ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Κώστας Γαβρίλης
Μαρία Ελένη Πούλου
Γιώργος Μπαραλός
Μιχάλης Φιλιππάκης
Νίκος Τάσος
Χρήστος Μάλλιαρης
Βασίλης Νεστορίδης
Βασίλης Μοτσάκος

ΑΛΓΕΒΡΑ

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΑΛΓΕΒΡΑ

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Επιστημονική Επιτροπή Αξιολόγησης

Συντονιστής / Αξιολογητής	**Λουλάκης Μιχαήλ** Εν ενεργεία μέλος Διδακτικού Ερευνητικού Προσωπικού Πανεπιστημίου
Αξιολογητής	**Βρέκας Χαρίλαος** Εν ενεργεία Εκπαιδευτικός
Αξιολογητής	**Σκουρκέας Αναστάσιος** Εν ενεργεία Εκπαιδευτικός
Τεχνικός Εμπειρογνώμονας	**Σύψας Αθανάσιος** Πτυχιούχος Πληροφορικής
Επικουρικός Εμπειρογνώμονας	**Στάθη Ευθυμία** Διπλωματούχος Τεχνολογίας Γραφικών Τεχνών
Υπεύθυνη του μαθήματος / γνωστικού αντικειμένου στο πλαίσιο της Πράξης	**Ειρήνη Γεωργάκη, Σύμβουλος Α΄ ΙΕΠ,** μέλος της Επιστημονικής Ομάδας Έργου (ΕΟΕ) της Πράξης

Πράξη με τίτλο: «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ 6010165 στο Πρόγραμμα «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή» 2021-2027

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ
Σπυρίδων Δουκάκης
Πρόεδρος του Δ.Σ. του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Υπεύθυνη Πράξης
Πολυξένη Μπίλλα
Σύμβουλος Α΄ του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής
Προϊσταμένη Τμήματος Β΄ Προγραμμάτων Σπουδών και Εκπαιδευτικού Υλικού

Αναπληρώτρια Υπεύθυνη Πράξης
Άννα-Αικατερίνη Λυκούρη
Σύμβουλος Α΄ του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

«Με τη συγχρηματοδότηση της Ευρωπαϊκής Ένωσης»
και το Πρόγραμμα «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή»

Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας, Θρησκευμάτων και Αθλητισμού
ΙΕΠ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2021-2027
Πρόγραμμα Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Κώστας Γαβρίλης
Γιώργος Μπαραλός
Νίκος Τάσος
Βασίλης Νεστορίδης
Μαρία Ελένη Πούλου
Μιχάλης Φιλιππάκης
Χρήστος Μάλλιαρης
Βασίλης Μοτσάκος

ΑΛΓΕΒΡΑ

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

εκδόσεις πουκαμισάς

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΥΓΓΡΑΦΗΣ

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ

Γαβρίλης Κώστας
Επ. Σχ. Σύμβουλός Μαθηματικών
Μπαραλός Γιώργος
Επ. Σχ. Σύμβουλος Μαθηματικών
Τάσος Νίκος
Σύμβουλος Μαθηματικών, ΙΕΠ
Νεστορίδης Βασίλης
Ομοτ. Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών - ΕΚΠΑ
Πούλου Μαρία Ελένη
Επίκουρη Καθηγήτρια Πανεπιστημίου Δυτ. Αττικής
Φιλιππάκης Μιχάλης
Καθηγητής Πανεπιστημίου Πειραιά - ΠΑΠΕΙ
Μάλλιαρης Χρήστος
Μαθηματικός, Εκπαιδευτικός Β/θμιας Εκπαίδευσης
Μοτσάκος Βασίλης
Μαθηματικός, Εκπαιδευτικός Β/θμιας Εκπαίδευσης

ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ

Μπαραλός Γιώργος

ΣΕΛΙΔΟΠΟΙΗΣΗ,
ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΕΞΩΦΥΛΛΟΥ

Τμήμα Εκδόσεων Πουκαμισάς

Περιεχόμενα

Ταυτότητα του Βιβλίου

Το βιβλίο αυτό αποτελεί υλοποίηση των νέων Προγραμμάτων Σπουδών (ΠΣ) για τα Μαθηματικά της Α΄ Λυκείου και κατά τη συγγραφή του λάβαμε υπόψη μας όλες τις σχετικές οδηγίες του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (ΙΕΠ).

Στο βιβλίο αναπτύσσονται κυρίως έργα που συναντούν τις εμπειρίες των μαθητών/ριών, ώστε να εμπλέκονται δημιουργικά στην αναζήτηση ιδιοτήτων και σχέσεων, στη δημιουργία διασυνδέσεων καθώς, και σε δράσεις διερεύνησης, πειραματισμού και αναστοχασμού σε συνδυασμό με το αντίστοιχο θεωρητικό πλαίσιο.
Για τον σκοπό αυτό παραθέτουμε εισαγωγικές διερευνήσεις σε κάθε ενότητα, οι οποίες χρησιμεύουν ως προκαταβολικοί οργανωτές, διευκολύνουν το διδακτικό μετασχηματισμό και υποβοηθούνται από πολλές ψηφιακές εφαρμογές και ψηφιακά δομήματα.

Καινοτόμα στοιχεία του βιβλίου είναι:

1. Η έμφαση στην ενεργό εμπλοκή των μαθητών/τριών μέσα από ένα μεγάλο πλήθος διερευνήσεων οι οποίες συνδέουν τις υπάρχουσες με τις νέες γνώσεις.
2. Οι ψηφιακές δραστηριότητες οι οποίες παρέχουν ευκαιρίες διερεύνησης, αξιολόγησης, εξάσκησης και διεύρυνσης των νέων γνώσεων, κυρίως με τη χρήση του ελεύθερου λογισμικού Geogebra το οποίο είναι ιδιαίτερα εύχρηστο από διδάσκοντες και μαθητές/τριες.
3. Οι πολλές και στοχευμένες εφαρμογές που παρέχουν παραδείγματα επίλυσης ασκήσεων και προβλημάτων περιγράφοντας αναλυτικά τις σχετικές διαδικασίες για την επιτυχή αντιμετώπιση νέων προβλημάτων.
4. Η ποικιλία των προβλημάτων ρεαλιστικού πλαισίου σε συνδυασμό με την εισαγωγή στον κύκλο της μοντελοποίησης.
5. Η παράθεση έργων αυτοαξιολόγησης, ψηφιακών κουίζ, ιστορικών αναφορών με σχετικές εργασίες, επαναληπτικών ασκήσεων και προβλημάτων καθώς και συγκεντρωτικών ανά κεφάλαιο φύλλων αξιολόγησης.

Ειδικότερα, η υλοποίηση των ΠΣ ως προς τους βασικούς άξονες, περιεχόμενο, μάθηση και διδασκαλία, δομή και οργάνωση, συμπληρωματικό υλικό, διαρθρώνεται ως εξής:

Περιεχόμενο

Για την επίτευξη των Προσδοκώμενων Μαθησιακών Αποτελεσμάτων (ΠΜΑ) υιοθετήθηκε η σύγχρονη αντίληψη ότι στην τάξη των Μαθηματικών, η μάθηση και η διδασκαλία εξελίσσονται τόσο σε ατομικό όσο και σε συλλογικό επίπεδο, μέσα σε διερευνητικά περιβάλλοντα μάθησης τα οποία δίνουν τη δυνατότητα δημιουργίας συνδέσεων της γνώσης και των περιεχομένων των Μαθηματικών με την εφαρμογή των εννοιών και τις διαδικασίες τους.

Τα ΠΜΑ παρατίθενται αναλυτικά σε κάθε διδακτική ενότητα προσδιορίζοντας τους επί μέρους στόχους που πρέπει να επιτευχθούν σε αντιστοίχιση με τα επί μέρους μαθηματικά περιεχόμενα. Για την αξιολόγηση της επίτευξης των ΠΜΑ παραθέτουμε:

Α. *Στο τέλος κάθε ενότητας:* Ερωτήσεις αυτοαξιολόγησης, Ερωτήσεις κατανόησης, Ασκήσεις και προβλήματα συνδεδεμένα με εμπειρίες των μαθητών/τριών.
Β. *Στο τέλος κάθε κεφαλαίου:* Ανακεφαλαίωση, Επαναληπτικές ασκήσεις, προβλήματα, Συνθετικές εργασίες επέκτασης και διεύρυνσης των γνώσεων καθώς και συγκεντρωτικά φύλλα αξιολόγησης.
Γ. *Στο τέλος του βιβλίου:* Απαντήσεις και υποδείξεις των προτεινόμενων ασκήσεων.

Οι διδακτικές ενότητες και η πρότασή μας για τη σειρά διαχείρισής τους αποτυπώνονται στην ενότητα των περιεχομένων. Τα προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ) παρατίθενται εισαγωγικά σε κάθε ενότητα. Ειδικότερα, για την αποτελεσματικότερη διαχείριση των ΠΜΑ του ΠΣ προσθέσαμε:

α) Ένα εισαγωγικό κεφάλαιο στο οποίο γίνεται σύντομη αναφορά σε βασικές έννοιες για την κατανόηση της δομής της απόδειξης, η οποία αποτελεί κεντρικό στόχο στο Λύκειο και διατρέχει τα μαθηματικά όλων των τάξεων. Το κεφάλαιο αυτό δεν περιέχεται στα ΠΜΑ των ΠΣ, αποτελεί αυτόνομη ενότητα και μπορεί να χρησιμοποιηθεί από τους/τις διδάσκοντες/ουσες κατά την κρίση τους σε οποιαδήποτε φάση της διδασκαλίας.

β) Δύο παραγράφους (4.1 και 4.2) που αφορούν στην παραγοντοποίηση και στο πρόσημο τριωνύμου δευτέρου βαθμού. Δεν περιέχονται στα ΠΜΑ των ΠΣ αλλά τις θεωρήσαμε αναγκαίες για την υλοποίηση των ΠΜΑ του ΠΣ που αφορά στην επίλυση ανισώσεων δευτέρου βαθμού.

Μάθηση και Διδασκαλία

Ως βασική διδακτική αρχή υιοθετήθηκε η μάθηση μέσω της καθοδηγούμενης ανακάλυψης η οποία έχει ως συνέπεια τη δημιουργία και παράθεση έργων εμπλοκής των μαθητών/τριων τα οποία λαμβάνουν υπόψη τους τη διεύρυνση της γνωστικής τους δυνατότητας με την παροχή βοήθειας (ζώνη επικείμενης ανάπτυξης).

Κατά τη συγγραφή λάβαμε υπόψη μας βασικά συμπεράσματα της διδακτικής των Μαθηματικών καθώς και των Παιδαγωγικών ενσωματώνοντας έργα τα οποία διευκολύνουν:

- Την συμμετοχή των μαθητών/ριών σε κατάλληλα έργα διερεύνησης και ανακάλυψης νέων ιδεών.
- Την ταυτόχρονη εξέλιξη της μάθησης και της διδασκαλίας τόσο σε ατομικό όσο και σε συλλογικό επίπεδο, με συνεργατικές-συμμετοχικές διαδικασίες και πλούσια έργα ρεαλιστικού περιεχομένου.
- Την συμπληρωματική και σε συνεχή αλληλεπίδραση γνωστική - ατομική και κοινωνικοπολιτισμική συμμετοχική προσέγγιση στη μάθηση των Μαθηματικών.
- Την συμπερίληψη και διαφοροποίηση.
- Τον μετασχηματισμό της διδακτέας ύλης ως διδάξιμης από τους/τις συναδέλφους/ισες Εκπαιδευτικούς της τάξης.

Δομή και Οργάνωση

Η διδακτέα ύλη των ενοτήτων επιμερίζεται σε κεφάλαια και αρθρώνεται σε υποενότητες, κάθε μία από τις οποίες περιέχει:

- Διατύπωση μαθησιακών στόχων (ΠΜΑ)
- Διερευνήσεις με στόχο την ανάκληση πρότερων γνώσεων και την αναγνώριση της ανάγκης διεύρυνσής της για την επίλυση νέων προβλημάτων.
- Ψηφιακά δομήματα που ενθαρρύνουν την εμπλοκή των μαθητών/τριών και υποβοηθούν την διερεύνηση.
- Ανάλυση του μαθηματικού περιεχομένου.
- Εφαρμογές του μαθηματικού περιεχομένου.
- Ερωτήσεις κατανόησης και αυτοαξιολόγησης.
- Ασκήσεις και προβλήματα για την αξιολόγηση της επίτευξης των μαθησιακών στόχων.

Η ανάπτυξη της ύλης πλαισιώνεται με:

- Συμπληρωματικό υλικό που αναπτύσσεται παράλληλα ως ψηφιακό, με τη μορφή γραμμωτού κώδικα και είναι διαθέσιμο μέσω διαδικτύου.
- Ανακεφαλαίωση-Επανάληψη σε κάθε κεφάλαιο με συνθετικές εργασίες.
- Επαναληπτικές ασκήσεις και προβλήματα.

Συμπληρωματικό υλικό

Το συμπληρωματικό υλικό περιλαμβάνει:

- Ψηφιακά δομήματα τα οποία δίνουν τη δυνατότητα για ποικίλες επιπλέον διερευνήσεις, δημιουργία εικασιών, εξάσκηση και αξιολόγηση επίτευξης γνωστικών στόχων. Αναπτύσσονται παράλληλα με το μαθηματικό περιεχόμενο και μπορούν να χρησιμοποιηθούν επιλεκτικά από τους/τις διδάσκοντες/ουσες και από τους μαθητές και τις μαθήτριες.
- Ιστορικές αναφορές οι οποίες συνδυάζονται με εργασίες που σκοπό έχουν την ανάδειξη της συνοχής και της διαχρονικής εξέλιξης των μαθηματικών εννοιών.
- Ευκαιρίες εξοικείωσης με το περιβάλλον χρήσιμων λογισμικών.
- Ασκήσεις αξιολόγησης για μεγαλύτερη άσκηση και εμβάθυνση στις σχετικές έννοιες.

Πιστεύουμε ότι κανένα έργο δεν μπορεί να υλοποιηθεί αποτελεσματικά χωρίς την ανεκτίμητη βοήθεια των Εκπαιδευτικών της τάξης, οι οποίοι είμαστε βέβαιοι ότι θα ζωντανέψουν τις ιδέες που εμπεριέχονται στο βιβλίο αυτό.

Προσπαθήσαμε για το καλύτερο αλλά αυτό δεν μας απαλλάσσει από όποια ενδεχόμενη αστοχία για την οποία αναλαμβάνουμε την αποκλειστική ευθύνη. Θα είμαστε υποχρεωμένοι σε όποιον/α θα επικοινωνούσε μαζί μας για τη βελτίωση του παρόντος βιβλίου.

Οι Συγγραφείς

Διδακτική διαχείριση και μαθηματική δραστηριότητα μαθητών/τριών.

Πλοήγηση στο συμπληρωματικό υλικό. Διασύνδεση έργων με ΠΣ.

0. Εισαγωγικό Κεφάλαιο

Τα μαθηματικά είναι ένα αξιωματικό σύστημα που αποτελείται από:

- ***αρχικούς όρους*** που επιλέγουμε χωρίς να τους ορίσουμε,
- ***ορισμούς*** που δημιουργούνται με τη βοήθεια των αρχικών όρων,
- ***αξιώματα*** που είναι προτάσεις, οι οποίες δεχόμαστε ότι είναι αληθείς,
- ***θεωρήματα*** που είναι μαθηματικές προτάσεις, η αλήθεια των οποίων προκύπτει από τα αξιώματα με τη βοήθεια της μαθηματικής λογικής.

Στην καθημερινή ζωή η απόδειξη δεν έχει αυστηρή δομή και διατυπώνεται συνήθως με τη μορφή της εξήγησης, της αιτιολόγησης ή της επαλήθευσης.

Ωστόσο, στα μαθηματικά η απόδειξη έχει αυστηρή δομή και για τη δημιουργία της υπάρχουν διάφορες μέθοδοι. Στο εισαγωγικό αυτό κεφάλαιο παραθέτουμε συνοπτικά:

- ✓ Τις βασικές μεθόδους απόδειξης:
  - *Ευθεία - Άμεση (ή Κατασκευαστική)* • *Απαγωγή σε άτοπο* • *Αντιπαράδειγμα*
- ✓ Τη *συνεπαγωγή* και την *ισοδυναμία*
- ✓ Τους λογικούς συνδέσμους *«ή»*, *«και»*

Σε επόμενη τάξη θα μάθουμε και άλλες μεθόδους απόδειξης, όπως τη *Μαθηματική Επαγωγή*.

0.1 • Μέθοδοι Απόδειξης

Ευθεία ή Άμεση απόδειξη

Διερεύνηση 1

Αποδείξτε ότι: $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

Εξηγήστε πού βασίζεται κάθε βήμα της απόδειξης.

Ευθεία ή Άμεση απόδειξη (ή κατασκευαστική) ονομάζουμε μια ακολουθία αληθών προτάσεων η οποία κατασκευάζεται ξεκινώντας από την υπόθεση, τα αξιώματα, τους ορισμούς, τις ιδιότητες, τα θεωρήματα που έχουν ήδη αποδειχτεί και με τη βοήθεια της μαθηματικής λογικής οδηγούμαστε στην αλήθεια μιας πρότασης.
Ευθεία ή Άμεση απόδειξη διατυπώνει η Σοφία στην εικόνα της εισαγωγής η οποία, αφού κοιτάζει την ημερομηνία στα εισιτήρια, συμπεραίνει ότι *«η συναυλία* ***δεν είναι*** *σήμερα»*.

Εφαρμογή 1

Να αποδείξετε ότι: $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$

Απάντηση:

Είναι: $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = \alpha(\alpha + \beta) - \beta(\alpha + \beta)$ [Επιμεριστική ιδιότητα]

$= \alpha^2 + \alpha\beta - \beta\alpha - \beta^2$ [Αναγωγή όμοιων όρων]

$= \alpha^2 - \beta^2$

Διερεύνηση 2. *Αθώος ή ένοχος;*

Σε ένα δικαστήριο, ο/η δικηγόρος που υπερασπίζεται έναν κατηγορούμενο λέει:

«Ο πελάτης μου είναι αθώος. Αν υποθέσουμε ότι ο πελάτης μου δεν είναι αθώος, τότε θα έπρεπε να έχει κάνει το έγκλημα για το οποίο κατηγορείται. Αν, όμως, έκανε το έγκλημα, θα έπρεπε να ήταν στον τόπο του εγκλήματος την ώρα που έγινε το έγκλημα. Όμως, την ίδια ώρα και ημέρα ο πελάτης μου βρίσκονταν σε άλλη πόλη και παρουσίαζε επι ώρες ένα προϊόν της εταιρείας του σε δεκάδες διαφορετικούς πελάτες οι οποίοι το επιβεβαιώνουν με καταθέσεις τους ... »

Αν ήσασταν ο/η δικηγόρος πώς θα συμπληρώνατε την παραπάνω αγόρευση;

Όταν είναι δύσκολο να εργαστούμε με ευθεία απόδειξη, τότε μπορούμε να εργαστούμε με την έμμεση μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο η οποία έχει ως εξής:

Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει αυτό το οποίο θέλουμε να αποδείξουμε. Δηλαδή, υποθέτουμε ότι ισχύει η άρνησή του και επισυνάπτοντας αυτή την υπόθεση στα όσα γνωρίζουμε (αξιώματα, θεωρήματα, κ.λπ.) προσπαθούμε χρησιμοποιώντας αληθείς προτάσεις να οδηγηθούμε σε μια κατάσταση όπου αναγκαία θα πρέπει να ισχύει ένας ισχυρισμός και η άρνησή του/ο αντίθετός του. Αυτό είναι αντίφαση και λέμε ότι οδηγηθήκαμε σε άτοπο[1].

Άρα δεν ισχύει η υπόθεση που κάναμε και επομένως αναγκαία ισχύει αυτό που θέλαμε να αποδείξουμε.

Απαγωγή σε άτοπο ή *Έμμεση απόδειξη* διατυπώνει η Μαρία στην εικόνα της εισαγωγής, η οποία σκέπτεται ότι αν ήταν σήμερα η συναυλία τότε θα έπρεπε να υπάρχει κόσμος.

Κόσμος όμως δεν υπάρχει, οπότε οδηγείται σε άτοπο[2] και συμπεραίνει ότι *«η συναυλία δεν μπορεί να είναι σήμερα»*. Συνήθως χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο όταν στις εκφωνήσεις συναντάμε **άρνηση** (**δεν**).

Εφαρμογή 2

Να αποδείξετε ότι αν ο ν^2 είναι άρτιος, τότε και ο ν είναι άρτιος (ν: ακέραιος).

Απάντηση:
Η υπόθεσή μας είναι Α: *«ο ν^2 είναι άρτιος αριθμός»* και το συμπέρασμα στο οποίο θέλουμε να καταλήξουμε είναι Β: *«ο ν είναι άρτιος αριθμός»*.
Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα Β: *«ο ν είναι άρτιος αριθμός»*.
Δηλαδή, υποθέτουμε ότι ισχύει προσωρινά η άρνηση του Β ότι: *«ο ν δεν είναι άρτιος αριθμός»*.
Με υπόθεση πλέον ότι ισχύει ο Α και η άρνηση του Β θα αποδείξουμε ότι οδηγούμαστε σε άτοπο-αντίφαση.

Πράγματι.
Αν υποθέσουμε ότι ο ν δεν είναι άρτιος, τότε θα είναι περιττός.
Άρα θα υπάρχει ακέραιος κ τέτοιος ώστε $\nu = 2\kappa + 1$. Τότε όμως θα έχουμε:
$\nu^2 = (2\kappa + 1)^2 = 4\kappa^2 + 4\kappa + 1 = 2(2\kappa^2 + 2\kappa) + 1 = 2\lambda + 1$, όπου $\lambda = 2\kappa^2 + 2\kappa$, ακέραιος.
Άρα, αν ο ν δεν είναι άρτιος τότε αναγκαία ο ν^2 θα είναι περιττός.

Η Απαγωγή σε άτοπο
αποδίδεται στον Ζήνωνα (5ος αιώνας π.Χ.) και την χρησιμοποίησε ο Ευκλείδης (3ος αιώνας π.Χ.) για να αποδείξει ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί.

[1]Η μέθοδος της απαγωγής σε άτοπο στηρίζεται σε δύο λογικές αρχές:
1. Ισχύει μια πρόταση ή η άρνησή της *(Αρχή της αποκλίσεως του τρίτου ή του μέσου)*.
2. Αποκλείεται να ισχύει μια πρόταση και η άρνησή της / η αντίθετή της *(Αρχή της μη-αντίφασης)*.

[2]Δηλαδή στην αντίφαση: *«υπάρχει κόσμος»* και *«δεν υπάρχει κόσμος»*.

Τότε όμως θα πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα οι ισχυρισμοί: *«ο $ν^2$ είναι άρτιος αριθμός»* **και** *«ο $ν^2$ είναι περιττός αριθμός»*. Αυτό όμως είναι άτοπο (αντίφαση), αφού δεν μπορεί να ισχύει ταυτόχρονα ένας ισχυρισμός και η άρνησή του. Στο συμπέρασμα αυτό οδηγηθήκαμε γιατί υποθέσαμε λανθασμένα ότι *«ο ν δεν είναι άρτιος αριθμός»*. Άρα, η υπόθεση που κάναμε δεν ισχύει και επομένως συμπεραίνουμε ότι *«ο ν είναι άρτιος αριθμός»*.

Απόδειξη με αντιπαράδειγμα

Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται όταν θέλουμε να αποδείξουμε ότι δεν ισχύει ένας ισχυρισμός. Δηλαδή, όταν θέλουμε να αποδείξουμε ότι ένας ισχυρισμός δεν ισχύει για κάθε στοιχείο του συνόλου αναφοράς του. Γι' αυτό είναι αρκετό να βρούμε ένα μόνο παράδειγμα για το οποίο δεν ισχύει ο ισχυρισμός αυτός (είναι ψευδής). Το παράδειγμα με το οποίο διαψεύδουμε ένα ισχυρισμό λέγεται «αντιπαράδειγμα».

Εφαρμογή 3

Να εξετάσετε αν για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει ότι: $α^2 > α$.

Απάντηση:

Αν για κάθε πραγματικό αριθμό α, ισχύει ότι: $α^2 > α$ τότε θα ισχύει και για $α = \frac{1}{2}$. Ωστόσο για $α = \frac{1}{2}$ έχουμε $α^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} < α = \frac{1}{2}$ και επομένως ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού βρήκαμε ένα αντιπαράδειγμα $\left(α = \frac{1}{2}\right)$ για το οποίο ο ισχυρισμός δεν ισχύει.

0.2 • Συνεπαγωγή & Ισοδυναμία

Οι περισσότεροι ισχυρισμοί μπορούν να τεθούν στις μορφές «***Αν…τότε…***» και «***…όταν και μόνο όταν…***» οι οποίες ακολουθούν:

Η συνεπαγωγή ($Α \Rightarrow Β$)

Διερεύνηση 3

Α: «Σήμερα βρέχει στην πόλη μου» **Β:** «Σήμερα ο ουρανός έχει σύννεφα στην πόλη μου»

Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής;

i. Αν «Α», τότε «Β» **ii.** Αν «Β», τότε «Α»

Ξέρουμε ότι **αν** $x = 2$, **τότε** $x^2 = 2^2 = 4$. Σε μια τέτοια περίπτωση λέμε ότι ο ισχυρισμός $x = 2$ *συνεπάγεται* τον ισχυρισμό $x^2 = 4$ και γράφουμε συμβολικά: $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$.

Γενικά:

Αν Α, Β δύο ισχυρισμοί τέτοιοι ώστε όταν αληθεύει ο Α να αληθεύει και ο Β, τότε λέμε ότι ***ο Α συνεπάγεται τον Β*** και γράφουμε συμβολικά **$Α \Rightarrow Β$**.

Ο ισχυρισμός $Α \Rightarrow Β$ διαβάζεται «***Αν** Α, **τότε** Β*», δηλαδή *«Αν ισχύει η πρόταση Α, τότε θα ισχύει και η πρόταση Β»* και ονομάζεται «**συνεπαγωγή**».

Η πρόταση Α λέγεται *υπόθεση* και η πρόταση Β *συμπέρασμα*.

Για να αποδείξουμε μια συνεπαγωγή « $A \Rightarrow B$ », υποθέτουμε ότι η Α είναι αληθής[3] και κατασκευάζουμε μια διαδοχή αληθών συνεπαγωγών $A \Rightarrow A_1$ και $A_1 \Rightarrow A_2$ και $A_2 \Rightarrow A_3$ και ... $A_{\nu-1} \Rightarrow A_\nu = B$[4] οπότε συμπεραίνουμε ότι ο ισχυρισμός « $A \Rightarrow B$ » είναι αληθής.

Ο Ράσελ και ο Πάπας

Εφαρμογή 4

Να αποδείξετε ότι αν $\alpha < \beta$, τότε $\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2}$.

Απάντηση:

Θέλουμε να αποδείξουμε τη συνεπαγωγή: $\alpha < \beta \Rightarrow \alpha < \frac{\alpha+\beta}{2}$.

Υποθέτουμε ότι ισχύει $\alpha < \beta$ και έχουμε: $\alpha < \beta \Rightarrow \alpha + \alpha < \beta + \alpha \Rightarrow 2\alpha < \alpha + \beta \Rightarrow \alpha < \frac{\alpha+\beta}{2}$.

Άρα ισχύει ότι, αν $\alpha < \beta$, τότε $\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2}$.

Σημείωση

Αποδεικνύεται ότι:

Η συνεπαγωγή «**Α ⇒ Β**» είναι ισοδύναμη με τη συνεπαγωγή « **Όχι Β ⇒ Όχι Α**».

Έτσι, αντί να αποδείξουμε τη συνεπαγωγή *«Αν Α, τότε Β»* μπορούμε να αποδείξουμε την ισοδύναμή της συνεπαγωγή *«Αν όχι Β, τότε όχι Α»*.

Παράδειγμα.
Αντί να αποδείξουμε $\alpha < \beta \Rightarrow \alpha < \frac{\alpha+\beta}{2}$ είναι το ίδιο να αποδείξουμε ότι: $\alpha \geq \frac{\alpha+\beta}{2} \Rightarrow \alpha \geq \beta$.

Η ισοδυναμία ($A \Leftrightarrow B$)

Διερεύνηση 4

Α: «Η Βάλια είναι κόρη της Μαρίας» **Β:** «Η Μαρία είναι μητέρα της Βάλιας»

Εξετάστε την αλήθεια των προτάσεων: **i)** Αν «Α», τότε «Β» **ii)** Αν «Β», τότε «Α»

Στην εφαρμογή (4) αποδείξαμε ότι: $\alpha < \beta \Rightarrow \alpha < \frac{\alpha+\beta}{2}$.

Παρατηρούμε ότι ισχύει και η αντίστροφη συνεπαγωγή: $\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} \Rightarrow 2\alpha < \alpha + \beta \Rightarrow \alpha < \beta$.

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι ο ισχυρισμός $\alpha < \beta$ είναι *ισοδύναμος* με τον ισχυρισμό $\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2}$ και γράφουμε συμβολικά: $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha < \frac{\alpha+\beta}{2}$.

Γενικά:

Αν Α, Β δύο ισχυρισμοί τέτοιοι ώστε **Α ⇒ Β** και **Β ⇒ Α**, τότε λέμε ***ο Α είναι ισοδύναμος με τον Β*** και γράφουμε συμβολικά **Α ⇔ Β.**

Ο ισχυρισμός **Α ⇔ Β** λέγεται **ισοδυναμία ή διπλή συνεπαγωγή** και διαβάζεται «**Α αληθής** όταν και μόνο όταν **Β αληθής**» ή «**Α αληθής** αν και μόνο αν **Β αληθής**».

[3] Αν η υπόθεση Α είναι ψευδής, τότε η συνεπαγωγή $A \Rightarrow B$ είναι αληθής ανεξάρτητα από το αν η Β είναι αληθής ή ψευδής πρόταση. Στην πράξη θεωρούμε ότι η υπόθεση Α είναι αληθής και δείχνουμε ότι και η Β είναι αληθής.

[4] Συνήθως γράφουμε για συντομία με το ίδιο νόημα: $A \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow A_3$ ... $A_{\nu-1} \Rightarrow A_\nu = B$.

Εφαρμογή 5

Αν $\alpha > 0$, να αποδείξετε[5] ότι: $\alpha + \frac{1}{\alpha} = 3 \Leftrightarrow \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} = 7$

Απάντηση:

Πράγματι, για $\alpha > 0$ έχουμε:

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} = 3 \Leftrightarrow \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 = 3^2 \Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha\frac{1}{\alpha} + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 = 9 \Leftrightarrow \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} = 9 - 2 \Leftrightarrow \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} = 7$$

Σημείωση

Όταν χρησιμοποιούμε ισοδυναμίες πρέπει να βεβαιωνόμαστε ότι ισχύει συνεπαγωγή και προς τις δύο κατευθύνσεις. Για παράδειγμα:
$x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$, αλλά $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ ή $x = -2$, οπότε δεν είναι σωστό να γράψουμε $x = 2 \Leftrightarrow x^2 = 4$.

0.3 • Οι Σύνδεσμοι «ή», «και»

Διερεύνηση 5. *Καφέ ή τσάι;*

Σερβιτόρος: *Θα θέλατε καφέ ή τσάι;*
Πελάτης Α: *Ναι*
Πελάτης Β: *Όχι*

Τι συμπεραίνετε από τις απαντήσεις των πελατών;

Ο σύνδεσμος «ή»

Στην καθημερινή ζωή όταν πρόκειται να πάω για φαγητό με τους φίλους μου και σκέφτομαι ότι θα παραγγείλω *«πατάτες ή σουβλάκι»*, αυτό μπορεί να σημαίνει ότι θα παραγγείλω:

- ✓ Ένα μόνο από τα δύο: *«μόνο πατάτες»* ή *«μόνο σουβλάκι»* είτε
- ✓ Ένα τουλάχιστον από τα δύο: *«μόνο πατάτες»* ή *«μόνο σουβλάκι»* ή *«και πατάτες και σουβλάκι»*

Στα σχολικά μαθηματικά, συμφωνούμε ο σύνδεσμος «**ή**» να χρησιμοποιείται με τη δεύτερη σημασία του.
Για παράδειγμα, όπως έχουμε μάθει στο Γυμνάσιο, ισχύει η βασική ιδιότητα των πραγματικών αριθμών:
«$\alpha \cdot \beta = 0$ όταν και μόνο όταν $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$»[6] και γράφουμε συμβολικά: $\boldsymbol{\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0}$ ή $\boldsymbol{\beta = 0}$
εννοώντας: $\alpha = 0$ **ή** $\beta = 0$ **ή** ($\alpha = 0$ και $\beta = 0$). Δηλαδή ότι ένας τουλάχιστον από τους α, β είναι μηδέν.

Γενικά:

Αν Α και Β δύο ισχυρισμοί, τότε ο ισχυρισμός «**Α ή Β**» λέγεται **διάζευξη** και είναι αληθής όταν και μόνο όταν **ένας τουλάχιστον** από τους δύο ισχυρισμούς Α, Β είναι αληθής.

Εφαρμόζοντας αυτή την ιδιότητα λύνουμε εξισώσεις. Για παράδειγμα:

$x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 1$.

---

[5] Πολλές φορές χρησιμοποιούμε με το ίδιο νόημα τη λέξη «δείξτε» αντί της λέξης «αποδείξτε»

[6] Η ιδιότητα αυτή ισχύει και για περισσότερους παράγοντες. Δηλαδή: $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma=0 \Leftrightarrow \alpha=0$ ή $\beta=0$ ή $\gamma=0$, $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta=0 \Leftrightarrow \alpha=0$ ή $\beta=0$ ή $\gamma=0$ ή $\delta=0$ κ.ο.κ.

Ο σύνδεσμος «και»

Στην καθημερινή ζωή, αν πηγαίνοντας για φαγητό με τους φίλους μου σκέφτομαι ότι θα παραγγείλω *«πατάτες και σουβλάκι»*, αυτό σημαίνει ότι θα παραγγείλω και τα δύο. Δηλαδή, πατάτες και σουβλάκι.

Στα μαθηματικά, γράφοντας για παράδειγμα, «$x^2 - 1 = 0$ και $x - 1 = 0$» δηλώνουμε τις τιμές του x οι οποίες αληθεύουν την $x^2 - 1 = 0$ (1) **και** την $x = 1$ (2).
Οι αριθμοί -1 και 1 είναι οι λύσεις της (1) **και** ο αριθμός 1 λύση της (2).
Άρα, η τιμή που αληθεύει τις (1) **και** (2) είναι η κοινή λύση $x = 1$.

Γενικά:

Αν Α και Β δύο ισχυρισμοί, τότε ο ισχυρισμός **Α και Β** λέγεται **σύζευξη** και είναι αληθής, όταν και μόνο όταν **και οι δύο** ισχυρισμοί Α, Β είναι αληθείς.

Σχόλιο

Ξέρουμε από το Γυμνάσιο ότι: *«το γινόμενο δύο πραγματικών αριθμών α, β είναι διαφορετικό από το μηδέν όταν και μόνο όταν και οι δύο αριθμοί α, β είναι διαφορετικοί από το μηδέν».*

Δηλαδή: $\boldsymbol{\alpha \cdot \beta} \neq 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha} \neq 0$ και $\boldsymbol{\beta} \neq 0$

Παρατηρήστε ότι ($\alpha \neq 0$ **και** $\beta \neq 0$) είναι η άρνηση της ($\alpha = 0$ **ή** $\beta = 0$).

Ασκήσεις

1. Να αποδείξετε ότι: «Αν δύο ακέραιοι είναι διαδοχικοί, τότε το άθροισμά τους είναι περιττός αριθμός».

2. Αν $\alpha, \beta \geq 0$, με $\alpha + \beta = 0$, να δείξετε ότι $\alpha = \beta = 0$.

3. Να αποδείξετε ότι αν $\alpha + \frac{1}{\alpha} = 2$, $\alpha \neq 0$, τότε $\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} = 2$.

4. Αν $\alpha\beta \neq 0$, να αποδείξετε ότι: $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 > 0$.

5. Να αποδείξετε ότι δεν είναι αληθείς οι ισχυρισμοί:

i) «Για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει $(\alpha + 1)^2 > \alpha^2 + 1$».

ii) «Για κάθε $x \neq 0$ με $-3 < x < 3$, ισχύει $-\frac{1}{3} < \frac{1}{x} < \frac{1}{3}$».

6. Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 + \beta^2 + 2 \geq 2\alpha + 2\beta$. Πότε ισχύει η ισότητα;

7. Να βρεθούν οι x, y στις παρακάτω περιπτώσεις:
i) $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 0$ ii) $2x^2 - 2xy + y^2 + 1 = 2x$

8. Αν y θετικός, να αποδείξετε ότι: $\frac{x}{y} < \frac{1}{2}$ όταν και μόνο όταν $\frac{x + 2}{y + 4} < \frac{1}{2}$.

9. Αν β, δ θετικοί, να αποδείξετε ότι: $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\gamma}{\delta}$ όταν και μόνο όταν $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$.

10. Να εξετάσετε αν για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει ότι:
$\alpha < \beta \Rightarrow \alpha^2 < \beta^2$.

11. Αν $\alpha > 0$, να αποδείξετε ότι:
$\alpha + \frac{1}{\alpha} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{4}$.

12. Αν $\alpha\beta \neq 0$, να δείξετε ότι: $\alpha^2 + \beta^2 > 1$ όταν και μόνο όταν $\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 + \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)^2 > \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + 5$.

13. Αν $\alpha + \beta = 3$ και $\alpha\beta = 2$, να βρεθεί η τιμή της παράστασης $(\alpha - \beta)^2$.

14. Να αποδείξετε ότι αν ο α^2 είναι περιττός, τότε και ο α είναι περιττός (α ακέραιος).

15. Να αποδείξετε ότι:

α. $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma$, $\beta\delta \neq 0$

β. $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$, $\beta\gamma\delta \neq 0$

γ. $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha + \beta}{\beta} = \frac{\gamma + \delta}{\delta}$, $\beta\delta \neq 0$

δ. $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$, $\beta\delta(\beta + \delta) \neq 0$

Πραγματικοί Αριθμοί

Κεφάλαιο

1

- Διάκριση ρητών - άρρητων
- Πυκνότητα και Διαδοχικότητα
- Διάταξη και διαστήματα
- Ταυτότητες
- Απόλυτη τιμή
- Ρίζες
- Δυνάμεις με ρητό εκθέτη

1.1 • Διάκριση ρητών–άρρητων και ταξινόμηση στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών

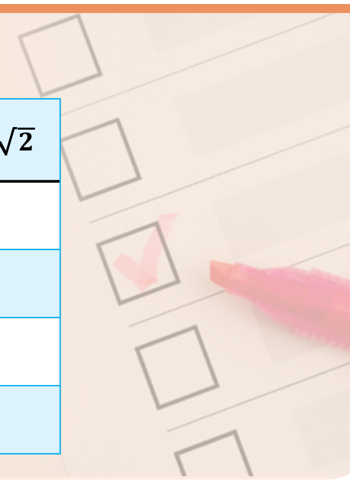
Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/ήτριες να μπορούν:

Να διακρίνουν τους ρητούς από τους άρρητους αριθμούς μέσα από τις διάφορες αναπαραστάσεις τους και να ταξινομούν συγκεκριμένους αριθμούς στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$).

Διερεύνηση 1

Να τοποθετήσετε τους παρακάτω αριθμούς στα σύνολα στα οποία ανήκουν.

	–3	**0**	**4**	**0,312**	$\frac{2}{3}$	**1,222…**[7]	**1,231402579…**	$\sqrt{2}$
$\mathbb{N}$								
$\mathbb{Z}$								
$\mathbb{Q}$								
$\mathbb{R} - \mathbb{Q}$								



Διερεύνηση 2

Δύο συμμαθητές διαφωνούν για το αν ο αριθμός 0,333… είναι ρητός ή άρρητος αριθμός. Η Μαρία ισχυρίζεται ότι είναι ρητός και ο Κώστας ότι είναι άρρητος. Ποιος έχει δίκιο και γιατί;

Ξέρουμε από το Γυμνάσιο ότι:

Ρητοί αριθμοί είναι αυτοί που μπορούν να γραφτούν ως κλάσματα. Δηλαδή, αυτοί που μπορούν να γραφτούν στη μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$ όπου α, β ακέραιοι και $\beta \neq 0$.

Επομένως, ρητοί αριθμοί είναι:

- Οι ακέραιοι. *Παράδειγμα:* $3 = \frac{3}{1}$.
- Οι δεκαδικοί με περιορισμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων. *Παράδειγμα*: $0{,}24 = \frac{24}{100}$.
- Οι δεκαδικοί με απεριόριστο (άπειρο) πλήθος δεκαδικών ψηφίων με περίοδο. *Παράδειγμα:* 0,999… (Εφαρμογή 1).

Άρρητοι αριθμοί είναι όσοι δεν είναι ρητοί αριθμοί. Δηλαδή, όσοι δεν μπορούν να γραφτούν στη μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$ όπου α, β ακέραιοι και $\beta \neq 0$.

Άρρητοι είναι οι μη περιοδικοί δεκαδικοί αριθμοί. Δηλαδή, οι δεκαδικοί με άπειρο μη περιοδικό δεκαδικό μέρος.

Παραδείγματα: $\sqrt{2}$, ημ45°, 1,234156734…, π = 3,1415926535 ...

«Ο αριθμός π»

[7] Με «…» σε απειροψήφιους δεκαδικούς αριθμούς δηλώνουμε ότι:
- Αν στο παρουσιαζόμενο δεκαδικό μέρος εμφανίζεται περίοδος, τότε αυτή συνεχίζεται απεριόριστα.
- Αν στο παρουσιαζόμενο δεκαδικό μέρος δεν εμφανίζεται περίοδος, τότε πουθενά στη συνέχεια δεν εμφανίζεται περίοδος.

Εφαρμογή 1

Να αποδείξετε ότι είναι ρητοί οι αριθμοί:
α. 0,999… **β.** 1,14999… **γ.** 0,142857142857142857…

Απάντηση:

α. Έστω $x = 0,999\ldots$ (1). Τότε $10x = 9,999\ldots$ (2) και αφαιρώντας τις σχέσεις (1), (2) κατά μέλη παίρνουμε: $10x - x = 9,999\ldots - 0,999\ldots$ ή $9x = 9$ ή $x = 1$. Άρα ο αριθμός 0,999… είναι ο ρητός αριθμός 1.

β. Έστω $x = 1,14999\ldots$, τότε $100x = 114,999 = 114 + 0,999\ldots \overset{(\alpha)}{=} 114 + 1 = 115$. Άρα: $x = \frac{115}{100} = 1,15$

γ. Έστω $x = 0,142857142857142857\ldots$ (1). Τότε $1000000x = 142857,142857142857\ldots$ ή

$1000000x = 142857 + 0,142857142857\ldots \overset{(1)}{=} 142857 + x$ ή $999.999x = 142857$ ή $x = \frac{142857}{999.999}$ ή $x = \frac{1}{7}$

Σημείωση

Οι ακέραιοι και οι δεκαδικοί αριθμοί μπορούν να γραφτούν ως περιοδικοί δεκαδικοί αριθμοί.
Παράδειγμα: $1= 0,999\ldots$, $1,15 = 1,14999\ldots$

Εφαρμογή 2

Αν **ρ** ρητός και **α** άρρητος, τότε είναι άρρητοι οι αριθμοί:

i. $\alpha + \rho$ και **ii.** $\alpha - \rho, \frac{\rho}{\alpha}, \frac{\alpha}{\rho}$ $(\rho \neq 0)$

Απάντηση:

i. Έστω ότι ο αριθμός $\alpha + \rho$ είναι ένας ρητός αριθμός ρ'.
Τότε: $\alpha + \rho = \rho'$ ή $\alpha = \rho - \rho'$ και επομένως ο α θα έπρεπε να είναι ρητός, αφού είναι ίσος με τον ρητό $\rho - \rho'$, που είναι άτοπο.

Επομένως, το άθροισμα ενός άρρητου αριθμού με έναν ρητό είναι άρρητος αριθμός.

ii. Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύονται και οι υπόλοιπες περιπτώσεις.

▶ Το αποτέλεσμα των πράξεων μεταξύ δύο άρρητων αριθμών, άλλες φορές είναι άρρητος και άλλες ρητός.

Παράδειγμα:

- Οι αριθμοί $(1 + \sqrt{2}), (\sqrt{2} - 1)$ είναι άρρητοι και το άθροισμά τους $(1 + \sqrt{2}) + (\sqrt{2} - 1) = 2\sqrt{2}$ είναι άρρητος αριθμός.
- Οι αριθμοί $-\sqrt{2}$ και $(1 + \sqrt{2})$ είναι άρρητοι, αλλά έχουν άθροισμα τον ρητό αριθμό 1.

Οι άρρητοι αριθμοί μπορούν να προσεγγιστούν από ακολουθίες ρητών αριθμών. Για τον αριθμό $\sqrt{2}$ αναφέραμε στο Γυμνάσιο ότι είναι άρρητος και είδαμε πως μπορούμε να βρίσκουμε δεκαδικές προσεγγίσεις του.
Στην εφαρμογή που ακολουθεί θα δούμε τώρα την απόδειξη.

Εφαρμογή 3

Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.

Απάντηση:

Εργαζόμαστε με τη μέθοδο της απαγωγής στο άτοπο. Έστω λοιπόν ότι ο $\sqrt{2}$ είναι ρητός αριθμός.

Τότε υπάρχουν ακέραιοι κ, λ με $\lambda \neq 0$ τέτοιοι ώστε $\sqrt{2} = \frac{\kappa}{\lambda}$ (1) και το κλάσμα $\frac{\kappa}{\lambda}$ να είναι ανάγωγο[8].

Από την (1) έχουμε: $(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)^2 \Rightarrow 2 = \frac{\kappa^2}{\lambda^2} \Rightarrow \kappa^2 = 2\lambda^2$ (2).

Άρα ο κ^2 είναι άρτιος αριθμός, οπότε και ο κ είναι άρτιος[9].

[8]Δεν απλοποιείται άλλο (ανάγωγο κλάσμα). Δηλαδή δεν υπάρχει ακέραιος, εκτός από τη μονάδα, που να διαιρεί τον κ και τον λ.
[9]Εισαγωγικό Κεφάλαιο-Εφαρμογή 2.

Επομένως ο 2 διαιρεί τον κ, οπότε υπάρχει ακέραιος μ τέτοιος ώστε $κ = 2μ$.

Τότε όμως από τη (2) παίρνουμε: $(2μ)^2 = 2λ^2 \Rightarrow 4μ^2 = 2λ^2 \Rightarrow λ^2 = 2μ^2$.

Άρα ο $λ^2$ είναι άρτιος, οπότε και ο λ είναι άρτιος. Επομένως, ο 2 διαιρεί τον λ.

Ώστε ο 2 διαιρεί τον κ και τον λ. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού υποθέσαμε ότι το κλάσμα $\frac{κ}{λ}$ είναι ανάγωγο.

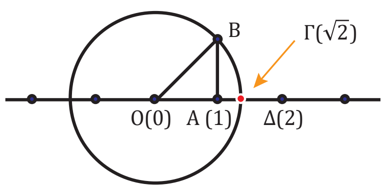
Άρα, ο $\sqrt{2}$ δεν είναι ρητός και επομένως ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.

Για να διερευνήσεις και να εξασκηθείς στην εύρεση ρητών προσεγγίσεων άρρητων αριθμών, άνοιξε την εφαρμογή:

Εφαρμογή 4

Να τοποθετήσετε τον $\sqrt{2}$ στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

Απάντηση:
Στο σημείο Α(1) του ημιάξονα των πραγματικών αριθμών φέρνουμε κάθετη ευθεία και πάνω σ' αυτή παίρνουμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ μήκους 1.
Με κέντρο το σημείο Ο(0) και ακτίνα την ΟΒ που είναι η υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΟΑΒ γράφουμε κύκλο.
Το σημείο Γ στο οποίο τέμνει τον άξονα ο κύκλος έχει τετμημένη $\sqrt{2}$, αφού από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ έχουμε:
$(ΟΒ)^2 = (ΟΑ)^2 + (ΑΒ)^2 \Leftrightarrow (ΟΒ)^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ και επομένως $ΟΒ = ΟΓ = \sqrt{2}$.



Στην ψηφιακή εφαρμογή μπορείς να δεις με ποιον τρόπο ο Θεόδωρος ο Κυρηναίος (470-400 π.Χ.) εργαζόμενος ανάλογα κατασκεύασε τις τετραγωνικές ρίζες των διαδοχικών ακέραιων μέχρι και τον αριθμό 17.

Ασκήσεις

1. Να τοποθετήσετε τους παρακάτω αριθμούς στα σύνολα στα οποία ανήκουν.

	-5	0	2	$0{,}125$	$\frac{3}{5}$	$2{,}333\ldots$	$3{,}347198273\ldots$	$\sqrt{3}$
$\mathbb{N}$								
$\mathbb{Z}$								
$\mathbb{Q}$								
$\mathbb{R}-\mathbb{Q}$								

2. Αν $α = 0{,}10100100010000\ldots$ και $β = 1{,}01011011101111\ldots$ (μη περιοδικοί δεκαδικοί), να βρείτε και να χαρακτηρίσετε ως ρητό ή άρρητο τον αριθμό $α + β$.

3. α. Να αποδείξετε ότι είναι ρητός ο αριθμός $0{,}555\ldots$.
β. Ομοίως ο αριθμός $2{,}17555\ldots$.

4. Δίνονται οι αριθμοί $α = \sqrt{3} - 1$, $β = \sqrt{3} + 1$ και $γ = \sqrt{2}$.
Να βρείτε και να χαρακτηρίσετε ως ρητούς ή άρρητους τους αριθμούς:
i. $α + β$ **ii.** $α - β$ **iii.** $α \cdot β$ **iv.** $α \cdot γ$

5. Να αποδείξετε ότι είναι ρητός ο αριθμός:

$$\left(\sqrt{\frac{3}{5}}+\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2$$

6. Το ίδιο για τον αριθμό $\left(\sqrt{\kappa+1}+\frac{1}{\sqrt{\kappa+1}}\right)^2$, όπου κ ακέραιος με $\kappa > -1$.

7. Να αποδείξετε ότι είναι άρρητος ο αριθμός ημ45°.

8. Να τοποθετήσετε τον $\sqrt{3}$ στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

9. Αν ο αριθμός $\sqrt{15}$ είναι άρρητος, να αποδείξετε ότι είναι άρρητος και ο αριθμός $\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2$.

1.2 • Πυκνότητα και Διαδοχικότητα στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/ήτριες να μπορούν:

Να διερευνούν την έννοια της «πυκνότητας» και της «διαδοχικότητας» στα σύνολα $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$.

Διερεύνηση 1

α. Να βρείτε, αν υπάρχει, έναν ρητό ανάμεσα στους αριθμούς:

i. 0 και 1 **ii.** $\frac{1}{5}$ και $\frac{1}{2}$ **iii.** 0,000001 και 0,000002

β. Να βρείτε, αν υπάρχει, τον επόμενο του αριθμού που βρήκατε σε καθεμία από τις προηγούμενες περιπτώσεις. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ. Τι συμπεραίνετε;

Διερεύνηση 2

Να ανοίξετε τη διερεύνηση στο συμπληρωματικό υλικό και να ακολουθήσετε τις οδηγίες.

Όπως ξέρουμε, οι φυσικοί και οι ακέραιοι αριθμοί είναι άπειροι και καθένας από αυτούς έχει επόμενο. Ωστόσο, αν τους τοποθετήσουμε στην ευθεία των πραγματικών αριθμών, τότε ανάμεσα σε δύο οποιουσδήποτε από αυτούς, δεν θα υπάρχει κανένας, είτε θα υπάρχουν σχετικά λίγοι άλλοι φυσικοί ή ακέραιοι. Για παράδειγμα, ανάμεσα στο −3 και στο 2 υπάρχουν τέσσερις ακέραιοι και δύο φυσικοί αριθμοί, ενώ ανάμεσα στο 1 και στο 2 δεν υπάρχει ούτε ακέραιος, ούτε φυσικός αριθμός. Παρόλο λοιπόν που οι φυσικοί και οι ακέραιοι είναι άπειροι δεν βρίσκονται και πολύ κοντά μεταξύ τους. Με άλλα λόγια, αν τους τοποθετήσουμε στη σειρά πάνω στην ευθεία των πραγματικών αριθμών θα διαπιστώσουμε ότι δεν υπάρχει και μεγάλος «συνωστισμός». Έτσι, αν επιχειρήσουμε να «περπατήσουμε» πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών «πατώντας» μόνο σε φυσικούς ή ακέραιους, τότε «κινδυνεύουμε» να πέσουμε σε κάποιο κενό.

Περιγράφουμε αυτή την κατάσταση λέγοντας ότι οι φυσικοί και οι ακέραιοι δεν είναι πυκνοί στους πραγματικούς αριθμούς.

Αναρωτιόμαστε τώρα αν το ίδιο συμβαίνει και με τους ρητούς αριθμούς που δεν είναι ακέραιοι.
Δηλαδή, αν τοποθετήσουμε όλους τους ρητούς, πάνω στην ευθεία των πραγματικών αριθμών και ξεκινήσουμε να προχωράμε μπορεί να «πέσουμε» σε κάποιο κενό;

Διερεύνηση 3. *Το μοντέλο του ημιαθροίσματος*

Δίνονται οι ρητοί αριθμοί 0,1 και 0,2.

- Να βρείτε και να χαρακτηρίσετε τον αριθμό $\frac{0{,}1 + 0{,}2}{2}$.
- Να εξετάσετε αν ο αριθμός $\frac{0{,}1 + 0{,}2}{2}$ βρίσκεται ανάμεσά τους.
- Υπάρχει ρητός αριθμός ανάμεσα στον 0,1 και στον $\frac{0{,}1 + 0{,}2}{2}$;
- Υπάρχει επόμενος ρητός του 0,1; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Αν θεωρήσουμε τους ρητούς αριθμούς $\frac{1}{3}$ και $\frac{1}{2}$ τότε ανάμεσά τους μεταξύ άλλων βρίσκεται ο ρητός $\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{2} = \frac{5}{12}$, αφού φανερά: $\frac{1}{3} < \frac{5}{12} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{4}{12} < \frac{5}{12} < \frac{6}{12}$.

Ανάμεσα στους ρητούς $\frac{1}{3}$ και $\frac{5}{12}$ βρίσκεται ο ρητός $\frac{\frac{1}{3}+\frac{5}{12}}{2} = \frac{27}{72}$ (γιατί;).

Ανάμεσα στους ρητούς αριθμούς $\frac{1}{3}$ και $\frac{27}{72}$ βρίσκεται ο ρητός $\frac{\frac{1}{3}+\frac{27}{72}}{2} = \frac{153}{432}$ (γιατί;).

κ.ο.κ.

Φαίνεται λοιπόν ότι:
- Ανάμεσα σε δύο ρητούς, όσο κοντά κι αν είναι, μπορούμε να βρούμε κάποιον ρητό αριθμό.
- Δεν υπάρχει επόμενος ενός ρητού.

Αναρωτιόμαστε αν αυτό συμβαίνει πάντοτε για οποιουσδήποτε ρητούς (μη ακέραιους) αριθμούς, δηλαδή αν ανάμεσα σε δύο οποιουσδήποτε ρητούς (μη ακέραιους) αριθμούς μπορούμε να βρίσκουμε πάντοτε έναν ρητό αριθμό.

Πράγματι αυτό συμβαίνει και θα δούμε γιατί χρησιμοποιώντας το μοντέλο του ημιαθροίσματος στην εφαρμογή που ακολουθεί.

Εφαρμογή 1. *Πόσοι ακόμα χωράνε;*

Έστω α, β ρητοί αριθμοί με $α < β$.

α. Να αποδείξετε ότι: $α < \frac{α + β}{2} < β$.

Τι συμπεραίνετε;

β. Να βρείτε αν υπάρχει ρητός αριθμός σε καθένα από τα διαστήματα $\left(α, \frac{α + β}{2}\right)$ και $\left(\frac{α + β}{2}, β\right)$.

γ. Πόσοι ρητοί υπάρχουν ανάμεσα σε δύο ρητούς;

Απάντηση:

α. Είναι: $α < β \Rightarrow α + α < α + β \Rightarrow 2α < α + β \Rightarrow α < \frac{α + β}{2}$

Επίσης: $α < β \Rightarrow α + β < β + β \Rightarrow α + β < 2β \Rightarrow \frac{α + β}{2} < β$

Άρα αν α, β ρητοί αριθμοί με $α < β$ τότε $α < \frac{α + β}{2} < β$.

«Ανάμεσα σε δύο ρητούς»
Για καλύτερη κατανόηση να πειραματιστείτε με τη δραστηριότητα του συνδέσμου.

Επειδή ο αριθμός $\frac{α + β}{2}$ είναι ρητός, από την ανισότητα αυτή συμπεραίνουμε ότι ανάμεσα σε δύο οποιουσδήποτε ρητούς αριθμούς υπάρχει τουλάχιστον ένας ακόμα ρητός αριθμός που είναι το ημιάθροισμά τους.

β. Σύμφωνα με το ερώτημα **(α)**:

- Ανάμεσα στους ρητούς α και $\frac{α + β}{2}$ υπάρχει ο ρητός $\dfrac{α + \frac{α + β}{2}}{2} = \dfrac{3α + β}{4}$.
- Ανάμεσα στους ρητούς $\frac{α + β}{2}$ και β υπάρχει ο ρητός $\dfrac{\frac{α + β}{2} + β}{2} = \dfrac{α + 3β}{4}$.

γ. Στο **(α)** ερώτημα βρήκαμε ότι ανάμεσα σε δύο ρητούς υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός που είναι ίσος με το ημιάθροισμά τους $\frac{α + β}{2}$.

Με εφαρμογή του συμπεράσματος αυτού στο ερώτημα (β) προέκυψαν άλλοι δύο ρητοί αριθμοί ανάμεσα στους ρητούς α, β και συνεχίζοντας τη διαδικασία αυτή θα βρίσκουμε συνεχώς νέους ρητούς αριθμούς ανάμεσα στους ρητούς α και β. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ανάμεσα σε δύο ρητούς αριθμούς υπάρχουν άπειροι ρητοί αριθμοί.

Επομένως:

1. Ανάμεσα σε δύο ρητούς υπάρχει πάντοτε ένας ρητός.

2. Οι ρητοί είναι άπειροι.

Δηλαδή, όσους ρητούς κι αν βάλουμε ανάμεσα σε δύο ρητούς, πάντοτε υπάρχει χώρος και γι’ άλλους.

Εφαρμογή 2

Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει επόμενος ενός ρητού μη ακέραιου αριθμού.

Απάντηση:

Έστω ότι υπάρχει επόμενος ενός ρητού μη ακέραιου αριθμού α και είναι ο κ.

Τότε α < κ και σύμφωνα με την προηγούμενη εφαρμογή, ανάμεσα στους ρητούς α και κ θα υπάρχει ο αριθμός $\frac{α + κ}{2}$ που είναι ρητός (γιατί;).

Επομένως $α < \frac{α + κ}{2} < κ$ που είναι άτοπο, αφού υποθέσαμε ότι ο επόμενος του α είναι ο κ.

Άρα: **Δεν υπάρχει επόμενος ενός ρητού αριθμού.**

Συνεπώς δεν ισχύει στους ρητούς αριθμούς η διαδοχικότητα που ξέρουμε ότι ισχύει στους φυσικούς και στους ακέραιους αριθμούς.

Όπως είδαμε στις παραπάνω εφαρμογές, οι ρητοί αριθμοί έχουν δύο ιδιότητες που τους ξεχωρίζουν από τους ακέραιους και τους φυσικούς αριθμούς:

Οι ρητοί αριθμοί παρόλο που είναι άπειροι και πολύ κοντά μεταξύ τους, ακόμα κι αν προσθέσουμε κι αυτούς στην ευθεία των πραγματικών αριθμών πάλι παραμένουν άπειρα κενά μεταξύ τους.

Τα κενά αυτά τα κλείνουν οι άρρητοι αριθμοί όπως ο $\sqrt{2}$, για τους οποίους αποδεικνύεται ότι κι αυτοί είναι πυκνοί στους άρρητους, δεν ισχύει ούτε γι’ αυτούς η διαδοχικότητα και ισχύουν οι παραπάνω ιδιότητες.

Αποδεικνύεται επίσης ότι ανάμεσα σε δύο οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς υπάρχει ένας τουλάχιστον ρητός αριθμός και ένας άρρητος αριθμός.

Δηλαδή, οι ρητοί και οι άρρητοι είναι άπειροι. Με τη γλώσσα των μαθηματικών *«Οι ρητοί και οι άρρητοι είναι πυκνοί στους πραγματικούς αριθμούς»*.

Σχόλιο

Η απόδειξη ότι ανάμεσα σε δύο πραγματικούς αριθμούς υπάρχει ένας τουλάχιστον ρητός αριθμός και ένας τουλάχιστον άρρητος απαιτεί γνώσεις που δεν διδάσκονται στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Για μια απόδειξη ότι ανάμεσα σε δύο πραγματικούς υπάρχει τουλάχιστον ένας ρητός και ένας άρρητος, αντίστοιχα, μπορείς να ανατρέξεις στο συμπληρωματικό υλικό.

Ασκήσεις

1. α. Να βρείτε, αν υπάρχει, έναν ρητό αριθμό ανάμεσα στους αριθμούς:

i. 2 και 3 **ii.** $\frac{1}{4}$ και $\frac{1}{3}$

β. Να βρείτε, αν υπάρχει ο επόμενος του αριθμού που βρήκατε σε καθεμία από τις προηγούμενες περιπτώσεις. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ. Τι συμπεραίνετε;

2. Δίνονται οι αριθμοί α = 0,222…και β = 0, 444.

α. Να βρείτε και να χαρακτηρίσετε τον αριθμό $\frac{\alpha+\beta}{2}$.

β. Να εξετάσετε αν ο αριθμός $\frac{\alpha+\beta}{2}$ βρίσκεται ανάμεσά τους.

γ. Υπάρχει ρητός αριθμός ανάμεσα στον 0,333… και στον $\frac{\alpha+\beta}{2}$;

δ. Υπάρχει επόμενος του αριθμού α; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

3. Έστω ρ ρητός. Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση:

$$\rho < \sqrt{3} \text{ αν και μόνο αν } \rho < \sqrt{3} + 0,2.$$

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

4. α. Δίνονται οι ρητοί αριθμοί $\frac{1}{2}$ και $\frac{3}{4}$.

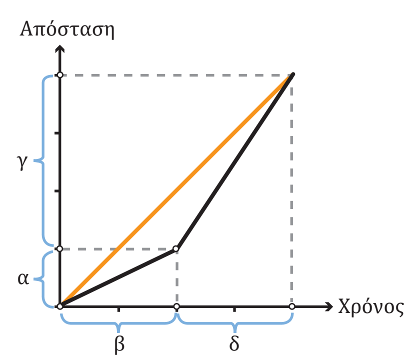
- Να βρείτε και να χαρακτηρίσετε τον αριθμό $\frac{1+3}{2+4}$.
- Να εξετάσετε αν ο αριθμός $\frac{1+3}{2+4}$ βρίσκεται ανάμεσά τους.

β. Υπάρχει ρητός αριθμός ανάμεσα στον $\frac{1}{2}$ και στον $\frac{2}{3}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ. Αν $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$ θετικοί ρητοί αριθμοί με $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\gamma}{\delta}$ να βρείτε έναν ρητό ανάμεσά τους. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

δ. Πόσους ρητούς μπορείτε να βρείτε μεταξύ των $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ε. Στο διάγραμμα γίνεται αναπαράσταση της κίνησης ενός κινητού που διανύει μια απόσταση α σε χρόνο β με ταχύτητα $\frac{\alpha}{\beta}$ και στη συνέχεια διανύει μια απόσταση γ σε χρόνο δ με ταχύτητα $\frac{\gamma}{\delta}$.



Αν η δεύτερη ταχύτητα είναι μεγαλύτερη από την πρώτη, εξηγήστε γιατί η μέση ταχύτητα με την οποία το κινητό διανύει το άθροισμα των αποστάσεων είναι μεταξύ των δύο ταχυτήτων.
Συσχετίζεται αυτό με το προηγούμενο ερώτημα; Να εξηγήσετε την απάντησή σας.

1.3 • Διάταξη και διαστήματα πραγματικών αριθμών

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/ήτριες να μπορούν:

- Να συμβολίζουν με διαστήματα τα υποσύνολα των πραγματικών αριθμών που προσδιορίζονται από ανισοτικές σχέσεις.
- Να διερευνούν τις ιδιότητες που συνδέουν τη διάταξη με τις πράξεις και να αποδεικνύουν ανισοτικές σχέσεις.

Διάταξη

Στο Γυμνάσιο ορίστηκε ότι ένας αριθμός α είναι μεγαλύτερος από έναν άλλο αριθμό β, όταν και μόνο όταν η διαφορά τους, $\alpha - \beta$, είναι θετικός αριθμός.

Συμβολικά: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$

Η γεωμετρική ερμηνεία της ανισότητας $\alpha > \beta$ είναι ότι αν τοποθετήσουμε τους αριθμούς α, β πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τότε ο αριθμός α θα βρίσκεται δεξιότερα από τον αριθμό β. Και αντίστροφα. Ειδικότερα, αν $\alpha > 0$ ή $\alpha = 0$, τότε γράφουμε συμβολικά $\alpha \geq 0$.

Επομένως: $\alpha \geq 0 \Leftrightarrow \alpha > 0$ ή $\alpha = 0$

$\alpha^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$
Γιατί;

Από τον τρόπο ορισμού των πράξεων προκύπτει ότι:

- Αν ($\alpha > 0$ και $\beta > 0$), τότε $\alpha + \beta > 0$
- Αν ($\alpha < 0$ και $\beta < 0$), τότε $\alpha + \beta < 0$
- α, β ομόσημοι $\Leftrightarrow \alpha \cdot \beta > 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} > 0$
- α, β ετερόσημοι $\Leftrightarrow \alpha \cdot \beta < 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} < 0$
- Για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει: $\alpha^2 \geq 0$

Εφαρμογή 1

Να αποδείξετε ότι:

i. $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow (\alpha = 0$ και $\beta = 0)$

ii. $\alpha^2 + \beta^2 > 0 \Leftrightarrow (\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0)$

Απάντηση:

i. • Αν ($\alpha = 0$ και $\beta = 0$), τότε $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ (1)

Πράγματι. Αν ($\alpha = 0$ και $\beta = 0$) τότε ($\alpha^2 = 0$ και $\beta^2 = 0$), οπότε $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ και επομένως η (1) ισχύει.

• Αν $\alpha^2 + \beta^2 = 0$, τότε ($\alpha = 0$ και $\beta = 0$) (2).

Πράγματι. Έστω ότι δεν ισχύει ($\alpha = 0$ και $\beta = 0$). Τότε ($\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$), δηλαδή ένας τουλάχιστον από τους α, β δεν θα είναι μηδέν. Άρα ($\alpha^2 > 0$ ή $\beta^2 > 0$) και επομένως $\alpha^2 + \beta^2 > 0$, που είναι άτοπο. Άρα $\alpha = 0$ και $\beta = 0$.

Από τις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι: $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ και $\beta = 0$

ii. Εργαζόμαστε ανάλογα.

Σημείωση

Το άθροισμα μη αρνητικών όρων είναι ίσο με το μηδέν, μόνο όταν όλοι οι όροι του αθροίσματος είναι μηδέν.

Από τον τρόπο ορισμού της ανισότητας και των πράξεων προκύπτουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

• Ιδιότητες Ανισοτήτων

1. ($\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma$) $\Rightarrow \alpha > \gamma$

2. $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$

3. Αν $\gamma > 0$ τότε: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$

4. Αν $\gamma < 0$ τότε: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$

5. ($\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$) $\Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \delta$

6. Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ τότε: ($\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$) $\Rightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$

Οι ιδιότητες (5) και (6) ισχύουν και για περισσότερες ανισότητες.

Συγκεκριμένα:

7. $(\alpha_1 > \beta_1$ και $\alpha_2 > \beta_2$ και ... και $\alpha_\nu > \beta_\nu) \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu > \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_\nu$

8. Αν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu$ και $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_\nu$ θετικοί αριθμοί, τότε:
$(\alpha_1 > \beta_1$ και $\alpha_2 > \beta_2$ και ... και $\alpha_\nu > \beta_\nu) \Rightarrow \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_\nu > \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \ldots \cdot \beta_\nu$

Δεν μπορούμε να αφαιρούμε και να διαιρούμε ομοιόστροφες ανισώσεις κατά μέλη.

Εφαρμογή 2

Αν α, β θετικοί αριθμοί και ν θετικός ακέραιος, τότε να δείξετε ότι:
i. $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu > \beta^\nu$ **ii.** $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu = \beta^\nu$

Απάντηση:

i.
- Αν $\alpha > \beta$, τότε για $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_\nu = \alpha$ και $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_\nu = \beta$, από την ιδιότητα (8) παίρνουμε $\alpha^\nu > \beta^\nu$ (1)
- Για την αντίστροφη συνεπαγωγή εργαζόμαστε με τη μέθοδο της απαγωγής στο άτοπο.
  Αν $\alpha^\nu > \beta^\nu$ τότε $\alpha > \beta$ (2) διότι:
  - Αν $\alpha = \beta$, τότε $\alpha^\nu = \beta^\nu$ από τον ορισμό της ισότητας, που είναι άτοπο αφού $\alpha^\nu > \beta^\nu$ (υπόθεση).
  - Αν $\alpha < \beta$, τότε $\alpha^\nu < \beta^\nu$ από την (1), που είναι άτοπο αφού $\alpha^\nu > \beta^\nu$ (υπόθεση).

Από τις (1), (2) πλέον παίρνουμε: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu > \beta^\nu$

ii.
- Αν $\alpha = \beta$, τότε $\alpha^\nu = \beta^\nu$ (1) από τον ορισμό της ισότητας.
- Για την αντίστροφη συνεπαγωγή εργαζόμαστε με τη μέθοδο της απαγωγής στο άτοπο.
  Αν $\alpha^\nu = \beta^\nu$ τότε $\alpha = \beta$ (2) διότι:
  - Αν $\alpha > \beta$, τότε $\alpha^\nu > \beta^\nu$ από την προηγούμενη εφαρμογή (2), που είναι άτοπο αφού $\alpha^\nu = \beta^\nu$ (υπόθεση).
  - Αν $\alpha < \beta$, τότε $\alpha^\nu < \beta^\nu$ από την προηγούμενη εφαρμογή (2), που είναι άτοπο αφού $\alpha^\nu = \beta^\nu$ (υπόθεση).

Από τις (1), (2) πλέον παίρνουμε: $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu = \beta^\nu$

Εφαρμογή 3

α. Αν $\alpha\beta > 0$, να δείξετε ότι: **i.** $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \geq 2$ **ii.** $(\alpha + \beta)\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \geq 4$

β. Αν $2 < x < 3$ (1) και $1 < y < 4$ (2), να δείξετε ότι: $y^2 - 12 < x^2 < y^2 + 12$

Απάντηση:

α. i. Έχουμε: $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \geq 2 \xLeftrightarrow{\alpha\beta > 0} \alpha\beta\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right) \geq 2\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 \geq 0$ που ισχύει.

ii. Έχουμε: $(\alpha + \beta)\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \geq 4 \Leftrightarrow \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} + \alpha \cdot \frac{1}{\beta} + \beta \cdot \frac{1}{\alpha} + \beta \cdot \frac{1}{\alpha} \geq 4 \Leftrightarrow$

$1 + \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + 1 \geq 4 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \geq 2$ που ισχύει από την (1)

β. Έχουμε: $\begin{cases} 2 < x < 3 \\ 1 < y < 4 \end{cases} \xRightarrow{\varepsilon\varphi.2} \begin{cases} 2^2 < x^2 < 3^2 \\ 1^2 < y^2 < 4^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 < x^2 < 9 \\ -16 < -y^2 < -1 \end{cases} \xRightarrow{(+)}$

$-12 < x^2 - y^2 < 8 \Rightarrow -12 < x^2 - y^2 < 12 \Rightarrow y^2 - 12 < x^2 < y^2 + 12$

Διαστήματα

Διερεύνηση

α. Να λυθούν οι ανισώσεις:

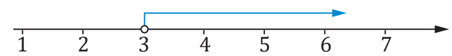
i. $3(x - 1) > 2x + 1$ **ii.** $\frac{x}{3} > \frac{x-1}{2}$ **iii.** $2x + 1 \leq 3x \leq 2x$

β. Να απεικονίσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να τις περιγράψετε.

Όταν λύνουμε μια ανίσωση, οι λύσεις που προκύπτουν συνήθως είναι πολλές έως άπειρες.

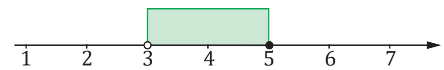
Παραδείγματα:

- $2x - 4 > 2 \Leftrightarrow 2x > 6 \Leftrightarrow x > 3$ και επομένως η ανίσωση $2x - 4 > 2$ έχει λύσεις όλους τους πραγματικούς αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι από το 3. Το σύνολο των λύσεων το ονομάζουμε διάστημα ανοιχτό από το 3 έως το συν άπειρο, το συμβολίζουμε με $x \in (3, +\infty)$ και το απεικονίζουμε γραφικά όπως στο σχήμα (1).



Σχήμα (1)

- $2 < 2x - 4 \leq 6 \Leftrightarrow 3 < x \leq 5$ και επομένως η ανίσωση $2 < 2x - 4 \leq 6$ έχει λύσεις όλους τους πραγματικούς αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι από 3 και μικρότεροι είτε ίσοι με το 5. Το σύνολο των λύσεων ονομάζουμε διάστημα ανοιχτό από το 3 έως το 5 κλειστό, το συμβολίζουμε με $x \in (3, 5]$ και το απεικονίζουμε γραφικά όπως στο σχήμα (2).



Σχήμα (2)

Σημείωση

Στα διαστήματα τα σύμβολα «[» και «]» δηλώνουν ότι περιλαμβάνεται το άκρο του διαστήματος, ενώ τα σύμβολα «(», «)» δηλώνουν ότι δεν περιλαμβάνεται.

Πίνακας Διαστημάτων

ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ	ΔΙΑΣΤΗΜΑ	ΣΧΗΜΑ
$x > \alpha$	$(\alpha, +\infty)$	
$x \geq \alpha$	$[\alpha, +\infty)$	
$x < \alpha$	$(-\infty, \alpha)$	
$x \leq \alpha$	$(-\infty, \alpha]$	
$\alpha < x < \beta$	(α, β)	
$\alpha \leq x < \beta$	$[\alpha, \beta)$	
$\alpha < x \leq \beta$	$(\alpha, \beta]$	
$\alpha \leq x \leq \beta$	$[\alpha, \beta]$	

Ασκήσεις

1. Να αποδείξετε ότι: αν $\gamma < 0$ και $\alpha > \beta$, τότε $\frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$.

Αν $\gamma > 0$ ποιος είναι μεγαλύτερος από τους $\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}$;

2. Να αποδείξετε ότι:

α. Αν α, β ομόσημοι αριθμοί, τότε: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}$

β. Για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει ότι: $\alpha^2 + 1 \geq 2\alpha$

γ. Αν $\alpha < 0$ τότε: $\alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2$

3. Να αποδείξετε ότι:

α. $\alpha^2 + 4 > 2\alpha$ **β.** $\alpha^2 - 6\alpha + 10 > 0$

4. Αν $\alpha > 0$, να αποδείξετε ότι:

α. $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$ **β.** $\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} \geq 2$

5. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, y στις παρακάτω περιπτώσεις:

α. $(x - 4)^2 + y^2 = 0$

β. $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$

6. Αν $1 < x \leq 2$ και $3 \leq y \leq 4$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{11}{2} < \frac{2x + 3y}{2} \leq 8$$

7. Να γράψετε με τη μορφή διαστημάτων τις λύσεις των ανισώσεων:

α. $\frac{x}{3} - 3 \leq \frac{x}{2} - 2$ **β.** $2(x - 1) + 5 > x + 3$

8. Να γράψετε με τη μορφή διαστημάτων τις λύσεις των ανισώσεων:

α. $x(x + 1) \geq x(x - 2)$

β. $3x - \frac{x}{2} + \frac{1}{3} < x + 1$

9. α. Να λυθούν οι ανισώσεις:

$$\frac{x+1}{2}+\frac{x-1}{3}>x-1 \text{ και } x(x-1)\geq x^2-2x+1$$

β. Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων.

10. Να βρείτε τις τιμές x για τις οποίες ισχύει ότι: $-x \geq x+1 \geq -x-2$.

11. Να βρείτε τους ακέραιους x για τους οποίους συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$\frac{x+2}{3}-1>\frac{x-1}{2} \quad \text{και} \quad \frac{x+1}{2}\geq\frac{x-1}{3}$$

12. Να βρείτε τους ακέραιους x για τους οποίους ισχύει:

α. $x+1<\frac{3x+1}{2}<x+2$

β. $\frac{3x-2}{3}\leq x+\frac{x+1}{3}\leq\frac{3x+1}{3}$

13. Μια εταιρεία ενοικίασης τρίτροχων για μικρομεταφορές χρεώνει για την ενοικίαση κάθε τρίτροχου 10 ευρώ την ημέρα και επιπλέον 5 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύουν. Πόσα χιλιόμετρα την ημέρα πρέπει να διανύει κάθε τρίτροχο ώστε τα ημερήσια έσοδα να είναι τουλάχιστον 1000 ευρώ για το καθένα από αυτά;

1.4 • Ταυτότητες

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/ήτριες να μπορούν:

Να αποδεικνύουν και να χρησιμοποιούν τις ταυτότητες: $(\boldsymbol{\alpha+\beta})^3$, $(\boldsymbol{\alpha-\beta})^3$, $\boldsymbol{\alpha^3+\beta^3}$ και $\boldsymbol{\alpha^3-\beta^3}$

Υπάρχουν ισότητες με μεταβλητές οι οποίες αληθεύουν για ορισμένες τιμές των μεταβλητών τους. Για παράδειγμα η ισότητα $x+1=2$ αληθεύει μόνο για $x=1$.

Αντίθετα, υπάρχουν ισότητες με μεταβλητές οι οποίες αληθεύουν για όλες τις τιμές των μεταβλητών τους. Για παράδειγμα, η ισότητα $2x+3x=5x$ αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Για διάκριση των περιπτώσεων αυτών δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός

Ταυτότητα λέγεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών της.

Οι ταυτότητες είναι πολύ χρήσιμες για την απλοποίηση και την παραγοντοποίηση. Βασικές ταυτότητες που είδαμε στο Γυμνάσιο είναι:

1. $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

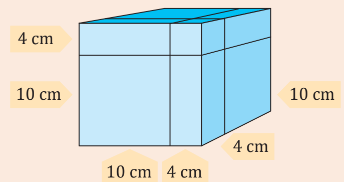
2. $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

3. $\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$

«Γεωμετρικές ταυτότητες». Για καλύτερη κατανόηση να πειραματιστείτε με τη δραστηριότητα του συνδέσμου.

Διερεύνηση. *Ανακαλύπτοντας το ανάπτυγμα* $(\alpha+\beta)^3$.

Να ανοίξετε το ψηφιακό δόμημα και να απαντήσετε στα ερωτήματα τα οποία περιλαμβάνει.



Αξιοσημείωτες ταυτότητες

- **Κύβος αθροίσματος**

$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)^3 &= (\alpha + \beta)(\alpha + \beta)^2 && \text{(ιδιότητες δυνάμεων)} \\ &= (\alpha + \beta)(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) && \text{(ανάπτυγμα ταυτότητας)} \\ &= \alpha^3 + 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta\alpha^2 + 2\alpha\beta^2 + \beta^3 && \text{(επιμεριστική ιδιότητα)} \\ &= \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 && \text{(αναγωγή ομοίων όρων)} \end{aligned}$$

«Κύβος». Για καλύτερη κατανόηση να πειραματιστείτε με τη δραστηριότητα του συνδέσμου.

- **Κύβος διαφοράς**

$$(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$$

Απόδειξη.
Προκύπτει από την $(\alpha + \beta)^3$ θέτοντας όπου β το $-\beta$.

- **Άθροισμα κύβων**

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) &= \alpha^3 - \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta\alpha^2 - \alpha\beta^2 + \beta^3 && \text{(επιμεριστική ιδιότητα)} \\ &= \alpha^3 + \beta^3 && \text{(αναγωγή ομοίων όρων)} \end{aligned}$$

- **Διαφορά κύβων**

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$

Απόδειξη.
Προκύπτει από την $\alpha^3 + \beta^3$ θέτοντας όπου β το $-\beta$.

«Αλγεβρικές παραστάσεις». Για καλύτερη κατανόηση να πειραματιστείτε με τη δραστηριότητα του συνδέσμου.

Σημείωση

Ο κύβος του αθροίσματος και της διαφοράς γράφονται αντίστοιχα:

- $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 = \alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$
- $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - \beta^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 = \alpha^3 - \beta^3 - 3\alpha\beta(\alpha - \beta)$

Εφαρμογή 1

α. Να βρείτε το ανάπτυγμα της: $(2x + 3)^3$

β. Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση: $8x^3 - 1$

Απάντηση:

α. Από την ταυτότητα του κύβου του αθροίσματος θέτοντας $\alpha = 2x$ και $\beta = 3$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned} (2x + 3)^3 &= (2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot 3 + 3 \cdot (2x) \cdot 3^2 + 3^3 \\ &= 8x^3 + 3 \cdot 4x^2 \cdot 3 + 3 \cdot 2x \cdot 9 + 27 \\ &= 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27 \end{aligned}$$

β. Είναι:

$$8x^3 - 1 = (2x)^3 - 1^3 = (2x - 1)[(2x)^2 + 2x + 1^2] = (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$$

Εφαρμογή 2

Αν $\alpha + \frac{1}{\alpha} = 2$ να βρείτε την τιμή των παραστάσεων: **α.** $\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}$ **β.** $\alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3}$

Απάντηση:

α. Είναι:

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} = 2 \Rightarrow \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 = 2^2 \Rightarrow \alpha^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} = 4 \Rightarrow$$
$$\alpha^2 + 2 + \frac{1}{\alpha^2} = 4 \Rightarrow \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} = 2$$

β. Είναι:

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} = 2 \Rightarrow \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^3 = 2^3 \Rightarrow \alpha^3 + 3 \cdot \alpha^2 \cdot \frac{1}{\alpha} + 3 \cdot \alpha \cdot \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^3} = 8 \Rightarrow$$
$$\alpha^3 + 3\alpha + 3\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^3} = 8 \Rightarrow \alpha^3 + 3\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) + \frac{1}{\alpha^3} = 8 \Rightarrow$$
$$\alpha^3 + 3 \cdot 2 + \frac{1}{\alpha^3} = 8 \Rightarrow \alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3} = 2$$

Αυτοαξιολόγηση

α. Να αποδείξετε ότι $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$

β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ως σωστές ή λανθασμένες αιτιολογώντας την απάντησή σας.

i. $(-\alpha)^3 + (-\beta)^3 = (\alpha + \beta)(\alpha\beta - \alpha^2 - \beta^2)$ **ii.** $(-\alpha + \beta)^3 = (\beta - \alpha)(\alpha\beta + \alpha^2 + \beta^2)$

iii. $\alpha^6 + \beta^6 = (\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$

γ. Να αποδείξετε ότι: $(\alpha + \beta)^3 - (\alpha - \beta)^3 = 2\beta(3\alpha^2 + \beta^2)$

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Σε καθεμία από τις παρακάτω ερωτήσεις, να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

α. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω ισότητες είναι ταυτότητες:

i. $3\alpha\beta + 2\alpha\beta = 5\alpha\beta$

ii. $\alpha\beta = 0$

iii. $x^2 \cdot x^3 = x^5$

iv. $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{\alpha^2} + \sqrt{\beta^2}$

β. Το ανάπτυγμα του $(3 - \alpha)(9 + 3\alpha + \alpha^2)$ είναι:

i. $3^3 + \alpha^3$ **ii.** $\alpha^3 - 3^3$

iii. $3^3 - \alpha^3$ **iv.** $9 - \alpha^3$

γ. Το ανάπτυγμα του $(2\beta + 3\alpha)(4\beta^2 - 6\alpha\beta + 9\alpha^2)$ είναι:

i. $2\beta^3 + 3\alpha^3$ **ii.** $(2\beta)^3 - (3\alpha)^3$

iii. $2\beta^3 - 3\alpha^3$ **iv.** $8\beta^3 + 27\alpha^3$

δ. Το ανάπτυγμα του $(-\alpha - \beta)^3$ είναι:

i. $\alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

ii. $-\alpha^3 - 3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

iii. $\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

iv. $-\alpha^3 + 3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

2. Να συμπληρώσετε τα κενά, ώστε να ισχύουν οι παρακάτω ισότητες.

α. $(\alpha + \ldots\ldots)^3 = \ldots\ldots + 6\alpha^2 + \ldots\ldots + \ldots\ldots$

β. $(\ldots\ldots - \ldots\ldots)^3 = 8x^3 - \ldots\ldots + \ldots\ldots - 1$

γ. $8\alpha^3 + \ldots\ldots = (\ldots\ldots + \ldots\ldots)(\ldots\ldots - \ldots\ldots + 16)$

δ. $\ldots\ldots - \ldots\ldots = (\ldots\ldots - \ldots\ldots)(\ldots\ldots + 6x + 4)$

3. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α με ένα μόνο στοιχείο της στήλης Β, ώστε να προκύπτει αληθής ισότητα.

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $(\alpha - 2\beta)^3$	**α.** $(\alpha^2 - \beta^2) \cdot (\alpha^4 - \alpha^2\beta^2 + \beta^4)$
2. $8\alpha^3 + 27\beta^3$	**β.** $(2\alpha + 3\beta) \cdot (4\alpha^2 + 2\alpha\beta + 9\beta^2)$
3. $\alpha^6 - \beta^6$	**γ.** $(\alpha^3 + \beta^3) \cdot (\alpha^6 - \alpha^3\beta^3 + \beta^6)$
4. $\alpha^9 + \beta^9$	**δ.** $\alpha^3 - 6\alpha^2\beta + 12\alpha\beta^2 - 8\beta^3$
	ε. $(2\alpha + 3\beta) \cdot (4\alpha^2 - 6\alpha\beta + 9\beta^2)$

4. Να φτιάξετε δύο δικές σας ταυτότητες με κύβους και να τις δώσετε στον/στη διπλανό/διπλανή σας να τις αποδείξει.

Ασκήσεις

1. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α. $(x + 3)^3$ **β.** $(2\alpha + 1)^3$

γ. $(3\beta^2 + 2\beta)^3$ **δ.** $(x - 1)^3$

ε. $(-2 + x^2)^3$ **στ.** $(-3\beta^2 - 2\beta)^3$

2. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $\alpha^3 + 1$ **β.** $8x^3 + 27$

γ. $27\alpha^3 + 64\beta^3$ **δ.** $8 - y^3$

ε. $27\alpha^3 - 1$ **στ.** $8\alpha^3 - 64\beta^6$

3. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α. $(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$

β. $(3x + 1)(9x^2 - 3x + 1)$

γ. $(2\alpha^2 + 3\beta^3)(\beta^2 + 4\alpha^2 + 2\alpha\beta)$

δ. $(x - 1)(x^2 + x + 1)$

ε. $(2x - 3)(4x^2 + 9 + 6x)$

στ. $(2\alpha - \beta)(\beta^2 + 4\alpha^2 + 2\alpha\beta)$

4. Να βρείτε το ανάπτυγμα $(\alpha + \beta)^4$.

5. Για τον Πασκάλ και τον τρόπο σχηματισμού των συντελεστών σε διώνυμα της μορφής $(\alpha+\beta)^\nu$ να ανοίξετε το συμπληρωματικό υλικό: **«Πασκάλ και συντελεστές διώνυμων $(\alpha+\beta)^\nu$»** και να κάνετε την εργασία που προτείνεται.

6. Για να εξασκηθείτε στην εύρεση των συντελεστών στα διώνυμα $(\alpha+\beta)^\nu$ με τη βοήθεια του τριγώνου Pascal, να ανοίξετε το ψηφιακό δόμημα «Τρίγωνο Πασκάλ».

Τρίγωνο Πασκάλ

7. α. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

i. $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$

ii. $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$

β. Αν $\alpha + \beta = 4$ και $\alpha \cdot \beta = 2$ να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

i. $\alpha^2 + \beta^2$ **ii.** $\alpha^3 + \beta^3$

8. Αν $\alpha + \frac{2}{\alpha} = 5$ να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

α. $\alpha^2 + \frac{4}{\alpha^2}$ **β.** $\alpha^3 + \frac{8}{\alpha^3}$

9. α. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$(\alpha - 1)^3 - (\alpha + 1)^3 = -2(3\alpha^2 + 1)$$

β. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 19^3 - 21^3$$

10. α. Να αποδείξετε ότι: $\frac{\alpha^3 - \beta^3}{(\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta} = \alpha - \beta$

β. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\frac{2028^3 - 8}{2030^2 - 4056}$$

11. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $\frac{\alpha^3 + 1}{(\alpha - 1)^2 + \alpha}$ **β.** $\frac{\alpha^2 + 4\alpha + 4}{\alpha^3 - 1} \cdot \frac{\alpha - 1}{\alpha + 2}$

γ. $\frac{\alpha^3 - \beta^3}{(\alpha\beta - \beta^2)^2} : \frac{\alpha\beta + \beta^2}{\alpha^2 - \beta^2}$ **δ.** $\frac{\alpha^4 - \beta^4}{\alpha^3 - \beta^3} : \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}$

1.5 • Απόλυτη Τιμή

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/ήτριες να μπορούν:

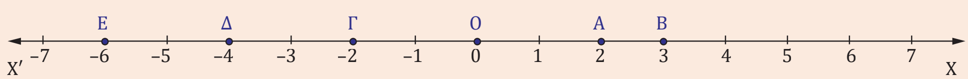
- Να ορίζουν αλγεβρικά την απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού.
- Να συνδέουν την απόλυτη τιμή με την απόσταση του αριθμού από το μηδέν.
- Να ερμηνεύουν γεωμετρικά την απόλυτη τιμή της διαφοράς δύο πραγματικών αριθμών.
- Να αποδεικνύουν τις βασικές ιδιότητες της απόλυτης τιμής.
- Να επιλύουν αλγεβρικά και γεωμετρικά απλές εξισώσεις, ανισώσεις και προβλήματα χρησιμοποιώντας ιδιότητες της απόλυτης τιμής.

1.5.1. Η έννοια της Απόλυτης Τιμής

«Απόλυτες τιμές στον άξονα». Για καλύτερη κατανόηση να πειραματιστείτε με τη δραστηριότητα του συνδέσμου.

Διερεύνηση 1

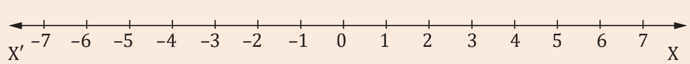
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ο άξονας των πραγματικών αριθμών. Το σημείο Ο αντιστοιχεί στον αριθμό 0 και στα σημεία Α, Β, Γ, Δ και Ε αντιστοιχούν οι αριθμοί 2, 3, – 2, – 4 και – 6.



Να βρείτε την απόσταση των σημείων Α, Β, Γ, Δ και Ε από το σημείο Ο.

Διερεύνηση 2

Δίνεται ο άξονας των πραγματικών αριθμών.



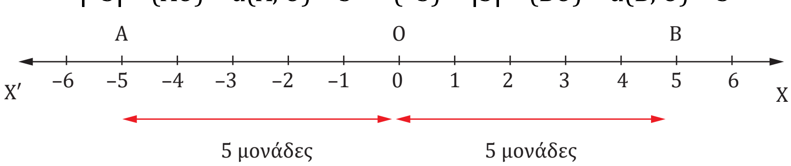
α. Να πάρετε δύο θετικές τιμές στον παραπάνω άξονα και να βρείτε την απόσταση ενός από το 0.
β. Να πάρετε τους αντίθετους αριθμούς από αυτούς που πήρατε στο προηγούμενο ερώτημα και να βρείτε την απόστασή τους από το 0.
γ. Ποια είναι η σχέση των απολύτων τιμών των αριθμών στα ερωτήματα (α) και (β);
δ. Να βρείτε ποιοι αριθμοί απέχουν από το 0 απόσταση 5.

Γνωρίζουμε από το Γυμνάσιο ότι απόλυτη τιμή ενός ρητού αριθμού α είναι η απόσταση ΟΑ του σημείου Α(α) από την αρχή Ο(0) του άξονα και την συμβολίζουμε με $|\alpha|$.

Την **απόσταση** αυτή, που είναι το **μήκος (ΑΟ)**, τη συμβολίζουμε με d(Ο, Α) όπου Α το παραστατικό σημείο του αριθμού α πάνω στον άξονα.

Παράδειγμα:

$|-5| = (AO) = d(A, O) = 5 = -(-5) \qquad |5| = (BO) = d(B, O) = 5$



- Η απόλυτη τιμή ενός θετικού αριθμού είναι ο ίδιος αριθμός. Δηλαδή: **$|\alpha| = \alpha$, για κάθε α** > 0.
- Η απόλυτη τιμή ενός αρνητικού αριθμού είναι ο αντίθετός του. Δηλαδή: **$|\alpha| = -\alpha$, για κάθε α** < 0.

Εξάλλου, φανερά $|0| = 0$, οπότε οδηγούμαστε στον ακόλουθο αλγεβρικό ορισμό της απόλυτης τιμής ενός πραγματικού αριθμού.

Ορισμός

Απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού α είναι ο μη αρνητικός αριθμός που συμβολίζεται με $|\alpha|$ και ορίζεται από τον τύπο:

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{αν } \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$$

Γεωμετρική ερμηνεία

Η απόλυτη τιμή $|x|$ ενός πραγματικού αριθμού x εκφράζει την απόσταση του παραστατικού του σημείου $A(x)$ από την αρχή του άξονα, δηλαδή από το σημείο $O(0)$.
Άμεση συνέπεια του ορισμού είναι οι παρακάτω ιδιότητες:

1. $|\alpha| \geq 0, \ \alpha \in \mathbb{R}$

2. $|\alpha| = |-\alpha|, \ \alpha \in \mathbb{R}$

3. $-|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha|, \ \alpha \in \mathbb{R}$

4. $|\alpha|^2 = \alpha^2, \ \alpha \in \mathbb{R}$

5. $|x| = \theta \Leftrightarrow x = -\theta$ ή $x = \theta, \ \theta > 0$

6. $|x| = |\theta| \Leftrightarrow x = -\theta$ ή $x = \theta$

Παραδείγματα:

- $|-3| = 3 \geq 0, \quad |3| = 3 \geq 0$
- $|x| = 4 \Leftrightarrow x = -4$ ή $x = 4$
- $|-2|^2 = 4 = (-2)^2$
- $-|4| \leq 4 \leq |4|$
- $|-5| = 5 = |5|$
- $|x| = -2$ αδύνατη (γιατί;)

Σημείωση

Η λύση εξισώσεων με απόλυτες τιμές στηρίζεται στις ιδιότητες (5) και (6).

Εφαρμογή 1

Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές τις παρακάτω παραστάσεις:

α. $|\sqrt{5} - 2|$ **β.** $|3 - \pi|$ **γ.** $|\alpha^2 + 1|, \ \alpha \in \mathbb{R}$ **δ.** $|-\alpha^2 + 2\alpha - 1|, \ \alpha \in \mathbb{R}$

Απάντηση:

α. $|\sqrt{5} - 2| = \sqrt{5} - 2$, διότι $\sqrt{5} - 2 > 0$

β. $|3 - \pi| = -(3 - \pi) = \pi - 3$, διότι $3 - \pi < 0$

γ. $|\alpha^2 + 1| = \alpha^2 + 1$, διότι $\alpha^2 + 1 > 0$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$

δ. $|-\alpha^2 + 2\alpha - 1| = |-(\alpha^2 - 2\alpha + 1)| = |-(\alpha - 1)^2| = (\alpha - 1)^2$, αφού $(\alpha - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow -(\alpha - 1)^2 \leq 0$

Εφαρμογή 2

Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει: **α.** $|x - 1| = 3$ **β.** $|x + 7| = -1$

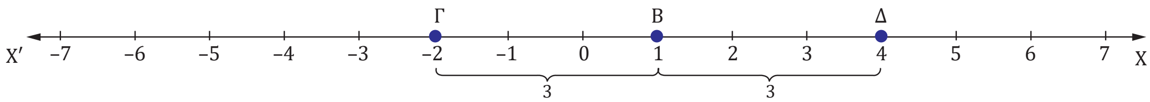
Απάντηση:

α. Γεωμετρική επίλυση

Η απόλυτη τιμή $|x - 1|$ είναι η απόσταση του παραστατικού σημείου του αριθμού $(x - 1)$ από το σημείο $O(0)$.

«Αποστάσεις στον άξονα».
Για καλύτερη κατανόηση να πειραματιστείτε με τη δραστηριότητα του συνδέσμου.

Η απόσταση αυτή είναι 3 όταν και μόνο όταν: $x - 1 = -3$ ή $x - 1 = 3$ απ' όπου παίρνουμε: $x = -2$ ή $x = 4$.



Αλγεβρική επίλυση

Για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει: $|x| = \theta \Leftrightarrow x = -\theta$ ή $x = \theta$, $\theta > 0$ *(Ιδιότητα 5)* και επομένως:

$$|x - 1| = 3 \Leftrightarrow x - 1 = -3 \ \text{ή}\ x - 1 = 3 \Leftrightarrow x = -2 \ \text{ή}\ x = 4$$

β. Η απόλυτη τιμή $|x + 7|$ είναι η απόσταση του παραστατικού σημείου $A(x + 7)$ του άξονα x΄x από το σημείο O (0) και είναι μη αρνητικός αριθμός. Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

Εφαρμογή 3

Να λύσετε τις εξισώσεις: **α.** $|x - 4| = |x - 2|$ **β.** $\dfrac{|2x - 1|}{3} = \dfrac{|x + 1|}{2}$

Απάντηση:

α. Από τις ιδιότητες των απολύτων τιμών έχουμε:

$$|x - 4| = |x - 2| \Leftrightarrow x - 4 = x - 2 \ \text{ή}\ x - 4 = -(x - 2) \Leftrightarrow$$

$$x - x = 4 - 2 \ \text{ή}\ x - 4 = -x + 2 \Leftrightarrow 0x = 2 \ \text{ή}\ 2x = 6$$

Η πρώτη είναι αδύνατη και από τη δεύτερη παίρνουμε: $x = 3$.

β. Από τις ιδιότητες των απολύτων τιμών έχουμε:

$$\frac{|2x - 1|}{3} = \frac{|x + 1|}{2} \Leftrightarrow 2|2x - 1| = 3|x + 1| \Leftrightarrow |2(2x - 1)| = |3(x + 1)| \Leftrightarrow$$

$$2(2x - 1) = 3(x + 1) \ \text{ή}\ 2(2x - 1) = -3(x + 1) \Leftrightarrow$$

$$4x - 2 = 3x + 3 \ \text{ή}\ 4x - 2 = -3x - 3 \Leftrightarrow$$

$$x = 5 \ \text{ή}\ 7x = -1 \Leftrightarrow x = 5 \ \text{ή}\ x = -\frac{1}{7}$$

Με τον ίδιο τρόπο λύνονται οι εξισώσεις της μορφής $|A(x)| = |B(x)|$.

1.5.2. Ιδιότητες της Απόλυτης Τιμής

Διερεύνηση

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = -2$ και $\beta = 3$.

α. Να βρείτε τους αριθμούς: $|\alpha|$, $|\beta|$, $|\alpha \cdot \beta|$, $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|$ και $|\alpha + \beta|$

β. Να συγκρίνετε την απόλυτη τιμή του αθροίσματος, του γινομένου και του πηλίκου με τις απόλυτες τιμές των αριθμών α, β.

Για την απόλυτη τιμή του γινομένου, του πηλίκου και του αθροίσματος δύο αριθμών $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

Ιδιότητες Απόλυτης Τιμής

Αν α, β πραγματικοί αριθμοί, τότε:

1. $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ **2.** $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$, $\beta \neq 0$ **3.** $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

Απόδειξη

1. Τα δύο μέλη της ισότητας $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, οπότε διαδοχικά έχουμε:

$$|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta| \Leftrightarrow |\alpha \cdot \beta|^2 = (|\alpha| \cdot |\beta|)^2 \Leftrightarrow |\alpha \cdot \beta|^2 = |\alpha|^2 \cdot |\beta|^2 \Leftrightarrow (\alpha \cdot \beta)^2 = \alpha^2 \cdot \beta^2$$

που ισχύει.

2. Αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο και αφήνεται ως άσκηση.

3. Τα δύο μέλη της ανίσωσης $|\alpha + \beta| \le |\alpha| + |\beta|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, οπότε διαδοχικά έχουμε:

$$|\alpha + \beta| \le |\alpha| + |\beta| \Leftrightarrow |\alpha + \beta|^2 \le (|\alpha| + |\beta|)^2 \Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 \le |\alpha|^2 + 2|\alpha| \cdot |\beta| + |\beta|^2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \le \alpha^2 + 2|\alpha \cdot \beta| + \beta^2 \Leftrightarrow \alpha\beta \le |\alpha\beta|, \text{ που ισχύει.}$$

Η ανισότητα
$|\alpha + \beta| \le |\alpha| + |\beta|$
ισχύει ως
ισότητα όταν και
μόνο όταν
$\alpha \cdot \beta \ge 0$
Γιατί;

Σχόλια

α. Η ισότητα $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ ισχύει και για περισσότερους παράγοντες.
Συγκεκριμένα: $|\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_\nu| = |\alpha_1| \cdot |\alpha_2| \cdot \ldots \cdot |\alpha_\nu|, \quad \nu \in \mathbb{N}^*$

β. Στην ειδική περίπτωση όπου $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_\nu = \alpha$, η προηγούμενη ισότητα γίνεται: $|\alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha| = |\alpha| \cdot |\alpha| \cdot \ldots \cdot |\alpha| \Leftrightarrow |\alpha^\nu| = |\alpha|^\nu, \quad \nu \in \mathbb{N}^*$

γ. Η ανισότητα $|\alpha + \beta| \le |\alpha| + |\beta|$ ισχύει και για περισσότερους προσθετέους.
Συγκεκριμένα: $|\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu| \le |\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_\nu|, \quad \nu \in \mathbb{N}^*$

Να ανοίξετε το ψηφιακό αρχείο **«Απόλυτη τιμή αθροίσματος»** και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

Εφαρμογή 1

Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι: $|\alpha - \beta| \le |\alpha - \gamma| + |\gamma - \beta|$

Απάντηση:

Ισχύει ότι:

$$|\alpha - \beta| = |\alpha - \gamma + \gamma - \beta| \quad \text{(προσθέτουμε και αφαιρούμε το } \gamma\text{)}$$

$$\le |\alpha - \gamma| + |\gamma - \beta| \quad \text{(εφαρμόζουμε την ιδιότητα } |\alpha + \beta| \le |\alpha| + |\beta|\text{)}$$

Εφαρμογή 2

Αν $\alpha\beta \neq 0$ να δείξετε ότι: $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| + \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \ge 2$

Απάντηση:

Με $\alpha\beta \neq 0$ είναι $|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta| > 0$, οπότε:

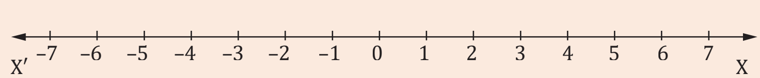
$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| + \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \ge 2 \Leftrightarrow \frac{|\alpha|}{|\beta|} + \frac{|\beta|}{|\alpha|} \ge 2 \Leftrightarrow \frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{|\alpha| \cdot |\beta|} \ge 2 \Leftrightarrow |\alpha|^2 + |\beta|^2 \ge 2|\alpha| \cdot |\beta| \Leftrightarrow |\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2|\alpha| \cdot |\beta| \ge 0 \Leftrightarrow (|\alpha| - |\beta|)^2 \ge 0,$$

η οποία ισχύει.

1.5.3. Απόλυτη Τιμή διαφοράς δύο αριθμών

Διερεύνηση

Δίνεται ο άξονας:

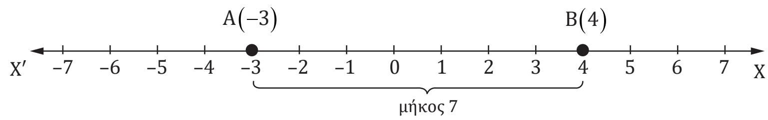


α. Να παραστήσετε στον άξονα τους αριθμούς −2 , 3 με τα σημεία Α και Β αντίστοιχα και να βρείτε την απόστασή τους.

β. Να επαναλάβετε την ίδια διαδικασία παίρνοντας δύο θετικούς και δύο αρνητικούς αριθμούς.

Για τα παραστατικά σημεία Α(−3) και Β(4) αντίστοιχα παρατηρούμε ότι το μήκος (ΑΒ) είναι:

$(AB) = 7 = |(-3) - 4| = |4 - (-3)|$



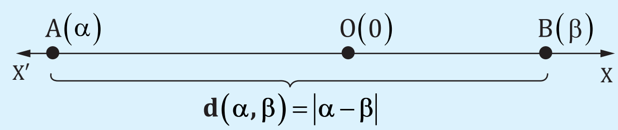
και εκφράζει την απόσταση των αριθμών −3 και 4.

Γενικά για δύο οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β με παραστατικά σημεία Α(α) και Β(β) αντίστοιχα, δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός

Απόσταση δύο αριθμών α, β με παραστατικά σημεία Α(α)και Β(β)στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι το **μήκος (ΑΒ)** του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. Το συμβολίζουμε με d(α, β) και είναι ίσο με $|\alpha - \beta|$.

Δηλαδή: $\mathbf{d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|}$



Παραδείγματα:

- Η απόσταση των αριθμών 4 και −1 είναι $d(4, -1) = |4 - (-1)| = |5| = 5$.
- Ο αριθμός $d(\alpha, 2) = |\alpha - 2|$ εκφράζει την απόσταση των αριθμών α και 2.

Σημείωση

- Παρατηρήστε ότι η απόσταση των αριθμών α και β είναι ίδια με την απόσταση των β και α, αφού $|\alpha - \beta| = |\beta - \alpha|$.
- Η απόλυτη τιμή $|\alpha - \beta|$ της διαφοράς δύο αριθμών α, β χρησιμοποιείται για να εκφράσει την **απόκλιση** μεταξύ τους.

Διερεύνηση

α. Να βρείτε τους αριθμούς x οι οποίοι απέχουν από το μηδέν απόσταση:

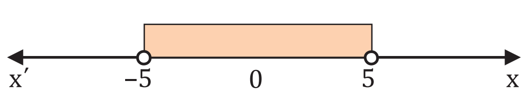
i. Ίση με 4 **ii.** Μικρότερη από 4 **iii.** Μεγαλύτερη από 4

β. Να βρείτε τους αριθμούς x οι οποίοι απέχουν από το 3 απόσταση:

i. Ίση με 2 **ii.** Μικρότερη από 2 **iii.** Μεγαλύτερη από 2

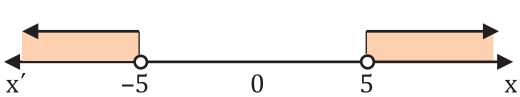
Η απόσταση ενός αριθμού x από το μηδέν είναι:

$d(x, 0) = |x - 0| = |x|$, οπότε: $|x| < 5 \Leftrightarrow d(x, 0) < 5 \Leftrightarrow -5 < x < 5$



και γενικά: $\mathbf{|x| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; -\varepsilon < x < \varepsilon, \quad \varepsilon > 0}$

Έχουμε: $|x| > 5 \Leftrightarrow d(x, 0) > 5 \Leftrightarrow x < -5\ x > 5$



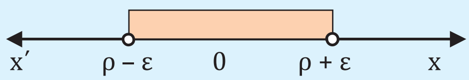
και γενικά: $\mathbf{|x| > \varepsilon \;\Leftrightarrow\; x < -\varepsilon}$ ή $\mathbf{x > \varepsilon, \;\varepsilon > 0}$

Να ανοίξετε το ψηφιακό αρχείο **«Αποστάσεις στον άξονα ΙΙ»** και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

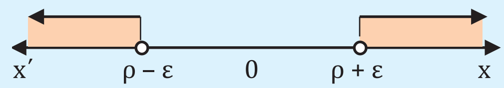
Να ανοίξετε το ψηφιακό αρχείο **«Αποστάσεις στον άξονα ΙV»** και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

Επίσης, ανάλογα προς τις προηγούμενες ανισότητες έχουμε:

$|x - \rho| < \varepsilon \Leftrightarrow \rho - \varepsilon < x < \rho + \varepsilon, \ \varepsilon > 0$



$|x - \rho| > \varepsilon \Leftrightarrow x < \rho - \varepsilon$ **ή** $x > \rho + \varepsilon, \ \ \varepsilon > 0$



Εφαρμογή 1

Ο Μάριος θέλει να αγοράσει έναν νέο υπολογιστή. Ο διπλανός πίνακας δείχνει τις τιμές των υπολογιστών σε ένα πολυκατάστημα που επισκέφθηκε. Είναι πρόθυμος να πληρώσει τη μέση τιμή της αξίας των 10 υπολογιστών με μια απόκλιση το πολύ 100 €.

α. Να γράψετε την παραπάνω συνθήκη ως ανισότητα που περιλαμβάνει απόλυτη τιμή.

β. Ποιο είναι το εύρος τιμών των υπολογιστών στο οποίο μπορεί να αγοράσει υπολογιστή ο Μάριος;

ΤΙΜΗ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ	
890 €	750 €
650 €	370 €
660 €	670 €
450 €	650 €
725 €	825 €

Απάντηση:

α. Καθορίζουμε τη μεταβλητή: Έστω x η τιμή αγοράς.

Μετάφραση των λέξεων σε αλγεβρικούς όρους: Οι πληροφορίες του προβλήματος μπορούν να οργανωθούν ως εξής:

Λεκτικά	**Συμβολικά**
Ζητούμενη τιμή	x
Μέση αξία υπολογιστών καταστήματος	$\frac{890 + 650 + 660 + 450 + 725 + 750 + 370 + 670 + 650 + 825}{10} = 664$
Απόκλιση από τη μέση τιμή	$\lvert x - 664 \rvert$

Μοντελοποίηση: Η απόκλιση από τη μέση τιμή δεν πρέπει να ξεπερνάει τα 100 €, οπότε έχουμε: $|x - 664| \leq 100$

β. Λύση. Λύνουμε την ανίσωση που κατασκευάσαμε στο προηγούμενο βήμα:

$$|x - 664| \leq 100 \Leftrightarrow -100 \leq x - 664 \leq 100 \Leftrightarrow$$

$$-100 + 664 \leq x - 664 + 664 \leq 100 + 664 \Leftrightarrow 564 \leq x \leq 764$$

Επομένως, ο Μάριος μπορεί να αγοράσει υπολογιστή από τους διαθέσιμους στο συγκεκριμένο κατάστημα, σε τιμή από 564 € έως και 764 €.

Εφαρμογή 2

Να βρείτε γεωμετρικά και αλγεβρικά τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει:

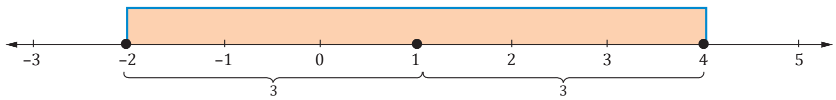
α. $|x - 1| \leq 3$ **β.** $|x + 3| \geq 2$

Να ανοίξετε το ψηφιακό αρχείο **«Αποστάσεις στον άξονα ΙΙΙ»** και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

Απάντηση:

α. Γεωμετρικά

Αναζητούμε τις τιμές του x ώστε η απόσταση ενός σημείου του άξονα x′x από το σημείο με τετμημένη 1, να είναι μικρότερη είτε ίση με 3.



Από τον παραπάνω άξονα διαπιστώνουμε ότι:

$$|x - 1| \leq 3 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow x \in [-2, 4]$$

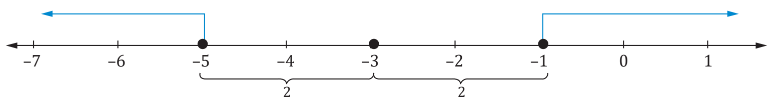
Αλγεβρικά

$$|x - 1| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x - 1 \leq 3 \Leftrightarrow$$

$$-3 + 1 \leq x - 1 + 1 \leq 3 + 1 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow x \in [-2, 4]$$

β. Γεωμετρικά

Ανάλογα προς το ερώτημα (α) βρίσκουμε ότι $x \in (-\infty, -5] \cup [-1, +\infty)$



Αλγεβρικά

$$|x + 3| \geq 2 \Leftrightarrow x + 3 \leq -2 \text{ ή } x + 3 \geq 2 \Leftrightarrow x \leq -5 \text{ ή } x \geq -1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -5] \cup [-1, +\infty)$$

Να ανοίξετε το ψηφιακό αρχείο **«Αποστάσεις στον άξονα V»** και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

Αυτοαξιολόγηση

α. Να ορίσετε αλγεβρικά την απόλυτη τιμή ενός αριθμού α.

β. Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά την απόλυτη τιμή της διαφοράς δύο πραγματικών αριθμών.

γ. Να αποδείξετε ότι $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$

δ. Σωστό ή λανθασμένο και γιατί: Αν $\alpha < \beta$, τότε $|\alpha| < |\beta|$.

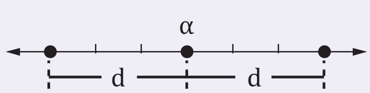
ε. Αν $-1 < \alpha < 4$, να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση $A = |\alpha + 1| + |\alpha + 2| + |\alpha - 4| - |\alpha - 5|$

στ. Να λύσετε αλγεβρικά και γεωμετρικά τις εξισώσεις: **i.** $|x + 1| = 3$ **ii.** $|3x - 1| - 2 = 5$

ζ. Να λύσετε αλγεβρικά και γεωμετρικά τις ανισώσεις: **i.** $|x - 2| < 4$ **ii.** $|x + 1| - 2 \geq 3$

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. α. Να συμπληρώσετε τα κενά και να λύσετε την εξίσωση |x − ....| = ... σύμφωνα με το παρακάτω γράφημα



β. Να φτιάξετε ένα δικό σας αριθμητικό παράδειγμα.

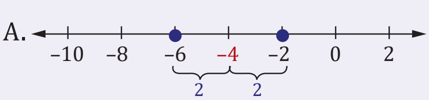
2. Να ταιριάξετε τις εξισώσεις με τα γραφήματα:

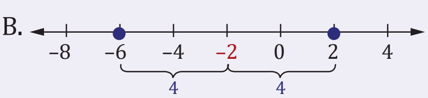
α. $|x + 2| = 4$

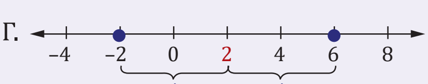
β. $|x - 4| = 2$

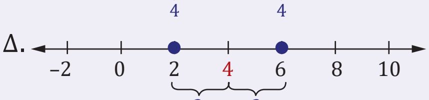
γ. $|x - 2| = 4$

δ. $|x + 4| = 2$

Α. 

Β. 

Γ. 

Δ. 

3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ως σωστές ή λανθασμένες αιτιολογώντας την απάντησή σας.

α. $\frac{|x|}{x} = 1,\ x \neq 0$

β. $\frac{x^2}{|x|} = |x|,\ x \neq 0$

γ. $|x + 1| = |x| + 1,\ x > 0$

δ. $|x - 1| = |x| - 1,\ x \in \mathbb{R}$

ε. $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$, μόνο αν $\alpha, \beta < 0$

στ. $|\alpha - \beta| = |\alpha + \beta|$, τότε $\alpha=0$ ή $\beta=0$

4. Να συμπληρώσετε τον πίνακα που ακολουθεί.

Απόλυτη τιμή	Απόσταση	Διάστημα ή ένωση διαστημάτων
$\|x - 1\| < 2$		
	$d(x, -2) > 1$	
$\|3 - x\| \geq 3$		
	$d(x, 5) \leq 4$	
$\|-1 - x\| \geq 2$		

5. Να μοντελοποιήσετε ένα πρόβλημα για μια καθημερινή σας ενασχόληση το οποίο να περιγράφεται με απόλυτες τιμές.

Ασκήσεις

1. Να γράψετε τους παρακάτω αριθμούς σε αύξουσα σειρά.

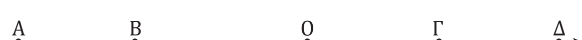
$|-6,5|,\ 5,\ |4,75|,\ -3,4\ ,\ \left|-\frac{12}{5}\right|,\ |-0,1|,\ -0,01,\ \left|-2 + \frac{1}{2}\right|$

2. Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α. $A = |\pi - 3| - |3 - \pi|$ **β.** $B = 3|2\sqrt{5} - 2| + 6|\sqrt{5} - 4|$

γ. $\Gamma = -|-2^2 - 5| + 2|-3(5 - 7)^2 + 6|$

3. Στον παρακάτω άξονα δίνονται τα σημεία Α (−6, 2), Β (−3, 7), Γ (2, 8) και Δ (5, 4).



Να χρησιμοποιήσετε το σύμβολο της απόλυτης τιμής για να εκφράσετε την απόσταση των σημείων:

α. Α και Γ **β.** Β και Δ

γ. Γ και Β **δ.** Δ και Α

Βρες τον κανόνα

4. Αν $|\alpha| < 1$, να αποδείξετε ότι $|2 - |\alpha - 1|| = \alpha + 1$

5. Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση $A = |\alpha - 2| + |4 - \alpha|$, όταν:

α. $\alpha < 2$ **β.** $\alpha > 4$ **γ.** $2 < \alpha < 4$

6. Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές τις παραστάσεις:

α. $A = 1 - |x - 3|$ **β.** $B = |4 - 2x| + 3$

7. Αν $\alpha \neq 2$ και $\beta \neq -1$, να απλοποιήσετε την παράσταση: $A = \frac{|2 - \alpha|}{\alpha - 2} - \frac{\beta + 1}{|1 + \beta|}$

8. Να αποδείξετε ότι:

α. $(\alpha - |\alpha|)(\alpha + |\alpha|) = 0$

β. $\left(1 - \frac{|\alpha|}{\alpha}\right)(\alpha + |\alpha|) = 0,\ \alpha \neq 0$

γ. $|\alpha + 1|^2 - |\alpha - 1|^2 = 4\alpha$

9. Αν $|\alpha| \leq 2$, $|\beta| \leq 1$, να αποδείξετε ότι:

α. $|\alpha - \beta| \leq 3$ **β.** $|3\alpha + 2\beta| \leq 8$

10. Τι συμπεραίνετε για τους πραγματικούς αριθμούς α και β όταν ισχύει:

α. $|\alpha| + |\beta| = 0$ **β.** $|\alpha| + |\beta| > 0$

11. **α.** Να αποδείξετε ότι $|\alpha - \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

β. Πότε ισχύει ως ισότητα;

12. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει:

α. $|x - 2| = 4$

β. $|7x + 1| + 2 = 0$

γ. $|2x - 3| = |3x + 1|$

Απόλυτες τιμές στο CAS

13. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $\frac{|x - 2| + 1}{2} - \frac{3|2 - x|}{4} = \frac{|2x - 4| + 4}{8}$

β. $|x - 2| = 2x - 6$

γ. $\sqrt{9x^2 + 6x + 1} = |x - 1|$

14. Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε στην ευθεία των πραγματικών αριθμών τις λύσεις τους.

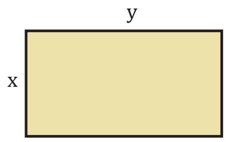
α. $|x| < 2$ **β.** $|2x - 1| \leq 3$ **γ.** $3 + 2|1 - 3x| < 5$

15. Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε στην ευθεία των πραγματικών αριθμών τις λύσεις τους.

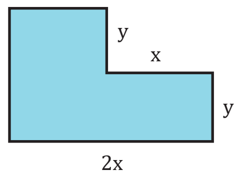
α. $|x| > 4$ **β.** $|5 - 2x| \geq 1$ **γ.** $2|3x + 4| - 1 > 7$

16. Αν $|x - 2| < 1$ και $|y - 4| < 2$, να εκτιμήσετε την περίμετρο των σχημάτων:

α.



β.



17. Το προτεινόμενο βάρος μιας μπάλας ποδοσφαίρου για έναν επίσημο αγώνα είναι 430 gr. Το βάρος επιτρέπεται να διαφοροποιείται μέχρι 20 gr.

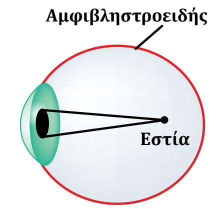
α. Να γράψετε και να λύσετε μια ανίσωση με απόλυτη τιμή για να βρείτε το ελάχιστο και το μέγιστο επιτρεπόμενο βάρος της μπάλας.

β. Μια μπάλα έχει βάρος 423 gr. Μετά από αρκετούς αγώνες η μπάλα έχει μια φθορά, με αποτέλεσμα να ζυγίζει 16 gr λιγότερο. Είναι αυτό το βάρος αποδεκτό προκειμένου να χρησιμοποιηθεί και σε επόμενο ποδοσφαιρικό αγώνα; Εξηγήστε την απάντησή σας.

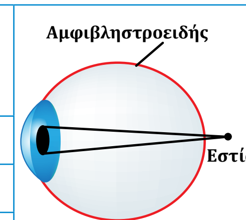
18. Η μυωπία και η πρεσβυωπία είναι μια διαθλαστική ανωμαλία/βλάβη του ματιού και μετριέται σε διοπτρίες. Ο αριθμός x των διοπτριών είναι αρνητικός για μυωπική όραση και θετικός για πρεσβυωπική όραση.

Ένα περίεργο φαινόμενο

Μυωπία (εστίαση μπροστά από τον αμφιβληστροειδή)	
Ήπιος	$|x + 1{,}5| < 1{,}5$
Μέτριος	$|x + 4{,}5| < 1{,}5$
Υψηλός	$|x + 7{,}5| < 1{,}5$



Πρεσβυωπία (εστίαση πίσω από τον αμφιβληστροειδή)	
Ήπιος	$|x - 1| < 1$
Μέτριος	$|x - 3| < 1$
Υψηλός	$|x - 5| < 1$



Αν x οι διοπτρίες ενός ανθρώπου, τότε:

α. Να λύσετε τις ανισώσεις για καθεμία περίπτωση που περιγράφεται στον παραπάνω πίνακα.

β. Να παρουσιάσετε στην ίδια αριθμογραμμή το εύρος των τιμών της διοπτρίας για καθεμία από τις παραπάνω περιπτώσεις ονομάζοντας τα αντίστοιχα διαστήματα σύμφωνα με την οπτική βλάβη.

19. Η «κανονική» θερμοκρασία του ανθρώπινου σώματος είναι 36,7°C. Εάν η θερμοκρασία ενός ατόμου διαφέρει από την κανονική κατά τουλάχιστον 0,7°C, αυτό αποτελεί ένδειξη κάποιας πιθανής ασθένειας. Να βρείτε το εύρος αυτών των θερμοκρασιών.

20. Η διάρκεια της ανθρώπινης εγκυμοσύνης είναι περίπου 266 μέρες.
Μια γυναικολογική κλινική θεωρεί ότι μια μητέρα έχει ασυνήθιστη εγκυμοσύνη όταν οι μέρες κύησης x ικανοποιούν την ανίσωση $\left|\frac{x - 266}{16}\right| > 1{,}96$. Να βρείτε το εύρος των ημερών που η κύηση θεωρείται ασυνήθιστη.

1.6 • Ρίζες – Δυνάμεις με Ρητό Εκθέτη

Αν καταφέρναμε να κινηθούμε με ταχύτητες κοντά στην ταχύτητα του φωτός (περίπου 300.000 χιλιόμετρα το δευτερόλεπτο) τότε, όπως προβλέπει ο τύπος της ειδικής σχετικότητας του Einstein, ο χρόνος θα κυλούσε πιο αργά στο διάστημα απ' ό,τι στη Γη. Η ηλικία ενός αστροναύτη R_α συνδέεται με την ηλικία ενός συνομήλικου φίλου του R_f στη Γη σύμφωνα με τον τύπο: $R_\alpha = R_f\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$ όπου v η ταχύτητα κίνησης του αστροναύτη και c η ταχύτητα του φωτός. Αν, λοιπόν, ένας αστροναύτης ταξίδευε με ταχύτητα 0,9c, τότε μετά από 50 γήινα

χρόνια η ηλικία του αστροναύτη θα ήταν $R_\alpha = 50\sqrt{1-\left(\frac{0,9c}{c}\right)^2} = 50\sqrt{0,81} \approx 21,8$. Δηλαδή, αν γυρνούσε στη Γη ο αστροναύτης μετά από 50 χρόνια, θα ήταν νεότερος από τον φίλο του κατά 50 – 21,8 = 28,2 χρόνια!

Για να βρούμε την ηλικία του αστροναύτη χρειάστηκε να υπολογίσουμε μια τετραγωνική ρίζα κι αυτό συμβαίνει σε πλήθος προβλημάτων που σχετίζονται με επιτεύγματα της επιστήμης στην Ιατρική, στην αεροναυπηγική, στην αυτοκινητοβιομηχανία, στην οικονομία και πολλούς άλλους τομείς.

Στην ενότητα αυτή θα θυμηθούμε τις τετραγωνικές ρίζες και θα γενικεύσουμε την έννοια της ρίζας.

1.6.1. Η έννοια της Νιοστής Ρίζας

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/ήτριες να μπορούν:

Να ορίζουν τη ν-οστή ρίζα μη αρνητικού αριθμού ως τη μοναδική μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^\nu = \alpha$.

Στο Γυμνάσιο μελετήσαμε την έννοια της τετραγωνικής ρίζας μη αρνητικού αριθμού και τις ιδιότητές της. Αναλυτικότερα:

Ορισμός

Η τετραγωνική ρίζα ενός **μη αρνητικού** αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt{\alpha}$ και είναι ο **μη αρνητικός** αριθμός που, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον α.

Επομένως:

Αν $\alpha \geq 0$, η $x = \sqrt{\alpha}$ παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^2 = \alpha$

ή ισοδύναμα:

Για $\alpha \geq 0$ ισχύει ότι: $x \geq 0,\ x^2 = \alpha \Leftrightarrow x = \sqrt{\alpha}$

Για παράδειγμα, $4^2 = 16$ και $(-4)^2 = 16$, αλλά $\sqrt{16} = 4$. Δηλαδή, αν και η εξίσωση $x^2 = 16$ έχει δύο λύσεις, τους αριθμούς −4 και 4, η τετραγωνική ρίζα $\sqrt{16}$ είναι **μοναδική** και είναι η θετική της λύση, ο αριθμός 4.

Επίσης, για τις ιδιότητες των τετραγωνικών ριζών γνωρίζουμε ότι:

α. $\sqrt{\alpha^2} = \alpha,\ \alpha \geq 0$

β. $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|,\ \alpha \in \mathbb{R}$

γ. $\sqrt{\alpha \cdot \beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta},\ \alpha \geq 0,\ \beta \geq 0$

δ. $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}},\ \alpha \geq 0,\ \beta > 0$

$\sqrt{\alpha+\beta} \neq \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$
Γιατί;

Διερεύνηση 1

α) Έχουν νόημα οι ρίζες $\sqrt{(-4)\cdot(-9)}$ και $\sqrt{\frac{-25}{-4}}$;

β) Μπορούμε να εφαρμόσουμε τις ιδιότητες των ριζών για αυτές τις περιπτώσεις; Αν όχι, για ποιον λόγο;

γ) Τι θα μπορούσαμε να κάνουμε για να επεκτείνουμε τις ιδιότητες των ριζών του γινομένου και του πηλίκου όταν και οι δύο αριθμοί είναι αρνητικοί;

Βασική παρατήρηση

Αν $\alpha < 0$ και $\beta < 0$ τότε οι ιδιότητες (γ) και (δ) γράφονται ως εξής:

- $\boldsymbol{\sqrt{\alpha\cdot\beta} = \sqrt{|\alpha|}\cdot\sqrt{|\beta|}}$
- $\boldsymbol{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt{|\alpha|}}{\sqrt{|\beta|}}}$

Διερεύνηση 2

α) Ποιον τύπο χρησιμοποιούμε για να υπολογίσουμε τον όγκο ενός κύβου πλευράς;

β) Μια εταιρεία ισχυρίζεται ότι πουλάει λάδι ενός λίτρου συσκευασμένο σε κυβικά δοχεία. Τι πρέπει να κάνουμε για να σιγουρευτούμε ότι το δοχείο έχει τις κατάλληλες διαστάσεις;

Ο όγκος του κύβου του Ρούμπικ (Rubik) του διπλανού σχήματος είναι $64 cm^3$. Αν x το μήκος της πλευράς του, τότε $x^3 = 64$. Ο x είναι θετικός αριθμός αφού εκφράζει μήκος και με δοκιμές βρίσκουμε ότι $4^3 = 64$.

Ο αριθμός 4 ονομάζεται **τρίτη ρίζα** ή **κυβική ρίζα** του 64 και συμβολίζεται $\sqrt[3]{64}$.
Γενικά, για κάθε **θετικό ακέραιο ν** δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός

Νιοστή ρίζα ενός **μη αρνητικού αριθμού α** είναι ο **μη αρνητικός αριθμός** που, όταν υψωθεί στη **ν**, δίνει τον αριθμό α και συμβολίζεται με $\sqrt[\nu]{\alpha}$.

Στον συμβολισμό $\sqrt[\nu]{\alpha}$:

Ο δείκτης **ν** ονομάζεται **τάξη** της ρίζας

$$\sqrt[\nu]{\alpha}$$

Το σύμβολο $\sqrt{\ }$ ονομάζεται **ριζικό**

Το **α** ονομάζεται **υπόρριζη** ποσότητα

Εκτιμήσεις για τη νιοστή ρίζα

Επομένως:

Αν $\alpha \geq 0$, η $x = \sqrt[\nu]{\alpha}$ παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^\nu = \alpha$

Ισοδύναμα, για $\alpha \geq 0$ ισχύει ότι: $x \geq 0,\ x^\nu = \alpha \Leftrightarrow x = \sqrt[\nu]{\alpha}$

Για παράδειγμα, $2^4 = 16$ και $(-2)^4 = 16$, αλλά $\sqrt[4]{16} = 2$. Δηλαδή, αν και η εξίσωση $x^4 = 16$ έχει δύο πραγματικές λύσεις, τους αριθμούς -2 και 2, η ρίζα $\sqrt[4]{16}$ είναι **μοναδική** και είναι η θετική της λύση, ο αριθμός 2.

Σημειώσεις

1. Στο βιβλίο αυτό το σύμβολο $\sqrt[\nu]{\alpha}$ έχει νόημα μόνο όταν $\alpha \geq 0$.
2. $\sqrt[1]{\alpha} = \alpha$ και $\sqrt[2]{\alpha} = \sqrt{\alpha}$, $\alpha \geq 0$.

Εφαρμογή

Να υπολογίσετε τις παρακάτω ρίζες:

α. $\sqrt[3]{64}$ **β.** $\sqrt[4]{10.000}$ **γ.** $\sqrt[5]{243}$

Απάντηση:

α. Είναι $\sqrt[3]{64} = 4$, διότι $4^3 = 64$ **β.** $\sqrt[4]{10.000} = 10$, διότι $10^4 = 10.000$ **γ.** $\sqrt[5]{243} = 3$, διότι $3^5 = 243$

1.6.2. Ιδιότητες Νιοστής Ρίζας

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/ήτριες να μπορούν:

Να αποδεικνύουν τις βασικές ιδιότητες (γινόμενο και πηλίκο ριζών).

Διερεύνηση

Να εξετάσετε, με αριθμητικά παραδείγματα, αν ισχύουν οι ισότητες:

α. $\sqrt[3]{\alpha+\beta}=\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}$ και $\sqrt[3]{\alpha-\beta}=\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\beta}$ όπου $\alpha,\ \beta\geq 0$ και $\alpha\geq\beta$

β. $\sqrt[3]{\alpha}\cdot\sqrt[3]{\beta}=\sqrt[3]{\alpha\cdot\beta}$, $\alpha,\ \beta\geq 0$ και $\dfrac{\sqrt[3]{\alpha}}{\sqrt[3]{\beta}}=\sqrt[3]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$, $\alpha\geq 0,\ \ \beta>0$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της νιοστής ρίζας και τις ιδιότητες των δυνάμεων, θα αποδείξουμε βασικές ιδιότητες που ισχύουν για τις νιοστές ρίζες.

Ιδιότητες ριζών

i. $\boldsymbol{\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu}=\alpha}$, για κάθε $\alpha\geq 0$ και ν θετικό ακέραιο.

ii. $\boldsymbol{\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta}}$, για κάθε $\alpha,\ \beta\geq 0$ και ν θετικό ακέραιο.

iii. $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}=\sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}}$, για κάθε $\alpha\geq 0$, $\beta>0$ και ν θετικό ακέραιο.

Πειράματα με τη νιοστή ρίζα

Απόδειξη

i. Θέτουμε $\sqrt[\nu]{\alpha}=x$. Από τον ορισμό της νιοστής ρίζας έχουμε: $\sqrt[\nu]{\alpha}=x\Leftrightarrow\alpha=x^{\nu},\ x\geq 0$

Άρα: $\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu}=x^{\nu}=\alpha$

ii. Από τις ιδιότητες των δυνάμεων και την (i) έχουμε: $\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}\right)^{\nu}=\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu}\cdot\left(\sqrt[\nu]{\beta}\right)^{\nu}=\alpha\cdot\beta$

Άρα από τον ορισμό της νιοστής ρίζας παίρνουμε: $\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta}$

iii. Από τις ιδιότητες των δυνάμεων έχουμε: $\dfrac{\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu}}{\left(\sqrt[\nu]{\beta}\right)^{\nu}}=\left(\sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}\right)^{\nu}=\dfrac{\alpha}{\beta}$

Άρα από τον ορισμό της νιοστής ρίζας παίρνουμε: $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}=\sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$

Παραδείγματα

- $\left(\sqrt[7]{3}\right)^{7}=3$
- $\sqrt[3]{40}=\sqrt[3]{8\cdot 5}=\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{5}=2\cdot\sqrt[3]{5}$
- $\dfrac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}=\sqrt[4]{\dfrac{32}{2}}=\sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{2^4}=2$
- $\sqrt[5]{3}\cdot\sqrt[5]{2}=\sqrt[5]{3\cdot 2}=\sqrt[5]{6}$
- $\sqrt[3]{\dfrac{8}{27}}=\dfrac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}}=\dfrac{\sqrt[3]{2^3}}{\sqrt[3]{3^3}}=\dfrac{2}{3}$

Σχόλια

- Για κάθε $\alpha\leq 0$ και ν άρτιο ισχύει ότι: $\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}}=|\alpha|$

Παράδειγμα: $\sqrt[6]{(-7)^6}=|-7|=7$

• Η ιδιότητα $\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta}$ ισχύει και για περισσότερους από δύο μη αρνητικούς παράγοντες. Δηλαδή:
$\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} \cdot \sqrt[\nu]{\gamma} = \sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}$ και γενικότερα $\sqrt[\nu]{\alpha_1} \cdot \sqrt[\nu]{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot \sqrt[\nu]{\alpha_\kappa} = \sqrt[\nu]{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_\kappa}$

• Αν $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_\kappa$, τότε η προηγούμενη ισότητα γράφεται:

$$\underbrace{\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \ldots \cdot \sqrt[\nu]{\alpha}}_{\kappa \text{ παράγοντες}} = \sqrt[\nu]{\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha}_{\kappa \text{ παράγοντες}}} \Leftrightarrow \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\kappa = \sqrt[\nu]{\alpha^\kappa}$$

• Για κάθε α, β ≥ 0 και ν θετικό ακέραιο ισχύει ότι: $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu \cdot \beta} = \sqrt[\nu]{\alpha^\nu} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \alpha \cdot \sqrt[\nu]{\beta}$

Δηλαδή: $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu \cdot \beta} = \alpha \cdot \sqrt[\nu]{\beta}$

Εφαρμογή 1

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $\sqrt{7^{20}}$ **β.** $\sqrt[4]{32}$ **γ.** $\sqrt[3]{5^{63}}$ **δ.** $\sqrt[4]{9^{24} \cdot x^{12}}$ **ε.** $\sqrt[5]{\frac{x^{15}}{32}}$, $x \geq 0$

Απάντηση:

Σε καθεμία από τις εμφανιζόμενες παραστάσεις θα αξιοποιήσουμε την ιδιότητα των δυνάμεων $\alpha^{\kappa\nu} = (\alpha^\kappa)^\nu$

α. Είναι: $\sqrt{7^{20}} = \sqrt{7^{2 \cdot 10}} = \sqrt{(7^{10})^2} = 7^{10}$

β. Έχουμε: $\sqrt[4]{32} = \sqrt[4]{16 \cdot 2} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{2} = 2\sqrt[4]{2}$

γ. Είναι: $\sqrt[3]{5^{63}} = \sqrt[3]{5^{21 \cdot 3}} = \sqrt[3]{(5^{21})^3} = 5^{21}$

δ. Έχουμε: $\sqrt[4]{9^{24} \cdot x^{12}} = \sqrt[4]{9^{24}} \cdot \sqrt[4]{x^{12}} = \sqrt[4]{9^{6 \cdot 4}} \cdot \sqrt[4]{x^{3 \cdot 4}} = \sqrt[4]{(9^6)^4} \cdot \sqrt[4]{(x^3)^4} = 9^6 \cdot |x^3|$

ε. Για κάθε x ≥ 0 είναι: $\sqrt[5]{\frac{x^{15}}{32}} = \frac{\sqrt[5]{x^{15}}}{\sqrt[5]{32}} = \frac{\sqrt[5]{(x^3)^5}}{\sqrt[5]{2^5}} = \frac{x^3}{2}$

Εφαρμογή 2

Αν α, β μη αρνητικοί αριθμοί και ν θετικός ακέραιος, να αποδείξετε ότι: $\boldsymbol{\alpha < \beta \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{\alpha} < \sqrt[\nu]{\beta}}$

Απάντηση:

Είναι: $\sqrt[\nu]{\alpha} < \sqrt[\nu]{\beta} \Leftrightarrow \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu < \left(\sqrt[\nu]{\beta}\right)^\nu \Leftrightarrow \alpha < \beta$

Σημείωση

Αποδεικνύεται ότι αν α ≥ 0 και μ, ν, ρ θετικοί ακέραιοι, τότε: **i.** $\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}} = \sqrt[\nu \cdot \mu]{\alpha}$ **ii.** $\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$

Μετατροπή Άρρητου Παρονομαστή σε Ρητό

Διερεύνηση

Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά ώστε να ισχύουν οι ισότητες.

α. $\frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}\ldots} = \frac{\sqrt{8}}{\ldots} = \frac{\sqrt{2}}{\ldots}$

β. $\frac{1}{\sqrt{7}+5} = \frac{\sqrt{7}-5}{(\sqrt{7}+5)\ldots} = \frac{\sqrt{7}-5}{\ldots} = \ldots$

γ. $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\ldots} = \frac{\ldots}{(\ldots)^2 - (\ldots)^2} = \ldots$

δ. $\frac{1}{\sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\ldots} = \frac{\sqrt[3]{25}}{\ldots} = \ldots$

Τι παρατηρείτε στον αρχικό και στον τελικό παρονομαστή των κλασμάτων;

Ρητοποίηση ονομάζουμε τη διαδικασία με την οποία μετατρέπουμε ένα κλάσμα με άρρητο παρονομαστή σε ένα ισοδύναμο κλάσμα με ρητό παρονομαστή.
Η ρητοποίηση διευκολύνει τις πράξεις και την ερμηνεία σχετικών άρρητων παραστάσεων.

Εφαρμογή 1

Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα κλάσματα με ρητό παρονομαστή (ρητοποίηση).

α. $\frac{7}{\sqrt{5}}$ **β.** $\frac{3}{2\sqrt{15}}$ **γ.** $\frac{6}{\sqrt[3]{7}}$ **δ.** $\frac{20}{\sqrt[9]{10^5}}$

Απάντηση:

α. $\frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \frac{7\cdot\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} = \frac{7\cdot\sqrt{5}}{5}$

β. $\frac{3}{2\sqrt{15}} = \frac{3\cdot\sqrt{15}}{2\sqrt{15}\cdot\sqrt{15}} = \frac{3\cdot\sqrt{15}}{2(\sqrt{15})^2} = \frac{3\cdot\sqrt{15}}{2\cdot 15} = \frac{\sqrt{15}}{10}$

γ. $\frac{6}{\sqrt[3]{7}} = \frac{6\cdot\sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[3]{7^2}} = \frac{6\cdot\sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7\cdot 7^2}} = \frac{6\cdot\sqrt[3]{49}}{\sqrt[3]{7^3}} = \frac{6\cdot\sqrt[3]{49}}{7}$

δ. $\frac{20}{\sqrt[9]{10^5}} = \frac{20\cdot\sqrt[9]{10^4}}{\sqrt[9]{10^5}\cdot\sqrt[9]{10^4}} = \frac{20\cdot\sqrt[9]{10^4}}{\sqrt[9]{10^9}} = \frac{20\cdot\sqrt[9]{10^4}}{10} = 2\sqrt[9]{10^4}$

Εφαρμογή 2

Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα κλάσματα με ρητό παρονομαστή (ρητοποίηση).

α. $\frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ **β.** $\frac{5}{3\sqrt{2}+4\sqrt{3}}$

Απάντηση:

α. $\frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} = \frac{4(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{\sqrt{7}^2-\sqrt{5}^2} = \frac{4(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{7-5} = 2(\sqrt{7}+\sqrt{5})$

β. $\frac{5}{3\sqrt{2}+4\sqrt{3}} = \frac{5}{3\sqrt{2}+4\sqrt{3}}\cdot\frac{3\sqrt{2}-4\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-4\sqrt{3}} = \frac{5(3\sqrt{2}-4\sqrt{3})}{(3\sqrt{2})^2-(4\sqrt{3})^2} = \frac{5(3\sqrt{2}-4\sqrt{3})}{9\cdot(\sqrt{2})^2-16\cdot(\sqrt{3})^2} =$

$\frac{5(3\sqrt{2}-4\sqrt{3})}{18-48} = \frac{5(3\sqrt{2}-4\sqrt{3})}{-30} = -\frac{3\sqrt{2}-4\sqrt{3}}{6} = \frac{4\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{6}$

Αυτοαξιολόγηση

α. Να αποδείξετε ότι $\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta}$ για κάθε $\alpha,\ \beta \geq 0$ και ν θετικό ακέραιο.

β. Να εξετάσετε αν ισχύουν οι ισότητες:

i. $\sqrt{\alpha+\beta} = \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$, **ii.** $\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \alpha+\beta$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ. Ο Δημήτρης για να αποδείξει ότι $\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta}$ προτείνει την εξής λύση:

$$\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta} \Leftrightarrow \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}\right)^\nu = \left(\sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta}\right)^\nu \Leftrightarrow \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu\cdot\left(\sqrt[\nu]{\beta}\right)^\nu = \alpha\cdot\beta \Leftrightarrow \alpha\cdot\beta = \alpha\cdot\beta, \text{ ισχύει}$$

Συμφωνείτε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

δ. Να γράψετε με μορφή μίας ρίζας την παράσταση $\Pi = 2\sqrt[3]{16} - 3\sqrt[3]{54} + 4\sqrt[3]{128}$

ε. Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε κλάσματα με ρητό παρονομαστή:

i. $\frac{14}{\sqrt{7}}$ **ii.** $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}-3}$ **iii.** $\frac{1}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}$

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ή λανθασμένες δικαιολογώντας την απάντησή σας.

α. Για κάθε θετικό ακέραιο ν και $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:
$$\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = \alpha$$

β. Αν $\alpha \cdot \beta \geq 0$ και ν θετικός ακέραιος, τότε
$$\sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta} = \sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta}$$

γ. $\sqrt[4]{16} = -2$ διότι $(-2)^4 = 16$.

δ. Αν $\alpha \in \mathbb{R}$ και ν άρτιος φυσικός αριθμός, τότε
$$\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = \left(\sqrt[\nu]{|\alpha|}\right)^\nu$$

2. Να συμπληρώσετε τα κενά που ακολουθούν ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις και ισότητες.

α. Η νιοστή ρίζα ενός .... α συμβολίζεται με $\sqrt[\nu]{\alpha}$ και είναι ο .... που, όταν υψωθεί στη ν, δίνει τον αριθμό ....

β. Αν $\alpha \geq 0$ και ν θετικός ακέραιος, τότε ισχύει ότι: $\sqrt[\nu]{\alpha} = \beta \Leftrightarrow$...................... .

γ. Αν $\alpha < 0$, τότε $\sqrt[4]{\alpha^4} =$...................... .

Ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε τις ρίζες:

α. $\sqrt{25}$, $\sqrt{4^2 + 3^2}$, $\dfrac{\sqrt{(-30)^2}}{\sqrt{0,25}}$, $\sqrt{49}\,\sqrt{0,36}$

β. $\sqrt[4]{81}$, $\sqrt[3]{\dfrac{24}{3}}$, $\dfrac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt[3]{8}}$, $\sqrt[4]{16 \cdot 10^{-8}}$

γ. $\sqrt{0,01}$, $\sqrt[3]{0,008}$, $\sqrt[4]{0,0016}$

2. Να γράψετε χωρίς ριζικά τις παρακάτω παραστάσεις:

α. $\sqrt{(2 - \sqrt{6})^2}$, $\sqrt{(2\pi - 6)^2}$, $\sqrt[7]{\left|\sqrt{3} - \sqrt[5]{32}\right|^7}$

β. $\sqrt{(3 - x)^2}$, $\sqrt[3]{(x^2 + |x|)^3}$, $\sqrt[4]{\dfrac{81}{16x^4}}$

3. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

α. $A = \sqrt{18} - \sqrt{50} + \sqrt{32}$

β. $B = 3\sqrt{45} - 2\sqrt{80} - \dfrac{1}{5}\sqrt{500}$

γ. $\Gamma = \sqrt{(2 - \sqrt{2})^2} + 2\sqrt{(5 - \sqrt{50})^2}$

δ. $\Delta = 2\sqrt[3]{32} - 3\sqrt[3]{108} + \sqrt[3]{256}$

4. Να αποδείξετε ότι:

α. $(\sqrt{27} - \sqrt{12})(2\sqrt{48} - 3\sqrt{75} + \sqrt{108}) = -3$

β. $(\sqrt{18} - \sqrt{32} + 3\sqrt[3]{8} - \sqrt{50})(1 + \sqrt{2}) = -6$

5. Να αποδείξετε ότι:

α. $\sqrt{3 - \sqrt{6}} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3 + \sqrt{6}} = 3$

β. $\sqrt[3]{4 - 2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{4 + 2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{64} = 8$

γ. $\dfrac{\sqrt{4 - \sqrt{8}} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{4 + \sqrt{8}}}{\sqrt[3]{3 - \sqrt{6}} \cdot \sqrt[3]{9}\sqrt[3]{3 + \sqrt{6}}} = \dfrac{4}{3}$

6. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

α. $A = \sqrt{21 + \sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{4}}}}$

β. $B = \sqrt{14 + \sqrt[5]{30 + \sqrt[4]{13 + \sqrt[3]{27}}}}$

γ. $\Gamma = \sqrt[4]{\dfrac{8}{3} \cdot \sqrt{12 \cdot \sqrt[3]{27}}}$

7. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α. $A = \sqrt{(\alpha - 2)^2} - \sqrt{(\alpha + 2)^2}$, αν $|\alpha| < 2$

β. $B = \sqrt{\beta^2 + 8\beta + 16} - \sqrt{\beta^2 - 4\beta + 4}$, αν $-4 \leq \beta \leq 2$

γ. $\Gamma = \dfrac{\sqrt{\gamma^2 - 2\gamma + 1}}{1 - \gamma} - \dfrac{\sqrt{\gamma^2 - 4\gamma + 4}}{\gamma - 2}$, αν $1 < \gamma < 2$

8. α. Να αποδείξετε ότι: $7 + 4\sqrt{3} = (\sqrt{3} + 2)^2$ και $7 - 4\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 2)^2$

β. Να απλοποιήσετε την παράσταση:
$$A = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$$

9. Να μετατρέψετε τις παρακάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητούς παρονομαστές.

α. $\dfrac{10}{\sqrt{5}}$ **β.** $\dfrac{14}{\sqrt{7}}$ **γ.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{12}}$ **δ.** $\dfrac{2}{\sqrt[5]{4^3}}$ **ε.** $\dfrac{6}{\sqrt[4]{3^9}}$

10. Να μετατρέψετε τις παρακάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητούς παρονομαστές.

α. $\dfrac{9}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$ **β.** $\dfrac{2}{\sqrt{7} + \sqrt{3}}$ **γ.** $\dfrac{4}{4\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}$

11. α. Να αποδείξετε ότι για θετικούς ρητούς με α, β $\alpha \neq \beta$ ισχύει ότι: $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}} - \dfrac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}} = \dfrac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}$

β. Να υπολογίσετε, χωρίς να κάνετε πράξεις, την τιμή της παράστασης $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} - \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

12. α. Αν α, β θετικοί ακέραιοι να δείξετε ότι ο αριθμός $\left(\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}} - \sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}}\right)^2$ είναι ρητός.

β. Ο αριθμός $\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}} - \sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)^2 - \left(\sqrt{\dfrac{2}{3}} + \sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)^2$ είναι ρητός ή άρρητος;

Συνθετική Εργασία

Να κάνετε τη συνθετική εργασία στη «Χρυσή Τομή» που θα βρείτε στον σύνδεσμο:

1.6.3. Δυνάμεις με Ρητό Εκθέτη

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/ήτριες να μπορούν:

- Να ορίζουν δυνάμεις με ρητό εκθέτη και να διερευνούν τις ιδιότητές τους.
- Να χρησιμοποιούν τον ορισμό και τις ιδιότητες των ν-οστών ριζών και γενικότερα των δυνάμεων με ρητό εκθέτη στον υπολογισμό της τιμής αριθμητικών παραστάσεων.
- Να χρησιμοποιούν τις ταυτότητες σε συνδυασμό με τις ιδιότητες των ν-οστών ριζών και γενικότερα των δυνάμεων με ρητό εκθέτη στον μετασχηματισμό αλγεβρικών παραστάσεων.

Διερεύνηση

Δίνεται η παράσταση $\left(2-\sqrt[3]{2}\right)\left[4+2\sqrt[3]{2}+\left(\sqrt[3]{2}\right)^2\right]$

α. Να υπολογίσετε την παράσταση με τη χρήση αριθμομηχανής με προσέγγιση τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων.

β. Να υπολογίσετε την παράσταση χρησιμοποιώντας αλγεβρικές ιδιότητες.

γ. Να συγκρίνετε τις δύο μεθόδους ως προς την ακρίβεια των αποτελεσμάτων αλλά και την ταχύτητα υλοποίησης των υπολογισμών.

Μέχρι τώρα έχουμε ορίσει δυνάμεις της μορφής α^ν με εκθέτη ακέραιο αριθμό και α πραγματικό αριθμό.

Συγκεκριμένα:

- Για ν θετικό ακέραιο, ορίσαμε: Για ν = 1, $\boldsymbol{\alpha^1 = \alpha}$ και για ν > 1, $\boldsymbol{\alpha^\nu = \underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\ldots\cdot\alpha}_{\nu\ \text{παραγοντες}}}$
- Για ν = 0 και α ≠ 0, $\boldsymbol{\alpha^0 = 1}$
- Για α ≠ 0, $\boldsymbol{\alpha^{-\nu} = \dfrac{1}{\alpha^\nu}}$

Προκειμένου να ορίσουμε δυνάμεις με εκθέτη ρητό αριθμό, θέλουμε να ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες των δυνάμεων και η δύναμη $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ να είναι λύση κάποιας εξίσωσης.

Αν λοιπόν ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες των δυνάμεων και για ρητούς εκθέτες, τότε για παράδειγμα θα έχουμε ότι: $\left(2^{\frac{3}{5}}\right)^5 = 2^{\frac{3}{5}\cdot 5} = 2^3$. Άρα ο $2^{\frac{3}{5}}$ θα πρέπει να είναι λύση της εξίσωσης $x^5 = 2^3$ και επομένως θα πρέπει να ισχύει ότι: $2^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2^3}$.

Οδηγούμαστε λοιπόν έτσι στον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός

Αν $\alpha > 0$, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε: $\boldsymbol{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}}$

Παραδείγματα:

$$27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = \sqrt[3]{(3^3)^2} = \sqrt[3]{(3^2)^3} = 3^2 = 9,\ \ 8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{8^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(2^3)^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(2^2)^3}} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

Όταν $\alpha = 0$ και μ, ν θετικοί ακέραιοι τότε ορίζουμε: $0^{\frac{\mu}{\nu}} = 0$

Αποδεικνύεται ότι για δυνάμεις με βάση θετικό αριθμό και ρητό εκθέτη ισχύουν οι ιδιότητες με ακέραιο εκθέτη, οπότε ο λογισμός με ριζικά διευκολύνεται μετασχηματίζοντάς τα σε δυνάμεις.

Παράδειγμα: Για $\alpha > 0$, $\sqrt[3]{\alpha} \cdot \sqrt{\alpha} = \alpha^{\frac{1}{3}} \cdot \alpha^{\frac{1}{2}} = \alpha^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} = \alpha^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{\alpha^5}$

Σχόλιο: Αν μ, ν θετικοί ακέραιοι, μ άρτιος και $\alpha \in \mathbb{R}$, τότε: $\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}} = |\alpha|^{\frac{\mu}{\nu}}$

Εφαρμογή

α. Να αποδείξετε ότι: **i.** $\dfrac{\sqrt[4]{16^3} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt[4]{4}} = 8$ **ii.** $\sqrt{2 \cdot \sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{4}$

β. Να γράψετε σε μορφή μίας ρίζας την παράσταση $A = \sqrt[3]{\alpha^2} \cdot \sqrt[4]{\alpha} \cdot \sqrt[6]{\alpha^5}$, $\alpha > 0$

Απάντηση:

α. i. Ισχύει ότι:

$$\frac{\sqrt[4]{16^3} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt[4]{4}} = \frac{16^{\frac{3}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{2}}}{4^{\frac{1}{4}}} = \frac{(2^4)^{\frac{3}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{2}}}{(2^2)^{\frac{1}{4}}} = \frac{2^{4\cdot\frac{3}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{2}}}{2^{2\cdot\frac{1}{4}}} = \frac{2^3 \cdot 2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} = 8$$

ii. Είναι:

$$\sqrt{2 \cdot \sqrt[3]{2}} = \sqrt{2 \cdot 2^{\frac{1}{3}}} = \sqrt{2^{1+\frac{1}{3}}} = \sqrt{2^{\frac{4}{3}}} = \left(2^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}} = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$$

β. Για κάθε $\alpha > 0$, ισχύει:

$$A = \sqrt[3]{\alpha^2} \cdot \sqrt[4]{\alpha} \cdot \sqrt[6]{\alpha^5} = \alpha^{\frac{2}{3}} \cdot \alpha^{\frac{1}{4}} \cdot \alpha^{\frac{5}{6}} = \alpha^{\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{5}{6}} = \alpha^{\frac{8}{12}+\frac{3}{12}+\frac{10}{12}} = \alpha^{\frac{8+3+10}{12}} = \alpha^{\frac{21}{12}} = \alpha^{\frac{7}{4}} = \sqrt[4]{\alpha^7}$$

Αυτοαξιολόγηση

α. Πώς ορίζεται η δύναμη με ρητό εκθέτη;

β. Να αποδείξετε ότι: **i.** $\sqrt[4]{9} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{243}$ **ii.** $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{32} \cdot \sqrt[12]{32} = 4$

γ. Ομοίως: **i.** $\sqrt[3]{2 \cdot \sqrt{\sqrt[4]{4}}} = \sqrt[12]{32}$ **ii.** $\dfrac{\sqrt{6} \cdot \sqrt[6]{27}}{\sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[3]{2}} = \dfrac{3 \cdot \sqrt[3]{4}}{2}$

δ. Για ποιες τιμές του α είναι σωστή η ισότητα $A = \sqrt[3]{\alpha^4} = \alpha^{\frac{4}{3}}$; Πώς πρέπει να γραφτεί η προηγούμενη ισότητα αν γνωρίζετε ότι $\alpha \in \mathbb{R}$;

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ή λανθασμένες δικαιολογώντας την απάντησή σας.

α. Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι: $\sqrt[4]{\alpha^2} = \alpha^{\frac{2}{4}} = \alpha^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\alpha}$

β. Για κάθε $\alpha,\ \beta \geq 0$ ισχύει ότι: $\sqrt[4]{\alpha^4 + \beta^4} = \alpha + \beta$

γ. Για $\alpha \in \mathbb{R}$ και $\beta > 0$ ισχύει ότι:
$\sqrt[6]{\alpha^6 \cdot \beta} = \sqrt[6]{\alpha^6} \cdot \sqrt[6]{\beta} = |\alpha| \cdot \sqrt[6]{\beta}$

δ. Για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει ότι: $\alpha^{\frac{3}{4}} = \sqrt[3]{\alpha^4}$

2. Να εντοπίσετε το λάθος στις παρακάτω ισότητες.

$$-1 = (-1)^1 = (-1)^{\frac{2}{2}} = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$$

3. α. Να εξετάσετε σε ποια περίπτωση η παρακάτω ισότητα είναι σωστή και σε ποια λανθασμένη. Στην περίπτωση του λάθους να εντοπίσετε τον λανθασμένο μετασχηματισμό.

$$\sqrt[3]{\alpha^2} \cdot \sqrt[12]{(-\alpha)^4} = \sqrt[3]{\alpha^2} \cdot \sqrt[12]{\alpha^4} = \alpha^{\frac{2}{3}} \cdot \alpha^{\frac{4}{12}} =$$
$$\alpha^{\frac{2}{3}} \cdot \alpha^{\frac{1}{3}} = \alpha^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}} = \alpha^{\frac{3}{3}} = \alpha$$

β. Να δημιουργήσετε ένα δικό σας παράδειγμα με σύμβολα αλλά και αριθμητικό, όπως το προηγούμενο, το οποίο να είναι σωστό υπό προϋποθέσεις.

4. α. Να εξηγήσετε ποια από τις δύο παρακάτω ισότητες είναι σωστή αιτιολογώντας την απάντησή σας.

$$\sqrt[3]{\alpha^2} = (\alpha^2)^{\frac{1}{3}} \quad \text{και} \quad \sqrt[3]{\alpha^2} = \alpha^{\frac{2}{3}}$$

β. Πώς μπορούμε να μετατρέψουμε τη λανθασμένη ισότητα σε σωστή;

Ασκήσεις

1. Να γράψετε τις παρακάτω δυνάμεις με ρητό εκθέτη σε μορφή ρίζας.

α. $3^{\frac{1}{4}}$ **β.** $5^{\frac{7}{6}}$ **γ.** $2^{\frac{4}{5}}$ **δ.** $(4^{-3})^{\frac{2}{11}}$

2. Να γράψετε τις παρακάτω ρίζες σε μορφή δύναμης με ρητό εκθέτη.

α. $\sqrt[5]{2}$ **β.** $\sqrt[4]{2^3}$ **γ.** $\sqrt[6]{(-2)^4}$

δ. $\left(\sqrt[8]{3^5}\right)^2$ **ε.** $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$ **στ.** $\sqrt{\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2}}$

3. Να αποδείξετε ότι:

α. $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[3]{2} = 2 \cdot \sqrt[12]{2}$ **β.** $\sqrt[6]{9} \cdot \sqrt[12]{3^5} = \sqrt[4]{27}$

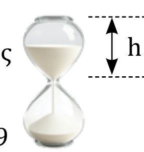
γ. $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{5^4} \cdot \sqrt[6]{5^4} = 125$

4. Να αποδείξετε ότι:

α. $\sqrt[6]{5} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt[6]{8} = 10$ **β.** $\dfrac{\sqrt{6} \cdot \sqrt[6]{24} \cdot \sqrt[3]{3}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{2}} = 3$

5. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει:

$$\left(\alpha^{\frac{1}{2}} + \alpha^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(\frac{\alpha + 1}{\sqrt{\alpha}}\right)^2$$



6. Το πάνω μέρος μιας κλεψύδρας έχει ύψος h (cm) και είναι γεμάτο με άμμο.

Ο τύπος $t = 0,03\left[9^{\frac{5}{2}} - (9 - h)^{\frac{5}{2}}\right],\ 0 \leq h \leq 9$ περιγράφει τον χρόνο σε sec που χρειάζεται για να αδειάσει το πάνω μέρος και να μεταφερθεί η άμμος στο κάτω μέρος. Αν $h = 5$ cm, να βρείτε τον χρόνο αδειάσματος.

Συνθετική Εργασία

Η επιτάχυνση g της βαρύτητας κοντά στην επιφάνεια της Γης είναι 9,8 m/sec^2. Αν μια μπάλα μάζας 0,145 Kg πέσει από την κορυφή της τροχιάς της στο έδαφος που βρίσκεται σε απόσταση 100 m και η διαστημική κάψουλα Ares 1-X μάζας 5000 kg πέσει επίσης από την κορυφή της τροχιάς της στο έδαφος διανύοντας απόσταση 45000 m, ποιες θα ήταν οι ταχύτητες πρόσκρουσής τους στο έδαφος;

Χρησιμοποιήστε τους τύπους:

Δυναμική Ενέργεια = mgh και Κινητική ενέργεια = $\frac{1}{2}$m V^2

1.7 • Ανακεφαλαίωση 1ου Κεφαλαίου

Θεωρία

1. Ρητοί – Άρρητοι – Πυκνότητα – Διαδοχικότητα

- **Ρητοί αριθμοί** είναι αυτοί που μπορούν να γραφτούν ως κλάσματα. Δηλαδή αυτοί που μπορούν να γραφτούν στη μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$ όπου α, β ακέραιοι και $\beta \neq 0$.
- **Άρρητοι αριθμοί** είναι όσοι δεν είναι ρητοί. Δηλαδή όσοι δεν μπορούν να γραφτούν στη μορφή όπου α, β ακέραιοι και $\beta \neq 0$.
- **Ανάμεσα σε δύο οποιουσδήποτε ρητούς αριθμούς υπάρχει πάντοτε ένας άλλος ρητός αριθμός.**
- **Δεν υπάρχει επόμενος ενός ρητού αριθμού.**
- **Οι ρητοί είναι άπειροι.**
- **Ανάμεσα σε δύο οποιουσδήποτε άρρητους αριθμούς υπάρχει πάντοτε ένας άλλος άρρητος αριθμός.**
- **Δεν υπάρχει επόμενος ενός άρρητου αριθμού.**
- **Οι άρρητοι είναι άπειροι.**

2. Διάταξη - Ιδιότητες ανισοτήτων

- $(\alpha > \beta \text{ και } \beta > \gamma) \Rightarrow \alpha > \gamma$
- $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$
- Αν $\gamma > 0$ τότε: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$
- Αν $\gamma < 0$ τότε: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$
- $(\alpha > \beta \text{ και } \gamma > \delta) \Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \delta$
- Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ τότε:
  $(\alpha > \beta \text{ και } \gamma > \delta) \Rightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$
- Αν α, β θετικοί αριθμοί και ν θετικός ακέραιος, τότε: $\boldsymbol{\alpha} > \boldsymbol{\beta} \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}^{\nu} > \boldsymbol{\beta}^{\nu}$

3. Ταυτότητες

- $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$
- $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$
- $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$
- $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$

4. Ορισμός απόλυτης τιμής:

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, \text{ αν } \alpha \geq 0 \\ -\alpha, \text{ αν } \alpha < 0 \end{cases}$$

5. Συνέπειες ορισμού απόλυτης τιμής

α. $|\alpha| \geq 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

β. $|\alpha|^2 = \alpha^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

γ. $|\alpha| = |-\alpha|, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

δ. $|x| = \theta \Leftrightarrow x = -\theta$ ή $x = \theta, \theta > 0$

ε. $-|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha|, \alpha \in \mathbb{R}$

στ. $|x| = |\theta| \Leftrightarrow x = -\theta$ ή $x = \theta$

6. Ιδιότητες απόλυτης τιμής

Αν α, β πραγματικοί αριθμοί, τότε:

α. $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$

β. $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}, \quad \beta \neq 0$

γ. $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

7. Απόσταση δύο αριθμών

Απόσταση δύο αριθμών α, β με παραστατικά σημεία Α(α) και Β(β) στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι το μήκος (ΑΒ) του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. Δηλαδή: $\mathbf{d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|}$.

8. Ορισμός ν-οστής ρίζας

Νιοστή ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt[\nu]{\alpha}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός που, όταν υψωθεί στην ν, δίνει τον αριθμό α.

9. Ιδιότητες ριζών

α. $(\sqrt[\nu]{\alpha})^{\nu} = \alpha$, για κάθε $\alpha \geq 0$ και ν θετικό ακέραιο.

β. $\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta}$, για κάθε $\alpha, \beta \geq 0$ και ν θετικό ακέραιο.

γ. $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$, για κάθε $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$ και ν θετικό ακέραιο.

10. Δυνάμεις με ρητό εκθέτη

Αν $\alpha > 0$, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε: $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$

Επαναληπτικές Ασκήσεις

1. Αν $\alpha = 0{,}681181118\ldots$ και $\beta = 1{,}318818881\ldots$ (μη περιοδικοί δεκαδικοί), να βρείτε και να χαρακτηρίσετε ως ρητό ή άρρητο τον αριθμό $\alpha + \beta$.

2. Αν α, β ρητοί αριθμοί και λ άρρητος αριθμός, τέτοιοι ώστε $\alpha + \beta\lambda = 0$, τότε να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = 0$.

3. Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ θετικοί με $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\gamma}{\delta}$ και ν θετικός ακέραιος, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι: $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\nu\alpha + \gamma}{\nu\beta + \delta} < \frac{\gamma}{\delta}$.

β. Να βρείτε έναν ρητό ανάμεσα στους $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\nu\alpha + \gamma}{\nu\beta + \delta}$.

γ. Πόσοι ρητοί χωράνε ανάμεσα στους $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$;

4. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Σ, αν ο ισχυρισμός είναι σωστός και το γράμμα Λ, αν ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος. Να εξηγήσετε την απάντησή σας.

α. Ο επόμενος ρητός αριθμός του 0,11 είναι ο 0,12.	Σ	Λ
β. Δεν υπάρχει ρητός αριθμός ανάμεσα στους 0,0000001 και 0,0000002.	Σ	Λ
γ. Ο επόμενος άρρητος του $\sqrt{2}$ είναι ο $\sqrt{3}$.	Σ	Λ
δ. Δεν υπάρχει άρρητος αριθμός ανάμεσα στους $\sqrt{5}$ και $\sqrt{7}$.	Σ	Λ
ε. Ο αριθμός 1,24999... είναι ρητός.	Σ	Λ

5. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Σ, αν ο ισχυρισμός είναι σωστός και το γράμμα Λ, αν ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος. Να εξηγήσετε την απάντησή σας.

α. Αν $\alpha + \beta = 0$, τότε $\lvert\alpha\rvert = \lvert\beta\rvert$	Σ	Λ
β. Ισχύει: $\lvert\alpha - \lvert\alpha\rvert\rvert = \lvert\alpha\rvert - \alpha$	Σ	Λ
γ. Η σχέση $\lvert\lvert x\rvert + x\rvert + \lvert\lvert x\rvert - x\rvert = 2x$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$	Σ	Λ
δ. Αν $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 0$ τότε $x = 2$ και $y = 3$	Σ	Λ
ε. Ισχύει $x^6 - y^6 = (x^2 - y^2)(x^2 - xy + y^2)(x^2 + xy + y^2)$	Σ	Λ
στ. Ισχύει $[(-\alpha)^2]^{-3} : \alpha^3 = \alpha^9$	Σ	Λ
ζ. Ισχύει $(0,5)^{16} \cdot 32^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^6 = 1$	Σ	Λ
η. Ισχύει $\sqrt[3]{3 - \sqrt{8}} \cdot \sqrt[3]{3 + \sqrt{8}} = 1$	Σ	Λ
θ. Ισχύει $\alpha^{\frac{1}{3}} \cdot \alpha^{\frac{1}{2}} = \sqrt[6]{\alpha}$	Σ	Λ

6. Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α. Η τιμή του κλάσματος $\frac{\lvert\alpha\rvert}{\alpha} + \frac{\beta}{\lvert\beta\rvert}$, $\alpha\beta \neq 0$ είναι ίση με

i. 2 αν $\alpha > 0$ και $\beta > 0$ **ii.** 1 αν $\alpha > 0$ και $\beta < 0$

iii. -2 αν $\alpha < 0$ και $\beta > 0$ **iv.** 0 αν $\alpha < 0$ και $\beta < 0$

β. Αν $\alpha \neq 0$, ποιες από τις παρακάτω σχέσεις είναι σωστές; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

i. $\left|\alpha + \frac{1}{\alpha}\right| \leq \lvert\alpha\rvert + \frac{1}{\lvert\alpha\rvert}$ **ii.** $\left|\alpha + \frac{1}{\alpha}\right| > \lvert\alpha\rvert + \frac{1}{\lvert\alpha\rvert}$

iii. $\left|\alpha + \frac{1}{\alpha}\right| = \lvert\alpha\rvert + \frac{1}{\lvert\alpha\rvert}$

γ. Η απλοποιημένη μορφή της παράστασης

$$\frac{(\alpha+\beta)^3}{(\alpha-\beta)^3(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)} \cdot \frac{(\alpha^3-\beta^3)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)}{\alpha^3+\beta^3}$$

είναι:

i. $\alpha + \beta$ **ii.** $\alpha - \beta$ **iii.** $\alpha^2 - \beta^2$ **iv.** $\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right)^2$

δ. Το ανάπτυγμα $(x - 2y)^3$ είναι ίσο με:

i. $x^3 - 8y^3$ **ii.** $x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$

iii. $x^3 - 8y^3 - 6xy(x - 2y)$ **iv.** $x^3 - 2y^3$

ε. Ο αριθμός $\sqrt{2 \cdot \sqrt[3]{2}}$ είναι ίσος με:

i. $2^{\frac{2}{3}}$ **ii.** $\sqrt[6]{2}$ **iii.** $\sqrt[4]{2^3}$ **iv.** $\sqrt[3]{2^4}$

7. α. Να απλοποιήσετε την παράσταση

$$A = \frac{\alpha^3 - \beta^3}{(\alpha+\beta)^2 - \alpha\beta}, \quad \alpha \cdot \beta \neq 0$$

β. Αν $A = \alpha - \beta$, με $\alpha \neq \beta$:

i. Να απλοποιήσετε την παράσταση $B = \frac{\sqrt{A^2}}{A}$.

ii. Αν $\alpha \geq -\beta$, να δείξετε ότι $A + \sqrt{A^2 + 4\alpha\beta} = 2\alpha$.

8. α. Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$A = \frac{\alpha^4 - \beta^4}{\alpha^3 - \beta^3} : \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 + \beta(\alpha+\beta)}, \ \alpha \neq \beta \text{ και } \alpha \neq 0, \ \beta \neq 0$$

β. Αν $A = \alpha + \beta$, να δείξετε ότι:

i. $A^2 > 2\alpha\beta$ **ii.** $\lvert A\rvert^2 - \lvert 2\alpha\beta - A^2\rvert = 2\alpha\beta$

9. α. Να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{\lvert x\rvert - 1}{2} - \frac{2\lvert x\rvert - 1}{5} = \frac{5 - 3\lvert x\rvert}{4} + \frac{5\lvert x\rvert - 12}{3}$$

β. Να λύσετε την ανίσωση $\lvert 2x - 1\rvert < 8$

γ. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις κοινές λύσεις της εξίσωσης και της ανίσωσης.

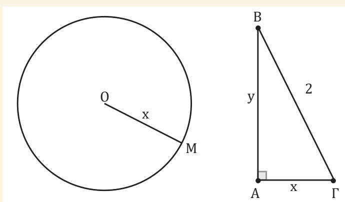
10. Δίνονται τα σημεία Α, Β και Μ, που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς -3, 8 και x αντίστοιχα, με $-3 < x < 8$.

α. Ποια είναι η γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων: **i.** $|x + 3|$, **ii.** $|x - 8|$;

β. Ποια είναι η γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος: $|x + 3| + |x - 8|$;

γ. Να βρείτε γεωμετρικά και αλγεβρικά την τιμή της παράστασης $A = |x + 3| + |x - 8|$.

11. Αν ισχύουν οι ανισότητες $|x - 3| < 2$ και $|y - 4| < 3$, να εκτιμήσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του κύκλου και του ορθογωνίου τριγώνου.



12. Δίνονται οι παραστάσεις:

$A = |x + y - 4| - |x - y + 1|$ και $B = |A - 1| + |A + 1|$ με $1 \le x \le 2$ και $3 < y < 4$.

α. Να δείξετε ότι η παράσταση Α είναι ανεξάρτητη του y.

β. Να δείξετε ότι ισχύει η ανισότητα: $-1 \le A \le 1$

γ. Να δείξετε ότι η παράσταση Β είναι σταθερή.

13. Δίνεται η παράσταση

$$A = \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{1 - x} + \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3}$$

α. Να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει ο αριθμός x, ώστε η παράσταση Α να έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

β. Να αποδείξετε ότι $A = \dfrac{|x - 1|}{1 - x} + \dfrac{|x - 3|}{x - 3}$.

γ. Να απλοποιήσετε την παράσταση Α.

δ. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες είναι $A < 0$.

14. Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt[3]{3 \cdot \sqrt[4]{3^8}}$.

α. Να δείξετε ότι $A = 3$.

β. Να ρητοποιήσετε τις παραστάσεις $B = \dfrac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{6}}$ και $\Gamma = \dfrac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{6}}$.

γ. Να δείξετε ότι $B^2 + \Gamma^2 = 2 + 8A$.

15. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = 2 + \sqrt{5}$ και $\beta = 2 - \sqrt{5}$.

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 = 9 + 4\sqrt{5}$ και $\beta^2 = 9 - 4\sqrt{5}$.

β. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \sqrt{9 + 4\sqrt{5}} - \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$$

γ. Να αποδείξετε ότι $\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} > \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2}$.

16. Αν για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει ότι $|x - 1| < \varepsilon$, να αποδείξετε ότι $x = 1$.

Φύλλο Αξιολόγησης 1ου Κεφαλαίου

Γλωσσάρι 1ου Κεφαλαίου

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής στη Διάταξη

Ερωτήσεις Σωστού - Λάθους στη Διάταξη

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής στην Απόλυτη Τιμή

Ερωτήσεις Σωστού - Λάθους στην Απόλυτη Τιμή

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής στις Ρίζες

Ερωτήσεις Σωστού - Λάθους στις Ρίζες

Σύνολα

Κεφάλαιο

2

- Να αναγνωρίζουν αν μια ιδιότητα ορίζει ένα σύνολο
- Να αναπαριστούν τα σύνολα με διάφορους τρόπους (αναγραφή και περιγραφή στοιχείων, διάγραμμα Venn)
- Να εξετάζουν αν ένα αντικείμενο ανήκει ή όχι σε ένα σύνολο και να δηλώνουν αυτή τη σχέση συμβολικά

2.1 • Σύνολα

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/ήτριες να μπορούν:

- Να αναγνωρίζουν αν μια ιδιότητα ορίζει ένα σύνολο.
- Να αναπαριστούν τα σύνολα με διάφορους τρόπους (αναγραφή και περιγραφή στοιχείων, διάγραμμα Venn).
- Να εξετάζουν αν ένα αντικείμενο ανήκει ή όχι σε ένα σύνολο και να δηλώνουν αυτή τη σχέση συμβολικά.

Πολλοί άνθρωποι δείχνουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον στη συλλογή αντικειμένων. Οι έφηβοι, για παράδειγμα, συλλέγουν αφίσες, βιντεοπαιχνίδια περιπέτειας, ρόλων κ.λπ. Άλλοι πάλι δημιουργούν συλλογές από μουσικά κομμάτια που ανήκουν σε διαφορετικές κατηγορίες, όπως ποπ, ραπ, χιπ χοπ, ροκ, παραδοσιακά, λαϊκά, κ.λπ. Διαπιστώνουμε λοιπόν ότι η έννοια του συνόλου και της συλλογής είναι μέρος της καθημερινότητάς μας.

Διερεύνηση



α. Στις παραπάνω φωτογραφίες μπορείτε να διακρίνετε κάποιες συλλογές αντικειμένων;
β. Ποια είναι τα βασικά στοιχεία αυτών των συλλογών;
γ. Ποια είναι η σχέση μεταξύ των συνόλων που επιλέξατε σε κάθε φωτογραφία;

Για συλλογές, ομάδες ή κατηγορίες από αντικείμενα ή αριθμούς, που μπορούμε με σαφήνεια να τα ταυτοποιούμε και να τα ξεχωρίζουμε μεταξύ τους, δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός

Σύνολο είναι κάθε συλλογή αντικειμένων, τα οποία προέρχονται από την εμπειρία μας ή τη διανόησή μας, είναι καλά ορισμένα και διακρίνονται το ένα από το άλλο.

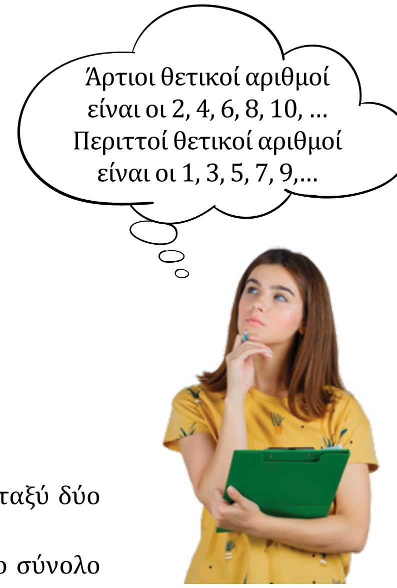
- Τα αντικείμενα που αποτελούν ένα σύνολο ονομάζονται **στοιχεία** ή **μέλη** του συνόλου. Τα σύνολα τα συμβολίζουμε συνήθως με κεφαλαία γράμματα και τα στοιχεία τους με μικρά γράμματα μέσα σε άγκιστρα, με κόμμα ανάμεσά τους. Για παράδειγμα, μπορούμε να συμβολίσουμε το σύνολο των φωνηέντων του ελληνικού αλφάβητου ως $Φ = \{α, ε, ο, ι, η, υ, ω\}$.
- Για να έχει νόημα η αναφορά σε ένα σύνολο, πρέπει να μπορούμε να διακρίνουμε και να αναγνωρίζουμε επακριβώς τα στοιχεία του, κάτι που συμβαίνει όταν έχουμε έναν κανόνα καθορισμού για την ένταξη ενός στοιχείου σε αυτό (καλώς ορισμένο σύνολο). Για παράδειγμα, η «συλλογή παλιών κινητών τηλεφώνων» δεν μπορεί να θεωρηθεί σύνολο διότι δεν καθορίζεται σαφώς η έννοια «παλιό κινητό τηλέφωνο».

Σημείωση
Βασικά αριθμητικά σύνολα:

- $\mathbb{N}$: Σύνολο των φυσικών αριθμών
- $\mathbb{Z}$: Σύνολο των ακέραιων αριθμών
- $\mathbb{Q}$: Σύνολο των ρητών αριθμών
- $\mathbb{R}$: Σύνολο των πραγματικών αριθμών

Τα σύμβολα ∈, ∉

- Το σύμβολο « ∈ » σημαίνει «είναι στοιχείο του συνόλου» και διαβάζεται «**ανήκει**».
- Το σύμβολο « ∉ » σημαίνει «δεν είναι στοιχείο του συνόλου» και διαβάζεται «**δεν ανήκει**».



Για παράδειγμα, αν Α = {άρτιοι θετικοί αριθμοί μικρότεροι του 10}
τότε Α = {2, 4, 6, 8} και επομένως: 6 ∈ Α, 5 ∉ Α.

Παράσταση Συνόλου

Παράσταση συνόλου με αναγραφή

Όταν τα στοιχεία ενός συνόλου είναι λίγα σε πλήθος, τότε τα γράφουμε μεταξύ δύο αγκίστρων.
Για παράδειγμα, οι άρτιοι αριθμοί ανάμεσα στους αριθμούς 1 και 9 είναι το σύνολο Α = {2, 4, 6, 8}.

Όταν τα στοιχεία ενός συνόλου είναι πολλά σε πλήθος, τότε τα γράφουμε και πάλι μεταξύ δύο αγκίστρων και βάζουμε τελείες για να περιγράψουμε σιωπηρά τα ενδιάμεσα στοιχεία.
Για παράδειγμα, οι άρτιοι αριθμοί ανάμεσα στους αριθμούς 1 και 100 είναι το σύνολο Α = {2, 4, 6, ..., 98, 100} .

Οι παραπάνω τρόποι περιγραφής ενός συνόλου λέγονται «παράσταση του συνόλου με **αναγραφή** των στοιχείων του».

Παράσταση συνόλου με περιγραφή

Πολλές φορές, είτε για να αποφύγουμε να έχουμε μια μεγάλη λίστα αριθμών είτε γιατί δεν μπορούμε να έχουμε καθόλου αριθμούς, χρησιμοποιούμε την **περιγραφή** των στοιχείων ενός συνόλου. Συχνά περιγράφουμε ένα σύνολο με όλες τις τιμές του x που ικανοποιεί μια συγκεκριμένη ιδιότητα. Έτσι, αν από ένα σύνολο Ω επιλέξουμε εκείνα τα στοιχεία του που έχουν μια συγκεκριμένη ιδιότητα Ι, τότε φτιάχνουμε ένα νέο σύνολο που συμβολίζεται με: $\{x \in \Omega | x$ έχει την ιδιότητα Ι$\}$

Παράδειγμα:
Το σύνολο $\{x \in \mathbb{R} | -3 < x \leq 2\}$ διαβάζεται: «το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών x οι οποίοι βρίσκονται ανάμεσα στους αριθμούς –3 και 2, συμπεριλαμβανομένου και του 2.

Σημείωση

Σε επόμενη παράγραφο θα δούμε και έναν ακόμη τρόπο με τη χρήση των διαγραμμάτων **Venn**.

Πεπερασμένα & Άπειρα Σύνολα

- Ένα σύνολο που έχει ν ακριβώς στοιχεία για κάποιον φυσικό αριθμό ν ονομάζεται **πεπερασμένο σύνολο**.
- Ένα σύνολο που δεν είναι πεπερασμένο ονομάζεται **απειροσύνολο**.

Πληροφορίες για τα σύνολα με άπειρο πλήθος στοιχείων.

Το πλήθος των στοιχείων ενός πεπερασμένου συνόλου Α συμβολίζεται με **Ν(**Α) και ονομάζεται **πληθικός αριθμός** του Α.

Παράδειγμα:
- Το σύνολο Φ των φωνηέντων της ελληνικής γλώσσας είναι πεπερασμένο με Ν(Φ) = 7.
- Το σύνολο Π = {1, 3, 5,7...} των περιττών αριθμών είναι απειροσύνολο.

Ίσα Σύνολα

Ορισμός

Δύο σύνολα είναι **ίσα** όταν και μόνο όταν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία.

Όταν δύο σύνολα Α, Β είναι ίσα, γράφουμε **Α = Β**.

Παραδείγματα:
- {2, 6, 5} = {5, 2, 6}.
- Το σύνολο των γραμμάτων της λέξης ΑΡΓΩ είναι Κ = {Α, Ρ, Γ, Ω} και το σύνολο των γραμμάτων της λέξης ΡΩΓΑ είναι Λ = { Ρ, Ω, Γ, Α}. Άρα Κ = Λ.

Σχόλιο
Φανερά δύο σύνολα Α, Β είναι ίσα όταν κάθε στοιχείο του Α είναι στοιχείο του Β και, αντίστροφα, κάθε στοιχείο του Β είναι και στοιχείο του Α.

Υποσύνολα Συνόλου

Για τα σύνολα Α = {2, 4, 5} και Β = {1, 2, 3, 4, 5, 6} παρατηρούμε ότι κάθε στοιχείο του συνόλου Α είναι και στοιχείο του συνόλου Β. Σε μια τέτοια περίπτωση λέμε ότι το σύνολο Α είναι υποσύνολο του συνόλου Β .
Γενικά δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός

Ένα σύνολο Α ονομάζεται **υποσύνολο** ενός συνόλου Β και συμβολίζεται με **Α ⊆ Β** όταν και μόνο όταν κάθε στοιχείο του Α είναι και στοιχείο του Β.

Για τα σύνολα Α = {1, 2, 3} και Β = {1, 2, 3, 4} διαπιστώνουμε ότι Α ⊆ Β αλλά Α ≠ Β. Για περιπτώσεις όπως αυτή δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός

Ένα σύνολο Α ονομάζεται **γνήσιο υποσύνολο** ενός συνόλου Β όταν κάθε στοιχείο του Α είναι και στοιχείο του Β, αλλά Α ≠ Β. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε Α ⊂ Β.

Το Κενό Σύνολο

Αν αναζητήσουμε το σύνολο Α των στοιχείων του συνόλου Β = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} που είναι πολλαπλάσια του 10, διαπιστώνουμε ότι αυτό δεν υπάρχει ή αλλιώς δεν έχει κανένα στοιχείο. Ένα τέτοιο σύνολο το ονομάζουμε *κενό σύνολο*. Ώστε:

Ορισμός

Κενό σύνολο ονομάζεται ένα σύνολο που δεν έχει στοιχεία και συμβολίζεται με { } ή ∅ .

Παράδειγμα:
Δεν υπάρχει φυσικός αριθμός που να είναι λύση της εξίσωσης $x + 3 = 0$. Άρα το σύνολο Α των λύσεών της είναι $A = \emptyset$.

Σημείωση

Δεχόμαστε ότι το κενό σύνολο είναι υποσύνολο όλων των συνόλων.

Εφαρμογή

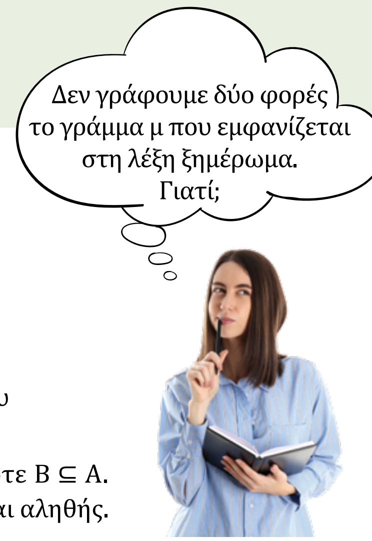
Έστω Α το σύνολο των γραμμάτων της λέξης «ξημέρωμα» και Β το σύνολο των γραμμάτων της λέξης «μέρα».

α. Να γράψετε με αναγραφή τα στοιχεία του συνόλου Α και του συνόλου Β.

β. Να βρείτε το Ν(Α) και το Ν(Β).

γ. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς και ποιες ψευδείς;

i. $\alpha \in A$ **ii.** $\xi \in B$ **iii.** $\nu \notin A$ **iv.** $A \subseteq B$ **v.** $B \subset A$



Απάντηση:

α. $A = \{\xi, \eta, \mu, \varepsilon, \rho, \omega, \alpha\}$ $B = \{\mu, \varepsilon, \rho, \alpha\}$

β. $N(A) = 7$ και $N(B) = 4$

γ. **i.** Το γράμμα α ανήκει στο σύνολο Α, οπότε η πρόταση είναι αληθής.

ii. Το γράμμα ξ δεν ανήκει στο σύνολο Β, οπότε η πρόταση είναι ψευδής.

iii. Το γράμμα ν δεν ανήκει στο σύνολο Α, οπότε η πρόταση είναι αληθής.

iv. Επειδή το ξ είναι στοιχείο του συνόλου Α, αλλά δεν είναι και στοιχείο του συνόλου Β, η πρόταση είναι ψευδής.

v. Όλα τα στοιχεία του συνόλου Β είναι και στοιχεία του συνόλου Α, οπότε $B \subseteq A$. Ωστόσο $\xi \in A$ αλλά $\xi \notin B$ και επομένως $A \neq B$. Άρα $B \subset A$ και η πρόταση είναι αληθής.

Αυτοαξιολόγηση

Έστω Α το σύνολο των γραμμάτων της λέξης «ξεκουράζομαι» και Β το σύνολο των γραμμάτων της λέξης «μοιράζω».

α. Ποια είναι τα στοιχεία των συνόλων Α και Β;

β. Να βρεθούν οι Ν(Α), Ν(Β).

γ. Ποιος από τους παρακάτω ισχυρισμούς είναι αληθής;

i. $\alpha \in A$ **ii.** $\xi \in B$ **iii.** $\nu \notin A$ **iv.** $A \subseteq B$ **v.** $B \subset A$

Ασκήσεις

1. Να ελεγχθεί ποια από τις παρακάτω προτάσεις ορίζει σύνολο.

α. Α = {οι πλούσιοι άνθρωποι του πλανήτη}

β. Β = {οι ασθενείς που έχουν καρδιακά προβλήματα σε ένα συγκεκριμένο νοσοκομείο της Κρήτης}

γ. Γ = {τα καΐκια των κατοίκων της Χίου}

δ. Δ = {οι καλύτερες ποδοσφαιρικές ομάδες}

ε. Ε = {οι πολλοί μεγάλοι αριθμοί}

2. Να γράψετε με τα κατάλληλα σύμβολα τις παρακάτω προτάσεις.

α. Το 7 είναι στοιχείο ενός συνόλου Α.

β. Το 8 δεν είναι στοιχείο ενός συνόλου Β.

γ. Το γράμμα β δεν είναι φωνήεν της ελληνικής γλώσσας.

δ. Το σύνολο {3, 5, 7} είναι υποσύνολο του {2, 3, 4, 5, 6, 7}.

3. Για καθένα από τα παρακάτω σύνολα Α να βρείτε το Ν(Α).

α. Α = {οι ωκεανοί της γης}

β. Α = {οι ημέρες της εβδομάδας}

γ. Α = {τα λεπτά μιας ώρας}

δ. Α = {οι διαιρέτες του 12}

ε. Α = {τα γράμματα που σχηματίζουν τη λέξη ΚΑΛΟΚΑΙΡΙ}

4. Δίνονται τα σύνολα Α = {1, 2, 3, 5, 7, 8, 9} και Β = {2, 7, 9}
   α. Να βρείτε τους πληθικούς αριθμούς Ν(Α) και Ν(Β).
   β. Να ελέγξετε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ή λάθος.
   i. 5∈Α **ii.** 6∉Β **iii.** 4∈Β **iv.** Β ⊂ Α

5. **α.** Να γράψετε:
   i. Το σύνολο Α που σχηματίζεται με τα γράμματα της λέξης «βαρίδι».
   ii. Το σύνολο Β που σχηματίζεται με τα γράμματα της λέξης «βραδιά».
   β. Τι παρατηρείτε για τις λέξεις και το πλήθος των στοιχείων των Α, Β;

6. Δίνονται τα σύνολα:
   Α = {πρώτοι αριθμοί ανάμεσα στους 30 και 40}
   Β = {άρτιοι αριθμοί ανάμεσα στους 30 και 40}
   Γ = {σύνθετοι αριθμοί ανάμεσα στους 30 και 40}
   Δ = {πολλαπλάσια του 21 ανάμεσα στους 30 και 40}
   α. Να γράψετε τα σύνολα με αναγραφή.
   β. Να βρείτε Ν(Α) και Ν(Δ).
   γ. Ποιο από τα παραπάνω σύνολα είναι
   i. υποσύνολο του Α;
   ii. γνήσιο υποσύνολο του Γ;

7. **α.** Να δημιουργήσετε σύνολα με αντικείμενα που βλέπετε μέσα στην τάξη σας.
   β. Να βρείτε το πλήθος των στοιχείων τους καθώς και κάποια υποσύνολά τους.

ΘΥΜΑΜΑΙ:
- Ένας αριθμός που έχει διαιρέτες μόνο το 1 και τον εαυτό του ονομάζεται **πρώτος**.
- Ένας αριθμός που έχει περισσότερους από 2 διαιρέτες ονομάζεται **σύνθετος**.

«Λεξιμαχίες». Να ανοίξετε το ψηφιακό δόμημα και να κάνετε τις δραστηριότητες που προτείνονται.

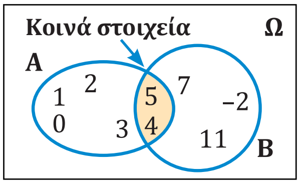
2.2 • Διαγράμματα VENN – Η Άλγεβρα των Συνόλων

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/ήτριες να μπορούν:

Να αναγνωρίζουν και να δηλώνουν σχέσεις και πράξεις μεταξύ συνόλων με χρήση διαφορετικών αναπαραστάσεων και λεκτικά με κατάλληλη χρήση των συνδέσμων «ή» και «και».

Για να γίνουν καλύτερα αντιληπτές οι σχέσεις μεταξύ συνόλων χρησιμοποιούμε διαγράμματα.

Διαγράμματα Venn είναι τα διαγράμματα τα οποία χρησιμοποιούν κλειστές γραμμές όπως τεμνόμενους κύκλους, ελλείψεις ή ορθογώνια για να εμφανίσουν τις σχέσεις μεταξύ συνόλων. Οι ομοιότητες ή τα κοινά στοιχεία απεικονίζονται στα τεμνόμενα τμήματα των κλειστών γραμμών και οι διαφορές ή τα μη κοινά τους στοιχεία στα μη τεμνόμενα τμήματά τους.



Τα σύνολα τα οποία κάθε φορά απεικονίζουμε θεωρούνται υποσύνολα ενός συνόλου αναφοράς που ονομάζουμε **βασικό σύνολο** και συμβολίζουμε με Ω.

Το βασικό σύνολο Ω το παριστάνουμε με το εσωτερικό ενός ορθογωνίου και κάθε υποσύνολό του με το εσωτερικό μιας κλειστής γραμμής που βρίσκεται στο εσωτερικό του Ω.

Εφαρμογή

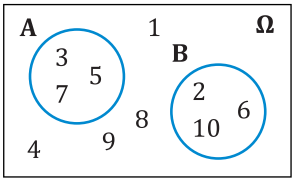
Αν Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, να παρουσιάσετε με διαγράμματα Venn τα παρακάτω σύνολα.

α. Α = {3, 5, 7} και Β = {2, 6, 10}
β. Α = {2, 4, 6, 8, 9} και Β = {1, 3, 6, 10}
γ. Α = {3, 5, 6, 8, 9, 10} και Β = {5, 9, 10}

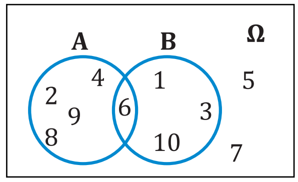
Σε ποια περίπτωση είναι Β ⊆ Α;

Απάντηση:

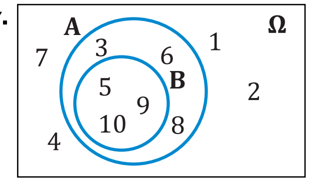
α.



β.



γ.



Στην περίπτωση **(γ)** είναι B ⊆ A, αφού όλα τα στοιχεία του συνόλου B ανήκουν και στο σύνολο A.

Διερεύνηση

Στην πόλη μας εκδίδονται δύο εφημερίδες, η Πρωινή και η Μεσημεριανή. Ρωτήσαμε 10 ανθρώπους ποια εφημερίδα διαβάζουν και πήραμε τις εξής απαντήσεις: Οι A_1, A_2, A_5, A_6, A_7 διαβάζουν την Πρωινή και οι A_1, A_4, A_8, A_9, A_{10} τη Μεσημεριανή.

α. Πώς μπορούμε να παρουσιάσουμε τις παραπάνω πληροφορίες σε ένα διάγραμμα Venn;

β. Ποιοι διαβάζουν:

i. και τις δύο εφημερίδες; **ii.** τουλάχιστον μία από τις δύο εφημερίδες; **iii.** την Πρωινή αλλά όχι τη Μεσημεριανή;

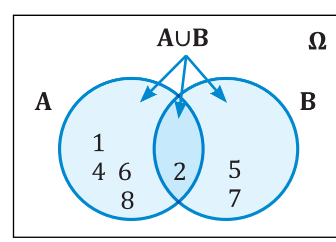
γ. Ποιοι δεν διαβάζουν καμία από τις δύο εφημερίδες;

Ένωση Συνόλων

Για τα σύνολα A = {1, 2, 4, 6, 8} και B = {2, 5, 7} μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα σύνολο το οποίο να περιέχει τα κοινά και μη κοινά στοιχεία τους. Το σύνολο αυτό το ονομάζουμε ένωση των συνόλων A και B και στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι το σύνολο {1, 2, 4, 5, 6, 7, 8}.

Ορισμός

Ένωση δύο υποσυνόλων A, B ενός βασικού συνόλου Ω ονομάζεται το σύνολο των στοιχείων του Ω που ανήκουν **τουλάχιστον σε ένα** από τα σύνολα A και B και συμβολίζεται με **A ∪ B**.



Σημειώσεις

1. Ένα στοιχείο ανήκει στην ένωση **A ∪ B** δύο συνόλων **A, B** όταν **«ανήκει στο σύνολο A ή ανήκει στο σύνολο B»**.
2. Στην ένωση δύο συνόλων τα κοινά τους στοιχεία αναγράφονται μόνο μία φορά.

Τομή Συνόλων

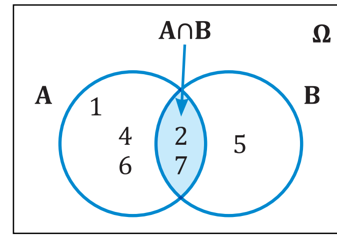
Για τα σύνολα A = {1, 2, 4, 6, 7} και B = {2, 5, 7} μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα σύνολο το οποίο να περιέχει μόνο τα κοινά τους στοιχεία. Το σύνολο αυτό ονομάζουμε τομή των συνόλων A, B και στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι το σύνολο {2, 7}.

Σημείωση

Ένα στοιχείο ανήκει στην τομή **A ∩ B** δύο συνόλων **A, B** όταν **«ανήκει στο σύνολο A και στο σύνολο B»**.

Ορισμός

Τομή δύο υποσυνόλων Α, Β ενός βασικού συνόλου Ω ονομάζεται το σύνολο των στοιχείων του Ω που ανήκουν **και** στα δύο σύνολα Α, Β και συμβολίζεται με **Α ∩ Β.**



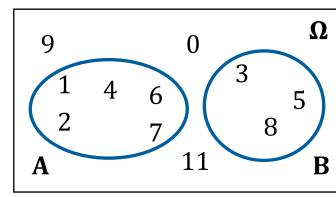
Ξένα Σύνολα

Τα σύνολα Α = {1, 2, 4, 6, 7} και Β = {3, 5, 8} δεν έχουν κοινά στοιχεία και επομένως η τομή τους είναι το κενό σύνολο. Για σύνολα όπως αυτά διατυπώνουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Να ανοίξετε το ψηφιακό δόμημα **«Πράξεις με σύνολα πολλαπλασίων αριθμών»** και να κάνετε τις δραστηριότητες που προτείνονται.

Ορισμός

Ξένα ονομάζονται δύο σύνολα Α, Β όταν η τομή τους είναι το κενό σύνολο.



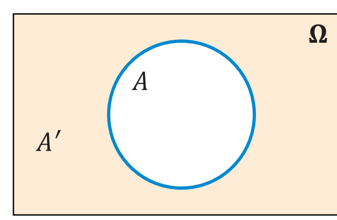
Συμβολικά: Α ∩ Β = ∅

Συμπλήρωμα Συνόλου

Αν Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} και Α = {1, 3, 5}, τότε τα στοιχεία που ανήκουν στο Ω αλλά όχι στο σύνολο Α, δημιουργούν ένα άλλο σύνολο Β = {2, 4, 6, 7}.

Ορισμός

Συμπλήρωμα ή Συμπληρωματικό σύνολο ενός υποσυνόλου Α ενός βασικού συνόλου Ω ονομάζεται το σύνολο των στοιχείων του Ω που δεν ανήκουν στο Α και συμβολίζεται με **Α′**.



Το σύνολο Α′ ονομάζεται και **αντίθετο** του συνόλου Α.
Από τα παραπάνω προκύπτει άμεσα ότι: • **Α ∩ Α′ = ∅** • **Α ∪ Α′ = Ω**

Σημείωση
Διαφορά ενός συνόλου **Β** από ένα σύνολο **Α** ονομάζεται το σύνολο των στοιχείων του Α που δεν ανήκουν στο Β και συμβολίζεται με **Α – Β.**

Για να εξασκηθείτε στις πράξεις συνόλων, να ανοίξετε το ψηφιακό δόμημα και να βρείτε τα ζητούμενα σύνολα.

Εφαρμογή 1

Δίνεται το βασικό σύνολο Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} και τα παρακάτω ζεύγη συνόλων.
- Α = {1, 3, 6, 8} και Β = {2, 3, 4, 5, 8}
- Γ = {1, 3, 6, 7, 8} και Δ = {3, 6, 8}
- Ε = {2, 4, 8} και Ζ = {1, 3, 5}

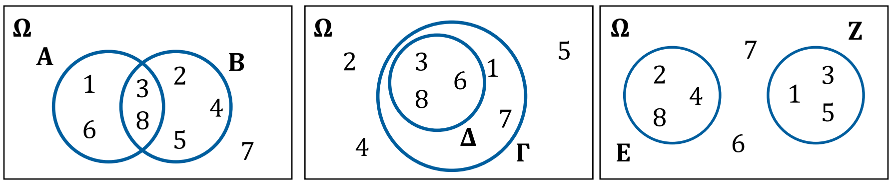
α. Να παραστήσετε σε διάγραμμα Venn τα παραπάνω ζεύγη συνόλων.
β. Να βρείτε την ένωση και την τομή των παραπάνω συνόλων.
γ. Στην περίπτωση των συνόλων Γ και Δ όπου είναι Δ ⊆ Γ, τι συμπεραίνετε για την ένωση και την τομή τους;

Να πειραματιστείτε με τη δραστηριότητα για να εξοικειωθείτε με τις πράξεις δύο συνόλων.

δ. Να βρείτε το συμπλήρωμα A' του συνόλου A καθώς και το σύνολο $A \cup A'$. Τι παρατηρείτε;
ε. Να βρείτε τα σύνολα $A - B$ και $A \cap B'$. Τι παρατηρείτε;
στ. Να βρείτε τα σύνολα $(A \cup B)'$ και $A' \cap B'$. Τι παρατηρείτε;
ζ. Να βρείτε τα σύνολα $(A \cap B)'$ και $A' \cup B'$. Τι παρατηρείτε;

Απάντηση:

α.



β. Με τη βοήθεια των παραπάνω διαγραμμάτων βρίσκουμε ότι:
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$ και $A \cap B = \{3, 8\}$
$\Gamma \cup \Delta = \{1, 3, 6, 7, 8\}$ και $\Gamma \cap \Delta = \{3, 6, 8\}$
$E \cap Z = \emptyset$

γ. Στην περίπτωση όπου $\Delta \subseteq \Gamma$ παρατηρούμε ότι:
$\Gamma \cup \Delta = \Gamma$ και $\Gamma \cap \Delta = \Delta$.

Σημείωση.
Το συμπέρασμα αυτό ισχύει σε κάθε τέτοια περίπτωση, δηλαδή αν $A \subseteq B$, τότε $A \cup B = B$ και $A \cap B = A$.

δ. Είναι $A' = \{2, 4, 5, 7\}$ και παρατηρούμε ότι: $A \cup A' = \Omega$.
ε. Είναι $A - B = \{1, 6\}$, $B' = \{1, 6, 7\}$ και $A \cap B' = \{1, 6\}$. Παρατηρούμε ότι $\mathbf{A - B = A \cap B'}$.
στ. Είναι $(A \cup B)' = \{7\}$ και $A' \cap B' = \{2, 4, 5, 7\} \cap \{1, 6, 7\} = \{7\}$. Παρατηρούμε ότι $(A \cup B)' = A' \cap B'$.
ζ. Είναι $(A \cap B)' = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$ και $A' \cup B' = \{2, 4, 5, 7\} \cup \{1, 6, 7\} = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$.
Παρατηρούμε ότι $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

Σχόλιο

Αποδεικνύεται ότι για οποιαδήποτε σύνολα A, B ισχύει ότι: $\mathbf{(A \cup B)' = A' \cap B'}$ και $\mathbf{(A \cap B)' = A' \cup B'}$

Εφαρμογή 2

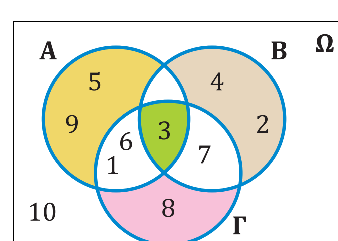
Δίνεται το βασικό σύνολο $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ και τα σύνολα
$A = \{1, 3, 5, 6, 9\}$, $B = \{2, 3, 4, 7\}$ και $\Gamma = \{1, 3, 6, 7, 8\}$

α. Να παραστήσετε με ένα διάγραμμα Venn τα σύνολα A, B και Γ.
β. Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα σύνολα:
i. $A \cap B$ **ii.** $B \cup \Gamma$ **iii.** $A \cup (B \cap \Gamma)$ **iv.** $A \cap (B \cup \Gamma)$ **v.** $A \cap B \cap \Gamma$ **vi.** $A' \cap B'$
γ. Να βρείτε το σύνολο Δ που αποτελείται από όλα τα υποσύνολα του B.
δ. Ισχύει ότι $\Delta \subseteq B$;
ε. Ισχύει ότι $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$;
στ. Ισχύει ότι $A \cap B(B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$;

Να πειραματιστείτε με τη δραστηριότητα για να εξασκηθείτε με τις πράξεις τριών συνόλων.

Απάντηση:

α. Το διάγραμμα Venn είναι:



β. **i.** $A \cap B = \{3\}$
ii. $B \cup \Gamma = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$
iii. Είναι $B \cap \Gamma = \{3, 7\}$, οπότε $A \cup (B \cap \Gamma) = \{1, 3, 5, 6, 9\} \cup \{3, 7\} = \{1, 3, 5, 6, 7, 9\}$
iv. Είναι $B \cup \Gamma = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$,
οπότε $A \cap (B \cup \Gamma) = \{1, 3, 5, 6, 9\} \cap \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\} = \{1, 3, 6\}$
v. $A \cap B \cap \Gamma = \{3\}$
vi. Είναι $A' = \{2, 4, 7, 8, 10\}$ και $B' = \{1, 5, 6, 8, 9, 10\}$, οπότε $A' \cap B' = \{8, 10\}$

γ. $\Delta = \{\{\ \}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{7\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 7\}, \{3, 4\}, \{3, 7\}, \{4, 7\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 7\}, \{2, 4, 7\}, \{3, 4, 7\}, \{2, 3, 4, 7\}\}$

δ. Όχι, γιατί τα στοιχεία του Δ είναι σύνολα και επομένως κανένα στοιχείο του δεν είναι και στοιχείο του Β. Φανερά $\Delta \cap B = \emptyset$.

ε. Στο β(iii) είδαμε ότι $A \cup (B \cap \Gamma) = \{1, 3, 5, 6, 7, 9\}$. Εξάλλου $(A \cup B) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$, $(A \cup \Gamma) = \{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$ και $(A \cup B) \cap (A \cup \Gamma) = \{1, 3, 5, 6, 7, 9\}$, οπότε ισχύει ότι: $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$.

στ. Στο β(iv) είδαμε ότι $A \cap (B \cup \Gamma) = \{1, 3, 6\}$. Εξάλλου $(A \cap B) = \{3\}$, $(A \cap \Gamma) = \{1, 3, 6\}$ και $(A \cap B) \cup (A \cap \Gamma) = \{1, 3, 6\}$, οπότε ισχύει ότι: $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$.

Σημείωση

Οι ισότητες που είδαμε στα ερωτήματα (ε) και (στ) ισχύουν για οποιαδήποτε σύνολα:
- $\mathbf{A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)}$ *(Επιμεριστική ιδιότητα της ένωσης ως προς την τομή)*
- $\mathbf{A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)}$ *(Επιμεριστική ιδιότητα της τομής ως προς την ένωση)*

Αυτοαξιολόγηση

α. **i.** Πώς ορίζεται η ένωση και η τομή δύο συνόλων Α και Β;
ii. Ποια είναι τα σύμβολά τους;
iii. Πώς αναπαρίστανται σε ένα διάγραμμα Venn;

β. Τι είναι το συμπλήρωμα ενός συνόλου Α; Ποιο είναι το διάγραμμα Venn για το συμπλήρωμα;

γ. Σωστό ή λάθος ότι για κάθε σύνολο Α, ισχύει: **i.** $\emptyset \cup A = A$ **ii.** $\emptyset \cap A = A$;

δ. Αν για δύο σύνολα Α, Β ισχύει ότι $N(A) = N(B)$, τότε $A = B$;

ε. Δίνεται το βασικό σύνολο $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ και τα παρακάτω σύνολα.

$$A = \{1, 3, 6, 8\} \text{ και } B = \{2, 3, 4, 5\} \text{ και } \Gamma = \{1, 3, 6, 7, 8\}$$

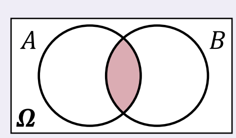
i. Να παρασταθούν τα παραπάνω σύνολα σε διάγραμμα Venn.
ii. Να βρείτε τα σύνολα $A \cup B$, $B \cap \Gamma$ και Γ'.
iii. Να ελέγξετε αν ισχύει $A \cap B \subseteq B$ και $\Gamma \subseteq A \cup \Gamma$.

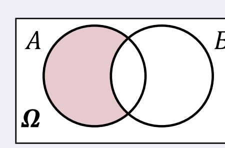
Ερωτήσεις Κατανόησης

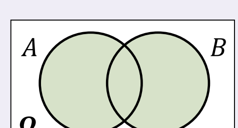
1. α. Αν $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 < x \leq 4\}$, να δημιουργήσετε ένα υποσύνολο του Α.
β. Αν $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ άρτιοι}\}$, να δημιουργήσετε ένα υποσύνολο του Α.
γ. Αν Α = {ημέρες της εβδομάδας}, να δημιουργήσετε ένα υποσύνολο του Α.
δ. Αν Α = {μουσικά συγκροτήματα}, μπορείς να φτιάξεις ένα υποσύνολό του; Συνεργάσου με τον διπλανό σου για να δώσετε μια απάντηση.

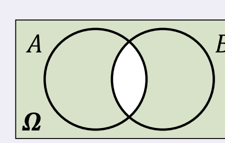
2. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ή λανθασμένες δικαιολογώντας την απάντησή σας.
α. Αν Α και Β είναι δύο ξένα μεταξύ τους σύνολα, τότε και τα Α΄ και Β΄ είναι ξένα σύνολα.
β. Αν Α και Β είναι δύο ξένα μεταξύ τους σύνολα, τότε είναι και αντίθετα.
γ. Αν για δύο σύνολα Α, Β ισχύει ότι $A \cup B = \Omega$, τότε είναι αντίθετα.
δ. Αν $A \cup \Gamma = B \cup \Gamma$, τότε $A = B$.

3. Να περιγράψετε με τις πράξεις των συνόλων τα χρωματισμένα σχήματα στα παρακάτω διαγράμματα Venn.

α.


β.


γ.


δ.


Ασκήσεις

1. Να κατασκευάσετε διαγράμματα Venn για τις παρακάτω περιπτώσεις συνόλων.
α. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{2, 4, 6\}$ και $B = \{3, 7\}$
β. $\Omega = \{2, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$, $A = \{2, 3, 7, 9, 11\}$ και $B = \{5, 7, 13\}$
γ. $\Omega = \{1, 3, 5, 7, 8, 10\}$, $A = \{3, 5, 7, 8\}$ και $B = \{5, 7\}$

2. Δίνονται τα σύνολα $\Omega = \{x \in \mathbb{Z} \mid -4 \leq x < 5\}$, $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x < 4\}$ και $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x < 3\}$.

α. Να γράψετε τα παραπάνω σύνολα με αναγραφή.

β. Να κατασκευάσετε διαγράμματα Venn για τις παραπάνω περιπτώσεις συνόλων.

γ. Είναι σωστό ή λάθος ότι $B \subseteq A$;

δ. Δημιουργήστε δικά σας υποσύνολα του συνόλου Α.

3. Δίνεται το βασικό σύνολο $\Omega = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 12\}$ και τα σύνολα Α = {περιττοί φυσικοί αριθμοί μικρότεροι του 11} και Β = {φυσικοί πρώτοι αριθμοί μικρότεροι 12}.

α. Να γράψετε τα σύνολα Ω, Α και Β με αναγραφή.

β. Να παραστήσετε τα σύνολα Ω, Α και Β με διαγράμματα Venn.

γ. Να βρείτε τα σύνολα $A \cap B$, $A \cup B$ και A'.

4 Δίνεται $\Omega = \mathbb{Z}$ και τα σύνολα $A = \{x \in \mathbb{N} \mid -4 \leq x \leq 5\}$ και $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -4 \leq x < 5\}$.

α. Να γράψετε με αναγραφή τα σύνολα Α και Β.

β. Να βρείτε τα σύνολα $A \cap B$ και το $A \cup B$.

γ. Αν $\Gamma = \{x \in \mathbb{Z} \mid -4 \leq x \leq 5\}$, να ελέγξετε αν ισχύει ότι $A = \Gamma$, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

5. Δίνεται το βασικό σύνολο $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ και τα σύνολα $A = \{3, 4, 6, 7, 8, 10\}$ και $B = \{1, 4, 6, 8, 9\}$ και $\Gamma = \{2, 5, 7, 10\}$:

α. Να παραστήσετε τα σύνολα Ω, Α, Β και Γ με διαγράμματα Venn.

β. Να βρείτε τα σύνολα:

i. $A \cup \Gamma$ **ii.** $A \cap B$ **iii.** $B \cap \Gamma$

γ. Να βρείτε τα σύνολα:

i. A' **ii.** B' **iii.** Γ'

iv. $A' \cup B'$ **v.** $A' \cap B$ **vi.** $A' \cup \Gamma'$

δ. Να βρείτε τα σύνολα:

i. $A \cap B \cap \Gamma'$ **ii.** $A \cup B' \cup \Gamma'$ **iii.** $(A' \cup B') \cap \Gamma'$

6. Έστω Ω το σύνολο των θετικών ακέραιων και τα σύνολα:

$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 6 \leq x \leq 15\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 12 \leq x \leq 20\}$

$\Gamma = \{x \in \mathbb{Z} \mid 17 \leq x \leq 24\}$.

α. Να γράψετε με αναγραφή τα σύνολα Α, Β και Γ.

β. Να βρείτε τα σύνολα:

i. $A \cap B$ **ii.** $A \cap \Gamma$ **iii.** $B \cap \Gamma$

γ. Να βρείτε τα σύνολα:

i. $A \cup B$ **ii.** $\Gamma \cup B$ **iii.** $A \cup \Gamma$

δ. Να βρείτε τα σύνολα:

i. $(A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$

ii. $(A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$

iii. $A \cap (B \cup \Gamma)$

ε. Να εξετάσετε αν ισχύουν οι ισότητες:

i. $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$

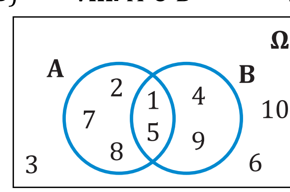
ii. $A \cup (B \cup \Gamma) = (A \cup B) \cup \Gamma$

7. α. Με βάση το διάγραμμα Venn, να γράψετε με αναγραφή τα σύνολα:

i. A **ii.** B **iii.** A'

iv. B' **v.** $A \cap B$ **vi.** $A \cup B$

vii. $(A \cup B)'$ **viii.** $A' \cup B'$ **ix.** $A' \cap B'$



β. Από τα ερωτήματα (vii), (viii), (ix), ποια ισότητα διαπιστώνετε ότι ισχύει;

γ. Το σύνολο $(A \cap B)'$ είναι ίσο με το σύνολο $A' \cap B'$ ή με το σύνολο $A' \cup B'$;

2.3 • Ανακεφαλαίωση 2ου Κεφαλαίου

Θεωρία

- **Σύνολο** είναι κάθε συλλογή αντικειμένων που προέρχεται από την εμπειρία μας ή τη διανόησή μας, είναι καλά ορισμένα και διακρίνονται το ένα από το άλλο.
- **Στοιχεία ή μέλη ενός συνόλου** ονομάζουμε τα αντικείμενα που αποτελούν το σύνολο.
- Το σύμβολο $\in$ σημαίνει «είναι στοιχείο του συνόλου» και διαβάζεται «ανήκει».
- Το σύμβολο $\notin$ σημαίνει «δεν είναι στοιχείο του συνόλου» και διαβάζεται «δεν ανήκει».
- **Πληθικός αριθμός** ενός συνόλου Α ονομάζεται το πλήθος των στοιχείων του και συμβολίζεται με **$N(A)$**.
- Αναπαριστούμε τα σύνολα με **περιγραφή**, με **αναγραφή** και με **διαγράμματα Venn**.
- **Πεπερασμένο** ονομάζεται ένα σύνολο όταν περιέχει πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. **Απειροσύνολο** ονομάζεται ένα σύνολο όταν δεν είναι πεπερασμένο.
- **Ίσα** ονομάζονται δύο σύνολα όταν περιέχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία.
- **Υποσύνολο** ενός συνόλου Β ονομάζεται ένα σύνολο Α, όταν και μόνο όταν κάθε στοιχείο του Α είναι και στοιχείο του Β. Συμβολικά γράφουμε **$A \subseteq B$**.
- **Κενό** ονομάζεται ένα σύνολο που δεν περιέχει στοιχεία και το συμβολίζουμε $\emptyset$.
- **Ένωση δύο υποσυνόλων Α, Β** ενός βασικού συνόλου Ω λέγεται το σύνολο των στοιχείων του Ω που ανήκουν τουλάχιστον σε ένα από τα σύνολα Α και Β και συμβολίζεται με **$A \cup B$**.

• **Τομή δύο υποσυνόλων A, B** ενός βασικού συνόλου Ω λέγεται το σύνολο των στοιχείων του Ω που ανήκουν και στα δύο σύνολα A, B και συμβολίζεται με **A ∩ B**.

• **Συμπλήρωμα ή Συμπληρωματικό σύνολο** ενός υποσυνόλου A ενός βασικού συνόλου Ω λέγεται το σύνολο των στοιχείων του Ω που δεν ανήκουν στο A και συμβολίζεται με A′.

Επαναληπτικές Ασκήσεις

1. Έστω K το σύνολο των γραμμάτων της λέξης ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ και Λ το σύνολο των γραμμάτων της λέξης ΓΡΑΜΜΗ.

α. Να γράψετε με αναγραφή τα στοιχεία του συνόλου K και του συνόλου Λ.

β. Να βρείτε το N(K) και το N(Λ).

γ. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος;

i. $A \in K$ **ii.** $\Delta \in \Lambda$ **iii.** $I \notin \Lambda$ **iv.** $K \subseteq \Lambda$ **v.** $\Lambda \subset K$

δ. Να βρείτε τα σύνολα:

i. $K \cap \Lambda$ **ii.** $K \cup \Lambda$

2. Έστω $\Omega = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 15\}$ και τα σύνολα:
$A = \{x \in \Omega \mid$ διαιρέτες του $60\}$, $B = \{x \in \Omega \mid$ πολλαπλάσια του $5\}$ και $\Gamma = \{x \in \Omega \mid x$ άρτιοι$\}$

α. Να γράψετε με αναγραφή τα στοιχεία των συνόλων A, B και Γ.

β. Να παρουσιάσετε με διαγράμματα Venn τα σύνολα A, B και Γ.

γ. Να ελέγξετε ποιο από τα επόμενα είναι αληθές:

i. $A \subseteq \Gamma$ **ii.** $B \subseteq A$ **iii.** $B \subseteq \Gamma$

δ. Να βρείτε τα σύνολα: **i.** $A \cap B$ **ii.** $B \cup \Gamma$ **iii.** $A \cup \Gamma'$

ε. Να βρείτε τα σύνολα: **i.** $A' \cap B'$ **ii.** $A' \cup B'$ **iii.** $(A \cap \Gamma)'$

στ. Να εξετάσετε αν ισχύει ότι:

i. $(A \cap \Gamma)' = A' \cup \Gamma'$ **ii.** $A' \cap B' = (A \cup B)'$

3. α. Αν $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x \leq 5\}$, να βρείτε δύο υποσύνολα του A.

β. Αν $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ περιττοί$\}$, να βρείτε δύο υποσύνολα του A.

γ. Αν A = {μήνες του χρόνου}, να βρείτε δύο υποσύνολα του A.

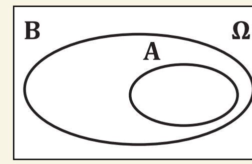
4. Να γράψετε όλα τα υποσύνολα του συνόλου $A = \{1, 2, 3\}$.

5. Σε ξεχωριστά διαγράμματα Venn, όπως το παρακάτω, να γραμμοσκιάσετε τα σύνολα:

α. A'

β. $A \cap B$

γ. $B \cap A'$



Ποια σχέση συνδέει τα σύνολα A και B′;

6. Ρωτήσαμε 10 μαθητές του σχολείου μας σε ποια σχολική δραστηριότητα παίρνουν μέρος και πήραμε τις εξής απαντήσεις:
Οι A_1, A_4, A_5, A_6, A_7 είναι μέλη του μουσικού συγκροτήματος και οι A_1, A_2, A_7, A_8, A_9, A_{10} είναι μέλη της ομάδας μπάσκετ.

α. Να παρουσιάσετε τις παραπάνω πληροφορίες σε ένα διάγραμμα Venn.

β. Ποιοι μαθητές παίρνουν μέρος:

i. και στις δύο σχολικές δραστηριότητες;

ii. σε τουλάχιστον μία από τις δύο δραστηριότητες;

iii. στην ομάδα μπάσκετ αλλά όχι στο μουσικό συγκρότημα;

γ. Ποιοι δεν παίρνουν μέρος σε καμία δραστηριότητα;

7. Σε καθεμία από τις παρακάτω ερωτήσεις να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

α. Για δύο σύνολα A και B ισχύει πάντα

i. $A \subseteq A \cap B$ **ii.** $B \subseteq A \cap B$
iii. $A \cup B \subseteq B$ **iv.** $A \cap B \subseteq A \cup B$

β. Για δύο σύνολα A και B ισχύει πάντα

i. $A \subseteq A \cup B$ **ii.** $A \cup B \subseteq A$
iii. $B \subseteq A \cup B$ **iv.** $A \cup B \subseteq A \cap B$

8. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις να συμπληρώσετε τα κενά.

α. Δίνεται το βασικό σύνολο Ω, το κενό σύνολο ∅ και τα σύνολα $A, B \subseteq \Omega$. Τότε:

i. $\emptyset' =$ …… **ii.** $\Omega' =$ …… **iii.** $(A')' =$ ……

β. Αν $A \subseteq B$, τότε:

i. $A \cup B =$ …… **ii.** $A \cap B =$ …… **iii.** $A \cap B' =$ ……

Μαγικά με σύνολα αριθμών

Ερωτήσεις Σωστού - Λάθους στις πράξεις με δύο σύνολα

Φύλλο Αξιολόγησης 2ου Κεφαλαίου

Γλωσσάρι 2ου Κεφαλαίου

Κεφάλαιο

3

Εξισώσεις

- Παραμετρικές εξισώσεις 1ου βαθμού
- Η εξίσωση $x^ν = α$
- Εξισώσεις 2ου βαθμού

Ένας αστροναύτης που βρίσκεται στην επιφάνεια του φεγγαριού πετάει ένα μπαλάκι του τένις κατακόρυφα προς τα πάνω. Το ίδιο κάνει και ένας άνθρωπος που βρίσκεται στη Γη.

Πώς άραγε αυτή η ρίψη μπορεί να μας οδηγήσει σε εξισώσεις 2ου βαθμού;

3.1 • Παραμετρικές Εξισώσεις 1ου Βαθμού

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/ήτριες να μπορούν:

Να επιλύουν απλές παραμετρικές εξισώσεις 1ου βαθμού και ρεαλιστικά προβλήματα που ανάγονται σε εξισώσεις αυτής της μορφής.

Στο Γυμνάσιο μάθαμε τον τρόπο επίλυσης εξισώσεων της μορφής $αx + β = 0$ **(1)** με $α, β \in \mathbb{R}$.

Συγκεκριμένα:

- Αν **$α \neq 0$**, τότε η (1) γράφεται: $αx = -β$ και έχει **ακριβώς μία λύση** την $x = -\frac{β}{α}$.
- Αν **$α = 0$**, τότε η (1) γράφεται **$0x = -β$**, οπότε:
  - ▶ αν **$β \neq 0$** η τελευταία δεν έχει λύση. Άρα η (1) είναι **αδύνατη**.
  - ▶ αν **$β = 0$** η τελευταία γράφεται $0x = 0$ και αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x. Άρα η (1) είναι **αόριστη** ή αλλιώς **ταυτότητα**.

Ρίζα ή **λύση** μιας εξίσωσης λέμε κάθε αριθμό που την επαληθεύει.

Παραδείγματα:

α. Η εξίσωση $3x + 4 = 0$ είναι της μορφής $αx + β = 0$, με $α = 3$ και $β = 4$.

Επειδή $α = 3 \neq 0$ η εξίσωση έχει *μία ακριβώς λύση*: $3x + 4 = 0 \Leftrightarrow 3x = -4 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{3}$

β. Η εξίσωση $2(x-1) + 3 = 2x$ γράφεται:

$2(x - 1) + 3 = 2x \Leftrightarrow 2x - 2 + 3 = 2x \Leftrightarrow 2x - 2x = 2 - 3 \Leftrightarrow 0x = -1$

Επειδή $α = 0$ και $β = -1 \neq 0$, η τελευταία εξίσωση οπότε και η αρχική είναι *αδύνατη*.

γ. Η εξίσωση $3(x - 4) - x = 2(x - 6)$ γράφεται:

$3(x - 4) - x = 2(x - 6) \Leftrightarrow 3x - 12 - x = 2x - 12 \Leftrightarrow 3x - x - 2x = 12 - 12 \Leftrightarrow 0x = 0$

Επειδή $α = 0$ και $β = 0$, η τελευταία εξίσωση οπότε και η αρχική είναι *αόριστη ή ταυτότητα*.

«Αριθμητική λύση εξισώσεων»
Για καλύτερη κατανόηση να πειραματιστείτε με τη δραστηριότητα του συνδέσμου.

Διερεύνηση

Μια εταιρεία ενοικίασης αυτοκινήτων ακολουθεί το εξής μοντέλο Α χρέωσης: Πάγια μηναία χρέωση 50€ και 0,3€ για κάθε χιλιόμετρο κίνησης.

α. Να διατυπώσετε συμβολικά το μοντέλο Α της μηνιαίας χρέωσης της εταιρείας.

β. Η εταιρεία επεξεργάζεται διάφορα σχέδια για το πρόγραμμα αυτό με χρεώσεις οι οποίες θα ξεκινάνε από 0,2€ για κάθε χιλιόμετρο. Πώς διαμορφώνεται ένα τέτοιο μοντέλο Β χρέωσης;

γ. Ένα εναλλακτικό σχέδιο χρέωσης που συζητάει η εταιρεία είναι η μείωση της πάγιας μηνιαίας χρέωσης στο μοντέλο Β κατά 0,2€ για κάθε χιλιόμετρο που διανύεται. Πώς διαμορφώνεται το εναλλακτικό σχέδιο χρέωσης;

δ. Αν ένας πελάτης διαθέτει 250€, πόσα χιλιόμετρα θα μπορούσε να διανύσει σε έναν μήνα με ένα αυτοκίνητο που έχει ενοικιάσει από την εταιρεία με το εναλλακτικό μοντέλο χρέωσης;

ε. Πόσο πρέπει να χρεώνει η εταιρεία ανά χιλιόμετρο, ώστε ένας πελάτης που διαθέτει 250€ να μπορεί να διανύει 2000 χιλιόμετρα τον μήνα σύμφωνα με το εναλλακτικό μοντέλο χρέωσης;

Κάθε εξίσωση που είναι ή ανάγεται στη μορφή $αx + β = 0$, όπου οι α, β είναι πραγματικοί αριθμοί λύνεται όπως αναφέρθηκε παραπάνω.

Ωστόσο υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες οι συντελεστές α, β μιας εξίσωσης της μορφής $αx + β = 0$ εκφράζονται με τη βοήθεια γραμμάτων. Τα γράμματα αυτά ονομάζονται **παράμετροι** και η αντίστοιχη εξίσωση λέγεται **παραμετρική**.

Σε μια τέτοια περίπτωση η διαδικασία που ακολουθούμε για την εύρεση του πλήθους των ριζών της παραμετρικής εξίσωσης ονομάζεται **διερεύνηση**.

Εφαρμογή 1. *Μοντελοποίηση της χρέωσης*

Η εταιρεία κινητής τηλεφωνίας ΠΑΡΛΑΦΟΝ, σε ένα από τα προγράμματά της με συμβόλαιο, χρεώνει τους πελάτες της με πάγιο μηνιαίο τέλος 15€ και χρέωση 0,05€ ανά λεπτό ομιλίας.

α. Να διατυπώσετε συμβολικά αυτό το μοντέλο Α της μηνιαίας χρέωσης της εταιρείας.

β. Η εταιρεία επεξεργάζεται διάφορα σχέδια για το πρόγραμμα αυτό με χρεώσεις οι οποίες θα ξεκινάνε από 0,03€ για κάθε λεπτό ομιλίας. Πώς διαμορφώνεται ένα τέτοιο μοντέλο Β;

γ. Ένα εναλλακτικό σχέδιο χρέωσης που συζητάει η εταιρεία είναι η μείωση της πάγιας μηνιαίας χρέωσης στο μοντέλο Β κατά 0,03€ για κάθε λεπτό ομιλίας. Πώς διαμορφώνεται το εναλλακτικό μοντέλο χρέωσης;

δ. Αν ένας πελάτης διαθέτει 60€, πόσα λεπτά θα μπορούσε να μιλήσει σε έναν μήνα σύμφωνα με το εναλλακτικό μοντέλο χρέωσης;

ε. Πόσο πρέπει να χρεώνει η εταιρεία ανά λεπτό ομιλίας, ώστε ένας πελάτης που διαθέτει 60€ να μπορεί να μιλάει 4500 λεπτά τον μήνα σύμφωνα με το εναλλακτικό μοντέλο χρέωσης;

«Χρέωση τηλεφώνου»
Για καλύτερη κατανόηση να πειραματιστείτε με τη δραστηριότητα του συνδέσμου.

Απάντηση:

α. Έστω x τα λεπτά ομιλίας σε έναν μήνα σ' αυτό το πρόγραμμα. Τότε σε έναν μήνα ο πελάτης θα πληρώσει την πάγια χρέωση και 0,05x για τα λεπτά που θα μιλήσει. Συνεπώς το μοντέλο Α περιγράφεται συμβολικά από τη σχέση $\mathbf{y = 15 + 0{,}05x}$.

β. Αν η χρέωση είναι λ€ με $\lambda \geq 0{,}03$ ανά λεπτό ομιλίας, τότε:

- Αν η χρέωση είναι 0,03€ για κάθε λεπτό ομιλίας, τότε το μοντέλο Β μηνιαίας χρέωσης της εταιρείας θα είναι: $y = 15 + 0{,}03x$.
- Αν η χρέωση είναι 0,04€ για κάθε λεπτό ομιλίας, τότε το μοντέλο Β μηνιαίας χρέωσης της εταιρείας θα είναι: $y = 15 + 0{,}04x$.
- Γενικά, αν η χρέωση είναι λ€ με $\lambda \geq 0{,}03$ ανά λεπτό ομιλίας, τότε το μοντέλο Β μηνιαίας χρέωσης της εταιρείας θα είναι: $y = 15 + \lambda x$, με $\lambda \geq 0{,}03$.

γ. Αφού στο εναλλακτικό μοντέλο της εταιρείας για κάθε λεπτό ομιλίας η πάγια χρέωση μειώνεται κατά 0,03€, τότε το εναλλακτικό μοντέλο διαμορφώνεται ως εξής: $y = 15 + \lambda x - 0{,}03x$ ή $y = 15 + (\lambda - 0{,}03)x$ **(1)**, με $\lambda \geq 0{,}03$.

δ. Αν ένας πελάτης διαθέτει 60€ τον μήνα, τότε $y = 60$ και επομένως από την (1) έχουμε:

$$60 = 15 + (\lambda - 0{,}03)x \Leftrightarrow (\lambda - 0{,}03)x = 45 \quad \mathbf{(2)}$$

- Αν $\lambda = 0{,}03$ η εξίσωση (2) γράφεται $0x = 45$, η οποία είναι αδύνατη.
  Για να ερμηνεύσουμε τι συμβαίνει σ' αυτή την περίπτωση, παρατηρούμε ότι για $\lambda = 0{,}03$ από την (1) προκύπτει $y = 15$. Δηλαδή αν η εταιρεία αφαιρούσε για κάθε λεπτό ομιλίας 0,03€ από την πάγια χρέωση, τότε όλοι οι πελάτες θα μπορούσαν να μιλάνε απεριόριστα πληρώνοντας μόνο τη μηνιαία πάγια χρέωση των 15€.
- Αν $\lambda > 0{,}03$, τότε $\lambda - 0{,}03 > 0 \Rightarrow \lambda - 0{,}03 \neq 0$ οπότε η εξίσωση (2) γράφεται: $x = \dfrac{45}{\lambda - 0{,}03}$ **(3)**.

  Από την εξίσωση αυτή προκύπτει ο αντίστοιχος χρόνος ομιλίας για κάθε τιμή $\lambda > 0{,}03$.

ε. Όπως είδαμε στο προηγούμενο ερώτημα (δ), ο χρόνος ομιλίας στο εναλλακτικό μοντέλο χρέωσης ενός πελάτη που διαθέτει 60€ τον μήνα δίνεται από την (3) με $\lambda > 0{,}03$. Αρκεί λοιπόν να προσδιορίσουμε την τιμή του λ από την (3) για $x = 4500$.

Έτσι έχουμε: $4500 = \dfrac{45}{\lambda - 0{,}03} \Leftrightarrow \lambda - 0{,}03 = 0{,}01 \Leftrightarrow \lambda = 0{,}04$ που είναι αποδεκτή τιμή και επομένως η ζητούμενη χρέωση ανά λεπτό ομιλίας είναι 0,04€.

Εφαρμογή 2. *Παραμετρικές εξισώσεις*

Να λύσετε ως προς x τις παρακάτω εξισώσεις για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ.

α. $\lambda(\lambda-3)x=\lambda-3$ **β.** $\lambda^2x-4x+2=\lambda$

«Διερεύνηση παραμετρικών εξισώσεων». Για καλύτερη κατανόηση να πειραματιστείτε με τη δραστηριότητα του συνδέσμου.

Απάντηση:

α.
- Αν $\lambda\neq0$ και $\lambda\neq3$, η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x=\dfrac{\lambda-3}{\lambda(\lambda-3)}=\dfrac{1}{\lambda}$
- Αν $\lambda=0$, η εξίσωση γράφεται $0x=-3$ οπότε είναι αδύνατη.
- Αν $\lambda=3$, η εξίσωση γράφεται $0x=0$ οπότε είναι ταυτότητα.

β. Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$(\lambda^2-4)x=\lambda-2\Leftrightarrow(\lambda-2)(\lambda+2)x=\lambda-2\quad(1)$$

- Αν $\lambda\neq-2$ και $\lambda\neq2$, η εξίσωση (1) έχει μοναδική λύση την

$$x=\frac{\lambda-2}{(\lambda-2)(\lambda+2)}=\frac{1}{\lambda+2}$$

- Αν $\lambda=-2$, η εξίσωση (1) γράφεται $0x=-4$ οπότε είναι αδύνατη.
- Αν $\lambda=2$, η εξίσωση (1) γράφεται $0x=0$ οπότε είναι ταυτότητα.

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις και να εξηγήσετε τις απαντήσεις σας.

α. Αν η εξίσωση $(\lambda+3)x=(\lambda-1)(\lambda+2)$ έχει ακριβώς μια λύση, τότε $\lambda\neq$ ....

β. Αν η εξίσωση $(\lambda^2-1)x=(\lambda-1)(\lambda+2)$ είναι αδύνατη, τότε $\lambda=$ ....

γ. Αν η εξίσωση $(\alpha^2+\beta^2)x=\alpha+\beta$ είναι ταυτότητα, τότε $\alpha=$ .... και $\beta=$ ....

δ. Αν η εξίσωση $(\lambda^2-16)x-4=\lambda$ έχει άπειρες λύσεις, τότε $\lambda=$ ....

2. Η Σοφία προκειμένου να λύσει την εξίσωση $(\lambda-1)x=\lambda-2$ ως προς x, έθεσε $\lambda=2$ και κατέληξε στο συμπέρασμα ότι η εξίσωση είναι αδύνατη για αυτήν την τιμή. Συμφωνείτε με την απάντησή της; Αν όχι, ποια είναι η σωστή απάντηση;

3. Δίνεται η εξίσωση $\lambda(\lambda+2)x=(\lambda-1)(\lambda+2)$.
Να αντιστοιχίσετε τις τιμές της παραμέτρου λ της Στήλης Α με το αντίστοιχο πλήθος των λύσεων της εξίσωσης στη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $\lambda=0$	**α.** Μία λύση
2. $\lambda=-2$	**β.** Καμία λύση
3. $\lambda=1$	**γ.** Άπειρες λύσεις

Ασκήσεις & Προβλήματα

1. Δίνεται η εξίσωση: $(25-\lambda^2)x=\lambda-5,\ \lambda\in\mathbb{R}$

α. Να λύσετε την εξίσωση για $\lambda=5$, $\lambda=-5$ και $\lambda=6$.

β. Πόσες λύσεις έχει η εξίσωση σε καθεμία από τις προηγούμενες περιπτώσεις;

2. Δίνεται η εξίσωση $\lambda^2(1-x)=3(\lambda x+3)$, όπου x άγνωστος και $\lambda\in\mathbb{R}$ παράμετρος.

α. Να δείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα στη μορφή $\lambda(\lambda+3)x=\lambda^2-9,\ \lambda\in\mathbb{R}$ (1)

β. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση (1):

i. έχει μοναδική λύση

ii. είναι αδύνατη

iii. είναι ταυτότητα

αιτιολογώντας την απάντησή σας.

3. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις, ως προς x, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ.

α. $(\lambda-1)x=\lambda-1$ **β.** $(\lambda^2-9)x=\lambda-3$

4. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις, ως προς x, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ.

α. $(\lambda + 1)(\lambda - 5)x = \lambda - 5$ **β.** $\lambda(x - \lambda) = 4(x - 4)$

5. Να δείξετε ότι έχει πάντα λύση ως προς x, για τις διάφορες τιμές των πραγματικών αριθμών α και β η εξίσωση: $(x + \alpha)^2 - 4\beta^2 = x(x + \alpha - \beta) - 3\alpha^2$.

6. Ένα γυμναστήριο στη Θεσσαλονίκη προσφέρει στους πελάτες του το εξής πρόγραμμα συνδρομής: *«70€ εγγραφή και 30€ ανά μήνα»*.

α. Να διατυπώσετε συμβολικά το μοντέλο Α της χρέωσης της εταιρείας.

β. Ο ιδιοκτήτης του γυμναστηρίου επεξεργάζεται ένα νέο πρόγραμμα με τιμές χρέωσης ανά μήνα μεγαλύτερες ή ίσες από 25€. Πώς διαμορφώνεται ένα τέτοιο μοντέλο Β;

γ. Ένα εναλλακτικό σχέδιο χρέωσης που συζητάει η εταιρεία είναι η μείωση της πάγιας μηνιαίας χρέωσης στο μοντέλο Β κατά 25€ για κάθε μήνα εκγύμνασης. Πώς διαμορφώνεται το εναλλακτικό μοντέλο χρέωσης;

δ. Αν ένας πελάτης διαθέτει 220€, πόσους μήνες θα μπορούσε να γυμναστεί χωρίς να χρεωθεί επιπλέον χρήματα σύμφωνα με το εναλλακτικό μοντέλο χρέωσης;

ε. Πόσο πρέπει να χρεώνει ο ιδιοκτήτης ανά μήνα χρήσης του γυμναστηρίου, ώστε ένας πελάτης που διαθέτει 220€ να μπορεί να γυμνάζεται 10 μήνες τον χρόνο σύμφωνα με το εναλλακτικό μοντέλο χρέωσης;

7. Η διαδικτυακή εταιρεία παροχής βίντεο (video streaming) ΦΛΙΞ χρεώνει κάθε πελάτη της που κατεβάζει ταινίες στον υπολογιστή του με 10€ μηνιαία συνδρομή και επιπλέον 0,3€ για κάθε ταινία που βλέπει τον μήνα.

α. Ποιο είναι το μοντέλο χρέωσης Α που προτείνει η εταιρεία;

β. Η εταιρεία επεξεργάζεται διάφορα σενάρια για κάθε ταινία που βλέπει ένας συνδρομητής με τιμές χρέωσης μεγαλύτερες ή ίσες από 0,3€. Πώς διαμορφώνεται ένα τέτοιο μοντέλο χρέωσης Β;

γ. Ένα εναλλακτικό σχέδιο χρέωσης που συζητάει η εταιρεία είναι η μείωση της πάγιας μηνιαίας χρέωσης στο μοντέλο Β κατά 0,3€ για κάθε ταινία που βλέπει ένας συνδρομητής. Πώς διαμορφώνεται το εναλλακτικό μοντέλο χρέωσης;

δ. Αν η εταιρεία εφαρμόσει το εναλλακτικό μοντέλο χρέωσης, πόσες ταινίες θα μπορεί να βλέπει σε έναν μήνα ένας συνδρομητής που διαθέτει 20€;

ε. Η εταιρεία σκέφτεται να εφαρμόσει το εναλλακτικό σχέδιο χρέωσης. Πόσο πρέπει να χρεώνει κάθε ταινία που βλέπει ένας πελάτης ώστε αν διαθέτει 20€ να μπορεί να βλέπει 100 ταινίες τον μήνα.

8. Να λύσετε την εξίσωση $|2x - 4| = \lambda x - 1$.

Διερεύνηση: Για να πειραματιστείτε και να εξασκηθείτε στην αριθμητική επίλυση εξισώσεων της μορφής $|\alpha x + \beta| = \gamma x + \delta$ να ανοίξετε την εφαρμογή:

9. Να λύσετε την εξίσωση $|2x + 1| = |\lambda x|$.

Διερεύνηση: Για να πειραματιστείτε και να εξασκηθείτε στην αριθμητική επίλυση εξισώσεων της μορφής $|\alpha x + \beta| = |\gamma x + \delta|$ να ανοίξετε την εφαρμογή:

10. Να λύσετε την εξίσωση $2|x| + 1 = \lambda x - 3$.

Διερεύνηση: Για να πειραματιστείτε και να εξασκηθείτε στην αριθμητική επίλυση εξισώσεων της μορφής $\alpha|x| + \beta = \gamma x + \delta$ να ανοίξετε την εφαρμογή:

11. Να λύσετε την εξίσωση $3|x| - 1 = \lambda|x| - 4$.

Διερεύνηση: Για να πειραματιστείτε και να εξασκηθείτε στην αριθμητική επίλυση εξισώσεων της μορφής $\alpha|x| + \beta = \gamma|x| + \delta$ να ανοίξετε την εφαρμογή:

3.2 • Η Εξίσωση $x^ν = α$

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/-ήτριες να μπορούν:

Να επιλύουν απλές εξισώσεις της μορφής $x^ν = α$.

Διερεύνηση

α. Ποιον τύπο χρησιμοποιούμε για να υπολογίσουμε τον όγκο ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου;

β. Η καρότσα ενός φορτηγού είναι σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου και έχει διαστάσεις x, 2x και 3x. Αν η χωρητικότητά του είναι $48m^3$, να υπολογίσετε τις διαστάσεις της καρότσας.

Όπως διαπιστώσαμε στην παράγραφο 1.6.1. η νιοστή ρίζα συνδέεται με την επίλυση της εξίσωσης $x^ν = α$, $ν \in \mathbb{N}^*$, $α \in \mathbb{R}$. Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε το πλήθος των λύσεων που μπορεί να έχει αυτή η εξίσωση.

Σύμφωνα με τον ορισμό της νιοστής ρίζας, η εξίσωση $x^3 = 64$ έχει μία θετική λύση, την $x = \sqrt[3]{64} = 4$.

Εξάλλου, για κάθε $x \le 0$ ισχύει ότι $x^3 \le 0$ και επομένως η εξίσωση $x^3 = 64$ έχει μοναδική λύση την $\sqrt[3]{64} = 4$.

Γενικά:

Η εξίσωση $x^ν = α$ με **$α > 0$** και **ν περιττό** φυσικό αριθμό έχει **μοναδική λύση**, την $\mathbf{x = \sqrt[ν]{α}}$.

Όπως έχουμε δει, η εξίσωση $x^2 = 4$ έχει δύο λύσεις, τις $x_1 = 2$ και $x_2 = -2$.

Δηλαδή $x^2 = 4 \Leftrightarrow x_1 = \sqrt{4} = 2$ και $x_2 = -\sqrt{4} = -2$.

Αντίστοιχα, η εξίσωση $x^4 = 81$ έχει δύο λύσεις, τις $x_1 = -\sqrt[4]{81} = -3$ και $x_2 = \sqrt[4]{81} = 3$.

Γενικά:

Η εξίσωση $x^ν = α$ με **$α > 0$** και **ν άρτιο** φυσικό αριθμό έχει **ακριβώς δύο λύσεις**, τις $\mathbf{x_1 = \sqrt[ν]{α}}$ και $\mathbf{x_2 = -\sqrt[ν]{α}}$.

Για τη λύση της εξίσωσης $x^3 = -64$ έχουμε:

$$x^3 = -64 \Leftrightarrow -x^3 = 64 \Leftrightarrow (-x)^3 = 64 \Leftrightarrow -x = \sqrt[3]{64} \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{64} \Leftrightarrow x = -4$$

Επομένως η εξίσωση αυτή έχει μοναδική λύση την $x = -\sqrt[3]{64} = -4$.

Γενικά:

Η εξίσωση $x^ν = α$ με **$α < 0$** και **ν περιττό** φυσικό αριθμό έχει **μοναδική λύση**, την $\mathbf{x = -\sqrt[ν]{|α|} = -\sqrt[ν]{-α}}$.

Η εξίσωση $x^4 = -1$ είναι αδύνατη αφού το πρώτο μέλος είναι μη αρνητικός αριθμός $(x^4 \ge 0)$ και το δεύτερο μέλος είναι αρνητικός αριθμός.

Γενικά: Η εξίσωση $x^ν = α$ με **$α < 0$** και **ν άρτιο** φυσικό αριθμό είναι **αδύνατη**.

Παραδείγματα:

- $x^4 = 3 \Leftrightarrow x = -\sqrt[4]{3}$ ή $x = \sqrt[4]{3}$
- $x^5 = -2 \Leftrightarrow x = -\sqrt[5]{-(-2)} = -\sqrt[5]{2}$
- $x^5 = 7 \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{7}$
- $x^4 = -2$, αδύνατη

Σχόλιο

Για τη λύση της εξίσωσης $\mathbf{x^ν = α^ν}$, $ν \in \mathbb{N}^*$, $α \in \mathbb{R}$ έχουμε:

- αν **ν περιττός**, τότε $\mathbf{x^ν = α^ν \Leftrightarrow x = α}$
- αν **ν άρτιος**, τότε $\mathbf{x^ν = α^ν \Leftrightarrow x = α}$ **ή** $\mathbf{x = -α}$

Παραδείγματα: $x^5 = 4^5 \Leftrightarrow x = 4$, $x^4 = 7^4 \Leftrightarrow x = 7$ ή $x = -7$

Εφαρμογή

Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις.

α. $x^4 - 27x = 0$ **β.** $(x^5 + 7)(x^{10} + 1) = 0$ **γ.** $(x + 1)^4 = 16$

Απάντηση:

α. Είναι:

$$x^4 - 27x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 27) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x^3 = 27 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = \sqrt[3]{27} = 3$$

β. Έχουμε:

$$(x^5 + 7)(x^{10} + 1) = 0 \Leftrightarrow x^5 + 7 = 0 \text{ ή } x^{10} + 1 = 0 \Leftrightarrow x^5 = -7 \text{ ή } x^{10} = -1 \Leftrightarrow x = -\sqrt[5]{7}$$

αφού η εξίσωση $x^{10} = -1$ είναι αδύνατη.

γ. Είναι:

$$(x + 1)^4 = 16 \Leftrightarrow (x + 1)^4 = 2^4 \Leftrightarrow x + 1 = -2 \text{ ή } x + 1 = 2 \Leftrightarrow x = -3 \text{ ή } x = 1.$$

Ασκήσεις & Προβλήματα

1. Να λύσετε τις εξισώσεις.

α. $x^{21} + 1 = 0$ **β.** $x^5 + 243 = 0$

γ. $8x^3 + 1 = 0$ **δ.** $(2x + 1)^5 + 32 = 0$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις.

α. $x^{19} - 1 = 0$ **β.** $x^5 - 32 = 0$

γ. $32x^5 - 8 = 0$ **δ.** $(1 - 3x)^3 - 125 = 0$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις.

α. $x^{12} - 1 = 0$ **β.** $x^4 - 81 = 0$

γ. $16x^4 - 81 = 0$ **δ.** $(x + 2)^6 - 64 = 0$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις.

α. $x^4 + 27x = 0$ **β.** $x^6 - 32x = 0$

γ. $8x^5 + 16x = 0$ **δ.** $(1 - x)^4 + 8(x - 1) = 0$

ε. $(x^{2026} + 2027)(x^2 - 1) = 0$

5. Να βρείτε τον αριθμό (τους αριθμούς) ο οποίος όταν:

α. μειωθεί κατά ένα και υψωθεί στην εβδόμη είναι ίσος με 4.

β. αυξηθεί κατά 2 και υψωθεί στην τετάρτη είναι ίσος με 16.

3.3 • Εξισώσεις 2ου Βαθμού

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/ήτριες να μπορούν:

- Να επιλύουν αλγεβρικά εξισώσεις 2ου βαθμού.
- Να επιλύουν απλές εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις 2ου βαθμού.
- Να χρησιμοποιούν εξισώσεις 2ου βαθμού στη μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων.
- Να κατασκευάζουν δικά τους προβλήματα που επιλύονται με εξισώσεις δευτέρου βαθμού.

Η λύση εξισώσεων όπως οι εξισώσεις 2ου βαθμού που είδαμε στο Γυμνάσιο στηρίζεται στην παραγοντοποίηση και στην ιδιότητα των πραγματικών αριθμών: $\boldsymbol{\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0}$ ή $\boldsymbol{\beta = 0}$.

Για παράδειγμα:

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - x + 2 = 0 \Leftrightarrow x(x - 2) - (x - 2) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = 1$$

Διερεύνηση 1

Ο **Διόφαντος** (3ος αιώνας μ.Χ.) ήταν ο πρωτοπόρος των εξισώσεων καθώς επινόησε και έλυσε πολύπλοκα αλγεβρικά προβλήματα χρησιμοποιώντας ενδιαφέρουσες και πρωτότυπες μεθόδους. Στο βιβλίο του *Αριθμητικά* περιέχονται εξισώσεις 1ου βαθμού και μερικές 2ου βαθμού και τα προβλήματα που πρότεινε βοήθησαν στην εδραίωση της θεωρίας της εξίσωσης που αναπτύχθηκε αιώνες αργότερα.

Ένα από τα προβλήματα που παρουσίασε στο βιβλίο του είναι το εξής:

«Αν προσθέσω τον αριθμό των ελεφάντων που πίνουν νερό σε ένα ποτάμι στον αριθμό των χαυλιοδόντων τους και των ποδιών τους, θα πάρω το τετράγωνο του πλήθους των ελεφάντων. Πόσοι ελέφαντες υπάρχουν;»

Να προσπαθήσετε να απαντήσετε στο ερώτημα και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Διερεύνηση 2

Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $x^2 - 5x = 0$ **β.** $x^2 - 5x + 4 = 0$ **γ.** $x^2 - 5x + 5 = 0$

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε να λύνουμε εξισώσεις 2ου βαθμού χρησιμοποιώντας τύπους.

Ορισμός

Εξίσωση 2ου βαθμού είναι μια εξίσωση που μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$\boldsymbol{\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0}$, με $\boldsymbol{\alpha \neq 0}$

Οι αριθμοί α, β, γ λέγονται **συντελεστές** της εξίσωσης. Ο συντελεστής γ ονομάζεται **σταθερός όρος**.

Η μέθοδος συμπλήρωσης τετραγώνου

Η επίλυση εξισώσεων, όπως έχουμε αναφέρει, στηρίζεται στην παραγοντοποίηση. Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται ο γενικός τρόπος μετασχηματισμού μιας εξίσωσης της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ σε γινόμενο παραγόντων που οδηγεί στην επίλυσή της και ονομάζεται **μέθοδος συμπλήρωσης τετραγώνου**.

Για καλύτερη κατανόηση της συμπλήρωσης τετραγώνου να πειραματιστείτε με τη δραστηριότητα του συνδέσμου.

Η ιδέα που κρύβεται πίσω από τη συμπλήρωση του τετραγώνου είναι ο μετασχηματισμός της στη μορφή $(x + A)^2 = B$, όπου A, B σταθερές και το αριστερό μέλος $(x + A)^2$, έχει τη μορφή **τέλειου τετραγώνου**.

Αλγεβρικά	**Λεκτικά**
$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$	Αρχική εξίσωση
ή $\frac{\alpha}{\alpha}x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0$	Διαιρούμε με το α [συντελεστής του x^2]
ή $x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} - \frac{\gamma}{\alpha} = -\frac{\gamma}{\alpha}$	Αφαιρούμε το $\frac{\gamma}{\alpha}$ και από τα δύο μέλη της ισότητας [σταθερός όρος]
ή $x^2 + 2\frac{\beta}{2\alpha}x = -\frac{\gamma}{\alpha}$	Γράφουμε τον συντελεστή $\frac{\beta}{\alpha}$ του x στη μορφή $2\frac{\beta}{2\alpha}$
ή $x^2 + 2\frac{\beta}{2\alpha}x + \left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\gamma}{\alpha}$	Για να δημιουργήσουμε την ταυτότητα του τετραγώνου στο πρώτο μέλος, προσθέτουμε (συμπληρώνουμε) το $\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ και στα δύο μέλη
ή $\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2}$	Το αριστερό μέλος της ισότητας είναι η ταυτότητα του τετραγώνου που δημιουργήσαμε

Θέτουμε **Δ = β² − 4αγ** οπότε η τελευταία ισότητα γράφεται: $\left(x+\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\dfrac{\Delta}{4\alpha^2}$ (1)

Διακρίνουμε τώρα τις παρακάτω περιπτώσεις:

• Αν **Δ > 0**, τότε από την (2) έχουμε:

$$\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)^2 \Leftrightarrow \left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)^2=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{\beta}{2\alpha}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$x=-\frac{\beta}{2\alpha}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \text{ ή } x=-\frac{\beta}{2\alpha}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \Leftrightarrow x=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \text{ ή } x=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

• Αν **Δ = 0**, τότε από την (1) παίρνουμε:

$$\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=0 \Leftrightarrow x+\frac{\beta}{2\alpha}=0 \Leftrightarrow x=-\frac{\beta}{2\alpha}$$

• Αν **Δ < 0** τότε η εξίσωση (1) είναι **αδύνατη** στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Συνοψίζουμε τα συμπεράσματα στον παρακάτω πίνακα:

$\mathbf{\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma}$	$\mathbf{\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ \alpha\neq 0}$
Δ > 0	Δύο πραγματικές και άνισες ρίζες $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
Δ = 0	Μία διπλή πραγματική ρίζα $x=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$
Δ < 0	Αδύνατη στο $\mathbb{R}$

Αν $\alpha\gamma<0$ τότε η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ έχει πάντα λύση. Γιατί;

Η παράσταση $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$ ονομάζεται ***διακρίνουσα*** και το πρόσημό της καθορίζει το είδος και το πλήθος των ριζών μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης.

Σημείωση

Από την πορεία επίλυσης της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ \alpha\neq 0$ διαπιστώνουμε εύκολα ότι:

$$\boldsymbol{\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\Delta}{4\alpha^2}\right]}$$

Ιστορικό Σημείωμα και Συνθετική Εργασία 1.

Οι προσπάθειες για την επίλυση μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού, οι οποίες εμφανίζονταν κυρίως στον υπολογισμό εμβαδών, ξεκινούν από την αρχαιότητα. Οι αρχαίοι Έλληνες χρησιμοποιούσαν γεωμετρικές μεθόδους και αργότερα οι Ινδοί και οι Άραβες παραπλήσιες μεθόδους με τη σημερινή μέθοδο *«συμπλήρωσης τετραγώνου»*. Τρεις σημαντικές μέθοδοι λύσης της εξίσωσης $\boldsymbol{\alpha x^2+\beta x+\gamma=0}$, $\boldsymbol{\alpha}\neq 0$ οι οποίες καταγράφονται ιστορικά παρουσιάζονται μαζί με μία συνθετική εργασία στο συμπληρωματικό υλικό που υπάρχει εδώ:

Ιστορικό Σημείωμα και Συνθετική Εργασία 2.

Για να δεις πώς έλυνε τον 8ο αιώνα ο Πέρσης μαθηματικός Al-Khwarizmi με συμπλήρωση τετραγώνου δευτεροβάθμιες εξισώσεις και να κάνεις σχετική συνθετική εργασία, να ανοίξεις το συμπληρωματικό υλικό που υπάρχει εδώ:

Εφαρμογή 1

Να λύσετε τις εξισώσεις.

α. $8x^2+2x-1=0$ **β.** $4t^2-4\sqrt{3}t=-3$ **γ.** $x(1-x)=2(2x+3)-1$

Απάντηση:

α. Η εξίσωση $8x^2 + 2x - 1 = 0$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 8 \cdot (-1) = 4 + 32 = 36 > 0$.

Άρα, η εξίσωση έχει δύο πραγματικές ρίζες, τις $x_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 8} = \dfrac{-2 \pm 6}{16}$, δηλαδή $x_1 = \dfrac{1}{4}$ και $x_2 = -\dfrac{1}{2}$.

β. Η αρχική εξίσωση γράφεται $4t^2 - 4\sqrt{3}t + 3 = 0$ και έχει διακρίνουσα $\Delta = (-4\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = 48 - 48 = 0$.

Άρα, η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα, την $t = \dfrac{-(-4\sqrt{3})}{2 \cdot 4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

γ. Η αρχική εξίσωση γράφεται $x - x^2 = 4x + 6 - 1 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 5 = 0$.
Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 9 - 20 = -11 < 0$, οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

Σημείωση

Οι λύσεις μιας εξίσωσης εξαρτώνται μόνο από τη μορφή της και όχι από το όνομα του αγνώστου.
Για παράδειγμα, οι εξισώσεις: $3x^2 - 5x - 2 = 0$, $3\rho^2 - 5\rho - 2 = 0$ και $3u^2 - 5u - 2 = 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις.

Εφαρμογή 2. *Εξισώσεις που ανάγονται σε δευτεροβάθμιες*

Να λύσετε τις εξισώσεις.

α. $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$ **β.** $x^2 + 2|x| - 3 = 0$

Απάντηση:

α. Η αρχική εξίσωση γράφεται $(x^2)^2 - 5x^2 - 36 = 0$ (1)

Θέτουμε στην (1), $x^2 = \alpha$ (2) οπότε αυτή γράφεται $\alpha^2 - 5\alpha - 36 = 0$ (3)

Η εξίσωση (3) έχει διακρίνουσα $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-36) = 25 + 144 = 169 > 0$.

Άρα, έχει δύο πραγματικές ρίζες, τις $\alpha_{1,2} = \dfrac{-(-5) \pm \sqrt{169}}{2 \cdot 1} = \dfrac{5 \pm 13}{2} = \begin{cases} 9 \\ -4 \end{cases}$

Από τη (2) πλέον παίρνουμε:

$$x^2 = 9 \text{ ή } x^2 = -4 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = -3 \text{ ή } x = 3, \text{ αφού η εξίσωση } x^2 = -4 \text{ είναι αδύνατη.}$$

Σχόλιο

Οι εξισώσεις της μορφής $\boldsymbol{\alpha x^{2\nu} + \beta x^{\nu} + \gamma = 0}$, $\alpha \neq 0$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ ονομάζονται **διτετράγωνες εξισώσεις** και λύνονται με τον ίδιο τρόπο.

β. Από τις ιδιότητες των απόλυτων τιμών γνωρίζουμε ότι $x^2 = |x|^2$ οπότε η δοθείσα εξίσωση γράφεται:

$$|x|^2 + 2|x| - 3 = 0 \quad (1)$$

Θέτουμε $|x| = \alpha$ (2), οπότε η (1) γράφεται $\alpha^2 + 2\alpha - 3 = 0$ (3)

Η εξίσωση (3) έχει διακρίνουσα $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16 > 0$.

Άρα έχει δύο πραγματικές ρίζες, τις $\alpha_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$

Επομένως από την (2) παίρνουμε: $|x| = 1$ ή $|x| = -3 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = -1$ ή $x = 1$, αφού η $|x| = -3$ είναι αδύνατη.

Σχόλιο

Η **μέθοδος της αντικατάστασης** που ακολουθήσαμε στην επίλυση των εξισώσεων στα ερωτήματα (α) και (β) είναι μια γενική μέθοδος που διευκολύνει την επίλυση εξισώσεων με αναγωγή τους σε απλούστερες.

Εφαρμογή 3. *Εξισώσεις που ανάγονται σε δευτεροβάθμιες*

Να λύσετε τις εξισώσεις.

α. $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+3} = \dfrac{3}{10}$ **β.** $x + 2\sqrt{x} - 8 = 0$

Απάντηση:

α. Η εξίσωση ορίζεται όταν $x \neq 0$ και $x \neq -3$. Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} = \frac{3}{10} \Leftrightarrow 10x(x+3)\frac{1}{x} - 10x(x+3)\frac{1}{x+3} = 10x(x+3)\frac{3}{10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10(x+3) - 10x = 3x(x+3) \Leftrightarrow 10x + 30 - 10x = 3x^2 + 9x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 10 = 0$$

Η τελευταία έχει διακρίνουσα $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 49 > 0$ και επομένως δύο πραγματικές ρίζες, τις $x_1 = -5$ και $x_2 = 2$. Οι λύσεις ικανοποιούν τους αρχικούς περιορισμούς και επομένως είναι δεκτές.

β. Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x \geq 0$. Με αυτόν τον περιορισμό θέτουμε $\sqrt{x} = u$, $u \geq 0$ (1) οπότε $x = u^2$ και η αρχική εξίσωση γράφεται: $u^2 + 2u - 8 = 0$ (2)

Η εξίσωση (2) έχει διακρίνουσα $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36 > 0$, οπότε έχει

δύο πραγματικές ρίζες, τις $u_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-2 \pm 6}{2} = \begin{cases} 2 \\ -4 \end{cases}$

Επομένως από την (1) παίρνουμε:

$$\sqrt{x} = 2 \text{ ή } \sqrt{x} = -4 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4, \text{ αφού η } \sqrt{x} = -4 \text{ είναι αδύνατη.}$$

Εφαρμογή 4. *Τύποι Vieta*

Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ έχει δύο ρίζες x_1, x_2.

α. **i.** Να αποδείξετε ότι: $x_1 + x_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha}$ και $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha}$.

ii. Αν $S = x_1 + x_2$ και $P = x_1 \cdot x_2$ να αποδείξετε ότι: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \Leftrightarrow x^2 - Sx + P = 0$.

β. Να βρείτε την εξίσωση που έχει ρίζες τους αριθμούς $\sqrt{2}$ και 3.

Απάντηση:

α. **i.** Είναι:

$$x_1 + x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} + \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2\beta}{2\alpha} = -\frac{\beta}{\alpha} \text{ και}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \cdot \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{(-\beta)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4\alpha^2} = \frac{\beta^2 - (\beta^2 - 4\alpha\gamma)}{4\alpha^2} = \frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

ii. Έχουμε: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha\left(x^2 + \dfrac{\beta}{\alpha}x + \dfrac{\gamma}{\alpha}\right) = 0 \Leftrightarrow x^2 - Sx + P = 0$

β. Είναι $S = \sqrt{2} + 3$ και $P = 3\sqrt{2}$ οπότε αντικαθιστώντας στον προηγούμενο τύπο βρίσκουμε:

$$x^2 - (\sqrt{2} + 3)x + 3\sqrt{2} = 0$$

Εφαρμογή 5. *Τένις στο φεγγάρι!*

Το ύψος H ενός αντικειμένου t sec μετά την εκτόξευσή του προς τα πάνω, με αρχική ταχύτητα v, υπολογίζεται από τον τύπο $H(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + vt + h$, όπου g η βαρυτική έλξη και h το αρχικό ύψος του αντικειμένου.

Ένας αστροναύτης στο φεγγάρι πετάει προς τα πάνω από ύψος 2m από το έδαφος ένα μπαλάκι του τένις με αρχική ταχύτητα 10m/sec. Το ίδιο κάνει και ένας άνθρωπος στη Γη. Αν η βαρυτική έλξη στο φεγγάρι είναι $1{,}6\text{m/s}^2$ και στη Γη $9{,}8\text{m/s}^2$ να βρείτε:

α. Σε πόσο χρόνο το μπαλάκι θα φτάσει στην επιφάνεια του φεγγαριού και σε πόσο στην επιφάνεια της Γης.

β. Πόσο περισσότερο χρόνο θα μείνει στον αέρα το μπαλάκι που πετάχτηκε στο φεγγάρι, σε σχέση με το αντίστοιχο που πετάχτηκε στη Γη;

Απάντηση:

α. Για να βρούμε σε πόσο χρόνο μετά την εκτόξευση το μπαλάκι χτυπάει στο έδαφος, αρκεί να βρούμε τον χρόνο t για τον οποίο $H = 0$.

Μπαλάκι του τένις στο φεγγάρι	Μπαλάκι του τένις στη Γη
$H = -\frac{1}{2}gt^2 + vt + h \Leftrightarrow 0 = -\frac{1}{2} \cdot 1{,}6 \cdot t^2 + 10t + 2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 0 = -0{,}8 \cdot t^2 + 10t + 2 \Leftrightarrow -0{,}4 \cdot t^2 + 5t + 1 = 0$	$H = -\frac{1}{2}gt^2 + vt + h \Leftrightarrow 0 = -\frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \cdot t^2 + 10t + 2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 0 = -4{,}9 \cdot t^2 + 10t + 2$
Η εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta = 106{,}4 > 0$ και ρίζες $t_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{106{,}4}}{-1{,}6} \approx \begin{cases} 12{,}7 \\ -0{,}2 \quad (\text{απορρίπτεται}) \end{cases}$	Η εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta = 139{,}2 > 0$ και ρίζες $t_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{139{,}2}}{-9{,}8} \approx \begin{cases} 2{,}2 \\ -0{,}2 \quad (\text{απορρίπτεται}) \end{cases}$
Άρα το μπαλάκι θα χτυπήσει την επιφάνεια του φεγγαριού σε 12,7 sec.	Άρα το μπαλάκι θα χτυπήσει την επιφάνεια της Γης σε 2,2 sec.

β. Το μπαλάκι στο φεγγάρι θα παραμείνει στον αέρα περίπου $12{,}7 - 2{,}2 = 10{,}5$ δευτερόλεπτα περισσότερο.

Δραστηριότητα

Ένα κομμάτι σύρματος έχει μήκος 8 μέτρα. Το σύρμα κόβεται σε δύο κομμάτια και στη συνέχεια κάθε κομμάτι κάμπτεται για να σχηματιστούν δύο τετράγωνα.
Να βρείτε τα μήκη των τμημάτων στα οποία κόπηκε αν το άθροισμα των εμβαδών αυτών των τετραγώνων είναι δύο τετραγωνικά μέτρα με τη βοήθεια του ψηφιακού δομήματος.

«Η κάμψη του σύρματος»

Ιστορικό Σημείωμα και Συνθετική Εργασία 3.

Ο Al-Khwarizmi ήταν Πέρσης μαθηματικός, αστρονόμος και γεωγράφος, γεννημένος στη Βαγδάτη το 780 μ.Χ. Θεωρείται ως ένας από τους κορυφαίους μαθηματικούς όλων των εποχών. Η λέξη «άλγεβρα» θεωρείται ότι προέρχεται από τη μετάφραση στα λατινικά του «al-jabr», μέρος του τίτλου του πιο διάσημου βιβλίου του, στο οποίο εισήγαγε τις θεμελιώδεις αλγεβρικές μεθόδους και τεχνικές επίλυσης εξισώσεων.
Ανέπτυξε την άλγεβρα σε προτάσεις αντί να χρησιμοποιήσει εξισώσεις και εξηγούσε την εργασία του με γεωμετρικά σχήματα.
Περισσότερες πληροφορίες και μια σχετική συνθετική εργασία θα βρεις στο συμπληρωματικό υλικό.

Γεωμετρική μέθοδος Al-Khwarizmi

Αυτοαξιολόγηση

α. Ποια είναι η γενική μορφή μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού;

β. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $3x^2 - 4x + 1 = 0$ **ii.** $16 = 25x^2$ **iii.** $2x^2 + 3 = 3\sqrt{3}x$

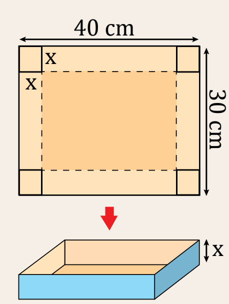
γ. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $\frac{x(x+1)}{2} - 3x = \frac{x}{4} + \frac{3}{2}$ **ii.** $\frac{x^4}{2} = 16 + 7x^2$ **iii.** $x - \frac{x-1}{x+1} - 3 = \frac{3x-1}{2}$

δ. Να αποδείξετε ότι:

i. Αν η εξίσωση είναι της μορφής $x^2 + bx + p = 0$ με $\Delta > 0$, τότε οι ρίζες της θα είναι δύο αριθμοί με γινόμενο p και άθροισμα $-b$.

ii. Αν για την εξίσωση $\alpha x^2 + bx + p = 0$ ισχύει $\alpha + b + p = 0$, τότε αυτή θα έχει ρίζες τις 1 και p/α.



ε. Θέλουμε να κατασκευάσουμε μία κοσμηματοθήκη από μεταλλικό υλικό διαστάσεων 40cm x 30cm. Για να τη φτιάξουμε κόβουμε τετράγωνα πλευράς x cm από την κάθε γωνία της λαμαρίνας και μετά διπλώνουμε τα πλαϊνά όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

i. Να δείξετε ότι το εμβαδόν της βάσης της κοσμηματοθήκης μετά την αναδίπλωση περιγράφεται από τον τύπο $E = (40 - 2x)(30 - 2x)$.

ii. Τι μήκος μπορεί να έχει η πλευρά του τετραγώνου που κόβουμε;

iii. Αν το εμβαδόν της βάσης της κοσμηματοθήκης είναι 600cm^2, ποιο είναι το μήκος της πλευράς του τετραγώνου που κόβουμε;

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις.

α. Η διακρίνουσα της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \quad \alpha \neq 0$ δίνεται από τον τύπο ....

β. Αν η διακρίνουσα της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \quad \alpha \neq 0$ είναι αρνητική, τότε η εξίσωση .... πραγματική λύση.

γ. Αν η διακρίνουσα της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \quad \alpha \neq 0$ είναι .... τότε η εξίσωση έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.

2. Τρεις μαθητές, για τη λύση μιας εξίσωσης, έγραψαν τα παρακάτω. Να βρείτε ποια λύση είναι σωστή, αιτιολογώντας γιατί οι άλλες λύσεις είναι λανθασμένες.

Γιώργος	Κώστας	Νίκος
$x^2 - 8x = 0$ $\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 64$ $x_{1,2} = \dfrac{-8 \pm \sqrt{64}}{2} = \begin{cases} 0 \\ -8 \end{cases}$	$x^2 - 8x = 0$ $x^2 = 8x$ $\dfrac{x^2}{x} = \dfrac{8x}{x}$ $x = 8$	$x^2 - 8x = 0$ $x(x - 8) = 0$ $x = 0$ ή $x - 8 = 0$ $x = 0$ ή $x = 8$

3. Να λύσετε με δύο διαφορετικούς τρόπους την εξίσωση $x^2 - 2x - 15 = 0$.

α. Σε τι διαφέρουν μεταξύ τους;

β. Ποιος είναι πιο γρήγορος;

4. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ή λανθασμένες δικαιολογώντας την απάντησή σας.

α. Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ και $\gamma = 0$ δεν είναι ποτέ αδύνατη.

β. Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha > 0$ και $\beta = 0$ και $\gamma < 0$ είναι αδύνατη.

γ. Αν $\kappa < 1$, τότε η εξίσωση $9x^2 - 6x + \kappa = 0$ έχει δύο πραγματικές ρίζες.

δ. Μια εξίσωση 2ου βαθμού μπορεί να έχει άπειρες ρίζες.

ε. Η εξίσωση $x^2 + x - 1 = x(x - 2)$ είναι 2ου βαθμού.

στ. Η εξίσωση $x^2 + \alpha x - \alpha^2 = 0, \ \alpha \in \mathbb{R}$ δεν είναι ποτέ αδύνατη.

ζ. Αν οι α, β, γ είναι ρητοί αριθμοί και η διακρίνουσα τέλειο τετράγωνο, τότε οι ρίζες της $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ είναι ρητοί αριθμοί.

5. Να κάνετε την παρακάτω αντιστοίχιση.

Πλήθος ριζών εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \quad \alpha \neq 0$	Διακρίνουσα
α. Δύο ρίζες άνισες	**1.** $\Delta < 0$
β. Μία διπλή ρίζα	**2.** $\Delta = 0$
γ. Καμία πραγματική ρίζα	**3.** $\Delta \geq 0$
	4. $\Delta \leq 0$
	5. $\Delta > 0$

6. Να γράψετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει:

α. δύο πραγματικές και άνισες ρίζες,

β. μία διπλή ρίζα,

γ. καμία πραγματική ρίζα, εξηγώντας σε κάθε περίπτωση τον τρόπο με τον οποίο επιλέξατε τις εξισώσεις.

Ασκήσεις

1. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις.

α. $x^2 + 4x = 0$ **β.** $8x = -2x^2$ **γ.** $-4x^2 = -18x$

2. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις.

α. $x^2 - 25 = 0$ **β.** $36 = 4x^2$ **γ.** $9x^2 = -4$

3. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις.

α. $x^2 - 4x - 5 = 0$ **β.** $\alpha^2 - 6\alpha + 7 = 0$

γ. $t^2 + 8t + 19 = 0$ **δ.** $-8\rho + 8\rho^2 + 3 = 1$

ε. $4x^2 - 1 - 2x = 6x - 2$ **στ.** $0{,}8 + 0{,}8k = 0{,}3(k^2 - 1)$

4. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις.

α. $(x + 1)^2 - (x - 2)^2 = (x + 3)^2 + 5x - 6$

β. $\dfrac{(x - 1)(x + 2)}{12} - 1 = \dfrac{x - 3}{3} + \dfrac{(x + 1)(x - 2)}{6}$

γ. $\dfrac{(x - 3)^2}{4} - \dfrac{(x - 1)^2}{16} = \dfrac{35}{16}$

δ. $(x + 1)^2 = \dfrac{x}{2}(5x + 6) - (2x^2 + 1)$

5. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις.

α. $\dfrac{x + 2}{x} + 3x = \dfrac{5x + 6}{2}$ **β.** $\dfrac{2}{3 - x} = \dfrac{x}{x + 1}$

γ. $\dfrac{x - 4}{x} - \dfrac{x - 1}{4x} = -3x$ **δ.** $\dfrac{x + 1}{x - 1} - 3 = \dfrac{2 - x}{x}$

6. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις.

α. $x^5 = 9x^3$ **β.** $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$

γ. $x^5 + 2 = x^3 + x^2 + 1$

7. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις.

α. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ **β.** $4x^4 + 3x^2 = 1$

γ. $(x + 1)^4 - 5(x + 1)^2 + 4 = 0$

8. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις.

α. $x^2 - 7|x| + 12 = 0$ **β.** $x^2 - 2x + 1 = |x - 1|$

γ. $(x - 1)^2 - 6|x - 1| + 8 = 0$

9. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις.

α. $x + \sqrt{x} - 6 = 0$ **β.** $x + 2 = 3\sqrt{x}$

γ. $x + 4\sqrt{x} + 3 = 0$

10. Αν ρ_1, ρ_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + 5x + 5 = 0$ να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α. $\rho_1 + \rho_2$ **β.** $\rho_1 \cdot \rho_2$ **γ.** $\rho_1^2 + \rho_2^2$ **δ.** $\rho_1^3 + \rho_2^3$

11. Μία μικρή εταιρεία κατασκευάζει και πουλάει μηχανήματα κάθε μήνα. Το μηνιαίο κόστος, σε €, κατασκευής x μηχανημάτων δίνεται από τον τύπο $K(x) = 0{,}35x^2 + 3500$.

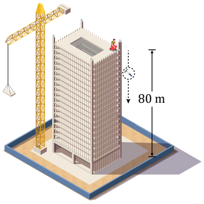
Τα μηνιαία έσοδα, σε €, πώλησης x μηχανημάτων δίνονται από τον τύπο $E(x) = 192x - 0{,}45x^2$.

α. Να δείξετε ότι το κέρδος της εταιρείας δίνεται από τον τύπο $P(x) = -0{,}8x^2 + 192x - 3500$.

β. Αν έναν μήνα η εταιρεία πουλήσει 20 μηχανήματα έχει κέρδος ή ζημία;

γ. Αν η εταιρεία τον Ιανουάριο είχε κέρδος 8.020€ πόσα μηχανήματα πούλησε;

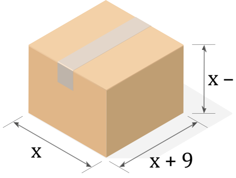
12. Από ύψος 80 μέτρων που εργάζεται ένας οικοδόμος πέφτει κατά λάθος ένα σφυρί και φωνάζει *«Προσοχή, φυλαχτείτε, πέφτει σφυρί!»*



Πόσο χρόνο έχει στη διάθεσή του να απομακρυνθεί και να αποφύγει το σφυρί ένας εργαζόμενος που βρίσκεται στο έδαφος;

Να λάβετε υπόψη σας ότι η εξίσωση που δίνει το ύψος ενός τέτοιου αντικειμένου είναι $h(t) = -5t^2 + h_0$, όπου h_0 το αρχικό ύψος και η ταχύτητα του ήχου είναι 343m/sec.

13. Το πλάτος ενός κουτιού είναι 9cm περισσότερο από το μήκος του. Το ύψος του κουτιού είναι 1cm λιγότερο από το μήκος του. Αν το κουτί έχει όγκο $72cm^3$, ποιες είναι οι διαστάσεις του κουτιού;

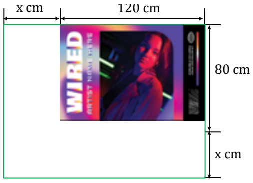


14. Το εμβαδόν ενός τραπεζιού πινγκ-πονγκ που έχει σχήμα ορθογωνίου είναι $8m^2$. Το μήκος του είναι 2m περισσότερο από το πλάτος του.

α. Να γράψετε μια εξίσωση που να αναπαριστά το εμβαδόν του τραπεζιού.

β. Να βρείτε τις διαστάσεις του τραπεζιού.

15. Η Σοφία έχει μια αφίσα στο δωμάτιό της και ζητάει από τον πατέρα της να της αγοράσει μια καινούρια ώστε το μήκος και το πλάτος της να αυξηθεί το ίδιο προκειμένου να διπλασιαστεί το εμβαδόν της.



Αν οι αρχικές διαστάσεις της αφίσας ήταν 120 cm πλάτος και 80 cm μήκος, ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις της νέας αφίσας;

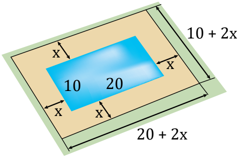
16. Ένα τουριστικό γραφείο με έδρα την Αθήνα συμφωνεί με τον Διευθυντή και το δεκαπενταμελές του σχολείου σας να διοργανώσει εκδρομή με πούλμαν με προορισμό τη Θεσσαλονίκη.

Κάθε λεωφορείο έχει 70 θέσεις. Όταν ο αριθμός των μαθητών είναι 50, η τιμή του εισιτηρίου είναι 30€ ανά μαθητή. Το γραφείο, προκειμένου να έχει περισσότερες συμμετοχές, κάνει την εξής προσφορά *«Για κάθε επιπλέον μαθητή που θα δηλώνει συμμετοχή, η τιμή του εισιτηρίου στους συμμετέχοντες μαθητές θα μειώνεται κατά 0,5€»*.

α. Αν συμβολίσουμε με x τον κάθε επιπλέον μαθητή, να δείξετε ότι τα έσοδα του γραφείου δίνονται από τον τύπο $E(x) = (30 - 0{,}5x)(50 + x)$, $x \in [0, 20]$.

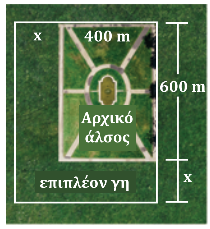
β. Να βρείτε το πλήθος των επιπλέον μαθητών, ώστε η επιχείρηση να έχει έσοδα 1.488€.

17. Μια πισίνα διαστάσεων 10 επί 20 μέτρα περιβάλλεται από μια διαδρομή ομοιόμορφου πλάτους, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Αν ο χώρος της πισίνας και του μονοπατιού μαζί είναι 600 τετραγωνικά μέτρα, ποιο είναι το πλάτος του μονοπατιού;

18. Μια πόλη έχει ένα άλσος σε σχήμα ορθογωνίου που έχει διαστάσεις 600 μέτρα επί 400 μέτρα. Το Δημοτικό συμβούλιο της πόλης αποφάσισε να μεγαλώσει την έκταση του άλσους προσθέτοντας γη, όπως φαίνεται στην εικόνα.



Δημιουργήστε μια ιστορία με βάση τις πληροφορίες της εικόνας που να σας οδηγεί στην κατασκευή μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης. Στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση και να εξηγήσετε αν οι λύσεις σας έχουν φυσικό νόημα.

19. Να βρείτε για ποιες τιμές του α, η εξίσωση $x^2 + 2αx = 10 - 7α$ έχει μια διπλή ρίζα, την οποία και να προσδιορίσετε.

Διερεύνηση παραμετρικών εξισώσεων ΙΙ

20. Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις, με άγνωστο τον x, δεν είναι ποτέ αδύνατες.

i. $α^2x^2 + 2αx - 1 = 0, \quad α \neq 0$

ii. $αx^2 - (2α + 1)x + α + 1 = 0, \quad α \neq 0$

21. Δίνεται η εξίσωση $αx^2 - 5x = 6, \quad α \neq 0$.

α. Να βρείτε τη διακρίνουσα και στη συνέχεια να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η εξίσωση:

i. είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$

ii. έχει μία διπλή ρίζα

iii. έχει δύο ρίζες άνισες

β. Αν η εξίσωση έχει λύση τον αριθμό 2, να βρείτε την άλλη λύση της εξίσωσης.

22. Δίνεται η εξίσωση $(λ^2 + 1)x^2 + 2(λ + 1)x = -2, \quad λ \in \mathbb{R}$

α. Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει διακρίνουσα $Δ = -4\,(λ - 1)^2$

β. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση είναι αδύνατη και για ποιες έχει μία διπλή ρίζα.

23. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + βx + \frac{β^2}{4} = α$, $α, β \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η εξίσωση:

α. Έχει δύο ρίζες τις οποίες και να προσδιορίσετε.

β. Έχει μία ρίζα την οποία και να προσδιορίσετε.

γ. Δεν έχει καμία ρίζα.

Η εξίσωση του κουτιού

Στο γραφείο του πολιτικού μηχανικού

Η εξίσωση των εμβαδών

Ιστορικό Σημείωμα

Μια ενδεικτική ιστορική εξέλιξη της επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων μπορείς να βρεις εδώ:

3.4 • Ανακεφαλαίωση 3ου Κεφαλαίου

Θεωρία

1. Όταν οι συντελεστές α, β μιας εξίσωσης της μορφής $αx + β = 0$ εκφράζονται με τη βοήθεια γραμμάτων, τότε η εξίσωση λέγεται **παραμετρική** και τα γράμματα **παράμετροι**.

2. Κάθε αριθμός που επαληθεύει μια εξίσωση ονομάζεται **ρίζα** ή **λύση** της εξίσωσης.

3. Για την εξίσωση $x^ν = α$ ισχύουν τα εξής:

- Αν **α > 0** και **ν περιττός** φυσικός αριθμός, η εξίσωση έχει **μοναδική λύση**, την $\mathbf{x = \sqrt[ν]{α}}$
- Αν **α > 0** και **ν άρτιος** φυσικός αριθμός, η εξίσωση έχει **ακριβώς δύο λύσεις**, τις $\mathbf{x = \sqrt[ν]{α}}$, $\mathbf{x = -\sqrt[ν]{α}}$
- Αν **α < 0** και **ν περιττός** φυσικός αριθμός, η εξίσωση έχει **μοναδική λύση**, την $\mathbf{x = -\sqrt[ν]{-α}}$
- Αν **α < 0** και **ν άρτιος** φυσικός αριθμός, η εξίσωση είναι **αδύνατη**.

4. Μια εξίσωση 2ου βαθμού έχει τη μορφή $αx^2 + βx + γ = 0$, $α \neq 0$ όπου α, β, γ πραγματικοί αριθμοί.

5. Το πλήθος και το είδος των ριζών μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης εξαρτάται από πρόσημο της διακρίνουσας $Δ = β^2 - 4αγ$:

- Αν **Δ > 0** η εξίσωση έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες $x_{1,2} = \dfrac{-β \pm \sqrt{Δ}}{2α}$
- Αν **Δ = 0** η εξίσωση έχει μία διπλή πραγματική ρίζα $x = -\dfrac{β}{2α}$
- Αν **Δ < 0** η εξίσωση είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

Επαναληπτικές Ασκήσεις

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $3x^2 - 2(x + 5) = (x + 3)^2 - 19$

β. $(3x + 4)(5x - 7) = (2x + 7)^2 + 53$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $x^3(x^2 + 2) = x^4$

β. $x^4 + (|x| + 1)(|x| - 1) = 1$

γ. $(x + 3)^2 - \sqrt{x^2 + 6x + 9} = 6$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $\dfrac{x}{x+3} + \dfrac{1}{x^2-9} = \dfrac{2}{x-3}$

β. $\dfrac{2}{x^2-4} - \dfrac{4-x}{x^2+2x} = \dfrac{1}{x(x-2)}$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $9(3|x| + 1)^2 - 24(3|x| + 1) = -16$

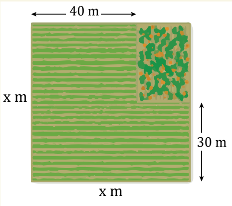
β. $x^2 + 4x + 3|x + 2| = 0$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $x - 3\sqrt{x-1} - 1 = 0$

β. $\sqrt{x+1} - 8 = 8x(x + 2)$

6. Ένας αγρότης φυτεύει ντομάτες στη βορειοανατολική γωνία ενός τετράγωνου χωραφιού. Το μέρος του χωραφιού που φυτεύει τις ντομάτες του είναι σχήματος ορθογωνίου με εμβαδόν $600m^2$.



Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου μέρους που φυτεύει τις ντομάτες.

7. Ο τιμοκατάλογος χρέωσης των TAXI στην Αθήνα είναι ο εξής: 1,8€ αρχική χρέωση (πτώση σημαίας) και 0,9€ ανά χιλιόμετρο.

Οι αντίστοιχες χρεώσεις στη Νέα Υόρκη είναι 4$ αρχική χρέωση (πτώση σημαίας) και 2$ ανά χιλιόμετρο. Θεωρούμε ότι 1€ = 1$.

α. Να διατυπώσετε συμβολικά το μοντέλο χρέωσης μιας ίδιας διαδρομής στην Αθήνα και στη Νέα Υόρκη.

β. Να βρείτε την απόσταση που μπορεί να διανύσει με TAXI ένας επιβάτης που παίρνει ταξί στην Αθήνα και στη Νέα Υόρκη, αν διαθέτει 20€.

γ. Αν στο Παρίσι η αρχική χρέωση για το TAXI είναι 2λ€ και $(\lambda - 1)$ € με $\lambda \geq 1$ για κάθε χιλιόμετρο διαδρομής, να βρείτε σε σχέση με το λ πόσα χιλιόμετρα μπορεί να ταξιδέψει ένας επιβάτης αν διαθέτει 20€.

δ. Για ποια τιμή χρέωσης λ ανά χιλιόμετρο ένας επιβάτης TAXI στο Παρίσι, που διαθέτει 20€, θα μπορούσε να ταξιδέψει 10 χιλιόμετρα;

8. Δίνεται η εξίσωση $\lambda^2(x - 1) = 2(2x + \lambda)$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να γράψετε τρεις εξισώσεις για τις διάφορες τιμές του λ και να τις λύσετε.

β. Να γράψετε την εξίσωση στη μορφή $(\lambda^2 - 4)x = \lambda^2 + 2\lambda$ (1).

γ. Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η (1) να έχει:

i. μοναδική λύση **ii.** άπειρες λύσεις

δ. Αν η (1) έχει μοναδική λύση την $x = 2$, να βρείτε τις τιμές του λ.

Φύλλο Αξιολόγησης 3ου Κεφαλαίου

Γλωσσάρι 3ου Κεφαλαίου

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής στις εξισώσεις 1ου βαθμού

Ερωτήσεις Σωστού - Λάθους στις εξισώσεις 1ου βαθμού

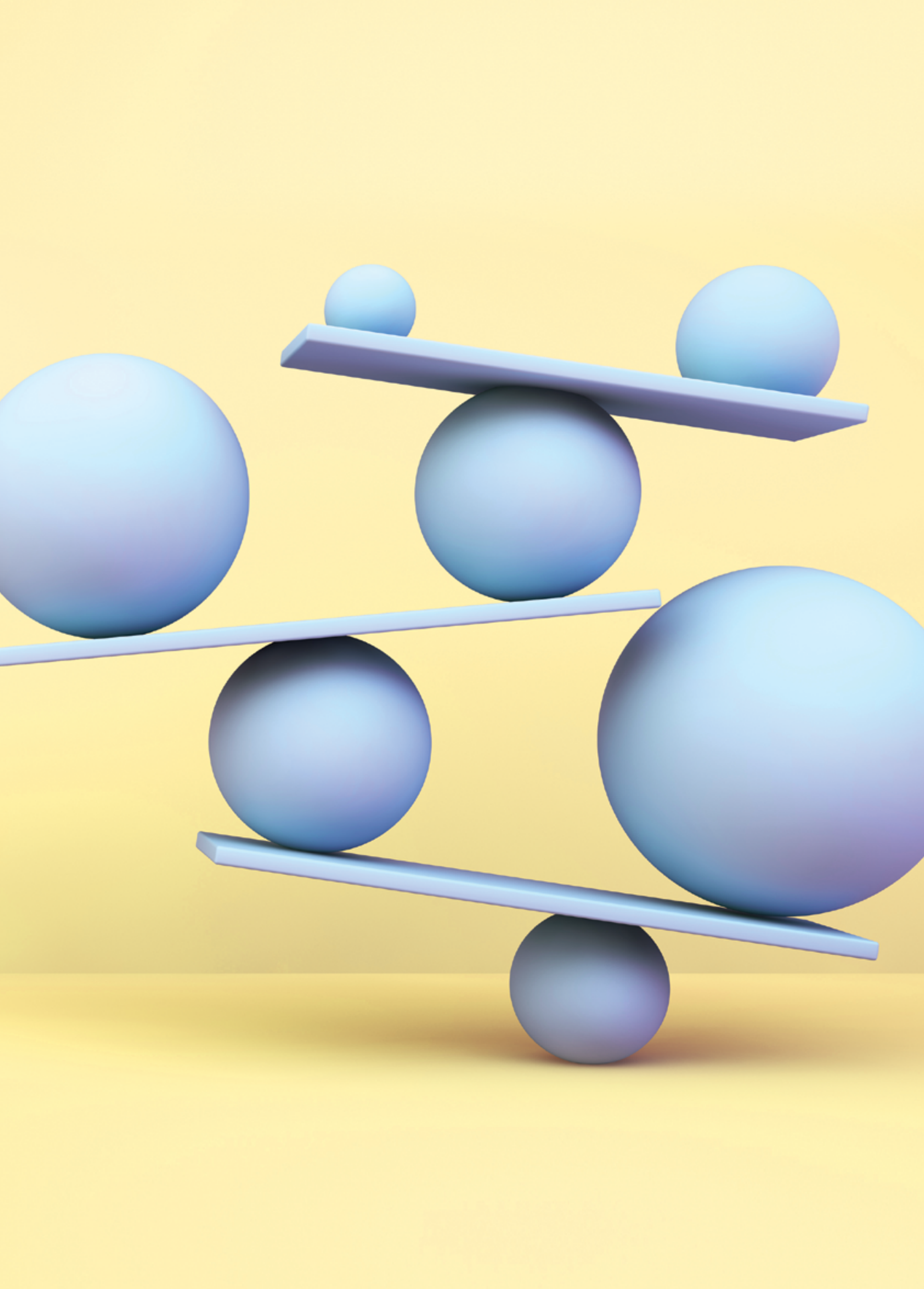
Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής στις εξισώσεις 2ου βαθμού

Ερωτήσεις Σωστού - Λάθους στις εξισώσεις 2ου βαθμού

Ανισώσεις

Κεφάλαιο

4



- Παραγοντοποίηση τριωνύμου δευτέρου βαθμού
- Πρόσημο τριωνύμου δευτέρου βαθμού
- Ανισώσεις δευτέρου βαθμού

4.1 • Παραγοντοποίηση τριωνύμου

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/ήτριες να μπορούν:

• Να παραγοντοποιούν ένα τριώνυμο δευτέρου βαθμού.

Παραγοντοποίηση του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$

Όπως είδαμε κατά την επίλυση της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ (Κεφάλαιο 3.3. Σημ.), το τριώνυμο γράφεται:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha^2}\right] \quad (1)$$

Έτσι, λοιπόν, ανάλογα με το πρόσημο της διακρίνουσας $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$, έχουμε:

1. Αν $\Delta > 0$, τότε $(\sqrt{\Delta})^2 = \Delta$, οπότε από την (1) παίρνουμε:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha^2}\right] = \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)^2\right] = \alpha\left(x - \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)\left(x - \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)$$

Άρα, $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$, όπου $x_1 = \dfrac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ και $x_2 = \dfrac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ οι ρίζες του τριωνύμου.

2. Αν $\Delta = 0$, τότε η (1) γράφεται $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(x + \dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2$

3. Αν $\Delta < 0$, τότε η (1) γράφεται $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left[\left(x + \dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \dfrac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right]$ και δεν παραγοντοποιείται.

Συμπερασματικά

Πρόσημο Διακρίνουσας	Μορφή τριωνύμου
$\Delta > 0$	$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$
$\Delta = 0$	$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$
$\Delta < 0$	$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{\|\Delta\|}{4\alpha^2}\right]$

Εφαρμογή

Να παραγοντοποιηθούν, εφόσον είναι δυνατόν, τα τριώνυμα:

α. $2x^2 + x - 1$ **β.** $4x^2 - 4x + 1$ **γ.** $-x^2 + 2x - 5$

Απάντηση:

α. Είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9 > 0$, οπότε το τριώνυμο έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες:

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 - 3}{4} = -1 \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 + 3}{4} = \frac{1}{2}$$

Εξάλλου $\alpha = 2$ και επομένως:

$$2x^2 + x - 1 = 2(x - (-1))\left(x - \frac{1}{2}\right) = 2(x + 1)\left(x - \frac{1}{2}\right) = (x + 1)(2x - 1)$$

β. Είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 0$, οπότε το τριώνυμο έχει μια διπλή πραγματική ρίζα, την $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha} = -\dfrac{-4}{2 \cdot 4} = \dfrac{1}{2}$

Εξάλλου $\alpha = 4$ και επομένως: $4x^2 - 4x + 1 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

γ. Είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5) = -16 < 0$, οπότε το τριώνυμο δεν παραγοντοποιείται.

4.2 • Πρόσημο τριωνύμου

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/ήτριες να μπορούν:

- Να προσδιορίζουν αλγεβρικά το πρόσημο ενός τριωνύμου δευτέρου βαθμού.

Διερεύνηση

Α. Δίνεται το τριώνυμο $x^2 - 7x + 10$:

α. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο.

β. Να πάρετε μερικές αριθμητικές τιμές ανάμεσα στις ρίζες του τριωνύμου και να βρείτε το πρόσημό του για τις τιμές αυτές. Πώς συνδέεται το πρόσημο που βρήκατε για τις τιμές αυτές με το πρόσημο του συντελεστή του x^2;

γ. Να πάρετε μερικές αριθμητικές τιμές εκτός των ριζών του τριωνύμου και να βρείτε το πρόσημό του για τις τιμές αυτές. Πώς συνδέεται το πρόσημο που βρήκατε για τις τιμές αυτές με το πρόσημο του συντελεστή του x^2;

δ. Μπορείτε να γενικεύσετε;

Β. Να μελετήσετε το πρόσημο του τριωνύμου $4x^2 - 4x + 1$ ακολουθώντας την παραπάνω διαδικασία.

Γ. Τι μπορείτε να συμπεράνετε για το πρόσημο των τριωνύμων $x^2 + x + 1$ και $-2x^2 + x - 3$ ακολουθώντας την παραπάνω διαδικασία;

Διερεύνηση: Να ανοίξετε την εφαρμογή **«Τριώνυμο»** και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

Πρόσημο τριωνύμου

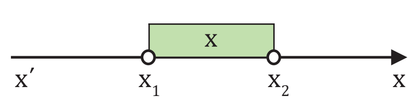
Το πρόσημο των τιμών του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ για τις διάφορες τιμές του x εξαρτάται από την τιμή του συντελεστή α του x^2 και από το πρόσημο της διακρίνουσας $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$.

Συγκεκριμένα:

- Αν **$\Delta > 0$,** τότε όπως είδαμε: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \boldsymbol{\alpha(x - x_1)(x - x_2)}$ (2). Υποθέτοντας ότι $x_1 < x_2$ (όμοια αν $x_1 > x_2$) έχουμε:

▶ Αν ο x παίρνει τιμές μεταξύ των ριζών x_1, x_2 του τριωνύμου, δηλαδή αν $x_1 < x < x_2$, (Σχήμα 1) τότε $x - x_1 > 0$ και $x - x_2 < 0$ οπότε $(x - x_1)(x - x_2) < 0$.

Άρα από την (2) παίρνουμε ότι το τριώνυμο γίνεται **ετερόσημο του α.**



Σχήμα 1.

▶ Αν ο x παίρνει τιμές εκτός των ριζών x_1, x_2 του τριωνύμου (Σχήμα 2) έχουμε:

■ αν $x < x_1 < x_2$, τότε $x - x_1 < 0$ και $x - x_2 < 0$ οπότε $(x - x_1)(x - x_2) > 0$

■ αν $x_2 < x_1 < x$, τότε $x - x_1 > 0$ και $x - x_2 > 0$ οπότε $(x - x_1)(x - x_2) > 0$

Σχήμα 2.

Άρα από την (2) συμπεραίνουμε ότι το τριώνυμο γίνεται **ομόσημο του α.**

- Αν **$\Delta = 0$,** τότε όπως είδαμε: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \boldsymbol{\alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2}$ οπότε το τριώνυμο γίνεται **ομόσημο του α** για κάθε $x \in \mathbb{R}$ εκτός από τη ρίζα $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$ για την οποία μηδενίζεται.

• Αν **Δ < 0,** τότε όπως είδαμε: $αx^2 + βx + γ = \boldsymbol{α}\left[\left(\mathbf{x} + \frac{\boldsymbol{β}}{\mathbf{2α}}\right)^2 + \frac{|\boldsymbol{Δ}|}{\mathbf{4α^2}}\right]$

οπότε το τριώνυμο γίνεται **ομόσημο του α** για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αφού για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει ότι $\left(x + \frac{β}{2α}\right)^2 + \frac{|Δ|}{4α^2} > 0$.

Διερεύνηση: Να ανοίξετε την εφαρμογή **«Πρόσημο τριωνύμου»** και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

Συμπερασματικά

Το τριώνυμο $αx^2 + βx + γ = 0$, $α \neq 0$ γίνεται:
- **Ετερόσημο του α**, όταν $Δ > 0$, για κάθε x μεταξύ των ριζών του.
- **Μηδέν**, όταν το x είναι ρίζα του.
- **Ομόσημο του α** σε κάθε άλλη περίπτωση.

Εφαρμογή

Να μελετήσετε τα παρακάτω τριώνυμα ως προς το πρόσημό τους.

α. $-x^2 - x + 2$ **β.** $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + 1$

Απάντηση:

α. Το τριώνυμο $-x^2 - x + 2$ έχει διακρίνουσα $Δ = 9 > 0$, οπότε έχει δύο ρίζες. Τις $x_1 = -2$ και $x_2 = 1$. Εξάλλου $α = -1 < 0$ και κατασκευάζοντας τον πίνακα προσήμου του τριωνύμου, συμπεραίνουμε ότι το τριώνυμο γίνεται θετικό για $x \in (-2, 1)$ και αρνητικό για $x < -2$ ή $x > 1$.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$-x^2 - x + 2$		−	0	+	0	−	

β. Το τριώνυμο $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + 1$ έχει διακρίνουσα $Δ = -\frac{17}{9} < 0$. Άρα δεν έχει πραγματικές ρίζες και επειδή $α = \frac{1}{2} > 0$, γίνεται θετικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

4.3 • Αλγεβρική επίλυση ανισώσεων δευτέρου βαθμού

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/ήτριες να μπορούν:

- Να επιλύουν ανισώσεις 2ου βαθμού αλγεβρικά.
- Να χρησιμοποιούν ανισώσεις 2ου βαθμού στη μοντελοποίηση και στην επίλυση προβλημάτων.
- Να κατασκευάζουν δικά τους προβλήματα που επιλύονται με ανισώσεις 2ου βαθμού.

Στην ενότητα αυτή γίνεται διαπραγμάτευση της αλγεβρικής επίλυσης ανισώσεων της μορφής:

$$αx^2 + βx + γ > 0,\quad αx^2 + βx + γ \geq 0,\quad αx^2 + βx + γ < 0,\quad αx^2 + βx + γ \leq 0 \quad (α \neq 0)$$

χρησιμοποιώντας τα συμπεράσματα της προηγούμενης παραγράφου για το πρόσημο τριωνύμου, όπως φαίνεται στις εφαρμογές που ακολουθούν.
Η γραφική τους επίλυση παρουσιάζεται στην ενότητα των συναρτήσεων.

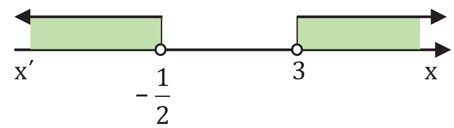
Εφαρμογή 1

Να λυθούν οι ανισώσεις:

α. $2x^2 - 5x - 3 > 0$ **β.** $3x^2 + 4x + 1 \leq 0$ **γ.** $x^2 - 8x + 16 \leq 0$ **δ.** $\frac{3x^2 + 1}{2} - \frac{x + 2}{3} \leq \frac{3x - 4}{6}$

Απάντηση:

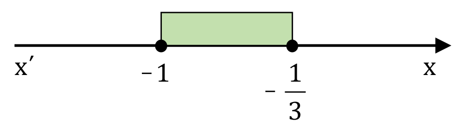
α. Είναι $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 49 > 0$, οπότε το τριώνυμο έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.



Τις $x_1 = -\frac{1}{2}$ και $x_2 = 3$. Εξάλλου $\alpha = 2 > 0$ και επομένως η ανίσωση $2x^2 - 5x - 3 > 0$ έχει λύσεις τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει $x < -\frac{1}{2}$ ή $x > 3$.

Επομένως: $2x^2 - 5x - 3 > 0 \Leftrightarrow \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (3, +\infty)$

β. Είναι $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 4 > 0$, οπότε το τριώνυμο έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες, τις $x_1 = -1$ και $x_2 = -\frac{1}{3}$.



Εξάλλου $\alpha = 3 > 0$ και επομένως η ανίσωση $3x^2 + 4x + 1 \le 0$ έχει λύσεις τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει $-1 \le x \le -\frac{1}{3}$.

Επομένως: $3x^2 + 4x + 1 \le 0 \Leftrightarrow x \in \left[-1, -\frac{1}{3}\right]$.

γ. Η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2 - 8x + 16$ είναι $\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 0$, οπότε το τριώνυμο έχει μία διπλή ρίζα: $x_1 = -\frac{-8}{2 \cdot 1} = 4$. Εξάλλου $\alpha = 1 > 0$ και επομένως είναι: $x^2 - 8x + 16 > 0$, για κάθε $x \neq 4$.

Άρα, $x^2 - 8x + 16 \le 0 \Leftrightarrow x = 4$.

δ. Η ανίσωση γράφεται:

$$\frac{3x^2 + 1}{2} - \frac{x + 2}{3} \le \frac{3x - 4}{6} \Leftrightarrow 3(3x^2 + 1) - 2(x + 2) \le 3x - 4 \Leftrightarrow 9x^2 - 5x + 3 \le 0$$

Το τριώνυμο $9x^2 - 5x + 3$ έχει διακρίνουσα $\Delta = -83 < 0$. Άρα δεν έχει πραγματικές ρίζες και επειδή $\alpha = 9 > 0$ γίνεται θετικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η ανίσωση $9x^2 - 5x + 3 \le 0$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

Διερεύνηση: Να ανοίξετε την εφαρμογή και να διερευνήσετε τις λύσεις της ανίσωσης $x^2 - \lambda x - 2 \le 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Εφαρμογή 2

Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$-x^2 - x + 12 \ge 0 \quad \text{και} \quad x^2 + x - 2 > 0$$

Απάντηση:

Λύνουμε την κάθε ανίσωση ξεχωριστά και στη συνέχεια βρίσκουμε τις κοινές τους λύσεις.

• Το τριώνυμο $-x^2 - x + 12$ έχει $\Delta = 49 > 0$. Άρα έχει δύο πραγματικές ρίζες, τις $x_1 = -4$, $x_2 = 3$. Κατασκευάζοντας τον πίνακα προσήμου του τριωνύμου:

x	$-\infty$		-4		3		$+\infty$
$-x^2 - x + 12$		$-$	0	$+$	0	$-$	

έχουμε $-x^2 - x + 12 \ge 0 \Leftrightarrow x \in [-4, 3]$.

• Το τριώνυμο $x^2 + x - 2$ έχει $\Delta = 9 > 0$. Άρα έχει δύο πραγματικές ρίζες, τις $x_1 = -2$, και $x_2 = 1$. Κατασκευάζοντας τον πίνακα προσήμου του τριωνύμου:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x^2 + x - 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

έχουμε $x^2 + x - 2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$.

Με τη βοήθεια πλέον του σχήματος συμπεραίνουμε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [-4, -2) \cup (1, 3]$

Εφαρμογή 3 (Μοντελοποίηση)

Ένας αγρότης έχει 100m πλέγματος για να δημιουργήσει ένα μαντρί σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

α. Να γραφτεί μια σχέση που να συνδέει το εμβαδόν Ε του μαντριού με μια από τις πλευρές του και να προσδιοριστεί ποιες τιμές μπορεί να πάρει η πλευρά του.

β. Αν ο αγρότης θέλει να περιφράξει τουλάχιστον 400m^2, ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις του ορθογώνιου;

γ. Να αναφερθούν πιθανές παραδοχές που ελήφθησαν υπόψη κατά τη μοντελοποίηση.

Διερεύνηση: Να ανοίξετε την εφαρμογή **«Το μαντρί»** και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

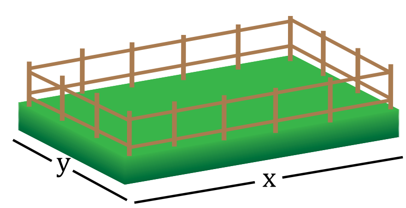
Απάντηση:

α. Επειδή το μαντρί που θα κατασκευαστεί θα έχει σχήμα ορθογώνιου παραλληλόγραμμου, το εμβαδόν του θα είναι $E = x \cdot y$, όπου x, y οι διαστάσεις του ορθογωνίου σε m.

Επιλογή μεταβλητής.
Έστω x = το μήκος του ορθογωνίου

Οργάνωση των πληροφοριών

Φυσικό μοντέλο	Αλγεβρικό μοντέλο
Μήκος του μαντριού	x
Πλάτος του μαντριού	y
Περίμετρος φράχτη	$2x + 2y = 100$
Εμβαδόν μαντριού	$E = x \cdot y$



Μοντελοποίηση. Από την περίμετρο του φράχτη βρίσκουμε: $2x + 2y = 100 \Leftrightarrow y = 50 - x$

Άρα η σχέση είναι: $E = x \cdot y \Leftrightarrow E(x) = x(50 - x) \Leftrightarrow E(x) = 50x - x^2$

Επειδή οι διαστάσεις (το μήκος και το πλάτος) της περίφραξης πρέπει να είναι θετικοί αριθμοί, έχουμε:

$$(x > 0 \text{ και } y = 50 - x > 0) \Leftrightarrow (x > 0 \text{ και } x < 50) \Leftrightarrow 0 < x < 50$$

Επομένως η πλευρά x παίρνει τιμές που ανήκουν στο διάστημα $(0, 50)$.

β. Για να περιφράξει τουλάχιστον 400m^2 γης θα πρέπει $E(x) \geq 400$. Χρειάζεται επομένως να λύσουμε την ανίσωση:

$$50x - x^2 \geq 400 \Leftrightarrow -x^2 + 50x - 400 \geq 0$$

Το τριώνυμο $-x^2 + 50x - 400$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 900$, $\alpha = -1 < 0$ και ρίζες τις $x_1 = 10$ και $x_2 = 40$.
Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί:

x	$-\infty$		10		40		$+\infty$
$-x^2 + 50x - 400$		$-$	●	$+$	●	$-$	

Συνεπώς για τη μια πλευρά του x έχουμε: $10 \leq x \leq 40$.

Άρα, για να περιφράξει ο αγρότης με 100m πλέγματος τουλάχιστον $400m^2$ γης, θα πρέπει να φτιάξει τη μια πλευρά του ορθογώνιου από 10 έως 40 μέτρα και αντίστοιχα την άλλη από 40 έως 10 μέτρα. Για παράδειγμα, αν η μια πλευρά είναι 15 μέτρα, τότε η άλλη πλευρά του ορθογώνιου πρέπει να είναι $50 - 15 = 35$ μέτρα και σ΄ αυτή την περίπτωση το εμβαδόν θα είναι $25 \cdot 35 = 525$τ.μ.

γ. Για την κατασκευή της σχέσης του εμβαδού που μοντελοποιεί το πρόβλημα υποθέσαμε ότι ο αγρότης θα χρησιμοποιήσει όλο το διαθέσιμο πλέγμα. Υποθέσαμε επίσης ότι η μορφολογία του εδάφους επιτρέπει οποιοδήποτε μήκος ή πλάτος για την κατασκευή του μαντριού.

Ωστόσο, στην πραγματικότητα υπάρχουν περιορισμοί ως προς τις διαστάσεις, οι οποίες πολλές φορές καθορίζονται από τα όρια της ιδιοκτησίας, το ανάγλυφο της περιοχής και τα φυσικά εμπόδια (ποτάμια, δέντρα, μικροί λόφοι κ.λπ.).

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Να αντικαταστήσετε το κενό στην ανίσωση $3x^2 + 12$ .... $12x$ με ένα από τα σύμβολα **>**, ≤ και ≥ ώστε η ανίσωση:

α. να μην έχει λύσεις **β.** να έχει μοναδική λύση

γ. να έχει λύσεις όλους τους πραγματικούς αριθμούς

2. α. Η Ανθή ισχυρίζεται ότι έχει μια γρήγορη απάντηση για το σύνολο λύσεων της ανίσωσης $(x - 3)^2 \geq -1$ χωρίς να κάνει πίνακα προσήμου. Τι παρατήρησε η Ανθή;

β. Στηριζόμενοι στην ιδέα της Ανθής ή σε κάποια δική σας να γράψετε μια ανίσωση δευτέρου βαθμού που να είναι αδύνατη.

3. Να γράψετε ανίσωση δευτέρου βαθμού που:

α. να είναι αδύνατη

β. να έχει μοναδική λύση

γ. να έχει άπειρο πλήθος λύσεων

δ. να έχει ως λύσεις τα $x \in (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$

4. Ζητήθηκε σε ένα σχολείο να λυθεί η ανίσωση $x^2 \leq 4$. Παρακάτω δίνεται η λύση τριών μαθητών/τριών. Να εξηγήσετε ποιες από τις παρακάτω λύσεις είναι σωστές.

Γιάννης

$$x^2 \leq 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} \leq \sqrt{4} \Leftrightarrow |x| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$$

Δήμητρα

$$x^2 \leq 4 \Leftrightarrow x \leq \pm 2$$

Μαρία

$$x^2 \leq 4 \Leftrightarrow x^2 - 4 \leq 0$$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$x^2 - 4$		+	•	−	•	+	

Άρα $-2 \leq x \leq 2$

5. Να εντοπίσετε το λάθος στον ακόλουθο τρόπο λύσης.

$$x^2 - 5x > 0 \Leftrightarrow x^2 > 5x \Leftrightarrow \frac{x^2}{x} > \frac{5x}{x} \Leftrightarrow x > 5$$

Ποιος είναι ο σωστός τρόπος λύσης;

6. Ο Μπάμπης και ο Σάκης λύνουν την ανίσωση $(x - 1)(x - 2) > 0$.

Ο Μπάμπης γράφει:

$$(x-1)(x-2) > 0 \Leftrightarrow x - 1 > 0 \text{ ή } x - 2 > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x > 1 \text{ ή } x > 2 \Leftrightarrow x > 2$$

Ο Σάκης γράφει:

$$(x-1)(x-2) > 0 \Leftrightarrow$$
$$(x - 1 > 0 \text{ και } x - 2 > 0) \text{ ή } (x - 1 < 0 \text{ και } x - 2 < 0)$$
$$\Leftrightarrow (x > 1 \text{ και } x > 2) \text{ ή } (x < 1 \text{ και } x < 2)$$
$$\Leftrightarrow x < 1 \text{ ή } x > 2$$

α. Ποιος από τους δύο έλυσε σωστά την ανίσωση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β. Ο Σάκης ισχυρίζεται ότι η ανίσωση που έλυσε δεν είναι 2ου βαθμού, διότι δεν υπάρχει παράγοντας x^2. Συμφωνείτε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ. Να προτείνετε έναν διαφορετικό τρόπο λύσης.

Ασκήσεις

1. Να παραγοντοποιήσετε όσα από τα παρακάτω τριώνυμα παραγοντοποιούνται.

α. $2x^2 - x - 1$ **β.** $9x^2 - 3x + \frac{1}{4}$

γ. $x + 3x^2 + 7$ **δ.** $2(x^2 + 2) + 4\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{8}\right)$

ε. $2x(3x - 2) - 2(3x + 2)$ **στ.** $(x - 1)(9x - 15) + 1$

2. Να μελετήσετε το πρόσημο των παρακάτω τριωνύμων για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

α. $x^2 - 2x - 3$ **β.** $x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{2}{3}$

γ. $x^2 + 5 - 2x$ **δ.** $4x - 16x^2 - \frac{1}{4}$

ε. $(2x - 1)^2 - (x + 1)^2$ **στ.** $(x - 2)x - 2x(x + 1)$

3. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α. $x^2 \geq 5x$ **β.** $4x^2 < 8x$ **γ.** $x^2 + x \leq 7x$

δ. $x^2 < 9$ **ε.** $3x^2 \geq 12$ **στ.** $x^2 + 16 > 0$

4. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α. $x^2 - 4x - 21 \geq 0$ **β.** $x^2 + 11x + 30 < 0$

γ. $6x^2 + 7x - 3 \leq 0$ **δ.** $6x^2 - 5x + 1 > 0$

ε. $12x^2 + 1 \geq 5x + 3$ **στ.** $2x^2 + 9 > 9x$

5. Να λύσετε τις ανισώσεις

α. $5x - 1 < 7x^2$ **β.** $4x^2 + 1 \leq 4x$ **γ.** $3(x^2 + 1) > -6x$

6. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α. $(2x + 1)(x - 3) \geq 0$

β. $3x(x + 4) - x(x - 1) < 15$

γ. $(4x + 1)(3x + 2) \geq 16x - 4$

δ. $(2x + 3)^2 < x + 6$

7. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α. $\dfrac{x^2 - 9}{5} - \dfrac{x^2 - 4}{15} < \dfrac{1 - 2x}{3}$

β. $\dfrac{x^2 - 1}{2} - 4\dfrac{x - 2}{3} \geq \dfrac{2x^2 + 1}{6}$

8. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες συναληθεύουν οι παρακάτω ανισώσεις

α. $x^2 - 2x - 3 \geq 0$ και $x^2 + 7x + 10 < 0$

β. $2 - x(x + 3) \leq 2(1 - x)$ και $\dfrac{x^2}{3} - 1 > \dfrac{3x - 1}{6}$

9. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει

$$x - 4 \leq x^2 - 4x < x + 6$$

10. Για καθεμία από τις παρακάτω εξισώσεις να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού k ώστε να έχουν:

α. δύο πραγματικές άνισες ρίζες

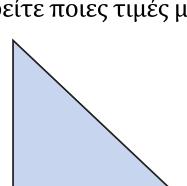
β. μία διπλή ρίζα

γ. καμία πραγματική ρίζα

i. $2x^2 + (k - 2)x + 2 = 0$ **ii.** $(k + 1)x^2 + kx + k = 0$

11. Το εμβαδόν του τριγώνου του παρακάτω σχήματος είναι μικρότερο από το εμβαδόν του ορθογωνίου. Να βρείτε ποιες τιμές μπορεί να πάρει η μεταβλητή x.

4



x – 2

x – 3

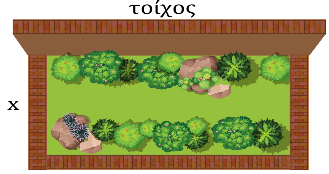
x

Διερεύνηση: Να ανοίξετε την εφαρμογή **«Τα εμβαδά»** και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

12. Ένας κήπος σχήματος ορθογωνίου θα περιφραχτεί στις τρεις πλευρές του καθώς η τέταρτη πλευρά του είναι τοίχος. Αν διαθέτουμε φράχτη μήκους 100m και ο κήπος που θα περιφραχτεί θα έχει εμβαδόν το πολύ 450m², να βρείτε το εύρος των διαστάσεων του κήπου.

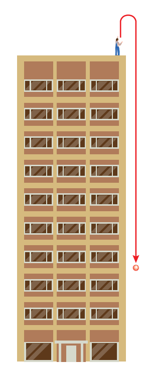
τοίχος

x



13. Δημιουργήστε μια άσκηση, όπως η προηγούμενη, έχοντας κατά νου ότι θέλετε να καλύψετε με πλακάκια ένα πάτωμα σχήματος ορθογωνίου. Σκεφτείτε τι θα σας ενδιέφερε να μάθετε προκειμένου να δημιουργήσετε μια ανισωτική σχέση.

14. Ένας άνθρωπος βρίσκεται στην ταράτσα ενός κτιρίου ύψους 36m και πετάει προς τα πάνω μια μπάλα, η οποία μετά πέφτει κατακόρυφα προς τα κάτω με αρχική ταχύτητα 6m/s. Το ύψος της μπάλας από το έδαφος t sec μετά τη ρίψη περιγράφεται κατά προσέγγιση από τη σχέση $h = 36 + 6t - 6t^2$. Ποιο χρονικό διάστημα η μπάλα θα είναι τουλάχιστον 24m πάνω από το έδαφος;



15. Τα έσοδα (σε €) μιας επιχείρησης που πουλάει σε έναν μήνα x προϊόντα περιγράφονται από τον τύπο $E(x) = 20x$ και τα έξοδα (σε €) από τον τύπο:

$$K(x) = 2000 + 8x + 0{,}0025\,x^2.$$

Αν το κέρδος P(x) της επιχείρησης περιγράφεται από την ισότητα $P(x) = E(x) - K(x)$, να βρείτε:

α. Πόσα προϊόντα το πολύ πρέπει να παράγει η επιχείρηση ώστε το κόστος να μην ξεπεράσει τα 3.700€.

β. Πόσα προϊόντα πρέπει να πουλήσει η επιχείρηση ώστε να έχει κέρδος τουλάχιστον 2.400€.

4.4 • Ανακεφαλαίωση 4ου Κεφαλαίου

Θεωρία

1. Παραγοντοποίηση τριωνύμου

Πρόσημο Διακρίνουσας	Μορφή τριωνύμου
$\Delta > 0$	$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$
$\Delta = 0$	$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$
$\Delta < 0$	$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{\lvert\Delta\rvert}{4\alpha^2}\right]$

2. Πρόσημο τριωνύμου

Το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ γίνεται:

- **Ετερόσημο του α** όταν έχει διακρίνουσα $\Delta > 0$, για κάθε x μεταξύ των ριζών του.
- **Μηδέν**, όταν το x είναι ρίζα του.
- **Ομόσημο του α** σε κάθε άλλη περίπτωση για κάθε x που δεν είναι ρίζα.

Επαναληπτικές Ασκήσεις

1. Δίνεται το τριώνυμο $6x^2 + 7x - 3$.

α. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου.
β. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο.
γ. Να μελετήσετε το πρόσημο του τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του x.

2. α. Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - 3x - 10 < 0$ (1).

β. Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\frac{\sqrt{5}}{2}$ και $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ είναι λύσεις της ανίσωσης (1).

Δίνεται η παράσταση:

$$A = \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{x + 2} - 2\frac{\sqrt{x^2 - 10x + 25}}{5 - x}$$

γ. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση Α.
δ. Για τις τιμές του x που επαληθεύουν την ανίσωση (1), να δείξετε ότι η παράσταση Α είναι σταθερή και να βρείτε την τιμή της.

3. α. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{|x - 2|}{2} + \frac{|3x - 6|}{3} < 6$.

β. Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - 5x + 4 \geq 0$.
γ. Να δείξετε ότι οι ανισώσεις των ερωτημάτων (α) και (β) συναληθεύουν και να βρείτε τις κοινές τους λύσεις.
δ. Αν οι αριθμοί α και β, με $\alpha < \beta$, είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων με $\alpha, \beta \in (-2, 1]$, είναι και ο αριθμός $\frac{\alpha + 2\beta}{3}$ κοινή τους λύση;

4. α. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 - x - 2$.

Δίνεται η παράσταση $A = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x}$

β. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση Α.
γ. Να απλοποιήσετε την παράσταση Α.
δ. Να λύσετε την ανίσωση $x^2 \cdot A^2 \geq x - 2$

5. α. Να αποδείξετε ότι $x^2 - 4x + 5 > 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x.

β. Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση:

$$A = |x^2 - 4x + 5| - |4x^2 - 4x + 1|$$

γ. Να λύσετε την ανίσωση $A > x$.

6. α. Να λύσετε την ανίσωση $|x - 2| \leq 1$ (1).

β. Να βρείτε μια ανίσωση 2ου βαθμού που να έχει τις ίδιες λύσεις με την (1).
γ. Να δείξετε ότι αν το τετράγωνο ενός αριθμού αυξημένο κατά 3 δεν ξεπερνάει το τετραπλάσιό του, τότε η απόστασή του από το 2 δεν ξεπερνάει το 1.

7. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α. $-4 < x^2 - 5x < 6$
β. $2x - 2 \leq 2x^2 - x \leq 4 + x$
γ. $4 - 2x \leq 7 - x^2 < 11 - 5x$

8. Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 - 2(3-\lambda)x + 4 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Να προσδιορίσετε το λ ώστε η εξίσωση:

α. να έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.
β. να έχει μία διπλή ρίζα.
γ. να μην έχει πραγματικές ρίζες.

9. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε:

α. $(\lambda-2)x^2 + (2\lambda-3)x + \lambda > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
β. το τριώνυμο $(\lambda-2)x^2 + 4x + 1 + \lambda$ να διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

10. **Διερεύνηση:** Να ανοίξετε την εφαρμογή **«Παραμετρικό τριώνυμο»** και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

11. Δίνεται η παράσταση $A = \dfrac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^2 + |x| - 2}$

α. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ορίζεται η παράσταση Α.
β. Να απλοποιήσετε την παράσταση Α.
γ. Να λύσετε την ανίσωση $A < 0$.

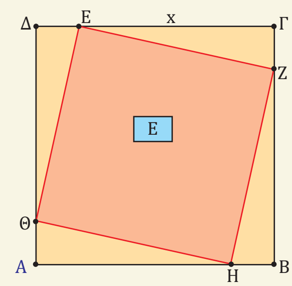
12. Ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο $\Pi = 60$cm. Αν x cm είναι το μήκος του ορθογωνίου, τότε να δείξετε ότι:

α. Το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου δίνεται από τη σχέση $E(x) = 30x - x^2$, $x \in (0, 30)$.
β. Για το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου ισχύει: $E(x) \leq 225$, για κάθε $x \in (0, 30)$.
γ. Από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο 60cm, εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι το τετράγωνο πλευράς 15cm.

13. Ένα αντικείμενο εκτοξεύεται από το έδαφος κατακόρυφα προς τα πάνω. Το ύψος h (σε m) στο οποίο θα βρεθεί το αντικείμενο τη χρονική στιγμή t (σε sec) μετά την εκτόξευση, δίνεται από τη σχέση $h(t) = 45t - 5t^2$. Να βρείτε:

α. μετά από πόσο χρόνο θα επανέλθει το αντικείμενο στο έδαφος,
β. ποιες χρονικές στιγμές το αντικείμενο θα βρεθεί σε ύψος $h = 35$m,
γ. το χρονικό διάστημα στη διάρκεια του οποίου το αντικείμενο βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από 35m.

14. Ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά 4 cm και στο εσωτερικό του τοποθετούμε τετράγωνο ΕΖΗΘ όπως στο σχήμα που οι κορυφές του ισαπέχουν από τις κορυφές του ΑΒΓΔ.



Αν x η απόσταση της κορυφής Ε από την κορυφή Γ, τότε:

α. Να εκφράσετε το εμβαδόν Ε του τετραγώνου ΕΖΗΘ, ως συνάρτηση του x.
β. Να βρείτε για ποια τιμή του x το εμβαδόν Ε είναι μικρότερο ή ίσο με 8 cm^2.
γ. Για την τιμή του x που βρήκατε, σε ποια θέση βρίσκονται οι κορυφές του ΕΖΗΘ;

Φύλλο Αξιολόγησης
4ου Κεφαλαίου

Γλωσσάρι
4ου Κεφαλαίου

Ερωτήσεις
πολλαπλής επιλογής

Ερωτήσεις
Σωστού - Λάθους

Συναρτήσεις

Κεφάλαιο

5

- Η Έννοια της Συνάρτησης
- Γραφική Παράσταση Συνάρτησης
- Η Συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$
- Η Συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

5.1 • Η Έννοια της Συνάρτησης

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/ήτριες να μπορούν:

- Να αναγνωρίζουν συναρτήσεις μέσα από καταστάσεις συμμεταβολής της καθημερινής ζωής και να τις διακρίνουν από άλλες σχέσεις συμμεταβολής.
- Να χρησιμοποιούν τον ορισμό της συνάρτησης για να εξετάσουν αν μία σχέση ή αντιστοιχία είναι συνάρτηση ή όχι.
- Να συνδέουν διαφορετικές αναπαραστάσεις μιας συνάρτησης (τύπος, πίνακας τιμών, γραφική παράσταση).

Αν παρατηρήσουμε γύρω μας θα διαπιστώσουμε ότι υπάρχουν ποσότητες-μεγέθη τα οποία μεταβάλλονται ταυτόχρονα (συμμεταβάλλονται) έτσι ώστε οι τιμές τους να έχουν μια σταθερή σχέση.
Παραδείγματα τέτοιων συμμεταβολών είναι τα ανάλογα και τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά τα οποία έχουμε ήδη συναντήσει στο Γυμνάσιο:

- Στα **ανάλογα ποσά** οι τιμές συμμεταβάλλονται έτσι ώστε ο λόγος των διαδοχικών τιμών τους να παραμένει σταθερός. Αν α ο σταθερός λόγος, τότε: $\frac{y}{x} = α$ ή $y = α \cdot x$, $x \neq 0$.
- Στα **αντιστρόφως ανάλογα ποσά** οι τιμές συμμεταβάλλονται έτσι ώστε το γινόμενο των διαδοχικών τιμών τους να παραμένει σταθερό. Αν α το σταθερό γινόμενο, τότε: $x \cdot y = α$ ή $y = \frac{α}{x}$, $x \neq 0$.

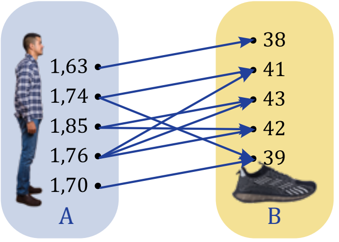
Διερεύνηση. *Τιμές πώλησης βιβλίων*

Ένας βιβλιοπώλης, προκειμένου να πουλήσει 5 βιβλία, τα οποία για συντομία ονομάζουμε Α, Β, Γ, Δ και Ε, αφού λάβει υπόψη του διάφορες παραμέτρους (Τιμή αγοράς, περιθώριο κέρδους, πολιτικές εκπτώσεων, ανταγωνισμός, έξοδα κ.τ.λ.) γράφει μια τιμή πάνω σε κάθε βιβλίο. Δηλαδή, καθορίζει μια τιμή πώλησης για κάθε βιβλίο.
Μπορεί, για λόγους πολιτικής, να αποφασίσει να πουλήσει δύο (ή και περισσότερα) βιβλία στην ίδια τιμή, αλλά δεν μπορεί για λόγους αξιοπιστίας να αποφασίσει να πουλήσει το ίδιο βιβλίο σε δύο (ή περισσότερες) διαφορετικές τιμές.

α. Πόσες τιμές μπορεί να έχει κάθε βιβλίο;
β. Σε κάθε τιμή πόσα βιβλία μπορεί να αντιστοιχούν;
γ. Να κάνετε αντιστοιχίσεις των βιβλίων σε τιμές πώλησης σύμφωνα με τους παραπάνω περιορισμούς.
δ. Τι παρατηρείτε για τον τρόπο σύνδεσης των βιβλίων με τις τιμές πώλησης;

Όταν δυο ποσότητες (μεγέθη, μεταβλητές) συμμεταβάλλονται μέσω μιας σταθερής σχέσης μεταξύ των τιμών τους, τότε μπορεί η τιμή της μιας από αυτές να καθορίζει ακριβώς είτε όχι την τιμή της άλλης. Για παράδειγμα:

- Κάθε τιμή θερμοκρασίας σε βαθμούς Φαρενάιτ συνδέεται με ακριβώς μία τιμή θερμοκρασίας σε βαθμούς Κελσίου.
- Η τιμή που κοστίζει ένα κιλό ψωμί καθορίζει ακριβώς το ποσό χρημάτων που θα πληρώσουμε για την αγορά ενός πλήθους κιλών ψωμιού.
- Το ύψος ενός μαθητή δεν καθορίζει ακριβώς το νούμερο παπουτσιών που φοράει, αφού όπως φαίνεται στο βελοδιάγραμμα που αφορά τους συγκεκριμένους μαθητές μιας ομάδας:
  - ✓ Όλοι οι μαθητές με ύψος 1,63 φοράνε 38 και όλοι οι μαθητές με ύψος 1,70 φοράνε παπούτσια νούμερο 39. Έτσι, στο ύψος 1,63 αντιστοιχεί ακριβώς ένα νούμερο παπουτσιών. Το ίδιο και στο ύψος 1,70.
  - ✓ Υπάρχουν όμως μαθητές, όπως αυτοί με ύψος 1,74, από τους οποίους κάποιοι φοράνε παπούτσια νούμερο 39 και κάποιοι άλλοι 41. Άρα στο ύψος 1,74 δεν αντιστοιχεί ακριβώς ένα νούμερο παπουτσιών. Ανάλογα και στα ύψη 1,76 και 1,85.



Βελοδιάγραμμα

Διερεύνηση: Να ανοίξετε την εφαρμογή **«Η έννοια της συναρτησης Ι»** και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

Εφαρμογή 1

Μία δρομέας ξεκινάει από το σημείο Α και τερματίζει στο σημείο Β κινούμενη με την ίδια ταχύτητα στη διαδρομή ΑΒ. Αν x η απόστασή της από το σημείο εκκίνησης Α και y η απόστασή της από το σημείο Β, τότε:

α. Πώς μεταβάλλονται οι αποστάσεις x, y κατά την κίνηση από το σημείο Α στο σημείο Β;

β. Αν τα Α, Β απέχουν 30 μέτρα, τι τιμές παίρνουν οι x, y;

γ. Να περιγράψετε τη σχέση που συνδέει τις μεταβολές των x, y:
- Λεκτικά
- Συμβολικά
- Γραφικά

δ. Να κατασκευάσετε:
- Έναν ενδεικτικό πίνακα 7 τιμών της συμμεταβολής των x, y.
- Ένα βελοδιάγραμμα με τις ενδεικτικές τιμές του πίνακα που δημιουργήσατε.

Τι παρατηρείτε;

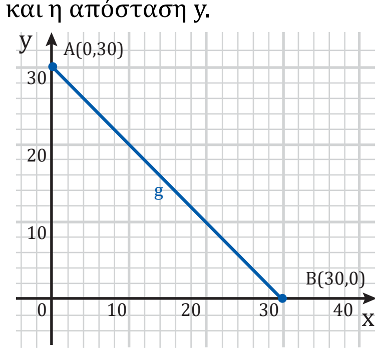
Απάντηση:

α. Οι αποστάσεις x, y από τα σημεία Α, Β αντίστοιχα συμμεταβάλονται. Ειδικότερα για τον τρόπο συμμεταβολής παρατηρούμε ότι η απόσταση x αυξάνεται καθώς η δρομέας απομακρύνεται από το σημείο Α της εκκίνησης και πλησιάζει στο σημείο τερματισμού Β. Αντίστοιχα, η απόσταση y ελαττώνεται καθώς η δρομέας απομακρύνεται από το σημείο Α της εκκίνησης και πλησιάζει στο σημείο τερματισμού Β.

β. Η απόσταση x παίρνει τιμές από 0 μέχρι και 30 μέτρα. Τις ίδιες τιμές παίρνει και η απόσταση y.

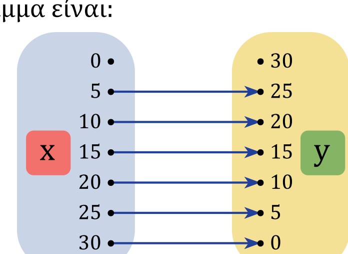
γ. Οι αποστάσεις x, y συμμεταβάλλονται και καθώς η απόσταση x αυξάνεται, η y ελαττώνεται. Επειδή τα Α, Β απέχουν 30 μέτρα, για τη σχέση που συνδέει τις x, y έχουμε:
- Λεκτικά: Το άθροισμα των αποστάσεων x, y είναι 30 μέτρα.
- Συμβολικά: $x + y = 30$.
- Γραφικά: Είναι $x + y = 30 \Leftrightarrow y = -x + 30$, οπότε πρόκειται για μια ευθεία την οποία σχεδιάζουμε κατά τα γνωστά.

Εξάλλου οι x, y παίρνουν τιμές από 0 έως 30, οπότε η γραφική παράσταση περιορίζεται στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ του σχήματος.



δ. Ένας ενδεικτικός πίνακας 7 τιμών και το αντίστοιχο βελοδιάγραμμα είναι:

x	0	5	10	15	20	25	30
y	30	25	20	15	10	5	0



Παρατηρούμε ότι οι x, y συμμεταβάλλονται μέσω της σταθερής σχέσης $x + y = 30$ μεταξύ των τιμών τους και σε κάθε τιμή του x αντιστοιχεί μία ακριβώς τιμή του y.

Όπως ξέρουμε από το Γυμνάσιο, όταν δυο ποσότητες συμμεταβάλλονται μέσω μιας σταθερής σχέσης μεταξύ των τιμών τους και έχουν την ιδιότητα κάθε τιμή της μιας ποσότητας να καθορίζει ακριβώς την τιμή της άλλης, τότε η συμμεταβολή ονομάζεται **συνάρτηση**.

Αν Α, Β λοιπόν τα σύνολα τιμών δύο ποσοτήτων (μεγεθών, μεταβλητών) μιας τέτοιας συμμεταβολής στην οποία κάθε τιμή x του Α καθορίζει ακριβώς την τιμή y μιας άλλης τιμής στο Β, τότε αυτό σημαίνει ότι κάθε τιμή x του συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε μία ακριβώς τιμή y του Β.

Ορισμός

Συνάρτηση f από ένα μη κενό σύνολο A σε ένα μη κενό σύνολο B ονομάζουμε μια διαδικασία (έναν κανόνα, μια σχέση) με την οποία κάθε στοιχείο του συνόλου A αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου B.

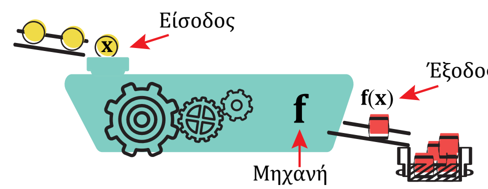
ΣΗΜΕΙΩΣΗ
Δεν ενδιαφέρει το γράμμα με το οποίο συμβολίζουμε μια συνάρτηση ή τη μεταβλητή της. Για παράδειγμα, οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - x$, $g(t) = t^2 - t$ και $\varphi(\rho) = \rho^2 - \rho$ εκφράζουν την ίδια συνάρτηση.

- Το σύνολο A λέγεται **πεδίο ορισμού** ή **σύνολο ορισμού** της f.
- Το γράμμα $x \in A$ ονομάζεται **ανεξάρτητη μεταβλητή.**
- Το $y = f(x) \in B$, στο οποίο αντιστοιχίζεται το $x \in A$ μέσω της f, ονομάζεται **εξαρτημένη μεταβλητή** ή **τιμή της f στο x** ή **εικόνα του x μέσω της f**.

Συμβολικά: $\mathbf{f: A \to B}$ ή $\mathbf{x \to f(x)}$

Για τις συναρτήσεις χρησιμοποιούμε συνήθως τα γράμματα f, g, h κ.τ.λ. του λατινικού αλφάβητου.

Μπορούμε να φανταστούμε τη συνάρτηση ως μια μηχανή f, η οποία δέχεται ένα αντικείμενο x στην είσοδο και το μετασχηματίζει σε ένα άλλο f(x) στην έξοδο.



Για να πειραματιστείτε με τον τύπο της συνάρτησης να ανοίξετε την εφαρμογή "Number Cruncher" στο σύνδεσμο:
http://www.shodor.org/interactivate/activities/NumberCruncer/

Διερεύνηση: Να ανοίξετε την εφαρμογή **«Η έννοια της συναρτησης ΙΙ»** και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

Από τον ορισμό της συνάρτησης $f: A \to B$ προκύπτει ότι:
- Στην αντιστοίχιση παίρνουν μέρος όλα τα στοιχεία του πεδίου ορισμού της A.
- Κανένα στοιχείο του συνόλου A δεν μπορεί να αντιστοιχίζεται σε δύο ή περισσότερα στοιχεία του συνόλου B.
- Δύο ή περισσότερα στοιχεία του συνόλου A μπορεί να αντιστοιχίζονται σε ένα στοιχείο του συνόλου B.

Για να είναι καλά ορισμένη μια συνάρτηση f πρέπει να ξέρουμε:
- Το πεδίο ορισμού της A, το σύνολο B και το f(x), για κάθε $x \in A$.

Ωστόσο, πολλές φορές αναφερόμαστε σε μια συνάρτηση f μόνο με τον κανόνα αντιστοίχισης ή τύπο της f(x).

Για παράδειγμα λέμε:
«Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \sqrt{x-1}$» ή *«δίνεται η συνάρτηση* $f(x) = \sqrt{x-1}$» ή *«δίνεται η συνάρτηση* $y = \sqrt{x-1}$»

Σε μια τέτοια περίπτωση θεωρούμε συμβατικά ότι $B = \mathbb{R}$ και ως πεδίο ορισμού της A, το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο οι τιμές f(x) έχουν νόημα πραγματικού αριθμού.

Συμβολικά: $\mathbf{A = \{x \in \mathbb{R} \mid y = f(x) \in \mathbb{R}\}}$

Παράδειγμα:
- Για τη συνάρτηση $f: (2, 10) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{x-1}$ έχουμε $A = (2, 10)$, $B = \mathbb{R}$ και τύπο $f(x) = \sqrt{x-1}$.
- Για τη συνάρτηση όμως g με τύπο $g(x) = \sqrt{x-1}$, έχουμε:
  Το πεδίο ορισμού A της g αποτελείται από το ευρύτερο υποσύνολό του στο οποίο $g(x) \in \mathbb{R}$.
  Εξάλλου $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ οπότε: $A = [1, +\infty)$, $B = \mathbb{R}$ και $g(x) = \sqrt{x-1}$

Το σύνολο των εικόνων του A μέσω της f ονομάζεται **σύνολο τιμών**, συμβολίζεται με f(A) και είναι:

$$f(A) = \{\mathbf{y \in B} \mid \textbf{υπάρχει } \mathbf{x \in A, y = f(x)}\} \subseteq \mathbf{B}.$$

Στο βιβλίο αυτό:

- Τα σύνολα Α, Β των συναρτήσεων με τις οποίες θα ασχοληθούμε είναι υποσύνολα του συνόλου των πραγματικών αριθμών και γι' αυτό οι συναρτήσεις ονομάζονται **πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής**.
- Οι συναρτήσεις με τις οποίες θα ασχοληθούμε έχουν **πεδίο ορισμού διάστημα** ή **ένωση διαστημάτων**.

Σχόλιο

- Μια αντιστοίχιση μπορεί να είναι συνάρτηση και να έχει μια γραφική παράσταση αλλά να μην ξέρουμε έναν τύπο γι' αυτή.
- Μια αντιστοίχιση μπορεί να είναι συνάρτηση και να έχει τύπο αλλά να μην έχει γραφική παράσταση.

Για παράδειγμα, η $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ αν } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ αν } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$ (συνάρτηση Dirichlet)

Τρόποι αναπαράστασης συνάρτησης

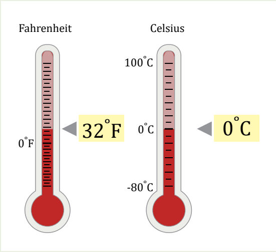
Μια συνάρτηση μπορεί να αναπαρασταθεί με τους ακόλουθους τέσσερις τρόπους:

1. Συμβολικά, με την αλγεβρική σχέση της αντιστοίχισης ή τον τύπο της συνάρτησης.
2. Γραφικά, με τη γραφική απεικόνιση των ζευγών (x, y) που ικανοποιούν την αντιστοίχιση των δύο μεγεθών.
3. Αριθμητικά, παρουσιάζοντας με έναν πίνακα την αντιστοίχιση των τιμών, το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών.
4. Λεκτικά, περιγράφοντας με λέξεις τη διαδικασία (τον κανόνα) αντιστοίχισης.

Ο κάθε τρόπος αναπαράστασης μιας συνάρτησης παρέχει πληροφορίες για ορισμένες διαστάσεις της έννοιας.

Εφαρμογή 1. *Συνάρτηση – Αντιστοίχιση*

Μια λεκτική περιγραφή της σχέσης που συνδέει τους βαθμούς Κελσίου με τους βαθμούς Φαρενάιτ είναι η εξής:
«Για να μετατρέψουμε τους βαθμούς Κελσίου °C σε Φαρενάιτ (F) πολλαπλασιάζουμε τους βαθμούς Κελσίου με 1,8 και στη συνέχεια προσθέτουμε 32».



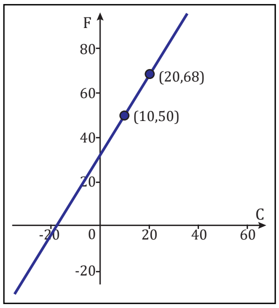
α. Η αντιστοίχιση των βαθμών Κελσίου με τους βαθμούς Φαρενάιτ είναι συνάρτηση;
β. Αν η αντιστοίχιση είναι συνάρτηση, να την παρουσιάσετε:
i. Συμβολικά **ii.** Γραφικά

Απάντηση:

α. Σε κάθε τιμή των βαθμών Φαρενάιτ αντιστοιχεί ακριβώς μία τιμή των βαθμών Κελσίου. Συνεπώς αυτή η σχέση είναι συνάρτηση.

β. i. Αν C οι βαθμοί Κελσίου και F(C) οι αντίστοιχοι βαθμοί σε Φαρενάιτ, τότε από τη λεκτική περιγραφή προκύπτει ότι:

$$F(C) = 1,8 \cdot C + 32$$



Σημείωση

Το ίδιο θα ήταν να γράφαμε $f(x) = 1,8x + 32$, όπου x η θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου και f(x) η αντίστοιχη θερμοκρασία σε βαθμούς Φαρενάιτ.

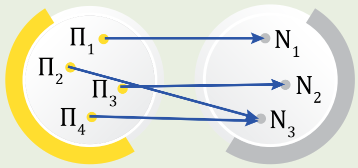
ii. Η $F(C) = 1,8 \cdot C + 32$ είναι συνάρτηση της μορφής $y = \alpha x + \beta$, οπότε, κατά τα γνωστά, παίρνοντας δύο σημεία π.χ. τα (10, 50) και (20, 68) σχεδιάζουμε τη γραφική της παράσταση.

Εφαρμογή 2. *Συνάρτηση - Βελοδιάγραμμα*

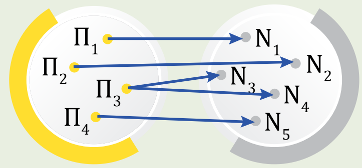
Τέσσερα πλοία $Π_1$, $Π_2$, $Π_3$, $Π_4$ ξεκινάνε απευθείας δρομολόγια προς τα νησιά N_1, N_2, N_3, N_4, N_5. Τα δρομολόγια δεν είναι πάντα τα ίδια και περιγράφονται στα παρακάτω βελοδιαγράμματα.

α. Ποιο από τα βελοδιαγράμματα αναπαριστά συνάρτηση;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

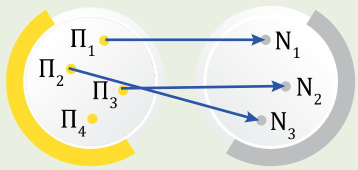
β. Για κάθε βελοδιάγραμμα που αναπαριστά συνάρτηση f, να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών.



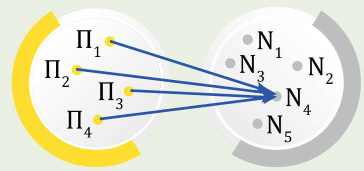
i.



ii.



iii.



iv.

Απάντηση:

α. Το βελοδιάγραμμα **(i)** αναπαριστά συνάρτηση διότι κάθε πλοίο πηγαίνει σε ένα και μόνο νησί.

Το βελοδιάγραμμα **(ii)** δεν αναπαριστά συνάρτηση διότι το πλοίο Π_3 εκτελεί δρομολόγια σε δύο νησιά, οπότε αντιστοιχίζεται σε δύο διαφορετικά νησιά.

Το βελοδιάγραμμα **(iii)** δεν αναπαριστά συνάρτηση διότι το πλοίο Π_4 δεν κάνει κανένα δρομολόγιο και επομένως δεν αντιστοιχίζονται όλα τα πλοία σε κάποιο νησί.

Το βελοδιάγραμμα **(iv)** αναπαριστά συνάρτηση διότι κάθε πλοίο πηγαίνει σε ένα και μόνο νησί.

β. Στην περίπτωση **(i)** πεδίο ορισμού είναι το $A = \{\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4\}$ και σύνολο τιμών το $f(A)= \{N_1, N_2, N_3\}$.

Στην περίπτωση **(iv)** πεδίο ορισμού είναι το $A = \{\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4\}$ και σύνολο τιμών το $f(A)= \{N_4\}$.

Εφαρμογή 3. *Συνάρτηση – Πίνακας*

Μια ομάδα μαθητών της Α' Λυκείου κατέγραψε το ύψος και τη μάζα των συμμαθητών τους που παίζουν βόλεϊ στην ομάδα του σχολείου τους. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον διπλανό πίνακα.

α. Να εξετάσετε αν ο πίνακας περιγράφει αριθμητικά μια συνάρτηση μεταξύ των υψών και των μαζών.

β. Να παρουσιάσετε τα δεδομένα του πίνακα σε ένα σύστημα αξόνων με άξονα των x τα ύψη και άξονα των y τις μάζες. Τι παρατηρείτε;

Οι μαθητές διαπίστωσαν ότι έκαναν λάθος στις μετρήσεις μάζας για τον 5ο, τον 8ο, τον 9ο και τον 11ο μαθητή και τις διέγραψαν από τον πίνακα.

γ. Πώς διαμορφώνεται ο νέος πίνακας και το νέο διάγραμμα ύψους – μάζας;

δ. Η νέα αντιστοίχιση υψών – μαζών που προέκυψε μετά τη διαγραφή είναι συνάρτηση;

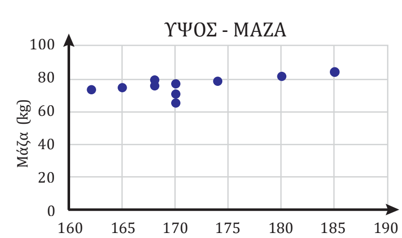
ε. Ποιος είναι ο τύπος της συνάρτησης που προκύπτει;

α/α	ΥΨΟΣ (cm)	ΜΑΖΑ (kg)
1	162	73
2	170	77
3	165	74,5
4	168	76
5	170	70
6	174	79
7	180	82
8	170	65
9	168	80
10	185	84,5
11	165	74,5

Απάντηση:

α. Παρατηρούμε από τον πίνακα ότι στο ύψος 170cm αντιστοιχούν τρεις διαφορετικές μάζες, 77kg, 70kg και 65kg, αντίστοιχα. Άρα ο πίνακας δεν περιγράφει αριθμητικά μια συνάρτηση μεταξύ των υψών και των μαζών, αφού σε ένα ύψος αντιστοιχούν τρεις διαφορετικές μάζες.

β. Τοποθετώντας τα ζεύγη (Ύψος, Μάζα) σε ένα σύστημα αξόνων παίρνουμε το διπλανό διάγραμμα (1). Παρατηρούμε ότι υπάρχουν τρεις μαθητές με το ίδιο ύψος 1,70m οι οποίοι έχουν διαφορετικές μάζες. Αυτό σημαίνει ότι σε μια τιμή του ύψους δεν αντιστοιχεί μόνο μία τιμή μάζας και επομένως δεν είναι συνάρτηση.

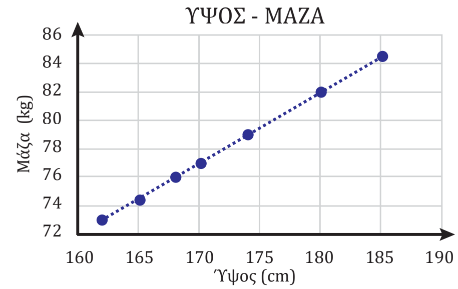


Διάγραμμα 1

γ. Ο νέος πίνακας τιμών και το νέο διάγραμμα (Διάγραμμα 2) είναι:

α/α	ΥΨΟΣ (cm)	ΜΑΖΑ (kg)
1	162	73
2	170	77
3	165	74,5
4	168	76
5	174	79
6	180	82
7	185	84,5

Νέος πίνακας



Διάγραμμα 2

δ. Ο νέος πίνακας παριστάνει μια συνάρτηση, αφού σε κάθε τιμή της στήλης των υψών αντιστοιχίζεται μία ακριβώς τιμή της στήλης των μαζών. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε και από το νέο διάγραμμα αφού σε κάθε τετμημένη (ύψος) αντιστοιχίζεται ακριβώς μια τεταγμένη (μάζα).

ε. Από το διάγραμμα φαίνεται ότι τα σημεία βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία. Η εξίσωση μιας ευθείας, όπως ξέρουμε, είναι της μορφής $y = αx + β$ (1) και ορίζεται από δύο σημεία. Θεωρούμε ότι διέρχεται από τα σημεία (162,73), (170,77) οπότε οι συντεταγμένες τους την επαληθεύουν. Αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες των σημείων στην (1), βρίσκουμε $α = 2$ και $β = 16$, οπότε η ευθεία που διέρχεται από αυτά τα δύο σημεία είναι: $y = 2x + 16$ (2). Επειδή και οι συντεταγμένες όλων των άλλων σημείων επαληθεύουν την (2), ο τύπος της συνάρτησης είναι $f(x)= 2x + 16$. Πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο $A = \{162, 170, 165, 168, 174, 180, 185\}$ των τετμημένων (ύψη) και σύνολο τιμών της το σύνολο $f(A)= \{73, 77, 74{,}5 , 76, 79, 82, 84{,}5\}$ των τεταγμένων (μάζες) των σημείων.

Εφαρμογή 4. *Συνάρτηση με κλάδους*

Η πάγια χρέωση από μια εταιρεία σε έναν χρήστη κινητού τηλεφώνου είναι 20€ τον μήνα για απεριόριστη ομιλία και χρήση δεδομένων μέχρι και 2 GB. Για επιπλέον χρήση δεδομένων μετά από τα 2 GB, η εταιρεία χρεώνει τον χρήστη 3€ ανά GB.

α. Να περιγράψετε συμβολικά τη μηνιαία χρέωση η οποία περιλαμβάνει και χρήση δεδομένων μεγαλύτερη των 2 GB.

β. Η μηνιαία χρέωση που προσδιορίσατε στο (α) ερώτημα είναι συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ. Να βρείτε τα χρήματα που θα πληρώσει ένας χρήστης αν από τα δεδομένα χρησιμοποιήσει:
i. 1 GB **ii.** 2 GB **iii.** 5 GB

Απάντηση:

α. Αν συμβολίσουμε με x τα GB που χρησιμοποιούμε, τότε:

- Για χρήση δεδομένων $x \in [0,2]$ GB, η μηνιαία χρέωση είναι 20€ τον μήνα.
- Για χρήση δεδομένων $x > 2$ GB, η μηνιαία χρέωση $f(x)$ είναι $f(x) = 20 + 3(x - 2) = 3x + 14$.

Άρα η μηνιαία χρέωση $f(x)$ περιγράφεται από τον τύπο: $f(x) = \begin{cases} 20, & 0 \le x \le 2 \\ 3x + 14, & x > 2 \end{cases}$ (1)

β. Όλοι οι χρήστες δεδομένων που καταναλώνουν μέχρι και 2 GB πληρώνουν το ίδιο σταθερό ποσό των 20€, αφού όπως ξέρουμε η $f(x) = 20$ είναι η σταθερή συνάρτηση. Άρα ο κλάδος με τύπο $f(x) = 20$, $0 \le x \le 2$ είναι συνάρτηση. Σε κάθε χρήστη ο οποίος καταναλώνει περισσότερα από 2 GB αντιστοιχεί ακριβώς μια τιμή χρέωσης, αφού όπως ξέρουμε η $f(x) = 3x + 14$ είναι συνάρτηση. Άρα και ο κλάδος με τύπο $f(x) = 3x + 14$, $x > 2$ είναι συνάρτηση. Επομένως σε κάθε x από το πεδίο ορισμού της f αντιστοιχεί μία ακριβώς τιμή f(x), οπότε η μηνιαία χρέωση f(x) που περιγράφεται από τον τύπο (1) είναι συνάρτηση.

γ. Από τον τύπο (1) έχουμε:

i. Επειδή $1 < 2$, θέτοντας $x = 1$ στον πρώτο κλάδο της συνάρτησης παίρνουμε: $f(1) = 20€$

ii. Επειδή $2 \leq 2$, θέτοντας $x = 2$ στον πρώτο κλάδο της συνάρτησης παίρνουμε: $f(2) = 20€$

iii. Επειδή $5 > 2$, θέτοντας $x = 5$ στον δεύτερο κλάδο της συνάρτησης παίρνουμε: $f(5) = 3 \cdot 5 + 14 = 29€$

Σημείωση

Το γεγονός ότι όλοι οι χρήστες που καταναλώνουν λιγότερα δεδομένα από 2 GB πληρώνουν το ίδιο ποσό σημαίνει ότι η συνάρτηση είναι **σταθερή** στο διάστημα $[0, 2]$.

Εφαρμογή 5. *Συνάρτηση – Πεδίο ορισμού*

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

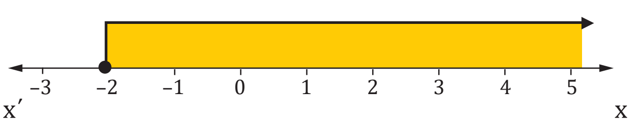
α. $f(x) = \dfrac{7x + 1}{x - 3}$ **β.** $g(x) = \sqrt{x + 2}$ **γ.** $h(x) = \dfrac{\sqrt{x + 3}}{x - 4} + \sqrt{6 - x}$

Απάντηση:

α. Για να έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση $\dfrac{7x + 1}{x - 3}$, πρέπει να ισχύει ότι $x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$.

Άρα το πεδίο ορισμού Α της f είναι το $A = \mathbb{R} - \{3\}$ ή $A = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$.

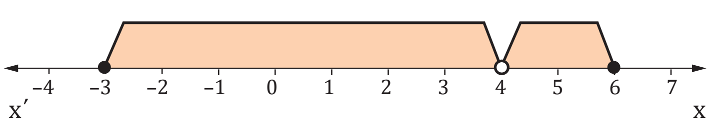
β. Για να έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση $\sqrt{x + 2}$ πρέπει να ισχύει ότι $x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$.



Άρα το πεδίο ορισμού Α της g είναι το $A = [-2, +\infty)$.

γ. Για να έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση $\dfrac{\sqrt{x + 3}}{x - 4} + \sqrt{6 - x}$ πρέπει να ισχύει ότι:

$(x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3)$ **και** $(x - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 4)$ **και** $(6 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 6)$



Άρα το πεδίο ορισμού Α της h είναι το $A = [-3, 4) \cup (4, 6]$.

Ιστορικό Σημείωμα – Δραστηριότητα

Χρήσιμες πληροφορίες για τη ζωή σημαντικών μαθηματικών που συνέβαλαν στην ανάπτυξη της θεωρίας των συναρτήσεων καθώς και μια σχετική δραστηριότητα θα βρεις στο συμπληρωματικό υλικό.

Αυτοαξιολόγηση

1. Πώς ορίζεται:

α. η συνάρτηση;

β. το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης;

2. Να βρείτε ποια από τις παρακάτω σχέσεις είναι συνάρτηση δικαιολογώντας την απάντησή σας.

α. Κάθε σκυλίτσα γεννάει ένα μόνο κουτάβι.

β. Κάθε άνθρωπος κοιμάται μόνο 8 ώρες την ημέρα.

γ. Κάθε αυτοκίνητο έχει ένα τιμόνι.

3. α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = x^2 - 9$ **ii.** $g(x) = \sqrt{4x + 16}$

iii. $h(x) = \dfrac{1}{x - 4}$

β. Αν f, g, h οι συναρτήσεις του (α) ερωτήματος, να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

i. $\dfrac{1}{f(x)}$ **ii.** $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ **iii.** $g(x) \cdot h(x)$

4. Το μέγιστο όριο ταχύτητας x σε έναν αυτοκινητόδρομο είναι 130 km/h και το ελάχιστο 60 km/h. Το πρόστιμο f για την παραβίαση του κατώτερου και του ανώτερου ορίου είναι 5 € για κάθε ένα km/h, έξω από τα όρια.

α. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω τύπο ώστε να περιγράφει την παραπάνω λεκτική διατύπωση.

$$f(x) = \begin{cases} \text{.........................}, & 0 < x < 60 \\ \text{.........................}, & 60 \leq x \leq 130 \\ \text{.........................}, & x > 130 \end{cases}$$

β. Να βρείτε τις τιμές f(40), f(60), f(130), f(160).

γ. Ποια είναι η φυσική ερμηνεία των τιμών που υπολογίσατε στο προηγούμενο ερώτημα;

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Στη συνάρτηση $f: A \to B$ με τύπο $y = 2x - 1$, το σύνολο A ονομάζεται ………………. της f, το x ονομάζεται ………………. μεταβλητή και το y ………………. μεταβλητή της f.

2. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συμμεταβολές είναι συναρτήσεις δικαιολογώντας την απάντησή σας.

α. Σε κάθε άνθρωπο αντιστοιχεί μόνο μία ομάδα αίματος.

β. Κάθε παιχνιδομηχανή παίζει ένα μόνο παιχνίδι.

γ. Σε κάθε ζυγό αριθμό κυκλοφορίας αντιστοιχεί ένα αυτοκίνητο.

δ. Κάθε μαθητής έχει μόνο μία αστυνομική ταυτότητα.

ε. Κάθε γονιός έχει ένα μόνο παιδί.

3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ως σωστές ή λανθασμένες αιτιολογώντας την απάντησή σας.

α. Οι τύποι $f(x) = x + 3$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(t) = t + 3$, $t \in \mathbb{R}$ εκφράζουν διαφορετικές συναρτήσεις.

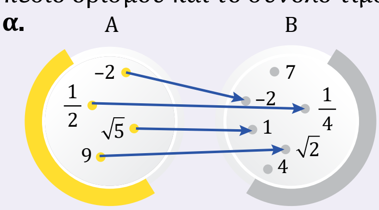
β. Αν το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης έχει ένα στοιχείο, τότε και το σύνολο τιμών θα έχει ένα στοιχείο.

γ. Ο τύπος $y^2 = x + 1$, $x \geq -1$ με ανεξάρτητη μεταβλητή την x ορίζει συνάρτηση.

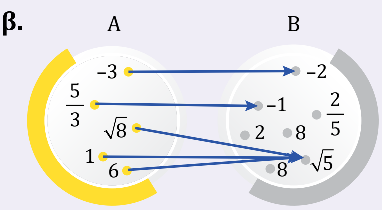
δ. Δεν υπάρχει συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(1) = f(-1)$.

4. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω αντιστοιχίσεις είναι συναρτήσεις και στη συνέχεια να γράψετε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών τους.

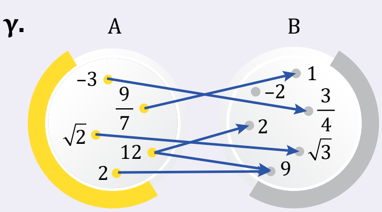
α.



β.



γ.



5. Να γράψετε δύο παραδείγματα συμμεταβολών από την καθημερινή σας ζωή που είναι συναρτήσεις και δύο που δεν είναι.

Ασκήσεις

1. Οι ακτίνες και τα εμβαδά 5 ομόκεντρων κύκλων παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

Ακτίνα (ρ)	0.5	1	1.5	2	2.5
Εμβαδόν (Ε)	0,785	3,14	7,065	12,56	19,625
Λόγοι (E/ρ^2)					

α. Ποιες μεταβλητές παρατηρείτε;

β. Ποια μεταβλητή προξενεί μεταβολή στην άλλη μεταβλητή;

γ. Συνδέεται η μεταβολή της ακτίνας ρ στη μεταβολή του εμβαδού Ε του κύκλου;

δ. Παρατηρήστε τις μεταβολές της ακτίνας και τις αντίστοιχες του εμβαδού. Διαπιστώνετε κάποια σχέση;

ε. Να βρείτε τους λόγους των τιμών των εμβαδών των κύκλων με τα τετράγωνα των αντίστοιχων ακτινών και να συμπληρώσετε τον πίνακα. Τι μεταβάλλεται, τι παραμένει σταθερό;

στ. Να παραστήσετε γραφικά τα ζεύγη (ακτίνα, εμβαδόν). Ανήκουν τα σημεία στη γραφική παράσταση κάποιας συνάρτησης; Αν ναι, ποια είναι η εξίσωσή της;

2. Να βρείτε τις τιμές που ζητούνται για κάθε συνάρτηση σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις.

α. Συνάρτηση: $f(x) = x^2 - 4$.
Τιμές: $f(-1)$, $f(0)$, $f(4)$, $f(2x)$.

β. Συνάρτηση: $w(\alpha) = 1 + \frac{1}{\alpha}$.
Τιμές: $w\left(-\frac{1}{4}\right)$, $w(1)$, $w(x-1)$.

γ. Συνάρτηση: $f(x) = 3|x| - 2$.
Τιμές: $f(-1)$, $f(1)$, $f(-1) - 2f(1)$, $f^2(0) + f\left(\frac{1}{3}\right)$

3. Να παρουσιάσετε μια συνάρτηση και με τους 4 τρόπους περιγραφής (λεκτικά, αλγεβρικά, αριθμητικά και οπτικά) αιτιολογώντας γιατί είναι συνάρτηση.

4. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \begin{cases} 2x, & x > 1 \\ x^2 - 1, & x \leq 1 \end{cases}$

α. Να βρείτε τις τιμές $f(2)$, $f(1)$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

γ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \geq 8$.

5. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α. $f(x) = \frac{2x}{4 - x}$ **β.** $g(\rho) = \frac{|\rho| - 3}{2\rho^2 + 3\rho + 1}$

γ. $h(\alpha) = \frac{3\alpha - 2}{|\alpha| + \alpha}$ **δ.** $f(x) = \sqrt{9 - 4x^2}$

ε. $g(\rho) = \frac{\rho - 7}{\sqrt{\rho + 4}} + \frac{2}{\rho - 1}$ **στ.** $h(\alpha) = \frac{\alpha^2 - 4}{2 - \sqrt{\alpha}}$

6. Δίνεται συνάρτηση g με τύπο $g(t) = (t + 2)^2 - 1$:

α. Να διατυπώσετε λεκτικά τον παραπάνω τύπο.

β. Ποια είναι η ανεξάρτητη και ποια η εξαρτημένη μεταβλητή;

γ. Αν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το $A = \{t \in \mathbb{Z} | -2 \leq t \leq 2\}$, να βρείτε το σύνολο τιμών της g.

7. α. Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο 80cm και η μία πλευρά του έχει μήκος x cm. Να εκφράσετε το εμβαδόν του συναρτήσει του x.

β. Ένα ισόπλευρο τρίγωνο έχει ύψος x cm. Να εκφράσετε το εμβαδόν του συναρτήσει του x.

8. Το βάρος ενός αστροναύτη είναι 80kg στην επιφάνεια της Γης και όταν είναι x km μακριά από τη Γη το βάρος του περιγράφεται προσεγγιστικά από τη συνάρτηση w με τύπο

$$w(x) = 80\left(\frac{3960}{3960 + x}\right)^2$$

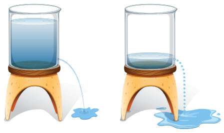
για τα πρώτα 2000 km.

α. Ποιο είναι το βάρος του αστροναύτη όταν βρίσκεται 100 km πάνω από τη Γη;

β. Να κατασκευάσετε πίνακα 10 τιμών για τη συνάρτηση του βάρους w από 0 km έως και 500 km.

γ. Πόσο μεταβλήθηκε το βάρος του αστροναύτη που βρίσκεται σε ύψος 2000 km σε σχέση με το βάρος του στην επιφάνεια της Γης;

9. Ένα δοχείο περιέχει 30 lt νερό και στη βάση του υπάρχει μια τρύπα από την οποία διαρρέει το νερό και το δοχείο αδειάζει σε 20 λεπτά. Η διαρροή γίνεται γρηγορότερα όταν το δοχείο είναι σχεδόν γεμάτο διότι η πίεση είναι μεγαλύτερη. Σύμφωνα με τον νόμο του Torricelli, ο όγκος του νερού που παραμένει στο δοχείο μετά από t λεπτά περιγράφεται από τον τύπο



$$V(t) = 30\left(1 - \frac{t}{20}\right)^2$$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης V.

β. Να υπολογίσετε τις τιμές V(0) και V(20).

γ. Ποια είναι η φυσική ερμηνεία των τιμών που προσδιορίσατε στο προηγούμενο ερώτημα;

δ. Να κάνετε έναν πίνακα τιμών και να σχεδιάσετε μια πιθανή μεταβολή του όγκου του νερού που απομένει στο δοχείο καθώς το t μεταβάλλεται από 0 min στα 20 min.

10. Ένα ξενοδοχείο χρεώνει 80€ τη διανυκτέρευση σε ένα δίκλινο για τις 2 πρώτες μέρες και 50€ για κάθε επιπλέον μέρα.

α. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f που περιγράφει το κόστος της διανυκτέρευσης συναρτήσει του αριθμού των ημερών x διαμονής.

β. Να υπολογίσετε τις τιμές f(1), f(2), f(5).

γ. Ποια είναι η φυσική ερμηνεία των τιμών που υπολογίσατε στο προηγούμενο ερώτημα;

5.2 • Γραφική Παράσταση Συνάρτησης

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/ήτριες να μπορούν:

Να ερμηνεύουν μία δεδομένη γραφική παράσταση συνάρτησης για να επιλύσουν ένα πρόβλημα.

Η τοποθέτηση όλων των σημείων της $(x,\ f(x))$ μιας συνάρτησης $f\colon A \to \mathbb{R}$ στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων, μας επιτρέπει να διερευνήσουμε και να καταλάβουμε καλύτερα τον τρόπο σύνδεσης της ανεξάρτητης μεταβλητής x με την εξαρτημένη μεταβλητή $y = f(x)$.

Ορισμός

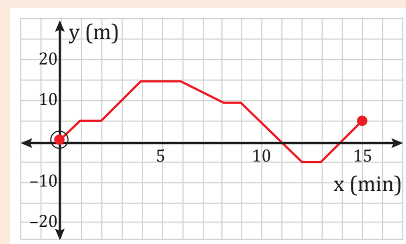
Γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f\colon A \to \mathbb{R}$ ονομάζουμε το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x,\ f(x))$, $x \in A$.

Το **x** λέγεται **τετμημένη** και το **y τεταγμένη** του σημείου Μ. Οι αριθμοί **x**, **y** λέγονται **συντεταγμένες** του Μ.
Τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f τη συμβολίζουμε συνήθως με C_f.
Σύμφωνα με τον ορισμό μιας συνάρτησης, κάθε τιμή $x \in A$ αντιστοιχεί σε μια και μόνη τιμή $y \in \mathbb{R}$. Αυτό σημαίνει ότι το γράφημα μιας συνάρτησης δεν μπορεί να έχει δύο ή περισσότερα διαφορετικά σημεία με την ίδια τετμημένη. Συνεπώς, μια κάθετη ευθεία στον άξονα x΄x τέμνει τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης το πολύ μία φορά. Αυτή η παρατήρηση μας δίνει έναν τρόπο ελέγχου για να διαπιστώνουμε αν ένα γράφημα είναι γραφική παράσταση μιας συνάρτησης.

Διερεύνηση: Να ανοίξετε την εφαρμογή **«Η έννοια της συνάρτησης ΙΙΙ»** και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

Πληροφορίες από τη Γραφική Παράσταση Συνάρτησης

Διερεύνηση



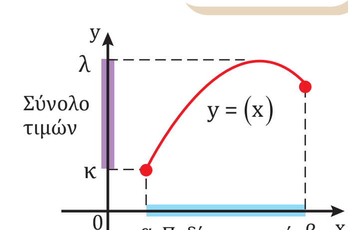
Η Άννα και η Δήμητρα μετέχουν σε έναν μαραθώνιο. Το διπλανό διάγραμμα δείχνει πόσο πιο μπροστά βρίσκεται η Άννα από τη Δήμητρα μετά από x λεπτά.

α. Για ποιο χρονικό διάστημα μελετάμε την απόσταση των δύο αθλητριών;
β. Τι αναπαριστούν οι τιμές του άξονα y΄y;
γ. Μετά από 3 λεπτά ποια είναι η απόσταση της Άννας από τη Δήμητρα;
δ. Είναι σωστή η προηγούμενη πρόταση αν διατυπωθεί ως εξής;
«Ποια είναι η τιμή του y όταν x = 3;»
ε. Ποιες χρονικές στιγμές η Άννα είναι 10 m πιο μπροστά από τη Δήμητρα;
στ. Ποιες χρονικές στιγμές διασταυρώνονται;
ζ. Ποιες χρονικές στιγμές η απόσταση των δύο αθλητριών φαίνεται να είναι σταθερή; Ποιες φαίνεται να αυξάνεται και ποιες να μειώνεται;
η. Ποια χρονική στιγμή έχουμε για πρώτη φορά τη μέγιστη απόσταση των δύο αθλητριών και ποια είναι αυτή;
θ. Πώς ερμηνεύετε το γεγονός ότι το χρονικό διάστημα από 11 έως και 14 min η διαφορά των αποστάσεων των δύο αθλητριών είναι αρνητική;

Διερεύνηση: Να ανοίξετε την εφαρμογή **«Πεδίο ορισμού Ι»** και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

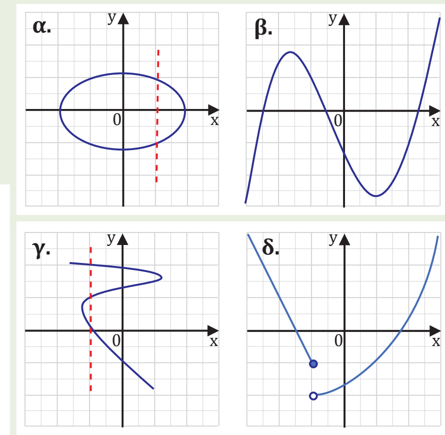
Πεδίο Ορισμού και Σύνολο Τιμών από Γραφική Παράσταση

Το **πεδίο ορισμού** και το **σύνολο τιμών** μιας συνάρτησης $y = f(x)$ μπορεί να βρεθεί από τη γραφική παράσταση της f, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Συγκεκριμένα, το πεδίο ορισμού βρίσκεται με προβολή των σημείων της C_f στον άξονα x΄x και το σύνολο τιμών με προβολή της C_f στον άξονα y΄y.



Εφαρμογή

Να ελέγξετε ποια από τα επόμενα γραφήματα αποτελούν γραφική παράσταση συνάρτησης.
Στις περιπτώσεις που ορίζεται συνάρτηση να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών τους.



Απάντηση:
Στο (α) και στο (γ) σχήμα διαπιστώνουμε ότι υπάρχουν κατακόρυφες ευθείες οι οποίες τέμνουν τα γραφήματα σε περισσότερα από ένα σημεία, οπότε δεν είναι συναρτήσεις.

Το γράφημα στο (β) σχήμα παριστάνει συνάρτηση με $A = \mathbb{R}$ και $f(A) = \mathbb{R}$.
Το γράφημα στο (δ) σχήμα παριστάνει συνάρτηση με $A = \mathbb{R}$ και $f(A) = (-4, +\infty)$.

Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της συνάρτησης στην εφαρμογή "Domain and Range Animation" της ιστοσελίδας
www.geogebra.org/m/FCMDfPNf

Διερεύνηση: Να ανοίξετε την εφαρμογή **«Πεδίο ορισμού ΙΙ»** και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

Σημεία Τομής Γραφικών Παραστάσεων Συναρτήσεων

Οι συντεταγμένες των κοινών σημείων δύο συναρτήσεων βρίσκονται:

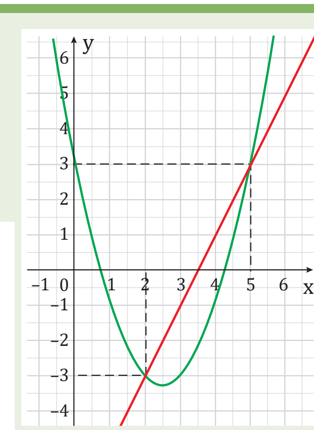
- Με εκτίμηση από τις γραφικές τους παραστάσεις
- Με υπολογισμό από τις αναλυτικές τους εκφράσεις, όπως παρουσιάζεται στις εφαρμογές που ακολουθούν.

Εφαρμογή 1

Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2 - 5x + 3$ και $g(x) = 2x - 7$

α. Να εκτιμήσετε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f, g.

β. Να υπολογίσετε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f, g.



Απάντηση:
α. Από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g του σχήματος εκτιμούμε ότι τα σημεία τομής τους είναι $(2, -3)$ και $(5, 3)$.
β. Από τις αναλυτικές εκφράσεις των f, g για τις τετμημένες των σημείων τομής τους έχουμε:
$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 5x + 3 = 2x - 7 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = 5$
Οι τεταγμένες τους βρίσκονται με αντικατάσταση των τετμημένων σε έναν από τους τύπους $f(x)$, $g(x)$.
Είναι: $g(2) = 2 \cdot 2 - 7 = -3$ και $g(5) = 2 \cdot 5 - 7 = 3$, οπότε τα σημεία τομής των f, g είναι: $(2, -3)$ και $(5, 3)$.

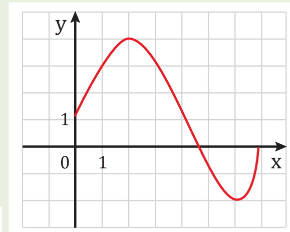
Εφαρμογή 2

Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f του διπλανού σχήματος:

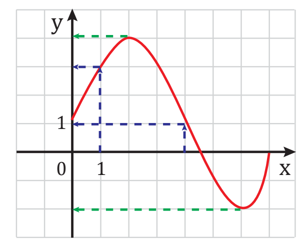
α. Να βρείτε την τιμή f(1) και να εκτιμήσετε την τιμή f(4).

β. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f.

γ. Πόσες ρίζες έχει η εξίσωση f(x) = 0.



Απάντηση:



α. Υψώνουμε κάθετη στον άξονα x΄x στο σημείο x = 1 (ακριβέστερα στο (1,0)) και στη συνέχεια από το σημείο στο οποίο συναντάει τη γραφική παράσταση φέρνουμε κάθετη στον άξονα y΄y η οποία τον τέμνει στο y = 3 (ακριβέστερα στο (0,3)). Άρα, f(1) = 3. Εργαζόμενοι ανάλογα βρίσκουμε ότι f(4)≈ 1,2.

β. Προβάλλοντας τη γραφική παράσταση στον x΄x βρίσκουμε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το διάστημα A = [0, 7]. Προβάλλοντας τη γραφική παράσταση στον y΄y βρίσκουμε ότι το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το διάστημα [−2, 4], δηλαδή f(A) = [− 2, 4].

γ. Ρίζες της εξίσωσης f(x) = 0 είναι οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x. Η γραφική παράσταση της f τέμνει σε ένα μόνο σημείο τον άξονα x΄x και επομένως η εξίσωση f(x) = 0 έχει μία ακριβώς ρίζα.

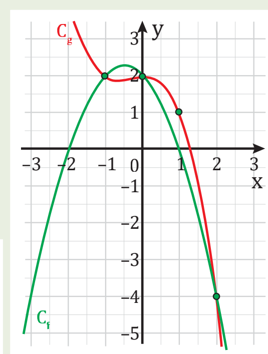
Εφαρμογή 3

Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f και g, με πεδίο ορισμού το ℝ. Να βρείτε από τις γραφικές παραστάσεις:

α. Τις τιμές της f στα σημεία: −2, −1, 0, 1 και 2.

β. Τις λύσεις των εξισώσεων f(x) = 0, f(x) = 2 και f(x) = g(x).

γ. Τις τιμές του x για τις οποίες f(x) > 0 και f(x) > g(x), **x** ∈ ℝ.



Απάντηση:

α. Από τη διπλανή γραφική παράσταση διαπιστώνουμε ότι:
f(−2) = 0, f(−1) = 2, f(0) = 2, f(1) = 0 και f(2) = −4

β.
- Λύσεις της εξίσωσης f(x) = 0 είναι οι τετμημένες των σημείων τομής της C_f με τον άξονα x΄x και από το διάγραμμα βρίσκουμε ότι είναι: $x_1 = -2$ και $x_2 = 1$.
- Λύσεις της εξίσωσης f(x) = 2 είναι οι τετμημένες των σημείων της C_f που έχουν τεταγμένη 2 και από το διάγραμμα βρίσκουμε ότι είναι: $x_1 = -1$ και $x_2 = 0$.
- Λύσεις της εξίσωσης f(x) = g(x) είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f, C_g και από το διάγραμμα βρίσκουμε ότι είναι: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ και $x_3 = 2$.

γ.
- Λύσεις της ανίσωσης f(x) > 0 είναι οι τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x και από το διάγραμμα βρίσκουμε ότι είναι: x ∈ (−2, 1).
- Λύσεις της ανίσωσης f(x) > g(x) είναι οι τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται πάνω από την C_g και από το διάγραμμα βρίσκουμε ότι είναι: x ∈ (−1, 0) ∪ (2, +∞).

Διερεύνηση: Να ανοίξετε την εφαρμογή **«Πεδίο ορισμού ΙΙΙ»** και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

Διερεύνηση: Να ανοίξετε την εφαρμογή **«Πεδίο ορισμού IV»** και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

Αυτοαξιολόγηση

α. Πώς ορίζεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f;

β. Πώς ελέγχουμε αν μια καμπύλη είναι γραφική παράσταση συνάρτησης;

γ. Δίνεται συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 3x - 4}}{x + 1}$.

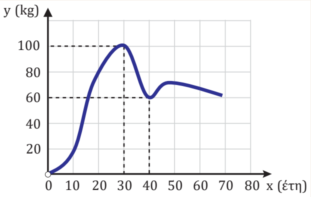
i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii. Να βρείτε τις τιμές f(5) και f(−5).

iii. Να εξετάσετε αν το σημείο $A\left(-2, \sqrt{6}\right)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

iv. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x΄x και y΄y.

δ. Η γραφική παράσταση δείχνει τη μεταβολή της μάζας ενός ατόμου συναρτήσει της ηλικίας του.



i. Μέχρι ποια ηλικία η γραφική παράσταση μας δίνει πληροφορίες για τη μάζα του ατόμου;

ii. Ποια είναι η μάζα του ατόμου στην ηλικία των 40 ετών;

iii. Ποια ήταν η μεγαλύτερη (μέγιστη) μάζα του ατόμου;

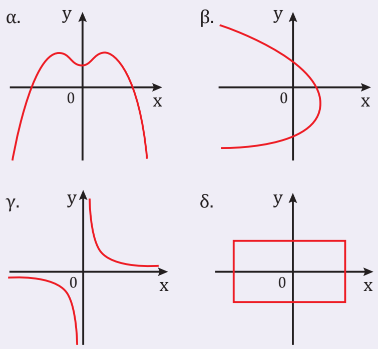
iv. Σε ποια ηλικία η μάζα του ήταν για πρώτη φορά 80 kg;

v. Πόσα κιλά πήρε αυτό το άτομο από 15 έως 30 ετών;

vi. Πόσος χρόνος χρειάστηκε από την ηλικία των 30 ετών και μετά για να αποκτήσει ξανά για πρώτη φορά τη μάζα που είχε στην ηλικία των 15 περίπου ετών;

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Να ελέγξετε ποια από τα επόμενα γραφήματα αποτελούν γραφική παράσταση συνάρτησης.



2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ως σωστές ή λανθασμένες αιτιολογώντας την απάντησή σας.

α. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 3 - x$ διέρχεται από το σημείο A(0, 3).

β. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης τέμνει τον άξονα y΄y το πολύ μια φορά.

γ. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 1$ τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία A(−1, 0) και B(1, 0).

δ. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης δεν μπορεί να διέρχεται από δύο σημεία που έχουν διαφορετική τετμημένη και ίδια τεταγμένη.

Ασκήσεις

1. Οι γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων διέρχονται από το σημείο A(−1, 2). Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό α που εμφανίζεται στον τύπο τους.

α. $f(x) = x^2 - \alpha x + 1$

β. $h(\rho) = 6\rho^3 + \alpha^2\rho^2 - 2\rho + \alpha$

γ. $f(x) = |\alpha^2 - 2x| + 3\alpha$

δ. $g(t) = \dfrac{1 - 3t}{t^2 + \alpha}$

2. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους $f(x) = x - 2$ και $g(x) = x^2 - 5x + 6$. Να βρείτε:

α. Τα σημεία τομής των C_f, C_g με τους άξονες x΄x και y΄y.

β. Τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x και τις τετμημένες των σημείων της C_g που βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x.

γ. Τα κοινά σημεία των C_f, C_g.

δ. Το διάστημα στο οποίο η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g.

3. Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπους $f(x) = \alpha x - \alpha - 5$ και $g(x) = x^2 - (\alpha + 3)x + 3$ με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο A(1, − 5) για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού α.

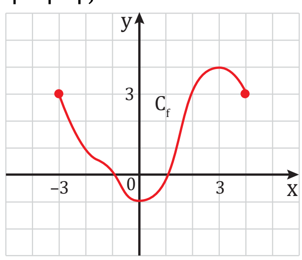
β. Αν οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε σημείο με τετμημένη 5. Να βρείτε την τιμή του α.

Για α = 2,

γ. Να εξετάσετε αν οι οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται και σε άλλο σημείο. Στην περίπτωση που τέμνονται να το προσδιορίσετε.

δ. Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της g είναι πάνω από τη γραφική παράσταση της f.

4. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.



Να βρείτε:

α. τις τιμές f(–2), f(0), f(2) και f(3),

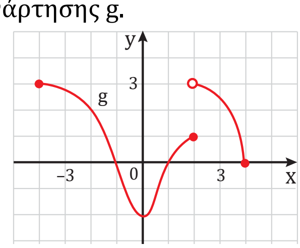
β. το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f,

γ. τις τιμές του x για τις οποίες f(x)= 3,

δ. τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες,

ε. το διάστημα για το οποίο η f είναι κάτω από τον άξονα x΄x.

5. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης g.



Να βρείτε:

α. g(–4), g(–2), g(0), g(2) και g(4),

β. το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της g,

γ. τις τιμές του x για τις οποίες g(x) = 3,

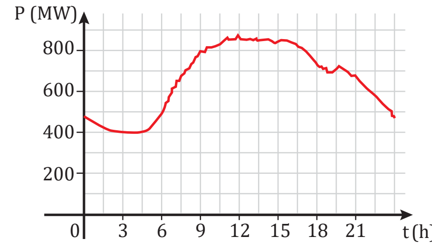
δ. τις τιμές του x για τις οποίες g(x) ≤ 0,

ε. τα σημεία τομής της C_g με τους άξονες.

στ. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

x		–2		2	4
y	3		–2		

6. Στο γράφημα που ακολουθεί περιγράφεται η κατανάλωση της ηλεκτρικής ενέργειας P στη Θεσσαλονίκη και στους γύρω Δήμους μια μέρα του Ιανουαρίου. (P το μετράμε σε MW και το t σε ώρες).



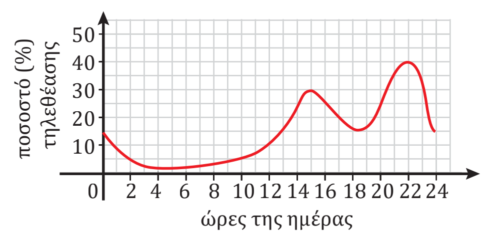
α. Πόση ήταν η κατανάλωση της ηλεκτρικής ενέργειας στις 6:00 π.μ. και πόση στις 6:00 μ.μ.;

β. Ποια ώρα της ημέρας είχαμε τη μικρότερη και ποια ώρα είχαμε τη μεγαλύτερη κατανάλωση;

γ. Ποιες ώρες είχαμε κατανάλωση 600 MW;

δ. Βρείτε τη μεταβολή στην κατανάλωση από τις 9:00 π.μ. στις 7:00 μ.μ.

7. Η καμπύλη του παρακάτω σχήματος δείχνει το ποσοστό τηλεθέασης ενός τηλεοπτικού σταθμού κατά τη διάρκεια μιας ημέρας (εικοσιτετράωρο).



α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών.

β. Ποια ώρα της ημέρας είχε το χαμηλότερο και ποια ώρα το υψηλότερο ποσοστό τηλεθέασης;

γ. Ποιες ώρες της ημέρας η τηλεθέαση αυξάνεται και ποιες μειώνεται;

δ. Αν ο ιδιοκτήτης του καναλιού θέλει να βελτιώσει τα ποσοστά τηλεθέασης, ποιες ώρες θα του προτείνατε να τροποποιήσει το πρόγραμμά του;

8. Στο παρακάτω σχήμα περιγράφεται ο χρόνος (σε λεπτά) που χρειάζεται ένας μαθητής για να διανύσει τη διαδρομή s (σε μέτρα) με το ποδήλατό του από το σπίτι του μέχρι το σχολείο. Περιγράψτε τα χαρακτηριστικά της κίνησης του μαθητή με κατάλληλα ερωτήματα που να ερμηνεύουν το γράφημα. (***Εναλλακτικά:*** Δημιουργήστε μια δική σας «ιστορία» που να περιγράφει το παρακάτω γράφημα.)

9.

Διερεύνηση: Να ανοίξετε την εφαρμογή **«Συμμεταβολές στον κύλινδρο»** και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

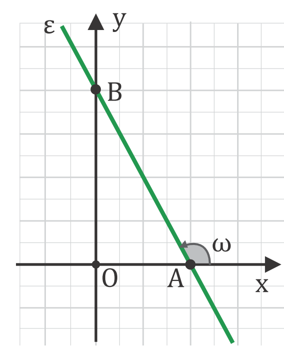
5.3 • Η συνάρτηση f(x) = αx + β

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/ήτριες να μπορούν:

- Να ερμηνεύουν τον ρόλο των παραμέτρων α και β στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = αx + β$
- Να αντλούν από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης της μορφής $f(x) = αx + β$ πληροφορίες για τη συνάρτηση, όπως η κλίση της και η εξίσωσή της.
- Να χρησιμοποιούν πολυωνυμικές συναρτήσεις 1ου βαθμού στη μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων.

Πλήθος δραστηριοτήτων και φαινομένων της καθημερινής μας ζωής μοντελοποιούνται με συναρτήσεις της μορφής $y = αx + β$ τις οποίες έχουμε συναντήσει στο Γυμνάσιο και ξέρουμε ότι η γραφική τους παράσταση είναι μια ευθεία. Σε αυτήν την ενότητα θα θυμηθούμε βασικές έννοιες τις οποίες θα επεκτείνουμε.

Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας



Θεωρούμε ένα σύστημα συντεταγμένων και μια ευθεία ε που τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο Α και τον άξονα y΄y στο σημείο Β.

Γωνία μιας ευθείας ε με τον άξονα x΄x ονομάζουμε τη γωνία ω που διαγράφει η ημιευθεία Αx, όταν περιστραφεί γύρω από το σημείο Α, με φορά αντίθετη από αυτή της κίνησης των δεικτών του ρολογιού, μέχρι να πέσει πάνω στην ευθεία ε. Αν η ευθεία ε είναι παράλληλη στον άξονα x΄x ή συμπίπτει με αυτόν, τότε η ευθεία ε σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία $ω = 0^ο$. Άρα $0^ο \le$ **ω** $< 180^ο$.

Ορισμός

Συντελεστή διεύθυνσης ή **κλίση** μιας ευθείας, που δεν είναι κάθετη στον άξονα x΄x, ονομάζουμε την εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα x΄x.

Σχόλια

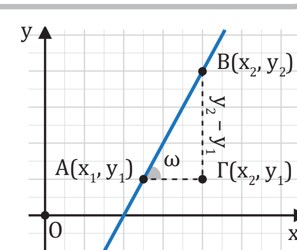
α. Τον συντελεστή διεύθυνσης μιας ευθείας τον συμβολίζουμε συνήθως με λ, δηλαδή $λ = εφω$.

β. Για τη γωνία ω, που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα x΄x και την κλίση της, ισχύουν τα εξής:
- αν **λ > 0**, τότε $0^ο < ω < 90^ο$,
- αν **λ < 0**, τότε $90^ο < ω < 180^ο$,
- αν **λ = 0**, τότε $ω = 0^ο$

Φανερά, ισχύει και το αντίστροφο.

γ. Όταν $\boldsymbol{ω = 90^ο}$ τότε η ευθεία ε είναι κάθετη στον άξονα x΄x και **δεν ορίζεται** συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ε.

Κλίση ευθείας με τη βοήθεια συντεταγμένων



Από το τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος βρίσκουμε ότι:

$$λ = εφω = \frac{ΒΓ}{ΑΓ} \text{ ή } λ = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Άρα, η κλίση λ μιας ευθείας που διέρχεται από δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ με $x_1 \neq x_2$ είναι: $\boldsymbol{\lambda = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$

Για παράδειγμα, η κλίση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία: Α (3, –1) και Β (–1, 2) είναι $\lambda = \dfrac{2-(-1)}{-1-3} = -\dfrac{3}{4}$

Διερεύνηση: Να ανοίξετε την εφαρμογή **«Η κλίση»** και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

Διερεύνηση

Κρεμάμε διαφορετικά βάρη στα άκρα ενός ελατηρίου και καταγράφουμε τις διάφορες επιμηκύνσεις. Το μήκος του ελατηρίου συνδέεται με το βάρος που του κρεμάσαμε.

α. Αν το αρχικό μήκος του ελατηρίου είναι 20 cm και επιμηκύνεται κατά 5 cm για κάθε 1 kg βάρους που του προσθέτουμε, να βρείτε μια σχέση που συνδέει το μήκος y του ελατηρίου με το βάρος x που προσθέτουμε.

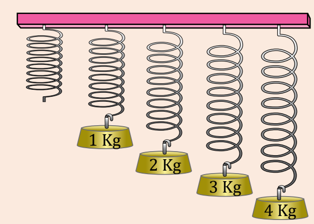
β. Να συμπληρώσετε τον διπλανό πίνακα σύμφωνα με τη σχέση που συνδέει το μήκος y ελατηρίου με το βάρος x που προσθέτουμε.

γ. **i.** Να απεικονίσετε σε ένα σύστημα αξόνων τα σημεία του πίνακα.

ii. Να εξετάσετε αν τα σημεία που απεικονίσατε είναι συνευθειακά.

iii. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας που ορίζεται από δύο σημεία του πίνακα με τους άξονες x΄x και y΄y.

Επιμήκυνση ελατηρίου



x	y
0	
1	
2	
3	
4	

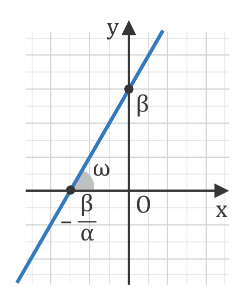
Διερεύνηση: Να ανοίξετε την εφαρμογή «**Το ελατήριο**» και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

Η συνάρτηση f(x) = αx + β, α ≠ 0

Όπως μάθαμε στο Γυμνάσιο η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x) = αx + β είναι μια ευθεία γραμμή.

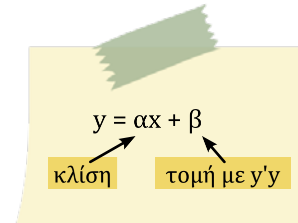
Για τα σημεία τομής της με τους άξονες έχουμε:

- Για x = 0 είναι y = β και επομένως τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο (0, β).
- Για y = 0 είναι $\alpha x + \beta = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\beta}{\alpha}$ και επομένως τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο $\left(-\dfrac{\beta}{\alpha},\ 0\right)$.



Η ευθεία y = αx + β διέρχεται από τα σημεία (0, β) και $\left(-\dfrac{\beta}{\alpha},\ 0\right)$, οπότε για την κλίση της παίρνουμε:

$\lambda = \dfrac{\beta - 0}{0 - \left(-\dfrac{\beta}{\alpha}\right)} = \dfrac{\beta}{\dfrac{\beta}{\alpha}} = \alpha$. Άρα για την κλίση λ της ευθείας y = αx + β, έχουμε: λ = α.



Ερμηνεία των συντελεστών α και β

1. Ο συντελεστής α:

- Δείχνει την κλίση της ευθείας της συνάρτησης f(x) = αx + β.
- Εκφράζει τον μέσο ρυθμό μεταβολής της μεταβλητής y στο αντίστοιχο διάστημα της μεταβλητής x.
- Δείχνει τη μεταβολή της συνάρτησης για μια μοναδιαία μεταβολή της x, αφού: $f(x+1) = \alpha(x+1) + \beta = (\alpha x + \beta) + \alpha = f(x) + \alpha$ ή $f(x+1) - f(x) = \alpha$.

Παράδειγμα. Αν τα κέρδη μιας καφετέριας για x πελάτες σε ευρώ δίνονται από τη σχέση $f(x) = 3x + 1$, τότε τα κέρδη για 10 πελάτες θα είναι $f(10) = 3 \cdot 10 + 1 = 31$€ και για 11 πελάτες $f(11) = 3 \cdot 11 + 1 = 34$€. Άρα η αύξηση κατά έναν πελάτη φέρνει επιπλέον κέρδη $f(11) - f(10) = 3$€ και επομένως ο συντελεστής 3 δείχνει ποια είναι η αύξηση του κέρδους της καφετέριας όταν προστίθεται ένας πελάτης.

2. Ο συντελεστής β δείχνει την τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας $y = αx + β$ με τον άξονα y΄y και επομένως την τιμή από την οποία ξεκινάει η μεταβολή της συνάρτησης $f(x) = αx + β$.

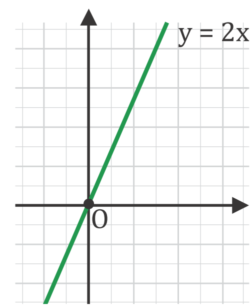
Σημείωση

Η $y = αx + β$ δεν περιλαμβάνει ευθείες κάθετες στον άξονα x΄x οι οποίες έχουν εξίσωση $x = ρ$, για τις οποίες δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης.

Διερεύνηση: Να ανοίξετε το ψηφιακό αρχείο «**Η ψ = αχ + β**» και να απαντήσετε τα ερωτήματα που περιλαμβάνονται.

Ειδικές περιπτώσεις της y = αx + β

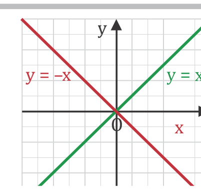
Η συνάρτηση f(x) = αx



Στην ειδική περίπτωση όπου $β = 0$, ο τύπος της συνάρτησης $f(x) = αx + β$ γίνεται $f(x) = αx$, οπότε η γραφική της παράσταση είναι μια ευθεία που διέρχεται πάντα από την αρχή των αξόνων, δηλαδή από το σημείο $O(0, 0)$.
Για παράδειγμα, η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 2x$ έχει κλίση $α = 2$ και διέρχεται από την αρχή των αξόνων, δηλαδή από το σημείο $O(0, 0)$.

Σχόλιο

- Για $α = 1$ είναι $\mathbf{y = x}$, η οποία είναι **διχοτόμος** των γωνιών του 1ου και του 3ου τεταρτημορίου.
- Για $α = -1$ είναι $\mathbf{y = -x}$, η οποία είναι **διχοτόμος** των γωνιών του 2ου και του 4ου τεταρτημορίου.



Η συνάρτηση f(x) = β

Για $α = 0$, η συνάρτηση $f(x) = αx + β$ γίνεται $f(x) = β$.
Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται **σταθερή**, διότι η τιμή της είναι ίδια για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση είναι μια ευθεία παράλληλη προς τον άξονα x΄x σε απόσταση $|β|$ από αυτόν.

Διερεύνηση

α. **i.** Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x) = 2x,\ g(x) = 2x + 2 \text{ και } h(x) = 2x - 2.$$

ii. Τι παρατηρείτε για τη σχετική θέση των ευθειών; Συνδέεται με τις κλίσεις τους; Αν ναι, πώς;

β. **i.** Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x) = 2x + 1,\ g(x) = -x + 1 \text{ και } h(x) = 3x + 1.$$

ii. Διέρχονται οι γραφικές παραστάσεις των f, g και h από το ίδιο σημείο;

iii. Συνδέονται οι σταθεροί όροι των f, g και h με τις συντεταγμένες του σημείου τομής των γραφικών τους παραστάσεων με τον άξονα y΄y;

Διερεύνηση: Να ανοίξετε το ψηφιακό αρχείο **«Οι συντελεστές της συνάρτησης»** και να απαντήσετε στα ερωτήματα που περιλαμβάνονται.

Σχετικές θέσεις δύο ευθειών

Θεωρούμε τις ευθείες με εξισώσεις ε_1: $y = \alpha_1 x + \beta_1$ και ε_2: $y = \alpha_2 x + \beta_2$

Αν $\alpha_1 = \alpha_2$ τότε $\varepsilon\varphi\omega_1 = \varepsilon\varphi\omega_2$, οπότε[1] $\omega_1 = \omega_2$ και συνεπώς οι ευθείες ε_1 και ε_2 οι ευθείες είναι παράλληλες ή ταυτίζονται.

Ειδικότερα:

- Αν $\alpha_1 = \alpha_2$ και $\beta_1 \neq \beta_2$ οι ευθείες είναι **παράλληλες**.
- Αν $\alpha_1 = \alpha_2$ και $\beta_1 = \beta_2$ οι ευθείες **ταυτίζονται**.
- Αν $\alpha_1 \neq \alpha_2$ οι ευθείες **τέμνονται σε ένα σημείο**.

Σχόλιο

- Οι ευθείες της μορφής $y = \alpha x + \beta$, με β σταθερό και α μεταβλητό διέρχονται όλες από το σημείο $(0, \beta)$ του άξονα $y'y$.
- Οι ευθείες της μορφής $y = \alpha x + \beta$, με α σταθερό και β μεταβλητό είναι όλες παράλληλες μεταξύ τους.

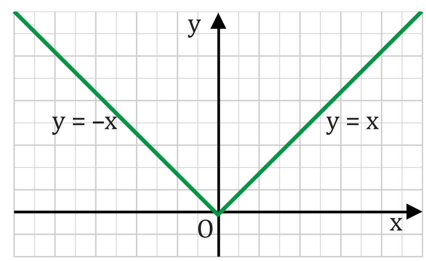
Η συνάρτηση f(x) = |x|

Σύμφωνα με τον ορισμό της απόλυτης τιμής έχουμε:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{αν } x \geq 0 \\ -x, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

και επομένως η γραφική της παράσταση αποτελείται από τις *ημιευθείες*:

$$y = x, \text{ με } x \geq 0 \text{ και } y = -x, \text{ με } x \leq 0$$



Εφαρμογή 1. *Προσδιορισμός εξίσωσης ευθείας*

α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας στις παρακάτω περιπτώσεις:

i. Διέρχεται από το σημείο $A(-2, -1)$ και έχει κλίση $\frac{2}{3}$.

ii. Διέρχεται από τα σημεία $A(-2, 3)$, $B(2, 5)$.

iii. Να βρεθεί ο μέσος ρυθμός μεταβολής του y των ευθειών που προσδιορίσατε.

β. Να εξετάσετε αν είναι συνευθειακά τα σημεία:

i. $A(-2, 3)$, $B(2, 5)$, $\Gamma(4, 6)$ **ii.** $A(-2, 3)$, $B(2, 5)$, $\Delta(0, 3)$

Απάντηση:

α. i. Η ζητούμενη ευθεία έχει εξίσωση $y = \alpha x + \beta$.

Επειδή έχει κλίση $\frac{2}{3}$ είναι $\alpha = \frac{2}{3}$ και η εξίσωση γράφεται $y = \frac{2}{3}x + \beta$.

Αφού η ευθεία διέρχεται από το σημείο $A(-2, -1)$ οι συντεταγμένες του την επαληθεύουν, οπότε:

$-1 = \frac{2}{3}(-2) + \beta \Leftrightarrow \beta = \frac{4}{3} - 1 \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{3}$. Άρα η ευθεία έχει εξίσωση $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

ii. Η ζητούμενη ευθεία έχει εξίσωση $y = \alpha x + \beta$. Η κλίση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B είναι:

$\alpha = \frac{5-3}{2-(-2)} = \frac{1}{2}$. Άρα η εξίσωσή της γράφεται $y = \frac{1}{2}x + \beta$.

Εξάλλου η ευθεία διέρχεται από το σημείο $B(2, 5)$, οπότε οι συντεταγμένες του σημείου B την επαληθεύουν, δηλαδή:

$5 = \frac{1}{2} \cdot 2 + \beta \Leftrightarrow \beta = 5 - 1 \Leftrightarrow \beta = 4$. Άρα η ευθεία έχει εξίσωση $y = \frac{1}{2}x + 4$

[1] $\omega_1, \omega_2 \in (0, 180^\circ)$

iii. Ο μέσος ρυθμός μεταβολής μιας γραμμικής συνάρτησης της μορφής $y = αx + β$ είναι ο συντελεστής α. Επομένως ο μέσος ρυθμός μεταβολής του y των ευθειών είναι $\frac{2}{3}$ και $\frac{1}{2}$ αντίστοιχα.

β. Δύο σημεία ορίζουν μια ευθεία και όπως είδαμε στο προηγούμενο ερώτημα, τα σημεία Α(−2, 3), Β(2, 5) ορίζουν την ευθεία με εξίσωση: $y = \frac{1}{2}x + 4$ (1). Αρκεί λοιπόν να εξετάσουμε αν τα σημεία Γ(4, 6) και Δ(0, 3) ανήκουν σε αυτή την ευθεία.

i. Για $x = 4$, από την (1) παίρνουμε $y = 6$ και επομένως το σημείο Γ(4, 6) ανήκει στην ίδια ευθεία με τα σημεία Α(−2, 3), Β(2, 5).

ii. Για $x = 0$, από την (1) παίρνουμε $y = 4 \neq 3$ και επομένως το σημείο Δ(0, 3) δεν ανήκει στην ίδια ευθεία με τα σημεία Α(−2, 3), Β(2, 5).

Εφαρμογή 2. *Χάραξη γραφικής παράστασης από γνωστό τύπο*

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2x − 6$ και $g(x) = 2 − x$.

α. Ποια είναι η σχετική θέση των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων;

β. Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις f και g.

γ. Να εξετάσετε αν οι γραφικές παραστάσεις των f, g διέρχονται από τα σημεία (0, 2) και (2, 1).

δ. Να βρείτε από το διάγραμμα τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f είναι πάνω από τον άξονα x΄x.

ε. Να υπολογίσετε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f είναι πάνω από τη γραφική παράσταση της g.

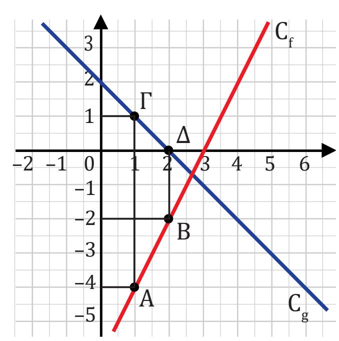
στ. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής των συναρτήσεων f, g;

Απάντηση:

Οι γραφικές παραστάσεις και των δύο συναρτήσεων είναι ευθείες.

α. Η κλίση της ευθείας $y = 2x − 6$ είναι $α_1 = 2$ και της ευθείας $y = 2 − x$ είναι $α_2 = −1$. Επειδή $α_1 \neq α_2$, οι ευθείες τέμνονται.

β. Για να παραστήσουμε γραφικά τις δύο ευθείες, αρκεί να γνωρίζουμε δύο σημεία από τα οποία διέρχονται.
Από τον τύπο της f έχουμε: Για $x = 1$ είναι $y = 2 \cdot 1 − 6 = − 4$ και για $x = 2$ είναι $y = 2 \cdot 2 − 6 = − 2$.
Άρα η ευθεία διέρχεται από τα σημεία Α(1, −4) και Β(2, −2).
Όμοια, από τον τύπο της g έχουμε: για $x = 1$ είναι $y = 2 − 1 = 1$ και για $x = 2$ είναι $y = 2 − 2 = 0$.
Άρα η ευθεία διέρχεται από τα σημεία Γ(1, 1) και Δ(2, 0).
Οι γραφικές παραστάσεις των f, g παρουσιάζονται στο σχήμα.



γ. Ένα σημείο ανήκει σε μια ευθεία ή μια ευθεία διέρχεται από ένα σημείο όταν και μόνο όταν οι συντεταγμένες του ικανοποιούν την εξίσωση της ευθείας.
Έτσι λοιπόν έχουμε:

- Είναι $g(0) = 2$, οπότε το σημείο (0, 2) ανήκει στη γραφική παράσταση της g.
- Είναι $g(2) = 0 \neq 1$, οπότε το σημείο (2, 1) δεν ανήκει στη γραφική παράσταση της g.
  Επίσης, $f(2) = −2 \neq 1$, οπότε το σημείο (2, 1) δεν ανήκει ούτε στη γραφική παράσταση της f.
- Επειδή $f(0) = −6 \neq 2$, το σημείο (0, 2) δεν ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

δ. Από το διάγραμμα βλέπουμε ότι η γραφική παράσταση της f είναι πάνω από τον άξονα x΄x για τα x για τα οποία ισχύει: $x > 3$.

ε. Η γραφική παράσταση της f είναι πάνω από τη γραφική παράσταση της g για τα x για τα οποία ισχύει:

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow 2x − 6 > 2 − x \Leftrightarrow x > \frac{8}{3}$$

στ. Ο ρυθμός μεταβολής των συναρτήσεων μιας γραμμικής συνάρτησης της μορφής $y = αx + β$ είναι ο συντελεστής α. Επομένως ο ρυθμός μεταβολής των συναρτήσεων f, g είναι 2 και −1 αντίστοιχα.

Εφαρμογή 3. *Μοντελοποίηση*

Η διευθύντρια ενός σχολείου αποφασίζει στην αρχή της χρονιάς να νοικιάσει ένα φωτοτυπικό μηχάνημα για τις ανάγκες του σχολείου και θέλει να επιλέξει την οικονομικότερη προσφορά που πήρε από δύο εταιρείες που παρέχουν το ίδιο ακριβώς μηχάνημα.
Εταιρεία Α: 100€ για τα έξοδα εγκατάστασης και επιπλέον χρέωση 20€ για κάθε μήνα ενοικίασης.
Εταιρεία Β: 40€ για κάθε μήνα ενοικίασης χωρίς άλλα έξοδα.

α. Να περιγράψετε με τύπους συναρτήσεων τις προσφορές των εταιρειών που συνδέουν το κόστος με τους μήνες ενοικίασης.

β. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων και από αυτές να βρείτε:
- **i.** Τι εκφράζει στο πλαίσιο του προβλήματος το σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων;
- **ii.** Πόσους μήνες πρέπει να νοικιαστεί το φωτοτυπικό μηχάνημα ώστε να συμφέρει η προσφορά της εταιρείας Β;
- **iii.** Πόσα χρήματα θα πληρώσει η διευθύντρια στην εταιρεία Α και πόσα στην εταιρεία Β αν νοικιάσει 10 μήνες το φωτοτυπικό μηχάνημα;
- **iv.** Πότε συμφέρει οικονομικά η ενοικίαση του φωτοτυπικού από την εταιρεία Α και πότε από την εταιρεία Β;
- **v.** Αν επέλεξε την οικονομικότερη προσφορά για την οποία πλήρωσε 400€, πόσους μήνες και από ποια εταιρεία νοίκιασε το φωτοτυπικό;

Απάντηση:

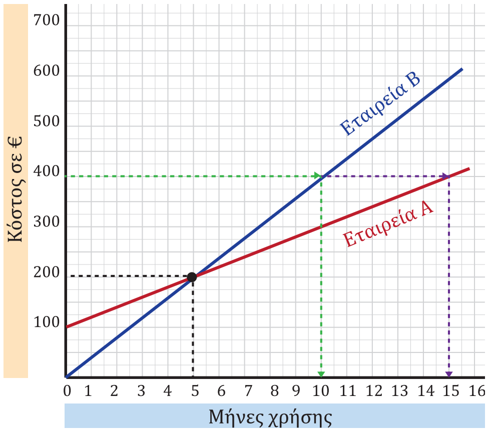
α. Καθορισμός μεταβλητής. Έστω x οι μήνες ενοικίασης ενός φωτοτυπικού μηχανήματος.
Αναζητούμε το κόστος ενοικίασης του φωτοτυπικού μηχανήματος.
Μετάφραση των λέξεων σε αλγεβρικούς όρους. Οι πληροφορίες του προβλήματος μπορούν να οργανωθούν ως εξής:

Φυσικό μοντέλο	Αλγεβρικό μοντέλο Εταιρεία Α	Αλγεβρικό μοντέλο Εταιρεία Β
Κόστος εγκατάστασης (€)	100	0
Κόστος ανά μήνα ενοικίασης (€)	20	40
Μήνες ενοικίασης φωτοτυπικού	x	x
Συνολικό κόστος για x μήνες	100 + 20x	40x

Μοντελοποίηση. Οι συναρτήσεις που μοντελοποιούν το πρόβλημα είναι:

Εταιρεία Α: $f(x) = 100 + 20x$ **Εταιρεία Β:** $g(x) = 40x$

β. Στο διπλανό γράφημα έχουν σχεδιαστεί οι δύο ευθείες.



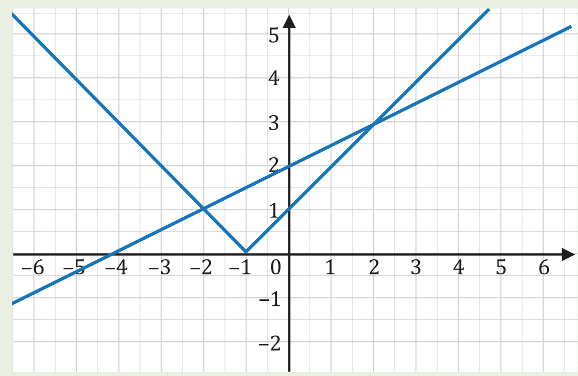
- **i.** Στο πλαίσιο του προβλήματος, το κοινό σημείο τομής εκφράζει τον αριθμό των μηνών ενοικίασης για τους οποίους το κόστος είναι ίδιο και για τις δύο εταιρείες.
- **ii.** Από το διάγραμμα διαπιστώνουμε ότι για να συμφέρει η προσφορά της εταιρείας Β, το φωτοτυπικό μηχάνημα πρέπει να νοικιαστεί λιγότερο από 5 μήνες.
- **iii.** Από το διάγραμμα διαπιστώνουμε ότι αν το φωτοτυπικό νοικιαστεί για 10 μήνες, τότε η διευθύντρια θα πληρώσει 400€ στην εταιρεία Β ενώ στην εταιρεία Α θα πληρώσει 300€.
- **iv.** Αν η ενοικίαση γίνει για λιγότερο από 5 μήνες συμφέρει η ενοικίαση από την εταιρεία Β. Αν η ενοικίαση γίνει για περισσότερο από 5 μήνες τότε συμφέρει η ενοικίαση από την εταιρεία Α.
- **v.** Αν πλήρωσε 400€, τότε από το διάγραμμα βλέπουμε ότι η οικονομικότερη προσφορά είναι αυτή της εταιρείας Α, αφού με τα ίδια χρήματα θα ενοικίασε για περισσότερους μήνες (15) το ίδιο φωτοτυπικό μηχάνημα.

Διερεύνηση: Να ανοίξετε το ψηφιακό αρχείο **«Το φωτοτυπικό μηχάνημα»** και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

Εφαρμογή 4. *Γραφική επίλυση ανίσωσης*

Στο σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g με τύπους:

$$f(x) = |x + 1| \text{ και } g(x) = \frac{1}{2}x + 2$$



α. Να προσδιορίσετε τις γραφικές παραστάσεις των f, g.

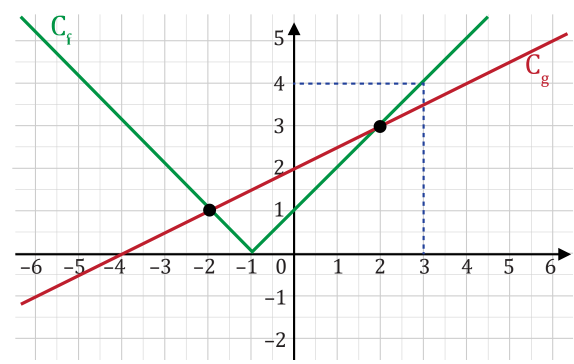
β. Να εκτιμήσετε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

γ. Να υπολογίσετε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

δ. Να βρείτε από τις γραφικές παραστάσεις τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της g.

ε. Να εκτιμήσετε και να υπολογίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης με τύπο $h(x) = \sqrt{|x + 1| - \frac{1}{2}x - 2}$.

Απάντηση:



α. Είναι $f(x) = |x + 1| = \begin{cases} -x - 1, & x \le -1 \\ x + 1, & x > -1 \end{cases}$, οπότε η γραφική παράσταση της f αποτελείται από τις δύο ημιευθείες που σημειώνονται στο σχήμα με πράσινο χρώμα. Φανερά $f(x) \ge 0$.
Η γραφική παράσταση της g είναι η ευθεία που απεικονίζεται στο σχήμα με κόκκινο χρώμα.

β. Από τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων εκτιμάμε ότι τέμνονται στα σημεία $(-2, 1)$ και $(2, 3)$.

γ. Για τον υπολογισμό των κοινών σημείων των C_f και C_g λύνουμε την εξίσωση:

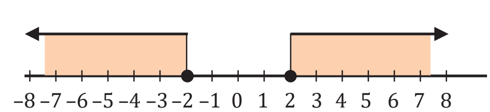
$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow |x + 1| = \frac{1}{2}x + 2 \ (1)$$

- Για $x \ge -1$ από την (1) έχουμε: $x + 1 = \frac{1}{2}x + 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = 1 \Leftrightarrow x = 2$, δεκτή αφού $2 > -1$.
  Αντικαθιστώντας στον τύπο της f, βρίσκουμε $f(2) = |2 + 1| = 3$. Άρα οι C_f, C_g τέμνονται στο σημείο $(2, 3)$.
- Για $x < -1$ από την (1) έχουμε: $-x - 1 = \frac{1}{2}x + 2 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}x = 3 \Leftrightarrow x = -2$, δεκτή αφού $-2 < -1$.
  Αντικαθιστώντας στον τύπο της g βρίσκουμε $g(-2) = 1$. Άρα οι C_f, C_g τέμνονται και στο σημείο $(-2, 1)$.

δ. Αναζητούμε τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) < g(x)$. Από τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων f και g φαίνεται ότι αυτό συμβαίνει για $x \in (-2, 2)$.

ε. Ο τύπος της συνάρτησης h γράφεται: $h(x) = \sqrt{|x + 1| - \frac{1}{2}x - 2} = \sqrt{|x + 1| - \left(\frac{1}{2}x + 2\right)} = \sqrt{f(x) - g(x)}$

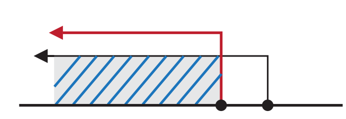
Άρα το πεδίο ορισμού A της h αποτελείται από τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους $f(x) \ge g(x)$.
Από τις γραφικές παραστάσεις των f, g μια εκτίμηση για το πεδίο ορισμού της συνάρτησης h είναι ότι αποτελείται από τα x για τα οποία $x \le -2$ ή $x \ge 2$.



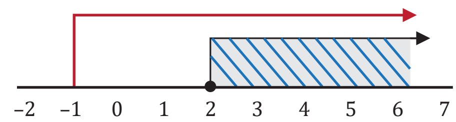
Για τον υπολογισμό του πεδίου ορισμού A της συνάρτησης h έχουμε:

- Αν $x \le -1$, τότε $f(x) \overset{(α)}{=} -x - 1$ οπότε:

$$f(x) \ge g(x) \Leftrightarrow -x - 1 \ge \frac{1}{2}x + 2 \ \Leftrightarrow \ x + \frac{1}{2}x \le -1 - 2 \ \Leftrightarrow \ x \le -2 \text{ (δεκτές)}$$



- Αν $x > -1$, τότε $f(x) \overset{(\alpha)}{=} x + 1$ οπότε:
- $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow x + 1 \geq \frac{1}{2}x + 2 \Leftrightarrow x - \frac{1}{2}x \geq 2 - 1 \Leftrightarrow x \geq 2$ (δεκτές)



Επομένως: $A = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.

Διερεύνηση: Να ανοίξετε το ψηφιακό αρχείο **«Γραφική λύση εξίσωσης, ανίσωσης»** και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

Αυτοαξιολόγηση

1. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ή λανθασμένες δικαιολογώντας την απάντησή σας.

α. Ο άξονας x΄x είναι μια ευθεία με εξίσωση $y = 0$.

β. Η ευθεία με εξίσωση $y = 1 - 2x$ έχει κλίση 1.

γ. Όλες οι ευθείες τέμνουν τον άξονα x΄x.

δ. Η ευθεία με εξίσωση $y = 2x - 4$ τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο $A(0, -4)$

ε. Η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα x΄x η ευθεία με εξίσωση $2x = y + 1$ είναι αμβλεία.

2. Δίνεται η ευθεία με εξίσωση (ε): $y = 3 - 2x$.

α. Να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα x΄x.

β. Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της ευθείας διέρχεται από τα σημεία $A(1, 2)$, $B(2, 1)$ και $\Gamma(-1, 5)$.

γ. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της ευθείας.

δ. Να βρείτε τις συντεταγμένες ενός σημείου Δ ώστε τα σημεία Β, Γ και Δ να είναι συνευθειακά.

ε. Να γράψετε μια εξίσωση ευθείας που να είναι παράλληλη στην ευθεία (ε).

στ. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της (ε);

3. Η γραφική παράσταση της ευθείας με εξίσωση $y = 3x - \beta$ διέρχεται από το σημείο $A(3, 3)$.

α. Να βρείτε την κλίση της ευθείας.

β. Να δείξετε ότι $\beta = 6$.

γ. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της ευθείας με τους άξονες x΄x και y΄y.

δ. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της ευθείας.

4. Ο Γιάννης πηγαίνει καλοκαιρινές διακοπές στη Μύκονο με μια φίλη του και νοικιάζει ένα μηχανάκι προκειμένου να κινούνται ευκολότερα. Το γραφείο ενοικιάσεως του προτείνει δύο εναλλακτικές επιλογές:

1η επιλογή: Να δώσει 100€ και να χρεώνεται 10€ για κάθε μέρα ενοικίασης.

2η επιλογή: Να δώσει 20€ για κάθε μέρα ενοικίασης.

α. Να περιγράψετε με τύπους συναρτήσεων τις δύο επιλογές που προτείνει το γραφείο ενοικιάσεως που να συνδέουν το κόστος ενοικίασης για το μηχανάκι με τις μέρες διακοπών.

Αν η πρώτη επιλογή περιγράφεται από τον τύπο $f(x) = 100 + 10x$ και η δεύτερη από τον τύπο $g(x) = 20x$:

β. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων και από αυτές:

i. Να βρείτε πόσες μέρες πρέπει να μείνει ο Γιάννης στη Μύκονο ώστε να τον συμφέρει η δεύτερη επιλογή.

ii. Τι εκφράζει στο πλαίσιο του προβλήματος το σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων;

iii. Πόσα χρήματα θα πληρώσει με την πρώτη και πόσα με τη δεύτερη προσφορά αν παραμείνει στο νησί 5 μέρες;

iv. Αν θέλει να ξοδέψει 220€, ποια εταιρεία πρέπει να προτιμήσει για να κρατήσει περισσότερες ημέρες το μηχανάκι;

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ή λανθασμένες δικαιολογώντας την απάντησή σας.

α. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = (2x + 1)x$ είναι ευθεία.

β. Η κλίση της ευθείας με εξίσωση $2y = 4x + 1$ είναι 2.

γ. Η ευθεία με εξίσωση $2x - y = 0$ διέρχεται πάντα από την αρχή των αξόνων.

δ. Η ευθεία με εξίσωση $y - x = 0$ είναι η διχοτόμος των γωνιών του 2ου και του 4ου τεταρτημορίου.

ε. Μια ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ έχει πάντα κλίση που υπολογίζεται από τον τύπο $\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

στ. Οι ευθείες με εξισώσεις $x = 3$ και $x = -2$ δεν είναι παράλληλες διότι δεν ορίζεται για αυτές συντελεστής διεύθυνσης.

2. α. Να γράψετε την εξίσωση μιας ευθείας με:
i. θετική κλίση **ii.** αρνητική κλίση
iii. μηδενική κλίση.

β. Να γράψετε μια εξίσωση ευθείας με αρνητική κλίση που να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

γ. Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και για την οποία δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης.

3. Να γράψετε τις εξισώσεις δύο ευθειών σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις.

α. Η ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β. Η ευθεία τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο Α(0, – 2).

γ. Η ευθεία έχει κλίση 4 και δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

δ. Η ευθεία διέρχεται από το σημείο Β(– 3, 1)

4. Ένας συμμαθητής σας ισχυρίζεται ότι αν ξέρουμε δύο οποιαδήποτε σημεία σε ένα σύστημα συντεταγμένων, τότε υπάρχει πάντοτε μια ευθεία της μορφής y = αx + β που διέρχεται από αυτά. Έχει δίκιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

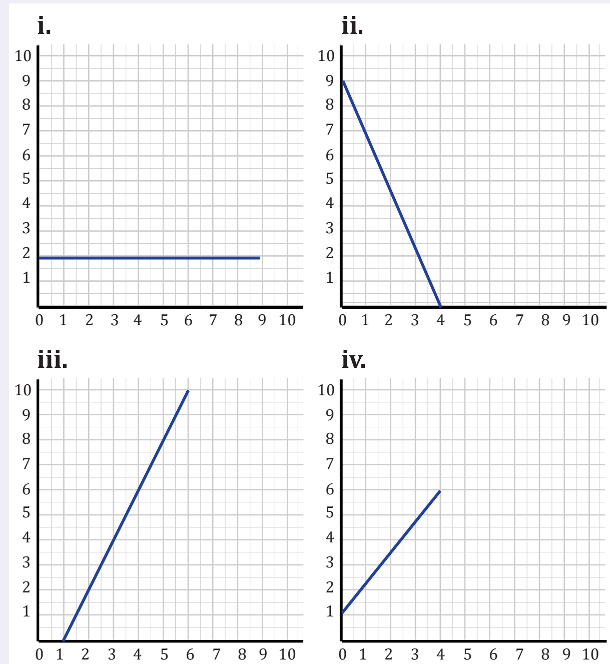
5. Ταιριάξτε καθεμία από τις παρακάτω περιγραφές με τις γραφικές παραστάσεις που ακολουθούν, δίνοντας σε κάθε περίπτωση κατάλληλες ονομασίες στους άξονες x΄x και y΄y.

α. Ο Γιώργος βρίσκεται τώρα στο 1ο χιλιόμετρο του μαραθωνίου στον οποίο συμμετέχει και τρέχοντας συνεχώς για 10 λεπτά φτάνει στο 6ο χιλιόμετρο.

β. Η Άντζι έχει στο αυτοκίνητό της 9 λίτρα βενζίνη και μετά από 4 ώρες συνεχούς οδήγησης το αυτοκίνητο ξεμένει από καύσιμα!

γ. Ένας γεωργός έχει σήμερα στις αποθήκες του 1 τόνο σιτάρι και μετά από 4 μέρες συνεχούς αποθήκευσης έχει 6 τόνους.

δ. Η Δήμητρα για τα επόμενα 9 λεπτά κολυμπά σε σταθερό βάθος 2 μέτρων.



Ασκήσεις

1. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:
α. y = 2x **β.** y = –3x **γ.** y = 2x + 1 **δ.** y = 5 – 3x

2. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση των παρακάτω συναρτήσεων.
α. y = 3 **β.** y = –2 **γ.** x = 1 **δ.** x = –4

3. Μια ευθεία (ε) διέρχεται από το σημείο Α(1, 4) και έχει κλίση –2.

α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε).

β. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της μεταβλητής y στο αντίστοιχο διάστημα της μεταβλητής x για την ευθεία (ε);

γ. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας (ε) με τους άξονες x΄x και y΄y.

δ. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της ευθείας (ε).

ε. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία 45^o και διέρχεται από το σημείο όπου η ευθεία (ε) τέμνει τον άξονα y΄y.

4. Μια ευθεία διέρχεται από τα σημεία Α(–2, 4) και Β(3, –1).

α. Να βρείτε την κλίση της ευθείας και το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα x΄x.

β. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας.

γ. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της ευθείας είναι πάνω από τον άξονα x΄x.

δ. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της ευθείας.

ε. Να βρείτε τις συντεταγμένες ενός τρίτου σημείου Γ ώστε τα σημεία Α, Β και Γ να είναι συνευθειακά.

5. Μια ευθεία $(ε_1)$ διέρχεται από το σημείο Α(3, 5) και είναι παράλληλη στην ευθεία $(ε_2)$ με εξίσωση 2y + 4x = 8.

α. Να βρείτε την κλίση της ευθείας $(ε_2)$ και το είδος της γωνίας που σχηματίζει με τον άξονα x΄x.

β. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_1).

γ. Να βρείτε τα σημεία τομής των ευθειών (ε_1) και (ε_2) με τους άξονες.

δ. Να σχεδιάσετε τις ευθείες (ε_1) και (ε_2) στο ίδιο σύστημα αξόνων.

ε. Ποια είναι η μεταβολή της εξαρτημένης μεταβλητής y για μια μοναδιαία μεταβολή της ανεξάρτητης x για την ευθεία (ε_2);

6. Δίνεται η ευθεία (ε) με εξίσωση $2y + 3x = 6$.

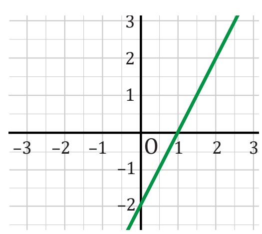
α. Να βρείτε το είδος της γωνίας ω που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον άξονα x΄x.

β. Να εξετάσετε ποια από τα σημεία $Α(-2, 6)$, $Β(2, 4)$ και $Γ(4, -3)$ ανήκουν στην ευθεία (ε).

γ. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού κ ώστε το σημείο $Δ(κ, κ + 1)$ να ανήκει στην ευθεία (ε).

δ. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που είναι κάθετη στον άξονα x΄x και διέρχεται από το σημείο όπου η ευθεία (ε) τέμνει τον άξονα x΄x.

7. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας ευθείας.



α. Να βρείτε την κλίση της.

β. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας με τους άξονες x΄x και y΄y.

γ. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας.

δ. Να γράψετε την εξίσωση τριών ευθειών παράλληλων στην ευθεία του σχήματος.

8.

Διερεύνηση: Να ανοίξετε το ψηφιακό αρχείο **«Η εξίσωση της διάθλασης»** και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

9. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = \dfrac{(5α + 1)x^2 - α(x + 1) - 1}{3x - 2}$ διέρχεται από το σημείο $Α(1, 3)$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β. Να δείξετε ότι $α = 1$.

γ. Να δείξετε ότι ο τύπος της f γράφεται στη μορφή

$f(x) = 2x + 1, x \in \mathbb{R} - \left\{\dfrac{2}{3}\right\}$

δ. Να ερμηνεύσετε τους συντελεστές της συνάρτησης f.

ε. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f και της ευθείας (ε) με εξίσωση $y = 2$.

στ. Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την ευθεία (ε).

10. Δίνεται συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 3|2 - x| - 2$

α. Να δείξετε ότι ο τύπος της f γράφεται:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 8, & x \geq 2 \\ 4 - 3x, & x < 2 \end{cases}$$

β. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

γ. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x΄x και y΄y.

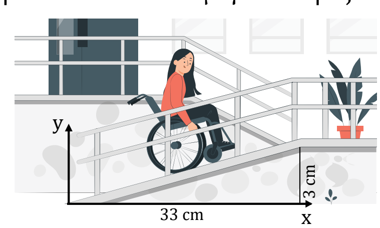
δ. Να σχεδιάσετε την ευθεία (ε): $y = 1$ και στη συνέχεια να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f δεν είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της ευθείας (ε).

ε. Να ερμηνεύσετε τους συντελεστές της συνάρτησης f.

11.

Διερεύνηση: Να ανοίξετε το ψηφιακό αρχείο **«Η διπλή συνάρτηση»** και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

12. Στην είσοδο του σχολείου σας πρόκειται να κατασκευαστεί μια ράμπα ώστε να μπορούν να έχουν πρόσβαση και άνθρωποι που κινούνται με αναπηρικά αμαξίδια. Οι τεχνικές προδιαγραφές μιας τέτοιας κατασκευής προϋποθέτουν ότι για κάθε οριζόντια απόσταση 33cm απαιτείται μέγιστο ύψος 3cm.



α. Ποια είναι η μέγιστη επιτρεπόμενη κλίση για ένα αναπηρικό αμαξίδιο;

β. Υποθέτοντας ότι η ράμπα έχει τη μέγιστη άνοδο, βρείτε μια συνάρτηση H που μοντελοποιεί το ύψος της ράμπας πάνω από το έδαφος σε συνάρτηση με την οριζόντια απόσταση x.

γ. Εάν ο διαθέσιμος χώρος για την κατασκευή ράμπας έχει οριζόντια απόσταση 3,8 μέτρα, πόσο ψηλά φτάνει η ράμπα;

13. Ο Χρήστος εργάζεται σε ένα κατάστημα που φτιάχνει πίτσες και τις παραδίδει με το μηχανάκι του όπου του ζητηθεί (delivery). Για κάθε μέρα εργασίας ο εργοδότης του δίνει 10€ και 0,5€ για κάθε παραγγελία που παραδίδει.

α. Να βρείτε τα έσοδα του Χρήστου αν σε 1 μέρα παραδώσει x πίτσες.

β. Πόσα χρήματα θα βγάλει αν σε 1 μέρα κάνει 15 παραδόσεις;

γ. Αν μια μέρα έβγαλε 14€ πόσες πίτσες παρέδωσε;

14. Ο Μάριος έχει σήμερα 200 μουσικά κομμάτια στο κινητό του. Κάθε μήνα προσθέτει 15 νέα τραγούδια.

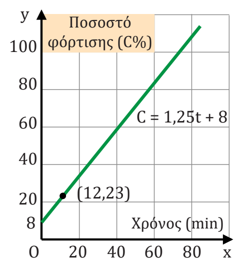
α. Να γράψετε έναν τύπο που να δίνει τον αριθμό Ν των τραγουδιών που θα έχει στο κινητό του μετά από ν μήνες.

β. Πόσα τραγούδια θα έχει σε έναν χρόνο;

γ. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία (ν, Ν), όπου Ν η συνάρτηση του ερωτήματος (α).

δ. Να εξηγήσετε τι δηλώνει το σημείο τομής της με τον άξονα y΄y.

15. Το laptop του Έντι είχε μπαταρία σε ποσοστό 8% όταν άρχισε να το φορτίζει και μετά από 12 λεπτά φόρτισης το ποσοστό έγινε 23%. Ο Έντι θα ήθελε να γνωρίζει πότε το laptop θα ήταν πλήρως φορτισμένο και κατασκεύασε τη γραφική παράσταση του διπλανού σχήματος για να πάρει την απάντηση.



α. Μπορείτε να εξηγήσετε πώς ο Έντι έκανε το γράφημα; Τι υποθέσεις έκανε ο Έντι για να το φτιάξει;

β. Ποιο εύρος τιμών μπορεί να πάρει η μεταβλητή του χρόνου και ποιες η μεταβλητή της φόρτισης; Τα έλαβε ο Έντι υπόψη του για να φτιάξει το γράφημα;

γ. Σύμφωνα με το μοντέλο του Έντι, σε πόσο χρόνο θα φορτίσει το laptop;

δ. Το laptop χρειάστηκε τελικά 79 λεπτά για να φορτιστεί πλήρως.

i. Γιατί πιστεύετε ότι ο πραγματικός χρόνος διαφέρει από την πρόβλεψη του μοντέλου του Έντι;

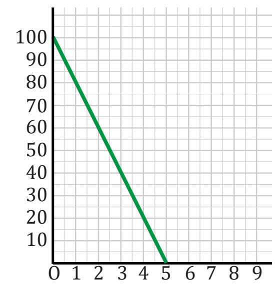
ii. Πιστεύετε ότι το μοντέλο του Έντι θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί παρά τις μικρές διαφορές του από τον πραγματικό χρόνο φόρτισης;

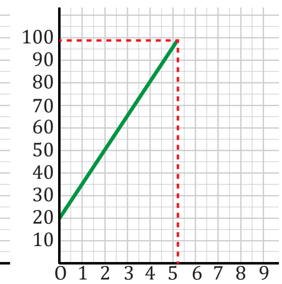
16. α. Να βρείτε τις συναρτήσεις των παρακάτω ευθειών.

β. Να δημιουργήσετε δύο προβλήματα που να μοντελοποιούνται απο τις συναρτήσεις που βρήκατε.

γ. Να ερμηνεύσετε στο πλαίσιο των προβλημάτων που δημιουργήσατε τους συντελεστές α και β των εξισώσεων.

δ. Ποιοι είναι οι μέσοι ρυθμοί μεταβολής του y των συναρτήσεων που βρήκατε;





Διερεύνηση: Να ανοίξετε το ψηφιακό αρχείο **«Η περίμετρος των εξαγώνων»** και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

Να ανοίξετε το ψηφιακό αρχείο **«Τα κεριά»** και να απαντήσετε στα ερωτήματα που δίνονται.

Διερεύνηση: Να ανοίξετε το ψηφιακό αρχείο **«Το άδειασμα των δοχείων»** και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

5.4 • Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/ήτριες να μπορούν:

- Να αναγνωρίζουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$.
- Να αναγνωρίζουν τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης: $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ με τον άξονα x΄x ως ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$.
- Να ερμηνεύουν γραφικά το πρόσημο της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$.
- Να επιλύουν ανισώσεις δευτέρου βαθμού γραφικά.
- Να χρησιμοποιούν πολυωνυμικές συναρτήσεις 2ου βαθμού στη μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων.

Στην καθημερινή ζωή, αν παρατηρήσουμε το σχήμα μιας γέφυρας, το σχήμα της ροής του νερού σε μια βρύση όπως αυτή της φωτογραφίας, ή αν φανταστούμε την τροχιά που διαγράφει μια μπάλα στο μπάσκετ, στο ποδόσφαιρο ή στο βόλεϊ, θα διαπιστώσουμε ότι σε όλες αυτές τις περιπτώσεις «εμφανίζεται» ένα σχήμα με τα ίδια χαρακτηριστικά, το οποίο συναντήσαμε και στο Γυμνάσιο, που ονομάζεται **παραβολή.**




Στο Γυμνάσιο είδαμε τη συνάρτηση $f(x) = αx^2$, $α \neq 0$, τον ρόλο του συντελεστή α καθώς και χαρακτηριστικά της γραφικής της παράστασης, όπως η μορφή, η κορυφή, το ακρότατο (μέγιστο – ελάχιστο) και ο άξονας συμμετρίας.

Διερεύνηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x - 3$:

α. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα και να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

x	– 3	– 2	– 1	0	1	2	3	4	5
y									

Αξιοποιήστε την τεχνολογία για να χαράξετε την C_f και να εντοπίσετε πιθανές αποκλίσεις από τις δικές σας.

β. Να εκτιμήσετε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x σύμφωνα με το διάγραμμα που κάνατε.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 2x - 3 = 0$. Συνδέονται οι λύσεις της εξίσωσης και οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x;

δ. Να εκτιμήσετε από τη γραφική παράσταση της f τα διαστήματα στα οποία η f είναι πάνω από τον άξονα x΄x και τα διαστήματα στα οποία είναι κάτω από τον άξονα x΄x.

ε. Να λύσετε τις ανισώσεις $x^2 - 2x - 3 > 0$ και $x^2 - 2x - 3 < 0$. Τι παρατηρείτε ανάμεσα στις λύσεις των ανισώσεων και στα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι πάνω ή κάτω από τον άξονα x΄x;

στ. Να απαντήσετε στα ίδια ερωτήματα για τη συνάρτηση: $g(x) = -x^2 + 1$.

ζ. Τι παρατηρείτε στη μορφή της παραβολής όταν ο συντελεστής του x^2 είναι θετικός και τι όταν ο συντελεστής είναι αρνητικός;

Διερεύνηση: Να ανοίξετε το ψηφιακό αρχείο **«Μελέτη της συνάρτησης»** και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

Η $f(x) = αx^2 + βx + γ$, $α \neq 0$ λέγεται **τετραγωνική συνάρτηση** και η γραφική της παράσταση παρουσιάζει χαρακτηριστικά ανάλογα με τα χαρακτηριστικά της συνάρτησης $y = αx^2$, $α \neq 0$.

Συγκεκριμένα αποδεικνύεται ότι είναι **παραβολή** και **η μορφή της** εξαρτάται από το πρόσημο του συντελεστή α και το πρόσημο της διακρίνουσας $Δ = β^2 - 4αγ$ του τριώνυμου.

Ειδικότερα:

- **Έχει άξονα συμμετρίας** την ευθεία $x = -\frac{β}{2α}$.
- Έχει κορυφή το σημείο $\left(-\frac{β}{2α}, f\left(-\frac{β}{2α}\right)\right)$.
- **Μέγιστο – Ελάχιστο**
  - ✓ Αν **α > 0,** τότε έχει **ελάχιστο** για $x = -\frac{β}{2α}$, το $f\left(-\frac{β}{2α}\right)$.
  - ✓ Αν **α < 0,** τότε έχει **μέγιστο** για $x = -\frac{β}{2α}$, το $f\left(-\frac{β}{2α}\right)$.

$$f\left(-\frac{β}{2α}\right) = -\frac{Δ}{4α}$$

• Σημεία τομής με τους άξονες:

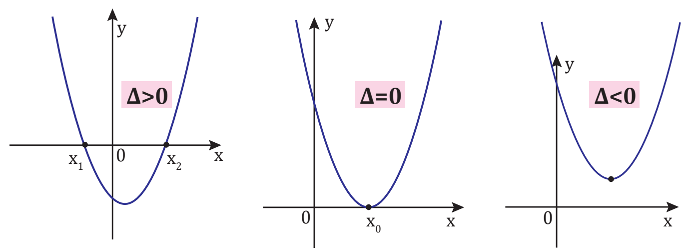
Με τον άξονα y΄y: Ένα σημείο με τεταγμένη y = f(0).

Με τον άξονα x΄x:

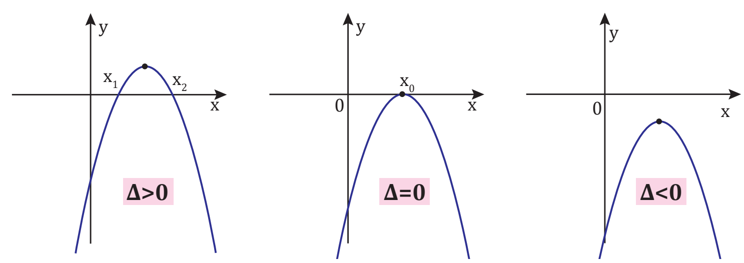
- Αν **Δ > 0,** τότε έχει **δύο σημεία τομής** με τον άξονα x΄x και οι τετμημένες τους είναι οι ρίζες του τριώνυμου.
- Αν **Δ = 0,** τότε έχει **ένα σημείο τομής** (επαφής) με τον άξονα x΄x και η τετμημένη του είναι η διπλή ρίζα του τριώνυμου.
- Αν **Δ < 0,** τότε δεν έχει **κανένα σημείο τομής** με τον άξονα x΄x.

Διερεύνηση: Να ανοίξετε το ψηφιακό αρχείο **«Τι θα συμβεί στη συνάρτηση;»** και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

$f(x) = αx^2 + βx + γ$, **α > 0**



$f(x) = αx^2 + βx + γ$, **α < 0**



Σχεδιασμός γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = αx^2 + βx + γ$, α ≠0

Για τη σχεδίαση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)= αx^2 + βx + γ$, α ≠0 σχηματίζουμε πίνακα τιμών με τιμές συμμετρικές ως προς τον κατακόρυφο άξονα $x = -\frac{β}{2α}$ και απεικονίζουμε τα σημεία σε ένα σύστημα αξόνων χρησιμοποιώντας τα παραπάνω συμπεράσματα, όπως παρουσιάζεται στις εφαρμογές που ακολουθούν.

Εφαρμογή 1

α. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της παραβολής $y = x^2 + 6x + 8$.

β. Από τη γραφική παράσταση της παραβολής, να εκτιμήσετε τα διαστήματα στα οποία η παραβολή είναι πάνω από τον άξονα x΄x και τα διαστήματα στα οποία είναι κάτω από τον άξονα x΄x.

γ. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την εκτίμησή σας.

Απάντηση:

α. Η συνάρτηση έχει άξονα συμμετρίας την κάθετη στον άξονα x΄x ευθεία $x = -\frac{β}{2α} = -\frac{6}{2 \cdot 1} = -3$, οπότε δημιουργούμε τον παρακάτω πίνακα με συμμετρικές τιμές ως προς τον άξονα.

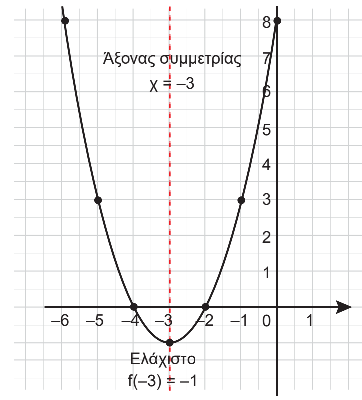
x	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0
y	8	3	0	−1	0	3	8

Εξάλλου:

- Έχει κορυφή το σημείο $\left(-\frac{\beta}{2\alpha},\ f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)\right)$ και επειδή $-\frac{\beta}{2\alpha} = -3$, $f(-3) = (-3)^2 + 6(-3) + 8 = -1$ κορυφή είναι το σημείο $(-3, -1)$.

- Είναι $\alpha = 1 > 0$, οπότε η συνάρτηση έχει ελάχιστο για $x = -3$ το $f(-3) = -1$.
- Για $x = 0$, $f(0) = 8$, οπότε τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $(0, 8)$.
- Είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 4 > 0$, οπότε τέμνει σε δύο σημεία τον άξονα $x'x$.
  Για $y = 0$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = -4$ ή $x = -2$, οπότε τέμνει τον $x'x$ στα σημεία $(-4, 0)$ και $(-2, 0)$.

Με τη βοήθεια των παραπάνω φτιάχνουμε τη γραφική παράσταση της παραβολής του διπλανού σχήματος.



β. Από τη γραφική παράσταση της f φαίνεται ότι η παραβολή βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ στο $(-\infty, -4) \cup (-2, +\infty)$ και κάτω από τον άξονα $x'x$ στο διάστημα $(-4, -2)$.

γ. Το τριώνυμο $x^2 + 6x + 8$ έχει $\alpha = 1 > 0$ και $\Delta = 4 > 0$, οπότε κατά τα γνωστά από το πρόσημο του τριώνυμου έχουμε: $f(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 8 > 0 \Leftrightarrow x < -4$ η $x > -2$ και $f(x) < 0 \Leftrightarrow -4 < x < -2$.
Επομένως, επιβεβαιώνεται και αλγεβρικά η εκτίμησή μας.

Εφαρμογή 2. *Προσομοιώνοντας μια βολή στο μπάσκετ*

Στη φωτογραφία παρουσιάζονται μερικές διαδοχικές θέσεις της τροχιάς που διαγράφει μια μπάλα μπάσκετ σε μια βολή ενός αθλούμενου, οι οποίες τραβήχτηκαν με μια φωτογραφική μηχανή. Αν ο αθλούμενος πετυχαίνει καλάθι με αυτή τη βολή, να ανοίξετε το αρχείο με τον γραμμωτό κώδικα και να επεξεργαστείτε τα παρακάτω ερωτήματα:

α. Θεωρώντας ότι η τροχιά της μπάλας είναι παραβολή της μορφής $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$, να πειραματιστείτε με τους δρομείς για τους συντελεστές α, β και γ προκειμένου να προσδιορίσετε την εξίσωση της τροχιάς.

β. Ποιο είναι το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει η μπάλα;
γ. Αν ο αθλούμενος πατάει στην αρχή των αξόνων και η μπάλα δεν χτυπήσει πουθενά, σε πόση απόσταση από τον αθλούμενο θα χτυπήσει στο έδαφος;
δ. Να συγκρίνετε τα αποτελέσματα που βρήκατε με τα αντίστοιχα των συμμαθητών σας. Τι παρατηρείτε;

Εφαρμογή 3

α. Να βρείτε την εξίσωση της συνάρτησης $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(-1, 4)$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία με τετμημένες -2 και 1.
β. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.
γ. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και να εκτιμήσετε το σύνολο τιμών της συνάρτησης.
δ. Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης να εκτιμήσετε το διάστημα στο οποίο είναι πάνω από τον άξονα $x'x$ και να επιβεβαιώσετε την εκτίμησή σας αλγεβρικά.

Απάντηση:

α. Γνωρίζουμε ότι $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$, όπου x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$.
Άρα $y = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$ (1) και αφού η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία με τετμημένες -2 και 1 η (1) γράφεται: $y = \alpha(x + 2)(x - 1)$ (2).

Επίσης, η γραφική παράσταση της παραβολής διέρχεται από το σημείο Α(–1, 4), οπότε οι συντεταγμένες του ικανοποιούν την (2) από την οποία παίρνουμε:

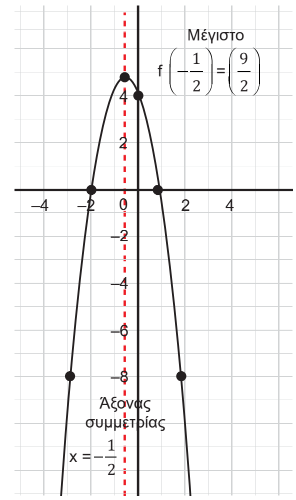
$$4 = \alpha(-1 + 2)(-1 - 1) \Leftrightarrow 4 = -2\alpha \Leftrightarrow \alpha = -2$$

Επομένως:

$$y = -2(x + 2)(x - 1) \Leftrightarrow y = -2(x^2 + x - 2) \Leftrightarrow y = -2x^2 - 2x + 4$$

β. Η συνάρτηση έχει άξονα συμμετρίας την κάθετη στον άξονα x΄x ευθεία $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha} = -\dfrac{-2}{2\cdot(-2)} = -\dfrac{1}{2}$, οπότε δημιουργούμε τον παρακάτω πίνακα με συμμετρικές τιμές ως προς τον άξονα.

x	**–3**	**–2**	**–1**	$-\frac{1}{2}$	**0**	**1**	**2**
y	**–8**	**0**	**4**	$\frac{9}{2}$	**4**	**0**	**–8**



Επίσης:

- $\alpha = -2 < 0$, οπότε η συνάρτηση έχει μέγιστο για $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha} = -\dfrac{1}{2}$ το

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 4 = \frac{9}{2}$$

- Για $x = 0$, $f(0) = 4$, οπότε τέμνει τον y΄y στο σημείο (0, 4).
- Η C_f σύμφωνα με την εκφώνηση τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία (–2, 0) και (1, 0).

Με τη βοήθεια των παραπάνω σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της παραβολής του σχήματος.

γ. Το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης αποτελείται από τα $x\in\mathbb{R}$ για τα οποία $y\in\mathbb{R}$. Αυτό συμβαίνει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και επομένως $A = \mathbb{R}$. Προβάλλοντας τη γραφική παράσταση στον άξονα y΄y, βρίσκουμε ότι το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το διάστημα $\left(-\infty, \frac{9}{2}\right]$.

δ. Από τη γραφική παράσταση της f φαίνεται ότι η παραβολή βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x στο διάστημα (–2, 1). Εξάλλου, το τριώνυμο $-2x^2 - 2x + 4$ έχει $\alpha = -2 < 0$ και $\Delta = 36 > 0$, οπότε κατά τα γνωστά από το πρόσημο του τριώνυμου έχουμε:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow -2x^2 - 2x + 4 > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 1$$

Επομένως, επιβεβαιώνεται και αλγεβρικά η εκτίμησή μας.

Εφαρμογή 4

Ένα αρχαίο θέατρο έχει χωρητικότητα 25.000 θεατές. Με τιμή του εισιτηρίου στα 14€, ο μέσος όρος των ανθρώπων που παρακολουθούν μια παράσταση είναι 10.000. Σε μια έρευνα που πραγματοποίησε η διεύθυνση του θεάτρου διαπίστωσε ότι για κάθε 1€ που μειώνεται η τιμή του εισιτηρίου, ο μέσος όρος των θεατών αυξάνει κατά 1000.

α. Να βρείτε μια συνάρτηση που να μοντελοποιεί τα έσοδα σε σχέση με τη μείωση της τιμής του εισιτηρίου.

β. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα.

γ. Για ποια τιμή του εισιτηρίου επιτυγχάνονται τα μέγιστα έσοδα; Πόσα είναι;

Απάντηση:

α. Επιλογή μεταβλητής. Αναζητούμε τα έσοδα του θεάτρου σε σχέση με το πλήθος των θεατών. Έστω x η μείωση της τιμής του εισιτηρίου.

Μετάφραση των λέξεων σε αλγεβρικούς όρους.
Διερευνούμε τον τρόπο εξέλιξης της κατάστασης με τη βοήθεια του πίνακα:

Ποσό μείωσης του εισιτηρίου	Τιμή εισιτηρίου	Αύξηση θεατών	Συνολικό πλήθος θεατών
0	14	$1000 \cdot 0 = 0$	10000
1	$14 - 1 = 13$	$1000 \cdot 1 = 1000 \cdot 1$	$10000 + 1000 \cdot 1$
2	$14 - 2 = 12$	$1000 \cdot 2 = 1000 \cdot 2$	$10000 + 1000 \cdot 2$
3	$14 - 3 = 11$	$1000 \cdot 3 = 1000 \cdot 3$	$10000 + 1000 \cdot 3$
...	...	...	...
x	$14 - x$	$1000 \cdot x$	$10000 + 1000 \cdot x$

Μοντελοποίηση. Τα έσοδα της επιχείρησης είναι:

Έσοδα = (Συνολικό πλήθος θεατών) × (Τιμή εισιτηρίου)

Συμβολίζοντας με Ε τα έσοδα της επιχείρησης, η συνάρτηση που μοντελοποιεί το πρόβλημα είναι:

$$E(x) = (10000 + 1000 \cdot x) \cdot (14 - x) \Leftrightarrow E(x) = -1000x^2 + 4000x + 140000.$$

Επειδή $14 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 14$, πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το διάστημα $[0,14]$ για οποιαδήποτε μείωση της τιμής ή οι φυσικοί αριθμοί στο διάστημα αυτό για διακριτές μειώσεις της τιμής του εισιτηρίου.

β. Για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $E(x) = -1000x^2 + 4000x + 140000$, έχουμε:

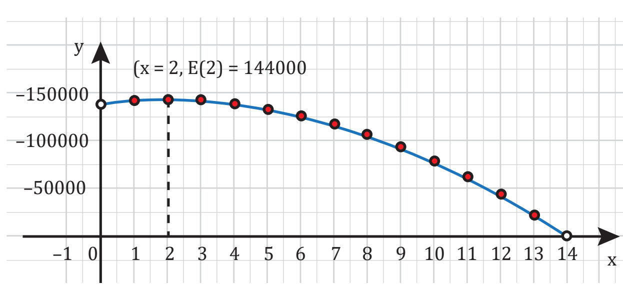
- Η συνάρτηση έχει άξονα συμμετρίας την κάθετη στον άξονα x΄x ευθεία $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$ ή $-\dfrac{4000}{2 \cdot (-1000)} = 2$, οπότε δημιουργούμε τον παρακάτω πίνακα με συμμετρικές τιμές ως προς τον άξονα συμμετρίας.

x	0	1	2	3	4
E(x)	140000	143000	144000	143000	140000

Επίσης:
- $\alpha = -1000 < 0$, οπότε η συνάρτηση έχει μέγιστο για $x = 2$, το $E(2) = 144000$.
- Για $x = 0$ $E(0) = 140000$, οπότε η γραφική παράσταση τέμνει τον y΄y στο σημείο $(0, 140000)$.
- Για $y = 0$, $E(x) = 0 \Leftrightarrow -1000^2 + 4000x + 140000 = 0 \Leftrightarrow x = -10$ ή $x = 14$, οπότε η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία $(-10, 0)$ και $(14, 0)$.

Με τη βοήθεια των παραπάνω, σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της Ε από την οποία αποκόπτουμε το τμήμα της με $0 \leq x \leq 14$, για οποιαδήποτε μείωση της τιμής. Στο σχήμα είναι η μπλε γραμμή.

Ωστόσο οι μειώσεις τιμών και οι αντίστοιχες τιμές των εισιτηρίων συνήθως είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί, οπότε η γραφική παράσταση δεν είναι μια συνεχής γραμμή αλλά σημεία πάνω σε αυτή της μορφής $(x, E(x))$, όπου x η μείωση και $E(x)$ τα αντίστοιχα έσοδα, με $x \in (0, 14)$. Τα σημεία αυτά απεικονίζονται στο σχήμα με κόκκινες κουκκίδες.
Για $x = 0$ δεν υπάρχει καμιά μείωση και για $x = 14$ η είσοδος θα είναι δωρεάν (λευκές κουκκίδες στο σχήμα).



γ. Από τη γραφική παράσταση και όπως είδαμε στο προηγούμενο ερώτημα, η επιχείρηση έχει τα περισσότερα έσοδα, τα οποία είναι $E(2) = 144000$€, όταν η μείωση της τιμής του εισιτηρίου είναι 2€. Για μείωση 2€ η τιμή του εισιτηρίου για την οποία επιτυγχάνονται τα μέγιστα έσοδα είναι $14 - 2 = 12$€.

Διερεύνηση: Να ανοίξετε το ψηφιακό αρχείο **«Οι δύο μορφές της συνάρτησης»** και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

Αυτοαξιολόγηση

1. α. Να βρείτε τον άξονα συμμετρίας της $f(x) = -x^2 + 5x - 4$.

β. Να συμπληρώσετε τον ακόλουθο πίνακα τιμών.

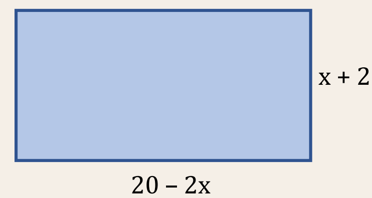
x	0	1	2	2,5	3	4	5
$-x^2 + 5x - 4$							

γ. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x΄x και y΄y.

δ. Να σχεδιάσετε σε ένα σύστημα αξόνων τη γραφική παράσταση της $f(x) = -x^2 + 5x - 4$.

ε. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι πάνω από τον άξονα x΄x και εκείνα που είναι κάτω από τον άξονα x΄x.

2. α. Να γράψετε τον τύπο Ε(x) της τετραγωνικής συνάρτησης που περιγράφει το εμβαδόν του διπλανού σχήματος.



β. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης Ε(x) και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

γ. Ποιο είναι το σύνολο τιμών της συνάρτησης;

δ. Από τη γραφική παράσταση να εκτιμήσετε το x ώστε το εμβαδόν Ε(x) να γίνεται μέγιστο καθώς και το μέγιστο εμβαδόν.

3. Το βράδυ της Ανάστασης, ανάμεσα στις εκκλησίες του Αγίου Μάρκου και της Παναγίας της Ερειθιανής, που βρίσκονται στο Βροντάδο της Χίου, εκτοξεύονται χιλιάδες αυτοσχέδιες ρουκέτες, οι τροχιές των οποίων είναι παραβολικές. Η παραβολική τροχιά μιας τέτοιας ρουκέτας περιγράφεται από τη συνάρτηση:

$$h(t) = -\frac{8}{7}t^2 + \frac{22}{7}t + 2$$

όπου h το ύψος σε μέτρα (m) και t ο χρόνος σε δευτερόλεπτα (sec).

α. Να βρείτε τον χρόνο που χρειάζεται μια ρουκέτα που εκτοξεύεται από τον Άγιο Μάρκο να χτυπήσει στο έδαφος.

β. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της h που μοντελοποιεί το πρόβλημα.

γ. Από ποιο ύψος σε σχέση με το οριζόντιο επίπεδο εκτοξεύονται οι ρουκέτες αυτές;

δ. Ποιο είναι το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνουν οι ρουκέτες αυτές σε σχέση με το οριζόντιο επίπεδο;

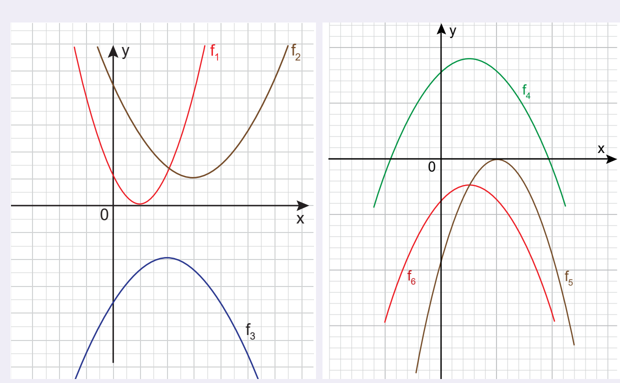
ε. Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης, να εκτιμήσετε το χρονικό διάστημα στο οποίο η ρουκέτα είναι σε ανοδική τροχιά και το χρονικό διάστημα στο οποίο είναι σε καθοδική τροχιά.

Διερεύνηση: Να ανοίξετε το ψηφιακό αρχείο **«Η τροχιά της βολής»** και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

Ιστορικό σημείωμα για την τροχιά βλημάτων και μια Διαθεματική Εργασία μπορείτε να βρείτε στο συμπληρωματικό υλικό.

Ερωτήσεις Κατανόησης

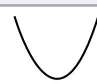
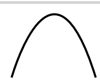
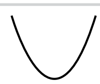
1. Στα διπλανά σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις έξι παραβολών της μορφής $y = αx^2 + βx + γ$. Να συμπληρώσετε τις στήλες του πίνακα που ακολουθεί με το πρόσημο των συντελεστών α, γ και της διακρίνουσας Δ όταν $α \neq 0$.



Τριώνυμο	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
α						
γ						
Δ						

2. Να εξετάσετε αν υπάρχει πραγματική τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$ για την οποία η παραβολή $y = 4x^2 + \kappa x + 1$ δεν τέμνει τον άξονα x΄x.

3. Να γράψετε τύπους συναρτήσεων της μορφής $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, οι γραφικές παραστάσεις των οποίων:

α. τέμνουν τον άξονα x΄x σε δύο σημεία και έχουν τη μορφή →	
β. δεν τέμνουν τον άξονα x΄x και έχουν τη μορφή →	
γ. εφάπτονται στον άξονα x΄x και έχουν τη μορφή →	

4. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ή λανθασμένες δικαιολογώντας την απάντησή σας.

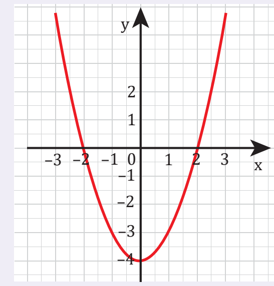
α. Η γραφική παράσταση της $y = x^2 - 2x + 2$ είναι πάνω από τον άξονα x΄x για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β. Όλες οι γραφικές παραστάσεις των τετραγωνικών συναρτήσεων τέμνουν τον άξονα x΄x σε δύο το πολύ σημεία.

γ. Η γραφική παράσταση του σχήματος που ακολουθεί είναι παραβολή.

i. είναι πάνω από τον άξονα x΄x για κάθε $x \in (-2, 2)$;

ii. ο συντελεστής του x^2 είναι αρνητικός;



5. Γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση μιας τετραγωνικής συνάρτησης $f(x) = (x - \kappa)(x - \lambda)$ είναι μια παραβολή.

α. Κάντε μια πρόχειρη γραφική παράσταση που να περιγράφει την παραπάνω παραβολή.

β. Ποια είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x;

γ. Να βρείτε την τετμημένη του χαμηλότερου σημείου της f.

δ. Να αντικαταστήσετε τις παραμέτρους κ, λ με δικούς σας αριθμούς και να απαντήσετε στα παραπάνω ερωτήματα.

6. Σχεδιάστε μια παραβολή που να μοντελοποιεί μια πραγματική κατάσταση και εξηγήστε τι αναπαριστά το ψηλότερο ή το χαμηλότερο σημείο της συνάρτησης. Προσδιορίστε επίσης το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

7. Μία συμμαθήτριά σας ισχυρίζεται ότι αν γνωρίζει δύο διαφορετικά σημεία σε ένα σύστημα συντεταγμένων μπορεί να σχεδιάσει μία μοναδική παραβολή. Έχει δίκιο η συμμαθήτριά σας; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Ασκήσεις

1. **α.** Να συμπληρώσετε τον ακόλουθο πίνακα τιμών.

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1
$x^2 + 4x + 5$							

β. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των $f(x) = x^2$ και $g(x) = x^2 + 4x + 5$.

γ. Να σχεδιάσετε σε διαφανές χαρτί την f και στη συνέχεια μετατοπίζοντάς την κατάλληλα, να εξετάσετε αν ταυτίζεται με τη γραφική παράσταση της g. Τι παρατηρείτε;

2. Για καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις:

α. Να βρείτε τον άξονα συμμετρίας.

β. Να βρείτε αν έχουν μέγιστο ή ελάχιστο.

γ. Να βρείτε το μέγιστο ή το ελάχιστό τους.

δ. Να βρείτε τα σημεία τομής τους με τους άξονες x΄x και y΄y (αν υπάρχουν).

ε. Να φτιάξετε πίνακα με συμμετρικές τιμές ως προς τον άξονα συμμετρίας.

στ. Να τις σχεδιάσετε.

i. $y = x^2 + 2x - 2$ **ii.** $y = x^2 - 4$

iii. $y = x^2 - 3x$ **iv.** $y = -x^2 + x + 2$

v. $y = -x^2 + 6x - 9$ **vi.** $y = -2x^2 + 3x + 10$

Χρησιμοποιήστε ένα ψηφιακό εργαλείο για να χαράξετε τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις και ελέγξτε τις απαντήσεις σας.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 2x - 3$.

α. Να βρείτε:

i. τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

ii. τον άξονα συμμετρίας της f.

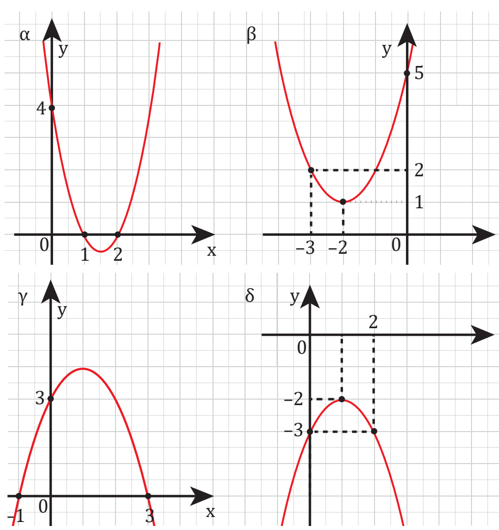
iii. αν έχει μέγιστο ή ελάχιστο και να το προσδιορίσετε.

β. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f.

γ. **i.** Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι πάνω από τον άξονα x΄x και τα διαστήματα στα οποία είναι κάτω από τον άξονα x΄x.

ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις του προηγούμενου ερωτήματος.

4. Οι παρακάτω γραφικές παραστάσεις περιγράφουν συναρτήσεις της μορφής $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$. Να βρείτε τους τύπους τους.



5. Να ανοίξετε το ψηφιακό αρχείο **«Αλγεβρική και γραφική μελέτη»** και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

6. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2x^2 - x + 3$ και $g(x) = x^2 + x + 2$.

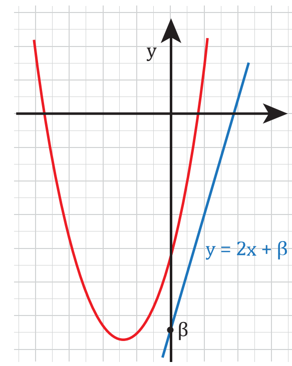
α. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g.

β. Να εκτιμήσετε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g από το σχέδιο που κάνατε και να επιβεβαιώσετε και αλγεβρικά τα συμπεράσματά σας.

γ. Με τη βοήθεια του σχήματος να βρείτε τις λύσεις της ανίσωσης $2x^2 - x + 3 > x^2 + x + 2$.

δ. Να λύσετε αλγεβρικά την ανίσωση του προηγούμενου ερωτήματος.

7. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της τετραγωνικής συνάρτησης $y = x^2 + 4x - 5$ και της ευθείας $y = 2x + \beta$.



α. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y = x^2 + 4x - 5$ με τους άξονες x΄x και y΄y.

β. **i.** Με τη βοήθεια του σχήματος να βρείτε τις λύσεις της ανίσωσης $x^2 + 4x - 5 < 0$.

ii. Να λύσετε αλγεβρικά την ανίσωση του προηγούμενου ερωτήματος.

γ. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού β ώστε η ευθεία:

i. να τέμνει την καμπύλη σε δύο σημεία,

ii. να εφάπτεται στην καμπύλη,

iii. να μην έχει κοινά σημεία με την καμπύλη.

8. Για καθεμία από τις επόμενες τετραγωνικές συναρτήσεις, να βρείτε τις τιμές του λ, για τις οποίες οι γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων f, g και h:

α. $f(x) = x^2 + 3x + \lambda$

β. $g(x) = \lambda x^2 - 4x + 1$, $\lambda \neq 0$

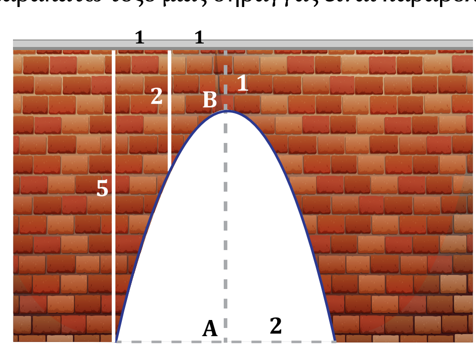
γ. $h(x) = (\lambda + 1)x^2 - 2\lambda x + (\lambda - 4)$, $\lambda \neq -1$

i. τέμνουν τον άξονα x΄x δύο φορές,

ii. εφάπτονται στον άξονα x΄x,

iii. δεν τέμνουν τον άξονα x΄x.

9. Το παρακάτω τόξο μιας σήραγγας είναι παραβολικό.



α. Να θεωρήσετε σύστημα αξόνων με αρχή το σημείο Α και να προσδιορίσετε την εξίσωση της παραβολής.

β. Να θεωρήσετε σύστημα αξόνων με αρχή το σημείο Β και να προσδιορίσετε την εξίσωση της παραβολής.

γ. Τι παρατηρείτε για τις εξισώσεις που προσδιορίσατε στα προηγούμενα ερωτήματα;

10. Ο Ανδρέας κάνει βουτιά από έναν βατήρα και το ύψος του h σε μέτρα κατά το χρόνο t sec σε σχέση με την επιφάνεια του νερού περιγράφεται από τη συνάρτηση:

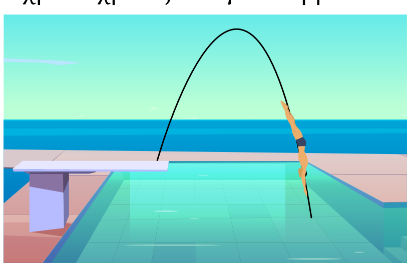
$$h(t) = -4t^2 + 4t + 4,\ t \geq 0$$

α. Πόσο ψηλά από το νερό είναι ο βατήρας;

β. Πόσο χρόνο χρειάζεται ο Ανδρέας για να φτάσει στο μέγιστο ύψος της βουτιάς του;

γ. Πόσο απέχει από την επιφάνεια του νερού ο Ανδρέας όταν βρίσκεται στο ψηλότερο σημείο του;

δ. Πόσο χρόνο χρειάζεται για να βρεθεί στο νερό;



11.

Να ανοίξετε το ψηφιακό αρχείο **«Γραφείο ταξιδίων»** και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

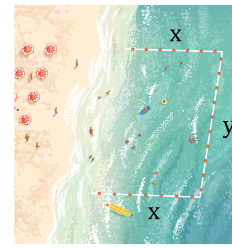
12. Ένας αγρότης θέλει να περιφράξει μια περιοχή και να δημιουργήσει δύο ακριβώς ίδια μαντριά σχήματος ορθογωνίου, ώστε στο ένα να βάλει τα πρόβατά του και στο άλλο τις αγελάδες του, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Από τη μια μεριά της γης υπάρχει ένα ποτάμι και συνολικά ο αγρότης θέλει να χρησιμοποιήσει 180 m πλέγματος. Συμβολίζουμε με x το πλάτος του μαντριού.

α. Να γράψετε μια τετραγωνική συνάρτηση που να περιγράφει το συνολικό εμβαδόν Ε και των δύο μαντριών και το πεδίο ορισμού της.

β. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης που δημιουργήσατε στο προηγούμενο ερώτημα.

γ. Να βρείτε τις διαστάσεις που πρέπει να έχει κάθε μαντρί ώστε να μεγιστοποιηθεί το εμβαδόν του.

13. Σε μια παραλία την οποία επιβλέπει ένας ναυαγοσώστης έχουν τοποθετηθεί θαλάσσιες μπάρες από σκοινί ασφαλείας προκειμένου να κολυμπούν παιδιά και να είναι έτσι ευκολότερη η επιτήρησή τους.



Η ασφαλής θαλάσσια περιοχή δημιουργεί ένα ορθογώνιο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, όπου το σκοινί έχει μήκος 100m.

α. Αν x, y είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου να βρείτε το εμβαδόν Ε του συναρτήσει του x.

β. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης Ε(x).

γ. Να βρείτε τις διαστάσεις της περιφραγμένης περιοχής προκειμένου να μεγιστοποιηθεί η ασφαλής περιοχή κολύμβησης.

14.

Να ανοίξετε το ψηφιακό αρχείο **«Το εμβαδόν»** και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

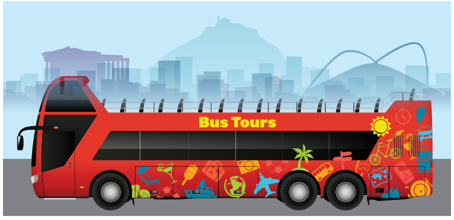
15. Κατά τη διάρκεια ενός παιχνιδιού τένις, η Μαρία Σάκκαρη χτυπά το μπαλάκι στον αέρα και αυτό ακολουθεί μια παραβολική τροχιά. Το αρχικό σημείο χτυπήματος της μπάλας του τένις είναι 1m πάνω από το έδαφος. Το μπαλάκι φτάνει σε μέγιστο ύψος 4 μέτρα από το έδαφος σε απόσταση 11m από τη Σάκκαρη. Το μπαλάκι είναι και πάλι 1m πάνω από το έδαφος όταν είναι 22 μέτρα μακριά από το αρχικό σημείο που η Σάκκαρη το χτύπησε.

α. Να γράψετε τον τύπο της τετραγωνικής συνάρτησης που μοντελοποιεί την τροχιά της μπάλας.

β. Να κάνετε μια γραφική παράσταση παραβολής που να περιγράφει την τροχιά της μπάλας.

γ. Να βρείτε πόσα μέτρα μακριά από το αρχικό χτύπημα της Σάκκαρη προσγειώνεται το μπαλάκι. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας τόσο γραφικά όσο και αλγεβρικά.

16. Ένα ταξιδιωτικό πρακτορείο στην Αθήνα εξυπηρετεί καθημερινά 400 τουρίστες, τους οποίους ξεναγεί σε αξιοθέατα της πόλης. Η τιμή του εισιτηρίου είναι 5 ευρώ ανά τουρίστα. Ο ιδιοκτήτης του πρακτορείου εκτιμά ότι θα χάνει 10 πελάτες – τουρίστες, για κάθε 0,5€ αύξηση της τιμής του εισιτηρίου.



α. Να μοντελοποιήσετε το παραπάνω πρόβλημα φτιάχνοντας μια συνάρτηση εσόδων $E(x)$, όπου x το πλήθος των αυξήσεων της αρχικής τιμής του εισιτηρίου.

β. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης εσόδων για οποιοδήποτε πλήθος αυξήσεων της τιμής του εισιτηρίου και να σημειώσετε πάνω σε αυτή τα σημεία $(x, E(x))$ με $x \in \mathbb{N}$.

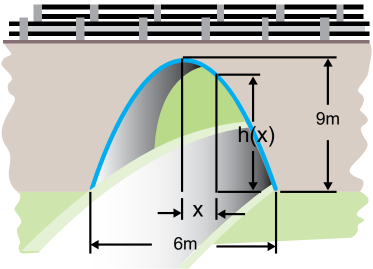
γ. Για ποια τιμή του εισιτηρίου μεγιστοποιούνται τα έσοδα του πρακτορείου;

δ. Ποια είναι τα μέγιστα ημερήσια έσοδα;

17. Να ανοίξετε το ψηφιακό αρχείο **«Τριγωνικές διατάξεις τύπου L»** και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

18. Το σχήμα του τούνελ του διπλανού σχήματος είναι παραβολικό και περιγράφεται ικανοποιητικά από μια τετραγωνική συνάρτηση της μορφής:

$$h(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma.$$



α. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης.

β. Μπορεί ένα φορτηγό με ύψος 6m και πλάτος 4m να περάσει από το τούνελ;

γ. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x)$ και από αυτήν να εκτιμήσετε ποιο είναι το μέγιστο ύψος ενός φορτηγού με πλάτος 4m που μπορεί να περάσει από το τούνελ.

19. Να ανοίξετε το ψηφιακό αρχείο **«Τοξωτές γέφυρες»** και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

20. Να ανοίξετε το ψηφιακό αρχείο **«Τα σημεία της τετραγωνικής συνάρτησης»** και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

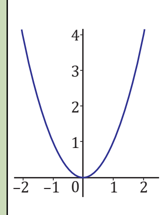
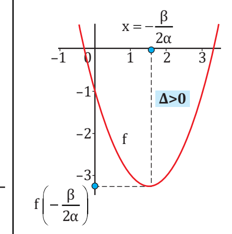
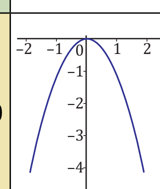
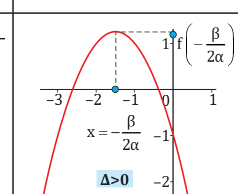
21. Να ανοίξετε το ψηφιακό αρχείο **«Η υδρορροή»** και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

5.5 • Ανακεφαλαίωση 5ου Κεφαλαίου

Θεωρία

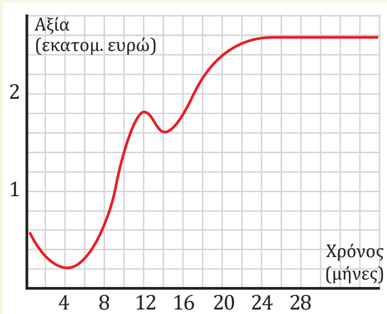
1. **Συνάρτηση** f από ένα μη κενό σύνολο Α σε ένα μη κενό σύνολο Β ονομάζουμε μια διαδικασία (έναν κανόνα) με την οποία κάθε στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου Β.
   - Το σύνολο Α λέγεται **πεδίο ορισμού** ή **σύνολο ορισμού** της f.
   - Το γράμμα $x \in A$ ονομάζεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**.
   - Το $y = f(x) \in B$ στο οποίο αντιστοιχίζεται το $x \in A$ μέσω της f, ονομάζεται **εξαρτημένη μεταβλητή** ή **τιμή της f στο x** ή **εικόνα του x μέσω της f.**
   - Το σύνολο των εικόνων του Α μέσω της f λέγεται **σύνολο τιμών** και συμβολίζεται με **f(A)**.
2. **Γραφική παράσταση** μιας συνάρτησης $f: A \to \mathbb{R}$ ονομάζουμε το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, $x \in A$.
   - Το **x** λέγεται **τετμημένη** και το **y τεταγμένη** του σημείου Μ. Οι αριθμοί **x**, **y** λέγονται **συντεταγμένες** του Μ.
   - Τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f τη συμβολίζουμε συνήθως με C_f.
3. **Συντελεστή διεύθυνσης** ή **κλίση** μιας ευθείας ονομάζουμε την εφαπτομένη της γωνίας $\omega \neq 90^0$ που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα x΄x.
4. Η κλίση λ μιας ευθείας που διέρχεται από δύο τυχαία σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ με $x_1 \neq x_2$ είναι:
$$\boldsymbol{\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$
5. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x + \beta$ είναι μια ευθεία γραμμή.
   α. Ο συντελεστής α:
   - Δείχνει την κλίση της ευθείας της συνάρτησης $f(x) = \alpha x + \beta$.
   - Εκφράζει τον μέσο ρυθμό μεταβολής της μεταβλητής y στο αντίστοιχο διάστημα της μεταβλητής x.
   - Δείχνει τη μεταβολή της συνάρτησης για αύξηση μιας μονάδας της x.

   β. Ο συντελεστής β δείχνει την τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας $y = \alpha x + \beta$ με τον άξονα y΄y και επομένως την τιμή από την οποία ξεκινάει η μεταβολή της συνάρτησης $f(x) = \alpha x + \beta$.
6. Στην ειδική περίπτωση όπου $\beta = 0$, ο τύπος της συνάρτησης $f(x) = \alpha x + \beta$ γίνεται $f(x) = \alpha x$, οπότε η γραφική της παράσταση είναι μια ευθεία που διέρχεται πάντα από την αρχή των αξόνων.
7. Για $\alpha = 0$, η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$ γίνεται $f(x) = \beta$. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται **σταθερή** και η γραφική της παράσταση είναι μια ευθεία παράλληλη προς στον άξονα x΄x (κάθετη στον άξονα y΄y).
8. Θεωρούμε τις ευθείες με εξισώσεις $\varepsilon_1 : y = \alpha_1 x + \beta_1$ και $\varepsilon_2 : y = \alpha_2 x + \beta_2$.
   - Αν $\alpha_1 = \alpha_2$ και $\beta_1 \neq \beta_2$, οι ευθείες είναι **παράλληλες**.
   - Αν $\alpha_1 = \alpha_2$ και $\beta_1 = \beta_2$, οι ευθείες **ταυτίζονται.**
   - Αν $\alpha_1 \neq \alpha_2$, οι ευθείες **τέμνονται σε ένα σημείο.**
9. Οι συναρτήσεις $f(x) = \alpha x^2$ και $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$

Συναρτήσεις		**$f(x) = \alpha x^2$, $\alpha \neq 0$**	**$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$**
Κορυφή		(0, 0)	$\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)\right)$
Άξονας συμμετρίας		x = 0 (άξονας y΄y)	$x = -\frac{\beta}{2\alpha}$
Μορφή	$\alpha > 0$		
	$\alpha < 0$		
Μέγιστο Ελάχιστο	$\alpha > 0$	Ελάχιστο $y = 0$, για $x = 0$	Ελάχιστο $y = f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)$ για $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$
	$\alpha < 0$	Μέγιστο $y = 0$, για $x = 0$	Μέγιστο $y = f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)$ για $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$

Επαναληπτικές Ασκήσεις

1. Η γραφική παράσταση δείχνει την εξέλιξη της αξίας (σε εκατομμύρια €) μιας εταιρείας από τη στιγμή της ίδρυσής της.



α. Ποια ήταν η αξία της (σε εκατομμύρια €) όταν ιδρύθηκε;

β. Ποια ήταν η αξία της 4 μήνες μετά; Αυξήθηκε ή ελαττώθηκε;

γ. Ποια χρονική περίοδο φαίνεται να έχει τη μεγαλύτερη αύξηση της αξίας της;

δ. Ποια είναι η μικρότερη αξία της εταιρείας και σε ποιον μήνα την είχε; Από το γράφημα φαίνεται να έχει μέγιστη αξία;

ε. Ποια φαίνεται να είναι η τάση στην αξία της εταιρείας για τους επόμενους μήνες;

στ. Περιγράψτε την αξία της εταιρείας τα 3 πρώτα χρόνια λειτουργίας της.

2. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 4x + \alpha$ και $g(x) = \alpha - x$, $\alpha \in \mathbb{R}$

α. Αν ισχύει ότι $f(1) + g(2) = 3$, να βρείτε το α.

Για $\alpha = 4$:

β. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g.

γ. Να εκτιμήσετε από τη γραφική παράσταση και στη συνέχεια να λύσετε αλγεβρικά:

i. την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

ii. την ανίσωση $f(x) \geq g(x)$.

δ. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$h(x) = \frac{\sqrt{f(x) - g(x)}}{g(x)}.$$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4x^2 - 12x + \alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

α. Να βρείτε για ποιες τιμές του α η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$.

β. Αν $f(-1) = 5f^2(1)$ να βρείτε το α.

Για $\alpha = 9$:

γ. Να δείξετε ότι $f(x) = |2x - 3|$, $x \in \mathbb{R}$.

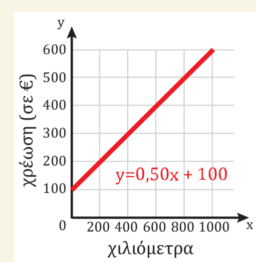
δ. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f δεν είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της $g(x) = 5$.

4. α. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = |x - 1|$ και $g(x) = 2$.

β. Να εκτιμήσετε γραφικά και να βρείτε αλγεβρικά τα σημεία τομής των C_f, C_g.

γ. Να εκτιμήσετε γραφικά και να βρείτε αλγεβρικά τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f είναι πάνω από τη γραφική παράσταση της g.

5. Η οικογένεια της Δώρας αποφασίζει φέτος να νοικιάσει ένα τροχόσπιτο για να κάνει διακοπές. Το κόστος ενοικίασης ενός τροχόσπιτου είναι 0,50€/km, συν ένα πάγιο τέλος 100€.
Το κόστος απεικονίζεται στο γράφημα και μπορεί να μοντελοποιηθεί με τη συνάρτηση $y = 0{,}50x + 100$, όπου y είναι το συνολικό κόστος ενοικίασης σε € και x είναι ο αριθμός των διανυόμενων km.



α. Ποια είναι η κλίση της ευθείας; Με τι αντιστοιχεί η κλίση στο πρόβλημα;

β. Τι δηλώνει το σημείο τομής της ευθείας με τον άξονα y΄y;

γ. Χρησιμοποιήστε την εξίσωση για να προσδιορίσετε τη συνολική χρέωση εάν οδηγήσουν 400 km. Επιβεβαιώστε την απάντησή σας και γραφικά.

δ. Χρησιμοποιήστε το γράφημα για να προσδιορίσετε τον αριθμό των διανυόμενων χιλιομέτρων εάν η χρέωση είναι 500€. Επιβεβαιώστε την απάντησή σας και αλγεβρικά.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 4x + 3$ και η ευθεία (ε): $y = -4x - 13$.

α. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f και της ευθείας (ε).

β. Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) εφάπτεται της παραβολής και να βρείτε το σημείο επαφής.

Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση $g(x) = x + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

γ. Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες:

i. οι γραφικές παραστάσεις των f, g έχουν δύο κοινά σημεία,

ii. οι γραφικές παραστάσεις των f, g δεν έχουν κοινά σημεία.

7. Μια μικρή κατασκευαστική εταιρεία φτιάχνει και πουλάει x μηχανήματα κάθε μήνα. Το μηνιαίο κόστος (σε €) για την κατασκευή x μηχανημάτων δίνεται από τη συνάρτηση:

$$K(x) = 0{,}35x^2 + 3200$$

Τα μηνιαία έσοδα από την πώληση x μηχανημάτων περιγράφονται από την:

$$E(x) = 180x - 0{,}55x^2$$

α. Να δείξετε ότι το μηνιαίο κέρδος της εταιρείας μπορεί να υπολογιστεί από την τετραγωνική συνάρτηση

$$P(x) = -0{,}9x^2 + 180x - 3200$$

β. Να χαράξετε τη γραφική της παράσταση χρησιμοποιώντας ψηφιακά εργαλεία και από αυτή να εκτιμήσετε:

i. Πόσα μηχανήματα πρέπει να φτιάξει τον μήνα για να μεγιστοποιήσει το κέρδος της.

ii. Ποιο είναι το μέγιστο μηνιαίο κέρδος της εταιρείας;

γ. Για το πλήθος των μηχανημάτων όπου η εταιρεία μεγιστοποιεί το κέρδος της, ποια είναι τα έσοδά της;

δ. Να βρείτε τον μικρότερο αριθμό μηχανημάτων που πρέπει να κατασκευάσει και να πουλήσει η εταιρεία προκειμένου να έχει θετικό κέρδος.

8. Οι μαθητές και οι μαθήτριες της Α' Λυκείου αποφασίζουν να φτιάξουν έναν μικρό κήπο σχήματος ορθογωνίου στην αυλή του σχολείου σας.

Για τον σκοπό αυτό αγοράζουν έναν φράχτη μήκους 36 m ώστε να περιφράξουν μια περιοχή της αυλής. Προκειμένου να έχουν όσο το δυνατόν μεγαλύτερη περίμετρο περίφραξης, αποφασίζουν η μία μεριά του κήπου να ακουμπάει στον τοίχο του σχολείου ώστε να μην χρειαστεί να βάλουν φράχτη.

α. Να γράψετε μια τετραγωνική συνάρτηση που να περιγράφει το εμβαδόν Ε του κήπου και το πεδίο ορισμού της.

β. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης που δημιουργήσατε στο προηγούμενο ερώτημα.

γ. Να βρείτε τις διαστάσεις της περιφραγμένης περιοχής προκειμένου να μεγιστοποιηθεί η περιφραγμένη περιοχή.

9. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 3x^2 - 4x$ και $g(x) = 3x - 4$, $x \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f, C_g.

β. Να βρείτε:

i. τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα x΄x,

ii. τον άξονα συμμετρίας της C_f.

γ. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

δ. Να βρείτε τη σχετική θέση της C_f και της ευθείας (ε): $y = α$, για τις διάφορες τιμές του $α \in \mathbb{R}$.

10. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - β$ και $g(x) = x - β$, $x \in \mathbb{R}$ και β ακέραιος.

α. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g.

β. Αν η συνάρτηση $f(x) + g(x)$ διέρχεται από το σημείο $Α\left(\frac{3β}{2} - 4, -2\right)$, να βρείτε το β.

Για $β = 4$

γ. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{f(x) - 12}{g(x)} + \frac{g(x)}{f(x) - 12} = 1$

11. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{Α} = 90^o)$ έχει κάθετες πλευρές με μήκη x, y ώστε $x + y = 20$.

α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο:

$$E(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 10x,\ x \in (0, 20)$$

β. Να αποδείξετε ότι $E(x) \leq 50$, για κάθε $x \in (0, 20)$ και να βρείτε την τιμή του x για την οποία το εμβαδόν γίνεται μέγιστο.

γ. Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις πλευρές του για τη μέγιστη τιμή του x που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα.

12. Ένα γυμναστήριο κάνει την εξής ετήσια προσφορά: «10€ εφάπαξ ποσό και 20€ ανά μήνα για τους 4 πρώτους μήνες και 70€ εφάπαξ ποσό και 5€ ανά μήνα από 4 μήνες και πάνω».

α. Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης f που περιγράφει την ετήσια προσφορά.

β. Αν $f(x) = \begin{cases} 10 + 20x, & 0 \le x < 4 \\ 70 + 5x, & 4 \le x \le 12 \end{cases}$, όπου x σε μήνες, να βρείτε πόσα ευρώ (€) θα πληρώσει κάποιος αν:

i. γραφτεί και δεν πάει στο γυμναστήριο,

ii. πάει 4 μήνες γυμναστήριο,

iii. πάει 10 μήνες γυμναστήριο.

Ένα άλλο ανταγωνιστικό γυμναστήριο κάνει την εξής προσφορά:

«40€ εφάπαξ ποσό και 10€ ανά μήνα για ένα έτος».

γ. Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης g που περιγράφει την ετήσια προσφορά.

Αν $g(x) = 40 + 10x$:

δ. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των f, g.

ε. Να εκτιμήσετε από τη γραφική παράσταση τις τιμές του x για τις οποίες $g(x) \le f(x)$ και να ερμηνεύσετε την απάντησή σας στο πλαίσιο του προβλήματος.

13. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + 3$ τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο Α(–3, 0) και παίρνει μέγιστη τιμή όταν $x = -1$.

α. Να βρείτε τα α, β.

Για $\alpha = -1$ και $\beta = -2$:

β. Να βρείτε το άλλο σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x.

γ. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η παραβολή είναι πάνω από την ευθεία (ε): $y - 3 = x$.

δ. Δίνεται η ευθεία (η): $y = \lambda$. Να βρείτε την τιμή του λ, αν η ευθεία (η) έχει:

i. ένα μόνο κοινό σημείο με την παραβολή,

ii. δύο κοινά σημεία με την παραβολή.

Φύλλο Αξιολόγησης
5ου Κεφαλαίου

Γλωσσάρι
5ου Κεφαλαίου

Ερωτήσεις
πολλαπλής επιλογής
στις Συναρτήσεις

Ερωτήσεις
Σωστού - Λάθους
στις Συναρτήσεις

Κεφάλαιο

6

Τριγωνομετρία

Το Στόουνχεντζ, (Stonehenge), ο διάσημος «μεγαλιθικός κύκλος», χτίστηκε στην Αγγλία μεταξύ 2750 π.Χ. και 1300 π.Χ. με συμπαγείς λίθους που ζυγίζουν πάνω από 44 τόνους ο καθένας. Χρειάζονταν 550 άτομα για να τραβήξουν μια πέτρα πάνω σε μια ράμπα με κλίση 9°.

6.1 • Εισαγωγή - Επανάληψη

Η λέξη τριγωνομετρία σημαίνει «μέτρηση τριγώνων» και με τη βοήθειά της οι αρχαίοι Έλληνες μελέτησαν τις τοποθεσίες χιλιάδων αστέρων καθώς και την κίνηση της Σελήνης σε σχέση με τη Γη.

Η τριγωνομετρία σήμερα έχει πλήθος εφαρμογών όπως η αστρονομία, η γεωγραφία, η πλοήγηση, η βιολογία, η χημεία, η ακτινοδιαγνωστική, η οικονομία, τα γραφικά υπολογιστών, η θεωρία πιθανοτήτων, η στατιστική, η κρυπτογραφία, η αρχιτεκτονική, η φωνητική, η ηλεκτρονική, η μηχανολογία, οι κατασκευές, η σεισμολογία κ.ά.

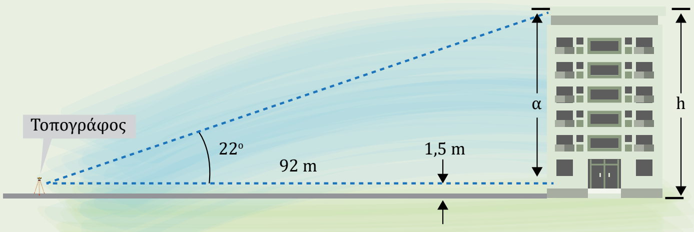
Διερεύνηση

Το Στόουνχεντζ (Stonehenge), ο διάσημος «μεγαλιθικός κύκλος», χτίστηκε στην Αγγλία μεταξύ 2750 π.Χ. και 1300 π.Χ. με συμπαγείς πέτρες που ζυγίζουν πάνω από 44 τόνους η καθεμία. Χρειάζονταν 550 άτομα για να τραβήξουν μια τέτοια πέτρα πάνω σε μια ράμπα με κλίση 9^o.

Να περιγράψετε πώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί η τριγωνομετρία του ορθογωνίου τριγώνου για τον προσδιορισμό της απόστασης που χρειάζονταν να σύρουν 550 εργάτες μια τέτοια πέτρα, για να την ανεβάσουν σε ύψος 9 μέτρων.

Εφαρμογή

Ένας τοπογράφος, για να μετρήσει την κορυφή ενός κτιρίου, τοποθέτησε το όργανο μέτρησης 1,5m πάνω από το έδαφος και βρήκε ότι η γωνία σε σχέση με το έδαφος ήταν 22^o. Αν η απόσταση του οργάνου από το κτίριο ήταν 92m, να βρεθεί το ύψος του κτιρίου.



Απάντηση

Ας συμβολίσουμε με α το ύψος του τμήματος του κτιρίου που βρίσκεται πάνω από το όργανο μέτρησης και h το ύψος του κτιρίου. Είναι:

$$εφ22^o = \frac{α}{92} \Leftrightarrow 0{,}4040 = \frac{α}{92} \Leftrightarrow α = 92 \cdot 0{,}4040 \Leftrightarrow α = 37{,}168\text{m}$$

και επομένως, το ύψος του κτιρίου είναι $h = 37{,}168 + 1{,}5 = 38{,}668$m.

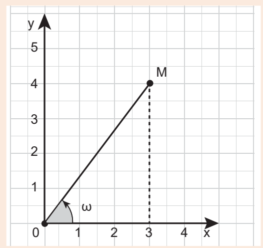
Να ανοίξετε το ψηφιακό αρχείο **«Πυροσβεστική διάσωση»** και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

6.2 • Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω, με $0^o \leq ω \leq 360^o$

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/ήτριες να μπορούν:

Να ορίζουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνίας μεταξύ 0^o και 360^o με τη βοήθεια συστήματος συντεταγμένων.

Διερεύνηση



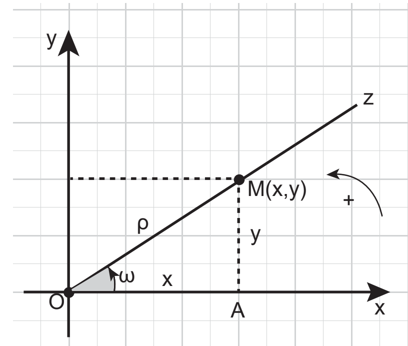
Στο διπλανό ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy θεωρούμε ένα σημείο Μ.

α. Να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του σημείου Μ.

β. Να υπολογίσετε το μήκος (ΟΜ).

γ. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

Θεωρούμε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy, την ημιευθεία Oz και την οξεία γωνία ω που δημιουργείται από τον ημιάξονα Ox, όταν περιστραφεί κατά τη θετική φορά γύρω από το σημείο O μέχρι να συμπέσει (για πρώτη φορά) με την ημιευθεία Oz.
Θεωρούμε τυχαίο σημείο M(x, y), διαφορετικό από το O, πάνω στην τελική πλευρά Oz της γωνίας ω, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



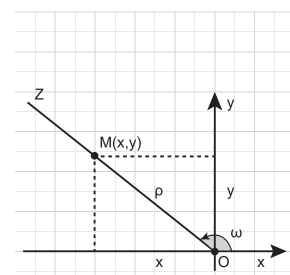
Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο AOM, βρίσκουμε ότι η απόσταση του σημείου O από το M είναι $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Οπότε κατά τα γνωστά από τον ορισμό των τριγωνομετρικών αριθμών, σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της οξείας γωνίας ω είναι:

$$\eta\mu\omega = \frac{(AM)}{(OM)} = \frac{\text{τεταγμένη του M}}{\text{απόσταση του M από το O}} = \frac{y}{\rho} \qquad \varepsilon\varphi\omega = \frac{(AM)}{(OA)} = \frac{\text{τεταγμένη του M}}{\text{τετμημένη του M}} = \frac{y}{x}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{(OA)}{(OM)} = \frac{\text{τετμημένη του M}}{\text{απόσταση του M από το O}} = \frac{x}{\rho} \qquad \sigma\varphi\omega = \frac{(OA)}{(AM)} = \frac{\text{τετμημένη του M}}{\text{τεταγμένη του M}} = \frac{x}{y}$$

Γενικεύοντας, για τους τριγωνομετρικούς αριθμούς οποιασδήποτε γωνίας από 0^0 έως 360^0 ορίζουμε:

$$\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho}, \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho}, \quad \varepsilon\varphi\omega = \frac{y}{x} \ (\text{με } x \neq 0), \ \sigma\varphi\omega = \frac{x}{y} \ (\text{με } y \neq 0)$$



όπου (x, y) οι συντεταγμένες οποιουδήποτε σημείου M (διαφορετικού του O) της τελικής πλευράς της γωνίας ω με $0^o \leq \omega \leq 360^o$ και $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, η απόσταση του M από το O.

Σχόλιο

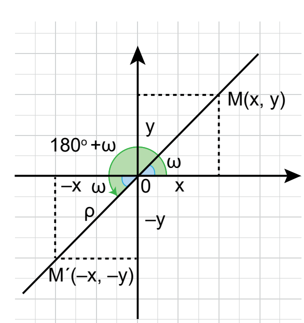
Για τον προσδιορισμό των τριγωνομετρικών αριθμών μιας οξείας γωνίας ω ενός ορθογωνίου τριγώνου, όπως μάθαμε στο Γυμνάσιο, χρησιμοποιούμε λόγους πλευρών.

Για τον προσδιορισμό των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας ω, με $0^o \leq \omega \leq 360^o$ χρησιμοποιούμε τους λόγους των συντεταγμένων ενός τυχαίου σημείου M(x, y) της τελικής πλευράς της γωνίας και της απόστασης ρ της αρχής των αξόνων από το σημείο M.

6.3 • Γωνίες που διαφέρουν κατά 90°, 180° και 270°

Γωνίες με διαφορά 180°

Θεωρούμε οξεία γωνία ω και τη γωνία 180 + ω, όπως στο σχήμα.
Αν M(x, y) σημείο πάνω στην τελική πλευρά της γωνίας ω, τότε το συμμετρικό του σημείο M΄ ως προς την αρχή των αξόνων, θα βρίσκεται πάνω στην τελική πλευρά της γωνίας $180^o + \omega$ και θα έχει συντεταγμένες M΄(– x, – y). Έτσι λοιπόν έχουμε:



$$\eta\mu(180^o + \omega) = \frac{y_{OM'}}{\rho} = \frac{-y}{\rho} = -\eta\mu\omega \qquad \sigma\upsilon\nu(180^o + \omega) = \frac{x_{OM'}}{\rho} = \frac{-x}{\rho} = -\sigma\upsilon\nu\omega$$

$$\varepsilon\varphi(180^o + \omega) = \frac{y_{OM'}}{x_{OM'}} = \frac{-y}{-x} = \frac{y}{x} = \varepsilon\varphi\omega \qquad \sigma\varphi(180^o + \omega) = \frac{x_{OM'}}{y_{OM'}} = \frac{-x}{-y} = \frac{x}{y} = \sigma\varphi\omega$$

Άρα οι γωνίες ω και $180^\circ + ω$, με διαφορά 180°, έχουν την ίδια εφαπτομένη, την ίδια συνεφαπτομένη και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

$$\mathbf{ημ(180^\circ + ω) = -ημω,\ συν(180^\circ + ω) = -συνω,\ εφ(180^\circ + ω) = εφω,\ σφ(180^\circ + ω) = σφω}$$

Ανάλογα αποδεικνύεται, όπως θα δούμε σε επόμενη τάξη, ότι ισχύουν και οι ακόλουθοι τύποι:

	Γωνίες με διαφορά 90°
Τύποι	$ημ(90^\circ + ω) = συνω$, $συν(90^\circ + ω) = -ημω$, $εφ(90^\circ + ω) = -σφω$, $σφ(90^\circ + ω) = -εφω$

	Γωνίες με διαφορά 270°
Τύποι	$ημ(270^\circ + ω) = -συνω$, $συν(270^\circ + ω) = ημω$, $εφ(270^\circ + ω) = -σφω$, $σφ(270^\circ + ω) = -εφω$

Τα πρόσημα των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας ω εξαρτώνται από το τεταρτημόριο στο οποίο ανήκει η τελική της πλευρά.

Διερεύνηση: Να ανοίξετε το ψηφιακό αρχείο **«Γωνίες με άθροισμα 90° και 180°»** και να μελετήσετε το κείμενο.

Διερεύνηση: Να ανοίξετε το ψηφιακό αρχείο **«Αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο»** και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

Εφαρμογή 1

α. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $Π = ημ120^\circ \cdot συν210^\circ - \sqrt{3} \cdot εφ135^\circ \cdot σφ240^\circ$

β. Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy παίρνουμε το σημείο $Α\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$.
Αν η τελική πλευρά της γωνίας ω είναι η ΟΑ, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

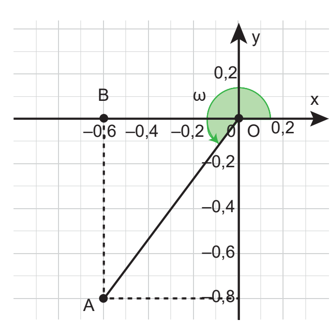
Απάντηση

α. Είναι:

- $ημ120^\circ = ημ(90^\circ + 30^\circ) = συν30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $συν210^\circ = συν(180^\circ + 30^\circ) = -συν30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $εφ\,135^\circ = εφ(90^\circ + 45^\circ) = -σφ45^\circ = -1$
- $σφ240^\circ = σφ(180^\circ + 60^\circ) = σφ60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Επομένως: $Π = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \sqrt{3} \cdot (-1) \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{3}{4} + 1 = \frac{1}{4}$

β. Είναι $ρ = (ΟΑ) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = 1$, οπότε:



$ημω = \frac{y_A}{ρ} = \frac{-\frac{4}{5}}{1} = -\frac{4}{5}$, $συνω = \frac{x_A}{ρ} = \frac{-\frac{3}{5}}{1} = -\frac{3}{5}$

$εφω = \frac{y_A}{x_A} = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$ και $σφω = \frac{x_A}{y_A} = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$

Να ανοίξετε το ψηφιακό αρχείο **«Εκτίμηση των τριγωνομετρικών αριθμών»** και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

Αυτοαξιολόγηση

α. Θεωρούμε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy και μια γωνία ω. Αν M(x, y) το σημείο της τελικής πλευράς, να ορίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

β. Αν $ημθ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $συνθ = -\frac{1}{2}$ με $0^o \le θ \le 360^o$, να βρείτε τη γωνία θ εξηγώντας την απάντησή σας με κατάλληλο διάγραμμα.

γ. Να βρείτε το πρόσημο των παραστάσεων:

i. $\frac{ημ42^o}{εφ130^o}$ **ii.** $\frac{ημ180^o + συν180^o}{σφ243^o}$ **iii.** $\frac{ημ270^o \cdot συν37^o}{-σφ287^o + εφ198^o}$

δ. Θεωρούμε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy και μια γωνία ω. Αν $A\left(\frac{6}{11}, -\frac{8}{11}\right)$ σημείο της τελικής πλευράς, τότε:

i. να βρείτε το τεταρτημόριο στο οποίο ανήκει η τελική πλευρά,
ii. να βρείτε τα πρόσημα των τριγωνομετρικών αριθμών της γωνίας ω,
iii. να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

Ιστορικό Σημείωμα

Οι απαρχές της Τριγωνομετρίας εντοπίζονται στην αρχαιότητα. Στη διπλανή εικόνα φαίνεται μια βαβυλωνιακή πινακίδα (Plimpton 322), η οποία παρέχει έναν πίνακα τιμών των τεμνουσών. Οι Έλληνες μαθηματικοί Ίππαρχος και Κλαύδιος Πτολεμαίος ανέπτυξαν έναν πίνακα με χορδές, ο οποίος δίνει τιμές των ημιτόνων γωνιών μεταξύ 0ᵒ και 90ᵒ με προσαυξήσεις 15 λεπτών. Μέχρι την εμφάνιση των επιστημονικών αριθμομηχανών στα τέλη του 20ου αιώνα, οι πίνακες αυτοί χρησιμοποιούνταν για την εύρεση τιμών συναρτήσεων.

Η μελέτη της αστρονομίας γι' αυτούς τους αρχαίους πολιτισμούς στηρίχτηκε σε εφαρμογές της Σφαιρικής Τριγωνομετρίας, η οποία μέχρι τα μέσα του 20ού αιώνα διδασκόταν σε σχολικά μαθηματικά.

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ή λανθασμένες δικαιολογώντας την απάντησή σας.

α. Αν δύο γωνίες ω και φ έχουν τελικές πλευρές που διέρχονται από τα σημεία A(α, β) και B(−α, −β), αντίστοιχα, τότε εφω = εφφ και σφω = σφφ.

β. Η τελική πλευρά της γωνίας $ω = 130^o$ ανήκει στο 3ο τεταρτημόριο.

γ. $εφ\,230^o < 0$

δ. $\frac{ημ\,120^o}{συν\,240^o} > 0$

ε. Αν η τελική πλευρά μιας γωνίας ω διέρχεται από το σημείο A(2, 0) και η τελική πλευρά μιας γωνίας φ διέρχεται από το σημείο B(4, 0), τότε ω = φ.

2. Υπάρχουν δύο γωνίες μεταξύ 0ᵒ και 360ᵒ που έχουν το ίδιο ημίτονο και αντίθετο συνημίτονο;

3. Να αντιστοιχίσετε τους παρακάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς με τα τεταρτημόρια στα οποία μπορεί να ανήκει η τελική πλευρά κάθε γωνίας.

Τριγωνομετρικός αριθμός	Τεταρτημόριο
1. ημω = 0,2	
2. εφω = −2	**Α.** 1ο
3. συνω = −0,4	**Β.** 2ο
4. ημω = −0,7	**Γ.** 3ο
5. σφω = 1,8	**Δ.** 4ο
6. συνω = 0,9	

Ασκήσεις

1. Να βρείτε το πρόσημο των παρακάτω τριγωνομετρικών αριθμών:

   α. ημ110° **β.** σφ192° **γ.** συν234°

   δ. ημ312° **ε.** εφ94° **στ.** συν280°

   ζ. εφ12° **η.** σφ162°

2. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς που ορίζονται για τις γωνίες $ω = 0°$, $ω = 90°$, $ω = 360°$

3. Ομοίως για τις γωνίες $ω = 180°$, $ω = 270°$

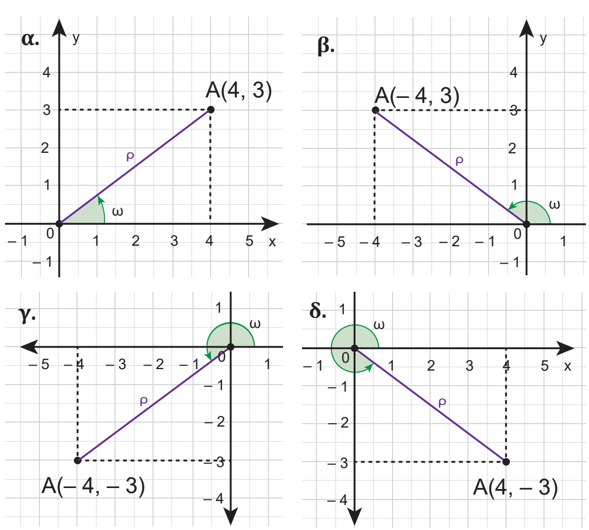
4. Θεωρούμε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy και μια γωνία ω. Αν η τελική πλευρά της γωνίας είναι η ΟΑ, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω, όταν:

   α. $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **β.** $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

   γ. $A\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ **δ.** $A\left(\frac{2}{3}, -\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$

   Σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας ω σε καθεμία από τις παραπάνω περιπτώσεις;

5. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω που ορίζονται σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις.

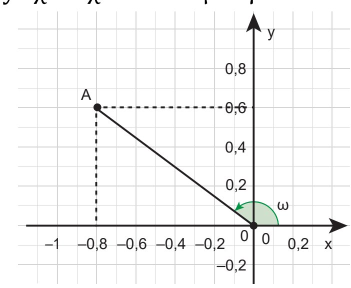


6. Να βρείτε σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας ω σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις.

   α. $ημω < 0$, $εφω > 0$ **β.** $συνω > 0$, $σφω < 0$

   γ. $ημω > 0$, $εφω < 0$

7. Στο παρακάτω ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy έχει σχεδιαστεί μια γωνία ω.

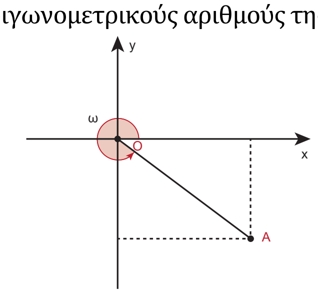


   α. Να εξηγήσετε με βάση το σχήμα γιατί

   $συνω = -\frac{4}{5}$

   β. Να βρείτε το ημω.

8. Για το παρακάτω σχήμα $εφω = -\frac{2}{3}$ και η τετμημένη του σημείου Α είναι 3.
   Να βρείτε:
   α. την τεταγμένη του σημείου Α,
   β. τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.



9. Δίνεται η ημιευθεία με εξίσωση (ε): $y = 2x$, $x \geq 0$.
   α. Αν το σημείο Μ με τετμημένη $x = 1$ ανήκει στην ημιευθεία (ε), να βρείτε την τεταγμένη του σημείου.
   β. Να σχεδιάσετε την ημιευθεία (ε) σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy.
   γ. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $x\hat{O}M$.

10. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:
    α. $A = ημ210° \cdot συν135° - \sqrt{3} \cdot εφ225° \cdot σφ300°$
    β. $\dfrac{\sqrt{2} \cdot ημ225° \cdot συν150° - συν315° \cdot εφ225°}{εφ135° - σφ240°}$

11. Για την άσκηση αυτή θα χρειαστείτε ένα μοιρογνωμόνιο, έναν χάρακα, ένα μολύβι και μια υπολογιστική μηχανή. Ας υποθέσουμε ότι ο σχεδιασμός θα γίνει σε ένα πλέγμα όπου το τετραγωνάκι του έχει μήκος 0,1.

α. Να σχεδιάσετε σε πλέγμα ένα σύστημα συντεταγμένων και έναν κύκλο με κέντρο Ο(0, 0) και ακτίνα 1.

β. **i.** Να σχεδιάσετε την τελική πλευρά μιας γωνίας $\omega = 140^o$ η οποία τέμνει τον κύκλο σε ένα σημείο Κ και να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες του σημείου Κ.

ii. Ποιες είναι οι τιμές του ημ140^o και του συν140^o;

γ. **i.** Να σχεδιάσετε την τελική πλευρά μιας γωνίας $\omega = 210^o$ η οποία τέμνει τον κύκλο σε ένα σημείο Λ και να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες του σημείου Λ.

ii. Ποιες είναι οι τιμές της εφ210^o και της σφ210^o;

iii. Να χρησιμοποιήσετε μια υπολογιστική μηχανή για να βρείτε την εφ210^o και την σφ210^o.

iv. Ποιο είναι το σφάλμα εκτίμησης;

12. Να ανοίξετε το ψηφιακό αρχείο **«Ο τροχός του Λούνα Παρκ»** και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

13. Να ανοίξετε το ψηφιακό αρχείο **«Σύγκριση και μεταβολή»** και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

6.4 • Βασικές Τριγωνομετρικές Ταυτότητες

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/ήτριες να μπορούν:

- Να αποδεικνύουν τις βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες.
- Να υπολογίζουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας γωνίας μεταξύ 0^o και 360^o όταν ένας από αυτούς είναι γνωστός.

Διερεύνηση

Να εργαστείτε σε ομάδες.

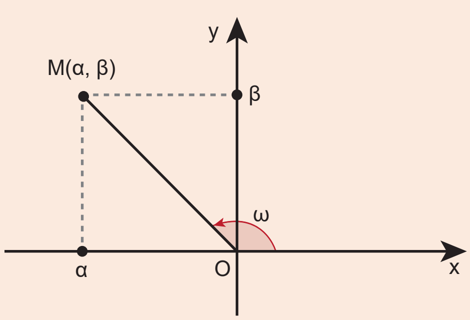
Στο διπλανό σχήμα δίνεται ένα σημείο Μ(α, β) και μια γωνία ω.

α. • Να εκφράσετε το ημω και το συνω συναρτήσει των συντεταγμένων του σημείου Μ.

• Να υπολογίσετε την παράσταση $(\text{ημ}\omega)^2 + (\text{συν}\omega)^2$.

β. • Να εκφράσετε την εφω και τη σφω συναρτήσει των συντεταγμένων του σημείου Μ.

• Να υπολογίσετε τους λόγους $\dfrac{\text{ημ}\omega}{\text{συν}\omega}$, $\dfrac{\text{συν}\omega}{\text{ημ}\omega}$ και να ελέγξετε αν συνδέονται με την εφω και τη σφω αντίστοιχα.



Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας γωνίας ω συνδέονται μεταξύ τους με σχέσεις οι οποίες είναι γνωστές ως τριγωνομετρικές ταυτότητες. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε τρεις βασικές από αυτές με τη βοήθεια των οποίων αποδεικνύονται και άλλες τριγωνομετρικές ταυτότητες.

Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες

1. $\text{ημ}^2\omega + \text{συν}^2\omega = 1$

2. $\text{εφ}\omega = \dfrac{\text{ημ}\omega}{\text{συν}\omega}, \ \text{συν}\omega \neq 0$

3. $\text{σφ}\omega = \dfrac{\text{συν}\omega}{\text{ημ}\omega}, \ \text{ημ}\omega \neq 0$

Απόδειξη

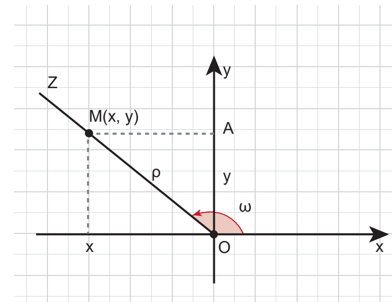
1. Θεωρούμε σημείο $M(x, y)$ διαφορετικό από το O και τη γωνία $\omega = x\hat{O}M$ όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Είναι: $(OM) = \rho$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho}$ και $\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho}$

οπότε:

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \Rightarrow \frac{y^2}{\rho^2} + \frac{x^2}{\rho^2} = \frac{\rho^2}{\rho^2} \Rightarrow \left(\frac{y}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{x}{\rho}\right)^2 = 1 \Rightarrow (\eta\mu\omega)^2 + (\sigma\upsilon\nu\omega)^2 = 1$$

Άρα: $\boldsymbol{\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1}$



2. Με $\sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$ έχουμε: $\varepsilon\varphi\omega = \frac{y}{x} = \frac{\frac{y}{\rho}}{\frac{x}{\rho}} = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$. Επομένως $\boldsymbol{\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}}$

3. Με $\eta\mu\omega \neq 0$ έχουμε: $\sigma\varphi\omega = \frac{x}{y} = \frac{\frac{x}{\rho}}{\frac{y}{\rho}} = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$. Επομένως $\boldsymbol{\sigma\varphi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}}$

$(\eta\mu\omega)^2 = \eta\mu^2\omega$

$(\eta\mu\omega)^2 \neq \eta\mu\omega^2$

Να ανοίξετε το ψηφιακό αρχείο **«Τριγωνομετρικοί αριθμοί και Πυθαγόρειο θεώρημα»** και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

Εφαρμογή 1

Να αποδείξετε ότι:

α. $\boldsymbol{\varepsilon\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\omega = 1}$, $\eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$

β. $\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1 + \varepsilon\varphi^2\omega}}$, $\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\omega} \neq 0$

Απάντηση

α. Με $\eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$, έχουμε: $\varepsilon\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} = 1$

β. Ξέρουμε ότι $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ και διαιρώντας και τα δύο μέλη της ισότητας με $\sigma\upsilon\nu^2\omega \neq 0$ παίρνουμε:

$$\frac{\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} + \frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} \Rightarrow \varepsilon\varphi^2\omega + 1 = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1 + \varepsilon\varphi^2\omega}$$

Να ανοίξετε το ψηφιακό αρχείο **«Τριγωνομετρικές σχέσεις με CAS»** και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

Εφαρμογή 2

Αν $\eta\mu\omega = \frac{3}{4}$ και $90° < \omega < 180°$, να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

Απάντηση

- $ημ^2ω + συν^2ω = 1 \Rightarrow συν^2ω = 1 - ημ^2ω \Rightarrow συν^2ω = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 \Rightarrow$

  $\Rightarrow συν^2ω = 1 - \frac{9}{16} \Rightarrow συν^2ω = \frac{7}{16} \Rightarrow συνω = -\frac{\sqrt{7}}{4}$ ή $συνω = \frac{\sqrt{7}}{4}$

  Εξάλλου $90^ο < ω < 180^ο$, οπότε $συνω < 0$ και επομένως $συνω = -\frac{\sqrt{7}}{4}$.

- $εφω = \frac{ημω}{συνω} = \frac{\frac{3}{4}}{-\frac{\sqrt{7}}{4}} = -\frac{3}{\sqrt{7}} = -\frac{3\sqrt{7}}{7}$

- $σφω = \frac{συνω}{ημω} = -\frac{\sqrt{7}}{3}$

Εφαρμογή 3

Αν $εφω = \frac{3}{5}$ και $180^ο < ω < 270^ο$, να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

Απάντηση

- $εφω = \frac{3}{5}$ και $εφω \cdot σφω = 1$ (Εφαρμογή 1) οπότε: $σφω = \frac{1}{εφω} = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}$.

- $εφω = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{ημω}{συνω} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow ημω = \frac{3}{5}συνω$ (1), οπότε

  $ημ^2ω + συν^2ω = 1 \xRightarrow{(1)} \left(\frac{3}{5}συνω\right)^2 + συν^2ω = 1 \Rightarrow \frac{9}{25}συν^2ω + συν^2ω = 1 \Rightarrow \frac{34}{25}συν^2ω = 1 \Rightarrow$

  $\Rightarrow συν^2ω = \frac{25}{34} \Rightarrow συνω = -\frac{5\sqrt{34}}{34}$ ή $συνω = \frac{5\sqrt{34}}{34}$

  Εξάλλου $180^ο < ω < 270^ο$, οπότε $συνω < 0$ και επομένως $συνω = -\frac{5\sqrt{34}}{34}$.

- Αντικαθιστώντας στην (1) παίρνουμε: $ημω = \frac{3}{5}\left(-\frac{5\sqrt{34}}{34}\right) = -\frac{3\sqrt{34}}{34}$.

Εφαρμογή 4

Να αποδείξετε ότι:

α. $ημ^4ω - συν^4ω = 1 - 2συν^2ω$ **β.** $εφ^2θ - ημ^2θ = εφ^2θ \cdot ημ^2θ$

Απάντηση

α. Έχουμε:
$$\begin{aligned} ημ^4ω - συν^4ω &= (ημ^2ω)^2 - (συν^2ω)^2 \\ &= (ημ^2ω - συν^2ω)(ημ^2ω + συν^2ω) \\ &= (ημ^2ω - συν^2ω) \cdot 1 = ημ^2ω - συν^2ω \\ &= 1 - συν^2ω - συν^2ω \\ &= 1 - 2συν^2ω \end{aligned}$$

β. Έχουμε $εφ^2θ - ημ^2θ = \dfrac{ημ^2θ}{συν^2θ} - ημ^2θ = \dfrac{ημ^2θ - ημ^2θσυν^2θ}{συν^2θ} = \dfrac{ημ^2θ(1 - συν^2θ)}{συν^2θ}$

$$= \frac{ημ^2θ \cdot ημ^2θ}{συν^2θ} = \frac{ημ^2θ}{συν^2θ} \cdot ημ^2θ = εφ^2θ \cdot ημ^2θ$$

Δεν έχει νόημα μια τριγωνομετρική παράσταση χωρίς την αναγραφή της γωνίας. Για παράδειγμα, γράφουμε $συνω \cdot εφω + ημω$ και ποτέ $συν \cdot εφ + ημ$

Σημείωση

Η απόδειξη ταυτοτήτων ζητείται για τις περιπτώσεις στις οποίες αυτές ορίζονται.

Αυτοαξιολόγηση

α. Για κάθε γωνία ω με $0^0 \leq ω \leq 360^0$ να αποδείξετε ότι $ημ^2ω + συν^2ω = 1$.

β. Αν $ημω = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ και $90^o < ω < 180^o$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

γ. Να αποδείξετε ότι $ημ^2ω \cdot σφ^2ω + ημ^2ω = 1$.

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ή λανθασμένες δικαιολογώντας την απάντησή σας.

α. Υπάρχει γωνία ω ώστε να ισχύει $ημω = 1$ και $συνω = 1$.

β. Για κάθε γωνία ω ισχύει $συνω = \sqrt{1 - ημ^2ω}$.

γ. Αν $συνω = 0$, τότε $ημω = -1$ ή $ημω = 1$.

δ. Αν $ημω = 0$, τότε $συνω = 1$.

ε. Για κάθε γωνία ω ισχύει ότι $ημω^2 + συνω^2 = 1$.

στ. Αν ΑΒΓ ορθογώνιο τρίγωνο με $\hat{Α} = 90^o$, τότε $συν(Β + Γ) = 0$.

ζ. $(ημφ + συνφ)^2 + (ημφ - συνφ)^2 - 1 = 1$

2. Μια άσκηση βαθμολογείται με 10 βαθμούς και ζητείται από τους μαθητές να αποδείξουν ότι

$$\frac{ημ^2x - συν^2x}{ημx + συνx} = ημx - συνx$$

Μια μαθήτρια γράφει:

$$\frac{ημ^2x - συν^2x}{ημx + συνx} = \frac{ημ^2x}{ημx} - \frac{συν^2x}{συνx} = ημx - συνx$$

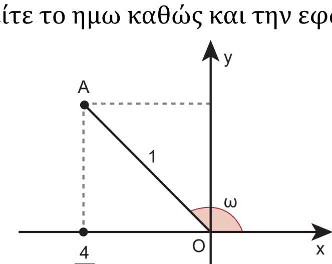
Με πόσους βαθμούς θα αξιολογούσατε την απόδειξή της; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

3. Η ισότητα $2ημω + 4συνω = 6 \cdot ημω \cdot συνω$ είναι τριγωνομετρική ταυτότητα;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Ασκήσεις

1. Αν $συνω = \dfrac{3}{5}$ και $270^o < ω < 360^o$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

2. **α.** Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας ω του παρακάτω σχήματος αιτιολογώντας την απάντησή σας.
β. Να βρείτε το ημω καθώς και την εφω.



3. Αν $ημω = -\dfrac{2}{3}$ και $εφω > 0$,
α. να βρείτε σε ποιο τεταρτημόριο ανήκει η τελική πλευρά της γωνίας ω,
β. να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

4. Αν $εφω = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ και $90^o < ω < 180^o$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

5. Αν $ημ^2ω = \dfrac{1}{4}$ και $σφω > 0$, να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

6. Αν $x = 2ημω$ και $y = 2συνω$, να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:
α. $x \cdot ημω + y \cdot συνω$ **β.** $x^2 + y^2$
γ. $(x+y)^2 + (x-y)^2$

7. Να αποδείξετε ότι:
α. $(1 - ημθ)(1 + ημθ) = συν^2θ$
β. $συνx - συνx \cdot ημ^2x = συν^2x$
γ. $συν^3ω + συνω \cdot ημ^2ω = συνω$
δ. $συν^4ω + ημ^4ω = 1 - 2(ημω \cdot συνω)^2$

8. Να αποδείξετε ότι:
α. $\dfrac{ημθ}{συνθ} + \dfrac{συνθ}{ημθ} = \dfrac{1}{ημθ \cdot συνθ}$
β. $\dfrac{ημx}{1 + συνx} = \dfrac{1 - συνx}{ημx}$

9. Αν $ημω = x$ και $συνω = x - 1$ με $0^o \le ω \le 360^o$ και $x \in \mathbb{R}$, τότε:
α. Να βρείτε το x.
β. Να βρείτε τη γωνία ω.

10. Να αποδείξετε ότι:
α. $σφx \cdot συνx + ημx = \dfrac{1}{ημx}$
β. $\dfrac{ημ^2x + 2ημx + 1}{συν^2x} = \dfrac{1 + ημx}{1 - ημx}$
γ. $\dfrac{εφx - σφx}{εφx + σφx} = 1 - 2συν^2x$
δ. $\dfrac{1 - 2ημ^2x}{ημx \cdot συνx} = σφx - εφx$

11. Να αποδείξετε ότι η παράσταση $A = ημ^2x + \dfrac{1}{εφ^2x + 1}$ είναι ανεξάρτητη του x.

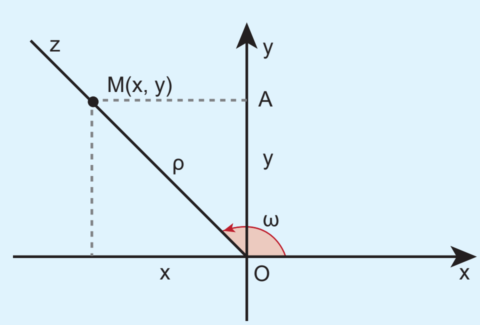
12. Αν ξεκινήσετε με μια τριγωνομετρική έκφραση και τη μετασχηματίσετε αξιοποιώντας κάποιους τύπους ή την απλοποιήσετε και ακολούθως εξισώσετε την αρχική έκφραση με αυτή που προέκυψε, τότε θα έχετε δημιουργήσει μια τριγωνομετρική ταυτότητα. Για παράδειγμα, αν ξεκινήσετε από την έκφραση: $συνω + εφω \cdot ημω$ και αντικαταστήσετε την εφω με $\dfrac{ημω}{συνω}$ τότε, μετά από πράξεις θα προκύψει μια νέα μορφή.
Χρησιμοποιήστε αυτή την τεχνική για να δημιουργήσετε μια δική σας ταυτότητα και μετά δώστε τη σε έναν συμμαθητή ή συμμαθήτριά σας για επαλήθευση.

6.5 • Ανακεφαλαίωση 6ου Κεφαλαίου

Θεωρία

α. Αν ω γωνία από 0ᵒ έως 360ᵒ τότε:

- $ημω = \dfrac{\text{τεταγμένη του M}}{\text{απόσταση του M από το O}} = \dfrac{y}{ρ}$
- $συνω = \dfrac{\text{τετμημένη του M}}{\text{απόσταση του M από το O}} = \dfrac{x}{ρ}$
- $εφω = \dfrac{\text{τεταγμένη του M}}{\text{τετμημένη του M}} = \dfrac{y}{x}$, $x \neq 0$.
- $σφω = \dfrac{\text{τετμημένη του M}}{\text{τεταγμένη του M}} = \dfrac{x}{y}$, $y \neq 0$.



β. Γωνίες που διαφέρουν κατά 90ᵒ, 180ᵒ και 270ᵒ

$ημ(180^o + ω) = -ημω$ | $συν(180^o + ω) = -συνω$ | $εφ(180^o + ω) = εφω$ | $σφ(180^o + ω) = σφω$
$ημ(90^o + ω) = συνω$ | $συν(90^o + ω) = -ημω$ | $εφ(90^o + ω) = -σφω$ | $σφ(90^o + ω) = -εφω$
$ημ(270^o + ω) = -συνω$ | $συν(270^o + ω) = ημω$ | $εφ(270^0 + ω) = -σφω$ | $σφ(270^o + ω) = -εφω$

γ. Βασικές Τριγωνομετρικές Ταυτότητες

- $ημ^2ω + συν^2ω = 1$
- $εφω = \dfrac{ημω}{συνω}$, *συνω≠0*
- $σφω = \dfrac{συνω}{ημω}$, *ημω≠0*
- $εφω \cdot σφω = 1$, *ημω·συνω ≠0*

Επαναληπτικές Ασκήσεις

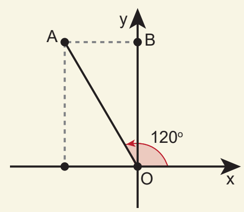
1. Στο παρακάτω σχήμα είναι ΟΑ = 2. Να βρείτε:

α. τις συντεταγμένες του σημείου Α,

β. τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 120^o,

γ. την τιμή της παράστασης:

$Α = ημ^2120^o \cdot σφ60^o - συν120^o \cdot ημ30^o$



2. Δίνεται γωνία ω με $90^o < ω < 180^o$ για την οποία ισχύει $8ημ^2ω - 2ημω - 1 = 0$

Να υπολογίσετε:

α. το ημω και το συνω,

β. την τιμή της παράστασης $Α = \dfrac{2ημω - 4συνω}{σφω}$

3. Δίνεται γωνία ω με $0^o < ω < 90^o$ για την οποία ισχύει $10εφω - 5εφ(180^o + ω) - 12 = 0$

Να υπολογίσετε:

α. την εφω,

β. την τιμή της παράστασης:

$$Α = \frac{ημ^240^o + ημ^2130^o - ημω + συνω - 1}{ημω + 3συνω}$$

4. Δίνεται γωνία ω με $90^o < ω < 180^o$ για την οποία ισχύει $20ημ^2ω - συνω - 19 = 0$

Να υπολογίσετε:

α. το ημω και το συνω,

β. την τιμή της παράστασης:

$$Α = \frac{εφω - συν210^o \cdot εφ60^o}{4συνω - συν120^o}$$

5. Αν $σφω = \dfrac{2}{3}$ και $0^o < ω < 90^o$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $Α = \dfrac{3ημω - 2συνω}{-συνω + 3ημω}$

6. Δίνεται η παράσταση $Α = \dfrac{6συν^2ω - 3}{8ημ^2ω - 4}$

α. Να αποδείξετε ότι η τιμή της παράστασης Α είναι σταθερή.

Αν $Α = -\dfrac{3}{4}$ και γωνία x με $0^o \le x \le 360^o$ τέτοια ώστε $ημx + συνx = Α$, τότε:

β. να αποδείξετε ότι $ημx \cdot συνx = -\dfrac{7}{32}$

γ. να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $Β = εφx + σφx$

7. Να αποδείξετε ότι:

α. $(ημω - συνω)^2 + (ημω + συνω)^2 = 2$

β. $ημ^2ω - ημ^4ω = συν^2ω - συν^4ω$

8. Να αποδείξετε ότι:

α. $\left(\dfrac{1}{σφθ} - ημθ\right)\left(\dfrac{1}{σφθ} + ημθ\right) = \dfrac{ημ^2θ}{σφ^2θ}$

β. $\dfrac{1 - εφ^2θ}{1 + εφ^2θ} = 2συν^2θ - 1$

Γλωσσάρι
6ου Κεφαλαίου

Ερωτήσεις
πολλαπλής επιλογής
στην Τριγωνομετρία

Ερωτήσεις
Σωστού - Λάθους
στην Τριγωνομετρία

Φύλλο
Αξιολόγησης
6ου Κεφαλαίου

Υποδείξεις – Απαντήσεις Ερωτήσεων Κατανόησης & Ασκήσεων

● ΚΕΦΑΛΑΙΟ 0 – ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1. Έστω κ και κ + 1 οι 2 διαδοχικοί ακέραιοι.
3. Υψώνουμε στο τετράγωνο.
4. $(α + β)^2 + α^2 + β^2 > 0$
5. Αντιπαράδειγμα
6. $(α - 1)^2 + (β - 1)^2 \geq 0$
7. i. $x = -1$ και $y = 3$ **ii.** $x = y = 1$
10. Αντιπαράδειγμα
13. $(α - β)^2 = 1$

● ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 – ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

1.1 Διάκριση ρητών – άρρητων και ταξινόμηση στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών

2. $α + β = 1{,}1111\cdots = \frac{10}{9}$
3. α. $\frac{5}{9}$ **β.** $\frac{979}{450}$
4. α. $α + β = 2\sqrt{3}$ άρρητος **β.** $α - β = -2$ ρητός
γ. $α \cdot β = 2$ ρητός **δ.** $α \cdot γ = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ άρρητος
5. $\frac{64}{15}$ ρητός
6. $κ + 3 + \frac{1}{κ + 1}$ ρητός
7. Εις άτοπο απαγωγή
9. $(\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 = 8 + 2\sqrt{15}$

1.2 Πυκνότητα και Διαδοχικότητα στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών

1. α. i. $\frac{5}{2}$, **ii.** $\frac{7}{24}$ **β.** δεν έχει επόμενο
γ. το σύνολο των ρητών είναι πυκνό
2. α. $\frac{α + β}{2} = \frac{1}{3}$ ρητός **β.** είναι ανάμεσα **γ.** όχι **δ.** όχι
3. Το αντίστροφο όχι. Π.χ $\sqrt{3} < 1{,}8 < \sqrt{3} + 0{,}2$
4. α. ρητός και ανάμεσά τους **β.** $\frac{7}{12}$ **γ.** $\dfrac{\frac{α}{β} + \frac{γ}{δ}}{2}$
δ. άπειρους **ε.** ημιάθροισμα

1.3 Διάταξη και διαστήματα πραγματικών αριθμών

2. β. $(α - 1)^2 \geq 0$ **γ.** $(α + 1)^2 \geq 0$
3. α. $(α - 1)^2 + 3 > 0$ **β.** $(α - 3)^2 + 1 > 0$
4. α. $(α - 1)^2 \geq 0$ **β.** $(α^2 - 1)^2 \geq 0$
5. α. $x = 4, y = 0$ **β.** $x = 1, y = -2$
7. α. $[-6, +\infty)$ **β.** $(0, +\infty)$
8. α. $[0, +\infty)$ **β.** $\left(-\infty, \frac{4}{9}\right)$
9. α. $x < 7$ και $x \geq 1$ **β.** $1 \leq x < 7$
10. $-\frac{3}{2} \leq x \leq -\frac{1}{2}$
11. $x = 0, -1, -2, -3, -4, -5$
12. α. $x = 2$ **β.** $x = -3, -2, -1$ και 0
13. τουλάχιστον 198 χιλιόμετρα την ημέρα

1.4 Ταυτότητες

Ερωτήσεις κατανόησης

1. α. i. και iii. **β.** iii. **γ.** iv. **δ.** ii.
2. α. $(α + 2)^3 = α^3 + 6α^2 + 12α + 8$
β. $(2x - 1)^3 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$
γ. $8α^3 + 64 = (8α + 4)(64α^2 - 32α + 16)$
δ. $27x^3 - 8 = (3x - 2)(9x^2 + 6x + 4)$
3. 1) → δ), 2) → ε), 3) → α), 4) → γ)

Ασκήσεις

1. α. $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$ **β.** $8α^3 + 12α^2 + 6α + 1$
γ. $27β^6 + 54β^5 + 36β^4 + 8β^3$ **δ.** $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
ε. $x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 8$ **στ.** $-27β^6 - 54β^5 - 36β^4 - 8β^3$
2. α. $(α + 1)(α^2 - α + 1)$ **β.** $(2x + 3)(4x^2 - 6x + 9)$
γ. $(3α + 4β)(9α^2 - 12αβ + 16β^2)$ **δ.** $(2 - y)(4 + 2y + y^2)$
ε. $(3α - 1)(9α^2 + 3α + 1)$ **στ.** $8(α - 2β^2)(α^2 + 2αβ^2 + 4β^2)$
3. α. $x^2 + 8$ **β.** $27x^3 + 1$ **γ.** $8α^6 + 27β^9$
δ. $x^3 - 1$ **ε.** $8x^3 - 27$ **στ.** $8α^3 - β^3$
4. α. $α^4 + 4α^3β + 6α^2β^2 + 4αβ^3 + β^4$
7. β. i. 12 **ii.** 40
8. α. 21 **β.** 95
9. β. –2402
10. β. 2026
11. α. $α + 1$ **β.** $\frac{α + 2}{α^2 + α + 1}$ **γ.** $\frac{α^2 + αβ + β^2}{β^3}$ **δ.** $α + β$

1.5 Απόλυτη τιμή

Ερωτήσεις κατανόησης

1. α. $x = d + α$ ή $x = α - d$
2. α. → Β **β.** → Δ **γ.** → Γ **δ.** → Α
3. α. Λ **β.** Σ **γ.** Σ **δ.** Λ **ε.** Λ **στ.** Σ

Απόλυτη τιμή	Απόσταση	Διάστημα ή ένωση διαστημάτων
$\|x - 1\| < 2$	$d(x, 1) < 2$	$(-1, 3)$
$\|x + 2\| > 1$	$d(x, -2) > 1$	$(-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$
$\|3 - x\| \geq 3$	$d(x, 3) \geq 3$	$(-\infty, 0] \cup [6, +\infty)$
$\|x - 5\| \leq 4$	$d(x, 5) \leq 4$	$[1, 9]$
$\|-1 - x\| \geq 2$	$d(x, -1) \geq 2$	$(-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$

Ασκήσεις

1. $-3{,}4 < -0{,}01 < |-0{,}1| < \left|-2 + \frac{1}{2}\right| < \left|-\frac{12}{5}\right| < |4{,}75| < 5 < |-6{,}5|$
2. α. $Α = 0$ **β.** $Β = 18$ **γ.** $Γ = 3$
3. α. $(ΑΓ) = 9$ **β.** $(ΒΔ) = 9{,}1$ **γ.** $(ΒΓ) = 6{,}5$ **δ.** $(ΔΑ) = 11{,}6$
5. α. $Α = 6 - 2α$ **β.** $Α = 2α - 6$ **γ.** $Α = 2$
6. α. $Α = \begin{cases} 4 - x, & x \geq 3 \\ x - 2, & x < 3 \end{cases}$ **β.** $Β = \begin{cases} 2x - 1, & x \geq 2 \\ -2x + 7, & x < 2 \end{cases}$
7. • $Α = -2$, $α < 2$ και $β > -1$ • $Α = 0$, $α < 2$ και $β < -1$
• $Α = 0$, $α > 2$ και $β > -1$ • $Α = 2$, $α > 2$ και $β < -1$
10. α. $α = β = 0$ **β.** Ένας από τους α, β διάφορος του μηδενός.
12. α. $x = -2$ ή $x = 6$ **β.** αδύνατη **γ.** $x = -4$ ή $x = \frac{2}{5}$
13. α. $x = 2$ **β.** $x = 4$ **γ.** $x = -1$ ή $x = 0$
14. α. $-2 < x < 2$ **β.** $-1 \leq x \leq 2$ **γ.** $0 < x < \frac{2}{3}$
15. α. $x < -4$ ή $x > 4$ **β.** $x \geq 3$ ή $x \leq 2$ **γ.** $x < -\frac{8}{3}$ ή $x > 0$
16. α. $6 < Π < 18$ **β.** $12 < Π < 36$
17. α. $410 \leq x \leq 450$ **β.** δεν είναι αποδεκτό
18. α. Μυωπία: Ήπιος $-3 < x < 0$, Μέτριος $-6 < x < -3$, Υψηλός $-9 < x < -6$.
Πρεσβυωπία: Ήπιος $0 < x < 2$, Μέτριος $2 < x < 4$, Υψηλός $4 < x < 6$.
19. $x \geq 37{,}4$ ή $x \leq 36$
20. Θεωρείται ασυνήθιστη.

1.6 Ρίζες – Δυνάμεις με ρητό εκθέτη (Η έννοια της Νιοστής ρίζας)

Ερωτήσεις κατανόησης

1. α. Λ **β.** Λ **γ.** Λ **δ.** Σ

2. α. μη αρνητικού αριθμού, μη αρνητικός αριθμός, α.
β. $α = β^ν$, $α \geq 0$ **γ.** $|α| = -α$

Ασκήσεις

1. α. 5, 5, 60, 4,2 **β.** 3, 2, 1, $\frac{1}{50}$ **γ.** 0,1 0,2 0,2

2. α. $\sqrt{6} - 2$, $2π - 6$, $2 - \sqrt{3}$ **β.** $|3 - x|$, $x^2 + |x|$, $\left|\frac{3}{2x}\right|$

3. α. $Α = 2\sqrt{2}$ **β.** $Β = -\sqrt{5}$ **γ.** $Γ = -8 + 9\sqrt{2}$ **δ.** $Δ = -\sqrt[3]{4}$

6. α. Α = 5 **β.** Β = 4 **γ.** Γ = 2

7. α. Α = –2α **β.** Β = 2β + 2 **γ.** Γ = 0

8. β. Α = 4

9. α. $2\sqrt{5}$ **β.** $2\sqrt{7}$ **γ.** $\frac{3}{2}$ **δ.** $\frac{\sqrt[5]{16}}{2}$ **ε.** $\frac{2\sqrt[4]{27}}{9}$

10. α. $3(\sqrt{5} + \sqrt{2})$ **β.** $\frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{2}$ **γ.** $\frac{2(4\sqrt{3} + 3\sqrt{2})}{15}$

11. β. 2

12. α. $\frac{α}{β} - 2 + \frac{β}{α}$ **β.** –4

(Δυνάμεις με ρητό εκθέτη)

Ερωτήσεις κατανόησης

1. α. Λ **β.** Λ **γ.** Σ **δ.** Λ

2. η $α^{\frac{μ}{ν}}$ ισχύει αν α > 0

3. α. α ≥ 0 **β.** $\sqrt[3]{α^2} \cdot \sqrt[12]{(-α)^4}$

4. α. Σωστή αν α ≥ 0 και λάθος αν α < 0 **β.** $|α|^{\frac{2}{3}}$

Ασκήσεις

1. α. $\sqrt[4]{3}$ **β.** $5\sqrt[6]{5}$ **γ.** $\sqrt[5]{16}$ **δ.** $\frac{1}{\sqrt[11]{4^6}}$

2. α. $2^{\frac{1}{5}}$ **β.** $2^{\frac{3}{4}}$ **γ.** $2^{\frac{2}{3}}$ **δ.** $3^{\frac{5}{4}}$ **ε.** 2 **στ.** $2^{\frac{1}{3}}$

6. 6,33 sec.

1.7 Ανακεφαλαίωση 1ου Κεφαλαίου

Επαναληπτικές Ασκήσεις

1. α + β = 2, ρητός

2. Απαγωγή σε άτοπο

3. β. $\frac{\frac{α}{β} + \frac{να + γ}{νβ + δ}}{2}$ **γ.** άπειροι

4. α. Λ **β.** Λ **γ.** Λ **δ.** Λ **ε.** Σ

5. α. Σ **β.** Σ **γ.** Λ **δ.** Σ **ε.** Σ **στ.** Λ **ζ.** Λ **η.** Σ **θ.** Λ

6. α. i. **β.** i. και iii. **γ.** iv. **δ.** iii. **ε.** i.

7. α. i. Β = 1, α > β και Β = –1, α < β

8. α. α + β

9. α. x = 3 ή x = –3 **β.** $-\frac{7}{2} < x < \frac{9}{2}$ **γ.** x = 3 ή x = –3

10. α. $|x + 3| = (ΑΜ)$, $|x - 8| = (ΒΜ)$
β. $|x + 3| + |x - 8| = (ΑΜ) + (ΒΜ)$ **γ.** $(ΑΜ) + (ΒΜ) = 11$

11. $2π < Π_1 < 10π$, $π < Ε_1 < 25π$, $\frac{1}{2} < Ε_2 < \frac{35}{2}$, $4 < Π_2 < 14$

12. α. Α = 2x – 3 **β.** –1 < Α < 1 **γ.** |Α – 1| + |Α + 1| = 2

13. α. x ≠ 1 και x ≠ 3 **γ.** • Α = 0, x < 1 • Α = –2, 1 < x < 3
• Α = 0, x > 3 **δ.** Α < 0 αν 1 < x < 3

14. β. $Β = \sqrt{7} + \sqrt{6}$, $Γ = \sqrt{7} - \sqrt{6}$

15. β. 4

16. Με εις άτοπον απαγωγή

● ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 – ΣΥΝΟΛΑ

2.1 Σύνολα

1. Σύνολα είναι τα: β. γ.

2. α. 7 ∈ Α **β.** 8 ∉ Β **δ.** {3, 5, 7} ⊂ {2, 3, 4, 5, 6, 7}

3. α. Ν(Α) = 5 **β.** Ν(Α) = 7 **γ.** Ν(Α) = 60 **δ.** Ν(Α) = 6 **ε.** Ν(Α) = 6

4. α. Ν(Α) = 7 και Ν(Β) = 3 **β. i.** Σ **ii.** Σ **iii.** Λ **iv.** Σ

5. α. i. Α = {β, α, ρ, ι, δ} **ii.** Β = {β, α, ρ, ι, δ} **β.** τα σύνολα είναι ίσα

6. α. Α= {31, 37}, Β = {32, 34, 36, 38}, Γ = {32, 33, 34, 35, 36, 38, 39,}
Δ = ∅ **β.** Ν(Α) = 2, Ν(Δ) = 0 **γ. i.** Δ ⊆ Α, **ii.** Β ⊂ Γ

2.2 Διαγράμματα Venn – Η Άλγεβρα των συνόλων

Ερωτήσεις κατανόησης

1. α. Β = {0, 1, 2} **β.** Β= {4, 6, 24} **γ.** Β = {Δευτέρα, Κυριακή}

2. α. Λ **β.** Λ **γ.** Λ **δ.** Λ

3. α. Α ∩ Β **β.** Α – Β **γ.** Α ∪ Β **δ.** (Α ∩ Β)′

Ασκήσεις

2. α. Ω = {–4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4}, Α = {–2, –1, 0, 1, 2, 3},
Β = {–1, 0, 1, 2} **γ.** Σ

3. α. Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}, Α = {1, 3, 5, 7, 9,},
Β = {1, 2, 3, 5, 7, 11}
γ. Α ∩ Β = {1, 3, 5, 7}, Α ∪ Β = {1, 2, 3, 5, 7, 9, 11},
Α′ = {2,4,6,8,10,11,12}

4. α. Α = {0, 1, 2, 3, 4, 5}, Β = {–4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4}

5. β. i. Α ∪ Γ = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10}, **ii.** Α ∩ Β = {4, 6, 8}, **iii.** Β ∩ Γ = ∅
γ. i. Α′= {2, 5, 1, 9}, **ii.** Β′= {2, 3, 5, 7, 10}, **iii.** Γ′= {1, 3, 4, 6, 8, 9}
iv. Α′∪ Β′ = {1, 2, 3, 5, 7, 9, 10}, **v.** Α′∩ Β = {1, 9}, **vi.** Α′∪ Γ′= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9}
δ. i. Α ∩ Β ∩ Γ′= {4, 6, 8}, **ii.** Α ∪ Β′ ∪ Γ′ = Ω, **iii.** (Α′ ∪ Β′) ∩ Γ′= {1, 3, 9}

6. α. Α = {6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15},
Β = {12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20},
Γ = {17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24}
β. i. Α ∩ Β = {12, 13, 14, 15}, **ii.** Α ∩ Γ = ∅ , **iii.** Β ∩ Γ = {17, 18, 19, 20}
γ. i. Α ∪ Β = {6, 7, 8, ..., 19, 20}, **ii.** Γ ∪ Β = {12, 13, ..., 21, 22, 23, 24}
iii. Α ∪ Γ = {6, 7, 8, ..., 15, 17, 18, ...24}

7. α. i. Α = {1, 2, 5, 7, 8}, **ii.** Β = {1, 4, 5, 9}, **iii.** Α′= {3, 4, 6, 9, 10},
iv. Β′= {2, 3, 6, 7, 8, 10}, **v.** Α ∩ Β = {1, 5}
vi. Α ∪ Β = {1, 2, 4, 5, 7, 8, 9}, **vii.** (Α ∪ Β)′= {3, 6, 10},
viii. Α′∪ Β′ = {2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10}, **ix.** Α′∩ Β′ = {3, 6, 10}
β. (Α ∪ Β)′ = Α′∩ Β′
γ. (Α ∩ Β)′ = Α′∪ Β′ = {2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10}

2.3 Ανακεφαλαίωση 2ου Κεφαλαίου

Επαναληπτικές Ασκήσεις

1. α. Κ = {Δ, Ι, Α, Γ, Ρ, Μ}, Λ = {Γ, Ρ, Α, Μ, Η} **β.** Ν(Κ) = 6, Ν(Λ) = 5
γ. i. Σ **ii.** Λ **iii.** Σ **iv.** Λ **v.** Λ
δ. i. Κ ∩ Λ = {Γ, Ρ, Α, Μ} **ii.** Κ ∪ Λ = {Δ, Ι, Α, Γ, Ρ, Μ, Η}

2. α. Α = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15}, Β = {0, 5, 10, 15} και
Γ = {0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14} **γ. i.** ψευδές **ii.** ψευδές **iii.** ψευδές
δ. i. Α ∩ Β = {5, 10, 15} **ii.** Β ∪ Γ = {0, 2, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 15} και
Α ∪ Γ′ = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 15}
ε. i. Α′ ∩ Β′ = {7, 8, 9, 11, 12, 13, 14}
ii. Α′∪ Β′ = {0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14}
iii. (Α ∩ Γ)′ = {0, 1, 3, 5, 7, 8, 9, 11, 13, 14, 15}
στ. ισχύουν

4. ∅, Α, {1}, {2}, {3}, {1,2}, {1,3}, {2,3}

6. β. i. $\{Α_1, Α_7\}$ **ii.** $\{Α_1, Α_2, Α_4, Α_5, Α_6, Α_7, Α_8, Α_9, Α_{10}\}$
iii. $\{Α_2, Α_8, Α_9, Α_{10}\}$ **γ.** ο μαθητής $Α_3$

7. α. iv. **β.** i. και iii.

8. α. i. ∅′ = Ω **ii.** Ω′= ∅ **iii.** (Α′)′ = Α **β. i.** Α ∪ Β = Β
ii. Α ∩ Β = Α **iii.** Α ∩ Β′ = ∅

● ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 – ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

3.1 Παραμετρικές εξισώσεις 1ου βαθμού

Ερωτήσεις κατανόησης

1. α. $\lambda \neq -3$ **β.** $\lambda = -1$ **γ.** $\alpha = \beta = 0$ **δ.** $\lambda = -4$

2. Όχι, $\lambda = 1$

3. $1 \to \beta$, $2 \to \gamma$, $3 \to \alpha$

Ασκήσεις

1. $\lambda = 5$ άπειρες, $\lambda = -5$, αδύνατη, $\lambda = 6$ μοναδική $x = -\frac{1}{11}$

2. β. i. $\lambda \neq 0,\ -3$ **ii.** $\lambda = 0$ **iii.** $\lambda = -3$

3. α. • $\lambda = 1$ άπειρες • $\lambda \neq 1$, $x = 1$ β. • $\lambda = 3$ άπειρες

• $\lambda = -3$, αδύνατη • $\lambda \neq \pm 3$, $x = \frac{1}{\lambda + 3}$

4. α. • $\lambda = 5$, άπειρες • $\lambda = -1$, αδύνατη • $\lambda \neq -1$, $\lambda \neq 5$, $x = \frac{1}{\lambda + 1}$

β. • $\lambda = 4$ άπειρες • $\lambda \neq 4$, $x = \lambda + 4$

5. Για $\alpha + \beta \neq 0$, $x = 4(\beta - \alpha)$. Για $\alpha + \beta = 0$, άπειρες.

6. α. $A_{χρέωση} = 70 + 30 \cdot \nu$, ν = μήνες

β. $B_{χρέωση} = 70 + x \cdot \nu$, ν: μήνες, x: μηνιαία συνδρομή με $x \geq 25$

γ. $\Gamma_{χρέωση} = 70 + (x - 25) \cdot \nu$, ν: μήνες, x: μηνιαία συνδρομή με $x \geq 25$ **ε.** $x = 40$ €

7. α. $A_{χρέωση} = 10 + 0{,}3 \cdot x$, x: ο αριθμός των ταινιών

β. $B_{χρέωση} = 10 + \alpha \cdot x$, x: ο αριθμός των ταινιών, α: χρέωση της ταινίας $\alpha \geq 0{,}3$

γ. $\Gamma_{χρέωση} = 10 + (\alpha - 0{,}3) \cdot x$, x: ο αριθμός των ταινιών, α: = χρέωση της ταινίας με $\geq 0{,}3$

ε. $\alpha = 0{,}4$ €

8. Αν $\lambda = 2$ αδύνατη. Για $x \geq 2$, $x = -\frac{3}{2 - \lambda}$ με $\frac{1}{2} \leq \lambda < 2$. Ανάλογα για $x < 2$.

9. Για $\lambda = 0$, $x = -\frac{1}{2}$. Για $\lambda = 2$, ή $\lambda = -2$, $x = -\frac{1}{4}$.
Για $\lambda \notin \{-2, 0, 2\}$, $x = \frac{1}{\lambda - 2}$, $x = \frac{-1}{\lambda + 2}$

10. Αν $\lambda = 2$ αδύνατη. Αν $\lambda > 2$, $x = \frac{4}{\lambda - 2}$. Ανάλογα για $x < 0$.

11. Αν $\lambda = 3$, αδύνατη. Για $\lambda > 3$, $x = \frac{3}{\lambda - 3}$, $x = \frac{3}{3 - \lambda}$

3.2 Η εξίσωση $x^\nu = \alpha$

1. α. $x = -1$ **β.** $x = -3$ **γ.** $x = -\frac{1}{2}$ **δ.** $x = -\frac{3}{2}$

2. α. $x = 1$ **β.** $x = 2$ **γ.** $x = \sqrt[5]{\frac{1}{4}}$ **δ.** $x = -\frac{4}{3}$

3. α. $x = 1$ ή $x = -1$ **β.** $x = 3$ ή $x = -3$

γ. $x = \frac{3}{2}$ ή $x = -\frac{3}{2}$ **δ.** $x = 0$ ή $x = -4$

4. α. $x = 0$ ή $x = -3$ **β.** $x = 0$ ή $x = 2$ **γ.** $x = 0$ **δ.** $x = -1$ ή $x = 1$

5. α. $x = \sqrt[7]{4} + 1$ **β.** $x = 0$ ή $x = -4$

3.3 Εξισώσεις 2ου βαθμού

Ερωτήσεις κατανόησης

1. α. $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ **β.** δεν έχει **γ.** $\Delta > 0$

2. Νίκος

4. α. Σ **β.** Λ **γ.** Σ **δ.** Λ **ε.** Λ **στ.** Σ **ζ.** Σ

5. $\alpha \to 5$, $\beta \to 2$, $\gamma \to 1$

Ασκήσεις

1. α. $x_1 = 0, x_2 = -4$ **β.** $x_1 = 0, x_2 = -4$ **γ.** $x_1 = 0, x_2 = \frac{9}{2}$

2. α. $x_1 = 5, x_2 = -5$ **β.** $x_1 = 3, x_2 = -3$ **γ.** αδύνατη

3. α. $x_1 = 5, x_2 = -1$ **β.** $\alpha_1 = 3 + \sqrt{2}$, $\alpha_2 = 3 - \sqrt{2}$ **γ.** αδύνατη

δ. $\rho_1 = \rho_2 = \frac{-(-4)}{2 \cdot 4} = \frac{1}{2}$ **ε.** $x_1 = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$, $x_2 = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$

στ. $k_1 = \frac{11}{3}$, $k_2 = -1$

4. α. $x_1 = -2$, $x_2 = -3$ **β.** $x_1 = 1, x_2 = -2$

γ. $x_1 = 0, x_2 = \frac{22}{3}$ **δ.** Αδύνατη

5. α. $x = 2$ **β.** αδύνατη **γ.** $x_1 = 1, x_2 = -\frac{5}{4}$ **δ.** $x_1 = 2, x_2 = -1$

6. α. $x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = -3$ **β.** $x_1 = -3, x_2 = 2, x_3 = -2$
γ. $x_1 = 1, x_2 = -1$

7. α. $x_1 = 2,\ x_2 = -2,\ x_3 = 1, x_4 = -1$ **β.** $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -\frac{1}{2}$

γ. $x_1 = 0,\ x_2 = -2,\ x_3 = 1, x_4 = -3$

8. α. $x_1 = 4,\ x_2 = -4,\ x_3 = 3,\ x_4 = -3$ **β.** $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 1$
γ. $x_1 = 5, x_2 = -3, x_3 = 3, x_4 = -1$

9. α. $x = 4$ **β.** $x_1 = 4, x_2 = 1$ **γ.** αδύνατη

10. α. -5 **β.** 5 **γ.** 15 **δ.** -50

11. β. κέρδος 20€ **γ.** 120 μηχανήματα

12. $t_{χρ.πτ.} = 4$ γιατί $h(t) = 0 \Leftrightarrow 5t^2 = 80 \Leftrightarrow t^2 = 16 \Leftrightarrow t = 4$,
$t_{χρ.πτ} - t_{ηχ} = 4sec - 0{,}233sec = 3{,}766sec$

13. πλάτος = 12cm, ύψος 2cm

14. πλάτος 2m, μήκος 4m

15. 160cm, 120cm

16. β. 12

17. 5 μέτρα

19. Αν $\alpha_1 = 5$ τότε $x_1 = -5$, αν $\alpha_2 = 2$ τότε $x_2 = -2$

20. i. $\Delta = 8\alpha^2 > 0$ **ii.** $\Delta = 1 > 0$

21. α. $\Delta = 25 + 24\alpha$ **i.** $\alpha < -\frac{25}{24}$ **ii.** $\alpha = -\frac{25}{24}$ **iii.** $\alpha > -\frac{25}{24}$
β. $x = -\frac{3}{4}$.

22. β. $\lambda \neq 1$ αδύνατη, $\lambda = 1$ διπλή ρίζα.

23. β. i. $\alpha > 0$ τότε $x_{1,2} = -\frac{\beta}{2} \pm \sqrt{\alpha}$, **ii.** $\alpha = 0$ τότε $x = -\frac{\beta}{2}$
iii. $\alpha < 0$ αδύνατη

3.4 Ανακεφαλαίωση 3ου Κεφαλαίου

1. α. $x_1 = 0, x_2 = 4$ **β.** $x_1 = 5, x_2 = -\frac{26}{11}$

2. α. $x = 0$ **β.** $x_1 = 1, x_2 = -1$ **γ.** $x_1 = 0, x_2 = -6$

3. α. $x_1 = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{5 - 3\sqrt{5}}{2}$ **β.** $x = 3$

4. α. $x_1 = -\frac{1}{9}$, $x_2 = \frac{1}{9}$ **β.** $x_1 = -3, x_2 = -1$

5. α. $x_1 = 10, x_2 = 1$ **β.** $x = -1, x = \frac{3}{4}$

6. 20m και 30m

7. α. Αθήνα $1{,}8 + 0{,}9 \cdot x$, Νέα Υόρκη $4 + 2 \cdot x$
β. Αθήνα 20,22km, Νέα Υόρκη 8km **γ.** $x = \frac{20 - 2 \cdot \lambda}{\lambda - 1}$ **δ.** 2,5€

8. γ. i. $\lambda \neq \pm 2$ **ii.** $\lambda = -2$ **δ.** $\lambda = 4$

• ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

4.3 Αλγεβρική επίλυση ανισώσεων δευτέρου βαθμού

Ερωτήσεις κατανόησης

1. α. $<$ **β.** $=$ **γ.** $\geq$

2. α. $(x - 3)^2 \geq 0 > -1$ **β.** $(2x + 2)^2 \leq -4$

4. Γιάννης και Μαρία

5. $x \in (-\infty, 0) \cup (5, +\infty)$

6. α. Σάκης **β.** Λάθος **γ.** $x \in (-\infty, 1) \cup (2,\ +\infty)$

Ασκήσεις

1. α. $(x - 1)(2x + 1)$ **β.** $9\left(x - \frac{1}{6}\right)^2$ **ε.** $2(x - 2)(3x + 1)$ **στ.** $(3x - 4)^2$

2. α. $x^2 - 2x - 3 > 0, x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ και $x^2 - 2x - 3 < 0, x \in (-1, 3)$

β. $x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{2}{3} > 0$, $x \in (-\infty, -2) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$ και
$x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{2}{3} < 0$, $x \in \left(-2, \frac{1}{3}\right)$

γ. $x^2 + 5 - 2x > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

δ. $4x - 16x^2 - \frac{1}{4} \le 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ε. $3x(x-2) > 0,\ x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ και $3x(x-2) < 0,\ x \in (0, 2)$

στ. $-x(x+4) < 0,\ x \in (-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$ και $-x(x+4) > 0,\ x \in (-4, 0)$

3. α. $x \in (-\infty, 0] \cup [5, +\infty)$ **β.** $x \in (0, 2)$ **γ.** $x \in [0, 6]$
δ. $x \in (-3, 3)$ **ε.** $x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ **στ.** $x \in \mathbb{R}$

4. α. $x \in (-\infty, -3] \cup [7, +\infty)$ **β.** $x \in (-6, -5)$ **γ.** $x \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{3}\right]$
δ. $x \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ **ε.** $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$
στ. $x \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \cup (3, +\infty)$

5. α. $x \in \mathbb{R}$ **β.** $x = \frac{1}{2}$ **γ.** $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$

6. α. $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [3, +\infty)$ **β.** $x \in \left(-\frac{15}{2}, 1\right)$
γ. $x \in \mathbb{R}$ **δ.** $x \in \left(\frac{-11-\sqrt{73}}{8}, \frac{-11+\sqrt{73}}{8}\right)$

7. α. $x \in (-7, 2)$ **β.** $x \in (-\infty, 2] \cup [6, +\infty)$

8. α. $x \in (-5, -2)$ **β.** $x \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$

9. $x \in (-1, 1] \cup [4, 6)$

10. i. α. $-2 < k$ ή $k > 6$ **β.** $k = -2$ ή $k = 6$ **γ.** $-2 < k < 6$
ii. αν $k = -1 \Rightarrow x = -1$, αν $k \ne -1$ έχουμε τριώνυμο
α. δύο ρίζες $-\frac{4}{3} < k < 0$ **β.** μία διπλή ρίζα, $k = -\frac{4}{3}$ ή $k = 0$
γ. αδύνατη, $k < -\frac{4}{3}$ ή $k > 0$

11. $x \in (4, +\infty)$

12. $x \in (0, 5] \cup [45, 50)$

14. Στα πρώτα 2 sec της κίνησης της

15. α. 200 **β.** $x \in (400, 4400)$

4.4 Ανακεφαλαίωση 4ου Κεφαλαίου

1. α. $\Delta = 121$, $x_1 = \frac{1}{3}$ ή $x_2 = -\frac{3}{2}$ **β.** $(3x-1)(2x+3)$
γ. θετικό για $x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$, αρνητικό για $x \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{3}\right)$

2. α. $x \in (-2, 5)$ **β.** $\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{3} \in (-2, 5)$
γ. $x \ne -2$ και $x \ne 5$ **δ.** $A = -1$

3. α. $-2 < x < 6$ **β.** $x \in (-\infty, 1] \cup [4, +\infty)$ **γ.** $x \in (-2, 1] \cup [4, 6)$
δ. είναι κοινή τους λύση

4. α. $(x-2)(x+1)$ **β.** $x \ne 0, x \ne -1$ **γ.** $A = \frac{x-2}{x}$
δ. $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 2] \cup [3, +\infty)$

5. α. $\Delta = -4 < 0$ **β.** $A = -3x^2 + 4$ **γ.** $x \in \left(-\frac{4}{3}, 1\right)$

6. α. $1 \le x \le 3$ **β.** $x^2 - 4x + 3 \le 0$
γ. $x^2 + 3 \le 4x \Leftrightarrow d(x, 2) \le 1 \Leftrightarrow |x - 2| \le 1$

7. α. $x \in (-1, 1) \cup (4, 6)$ **β.** $x \in [-1, 2]$ **γ.** $x \in [-1, 1)$

8. α. $\Delta > 0$, δηλαδή $\lambda < 1$ ή $\lambda > 9$ με $\lambda \ne 0$ **β.** $\Delta = 0$, δηλαδή $\lambda = 1$ ή $\lambda = 9$
γ. $\Delta < 0$, δηλαδή $1 < \lambda < 9$

9. α. $\lambda > \frac{9}{4}$ **β.** $\lambda \in (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$

11. α. $x \ne \pm 1$ **β.** αν $x \ge 0$ και $x \ne 1 \Rightarrow A = (x+1)(x-2)$,
αν $x < 0$ και $x \ne -1 \Rightarrow A = (x-1)(x+2)$
γ. αν $x \ge 0$ και $x \ne 1 \Rightarrow x \in [0, 1) \cup (1, 2)$,
αν $x < 0$ και $x \ne -1 \Rightarrow x \in (-2, -1) \cup (-1, 0)$

12. α. $E = x \cdot y = (30 - x)x = 30x - x^2$ **β.** $x \in (0, 30)$ **γ.** $x = 15$

13. α. $t = 9$sec **β.** $t_1 = \frac{9+\sqrt{53}}{2}$sec ή $t_2 = \frac{9-\sqrt{53}}{2}$sec
γ. $t \in \left(\frac{9-\sqrt{53}}{2}, \frac{9+\sqrt{53}}{2}\right)$

14. α. $(ΕΖΗΘ) = (4-x)^2 + x^2$ **β.** $x = 2$ **γ.** μέσα του τετραγώνου

● ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 – ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

5.1 Η έννοια της Συνάρτησης

Ερωτήσεις κατανόησης

1. Πεδίο ορισμού, ανεξάρτητη, εξαρτημένη

2. α. Ναι **β.** Όχι **γ.** Ναι **δ.** Ναι **ε.** Όχι

3. α. Λ **β.** Σ **γ.** Λ **δ.** Λ

4. α. Πεδίο ορισμού $= \left\{-2, \frac{1}{2}, \sqrt{5}, 9\right\}$, Σύνολο Τιμών $= \left\{-2, 1, \sqrt{2}, \frac{1}{4}\right\}$
β. Πεδίο ορισμού $= \left\{-3, \frac{5}{3}, \sqrt{8}, 1, 6\right\}$ και Σύνολο Τιμών $= \{-2, -1, \sqrt{5}\}$

Ασκήσεις

1. α. Η ακτίνα ρ και το εμβαδόν των κύκλων μεταβάλλονται
β. Η μεταβολή της ακτίνας ρ μεταβάλλει και το εμβαδόν του κύκλου
γ. Όσο μεγαλώνει η ακτίνα τόσο μεγαλώνει και το εμβαδόν
δ. Συνδέονται με βάση τον γνωστό τύπο $E_{κύκλου} = \pi \cdot \rho^2$
ε. $\frac{E_{κύκλου}}{\rho^2} = \pi$
στ. $y = \pi x^2$ με $E_{κύκλου} = y$ και $\rho =$ ακτίνα $= x$

2. α. $f(-1) = -3,\ f(0) = -4,\ f(4) = 12,\ f(2x) = 4x^2 - 4$
β. $w\left(-\frac{1}{4}\right) = -3,\ w(1) = 2,\ w(x-1) = 1 + \frac{1}{x-1}, x \ne 1$
γ. $f(-1) = 1,\ f(1) = 1,\ f(-1) - 2f(1) = -1,\ f^2(0) + f\left(\frac{1}{3}\right) = 3$

4. α. $f(2) = 4,\ f(1) = 0,\ f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}$, **β.** $x = 1$ ή $x = -1$
γ. $x \le -3$ ή $x \ge 4$

5. α. $A_f = \mathbb{R} - \{4\}$ **β.** $A_g = \mathbb{R} - \left\{-1, -\frac{1}{2}\right\}$ **γ.** $A_h = (0, +\infty)$
δ. $A_f = \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$ **ε.** $A_g = (-4, 1) \cup (1, +\infty)$
στ. $A_h = [0, 4) \cup (4, +\infty)$

6. α. αυξάνουμε την μεταβλητή t κατά 2 και στην συνέχεια το υψώνουμε στο τετράγωνο αφαιρώντας 1.
β. ανεξάρτητη μεταβλητή είναι η t και αν $y = g(t)$ εξαρτημένη είναι η y.
γ. $B = \{-1, 0, 3, 8, 15\}$

7. α. $E(x) = x \cdot y = x \cdot (40 - x),\ 40 > x > 0$ **β.** $E(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}x^2,\ x > 0$

8. α. $w(100) \simeq 76{,}8$ kg **γ.** 44,683 Kg

9. α. $0 \le t \le 20$ **β.** $V(0) = 30$ lt, $V(20) = 0$ lt

10. α. $f(x) = \begin{cases} 80x, & x = 1 \text{ ή } 2 \\ 160 + (x-2)50, & x = 3, 4, 5 \ldots\ldots \end{cases}$
β. $f(1) = 80€,\ f(2) = 160€,\ f(5) = 310€$

5.2 Γραφική Παράσταση Συνάρτησης

Ερωτήσεις κατανόησης

1. Τα (α) και (γ) είναι συναρτήσεις και (β) και (δ) όχι

2. α. Σ **β.** Σ **γ.** Λ **δ.** Λ

Ασκήσεις

1. α. $\alpha = 0$ **β.** $\alpha_1 = 2$ ή $\alpha_2 = -3$ **γ.** $\alpha_1 = 0$ ή $\alpha_2 = -3$ **δ.** $\alpha = 1$

2. α. C_f: $A(0, -2), B(2, 0)$ C_g: $\Gamma(0, 6), \Delta(2, 0), E(3, 0)$
β. $f(x) > 0 \Leftrightarrow x > 2$, $g(x) < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 3$
γ. $f(x) = g(x)$, $K(4, 2), B(2, 0)$
δ. $f(x) > g(x) \Leftrightarrow 2 < x < 4$

3. α. $f(1) = -5$ **β.** $\alpha = 2$ **γ.** $A(5, 3)$ και $B(2, -3)$
δ. $g(x) > f(x) \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2) \cup (5, +\infty)$

4. α. $f(-2) = 1$, $f(0) = -1$, $f(2) = 3$, $f(3) = 4$
β. Πεδίο ορισμού $[-3, 4]$, Σύνολο τιμών $[-1, 4]$
γ. $x_1 = -3$, $x_2 = 2$ και $x_2 = 4$ **δ.** $A(0,-1)$, $B(-1, 0)$ και $\Gamma(1, 0)$
ε. $x \in (-1, 1)$

5. α. $g(-4) = 3$, $g(-2) = 2$, $g(0) = -2$, $g(4) = 0$
β. Πεδίο ορισμού $[-4,4]$
Σύνολο τιμών $[-2, 3]$ **γ.** $x = -4$ **δ.** $x \in [-1, 1] \cup \{4\}$
ε. $A(-1, 0)$, $B(0, -2)$και $\Gamma(1, 0)$

6. α. 6:00π.μ. κατανάλωση 500MW και στις 6:00μ.μ. κατανάλωση 740MW περίπου.
β. Στις 3:00π.μ. την μικρότερη κατανάλωση και στις 12:00π.μ. την μεγαλύτερη κατανάλωση.
γ. Η ευθεία $y = 600$ τέμνει την γραφική παράσταση στα σημεία με τετμημένες τους αριθμούς x_1 = 7:00μ.μ. και x_2 = 10:00μ.μ.
δ. από τις 9:00π.μ. έως στις 7:00μ.μ. η κατανάλωση από 800MW ανέβηκε στο μέγιστο 840MW περίπου και κατέβηκε στις 700MW.

7. α. Πεδίο ορισμού $A = [0, 24]$, Σύνολο τιμών (0%, 40%]
β. Χαμηλότερη 4:00π.μ. έως 6:00π.μ. και το μεγαλύτερο στις 10:00μ.μ.
γ. Η τηλεθέαση αυξάνεται στα διαστήματα από τις 2:00μ.μ έως 4:00μ.μ. και από τις 8:00μ.μ. έως 11:00μ.μ. μειώνεται στα διαστήματα από τις 2:00π.μ. έως 6:00π.μ. και από τις 4:00μ.μ. έως 8:00μ.μ.
δ. από τις 4:00μ.μ. έως 8:00μ.μ.

5.3 Η συνάρτηση f(x) = αx + β

Ερωτήσεις κατανόησης

1. α. Λ **β.** Σ **γ.** Σ **δ.** Λ **ε.** Λ **στ.** Λ

2. α. i. $y = 2x + 3$ **ii.** $y = -2x + 6$ **iii.** $y = 0$ **β.** $y = -3x$ **γ.** $x = 0$

3. α. $y = 4x$, $y = 8x$ **β.** $y = 4x - 2$, $y = 8x - 2$ **γ.** $y = 4x + 9$ **δ.** $-3y = x$

4. όχι

5. α. → iii. **β.** → ii. **γ.** → iv. **δ.** → i.

Ασκήσεις

3. α. (ε): $y = -2x + 6$ **β.** $\alpha = -2$ **γ.** $B(0, 6)$, $\Gamma(3, 0)$ **ε.** $y = x + 6$

4. α. -1, αμβλεία **β.** $y = -x + 2$ **γ.** $x < 2$ **ε.** $\Gamma(1,1)$

5. α. $\alpha_2 = -2$, αμβλεία **β.** (ε_1): $y = -2x + 11$ **γ.** για την (ε_1): $B(0, 11)$, $\Gamma\left(\frac{11}{2}, 0\right)$, για την (ε_2): $\Delta(0, 4)$, $E(2, 0)$ **ε.** $\alpha = -2$

6. α. $\alpha = -\frac{3}{2} < 0$, αμβλεία γωνία **β.** το Α και το Γ ανήκουν
γ. $\kappa = \frac{4}{5}$ **δ.** $x = 2$

7. α. $\alpha = 2$ **β.** $A(1, 0)$ και $B(0, -2)$ **γ.** (ε): $y = 2x - 2$

9. α. $A_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}$ **β.** $f(1) = 3 \Rightarrow \alpha = 1$ **στ.** $\frac{1}{2} < x \neq \frac{2}{3}$

10. γ. $A(0, 4)$, $\Gamma\left(\frac{8}{3}, 0\right)$, $\Delta\left(\frac{4}{3}, 0\right)$ **δ.** $x < 1$ ή $x > 3$

12. α. $\frac{1}{11}$ **β.** $H(x) = \frac{1}{11}x$ **γ.** περίπου 34,5cm

13. α. $y = 10 + 0{,}5x$ **β.** 17,5€ **γ.** 8 παραγγελίες

14. α. $N(\nu) = 200 + 15 \cdot \nu$ με $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ **β.** 380 τραγούδια

15. α. ένωσε τα σημεία (0, 8) και (12, 23) **β.** Το εύρος είναι από 8% έως 100% και από 0 λεπτά έως 80 λεπτά περίπου
γ. 73,6 λεπτά

5.4 Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$

Ερωτήσεις κατανόησης

1. • $f_1 : \alpha > 0, \gamma > 0, \Delta = 0$ • $f_2 : \alpha > 0, \gamma > 0, \Delta < 0$
• $f_3 : \alpha < 0, \gamma < 0, \Delta < 0$ • $f_4 : \alpha < 0, \gamma > 0, \Delta > 0$
• $f_5 : \alpha < 0, \gamma < 0, \Delta = 0$ • $f_6 : \alpha < 0, \gamma < 0, \Delta < 0$

2. $-4 < \kappa < 4$

3. α. $f(x) = x^2 + 3x + 2$ **β.** $f(x) = -x^2 + 5x - 4$ **γ.** $f(x) = x^2 + 4x + 4$

4. α. Σ **β.** Σ **γ. i.** Λ **ii.** Λ

5. β. $A(\kappa, 0)$ και $B(\lambda, 0)$ **γ.** $\alpha = \frac{\kappa + \lambda}{2}$

7. όχι

Ασκήσεις

1. α.

−5	−4	−3	−2	−1	0	1
10	5	2	1	2	5	10

β. ταυτίζονται

2. α. $x = -1$, ελάχιστο για $x = -1$ το -3 και σημεία τομής με τους άξονες τα $(0, -2)$, $\left(-1 - \sqrt{3}, 0\right)$, και $\left(-1 + \sqrt{3}, 0\right)$
β. $x = 0$, ελάχιστο για $x = 0$ το -4 και σημεία τομής με τους άξονες τα $(0, -4)$, $(2, 0)$ και $(-2, 0)$
γ. $x = \frac{3}{2}$, ελάχιστο για $x = \frac{3}{2}$ το $-\frac{9}{4}$και σημεία τομής με τους άξονες τα $(0,0)$, $(3,0)$ και $(0,0)$
δ. $x = \frac{1}{2}$, μέγιστο για $x = \frac{1}{2}$ το $\frac{9}{4}$ και σημεία τομής με τους άξονες τα $(0,2)$, $(2,0)$ και $(-1,0)$
ε. $x = 3$, μέγιστο για $x = 3$ το 0 και σημεία τομής με τους άξονες τα $(0, -9)$ και $(3, 0)$
στ. $x = \frac{3}{4}$, μέγιστο για $x = \frac{3}{4}$ το $\frac{89}{8}$ και σημεία τομής με τους άξονες τα $(0,10)$, $\left(\frac{3 - \sqrt{89}}{4}, 0\right)$και $\left(\frac{3 + \sqrt{89}}{4}, 0\right)$

3. α. i. $(0, -3)$ **ii.** $x = 1$ **iii.** μέγιστο το -2
γ. i. Είναι κάτω από τον xx΄ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

4. α. $y = 2(x^2 - 3x + 2)$ **β.** $y = x^2 + 4x + 5$ **γ.** $y = -x^2 + 2x + 3$
δ. $y = -x^2 + 2x - 3$

6. β. $(1, 4)$ **γ.** $x \in \mathbb{R} - \{1\}$

7. α. $(0, -5)$, $(1, 0)$ και $(-5, 0)$ **β.** $f(x) < 0$, $x \in (-5, 1)$
γ. i. δύο σημεία τομής, $\beta > -6$ **ii.** Ένα σημείο $\beta = 6$
iii. Κανένα σημείο $\beta < -6$

8. α. i. Για να τέμνουν τον άξονα x΄x δύο φορές, πρέπει $\lambda < \frac{9}{4}$
ii. Για να εφάπτονται στον άξονα x΄x, πρέπει $\lambda = \frac{9}{4}$
iii. Για να μην έχει κοινά σημεία με τον άξονα x΄x, πρέπει $\lambda > \frac{9}{4}$
β. i. Για να τέμνουν τον άξονα x΄x πρέπει $4 > \lambda$, $\lambda \neq 0$
ii. Για να εφάπτονται στον άξονα x΄x, πρέπει $\lambda = 4$
iii. Για να μην έχει κοινά σημεία με τον άξονα x΄x πρέπει $\lambda > 4$
γ. i. Για να τέμνουν τον άξονα x΄x δύο φορές, πρέπει $\lambda > -\frac{4}{3}$, $\lambda \neq -1$
ii. Για να εφάπτονται στον άξονα x΄x, πρέπει $\lambda = -\frac{4}{3}$
iii. Για να μην έχει κοινά σημεία πρέπει $\lambda < -\frac{4}{3}$

9. α. $f(x) = -x^2 + 4$ **β.** $g(x) = -x^2$

10. α. 4m **β.** 0,5 sec **γ.** 5 m **δ.** $t_2 \cong 1{,}618$

12. α. $E(x) = -3x^2 + 180x$, $x \in (0, 60)$ **γ.** $x = 30$m, $y = 90$m

13. α. $E(x) = -2x^2 + 100x$ **β.** $(0,50)$ **γ.** $x = 25$, $y = 50$m

15. α. $y = -\frac{3}{121}x^2 + 3$ **γ.** 23,7m

16. α. $E(x) = -5x^2 + 150x + 2000$ **γ.** $x = 15$ **δ.** 3125€

18. α. $h(x) = -x^2 + 9$ **β.** δεν περνάει **γ.** 5m

5.5 Ανακεφαλαίωση 5ου Κεφαλαίου

1. α. 0,6 εκατ. € **β.** 0,2 εκατ. € **γ.** Μετά από 24 μήνες **δ.** Τον 4ο μήνα και είχε αξία 200.000€. Μέγιστη τιμή έχει 2.600.000€
ε. σταθεροποιείται **στ.** Η αξία της ήταν 2.600.000€

2. α. $\alpha = 4$ **γ. i.** $x_1 = 4$ ή $x_2 = 3$ **ii.** $x \in (-\infty, 0] \cup [3, +\infty)$

δ. $x \in (-\infty, 0] \cup [3, 4) \cup (4, +\infty)$

3. α. $\alpha \geq 9$ **β.** $\alpha = 9$

γ. $f(x) = \sqrt{(2x-3)^2} = |2x - 3|$

δ. $x \in (-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$

4. β. $\Gamma(-1, 2)$ και $Z(3, 2)$ **γ.** $x \geq 3$ ή $x \leq -1$

5. α. Η κλίση είναι $\alpha = 0{,}5$ και εκφράζει τον μέσο ρυθμό μεταβολής της μεταβλητής y στο αντίστοιχο διάστημα της μεταβλητής x

β. Δηλώνει το πάγιο τέλος 100€ , χωρίς να κάνει χιλιόμετρα.

γ. y = 300€ **δ.** 800km

6. β. $(-4, 3)$ **γ. i.** $\alpha > \frac{3}{4}$ **ii.** $\alpha < \frac{3}{4}$

7. α. $P(x) = -0{,}90x^2 + 180x - 3200$ **γ.** P(100) = 5800€

8. α. $E(x) = -2x^2 + 36x,\ x \in (0, 18)$ **γ.** 9 και 18

9. α. $A\left(\frac{4}{3}, 0\right)$ και $B(1, -1)$ **β. i.** $O(0, 0)$ και $A\left(\frac{4}{3}, 0\right)$ **ii.** $x = \frac{2}{3}$

δ. Δύο κοινά σημεία για $\alpha > -\frac{4}{3}$, ένα κοινό σημείο για $\alpha = -\frac{4}{3}$ και κανένα κοινό σημείο για $\alpha < -\frac{4}{3}$.

10. α. $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ **β.** $\beta = 4$ **γ.** Αδύνατη

11. β. $x = 10$ **γ.** Ορθογώνιο και ισοσκελές

12. α. $f(x) = \begin{cases} 10 + 20x, & 0 \leq x < 4 \\ 70 + 5x, & 4 \leq x \leq 12 \end{cases}$ **β. i.** 10€ **ii.** 90€ **iii.** 120€

γ. $g(x) = 40 + 10x$ **ε.** από 3 μήνες έως 6 μήνες στο Α΄ γυμναστήριο είναι πιο οικονομικά από το Β΄

13. α. $\alpha = -1, \beta = -2$ **β.** $B(1,0)$ **γ.** $x \in (-3, 0)$ **δ. i.** $\lambda = 4$ **ii.** $\lambda < 4$

● ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 – ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

6.3 Γωνίες που διαφέρουν κατά 90°, 180°, 270°

Ερωτήσεις κατανόησης

1. α. Σ **β.** Λ **γ.** Λ **δ.** Λ **ε.** Λ

2. 45° με 135° και 225° με 315°

3. 1 → Α ή Β, 2 → Β ή Δ, 3 → Β ή Γ, 4 → Γ ή Δ, 5 → Α ή Γ, 6 → Α ή Δ

Ασκήσεις

1. α. ημ110° > 0 **β.** σφ192° > 0 **γ.** συν234° < 0 **δ.** ημ312° < 0

ε. εφ94° < 0 **στ.** συν280° > 0 **ζ.** εφ12° > 0 **η.** σφ162° < 0

2. ημ0° = 0, συν0° = 1, εφ0° = 0, σφ0° = δεν υπάρχει

ημ90° = 1, συν90° = 0, εφ90° = δεν υπάρχει, σφ90° = 0

ημ360° = 0, συν360° = 1, εφ360° = 0 και σφ360° = δεν υπάρχει

3. ημ180° = 0, συν180° = −1, εφ180° = 0, σφ180° = δεν υπάρχει

ημ270° = −1, συν270° = 0, εφ270° = δεν υπάρχει, σφ270° = 0

4. α. $\eta\mu\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{1}{2}$, $\varepsilon\varphi\omega = -\sqrt{3}$, $\sigma\varphi\omega = -\frac{\sqrt{3}}{3}$,

2ο τεταρτημόριο

β. $\eta\mu\omega = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\varepsilon\varphi\omega = 1$, $\sigma\varphi\omega = 1$

1ο τεταρτημόριο

γ. $\eta\mu\omega = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{1}{3}$, $\varepsilon\varphi\omega = 2\sqrt{2}$, $\sigma\varphi\omega = \frac{\sqrt{2}}{4}$,

3ο τεταρτημόριο

δ. $\eta\mu\omega = -\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{2}{3}$, $\varepsilon\varphi\omega = -\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\sigma\varphi\omega = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$,

4ο τεταρτημόριο

5. α. $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$, $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{4}{5}$, $\varepsilon\varphi\omega = \frac{3}{4}$, $\sigma\varphi\omega = \frac{4}{3}$

β. $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$, $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{-4}{5}$, $\varepsilon\varphi\omega = -\frac{3}{4}$, $\sigma\varphi\omega = -\frac{4}{3}$

γ. $\eta\mu\omega = -\frac{3}{5}$, $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{4}{5}$, $\varepsilon\varphi\omega = \frac{3}{4}$, $\sigma\varphi\omega = \frac{4}{3}$

δ. $\eta\mu\omega = -\frac{3}{5}$, $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{4}{5}$, $\varepsilon\varphi\omega = -\frac{3}{4}$, $\sigma\varphi\omega = -\frac{4}{3}$

6. α. 3ο τεταρτημόριο **β.** 4ο τεταρτημόριο **γ.** 2ο τεταρτημόριο

7. α. $x_A = -0{,}8$ και $y_A = 0{,}6$, $\rho = (OA) = 1$ **β.** $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$

8. α. $y_A = -2$ **β.** $\eta\mu\omega = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\sigma\varphi\omega = -\frac{3}{2}$

9. α. $M(1,2)$ **γ.** $\eta\mu\omega = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\varepsilon\varphi\omega = 2$, $\sigma\varphi\omega = \frac{1}{2}$

10. α. $A = \frac{\sqrt{2}}{4} + 1$ **β.** $B = \frac{3 + 3\sqrt{2} - 3\sqrt{3} + \sqrt{6}}{4}$

11. β. i. $K(-0{,}76,\ 0{,}64)$ **ii.** ημ140° ≃ 0,64, συν140° ≃ −0,76

γ. i. Το σημείο Λ έχει Λ(−0,87, −0,5)

ii. εφ210° = 0,57, σφ210° ≃ 1,74

iii. εφ210° = 0,5773502692, σφ210° = 1,7320508075

iv. |0,5773502692 − 0,57| = 0,0073502692|1,7320508075 − 1,74| = 0,007949925

6.4 Τριγωνομετρικές ταυτότητες

Ερωτήσεις κατανόησης

1. α. Λ **β.** Λ **γ.** Σ **δ.** Λ **ε.** Λ **στ.** Σ **ζ.** Σ

3. όχι

Ασκήσεις

1. $\eta\mu\omega = -\frac{4}{5}$, $\varepsilon\varphi\omega = -\frac{4}{3}$, $\sigma\varphi\omega = -\frac{3}{4}$

2. α. $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{4}{5}$ **β.** $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$, $\varepsilon\varphi\omega = -\frac{3}{4}$

3. α. 3ο τεταρτημόριο

β. $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\varepsilon\varphi\omega = \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{5}$, $\sigma\varphi\omega = \frac{\sqrt{5}}{2}$

4. $\sigma\varphi\omega = -\sqrt{3}$, $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\eta\mu\omega = \frac{1}{2}$

5. 1η: περίπτωση: $0^\circ < \omega < 90^\circ$,

$\eta\mu\omega = \frac{1}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\sigma\varphi\omega = \sqrt{3}$

2η: περίπτωση: $180^\circ < \omega < 270^\circ$,

$\eta\mu\omega = \frac{-1}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{-\sqrt{3}}{2}$, $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\sigma\varphi\omega = \sqrt{3}$

6. α. 2 **β.** 4 **γ.** 8

9. α. x = 0 ή x = 1 **β.** Αν x = 0 τότε ω = 180°. Αν x = 1 τότε ω = 90°

6.5 Ανακεφαλαίωση 6ου Κεφαλαίου

1. α. $(-1, \sqrt{3})$

β. $\eta\mu 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sigma\upsilon\nu 120^\circ = -\frac{1}{2}$, $\varepsilon\varphi\omega = -\sqrt{3}$, $\sigma\varphi\omega = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

γ. $\frac{\sqrt{3} + 1}{4}$

2. α. $\eta\mu\omega = \frac{1}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ **β.** $A = -\frac{\sqrt{3} + 6}{3}$

3. α. $\varepsilon\varphi\omega = \frac{12}{5}$ **β.** $A = -\frac{7}{27}$

4. α. $\eta\mu\omega = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{1}{4}$ **β.** $A = 2\sqrt{15} - 3$

5. $A = \frac{5}{7}$

6. γ. $B = -\frac{32}{7}$

Ευρετήριο Όρων

Πηγές

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

- Ο πύραυλος Ares-1 εκτοξεύει τη διαστημική κάψουλα Orion. Αποθετήριο πολυμέσων Wikimedia: **https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ares-1_Orion_launch_(Sept_2006).jpg**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

- Ένα φανταστικό πορτρέτο για τον Αλ-Χουαρίζμι που προέρχεται από ένα σοβιετικό γραμματόσημο. Αποθετήριο πολυμέσων Wikimedia και Creative Commons άδειες: **Michel Bakni** , **CC BY-SA 4.0** , μέσω των Wikimedia Commons: **https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Al-Khwarizmi_portrait.jpg**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

- Η Τοξωτή γέφυρα Τσακώνας. Αποθετήριο πολυμέσων Wikimedia και Creative Commons άδειες: **ddp2000**, **CC BY 2.0**, μέσω των Wikimedia Commons: **https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tsakona_bridge_Messinia.jpg**
- Θέατρο της Επιδαύρου, Ελλάδα. Αποθετήριο πολυμέσων Wikimedia και Creative Commons άδειες: **btr**, **CC BY-SA 2.5** , μέσω των Wikimedia Commons: **https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Theater_of_Epidaurus_1.jpg**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

- Βαβυλωνιακή επιγραφή με λίστα πυθαγόρειων τριάδων. Αποθετήριο πολυμέσων Wikimedia και Creative Commons άδειες: **photo author unknown** , Public domain, μέσω των Wikimedia Commons: **https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Plimpton_322.jpg**