## Αλγεβρικές σχέσεις

# Υπολογίζω τη χρυσή τομή

Στο σχήμα, το ευθύγραμμο τμήμα έχει χωριστεί σε δύο μικρότερα, που για τα μήκη τους ισχύει η αναλογία:

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha}=\frac{\alpha}{\beta}$$


Ο λόγος $\frac{\alpha}{\beta}$, τον οποίο ονομάζουμε χρυσή τομή και συμβολίζουμε με το γράμμα φ είναι άρρητος αριθμός και ισούται με $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Σε σχήματα που εμπεριέχουν αυτή την αναλογία, τη λεγόμενη ως «θεία» ή «χρυσή», αποδίδεται χαρακτηριστικά αρμονίας και ομορφιάς.

Για περισσότερες πληροφορίες μπορείτε να μελετήσετε το ψηφιακό μαθησιακό αντικείμενο με τίτλο «η χρυσή τομή» που βρίσκεται στην διδακτική ενότητα 1.2.

Το ερώτημα που θα απαντήσουμε εδώ είναι πώς υπολογίζουμε την τιμή της χρυσής τομής, δηλαδή γιατί $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Εφόσον $\varphi=\frac{\alpha}{\beta}$, τότε μπορούμε να κάνουμε το εξής:

Αρχικά, με κατάλληλους μετασχηματισμούς εμφανίζουμε το $\frac{\alpha}{\beta}$ στην παρακάτω εξίσωση:

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha}=\frac{\alpha}{\beta} \quad \text{ή} \quad \frac{\alpha}{\alpha}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha}{\beta} \quad \text{ή} \quad 1+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha}{\beta} \quad \text{ή} \quad 1+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-1}=\frac{\alpha}{\beta}$$

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε όπου $\frac{\alpha}{\beta}$ το φ και μετατρέπουμε την εξίσωση που προκύπτει σε δευτεροβάθμια.

$$1+\varphi^{-1}=\varphi \quad \text{ή} \quad \varphi\cdot 1+\varphi\cdot\varphi^{-1}=\varphi\cdot\varphi \quad \text{ή} \quad \varphi+\varphi^{1-1}=\varphi^2 \quad \text{ή}$$

$$\varphi+1=\varphi^2 \quad \text{ή} \quad \varphi^2-\varphi-1=0$$

Θα λύσουμε την τελευταία εξίσωση με συμπλήρωση τετραγώνων:

$$\varphi^2 - 2\varphi \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = 0 \quad ή \quad \left(\varphi - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0 \quad ή \quad \left(\varphi - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = 0 \quad ή \quad \left(\varphi - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \quad ή$$

$$\left(\varphi - \frac{1}{2}\right)^2 - \sqrt{\frac{5}{4}}^2 = 0 \quad ή \quad \left(\varphi - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 0$$

Αξιοποιώντας τη διαφορά τετραγώνων έχουμε:

$$\left[\left(\varphi - \frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{5}}{2}\right] \cdot \left[\left(\varphi - \frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{5}}{2}\right] = 0 \quad ή \quad \left(\varphi - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(\varphi - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) = 0 \quad ή$$

$$\left(\varphi - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\varphi - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 0$$

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad ή \quad \varphi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Η μία από τις λύσεις είναι αρνητική. Πράγματι $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$, γιατί $1 < \sqrt{5}$. Όμως ο αριθμός φ εκφράζει λόγο μηκών, άρα είναι θετικός, επομένως απορρίπτουμε την λύση $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Δεχόμαστε μόνο τη λύση $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

## ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

**ΤΙΤΛΟΣ:** Υπολογίζω τη χρυσή τομή


**ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ / ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ / ΤΕΧΝΙΚΗ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ:**

Δημήτρης Διαμαντίδης

Ελισσάβετ Καλογερία

Ειρήνη Περυσινάκη

Γιάννης Σταμπόλας

Κώστας Στουραΐτης

Βαγγέλης Φακούδης

Γιώργος Ψυχάρης



**ΕΚΔΟΣΗ:** 1.0

**ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:** 28-12-2024

Το παρόν αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της Πράξης «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ (MIS) 6010165, του Προγράμματος «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή 2021-2027» που υλοποιείται από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής και συγχρηματοδοτείται από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο.

Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων · ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ Υπουργείο Παιδείας, Θρησκευμάτων και Αθλητισμού · ΙΕΠ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ · Με τη συγχρηματοδότηση της Ευρωπαϊκής Ένωσης · ΕΣΠΑ 2021-2027 · Πρόγραμμα Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή