

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΡΕΚΟΥΜΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ  
ΚΑΤΣΑΠΑΣ ΛΑΜΠΡΟΣ  
ΚΟΥΜΑΝΤΟΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ  
ΡΕΚΟΥΜΗ ΕΛΕΝΗ

# ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ



ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ  
«ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

# ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

## Επιστημονική Επιτροπή Αξιολόγησης

Συντονιστής / Αξιολογητής	<b>Μπατσίδης Απόστολος</b> Αν. Καθηγητής Τμήματος Μαθηματικών Πανεπιστημίου Ιωαννίνων
Αξιολογητής	<b>Καλυκάκης Δημήτριος</b> Εν ενεργεία Εκπαιδευτικός
Αξιολογήτρια	<b>Ραχιώτου Λεμονιά</b> Εν ενεργεία Εκπαιδευτικός
Τεχνικός Εμπειρογνώμονας	<b>Θεοτόκης Δημήτριος</b> Εν ενεργεία Εκπαιδευτικός ΠΕ86
Επικουρικός Εμπειρογνώμονας	<b>Αντζόπουλος Νικόλαος</b> Διπλωματούχος τεχνολογίας γραφικών τεχνών
Υπεύθυνη του μαθήματος/γνωστικού αντικειμένου στο πλαίσιο της Πράξης	<b>Ειρήνη Γεωργάκη</b> , Σύμβουλος Α΄ ΙΕΠ, μέλος της Επιστημονικής Ομάδας Έργου (ΕΟΕ) της Πράξης

Πράξη με τίτλο: «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ 6010165 στο Πρόγραμμα «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή» 2021-2027

### ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Σπυρίδων Δουκάκης

Πρόεδρος του Δ.Σ. του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Υπεύθυνη Πράξης

Πολυξένη Μπίλλα

Σύμβουλος Α΄ του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Προϊσταμένη Τμήματος Β΄ Προγραμμάτων Σπουδών και Εκπαιδευτικού Υλικού

Αναπληρώτρια Υπεύθυνη Πράξης

Άννα-Αικατερίνη Λυκούρη

Σύμβουλος Α΄ του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**«Με τη συγχρηματοδότηση της Ευρωπαϊκής Ένωσης»  
και το Πρόγραμμα «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή»**

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΡΕΚΟΥΜΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ  
ΚΑΤΣΑΠΑΣ ΛΑΜΠΡΟΣ  
ΚΟΥΜΑΝΤΟΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ  
ΡΕΚΟΥΜΗ ΕΛΕΝΗ

# ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ  
«ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ

**ΡΕΚΟΥΜΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ**  
**ΚΑΤΣΑΠΑΣ ΛΑΜΠΡΟΣ**  
**ΚΟΥΜΑΝΤΟΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ**  
**ΡΕΚΟΥΜΗ ΕΛΕΝΗ**

# Περιεχόμενα

Η Ταυτότητα του βιβλίου.....	6
Τα Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ).....	8
Δομή και οργάνωση του βιβλίου.....	10
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1<sup>ο</sup> - Παράλληλες ευθείες</b> .....	<b>12</b>
Ενότητα 1.1 – Ιδιότητες των παράλληλων ευθειών.....	13
Ενότητα 1.2 – Άθροισμα γωνιών τριγώνου.....	22
Ενότητα 1.3 - <i>Ανακεφαλαίωση</i> .....	31
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2<sup>ο</sup> - Τρίγωνα και κύκλος</b> .....	<b>33</b>
Ενότητα 2.1 – Ισότητα τριγώνων.....	34
Ενότητα 2.2 - Ανισοτικές σχέσεις στα τρίγωνα.....	47
Ενότητα 2.3 – Κύκλος – Χορδές – Αποστήματα.....	52
Ενότητα 2.4 – Γεωμετρικές κατασκευές.....	55
Ενότητα 2.5 – Γεωμετρικοί τόποι.....	65
Ενότητα 2.6 - <i>Ανακεφαλαίωση</i> .....	68
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3<sup>ο</sup> - Παραλληλόγραμμο</b> .....	<b>72</b>
Ενότητα 3.1 – Το παραλληλόγραμμο.....	73
Ενότητα 3.2 – Είδη παραλληλογράμμων.....	81
Ενότητα 3.3 – Τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου.....	91
Ενότητα 3.4 – Ιδιότητες των ορθογωνίων τριγώνων.....	95
Ενότητα 3.5 – Χαρακτηριστικά σημεία τριγώνου.....	101
Ενότητα 3.6 – Τραπεζία.....	108
Ενότητα 3.7 - <i>Ανακεφαλαίωση</i> .....	115
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4<sup>ο</sup> - Στερεομετρία</b> .....	<b>121</b>
Ενότητα 4.1 – Ευθείες και επίπεδα στον χώρο.....	122
Ενότητα 4.2 – Δίεδρες γωνίες – Κάθετα επίπεδα.....	130
Ενότητα 4.3 - <i>Ανακεφαλαίωση</i> .....	133
<b>Υποδείξεις - Απαντήσεις ασκήσεων</b> .....	<b>135</b>



# Η Ταυτότητα του βιβλίου

## Εισαγωγή

Το παρόν σχολικό εγχειρίδιο γεωμετρίας απευθύνεται στους μαθητές και τις μαθήτριες της Α' Λυκείου. Είναι σχεδιασμένο και δομημένο σύμφωνα με τις οδηγίες του ΙΕΠ και στοχεύει στην επίτευξη των ΠΜΑ (Προσδοκώμενων Μαθησιακών Αποτελεσμάτων) που περιέχονται στο νέο Πρόγραμμα σπουδών.

Είναι γνωστό ότι η μελέτη της Γεωμετρίας συμβάλλει στην ανάπτυξη της αντίληψης του χώρου που ζούμε και των αντικειμένων που καθημερινά παρατηρούμε, προσφέροντας δυνατότητες ερμηνείας και παρέμβασης στο φυσικό και δομημένο περιβάλλον.

Το πιο σημαντικό, ωστόσο, είναι ότι η μελέτη της συνεισφέρει ουσιαστικά στην ανάπτυξη της μαθηματικής συλλογιστικής και της δημιουργικής σκέψης, καθώς και γενικότερα στην ανάπτυξη της λογικής επιχειρηματολογίας, τεκμηρίωσης και δημιουργικότητας σε ευρύτερα, πέραν των μαθηματικών, πλαίσια, στοιχεία σημαντικά για τον σύγχρονο άνθρωπο.

**Τόσο στον αρχικό σχεδιασμό, όσο και στην πορεία δημιουργίας του βιβλίου, οι συγγραφείς έλαβαν υπόψη τα παρακάτω στοιχεία:**

- Οι μαθητές/τριες έχουν διδαχθεί σε μικρότερες τάξεις αρκετά σημαντικά στοιχεία Γεωμετρίας και ειδικότερα τις ιδιότητες αρκετών σχημάτων, όπως αυτές των ισοσκελών τριγώνων, των ορθογωνίων τριγώνων, της μεσοκαθέτου τμήματος, της διχοτόμου γωνίας, αλλά και βασικές προτάσεις από την παραλληλία, την ισότητα τριγώνων, από τα παραλληλόγραμμα κ.λπ. Δίνεται συνεπώς μεγάλη βαρύτητα στην αξιοποίηση αυτών των γνώσεων και τη σύνδεσή τους με το νέο υλικό, με τη θεωρητική τους αιτιολόγηση και προφανώς στον εμπλουτισμό τους με νέα θεωρήματα ή δραστηριότητες που απορρέουν από το ΠΣ και τα ΠΜΑ.
- Τις βασικές αρχές της διδακτικής του συγκεκριμένου μαθήματος και μεταξύ άλλων τα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης, όπως αυτά περιγράφονται στη θεωρία των van Hiele, η οποία ιεραρχεί τον τρόπο κατανόησης των γεωμετρικών ιδεών σε επίπεδα.
- Τις κυρίαρχες μεγάλες ιδέες της Γεωμετρίας, όπως η μαθηματική δομή, η απόδειξη, η γενίκευση, η μεταβολή, η ισοδυναμία, οι μετασχηματισμοί και οι κατασκευές.
- Τη μεγάλη σημασία που έχει η υποστήριξη της εμπλοκής όλων των μαθητών/τριων σε κρίσιμες διεργασίες κατανόησης και ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης. Οι διεργασίες αυτές, διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στο τρόπο του «μαθαίνεται», μην παραβλέποντας συγχρόνως ότι για την κατάκτηση της γεωμετρικής γνώσης δεν υπάρχει βασιλική οδός.
- Τη σπουδαιότητα που έχει η έμφαση σε τεχνικές και πρακτικές που ενισχύουν τη δημιουργία συνδέσεων, τον συλλογισμό, την επιχειρηματολογία, την οπτικοποίηση, την επίλυση προβλημάτων και τη μοντελοποίηση, πάντα στο μέτρο του εφικτού και μέσα στα περιορισμένα χρονικά όρια που ορίζει το Πρόγραμμα Σπουδών για τη διδασκαλία του μαθήματος.

Πέραν των παραπάνω στοιχείων σε όλη την πορεία, οι συγγραφείς αναζητούσαν συνεχώς τρόπους για την εναρμόνιση του βιβλίου και με άλλα θεμελιώδη στοιχεία που ορίζουν οι οδηγίες του ΙΕΠ για τη δημιουργία ενός σύγχρονου σχολικού βιβλίου.

Για παράδειγμα, το ΠΣ για τα Μαθηματικά υποστηρίζει τη γνωστική-ατομική και την κοινωνικοπολιτισμική-συμμετοχική προσέγγιση στη μάθηση, αντιμετωπίζοντάς τες ως συμπληρωματικές και σε συνεχή αλληλεπίδραση.

Λαμβάνοντας υπόψη την έρευνα που διεξάγεται διεθνώς αναφορικά με τις αρχές που θα πρέπει να διέπουν ένα σύγχρονο ΠΣ για τα Μαθηματικά, υιοθετείται η άποψη ότι, σε μια τάξη Μαθηματικών, η μάθηση και η διδασκαλία εξελίσσονται τόσο σε ατομικό όσο και σε συλλογικό επίπεδο.

Το σχολικό εγχειρίδιο επομένως αναγνωρίζοντας την κρισιμότητα της μαθηματικής γνώσης σε όλους τους τομείς της ανθρώπινης δράσης, επενδύει στη δημιουργία περιβαλλόντων μάθησης που δίνουν τη δυνατότητα δημιουργίας συνδέσεων μεταξύ της γνώσης του περιεχομένου των Μαθηματικών και της εφαρμογής των εννοιών και των διαδικασιών που το χαρακτηρίζουν. Επιπλέον, υποστηρίζει την ανάπτυξη υψηλού επιπέδου μαθηματικού συλλογισμού, μαθηματικών ικανοτήτων διατύπωσης και επίλυσης ολοένα και πιο περίπλοκων προβλημάτων, τη διαμόρφωση στάσεων και πεποιθήσεων που βοηθούν τους/τις μαθητές/τριες να αντιμετωπίσουν με αποτελεσματικό τρόπο προβλήματα στα Μαθηματικά, όπως και εκτός αυτών.

**Παράλληλα ενδιαφέρεται να αποκτήσει ο/η μαθητής/τρια την ικανότητα:**

- α) να αναλύει, να ερμηνεύει και να επεμβαίνει στο κοινωνικό του περιβάλλον, χρησιμοποιώντας ως εργαλείο τα Μαθηματικά, και
- β) να αναλύει και να ερμηνεύει τον τρόπο που χρησιμοποιούνται τα Μαθηματικά για τη λήψη αποφάσεων στο κοινωνικό περιβάλλον.

Τελειώνοντας, ένα βιβλίο Γεωμετρίας για μαθητές/τριες Λυκείου μπορεί και πρέπει να επιδιώκει να προσφέρει ευκαιρίες για πολλαπλούς τρόπους συμμετοχής στη μαθηματική δραστηριότητα μέσα στη σχολική τάξη με τρόπο ώστε να αναδεικνύονται και οι μαθηματικές ιδέες και η χρησιμότητα των Μαθηματικών. Η μάθηση των Μαθηματικών είναι μια δυναμική, σταδιακή και συνεχής διαδικασία, στην οποία ο ρόλος του/της εκπαιδευτικού είναι καθοριστικός και καίριας σημασίας. Επιπρόσθετα, στοχεύει σε όλους/ες τους/τις μαθητές/τριες, λαμβάνοντας υπόψη τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους αυτοί/ές νοηματοδοτούν τις εμπειρίες τους και τις μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες στις τάξεις των Μαθηματικών, αλλά και τις διαφορετικές τους κοινωνικές, πολιτισμικές και συναισθηματικές αφετηρίες. Υποστηρίζει διδακτικές στρατηγικές συμπερίληψης και διαφοροποίησης αναγνωρίζοντας ότι οι μαθητές/τριες διαφέρουν μεταξύ τους ως προς τον τρόπο και τον ρυθμό που μαθαίνουν, τα ενδιαφέροντά τους, τις προηγούμενες γνώσεις και τις εμπειρίες, την κουλτούρα και τη γλώσσα τους. Συνεπώς, κάθε μαθητής/τρια, ανάλογα με τις γνωστικές ή άλλες ανάγκες του/της, προσκαλείται να εμπλακεί σε έργα μάθησης που οδηγούν σε αυθεντική μαθηματική δραστηριότητα, η οποία προσφέρει προκλήσεις ανάπτυξης της μαθηματικής σκέψης και συμβάλλει στη συλλογική συγκρότηση του μαθηματικού νοήματος μέσα από τη συμμετοχή στα δρώμενα της τάξης. Το ΠΣ ενθαρρύνει την προσέγγιση της πολιτισμικά ευαισθητοποιημένης διδασκαλίας των Μαθηματικών.

# Τα Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ)

## Τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα (ΠΜΑ)

Τα ΠΜΑ, όπως αυτά διατυπώνονται στο ΠΣ είναι τα παρακάτω και αποτελούν την πυξίδα για τον/την διδάσκοντα/διδάσκουσα στον σχεδιασμό και την υλοποίηση της διδασκαλίας τους.

### Γεωμετρία του επιπέδου.

1. Αναγνωρίζουν τη σημασία του 5<sup>ου</sup> Ευκλείδειου Αιτήματος στην εξέλιξη της Γεωμετρίας.
2. Αποδεικνύουν τις σχέσεις γωνιών που σχηματίζουν παράλληλες ευθείες όταν τέμνονται από τρίτη και διατυπώνουν τους αντίστροφους ισχυρισμούς και τους αναγνωρίζουν ως κριτήρια παραλληλίας.
3. Αποδεικνύουν ότι το άθροισμα γωνιών τριγώνου είναι ίσο με μία ευθεία γωνία.
4. Αναγνωρίζουν γωνίες με πλευρές κάθετες ή παράλληλες, διερευνούν και αποδεικνύουν τις μεταξύ τους σχέσεις.
5. Σχεδιάζουν με γεωμετρικά όργανα από σημείο εκτός ευθείας, ευθεία παράλληλη προς αυτήν και αιτιολογούν τη διαδικασία.
6. Χρησιμοποιούν ιδιότητες των παράλληλων ευθειών για την επίλυση μαθηματικών και ρεαλιστικών προβλημάτων.
7. Ανακαλύπτουν και αποδεικνύουν τον τύπο για το άθροισμα γωνιών κυρτού  $n$  - γώνου.
8. Ελέγχουν πότε σχέσεις μεταξύ βασικών στοιχείων τριγώνων και ορθογώνιων τριγώνων αποτελούν κριτήριο ισότητας αυτών.
9. Κατασκευάζουν με κανόνα και διαβήτη τρίγωνα με δεδομένα βασικά τους στοιχεία (γωνίες, πλευρές).
10. Αποδεικνύουν και χρησιμοποιούν κριτήρια που καθορίζουν ότι ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές.
11. Χρησιμοποιούν ιδιότητες των ίσων τριγώνων στην επίλυση μαθηματικών και ρεαλιστικών προβλημάτων.
12. Αναγνωρίζουν τη διχοτόμο γωνίας και τη μεσοκάθετο ευθύγραμμου τμήματος ως γεωμετρικούς τόπους σημείων και αποδεικνύουν τις ιδιότητες τους.
13. Κατασκευάζουν με κανόνα και διαβήτη τη διχοτόμο γωνίας και τη μεσοκάθετο ευθύγραμμου τμήματος και αιτιολογούν τη διαδικασία.
14. Βρίσκουν απλούς γεωμετρικούς τόπους εξηγώντας τον συλλογισμό τους.
15. Διερευνούν και αποδεικνύουν βασικές ανισοτικές σχέσεις στοιχείων τριγώνου (τριγωνική ανισότητα και σύνδεση σχέσης πλευρών με σχέση αντίστοιχων γωνιών).
16. Αποδεικνύουν ότι, σε ίσους κύκλους, ίσα τόξα ορίζουν ίσες χορδές και ίσα αντίστοιχα σε αυτές αποστήματα. Διατυπώνουν και ελέγχουν τους αντίστροφους ισχυρισμούς.

17. Κατασκευάζουν εφαπτομένη κύκλου σε σημείο του με κανόνα και διαβήτη.
18. Διερευνούν και αποδεικνύουν τις βασικές ιδιότητες του παραλληλογράμμου και των ειδικών παραλληλογράμμων (ορθογώνιο, ρόμβος, τραπέζιο) και διακρίνουν αυτές που τα χαρακτηρίζουν.
19. Αποδεικνύουν ιδιότητες που αφορούν το ευθύγραμμο τμήμα το οποίο συνδέει μέσα πλευρών τριγώνου.
20. Προσδιορίζουν και αποδεικνύουν τις σχέσεις που συνδέουν την υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου αφενός με τη διάμεσο που αντιστοιχεί σε αυτήν και αφετέρου με την κάθετη πλευρά που είναι απέναντι από γωνία 30 μοιρών. Διαπιστώνουν ότι οι ιδιότητες αυτές χαρακτηρίζουν τα ορθογώνια τρίγωνα.
21. Αποδεικνύουν ότι οι μεσοκάθετοι των πλευρών ενός τριγώνου και οι διχοτόμοι των γωνιών του συντρέχουν αντιστοίχως σε σημεία που αποτελούν κέντρα χαρακτηριστικών κύκλων του.
22. Διαπιστώνουν ότι τα ύψη και οι διάμεσοι ενός τριγώνου συντρέχουν αντιστοίχως.
23. Μοντελοποιούν και επιλύουν προβλήματα αξιοποιώντας τα κέντρα τριγώνου.
24. Αναγνωρίζουν το τραπέζιο ως το τετράπλευρο με μόνο δύο πλευρές παράλληλες και αποδεικνύουν τις βασικές ιδιότητές τους.
25. Μοντελοποιούν και επιλύουν προβλήματα χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των παραλληλογράμμων και τραπεζίων.

### Γεωμετρία του χώρου.

1. Σχεδιάζουν ευθείες και επίπεδα στον χώρο.
2. Διερευνούν τις σχετικές θέσεις ευθειών και επιπέδων στον χώρο, καθώς και ευθείας και επιπέδου.
3. Αναγνωρίζουν τις δίεδρες γωνίες.

### Μετρήσεις - Μέτρο γωνιών.

1. Ορίζουν το μέτρο δίεδρης γωνίας.



Ιστορικός οδηγός στην αξιωματική θεμελίωση της Γεωμετρίας



Χαρακτηριστικά σημεία τριγώνου



Οδηγός επανάληψης στα παραλληλόγραμμα



Οδηγός επανάληψης παραλληλίου-τρίγωνα-κύκλος

# Δομή και οργάνωση του βιβλίου

Αριθμός κεφαλαίου και ενότητας

Τίτλος ενότητας

22

## 1.2

### Άθροισμα γωνιών τριγώνου

Περιεχόμενα Ενότητας

- Περιέχονται
- Άθροισμα γωνιών τριγώνου.
  - Σχέση εξωτερικής γωνίας με απέναντι εσωτερικές.
  - Άθροισμα γωνιών ν-γώνου.
  - Άθροισμα εξωτερικών γωνιών ν-γώνου.

Οι στόχοι της ενότητας:

1. Αποδεικνύουμε ότι το άθροισμα των γωνιών τριγώνου είναι ίσο με  $180^\circ$ .
2. Αναζητούμε και ερευνάμε σχέση ανάμεσα στην εξωτερική γωνία τριγώνου με το άθροισμα των απέναντι εσωτερικών γωνιών.
3. Αποδεικνύουμε ότι η εξωτερική γωνία είναι ίση με το άθροισμα των απέναντι εσωτερικών γωνιών.
4. Ανακαλύπτουμε και αποδεικνύουμε τύπο για το άθροισμα των γωνιών ν-γώνου. Ανακαλύπτουμε τύπο για το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών τριγώνου και ν-γώνου.
5. Αναζητούμε και αποδεικνύουμε σχέση δύο γωνιών με παράλληλες ή κάθετες πλευρές.
6. Χρησιμοποιούμε τα παραπάνω στη λύση ασκήσεων ή προβλημάτων.

Δραστηριότητες

#### Δραστηριότητα 1

Στο διπλανό σχήμα είναι  $\Gamma\Delta \parallel \text{AB}$ . Έχουν σημειωθεί τέσσερις γωνίες: οι  $x, y, \varphi, \omega$ .

- α. Να βρείτε δύο ζεύγη γωνιών που το κάθε ζεύγος να αποτελείται από ίσες γωνίες.
- β. Ποια σχέση συνδέει την εξωτερική γωνία  $\hat{\Gamma}$  του τριγώνου με τις γωνίες  $\hat{A}$  και  $\hat{B}$ ;

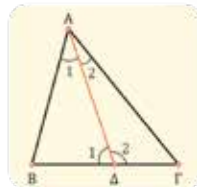
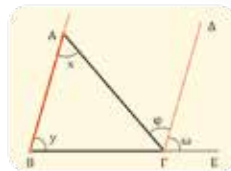
Να διατυπώσετε γενικό συμπέρασμα.

γ. Πώς θα αξιοποιήσουμε το παραπάνω σχήμα, για να βρούμε το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου  $\text{AB}\Gamma$ ;

#### Δραστηριότητα 2

Αν το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι ένας σταθερός αριθμός (ίδιος για όλα τα τρίγωνα), να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι ίσο με  $180^\circ$ .

Σχέδια και σχήματα βιβλίου



Κωδικός QR



Ορισμοί

#### Ορισμός

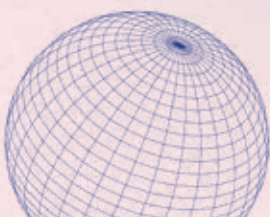
Δύο ευθείες του επιπέδου λέγονται **παράλληλες**, αν δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, αν δηλαδή δεν τέμνονται.

Ας πάρουμε τώρα τρεις ευθείες ( $\epsilon$ ), ( $\zeta$ ) και ( $\eta$ ), από τις οποίες η ευθεία ( $\eta$ ) τέμνει τις άλλες δύο, που πιθανόν να είναι και παράλληλες.

Ιδιαίτερα χρήσιμες για αυτή την ενότητα, αλλά και για όλο το βιβλίο, είναι οι παρακάτω ονομασίες, γνωστές από μικρότερες τάξεις.



$\epsilon \parallel \zeta$



Θεωρήματα

**Θεώρημα 1**

Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι ίσο με δύο ορθές, δηλαδή  $180^\circ$ .

**Απόδειξη**

Από την κορυφή Α φέρουμε ευθεία (ε) // ΒΓ. Είναι τότε:

- $\hat{B} = \hat{A}_1 = \phi$ , ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων (ε) και ΒΓ με τέμνουσα την ΑΒ.
- $\hat{\Gamma} = \hat{A}_2 = \omega$ , ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων (ε) και ΒΓ με τέμνουσα την ευθεία ΑΓ.

Επομένως  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = \phi + \hat{A} + \omega = \hat{A}_1 + \hat{A} + \hat{A}_2 = 180^\circ$ .

**Πορίσματα**

Αφού σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα των γωνιών του είναι  $180^\circ$ , συμπεραίνουμε άμεσα ότι:

- α. Στα ορθογώνια τρίγωνα οι οξείες γωνίες είναι συμπληρωματικές (Σχ. α).
- β. Κάθε γωνία ενός ισοπλεύρου τριγώνου είναι ίση με  $60^\circ$  (Σχ. β).
- γ. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες, μία προς μία, τότε θα έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες (θα είναι ισογώνια).
- δ. Αν η γωνία της κορυφής ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι  $\phi$  και οι ίσες γωνίες του είναι  $\omega$ , τότε (Σχ. γ):

$$\phi = 180^\circ - 2\omega, \quad \omega = 90^\circ - \frac{\phi}{2}$$

**Εφαρμογή (βασική)**

Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) φέρνουμε το ύψος ΑΔ. Να αποδείξετε ότι:

- α.  $\hat{B} = \hat{\Delta\hat{A}\hat{\Gamma}}$ ,
- β.  $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta\hat{A}\hat{B}}$ .

**Λύση**

α) Από τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΓ παίρνουμε:

- $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ$ ,
- $y + \hat{\Gamma} = 90^\circ$ .

Επομένως  $\hat{B} = y$ , δηλαδή  $\hat{B} = \hat{\Delta\hat{A}\hat{\Gamma}}$ .

Με άλλα λόγια οι γωνίες  $\hat{B}$  και  $\hat{\Delta\hat{A}\hat{\Gamma}}$  είναι ίσες, διότι είναι συμπληρωματικές της γωνίας  $\hat{\Gamma}$  του τριγώνου ΑΒΓ (ή της γωνίας  $\phi$ , αφού:

$$x + \phi = 90^\circ \text{ και } y + \phi = 90^\circ).$$

β) Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ παίρνουμε:

$$\hat{\Gamma} = 90^\circ - y = \hat{A} - y = \phi = \hat{\Delta\hat{A}\hat{B}}.$$

Και εδώ μπορούμε να πούμε ότι οι γωνίες  $\hat{\Gamma}$  και  $\hat{\Delta\hat{A}\hat{B}}$  είναι ίσες, διότι είναι συμπληρωματικές της γωνίας  $\hat{B}$  (ή της γωνίας  $y$ ).

**Παράδειγμα**

Στο διπλανό σχήμα δύο ευθείες (ε) και (ζ) τέμνονται από την ευθεία (η). Τα μέτρα δύο από τις σχηματιζόμενες γωνίες είναι  $40^\circ$  και  $140^\circ$ . Να αποδείξετε ότι  $\epsilon // \zeta$ .

**Λύση**

Αφού  $x = 140^\circ$ , είναι  $\alpha = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$ .

Είναι επίσης  $y = 40^\circ$ , οπότε:  $\beta = y = 40^\circ$ , ως κατακορυφήν.

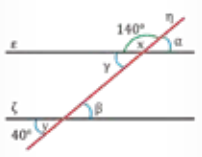
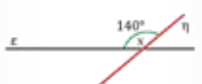
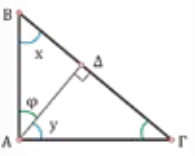
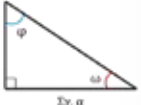
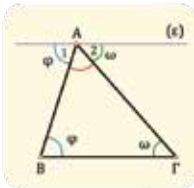
Αφού  $\alpha = \beta = 40^\circ$  και οι γωνίες  $\alpha, \beta$  είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη, θα είναι  $\epsilon // \zeta$ .

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε, αν παρατηρήσουμε ότι:

$$\gamma = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ \text{ και } \beta = y = 40^\circ,$$

δηλαδή  $\beta = \gamma$  ■

◆ **Αξίωμα των παραλλήλων**



Πορίσματα

Εφαρμογές

Παράδειγματα

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1<sup>ο</sup>

## Παράλληλες ευθείες

### Περιεχόμενα

- 1.1 Ιδιότητες των παράλληλων ευθειών
- 1.2 Άθροισμα γωνιών τριγώνου και πολυγώνου
- 1.3 Ανακεφαλαίωση

#### Λέξεις κλειδιά:

Παράλληλες ευθείες	Υπερβολική Γεωμετρία
Αξίωμα παράλληλων	Άθροισμα γωνιών
Ευκλείδειο αίτημα	Εξωτερική γωνία

### Εισαγωγικά και ιστορικά σχόλια

Στο κεφάλαιο αυτό, όπως υποδηλώνει και ο τίτλος του, θα δούμε από μια άλλη σκοπιά τη σημασία και τον ρόλο που παίζουν οι παράλληλες ευθείες στη σχολική γεωμετρία. Ήδη, στο περίφημο βιβλίο του «Τα Στοιχεία», ο Ευκλείδης έθεσε με συστηματικό τρόπο όχι μόνο τα πρώτα σημαντικά βήματα αλλά έθεσε και το διαβόητο, όπως αποδείχθηκε στην πορεία, 5ο Αίτημα.

Σύμφωνα με αυτό:

Αν μια ευθεία τέμνει δύο άλλες ευθείες και σχηματίζει με αυτές τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες με άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές, τότε οι δύο ευθείες αν προεκταθούν επ'άπειρον τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας που βρίσκονται οι γωνίες.

Έχοντας το Ευκλείδειο αίτημα μπορούμε να αποδείξουμε πλήθος από ενδιαφέροντα συμπεράσματα, όπως π.χ. το γεγονός ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι ίσο με 180 μοίρες. Με το αξίωμα αυτό στην ουσία μπαίνουμε στο κατώφλι της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

# 1.1

## Ιδιότητες των παράλληλων ευθειών

### Περιέχονται

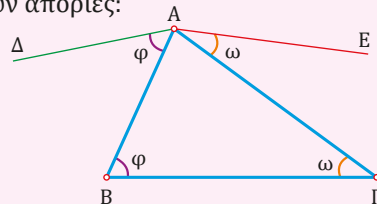
- Κριτήρια παραλληλίας.
- Το αξίωμα παραλληλίας.
- Ιδιότητες παράλληλων ευθειών.
- Κατασκευή παράλληλης από σημείο προς ευθεία.

### Στην ενότητα αυτή:

1. Διατυπώνουμε το 5ο αίτημα του Ευκλείδη.
2. Διατυπώνουμε ισοδύναμη μορφή του 5ου αιτήματος για την παραλληλία.
3. Αναγνωρίζουμε τη σημασία του 5ου αιτήματος στην εξέλιξη των γεωμετριών.
4. Διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε συμπεράσματα του Ευκλείδειου αιτήματος.
5. Διατυπώνουμε κριτήρια για το πότε δύο ευθείες είναι παράλληλες.
6. Κατασκευάζουμε παράλληλη από σημείο προς ευθεία.

### Δραστηριότητα

Βλέποντας το παρακάτω σχήμα οι μαθητές/τριες ενός τμήματος της Α' Λυκείου άρχισαν να διατυπώνουν απορίες:



α. Μήπως πρέπει να είναι  $A\Delta // B\Gamma$  και  $A\epsilon // B\Gamma$ ;

β. Μήπως πρέπει τα σημεία Δ, Α, Ε να βρίσκονται στην ίδια ευθεία (η);

Τι απάντηση θα δίνετε εσείς στα παραπάνω ερωτήματα;

γ. Ένας/μία μαθητής/τρια θέτει το εξής ερώτημα:

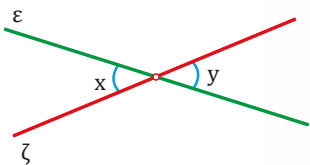
«Ωραία! Αν φέρουμε εμείς μια ευθεία ΔΑΕ παράλληλη προς τη ΒΓ, γιατί (με απόδειξη)  $\hat{B} = \hat{B}\hat{A}\hat{\Delta}$  και  $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}\hat{A}\hat{E}$ ;

### Θεωρία και Εφαρμογές

#### ◆ Τεμνόμενες - παράλληλες ευθείες

Δύο ευθείες του ίδιου επιπέδου που έχουν μόνο ένα κοινό σημείο λέγονται **τεμνόμενες**. Οι γωνίες που σχηματίζονται από δύο τεμνόμενες ευθείες, όπως π.χ. οι x και y, λέγονται **κατακορυφήν** και είναι ίσες.

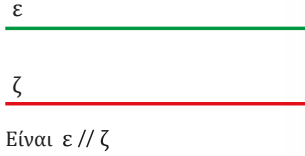
Οι ευθείες του ίδιου επιπέδου που παίζουν τεράστιο ρόλο στη Γεωμετρία, είναι αυτές που δεν τέμνονται. Δύο τέτοιες ευθείες του ίδιου επιπέδου λέγονται **παράλληλες**.



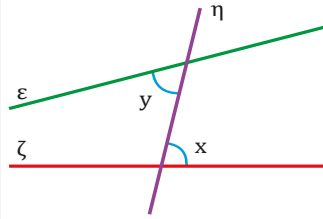


**Ορισμός**

Δύο ευθείες του ίδιου επιπέδου λέγονται **παράλληλες**, αν δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, αν δηλαδή δεν τέμνονται.

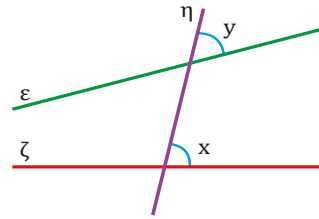


Ας πάρουμε τώρα τρεις ευθείες (ε), (ζ) και (η), από τις οποίες η ευθεία (η) τέμνει τις άλλες δύο, που πιθανόν να είναι και παράλληλες. Ιδιαίτερα χρήσιμες για αυτήν την ενότητα, αλλά και για όλο το βιβλίο, είναι οι παρακάτω ονομασίες, γνωστές από μικρότερες τάξεις.



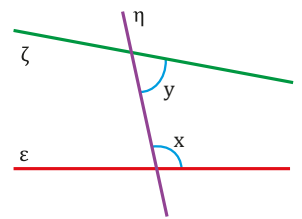
(Σχ. α)

Οι γωνίες x, y είναι εντός εναλλάξ.



(Σχ. β)

Οι γωνίες x, y είναι εντός - εκτός και επί τα αυτά μέρη.



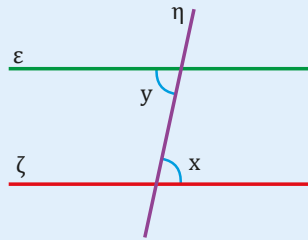
(Σχ. γ)

Οι γωνίες x, y είναι εντός και επί τα αυτά μέρη.



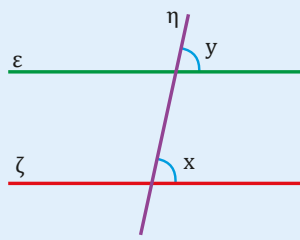
Ευθείες και τέμνουσα

**Παράλληλες ευθείες και τέμνουσα**



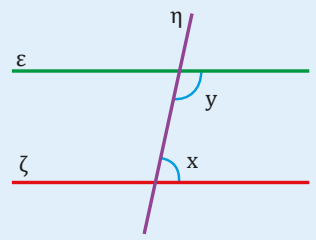
(Σχ. α)

Οι γωνίες x, y είναι εντός εναλλάξ.



(Σχ. β)

Οι γωνίες x, y είναι εντός - εκτός και επί τα αυτά.



(Σχ. γ)

Οι γωνίες x, y είναι εντός και επί τα αυτά.



**Θεώρημα 1 - Κριτήριο παραλληλίας**

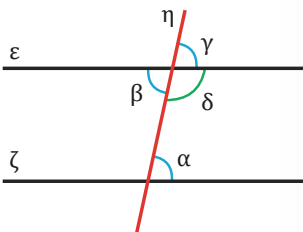
Έστω ότι δύο ευθείες τέμνονται από μία τρίτη. Αν ισχύει μία από τις παρακάτω προτάσεις, τότε οι ευθείες αυτές είναι παράλληλες:

- Δύο εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες.
- Δύο εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες είναι ίσες.
- Δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες είναι παραπληρωματικές.

Αν λοιπόν είναι:

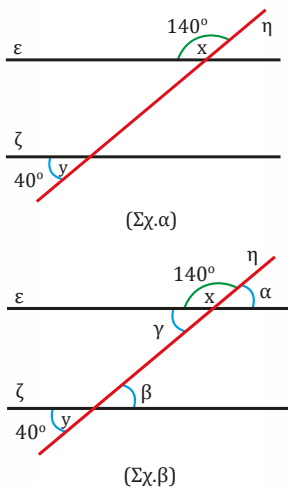
- $\alpha = \beta$  (εντός εναλλάξ ίσες) ή
- $\alpha = \gamma$  (εντός, εκτός και επί τα αυτά ίσες) ή
- $\alpha + \delta = 180^\circ$  (εντός και επί τα αυτά παραπληρωματικές),

τότε οι ευθείες (ε) και (ζ) λέγονται παράλληλες.





### Παράδειγμα στις γωνίες από παράλληλες και τέμνουσα



Ας παρατηρήσουμε επίσης ότι στην περίπτωση που η τέμνουσα είναι κάθετη στις δύο ευθείες, τότε όλες οι σχηματιζόμενες γωνίες είναι  $90^\circ$ . Άρα, οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες. Συμπεραίνουμε επομένως ότι:

#### Πόρισμα

Αν δύο ευθείες είναι κάθετες προς την ίδια ευθεία σε διαφορετικά σημεία, τότε είναι μεταξύ τους παράλληλες.

#### Παράδειγμα

Στο διπλανό σχήμα (Σχ. α) οι ευθείες (ε) και (ζ) τέμνονται από την ευθεία (η). Τα μέτρα δύο εκ των σχηματιζόμενων γωνιών είναι  $40^\circ$  και  $140^\circ$ . Να αποδείξετε ότι  $\varepsilon \parallel \zeta$ .

#### Λύση

Αφού  $x = 140^\circ$ , είναι  $\alpha = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$ .

Η  $\beta$  (Σχ. β) είναι ίση με τη γωνία  $\gamma$  καθώς είναι κατακορυφήν, άρα  $\beta = 40$  μοίρες. Αφού  $\alpha = \beta = 40^\circ$  και οι γωνίες  $\alpha, \beta$  είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη, θα είναι  $\varepsilon \parallel \zeta$ .

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε, αν παρατηρήσουμε ότι:

$$\gamma = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ \quad \text{και} \quad \beta = \gamma = 40^\circ,$$

δηλαδή  $\beta = \gamma$ . ■

#### ◆ Αξίωμα των παράλληλων

Ο Ευκλείδης, στο περίφημο έργο του «Στοιχεία», κάνοντας μια θαυμαστή θεμελίωση της γεωμετρίας στηριζόμενος σε αξιώματα και ορισμούς, απέδειξε πλήθος από προτάσεις που αφορούν τα τρίγωνα και τον κύκλο, χωρίς να εμπλέξει την έννοια της παραλληλίας. Τις παράλληλες ευθείες, διαισθανόμενος ότι κρύβουν μυστήριο, αλλά, και λογικούς κινδύνους, τις άφησε τελευταίες. Μόνο μετά από σχεδόν δύο χιλιάδες χρόνια οι μαθηματικοί κατάλαβαν πόσο δίκιο είχε, αλλά, και πόση σοφία διέθετε.

Για να αποδείξει λοιπόν ο Ευκλείδης προτάσεις που αφορούσαν παράλληλες ευθείες και τις γωνίες που σχηματίζονταν όταν κάποια άλλη ευθεία τις έτεμνε, θεώρησε απαραίτητο να θέσει το επόμενο αξίωμα, μια πρόταση δηλαδή που έπρεπε να τη δεχτούμε χωρίς απόδειξη.

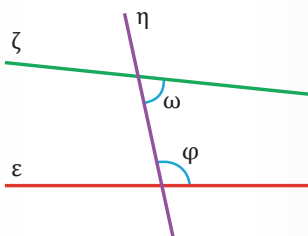
#### Αξίωμα παράλληλων | Αρχική μορφή

Αν μια ευθεία τέμνει δύο άλλες ευθείες και σχηματίζει με αυτές τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες με άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές, τότε οι δύο ευθείες τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας που βρίσκονται οι γωνίες αυτές.

#### 5° Ευκλείδειο αίτημα

Έτσι, αν στο διπλανό σχήμα είναι  $\varphi + \omega < 2\perp = 180^\circ$ , τότε οι ευθείες (ε) και (ζ) δεν είναι παράλληλες και μάλιστα τέμνονται προς τα δεξιά της ευθείας (η).

Αν οι γωνίες  $\varphi$  και  $\omega$  έχουν άθροισμα δύο ορθές (είναι παραπληρωματικές), τότε  $\varepsilon \parallel \zeta$ .



Τι είναι λοιπόν αυτό που μας χαρίζει το παραπάνω αξίωμα και είναι τόσο σπουδαίο;

Την απάντηση δίνει το παρακάτω θεώρημα.



### Θεώρημα 2

Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, τότε:

**α.** Οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες είναι παραπληρωματικές.

**β.** Οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες.

**γ.** Οι εντός - εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες είναι ίσες.

### Απόδειξη

**α.** Έστω  $\varepsilon // \zeta$  και  $\varphi, \omega$  δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες που σχηματίζει με αυτές η τέμνουσα ( $\eta$ ) (Σχ. α). Θα αποδείξουμε ότι  $\varphi + \omega = 180^\circ$ .

Έστω ότι  $\varphi + \omega \neq 180^\circ$ .

- Αν  $\varphi + \omega < 180^\circ$ , τότε, σύμφωνα με το Ευκλείδειο αίτημα, οι ευθείες ( $\varepsilon$ ) και ( $\zeta$ ) τέμνονται προς τα δεξιά της ( $\eta$ ), άτοπο.
- Αν  $\varphi + \omega > 180^\circ$ , τότε  $\alpha + \beta < 180^\circ$  και έτσι οι ( $\varepsilon$ ), ( $\zeta$ ) τέμνονται αριστερά της ευθείας ( $\eta$ ), άτοπο.

Σε κάθε λοιπόν περίπτωση οδηγούμαστε σε άτοπο, οπότε θα είναι:

$$\varphi + \omega = 180^\circ.$$

**β.** Έστω  $\varphi$  και  $y$  δύο εντός εναλλάξ γωνίες (Σχ. β).

Επειδή:

$$\varphi + \omega = 180^\circ \text{ και } y + \omega = 180^\circ,$$

οι γωνίες  $\varphi$  και  $y$  θα είναι ίσες, δηλαδή  $\varphi = y$ .

Οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι λοιπόν ίσες.

**γ.** Ας πάρουμε τις εντός - εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες  $\varphi$  και  $x$ . Θα αποδείξουμε ότι  $\varphi = x$  (Σχήμα β).

Επειδή  $\varphi + \omega = 180^\circ$  και  $x + \omega = 180^\circ$ , προκύπτει ότι  $\varphi = x$ , που είναι η ζητούμενη ισότητα. ■

### Εφαρμογή

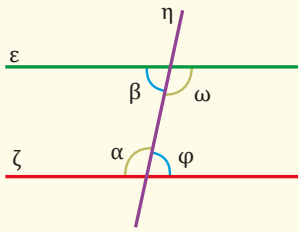
Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές με βάση  $B\Gamma$ . Η ευθεία  $AE$  είναι παράλληλη προς τη  $B\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι η  $AE$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{GA\Delta}$ .

### Λύση

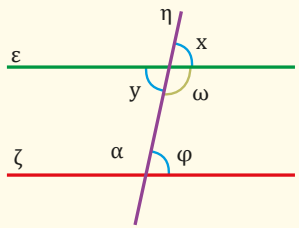
Από την υπόθεση έχουμε ότι  $AE // B\Gamma$ . Είναι επίσης  $\widehat{B} = \widehat{\Gamma} = \varphi$ , αφού το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές. Έτσι, είναι:

- $\widehat{\Gamma} = \widehat{GA\Delta}$ , δηλαδή  $\varphi = y$ , ως εντός εναλλάξ των παράλληλων  $B\Gamma, AE$  με τέμνουσα την  $AG$ .
- $\widehat{B} = \widehat{\Delta AE}$ , δηλαδή  $\varphi = x$ , ως εντός - εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες των παράλληλων  $AE, B\Gamma$  με τέμνουσα την  $AB$ .

Έχουμε λοιπόν ότι  $y = \varphi$  και  $x = \varphi$ , οπότε  $x = y$ . Επομένως, η  $AE$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{GA\Delta}$ , δηλαδή της  $\widehat{A_{εξ}}$ . ■



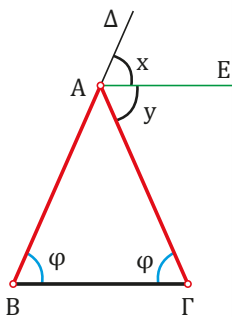
(Σχ. α)



(Σχ. β)



- Οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες ( $\varphi = y, \alpha = \omega$ ).
- Οι εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη είναι ίσες ( $\varphi = x$ ).



## Ιστορικό Σχόλιο

Μια μάταιη προσπάθεια 2000 χρόνων

### Το 5<sup>ο</sup> Ευκλείδειο αίτημα

**«Και εάν εις δύο ευθείας ευθεία έμπίπτουσα τὰς εντός και επί τὰ αυτά μέρη γωνίας δύο όρθων έλάσσονας ποιή, έκβαλλομένας τὰς δύο ευθείας έπ' άπειρον συμπίπτειν, έφ' ά μέρη ειςιν αι τών δύο όρθων έλάσσονες.»**

Και αν ευθεία τέμνουσα δύο ευθείες σχηματίζει τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες μικρότερες των δύο ορθών, όταν οι δύο ευθείες προεκταθούν επ' άπειρον, θα συμπίπτουν προς τα μέρη όπου σχηματίζονται οι μικρότερες των δύο ορθών γωνιών.

Το γεγονός ότι ο Ευκλείδης συμπεριέλαβε την παραπάνω πρόταση στα αιτήματά του θεωρήθηκε από τους μεταγενέστερους ως αδυναμία ή αστοχία του μεγάλου μαθηματικού, διότι αυτό μπορούσε, όπως πίστευαν, να αποδειχθεί από τα προηγούμενα αξιώματα.

Από την τεράστια αυτή προσπάθεια, να αποδειχθεί δηλαδή το 5<sup>ο</sup> αίτημα, προέκυψε τελικά το εξής απλό, αλλά «απογοητευτικό» για τους μελετητές συμπέρασμα: Ο Ευκλείδης είχε δίκαιο! Το αίτημα αυτό δεν μπορεί να αποδειχθεί από τα υπόλοιπα αξιώματα ως θεώρημα.

Το αίτημα πρέπει να παραμείνει και παρέμεινε!

Αποτέλεσμα όμως αυτής της μακροχρόνιας προσπάθειας είναι η ανακάλυψη των μη Ευκλείδειων Γεωμετριών, και πιο συγκεκριμένα της Υπερβολικής Γεωμετρίας.

Μέσα στην προσπάθεια να αποδειχθεί, το αίτημα αυτό πήρε μια πιο απλή, ισοδύναμη, μορφή, η οποία διατυπώνεται στη συνέχεια.

Από σημείο εκτός ευθείας, μόνο μια παράλληλη μπορούμε να φέρουμε προς αυτήν.

John Playfair

Έτσι, αν A είναι τυχαίο σημείο εκτός ευθείας (ε), τότε το πολύ μία παράλληλη υπάρχει προς την ευθεία (ε), που διέρχεται από το A.

Είδαμε όμως σε προηγούμενη παράγραφο ότι από κάθε σημείο εκτός ευθείας μπορούμε να φέρουμε παράλληλη προς την ευθεία.

Επομένως, μπορούμε να διατυπώσουμε το παραπάνω αξίωμα και με την εξής πιο εύχρηστη μορφή:

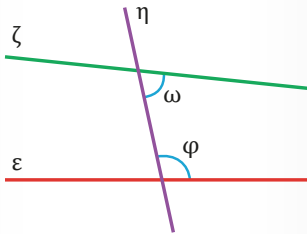
### Αξίωμα παραλληλίας

Από σημείο εκτός ευθείας υπάρχει ακριβώς μία ευθεία παράλληλη προς αυτήν.

Θα αποκαλούμε για πρακτικούς λόγους το παραπάνω αξίωμα «Ευκλείδειο αίτημα» ή Αξίωμα παραλληλίας, αν και, όπως είδαμε, ο Ευκλείδης το διατύπωσε σε διαφορετική μορφή, ισοδύναμη με την παραπάνω.

### ♦ Συνέπειες του Ευκλείδειου αιτήματος

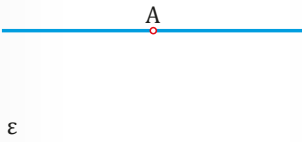
Ως εφαρμογή του Ευκλείδειου αιτήματος παρουσιάζουμε στη συνέχεια μια χρήσιμη πρόταση. Η μέθοδος της απαγωγής σε άτοπο αναδεικνύει και εδώ την τεράστια αξία της.



Παράδειγμα  
στις διχοτόμους εντός  
και επί τα αυτά γωνιών



Υπάρχουν  
παράλληλες ευθείες;



Αξίωμα  
παράλληλων



### Θεώρημα 3

Αν δύο διαφορετικές ευθείες είναι παράλληλες προς μία τρίτη ευθεία, τότε θα είναι και μεταξύ τους παράλληλες.

#### Απόδειξη

Έστω ότι καθεμιά από τις ευθείες  $(\varepsilon_1)$  και  $(\varepsilon_2)$  είναι παράλληλη προς την ευθεία  $(\eta)$ , δηλαδή  $\varepsilon_1 // \eta$  και  $\varepsilon_2 // \eta$ . Θα αποδείξουμε ότι  $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ .

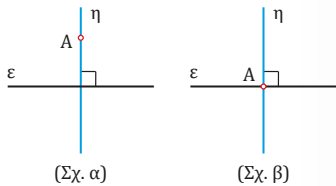
Θα χρησιμοποιήσουμε και εδώ τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο. Αν οι  $(\varepsilon_1)$ ,  $(\varepsilon_2)$  τέμνονται σε ένα σημείο A, τότε από το A έχουμε δύο παράλληλες προς την  $(\eta)$ , τις  $(\varepsilon_1)$  και  $(\varepsilon_2)$ . Αυτό όμως αντίκειται στο Ευκλείδειο αίτημα (αξίωμα των παράλληλων). Άρα  $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ . ■

#### ◆ Κατασκευή παράλληλης προς ευθεία

Έχουμε μάθει στις προηγούμενες τάξεις ότι με χρήση κανόνα και διαβήτη μπορούμε:

- να φέρουμε κάθετο από σημείο εκτός ευθείας προς την ευθεία αυτή (Σχ. α),
- να φέρουμε κάθετο προς μια ευθεία σε τυχαίο σημείο της (Σχ. β),
- να φέρουμε τη μεσοκάθετο ενός ευθυγράμμου τμήματος.

Οι παραπάνω κατασκευές δίνουν τη δυνατότητα να κατασκευάσουμε από σημείο εκτός ευθείας παράλληλη προς την ευθεία.

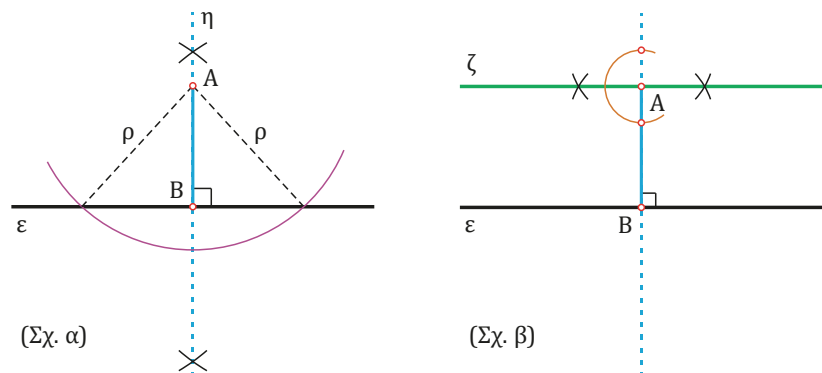


#### Πρόβλημα

Από σημείο εκτός ευθείας να κατασκευαστεί παράλληλη προς την ευθεία.

#### Λύση

Θα κάνουμε την κατασκευή σε δύο βήματα.



Θεωρούμε λοιπόν ευθεία  $(\varepsilon)$  και σημείο A εκτός αυτής.

- Από το A φέρουμε (κατασκευάζουμε) την κάθετο AB προς την ευθεία  $(\varepsilon)$  (Σχ. α).
- Στην ευθεία AB φέρουμε την κάθετο  $(\zeta)$  προς την AB στο σημείο A (Σχ. β). Αφού οι ευθείες  $(\zeta)$  και  $(\varepsilon)$  είναι κάθετες στην AB, είναι μεταξύ τους παράλληλες. Επομένως, η  $(\zeta)$  είναι η ζητούμενη ευθεία.

◆ **Μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες (Σύντομο ιστορικό οδοιπορικό)**

Το αξίωμα των παράλληλων, όποια μορφή και να έχει, μπορούμε να το αποκαλούμε για συντομία «Ευκλείδειο αίτημα». Ας κρατήσουμε, για τις ανάγκες της σχολικής Ευκλείδειας Γεωμετρίας τη δεύτερη μορφή:



**Αξίωμα**

Από σημείο εκτός ευθείας υπάρχει μοναδική παράλληλη προς την ευθεία.

Τι θα συμβεί όμως αν δεχτούμε ότι το αξίωμα αυτό δεν υπάρχει; Μπορεί να υπάρχει, με άλλα λόγια, κάποια γεωμετρία, στην οποία αντί για το Ευκλείδειο αίτημα να έχουμε ένα από τα παρακάτω αξιώματα;

**Αξίωμα I - Ελλειπτική ή Σφαιρική Γεωμετρία**

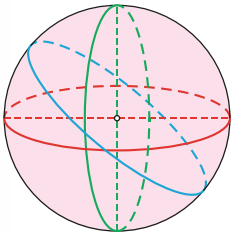
Δεν υπάρχουν παράλληλες ευθείες.

**Αξίωμα II - Υπερβολική Γεωμετρία**

Από σημείο εκτός ευθείας υπάρχουν τουλάχιστον δύο παράλληλες προς αυτήν την ευθεία.

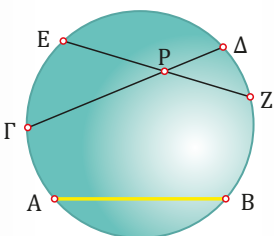
Η προσπάθεια να αποδειχθεί το 5<sup>ο</sup> αίτημα του Ευκλείδη (αξίωμα της παραλληλίας, αρχική μορφή) οδήγησε μετά από είκοσι αιώνες στην ανακάλυψη νέων γεωμετριών.

- Η γεωμετρία, στην οποία δεν υπάρχουν παράλληλες ευθείες λέγεται **Σφαιρική (ή Ελλειπτική) Γεωμετρία**. Όλες οι «ευθείες» τέμνονται όπως γίνεται με τους μέγιστους κύκλους μιας σφαίρας. Στο διπλανό σχήμα «επίπεδο» είναι η επιφάνεια μιας σφαίρας και «ευθείες» είναι οι μέγιστοι κύκλοι της σφαίρας, οι τομές δηλαδή της σφαίρας με επίπεδα που διέρχονται από το κέντρο της. Όλοι οι μέγιστοι κύκλοι τέμνονται και έτσι δεν υπάρχουν παράλληλες ευθείες.
- Η γεωμετρία, στην οποία από κάθε σημείο εκτός ευθείας άγονται δύο τουλάχιστον ευθείες παράλληλες προς αυτήν λέγεται **Υπερβολική Γεωμετρία**.



Nikolai Lobachevsky (1792-1856)

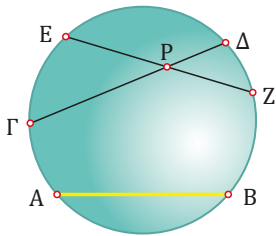
Ο Νικολάι Λομπατσέφσκι (1792-1856) ήταν Ρώσος μαθηματικός, γνωστός για την ανάπτυξη της μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Ανέπτυξε τη γεωμετρία όπου το πέμπτο αίτημα του Ευκλείδη αντικαταστάθηκε από το Αξίωμα II, δημιουργώντας ένα νέο μαθηματικό πεδίο. Το έργο του επηρέασε βαθιά τη μαθηματική σκέψη και άνοιξε δρόμους για σύγχρονες θεωρίες.



Ας δούμε ένα παράδειγμα Υπερβολικής Γεωμετρίας (ΥΓ).

- Σημεία αυτής της γεωμετρίας είναι τα εσωτερικά σημεία ενός κύκλου.
- Ευθείες για την ΥΓ είναι οι χορδές του κύκλου χωρίς φυσικά τα άκρα της. Μπορούμε να βρούμε έναν τρόπο να μετράμε αποστάσεις, ώστε ένα τμήμα που τείνει να γίνει χορδή ή το ένα άκρο του είναι κοντά στον κύκλο να έχει απεριόριστο (άπειρο) μήκος.

Στη ΥΓ ισχύουν όλα εκείνα τα αποτελέσματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που δεν προκύπτουν με χρήση του Ευκλείδειου αιτήματος. Ωστόσο, με τις παράλληλες ευθείες τα πράγματα είναι τελείως διαφορετικά.



Μοντέλο Υπερβολικής Γεωμετρίας



Μοντέλο Υπερβολικής Γεωμετρίας

- Οι ευθείες ΓΔ και ΕΖ τέμνονται στο σημείο Ρ.
- Οι ευθείες ΓΔ και ΕΖ διέρχονται από το Ρ και δεν τέμνουν την ευθεία ΑΒ αυτού του Υπερβολικού Επιπέδου (που είναι το εσωτερικό του κύκλου).  
Με άλλα λόγια, τόσο η ΕΖ όσο και η ΓΔ, που περνάνε από το Ρ είναι παράλληλες με την ΑΒ. Φυσικά, υπάρχουν άπειρες ευθείες από το Ρ παράλληλες με την ΑΒ. Η γεωμετρία αυτή είναι Υπερβολική, αφού ισχύει το παρακάτω αξίωμα:

### ◆ Αξίωμα Υπερβολικής Γεωμετρίας

Από κάθε σημείο εκτός ευθείας υπάρχουν τουλάχιστον δύο ευθείες παράλληλες προς αυτήν.

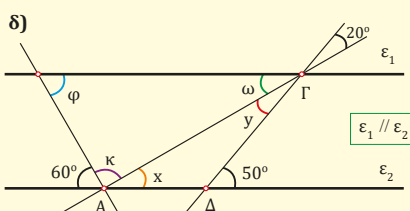
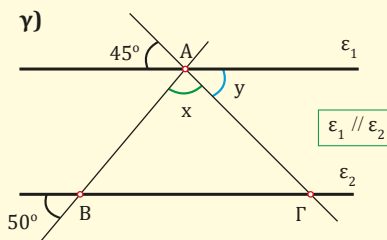
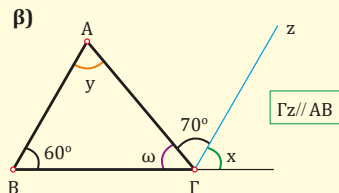
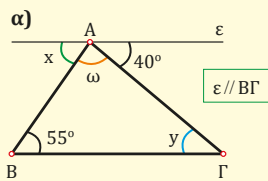
Το μέρος της γεωμετρίας που είναι κοινό στην Ευκλείδεια και στην Υπερβολική Γεωμετρία λέγεται **Απόλυτη** (ή Ουδέτερη) **Γεωμετρία**.

Για παράδειγμα η πρόταση «Στο ισοσκελές τρίγωνο οι γωνίες της βάσης είναι ίσες» είναι θεώρημα της Απόλυτης Γεωμετρίας. Τονίζουμε ότι στην Απόλυτη Γεωμετρία δεν υπάρχει το αξίωμα των παράλληλων, επομένως ούτε οι προτάσεις που απορρέουν από αυτό.

## Ασκήσεις και Προβλήματα

### Ασκήσεις Α' Ομάδας

1. Να υπολογίσετε τις άγνωστες γωνίες στα παρακάτω σχήματα.

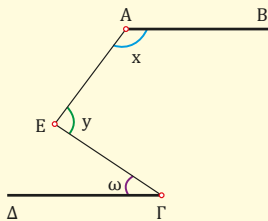


2. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και ευθεία ε παράλληλη προς τη βάση του ΒΓ, που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.
3. Δίνεται γωνία  $x\hat{O}y$  και σημείο Α της διχοτόμου της. Αν η παράλληλη από το Α προς την Οx τέμνει την Οy στο Β, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές.
4. Δίνεται γωνία  $x\hat{O}y$  και η διχοτόμος της ΟΔ. Από σημείο Α της Οy φέρουμε παράλληλη προς την ΟΔ που τέμνει την προέκταση της Οx στο Β. Να αποδείξετε ότι  $OA = OB$ .
5. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ( $AB = AG$ ) και σημείο Δ της πλευράς ΑΒ. Αν Ε είναι σημείο της πλευράς ΒΓ με  $DE = DB$ , να αποδείξετε ότι  $DE // AG$ .
6. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ, ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε αντίστοιχα τα τμήματα  $AD = AB$  και  $AE = AG$ . Να αποδείξετε ότι  $DE // BG$ .
7. Δίνεται κύκλος  $(O, \rho)$  και Μ το μέσο χορδής του ΑΒ. Φέρουμε  $Ox \perp OM$ . Να αποδείξετε ότι  $Ox // AB$ .

8. Δίνονται δύο παράλληλες ευθείες και μια ευθεία που τις τέμνει.
- Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι δύο εντός και εναλλάξ γωνιών είναι παράλληλες.
  - Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών τέμνονται κάθετα.
9. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και η διάμεσος  $AM$ . Φέρουμε  $Gx \perp B\Gamma$  προς το ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το  $A$  και παίρνουμε σε αυτήν τμήμα  $GD = AB$ . Να αποδείξετε ότι η  $AD$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $M\hat{A}\Gamma$ .

### Ασκήσεις Β' Ομάδας

10. Στο παρακάτω σχήμα είναι  $AB \parallel \Gamma\Delta$ . Να αποδείξετε ότι  $\hat{x} + \hat{y} - \hat{\omega} = 180^\circ$ .

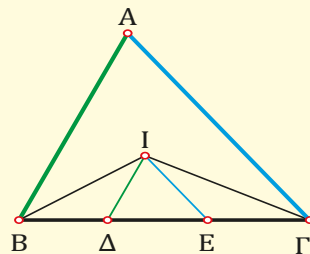


11. Δίνεται γωνία  $x\hat{O}y$ . Από σημείο  $A$  της  $Ox$  φέρουμε  $AB \perp Oy$ . Η διχοτόμος της γωνίας  $O\hat{A}B$  τέμνει την  $Oy$  στο σημείο  $\Gamma$ . Από το  $\Gamma$  φέρουμε  $\Gamma\Delta \perp Oy$ , που τέμνει την  $Ox$  στο  $\Delta$ . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $A\Delta\Gamma$  είναι ισοσκελές.
12. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και η διχοτόμος του  $AD$ . Από την κορυφή  $B$  φέρουμε  $BE \parallel AD$  που τέμνει την προέκταση της  $\Gamma A$  στο  $E$ . Να αποδείξετε ότι:  
 $EG = AB + A\Gamma$ .
13. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$ . Σε ευθεία  $(\varepsilon)$  που διέρχεται από την κορυφή  $A$  και είναι κάθετος στην  $A\Gamma$ , θεωρούμε δεξιά του  $A$  σημείο  $\Delta$ , ώστε  $AB = A\Delta$ . Από την κορυφή  $B$  φέρουμε  $BE \perp A\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι η  $B\Delta$  διχοτομεί τη γωνία  $A\hat{B}E$ .



Μεσοπαράλληλη  
 παραλλήλων ευθειών

14. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$ , με  $AB = A\Gamma$ , και ευθεία  $(\varepsilon) \parallel B\Gamma$  που διέρχεται από το  $A$ . Να αποδείξετε ότι η ευθεία  $(\varepsilon)$  διχοτομεί τη γωνία  $A\hat{\varepsilon}$ .
15. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma$  και η εξωτερική διχοτόμος του  $Ax$ . Από την κορυφή  $B$  φέρουμε  $B\Delta \parallel Ax$  που τέμνει την  $A\Gamma$  στο  $\Delta$ . Να αποδείξετε ότι  $\Delta\Gamma = A\Gamma - AB$ .
16. Οι διχοτόμοι των γωνιών  $B$  και  $\Gamma$  ενός τριγώνου  $AB\Gamma$  τέμνονται στο  $I$ . Από το  $I$  φέρουμε ευθεία παράλληλη της  $B\Gamma$  που τέμνει τις  $AB$  και  $A\Gamma$  στα σημεία  $\Delta, E$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:  
 α)  $B\Delta = \Delta I$ ,     β)  $\Delta E = B\Delta + \Gamma E$ .
17. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και ευθεία  $\varepsilon \parallel B\Gamma$ , που διέρχεται από το  $A$ . Αν οι ευθείες των διχοτόμων  $B\Delta$  και  $\Gamma E$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  τέμνουν την ευθεία  $(\varepsilon)$  στα σημεία  $Z$  και  $H$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:  
 α. το τρίγωνο  $ABZ$  είναι ισοσκελές,  
 β.  $ZH = AB + A\Gamma$ .
18. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$ , με  $AB < A\Gamma$ , και ευθεία  $(\varepsilon) \parallel B\Gamma$  που διέρχεται από το σημείο  $A$ . Οι διχοτόμοι των γωνιών  $B\hat{\varepsilon}$  και  $\hat{\Gamma}$  τέμνουν την ευθεία  $(\varepsilon)$  στα σημεία  $\Delta$  και  $E$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι  $\Delta E = A\Gamma - AB$ .
19. Οι διχοτόμοι των γωνιών  $B$  και  $\Gamma$  ενός τριγώνου  $AB\Gamma$  τέμνονται στο  $I$ . Από το  $I$  φέρουμε  $I\Delta \parallel AB$  και  $I E \parallel A\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τριγώνου  $\Delta I E$  ισούται με το μήκος της  $B\Gamma$ .

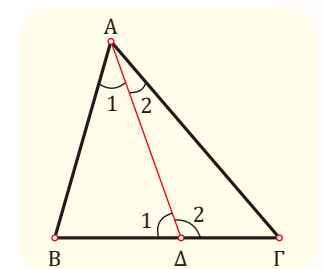
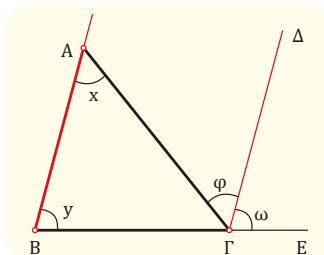


# 1.2

## Άθροισμα γωνιών τριγώνου και πολυγώνου

### Περιέχονται

- Άθροισμα γωνιών τριγώνου.
- Σχέση εξωτερικής γωνίας με απέναντι εσωτερικές.
- Άθροισμα γωνιών  $n$ -γώνου.



### Στην ενότητα αυτή:

1. Αποδεικνύουμε ότι το άθροισμα των γωνιών τριγώνου είναι ίσο με  $180^\circ$ .
2. Αναζητούμε και ερευνάμε σχέση ανάμεσα στην εξωτερική γωνία τριγώνου με το άθροισμα των απέναντι εσωτερικών γωνιών.
3. Αποδεικνύουμε ότι η εξωτερική γωνία είναι ίση με το άθροισμα των απέναντι εσωτερικών γωνιών.
4. Αποδεικνύουμε τύπο για το άθροισμα των γωνιών κυρτού  $n$ -γώνου και για το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών τριγώνου και  $n$ -γώνου.
5. Αναζητούμε και αποδεικνύουμε σχέση δύο γωνιών με παράλληλες ή κάθετες πλευρές.
6. Χρησιμοποιούμε τα παραπάνω στη λύση ασκήσεων ή προβλημάτων.

### Δραστηριότητα 1

Στο διπλανό σχήμα είναι  $\Gamma\Delta \parallel AB$ . Έχουν σημειωθεί τέσσερις γωνίες:

οι  $x, y, \varphi, \omega$ .

- α. Να βρείτε δύο ζεύγη γωνιών που το κάθε ζεύγος να αποτελείται από ίσες γωνίες.
- β. Ποια σχέση συνδέει την εξωτερική γωνία  $\hat{\Gamma}$  του τριγώνου με τις γωνίες  $\hat{A}$  και  $\hat{B}$ ;

Να διατυπώσετε γενικό συμπέρασμα.

- γ. Πώς θα αξιοποιήσουμε το διπλανό σχήμα, για να βρούμε το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου  $AB\Gamma$ ;

### Δραστηριότητα 2

Αν το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι ίσο με έναν σταθερό αριθμό (ίδιος για όλα τα τρίγωνα), να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι ίσο με  $180^\circ$ .

## Θεωρία και Εφαρμογές

### ♦ Α. Άθροισμα γωνιών τριγώνου

Μια από τις πιο σπουδαίες συνέπειες του Ευκλείδειου αιτήματος είναι το γεγονός ότι σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα των γωνιών του είναι ίσο με δύο ορθές. Το συμπέρασμα αυτό είναι πολύ σημαντικό και χαρακτηρίζει την Ευκλείδεια Γεωμετρία, την ξεχωρίζει δηλαδή από άλλες γεωμετρίες. Πραγματικά:

- Στην Υπερβολική Γεωμετρία το άθροισμα των γωνιών τριγώνου είναι μικρότερο από δύο ορθές και μάλιστα δεν είναι ίσο με σταθερό αριθμό.
- Στην Ελλειπτική Γεωμετρία, το παραπάνω άθροισμα είναι μεγαλύτερο από δύο ορθές και όχι το ίδιο για όλα τα τρίγωνα.



Παράδειγμα  
στο άθροισμα  
γωνιών τριγώνου



**Θεώρημα 1**

Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι ίσο με δύο ορθές, δηλαδή  $180^\circ$ .

**Απόδειξη**

Από την κορυφή Α φέρουμε ευθεία (ε) // ΒΓ. Είναι, τότε:

- $\hat{B} = \hat{A}_1 = \varphi$ , ως εντός εναλλάξ των παράλληλων (ε) και ΒΓ με τέμνουσα την ΑΒ.
- $\hat{\Gamma} = \hat{A}_2 = \omega$ , ως εντός εναλλάξ των παράλληλων (ε) και ΒΓ με τέμνουσα την ευθεία ΑΓ.

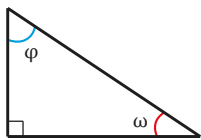
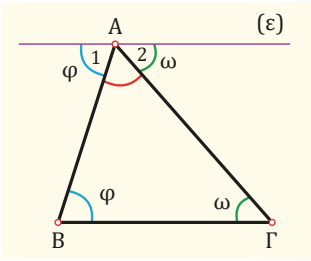
Επομένως,  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = \varphi + \hat{A} + \omega = \hat{A}_1 + \hat{A} + \hat{A}_2 = 180^\circ$ . ■

**Πορίσματα**

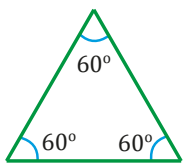
Αφού σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα των γωνιών του είναι  $180^\circ$ , συμπεραίνουμε άμεσα ότι:

- α. Στα ορθογώνια τρίγωνα οι οξείες γωνίες είναι συμπληρωματικές (Σχ. α).
- β. Κάθε γωνία ενός ισοπλεύρου τριγώνου είναι ίση με  $60^\circ$  (Σχ. β).
- γ. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες, μία προς μία, τότε θα έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες (θα είναι ισογώνια).
- δ. Αν η γωνία της κορυφής ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι  $\varphi$  και οι ίσες γωνίες του είναι  $\omega$ , τότε (Σχ. γ):

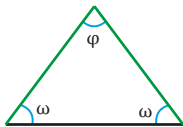
$$\varphi = 180^\circ - 2\omega, \quad \omega = 90^\circ - \frac{\varphi}{2}.$$



Σχ. α



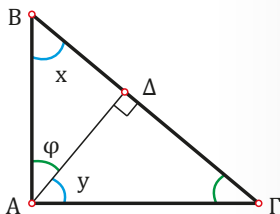
Σχ. β



Σχ. γ



**Εφαρμογή  
στο άθροισμα  
γωνιών τριγώνου**



**Εφαρμογή (βασική)**

Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) φέρουμε το ύψος ΑΔ. Να αποδείξετε ότι:

- α.  $\hat{B} = \Delta\hat{A}\Gamma$ ,
- β.  $\hat{\Gamma} = \Delta\hat{A}B$ .

**Λύση**

α) Από τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΓ παίρνουμε:

- $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ$ ,
- $y + \hat{\Gamma} = 90^\circ$ .

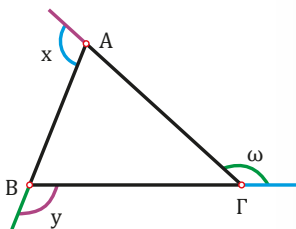
Επομένως,  $\hat{B} = y$ , δηλαδή  $\hat{B} = \Delta\hat{A}\Gamma$ .

Με άλλα λόγια οι γωνίες  $\hat{B}$  και  $\Delta\hat{A}\Gamma$  είναι ίσες, διότι είναι συμπληρωματικές της γωνίας  $\hat{\Gamma}$  του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ παίρνουμε:

$$\hat{\Gamma} = 90^\circ - y = \hat{A} - \hat{y} = \varphi = \Delta\hat{A}B.$$

Και εδώ μπορούμε να πούμε ότι οι γωνίες  $\hat{\Gamma}$  και  $\Delta\hat{A}B$  είναι ίσες, διότι είναι συμπληρωματικές της γωνίας  $\hat{B}$ . ■



### ♦ Β. Εξωτερική γωνία τριγώνου

Κάθε γωνία που σχηματίζεται από μια πλευρά τριγώνου και την προέκτασή της άλλης, όπως στο διπλανό σχήμα, λέγεται **εξωτερική γωνία του τριγώνου**. Το τρίγωνο έχει τρεις εξωτερικές γωνίες. Καθεμιά από αυτές είναι παραπληρωματική με την εφεξής της γωνία του τριγώνου. Έτσι, στο σχήμα είναι:

$$\hat{A}_{εξ} = x, \quad \hat{B}_{εξ} = y, \quad \hat{\Gamma}_{εξ} = \omega.$$

Για την εξωτερική γωνία έχουμε το επόμενο σημαντικό συμπέρασμα:



### Θεώρημα 2

Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών του γωνιών.

### Απόδειξη

Θεωρούμε το τρίγωνο ΑΒΓ. Θα αποδείξουμε ότι  $\omega = \hat{A} + \hat{B}$ , όπου  $\omega = \hat{\Gamma}_{εξ}$ .

Πράγματι, στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ.$$

Είναι όμως  $\omega + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ . Επομένως:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = \omega + \hat{\Gamma} \quad \text{ή} \quad \omega = \hat{A} + \hat{B}. \quad \blacksquare$$

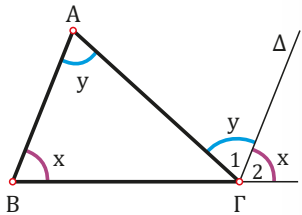
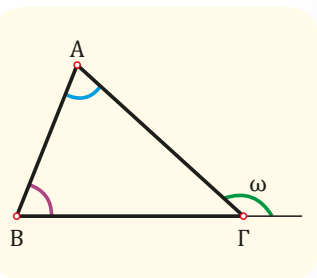
### Παρατήρηση

Αν φέρουμε  $\Gamma\Delta // AB$ , τότε:

$$\hat{\Gamma}_1 = \hat{A} = y \quad \text{και} \quad \hat{\Gamma}_2 = \hat{B} = x.$$

Επομένως:

$$\hat{\Gamma}_{εξ} = \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2 = y + x = \hat{A} + \hat{B}.$$



### Παράδειγμα

Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι  $\hat{A} = 40^\circ$  και  $\hat{B} = 70^\circ$ . Να αποδείξετε ότι:  $AB = AG$ .

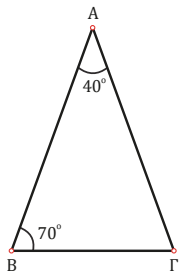
### Λύση

Γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι  $180^\circ$ .

Αφού  $\hat{A} = 40^\circ$  και  $\hat{B} = 70^\circ$ , παίρνουμε:

$$40^\circ + 70^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ \quad \text{ή} \quad \hat{\Gamma} = 70^\circ.$$

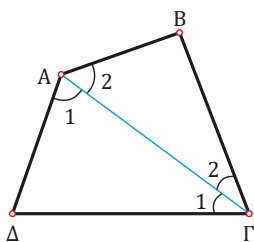
Αφού  $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 70^\circ$ , το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές και έτσι  $AB = AG$ .



### ♦ Γ. Άθροισμα γωνιών κυρτού ν-γώνου

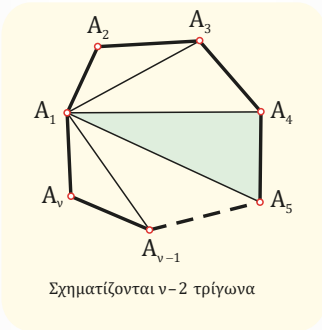
Έχουμε αποδείξει ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι  $180^\circ$ . Πόσο όμως είναι το άθροισμα των γωνιών ενός κυρτού πολυγώνου με  $n$  πλευρές; Ας δούμε πρώτα την περίπτωση ενός τυχαίου τετραπλεύρου.

Επειδή θα μπορούσε αυτό το τετράπλευρο να έχει 4 ορθές γωνίες, η αναμενόμενη απάντηση είναι  $360^\circ$ . Γιατί όμως αυτό να συμβαίνει σε τυχαίο τετράπλευρο; Φέρουμε τη διαγώνιο ΑΓ του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. Το τετράπλευρο χωρίζεται σε δύο τρίγωνα και έτσι:





### Εξωτερικές και εσωτερικές γωνίες τριγώνου

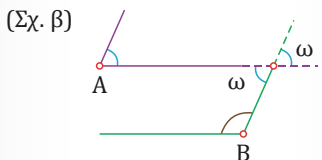
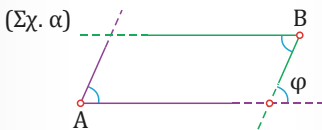


### Άθροισμα γωνιών n-γώνου

- $\Sigma_v = (2v - 4)$  ορθές ή
- $\Sigma_v = 180^\circ v - 360^\circ$ .



### Άθροισμα εξωτερικών γωνιών n-γώνου



$$\begin{aligned}\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} &= (\hat{A}_1 + \hat{\Delta} + \hat{\Gamma}_1) + (\hat{A}_2 + \hat{B} + \hat{\Gamma}_2) = \\ &= 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ.\end{aligned}$$

Γενικά, λοιπόν, ισχύει η εξής πρόταση:

### Θεώρημα 3

Το άθροισμα των γωνιών κάθε (κυρτού) n-γώνου είναι ίσο με:

$$2v - 4 \text{ ορθές ή } 180v - 360 \text{ μοίρες.}$$

### Απόδειξη

Φέρουμε όλες τις διαγώνιες του (κυρτού) n-γώνου  $A_1A_2 \dots A_v$  από την κορυφή  $A_1$ . Το πλήθος αυτών των διαγωνίων είναι  $v - 3$ , σχηματίζονται όμως  $v - 2$  τρίγωνα.

Αφού το άθροισμα των γωνιών καθενός από αυτά τα τρίγωνα είναι 2 ορθές, το άθροισμα όλων των γωνιών του n-γώνου, έστω  $\Sigma_v$ , θα είναι:

$$\Sigma_v = 2(v - 2) = 2v - 4 \text{ ορθές.}$$

Επειδή η ορθή γωνία έχει μέτρο  $90^\circ$ , το άθροισμα των γωνιών του n-γώνου θα είναι:

$$\Sigma_v = (180v - 360)^\circ. \blacksquare$$

### Παράδειγμα

α. Πόσο είναι το άθροισμα των γωνιών ενός πενταγώνου;

β. Ένα (κυρτό) n-γωνο έχει άθροισμα γωνιών  $900^\circ$ . Πόσες πλευρές έχει το πολύγωνο αυτό;

### Λύση

α. Στο πεντάγωνο έχουμε  $v = 5$ . Έτσι, το άθροισμα των γωνιών του είναι:

$$\Sigma_5 = 2 \cdot 5 - 4 \text{ ορθές} = 6 \text{ ορθές} = 540^\circ.$$

β. Εδώ έχουμε:

$$\Sigma_v = 900^\circ \text{ ή } 180^\circ v - 360^\circ = 900^\circ \text{ ή } 180^\circ v = 1260^\circ \text{ ή } v = 7.$$

Πρόκειται επομένως για κυρτό 7-γωνο.  $\blacksquare$

### ♦ Γωνίες με πλευρές παράλληλες

Στο διπλανό σχήμα (Σχ. α) οι γωνίες  $\hat{A}$  και  $\hat{B}$  έχουν τις πλευρές τους παράλληλες. Όπως άμεσα μπορούμε να δούμε, οι γωνίες αυτές είναι και οι δύο οξείες και είναι ίσες, αφού η καθεμία είναι π.χ. ίση με τη γωνία  $\varphi$ .

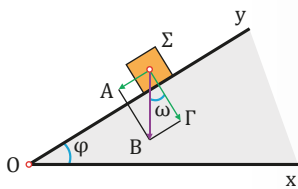
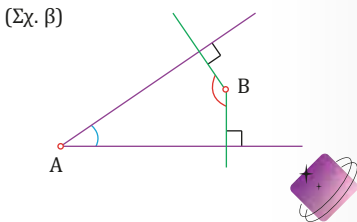
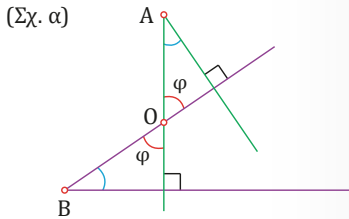
Στο δεύτερο σχήμα (Σχ. β) οι δύο γωνίες  $\hat{A}$  και  $\hat{B}$  έχουν μεν παράλληλες πλευρές, ωστόσο η μία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία. Στην περίπτωση αυτή οι γωνίες είναι παραπληρωματικές, διότι π.χ. η  $\hat{A}$  είναι ίση με την  $\omega$ , ενώ η  $\hat{B}$  είναι παραπληρωματική της  $\omega$ , ως εντός και επί τα αυτά.

Καταλήγουμε λοιπόν στο εξής συμπέρασμα:

### Θεώρημα 4

Έστω ότι δύο γωνίες έχουν τις πλευρές τους παράλληλες.

- Αν οι γωνίες είναι και οι δύο οξείες ή και οι δύο αμβλείες, τότε είναι **ίσες**.
- Αν η μία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία, τότε είναι **παραπληρωματικές**.



### ◆ Γωνίες με πλευρές κάθετες

Στο διπλανό σχήμα (Σχ. α) οι γωνίες  $\hat{A}$  και  $\hat{B}$  έχουν τις πλευρές τους μία προς μία κάθετες. Οι γωνίες είναι και οι δύο οξείες και μάλιστα είναι ίσες, αφού π.χ. είναι συμπληρωματικές της γωνίας  $\varphi$ .

Στο διπλανό σχήμα (Σχ. β) οι γωνίες  $\hat{A}$  και  $\hat{B}$  έχουν τις πλευρές τους κάθετες, η μία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία. Στην περίπτωση αυτή οι γωνίες είναι παραπληρωματικές.

Γενικά, ισχύει το εξής συμπέρασμα:

### Θεώρημα 5

Έστω ότι δύο γωνίες έχουν τις πλευρές τους μία προς μία κάθετες.

- Αν οι γωνίες είναι και οι δύο οξείες ή και οι δύο αμβλείες, τότε είναι **ίσες**.
- Αν η μία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία, τότε είναι **παραπληρωματικές**.

### Παράδειγμα

Ένα σώμα Σ με βάρος Β βρίσκεται σε ένα κεκλιμένο επίπεδο γωνίας  $\varphi$ . Στην τάξη προσπαθούν να εξηγήσουν γιατί αν δεν υπάρχουν τριβές ή άλλα εμπόδια, το σώμα θα αρχίσει να ολισθαίνει.

Πώς θα δικαιολογήσουν οι μαθητές/τριες ότι ο/η εκπαιδευτικός της Φυσικής στη θέση της γωνίας  $\omega$  έγγραφε  $\varphi$ ;

### Λύση

Οι γωνίες  $\varphi$  και  $\omega$  είναι και οι δύο οξείες. Όμως  $\Sigma B \perp O_x$  και  $\Sigma \Gamma \perp O_y$ .

Οι γωνίες λοιπόν  $\varphi$  και  $\omega$  έχουν επιπλέον τις πλευρές τους κάθετες και αφού είναι οξείες, θα είναι ίσες. ■

### Εφαρμογή

Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τις διχοτόμους των γωνιών  $\hat{B}$  και  $\hat{\Gamma}$  που τέμνονται στο σημείο Ρ. Οι διχοτόμοι της  $\hat{B}$  και της εξωτερικής γωνίας  $\hat{\Gamma}$  τέμνονται στο Ε. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha. \quad \widehat{BPG} = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2},$$

$$\beta. \quad \hat{E} = \frac{\hat{A}}{2}.$$

### Λύση

α. Από το τρίγωνο ΡΒΓ παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \widehat{BPG} &= 180^\circ - (x + y) = 180^\circ - \left( \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} \right) = \\ &= 180^\circ - \frac{180^\circ - \hat{A}}{2} = 180^\circ - \left( 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2} \right) = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}. \end{aligned}$$

β. Στο τρίγωνο ΕΓΒ η γωνία  $\widehat{E\Gamma\Delta} = \omega$  είναι εξωτερική. Έτσι:

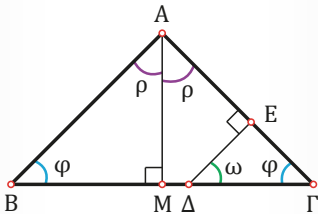
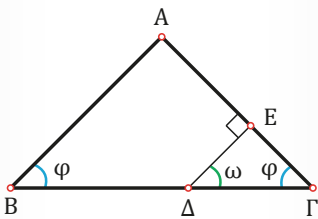
Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ είναι:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$$

$$\frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} = 90^\circ$$



Γωνία εσωτερικής και εξωτερικής διχοτόμου



Συμμετρία ως προς σημείο και ως προς ευθεία



Συνέπειες του θεωρήματος εξωτερικής γωνίας τριγώνου

$$\begin{aligned} \widehat{E\Gamma\Delta} &= \widehat{\Gamma\hat{B}E} + \widehat{\Gamma\hat{E}B} \\ \text{ή} \\ \omega &= \frac{\widehat{B}}{2} + \widehat{E}. \end{aligned} \quad (1)$$

Όμως  $\omega = \frac{\widehat{\Gamma_{\text{εξ}}}}{2} = \frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2}$ . Επομένως, από τη σχέση (1), παίρνουμε:

$$\widehat{E} = \omega - \frac{\widehat{B}}{2} = \frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2} - \frac{\widehat{B}}{2} = \frac{\widehat{A}}{2}. \blacksquare$$

### Εφαρμογή

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και σημείο  $\Delta$  στην πλευρά  $B\Gamma$ . Φέρουμε  $\Delta E \perp A\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι  $\widehat{A} = 2\omega$ , όπου  $\omega = \widehat{E\Delta\Gamma}$ .

### Λύση

Αφού το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές με  $AB = A\Gamma$  παίρνουμε:

$$\widehat{B} = \widehat{\Gamma} = \varphi.$$

- Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $\Delta E\Gamma$  είναι:

$$\varphi + \omega = 90^\circ,$$

αφού οι οξείες γωνίες κάθε ορθογωνίου τριγώνου είναι συμπληρωματικές.

- Από το τρίγωνο  $AB\Gamma$  παίρνουμε:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ \quad \text{ή} \quad \widehat{A} + 2\varphi = 180^\circ \quad \text{ή}$$

$$\widehat{A} = 180^\circ - 2\varphi.$$

Επειδή  $\varphi + \omega = 90^\circ$ , είναι  $\widehat{A} = 180^\circ - 2\varphi = 180 - 2(90^\circ - \omega) = 2\omega$ .

### Άλλος τρόπος

Φέρουμε το ύψος  $AM$ , το οποίο είναι και διχοτόμος. Τότε,

- από το ορθογώνιο τρίγωνο  $AM\Gamma$  παίρνουμε  $\rho = 90^\circ - \varphi$ , ενώ
- από το ορθογώνιο τρίγωνο  $\Delta E\Gamma$  παίρνουμε  $\omega = 90^\circ - \varphi$ .

Άρα  $\rho = \omega$  και έτσι  $\widehat{A} = 2\rho = 2\omega$ .  $\blacksquare$



Αληθές-ψευδές στις παράλληλες ευθείες

## Μαθηματικές Ιστορίες

Στα Στοιχεία του Ευκλείδη, και συγκεκριμένα στο βιβλίο III, ξεχωρίζει η πρόταση 31, σύμφωνα με την οποία:

Ἐν κύκλῳ ἢ μὲν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία ὀρθή ἐστίν ...

Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.

Η απόδειξη αυτής της πρότασης, όπως αναφέρεται, αποδίδεται στον Θαλή τον Μιλήσιο (640 – 546 π.Χ.), έναν από τους επτά σοφούς της αρχαιότητας. Αποτελεί δείγμα της αυστηρής γεωμετρικής σκέψης που ξεκίνησε από τους Έλληνες και λόγω της απλότητάς της, αλλά και της σπουδαιότητάς της, σε ορισμένες χώρες αναφέρεται στα σχολικά βιβλία ως Θεώρημα του Θαλή.

Ἐστω λοιπόν  $O$  το κέντρο του κύκλου,  $AB$  μια διάμετρος και  $M$  τυχαίο σημείο του. Θα αποδείξουμε ότι  $\widehat{AMB} = 90^\circ$ .

Αφού  $OA = OM = OB$ , ως ακτίνες, τα τρίγωνα  $OAM$  και  $OMB$  είναι ισοσκελή.

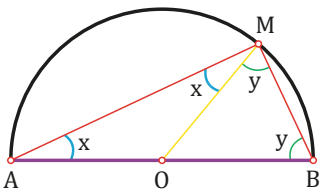
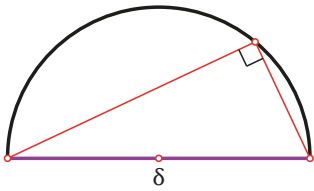
Επομένως:

$$\widehat{OAM} = \widehat{OMA} = x \quad \text{και} \quad \widehat{OMB} = \widehat{OBM} = y.$$

Στο τρίγωνο  $MAB$  οι γωνίες έχουν άθροισμα  $180^\circ$ , οπότε:

$$x + (x + y) + y = 180^\circ \quad \text{ή} \quad 2(x + y) = 180^\circ.$$

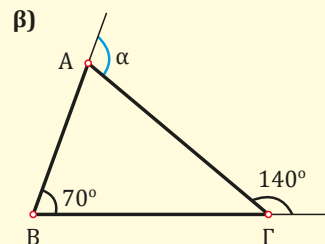
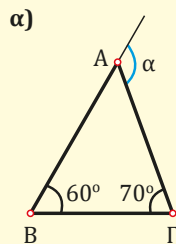
Επομένως,  $x + y = 90^\circ$  και έτσι  $\widehat{AMB} = x + y = 90^\circ$ , οπότε η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. Στην ενότητα με τα ορθογώνια τρίγωνα αλλά και στον κύκλο, θα συναντήσουμε και άλλους τρόπους απόδειξης αυτής της πρότασης.

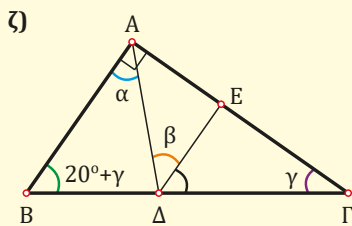
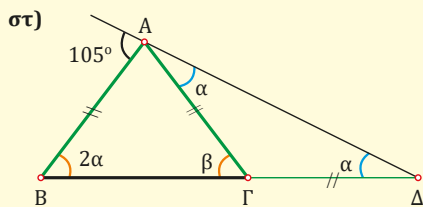
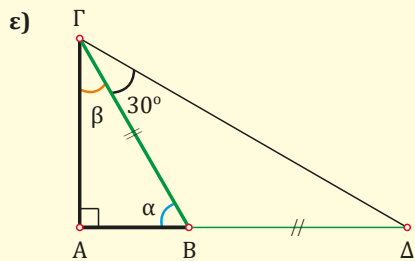
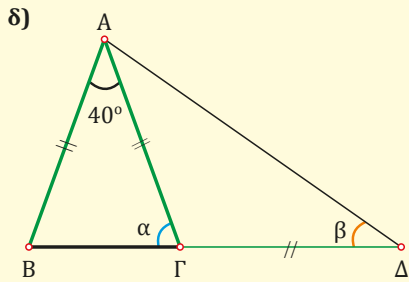
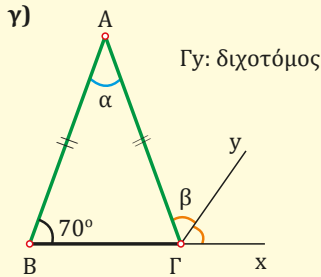


## Ασκήσεις και Προβλήματα

## Ασκήσεις Α' Ομάδας

1. Στα παρακάτω σχήματα να υπολογίσετε τις γωνίες  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$ .



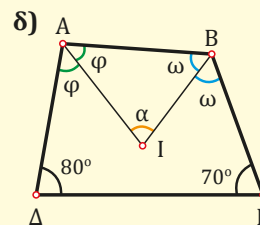
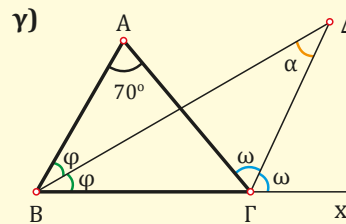
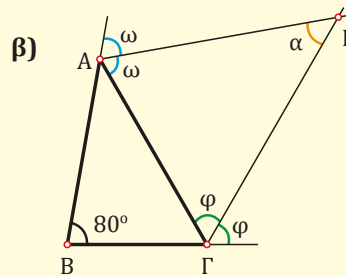
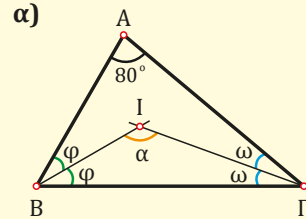


Στο σχήμα ζ) είναι  $AB \parallel \Delta E$  και  $A\Delta$  διχοτόμος.

2. Σε ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $\hat{A} = 60^\circ$  και  $\hat{B} = \hat{\Gamma} + 20^\circ$ .  
 α. Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου  $AB\Gamma$ .  
 β. Αν το ύψος  $A\Delta$  και η διχοτόμος  $BE$  τέμνονται στο  $K$ , να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου  $AEK$ .

3. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A} = 60^\circ$ ,  $\hat{\Gamma} = 50^\circ$ . Η διχοτόμος  $B\Delta$  και το ύψος  $AH$  τέμνονται στο σημείο  $E$ . Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $AE\Delta$ .

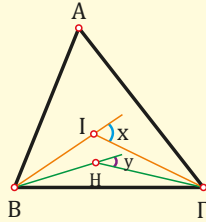
4. Να υπολογίσετε τη γωνία  $\alpha$  στα παρακάτω σχήματα.



5. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Στο σημείο  $B$  φέρουμε ευθεία κάθετη στην  $AB$ , που τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας  $\hat{A}$  στο σημείο  $E$ . Η κάθετος  $B\Delta$  στην πλευρά  $A\Gamma$  τέμνει την  $AE$  στο σημείο  $Z$ . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $BZE$  είναι ισοσκελές.

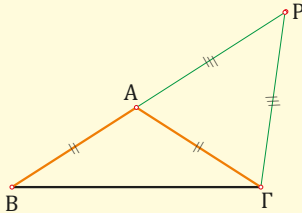
## Ασκήσεις Β' Ομάδας

6. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Οι διχοτόμοι των γωνιών  $\hat{B}$  και  $\hat{\Gamma}$  τέμνονται στο  $I$ , ενώ οι διχοτόμοι των γωνιών  $\hat{I}B\Gamma$  και  $\hat{I}\Gamma B$  τέμνονται στο  $H$  (βλέπε σχήμα).



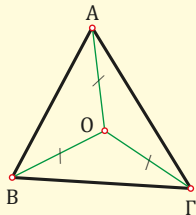
Να αποδείξετε ότι  $x = 2y$ .

7. Στο παρακάτω σχήμα τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $PA\Gamma$  είναι ισοσκελή και τα σημεία  $B, A, P$  είναι συνευθειακά.



Να αποδείξετε ότι  $\hat{B}\hat{\Gamma}P = 3\hat{B}$ .

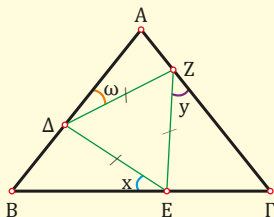
8. Στο εσωτερικό ενός οξυγωνίου τριγώνου  $AB\Gamma$  υπάρχει ένα σημείο  $O$  τέτοιο, ώστε  $OA = OB = OG$ .



Να αποδείξετε ότι  $\hat{B}\hat{O}\Gamma = 2\hat{A}$ .

9. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = AG$ . Το τρίγωνο  $\Delta EZ$  είναι ισόπλευρο. Να αποδείξετε ότι:

$$x = \frac{y + \omega}{2}.$$



10. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{B} > \hat{\Gamma}$  και η διχοτόμος του  $AD$ . Να αποδείξετε ότι:

α.  $\hat{A}\hat{\Delta}\Gamma - \hat{A}\hat{\Delta}B = \hat{B} - \hat{\Gamma}$ .

β.  $\hat{A}\hat{\Delta}B = 90^\circ - \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$  και  $\hat{A}\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ + \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$ .

11. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < AG$ , η διχοτόμος του  $AD$  και ένα σημείο  $E$  της πλευράς  $AB$ . Από το  $E$  φέρουμε ευθεία κάθετο στην  $AD$ , που τέμνει την  $AD$  στο  $Z$  και την προέκταση της  $\Gamma B$  στο  $H$ .

Να αποδείξετε ότι  $\hat{E}\hat{H}B = \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$ .

12. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ), το ύψος του  $AD$  και η διχοτόμος του  $BZ$  που τέμνονται στο σημείο  $E$ . Να αποδείξετε ότι:

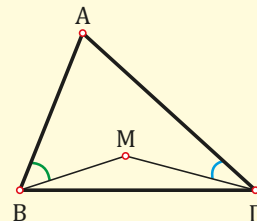
α.  $\hat{B} = \hat{\Delta}\hat{A}\Gamma$  και  $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}\hat{A}B$ ,

β.  $\hat{A}\hat{Z}B = \hat{A}\hat{E}Z$ .

13. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ). Η διχοτόμος της γωνίας  $\hat{B}$  τέμνει την  $AG$  στο σημείο  $Z$  και την κάθετο προς τη  $B\Gamma$  στο σημείο  $\Gamma$  στο  $H$ . Να αποδείξετε ότι  $\hat{\Gamma}\hat{Z}H = \hat{\Gamma}\hat{H}Z$ .

14. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A} = 60^\circ$  και οι διχοτόμοι του  $B\Delta, \Gamma E$ . Να αποδείξετε ότι  $\hat{B}\hat{\Delta}\Gamma = \hat{\Gamma}\hat{E}A$ .

15. Αν το  $M$  είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου  $AB\Gamma$ , να αποδείξετε ότι  $\hat{B}\hat{M}\Gamma = \hat{A} + \hat{A}\hat{B}M + \hat{A}\hat{\Gamma}M$ .



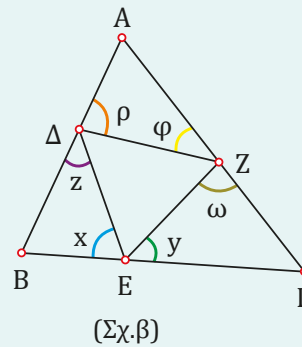
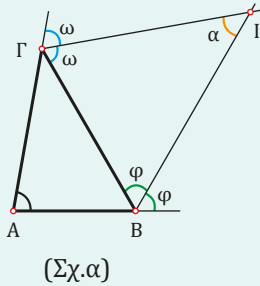
16. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = AG$ ) και τυχαίο σημείο  $\Delta$  της πλευράς  $AB$ . Στην προέκταση της  $\Gamma A$  προς το  $A$ , παίρνουμε τμήμα  $AE = A\Delta$ . Να αποδείξετε ότι  $\Delta E \perp B\Gamma$ .

# 1.3

## Ανακεφαλαίωση

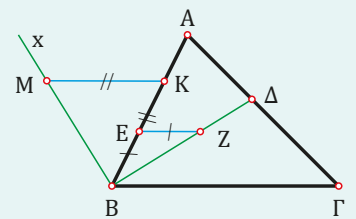
**Στην ενότητα αυτή** περιλαμβάνονται έργα για περαιτέρω αναζητήσεις και διερευνήσεις των μαθητών/τριών, με στόχο την εμπάθυνση και κατανόηση των Προσδοκώμενων Μαθησιακών Αποτελεσμάτων του κεφαλαίου.

1. α. Στο (Σχ.α) να αποδείξετε ότι  $\widehat{B\hat{\Gamma}} = 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2}$ .



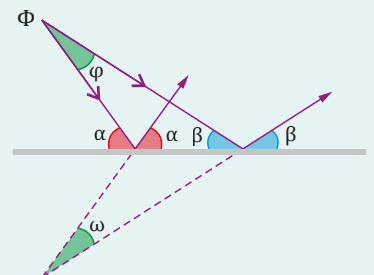
- β. Στο (Σχ.β) να αποδείξετε ότι  $x + y + \omega + \varphi + \rho + z = 360^\circ$ .

2. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με  $AB < AG$ , η διχοτόμος AΔ και σημείο M του τμήματος ΔΓ. Από το M φέρουμε παράλληλη προς την AΔ που τέμνει τις ευθείες AB και AG στα σημεία E και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
- το τρίγωνο EAZ είναι ισοσκελές,
  - $BE + \Gamma Z = AB + A\Gamma$ .
3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ με  $AB = A\Gamma$ , το μέσο M της BΓ, τυχαίο σημείο Δ του BM και E το μέσο του BΔ. Από το E φέρουμε ευθεία κάθετη στη BΓ, που τέμνει την AB στο Z.
- Να αποδείξετε ότι  $DZ \parallel A\Gamma$ .
  - Αν οι ευθείες ZΔ και AM τέμνονται στο K, να αποδείξετε ότι  $BZ + ZK = A\Gamma$ .
4. Δίνεται τρίγωνο ABΓ, η διχοτόμος του BΔ και η εξωτερική διχοτόμος του Bx. Θεωρούμε δύο σημεία E και K της πλευράς AB. Αν ο κύκλος (E, EB) τέμνει τη BΔ στο Z, ενώ ο κύκλος (K, KB) τέμνει τη Bx στο M, να αποδείξετε ότι  $EZ \parallel MK$ .



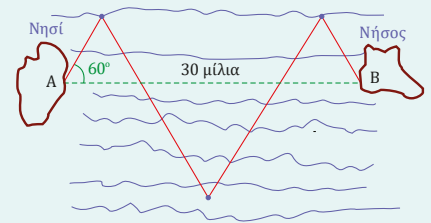
### 5. Ανακλάσεις

Από τη φωτεινή πηγή Φ εκπέμπονται δύο ακτίνες που σχηματίζουν γωνία φ. Ανακλώνται σε επίπεδο καθρέφτη έτσι, ώστε οι γωνίες προσπτώσεως να είναι ίσες με τις γωνίες ανακλάσεως, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να αποδείξετε ότι η γωνία ω που σχηματίζουν οι προεκτάσεις των ακτίνων αφού ανακλαστούν είναι ίση με τη φ.

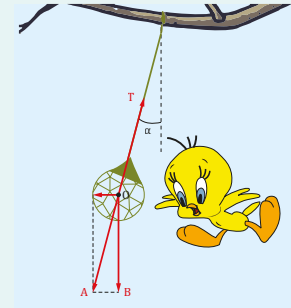


**6. Αλλαγή πορείας**

Ένα πλοίο κάνει τη διαδρομή μεταξύ δύο λιμανιών A και B που απέχουν 30 μίλια. Επειδή όμως πνέουν ισχυροί άνεμοι, ο καπετάνιος αντί να κάνει ευθύγραμμη διαδρομή προτιμάει να κάνει ζικ-ζακ όπως στο σχήμα. Αν όλες οι οξείες γωνίες που σχηματίζονται είναι ίσες με 60 μοίρες, πόσο είναι το μήκος της τεθλασμένης διαδρομής που έκανε το πλοίο για να μεταβεί από το A στο B;

**7. Το εκκρεμές**

Ο Τουίτι μαθαίνει το εκκρεμές της Φυσικής. Παρατηρεί ότι το σώμα βάρους B ισορροπεί με την επίδραση δύναμης F. Η δύναμη T είναι η τάση του νήματος και A η αντίδρασή της. Βοηθήστε τον Τουίτι να βρει τη γωνία  $\alpha$ , αν η γωνία OAB είναι  $72^\circ$ .

**8. Το πείραμα του Ερατοσθένη**

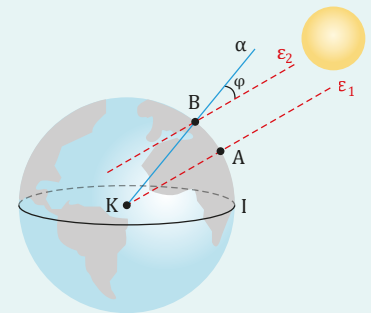
Στο σχήμα βλέπουμε τη Γη, τον ισημερινό της I και τις πόλεις A και B που βρίσκονται στον ίδιο μεσημβρινό της. Η απόσταση των δύο πόλεων είναι 800 km. Θα υπολογίσουμε την περίμετρο της Γης, την οποία θεωρούμε ότι έχει σχήμα σφαίρας με κέντρο K.

Μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή που η ακτίνα  $\epsilon_1$  του φωτός του Ηλίου πέφτει κάθετα στην επιφάνεια της Γης, οπότε η ευθεία  $\epsilon_1$  διέρχεται από το κέντρο K, στην πόλη A, η ακτίνα  $\epsilon_2$  του Ήλιου σχηματίζει με την ακτίνα της Γης στην πόλη B γωνία  $\varphi$ , η οποία είναι το  $\frac{1}{50}$  της πλήρους γωνίας.

α) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας  $\varphi$  σε μοίρες.

β) Να βρείτε τη γωνία  $\widehat{AKB}$ .

γ) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος της Γης, σύμφωνα με τις παραπάνω μετρήσεις και παραδοχές, είναι 40.000 km.

**9. Παιχνίδια με σπίρτα**

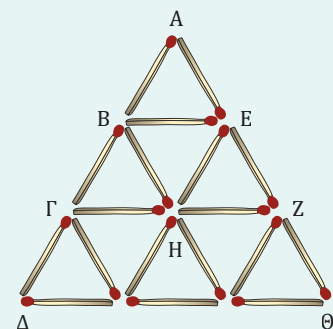
Με 18 σπίρτα κατασκευάσαμε το διπλανό σχήμα, το οποίο αποτελείται από ισόπλευρα τρίγωνα με μήκος πλευράς ίσο με το μήκος ενός σπύρτου.

Ας θεωρήσουμε ότι τα σπίρτα είναι αμελητέου πάχους, ώστε να είναι ίσα ευθύγραμμα τμήματα.

α) Τα A, B, Γ και Δ είναι συνευθειακά και επιπλέον να υποδείξετε και άλλες ομάδες συνευθειακών σημείων.

β) Να αποδείξετε ότι  $BE \parallel \Gamma H Z$  και  $BE \parallel \Delta \Theta$ .

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν συνολικά 13 ισόπλευρα τρίγωνα.



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2<sup>ο</sup>

## Τρίγωνα και κύκλος

### Περιεχόμενα

- 2.1 Ισότητα τριγώνων
- 2.2 Ανισοτικές σχέσεις στα τρίγωνα
- 2.3 Κύκλος - Χορδές - Αποστήματα
- 2.4 Γεωμετρικές κατασκευές
- 2.5 Γεωμετρικοί τόποι
- 2.6 Ανακεφαλαίωση

#### Λέξεις κλειδιά:

Ίσα τρίγωνα	Κύκλος, χορδή
Κριτήρια ισότητας	Χορδές και αποστήματα
Μεσοκάθετος, διχοτόμος	Γεωμετρικές κατασκευές
Ισοσκελές τρίγωνο	Γεωμετρικός τόπος

### Εισαγωγικά και ιστορικά σχόλια

Στο κεφάλαιο αυτό, θα εστιάσουμε αρχικά στην έννοια της ισότητας τριγώνων και θα παρουσιάσουμε τα κριτήρια που διαθέτουμε για να συγκρίνουμε τόσο δύο τυχαία όσο και δύο ορθογώνια τρίγωνα. Από αυτά τα κριτήρια, το πρώτο το δεχόμαστε ως αξίωμα, όπως είχε κάνει και ο Ευκλείδης. Όλα τα υπόλοιπα κριτήρια μπορούν να αποδειχθούν.

Στη συνέχεια, αφού αποδείξουμε τις ιδιότητες του ισοσκελούς τριγώνου, θα θυμηθούμε τη χαρακτηριστική ιδιότητα της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος και της διχοτόμου γωνίας.

Ενδιαφέρον σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουν, επίσης, ορισμένες προτάσεις που μας επιτρέπουν να συγκρίνουμε πλευρές ή γωνίες σε ένα τρίγωνο. Όμως, το πιο σπουδαίο συμπέρασμα είναι ότι καθεμιά από τις εξωτερικές γωνίες τριγώνου είναι μεγαλύτερη από τις απέναντι εσωτερικές. Με βάση αυτό το θεώρημα μπορούμε στο πλαίσιο της Απόλυτης Γεωμετρίας να αποδείξουμε ότι υπάρχουν παράλληλες ευθείες και έτσι αποκτά νόημα το πρώτο κεφάλαιο της παραλληλίας.

Τέλος, θα δούμε τις σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου ή δύο κύκλων και θα αποδείξουμε ότι τα εφαπτόμενα τμήματα είναι ίσα.

# 2.1

## Ισότητα τριγώνων

Στην ενότητα αυτή:

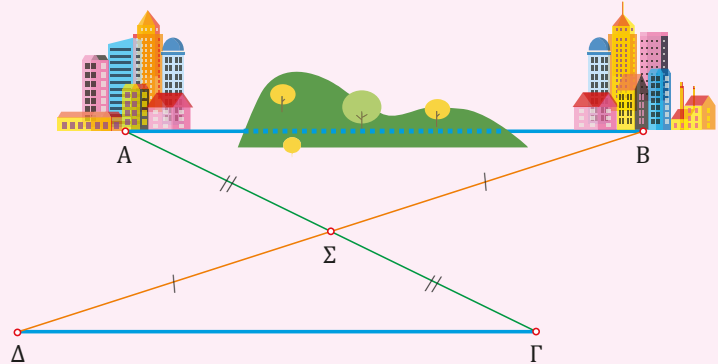
1. Διατυπώνουμε τα κριτήρια ισότητας τυχαίων ή ορθογωνίων τριγώνων.
2. Γράφουμε τις ισότητες πλευρών ή γωνιών σε ίσα τρίγωνα.
3. Γράφουμε και αποδεικνύουμε τις ιδιότητες του ισοσκελούς τριγώνου.
4. Διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε τη χαρακτηριστική ιδιότητα της μεσοκαθέτου τμήματος.
5. Διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε τη χαρακτηριστική ιδιότητα της διχοτόμου γωνίας.
6. Εφαρμόζουμε τα παραπάνω στη λύση ασκήσεων ή προβλημάτων.

Περιέχονται

- Ισότητα τυχαίων τριγώνων.
- Ιδιότητες ισοσκελούς τριγώνου.
- Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων.
- Ιδιότητα της μεσοκαθέτου.
- Ιδιότητα της διχοτόμου.

### Εξερεύνηση

Στο σχέδιο ενός πολιτικού μηχανικού, βλέπουμε το παρακάτω διάγραμμα που αποτυπώνει μια περιοχή του θεσσαλικού κάμπου.



Από τις πόλεις A και B θα περάσει ένας ευθύγραμμος δρόμος. Το εμπόδιο του λόφου που βρίσκεται ανάμεσα στις πόλεις, θα λυθεί με ένα τούνελ. Στο σχέδιο ο μηχανικός υποδεικνύει στην κατασκευάστρια εταιρεία έναν τρόπο για τη μέτρηση του τμήματος AB.

- α. Τι έχει σχεδιάσει ο μηχανικός για να βρεθεί το μήκος του AB;
- β. Γιατί το μήκος του ΓΔ είναι ίσο με το μήκος του AB;  
Τι απάντηση θα δίνετε εσείς στα παραπάνω ερωτήματα;
- γ. Γιατί στο σχέδιο αναγκαστικά είναι  $\Gamma\Delta // AB$ ;

### Θεωρία και εφαρμογές

#### ◆ Α. Ισότητα τυχαίων τριγώνων

Ένα από τα σημαντικότερα πράγματα που μελετάμε στη Γεωμετρία είναι η ισότητα διάφορων γεωμετρικών σχημάτων, όπως τμημάτων, γωνιών, τριγώνων, τετραπλευρών, κύκλων κ.λπ.

Στη Γεωμετρία τα ύψη ενός τριγώνου  $AB\Gamma$  που άγονται από τις κορυφές του A, B και Γ συμβολίζονται  $υ_{\alpha}$ ,  $υ_{\beta}$  και  $υ_{\gamma}$  αντίστοιχα.

Παρόμοια οι διάμεσοι συμβολίζονται  $\mu_{\alpha}$ ,  $\mu_{\beta}$ ,  $\mu_{\gamma}$  και οι διχοτόμοι  $\delta_{\alpha}$ ,  $\delta_{\beta}$ ,  $\delta_{\gamma}$ .

Γενικά, με διαισθητικό ή περιγραφικό τρόπο μιλώντας, δύο σχήματα είναι ίσα, αν μετακινώντας τα κατάλληλα στο επίπεδο ή στον χώρο, μπορούμε να τα τοποθετήσουμε με τέτοιο τρόπο, ώστε να συμπίψουν.

Η ισότητα λοιπόν των τριγώνων μπορεί, αρχικά, να γίνει κατανοητή με αυτόν τον τρόπο. Αφού δύο ίσα τρίγωνα μπορούν να συμπίψουν με μετακίνηση στον χώρο ή στο επίπεδο, είναι άμεσα αντιληπτό ότι:

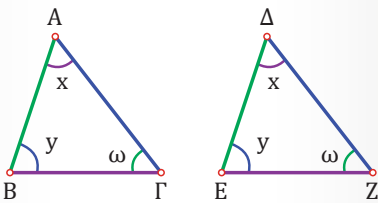
- οι πλευρές τους είναι ίσες μία προς μία,
- οι γωνίες τους, μία προς μία, είναι και αυτές ίσες.

Επειδή, όμως, η έννοια της μετακίνησης στο επίπεδο ή στον χώρο είναι δύσκολο να οριστεί για τις ανάγκες ενός σχολικού βιβλίου, για τον λόγο αυτό η ισότητα τριγώνων εισάγεται με πιο απλό τρόπο, κάτι που διατυπώνεται στη συνέχεια.



### Ορισμός

Δύο τρίγωνα που έχουν τις πλευρές τους ίσες, μία προς μία, και τις γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές αντίστοιχα ίσες, μία προς μία, λέγονται **ίσα**.



Αν λοιπόν, όπως στο διπλανό σχήμα, τα τρίγωνα ABΓ και ΔΕΖ έχουν:

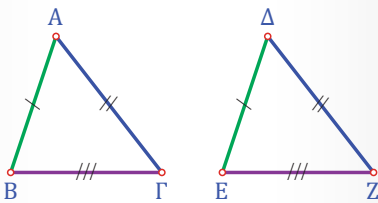
- $AB = ΔΕ, ΑΓ = ΔΖ, ΒΓ = ΕΖ,$
- $\hat{A} = \hat{\Delta}, \hat{B} = \hat{E}, \hat{\Gamma} = \hat{Z},$

τότε είναι ίσα και αντιστρόφως.

### Κανόνας

Σε δύο ίσα τρίγωνα:

- απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες,
- απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές.



Από την ισότητα δύο τριγώνων, π.χ. των τριγώνων ABΓ και ΔΕΖ παίρνουμε τις εξής ισότητες:

- $AB = ΔΕ, ΑΓ = ΔΖ, ΒΓ = ΕΖ,$
- $\hat{A} = \hat{\Delta}, \hat{B} = \hat{E}, \hat{\Gamma} = \hat{Z}.$

Βλέπουμε ότι οι τρεις από αυτές τις ισότητες αφορούν πλευρές και οι άλλες τρεις τις αντίστοιχες γωνίες.

Αν, όμως, για την απόδειξη της ισότητας δύο τριγώνων χρειαζόμαστε έξι ισότητες, τότε από τη μια μεριά αυτό είναι μια δύσκολη διαδικασία και από την άλλη το γεωμετρικό όφελος από την ισότητα των τριγώνων είναι περιορισμένο.

Επιπλέον, εύκολα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι δεν χρειάζονται τόσα πολλά στοιχεία, δηλαδή έξι ισότητες, για να είναι δύο τρίγωνα ίσα. Για παράδειγμα, αν δούμε δύο τρίγωνα που έχουν τις πλευρές τους ίσες, μία προς μία, χωρίς δισταγμό θα πούμε ότι είναι ίσα, ακόμα κι αν δεν μπορούμε να δώσουμε μια πειστική αιτιολόγηση.

Πράγματι, για την ισότητα δύο τυχαίων τριγώνων αρκούν τρεις από τις έξι ισό-

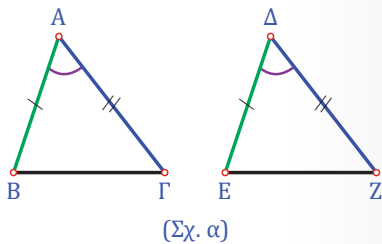
τητες που γράψαμε παραπάνω, με την προϋπόθεση ότι μία τουλάχιστον ισότητα αφορά πλευρές των δύο τριγώνων. Ποιες είναι όμως οι άλλες δύο ισότητες;

Την απάντηση, συνολικά, τη δίνουμε με τις παρακάτω προτάσεις, οι οποίες λέγονται για συντομία Κριτήρια Ισότητας Τριγώνων.



### 1<sup>ο</sup> Κριτήριο Ισότητας Τριγώνων (ΠΓΠ)

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες, μία προς μία, και τις περιεχόμενες στις ίσες πλευρές γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα.



Αν λοιπόν στα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  του διπλανού σχήματος (Σχ. α) είναι:

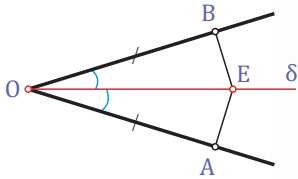
$$AB = \Delta E, \quad A\Gamma = \Delta Z, \quad \hat{A} = \hat{\Delta},$$

τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

Από την ισότητα αυτή προκύπτουν τρεις νέες ισότητες, οι οποίες στην ουσία είναι η «ανταμοιβή» μας:  $B\Gamma = EZ$ ,  $\hat{B} = \hat{E}$ ,  $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$ .

Είναι σημαντικό, να τονίσουμε και εδώ, ότι οι τρεις νέες ισότητες δεν είναι τυχαία γραμμένες, αλλά υπακούουν στον γενικό κανόνα:

Σε ίσα τρίγωνα, απέναντι από τις ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες και αντιστρόφως.



### Παράδειγμα

Στο διπλανό σχήμα είναι  $OA = OB$  και η  $O\delta$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{O}$ . Να αποδείξετε ότι για κάθε σημείο  $E$  της διχοτόμου ισχύει ότι:

- $EA = EB$ ,
- η  $EO$  διχοτομεί τη γωνία  $\hat{AEB}$ .

### Λύση

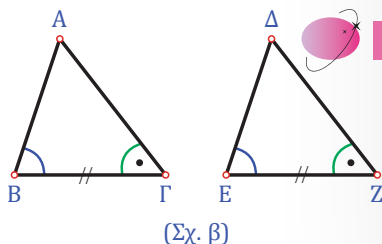
α) Γίνεται αμέσως αντιληπτό ότι για να είναι  $EA = EB$ , αρκεί να αποδείξουμε ότι τα τρίγωνα  $OEA$  και  $OEB$  είναι ίσα.

Όμως, τα τρίγωνα  $OEA$  και  $OEB$  έχουν:

- $OA = OB$ , από την υπόθεση,
- την  $OE$  κοινή,
- $\hat{EOA} = \hat{EOB}$ , διότι η  $OE$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{O}$ .

Τα τρίγωνα λοιπόν αυτά είναι ίσα (ΠΓΠ) και έτσι  $EA = EB$ , αφού τα  $EA, EB$  βρίσκονται απέναντι από τις αντίστοιχα ίσες γωνίες  $\hat{EOA}$  και  $\hat{EOB}$ .

β) Από την ισότητα των τριγώνων  $OEA$  και  $OEB$ , παίρνουμε επίσης ότι  $\hat{OEA} = \hat{OEB}$ , αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές  $OA$  και  $OB$  των δύο αυτών τριγώνων. Άρα η  $EO$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{AEB}$ . ■



### 2<sup>ο</sup> Κριτήριο Ισότητας Τριγώνων (ΓΠΓ)

Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες, μία προς μία, τότε είναι ίσα.

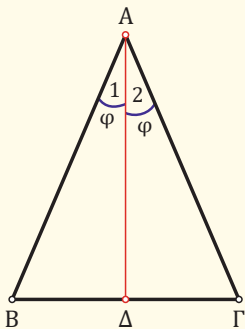
Αν λοιπόν (Σχ. β) τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  έχουν:

$$B\Gamma = EZ, \quad \hat{B} = \hat{E}, \quad \hat{\Gamma} = \hat{Z},$$





Βασικές γνώσεις  
από το Γυμνάσιο  
στο ισοσκελές  
τρίγωνο



$$\widehat{\Gamma\hat{A}B} = \widehat{\Gamma\hat{A}\Delta} \text{ και } \widehat{A\hat{\Gamma}B} = \widehat{A\hat{\Gamma}\Delta}.$$

Άρα η ΑΓ διχοτομεί τις γωνίες  $\hat{A}$  και  $\hat{\Gamma}$ . ■

### ◆ Ιδιότητες του ισοσκελούς τριγώνου

Το ισοσκελές τρίγωνο έχει δύο πλευρές ίσες. Θα δούμε παρακάτω ότι οι γωνίες της βάσης είναι επίσης ίσες. Ισχύει λοιπόν η εξής πρόταση:

#### Πρόταση

Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο:

- οι γωνίες της βάσης είναι ίσες, και
- η διχοτόμος, η διάμεσος και το ύψος προς τη βάση συμπίπτουν.

#### Απόδειξη

Θεωρούμε το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ).

α) Φέρουμε τη διχοτόμο ΑΔ. Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ είναι ίσα διότι έχουν:

- την ΑΔ κοινή,
- ΑΒ = ΑΓ, αφού το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές,
- $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \varphi$ , αφού η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{A}$ .

Επομένως  $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ .

β) Από την ισότητα των τριγώνων ΑΔΒ και ΑΔΓ παίρνουμε επίσης ότι:

- $\Delta B = \Delta \Gamma$  που σημαίνει ότι η ΑΔ είναι και διάμεσος,
- $\hat{A\hat{\Delta}B} = \hat{A\hat{\Delta}\Gamma}$ . Επειδή όμως  $\hat{A\hat{\Delta}B} + \hat{A\hat{\Delta}\Gamma} = 180^\circ$ , θα είναι:  
$$\hat{A\hat{\Delta}B} = \hat{A\hat{\Delta}\Gamma} = 90^\circ$$

που σημαίνει ότι  $AD \perp BG$ . Άρα το ΑΔ είναι και ύψος. ■

Ας σημειώσουμε ότι στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε αν, αντί της διχοτόμου ΑΔ φέρουμε τη διάμεσο ΑΜ, αφού τα τρίγωνα ΑΜΒ και ΑΜΓ έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία και έτσι είναι ίσα.

#### Παράδειγμα

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ), το μέσο Δ της πλευράς ΒΓ και τα μέσα Μ, Ν των πλευρών ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- $\Delta M = \Delta N$ ,
- $\hat{A\hat{\Delta}M} = \hat{A\hat{\Delta}N}$ .

#### Λύση

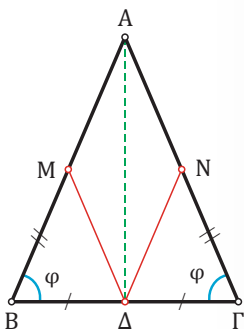
α) Τα τρίγωνα ΔΒΜ και ΔΓΝ είναι ίσα, διότι:

- $\Delta B = \Delta \Gamma$ , αφού το Δ είναι μέσο του ΒΓ,
- $BM = \Gamma N$ , ως μισά των ίσων τμημάτων (πλευρών) ΑΒ και ΑΓ,
- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ , ως παρά τη βάση γωνίες του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Άρα θα είναι και  $\Delta M = \Delta N$ .

β) Αφού  $\Delta M = \Delta N$  και  $AM = AN$ , τα τρίγωνα ΑΔΜ και ΑΔΝ είναι ίσα, δηλαδή είναι  $\hat{A\hat{\Delta}M} = \hat{A\hat{\Delta}N}$  (ΠΠΠ).

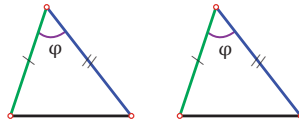
Επομένως  $\hat{A\hat{\Delta}M} = \hat{A\hat{\Delta}N}$ . ■





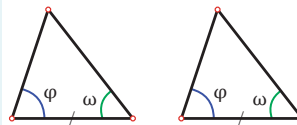
### Κριτήρια Ισότητας Τριγώνων

#### 1° Κριτήριο (ΠΓΠ)



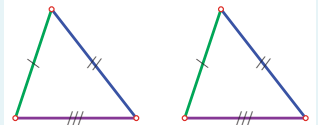
Δύο πλευρές και οι περιεχόμενες γωνίες, μία προς μία ίσες.

#### 2° Κριτήριο (ΓΠΓ)



Μία πλευρά και οι προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες, μία προς μία.

#### 3° Κριτήριο (ΠΠΠ)



Τρεις πλευρές ίσες, μία προς μία.

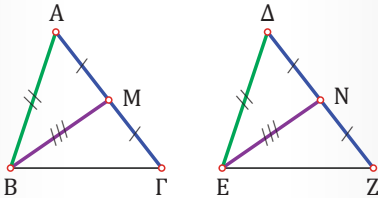
### Εφαρμογή

Δύο τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  έχουν:  $AB = \Delta E$ ,  $A\Gamma = \Delta Z$ , και τις διαμέσους  $BM$ ,  $EN$  ίσες. Να αποδείξετε ότι  $B\Gamma = EZ$ .

#### Λύση

Αφού  $A\Gamma = \Delta Z$  και τα  $M$ ,  $N$  είναι μέσα των  $A\Gamma$ ,  $\Delta Z$ , θα είναι  $AM = \Delta N$ .

- Τα τρίγωνα λοιπόν  $ABM$  και  $\Delta EN$  είναι ίσα (ΠΠΠ), αφού  $AB = \Delta E$ ,  $AM = \Delta N$ ,  $BM = EN$ . Επομένως  $\hat{A} = \hat{\Delta}$ .
- Επειδή όμως  $AB = \Delta E$ ,  $A\Gamma = \Delta Z$  και  $\hat{A} = \hat{\Delta}$ , τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  είναι ίσα (ΠΓΠ). Άρα  $B\Gamma = EZ$ .



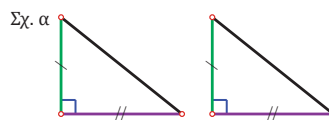
### ♦ Β. Ισότητα Ορθογωνίων Τριγώνων

Δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν ήδη ίσες τις ορθές τους γωνίες. Για να είναι λοιπόν ίσα, χρειαζόμαστε δύο ακόμα ισότητες, από τις οποίες η μια αφορά οπωσδήποτε ισότητα αντίστοιχων πλευρών. Τα κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων διατυπώνονται στη συνέχεια, χωρίς να αποδεικνύονται.

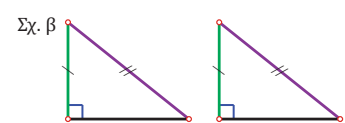


### Τα κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

#### 1° Κριτήριο

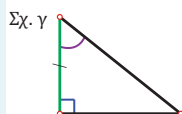


#### 2° Κριτήριο

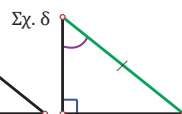


Αν δύο αντίστοιχες πλευρές είναι μία προς μία ίσες, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

#### 3° Κριτήριο



#### 4° Κριτήριο



#### 5° Κριτήριο



Αν μια αντίστοιχη πλευρά και μια αντίστοιχη γωνία είναι μία προς μία ίσες, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

1. Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες, μία προς μία, τότε είναι ίσα (ΠΓΠ).
2. Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μία κάθετη πλευρά αντίστοιχα μία προς μία ίσες, τότε είναι ίσα.
3. Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία μία προς μία ίσες, τότε είναι ίσα (ΓΠΓ).
4. Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μία οξεία γωνία μία προς μία ίσες, τότε είναι ίσα.
5. Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μια κάθετη πλευρά και την απέναντι γωνία μία προς μία ίσες, τότε είναι ίσα.

Συγκεντρώνοντας τα παραπάνω κριτήρια βλέπουμε ότι:



### Γενικό κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες ή μία αντίστοιχη πλευρά και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίσες, μία προς μία, τότε αυτά είναι ίσα.

### Εφαρμογή

Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) φέρουμε τα ύψη  $B\Delta$  και  $\Gamma E$ . Να αποδειχθεί ότι:

- α)  $B\Delta = \Gamma E$ ,
- β)  $BE = \Gamma\Delta$ .

### Λύση

α) Τα ύψη  $B\Delta$  και  $\Gamma E$  σχηματίζουν ορθογώνια τρίγωνα. Θα συγκρίνουμε δύο από αυτά και πιο συγκεκριμένα τα  $AB\Delta$  και  $A\Gamma E$ . Αυτά είναι ορθογώνια και έχουν:

- $AB = A\Gamma$ , αφού το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές,
- τη γωνία  $\hat{A}$  κοινή.

Τα τρίγωνα αυτά είναι επομένως ίσα, οπότε θα έχουν και τα υπόλοιπα στοιχεία τους ίσα. Έτσι  $B\Delta = \Gamma E$ .

β) Αφού  $\hat{A}B\Delta = \hat{A}\Gamma E$ , θα είναι  $A\Delta = AE$ . Είναι όμως  $AB = A\Gamma$  και έτσι:

$$AB - AE = A\Gamma - A\Delta,$$

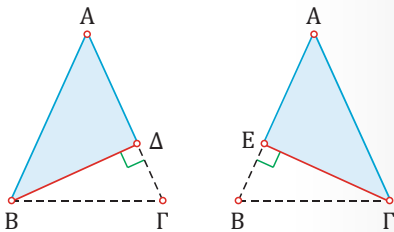
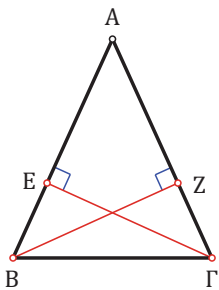
δηλαδή  $BE = \Gamma\Delta$ .

Επιγραμματικά μπορούμε να πούμε ότι  $BE = \Gamma\Delta$ , ως διαφορές ίσων τμημάτων.

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε με τον ίδιο τρόπο να αποδείξουμε ότι τα τρίγωνα  $B\Gamma\Delta$  και  $\Gamma B E$  είναι ίσα, διότι έχουν την  $B\Gamma$  κοινή και  $\hat{\Gamma} = \hat{B}$ , ως γωνίες της βάσης ισοσκελούς τριγώνου. ■

### ◆ Ιδιότητα της διχοτόμου

Η διχοτόμος μιας γωνίας χωρίζει ως γνωστόν τη γωνία σε δύο ίσες γωνίες. Τα σημεία της διχοτόμου έχουν μια ενδιαφέρουσα ιδιότητα που διατυπώνεται και αποδεικνύεται στο θεώρημα που ακολουθεί.





### Θεώρημα 2

Τα σημεία της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχουν από τις πλευρές της.

#### Απόδειξη

Θεωρούμε τη γωνία  $\widehat{xOy}$ , τη διχοτόμο της  $O\delta$  και τυχαίο σημείο  $P$  της διχοτόμου. Φέρουμε  $PA \perp Ox$  και  $PB \perp Oy$ . Θα αποδείξουμε ότι  $PA = PB$ .

Τα ορθογώνια τρίγωνα  $OAP$  και  $OBP$  είναι ίσα διότι έχουν:

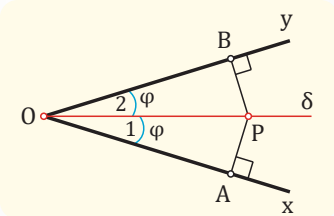
- την  $OP$  κοινή,
- $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 = \varphi$ , διότι η  $O\delta$  είναι διχοτόμος.

Αφού τα τρίγωνα είναι ίσα, συμπεραίνουμε ότι  $PA = PB$ . ■

#### Το αντίστροφο θεώρημα

Τι θα συμβεί τώρα αν πάρουμε ένα σημείο  $P$  στο εσωτερικό της γωνίας  $\widehat{xOy}$ , το οποίο ισαπέχει από τις πλευρές της, δηλαδή  $PA = PB$ ;

Είναι αναμενόμενο ότι το  $P$  θα βρίσκεται στη διχοτόμο της γωνίας  $\widehat{O}$ , δηλαδή ότι η  $OP$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{O}$ . Ισχύει πράγματι ότι:



Διχοτόμος γωνίας  
(ιδιότητα των σημείων της)



### Θεώρημα 2 (αντίστροφο)

Αν ένα εσωτερικό σημείο μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της, τότε αυτό βρίσκεται στη διχοτόμο της.

#### Απόδειξη

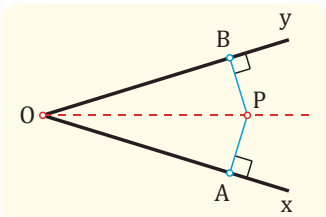
Έστω  $P$  τυχαίο εσωτερικό σημείο της γωνίας  $\widehat{xOy}$  και οι κάθετες  $PA, PB$  στις πλευρές της  $Ox, Oy$  αντίστοιχα, για τις οποίες  $PA = PB$ .

Τα ορθογώνια τρίγωνα  $OAP$  και  $OBP$  έχουν την  $OP$  κοινή και  $PA = PB$ .

Επομένως είναι ίσα και έτσι:

$$\widehat{POA} = \widehat{POB}.$$

Η  $OP$  είναι λοιπόν διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{O}$ . ■



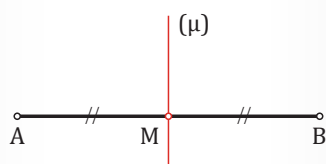
### ◆ Ιδιότητα της μεσοκάθετου

Θυμίζουμε ότι μεσοκάθετος ενός ευθυγράμμου τμήματος είναι η κάθετος ευθεία στο μέσο του τμήματος.

Στο διπλανό σχήμα η ευθεία  $(\mu)$  είναι η μεσοκάθετος του τμήματος  $AB$ , διότι:

$$MA = MB \text{ και } (\mu) \perp AB.$$

Τα σημεία της μεσοκάθετου ενός τμήματος έχουν μια χαρακτηριστική ιδιότητα που διατυπώνεται στο επόμενο θεώρημα.



Μεσοκάθετος  
τμήματος



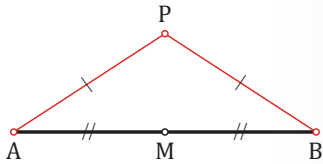
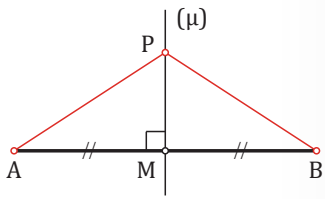
### Θεώρημα 3

Τα σημεία της μεσοκάθετου ενός ευθυγράμμου τμήματος ισαπέχουν από τα άκρα του και αντιστρόφως.

#### Απόδειξη

Θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  και τη μεσοκάθετό του  $(\mu)$ .

Παίρνουμε τυχαίο σημείο  $P$  στη μεσοκάθετο  $(\mu)$ . Θα αποδείξουμε ότι  $PA = PB$ .



Παράδειγμα  
στη μεσοκάθετο

Στο διπλανό σχήμα τα ορθογώνια τρίγωνα PMA και PMB είναι ίσα, διότι έχουν:

- την PM κοινή
- $MA = MB$ .

Επομένως θα είναι  $PA = PB$ .

### Αντίστροφα

Έστω ένα σημείο P του επιπέδου, το οποίο ισαπέχει από τα άκρα του τμήματος AB, δηλαδή  $PA = PB$ .

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο PAB είναι ισοσκελές και έτσι, αν M είναι το μέσο του AB, τότε η PM, ως διάμεσος, είναι και ύψος. Επομένως, η PM είναι μεσοκάθετος του AB, δηλαδή το P βρίσκεται στη μεσοκάθετο του AB.

Αν το P ταυτίζεται με το M, τότε το συμπέρασμα είναι άμεσο. ■

### ◆ Κριτήρια για να είναι ένα τρίγωνο ισοσκελές

Όπως το ορθογώνιο τρίγωνο, έτσι και το ισοσκελές παίζει έναν σημαντικό ρόλο σε όλη την έκταση της σχολικής γεωμετρίας.

Είδαμε σε προηγούμενες ενότητες ορισμένες σημαντικές ιδιότητες του ισοσκελούς τριγώνου, όπως:

- οι γωνίες της βάσης είναι ίσες,
- το ύψος, η διάμεσος και η διχοτόμος προς τη βάση του συμπίπτουν.

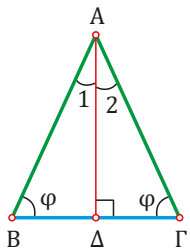
Το αντίστροφο ερώτημα είναι να εντοπίσουμε κριτήρια, ώστε ένα τρίγωνο να είναι ισοσκελές.

Το πρώτο σημαντικό κριτήριο, γνωστό από μικρότερες τάξεις, είναι το παρακάτω:



#### Κριτήριο 1°

Αν δύο γωνίες τριγώνου είναι ίσες, τότε αυτό είναι ισοσκελές.



#### Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι στο τρίγωνο ABΓ του διπλανού σχήματος είναι  $\hat{B} = \hat{G} = \varphi$ . Φέρουμε το ύψος ΑΔ.

Είναι τότε:  $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = 90^\circ - \varphi$  και έτσι τα τρίγωνα ΑΔΒ, ΑΔΓ είναι ίσα.

Άρα  $AB = AG$ , οπότε το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές. ■

Για να αποδείξουμε ότι ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές, έχουμε και το παρακάτω απλό αλλά χρήσιμο κριτήριο.



#### Κριτήριο 2°

Ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές, αν ισχύει ένα από τα ακόλουθα:

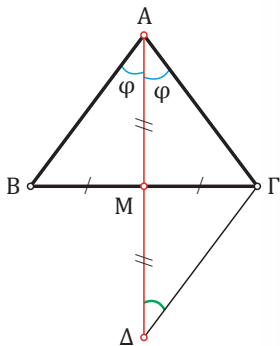
- Μια διάμεσος είναι και διχοτόμος.
- Μια διάμεσος είναι και ύψος.
- Μια διχοτόμος είναι και ύψος.

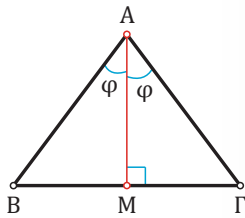
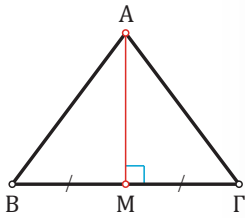
#### Απόδειξη

α) Έστω ότι στο τρίγωνο ABΓ του διπλανού σχήματος η διάμεσος AM είναι συγχρόνως και διχοτόμος. Έχουμε λοιπόν ότι:

$$MB = MG \text{ και } \hat{MAB} = \hat{MAG} = \varphi.$$

Στην προέκταση της διαμέσου AM παίρνουμε τμήμα  $M\Delta = MA$ .





Τα τρίγωνα MAB και MΓΔ είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε  $ΓΔ = AB$  και:

$$\widehat{\Delta} = \widehat{M\hat{A}B} = \varphi = \widehat{M\hat{A}\Gamma}.$$

Αφού  $\widehat{\Gamma\hat{\Delta}A} = \widehat{\Gamma\hat{\Delta}D} = \varphi$ , το τρίγωνο ΓΑΔ είναι ισοσκελές, οπότε:  
 $ΓA = ΓΔ = AB$ .

Είναι λοιπόν  $AB = AΓ$ , οπότε το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές.

β) Έστω τώρα ότι η διάμεσος AM είναι και ύψος.

Αφού  $MB = MΓ$  και  $AM \perp BΓ$ , τα ορθογώνια τρίγωνα AMB και AMΓ είναι ίσα (η AM είναι κοινή). Επομένως  $AB = AΓ$ .

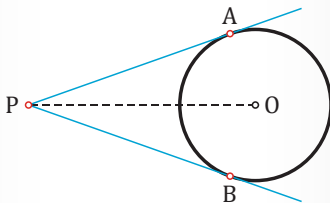
γ) Υποθέτουμε τώρα ότι η διχοτόμος AM είναι και ύψος, δηλαδή  $AM \perp BΓ$ .

Τα ορθογώνια τρίγωνα AMB και AMΓ είναι ίσα, αφού έχουν την AM κοινή και  $\widehat{M\hat{A}B} = \widehat{M\hat{A}\Gamma} = \varphi$ , διότι η AM είναι διχοτόμος της  $\widehat{A}$ . Άρα  $AB = AΓ$ , που σημαίνει ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές. ■

Τα παραπάνω οδηγούν στο ακόλουθο συμπέρασμα.

### Συμπέρασμα

Αν κάποιο από τα τρία στοιχεία: ύψος, διάμεσος, διχοτόμος ενός τριγώνου είναι συγχρόνως και ένα από τα υπόλοιπα δύο, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.



### ◆ Εφαπτόμενα τμήματα

Θεωρούμε έναν κύκλο  $(O, R)$  και ένα εξωτερικό σημείο P του κύκλου. Από το P μπορούμε να φέρουμε τις εφαπτομένες PA και PB του κύκλου.

- Τα τμήματα PA και PB, από το P μέχρι τα σημεία επαφής, λέγονται εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου από το σημείο P.
- Η ευθεία PO λέγεται διακεντρική ευθεία του σημείου P.

Διαισθητικά, λόγω της συμμετρίας του σχήματος ως προς την PO, αναμένουμε να είναι  $PA = PB$ . Πραγματικά, αυτό είναι αληθές και αποδεικνύεται αμέσως παρακάτω.

### Εφαρμογή

Τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου που άγονται από εξωτερικό σημείο του είναι ίσα.

### Λύση

Έστω ο κύκλος  $(O, R)$  και τα εφαπτόμενα τμήματα PA, PB. Θα αποδείξουμε ότι  $PA = PB$ .

Φέρουμε τις ακτίνες OA και OB στα σημεία επαφής A και B. Είναι τότε  $OA \perp PA$  και  $OB \perp PB$ .

Τα ορθογώνια τρίγωνα POA και POB είναι ίσα διότι:

- η PO είναι κοινή και
- $OA = OB = R$ .

Από την ισότητα των τριγώνων αυτών συμπεραίνουμε ότι  $PA = PB$ . ■

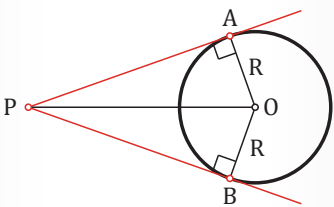
Από την ισότητα των τριγώνων POA και POB προκύπτει επίσης ότι:

$$\widehat{O\hat{P}A} = \widehat{O\hat{P}B} \text{ και } \widehat{P\hat{O}A} = \widehat{P\hat{O}B}.$$

Επομένως:

Η διακεντρική ευθεία από εξωτερικό σημείο ενός κύκλου:

- α) διχοτομεί τη γωνία των εφαπτομένων τμημάτων,
- β) διχοτομεί τη γωνία των ακτίνων που καταλήγουν στα σημεία επαφής,
- γ) είναι μεσοκάθετος της χορδής με άκρα τα σημεία επαφής.

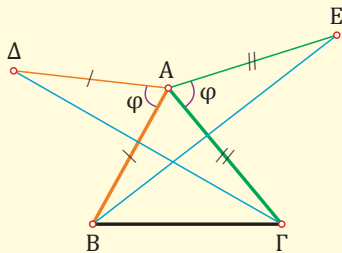


Κύκλοι και εφαπτομένες

## Ασκήσεις και Προβλήματα

### Ασκήσεις Α' Ομάδας

- Στις προεκτάσεις των πλευρών  $BA$ ,  $GA$  ενός τριγώνου  $AB\Gamma$  θεωρούμε τμήματα  $A\Delta = AB$  και  $AE = A\Gamma$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
  - $BE = \Gamma\Delta$ ,
  - $\widehat{B\hat{E}\Gamma} = \widehat{E\hat{\Gamma}\Delta}$ ,
  - τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $EAD$  είναι ίσα,
  - $B\Gamma = E\Delta$  και  $E\hat{\Delta}A = A\hat{B}\Gamma$ .
- Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Στις προεκτάσεις των πλευρών  $AB$ ,  $B\Gamma$ ,  $GA$  θεωρούμε αντίστοιχα τα τμήματα  $BK$ ,  $\Gamma\Lambda$ ,  $AM$  τέτοια, ώστε  $BK = \Gamma\Lambda = AM$ . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $K\Lambda M$  είναι ισόπλευρο.
- Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma$  και η διχοτόμος του  $A\Delta$ . Πάνω στην ημιευθεία  $A\Delta$  θεωρούμε τα σημεία  $E$  και  $Z$  τέτοια, ώστε  $AE = AB$  και  $AZ = A\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι  $A\hat{\Gamma}E = A\hat{Z}B$ .
- Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$ . Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών  $BA$ ,  $GA$  θεωρούμε τα τμήματα  $A\Delta$ ,  $AE$  αντίστοιχα, με  $A\Delta = AE$ . Έστω  $M$  το μέσο της πλευράς  $B\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:
  - $BE = \Gamma\Delta$ ,
  - το τρίγωνο  $EM\Delta$  είναι ισοσκελές,
  - $B\hat{\Delta}M = \Gamma\hat{E}M$ ,
  - $AM \perp B\Gamma$ ,
  - $AM \perp \Delta E$  και  $\Delta E \parallel B\Gamma$ .
- Στο παρακάτω σχήμα είναι  $A\Delta = AB$ ,  $AE = A\Gamma$  και:  $B\hat{\Delta}A = \Gamma\hat{A}E$ . Να αποδείξετε ότι:
  - $\Gamma\Delta = BE$
  - οι γωνίες  $ABE$  και  $A\Delta\Gamma$  είναι ίσες.



- Στην προέκταση της βάσης  $B\Gamma$  ενός ισοσκελούς τριγώνου  $AB\Gamma$ , και προς τα δύο μέρη, παίρνουμε τμήματα  $B\Delta = \Gamma E$ . Να αποδείξετε ότι:
  - το τρίγωνο  $A\Delta E$  είναι ισοσκελές,
  - $B\hat{\Delta}A = \Gamma\hat{A}E$ .
- Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$  και οι διχοτόμοι του  $B\Delta$ ,  $\Gamma E$ . Να αποδείξετε ότι  $B\Delta = \Gamma E$ .
- Σε ένα τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$ , η  $A\Gamma$  είναι διχοτόμος των γωνιών  $\hat{A}$  και  $\hat{\Gamma}$ . Να αποδείξετε ότι:
  - $AB = A\Delta$  και  $\Gamma B = \Gamma\Delta$ ,
  - $B\Delta \perp A\Gamma$ .
- Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ , με  $AB < A\Gamma$  και η διχοτόμος  $A\Delta$  της γωνίας  $\hat{A}$ . Στην πλευρά  $A\Gamma$  παίρνουμε σημείο  $E$ , ώστε  $AE = AB$ . Αν η  $\Delta E$  τέμνει την προέκταση της  $AB$  στο  $Z$ , να αποδείξετε ότι:
  - $B\Delta = \Delta E$ ,
  - $AZ = A\Gamma$ ,
  - $A\Delta \perp Z\Gamma$ .
- Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και οι διάμεσοι  $B\Delta$ ,  $\Gamma E$ , που τέμνονται στο σημείο  $M$ . Να αποδείξετε ότι:
  - τα τρίγωνα  $A\Delta B$  και  $A\Gamma E$  είναι ίσα,
  - $B\hat{E}\Gamma = B\hat{\Delta}\Gamma$ ,
  - τα τρίγωνα  $MEB$  και  $M\Delta\Gamma$  είναι ίσα,
  - το τρίγωνο  $MB\Gamma$  είναι ισοσκελές,
  - $AM \perp B\Gamma$ .
- Να αποδείξετε ότι τα ύψη ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσα.
- Σε ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$ , η διάμεσος  $AM$  είναι και ύψος. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο αυτό είναι ισοσκελές.
- Σε ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$ , το ύψος  $A\Delta$  είναι και διχοτόμος. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο αυτό είναι ισοσκελές.
- Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma$  και η διάμεσός του  $AM$ . Να αποδείξετε ότι οι κορυφές  $B$  και  $\Gamma$  ισαπέχουν από την ευθεία  $AM$ .
- Αν δύο τρίγωνα είναι ίσα, να αποδείξετε ότι και τα ύψη τους που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές είναι ίσα.

- 16.** Να αποδείξετε ότι τα μέσα  $M$  και  $N$  των ίσων πλευρών  $AB$  και  $AG$  ενός ισοσκελούς τριγώνου  $ABG$ , ισαπέχουν:
- από τις απέναντι πλευρές,
  - από τη βάση  $BG$  του τριγώνου.
- 17.** Έστω  $M$  το μέσο της βάσης  $BG$  ενός ισοσκελούς τριγώνου  $ABG$ . Αν  $MD \perp AB$  και  $ME \perp AG$ , να αποδείξετε ότι:
- $MD = ME$ ,
  - $\widehat{AMD} = \widehat{AME}$ ,
  - $AM \perp DE$  και  $DE \parallel BG$ .
- 18.** Δίνεται γωνία  $\widehat{AOB}$  και τα σημεία  $\Gamma, \Delta$  των πλευρών  $OA, OB$  αντίστοιχα, ώστε  $OG = OD$ . Η κάθετος προς την  $OA$  στο  $\Gamma$  και η κάθετος προς την  $OB$  στο  $\Delta$  τέμνονται στο  $P$ . Να αποδείξετε ότι:
- το  $P$  βρίσκεται στη διχοτόμο της γωνίας  $\widehat{AOB}$ ,
  - αν  $M$  είναι σημείο του  $OP$ , τότε  $M\Gamma = M\Delta$ .
- 19.** Να αποδείξετε ότι αν σε δύο τρίγωνα  $ABG$  και  $A'B'\Gamma'$  είναι  $\alpha = \alpha', \nu_\alpha = \nu_{\alpha'}, \mu_\alpha = \mu_{\alpha'}$ , τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.
- 20.** Δίνεται το ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  και η μεσοκάθετός του  $(\varepsilon)$ . Έστω  $\Gamma, \Delta$  δύο τυχαία σημεία της μεσοκάθετου  $(\varepsilon)$  στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η  $AB$ . Να αποδείξετε ότι  $\widehat{\Delta\hat{A}\Gamma} = \widehat{\Delta\hat{B}\Gamma}$ .
- 21.** Δίνεται τρίγωνο  $ABG$  με  $AB < AG$ . Η μεσοκάθετος της πλευράς  $BG$  τέμνει την  $AG$  στο  $\Delta$  και την προέκταση της  $BA$  στο  $E$ . Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $BE\Delta$  και  $\Gamma E\Delta$  είναι ίσα.
- 22.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $ABG$  ( $AB = AG$ ) και οι διχοτόμοι  $BD$  και  $\Gamma E$  που τέμνονται στο σημείο  $O$ . Να αποδείξετε ότι  $AO \perp BG$ .

Σε κάθε τρίγωνο  $ABG$  συμβολίζουμε:

- με  $\mu_\alpha, \mu_\beta, \mu_\gamma$  τις διαμέσους προς τις πλευρές  $\alpha, \beta, \gamma$  αντίστοιχα,
- με  $\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma$  τις αντίστοιχες διχοτόμους,
- με  $\nu_\alpha, \nu_\beta, \nu_\gamma$  τα αντίστοιχα ύψη.

## Ασκήσεις Β' Ομάδας

- 23.** Δίνονται τα τρίγωνα  $ABG, \Delta EZ$  για τα οποία ισχύουν  $\beta = \varepsilon, \gamma = \zeta, \widehat{A} = \widehat{\Delta}$ . Οι διχοτόμοι  $AK, BL$  των γωνιών  $\widehat{A}, \widehat{B}$  τέμνονται στο  $I$  και οι διχοτόμοι  $\Delta M, EN$  των γωνιών  $\widehat{\Delta}, \widehat{E}$  στο  $P$ . Να αποδείξετε ότι:
- $AK = \Delta M$ ,
  - $BL = EN$ ,
  - $AI = \Delta P$  και  $BI = EP$ .
- 24.** Δίνονται τα τρίγωνα  $ABG$  και  $A'B'\Gamma'$ , για τα οποία ισχύουν  $\beta = \beta', \widehat{A} = \widehat{A'}$  και  $\delta_\alpha = \delta_{\alpha'}$ . Να αποδείξετε ότι:
- $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}$ ,
  - τα τρίγωνα  $ABG$  και  $A'B'\Gamma'$  είναι ίσα.
- 25.** Δίνεται τρίγωνο  $ABG$  και  $O$  ένα σημείο εξωτερικό του τριγώνου. Θεωρούμε τα συμμετρικά σημεία  $A_1, B_1, \Gamma_1$ , των  $A, B, \Gamma$  αντίστοιχα ως προς το σημείο  $O$ . Να αποδείξετε ότι:
- $AB = A_1B_1$  και  $AG = A_1\Gamma_1$ ,
  - τα τρίγωνα  $ABG$  και  $A_1B_1\Gamma_1$  είναι ίσα.
- 26.** Δίνεται τρίγωνο  $ABG$  με  $AB < AG$ . Προεκτείνουμε τη διάμεσο  $AM$  κατά τμήμα  $M\Delta = AM$ . Να αποδείξετε ότι:
- $AB = \Gamma\Delta$ ,
  - τα τρίγωνα  $ABG$  και  $B\Gamma\Delta$  είναι ίσα,
  - $AB \parallel \Gamma\Delta$  και  $B\Delta \parallel AG$ .
- 27.** Δίνεται τετράπλευρο  $ABG\Delta$  με  $AB = \Gamma\Delta$  και  $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ . Να αποδείξετε ότι:
- $AG = B\Delta$ ,                      β)  $\widehat{A} = \widehat{\Delta}$ ,
  - τα τρίγωνα  $OAB$  και  $O\Gamma\Delta$  είναι ίσα, με  $O$  να είναι το σημείο τομής των  $AG$  και  $B\Delta$ .
- 28.** Να αποδείξετε ότι αν σε δύο οξυγώνια τρίγωνα  $ABG$  και  $A'B'\Gamma'$  είναι  $\alpha = \alpha', \nu_\beta = \nu_{\beta'}, \nu_\gamma = \nu_{\gamma'}$ , τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.
- 29.** Στην προέκταση της διαμέσου  $AM$ , ενός ορθογώνιου τριγώνου  $ABG$  ( $\widehat{A} = 90^\circ$ ), παίρνουμε τμήμα  $M\Delta = MA$ . Να αποδείξετε ότι:
- τα τρίγωνα  $MAB$  και  $M\Delta\Gamma$  είναι ίσα,
  - $\widehat{B\hat{A}M} = \widehat{\Gamma\hat{\Delta}M}$  και  $\Gamma\Delta \perp AG$    γ)  $B\Delta \perp \Gamma\Delta$ .

- 30.** Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$ , με  $AB = A\Gamma$ , φέρουμε τη διάμεσο  $AM$  και στην προέκτασή της παίρνουμε σημείο  $\Delta$  έτσι, ώστε  $B\hat{\Gamma}\Delta = \hat{B}$ . Να αποδείξετε ότι:
- τα τρίγωνα  $MAB$  και  $M\Gamma\Delta$  είναι ίσα,
  - $A\hat{\Delta}B = A\hat{\Delta}\Gamma$ ,
  - $AB = B\Delta = \Delta\Gamma = A\Gamma$ .
- 31.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$  και έστω  $M$  το μέσο της  $AB$ . Προεκτείνουμε την  $A\Gamma$  προς το  $\Gamma$  κατά τμήμα  $\Gamma N = \frac{A\Gamma}{2}$ . Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $M, N$  ισαπέχουν από την ευθεία  $B\Gamma$ .
- 32.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A} = 90^\circ$  και η διχοτόμος του  $B\Delta$ . Φέρουμε  $\Delta E \perp B\Gamma$ .
- Να αποδείξετε ότι  $BA = BE$ .
  - Αν οι ευθείες  $E\Delta, BA$  τέμνονται στο  $H$ , να αποδείξετε ότι:
    - $E\Gamma = AH$ ,
    - η ευθεία  $B\Delta$  είναι μεσοκάθετος του τμήματος  $\Gamma H$ .
- 33.** Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$ , με  $AB = A\Gamma$ . Προεκτείνουμε τη  $B\Gamma$  κατά ίσα τμήματα  $B\Delta$  και  $\Gamma E$  και φέρουμε τα τμήματα  $\Delta Z \perp A\Gamma$  και  $E H \perp AB$ .
- Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $BEH$  και  $\Gamma\Delta Z$  είναι ίσα.
  - Αν τα  $E H$  και  $\Delta Z$  τέμνονται στο  $M$ , να αποδείξετε ότι η  $AM$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{A}$ .
- 34.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma$  και η διχοτόμος του  $A\Delta$ . Από το σημείο  $B$  φέρουμε ευθεία κάθετη στην  $A\Delta$ , που τέμνει την  $A\Delta$  στο  $E$  και την πλευρά  $A\Gamma$  στο  $Z$ . Να αποδείξετε ότι:
- $AB = AZ$ ,
  - $\Delta B = \Delta Z$ ,
  - $B\hat{\Delta}E = E\hat{\Delta}Z$ ,
  - $E\hat{B}Z = E\hat{Z}\Delta$ .
- 35.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών  $\hat{B}$  και  $\hat{\Gamma}$  τέμνονται στο σημείο  $I$ . Να αποδείξετε ότι:
- το  $I$  ισαπέχει από τις ευθείες  $AB$  και  $A\Gamma$ ,
  - η  $AI$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{A}$ .
- 36.** Σε ένα οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  θεωρούμε τη διχοτόμο του  $B\Delta$  και φέρουμε  $\Delta E \perp AB$ . Προεκτείνουμε την  $A\Gamma$  κατά τμήμα  $\Gamma Z = \Gamma\Delta$ . Αν  $ZH \perp B\Gamma$ , να αποδείξετε ότι  $\Delta E = ZH$ .
- 37.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $B\Gamma = 2AB$  και  $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο.
- 38.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma$ . Η διχοτόμος της γωνίας  $\hat{A}$  τέμνει τη μεσοκάθετο ( $\epsilon$ ) της πλευράς  $B\Gamma$  στο σημείο  $\Delta$ . Από το  $\Delta$  φέρουμε  $\Delta Z \perp AB$  και  $\Delta E \perp A\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:
- $\Delta B = \Delta\Gamma$ ,
  - $BZ = E\Gamma$ .



Ίσα τρίγωνα  
(Α-Ψ)



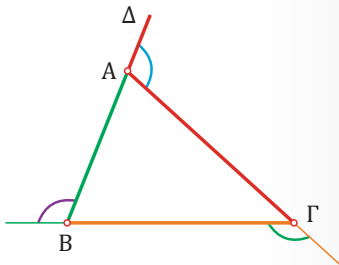
Τύπου αληθές-ψευδές  
στην ισότητα τριγώνων

# 2.2

## Ανισοτικές σχέσεις στα τρίγωνα

Περιέχονται

- Σχέση εξωτερικής και απέναντι εσωτερικής γωνίας.
- Σύγκριση πλευρών και γωνιών τριγώνου.
- Ιδιότητες ισοσκελούς τριγώνου.
- Η τριγωνική ανισότητα.



Στην ενότητα αυτή:

1. Γράφουμε και αποδεικνύουμε τη σχέση εξωτερικής γωνίας τριγώνου με τις απέναντι εσωτερικές.
2. Διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε προτάσεις που αφορούν διάταξη πλευρών ή γωνιών τριγώνου.
3. Συγκρίνουμε πλευρές ή γωνίες τριγώνου.
4. Διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε την τριγωνική ανισότητα.

### Θεωρία και εφαρμογές

#### ◆ Εξωτερική και απέναντι εσωτερική γωνία

Ας πάρουμε ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$ .

Προεκτείνοντας την πλευρά  $BA$ , σχηματίζεται η γωνία  $\widehat{\Gamma\Delta A}$ , που έχει πλευρές την  $A\Gamma$  και την αντικείμενη ημιευθεία της  $AB$ . Η γωνία αυτή είναι η εξωτερική γωνία της γωνίας  $\widehat{A}$  του τριγώνου.

Ανάλογα, σχηματίζουμε και τις εξωτερικές γωνίες των  $\widehat{B}$  και  $\widehat{\Gamma}$ .

Για την εξωτερική γωνία τριγώνων ισχύει το παρακάτω σημαντικό θεώρημα, το οποίο χρησιμεύει στη μελέτη των ιδιοτήτων των παράλληλων ευθειών.

#### Θεώρημα 1

Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι μεγαλύτερη από τις απέναντι εσωτερικές γωνίες του τριγώνου.

#### Απόδειξη

Θεωρούμε το τρίγωνο  $AB\Gamma$  και την εξωτερική του γωνία  $\widehat{A}$ . Επειδή  $\widehat{A_{εξ}} = \widehat{B} + \widehat{\Gamma}$  προκύπτει ότι  $\widehat{A_{εξ}} > \widehat{\Gamma}$  και  $\widehat{A_{εξ}} > \widehat{B}$ . ■

Το παραπάνω θεώρημα παίζει σπουδαίο ρόλο στη μελέτη των παράλληλων ευθειών και μπορεί να αποδειχθεί χωρίς τη χρήση του αξιώματος της παραλληλίας. Αυτό γίνεται ως εξής.

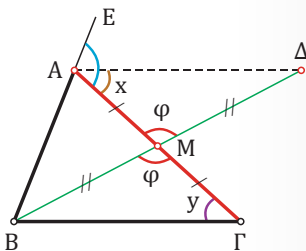
Έστω  $M$  το μέσο της πλευράς  $A\Gamma$  και  $\Delta$  το συμμετρικό του  $B$  ως προς το  $M$ , δηλαδή  $M\Delta = MB$ . Τα τρίγωνα  $MAD$  και  $MB\Gamma$  είναι ίσα (ΠΓΠ), διότι

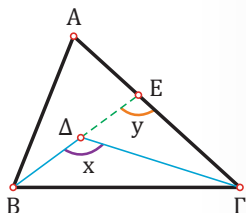
$$MA = M\Gamma, M\Delta = MB, \widehat{A\widehat{M}\Delta} = \widehat{B\widehat{M}\Gamma}.$$

Επομένως  $x = y$ . Όμως  $\widehat{A_{εξ}} > x$ , οπότε  $\widehat{A_{εξ}} > y$ , δηλαδή  $\widehat{A_{εξ}} > \widehat{\Gamma}$ .

Όμοια, προκύπτει ότι:  $\widehat{A_{εξ}} > \widehat{B}$ .

Επομένως, σε κάθε τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $\widehat{A_{εξ}} > \widehat{B}$  και  $\widehat{A_{εξ}} > \widehat{\Gamma}$ .



**Εφαρμογή**

Στο εσωτερικό ενός τριγώνου  $AB\Gamma$  παίρνουμε τυχαίο σημείο  $\Delta$ . Να αποδειχθεί ότι  $\widehat{B\Delta\Gamma} > \widehat{A}$ .

**Λύση**

Έστω  $\widehat{B\Delta\Gamma} = x$  και  $\widehat{\Delta E\Gamma} = y$ .

- Στο τρίγωνο  $\Delta E\Gamma$  η γωνία  $x$  είναι εξωτερική, οπότε  $x > y$ .
  - Στο τρίγωνο  $ABE$  η γωνία  $y$  είναι εξωτερική, οπότε  $y > \widehat{A}$ .
- Αφού  $x > y$  και  $y > \widehat{A}$ , παίρνουμε ότι  $x > \widehat{A}$ , δηλαδή:

$$\widehat{B\Delta\Gamma} > \widehat{A}. \blacksquare$$

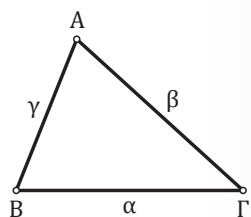
**◆ Σύγκριση πλευρών - γωνιών τριγώνου**

Ας πάρουμε ένα σκαληνό τρίγωνο  $AB\Gamma$  με:

$$AB < AG < BG.$$

Ένα ενδιαφέρον ερώτημα είναι να εντοπίσουμε ποια από τις γωνίες του τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι η μεγαλύτερη.

Για να απαντήσουμε σε αυτό το ερώτημα θα χρησιμοποιήσουμε το παρακάτω συμπέρασμα.

**Θεώρημα 2**

Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται ομοίως άνισες γωνίες και αντίστροφα.

**Απόδειξη**

Θεωρούμε το τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < AG$ . Θα αποδείξουμε ότι  $\widehat{\Gamma} < \widehat{B}$ , δηλαδή ότι απέναντι από τη μικρότερη πλευρά βρίσκεται η μικρότερη γωνία.

Αφού  $AG > AB$ , πάνω στην  $AG$  παίρνουμε σημείο  $\Delta$  με  $A\Delta = AB$ .

Το τρίγωνο  $AB\Delta$  είναι ισοσκελές, οπότε  $\widehat{B}_1 = \widehat{\Delta}_1 = \varphi$ .

Το  $\Delta$  είναι εσωτερικό σημείο της γωνίας  $\widehat{B}$ , οπότε  $\widehat{B} > \widehat{A\Delta B} = \varphi$ , δηλαδή  $\widehat{B} > \widehat{\Delta}_1$ .

Στο τρίγωνο  $\Delta B\Gamma$  η γωνία  $\widehat{\Delta}_1$  είναι εξωτερική. Επομένως  $\widehat{\Delta}_1 > \widehat{\Gamma}$ . Είναι λοιπόν  $\widehat{B} > \widehat{\Delta}_1 > \widehat{\Gamma}$ , δηλαδή  $\widehat{B} > \widehat{\Gamma}$ .

**Αντίστροφα**

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι  $\widehat{B} > \widehat{\Gamma}$ . Θα αποδείξουμε ότι  $\beta > \gamma$ .

- Αν ήταν  $\beta = \gamma$ , τότε θα παίρναμε  $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ , άτοπο.
- Αν είχαμε  $\beta < \gamma$ , τότε σύμφωνα με το ευθύ, θα παίρναμε  $\widehat{B} < \widehat{\Gamma}$ , άτοπο.

Επομένως αποδείξαμε ότι  $\beta > \gamma$ .  $\blacksquare$

**Θεώρημα 3 (Κριτήριο ισοσκελούς τριγώνου)**

Αν ένα τρίγωνο έχει δύο γωνίες ίσες, τότε αυτό είναι ισοσκελές.

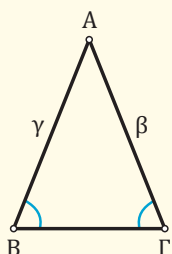
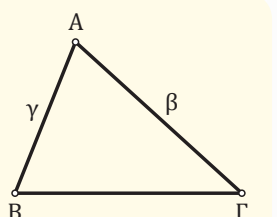
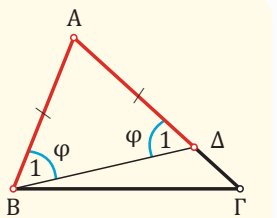
**Απόδειξη**

Ας δούμε και μια άλλη απόδειξη αυτού του κριτηρίου.

Έστω ότι στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ . Θα αποδείξουμε, με βάση το προηγούμενο θεώρημα, ότι  $AB = AG$ , δηλαδή  $\gamma = \beta$ .

Έστω ότι αυτό δεν συμβαίνει, δηλαδή έστω ότι  $\beta \neq \gamma$ .

- Αν  $\beta < \gamma$ , τότε  $\widehat{B} < \widehat{\Gamma}$ , άτοπο, αφού  $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ .

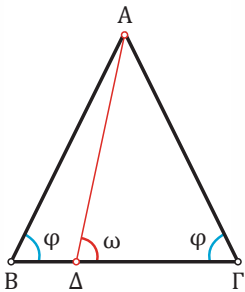


- Αν  $\beta > \gamma$ , τότε  $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ , άτοπο.

Σε κάθε λοιπόν περίπτωση οδηγούμαστε σε άτοπο. Άρα  $\beta = \gamma$ , δηλαδή το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές. ■

### Εφαρμογή

Στη βάση  $B\Gamma$  ενός ισοσκελούς τριγώνου  $AB\Gamma$  παίρνουμε τυχαίο σημείο  $\Delta$ . Να αποδείξετε ότι  $A\Delta < A\Gamma$ .



### Λύση

Είναι  $\hat{B} = \hat{\Gamma} = \varphi$ .

Για να είναι  $A\Delta < A\Gamma$ , αρκεί στο τρίγωνο  $A\Delta\Gamma$  να είναι  $\varphi < \omega$ .

Όμως, στο τρίγωνο  $A\Delta B$  η  $\omega$  είναι εξωτερική. Έτσι  $\omega > \hat{B}$ , δηλαδή  $\omega > \varphi$ .

Αποδείξαμε λοιπόν ότι στο τρίγωνο  $A\Delta\Gamma$  είναι  $\omega > \varphi$ , οπότε  $A\Gamma > A\Delta$ . Άρα:

$$A\Delta < A\Gamma. \blacksquare$$

Από τα προηγούμενα θεωρήματα προκύπτουν άμεσα τα παρακάτω συμπεράσματα:

### Πορίσματα

- Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο η υποτείνουσα είναι η μεγαλύτερη πλευρά.
- Στο αμβλυγώνιο τρίγωνο η μεγαλύτερη πλευρά είναι αυτή που βρίσκεται απέναντι από την αμβλεία γωνία.
- Αν ένα τρίγωνο έχει τις γωνίες του ίσες, τότε είναι ισόπλευρο.

### ♦ Η τριγωνική ανισότητα

Ας εξετάσουμε τώρα πώς συνδέονται μέσω μιας ανισοτικής σχέσης οι πλευρές  $\alpha, \beta, \gamma$ , ενός τριγώνου  $AB\Gamma$ .

Στην προέκταση της  $B\Gamma$  παίρνουμε τμήμα  $\Gamma\Delta = \Gamma A$ , οπότε  $B\Delta = \alpha + \beta$ .

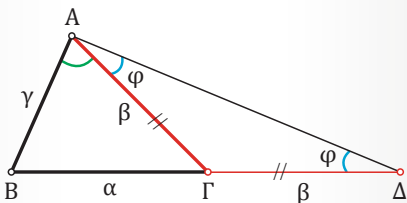
Στο τρίγωνο  $BA\Delta$  είναι  $B\hat{A}\Delta > \Gamma\hat{A}\Delta = \varphi = \hat{\Delta}$ , δηλαδή  $\hat{\Delta} < B\hat{A}\Delta$ . Επομένως,

$$\gamma < \alpha + \beta.$$

Όμοια παίρνουμε ότι  $\alpha < \beta + \gamma$  και  $\beta < \alpha + \gamma$ .

Αποδείξαμε επομένως ότι:

Κάθε πλευρά ενός τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων πλευρών και μεγαλύτερη από την απόλυτη τιμή της διαφοράς τους.



### Θεώρημα 4

Σε κάθε τρίγωνο  $AB\Gamma$  ισχύει ότι:

$$\alpha < \beta + \gamma, \quad \beta < \alpha + \gamma, \quad \gamma < \alpha + \beta,$$

δηλαδή κάθε πλευρά τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων πλευρών.

Ας πάρουμε τις σχέσεις  $\beta < \alpha + \gamma$  και  $\gamma < \alpha + \beta$ . Αυτές δίνουν  $\alpha > \beta - \gamma$  και  $\alpha > \gamma - \beta = -(\beta - \gamma)$ .

Λαμβάνοντας επιπλέον υπόψη ότι  $\alpha < \beta + \gamma$ , παίρνουμε:

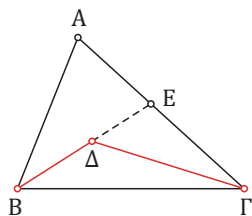
$$|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma.$$

Καταλήγουμε λοιπόν στην παρακάτω πρόταση:

### Τριγωνική ανισότητα

Για τα μήκη  $\alpha, \beta, \gamma$  των πλευρών τριγώνου  $AB\Gamma$  ισχύει ότι:

- $|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma$
- $|\gamma - \alpha| < \beta < \gamma + \alpha$
- $|\alpha - \beta| < \gamma < \alpha + \beta$

**Εφαρμογή**

Αν το  $\Delta$  είναι εσωτερικό σημείο ενός τριγώνου  $AB\Gamma$ , να αποδείξετε ότι:  
 $\Delta B + \Delta\Gamma < AB + A\Gamma$ .

**Λύση**

Έστω ότι η  $B\Delta$  τέμνει την πλευρά  $A\Gamma$  στο σημείο  $E$ . Από την τριγωνική ανισότητα στα τρίγωνα  $ABE$  και  $\Delta E\Gamma$  παίρνουμε:

$$\bullet \quad BE < AB + AE \quad \text{ή} \quad B\Delta + \Delta E < AB + AE. \quad (1)$$

$$\bullet \quad \Delta\Gamma < E\Delta + E\Gamma. \quad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1) και (2):

$$B\Delta + \Delta E + \Delta\Gamma < AB + AE + E\Delta + E\Gamma.$$

Ο όρος  $\Delta E$  διαγράφεται, ενώ  $AE + E\Gamma = A\Gamma$ . Επομένως:

$$B\Delta + \Delta\Gamma < AB + A\Gamma. \quad \blacksquare$$

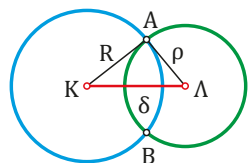
**◆ Τεμνόμενοι κύκλοι****Ορισμός**

Αν δύο κύκλοι έχουν δύο κοινά σημεία, τότε λέμε ότι **τέμνονται**.

Η χορδή που ορίζουν τα σημεία τομής λέγεται **κοινή χορδή**.

Οι κύκλοι  $(K, R)$  και  $(\Lambda, \rho)$  τέμνονται, αν και μόνο αν η διάκεντρος  $\delta$  και οι ακτίνες  $R, \rho$  συνδέονται με τη σχέση:

$$|R - \rho| < \delta < R + \rho.$$



$$R - \rho < \delta < R + \rho$$

**Εφαρμογή**

Αν δύο κύκλοι τέμνονται, τότε η διάκεντρος είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους.

**Λύση**

Θεωρούμε τους τεμνόμενους κύκλους  $(K, R)$  και  $(\Lambda, \rho)$  που έχουν κοινή χορδή την  $AB$ .

- Επειδή  $KA = KB = R$ , το  $K$  βρίσκεται στη μεσοκάθετο της χορδής  $AB$ .
- Επειδή  $LA = LB = \rho$ , το  $\Lambda$  βρίσκεται επίσης στη μεσοκάθετο της κοινής χορδής  $AB$ .

Άρα η  $K\Lambda$  είναι η μεσοκάθετος της κοινής χορδής  $AB$  των δύο κύκλων.  $\blacksquare$



Εσωτερικά - Εξωτερικά  
σημεία κύκλου



Σχετικές θέσεις  
ευθείας - κύκλου

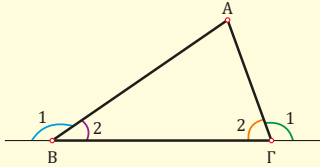


Σχετικές θέσεις  
δύο κύκλων

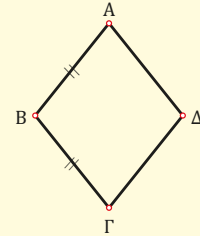
## Ασκήσεις και Προβλήματα

### Ασκήσεις Α' Ομάδας

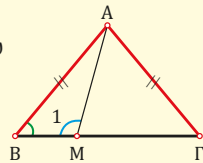
1. Στο παρακάτω σχήμα είναι  $\hat{B}_1 > \hat{\Gamma}_1$ . Να αποδείξετε ότι:  $\hat{B}_1 > 90^\circ$ .



2. Το σημείο Β ισαπέχει από τα άκρα του τμήματος ΑΓ και  $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ . Να αποδείξετε ότι:  
α)  $AD = \Gamma\Delta$ , β)  $B\Delta \perp A\Gamma$ .



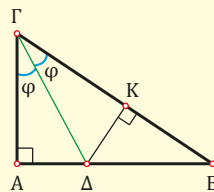
3. Το τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος είναι ισοσκελές.



Να αποδείξετε ότι

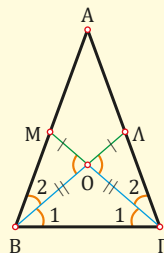
- α) η γωνία  $M_1$  είναι μεγαλύτερη από τη γωνία Β, και  
β)  $AM < AB$ .

4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ( $\hat{A} = 90^\circ$ ). Η διχοτόμος της γωνίας  $\hat{\Gamma}$  τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ.



- α. Να συγκρίνετε τα τμήματα ΔΑ και ΔΚ.  
β. Να αποδείξετε ότι:  $AD < \Delta B$ .

5. Το σημείο Ο ισαπέχει από τα άκρα του ΒΓ και  $OL = OM$ .



Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

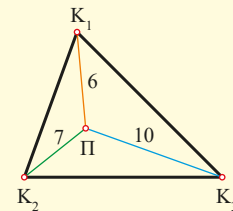
6. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ( $AB = A\Gamma$ ) και Ι το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών  $\hat{B}$ ,  $\hat{\Gamma}$ . Να αποδείξετε ότι:

- α) το τρίγωνο ΒΙΓ είναι ισοσκελές,  
β) η ΑΙ είναι διχοτόμος της  $\hat{A}$ .

### Ασκήσεις Β' Ομάδας

7. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ( $AB < A\Gamma$ ) και Κ, Λ τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι αν οι εξωτερικές διχοτόμοι των γωνιών του  $\hat{B}$  και  $\hat{\Gamma}$  τέμνονται στο σημείο Δ, τότε το τρίγωνο ΔΚΛ είναι ισοσκελές.

8. Οι κωμοπόλεις  $K_1, K_2, K_3$  απέχουν από την πόλη Π (παρακάτω σχήμα), αποστάσεις 7, 6 και 10 km



αντίστοιχα. Ένα αυτοκίνητο ξεκινάει από την κωμόπολη  $K_1$  και ακολουθώντας τη διαδρομή  $K_1K_2K_3K_1$  επιστρέφει στην  $K_1$ . Ο χιλιομετρτής του γράφει ότι για αυτήν τη διαδρομή διήνυσε απόσταση 47 km. Είναι σωστή η μέτρηση του οργάνου;

9. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσος  $AM = \mu_\alpha$ .

α) Αν  $\mu_\alpha < \frac{\alpha}{2}$ , να αποδείξετε ότι:

- i)  $\hat{B} < \hat{BAM}$ , ii)  $\hat{A} > 90^\circ$ .

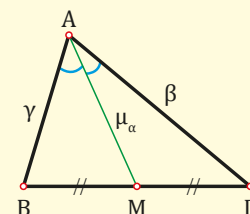
β) Αν  $\mu_\alpha > \frac{\alpha}{2}$ , να αποδείξετε ότι  $\hat{A} < 90^\circ$ .

γ) Αν  $\mu_\alpha = \frac{\alpha}{2}$ , να αποδείξετε ότι  $\hat{A} = 90^\circ$ .

10. Με τη βοήθεια του σχήματος να αποδείξετε ότι:

α)  $\frac{\beta - \gamma}{2} < \mu_\alpha < \frac{\beta + \gamma}{2}$ ,

β)  $\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma < 2\tau$ , όπου  $\tau = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}$ .

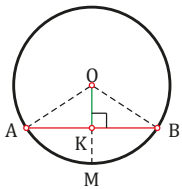
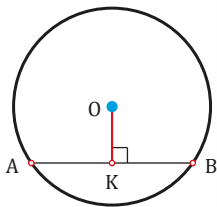


# 2.3

## Κύκλος - Χορδές - Αποστήματα

Περιέχονται

- Κύκλος - τόξα - χορδές.
- Απόστημα χορδής.
- Σύγκριση χορδών και αποστημάτων.
- Σύγκριση τόξων και χορδών.



Στην ενότητα αυτή:

1. Διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε πρόταση που αφορά μια χορδή και το αντίστοιχο απόστημα.
2. Αποδεικνύουμε ότι σε ίσα τόξα αντιστοιχούν ίσες χορδές.
3. Ορίζουμε τη μονάδα μέτρησης τόξων και γωνιών.

### Θεωρία και εφαρμογές

#### ◆ Χορδές και απόστημα

Αν  $AB$  είναι χορδή ενός κύκλου, τότε η απόσταση του  $O$  από την ευθεία  $AB$  λέγεται **απόστημα** της χορδής αυτής.

Έτσι, στο σχήμα, το  $OK$  είναι το απόστημα της χορδής  $AB$ .

Ας πάρουμε έναν κύκλο  $(O, R)$  και μια χορδή του  $AB$ . Φέρουμε το απόστημα  $OK$  της χορδής αυτής, δηλαδή  $OK \perp AB$ .

Επειδή  $OA = OB = R$ , το τρίγωνο  $OAB$  είναι ισοσκελές με βάση  $AB$ . Επομένως, το ύψος  $OK$  είναι και διάμεσος και διχοτόμος. Το  $K$  είναι λοιπόν μέσο της  $AB$  και η ευθεία  $OK$  διχοτομεί το τόξο  $\widehat{AB}$ , αφού διχοτομεί την επίκεντρη γωνία  $\widehat{AOB}$ . Έτσι:

Η κάθετη από το κέντρο ενός κύκλου προς μια χορδή του διχοτομεί και τη χορδή και τα τόξα που σχηματίζει.

#### ◆ Σύγκριση χορδών - αποστημάτων

Θα δούμε τώρα ποια σχέση συνδέει τα αποστήματα δύο ίσων χορδών ενός κύκλου. Συγκεκριμένα, ισχύουν όσα διατυπώνονται στο θεώρημα που ακολουθεί.

#### Θεώρημα 1

Δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες, αν και μόνο αν έχουν ίσα αποστήματα.

#### Απόδειξη

Θεωρούμε αρχικά δύο ίσες χορδές  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  του κύκλου  $(O, R)$  και τα αποστήματά τους  $OM, ON$  αντίστοιχα. Θα αποδείξουμε ότι  $OM = ON$ .

Τα  $M, N$  είναι μέσα των  $AB, \Gamma\Delta$  και αφού  $AB = \Gamma\Delta$ , θα είναι  $AM = \Delta N$ .

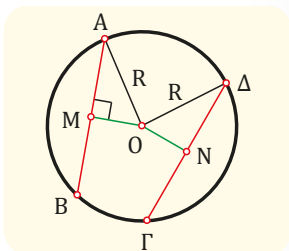
Τα ορθογώνια τρίγωνα  $OMA$  και  $ON\Delta$  έχουν:

$$MA = N\Delta \quad \text{και} \quad OA = O\Delta = R,$$

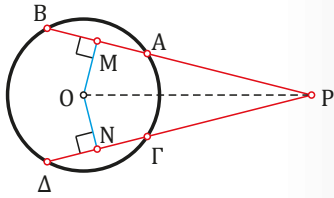
οπότε είναι ίσα. Επομένως θα είναι  $OM = ON$ , δηλαδή τα αποστήματα των χορδών  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  είναι ίσα.

#### Αντίστροφα

Έστω ότι τα αποστήματα  $OM$  και  $ON$  των χορδών  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  είναι ίσα.







Φέρουμε λοιπόν τα αποστήματα  $OM$  και  $ON$  των χορδών αυτών.

Αφού  $AB = \Gamma\Delta$ , θα είναι  $OM = ON$ .

Τα ορθογώνια τρίγωνα  $POM$  και  $PON$  είναι ίσα, αφού:

- η  $OP$  είναι κοινή,
- $OM = ON$ .

Επομένως θα είναι και  $PM = PN$ .

Τα αποστήματα διχοτομούν τις χορδές  $AB, \Gamma\Delta$  και αφού αυτές είναι ίσες, παίρνουμε  $MB = N\Delta$ .

Επομένως, έχουμε ότι:

$$PM + MB = PN + N\Delta \quad \text{ή} \quad PB = P\Delta.$$

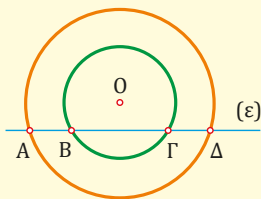
β) Αφού  $PB = P\Delta$  και  $AB = \Gamma\Delta$ , θα είναι  $PA = P\Gamma$  ως διαφορές ίσων τμημάτων.

Όντως  $PA = PB - AB = P\Delta - \Gamma\Delta = P\Gamma$ .

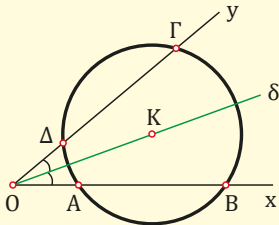
## Ασκήσεις και Προβλήματα

### Ασκήσεις Α' Ομάδας

1. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι κέντρου  $O$  και μια ευθεία  $(\epsilon)$ , που τους τέμνει διαδοχικά στα σημεία  $A, B, \Gamma, \Delta$ .  
Να αποδείξετε ότι  $AB = \Gamma\Delta$ .



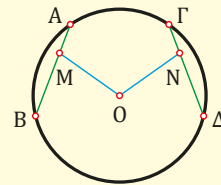
2. Δίνεται γωνία  $\hat{xOy}$  και  $K$  ένα σημείο της διχοτόμου της  $O\delta$ . Σχεδιάζουμε κύκλο κέντρου  $K$ , που τέμνει την  $Ox$  στα σημεία  $A$  και  $B$  και την  $Oy$  στα σημεία  $\Gamma$  και  $\Delta$ . Να αποδείξετε ότι  $AB = \Gamma\Delta$ .



3. Στον κύκλο κέντρου  $O$  του παρακάτω σχήματος, οι χορδές  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  είναι ίσες. Θεωρούμε σημεία  $M$  και  $N$  των  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  αντίστοιχα, ώστε  $AM = \Gamma N$ .

Να αποδείξετε ότι:

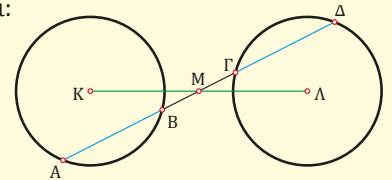
- α)  $OM = ON$ ,
- β) η  $OE$  διχοτομεί τη γωνία  $\hat{M\hat{O}N}$ , με  $E$  να είναι το σημείο τομής των ευθειών  $BA, \Delta\Gamma$ .



4. Στο παρακάτω σχήμα οι κύκλοι είναι ίσοι και:  $AB = \Gamma\Delta$ .

Να αποδείξετε ότι:

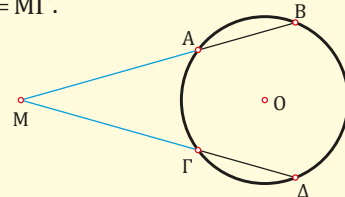
- α)  $MK = M\Lambda$ ,
- β)  $KA \parallel \Lambda\Delta$ .



5. Στο παρακάτω σχήμα οι τέμνουσες  $MAB$  και  $M\Gamma\Delta$  είναι ίσες.

Να αποδείξετε ότι:

- α) τα τρίγωνα  $MOB$  και  $MO\Delta$  είναι ίσα,
- β) το σημείο  $O$  ισαπέχει από τις τέμνουσες,
- γ)  $MA = M\Gamma$ .



# 2.4

## Γεωμετρικές κατασκευές

Περιέχονται

- Κατασκευή μεσοκαθέτου.
- Κατασκευή διχοτόμου.
- Κατασκευή καθέτου προς ευθεία.
- Κατασκευή τριγώνων.

Στην ενότητα αυτή:

Κατασκευάζουμε με κανόνα και διαβήτη:

1. τη διχοτόμο γωνίας,
2. τη μεσοκάθετο ευθυγράμμου τμήματος,
3. τρίγωνα από δεδομένα στοιχεία τους (π.χ. τις πλευρές τους),
4. την εφαπτομένη κύκλου σε σημείο του,
5. την κάθετη από σημείο προς ευθεία ή σε σημείο της ευθείας.

### Θεωρία και εφαρμογές

#### ◆ Τα γεωμετρικά όργανα

Τα γεωμετρικά όργανα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας είναι δύο:

ο **κανόνας** και ο **διαβήτης**.

- Με τον κανόνα μπορούμε να σχεδιάζουμε ευθείες. Αν λοιπόν έχουμε δύο σημεία του επιπέδου, τότε αυτά ορίζουν μια μοναδική ευθεία, την οποία μπορούμε να τη χαράξουμε με τη βοήθεια του κανόνα. Σημειώνουμε ότι ο κανόνας είναι αδιαβάθμητος, δεν έχει δηλαδή υποδιαιρέσεις.
- Με τον διαβήτη μπορούμε να μεταφέρουμε τμήματα και να χαράζουμε κύκλους. Βάζοντας τις άκρες του διαβήτη στα άκρα ενός τμήματος AB έχουμε στην ουσία «αιχμαλωτίσει» το τμήμα και μπορούμε έτσι να το τοποθετήσουμε πάνω σε οποιαδήποτε ευθεία (ε), σε όποια θέση επιθυμούμε, π.χ. στη θέση ΓΔ.

#### Ορισμός

Λέμε ότι ένα σχήμα κατασκευάζεται γεωμετρικά, αν μπορούμε να το σχεδιάσουμε χρησιμοποιώντας μόνο τα γεωμετρικά όργανα, δηλαδή τον κανόνα και τον διαβήτη.

Οι γεωμετρικές κατασκευές απασχόλησαν τους ανθρώπους από την εποχή του **Ευκλείδη** αλλά και πριν από αυτόν. Από νωρίς έγινε αντιληπτό ότι μερικές κατασκευές δεν μπορούν να γίνουν με κανόνα και διαβήτη, όπως π.χ. να χωριστεί μια τυχαία γωνία σε τρία ίσα μέρη (τριχοτόμηση της γωνίας) ή να χωριστεί ένας κύκλος σε τυχαίο αριθμό ίσων τόξων (π.χ. 7 ή 9).

Η απόδειξη όμως ότι αυτές οι κατασκευές είναι πράγματι αδύνατες με κανόνα και διαβήτη έγινε μόνο τους τελευταίους αιώνες.

#### ◆ Τα στάδια μιας κατασκευής

Για την επίτευξη μιας γεωμετρικής κατασκευής, ακολουθούμε συνήθως τα παρακάτω βήματα, άλλοτε χωριστά και άλλοτε ενοποιημένα:

- την ανάλυση,
- τη σύνθεση (κατασκευή),
- την απόδειξη, και
- τη διερεύνηση.



(ε) Γ Δ

- α) Με την ανάλυση, ξεκινώντας ότι έχουμε λύσει το πρόβλημα, προσπαθούμε με αντίστροφα βήματα, να οδηγηθούμε σε κάποια συμπεράσματα που θα μας δείξουν πώς θα γίνει η κατασκευή.
- β) Με την κατασκευή δείχνουμε βήμα - βήμα πώς πετυχαίνουμε να λύσουμε το πρόβλημα.
- γ) Με την απόδειξη αιτιολογούμε θεωρητικά γιατί η κατασκευή που περιγράψαμε είναι πραγματικά ορθή.
- δ) Με τη διερεύνηση αναζητούμε να προσδιορίσουμε κάτω από ποιες συνθήκες το προς επίλυση πρόβλημα (κατασκευή) έχει λύση και πόσες.

Για παράδειγμα, αν μας δοθούν τρεις θετικοί αριθμοί (3, 4, 7) και ζητηθεί η κατασκευή τριγώνου με μήκη πλευρών αυτούς τους αριθμούς, τότε αυτό το πρόβλημα δεν έχει λύση, αφού δεν ισχύει η τριγωνική ανισότητα για την πλευρά με μήκος 7, δηλαδή δεν ισχύει ότι  $7 < 3 + 4$ .

### ◆ Μεταφορά τμήματος και γωνίας

#### Μεταφορά τμήματος

Στην ημιευθεία  $Gx$  να κατασκευάσετε τμήμα  $G\Delta$  ίσο με δοσμένο τμήμα  $AB$ .

#### Λύση

**Κατασκευή:** Η μεταφορά (κατασκευή) γίνεται με τον διαβήτη.

Ανοίγουμε τον διαβήτη τόσο, όσο είναι το τμήμα  $AB = \alpha$ . Στη συνέχεια, τοποθετούμε την ακίδα του διαβήτη στο  $G$  και χαράσσουμε τόξο  $(G, \alpha)$  που τέμνει την  $Gx$  στο  $\Delta$ . Προφανώς  $G\Delta = \alpha = AB$ . ■

#### Παράδειγμα

Να κατασκευάσετε ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά  $\alpha$ .

#### Λύση

Θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα  $AB = \alpha$ . Θα κατασκευάσουμε ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρές ίσες με  $\alpha$ .

Φέρουμε τους κύκλους  $(A, \alpha)$  και  $(B, \alpha)$  που τέμνονται στα σημεία  $\Gamma$  και  $\Delta$ .

Επειδή:

$$AG = BG = \alpha = AB,$$

το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισόπλευρο.

Όμοια, αφού:

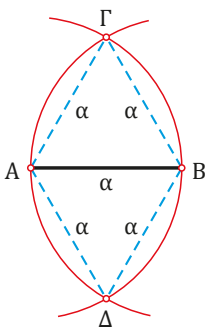
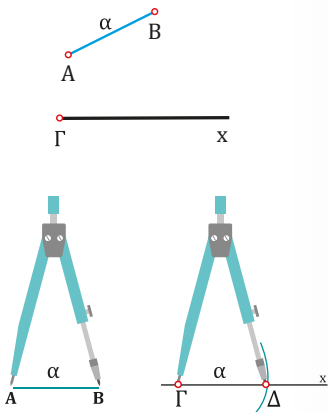
$$AD = BD = \alpha = BA,$$

το τρίγωνο  $\Delta AB$  είναι επίσης ισόπλευρο, ίσο προφανώς με το τρίγωνο  $AB\Gamma$ .

**Διερεύνηση:** Το πρόβλημα έχει πάντα δύο λύσεις. ■

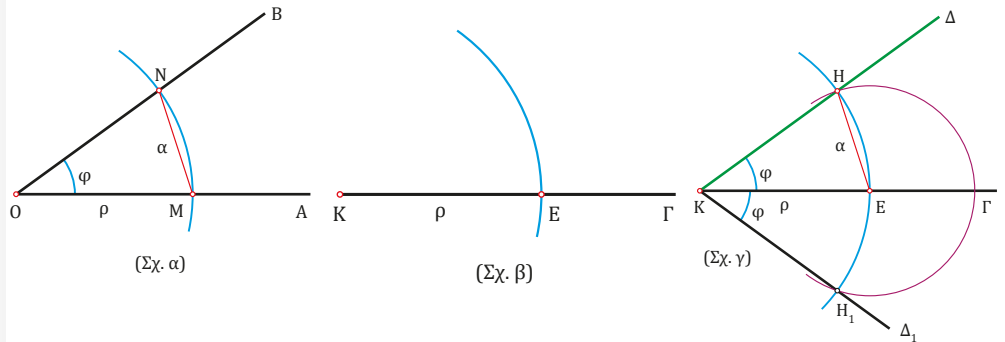
#### Μεταφορά γωνίας

Να κατασκευάσετε γωνία  $\widehat{K\Delta}$  ίση με δοσμένη γωνία  $\widehat{A\Omega B}$ , που η μία πλευρά της να είναι η δοσμένη ημιευθεία  $K\Gamma$ .



### Λύση

**Κατασκευή:** Ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα.



#### 1<sup>ο</sup> βήμα

Φέρουμε τυχαίο κύκλο  $(O, \rho)$  που ορίζει στις πλευρές  $OA, OB$  της γωνίας  $\widehat{O}$  τη χορδή  $MN = \alpha$  (Σχ. α).

#### 2<sup>ο</sup> βήμα

Φέρουμε τον κύκλο  $(K, \rho)$  και προσδιορίζουμε στην  $K\Gamma$  το σημείο  $E$  (Σχ. β).

#### 3<sup>ο</sup> βήμα

Φέρουμε τον κύκλο  $(E, \alpha)$ , όπου  $\alpha = MN$  και προσδιορίζουμε το σημείο τομής  $H$  των  $(K, \rho)$  και  $(E, \alpha)$ . Φέρουμε την ημιευθεία  $KH$  (Σχ. γ).

Η γωνία  $\widehat{K\Gamma\Delta}$  είναι μια λύση του προβλήματος.

#### Απόδειξη

Οι γωνίες  $\widehat{O}$  και  $\widehat{K}$  είναι επίκεντρες των ίσων κύκλων  $(O, \rho)$ ,  $(K, \rho)$  και βαίνουν στα ίσα τόξα  $\widehat{MN}$  και  $\widehat{EH}$ . Επομένως:

$$\widehat{K} = \widehat{O} = \varphi.$$

**Διερεύνηση:** Το πρόβλημα έχει πάντα δύο λύσεις αφού οι κύκλοι  $(K, \rho)$  και  $(E, \alpha)$  τέμνονται σε δύο ακριβώς σημεία. ■

### ◆ Κατασκευή μεσοκαθέτου - διχοτόμου - καθέτου

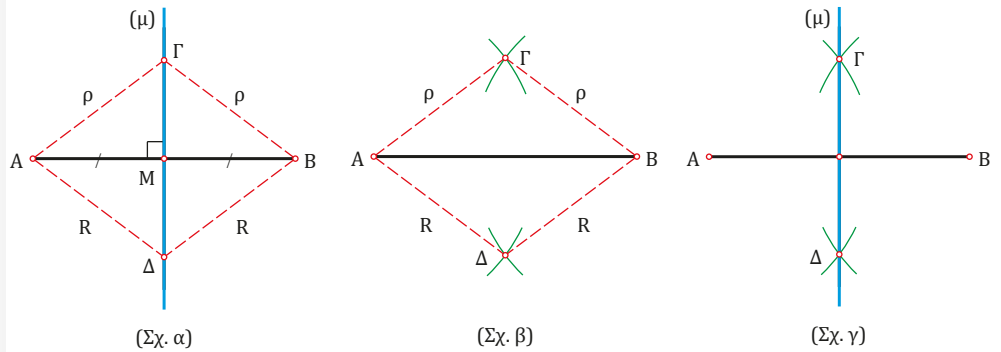


#### Πρόβλημα 1<sup>ο</sup>

Να κατασκευαστεί η μεσοκάθετος ενός ευθυγράμμου τμήματος.

#### Λύση

Η κατασκευή της μεσοκαθέτου περιγράφεται σταδιακά μέσω των παρακάτω βημάτων:



**Ανάλυση:** Αν  $(\mu)$  είναι η ζητούμενη μεσοκάθετος, τότε αυτή προσδιορίζεται από δύο σημεία.

Όμως, τα σημεία της μεσοκαθέτου ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος.

Έτσι, στο (Σχ. α), αρκεί να βρούμε δύο σημεία  $\Gamma$  και  $\Delta$ , ώστε  $\Gamma A = \Gamma B$  και  $\Delta A = \Delta B$ , κάτι το οποίο είναι πάντα εφικτό.

**Κατασκευή:** Φέρουμε τους κύκλους  $(A, \rho)$ ,  $(B, \rho)$ , με  $\rho > \frac{AB}{2}$ , που τέμνονται στο σημείο  $\Gamma$  και τους κύκλους  $(A, R)$ ,  $(B, R)$ , με  $R > \frac{AB}{2}$ , που τέμνονται στο σημείο  $\Delta$ . Μπορούμε, φυσικά, να πάρουμε  $\rho = R$ , οπότε οι κύκλοι αυτοί είναι ίσοι. Η  $\Gamma\Delta$  είναι η ζητούμενη μεσοκάθετος.

### Απόδειξη

Αφού  $\Gamma A = \Gamma B$  και  $\Delta A = \Delta B$ , τα σημεία  $\Gamma$  και  $\Delta$  ανήκουν στη μεσοκάθετο του  $AB$ . Άρα η ευθεία  $\Gamma\Delta$  είναι η μεσοκάθετος του τμήματος  $AB$ .

**Διερεύνηση:** Αφού πάντα προσδιορίζονται τα σημεία  $\Gamma$  και  $\Delta$ , το πρόβλημα έχει πάντα λύση. ■

### Εφαρμογή

Να προσδιοριστεί (γεωμετρικά) το μέσο δοθέντος τμήματος.

### Λύση

Αφού είναι δυνατή η κατασκευή της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος, είναι άμεσος και ο προσδιορισμός του μέσου  $M$  ενός τμήματος  $AB$ .

Πραγματικά, το μέσο του  $AB$  είναι η τομή της μεσοκαθέτου  $(\mu)$  του  $AB$  με την ευθεία  $AM$ .

Αν, λοιπόν, φέρουμε τους κύκλους  $(A, \rho)$ , και  $(B, \rho)$ , με  $\rho > \frac{AB}{2}$  (π.χ. με  $\rho = AB$ ), που τέμνονται στα σημεία  $\Gamma$  και  $\Delta$ , τότε η  $\Gamma\Delta$  είναι η μεσοκάθετος του  $AB$  και έτσι η τομή της  $AB$  με τη  $\Gamma\Delta$  δίνουν το μέσο  $M$  του  $AB$ . ■

### Πρόβλημα 2°

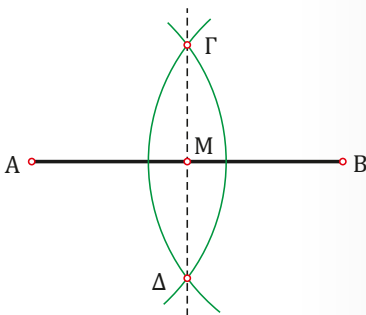
Από σημείο εκτός ευθείας  $(\varepsilon)$  να κατασκευαστεί (αχθεί) ευθεία κάθετο προς την  $(\varepsilon)$ .

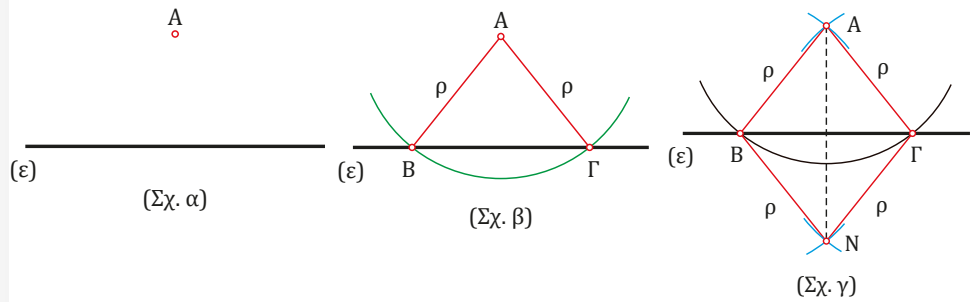
### Λύση

Έστω ευθεία  $(\varepsilon)$  και σημείο  $A$  σε αυτήν (Σχ. α). Η κατασκευή της καθέτου ευθείας περιγράφεται σταδιακά με τα παρακάτω βήματα. Η ακτίνα  $\rho$  πρέπει να είναι μεγαλύτερη από την απόσταση του σημείου  $A$  από την ευθεία  $(\varepsilon)$ .



Κατασκευή  
μεσοκαθέτου





### 1<sup>ο</sup> βήμα

Φέρουμε τον κύκλο  $(A, \rho)$  που τέμνει την ευθεία  $(\varepsilon)$  στα σημεία B και Γ (Σχ. β).

### 2<sup>ο</sup> βήμα

Όπως στο Πρόβλημα 1<sup>ο</sup> (Σχ. γ).

Για παράδειγμα, αν οι κύκλοι  $(B, \rho), (\Gamma, \rho)$  ξανατέμνονται στο N, τότε η ευθεία AN είναι η ζητούμενη.

### Απόδειξη

Από την κατασκευή είναι  $AB = A\Gamma$  και  $NB = N\Gamma$ .

Αφού η AN είναι μεσοκάθετος του BΓ και περνάει από το A, θα είναι:

$$AN \perp B\Gamma.$$

**Διερεύνηση:** Το πρόβλημα έχει πάντα λύση, αφού πάντα μπορούμε να προσδιορίσουμε τα σημεία B, Γ και να φέρουμε τη μεσοκάθετο του τμήματος BΓ. ■

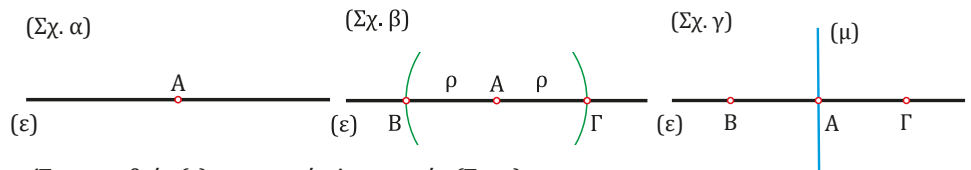


### Πρόβλημα 3<sup>ο</sup>

Σε σημείο A μιας ευθείας  $(\varepsilon)$  να κατασκευαστεί (αχθεί) ευθεία κάθετη προς την  $(\varepsilon)$ .

### Λύση

**Κατασκευή:** Ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα που περιγράφονται στα σχήματα.



Έστω ευθεία  $(\varepsilon)$  και σημείο A σε αυτήν (Σχ. α).

### 1<sup>ο</sup> βήμα

Γράφουμε τυχαίο κύκλο  $(A, \rho)$  που τέμνει την ευθεία  $(\varepsilon)$  στα σημεία B και Γ (Σχ. β).

### 2<sup>ο</sup> βήμα

Φέρουμε τη μεσοκάθετο  $(\mu)$  του τμήματος BΓ (Σχ. γ) όπως στο Πρόβλημα 1<sup>ο</sup>. Η ευθεία  $(\mu)$  είναι η ζητούμενη.

**Απόδειξη**

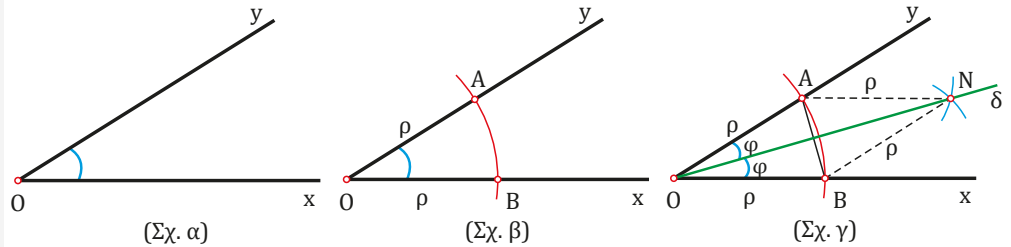
Αφού  $AB = AG$ , λόγω του τρόπου προσδιορισμού των σημείων B και Γ, η μεσοκάθετος ( $\mu$ ) του τμήματος BΓ διέρχεται από το μέσο A του BΓ και είναι κάθετη προς αυτό. ■

**Πρόβλημα 4°**

Να κατασκευαστεί η διχοτόμος μιας γωνίας.

**Λύση**

**Κατασκευή:** Για την κατασκευή (χάραξη) της διχοτόμου μιας γωνίας (Σχ. α) ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα, που περιγράφονται στα σχήματα.

**1° βήμα**

Καθιστούμε τη γωνία  $\hat{O}$  επίκεντρο. Φέρουμε λοιπόν τυχαίο κύκλο  $(O, \rho)$  που τέμνει τις πλευρές της γωνίας  $x\hat{O}y$  στα σημεία A και B (Σχ. β).

**2° βήμα**

Φέρουμε τη μεσοκάθετο του τμήματος (της χορδής) AB, όπως στο Πρόβλημα 1°, π.χ. φέρνοντας τους κύκλους  $(A, \rho)$  και  $(B, \rho)$  που τέμνονται στα σημεία O και N (Σχ. γ).

Η ημιευθεία ON είναι η ζητούμενη διχοτόμος.

**Απόδειξη**

Η μεσοκάθετος κάθε χορδής, δηλαδή η ευθεία του αποστήματος, διέρχεται από το κέντρο O του κύκλου. Όμως, το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές, διότι

$$OA = OB = \rho.$$

Άρα η μεσοκάθετος ON του AB είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{O}$ .

**Διερεύνηση:** Το πρόβλημα έχει πάντα λύση. ■

**Πρόβλημα 5°**

Να κατασκευαστεί η εφαπτομένη ενός κύκλου σε δοσμένο σημείο του.

**Λύση**

**Κατασκευή:** Θεωρούμε τυχαίο σημείο A ενός κύκλου  $(O, \rho)$ . Η κατασκευή της εφαπτομένης του κύκλου στο A περιγράφεται στα παρακάτω βήματα.

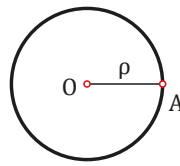
**1° βήμα**

Έστω ο κύκλος  $(O, \rho)$  και τυχαίο σημείο A σε αυτόν (Σχ. α).

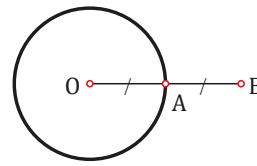
Στην προέκταση της ακτίνας OA παίρνουμε τμήμα  $AB = OA = \rho$  (Σχ. β).



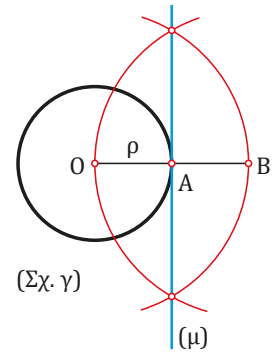
Κατασκευή  
εφαπτομένης κύκλου



(Σχ. α)



(Σχ. β)



(Σχ. γ)

### 2<sup>ο</sup> βήμα

Φέρουμε τη μεσοκάθετο (μ) του τμήματος OB (Σχ. γ). Αυτή είναι η ζητούμενη εφαπτομένη.

### Απόδειξη

Η μεσοκάθετος του OB διέρχεται από το A, αφού το A είναι μέσο του OB. Επειδή είναι  $(\mu) \perp OB$ , η ακτίνα OA είναι κάθετη στην ευθεία (μ). Άρα η (μ) είναι η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο A.

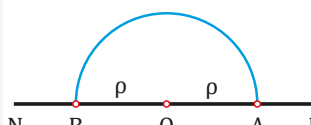
**Διερεύνηση:** Το πρόβλημα έχει πάντα λύση, λόγω της κατασκευής της ευθείας (μ).

### Εφαρμογή

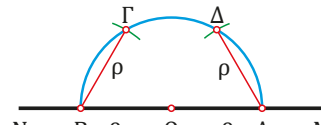
Μόνο με τον διαβήτη να τριχοτομηθεί μια ευθεία γωνία.

### Λύση

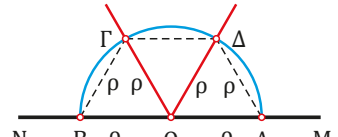
Θα στηριχτούμε στο γεγονός ότι σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο οι γωνίες του είναι ίσες με  $60^\circ$ .



(Σχ. α)



(Σχ. β)



(Σχ. γ)

### 1<sup>ο</sup> βήμα

Φέρουμε τυχαίο κύκλο  $(O, \rho)$  και προσδιορίζουμε τα σημεία A, B, ώστε  $OA = OB = \rho$  (Σχ. α).

### 2<sup>ο</sup> βήμα

Φέρουμε τους κύκλους  $(B, \rho)$  και  $(A, \rho)$ , οπότε βρίσκουμε τα σημεία Γ και Δ. (Σχ. β).

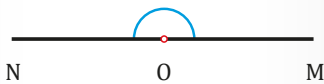
### 3<sup>ο</sup> βήμα

Φέρουμε τις ημιευθείες OΓ, OΔ. Αυτές χωρίζουν την ευθεία γωνία  $\widehat{MÔN}$  σε τρεις ίσες γωνίες (Σχ. γ).

### Απόδειξη

Τα τρίγωνα OΒΓ και OΑΔ είναι ισόπλευρα, εκ κατασκευής. Άρα:

$$\widehat{BÔ\Gamma} = \widehat{AÔ\Delta} = 60^\circ.$$



Μόνο με διαβήτη!



Κατασκευή γωνίας  
60 μοιρών

Θα είναι επομένως και  $\widehat{\Gamma\hat{O}\Delta} = 60^\circ$ , οπότε η ευθεία γωνία  $\hat{O}$  έχει τριχοτομηθεί. ■

### Ιστορικό σχόλιο

Ένα από τα εξαιρετικά συμπεράσματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στο κεφάλαιο των κατασκευών είναι το εξής:

**Κάθε κατασκευή που γίνεται με κανόνα και διαβήτη μπορεί να γίνει μόνο με διαβήτη.**

### ◆ Κατασκευή τριγώνου

Το μεγαλύτερο ενδιαφέρον στις γεωμετρικές κατασκευές παρουσιάζει η κατασκευή τριγώνου, όταν δίνονται διάφορα στοιχεία του, όπως πλευρές, γωνίες, ύψος, διάμεσος, και συνδυασμοί αυτών.

Η κατασκευή κύκλου ή ο προσδιορισμός σημείων, πλην απλών περιπτώσεων, αν και έχει πλούσιες εφαρμογές, δεν εμπίπτει στους σκοπούς της γεωμετρικής γνώσης αυτής της τάξης.

Στην κατασκευή τριγώνων ωστόσο θα παρουσιάσουμε τις πιο απλές περιπτώσεις, που αποτελούν βασικά εργαλεία για τη λύση πιο σύνθετων προβλημάτων.

### Πρόταση

Τα τμήματα  $\alpha, \beta, \gamma$  με  $\alpha \geq \beta \geq \gamma$  αποτελούν πλευρές τριγώνων, αν και μόνο αν  $\alpha < \beta + \gamma$ , δηλαδή αν το μεγαλύτερο τμήμα είναι μικρότερο από το άθροισμα των δύο άλλων.

Αφού  $\alpha \geq \beta \geq \gamma$  προφανώς  $\beta < \alpha + \gamma$  και  $\gamma < \alpha + \beta$ . Αυτές δίνουν:

$$\alpha > \beta - \gamma \text{ και } \alpha > \gamma - \beta,$$

οπότε  $\alpha > |\beta - \gamma|$ . Ισχύει λοιπόν ότι:

$$|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma$$

και έτσι τα  $\alpha, \beta, \gamma$  μπορούν να σχηματίσουν τρίγωνο.

Αντίστροφα, αφού τα  $\alpha, \beta, \gamma$  αποτελούν πλευρές τριγώνου τότε από το Θεώρημα 4 στη σελ. 49 ξέρουμε ότι  $\alpha < \beta + \gamma$ , που αποδεικνύει το αντίστροφο. ■

### Πρόβλημα 6°

Να κατασκευαστεί τρίγωνο όταν δίνονται οι πλευρές του.

### Λύση

Έστω ότι δίνονται τα τμήματα  $\alpha, \beta, \gamma$  και θέλουμε με αυτά να κατασκευάσουμε τρίγωνο, π.χ. το  $AB\Gamma$ .

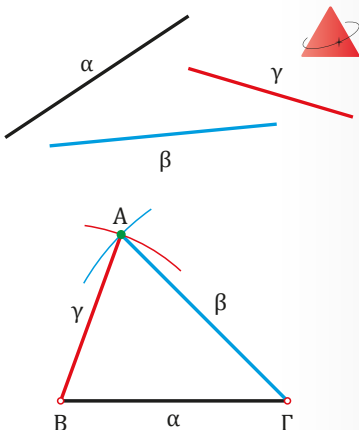
**Κατασκευή:** Αρχικά παίρνουμε τμήμα:

$$B\Gamma = \alpha.$$

Αφού:

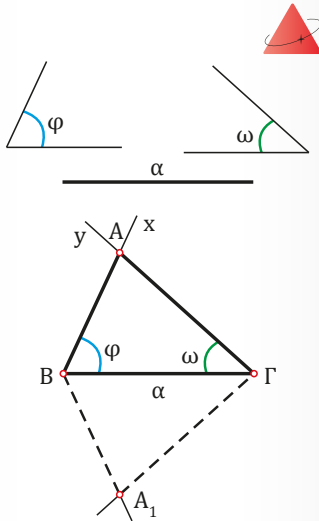
$$AB = \gamma \text{ και } A\Gamma = \beta,$$

το  $A$  είναι σημείο τομής των κύκλων  $(B, \gamma)$  και  $(\Gamma, \beta)$ . Χαράσουμε λοιπόν τους δύο αυτούς κύκλους και προσδιορίζουμε την κορυφή  $A$ .





Κατασκευή τριγώνου από τις πλευρές του



### Πρόβλημα 7°

Να κατασκευαστεί τρίγωνο, αν δίνονται μια πλευρά και οι προσκείμενες σε αυτή γωνίες.

#### Λύση

Θεωρούμε το τμήμα  $B\Gamma = \alpha$ .

**Κατασκευή:** Μπορούμε τότε να φέρουμε ημιευθείες  $Bx, \Gamma y$  με:

$$\widehat{Bx} = \varphi$$

και

$$\widehat{\Gamma y} = \omega$$

προς το ίδιο μέρος της ευθείας  $B\Gamma$ .

Αν αυτές τέμνονται στο σημείο  $A$ , τότε το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι το ζητούμενο, αφού:

$$B\Gamma = \alpha, \widehat{B} = \varphi \text{ και } \widehat{\Gamma} = \omega.$$

**Διερεύνηση:** Για να κατασκευάζεται το τρίγωνο  $AB\Gamma$  πρέπει να τέμνονται οι ημιευθείες  $Bx$  και  $\Gamma y$ .

Αυτό όμως συμβαίνει μόνο αν  $\varphi + \omega < 180^\circ$ .

Φυσικά, με σταθερό το τμήμα  $B\Gamma = \alpha$ , κατασκευάζονται δύο τέτοια τρίγωνα: το  $AB\Gamma$  και το  $A_1B\Gamma$ , αφού η ευθεία  $B\Gamma$  ορίζει δύο ημιεπίπεδα. ■

### Εφαρμογή

Να κατασκευαστεί τρίγωνο, αν δίνονται δύο πλευρές και η περιεχόμενη τους γωνία.

#### Λύση

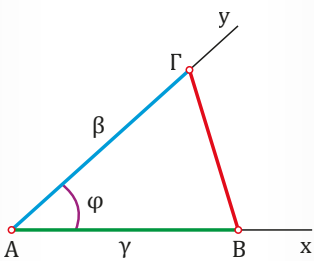
**Κατασκευή:**

Ας είναι  $\widehat{A} = \widehat{xAy} = \varphi$  η δοσμένη γωνία και  $\beta, \gamma$  οι δύο πλευρές του τριγώνου που περιέχουν τη γωνία  $\varphi$ .

- Στην ημιευθεία  $Ax$  παίρνουμε (με τον διαβήτη) το τμήμα  $AB = \gamma$ .
- Στην ημιευθεία  $Ay$  παίρνουμε το τμήμα  $AG = \beta$ .

Στη συνέχεια φέρουμε με τον κανόνα το τμήμα  $B\Gamma$ .

Το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι το ζητούμενο και κατασκευάζεται πάντα. ■



Αληθές-ψευδές στα τρίγωνα και τον κύκλο

## Ασκήσεις και Προβλήματα

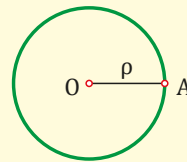
### Ασκήσεις Α' Ομάδας

- Με κανόνα και διαβήτη να προσδιορίσετε:
  - το συμμετρικό ενός σημείου  $A$  ως προς μία ευθεία  $(\epsilon)$ ,
  - το μέσο  $M$  ενός τμήματος  $AB$ .
- Να κατασκευάσετε ορθογώνιο τρίγωνο αν δίνεται η υποτείνουσα και μια οξεία γωνία του.
- Δίνεται κύκλος  $(O, \rho)$ , και σημείο  $M$  εντός αυτού. Να κατασκευάσετε χορδή  $B\Gamma$  του κύκλου που έχει το  $M$  ως μέσο.
- Να κατασκευάσετε κύκλο, αν δίνεται μια χορδή του και το αντίστοιχο απόστημά της.
- Να κατασκευαστεί ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A} = 90^\circ$ , αν δίνεται η υποτείνουσα και η πλευρά  $AB = \gamma$ .
- Μόνο με διαβήτη, να διαιρέσετε τόξο κύκλου ίσο με ημικύκλιο σε τρία ίσα τόξα.
- Να κατασκευάσετε (προσδιορίσετε) σημείο, το οποίο να ισαπέχει από τις κορυφές ενός τριγώνου.
- Να προσδιορίσετε (κατασκευάσετε) σημείο, το οποίο ισαπέχει από τις πλευρές ενός τριγώνου.
- Να κατασκευάσετε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma = 5$  και ύψος  $AM = 4$ .

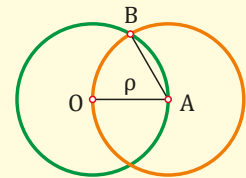
### Ασκήσεις Β' Ομάδας

- Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Να κατασκευάσετε κύκλο που εφάπτεται και στις τρεις πλευρές του τριγώνου.
- Δίνεται κύκλος  $(O, R)$ . Να προσδιορίσετε τέσσερα σημεία  $A, B, \Gamma, \Delta$  του κύκλου, ώστε το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  να έχει τις πλευρές του ίσες, δηλαδή  $AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta A$ . Τι σχήμα είναι το  $AB\Gamma\Delta$ ;

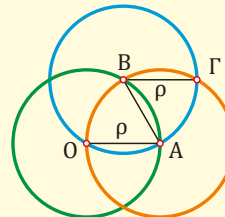
- Δίνεται κύκλος  $(O, R)$ . Να κατασκευάσετε κανονικό εξάγωνο εγγεγραμμένο στον κύκλο αυτό. Να βρείτε τη γωνία του εξαγώνου σε μέρη ορθής.
- Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Να κατασκευάσετε κύκλο που να διέρχεται και από τις τρεις κορυφές του τριγώνου.
- Σε έναν κύκλο  $(O, R)$ , να βρείτε τρία σημεία  $A, B, \Gamma$  έτσι, ώστε το τρίγωνο  $AB\Gamma$  να είναι ισόπλευρο.
- Κατασκευή εφαπτομένης (μόνο με διαβήτη)**  
Ας υποθέσουμε ότι διαθέτουμε μόνο διαβήτη και θέλουμε να φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου  $(O, \rho)$  στο σημείο  $A$  (Σχ. α).



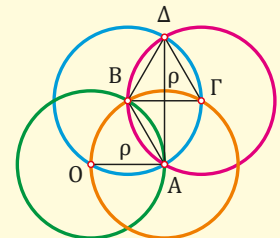
(Σχ. α)



(Σχ. β)



(Σχ. γ)



(Σχ. δ)

Τα παραπάνω σχήματα δείχνουν έναν τρόπο κατασκευής αυτής της εφαπτομένης, βρίσκοντας διαδοχικά τα σημεία  $B$  (Σχ. β),  $\Gamma$  (Σχ. γ),  $\Delta$  (Σχ. δ). Η ευθεία  $AD$  είναι η ζητούμενη εφαπτομένη. Να αποδείξετε την ορθότητα αυτής της κατασκευής.

- Να αποδείξετε ότι αν μπορούμε να κατασκευάσουμε γωνία  $19^\circ$ , τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε και γωνία  $1^\circ$ .

# 2.5

## Γεωμετρικοί τόποι

Στην ενότητα αυτή:

1. Διατυπώνουμε την έννοια του γεωμετρικού τόπου.
2. Αναγνωρίζουμε τη μεσοκάθετο και τη διχοτόμο ως γεωμετρικούς τόπους.
3. Βρίσκουμε γεωμετρικούς τόπους σε ασκήσεις και προβλήματα.

### Θεωρία και εφαρμογές

#### ◆ Η έννοια του γεωμετρικού τόπου

Ας ξεκινήσουμε με το πολύ γνωστό μας ερώτημα:

Τι λέμε κύκλο με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $\rho$ ;

Από τα πρώιμα σχολικά μας χρόνια είναι γνωστή η απάντηση:

Κύκλος είναι το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου που απέχουν από το κέντρο  $O$  απόσταση ίση με  $\rho$ .

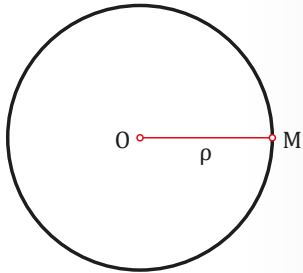
Τα σημεία λοιπόν του κύκλου **χαρακτηρίζονται** από μια ιδιότητα:

**να ισαπέχουν από το κέντρο.**

Αυτό σημαίνει ουσιαστικά δύο πράγματα:

- Κάθε σημείο του κύκλου απέχει από το κέντρο όσο είναι η ακτίνα του.
- Κάθε σημείο του επιπέδου που απέχει από το κέντρο  $O$  απόσταση  $\rho$  βρίσκεται πάνω στον κύκλο.

Για τους παραπάνω δύο λόγους λέμε με πιο αυστηρούς γεωμετρικούς όρους ότι: Ο κύκλος είναι ο **γεωμετρικός τόπος** των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από δοσμένο σταθερό σημείο, το κέντρο του.

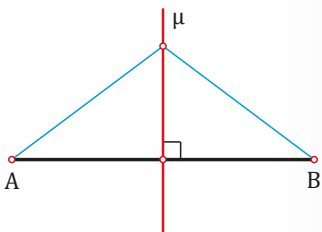


#### Ορισμός

**Γεωμετρικός τόπος** είναι ένα σύνολο από σημεία που αυτά και μόνο αυτά έχουν μια δοσμένη ιδιότητα.

#### Παράδειγμα

Η μεσοκάθετος ενός τμήματος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου, τα οποία ισαπέχουν από τα άκρα του.



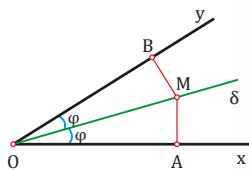
Η μεσοκάθετος του τμήματος  $AB$  είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τα άκρα του.

Πράγματι, έχουμε αποδείξει σε προηγούμενη ενότητα ότι:

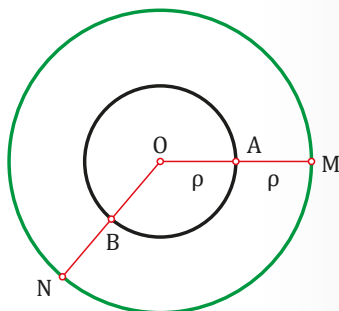
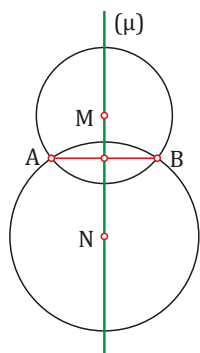
- Τα σημεία της μεσοκαθέτου ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος.
- Κάθε σημείο (του επιπέδου) που ισαπέχει από τα άκρα του τμήματος, ανήκει στη μεσοκάθετο.

Η χαρακτηριστική λοιπόν ιδιότητα της μεσοκαθέτου που την καθιστά γεωμετρικό τόπο είναι ότι:

«Τα σημεία της, και μόνο αυτά, ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος.»



Διχοτόμος  
γωνίας-γεωμ. τόπος



### Παράδειγμα

Η διχοτόμος μιας γωνίας είναι ο **γεωμετρικός τόπος** των σημείων που ισαπέχουν από τις πλευρές της.

Έχουμε αποδείξει ότι κάθε σημείο της διχοτόμου γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της, αλλά και αντίστροφα:

Κάθε εσωτερικό σημείο της γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές της βρίσκεται στη διχοτόμο της γωνίας.

Για τον λόγο αυτό:

**Γενικότερα, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από δύο τεμνόμενες ευθείες είναι οι δύο ευθείες που διχοτομούν τις σχηματιζόμενες γωνίες.**

### Εφαρμογή

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων που διέρχονται από δύο σταθερά σημεία.

#### Λύση

Ας πάρουμε δύο σταθερά σημεία A και B. Θέλουμε να βρούμε όλα τα σημεία του επιπέδου που είναι κέντρα κύκλων, οι οποίοι διέρχονται από τα σημεία A και B. Έστω M το κέντρο ενός κύκλου που διέρχεται από τα A και B. Αφού:  $MA = MB$ , το M βρίσκεται στη μεσοκάθετο (μ) του τμήματος AB. Για να είναι όμως η μεσοκάθετος του AB ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος πρέπει να αποδείξουμε επιπλέον ότι κάθε σημείο της μεσοκαθέτου (μ) μπορεί να είναι κέντρο ενός κύκλου που διέρχεται από τα A, B, δηλαδή το αντίστροφο.

#### Αντίστροφα

Έστω N τυχαίο σημείο της μεσοκαθέτου του AB. Επειδή  $NA = NB$ , ο κύκλος με κέντρο N και ακτίνα NA, δηλαδή ο κύκλος (N, NA), διέρχεται από τα A και B. Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η μεσοκάθετος του τμήματος AB, δηλαδή του τμήματος που ορίζουν τα δύο δοσμένα σταθερά σημεία. ■

### Εφαρμογή

Δίνεται κύκλος (O, ρ) και μεταβλητό σημείο A του κύκλου. Στην ημιευθεία OA παίρνουμε τμήμα  $AM = OA = \rho$ . Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του σημείου M.

#### Λύση

Αφού  $AM = OA = \rho$ , θα είναι:

$$OM = OA + AM = 2\rho.$$

Το M απέχει λοιπόν σταθερή απόσταση από το O, οπότε είναι σημείο ενός ομόκεντρου κύκλου με τον (O, ρ), με ακτίνα  $R = 2\rho$ .

Με άλλα λόγια το M ανήκει στον κύκλο (O, 2ρ).

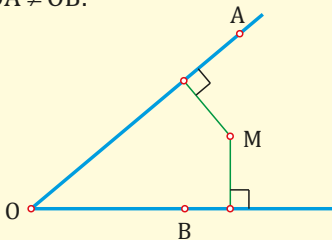
### Αντίστροφα

Έστω  $N$  τυχαίο σημείο του κύκλου  $(O, 2\rho)$ . Αφού  $ON = 2\rho$  και  $OB = \rho$ , θα είναι  $BN = OB = \rho$ . Άρα το  $N$  είναι το συμμετρικό του  $O$  ως προς το  $B$ , δηλαδή είναι το σημείο του γεωμετρικού τόπου. Ο ζητούμενος λοιπόν γεωμετρικός τόπος είναι ο κύκλος  $(O, 2\rho)$ . ■

## Ασκήσεις και Προβλήματα

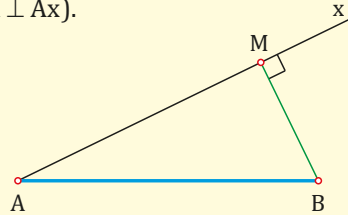
### Ασκήσεις Α' Ομάδας

1. Δίνεται κύκλος  $(O, \rho = 2)$  και μεταβλητό σημείο  $A$  του κύκλου. Στην προέκταση του  $OA$  παίρνουμε τμήμα  $AM = 3$ . Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του σημείου  $M$ .
2. Ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  έχει σταθερή τη βάση  $B\Gamma$ . Η διάμεσος  $AM$  έχει σταθερό μήκος  $\mu$ . Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της κορυφής  $A$ .
3. Δίνονται τα σταθερά σημεία  $A$  και  $B$ . Θεωρούμε μεταβλητή ευθεία  $(\varepsilon)$  που διέρχεται από το  $B$  και το συμμετρικό  $M$  του  $A$  ως προς την  $(\varepsilon)$ . Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του σημείου  $M$ .
4. Τα άκρα  $A, B$  μιας χορδής κύκλου με σταθερό μήκος κινούνται πάνω στον κύκλο  $(O, R)$ . Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του μέσου  $M$  του  $AB$ .
5. Δύο ευθείες τέμνονται στο σημείο  $A$ . Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων που εφάπτονται στις δύο αυτές ευθείες.
6. Δίνονται δύο παράλληλες ευθείες  $(\varepsilon), (\zeta)$  και τα μεταβλητά σημεία  $A, B$  των  $(\varepsilon), (\zeta)$  αντίστοιχα. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του μέσου  $M$  του τμήματος  $AB$ .
7. Δίνεται γωνία  $\hat{O}$  και τα σημεία  $A, B$  των πλευρών της με  $OA \neq OB$ .



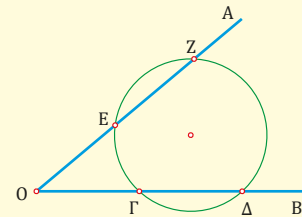
Να βρείτε τη θέση ενός σημείου  $M$  έτσι, ώστε  $MA = MB$  και οι αποστάσεις του  $M$  από τις πλευρές της γωνίας να είναι ίσες.

8. Γύρω από το άκρο  $A$  ενός τμήματος  $AB$  στρέφεται μια ημιευθεία  $Ax$ . Έστω  $M$  η προβολή του  $B$  στην  $Ax$  ( $BM \perp Ax$ ).



Γνωρίζοντας ότι η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου προς την υποτείνουσα είναι ίση με το μισό της, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του  $M$ .

9. Δίνεται μια γωνία  $\hat{A}\hat{O}B$ . Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων που αποκόπτουν από τις πλευρές της γωνίας ίσες χορδές.



10. Δίνεται ένα τμήμα  $AB = 4\alpha$ . Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων  $M$  του επιπέδου με  $MA < 3\alpha$  και  $MA > MB$ .
11. Ένα πάρκο άγριων ζώων έχει σχήμα ορθογωνίου. Οι πινακίδες προτρέπουν τους επισκέπτες να μένουν τουλάχιστον 1 m μακριά από τη συρμάτινη περίφραξη. Ποια είναι η βοηθή γραμμή που ορίζεται από όλα τα σημεία με την επιτρεπτή απόσταση;
12. Η πλευρά  $B\Gamma = \alpha$  ενός ισόπλευρου τριγώνου  $AB\Gamma$  κινείται πάνω σε μια ευθεία  $(\varepsilon)$ . Αν το μήκος της  $B\Gamma$  παραμένει σταθερό, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της κορυφής  $A$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

# 2.6

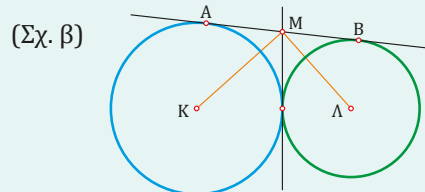
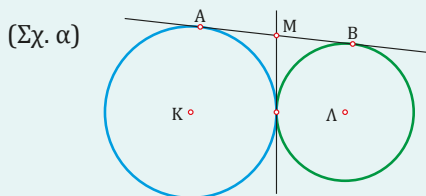
## Ανακεφαλαίωση

**Στην ενότητα αυτή** περιλαμβάνονται έργα για περαιτέρω αναζητήσεις και διερευνήσεις των μαθητών/τριών, με στόχο την εμπάθυνση και κατανόηση των Προσδοκώμενων Μαθησιακών Αποτελεσμάτων του κεφαλαίου.

- α) Να αναφέρετε τα κριτήρια ισότητας τυχαίων και ορθογωνίων τριγώνων, σχεδιάζοντας τα αντίστοιχα σχήματα.
  - β) Να γράψετε τις ιδιότητες του ισοσκελούς τριγώνου.
  - γ) Να γράψετε τα κριτήρια, ώστε ένα τρίγωνο να είναι ισοσκελές.
  - δ) Ποια πρόταση συνδέει χορδές και αποστήματα σε έναν κύκλο ή σε ίσους κύκλους;
  - ε) Τι γνωρίζετε για την εξωτερική γωνία τριγώνου;
- α) Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις με Σ (Σωστή) ή Λ (Λανθασμένη).

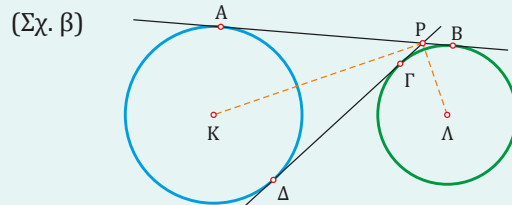
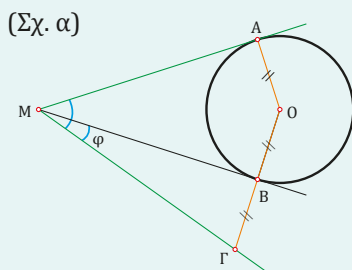
α) Αν δύο τρίγωνα έχουν μία προς μία πλευρά και δύο γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα.	Σ	Λ
β) Δυο ορθογώνια τρίγωνα που έχουν δύο πλευρές μία προς μία ίσες είναι ίσα.	Σ	Λ
γ) Στο ισοσκελές τρίγωνο κάθε ύψος είναι και διάμεσος.	Σ	Λ
δ) Σε ένα τρίγωνο απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται ομοίως άνισες γωνίες.	Σ	Λ
ε) Αν τα αποστήματα δύο χορδών ενός κύκλου είναι ίσα, τότε και οι χορδές είναι ίσες.	Σ	Λ
στ) Αν δοθούν τρία τμήματα, μπορούμε πάντα να κατασκευάσουμε τρίγωνο με πλευρές τα τμήματα αυτά.	Σ	Λ
ζ) Τα σημεία της μεσοκαθέτου ενός τμήματος ισαπέχουν από τα άκρα του και αντιστρόφως.	Σ	Λ

- α) Στο παρακάτω σχήμα (Σχ. α) να αποδείξετε ότι  $MA = MB$ .



- β) Στο παραπάνω σχήμα (Σχ.β) να αποδείξετε ότι  $\widehat{KML} = 90^\circ$ .

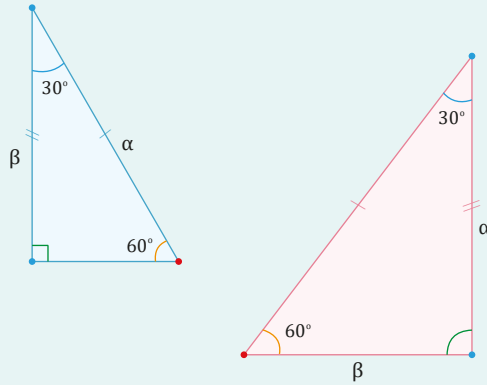
- α) Στο (Σχ. α) οι  $MA, MB$  εφάπτονται στον κύκλο. Να αποδείξετε ότι  $\widehat{AM\Gamma} = 3\varphi$ .



- β) Στο (Σχ. β) οι ευθείες  $AB$  και  $\Delta\Gamma$  εφάπτονται στους κύκλους. Να αποδείξετε ότι:  $\widehat{K\Gamma\Lambda} = 90^\circ$ .

### 5. Κι όμως τα τρίγωνα δεν είναι ίσα.

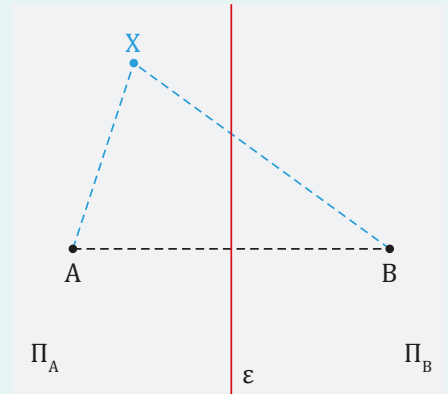
Δύο ίσα τρίγωνα δίνουν τρεις ισότητες με γωνίες και τρεις με πλευρές. Τι θα συμβεί άραγε αν δύο τρίγωνα έχουν 5 ίσα στοιχεία, αν ανάμεσα δηλαδή στα στοιχεία τους έχουμε 5 ισότητες;



- α) Να εξετάσετε την περίπτωση που ανάμεσα στις πέντε ισότητες οι τρεις αφορούν τις πλευρές.
- β) Παρατηρώντας τα τρίγωνα που φαίνονται στην εικόνα, να διατυπώσετε ένα συμπέρασμα για την ισότητα δύο τριγώνων, αν μεταξύ των στοιχείων τους έχουμε πέντε ισότητες.

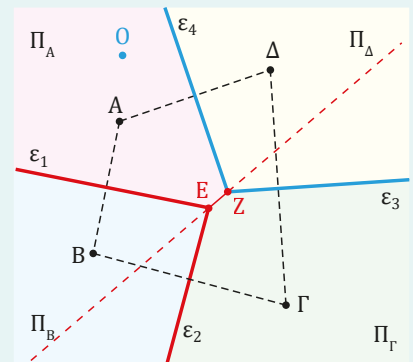
### 6. Διαγράμματα Voronoi

- α) Η μεσοκάθετος  $\epsilon$  του τμήματος  $AB$  χωρίζει το επίπεδο σε δύο ημιεπίπεδα, το  $\Pi_A$  που περιέχει το σημείο  $A$  και το  $\Pi_B$  που περιέχει το  $B$ , όπως φαίνεται στο σχήμα, το οποίο θα το λέμε **διάγραμμα Voronoi δύο σημείων**. Τα ημιεπίπεδα  $\Pi_A$  και  $\Pi_B$  λέγονται περιοχές των σημείων  $A$  και  $B$ , αντίστοιχα.



Να αποδείξετε ότι κάθε σημείο της περιοχής του  $A$  απέχει από το  $A$  απόσταση μικρότερη ή ίση από την απόστασή του από το  $B$ .  
Να διατυπώσετε και να αποδείξετε αντίστοιχη ιδιότητα για τα σημεία της περιοχής του  $B$ .

- β) Θεωρούμε τα σημεία  $A, B, \Gamma$  και  $\Delta$  του σχήματος. Οι μεσοκάθετοι  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$  των τμημάτων  $AB$  και  $B\Gamma$  τέμνονται στο  $E$  και οι μεσοκάθετοι  $\epsilon_3$  και  $\epsilon_4$  των  $\Gamma\Delta$  και  $\Delta A$  τέμνονται στο  $Z$ . Το επίπεδο χωρίζεται σε 4 περιοχές τις  $\Pi_A, \Pi_B, \Pi_\Gamma$  και  $\Pi_\Delta$  που λέγονται κατά σειρά περιοχές των  $A, B, \Gamma$  και  $\Delta$ . Το σχήμα που προέκυψε θα το λέμε **διάγραμμα Voronoi τεσσάρων σημείων**.

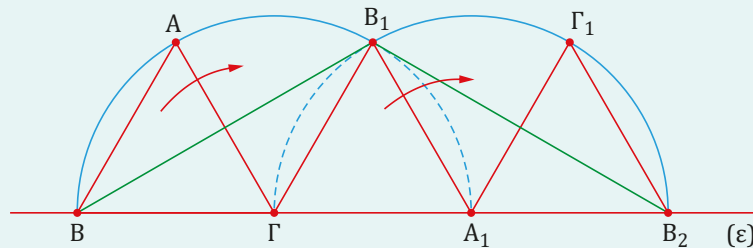


Να αποδείξετε ότι:

- β<sub>1</sub>) Η ευθεία  $EZ$  είναι μεσοκάθετος του τμήματος  $A\Gamma$ .
- β<sub>2</sub>) Κάθε σημείο της περιοχής ενός σημείου, απέχει από το σημείο αυτό απόσταση μικρότερη ή ίση από τις αποστάσεις του από τα άλλα σημεία. Για παράδειγμα, για το σημείο  $O$  της περιοχής του  $A$ , να αποδείξετε ότι  $OA \leq OB$ ,  $OA \leq O\Gamma$  και  $OA \leq O\Delta$ .

### 7. Κυκλοειδής γραμμή

Η βάση  $B\Gamma$  του ισοπλεύρου τριγώνου  $AB\Gamma$  βρίσκεται στην ευθεία  $(\epsilon)$ . Στρέφουμε το τρίγωνο περί την κορυφή του  $\Gamma$  μέχρι η κορυφή  $A$  να πάει στη θέση  $A_1$  και η κορυφή  $B$  στη θέση  $B_1$ . Στη συνέχεια στρέφουμε το τρίγωνο  $\Gamma B_1 A_1$  γύρω από το  $A_1$  μέχρι η κορυφή  $\Gamma$  να πάει στο σημείο  $\Gamma_1$  και το  $B_1$  στο  $B_2$ . Τη γραμμή που συγκροτούν τα δύο τόξα  $\widehat{BAB_1}$  και  $\widehat{B_1\Gamma_1 B_2}$ , την οποία διαγράφει η κορυφή  $B$  θα τη λέμε **κυκλοειδή**.



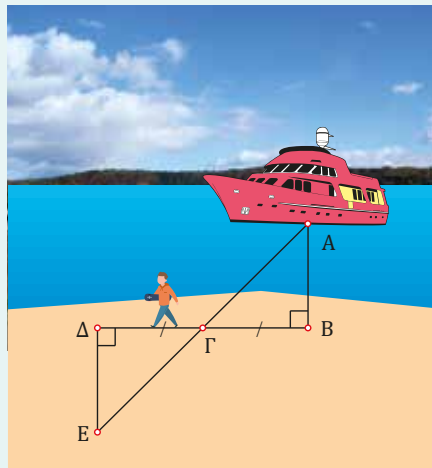
Να αποδείξετε ότι:

- τα τόξα  $\widehat{BAB_1}$  και  $\widehat{B_1\Gamma_1 B_2}$  είναι ίσα,
- το τρίγωνο  $BB_1 B_2$  είναι ισοσκελές και να βρείτε τις γωνίες του,
- τα σημεία  $A$ ,  $B_1$  και  $\Gamma_1$  είναι συνευθειακά.

### 8. Πόσο απέχει το γιοτ από την ακτή;

Όταν ένα τμήμα της Α' Λυκείου τελείωσε την ενότητα με τη σύγκριση τριγώνων, τα παιδιά αποφάσισαν να βρουν μια πρακτική εφαρμογή όσων έμαθαν. Ο καθηγητής τους είπε ότι μια καλή δραστηριότητα είναι να πάνε στη μεγάλη επίπεδη παραλία της περιοχής τους και να υπολογίσουν από τη στεριά πόσο απέχει από την ακτή ένα γιοτ που έχει ρίξει άγκυρα όχι πολύ μακριά από αυτή.

Τα παιδιά, πριν πάνε στην παραλία, έκαναν πρώτα μια προεργασία στο χαρτί που φαίνεται στο σχήμα.

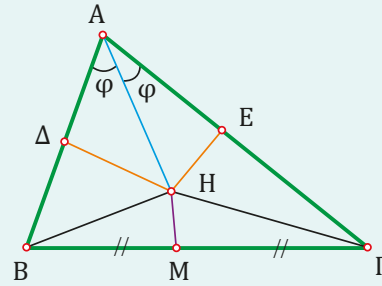


- Να περιγράψετε με βάση το σχήμα τα βήματα που έγιναν για την εύρεση της απόστασης  $AB$ .
- Να αποδείξετε ότι η μέθοδος αυτή είναι από μαθηματική άποψη ορθή.

**Σημείωση:** Η μέθοδος αυτή αποδίδεται στον Θαλή τον Μιλήσιο, έναν από τους επτά σοφούς του αρχαίου κόσμου.

### 9. Γεωμετρικό ... παράδοξο

Να "αποδειχθεί" ότι όλα τα τρίγωνα είναι ισοσκελή.



"Απόδειξη"

Έστω ότι στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $AB < A\Gamma$ . Η μεσοκάθετος του  $B\Gamma$  και η διχοτόμος της γωνίας  $\hat{B}$  τέμνονται στο σημείο  $H$ . Φέρουμε  $HD \perp AB$  και  $HE \perp A\Gamma$ .

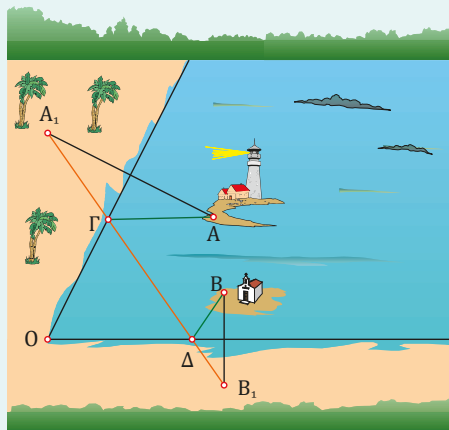
- ◆ Τα ορθογώνια τρίγωνα  $H\Delta A$  και  $HEA$  είναι ίσα, οπότε  $A\Delta = AE$ .
- ◆ Τα ορθογώνια τρίγωνα  $H\Delta B$  και  $HE\Gamma$  είναι ίσα ( $HD = HE$ ,  $HB = H\Gamma$ ). Άρα  $\Delta B = E\Gamma$ .
- ◆  $AB = A\Delta + \Delta B = AE + E\Gamma = A\Gamma$ .

Όμως  $AB < A\Gamma$  και έτσι έχουμε οδηγηθεί σε αντίφαση: Όλα τα τρίγωνα είναι ισοσκελή!

- α) Να εξετάσετε αν στους παραπάνω συλλογισμούς υπάρχει λάθος.
- β) Να προσδιορίσετε με ακρίβεια (κανόνα και διαβήτη) το σημείο  $H$ .
- γ) Πού οφείλεται κατά τη γνώμη σας το παραπάνω παράδοξο;

### 10. Πρόβλημα ελάχιστης διαδρομής.

Στη γωνία  $\hat{O}$  μιας ακτής βρίσκονται δύο μικρά νησιά, τα  $A$  και  $B$ . Ένας ψαράς κάνει καθημερινά με τη βάρκα του τη διαδρομή  $A\Gamma\Delta B$ , όπως στο σχήμα. Που συμφέρει να επιλέξει τα σημεία  $\Gamma$  και  $\Delta$ , ώστε η διαδρομή αυτή να έχει το ελάχιστο μήκος;



Η μεσοπαράλληλη  
ως γεωμετρικός τόπος



Ανακάλυψη  
γεωμετρικού τόπου



Παράλληλες  
και ίσα τμήματα



Τρίγωνα-κύκλος  
(Α-Ψ)

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3<sup>ο</sup>

## Παραλληλόγραμμα

### Περιεχόμενα

- 3.1 Το παραλληλόγραμμο
- 3.2 Είδη παραλληλογράμμων
- 3.3 Τμήμα που ενώνει μέσα πλευρών τριγώνου
- 3.4 Ιδιότητες των ορθογωνίων τριγώνων
- 3.5 Χαρακτηριστικά σημεία τριγώνου
- 3.6 Τραπεζία
- 3.7 Ανακεφαλαίωση

#### Λέξεις κλειδιά:

Παραλληλόγραμμο	Τμήμα που ενώνει μέσα
Ορθογώνιο	Διάμεσος ορθογωνίου
Ρόμβος	Τραπεζίο
Τετράγωνο	Ισοσκελές τραπέζιο
Κριτήρια	Διάμεσος τραπεζίου

### Εισαγωγικά και ιστορικά σχόλια

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τετράπλευρα που έχουν ξεχωριστή θέση στη Γεωμετρία. Αυτά είναι το παραλληλόγραμμο και τα είδη του, δηλαδή το ορθογώνιο, ο ρόμβος και το τετράγωνο.

Αξίζει να πούμε ότι οι ιδιότητες αυτών των τετραπλεύρων, όπως και του τραπεζίου που ακολουθεί, είναι συνέπειες του Αξιώματος των παράλληλων ευθειών και ως εκ τούτου είναι θεωρήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Για παράδειγμα, στην Υπερβολική Γεωμετρία δεν υπάρχουν ορθογώνια, αφού η ύπαρξη έστω και ενός μόνο ορθογωνίου εξασφαλίζει το Ευκλείδειο αίτημα.

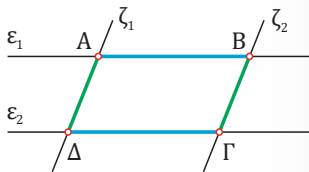
Ακολουθούν οι ιδιότητες των ορθογωνίων τριγώνων, όπως για παράδειγμα ότι η διάμεσος προς την υποτίενοσα είναι ίση με το μισό της, και τα χαρακτηριστικά σημεία τριγώνου. Θα αποδείξουμε για παράδειγμα ότι οι μεσοκάθετοι των πλευρών τριγώνου, όπως και οι διχοτόμοι των γωνιών του, συντρέχουν. Το ίδιο συμβαίνει με τις διαμέσους αλλά και με τους φορείς των υψών του.

# 3.1

## Το παραλληλόγραμμο

Περιέχονται

- Ορισμός του παραλληλογράμμου.
- Ιδιότητες των παραλληλογράμμων.
- Κριτήρια παραλληλογράμμου.



Στην ενότητα αυτή:

1. Δίνουμε τον ορισμό του παραλληλογράμμου.
2. Διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου.
3. Αναγνωρίζουμε, ανάμεσα σε τετράπλευρα, τα παραλληλόγραμμα και διατυπώνουμε κριτήρια.
4. Διερευνούμε πότε δύο παραλληλόγραμμα είναι ίσα.
5. Χρησιμοποιούμε τα παραπάνω στη λύση ασκήσεων και προβλημάτων.

### Δραστηριότητα

Έστω  $M$  το μέσο της πλευράς  $AG$  ενός τριγώνου  $ABΓ$  και  $\Delta$  το συμμετρικό του  $B$  ως προς το  $M$ , δηλαδή  $M\Delta = MB$ .

Να αποδείξετε ότι:

- α) τα τρίγωνα  $MAB$  και  $MΓ\Delta$  είναι ίσα,
- β)  $AB \parallel Γ\Delta$ ,
- γ)  $A\Delta = BΓ$  και  $A\Delta \parallel BΓ$ .
- δ) Τι σχήμα είναι το  $ABΓ\Delta$ ;

### Θεωρία και εφαρμογές

#### ♦ Το παραλληλόγραμμο

Ας πάρουμε δύο ζεύγη παράλληλων ευθειών  $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$  και  $\zeta_1 \parallel \zeta_2$ .

Οι ευθείες  $\zeta_1$  και  $\zeta_2$  τέμνουν τις ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  στα σημεία  $A, B, \Delta, \Gamma$ , όπως στο σχήμα.

Το τετράπλευρο που σχηματίζεται έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, είναι δηλαδή ένα παραλληλόγραμμο.

#### Ορισμός

**Παραλληλόγραμμο** λέγεται το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.

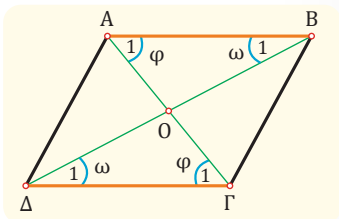
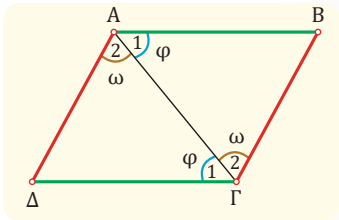
Το παραλληλόγραμμο είναι ένα τετράπλευρο με αρκετές σημαντικές ιδιότητες, οι περισσότερες από τις οποίες πηγάζουν ακριβώς από το γεγονός ότι οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες, δηλαδή πηγάζουν ουσιαστικά από τον ορισμό του παραλληλογράμμου.

Οι σημαντικότερες ιδιότητες διατυπώνονται και αποδεικνύονται στο παρακάτω θεώρημα.

#### Θεώρημα 1

Σε κάθε παραλληλόγραμμο:

- α) οι απέναντι πλευρές και οι απέναντι γωνίες είναι ίσες,
- β) οι διαγώνιοι διχοτομούνται.



### Απόδειξη

α) Θεωρούμε το παραλληλόγραμμο ABΓΔ. Θα αποδείξουμε πρώτα ότι  $AB = \Gamma\Delta$  και  $AD = B\Gamma$ , δηλαδή ότι οι απέναντι πλευρές είναι ίσες.

Φέρουμε τη διαγώνιο ΑΓ. Τα τρίγωνα ABΓ και ΑΔΓ που σχηματίζονται είναι ίσα, διότι:

- έχουν την πλευρά ΑΓ κοινή,
- $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1 = \varphi$ , ως εντός εναλλάξ των παράλληλων AB και ΓΔ με τέμνουσα την ΑΓ,
- $\hat{\Gamma}_2 = \hat{A}_2 = \omega$ , ως εντός εναλλάξ των παράλληλων AD και ΒΓ με τέμνουσα την ΑΓ.

Αφού τα τρίγωνα είναι ίσα, παίρνουμε ότι:

$$AB = \Gamma\Delta \quad \text{και} \quad B\Gamma = AD.$$

Οι απέναντι λοιπόν πλευρές του παραλληλογράμμου είναι ίσες.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι  $\hat{B} = \hat{\Delta}$  και  $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ .

Από την παραπάνω ισότητα των τριγώνων ABΓ και ΑΔΓ παίρνουμε επίσης ότι  $\hat{B} = \hat{\Delta}$ . Επειδή όμως  $AD \parallel B\Gamma$ , είναι  $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$  και  $\hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 180^\circ$ . Αυτές, αφού  $\hat{B} = \hat{\Delta}$ , δίνουν ότι  $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ . Με άλλα λόγια οι γωνίες  $\hat{A}$  και  $\hat{\Gamma}$  είναι ίσες ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών  $\hat{B}$  και  $\hat{\Delta}$ .

β) Έστω ότι οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο σημείο O. Θα αποδείξουμε ότι  $OA = O\Gamma$  και  $OB = O\Delta$ .

Τα τρίγωνα OAB και OΓΔ είναι ίσα, διότι:

- $AB = \Gamma\Delta$ , σύμφωνα με την ιδιότητα (α).
- $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1 = \varphi$  και  $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = \omega$ , ως εντός εναλλάξ.

Επομένως, από την ισότητα των τριγώνων αυτών, παίρνουμε:

$$OA = O\Gamma \quad \text{και} \quad OB = O\Delta,$$

δηλαδή με άλλα λόγια ότι οι διαγώνιοι διχοτομούνται. ■

Το σημείο τομής των διαγωνίων ενός παραλληλογράμμου λέγεται **κέντρο του παραλληλογράμμου**.

### Παράδειγμα

Δίνεται παραλληλόγραμμο ABΓΔ. Στην προέκταση της πλευράς AB (προς το Β) παίρνουμε τμήμα BE = AD. Να αποδείξετε ότι:

- το τρίγωνο ΒΓΕ είναι ισοσκελές,
- $\hat{\Delta} = 2\hat{E}$ .

### Λύση

α) Στα παραλληλόγραμμο οι απέναντι πλευρές είναι ίσες. Άρα:

$$B\Gamma = AD.$$

Αφού  $AD = BE$ , θα είναι  $B\Gamma = BE$ , οπότε το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ισοσκελές.

β) Αφού το τρίγωνο ΒΓΕ είναι ισοσκελές, θα είναι:

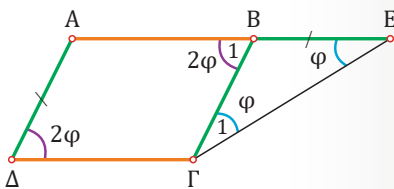
$$\hat{E} = \hat{\Gamma}_1 = \varphi.$$

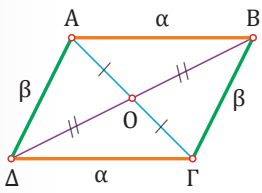
Στο τρίγωνο ΒΕΓ η γωνία  $\hat{B}_1$  είναι εξωτερική, οπότε:

$$\hat{B}_1 = \hat{E} + \hat{\Gamma}_1 = \varphi + \varphi = 2\varphi = 2\hat{E}.$$

Επιπλέον, στο παραλληλόγραμμο ABΓΔ είναι  $\hat{\Delta} = \hat{B}_1$ . Επομένως, αφού  $\hat{E} = \varphi$ , παίρνουμε:

$$\hat{\Delta} = \hat{B}_1 = 2\varphi = 2\hat{E}. \quad \blacksquare$$





- $AB = \Gamma\Delta = \alpha$
- $A\Delta = B\Gamma = \beta$
- $OA = OG$  και  $OB = OD$



### ◆ Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο παραλληλόγραμμο

Είδαμε στο προηγούμενο θεώρημα τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου. Είναι όμως εξίσου σημαντικό να γνωρίζουμε ποιες ιδιότητες πρέπει και αρκεί να έχει ένα τετράπλευρο, ώστε αυτό να είναι παραλληλόγραμμο. Για παράδειγμα δεν αρκεί να είναι μόνο οι δύο απέναντι πλευρές ίσες, ούτε μόνο δύο απέναντι γωνίες ίσες. Οι ιδιότητες αυτές λέγονται κριτήρια και διατυπώνονται στο επόμενο θεώρημα.

#### Θεώρημα 2 - Κριτήριο

Ένα τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο, αν ισχύει μία από τις παρακάτω προτάσεις.

- Οι απέναντι πλευρές είναι ανά δύο ίσες.
- Οι απέναντι γωνίες είναι ανά δύο ίσες.
- Οι διαγώνιοι διχοτομούνται.
- Δύο απέναντι πλευρές είναι ίσες και παράλληλες.

#### Απόδειξη

Θα αποδείξουμε μόνο την περίπτωση (δ).

Έστω, λοιπόν, ότι στο τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  είναι  $AB = \Gamma\Delta$  και  $AB \parallel \Gamma\Delta$ .

Φέρουμε τη διαγώνιο  $AG$ . Τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A\Delta\Gamma$  είναι ίσα, διότι:

- $AB = \Gamma\Delta$  και η  $AG$  είναι κοινή,
- $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1$ , αφού  $AB \parallel \Gamma\Delta$ .

Άρα, θα είναι  $B\Gamma = A\Delta$ . Αφού  $AB = \Gamma\Delta$  και  $A\Delta = B\Gamma$ , το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο, σύμφωνα με το κριτήριο (α). ■

#### Παράδειγμα

Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  και σημεία  $E, Z$  στις πλευρές  $AB, \Gamma\Delta$  αντίστοιχα έτσι, ώστε  $AE = \Gamma Z$ . Να αποδείξετε ότι:

- τα τρίγωνα  $A\Delta E$  και  $\Gamma B Z$  είναι ίσα,
- $y = \omega$ ,
- $\Delta E \parallel B Z$ .

#### Λύση

α) Αφού το  $AB\Gamma\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο, είναι  $A\Delta = B\Gamma$  και  $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ .

Είναι όμως  $AE = \Gamma Z$  από την υπόθεση.

Άρα τα τρίγωνα  $A\Delta E$  και  $\Gamma B Z$  είναι ίσα.

β) Αφού  $AB \parallel \Delta\Gamma$ , είναι  $x = \omega$ .

Αλλά από την ισότητα των τριγώνων  $A\Delta E$  και  $\Gamma B Z$  παίρνουμε  $x = y$  (είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές  $A\Delta$  και  $B\Gamma$ ). Οι σχέσεις  $x = \omega$  και  $x = y$  δίνουν ότι  $y = \omega$ .

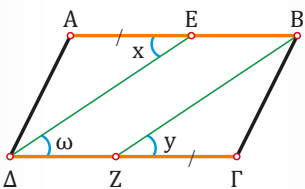
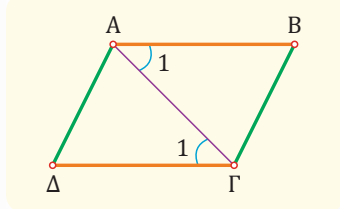
γ) Αφού  $\omega = y$  και οι  $\omega, y$  είναι εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες των ευθειών  $\Delta E, B Z$  με τέμνουσα την  $\Gamma\Delta$ , θα είναι  $\Delta E \parallel B Z$ .

#### Άλλος τρόπος (για τα (γ) και (β))

Αφού  $AB = \Delta\Gamma$  και  $AE = \Gamma Z$ , θα είναι  $BE = \Delta Z$ . Είναι, όμως,  $BE \parallel \Delta Z$ .

Επομένως, το  $EBZ\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο και έτσι:

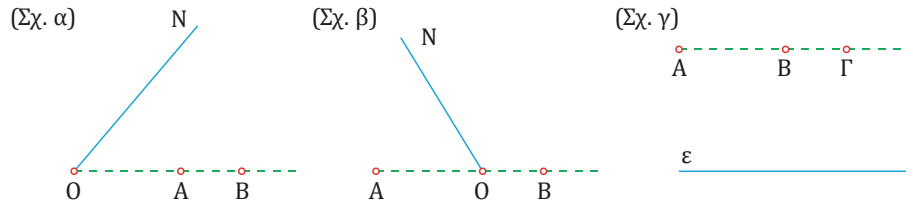
- $\Delta E \parallel B Z$ ,
- $\omega = y$ , ως εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες των παράλληλων  $\Delta E, B Z$  με τέμνουσα την  $\Gamma\Delta$ . ■



Ιδιότητες  
παραλληλογράμμου

### ◆ Μέθοδος (συνευθειακών σημείων)

- α) Αν οι γωνίες  $\widehat{NOA}$  και  $\widehat{NOB}$  είναι ίσες, τότε τα σημεία  $O, A$  και  $B$  είναι συνευθειακά (Σχ. α).  
 β) Αν  $\widehat{NOA} + \widehat{NOB} = 180^\circ$ , τότε τα σημεία  $A, O, B$  είναι συνευθειακά (Σχ. β).  
 γ) Αν  $AB \parallel \varepsilon$  και  $B\Gamma \parallel \varepsilon$  (ή  $AB, A\Gamma \parallel \varepsilon$ ), τότε τα σημεία  $A, B, \Gamma$  είναι συνευθειακά (Σχ. γ).



### Εφαρμογή

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και τα μέσα  $M, N$  των πλευρών  $A\Gamma, AB$ , αντίστοιχα. Αν  $\Delta$  και  $E$  είναι τα συμμετρικά των  $B$  και  $\Gamma$  ως προς τα  $M, N$ , αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- α)  $A\Delta = AE$ ,  
 β) τα σημεία  $E, A, \Delta$  είναι συνευθειακά.

### Λύση

α) Αφού τα τμήματα  $B\Delta$  και  $A\Gamma$  διχοτομούνται, το  $A\Delta\Gamma B$  είναι παραλληλόγραμμο. Επομένως:

$$A\Delta = B\Gamma \text{ και } A\Delta \parallel B\Gamma. \quad (1)$$

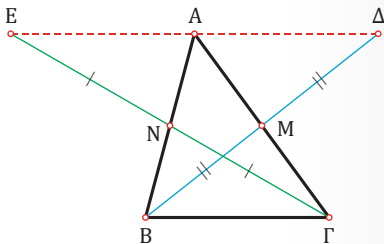
Το  $AEB\Gamma$  είναι επίσης παραλληλόγραμμο, διότι τα τμήματα  $AB$  και  $\Gamma E$  διχοτομούνται. Επομένως:

$$AE = B\Gamma \text{ και } AE \parallel B\Gamma. \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) παίρνουμε ότι  $A\Delta = AE$ .

β) Από τις σχέσεις (1) και (2) παίρνουμε ότι  $A\Delta \parallel B\Gamma$  και  $AE \parallel B\Gamma$ .

Αν τα  $E, A, \Delta$  δεν ήταν συνευθειακά, τότε από το  $A$  θα είχαμε δύο παράλληλες προς την  $B\Gamma$ : την  $A\Delta$  και την  $AE$ . Αυτό όμως, σύμφωνα με το Ευκλείδειο αίτημα, είναι αδύνατο. Άρα τα σημεία  $E, A, \Delta$  είναι συνευθειακά. ■



### Εφαρμογή

Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$ . Οι διχοτόμοι των γωνιών  $\widehat{A}$  και  $\widehat{\Gamma}$  τέμνουν τις πλευρές  $\Gamma\Delta$  και  $AB$  στα σημεία  $E$  και  $Z$ , αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α)  $AZ = \Gamma E$ ,  
 β)  $AE \parallel Z\Gamma$ ,  
 γ)  $B\Gamma = BZ$  και  $\Delta A = \Delta E$ .

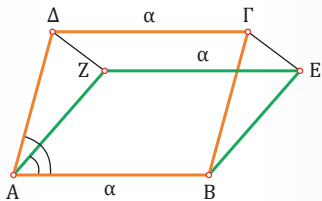
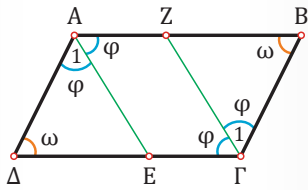
### Λύση

α) Επειδή  $\widehat{A} = \widehat{\Gamma}$ , ως απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου, οι  $AE, \Gamma Z$  σχηματίζουν τέσσερις ίσες γωνίες, σημειωμένες με  $\varphi$ .

Τα τρίγωνα  $\Delta DE$  και  $B\Gamma Z$  είναι ίσα, διότι έχουν:



Εφαρμογή στα  
παραλληλόγραμμο



- $AD = BΓ$ , •  $\hat{\Delta} = \hat{B} = \omega$ , •  $\hat{A}_1 = \varphi = \hat{\Gamma}_1$  (ως μισά ίσων γωνιών).  
Άρα  $AE = ΓZ$  και  $\Delta E = BZ$ .  
Επειδή  $AB = ΓΔ$  και  $BZ = \Delta E$ , θα είναι  $AZ = ΓE$  (ως διαφορές ίσων τμημάτων).
- β) Αφού  $AZ = EΓ$  και  $AZ // EΓ$ , το  $AZΓE$  είναι παραλληλόγραμμο. Άρα  $AE // ΓZ$ .
- γ) Είναι  $\hat{B}ZΓ = \hat{Z}ΓΔ = \hat{Z}ΓB = \varphi$ , οπότε το τρίγωνο  $BΓZ$  είναι ισοσκελές.  
Άρα  $BΓ = BZ$ .  
Όμοια και το τρίγωνο  $\Delta AE$  είναι ισοσκελές.  
Άρα  $\Delta A = \Delta E$ . ■

### Εφαρμογή

Δίνονται τα παραλληλόγραμμο  $ABΓΔ$  και  $ABEZ$ , όπως φαίνεται στο σχήμα.

- α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $ΓΔZE$  είναι παραλληλόγραμμο.
- β) Αν είναι  $AD = AZ$ , μπορούμε να συμπεράνουμε ότι τα παραλληλόγραμμο  $ABEZ$  και  $ABΓΔ$  είναι ίσα;

### Λύση

- α) Επειδή  $ΓΔ // AB$  και  $ZE // AB$ , θα είναι  $\Delta Γ // ZE$ .  
Αφού στο τετράπλευρο  $ΓΔZE$  δύο απέναντι πλευρές, οι  $\Delta Γ$  και  $ZE$ , είναι ίσες και παράλληλες, αυτό είναι παραλληλόγραμμο.
- β) Αφού  $AD = AZ$ , τα παραλληλόγραμμο  $ABΓΔ$ ,  $ABEZ$  έχουν τις πλευρές τους μία προς μία ίσες. Ωστόσο, τα παραλληλόγραμμο αυτά δεν είναι ίσα, αφού π.χ. οι γωνίες  $\hat{\Delta}AB$  και  $\hat{Z}AB$  είναι άνισες. ■

### Εφαρμογή

Δίνεται παραλληλόγραμμο  $ABΓΔ$  με κέντρο  $O$ . Αν  $M$ ,  $N$  είναι τα μέσα των τμημάτων  $OB$  και  $OD$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- α)  $AM = ΓN$ .
- β)  $AN // ΓM$ .

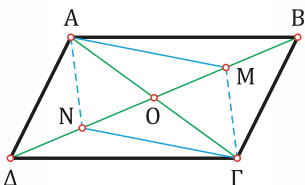
### Λύση

Το κέντρο  $O$  του παραλληλογράμμου είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του. Στο παραλληλόγραμμο οι διαγώνιοι διχοτομούνται. Επομένως:

$$OA = OΓ \text{ και } OB = OD.$$

Άρα  $OM = \frac{OB}{2} = \frac{OD}{2} = ON$ . Με άλλα λόγια είναι  $OM = ON$ , ως μισά των ίσων τμημάτων  $OB$ ,  $OD$ . Στο τετράπλευρο λοιπόν  $AMΓN$  οι διαγώνιοι  $AG$  και  $MN$  διχοτομούνται, οπότε αυτό είναι παραλληλόγραμμο. Θα είναι επομένως:

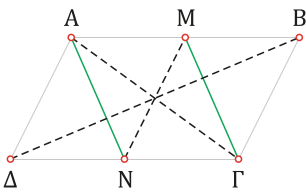
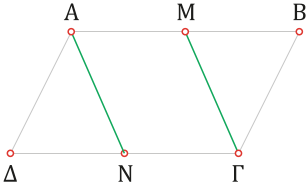
- α)  $AM = ΓN$ , διότι οι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου είναι ίσες,
- β)  $AN // ΓM$ , αφού το  $AMΓN$  είναι παραλληλόγραμμο. ■



**Εφαρμογή**

Σε ένα παραλληλόγραμμο  $ΑΒΓΔ$  παίρνουμε το μέσο  $Μ$  της πλευράς  $ΑΒ$  και το μέσο  $Ν$  της πλευράς  $ΓΔ$ . Να αποδείξετε ότι:

- το τετράπλευρο  $ΑΜΓΝ$  είναι παραλληλόγραμμο,
- οι ευθείες  $ΑΓ, ΒΔ, ΜΝ$  διέρχονται από το ίδιο σημείο.

**Λύση**

α) Αφού το  $ΑΒΓΔ$  είναι παραλληλόγραμμο θα είναι και:

$$ΑΒ // ΓΔ.$$

Αλλά τα  $Μ, Ν$  είναι μέσα των  $ΑΒ, ΓΔ$ , οπότε  $ΑΜ = ΓΝ$ .

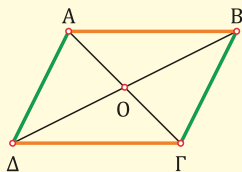
Επειδή λοιπόν  $ΑΜ // ΓΝ$ , το  $ΑΜΓΝ$  είναι παραλληλόγραμμο.

- Γνωρίζουμε ότι σε κάθε παραλληλόγραμμο οι διαγώνιοι διχοτομούνται.
    - Στο παραλληλόγραμμο  $ΑΒΓΔ$  οι  $ΒΔ, ΑΓ$  διχοτομούνται. Άρα, η  $ΒΔ$  περνάει από το μέσο  $Ο$  της διαγωνίου  $ΑΓ$ .
    - Στο παραλληλόγραμμο  $ΑΜΓΝ$  η διαγώνιος  $ΜΝ$  περνάει και αυτή από το μέσο  $Ο$  της διαγωνίου  $ΑΓ$ .
- Άρα οι ευθείες  $ΒΔ, ΜΝ$  περνάνε από το μέσο  $Ο$  της διαγωνίου  $ΑΓ$ , που σημαίνει ότι οι ευθείες  $ΒΔ, ΑΓ, ΜΝ$  συντρέχουν. ■

**Ασκήσεις και Προβλήματα****Ασκήσεις Α' Ομάδας****Κατανόηση της θεωρίας**

- Δίνεται παραλληλόγραμμο  $ΑΒΓΔ$  με  $\hat{B}=60^\circ$ ,  $ΑΒ=8$ ,  $ΒΓ=6$ . Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά.

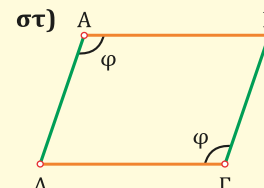
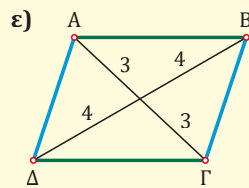
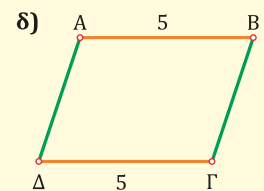
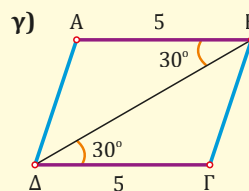
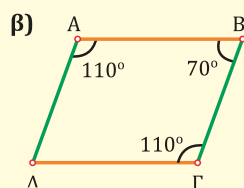
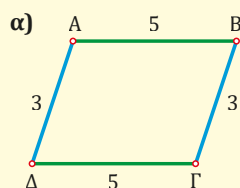
- $\Delta\Gamma = \dots\dots\dots$ ,  $ΑΔ = \dots\dots\dots$
- $\hat{\Delta} = \dots\dots\dots$ ,  $\hat{\Gamma} = \dots\dots\dots$ ,  $\hat{A} = \dots\dots\dots$



- Δίνεται το παραλληλόγραμμο  $ΑΒΓΔ$  με κέντρο  $Ο$ . Αν  $ΟΑ=3$ ,  $ΟΔ=4$  και  $\hat{B}\Delta\Gamma=20^\circ$ , να συμπληρώσετε τα κενά:

- $ΑΓ = \dots\dots\dots$ ,  $ΒΔ = \dots\dots\dots$
- $\Delta\hat{B}A = \dots\dots\dots$ ,  $Β\hat{O}\Gamma - Α\hat{\Gamma}\Delta = \dots\dots\dots$

- Από τα παρακάτω τετράπλευρα να βρείτε ποια είναι παραλληλόγραμμο. Να αξιοποιήσετε μόνο τα αναγραφόμενα στοιχεία.

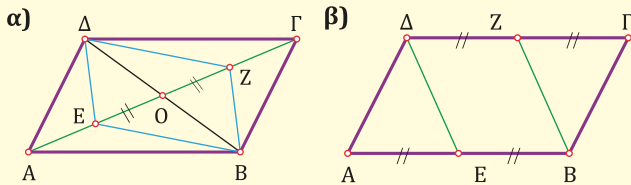


- Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ).

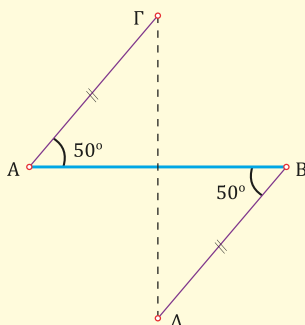
- Σε κάθε παραλληλόγραμμο οι απέναντι γωνίες και οι απέναντι πλευρές είναι ίσες.
- Σε κάθε παραλληλόγραμμο οι διαγώνιοι είναι ίσες.
- Αν οι διαγώνιοι ενός τετραπλεύρου διχοτομούνται, τότε αυτό είναι παραλληλόγραμμο.
- Αν δύο πλευρές ενός τετραπλεύρου είναι ίσες, τότε αυτό είναι παραλληλόγραμμο.
- Σε κάθε παραλληλόγραμμο δύο οποιοσδήποτε διαδοχικές γωνίες είναι παραπληρωματικές.

### Βασικές ασκήσεις

5. Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  και το μέσο  $M$  της πλευράς  $A\Delta$ . Από το  $M$  φέρουμε παράλληλη προς την  $\Delta\Gamma$  που τέμνει την  $B\Gamma$  στο  $N$ .  
Να αποδείξετε ότι  $NB=NG$ .
6. Στο παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  φέρουμε τη διχοτόμο  $AE$  της γωνίας  $\hat{A}$  που τέμνει την  $\Gamma\Delta$  στο  $E$ .  
α) Να αποδείξετε ότι  $\Delta E=B\Gamma$ .  
β) Αν  $\hat{A\hat{E}\Delta}=50^\circ$ , να υπολογίσετε τις γωνίες του παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$ .
7. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και η διχοτόμος του  $A\Delta$ .  
Η παράλληλη από το  $\Delta$  προς την  $AB$  τέμνει την πλευρά  $A\Gamma$  στο σημείο  $E$  και η παράλληλη από το  $E$  προς το  $B\Gamma$  τέμνει την πλευρά  $AB$  στο σημείο  $Z$ .  
Να αποδείξετε ότι:  
α) το τετράπλευρο  $B\Delta E Z$  είναι παραλληλόγραμμο,  
β)  $AE=BZ$ .
8. Στα παρακάτω σχήματα το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο. Να αποδείξετε ότι και το  $\Delta ZBE$  είναι παραλληλόγραμμο:



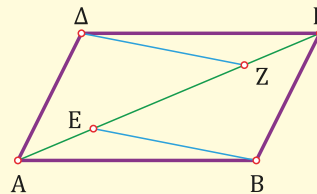
9. Αν τα τετράπλευρα  $AB\Gamma\Delta$  και  $\Gamma\Delta E Z$  είναι παραλληλόγραμμο, να αποδείξετε ότι  $EA=BZ$ .
10. Στο παρακάτω σχήμα είναι  $A\Gamma=B\Delta$ .  
Να αποδείξετε ότι:  
α) το τετράπλευρο  $A\Gamma B\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο,  
β) το τμήμα  $\Gamma\Delta$  διέρχεται από το μέσο του  $AB$ .



11. Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$ , το μέσο  $M$  της πλευράς  $\Gamma\Delta$  και το σημείο  $N$  στην προέκταση της  $AB$ , ώστε  $AB=2BN$ . Να αποδείξετε ότι:  
α) η ευθεία  $MN$  διχοτομεί την πλευρά  $B\Gamma$ ,  
β)  $B\Delta=MN$ .
12. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και η διάμεσος  $BM$ . Στην προέκταση της  $BM$  θεωρούμε τμήμα  $M\Delta=BM$ . Να αποδείξετε ότι:  
α)  $AB=\Gamma\Delta$ ,  
β)  $\hat{\Gamma B\Delta}=\hat{A\Delta B}$ .
13. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και τα παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$ ,  $A\Gamma B E$ . Να αποδείξετε ότι:  
α)  $A\Delta=AZ$ ,  
β) τα σημεία  $Z, A, \Delta$  είναι συνευθειακά και το  $A$  είναι μέσο του  $Z\Delta$ .

### Ασκήσεις Β' Ομάδας

14. Το  $AB\Gamma\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο και  $\Delta Z//BE$ .



Να αποδείξετε ότι:

- α)  $\Delta Z=EB$ ,  
β) το τετράπλευρο  $\Delta ZBE$  είναι παραλληλόγραμμο,  
γ) η  $\Delta B$  διέρχεται από το μέσο της  $EZ$ .
15. Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$ , το μέσο  $M$  της πλευράς  $B\Gamma$  και το συμμετρικό  $N$  του  $A$  ως προς το  $M$ . Να αποδείξετε ότι:  
α)  $\Gamma N=\Gamma\Delta$ ,  
β) τα σημεία  $\Delta, \Gamma, N$  είναι συνευθειακά.

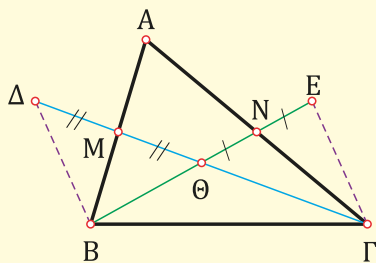
16. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB=AG$  και ένα τυχαίο σημείο  $M$  της βάσης του  $B\Gamma$ . Από το  $M$  φέρουμε  $ME//AB$  (το  $E$  είναι σημείο της  $AG$ ) και  $M\Delta//AG$  (το  $\Delta$  είναι σημείο της  $AB$ ).  
Να αποδείξετε ότι:  
α) το τετράπλευρο  $AEM\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο,  
β) το τρίγωνο  $BMD$  είναι ισοσκελές,  
γ)  $M\Delta+ME=AB$ .

17. Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$ . Από τα  $A$  και  $\Gamma$  φέρουμε δύο παράλληλες που τέμνουν τις πλευρές  $\Gamma\Delta$ ,  $AB$  στα σημεία  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα ( $AE//\Gamma Z$ ).  
α) Να αποδείξετε ότι  $AE = \Gamma Z$ .  
β) Αν  $M$  είναι το μέσο του  $ZE$ , τότε να αποδείξετε ότι τα σημεία  $\Delta$ ,  $M$ ,  $B$  είναι συνευθειακά.

18. Σε ένα παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  είναι  $AB=2B\Gamma$ . Η διχοτόμος της γωνίας  $\Delta$  τέμνει την πλευρά  $AB$  στο σημείο  $E$ . Να αποδείξετε ότι:  
α)  $AE = A\Delta$ ,  
β) το  $E$  είναι μέσο της πλευράς  $AB$ ,  
γ)  $\Delta\hat{E}\Gamma=90^\circ$ .

19. Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB>B\Gamma$ . Προεκτείνουμε την  $AB$  (προς το  $B$ ) κατά τμήμα  $BE=B\Gamma$  και την  $\Delta A$  (προς το  $A$ ) έτσι, ώστε  $\Delta Z=\Delta\Gamma$ .  
Να αποδείξετε ότι  $Z\Gamma \perp \Gamma E$ .

20. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και τα μέσα  $M$ ,  $N$  των  $AB$ ,  $AG$  αντίστοιχα. Οι  $BN$ ,  $\Gamma M$  τέμνονται στο  $\Theta$ . Στην προέκταση των  $\Gamma M$ ,  $BN$  παίρνουμε τμήματα  $M\Delta=M\Theta$  και  $NE=N\Theta$ .



Να αποδείξετε ότι:

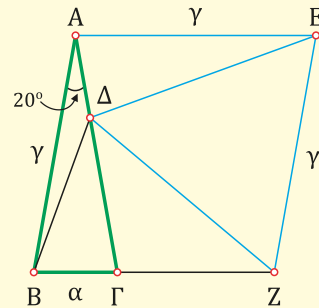
- α)  $B\Delta = \Gamma E$ ,  
β)  $B\Theta=2\Theta N$  και  $\Gamma\Theta=2\Theta M$ .

21. Το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο. Στις προεκτάσεις των  $\Delta A$ ,  $\Delta\Gamma$  παίρνουμε σημεία  $E$ ,  $Z$  αντίστοιχα, ώστε  $A\Delta=A\hat{E}$  και  $\Gamma\Delta=\Gamma Z$ .

Να αποδείξετε ότι:

- α)  $E\hat{A}B=B\hat{\Gamma}Z$ ,  
β) τα σημεία  $E$ ,  $B$ ,  $Z$  βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία.

22. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A}=20^\circ$  και  $AB=AG$ . Στην πλευρά  $AG$  παίρνουμε τμήμα  $A\Delta=B\Gamma$ . Από το  $A$  παίρνουμε τμήμα  $AE=AB$  και  $AE//B\Gamma$ . Σχηματίζουμε το παραλληλόγραμμο  $BAEZ$ .



Να αποδείξετε ότι:

- α) τα τρίγωνα  $EAD$  και  $AB\Gamma$  είναι ίσα,  
β) το τρίγωνο  $\Delta EZ$  είναι ισόπλευρο,  
γ)  $B\hat{\Delta}Z=70^\circ$ ,  
δ)  $\Gamma\Delta=\Gamma Z$  και  $A\hat{B}\Delta=10^\circ$ .

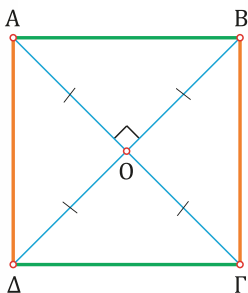
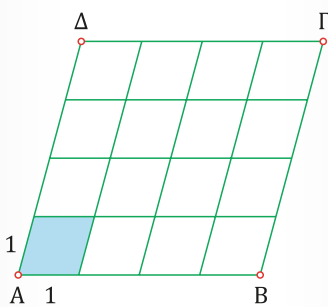
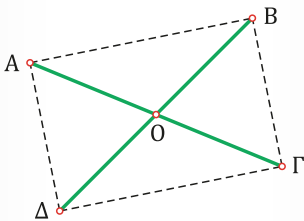
# 3.2

## Είδη παραλληλογράμμων



Περιέχονται

- Ορθογώνιο
- Ρόμβος
- Τετράγωνο



Στην ενότητα αυτή:

1. Διατυπώνουμε τους ορισμούς του ορθογωνίου, του ρόμβου και του τετραγώνου.
2. Αναγνωρίζουμε το ορθογώνιο, τον ρόμβο και το τετράγωνο ως είδη παραλληλογράμμου.
3. Σχεδιάζουμε τα παραπάνω τετράπλευρα.
4. Διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε τις ιδιότητες του ορθογωνίου.
5. Διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε τις ιδιότητες του ρόμβου.
6. Ταξινομούμε τις ιδιότητες του τετραγώνου, αφού είναι συγχρόνως παραλληλόγραμμο, ορθογώνιο και ρόμβος.
7. Διατυπώνουμε κριτήρια ώστε ένα παραλληλόγραμμο να είναι ορθογώνιο ή ρόμβος ή τετράγωνο.
8. Χρησιμοποιούμε τα παραπάνω στη λύση ασκήσεων ή προβλημάτων.

### Δραστηριότητα 1

Δύο τμήματα ΑΓ και ΒΔ είναι ίσα και έχουν κοινό μέσο Ο.

- α) Μπορούμε να πούμε ότι το τετράπλευρο με κορυφές τα Α, Β, Γ, Δ είναι παραλληλόγραμμο και γιατί;
- β) Να αποδείξετε ότι  $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$ .
- γ) Τι μπορούμε να συμπεράνουμε για τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ και πώς λέγεται αυτό το σχήμα;

### Δραστηριότητα 2

Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε μέρος από ένα συρματοπλέγμα (ή διακοσμητικό φράκτη). Τα κενά ανάμεσα στα σύρματα είναι παραλληλόγραμμο με ίσες πλευρές, όπως π.χ. αυτό που βρίσκεται στην κορυφή Α.

- α) Είναι άραγε το ΑΒΓΔ (τουλάχιστον) παραλληλόγραμμο και γιατί;
- β) Η Μαρία ισχυρίζεται ότι το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος. Συμφωνείτε μαζί της;
- γ) Φέρτε στο σχήμα με το μολύβι τις διαγωνίους ΑΓ και ΒΔ. Τι παρατηρείτε για αυτές που δεν ισχύει σε τυχαία παραλληλόγραμμο;
- δ) Γιατί οι ΑΓ και ΒΔ διχοτομούν τις γωνίες του ΑΒΓΔ;

### Δραστηριότητα 3

Στο διπλανό σχήμα οι διαγώνιοι είναι ίσες, κάθετοι και διχοτομούνται.

- α) Γιατί το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο;
- β) Να υπολογίσετε τις γωνίες αυτού του σχήματος.
- γ) Γιατί είναι  $AB = BG = \Gamma\Delta = \Delta A$ ;
- δ) Διχοτομούν οι διαγώνιοι τις γωνίες του ΑΒΓΔ;
- ε) Ποιο γνωστό τετράπλευρο είναι αυτό το σχήμα;

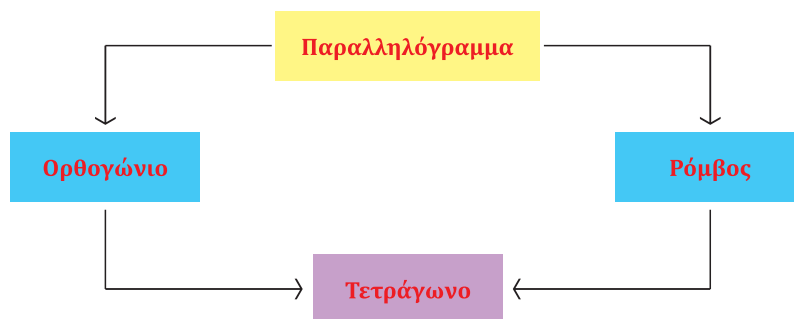
## Θεωρία και εφαρμογές

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε ορισμένα χαρακτηριστικά παραλληλόγραμμα, δίνοντας όμως σε αυτά έναν κάπως διαφορετικό ορισμό, από αυτούς που έχουμε μάθει σε μικρότερες τάξεις. Για παράδειγμα, με το άκουσμα της λέξης ορθογώνιο όλοι μας φανταζόμαστε το σχήμα που έχει όλες τις γωνίες του ορθές. Αυτό άλλωστε μαρτυράει και το όνομά του.

Στο Λύκειο το ορθογώνιο είναι πρώτα παραλληλόγραμμο. Τι έχει όμως παραπάνω; Έχει μια (τουλάχιστον) ορθή γωνία. Μα τότε έχει όλες τις γωνίες του ορθές και έτσι δεν ερχόμαστε σε αντίφαση με αυτό που αποδίδουμε στο ορθογώνιο: ορθές γωνίες.

Κάτι ανάλογο ισχύει για τον ρόμβο και το τετράγωνο. Θα μελετήσουμε λοιπόν αναλυτικά τα σχήματα: ορθογώνιο, ρόμβος, τετράγωνο, βλέποντάς τα ως παραλληλόγραμμα, που έχουν κάποιο ιδιαίτερο χαρακτηριστικό.

### Είδη Παραλληλογράμων



- **Ορθογώνιο:** Έχει όλες τις γωνίες ορθές και τις διαγωνίους ίσες.
- **Ρόμβος:** Έχει όλες τις πλευρές ίσες, οι διαγώνιοι είναι κάθετοι και διχοτομούν τις γωνίες.
- **Τετράγωνο:** Έχει όλες τις ιδιότητες του ορθογωνίου και του ρόμβου.

### ◆ Το ορθογώνιο

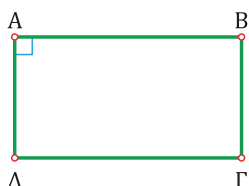
Το ορθογώνιο είναι ένα πολύ χαρακτηριστικό τετράπλευρο, με το οποίο όλοι οι άνθρωποι είναι εξοικειωμένοι από τα πρώτα χρόνια της ζωής τους. Αν και η λέξη ορθογώνιο μαρτυράει τη φύση αυτού του τετραπλεύρου (έχει ορθές γωνίες), στην Α' Λυκείου θα δούμε το ορθογώνιο ως ένα είδος παραλληλογράμμου. Με άλλα λόγια, το ορθογώνιο είναι ένα παραλληλόγραμμο, που έχει μια επιπλέον ιδιότητα. Ποια όμως είναι αυτή η ιδιότητα; Την απάντηση τη δίνει ο παρακάτω ορισμός.

#### Ορισμός

**Ορθογώνιο** λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει μία (τουλάχιστον) ορθή γωνία.

Επειδή στο παραλληλόγραμμο οι απέναντι γωνίες είναι ίσες και δύο οποιεσδήποτε διαδοχικές γωνίες του είναι παραπληρωματικές, συμπεραίνουμε ότι:

Όλες οι γωνίες του ορθογωνίου είναι ορθές.



Το ορθογώνιο, ως παραλληλόγραμμο, έχει κληρονομήσει όλες τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου. Οι απέναντι, λοιπόν, πλευρές είναι ίσες και οι διαγώνιοι διχοτομούνται. Μια ακόμα σημαντική ιδιότητα διατυπώνεται στο επόμενο θεώρημα.



### Θεώρημα 1

Σε κάθε ορθογώνιο οι διαγώνιοι είναι ίσες.

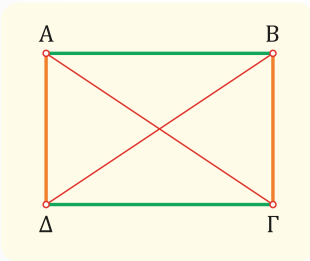
#### Απόδειξη

Θεωρούμε το ορθογώνιο ΑΒΓΔ. Θα αποδείξουμε ότι οι διαγώνιοι είναι ίσες, δηλαδή ότι  $ΑΓ = ΒΔ$ .

Θα συγκρίνουμε τα δύο ορθογώνια τρίγωνα με κοινή πλευρά τη ΓΔ. Τα τρίγωνα αυτά είναι τα ΑΔΓ και ΒΓΔ. Αυτά έχουν:

- $ΑΔ = ΒΓ$ , ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου,
- την πλευρά ΓΔ κοινή.

Τα τρίγωνα, λοιπόν, ΑΔΓ και ΒΓΔ είναι ίσα, οπότε  $ΑΓ = ΒΔ$ . ■



### Παράδειγμα

Να αποδείξετε ότι οι διαγώνιοι του ορθογωνίου το χωρίζουν σε τέσσερα ισοσκελή τρίγωνα.

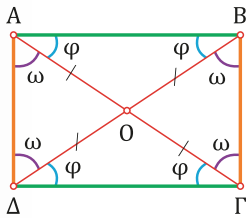
#### Λύση

Έστω ΑΓ και ΒΔ οι διαγώνιοι του ορθογωνίου ΑΒΓΔ. Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι ίσες και, φυσικά, διχοτομούνται. Άρα:

$$ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ = ΟΔ.$$

Τα τρίγωνα, λοιπόν, ΟΑΒ, ΟΒΓ, ΟΓΔ και ΟΑΔ είναι ισοσκελή. ■

Ας τονίσουμε ότι οι τέσσερις γωνίες, που είναι σημειωμένες με φ είναι ίσες, όπως, επίσης, και οι τέσσερις γωνίες που είναι σημειωμένες με το γράμμα ω.



### ◆ Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ορθογώνιο

Για να είναι ένα τετράπλευρο ορθογώνιο, αρκεί να ισχύει μία από τις παρακάτω ιδιότητες.



Ιδιότητες ορθογωνίου



### Κριτήρια

Για να είναι ένα τετράπλευρο ορθογώνιο αρκεί να ισχύει μία από τις παρακάτω προτάσεις.

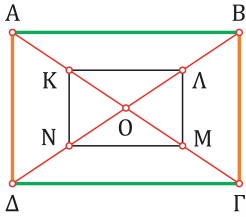
- Έχει τρεις γωνίες ορθές.
- Έχει τέσσερις γωνίες ίσες.
- Είναι παραλληλόγραμμο και έχει μια ορθή γωνία.
- Είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοι είναι ίσες.

### Εφαρμογή

Οι διαγώνιοι ενός ορθογωνίου ΑΒΓΔ τέμνονται στο Ο. Να αποδείξετε ότι τα μέσα των τμημάτων ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ είναι κορυφές ορθογωνίου.

#### Λύση

Ας είναι Κ, Λ, Μ, Ν τα μέσα των ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ, αντίστοιχα.



Αφού το  $AB\Gamma\Delta$  είναι ορθογώνιο, οι διαγώνιοι είναι ίσες. Έτσι,  $A\Gamma = B\Delta$  και συνεπώς:

$$OA = OB = OG = OD.$$

Επειδή τα  $K, \Lambda, M, N$  είναι μέσα των παραπάνω τμημάτων, θα είναι:

$$OK = O\Lambda = OM = ON,$$

δηλαδή  $N\Lambda = KM$ . Τα τμήματα όμως αυτά διχοτομούνται και έτσι το  $K\Lambda MN$  είναι παραλληλόγραμμο με ίσες διαγωνίους (αφού  $N\Lambda = KM$ ). Άρα το  $K\Lambda MN$  είναι ορθογώνιο. ■

Στην επόμενη ενότητα μπορούμε να δώσουμε και μια ακόμα λύση.

### ◆ Ο ρόμβος



#### Ορισμός

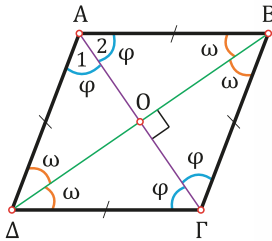
**Ρόμβος** λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.

Αφού ο ρόμβος είναι παραλληλόγραμμο, έχει όλες τις ιδιότητες του παραλληλόγραμμου και επιπλέον:



#### Ιδιότητες ρόμβου

- Όλες οι πλευρές είναι ίσες.
- Οι διαγώνιοι είναι κάθετοι.
- Οι διαγώνιοι διχοτομούν τις γωνίες του.



Αν, λοιπόν, το  $AB\Gamma\Delta$  είναι ρόμβος, τότε εξ ορισμού οι πλευρές του είναι ίσες και οι διαγώνιοι  $A\Gamma$  και  $B\Delta$  διχοτομούνται στο  $O$ .

Στο ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Delta$ , η  $AO$  είναι διάμεσος, οπότε:

$$AO \perp B\Delta \quad \text{και} \quad \hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \varphi.$$

Άρα οι διαγώνιοι είναι κάθετοι και διχοτομούν τις γωνίες του ρόμβου.

### ◆ Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ρόμβος

Ας δούμε τώρα πότε ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος. Τόσο ο ορισμός, όσο και οι ιδιότητες του ρόμβου λειτουργούν και ως κριτήρια.



#### Κριτήρια

Για να είναι ένα τετράπλευρο ρόμβος, αρκεί να ισχύει μία από τις παρακάτω προτάσεις.

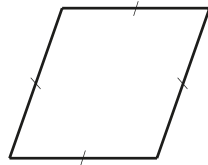
- Όλες οι πλευρές είναι ίσες.
- Είναι παραλληλόγραμμο με δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.
- Είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα.
- Είναι παραλληλόγραμμο και μία διαγώνιος διχοτομεί μία γωνία του.
- Είναι παραλληλόγραμμο με δύο ύψη ίσα.



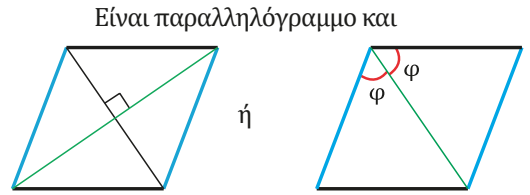
Ανακαλύπτουμε  
τις ιδιότητες  
του ρόμβου



**Κριτήρια:** Ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος, αν:



Όλες οι πλευρές είναι ίσες.



Είναι παραλληλόγραμμο και

ή

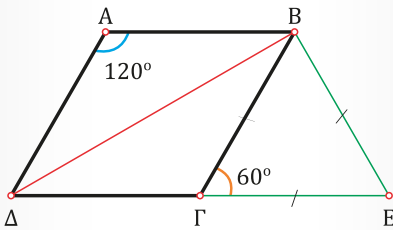
Οι διαγώνιοι είναι κάθετες.

Μία διαγώνιος διχοτομεί μία γωνία.

**Παράδειγμα**

Σε έναν ρόμβο  $AB\Gamma\Delta$  είναι  $\hat{A}=120^\circ$ . Στο εξωτερικό του ρόμβου θεωρούμε το ισόπλευρο τρίγωνο  $B\Gamma E$ . Να αποδείξετε ότι:

- α) τα σημεία  $\Delta, \Gamma, E$  βρίσκονται στην ίδια ευθεία και το  $\Gamma$  είναι μέσο του  $\Delta E$ ,
- β)  $B\Delta \perp BE$ ,
- γ)  $A\Gamma \parallel BE$ .



**Λύση**

α) Αφού ο ρόμβος είναι παραλληλόγραμμο, παίρνουμε ότι:

$$\hat{B\Gamma\Delta} = \hat{A} = 120^\circ.$$

Όμως το τρίγωνο  $B\Gamma E$  είναι ισόπλευρο, οπότε  $\hat{B\Gamma E} = 60^\circ$ . Επειδή:

$$\hat{\Delta\Gamma E} = \hat{\Delta\Gamma B} + \hat{B\Gamma E} = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ,$$

τα σημεία  $\Delta, \Gamma, E$  είναι συνευθειακά.

Είναι ακόμα  $\Gamma\Delta = \Gamma B = \Gamma E$ , δηλαδή  $\Gamma\Delta = \Gamma E$ . Άρα το  $\Gamma$  είναι μέσο του τμήματος  $\Delta E$ .

β) Στον ρόμβο οι διαγώνιοι διχοτομούν τις γωνίες. Επομένως:

$$\hat{\Delta B\Gamma} = \hat{\Delta B A} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ.$$

Άρα  $\hat{\Delta B E} = \hat{\Delta B\Gamma} + \hat{\Gamma B E} = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$ .

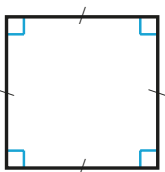
Αφού  $\hat{\Delta B E} = 90^\circ$ , θα είναι  $B\Delta \perp BE$ .

γ) Το  $ABE\Gamma$  είναι παραλληλόγραμμο, διότι  $AB \parallel \Gamma E$ . Επομένως  $A\Gamma \parallel BE$ . ■

**Το τετράγωνο**

Το τετράγωνο είναι ίσως το πιο «καλαίσθητο» τετράπλευρο. Όλοι το αναγνωρίζουμε, αρκεί να δούμε ότι έχει όλες τις γωνίες ορθές και τις πλευρές ίσες.

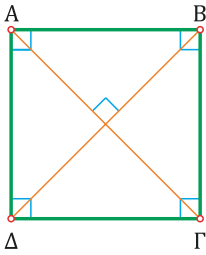
Ας δούμε το τετράγωνο με λίγο διαφορετική οπτική γωνία για να ταιριάζει με τη συνολική παρουσίαση των παραλληλογράμμων.



**Ορισμός**

**Τετράγωνο** λέγεται το παραλληλόγραμμο που είναι συγχρόνως ορθογώνιο και ρόμβος.

Το τετράγωνο έχει όλες τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου, του ορθογωνίου και του ρόμβου. Πιο συγκεκριμένα:



### Ιδιότητες τετραγώνου

- Οι πλευρές του τετραγώνου είναι όλες ίσες.
- Οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες.
- Όλες οι γωνίες του είναι ορθές.
- Οι διαγωνιοί του είναι ίσες, τέμνονται κάθετα και διχοτομούν τις γωνίες του.

Ας δούμε τώρα σε ποιες περιπτώσεις ένα τετράπλευρο είναι τετράγωνο.

Είναι φανερό ότι το τετράπλευρο θα είναι τετράγωνο, αν εξασφαλίσουμε ότι είναι συγχρόνως ορθογώνιο και ρόμβος. Ειδικότερα:

### Κριτήρια

Ένα παραλληλόγραμμο είναι τετράγωνο, αν ισχύει μία από τις παρακάτω προτάσεις.

- Έχει ίσες διαγωνίους και δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.
- Έχει ίσες και κάθετους διαγωνίους.
- Έχει ίσες διαγωνίους και μία από αυτές διχοτομεί μία του γωνία.
- Μια γωνία είναι ορθή και οι διαγώνιοι είναι κάθετοι.
- Μια γωνία είναι ορθή και δύο διαδοχικές πλευρές είναι ίσες.
- Μια γωνία είναι ορθή και μια διαγώνιος διχοτομεί μια του γωνία.

Τονίζουμε ότι για να είμαστε βέβαιοι πως τα στοιχεία που έχουμε εξασφαλίζουν ότι ένα τετράπλευρο είναι τετράγωνο, αρκεί να ελέγξουμε αν με τα στοιχεία αυτά το τετράπλευρο είναι και ορθογώνιο και ρόμβος.

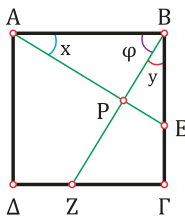
Έτσι, αν π.χ. οι πλευρές και οι γωνίες ενός τετράπλευρου είναι ίσες, τότε αυτό είναι τετράγωνο, αφού:

- οι ίσες πλευρές το καθιστούν ρόμβο,
- οι ίσες γωνίες το καθιστούν ορθογώνιο.

Το ίδιο ισχύει και αν οι διαγώνιοι ενός τετραπλεύρου διχοτομούνται, είναι ίσες και μία από αυτές διχοτομεί μία γωνία του.



**Εφαρμογή  
στα τετράγωνα**



### Εφαρμογή

Σε ένα τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  παίρνουμε σημείο  $E$  στην πλευρά  $B\Gamma$  και σημείο  $Z$  στην πλευρά  $\Gamma\Delta$ , ώστε  $BE = \Gamma Z$ . Να αποδειχθεί ότι  $AE \perp BZ$ .

### Λύση

Τα ορθογώνια τρίγωνα  $ABE$  και  $B\Gamma Z$  είναι ίσα, διότι έχουν  $AB = B\Gamma$  και  $BE = \Gamma Z$ . Άρα  $x = y$ .

Όμως  $y + \varphi = \widehat{B} = 90^\circ$  οπότε  $x + \varphi = 90^\circ$ . Άρα το τρίγωνο  $ABP$  είναι ορθογώνιο.

Συνεπώς  $AE \perp BZ$ . ■

### Εφαρμογή

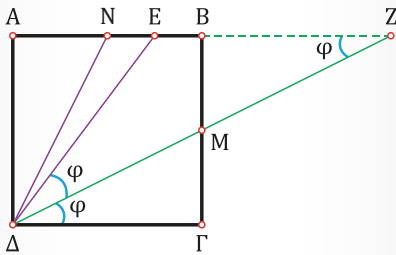
Δίνεται τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  και σημείο  $E$  στην πλευρά  $AB$ , ώστε:

$$\Delta E = B\Gamma + BE.$$

Η διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{\Gamma\Delta E}$  τέμνει την πλευρά  $B\Gamma$  στο σημείο  $M$ .

Να αποδείξετε ότι:

- α)  $MB = MG$ ,  
β)  $\widehat{\Gamma\Delta E} = 2\widehat{\Delta\Delta N}$ , όπου N το μέσο της AB.



### Λύση

α) Προεκτείνουμε τη DM μέχρι να συναντήσει την ευθεία AB στο σημείο Z. Επειδή η ΔZ είναι διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{\Gamma\Delta E}$  παίρνουμε:

$$\widehat{Z} = \widehat{Z\Delta\Gamma} = \widehat{Z\Delta E} = \varphi.$$

Αφού  $\widehat{E\Delta Z} = \widehat{E\Delta\Gamma} = \varphi$ , το τρίγωνο EΔZ είναι ισοσκελές. Άρα:

$$EZ = ED \text{ ή } EB + BZ = BE + B\Gamma \text{ ή } BZ = B\Gamma \text{ ή } BZ = \Gamma\Delta.$$

Επειδή  $BZ \parallel \Gamma\Delta$ , το BZΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. Οι διαγώνιοι λοιπόν BΓ και ΔZ διχοτομούνται, οπότε  $MB = MG$ .

β) Αφού  $\widehat{\Delta\Delta N} = \widehat{\Gamma\Delta M}$  (ΠΓΠ), είναι:

$$\widehat{\Delta\Delta N} = \widehat{M\Delta\Gamma} = \frac{\widehat{E\Delta\Gamma}}{2},$$

δηλαδή  $\widehat{\Gamma\Delta E} = 2\widehat{\Delta\Delta N}$ . ■

### Μαθηματικές Ιστορίες

(Από τη Γεωμετρία)

Στην προσπάθειά τους να αποδείξουν το 5<sup>ο</sup> αίτημα του Ευκλείδη, οι μεταγενέστεροι του Ευκλείδη μαθηματικοί και μελετητές θεώρησαν αυτονόητο ότι αν δύο ευθείες είναι παράλληλες, τότε τα σημεία τους ισαπέχουν.

Είχαν όμως προσέξει ότι χωρίς το αξίωμα αυτό δεν μπορούν να αποδείξουν ότι δύο κάθετες ευθείες σε δύο παράλληλες ευθείες ορίζουν ορθογώνιο.

Το τετράπλευρο λοιπόν  $ABB_1A_1$ , αν και σε μας που σκεφτόμαστε με τον «Ευκλείδειο τρόπο» είναι ορθογώνιο, αν αφήσουμε έξω το 5ο αίτημα δεν μπορούμε να αποδείξουμε ότι είναι πράγματι ορθογώνιο.

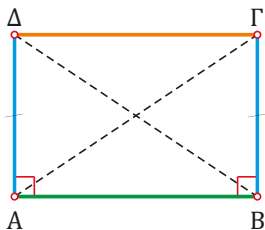
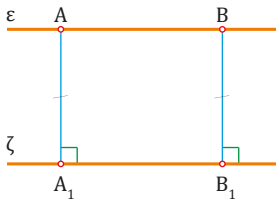
Αν υπάρχει ορθογώνιο, τότε η γεωμετρία είναι Ευκλείδεια.

Τέτοια τετράπλευρα, όπως το διπλανό, με απέναντι πλευρές ίσες και κάθετες στη μία πλευρά ( $\widehat{\Delta A} = \widehat{\Gamma B} = 90^\circ$ ) τα μελέτησε σχολαστικά ο Ιταλός μαθηματικός Girolamo Saccheri (1667 – 1733) και έχουν το όνομά του. Με σύγκριση ορθογωνίων τριγώνων προκύπτει ότι  $A\Gamma = B\Delta$  και στη συνέχεια ότι  $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Delta}$ .

Αξιοσημείωτο είναι επίσης το συμπέρασμα ότι  $AB \leq \Gamma\Delta$  και  $\Gamma\Delta \parallel AB$ .

Ο Saccheri απέδειξε ότι δεν μπορεί οι γωνίες  $\widehat{\Gamma}$  και  $\widehat{\Delta}$  να είναι αμβλείες. Η προσπάθειά του ήταν λοιπόν να αποδείξει ότι οι γωνίες αυτές είναι ορθές (υπόθεση της ορθής γωνίας), διότι τότε θα μπορούσε να αποδείξει ότι το άθροισμα των γωνιών τριγώνου είναι  $180^\circ$ , άρα και το 5ο αίτημα του Ευκλείδη, αφού αυτές οι προτάσεις είναι ισοδύναμες.

Δεν μπόρεσε όμως να αποδείξει ότι οι γωνίες  $\widehat{\Gamma}$  και  $\widehat{\Delta}$  δεν είναι οξείες (υπόθεση της οξείας γωνίας). Με κάποιον ανορθόδοξο τρόπο δέχθηκε ότι αναγκαστικά οι γωνίες  $\widehat{\Gamma}$  και  $\widehat{\Delta}$  είναι ορθές, διότι στην εποχή του κάθε άλλη εκδοχή δεν φάνταζε «φυσική». Ο Saccheri στην πραγματικότητα έφτασε ένα βήμα πριν την ανακάλυψη της Υπερβολικής Γεωμετρίας. Έφτασε στην πηγή, αλλά δεν ξεδίψασε! Δεν ήταν όμως ο μόνος...

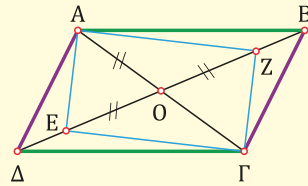


## Ασκήσεις και Προβλήματα

### Ασκήσεις Α' Ομάδας

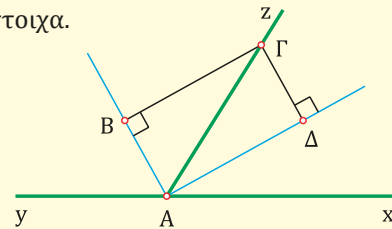
- Τι ονομάζουμε ορθογώνιο; Να σχεδιάσετε ένα ορθογώνιο και να γράψετε τις ιδιότητές του.
  - Τι λέμε ρόμβος; Να σχεδιάσετε έναν ρόμβο και να γράψετε τις ιδιότητές του.
  - Να γράψετε πέντε ιδιότητες του τετραγώνου.
- Τι παραπάνω ιδιότητες πρέπει να έχει ένα παραλληλόγραμμο, ώστε αυτό να είναι:
  - ορθογώνιο,
  - ρόμβος,
  - τετράγωνο.
- Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις με Σ (Σωστή) ή Λ (Λανθασμένη).
  - Οι διαγώνιες του ορθογωνίου είναι ίσες. Σ Λ
  - Αν ένα τετράπλευρο έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες και επιπλέον οι διαγώνιοι είναι κάθετες, τότε αυτό είναι τετράγωνο. Σ Λ
  - Οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του. Σ Λ
  - Αν σε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι:
 
$$\hat{A}=\hat{B}=\hat{\Gamma}=90^\circ \text{ και } \text{ΑΓ} \perp \text{ΒΔ},$$
 τότε αυτό είναι τετράγωνο. Σ Λ
- Θεωρούμε το ορθογώνιο ΑΒΓΔ και το παραλληλόγραμμο ΓΑΔΕ. Να αποδείξετε ότι:
  - $\text{ΒΓ} = \text{ΓΕ}$ ,
  - τα σημεία Β, Γ, Ε είναι συνευθειακά,
  - το τρίγωνο ΔΒΕ είναι ισοσκελές.
- Οι διαγώνιες ενός ορθογωνίου ΑΒΓΔ τέμνονται στο σημείο Ο.
  - Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΟΓΔ είναι ισοσκελές.
  - Αν  $\hat{A}\hat{O}\hat{B}=\omega$ , τότε να αποδείξετε ότι
 
$$\hat{O}\hat{\Gamma}\hat{\Delta}=\hat{O}\hat{\Delta}\hat{\Gamma}=90^\circ-\frac{\omega}{2}.$$
- Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ. Να αποδείξετε ότι η μεσοκάθετος (μ) της πλευράς ΑΒ είναι και μεσοκάθετος της πλευράς ΓΔ.
- Σε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι:
 
$$\text{ΑΔ}=\text{ΒΓ} \text{ και } \hat{A}=\hat{\Gamma}=90^\circ.$$
 Να εξετάσετε αν αυτό είναι ορθογώνιο.

- Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο και  $\text{OΑ}=\text{OΕ}=\text{OΖ}$ .



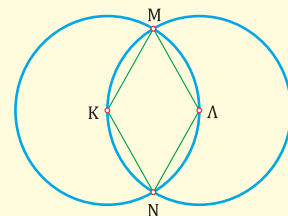
Να αποδείξετε ότι το ΑΖΓΕ είναι ορθογώνιο.

- Σε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι  $\hat{A}=\hat{B}=\hat{\Gamma}=90^\circ$ . Να εξηγήσετε γιατί το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο με τη βοήθεια του ορισμού και μόνο.
- Σε κύκλο με κέντρο Ο θεωρούμε τις διαμέτρους ΑΒ, ΓΔ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ, Δ είναι κορυφές ορθογωνίου.
- Δίνεται κύκλος (Ο, R). Να προσδιορίσετε (με αιτιολόγηση) σημεία Α, Β, Γ, Δ του κύκλου έτσι, ώστε το ΑΒΓΔ να είναι τετράγωνο.
- Δίνεται η ευθεία γωνία  $x\hat{A}y$  και η ημιευθεία ΑΓ. Οι ΑΔ, ΑΒ είναι διχοτόμοι των γωνιών  $x\hat{A}\hat{\Gamma}$  και  $\hat{\Gamma}Ay$  αντίστοιχα.



Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο και ότι  $\text{ΒΔ} // xy$ .

- Δίνεται τμήμα  $\text{ΚΛ}=\alpha$ . Οι κύκλοι (Κ,  $\alpha$ ) και (Λ,  $\alpha$ ) τέμνονται στα σημεία Μ, Ν.



Να αποδείξετε ότι το ΚΛΜΝ είναι ρόμβος.

- Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσος ΑΜ. Στην προέκταση της ΑΜ παίρνουμε τμήμα

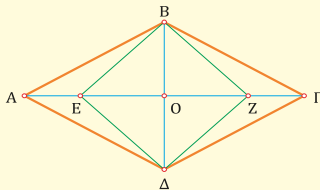
$MD=MA$ . Να αποδείξετε ότι:

- α)  $\Delta B = \Delta \Gamma$ ,
- β) το τετράπλευρο  $AB\Delta\Gamma$  είναι ρόμβος.

15. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και η διχοτόμος  $B\Delta$ . Η παράλληλη από το  $\Delta$  προς τη  $B\Gamma$  τέμνει την  $AB$  στο  $E$ . Η παράλληλη από το  $\Delta$  προς την  $AB$  τέμνει την  $B\Gamma$  στο  $Z$ . Να αποδείξετε ότι  $EZ \perp B\Gamma$ .

16. Δίνεται τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  και τα μέσα  $K, \Lambda, M, N$  των πλευρών  $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:  
α) το  $K\Lambda M N$  είναι τετράγωνο,  
β) η  $KN$  διχοτομεί τη γωνία  $\widehat{AKM}$ .

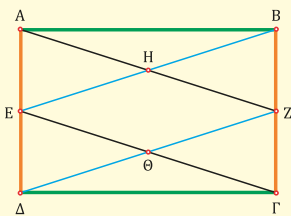
17. Στο παρακάτω σχήμα το  $AB\Gamma\Delta$  είναι ρόμβος με  $A\Gamma > B\Delta$ .



Αν  $OE=OZ=OB$ , να αποδείξετε ότι το  $BE\Delta Z$  είναι τετράγωνο.

### Ασκήσεις Β' Ομάδας

18. Δίνεται ορθογώνιο  $AB\Gamma\Delta$  και τα μέσα  $E, Z$  των  $AD, B\Gamma$ .



Οι  $AZ, BE$  τέμνονται στο  $H$  και οι  $GE, DZ$  τέμνονται στο  $\Theta$ . Να αποδείξετε ότι:

- α) τα τετράπλευρα  $AZ\Gamma E, BZ\Delta E$  είναι παραλληλόγραμμα,
- β) το  $E\Theta Z$  είναι ρόμβος.

19. Στην πλευρά  $AB$  τετραγώνου  $AB\Gamma\Delta$  παίρνουμε σημείο  $E$ . Αν η κάθετη από το  $A$  προς την  $DE$  τέμνει την πλευρά  $B\Gamma$  στο  $Z$ , να αποδείξετε ότι  $BE=\Gamma Z$ .

20. Δίνεται ρόμβος  $AB\Gamma\Delta$  και το μέσο  $M$  της πλευράς  $B\Gamma$ . Η ευθεία  $AM$  τέμνει την προέκταση της  $\Delta\Gamma$  στο σημείο  $E$ . Να αποδείξετε ότι:  
α) τα τρίγωνα  $ABM$  και  $M\Gamma E$  είναι ίσα,  
β) το τετράπλευρο  $ABE\Gamma$  είναι παραλληλόγραμμο,  
γ) το  $\Gamma$  είναι μέσο του  $\Delta E$ ,  
δ) το τρίγωνο  $\Delta BE$  είναι ορθογώνιο.

21. Δίνεται τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  και το ισόπλευρο τρίγωνο  $\Gamma\Delta E$  στο εσωτερικό του τετραγώνου. Η ευθεία  $AE$  τέμνει την  $B\Gamma$  στο σημείο  $Z$ . Να αποδείξετε ότι:  
α)  $EA = EB$ ,  
β)  $EB = EZ$ .

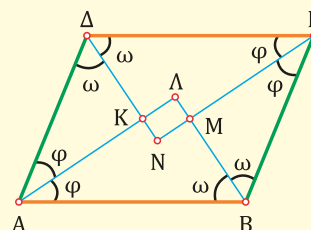
22. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB=A\Gamma$ ), σημείο  $M$  στη βάση  $B\Gamma$  και το ύψος  $\Gamma H$ . Αν  $\Delta$  και  $E$  είναι οι προβολές του  $M$  στις  $AB$  και  $A\Gamma$ , να αποδείξετε ότι  $M\Delta + ME = \Gamma H$ .

23. Θεωρούμε τον ρόμβο  $AB\Gamma\Delta$  με  $\widehat{A} > 90^\circ$ . Φέρουμε  $AE \perp B\Gamma$  και  $AZ \perp \Delta\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:  
α)  $AZ = AE$ ,  
β) η  $A\Gamma$  διχοτομεί τη γωνία  $\widehat{E\Delta Z}$ .

24. Δίνεται ορθογώνιο  $AB\Gamma\Delta$  και η προβολή  $E$  του  $B$  στην  $A\Gamma$ . Η διχοτόμος της γωνίας  $\Delta BE$  τέμνει την  $\Gamma\Delta$  στο  $Z$ . Να αποδείξετε ότι:  
α)  $E\widehat{B\Gamma} = B\widehat{\Delta\Gamma}$ ,  
β)  $B\widehat{Z\Gamma} = 45^\circ$  και  $\Gamma Z = A\Delta$ .

25. Στις πλευρές  $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$  ενός τετραγώνου παίρνουμε τα σημεία  $K, \Lambda, M$  και  $N$  αντίστοιχα, ώστε:  $AK = B\Lambda = \Gamma M = \Delta N$ .  
Να αποδείξετε ότι:  
α) το  $K\Lambda M N$  είναι τετράγωνο,  
β) τα τμήματα  $KM, \Lambda N$  διέρχονται από το κέντρο του τετραγώνου.

26. Οι διχοτόμοι των γωνιών του παραλληλογράμμου

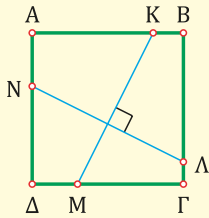


ΑΒΓΔ τέμνονται στα σημεία Κ, Λ, Μ, Ν, όπως στο σχήμα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ορθογώνιο.

27. Οι πλευρές ΑΒ και ΒΓ ενός τετραγώνου ΑΒΓΔ προεκτείνονται κατά ίσα τμήματα ΒΕ και ΓΖ. Να αποδείξετε ότι:

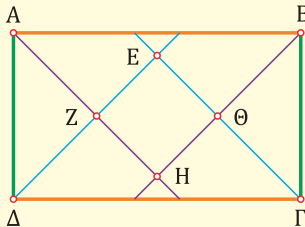
- α)  $\Delta E = B\Gamma$ ,  
β)  $\Delta E \perp AZ$ .

28. Στο παρακάτω σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο και  $KM \perp LN$ .



Να αποδείξετε ότι  $KM = LN$ .

29. Οι διχοτόμοι των γωνιών  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{\Gamma}$  και  $\hat{\Delta}$  ενός ορθογώνιου ΑΒΓΔ σχηματίζουν το τετράπλευρο ΕΖΗΘ, όπως στο σχήμα που ακολουθεί.

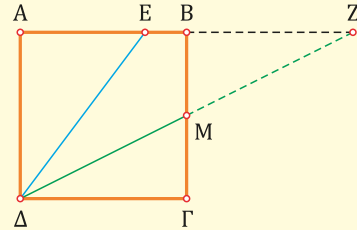


Να αποδειχθεί ότι:

- α) το ΕΖΗΘ είναι ορθογώνιο,  
β) τα τρίγωνα ΖΑΔ και ΘΒΓ είναι ίσα,  
γ)  $E\Delta = E\Gamma$  και  $Z\Delta = \Theta\Gamma$ ,  
δ) το ΕΖΗΘ είναι τετράγωνο,  
ε)  $Z\Theta \parallel \Gamma\Delta$ .

30. Σε έναν μαθηματικό διαγωνισμό δόθηκε το παρακάτω πρόβλημα:

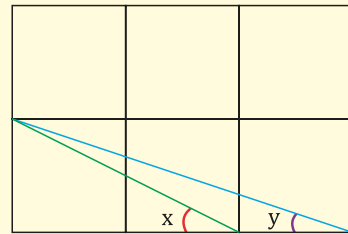
Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ παίρνουμε το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ και σημείο Ε στην πλευρά ΑΒ, ώστε  $\Delta E = EB + B\Gamma$ . Να αποδειχθεί ότι  $M\hat{\Delta}E = M\hat{\Delta}\Gamma$ .



Ένα διαγωνιζόμενο άτομο έκανε την εξής βοηθητική κίνηση. Προέκτεινε την ΔΜ μέχρι να συναντήσει την ευθεία ΑΒ στο Ζ.

- α) Πώς απέδειξε ότι  $BZ = \Gamma\Delta$ ;  
β) Γιατί το τρίγωνο ΕΔΖ είναι ισοσκελές;  
γ) Πώς απέδειξε ότι  $M\hat{\Delta}E = M\hat{\Delta}\Gamma$ ;

31. Στο παρακάτω σχήμα το πλέγμα αποτελείται από τετράγωνα.



Αξιοποιώντας προαιρετικά το πλέγμα, να αποδείξετε ότι  $x + y = 45^\circ$ .



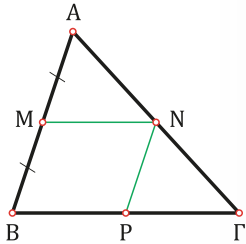
Αληθές-ψευδές  
στα παραλληλόγραμμα

# 3.3

## Τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου

Περιέχονται

- Τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου.
- Ευθεία που διέρχεται από το μέσο πλευράς τριγώνου παράλληλη προς κάποια πλευρά.



Στην ενότητα αυτή:

1. Ανακαλύπτουμε και αποδεικνύουμε την ιδιότητα του τμήματος που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου.
2. Διατυπώνουμε θεώρημα για την ευθεία που διέρχεται από μέσο πλευράς τριγώνου παράλληλη προς κάποια πλευρά του.
3. Εφαρμόζουμε τα παραπάνω στη λύση ασκήσεων και προβλημάτων.

### Δραστηριότητα 1

Από το μέσο M της πλευράς AB τριγώνου ABΓ φέρουμε  $MN \parallel B\Gamma$  και  $NP \parallel AB$ .

- α) Τι είδους τετράπλευρα είναι τα MNPB και AMPN;
- β) Γιατί το MNGP είναι παραλληλόγραμμο;
- γ) Τι είναι το N για την ΑΓ;
- δ) Να διατυπώσετε γενικά το παραπάνω συμπέρασμα.
- ε) Γιατί  $B\Gamma = 2MN$ ; Να διατυπώσετε γενικό συμπέρασμα για την ευθεία MN και τη σχέση του MN με την πλευρά BΓ.

### Δραστηριότητα 2

Ποιο είναι το ελάχιστο ύψος ενός επίπεδου καθρέπτη που κρέμεται στον τοίχο, ώστε μια γυναίκα ύψους 170 cm να βλέπει στον καθρέπτη ολόκληρο τον εαυτό της; Παίζει ρόλο η απόστασή της από τον καθρέπτη;

## Θεωρία και εφαρμογές

### ◆ Τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου

Ας πάρουμε ένα τρίγωνο ABΓ και τα μέσα M, N δύο πλευρών του π.χ. των AB και ΑΓ. Αν χαράξουμε αρκετά τέτοια σχήματα, θα διαπιστώσουμε ότι η ευθεία MN είναι πάντα παράλληλη με την BΓ. Πέραν όμως αυτού του σημαντικού συμπεράσματος το τμήμα MN είναι το μισό του BΓ.

Το παραπάνω συμπέρασμα διατυπώνεται και αποδεικνύεται στο παρακάτω θεώρημα.

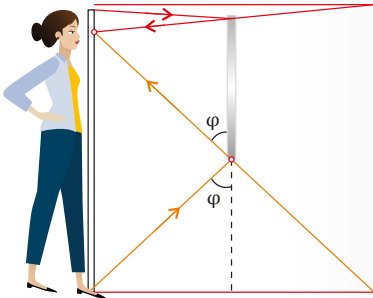
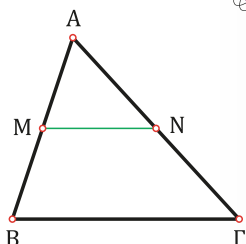
### Θεώρημα 1

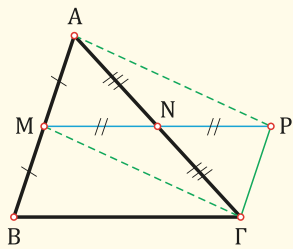
Το τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.

### Απόδειξη

Για την απόδειξη ακολουθούμε τα εξής βήματα.

- 1ο. Προεκτείνουμε τη MN κατά τμήμα  $NP = NM$ .





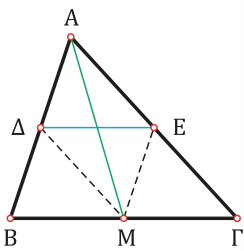
2ο. Το AMNP είναι παραλληλόγραμμο, διότι οι διαγώνιοι ΑΓ και ΜΡ διχοτομούνται. Άρα  $PN = AM$ .

3ο. Αφού  $PN = AM$  και  $AM = MB$ , θα είναι  $PN = MB$ . Άρα και το MBNP είναι παραλληλόγραμμο. Επομένως:

- $MP \parallel BN$ , δηλαδή  $MN \parallel BN$ ,
- $MP = BN$ , δηλαδή  $2MN = BN$  και έτσι  $MN = \frac{BN}{2}$ . ■

### Παράδειγμα

Σε ένα τρίγωνο ABΓ παίρνουμε τα μέσα Δ, Ε των πλευρών AB, ΑΓ και το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ. Να αποδείξετε ότι τα τμήματα AM και ΔΕ διχοτομούνται.



### Λύση

Φέρουμε τις ΜΔ και ΜΕ.

- Στο τρίγωνο ABΓ το τμήμα ΜΔ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών. Άρα  $MD \parallel AG$ .
- Στο τρίγωνο ABΓ και το τμήμα ΜΕ ενώνει μέσα. Επομένως  $ME \parallel AB$ .
- Αφού  $MD \parallel AG$  και  $ME \parallel AB$ , το ADME είναι παραλληλόγραμμο. Άρα τα τμήματα AM και ΔΕ διχοτομούνται.

Σχόλιο: Τα τέσσερα τρίγωνα ADE, BDM, ΓEM και DEM είναι ίσα. ■

### ◆ Παράλληλη από μέσο μιας πλευράς τριγώνου



### Θεώρημα 2

Αν από το μέσο Μ της πλευράς AB τριγώνου ABΓ φέρουμε παράλληλη προς την πλευρά του ΒΓ, τότε αυτή θα περάσει και από το μέσο της πλευράς ΑΓ.

### Απόδειξη

Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο.

Έχουμε λοιπόν ότι το Μ είναι μέσο της AB και  $MN \parallel BG$ . Θέλουμε να αποδείξουμε ότι το Ν είναι μέσο της ΑΓ.

Έστω ότι το Ν δεν είναι μέσο της ΑΓ και ότι το μέσο είναι το Ρ.

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα είναι:

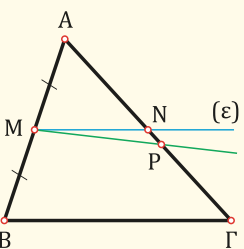
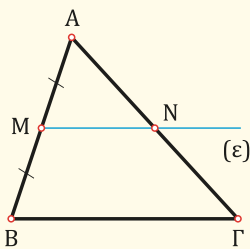
$$MP \parallel BG.$$

Όμως:

$$MN \parallel BG.$$

Επομένως από το Μ έχουμε δύο παράλληλες προς την ΒΓ, πράγμα άτοπο σύμφωνα με το Ευκλείδειο αίτημα.

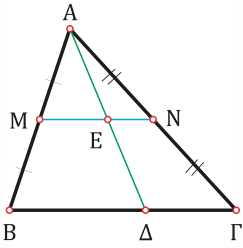
Άρα το Ν είναι μέσο της ΑΓ. ■



### Παράδειγμα

Δίνεται τρίγωνο ABΓ, τα μέσα Μ, Ν των πλευρών AB, ΑΓ και τυχαίο σημείο Δ στην πλευρά ΒΓ. Η ΜΝ τέμνει την ΑΔ στο Ε. Να αποδείξετε ότι:

$$EA = ED.$$

**Λύση**

Το τμήμα MN ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ABΓ, οπότε  $MN \parallel BG$ .

Στο τρίγωνο ABΔ το M είναι μέσο του AB και  $ME \parallel BΔ$ .

Άρα η ευθεία ME διέρχεται και από το μέσο του AΔ. Είναι επομένως:

$$EA = EΔ. \blacksquare$$

**Εφαρμογή**

Να αποδειχθεί ότι τα μέσα των πλευρών τυχαίου τετραπλεύρου είναι κορυφές παραλληλογράμμου.

**Λύση**

Έστω K, Λ, M, N τα μέσα των πλευρών του τετραπλεύρου ABΓΔ. Θα αποδείξουμε ότι το KLMN είναι παραλληλόγραμμο.

Φέρουμε τη διαγώνιο BΔ.

- Από το τρίγωνο ABΔ παίρνουμε ότι:

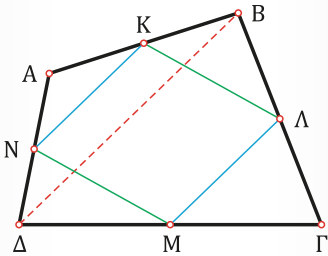
$$NK \parallel BΔ \text{ και } NK = \frac{BΔ}{2},$$

διότι τα σημεία N, K είναι μέσα δύο πλευρών του.

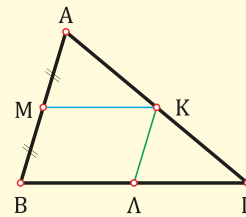
- Στο τρίγωνο ΓBΔ παίρνουμε για τον ίδιο λόγο ότι:

$$MΛ \parallel \frac{BΔ}{2}.$$

Άρα  $NK \parallel MΛ$ , που σημαίνει ότι το KLMN είναι παραλληλόγραμμο.

**Ασκήσεις και Προβλήματα****Ασκήσεις Α' Ομάδας**

- Στο τρίγωνο ABΓ τα σημεία M, N είναι μέσα των πλευρών AB, AG, αντίστοιχα. Το E είναι τυχαίο εσωτερικό σημείο του τριγώνου ABΓ και τα σημεία K, Λ είναι μέσα των BE, EΓ, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
  - $MK = NΛ$ ,
  - η MΛ διέρχεται από το μέσο του KN.
- Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABΓ, τα ύψη του AΔ, ΓE που τέμνονται στο H και τα μέσα Z, M, N των AH, AG, BΓ, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι  $MZ \perp MN$ .
- Δίνεται τρίγωνο ABΓ και το μέσο M της πλευράς AB. Από το M φέρουμε παράλληλη στην BΓ που τέμνει την AG στο K και από το K παράλληλη στην AB, που τέμνει την BΓ στο Λ.



Να αποδείξετε ότι:

- το Λ είναι μέσο της πλευράς BΓ,
  - MKΓΛ είναι παραλληλόγραμμο.
- Δίνεται τρίγωνο ABΓ και τα μέσα M, N των πλευρών AB, AG, αντίστοιχα. Αν Δ είναι τυχαίο σημείο της πλευράς BΓ και η AΔ τέμνει την MN στο σημείο E, να αποδείξετε ότι:
    - $BΔ = 2ME$ ,
    - $ΓΔ = 2EN$ .

## Ασκήσεις Β' Ομάδας

5. Δίνεται τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  και τα μέσα  $K, \Lambda, M, N$  των πλευρών  $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ , αντίστοιχα.
- Να αποδείξετε ότι τα  $KM$  και  $N\Lambda$  διχοτομούνται.
  - Αν  $A\Gamma = B\Delta$  και  $A\Gamma \perp B\Delta$ , να αποδείξετε ότι το  $K\Lambda M N$  είναι τετράγωνο.
  - Αν το  $AB\Gamma\Delta$  είναι ορθογώνιο, να αποδείξετε ότι το  $K\Lambda M N$  είναι ρόμβος.
  - Αν το  $AB\Gamma\Delta$  είναι ρόμβος, να αποδείξετε ότι το  $K\Lambda M N$  είναι ορθογώνιο.
6. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και το μέσο  $K$  της διαμέσου  $AM$ . Η ευθεία  $BK$  τέμνει την  $A\Gamma$  στο σημείο  $\Lambda$ . Από το  $M$  φέρουμε παράλληλη στην  $B\Lambda$  που τέμνει την  $A\Gamma$  στο σημείο  $Z$ . Να αποδείξετε ότι:
- το  $Z$  είναι μέσο του  $\Lambda\Gamma$ ,
  - $A\Lambda = \frac{A\Gamma}{3}$ ,
  - $B\Lambda = 4K\Lambda$ .
7. Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  και τα μέσα  $Z, E$  των πλευρών  $\Delta\Gamma, B\Gamma$ , αντίστοιχα. Η  $ZE$  τέμνει τη διαγώνιο  $A\Gamma$  στο σημείο  $H$ . Να αποδείξετε ότι:
- $\Gamma H = \frac{A\Gamma}{4}$ ,
  - $ZH = \frac{\Delta B}{4}$ .
8. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma$  και η διχοτόμος του  $A\Delta$ . Από το  $B$  φέρουμε κάθετη ευθεία στην  $A\Delta$ , που τέμνει την  $A\Delta$  στο σημείο  $M$  και την  $A\Gamma$  στο σημείο  $E$ . Δίνεται ακόμη το μέσο  $N$  της πλευράς  $B\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:
- $MN \parallel A\Gamma$ ,
  - $MN = \frac{A\Gamma - AB}{2}$ ,
  - $\widehat{\Delta MN} = \frac{\widehat{A}}{2}$ ,
  - η  $MN$  διέρχεται από το μέσο της  $AB$ .
9. Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  και τα μέσα  $M, N$  των  $AB, \Gamma\Delta$ , αντίστοιχα. Οι  $\Delta M, B N$  τέμνουν την  $A\Gamma$  στα  $E$  και  $Z$ , αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
- το  $E$  είναι μέσο του  $AZ$ ,
  - $EZ = AE = \Gamma Z$ .



Τμήμα που ενώνει  
μέσα δύο πλευρών  
τριγώνου



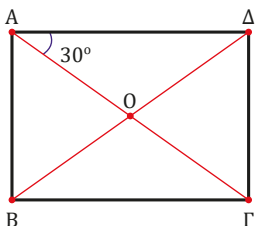
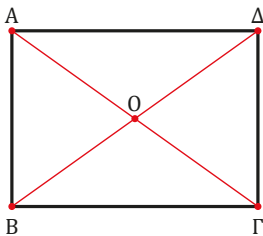
Ιδιότητα των  
μέσων πλευρών  
τετραπλεύρου

# 3.4

## Ιδιότητες των ορθογωνίων τριγώνων

Περιέχονται

- Η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου προς την υποτείνουσα.
- Το αντίστροφο θεωρήμα.
- Πλευρά ορθογωνίου τριγώνου απέναντι από γωνία  $30^\circ$ .



Στην ενότητα αυτή:

1. Διερευνούμε τη σχέση διαμέσου και υποτείνουσας σε ορθογώνιο τρίγωνο.
2. Διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε την ιδιότητα της διαμέσου ορθογωνίου τριγώνου προς την υποτείνουσα.
3. Διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε την ιδιότητα ορθογωνίου τριγώνου με γωνία  $30^\circ$ .
4. Διατυπώνουμε την αντίστροφη της παραπάνω ιδιότητας.
5. Εφαρμόζουμε τα παραπάνω στη λύση ασκήσεων και προβλημάτων.

### Δραστηριότητα 1

Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε ένα τετράπλευρο ABΓΔ με:

$$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{\Gamma} = 90^\circ.$$

- α) Τι σχήμα είναι το ABΓΔ.
- β) Τι μπορούμε να πούμε για τα τμήματα ΑΓ και ΒΔ.
- γ) Τι είναι το ΒΟ στο τρίγωνο ΒΑΓ.
- δ) Ποια ιδιότητα συνδέει τη διάμεσο ΒΟ με την υποτείνουσα ΑΓ στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και ποια εικασία μπορούμε να διατυπώσουμε;

### Δραστηριότητα 2

Στο ορθογώνιο ABΓΔ είναι  $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 30^\circ$ . Οι διαγώνιες τέμνονται στο Ο.

- α) Να βρείτε όλα τα ισοσκελή τρίγωνα του σχήματος.
- β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΟΒΓ.
- γ) Να συγκρίνετε την υποτείνουσα ΑΓ με την πλευρά ΒΓ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ.

## Θεωρία και εφαρμογές

### ◆ Ιδιότητα της διαμέσου ορθογωνίου τριγώνου

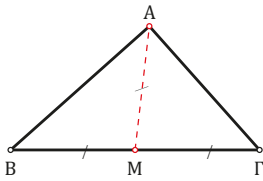
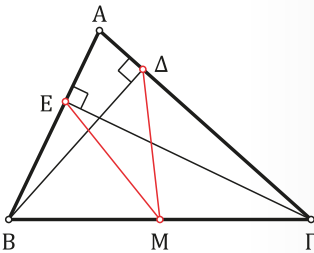
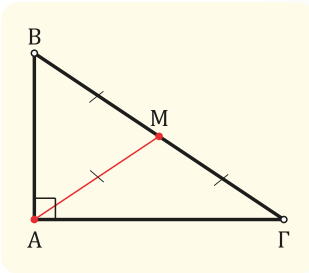
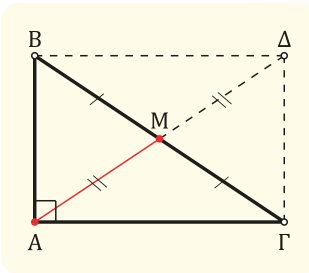
Τα ορθογώνια τρίγωνα, εκτός από το γεγονός ότι έχουν:

- μια ορθή γωνία και
- τις δύο οξείες συμπληρωματικές, έχουν μερικές ακόμα χρήσιμες ιδιότητες. Αυτές οι ιδιότητες, οι οποίες αποτελούν το κύριο αντικείμενο αυτής της ενότητας, διατυπώνονται και αποδεικνύονται στα θεωρήματα που ακολουθούν.



### Θεώρημα 1

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο η διάμεσος προς την υποτείνουσα είναι ίση με το μισό της.



### Απόδειξη

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ (με ορθή την γωνία της κορυφής A) φέρουμε τη διάμεσο AM και την προεκτείνουμε κατά τμήμα  $MΔ = AM$ .

Το τετράπλευρο ABΔΓ είναι παραλληλόγραμμο, διότι οι διαγώνιοί του AD και BΓ διχοτομούνται. Στο παραλληλόγραμμο αυτό είναι  $\hat{A} = 90^\circ$ . Επομένως το ABΔΓ είναι ορθογώνιο.

Επειδή στο ορθογώνιο οι διαγώνιοι είναι ίσες, θα ισχύει ότι  $AΔ = BΓ$ .

Όμως  $AΔ = 2AM$  και έτσι  $2AM = BΓ$  ή  $AM = \frac{BΓ}{2}$ . ■

Σύμφωνα με το θεώρημα αυτό στο ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ η διάμεσος AM προς την υποτείνουσα BΓ σχηματίζει δύο ισοσκελή τρίγωνα, τα MAB και MΑΓ, διότι  $MA = MB = MG$ .

### Παράδειγμα

Σε ένα οξυγώνιο τρίγωνο ABΓ φέρουμε τα ύψη BΔ και ΓΕ. Αν M είναι το μέσο του BΓ, να αποδειχθεί ότι  $ME = MΔ$ .

### Λύση

Τα ύψη BΔ και ΓΕ σχηματίζουν τα ορθογώνια τρίγωνα BΔΓ και ΓΕB.

- Στο ορθογώνιο τρίγωνο BΔΓ η ΔM είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα BΓ.  
Άρα:

$$ΔM = \frac{BΓ}{2}$$

- Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΕB η EM είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα BΓ.

$$\text{Έτσι } EM = \frac{BΓ}{2}$$

Από τις παραπάνω ισότητες παίρνουμε ότι  $MΔ = ME$ . ■

Στο διπλανό σχήμα έχουμε ένα τμήμα BΓ, το μέσο M και ένα σημείο A, ώστε  $MA = MB = MG$ . Τι θα μπορούσαμε άραγε να συμπεράνουμε για τη γωνία  $\hat{A}$ ;

Η απάντηση είναι αρκετά ενδιαφέρουσα: Η γωνία  $\hat{A}$  είναι ορθή.

Το συμπέρασμα αυτό διατυπώνεται και αποδεικνύεται γενικά στο επόμενο θεώρημα.

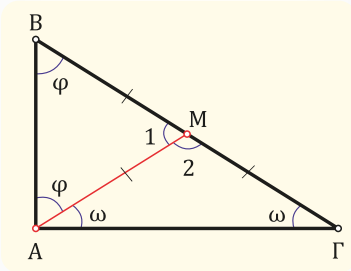


### Θεώρημα 2 (αντίστροφο)

Αν μια διάμεσος ενός τριγώνου είναι ίση με το μισό της αντίστοιχης πλευράς, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή.

### Απόδειξη

Έστω ότι για τη διάμεσο AM του τριγώνου ABΓ ισχύει  $AM = \frac{BΓ}{2}$ . Θα αποδείξουμε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα τη BΓ.



Αφού  $AM = \frac{B\Gamma}{2}$  και το M είναι μέσο του BΓ, θα έχουμε:

$$MA = MB = MG.$$

Επομένως τα τρίγωνα MAB και MΑΓ είναι ισοσκελή και έτσι:

$$\begin{aligned} \widehat{MAB} &= \widehat{MBA} = \varphi, \\ \widehat{MAG} &= \widehat{MGA} = \omega. \end{aligned}$$

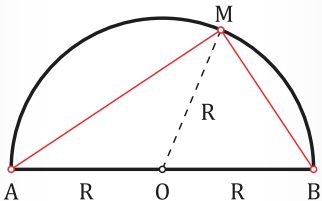
Όμως στο τρίγωνο ABΓ είναι

$$\begin{aligned} \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} &= 180^\circ \text{ ή } (\varphi + \omega) + \varphi + \omega = 180^\circ \text{ ή} \\ 2\varphi + 2\omega &= 180^\circ \text{ ή} \\ 2(\varphi + \omega) &= 180^\circ \text{ ή} \\ \varphi + \omega &= 90^\circ. \end{aligned}$$

Αφού λοιπόν  $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = \varphi + \omega = 90^\circ$ , έπεται ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο στο A. ■



Μια ανακάλυψη  
(γωνία που βαίνει  
σε ημικύκλιο)



### Παράδειγμα

Στο διπλανό σχήμα η AB είναι διάμετρος και το M είναι τυχαίο εσωτερικό σημείο του τόξου  $\widehat{AB}$ . Να αποδειχθεί ότι  $\widehat{AMB} = 90^\circ$ .

### Λύση

Επειδή  $MO = OA = OB = R$ , στο τρίγωνο MAB η ακτίνα MO είναι διάμεσος και ισχύει ότι

$$MO = \frac{AB}{2}.$$

Σύμφωνα με το θεώρημα 2 το τρίγωνο MAB είναι ορθογώνιο και μάλιστα  $\widehat{M} = 90^\circ$ , διότι υποτείνουσα είναι η AB. ■

### ♦ Ορθογώνιο τρίγωνο με γωνία 30°



### Θεώρημα 3

Αν σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του είναι ίση με 30°, τότε η απέναντι κάθετη πλευρά της είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

### Απόδειξη

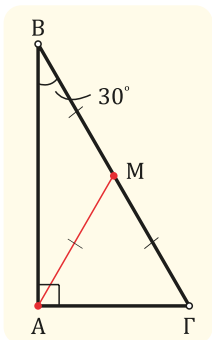
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ με  $\widehat{A} = 90^\circ$  είναι  $\widehat{B} = 30^\circ$ . Θα αποδείξουμε ότι:

$$A\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}.$$

Φέρουμε τη διάμεσο AM. Επειδή  $MA = MB = MG$  και:

$$\widehat{\Gamma} = 90^\circ - \widehat{B} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ,$$

το τρίγωνο MΑΓ είναι ισόπλευρο. Επομένως,  $A\Gamma = M\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$ . ■







7. Σε ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  με:

$$\widehat{A}=60^\circ \text{ και } A\Gamma=2AB$$

φέρουμε τη διχοτόμο  $AD$  της γωνίας  $\widehat{A}$  που τέμνει τη  $B\Gamma$  στο  $Z$ . Αν  $B\Delta$ ,  $\Gamma E \perp AD$  (τα  $\Delta$ ,  $E$  βρίσκονται στην  $AD$ ), να αποδείξετε ότι:

- α)  $AB=\Gamma E$ ,  
β)  $A\Gamma=4B\Delta$ .

8. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma$  και  $\widehat{A}=60^\circ$ . Έστω  $B\Delta$ ,  $\Gamma E$  ύψη,  $M$  το μέσο του  $AB$  και  $N$  το μέσο του  $A\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:

$$ME=N\Delta=\frac{A\Gamma-AB}{2}.$$

### Ασκήσεις Β' Ομάδας

9. Δίνεται ορθογώνιο  $AB\Gamma$  με  $\widehat{A}=90^\circ$  και  $\widehat{\Gamma}=30^\circ$ . Θεωρούμε  $K$ ,  $L$  μέσα των πλευρών  $A\Gamma$ ,  $B\Gamma$  αντίστοιχα. Προεκτείνουμε την  $LK$  προς το  $K$  και θεωρούμε τμήμα  $KM=KL$ . Να αποδείξετε ότι:

α)  $KL=\frac{B\Gamma}{4}$ ,

- β) το τετράπλευρο  $AMAB$  είναι ρόμβος,  
γ)  $MB \perp AL$ .

10. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\widehat{A}=90^\circ$ ) και το ύψος  $AD$ . Θεωρούμε τα μέσα  $M$ ,  $N$ ,  $P$  των τμημάτων  $AB$ ,  $A\Gamma$  και  $MN$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α)  $\widehat{M\Delta N}=90^\circ$ ,

β)  $\Delta P=\frac{B\Gamma}{4}$ ,

- γ) η  $MN$  είναι μεσοκάθετος του  $AD$ .

11. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και τα ύψη του  $B\Delta$ ,  $\Gamma E$  που τέμνονται στο σημείο  $P$ . Έστω  $K$  το μέσο του  $AP$  και  $L$  το μέσο του  $B\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι το  $KL$  είναι μεσοκάθετος του  $E\Delta$ .

12. Δίνεται ορθογώνιο  $AB\Gamma$  με  $\widehat{A}=90^\circ$  και  $\widehat{\Gamma}=30^\circ$ . Η μεσοκάθετος της πλευράς  $B\Gamma$  τέμνει την  $A\Gamma$  στο σημείο  $E$  και την  $AB$  στο  $\Delta$ . Να αποδείξετε ότι:

- α) η  $EB$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{B}$ ,  
β)  $E\Delta=EA$ ,  
γ)  $\Delta E=\frac{A\Gamma}{3}$ .

13. Δίνεται ορθογώνιο  $AB\Gamma$  με  $\widehat{A}=90^\circ$  και  $\widehat{\Gamma}=15^\circ$ .

Φέρουμε τη διάμεσο  $AM$  και το ύψος  $AD$ .

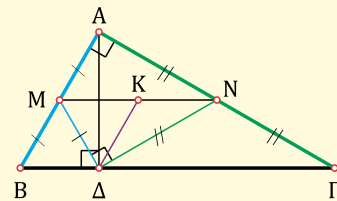
Να αποδείξετε ότι:

- α)  $\widehat{M\Delta D}=30^\circ$ ,  
β)  $A\Delta=\frac{B\Gamma}{4}$ .

14. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\widehat{B} > \widehat{\Gamma}$ , το ύψος του  $AD$ , το μέσο  $E$  της πλευράς  $A\Gamma$  και το μέσο  $Z$  της πλευράς  $B\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:

- α)  $2 \cdot EZ=AB$ ,  
β)  $\widehat{B}=\widehat{E\Delta Z}$ ,  
γ)  $\widehat{\Delta EZ}=\widehat{B}-\widehat{\Gamma}$ .

15. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\widehat{A}=90^\circ$ . Έστω  $M$  το μέσο της  $AB$ ,  $N$  το μέσο της  $\Gamma A$  και  $AD \perp B\Gamma$ .



Να αποδείξετε ότι:

- α)  $\Delta M=AM$ ,  
β) τα τρίγωνα  $AMN$  και  $MN\Delta$  είναι ίσα,  
γ)  $\Delta K=\frac{MN}{2}$ ,  
δ)  $4\Delta K=B\Gamma$ .

16. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\widehat{A}=60^\circ$  και το μέσο  $M$  της πλευράς  $B\Gamma$ . Φέρουμε τα ύψη  $B\Delta$ ,  $\Gamma E$ . Να αποδείξετε ότι:

- α)  $2A\Delta=AB$ ,  
β)  $ME=M\Delta$ ,  
γ)  $\widehat{E\Delta M}=60^\circ$ ,  
δ)  $E\Delta=\frac{B\Gamma}{2}$ .



Ιδιότητα ορθογωνίου  
τριγώνου

# 3.5

## Χαρακτηριστικά σημεία τριγώνου



Περιέχονται

- Το περίκεντρο.
- Το έγκεντρο.
- Το ορθόκεντρο.
- Το βαρύκεντρο.

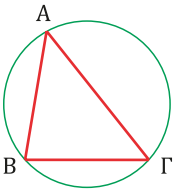
Στην ενότητα αυτή:

1. Αναγνωρίζουμε σε ένα τρίγωνο το περίκεντρο, το έγκεντρο, το ορθόκεντρο, το βαρύκεντρο.
2. Αποδεικνύουμε ότι οι μεσοκάθετοι των πλευρών κάθε τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το περίκεντρο του τριγώνου.
3. Αποδεικνύουμε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών κάθε τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το έγκεντρο του τριγώνου.
4. Αποδεικνύουμε ότι οι φορείς των υψών κάθε τριγώνου συντρέχουν στο ορθόκεντρο του τριγώνου.
5. Αποδεικνύουμε ότι οι διάμεσοι κάθε τριγώνου συντρέχουν στο βαρύκεντρο του τριγώνου.

### Θεωρία και εφαρμογές

#### ◆ Το περίκεντρο τριγώνου

Αν έχουμε οποιοδήποτε τρίγωνο μπορούμε να χαράξουμε έναν κύκλο που να διέρχεται και από τις τρεις κορυφές του. Με άλλα λόγια, από τρία σημεία που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία, υπάρχει πάντα κύκλος που περνάει από αυτά. Θα δούμε στη συνέχεια πώς βρίσκουμε το κέντρο αυτού του κύκλου, μια και ο κύκλος αυτός έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον στη Γεωμετρία και συνοδεύεται από σημαντικά συμπεράσματα.



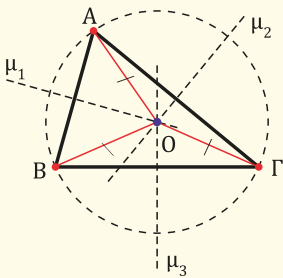
#### Θεώρημα 1

Οι μεσοκάθετοι των πλευρών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι το κέντρο του κύκλου που διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου.

#### Απόδειξη

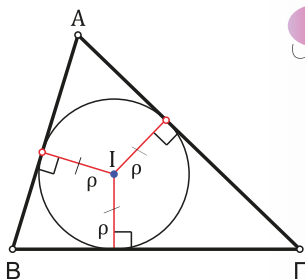
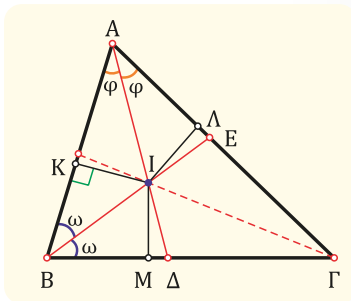
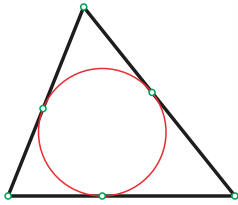
Ας είναι  $\mu_1$  και  $\mu_2$  οι μεσοκάθετοι των πλευρών AB και AΓ του τριγώνου ABΓ. Οι ευθείες  $\mu_1$  και  $\mu_2$  δεν μπορεί να είναι παράλληλες, οπότε τέμνονται σε ένα σημείο O.

- Επειδή το O είναι σημείο τομής των  $\mu_1$  και  $\mu_2$ , θα ισχύει αντίστοιχα ότι  $OA=OB$  και  $OA=OΓ$ . Από τις ισότητες αυτές παίρνουμε ότι:  $OB=OΓ$ .
- Επειδή  $OB=OΓ$ , το O βρίσκεται και στη μεσοκάθετο της πλευράς BΓ. Επομένως οι μεσοκάθετοι των πλευρών του τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο. Άρα ο κύκλος (O, OA) θα διέρχεται από τις τρεις κορυφές του τριγώνου ABΓ. ■



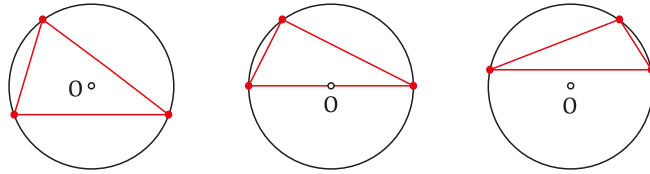
Περίκεντρο  
τριγώνου

Ο κύκλος με κέντρο το σημείο τομής O των μεσοκαθέτων των πλευρών ενός τριγώνου ABΓ και ακτίνα  $OA = OB = OΓ = R$ , διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου και λέγεται **περιγεγραμμένος κύκλος**. Το κέντρο του κύκλου αυτού λέγεται **περίκεντρο του τριγώνου**.



Εφαρμογή στο  
έγκεντρο τριγώνου

Το περίκεντρο μπορεί να βρίσκεται είτε μέσα στο τρίγωνο ή να είναι πάνω σε κάποια πλευρά ή να είναι εξωτερικό σημείο του τριγώνου.



### ◆ Το έγκεντρο του τριγώνου

Σε κάθε τρίγωνο υπάρχει ένας κύκλος που εφάπτεται και με τις τρεις πλευρές του τριγώνου. Ας δούμε για ποιο λόγο συμβαίνει αυτό και πώς βρίσκουμε το κέντρο του.

### Θεώρημα 2

Οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι κέντρο κύκλου που εφάπτεται και στις τρεις πλευρές του τριγώνου.

### Απόδειξη

Ας πάρουμε το τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Οι διχοτόμοι των γωνιών  $\hat{A}$  και  $\hat{B}$  τέμνονται στο σημείο  $I$ . Θα αποδείξουμε ότι η  $GI$  διχοτομεί τη γωνία  $\hat{\Gamma}$ .

- Φέρουμε τις  $IK \perp AB$  και  $IL \perp A\Gamma$ . Θα είναι τότε:

$$IK = IL$$

διότι τα σημεία της διχοτόμου γωνίας ισαπέχουν από τις πλευρές της.

- Φέρουμε την  $IM \perp B\Delta$ . Αφού το  $I$  είναι σημείο της διχοτόμου της γωνίας  $\hat{B}$ , θα είναι

$$IK = IM.$$

Από τις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε ότι  $IL = IM$ . Αυτό σημαίνει ότι το  $I$  βρίσκεται στη διχοτόμο της γωνίας  $\hat{\Gamma}$ , αφού ισαπέχει από τις πλευρές της. Επομένως οι διχοτόμοι του τριγώνου περνάνε από το ίδιο σημείο. Με κέντρο το  $I$  και ακτίνα  $IK = IL = IM$  γράφεται κύκλος που εφάπτεται και στις τρεις πλευρές του τριγώνου. ■



### Ορισμός

- Το σημείο τομής των διχοτόμων ενός τριγώνου λέγεται **έγκεντρο** του τριγώνου.
- Ο κύκλος που βρίσκεται στο εσωτερικό ενός τριγώνου και εφάπτεται και στις τρεις πλευρές του τριγώνου λέγεται **εγγεγραμμένος κύκλος**.

Ο εγγεγραμμένος κύκλος:

- έχει κέντρο το έγκεντρο του τριγώνου, δηλαδή το σημείο τομής των διχοτόμων του,
- έχει ακτίνα την απόσταση του έγκεντρου από τις πλευρές του τριγώνου.

### ◆ Το ορθόκεντρο τριγώνου

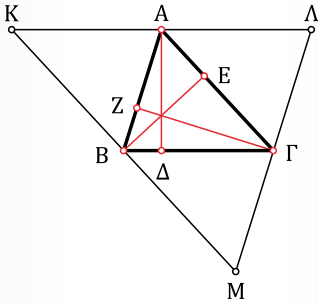
Έχουμε αποδείξει παραπάνω ότι οι διχοτόμοι ενός τριγώνου συντρέχουν στο έγκεντρο και οι μεσοκάθετοι των πλευρών του συντρέχουν στο περίκεντρο του τριγώνου.

Κάτι ανάλογο συμβαίνει και με τους φορείς των υψών του τριγώνου, πράγμα που διατυπώνεται και αποδεικνύεται παρακάτω.



### Θεώρημα 3

Οι φορείς των υψών κάθε τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο (συντρέχουν).



Ορθόκεντρο

#### Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε το τρίγωνο  $AB\Gamma$  και τα ύψη του  $AD$ ,  $BE$ ,  $\Gamma Z$ . Από τις κορυφές του τριγώνου φέρουμε παράλληλες προς τις απέναντι πλευρές του. Αυτές σχηματίζουν το τρίγωνο  $K\Lambda M$ .

- Από τα παραλληλόγραμμα  $AB\Gamma\Lambda$  και  $A\Gamma B\Lambda$  συμπεραίνουμε ότι:

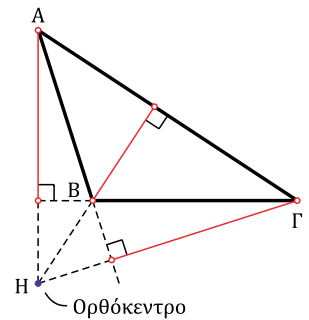
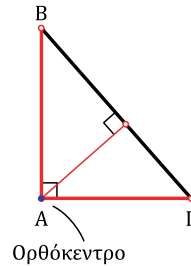
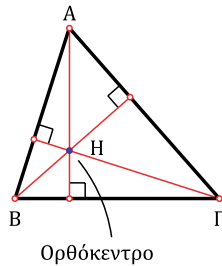
$$A\Lambda = B\Gamma = A\Lambda,$$

οπότε η ευθεία  $AD$  είναι μεσοκάθετος της πλευράς  $K\Lambda$ .

Ομοίως και η ευθεία  $BE$  είναι μεσοκάθετος της πλευράς  $K\Lambda M$  του τριγώνου  $K\Lambda M$  και η ευθεία  $\Gamma Z$  είναι μεσοκάθετος της πλευράς  $\Lambda M$ .

Οι φορείς λοιπόν των υψών  $AD$ ,  $BE$ ,  $\Gamma Z$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  διέρχονται από το ίδιο σημείο, το ορθόκεντρο του τριγώνου  $K\Lambda M$ . ■

Το σημείο από το οποίο διέρχονται οι φορείς των υψών ενός τριγώνου λέγεται **ορθόκεντρο** του τριγώνου.



Ορθόκεντρο τριγώνου

Ας παρατηρήσουμε ότι:

- Στο οξυγώνιο τρίγωνο το ορθόκεντρο βρίσκεται στο εσωτερικό του τριγώνου.
- Στο ορθογώνιο τρίγωνο το ορθόκεντρο συμπίπτει με την κορυφή της ορθής γωνίας.
- Στο αμβλυγώνιο τρίγωνο το ορθόκεντρο βρίσκεται στο εξωτερικό του τριγώνου και είναι το σημείο τομής των προεκτάσεων των υψών του.

#### Εφαρμογή

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A}=90^\circ$ ) και τυχαίο σημείο  $\Delta$  στην προέκταση της  $GA$ . Η κάθετος  $DE$  από το  $\Delta$  προς την  $B\Gamma$  τέμνει την πλευρά  $AB$  στο σημείο  $Z$ . Να αποδειχθεί ότι  $\Gamma Z \perp B\Delta$ .

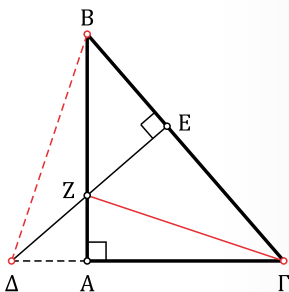
#### Λύση

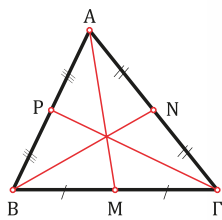
Στο τρίγωνο  $B\Delta\Gamma$  είναι:

$$BA \perp \Delta\Gamma \text{ και } DE \perp B\Gamma.$$

Το  $Z$ , ως σημείο τομής δύο υψών, είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου  $B\Delta\Gamma$ . Επομένως:

$$\Gamma Z \perp B\Delta. \blacksquare$$





### ◆ Το βαρύκεντρο τριγώνου

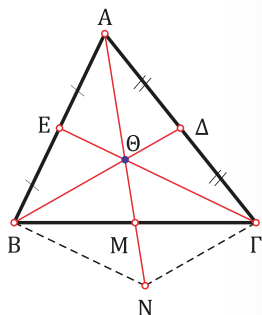
Σε κάθε τρίγωνο οι τρεις διάμεσοι βρίσκονται στο εσωτερικό του. Στην παράγραφο αυτή θα αποδειχθεί ότι οι διάμεσοι του τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το βαρύκεντρο του τριγώνου.

Οι διάμεσοι του τριγώνου ΑΒΓ, που αντιστοιχούν στις κορυφές του Α, Β και Γ συμβολίζονται κατά σειρά ως  $\mu_\alpha$ ,  $\mu_\beta$  και  $\mu_\gamma$ .



#### Θεώρημα 4

Οι διάμεσοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, του οποίου η απόσταση από κάθε κορυφή είναι ίση με τα  $\frac{2}{3}$  του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου.



#### Απόδειξη

Ας πάρουμε το τρίγωνο ΑΒΓ και ας φέρουμε τις διαμέσους ΒΔ, ΓΕ που τέμνονται στο σημείο Θ.

Θα αποδείξουμε ότι η ευθεία ΑΘ διέρχεται από το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ.

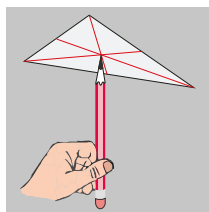
Στην προέκταση της ΑΘ παίρνουμε τμήμα  $\Theta N = \Theta A$ . Φέρουμε και τις ΝΒ, ΝΓ.

- Στο τρίγωνο ΑΒΝ το ΕΘ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΝ. Άρα  $E\Theta \parallel BN$ , δηλαδή  $BN \parallel E\Gamma$ .
- Από το τρίγωνο ΑΓΝ όμοια παίρνουμε  $\Theta\Delta \parallel N\Gamma$ , δηλαδή  $\Gamma N \parallel B\Delta$ .
- Το τετράπλευρο ΒΘΓΝ έχει τις απέναντι πλευρές παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Συνεπώς οι διαγώνιοι ΒΓ και ΘΝ διχοτομούνται στο Μ. Αυτό σημαίνει ότι η ΑΜ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ. Επομένως οι διάμεσοι διέρχονται από το ίδιο σημείο, το Θ.

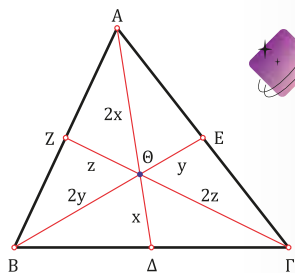
Επειδή  $A\Theta = \Theta N = 2\Theta M$ , είναι  $A\Theta = \frac{2}{3}AM$ . Ομοίως  $B\Theta = \frac{2}{3}B\Delta$  και  $\Gamma\Theta = \frac{2}{3}\Gamma E$ , δηλαδή

$$\Theta A = \frac{2}{3}\mu_\alpha, \quad \Theta B = \frac{2}{3}\mu_\beta, \quad \Theta \Gamma = \frac{2}{3}\mu_\gamma. \quad \blacksquare$$

Το σημείο τομής των διαμέσων ενός τριγώνου λέγεται **βαρύκεντρο** του τριγώνου.



Φυσική ερμηνεία του κέντρου βάρους



#### Πόρισμα

Το βαρύκεντρο τριγώνου χωρίζει τη διάμεσο σε δύο τμήματα και ισχύουν όσα διατυπώνονται στη συνέχεια.

- Το μήκος του τμήματος προς την κορυφή είναι διπλάσιο του μήκους του μικρού τμήματος προς το μέσο της αντίστοιχης πλευράς.
- Το μήκος του μεγάλου τμήματος προς την κορυφή είναι τα  $\frac{2}{3}$  του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου, ενώ το μήκος του τμήματος προς το μέσο της πλευράς είναι το  $\frac{1}{3}$  του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου.

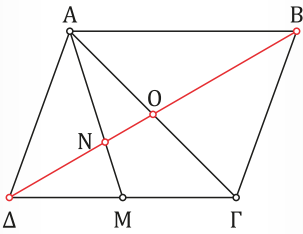


Βαρύκεντρο τριγώνου

#### Εφαρμογή

Έστω Μ το μέσο της πλευράς ΓΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Η ΑΜ τέμνει τη διαγώνιο ΒΔ στο σημείο Ν. Να αποδειχθεί ότι:

$$\Delta B = 3\Delta N.$$



### Λύση

Φέρουμε τη διαγώνιο ΑΓ και ας είναι Ο το σημείο τομής των ΑΓ, ΒΔ. Αφού οι διαγώνιες παραλληλογράμμου διχοτομούνται, το Ο είναι μέσο της ΑΓ. Στο τρίγωνο λοιπόν ΑΔΓ η ΔΟ είναι διάμεσος, όπως και η ΑΜ. Συνεπώς, το Ν είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΔΓ. Άρα:

$$\Delta N = \frac{2}{3} \Delta O = \frac{2}{3} \cdot \frac{B\Delta}{2} = \frac{1}{3} B\Delta.$$

Αποδείξαμε έτσι ότι  $\Delta N = \frac{B\Delta}{3}$ , δηλαδή  $B\Delta = 3\Delta N$ . ■

## Ασκήσεις και Προβλήματα

### Ασκήσεις Α' Ομάδας

#### Κατανόηση της θεωρίας

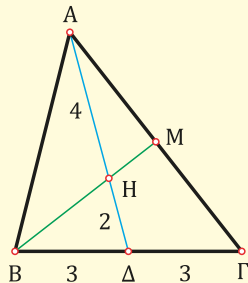
- Να απαντήσετε τις παρακάτω ερωτήσεις:
  - Να πάρετε ένα τρίγωνο, να βρείτε το έγκεντρο και να σχεδιάσετε τον εγγεγραμμένο κύκλο.
  - Σε ένα τρίγωνο να βρείτε το περίκεντρο και να φέρετε τον περιγεγραμμένο κύκλο.
  - Τι λέμε ορθόκεντρο και τι βαρύκεντρο ενός τριγώνου;
- Να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις:
  - Το έγκεντρο ενός τριγώνου είναι το σημείο τομής των \_\_\_\_\_ του και είναι το κέντρο του \_\_\_\_\_ κύκλου.
  - Το περίκεντρο ενός τριγώνου είναι το σημείο τομής των \_\_\_\_\_ των πλευρών του και είναι το κέντρο του \_\_\_\_\_ κύκλου, δηλαδή του κύκλου που διέρχεται από τις \_\_\_\_\_ του τριγώνου.
  - Το σημείο, στο οποίο συντρέχουν οι φορείς των υψών ενός τριγώνου λέγεται \_\_\_\_\_ του τριγώνου.
  - Το σημείο τομής των διαμέσων ενός τριγώνου λέγεται \_\_\_\_\_.
- Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις με Σ (Σωστή) ή Λ (Λανθασμένη).
  - Το έγκεντρο είναι το σημείο τομής των διχοτόμων ενός τριγώνου. Σ Λ
  - Το περίκεντρο είναι το σημείο τομής των υψών ενός τριγώνου. Σ Λ

- Αν Θ είναι το βαρύκεντρο ενός τριγώνου ΑΒΓ και η ΑΜ είναι διάμεσος, τότε  $\Theta A = 2\Theta M$  και  $\Theta M = \frac{1}{3} \mu_a$ . Σ Λ
- Το ορθόκεντρο ενός οξυγωνίου τριγώνου είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου. Σ Λ

#### Βασικές ασκήσεις

- Μια μαθήτρια εξέφρασε στην τάξη το εξής ερώτημα:  
«Υπάρχει τρίγωνο, στο οποίο το έγκεντρο και το περίκεντρο ταυτίζονται;»  
«Βεβαίως», απάντησαν οι συμμαθητές/τριες της.  
Πώς αιτιολόγησαν την απάντησή τους;
- Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ( $AB = AG$ ) είναι  $\hat{A} = 40^\circ$ . Στη διάμεσο ΑΜ παίρνουμε σημείο Ι, ώστε  $\hat{I\Gamma B} = 35^\circ$ . Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με κέντρο Ι και ακτίνα ΙΜ εφάπτεται στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ και ΑΓ.
- Σε έναν δορυφορικό χάρτη φαίνονται τρεις πόλεις Α, Β και Γ.
  - Πώς θα προσδιορίσει ένας τοπογράφος τη θέση ενός πυροσβεστικού σταθμού Σ, ο οποίος ισαπέχει από τους ευθύγραμμους δρόμους ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ;
  - Πού θα είναι ο σταθμός Σ, αν πρέπει να ισαπέχει από τις πόλεις Α, Β, Γ;

7. Στο παρακάτω σχήμα είναι  $AH=4$ ,  $H\Delta=2$  και  $B\Delta=\Delta\Gamma=3$ .



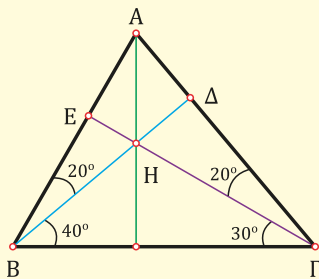
Να αποδείξετε ότι το M είναι μέσο της AG.

8. Δίνεται τρίγωνο ABΓ και οι διάμεσοί του BM, ΓN που τέμνονται στο σημείο O. Αν οι διάμεσοι είναι ίσες, να αποδείξετε ότι:
- το τρίγωνο BOΓ είναι ισοσκελές,
  - τα τρίγωνα BON και ΓOM είναι ίσα,
  - το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές.
9. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ, με  $\hat{A}=90^\circ$ . Επιπλέον, έστω M και N τα μέσα των πλευρών BΓ και AΓ, αντιστοίχως, ενώ Θ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ABΓ. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \Theta M = \frac{B\Gamma}{6},$$

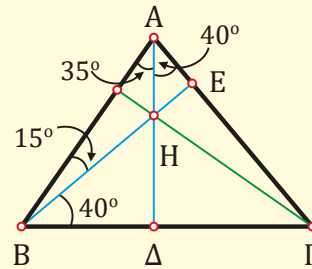
$$\beta) A\Theta = \frac{B\Gamma}{3}.$$

10. Στο παρακάτω τρίγωνο ABΓ είναι:  $\hat{A}\Delta = \hat{A}\Gamma\epsilon = 20^\circ$ ,  $\hat{\Delta}\beta\Gamma = 40^\circ$  και  $\hat{\epsilon}\Gamma\beta = 30^\circ$ .



Να αποδείξετε ότι  $AH \perp B\Gamma$ .

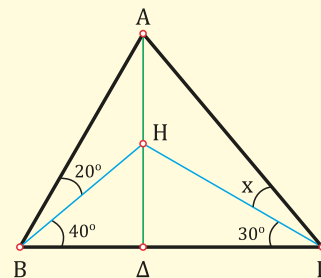
11. Στο παρακάτω σχήμα είναι:
- $$\hat{\Delta}AB = 35^\circ, \hat{\epsilon}BA = 15^\circ, \hat{\epsilon}\beta\Gamma = 40^\circ \text{ και}$$
- $$\hat{\Delta}A\Gamma = 40^\circ.$$



Να αποδείξετε ότι  $G\Gamma \perp AB$ .

12. Έστω Θ το βαρύκεντρο ενός τριγώνου ABΓ για το οποίο ισχύει  $\Theta A = B\Gamma$ .  
Να αποδείξετε ότι  $B\Theta \perp \Gamma\Theta$ .

13. Στο παρακάτω σχήμα είναι  $A\Delta \perp B\Gamma$ ,  $\hat{A}\beta H = 20^\circ$ ,  $\hat{H}\beta\Gamma = 40^\circ$  και  $\hat{H}\Gamma\beta = 30^\circ$ .



Να αποδείξετε ότι  $x = 20^\circ$ .

14. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ με  $\hat{A} = 90^\circ$  φέρουμε το ύψος AΔ και έστω M, N τα μέσα των AΔ, ΓΔ, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
- $MN \perp AB$ ,
  - $BM \perp AN$ .

15. Δίνεται παραλληλόγραμμο ABΓΔ με κέντρο O και το μέσο K της πλευράς BΓ. Η AK τέμνει τη διαγώνιο ΔB στο σημείο Λ. Να αποδείξετε ότι:
- η ΓΛ διέρχεται από το μέσο της AB,

$$\beta) B\Lambda = \frac{1}{3}B\Delta.$$

16. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ με  $AB = A\Gamma$  και το μέσο M της πλευράς BΓ. Φέρουμε  $MN \perp A\Gamma$  και θεωρούμε τα μέσα P, Δ των τμημάτων MN, NΓ, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- $M\Delta \parallel B\Gamma$ ,
- $P\Delta \perp A\Gamma$ ,
- $AP \perp B\Gamma$ .

## Ασκήσεις Β' Ομάδας

- 17.** Δίνεται παραλληλόγραμμο  $ABΓΔ$  και τα μέσα  $K, Λ$  των πλευρών  $BΓ, ΓΔ$ , αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
- $KΛ = \frac{BΔ}{2}$ ,
  - οι  $ΑΛ, ΑΚ$  τριχοτομούν τη διαγώνιο  $BΔ$ .
- 18.** Οι εφαπτομένες σε τρία σημεία  $K, Λ, Μ$  ενός κύκλου  $(I, ρ)$  τεμνόμενες ανά δύο σχηματίζουν το τρίγωνο  $ΑΒΓ$ .
- Ποιο είναι το έγκεντρο του τριγώνου  $ΑΒΓ$  και γιατί;
  - Αν συμβαίνει να είναι  $\hat{A} = 90^\circ$ , πόσο είναι η γωνία  $\hat{B}\hat{I}\hat{G}$ ;
- 19.** Σε ένα οξυγώνιο τρίγωνο  $ΑΒΓ$  φέρουμε τα ύψη  $BΔ$  και  $ΓΕ$ . Να αποδείξετε ότι:
- το περίκεντρο των τριγώνων  $\Delta B\Gamma$  και  $E B\Gamma$  είναι το μέσο  $M$  της πλευράς  $B\Gamma$ ,
  - οι μεσοκάθετοι των  $EB, ΓΔ$  τέμνονται πάνω στην  $B\Gamma$ .
- 20.** Σε ένα τετράπλευρο  $ΑΒΓΔ$  είναι  $\hat{B} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ .  
Να αποδείξετε ότι:
- τα τρίγωνα  $ΑΒΓ$  και  $ΑΔΓ$  έχουν το ίδιο περίκεντρο,
  - υπάρχει κύκλος που διέρχεται και από τις τέσσερις κορυφές του  $ΑΒΓΔ$ ,
  - τα τρίγωνα  $ΑΒΔ$  και  $ΓΒΔ$  έχουν επίσης το ίδιο περίκεντρο.
- 21.** Σε ένα τετράπλευρο  $ΑΒΓΔ$  είναι:  
 $\hat{A}\hat{B}\hat{\Delta} = \hat{A}\hat{\Gamma}\hat{\Delta} = 90^\circ$ .  
Να αποδείξετε ότι:
- το περίκεντρο του τριγώνου  $ΒΑΔ$  είναι το μέσο  $M$  του  $ΑΔ$ ,
  - τα σημεία  $A, B, \Gamma, \Delta$  βρίσκονται στον ίδιο κύκλο με διάμετρο την  $ΑΔ$ ,
  - οι μεσοκάθετοι των  $ΑΒ, Β\Gamma$  και η  $ΑΔ$  διέρχονται από το ίδιο σημείο.



Γεωμετρικός τύπος  
(σε παραλληλόγραμμο)



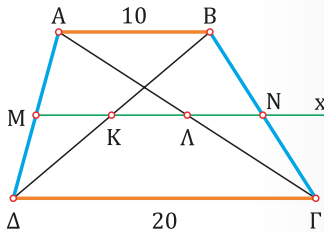
Παράκεντρα  
τριγώνου

# 3.6

## Τραπέζια

Περιέχονται

- Η διάμεσος τραapeζίου.
- Το τμήμα που ενώνει τα μέσα των διαγωνίων τραapeζίου.
- Το ισοσκελές τραπέζιο και οι ιδιότητές του.



Στην ενότητα αυτή:

1. Ορίζουμε το τραπέζιο.
2. Διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε την ιδιότητα της διαμέσου τραapeζίου.
3. Διατυπώνουμε την ιδιότητα του τμήματος που ενώνει τα μέσα των διαγωνίων τραapeζίου.
4. Ορίζουμε το ισοσκελές τραπέζιο και διατυπώνουμε τις ιδιότητές του.
5. Ερευνάμε και διατυπώνουμε κριτήρια, ώστε ένα τραπέζιο να είναι ισοσκελές.
6. Εφαρμόζουμε τα παραπάνω στη λύση ασκήσεων και προβλημάτων.

### Δραστηριότητα

Στο διπλανό σχήμα είναι  $AB \parallel \Gamma\Delta$  και το  $M$  είναι το μέσο της πλευράς  $AD$  του τετραπλεύρου  $AB\Gamma\Delta$  (τραπέζιο). Από το  $M$  φέρουμε την παράλληλη  $Mx$  προς την  $\Gamma\Delta$ .

- α) Γιατί το  $K$  είναι μέσο του  $B\Delta$ ;
- β) Να εξετάσετε αν το  $\Lambda$  είναι μέσο του  $A\Gamma$ .
- γ) Ποιο άλλο μέσο τμήματος εμφανίζεται στο σχήμα και γιατί;
- δ) Να υπολογίσετε τα τμήματα  $MN$ ,  $K\Lambda$  και να βρείτε σε κάθε περίπτωση μια ισότητα που συνδέει τα μήκη των  $MN$ ,  $K\Lambda$  με τα μήκη των  $AB$  και  $\Gamma\Delta$ .

### Θεωρία και εφαρμογές

#### ◆ Το τραπέζιο

Είδαμε ότι ένα τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές παράλληλες είναι παραλληλόγραμμο και μελετήσαμε τις ιδιότητες που έχει. Τι είδους όμως τετράπλευρο είναι αυτό, στο οποίο μόνο δύο απέναντι πλευρές είναι παράλληλες; Το τετράπλευρο αυτό ονομάζεται, όπως γνωρίζουμε, τραπέζιο και στη συνέχεια θα δούμε ενδιαφέρουσες προτάσεις που το συνοδεύουν.

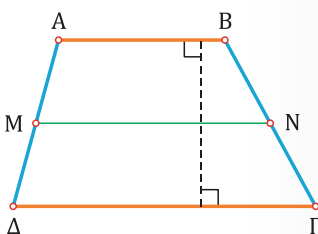
#### Ορισμός

**Τραπέζιο** λέγεται το κυρτό τετράπλευρο που έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες.

Θεωρούμε το τραπέζιο με  $AB \parallel \Gamma\Delta$ .

- Οι πλευρές  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  λέγονται **βάσεις** του τραapeζίου.
- Οι  $AD$  και  $B\Gamma$  λέγονται **μη παράλληλες** πλευρές.
- Η απόσταση των δύο βάσεων λέγεται **ύψος** του τραapeζίου.
- Το τμήμα  $MN$  που ενώνει τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών λέγεται **διάμεσος** του τραapeζίου.

Για τη διάμεσο του τραapeζίου ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

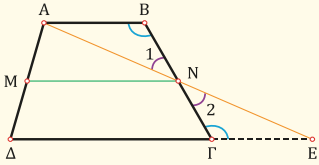


Το  $MN$  είναι διάμεσος του τραapeζίου.



### Θεώρημα 1

Η διάμεσος τραπεζίου είναι παράλληλη με τις βάσεις του και ίση με το ημίαθροισμά τους.



#### Απόδειξη

Θεωρούμε το τραπέζιο ΑΒΓΔ και τη διάμεσο ΜΝ. Θα αποδείξουμε ότι:

$$MN \parallel AB \parallel \Gamma\Delta \text{ και } MN = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2}$$

Η ευθεία ΑΝ τέμνει την ευθεία ΔΓ στο Ε. Τα τρίγωνα ΑΒΝ και ΝΓΕ είναι ίσα ( $BN = \Gamma N$ ,  $\hat{B} = \hat{\Gamma}$  και  $\hat{N}_1 = \hat{N}_2$ ). Άρα  $AN = NE$  και  $\Gamma E = AB$ .

Στο τρίγωνο ΑΔΕ το ΜΝ ενώνει τα μέσα των ΑΔ και ΑΕ. Επομένως:

- $MN \parallel \Gamma\Delta$ .
- $MN = \frac{\Delta E}{2} = \frac{\Delta\Gamma + \Gamma E}{2} = \frac{\Gamma\Delta + AB}{2}$ . ■



### Θεώρημα 2

Το τμήμα που ενώνει τα μέσα των διαγωνίων τραπεζίου είναι παράλληλο προς τις βάσεις και ίσο με την ημιδιαφορά τους.

#### Απόδειξη

Θεωρούμε το τραπέζιο ΑΒΓΔ, με  $AB < \Gamma\Delta$ , και τα μέσα Μ, Ν των διαγωνίων του ΑΓ, ΒΔ αντίστοιχα. Θα αποδείξουμε ότι  $MN \parallel \Gamma\Delta$  και  $MN = \frac{\Gamma\Delta - AB}{2}$ .

Έστω ότι η ευθεία ΒΜ τέμνει την ΓΔ στο Ε. Τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΜΓΕ είναι ίσα, αφού  $AM = \Gamma M$ ,  $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1$  και  $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ .

Επομένως:

$$BM = ME \text{ και } \Gamma E = AB.$$

Στο τρίγωνο ΒΔΕ το ΜΝ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΒΔ, ΒΕ. Άρα:

- $MN \parallel \Gamma\Delta$ ,
- $MN = \frac{\Delta E}{2} = \frac{\Delta\Gamma - \Gamma E}{2} = \frac{\Gamma\Delta - AB}{2}$ . ■

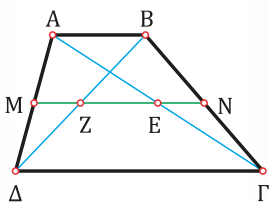
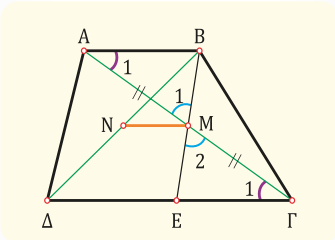
Ας πάρουμε τώρα ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ και τη διάμεσό του ΜΝ.

Επειδή  $MN \parallel AB$  και  $MN \parallel \Gamma\Delta$ , η ΜΝ θα περάσει τόσο από το μέσο της διαγωνίου ΒΔ (στο τρίγωνο ΔΑΒ) όσο και από το μέσο της διαγωνίου ΑΓ (στο τρίγωνο ΑΔΓ). Καταλήγουμε, έτσι, στο συμπέρασμα.

### Πόρισμα

Σε κάθε τραπέζιο:

- η διάμεσος διέρχεται από τα μέσα των διαγωνίων του,
- τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών και τα μέσα των διαγωνίων βρίσκονται στην ίδια ευθεία.



Ανακαλύπτουμε τις ιδιότητες της διάμεσου τραπεζίου

Αφού τα μέσα Μ, Ν των μη παράλληλων πλευρών ΑΔ, ΒΓ και τα μέσα Ε, Ζ των διαγωνίων ΑΓ, ΒΔ του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι στην ίδια ευθεία, μπορούμε να δια-

πιστώσουμε ξανά ότι:

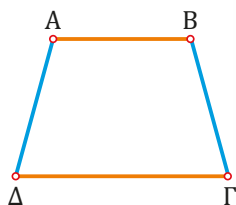
$$ZE = ME - MZ = \frac{\Gamma\Delta}{2} - \frac{AB}{2} = \frac{\Gamma\Delta - AB}{2},$$

$$MN = MZ + ZN = \frac{AB}{2} + \frac{\Gamma\Delta}{2} = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2}.$$

### ♦ Το ισοσκελές τραπέζιο

Τα τραπέζια έχουν δύο μόνο πλευρές παράλληλες, αφού διαφορετικά θα ήταν παραλληλόγραμμα. Οι μη παράλληλες πλευρές μπορεί να είναι ίσες, μπορεί και άνισες.

Στην περίπτωση που οι μη παράλληλες πλευρές είναι ίσες παίρνουμε ένα ενδιαφέρον είδος τραπέζιου με απλές και αναμενόμενες ιδιότητες. Μελετάμε λοιπόν στη συνέχεια το ισοσκελές τραπέζιο.



#### Ορισμός

Ένα τραπέζιο λέγεται ισοσκελές, όταν οι μη παράλληλες πλευρές του είναι ίσες.

Το τραπέζιο λοιπόν ABΓΔ ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ) με  $AD = BG$  είναι ισοσκελές.

Τι συμβαίνει με τις γωνίες των βάσεων ή τις διαγωνίους σε ένα ισοσκελές τραπέζιο;

Η απάντηση είναι αναμενόμενη και διατυπώνεται στο επόμενο θεώρημα.



#### Θεώρημα 3

Σε κάθε ισοσκελές τραπέζιο:

- οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση είναι ίσες,
- οι διαγωνίοι είναι ίσες.

#### Απόδειξη

α) Θεωρούμε το ισοσκελές τραπέζιο ABΓΔ με  $AB \parallel \Gamma\Delta$  και  $AD = BG$ .

Φέρουμε τα τμήματα:

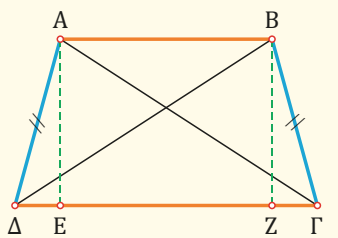
$$AE \perp \Gamma\Delta \quad \text{και} \quad BZ \perp \Gamma\Delta.$$

Επειδή  $AE = BZ$  και  $AD = BG$ , τα ορθογώνια τρίγωνα AΔΕ και ΒΓΖ είναι ίσα. Επομένως  $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$ . Οι γωνίες  $\hat{A}$  και  $\hat{B}$  είναι επίσης ίσες ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών  $\hat{\Delta}$  και  $\hat{\Gamma}$ .

β) Αφού  $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$  και  $AD = BG$ , τα τρίγωνα AΔΓ και ΒΓΔ είναι ίσα (η ΓΔ είναι κοινή πλευρά). Επομένως,

$$BD = AG,$$

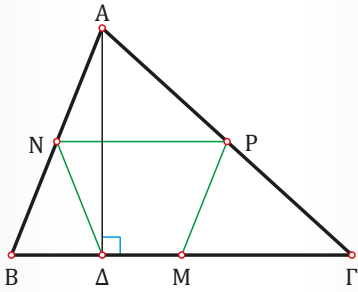
δηλαδή οι διαγωνίοι στο ισοσκελές τραπέζιο είναι ίσες. ■



Ιδιότητες  
ισοσκελούς  
τραπέζιου

#### Παράδειγμα

Σε ένα οξυγώνιο τρίγωνο ABΓ φέρουμε το ύψος AD και ως είναι M το μέσο της ΒΓ, N το μέσο της AB και P το μέσο της πλευράς ΑΓ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο MΔNP είναι ισοσκελές τραπέζιο.



### Λύση

Στο τρίγωνο ABΓ το NP ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του. Άρα:

$$NP \parallel B\Gamma.$$

Επειδή  $PM \parallel AB$ , δεν μπορεί να είναι  $PM \parallel ND$ . Άρα το  $M\Delta NP$  είναι τραπέζιο, αφού έχει μόνο τις πλευρές  $\Delta M, NP$  παράλληλες.

Ωστόσο, στο ορθογώνιο τρίγωνο  $\Delta DB$  η  $\Delta N$  είναι διάμεσος, οπότε:

$$\Delta N = \frac{AB}{2} = PM.$$

Άρα το τραπέζιο  $NPM\Delta$  είναι ισοσκελές. ■

Ας δούμε τώρα ποια επιπλέον στοιχεία πρέπει να έχει ένα τραπέζιο, ώστε αυτό να είναι ισοσκελές.

Οι βασικές ιδιότητες του ισοσκελούς τραapeζιού αποτελούν και κριτήρια για να είναι αυτό ισοσκελές. Έτσι:



### Κριτήρια ισοσκελούς τραapeζιού

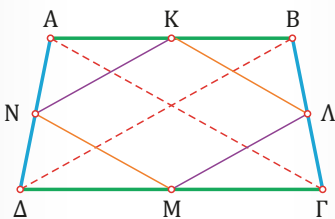
Ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις.

- α) Οι γωνίες μιας βάσης είναι ίσες.
- β) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες.
- γ) Οι μη παράλληλες πλευρές του είναι ίσες.

### Εφαρμογή

Παίρνουμε ένα ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ) και τα μέσα  $K, \Lambda, M, N$  των πλευρών του  $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ . Να αποδείξετε ότι:

- α) το τετράπλευρο  $K\Lambda M N$  είναι ρόμβος,
- β) η ευθεία  $KM$  είναι μεσοκάθετος των τμημάτων  $AB$  και  $\Gamma\Delta$ .



### Λύση

α) Το  $K\Lambda M N$  είναι παραλληλόγραμμο (εφαρμογή στην Ενότητα 3.3).

Για να είναι ρόμβος, αρκεί π.χ. να αποδείξουμε ότι  $K\Lambda = K N$ .

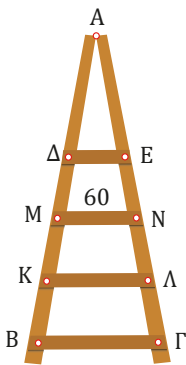
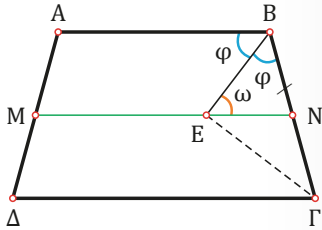
Από τα τρίγωνα  $B\Lambda\Gamma$  και  $A\Lambda\Delta$  παίρνουμε ότι  $K\Lambda = \frac{A\Gamma}{2}$ ,  $K N = \frac{B\Delta}{2}$ , διότι τα παραπάνω τμήματα ενώνουν τα μέσα δύο πλευρών τους.

Αφού το τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  είναι ισοσκελές, οι διαγώνιοί του  $A\Gamma$  και  $B\Delta$  είναι ίσες, δηλαδή  $A\Gamma = B\Delta$ . Επομένως από τις παραπάνω ισότητες παίρνουμε ότι  $K\Lambda = K N$ .

β) Στον ρόμβο οι διάγωνιοι είναι κάθετες. Επομένως θα είναι:

$$K M \perp \Lambda N.$$

Αφού  $\Lambda N \parallel AB \parallel \Gamma\Delta$ , θα είναι  $K M \perp AB$  και  $K M \perp \Gamma\Delta$ . Τα  $K, M$  όμως είναι μέσα των  $AB, \Gamma\Delta$  και έτσι η ευθεία  $K M$  είναι μεσοκάθετος των πλευρών  $AB$  και  $\Gamma\Delta$ .

**Εφαρμογή**

Δίνεται τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB \parallel \Gamma\Delta$  και η διάμεσος  $MN$ . Η διχοτόμος της γωνίας  $\hat{B}$  τέμνει την  $MN$  στο σημείο  $E$ . Να αποδειχθεί ότι  $EB \perp E\Gamma$ .

**Λύση**

Αφού η  $BE$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{B}$ , θα είναι:

$$\hat{EBA} = \hat{EBN} = \varphi.$$

Επειδή  $MN \parallel AB$  (ως διάμεσος), είναι  $AB \parallel EN$ , οπότε:

$$\hat{ABE} = \hat{BEN} \quad \text{ή} \quad \varphi = \omega.$$

Αφού  $\varphi = \omega$  ( $\hat{NBE} = \hat{NEB}$ ), το τρίγωνο  $NBE$  είναι ισοσκελές. Άρα:

$$NE = NB = N\Gamma.$$

Στο τρίγωνο  $EB\Gamma$  η  $EN$  είναι διάμεσος και ισχύει ότι  $EN = \frac{B\Gamma}{2}$ .

Άρα το τρίγωνο  $EB\Gamma$  είναι ορθογώνιο, δηλαδή  $EB \perp E\Gamma$ .

**Πρόβλημα 1°**

Στο διπλανό σχήμα τα  $M, N$  είναι μέσα των ίσων πλευρών  $AB, A\Gamma$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ . Τα  $K, \Lambda$  είναι μέσα των  $MB, N\Gamma$ .

- Ποιο είναι το μήκος του  $B\Gamma$ ;
- Ένας αγρότης θέλει να φτιάξει μια σκάλα με τη μορφή του σχήματος.
  - Τι μήκος έχει το σκαλοπάτι  $K\Lambda$ ;
  - Αν ο αγρότης θέλει το  $\Delta E$  να έχει μήκος 30 cm, πώς μπορεί να φτιάξει αυτήν την σκάλα;

**Λύση**

α) Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  θα είναι  $MN = \frac{B\Gamma}{2}$ , οπότε  $B\Gamma = 120$  cm.

β) i) Στο τραπέζιο  $MN\Gamma B$  η  $K\Lambda$  είναι διάμεσος. Επομένως:

$$K\Lambda = \frac{MN + B\Gamma}{2} = \frac{60 + 120}{2} = 90 \text{ cm.}$$

ii) Αφού  $\Delta E = 30 = \frac{MN}{2}$ , τα  $\Delta, E$  είναι μέσα των  $AM, AN$ . Άρα:

$$A\Delta = \Delta M = M\Lambda = \Lambda B \quad \text{και}$$

$$A\epsilon = \epsilon N = N\Lambda = \Lambda\Gamma.$$

Ο αγρότης δεν έχει παρά να διαιρέσει τα ίσου μήκους ξύλινα καδρόνια  $AB$  και  $A\Gamma$  σε 4 ίσα μέρη, να κόψει τα σκαλιά στα μήκη 30, 60, 90, 120 cm (με τις σχετικές προεκτάσεις) και να τα καρφώσει.

Το  $B\Gamma$  μπορεί, για πρακτικούς λόγους, να το κόψει μικρότερο και να το τοποθετήσει λίγο πιο ψηλά, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Αληθές-ψευδές  
στα τραπέζια

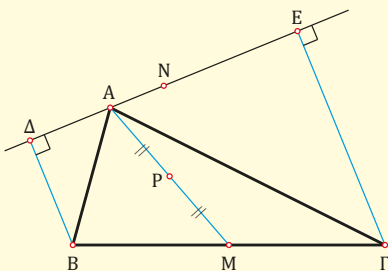


Διαίρεση ευθυγράμμου  
τμήματος σε ίσα τμήματα

## Ασκήσεις και Προβλήματα

### Ασκήσεις Α' Ομάδας

- Δίνεται τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB//\Gamma\Delta$  και  $\Gamma\Delta=2AB$ . Έστω  $M, K, \Lambda, N$  τα μέσα των  $AD, BD, A\Gamma, B\Gamma$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
  - $MK=K\Lambda=\Lambda N$ ,
  - $MN=\frac{3}{2}AB$ .
- Δίνεται τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB//\Gamma\Delta$  και  $\Gamma\Delta=3AB$ . Έστω  $M, N$  τα μέσα των  $AD, B\Gamma$  και  $K, \Lambda$  τα μέσα των  $A\Gamma, BD$ , αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
  - $MK=\Lambda N$ ,
  - το  $AK\Lambda B$  είναι παραλληλόγραμμο.
- Δίνεται τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB//\Gamma\Delta$  και η διάμεσός του  $EZ$ . Η διχοτόμος της γωνίας  $\hat{B}$  τέμνει την  $EZ$  στο σημείο  $H$ . Να αποδείξετε ότι  $\hat{B}\hat{H}\Gamma=90^\circ$ .
- Στο παρακάτω σχήμα το  $P$  είναι μέσο της διαμέσου  $AM$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  και  $BD\perp\epsilon, \Gamma E\perp\epsilon$ . Έστω ακόμη το μέσο  $N$  του τμήματος  $\Delta E$ .



Να αποδείξετε ότι:

- $2MN=B\Delta+\Gamma E$ ,
  - $AM=2PN$ .
- Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και τα μέσα  $\Delta, E$  των πλευρών  $AB, A\Gamma$ , αντίστοιχα.
    - Να αποδείξετε ότι το  $\Delta E\Gamma B$  είναι τραπέζιο.
    - Αν  $AB=A\Gamma$ , να αποδείξετε ότι το  $\Delta E\Gamma B$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.
  - Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB//\Gamma\Delta$ ) με  $AB<\Gamma\Delta$  και τα ύψη του  $AE$  και  $BZ$ . Να αποδείξετε ότι  $\Delta E=\Gamma Z=\frac{\Gamma\Delta-AB}{2}$ .

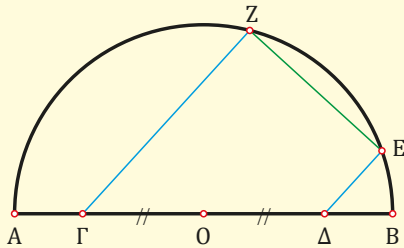
- Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB//\Gamma\Delta$  και  $O$  το σημείο τομής των διαγωνίων του. Θεωρούμε τα σημεία  $E, Z, H, \Theta$ , που είναι τα μέσα των τμημάτων  $OA, OB, O\Gamma, O\Delta$ , αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το  $EZH\Theta$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.
- Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  και το ύψος του  $AE$ . Αν  $K, \Lambda$  είναι τα μέσα των  $AD$  και  $B\Gamma$ , αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το  $K\Lambda\Gamma E$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.

### Ασκήσεις Β' Ομάδας

- Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ , το ύψος του  $AD$  και τα μέσα  $H, Z, E$  των πλευρών  $AB, A\Gamma, B\Gamma$ , αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
  - $\Delta H=EZ$ ,
  - το τετράπλευρο  $\Delta HZE$  είναι ισοσκελές τραπέζιο,
  - $HE=\Delta Z$ .
- Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB=A\Gamma$  και το μέσο της πλευράς  $AB$ . Η μεσοκάθετος της  $AB$  τέμνει την πλευρά  $A\Gamma$  στο σημείο  $Z$  και η παράλληλη από το  $Z$  προς την  $B\Gamma$  τέμνει την  $AB$  στο  $H$ . Να αποδείξετε ότι:
  - το  $HZ\Gamma B$  είναι ισοσκελές τραπέζιο,
  - $\Gamma H=AZ$ .
- Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  και το ισοσκελές τραπέζιο  $A\Gamma E\Delta$  με  $\Delta E//A\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:
  - το τρίγωνο  $\Gamma B E$  είναι ισοσκελές,
  - η  $\Gamma A$  διχοτομεί τη γωνία  $\hat{B}\Gamma E$ ,
  - $\hat{B}\hat{E}\Delta=90^\circ$ .
- Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  και το συμμετρικό  $E$  του σημείου  $A$  ως προς τη διαγώνιο  $B\Delta$ . Να αποδείξετε ότι το  $B\Gamma E\Delta$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.

13. Δίνεται τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB \parallel \Gamma\Delta$  και  $AB + \Gamma\Delta = B\Gamma$ .  
Αν  $M$  είναι το μέσο του  $A\Delta$ , να αποδείξετε ότι:  
 $\widehat{BM\Gamma} = 90^\circ$ .

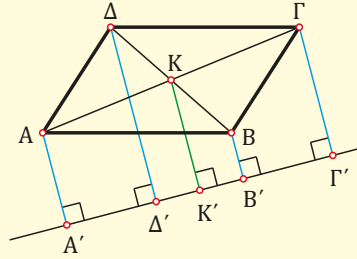
14. Στο παρακάτω σχήμα οι χορδές  $\Gamma Z$ ,  $\Delta E$  είναι παράλληλες και το κέντρο  $O$  του κύκλου είναι μέσο του  $\Gamma\Delta$ .



Να αποδείξετε ότι  $ZE \perp \Delta E$ .

15. Δίνεται τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB \parallel \Gamma\Delta$ ,  $\widehat{A} = \widehat{\Delta} = 90^\circ$  και  $B\Gamma = 2AB$ . Έστω  $M$  το μέσο του  $B\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι  $\widehat{BM\Delta} = 3 \cdot \widehat{M\Delta\Gamma}$ .

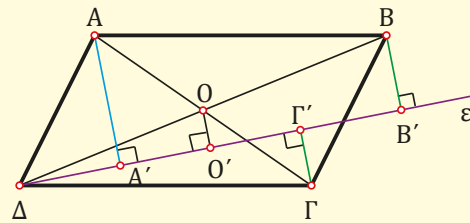
16. Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο.



Να αποδείξετε ότι:

$$AA' + BB' + \Gamma\Gamma' + \Delta\Delta' = 4KK'$$

17. Το  $AB\Gamma\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο και η  $\epsilon$  είναι τυχαία ευθεία που διέρχεται από το  $\Delta$ .



Να αποδείξετε ότι  $AA' = \Gamma\Gamma' + BB'$ .



Παραλληλόγραμμα-τραπέζια  
(πολλαπλής επιλογής)

# 3.7

## Ανακεφαλαίωση

**Στην ενότητα αυτή** περιλαμβάνονται έργα για περαιτέρω αναζητήσεις και διερευνήσεις των μαθητών/τριών, με στόχο την εμπάθυνση και κατανόηση των Προσδοκώμενων Μαθησιακών Αποτελεσμάτων του κεφαλαίου.

1. α) Να γράψετε τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου, του ορθογωνίου και του ρόμβου, χαράσσοντας κάθε φορά το αντίστοιχο σχήμα.
  - β) Τι επιπλέον στοιχεία χρειάζεται ένα παραλληλόγραμμο για να γίνει:
    - i) ορθογώνιο
    - ii) ρόμβος.
  - γ) Ποια επιπλέον ιδιότητα πρέπει να έχει ένα τετράπλευρο, ώστε αυτό να είναι:
    - i) ορθογώνιο
    - ii) ρόμβος.
  - δ) Τι γνωρίζετε για το τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου;
2. α) Να διατυπώσετε την πρόταση που αφορά στη διάμεσο ορθογωνίου τριγώνου προς την υποτείνουσα καθώς και την αντίστροφή της.
  - β) Να γράψετε τις ιδιότητες του τραπεζίου καθώς και του ισοσκελούς τραπεζίου.
  - γ) Να σχεδιάσετε σε ένα τρίγωνο:
    - i) το έγκεντρο και τον εγγεγραμμένο κύκλο,
    - ii) το περίκεντρο και τον περιγεγραμμένο κύκλο,
    - iii) το ορθόκεντρο (τρεις περιπτώσεις),
    - iv) το βαρύκεντρο.
  - δ) Ποια ιδιότητα έχει η διάμεσος τραπεζίου και ποια το τμήμα που ενώνει τα μέσα των διαγωνίων του;
3. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις με Σ (Σωστή) ή Λ (Λανθασμένη).
 

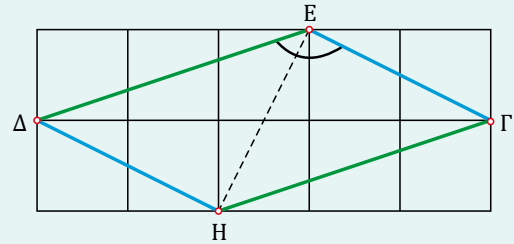
α) Αν σε ένα τετράπλευρο δύο απέναντι πλευρές είναι ίσες και παράλληλες, αυτό είναι παραλληλόγραμμο.	Σ   Λ
β) Αν ένα τετράπλευρο έχει ίσες διαγωνίους, αυτό είναι ορθογώνιο.	Σ   Λ
γ) Οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται κάθετα και διχοτομούν τις γωνίες του.	Σ   Λ
δ) Το τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου είναι ίσο με το μισό της τρίτης πλευράς.	Σ   Λ
ε) Αν η AM είναι διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου ABΓ, τότε $AM = \frac{BΓ}{2}$ .	Σ   Λ
στ) Αν σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία είναι $30^\circ$ , τότε η απέναντι πλευρά της είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.	Σ   Λ
ζ) Η διάμεσος τραπεζίου διχοτομεί τις διαγώνιες και ισούται με το ημίθροισμά των βάσεων του.	Σ   Λ
4. Αν M, N είναι τα μέσα των πλευρών AD και BΓ παραλληλογράμμου ABΓΔ και O είναι το κέντρο του, να αποδείξετε ότι τα σημεία M, O και N βρίσκονται στην ίδια ευθεία.



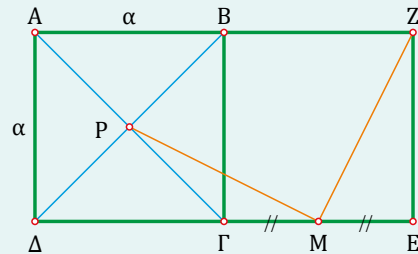
**13. Πλέγματα και γεωμετρία.**

Στο σχήμα βλέπουμε δέκα τετράγωνα, πέντε σε κάθε σειρά και τέσσερα μεγάλα. Να αποδείξετε ότι:

- α) το ΔΕΓΗ είναι παραλληλόγραμμο,
- β)  $EH \perp \Delta H$ ,
- γ)  $\widehat{\Delta \hat{E} \Gamma} = 135^\circ$ .
- δ) Να προσθέσετε δύο ακόμα σειρές κάτω από το πλέγμα και να υπολογίσετε με άλλον τρόπο τη γωνία  $\widehat{E}$ .



- 14.** Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε δύο τετράγωνα ΑΒΓΔ και ΒΓΕΖ με κοινή πλευρά ΒΓ. Αν Μ είναι το μέσο του ΓΕ, να αποδείξετε ότι: α)  $MP = MZ$ , β)  $MP \perp MZ$ .

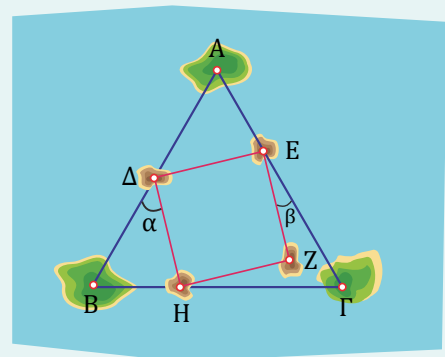


**15. Ανακατασκευή τριγώνου**

Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε σημειώσει τα μέσα Κ, Λ, Μ των πλευρών του. Από λάθος, οι πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ έσβησαν και έμειναν μόνο τα σημεία Κ, Λ, Μ. Πώς θα ξαναφτιάξουμε το τρίγωνο ΑΒΓ, έχοντας μόνο τα μέσα των πλευρών του;

**16. Το δίλημμα του τοπογράφου**

Ένας τοπογράφος μηχανικός αποτύπωσε στο σχέδιό του με τη βοήθεια δορυφόρου τρία νησιά και τέσσερις βραχονησίδες. Ο μηχανικός παρατήρησε ότι τα νησιά Α, Β, Γ σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο και οι βραχονησίδες Δ, Ε, Ζ, Η τετράγωνο. Οι μετρήσεις του δείχνουν ότι  $\alpha + \beta = 60^\circ$ . Να αιτιολογήσετε ότι οι μετρήσεις είναι σωστές.

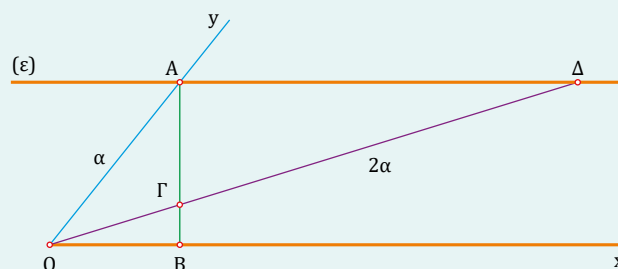


**17. Γεωμετρική κατασκευή**

Έστω Ρ εσωτερικό σημείο μιας γωνίας  $\widehat{xOy}$ . Να κατασκευάσετε (φέρετε) από το Ρ ευθεία που να ορίζει με τις  $Ox, Oy$  τμήμα ΑΒ που έχει μέσο το Ρ.

**18. Απρόσμενη τριχοτόμηση γωνίας**

Από τυχαίο σημείο Α της πλευράς  $Oy$  μιας τυχαίας γωνίας  $\widehat{xOy}$  φέρουμε την παράλληλη (ε) προς την  $Ox$  και την  $AB \perp Ox$ .



Από το  $O$  φέρουμε ευθεία  $ΟΓΔ$  που συναντά την  $AB$  στο  $Γ$  και την  $(\epsilon)$  στο  $Δ$  έτσι, ώστε  $ΓΔ=2ΟΑ$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $\widehat{A\hat{O}B}=3\widehat{\Delta}$ .

β) Να εξηγήσετε πώς το παραπάνω σχήμα επιτρέπει να τριχοτομήσουμε μια τυχαία γωνία.

γ) Η τριχοτόμηση μιας γωνίας με κανόνα και διαβήτη είναι αδύνατη. Έρχεται αυτό σε αντίφαση με το ερώτημα (β) και γιατί;

### 19. Γεωμετρία και μπιλιάρδο!

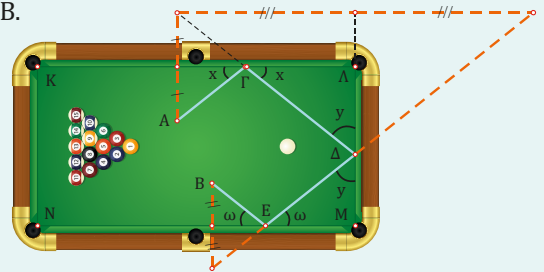
Σε ένα ορθογώνιο μπιλιάρδο  $KLMN$  βρίσκονται δύο μπάλες  $A$  και  $B$ .

α) Πώς θα βρούμε σημείο  $Γ$  στην πλευρά  $ΚΛ$  έτσι ώστε, αν η μπάλα  $A$  κινηθεί ομαλά προς το  $Γ$ , και ανακλώμενη στις πλευρές  $ΚΛ$ ,  $ΛΜ$ ,  $MN$  του μπιλιάρδου να χτυπήσει την μπάλα  $B$ ;

β) Στο σχήμα που δίνεται βλέπουμε μια τέτοια διαδρομή και πώς προέκυψε με γεωμετρικό τρόπο. Να εξηγήσετε αυτήν την κατασκευή, αιτιολογώντας ότι είναι σωστή.

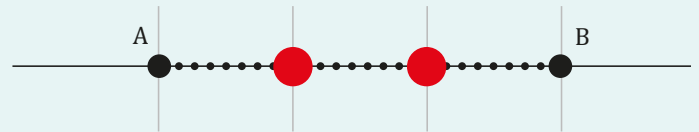
γ) Να αποδείξετε ότι  $x=\omega$ .

δ) Να εξετάσετε αν οι διαδρομές  $AΓ$  και  $ΔΕ$  είναι παράλληλες. Ισχύει το ίδιο για τις διαδρομές  $ΓΔ$  και  $EB$ ;



### 20. Ο μαγικός κανόνας

Ένας μαθητής διαθέτει έναν παράξενο κανόνα, ο οποίος του δίνει τη δυνατότητα να χωρίζει ένα τυχαίο ευθύγραμμο τμήμα σε τρία ίσα μέρη.



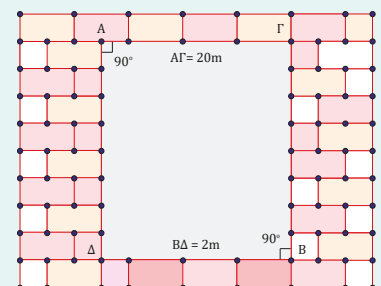
Όταν είπε στον μαθηματικό του το γεγονός αυτό, εκείνος του απάντησε: «Τότε μπορείς μόνο με τη βοήθεια του κανόνα (αδιαβάθητου χάρακα), χωρίς διαβήτη, να βρεις και το μέσο κάθε ευθυγράμμου τμήματος». «Πώς γίνεται αυτό;», ρώτησε ο μαθητής.

«Προσπάθησε να το βρεις μόνος/η ή με τους/τις συμμαθητές/τριες σου και το συζητάμε στο επόμενο μάθημα», απάντησε ο καθηγητής. Πώς θα λύνατε εσείς το παραπάνω πρόβλημα, αν διαθέτατε τον κανόνα αυτό;

### 21. Παράθυρο στον τοίχο!

Ένας κτίστης θέλει να αφήσει ένα ορθογώνιο παράθυρο σε έναν διακοσμημένο τοίχο. Για το λόγο αυτό έχει εξασφαλίσει ότι τα μήκη  $AΓ$  και  $BΔ$  είναι ίσα. Έχει επίσης φροντίσει οι γωνίες  $A$  και  $B$  να είναι ορθές.

Τη μέθοδο αυτή ο κτίστης την έχει αποκτήσει εμπειρικά. Μπορείτε να εξηγήσετε στους/στις συμμαθητές/τριες σας, αλλά και στον κτίστη ότι το παράθυρο είναι όντως ορθογώνιο, κάνοντας χρήση των γεωμετρικών σας γνώσεων;



## 22. Τριχοτόμηση τμήματος

Δυο μαθητές, ο Γιώργος και ο Ορφέας, περιεργάζονται το διπλανό σχήμα.

Το σχήμα αυτό είναι φτιαγμένο με σπίρτα που όλα έχουν το ίδιο μήκος.

(α) Ο Γιώργος ισχυρίζεται ότι το σχήμα αυτό είναι ένα ισόπλευρο τρίγωνο.

Ο Ορφέας συμφωνεί, εκφράζει όμως την απορία ότι για να έχουμε με βεβαιότητα και τις πλευρές του τριγώνου πρέπει να κάνουμε κάποια σημαντική παρατήρηση. Ποια μπορεί να είναι αυτή η απαραίτητη παρατήρηση και γιατί το τρίγωνο είναι όντως ισόπλευρο;

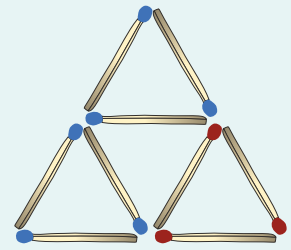
(β) Ο Γιώργος ισχυρίζεται ότι τα σπίρτα που είναι μέσα στο τρίγωνο είναι παράλληλα με τις πλευρές του μεγάλου τριγώνου. Πώς θα δικαιολογούσατε αυτόν τον ισχυρισμό, αν συμφωνείτε;

(γ) Όταν η καθηγήτρια της τάξης στα μαθηματικά, αντιλήφθηκε τον διάλογο των δύο μαθητών, γεμάτη ικανοποίηση για τις απαντήσεις που της έδωσαν, τους/τις έδωσε ένα ακόμα συμπληρωματικό ερώτημα για το άλλο μάθημα:

**«Μόνο με τον κανόνα να χωρίσετε ένα σπίρτο σε τρία ίσα μέρη»**

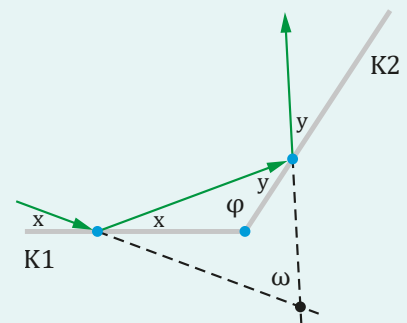
Τα παιδιά στο άλλο μάθημα ζήτησαν τη βοήθεια της καθηγήτριας και εκείνη συζήτησε το πρόβλημα στην τάξη.

Το τμήμα με την καθοδήγησή της και συνεργασία μεταξύ τους βρήκε τη λύση. Πώς άραγε μπορεί να γίνει μια τέτοια κατασκευή μόνο με τον κανόνα;



## 23. Διαδοχικές αντανάκλασεις

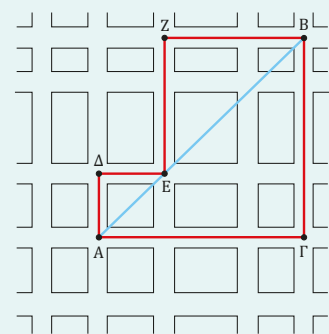
Δύο καθρέφτες K1 και K2 σχηματίζουν γωνία  $\varphi$ . Η διεύθυνση μιας ακτίνας που προσκρούει στον K1 και η διεύθυνση μετά την αντανάκλαση με τον K2 σχηματίζουν γωνία  $\omega$ . Ποια σχέση συνδέει τις δύο αυτές γωνίες;



## 24. Μετακίνηση στην πόλη

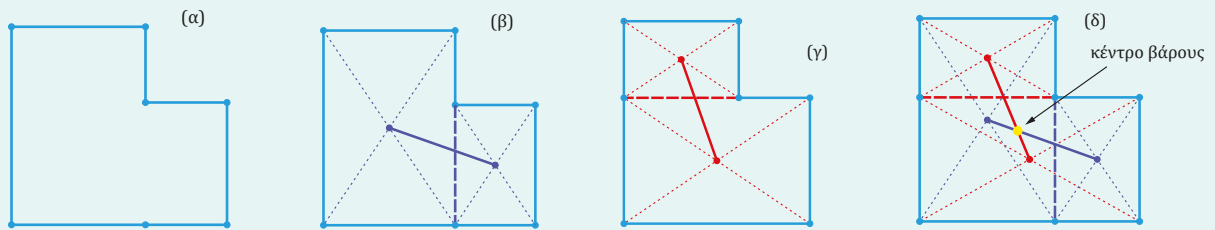
Στον χάρτη της πόλης βλέπουμε τις διαδρομές ΑΓΒ και ΑΔΕΖΒ που ακολούθησαν δύο φίλοι για να μεταβούν από τη θέση Α στη θέση Β.

Να συγκρίνετε τις δύο διαδρομές ως προς το μήκος τους.



## 25. Το λήμμα του Αρχιμήδη για τα κέντρα βάρους

Σύμφωνα με το λήμμα αυτό, το κέντρο βάρους του συστήματος δύο σωμάτων βρίσκεται στην ευθεία που ενώνει τα κέντρα βάρους των δύο σωμάτων.



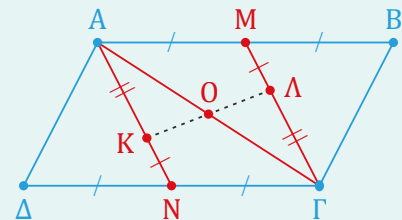
Είναι γνωστό ότι το κέντρο βάρους ενός παραλληλογράμμου είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του και το κέντρο βάρους ενός τριγώνου είναι το σημείο τομής των διαμέσων του.

α) Με τη βοήθεια των σχημάτων (β), (γ) και (δ), να εξηγήσετε πώς μπορούμε να βρούμε το κέντρο βάρους του σώματος του σχήματος (α).

β) Στο παραλληλόγραμμο  $ABΓΔ$  τα  $M, N, O$  είναι τα μέσα των  $AB, ΔΓ$  και  $ΑΓ$  αντίστοιχα. Για τα σημεία  $K$  και  $Λ$  ισχύουν:

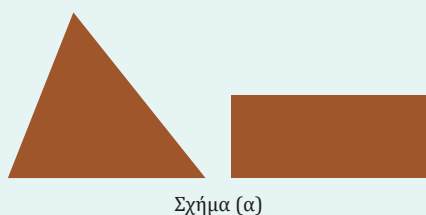
$$AK = 2KN \text{ και } ΓΛ = 2ΛM.$$

Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $K, O$  και  $Λ$  είναι συνευθειακά.

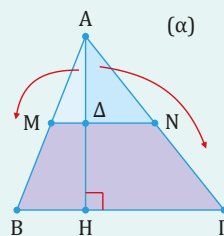


## 26. Ανατομές σχημάτων

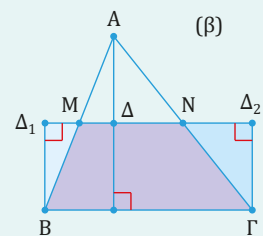
Ένας ξυλουργός έχει μία σανίδα σχήματος τριγώνου και θέλει να την κόψει σε κομμάτια, τα οποία τοποθετώντας τα κατάλληλα θα συνθέσουν μία σανίδα σχήματος ορθογωνίου (Σχήμα (α)). Έφερε το ύψος  $AH$  του τριγώνου  $ABΓ$  και πήρε τα μέσα  $M, N$  των πλευρών του  $AB, ΑΓ$  αντίστοιχα. Απέκοψε τα τρίγωνα  $ΑΜΔ$  και  $ΑΝΓ$ , τα οποία τοποθέτησε όπως υπονοείται στο Σχήμα (β). Για να ελέγξουμε ότι η κατασκευή αυτή είναι ακριβής θα εργαστούμε στο Σχήμα (γ), όπου  $M, N$  είναι τα μέσα των  $AB, ΑΓ$  αντίστοιχα και  $AH$  το ύψος του τριγώνου, το οποίο τέμνει τη  $MN$  στο  $Δ$ . Τα  $Δ_1$  και  $Δ_2$  είναι οι προβολές των  $B$  και  $Γ$  στη  $MN$  αντίστοιχα.



Σχήμα (α)



Σχήμα (β)



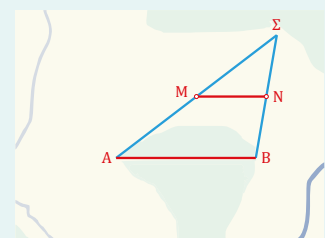
Σχήμα (γ)

Να αποδείξετε ότι:

- το  $AH$  είναι κάθετο στη  $MN$ ,
- το τρίγωνο  $ΑΔΜ$  είναι ίσο με το  $ΜΔ_1Β$  και το  $ΑΔΝ$  είναι ίσο με το  $ΝΔ_2Γ$ ,
- το τετράπλευρο  $Δ_1ΒΓΔ_2$  είναι ορθογώνιο.

27. Ο Γιώργος, δεινός γεωμέτρης, θέλει να υπολογίσει το πλάτος  $AB$  ενός έλους. Έφερε τα τμήματα  $ΣΑ$  και  $ΣΒ$  και πήρε τα μέσα τους  $M, N$  αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Στη συνέχεια μέτρησε το τμήμα  $MN$  και βρήκε  $MN=128m$ .

Πόσα μέτρα είναι το μήκος του  $AB$ ;



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4<sup>ο</sup>

## Στερεομετρία

### Περιεχόμενα

- 4.1 Ευθείες και επίπεδα στον χώρο
- 4.2 Διέδρες γωνίες - Κάθετα επίπεδα
- 4.3 Ανακεφαλαίωση

#### Λέξεις κλειδιά:

Επίπεδο	Θεώρημα τριών καθέτων
Σχετικές θέσεις	Διέδρη γωνία
Παράλληλα επίπεδα	Αντίστοιχη επίπεδη γωνία
Ασύμβατες ευθείες	Κάθετα επίπεδα

### Εισαγωγικά και ιστορικά σχόλια

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε κυρίως με τις βασικές ιδιότητες που έχουν οι ευθείες και τα επίπεδα στον χώρο.

Θα δούμε τις σχετικές θέσεις ευθειών και επιπέδων ή επιπέδων μεταξύ τους. Από το πλήθος των προτάσεων της στερεομετρίας θα αναφέρουμε, χάρη στη σημασία του, το θεώρημα των τριών καθέτων.

Η διέδρη γωνία είναι μια απλή έννοια που μας επιτρέπει να ορίσουμε τα κάθετα επίπεδα, επίπεδα τα οποία επίσης αναγνωρίζουμε σε κάθε μας βήμα, στο σπίτι, στο σχολείο ή στους χώρους που επισκεπτόμαστε.

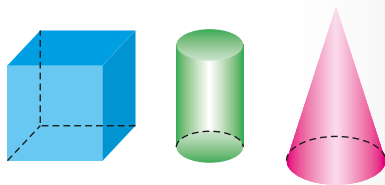
Με τη μελέτη των στερεών σχημάτων, όπως π.χ. με την εύρεση του εμβαδού της επιφάνειας και του όγκου τους θα ασχοληθούμε στην επόμενη τάξη.

# 4.1

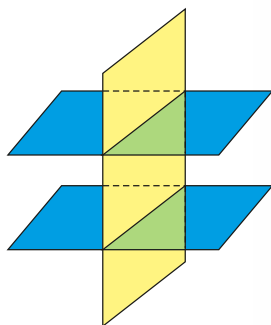
## Ευθείες και επίπεδα στον χώρο

Περιέχονται

- Ευθείες και επίπεδα στον χώρο.
- Σχετική θέση ευθειών στον χώρο.
- Σχετική θέση δύο επιπέδων στον χώρο.
- Σχετική θέση ευθείας και επιπέδου.
- Απόσταση ασύμβατων ευθειών.
- Το θεώρημα των τριών καθέτων.



(Σχ. α) -Στερεά σχήματα



(Σχ. β) -Επίπεδα



Στην ενότητα αυτή:

1. Διερευνάμε τη σχετική θέση δύο ευθειών ή δύο επιπέδων στον χώρο.
2. Βρίσκουμε τη σχετική θέση ευθείας και επιπέδου.
3. Διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε πρόταση για να είναι μια ευθεία κάθετη σε επίπεδο.
4. Διατυπώνουμε το θεώρημα των τριών καθέτων.
5. Βρίσκουμε την κοινή κάθετη δύο ασύμβατων ευθειών.

### Θεωρία και εφαρμογές

#### ◆ Σχήματα στον χώρο

Από μικρότερες τάξεις στο σχολείο αναγνωρίζουμε και μελετάμε διάφορα σχήματα στον χώρο, όπως π.χ. τον κύβο, τον κύλινδρο, τον κώνο, τη σφαίρα, την πυραμίδα κ.λπ.

Στα γεωμετρικά αυτά σχήματα που λέγονται στερεά (ή γεωμετρικά στερεά) ενδιαφέρει πρωτίστως η εύρεση του εμβαδού των επιφανειών τους και ο υπολογισμός του όγκου τους.

Πριν φτάσουμε όμως στη μελέτη αυτών των στερεών, κάτι που θα γίνει πιο διεξοδικά σε επόμενη τάξη, είναι απαραίτητο να γνωρίσουμε καλύτερα τον χώρο που κινούμαστε και κυρίως να μελετήσουμε πώς μπορούν να παρουσιαστούν ευθείες στον χώρο ή να αναζητήσουμε αν υπάρχουν παράλληλα ή κάθετα επίπεδα στον χώρο, αλλά και γωνίες στον χώρο.

Για παράδειγμα, στο (Σχ. β) βλέπουμε ένα επίπεδο να τέμνει, και μάλιστα κάθετα, δύο παράλληλα επίπεδα.

Ο σχεδιασμός τέτοιων επιπέδων αλλά και ιδιαίτερα η μελέτη των ιδιοτήτων τους γίνεται στις τρέχουσες ενότητες του κεφαλαίου αυτού.

#### ◆ Βασικές έννοιες

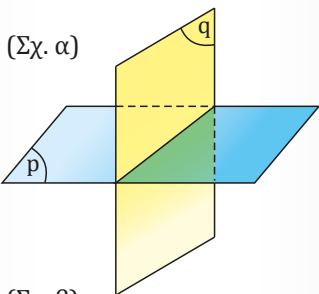
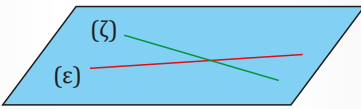
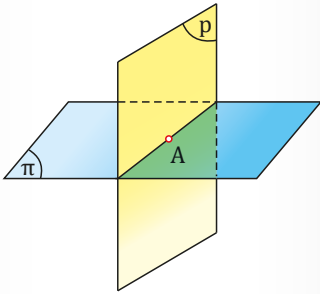
Από τις επιφάνειες του χώρου ξεχωριστό ενδιαφέρον παρουσιάζει **το επίπεδο**. Το επίπεδο, διαισθητικά, είναι μια επιφάνεια που εφαρμόζει απόλυτα η ευθεία, όπως και να την τοποθετήσουμε. Με άλλα λόγια, αν πάρουμε δύο οποιαδήποτε σημεία ενός επιπέδου, τότε η ευθεία που ορίζουν τα σημεία αυτά ανήκει στο συγκεκριμένο επίπεδο.

Όπως οι έννοιες του σημείου και της ευθείας είναι πρωταρχικές, έτσι και η έννοια του επιπέδου είναι πρωταρχική, τη δεχόμαστε δηλαδή χωρίς να χρειάζεται να δώσουμε τυπικό ορισμό.

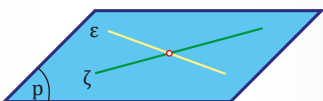
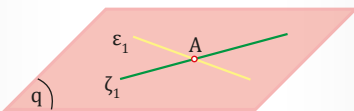
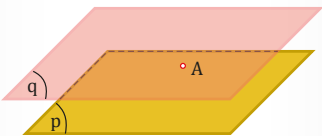
#### ◆ Θεμελιώδεις ιδιότητες χώρου και επιπέδου

Για το επίπεδο στον χώρο δεχόμαστε (αξιωματικά) τα παρακάτω:

- Τρία σημεία του χώρου που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία, ορίζουν ένα και μοναδικό επίπεδο.



(Σχ. β)



- Για κάθε δεδομένο επίπεδο υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο του χώρου που δεν ανήκει σε αυτό.
- Αν δύο σημεία μιας ευθείας του χώρου ανήκουν σε ένα επίπεδο, τότε ολόκληρη η ευθεία ανήκει στο επίπεδο αυτό.
- Αν δύο επίπεδα έχουν κοινό σημείο, τότε έχουν κοινή και μια ευθεία, στην οποία ανήκει το σημείο αυτό.

Στο πρώτο σχήμα βλέπουμε δύο επίπεδα ( $\pi$ ) και ( $\rho$ ) που έχουν κοινό το σημείο  $A$ . Τα επίπεδα αυτά έχουν κοινή ολόκληρη μια ευθεία, που διέρχεται από το  $A$ . Η ευθεία αυτή είναι η **τομή** των επιπέδων αυτών.

Από τις παραπάνω ιδιότητες του χώρου και του επιπέδου προκύπτει ότι:

- Κάθε επίπεδο περιέχει άπειρα σημεία, άπειρες ευθείες αλλά και άπειρα σημεία που βρίσκονται έξω από αυτό.
- Μια ευθεία και ένα σημείο εκτός αυτής ορίζουν ένα μοναδικό επίπεδο, στο οποίο ανήκουν το σημείο και η ευθεία.
- Δύο τεμνόμενες ευθείες του χώρου ορίζουν μοναδικό επίπεδο, στο οποίο ανήκουν.

Είναι προφανές ότι το επίπεδο που ορίζεται στις παραπάνω περιπτώσεις περιέχει και όλα τα σημεία των ευθειών αυτών.

Συμβολίζουμε:

- με  $(A, \varepsilon)$  το επίπεδο που ορίζουν το σημείο  $A$  και η ευθεία  $(\varepsilon)$ ,
- με  $(\varepsilon, \zeta)$  το επίπεδο που σχηματίζουν οι ευθείες  $(\varepsilon)$  και  $(\zeta)$ ,
- με  $(A, B, \Gamma)$  το επίπεδο που ορίζουν τα μη συνευθειακά σημεία  $A, B, \Gamma$ .

### ◆ Σχετικές θέσεις δύο επιπέδων

Έχουμε ήδη αναφέρει στις βασικές ιδιότητες ότι αν δύο (διαφορετικά) επίπεδα έχουν κοινό σημείο, τότε έχουν κοινή και ολόκληρη ευθεία (Σχ. α). Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα **επίπεδα τέμνονται**.

Αν ωστόσο τα δύο επίπεδα δεν έχουν κοινά σημεία, τότε λέμε ότι είναι **παράλληλα** (Σχ. β).

Επομένως:

#### Σχετικές θέσεις στο επίπεδο

Δύο διαφορετικά επίπεδα μπορεί:

- να είναι παράλληλα ή
- να τέμνονται.

Η τομή δύο επιπέδων είναι μια ευθεία που ανήκει συγχρόνως και στα δύο επίπεδα.

Στον χώρο ισχύει το εξής συμπέρασμα:

Από σημείο εκτός επιπέδου υπάρχει μοναδικό επίπεδο παράλληλο προς αυτό.

Πώς όμως βρίσκουμε ένα τέτοιο επίπεδο;

Ας πάρουμε το επίπεδο ( $\rho$ ) και το σημείο  $A$  εκτός αυτού.

Στο ( $\rho$ ) παίρνουμε δύο τεμνόμενες ευθείες  $\varepsilon$  και  $\zeta$ .

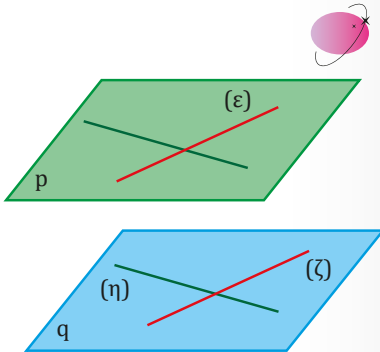
Από το  $A$  φέρουμε  $\varepsilon_1 // \varepsilon$  και  $\zeta_1 // \zeta$ . Οι ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\zeta_1$ , ως τεμνόμενες στο  $A$ , ορίζουν ένα επίπεδο. Το επίπεδο αυτό είναι παράλληλο με το επίπεδο ( $\rho$ ).

### ◆ Σχετικές θέσεις ευθειών στον χώρο

Ας πάρουμε δύο ευθείες  $(\varepsilon)$  και  $(\eta)$  του χώρου, οι οποίες δεν έχουν κοινά σημεία, δηλαδή δεν τέμνονται.

Τι μπορεί να είναι αυτές οι ευθείες;

Για να απαντήσουμε σε αυτό το ερώτημα υπάρχουν δύο περιπτώσεις.



#### Ορισμός

- Αν δύο ευθείες του χώρου βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και δεν τέμνονται, τότε λέγονται **παράλληλες**.
- Αν δύο ευθείες του χώρου δεν είναι παράλληλες και δεν τέμνονται, τότε λέγονται **ασύμβατες**.

Στο σχήμα μας, οι ευθείες  $(\varepsilon)$  και  $(\zeta)$  είναι παράλληλες (γράφουμε  $\varepsilon // \zeta$ ), ενώ οι ευθείες  $(\varepsilon)$  και  $(\eta)$  είναι ασύμβατες.

Αν λοιπόν δύο ευθείες είναι ασύμβατες, τότε μπορούμε να βρούμε δύο επίπεδα που δεν τέμνονται και περιέχουν αυτές τις ευθείες.

Ένας απλός τρόπος να βρούμε αυτά τα επίπεδα είναι να πάρουμε από ένα σημείο της κάθε ευθείας και να φέρουμε παράλληλη προς την άλλη.

Θυμίζουμε ότι δύο τεμνόμενες ευθείες ορίζουν ένα μοναδικό επίπεδο.

#### Συμπέρασμα

- Αν δύο ευθείες είναι συνεπίπεδες και δεν έχουν κοινά σημεία, τότε είναι παράλληλες.
- Αν δύο ευθείες δεν έχουν κοινά σημεία και δεν είναι παράλληλες, τότε αυτές είναι ασύμβατες.

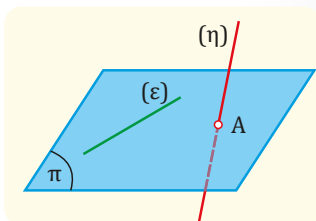
Επομένως:

- Δύο ευθείες του χώρου ή τέμνονται ή είναι παράλληλες ή είναι ασύμβατες.
- Αν δύο ευθείες είναι ασύμβατες, τότε δεν υπάρχει επίπεδο που να τις περιέχει.



#### Θεώρημα 1

Αν μια ευθεία του χώρου τέμνει ένα επίπεδο, τότε αυτή είναι ασύμβατη με κάθε ευθεία του επιπέδου που δεν διέρχεται από το σημείο τομής.

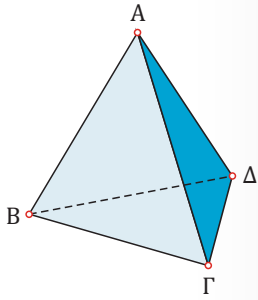


#### Απόδειξη

Έστω ότι η ευθεία  $(\eta)$  τέμνει ένα επίπεδο  $(\pi)$  στο  $A$  και ας είναι  $(\varepsilon)$  μία ευθεία του  $(\pi)$  που δεν διέρχεται από το  $A$ . Θα αποδείξουμε ότι η  $(\eta)$  είναι ασύμβατη με την  $(\varepsilon)$ .

- Αν οι  $(\varepsilon)$  και  $(\eta)$  τέμνονται, τότε το σημείο τομής τους θα ανήκει και στο επίπεδο  $(\pi)$ , που βρίσκεται και το σημείο  $A$  της  $(\eta)$ . Έτσι η  $(\eta)$  θα ανήκει στο  $(\pi)$ , άτοπο, διότι την τέμνει.
- Αν οι  $(\varepsilon)$  και  $(\eta)$  είναι παράλληλες, τότε θα ορίζουν ένα επίπεδο. Το επίπεδο αυτό θα έχει με το  $(\pi)$  κοινά σημεία μόνο τα σημεία της  $(\varepsilon)$ . Αφού όμως  $(\eta) // (\varepsilon)$ , η  $(\eta)$  δεν τέμνει το  $(\pi)$ , άτοπο.

Σε όλες τις περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο, οπότε οι ευθείες  $(\eta)$  και  $(\varepsilon)$  είναι ασύμβατες. ■

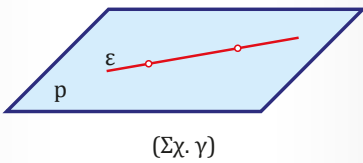
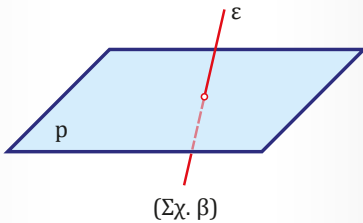
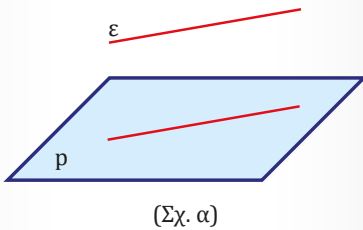


### Παράδειγμα

Στο διπλανό σχήμα τα ζεύγη  $(AB, \Gamma\Delta)$ ,  $(A\Gamma, B\Delta)$ ,  $(A\Delta, B\Gamma)$  αποτελούνται από ασύμβατες ευθείες.

Πράγματι, η ευθεία  $AB$  τέμνει το επίπεδο  $(B, \Gamma, \Delta)$  στο  $B$  και αφού η ευθεία  $\Gamma\Delta$  του επιπέδου  $(B, \Gamma, \Delta)$  δεν διέρχεται από το σημείο τομής  $B$ , θα είναι ασύμβατη με την ευθεία  $AB$ .

Όμοια επιχειρήματα χρησιμοποιούμε και για τα άλλα ζεύγη.



### ◆ Σχετική θέση ευθείας και επιπέδου

Ας πάρουμε ένα επίπεδο  $(p)$  και μια ευθεία  $(\varepsilon)$  που δεν ανήκει σε αυτό. Υπάρχουν τρεις δυνατότητες:

- η ευθεία  $(\varepsilon)$  δεν τέμνει το  $(p)$ , δηλαδή δεν έχει με το  $(p)$  κανένα κοινό σημείο. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η  $(\varepsilon)$  είναι παράλληλη με το  $(p)$  και γράφουμε  $\varepsilon // p$  (Σχ. α),
- η ευθεία  $(\varepsilon)$  έχει με το  $(p)$  ένα ακριβώς κοινό σημείο, δηλαδή τέμνει το επίπεδο  $(p)$ ,
- η ευθεία  $(\varepsilon)$  ανήκει στο επίπεδο  $(p)$ , έχει δηλαδή με αυτό δύο (τουλάχιστον) κοινά σημεία (Σχ. γ).

Επομένως:

Για τη σχετική θέση ευθείας και επιπέδου ισχύει ότι:

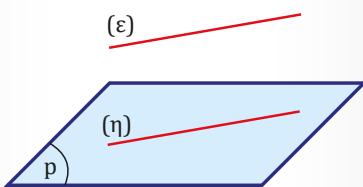
- Η ευθεία είναι παράλληλη με το επίπεδο.
- Η ευθεία τέμνει το επίπεδο.
- Η ευθεία ανήκει στο επίπεδο.

Ένα σημαντικό, αν και προφανές στην αντίληψή μας, συμπέρασμα που αφορά στην παραλληλία ευθείας και επιπέδου είναι το παρακάτω:



### Θεώρημα 2

Αν μια ευθεία είναι παράλληλη σε μια ευθεία ενός επιπέδου και δεν ανήκει σε αυτό, τότε η ευθεία αυτή είναι παράλληλη προς το επίπεδο.



### Απόδειξη

Έστω ότι η ευθεία  $(\varepsilon)$  είναι παράλληλη με την ευθεία  $(\eta)$  του επιπέδου  $(p)$ . Η ευθεία  $(\varepsilon)$  και η  $(\eta)$  ορίζουν ένα επίπεδο. Το επίπεδο αυτό τέμνει το  $(p)$  κατά μήκος της ευθείας  $(\eta)$ , αφού η  $(\eta)$  ανήκει και στα δύο.

Αν η  $(\varepsilon)$  έτεμνε το  $(p)$ , το σημείο τομής θα ήταν πάνω στην ευθεία  $(\eta)$ . Αυτό όμως είναι άτοπο, διότι  $\varepsilon // (\eta)$ .

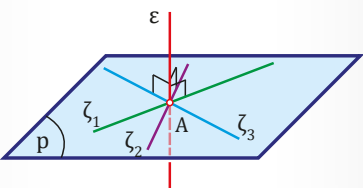
### ◆ Ευθεία κάθετη σε επίπεδο

Στο διπλανό σχήμα η ευθεία  $(\varepsilon)$  τέμνει το επίπεδο  $(p)$  στο σημείο  $A$ , έτσι ώστε

$$\varepsilon \perp \zeta_1, \varepsilon \perp \zeta_2, \varepsilon \perp \zeta_3.$$

Η ευθεία  $(\varepsilon)$  μπορεί να είναι κάθετη σε κάθε ευθεία που περνάει από το  $A$ . Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η  $(\varepsilon)$  είναι κάθετη στο επίπεδο  $(p)$  και γράφουμε  $(\varepsilon) \perp (p)$ . Το σημείο τομής λέγεται και **ίχνος** της ευθείας  $(\varepsilon)$ .

Οδηγούμαστε λοιπόν στον εξής ορισμό:





Ευθεία κάθετη  
σε επίπεδο



### Ορισμός

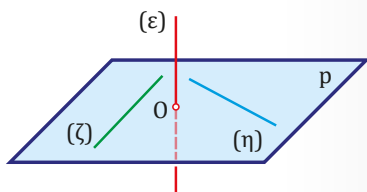
Μια ευθεία λέμε ότι είναι **κάθετη** σε ένα επίπεδο, όταν είναι κάθετη σε κάθε ευθεία του επιπέδου που διέρχεται από το σημείο τομής τους.

Για να είναι ωστόσο μια ευθεία κάθετη σε ένα επίπεδο, δεν είναι απαραίτητο να είναι κάθετη με όλες τις ευθείες του επιπέδου που διέρχονται από το σημείο τομής. Μας αρκεί να είναι κάθετη σε δύο τέτοιες ευθείες. Διατυπώνουμε λοιπόν το παρακάτω θεώρημα:



### Θεώρημα 3

Αν μια ευθεία τέμνει ένα επίπεδο και είναι κάθετη σε δύο ευθείες του επιπέδου που διέρχονται από το σημείο τομής (το ίχνος της), τότε είναι κάθετη στο επίπεδο.



Στο διπλανό σχήμα η ευθεία (ε) είναι κάθετη στις (ζ) και (η), επομένως είναι κάθετη και στο επίπεδο (ρ).

Το σημείο τομής του επιπέδου και της κάθετης προς αυτό ευθείας (ε) λέγεται **ίχνος** της καθέτου (ε).

Έστω (ε) και (η) δύο ασύμβατες ευθείες και τυχαίο σημείο A της (η). Αν η παράλληλη από το A προς την (ε) είναι κάθετη προς την (η), τότε οι ευθείες (ε) και (η) λέγονται **ορθογώνιες**.



Θεώρημα τριών  
καθέτων

Αν μια ευθεία είναι ορθογώνια σε δύο ευθείες ενός επιπέδου, τότε είναι κάθετη στο επίπεδο αυτό.

Αν η ευθεία (ε) είναι ορθογώνια προς τις ευθείες (ζ) και (η) του επιπέδου (ρ) (ή κάθετη σε μία και ορθογώνια στην άλλη), τότε η (ε) είναι κάθετη στο επίπεδο αυτό.

### ◆ Το θεώρημα των τριών καθέτων

Ένα από τα πιο ωραία θεωρήματα που αφορά σε ευθείες και επίπεδα του χώρου είναι το παρακάτω και το συναντάμε ως **θεώρημα των τριών καθέτων**.

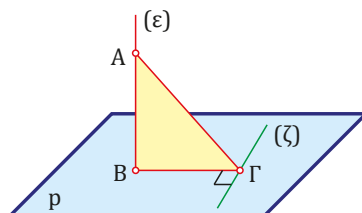
### Θεώρημα 4

α) Αν η ευθεία (ε) τέμνει κάθετα ένα επίπεδο (ρ) στο B και η BΓ είναι κάθετη σε μια ευθεία (ζ) του (ρ) που δεν περνάει από το B, τότε:

$$ΑΓ \perp (ζ).$$

β) Αν  $AB \perp (ρ)$  και  $ΑΓ \perp (ζ)$ , τότε  $BΓ \perp (ζ)$ .

γ) Αν  $ΑΓ \perp (ζ)$ ,  $BΓ \perp (ζ)$  και  $AB \perp BΓ$ , τότε  $AB \perp (ρ)$ .

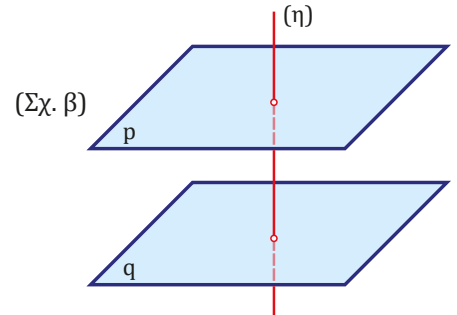
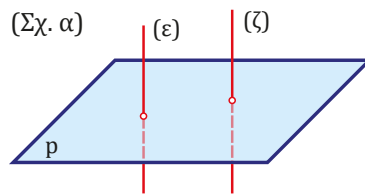


◆ **Χρήσιμα συμπεράσματα στην καθετότητα ευθείας και επιπέδου**

Όπως είναι αναμενόμενο, η καθετότητα ευθείας και επιπέδου συνοδεύεται από αρκετά χρήσιμα και άμεσα συμβατά με τη διαίσθησή μας συμπεράσματα. Τα πιο σπουδαία από αυτά διατυπώνονται στο παρακάτω θεώρημα, παραλείποντας τις αποδείξεις τους γιατί ξεφεύγουν των στόχων του παρόντος σχολικού βιβλίου.

**Θεώρημα 5**

- α) Δύο ευθείες κάθετες στο ίδιο επίπεδο είναι παράλληλες (Σχ. α).
- β) Δύο επίπεδα κάθετα στην ίδια ευθεία είναι παράλληλα (Σχ. β).



Πρακτικά επομένως, αντιλαμβανόμαστε ότι:

- Οι κολώνες φωτισμού στην άκρη ενός επιπέδου δρόμου ορίζουν παράλληλες ευθείες.
- Οι όροφοι κάθε κτιρίου είναι παράλληλα επίπεδα, όπως και τα καταστρώματα ενός πλοίου, αφού σχεδιάζονται να είναι κάθετα με τη διεύθυνση του νήματος της στάθμης.

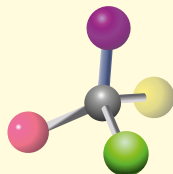


Παράλληλα επίπεδα και τομές από τρίτο επίπεδο

**Ασκήσεις και Προβλήματα**

**Ασκήσεις Α' Ομάδας**

1. Το παρακάτω σχήμα δείχνει στον χώρο τη διάταξη των μερών του μορίου μιας χημικής ένωσης. Τέτοια σχήματα παίζουν σημαντικό ρόλο στον κλάδο της Στερεοχημείας.



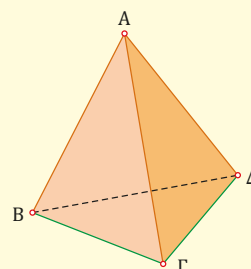
- A. Πόσα επίπεδα σχηματίζουν τα πέντε σημεία (οι μικρές σφαίρες) σε αυτήν την απεικόνιση;
- B. Να τοποθετήσετε τα γράμματα A, B, Γ, Δ, E στις χρωματικές μπάλες: A στη βυσσινή, B στη μαύρη, Γ στη ροζ, Δ στην πράσινη και E στην κίτρινη. Με βάση το σχήμα που θα προκύψει:
  - α) να βρείτε την τομή των επιπέδων (A,B,Γ) και (A,B,E),
  - β) να βρείτε τις ευθείες που ορίζουν τα σημεία, με

τις οποίες είναι ασύμβατη:

- i) η ευθεία ΑΓ,
- ii) η ευθεία ΑΒ.

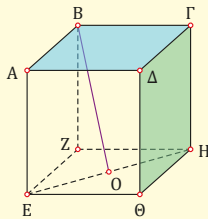
2. Να σχεδιάσετε ένα επίπεδο (p) και μια ευθεία (ε) που να τέμνει το (p) σε ένα σημείο Α. Στη συνέχεια να πάρετε μια ευθεία (η) του (p) που δεν περνάει από το Α. Είναι η (ε) ασύμβατη με την (η) και γιατί;

3. Δίνεται η πυραμίδα (ΑΒΓΔ).



- α) Πόσα επίπεδα ορίζουν οι πλευρές της και ποια;  
 β) Με ποια από τις έξι ευθείες είναι ασύμβατη η ευθεία:  
 i) AB,                    ii) AG,                    iii) BΔ;  
 γ) Ποια είναι η τομή των επιπέδων (A, Γ, Δ) και (Δ, B, Γ);

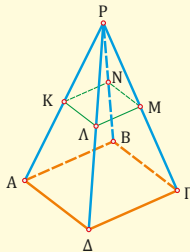
4. Στο σχήμα βλέπουμε ένα ορθό τετραγωνικό πρίσμα (όλες οι γωνίες είναι ορθές).



- Αν O είναι το κέντρο του τετραγώνου EΖΗΘ,  
 α) να βρείτε δύο ζεύγη παράλληλων επιπέδων,  
 β) να βρείτε δύο ζεύγη ασύμβατων ευθειών,  
 γ) να αποδείξετε ότι  $BO \perp EH$ .

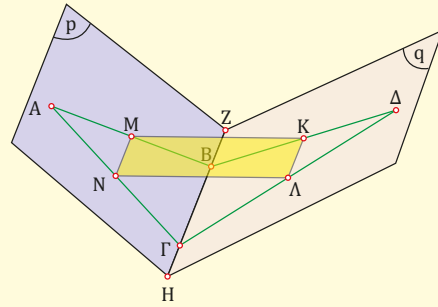
5. Δίνονται δύο παράλληλα επίπεδα (p) και (q), μια ευθεία (ε) του (p) και μια ευθεία (ζ) του (q) που δεν είναι παράλληλες. Να αποδείξετε ότι οι (ε), (ζ) είναι ασύμβατες.

6. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε μια πυραμίδα με κορυφή P και τα μέσα K, Λ, M, N των ακμών της PA, PB, PΓ, PΔ.



Να αποδείξετε ότι τα σημεία K, Λ, M, N βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, παράλληλο με το (A, B, Γ).

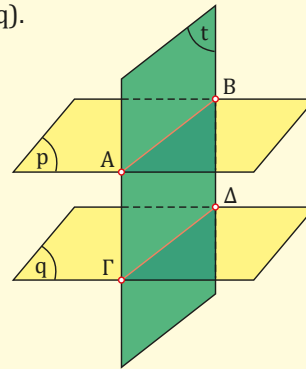
7. Δίνεται ευθεία (ε) παράλληλη προς επίπεδο (p). Αν από σημείο A του (p) φέρουμε ευθεία (η) παράλληλη στην (ε), να αποδείξετε ότι η (η) είναι ευθεία του (p).  
 8. Δύο επίπεδα (p) και (q) τέμνονται κατά μήκος της ευθείας ΖΗ. Έστω A, Δ σημεία των (p), (q) και B, Γ δύο σημεία της ευθείας ΖΗ.



Αν τα M, N, K, Λ είναι τα μέσα των AB, AG, ΔB και ΔΓ, να αποδείξετε ότι:

- α) οι ευθείες KM και ΛN ορίζουν επίπεδο,  
 β) οι ευθείες AG και BΔ είναι ασύμβατες.

9. Ένα επίπεδο (ε) τέμνει δύο παράλληλα επίπεδα (p) και (q).



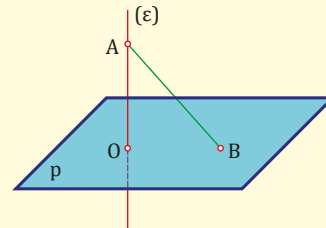
Να αποδείξετε ότι:

- α) οι τομές AB και ΓΔ του (t) με τα επίπεδα (p) και (q) είναι παράλληλες ευθείες,  
 β) κάθε ευθεία (ε) του (p) που τέμνει την AB είναι ασύμβατη με την ευθεία ΓΔ.

## Ασκήσεις Β' Ομάδας

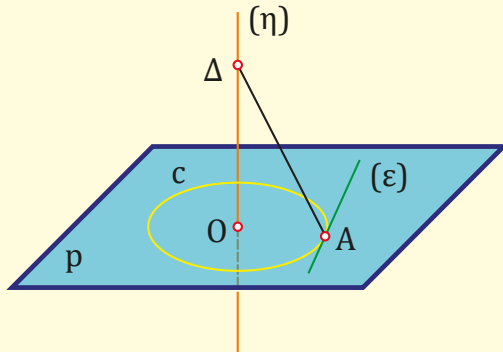
10. Αν μια ευθεία (ε) είναι παράλληλη προς δύο τεμνόμενα επίπεδα, να αποδείξετε ότι είναι παράλληλη και προς την τομή τους.

11. Μια ευθεία (ε) τέμνει κάθετα ένα επίπεδο (p) στο σημείο O.



Αν B είναι τυχαίο σημείο του επιπέδου (p), να αποδείξετε ότι  $AB > AO$ .

12. Στο κέντρο  $O$  ενός κύκλου  $(O, R)$  που βρίσκεται στο επίπεδο  $(p)$  φέρουμε κάθετη ευθεία  $(\eta)$ . Σε τυχαίο σημείο  $A$  του κύκλου φέρουμε την εφαπτομένη  $(\epsilon)$ .

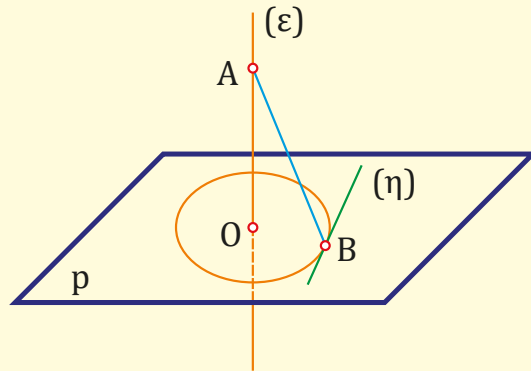


Αν  $\Delta$  είναι σημείο της ευθείας  $(\eta)$ , να αποδείξετε ότι  $\Delta A \perp (\epsilon)$ .

13. Στην κορυφή  $A$  ενός ισοσκελούς τριγώνου  $AB\Gamma$  φέρουμε κάθετη ευθεία  $(\epsilon)$  προς το επίπεδο  $(A, B, \Gamma)$ . Αν  $E$  είναι τυχαίο σημείο της ευθείας  $(\epsilon)$  και  $M$  είναι το μέσο της πλευράς  $B\Gamma$ , να αποδείξετε ότι:  
 $EM \perp B\Gamma$ .

14. Δίνονται δύο παράλληλα επίπεδα  $(p)$  και  $(q)$  καθώς και μια ευθεία  $(\epsilon)$  του  $(p)$ . Από τυχαίο σημείο  $A$  του  $(q)$  φέρουμε παράλληλη  $(\zeta)$  προς την  $(\epsilon)$ . Να αποδείξετε ότι η  $(\zeta)$  ανήκει στο  $(q)$ .

15. Μια ευθεία  $(\epsilon)$  τέμνει κάθετα ένα επίπεδο  $(p)$  στο σημείο  $O$ .



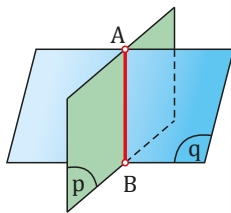
Θεωρούμε ευθεία  $(\eta)$  του επιπέδου  $(p)$ , που δεν διέρχεται από το  $O$ . Αν  $AB \perp (\eta)$ , να αποδείξετε ότι ο κύκλος  $(O, OB)$  εφάπτεται με την ευθεία  $(\eta)$ .

# 4.2

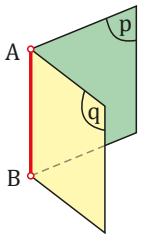
## Διέδρες γωνίες - Κάθετα επίπεδα

Περιέχονται

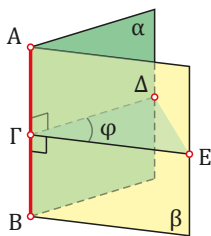
- Η έννοια της διέδρης γωνίας.
- Αντίστοιχη επίπεδη διέδρης γωνίας.
- Κάθετα επίπεδα.



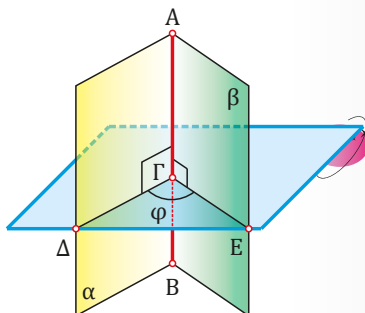
(Σχ. α)



(Σχ. β)



(Σχ. γ)



(Σχ. δ)

Στην ενότητα αυτή:

1. Ορίζουμε τη διέδρη γωνία.
2. Αναγνωρίζουμε διέδρες γωνίες σε ένα στερεό σχήμα.
3. Διατυπώνουμε τον ορισμό της αντίστοιχης επίπεδης διέδρης γωνίας.
4. Ορίζουμε το μέτρο διέδρης γωνίας.
5. Ανακαλύπτουμε ιδιότητες κάθετων επιπέδων.

### Θεωρία και εφαρμογές

#### ♦ Η έννοια της διέδρης γωνίας

Όταν δύο επίπεδα τέμνονται, η τομή τους είναι μια ευθεία. Η τομή λοιπόν των επιπέδων ( $p$ ) και ( $q$ ) που βλέπουμε στο (Σχ. α) είναι η ευθεία  $AB$ .

Με την τομή των επιπέδων σχηματίζονται τέσσερα ημιεπίπεδα (Σχ. α). Όλα έχουν ακμή την ευθεία  $AB$  της τομής τους. Αν πάρουμε δύο από αυτά τα ημιεπίπεδα, όπως στο (Σχ. β), τότε σχηματίζεται μια γωνία που οι πλευρές της είναι ακριβώς αυτά τα ημιεπίπεδα. Η γωνία αυτή λέγεται διέδρη γωνία με ακμή  $AB$  και συμβολίζεται με  $(AB, p, q)$  ή  $AB(p, q)$ .

#### Ορισμός

**Διέδρη** γωνία ονομάζουμε το σχήμα που αποτελείται από δύο ημιεπίπεδα με κοινή αρχή. Τα δύο ημιεπίπεδα λέγονται **έδρες** της διέδρης γωνίας και η κοινή τους αρχή λέγεται **ακμή** της (Σχ.β).

Στο (Σχ. γ) βλέπουμε τη διέδρη γωνία  $(AB, \alpha, \beta)$  που έχει **ακμή** την ευθεία  $AB$  και **έδρες** τα ημιεπίπεδα  $\alpha$  και  $\beta$ .

Ας πάρουμε τώρα ένα σημείο  $\Gamma$  της ακμής και ας θεωρήσουμε τις ευθείες  $\Gamma\Delta$ ,  $\Gamma\text{E}$  των εδρών  $\alpha$  και  $\beta$  που είναι κάθετες προς την  $AB$  στο  $\Gamma$ .

Οι ευθείες αυτές ορίζουν τη γωνία  $\varphi = \widehat{\Delta\Gamma\text{E}}$ .

Η γωνία αυτή λέγεται αντίστοιχη επίπεδη της διέδρης γωνίας  $(AB, \alpha, \beta)$ .

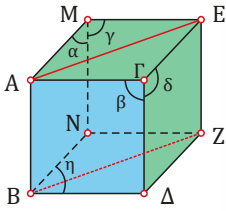
Επειδή  $AB \perp \Gamma\Delta$  και  $AB \perp \Gamma\text{E}$ , η ευθεία  $AB$  είναι κάθετη στο επίπεδο  $(\Gamma\Delta, \Gamma\text{E})$  που σχηματίζουν οι ευθείες  $\Gamma\Delta$  και  $\Gamma\text{E}$ .

Επομένως το επίπεδο  $(\Gamma\Delta, \Gamma\text{E})$  είναι κάθετο προς την ακμή  $AB$  της διέδρης αυτής γωνίας. Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε την αντίστοιχη επίπεδη μιας διέδρης γωνίας καθώς και το μέτρο διέδρης γωνίας ως εξής:

#### Ορισμός

**Αντίστοιχη επίπεδη** διέδρης γωνίας ονομάζουμε την επίπεδη γωνία που είναι η τομή της διέδρης με ένα επίπεδο κάθετο στην ακμή της. Ως **μέτρο** της διέδρης γωνίας λέμε το μέτρο της αντίστοιχης επίπεδης γωνίας της.

Ανάλογα με το είδος της αντίστοιχης επίπεδης γωνίας, μια διέδρη γωνία μπορεί να είναι οξεία, ορθή ή αμβλεία.



### Εφαρμογή

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ένας κύβος.

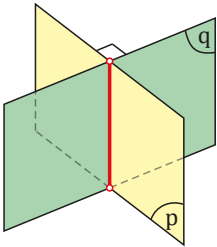
- Να σημειώσετε δύο διέδρες γωνίες.
- Να βρείτε μια διέδρη γωνία με μέτρο  $90^\circ$ .
- Να βρείτε μια διέδρη γωνία με μέτρο  $45^\circ$ .

### Λύση

- Με ακμή την  $AB$  μπορούμε να δούμε τη διέδρη που έχει έδρες τα ημιεπίπεδα  $AMNB$  και  $AGDB$ . Η διέδρη αυτή είναι η  $(AB, \alpha, \beta)$ .  
Εντελώς παρόμοια μπορούμε να πάρουμε τη διέδρη  $(EZ, \gamma, \delta)$  ή τη διέδρη  $(\Delta Z, \delta, \eta)$ .
- Όλες οι παραπάνω διέδρες έχουν μέτρο  $90^\circ$ , είναι δηλαδή ορθές.  
Για παράδειγμα, αφού  $AM \perp AB$  και  $AG \perp AB$ , η αντίστοιχη επίπεδη της διέδρης  $(AB, \alpha, \beta)$  είναι η γωνία  $\widehat{MAG}$  που είναι ορθή.
- Η διέδρη με ακμή  $AB$  και έδρες τις  $AEZB, AGDB$  έχει αντίστοιχη επίπεδη γωνία την  $\widehat{EAG}$ , που είναι ίση με  $45^\circ$ .

### ♦ Κάθετα επίπεδα

Όπως η καθετότητα ευθειών στο επίπεδο ή στον χώρο και η καθετότητα ευθείας και επιπέδου, έτσι και η καθετότητα επιπέδων έχει ξεχωριστό ρόλο στη γεωμετρία του χώρου. Η καθετότητα επιπέδων είναι συνυφασμένη με την εμπειρική μας γνώση, αφού στην καθημερινή μας ζωή συναντάται σχεδόν σε κάθε βήμα: στο δωμάτιό μας, στη σχολική μας τάξη, στους χώρους αναψυχής, αλλά και στα καθημερινά αντικείμενα που χρησιμοποιούμε, όπως π.χ. το βιβλίο ή το κινητό μας ή ένα δώρο που είναι τυλιγμένο σε κάποιο κουτί. Σχεδόν παντού βλέπουμε κάθετα επίπεδα.



### Ορισμός

**Δύο επίπεδα** λέγονται κάθετα, αν τεμνόμενα σχηματίζουν ορθές διέδρες γωνίες.

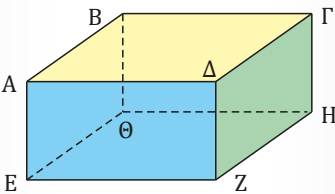
Επειδή όλες οι ορθές διέδρες γωνίες είναι ίσες, είναι άμεσο ότι δύο κάθετα επίπεδα σχηματίζουν τέσσερις ίσες διέδρες γωνίες.

Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα με κάθετα επίπεδα.

### Παράδειγμα

Στο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο του σχήματος:

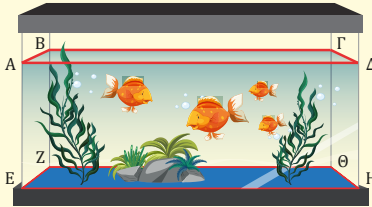
- Τα επίπεδα  $(A, B, \Gamma, \Delta)$  και  $(A, B, \Theta, E)$  είναι κάθετα γιατί σχηματίζουν την ορθή διέδρη γωνία με ακμή  $AB$ .
- Καθένα από τα επίπεδα  $(A, B, \Gamma, \Delta)$ ,  $(E, Z, H, \Theta)$  είναι κάθετο με το επίπεδο  $(A, B, \Theta, E)$  και μεταξύ τους είναι παράλληλα.



## Ασκήσεις και Προβλήματα

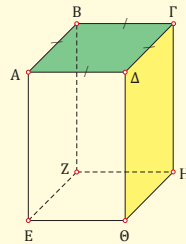
### Ασκήσεις Α' Ομάδας

1. Το ενυδρείο της εικόνας έχει σχήμα ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου.



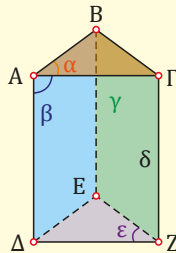
- α) Να βρείτε όλες τις ευθείες που είναι παράλληλες με την ΓΔ.  
 β) Να βρείτε τις ευθείες που είναι κάθετες με τη ΓΔ.  
 γ) Να βρείτε τρία ζεύγη ασύμβατων ευθειών.  
 δ) Να βρείτε την τομή των επιπέδων (B,Γ,Z) και (H,Γ,Θ),  
 ε) Να βρείτε τρεις διέδρες γωνίες και την αντίστοιχη επίπεδη γωνία τους.  
 στ) Να βρείτε δύο ζεύγη κάθετων επιπέδων.

2. Με βάση το διπλανό σχήμα που δείχνει ένα τετραγωνικό ορθό πρίσμα:



- α) Να βρείτε τέσσερις ορθές διέδρες γωνίες.  
 β) Να βρείτε τρία ζεύγη παράλληλων επιπέδων.  
 γ) Να βρείτε δύο διέδρες γωνίες με μέτρο  $45^\circ$ .  
 δ) Να βρείτε τέσσερις παράλληλες ευθείες και ένα επίπεδο, προς το οποίο είναι κάθετες.

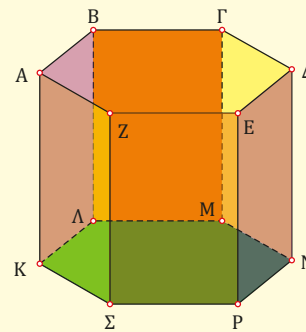
3. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ένα ορθό τριγωνικό πρίσμα. Τα σχηματιζόμενα ημιεπίπεδα είναι σημειωμένα με  $\alpha, \beta, \dots, \epsilon$ . Τα τρίγωνα ABΓ και ΔΕΖ είναι ισόπλευρα.



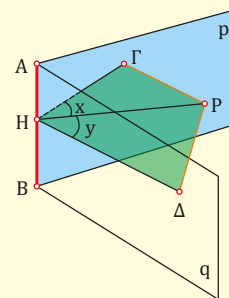
- α) Να γράψετε όλες τις διέδρες γωνίες.  
 β) Να βρείτε το μέτρο των αντίστοιχων επίπεδων γωνιών των παραπάνω διέδρων γωνιών.

4. Να σχεδιάσετε μια κανονική τριγωνική πυραμίδα (όλες οι έδρες είναι ισόπλευρα τρίγωνα) και:  
 α) να δείξετε όλες τις διέδρες γωνίες,  
 β) να σχεδιάσετε μία από τις αντίστοιχες επίπεδες γωνίες των διέδρων αυτών.

5. Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε ένα ορθό εξαγωνικό πρίσμα. Οι παράπλευρες έδρες είναι όλες ορθογώνια.  
 α) Να βρείτε τέσσερα ζεύγη παράλληλων επιπέδων.  
 β) Να βρείτε τρεις διέδρες γωνίες και τις αντίστοιχες επίπεδες γωνίες. Ποιο είναι το μέτρο των αντίστοιχων αυτών διέδρων γωνιών;  
 γ) Να βρείτε τρεις ευθείες, με τις οποίες η ΒΓ είναι ασύμβατη.  
 δ) Γιατί τα επίπεδα (A, B, Γ) και (K, Λ, Μ) είναι παράλληλα;



6. Δίνεται η διέδρη γωνία AB ( $p, q$ ) και σημείο P στο εσωτερικό της. Θεωρούμε τις προβολές Γ και Δ του P στα επίπεδα ( $p$ ) και ( $q$ ) αντίστοιχα.  
 α) Να αποδείξετε ότι η ακμή AB είναι κάθετη στο επίπεδο (PΓ, PΔ).  
 β) Πού βρίσκονται όλα τα σημεία P του χώρου με την ιδιότητα  $P\Gamma = P\Delta$ ;  
 γ) Αν  $GH \perp AB$ , ποια είναι η αντίστοιχη επίπεδη της διέδρης γωνίας AB ( $p, q$ );



7. Δίνεται επίπεδο ( $p$ ) και ευθεία ( $\epsilon$ ) που δεν ανήκει σε αυτό. Πώς θα φέρουμε επίπεδο ( $q$ ) που περιέχει την ( $\epsilon$ ) και είναι κάθετο στο ( $p$ );



Καθετότητα επιπέδων



Κάθετα επίπεδα και ευθείες

# 4.3

## Ανακεφαλαίωση

Στην ενότητα αυτή περιλαμβάνονται έργα για περαιτέρω αναζητήσεις και διερευνήσεις των μαθητών/τριών, με στόχο την εμπάθυνση και κατανόηση των Προσδοκώμενων Μαθησιακών Αποτελεσμάτων του κεφαλαίου.

1. α) Τι μπορεί να κάνουν μια ευθεία ( $\epsilon$ ) και ένα επίπεδο ( $p$ ) στον χώρο;  
 β) Πότε δύο ευθείες του χώρου λέγονται ασύμβατες;  
 γ) Με πόσες τουλάχιστον ευθείες ενός επιπέδου ( $p$ ) πρέπει να είναι κάθετη μια ευθεία ( $\epsilon$ ) του χώρου, ώστε  $\epsilon \perp p$ ;  
 δ) Ένα επίπεδο ( $t$ ) τέμνει δύο παράλληλα επίπεδα ( $p$ ) και ( $q$ ) κατά μήκος των ευθειών ( $\epsilon$ ) και ( $\zeta$ ) αντίστοιχα. Τι μπορούμε να συμπεράνουμε για τις ευθείες ( $\epsilon$ ) και ( $\zeta$ );  
 ε) Μια ευθεία ( $\epsilon$ ) δεν ανήκει στο επίπεδο ( $p$ ) και είναι παράλληλη με μια ευθεία ( $\eta$ ) του ( $p$ ). Τι συμπεραίνετε για την ( $\epsilon$ ) και το επίπεδο ( $p$ );

2. Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε ένα παραλληλεπίπεδο.

Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με Σ (Σωστή) ή Λ (Λανθασμένη).

α)  $(A, B, \Gamma) // (\Theta, E, Z)$ .

Σ Λ

β) Η τομή των επιπέδων  $(A, \Delta, B)$  και  $(\Delta, \Theta, E)$  είναι η ευθεία  $A\Delta$ .

Σ Λ

γ)  $AE \perp (H, Z, \Theta)$ .

Σ Λ

δ) Οι ευθείες  $A\Gamma$  και  $\Delta E$  είναι ασύμβατες.

Σ Λ

ε) Οι ευθείες  $A\Gamma$  και  $\Theta Z$  είναι παράλληλες.

Σ Λ

στ) Το τρίγωνο  $\Delta\Theta Z$  είναι ορθογώνιο.

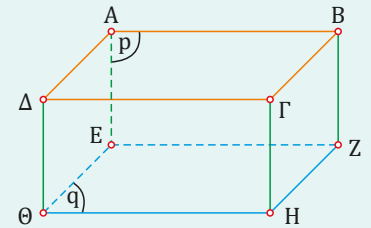
Σ Λ

ζ)  $AZ \perp ZH$ .

Σ Λ

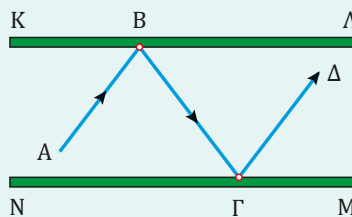
η) Η αντίστοιχη επίπεδη γωνία της δίεδρης  $(EZ, p, q)$  είναι η γωνία  $\widehat{BZH}$ .

Σ Λ



3. Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε δύο παράλληλους επιπέδους καθρέπτες στον χώρο.

Μια ακτίνα  $AB$  ανακλάται στα σημεία  $B$  και  $\Gamma$  πάνω στους καθρέπτες. Να εξετάσετε αν  $AB // \Gamma\Delta$ .

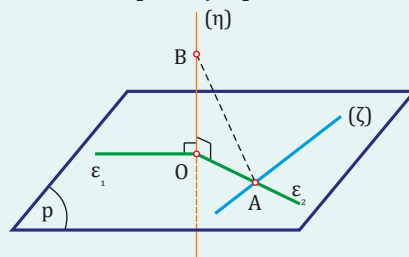


4. Στο παρακάτω σχήμα είναι  $\eta \perp \epsilon_1$ ,  $\eta \perp \epsilon_2$  και  $\zeta \perp \epsilon_2$ . Οι  $\epsilon_1, \epsilon_2$  σχηματίζουν το επίπεδο ( $p$ ) και η  $\zeta$  είναι ευθεία του ( $p$ ).

Να αποδείξετε ότι:

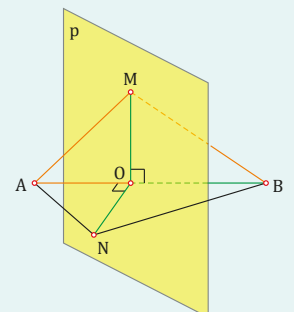
α)  $\eta \perp p$ ,

β)  $BA \perp \zeta$ .

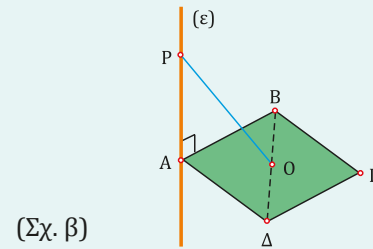
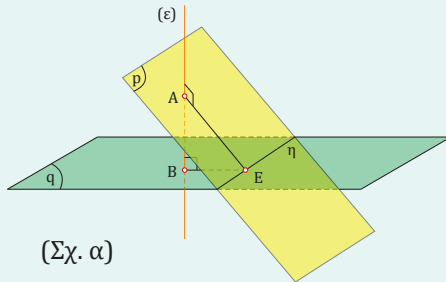


5. Δίνεται στον χώρο ένα ευθύγραμμο τμήμα  $AB$ . Πού βρίσκονται όλα τα σημεία  $M$  του χώρου που ισαπέχουν από τα σημεία  $A$  και  $B$ ;

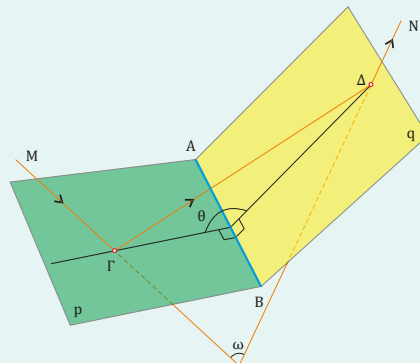
Μπορείτε προαιρετικά να χρησιμοποιήσετε το διπλανό σχήμα, στο οποίο τα σημεία  $M, N$  ισαπέχουν από τα  $A$  και  $B$ . Τι είναι η ευθεία  $AB$  στο επίπεδο  $(O, M, N)$ ;



6. Δύο επίπεδα  $(p)$  και  $(q)$  είναι κάθετα στην ίδια ευθεία  $(\varepsilon)$ . Με τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο και τη βοήθεια του παρακάτω σχήματος (Σχ. α), να αποδείξετε ότι τα  $(p)$ ,  $(q)$  είναι παράλληλα.



7. Στην κορυφή A ενός ρόμβου ABΓΔ φέρουμε ευθεία  $(\varepsilon)$  κάθετη στο επίπεδο του ρόμβου. Αν O είναι το κέντρο του ρόμβου, να αποδείξετε ότι  $PO \perp B\Delta$  για οποιοδήποτε σημείο P της ευθείας  $(\varepsilon)$  (Σχ. β).
8. Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε δύο επίπεδους καθρέφτες  $(p)$  και  $(q)$ . Μια ακτίνα φωτός από το M ανακλάται αρχικά στο σημείο Γ του  $(p)$ , μετά στο σημείο Δ του καθρέπτη  $(q)$  και φεύγει στη διεύθυνση ΔN.

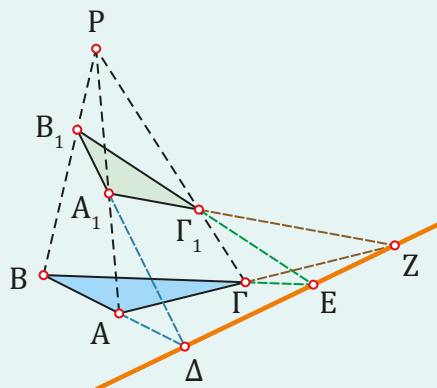


Οι καθρέφτες σχηματίζουν τη δίεδρη γωνία  $(AB, p, q)$  με αντίστοιχη επίπεδη γωνία  $\theta$ . Αν οι διευθύνσεις των ακτίνων στην αρχική και τελική πορεία σχηματίζουν γωνία  $\omega$ , να αποδείξετε ότι  $\omega = 2\theta - 180^\circ$ .

9. Στον χώρο δίνονται τα τρίγωνα ABΓ και  $A_1B_1\Gamma_1$ . Οι ευθείες  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $\Gamma\Gamma_1$  που ορίζουν οι κορυφές των τριγώνων αυτών συντρέχουν στο σημείο P, όπως στο σχήμα. Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής Δ, E, Z των  $(BA, B_1A_1)$ ,  $(B\Gamma, B_1\Gamma_1)$  και  $(A\Gamma, A_1\Gamma_1)$  τέμνονται πάνω στην ίδια ευθεία.



Πρόβλημα στις  
ασύμβατες ευθείες



# Υποδείξεις - Απαντήσεις ασκήσεων

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1<sup>ο</sup>

### Ενότητα 1.1

#### Α' Ομάδα

- α)  $x = 55^\circ$ ,  $y = 40^\circ$ ,  $\omega = 85^\circ$ .  
β)  $x = 60^\circ$ ,  $y = 70^\circ$ ,  $\omega = 50^\circ$ .  
γ)  $y = 45^\circ$ ,  $x = 85^\circ$ .  
δ)  $y = 20^\circ$ ,  $x = \omega = 30^\circ$ ,  $\kappa = 90^\circ$ ,  $\varphi = 60^\circ$ .
- $\widehat{A\Delta E} = \widehat{B} = \widehat{\Gamma} = \widehat{A\hat{E}\Delta}$ .  
Σχόλιο:  
Να λαμβάνεται ως γνωστό ότι:
  - Οι γωνίες της βάσης ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.
  - Αν δύο γωνίες τριγώνου είναι ίσες, αυτό είναι ισοσκελές.
- $\widehat{B\hat{O}A} = \widehat{A\hat{O}x} = \widehat{O\hat{A}B}$ .
- $\widehat{B} = \widehat{\Delta\hat{O}x} = \widehat{\Delta\hat{O}A} = \widehat{O\hat{A}B}$ .
- Είναι  $\widehat{\Delta\hat{E}B} = \widehat{\Delta\hat{B}E} = \widehat{\Gamma}$ .
- Αφού  $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{A\hat{A}E}$ , είναι  $\widehat{E} = \widehat{\Gamma}$ , οπότε  $\Delta E \parallel B\Gamma$ .
- Είναι  $OM \perp AB$ .
- α) Οι εντός εναλλάξ γωνίες που σχηματίζονται είναι ίσες.  
β) Είναι:  $2\varphi + 2\omega = 180^\circ$  ή  $\varphi + \omega = 90^\circ$ , όπου  $2\varphi, 2\omega$  είναι οι αρχικές γωνίες.
- Είναι:  $\widehat{\Gamma\hat{A}\Delta} = \widehat{\Gamma\hat{A}A} = \widehat{\Delta\hat{A}M}$ , αφού  $AM \parallel \Gamma\Delta$ .

#### Β' Ομάδα

- Από το E φέρουμε  $EZ \parallel AB$  στο εσωτερικό της γωνίας  $\widehat{E}$ .
- Είναι  $\Gamma\Delta \parallel AB$  και:  $\widehat{\Delta\hat{\Gamma}A} = \widehat{\Gamma\hat{A}B} = \widehat{\Gamma\hat{A}\Delta}$ .
- Είναι  $\widehat{E} = \widehat{\Gamma\hat{A}\Delta} = \widehat{\Delta\hat{A}B} = \widehat{A\hat{B}E}$ . Άρα:  $AB = AE$ .
- Είναι  $BE \parallel A\Delta$ ,  $\widehat{\Delta} = \widehat{A\hat{B}\Delta}$ ,  $\widehat{\Delta} = \widehat{\Delta\hat{B}E}$ .
- Είναι εφαρμογή στο 2ο θεώρημα.
- Είναι  $\widehat{A\hat{\Delta}B} = \widehat{A\hat{B}\Delta}$ , οπότε  $A\Delta = AB$ .
- α)  $\widehat{\Delta\hat{B}I} = \widehat{I\hat{B}\Gamma} = \widehat{B\hat{I}\Delta}$ . β) Όμοια είναι  $\Gamma E = EI$ .
- α)  $\widehat{Z} = \widehat{Z\hat{B}\Gamma} = \widehat{Z\hat{B}A}$ . β) Όμοια είναι  $HA = AG$ .
- Είναι  $AE = AG$  και  $A\Delta = AB$ .
- Είναι  $\Delta B = \Delta I$  και  $E\Gamma = EI$ .

### Ενότητα 1.2

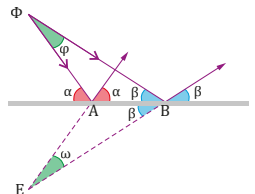
#### Α' Ομάδα

- α)  $\alpha = 130^\circ$ . β)  $\alpha = 110^\circ$ . γ)  $\alpha = 40^\circ$ ,  $\beta = 55^\circ$ .  
δ)  $\alpha = 70^\circ$ ,  $\beta = 35^\circ$ . ε)  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$ .  
στ)  $\alpha = 27^\circ$ ,  $\beta = 54^\circ$ . ζ)  $\gamma = 35^\circ$ ,  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\beta = 45^\circ$ .
- α)  $\widehat{\Gamma} = 50^\circ$ ,  $\widehat{B} = 70^\circ$ . β)  $55^\circ, 85^\circ, 40^\circ$ .

- Όπως η άσκηση 2 (β).
- α)  $\alpha = 130^\circ$ . β)  $\alpha = 50^\circ$ . γ)  $35^\circ$ . δ)  $75^\circ$ .
- Αν  $\widehat{A} = 2\varphi$ , τότε:  $\widehat{B\hat{Z}E} = \widehat{B\hat{E}Z} = 90^\circ - \varphi$ .
- Αν  $\widehat{I\hat{B}\Gamma} = 2\varphi$  και  $\widehat{I\hat{\Gamma}B} = 2\omega$ , τότε:  
 $x = 2\varphi + 2\omega = 2(\varphi + \omega) = 2y$ .
- Αν  $\widehat{B} = \varphi = \widehat{A\hat{\Gamma}B}$ , τότε:  $\widehat{\Pi\hat{\Gamma}A} = \widehat{\Pi\hat{A}\Gamma} = 2\varphi$ .
- Προεκτείνουμε την  $AO$ .
- Έστω  $\widehat{B} = \widehat{\Gamma} = \varphi$ ,  $\widehat{B\hat{\Delta}E} = \rho$ ,  $\widehat{Z\hat{E}\Gamma} = \tau$ ,  $\widehat{A\hat{Z}\Delta} = \sigma$ .  
Τότε:  $x = 180^\circ - \varphi - \rho = \dots = 60^\circ - \varphi + \omega$   
και:  $y = 180^\circ - \varphi - \tau = \dots = 60^\circ - \varphi + x$   
ή  $x = y + \varphi - 60^\circ$ .
- α)  $\widehat{A\hat{\Delta}\Gamma} - \widehat{A\hat{\Delta}B} = \left(\widehat{B} + \frac{\widehat{A}}{2}\right) - \left(\widehat{\Gamma} + \frac{\widehat{A}}{2}\right)$ .  
β) Είναι  $\widehat{A\hat{\Delta}B} = 180^\circ - \widehat{A\hat{\Delta}\Gamma}$ .  
Στηριζόμαστε και στο (α).
- $\widehat{H} = 90^\circ - \widehat{A\hat{\Delta}H} = \frac{\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma}}{2} - \left(\widehat{\Gamma} + \frac{\widehat{A}}{2}\right)$ .
- α) Συμπληρωματικές της  $\widehat{\Gamma}$ .  
β) Αν  $\widehat{B} = 2\varphi$ , τότε:  $\widehat{A\hat{E}Z} = \widehat{B\hat{E}\Delta} = 90^\circ - \varphi = \widehat{B\hat{Z}A}$ .
- Η κάθεμία είναι  $90^\circ - \varphi$ , όπου:  $\widehat{B} = 2\varphi$ .
- Αρκεί  $\frac{\widehat{B}}{2} + \widehat{A} = \frac{\widehat{\Gamma}}{2} + \widehat{B}$  ή  $\widehat{A} = \frac{\widehat{B} + \widehat{\Gamma}}{2}$ , που ισχύει.
- Προεκτείνουμε την  $AM$ .
- Αρκεί  $\widehat{E} + \widehat{\Gamma} = 90^\circ$ . Όμως  $\widehat{A} = 2\widehat{E}$  και  $\widehat{A} + 2\widehat{\Gamma} = 180^\circ$ .

### Ενότητα 1.3 (Ανακεφαλαίωση)

- α)  $\widehat{I} = 180^\circ - (\omega + \varphi)$ ,  $\varphi = \frac{\widehat{A} + \widehat{\Gamma}}{2}$ .  
β)  $x + z = 180^\circ - \widehat{B}$ ,  $y + \omega = 180^\circ - \widehat{\Gamma}$ ,  $\rho + \varphi = 180^\circ - \widehat{A}$ .  
Προσθέτουμε κατά μέλη.
- α)  $\widehat{A\hat{Z}E} = \widehat{Z\hat{A}\Delta} = \widehat{\Delta\hat{A}B} = \widehat{Z\hat{E}A}$ .  
β)  $BE = BA + AE = BA + AZ$ .
- α)  $\widehat{Z\hat{\Delta}B} = \widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ .  
β)  $\widehat{Z\hat{K}A} = \widehat{K\hat{A}\Gamma} = \widehat{K\hat{A}Z}$ , οπότε:  $ZK = ZA$ .
- α)  $\widehat{K\hat{E}Z} = \widehat{B}$ ,  $\widehat{M\hat{K}B} = 180^\circ - 2 \cdot \frac{1}{2} \widehat{B}_{\text{εξ}} = \widehat{B}$ .  
(ή  $EZ \parallel B\Gamma$ ,  $MK \parallel B\Gamma$ ).
- Από το πάνω ημιεπίπεδο παίρνουμε ότι  $\varphi = \alpha - \beta$  (Σχέση εξωτερικής - εσωτερικών γωνιών: Η  $\alpha$  είναι εξωτερική και οι  $\varphi, \beta$  εσωτερικές στο τρίγωνο  $\Phi AB$ ). Το ίδιο προκύπτει και στο κάτω ημιεπίπεδο για την  $\omega$ , αφού η  $\alpha$  είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου  $EAB$  και η άλλη είναι επίσης  $\beta$ , ως κατακορυφήν με μια γωνία  $\beta$ .



6. Η διαδρομή και η ευθεία AB σχηματίζουν τρία ισόπλευρα τρίγωνα. Επομένως η τεθλασμένη διαδρομή είναι διπλάσια από το μήκος του AB, δηλαδή 60 μίλια.
7. Η γωνία α είναι ίση με τη γωνία AOB (εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη).
8. β) Είναι ίση με την φ.  
 γ) Το μήκος του τόξου AB είναι  $\frac{\varphi}{180} \cdot \pi r$ .

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2°

### Ενότητα 2.1

#### Α' Ομάδα

1. α) Τα τρίγωνα ABE και AΓΔ είναι ίσα.  
 β) Λόγω της παραπάνω ισότητας.  
 γ) ΠΓΠ ( $\widehat{B\hat{A}G} = \widehat{\Delta\hat{A}E}$ ).  
 δ) Από το ερώτημα (γ).
2. Τα τρίγωνα BΚΛ, ΓΛΜ, ΑΚΜ είναι ίσα (ΠΓΠ).
3. Τα τρίγωνα ABZ και AGE είναι ίσα.
4. α) Τα τρίγωνα ABE και AΓΔ είναι ίσα (ΠΓΠ).  
 β) Τα τρίγωνα AME και AMD είναι ίσα.  
 γ) Λόγω του (β).  
 δ) Η AM είναι και ύψος.  
 ε) Το τρίγωνο ADE είναι ισοσκελές και η ευθεία MA διχοτομεί τη γωνία  $\widehat{\Delta\hat{A}E}$ .  
 Είναι ακόμα  $B\Gamma, \Delta E \perp AM$ .
5. Είναι: α)  $\widehat{A\hat{D}\Gamma} = \widehat{A\hat{B}E}$ .  
 β) Λόγω του (α).
6. Τα τρίγωνα ABΔ, AGE είναι ίσα.
7. Τα τρίγωνα ABΔ και AGE είναι ίσα (ΓΠΓ).
8. α) Τα τρίγωνα AΓB, AΓΔ είναι ίσα.
- β) Το τρίγωνο ABΔ είναι ισοσκελές και η AΓ διχοτομεί τη γωνία  $\widehat{A}$ .
9. α) Τα τρίγωνα AΔB, AΔE είναι ίσα (ΠΓΠ).  
 β)  $\widehat{A\hat{E}Z} = \widehat{A\hat{B}\Gamma}$  (ΓΠΓ).  
 γ) Το AΓZ είναι ισοσκελές.
10. α) Κριτήριο ΠΓΠ.  
 β) Διότι  $\widehat{A\hat{E}\Gamma} = \widehat{A\hat{\Delta}B}$ .  
 γ) Είναι  $EB = \Delta\Gamma$ . Κριτήριο ΓΠΓ.  
 δ) Λόγω του ερωτήματος (γ).  
 ε) Η AM είναι μεσοκάθετος του BΓ αφού  $AB = A\Gamma$  και  $MB = M\Gamma$ .
11. Αν τα τμήματα BΔ και ΓE είναι τα ύψη ( $AB = A\Gamma$ ), τότε  $\widehat{A\hat{B}\Delta} = \widehat{A\hat{E}\Gamma}$ .
12. Είναι  $\widehat{A\hat{M}B} = \widehat{A\hat{M}\Gamma}$ .
13. Είναι  $\widehat{A\hat{\Delta}B} = \widehat{A\hat{\Delta}\Gamma}$ .
14. Αν  $B\Delta, \Gamma E \perp AM$ , τότε:  $\widehat{M\hat{B}\Delta} = \widehat{M\hat{\Gamma}E}$ .

15. Συγκρίνουμε δύο αντίστοιχα ορθογώνια τρίγωνα.

16. α) Αν  $M\Delta \perp A\Gamma$  και  $NE \perp AB$ , τότε  $\widehat{A\hat{\Delta}M} = \widehat{A\hat{E}N}$ .  
 β) Αν  $MZ, NH \perp B\Gamma$ , τότε:  $\widehat{M\hat{B}Z} = \widehat{N\hat{\Gamma}H}$ .
17. α)  $\widehat{M\hat{B}\Delta} = \widehat{M\hat{\Gamma}E}$ . β)  $\widehat{M\hat{A}\Delta} = \widehat{M\hat{A}E}$ .
18. α)  $\widehat{P\hat{O}\Gamma} = \widehat{P\hat{O}\Delta}$ , οπότε  $P\Gamma = P\Delta$ .  
 β) Είναι  $\widehat{M\hat{O}\Gamma} = \widehat{M\hat{O}\Delta}$ .
19. Αν AΔ, AM είναι ύψος και διάμεσος αντίστοιχα, τότε  $\widehat{A\hat{\Delta}M} = \widehat{A'\hat{\Delta}'M'}$ . Άρα  $\widehat{A\hat{M}B} = \widehat{A'\hat{M}'B'}$  κ.λπ.
20. Είναι  $\widehat{\Gamma\hat{A}B} = \widehat{\Gamma\hat{B}A}$  και  $\widehat{\Delta\hat{A}B} = \widehat{\Delta\hat{B}A}$ .
21. Είναι  $EB = E\Gamma$  και  $B\Delta = \Delta\Gamma$ .
22. Είναι  $\widehat{A\hat{B}\Delta} = \widehat{A\hat{\Gamma}E}$  και επομένως  $\widehat{O\hat{B}E} = \widehat{O\hat{\Gamma}\Delta}$ . Άρα  $OB = O\Gamma$ . Επίσης  $AB = A\Gamma$ .
- #### Β' Ομάδα
23. Τα τρίγωνα ABΓ και ΔEZ είναι ίσα.  
 α)  $\widehat{A\hat{B}K} = \widehat{A\hat{E}M}$  (ΓΠΓ).  
 β)  $\widehat{A\hat{B}\Lambda} = \widehat{A\hat{E}N}$  (ΓΠΓ).  
 γ)  $IAB = P\Delta E$  (ΓΠΓ).
24. α) Αν  $\delta_\alpha = A\Delta$ , τότε  $\widehat{A\hat{\Delta}\Gamma} = \widehat{A'\hat{\Delta}'\Gamma'}$ .  
 β) Θα είναι  $A\Gamma = A'\Gamma'$  κ.λπ.
25. α)  $OAB = OA_1B_1, OAG = OA_1\Gamma_1$ .  
 β) Είναι και  $OAB = OA_1B_1$ .
26. α)  $MAB = M\Gamma\Delta$ .  
 β) Όμοια  $A\Gamma = B\Delta$ .  
 γ)  $\widehat{B\hat{A}M} = \widehat{M\hat{\Delta}\Gamma}$ , από το (α).
27. α)  $\widehat{A\hat{B}\Gamma} = \widehat{A\hat{\Gamma}B}$  (ΠΓΠ). β)  $\widehat{A\hat{\Delta}B} = \widehat{A\hat{\Delta}\Gamma}$  (ΠΠΠ).
28. • Είναι  $\widehat{B\hat{\Delta}\Gamma} = \widehat{B'\hat{\Delta}'\Gamma'}$ , με  $B\Delta = \nu_\beta$ . Άρα  $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}$ .  
 •  $\widehat{A\hat{H}\Gamma} = \widehat{A'\hat{H}'\Gamma'}$ , όπου  $AH = \nu_\alpha$ . Άρα  $\widehat{B} = \widehat{B'}$ .
29. α) Είναι  $MAB = M\Gamma\Delta$ .  
 β) Θα είναι  $\Delta\Gamma // AB$ . Αλλά:  $AB \perp A\Gamma$ .  
 γ) Όμοια είναι  $B\Delta // A\Gamma$  (ή διότι οι γωνίες  $\widehat{M\hat{\Delta}B}$  και  $\widehat{M\hat{A}\Gamma}$  είναι ίσες και με χρήση του (β)).
30. α) Είναι  $MB = M\Gamma$ . Από ΓΠΓ.  
 β) Η AΔ είναι μεσοκάθετος του BΓ.  
 γ) Η BΓ είναι μεσοκάθετος του AΔ, αφού  $MA = M\Delta$ , από το (α).
31. Αν  $M\Delta, NE \perp B\Gamma$ , τότε:  $\widehat{M\hat{\Delta}B} = \widehat{M\hat{\Gamma}E}$ , διότι  $\Gamma N = MB$ .
32. α)  $\widehat{\Delta\hat{B}A} = \widehat{\Delta\hat{B}E}$ .  
 β) Είναι  $\widehat{\Delta\hat{E}\Gamma} = \widehat{\Delta\hat{A}H}$ .  
 γ) Αφού  $BA = BE$  και  $AH = E\Gamma$ , η BΔ είναι διχοτόμος στο ισοσκελές τρίγωνο BΗΓ.
33. α) Είναι  $BE = \Gamma\Delta$  και  $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$  στο ισοσκελές τρίγωνο ABΓ.

β)  $\widehat{AMH} = \widehat{AMZ}$ , αφού:

$$AH = AB - HB = AG - ZG = AZ$$

34. α)  $\widehat{EAB} = \widehat{EAZ}$ .

β) Η ΑΔ είναι μεσοκάθετος του ΒΖ (ή διότι  $\widehat{DEB} = \widehat{DEZ}$ ).

γ) Η ΔΕ είναι διχοτόμος στο ισοσκελές τρίγωνο ΔΒΖ.

35. α) Αν φέρουμε  $ID \perp AB$ ,  $IE \perp AG$  και  $IZ \perp BG$ , τότε  $ID = IZ = IE$ .

β) Διότι  $ID = IE$ .

36. Φέρουμε  $DN \perp BG$ . Τότε  $HZ = DN$ . Αλλά  $DN = DE$ .

37. Φέρουμε τη διχοτόμο ΑΔ και την  $\Delta H \perp BG$ .

Θα είναι:  $HB = HG = AB$ , οπότε  $\widehat{DAB} = \widehat{DHB}$ .

38. α) Το Δ βρίσκεται στη μεσοκάθετο του ΒΓ.

β) Είναι  $\Delta Z = DE$ , οπότε τα τρίγωνα ΔΖΒ, ΔΕΓ είναι ίσα.

## Ενότητα 2.2

### Α' Ομάδα

1.  $\widehat{B}_1 > \widehat{\Gamma}_2$  και  $\widehat{B}_1 > \widehat{\Gamma}_1$ . Προσθέτουμε κατά μέλη.

2.  $\widehat{BAG} = \widehat{BGA}$ , οπότε  $\widehat{DAG} = \widehat{DGA}$ .

3. α)  $\widehat{M}_1 > \widehat{\Gamma}$ . β) Από το (α).

4. α)  $\Delta A = \Delta K$ . β)  $\Delta B > \Delta K$ .

5.  $\widehat{BOM} = \widehat{LOG}$ , οπότε  $\widehat{B}_2 = \widehat{\Gamma}_2$ .

6. α)  $\widehat{IBG} = \widehat{IGB}$ . β)  $\widehat{IAB} = \widehat{IAG}$ .

### Β' Ομάδα

7.  $\widehat{KBD} = \widehat{LGD}$ .

8.  $K_1K_2 < 6+7=13$ ,  $K_2K_3 < 17$  και  $K_1K_3 < 16$ .

Δεν είναι σωστό.

9. α)  $\widehat{BAM} = \widehat{A}_1$ ,  $\widehat{GAM} = \widehat{A}_2$ , τότε:  $\widehat{B} < \widehat{A}_1$  και  $\widehat{\Gamma} < \widehat{A}_2$ .

Έτσι  $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} < \widehat{A}$  ή  $180^\circ - \widehat{A} < \widehat{A}$ .

β) Όπως στο (α).

γ)  $\widehat{B} = \widehat{A}_1$ ,  $\widehat{\Gamma} = \widehat{A}_2$ ,  $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = \widehat{A}$ .

10. α) Στο  $\Delta DG$ :  $\beta - \gamma < \Delta D < \beta + \gamma$ .

β)  $\mu_\alpha < \frac{\beta + \gamma}{2}$  και κυκλικά.

## Ενότητα 2.3

### Α' Ομάδα

1. Φέρουμε  $AM \perp GD$ .

2. Φέρουμε  $KM \perp AB$ ,  $KN \perp GD$ .

3. Φέρουμε τα αποστήματα.

4. α) Φέρουμε τα αποστήματα ΚΕ, ΛΖ.

β)  $\widehat{KAM} = \widehat{LMA}$ , οπότε:  $\widehat{KAM} = \widehat{MLA}$ .

5. α)  $OB = OD$ , ΠΠΠ.

β) Αν  $OK \perp AB$ ,  $OL \perp GD$ , τότε:  $\widehat{OKB} = \widehat{OLA}$ .

γ) Είναι  $OK = OL$ , οπότε  $AB = GD$ .

## Ενότητα 2.4

### Α' Ομάδα

1. Όπως φέρουμε τη μεσοκάθετο.

2. Στη γωνία παίρνουμε τμήμα ίσο με την υποτεινούσα και φέρουμε κάθετο από το άκρο.

3. Φέρουμε ευθεία  $\varepsilon \perp OM$ .

4. Στη μεσοκάθετο της χορδής παίρνουμε το απόστημα.

5. Στην ορθή γωνία παίρνουμε την πλευρά.

6-9 Είναι απλές εφαρμογές

### Β' Ομάδα

10. Φέρουμε τις δύο διχοτόμους και από την τομή κάθετο σε πλευρά.

11. Φέρουμε δύο κάθετες διαμέτρους. Σχηματίζεται τετράγωνο.

12. Παίρνουμε έξι χορδές με μήκος R (ακτίνα).

13. Φέρουμε τις μεσοκαθέτους δύο πλευρών. Εκεί είναι το κέντρο.

14. Φέρουμε διάμετρο ΑΔ και τη μεσοκάθετο ΒΓ της ακτίνας ΟΔ

15.  $\widehat{OAD} = \widehat{OAB} + \widehat{BAD} = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$ .

16. Διότι  $19 \cdot 19 = 361$ .

Παίρνουμε 19 ίσα διαδοχικά τόξα μέτρου  $19^\circ$ .

## Ενότητα 2.5

### Α' Ομάδα

1. Ο κύκλος (O, 5).

2. Ο κύκλος (M, MA).

3. Είναι  $BM = BA = ct$ .

4. Το απόστημα ρ των χορδών είναι σταθερό. Ο κύκλος (O, ρ).

5. Οι διχοτόμοι των γωνιών που σχηματίζονται.

6. Ευθεία παράλληλη προς τις ε, ζ από το μέσο της κοινής τους κάθετης ΓΔ.

7. Η τομή της διχοτόμου της  $\widehat{O}$  και της μεσοκαθέτου του ΑΒ.

8. Ο κύκλος με κέντρο το μέσο Ν του ΑΒ και ακτίνα

$$R = \frac{AB}{2}.$$

9. Η διχοτόμος της  $\widehat{O}$ .

10. Φέρουμε τον κύκλο (Α, 3α) και τη μεσοκάθετο (μ) του ΑΒ. Παίρνουμε κυκλικό τμήμα «δεξιά» της (μ).

11. Είναι ορθογώνιο και στις γωνίες τεταρτοκύκλια κύκλου με  $R = 1$ .

12. Δύο ευθείες παράλληλες στην (ε) που απέχουν όσο το ύψος του  $\widehat{ABG}$   $\left( u = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} \right)$ .

## Ενότητα 2.6 (Ανακεφαλαίωση)

- Είναι ερωτήσεις θεωρίας.
- α) Λ, β) Λ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Σ, στ) Λ, ζ) Σ.
- α)  $MA = MG, MB = MG$ , όπου Γ το σημείο επαφής.  
β) Οι MK, ML διχοτομούν τις γωνίες  $\widehat{AMG}, \widehat{GMB}$  όπου Γ το σημείο επαφής.
- α) Φέρουμε τη MO.  
β) Οι PK, PL διχοτομούν τις  $\widehat{APL}, \widehat{BPL}$ .
- α) Αν έχουμε τρεις ισότητες με πλευρές, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.  
β) Τα τρίγωνα αυτά έχουν τρεις ισότητες με γωνίες και δύο με πλευρές, δεν είναι όμως ίσα.
- α) Αν η ΧΑ τέμνει την ευθεία (ε) στο Ν, τότε είναι  $NA = NB$  και έτσι  $XA < XN + NA = XN + NB = XB$   
β1) Βασιζόμαστε στο πρώτο σκέλος. Είναι  $EA = EB = EG$  και  $ZA = ZD = ZG$ . Άρα τα Ε, Ζ ισαπέχουν από τα Α και Γ.
- α) Αντιστοιχούν σε ίσες επίκεντρες γωνίες ίσων κύκλων.  
β) Οι χορδές  $BB_1$  και  $B_2B_1$  είναι ίσες, λόγω του ερωτήματος (α).  
γ) Αν φέρουμε τα τμήματα  $AB_1$  και  $B_1\Gamma_1$  τότε από τα τρία ισόπλευρα τρίγωνα με κοινή κορυφή το  $B_1$  συμπεραίνουμε ότι η γωνία  $AB_1\Gamma_1$  είναι ευθεία, μια και αποτελείται από τρεις γωνίες των 60 μοιρών.
- α) Βασιζόμαστε στο σχήμα.  
β) Τα τρίγωνα  $ABG, GAE$  είναι ίσα.
- α) Δεν υπάρχει λάθος.  
γ) Το Η είναι έξω από το τρίγωνο.
- Τα  $A_1, B_1$  να είναι συμμετρικά των Α, Β ως προς την ακτογραμμή!

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3°

### Ενότητα 3.1

#### Α' Ομάδα

- α)  $\Delta\Gamma = 8, \Delta\Delta = 6$ .  
β)  $\widehat{\Delta} = 60^\circ, \widehat{\Gamma} = 120^\circ, \widehat{A} = 120^\circ$ .
- α)  $AG = 6, BD = 8$ . β)  $\widehat{OAG} = 20^\circ$ .
- Τα σχήματα (α), (β), (γ), (ε).
- α) Σ, β) Λ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Σ.
- Τα  $ABNM, \Gamma\Delta MN$  είναι παραλληλόγραμμα.  
Άρα  $BN = AM = MD = NG$ .
- α) Είναι  $\Delta E = \Delta A = B\Gamma$ . β)  $\widehat{A} = 100^\circ, \widehat{B} = 80^\circ$ .
- α) Έχει τις απέναντι πλευρές παράλληλες.

- β) Το τρίγωνο  $EAD$  είναι ισοσκελές.
- α) Οι διαγώνιες διχοτομούνται. β)  $\Delta Z = // EB$ .
- Είναι  $AB = // EZ$ .
- α) Διότι  $AG = // BD$ .  
β) Στο παραλληλόγραμμο οι διαγώνιες διχοτομούνται.
- α) Είναι  $BN = // MG$ . β) Είναι  $BN = // \Delta M$ .
- α) Το  $AB\Gamma\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο.  
β) Διότι  $A\Delta = // B\Gamma$ .
- α)  $A\Delta = B\Gamma = MZ$ .  
β) Είναι  $AZ, A\Delta // B\Gamma$ . Με απαγωγή σε άτοπο.

#### Β' Ομάδα

- α)  $\widehat{\Gamma\Delta Z} = \widehat{ABE}$ . β)  $\Delta Z = // EB$ .  
γ) Λόγω του ερωτήματος (β).
- α)  $\widehat{MAB} = \widehat{MGN}$ .  
β) Το  $ABN\Gamma$  είναι παραλληλόγραμμο. Έτσι  $\Gamma N // AB$ . Όμως και:  $\Gamma\Delta // AB$ .
- α) Από τον ορισμό. β)  $\widehat{\Delta MB} = \widehat{\Gamma} = \widehat{B}$ .  
γ) Είναι  $\Delta B = \Delta M$  και  $E\Gamma = E M$ .
- α) Το  $AZ\Gamma E$  είναι παραλληλόγραμμο.  
β) Οι ΒΔ, ΖΕ περνάνε από το μέσο της ΑΓ που είναι επίσης το Ε.  
18. α)  $A\widehat{E}\Delta = E\widehat{\Delta}\Gamma = E\widehat{\Delta}A$ .  
β) Διότι  $AB = 2B\Gamma = 2A\Delta = 2AE$ .  
γ) Είναι  $\widehat{\Delta EA} + \widehat{\Gamma EB} = \left(90 - \frac{\widehat{A}}{2}\right) + \left(90 - \frac{\widehat{B}}{2}\right) = 90^\circ$ .
- $B\widehat{\Gamma}E + B\widehat{\Gamma}Z = \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{180^\circ - \widehat{\Delta}}{2} = 90^\circ$ , διότι  $\widehat{B} = \widehat{\Delta}$  και  $\widehat{B} = \widehat{E} + B\widehat{\Gamma}E = 2B\widehat{\Gamma}E$ .
- α)  $B\Delta = A\Theta = \Gamma E$ .  
β) Το  $B\Gamma E\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο.
- α) Είναι παραπληρωματικές των ίσων γωνιών  $\widehat{A}$  και  $\widehat{\Gamma}$  του  $AB\Gamma\Delta$ .  
β) Είναι  $AE = // B\Gamma$ , οπότε:  $EB // A\Gamma$ . Όμοια  $BZ // A\Gamma$ .
- α) ΠΓΠ ( $AE = AB, A\Delta = B\Gamma$  κ.λπ).  
β) Το (α) δίνει  $\Delta E = AB = E\Gamma$  και  $A\widehat{E}\Delta = 20^\circ$ .  
γ) Είναι  $Z\Delta = AE = BZ$  και:  $\widehat{\Delta ZB} = 100^\circ - 60^\circ = 40^\circ$ .  
δ)  $\widehat{\Gamma\Delta Z} = 180^\circ - 80^\circ - 60^\circ = 40^\circ = \widehat{\Gamma Z\Delta}$ .  
Είναι ακόμα  
 $A\widehat{B}\Delta = A\widehat{B}\Gamma - \Delta B\Gamma = 80^\circ - B\widehat{\Delta}Z = 80^\circ - 70^\circ = 10^\circ$ .

### Ενότητα 3.2

#### Α' Ομάδα

- Είναι θεωρία.
- Είναι θεωρία.
- α) Σ, β) Λ, γ) Σ, δ) Σ.
- α)  $\Gamma E = A\Delta = B\Gamma$ .

- β)  $B\Gamma, \Gamma E // A\Delta$ . γ)  $\Delta E = A\Gamma = B\Delta$ .
5. α) Διότι  $A\Gamma = B\Delta$  ή  $2O\Gamma = 2O\Delta$ .  
β) Άθροισμα γωνιών τριγώνου στο τρίγωνο  $O\Gamma\Delta$ .
6. Αν η  $(\mu)$  τέμνει την  $AB$  στο  $M$  και την  $\Gamma\Delta$  στο  $N$ , τότε  
 $\overset{\Delta}{AM\Delta} = \overset{\Delta}{BM\Gamma}$  και έτσι  $MN \perp \Gamma\Delta$ .
7. Όχι απαραίτητα.
8. Οι διαγώνιες διχοτομούνται και είναι ίσες.
9. Διότι  $\hat{\Delta} = 90^\circ$ .
10. Οι διαγώνιες είναι ίσες και διχοτομούνται.
11. Αρκεί να φέρουμε δύο διαμέτρους  $A\Gamma$  και  $B\Delta$ .
12. Οι γωνίες  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Delta}$  είναι ορθές. Επίσης  
 $\overset{\Delta}{B\Delta A} = \overset{\Delta}{\Delta A\Gamma} = \overset{\Delta}{\Delta A\chi}$ .
13. Όλες οι πλευρές είναι ίσες.
14. α) Η  $A\Delta$  είναι μεσοκάθετος του  $B\Gamma$ .  
β) Είναι παραλληλόγραμμο με κάθετες διαγώνιες.
15. Το  $BE\Delta Z$  είναι παραλληλόγραμμο και η  $B\Delta$  διχοτομεί τη γωνία  $\hat{B}$ . Άρα είναι ρόμβος.
16. Με ισότητα τριγώνων. Αλλά:  
 $\overset{\Delta}{N\hat{K}A} = \overset{\Delta}{\Lambda\hat{K}B} = 45^\circ$ .
17. Είναι ορθογώνιο με  $B\Delta \perp EZ$ .

### Β' Ομάδα

18. α) Είναι π.χ.  $AE // \Gamma Z$ .  
β) Τα  $ABZE, E\Delta\Gamma Z$  είναι ίσα ορθογώνια, οπότε  
 $HE = HZ = OE = OZ$ .
19.  $\overset{\Delta}{ABZ} = \overset{\Delta}{A\Delta E}$ , οπότε  $AE = BZ$ .
20. α) ΠΓΠ. β) Είναι  $AB // \Gamma E$ . γ)  $\Gamma E = AB = \Gamma\Delta$ .  
δ) Είναι  $BE // A\Gamma$  και  $A\Gamma \perp B\Delta$ .
21. α)  $\overset{\Delta}{\Delta A E} = \overset{\Delta}{\Gamma B E}$ . β)  $\overset{\Delta}{\Delta E A} = \overset{\Delta}{\Gamma E B} = \overset{\Delta}{\Gamma B E} = 75^\circ$ .  
Βρίσκουμε  
 $\overset{\Delta}{E Z B} = \overset{\Delta}{Z E \Gamma} + \overset{\Delta}{Z \Gamma E} = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ = \overset{\Delta}{Z B E}$ .
22. Αν  $MN \perp \Gamma H$ , τότε  $HN = M\Delta$  και  $ME = N\Gamma$ .
23. α)  $\overset{\Delta}{AZ\Delta} = \overset{\Delta}{AEB}$ .  
β) Είναι  $\overset{\Delta}{\Gamma A \Delta} = \overset{\Delta}{\Gamma A B}$ ,  $\overset{\Delta}{Z A \Delta} = \overset{\Delta}{E A B}$ .
24. α) Είναι συμπληρωματικές της γωνίας  $B\hat{\Gamma}A$ .  
β)  $\overset{\Delta}{B Z \Gamma} = \overset{\Delta}{B \Delta Z} + \overset{\Delta}{Z B \Delta} = \overset{\Delta}{E B \Gamma} + \overset{\Delta}{E B Z} = \overset{\Delta}{B \hat{\Gamma} Z}$ .
25. α) Τα τρίγωνα  $AKN, B\Lambda K$  κ.λπ. είναι ίσα.  
β) Στο παραλληλόγραμμο  $KBMD$  ( $KB // \Delta M$ ) η  $KM$  διέρχεται από το μέσο της  $B\Delta$ .
26. Είναι  $\varphi + \omega = 90^\circ$  και έτσι οι γωνίες στα  $K, \Lambda, M, N$  είναι ορθές.
27. α)  $\overset{\Delta}{A\Delta E} = \overset{\Delta}{ABZ}$ .  
β) Είναι  $\hat{E} = \hat{Z}$  και  $\hat{Z} + \overset{\Delta}{Z A B} = 90^\circ$ .
28. Φέρουμε  $NE \perp B\Gamma$  και  $MZ \perp AB$ .

29. α)  $\hat{E} = \hat{Z} = \hat{H} = \hat{\Theta} = 90^\circ$ . δ)  $Z\hat{\Theta}E = \Delta\hat{\Gamma}E = 45^\circ$ .

30. α)  $\overset{\Delta}{BMZ} = \overset{\Delta}{\Gamma M \Delta}$ . β)  $\Delta E = EB + B\Gamma = EB + BZ = EZ$ .  
γ)  $\overset{\Delta}{E \hat{\Delta} Z} = \overset{\Delta}{Z} = \overset{\Delta}{Z \hat{\Delta} \Gamma}$ .

31. Την κορυφή της γωνίας  $\chi$  την ενώνουμε με την άνω κορυφή τού πάνω δεξιά τετραγώνου.

### Ενότητα 3.3

#### Α' Ομάδα

1. α) Είναι  $MK = \frac{AE}{2} = N\Lambda$ .  
β) Το  $MN\Lambda K$  είναι παραλληλόγραμμο.
2. Είναι  $MZ // H\Gamma$  και  $MN // AB$ .
3. α) Το  $K$  είναι μέσο της  $A\Gamma$ . β) Διότι  $MK // \Lambda\Gamma$ .
4. α)  $ME // B\Delta$  και το  $M$  είναι μέσο του  $AB$ .  
β) Το  $EN$  ενώνει μέσα.

#### Β' Ομάδα

5. α) Το  $K\Lambda MN$  είναι παραλληλόγραμμο.  
β)  $K\Lambda = \frac{A\Gamma}{2} = \frac{B\Delta}{2} = KN$ . γ) Είναι  $A\Gamma = B\Delta$ .  
δ) Αφού  $A\Gamma \perp B\Delta$ , είναι  $KM \perp KN$ .
6. α)  $MB = M\Gamma$  και  $MZ // B\Lambda$ .  
β) Στο τρίγωνο  $AMZ$  είναι:  $K\Lambda // MZ$ . Άρα  $\Lambda A = \Lambda Z$ .  
γ)  $B\Lambda = 2MZ = 4K\Lambda$ .
7. α)  $\Gamma H = \frac{O\Gamma}{2} = \frac{A\Gamma}{4}$ ,  $O$  το κέντρο του  $AB\Gamma\Delta$ .  
β) Είναι  $Z E // B\Delta$ , οπότε το  $H$  είναι μέσο του  $\Gamma O$ .
8. α) Το τρίγωνο  $ABE$  είναι ισοσκελές και το  $M$  θα είναι μέσο της  $BE$ .  
β)  $MN = \frac{E\Gamma}{2} = \frac{A\Gamma - AE}{2}$ ,  $AE = AB$ .  
γ) Είναι  $MN // A\Gamma$ .  
δ) Στο τρίγωνο  $BAE$  το  $E$  είναι μέσο και  $MN // AE$ .
9. α) Είναι  $\Delta M // BZ$ . Στο  $ABZ$  το  $E$  θα είναι μέσο του  $AZ$ .  
β) Στο  $\overset{\Delta}{\Gamma E \Delta}$  το  $Z$  θα είναι μέσο του  $\Gamma E$ .

### Ενότητα 3.4

#### Α' Ομάδα

1. α) Είναι  $M\Delta = MA$  και:  $M\hat{\Delta}A = M\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}B$ .  
β) Διότι  $MA = M\Gamma$  και  $\Gamma\Delta // AB$ .
2. Είναι  $MZ = \frac{MB}{2} = ME$ .
3. Είναι  $MO = OA = OB$ , όπου  $O$  το κέντρο του κύκλου.
4. Είναι  $MA = MB = \frac{OK}{2}$ .
5. α) Διότι  $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ .  
β)  $B\Gamma = 2AB = 2 \cdot 2MN = 4MN$ .
6. α)  $\Delta\hat{A}\Gamma = 30^\circ$ .  
β)  $B\Gamma = 2A\Gamma$  ή  $\Gamma\Delta + \Delta B = 4\Gamma\Delta$ .
7. α)  $\Gamma E = \frac{A\Gamma}{2} = AB$ . β)  $A\Gamma = 2AB = 4B\Delta$ .

8.  $ME = AE - AM = \frac{AG}{2} - \frac{AB}{2}$ .
9. α)  $KL = \frac{AB}{2} = \frac{BG}{4}$ .  
β) Είναι παραλληλόγραμμο (είναι  $AB \parallel \Lambda M$ ),  
 $BA = \Lambda A$ .  
γ) Είναι διαγώνιοι ρόμβου.
10. α)  $\widehat{M\hat{A}N} = \widehat{\Delta\hat{A}M} + \widehat{\Delta\hat{A}N} = 90^\circ$ . β)  $\Delta P = \frac{MN}{2} = \frac{BG}{4}$ .  
γ)  $MA = M\Delta$  και  $NA = N\Delta$ .
11. Είναι  $KE = K\Delta$  και  $LE = \Lambda\Delta$ .
12. α)  $\widehat{EB\Gamma} = \widehat{\Gamma} = 30^\circ$ . Όμως  $\widehat{B} = 60^\circ$ .  
β)  $EA \perp BA$ ,  $E\Delta \perp B\Gamma$ .  
γ)  $E\Gamma = 2E\Delta$  ή  $A\Gamma - AE = 2E\Delta$  ή  $A\Gamma = 3E\Delta$ .

**Β' Ομάδα**

13. α)  $MA = M\Gamma$ . β)  $\Lambda\Delta = \frac{MA}{2}$ .
14. α) Το EZ ενώνει μέσα.  
β) Διότι  $EZ \parallel AB$ .  
γ)  $\widehat{\Delta E Z} = \widehat{E Z \Gamma} - \widehat{E \Lambda Z} = \widehat{B} - \widehat{\Gamma}$ .
15. α) Διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου.  
β)  $MA = M\Delta$ ,  $NA = N\Delta$  (ΠΠΠ).  
γ) Η γωνία  $\widehat{M\hat{A}N}$  είναι ορθή.  
δ)  $B\Gamma = 2MN = 4\Delta K$ .
16. α)  $\widehat{A\hat{B}\Delta} = 30^\circ$ . β)  $ME = \frac{B\Gamma}{2} = M\Delta$ .  
γ)  $\widehat{E\hat{M}B} = 180^\circ - 2\widehat{B}$  και  $\widehat{\Delta\hat{M}\Gamma} = 180^\circ - 2\widehat{\Gamma}$ .  
δ) Το τρίγωνο  $M\Delta E$  είναι ισόπλευρο.

**Ενότητα 3.5****Α' Ομάδα**

- Είναι ερωτήσεις θεωρίας.
- α) διχοτόμων, εγγεγραμμένου,  
β) μεσοκαθέτων, περιγεγραμμένου, κορυφές,  
γ) ορθόκεντρο,  
δ) βαρύκεντρο.
- α) Σ, β) Λ, γ) Σ, δ) Σ.
- Το ισόπλευρο τρίγωνο.
- Το I είναι έγκεντρο του  $\triangle AB\Gamma$ .
- α) Είναι το έγκεντρο του  $\triangle AB\Gamma$ .  
β) Στο περίκεντρο του  $\triangle AB\Gamma$ .
- Το H είναι βαρύκεντρο.
- α)  $OB = \frac{2}{3}BM = \frac{2}{3}\Gamma N = O\Gamma$ .  
β) ΠΓΠ ( $ON = OM$ ,  $OB = O\Gamma$ ).  
γ)  $2NB = 2M\Gamma$  ή  $AB = A\Gamma$ .
- α)  $\Theta M = \frac{1}{3}AM$ ,  $AM = \frac{B\Gamma}{2}$ . β)  $A\Theta = \frac{2}{3}AM$ .
- Τα  $B\Delta$ ,  $\Gamma E$  είναι ύψη.
- $BE \perp A\Gamma$ ,  $A\Delta \perp B\Gamma$ .

12. Αν M το μέσο της  $B\Gamma$ , τότε:  $\Theta M = \frac{1}{2}A\Theta = \frac{1}{2}B\Gamma$ .

13.  $\Gamma H \perp AB$ , διότι:  $30^\circ + 40^\circ + 20^\circ = 90^\circ$ .

14. α)  $MN \parallel A\Gamma$ .

β) Στο  $\triangle ABN$  το M είναι ορθόκεντρο.

15. α) Το Λ είναι βαρύκεντρο στο τρίγωνο  $AB\Gamma$ .

β)  $B\Lambda = \frac{2}{3}B\Theta = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}B\Delta = \frac{1}{3}B\Delta$ .

16. α) Το  $M\Delta$  ενώνει μέσα.

β)  $P\Delta \parallel M\Gamma$ ,  $AM \perp B\Gamma$ .

γ) Στο  $\triangle AM\Delta$  το P είναι ορθόκεντρο.

17. α) Το  $K\Lambda$  ενώνει μέσα.

β) Φέρουμε την  $A\Gamma$  και σχηματίζονται δύο βαρύκεντρα.

18. α) Είναι το I. β)  $135^\circ$ .

19. α) Διότι  $ME = M\Delta = MB = M\Gamma$ .

β) Διέρχονται από το M.

20. α) Είναι το μέσο M της  $A\Gamma$ .

β)  $MA = MB = M\Gamma = M\Delta$ .

γ) Άμεσο από το ερώτημα (β).

21. α) Διότι  $MB = \frac{A\Delta}{2}$ . β) Είναι  $\Gamma M = \frac{A\Delta}{2}$ .

γ) Διέρχονται όλες από το M.

**Ενότητα 3.6****Α' Ομάδα**

- α)  $MK = \frac{AB}{2} = \Lambda N$ ,  $K\Lambda = \frac{\Gamma\Delta - AB}{2}$ .  
β) Διάμεσος τραπεζίου.
- α) Τα τμήματα αυτά ενώνουν μέσα.  
β)  $K\Lambda = \frac{\Gamma\Delta - AB}{2} = AB$ ,  $K\Lambda \parallel AB$ .
- Είναι  $ZH = ZB = Z\Gamma$ .
- α) Το  $B\Delta E\Gamma$  είναι τραπέζιο και η  $MN$  είναι διάμεσος.  
β) Το  $\triangle ANM$  είναι ορθογώνιο.
- α)  $\Delta E \parallel B\Gamma$ ,  $B\Delta \not\parallel \Gamma E$ .  
β) Επιπλέον  $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ .
- Είναι  $\triangle A\hat{E}\Delta = \triangle B\hat{Z}\Gamma$  και  $EZ = AB$ .
- $EZ \parallel AB \parallel \Gamma\Delta \parallel \Theta H$ ,  $E\Theta = \frac{A\Delta}{2} = \frac{B\Gamma}{2} = ZH$ .
- $K\Lambda \parallel \Gamma\Delta$ ,  $EK = \frac{A\Delta}{2} = \frac{B\Gamma}{2} = \Lambda\Gamma$ .

**Β' Ομάδα**

- α)  $\Delta H = \frac{AB}{2} = ZE$ . β)  $HZ \parallel B\Gamma$ .  
γ) Διαγώνιες ισοσκελούς τραπεζίου.
- α) Είναι  $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ . β)  $H\Gamma = BZ = ZA$ .
- α)  $B\Gamma = A\Delta = \Gamma E$ . β)  $B\hat{\Gamma}A = \Gamma\hat{\Lambda}\Delta = A\hat{\Gamma}E$ .  
γ)  $\Gamma A \perp BE$  και  $\Delta E \parallel A\Gamma$ .
- Φέρουμε την  $A\Gamma$ . Αν O είναι το μέσο της, τότε  $O\Delta \parallel \Gamma E$ .

13. Έστω Ν το μέσο του ΒΓ. Τότε:  $MN = \frac{BG}{2}$ .
14. Έστω Μ το μέσο του ΕΖ. Είναι:  
 $OM \perp ZE$  και  $OM \parallel \Delta E$ .
15. Έστω Ν το μέσο της ΑΔ. Είναι:  $MA = MD$ .
16.  $AA' + \Gamma\Gamma' = 2KK'$ ,  $\Delta\Delta' + BB' = 2KK'$ .
17. Είναι  $OO' = \frac{BB'}{2}$  και:  $OO' = \frac{AA' - \Gamma\Gamma'}{2}$ .

### Ενότητα 3.7 (Ανακεφαλαίωση)

#### Α' Ομάδα

- Είναι ερωτήσεις θεωρίας.
- Είναι ερωτήσεις θεωρίας.
- α) Σ, β) Λ, γ) Σ, δ) Σ, ε) Λ, στ) Σ, ζ) Σ.
- Διότι  $OM \parallel AB$ ,  $ON \parallel AB$ .
- Τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΜΓΕ είναι ίσα. Οπότε  $MA = ME$ .
- α)  $BA \perp AG$  και  $MZ \parallel BA$ .  
 β) Στο τρίγωνο ΑΖΓ το Μ είναι ορθόκентρο
- α)  $\widehat{A\Gamma N} = \widehat{\Delta\Gamma M} = 30^\circ = \widehat{\Gamma\Delta\Delta} = \widehat{\Delta}$   
 β) Είναι  $\widehat{BAN} = \widehat{B\Gamma N} = 90^\circ$  και  $OA = OG = \frac{BN}{2}$   
 όπου Ο το μέσο του ΒΝ.  
 γ) Οι πλευρές είναι ίσες.
- α) Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΔΖ είναι ίσα.  
 Οπότε  $ZH = AE = AZ$ .  
 β) Η ΝΖ είναι μεσοκάθετος του ΑΗ.  
 γ)  $\widehat{NHZ} = \widehat{NHA} + \widehat{AHZ} = \widehat{N\hat{A}H} + \widehat{H\hat{A}Z} = \widehat{N\hat{A}Z} = 90^\circ$
- α)  $EN = \frac{AG}{2} = NA$ ,  $\Delta M = \frac{AB}{2} = MA$   
 β)  $BD = \Delta M$ ,  $\widehat{A\hat{B}\Delta} = 60^\circ$ .  
 γ)  $\widehat{EM\Delta} + \widehat{M\hat{E}N} = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$ .
- α) Οι πλευρές είναι ίσες.  
 β) Είναι διαγώνιες ρόμβου.  
 γ) Διότι  $MN \parallel \Gamma\Delta$ .  
 δ) Έχουν παράλληλες πλευρές κ.λπ.
- $AD = AB = AE$ .
- α) Είναι ορθή. β)  $x = y$ .
- α) Οι απέναντι πλευρές είναι ίσες.  
 β) Τα τρίγωνα με υποτείνουσες ΔΗ, ΕΗ είναι ίσα.
- Είναι  $PH \perp \Gamma\Delta$ . Τότε τα τρίγωνα ΡΗΜ και ΜΕΖ είναι ίσα.
- Από τις κορυφές του τριγώνου ΚΛΜ φέρουμε παράλληλες προς τις απέναντι πλευρές.
- Αν  $Z\widehat{H\Gamma} = x$  τότε  $\beta + x = 30^\circ$  (προεκτείνουμε την ΓΖ) και  $\alpha - x = 30^\circ$  (στο τρίγωνο  $\widehat{\Delta H B} = 90^\circ - x$ ).
- Παίρνουμε το συμμετρικό του Ο ως προς το Ρ.
- α) Έστω Μ το μέσο του ΓΔ και:  $\widehat{\Delta} = \varphi$ . Τότε  $\widehat{M\hat{A}\Delta} = \varphi$ ,  $\widehat{\Delta O B} = \varphi$ ,  $AM = AO$ ,  $\widehat{A\hat{O}M} = \widehat{A\hat{M}O} = 2\varphi$ .

β) Από το Α φέρουμε:  $\varepsilon \parallel Ox$ ,  $AB \perp Ox$  κ.λπ. Δεν έχουμε αντίφαση γιατί δεν μπορούμε με κανόνα και διαβήτη να φέρουμε την ευθεία ΟΓΔ (είναι «νεύση»).

- Οι συμμετρικές δημιουργούν ισοσκελή τρίγωνα και έτσι έχουμε ανακλάσεις στα Γ, Δ, Ε.
- Σε ευθεία:  $AG = \Gamma\Delta = \Delta E$  (ΑΕ τυχαίο). Στο ΒΓ:  $BZ = ZH$  ΗΓ. Στο τρίγωνο ΔΑΒ το Η είναι βαρύκентρο.
- Αν φέρουμε τη ΓΔ, τότε τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΒΓΔ είναι ίσα. Επομένως  $AD = \Gamma B$  και έτσι το ΑΓΒΔ είναι παραλληλόγραμμα και κατά συνέπεια ορθογώνιο, αφού έχει και ορθή γωνία.
- α) Εκεί που ενώνονται τα εξωτερικά σπίρτα (3 σπίρτα μαζί) σχηματίζουν γωνία 180 μοιρών και έτσι τα σπίρτα βρίσκονται στην ευθεία. Άρα πράγματι τα εξωτερικά σπίρτα αποτελούν τις πλευρές του τριγώνου.  
 β) Οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες. Μπορούμε όμως να εργαστούμε και με παραλληλόγραμμα (ρόμβοι).  
 γ) Όπως στο σχήμα.
- Η γωνία φ σχηματίζεται από δύο διχοτόμους. Βρίσκουμε ότι  $\omega = 2\varphi - 180^\circ$ .
- Οι διαδρομές είναι ίσες. Αρκεί να προεκτείνουμε τις ΒΖ και ΑΔ μέχρι να συναντηθούν στο Η. Τότε οι διαδρομές ΑΔΕΖ και ΑΔΗΖ έχουν το ίδιο μήκος.
- Τα σημεία Κ, Λ και Ο είναι τα κέντρα βάρους των ΑΔΓ, ΑΒΓ και ΑΒΓΣ αντίστοιχα.
- $AB = 256m$

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4<sup>ο</sup>

### Ενότητα 4.1

#### Α' Ομάδα

- Α. (Α, Β, Γ), (Α, Β, Δ), (Α, Β, Ε) κ.λπ. Σύνολο  $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$  επίπεδα.  
 Β. α) Η ευθεία ΑΒ.  
 β) i) ΒΔ, ΒΕ, ΔΕ. ii) ΓΔ, ΔΕ, ΓΕ.
- Όπως στο θεώρημα 1.
- α) (Α, Β, Γ), (Α, Γ, Δ), (Α, Β, Δ), (Β, Γ, Δ).  
 β) i) ΓΔ, ii) ΒΔ iii) ΑΓ. γ) ΓΔ.
- α) (Α, Β, Γ) // (Ε, Ζ, Θ),  
 (Α, Β, Ζ) // (Γ, Δ, Θ) κ.λπ.  
 β) (ΑΒ, ΘΗ), (ΒΓ, ΕΖ), (ΒΓ, ΘΗ) κ.λπ.  
 γ) Διότι  $BZ \perp (Z, E, H)$  και  $ZO \perp HE$ .
- Δεν τέμνονται, διότι:  $p \parallel q$  και  $\varepsilon \neq \zeta$
- $KL \parallel AD$ ,  $NM \parallel \Gamma B$ .

7. Το επίπεδο  $(A, \varepsilon)$  τέμνει το  $(p)$ .
8.  $\alpha)$   $NM // KL$ .  $\beta)$  Με το θεώρημα 1.
9.  $\alpha)$  Με άτοπο.  
 $\beta)$  Η  $(\varepsilon)$  δεν τέμνει το  $(q)$  και είναι  $\varepsilon \# \Gamma\Delta$ .

### **B' Ομάδα**

10. Παίρνουμε ένα σημείο στην τομή και φέρουμε παράλληλη στην  $(\varepsilon)$ . Αυτό ανήκει και στο  $(p)$  και στο  $(q)$ .
11. Θεώρημα τριών καθέτων.
12. Είναι  $OA \perp (\varepsilon)$ .
13. Θεώρημα τριών καθέτων.
14. Με άτοπο.
15. Διότι  $OB \perp (\eta)$ , από το θεώρημα τριών καθέτων.

### **Ενότητα 4.2**

#### **A' Ομάδα**

1.  $\alpha)$   $AB, EZ, \Theta H$ .  $\beta)$   $B\Gamma, A\Delta, \Theta\Gamma, H\Delta, Z\Gamma, E\Delta$ .  
 $\gamma)$   $(B\Gamma, EZ), (B\Gamma, \Theta H), (AE, B\Gamma)$ .  $\delta)$   $\Gamma\Theta$ .  
 $\varepsilon)$  Τα  $(A, B, \Gamma, \Delta), (A, E, H, \Delta)$  με ακμή  $A\Delta$  και αντίστοιχη επίπεδη  $BAE$  (ή  $\Gamma\Delta H$ ).  
 $\sigma\tau)$   $(A, B, \Gamma, \Delta) \perp (A, \Delta, H, E)$ .
2. Όπως στην άσκηση 1.
- $\delta)$   $B\Gamma // A\Delta // ZH // E\Theta$ , κάθετες στο  $(\Gamma, \Delta, \Theta, H)$ .
3.  $\alpha)$  Π.χ.  $A\Delta$  ( $ABE\Delta, A\Gamma Z\Delta$ ) με ακμή  $A\Delta$  και επίπεδη γωνία  $\widehat{B\hat{A}\Gamma}$  ίση με  $60^\circ$ .
4. Με τον ορισμό.

5.  $\alpha)$  Π.χ.  $(AB\Gamma) // (K\Lambda M), (AB\Delta) // (E\Delta N)$ .  
 $\beta)$   $AZ$  ( $(AZE), (AZ\Sigma)$ ) με γωνία  $90^\circ$ .
6.  $\alpha)$  Η  $P\Gamma$  είναι ορθογώνια με την  $AB$ . Όμοια και η  $P\Delta$ .  
 $\beta)$  Σε επίπεδο που διχοτομεί τη διέδρη.  
 $\gamma)$  Η γωνία  $\widehat{\Gamma H\Delta}$ .
7. Παίρνουμε σημείο  $A$  στην  $(\varepsilon)$  και φέρουμε  $AB \perp p$ . Το επίπεδο  $(\varepsilon, AB)$  είναι κάθετο στο  $(p)$ .

### **Ενότητα 4.3**

#### **A' Ομάδα**

1. Είναι ερωτήσεις θεωρίας.
2.  $\alpha)$   $\Sigma$ ,  $\beta)$   $\Sigma$ ,  $\gamma)$   $\Sigma$ ,  $\delta)$   $\Sigma$ ,  $\varepsilon)$   $\Lambda$   $\sigma\tau)$   $\Sigma$ ,  $\zeta)$   $\Sigma$ ,  $\eta)$   $\Sigma$ .
3. Στο  $B$  βάζουμε  $\varphi, \chi, \varphi$  και στο  $\Gamma$   $\omega, y, \omega$ . Πρέπει  $\varphi = \omega$ , οπότε  $x = y$  και έτσι  $AB // \Gamma\Delta$ .
4.  $\alpha)$  Διότι  $\eta \perp \varepsilon_1, \eta \perp \varepsilon_2$ .  
 $\beta)$  Από το θεώρημα τριών καθέτων.
5. Στο μεσοκάθετο επίπεδο του  $AB$ .
6. Αν όχι, τότε το τρίγωνο  $EAB$  θα έχει δύο ορθές γωνίες.
7. Διότι  $AO \perp B\Delta$ .
8. Έστω  $O$  η κορυφή της  $\omega$  και  $A$  η κορυφή της  $\theta$ .  
 $\widehat{\Delta\hat{\Gamma}O} = 2x, \widehat{\Gamma\hat{\Delta}O} = 2y = 2\widehat{\Gamma\hat{\Delta}A}$ .  
Άθροισμα γωνιών στο  $O\hat{\Gamma}\hat{\Delta}$ .
9. Τέμνονται στην τομή των επιπέδων των τριγώνων.

# Ευρετήριο όρων

## Άθροισμα γωνιών

Τριγώνου.....	22
Πολυγώνου .....	25
Ανισοτικές σχέσεις.....	47
Αντίστοιχη επίπεδη δίδερης γωνίας.....	130
Αξίωμα παραλληλίας.....	15
Απόστημα χορδής.....	52
Ασύμβατες ευθείες.....	124
Βαρύκεντρο.....	104

## Γεωμετρία

Απόλυτη.....	20
Ευκλείδεια .....	17
Σφαιρική .....	19
Υπερβολική.....	19
Γεωμετρικά όργανα .....	65
Γεωμετρικός τόπος.....	73

## Γωνίες

Εναλλάξ.....	14
Εντός εκτός.....	14
Εξωτερικές .....	47
Παραπληρωματικές .....	14
Διαγώνιος.....	73
Διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου .....	95
Διάμεσος τραπέζιου .....	108
Δίδερη γωνία .....	130
Διχοτόμος.....	40
Δραστηριότητα.....	13
Έγκεντρο.....	102
Επίπεδο .....	122
Ευθεία κάθετη σε επίπεδο.....	125
Ευκλείδειο αίτημα.....	15
Εφαπτόμενα τμήματα .....	43
Θεώρημα τριών καθέτων .....	126
Ίσα τρίγωνα.....	35
Ισοσκελές τραπέζιο .....	110
Ισοσκελές τρίγωνο.....	38
Κάθετα επίπεδα .....	131
Κανόνας .....	55
Κατακορυφήν γωνίες .....	13

## Κατασκευή

Διχοτόμου .....	60
Καθέτου προς ευθεία.....	58
Μεσοκαθέτου.....	57
Παράλληλης.....	18
Τριγώνων.....	62, 63
Κέντρο παραλληλογράμμου.....	77
Κοινή χορδή.....	50

## Κριτήρια

Ισότητας ορθογωνίων τριγώνων.....	39,40
Ισότητας τυχαίων τριγώνων.....	36, 37,39

## Κριτήρια ώστε να είναι ένα τετράπλευρο

Ισοσκελές τραπέζιο .....	111
Ορθογώνιο.....	83
Ρόμβος.....	84
Τετράγωνο.....	86
Κύκλος εγγεγραμμένος .....	102
Κύκλος περιγεγραμμένος.....	101
Μεσοκάθετος.....	41
Μη ευκλείδειες γεωμετρίες .....	19
Ορθογώνιο .....	82, 83
Ορθόκεντρο .....	102
Παράλληλα επίπεδα .....	123
Παράλληλες ευθείες.....	13
Παραλληλόγραμμο .....	73
Περίκεντρο.....	101
Ρόμβος .....	82, 84

## Σχετικές θέσεις

ευθειών και επιπέδων .....	125
δύο επιπέδων .....	123
Τεμνόμενα επίπεδα.....	123
Τεμνόμενες ευθείες .....	13
Τέμνουσα.....	14
Τετράγωνο.....	82, 85
Τραπέζιο .....	108
Τριγωνική ανισότητα.....	49
Χορδές.....	52

