ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΡΕΚΟΥΜΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ
ΚΑΤΣΑΠΑΣ ΛΑΜΠΡΟΣ
ΚΟΥΜΑΝΤΟΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ
ΡΕΚΟΥΜΗ ΕΛΕΝΗ

ΑΛΓΕΒΡΑ

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ
«ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΑΛΓΕΒΡΑ

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Επιστημονική Επιτροπή Αξιολόγησης

Συντονιστής / Αξιολογητής	**Κριτσωτάκης Ευάγγελος** Εν ενεργεία μέλος Διδακτικού Ερευνητικού Προσωπικού Πανεπιστημίου
Αξιολογήτρια	**Καρλή Γαρυφαλλιά** Εν ενεργεία Εκπαιδευτικός
Αξιολογητής	**Μπέλλος Άγγελος** Εν ενεργεία Εκπαιδευτικός
Τεχνικός Εμπειρογνώμονας	**Παπακώστας Χρήστος** Πτυχιούχος Πληροφορικής
Επικουρικός Εμπειρογνώμονας	**Παπαδάτου Ψημάρη Χαραλαμπία** Πτυχιούχος Γραφιστικής
Υπεύθυνη του μαθήματος/γνωστικού αντικειμένου στο πλαίσιο της Πράξης	**Ειρήνη Γεωργάκη**, Σύμβουλος Α΄ ΙΕΠ, μέλος της Επιστημονικής Ομάδας Έργου (ΕΟΕ) της Πράξης

Πράξη με τίτλο: «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ 6010165 στο Πρόγραμμα «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή» 2021-2027

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Σπυρίδων Δουκάκης

Πρόεδρος του Δ.Σ. του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Υπεύθυνη Πράξης

Πολυξένη Μπίλλα

Σύμβουλος Α΄ του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Προϊσταμένη Τμήματος Β΄ Προγραμμάτων Σπουδών και Εκπαιδευτικού Υλικού

Αναπληρώτρια Υπεύθυνη Πράξης

Άννα-Αικατερίνη Λυκούρη

Σύμβουλος Α΄ του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

«Με τη συγχρηματοδότηση της Ευρωπαϊκής Ένωσης»

και το Πρόγραμμα «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή»

Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ Υπουργείο Παιδείας, Θρησκευμάτων και Αθλητισμού

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΕΣΠΑ 2021-2027

Πρόγραμμα Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΡΕΚΟΥΜΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ
ΚΑΤΣΑΠΑΣ ΛΑΜΠΡΟΣ
ΚΟΥΜΑΝΤΟΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ
ΡΕΚΟΥΜΗ ΕΛΕΝΗ

ΑΛΓΕΒΡΑ

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ
«ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ

ΡΕΚΟΥΜΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ
ΚΑΤΣΑΠΑΣ ΛΑΜΠΡΟΣ
ΚΟΥΜΑΝΤΟΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ
ΡΕΚΟΥΜΗ ΕΛΕΝΗ

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΒΙΒΛΙΟΥ

CONCEPT MANIAX

Περιεχόμενα

Η Ταυτότητα του βιβλίου

Εισαγωγή

Το παρόν σχολικό εγχειρίδιο στην Άλγεβρα απευθύνεται στους μαθητές και τις μαθήτριες της Α΄τάξης των Λυκείων της χώρας μας. Είναι σχεδιασμένο και γραμμένο σύμφωνα με τις οδηγίες του ΙΕΠ και όλα, όσα ορίζονται στο νέο πρόγραμμα σπουδών (ΠΣ), έρχεται δε να υπηρετήσει και να υλοποιήσει τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα (ΠΜΑ) που περιγράφονται αναλυτικά σε αυτό.

Ορισμένα δομικά χαρακτηριστικά που η συγγραφική ομάδα θεωρεί σημαντικά και αποτελούσαν κατά κάποιον τρόπο πυξίδα σε όλη την πορεία συγγραφής, είναι ότι το βιβλίο σε αντιστοίχιση με το ΠΣ και ως κύριος συνδετικός κρίκος των συντελεστών μάθησης σε μια αίθουσα, πρέπει :

- Να υποστηρίζει την ατομική, την κοινωνική και την πολιτισμική προσέγγιση στη μάθηση των μαθηματικών, να τις αντιμετωπίζει ως συμπληρωματικές και σε συνεχή αλληλεπίδραση και να εστιάζει στο βασικό δίπολο μάθηση και μαθητής, μάθηση και διδασκαλία. Επιδιώκει στο να καταστήσει τους/τις μαθητές/-τριες ικανούς/-ες να συνδέουν έννοιες, να κατανοούν το πεδίο εφαρμογής με τους περιορισμούς μιας μαθηματικής έννοιας, κυρίως όμως να αναζητούν και να επινοούν λύσεις σε προβλήματα.
- Να ενθαρρύνει και να προτρέπει τους μαθητές/-τριες να να οργανώνουν τις γνώσεις τους με λογικό τρόπο και να μαθαίνουν νέες ιδέες που σχετίζονται με τις υπάρχουσες γνώσεις, έτσι ώστε όταν διατυπώνουν έναν μαθηματικό συλλογισμό, να είναι σε θέση να κατανοήσουν, να αξιολογήσουν και να διακρίνουν τις κεντρικές ιδέες που συγκροτούν την μαθηματική επιχειρηματολογία.
- Να δίνει μέσα από τις δραστηριότητες που περιέχει τη δυνατότητα στον εκπαιδευτικό να δημιουργεί ένα πλούσιο μαθησιακό περιβάλλον συνεργατικής οικοδόμησης της γνώσης με χρήσιμα επακόλουθα, όπως η αυτενέργεια, η αυτοπεποίθηση και η αυτοεκτίμηση. Να έχει στη διάθεσή του έργα που θα αναθέτει στην τάξη και θα καθορίζουν σε μεγάλο βαθμό το είδος της μαθηματικής δραστηριότητας που θα αναπτύξουν οι μαθητές/-τριες. Με τον τρόπο αυτό ο/η διδάσκων/ούσα δημιουργεί ένα υποστηρικτικό περιβάλλον μάθησης, στο οποίο :

  Ενθαρρύνει τη συμμετοχή των μαθητών σε ατομικές και ομαδικές δραστηριότητες στα πλαίσια ενός ερευνητικού περιβάλλοντος.

  Επικεντρώνει στις σημαντικές ιδέες.

  Συνδέει τη νέα γνώση με τις προϋπάρχουσες των μαθητών/-τριών μέσω πολλαπλών προσεγγίσεων ανάλογα με τις ανάγκες, τις δυνατότητες και τα ενδιαφέροντά τους.

  Υιοθετεί στρατηγικές διαφοροποιημένης διδασκαλίας.

  Αξιοποιεί κατάλληλα τις νέες τεχνολογίες.

  Ενθαρρύνει τον κριτικό στοχασμό.
- Να διασφαλίζει ότι τα περιεχόμενα κάθε κεφαλαίου και κάθε ενότητας είναι συμβατά με τις αρχές και τους στόχους του νέου ΠΣ , όπως αυτοί εξειδικεύονται στα Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ), τα οποία διατυπώνονται με ακρίβεια για να περιγράψουν τι αλλά και σε ποιο επίπεδο καλούνται να γνωρίζουν, να κατανοούν και να είναι σε θέση να κάνουν οι μαθητές/τριες.

Η συγγραφική ομάδα μελέτησε και υιοθέτησε πολλές από τις αρχές που διέπουν το νέο ΠΣ , όπως για παράδειγμα ότι το περιεχόμενο κάθε σχολικού βιβλίου πρέπει :

(i) Να υπηρετεί την ανάπτυξη των ΠΜΑ χαρτογραφώντας την εξελικτική πορεία της μάθησης και την ανάπτυξη των μαθηματικών νοημάτων.

(ii) Να αναπτύσσει το μαθηματικό περιεχόμενο λαμβάνοντας υπόψη: τη βασική αρχή της μάθησης μέσω διερεύνησης, την ανάπτυξη της ικανότητας όλων των μαθητών/-τριών ώστε να παίρνουν αποφάσεις με ατομική, συλλογική σκέψη, επικοινωνία, αλληλεπίδραση και συνεργασία.

(iii) Να μοντελοποιούν πραγματικές καταστάσεις.

(iv) Να εμπλέκουν τους/τις μαθητές/-τριες σε μαθηματικές πρακτικές οι οποίες αναπτύσσουν τον συλλογισμό, την μοντελοποίηση, την επικοινωνία και τον αναστοχασμό και ενδυναμώνουν τη μάθηση των μαθηματικών.

(v) Να υποστηρίζουν κοινωνικο-πολιτισμικές και κοινωνικο-συναισθηματικές πρακτικές, δηλαδή διεργασίες που ενέχουν ταυτόχρονα γνωστικά και κοινωνικο-πολιτισμικό-πολιτικά στοιχεία της ανθρώπινης νοητικής και φυσικής δράσης και δραστηριότητας, όπως η επικοινωνία, η αλληλεπίδραση, ο λόγος, η συμπερίληψη, η ανάπτυξη μαθηματικής ταυτότητας μάθησης, η ανάπτυξη κριτικής επίγνωσης του τρόπου χρήσης των μαθηματικών, η κατανόηση της σχέσης μαθηματικών και πολιτισμού, η μαθηματική εγγραμματοσύνη.

Ένα σημαντικό στοιχείο των νέων βιβλίων είναι ότι στο τέλος κάθε Κεφαλαίου υπάρχει μια διδακτική ενότητα ανακεφαλαίωσης στην οποία αναπτύσσονται έργα, με τα οποία ο/η εκπαιδευτικός ελέγχει την επίτευξη των ΠΜΑ της θεματικής ενότητας και διαμορφώνει συνολική άποψη για την μαθησιακή πορεία των μαθητών και μαθητριών ατομικά και συλλογικά . Η διδακτική ενότητα ανακεφαλαίωσης περιλαμβάνει επιπλέον έργα, τα οποία προσφέρουν τη δυνατότητα περαιτέρω αναζητήσεων και διευρύνσεων στους μαθητές και τις μαθήτριες, τόσο ατομικά όσο και συλλογικά, με στόχο την εμβάθυνση στην κατανόηση του συνόλου των ΠΜΑ της θεματικής ενότητας με συνθετικό τρόπο.

Όσον αφορά τη δομή και τη γενική φιλοσοφία του βιβλίου, θεωρούμε χρήσιμο να αναφέρουμε τα εξής:

Οι τυπικοί ορισμοί των εννοιών δίνονται , αφού προηγηθούν οι αντίστοιχοι άτυποι και/ή διαισθητικοί ορισμοί των εννοιών, οι οποίοι θα βοηθήσουν τον/τη μαθητή/-τρια στην καλύτερη και βαθύτερη κατανόηση της αντίστοιχης μαθηματικής έννοιας. Οι ορισμοί παρουσιάζονται συχνά με πολλαπλές αναπαραστάσεις, δηλαδή εικονικές, συμβολικές κλπ.

Η χρήση των συμβόλων γίνεται μόνο όπου είναι απαραίτητη, αφήνοντας έτσι περιθώριο χρήσης της φυσικής γλώσσας, ώστε να αποδίδεται το νόημα λεκτικά και να δίνεται έμφαση στην κατανόηση.

Έχει αποφευχθεί η χρήση των λογικών συμβόλων της συνεπαγωγής και ισοδυναμίας και δόθηκε βαρύτατα στην λεκτική παρουσίαση όλων των σταδίων σε μια μαθηματική διεργασία, όπως η επίλυση μας εξίσωσης ή η απόδειξη μιας ανισότητας κλπ.

Τέλος, με την πεποίθηση ότι το βιβλίο αυτό ανταποκρίνεται ικανοποιητικά στα κριτήρια ενός σύγχρονου σχολικού εγχειριδίου, το αφιερώνουμε στους μαθητές και τις μαθήτριες αλλά και στους εκπαιδευτικούς, που θα το ζωντανέψουν και θα το αξιοποιήσουν στο μέγιστο βαθμό με τις παιδαγωγικές αρετές τους.

Οι συγγραφείς

Τα Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ)

Σύνολα.

1. Αναγνωρίζουν αν μια ιδιότητα ορίζει ένα σύνολο.
2. Αναπαριστούν τα σύνολα με διάφορους τρόπους (αναγραφή, περιγραφή στοιχείων, διάγραμμα Venn).
3. Εξετάζουν αν ένα αντικείμενο ανήκει ή όχι σε ένα σύνολο και δηλώνουν αυτή τη σχέση συμβολικά.
4. Αναγνωρίζουν και δηλώνουν σχέσεις και πράξεις μεταξύ συνόλων με χρήση διαφορετικών αναπαραστάσεων και λεκτικά με κατάλληλη χρήση των συνδέσμων «ή» και «και».

Πραγματικοί αριθμοί.

1. Διακρίνουν τους ρητούς από τους άρρητους αριθμούς μέσα από τις διάφορες αναπαραστάσεις τους και ταξινομούν συγκεκριμένους αριθμούς στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R}$.
2. Διερευνούν την έννοια της «πυκνότητας» και της «διαδοχικότητας» στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών.
3. Συμβολίζουν με διαστήματα τα υποσύνολα των πραγματικών αριθμών που προσδιορίζονται από ανισοτικές σχέσεις.
4. Ορίζουν αλγεβρικά την απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού και τη συνδέουν με την απόσταση του αριθμού από το μηδέν. Ερμηνεύουν γεωμετρικά την απόλυτη τιμή της διαφοράς δύο πραγματικών αριθμών.
5. Αποδεικνύουν βασικές ιδιότητες της απόλυτης τιμής.
6. Ορίζουν τη ν-οστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α ως τη μοναδική μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^{\nu} = \alpha$ και αποδεικνύουν τις βασικές ιδιότητες (γινόμενο και πηλίκο ριζών).
7. Ορίζουν δυνάμεις με ρητό εκθέτη και διερευνούν τις ιδιότητές τους.
8. Χρησιμοποιούν τον ορισμό και τις ιδιότητες των ν -οστών ριζών και γενικότερα των δυνάμεων με ρητό εκθέτη στον υπολογισμό της τιμής αριθμητικών παραστάσεων.

Αλγεβρικές παραστάσεις.

1. Αποδεικνύουν τις ταυτότητες που σχετίζονται με τις παραστάσεις $(\alpha\pm\beta)^3$ και $\alpha^3\pm\beta^3$.
2. Χρησιμοποιούν τις ταυτότητες σε συνδυασμό με τις ιδιότητες των ν-οστών ριζών και γενικότερα των δυνάμεων με ρητό εκθέτη στο μετασχηματισμό αλγεβρικών παραστάσεων

Ψηφιακός Οδηγός Εκπαιδευτικού

Διδακτικό εγχειρίδιο
Οδηγός στη διάταξη πραγματικών αριθμών

Αλγεβρικές σχέσεις.

1. Επιλύουν απλές παραμετρικές εξισώσεις $1^{ου}$ βαθμού και ρεαλιστικά προβλήματα που ανάγονται σε εξισώσεις αυτής της μορφής.
2. Διερευνούν τις ιδιότητες που συνδέουν τη διάταξη με τις πράξεις και αποδεικνύουν ανισοτικές σχέσεις.
3. Επιλύουν αλγεβρικά και γεωμετρικά απλές εξισώσεις, ανισώσεις και προβλήματα χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της απόλυτης τιμής.
4. Επιλύουν εξισώσεις της μορφής $x^ν = α$.
5. Επιλύουν αλγεβρικά εξισώσεις $2^{ου}$ βαθμού.
6. Επιλύουν εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις $2^{ου}$ βαθμού.
7. Χρησιμοποιούν εξισώσεις $2^{ου}$ βαθμού στη μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων
8. Μοντελοποιούν προβλήματα που ανάγονται στο πρόσημο και στις ρίζες τριωνύμου και η επίλυσή τους διευκολύνεται γραφικά.
9. Επιλύουν ανισώσεις $2^{ου}$ βαθμού αλγεβρικά και γραφικά.
10. Χρησιμοποιούν ανισώσεις $2^{ου}$ βαθμού στη μοντελοποίηση και στην επίλυση προβλημάτων.
11. Κατασκευάζουν δικά τους προβλήματα που επιλύονται με εξισώσεις ή/και ανισώσεις $2^{ου}$ βαθμού.

Συναρτήσεις

1. Αναγνωρίζουν συναρτήσεις μέσα από καταστάσεις συμμεταβολής της καθημερινής ζωής και τις διακρίνουν από άλλες σχέσεις συμμεταβολής.
2. Χρησιμοποιούν τον ορισμό της συνάρτησης για να εξετάσουν αν μία σχέση ή αντιστοιχία είναι συνάρτηση ή όχι.
3. Συνδέουν διαφορετικές αναπαραστάσεις μιας συνάρτησης.
4. Ερμηνεύουν μία δεδομένη γραφική παράσταση συνάρτησης για να επιλύσουν ένα πρόβλημα.
5. Ερμηνεύουν το ρόλο των παραμέτρων α και β στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=αx+β$.
6. Αντλούν από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης της μορφής $f(x)=αx+β$ πληροφορίες για τη συνάρτηση, όπως η κλίση της και η εξίσωσή της.
7. Αναγνωρίζουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=αx^2+βx+γ, α \neq 0$ και τις τετμημένες των σημείων τομής της με τον άξονα $x'x$ ως τις ρίζες της εξίσωσης $αx^2+βx+γ=0$.
8. Προσδιορίζουν αλγεβρικά και ερμηνεύουν γραφικά το πρόσημο της συνάρτησης $f(x)=αx^2+βx+γ, α \neq 0$
9. Χρησιμοποιούν πολυωνυμικές συναρτήσεις 1ου και 2ου βαθμού στη μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων.
10. Ορίζουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνίας μεταξύ 0^0 και 360^0 με τη βοήθεια συστήματος συντεταγμένων.
11. Αποδεικνύουν τις βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες $εφx=\frac{ημx}{συνx}$, $σφx=\frac{συνx}{ημx}$, $ημ^2x+συν^2x=1$ και υπολογίζουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας γωνίας μεταξύ 0^0 και 360^0 όταν ένας από αυτούς είναι γνωστός.

Διδακτικό εγχειρίδιο Οδηγός στις Εξισώσεις

Διδακτικό εγχειρίδιο Οδηγός Κλασική Άλγεβρα

Διδακτικό εγχειρίδιο Οδηγός στην Παραγοντοποίηση

Διδακτικό εγχειρίδιο Οδηγός στις Ρίζες Πραγματικών Αριθμών

Οι συμβολισμοί του βιβλίου

Αριθμός κεφαλαίου και ενότητας

Τίτλος ενότητας

Περιεχόμενα Ενότητας

Σχέδια και σχήματα βιβλίου

Απόδειξη

5.1 Η έννοια της συνάρτησης

Περιέχονται:

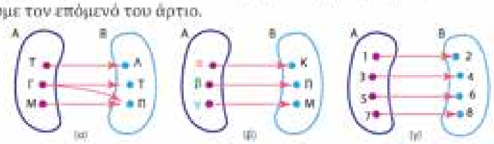
- Η έννοια της συνάρτησης
- Ορισμοί
- Ορισμός συνάρτησης
- Πεδίο ορισμού και σύνολο αφετηρίας συνάρτησης
- Σύνολο τιμών συνάρτησης
- Ανεξάρτητη μεταβλητή
- Εξαρτημένη μεταβλητή

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε:

- Να αναγνωρίζουμε συναρτήσεις μέσα από καταστάσεις συμμεταβολής της καθημερινής ζωής.
- Να διακρίνουμε τις συναρτήσεις από άλλες σχέσεις συμμεταβολής.
- Να χρησιμοποιούμε τον ορισμό της συνάρτησης για να εξετάσουμε αν μία σχέση ή αντιστοιχία είναι συνάρτηση ή όχι.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Στο επόμενο διάγραμμα (α) φαίνονται οι τρόποι με του οποίους ο Τάκης (Τ), ο Γιάννης (Γ), και η Μαρία (Μ), πηγαίνουν από το σπίτι στο σχολείο: Με λεωφορείο (Λ), με τραμ (Τ), ή με τα πόδια (Π).
Στο διάγραμμα (β) αντιστοιχίζουμε σε καθένα από τα γράμματα α, β, γ το χρώμα του, κόκκινο (Κ), πράσινο (Π) και μπλε (Μ).
Στο διάγραμμα (γ), σε καθένα από τους περιττούς αριθμούς 1, 3, 5 και 7 αντιστοιχίζουμε τον επόμενό του άρτιο.



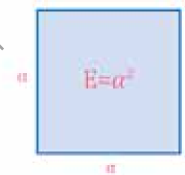
Στοιχεία του Α				
Στοιχεία του Β				

α. Σε ποιο από τα παραπάνω διαγράμματα κάθε στοιχείο του συνόλου A αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο στοιχείο του συνόλου B;
β. Για το διάγραμμα (γ), να συμπληρώσετε τον διπλανό πίνακα τιμών.

Η έννοια της συνάρτησης

Στην καθημερινή ζωή παρατηρούμε μεταβολές δύο μεγεθών, οι οποίες γίνονται, με τέτοιο τρόπο, ώστε, σε κάθε τιμή του ενός να αντιστοιχεί μία μόνο τιμή του άλλου.

Παράδειγμα 1
Το διάστημα s που διανύει ένα αυτοκίνητο κινούμενο με σταθερή ταχύτητα μέτρου $v = 2m/s$ εξαρτάται από τον χρόνο κίνησης. Σε κάθε χρονική στιγμή $t \in [0,10]$ αντιστοιχεί μία μόνο τιμή του διαστήματος $s \in [0,20]$ αφού το κινητό δεν μπορεί να βρίσκεται την ίδια χρονική στιγμή σε διαφορετικές θέσεις.
Λέμε, ότι το s είναι συνάρτηση του t.



Παράδειγμα 2
Το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς α είναι $E = \alpha^2$. Όταν η πλευρά α μεταβάλλεται στο διάστημα $A = (2, 5)$ σε κάθε τιμή της αντιστοιχεί μία μόνο τιμή του εμβαδού στο διάστημα $B = (4, 25)$.
Λέμε, ότι το εμβαδό είναι συνάρτηση του α.

Απόδειξη

Έχουμε:

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)^3 &= (\alpha+\beta)(\alpha+\beta)^2 = (\alpha+\beta)(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)\\ &= \alpha(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)+\beta(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)\\ &= \alpha^3+2\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2+\beta^3\\ &= \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3\end{aligned}$$

Γενικότερα συμπεράσματα

Γενικότερα:
Αν πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη δύο ή περισσότερες ανισότητες που έχουν την ίδια φορά και θετικά μέλη, τότε προκύπτει ανισότητα με ίδια φορά:

Αν $\alpha > \beta > 0$ και $\gamma > \delta > 0$ τότε $\alpha\gamma > \beta\delta$.

- Σε κάποιο στοιχείο του A αντιστοιχίζουν περισσότερα από ένα στοιχεία του B, ή
- Υπάρχει, τουλάχιστον, ένα στοιχείο του A που δεν αντιστοιχίζεται σε στοιχείο του B.

Παραδείγματα

Παράδειγμα 3
Δεν ορίζουν συναρτήσεις οι παρακάτω διαδικασίες:
- Σε κάθε μαθητή αντιστοιχίζουμε τους φίλους του, αφού υπάρχουν μαθητές με περισσότερους από ένα φίλους.
- Σε κάθε φυσικό αριθμό αντιστοιχίζουμε τους διαιρέτες του, εκτός από τον εαυτό του και την μονάδα, αφού, για παράδειγμα, στο 5 δεν αντιστοιχίζουμε κανένα τέτοιο διαιρέτη, ενώ στον 6 αντιστοιχίζουμε τους 2 και 3.

Παραπομπή σε ασκήσεις

Ασκήσει 2, 3 και 4

Δίνουμε στη συνέχεια τους επόμενους ορισμούς:

Ορισμοί

ΟΡΙΣΜΟΙ
Συνάρτηση f από το σύνολο A στο σύνολο B λέμε έναν κανόνα, ο οποίος σε κάθε στοιχείο x του συνόλου A αντιστοιχίζει ακριβώς ένα στοιχείο του συνόλου B που συμβολίζεται με $f(x)$.

Το σύνολο A λέγεται πεδίο ορισμού ή σύνολο αφετηρίας και πολλές φορές συμβολίζεται A_f ή D_f. Το σύνολο B λέγεται σύνολο αφίξεως της συνάρτησης.

Το $f(x)$ λέγεται τιμή της συνάρτησης στο x. Το υποσύνολο του B με στοιχεία τις τιμές $f(x)$ της συνάρτησης στο x, για όλα τα στοιχεία x του συνόλου A, λέγεται σύνολο τιμών της συνάρτησης και συμβολίζεται με $f(A)$.

$$f(A) = \{f(x) \,/\, x \in A\}$$

Αν συμβολίσουμε με $y \in B$ την **τιμή της συνάρτησης** στο x, τότε $y = f(x)$

Το x λέγεται ανεξάρτητη μεταβλητή και το y λέγεται εξαρτημένη μεταβλητή.

Ασκήσεις 5 και 6

Ασκήσεις και προβλήματα

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Ασκήσεις κατανόησης

1. Να χαρακτηρίσετε σαν αληθή ή ψευδή καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις:
(α) Για την συνάρτηση $f: A \to B$ το A λέγεται πεδίο ορισμού και το B σύνολο αφίξεως της f.
(β) Υπάρχει συνάρτηση f με $f(1)=2$ και $f(1)=5$.
(γ) Το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης είναι υποσύνολο του συνόλου αφίξεως.
(δ) Το ύψος ενός ανθρώπου είναι συνάρτηση της ηλικίας του.

Εφαρμογή

Εφαρμογή 1
Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$(\alpha+\beta)^3 + 2(\alpha^3+\beta^3) = 3(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)$$

Λύση
Έχουμε:

Πρώτο μέλος: $(\alpha+\beta)^3 + 2(\alpha^3+\beta^3) = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 + 2\alpha^3 + 2\beta^3$
$= 3\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + 3\beta^3$

Δεύτερο μέλος: $3(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2) = 3(\alpha^3 + \alpha\beta^2 + \alpha^2\beta + \beta^3)$
$= 3\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + 3\beta^3$

Επομένως $(\alpha+\beta)^3 + 2(\alpha^3+\beta^3) = 3(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)$

Για να αποδείξουμε μια ταυτότητα, ένας τρόπος είναι να εκτελέσουμε τις πράξεις σε κάθε ένα από τα δύο μέλη της ξεχωριστά και να καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα.

Η ιστορία της Άλγεβρας

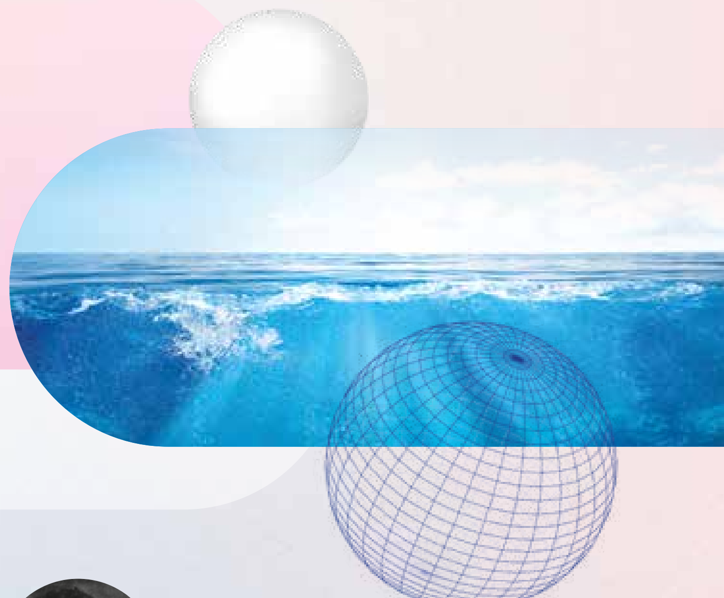
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

Σύνολα

Σύντομη γνωριμία

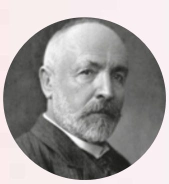
Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα πιο βασικά στοιχεία από τη θεωρία των συνόλων, όπως πχ η παράσταση συνόλων και πράξεις με σύνολα.
Η κατανόηση όλων των σχετικών εννοιών είναι σημαντική και συναντάται σε όλους τους κλάδους των μαθηματικών, τόσο στο Λύκειο όσο και στην Τριτοβάθμια εκπαίδευση.

Περιεχόμενα



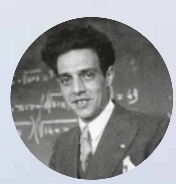
Λέξεις κλειδιά:

Σύνολο
Αναπαράσταση
Ανήκει
Ίσα σύνολα
Υποσύνολο
Ένωση
Τομή
Συμπλήρωμα
Βασικό σύνολο
Αφαίρεση συνόλων



Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845– 1918)

Γερμανός Μαθηματικός με κεντρικό ρόλο στη δημιουργία της θεωρίας συνόλων. Πριν από αυτόν, η έννοια του συνόλου ήταν μάλλον στοιχειώδης και ασαφής. O Cantor διαπίστωσε ότι η θεωρία συνόλων έπρεπε να μελετηθεί σε βάθος, γιατί χωρίς την αυστηρή θεμελίωσή τους, τόσο οι πραγματικοί αριθμοί όσο και οι άπειρες διαδικασίες κινδύνευαν από αντιφάσεις. Οι βασικές έννοιες της θεωρίας συνόλων χρησιμοποιούνται πλέον σε όλα τα μαθηματικά.



Giuseppe Peano (1858– 1932)

Ιταλός μαθηματικός και γλωσσολόγος. Συνέβαλε στην ανάπτυξη της ανάλυσης, των συνόλων και της λογικής. Συνεισέφερε στους τομείς των διαφορικών εξισώσεων και της διανυσματικής ανάλυσης. Έπαιξε βασικό ρόλο στην αξιοποίηση των μαθηματικών και ήταν πρωτοπόρος στην ανάπτυξη της μαθηματικής λογικής. Η αξιωματική θεμελίωση των φυσικών αριθμών πήρε το όνομά του προς τιμή του και ονομάζεται «αξιώματα Peano». Το μεγαλύτερο μέρος της καριέρας του δίδασκε μαθηματικά στο Πανεπιστήμιο του Τορίνο.

1.1 Η έννοια του συνόλου

- Η έννοια του συνόλου
- Αναπαράσταση συνόλων
- Τα σύμβολα $\in$ και $\notin$
- Ίσα σύνολα
- Υποσύνολο συνόλου
- Η έννοια του βασικού συνόλου

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε:

- Να αναγνωρίζουμε αν μία ιδιότητα ορίζει ένα σύνολο.
- Να αναπαριστάνουμε τα σύνολα με αναγραφή και περιγραφή των στοιχείων τους και με διαγράμματα Venn.
- Την έννοια του βασικού συνόλου.

Η έννοια του συνόλου

Η έννοια του συνόλου είναι πρωταρχική έννοια, όπως του σημείου, της ευθείας, του επίπεδου και άλλων. Αντιλαμβανόμαστε την έννοια του συνόλου ως μια συλλογή αντικειμένων που γίνονται αντιληπτά με την εμπειρία μας ή τη διανόησή μας, είναι καλά ορισμένα και διακρίνονται με σαφήνεια μεταξύ τους.

Για παράδειγμα, μπορούμε να μιλάμε για το σύνολο των φυσικών αριθμών, το οποίο έχει στοιχεία όλους τους φυσικούς αριθμούς, αλλά δεν μπορούμε να μιλάμε για το σύνολο των μεγάλων φυσικών αριθμών, γιατί δεν έχουμε ορίσει ποιος φυσικός αριθμός είναι ή δεν είναι μεγάλος.

Συνήθως, για να ορίσουμε ένα σύνολο, χρησιμοποιούμε μια ιδιότητα των στοιχείων του, η οποία χαρακτηρίζει τα στοιχεία αυτά και μόνο αυτά, όπως στα επόμενα παραδείγματα:

Παραδείγματα

Οι επόμενες προτάσεις ορίζουν σύνολο με την μαθηματική έννοια του όρου:

- Το σύνολο με στοιχεία τους άρτιους φυσικούς αριθμούς.
- Το σύνολο με στοιχεία τους φυσικούς αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι του 100.
- Το σύνολο των γραμμάτων της λέξης ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ.
- Το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης $x^3=1$.
- Το σύνολο των αριθμών που επαληθεύουν την ανίσωση $x^2\le -1$.

- Η εξίσωση $x^3=1$ έχει μία μόνο λύση την $x=1$. Λέμε ότι το σύνολο με στοιχεία τις λύσεις της είναι μονομελές σύνολο.
- Η ανίσωση $x^2\le -1$ είναι αδύνατη, γιατί $x^2\ge 0$. Λέμε ότι το σύνολο με τις λύσεις της είναι το κενό σύνολο και το συμβολίζουμε συνήθως $\varnothing$.

Δεν ορίζουν σύνολο στα Μαθηματικά οι επόμενες προτάσεις:

- «Το σύνολο των ωραίων πινάκων ζωγραφικής», διότι η έννοια του ωραίου είναι υποκειμενική. Δεν υπάρχει κανόνας που να ορίζει ποιος πίνακας είναι ωραίος και ποιος δεν είναι ωραίος.
- «Το σύνολο των έξυπνων ανθρώπων», διότι δεν έχουμε ορίσει ποιος είναι έξυπνος και ποιος δεν είναι. Αν όμως θεωρήσουμε τους ανθρώπους με δείκτη νοημοσύνης άνω του 145, τότε αυτοί συγκροτούν ένα σύνολο με την μαθηματική έννοια του όρου.

Για να συμβολίσουμε ένα σύνολο, χρησιμοποιούμε ένα κεφαλαίο γράμμα του Ελληνικού ή του Αγγλικού αλφάβητου Α, Β, Ζ, C, R, κ.λπ., ενώ τα στοιχεία του τα συμβολίζουμε συνήθως με μικρά γράμματα α, β, γ, x, y, w κ.λπ.

Δεχόμαστε ότι υπάρχει ένα σύνολο χωρίς στοιχεία, το οποίο λέγεται κενό σύνολο και συμβολίζεται με $\varnothing$ ή $\{\ \}$.

Αναπαράσταση των συνόλων

Τα σύνολα παριστάνονται με τρεις κυρίως τρόπους: **Με αναγραφή των στοιχείων τους, με περιγραφή των στοιχείων τους και με διαγράμματα Venn.**

Παράσταση συνόλου με αναγραφή των στοιχείων του

Όταν το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου είναι σχετικά μικρό, τότε, εφόσον είναι δυνατόν, γράφουμε τα στοιχεία του μέσα σε άγκιστρα και τα χωρίζουμε με κόμματα. Για παράδειγμα το σύνολο των άρτιων ψηφίων έχει στοιχεία τα ψηφία $0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8$ και παριστάνεται ως

$$A=\{\ 0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8\ \}$$

Η σειρά με την οποία γράφονται τα στοιχεία του συνόλου μέσα στα άγκιστρα δεν έχει σημασία. Για παράδειγμα το παραπάνω σύνολο παριστάνεται και ως

$$A=\{8,\ 6,\ 4,\ 2,\ 0\} \quad \text{ή} \quad A=\{0,\ 2,\ 4,\ 8,\ 6\}$$

Παρόμοια, παριστάνουμε σύνολα με σχετικά πολλά ή ακόμη και άπειρα στοιχεία, γράφοντας μέσα σε άγκιστρα μερικά από τα στοιχεία τους και παραλείποντας τα υπόλοιπα, με χρήση αποσιωπητικών, αρκεί να είναι φανερό ποια στοιχεία παραλείπονται. Για παράδειγμα το σύνολο Β των ακεραίων x με $2 \leq x \leq 1000$ συμβολίζεται ως

$$\mathrm{B}=\{2,\ 3,\ 4,\ ...\ ,\ 999,\ 1000\},$$

ενώ το σύνολο όλων των φυσικών αριθμών συμβολίζεται ως

$$\mathbb{N}=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ ...\}$$

Παράσταση συνόλου με περιγραφή των στοιχείων του

Ο τρόπος αυτός χρησιμοποιείται για την παράσταση ενός συνόλου, για τα στοιχεία του οποίου γνωρίζουμε μια χαρακτηριστική ιδιότητά τους. Αν, για παράδειγμα, από το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ ...\}$ επιλέξουμε τα πολλαπλάσια του 3, τότε φτιάχνουμε σύνολο, το οποίο συμβολίζεται ως εξής:

$$\{x \in \mathbb{N} \,|\, x \text{ πολλαπλάσιο του } 3\}$$

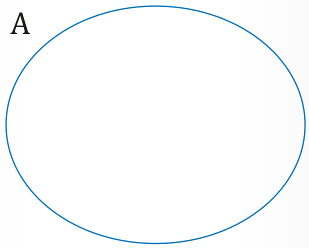
και διαβάζεται «το σύνολο των $x \in \mathbb{N}$, όπου το x είναι πολλαπλάσιο του 3».

Γενικά, για να παραστήσουμε με περιγραφή των στοιχείων του ένα σύνολο, γράφουμε μέσα σε άγκιστρα πρώτα το « $x \,|\, x$ », που διαβάζεται «το x, όπου το x ...», και στη συνέχεια γράφουμε την ιδιότητα που έχουν τα στοιχεία του συνόλου. Αν θέλουμε να δηλώσουμε ότι τα στοιχεία x επιλέγονται από τα στοιχεία ενός συνόλου Ω, αντί του « $x \,|\, x$ », γράφουμε « $x \in \Omega \,|\, x$ » και διαβάζουμε «το σύνολο των στοιχείων $x \in \Omega$, όπου το x ...».

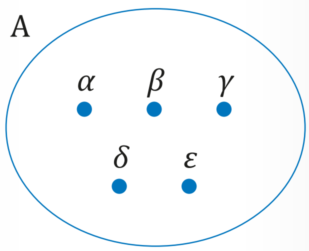
Άσκηση 5

Παράσταση συνόλου με διάγραμμα Venn

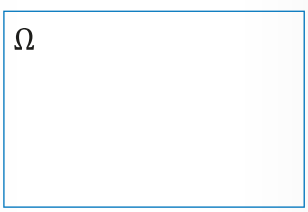
Τα διαγράμματα Venn δίνουν μία περισσότερο εποπτική αντίληψη της έννοιας του συνόλου. Με τον τρόπο αυτό, κάθε σύνολο παριστάνεται με το εσωτερικό μιας κλειστής καμπύλης (σχήμα α). Αν το πλήθος των στοιχείων είναι σχετικά μικρό, τότε το παριστάνουμε, όπως, για παράδειγμα, το σύνολο $A=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\}$ (σχήμα β), αντιστοιχίζοντας κάθε στοιχείο σε μία κουκίδα.
Υπάρχουν περιπτώσεις, όπου η κλειστή γραμμή είναι ορθογώνιο (σχήμα γ).



Σχήμα (α)



Σχήμα (β)



Σχήμα (γ)

Ασκήσεις 7 και 8

Τα σύμβολα ∈ και ∉

Για να δηλώσουμε ότι ένα αντικείμενο x είναι στοιχείο ή μέλος ενός συνόλου Α, γράφουμε

$$x \in A$$

και διαβάζουμε «το x ανήκει στο Α».
Για να δηλώσουμε ότι το x δεν είναι στοιχείο ή μέλος του συνόλου Α γράφουμε

$$x \notin A$$

και διαβάζουμε «το x δεν ανήκει στο Α».

Για παράδειγμα, αν Α είναι το σύνολο των άρτιων φυσικών αριθμών, τότε γράφουμε:

$$2\in A,\ 10\in A,\ 1\notin A,\ \sqrt{2}\notin A$$

Ίσα σύνολα

Ας πάρουμε το σύνολο *A* με στοιχεία τα άρτια ψηφία της αριθμητικής και το σύνολο $B=\{0,2,4,6,8\}$. Αυτά έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία. Συγκεκριμένα, κάθε στοιχείο του συνόλου *A* είναι στοιχείο του συνόλου *B* και κάθε στοιχείο του *B* είναι στοιχείο του *A*. Λέμε, ότι τα σύνολα *A* και *B* είναι ίσα και γράφουμε *A*=*B*. Γενικά, έχουμε τον ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ
Δύο σύνολα λέγονται ίσα, όταν έχουν τα ίδια στοιχεία.

Επειδή η σειρά με την οποία γράφονται τα στοιχεία ενός συνόλου μέσα στα άγκιστρα δεν έχει σημασία, είναι:

$$\{8,\ 6,\ 4,\ 2,\ 0\}=\{0,\ 2,\ 4,\ 8,\ 6\}$$

Υποσύνολο συνόλου

Ας πάρουμε τα σύνολα $A=\{1,\ 3,\ 5\}$ και $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$. Βλέπουμε ότι όλα τα στοιχεία του A είναι και στοιχεία του *B*. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι το Α είναι υποσύνολο του Β και γράφουμε $A\subseteq B$. Γενικά έχουμε τον ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ
Ένα σύνολο A λέγεται υποσύνολο ενός συνόλου B και συμβολίζουμε $A\subseteq B$, όταν κάθε στοιχείο του A είναι στοιχείο του B.

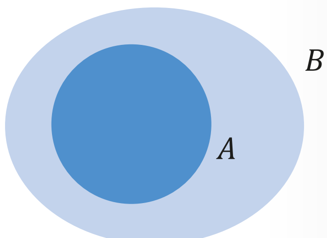
Πράξεις με σύνολα 1

Είναι $\{1, 3, 5\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, γιατί κάθε στοιχείο του πρώτου συνόλου είναι και στοιχείο του δεύτερου συνόλου.

Παραδείγματα

- Το σύνολο των αντρών είναι υποσύνολο του συνόλου των ανθρώπων.
- Το σύνολο των άρτιων φυσικών αριθμών είναι υποσύνολο του συνόλου των φυσικών αριθμών.
- Το σύνολο των σχολικών βιβλίων είναι υποσύνολο του συνόλου των βιβλίων.

Άσκηση 6



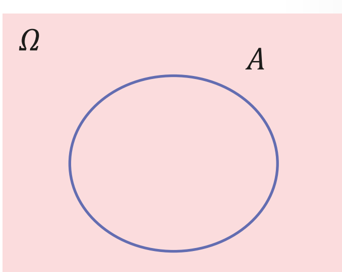
Με διάγραμμα Venn, η σχέση $A \subseteq B$ εκφράζεται ως εξής: το σύνολο A παριστάνεται με μία κλειστή καμπύλη, η οποία βρίσκεται στο εσωτερικό της καμπύλης που παριστάνει το B, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα:

Ισχύουν τα επόμενα:
Το κενό σύνολο είναι υποσύνολο κάθε συνόλου A: $\varnothing \subseteq A$.

- Κάθε σύνολο Α θεωρείται υποσύνολο του εαυτού του: $A \subseteq A$.
- Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$, τότε $A = B$.

Άσκηση 9

Η έννοια του βασικού συνόλου



Στα Μαθηματικά, στους διάφορους τομείς τους, συνήθως εργαζόμαστε με τα υποσύνολα ενός συνόλου, το οποίο λέγεται βασικό σύνολο ή σύνολο αναφοράς και θα το συμβολίζουμε με Ω. Στα διαγράμματα Venn παριστάνεται με ένα ορθογώνιο και κάθε υποσύνολό του παριστάνεται με μία κλειστή καμπύλη στο εσωτερικό μέρος του ορθογωνίου αυτού.
Τη χρησιμότητα, μαζί με εφαρμογές, του βασικού συνόλου θα τη δούμε στην επόμενη ενότητα.

Γενικές Ασκήσεις 10, 11, 12

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Ασκήσεις κατανόησης

1. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις επόμενες προτάσεις ως αληθή ή ψευδή:
(α) Τα στοιχεία της συλλογής των έξυπνων ανθρώπων είναι καλώς ορισμένα.
(β) Αν το α είναι στοιχείο του συνόλου A, τότε $\alpha \in A$.
(γ) Το κενό σύνολο είναι υποσύνολο κάθε συνόλου.
(δ) Το σύνολο των φωνηέντων της λέξης ΣΥΝΟΛΟ είναι υποσύνολο του συνόλου των γραμμάτων της ίδιας λέξης.
(ε) Ισχύει $\{5\} \subseteq \{4,5,6\}$.
(στ) Ισχύει $\{1,2,\{3,4\}\} \subseteq \{1,2,3,4,5,6\}$.

2. Να συμπληρώσετε τα κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις:
(α) Το σύνολο A είναι υποσύνολο του συνόλου B και γράφουμε ...., όταν κάθε στοιχείο του A είναι ....
(β) Το μονομελές σύνολο έχει .... στοιχείο.
(γ) Τα σύνολα $\{1,2,3\}$ και $\{3,2,1\}$ είναι ....

3. Δίνονται τα σύνολα:
$A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{x \mid \sqrt{x} = 2\}$,
$\Gamma = \{x \mid 3x = 12\}$ και $\Delta = \{x \mid x^4 < 0\}$.
Να απαντήσετε στις επόμενες ερωτήσεις, αιτιολογώντας την απάντησή σας:
(α) Είναι το σύνολο A υποσύνολο του συνόλου B;

(β) Είναι το -2 στοιχείο του συνόλου B;
(γ) Είναι το σύνολο B υποσύνολο του συνόλου Γ;
(δ) Είναι το σύνολο B ίσο με το σύνολο Γ;
(ε) Είναι κάποιο από τα σύνολα αυτά το κενό σύνολο;
(στ) Είναι το σύνολο Δ υποσύνολο του συνόλου A;
(ζ) Είναι $\{2,4\}\subseteq A$;

4. Να εξηγήσετε γιατί είναι:
(α) $\{2,4,3\}=\{3,2,4\}$
(β) $\{2,4,3\}\subseteq\{3,2,4\}$

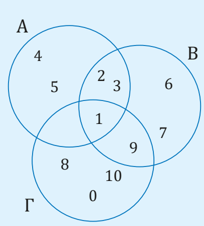
Ασκήσεις ανάπτυξης

5. Να παραστήσετε, με αναγραφή των στοιχείων τα παρακάτω σύνολα πραγματικών αριθμών:
$A=\{x \mid x^2=1\}$
$B=\{x \mid x$ φυσικός διαιρέτης του $6\}$
$\Gamma=\{$ τα γράμματα της λέξης ΑΛΓΕΒΡΑ $\}$
$\Delta=\{$ φυσικός αριθμός μεγαλύτερος του $1000\}$
$E=\{x \mid x$ ακέραιος με $x^2<10\}$

6. Να γράψετε όλα τα υποσύνολα του συνόλου

$$A=\{\alpha,\beta\}$$

7. Να γράψετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα σύνολα A, B και Γ του παρακάτω διαγράμματος:



8. Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn τα σύνολα $A=\{1,2,3\}$ και $B=\{3,4,5\}$.

9. Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn τα σύνολα $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{3,2,1\}$ και $\Gamma=\{1\}$.

10. Να γράψετε με περιγραφή των στοιχείων τους:
(α) Το σύνολο των κατοίκων της χώρας μας.
(β) Το σύνολο των ημερών της εβδομάδας.
(γ) Το σύνολο $\{1,3,5,7,9,11,13,15,17,19\}$.
(δ) Το σύνολο $\{1,2,4,8,16,32,\ldots\}$.

11. Να παραστήσετε:
(α) Με αναγραφή των στοιχείων του, το σύνολο των ακέραιων διαιρετών του 10.
(β) Με περιγραφή των στοιχείων του, το σύνολο των μηνών του έτους.
(γ) Με περιγραφή και αναγραφή των στοιχείων του το σύνολο των ατόμων του μορίου H_2SO_4

12. Δίνονται τα σύνολα

$$A=\{x\in\mathbb{R} \mid x^2=4 \text{ ή } 2x+4=0\} \text{ και}$$
$$B=\{x\in\mathbb{R} \mid x^2=4 \text{ και } 2x+4=0\}$$

(α) Να γράψετε τα σύνολα με αναγραφή των στοιχείων τους.
(β) Να βρείτε τα σύνολα $\{x \mid x\in A$ και $x\in B\}$ και $\{x \mid x\in A$ ή $x\in B\}$.

Σύνολα ορισμοί

Στον Βρετανό φιλόσοφο, μαθηματικό και ειρηνιστή Bertrand Arthur William Russell, οφείλεται το παρακάτω παράδοξο από τη θεωρία των συνόλων:
«Σε μια χώρα που όλοι οι άντρες είναι καθημερινά ξυρισμένοι, υπάρχει ένας μόνο κουρέας. Αυτός ξυρίζει όλους τους άντρες που δεν ξυρίζονται μόνοι τους. Τότε όμως ποιος ξυρίζει τον κουρέα;»
Αποκλείεται να ξυρίζεται μόνος του, αφού αυτός ξυρίζει μόνο όλους αυτούς που δεν ξυρίζονται μόνοι τους. Αποκλείεται να τον ξυρίζει κάποιος άλλος, αφού μόνο ο κουρέας ξυρίζει όλους αυτούς που δεν ξυρίζονται μόνοι τους. Βρισκόμαστε εδώ μπροστά σ' ένα παράδοξο.

1.2 Πράξεις μεταξύ συνόλων

- Τομή συνόλων
- Ένωση συνόλων
- Χρήση των συνδέσμων «και» και «ή»
- Αφαίρεση συνόλων

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε:

- Τις βασικές πράξεις συνόλων, τομή, ένωση, συμπλήρωμα συνόλου και αφαίρεση συνόλων.
- Τη χρήση των συνδέσμων «και» και «ή».

Όπως θα δούμε στη συνέχεια, οι κυριότερες πράξεις μεταξύ συνόλων είναι η τομή, η ένωση και η διαφορά συνόλων. Με τη βοήθειά τους, μπορούν να οριστούν οι υπόλοιπες πράξεις συνόλων.

Πράξεις συνόλων (τομή-ξένα)

Τομή συνόλων

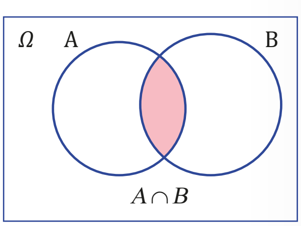
Ας θεωρήσουμε τα σύνολα $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ και $B=\{0,3,6,9\}$. Σχηματίζουμε ένα νέο σύνολο που αποτελείται από όλα τα στοιχεία, τα οποία ανήκουν σε αμφότερα τα σύνολα A και B. Το σύνολο αυτό το συμβολίζουμε $A\cap B$ και το διαβάζουμε «A τομή B» ή «A και B». Με άλλα λόγια, η τομή των συνόλων A και B αποτελείται από τα κοινά τους στοιχεία, τα οποία, στην περίπτωσή μας, είναι τα 3 και 6. Επομένως

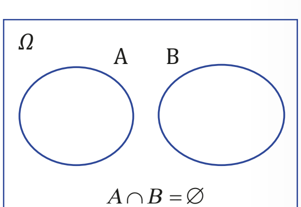
$$A\cap B=\{1,2,3,4,5,6\}\cap\{0,3,6,9\}=\{3,6\}.$$

Γενικά έχουμε τον ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ονομάζουμε τομή δύο συνόλων A και B και συμβολίζουμε $A\cap B$ το σύνολο που αποτελείται από τα κοινά τους στοιχεία.





Αν τα σύνολα δεν έχουν κοινά στοιχεία, τότε λέγονται ξένα σύνολα και η τομή τους είναι το κενό σύνολο: $A\cap B=\varnothing$. Η τομή $A\cap B$ με περιγραφή των στοιχείων της παριστάνεται ως:

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ και } x\in B\}.$$

Στο διάγραμμα Venn, η τομή παριστάνεται με το κοινό εσωτερικό μέρος των δύο καμπύλων που παριστάνουν τα σύνολα A και B. Αν τα σύνολα είναι ξένα, τότε οι καμπύλες τους δεν έχουν κοινό μέρος και βρίσκεται η μία στο εξωτερικό της άλλης. Είναι φανερό ότι:

$$A\cap B\subseteq A \text{ και } A\cap B\subseteq B.$$

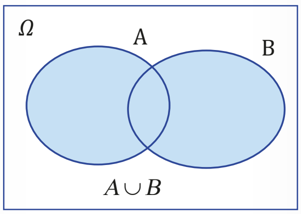
Ένωση συνόλων

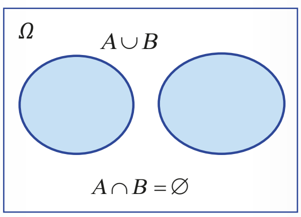
Ας θεωρήσουμε και πάλι τα σύνολα $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ και $B=\{0,3,6,9\}$. Σχηματίζουμε ένα νέο σύνολο που αποτελείται από όλα τα στοιχεία, τα οποία ανήκουν σε ένα, τουλάχιστον, από τα σύνολα A και B. Αποτελείται, δηλαδή, από τα στοιχεία που ανήκουν, ή στο σύνολο A, ή στο σύνολο B, ή και στα δύο σύνολα. Το σύνολο αυτό το συμβολίζουμε $A\cup B$ και διαβάζουμε «A ένωση B» ή «A ή B».

Για ευκολία, γράφουμε πρώτα τα στοιχεία του A και συμπληρώνουμε με τα στοιχεία του B που δεν ανήκουν στο A:

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\} \cup \{0,3,6,9\} = \{1,2,3,4,5,6,0,9\}.$$

Γενικά έχουμε τον ορισμό:





ΟΡΙΣΜΟΣ

Ονομάζουμε ένωση δύο συνόλων A και B και συμβολίζουμε $A \cup B$ το σύνολο που περιέχει όλα εκείνα τα στοιχεία που ανήκουν στο A ή στο B.

Η ένωση $A \cup B$ με περιγραφή των στοιχείων της παριστάνεται ως:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ή } x \in B\}.$$

Στο διάγραμμα Venn η ένωση παριστάνεται με το εσωτερικό μέρος και των δύο καμπύλων που παριστάνουν τα σύνολα A και B.
Είναι φανερό ότι:

$$A \subseteq A \cup B,\ B \subseteq A \cup B \text{ και } A \cap B \subseteq A \cup B.$$

Ασκήσεις 4, 5, και 6

Η χρήση των συνδέσμων «και» και «ή».

Όπως είδαμε στον ορισμό της τομής συνόλων, χρησιμοποιούμε τον σύνδεσμο «και», ενώ στον ορισμό της ένωσης χρησιμοποιούμε τον σύνδεσμο «ή»:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ και } x \in B\},\ A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ή } x \in B\}$$

Χρησιμοποιούμε το «και» για να δηλώσουμε ότι ισχύουν αμφότερα τα $x \in A$, $x \in B$, ενώ χρησιμοποιούμε το «ή» για να δηλώσουμε ότι ισχύει τουλάχιστον ένα από τα $x \in A$, $x \in B$, δηλαδή ότι ισχύει $x \in A$, ή $x \in B$ ή και τα δύο μαζί. Για καλύτερη κατανόηση, ας δούμε το επόμενο παράδειγμα.

Πράξεις με σύνολα 2

Παράδειγμα

Ο Γιάννης ισχυρίζεται ότι:

- Ισχυρισμός p: «το Σάββατο πρωί θα πάω γυμναστήριο», και
- Ισχυρισμός q: «το Σάββατο βράδυ θα πάω θέατρο».

Ας εξετάσουμε, τώρα, τους ισχυρισμούς «p και q» και «p ή q», ώστε να διαπιστώσουμε πότε είναι ο καθένας αληθής, με τη μαθηματική έννοια.
Με λόγια οι ισχυρισμοί λένε:

«p και q»: «το Σάββατο πρωί θα πάω γυμναστήριο και το Σάββατο βράδυ θα πάω θέατρο».

«p ή q»: «το Σάββατο πρωί θα πάω γυμναστήριο ή το Σάββατο βράδυ θα πάω θέατρο».

Είναι φανερό ότι ο «p και q» είναι αληθής, μόνο όταν ο Γιάννης το Σάββατο θα πάει το πρωί στο γυμναστήριο και το βράδυ στο θέατρο. Λέμε ότι ο ισχυρισμός «p και q» είναι αληθής, μόνον όταν αμφότεροι οι ισχυρισμοί p και q είναι αληθείς. Ο ισχυρισμός «p ή q» είναι αληθής, όταν ο Γιάννης το Σάββατο θα πάει το πρωί στο γυμναστήριο ή το βράδυ θα πάει στο θέατρο ή αν ο Γιάννης πάει και το πρωί γυμναστήριο και το βράδυ θέατρο. Λέμε ότι ο ισχυρισμός «p ή q» είναι αληθής, όταν τουλάχιστον ένας από τους ισχυρισμούς p και q είναι αληθής.

«Τουλάχιστον ένα από τα δύο» σημαίνει «ή το ένα ή το άλλο ή και τα δύο».

Άσκηση 7

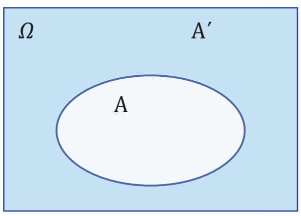
Συμπλήρωμα συνόλου

Πράξεις με σύνολα 3

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω ένα βασικό σύνολο Ω και A ένα υποσύνολό του. Το σύνολο με τα στοιχεία του Ω που δεν είναι στοιχεία του A λέγεται συμπλήρωμα ή συμπληρωματικό σύνολο του A και συμβολίζεται με A'. Διαβάζεται και, ως «όχι A».

Επομένως: $$A' = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$$



Σε διάγραμμα Venn το A' παριστάνεται με το μέρος του ορθογωνίου που βρίσκεται στο εξωτερικό μέρος της καμπύλης που παριστάνει το A.
Παρατηρούμε ότι τα σύνολα A και A' είναι ξένα μεταξύ τους και έχουν ένωση το Ω:
$$A \cap A' = \varnothing \text{ και } A \cup A' = \Omega.$$

Ακόμα είναι φανερό ότι: $\Omega' = \varnothing$ και $\varnothing' = \Omega$.

Παράδειγμα

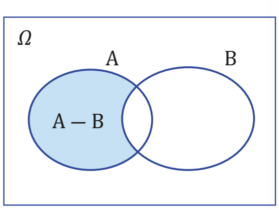
Αν $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ να βρείτε το συμπλήρωμα των συνόλων
$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ και } B = \{x \in \Omega \mid x \text{ άρτιος}\}.$$

Πράξεις συνόλων

Λύση

Τα στοιχεία του Ω που δεν είναι στοιχεία του A είναι τα $6, 7, 8, 9, 10$.
Επομένως $A' = \{6, 7, 8, 9, 10\}$.
Το συμπλήρωμα του B είναι το σύνολο $B' = \{x \in \Omega \mid x \text{ περιττός}\}$, δηλαδή $B' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

Διαφορά συνόλων



ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω δύο σύνολα A και B. Ορίζουμε σαν διαφορά $A - B$ το σύνολο με τα στοιχεία του A που δεν είναι στοιχεία του B.

Επομένως, με περιγραφή των στοιχείων του είναι:
$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ και } x \notin B\}.$$
Σε διάγραμμα Venn το $A - B$ παριστάνεται με το εσωτερικό μέρος της καμπύλης που παριστάνει το A, από το οποίο αφαιρείται το εσωτερικό μέρος της καμπύλης που παριστάνει το B.
Είναι φανερό ότι
$$A' = \Omega - A \text{ και γενικά } A - B \neq B - A.$$

Πράξεις με σύνολα 4

Η διαφορά $A - B$ σε κάποιους κλάδους των Μαθηματικών διαβάζεται «Α και όχι Β» ή «μόνο το Α». Είναι $A - B = A \cap B'$.

Παράδειγμα

Αν $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ και $B = \{4, 5, 6, 7\}$ να βρείτε τα σύνολα $A - B$ και $B - A$.

Λύση

Η διαφορά $A - B$ περιέχει όλα τα στοιχεία του A που δεν είναι στοιχεία του B, δηλαδή τα 1, 2 και 3.

Επομένως

$$A-B=\{1,2,3\}$$

Πράξεις με σύνολα 5

Πάλι, η διαφορά $B-A$ περιέχει όλα τα στοιχεία του B που δεν είναι στοιχεία του A, δηλαδή τα 6 και 7. Επομένως

$$B-A=\{6,7\}.$$

Ασκήσεις 8 και 9

Εφαρμογή 1

Δίνονται τα σύνολα $A=\{1,3,5\}$, $B=\{4,5,6\}$ και $\Gamma=\{1,2,3,4,5,6\}$.

α. Να βρείτε τα σύνολα $A\cup B$, $A\cup\Gamma$ και $(A\cup B)\cap(A\cup\Gamma)$.

β. Να βρείτε τα σύνολα $B\cap\Gamma$ και $A\cup(B\cap\Gamma)$.

Τι παρατηρείτε;

Η χρήση των παρενθέσεων δηλώνει την προτεραιότητα των πράξεων: πρώτα εκτελούνται οι πράξεις μέσα στις παρενθέσεις.

Λύση

α. Έχουμε: $A\cup B=\{1,3,4,5,6\}$, $A\cup\Gamma=\{1,2,3,4,5,6\}$ και

$$(A\cup B)\cap(A\cup\Gamma)=\{1,3,4,5,6\}$$

β. Έχουμε: $B\cap\Gamma=\{4,5,6\}$ και $A\cup(B\cap\Gamma)=\{1,3,4,5,6\}$.

Παρατηρούμε ότι $A\cup(B\cap\Gamma)=(A\cup B)\cap(A\cup\Gamma)$.

Εφαρμογή 2

Πράξεις με σύνολα 6

Έστω το βασικό σύνολο $\Omega=\{1,2,3,4,\dots,10\}$ και τα υποσύνολά του

$$A=\{x\in\Omega \mid 2<x<8\} \text{ και } B=\{x\in\Omega \mid 5\le x<10\}.$$

α. Να παραστήσετε με περιγραφή και αναγραφή των στοιχείων τους τα σύνολα $A\cap B$ και $A\cup B$.

β. Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn τα σύνολα Ω, A και B.

γ. Να βρείτε τα σύνολα A', B', $A'\cap B'$ και $(A\cup B)'$. Τι παρατηρείτε;

δ. Να βρείτε τα σύνολα $A-B$ και $B-A$.

Λύση

Είναι $A=\{3,4,5,6,7\}$ $B=\{5,6,7,8,9\}$

α. Με χρήση του συνδέσμου «και», η τομή των συνόλων παριστάνεται ως

$$A\cap B=\{x\in\Omega \mid 2<x<8 \text{ και } 5\le x<10\}.$$

Με αναγραφή των στοιχείων της είναι:

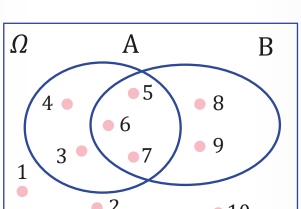
$$A\cap B=\{5,6,7\}$$

Η ένωση των συνόλων παριστάνεται με χρήση του συνδέσμου «ή», ως:

$$A\cup B=\{x\in\Omega \mid 2<x<8 \text{ ή } 5\le x<10\}.$$

Με αναγραφή των στοιχείων της είναι:

$$A\cup B=\{3,4,5,6,7,8,9\}$$



β. Στο εσωτερικό του βασικού συνόλου Ω τοποθετούμε τα στοιχεία των δύο συνόλων. Τα στοιχεία $1,2,10$ τοποθετούνται στο εξωτερικό μέρος τους, γιατί δεν ανήκουνε σε κάποιο από αυτά. Τα στοιχεία $5,6,7$ συγκροτούν την τομή τους και τοποθετούνται στο κοινό μέρος τους. Το διάγραμμα δίνεται στο σχήμα.

γ. Το συμπλήρωμα ενός συνόλου αποτελείται από όλα τα στοιχεία του Ω που δεν ανήκουν σε αυτό. Έχουμε:

$A'=\{1,2,8,9,10\}$ και $B'=\{1,2,3,4,10\}$, οπότε $A'\cap B'=\{1,2,10\}$

Αν $A, B \subseteq \Omega$, τότε:

- $(A \cup B)' = A' \cap B'$
- $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Είναι $A \cup B = \{3,4,5,6,7,8,9\}$ και $(A \cup B)' = \{1,2,10\}$.
Παρατηρούμε ότι $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

δ. Η διαφορά $A - B$ περιέχει όλα τα στοιχεία του A που δεν ανήκουν στο B επομένως $A - B = \{3,4\}$. Ομοίως βρίσκουμε: $B - A = \{8,9\}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Ασκήσεις κατανόησης

1. Να χαρακτηρίσετε σαν αληθή ή ψευδή, κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις:
(α) Τα κοινά στοιχεία δύο συνόλων περιέχονται στην τομή και την ένωσή τους.
(β) Για κάθε σύνολο A είναι $A \cap \varnothing = A$.
(γ) Αν $A \subseteq B$, τότε $A \cup B = B$.
(δ) Η διαφορά $A - B$ περιέχει όλα τα στοιχεία του A που δεν είναι στοιχεία του B.
(ε) Τα σύνολα A και A' είναι ξένα.

2. Ποιο από τα επόμενα σύνολα είναι υποσύνολο κάποιου άλλου από αυτά;

$$\varnothing,\ A,\ \ A \cap B,\ \ A \cup B.$$

3. Να απαντήσετε, αν τα σύνολα B και $A - B$ είναι ξένα μεταξύ τους και γιατί.

Ασκήσεις ανάπτυξης

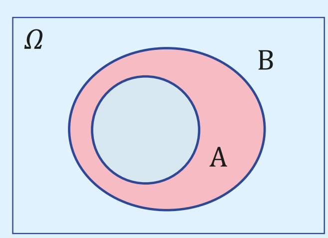
4. Δίνονται τα σύνολα
$A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ και $B = \{\gamma, \delta, \varepsilon\}$.
Να βρείτε τα σύνολα $A \cap B$ και $A \cup B$.

5. Δίνονται τα σύνολα:
$A = \{x \mid x$ άρτιος φυσικός αριθμός$\}$ και
$B = \{x \mid x$ περιττός φυσικός αριθμός$\}$.
Να βρείτε τα σύνολα $A \cap B$ και $A \cup B$.

6. Δίνεται το σύνολο $A = \{+, -\}$. Να το παραστήσετε με περιγραφή των στοιχείων του και να γράψετε όλα τα υποσύνολά του. Να βρείτε την τομή και την ένωση όλων των υποσυνόλων του.

7. Δίνονται τα σύνολα $A = \{x \mid x^2 = 1\}$ και $B = \{x \mid x$ φυσικός αριθμός με $x \le 2\}$.
(α) Να παραστήσετε τα σύνολα με αναγραφή των στοιχείων τους.
(β) Να παραστήσετε την τομή και την ένωση των συνόλων με περιγραφή των στοιχείων, με χρήση των συνδέσμων «και» και «ή».
Στη συνέχεια να τις παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων τους.

8. Δίνεται το βασικό σύνολο $\Omega = \{1,2,3,\ldots,25\}$ και τα υποσύνολά του $A = \{x \in \Omega \mid x^2 \in \Omega\}$ και $B = \{x \in \Omega \mid (3x) \in \Omega\}$.
(α) Να παραστήσετε με περιγραφή και αναγραφή των στοιχείων τους τα σύνολα:
$A',\ B',\ A \cap B,\ A \cup B,\ A - B$ και $B - A$.
(β) Να συμπληρώσετε το διάγραμμα Venn με τα στοιχεία του Ω.



9. Δίνεται το βασικό σύνολο
$\Omega = \{x \mid x$ γράμμα του Ελληνικού Αλφαβήτου$\}$
και τα υποσύνολά του $A = \{x \in \Omega \mid x$ σύμφωνο$\}$ και $B = \{x \in \Omega \mid x$ φωνήεν$\}$.

Να βρείτε τα σύνολα:
(α) $A \cap B$ και $A \cup B$
(β) A' και B'
(γ) $A - B$ και $B - A$.

1.3 Ανακεφαλαίωση

Στην ενότητα αυτή περιλαμβάνονται έργα για περαιτέρω αναζητήσεις και διευρύνσεις των μαθητών/μαθητριών, με στόχο την εμβάθυνση στην κατανόηση των Προσδοκώμενων Μαθησιακών Αποτελεσμάτων του κεφαλαίου.

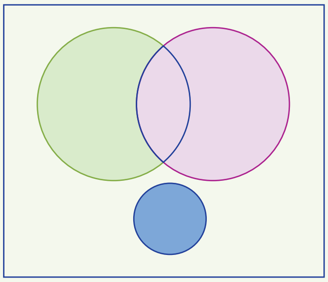
1. Να συμπληρωθούν τα παρακάτω κενά (__) με ένα κατάλληλο σύμβολο από τα $=, \neq, \subseteq, \in$ και $\notin$, ώστε να προκύψουν αληθείς ισχυρισμοί:

(α) $2 \_\_ \{2,3,4,5\}$
(β) $\{2\} \_\_ \{2,3,4,5\}$
(γ) $\varnothing \_\_ \{2,3,4,5\}$
(δ) $0 \_\_ \varnothing$
(ε) $\{5,3,4,2\} \_\_ \{2,3,4,5\}$
(στ) $A-B \_\_ A\cap B'$
(ζ) $A\cup A' \_\_ \Omega$
(η) $A\cap A' \_\_ \varnothing$
(θ) $\{3\} \_\_ \{2,\{3\},4,5\}$
(ι) $\{2,3,4,5,6\} \_\_ \{2,3,4,5\}$
(ια) $\{1,2,3,4,5\}\cap\{3,4,6\} \_\_ \{2,3,4,5\}$
(ιβ) $A-B \_\_ A-(A\cap B)$

2. Να απαντήσετε στα επόμενα ερωτήματα, αιτιολογώντας την απάντησή σας:
(α) «Το σύνολο των γρήγορων αυτοκινήτων» είναι σύνολο για τα Μαθηματικά;
(β) Ένα σύνολο με άπειρα στοιχεία είναι δυνατόν να παρασταθεί με αναγραφή των στοιχείων του;
(γ) Πόσα στοιχεία έχει το κενό σύνολο και πόσα το μονομελές σύνολο;
(δ) Πως μπορεί να παρασταθεί το σύνολο ντο, ρε, μι, φα, σολ, λα, σι με περιγραφή των στοιχείων του;
(ε) Είναι το σύνολο των πολλαπλάσιων του 4 ίσο με το σύνολο $\{x \mid x = 4\lambda,\ \lambda$ φυσικός αριθμός$\}$;

3. Στους φυσικούς αριθμούς θεωρούμε το σύνολο A των πολλαπλασίων του 9 και το σύνολο B των πολλαπλασίων του 3.
(α) Να εξηγήσετε γιατί το A είναι υποσύνολο του B.
(β) Να παραστήσετε τα σύνολα A και B με περιγραφή και αναγραφή των στοιχείων τους.
(γ) Να βρείτε τα σύνολα $A\cap B$, $A\cup B$ και $A-B$.

4. Έστω $\Omega=\{0,1,2,3,\ldots,9,10\}$ και τα υποσύνολά του $A=\{1,3,4,5,6\}$, $B=\{4,5,6,7,8,\}$ και $\Gamma=\{0,9\}$.
(α) Να βρείτε τα σύνολα $A\cup B$, $A\cup\Gamma$, $(A\cup B)\cap\Gamma$ και $(A\cup B)\cap(A\cup\Gamma)$.
(β) Να βρείτε τα σύνολα A', B', $(A\cup B)'$ και $A'\cap B'$.
(γ) Να συμπληρώσετε το επόμενο διάγραμμα Venn για τα σύνολα Ω, A, B και Γ:



5. Έστω το σύνολο των μαθητών ενός Λυκείου που έχει 250 μαθητές. Συμβολίζουμε A το σύνολο των μαθητών του Λυκείου που μαθαίνουν Αγγλικά και Γ το σύνολο των μαθητών του Λυκείου που μαθαίνουν Γαλλικά. Το σύνολο A έχει 180 μαθητές και το σύνολο Γ έχει 30 μαθητές και υπάρχουν 20 μαθητές που μαθαίνουν Αγγλικά και Γαλλικά.

(α) Να σχεδιάσετε σε ένα διάγραμμα Venn τα σύνολα Ω, A και Γ.

(β) Να γράψετε συμβολικά τα σύνολα των μαθητών οι οποίοι:

i) μαθαίνουν και τις δύο γλώσσες

ii) μαθαίνουν τουλάχιστον μία από τις δύο γλώσσες

iii) δεν μαθαίνουν καμία από τις δύο γλώσσες.

(γ) Να περιγράψετε λεκτικά και να βρείτε το πλήθος των στοιχείων των συνόλων

i) $A \cap \Gamma$, ii) $A \cup \Gamma$, iii) $(A \cup \Gamma)'$

(δ) Έστω τα σύνολα $A \cap \Gamma'$ και $\Gamma \cap A'$. Να τα περιγράψετε λεκτικά και να βρείτε το πλήθος των στοιχείων τους.

6. Έστω ένα βασικό σύνολο

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

και τα υποσύνολά του $A = \{0, 3, 4, 9\}$, $B = \{1, 3, 4, 7\}$ και $\Gamma = \{1, 4, 8\}$.

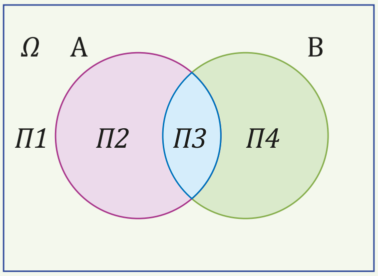
α) Να παραστήσετε σε διάγραμμα Venn τα σύνολα Ω , A , B και Γ▯

β) Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων τους και να γραμμοσκιάσετε στο διάγραμμα Venn τα παρακάτω σύνολα: $A \cap B$▯ $B \cup \Gamma$▯ $(A \cap B) \cup \Gamma$, $A \cap B \cap \Gamma$ και $A' \cap B'$.

γ) Βρείτε το σύνολο P που έχει στοιχεία όλα τα υποσύνολα του Γ▯ Είναι το Γ υποσύνολο του P ;

7. Σε ένα βιβλίο συνόλων, η Ρίτα είδε τη σχέση $A \cup B = A \cap B$ και προβληματίστηκε πώς είναι δυνατόν να ισχύει, γιατί είχε την εντύπωση, ότι η ένωση δύο συνόλων πρέπει να έχει περισσότερα στοιχεία από την τομή τους. Βοηθήστε την Ρίτα να βρει πότε ισχύει η παραπάνω ισότητα συνόλων.

8. Στο σχήμα φαίνονται, το βασικό σύνολο αναφοράς Ω και τα υποσύνολά του A και B. Το ορθογώνιο που παριστάνει το Ω είναι χωρισμένο στις περιοχές Π1, Π2, Π3 και Π4, καθεμία με το δικό της χρώμα.



Με βάση το διάγραμμα αυτό, να συμπληρωθεί ο επόμενος πίνακας.
Ορισμένα κελιά έχουν ήδη συμπληρωθεί:

Πράξη συνόλων	Συμβολισμός	Πως διαβάζεται	Παράσταση με περιγραφή των στοιχείων της	Περιοχές που καλύπτει
Τομή συνόλων				
Ένωση συνόλων				
Συμπλήρωμα ή συμπληρωματικό συνόλου	A'			Π1, Π4
Διαφορά συνόλων				
	$B - A$	B και όχι A	$\{x \in \Omega \mid x \in B \text{ και } x \notin A\}$	Π4

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

Οι πραγματικοί αριθμοί

Σύντομη γνωριμία

Στο κεφάλαιο αυτό ολοκληρώνεται η βασική άλγεβρα, της οποίας τα πιο σπουδαία στοιχεία ξεκινήσαμε να μαθαίνουμε από μικρότερες τάξεις. Αν και όπου κρίνεται απαραίτητο γίνεται η σχετική υπενθύμιση ορισμένων ιδιοτήτων ή ταυτοτήτων, εδώ παρουσιάζονται αναλυτικά τα πιο ουσιαστικά στοιχεία από τις απόλυτες τιμές, τις ρίζες και εισάγεται η έννοια της ρητής δύναμης μη αρνητικού αριθμού.

Περιεχόμενα

Λέξεις κλειδιά:
Φυσικός
Ακέραιος
Ρητός
Άρρητος
Πυκνό σύνολο
Διάστημα
Απόλυτη τιμή
Ν-οστή ρίζα
Δύναμη
Ρητός εκθέτης

Julius Wilhelm Richard Dedekind
(1831 - 1916)

Γερμανός μαθηματικός που συνεισέφερε σημαντικά στη θεωρία αριθμών, στην αφηρημένη άλγεβρα (ιδίως στη θεωρία δακτυλίων) και στις αξιωματικές βάσεις της αριθμητικής. Η πιο γνωστή συνεισφορά του είναι ο ορισμός των πραγματικών αριθμών μέσω της έννοιας της τομής Ντέντεκιντ. Θεωρείται επίσης πρωτοπόρος στην ανάπτυξη της σύγχρονης θεωρίας συνόλων και της φιλοσοφίας των μαθηματικών που είναι γνωστή ως λογικισμός.

2.1 Το σύνολο των πραγματικών αριθμών και τα υποσύνολά του

- Τα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών
- Δεκαδική αναπαράσταση ρητών και άρρητων αριθμών
- Άθροισμα ρητού με άρρητο και άθροισμα άρρητων αριθμών
- Η έννοια της πυκνότητας και της διαδοχικότητας στα βασικά υποσύνολα των αριθμών

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε:

- Να διακρίνουμε τους ρητούς από τους άρρητους αριθμούς, μέσα από τις διάφορες αναπαραστάσεις τους.
- Να ταξινομούμε συγκεκριμένους αριθμούς, στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών.
- Την έννοια της πυκνότητας και της διαδοχικότητας, στα βασικά υποσύνολα των αριθμών.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Τρεις φίλοι πεζοπόροι ξεκίνησαν μια διαδρομή, καθένας με τον δικό του ρυθμό βαδίσματος. Κάποια στιγμή, ο πρώτος είχε περπατήσει τα $\frac{3}{4}$ της διαδρομής και ο δεύτερος τα $\frac{2}{3}$. Μπορείτε να βρείτε ένα κλάσμα (μέρος) της διαδρομής, που πρέπει να έχει περπατήσει ο τρίτος, ώστε να βρίσκεται μεταξύ των δύο άλλων;

Τα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών

Επαναλήψεις - συμπληρώσεις - ορισμοί

ΟΡΙΣΜΟΙ

Φυσικοί αριθμοί λέγονται οι αριθμοί $0,1,2,3,\ldots$, οι οποίοι συγκροτούν το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών:

$$\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\ldots\}$$

Ακέραιοι αριθμοί λέγονται οι φυσικοί αριθμοί $0,1,2,3,\ldots$ και οι αντίθετοί τους: $0,\ -1,\ -2,\ -3,\ldots$, οι οποίοι συγκροτούν το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων αριθμών:

$$\mathbb{Z}=\{\ldots -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots\}$$

Ρητός αριθμός λέγεται κάθε αριθμός που γράφεται σαν κλάσμα $\frac{\kappa}{\lambda}$ δύο ακεραίων αριθμών $\kappa,\ \lambda$ με $\lambda \neq 0$. Το σύνολο των ρητών αριθμών συμβολίζεται $\mathbb{Q}$ και με περιγραφή των στοιχείων του παριστάνεται ως:

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{\kappa}{\lambda}\,|\,\kappa,\lambda\in\mathbb{Z},\lambda\neq 0\right\}$$

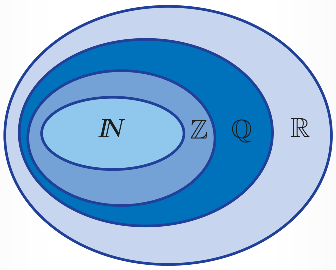
Για παράδειγμα, ρητοί είναι οι αριθμοί $\frac{3}{2}, \frac{-2}{+7}$ κ.α.

Κάθε ακέραιος αριθμός είναι και ρητός αριθμός, γιατί μπορεί να γραφεί ως κλάσμα με παρονομαστή το 1. Για παράδειγμα $5=\frac{5}{1},\ -14=\frac{-14}{1}$ κ.α.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Άρρητος αριθμός λέγεται κάθε αριθμός που δεν είναι ρητός.

Αποδεικνύεται ότι άρρητος είναι ο, γνωστός από την μέτρηση κύκλου, αριθμός π και η τετραγωνική ρίζα κάθε φυσικού αριθμού, ο οποίος δεν είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου, όπως οι $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ κ.λπ.



ΟΡΙΣΜΟΣ

Πραγματικοί αριθμοί είναι οι ρητοί και οι άρρητοι αριθμοί, οι οποίοι συγκροτούν το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.
Το σύνολο των άρρητων αριθμών είναι το $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$.

Από τα παραπάνω, συμπεραίνουμε ότι $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$

Δεκαδική αναπαράσταση ρητών και άρρητων αριθμών.

Κάθε ρητός αριθμός γράφεται σαν απλός δεκαδικός ή σαν περιοδικός δεκαδικός, όπως, για παράδειγμα

$$\frac{3}{4}=0{,}25,\quad \frac{10}{3}=3{,}333\ldots=3{,}\bar{3},\quad \frac{1}{7}=0{,}\overline{142857}\ \text{και}\ 0{,}999\ldots=0{,}\bar{9}=1$$

Οι άρρητοι αριθμοί, στη δεκαδική τους μορφή, έχουν άπειρο πλήθος μη μηδενικών δεκαδικών ψηφίων και δεν είναι περιοδικοί. Για παράδειγμα, ο αριθμός

$$2{,}1\underbrace{0}_{1}1\underbrace{00}_{2}1\underbrace{000}_{3}1\underbrace{0000}_{4}1\ldots$$

έχει άπειρα μη μηδενικά ψηφία. Στο δεκαδικό του μέρος, κάθε ομάδα μηδενικών έχει ένα μηδέν περισσότερο από την προηγούμενή της ομάδα. Επομένως αποκλείεται να είναι περιοδικός, άρα είναι άρρητος.

Άσκηση 5

Άθροισμα ρητού με άρρητο - άθροισμα άρρητων αριθμών

Πραγματικοί αριθμοί 1

Είναι γνωστό ότι το άθροισμα και το γινόμενο ρητών αριθμών είναι ρητός αριθμός. Ας πάρουμε, στη συνέχεια, το άθροισμα $\alpha+\rho$ του άρρητου αριθμού α με τον ρητό αριθμό ρ, για να δούμε αν είναι ρητός ή άρρητος αριθμός.
Αν υποθέσουμε ότι είναι ένας ρητός αριθμός ρ', τότε:

$$\alpha+\rho=\rho' \quad \text{ή} \quad \alpha=\rho'-\rho \ \text{ ρητός}$$

Δηλαδή ο άρρητος αριθμός α ισούται με τον ρητό $\rho'-\rho$, το οποίο είναι αδύνατο. Επομένως, το άθροισμα $\alpha+\rho$ είναι άρρητος αριθμός.

Άσκηση 6

Γενικότερα, το άθροισμα ενός ρητού αριθμού με έναν άρρητο αριθμό είναι άρρητος αριθμός. Το γινόμενο ενός ρητού αριθμού, διαφορετικού του μηδενός, με έναν άρρητο αριθμό είναι άρρητος αριθμός.

(ρητός)+(ρητός)=ρητός
(ρητός)(ρητός)=ρητός
(άρρητος)+(ρητός)=άρρητος
(άρρητος)(ρητός $\neq 0$)=άρρητος

Σύμφωνα με αυτό, οι αριθμοί $\sqrt{2}+2$, $\sqrt{2}-2$, $-\sqrt{2}+2$ είναι άρρητοι.
Τέλος, από τις ισότητες

$$\left(\sqrt{2}+2\right)+\left(\sqrt{2}-2\right)=2\sqrt{2}=\sqrt{8}\ \text{ άρρητος,}$$

Πραγματικοί αριθμοί 2

$$\left(\sqrt{2}+2\right)+\left(-\sqrt{2}+2\right)=4 \text{ ρητός,}$$

καταλαβαίνουμε ότι το άθροισμα δύο άρρητων αριθμών είναι άλλοτε ρητός και άλλοτε άρρητος αριθμός, κατά περίπτωση.

Η έννοια της πυκνότητας και της διαδοχικότητας στα βασικά υποσύνολα του $\mathbb{R}$

Είναι γνωστό, ότι κάθε φυσικός αριθμός έχει έναν επόμενο φυσικό αριθμό, με την έννοια ότι μεταξύ αυτών δεν υπάρχει άλλος φυσικός αριθμός. Με την ίδια έννοια, κάθε φυσικός, εκτός του μηδενός, έχει έναν προηγούμενο φυσικό αριθμό. Ομοίως, κάθε ακέραιος αριθμός έχει έναν επόμενο και έναν προηγούμενο ακέραιο αριθμό. Για παράδειγμα, ο επόμενος του 4 είναι ο 5 και ο προηγούμενος του -5 είναι ο -6. Ένας αριθμός, και ο επόμενός του ή ο προηγούμενός του, λέγονται διαδοχικοί αριθμοί. Στο σύνολο των ρητών αριθμών δεν ισχύει παρόμοια ιδιότητα, δηλαδή ένας ρητός αριθμός δεν έχει προηγούμενο ή επόμενο ρητό αριθμό.

Για αντιπαράδειγμα, ας πάρουμε τον $\frac{3}{4}=0{,}75$ και ας υποθέσουμε ότι έχει επόμενο ρητό. Έστω ότι είναι ο 0,751. Μεταξύ αυτών των δύο δεν πρέπει να υπάρχει ρητός αριθμός. Όμως, για τον 0,7501 είναι

$$0{,}750<0{,}7501<0{,}751$$

Αυτό, αποκλείει να είναι ο 0,751 ο επόμενος του 0,75. Με ίδιο τρόπο αποκλείουμε κάθε άλλο αριθμό σαν επόμενο ή, ακόμα, σαν προηγούμενο του $\frac{3}{4}=0{,}75$.

Γενικότερα, δεν υπάρχουν διαδοχικοί ρητοί ή διαδοχικοί άρρητοι αριθμοί ή γενικότερα διαδοχικοί πραγματικοί αριθμοί.

Τα στοιχεία των βασικών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ διέπουν οι παρακάτω σημαντικές για τα μαθηματικά ιδιότητες:

Πραγματικοί αριθμοί 3

- Μεταξύ δύο ρητών αριθμών, υπάρχει και ρητός και άρρητος αριθμός.
- Μεταξύ δύο αρρήτων αριθμών, υπάρχει και ρητός και άρρητος αριθμός.
- Μεταξύ δύο πραγματικών αριθμών, υπάρχει ένας ρητός και ένας άρρητος αριθμός.

Η παραπάνω ιδιότητα μάς επιτρέπει να λέμε ότι **τα σύνολα των ρητών και των αρρήτων αριθμών είναι πυκνά στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.**

Εφαρμογή

Να βρείτε έναν ρητό αριθμό μεταξύ των $\frac{1}{100}$ και $\frac{1}{99}$.

Λύση

- **Ένας τρόπος είναι** να επιλέξουμε τον μέσο όρο των δύο αριθμών

$$\frac{\frac{1}{100}+\frac{1}{99}}{2}=\frac{199}{19800}$$

- **Άλλος τρόπος είναι** να κάνουμε τις διαιρέσεις $1:100$ και $1:99$, ώστε να τους γράψουμε σε δεκαδική μορφή.

Είναι $\frac{1}{100}=0{,}01$ και $\frac{1}{99}=0{,}010101...$

Ένας ρητός αριθμός μεταξύ αυτών είναι ο $0{,}0101$.

- **Ένας ακόμη τρόπος είναι** να τρέψουμε τα κλάσματα σε ομώνυμα και να εργαστούμε με την ιδιότητα κατά την οποία μεταξύ ομώνυμων κλασμάτων μεγαλύτερο είναι εκείνο που έχει μεγαλύτερο αριθμητή. Πραγματικά είναι

$$\frac{1}{100}=\frac{99}{9900}=\frac{990}{99000} \text{ και } \frac{1}{99}=\frac{100}{9900}=\frac{1000}{99000}$$

Επομένως ένας αριθμός μεταξύ αυτών ο $\frac{991}{99000}$.

Άσκηση 7

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Ασκήσεις κατανόησης

1. Να συμπληρώσετε τον επόμενο πίνακα, με τον οποίο κατατάσσουμε τους αριθμούς της πρώτης στήλης στα κατάλληλα σύνολα της πρώτης γραμμής:

Σύνολο / Αριθμός	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}-\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
-2					
$4,\overline{25}$					
$-\frac{1}{2}$					√
$\sqrt{2}$				√	
$\sqrt{3}+1$					

2. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις επόμενες προτάσεις ως αληθή ή ψευδή:

(α) Οι περιοδικοί αριθμοί είναι ρητοί.

(β) Ο αριθμός $2{,}0202202220\ldots$ είναι άρρητος.

(γ) Το άθροισμα δύο, οποιωνδήποτε, άρρητων αριθμών είναι άρρητος αριθμός.

(δ) Το άθροισμα, το γινόμενο και το πηλίκο (εφόσον αυτό ορίζεται), ρητών αριθμών είναι ρητός αριθμός.

(ε) Κάθε άρρητος έχει επόμενο άρρητο αριθμό.

(στ) Το σύνολο των ρητών αριθμών είναι πυκνό, στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

3. Να απαντήσετε στις επόμενες ερωτήσεις αιτιολογώντας την απάντησή σας:

(α) Ο αριθμός $3{,}414141\ldots$, στον οποίο οι τρείς τελείες σημαίνουν ότι το διψήφιο τμήμα 41 επαναλαμβάνεται επ' άπειρον, είναι ρητός ή άρρητος;

(β) Το σύνολο των ακεραίων αριθμών είναι υποσύνολο του συνόλου των ρητών αριθμών;

(γ) Μεταξύ των αριθμών 2 και 3 υπάρχει ρητός αριθμός;

(δ) Ένας άρρητος αριθμός μεταξύ των 4 και $2\sqrt{5}$ είναι ο $2+\sqrt{5}$;

(ε) Ο λόγος $\frac{\Gamma}{\delta}$ του μήκους Γ ενός κύκλου, προς την διάμετρό του δ είναι ρητός ή άρρητος αριθμός;

Ασκήσεις ανάπτυξης

4. Να γράψετε στην μορφή $\frac{\kappa}{\lambda}$ με $\kappa,\lambda\in\mathbb{Z}$ τους αριθμούς

(α) $3{,}14$ (β) $3,\overline{14}$ (γ) $\frac{1{,}2}{4}$

5. Να ταξινομήσετε στους ρητούς ή στους άρρητους τους αριθμούς:

(α) $x=0{,}1010010001...$, $y=2{,}0202202220...$ και $z=0{,}20200200002...$

(β) $x+y$ (γ) $y+z$

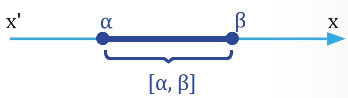
6. Να αποδείξετε ότι το γινόμενο ενός μη μηδενικού ρητού με έναν άρρητο, είναι άρρητος αριθμός.

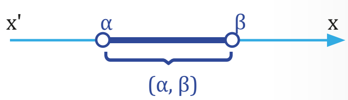
7. Να βρείτε έναν ρητό αριθμό μεταξύ των αριθμών

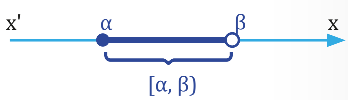
(α) $\frac{1}{11}$ και $\frac{2}{11}$ (β) $\frac{1}{11}$ και $\frac{1}{10}$ (γ) $2,\overline{25}$ και $2,\overline{26}$

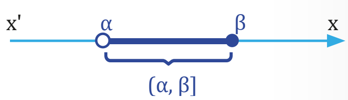
2.2 Διαστήματα πραγματικών αριθμών

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε να συμβολίζουμε με διαστήματα τα υποσύνολα των πραγματικών αριθμών που προσδιορίζονται από ανισοτικές σχέσεις.









Έστω οι αριθμοί α, β με $\alpha < \beta$.

Κλειστό διάστημα από α μέχρι β λέγεται το σύνολο των πραγματικών αριθμών x με $\alpha \leq x \leq \beta$ και συμβολίζεται με $[\alpha, \beta]$:

$$[\alpha, \beta] = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha \leq x \leq \beta\}$$

Ανοιχτό διάστημα από α μέχρι β λέγεται το σύνολο των πραγματικών αριθμών x με $\alpha < x < \beta$ και συμβολίζεται με (α, β):

$$(\alpha, \beta) = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha < x < \beta\}$$

Ανοιχτό δεξιά διάστημα από α μέχρι β λέγεται το σύνολο των πραγματικών αριθμών x με $\alpha \leq x < \beta$ και συμβολίζεται με $[\alpha, \beta)$:

$$[\alpha, \beta) = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha \leq x < \beta\}$$

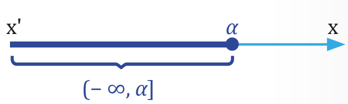
Ανοιχτό αριστερά διάστημα από α μέχρι β λέγεται το σύνολο των πραγματικών αριθμών x με $\alpha < x \leq \beta$ και συμβολίζεται με $(\alpha, \beta]$:

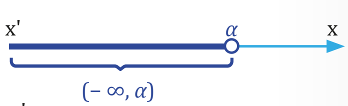
$$(\alpha, \beta] = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha < x \leq \beta\}$$

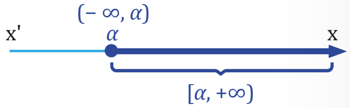
Οι αριθμοί α και β λέγονται άκρα των διαστημάτων και οι αριθμοί που βρίσκονται μεταξύ των α και β λέγονται εσωτερικά σημεία τους.

Το κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ περιέχει τα άκρα του και συμβολίζεται με αγκύλες. Το ανοιχτό διάστημα (α, β) δεν περιέχει τα άκρα του και συμβολίζεται με παρενθέσεις. Παρόμοια, το ανοικτό δεξιά $[\alpha, \beta)$ δεν περιέχει το δεξιό άκρο β, το ανοιχτό αριστερά διάστημα $(\alpha, \beta]$ δεν περιέχει το αριστερό άκρο α και στις αντίστοιχες θέσεις σημειώνονται παρενθέσεις.

Με τη βοήθεια των συμβόλων $+\infty$ και $-\infty$ που διαβάζονται «συν άπειρο» και «μείον άπειρο», αντιστοίχως, ορίζουμε τα επόμενα διαστήματα:







Το διάστημα $(-\infty, \alpha]$ είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών x με $x \leq \alpha$:

$$(-\infty, \alpha] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \alpha\}$$

Το διάστημα $(-\infty, \alpha)$ είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών x με $x < \alpha$:

$$(-\infty, \alpha) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \alpha\}$$

Το διάστημα $[\alpha, +\infty)$ είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών x με $x \geq \alpha$:

$$[\alpha, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \alpha\}$$

Το διάστημα $(\alpha, +\infty)$ είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών x με $x > \alpha$:

$$(\alpha, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \alpha\}$$

Το διάστημα $(-\infty, +\infty)$ είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών: $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

Τομή διαστημάτων

Σε καθένα από τα παραπάνω διαστήματα, ο αριθμός α λέγεται άκρο του και οι υπόλοιποι αριθμοί του λέγονται εσωτερικά σημεία. Το άκρο α περιλαμβάνεται στο αντίστοιχο διάστημα, μόνο όταν σε αυτό σημειώνεται αγκύλη.
Με τη βοήθεια των διαστημάτων και των πράξεων συνόλων μπορούμε να παριστάνουμε χαρακτηριστικά υποσύνολα του $\mathbb{R}$, όπως στα επόμενα παραδείγματα.

Παράδειγμα

Να παρασταθούν, με τη βοήθεια διαστημάτων, τα σύνολα των πραγματικών αριθμών x, όπου:
(α) $x \neq 1$ (β) $x > -1$ και $x \neq 2$ (γ) $x \neq 1$ και $x \neq 3$ (δ) $x < -2$ ή $x > 4$

Λύση

Διαστήματα αριθμών

(α) Από το διάστημα $(-\infty,+\infty)$ εξαιρούμε το 1. Επομένως έχουμε το σύνολο

$$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$$

(β) Οι αριθμοί x, όπου $x > -1$ ορίζουν το διάστημα $(-1,+\infty)$ από το οποίο εξαιρούμε το 2. Επομένως έχουμε το σύνολο $(-1,2)\cup(2,+\infty)$

(γ) Από το σύνολο $(-\infty,+\infty)$ εξαιρούμε το 1 και το 3, επομένως έχουμε το σύνολο $(-\infty,1)\cup(1,3)\cup(3,+\infty)$

(δ) Οι αριθμοί x, όπου $x < -2$ ορίζουν στο διάστημα $(-\infty,-2)$ και οι αριθμοί $x > 4$ ορίζουν το διάστημα $(4,+\infty)$. Επομένως, οι αριθμοί $x < -2$ ή $x > 4$ ορίζουν την ένωση $(-\infty,-2)\cup(4,+\infty)$

Ασκήσεις 2, 3 και 4

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Ασκήσεις κατανόησης

1. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις επόμενες προτάσεις ως αληθή ή ψευδή:
(α) Στο ανοιχτό διάστημα περιλαμβάνονται τα άκρα του.
(β) Το σύνολο $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 2\}$ είναι το διάστημα $(-1,2)$.
(γ) Ισχύει $4 \in (2,4)$.
(δ) Ο αριθμός 3 είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος $(1,5]$.
(ε) Το $\mathbb{R}$ είναι διάστημα.
(στ) Είναι $(1,4]\cap(2,7]=(2,4]$.

Ασκήσεις ανάπτυξης

2. Να γράψετε υπό μορφή διαστήματος τα σύνολα των αριθμών x για τους οποίους:
(α) $2<x<5$ (β) $-3 \leq x \leq 5$
(γ) $-5<x<-2$ (δ) $-1<x \leq 1$
(ε) $x>4$ (στ) $x<0$
(ζ) $x \geq -7$ (η) $x \leq 10$

3. Να γράψετε, με χρήση διαστημάτων, τις λύσεις των ανισώσεων:
(α) $1 < x + 3 \leq 2$ (β) $-3 \leq 2x + 5 \leq 9$
(γ) $1 - x \leq 4 - 3x$ (δ) $x^2 + 1 \geq 0$

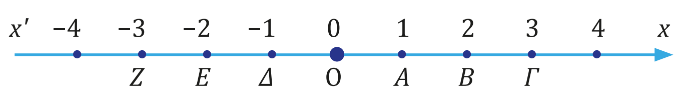
4. Να γράψετε, με χρήση διαστημάτων, τα σύνολα των πραγματικών αριθμοί x, όπου:
(α) $x \neq 0$ (β) $x \neq 0$ και $x \neq -2$
(γ) $x > -1$ και $x \neq 2$ (δ) $x < -1$ ή $x > \sqrt{3}$
(ε) $x^2 + 1 > 0$ (στ) $x = -1$ ή $x > 1$

2.3 Απόλυτη τιμή

Περιέχονται:
- Γεωμετρικός ορισμός απόλυτης τιμής πραγματικού αριθμού
- Αλγεβρικός ορισμός απόλυτης τιμής πραγματικού αριθμού
- Απόσταση δύο αριθμών

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε:
- Να ορίζουμε αλγεβρικά την απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού.
- Να την συνδέουμε με την απόστασή του από το μηδέν.
- Να ερμηνεύουμε γεωμετρικά την απόλυτη τιμή της διαφοράς δύο πραγματικών αριθμών.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

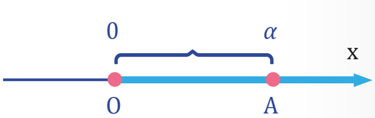


Στην ευθεία των πραγματικών αριθμών παίρνουμε τα σημεία Z, E, Δ, O, A, B και Γ που αντιστοιχούν κατά σειρά στους αριθμούς -3, -2, -1, 0, 1, 2 και 3.
(α) Να υπολογίσετε τις απόλυτες τιμές των αριθμών -2, 1, 2, και 3 και να τις συγκρίνετε με τα μήκη των ευθύγραμμων τμημάτων OE, OA, OB και $O\Gamma$ αντίστοιχα. Τι παρατηρείτε;
(β) Να συμπληρώσετε τον επόμενο πίνακα με τα μήκη των ευθύγραμμων τμημάτων $A\Delta$, $Z\Gamma$ και EB, καθώς και τις απόλυτες τιμές της διαφοράς των τετμημένων των άκρων τους, όπως ακριβώς συμπληρώθηκε με το ZB:
Τι παρατηρείτε;

ΤΜΗΜΑ	ZB	$A\Delta$	$Z\Gamma$	EB
Μήκος του ευθύγραμμου τμήματος	5			
Απόλυτη τιμή της διαφοράς των τετμημένων των άκρων του.	$\|-3-2\|=5$			

(γ) Να βρείτε όλες τις τιμές του α, για τις οποίες η απόσταση της εικόνας του από το O είναι μικρότερη του 2.

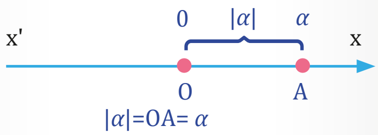
Γεωμετρικός ορισμός

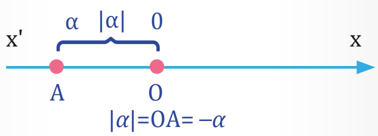


Έστω ο αριθμός α που παριστάνεται πάνω στην ευθεία των πραγματικών αριθμών με το σημείο A και ο αριθμός 0 που παριστάνεται από την αρχή O. Γνωρίζουμε ότι η απόσταση του αριθμού α από το 0 είναι το μήκος του τμήματος OA. Με τη βοήθεια της απόστασης αυτής δίνουμε τον παρακάτω γεωμετρικό ορισμό, όπως λέγεται, της απόλυτης τιμής:

ΟΡΙΣΜΟΣ
Ονομάζουμε απόλυτη τιμή του πραγματικού αριθμού α και συμβολίζουμε $|\alpha|$, την απόσταση της εικόνας του A στην ευθεία των αριθμών από την αρχή O:

$$|\alpha| = OA$$





- Η απόλυτη τιμή ενός μη αρνητικού αριθμού, είναι ο ίδιος ο αριθμός.
- Η απόλυτη τιμή ενός αρνητικού αριθμού, είναι ο αντίθετός του.

Απόσταση δύο αριθμών 1

Η απόσταση OA συμβολίζεται με $\mathrm{d}(\alpha,0)$. Επομένως $|\alpha| = \mathrm{d}(\alpha,0)$
Για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύουν $\mathrm{d}(\alpha,0) \geq 0$ και $\mathrm{d}(-\alpha,0) = \mathrm{d}(\alpha,0)$, οπότε

$$|\alpha| \geq 0 \text{ και } |-\alpha| = |\alpha|$$

Από τα διπλανά σχήματα παρατηρούμε ότι:

- Όταν $\alpha \geq 0$ τότε $|\alpha| = \alpha$ και
- όταν $\alpha \leq 0$ τότε $|\alpha| = -\alpha$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, μπορούμε να δώσουμε τον παρακάτω ισοδύναμο ορισμό:

Αλγεβρικός ορισμός

ΟΡΙΣΜΟΣ
Ονομάζουμε απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού α και συμβολίζουμε $|\alpha|$ τον αριθμό

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \alpha\nu \ \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \alpha\nu \ \alpha < 0 \end{cases}$$

Παραδείγματα

► $\left|-\frac{1}{2}\right| = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ γιατί $-\frac{1}{2} < 0$ ► $|\alpha^2 + 1| = \alpha^2 + 1$ γιατί $\alpha^2 + 1 > 0$

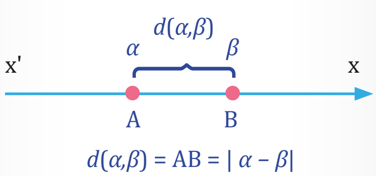
► $|4 - \pi| = 4 - \pi$ γιατί $4 - \pi > 0$ ► $|\sqrt{3} - 2| = -(\sqrt{3} - 2) = -\sqrt{3} + 2$, γιατί $\sqrt{3} - 2 < 0$

Απόσταση δύο αριθμών

Από την παραπάνω δραστηριότητα αντιλαμβανόμαστε ότι το μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος, που βρίσκεται πάνω στην ευθεία των αριθμών, είναι ίσο με την απόλυτη τιμή της διαφοράς των τετμημένων των άκρων του. Το μήκος αυτό λέγεται απόσταση των δύο αριθμών.
Για παράδειγμα η απόσταση των αριθμών -3 και 2 είναι το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος EZ που ισούται με $EZ = |-3-2| = 5$

Γενικότερα έχουμε τον εξής ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ
Ονομάζουμε απόσταση των αριθμών α και β και συμβολίζουμε $\mathrm{d}(\alpha,\beta)$ την απόσταση AB των εικόνων τους A και B, αντίστοιχα, στην ευθεία των πραγματικών αριθμών: $\mathrm{d}(\alpha,\beta) = AB$



Επειδή $AB = |\alpha - \beta|$ συμπεραίνουμε, ότι για οποιεσδήποτε θέσεις των α και β στην ευθεία των πραγματικών αριθμών, ισχύει:

$$\mathrm{d}(\alpha,\beta) = |\alpha - \beta|$$

Προφανώς είναι $\mathrm{d}(\alpha,\beta) = \mathrm{d}(\beta,\alpha)$ άρα $|\alpha - \beta| = |\beta - \alpha|$

Για τους αριθμούς α και β είναι $|\alpha - \beta| = |\beta - \alpha|$

Απόλυτη τιμή-Απόσταση δύο αριθμών

Παραδείγμα

Να βρείτε την απόσταση των αριθμών

(α) -5 και -2 (β) α και $\alpha+3$ (γ) π και 4

Λύση

(α) Είναι $d(-5,-2)=|-5-(-2)|=|-5+2|=|-3|=3$

(β) Είναι $d(\alpha,\alpha+3)=|\alpha-(\alpha+3)|=|-3|=3$

(γ) Είναι $d(\pi,4)=|\pi-4|=-\pi+4$

Ασκήσεις 4 και 5

Απόσταση δύο αριθμών 2

Εφαρμογή 1

Να γράψετε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής την παράσταση $|x-1|$

Λύση

Διακρίνουμε τις επόμενες περιπτώσεις:

- Αν $x-1\geq 0$ ή $x\geq 1$, τότε $|x-1|=x-1$
- Αν $x-1<0$ ή $x<1$, τότε $|x-1|=-(x-1)=-x+1$

Συνεπώς $|x-1|=\begin{cases} x-1, & \alpha\nu \ \ x\geq 1 \\ -x+1, & \alpha\nu \ \ x<1 \end{cases}$

Διακρίνουμε περιπτώσεις, ως προς τις ρίζες και το πρόσημο της παράστασης $x-1$, της οποίας έχουμε την απόλυτη τιμή.

Ασκήσεις 6 και 7

Εφαρμογή 2

Αν $0<\alpha<\beta<\gamma$ να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=|\beta-\alpha|+|\alpha|+|\beta-\gamma|-\gamma$

Λύση

- Είναι $\alpha<\beta$, οπότε $\beta-\alpha>0$, άρα $|\beta-\alpha|=\beta-\alpha$
- Είναι $\alpha>0$, άρα $|\alpha|=\alpha$
- Είναι $\beta<\gamma$, οπότε $\beta-\gamma<0$, άρα $|\beta-\gamma|=-(\beta-\gamma)=-\beta+\gamma$

Συνεπώς $A=|\beta-\alpha|+|\alpha|+|\beta-\gamma|-\gamma=\beta-\alpha+\alpha-\beta+\gamma-\gamma=0$

Ασκήσεις 8, 9, 10, 11 και 13

Εφαρμογή 3

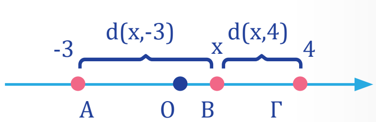
Έστω οι αριθμοί -3, x και 4 με $-3<x<4$ που παριστάνονται στην ευθεία των πραγματικών αριθμών με τα σημεία A, B και Γ.

(α) Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων $|x-4|$ και $|x+3|$.

(β) Να βρείτε γεωμετρικά την τιμή της παράστασης.

Λύση

(α) Η παράσταση $|x-4|$ παριστάνει την απόσταση του αριθμού x από τον αριθμό 4. Επομένως $|x-4|=d(x,4)=B\Gamma$



Η παράσταση $|x+3|$ παριστάνει την απόσταση του αριθμού x από τον αριθμό -3.

Επομένως $|x+3|=d(x,-3)=BA$

(β) Είναι $A=|x-4|+|x+3|=B\Gamma+BA=A\Gamma=7$

Άσκηση 12

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Ερωτήσεις κατανόησης

1. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις, ως αληθή ή ψευδή:

(α) $|-2|=-2$ (β) $|-\alpha|-|\alpha|=0$

(γ) $d(4,-3)=|4-3|$ (δ) Αν $|\alpha|=\alpha$, τότε $\alpha\geq 0$

(ε) Αν $|\alpha|\leq 0$, τότε $\alpha=0$ (στ) $|\alpha^2|=\alpha^2$

2. Με τη βοήθεια των απόλυτων τιμών να αποδώσετε αλγεβρικά τις παρακάτω εκφράσεις:

(α) Η απόσταση του α από το 0 είναι μεγαλύτερη του $\frac{1}{2}$.

(β) Η απόσταση του α από το 4 είναι μικρότερη ή ίση του 3.

(γ) Η απόσταση του 4α από το 0 είναι ίση με 2.

3. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

(α) Η απόλυτη τιμή ενός θετικού αριθμού είναι ο .... ο αριθμός.

(β) Η απόλυτη τιμή του .... είναι ο αριθμός 0.

(γ) η απόλυτη τιμή ενός .... αριθμού είναι ο αντίθετός του.

(δ) Είναι $d(\alpha,\beta)=$.........

Ερωτήσεις ανάπτυξης

4. Να υπολογίσετε τις απόλυτες τιμές:

(α) $|\pi-3|$ (β) $|\pi-4|$ (γ) $|\sqrt{3}-1|$

5. Να υπολογίσετε τις αποστάσεις:

(α) $d(\pi,1)$ (β) $d(-4,-1)$ (γ) $d(\sqrt{4},\sqrt{2})$

6. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις, χωρίς τη χρήση απόλυτης τιμής.

(α) $|x+1|$ (β) $|x-4|$

7. Να βρείτε τις τιμές που μπορούν να πάρουν οι παραστάσεις:

(α) $A=\frac{|-x|}{x}$, $x\neq 0$

(β) $B=\frac{|x|}{x}+\frac{y}{|y|}$, $x\neq 0$ και $y\neq 0$

8. Αν $1<x<2$ να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A=|x-1|+|x-2|$$

9. Αν $\alpha<\beta<\gamma$ να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A=|\gamma-\beta|-|\alpha-\beta|+2\beta$$

10. Αν $y<-1<x$ να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=d(-1,x)+d(y,-1)+d(y,x)$

11. Να γράψετε την παράσταση $A=|x-1|+|x-4|$ χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής όταν:

(α) $1<x<4$ (β) $x>4$ (γ) $x<1$

12. Έστω οι αριθμοί 1, x και 7 με $1<x<7$ που παριστάνονται στην ευθεία των αριθμών από τα σημεία A, B, Γ αντιστοίχως.

(α) Να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων $|x-7|$ και $|x-1|$.

(β) Να βρείτε γεωμετρικά την τιμή της παράστασης $A=|x-7|+|x-1|$ και να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το αποτέλεσμα.

13. Αν $\alpha<\beta$ να αποδείξετε:

(α) $\frac{\alpha+\beta+|\alpha-\beta|}{2}=\beta$

(β) $\frac{\alpha+\beta-|\alpha-\beta|}{2}=\alpha$

2.4 Ιδιότητες απόλυτης τιμής

Περιέχονται:

- Οι ιδιότητες:
  - $|\alpha|^2=\alpha^2$
  - $|\alpha|\geq\alpha$ και $|\alpha|\geq-\alpha$
  - $|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|$ και $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$
  - $|\alpha+\beta|\leq|\alpha|+|\beta|$
- Οι σχέσεις:

  $|\alpha|=\varepsilon$, $|\alpha|<\varepsilon$ και $|\alpha|>\varepsilon$

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε να αποδεικνύουμε τις βασικές ιδιότητες της απόλυτης τιμής.

Στην προηγούμενη ενότητα, για την απόλυτη τιμή ενός αριθμού α, μάθαμε τις εξής ιδιότητες:

$$|\alpha|\geq 0,\quad |-\alpha|=|\alpha| \quad \text{και} \quad |\alpha-\beta|=|\beta-\alpha|$$

Στη συνέχεια, θα μελετήσουμε μερικές, ακόμα, χρήσιμες ιδιότητες των απόλυτων τιμών.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύουν:

1. $|\alpha|^2=\alpha^2$ 2. $|\alpha|\geq\alpha$ και $|\alpha|\geq-\alpha$

Απόδειξη

1. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις $\alpha\geq 0$ και $\alpha<0$.

Έχουμε:

- Αν $\alpha\geq 0$, τότε, $|\alpha|=\alpha$, οπότε $|\alpha|^2=\alpha^2$ και
- Αν $\alpha<0$, τότε, $|\alpha|=-\alpha$, οπότε $|\alpha|^2=(-\alpha)^2=\alpha^2$

Συνεπώς σε κάθε περίπτωση είναι $|\alpha|^2=\alpha^2$

2. Έχουμε:

- Αν $\alpha\geq 0$, τότε, $|\alpha|=\alpha$
- Αν $\alpha<0$, τότε, $|\alpha|=-\alpha>\alpha$

Συνεπώς σε κάθε περίπτωση είναι $|\alpha|\geq\alpha$

Όμοια, ακριβώς, αποδεικνύουμε και την ιδιότητα $|\alpha|\geq-\alpha$

Την ιδιότητα 2 μπορούμε να την γράψουμε και ως εξής:

$$-|\alpha|\leq\alpha\leq|\alpha|$$

Απόλυτη τιμή γινομένου και πηλίκου δύο αριθμών

- Η απόλυτη τιμή του γινομένου δύο αριθμών είναι ίση με το γινόμενο των απολύτων τιμών τους.
- Η απόλυτη τιμή του πηλίκου δύο αριθμών ισούται με το πηλίκο των απόλυτων τιμών τους.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Για την απόλυτη τιμή του γινομένου και του πηλίκου δύο αριθμών α και β έχουμε:

3. $|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|$ 4. $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$ με $\beta\neq 0$

Απόδειξη

3. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

Αν $\alpha\geq 0$ και $\beta\geq 0$ τότε $\alpha\beta\geq 0$ οπότε $|\alpha\beta|=\alpha\beta=|\alpha||\beta|$

Αν $\alpha<0$ και $\beta<0$ τότε $\alpha\beta>0$ οπότε $|\alpha\beta|=\alpha\beta=(-\alpha)(-\beta)=|\alpha||\beta|$

Αν $\alpha \geq 0$ και $\beta < 0$ τότε $\alpha\beta \leq 0$ οπότε $|\alpha\beta| = -\alpha\beta = \alpha(-\beta) = |\alpha||\beta|$

Αν $\alpha < 0$ και $\beta \geq 0$ τότε $\alpha\beta \leq 0$ οπότε $|\alpha\beta| = -\alpha\beta = (-\alpha)\beta = |\alpha||\beta|$

Επομένως, σε κάθε περίπτωση $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$

Όμοια ακριβώς, αποδεικνύουμε και την ιδιότητα 4. Μπορούμε, όμως, να την αποδείξουμε απλούστερα, ως εξής:

Είναι
$$|\alpha| = \left|\beta\frac{\alpha}{\beta}\right| = |\beta|\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| \quad \text{άρα} \quad \left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$$

Απόλυτη τιμή αθροίσματος δύο αριθμών

Ιδιότητες απόλυτης τιμής 1

ΠΡΟΤΑΣΗ

Για την απόλυτη τιμή του αθροίσματος δύο αριθμών α και β ισχύει
$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$$
Πότε ισχύει η ισότητα $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$;

Απόδειξη

Διακρίνουμε περιπτώσεις για το πρόσημο του $\alpha + \beta$.

Αν $\alpha + \beta \geq 0$ τότε $|\alpha + \beta| = \alpha + \beta \leq \alpha + |\beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ (ιδιότητα $\alpha \leq |\alpha|$).

Η ισότητα $|\alpha + \beta| = \alpha + \beta = |\alpha| + |\beta|$ ισχύει όταν
$$\alpha \geq 0 \text{ και } \beta \geq 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Αν $\alpha + \beta < 0$ τότε $|\alpha + \beta| = -(\alpha + \beta) = -\alpha - \beta \leq -\alpha + |\beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

(ιδιότητα $-\alpha \leq |\alpha|$)

Η ισότητα $|\alpha + \beta| = -\alpha - \beta = |\alpha| + |\beta|$ ισχύει όταν
$$\alpha \leq 0 \text{ και } \beta \leq 0 \qquad \textbf{(2)}$$

Επομένως, σε κάθε περίπτωση είναι $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$.

Η ισότητα $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$ από τις σχέσεις (1) και (2) ισχύει μόνο όταν $\alpha\beta \geq 0$.

Ασκήσεις 11, 12, 13 και 14

Οι σχέσεις |α|=ε, |α|<ε και |α|>ε

Με τη βοήθεια της γεωμετρικής ερμηνείας της απόλυτης τιμής ενός αριθμού θα αποδείξουμε την επόμενη πρόταση:

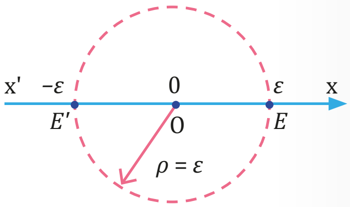
ΠΡΟΤΑΣΗ

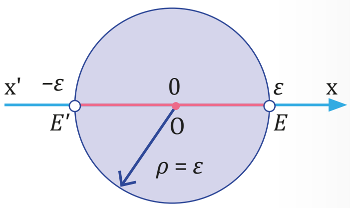
Αν $\varepsilon > 0$ τότε:

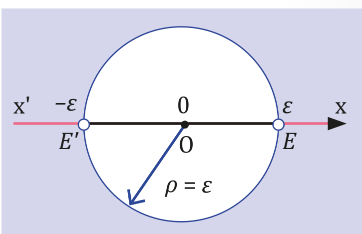
(α) Είναι $|\alpha| = \varepsilon$, αν και μόνο αν $\alpha = -\varepsilon$ ή $\alpha = \varepsilon$

(β) Είναι $|\alpha| < \varepsilon$, αν και μόνο αν $-\varepsilon < \alpha < \varepsilon$

(γ) Είναι $|\alpha| > \varepsilon$, αν και μόνο αν $\alpha < -\varepsilon$ ή $\alpha > \varepsilon$







Εξισώσεις-ανισώσεις με απόλυτες τιμές

Ιδιότητες απόλυτης τιμής 2

Απόδειξη

Με κέντρο το σημείο O, που παριστάνει το αριθμό 0, και ακτίνα ε γράφουμε κύκλο. Ο κύκλος τέμνει την ευθεία των αριθμών στα σημεία E' και E που είναι εικόνες των αριθμών $-\varepsilon$ και ε αντίστοιχα. Έχουμε:

α) Η σχέση $|\alpha|=\varepsilon$ αληθεύει για τους αριθμούς ε και $-\varepsilon$ που παριστάνονται με τα κοινά σημεία της ευθείας και του κύκλου (O,ε) και μόνον αυτούς. Επομένως είναι $|\alpha|=\varepsilon$, αν και μόνο αν $\alpha=-\varepsilon$ ή $\alpha=\varepsilon$.

β) Η σχέση $|\alpha|<\varepsilon$, αληθεύει για τους αριθμούς α που παριστάνονται με τα σημεία της ευθείας που βρίσκονται στο εσωτερικό του κύκλου (O,ε) και μόνον αυτούς. Τα σημεία αυτά είναι τα εσωτερικά σημεία του ευθύγραμμου τμήματος $E'E$, στα οποία παριστάνονται οι αριθμοί α με $-\varepsilon<\alpha<\varepsilon$. Επομένως, είναι $|\alpha|<\varepsilon$, αν και μόνο αν $-\varepsilon<\alpha<\varepsilon$.

γ) Η σχέση $|\alpha|>\varepsilon$, αληθεύει για τους αριθμούς α που παριστάνονται με τα σημεία της ευθείας, που βρίσκονται στο εξωτερικό του κύκλου (O,ε) και μόνον αυτούς. Τα σημεία αυτά είναι τα σημεία των ημιευθειών $E'x'$ και Ex, χωρίς την αρχή τους, όπου παριστάνονται οι αριθμοί α με $\alpha<-\varepsilon$ και $\alpha>\varepsilon$ αντιστοίχως. Επομένως, είναι $|\alpha|>\varepsilon$, αν και μόνο αν $\alpha<-\varepsilon$ ή $\alpha>\varepsilon$.

Συμπερασματικά έχουμε τον επόμενο πίνακα:

Σχέση με απόλυτη τιμή	Οι τιμές του α στην ευθεία αριθμών	Ισοδύναμη σχέση χωρίς απόλυτη τιμή
$\lvert\alpha\rvert=\varepsilon$	$-\varepsilon$ ε	$\alpha=\varepsilon$ ή $\alpha=-\varepsilon$
$\lvert\alpha\rvert<\varepsilon$	$-\varepsilon$ ε	$-\varepsilon<\alpha<\varepsilon$
$\lvert\alpha\rvert\le\varepsilon$	$-\varepsilon$ ε	$-\varepsilon\le\alpha\le\varepsilon$
$\lvert\alpha\rvert>\varepsilon$	$-\varepsilon$ ε	$\alpha<-\varepsilon$ ή $\alpha>\varepsilon$
$\lvert\alpha\rvert\ge\varepsilon$	$-\varepsilon$ ε	$\alpha\le-\varepsilon$ ή $\alpha\ge\varepsilon$

Εφαρμογή 1

Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες ισχύει:

(α) $|\alpha|\le 5$ (β) $|\alpha|>2$ (γ) $|\alpha|\ge -4$

και να γράψετε τα αποτελέσματα με χρήση διαστημάτων.

Λύση

(α) Είναι $|\alpha|\le 5$ αν και μόνο αν $-5\le\alpha\le 5$. Επομένως $\alpha\in[-5,5]$.

(β) Είναι $|\alpha|>2$ αν και μόνο αν $\alpha<-2$ ή $\alpha>2$. Επομένως $\alpha\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

(γ) Επειδή $|\alpha|\ge 0$ και $-4<0$ η σχέση $|\alpha|\ge -4$ αληθεύει για όλους τους αριθμούς $\alpha\in(-\infty,+\infty)$

Ασκήσεις 3, 4, 5, 6 και 7

Εφαρμογή 2

(α) Να απλοποιήσετε την παράσταση $A=\dfrac{x^2+|x|}{|x|+1}$, $x\in\mathbb{R}$

(β) Αν $A<1$ να αποδείξετε ότι $x\in(-1,1)$.

Λύση

(α) Έχουμε $A=\dfrac{x^2+|x|}{|x|+1}=\dfrac{|x|^2+|x|}{|x|+1}=\dfrac{|x|\left(|x|+1\right)}{|x|+1}=|x|$

(β) Αν $A<1$ τότε $|x|<1$ οπότε $-1<x<1$.
Επομένως $x\in(-1,1)$.

Άσκηση 10

Εφαρμογή 3

Αν $\dfrac{\alpha}{|\alpha|+1}=\dfrac{\beta}{|\beta|+1}$ να αποδείξετε ότι $\alpha=\beta$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι $\alpha\beta\geq 0$ (γιατί;)

Επειδή οι αριθμοί $\dfrac{\alpha}{|\alpha|+1}$ και $\dfrac{\beta}{|\beta|+1}$ είναι ίσοι, έχουν ίσες απόλυτες τιμές.

Επομένως $\left|\dfrac{\alpha}{|\alpha|+1}\right|=\left|\dfrac{\beta}{|\beta|+1}\right|$ ή $\dfrac{|\alpha|}{\left||\alpha|+1\right|}=\dfrac{|\beta|}{\left||\beta|+1\right|}$

οπότε $$\dfrac{|\alpha|}{|\alpha|+1}=\dfrac{|\beta|}{|\beta|+1}$$

Με το σχήμα χιαστί παίρνουμε:

$$|\alpha|\left(|\beta|+1\right)=|\beta|\left(|\alpha|+1\right) \text{ ή } |\alpha||\beta|+|\alpha|=|\beta||\alpha|+|\beta| \text{ ή } |\alpha|=|\beta|$$

Επομένως, είναι $\alpha=\beta$ ή $\alpha=-\beta$. Αλλά $\alpha\beta\geq 0$, άρα $\alpha=\beta$

Γενικές ασκήσεις 11, 12, 13, 14 και15

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Ερωτήσεις κατανόησης

1. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις, ως αληθή ή ψευδή:

(α) Ισχύει $|-3\alpha| = 3|\alpha|$

(β) Για αρνητικούς αριθμούς $\alpha,\ \beta$ ισχύει

$|\alpha+\beta| = |\alpha| + |\beta|$

(γ) Αν $\alpha < 3$ τότε $|\alpha| < 3$

(δ) Η απόλυτη τιμή του πηλίκου δύο αριθμών, είναι ίση με το πηλίκο των απολύτων τιμών τους.

2. Να απαντήσετε στις επόμενες ερωτήσεις δικαιολογώντας την απάντησή σας:

(α) Είναι σωστή η ισότητα $|\alpha\beta\gamma| = |\alpha||\beta||\gamma|$;

(β) Για ποιες τιμές του x είναι $|x+4| = |x| + 4$;

(γ) Για ποιες τιμές του x είναι $|x^3| = |x|^3$;

Ερωτήσεις ανάπτυξης

3. Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες:

(α) $|\alpha| < 1$ (β) $|\alpha| \le 2$ (γ) $|\alpha| < -1$

4. Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες ισχύει:

(α) $|\alpha| > 3$ (β) $|\alpha| \ge 4$ (γ) $|\alpha| > -1$

5. Να βρείτε τους αριθμούς α για τους οποίους ισχύει:

(α) $d(\alpha,0) = 4$ (β) $d(-\alpha,0) < \frac{1}{2}$ (γ) $d(\alpha,0) \ge 2$

6. Αν για έναν αριθμό α ισχύει $|4\alpha| \le 2$ να αποδείξετε ότι:

(α) $-\frac{1}{2} \le \alpha \le \frac{1}{2}$

(β) Η παράσταση $A = \left|\alpha + \frac{1}{2}\right| + \left|\alpha - \frac{1}{2}\right|$ είναι ανεξάρτητη του α.

7. Αν η απόσταση του α από το 0 είναι μικρότερη του 1 να αποδείξετε ότι:

(α) $\alpha \in (-1,1)$ (β) $|2\alpha - 2| + |\alpha + 1| + \alpha = 3$

8. Να αποδείξετε ότι $\big||\alpha| - \alpha\big| + \big||\alpha| + \alpha\big| = 2|\alpha|$

9. Αν $x \ne y$ να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει η παράσταση

$$\left|\frac{2x-2y}{y-x}\right|$$

10. Δίνεται η παράσταση $A = \dfrac{x^2 + 2|x|}{|x| + 2}$, $x \in \mathbb{R}$

(α) Να απλοποιήσετε την παράσταση A.

(β) Να αποδείξετε ότι η ανισότητα $|-2x| - 2 > A$ ισχύει για κάθε $x \in (-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$

11. Αν $|\alpha - 2| = |\alpha| + 2$ να αποδείξετε ότι $\alpha \le 0$

12. Να αποδείξετε ότι $|\alpha - \beta| \le |\alpha| + |\beta|$.

Πότε ισχύει η ισότητα $|\alpha - \beta| = |\alpha| + |\beta|$;

13. Να αποδείξετε ότι $|\alpha + \beta + \gamma| \le |\alpha| + |\beta| + |\gamma|$

14. Να αποδείξετε ότι $|x - y| \le |x - z| + |z - y|$

15. Θεωρούμε το διάστημα $[\alpha,\beta]$. Να αποδ είξετε, γεωμετρικά, με την βοήθεια των ιδιοτήτων της μεσοκαθέτου ευθύγραμμου τμήματος, ή με άλλον τρόπο, ότι υπάρχει μόνο ένας αριθμός x με την ιδιότητα

$$d(\alpha,x) = d(x,\beta)$$

Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $x = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$

2.5 Ν-οστή ρίζα αριθμού

Περιέχονται:
- Ν-οστή ρίζα μη αρνητικού αριθμού
- Ιδιότητες των ν-οστών ριζών

Με $x \geq 0$ και $\alpha \geq 0$:
Αν $x^2 = \alpha$, τότε $x = \sqrt{\alpha}$
Αν $x = \sqrt{\alpha}$, τότε $x^2 = \alpha$

Ερμηνεία Μαθηματικών Συμβόλων

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε:
- Να ορίζουμε τη ν-οστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α, ως τη μοναδική ρίζα της εξίσωσης $x^{\nu} = \alpha$ και
- Να αποδεικνύουμε τις βασικές ιδιότητες (γινόμενο και πηλίκο ριζών).

Ν-οστή ρίζα μη αρνητικού αριθμού

Είναι, ήδη, γνωστή η έννοια της **τετραγωνικής ρίζας** ενός μη αρνητικού αριθμού α. Συγκεκριμένα μάθαμε ότι:
Τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α είναι ο μη αρνητικός αριθμός x που, όταν υψωθεί στο τετράγωνο δίνει τον α.

Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε την τρίτη ρίζα του α, $\left(\sqrt[3]{\alpha}\right)$, την τέταρτη ρίζα του α, $\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)$, και γενικά την ν-οστή ρίζα του α, $\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)$:

ΟΡΙΣΜΟΣ
Έστω α ένας μη αρνητικός αριθμός και ν θετικός ακέραιος. Αποδεικνύεται ότι η εξίσωση $x^{\nu} = \alpha$ έχει μοναδική μη αρνητική ρίζα, η οποία συμβολίζεται $\sqrt[\nu]{\alpha}$ και ονομάζεται ν-οστή ρίζα του α.

Ειδικότερα ορίζουμε $\sqrt[1]{\alpha} = \alpha$ και $\sqrt[2]{\alpha} = \sqrt{\alpha}$
Το ν λέγεται **δείκτης** και το α λέγεται **υπόρριζο** της $\sqrt[\nu]{\alpha}$. Η τρίτη ρίζα $\sqrt[3]{\alpha}$ ονομάζεται και **κυβική ρίζα** του α.

Από τον ορισμό μπορούμε να πούμε ότι:
Ν-οστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α λέμε τον μη αρνητικό αριθμό x που όταν υψωθεί στην ν-οστή δύναμη δίνει τον α.

Επομένως με $\alpha \geq 0$ και $x \geq 0$ ισχύουν:
- Αν $x^{\nu} = \alpha$ τότε $\sqrt[\nu]{\alpha} = x$ και
- Αν $\sqrt[\nu]{\alpha} = x$ τότε $x^{\nu} = \alpha$.

Είναι φανερό ότι $\sqrt[\nu]{0} = 0$ και $\sqrt[\nu]{1} = 1$

Παραδείγματα

Είναι $\sqrt[3]{125} = 5$, γιατί $5^3 = 125$, $\sqrt[4]{81} = 3$, γιατί $3^4 = 81$

$\sqrt[5]{32} = 2$, γιατί $2^5 = 32$, $\sqrt[4]{\dfrac{64}{81}} = \dfrac{2}{3}$, γιατί $\left(\dfrac{2}{3}\right)^4 = \dfrac{64}{81}$

και $\sqrt[3]{64\alpha^6\omega^3} = 4\alpha^2\omega$, γιατί $(4\alpha^2\omega)^3 = 64\alpha^6\omega^3$, $\omega \geq 0$.

Ακόμα
Η εξίσωση $x^3 = 8$ έχει μοναδική θετική ρίζα τον αριθμό $x = \sqrt[3]{8} = 2$
Η εξίσωση $x^4 = 81$ έχει μοναδική θετική ρίζα τον αριθμό $x = \sqrt[4]{81} = 3$.

Άσκηση 4

Ιδιότητες των ν-οστών ριζών

Άμεση συνέπεια του ορισμού είναι οι ιδιότητες:

$$\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu} = \alpha \quad \text{και} \quad \sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}} = \alpha, \text{ με } \alpha \geq 0$$

Όταν ο ν είναι άρτιος η $\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}}$ ορίζεται με $\alpha < 0$, αλλά δεν ισχύει $\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}} = \alpha$.
Το ορθό είναι:

$$\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}} = \sqrt[\nu]{|\alpha|^{\nu}} = |\alpha|, \text{ ν άρτιος.}$$

Παραδείγματα

(α) $\sqrt[4]{(-3)^4} = |-3| = 3$, (β) $\sqrt[6]{(x-1)^6} = |x-1|$,

(γ) $\sqrt{x^2 + 4x + 4} = \sqrt{(x+2)^2} = |x+2|$,

(δ) $\sqrt[10]{\alpha^{10}\beta^{10}\gamma^{20}} = \sqrt[10]{\left(\alpha\beta\gamma^2\right)^{10}} = |\alpha\beta\gamma^2| = |\alpha\beta|\gamma^2$.

Ρίζα αθροίσματος αριθμών

Το γινόμενο ν-οστών ριζών μη αρνητικών αριθμών ισούται με τη ν-οστή ρίζα του γινομένου τους.

Το πηλίκο ν-οστών ριζών δύο αριθμών, ισούται με τη ν-οστή ρίζα του πηλίκου τους.

Γινόμενο Ν-οστών ριζών

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε τις επόμενες ιδιότητες των ν-οστών ριζών:

ΠΡΟΤΑΣΗ

Για το γινόμενο και το πηλίκο ν-οστών ριζών ισχύουν:

$$\sqrt[\nu]{\alpha}\sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha\beta}, \text{ με } \alpha, \beta \geq 0$$

και
$$\frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}}, \text{ με } \alpha \geq 0 \text{ και } \beta > 0$$

Απόδειξη

Θέτουμε $\sqrt[\nu]{\alpha} = x \geq 0$ και $\sqrt[\nu]{\beta} = y \geq 0$ **(1)**
οπότε $\alpha = x^{\nu}$ και $\beta = y^{\nu}$ **(2)**
Από τις σχέσεις **(1)** παίρνουμε
$$\sqrt[\nu]{\alpha}\sqrt[\nu]{\beta} = xy \qquad \textbf{(3)}$$
Από τις ισότητες **(2)** παίρνουμε
$$\alpha\beta = x^{\nu}y^{\nu} \text{ ή } \alpha\beta = (xy)^{\nu} \text{ οπότε } xy = \sqrt[\nu]{\alpha\beta}.$$
Η ισότητα αυτή και η **(3)** δίνουν $\sqrt[\nu]{\alpha}\sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha\beta}$.

Για την ιδιότητα του πηλίκου των ριζών μπορούμε να κάνουμε παρόμοια με την παραπάνω απόδειξη. Με τη βοήθεια, όμως, της ιδιότητας του γινομένου ριζών, που μόλις αποδείξαμε, έχουμε και την εξής:

Είναι $\sqrt[\nu]{\alpha} = \sqrt[\nu]{\beta\frac{\alpha}{\beta}} = \sqrt[\nu]{\beta}\sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}}$ άρα $\frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}}$

Παρατήρηση
Στην εφαρμογή 2 της επόμενης Ενότητας 2.6, θα δούμε τρεις ακόμα ιδιότητες των ριζών.

Η ιδιότητα του γινομένου ριζών ισχύει και για περισσότερους από δύο μη αρνητικούς παράγοντες $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\kappa$, όπου κ θετικός ακέραιος μεγαλύτερος του 2:

$$\sqrt[\nu]{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\kappa} = \sqrt[\nu]{\alpha_1}\,\sqrt[\nu]{\alpha_2}\ldots\sqrt[\nu]{\alpha_\kappa}$$

Αν στην παραπάνω ισότητα θέσουμε $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_\kappa = \alpha \geq 0$, θα πάρουμε:

$$\sqrt[\nu]{\alpha^\kappa} = \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\kappa$$

Παραδείγματα

(α) $\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{8} = \sqrt[4]{2\cdot 8} = \sqrt[4]{16} = 2$,

(β) $\sqrt[6]{\alpha}\,\sqrt[6]{\alpha^2}\,\sqrt[6]{\alpha^3} = \sqrt[6]{\alpha\,\alpha^2\,\alpha^3} = \sqrt[6]{\alpha^6} = \alpha, \alpha \geq 0$,

(γ) $\dfrac{\sqrt[4]{3^7}}{\sqrt[4]{3^3}} = \sqrt[4]{\dfrac{3^7}{3^3}} = \sqrt[4]{3^4} = 4$,

δ) $\dfrac{\sqrt[4]{10^9}}{\sqrt[4]{10}} = \sqrt[4]{\dfrac{10^9}{10}} = \sqrt[4]{10^8} = \sqrt[4]{(10^2)^4} = 10^2 = 100$,

(ε) $\dfrac{\sqrt[3]{5^7}\,\sqrt[3]{5^4}}{\sqrt[3]{5^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{5^7\cdot 5^4}}{\sqrt[3]{5^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{5^{11}}}{\sqrt[3]{5^2}} = \sqrt[3]{\dfrac{5^{11}}{5^2}} = \sqrt[3]{5^9} = \sqrt[3]{(5^3)^3} = 5^3 = 125$

Ασκήσεις 5, 6 και 7

Εφαρμογή 1

Να τραπούν οι επόμενες παραστάσεις σε ισοδύναμες, χωρίς ρίζες στον παρονομαστή:

$$(\alpha)\ \frac{3}{\sqrt{2}} \quad (\beta)\ \frac{2}{\sqrt[3]{2}} \quad (\gamma)\ \frac{1}{\sqrt{5}-2} \quad (\delta)\ \frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$$

Λύση

(α) Πολλαπλασιάζουμε και τους δύο όρους του κλάσματος με $\sqrt{2}$, ώστε στον παρονομαστή να εμφανιστεί το $\left(\sqrt{2}\right)^2$:

$$\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Γενικότερα είναι $\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}} = \dfrac{\sqrt{\alpha}}{\alpha}$

(β) Πολλαπλασιάζουμε και τους δύο όρους του κλάσματος με $\left(\sqrt[3]{2}\right)^2$, ώστε στον παρονομαστή να εμφανιστεί το $\left(\sqrt[3]{2}\right)^3$:

$$\frac{2}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2\left(\sqrt[3]{2}\right)^2}{\sqrt[3]{2}\left(\sqrt[3]{2}\right)^2} = \frac{2\left(\sqrt[3]{2}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^3} = \frac{2\left(\sqrt[3]{2}\right)^2}{2} = \sqrt[3]{4}$$

Γενικότερα είναι $\dfrac{1}{\sqrt[\nu]{\alpha^\kappa}} = \dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-\kappa}}}{\alpha}$

(γ) Πολλαπλασιάζουμε και τους δύο όρους του κλάσματος με $\sqrt{5}+2$, ώστε στον παρονομαστή να εμφανιστεί η διαφορά τετραγώνων

$$\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}+2\right) = \left(\sqrt{5}\right)^2 - 2^2$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}-2} = \frac{\sqrt{5}+2}{\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}+2\right)} = \frac{\sqrt{5}+2}{\left(\sqrt{5}\right)^2-2^2} = \frac{\sqrt{5}+2}{5-4} = \sqrt{5}+2$$

(δ) Πολλαπλασιάζουμε και τους δύο όρους του κλάσματος με $\sqrt{5}-\sqrt{2}$ ώστε στον παρονομαστή να εμφανιστεί η διαφορά τετραγώνων

Ν-οστή ρίζα αριθμού 1

$$\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)=\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2$$

$$\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{3\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}=\frac{3\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{3\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}{3}=\sqrt{5}-\sqrt{2}.$$

Ασκήσεις 8, 9 και 10

Εφαρμογή 2

Να απλοποιήσετε την παράσταση: $\dfrac{\sqrt{45}+\sqrt[3]{54}}{\sqrt{20}+\sqrt[3]{16}}$

Λύση

Έχουμε $\sqrt{45}=\sqrt{9\cdot 5}=\sqrt{9}\sqrt{5}=3\sqrt{5}$, $\quad\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{27\cdot 2}=\sqrt[3]{27}\sqrt[3]{2}=3\sqrt[3]{2}$,

$\sqrt{20}=\sqrt{4\cdot 5}=\sqrt{4}\sqrt{5}=2\sqrt{5}$, $\quad\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{8\cdot 2}=\sqrt[3]{8}\sqrt[3]{2}=2\sqrt[3]{2}$ και

Επομένως:

$$\frac{\sqrt{45}+\sqrt[3]{54}}{\sqrt{20}+\sqrt[3]{16}}=\frac{3\sqrt{5}+3\sqrt[3]{2}}{2\sqrt{5}+2\sqrt[3]{2}}=\frac{3\left(\sqrt{5}+\sqrt[3]{2}\right)}{2\left(\sqrt{5}+\sqrt[3]{2}\right)}=\frac{3}{2}$$

Άσκηση 11

Εφαρμογή 3

Ν-οστή ρίζα αριθμού 2

Να κατατάξετε στους άρρητους ή στους ρητούς τους αριθμούς

(α) $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ και $\sqrt{8}$ $\qquad$ (β) $\sqrt{2}\sqrt{8}$ και $\sqrt{3}\sqrt{8}$ $\quad$ Τι παρατηρείτε;

Λύση

(α) Γνωρίζουμε ότι η τετραγωνική ρίζα ενός φυσικού αριθμού, ο οποίος δεν είναι τετράγωνο ακεραίου, είναι άρρητος αριθμός. Επομένως οι αριθμοί $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ και $\sqrt{8}$ είναι άρρητοι.

(β) Είναι

$$\sqrt{2}\sqrt{8}=\sqrt{2\cdot 8}=\sqrt{16}=4,\ \text{ρητός.}$$
$$\sqrt{3}\sqrt{8}=\sqrt{3\cdot 8}=\sqrt{24},\ \text{άρρητος.}$$

Παρατηρούμε ότι το γινόμενο αρρήτων αριθμών, είναι άλλοτε άρρητος και άλλοτε ρητός αριθμός, κατά περίπτωση.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Ασκήσεις κατανόησης

1. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις, ως αληθή ή ψευδή:

(α) Για τον μη αρνητικό αριθμό α είναι $\sqrt[\nu]{\alpha} \geq 0$

(β) Αν $\alpha \geq 0$ τότε $\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu} = \alpha$.

(γ) Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ είναι $\sqrt[6]{\alpha^6} = \alpha$.

(δ) Αν $\alpha \geq 0$ τότε $\sqrt[10]{\alpha^2} = \sqrt[5]{\alpha}$.

(ε) Είναι $\sqrt[6]{(-2)^6} = -6$.

2. Να συμπληρώσετε τον επόμενο πίνακα:

α	α	$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha+\beta}$	$\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha-\beta}$
16	0				
9	4				
36	64				–

Τι παρατηρείτε για τις ισότητες $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha+\beta}$ και $\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha-\beta}$;

3. (α) Υπάρχει διαφορά μεταξύ των $\sqrt{7^4}$ και $\left(\sqrt{7}\right)^4$;

(β) Υπάρχει διαφορά μεταξύ των $\sqrt{\alpha^4}$ και $\left(\sqrt{\alpha}\right)^4$;
Να αιτιολογήσετε σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας.

Ασκήσεις ανάπτυξης

4. Να υπολογίσετε τις ρίζες:

(α) $\sqrt[3]{64}$, $\sqrt[3]{125}$, $\sqrt[3]{\dfrac{216}{1000}}$, $\sqrt[3]{7^9}$,

(β) $\sqrt[4]{16}$, $\sqrt[4]{81}$, $\sqrt[4]{\dfrac{625}{81}}$, $\sqrt[4]{0{,}0081}$

(γ) $\sqrt[10]{1}$, $\sqrt[12]{4^{24}}$, $\sqrt[8]{\dfrac{\alpha^8}{3^{16}}}$

(δ) $\sqrt[3]{8\alpha^3}$, $\sqrt[5]{\dfrac{2^{10}\alpha^5}{3^{15}}}$, $\alpha > 0$

(ε) $\sqrt[4]{2^8\alpha^4}$

5. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

(α) $\sqrt[3]{2}\,\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{3}\,\sqrt[4]{27}$ (β) $\dfrac{\sqrt[5]{64}}{\sqrt[5]{2}}$, $\dfrac{\sqrt[6]{x^7}}{\sqrt[6]{x}}$, $x > 0$

(γ) $\dfrac{\sqrt{6}\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{\sqrt[6]{81}}{\sqrt[6]{3}}\sqrt[6]{9}$ δ) $\dfrac{\sqrt{0{,}08}}{\sqrt{0{,}02}}$ $\sqrt[3]{0{,}01}\,\sqrt[3]{0{,}1}$

6. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

(α) $\dfrac{\sqrt{0{,}04}}{\sqrt{0{,}01}}$, (β) $\sqrt{0{,}25}\,\sqrt[3]{0{,}001}$

7. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\alpha = \left(\sqrt{\dfrac{2}{3}} + \sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)^2$ είναι ρητός.

8. Να τραπούν οι επόμενες παραστάσεις σε ισοδύναμες, χωρίς ρίζες στον παρονομαστή:

(α) $\dfrac{3}{\sqrt{3}}$ (β) $\dfrac{4}{\sqrt[3]{4}}$ (γ) $\dfrac{\alpha}{\sqrt[7]{\alpha^5}}$ (δ) $\dfrac{\alpha}{\sqrt[5]{\alpha^7}}$

9. Να τραπούν οι επόμενες παραστάσεις σε ισοδύναμες, χωρίς ρίζες στον παρονομαστή:

(α) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ (β) $\dfrac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$ (γ) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$

10. Να αποδείξετε ότι:

(α) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = 5$

(β) $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} + \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} = 7$

11. Να αποδείξετε ότι:

(α) $\left(2\sqrt{18}+\sqrt{8}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{72}-\sqrt{50}\right) = 14$

(β) $\sqrt[3]{4}\left(\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{2}\right) = 8$

2.6 Δυνάμεις με εκθέτη ρητό αριθμό

Περιέχονται:
- Δύναμη αριθμού με ρητό εκθέτη
- Ιδιότητες δυνάμεων με ρητό εκθέτη

Δυνάμεις με ρητό εκθέτη 1

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε να ορίζουμε δυνάμεις με ρητό εκθέτη και να διερευνούμε τις ιδιότητές τους.

Δύναμη αριθμού με ρητό εκθέτη

Έχουμε ήδη ορίσει τις δυνάμεις με βάση πραγματικό αριθμό και έκθετη φυσικό αριθμό ν, ως εξής:

$$\alpha^0 = 1, \text{ με } \alpha \neq 0 \qquad \alpha^1 = \alpha$$

$$\alpha^\nu = \underbrace{\alpha\,\alpha \ldots \alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}} \text{ με } \nu \geq 2$$

Ακόμα, επεκτείναμε τις δυνάμεις σε ακέραιο έκθετη με την ισότητα:

$$\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu} \text{ με } \alpha \neq 0.$$

Στη συνέχεια, θα επεκτείνουμε της έννοια της δύναμης με βάση μη αρνητικό αριθμό και για την περίπτωση που ο εκθέτης είναι ρητός, όπως για παράδειγμα:

$$4^{\frac{1}{2}},\ 27^{\frac{1}{3}},\ 64^{\frac{2}{3}},\ 5^{\frac{4}{3}} \text{ κ.λπ.}$$

Η νέα αυτή επέκταση γίνεται με τη βοήθεια του επόμενου ορισμού:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν $\alpha > 0$, ν ακέραιος και μ θετικός ακέραιος, τότε $\alpha^{\frac{\nu}{\mu}} = \sqrt[\mu]{\alpha^\nu}$.

Αν, επιπλέον, και ο ν είναι θετικός ακέραιος, τότε $0^{\frac{\nu}{\mu}} = 0$.

Παραδείγματα 1

(α) $25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$,

(β) $27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$,

(γ) $64^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{64^2} = \left(\sqrt[3]{64}\right)^2 = 4^2 = 16$,

(δ) $16^{-\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{16^{-5}} = \sqrt[4]{\dfrac{1}{16^5}} = \dfrac{1}{\left(\sqrt[4]{16}\right)^5} = \dfrac{1}{2^5} = \dfrac{1}{32}$

(ε) $\left(\alpha^{2\nu}\beta^{3\nu}\right)^{\frac{1}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\left(\alpha^2\beta^3\right)^\nu} = \alpha^2\beta^3$, με $\beta \geq 0$.

(στ) $32^{0,2} = 32^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{32} = 2$

Ασκήσεις 4 και 5

Δυνάμεις με ρητό εκθέτη

Ιδιότητες δυνάμεων με ρητό εκθέτη

Αποδεικνύεται ότι οι γνωστές ιδιότητες των δυνάμεων με έκθετη ακέραιο αριθμό ισχύουν και για τις δυνάμεις με έκθετη ρητό αριθμό. Έτσι, για τους αριθμούς $\alpha,\ \beta$ και τους ρητούς $\rho,\ \rho_1$ και ρ_2 έχουμε τις παρακάτω ιδιότητες, με την προϋπόθεση ότι όλες οι παραστάσεις που εμφανίζονται έχουν νόημα:

$$\alpha^{\rho_1}\alpha^{\rho_2}=\alpha^{\rho_1+\rho_2} \qquad \alpha^{\rho_1}:\alpha^{\rho_2}=\alpha^{\rho_1-\rho_2}$$
$$(\alpha\beta)^{\rho}=\alpha^{\rho}\beta^{\rho} \qquad (\alpha:\beta)^{\rho}=\alpha^{\rho}:\beta^{\rho}$$
$$\left(\alpha^{\rho_1}\right)^{\rho_2}=\alpha^{\rho_1\rho_2}$$

Παραδείγματα 2

(α) $\alpha^{\frac{1}{4}}\alpha^{\frac{3}{4}}=\alpha^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=\alpha^{\frac{4}{4}}=\alpha^{1}=\alpha,$

(β) $\dfrac{x^{\frac{18}{5}}}{x^{\frac{3}{5}}}=x^{\frac{18}{5}-\frac{3}{5}}=x^{\frac{15}{5}}=x^{3},$

(γ) $\left(\alpha^{4}\right)^{\frac{3}{4}}=\alpha^{4\cdot\frac{3}{4}}=\alpha^{3},$

(δ) $\left[\left(\alpha^{4}\right)^{-\frac{18}{5}}\right]^{-1}=\alpha^{4\left(-\frac{18}{5}\right)(-1)}=\alpha^{\frac{72}{5}},$

(ε) $\dfrac{32^{\frac{1}{3}}}{108^{\frac{1}{3}}}=\left(\dfrac{32}{108}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(\dfrac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{\dfrac{8}{27}}=\dfrac{2}{3},$

Ασκήσεις 6 και 7

Παραδείγματα 3

(α) $\dfrac{x^{\frac{3}{5}}x^{2}}{x^{\frac{1}{5}}x^{\frac{2}{5}}}=\dfrac{x^{\frac{3}{5}+2}}{x^{\frac{1}{5}+\frac{2}{5}}}=\dfrac{x^{\frac{13}{5}}}{x^{\frac{3}{5}}}=x^{\frac{13}{5}-\frac{3}{5}}=x^{\frac{10}{5}}=x^{2},$

(β) $\left(8\alpha^{3}\beta^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}=8^{\frac{2}{3}}\left(\alpha^{3}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\beta^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{8^{2}}\ \alpha^{3\cdot\frac{2}{3}}\ \beta^{\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}}=4\alpha^{2}\beta$

Άσκηση 8

Εφαρμογή 1

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=\left(\alpha^{\frac{2}{3}}\alpha^{\frac{1}{2}}\right)^{6}:\left(\alpha^{\frac{3}{4}}\alpha^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{13}}$ για $\alpha=2^{\frac{24}{17}}$

Λύση

Έχουμε: $A=\left(\alpha^{\frac{2}{3}}\alpha^{\frac{1}{2}}\right)^{6}:\left(\alpha^{\frac{3}{4}}\alpha^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{13}}=\left(\alpha^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}\right)^{6}:\left(\alpha^{\frac{3}{4}+\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{13}}=\left(\alpha^{\frac{7}{6}}\right)^{6}:\left(\alpha^{\frac{13}{12}}\right)^{-\frac{1}{13}}$

$$=\alpha^{\frac{7}{6}\cdot 6}:\alpha^{-\frac{13}{12}\cdot\frac{1}{13}}=\alpha^{7}:\alpha^{-\frac{1}{12}}$$
$$=\alpha^{7-\left(-\frac{1}{12}\right)}=\alpha^{\frac{85}{12}}$$

Για $\alpha=2^{\frac{24}{17}}$ παίρνουμε $A=\alpha^{\frac{85}{12}}=\left(2^{\frac{24}{17}}\right)^{\frac{85}{12}}=2^{\frac{24}{17}\cdot\frac{85}{12}}=2^{10}=1024$

Δυνάμεις με ρητό εκθέτη 2

Άσκηση 9

Δυνάμεις με ρητό εκθέτη 3

Εφαρμογή 2

Να αποδείξετε τις επόμενες ιδιότητες των ν-οστών ριζών με την προϋπόθεση ότι οι εμφανιζόμενες παραστάσεις έχουν νόημα:

(α) $\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}}=\sqrt[\nu\mu]{\alpha}$ (β) $\sqrt[\nu\kappa]{\alpha^{\mu\kappa}}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$ (γ) $\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}\beta}=\alpha\sqrt[\nu]{\beta}$

Λύση

Έχουμε

(α) $\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\frac{1}{\mu}}}=\left(\alpha^{\frac{1}{\mu}}\right)^{\frac{1}{\nu}}=\alpha^{\frac{1}{\mu}\cdot\frac{1}{\nu}}=\alpha^{\frac{1}{\nu\mu}}=\sqrt[\nu\mu]{\alpha}$

(β) $\sqrt[\nu\kappa]{\alpha^{\mu\kappa}}=\alpha^{\frac{\mu\kappa}{\nu\kappa}}=\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$

(γ) $\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}\beta}=(\alpha^{\nu}\beta)^{\frac{1}{\nu}}=\alpha^{\nu\frac{1}{\nu}}\beta^{\frac{1}{\nu}}=\alpha\beta^{\frac{1}{\nu}}=\alpha\sqrt[\nu]{\beta}$

Άσκηση 10

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Ασκήσεις κατανόησης

1. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις, ως αληθή ή ψευδή:

(α) Η δύναμη με εκθέτη ρητό αριθμό, ορίζεται μόνο για μη αρνητικούς αριθμούς.

(β) Είναι $4^{0,5}=\sqrt{4}=2$.

(γ) Ισχύει $\left(4^{\rho_1}\right)^{\rho_2}=4^{\rho_1\rho_2}$, με ρ_1 και ρ_2 ρητούς αριθμούς.

(δ) Ισχύει $\left(4^{\frac{1}{3}}\right)^{-2}=4^{-\frac{2}{3}}$

(ε) Αν $\alpha^{\frac{2}{3}}=\beta$, τότε $\alpha^2=\beta^3$.

2. Να βρείτε το λάθος στις επόμενες ισότητες:

$$-1=(-1)^3=(-1)^{\frac{6}{2}}=\left[(-1)^6\right]^{\frac{1}{2}}=1^{\frac{1}{2}}=1$$

3. Να δώσετε παραδείγματα δύναμης ρητού αριθμού με εκθέτη ρητό, στα οποία το αποτέλεσμα είναι (α) άρρητος και (β) ρητός αριθμός.

Ασκήσεις ανάπτυξης

4. Να υπολογίσετε τους αριθμούς:

(α) $16^{1/2}$, $16^{1/4}$, $9^{-1/2}$, $27^{1/3}$,

(β) $32^{3/5}$, $81^{-3/4}$ $25^{1/2}$, $125^{-2/3}$

5. Να υπολογίσετε τους αριθμούς:

(α) $\left(\frac{64}{25}\right)^{1/2}$, (β) $\left(\frac{16}{81}\right)^{3/4}$, (γ) $\left(\frac{27}{8}\right)^{-1/3}$, (δ) $\left(\frac{4}{9}\right)^{-3/2}$

6. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

(α) $5^{1/3}\cdot5^{2/3}$, $7^{2/5}\cdot7^{3/5}$, $4^{1/7}\cdot4^{2/7}\cdot4^{11/7}$.

(β) $\frac{8^{2/5}}{8^{7/5}}$, $\frac{2^{4/9}}{2^{-5/9}}$, $\frac{3^{3/4}3^{1/4}}{3^{-1}}$

7. Να γράψετε, ως δύναμη ενός αριθμού, τις επόμενες παραστάσεις, με την προϋπόθεση ότι ορίζονται:

(α) $\alpha^{3/4}\alpha^{5/4}$, (β) $\left(\alpha^{1/2}\alpha^{1/3}\right)^6$, (γ) $\left(\alpha^4\alpha^6\right)^{-2/5}$, (δ) $\frac{x^{4/3}x^{1/3}}{x^{2/3}}$

8. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\left(\alpha^2\alpha^3\right)^{1/3}\left(16\alpha^6\alpha^{2/3}\right)^{1/2},\ \text{αν}\ \alpha=2^{-0,2}$$

9. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

(α) $\left(\frac{3\alpha^{1/4}}{\beta}\right)^2\left(\frac{\alpha^{-1}}{\beta^4}\right)^{-1}$, αν $\alpha=\sqrt[3]{4}, \beta=\sqrt{2}$

(β) $\left(\frac{2\alpha^{-1/3}}{\beta^{-1}}\right)^{-4}\left(\frac{3\alpha^{1/3}}{\beta^{1/2}}\right)^{1/2}$, αν $\alpha=27$ και $\beta=\sqrt[17]{16}$.

10. Να αποδείξετε ότι:

(α) $\sqrt{3\sqrt{3}}=\sqrt[4]{3^3}$ (β) $\sqrt[3]{\sqrt{5^3}}=\sqrt{5}$

(γ) $\sqrt[18]{7^9}=\sqrt{7}$ (δ) $\sqrt[5]{4^{16}}=64\sqrt[5]{4}$

2.7 Εφαρμογές στον υπολογισμό αριθμητικών παραστάσεων

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε να χρησιμοποιούμε τον ορισμό και τις ιδιότητες των ν-οστών ριζών και γενικότερα των δυνάμεων με ρητό εκθέτη στον υπολογισμό αριθμητικών παραστάσεων.

Εφαρμογή 1

Να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt[3]{2\sqrt[5]{2\sqrt{2}}}=2^{\frac{13}{30}}$$

Λύση

Γράφουμε με μορφή μιας δύναμης του 2 την παράσταση του πρώτου μέλους. Εκτελούμε τους υπολογισμούς «από μέσα προς τα έξω» με τη σειρά που βλέπουμε στο διπλανό πλαίσιο. Έχουμε:

$$\sqrt[3]{2\sqrt[5]{\boxed{2\sqrt{2}}}}$$
$$\sqrt[3]{2\boxed{\sqrt[5]{2\sqrt{2}}}}$$
$$\sqrt[3]{\boxed{2\sqrt[5]{2\sqrt{2}}}}$$

$$2\sqrt{2}=2\cdot 2^{\frac{1}{2}}=2^{1+\frac{1}{2}}=2^{\frac{3}{2}} \quad \text{και}$$

$$\sqrt[5]{2\sqrt{2}}=\sqrt[5]{2^{\frac{3}{2}}}=\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{5}}=2^{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{5}}=2^{\frac{3}{10}} \quad \text{και}$$

$$2\sqrt[5]{2\sqrt{2}}=2\cdot 2^{\frac{3}{10}}=2^{1+\frac{3}{10}}=2^{\frac{13}{10}} \quad \text{και τέλος}$$

$$\sqrt[3]{2\sqrt[5]{2\sqrt{2}}}=\sqrt[3]{2^{\frac{13}{10}}}=\left(2^{\frac{13}{10}}\right)^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{13}{10}\cdot\frac{1}{3}}=2^{\frac{13}{30}}$$

Ασκήσεις 2 και 3

Εφαρμογή 2

Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{1}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2}+\dfrac{1}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}=10$

Λύση

Έχουμε: $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2-2\sqrt{3}\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2=3-2\sqrt{6}+2=5-2\sqrt{6}$

και $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{3}\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2=3+2\sqrt{6}+2=5+2\sqrt{6}$

Επομένως:

$$\frac{1}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}=\frac{1}{5+2\sqrt{6}}+\frac{1}{5-2\sqrt{6}}=\frac{5-2\sqrt{6}+5+2\sqrt{6}}{\left(5+2\sqrt{6}\right)\left(5-2\sqrt{6}\right)}$$

$$=\frac{10}{5^2-\left(2\sqrt{6}\right)^2}=\frac{10}{25-4\cdot 6}=10$$

Ασκήσεις 4, 5, 6 και 7

Εφαρμογή 3

Να αποδείξετε ότι $\sqrt[4]{5^3}\sqrt[4]{\sqrt{6}-1}\sqrt[4]{\sqrt{6}+1}=5$

Λύση

Έχουμε:

$$\sqrt[4]{5^3}\sqrt[4]{\sqrt{6}-1}\sqrt[4]{\sqrt{6}+1}=\sqrt[4]{5^3}\sqrt[4]{(\sqrt{6}-1)(\sqrt{6}+1)} \quad \textbf{Ιδιότητα } \sqrt[4]{\alpha}\sqrt[4]{\beta}=\sqrt[4]{\alpha\beta}$$

$$=\sqrt[4]{5^3}\sqrt[4]{(\sqrt{6})^2-1} \quad \textbf{Ταυτότητα } (\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2-\beta^2$$

$$=\sqrt[4]{5^3}\sqrt[4]{5} \quad \textbf{Ιδιότητα } \sqrt[4]{\alpha}\sqrt[4]{\beta}=\sqrt[4]{\alpha\beta}$$

$$=\sqrt[4]{5^3\cdot 5}=\sqrt[4]{5^4}=5 \quad \textbf{Ιδιότητα } \sqrt[\nu]{\alpha^\nu}=\alpha, \alpha\geq 0$$

Ασκήσεις 8 και 9

Εφαρμογή 4

Να αποδείξετε ότι: $A=\left(2^{\frac{2}{3}}.4^{\frac{1}{2}}\right)^6\left(4^{\frac{3}{4}}.8^{\frac{1}{3}}\right)^{-5}=1$

Λύση

Εφαρμόζουμε τις ιδιότητες των δυνάμεων. Είναι

$$4^{\frac{1}{2}}=\sqrt{4}=2,\quad 4^{\frac{3}{4}}=(2^2)^{\frac{3}{4}}=2^{\frac{3}{2}} \quad \text{και} \quad 8^{\frac{1}{3}}=(2^3)^{\frac{1}{3}}=2$$

Έχουμε:

$$A=\left(2^{\frac{2}{3}}.4^{\frac{1}{2}}\right)^6\left(4^{\frac{3}{4}}.8^{\frac{1}{3}}\right)^{-5}=\left(2^{\frac{2}{3}}.2\right)^6\left(2^{\frac{3}{2}}.2\right)^{-4}$$

$$=\left(2^{\frac{2}{3}+1}\right)^6\left(2^{\frac{3}{2}+1}\right)^{-4} \quad \textbf{Ιδιότητα } \alpha^{\rho_1}\alpha^{\rho_2}=\alpha^{\rho_1+\rho_2}$$

$$=\left(2^{\frac{5}{3}}\right)^6\left(2^{\frac{5}{2}}\right)^{-4}=2^{\frac{5}{3}6}\cdot 2^{\frac{5}{2}(-4)} \quad \textbf{Ιδιότητα } \left(\alpha^{\rho_1}\right)^{\rho_2}=\alpha^{\rho_1\cdot\rho_2}$$

$$=2^{10}\cdot 2^{-10} \quad \textbf{Ιδιότητα } \alpha^{\rho_1}\cdot\alpha^{\rho_2}=\alpha^{\rho_1+\rho_2}$$

$$=2^{10+(-10)}=2^0=1$$

Εφαρμογή 5

Να υπολογίσετε την παράσταση: $A=\sqrt[3]{4444^3-3333^3-2222^3-2\cdot 1111^3}$

Λύση

Είναι $4444^3=(4\cdot 1111)^3=4^3\cdot 1111^3=64\cdot 1111^3$

Ομοίως $2222^3=8\cdot 1111^3$ και $3333^3=27\cdot 1111^3$

Επομένως $A=\sqrt[3]{4444^3-3333^3-2222^3-2\cdot 1111^3}$

$$=\sqrt[3]{64\cdot 1111^3-27\cdot 1111^3-8\cdot 1111^3-2\cdot 1111^3}$$

$$=\sqrt[3]{27\cdot 1111^3}$$

$$=\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{1111^3}=3\cdot 1111=3333$$

Ασκήσεις 10, 11 και 12

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Ασκήσεις κατανόησης

1. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις επόμενες προτάσεις, ως αληθή ή ψευδή:

(α) Είναι $8^{1/4}=4^{3/8}$

(β) Ισχύει $\sqrt{\sqrt{5}}=\sqrt[4]{5}$.

(γ) Ισχύει $\sqrt[5]{\alpha}=\alpha^{0,2}$, με $\alpha\geq 0$.

(δ) Ισχύει $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2=5+2\sqrt{6}$.

(ε) Ο αντίστροφος του $\sqrt{11}+\sqrt{10}$ είναι ο $\sqrt{11}-\sqrt{10}$.

Ασκήσεις ανάπτυξης

2. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

(α) $\sqrt{3}\sqrt[3]{3}\sqrt[6]{3}$ (β) $\sqrt{\sqrt{5}\sqrt[3]{5}}\ \sqrt[6]{5^{7/2}}$

(γ) $\sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}\ \sqrt[4]{2}$ (δ) $\dfrac{\sqrt[5]{7}\sqrt{7\sqrt[3]{7}}}{\sqrt[15]{7^8}}$

3. Να αποδείξετε ότι:

(α) $\left(\sqrt[3]{3\sqrt{3}}\right)^2=3$ (β) $\sqrt[3]{4\sqrt[5]{2\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}}=2$

4. Να αποδείξετε ότι είναι ρητός ο αριθμός:

$$\alpha=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$$

5. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})^2}+\frac{1}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})^2}=6$$

6. Να αποδείξετε ότι

(α) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}=\dfrac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}$ και $\dfrac{\sqrt{5}+3}{3-\sqrt{5}}=\dfrac{(\sqrt{5}+3)^2}{4}$

(β) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}}-\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}+3}{3-\sqrt{5}}}=-2$

7. Δίνεται ο αριθμός $A=\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}$.

(α) Να εξετάσετε αν είναι θετικός, αρνητικός ή μηδέν.

(β) Να βρείτε το τετράγωνό του A^2 και τον A.

8. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

(α) $\sqrt[3]{\dfrac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{2+\sqrt{3}}}$ (β) $\sqrt[5]{7+\sqrt{17}}\ \sqrt[5]{7-\sqrt{17}}$

9. Να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt[3]{3-\sqrt{3}}\sqrt[3]{3+\sqrt{3}}\ \sqrt[3]{36}=6$$

10. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

(α) $\sqrt[5]{2^3\cdot 4^2}\sqrt[10]{2^4\cdot 4^{16}}$ (β) $3^{1/2}\left(9\cdot 3^{1/2}\right)^{1/5}$

(γ) $\sqrt[3]{\dfrac{54\cdot 3^6\cdot 9}{2\cdot 3^3\cdot 9^4}}$ (δ) $\left(\dfrac{4\cdot 7^{1/4}}{5^{1/2}}\right)^2\left(\dfrac{\left(7^{1/4}\right)^{-1}}{5^2}\right)^2$

11. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

(α) $\left(2^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{3}{4}}\left(2^{\frac{2}{5}}\right)^{-\frac{5}{4}}\left(2^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{1}{2}}$

(β) $\left[\left(5^{1/2}\right)^3 3^{2/3}\right]^{1/3}\left[16\left(5^{1/2}\right)^6\left(3^{2/3}\right)^{7/3}\right]^{1/2}$

12. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2\cdot 1}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3\cdot 2}}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{4\cdot 3}}+\ldots+\frac{\sqrt{9}-\sqrt{8}}{\sqrt{9\cdot 8}}=\frac{2}{3}$$

13. Να αποδείξετε ότι

$$\sqrt[4]{444^4-333^4-222^4+10\cdot 111^4}=111\sqrt{13}$$

2.8 Ανακεφαλαίωση

Στην ενότητα αυτή περιλαμβάνονται έργα για περαιτέρω αναζητήσεις και διευρύνσεις των μαθητών/μαθητριών, με στόχο την εμβάθυνση στην κατανόηση των Προσδοκώμενων Μαθησιακών Αποτελεσμάτων του κεφαλαίου.

Ασκήσεις κατανόησης της ύλης του κεφαλαίου:

1. Να συμπληρώσετε τα κενά ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις:

(α) Το άθροισμα ενός ρητού και ενός αρρήτου αριθμού είναι ____________ ____________

(β) Η απόσταση των αριθμών α και β είναι d(α, β)= ______

(γ) Είναι $|\alpha| = \begin{cases} \_\_, & \alpha\nu\ \alpha \geq 0 \\ \_\_, & \alpha\nu\ \alpha < 0 \end{cases}$

(δ) Αν $x^{\nu} = \alpha$, τότε $x = \_\_$ με $x, \alpha \geq 0$ και ν θετικό ακέραιο.

(ε) Αν ο ν είναι άρτιος, τότε $\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}} = \_\_\_$

(στ) Είναι $\alpha^{\frac{1}{\nu}} = \_\_\_$

2. Να χαρακτηρίσετε ως αληθή ή ψευδή καθεμία από τις επόμενες προτάσεις:

(α) Ο αριθμός $\sqrt{17}$ είναι ρητός.

(β) Ο αριθμός $0{,}212112111211112\ldots$ είναι άρρητος.

(γ) Το σύνολο $\mathbb{Q}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$

(δ) Το διάστημα $(1,2)$ περιέχει τους αριθμούς x με $1 \leq x \leq 2$

(ε) Είναι $(-\infty, \alpha) \subseteq (-\infty, \alpha]$.

(στ) Η απόσταση των αριθμών 4 και -2 είναι $|4-2| = 2$.

(ζ) Είναι $|\alpha| = 4$, αν και μόνο αν $\alpha = 4$ ή $\alpha = -4$

(η) Αν $|\alpha| \leq \varepsilon$ τότε $\alpha \leq -\varepsilon$ ή $\alpha \geq \varepsilon$

(θ) Είναι $16^{0,25} = 2$.

(ι) Ισχύει $\sqrt[5]{\alpha+\beta} = \sqrt[5]{\alpha} + \sqrt[5]{\beta}$ με $\alpha, \beta > 0$.

Ασκήσεις ανάπτυξης

3. Η ιδιότητα $\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}} = |\alpha|$ με ν άρτιο.

Δίνονται οι παραστάσεις

$$\alpha = \sqrt{(x-3)^2} \quad \text{και} \quad \beta = \sqrt[3]{(3-x)^3}$$

(α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση α;

(β) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση β;

(γ) Να αποδείξετε ότι, όταν ορίζονται και οι δύο παραστάσεις, τότε είναι ίσες.

4. Αναπτύγματα ταυτοτήτων.

Θα υπολογίσετε με δύο τρόπους τη τιμή της παράστασης:

$$\alpha = \sqrt{5+2\sqrt{6}} - \sqrt{5-2\sqrt{6}}$$

Α.(α) Να αναπτύξετε τις ταυτότητες

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2 \quad \text{και} \quad \left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2$$

(β) Να αποδείξετε ότι

$$\sqrt{5+2\sqrt{6}} - \sqrt{5-2\sqrt{6}} = 2\sqrt{2}$$

Β. Να αποδείξετε ότι

$$\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}} - \sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^2 = 8$$

Από αυτό προκύπτει $\alpha^2 = 8$, οπότε

$$\alpha = \sqrt{8} \quad \text{ή} \quad \alpha = -\sqrt{8}$$

Υπάρχει διαφορά στο αποτέλεσμα αυτό με το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος Α.(β) και γιατί;

5. Απαλοιφή απόλυτων τιμών.

Δίνεται η παράσταση

$$\alpha = \sqrt{x^2 + 4x + 4} + \sqrt{x^2 - 6x + 9}$$

(α) Να αποδείξετε ότι ορίζεται για όλους τους πραγματικούς αριθμούς.

(β) Να την γράψετε χωρίς χρήση ριζών, με χρήση απόλυτων τιμών.

(γ) Αν $-2 \le x \le 3$ να αποδείξετε ότι η παράσταση έχει σταθερή τιμή.

(δ) Αν $x < -2$, να γράψετε την παράσταση χωρίς τις απόλυτες τιμές.

6. Πράξεις με ριζικά.

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ και $\beta = \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

(α) Να αποδείξετε ότι είναι αντίστροφοι.

(β) Να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta = \sqrt{10}$ και $\alpha^2 + \beta^2 = 8$

(γ) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\alpha^4 + \beta^4$ είναι ρητός.

7. Το χρυσό ορθογώνιο.

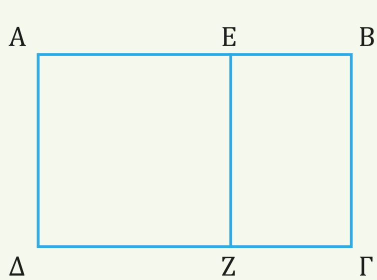
Ένα ορθογώνιο λέγεται χρυσό, όταν ο λόγος της μεγαλύτερης πλευράς του προς την μικρότερη ισούται με τον χρυσό αριθμό Φ, όπου

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

(α) Να αποδείξετε ότι $\Phi^2 = \Phi + 1$ και $\dfrac{1}{\Phi} = \Phi - 1$

(β) Να αποδείξετε ότι $\Phi^3 = \sqrt{5} + 2$

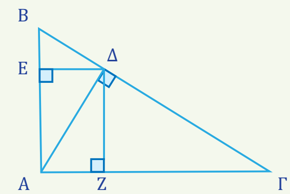
(γ) Να αποδείξετε ότι, αν από το χρυσό ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ αποκόψουμε το τετράγωνο $AEZ\Delta$, τότε το ορθογώνιο $EB\Gamma Z$ που απομένει είναι χρυσό.



Κατασκευή χρυσών ορθογωνίων

8. Μια ιδιότητα του ύψους ορθογωνίου τριγώνου.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρνουμε το ύψος $A\Delta$ και τις προβολές E, Z του Δ στις πλευρές AB

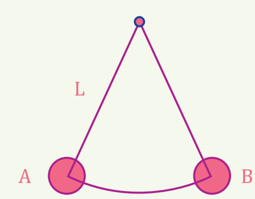


και $A\Gamma$ αντιστοίχως. Αποδεικνύεται ότι $A\Delta^3 = AE \cdot AZ \cdot B\Gamma$

Βρείτε το ύψος, αν $AE = 9{,}6$, $AZ = 7{,}2$ και $B\Gamma = 25$.

9. Ο τύπος του εκκρεμούς.

Η περίοδος T ενός εκκρεμούς είναι ο χρόνος που απαιτείται για μία πλήρη ταλάντωση, για παράδειγμα



ο χρόνος να πάει από την θέση A στην θέση B και να επιστρέψει στη θέση A.

Αποδεικνύεται ότι $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$, όπου L είναι το μήκος του εκκρεμούς και g η επιτάχυνση της βαρύτητας. Βρείτε την περίοδο του εκκρεμούς αν $L = \dfrac{490}{484}m$ και $g = 10m/s^2$.

Να πάρετε προσεγγιστικά $\pi \simeq \dfrac{22}{7}$

10. Το επιτόκιο.

Όταν καταθέτουμε ένα κεφάλαιο K για ν χρονικές περιόδους και πάρουμε τόκο T τότε το επιτόκιο δίνεται από τον τύπο:

$$\varepsilon = \left(\frac{K+T}{K}\right)^{\frac{1}{\nu}} - 1$$

Βρείτε το επιτόκιο με προσέγγιση χιλιοστού, αν $K = 150$ Ευρώ, $T = 50$ Ευρώ και $\nu = 5$ έτη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

Αλγεβρικές παραστάσεις

Σύντομη γνωριμία

Στο κεφάλαιο αυτό συνεχίζεται η παρουσίαση ορισμένων ακόμα βασικών στοιχείων από την Άλγεβρα. Πιο συγκεκριμένα, συμπληρώσουμε τις βασικές ταυτότητες που διδάχθηκαν στο Γυμνάσιο, όπως π.χ. οι παρακάτω:

- τετράγωνο αθροίσματος: $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$
- τετράγωνο διαφοράς: $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$
- διαφορά τετραγώνων: $\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$
- γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά: $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2-\beta^2$

Οι νέες ταυτότητες αφορούν στην εύρεση του κύβου αθροίσματος και διαφοράς, αλλά και στην παραγοντοποίηση αθροίσματος και διαφοράς κύβων. Τέλος δίνονται παραδείγματα και εφαρμογές που αναδεικνύουν την χρησιμότητα των ταυτοτήτων και των ριζικών, δυνάμεων δηλαδή σε ρητό εκθέτη, στον μετασχηματισμό και τον υπολογισμό αλγεβρικών ή αριθμητικών παραστάσεων.

Λέξεις κλειδιά:
Ταυτότητα
Αξιοσημείωτες ταυτότητες
Κύβος αθροίσματος
Κύβος διαφοράς
Άθροισμα κύβων
Διαφορά κύβων

Διόφαντος ο Αλεξανδρεύς
(περίπου 210 – 290)

Έλληνας μαθηματικός, ο οποίος έζησε στην Αλεξάνδρεια. Θεωρείται από πολλούς πατέρας της άλγεβρας, εξαιτίας του σπουδαίου έργου του «Αριθμητικά».
Το έργο αυτό περιέχει προβλήματα τα οποία λύνονται, σήμερα, με εξισώσεις 1ου και 2ου βαθμού.
Ο Διόφαντος συνεισέφερε στην ανάπτυξη της αριθμητικής, καθιέρωσε έναν μαθηματικό συμβολισμό για τη γραφή προβλημάτων και για πρώτη φορά σε μεγάλη κλίμακα χρησιμοποίησε κλάσματα, ως αριθμούς.
Προς τιμή του μια κατηγορία εξισώσεων, των οποίων ζητούνται οι ακέραιες λύσεις λέγονται διοφαντικές εξισώσεις.

Στον τάφο του, είχε γραφτεί μια επιγραφή-αλγεβρικό πρόβλημα. Η επιγραφή αυτή έλεγε:
Διαβάτη, σε αυτόν τον τάφο αναπαύεται ο Διόφαντος. Σε εσένα που είσαι σοφός, η επιστήμη θα δώσει το μέτρο της ζωής του. Άκουσε: Οι θεοί του επέτρεψαν να είναι νέος για το ένα έκτο της ζωής του. Ακόμα ένα δωδέκατο και φύτρωσε το μαύρο γένι του. Μετά από ένα έβδομο ακόμα, ήρθε του γάμου του η μέρα. Τον πέμπτο χρόνο αυτού του γάμου, γεννήθηκε ένα παιδί. Τι κρίμα, για το νεαρό του γιο. Αφού έζησε μονάχα τα μισά χρόνια από τον πατέρα του, γνώρισε τη παγωνιά του θανάτου. Τέσσερα χρόνια αργότερα, ο Διόφαντος βρήκε παρηγοριά στη θλίψη του, φτάνοντας στο τέλος ζωής του."
Το πρόβλημα αυτό οδηγεί σε μια εξίσωση που έχει λύση το 84.Τόσο έζησε ο Διόφαντος!

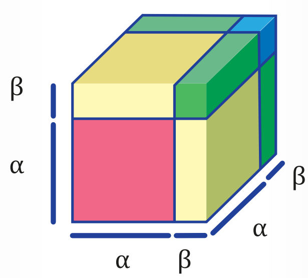
3.1 Αξιοσημείωτες ταυτότητες

Περιέχονται:
- Κύβος αθροίσματος και διαφοράς δύο όρων
- Άθροισμα και διαφορά δύο κύβων

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε να αποδεικνύουμε τις ταυτότητες που σχετίζονται με τις παραστάσεις $(\alpha\pm\beta)^3$ και $\alpha^3\pm\beta^3$.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Στο διπλανό σχήμα έχουμε έναν κύβο με πλευρά $\alpha+\beta$, τον οποίο, με κατάλληλες επίπεδες τομές, τον χωρίζουμε σε οκτώ στερεά σώματα.



Προσπαθήστε να απαντήσετε στα επόμενα ερωτήματα:

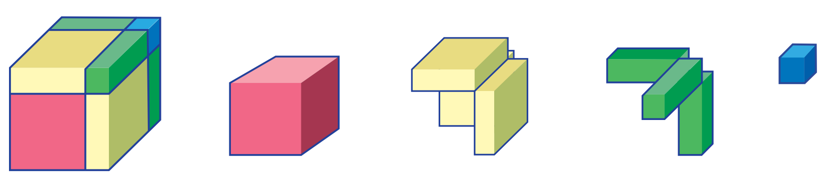
(α) Πόσοι νέοι κύβοι σχηματίζονται και τι όγκο έχει ο καθένας;

(β) Πόσα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα σχηματίζονται με διαστάσεις α, α και β; Τι όγκο έχουν συνολικά;

(γ) Πόσα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα σχηματίζονται με διαστάσεις α, β και β; Τι όγκο έχουν συνολικά;

Τι παρατηρείτε; Είναι αληθής η επόμενη ισότητα όγκων;

$$(\alpha+\beta)^3 \quad = \quad \alpha^3 \quad + \quad 3\alpha^2\beta \quad + \quad 3\alpha\beta^2 \quad + \quad \beta^3$$



Οι πρώτες αξιοσημείωτες ταυτότητες:
- Τετράγωνο αθροίσματος: $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$
- Τετράγωνο διαφοράς: $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$
- Διαφορά τετραγώνων: $\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$
- Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά: $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$

Στο Γυμνάσιο, συναντήσαμε για πρώτη φορά την έννοια της ταυτότητας. Είδαμε ότι **ταυτότητα** λέμε κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών αυτών. Αξιοσημείωτες είναι οι ταυτότητες που βλέπουμε στο διπλανό πλαίσιο. Στη συνέχεια, θα μάθουμε ταυτότητες που σχετίζονται με τις παραστάσεις $(\alpha\pm\beta)^3$ και $\alpha^3\pm\beta^3$.

Κύβος αθροίσματος και διαφοράς δύο όρων

Οι παραστάσεις $(\alpha+\beta)^3$ και $(\alpha-\beta)^3$ ο ονομάζονται κύβος αθροίσματος και κύβος διαφοράς αντίστοιχα. Όπως διαπιστώνουμε από την παραπάνω δραστηριότητα, για θετικούς αριθμούς α και β ισχύει η ισότητα

$$(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$$

Γενικότερα, για τους πραγματικούς αριθμούς α και β θα αποδείξουμε ότι:

$$(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3 \quad \text{και} \quad (\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$$

Απόδειξη

Έχουμε:

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)^3 &= (\alpha+\beta)(\alpha+\beta)^2=(\alpha+\beta)(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)\\ &= \alpha(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)+\beta(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)\\ &= \alpha^3+2\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2+\beta^3\\ &= \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3\end{aligned}$$

Η δεύτερη ταυτότητα αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο. Μπορούμε, όμως, να την αποδείξουμε απλούστερα, με τη βοήθεια της πρώτης. Πραγματικά είναι :

$$(\alpha-\beta)^3=[\alpha+(-\beta)]^3=\alpha^3+3\alpha^2(-\beta)+3\alpha(-\beta)^2+(-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$$

Παράδειγμα 1

Να βρείτε τα αναπτύγματα των παρακάτω παραστάσεων:

(α) $(\alpha-1)^3$ (β) $(1+2\alpha)^3$ (γ) $(3\beta+\alpha)^3$

Λύση

Έχουμε κατά σειρά

(α) $(\alpha-1)^3=\alpha^3-3\alpha^2\cdot 1+3\alpha\cdot 1^2-1^3=\alpha^3-3\alpha^2+3\alpha-1$

(β) $(1+2\alpha)^3=1^3+3\cdot 1^2\cdot(2\alpha)+3\cdot 1\cdot(2\alpha)^2+(2\alpha)^3=1+6\alpha+12\alpha^2+8\alpha^3$

(γ) $(3\beta+\alpha)^3=(3\beta)^3+3(3\beta)^2\alpha+3(3\beta)\alpha^2+\alpha^3=27\beta^3+27\beta^2\alpha+9\beta\alpha^2+\alpha^3$

Ασκήσεις 3 και 4

Άθροισμα και διαφορά δύο κύβων

Οι παραστάσεις $\alpha^3+\beta^3$ και $\alpha^3-\beta^3$ ονομάζονται **άθροισμα κύβων** και **διαφορά κύβων**, αντίστοιχα, των αριθμών α και β.

Για αυτές θα αποδείξουμε τις ταυτότητες:

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2) \quad \text{και} \quad \alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$$

Απόδειξη

Ο πιο απλός τρόπος είναι να ξεκινήσουμε από το δεύτερο μέλος και με την επιμεριστική ιδιότητα να καταλήξουμε στο πρώτο. Πραγματικά είναι:

$$(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=\alpha(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)+\beta(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$$

$$=\alpha^3-\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta\alpha^2-\alpha\beta^2+\beta^3=\alpha^3+\beta^3 \quad \text{και}$$

$$(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=\alpha(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)-\beta(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$$

$$=\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-\beta\alpha^2-\alpha\beta^2-\beta^3=\alpha^3-\beta^3$$

Παράδειγμα 2

Να παραγοντοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις

(α) β^3+8 (β) x^3-1 (γ) $8x^3-27y^3$

Λύση

Έχουμε κατά σειρά

(α) $\beta^3+8=\beta^3+2^3=(\beta+2)(\beta^2-\beta\cdot 2+2^2)=(\beta+2)(\beta^2-2\beta+4)$

(β) $x^3-1=x^3-1^3=(x-1)(x^2+x\cdot 1+1^2)=(x-1)(x^2+x+1)$

(γ) $8x^3-27y^3=(2x)^3-(3y)^3=(2x-3y)\left[(2x)^2+2x\,3y+(3y)^2\right]$

$$=(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)$$

Παράδειγμα 3

Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $(\alpha-2)(\alpha^2+2\alpha+4)$ (β) $(4x+5y)(16x^2-20xy+25y^2)$

Λύση

Έχουμε

(α) $(\alpha-2)(\alpha^2+2\alpha+4)=(\alpha-2)(\alpha^2+2\cdot\alpha+2^2)=\alpha^3-2^3=\alpha^3-8$

(β) $(4x+5y)(16x^2-20xy+25y^2)=(4x+5y)\left[(4x)^2-(4x)(5y)+(5y^2)\right]$

$$=(4x)^3+(5y)^3=64x^3+125y^3$$

Ασκήσεις 5 και 6

Για να αποδείξουμε μια ταυτότητα, ένας τρόπος είναι να εκτελέσουμε τις πράξεις σε κάθε ένα από τα δύο μέλη της ξεχωριστά και να καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα.

Εφαρμογή 1

Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$(\alpha+\beta)^3+2(\alpha^3+\beta^3)=3(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)$$

Λύση

Έχουμε:

Πρώτο μέλος: $(\alpha+\beta)^3+2(\alpha^3+\beta^3)=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3+2\alpha^3+2\beta^3$

$$=3\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+3\beta^3$$

Δεύτερο μέλος: $3(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)=3(\alpha^3+\alpha\beta^2+\alpha^2\beta+\beta^3)$

$$=3\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+3\beta^3$$

Επομένως $(\alpha+\beta)^3+2(\alpha^3+\beta^3)=3(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)$

Ασκήσεις 7 και 8

Είναι $\left(\sqrt{3}\right)^3=3\sqrt{3}$ και γενικότερα $\left(\sqrt{\alpha}\right)^3=\alpha\sqrt{\alpha}$

Εφαρμογή 2

α) Να βρείτε τα αναπτύγματα των παραστάσεων $\left(\sqrt{3}+1\right)^3$ και $\left(\sqrt{3}-1\right)^3$

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\Pi=\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10}-\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}$

Λύση

α) Είναι: $\left(\sqrt{3}+1\right)^3=\left(\sqrt{3}\right)^3+3\left(\sqrt{3}\right)^2\cdot 1+3\sqrt{3}\cdot 1^2+1^3=\left(\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}+9+3\sqrt{3}+1$

$$=3\sqrt{3}+3\sqrt{3}+10=6\sqrt{3}+10$$

$$\left(\sqrt{3}-1\right)^3=\left(\sqrt{3}\right)^3-3\left(\sqrt{3}\right)^2\cdot 1+3\sqrt{3}\cdot 1^2-1^3=\left(\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}-9+3\sqrt{3}-1$$

$$=3\sqrt{3}+3\sqrt{3}-10=6\sqrt{3}-10$$

β) Είναι: $\Pi=\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10}-\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}\overset{(\alpha)}{=}\sqrt[3]{\left(\sqrt{3}+1\right)^3}-\sqrt[3]{\left(\sqrt{3}-1\right)^3}$

$$=\sqrt{3}+1-\left(\sqrt{3}-1\right)=\sqrt{3}+1-\sqrt{3}+1=2.$$

Ασκήσεις 9 και 10

Γενικές ασκήσεις 11 και 12

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Ασκήσεις κατανόησης

1. Να συμπληρώσετε τα κενά, ώστε να προκύψουν ισότητες:
(α) $\left(2x+.....\right)\left(4x^2-.....+.....\right)=.....+1$
(β) $\left(....-.....\right)\left(4\alpha^2+.....+9\beta^2\right)=.....-.....$
(γ) $\left(.....-.....\right)^3=8x^3-.....+24x-.....$
(δ) $\left(2+....\right)^3=....+24x+....+....$

2. Να χαρακτηρίσετε ως αληθή ή ψευδή καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:
(α) Η παράσταση $(\alpha+\beta)^3$ λέγεται άθροισμα κύβων
(β) Ισχύει $(-\alpha-\beta)^3=-(\alpha+\beta)^3$
(γ) Για οποιουσδήποτε αριθμούς α, β ισχύει $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+\beta^3$
(δ) Είναι $1+\beta^3=(1+\beta)(1+\beta+\beta^2)$, $\beta\neq 0$
(ε) Είναι $x^3+3x^2+3x+1=(x+1)^3$

Ασκήσεις ανάπτυξης

3. Να βρείτε τα αναπτύγματα των παρακάτω παραστάσεων:
(α) $(x+2)^3$ (β) $\left(2\alpha+1\right)^3$ (γ) $(1-\alpha)^3$
(δ) $(2\beta-\alpha)^3$ (ε) $\left(\sqrt{3}+1\right)^3$ (στ) $\left(2-\sqrt{2}\right)^3$

4. Να βρείτε τα αναπτύγματα των παρακάτω παραστάσεων:
(α) $(3x+1)^3$ (β) $(2\beta+3)^3$ (γ) $\left(2\alpha-3\beta\right)^3$
(δ) $(2x-5)^3$ (ε) $(3\alpha-2y)^3$ (στ) $(2xy-z)^3$

5. Να παραγοντοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:
(α) x^3+1 (β) β^3-8 (γ) $8+y^3$
(δ) $27-x^3$ (ε) $8x^3-125$ (στ) $64\alpha^3+27$

6. Να κάνετε τις πράξεις:
(α) $(x+2)(x^2-2x+4)$ (β) $(3-\alpha)(9+3\alpha+\alpha^2)$
(γ) $(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$
(δ) $(1+3x)(1-3x+9x^2)$

7. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:
(α) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$ και
$\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)^3+3\alpha\beta(\alpha-\beta)$
(β) $(\alpha+\beta)^3-(\alpha-\beta)^3=2\beta(3\alpha^2+\beta^2)$
(γ) $(\alpha+\beta)^3-\alpha(\alpha+\beta)^2=\beta(\alpha+\beta)^2$
(δ) $(x+2)^3-6(x+1)^2=x^3+2$

8. Να εκτελέσετε τις πράξεις:
(α) $(\alpha-\beta)^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha-\beta)$
(β) $(x+2)^3-(x-2)^3$
(γ) $(y+2)^3-2(y-1)^3+y(y-1)(y+1)$

9. Να αποδείξετε ότι:
(α) $\left(\sqrt{5}+1\right)^3+\left(\sqrt{5}-1\right)^3=16\sqrt{5}$
(β) $\left(\sqrt{3}+2\right)^3-\left(\sqrt{3}-2\right)^3=52$

10. (α) Να βρείτε τα αναπτύγματα των παραστάσεων:
$\left(\sqrt{2}+1\right)^3$ και $\left(\sqrt{2}-1\right)^3$

(β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης :

$$\Pi=\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}$$

11. Να αποδείξετε ότι:
(α) $1+x+x^2=\dfrac{x^3-1}{x-1}, x\neq 1$

(β) $1-x+x^2=\dfrac{x^3+1}{x+1}, x\neq -1$

12. (α) Αν α, $\beta\neq 0$ να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\alpha^3+\beta^3}{(\alpha-\beta)^2+\alpha\beta}=\alpha+\beta$$

(β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^3+\left(1-\sqrt{3}\right)^3}{\left(1+2\sqrt{3}\right)^2+\left(2+\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)}$$

3.2 Μετασχηματισμός αλγεβρικών παραστάσεων

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε να χρησιμοποιούμε τις ταυτότητες σε συνδυασμό με τις ιδιότητες των ν-οστών ριζών και γενικότερα των δυνάμεων με ρητό εκθέτη, στον μετασχηματισμό αλγεβρικών παραστάσεων.

Εφαρμογή 1

Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $\left(\alpha^{\frac{1}{3}}-\beta^{\frac{1}{3}}\right)\left(\alpha^{\frac{2}{3}}+\alpha^{\frac{1}{3}}\beta^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{2}{3}}\right)$ (β) $\left(\alpha^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{1}{3}}\right)\left(\alpha^{\frac{2}{3}}-(\alpha\beta)^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{2}{3}}\right)$

Λύση

(α) Σύμφωνα με την ταυτότητα $(x-y)(x^2+xy+y^2)=x^3-y^3$ για

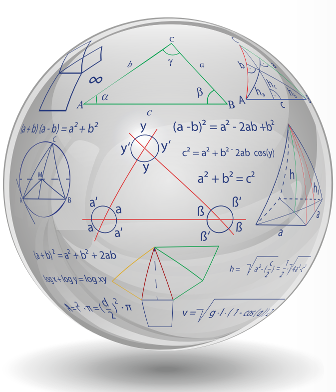
$$x=\alpha^{\frac{1}{3}} \text{ και } y=\beta^{\frac{1}{3}}$$

έχουμε: $$\left(\alpha^{\frac{1}{3}}-\beta^{\frac{1}{3}}\right)\left(\alpha^{\frac{2}{3}}+\alpha^{\frac{1}{3}}\beta^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{2}{3}}\right)=(x-y)(x^2+xy+y^2)=x^3-y^3$$
$$=\left(\alpha^{\frac{1}{3}}\right)^3-\left(\beta^{\frac{1}{3}}\right)^3=\alpha-\beta$$

(β) Σύμφωνα με την ταυτότητα $(x+y)(x^2-xy+y^2)=x^3+y^3$ για

$$x=\alpha^{\frac{1}{3}} \text{ και } y=\beta^{\frac{1}{3}}$$

Έχουμε: $$\left(\alpha^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{1}{3}}\right)\left(\alpha^{\frac{2}{3}}-(\alpha\beta)^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{2}{3}}\right)=(x+y)(x^2-xy+y^2)=x^3+y^3$$
$$=\left(\alpha^{\frac{1}{3}}\right)^3+\left(\beta^{\frac{1}{3}}\right)^3=\alpha+\beta$$



Εφαρμογή 2

Να αποδείξετε ότι $\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-1}}\sqrt[\nu]{\sqrt{\alpha+1}+1}\sqrt[\nu]{\sqrt{\alpha+1}-1}=\alpha$, με $\alpha\geq 0$.

Λύση

Έχουμε:

$$\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-1}}\underbrace{\sqrt[\nu]{\sqrt{\alpha+1}+1}\sqrt[\nu]{\sqrt{\alpha+1}-1}}_{\text{γινόμενο ριζών}}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-1}}\sqrt[\nu]{\left(\sqrt{\alpha+1}+1\right)\left(\sqrt{\alpha+1}-1\right)}$$ **Ιδιότητα** $\sqrt[\nu]{\alpha}\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha\beta}$

$$=\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-1}}\sqrt[\nu]{\left(\sqrt{\alpha+1}\right)^2-1^2}$$ **Ταυτότητα** $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$

$$=\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-1}}\sqrt[\nu]{\alpha+1-1}$$

$$=\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-1}}\sqrt[\nu]{\alpha}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-1}\alpha}$$ **Ιδιότητα** $\sqrt[\nu]{\alpha}\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha\beta}$

$$=\sqrt[\nu]{\alpha^{(\nu-1)+1}}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}}=\alpha$$

Ο μετασχηματισμός παραστάσεων είναι χρήσιμος για να υπολογίζουμε απλούστερα τις αριθμητικές τιμές όπως φαίνεται, μεταξύ άλλων, στις επόμενες εφαρμογές.

Εφαρμογή 3

Αν $x=\sqrt[3]{2}-1$ να αποδειχτεί ότι $x^3+3x^2+3x-1=0$.

Λύση

Ένας τρόπος είναι να αντικαταστήσουμε στην παράσταση x^3+3x^2+3x-1 το *x* με την τιμή του και να κάνουμε τις πράξεις. Έχουμε:

$$x^3+3x^2+3x-1=\left(\sqrt[3]{2}-1\right)^3+3\left(\sqrt[3]{2}-1\right)^2+3\left(\sqrt[3]{2}-1\right)-1$$

$$=\underbrace{\left(\sqrt[3]{2}\right)^3-3\left(\sqrt[3]{2}\right)^2+3\sqrt[3]{2}-1}_{(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3}+3\underbrace{\left[\left(\sqrt[3]{2}\right)^2-2\sqrt[3]{2}+1\right]}_{(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}+3\sqrt[3]{2}-3-1$$

$$=2-3\left(\sqrt[3]{2}\right)^2+3\sqrt[3]{2}-1+3\left(\sqrt[3]{2}\right)^2-6\sqrt[3]{2}+3+3\sqrt[3]{2}-3-1=0$$

Είναι, όμως, προτιμότερο πρώτα να μετασχηματίσουμε την παράσταση με χρήση της ταυτότητας του κύβου αθροίσματος και να εργαστούμε απλούστερα:

$$x^3+3x^2+3x-1=\underbrace{x^3+3x^2+3x+1}_{(x+1)^3}-2=(x+1)^3-2$$

Επομένως

$$x^3+3x^2+3x-1=(x+1)^3-2=\left[\left(\sqrt[3]{2}-1\right)+1\right]^3-2=\left(\sqrt[3]{2}\right)^3-2=2-2=0$$

Γίνεται, επομένως, άμεσα φανερή η αξία του μετασχηματισμού μιας παράστασης.

Εφαρμογή 4

Να αποδείξετε ότι η παράσταση $\left(\dfrac{4\alpha^2\beta^{2/3}}{\gamma^{1/3}}\right)^2\left(\dfrac{\alpha^{-6}\beta^2}{8\gamma^4}\right)^{1/3}$ μετασχηματίζεται στην $8\dfrac{\alpha^2\beta^2}{\gamma^2}$ και να βρείτε την τιμή της, αν $\dfrac{\alpha\beta}{\gamma}=8^{-1/2}$

Λύση

Εφαρμόζουμε τις ιδιότητες δυνάμεων με ρητό εκθέτη και έχουμε κατά σειρά:

$$\left(\frac{4\alpha^2\beta^{2/3}}{\gamma^{1/3}}\right)^2\left(\frac{\alpha^{-6}\beta^2}{8\gamma^4}\right)^{1/3}=\frac{\left(4\alpha^2\beta^{2/3}\right)^2}{\left(\gamma^{1/3}\right)^2}\frac{\left(\alpha^{-6}\beta^2\right)^{1/3}}{\left(8\gamma^4\right)^{1/3}}\qquad \textbf{Ιδιότητα } \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\rho=\frac{\alpha^\rho}{\beta^\rho}$$

$$=\frac{4^2\left(\alpha^2\right)^2\left(\beta^{2/3}\right)^2}{\gamma^{2(1/3)}}\frac{\left(\alpha^{-6}\right)^{1/3}\left(\beta^2\right)^{1/3}}{8^{1/3}\left(\gamma^4\right)^{1/3}}\qquad \textbf{Ιδιότητα } \left(\alpha\beta\right)^\rho=\alpha^\rho\beta^\rho$$

$$=\frac{16\alpha^4\beta^{2(2/3)}}{\gamma^{2/3}}\frac{\alpha^{-6(1/3)}\beta^{2(1/3)}}{2\gamma^{4(1/3)}}\qquad \textbf{Ιδιότητα } \left(\alpha^{\rho_1}\right)^{\rho_2}=\alpha^{\rho_1\rho_2}$$

$$=\frac{16\alpha^4\beta^{4/3}}{\gamma^{2/3}}\frac{\alpha^{-2}\beta^{2/3}}{2\gamma^{4/3}}$$

$$=\frac{16\alpha^{4-2}\beta^{4/3+2/3}}{2\gamma^{2/3+4/3}}$$

Ιδιότητα $\alpha^{\rho_1}\alpha^{\rho_2}=\alpha^{\rho_1+\rho_2}$

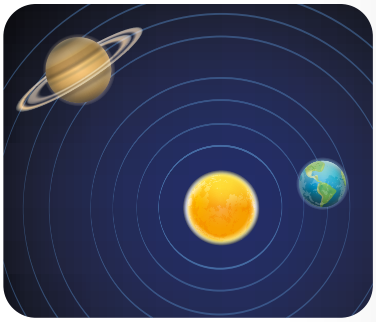
$$=8\frac{\alpha^2\beta^{6/3}}{\gamma^{6/3}}\quad =8\frac{\alpha^2\beta^2}{\gamma^2}$$

Στη συνέχεια, επειδή $8\frac{\alpha^2\beta^2}{\gamma^2}=8\frac{(\alpha\beta)^2}{\gamma^2}=8\left(\frac{\alpha\beta}{\gamma}\right)^2$ η τιμή της παράστασης για $\frac{\alpha\beta}{\gamma}=8^{-1/2}$ είναι $8(8^{-1/2})^2=8\cdot 8^{-2(1/2)}=8\cdot 8^{-1}=8^{1-1}=8^0=1$

Εφαρμογή 5

Οι μέσες αποστάσεις d_κ, d_γ από τον ήλιο και οι χρόνοι T_κ, T_γ μιας περιφοράς γύρω από αυτόν, του Κρόνου και της Γης αντίστοιχα, συνδέονται με τη σχέση:

$$\frac{d_\kappa^3}{d_\gamma^3}=\frac{T_\kappa^2}{T_\gamma^2}$$



(α) Να εξηγήσετε γιατί $d_\kappa=\sqrt[3]{\frac{T_\kappa^2}{T_\gamma^2}d_\gamma^3}$

(β) Αν θεωρήσουμε (προσεγγιστικά), ότι $\frac{T_\kappa}{T_\gamma}=10\sqrt{10}$ και $d_\gamma=1AU$ να αποδείξετε ότι $d_\kappa=10AU$.

(1 AU=μία αστρονομική μονάδα μήκους)

Λύση

(α) Έχουμε: $\frac{d_\kappa^3}{d_\gamma^3}=\frac{T_\kappa^2}{T_\gamma^2}$ δηλαδή $d_\kappa^3=\frac{T_\kappa^2}{T_\gamma^2}d_\gamma^3$

Επομένως το d_κ είναι η μοναδική μη αρνητική ρίζα της εξίσωσης

$$x^3=\alpha\text{, όπου } \alpha=\frac{T_\kappa^2}{T_\gamma^2}d_\gamma^3$$

Η ρίζα αυτή είναι η $x=\sqrt[3]{\alpha}$. Επομένως είναι

$$d_\kappa=\sqrt[3]{\frac{T_\kappa^2}{T_\gamma^2}d_\gamma^3}$$

(β) Έχουμε:

$$d_\kappa=\sqrt[3]{\frac{T_\kappa^2}{T_\gamma^2}d_\gamma^3}=\sqrt[3]{\left(\frac{T_\kappa}{T_\gamma}\right)^2 d_\gamma^3}=\sqrt[3]{\left(10\sqrt{10}\right)^2\cdot 1^3}=\sqrt[3]{1000}=10$$

Ώστε είναι $d_\kappa=10AU$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις, ως αληθή ή ψευδή.

α) Ισχύει $\sqrt[3]{(\alpha-1)^3}=\alpha-1$, με $\alpha\geq 1$.

β) Είναι $\sqrt{\sqrt[3]{\alpha}}=\sqrt[6]{\alpha}$, με $\alpha\geq 0$.

γ) Ισχύει $\sqrt[3]{\alpha^3-8}=\alpha-2$, με $\alpha>2$.

δ) Είναι $\sqrt[4]{\alpha^3}\sqrt{\alpha}=\sqrt[4]{\alpha^5}$, με $\alpha\geq 0$.

Ερωτήσεις Ανάπτυξης

2. Για $\alpha\geq 0$ να αποδείξετε ότι:

(α) $\sqrt[12]{\alpha}\sqrt[6]{\alpha^2}\sqrt[3]{\alpha^4}\sqrt{\alpha}=\alpha^2\sqrt[4]{\alpha}$

(β) $\sqrt{\alpha^3}\sqrt[3]{\alpha}\sqrt[4]{\alpha^5}=\alpha^3\sqrt[12]{\alpha}$

3. Για $\alpha\geq 0$ να γραφούν με τη μορφή ενός ριζικού οι παραστάσεις:

(α) $\sqrt{\alpha\sqrt{\alpha\sqrt{\alpha}}}$ (β) $\sqrt[3]{\alpha}\sqrt{\alpha}\sqrt[6]{\alpha}$ (γ) $\sqrt[3]{\alpha}\sqrt[6]{\alpha^5}\sqrt{\alpha}$

4. Αν $\alpha,\beta\geq 0$ να αποδείξετε ότι

(α) $A=(\sqrt{\alpha\beta}-1)^2-(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2=1+\alpha\beta-\alpha-\beta$

(β) $A=(1-\alpha)(1-\beta)$

5. Αν $x>0$ να γράψετε με την μορφή μιας ρίζας τις παραστάσεις

(α) $A=\sqrt{\dfrac{1}{x^2\sqrt{x}}}$ (β) $B=\sqrt[3]{x^2\sqrt{\dfrac{1}{x}}}$

(γ) $\Gamma=\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^3}\sqrt{x^4\sqrt{\dfrac{1}{x}}}}$

6. Αν $\alpha\geq 0$ και $\beta\geq 0$ να απλοποιηθούν οι παραστάσεις

(α) $A=(\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\beta})[(\sqrt[3]{\alpha})^2+\sqrt[3]{\alpha}\sqrt[3]{\beta}+(\sqrt[3]{\beta})^2]$

(β) $B=(\sqrt[3]{\alpha}+1)[(\sqrt[3]{\alpha})^2-\sqrt[3]{\alpha}+1]$

7. Αν $x\geq 1$ να αποδείξετε ότι

$$\sqrt[3]{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2x}}\,\sqrt[3]{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x}}\,\sqrt[3]{x-1}=x-1$$

8. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A=\sqrt[3]{x^3+3x^2(1-x)+3x(x-1)^2+(1-x)^3}$$

9. Αν $x\geq 1$ τότε:

(α) Να υπολογίσετε την παράσταση

$$\left(\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}\right)^2$$

(β) Να αποδείξετε ότι

$$\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}=\sqrt{2(x+1)}$$

10. Από τον τρίτο νόμο του Κέπλερ, η μέση τιμή της απόστασης d της γης από τον ήλιο (σε μέτρα) δίνεται από τη σχέση $\dfrac{d^3}{T^2}=\dfrac{GM}{4\pi^2}$, όπου

$M=1{,}99\cdot 10^{30}\,\mathrm{Kg}$ είναι η μάζα του ήλιου,

$G=6{,}67\cdot 10^{-11}\,\dfrac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{Kg}^2}$ είναι η σταθερά βαρύτητας

και T είναι η περίοδος της τροχιάς της (σε δευτερόλεπτα).

(α) Να αποδείξετε ότι $d=\sqrt[3]{\dfrac{GM}{4\pi^2}T^2}$

(β) Με τη βοήθεια αριθμομηχανής, αν $T=365$ ημέρες, να βρείτε την απόσταση της γης από τον ήλιο.

3.3 Ανακεφαλαίωση

Στην ενότητα αυτή περιλαμβάνονται έργα για περαιτέρω αναζητήσεις και διευρύνσεις των μαθητών/μαθητριών, με στόχο την εμβάθυνση στην κατανόηση των Προσδοκώμενων Μαθησιακών Αποτελεσμάτων του κεφαλαίου.

1. Να αποδείξετε (αλγεβρικά) τις ταυτότητες

$(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$ *και*

$(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$

2. Να αποδείξετε (αλγεβρικά) τις ταυτότητες

$\alpha^3+\beta^3=\left(\alpha+\beta\right)\left(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\right)$ *και*

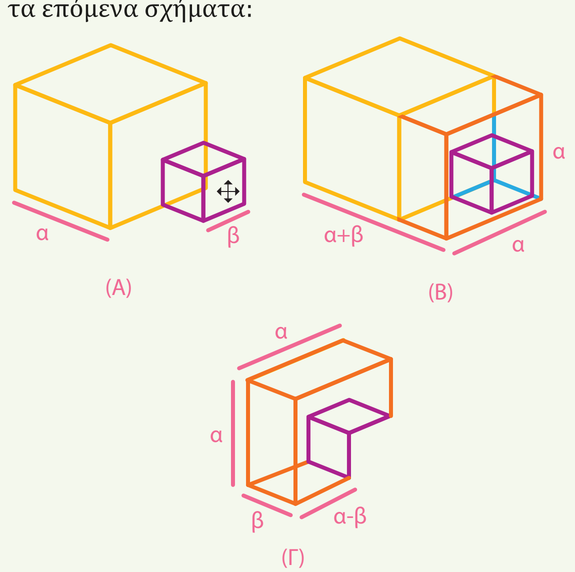
$\alpha^3-\beta^3=\left(\alpha-\beta\right)\left(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\right)$

3. Γεωμετρικές αποδείξεις ταυτοτήτων.

Ο καθηγητής μαθηματικών είπε στην τάξη, ότι θα αποδείξουν γεωμετρικά την ταυτότητα:

$$\alpha^3+\beta^3=\left(\alpha+\beta\right)\left(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\right)$$

Μοίρασε στους/στις μαθητές/τριες φωτοτυπίες με τα επόμενα σχήματα:



Τα παιδιά παρατήρησαν ότι το στερεό (Α) αποτελείται από δύο κύβους με πλευρές α και β, επομένως ο όγκος του είναι:

$$V_A=\alpha^3+\beta^3$$

Ο Γιώργος είπε, ότι το στερεό (Α) προκύπτει, αν από το στερεό (Β), που έχει διαστάσεις *α + β, α* και *α*, αφαιρέσουμε το στερεό (Γ). Ο όγκος του στερεού (Β) είναι $V_B=\left(\alpha+\beta\right)\alpha^2$. Η Μαρία συμπλήρωσε ότι το στερεό (Γ) προκύπτει από ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με διαστάσεις *β, α* και *α* από το οποίο αφαιρέθηκε ένας κύβος πλευράς β.

(α) Συμφωνείται με τις παρατηρήσεις της Μαρίας και του Γιώργου;

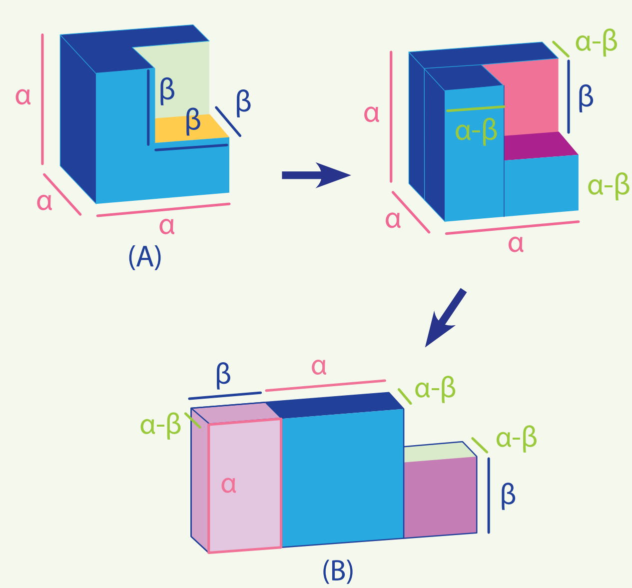
(β) Να αποδείξετε ότι ο όγκος του στερεού (Γ) είναι:

$$V_\Gamma=\alpha^2\beta-\beta^3=\left(\alpha+\beta\right)\left(\alpha-\beta\right)\beta$$

(γ) Με την παρατήρηση ότι $V_A=V_B-V_\Gamma$ να αποδείξετε την ταυτότητα

$$\alpha^3-\beta^3=\left(\alpha-\beta\right)\left(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\right)$$

(δ) Στη συνέχεια ο καθηγητής μοίρασε τα επόμενα σχήματα και έθεσε τα ερωτήματα.



(i) Πως από το πρώτο στερεό προκύπτει το τρίτο;
(ii) Ποιος είναι ο όγκος των στερεών (Α) και (Β);
(iii) Να αποδείξετε ότι

$$\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$$

Μετασχηματισμός παραστάσεων

4. Για να δείξει την αξία του μετασχηματισμού μιας αλγεβρικής παράστασης, ο Καθηγητής έγραψε στον πίνακα την παράσταση

$$A=(\sqrt[3]{3}-2)\left[(\sqrt[3]{3})^2+2\sqrt[3]{3}+4\right]$$

Ζήτησε από τους/τις μαθητές/τριες:

α) Να υπολογίσετε την παράσταση με χρήση αριθμομηχανής, με προσέγγιση πέντε δεκαδικών ψηφίων.

β) Να υπολογίσετε την παράσταση χρησιμοποιώντας αλγεβρικές ιδιότητες.

γ) Να συγκρίνετε τα αποτελέσματα που βρήκατε με τις δυο μεθόδους, ως προς την ακρίβεια και την ταχύτητα εκτέλεσης.
Να απαντήσετε κι εσείς στα παραπάνω ερωτήματα.

5. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων, αφού προηγουμένως τις μετασχηματίσετε με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των δυνάμεων:

$$A=\left(16x^6y\right)^{1/4}\left(x^2y^3\right)^{1/4.},\quad \text{αν } x\sqrt{y}=\sqrt{5}$$

$$B=\left(\frac{4\alpha^3\beta^{2/3}}{\gamma^{1/2}}\right)^2\left(\frac{\gamma^{-3}\alpha^6}{8\beta^4}\right)^{1/3},\quad \text{αν } \frac{\alpha^4}{\gamma}=\frac{1}{2^{3/2}}$$

6. Δίνονται οι θετικοί αριθμοί α και β και οι παραστάσεις

$$A=\sqrt[3]{\alpha^2\beta\sqrt[3]{\alpha^2\beta^2\sqrt{\alpha\beta^3}}}$$

και

$$B=\sqrt[6]{\alpha^{1/3}\beta\sqrt[3]{\beta^2}}$$

(α) Να γράψετε τις παραστάσεις A και B σαν γινόμενο δυνάμεων των α και β με ρητό εκθέτη.

(β) Να γράψετε τις παραστάσεις A και B στην μορφή

$$\sqrt[18]{\alpha^x\beta^y}$$

(γ) Να αποδείξετε ότι οι παραστάσεις A και B είναι αντίστροφοι αριθμοί, όταν και οι α και β είναι αντίστροφοι.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{ο}

Εξισώσεις, ανισώσεις, διάταξη

Σύντομη γνωριμία

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται ένα σημαντικό μέρος από την Άλγεβρα, το οποίο παίζει σημαντικό ρόλο στην επίλυση πολλών προβλημάτων. Οι εξισώσεις αποτελούν ισχυρά εργαλεία σε κάθε βήμα των θετικών επιστημών και έχει μεγάλη σημασία να γνωρίζουμε τις τεχνικές για τη λύση τους.
Λύνουμε λοιπόν και διερευνούμε εξισώσεις πρώτου βαθμού, εξισώσεις δευτέρου βαθμού, εξισώσεις με απόλυτα αλλά και διωνυμικές εξισώσεις, της μορφής δηλαδή $αx^{ν}=β$. Να αναφέρουμε τέλος ότι στο κεφάλαιο περιέχεται η επίσης σπουδαία ενότητα που αφορά στη διάταξη και την απόδειξη ανισοτήτων, αφού αυτές κυριαρχούν στο μαθηματικό χώρο.

Περιεχόμενα

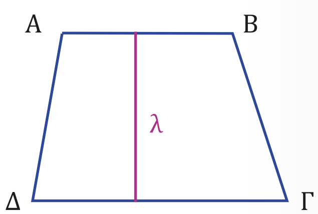
Λέξεις κλειδιά:
Εξίσωση $αx+β=0$
Αδύνατη
Ταυτότητα
Διάταξη
Διάταξη και πράξεις
Εξισώσεις με απόλυτα
Ανισώσεις με απόλυτα
Εξισώσεις 2^{ου} βαθμού
Μοντελοποίηση

François Viète, Φρανσουά Βιέτ
(1540-1603)

Ο Βιετά υπήρξε ο πρώτος μαθηματικός που χρησιμοποίησε σε ευρεία κλίμακα τα γράμματα για να εκφράσει αριθμητικές ποσότητες. Το 1593 κατάφερε να εκφράσει τον αριθμό π με τη βοήθεια ενός απειρογινόμενου και τον υπολόγισε με ακρίβεια εννέα δεκαδικών ψηφίων, βελτιώνοντας έτσι το σχετικό αποτέλεσμα του Αρχιμήδη. Ο Φραγκίσκος Βιετά συνεισέφερε σημαντικά στον αλγεβρικό συμβολισμό όταν χρησιμοποίησε για πρώτη φορά φωνήεντα για να παριστάνει τις άγνωστες μεταβλητές και σύμφωνα για τις γνωστές. Επίσης ο Βιετά χρησιμοποιούσε τα ίδια γράμματα για ύψωση σε δύναμη, ανοίγοντας τον δρόμο για την επικράτηση των x^2 και x^3 αντί των x quadratum, x cubum κλπ.

4.1 Η εξίσωση αx+β=0

Περιέχονται:
- Επίλυση της εξίσωσης $\alpha x+\beta=0$
- Παραμετρικές εξισώσεις της μορφής $\alpha x+\beta=0$
- Προβλήματα εξισώσεων



Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε:
- Να επιλύουμε απλές παραμετρικές εξισώσεις πρώτου βαθμού.
- Να επιλύουμε προβλήματα που ανάγονται σε αυτή την μορφή.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Δίνεται το τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ με $ΑΒ=2\text{cm}$, $ΓΔ=3\text{cm}$ και ύψος λcm

(α) Να βρείτε το εμβαδό E του τραπεζίου συναρτήσει του λ.

(β) Να βρείτε το εμβαδόν, αν $\lambda=5\text{cm}$.

(γ) Αν $E=6\text{cm}^2$, βρείτε το ύψος του τραπεζίου.

Επίλυση της εξίσωσης *αx+β=0* με *α, β* ∊ $\mathbb{R}$

Η εξίσωση γράφεται

$$\alpha x=-\beta$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

Αν $\alpha\neq 0$, τότε διαιρούμε και τα δύο μέλη της $\alpha x=-\beta$ με α και βρίσκουμε

$$x=-\frac{\beta}{\alpha}$$

Λέμε ότι η εξίσωση έχει **μοναδική λύση** την $x=-\dfrac{\beta}{\alpha}$

Αν $\alpha=0$, τότε η εξίσωση $\alpha x=-\beta$ γίνεται $0x=-\beta$. Επομένως:

- Αν $\beta=0$, παίρνει τη μορφή $0x=0$ που είναι **ταυτότητα**, δηλαδή, έχει λύση κάθε πραγματικό αριθμό.
- Αν $\beta\neq 0$ είναι **αδύνατη**, δηλαδή δεν έχει λύση.

Παράδειγμα 1

Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $\dfrac{x}{6}-\dfrac{x-6}{3}=1-\dfrac{x-8}{4}$ (β) $3(1+3x)-2(x-1)=7(x-1)+12$

Λύση

Έχουμε διαδοχικά:

$$2x-4(x-6)=12\cdot 1-3(x-8)$$
$$2x-4x+24=12-3x+24$$
$$2x-4x+3x=12$$
$x=12$, μοναδική λύση

Λύση

Έχουμε διαδοχικά:

$$3(1+3x)-2(x-1)=7(x-1)+12$$
$$3+9x-2x+2=7x-7+12$$
$$7x-7x=12-7-5$$
$0x=0$, ταυτότητα

Ασκήσεις 3, 4

Παραμετρικές εξισώσεις

Υπάρχουν εξισώσεις που περιέχουν και άλλα γράμματα εκτός του αγνώστου. Κάθε τέτοιο γράμμα θα το λέμε **παράμετρο** και την αντίστοιχη εξίσωση θα τη λέμε **παραμετρική εξίσωση.** Η διαδικασία που ακολουθούμε για την επίλυση μιας παραμετρικής εξίσωσης λέγεται **διερεύνηση.**

Παράδειγμα 2

Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $(\lambda-2)x-4=0$ (β) $\lambda^2(x-1)=4(4x-\lambda)$

για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$.

Λύση

α) Η εξίσωση γράφεται $(\lambda-2)x=4$ **(1)**

- Αν $\lambda-2=0$ ή $\lambda=2$, τότε η (1) γίνεται $0x=4$ και είναι αδύνατη.
- Αν $\lambda\neq 2$, τότε η (1) έχει μοναδική λύση την $x=\dfrac{4}{\lambda-2}$

β) Η εξίσωση γράφεται

$$\lambda^2x-\lambda^2=16x-4\lambda \text{ ή } \lambda^2x-16x=\lambda^2-4\lambda \text{ ή } x(\lambda^2-16)=\lambda(\lambda-4) \text{ ή }$$

$$(\lambda-4)(\lambda+4)x=\lambda(\lambda-4) \quad \textbf{(2)}$$

Είναι $(\lambda-4)(\lambda+4)=0$, όταν $\lambda-4=0$ ή $\lambda+4=0$, δηλαδή όταν $\lambda=4$ ή $\lambda=-4$

- Για $\lambda=-4$ η (2) γίνεται $0x=32$ και είναι αδύνατη.
- Για $\lambda=4$ η (2) γίνεται $0x=0$ και είναι ταυτότητα.
- Αν $\lambda\neq 4$ και $\lambda\neq -4$, τότε είναι $(\lambda-4)(\lambda+4)\neq 0$ και η (2) έχει μοναδική λύση την
$$x=\frac{\lambda(\lambda-4)}{(\lambda+4)(\lambda-4)} \text{ ή } x=\frac{\lambda}{\lambda+4}.$$

Η εξίσωση αx+β=0

Ασκήσεις 5, 6, 7, 8, 9

Προβλήματα που ανάγονται στην εξίσωση της μορφής αx+β=0

Για να λύσουμε ένα πρόβλημα εργαζόμαστε γενικά, ως εξής:

1. Συμβολίζουμε με x, ή ένα οποιοδήποτε άλλο γράμμα, ένα από τα ζητούμενα του προβλήματος.
2. Εκφράζουμε και τα υπόλοιπα ζητούμενα, ως συνάρτηση του x.
3. Από τα δεδομένα του προβλήματος σχηματίζουμε μία εξίσωση την οποία επιλύουμε.
4. Ελέγχουμε αν η λύση ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος.

Παράδειγμα 3

Ο Γιώργος έχει σήμερα διπλάσια ηλικία από τον Κώστα. Πριν από μερικά χρόνια, έστω λ, ο Γιώργος είχε τριπλάσια ηλικία από τον Κώστα.

(α) Να βρείτε, συναρτήσει του λ, τις ηλικίες του Γιώργου και του Κώστα.

(β) Αν πριν από 5 χρόνια ο Γιώργος είχε ηλικία τριπλάσια από τον Κώστα, ποιες είναι οι ηλικίες τους;

Λύση

(α) Έστω x η σημερινή ηλικία του Κώστα. Επειδή ο Γιώργος έχει διπλάσια ηλικία από τον Κώστα, η ηλικία του Γιώργου είναι $2x$.

Πριν από λ χρόνια ο Γιώργος είχε ηλικία $2x-\lambda$ και ο Κώστας $x-\lambda$.

Επομένως πρέπει $2x-\lambda=3(x-\lambda)$ ή $2x-\lambda=3x-3\lambda$ ή $x=2\lambda$.

Άρα ο Κώστας είναι 2λ ετών και ο Γιώργος $2\cdot 2\lambda=4\lambda$ ετών.

(β) Για $\lambda=5$ ο Κώστας είναι $2\cdot 5=10$ ετών και ο Γιώργος είναι $4\cdot 5=20$ ετών.

Παράδειγμα 4

Σε σύστημα συντεταγμένων δύο ευθείες έχουν εξισώσεις

$$y = 2(\lambda+1)x - \lambda \quad \text{και} \quad y = \lambda x + 2$$

Να βρείτε το πλήθος των κοινών τους σημείων.

Λύση

Έστω και (x, y) ένα κοινό σημείο των δύο ευθειών, αν υπάρχει. Η τετμημένη του είναι λύση της εξίσωσης

$$\begin{aligned} & 2(\lambda+1)x - \lambda = \lambda x + 2 \\ \text{ή} \quad & 2\lambda x + 2x - \lambda = \lambda x + 2 \\ \text{ή} \quad & \lambda x + 2x = \lambda + 2 \\ \text{ή} \quad & (\lambda+2)x = \lambda + 2 \quad (1) \end{aligned}$$

Αν $\lambda+2 \neq 0$, δηλαδή $\lambda \neq -2$, η εξίσωση (1) έχει μοναδική λύση και οι ευθείες έχουν ένα κοινό σημείο.

Αν $\lambda+2=0$, δηλαδή $\lambda=-2$, η εξίσωση (1) γίνεται $0x=0$ και είναι ταυτότητα. Οι ευθείες έχουν άπειρα κοινά σημεία και άρα συμπίπτουν.

Άσκηση 10

Εφαρμογή 1

Ο τιμοκατάλογος των TAXI περιλαμβάνει, σε μια πόλη, 1,8 Ευρώ για την εκκίνηση και 0,9 Ευρώ για κάθε χιλιόμετρο διαδρομής.

(α) Να βρείτε την απόσταση που θα διανύσει ένας επιβάτης, αν διαθέτει 15 Ευρώ.

(β) Αν στον νομό Μεσσηνίας η χρέωση των TAXI είναι $(\lambda+1)$ Ευρώ για την εκκίνηση και λ Ευρώ για κάθε χιλιόμετρο διαδρομής, να βρείτε σε σχέση με το λ:

(i) Την απόσταση που θα διανύσει ένας επιβάτης αν διαθέτει 15 Ευρώ.

(ii) Πόσα χιλιόμετρα θα κάνει ο επιβάτης, αν διαθέτει 15 Ευρώ και η χρέωση είναι 0,7 Ευρώ το χιλιόμετρο;

Λύση

(α) Έστω x τα km της διαδρομής. Αφού το κάθε χιλιόμετρο κοστίζει 0,9 Ευρώ τα x km κοστίζουν $0{,}9x$ Ευρώ. Ο επιβάτης διαθέτει 15 Ευρώ. Επομένως έχουμε ότι

$$1{,}8 + 0{,}9x = 15 \text{ ή } 0{,}9x = 13{,}2 \text{ ή } x = \frac{13{,}2}{0{,}9} \approx 14{,}66\,\text{km}$$

(β) Αφού το κάθε χιλιόμετρο κοστίζει λ Ευρώ τα x km κοστίζουν λx Ευρώ
Επομένως ο επιβάτης θα πληρώσει συνολικά, με την εκκίνηση, $\lambda + 1 + \lambda x$ Ευρώ.

(i) Σύμφωνα με το πρόβλημα είναι $\lambda + 1 + \lambda x = 15$ ή $\lambda x = 14 - \lambda$ ή

$$x = \frac{14}{\lambda} - 1 \ (\text{αφού } \lambda \neq 0).$$

(ii) Για $\lambda = 0{,}7$ έχουμε $x = \dfrac{14}{0{,}7} - 1$ ή $x = 19\,\text{km}$.

Ασκήσεις 11, 12, 13, 14

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Ερωτήσεις κατανόησης

1. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις, ως αληθή ή ψευδή.
Έστω η εξίσωση $\alpha x+\beta=0$.
(α) Αν $\alpha=0$ και $\beta=0$, έχει μοναδική λύση.
(β) Αν δεν είναι ταυτότητα τότε $\alpha\neq 0$.
(γ) Αν έχει μοναδική λύση τότε $\alpha\neq 0$.
(δ) Αν είναι αδύνατη τότε $\alpha=0$.

2. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις, ως αληθή ή ψευδή.
Η εξίσωση $\lambda(\lambda-2)x=\lambda(\lambda+1)$:
(α) Αν $\lambda=0$, είναι αδύνατη.
(β) Αν $\lambda=2$, είναι αδύνατη.
(γ) Αν $\lambda=3$ έχει μοναδική λύση.
(δ) Αν $\lambda=0$, είναι ταυτότητα.

Ασκήσεις ανάπτυξης

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:
(α) $5-2(3-x)=4(2-x)$ (β) $15-9(x+1)=3(2-3x)$
(γ) $3(4x-2)-4(3x+1)=10$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:
(α) $\frac{2x}{5}-\frac{x-3}{15}=-1-\frac{x+1}{10}$ (β) $\frac{5x-4}{5}-\frac{7x-10}{7}=\frac{22}{35}$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις για τις διάφορες τιμές του λ:
(α) $(\lambda-2)x=\lambda^2-4$ (β) $\lambda(\lambda-2)x=\lambda^2-2\lambda$
(γ) $\lambda x-\lambda=\lambda^2-x$ (δ) $\lambda(\lambda-x)-1=\lambda^2 x$

6. Δίνεται η εξίσωση: $\lambda^2(x-1)=2\lambda(x+1)$
Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η παραπάνω εξίσωση είναι: (α) ταυτότητα (β) αδύνατη

7. Δίνεται η εξίσωση: $\mu(x-2)=x-3(\lambda-1)+1$
Να βρείτε για ποιες τιμές των λ και μ η παραπάνω εξίσωση είναι: (α) αδύνατη (β) ταυτότητα

8. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:
(α) $\frac{x-2\alpha}{\beta}=\frac{x-2\beta}{\alpha}$ με $\alpha\beta\neq 0$ έχει λύση
(β) $(x+3\alpha)^2-(x-3\beta)^2=10\alpha^2-8\beta^2+2\alpha\beta$ έχει λύση για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

9. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις για τις διάφορες μη μηδενικές τιμές των α και β.
(α) $\frac{x}{\alpha}+\frac{x}{\beta}=1$ (β) $\frac{x}{\alpha}-\frac{x}{\beta}=\alpha-\beta$

10. Να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων των ευθειών
(α) $y=(\lambda^2-4)x+1$ και $y=\lambda+3$
(β) $y=\lambda^2 x+1$ και $y=x+\lambda$

11. Σε 6 χρόνια η ηλικία του Γιώργου θα γίνει πενταπλάσια της ηλικίας της κόρης του Έλενας.
(α) Ποια είναι η σημερινή ηλικία, έστω x, του Γιώργου συναρτήσει της ηλικίας λ της Έλενας;
(β) Ποια είναι η ηλικία του Γιώργου, αν σε δύο χρόνια η Έλενα γίνει 6 χρονών;

12. Μία βρύση γεμίζει τη δεξαμενή ενός ενυδρείου σε 15 ώρες και μία άλλη μπορεί να την αδειάζει σε λ ώρες με $8<\lambda<30$, ανάλογα με τις ανάγκες του ενυδρείου. Σε πόσες ώρες θα γεμίσει η δεξαμενή, αν είναι άδεια και ανοίξουν ταυτόχρονα και οι δύο βρύσες; Ποιος είναι ο χρόνος αυτός, αν $\lambda=20$;

13. Ένα κεφάλαιο 10.000 ευρώ θα κατατεθεί σε δύο διαφορετικές τράπεζες με επιτόκιο 7% στην πρώτη και 6% στη δεύτερη. Στην πρώτη τράπεζα θα κατατεθεί ένα μέρος λ του κεφαλαίου με $2000<\lambda<9000$.
(α) Πόσοι τόκοι, συναρτήσει του λ, θα εισπραχθούν μετά από έναν χρόνο;
(β) Ύστερα από έναν χρόνο εισπράχθηκαν 640 ευρώ τόκοι. Ποιο ποσό τοκίστηκε με 7% και ποιο με 6%;

14. Δύο αυτοκίνητα ξεκινούν ταυτόχρονα με αντίθετη κατεύθυνση, με σκοπό να συναντηθούν το πρώτο από μια πόλη Α με ταχύτητα 120Km / h και το δεύτερο από την πόλη Β με 110Km / h. Οι δύο πόλεις απέχουν s χιλιόμετρα.
(α) Σε πόσο χρόνο, συναρτήσει του s, θα συναντηθούν;
(β) Σε πόσο χρόνο θα συναντηθούν, αν οι πόλεις απέχουν 115Km;
(γ) Ποια είναι η απόσταση των πόλεων, αν συναντηθούν σε 45 λεπτά;

4.2 Διάταξη πραγματικών αριθμών

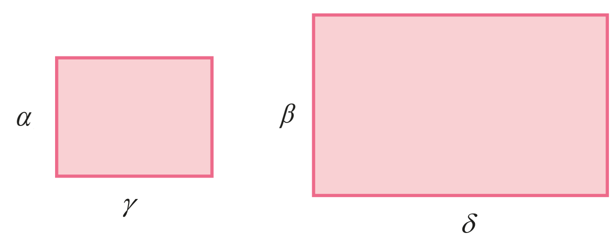
Περιέχονται:
- Διάταξη και πρόσθεση
- Διάταξη και πολλαπλασιασμός
- Διάταξη και δυνάμεις

Διάταξη και πράξεις

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε:
- Να διερευνούμε τις ιδιότητες που συνδέουν τη διάταξη με τις πράξεις.
- Να αποδεικνύουμε ανισοτικές σχέσεις.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Δίνονται τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα των παρακάτω σχημάτων, με πλευρές α, γ και β, δ για τις οποίες $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$



(α) Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδό των δύο ορθογωνίων.
(β) Να συγκρίνετε τις περιμέτρους και τα εμβαδά των ορθογωνίων.
(γ) Τι παρατηρείτε για τα αθροίσματα $\alpha+\gamma$, $\beta+\delta$ και τα γινόμενα $\alpha\gamma$, $\beta\delta$;

Διάταξη και πρόσθεση

- Είναι, ήδη, γνωστό ότι, αν και στα δύο μέλη μιας ανισότητας προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με ίδια φορά. Δηλαδή

  $$\text{αν } \alpha<\beta, \text{ τότε } \alpha+\gamma<\beta+\gamma \text{ και } \alpha-\gamma<\beta-\gamma$$

  Ισχύει και το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης δηλαδή

  $$\text{αν } \alpha+\gamma<\beta+\gamma \text{ ή } \alpha-\gamma<\beta-\gamma, \text{ τότε } \alpha<\beta$$

- Έστω, στη συνέχεια, οι ανισότητες $\alpha<\beta$ και $\gamma<\delta$. Από την παραπάνω δραστηριότητα καταλαβαίνουμε ότι, όταν οι αριθμοί α, β, γ και δ είναι θετικοί, τότε τις προσθέτουμε κατά μέλη και παίρνουμε $\alpha+\gamma<\beta+\delta$. Αυτό ισχύει γενικότερα και όταν οι αριθμοί δεν είναι όλοι θετικοί:

Αν προσθέσουμε κατά μέλη δύο ή περισσότερες ανισότητες προκύπτει ανισότητα με ίδια φορά: Αν $\alpha<\beta$ και $\gamma<\delta$, τότε $\alpha+\gamma<\beta+\delta$

Παράδειγμα

Αν $\alpha \le -1$ και $\beta \le 2$ τότε $\alpha+\beta \le 1$

Η ισότητα $\alpha+\beta=1$ ισχύει όταν $\alpha=-1$ και $\beta=2$

Παράδειγμα 1

(α) Αν $\alpha<2$, $\beta<3$ και $\gamma<1$, τότε $\alpha+\beta+\gamma<2+3+1$ ή $\alpha+\beta+\gamma<6$.
(β) Αν $1<\alpha<3$ και $2<\beta<4$, τότε $3<\alpha+\beta<7$.

Διάταξη και πολλαπλασιασμός

- Είναι γνωστό ότι, αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με έναν θετικό αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά, ενώ, αν την πολλαπλασιάσουμε ή τη διαιρέσουμε με αρνητικό αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με αντίθετη φορά. Δηλαδή με $\alpha > \beta$ έχουμε:

  Αν $\gamma > 0$ τότε $\alpha\gamma > \beta\gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$, και, αν $\gamma < 0$ τότε $\alpha\gamma < \beta\gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$.

- Έστω τώρα οι ανισότητες $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$. Από την παραπάνω δραστηριότητα καταλαβαίνουμε ότι, όταν οι αριθμοί α, β, γ και δ είναι θετικοί, τότε τις πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη και παίρνουμε $\alpha\gamma < \beta\delta$.

Γενικότερα:
Αν πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη δύο ή περισσότερες ανισότητες που έχουν την ίδια φορά και θετικά μέλη, τότε προκύπτει ανισότητα με ίδια φορά:

Αν $\alpha > \beta > 0$ και $\gamma > \delta > 0$ τότε $\alpha\gamma > \beta\delta$.

Παράδειγμα
Αν $\alpha \geq 2$ και $\beta \geq 3$ τότε $\alpha\beta \geq 6$. Πότε ισχύει η ισότητα $\alpha\beta = 6$;

Παράδειγμα 2
(α) Αν $\alpha > 1$ και $\beta > 2$ τότε $\alpha\beta > 2$ (β) Αν $\alpha \geq 2$ και $\beta > 3$ τότε $\alpha\beta > 6$.
(γ) Αν $1 < \alpha < 3$ και $3 < \beta < 4$ τότε $3 < \alpha\beta < 12$.

Αφαίρεση ή διαίρεση ανισοτήτων κατά μέλη

Έστω οι ανισότητες $10 > 8$ και $5 > 2$
Αν αφαιρέσουμε κατά μέλη, από την πρώτη τη δεύτερη, παίρνουμε $10-5 > 8-2$ ή $5 > 6$ άτοπο. Αν, πάλι, αφαιρέσουμε κατά μέλη, από τη δεύτερη την πρώτη, τότε προκύπτει $5-10 > 2-8$ ή $-5 > -6$ που ισχύει.
Επομένως, όταν αφαιρούμε κατά μέλη ανισότητες, δεν προκύπτει πάντοτε αληθής ανισότητα. Ίδια παρατήρηση κάνουμε και όταν διαιρούμε κατά μέλη ανισότητες. Επομένως: **Αποφεύγουμε να αφαιρούμε και να διαιρούμε κατά μέλη ανισότητες.**

Διάταξη αριθμών 1

Διάταξη και δυνάμεις

Για τις δυνάμεις αριθμών με ρητό εκθέτη αποδεικνύεται ότι:

Για θετικούς πραγματικούς αριθμούς α, β και θετικό ρητό ρ ισχύουν:
α) Αν $\alpha > \beta$, τότε $\alpha^\rho > \beta^\rho$ και αντιστρόφως: αν $\alpha^\rho > \beta^\rho$ τότε $\alpha > \beta$
β) Αν $\alpha^\rho = \beta^\rho$, τότε $\alpha = \beta$

Πόρισμα.
Είναι φανερό ότι για $\left(\rho = \frac{1}{\nu}\right)$:
Αν $\alpha > \beta \geq 0$ τότε $\sqrt[\nu]{\alpha} > \sqrt[\nu]{\beta}$
και
αν $\sqrt[\nu]{\alpha} > \sqrt[\nu]{\beta}$ τότε $\alpha > \beta \geq 0$

Παράδειγμα 3
(α) Αν $\alpha > 2$, τότε $\alpha^2 > 2^2$ δηλαδή $\alpha^2 > 4$
(β) Αν $\alpha > 9$ τότε $\alpha^{\frac{1}{2}} > 9^{\frac{1}{2}}$ δηλαδή $\sqrt{\alpha} > 3$
(γ) Αν $1 < x < 3$, τότε $1^4 < x^4 < 3^4$ δηλαδή $1 < x^4 < 81$

Ισχύει και η πρόταση:
Αν α, β ετερόσημοι με $\alpha < \beta$, τότε $\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}$

Εφαρμογή 1

Αν οι αριθμοί $\alpha,\ \beta$ είναι ομόσημοι με $\alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι $\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$

Απόδειξη

Οι $\alpha,\ \beta$ είναι ομόσημοι, επομένως έχουν γινόμενο $\alpha\beta$ θετικό. Διαιρούμε και τα δύο μέλη της ανισότητας $\alpha < \beta$ με $\alpha\beta > 0$ και έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\alpha\beta} < \frac{\beta}{\alpha\beta} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{\beta} < \frac{1}{\alpha} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$$

Είναι γνωστό ότι:

- Αν $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ τότε $\alpha = 0$ και $\beta = 0$
- Αν $\alpha^2 + \beta^2 \le 0$ τότε $\alpha = 0$ και $\beta = 0$

Εφαρμογή 2 (Άθροισμα τετραγώνων ίσο με μηδέν)

(α) Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha - 4\beta + 5 \ge 0$

(β) Πότε ισχύει η ισότητα $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha - 4\beta + 5 = 0$;

Λύση

(α) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\alpha^2 - 2\alpha + 1 + \beta^2 - 4\beta + 4 \ge 0$ ή $(\alpha - 1)^2 + (\beta - 2)^2 \ge 0$, που ισχύει.

(β) Η ισότητα $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha - 4\beta + 5 = 0$ ισχύει, όταν $(\alpha - 1)^2 + (\beta - 2)^2 = 0$ οπότε είναι $\alpha - 1 = 0$ και $\beta - 2 = 0$, άρα $\alpha = 1$ και $\beta = 2$.

Ασκήσεις 2, 3 και 4

Εφαρμογή 3

Αν $2 \le \alpha \le 3$ (1) και $3 < \beta < 4$ (2), να αποδείξετε ότι:

(α) $-2 < \alpha - \beta < 0$ (β) $\frac{1}{2} < \frac{\alpha}{\beta} < 1$

Λύση

(α) Πολλαπλασιάζουμε όλα τα μέλη της ανισότητα $3 < \beta < 4$ με -1 και έχουμε:

$$-3 > -\beta > -4 \quad \text{ή} \quad -4 < -\beta < -3 \qquad (3)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισότητες (1) και (3) και παίρνουμε:

$$2 - 4 < \alpha - \beta < 3 - 3 \quad \text{ή} \quad -2 < \alpha - \beta < 0.$$

(β) Σύμφωνα με την παραπάνω εφαρμογή 1 επειδή $3 < \beta < 4$ είναι:

$$\frac{1}{3} > \frac{1}{\beta} > \frac{1}{4} > 0 \quad \text{ή} \quad \frac{1}{4} < \frac{1}{\beta} < \frac{1}{3} \qquad (4)$$

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις ανισότητες (1) και (4) και παίρνουμε

$$2 \cdot \frac{1}{4} < \alpha \frac{1}{\beta} < 3 \cdot \frac{1}{3} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} < \frac{\alpha}{\beta} < 1$$

Για να εμφανίσουμε τη διαφορά $\alpha - \beta$ δεν αφαιρούμε κατά μέλη τις ανισότητες.

Για να εμφανίσουμε το πηλίκο $\frac{\alpha}{\beta}$ δεν διαιρούμε κατά μέλη τις ανισότητες.

Διάταξη αριθμών 2

Ασκήσεις 5 και 6

Γενικές ασκήσεις 7, 8 και 9

ΑΣΚΗΣΕΙΣ και ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Ερωτήσεις κατανόησης

1. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις, ως αληθή ή ψευδή:
(α) Αν $\alpha > \beta$, τότε $-2\alpha > -2\beta$.
(β) Αν $\alpha > \beta$, τότε $\alpha - 4 > \beta - 4$.
(γ) Αν $0 < \alpha < 1$, τότε $\alpha^2 < 1$.
(δ) Αν $\alpha^2 + \beta^2 \leq 0$, τότε $\alpha = 0$ και $\beta = 0$.
(ε) Αν $\alpha < 2$, τότε $\alpha^2 < 4$.

Ερωτήσεις ανάπτυξης

2. Να αποδείξετε ότι:
(α) $x^2 + 1 \geq 2x$ (β) $(x + y)^2 \geq 4xy$
(γ) $\alpha^2 - 2\alpha + 2 > 0$ (δ) $\alpha + \beta \geq 2\sqrt{\alpha\beta}$
με $\alpha, \beta \geq 0$

3. Να αποδείξετε ότι:
(α) $x^2 + y^2 + 4 \geq 4y$ (β) $2(x^2 + y^2) \geq (x - y)^2$
και να βρείτε πότε ισχύει η αντίστοιχη ισότητα.

4. Αν $x > 0$, να αποδείξετε ότι $x + \frac{1}{x} \geq 2$.
Πότε ισχύει η ισότητα $x + \frac{1}{x} = 2$;

5. Αν $1 < x < 2$ και $2 < y < 4$ να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:
(α) $2(x + y)$ (β) x^2y^2 (γ) $x - 2y$

6. Αν $2 < x < 3$ και $6 < y < 8$ να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:
(α) $\frac{y}{x}$ και $\frac{x}{y}$ (β) $x^2 + y$

7. Αν $\alpha < 1 < \beta$, να αποδείξετε ότι: $\alpha + \beta > 1 + \alpha\beta$

8. Αν $\alpha, \beta > 0$ να αποδείξετε ότι:
(α) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \geq 2$ (β) $(\alpha + \beta)\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \geq 4$

9. Η ανισοϊσότητα

$$\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta$$

Α. Να αποδείξετε ότι για τους πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύει

$$\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta \qquad (1)$$

και η αντίστοιχη ισότητα

$$\alpha^2 + \beta^2 = 2\alpha\beta$$

ισχύει μόνον όταν $\alpha = \beta$.

Β. Με κατάλληλες αντικαταστάσεις στην (1), ή με οποιονδήποτε άλλον τρόπο, να αποδείξετε τις επόμενες ανισότητες και να βρείτε πότε ισχύουν οι αντίστοιχες ισότητες:
(α) $\alpha + \beta \geq 2\sqrt{\alpha\beta}$, με $\alpha, \beta \geq 0$.
(β) $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$, με $\alpha > 0$
(γ) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \geq 2$, με $\alpha, \beta > 0$

Γ. Με πολλαπλή εφαρμογή της (1), ή με οποιονδήποτε άλλον τρόπο, να αποδείξετε τις επόμενες ανισότητες και να βρείτε πότε ισχύουν οι αντίστοιχες ισότητες:
(α) $(\alpha + \beta)\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \geq 4$, με $\alpha, \beta > 0$
(β) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$
(γ) $(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) \geq 8\alpha\beta\gamma$, με $\alpha, \beta, \gamma > 0$
(δ) $\alpha + \beta + \gamma + \delta \geq 4\sqrt[4]{\alpha\beta\gamma\delta}$, με $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$

4.3 Εξισώσεις και ανισώσεις με απόλυτα

Περιέχονται:

- Αλγεβρική και γεωμετρική επίλυση εξισώσεων της μορφής $|x-\alpha|=\beta$
- Αλγεβρική και γεωμετρική επίλυση ανισώσεων της μορφής
- $|x-\alpha|<\beta$ και $|x-\alpha|>\beta$

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε:

- Να επιλύουμε, αλγεβρικά και γεωμετρικά, εξισώσεις με απόλυτα.
- Να επιλύουμε, αλγεβρικά και γεωμετρικά, ανισώσεις με απόλυτα.
- Να επιλύουμε προβλήματα με απόλυτες τιμές.

Εξισώσεις με απόλυτα

Αλγεβρική επίλυση εξισώσεων της μορφής $|x-\alpha|=\beta$

Στην παράγραφο 2.4 είδαμε ότι η σχέση $|\alpha|=\varepsilon$, για $\varepsilon>0$, ικανοποιείται για τους αριθμούς $-\varepsilon$ και ε και μόνον αυτούς, δηλαδή:

$$\text{είναι } |\alpha|=\varepsilon, \text{ αν και μόνο αν } \alpha=-\varepsilon \text{ ή } \alpha=\varepsilon \qquad (1)$$

Με τη βοήθεια αυτής, μπορούμε να λύσουμε κάθε εξίσωση της μορφής

$$|x-\alpha|=\beta, \text{ με } \beta\geq 0.$$

Προφανώς αν $\beta<0$, η εξίσωση $|x-\alpha|=\beta$, είναι αδύνατη, διότι $|x-\alpha|\geq 0$.

Παράδειγμα 1

Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

(α) $|x-1|=1$

Λύση

Σύμφωνα με την (1) έχουμε:

$x-1=-1$ ή $x-1=1$

$x=0$ ή $x=2$

(β) $|x-1|=-1$

Λύση

Η εξίσωση είναι αδύνατη διότι $|x-1|\geq 0$

Άσκηση 2

Γεωμετρική επίλυση εξισώσεων της μορφής $|x-\alpha|=\beta$

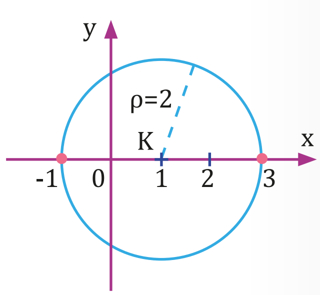
Για να επιλύσουμε γεωμετρικά με την βοήθεια της ευθείας των πραγματικών αριθμών, εξισώσεις της μορφής $|x-\alpha|=\beta$, εργαζόμαστε όπως στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα 2

Με τη βοήθεια της ευθείας των πραγματικών αριθμών να λύσετε την εξίσωση

$$|x-1|=2$$

Λύση



Γνωρίζουμε ότι το $|x-1|$ παριστάνει την απόσταση του αριθμού x, από τον αριθμό 1. Επομένως, αναζητούμε τους αριθμούς x, που η απόστασή τους από το 1, ισούται με 2. Γράφουμε τον κύκλο με κέντρο το σημείο K, που παριστάνει τον αριθμό 1 και ακτίνα $\rho=2$, μονάδες μήκους. Η εξίσωση $|x-1|=2$, αληθεύει για όλους τους αριθμούς x, που παριστάνονται με τα σημεία της ευθείας που ανήκουν στον κύκλο $(K,2)$ και μόνον αυτούς, δηλαδή, για τους αριθμούς $1-2=-1$ και $1+2=3$. Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης $|x-1|=2$ είναι οι αριθμοί -1 και 3.

Άσκηση 3

Αλγεβρική επίλυση ανισώσεων της μορφής $|x-\alpha|<\beta$

Γνωρίζουμε από την παράγραφο 2.4 ότι η σχέση $|\alpha|<\varepsilon$, για $\varepsilon>0$, ισχύει μόνο όταν $-\varepsilon<\alpha<\varepsilon$, δηλαδή

είναι $|\alpha|<\varepsilon$, αν και μόνο αν $-\varepsilon<\alpha<\varepsilon$. (2)

Επομένως, με τη βοήθεια αυτής μπορούμε να λύσουμε ανισώσεις της μορφής

$$|x-\alpha|<\beta \quad \text{και} \quad |x-\alpha|\leq\beta, \text{ με } \beta>0,$$

όπως φαίνεται και στα επόμενα παραδείγματα.

Προφανώς αν $\beta<0$, οι παραπάνω ανισώσεις είναι αδύνατες, διότι $|x-\alpha|\geq 0$

Παράδειγμα 3

Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις

α) $|x-1|<2$ (β) $|x+2|\leq 3$ (γ) $|2x-1|<-5$

α)

Λύση

Σύμφωνα με την (2) έχουμε:

$$-2<x-1<2$$

Προσθέτουμε το 1 σε όλα τα μέλη και παίρνουμε

$$-1<x<3$$

(β)

Λύση

Σύμφωνα με την (2) έχουμε:

$$-3\leq x+2\leq 3$$

Αφαιρούμε το 2 από όλα τα μέλη και παίρνουμε

$$-5\leq x\leq 1$$

(γ)

Λύση

Η ανίσωση είναι αδύνατη διότι

$$|2x-1|\geq 0$$

Άσκηση 4

Ανισώσεις με απόλυτα 1

Γεωμετρική επίλυση ανισώσεων της μορφής $|x-\alpha|<\beta$

Για να επιλύσουμε γεωμετρικά, με τη βοήθεια της ευθείας των πραγματικών αριθμών, ανισώσεις της μορφής

$$|x-\alpha|<\beta, \text{ με } \beta>0,$$

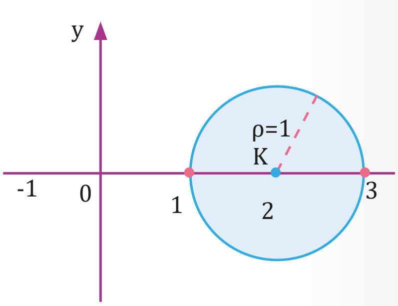
εργαζόμαστε όπως στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα 4

Με τη βοήθεια της ευθείας των πραγματικών αριθμών, να λύσετε την ανίσωση

$$|x-2|<1$$

Λύση



Γνωρίζουμε ότι το $|x-2|$, παριστάνει την απόσταση του αριθμού x, από τον αριθμό 2. Επομένως, αναζητούμε τους αριθμούς x, που η απόστασή τους από το 2, είναι μικρότερη από 1.

Γράφουμε τον κύκλο με κέντρο το σημείο K, που παριστάνει τον αριθμό 2 και ακτίνα $\rho=1$.

Η ανίσωση $|x-2|<1$ αληθεύει για όλους τους αριθμούς x, που παριστάνονται με τα σημεία της ευθείας που ανήκουν στο εσωτερικό του κύκλου, δηλαδή, με $1<x<3$.

Επομένως, οι λύσεις της ανίσωσης είναι οι αριθμοί x με $1<x<3$.

Άσκηση 5

Ανισώσεις με απόλυτα 2

Αλγεβρική επίλυση ανισώσεων της μορφής |x-α|>β

Γνωρίζουμε ότι η σχέση $|\alpha|>\varepsilon$, για $\varepsilon>0$, ισχύει όταν $\alpha<-\varepsilon$ ή $\alpha>\varepsilon$, δηλαδή

είναι $|\alpha|>\varepsilon$, αν και μόνο αν $\alpha<-\varepsilon$ ή $\alpha>\varepsilon$. (3)

Με τη βοήθεια αυτής, μπορούμε να λύσουμε ανισώσεις της μορφής

$$|x-\alpha|>\beta \text{ και } |x-\alpha|\geq\beta, \text{ με } \beta>0,$$

όπως φαίνεται και στα επόμενα παραδείγματα.
Προφανώς αν $\beta<0$, οι παραπάνω ανισώσεις έχουν λύση κάθε πραγματικό αριθμό, διότι $|x-\alpha|\geq 0$

Παράδειγμα 5
Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις

(α) $|x+4|>3$

Λύση
Με την βοήθεια της (3) έχουμε διαδοχικά:
$x+4<-3$ ή $x+4>3$
$x<-7$ ή $x>-1$

(β) $|x-2|\geq 5$

Λύση
Με την βοήθεια της (3) έχουμε διαδοχικά:
$x-2\leq -5$ ή $x-2\geq 5$
$x\leq -3$ ή $x\geq 7$

(γ) $|2x+1|>-2$

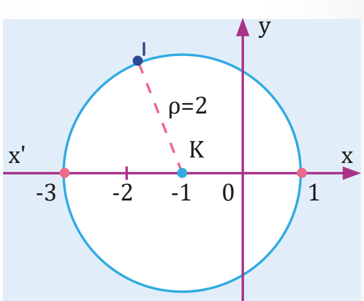
Λύση
Η ανίσωση αληθεύει για κάθε πραγματική τιμή του x, διότι,
$|2x+1|\geq 0$

Άσκηση 6

Ανισώσεις με απόλυτες τιμές

Γεωμετρική επίλυση ανισώσεων της μορφής |x-α|>β

Παράδειγμα 6
Με την βοήθεια της ευθείας των πραγματικών αριθμών να λύσετε την ανίσωση
$|x+1|>2$



Λύση
Γνωρίζουμε ότι το $|x+1|=|x-(-1)|$, παριστάνει την απόσταση του αριθμού x από τον αριθμό -1. Επομένως, αναζητούμε τους αριθμούς x, που η απόστασή τους από το -1 είναι μεγαλύτερη από 2.
Γράφουμε τον κύκλο με κέντρο το σημείο K, που παριστάνει τον αριθμό -1 και ακτίνα $\rho=2$.
Η ανίσωση $|x+1|>2$, αληθεύει για όλους τους αριθμούς x, που παριστάνονται με τα σημεία της ευθείας που ανήκουν στο εξωτερικό του κύκλου, δηλαδή, τους αριθμούς x, με $x<-3$ ή $x>1$.
Επομένως οι λύσεις της ανίσωσης $|x+1|>2$, είναι οι αριθμοί *x* με *x <–3* ή *x>1.*

Άσκηση 7

Γενικές ασκήσεις 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 και 17

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Ερωτήσεις κατανόησης

1. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις, ως αληθή ή ψευδή.
(α) Η ανίσωση $|x| \geq -1$, αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό.
(β) Αν $|x-3| \leq 0$, τότε $x=3$.
(γ) Η ανίσωση $|x-2|<-3$, είναι αδύνατη.
(δ) Η εξίσωση $|x+1|=-2$, είναι αδύνατη.

Ερωτήσεις ανάπτυξης

2. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:
(α) $|x-3|=2$ (β) $|x+1|=3$
(γ) $|x-1|=2$ (δ) $|2x-1|=5$

3. Με τη βοήθεια της ευθείας των πραγματικών αριθμών να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:
(α) $|x+2|=4$ (β) $|x-3|=2$

4. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:
(α) $|x-2|<3$ (β) $|x+1|<4$
(γ) $|1-x| \leq 1$ (δ) $|2x-5| \leq 5$

5. Με τη βοήθεια της ευθείας των πραγματικών αριθμών να λυθούν οι παρακάτω ανισώσεις:
(α) $|x-2|<4$ (β) $|x+3|<1$ (γ) $|x-4| \leq 5$

6. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:
(α) $|x-1|>2$ (β) $|x+2|>3$
(γ) $|x-3| \geq 4$ (δ) $|1-2x|>5$

7. Με τη βοήθεια της ευθείας των πραγματικών αριθμών να λυθούν οι παρακάτω ανισώσεις:
(α) $|x-4|>2$ (β) $|x+3|>3$
(γ) $|x+1|>2$ (δ) $|2x-1|>5$

8. Να λύσετε γεωμετρικά τις εξισώσεις:
(α) $|x-2|=|x+4|$ (β) $|x-1|+|x-3|=2$

9. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:
(α) $2 \leq |x| \leq 3$ (β) $1 \leq |x-1| \leq 5$

10. Να λύσετε τις εξισώσεις:
(α) $\left|\dfrac{x+3}{x-1}\right|=2$
(β) $\dfrac{|x-1|+2}{3}+|1-x|=4$

11. Να λύσετε τις εξισώσεις:
(α) $||x|-1|=2$
(β) $|2-|x+3||=3$

12. Να λύσετε την ανίσωση
$|x^2-4| \leq 0$

13. Να λύσετε την εξίσωση:
$|x^2-9|+|2x+6|=0$

14. Να λύσετε γεωμετρικά την ανίσωση:
$|x+2|>|x|$

15. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:
(α) $|x-2|=\lambda-1$
(β) $|\lambda x+4|=2$

16. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:
(α) $|2x-1|>\lambda$
(β) $|\lambda x+1|<\lambda$

17. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:
(α) $|x-2|=x-1$
(β) $|\lambda x+4|=0$

4.4 Η εξίσωση $x^\nu=\alpha$

- Επίλυση της εξίσωσης $x^\nu=\alpha$
- Ο ν είναι άρτιος
- Ο ν είναι περιττός

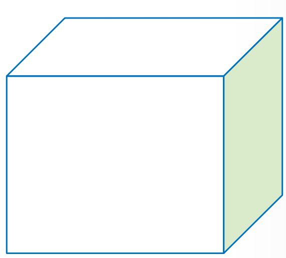
Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε να επιλύουμε εξισώσεις της μορφής $x^\nu=\alpha$.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Ο Γιώργος θέλει να κατασκευάσει για το χωράφι του μια δεξαμενή νερού, σχήματος κύβου και όγκου $125m^3$.

(α) Πώς θα μπορούσατε να βοηθήσετε τον Γιώργο, για να βρει το μήκος της πλευράς της κυβικής δεξαμενής;

(β) Εάν ο Γιώργος ήθελε να φτιάξει μια κυβική δεξαμενή κατά $100m^3$ μεγαλύτερη, ποια πρέπει να είναι η πλευρά της;



Λύση

(α) Έστω ότι η πλευρά του κύβου έχει μήκος x m. Γνωρίζουμε ότι ο όγκος ενός κύβου ακμής x είναι $V=x^3$. Επειδή ο όγκος της δεξαμενής είναι $125m^3$ έχουμε ότι $x^3=125$. Συνεπώς, αναζητούμε έναν αριθμό x ο οποίος όταν υψωθεί στην τρίτη μας δίνει 125. Παρατηρούμε ότι $2^3=8\neq125$, $3^3=27\neq125$, $4^3=64\neq125$, $5^3=125$, οπότε η πλευρά του κύβου είναι $5m$.

(β) Σκεπτόμενος, όπως παραπάνω, ο Γιώργος θα λύσει την εξίσωση

$$x^3=125+100 \text{ ή } x^3=225.$$

Η εξίσωση έχει μοναδική θετική λύση την $x=\sqrt[3]{225}$

Με τη βοήθεια αριθμομηχανής, ο Γιώργος βρίσκει με προσέγγιση εκατοστού $x=6{,}08$. Επομένως, η κυβική δεξαμενή πρέπει να έχει πλευρά $6{,}08m$.

Επίλυση της εξίσωσης $x^\nu=\alpha$

Έστω ν ένας θετικός ακέραιος αριθμός.

Στην παράγραφο 2.5 είδαμε ότι, η εξίσωση $x^\nu=\alpha$ με $\alpha\geq0$ έχει μοναδική μη αρνητική ρίζα την $x=\sqrt[\nu]{\alpha}$.

Στη συνέχεια θα δούμε πότε η εξίσωση αυτή έχει και αρνητικές λύσεις, και πως λύνεται όταν $\alpha<0$. Έχουμε δύο κύριες περιπτώσεις ανάλογα με το αν ο ν είναι άρτιος ή περιττός.

Α. Αν ο ν είναι άρτιος, τότε έχουμε εξισώσεις, όπως

$$x^{10}=-2,\ x^8=-1,\ x^4=16$$

- Παρατηρούμε στην εξίσωση $x^{10}=-2$, ότι το πρώτο μέλος της είναι μη αρνητικό, οπότε είναι αδύνατη.
  Ομοίως και η εξίσωση $x^8=-1$, είναι αδύνατη.
- Ας δούμε, τώρα, την εξίσωση $x^4=16$. Αυτή γράφεται, ως $|x|^4=16$

Η εξίσωση αυτή, με άγνωστο την απόλυτη τιμή $|x|\geq 0$, έχει μοναδική λύση την $\sqrt[4]{16}=2$, συνεπώς είναι

$$|x|=2 \text{ άρα } x=2 \text{ ή } x=-2$$

Γενικότερα έχουμε:
Αν ο ν είναι άρτιος, τότε η εξίσωση $x^{\nu}=\alpha$

- είναι αδύνατη, όταν $\alpha<0$
- έχει δύο λύσεις αντίθετες τις $x=-\sqrt[\nu]{\alpha}$ ή $x=\sqrt[\nu]{\alpha}$, όταν $\alpha\geq 0$

Β. Αν ο ν είναι περιττός, τότε έχουμε εξισώσεις, όπως οι $x^3=8$ και $x^5=-32$.

- Έστω η εξίσωση $x^3=8$. Αυτή έχει μοναδική θετική ρίζα την $x=\sqrt[3]{8}=2$. Παρατηρούμε ότι το δεύτερο μέλος είναι θετικό, οπότε και το πρώτο μέλος είναι θετικό δηλαδή $x^3>0$, άρα και $x>0$. Επομένως η εξίσωση δεν έχει αρνητική ρίζα και έχει μοναδική ρίζα την $x=\sqrt[3]{8}=2$.
- Έστω η εξίσωση $x^5=-32$. Παρατηρούμε ότι το δεύτερο μέλος είναι αρνητικό οπότε και το πρώτο μέλος είναι αρνητικό, δηλαδή $x^5<0$, άρα και $x<0$. Η εξίσωση παίρνει την μορφή $(-x)^5=32$ και επειδή $-x>0$ έχει μοναδική λύση την $-x=\sqrt[5]{32}=2$ ή $x=-2$.

Γενικότερα έχουμε:
Αν ο ν είναι περιττός, τότε η εξίσωση $x^{\nu}=\alpha$

- έχει λύση $x=\sqrt[\nu]{\alpha}$, όταν $\alpha\geq 0$
- έχει λύση $x=-\sqrt[\nu]{|\alpha|}$, όταν $\alpha<0$

Συγκεντρωτικά έχουμε τον πίνακα:

Η εξίσωση $x^{\nu}=\alpha$		
Τιμές του ν	Τιμές του α	Η λύση της εξίσωσης $x^{\nu}=\alpha$
ν άρτιος	$\alpha\geq 0$	$x=-\sqrt[\nu]{\alpha}$ ή $x=\sqrt[\nu]{\alpha}$
	$\alpha<0$	Αδύνατη
ν περιττός	$\alpha\geq 0$	$x=\sqrt[\nu]{\alpha}$
	$\alpha<0$	$x=-\sqrt[\nu]{|\alpha|}$

Η εξίσωση χ^ν=α 1

Παράδειγμα 1

Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $x^4=81$ (β) $x^6=-8$ (γ) $x^3=27$ (δ) $x^7=-1$

Λύση

(α) Η εξίσωση $x^4=81$ έχει δύο ρίζες τις $x=-\sqrt[4]{81}=-3$ και $x=\sqrt[4]{81}=3$.

(β) Η εξίσωση $x^6=-8$ είναι αδύνατη.

(γ) Η εξίσωση $x^3=27$ έχει μοναδική ρίζα την $x=\sqrt[3]{27}=3$.

(δ) Η εξίσωση $x^7=-1$ έχει μοναδική ρίζα την $x=-\sqrt[7]{|-1|}=-1$

Ασκήσεις 3, 4 και 5

Η εξίσωση χ^ν=α 2

Παράδειγμα 2

Να λύσετε την εξίσωση $2x^7+16x^4=0$

Λύση

Η εξίσωση γράφεται $2x^4(x^3+27)=0$ επομένως είναι $x^4=0$ ή $x^3+27=0$, οπότε $x=0$ ή $x^3=-27$. Η τελευταία εξίσωση δίνει $x=-\sqrt[3]{|-27|}=-3$.
Ώστε η εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς 0 και -3.

Άσκηση 6

Εφαρμογή

Να λύσετε την εξίσωση $(x-2)^6-64=0$

Λύση

Η εξίσωση γράφεται $(x-2)^6=64$. Επομένως είναι $x-2=\sqrt[6]{64}$ ή $x-2=-\sqrt[6]{64}$, οπότε $x-2=2$ ή $x-2=-2$ άρα $x=0$ ή $x=4$.
'Ωστε η εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς 0 και 4.

Άσκηση 7

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:
(α) Αν $\alpha>0$ και ν περιττός φυσικός αριθμός, τότε η εξίσωση $x^\nu=\alpha$ έχει .... λύση την ....
(β) Αν .... και ν περιττός φυσικός αριθμός, τότε η εξίσωση $x^\nu=\alpha$ έχει .... λύση την $x=-\sqrt[\nu]{|\alpha|}$.

2. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις, ως αληθή ή ψευδή:
(α) Η εξίσωση $x^\nu=0$ με $\nu\in\mathbb{N}-\{0\}$ έχει μοναδική λύση την $x=0$.
(β) Η εξίσωση $x^\nu=\alpha^\nu$ με $\nu\in\mathbb{N}-\{0\}$ και $\alpha\in\mathbb{R}$ έχει μοναδική λύση την $x=\alpha$.
(γ) Η εξίσωση $x^5=2^{10}$ έχει μοναδική λύση την $x=4$.
(δ) Η εξίσωση $x^4=-81$ έχει ακριβώς δύο ρίζες τις $x_1=-3$ και $x_2=3$.

Ερωτήσεις Ανάπτυξης

3. Να λύσετε τις εξισώσεις
(α) $x^9-1=0$ (β) $x^5-32=0$ (γ) $x^3-64=0$
(δ) $x^9+1=0$ (ε) $x^5+243=0$ (στ) $x^3+64=0$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις
(α) $x^2-121=0$ (β) $81-x^4=0$
(γ) $x^6-64=0$ (δ) $x^4+2=0$
(ε) $8x^3+1=0$ (στ) $125x^3-1=0$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις
(α) $(x^3+27)(x^6-64)=0$
(β) $x^7-x^4-16x^3+16=0$

6. Να λύσετε τις εξισώσεις
(α) $12x^2+x^4=0$ (β) $6x^6+12x=0$

7. Να λύσετε τις εξισώσεις
(α) $(x-2)^5=243$ (β) $(x^4+2)^4-81=0$

4.5 Εξισώσεις 2^{ου} Βαθμού

Περιέχονται:
- Ορισμοί
- Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού
- Επίλυση με παραγοντοποίηση
- Επίλυση με συμπλήρωση τετραγώνου
- Επίλυση με τη βοήθεια τύπου
- Εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις δευτέρου βαθμού

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε:
- Να λύνουμε αλγεβρικά εξισώσεις δευτέρου βαθμού.
- Να λύνουμε εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις δευτέρου βαθμού.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Εξίσωση δευτέρου βαθμού λέμε κάθε εξίσωση της μορφής

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \text{ με } \alpha\neq 0.$$

Οι αριθμοί $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ λέγονται συντελεστές της εξίσωσης. Ειδικά ο γ λέγεται σταθερός όρος και ο α συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου.

Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού

Έχουμε μάθει να λύνουμε εξισώσεις δευτέρου βαθμού, όπως οι επόμενες, στις οποίες ένας από τους συντελεστές $\beta,\ \gamma$ είναι μηδέν:

$$3x^2=0,\ \ 2x^2+5x=0,\ \ 3x^2-12=0,\ \ 4x^2+5=0$$

Πραγματικά, έχουμε κατά σειρά:

- Η εξίσωση $3x^2=0$ γράφεται $x^2=0$ και έχει ρίζα $x=0$.
- Η εξίσωση $2x^2+5x=0$ με παραγοντοποίηση γράφεται $x(2x+5)=0$ και δίνει $x=0$ ή $2x+5=0$ οπότε $x=0$ ή $x=-\dfrac{5}{2}$
- Η εξίσωση $3x^2-12=0$ λύνεται, όπως λέμε, ως προς x^2 και δίνει $x^2=4$, επομένως $x=\pm\sqrt{4}=\pm 2$
- Η εξίσωση $4x^2+5=0$ είναι αδύνατη, αφού $4x^2+5>0$.

Ασκήσεις 3, 4 και 5

Εξίσωση 2^{ου} βαθμού 1

Στην γενική της μορφή η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha\neq 0$ μπορεί να επιλυθεί με τρεις, κυρίως, τρόπους: με παραγοντοποίηση του πρώτου μέλους της, με συμπλήρωση τετραγώνου στο πρώτο μέλος της και με την βοήθεια τύπου. Συγκεκριμένα έχουμε:

Επίλυση με παραγοντοποίηση

Έστω η εξίσωση $x^2-4x+3=0$. Το πρώτο μέλος της παραγοντοποιείται ως εξής:

$$x^2-4x+3=x^2\underbrace{-3x-x}_{-4x}+3=x(x-3)-(x-3)=(x-3)(x-1)$$

Επομένως η εξίσωση γράφεται $(x-3)(x-1)=0$ οπότε είναι

$$x-3=0 \ \text{ ή } \ x-2=0 \ \text{ άρα } \ x=3 \ \text{ ή } \ x=1$$

'Ωστε η εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς 3 και 1.

Με ίδιο τρόπο, επιλύουμε κάθε εξίσωση δευτέρου βαθμού που μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε το πρώτο μέλος της.

Γινόμενο παραγόντων ίσο με μηδέν:
Αν $\alpha\beta=0$, τότε $\alpha=0$ ή $\beta=0$ και αντιστρόφως.

Ασκήσεις 7 (α), (β) και (γ)

Επίλυση με συμπλήρωση τετραγώνου

Έστω, πάλι, η εξίσωση $x^2-4x+3=0$. Στο πρώτο μέλος της κοιτάμε το x^2-4x και προσθαφαιρούμε το 4, έτσι ώστε να προκύψει το ανάπτυγμα του τετραγώνου $x^2-4x+4=(x-2)^2$:

$$x^2-4x+3=\underbrace{x^2-4x+4}-4+3=(x-2)^2-1$$

Τώρα η εξίσωση $x^2-4x+3=0$ γράφεται διαδοχικά:

$$(x-2)^2-1=0 \;\text{ ή }\; (x-2)^2=1 \;\text{ ή }\; x-2=\pm\sqrt{1}=\pm 1$$

Αν $x-2=1$, τότε $x=3$. Αν $x-2=-1$, τότε $x=1$.
Ώστε η εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς 3 και 1.
Με ίδιο τρόπο επιλύουμε κάθε εξίσωση δευτέρου βαθμού.

Άσκηση 7

Λέμε ότι κάνουμε συμπλήρωση τετραγώνου, όταν σε μία παράσταση της μορφής

$$\alpha^2 \pm 2\alpha\beta$$

προσθαφαιρούμε το β^2 και γίνεται

$$\underbrace{\beta^2 \pm 2\alpha\beta+\beta^2}-\beta^2$$

που ισούται με

$$(\alpha\pm\beta)^2-\beta^2$$

Επίλυση με την βοήθεια τύπου

Η μέθοδος αυτή είναι πιο απλή και ασφαλής σε σύγκριση με τις προηγούμενες. Για να λύσουμε την εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha\neq 0$ εργαζόμαστε ως εξής:
Πρώτα υπολογίζουμε την τιμή της παράστασης

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$$

που λέγεται διακρίνουσα της εξίσωσης. Στη συνέχεια διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma>0$, τότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες τις

$$x=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad\text{και}\quad x=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

Για συντομία γράφουμε $x=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$. Λέμε, ακόμα, ότι η εξίσωση έχει δύο (άνισες) ρίζες.

- Αν $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=0$, τότε η εξίσωση έχει μία μόνο ρίζα την

$$x=\frac{-\beta}{2\alpha},$$

η οποία λέγεται διπλή ρίζα. Λέμε, ακόμα, ότι η εξίσωση έχει δύο ίσες ρίζες.

- Αν $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma<0$, τότε η εξίσωση δεν έχει ρίζες. Λέμε ότι η εξίσωση είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

Ισχύουν και τα αντίστροφα των διπλανών συμπερασμάτων:

- Αν η εξίσωση έχει δύο (άνισες) ρίζες, τότε $\Delta>0$.
- Αν η εξίσωση έχει διπλή ρίζα, τότε $\Delta=0$.
- Αν η εξίσωση είναι αδύνατη, τότε $\Delta<0$.

Ακόμα, αν η εξίσωση έχει ρίζες (χωρίς να διευκρινίζεται πόσες), τότε $\Delta\geq 0$.

Παράδειγμα 1

Να λύσετε την εξίσωση $x^2-4x+3=0$.

Λύση

Οι συντελεστές της εξίσωσης είναι $\alpha=1$, $\beta=-4$ και $\gamma=3$. Πρώτα υπολογίζουμε την διακρίνουσα. Έχουμε

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-4)^2-4\cdot1\cdot3=16-12=4>0$$

Επομένως η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες τις

$$x=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-4)+\sqrt{4}}{2\cdot1}=\frac{4+2}{2}=3 \quad\text{και}$$
$$x=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-4)-\sqrt{4}}{2\cdot1}=\frac{4-2}{2}=1$$

Ώστε η εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς 3 και 1.

Εξίσωση 2ου βαθμού 2

Παράδειγμα 2

Να λύσετε τις εξισώσεις (α) $4x^2+4x+1=0$, (β) $-x^2+3x-5=0$

Λύση

(α) Οι συντελεστές της εξίσωσης είναι $\alpha=4$, $\beta=4$ και $\gamma=1$.

Έχουμε

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=4^2-4\cdot1\cdot4=16-16=0$$

Επομένως η εξίσωση έχει μία (διπλή) ρίζα την

$$x=\frac{-\beta}{2\alpha}=-\frac{4}{2\cdot4}=-\frac{1}{4}.$$

(β) Οι συντελεστές της εξίσωσης είναι $\alpha=-1$, $\beta=3$ και $\gamma=-5$.

Έχουμε

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=3^2-4\cdot(-1)\cdot(-5)=9-20=-11<0$$

Επομένως, η εξίσωση είναι αδύνατη.

Εξίσωση 2ου βαθμού 3

Ασκήσεις 6, 7, 8 και 9

Εφαρμογή 1

Δίνεται η εξίσωση $2x^2-4x+\lambda=0$.

Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση:

(α) Έχει δύο άνισες ρίζες. (β) Έχει διπλή ρίζα. (γ) Είναι αδύνατη;

Λύση

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=16-8\lambda$. Η ρίζα της και το πρόσημό της φαίνονται στον διπλανό πίνακα, από τον οποίο συμπεραίνουμε ότι:

λ	$-\infty$		2		$+\infty$
$16-8\lambda$		+	0	−	

(α) Η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες, όταν $\Delta>0$, οπότε $\lambda<2$.

(β) Η εξίσωση έχει διπλή ρίζα, όταν $\Delta=0$, οπότε $\lambda=2$.

(γ) Η εξίσωση είναι αδύνατη, όταν $\Delta<0$, οπότε $\lambda>2$.

Εξίσωση 2ου βαθμού 4

Ασκήσεις 10, 11 και 12

Εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις δευτέρου βαθμού

Στην κατηγορία αυτή ανήκουν εξισώσεις η επίλυση των οποίων, με κατάλληλο μετασχηματισμό, ανάγεται στην επίλυση εξίσωσης δευτέρου βαθμού. Τέτοιες είναι, για παράδειγμα, οι επόμενες εξισώσεις, τις οποίες και θα λύσουμε:

$$x^4-x^2-12=0,\quad x+4\sqrt{x}-5=0,\quad x^2+2|x|-3=0$$

Παράδειγμα 1

Να λύσετε την εξίσωση $x^4-x^2-12=0$

Λύση

Κάνουμε, όπως λέμε, την αντικατάσταση

$$x^2=y$$

Επειδή $x^2\geq0$ πρέπει $y\geq0$. Η εξίσωση $x^4-x^2-12=0$ γράφεται

$$(x^2)^2-x^2-12=0 \text{ ή } y^2-y-12=0$$

Με την αντικατάσταση
$$x^{\nu}=y$$
λύνουμε κάθε εξίσωση της μορφής
$$\alpha x^{2\nu}+\beta x^{\nu}+\gamma=0,\ \ \alpha\neq 0$$
Ειδικά η εξίσωση
$$\alpha x^{4}+\beta x^{2}+\gamma=0,\ \ \alpha\neq 0$$
λέγεται **διτετράγωνη.**

Η τελευταία εξίσωση με άγνωστο το y έχει ρίζες τους αριθμούς -3 και 4. Επειδή $y\geq 0$ το -3 απορρίπτεται. Έτσι είναι $y=4$, οπότε
$$x^2=4\ \ \text{ή}\ \ x=\pm\sqrt{4}=\pm 2.$$
Ώστε η εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς -2 και 2.

Άσκηση 13

Παράδειγμα 2

Να λύσετε την εξίσωση $x+4\sqrt{x}-5=0$

Λύση

Επειδή έχουμε την $\sqrt{x}$ πρέπει να είναι $x\geq 0$ και $\sqrt{x}\geq 0$. Κάνουμε την αντικατάσταση
$$\sqrt{x}=y$$
Επειδή $\sqrt{x}\geq 0$ πρέπει $y\geq 0$. Η εξίσωση $x+4\sqrt{x}-5=0$, γράφεται
$$\left(\sqrt{x}\right)^2+4\sqrt{x}-5=0\ \ \text{ή}\ \ y^2+4y-5=0$$
Η τελευταία εξίσωση με άγνωστο το y έχει ρίζες τους αριθμούς 1 και -5. Επειδή, όπως $y\geq 0$ το -5 απορρίπτεται. Έτσι είναι $y=1$, οπότε
$$\sqrt{x}=1\ \ \text{άρα}\ \ x=1$$
Ώστε η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό 1.

Με την αντικατάσταση
$$\sqrt{x}=y\geq 0$$
λύνουμε κάθε εξίσωση της μορφής
$$\alpha x+\beta\sqrt{x}+\gamma=0,\ \ \alpha\neq 0$$

Άσκηση 14

Παράδειγμα 3

Να λύσετε την εξίσωση $x^2+2|x|-3=0$

Λύση

Επειδή $x^2=|x|^2$ η εξίσωση γράφεται $|x|^2+2|x|-3=0$

Κάνουμε την αντικατάσταση
$$|x|=y$$
Επειδή $|x|\geq 0$ πρέπει $y\geq 0$. Η εξίσωση $|x|^2+2|x|-3=0$ γράφεται
$$y^2+2y-3=0$$
Η τελευταία εξίσωση με άγνωστο το y έχει ρίζες τους αριθμούς 1 και -3. Επειδή $y\geq 0$ το -3 απορρίπτεται. Έτσι είναι $y=1$, οπότε
$$|x|=1\ \ \text{άρα}\ \ x=-1\ \ \text{ή}\ \ x=1$$
Ώστε η εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς -1 και 1.

Με την αντικατάσταση
$$|x|=y\geq 0$$
λύνουμε κάθε εξίσωση της μορφής
$$\alpha x^2+\beta|x|+\gamma=0,\ \ \alpha\neq 0$$

Άσκηση 15

Γενικές ασκήσεις 16, 17, 18 και 19

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Ασκήσεις κατανόησης

1. Έστω η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha\neq 0$.
Να απαντήσετε στις επόμενες ερωτήσεις:

(α) Πόσες ρίζες έχει, όταν η διακρίνουσά της είναι αρνητική;

(β) Πότε έχει δύο άνισες ρίζες;

(γ) Πότε έχει δύο ρίζες ίσες;

(δ) Πόσες ρίζες έχει, όταν έχει διακρίνουσα $\Delta \geq 0$;

2. Έστω η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ και διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$. Να χαρακτηρίσετε, ως αληθή ή ψευδή, καθεμία από τις επόμενες προτάσεις:

(α) Αν $\Delta = -1$ η εξίσωση είναι αδύνατη.

(β) Αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$, τότε έχει ρίζα το 1.

(γ) Η εξίσωση έχει διπλή ρίζα, όταν $\beta^2 = 4\alpha\gamma$.

(δ) Αν $\Delta \geq 0$, τότε η εξίσωση έχει μία ή δύο ρίζες.

Ασκήσεις ανάπτυξης

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $x^2 = 0$ (β) $x^2 - 9 = 0$

(γ) $20 - 5x^2 = 0$ (δ) $2 + 4x^2 = 0$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $x^2 + x = 0$ (β) $-x^2 + 3x = 0$

(γ) $4x^2 + 3x = 0$ (δ) $6x^2 = 12x$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $x^2 = \sqrt{3}$ (β) $\sqrt{2}x^2 - \sqrt{6}x = 0$

6. Να βρείτε πόσες ρίζες έχουν οι επόμενες εξισώσεις, χωρίς να τις λύσετε:

(α) $3x^2 - 2x - 1 = 0$ (β) $3y^2 - 10y + 7 = 0$

(γ) $9y^2 + 6y + 1 = 0$

(δ) $2x^2 - \lambda x - 3 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

7. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $x^2 - 2x - 3 = 0$ (β) $y^2 - 10y + 7 = 0$

(γ) $4y^2 + 1 = 4y$ (δ) $2x^2 - 4x + 3 = 0$

8. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

(β) $x^2 - (\sqrt{3} + \sqrt{2})x + \sqrt{6} = 0$

9. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $(x+1)^2 + 2(x+1)(x-1) + 5 = 0$

(β) $(x-2)^2 + (x+2)^2 = x(x+3) + 6$

10. Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$
Να αποδείξετε ότι, αν οι συντελεστές α και γ είναι ετερόσημοι, τότε έχει δύο άνισες ρίζες.

11. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (\lambda + 1)x + \lambda + 1 = 0$

(α) Να αποδείξετε ότι έχει διακρίνουσα

$$\Delta = \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

(β) Αν η εξίσωση έχει διπλή ρίζα, να βρείτε τις τιμές του λ και τη ρίζα της.

12. Για τις διάφορες τιμές του λ, να βρείτε το πλήθος των ριζών των παρακάτω εξισώσεων:

(α) $2x^2 - \lambda x - 2 = 0$

(β) $3x^2 + 2x + \lambda - 1 = 0$

(γ) $x^2 - 2x + |\lambda| = 0$

Εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις δευτέρου βαθμού

13. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$ (β) $2x^4 - 3x^2 + 1 = 0$

(γ) $4y^4 - 4y^2 + 1 = 0$ (δ) $3\omega^4 - 2\omega^2 + 1 = 0$

14. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $x - 5\sqrt{x} + 4 = 0$ (β) $3x - 10\sqrt{x} + 3 = 0$

(γ) $4y - 3\sqrt{y} + 2 = 0$

15. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $x^2 + 2|x| - 3 = 0$ (β) $6x^2 - 5|x| + 1 = 0$

16. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $(x-1)^4 - 2(x-1)^2 - 3 = 0$

(β) $2(x-1)^2 + |x-1| = 1$ (γ) $x + 8 + 5\sqrt{x+2} = 0$

17. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$ (β) $32x^8 - 14x^4 - 1 = 0$

18. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $3x^{\frac{1}{4}} + 2x^{\frac{1}{2}} - 5 = 0$ (β) $3\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[6]{x-1} = 14$

19. Αν ο αριθμός α είναι ρίζα της εξίσωσης

$$\alpha^4 - 2\alpha^2 - 3 = 0$$

να λύσετε την εξίσωση:

$$\alpha^4 x + \alpha^2\sqrt{x} - 6 = 0$$

4.6 Μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων με εξισώσεις $2^{ου}$ Βαθμού

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε πώς μπορούμε να λύνουμε πραγματικά προβλήματα με χρήση εξισώσεων δευτέρου βαθμού.

1. Μια καλλιέργεια βακτηρίων

Μια εργαστηριακή καλλιέργεια βακτηρίων πολλαπλασιάζεται, ώστε ο αριθμός τους P σε συνάρτηση με τον χρόνο t σε ώρες, προσεγγίζεται από την παράσταση $P=500+125t+at^2$. Μετά από δύο ώρες η καλλιέργεια είχε 1350 βακτήρια.

(α) Πόσα βακτήρια είχε αρχικά η καλλιέργεια;

(β) Να αποδείξετε ότι $P=500+125t+125t^2$.

(γ) Σε πόσο χρόνο ο αριθμός των βακτηρίων θα είναι $P=7500$;

Λύση

(α) Ο αριθμός των βακτηρίων που είχε αρχικά η καλλιέργεια, αντιστοιχεί στην τιμή της παράστασης $P=500+125t+at^2$ όταν $t=0$ επομένως είχε $P=500$ βακτήρια.

(β) Για $t=2$ είναι $P=1350$, επομένως

$$1350=500+125\cdot 2+4\alpha \quad \text{ή} \quad \alpha=150$$

Άρα $P=500+125t+125t^2$.

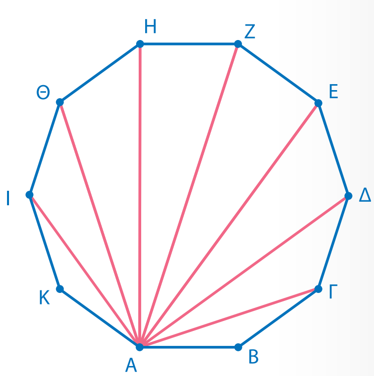
(γ) Ζητάμε τον χρόνο για τον οποίο $P=7500$ ή $7500=500+125t+125t^2$ ή $125t^2+125t-7000=0$ ή $t^2+t-56=0$

Η τελευταία εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς 7 και -8 (απορρίπτεται, αρνητική τιμή). Επομένως, σε 7 ώρες τα βακτήρια θα είναι 7500.

2. Διαγώνιες κυρτού πολυγώνου

(α) Να βρείτε πόσες διαγώνιες έχει ένα κυρτό δεκάγωνο, αφού διαπιστώσετε, ότι από κάθε κορυφή του άγονται 7 διαγώνιες.

(β) Πόσες πλευρές έχει ένα κυρτό πολύγωνο που έχει 119 διαγώνιες;



Λύση

(α) Από κάθε κορυφή του δεκάγωνου άγονται $10-3=7$ διαγώνιες, αφού θα ενωθεί με όλες τις κορυφές του, εκτός των δύο γειτονικών της και του εαυτού της. Επομένως από τις 10 κορυφές άγονται $10\cdot 7=70$ διαγώνιες.

Ο αριθμός αυτός θα διαιρεθεί με το 2, γιατί κάθε διαγώνιος έχει μετρηθεί δύο φορές, μία φορά για κάθε άκρο της. Άρα ο συνολικός αριθμός των διαγώνιων κάθε κυρτού δεκάγωνου είναι $\frac{10\cdot 7}{2}=\frac{70}{2}=35$.

(β) Έστω x ο ζητούμενος αριθμός. Σκεπτόμενοι όπως στο προηγούμενο ερώτημα το πολύγωνο έχει $\frac{x(x-3)}{2}$ διαγώνιες.

Επομένως προκύπτει η εξίσωση:

$$\frac{x(x-3)}{2}=119 \quad \text{ή} \quad x^2-3x-238=0$$

Η τελευταία εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς 17 και -14 (απορρίπτεται, ως αρνητική).

Επομένως, ένα κυρτό πολύγωνο με 119 διαγώνιες έχει 17 πλευρές.

3. Ένας σχεδιασμός κήπου

Η Μαρία είναι αρχιτέκτονας και σε ένα τετράγωνο οικόπεδο του Δήμου με πλευρά 60m θα κατασκευάσει έναν κήπο. Περιμετρικά του κήπου θα αφήσει ένα μέρος του οικοπέδου σαν πεζόδρομο για τους δημότες, ο οποίος θέλει να έχει σταθερό πλάτος.

Ποιο πρέπει να είναι το πλάτος του πεζόδρομου, ώστε να έχει ίδιο εμβαδό με τον κήπο;

Λύση

Το εμβαδό του οικοπέδου με πλευρά $\alpha=60\text{m}$ είναι $\text{E}=\alpha^2=3600\text{m}^2$.

Έστω x το ζητούμενο πλάτος του πεζόδρομου, ο οποίος θα δημιουργηθεί περιμετρικά της πλατείας. Πρέπει $0<x<30$. (γιατί;)

Η Μαρία κατασκεύασε ένα σχέδιο σαν και αυτό που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Επειδή η πλευρά του αρχικού τετραγώνου είναι $\alpha=60\text{m}$ ο κήπος θα έχει σχήμα τετραγώνου με πλευρά $(60-2x)\text{m}$ και θα έχει εμβαδό $(60-2x)^2\text{m}^2$.

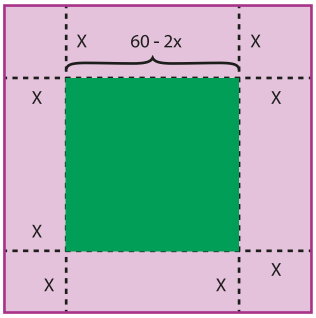
Επειδή, όμως, ο πεζόδρομος και ο κήπος έχουν ίδιο εμβαδό, αυτό θα είναι ίσο με το μισό του αρχικού εμβαδού, δηλαδή, $3600\text{m}^2:2=1800\text{m}^2$.

Επομένως, έχουμε την εξίσωση

$$(60-2x)^2=1800 \quad \text{ή} \quad 60-2x=\pm\sqrt{1800} \quad \text{ή} \quad x=\frac{60\mp\sqrt{1800}}{2}$$

Με χρήση αριθμομηχανής και με προσέγγιση εκατοστού, οι ρίζες είναι οι αριθμοί $8{,}79$ και $51{,}21$ (απορρίπτεται λόγω $0<x<30$).

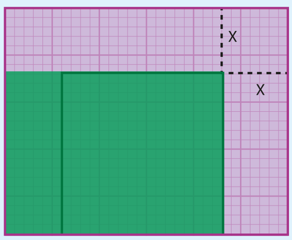
Επομένως, το πλάτος του πεζόδρομου πρέπει να είναι $8{,}79\text{m}$.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Τσουγκρίσματα

Σε μια πρόποση, κάθε παρευρισκόμενος τσούγκρισε το ποτήρι του με όλους τους άλλους. Αν ακούστηκαν 171 τσουγκρίσματα, πόσοι ήταν οι παρευρισκόμενοι;



2. Απαλλοτρίωση

Από ένα ορθογώνιο οικόπεδο διαστάσεων 60 μέτρα επί 50 μέτρα, ο Δήμος θα απαλλοτριώσει μία γωνία για να κατασκευάσει δρόμους, όπως στο σχήμα. Πόσο είναι το πλάτος των δρόμων αν απομείνει οικόπεδο με εμβαδό 2279m^2;

3. Άγρια ζώα

Σε μία προστατευόμενη περιοχή ο αριθμός των αγρίων ζώων προσεγγίζεται συναρτήσει του χρόνου από την παράσταση

$$P = -0.3t^4 + 90t^2 + 12000,$$

όπου t ο χρόνος σε έτη από τη στιγμή που άρχισε η καταγραφή τους.
Σε πόσα έτη αναμένεται να εξαφανιστεί όλος ο πληθυσμός των ζώων, αν δεν υπάρξει ανθρώπινη παρέμβαση;

4. Αριθμός προβολών διαφήμισης

Η αποτελεσματικότητα A μιας διαφήμισης στα social media σε μία κλίμακα από το 0 μέχρι το 100, είναι συνάρτηση του αριθμού ν των φορών που ένας χρήστης θα την παρακολουθήσει. Μετά από πειραματισμούς, ένας διαφημιστής βρήκε ότι η αποτελεσματικότητα των διαφημίσεών του προσεγγίζεται από τη σχέση

$$A = 0,8\nu - 0,01\nu^2 + 84$$

Πόσες φορές πρέπει ένας χρήστης να παρακολουθήσει μία διαφήμιση, ώστε αυτή να έχει τη μέγιστη αποτελεσματικότητα, σύμφωνα με αυτό το μοντέλο;

5. Τιμή εισιτηρίου σε αγώνα μπάσκετ

Ένα γήπεδο μπάσκετ χωράει 18000 θεατές. Αν η τιμή του εισιτηρίου σε έναν αγώνα είναι 16 ευρώ, τότε εκτιμάται ότι θα τον παρακολουθήσουν 12000 θεατές. Για κάθε ένα ευρώ μείωσης του εισιτηρίου, αναμένεται αύξηση των θεατών κατά 1000.

(α) Για ποια τιμή του εισιτηρίου θα γεμίσει το γήπεδο; Πόσες είναι τότε οι εισπράξεις;

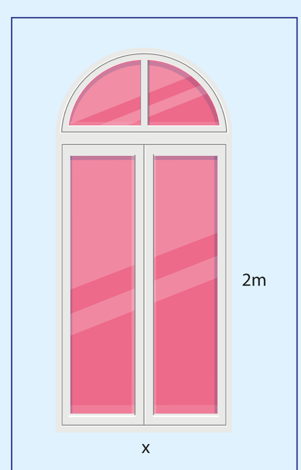
(β) Για ποια τιμή του εισιτηρίου θα έχουμε εισπράξεις 189000 ευρώ; Είναι τα 189000 ευρώ η μεγαλύτερη δυνατή είσπραξη;

6. Εμβαδό παράθυρου

Ένα παράθυρο αποτελείται από ένα ορθογώνιο ύψους 2m και ένα ημικύκλιο, όπως στο σχήμα.

(α) Να εκφράσετε το εμβαδό του παράθυρου συναρτήσει του πλάτους x.

(β) Το δωμάτιο που φωτίζεται από το παράθυρο έχει εμβαδό 30m^2. Για να είναι επαρκές το παράθυρο, πρέπει να έχει εμβαδό ίσο με το 17% του εμβαδού του δωματίου.
Για ποια τιμή του x, το παράθυρο θεωρείται επαρκές; Οι υπολογισμοί να γίνουν με προσέγγιση χιλιοστού.



4.7 Ανισώσεις 2^{ου} Βαθμού

- Γραφική επίλυση
- Αλγεβρική επίλυση
- Το πρόσημο της παράστασης $\alpha x^2+\beta x+\gamma$

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε να επιλύουμε ανισώσεις 2^{ου} βαθμού, γραφικά και αλγεβρικά.

Γραφική επίλυση ανισώσεων 2^{ου} βαθμού

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ανίσωση 2^{ου} βαθμού, λέμε κάθε ανίσωση που έχει μία από τις μορφές

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma>0,\qquad \alpha x^2+\beta x+\gamma<0,\ \text{ή}$$
$$\alpha x^2+\beta x+\gamma\ge 0,\qquad \alpha x^2+\beta x+\gamma\le 0$$

Σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις θεωρούμε ότι $\alpha\neq 0$.

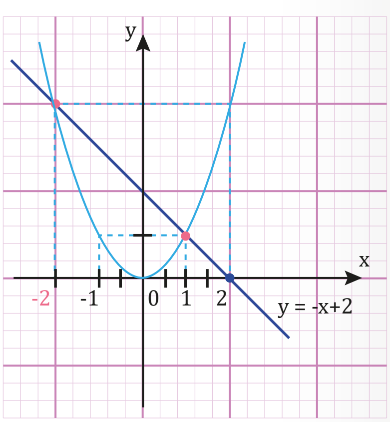
Μια τέτοια ανίσωση επιλύεται γραφικά και αλγεβρικά όπως θα δούμε στην συνέχεια.

Γραφική επίλυση

Για να επιλύσουμε γραφικά μια ανίσωση 2^{ου} βαθμού εργαζόμαστε, όπως στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα 1

Να λύσετε την ανίσωση $x^2+x-2<0$



Λύση

Η ανίσωση γράφεται $x^2<-x+2$. Στο ίδιο σύστημα αξόνων σχεδιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις των γνωστών μας συναρτήσεων $y=x^2$ (παραβολή) και $y=-x+2$ (ευθεία).

Τα κοινά σημεία των δύο συναρτήσεων έχουν τετμημένες τις ρίζες της εξίσωσης

$$x^2=-x+2 \ \text{ ή } \ x^2+x-2=0,$$

οι οποίες είναι οι αριθμοί -2 και 1. Οι λύσεις της ανίσωσης $x^2<-x+2$ είναι οι τετμημένες των σημείων της $y=x^2$ που βρίσκονται κάτω από τα αντίστοιχα σημεία της $y=-x+2$. Αυτές είναι όλα τα $x\in(-2,1)$.

Επομένως, η ανίσωση $x^2+x-2<0$ έχει λύσεις όλα τα $x\in(-2,1)$.

Γεωμετρική επίλυση της ανίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma<0$

Από τα παραπάνω, καταλαβαίνουμε ότι για να επιλύσουμε γραφικά την ανίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma<0$ κάνουμε τα εξής:

- Γράφουμε την ανίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma<0$ στη μορφή $\alpha x^2<-\beta x-\gamma$.
- Σχεδιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις των γνωστών μας συναρτήσεων $y=\alpha x^2$ και $y=-\beta x-\gamma$. Βρίσκουμε, αν υπάρχουν, τα κοινά τους σημεία.
- Οι ζητούμενες λύσεις, είναι οι τετμημένες των σημείων της $y=\alpha x^2$, αν υπάρχουν τέτοια σημεία, που βρίσκονται κάτω από την $y=-\beta x-\gamma$. Αν δεν υπάρχουν τέτοια σημεία, η ανίσωση είναι αδύνατη.
- Ομοίως εργαζόμαστε για τις άλλες μορφές ανισώσεων 2^{ου} βαθμού.

Ασκήσεις 3 και 4

Αλγεβρική επίλυση

Για να δούμε τον τρόπο που εργαζόμαστε για την αλγεβρική επίλυση μιας ανίσωσης 2ου βαθμού, θα λύσουμε αλγεβρικά την ανίσωση $x^2+x-2<0$ του προηγούμενου παραδείγματος:

Παράδειγμα 2

Να λύσετε αλγεβρικά την ανίσωση $x^2+x-2<0$

Λύση

Στην αρχή, λύνουμε την αντίστοιχη εξίσωση $x^2+x-2=0$. Οι ρίζες της είναι οι αριθμοί -2 και 1. Στη συνέχεια συμπληρώνουμε τον επόμενο πίνακα, ο οποίος λέγεται πίνακας πρόσημων της παράστασης x^2+x-2, ως εξής:

x	$-\infty$	-2		1		$+\infty$
Πρόσημο του x^2+x-2	+		−		+	

Στην πρώτη γραμμή του πίνακα τοποθετούμε τις τιμές του x με τις ρίζες που βρήκαμε, όπως ακριβώς κάνουμε στην ευθεία των αριθμών. Οι αριθμοί -2 και 1 χωρίζουν την ευθεία των αριθμών σε τρία διαστήματα, σε καθένα από τα οποία η παράσταση x^2+x-2 έχει σταθερό πρόσημο, με το οποίο συμπληρώνουμε την δεύτερη γραμμή του πίνακα.

Στο πρώτο και τρίτο διάστημα, που βρίσκονται, όπως λέμε, εκτός των ριζών, βάζουμε το πρόσημο του συντελεστή του x^2. Εδώ είναι το (+). Στο δεύτερο διάστημα, εντός των ριζών, βάζουμε το αντίθετο του πρόσημου του συντελεστή του x^2. Εδώ είναι το (-).

Επειδή στην ανίσωση $x^2+x-2<0$ η παράσταση x^2+x-2 είναι αρνητική, οι λύσεις της βρίσκονται στα διαστήματα που στη δεύτερη γραμμή του πίνακα έχουμε το πρόσημο (-). Εδώ βρίσκονται στο διάστημα $(-2,1)$ και μόνον σε αυτό. Επομένως, η ανίσωση $x^2+x-2<0$ έχει λύσεις τους αριθμούς x με $x\in(-2,1)$.

Το πρόσημο της παράστασης $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με $\alpha\neq 0$.

Από το παραπάνω παράδειγμα καταλαβαίνουμε ότι, όταν επιλύουμε ανισώσεις 2ου βαθμού, βρίσκουμε τις ρίζες και το πρόσημο της παράστασης $\alpha x^2+\beta x+\gamma$. Προς τούτο συμπληρώνουμε έναν από τους επόμενους πίνακες, ανάλογα με την τιμή της διακρίνουσας $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$ που καθορίζει το πλήθος των ριζών:

	x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma>0$	πρόσημο του $\alpha x^2+\beta x+\gamma$	πρόσημο του α	0	Αντίθετο πρόσημο του α	0	πρόσημο του α

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=0$	x	$-\infty$	$x=\frac{-\beta}{2\alpha}$	$+\infty$
	πρόσημο του $\alpha x^2+\beta x+\gamma$	πρόσημο του α	0	πρόσημο του α

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma<0$	x	$-\infty$	$+\infty$
	πρόσημο του $\alpha x^2+\beta x+\gamma$	πρόσημο του α	

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι (πρόσημο του τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$):

Το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$:

- μηδενίζεται όταν το x είναι ρίζα της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$,
- έχει το αντίθετο πρόσημο του α, όταν η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ έχει δύο ρίζες και το x βρίσκεται μεταξύ των ριζών, και
- έχει το πρόσημο του α σε κάθε άλλη περίπτωση

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Από τη μελέτη των παραπάνω πινάκων, προκύπτει ότι:

- Η ανίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma>0$, $\alpha\neq 0$ αληθεύει για κάθε πραγματική τιμή του x, αν και μόνο αν $\alpha>0$ και $\Delta<0$
- Η ανίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma<0$, $\alpha\neq 0$ αληθεύει για κάθε πραγματική τιμή του x, αν και μόνο αν $\alpha<0$ και $\Delta<0$

Ανίσωση 2ου βαθμού 1

Παράδειγμα 3

Να λύσετε τις ανισώσεις $4x^2+4x+1\geq 0$ και $4x^2+4x+1\leq 0$.

Λύση

Η εξίσωση $4x^2+4x+1=0$ έχει Δ=0 και διπλή ρίζα τον αριθμό $-\frac{1}{2}$. Από τον διπλανό πίνακα πρόσημων του τριωνύμου $\varphi(x)=4x^2+4x+1$ συμπεραίνουμε ότι:

- Οι λύσεις της ανίσωσης $4x^2+4x+1\geq 0$ είναι όλα τα $x\in\mathbb{R}$.
- Η ανίσωση $4x^2+4x+1\leq 0$ έχει λύση το $-\frac{1}{2}$ και μόνον.

Και οι δύο ανισώσεις επιλύονται ταυτόχρονα, με τη βοήθεια του πίνακα προσήμων του τριωνύμου $4x^2+4x+1$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$\varphi(x)$		+	0	+	

Ασκήσεις 3, 4, 5, 6, 7 και 8

Παράδειγμα 4

Να λύσετε την ανίσωση $x^2+\beta x+\beta^2>0$, με $\beta\neq 0$.

Λύση

Η εξίσωση $x^2+\beta x+\beta^2=0$ έχει $\Delta=-3\beta^2<0$, αφού $\beta\neq 0$. Επομένως το τριώνυμο $x^2+\beta x+\beta^2$ έχει σε κάθε περίπτωση το πρόσημο του $\alpha=1$, οπότε οι λύσεις της ανίσωσης $x^2+\beta x+\beta^2>0$ είναι όλοι οι αριθμοί $x\in\mathbb{R}$.

Άσκηση 9

Εφαρμογή 1

Δίνεται η εξίσωση $x^2-(2\lambda+1)x+3\lambda-\frac{1}{2}=0$, με $\lambda\in\mathbb{R}$.

Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση

(α) έχει δύο (άνισες) ρίζες, (β) έχει διπλή ρίζα, (γ) είναι αδύνατη.

Λύση

Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης εξαρτάται από τις ρίζες και το πρόσημο της διακρίνουσας. Έχουμε:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(2\lambda+1)^2-4\left(3\lambda-\frac{1}{2}\right)=4\lambda^2+4\lambda+1-12\lambda+2=4\lambda^2-8\lambda+3$$

Η εξίσωση $4\lambda^2-8\lambda+3=0$ έχει ρίζες τους αριθμούς $\frac{1}{2}$ και $\frac{3}{2}$. Συμπληρώνουμε, όπως μάθαμε, τον διπλανό πίνακα προσήμων της διακρίνουσας.

λ	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
Δ		+	0	−	0	+	

Από αυτόν συμπεραίνουμε ότι εξίσωση $x^2-(2\lambda+1)x+3\lambda-\frac{1}{2}=0$:

(α) έχει δύο ρίζες, αν και μόνο αν $\Delta>0$ ή $\lambda\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$

(β) έχει διπλή ρίζα, αν και μόνο αν $\Delta=0$ ή ($\lambda=\frac{1}{2}$ ή $\lambda=\frac{3}{2}$)

(γ) είναι αδύνατη, αν και μόνο αν $\Delta<0$ ή $\lambda\in\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$

Άσκηση 10

Γενικές ασκήσεις 7 και 8

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Ασκήσεις κατανόησης

1. Η εξίσωση $-x^2+5x-4=0$ έχει ρίζες τους αριθμούς 1 και 4. Ποια είναι η λύση της ανίσωσης

(α) $-x^2+5x-4>0$ (γ) $-x^2+5x-4\geq 0$

(β) $-x^2+5x-4<0$ (δ) $-x^2+5x-4\leq 0$;

2. Έστω η παράσταση $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με $\alpha\neq 0$. Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις αιτιολογώντας την απάντησή σας:

(α) Τι πρόσημο έχει όταν έχει δύο ρίζες και το x παίρνει τιμές:

(i) Εκτός του διαστήματος των ριζών της

(ii) Εντός του διαστήματος των ριζών της;

(β) Τι πρόσημο έχει όταν $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma<0$ και $\alpha>0$;

(γ) Για ποιες τιμές των Δ και α είναι

(i) $\alpha x^2+\beta x+\gamma>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(ii) $\alpha x^2+\beta x+\gamma<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$;

(δ) Τι συμπεραίνετε για το πλήθος των ριζών της, όταν υπάρχει τιμή του x για την οποία το πρόσημό της είναι το αντίθετο πρόσημο του α;

Ασκήσεις ανάπτυξης

3. Να λύσετε τις ανισώσεις

(α) $x^2-1>0$ (β) $x^2-5\leq 0$

(γ) $6-2x^2\geq 0$ (δ) $3x^2+7<0$

4. Να λύσετε τις ανισώσεις

(α) $2x^2+6x\geq 0$ (β) $-3x^2+7x\geq 0$

(γ) $x^2-x>0$ (δ) $2x+x^2>0$

5. Να λύσετε τις ανισώσεις

(α) $x^2-5x+6\geq 0$ (β) $x^2-5x+6\leq 0$

(γ) $6x^2+5x+1>0$ (δ) $6x^2+5x+1<0$

6. Να λύσετε τις ανισώσεις:

(α) $x^2+6x+9\geq 0$ (β) $x^2+6x+9>0$

(γ) $-x^2\geq 4+4x$ (δ) $-x^2\leq 4+4x$

(ε) $4x+3\geq -2x^2$ (στ) $4x+3\leq -2x^2$

7. Να λύσετε τις ανισώσεις:

(α) $(x+2)^2+(2x+1)(2x-1)>x+5$

(β) $-\frac{1}{3}(1-y^2)<y+1$

(γ) $x^2+x<\sqrt{3}(x+1)$

8. Να βρείτε τιμές του x για τις οποίες ορίζονται οι παραστάσεις

(α) $A=\sqrt{x^2-9}$ (β) $B=\sqrt{x^2-2x+1}$

9. (α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $x^2-2x+3>0$

(β) Για ποιες τιμές του λ είναι $x^2-2x+\lambda>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$;

10. Έστω η εξίσωση $x^2-(\alpha+1)x+\alpha+1=0$.
Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες

(α) έχει δύο ρίζες

(β) έχει διπλή ρίζα και

(γ) είναι αδύνατη

Τριώνυμο 2ου βαθμού

Ανίσωση 2ου βαθμού 2

11. Η Καθηγήτρια των Μαθηματικών ζήτησε από την τάξη, τη λύση των ανισώσεων:

(α) $x^2-4\geq 0$ (β) $2x^2<8x$|

Η Γιώτα, η οποία έχει έφεση στις απόλυτες τιμές και απομνημονεύει εύκολα τους τύπους, έγραψε στο τετράδιό της:

(α) $x^2-4\geq 0$

$x^2\geq 4$

$\sqrt{x^2}\geq\sqrt{4}$

$|x|\geq 2$

$\boxed{x\leq -2 \text{ ή } x\geq 2}$

(β) $2x^2-8x\leq 0$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-8)^2-4\cdot 2\cdot 0=64$

$x=\frac{+8\pm\sqrt{64}}{4}=\frac{8\pm 8}{4}$ $\begin{matrix} + & 4 \\ - & 0 \end{matrix}$

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$2x^2-8x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$x\in[0,4]$

Η Νικολέτα, η οποία αισθάνεται «δυνατή» στην παραγοντοποίηση, έγραψε στο τετράδιό της:

(α) $x^2-4\geq 0$

$x^2-4=0$

$(x-2)(x+2)=0$

$x=2$ ή $x=-2$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
x^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

$x\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

(β) $2x^2-8x\leq 0$

$2x^2-8x=0$

$2x(x-4)=0$

$x=0$ ή $x=4$

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$2x^2-8x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$x\in(0,4)$

Προσπαθήστε να καταλάβετε πώς ακριβώς έλυσαν τις ανισώσεις η Γιώτα και η Νικολέτα.
Στη συνέχεια να λύσετε και με τους δύο τρόπους τις παρακάτω ανισώσεις:

(α) $x^2-9\geq 0$ (β) $x^2-5<0$

(γ) $3x^2<48$ (δ) $9<x^2$

(ε) $2x^2-6x<0$ (στ) $3x<x^2$

4.8 Προβλήματα Ανισώσεων $2^{ου}$ Βαθμού

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε να χρησιμοποιούμε ανισώσεις $2^{ου}$ βαθμού στην επίλυση προβλημάτων.

Πρόβλημα 1. Ανταλλαγή δώρων

Κάθε μέλος μιας παρέας φίλων, αντάλλαξε δώρα με όλα τα άλλα μέλη.

(α) Πόσα δώρα ανταλλάχτηκαν, αν η παρέα είχε 6 μέλη;

(β) Πόσα ήταν τα μέλη, αν ανταλλάχτηκαν τουλάχιστον 132 δώρα;

Λύση

(α) Καθένα από τα 6 μέλη έδωσε $6-1=5$ δώρα, όσα ήταν τα υπόλοιπα μέλη. Επομένως, συνολικά τα 6 μέλη έδωσαν το ένα στο άλλο $6(6-1)=30$ δώρα.

Ώστε ανταλλάχτηκαν 30 δώρα.

(β) Έστω, ότι η παρέα αποτελείται από x μέλη, όπου x θετικός ακέραιος. Σκεπτόμενοι, όπως στο προηγούμενο ερώτημα, ανταλλάχτηκαν $x(x-1)$ δώρα. Επειδή, από την εκφώνηση, ήταν τουλάχιστον 132, προκύπτει η ανίσωση $x(x-1)\geq 132$ ή $x^2-x-132\geq 0$

Οι ρίζες και το πρόσημο του τριωνύμου $\varphi(x)=x^2-x-132$ φαίνονται στον διπλανό πίνακα, από τον οποίο προκύπτει ότι η ανίσωση έχει λύση

$$x\in(-\infty,-11]\cup[12,+\infty).$$

x	$-\infty$		-11		12		$+\infty$
$\varphi(x)$		+	0	−	0	+	

Επειδή, όμως, ο x είναι θετικός ακέραιος, η λύση είναι $x\geq 12$.

Επομένως τα μέλη ήταν τουλάχιστον 12.

Πρόβλημα 2. Σχολική εκδρομή

Ένα τουριστικό γραφείο έκανε στην Α Λυκείου ενός σχολείου την εξής προσφορά για την εκδρομή τους: Αν συμμετάσχουν μέχρι 70 μαθητές, το αντίτιμο θα είναι 900 ευρώ ανά μαθητή. Για κάθε επιπλέον μαθητή το αντίτιμο ανά μαθητή μειώνεται κατά 5 Ευρώ.

(α) Ποιο είναι το αντίτιμο ανά μαθητή, αν συμμετάσχουν 75 μαθητές;

(β) Αν οι μαθητές της Α Λυκείου είναι 120, πόσοι τουλάχιστον πρέπει να συμμετάσχουν, ώστε το γραφείο να εισπράξει περισσότερα από 68880 Ευρώ;

Λύση

(α) Έστω ότι συμμετέχουν 5 άτομα επιπλέον των 70. Επομένως, το αντίτιμο για καθένα άτομο μειώνεται κατά $5\cdot 5=25$ Ευρώ, και γίνεται $900-25=875$ Ευρώ.

(β) Έστω ότι συμμετέχουν x άτομα, όπου x θετικός ακέραιος μεγαλύτερος, προφανώς, του 70. Επιπλέον των 70 συμμετέχουν $x-70$ άτομα, επομένως η μείωση ανά άτομο είναι $5(x-70)=5x-350$ Ευρώ. Έτσι το αντίτιμο ανά άτομο είναι $900-(5x-350)=1250-5x$ Ευρώ και το γραφείο εισπράττει $x(1250-5x)$ Ευρώ.

x	$-\infty$		82		168		$+\infty$
$\varphi(x)$		+	0	−	0	+	

Από τα δεδομένα του προβλήματος προκύπτει η ανίσωση $x(1250-5x)>68880$ ή $-5x^2+1250x-68880>0$ ή $x^2-250x+13776<0$. Οι ρίζες και το πρόσημο του τριωνύμου $\varphi(x)=x^2-250x+13776$ φαίνονται στον διπλανό πίνακα από τον οποίο προκύπτει ότι η ανίσωση $x^2-250x+13776<0$ έχει λύση $x\in(82,168)$. Επομένως, επειδή ο x είναι ακέραιος πρέπει να συμμετάσχουν τουλάχιστον 83 μαθητές.

Πρόβλημα 3. Μια ιδιότυπη κούρσα

Ένα άλογο έχει ρεκόρ ταχύτητας $16{,}5m/s$. Ένα αυτοκίνητο μπορεί να αναπτύξει περίπου σταθερή επιτάχυνση $5{,}5m/s^2$. Αν συναγωνιστούν σε αγώνα ταχύτητας, επί πόσο χρόνο θα προηγείται το άλογο, αν υποθέσουμε ότι κινείται με σταθερή ταχύτητα ίση με το ρεκόρ του, και τι απόσταση θα έχει διανύσει;

Το διάστημα s συναρτήσει του χρόνου t, στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με ταχύτητα u είναι $s=ut$
Το διάστημα s συναρτήσει του χρόνου t, στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, με επιτάχυνση α είναι $s=\frac{1}{2}\alpha t^2$

Λύση

Η απόσταση s_1 που διανύει το άλογο με σταθερή ταχύτητα $u=16{,}5m/s$ συναρτήσει του χρόνου t είναι $s_1=16{,}5t$

Η απόσταση s_2 που διανύει το αυτοκίνητο με σταθερή επιτάχυνση $\alpha=5{,}5m/s^2$ είναι

$$s_2=\frac{5{,}5}{2}t^2=2{,}75t^2$$

Το άλογο προηγείται, όταν $s_1>s_2$ ή $16{,}5t>2{,}75t^2$ ή $2{,}75t^2-16{,}5t<0$

Η λύση της τελευταίας ανίσωσης είναι $0<t<6$

Επομένως, το άλογο προηγείται τα πρώτα 6 δευτερόλεπτα και έχει διανύσει απόσταση $s_1=16{,}5t=16{,}5\cdot 6=99$ μέτρα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Κίνηση δύο κινητών

Δύο κινητά Α και Β ξεκινούν μαζί από το ίδια σημείο μιας ευθείας, κινούμενα προς την ίδια κατεύθυνση. Σε χρόνο t(σε δευτερόλεπτα) διανύουν απόσταση το μεν Α ίση με $s_1=28t$ μέτρα και το Β ίση με $s_2=4t+2t^2$ μέτρα.

(α) Ποιο κινητό προηγείται όταν $t=3$ δευτερόλεπτα;

(β) Για πόσο χρόνο προηγείται το κινητό Α;

2. Οι χειραψίες

Μια παρέα φίλων αντάλλαξαν χειραψίες, ο ένας με όλους τους άλλους.

(α) Αν οι φίλοι ήταν 7 πόσες χειραψίες αντάλλαξαν;

(β) Πόσοι πρέπει να ήταν οι φίλοι αν αντάλλαξαν συνολικά λιγότερες από 55 χειραψίες;

3. Δενδροφυτεία

Αν σε ένα χωράφι φυτέψουμε 30 καρποφόρα δέντρα, όταν αυτά ωριμάσουν, η παραγωγή είναι 70 κιλά καρπού ανά δέντρο. Για κάθε ένα δέντρο, επιπλέον των 30, η παραγωγή πέφτει κατά 2 κιλά ανά δέντρο.

(α) Ποια είναι η παραγωγή, αν φυτέψουμε 35 δέντρα;

(β) Πόσα δέντρα πρέπει να φυτέψουμε, ώστε η παραγωγή να είναι μεγαλύτερη από 2100 κιλά καρπού;

4. Ορθογώνια περίφραξη

Ένας κτηνοτρόφος έχει 200 μέτρα συρματόπλεγμα και σκοπεύει να περιφράξει στο κτήμα του μια ορθογώνια περιοχή για να συγκεντρώνει τα ζώα του. Έστω x και y οι διαστάσεις της περιοχής που θα περιφραχθεί.

(α) Να αποδείξετε ότι $y=100-x$ και το εμβαδόν της περιοχής είναι $E=-x^2+100x$ m^2.

(β) Να αποδείξετε ότι $E\le 2500m^2$. Ποιο είναι το μεγαλύτερο δυνατόν εμβαδό που μπορεί να περιφράξει και τι σχήμα έχει τότε η περιφραγμένη περιοχή;

4.9 Ανακεφαλαίωση

Στην ενότητα αυτή περιλαμβάνονται δραστηριότητες και προβλήματα για περαιτέρω αναζητήσεις και διευρύνσεις των μαθητών/μαθητριών, με στόχο την εμβάθυνση στην κατανόηση των Προσδοκώμενων Μαθησιακών Αποτελεσμάτων του κεφαλαίου.

1. Να χαρακτηρίσετε κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις ως αληθή ή ψευδή:
(α) Η εξίσωση $0x=0$ είναι αδύνατη.
(β) Αν προσθέσουμε κατά μέλη δύο ανισότητες με ίδια φορά, προκύπτει ανισότητα ίδιας φοράς.
(γ) Αν $\alpha>2$ τότε $\alpha^2>2^2$ και αντιστρόφως, αν $\alpha^2>2^2$ τότε $\alpha>2$
(δ) Αν $|x-\beta|<\alpha$ τότε $-\alpha<x-\beta<\alpha$, $\alpha<0$.
(ε) Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha\neq 0$ έχει δύο ρίζες όταν $\Delta<0$.
(στ) Για τιμές του x που βρίσκονται μεταξύ των ριζών της εξίσωσης $x^2+\beta x+\gamma=0$, το τριώνυμο $x^2+\beta x+\gamma$ είναι θετικό.

2. Να απαντήσετε στις επόμενες ερωτήσεις αιτιολογώντας την απάντησή σας:
(α) Πότε η εξίσωση $\alpha x=\beta$ είναι ταυτότητα;
(β) Ποια είναι λύση της εξίσωσης $x^\nu=\alpha$ όταν $\alpha<0$;
(γ) Πόσες ρίζες έχει η εξίσωση $x^8=100$;
(δ) Για ποιους αριθμούς x αληθεύει ή ανίσωση $|x-2|>-2$;
(ε) Αν $\alpha<\beta$ και $\gamma<\delta$ ποιος από τους αριθμούς $\alpha+\gamma$ και $\beta+\delta$ είναι μικρότερος;
(στ) Αν $0<\alpha<\beta$ και ρ θετικός ρητός, ποια από τις δυνάμεις α^ρ κα β^ρ είναι μεγαλύτερη;
(ζ) Αν η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha\neq 0$ έχει δύο ρίζες τι πρόσημο έχει η διακρίνουσά της; Τι πρόσημο έχει τότε το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$;

3. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda-1)x=\lambda^2-1$ με λ πραγματική παράμετρο.
(α) Να την λύσετε, όταν $\lambda=1$
(β) Να την λύσετε, όταν $\lambda\neq 1$
(γ) Για ποιες τιμές του λ έχει ρίζα τον αριθμό 2;

4. Δίνονται οι ανισώσεις $|x-1|<1$ και $|y-3|<2$.
(α) Να τις λύσετε και να γράψετε τις λύσεις με χρήση διαστημάτων.
(β) Αν τα x και y είναι λύσεις των ανισώσεων αυτών, να αποδείξετε ότι
(i) $-5<3x-y<5$ και (ii) $0<\dfrac{x}{y}<2$

5. (α) Να λύσετε την εξίσωση $(x^3-8)(x^3+8)=0$
(β) Να βρείτε για ποιες τιμές του ορίζεται το κλάσμα
$\dfrac{(x^2+4)^2-(2x)^2}{(x^3-8)(x^3+8)}$ και να το απλοποιήσετε.

6. (α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2-6x+8<0$
(β) Αν $2<x<4$ να γράψετε χωρίς χρήση απόλυ της τιμής την παράσταση $A=|x-2|+|x-4|$
(γ) Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $2\pi-6\sqrt{2\pi}+8$ όπου π=3,14159...

7. Δίνεται η εξίσωση $x^2-2\lambda x+2\lambda+3=0$ με $\lambda\in\mathbb{R}$
(α) Για ποιες τιμές του έχει λύση;
(β) Για ποιες τιμές του λ είναι αδύνατη;
(γ) Για ποιες τιμές του λ η ανίσωση
$x^2-2\lambda x+2\lambda+3>0$
αληθεύει για κάθε τιμή του x;

8. Δίνεται η εξίσωση $x^2-\lambda x+4=0$ με $\lambda\in\mathbb{R}$
(α) Για ποιες τιμές του λ έχει δύο ρίζες;
(β) Αν έχει δύο ρίζες και το 2 είναι μεταξύ των ριζών της, να αποδείξετε ότι $\lambda>4$

9. **Λάθη που γίνονται συχνά και πρέπει να αποφεύγονται:**
Να βρείτε τα λάθη στις επόμενες «λύσεις»:

(α) $x^2-4x+3=0$
$x=\dfrac{-4\pm\sqrt{16+12}}{2}=\dfrac{-4\pm\sqrt{28}}{2}$

(β) $x^2-6x-7=0$ $\quad x=\dfrac{6\pm\sqrt{64}}{2}=3\pm\sqrt{64}$

(γ) $x^2-4x-3=0$ $\quad x=\dfrac{4\pm\sqrt{28}}{2}=\dfrac{4\pm 2\sqrt{7}}{2}=4\pm\sqrt{7}$

(δ) $3-2x-x^2<0$ $x=\dfrac{2\pm\sqrt{16}}{2}=\dfrac{2\pm4}{2}$ $x=3$ ή $x=-1$

x	$-\infty$	-1		3		$+\infty$
Πρόσημο του $3-2x-x^2$		+		−		+

Επομένως $-1<x<3$.

10. Λύση εξίσωσης δευτέρου βαθμού με αντικατάσταση

Μια εξίσωση δευτέρου βαθμού μπορεί να λυθεί με την μέθοδο της αντικατάστασης $x=y+c$, όπου c κατάλληλος αριθμός. Για παράδειγμα:
Έστω η εξίσωση $x^2+2x-3=0$.

(α) Να αποδείξετε ότι με την αντικατάσταση $x=y+c$, μετασχηματίζεται στην $y^2+2(c+1)y+c^2+2c-3=0$

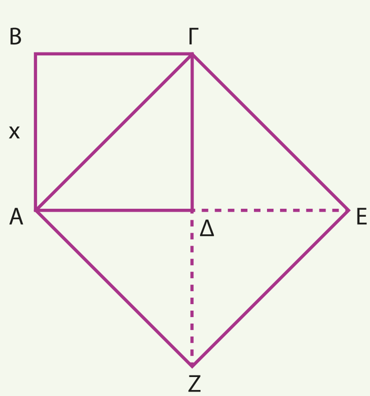
(β) Να βρείτε την τιμή του c για την οποία μηδενίζεται ο συντελεστής του y στη παρα πάνω εξίσωση, και να αποδείξετε ότι τότε γίνεται $y^2=4$.

(γ) Να λύσετε την εξίσωση $y^2=4$ και με την βοήθεια των ριζών της και της σχέσης $x=y+c$, να βρείτε τις ρίζες της αρχικής εξίσωσης $x^2+2x-3=0$.

(δ) Με την μέθοδο αυτή να λύσετε και την εξίσωση $x^2+3x-1=0$.

11. Ο διπλασιασμός τετραγώνου

Ο Σωκράτης απέδειξε γεωμετρικά, ότι το τετράγωνο με πλευρά την διαγώνιο $ΑΓ$ ενός τετραγώνου $ΑΒΓΔ$ έχει διπλάσιο εμβαδό από αυτό, δηλαδή $(ΑΓΕΖ)=2(ΑΒΓΔ)$



Διπλασιασμός τετραγώνου

(α) Μπορείτε να επιβεβαιώσετε τον Σωκράτη και να αποδείξετε (γεωμετρικά ή αλγεβρικά), ότι πραγματικά είναι $(ΑΓΕΖ)=2(ΑΒΓΔ)$;

(β) Αν υποθέσουμε ότι $(ΑΓΕΖ)=1800\text{cm}^2$ να βρείτε την πλευρά x του τετραγώνου $ΑΒΓΔ$.

12. Σύγκριση των κλασμάτων $\dfrac{\alpha}{\beta}$ και $\dfrac{\alpha+x}{\beta+x}$

Ο Γιάννης έγραψε στον πίνακα το κλάσμα $\dfrac{5}{7}$ και ρώτησε τους συμμαθητές του τι θα συμβεί αν προσθέσουν, και στους δύο όρους του, τον ίδιο θετικό αριθμό:
Το νέο κλάσμα θα είναι μικρότερο ή μεγαλύτερο από το $\dfrac{5}{7}$;
Πρόσθεσαν το 4 και πήραν το κλάσμα $\dfrac{5+4}{7+4}=\dfrac{9}{11}$
που είναι μεγαλύτερο από το αρχικό: $\dfrac{9}{11}>\dfrac{5}{7}$

(γιατί;) Είναι τυχαίο το αποτέλεσμα; Για να βοηθήσετε στην έρευνα των μαθητών, να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό αριθμό x είναι

$$\frac{5+x}{7+x}>\frac{5}{7}.$$

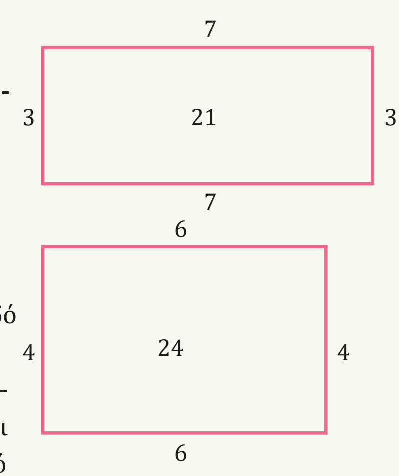
Γενικότερα να αποδείξετε ότι:

(α) Αν $0<\alpha<\beta$ και $x>0$ τότε $\dfrac{\alpha+x}{\beta+x}>\dfrac{\alpha}{\beta}$ και

(β) αν $\alpha>\beta>0$ και $x>0$ τότε $\dfrac{\alpha+x}{\beta+x}<\dfrac{\alpha}{\beta}$.

13. Σταθερό άθροισμα

Με ένα κομμάτι σύρμα μήκους 20cm θα κατασκευάσουμε ένα ορθογώνιο. Δύο πιθανές κατασκευές φαίνονται στα διπλανά σχήματα. Στην πρώτη το ορθογώνιο έχει διαστάσεις 3cm και 7cm με εμβαδό 21cm^2, και στην δεύτερη οι διαστάσεις είναι 4cm και 6cm με το εμβαδό 24cm^2.



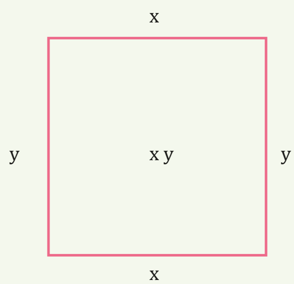
Σας ζητείται να βρείτε τις διαστάσεις x και y εκείνου του ορθογωνίου που έχει το μεγαλύτερο δυνατό εμβαδό.

Για να βρείτε την απάντηση ακολουθείστε τα επόμενα βήματα;

(α) Για θετικούς αριθμούς α και β ορίζουμε τον γεωμετρικό μέσο $ΓΜ$ και τον αριθμητικό μέσο $ΑΜ$ από τις ισότητες:

$$ΓΜ=\sqrt{\alpha\beta} \quad \text{και} \quad ΑΜ=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

Αποδείξτε ότι $ΓΜ \le ΑΜ$. Πότε ισχύει η ισότητα $ΓΜ=ΑΜ$;



(β) Αποδείξτε ότι απ' όλα τα ζεύγη αριθμών x και y που έχουν σταθερό άθροισμα, έστω s, μεγαλύτερο γινόμενο έχουν οι $x=y=\frac{s}{2}$.

(γ) Αποδείξτε ότι το μεγαλύτερο δυνατό εμβαδό το έχει το τετράγωνο με πλευρά 5cm.

Σταθερό άθροισμα
Μέγιστο γινόμενο

14. Τύποι του Vieta

Η Ρένα έλυσε την εξίσωση $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$ και βρήκε ότι έχει ρίζες τους αριθμούς α και β.
Στη συνέχεια για να λύσει την εξίσωση $x^2-4x+3=0$ παρατήρησε ότι γράφεται $x^2-(3+1)x+3\cdot 1=0$, επομένως είναι ειδική περίπτωση της παραπάνω εξίσωσης και έχει ρίζες τους αριθμούς 3 και 1.
Από αυτά συμπέρανε, ότι η αν η εξίσωση $x^2-\beta x+\gamma=0$ έχει δύο ρίζες, τότε έχουν άθροισμα β και γινόμενο γ.
Για να δείτε, αν η Ρένα έχει δίκιο, μπορείτε να δοκιμάσετε:

(α) Να λύσετε τις εξισώσεις
$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$ και $x^2-4x+3=0$

(β) Να αποδείξετε ότι, αν η εξίσωση $x^2-\beta x+\gamma=0$ έχει ρίζες, τότε δίνονται από τους τύπους

$$x_1=\frac{\beta+\sqrt{\beta^2-4\gamma}}{2}, \quad x_2=\frac{\beta-\sqrt{\beta^2-4\gamma}}{2}$$

και ισχύουν

$$x_1+x_2=\beta \quad \text{και} \quad x_1x_2=\gamma$$

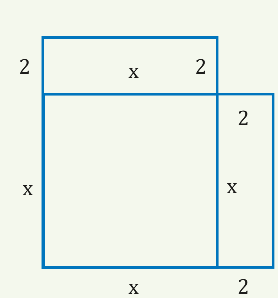
Ο καθηγητής των Μαθηματικών της Ρένας της είπε ότι οι σπουδαίες παρατηρήσεις της είναι ειδική περίπτωση των λεγομένων τύπων του Vieta, σύμφωνα με τους οποίους για τις ρίζες x_1 και x_2 της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\Delta\ge 0$ ισχύουν

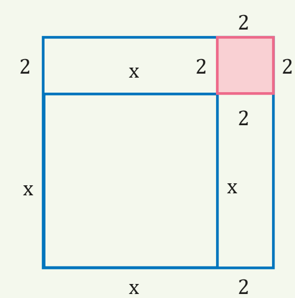
$$x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{και} \quad x_1x_2=\frac{\gamma}{\alpha}$$

(γ) Να αποδείξετε τους τύπους του Vieta.

15. Μια σύγχρονη … αρχαία τεχνική

Θα βρούμε την θετική ρίζα της εξίσωσης $x^2+4x=21$ με μια αρχαία τεχνική. Σχεδιάζουμε ένα τετράγωνο με πλευρά x και το συμπληρώνουμε με δύο ορθογώνια, διαστάσεων 2 επί x, όπως στο πρώτο σχήμα. (το 2 είναι το μισό του συντελεστή 4 του $4x$). Προκύπτει ένα σχήμα με ολικό εμβαδό $x^2+2(2x)=x^2+4x$ το οποίο πρέπει να ισούται με 21: $x^2+4x=21$





Αν προσθέσουμε και το άνω δεξιά τετράγωνο με εμβαδό $2^2=4$, όπως στο δεύτερο σχήμα, τότε προκύπττει ένα τεράγωνο με πλευρά $x+2$ και εμβαδό $21+4=25$. Τότε, όμως, η πλευρά του είναι ίση με $\sqrt{25}=5$, οπότε $x+2=5$ άρα $x=3$.
'Ωστε η θετική ρίζα της εξίσωσης είναι το 3.
Με σύγχρονους όρους κάναμε συμπλήρωση τετραγώνου. Πραγματικά είναι
$x^2+4x=21$ ή $x^2+4x+4=21+4$ ή
$(x+2)^2=25$ ή $x+2=\pm 5$
Επομένως $x=3$ ή $x=-7$.
Άσκηση: Εργαζόμενοι με την τεχνική αυτή, να βρείτε τη θετική ρίζα των εξισώσεων:
(α) $x^2+4x=12$ (β) $x^2+6x=27$.

Συμπλήρωση τετραγώνου

16. Κατακόρυφη βολή προς τα πάνω

Μια Πασχαλιάτικη ρουκέτα εκτοξεύεται από το έδαφος ($h = 0$) κατακόρυφα προς τα άνω και το ύψος της, σε μέτρα, πάνω από το έδαφος, σε t δευτερόλεπτα δίνεται από τον τύπο
$h = 50t - 5t^2$

Να απαντήσετε στα ερωτήματα:

(α) Σε πόσο χρόνο η ρουκέτα επιστρέφει στο έδαφος;

(β) Η Μαρίνα θυμάται από το μάθημα της Φυσικής, ότι η άνοδος της ρουκέτας διαρκεί όσο και η κάθοδός της (ο χρόνος ανόδου είναι ίσος με τον χρόνο καθόδου).

Με αυτό το δεδομένο, να βρείτε το μέγιστο ύψος που φτάνει η ρουκέτα.

(γ) Να αποδείξετε ότι, όταν $2 < t < 3$, η ρουκέτα ανεβαίνει και $80 < h < 105$.

Σε όλα τα παραπάνω, θεωρούμε αμελητέα την αντίσταση του αέρα.

17. Ο νόμος των Stefan – Boltzmann. Η εξίσωση

Κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας της εξίσωσης $x^\nu = \alpha$, ένας μαθητής ρώτησε τον καθηγητή, αν θα συναντήσουν ποτέ μεγαλύτερο δείκτη από το 3, ή αν όλα αυτά είναι χωρίς πρακτικές εφαρμογές. Ο καθηγητής έγραψε την εξίσωση

$$P_T = \sigma\varepsilon T^4$$

η οποία δηλώνει ότι η ενέργεια R_T που ακτινοβολείται από $1m^2$ της επιφάνειας ενός φαιού σώματος ανά δευτερόλεπτο, είναι ανάλογη της τέταρτης δύναμης της απόλυτης θερμοκρασίας της T (σε βαθμούς της κλίμακας Κέλβιν). Το σ είναι μια σταθερά (σταθερά Stefan – Boltzmann) και το ε ένας συντελεστής που εξαρτάται από το σώμα. Ζήτησε από τους μαθητές να βρουν την θερμοκρασία του Ήλιου, αν γνωρίζουν ότι στην περίπτωσή του, το πηλίκο $R_T / \sigma\varepsilon$ είναι $1{,}116 \cdot 10^{15} ({}^o K)^4$.

Ποια είναι η θερμοκρασία του Ήλιου;

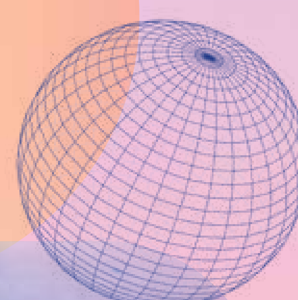
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^{ο}

Συναρτήσεις

Σύντομη γνωριμία

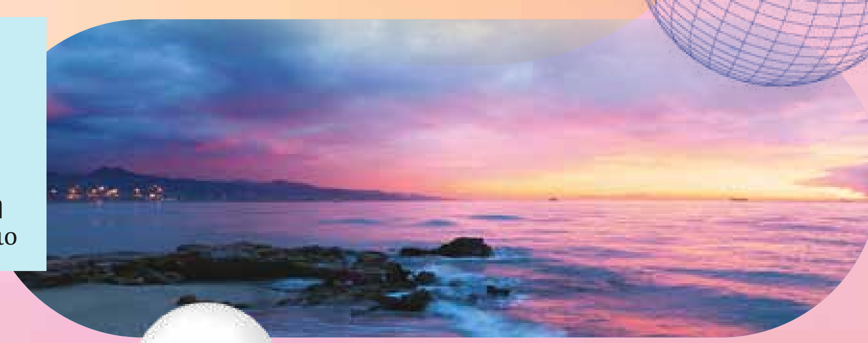
Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται μια πιο συστηματική εισαγωγή στις συναρτήσεις σε σχέση με όσα έχουν διδαχθεί σε μικρότερες τάξεις. Δίνεται ιδιαίτερη σημασία στην χάραξη ορισμένων γραφικών παραστάσεων, αλλά κυρίως στην άντληση στοιχείων από τη γραφική παράσταση για τη συμπεριφορά των συνδεόμενων μεγεθών που εκφράζει και περιγράφει η συνάρτηση. Από την γραφική παράσταση θα διαπιστώσουμε ότι μπορούμε να λύνουμε εξισώσεις ή ανισώσεις, ή να συμπεραίνουμε ποιοτικά χαρακτηριστικά για τη μεταβολή της συνάρτησης.

Περιεχόμενα



Λέξεις κλειδιά:

Συνάρτηση
Αναπαράσταση
Γραφική παράσταση
Κατακόρυφη ευθεία
Κλίση ευθείας
Άξονας συμμετρίας
Κορυφή
Παραβολή
Ημίτονο
Συνημίτονο
Εφαπτομένη
Τεταρτημόριο



Augustin Louis Cauchy
(1789 - 1857)

Ο Ωγκυστέν-Λουί Κωσύ ήταν Γάλλος μαθηματικός από τους πρωτοπόρους της ανάλυσης. Ήταν βαθυστόχαστος μαθηματικός, επηρέασε σημαντικά τους σύγχρονους μαθηματικούς, αλλά και τους μεταγενέστερους. Έγραψε περίπου 800 ερευνητικές δημοσιεύσεις και πέντε βιβλία σε πολλά θέματα των μαθηματικών και της Φυσικής. Εργάστηκε πάνω στη Θεωρία κυμάτων, στη μηχανική, στη ελαστικότητα στις μιγαδικές Συναρτήσεις κ.α.
Από όλους τους μαθηματικούς, ο Κωσύ είναι αυτός, του οποίου το όνομα συναντάται στις περισσότερες έννοιες και θεωρήματα σε πολλούς σημαντικούς κλάδους των μαθηματικών.

5.1 Η έννοια της συνάρτησης

Περιέχονται:
- Η έννοια της συνάρτησης
- Ορισμοί
- Ορισμός συνάρτησης
- Πεδίο ορισμού και σύνολο αφετηρίας συνάρτησης
- Σύνολο τιμών συνάρτησης
- Ανεξάρτητη μεταβλητή
- Εξαρτημένη μεταβλητή

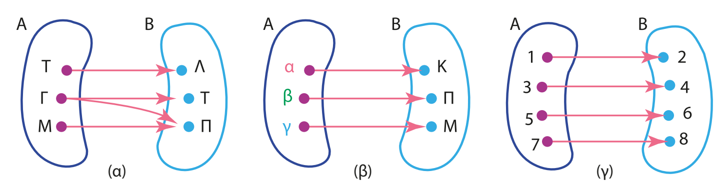
Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε:
- Να αναγνωρίζουμε συναρτήσεις μέσα από καταστάσεις συμμεταβολής της καθημερινής ζωής.
- Να διακρίνουμε τις συναρτήσεις από άλλες σχέσεις συμμεταβολής.
- Να χρησιμοποιούμε τον ορισμό της συνάρτησης για να εξετάσουμε αν μία σχέση ή αντιστοιχία είναι συνάρτηση ή όχι.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Στο επόμενο διάγραμμα (α) φαίνονται οι τρόποι με του οποίους ο Τάκης (Τ), ο Γιάννης (Γ), και η Μαρία (Μ), πηγαίνουν από το σπίτι στο σχολείο: Με λεωφορείο (Λ), με τραμ (Τ), ή με τα πόδια (Π).

Στο διάγραμμα (β) αντιστοιχίζουμε σε καθένα από τα γράμματα α, β, γ το χρώμα του, κόκκινο (Κ), πράσινο (Π) και μπλε (Μ).

Στο διάγραμμα (γ), σε καθένα από τους περιττούς αριθμούς 1, 3, 5 και 7 αντιστοιχίζουμε τον επόμενό του άρτιο.



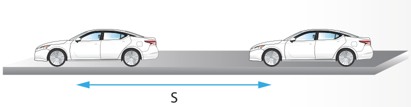
α. Σε ποιο από τα παραπάνω διαγράμματα κάθε στοιχείο του συνόλου A αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο στοιχείο του συνόλου B;

β. Για το διάγραμμα (γ), να συμπληρώσετε τον διπλανό πίνακα τιμών.

Στοιχεία του Α				
Στοιχεία του Β				

Η έννοια της συνάρτησης

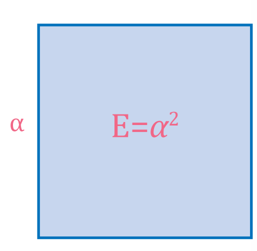
Στην καθημερινή ζωή παρατηρούμε μεταβολές δύο μεγεθών, οι οποίες γίνονται, με τέτοιο τρόπο, ώστε, σε κάθε τιμή του ενός να αντιστοιχεί μία μόνο τιμή του άλλου.



Παράδειγμα 1

Το διάστημα s που διανύει ένα αυτοκίνητο κινούμενο με σταθερή ταχύτητα μέτρου $v = 2m/s$ εξαρτάται από τον χρόνο κίνησης. Σε κάθε χρονική στιγμή $t \in [0,10]$ αντιστοιχεί μία μόνο τιμή του διαστήματος $s \in [0,20]$ αφού το κινητό δεν μπορεί να βρίσκεται την ίδια χρονική στιγμή σε διαφορετικές θέσεις.

Λέμε, ότι το s είναι συνάρτηση του t.



Παράδειγμα 2

Το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς α είναι $E = \alpha^2$. Όταν η πλευρά α μεταβάλλεται στο διάστημα $(2,5)$ σε κάθε τιμή της αντιστοιχεί μία μόνο τιμή του εμβαδού στο διάστημα $(4,25)$.

Λέμε, ότι το εμβαδό είναι συνάρτηση του α.

Στα παραδείγματα αυτά, μέσω μιας διαδικασίας, σε κάθε στοιχείο ενός συνόλου A αντιστοιχίζεται ακριβώς μία τιμή ενός συνόλου B. Λέμε ότι, έχουμε μία συνάρτηση f του A στο B και συμβολίζουμε $f : A \to B$.

Δεν ορίζουν συνάρτηση $f : A \to B$. οι διαδικασίες οι οποίες:

- Κάποιο στοιχείο του A το αντιστοιχίζουν σε περισσότερα από ένα στοιχεία του B, ή
- Υπάρχει, τουλάχιστον, ένα στοιχείο του A που δεν αντιστοιχίζεται σε στοιχείο του B.

Παράδειγμα 3

Δεν ορίζουν συναρτήσεις οι παρακάτω διαδικασίες:

- Σε κάθε μαθητή αντιστοιχίζουμε τους φίλους του, αφού υπάρχουν μαθητές με περισσότερους από ένα φίλους.
- Σε κάθε φυσικό αριθμό αντιστοιχίζουμε τους διαιρέτες του, εκτός από τον εαυτό του και την μονάδα, αφού, για παράδειγμα, στο 5 δεν αντιστοιχίζουμε κανένα τέτοιο διαιρέτη, ενώ στον 6 αντιστοιχίζουμε τους 2 και 3,

Ασκήσεις 2, 3 και 4

Δίνουμε στη συνέχεια τους επόμενους ορισμούς:

ΟΡΙΣΜΟΙ

Συνάρτηση f από το σύνολο A στο σύνολο B λέμε έναν κανόνα, ο οποίος σε κάθε στοιχείο x του συνόλου A αντιστοιχίζει ακριβώς ένα στοιχείο του συνόλου B που συμβολίζεται με $f(x)$.

Το σύνολο A λέγεται πεδίο ορισμού ή σύνολο αφετηρίας και πολλές φορές συμβολίζεται A_f ή D_f. Το σύνολο B λέγεται σύνολο αφίξεως της συνάρτησης.

Το $f(x)$ λέγεται τιμή της συνάρτησης στο x. Το υποσύνολο του B με στοιχεία τις τιμές $f(x)$ της συνάρτησης στο x, για όλα τα στοιχεία x του συνόλου A, λέγεται σύνολο τιμών της συνάρτησης και συμβολίζεται με $f(A)$.

$$f(A) = \{f(x) / x \in A\}$$

Αν συμβολίσουμε με $y \in B$ την τιμή της συνάρτησης στο x, τότε $y = f(x)$

Το x λέγεται ανεξάρτητη μεταβλητή και το y λέγεται εξαρτημένη μεταβλητή.

Ασκήσεις 5 και 6

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Ασκήσεις κατανόησης

1. Να χαρακτηρίσετε σαν αληθή ή ψευδή καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις:

(α) Για την συνάρτηση $f : A \to B$ το A λέγεται πεδίο ορισμού και το B σύνολο αφίξεως της f.

(β) Υπάρχει συνάρτηση f με $f(1) = 2$ και $f(1) = 5$.

(γ) Το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης είναι υποσύνολο του συνόλου αφίξεως.

(δ) Το ύψος ενός ανθρώπου είναι συνάρτηση της ηλικίας του.

2. Να εξετάσετε αν ορίζουν συναρτήσεις διαδικασίες κατά τις οποίες:
(α) Σε κάθε μαθητή αντιστοιχίζουμε τους καθηγητές του.
(β) Σε κάθε μαθητή αντιστοιχίζουμε το ύψος του.
(γ) Σε κάθε τρίγωνο αντιστοιχίζουμε τις γωνίες του.
(δ) Σε κάθε κύκλο αντιστοιχίζουμε το κέντρο του.
(ε) Σε κάθε αθλητή αντιστοιχίζουμε τα μετάλλια που έχει κερδίσει.

Ασκήσεις ανάπτυξης

3. Στον επόμενο πίνακα δίνεται ο αριθμός των δορυφόρων κάθε πλανήτη του ηλιακού μας συστήματος, όπως προέκυψε μετά την εξερεύνησή του από τις διαστημικές βολίδες Voyager I και II.

Πλανήτες	Αριθμός δορυφόρων
Ερμής	-
Αφροδίτη	-
Γη	1
Άρης	2
Δίας	95
Κρόνος	146
Ουρανός	27
Ποσειδών	14

Η εκτόξευση του Voyager I

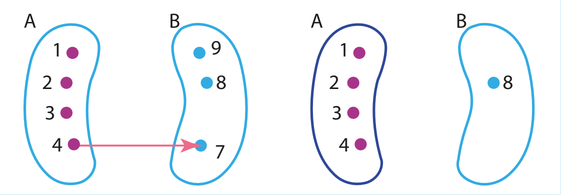
Ποια από τις επόμενες διαδικασίες ορίζει συνάρτηση και γιατί;
(α) Σε κάθε πλανήτη αντιστοιχίζουμε τους δορυφόρους του.
(β) Σε κάθε πλανήτη αντιστοιχίζουμε τον αριθμό των δορυφόρων του.

4. Στον πίνακα Α δίνονται οι τετραγωνικές ρίζες μερικών αριθμών, όπως αυτές ορίζονται λεκτικά, από αρκετούς συγγραφείς. Στον πίνακα Β δίνεται η τιμή του συμβόλου $\sqrt{x}$ των ίδιων αριθμών.

ΠΙΝΑΚΑΣ Α		ΠΙΝΑΚΑΣ Β	
x	α με $\alpha^2 = x$	x	$\sqrt{x}$
0	0	0	0
1	-1, 1	1	1
4	-2, 2	4	2
9	-3, 3	9	3
16	-4, 4	16	4

Ποιος από τους πίνακες αυτούς ορίζει συνάρτηση και γιατί;

5. Να συμπληρώσετε τα επόμενα διαγράμματα, ώστε να παριστάνουν συναρτήσεις $f: A \to B$:



Σε κάθε περίπτωση να γράψτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης.

6. Θεωρούμε την συνάρτηση f που σε κάθε φυσικό αριθμό αντιστοιχίζει το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το 3.
(α) Να βρείτε τις τιμές $f(10)$, $f(27)$ και $f(47)$.
(β) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού και ποιο το σύνολο τιμών της συνάρτησης;

Ορισμός συνάρτησης

5.2 Αναπαραστάσεις συνάρτησης

Περιέχονται:
- Λεκτική περιγραφή
- Αλγεβρικός τρόπος.
- Πίνακας τιμών
- Γραφική παράσταση
- Ορισμός γραφικής παράστασης
- Το κριτήριο της κατακόρυφης ευθείας

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε να συνδέουμε διαφορετικές αναπαραστάσεις μιας συνάρτησης.

Στη προηγούμενη ενότητα είδαμε ότι ένα βελοδιάγραμμα μπορεί να παριστάνει μία συνάρτηση. Άλλοι τρόποι με τους οποίους μπορεί να παρασταθεί μία συνάρτηση είναι:
- Με λεκτική περιγραφή
- Με Αλγεβρικό τρόπο (με τη βοήθεια τύπου)
- Με πίνακα τιμών
- Με γραφική παράσταση

Λεκτική περιγραφή

Με τον τρόπο αυτό μια συνάρτηση ορίζεται μέσω μιας διαδικασίας, η οποία διατυπώνεται με την φυσική, καθομιλουμένη, γλώσσα.

Παράδειγμα 1

Η φράση « το τετράγωνο ενός αριθμού αυξημένο κατά 5» ορίζει μια συνάρτηση $f: A \to B$, όπου
A είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών
B είναι το σύνολο $[5,+\infty)$
και αντιστοιχίζει τον αριθμό x στον αριθμό x^2+5

Αλγεβρικός τρόπος

Μία συνάρτηση $f: A \to B$ μπορεί να οριστεί μέσω ενός αλγεβρικού τύπου, όπως για παράδειγμα

$$f(x)=x^2+1, \text{ με } A=\mathbb{R} \text{ και } B=[0,+\infty)$$

Αν δεν υπάρχει ιδιαίτερος λόγος, θεωρούμε ως σύνολο B το $\mathbb{R}$ και δεν το αναφέρουμε. Γράφουμε απλούστερα δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=x^2+1, \text{ με } A=\mathbb{R}$$

Σε τέτοιες περιπτώσεις συνήθως δίνεται μόνο ο τύπος $f(x)$ της συνάρτησης και ως πεδίο ορισμού θεωρούμε το υποσύνολο του $\mathbb{R}$ που περιέχει όλους τους αριθμούς για τους οποίους ο τύπος έχει νόημα πραγματικού αριθμού. Το βρίσκουμε, όπως στα επόμενα παραδείγματα 2 και 3.

Ασκήσεις 1, 2 και 3

Παράδειγμα 2

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}+\dfrac{1}{x-2}$

Λύση

Η συνάρτηση ορίζεται για όλες τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει

$$\sqrt{x+1}\neq 0 \text{ και } x+1\geq 0 \text{ και } x-2\neq 0$$

$$\text{ή } x+1>0 \text{ και } x-2\neq 0$$
$$\text{ή } x>-1 \text{ και } x\neq 2$$

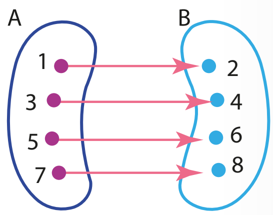
Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο

$$A=(-1,2)\cup(2,+\infty)$$

Ασκήσεις 4, 5, 6 και 7

Πίνακας τιμών

Μία συνάρτηση $f:A\to B$ μπορεί να παρασταθεί με έναν πίνακα δύο γραμμών (ή στηλών). Στην πρώτη γραμμή (ή στήλη) γράφονται οι τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής και στην δεύτερη οι αντίστοιχες τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής. Ο πίνακας αυτός λέγεται πίνακας τιμών της συνάρτησης. Για παράδειγμα η συνάρτηση που παριστάνεται με το διπλανό βελοδιάγραμμα αναπαριστάνεται με τον επόμενο πίνακα τιμών:



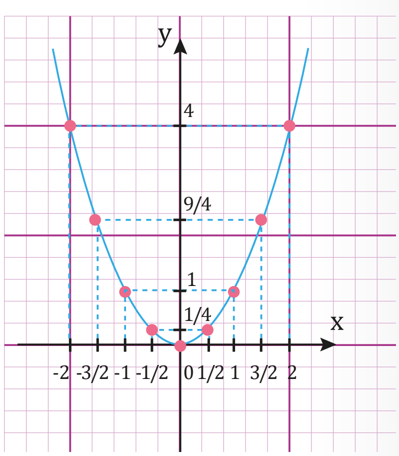
x	1	3	5	7
y	2	4	6	8

Ο τρόπος αυτός ενδείκνυται, όταν οι μεταβλητές x και y παίρνουν σχετικά λίγες τιμές.

Άσκηση 8

Γραφική παράσταση συνάρτησης

Μία συνάρτηση μπορεί να αναπαρασταθεί με τη λεγόμενη γραφική της παράσταση, η οποία ορίζεται, ως εξής:



ΟΡΙΣΜΟΣ

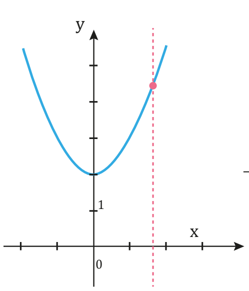
Έστω μια συνάρτηση $f:A\to B$ και ένα σύστημα αξόνων xOy. Το σύνολο των σημείων (x,y) με $y=f(x)$ για όλα τα $x\in A$ λέγεται γραφική παράσταση της συνάρτησης και συμβολίζεται C_f.

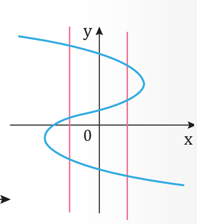
Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε, τη γνωστή από το Γυμνάσιο, γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2$.

Το κριτήριο της κατακόρυφης ευθείας

Στην γραφική παράσταση μιας συνάρτησης δεν υπάρχουν δύο ή περισσότερα σημεία με την ίδια τετμημένη, αφού σε κάθε τιμή του x αντιστοιχεί μία μόνο τιμή του y. Αυτό σημαίνει ότι:

Κάθε κατακόρυφη ευθεία τέμνει την γραφική παράσταση μιας συνάρτησης το πολύ μία φορά.





Για παράδειγμα, στο πρώτο από τα διπλανά σχήματα, η μπλε καμπύλη παριστάνει γραφική παράσταση συνάρτησης. Στο δεύτερο σχήμα η μπλε καμπύλη δεν παριστάνει γραφική παράσταση συνάρτησης, γιατί υπάρχει κατακόρυφη ευθεία που την τέμνει περισσότερες από μία φορές,

Άσκηση 9

Γενικές ασκήσεις 10 και 11

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Να παραστήσετε αλγεβρικά, με την βοήθεια τύπου τις συναρτήσεις, που περιγράφονται λεκτικά, ως εξής;
(α) Το τετράγωνο ενός αριθμού μειωμένο κατά 5
(β) Πολλαπλασιάζουμε την απόλυτη τιμή ενός αριθμού με το 3 και στο γινόμενο προσθέτουμε τον αριθμό αυτό.

2. Οι συναρτήσεις f και g ορίζονται ως εξής:
f: Στο τετράγωνο ενός αριθμού x προσθέτουμε 5.
g: Στον αριθμό x προσθέτουμε 5 και υψώνουμε το άθροισμα στο τετράγωνο.
Να παραστήσετε αλγεβρικά τις συναρτήσεις.

3. Να περιγράψετε λεκτικά τις συναρτήσεις :
(α) $f(x)=x^3+x$ (β) $f(x)=x+\frac{1}{x}$

4. Να εξηγήσετε γιατί οι επόμενες συναρτήσεις έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$:
(α) $f(x)=x+2$, (β) $g(x)=\sqrt{x^2+3}$

5. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:
(α) $f(x)=\sqrt{x}$ (β) $f(x)=\sqrt{2-x}$

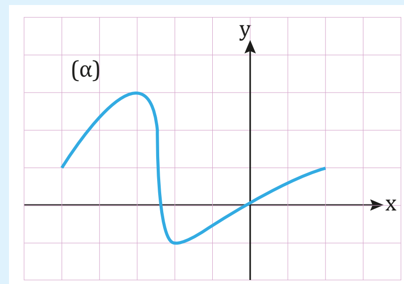
6. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:
(α) $f(x)=\frac{x}{x+1}$ (β) $f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x+2}}$

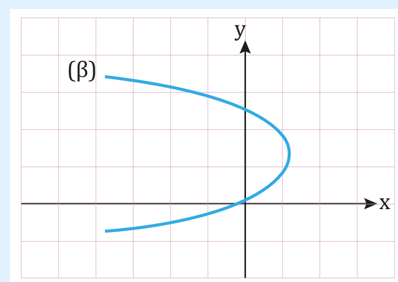
7. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:
(α) $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$ (β) $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{x}{x-1}$

8. Για την συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2, x<1 \\ 2, \quad x\geq 1 \end{cases}$
να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών:

x	-2	-1	0	1	2	3
y						

9. Να εξετάσετε σε ποιο από τα παρακάτω σχήματα έχουμε γραφική παράσταση συνάρτησης:





10. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x^2)=x^3$

11. Σε μια πόλη τα ταξί χρεώνουν τις διαδρομές τους ως εξής (λεκτική περιγραφή συνάρτησης):
Στην αρχή χρεώνουν 2 ευρώ. Για κάθε χιλιόμετρο μέχρι τα 3 πρώτα χρεώνουν επιπλέον 3 ευρώ και για κάθε επόμενο χιλιόμετρο άλλα 2 ευρώ.
Να συμπληρώσετε την συνάρτηση $K(x)$, που δίνει το κόστος μιας διαδρομής x Km. (αλγεβρική αναπαράσταση):

$$K(x)=\begin{cases} \_\_\_\_\_\_, & \alpha\nu\ \ 0<x\leq 3 \\ \_\_\_\_\_\_, & \alpha\nu\ \ x>3 \end{cases}$$

Κριτήριο κατακόρυφης ευθείας

5.3 Ερμηνεία γραφικών παραστάσεων για επίλυση προβλημάτων

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε να ερμηνεύουμε μία δεδομένη γραφική παράσταση συνάρτησης για να επιλύσουμε ένα πρόβλημα.

Εφαρμογή 1

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f και η ευθεία με εξίσωση $y = x + 2$.

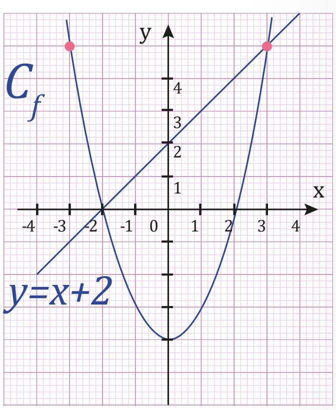
(α) Να βρείτε τις τιμές $f(x)$ της συνάρτησης, όταν το x είναι:

-3, -2, 0, 2 και 3.

(β) Να βρείτε τα διαστήματα των τιμών του x στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι πάνω από τον άξονα των x.

(γ) Να λύσετε:

(i) την εξίσωση $f(x) = 5$ (ii) την ανίσωση $f(x) < x + 2$



Λύση

(α) Από το σχήμα είναι $f(-3) = 5$, $f(-2) = 0$, $f(0) = -4$, $f(2) = 0$ και $f(3) = 5$

(β) Ζητάμε τα διαστήματα, στα οποία ανήκουν οι τετμημένες των σημείων της C_f, που βρίσκονται πάνω από τον άξονα των x. Αυτά είναι τα διαστήματα $(-\infty,-2)$ και $(2,+\infty)$.

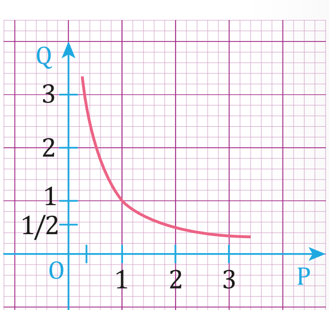
(γ) (i) Οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 5$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων $(-3,5)$ και $(3,5)$ της γραφικής παράστασης της f και της ευθείας με εξίσωση $y = 5$. Επομένως είναι οι αριθμοί -3 και 3.

(ii) Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x) < x + 2$ είναι οι τετμημένες των σημείων της γC_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = x + 2$. Επομένως είναι όλα τα $x \in (-2,3)$.

Εφαρμογή 2

Στο σχήμα φαίνεται η ποσότητα Q, σε κιλά, που είναι διατεθειμένος να αγοράσει ένας καταναλωτής, από ένα προϊόν, σε συνάρτηση με τη τιμή του P σε ευρώ.

1. Να βρείτε
   (α) Πόσα κιλά του προϊόντος θα αγοράσει αν η τιμή του είναι 1 ευρώ;
   (β) Σε τιμή θα αγόραζε 3 κιλά του προϊόντος;
2. Όταν η τιμή του προϊόντος μεταβληθεί από το 1 ευρώ στα 2 ευρώ, πόσο θα μειωθεί η ποσότητα που είναι διατεθειμένος να αγοράσει ο καταναλωτής;



Λύση

1. (α) Όταν η τιμή του προϊόντος είναι 1 ευρώ τότε $P = 1$ και, όπως φαίνεται στο σχήμα, η αντίστοιχη τιμή του Q είναι 1, που σημαίνει ότι θα αγοράσει 1 κιλό προϊόντος.

(β) Στα 3 κιλά προϊόντος είναι $Q=3$, οπότε, όπως φαίνεται στο σχήμα,

$P=\frac{1}{3}$ και θα αγόραζε στο $\frac{1}{3}$ του ευρώ

2. Από το προηγούμενο ερώτημα στα 100 ευρώ θα αγόραζε 1 κιλό. Στα 2 ευρώ το $P=2$, οπότε, όπως φαίνεται στο σχήμα, $Q=\frac{1}{2}$, και θα αγόραζε 0,5 κιλά. Επομένως η ποσότητα θα μειωθεί κατά $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ κιλά

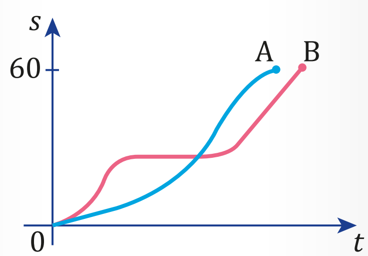
Εφαρμογή 3

Δύο δρομείς Α και Β μετείχαν σε μια κούρσα 60m. Στο διάγραμμα φαίνεται η απόσταση s που έτρεξαν κατά τη διάρκεια της κούρσας σε συνάρτηση με τον χρόνο t.

(α) Ποιος τερμάτισε πρώτος; (β) Ποιος είχε καλύτερη εκκίνηση;

(γ) Προσπέρασε κάποιος τον άλλον;

Αν ναι, να σημειώσετε στο σχήμα τη χρονική στιγμή που γίνεται η προσπέραση.

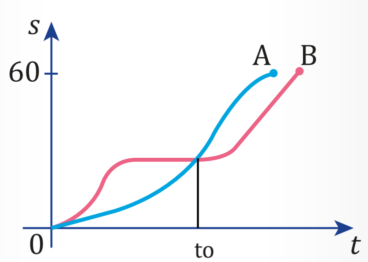


Λύση

(α) Από το σχήμα φαίνεται ότι ο Α κάλυψε την απόσταση των 60m σε μικρότερο χρόνο από ότι ο Β. Επομένως ο Α τερμάτισε πρώτος.

(β) Ακριβώς μετά την εκκίνηση, η κόκκινη καμπύλη που δείχνει την απόσταση που διανύει συναρτήσει του χρόνου ο Β, βρίσκεται πάνω από την αντίστοιχη καμπύλη του Α. Επομένως ο Β έκανε καλύτερη εκκίνηση.

(γ) Έστω t_0 ο χρόνος που αντιστοιχεί στο σημείο τομής των δύο καμπύλων του σχήματος. Μέχρι τη χρονική στιγμή t_0 ο Β προηγείται του Α, γιατί η καμπύλη του είναι πάνω από την καμπύλη του Α. Μετά τη στιγμή t_0 ο Α προηγείται του Β, γιατί η καμπύλη του είναι πάνω από την καμπύλη του Β. Τη χρονική στιγμή t_0 ο Α προσπερνάει τον Β.



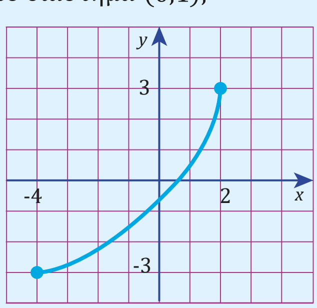
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.

α. Να βρείτε τις τιμές $f(-4)$ και $f(2)$.

β. Το $f(0)$ είναι θετικό ή αρνητικό;

γ. Ανήκει η ρίζα της συνάρτησης f στο διάστημα $(0,1)$;



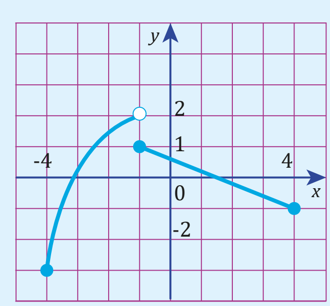
2. Η γραφική της παράσταση μιας συνάρτησης f δίνεται στο παρακάτω σχήμα.

α. Τι πρόσημο έχει η τιμή $f(-2)$;

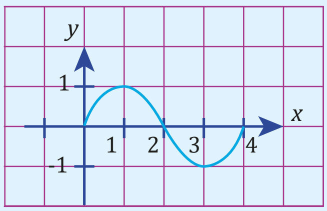
β. Ποια είναι η τιμή της συνάρτησης για $x=-1$;

γ. Να συγκρίνεται τις τιμές $f(2)$ και $f(3)$.

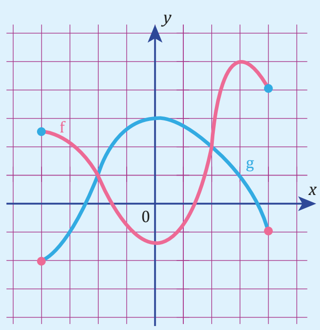
δ. Να βρείτε την διαφορά $f(-1)-f(4)$.



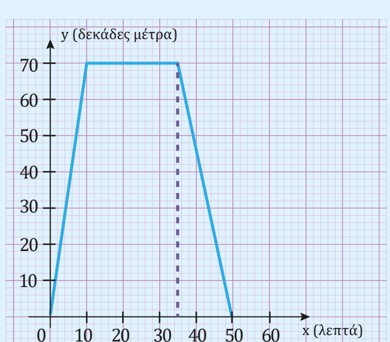
3. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $[0,4]$ και την γραφική παράσταση του σχήματος:
α. Ποιες είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$;
β. Ποιες είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=-1$;
γ. Να λύσετε τις ανισώσεις $f(x)>1$ και $f(x)\leq 1$.



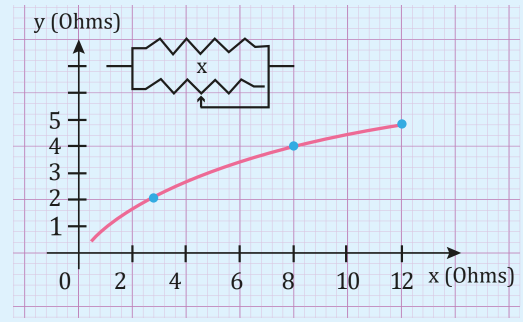
4. Στο σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g δύο συναρτήσεων f και g.
α. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων.
β. Να λύσετε την ανίσωση $g(x)>f(x)$.



5. Ο Γιώργος έφυγε από το σπίτι του και πήγε να παρακολουθήσει μία εκδήλωση. Η απόσταση του Γιώργου από το σπίτι του, σε δεκάδες μέτρα, συναρτήσει του χρόνου, φαίνεται στο σχήμα. Ως 0 είναι ο χρόνος που ξεκίνησε από το σπίτι του.
(α) Πόσο χρόνο έκανε για να φτάσει στην εκδήλωση, και πόσο χρόνο έκανε να επιστρέψει από την εκδήλωση στο Σπίτι του;
(β) Πόσο χρόνο παρέμεινε στην εκδήλωση;
(γ) Πόσα μέτρα περπάτησε συνολικά ο Γιώργος;

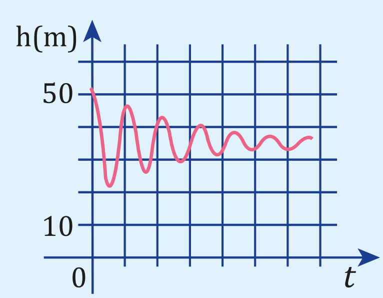


6. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της ολικής αντίστασης y μιας συνδεσμολογίας, ως συνάρτηση της μεταβλητής αντίστασης x σε omhs.



Να εκτιμήσετε:
(α) Ποια είναι η μεγαλύτερη ολική αντίσταση που μπορεί να έχει η συνδεσμολογία; Για ποια τιμή της μεταβλητής αντίστασης επιτυγχάνεται;
(β) Ποια είναι η ολική αντίσταση y, όταν $x=8$ Ohms;
(γ) Για ποια τιμή του x η ολική αντίσταση είναι 2 Ohms;

7. Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται, συναρτήσει του χρόνου η απόσταση από την ελεύθερη επιφάνεια των νερών ενός ποταμού ενός αθλητή, ο οποίος πήδηξε από μία γέφυρα ύψους 50 μέτρων δεμένος από αυτήν με ελαστικά σχοινιά. Ως μηδέν θεωρούμε τη χρονική στιγμή που έκανε το άλμα.



(α) Πόσο κοντά (σε μέτρα) στα νερά βρέθηκε μετά το άλμα του ο αθλητής;
(β) Σε ποιο ύψος εκτιμάτε ότι ισορρόπησε;

5.4 Η Συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$

Περιέχονται:
- Ο ρόλος των συντελεστών α και β.
- Επαναλήψεις-συμπληρώσεις
- Οι ευθείες $y=\alpha x$ και $y=\alpha x+\beta$
- Οι μεταβολές των συντελεστών α και β.
- Πως βρίσκουμε την κλίση μιας ευθεία από την γραφική της παράσταση
- Πως βρίσκουμε την συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$ από την γραφική της παράσταση.

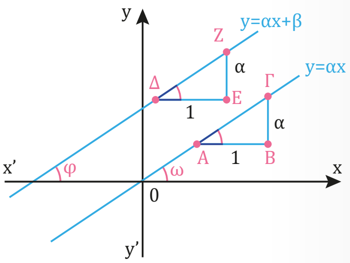
Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε:
- Να ερμηνεύουμε το ρόλο των παραμέτρων α και β στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha x+\beta$.
- Να αντλούμε από την γραφική παράσταση μιας συνάρτησης της μορφής $f(x)=\alpha x+\beta$ πληροφορίες για τη συνάρτηση, όπως η κλίση της και η εξίσωσή της.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Στο σχήμα της διπλανής στήλης δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\alpha x$ και $g(x)=\alpha x+\beta$ με $\beta\neq 0$.

Ποια είναι η μεταβολή των τιμών των συναρτήσεων που αντιστοιχεί σε κάθε μοναδιαία αύξηση του x ;
- Να εξηγήσετε, γιατί τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ και είναι ίσα.
- Να συγκρίνετε τις γωνίες ω και φ.
- Τι συμπέρασμα βγάζετε για τις ευθείες $y=\alpha x$ και $y=\alpha x+\beta$;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



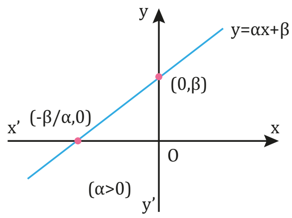
Ο ρόλος των συντελεστών α και β

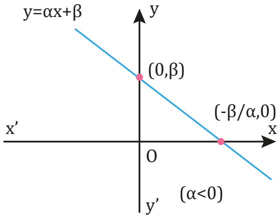
Επαναλήψεις - Συμπληρώσεις

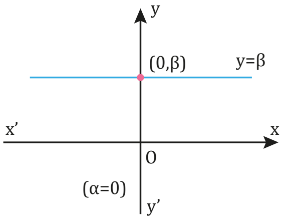
Είναι γνωστό από το Γυμνάσιο ότι:

1. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha x+\beta$ είναι μία ευθεία, η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0,\beta)$ και
   - Αν $\alpha\neq 0$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $\left(-\dfrac{\beta}{\alpha},0\right)$.
   - Αν $\alpha=0$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ ή συμπίπτει με τον άξονα $x'x$ (οριζόντια ευθεία).

2. Ο συντελεστής α λέγεται κλίση ή συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας





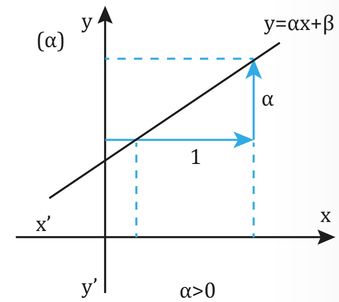


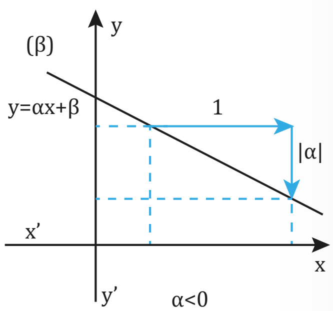
Γιατί ευθεία;

$y = \alpha x + \beta$ και **ισούται με τη μεταβολή του y που αντιστοιχεί σε μοναδιαία αύξηση του** x.

Πιο συγκεκριμένα:

- Αν $\alpha > 0$, όταν το x αυξάνεται κατά μία μονάδα, το y αυξάνεται κατά α μονάδες. (Σχήμα α)
- Αν $\alpha < 0$, όταν x το αυξάνεται κατά μία μονάδα, το y μειώνεται κατά $|\alpha|$ μονάδες. (Σχήμα β)





Παράδειγμα 1

Τα κέρδη y μιας εταιρείας ρούχων τα πέντε πρώτα έτη λειτουργίας της συναρτήσει του χρόνου λειτουργίας x σε έτη, είναι

$$y = 4000x + 12000$$

Αυξήθηκαν ή μειώθηκαν τα κέρδη της εταιρείας τον τέταρτο έτος λειτουργίας της σε σχέση με το τρίτο έτος και κατά πόσο;

Λύση

Όταν το x αυξάνεται κατά ένα έτος, το y αυξάνεται κατά $\alpha = 4000$.
Επομένως τα κέρδη αυξήθηκαν κατά 4000.

Ασκήσεις 3, 4 και 5

Οι ευθείες *y=αx* και *y=αx+β*

Το συμπέρασμα της δραστηριότητας, στην αρχή της ενότητας αυτής, γενικεύεται για όλες τις πραγματικές τιμές των α και β :

Οι ευθείες $y = \alpha x$ ***και*** $y = \alpha x + \beta$ ***είναι παράλληλες***

Η κλίση της ευθείας

Παράδειγμα 2

Οι ευθείες

$$y = 2x + 3,\ \ y = 2x - 4 \text{ και } y = 2x + \sqrt{3}$$

είναι παράλληλες με την ευθεία

$$y = 2x$$

Επομένως είναι και μεταξύ τους παράλληλες.

Άσκηση 6

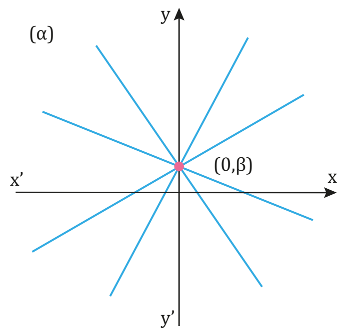
Οι μεταβολές των συντελεστών α και β

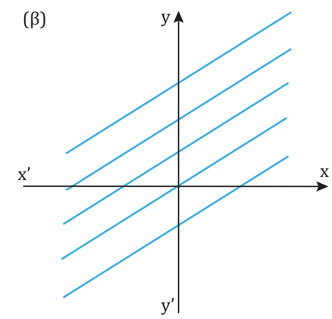
Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι:

- Όταν το β είναι σταθερό και το α μεταβάλλεται, τότε η ευθεία $y = \alpha x + \beta$ διέρχεται από το σταθερό σημείο $(0, \beta)$ του άξονα $y'y$. (Σχήμα α).
- Όταν το α είναι σταθερό και το β μεταβάλλεται, τότε η ευθεία $y = \alpha x + \beta$ μετατοπίζεται κινούμενη παράλληλα με την $y = \alpha x$. (Σχήμα β).

Η μεταβολή του α

Η μεταβολή του β





Πώς βρίσκουμε την κλίση μιας ευθείας από τη γραφική της παράσταση

Για να βρούμε την κλίση (συντελεστή διεύθυνσης) μιας ευθείας από την γραφική της παράσταση, εργαζόμαστε όπως στα επόμενα παραδείγματα.

Παράδειγμα 3

Να βρείτε την κλίση της ευθείας του διπλανού σχήματος (α):

Λύση

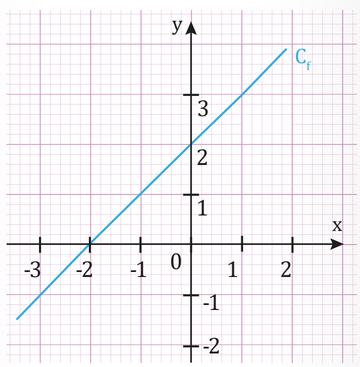
Η κλίση α μπορεί να βρεθεί με τους επόμενους τρόπους:

$1^{ος}$ τρόπος. Παρατηρούμε, ότι σε αύξηση του x κατά μία μονάδα το y αυξάνεται κατά μία μονάδα (σχ.(β)). Αυτό σημαίνει ότι $\alpha = 1$.

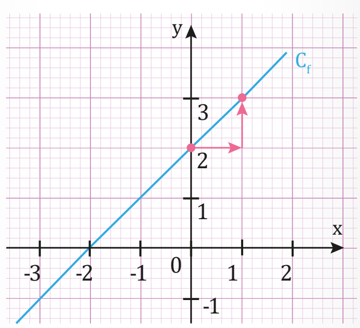
$2^{ος}$ τρόπος. Η συνάρτηση f έχει γραφική παράσταση ευθεία, επομένως είναι της μορφής $f(x) = \alpha x + \beta$. Επειδή διέρχεται από το σημείο $(0,2)$ του άξονα $y'y$ είναι $\beta = 2$. Η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $\left(-\frac{\beta}{\alpha}, 0\right)$.

Επομένως
$$-\frac{\beta}{\alpha} = -2 \quad \text{ή} \quad -\frac{2}{\alpha} = -2 \quad \text{ή} \quad \alpha = 1$$

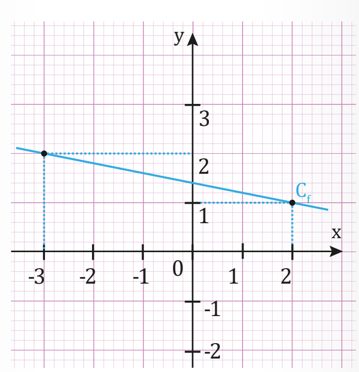
Ώστε η κλίση της ευθείας είναι $\alpha = 1$.



Σχήμα (α)



Σχήμα (β)



Σχήμα (γ)

Πώς βρίσκουμε την συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$ από την γραφική της παράσταση

Για να βρούμε την συνάρτηση, που έχει γραφική παράσταση ευθεία, εργαζόμαστε όπως στο επόμενο παράδειγμα.

Εφαρμογή 1

Να βρείτε την συνάρτηση, που η γραφική της παράσταση δίνεται στο σχήμα (γ).

Λύση

Η συνάρτηση f έχει γραφική παράσταση ευθεία, επομένως είναι της μορφής

$$f(x) = \alpha x + \beta$$

Επειδή διέρχεται από το σημείο $(-3,2)$ είναι $f(-3) = 2$. Επομένως $-3\alpha + \beta = 2$.
Πάλι, επειδή διέρχεται από το σημείο $(2,1)$ είναι $f(2) = 1$. Επομένως $2\alpha + \beta = 1$.

Προκύπτει, λοιπόν, το σύστημα

$$\begin{cases} -3\alpha+\beta=2 \\ 2\alpha+\beta=1 \end{cases}$$

Η λύση του συστήματος είναι $\alpha=-\frac{1}{5}$ και $\beta=\frac{7}{5}$.

Επομένως $f(x)=-\frac{1}{5}x+\frac{7}{5}$.

Ασκήσεις 7, 8, 9 κα 10

Παράλληλες-κάθετες τεμνόμενες ευθείες

Εφαρμογή 2

Τρείς φίλοι από την Καλαμπάκα, τα Τρίκαλα και την Καρδίτσα τοποθέτησαν στον χάρτη σύστημα αξόνων και βρήκαν ότι τα σπίτια τους έχουν συντεταγμένες

$$K(-25,25),\ \ T(-9,2) \text{ και } P(7,-21)$$

Ισχυρίστηκαν ότι τα σπίτια τους είναι στην ίδια ευθεία.
Να εξετάσετε αν έχουν δίκιο.

Λύση

Θα βρούμε την εξίσωση της ευθείας που ορίζουν δύο από τα σημεία, για παράδειγμα τα K και T, και θα εξετάσουμε αν το τρίτο σημείο ανήκει σε αυτή.
Η ευθεία έχει εξίσωση της μορφής $y=\alpha x+\beta$ και επειδή ορίζεται από τα σημεία $K(-25,25)$, $T(-9,2)$, έχουμε το σύστημα:

$$25=-25\alpha+\beta \text{ και } 2=-9\alpha+\beta$$

Η λύση του συστήματος είναι $\alpha=-\frac{23}{16}$ και $\beta=-\frac{175}{16}$, οπότε η ευθεία KT έχει εξίσωση

$$y=-\frac{23}{16}x-\frac{175}{16}$$

Εξετάζουμε αν το $P(7,-21)$ είναι σημείο της ευθείας αυτής. Πρέπει οι συντεταγμένες του P να επαληθεύουν την εξίσωσή της. Αντικαθιστούμε $x=7$ και $y=-21$ έχουμε:

$$-21=-\frac{23}{16}\cdot 7-\frac{175}{16} \text{ δηλαδή } -21=-\frac{336}{16} \text{ ή } -21=-21 \text{, που ισχύει.}$$

Επομένως οι τρεις φίλοι έχουν δίκιο. Τα σπίτια τους βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

Ασκήσεις 11 κα 12

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Ασκήσεις κατανόησης

1. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

α. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha x+\beta$ είναι ……………………, η οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο ……… και τον άξονα $y'y$ στο σημείο …………… .

β. Ο άξονας $x'x$ έχει εξίσωση ………… .

γ. Για την συνάρτηση $y=\alpha x+\beta$, όταν το x αυξηθεί κατά μία μονάδα, το y μεταβάλλεται κατά ……………………….

2. Να χαρακτηρίσετε ως αληθή ή ψευδή κάθε μία από τις επόμενες προτάσεις

α. Η ευθεία $x=3$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

β. Η ευθεία $y=2x-3$ διέρχεται από το σημείο $(0,3)$.

γ. Οι ευθείες $y=-2x$ και $y=-2x+5$ είναι παράλληλες.

Ασκήσεις ανάπτυξης

3. Να βρείτε τα σημεία τομής με τους άξονες των ευθειών:

α. $y=x+5$ β. $y+x=2$

γ. $y=4x+7$ δ. $y=\sqrt{3}x$

4. Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης (κλίση) των ευθειών με εξισώσεις:

α. $y=4x-3$ β. $y=\dfrac{3x}{4}-4$

γ. $y=\frac{2}{5}$ δ. $y+2x=3$

5. Τα μηνιαία έσοδα y, σε Ευρώ, μιας εταιρείας κατά την διάρκεια του πρώτου εξαμήνου του τρέχοντος έτους σε συνάρτηση του χρόνου x, σε μήνες, είναι: $y=8450x+648$
Να βρείτε την αύξηση των εσόδων της εταιρείας τον μήνα Μάρτιο.

6. Να βρείτε την τιμή του λ, ώστε οι ευθείες να είναι παράλληλες στις επόμενες περιπτώσεις:

(α) $y=2x+3$ και $y=(\lambda^2-1)x+\lambda$

(β) $2\lambda x+y=\lambda$ και $y=4(\lambda^2-3)x+4-\lambda$

7. Να βρείτε την συνάρτηση η οποία έχει γραφική παράσταση ευθεία και επιπλέον:

(α) Έχει κλίση -3 και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0,5)$.

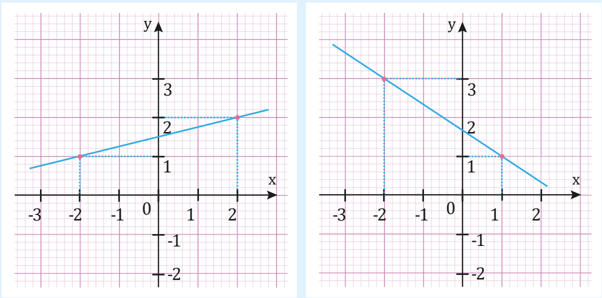
(β) Έχει κλίση -2 και τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(4,0)$.

(γ) Έχει κλίση $\frac{1}{3}$ και διέρχεται από το σημείο $(1,-6)$.

(δ) Έχει κλίση $\sqrt{2}$ και διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

(ε) Έχει συντελεστή διεύθυνσης 0 και διέρχεται από το σημείο $(-2,-2)$.

8. Να βρείτε την κλίση και τις συναρτήσεις που η γραφική τους παράσταση δίνεται στα σχήματα:



9. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη στην $y=-3x+4$ στις περιπτώσεις:

(α) Τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο του $A(0,-4)$

(β) Διέρχεται από το σημείο $T(3,-2)$.

10. Να βρείτε την συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση είναι μια ευθεία, που διέρχεται από τα σημεία:

(α) $A(1,2)$ και $B(-3,4)$ (β) $A(0,3)$ και $B(4,3)$

(γ) $A(-8,-8)$ και $B(4,4)$

(δ) $A(-\kappa,\kappa)$ και $B(3,-3)$, $\kappa\in\mathbb{R}-\{3\}$

11. Να εξετάσετε, αν είναι συνευθειακά τα σημεία:

α. $A(1,-1)$, $B(2,2)$ και $\Gamma(-1,-7)$

β. $A(-1,1)$, $B(-2,1)$ και $\Gamma(0,4)$

12. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(-1,1)$, $B(-1,-5)$ και $\Gamma(4,\kappa)$ είναι κορυφές τριγώνου.

5.5 Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,\ \alpha \neq 0$

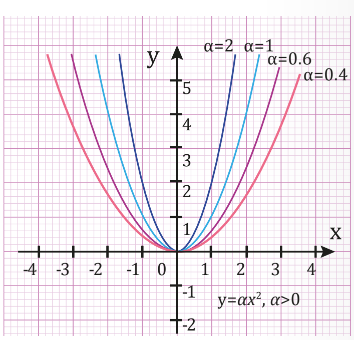
- Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2, \alpha \neq 0$
- Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha > 0$
- Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha < 0$
- Πρόσημο της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha \neq 0$
- Αλγεβρικός προσδιορισμός.
- Γραφική ερμηνεία.

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε:

- Να αναγνωρίζουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha \neq 0$ και
- Να αναγνωρίζουμε τις τετμημένες των σημείων τομής της με τον άξονα $x'x$, ως τις ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$. Να προσδιορίζουμε αλγεβρικά και να ερμηνεύουμε γραφικά το πρόσημο της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha \neq 0$.

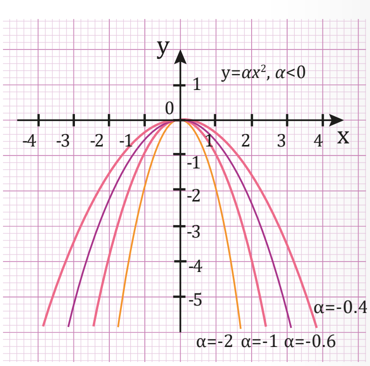
Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2$

Είναι γνωστή η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2$ για τις διάφορες πραγματικές τιμές του $\alpha \neq 0$. Είναι, όπως λέμε, μια παραβολή με κορυφή την αρχή $O(0,0)$ των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$.



Στα διπλανά σχήματα βλέπουμε, ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2$ με $\alpha \neq 0$:

- για θετικές τιμές του α βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$, εκτός από το σημείο της $O(0,0)$, που είναι κοινό με τον άξονα $x'x$, ενώ
- για αρνητικές τιμές του α βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$, εκτός από το σημείο της $O(0,0)$, που είναι κοινό με τον άξονα $x'x$.



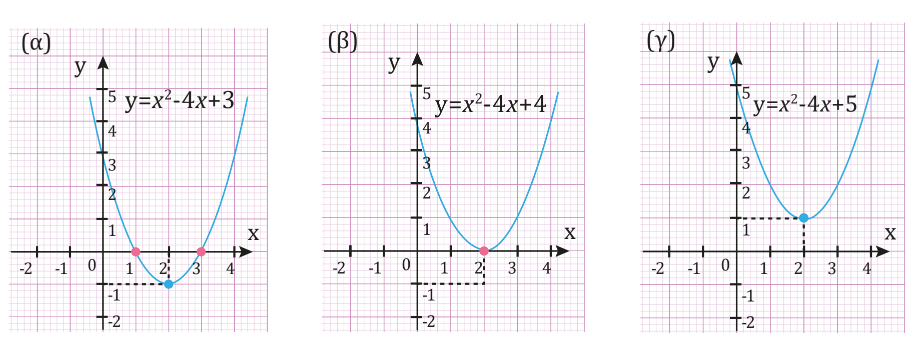
Σε κάθε περίπτωση παρατηρούμε ότι έχει με τον άξονα $x'x$ μόνο ένα κοινό σημείο το $O(0,0)$, η τετμημένη του οποίου είναι διπλή ρίζα της εξίσωσης $\alpha x^2 = 0$. Λέμε ότι η παραβολή εφάπτεται με τον άξονα $x'x$.

Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, με $\alpha > 0$

Στα παρακάτω σχήματα βλέπουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων με εξισώσεις

$$y = x^2 - 4x + 3,\ y = x^2 - 4x + 4 \text{ και } y = x^2 - 4x + 5.$$

- Η μορφή τους είναι μια παραβολή, όμοια με την $y = x^2$, μετατοπισμένη, όπως λέμε, παράλληλα με τον εαυτό της. Έχουν άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = 2$.



Η παραβολή

Ο αριθμός $-\dfrac{\beta}{2\alpha}$

Η συνάρτηση

$y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$

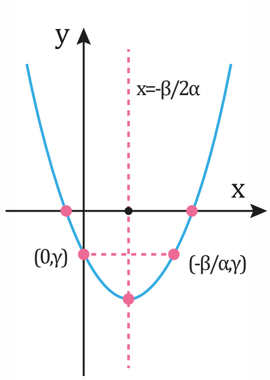
- έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$
- έχει κορυφή το σημείο με τετμημένη $-\dfrac{\beta}{2\alpha}$

Ο ρόλος του συντελεστή γ

Η συνάρτη $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο του $(0,\gamma)$

Γινόμενο θετικών αριθμών

Ο ρόλος του α στην παραβολή



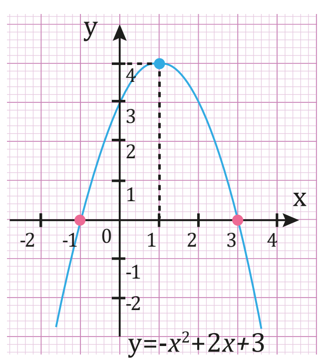
- Τα κοινά σημεία της $y=x^2-4x+3$ με τον άξονα $x'x$ (σχήμα α) έχουν τεταγμένη $y=0$, επομένως οι τετμημένες τους είναι οι ρίζες 1 και 3 της εξίσωσης $x^2-4x+3=0$. Τέμνει τον άξονα y′y στο σημείο του $(0,3)$. Έχει κορυφή το σημείο $(2,-1)$.
- Η $y=x^2-4x+4$ (σχήμα β) έχει ακριβώς ένα κοινό σημείο με τον άξονα τον $x'x$. Η τετμημένη του είναι η διπλή ρίζα 2 της εξίσωσης $x^2-4x+4=0$. Λέμε ότι η παραβολή εφάπτεται με τον άξονα $x'x$.
  Τέμνει τον άξονα y′y στο σημείο του $(0,4)$. Έχει κορυφή το σημείο $(2,0)$.
- Η $y=x^2-4x+5$ (σχήμα γ) δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$, γιατί η εξίσωση $x^2-4x+5=0$ είναι αδύνατη.
  Τέμνει τον άξονα y′y στο σημείο του $(0,5)$. Έχει κορυφή το σημείο $(2,1)$.

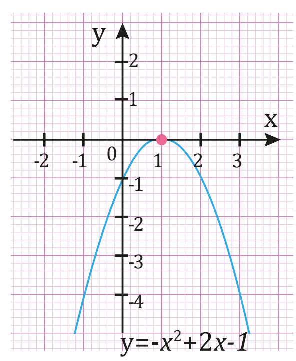
Τα παραπάνω συμπεράσματα γενικεύονται για κάθε συνάρτηση της μορφής $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με $\alpha>0$.

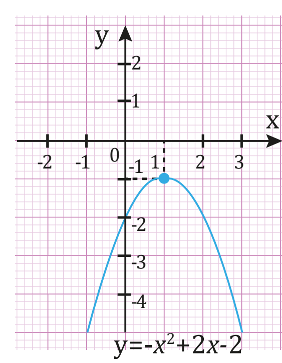
Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με $\alpha<0$

Ανάλογες με τις παραπάνω παρατηρήσεις μπορούμε να κάνουμε για τις επόμενες συναρτήσεις. Η γραφική τους παράσταση είναι όμοια με την παραβολή $y=-x^2$:

$$y=-x^2+2x+3,\ y=-x^2+2x-1 \text{ και } y=-x^2+2x-2$$







Από τη μελέτη των παραπάνω γραφικών παραστάσεων μπορείτε να απαντήσετε στα ερωτήματα:

(α) Ποιά είναι τα σημεία τομής τους με τους άξονες;

(β) Έχουν άξονα συμμετρίας, και ποιός είναι;

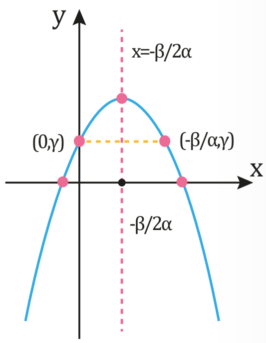
(γ) Ποιές είναι οι συντεταγμένες της κορυφής τους;

Τα συμπεράσματα αυτά γενικεύονται για κάθε συνάρτηση της μορφής $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με $\alpha<0$.

Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με $\alpha\neq 0$

Γενικεύοντας τα παραπάνω συμπεράσματα έχουμε:

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma, \alpha\neq 0$ είναι παραβολή όμοια με την $y=\alpha x^2$. Οι τετμημένες των σημείων τομής της με τον άξονα $x'x$, αν υπάρχουν, είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$.



Επιπλέον, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f :

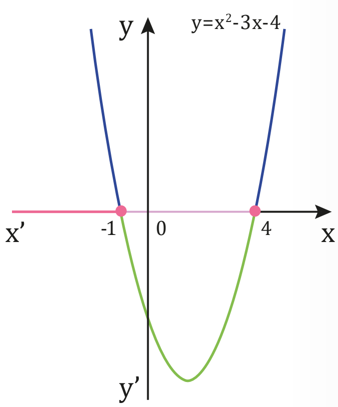
- Έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$
- Έχει κορυφή το σημείο με τετμημένη $-\dfrac{\beta}{2\alpha}$ και τεταγμένη $f\left(-\dfrac{\beta}{2\alpha}\right) = \dfrac{-\Delta}{4\alpha}$
- Διέρχεται από το σημείο $(0,\gamma)$ του άξονα $y'y$

Το πρόσημο της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ και η γραφική του ερμηνεία

Όταν μιλάμε για το πρόσημο της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, εννοούμε το πρόσημο των τιμών $f(x)$ για όλες τις πραγματικές τιμές του x. Συνεπώς το πρόσημο της συνάρτησης:

- είναι θετικό για τις τιμές του x για τις οποίες $\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0$
- είναι αρνητικό για τις τιμές του x για τις οποίες $\alpha x^2 + \beta x + \gamma < 0$

Αυτό σημαίνει, ότι το πρόσημο της συνάρτησης είναι ίδιο με το πρόσημο του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, που μάθαμε στην ενότητα **4.7.**



Γραφική ερμηνεία

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία με τετμημένες τις ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, αν υπάρχουν, και

- βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$, στα διαστήματα των τιμών του x που η f έχει θετικό πρόσημο
- βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$, στα διαστήματα των τιμών του x που η f έχει αρνητικό πρόσημο.

Παράδειγμα

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = x^2 - 3x - 4.$$

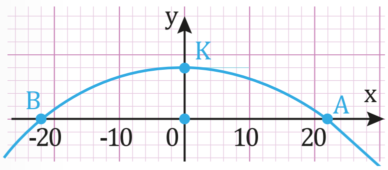
Παρατηρούμε ότι έχει ρίζες τους αριθμούς -1 και 4. Επομένως:

- Τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $(-1,0)$ και $(4,0)$
- Βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ όταν έχει θετικό πρόσημο, δηλαδή, όταν $x \in (-\infty,-1) \cup (4,+\infty)$ και
- Βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$ όταν έχει αρνητικό πρόσημο, δηλαδή, όταν $x \in (-1,4)$.

Ασκήσεις 4, 5, 6 και 7

Εφαρμογή

Το τοξωτό μέρος της πεζογέφυρας του σχήματος είναι τμήμα παραβολής με πλάτος στη βάση του 43,5 μέτρα και ύψος πάνω από το κατάστρωμά της 8,3 μέτρα. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής, αν έχει μορφή $y = \alpha x^2 + \beta$.



Λύση

Η κορυφή Κ έχει τετμημένη $x=0$ και τεταγμένη $y=8{,}3$. Αντικαθιστούμε στην εξίσωση $y=\alpha x^2+\beta$ και παίρνουμε:

$8{,}3=\alpha\cdot 0+\beta$ δηλαδή $\beta=8{,}3$.

Η τεταγμένη του σημείου Α είναι $y=0$ και η τετμημένη του είναι ίση με το μισό του πλάτους της πεζογέφυρας, δηλαδή είναι $x=43{,}5:2=21{,}75$ μέτρα.

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση $y=\alpha x^2+\beta$ και με $\beta=8{,}3$ παίρνουμε:

$$0=\alpha(21{,}5)^2+8{,}3 \text{ ή } \alpha=-\frac{8{,}3}{(21{,}75)^2}\simeq -0{,}0175$$

Ώστε η εξίσωση της παραβολής είναι $y=-0{,}0175x^2+8$

Άσκηση 8

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ερωτήσεις κατανόησης

1. Να χαρακτηρίσετε την καθεμία από τις επόμενες προτάσεις σαν αληθή ή ψευδή.

(α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=3x^2$ είναι παραβολή.

(β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=-2x^2$ έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$.

(γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{5}x^2$ έχει ένα, μόνο, κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$.

(δ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2+5x+6$ δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$.

(ε) Η κορυφή της συνάρτησης $f(x)=x^2+2\beta x+\gamma$ έχει τετμημένη $x=-\beta$.

2. Να απαντήσετε στις επόμενες ερωτήσεις αιτιολογώντας την απάντησή σας:

(α) Υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=2x^2+6$ που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$;

(β) Πότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2+\beta x+\gamma$ εφάπτεται με τον άξονα $x'x$;

(γ) Για τις τιμές του $x\in(1,4)$ γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x)=2(x-1)(x-4)$$

βρίσκεται πάνω ή κάτω από άξονα $x'x$;

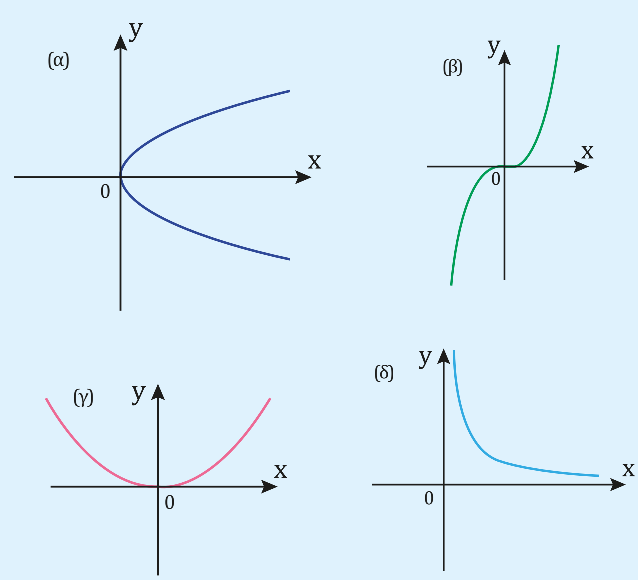
(δ) Πόσα κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$ έχει η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x)=x^2-5x+10;$$

(ε) Ποιος είναι ο άξονας συμμετρίας της συνάρτησης

$$f(x)=-x^2+2x+3;$$

3. Σε ποιο από τα επόμενα σχήματα μπορεί να έχουμε γραφική παράσταση συνάρτησης της μορφής $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma, \alpha\neq 0$, και γιατί;



Ασκήσεις ανάπτυξης

4. Να βρείτε για ποιες τιμές του x οι γραφικές παραστάσεις των επομένων συναρτήσεων βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ και για ποιες βρίσκονται κάτω από αυτόν:

(α) $f(x)=x^2-5x+6$ (β) $f(x)=-x^2+3x-2$
(γ) $f(x)=x^2+5x+7$ (δ) $f(x)=-x^2-1$

5. Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x)=x^2-2x+\alpha$$

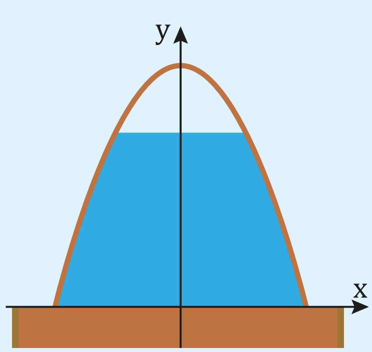
(α) εφάπτεται με τον άξονα $x'x$,
(β) βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα $x'x$.

6. Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x)=\alpha x^2-2x-3$$

βρίσκεται ολόκληρη κάτω από τον άξονα $x'x$.

7. Ένα υπόγειο κανάλι μεταφοράς νερού, έχει σχήμα παραβολής με άξονα συμμετρίας τον $y'y$ και εξίσωση $y=\alpha x^2+\beta$. (βλέπε σχήμα). Έχει ύψος 10 μέτρα και το πλάτος στην βάση του είναι 8 μέτρα. Η ελεύθερη επιφάνεια του νερού έχει πλάτος 4 μέτρα. Να βρείτε:
(α) Την εξίσωση της παραβολής και
(β) Το ύψος του νερού.

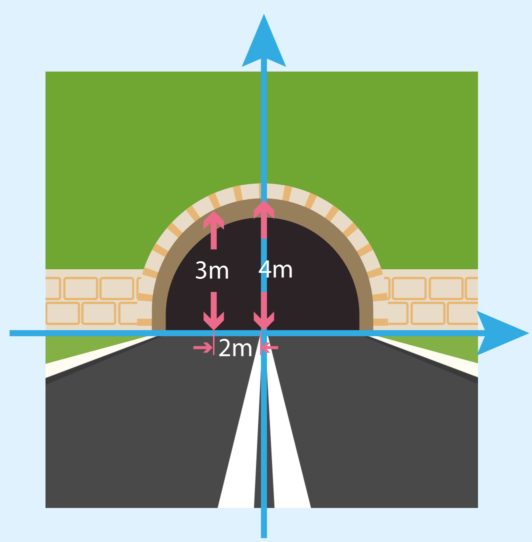


8. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2+\beta x+\gamma$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$, όταν $x\in(-2,3)$ και κάτω από αυτόν, όταν $x\in(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$. Να βρείτε τις τιμές των β και γ.

9. Στο σχήμα δίνεται ένα τούνελ ενός αυτοκινητόδρομου. Το σχήμα του προσεγγίζεται από μία παραβολή με εξίσωση $y=\alpha x^2+\beta$.
Η κορυφή του έχει ύψος 4m.
(α) Να βρείτε την τιμή του β.
(β) Ένα φορτηγό με πλάτος 4m και ύψος 3m χωράει οριακά στο τούνελ.

Να δείξετε ότι $\alpha=-\frac{1}{4}$

(γ) Ποιο είναι το πλάτος στην βάση του τούνελ;



Συνάρτηση τριώνυμο

5.6 Εφαρμογές στη μοντελοποίηση

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε να χρησιμοποιούμε συναρτήσεις πρώτου και δευτέρου βαθμού στη μοντελοποίηση προβλημάτων.

Εφαρμογή 1

Μια αέρια μάζα καθώς ανέρχεται στην ατμόσφαιρα ψύχεται. Η θερμοκρασία εδάφους ήταν $20^{o}C$ και σε ύψος 3 χιλιομέτρων είναι $-5^{o}C$.

(α) Να εκφράσετε τη θερμοκρασία T, σε ^{o}C,σε συνάρτηση με το ύψος h, σε Km, αν είναι γνωστό ότι ακολουθεί το γραμμικό μοντέλο (δηλαδή έχει γραφική παράσταση ευθεία).

(β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της θερμοκρασίας T, σε συνάρτηση με το ύψος h.

(γ) Να βρείτε στην θερμοκρασία σε ύψος 2Km.

Λύση

(α) Έστω $T = \alpha h+\beta$ η ζητούμενη συνάρτηση. Για $h=0$ είναι $T=20$ οπότε $\beta=20$

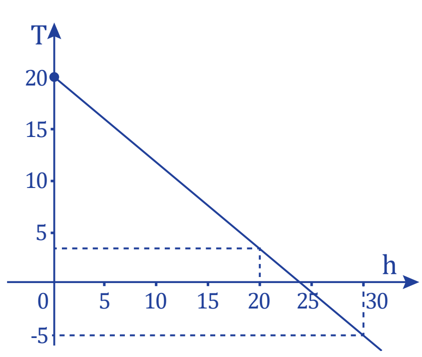
Για $h=3$ είναι $T=-5$ οπότε

$$-5=3\alpha+\beta \text{ ή } -5=3\alpha+20 \text{ ή } \alpha=-\frac{25}{3}$$

Επομένως είναι

$$T=-\frac{25}{3}h+20$$

(β) Η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα. Οι μονάδες για το ύψος είναι εκατοντάδες μέτρα, ώστε το σύστημα αξόνων να είναι κανονικό, για πιο ρεαλιστική απεικόνιση.



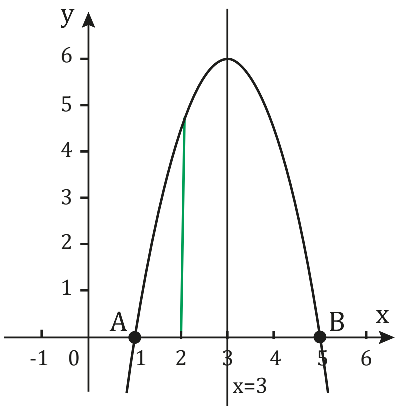
(γ) Για να βρούμε τη θερμοκρασία σε ύψος 2Km θέτουμε στην εξίσωση $T=-\frac{25}{3}h+20$ to $h=2$ και παίρνουμε:

$$T=-\frac{25}{3}\cdot 2+20=\frac{10}{3}{}^{o}C \simeq 3{,}33^{o}C$$

Άρα, σε ύψος 2Km η θερμοκρασία της αέριας μάζας είναι $3{,}33^{o}C$.

Εφαρμογή 2

Ο κρουνός ενός πίδακα, στο σιντριβάνι της φωτογραφίας, βρίσκεται σε απόσταση 1m από την άκρη της λίμνης. Ο πίδακας ρίχνει το νερό σε ύψος 6m και το σχήμα του μοντελοποιείται από μια παραβολή της μορφής $y = \alpha(x-3)^2 + \beta$ της οποίας δίνεται η γραφική παράσταση. Στο σημείο με τετμημένη 0, βρίσκεται η άκρη της λίμνης, ενώ το σημείο Α αντιστοιχεί στον κρουνό του πίδακα.



(α) Πόσο μακριά ρίχνει το νερό ο πίδακας;
(β) Να βρείτε τις τιμές των β και α.
(γ) Τι ύψος πρέπει να έχει ένα φυτό που φύτρωσε 1 μέτρο μακριά από την πηγή του πίδακα (βλέπε σχήμα), ώστε να μη διακόπτει την τροχιά του;

Λύση

(α) Ο πίδακας ρίχνει το νερό από το σημείο A της λίμνης του στο σημείο B. Είναι $AB = 4$, επομένως ρίχνει το νερό 5 μέτρα μακριά.
(β) Το ύψος $y = 6m$ επιτυγχάνεται για $x = 3$. Αντικαθιστούμε τις τιμές αυτές στην εξίσωση $y = \alpha(x-3)^2 + \beta$ και παίρνουμε:

$$6 = \alpha(3-3)^2 + \beta \quad \text{ή} \quad \beta = 6$$

Η συνάρτηση μηδενίζεται για $x = 1$. Επομένως

$$0 = \alpha(1-3)^2 + \beta \quad \text{ή} \quad 0 = \alpha(1-3)^2 + 6 \quad \text{ή} \quad \alpha = -1{,}5$$

(γ) Σύμφωνα με τα παραπάνω η εξίσωση της παραβολής είναι

$$y = -1{,}5(x-3)^2 + 6$$

Το φυτό φύτρωσε 1 μέτρο μακριά από την πηγή του πίδακα και στο σύστημα αξόνων παριστάνεται από το πράσινο τμήμα. Για $x = 2$ είναι

$$y = -1{,}5(2-3)^2 + 6 \quad \text{ή} \quad y = 4{,}5$$

Επομένως, το φυτό πρέπει να έχει ύψος μικρότερο από 4,5m.

Κίνηση οβίδας

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

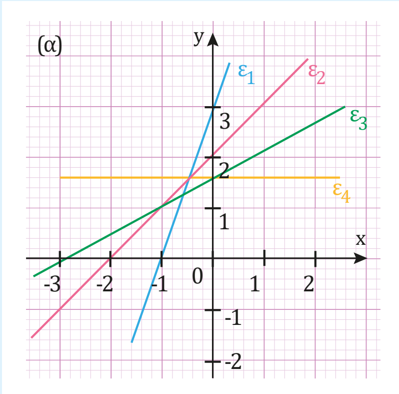
1. Η πίεση P της θάλασσας σε ατμόσφαιρες (atm) αυξάνεται σε συνάρτηση με το βάθος. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση ακολουθεί το γραμμικό μοντέλο (έχει γραφική παράσταση ευθεία) και για κάθε 1 μέτρο βάθους, η πίεση αυξάνεται κατά 0,1 ατμόσφαιρες.

(α) Ποια είναι η κλίση της ευθείας;

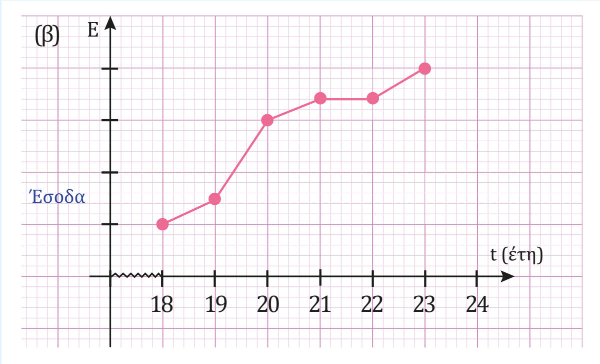
(β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, αν η πίεση στην επιφάνεια της θάλασσας είναι ίση με την ατμοσφαιρική (1 atm).

(γ) Σε ποιο βάθος η πίεση είναι 4,3 ατμόσφαιρες;

2. (α) Να βρείτε ποια από τις ευθείς του σχήματος (α) έχει τη μεγαλύτερη και ποια τη μικρότερη κλίση:

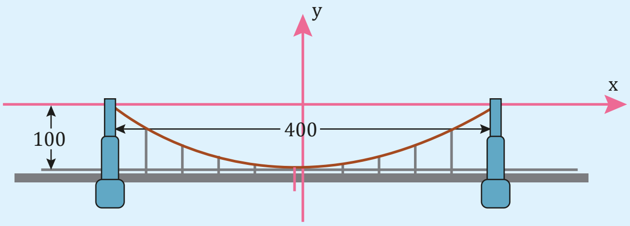


(β) Τα έσοδα μιας εταιρείας παραγωγής ρούχων, κατά τη διάρκεια των εβδομάδων 18 – 23 του περασμένου έτους, δίνονται στο διάγραμμα (β). Ποια εβδομάδα η εταιρεία είχε τη μεγαλύτερη αύξηση εσόδων και ποια τη μικρότερη;



Υπήρξε εβδομάδα με μείωση των εσόδων σε σχέση με την προηγούμενή της εβδομάδα;

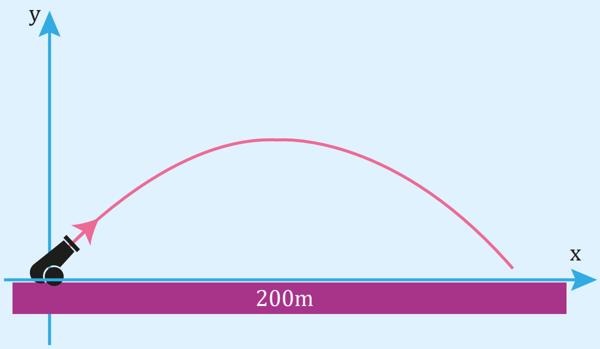
3. Η γέφυρα του σχήματος, έχει μήκος 400 μέτρα και το ύψος των πυλώνων στήριξης είναι 100 μέτρα. Στο σύστημα αξόνων του σχήματος το καλώδιο στήριξης είναι η γραφική παράσταση συνάρτησης της μορφής $f(x) = \alpha x^2 + \gamma$.



α. Να αποδείξετε ότι $\gamma = -100$.

β. Να βρείτε τις ρίζες της συνάρτησης f και την τιμή του α.

4. Το κανόνι του σχήματος βρίσκεται στην αρχή των αξόνων και ρίχνει βολή στα 200 μέτρα. Η τροχιά του βλήματος έχει εξίσωση $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$



α. Να αποδείξετε ότι $\gamma = 0$

β. Να βρείτε τις ρίζες της συνάρτησης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ και να αποδείξετε ότι $200\alpha + \beta = 0$.

γ. Όταν $x = 100$ μέτρα, το βλήμα βρίσκεται σε ύψος 50 μέτρα. Να αποδείξετε ότι η τροχιά του έχει εξίσωση

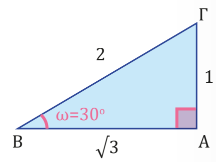
$$y = -\frac{1}{200}x^2 + x$$

5.7 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας μεταξύ 0° και 360°

- Ορισμοί των τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας μεταξύ 0^o και 360^o
- Οι τιμές των $\eta\mu\omega$ και $\sigma\upsilon\nu\omega$
- Τα πρόσημα των τριγωνομετρικών αριθμών.

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε:

- Να ορίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνίας ω μεταξύ 0^o και 360^o με την βοήθεια συστήματος αξόνων.
- Να υπολογίζουμε τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνιών μεγαλύτερων των 90^o συναρτήσει των τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας μεταξύ 0^o και 90^o **(αναγωγή στο 1° τεταρτημόριο).**

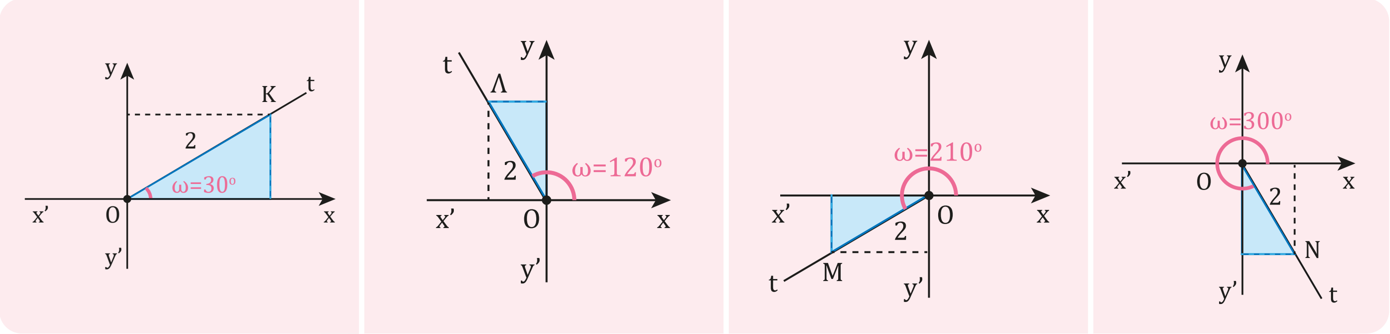


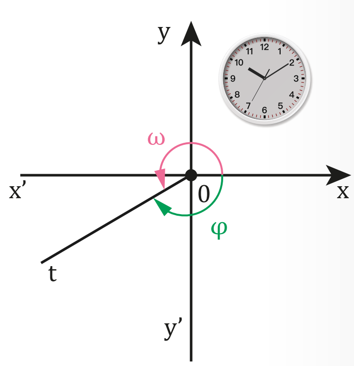
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Ας πάρουμε το ορθογώνιο τρίγωνο του σχήματος με $\omega=30^o$, υποτείνουσα 2 και κάθετες πλευρές 1 και $\sqrt{3}$.

α. Να υπολογίσετε τα $\eta\mu 30^o$ και $\sigma\upsilon\nu 30^o$

β. Στα παρακάτω σχήματα να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των σημείων *Κ, Λ, Μ* και *Ν*.

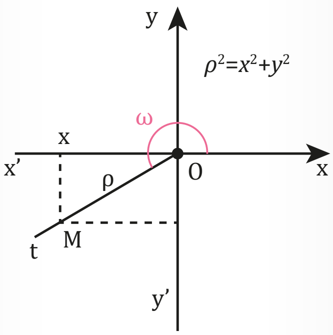




Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας μεταξύ 0° και 360°

Έστω μια γωνία ω με $0^o \le \omega \le 360^o$. Σε ένα σύστημα συντεταγμένων παίρνουμε τη γωνία $x\hat{O}t=\omega$, όπως στο σχήμα. Για να την ξεχωρίζουμε από την γωνία φ, η οποία συμβολίζεται ομοίως $x\hat{O}t$, θεωρούμε ότι η πλευρά της Ox στρέφεται περί το O μέχρι να συμπέσει με την πλευρά Ot με την αντίθετη φορά της κίνησης των δεικτών του ρολογιού. Η Ox λέγεται αρχική πλευρά της γωνίας ω και η Ot λέγεται τελική πλευρά της.

Επεκτείνουμε την έννοια των τριγωνομετρικών αριθμών, που μάθαμε για οξεία γωνία, για γωνία ω με $0^o \le \omega \le 360^o$, ως εξής:



ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν $M(x, y)$ είναι τυχαίο σημείο της τελικής πλευράς Οt της γωνίας ω με $OM = \rho > 0$, τότε ορίζουμε

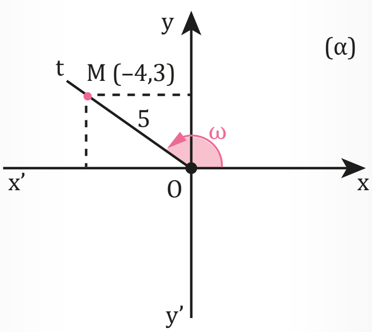
$$\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho},\ \ \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho},\ \ \varepsilon\varphi\omega = \frac{y}{x}\ \text{ με } x \neq 0 \ \text{ και } \sigma\varphi\omega = \frac{x}{y}\ \text{ με } y \neq 0.$$

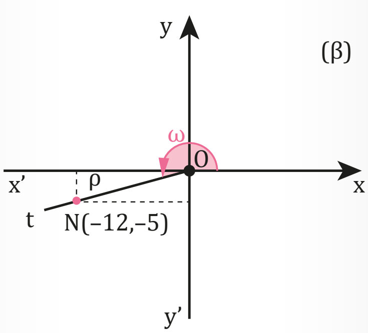
Παρατηρήσεις

1. Τα x, y, ρ συνδέονται με την σχέση: $\rho^2 = x^2 + y^2$
2. Για τις γωνίες 0^o και 180^o δεν ορίζεται συνεφαπτομένη, ενώ για τις γωνίες 90^o και 270^o δεν ορίζεται εφαπτομένη.

Παράδειγμα 1

Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών που σημειώνονται στα διπλανά σχήματα (α) και (β):





Λύση

(α) Είναι $M(-4,3)$, $x = -4$, $y = 3$ και $\rho = 5$ από τον ορισμό παίρνουμε:

$$\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho} = \frac{3}{5},\quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho} = -\frac{4}{5},\quad \varepsilon\varphi\omega = \frac{y}{x} = -\frac{3}{4}\quad \text{και}\quad \sigma\varphi\omega = \frac{x}{y} = -\frac{4}{3}$$

(β) Πρώτα υπολογίζουμε το $\rho = ON$. Είναι

$$\rho^2 = x^2 + y^2 = (-12)^2 + (-5)^2 = 169.$$

Επομένως

$$\rho = \sqrt{169} = 13$$

Με $x = -12$, $y = -5$ και $\rho = 13$ έχουμε:

$$\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho} = -\frac{5}{13},\quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho} = -\frac{12}{13},\quad \varepsilon\varphi\omega = \frac{y}{x} = \frac{5}{12},\quad \sigma\varphi\omega = \frac{x}{y} = \frac{12}{5}$$

Ασκήσεις 3, 4 και 5

Οι τιμές των ημω και συνω

Για κάθε γωνία ω είναι $|y| \leq \rho$. Επομένως $\frac{|y|}{\rho} \leq 1$, δηλαδή $|\eta\mu\omega| \leq 1$.

Ομοίως προκύπτει ότι $|\sigma\upsilon\nu\omega| \leq 1$.
Επομένως είναι

$$|\eta\mu\omega| \leq 1 \quad \text{και} \quad |\sigma\upsilon\nu\omega| \leq 1$$

Οι σχέσεις γράφονται και ως:

$$-1 \leq \eta\mu\omega \leq 1 \quad \text{και} \quad -1 \leq \sigma\upsilon\nu\omega \leq 1$$

Άσκηση 6

Το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών

Το πρόσημο του συνημίτονου και του ημιτόνου στα τέσσερα τεταρτημόρια, είναι ίδιο με το πρόσημο σε αυτά των συντεταγμένων x και y αντίστοιχα. Η εφαπτομένη και η συνεφαπτομένη έχουν θετικό πρόσημο στο 1ο και 3ο τεταρτημόριο, όπου οι συντεταγμένες x και y είναι ομόσημες, και, έχουν αρνητικό πρόσημο στο 3ο και 4ο τεταρτημόριο, όπου οι συντεταγμένες x και y είναι ετερόσημες. Έτσι, έχουμε τον επόμενο πίνακα προσήμων:

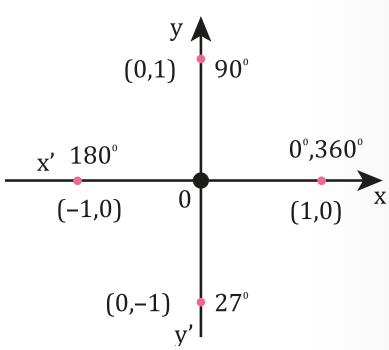
Πρόσημα τριγ. Αριθμών

	ημω	*συνω*	*εφω*	*σφω*
1ο τεταρτημόριο	+	+	+	+
2ο τεταρτημόριο	+	-	-	-
3ο τεταρτημόριο	-	-	+	+
4ο τεταρτημόριο	-	+	-	-

Άσκηση 7

Παράδειγμα 2

Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών, με τελική πλευρά έναν από τους ημιάξονες του συστήματος συντεταγμένων.



Λύση

Ζητάμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών 0^o, 90^o, 180^o, 270^o και 360^o, εφόσον ορίζονται. Πάνω στους ημιάξονες παίρνουμε τα σημεία τους $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ και $(0,-1)$, όπως στο σχήμα. Επειδή $\rho=1$, παίρνουμε:

$$\sigma\upsilon\nu 0^o=\frac{1}{1}=1,\ \eta\mu 0^o=\frac{0}{1}=0,\ \varepsilon\varphi 0^o=\frac{0}{1}=0$$

Δεν ορίζεται η συνεφαπτομένη γωνίας 0^o, 180^o και 360^o.

Εργαζόμενοι ομοίως για τις άλλες γωνίες, συμπληρώνουμε τον επόμενο πίνακα:

Τριγ. Αριθμοί Βασικών γωνιών

Γωνία	0^o	90^o	180^o	270^o	360^o
ημω	0	1	0	-1	0
συνω	1	0	-1	0	1
εφω	0	-	0	-	0
σφω	-	0	-	0	-

Άσκηση 8

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Ασκήσεις κατανόησης

1. Να χαρακτηρίσετε σαν αληθή ή ψευδή κάθε μία από τις επόμενες προτάσεις των ασκήσεων 1 έως 5:

(α) Αν $90^o < \omega < 180^o$ τότε $\sigma\upsilon\nu\omega > 0$.

(β) Υπάρχει γωνία ω με $\sigma\upsilon\nu\omega = 2$.

(γ) Αν το σημείο $M(1,-1)$ ανήκει στην τελική πλευρά γωνίας ω, τότε είναι

$$\rho = \sqrt{2},\ \eta\mu\omega = \frac{1}{\sqrt{2}} \ \text{ και } \ \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(δ) Είναι $\sigma\upsilon\nu 360^o = \sigma\upsilon\nu 0^o = 1$

(ε) Η τελική πλευρά των γωνιών με θετική εφαπτομένη βρίσκεται στο 1^o ή στο 3^o τεταρτημόριο.

2. Να απαντήσετε στις ερωτήσεις:

(α) Πως ορίζονται τα $\eta\mu\omega$ και $\sigma\upsilon\nu\omega$ μιας γωνίας ω;

(β) Ορίζεται για όλες τις γωνίες εφαπτομένη; Αν όχι, δώσε κατάλληλο αντιπαράδειγμα.

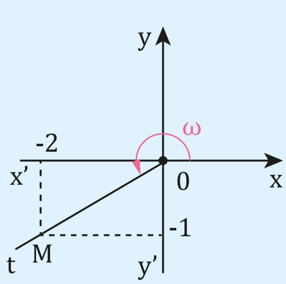
(γ) Ποια σχέση συνδέει τα x, y, ρ;

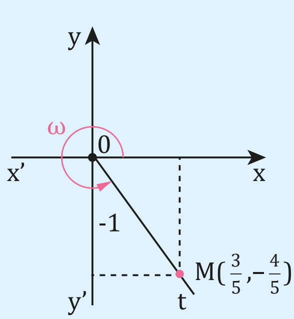
(δ) Ποιες γωνίες ω με $0^o \le \omega \le 360^o$ έχουν (i) $\eta\mu\omega = 0$ (ii) $\eta\mu\omega = 1$;

(ε) Ποιες είναι οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει το ημίτονο το συνημίτονο μιας γωνίας;

Ασκήσεις ανάπτυξης

3. Σε καθένα από τα επόμενα σχήματα, να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω:





4. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω, όταν στην τελική της πλευρά ανήκει το σημείο

(α) $M(-6,8)$ (β) $M(12,-5)$

5. Η τελική πλευρά γωνίας ω, με $0^o \le \omega \le 360^o$, ανήκει στο δεύτερο τεταρτημόριο και περιέχει το σημείο $M(-1,y)$. Αν $OM = \sqrt{2}$, να βρείτε το y

και τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

6. Να βρείτε, αν υπάρχει, το ημίτονο μιας γωνίας, αν είναι ρίζα της εξίσωσης

$$x^2 - 5x + 2 = 0$$

7. Σε ποιο τεταρτημόριο ανήκει η τελική πλευρά μιας γωνίας ω, όταν έχει:

(α) $\eta\mu\omega > 0$ και $\sigma\upsilon\nu\omega < 0$

(β) $\eta\mu\omega > 0$ και $\varepsilon\varphi\omega < 0$

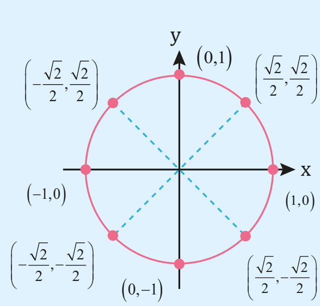
(γ) $\sigma\upsilon\nu\omega > 0$ και $\eta\mu\omega < 0$;

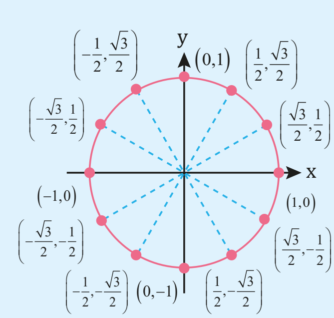
8. Έστω μια γωνία ω, με $0^o \le \omega \le 360^o$. Μελετώντας τον πίνακα του παραδείγματος 2, να απαντήσετε στις ερωτήσεις:

(α) Αν $\eta\mu\omega = 1$, ποια είναι η τιμή του $\sigma\upsilon\nu\omega$;

(β) Αν δεν ορίζεται η συνεφαπτομένη της, ποια είναι η τιμή της εφαπτομένης της;

9. Στα επόμενα σχήματα να βρείτε τις γωνίες μεταξύ και που η τελική τους πλευρά περιέχει ένα από τα σημεία των οποίων δίνονται οι συντεταγμένες. Ποια είναι η σημασία των συντεταγμένων αυτών;





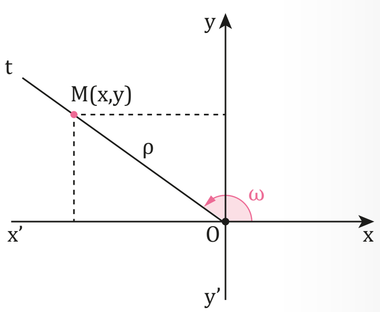
5.8 Βασικές Τριγωνομετρικές Ταυτότητες

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε τις βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες:

$$\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1,\quad \varepsilon\varphi\omega=\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \text{ με } \sigma\upsilon\nu\omega\neq 0 \text{ και } \sigma\varphi\omega=\frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} \text{ με } \eta\mu\omega\neq 0$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Για κάθε γωνία ω ισχύει $\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1$.



Απόδειξη

Έστω η γωνία ω με τελική πλευρά Ot και το σημείο $M(x,y)$ της Ot.
Είναι

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega+\eta\mu^2\omega=\left(\frac{x}{\rho}\right)^2+\left(\frac{y}{\rho}\right)^2=\frac{x^2+y^2}{\rho^2}=\frac{\rho^2}{\rho^2}=1$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Από το θεώρημα προκύπτει ότι:

$$\eta\mu^2\omega=1-\sigma\upsilon\nu^2\omega \quad \text{ή} \quad \eta\mu\omega=\pm\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\omega}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega=1-\eta\mu^2\omega \quad \text{ή} \quad \sigma\upsilon\nu\omega=\pm\sqrt{1-\eta\mu^2\omega}$$

Η επιλογή του προσήμου εξαρτάται από το τεταρτημόριο που ανήκει η τελική πλευρά της γωνίας ω.

Πρόταση

α. Για κάθε γωνία ω, με $\sigma\upsilon\nu\omega\neq 0$, είναι $\varepsilon\varphi\omega=\dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$

β. Για κάθε γωνία ω, με $\eta\mu\omega\neq 0$, είναι $\sigma\varphi\omega=\dfrac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$

Απόδειξη

Έστω η γωνία ω με τελική πλευρά Ot και το σημείο $M(x,y)$ της Ot.

Είναι $\quad \varepsilon\varphi\omega=\dfrac{y}{x}=\dfrac{\frac{y}{\rho}}{\frac{x}{\rho}}=\dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \quad$ και $\quad \sigma\varphi\omega=\dfrac{y}{x}=\dfrac{\frac{x}{\rho}}{\frac{y}{\rho}}=\dfrac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Η $\varepsilon\varphi\omega$ και η $\sigma\varphi\omega$, όταν ορίζονται και οι δύο, είναι αντίστροφοι αριθμοί, έχουν δηλαδή γινόμενο 1. Αν είναι γνωστή η μία από αυτές, τότε η άλλη είναι ο αντίστροφος αριθμός της, ενώ, αν η μία είναι μηδέν, η άλλη δεν ορίζεται.

Παραδείγματα

Αν $\varepsilon\varphi\omega=\frac{4}{3}$, τότε $\sigma\varphi\omega=\frac{3}{4}$.

Αν $\sigma\varphi\omega=-\frac{\sqrt{3}}{3}$, τότε $\varepsilon\varphi\omega=-\frac{3}{\sqrt{3}}=-\sqrt{3}$.

Αν $\varepsilon\varphi\omega=0$, τότε δεν ορίζεται η συνεφαπτομένη της ω.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Ως εφαρμογές των παραπάνω, θα δούμε πώς βρίσκουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μια γωνίας, όταν δίνεται ο ένας από αυτούς. Έχουμε δύο κύριες κατηγορίες. Στην μία δίνεται το ημίτονο ή το συνημίτονο της γωνίας και στην άλλη δίνεται η εφαπτομένη ή η συνεφαπτομένη της.

Εφαρμογή 1

Αν $\eta\mu\omega=-\frac{3}{5}$ και $180^o<\omega<270^o$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

Λύση

Από το βασικό θεώρημα $\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1$ έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega=1-\eta\mu^2\omega=1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$$

Επομένως $\sigma\upsilon\nu\omega=\pm\sqrt{\frac{16}{25}}=\pm\frac{4}{5}$. Επειδή η τελική πλευρά της γωνίας ανήκει στο 3^o τεταρτημόριο είναι $\sigma\upsilon\nu\omega<0$, οπότε επιλέγουμε $\sigma\upsilon\nu\omega=-\frac{4}{5}$. Είναι λοιπόν:

$$\varepsilon\varphi\omega=\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}=\frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=\frac{3}{4} \quad \text{και} \quad \sigma\varphi\omega=\frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}=\frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}=\frac{4}{3}.$$

Άρα $\sigma\upsilon\nu\omega=-\frac{4}{5}$ $\varepsilon\varphi\omega=\frac{3}{4}$ και $\sigma\varphi\omega=\frac{4}{3}$.

Ασκήσεις 2 και 3

Εφαρμογή 2

Αν $\varepsilon\varphi\omega=-\frac{5}{12}$ και $270^o<\omega<360^o$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

Λύση

Επειδή η $\varepsilon\varphi\omega$ και η $\sigma\varphi\omega$ είναι αντίστροφοι αριθμοί, παίρνουμε $\sigma\varphi\omega=-\frac{12}{5}$.

Έχουμε:

$$\varepsilon\varphi\omega=-\frac{5}{12} \text{ ή } \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}=-\frac{5}{12}, \text{ οπότε } \eta\mu\omega=-\frac{5}{12}\sigma\upsilon\nu\omega \quad \textbf{(1)}$$

Από το βασικό θεώρημα $ημ^2ω+συν^2ω=1$, λόγω της **(1)**, παίρνουμε:

$$\left(-\frac{5}{12}συνω\right)^2+συν^2ω=1 \text{ ή } \frac{25}{144}συν^2ω+συν^2ω=1 \text{ ή } \frac{169}{144}συν^2ω=1$$

Επομένως $συν^2ω=\frac{144}{169}$, οπότε $συνω=\pm\frac{12}{13}$

Επειδή $270^o<ω<360^o$, είναι $συνω>0$. Έτσι $συνω=\frac{12}{13}$.
Τέλος, από την (1) παίρνουμε:

$$ημω=-\frac{5}{12}συνω=-\frac{5}{12}\cdot\frac{12}{13}=-\frac{5}{13}.$$

Άρα $σφω=-\frac{12}{5}$, $συνω=\frac{12}{13}$ και $ημω=-\frac{5}{13}$.

Ασκήσεις 4 , 5 και 6

Εφαρμογή 3

Να αποδείξετε ότι:

$$συν^4ω-ημ^4ω=συν^2ω-ημ^2ω=2συν^2ω-1$$

Λύση

Είναι:

$$\begin{aligned} συν^4ω-ημ^4ω &= (συν^2ω)^2-(ημ^2ω)^2 \\ &= (συν^2ω+ημ^2ω)(συν^2ω-ημ^2ω) \\ &= συν^2ω-ημ^2ω \end{aligned}$$

$$συν^2ω+ημ^2ω=1$$

Έτσι αποδείξαμε την πρώτη ισότητα

$$συν^4ω-ημ^4ω=συν^2ω-ημ^2ω$$

Στην συνέχεια, επειδή $ημ^2ω=1-συν^2ω$ η παραπάνω ισότητα γίνεται

$$\begin{aligned} συν^4ω-ημ^4ω &= συν^2ω-ημ^2ω \\ &= συν^2ω-(1-συν^2ω) \\ &= συν^2ω-1+συν^2ω \\ &= 2συν^2ω-1 \end{aligned}$$

Άρα $συν^4ω-ημ^4ω=συν^2ω-ημ^2ω=2συν^2ω-1$

Ασκήσεις 7, 8, 9, 10 ,11, 12, 13, 14, 15, 16 και 17

Τριγωνομετρικές ταυτότητες

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Ασκήσεις κατανόησης

1. Να χαρακτηρίσετε σαν αληθή ή ψευδή κάθε μία από τις επόμενες προτάσεις;

(α) Η εφαπτομένη μιας γωνίας και η συνεφαπτομένη της είναι αντίστροφοί αριθμοί.

(β) Είναι $\eta\mu\omega = \pm\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\omega}$

(γ) Αν $\varepsilon\varphi\omega = \frac{3}{4}$, τότε $4\eta\mu\omega = 3\sigma\upsilon\nu\omega$.

(δ) Αν $\eta\mu\omega = 1$, τότε $\sigma\upsilon\nu\omega = 0$.

(ε) Υπάρχει γωνία ω με $\eta\mu\omega = \frac{2}{3}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{1}{3}$.

Ασκήσεις ανάπτυξης

2. Αν $\eta\mu\omega = -\frac{12}{13}$ και $180^o < \omega < 270^o$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

3. Αν $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{7}{25}$ και $180^o < \omega < 360^o$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

4. Αν $\varepsilon\varphi\omega = \frac{12}{13}$ και $180^o < \omega < 270^o$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

5. Αν $60\eta\mu\omega - 11 = 0$ και $90^o < \omega < 270^o$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

6. Στην τελική πλευρά γωνίας ω υπάρχει σημείο της M με $OM = 1$, τετμημένη $\frac{40}{41}$ και αρνητική τεταγμένη. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

7. Αν $x = 2\eta\mu\theta$ και $y = 2\sigma\upsilon\nu\theta$, να αποδείξετε ότι $x^2 + y^2 = 4$.

8. Αν $x = -3\eta\mu\theta$ και $y = 4\sigma\upsilon\nu\theta$, να αποδείξετε ότι $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$.

9. Να αποδείξετε ότι:

(α) $(\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega)^2 = 1 + 2\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega$

(β) $\frac{1-\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{1+\eta\mu\omega}$

(γ) $\varepsilon\varphi\omega + \sigma\varphi\omega = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\omega\eta\mu\omega}$

(δ) $\eta\mu^4\omega + \sigma\upsilon\nu^4\omega = 1 - 2\eta\mu^2\omega\sigma\upsilon\nu^2\omega$

(ε) $\sigma\upsilon\nu^4\omega - \eta\mu^4\omega = \sigma\upsilon\nu^2\omega - \eta\mu^2\omega = 2\sigma\upsilon\nu^2\omega - 1$

10. Να αποδείξετε ότι:

(α) $\frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{1-\eta\mu\omega} - \frac{1-\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = 2\varepsilon\varphi\omega$

(β) $\frac{1+\varepsilon\varphi\omega}{1-\varepsilon\varphi\omega} = \frac{\sigma\varphi\omega+1}{\sigma\varphi\omega-1}$

(γ) $\frac{\eta\mu^4\omega - \eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^4\omega - \sigma\upsilon\nu^2\omega} = 1$

11. Αν $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = \alpha$, να αποδείξετε ότι $\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x = \frac{\alpha^2 - 1}{2}$.

12. Αν $0^o < \theta < 90^o$, να αποδείξετε ότι $\varepsilon\varphi\omega + \sigma\varphi\omega \geq 2$.

13. Να αποδείξετε ότι $\frac{\eta\mu\omega}{1+\sigma\upsilon\nu\omega} + \frac{\eta\mu\omega}{1-\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{2}{\eta\mu\omega}$

5.9 Ανακεφαλαιώση

Στην ενότητα αυτή περιλαμβάνονται δραστηριότητες και προβλήματα για περαιτέρω αναζητήσεις και διευρύνσεις των μαθητών/μαθητριών, με στόχο την εμβάθυνση στην κατανόηση των Προσδοκώμενων Μαθησιακών Αποτελεσμάτων του κεφαλαίου.

1. Να απαντήσετε στις επόμενες ερωτήσεις αιτιολογώντας, όπου χρειάζεται, την απάντησή σας:

(α) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{x^2+1}$;

(β) Είναι δυνατόν μια κατακόρυφη ευθεία να μη τέμνει την γραφική παράσταση μιας συνάρτησης;

(γ) Ποια είναι η κλίση της ευθείας $y=-3x+4$;

(δ) Είναι οι ευθείες $y=2x+3$ και $y-2x=7$ παράλληλες;

(ε) Ποια είναι η κορυφή και ποιος ο άξονας συμμετρίας της παραβολής $y=2x^2$;

(στ) Η συνάρτηση $f(x)=x^2+\beta x+\gamma$ έχει ρίζες το 1 και το 3. Ποιο είναι το πρόσημό της; Τι πρόσημο έχει στο διάστημα (4, 6);

(ζ) Πως ορίζεται το ημίτονο και το συνημίτονο μιας γωνίας μεταξύ 0^o και 360^o;

(η) Γιατί δεν ορίζεται η εφαπτομένη των 90^o;

(θ) Να αποδείξετε ότι $\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1$

(ι) Ποιο είναι το πρόσημο του ημιτόνου στα διάφορα τεταρτημόρια;

(ια) Αν $\eta\mu\omega=1$ τι τιμή έχει το $\sigma\upsilon\nu\omega$;

(ιβ) Αν $\varepsilon\varphi\omega=0$, ορίζεται η $\sigma\varphi\omega$;

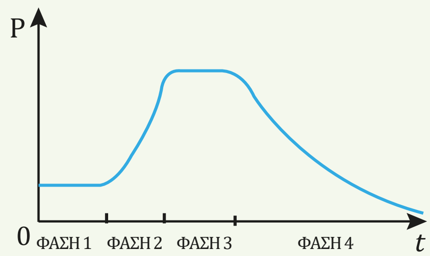
Ασκήσεις

2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων

$$f(x)=\sqrt{x-1},\quad g(x)=\frac{1}{x-2}\quad \text{και}\ h(x)=\sqrt{x-1}+\frac{1}{x-2}$$

3. Κοινωνία βακτηριδίων

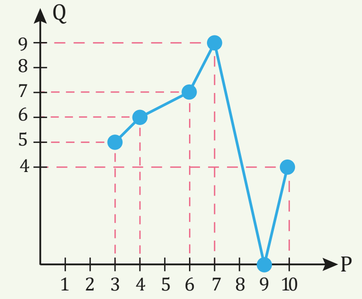
Στο σχήμα βλέπουμε τέσσερις φάσεις στην εξέλιξη
μιας κοινωνίας βακτηριδίων.



Τι συμπέρασμα βγάζετε για τον πληθυσμό P των βακτηρίων σε κάθε μία από τις φάσεις αυτές;

4. Συμμεταβολή ποσοτήτων

Στο σχήμα μία ποσότητα Q μεταβάλλεται συναρτήσει
μιας ποσότητας P.



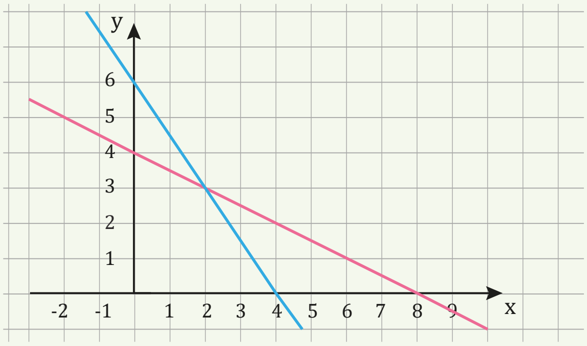
(α) Ποια είναι η τιμή του Q όταν P = 3;

(β) Ποια είναι η μικρότερη και ποια η μεγαλύτερη τιμή του Q;

(γ) Ποια τιμή του Q είναι πιο μεγάλη αυτή που αντιστοιχεί στην τιμή P = 6 ή αυτή που αντιστοιχεί στην τιμή P = 8;

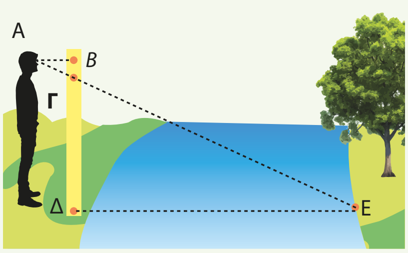
5. Αναγκαία συνάντηση

Στο σχήμα δίνονται δύο ευθείες. Να βρείτε τις εξισώσεις τους και το κοινό τους σημείο.



6. Το πλάτος του ποταμού.

Ο Γιώργος για να υπολογίσει το πλάτος του ποταμού
χρησιμοποίησε την ράβδο ΒΔ του σχήματος. Μέτρησε ΒΔ = 170cm, ΒΓ = 20cm και ΑΒ = 60cm.

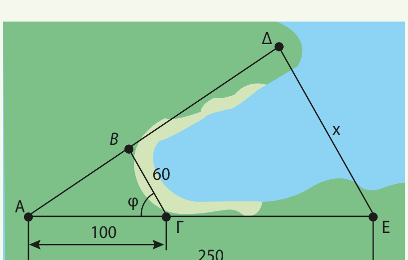


(α) Ποια είναι η $εφω$, όπου $ω = \widehat{ΓΑΒ}$;

(β) Αν $\widehat{ΓΕΔ} = ω$, ποιο είναι το πλάτος ΔΕ του ποταμού;

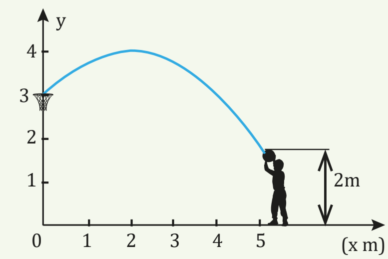
7. Τοπογραφία και Μαθηματικά

Η Μαρία είναι τοπογράφος. Για να υπολογίσει την απόσταση ΓΔ με το σχέδιο του σχήματος μέτρησε και βρήκε: ΑΓ = 100m, ΑΕ = 250m και ΒΓ = 60m. Ο σχεδιασμός της έγινε, ώστε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ να είναι ορθογώνια.



Για να βοηθήσετε την Μαρία, να βρείτε το $συνφ$ και στην συνέχεια το $x = ΔΕ$.

8. Μαθηματικά τρίποντα



Η τροχιά της μπάλας στο σχήμα είναι παραβολική με εξίσωση $y = αx^2 + βx + γ$. Στο μοντέλο αυτό το καλάθι έχει συντεταγμένες (0, 3) και η μπάλα στο χέρι του παίχτη (5, 2). Το μέγιστο ύψος της μπάλας είναι 4m, στην x = 2m.

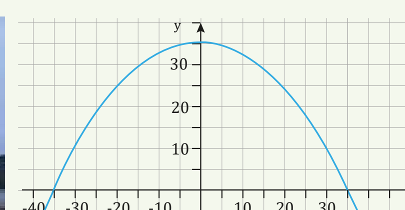
(α) Να βρείτε το γ.

(β) Να δείξετε ότι $4α + 2β = 1$ και $25α + 5β = -1$

(γ) Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής.

9. Μαθηματικά και αρχιτεκτονική

Το σχήμα του μικρότερου τόξου του κτιρίου προσεγγίζεται από μια παραβολή με εξίσωση $y = αx^2 + γ$, της οποίας δίνεται γραφική παράσταση.



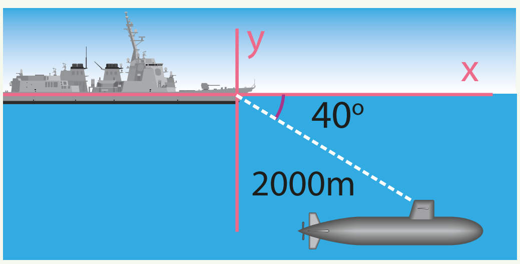
(α) Ποιο είναι το ύψος της κορυφής του τόξου; Ποια είναι η τιμή του $γ$;

(β) Ποιες είναι οι ρίζες της εξίσωσης $αx^2 + γ = 0$; Ποιο είναι το πλάτος της βάσης του κτιρίου; Ποια είναι η τιμή του $α$;

(γ) Το μεγαλύτερο τόξο είναι κατά 10 μέτρα ψηλότερο από το μικρότερο. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής του μεγαλύτερου τόξου.

10. Ναυτικά γυμνάσια

Το ραντάρ του πλοίου εντόπισε το υποβρύχιο σε απόσταση 2000 μέτρα μακριά του και με γωνία 40^o, όπως φαίνεται στην εικόνα. Αν είναι γνωστό ότι $ημ320^o \approx -0{,}643$, να βρείτε το βάθος στο οποίο βρίσκεται το υποβρύχιο.



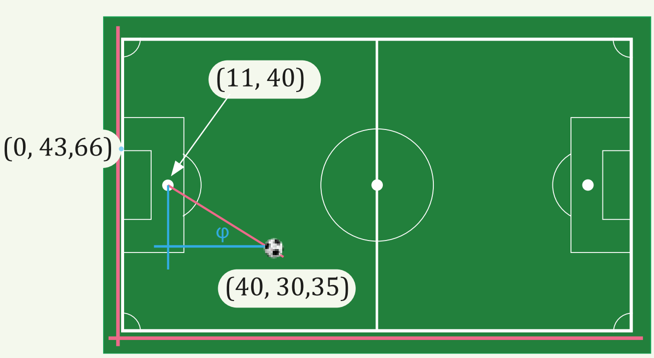
11. Δοκάρι και ... μέσα

Ο ποδοσφαιριστής από την θέση με συντεταγμένες (40, 30,35) σημαδεύει με την μπάλα το σημείο του πέναλτι (11, 40).

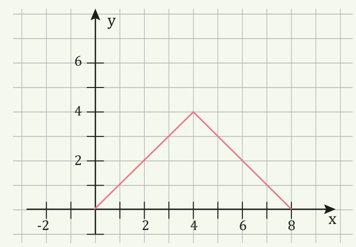
(α) Να βρείτε την εξίσωση της τροχιάς της μπάλας.

(β) Να βρείτε το μήκος της μπαλιάς του ποδοσφαιριστή.

(γ) Αν δεν παρεμβληθεί εμπόδιο στην μπάλα, να εκτιμήσετε αν κτυπήσει στο δοκάρι που συντεταγμένες (0, 43,66)

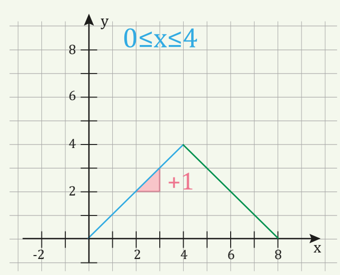


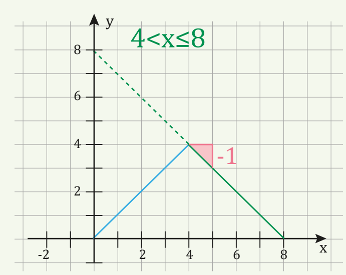
12. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης.



Με την βοήθεια των επόμενων σχημάτων να αποδείξετε ότι

(α) Η συνάρτηση είναι $f(x) = \begin{cases} x, & αν\ 0 \le x \le 4 \\ -x+8, & αν\ 4 \le x \le 8 \end{cases}$





(β) Η γραφική παράσταση αποτελείται από δύο ίσα και

κάθετα ευθύγραμμα τμήματα.

(γ) Ο τύπος της συνάρτησης παίρνει τη μορφή

$f(x) = 4 - |x-4|$ με $0 \le x \le 8$

(δ) Η συνάρτηση που έχει γραφική παράσταση συμμέτρική με την γραφική παράσταση της φ, ως προς τον άξονα των τετμημένων είναι η

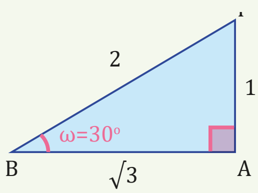
$g(x) = |x-4| - 4$ με $x \in [0,8]$

(ε) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να χαράξετε τις γραφικές

παραστάσεις των f και g.

Τι σχήμα προκύπτει από τις γραφικές παραστάσεις;

Συμμετρική συνάρτηση ως προς χ΄χ.



13. Αναγωγή στο πρώτο τεταρτημόριο

Στη συνέχεια θα μάθουμε να υπολογίζουμε τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνιών μεγαλύτερων των 90^o συναρτήσει των τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας μεταξύ 0^o και 90^o. Η διαδικασία αυτή λέγεται αναγωγή στο πρώτο τεταρτημόριο.

Οι γωνίες ω και $90^o+\omega$, **με διαφορά** 90^o.

Ας επανέλθουμε στη δραστηριότητα που είδαμε στην αρχή της ενότητας, από την οποία μεταφέρουμε τα δύο διπλανά σχήματα.

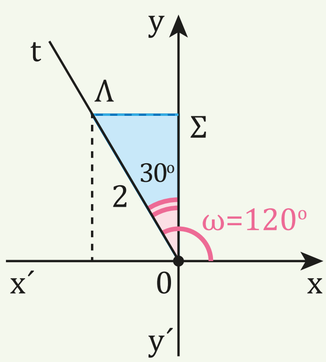
Έστω οι γωνίες 120^o και 30^o που διαφέρουν κατά 90^o.

Είναι εύκολα αντιληπτό, ότι το ορθογώνια τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΣΟΛ$ είναι ίσα. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι το σημείο Λ με τις συντεταγμένες του είναι

$$Λ(-1,\sqrt{3})$$

Επομένως

$$\eta\mu 120^o=\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ και } \sigma\upsilon\nu 120^o=-\frac{1}{2}$$



Παρατηρούμε ότι

$$\eta\mu 120^o=\sigma\upsilon\nu 30^o \text{ και } \sigma\upsilon\nu 120^o=-\eta\mu 30^o$$

Το συμπέρασμα αυτό δεν είναι τυχαίο. Γενικεύεται για τις γωνίες $90^o+\omega$ και ω.

Να αποδείξετε ότι:

$$\eta\mu(90^o+\omega)=\sigma\upsilon\nu\omega \text{ και } \sigma\upsilon\nu(90^o+\omega)=-\eta\mu\omega$$

Παράδειγμα

Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας 150^o.

Λύση

Παρατηρούμε ότι $150^o=90^o+60^o$. Άρα

$$\eta\mu 150^o=\eta\mu(90^o+60^o)=\sigma\upsilon\nu 60^o=\frac{1}{2},$$

$$\sigma\upsilon\nu 150^o=\sigma\upsilon\nu(90^o+60^o)=-\eta\mu 60^o=-\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\varepsilon\varphi 150^o=\frac{\eta\mu 150^o}{\sigma\upsilon\nu 150^o}=-\frac{\sqrt{3}}{3}, \qquad \sigma\varphi 150^o=\frac{\sigma\upsilon\nu 150^o}{\eta\mu 150^o}=-\sqrt{3}$$

Αναγωγή στο πρώτο τεταρτημόριο

Γωνίες με διαφορά 180^o και 270^o.

Εργαζόμενοι, όπως παραπάνω, βρίσκουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών 210^o και 300^o κάνοντας την παρατήρηση, ότι $210^o=180^o+30^o$ και $300^o=270^o+30^o$. **Να αποδείξετε ότι:**

$$\eta\mu(180^o+\omega)=-\eta\mu\omega,\ \sigma\upsilon\nu(180^o+\omega)=-\sigma\upsilon\nu\omega$$
$$\eta\mu(270^o+\omega)=-\sigma\upsilon\nu\omega,\ \sigma\upsilon\nu(270^o+\omega)=\eta\mu\omega$$

Υποδείξεις - Απαντήσεις ασκήσεων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Παράγραφος 1.1

1. Ψ, Α, Α, Α, Α, Ψ
2. (α) $A \subseteq B$, στοιχείο του Β, (β) ακριβώς ένα, (γ) ίσα
4. (α) Έχουν τα ίδια στοιχεία, (β) κάθε στοιχείο του πρώτου συνόλου είναι και στοιχείο του δεύτερου
5. (α) $A=\{-1,1\}$, (β) $B=\{1,2,3,6\}$, (γ) $\Gamma=\{A,B,\Gamma,E,\Lambda,P\}$, (δ) $\Delta=\{1001,1002,1003,......\}$, (ε) $E=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$
6. $\{\alpha\}$, $\{\beta\}$, Α, $\varnothing$
7. $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{1,2,3,6,7,9\}$, $\Gamma=\{0,1,8,9,10\}$
10. (α) $\{x|x$ κάτοικος Ελλάδας $\}$, (β) $\{x|x$ ημέρα εβδομάδας $\}$, (γ) $\{x|x$ περιττός μεταξύ του 0 και 20$\}$, (δ) $\{x|x$ δύναμη του 2 με εκθέτη φυσικό $\}$
11. (α) $\{1,2,5,10\}$ (β) $\{x|x$ οι μήνες του έτους $\}$, (γ) $\{x|x$ τα άτομα του μορίου του θειικού οξέος $\}$, ή $\{H,\Sigma,O\}$
12. (α) $A=\{-2,2\}$, $B=\{-2\}$ (β) $A\cap B=\{-2\}$, $A\cup B=\{-2,2\}$

Παράγραφος 1.2

1. Α, Ψ, Α, Α, Α
2. Το $\varnothing \subseteq A, A\cap B, A\cup B$, $A\cap B\subseteq A, A\cup B$, $A\subseteq A\cup B$
3. Η διαφορά $A-B$ περιέχει όλα τα στοιχεία του Α που δεν είναι στοιχεία του Β
4. $A\cap B=\{\gamma\}$, $A\cup B=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\}$,
5. $A\cap B=\varnothing$, $A\cup B=\mathbf{n}-\{0\}$,
6. $A=\{x|x$ πρόσημο $\}$ $\{-\}$, $\{+\}$, $\varnothing$, Α
7. (α) $A=\{-1,1\}$, $B=\{0,1,2\}$
   (β) $A\cap B=\{x|x\in A$ και $x\in B\}=\{1\}$,
   $A\cup B=\{x|x\in A$ ή $x\in B\}=\{-1,0,1,2\}$
8. (α) $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$,
   $A'=\{6,7,8,...,25\}$, $B'=\{9,10,11,...,25\}$
   $A\cap B=\{x|x\in A$ και $x\in B\}=\{1,2,3,4,5\}$,
   $A\cup B=\{x|x\in A$ ή $x\in B\}=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$
   $A-B=\varnothing$, $B-A=\{6,7,8\}$

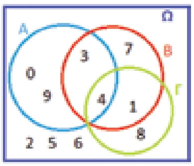
9) (α) $A\cap B=\varnothing$, $A\cup B=\Omega$, (β) $A'=B$, $B'=A$
   (γ) $A-B=A$, $B-A=B$

Παράγραφος 1.3

1.

α	β	γ	δ	ε	στ	ζ	η	θ	ι	ια	ιβ
$\in$	$\subseteq$	$\subseteq$	$\notin$	$=$	$=$	$=$	$=$	$\in$	$\neq$	$\neq$	$=$

2. (α) Δεν είναι σύνολο, η έννοια του γρήγορου είναι υποκειμενική, (β) $\mathbf{n}=\{0,1,2,...\}$
   (γ) το κενό σύνολο δεν έχει κανένα στοιχείο, ενώ το μονομελές έχει ένα ακριβώς στοιχείο.
   (δ) $A=\{x|x$ οι νότες του πενταγράμμου $\}$
3. (α) Γιατί κάθε πολ/σιο του 9, είναι πολ/σιο του 3,
   (β) $A=\{9,18,27,...\}$, $B=\{3,6,9,...\}$,
   (γ) $A\cap B=\{9,18,27,...\}=A$, $A\cup B=\{3,6,9,...\}=B$,
   $A-B=\varnothing$,
4. (α) $A\cup B=\{1,3,4,5,6,7,8\}$, $A\cup\Gamma=\{0,1,3,4,5,6,9\}$,
   $(A\cup B)\cap\Gamma=\varnothing$, $(A\cup B)\cap(A\cup\Gamma)=\{1,3,4,5,6,\}$
   (β) $A'=\{0,2,7,8,9,10\}$, $B'=\{0,1,2,3,9,10\}$,
   $(A\cup B)'=\{0,2,9,10\}$, $A'\cap B'=(A\cup B)'=\{0,2,9,10\}$
5. (β) i) $A\cap B$ ii) $A\cup B$ iii) $(A\cup B)'$
   (γ) $\nu(A\cap\Gamma)=20$, $\nu(A\cup\Gamma)=180+30-20=190$
   $\nu(A\cup\Gamma)'=250-190=60$
6. (α)



   (β) $A\cap B=\{3,4\}$ $B\cup\Gamma=\{1,3,4,7,8,\}$
   $(A\cap B)\cup\Gamma=\{3,4,1,8\}$ $A\cap B\cap\Gamma=\{4\}$
   $A'\cap B'=\{2,5,6,8\}$
   (γ) $P=\{\varnothing,\{1\},\{4\},\{8\},\{1,4\},\{1,8\},\{4,8\},\{1,4,8\}\}$ $\Gamma\subseteq P$

7) Είναι $A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B$ και $A\cap B\subseteq B\subseteq A\cup B$, άρα Α = Β

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Παράγραφος 2.1

2. Α, Α, Ψ, Α, Ψ, Α
3. (α) Είναι περιοδικός δεκαδικός άρα είναι ρητός,
   (β) κάθε ακέραιος μπορεί να γραφεί ως κλάσμα με παρονομαστή 1, (γ) υπάρχει ρητός μεταξύ του 2 και του 3 για παράδειγμα $2{,}5=\frac{5}{2}$
   (δ) ο $2+\sqrt{5}$ είναι ο μέσος όρος των αριθμών 4 και $2\sqrt{5}$,
   (ε) Είναι άρρητος διότι $\frac{\Gamma}{\delta}=\pi$ και ο π άρρητος
4. (α) $\frac{314}{100}$, (β) $\frac{311}{99}$, (γ) $\frac{3}{10}$
5. (α) x,y,z άρρητοι, (β) άρρητος, (γ)ρητός
6. με απαγωγή σε άτοπο
7. (α) $\frac{3}{22}$, (β) $\frac{21}{220}$, (γ) $\frac{447}{198}$

Παράγραφος 2.2

1. Ψ, Ψ, Ψ, Α, Α, Α
2. (α) $x\in(2,5)$, (β) $x\in[-3,5]$, (γ) $x\in(-5,-2)$, (δ) $x\in(-1,1]$, (ε) $x\in(4,+\infty)$, (στ) $x\in(-\infty,0)$, (ζ) $x\in[-7,+\infty)$, (η) $x\in(-\infty,10]$
3. (α) $x\in(-2,-1]$, (β) $x\in[-4,2]$, (γ) $x\in\left(-\infty,\frac{3}{2}\right]$,
   (δ) $x\in(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$
4. (α) $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)=\mathbb{R}^*$,
   (β) $x\in(-\infty,-2)\cup(-2,0)\cup(0,+\infty)$,
   (γ) $x\in(-1,2)\cup(2,+\infty)$,
   (δ) $x\in(-\infty,-1)\cup(\sqrt{3},+\infty)$, (ε) $x\in(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$
   (στ) $x\in\{-1\}\cup(1,+\infty)$

Παράγραφος 2.3

1. Ψ, Α, Ψ, Α, Α, Α
2. (α) $d(\alpha,0)=|\alpha-0|>\frac{1}{2}$, (β) $d(\alpha,4)=|\alpha-4|\leq 3$,
   (γ) $d(4\alpha,0)=|4\alpha-0|=2$
3. (α) θετικού, (β) μηδέν, (γ) αρνητικού, (δ) $|\alpha-\beta|$
4. (α) $\pi-3$, (β) $4-\pi$, (γ) $\sqrt{3}-1$
5. (α) $\pi-1$, (β) 3, (γ) $2-\sqrt{2}$
6. (α) $|x+1|=\begin{cases} x+1 & x\geq -1 \\ -x-1 & x<-1 \end{cases}$ (β) $|x-4|=\begin{cases} x-4 & x\geq 4 \\ -x+4 & x<4 \end{cases}$
7. (α) 1 αν $x>0$ και -1, αν $x<0$ (β) 2, αν $x>0$ και $y>0$, -2 αν $x<0$ και $y<0$, 0 αν $x>0$ και $y<0$, ή αν $x<0$ και $y>0$,
8. $A=1$ 9) $A=\alpha+\gamma$ 10) $A=2(x-y)$
11. (α) $A=3$, (β) $A=2x-5$, (γ) $A=5-2x$
12. (α) $|x-7|=d(x,7)=B\Gamma$, $|x-1|=d(x,1)=BA$
    (β) $A=6$ 13) $\alpha-\beta>0$, άρα $|\alpha-\beta|=\alpha-\beta$

Παράγραφος 2.4

1. Α, Α, Ψ, Α
2. (α) $|\alpha\beta\gamma|=|\alpha(\beta\gamma)|=|\alpha||\beta\gamma|=|\alpha||\beta||\gamma|$, (β) $x\geq 0$,
   (γ) για κάθε $x\in\mathbb{R}$
3. (α) $\alpha\in(-1,1)$, (β) $\alpha\in[-2,2]$, (γ) αδύνατη
4. (α) $\alpha\in(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$,
   (β) $\alpha\in(-\infty,-4]\cup[4,+\infty)$, (γ) αληθεύει για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$
5. (α) $\alpha=-4$ ή $\alpha=4$, (β) $-\frac{1}{2}<\alpha<\frac{1}{2}$,
   (γ) $\alpha\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$
6. (α) $|\alpha|\leq\frac{1}{2}$, (β) $A=1$
7. (α) $|\alpha|<1$, (β) $\alpha-1<0$ και $\alpha+1>0$
8. Χρησιμοποιήστε ότι $|\alpha|\geq\alpha$ και $|\alpha|\geq-\alpha$
9. 2
10. (α) $A=|x|$ (β) $|x|>2$ ή $x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$
11. $|\alpha-2|=|\alpha|+|-2|$, περίπτωση ισότητας στην τριγωνική ανισότητα.
12. Η ισότητα ισχύει όταν $\alpha\beta\leq 0$, 13. και 14. Χρησιμοποιήστε τριγωνική ανισότητα
15. Είναι το μέσο του [α, β]

Παράγραφος 2.5

1. Α, Α, Ψ, Α, Ψ
3. (α) Δεν υπάρχει διαφορά γιατί $\sqrt{7^4}=7^2=49$ και $\left(\sqrt{7}\right)^4=7^2=49$
   (β) Η $\sqrt{\alpha^4}$ ορίζεται για κάθε $\alpha\in\mathbf{R}$ και η $\left(\sqrt{\alpha}\right)^4$ ορίζεται για κάθε $\alpha\geq 0$
4. (α) 4, 5, $\frac{3}{5}$, 343 (β) 2, 3, $\frac{5}{3}$, 0,3 (γ) 1, 16, $\frac{|\alpha|}{9}$
   (δ) 2α, $\frac{4\alpha}{27}$ (ε) $4|\alpha|$
5. (α) 2, 3, (β) 2, x, (γ) 3, $\sqrt[6]{3^5}$ (δ) 2, 0,1
6. (α) 2, (β) 0,05 7) $\alpha=\frac{25}{6}\in\mathbb{Q}$
8. (α) $\sqrt{3}$, (β) $\sqrt[3]{16}$, (γ) $\sqrt[7]{\alpha^2}$, (δ) $\frac{\sqrt[5]{\alpha^3}}{\alpha}$

9. (α) $\frac{5+\sqrt{15}}{2}$, (β) $2(\sqrt{7}-\sqrt{5})$, (γ) $3+2\sqrt{2}$

Παράγραφος 2.6

1. Ψ, Α, Α, Α, Α

2. Το λάθος βρίσκεται στην ισότητα $(-1)^3=(-1)^{\frac{6}{2}}$ αφού δεν ορίζεται δύναμη με ρητό εκθέτη και βάση αρνητική.

3. (α) $\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{3}{5}}$, (β) $\left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{5}{2}$

4. (α) 4, (β) 2, (γ) $\frac{1}{3}$, (δ) 3

5. (α) $\frac{8}{5}$, (β) $\frac{8}{27}$, (γ) $\frac{2}{3}$, (δ) $\frac{27}{8}$

6. (α) 5, 7, 16 (β) $\frac{1}{8}$, 2, 9

7. (α) α^2, (β) α^5, (γ) $\frac{1}{\alpha^4}$, (δ) x

8. 2

9. (α) 36, (β) $\left(\frac{3}{2}\right)^5$

Παράγραφος 2.7

1. Α, Α, Α, Ψ, Α

2. (α) 3, (β) 5, (γ) 2, (δ) $\sqrt[3]{7}$

4. $\alpha=8$

7. (α) θετικός (β) $A^2=2$ και $A=\sqrt{2}$

8. (α) $2-\sqrt{3}$, (β) 2

10. (α) 32, (β) 3, (γ) 1, (δ) $\frac{16}{3125}$

11. (α) 1 (β) 300

12. (α) Ισχύει $\frac{\sqrt{\nu+1}-\sqrt{\nu}}{\sqrt{\nu(\nu+1)}}=\frac{1}{\sqrt{\nu}}-\frac{1}{\sqrt{\nu+1}}$, $\nu\in\mathbb{N}^*$

Παράγραφος 2.8

1. (α) άρρητος αριθμός, (β) $|\alpha-\beta|$, (γ) $|\alpha|=\begin{cases}\alpha & \alpha\geq 0\\ -\alpha & \alpha<0\end{cases}$, (δ) $\sqrt[\nu]{\alpha}$, (ε) $|\alpha|$, (στ) $\sqrt[\nu]{\alpha}$,

2. Ψ, Α, Α, Ψ, Α, Ψ, Α, Ψ, Α, Ψ

3. (α) $x\in\mathbb{R}$, (β) $x\in(-\infty,3]$

4. (α) $5+2\sqrt{6}$, $5-2\sqrt{6}$ (β) χρησιμοποιούμε το (α)

5. (γ) $\alpha=5$ (δ) $\alpha=1-2x$

6. (α) αρκεί $\alpha\beta=1$ (γ) 62

7. (α) $\Phi^2=\Phi+1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ (β) $\frac{1}{\Phi}=\Phi-1=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$
 (γ) αρκεί $\frac{B\Gamma}{BE}=\Phi$

8. $A\Delta=12$, 9. $T=2$, 10. $\varepsilon\cong 1{,}059$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Παράγραφος 3.1

1. (α) $(2x+1)(4x^2-2x+1)=8x^3+1$,
 (β) $(2\alpha-3\beta)(4\alpha^2+6\alpha\beta+9\beta^2)=8\alpha^3-27\beta^3$,
 (γ) $(2x-2)^3=8x^3-24x^2+24x-8$,
 (δ) $(2+2x)^3=8+24x+24x^2+8x^3$

2. Ψ, Α, Ψ, Ψ, Α

3. (α) $x^3+6x^2+12x+8$, (β) $8\alpha^3+12\alpha^2+6\alpha+1$,
 (γ) $1-3\alpha+3\alpha^2-\alpha^3$, (δ) $8\beta^3-12\beta^2\alpha+6\beta\alpha^2-\alpha^3$,
 (ε) $10+6\sqrt{3}$, (στ) $20-14\sqrt{2}$

4. (α) $27x^3+27x^2+9x+1$, (β) $8\beta^3+36\beta^2+54\beta+27$,
 (γ) $8\alpha^3-36\alpha^2\beta+54\alpha\beta^2-27\beta^3$,
 (δ) $8x^3-60x^2+150x-125$,
 (ε) $27\alpha^3-54\alpha^2y+36\alpha y^2-8y^3$,
 (στ) $8x^3y^3-12x^2y^2z+6xyz^2-z^3$

5. (α) $(x+1)(x^2-x+1)$, (β) $(\beta-2)(\beta^2+2\beta+4)$,
 (γ) $(2+y)(4-2y+y^2)$, (δ) $(3-x)(9+3x+x^2)$,
 (ε) $(2x-5)(4x^2+10x+25)$,
 (στ) $(4\alpha+3)(16\alpha^2-12\alpha+9)$

6. (α) x^3+8, (β) $27-\alpha^3$, (γ) x^3-8y^3, (δ) $1+27x^3$

8. (α) α^3, (β) $12x^2+16$ (γ) $12y^2+5y+10$

10. (α) $5\sqrt{2}+7$, $5\sqrt{2}-7$, (β) -2

12. (α) 7, (β) 18 13) (β) 3

Παράγραφος 3.2

1. Α, Α, Ψ, Α

3. (α) $\sqrt[8]{\alpha^7}$, (β) α, (γ) $\alpha\sqrt[3]{\alpha^2}$

5. (α) $\sqrt[4]{\frac{1}{x^5}}$, (β) $\sqrt{x}$, (γ) $\sqrt[12]{\frac{1}{x^5}}$

6. (α) $\alpha-\beta$, (β) $\alpha+1$ 8) 1

9. (α) $2(x+1)$ 10) (β) $d\cong 149.586.073$ Km

Παράγραφος 3.3

1. και 2. Θεωρία.

3. (α) συμφωνούμε. (β) και (γ) πράξεις.
 δ(ii) $V_A=\alpha^3-\beta^3$, $V_B=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$

4. A=-5

5. A= 10, B=1

6. (α) $A=\alpha^{17/18}\beta^{13/18}$, $B=\alpha^{1/18}\beta^{5/18}$
 (β) $A=\sqrt[18]{\alpha^{17}\beta^{13}}$, $B=\sqrt[18]{\alpha\beta^5}$

(γ) $AB=\alpha\beta=1$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Παράγραφος 4.1

1. Ψ, Ψ, Α, Α 2) Ψ, Α, Α, Α
3. (α) $x=\frac{3}{2}$, (β) ταυτότητα, (γ) αδύνατη
4. (α) $x=-3$, (β) ταυτότητα
5. (α) Αν $\lambda\neq 2$, τότε $x=\lambda+2$, αν $\lambda=2$, ταυτότητα

   (β) Αν $\lambda\neq 0$ και $\lambda\neq 2$, τότε $x=1$, αν $\lambda=0$ ή $\lambda=2$, ταυτότητα.

   (γ) Αν $\lambda\neq -1$, τότε $x=\lambda$, αν $\lambda=-1$, ταυτότητα

   (δ) Αν $\lambda\neq 0$ και $\lambda\neq -1$, τότε $x=\frac{\lambda-1}{\lambda}$, αν $\lambda=-1$, ταυτότητα, αν $\lambda=0$, αδύνατη
6. (α) $\lambda=0$, (β) $\lambda=2$
7. (α) $\mu=1$ και $\lambda\neq 2$ (β) $\mu=1$ και $\lambda=2$
8. (α) Αν $\alpha\neq\beta$, τότε $x=2(\alpha+\beta)$, αν $\alpha=\beta$, ταυτότητα

   (β) Αν $\alpha\neq-\beta$, τότε $x=\frac{\alpha+\beta}{6}$, αν $\alpha=-\beta$, ταυτότητα
9. (α) Αν $\alpha\neq-\beta$, τότε $x=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$, αν $\alpha=-\beta$, αδύνατη,

   (β) Αν $\alpha\neq\beta$, τότε $x=-\alpha\beta$, αν $\alpha=\beta$, ταυτότητα
10. (α) Αν $\lambda\neq\pm 2$ ένα κοινό σημείο. Αν $\lambda=2$ κανένα κοινός σημείο, αν $\lambda=-2$ άπειρα κοινά σημεία.

    (β) Αν $\lambda\neq\pm 1$ ένα κοινό σημείο. Αν $\lambda=-1$ κανένα κοινός σημείο, αν $\lambda=1$ άπειρα κοινά σημεία.
11. (α) $5\lambda+24$, (β) 44
12. (α) $x=\frac{15\lambda}{\lambda+15}$, (β) $\frac{60}{7}$ ώρες
13. (α) $600+0{,}01\lambda$, (β) 4000 και 6000
14. (α) $\frac{12s}{23}$ ώρες και $\frac{s}{230}$ ώρες (β) 30 λεπτά,

    (γ) 172,5 km

Παράγραφος 4.2

1. Ψ, Α, Α, Α, Ψ
2. (α) $(x-1)^2\geq 0$, (β) $(x-y)^2\geq 0$, (γ) $(\alpha+1)^2+1>0$,

   (δ) $\left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right)^2\geq 0$
3. (α) $x^2+(y-2)^2\geq 0$, η ισότητα για $x=0$ και $y=2$

   (β) $(x+y)^2\geq 0$, η ισότητα για $y=-x$
4. Πολλαπλασιάζουμε την σχέση με $x>0$,

   η ισότητα για $x=1$
5. (α) $6<2(x+y)<12$, (β) $4<x^2y^2<64$,

   (γ) $-7<x-2y<-2$
6. (α) $2<\frac{y}{x}<4$, $\frac{1}{4}<\frac{x}{y}<\frac{1}{2}$, (β) $10<x^2+y<17$
7. $(\alpha-1)(1-\beta)>0$ που ισχύει αφού $\alpha<1<\beta$
8. (α) Πολλαπλασιάζουμε την σχέση με $\alpha\beta>0$,

   (β) επιμεριστική ιδιότητα και από (α)
9. (Α) προκύπτει $(\alpha-\beta)^2\geq 0$ Ισότητα, όταν $\alpha=\beta$

   Β) (α) Θέτουμε στην (1) $\alpha\to\sqrt{\alpha},\beta\to\sqrt{\beta}$

   (β) Θέτουμε στην (Βα) $\beta\to\frac{1}{\alpha}$

   (γ) Θέτουμε στην (Ββ) $\alpha\to\frac{\alpha}{\beta}$

   (Γ) (α) πολ/ζουμε τις $\alpha+\beta\geq 2\sqrt{\alpha\beta}$, $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\geq 2\sqrt{\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\beta}}$

   (β) προσθέτουμε $\alpha^2+\beta^2\geq 2\alpha\beta$, $\beta^2+\gamma^2\geq 2\beta\gamma$, $\gamma^2+\alpha^2\geq 2\gamma\alpha$

   (γ) πολλ/σιάζουμε $\alpha+\beta\geq 2\sqrt{\alpha\beta}$, $\beta+\gamma\geq 2\sqrt{\beta\gamma}$, $\gamma+\alpha\geq 2\sqrt{\gamma\alpha}$

   (δ) $\alpha+\beta\geq 2\sqrt{\alpha\beta}$, $\gamma+\delta\geq 2\sqrt{\gamma\delta}$ και $\sqrt{\alpha\beta}+\sqrt{\gamma\delta}\geq 2\sqrt{\sqrt{\alpha\beta}\sqrt{\gamma\delta}}$

Παράγραφος 4.3

1. Α, Α, Α, Α
2. (α) 1 και 5, (β) 2 και -4, (γ) -1 και 3 (δ) -2 και 3
3. (α) -6 και 2, (β) 1 και 5
4. (α) $x\in(-1,5)$, (β) $x\in(-5,3)$, (γ) $x\in[0,2]$, (δ) $x\in[0,5]$
5. (α) $x\in(-2,6)$, (β) $x\in(-4,-2)$, (γ) $x\in[-1,9]$
6. (α) $x\in(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$, (β) $x\in(-\infty,-5)\cup(1,+\infty)$,

   (γ) $x\in(-\infty,-1]\cup[7,+\infty)$, (δ) $x\in(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$
7. (α) $x\in(-\infty,2)\cup(6,+\infty)$, (β) $x\in(-\infty,-6)\cup(0,+\infty)$,

   (γ) $x\in(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$, (δ) $x\in(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$
8. (α) -1, (β) $x\in[1,3]$
9. (α) $x\in[-3,-2]\cup[2,3]$, (β) $x\in[-4,0]\cup[2,6]$
10. (α) $-\frac{1}{3}$ και 5, (β) $-\frac{3}{2}$ και $\frac{7}{2}$,
11. (α) -3 και 3, (β) -8 και 2
12. -2 και 2 13) -3 14) $x\in(-1,+\infty)$
15. (α) αν $\lambda<1$, αδύνατη, αν $\lambda\geq 1$, τότε $x=\lambda+1$ ή $x=3-\lambda$

    (β) αν $\lambda\neq 0$, τότε $x=-\frac{2}{\lambda}$ ή $x=-\frac{6}{\lambda}$, αν $\lambda=0$, αδύνατη
16. (α) Αν $\lambda<0$, τότε $x\in\mathbf{R}$,, αν $\lambda=0$, τότε $x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$,

    αν $\lambda>0$, τότε $x\in\left(-\infty,\frac{1-\lambda}{2}\right)\cup\left(\frac{\lambda+1}{2},+\infty\right)$,

    (β) Αν $\lambda\leq 0$, αδύνατη, αν $\lambda>0$, τότε $x\in\left(-1-\frac{1}{\lambda},1-\frac{1}{\lambda}\right)$
17. (α) $\frac{3}{2}$ (β) αν $\lambda\neq 0$, τότε $x=-\frac{4}{\lambda}$, αν $\lambda=0$, αδύνατη

Παράγραφος 4.4

1. (α) μοναδική, $x=\sqrt[\nu]{\alpha}$, (β) $\alpha<0$, μοναδική
2. Α, Ψ, Α, Ψ
3. (α) 1, (β) 2, (γ) 4, (δ) −1, (ε) −3, (στ) −4
4. (α) ±11, (β) ±3, (γ) ±2, (δ) αδύνατη (ε) $-\frac{1}{2}$, (στ) $\frac{1}{5}$
5. (α) −3, ±2 (β) 1, ±2 6) (α) 0 (β) 0 και $-\sqrt[5]{2}$
7. (α) 5, (β) ±1

Παράγραφος 4.5

1. (α) καμία, (β) $\Delta>0$, (γ) $\Delta=0$, (δ) μία ή δύο
2. Α, Α, Α, Α
3. (α) 0 (β) ±3, (γ) ±2, (δ) αδύνατη
4. (α) −1 και 0, (β) 0 και 3, (γ) $-\frac{3}{4}$ και 0,
   (δ) 0 και 2 5) (α) $\pm\sqrt[4]{3}$, (β) 0και $\sqrt{3}$
6. (α) δύο ρίζες, (β) δύο ρίζες, (γ)διπλή ρίζα,
   (δ) δύο ρίζες
7. (α) −1 και 3, (β) $5-3\sqrt{2}$ και $5+3\sqrt{2}$, (γ) $\frac{1}{2}$,
   (δ) αδύνατη 8. (α) α και β, (β) $\sqrt{2}$ και $\sqrt{3}$
9. (α) αδύνατη, (β) 1 και 2
11. (β) −1 και 3
12. (α) Δύο ρίζες (β) αν $\lambda<\frac{4}{3}$, δύο ρίζες,
   αν $\lambda=\frac{4}{3}$, διπλή ρίζα, αν $\lambda>\frac{4}{3}$, αδύνατη
   (γ) αν $\lambda\in(-1,1)$, δύο ρίζες, αν $\lambda=-1$ ή $\lambda=1$,
   διπλή ρίζα, αν $\lambda\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$, αδύνατη
13. (α) ±1, $\pm\sqrt{3}$, (β) ±1, $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, (γ) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, (δ) αδύνατη
14. (α) 1 και 16, (β) $\frac{1}{9}$ και 9, (γ) αδύνατη
15. (α) ±1, (β) $\pm\frac{1}{2}$ και $\pm\frac{1}{3}$
16. (α) $1-\sqrt{3}$ και $1+\sqrt{3}$ (β) $\frac{1}{2}$ και $\frac{3}{2}$, (γ) αδύνατη
17. (α) 1 και 2, (β) $\pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$
18. (α) 1, (β) 65
19. $\alpha=\pm\sqrt{3}$ και $x=\frac{4}{9}$

Παράγραφος 4.6

1. 19, 2. 7m 3. 20 έτη 4. 40 φορές
5. (α) 10 €, 180000€ (β) 13,5 € 6. $x\cong 1{,}866$m

Παράγραφος 4.7

1. (α) $x\in(1,4)$, (β) $x\in(-\infty,1)\cup(4,+\infty)$, (γ) $x\in[1,4]$,
   (δ) $x\in(-\infty,1]\cup[4,+\infty)$,
2. (α)i) το πρόσημο του α, ii) αντίθετο του πρόσημου
   του α, (β) $\alpha x^2+\beta x+\gamma>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
   (γ) i) $\Delta<0$ και $\alpha>0$, ii) $\Delta<0$ και $\alpha<0$,
   (δ) έχει δύο ρίζες άνισες
3. (α) $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$, (β) $x\in\left[-\sqrt{5},\sqrt{5}\right]$,
   (γ) $x\in\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$, (δ) Αδύνατη.
4. (α) $x\in(-\infty,-3]\cup[0,+\infty)$, (β) $x\in\left[0,\frac{7}{3}\right]$,
   (γ) $x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$, (δ) $x\in(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$
5. (α) $x\in(-\infty,2]\cup[3,+\infty)$ (β) $x\in[2,3]$,
   (γ) $x\in\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$ (δ) $x\in\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{2}\right)$
6. (α) $|x\in\mathbb{R}$ (β) $x\in\mathbb{R}-\{3\}$, (γ) $x=-2$ (δ) $|x\in\mathbb{R}$
   (ε) $|x\in\mathbb{R}$ (στ) αδύνατη
7. (α) $x\in(-\infty,-1)\cup\left(\frac{2}{5},+\infty\right)$, (β) $y\in(-1,4)$,
   (γ) $x\in\left(-1,\sqrt{3}\right)$ 8) (α) $x\in(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)$, (β) $|x\in\mathbb{R}$
9. (β) $\lambda\in(1,+\infty)$
10. (α) $\alpha\in(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$, (β) $\alpha=-1$ ή $\alpha=3$,
   (γ) $\alpha\in(-1,3)$
11. (α) $x\in(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)$ (β) $x\in\left(-\sqrt{5},\sqrt{5}\right)$
   (γ) $x\in(-4,4)$ (δ) $x\in(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$ (ε) $x\in(0,3)$
   (στ) $x\in(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$

Παράγραφος 4.8

1. (α) το κινητό Α (β) για $t\in(0,12)$
2. (α) 21 χειραψίες, (β) λιγότερ από 11.
3. (α) 2100 κιλά (β) από 31 έως 34 δένδρα
4. (β) τετράγωνο

Παράγραφος 4.9 (ανακεφαλαίωση)

1. Ψ, Α, Ψ, Α, Ψ, Ψ
2. (α) $\alpha=0$ και $\beta=0$, (β) $x=-\sqrt[\nu]{|\alpha|}$, για ν περιττό (γ)
   έχει δύο ακριβώς ρίζες, (δ) $x\in\mathbb{R}$, (ε) $\alpha+\gamma<\beta+\delta$,
   (στ) $\alpha^\rho<\beta^\rho$,
   (ζ) $\Delta>0$, το πρόσημο του α εκτός των ριζών και
   το αντίθετο πρόσημο του α εντός των ριζών

3. (α) ταυτότητα (β) $x=\lambda+1$, (γ) $\lambda=1$
4. (α) $0<x<2$ και $1<y<5$
5. (α) -2 και 2, (β) $\frac{1}{x^2-4}$ για $x\neq-2$ και $x\neq2$
6. (α) $x\in(2,4)$, (β) 2, (γ) αρνητικό
7. (α) $\lambda\in(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$, (β) $\lambda\in(-1,3)$, (γ) $\lambda\in(-1,3)$
8. (α) $\lambda\in(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)$,
10. (β) $c=-1$, (γ) -3 και 1 (δ) $\frac{-3-\sqrt{13}}{2}$ και $\frac{-3+\sqrt{13}}{2}$
11. (β) 30cm
12. (α), (β) απαλοιφή παρονομαστών
13. (α) Υψώνουμε στο τετράγωνο και $\alpha=\beta$
15. (α) -6 και 2, (β) -9 και 3
16. (α) 10 δευτερόλεπτα
17. $T\cong5779(^0K)$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Παράγραφος 5.1

1. Α, Ψ, Α, Α
2. συνάρτηση τα ((β), (δ), (ε)
4. Ο πίνακας Β γιατί κάθε στοιχείο της πρώτης στήλης αντιστοιχεί σε ένα μόνο στοιχείο της δεύτερης στήλης
5. $A=\{1,2,3,4\}$, $f(A)=\{7,8,9\}$ και $A=\{1,2,3,4\}$,
6. (α) $f(10)=1$, $f(27)=0$ και $f(47)=2$

   (β) Οι φυσικοί αριθμοί, $f(A)=\{0,1,2\}$
7. (α) 7 και – 9 (β) i) x^2+3 ii) $x=-3$ (γ) $(-6+3)+3=0$

Παράγραφος 5.2

1. (α) $f(x)=x^2-5$, (β) $f(x)=3|x|+x$
2. (α) $f(x)=x^2+5$, (β) $f(x)=(x+5)^2$
3. (α) Στον κύβο ενός αριθμού προσθέτουμε τον αριθμό αυτό, (β) Σε έναν αριθμό προσθέτουμε τον αντίστροφό του
4. (β) $x^2+3>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
5. (α) $[0,+\infty)$, (β) $(-\infty,2]$
6. (α) $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$, (β) $(-2,+\infty)$
7. (α) $[0,1]$, (β) $\mathbb{R}-\{0,1\}$

8.

x	-2	-1	0	1	2	3
y	4	1	0	2	2	2

9. (α) συνάρτηση, (β) δεν είναι συνάρτηση
10. Παρατηρούμε ότι $f(1)=1$ και $f\left((-1)^2\right)=(-1)^3=-1$
11. $K(x)=\begin{cases}3x+2, 0<x\leq3\\ 2x+5, x>3\end{cases}$

Παράγραφος 5.3

1. (α) -3 και 3, (β) αρνητικό (γ) Ναι
2. (α) θετικό , (β) 1, (γ) $f(2)>f(3)$, (δ) 2
3. (α) 0, 2 και 4, (β) 1, (γ) $f(x)>1$ αδύνατη, $f(x)\leq1$ $[0,4]$
4. (α) $A(-2,1)$, $B(2,2)$ (β) $x\in(-2,2)$
5. (α) 10 λεπτά, 15 λεπτά (β) 25 λεπτά

   (γ) $(70+70)10=1400$m
6. (α) $y=4,8$ για $x=12$, (β) $y=4$, (γ) $x=2,8$
7. (α) 20m (β) 35m

Παράγραφος 5.4

1. (α) μία ευθεία, $\left(-\frac{\beta}{\alpha},0\right)$ και $(0,\beta)$, (β) $y=0$ και $x=0$, (γ) $|\alpha|$ μονάδες 2) Ψ, Ψ, Α
3. (α) $A(-5,0)$ και $B(0,5)$, (β) $A(2,0)$ και $B(0,2)$

   (γ) $A\left(-\frac{7}{4},0\right)$ και $B(0,7)$, (δ) $O(0,0)$
4. (α) 4, (β) $\frac{3}{4}$, (γ) 0, (δ) -2 5) 8450
6. (α) $\lambda=\pm\sqrt{3}$, (β) $\lambda=-2$ και $\lambda=\frac{3}{2}$
7. (α) $y=-3x+5$, (β) $y=-2x+8$, (γ) $y=\frac{1}{3}x-\frac{19}{3}$,

   (δ) $y=\sqrt{2}x$, (ε) $y=-2$
8. (α) $\lambda=\frac{1}{4}$, $y=\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}$, (β) $\lambda=-\frac{2}{3}$, $y=-\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$
9. (α) $y=-3x-4$, (β) $y=-3x+7$,
10. (α) $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$, (β) $y=3$, (γ) $y=x$, (δ) $y=-x$
11. (α) Ναι (β) Όχι 12)

Παράγραφος 5.5

1. Α, Α, Α, Ψ, Α
2. (α) Όχι, διότι $f(x)=2x^2+6>0$ (β) $\Delta=\beta^2-4\gamma=0$,

   (γ) κάτω από τον x,x, (δ) κανένα, διότι $x^2-5x+10\neq0$

   (ε) $x=1$
3. Μόνο στο σχήμα (γ).

4. (α) Άνω $x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$ και κάτω $x \in (2,3)$,
   (β) άνω $x \in (1,2)$, και κάτω $x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$,
   (γ) Άνω, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, (δ) Κάτω, για $x \in \mathbb{R}$
5. (α) $\alpha = 1$, (β) $\alpha > 1$
6. $\alpha < -\frac{1}{3}$
7. (α) $y = -\frac{5}{8}x^2 + 10$, (β) 7,5m.
8. $\beta = -1$ και $\gamma = -6$
9. (α) β = 4 (γ) 8m

Παράγραφος 5.6

1. (α) 0,1 (β) $P = 0{,}1x + 1$, (γ) 33 μέτρα
2. (α) Μεγαλύτερη κλίση έχει η ε_1 μικρότερη η ε_4
   (β) Μεγαλύτερη αύξηση την 20η εβδομάδα και μικρότερη την 21η. Μείωση την 20η και 21η εβδομάδα.
3. -200 και 200, $\alpha = \frac{1}{400}$ 4) (β)Ρίζες 0 και 200.

Παράγραφος 5.7

1. Ψ, Ψ, Ψ, Α, Α
2. (α)Για κάθε γωνία ω, (β) όχι, $\varepsilon\varphi 90^0$ δεν ορίζεται,
   (γ) $\rho^2 = x^2 + y^2$, (δ)i) $\omega = 0^0$ και $\omega = 180^0$, ii) $\omega = 90^0$,
   (ε) $-1 \le \eta\mu\omega \le 1$ και $-1 \le \sigma\upsilon\nu\omega \le 1$
3. $\eta\mu\omega = \frac{-1}{\sqrt{5}}$, $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{-2}{\sqrt{5}}$, $\varepsilon\varphi\omega = \frac{1}{2}$, $\sigma\varphi\omega = 2$
   και $\eta\mu\omega = -\frac{4}{5}$, $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{3}{5}$, $\varepsilon\varphi\omega = -\frac{4}{3}$, $\sigma\varphi\omega = -\frac{3}{4}$
4. (α) $\eta\mu\omega = \frac{4}{5}$, $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{3}{5}$, $\varepsilon\varphi\omega = -\frac{4}{3}$ και $\sigma\varphi\omega = -\frac{3}{4}$
   (β) $\eta\mu\omega = -\frac{5}{13}$, $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{12}{13}$, $\varepsilon\varphi\omega = -\frac{5}{12}$ και $\sigma\varphi\omega = -\frac{12}{5}$
5. $y = 1$, $\eta\mu\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ και $\varepsilon\varphi\omega = -1 = \sigma\varphi\omega$
6. $\eta\mu\omega = \frac{5 - \sqrt{17}}{2}$
8. (α) 0, (β) 0
9. Πρώτο σχήμα: $0^o, 45^o, 90^o, 135^o, 180^o, 225^o, 270^o, 315^o, 360^o$
   Δεύτερο σχήμα: $0^o, 30^0, 60^o, 90^o, 120^o$, 150^o, 180^o, 210^o, $240^o, 270^o, 300^o, 330^o, 360^o$ Οι συντεταγμένες το συνημίτονο και το ημίτονο των παραπάνω γωνιών.

Παράγραφος 5.8

1. Α, Α, Α, Α, Ψ
2. $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{5}{13}$, $\varepsilon\varphi\omega = \frac{12}{5}$ και $\sigma\varphi\omega = \frac{5}{12}$
3. $\eta\mu\omega = -\frac{24}{25}$, $\varepsilon\varphi\omega = -\frac{24}{7}$ και $\sigma\varphi\omega = -\frac{7}{24}$
4. $\eta\mu\omega = -\frac{12}{\sqrt{313}}$, $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{13}{\sqrt{313}}$ και $\sigma\varphi\omega = \frac{13}{12}$
5. $\eta\mu\omega = \frac{11}{60}$, $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{\sqrt{3479}}{60}$, $\varepsilon\varphi\omega = -\frac{11}{\sqrt{3479}}$
   και $\sigma\varphi\omega = -\frac{\sqrt{3479}}{11}$
6. $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{40}{41}$, $\eta\mu\omega = -\frac{9}{41}$, $\varepsilon\varphi\omega = -\frac{9}{40}$ και $\sigma\varphi\omega = -\frac{40}{9}$
7. Υψώνουμε τα x και y στο τετράγωνο και μετά τα προσθέτουμε.
8. $\frac{x}{-3} = \eta\mu\theta$ και $\frac{y}{4} = \sigma\upsilon\nu\theta$ υψώνουμε στο τετράγωνο και μετά προσθέτουμε τις σχέσεις.
11. Υψώνουμε στο τετράγωνο την σχέση $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = \alpha$
12. Αντικαθιστούμε την $\sigma\varphi\omega = \frac{1}{\varepsilon\varphi\omega}$, κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών οπότε $(\varepsilon\varphi\omega - 1)^2 \ge 0$

Παράγραφος 5.9 (ανακεφαλαίωση)

1. (α) $D_f = \mathbb{R}$, επειδή $x^2 + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, (β) ναι,
   (γ) $\alpha = -3$, (δ) ναι $\alpha_1 = \alpha_2 = -2$, (ε) $O(0,0)$ και $x'x$
   (στ) $f(x) > 0$ για $x \in (4,6)$, (η) $\sigma\upsilon\nu 90^0 = 0$, (ια) $\sigma\upsilon\nu\omega = 0$
2. $D_f = [1, +\infty)$, $D_g = \mathbb{R} - \{-2\}$ και $D_h = [1,2) \cup (2, +\infty)$
3. σταθερός πληθυσμός, αύξηση πληθυσμού, σταθερός πληθυσμός και μείωση πληθυσμού
4. (α) $Q = 5$, (β) η μικρότερη τιμή $Q = 0$, όταν $P = 9$ και μεγαλύτερη τιμή του $Q = 9$, όταν $P = 7$. (γ) $P = 6$
5. $y = -\frac{3}{2}x + 6$, $y = -\frac{1}{2}x + 4$ κοινό σημείο το $A(2,3)$
6. (α) $\varepsilon\varphi\omega = \frac{1}{3}$, (β) $\Delta E = 450$ cm 7) $\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{3}{5}$ και 150 m
8. (α) $\gamma = 3$, (γ) $y = -\frac{7}{30}x^2 + \frac{29}{30}x + 3$
9. (α) $\gamma = 35$, (β) πλάτος 70, $\alpha = -\frac{1}{35}$, (γ) $y = -\frac{1}{35}x^2 + 45$
10. 1286 μέτρα
11. (α) $y \simeq -\frac{9{,}65}{29}x + 43{,}66$ (β) μήκος μπαλιάς $\simeq 30{,}56$,
    (γ) το σημείο $(0, 43{,}66)$ επαληθεύει την ευθεία.
12. (ε) ρόμβος

Ευρετήριο όρων