



Πραγματικοί αριθμοί

Η χρυσή τομή

Στο σχήμα, το ευθύγραμμο τμήμα έχει χωριστεί σε δύο μικρότερα, που για τα μήκη τους ισχύει η αναλογία:

$$\frac{\alpha + \beta}{\alpha} = \frac{\alpha}{\beta}$$



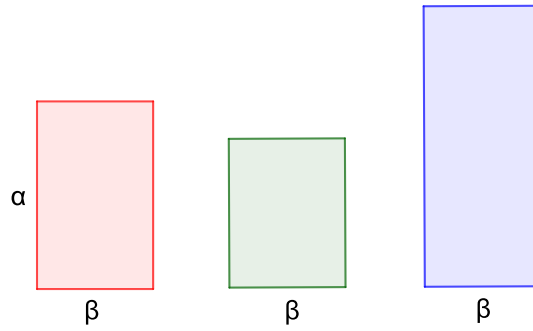
Κλασικοί και μεσαιωνικοί συγγραφείς όπως ο Kepler ύμνησαν το λόγο $\frac{\alpha}{\beta}$ με την παραπάνω ιδιότητα ως «θεία ή χρυσή αναλογία». Και πολλοί ακόμα τη συσχέτισαν με την ομορφιά και την αρμονία σε τέχνες όπως η ζωγραφική, η γλυπτική, η αρχιτεκτονική.

Η ομορφιά στην τέχνη υπήρξε αντικείμενο συζήτησης τουλάχιστον από την εποχή του Πλάτωνα και έχει αναλυθεί με όρους ασαφών εννοιών όπως η τάξη, η αναλογία, η ισορροπία, η αρμονία, η ενότητα και η διαύγεια. Στις νεότερες γενιές έγιναν προσπάθειες να αποδοθούν στις καλλιτεχνικές δημιουργίες κριτήρια αισθητικής ποιότητας βασισμένα στα Μαθηματικά. Τα κριτήρια αυτά μπορεί να είναι προσωρινά ή καλύτερα μεταβατικά, καθώς οι εποχές αλλάζουν και οι αισθητικές κρίσεις αντικατοπτρίζουν τις παραδόσεις μιας εποχής.

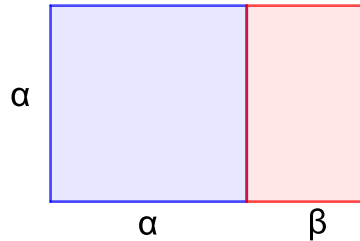
Στο πλαίσιο αυτό υπάρχουν προσεγγίσεις, βασισμένες κυρίως στην κλασική τέχνη και την αρχιτεκτονική, που υποστηρίζουν ότι το πιο όμορφο παραλληλόγραμμο είναι εκείνο στο οποίο για τον λόγο των μηκών των πλευρών του ισχύει η ιδιότητα της χρυσής αναλογίας:

$$\frac{\alpha + \beta}{\alpha} = \frac{\alpha}{\beta}$$

Τα παρακάτω ορθογώνια έχουν όλα βάση β, αλλά μόνο το πρώτο από αριστερά πληροί την ιδιότητα της χρυσής αναλογίας.



Επίσης στο παρακάτω σχήμα, δίπλα στο ορθογώνιο με τη χρυσή αναλογία έχουμε τοποθετήσει ένα τετράγωνο με πλευρά μήκους α. Εφόσον ισχύει ότι $\frac{\alpha + \beta}{\alpha} = \frac{\alpha}{\beta}$, το νέο ορθογώνιο που σχηματίζεται έχει και αυτό τη χρυσή αναλογία.

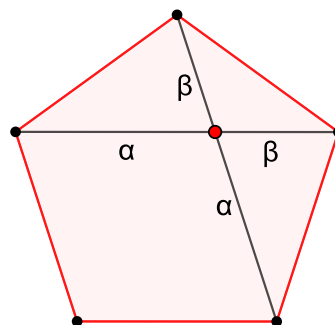


Αποδεικνύεται ότι ο λόγος της χρυσής αναλογίας προσεγγίζει τον δεκαδικό αριθμό 1,618 και με ακρίβεια είναι ίσος με $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, δηλαδή είναι άρρητος αριθμός τον οποίο ονομάζουμε «χρυσή τομή».

Τον συμβολίζουμε με το γράμμα φ, δηλαδή γράφουμε $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Συναντούμε το φ σε πληθώρα μαθηματικών καταστάσεων.

- Στη γεωμετρία του κανονικού πενταγώνου. Ο λόγος που τέμνονται δύο διαδοχικές διαγώνιοι τους είναι φ, δηλαδή στο σχήμα ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \varphi$.



- Οι όροι του μοτίβου που προκύπτουν με την παρακάτω διαδικασία προσεγγίζει όλο και περισσότερο το φ :

Σκεφτείτε δύο αριθμούς	1 και 4	Τάξη	Όροι του μοτίβου
Προσθέστε τους	$1 + 4 = 5$	1	$\frac{5}{4} = 1,25$
Προσθέστε τους δύο μεγαλύτερους	$4 + 5 = 9$	2	$\frac{9}{5} = 1,8$
Προσθέστε τους δύο μεγαλύτερους	$5 + 9 = 14$	3	
Προσθέστε τους δύο μεγαλύτερους	$9 + 14 = 23$	4	$\frac{23}{14} = 1,6428\dots$
Προσθέστε τους δύο μεγαλύτερους	$14 + 23 = 37$	5	$\frac{37}{23} = 1,60869\dots$
...	$23 + 37 = 60$	6	$\frac{60}{37} = 1,621621\dots$
...
...	$665 + 1.076 = 1.741$	13	$\frac{1.741}{1.076} = 1,6180297\dots$
...

Με αυτόν τον τρόπο, στην τελευταία στήλη του πίνακα σχηματίζεται ένα μοτίβο κλασμάτων. Καθώς αυξάνεται η τάξη του όρου του μοτίβου το κλάσμα πλησιάζει τον αριθμό το φ .

Πηγή:

Davis, P. J. (1981). The Mathematical Experience. Boston: Birkhäuser

ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ΤΙΤΛΟΣ: Η χρυσή τομή

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ / ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ / ΤΕΧΝΙΚΗ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ:

Δημήτρης Διαμαντίδης

Ελισσάβητ Καλογερία

Ειρήνη Πεрусινάκη

Γιάννης Σταμπόλας

Κώστας Στουραΐτης

Βαγγέλης Φακούδης

Γιώργος Ψυχάρης

ΕΚΔΟΣΗ: 1.0

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 28-12-2024

Το παρόν αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της Πράξης «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ (MIS) 6010165, του Προγράμματος «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή 2021-2027» που υλοποιείται από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής και συγχρηματοδοτείται από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο.



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας, Θρησκευμάτων
και Αθλητισμού

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ
ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ



Με τη συγχρηματοδότηση
της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΕΣΠΑ
2021-2027

Πρόγραμμα
Ανθρώπινο Δυναμικό και
Κοινωνική Συνοχή