



Χαράλαμπος Λεμονίδης

## **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ε΄ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ**

**Ψηφιακός πόρος για τον/την εκπαιδευτικό**

### **A. Εφαρμογή διδακτικών αρχών της σχολής των Μαθηματικών της Φύσης και της Ζωής (ΜΑ.ΦΥ.ΖΩ)**

Τα περιεχόμενα των μαθημάτων και ο τρόπος ανάπτυξής τους εκφράζουν και υλοποιούν το πνεύμα του Προγράμματος Σπουδών των Μαθηματικών. Η απόδοση των διδακτικών αρχών που εφαρμόστηκαν στο συγκεκριμένο εγχειρίδιο και στα αντίστοιχα Ψηφιακά Μαθησιακά Αντικείμενα (ΨΜΑ) βασίζεται στη λογική της σχολής των Μαθηματικών της Φύσης και της Ζωής (ΜΑ.ΦΥΖΩ). Παραθέτουμε σύντομα, στη συνέχεια, τις αρχές αυτές.

#### **1. Οι μαθητές και οι μαθήτριες οδηγούνται στην ανακάλυψη και την κατασκευή των μαθηματικών εννοιών**

Κάθε μάθημα αρχίζει με διδακτικές καταστάσεις οι οποίες είναι επιλεγμένες και κατάλληλες για να οδηγήσουν τα παιδιά, με βάση τις προϋπάρχουσες γνώσεις τους, να ανακαλύψουν και να κατασκευάσουν μόνο τους τις νέες μαθηματικές έννοιες. Αυτό πραγματοποιείται με τις δραστηριότητες «**Ερευνώ**» και «**Ανακαλύπτω**», οι οποίες παρουσιάζονται στις δύο πρώτες σελίδες του Βιβλίου του μαθητή και της μαθήτριας. Παρακάτω δίνουμε ένα παράδειγμα και παρουσιάζουμε τη λογική αυτών των δραστηριοτήτων.

#### **2. Τα Μαθηματικά συνδέονται με την πραγματικότητα και την καθημερινή ζωή των παιδιών**

Με στόχο τα Μαθηματικά να γίνουν ελκυστικά και χρήσιμα για τα παιδιά, προσπαθούμε να συνδέονται με τα ενδιαφέροντα και την καθημερινή ζωή τους. Έτσι, οι διάφορες καταστάσεις της πραγματικότητας (πλαίσια των μαθηματικών εννοιών) με τις οποίες παρουσιάζονται οι μαθητικές έννοιες σε αυτά τα εκπαιδευτικά υλικά προέρχονται από την καθημερινότητα των παιδιών. Επιπλέον, παρουσιάζονται καταστάσεις από τον πολιτισμό και την προστασία του περιβάλλοντος, με στόχο την ευαισθητοποίηση των παιδιών πάνω σε τέτοιου είδους θέματα.

### **3. Διδακτική πορεία από το πραγματικό και συγκεκριμένο προς το συμβολικό και αφηρημένο**

Τα Μαθηματικά δημιουργήθηκαν από τους ανθρώπους και συνεχίζουν να δημιουργούνται μέσα από ερωτήματα και προβλήματα της ζωής, του φυσικού περιβάλλοντος, αλλά και αυτών των ίδιων των Μαθηματικών. Οι μαθηματικοί, με αφετηρία καταστάσεις και προβλήματα της πραγματικότητας, μέσα από διαδοχικές επεξεργασίες και αφαιρέσεις, ανακαλύπτουν γενικούς κανόνες και μαθηματικούς τύπους. Ακολουθούν, δηλαδή, μια πορεία από το συγκεκριμένο και το εμπειρικό προς το αφηρημένο και το γενικό. Η πορεία αυτή, η «μαθηματικοποίηση», είναι από τις πιο σημαντικές διαδικασίες στη δημιουργία των Μαθηματικών.

Η διδακτική μέθοδος που ακολουθούμε σε αυτά τα εκπαιδευτικά υλικά για την ανακάλυψη των μαθηματικών εννοιών είναι η πορεία της μαθηματικοποίησης από τις πραγματικές καταστάσεις της καθημερινότητας προς τις συμβολικές, αφηρημένες εκφράσεις των Μαθηματικών. Τα συμβολικά Μαθηματικά, οι ιδιότητες και οι κανόνες είναι μια κατάληξη αυτής της πορείας μαθηματικοποίησης και όχι η αφετηρία, όπως γίνεται στην παραδοσιακή διδασκαλία.

### **4. Ποικίλες σημειολογικές αναπαραστάσεις και μοντέλα στη διαχείριση και παρουσίαση του εκπαιδευτικού υλικού**

Οι μαθηματικές έννοιες μπορεί να παρουσιάζονται με διάφορες σημειολογικές εκφράσεις, όπως πραγματικές καταστάσεις, φυσική γλώσσα, μοντέλα, χειραπτικά υλικά, εικονικές αναπαραστάσεις και μαθηματικά σύμβολα. Αυτές οι διάφορες σημειολογικές εκφράσεις δημιουργούν και διαφορετικές γνωστικές απαιτήσεις από την πλευρά των μαθητών. Στην πορεία της μαθηματικοποίησης που αναφέρουμε παραπάνω χρησιμοποιούμε πολλαπλές σημειολογικές εκφράσεις.

Σε αυτό το εκπαιδευτικό υλικό χρησιμοποιούμε συγκεκριμένα μοντέλα και αναπαραστάσεις για τις έννοιες, τα βασικότερα από τα οποία παρουσιάζουμε στη συνέχεια.

### **5. Έμφαση στην κατανόηση**

Τα Μαθηματικά μπορούν να γίνουν ελκυστικά τόσο για τους μαθητές / τις μαθήτριες τυπικής ανάπτυξης, όσο και για τους μαθητές / τις μαθήτριες με δυσκολίες, όταν διδάσκονται με τέτοιο τρόπο που δίνεται έμφαση στην εννοιολογική τους κατανόηση. Τα Μαθηματικά λοιπόν σε αυτό το εκπαιδευτικό υλικό γίνεται προσπάθεια να παρουσιάζονται με τέτοιο τρόπο, ώστε να γίνονται κατανοητά και να μην αποτελούν απλώς μια σειρά τεχνικών και κανόνων που πρέπει να εφαρμόζει ο μαθητής / η μαθήτρια χωρίς να κατανοεί.

### **6. Έμφαση στον συλλογισμό και τη λογική έκφραση των Μαθηματικών**

Ένας από τους βασικούς σκοπούς των Μαθηματικών είναι ο συλλογισμός και η έκφρασή του μέσα από τον λόγο. Αποδίδονται πολλές σημασίες και θεωρητικές αντιλήψεις στον όρο μαθηματική συλλογιστική. Μια χαρακτηριστική απόδοση του όρου δίνεται από τους Lannin, Ellis, & Elliot, (2011) «*μια εξελικτική διαδικασία της εικασίας, της γενίκευσης, της διερεύνησης του γιατί και της ανάπτυξης και αξιολόγησης των επιχειρημάτων*» (σελ. 10). Η μαθηματική συλλογιστική, λοιπόν, συνδέεται στενά με τους όρους της εικασίας, της γενίκευσης, της διερεύνησης, της τεκμηρίωσης της αλήθειας, των επιχειρημάτων και της αξιολόγησής τους. Αυτές οι λειτουργίες επιτυγχάνονται μέσα από τον διάλογο και τη διαπραγμάτευση των μαθηματικών εννοιών στο κοινωνικό περιβάλλον της τάξης των Μαθηματικών.

Ποια είναι τα χαρακτηριστικά των έργων στα οποία αναπτύσσεται η μαθηματική συλλογιστική; Τα έργα που στοχεύουν στην ανάπτυξη της μαθηματικής συλλογιστικής θα πρέπει να έχουν ορισμένα από τα παρακάτω βασικά χαρακτηριστικά:

*Πρώτον*, να είναι τέτοια, ώστε να δίνουν την ευκαιρία σε όλα τα παιδιά να εκφράσουν τη γνώμη τους και να συμμετέχουν στη διαπραγμάτευση του νοήματος. Να είναι επίσης έργα ανοιχτά που να επιδέχονται πολλές λύσεις.

*Δεύτερον*, να προκαλούν τη διαπραγμάτευση και την αιτιολόγηση των μαθηματικών εννοιών μεταξύ των ατόμων. Μέσα σε ένα περιβάλλον διαπραγμάτευσης και αιτιολόγησης αναπτύσσεται ο λόγος και η συλλογιστική (Ribeiro, Aguiar, Trevisan, & Elias, 2021).

*Τρίτον*, να δίνουν την ευκαιρία για μεταγνωστική σκέψη στους μαθητές. Να σκέφτονται, δηλαδή, και να εκφράζουν τι κάνουν και γιατί το κάνουν (Resnick, 1987).

Σε αυτό το εκπαιδευτικό υλικό πολλές από τις δραστηριότητες που προτείνονται είναι έτσι διαμορφωμένες, ώστε να δίνουν την ευκαιρία στα παιδιά να συλλογίζονται, να εξηγούν τη σκέψη τους και να αιτιολογούν τις απαντήσεις και τις λύσεις που προτείνουν. Επιπλέον, σε κάθε μάθημα του Τετραδίου εργασιών (Τ.Ε.) υπάρχει και μια ειδική δραστηριότητα με τον τίτλο «συλλογίζομαι», η οποία παρουσιάζεται στη συνέχεια.

## **7. Η χρήση της τεχνολογίας**

Επάνω στις σελίδες των μαθημάτων των σχολικών εγχειριδίων σε πολλά σημεία υπάρχουν κωδικοί QR οι οποίοι, αν σκαναριστούν, παραπέμπουν σε Ψηφιακά Μαθησιακά Αντικείμενα (Ψ.Μ.Α.). Με αυτά αξιοποιείται η τεχνολογία για μια αποτελεσματική μάθηση, εξάσκηση και κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και δεξιοτήτων που αναπτύσσονται στα εκπαιδευτικά υλικά.

Τα Ψ.Μ.Α. που προτείνονται είναι κατασκευασμένα με τέτοιο τρόπο, ώστε να είναι προσαρμοσμένα στη λογική και τις διδακτικές αρχές αυτού του εκπαιδευτικού υλικού. Τα Ψ.Μ.Α. μπορούν να χρησιμοποιηθούν στο σχολείο ή στο σπίτι και είναι διαφόρων τύπων:

- συμπληρωματικό υλικό για τα σχολικά βιβλία
- κουίζ εξάσκησης
- δυναμικά ψηφιακά εργαλεία, όπως οπτικοποιήσεις και βίντεο, που συμβάλλουν στην κατανόηση σημαντικών εννοιών αλλά και μοντέλων

- αλληλεπιδραστικά ψηφιακά μέσα, όπως παιχνίδια, που συμβάλλουν σε μια ελκυστική μάθηση μέσα από ένα ψηφιακό περιβάλλον.

## B. Η δομή των βιβλίων

### B.1. Βιβλίο μαθητή / μαθήτριας (B.M.)

Στις δύο πρώτες σελίδες του B.M. φαίνεται η κατασκευαστική λογική της γνώσης που ακολουθείται στα εγχειρίδια αυτά. Στην πρώτη σελίδα παρουσιάζεται η δραστηριότητα «Ερευνώ», η οποία δίνει τη δυνατότητα στα παιδιά, με βάση τις προϋπάρχουσες γνώσεις τους, να «ερευνήσουν», για να βρουν την/τις νέα/ες γνώση/εις. Στη δεύτερη σελίδα ανακαλύπτεται η νέα γνώση και επισημοποιείται, ανακοινώνεται με το «Μαθαίνω».

#### «Ερευνώ»



Στην πρώτη δραστηριότητα, με τίτλο «Ερευνώ», παρουσιάζεται ένα έργο του οποίου το πλαίσιο είναι προσεκτικά επιλεγμένο από την πραγματική ζωή και την καθημερινότητα του παιδιού. Προσπαθούμε το έργο αυτό να είναι αφενός ελκυστικό, ώστε να δημιουργεί κίνητρα στο παιδί για να ασχοληθεί με αυτό, αφετέρου να δίνει τη δυνατότητα σε όλα τα παιδιά να μπορούν να συμμετέχουν και να δίνουν απαντήσεις. Στο παράδειγμα που παρουσιάζεται στην εικόνα 1 το θέμα είναι «*Τα άλματα της ακρίδας*». Στο πλαίσιο αυτό τίθενται ερωτήματα τα οποία θα οδηγήσουν τα παιδιά στη νέα γνώση, που είναι η διαίρεση φυσικού αριθμού με κλασματική μονάδα. Τα παιδιά θα πρέπει να απαντήσουν σε αυτά τα ερωτήματα χωρίς να δουν την επόμενη σελίδα όπου παρουσιάζονται οι απαντήσεις τους.

Αριθμός μαθήματος

Τίτλος μαθήματος

**23** Διαίρεση φυσικού αριθμού με κλασματική μονάδα


Ερευνώ

1

Αριθμός δραστηριότητας

Τα άλματα της ακρίδας

Τίτλος εισαγωγικής δραστηριότητας



Μια ακρίδα πηδάει με ίσα άλματα. Κάθε άλμα είναι το  $\frac{1}{4}$  του μέτρου.

α) Πόσα άλματα θα κάνει η ακρίδα για να διανύσει 1 μέτρο; Κάνω ένα σχέδιο.

β) Πόσα άλματα θα κάνει η ακρίδα για να διανύσει 3 μέτρα; Κάνω ένα σχέδιο.  
Ποια πράξη αντιστοιχεί σε αυτόν τον υπολογισμό;

Εικόνα 1: Η 1η σελίδα (με τίτλο «Ερευνώ») του Μαθήματος 23 του Β.Μ.

**«Ανακαλύπτω»**



Στη δεύτερη σελίδα, στο «Ανακαλύπτω», παρουσιάζονται οι απαντήσεις στα ερωτήματα που τέθηκαν στην πρώτη σελίδα, στο «Ερευνώ». Μερικές φορές κατά τη διαδικασία των απαντήσεων αυτών υπάρχουν ορισμένα ερωτήματα που πρέπει να απαντήσουν τα παιδιά. Αυτό γίνεται με στόχο να συμμετέχουν και να παρακολουθήσουν τη ροή των απαντήσεων που δίνονται.

**Τίτλος μαθήματος**

23. Διάρθρωση φυσικού αριθμού με κλασματική μονάδα

**2** α) Υπολογίζω πόσα άλματα του  $\frac{1}{4}$  του μέτρου θα κάνει η ακρίδα, για να διανύσει απόσταση 1 μέτρου.

Η ακρίδα για να διανύσει 1 μέτρο θα κάνει 4 άλματα του  $\frac{1}{4}$  του μέτρου.

$$1 : \frac{1}{4} = 4 \text{ γιατί } 4 \times \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

β) Υπολογίζω πόσα άλματα του  $\frac{1}{4}$  του μέτρου θα κάνει η ακρίδα για να διανύσει απόσταση 3 μέτρων.

Η ακρίδα για να διανύσει 3 μέτρα θα κάνει 12 άλματα του  $\frac{1}{4}$  του μέτρου.

$$3 : \frac{1}{4} = 12 \text{ γιατί } 12 \times \frac{1}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

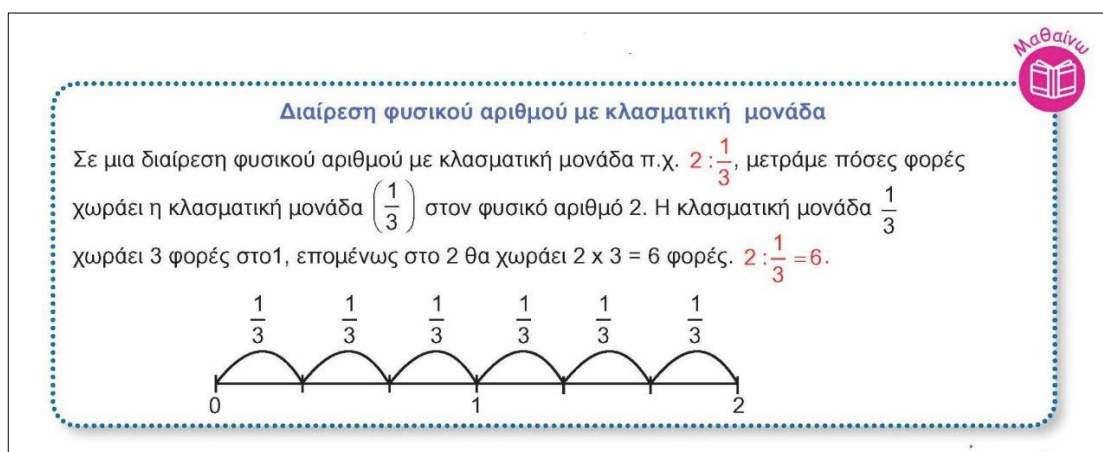
Εικόνα 2: Η 2η σελίδα (με τίτλο «Ανακαλύπτω») του Μαθήματος 23 του Β.Μ.

Προσπαθούμε οι απαντήσεις στα ερωτήματα της πρώτης σελίδας να γίνονται με τέτοιο τρόπο, ώστε να ακολουθείται μια εξελικτική, ευρετική πορεία προς την ανακάλυψη των νέων εννοιών. Στην πορεία αυτή χρησιμοποιούνται και τα κατάλληλα μοντέλα και οι εικονικές αναπαραστάσεις που υποστηρίζουν την κατανόηση των εννοιών αυτών. Οι εκπαιδευτικοί καλούνται να οδηγήσουν τα παιδιά να παρακολουθήσουν αυτήν την πορεία διαβάζοντας, συζητώντας και απαντώντας στα έργα που δίνονται στο «Ανακαλύπτω». Είναι γόνιμο σε αυτήν τη διαδικασία να γίνεται επιβεβαίωση είτε αντιπαραβολή με τις απαντήσεις που έδωσαν τα παιδιά στην πρώτη σελίδα του «Ερευνώ».

### «Μαθαίνω»



Το «Μαθαίνω» αποτελεί τη φάση της επισημοποίησης και της ανακοίνωσης της νέας γνώσης. Αυτή είναι η τελική φάση της ευρετικής πορείας που ακολουθήθηκε μετά το «Ερευνώ» και το «Ανακαλύπτω». Σε καμία περίπτωση ο/η εκπαιδευτικός δεν πρέπει να ξεκινάει τη διδασκαλία του από αυτήν τη φάση, γιατί τότε η διδασκαλία χάνει τον μαθητοκεντρικό και κατασκευαστικό της χαρακτήρα και αποκτά έναν χαρακτήρα παραδοσιακό και δασκαλοκεντρικό.



Εικόνα 3: Το πλαίσιο «Μαθαίνω» στη 2η σελίδα του Μαθήματος 23 του Β.Μ.

Υπάρχουν περιπτώσεις, όταν πρόκειται συνήθως για μεθόδους ή στρατηγικές, όπου το «Μαθαίνω» μπορεί να ταυτίζεται με όλο ή με ένα μέρος από το περιεχόμενο του «Ανακαλύπτω».

## **B.2. Τετράδιο Εργασιών (Τ.Ε.)**

Μετά την εργασία στο Β.Μ., όπου τα παιδιά οδηγήθηκαν στην ανακάλυψη της/των νέας/-ων γνώσης/-ων, και αφού πραγματοποίησαν δραστηριότητες εφαρμογής και εμπέδωσης, εργάζονται στο Τ.Ε. Οι δραστηριότητες στο Τ.Ε. στοχεύουν στην εφαρμογή και εμπέδωση των νέων γνώσεων τις οποίες κατασκεύασαν τα παιδιά στο Β.Μ. Στη συνέχεια θα αναφερθούμε στις δραστηριότητες με τίτλο «Λύνω πρόβλημα», «Συλλογίζομαι» και «Μαθηματικά στο σπίτι».

### **«Λύνω πρόβλημα»**



Σε κάθε μάθημα παρουσιάζεται ένα πρόβλημα το οποίο είναι σχετικό με την έννοια του μαθήματος. Είναι γνωστό το πόσο σημαντικό είναι για το παιδί να λύνει προβλήματα, γιατί αφενός αυτά συνδέουν τα Μαθηματικά με την πραγματικότητα, αφετέρου το παιδί κατά τη διαδικασία της επίλυσης προβλήματος απαιτείται να αναπτύσσει σκέψη υψηλού επιπέδου, όπως είναι η μαθηματικοποίηση. Τα παιδιά, μέσα από το πρόβλημα που παρουσιάζεται σε κάθε μάθημα, εξασκούνται στις έννοιες του μαθήματος. Ο/Η εκπαιδευτικός, ανάλογα με το πρόβλημα, αποφασίζει κάθε φορά για τον τρόπο οργάνωσης της τάξης – σε ομάδες, εταιρικά, ατομικά κτλ. Στο συμπληρωματικό υλικό των Ψ.Μ.Α. προσφέρονται επιπλέον προβλήματα.

### **«Συλλογίζομαι»**



Μία δραστηριότητα «Συλλογίζομαι» υπάρχει σε κάθε μάθημα του Τ.Ε. Η δραστηριότητα αυτή κάθε φορά είναι σχετική με το περιεχόμενο του μαθήματος και έχει στόχο να αναπτυχθεί η ικανότητα μαθηματικής συλλογιστικής στα παιδιά. Δηλαδή, επιδιώκεται να αναπτύσσουν τα παιδιά τον λόγο τους στα Μαθηματικά, να εξηγούν, να επιχειρηματολογούν, να αιτιολογούν, να τεκμηριώνουν και να εντοπίζουν λάθη και να τα αντιπαραβάλουν με το σωστό. Την οργάνωση της τάξης την καθορίζει ο/η εκπαιδευτικός, ώστε η επικοινωνία και η αλληλεπίδραση μεταξύ των παιδιών να γίνεται με τον καλύτερο δυνατό τρόπο.

## Γ. Οι διαδικασίες της επανάληψης, της αξιολόγησης και της αυτοαξιολόγησης μαθητών και μαθητριών

Το τελευταίο μάθημα κάθε ενότητας είναι αφιερωμένο στην επανάληψη, την αξιολόγηση και την αυτοαξιολόγηση των παιδιών. Πιο συγκεκριμένα, στο Β.Μ. με τον τίτλο **«Τι μάθαμε στην ενότητα»** παρουσιάζονται σύντομα τα νέα περιεχόμενα που διδάχτηκαν στην ενότητα, ώστε να γίνει επανάληψη. Παρουσιάζονται επίσης οι δραστηριότητες με τίτλο **«Μαθηματικό ημερολόγιο»** και **«Συλλογίζομαι»**.

Στο Τ.Ε. με τον τίτλο **«Εξέταση των γνώσεων της ενότητας»** δίνονται ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής, για να εξεταστούν οι γνώσεις των παιδιών στην ενότητα. Στη συνέχεια, με τις δραστηριότητες με τίτλο **«Ποιο φανάρι θα ανάψει;»** τα παιδιά μπορούν να αυτοαξιολογηθούν στις γνώσεις και τις δεξιότητες που απέκτησαν στην ενότητα.

### Γ.1. Βιβλίο μαθητή / μαθήτριας (Β.Μ.)

#### **«Τι μάθαμε στην ενότητα»**

Με στόχο να γίνει επανάληψη παρουσιάζονται σύντομα όλες οι καινούριες μαθηματικές έννοιες που διδάχτηκαν στην ενότητα, τις οποίες τα παιδιά και οι εκπαιδευτικοί μπορούν να τις βρουν εδώ συγκεντρωμένες. Κατά την επανάληψη, αν ο/η εκπαιδευτικός το κρίνει αναγκαίο, μπορεί να προτείνει στα παιδιά να βρουν περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τις νέες έννοιες στις δραστηριότητες του Βιβλίου μαθητή / μαθήτριας με τίτλους **«Μαθαίνω»** και **«Ανακαλύπτω»**.

#### **«Μαθηματικό Ημερολόγιο»**

Κάθε παιδί θα διατηρεί ένα ημερολόγιο για το μάθημα των Μαθηματικών, το οποίο θα ονομάζουμε «Μαθηματικό ημερολόγιο». Στα βιβλία προτείνονται επιλεγμένες δραστηριότητες σχετικά με αυτό. Αυτές οι δραστηριότητες αφορούν νέες έννοιες που μαθαίνει το παιδί και μπορούν να εφαρμοστούν στην πραγματικότητα. Σκοπός της δραστηριότητας αυτής είναι να μπορούν τα

παιδιά να αναπτύσσουν τον γραπτό λόγο στα Μαθηματικά και να διαχειρίζονται καταστάσεις με μαθηματικές έννοιες. Το Μαθηματικό ημερολόγιο θα αποτελεί κατά κάποιον τρόπο ένα πορτφόλιο κάθε παιδιού, το οποίο ο/η εκπαιδευτικός θα μπορεί να αξιολογεί, για να ελέγχει την πρόοδο του παιδιού.

### «Συλλογίζομαι»

Σε αυτό το τελευταίο μάθημα της ενότητας, που είναι επαναληπτικό, παρουσιάζεται κάθε φορά και μια δραστηριότητα με τίτλο «Συλλογίζομαι», τα χαρακτηριστικά της οποίας έχουν παρουσιαστεί στις προηγούμενες σελίδες.

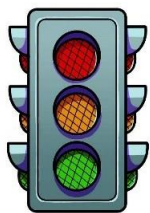
## Γ.2. Τετράδιο Εργασιών (Τ.Ε.)

### «Εξέταση των γνώσεων της ενότητας»



Προτείνονται ερωτήματα με μορφή πολλαπλής επιλογής, με στόχο να γίνει αξιολόγηση των γνώσεων των παιδιών στις έννοιες που διδάχτηκαν στην ενότητα. Θεωρούμε ότι είναι ένα εύκολο και γρήγορο εργαλείο αξιολόγησης για τους/τις εκπαιδευτικούς, με το οποίο θα μπορούν να αξιολογήσουν τις γνώσεις των μαθητών και των μαθητριών τους.

### «Ποιο φανάρι θα ανάψει;»



Με τις δραστηριότητες αυτές μπορεί να γίνει η αυτοαξιολόγηση των γνώσεων που απέκτησαν τα παιδιά στα μαθήματα της ενότητας. Τα ερωτήματα που τίθενται αναφέρονται σε σημαντικούς γνωστικούς στόχους και δεξιότητες που διδάχτηκαν. Τα παιδιά απαντούν σε κάθε ερώτηση επιλέγοντας ένα από τα τρία επίπεδα που προτείνονται:

- «Σίγουρα μπορώ να το κάνω!» (πράσινο φανάρι).
- «Το καταφέρνω με μια μικρή υποστήριξη» (πορτοκαλί φανάρι).
- «Χρειάζομαι βοήθεια» (κόκκινο φανάρι).

Αν, δηλαδή, το παιδί επιλέξει το πράσινο φανάρι, θα σημαίνει ότι κατέχει καλά τη γνώση και μπορεί να προχωρήσει στα επόμενα. Αν επιλέξει το πορτοκαλί φανάρι, σημαίνει ότι πρέπει να σταθεί και να ξαναδεί αυτές τις έννοιες που το δυσκολεύουν. Αν επιλέξει το κόκκινο φανάρι, θα πρέπει να σταματήσει, για να διδαχτεί και να κατανοήσει καλύτερα αυτά τα περιεχόμενα.

Η δραστηριότητα αυτή αποτελεί και μια πρόκληση για το παιδί, ώστε να μάθει και να εξασκηθεί στη διαδικασία της αυτοαξιολόγησης, η οποία είναι μια πολύ σημαντική γνωστική δεξιότητα. Οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να διαχειριστούν διδακτικά και παιδαγωγικά τη δραστηριότητα αυτή, ώστε τα παιδιά να συνηθίσουν και να βελτιώσουν τη συμπεριφορά τους στην αυτοαξιολόγηση.

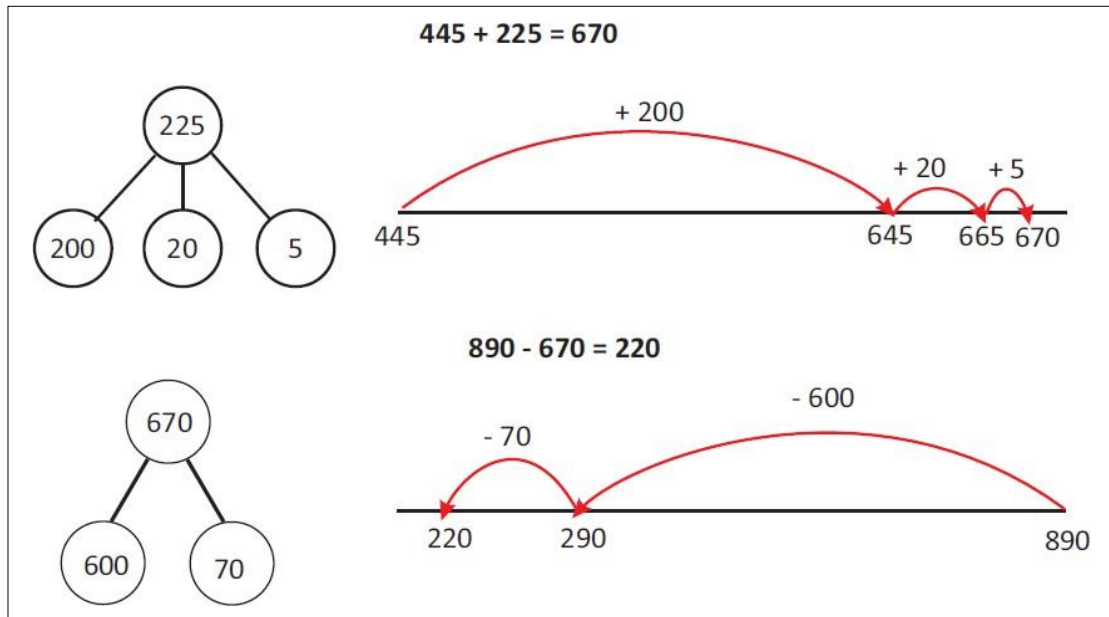
#### **Δ. Μοντέλα και οπτικές αναπαραστάσεις**

Τα μοντέλα και οι οπτικές αναπαραστάσεις των μαθηματικών εννοιών είναι τα κατάλληλα μέσα διδασκαλίας τα οποία συμβάλλουν σημαντικά στην κατανόηση των εννοιών αυτών. Μέσω των μοντέλων και των οπτικών αναπαραστάσεων γίνεται η μετάβαση από τη συγκεκριμένη και πραγματική προς την αφηρημένη και συμβολική έκφραση των Μαθηματικών. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τα πιο βασικά μοντέλα και οπτικές αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούμε στο εκπαιδευτικό υλικό της Ε΄ τάξης του Δημοτικού.

##### **Δ.1. (Ενότητα 2) Προσθέσεις και αφαιρέσεις**

##### **Η κενή αριθμογραμμή και το μοντέλο μέρος-όλου για τις νοερές προσθέσεις και αφαιρέσεις**

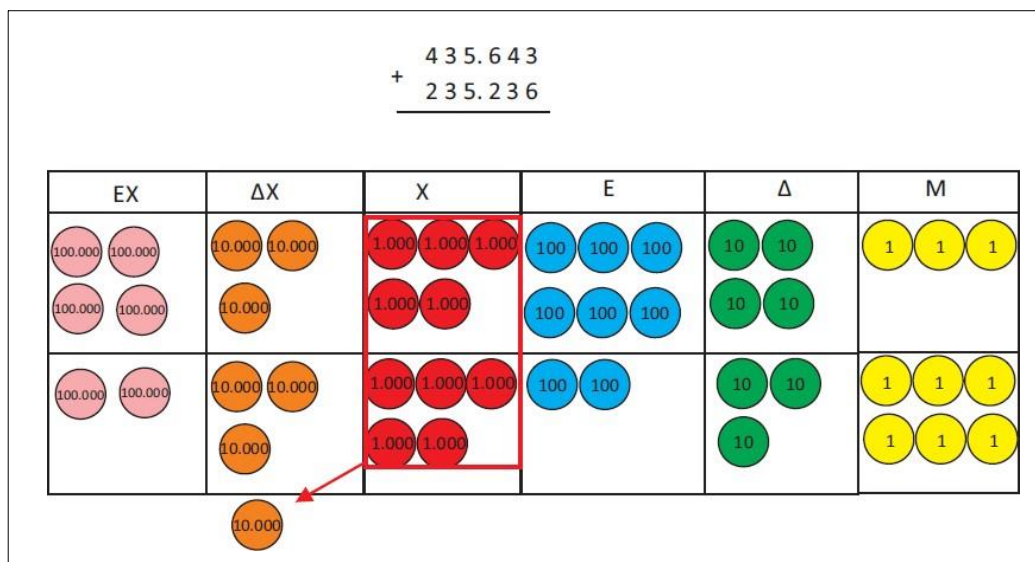
Με την κενή αριθμογραμμή και το μοντέλο μέρος-όλου μπορούμε να αναπαριστούμε τον υπολογισμό των νοερών προσθέσεων και αφαιρέσεων Lemonidis (2020, 2016).



Εικόνα 4: Αναπαράσταση των νοερών προσθέσεων και αφαιρέσεων.

### Το πλαίσιο της θεσιακής αξίας με μάρκες

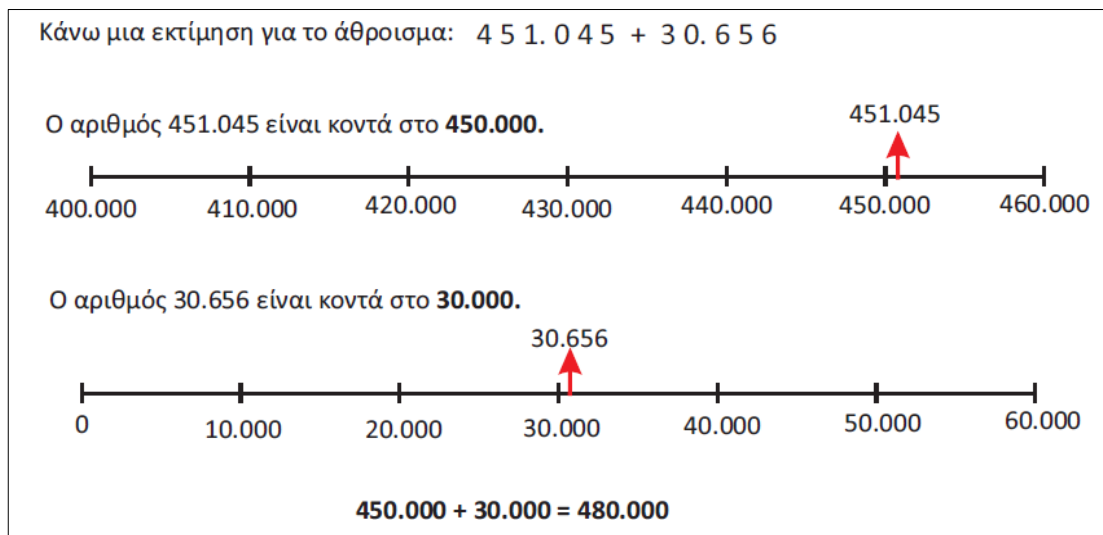
Το μοντέλο της θεσιακής αξίας με μάρκες βοηθάει να γίνει αναπαράσταση των κρατούμενων σε προσθέσεις και αφαιρέσεις. Βοηθάει στην κατανόηση των κάθετων μεθόδων.



Εικόνα 5: Αναπαράσταση της πρόσθεσης με κρατούμενο.

### Βαθμολογημένη αριθμογραμμή για εκτίμηση

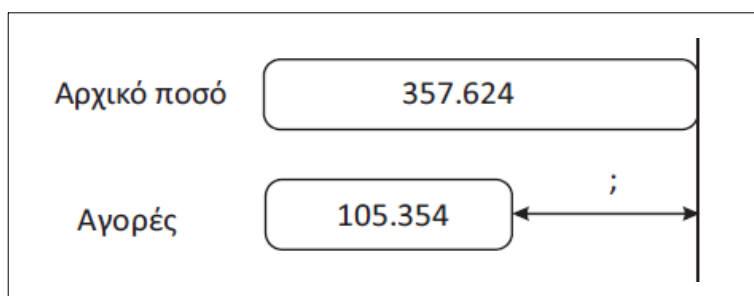
Η βαθμολογημένη αριθμογραμμή χρησιμοποιείται για να φανεί η στρογγυλοποίηση των αριθμών, όταν γίνεται εκτίμηση σε προσθέσεις και αφαιρέσεις.



Εικόνα 6: Αναπαράσταση της στρογγυλοποίησης αριθμών με τη βαθμολογημένη αριθμογραμμή.

### Το μοντέλο με τις μπάρες

Το μοντέλο αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την οπτικοποίηση της κατάστασης σε μερικά λεκτικά προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης.



Εικόνα 7: Το μοντέλο με τις μπάρες για προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης.

## Δ.2. (Ενότητα 5) Δεκαδικοί αριθμοί και ποσοστά

### Το πλαίσιο θεσιακής αξίας των δεκαδικών αριθμών με μάρκες ή με αριθμούς

Είναι ένα μοντέλο με το οποίο μπορούμε να αναπαραστήσουμε δεκαδικούς αριθμούς αλλά και την κάθετη πρόσθεση, αφαίρεση και πολλαπλασιασμό δεκαδικών αριθμών. Το πλαίσιο αυτό μπορούμε να το χρησιμοποιούμε με μάρκες ή με τα ψηφία των αριθμών.

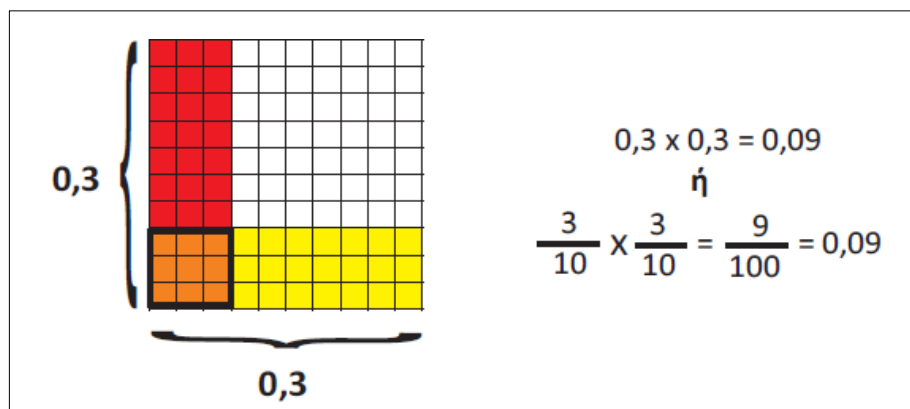
Μονάδες	,	Δέκατα	Εκατοστά
1 1 1 1 1	,	0,1 0,1 0,1 0,1	0,01

Μονάδες	,	Δέκατα	Εκατοστά
5	,	4	1

Εικόνα 8: Το μοντέλο για την αναπαράσταση δεκαδικών αριθμών και των πράξεων τους.

### Το μοντέλο του πλαισίου των εκατοστών για τον πολλαπλασιασμό δεκαδικών αριθμών

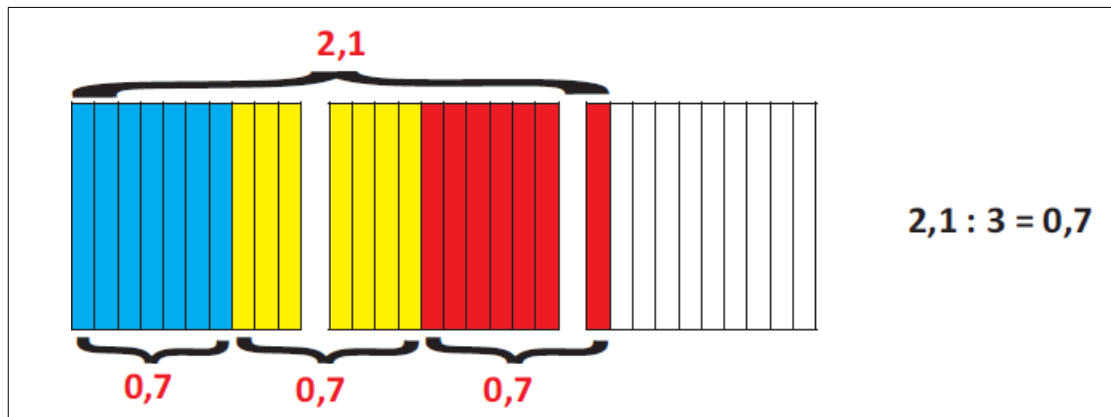
Χρησιμοποιούμε το πλαίσιο των εκατοστών για να αναπαραστήσουμε τον πολλαπλασιασμό δύο δεκαδικών αριθμών ως την κοινή επιφάνεια των δύο αριθμών.



Εικόνα 9: Το μοντέλο για τον πολλαπλασιασμό των δεκαδικών αριθμών.

### Το μοντέλο του πλαισίου των εκατοστών για τη διαίρεση δεκαδικού με φυσικό αριθμό

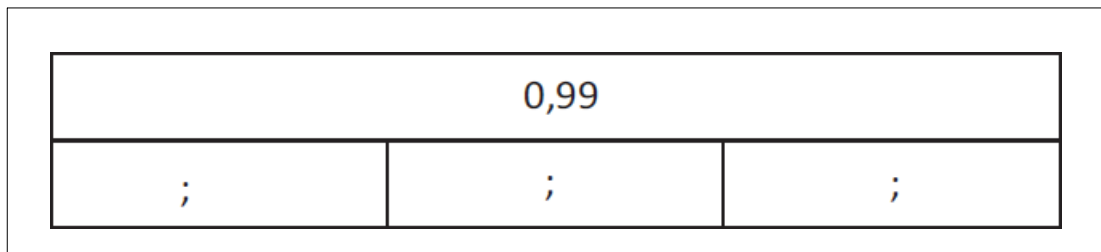
Χρησιμοποιούμε το πλαίσιο των εκατοστών για να αναπαραστήσουμε τη διαίρεση δεκαδικού με φυσικό αριθμό.



Εικόνα 10: Το μοντέλο για τη διαίρεση δεκαδικού με φυσικό αριθμό.

### Το μοντέλο με τις μπάρες

Το μοντέλο αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη σύγκριση αριθμών και τον προσδιορισμό τιμών που λείπουν. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αναπαραστήσει τις πληροφορίες σε προβλήματα των τεσσάρων πράξεων.

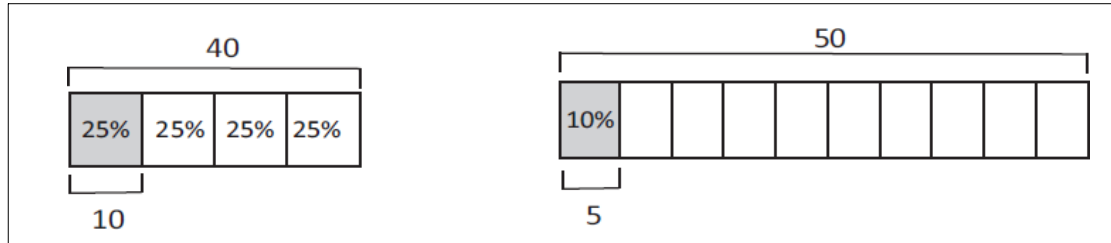


Εικόνα 11: Το μοντέλο για τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση δεκαδικού με φυσικό αριθμό.

Το μοντέλο αυτό μπορεί να αναπαραστήσει τον πολλαπλασιασμό  $3 \times 0,33 = 0,99$  ή τη διαίρεση  $0,99 : 3 = 0,33$ .

### Το μοντέλο του ποσοστού με τις μπάρες

Χρησιμοποιείται για την αναπαράσταση του ποσοστού μιας ποσότητας.



Εικόνα 12: Το μοντέλο για την αναπαράσταση των ποσοστών

### Δ.3. (Ενότητα 6) Γεωμετρία – Μετασχηματισμοί

#### Κατασκευή του συμμετρικού σημείου με τον γνώμονα

Χρησιμοποιούμε τον γνώμονα για να κατασκευάσουμε το συμμετρικό ενός σημείου ως προς τον άξονα συμμετρίας  $\epsilon$ .

Για να κατασκευάσουμε το συμμετρικό ενός σημείου  $A$  ως προς τον άξονα συμμετρίας  $\epsilon$ , ακολουθούμε τα εξής βήματα:

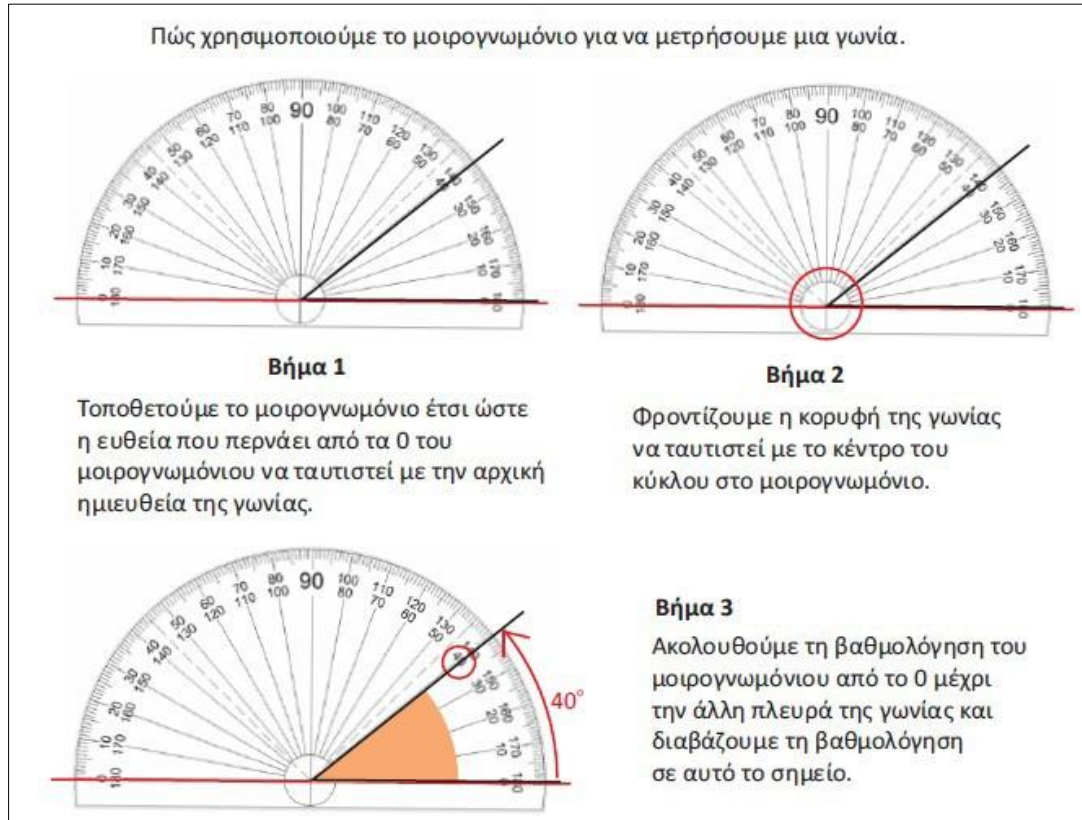
- 1) Από το σημείο  $A$  φέρνω με το γνώμονα το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  στον άξονα συμμετρίας  $\epsilon$ .
- 2) Προεκτείνω το ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  και παίρνω το σημείο  $A'$  έτσι ώστε  $AB = BA'$ .

Το σημείο  $A'$  είναι συμμετρικό του σημείου  $A$  ως προς τον άξονα συμμετρίας  $\epsilon$ .

Εικόνα 13: Τα βήματα για την κατασκευή του συμμετρικού ενός σημείου ως προς τον άξονα συμμετρίας.

#### Δ.4. (Ενότητα 7) Μετρήσεις

##### Η χρήση του μοιρογνωμόνιου για τη μέτρηση γωνιών

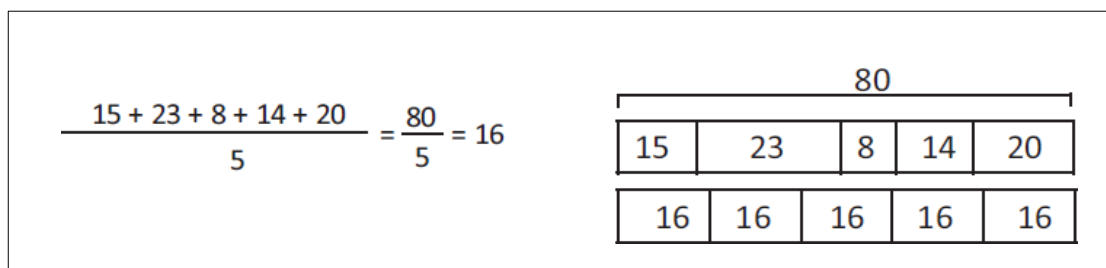


Εικόνα 14: Τα βήματα για τη μέτρηση μιας γωνίας με το μοιρογνωμόνιο.

#### Δ.5. (Ενότητα 9) Στατιστική – Πιθανότητες.

##### Το μοντέλο του μέσου όρου με μπάρες

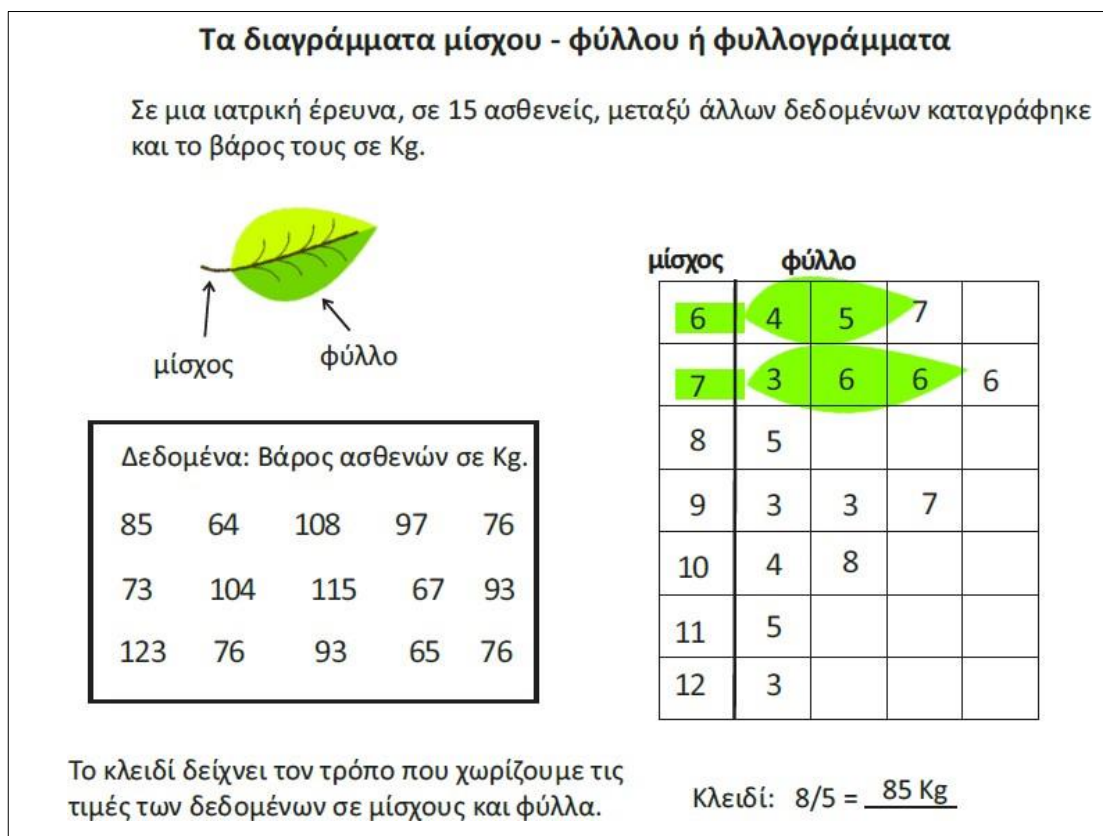
Το μοντέλο αυτό αναπαριστά τις τιμές όλων των δεδομένων και το μέσο όρο σε μπάρες καθώς και το άθροισμα όλων των δεδομένων.



Εικόνα 15: Το μοντέλο του μέσου όρου με τις μπάρες.

### Το διάγραμμα μίσχου-φύλλου ή φυλλόγραμμα

Το διάγραμμα αυτό παρουσιάζει αριθμητικά δεδομένα ή τιμές οι οποίες χωρίζονται σε δύο μέρη, το μίσχο και το φύλλο, σύμφωνα με τον τρόπο που δείχνει το κλειδί.



Εικόνα 16: Το διάγραμμα μίσχου-φύλλου ή φυλλόγραμμα.

## Ε. Η μάθηση ορισμένων σημαντικών περιεχομένων

### Ε.1. Η μάθηση των πράξεων στα κλάσματα

Στην Δ΄ τάξη τα παιδιά διδάχτηκαν την πρόσθεση και την αφαίρεση ομώνυμων και απλών ετερόνυμων κλασμάτων καθώς και τον πολλαπλασιασμό φυσικού αριθμού με κλάσμα. Στην Ε΄ τάξη τα παιδιά αρχικά θα ασκηθούν στο να ερμηνεύουν το κλάσμα ως διαίρεση και ως τελεστή. Στη συνέχεια θα διδαχθούν τις πράξεις των κλασμάτων. Στην τάξη αυτή προχωρά

περισσότερο η διδασκαλία της πρόσθεσης και της αφαίρεσης ετερόνυμων κλασμάτων και καταλήγουμε στους κανόνες των πράξεων αυτών (Λεμονίδης, 2017).

## **Ε.2. Εξελικτική ανάπτυξη της μάθησης του πολλαπλασιασμού κλασμάτων**

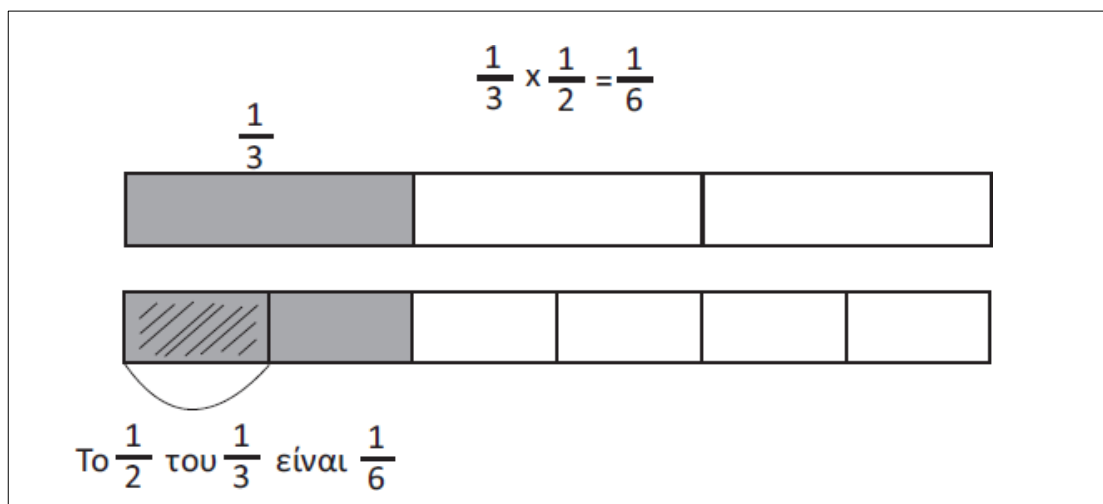
Η διδασκαλία του πολλαπλασιασμού των κλασμάτων γίνεται εξελικτικά, όπως παρουσιάζεται στη συνέχεια:

- πολλαπλασιασμός φυσικού αριθμού με κλάσμα·  $\kappa \times \alpha/\beta$  (π.χ.  $4 \times 3/5$ )
- πολλαπλασιασμός κοινών ή συνηθισμένων κλασμάτων
- πολλαπλασιασμός οποιωνδήποτε γνησίων κλασμάτων
- πολλαπλασιασμός μεικτών αριθμών ή καταχρηστικών κλασμάτων.

Ο πολλαπλασιασμός φυσικού αριθμού με κλάσμα διδάχτηκε στην Δ΄ τάξη, ενώ ο πολλαπλασιασμός μεικτών αριθμών ή καταχρηστικών κλασμάτων θα διδαχτεί στην Στ΄ τάξη. Στην Ε΄ τάξη αρχικά παρουσιάζεται ο πολλαπλασιασμός μεταξύ κοινών ή συνηθισμένων κλασμάτων, όπου στόχος είναι να γίνει κατανοητή η σημασία του πολλαπλασιασμού ως μέρος ενός μέρους. Κοινά ή συνηθισμένα κλάσματα είναι τα κλάσματα τα οποία χρησιμοποιούνται στην καθημερινότητα και μπορούν να νοηματοδοτηθούν εύκολα (π.χ.  $1/2$ ,  $1/4$ ,  $3/4$  κτλ.). Κοινές πράξεις είναι οι πράξεις που έχουν όρους κοινά ή συνηθισμένα κλάσματα. Τέλος θα διδάξουμε τον πολλαπλασιασμό μεταξύ οποιωνδήποτε δύο κλασμάτων και θα οδηγηθούν τα παιδιά στην ανακάλυψη του κανόνα του πολλαπλασιασμού μεταξύ δύο κλασμάτων ( $\alpha/\beta \times \gamma/\delta = \alpha \times \gamma / \beta \times \delta$ ). Δηλαδή, για να βρούμε το γινόμενο δύο κλασμάτων, πολλαπλασιάζουμε τους αριθμητές και τους παρονομαστές των δύο κλασμάτων. Το γινόμενο μεταξύ μη κοινών ή συνηθισμένων κλασμάτων τα παιδιά θα μπορούν να το βρίσκουν με τον κανόνα, αλλά θα μπορούν και να το ερμηνεύουν ως μέρος ενός μέρους.

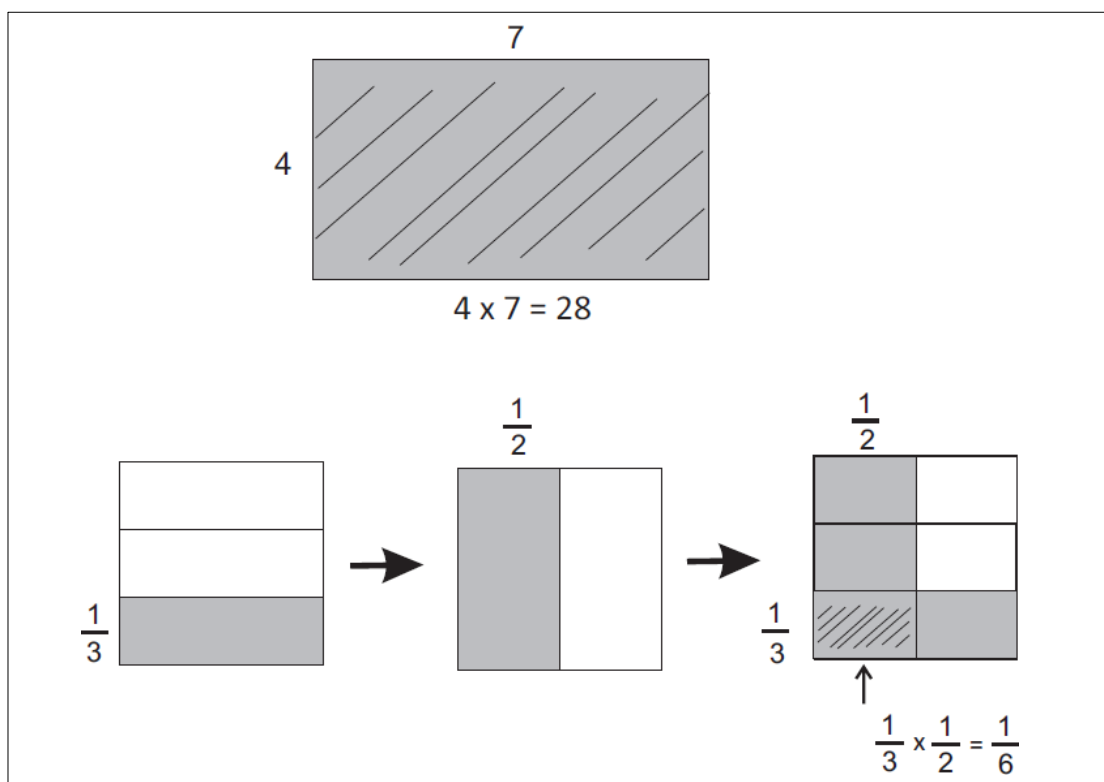
Για την οπτικοποίηση του πολλαπλασιασμού των κλασμάτων θα χρησιμοποιηθούν δύο μοντέλα:

**1. Το μοντέλο των κλασματικών λωρίδων.** Όταν τα κλάσματα είναι εύχρηστα, χρησιμοποιούμε τις κλασματικές λωρίδες, για να αναπαραστήσουμε τον πολλαπλασιασμό (βλ. εικόνα 17).



Εικόνα 17: Αναπαράσταση πολλαπλασιασμού κοινών ή συνηθισμένων κλασμάτων με κλασματικές λωρίδες.

**2. Το μοντέλο του εμβαδού ορθογωνίου παραλληλογράμμου.** Στους φυσικούς αριθμούς γνωρίζουμε ότι ένα γινόμενο δύο φυσικών αριθμών  $a \times b$ , αναπαρίσταται με το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου που σχηματίζεται με πλευρές  $a$  και  $b$ . Για παράδειγμα, στην εικόνα 18 έχουμε το εμβαδόν  $4 \times 7$  του ορθογωνίου παραλληλογράμμου με πλευρές 4 και 7. Παρόμοια, και το γινόμενο δύο κλασμάτων μπορεί να αναπαρασταθεί με το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με πλευρές τα δύο κλάσματα του γινομένου. Για παράδειγμα, στην εικόνα 18 παρουσιάζεται με εμβαδόν η αναπαράσταση του γινομένου  $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$ .



Εικόνα 18: Αναπαράσταση γινομένου με εμβαδόν ορθογωνίου.

### Ε.3. Εξελικτική ανάπτυξη της μάθησης της διαίρεσης κλασμάτων

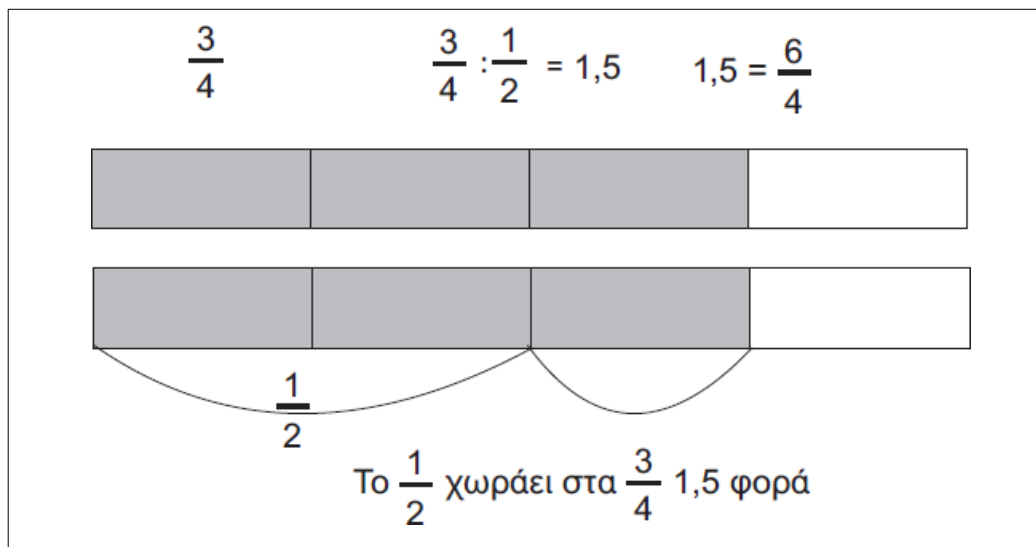
Παρόμοια, η διδασκαλία της διαίρεσης των κλασμάτων παρουσιάζεται εξελικτικά από τα πιο απλά προς τα πιο δύσκολα, σύμφωνα με τα παρακάτω στάδια:

- διαίρεση κλασματική μονάδας με φυσικό αριθμό·  $1/\beta : \kappa$  (π.χ.  $1/2 : 3$ )
- διαίρεση φυσικού αριθμού με κλασματική μονάδα·  $\kappa : 1/\beta$  (π.χ.  $2 : 1/3$ )
- διαίρεση κοινών ή συνηθισμένων και ομώνυμων κλασμάτων
- διαίρεση μεταξύ οποιωνδήποτε κλασμάτων.

Αρχικά διδάσκεται η διαίρεση κλασματικής μονάδας με φυσικό αριθμό ( $1/a : \kappa$ ), η οποία είναι διαίρεση μερισμού. Στη συνέχεια διδάσκεται η διαίρεση φυσικού αριθμού με κλασματική μονάδα ( $\kappa : 1/a$ ). Εδώ η διαίρεση είναι διαίρεση μέτρησης (πόσες φορές χωράει ή μετράει) ο διαιρέτης ( $1/a$ ) στον διαιρετέο  $\kappa$ . Μετά διδάσκεται η διαίρεση μεταξύ κοινών ή συνηθισμένων κλασμάτων και μεταξύ

ομώνυμων κλασμάτων. Με τις διαιρέσεις αυτές αποδίδεται η σημασία σε μια διαίρεση κλασμάτων. Για παράδειγμα, στο  $1/2 : 1/4$  η σημασία της πράξης είναι πόσες φορές ο διαιρέτης ( $1/4$ ) χωράει στον διαιρετέο ( $1/2$ ) ή με μέτρο το  $1/4$  μετράμε το  $1/2$ . Τέλος διδάσκεται η διαίρεση μεταξύ οποιωνδήποτε κλασμάτων. Τα παιδιά εδώ θα φτάσουν να ανακαλύψουν τον **κανόνα διαίρεσης των κλασμάτων ( $a/b : c/d = a/b \times d/c$ ): αντιστρέφω τον διαιρέτη και τον πολλαπλασιάζω με τον διαιρετέο**. Θα μπορούν να διαιρούν μεταξύ τους οποιαδήποτε κλάσματα, είτε μη κοινά είτε συνηθισμένα, τα οποία θα τα διαιρούν χρησιμοποιώντας τον κανόνα, αλλά θα κατανοούν τη σημασία της πράξης της διαίρεσης.

Οι αναπαράστασεις που χρησιμοποιούμε για τη διαίρεση κλασμάτων είναι οι κλασματικές λωρίδες (βλ. εικόνα 19).



Εικόνα 19: Αναπαράσταση της διαίρεσης  $3/4 : 1/2$  με κλασματικές λωρίδες.

#### Ε.4. Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί

Οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί που διδάσκονται στην Ε΄ τάξη είναι:

- η αξονική συμμετρία
- η μεταφορά
- η στροφή
- η κεντρική συμμετρία ενός σχήματος.

Τα παιδιά χειρίζονται ψηφιακά προγράμματα που παρουσιάζουν δυναμικά τους μετασχηματισμούς αυτούς. Η αξονική συμμετρία, η μεταφορά και η στροφή ξεκινούν να διδάσκονται από την Α΄ τάξη.

Όσον αφορά τη διδασκαλία της αξονικής συμμετρίας, προοδευτικά φτάνουμε στην Ε΄ τάξη να διδάσκεται ο ορισμός του συμμετρικού ενός σημείου και ενός σχήματος ως προς τον άξονα συμμετρίας. Δηλαδή, τα παιδιά οδηγούνται στο να κατασκευάζουν ή να συμπληρώνουν το συμμετρικό ενός σχήματος ως προς άξονα, κατασκευάζοντας τα συμμετρικά των σημείων του σχήματος ως προς τον άξονα.

Παρόμοια, για τον μετασχηματισμό της μεταφοράς θα διδαχτεί ο ορισμός της κατασκευής της μεταφοράς ενός σημείου ή γεωμετρικού σχήματος ως προς μία διεύθυνση και μία απόσταση.

Στην Ε΄ τάξη θα διδαχτεί το κέντρο συμμετρίας ενός σχήματος. Ένα σημείο ονομάζεται **κέντρο συμμετρίας**, όταν, εάν περιστραφεί το σχήμα κατά  $180^\circ$  γύρω από αυτό, το περιστραμμένο σχήμα συμπίπτει με το αρχικό σχήμα. Τα παιδιά θα ασκηθούν στο να αναγνωρίζουν σχήματα που έχουν κέντρο συμμετρίας. Τέλος, σχετικά με τον μετασχηματισμό της στροφής στόχος, είναι τα παιδιά να αναγνωρίζουν και να κατασκευάζουν στροφές των  $90^\circ$ , των  $180^\circ$  και των  $360^\circ$  σε σχήματα και εικόνες.

### Αναφορές

Lannin, J., Ellis, A. B., & Elliot, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning: Pre-K-Grade 8*. Reston, VA: NCTM.

Λεμονίδης, Χ. (2020). *Νοεροί Υπολογισμοί και Εκτιμήσεις. Από την έρευνα στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών*. Εκδόσεις Ζυγός. Θεσσαλονίκη. ISBN 978-618-5063-62-7

Λεμονίδης, Χ. (2017). *Στην τροχιά των ρητών*. Εκδόσεις Κυριακίδη, Θεσσαλονίκη. ISBN 9789605990688

Lemonidis, Ch. (2016). *Mental Computation and Estimation: Implications for mathematics education research, teaching and learning*. Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781315675664>

Resnick, L. B. (1987). *Education and learning to think*. Washington, D.C: National Research Council.

Ribeiro, A. J., Aguiar, M., Trevisan, A. L., & Elias, H. R. (2021). How Teachers Deal with Students' Mathematical Reasoning When Promoting Whole-Class Discussion During the Teaching of Algebra. In *Mathematical Reasoning of Children and Adults* (pp. 239-264). Springer, Cham.

## Πληροφοριακά στοιχεία

**Τίτλος:** Ψηφιακός πόρος για τον/την εκπαιδευτικό της Ε΄ τάξης του Δημοτικού

**Επιστημονικός Υπεύθυνος:** Χαράλαμπος Λεμονίδης

**Σχεδιασμός – Δημιουργία:** Χαράλαμπος Λεμονίδης

**Έκδοση:** 1.0

**Ημερομηνία:** 2-5-2025

Το παρόν αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της Πράξης «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ (MIS) 6010165, του Προγράμματος «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή 2021-2027» που υλοποιείται από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής και συγχρηματοδοτείται από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο.



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
Υπουργείο Παιδείας, Θρησκευμάτων  
και Αθλητισμού



Με τη συγχρηματοδότηση  
της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Πρόγραμμα  
Ανθρώπινο Δυναμικό και  
Κοινωνική Συνοχή