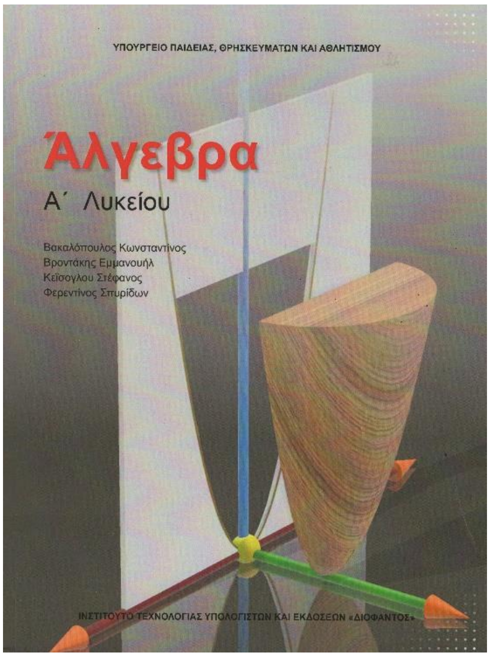
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Άλγεβρα Α΄ Λυκείου -
Βιβλίο Εκπαιδευτικού



Βακαλόπουλος Κωνσταντίνος

Βροντάκης Εμμανουήλ

Κεϊσογλου Στέφανος

Φερεντίνος Σπυρίδων

Πίνακας περιεχομένων

Πρόλογος

Το περιεχόμενο του διδακτικού βιβλίου δομείται με βάση τις παρακάτω βασικές στοχεύσεις του ΠΣ :

- **Είναι συμβατό και υποστηρίζει** τις αρχές και τους στόχους του νέου ΠΣ Οι γενικοί στόχοι μάθησης στο νέο ΠΣ εξειδικεύονται στα **Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ)**, τα οποία διατυπώνονται με ακρίβεια για να περιγράψουν τι αλλά και σε ποιο επίπεδο καλούνται να γνωρίζουν, να κατανοούν και να είναι σε θέση να κάνουν οι μαθητές
- **Υπηρετεί την εξελικτική ανάπτυξη των ΠΜΑ εντός κάθε βαθμίδας και από βαθμίδα σε βαθμίδα** όπως αυτή αποτυπώνεται στο νέο ΠΣ, χαρτογραφώντας την εξελικτική πορεία της μάθησης και την ανάπτυξη των μαθηματικών νοημάτων (αυτό που μαθαίνει ο/η μαθητής/-τρια σε μια φάση, επιτελείται σε ανώτερο επίπεδο στην επόμενη φάση). Επίσης το περιεχόμενο των διδακτικών βιβλίων είναι απαραίτητο να δίνει την δυνατότητα να ανιχνεύεται σε αυτό η εξελικτική πορεία ανάπτυξης των ΠΜΑ.
- **Αναπτύσσει το μαθηματικό περιεχόμενο λαμβάνοντας υπόψη**: τη βασική αρχή της μάθησης μέσω διερεύνησης, την ανάπτυξη της ικανότητας όλων των μαθητών/-τριών να παίρνουν αποφάσεις (με ατομική, συλλογική σκέψη, επικοινωνία, αλληλεπίδραση και συνεργασία), να μοντελοποιούν πραγματικές καταστάσεις, να νοηματοδοτούν και να κατανοούν σε βάθος τις Μεγάλες ιδέες των Μαθηματικών, οι οποίες διατρέχουν το ΠΣ. Η γνώση των μαθηματικών δομείται πάνω σε γνωστικά σχήματα που οργανώνονται γύρω από κεντρικές ιδέες ή αρχές που ονομάζονται **Μεγάλες ιδέες των Μαθηματικών**. Πρόκειται για αφηρημένες αρχές που χρησιμεύουν στην οργάνωση ευρέος φάσματος μαθηματικής γνώσης καθώς και στον καθορισμό στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων. Οι μεγάλες ιδέες διατρέχουν διαφορετικές μαθηματικές περιοχές και κάποιες από αυτές μπορεί να τις συναντήσει ο/η μαθητής/-τρια σε όλες τις εκπαιδευτικές βαθμίδες.

Μεγάλες ιδέες είναι ιδέες όπως η παρακάτω

- η **Μαθηματική δομή,**
- η **Απόδειξη,**
- η **Γενίκευση,**
- η **Μεταβολή,**
- η **Ισοδυναμία,**
- οι **Μετασχηματισμοί**

- **Εμπλέκει** τους/τις μαθητές/-τριες σε **μαθηματικές πρακτικές** οι οποίες αναπτύσσουν τον συλλογισμό, την μοντελοποίηση, την επικοινωνία και τον αναστοχασμό και ενδυναμώνουν τη μάθηση των μαθηματικών. Ως **μαθηματικές πρακτικές** εννοούμε τις νοητικές εκείνες διεργασίες που εμπλέκονται στην ανάπτυξη γνώσης και κατανόησης. Οι μαθηματικές διεργασίες αποτελούν σημαντικές όψεις της μάθησης και της κατανόησης των μαθηματικών αλλά και της μαθηματικής πράξης. Για τον λόγο αυτόν στο ΠΣ η εμπλοκή των μαθητών/-τριών στις παραπάνω γνωστικές διεργασίες θεωρούνται ως μαθηματικές πρακτικές.
- **Παραπέμπει** στη χρήση και στην επιλογή **χειραπτικών και ψηφιακών εργαλείων** τα οποία αφενός να υποστηρίζουν τους/τις μαθητές/τριες στην προσπάθεια προσέγγισης της γνώσης, καθώς και στην εφαρμογή της γνώσης που απέκτησαν, αφετέρου να επιτρέπουν στους/στις μαθητές/-τριες να ασκήσουν μια μαθηματική δράση, όπως η αποτελεσματική διατύπωση και διερεύνηση εικασιών, η κατάλληλη

αναπαράσταση μιας μαθηματικής ιδέας, οι διαφορετικές αναπαραστάσεις μιας μαθηματικής ιδέας, η μοντελοποίηση μιας κατάστασης.

- **Υποστηρίζει κοινωνικο-πολιτισμικές και κοινωνικο-συναισθηματικές πρακτικές**. Οι κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές είναι κρίσιμες διεργασίες που ενέχουν ταυτόχρονα γνωστικά και κοινωνικο-πολιτισμικό-πολιτικά στοιχεία της ανθρώπινης (νοητικής και φυσικής) δράσης και δραστηριότητας (μάθησης ή άλλης), όπως η επικοινωνία, η αλληλεπίδραση, ο λόγος (discourse), η συμπερίληψη, η ανάπτυξη μαθηματικής ταυτότητας μάθησης, η ανάπτυξη κριτικής επίγνωσης του τρόπου χρήσης των μαθηματικών, η κατανόηση της σχέσης μαθηματικών και πολιτισμού, η μαθηματική εγγραμματοσύνη. Οι κοινωνικο-συναισθηματικές πρακτικές αφορούν σε πρότυπα αναγνώρισης και διαχείρισης συναισθημάτων και συμπεριφορών, διαμόρφωσης και διατήρησης θετικών σχέσεων, λήψης υπεύθυνων αποφάσεων και επίλυσης προκλητικών καταστάσεων και, τέλος, διατύπωσης και επιτυχούς διεκπεραίωσης θετικών στόχων.
- **Περιλαμβάνει έργα και δραστηριότητες.** Το μαθηματικό έργο είναι το έργο που αναθέτει ο/η εκπαιδευτικός στους/στις μαθητές/-τριες, ενώ η μαθηματική δραστηριότητα αφορά στη δράση που προκύπτει στην πορεία εκπόνησης του μαθηματικού έργου που έχει ανατεθεί. Τα μαθηματικά έργα διαφοροποιούνται ως προς το μαθηματικό τους περιεχόμενο, ως προς την οργάνωση που απαιτούν (ατομικά ή ομαδικά), ως προς τη χρήση εργαλείων που προτείνουν και ως προς το είδος τους (γνωστικές απαιτήσεις, συνθετότητα, πλαίσιο, δράσεις που ενθαρρύνει, μαθηματικές γνωστικές διεργασίες και πρακτικές που ενδυναμώνει). Γενικότερα, ως μαθηματική δραστηριότητα εννοούμε τις μαθηματικές δράσεις τις οποίες αναπτύσσει ο/η μαθητής/-τρια (π.χ. αναζήτηση ιδιοτήτων και σχέσεων, αναγνώριση και αναζήτηση κανονικοτήτων και μαθηματικής δομής, αναζήτηση παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων), αξιοποιώντας μια ποικιλία εργαλείων (άτυπων, όπως πλακίδια και τυπικών, όπως ένα μοιρογνωμόνιο) με σκοπό να διαχειριστεί και να απαντήσει στο μαθηματικό έργο που του έθεσε ο/η εκπαιδευτικός.

ΔΟΜΗ ΚΑΙ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ – ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

ΑΛΓΕΒΡΑ Α’ ΛΥΚΕΙΟΥ										
α/α	Κεφάλαιο	Σελίδες	Παράγραφοι	Δραστηριότητες	Εφαρμογές	Ασκήσεις				Ώρες
						Κατανόησης		Ασκήσεις--Προβλήματα	Θέματα Κριτικής Σκέψης	
						Με απάντηση	Για εξάσκηση			
1	Πραγματικοί Αριθμοί	36	3	9	23	24	41	40	5	15
2	Συναρτήσεις και Τριγωνομετρία	42	4	6	12	11	28	37	-	20
3	Αλγεβρικές Παραστάσεις	8	1	2	3	7	5	11	-	5
4	Αλγεβρικές Σχέσεις	38	4	6	23	20	58	52	-	20
5	Σύνολα	12	2	6	5	6	33	8	-	10
Σύνολο		136	14	29	66	68	165	148	5	70

Το παρακάτω συμπληρωματικό υλικό περιλαμβάνει ειδικότερα ζητήματα, πλέον αυτών που αναφέρονται στον Οδηγό Εκπαιδευτικού του Προγράμματος Σπουδών και σχετίζονται με τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά και τη φύση του συγκεκριμένου γνωστικού αντικειμένου και των δραστηριοτήτων που περιλαμβάνονται στο διδακτικό βιβλίο.

Πιο συγκεκριμένα θα παρατεθούν ανά κεφάλαιο τα ΠΜΑ που αντιστοιχούν σε κάθε μία από τις παραγράφους του διδακτικού βιβλίου, καθώς και οι αντίστοιχες δραστηριότητες μέσω των οποίων οι μαθητές/τριες θα τα προσεγγίσουν. Ουσιαστικά θα προταθούν τρόποι διαχείρισης των δραστηριοτήτων προκειμένου οι μαθητές/τριες μέσα από ανακαλυπτικές διαδικασίες, με μεγαλύτερο ή μικρότερο βαθμό καθοδήγησης από τους εκπαιδευτικούς, θα προσεγγίσουν τους στόχους που εκφράζονται με τα αντίστοιχα για κάθε παράγραφο ΠΜΑ.

Επίσης θα παρατεθούν ορισμένες επιπλέον, από τις υπάρχοντες στο διδακτικό βιβλίο, δραστηριότητες, εφαρμογές, ασκήσεις, προβλήματα και λοιπό υλικό, προκειμένου ο εκπαιδευτικός δώσει μεγαλύτερη έμφαση σε ορισμένες περιοχές που κατά την κρίση του απαιτούν μεγαλύτερη εμβάθυνση και διεύρυνση.

Κεφάλαιο 1ο

1ο κεφ.: ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

1.1 Οι πραγματικοί αριθμοί και οι ιδιότητές τους

Τι καινούργιο υπάρχει στη παράγραφο

Με τη ύλη της παραγράφου αυτής θα μάθουμε να:

1) Διακρίνουμε τους ρητούς από τους άρρητους αριθμούς μέσα από τις διάφορες αναπαραστάσεις τους και να ταξινομούμε συγκεκριμένους αριθμούς στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών $(\mathbb{N},\ \mathbb{Z},\ \mathbb{Q},\ \mathbb{R}-\mathbb{Q})$ (ΠΜΑ: Αρ.Π.10.1)
2) Διερευνούμε την έννοια της «πυκνότητας» και της «διαδοχικότητας» στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών (ΠΜΑ: Αρ.Π.10.2)
3) Συμβολίζουμε με διαστήματα τα σύνολα των πραγματικών αριθμών που προσδιορίζονται με ανισοτικές σχέσεις. (ΠΜΑ: Αρ.Π.10.3)

Ανάλυση δραστηριότητας (σελ. 8)

Το σύνολο της δραστηριότητας καλύπτει το ΠΜΑ Αρ.Π.10.1

α) Αναμένουμε από τους μαθητές να αντιληφθούν ότι τα αποτελέσματα της πρώτης γραμμής του πίνακα αναφέρονται σε δεκαδικούς αριθμούς με πεπερασμένο (τερματιζόμενο) πλήθος δεκαδικών ψηφίων, σε αντίθεση με τους δεκαδικούς της δεύτερης γραμμής που έχουν άπειρο πλήθος δεκαδικών ψηφίων, μέρος του οποίου είναι επαναλαμβανόμενο (περίοδος). Σε κάθε περίπτωση και οι δύο κατηγορίες δεκαδικών μπορούν να λάβουν μορφή κλάσματος, δηλαδή μορφή ρητού αριθμού. Συγκεκριμένα, για τη ρητή μορφή του αριθμού 2,434343… μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις παρακάτω διαδικασίες προσέγγισης:

1η: Παρατηρώντας το αποτέλεσμα $\frac{43}{99}=0{,}434343...$ από το δεδομένο πίνακα, μπορούμε να έχουμε:

$$2{,}434343...=2+0{,}434343...=2+\frac{43}{99}=\frac{2\cdot 99+43}{99}=\frac{241}{99}\ .$$

2η (Γενικός τρόπος μετατροπής περιοδικού δεκαδικού σε κλάσμα):

Έστω

$x=2{,}434343...=2{,}\overline{43}$ **(1)**

Πολλαπλασιάζουμε με 100 και τα δύο μέλη της (1) ,

$100x=243{,}\overline{43}$ **(2)** *(γενικά πολλαπλασιάζουμε με κατάλληλη δύναμη του 10:* 10^{ν} *όπου ν το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων της περιόδου)*

$100x-x=243{,}\overline{43}-2{,}\overline{43}$ Αφαιρούμε κατά μέλη τη σχέση (1) από τη σχέση (2)

$99x=241$ Εκτελούμε τις πράξεις

$x=\frac{241}{99}=2{,}434343...$ Λύνουμε ως προς x

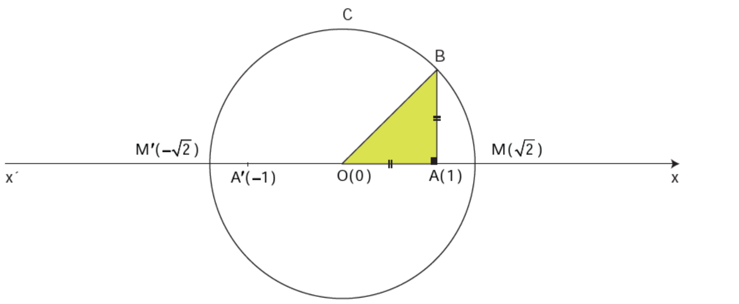
β) Αναμένουμε από τους μαθητές να αντιληφθούν ότι τα αποτελέσματα του πίνακα είτε αναφέρονται σε δεκαδικούς αριθμούς με πεπερασμένο (τερματιζόμενο) πλήθος δεκαδικών ψηφίων, είτε σε περιοδικούς δεκαδικούς, οι δύο αυτές κατηγορίες δεκαδικών μπορούν να λάβουν μορφή κλάσματος, δηλαδή μορφή ρητού αριθμού. Αντίθετα, εκκινώντας από την παρατήρηση των αποτελεσμάτων για τα π, $\sqrt{2}$, οι μαθητές θα πρέπει να εικάσουν την εμφάνιση μιας καινούργιας κατηγορίας δεκαδικών με άπειρα δεκαδικά ψηφία, οι οποίοι δε θα μπορούν να λάβουν μορφή ρητού αριθμού.

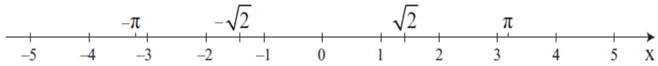
γ) Καθώς, σύμφωνα με τα προηγούμενα στο ερώτημα β), δε θα μπορεί να πάρει μορφή κλάσματος, άρα και ρητού (επομένως δε θα μπορεί να περιγραφεί με ακρίβεια), θα μπορεί να ονομαστεί άρρητος. Επιπλέον παραδείγματα άρρητων αριθμών θα μπορούσαν να είναι οι: $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{12}$ κ.λπ.

Ανάλυση δραστηριότητας

Το σύνολο της δραστηριότητας καλύπτει το ΠΜΑ Αρ.Π.10.1

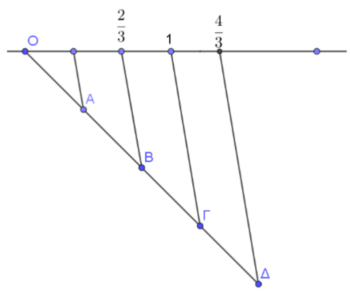
Α) Στο σημείο Α του άξονα που παριστάνει τον αριθμό 1 κατασκευάζουμε κάθετο τμήμα ΑΒ με μήκος 1. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΟΑΒ προκύπτει ότι $(OB)=\sqrt{2}$. συνέχεια με κέντρο το Ο και ακτίνα $OB=\sqrt{2}$ γράφουμε κύκλο ο οποίος τέμνει τον άξονα χ΄χ στα σημεία Μ και Μ΄ που παριστάνουν τους αριθμούς $\sqrt{2}$ και $-\sqrt{2}$ αντίστοιχα. (γιατί;)





(Τον αριθμό π τον τοποθετήσαμε κατά προσέγγιση αφού $\pi \simeq 3{,}14\ldots$)

Β) Από το σημείο Ο (που απεικονίζεται ο αριθμός 0) του άξονα των πραγματικών αριθμών φέρνουμε ημιευθεία και τα ίσα τμήματα $OA=AB=B\Gamma=\Gamma\Delta$. Ενώνουμε το Γ με το σημείο του άξονα που απεικονίζεται το 1 και φέρνουμε παράλληλες από τα σημεία Β και Δ προς το τμήμα που φέραμε από το Γ. Στα σημεία που τέμνουν οι παράλληλες αυτές τον άξονα απεικονίζονται οι αριθμοί $\frac{2}{3}$ και $\frac{4}{3}$ (Θεώρημα Θαλή)



Γ) Με δεδομένες τις θέσεις των αριθμών $\sqrt{2}$ και $\frac{2}{3}$ στην αριθμογραμμή (ερωτήματα α), και β), βρίσκουμε τουλάχιστον έναν πραγματικό αριθμό ανάμεσά τους, για παράδειγμα, τον αριθμό 1.

Σχόλιο

Στη δραστηριότητα αυτή, οι μαθητές μπορούν να θυμηθούν από το Γυμνάσιο το μάθημα των Καλλιτεχνικών, όπου χρησιμοποιούν τη συγκεκριμένη μέθοδο για να διαιρέσουν ένα ευθύγραμμο τμήμα σε ν-ίσα μέρη (και έτσι να αποκτήσει η δραστηριότητα **διαθεματικό** χαρακτήρα). (Δραστηριότητα σελίδα 17)

*Στις επόμενες δύο εφαρμογές μας δίνεται η ευκαιρία να παρουσιάσουμε την μέθοδο απόδειξης με την **«εις άτοπον απαγωγή»***

ΛΥΜΕΝΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ δεν είναι ρητός

Λύση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ δε γράφεται στη μορφή: $\frac{\alpha}{\beta}$ όπου α, β φυσικοί αριθμοί με $\beta \neq 0$

Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο απόδειξης: **«εις άτοπον απαγωγής»,** δηλαδή θα υποθέσουμε ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι ρητός και με μια σειρά λογικών βημάτων και ισχυρισμών θα φτάσουμε σε ένα συμπέρασμα που έρχεται σε αντίθεση με αυτό που υποθέσαμε, θα οδηγηθούμε όπως λέμε σε άτοπο, δηλαδή σε κάτι παράλογο, που δε μπορεί να ισχύει! Συνεπώς, δε θα ισχύει η αρχική μας υπόθεση!

Αρχικά αποδεικνύουμε την πρόταση: **«αν ο αριθμός α^2 είναι άρτιος τότε και ο α είναι άρτιος».**

Χρησιμοποιώντας και εδώ την «απαγωγή σε άτοπο», υποθέτουμε ότι ο α δεν είναι άρτιος, οπότε θα είναι περιττός και θα υπάρχει ακέραιος κ ώστε: $\alpha = 2\kappa + 1$ (γενική μορφή ενός περιττού αριθμού). Τότε θα ισχύει: $\alpha^2 = (2\kappa+1)^2 = 4\kappa^2 + 4\kappa + 1 = 2(2\kappa^2 + 2\kappa) + 1 = 2\lambda + 1$, όπου $\lambda = 2\kappa^2 + 2\kappa$, ένας ακέραιος αριθμός. Άρα ο α^2 είναι περιττός, που είναι άτοπο, καθώς έρχεται σε αντίφαση με το δεδομένο της δοθείσας πρότασης, οπότε η αρχική μας υπόθεση είναι λανθασμένη και τελικά ο αριθμός α είναι άρτιος.

Υποθέτουμε στη συνέχεια, ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι ρητός. Τότε θα υπάρχουν φυσικοί αριθμοί α, β με $\beta \neq 0$ τέτοιοι, ώστε: $\sqrt{2} = \frac{\alpha}{\beta}$, όπου $\frac{\alpha}{\beta}$ ανάγωγο κλάσμα. Τότε θα ισχύει: $(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2$, δηλαδή $2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2}$ ή $\alpha^2 = 2\beta^2$.

Συνεπώς ο αριθμός α^2 είναι άρτιος οπότε (σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση) και **ο α είναι άρτιος**, δηλαδή θα γράφεται στη γενική μορφή: $\alpha = 2\lambda$, όπου λ φυσικός. Τότε $\alpha^2 = (2\lambda)^2 = 4\lambda^2$ και επομένως $2\beta^2 = 4\lambda^2$ ή $\beta^2 = 2\lambda^2$. Συνεπώς ο αριθμός β^2 είναι άρτιος και σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση, **ο αριθμός β είναι άρτιος**. Τελικά το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ δεν είναι ανάγωγο. Αυτό όμως είναι άτοπο, εφόσον έχουμε υποθέσει ότι το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι ανάγωγο. Άρα δεν ισχύει η αρχική μας υπόθεση, και τελικά ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.

Γενικά, με την αποδεικτική μέθοδο της **«Απαγωγής σε Άτοπο»** όταν μας ζητούν να αποδείξουμε μια σχέση ή ιδιότητα:

Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει η σχέση ή η ιδιότητα που θέλουμε να αποδείξουμε και χρησιμοποιώντας μια σειρά λογικών βημάτων και ισχυρισμών, οδηγούμαστε σε ένα συμπέρασμα που έρχεται σε αντίθεση με αυτό που γνωρίζουμε -δεδομένα- ότι ισχύει. Αναγόμαστε όπως λέμε σε άτοπο! Άρα δεν ισχύει αυτό που υποθέσαμε και έτσι έχουμε αποδείξει τη σχέση ή την ιδιότητα που μας ζήτησαν.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Να αποδείξετε ότι αν ρ ρητός και x άρρητος αριθμός τότε το άθροισμα $\rho + x$ είναι άρρητος αριθμός.

Λύση

Έστω ρ ρητός αριθμός. Τότε θα υπάρχουν κ, λ ακέραιοι με $\lambda \neq 0$ τέτοιοι, ώστε $\rho = \frac{\kappa}{\lambda}$ και x άρρητος αριθμός δηλαδή αριθμός που δεν γράφεται στη μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$ με α, β ακεραίους με $\beta \neq 0$.

Σύμφωνα με τη μέθοδο της «Απαγωγής σε Άτοπο», υποθέτουμε ότι ο αριθμός $\rho + x$ είναι ρητός αριθμός. Έτσι θα υπάρχουν ακέραιοι μ, ν με $\nu \neq 0$ τέτοιοι, ώστε $\rho + x = \frac{\mu}{\nu}$. Τότε θα ισχύει: $x = \frac{\mu}{\nu} - \rho$, οπότε

$x=\frac{\mu}{\nu}-\frac{\kappa}{\lambda}=\frac{\mu\cdot\lambda-\kappa\cdot\nu}{\nu\cdot\lambda}$. Τόσο όμως ο αριθμητής, όσο και ο παρονομαστής του κλάσματος αυτού είναι ακέραιοι αριθμοί αφού άθροισμα και γινόμενο ακεραίων δίνει ακέραιο αριθμό . Άρα ο x γράφεται ως πηλίκο ακεραίων αριθμών, οπότε είναι ρητός. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί στην υπόθεση έχουμε ότι ο x είναι άρρητος αριθμός. Άρα η υπόθεσή μας ότι ο αριθμός $\rho+x$ είναι ρητός είναι εσφαλμένη. Άρα ο αριθμός $\rho+x$ είναι άρρητος.

Στο ψηφιακό συμπληρωματικό υλικό στη παράγραφο 1.1 μπορείτε να βρείτε :

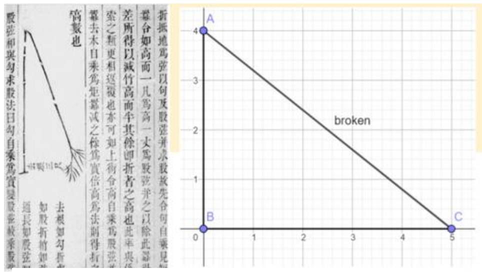
- βασική επανάληψη στους πραγματικούς αριθμούς και
- επιπλέον εφαρμογές

Ύπαρξη διαδοχικού αριθμού και η έννοια της πυκνότητας στα υποσύνολα των πραγματικών αριθμών

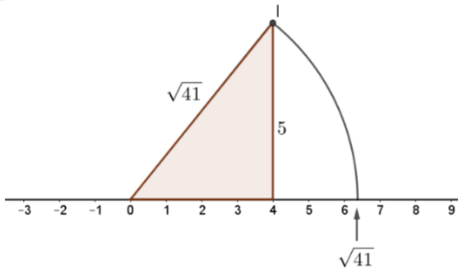
Ανάλυση δραστηριότητας (σελ. 10)

Το ερώτημα 1) καλύπτει το ΠΜΑ Αρ.Π.10.1, τα ερωτήματα 2) και 3) καλύπτουν το ΠΜΑ Αρ.Π.10.2, το ερώτημα 4) καλύπτει το ΠΜΑ Αρ.Π.10.3

1) Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα προκύπτει ότι η υποτείνουσα του τριγώνου έχει μήκος $\sqrt{41}$. Με τη γνωστή μέθοδο του Γυμνασίου βρίσκουμε ότι:



- $6^2=36<41<49=7^2$ άρα $6<\sqrt{41}<7$ ενώ $\sqrt{41}\simeq 6$
- $6{,}4^2=40{,}96<41<6{,}5^2=42{,}25$ άρα $6{,}4<\sqrt{41}<6{,}5$ ενώ $\sqrt{41}\simeq 6{,}4$
- $6{,}40^2=40{,}96<41<41{,}0881=6{,}41^2$ άρα $6{,}40<\sqrt{41}<6{,}41$ ενώ $\sqrt{41}\simeq 6{,}40$
- $6{,}403^2=40{,}998409<41<6{,}404^2=41{,}011216$ άρα $6{,}403<\sqrt{41}<6{,}404$ ενώ $\sqrt{41}\simeq 6{,}403$

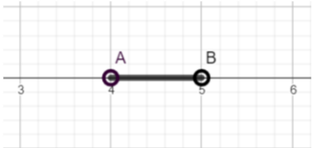


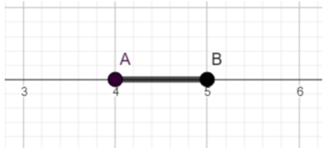
Επειδή αυτή η διαδικασία είναι ατέρμονη, η δεκαδική προσέγγιση του αριθμού $\sqrt{41}$ είναι δεκαδικός αριθμός με άπειρα δεκαδικά ψηφία μη περιοδικά. Άρα δεν είναι ρητός. αλλά άρρητος.

2) Οι αριθμοί 4 και 5 είναι διαδοχικοί. Ο επόμενος του 5 είναι ο 6 κλπ. Και αυτή η διαδοχικότητα δεν έχει τέλος. Το ίδιο συμβαίνει και με τους ακεραίους αριθμούς. Για τους ρητούς και άρρητους αριθμούς όμως η κατάσταση διαφοροποιείται: για παράδειγμα, για τον αριθμό $\frac{1}{4}$ (ή διαφορετικά 0,25), δεν ελέγχουμε ποιος είναι ο επόμενος (π.χ. ο 0,251 ή ο 0,2501 ή ο 0,26 κ.λπ.) ή ο προηγούμενος (π.χ. ο 0,24 ή ο 0,249 ή ο 0,2499 κ.λπ.) Αντίστοιχα, για τον άρρητο αριθμό $\sqrt{41}$ (ή με προσέγγιση 6,403124237…) δεν ελέγχουμε τον επόμενο (π.χ. ο 6,404 ή ο 6,41 ή ο 6,4032 κ.λπ) ή τον προηγούμενο (π.χ ο 6,402 ή ο 6,4030 ή ο 6,39 κ.λπ.)

3) Παρατηρούμε ότι: $\frac{1}{5}<\frac{1}{4}$, $\frac{4}{20}<\frac{5}{20}$, $\frac{8}{40}<\frac{10}{40}$, άρα (μέσω ισοδυνάμων κλασμάτων) ένας ζητούμενος ρητός μεταξύ του $\frac{1}{5}$ και του $\frac{1}{4}$ είναι ο $\frac{9}{40}$. Με την ίδια διαδικασία βρίσκουμε δυο, τρεις ή και άπειρους αριθμούς μεταξύ των $\frac{1}{5}$ και $\frac{1}{4}$.

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι όλοι οι πραγματικοί x μεταξύ των αριθμών 4 και 5 εκφράζονται από την ανισοτική σχέση: $4<x<5$, όταν στην απάντηση δε συμπεριλάβουμε τους αριθμούς 4 και 5, ενώ με τη σχέση: $4\le x\le 5$, όταν στην απάντηση συμπεριλάβουμε και τους αριθμός 4 και 5. Με την ευθεία των πραγματικών αριθμών έχουμε τις αναπαραστάσεις:





Μετά την εισαγωγή της έννοιας του διαστήματος, θα δώσουμε ισοδύναμες εκφράσεις για τα ερωτήματα αυτά: $x\in(4,\ 5)$ και $x\in[4,\ 5]$ αντίστοιχα.

Ύπαρξη διαδοχικού αριθμού και η έννοια της πυκνότητας στα υποσύνολα των πραγματικών αριθμών

Επιπλέον δραστηριότητα

Να σχολιάσετε στην τάξη τα ακόλουθα σενάρια:

1ο : Σε μια σχολική τάξη Γυμνασίου, στο μάθημα των Μαθηματικών διατυπώνεται η ακόλουθη ερώτηση: «Πόσοι ρητοί αριθμοί υπάρχουν μεταξύ του 0,1 και του 0,3;» . Ακολουθούν οι απαντήσεις τριών μαθητών:
Μ1: ένας, ο 0,2
Μ2: δεκαεννέα, οι 0,12, 0,13, 0,14, …, 0,29
Μ3: άπειροι

2ο: Σε μια σχολική τάξη Γυμνασίου, στο μάθημα των Μαθηματικών διατυπώνεται η ακόλουθη ερώτηση: «Πόσοι ρητοί αριθμοί υπάρχουν μεταξύ του $\frac{3}{6}$ και του $\frac{5}{6}$;» . Ακολουθούν οι απαντήσεις δύο μαθητών:

Μ1: ένας, ο $\frac{4}{6}$

Μ2: κανένας, διότι το $\frac{4}{6}$ γίνεται με απλοποίηση $\frac{2}{3}$ και δε βρίσκεται μεταξύ των δοσμένων αριθμών.

Ανάλυση δραστηριότητας:

Στο **1ο σενάριο** οι πρώτοι δύο μαθητές δεν έχουν αντιληφθεί την απειρία του πλήθους των αριθμών μεταξύ δύο πραγματικών και χρησιμοποιούν αριθμούς με ένα ή δύο δεκαδικά ψηφία για να εξαντλήσουν τις περιπτώσεις των ενδιάμεσων αριθμών. Ο τρίτος μαθητής έχει αντιληφθεί την απειρία του πλήθους των αριθμών μεταξύ των 0,1 και 0,3.

Στο **2ο σενάριο** οι μαθητές επιμένουν στην κλασματική μορφή των αριθμών και δεν απαντούν σωστά. Με την προτροπή του Καθηγητή μπορούν οι μαθητές να οδηγηθούν στις αντίστοιχες δεκαδικές μορφές, οπότε και θα αναγνωρίσουν τη σωστή πορεία απάντησης της ερώτησης.

1.2 Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

Τι καινούργιο υπάρχει στη παράγραφο

Με τη ύλη της παραγράφου αυτής θα μάθουμε :

1) Να ορίζουμε την απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού και να τη συνδέουμε με την απόσταση από το μηδέν. Επίσης, να ερμηνεύουμε γεωμετρικά την απόλυτη τιμή της διαφοράς δύο πραγματικών αριθμών (ΠΜΑ: Αρ.Π.10.4)
2) Να αποδεικνύουμε τις βασικές ιδιότητες της απόλυτης τιμής. (ΠΜΑ: Αρ.Π.10.5)

Ανάλυση εισαγωγικής δραστηριότητας (σελ. 18)

Το σύνολο της δραστηριότητας καλύπτει το ΠΜΑ Αρ.Π.10.4

1) Το ισόγειο στο ρόλο του μηδενός (αρχή των αξόνων), βοηθά τους μαθητές να αντιληφθούν το γεωμετρικό, αλλά και τον αλγεβρικό ορισμό της απόλυτης τιμής.

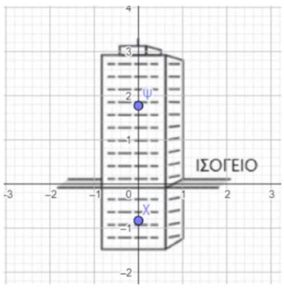
Ένδειξη Ανελκυστήρα	Απόσταση από το ισόγειο	Απόλυτη τιμή
+2	2	2
–4	4	4
4	4	4
0	0	0
+8	8	10

2) $|x-0|$ ή $|0-x|$, συζήτηση γύρω από το γεωμετρικό ορισμό της απόλυτης τιμής.

3)

Ένδειξη Ανελκυστήρα 1	+7	-1	0	+2
Ένδειξη Ανελκυστήρα 2	-2	0	-4	+7
Απόσταση μεταξύ Ανελκυστήρα 1 και Ανελκυστήρα 2	$(+7)-(-2)$	$(-1)-0$	$0-(-4)$	$(+2)-(+7)$
Απόσταση μεταξύ Ανελκυστήρα 2 και Ανελκυστήρα 1	$(-2)-(+7)$	$0-(-1)$	$(-4)-0$	$(+7)-(+2)$

Εδώ ζητούμε το σχολιασμό της απόστασης, η οποία αφενός εκφράζεται από έναν μη αρνητικό αριθμό και αφετέρου με τη χρήση της απόλυτης τιμής της διαφοράς των δύο αριθμών. Ο μαθητής θα πρέπει να συνδυάσει και τις δύο απαιτήσεις για να εξαλείψει το πρόβλημα, προσθέτοντας την τελευταία γραμμή, όπου για παράδειγμα, στην πρώτη στήλη έχουμε για την απόσταση των ανελκυστήρων:



$|(+7)-(-2)|=|+9|=|(-2)-(+7)|=|-9|=9$.

4) Γενικά: $d(x,y)=|x-y|$ ή $|y-x|$:

Ανάλυση δραστηριότητας (σελ. 19)

2. Αν $x \neq 0$, τότε το $|x|$ είναι το θετικό στοιχείο εκ των x, -x, που είναι και ο μεγαλύτερος από τους x, -x (καθώς κάθε θετικός είναι μεγαλύτερος από κάθε αρνητικό αριθμό).

3. Από τη συνέπεια 2. προκύπτει ότι: $x \leq |x|$ και $-|x| \leq x$, δηλαδή: $-|x| \leq x \leq |x|$

4. Δύο αντίθετοι αριθμοί (ή αντίθετες παραστάσεις) έχουν ίσες απόλυτες τιμές.

5. $$|x|^2 = |x| \cdot |x| = \begin{cases} x \cdot x = x^2, & x \geq 0 \\ (-x) \cdot (-x) = x^2, & x < 0 \end{cases}$$

6. Προφανές

7. Επειδή $|x| \geq 0$ και $|y| \geq 0$ αν ήταν $x = y = 0$ τότε θα ίσχυε: $|x| + |y| = 0$ που είναι άτοπο. Άρα τα x και y δεν είναι συγχρόνως μηδέν. Συνεπώς, ένα τουλάχιστον από τα x, y είναι διάφορο του μηδενός.

8. Αν $|x| = \theta$ με $\theta > 0$ τότε $|x|^2 = \theta^2$ δηλαδή $x^2 = \theta^2$ δηλαδή $x^2 - \theta^2 = 0$ δηλαδή $(x - \theta) \cdot (x + \theta) = 0$ οπότε $x - \theta = 0$ ή $x + \theta = 0$, άρα $x = \theta$ ή $x = -\theta$.

<u>Αντιστρόφως</u>: αφού $\theta > 0$, αν $x = \theta$ τότε $|x| = |\theta| = \theta$, ενώ αν $x = -\theta$ τότε $|x| = |-\theta| = |\theta| = \theta$

9. Αν $|x| = |y|$ τότε $|x|^2 = |y|^2$ δηλαδή $x^2 = y^2$ οπότε όπως στην 8. προκύπτει: $x = y$ ή $x = -y$

<u>Αντιστρόφως</u>: αν $x = y$ τότε $|x| = |y|$, ενώ αν $x = -y$ τότε $|x| = |-y| = |y|$

Ιδιότητες της Απόλυτης Τιμής

Ανάλυση δραστηριότητας (σελ. 28)

Το σύνολο της δραστηριότητας καλύπτει μέρος του ΠΜΑ Αρ.Π.10.5

Α.

1η περίπτωση: Για $\alpha = 3$ και $\beta = 5$ ισχύει: $|3+5| = |8| = 8$, $|3| + |5| = 3 + 5 = 8$. Άρα: $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$ (1)

2η περίπτωση: Για $\alpha = -3$ και $\beta = 5$ ισχύει: $|-3+5| = |2| = 2$, $|-3| + |5| = 3 + 5 = 8$. Άρα: $|\alpha + \beta| < |\alpha| + |\beta|$ (2)

3η περίπτωση: Για $\alpha = 3$ και $\beta = -5$ ισχύει: $|3 + -5| = |-2| = 2$, $|3| + |-5| = 3 + 5 = 8$. Άρα: $|\alpha + \beta| < |\alpha| + |\beta|$ (3)

4η περίπτωση: Για $\alpha = -3$ και $\beta = -5$ ισχύει: $|(-3) + (-5)| = |-8| = 8$, $|-3| + |-5| = 3 + 5 = 8$.

Άρα: $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$ (4)

Από τις σχέσεις (1), (2), (3) και (4) εικάζουμε ότι σε κάθε περίπτωση ισχύει: $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ και συγκεκριμένα:

- Αν οι αριθμοί α και β είναι ομόσημοι, τότε ισχύει: $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$
- Αν οι αριθμοί α και β είναι ετερόσημοι τότε ισχύει $|\alpha + \beta| < |\alpha| + |\beta|$
- Αν τουλάχιστον ένας από τους αριθμούς α και β είναι μηδέν τότε ισχύει: $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$

Β. Επειδή $|\alpha + \beta|$ και $|\alpha| + |\beta|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, για να αποδείξουμε ότι $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ αρκεί $|\alpha + \beta|^2 \leq (|\alpha| + |\beta|)^2$ αρκεί $(\alpha + \beta)^2 \leq |\alpha|^2 + 2|\alpha||\beta| + |\beta|^2$ αρκεί $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \leq \alpha^2 + 2|\alpha||\beta| + \beta^2$ αρκεί $\alpha\beta \leq |\alpha\beta|$ δηλαδή $|\alpha\beta| \geq \alpha\beta$ που ισχύει!

Εναλλακτικός τρόπος απόδειξης των ιδιοτήτων των απολύτων τιμών

Για παράδειγμα της ιδιότητας (2): $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}, \quad \beta \neq 0$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

1η περίπτωση: Αν $\alpha \geq 0$ και $\beta > 0$ τότε $\frac{\alpha}{\beta} \geq 0$ οπότε $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$

2η περίπτωση: Αν $\alpha \geq 0$ και $\beta < 0$ τότε $\frac{\alpha}{\beta} < 0$ οπότε $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = -\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{-\beta} = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$

3η περίπτωση: Αν $\alpha \leq 0$ και $\beta > 0$ τότε $\frac{\alpha}{\beta} \leq 0$ οπότε $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = -\frac{\alpha}{\beta} = \frac{-\alpha}{\beta} = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$

4η περίπτωση: Αν $\alpha \leq 0$ και $\beta < 0$ τότε $\frac{\alpha}{\beta} \geq 0$ οπότε $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$

Με όμοιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε και τις άλλες ιδιότητες

Στο ψηφιακό συμπληρωματικό υλικό στην παράγραφο 1.2 μπορείτε να βρείτε :

- επιπλέον ιστορικό σημείωμα και
- επιπλέον δραστηριότητα

1.3 Νιοστή ρίζα μη αρνητικού πραγματικού αριθμού – Δυνάμεις με ρητό εκθέτη

Τι καινούργιο υπάρχει στη παράγραφο

Στην παράγραφο αυτή θα μάθουμε για:

1) Τη νιοστή ρίζα μη αρνητικού αριθμού ως τη μοναδική μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^{\nu}=\alpha$, ν θετικός ακέραιος και α μη αρνητικός πραγματικός αριθμός και αποδεικνύουν τις βασικές ιδιότητες τις βασικές ιδιότητες (γινόμενο και πηλίκο ριζών) (ΠΜΑ Αρ.Π.10.6)

2) Τις δυνάμεις με ρητό εκθέτη και θα διερευνήσουμε τις ιδιότητές τους (ΠΜΑ Αρ.Π.10.7)

3) Τον υπολογισμό της τιμής αριθμητικών παραστάσεων, ενώ θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό και τις ιδιότητες των νιοστών ριζών και γενικότερα των δυνάμεων με ρητό εκθέτη. (ΠΜΑ Αρ.Π.10.8)

Ανάλυση εισαγωγικής δραστηριότητας (σελ. 32)

Τα ερωτήματα 1), 2) της δραστηριότητας καλύπτουν το ΠΜΑ Αρ.Π.10.6, ενώ τα ερωτήματα 3), 4) καλύπτουν το ΠΜΑ Αρ.Π.10.7

1) Από το γυμνάσιο γνωρίζουμε ότι αν α η πλευρά της πλατείας ότε το εμβαδόν της θα είναι: α^2. Άρα η πλευρά α θα είναι η τετραγωνική ρίζα του 144 δηλαδή η μη αρνητική ρίζα (γιατί είναι μήκος), της εξίσωσης: $\alpha^2=144$ δηλαδή ο αριθμός που αν υψωθεί στο τετράγωνο δίνει αποτέλεσμα 144. Άρα $\alpha=\sqrt{144}=12$ μέτρα , καθώς $12^2=144$

2) Αν x μέτρα είναι το μήκος της πλευράς της δεξαμενής, τότε ο όγκος της θα ισούται με x^3 κυβικά μέτρα (γιατί;) και επομένως θα ισχύει: $x^3=125$. Ισοδύναμα, αναζητούμε τη μη αρνητική ρίζα της εξίσωσης: $x^3=125$, το μη αρνητικό αριθμό (αφού είναι μήκος) δηλαδή που x όταν υψωθεί στον κύβο, θα μας δώσει 125. Με δοκιμές εύκολα μπορούμε να βρούμε πως ο ζητούμενος αριθμός είναι το 5, διότι: $5^3=125$. Ο αριθμός 5 ονομάζεται Τρίτη (ή Κυβική) Ρίζα του 125 και συμβολίζεται με $\sqrt[3]{125}$.Δηλαδή $\sqrt[3]{125}=5$, καθώς $5^3=125$.

3) Θα ισχύει: $\sqrt{144}\cdot\sqrt{144}=144$. Αν μπορούσαμε να συμβολίσουμε τον αριθμό $\sqrt{144}=144^{\rho}$, τότε θα ίσχυε: $144^{\rho}\cdot 144^{\rho}=144$, δηλαδή $144^{2\rho}=144$, άρα $2\rho=1$,δηλαδή $\rho=\frac{1}{2}$. Θα μπορούσαμε λοιπόν να γράφαμε: $\sqrt{144}=144^{\frac{1}{2}}$

4) Θα ισχύει: $\sqrt[3]{125}\cdot\sqrt[3]{125}\cdot\sqrt[3]{125}=125$. Αν μπορούσαμε να συμβολίσουμε τον αριθμό $\sqrt[3]{125}=125^{\rho}$, τότε θα ίσχυε: $125^{\rho}\cdot 125^{\rho}\cdot 125^{\rho}=125$, δηλαδή $125^{3\rho}=125$, άρα $3\rho=1$,δηλαδή $\rho=\frac{1}{3}$. Θα μπορούσαμε λοιπόν να γράφαμε: $\sqrt[3]{125}=125^{\frac{1}{3}}$.

Η νιοστή ρίζα μη αρνητικού αριθμού α

ΛΥΜΕΝΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να απλοποιήσετε τις ρίζες: i) $\sqrt{1728}$, ii) $\sqrt[3]{1728}$

Λύση

Η **«στρατηγική»** για να απλοποιούμε ριζικά μεγάλων αριθμών είναι να αναλύουμε τους αριθμούς σε γινόμενο πρώτων παραγόντων:

1728	2
864	2
432	2
216	2
108	2
54	2
27	3
9	3
3	3
1	

Οπότε: $1728 = 2^6 \cdot 3^3$ και συνεπώς:

i) $\sqrt{1728} = \sqrt{2^6 \cdot 3^3} = \sqrt{2^{2\cdot 3}} \cdot \sqrt{3^3} = \sqrt{\left(2^3\right)^2} \cdot \sqrt{3^3} = 2^3 \cdot \sqrt{3^3} = 8 \cdot \sqrt{27}$

ii) $\sqrt[3]{1728} = \sqrt[3]{2^6 \cdot 3^3} = \sqrt[3]{2^{3\cdot 2}} \cdot \sqrt[3]{3^3} = \sqrt[3]{\left(2^2\right)^3} \cdot 3 = 2^2 \cdot 3 = 12$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις: $A = \left(\sqrt{2}\right)^6$, $B = \left(\sqrt[3]{3}\right)^6$, $\Gamma = \left(\sqrt[6]{6}\right)^6$

i) Να δείξετε ότι Α+Β+Γ = 23

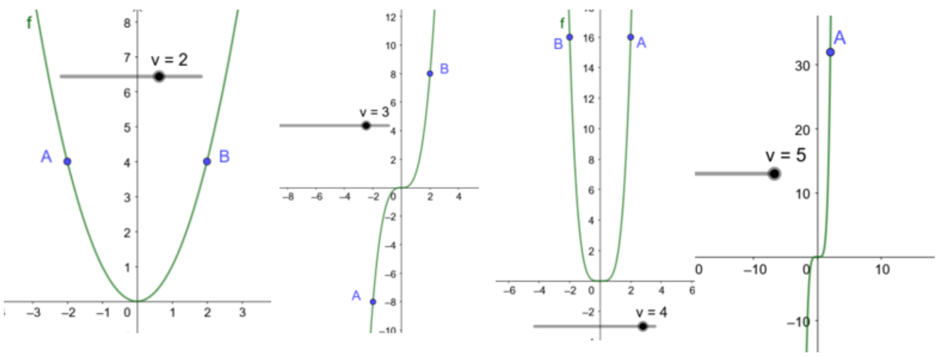
ii) Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\sqrt[3]{3}$ και $\sqrt[6]{6}$

Λύση

i) Έχουμε: $A + B + \Gamma = \left(\sqrt{2}\right)^6 + \left(\sqrt[3]{3}\right)^6 + \left(\sqrt[6]{6}\right)^6 = \sqrt{2^6} + \sqrt[3]{3^6} + 6 = 2^{\frac{6}{2}} + 3^{\frac{6}{3}} + 6 = 2^3 + 3^2 + 6 = 23$

ii) Υποθέτουμε ότι: $\sqrt[3]{3} \le \sqrt[6]{6}$, οπότε $3^{\frac{1}{3}} \le 6^{\frac{1}{6}}$, οπότε $\sqrt[6]{9} < \sqrt[6]{6}$ οπότε $\left(3^2\right)^{\frac{1}{6}} \le 6^{\frac{1}{6}}$ και τελικά $9^{\frac{1}{6}} \le 6^{\frac{1}{6}}$ δηλαδή $9 \le 6$ είναι άτοπο. Συνεπώς έχουμε: $\sqrt[3]{3} > \sqrt[6]{6}$.

Επιπλέον δραστηριότητα



Ας μεταφερθούμε στο περιβάλλον του λογισμικού Geogebra και ας προσπαθήσουμε χρησιμοποιώντας τον δρομέα ν να σχεδιάσουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$, $f(x) = x^4$, $f(x) = x^5$, … , γενικά: $f(x) = x^\nu$ με ν θετικό ακέραιο . Για τις τιμές $\nu = 2$, $\nu = 3$, $\nu = 4$ και $\nu = 5$ έχουμε τα παρακάτω στιγμιότυπα:

Από τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα:

1ον) Για $\nu = 2$, ποιοι αριθμοί δίνουν $x^2 = 4$;

2ον) Για $\nu = 3$, ποιοι αριθμοί δίνουν $x^3 = 8$;

3ον) Για $\nu = 3$, ποιοι αριθμοί δίνουν $x^3 = -8$;

4ον) Για $\nu = 4$, ποιοι αριθμοί δίνουν $x^4 = 16$;

5ον) Για $\nu = 5$, ποιοι αριθμοί δίνουν $x^5 = 32$;

6ον) Για $\nu = 5$, ποιοι αριθμοί δίνουν $x^5 = -32$;

7ον) Για $\nu = 2,3,4,5,...$, ποιοι αριθμοί δίνουν $x^\nu = 0$

Ανάλυση δραστηριότητας

Από τις γραφικές παραστάσεις που προκύπτουν από το λογισμικό GEOGEBRA που θα γίνουν στον διαδραστικό πίνακα (αν υπάρχει) ή θα τις έχετε έτοιμες σε φύλλα εργασίας προκύπτει ότι:

Για $\nu = 2$ υπάρχουν δύο αριθμοί, οι: $x = 2$ ή $x = -2$

Για $\nu = 3$ υπάρχει μόνο ένας αριθμός, ο: $x = 2$

Για $\nu = 4$ υπάρχουν δύο αριθμοί, οι: $x = 2$ ή $x = -2$

Για $\nu = 5$ υπάρχει μόνο ένας αριθμός, ο: $x = 2$ (που δίνει 32), ενώ

Για $\nu = 5$ υπάρχει επίσης μόνο ένας αριθμός, ο: $x = -2$ (που δίνει -32)

Για οποιαδήποτε τιμή του ν, υπάρχει ο αριθμός $x = 0$ που δίνει $x^\nu = 0$

Δυνάμεις με ρητό εκθέτη

Ανάλυση δραστηριότητας (σελ. 35)

Το σύνολο της δραστηριότητας καλύπτει το ΠΜΑ Αρ.Π.10.8

Ο μαθητής θα πρέπει -καθοδηγούμενος- να παρατηρήσει τα ίδια αποτελέσματα του κάθε ζεύγους, για $x, y > 0$

- $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x^4} = \sqrt[3]{x \cdot x^4}$
- $\dfrac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x^3}} = \sqrt[4]{\dfrac{x}{x^3}}$
- $\sqrt[5]{x^2} = \left(\sqrt[5]{x}\right)^2$
- $\sqrt[8]{x^8 \cdot y} = x \cdot \sqrt[8]{y}$

και να οδηγηθεί στην **«εικασία»** της ισχύος αντίστοιχων ιδιοτήτων, ανά περίπτωση.

Έτσι, θα έχουμε ότι για κάθε πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \geq 0$ και ν, μ, ρ θετικούς ακεραίους ισχύουν:

1) $\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta}$, **2)** $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$, $\beta \neq 0$, **3)** $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu} = \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\mu$, **4)** $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu \cdot \beta} = \alpha \cdot \sqrt[\nu]{\beta}$

Ασκήσεις - Προβλήματα

1) Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις:

$A=\sqrt[11]{2\sqrt[4]{2\sqrt{2}}}\cdot\sqrt[8]{128}$, $B=\sqrt[4]{2\sqrt[3]{2\sqrt[5]{2}}}\cdot\sqrt{2\sqrt[5]{2\sqrt{2}}}$, $\Gamma=\sqrt[11]{2\sqrt[4]{2\sqrt{2}}}\cdot\sqrt[8]{128}$, $\Delta=\sqrt[4]{2\sqrt[3]{2\sqrt[5]{2}}}\cdot\sqrt{2\sqrt[5]{2\sqrt{2}}}$

Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\sqrt{\dfrac{1}{3}}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\dfrac{3}{\sqrt{3}}$, $\dfrac{2}{\sqrt{12}}$

2) Δίνεται η παράσταση: $A=\sqrt{5-x}-\sqrt[6]{x^6}$

α) Να βρεθούν οι τιμές του για τις οποίες ορίζεται η παράσταση

β) Αν $\chi=-4$ να αποδείξετε ότι: $A^4+A^3+A^2+A+1=1$

3) A) Να υπολογίσετε τα αναπτύγματα: $\left(\sqrt{2}+1\right)^3$ και $\left(\sqrt{2}-1\right)^3$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

$\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}=2$

B) Να υπολογίσετε τα αναπτύγματα: $\left(\sqrt{2}+1\right)^3$ και $\left(\sqrt{2}-1\right)^3$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

$\sqrt[3]{5\sqrt{2}+3}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-3}=2$

Θέματα κριτικής σκέψης

1) Να υπολογίσετε τη παράσταση: $\alpha=\sqrt[3]{3+\sqrt{\dfrac{242}{27}}}+\sqrt[3]{3-\sqrt{\dfrac{242}{27}}}$

(<u>Υπόδειξη</u>: Να χρησιμοποιήσετε την ταυτότητα: $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)$)

2)

A) Να βρείτε τους αριθμούς x, y για τους οποίους ισχύει: $\sqrt{4x-8}+\sqrt[3]{x+2y+4}=0$

B) Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης: $M=\sqrt[3]{3\cdot\left(2\sqrt{10}+7\right)\cdot\left(\sqrt{x-y}-\sqrt{x}\right)^2}$

3) Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις: $\alpha=\left(\sqrt{3}\right)^8, \beta=\left(\sqrt[4]{5}\right)^8, \gamma=\left(\sqrt[8]{8}\right)^8$

A) Να δείξετε ότι: $\alpha+\beta+\gamma=114$

B) Να διατάξετε τα α, β, γ από το μεγαλύτερο στο μικρότερο και να δείξετε ότι:
$|\alpha-\beta|+|\beta-\gamma|-|\alpha-\gamma|=0$

Στο ψηφιακό συμπληρωματικό υλικό στην παράγραφο 1.2 μπορείτε να βρείτε

- επανάληψη στις τετραγωνικές ρίζες
- επιπλέον εφαρμογές
- επιπλέον ασκήσεις και προβλήματα και

Κεφάλαιο 2ο

2ο κεφ.: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

2.1 Ο ορισμός της συνάρτησης – Αναπαραστάσεις συνάρτησης

Τι καινούργιο υπάρχει στη παράγραφο

Στην παράγραφο αυτή θα:

1) Αναγνωρίζουμε συναρτήσεις μέσα από καταστάσεις συμμεταβολής της καθημερινής ζωής και θα τις διακρίνουμε από άλλες σχέσεις συμμεταβολής. (ΠΜΑ: Αλ.Σρ. 10.1)
2) Χρησιμοποιούμε τον ορισμό της συνάρτησης για να εξετάζουμε αν μία σχέση ή αντιστοιχία είναι συνάρτηση ή όχι. (ΠΜΑ: Αλ.Σρ. 10.2)
3) Συνδέουμε διαφορετικές αναπαραστάσεις μιας συνάρτησης (τύπο, πίνακα τιμών και γραφική παράσταση. (ΠΜΑ: Αλ.Σρ. 10.3)
4) Ερμηνεύουμε μια δεδομένη γραφική παράσταση συνάρτησης για να επιλύουμε ένα πρόβλημα. (ΠΜΑ: Αλ.Σρ.10.4)

Ανάλυση εισαγωγικής δραστηριότητας (σελ. 44)

Το ερώτημα i) καλύπτει τα ΠΜΑ Αλ.Σρ.10.1 και Αλ.Σρ.10.2, τα ερωτήματα ii), iii) και iv) καλύπτουν τα ΠΜΑ Αλ.Σρ.10.2, τα ερωτήματα iii), iv), v) και vi) καλύπτουν το ΠΜΑ Αλ.Σρ.10.3, ενώ τέλος το ερώτημα v) καλύπτει το ΠΜΑ Αλ.Σρ.10.4

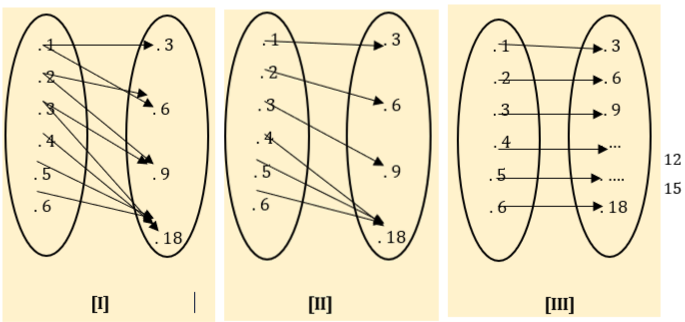
i) **Λόγος διαμαρτυριών:** Οι χρεώσεις δεν είναι ξεκάθαρες. Για παράδειγμα, η μία (1) ώρα παραμονής στο parking θα μπορούσε να χρεωθεί 3 ευρώ, αλλά και 6 ευρώ.

ii) **Κατηγορία διαμαρτυριών:** $3 < t \le 6$, η οποία χρεώνει 18 ευρώ είτε παραμείνει το αυτοκίνητο στο parking 4, είτε 5, είτε 6 ώρες.

iii) $c(t) = 3t$, για $t = 1$ είναι $c(1) = 3 \cdot 1 = 3$, για $t = 2$ είναι $c(2) = 3 \cdot 2 = 6$, για $t = 3$ είναι $c(3) = 3 \cdot 3 = 9$, για $t = 4$ είναι $c(4) = 3 \cdot 4 = 12$, για $t = 5$ είναι $c(5) = 3 \cdot 5 = 15$ και για $t = 6$ είναι $c(6) = 3 \cdot 6 = 18$.

iv) t: ανεξάρτητη μεταβλητή, c: εξαρτημένη μεταβλητή
Συνάρτηση περιγράφουν οι πίνακες [2] και [3], καθώς περιγράφουν διαδικασίες αντιστοίχισης, σύμφωνες με τον ορισμό της συνάρτησης.

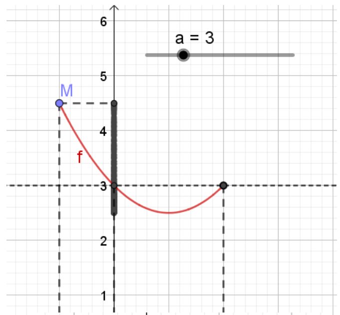
v) [1]→[Α], [2]→[Γ], [3]→[Β], όπου κάνουμε χρήση του κριτηρίου της κατακόρυφης γραμμής.



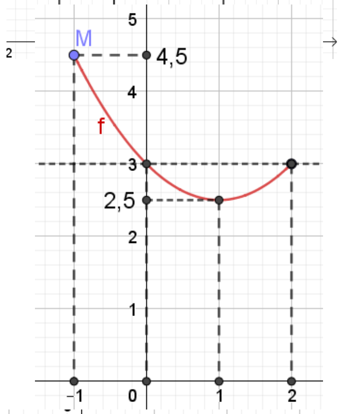
Ανάλυση εισαγωγικής δραστηριότητας (σελ. 51)

Το σύνολο της δραστηριότητας καλύπτει το ΠΜΑ Αλ.Σρ.10.4

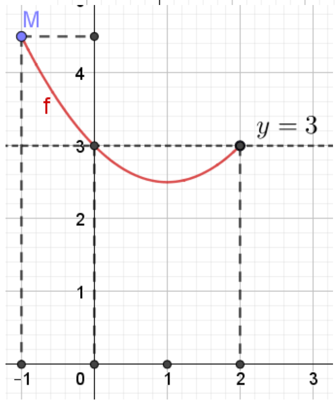
1) Από τη μετακίνηση του σημείου Μ βλέπουμε ότι οι τετμημένες του διαγράφουν το διάστημα από -1 έως 2 : ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ και οι τεταγμένες του το διάστημα από 2,5 έως 4,5 : ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ



2) Από τη γραφική παράσταση παρατηρούμε ότι η συνάρτηση παρουσιάζει τη μέγιστη τιμή της 4,5 για $x = -1$ και την ελάχιστη τιμή της 2,5 για $x = 1$



3) **α)** Από τη γραφική παράσταση της f και την ευθεία $\varepsilon : y = a$ παρατηρούμε ότι η ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία για $-2{,}5 < a \le 3$.



β) Για $a = 3$ η ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση σε δύο σημεία με τετμημένη: 0 και 2 αντίστοιχα. Άρα η εξίσωση $f(x) = 3$ έχει δύο ακριβώς λύσεις τις 0 και 2.

Επιπλέον δραστηριότητα

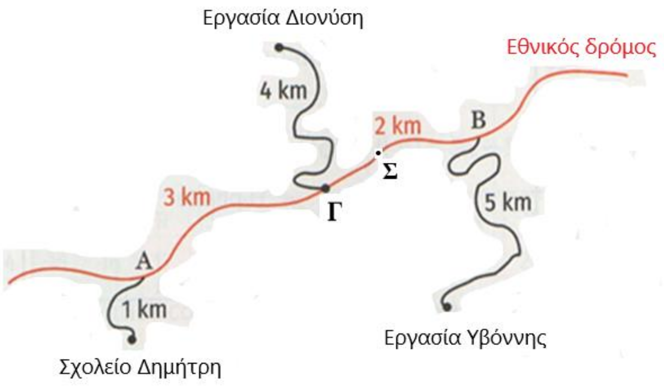
Ο Διονύσης και η Υβόννη πρόκειται να κτίσουν ένα σπίτι πάνω στον Εθνικό δρόμο (κόκκινη γραμμή) σε σημείο Σ μεταξύ των σημείων Γ και Β. Έχουν τα εξής δεδομένα:

- Η εργασία του Διονύση απέχει 4 km από τον εθνικό δρόμο (σημείο Γ) και για να πάει εκεί θα μετακινείται με το αυτοκίνητό του, με το οποίο κινείται με 80km/h στον εθνικό δρόμο (κόκκινη γραμμή) και με 40km/h στον επαρχιακό δρόμο (μαύρη γραμμή).
- Η εργασία της Υβόννης απέχει 5 km από τον εθνικό δρόμο (σημείο Β) και για να πάει εκεί θα μετακινείται με το αυτοκίνητό της, με το οποίο κινείται με 80 km/h στον εθνικό δρόμο και με 40 km/h στον επαρχιακό.
- Το σχολείο του γιού τους Δημήτρη απέχει 1 km από τον εθνικό δρόμο (σημείο Α) και θα τον πηγαίνει εκεί σχολικό λεωφορείο που κινείται με 60 km/h στον εθνικό δρόμο και 30 km/h στον επαρχιακό δρόμο.

Έστω Σ το σημείο που θα χτιστεί το σπίτι και x η απόσταση ΓΣ.

1ον) Αν ο Διονύσης και η Υβόννη θέλουν να απέχει το σπίτι εξ ίσου από τη δουλειά τους τότε πόσο χρόνο θα κάνει ο Δημήτρης να πάει σχολείο του;

2ον) Αν ο Διονύσης και η Υβόννη θέλουν να κάνουν ίδιο χρόνο να πάνε στη δουλειά τους τότε πόσο χρόνο θα θέλει ο Δημήτρης να πάει στο σχολείο του;



(θα υποθέσετε ότι τα αυτοκίνητα και το λεωφορείο εκτελούν ομαλή ευθύγραμμη κίνηση στην οποία από τη Φυσική γνωρίζουμε ότι για το διάστημα (s), την ταχύτητα (v) και τον χρόνο (t) ισχύει: $t=\frac{s}{v}$)

Ανάλυση δραστηριότητας

Το σύνολο της δραστηριότητας καλύπτει το ΠΜΑ Αλ.Σρ.10.1

- Ο Διονύσης για να πάει στη δουλειά του θα διανύσει την απόσταση: $(\Sigma\Gamma+4)$ km δηλαδή $(x+4)$ km. Αν T ο χρόνος που θα χρειαστεί τότε (συναρτήσει του x) θα ισχύει: $T(x)=\frac{x}{80}+\frac{4}{40}$ δηλαδή $T(x)=\frac{x}{80}+0{,}01$ (σε ώρες).
- Η Υβόννη για να πάει στη δουλειά της θα διανύσει την απόσταση: $(\Sigma B+5)$ km δηλαδή $(2-x+5)$ km. Αν T ο χρόνος που θα χρειαστεί τότε (συναρτήσει του x) θα ισχύει: $T(x)=\frac{2-x}{80}+\frac{5}{40}$ δηλαδή $T(x)=\frac{2-x}{80}+0{,}125$ (σε ώρες).
- Ο Δημήτρης για να πάει στο σχολείο θα διανύσει την απόσταση: $(\Sigma A+1)$ km δηλαδή $(x+3+1)$ km. Αν T ο χρόνος που θα χρειαστεί τότε θα ισχύει: $T(x)=\frac{x+3}{60}+\frac{1}{30}$ (σε ώρες).

1ον) Πρέπει να ισχύει: $x+4=(2-x)+5$ δηλαδή $2x=3$ δηλαδή $x=1{,}5$ km . Τότε ο χρόνος του Δημήτρη θα γίνει $T(1{,}5)=(1{,}5+3)\frac{1}{60}+\frac{1}{30}=6{,}5\cdot\frac{1}{60}$ ώρες δηλαδή $6{,}5\cdot\frac{1}{60}\cdot 60=6{,}5$ min.

2ον) Πρέπει να ισχύει: $\frac{x}{80}+\frac{4}{40}=\frac{2-x}{80}+\frac{5}{40}$ δηλαδή $x+8=2-x+10$ δηλαδή $x=2$. Άρα στη περίπτωση αυτή το σπίτι θα χτιστεί στο σημείο B. Ο Δημήτρης τότε θα χρειαστεί $T(2)=\frac{2+3}{60}+\frac{1}{30}=\frac{7}{60}$ της ώρας δηλαδή 7 min

Στο ψηφιακό συμπληρωματικό υλικό στην παράγραφο 2.1 μπορείτε να βρείτε

- επανάληψη στο ορθοκανονικό (Καρτεσιανό) σύστημα συντεταγμένων και
- επιπλέον εφαρμογή

2.2 Η συνάρτηση $f(x)=\alpha \cdot x+\beta$

Τι καινούργιο υπάρχει στη παράγραφο

Στην παράγραφο αυτή θα:

1) Ερμηνεύσουμε το ρόλο των παραμέτρων α και β στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha x+\beta$ (ΠΜΑ: Αλ.Σρ.10.5)

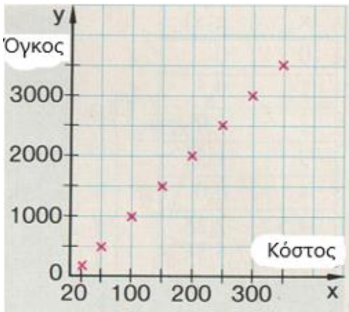
2) Μάθουμε να αντλούμε από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης της μορφής $f(x)=\alpha x+\beta$ πληροφορίες για τη συνάρτηση, όπως η κλίση της και η εξίσωσή της. (ΠΜΑ: Αλ.Σρ.10.6)

Ανάλυση δραστηριότητας (σελ. 56)

Το σύνολο της δραστηριότητας καλύπτει το ΠΜΑ Αλ.Σρ.10.5

1ον) Το γράφημα είναι:
$G=\{(20,200),(50,500),(100,1000),(150,1500),((200,2000),(250,2500),(300,3000),(350,3500)\}$

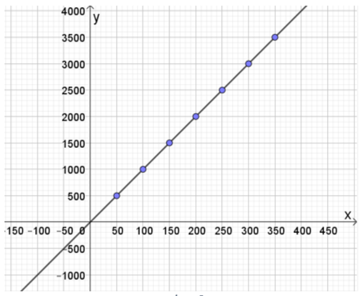
2ον) Η γραφική παράσταση σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (που δεν είναι κανονικό) είναι το διπλανό σχήμα 1. Παρατηρούμε ότι τα σημεία που προκύπτουν βρίσκονται σε μια ευθεία γραμμή που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.



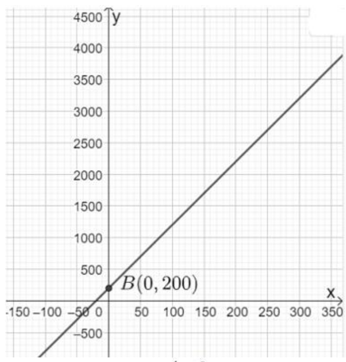
σχήμα 1

3ον) Προφανώς στη περίπτωση που η συνάρτηση $\varphi(x)=10x$ είχε πεδίο ορισμού όλο το σύνολο των πραγματικών αριθμών η γραφική παράσταση θα είχε όλα τα σημεία της ευθείας όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα 2

Ο αριθμός 10 παριστάνει τη κλίση της ευθείας δηλαδή το λόγο $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, της μεταβολής του y, ως προς τη μεταβολή του x, μεταξύ δύο σημείων της όπως για παράδειγμα $\frac{1000-500}{100-50}=\ldots=\frac{2500-1500}{250-150}=\ldots=10$


σχήμα 2

4ον) Η συνάρτηση γίνεται $\varphi(x)=10x+200$ και η γραφική της παράσταση φαίνεται στο σχήμα 3. Είναι προηγούμενη ευθεία μετατοπισμένη 200 μονάδες προς τα πάνω.

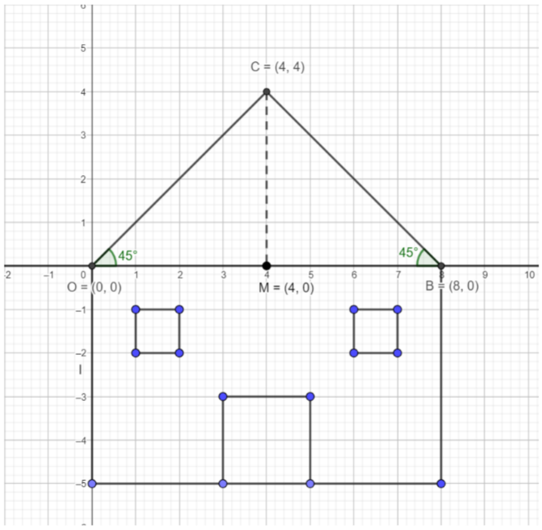


σχήμα 3

5ον) Παρατηρούμε ότι για $x=0$, $\varphi(0)=10\cdot 0+200=200$ οπότε η ευθεία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0,200)$. Άρα ο αριθμός 200 είναι η τεταγμένη του σημείου που η ευθεία τέμνει τον άξονα $y'y$.

Επιπλέον δραστηριότητα 1

Ένας αρχιτέκτονας σχεδίασε την τριγωνική στέγη μιας οικοδομής όπως δείχνει το ακόλουθο σχήμα. Να βρείτε:



i) Την εξίσωση της ευθείας OC

ii) Την εξίσωση της ευθείας CB

iii) Τον τύπο της συνάρτησης $f(x)$ που περιγράφει τη στέγη OCB.

iii) Τις τιμές: $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$

Τι παρατηρείτε;

v) Τις τιμές: $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$, $f(7)$, $f(8)$

Τι παρατηρείτε;

Ανάλυση δραστηριότητας

Τα ερωτήματα i), ii) καλύπτουν το ΠΜΑ Αλ.Σρ.10.5, ενώ τα ερωτήματα iv), v) καλύπτουν το ΠΜΑ Αλ.Σρ.10.6

i) Η ευθεία OC διέρχεται από το (0, 0), οπότε έχει τη μορφή: $y = \lambda_{OC} x$, με $\lambda_{OC} = εφ45^\circ = 1$. Άρα $y = x$.

ii) Η ευθεία CB έχει τη γενική μορφή: $y = \lambda_{CB} x + \beta$, με $\lambda_{CB} = εφ135^\circ = -1$. Άρα $y = -x + \beta$ και καθώς το C(4, 4) ανήκει στην ευθεία, θα είναι: $4 = -4 + \beta$, δηλαδή: $\beta = 8$ και τελικά η ευθεία είναι η $y = -x + 8$.

iii) $f(x) = \begin{cases} x, & αν\ \ 0 \le x < 4 \\ -x+8, & αν\ \ 4 \le x \le 8 \end{cases}$

iv) $f(0)=0,\ f(1)=1,\ f(2)=2,\ f(3)=3,\ f(4)=4$

Παρατηρούμε ότι καθώς μεγαλώνουν οι τιμές της μεταβλητής x, οι τιμές της μεταβλητής y μεγαλώνουν επίσης. Στη γραφική μας παράσταση, αυτό δηλώνεται από την ανοδική της πορεία στο διάστημα $[0,\ 4]$

(Λέμε, όπως θα μάθουμε σε επόμενη τάξη, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,\ 4]$)

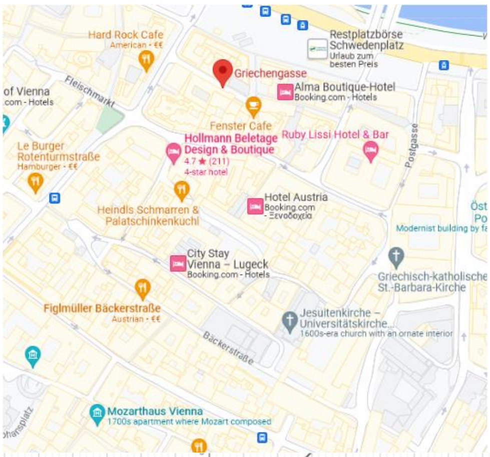
v) $f(4)=4,\ f(5)=3,\ f(6)=2,\ f(7)=1,\ f(8)=0$

Παρατηρούμε ότι καθώς μεγαλώνουν οι τιμές της μεταβλητής x, οι τιμές της μεταβλητής y μικραίνουν. Στη γραφική μας παράσταση, αυτό δηλώνεται από την καθοδική της πορεία στο διάστημα $[4,\ 8]$

(Λέμε, όπως θα μάθουμε σε επόμενη τάξη, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[4,\ 8]$)

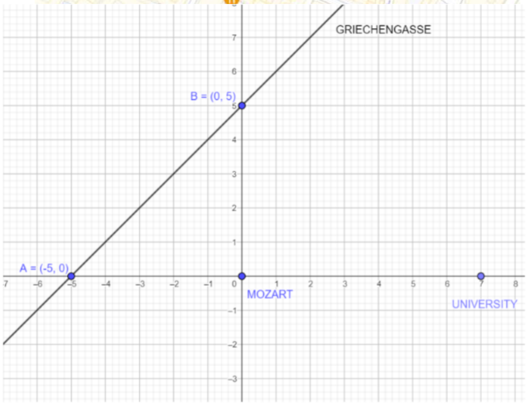
Επιπλέον δραστηριότητα 2

Στις 12 Αυγούστου του 1988 ο Νίκος έκλεισε αεροπορικό εισιτήριο για να πάει στη Βιέννη και να επισκεφθεί τους φίλους του, Rene και Ευκλείδη, που μένουν στην Ελληνική συνοικία. Καθώς σχεδίαζε το ταξίδι, τους ρώτησε για το πως θα έβρισκε την οδό “Griechengasse” (ή «Οδό των Ελλήνων»), όπου θα τον φιλοξενούσαν. Εκείνοι, θέλοντας να «πειράξουν» το φίλο τους, αλλά και να δοκιμάσουν τις γνώσεις του πάνω στα Μαθηματικά, του απάντησαν ξεχωριστά, χρησιμοποιώντας ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων όπου στην αρχή του βρισκόταν το σπίτι του διάσημου συνθέτη Wolfgang Amadeus Mozart.



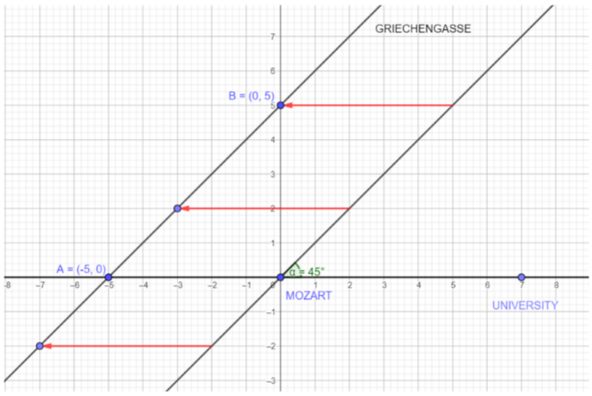
- Ο Ευκλείδης του έστειλε το ακόλουθο σχήμα με οδηγίες:

«Βρες τα σημεία με συντεταγμένες $A(-5,\ 0)$ και $B(0,\ 5)$. Σχεδίασε τη μοναδική ευθεία που διέρχεται από αυτά και έχεις μπροστά σου την οδό “Griechengasse” .



- Ο Rene του έστειλε το ακόλουθο σχήμα με οδηγίες:

«Από το σπίτι του Mozart, κοιτάζοντας προς το Πανεπιστήμιο, στρίψε με φορά αντίθετη από αυτή των δεικτών του ρολογιού κατά 45 μοίρες. Βρίσκεσαι τώρα πάνω σε μια νοητή ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Η οδός “Griechengasse” είναι η πέμπτη παράλληλος προς την ευθεία στην οποία βρίσκεσαι, κινούμενος προς τα αριστερά.»



Ερωτήματα:

1) Είναι σωστή η περιγραφή του Ευκλείδη για την τοποθεσία της οδού;

2) Είναι σωστή η περιγραφή του Rene για την τοποθεσία της οδού;

3) Μετά από την περιγραφή του Ευκλείδη, μπορείτε να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περιγράφει την οδό;

4) Μετά από την περιγραφή του Rene, μπορείτε να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περιγράφει αρχικά την οδό που διέρχεται από το σπίτι του Mozart;

5) Μπορείτε στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περιγράφει την οδό “Griechengasse”; Ποιος θα είναι ο ρόλος της γωνίας των 45 μοιρών και ποιος της $5^{ης}$ παραλλήλου; Πως εκφράζονται οι ρόλοι αυτοί στην εξίσωση της ευθείας;

6) Σχολιάστε με τον Καθηγητή σας την επιλογή των ονομάτων των δύο φίλων του Νίκου.

Ανάλυση δραστηριότητας

Το σύνολο της δραστηριότητας καλύπτει το ΠΜΑ Αλ.Σρ.10.5

1) Ναι, καθώς δίνονται δύο σημεία και ως γνωστόν, σύμφωνα με τον Ευκλείδη:

«Ἠιτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. »

2) Ναι, καθώς ο Rene δίνει ένα σημείο και την κλίση μιας ευθείας, η οποία είναι παράλληλη της ζητούμενης.

3) Χρησιμοποιώντας τα δύο σημεία, στην γενική μορφή $y = \alpha x + \beta$, βρίσκουμε: α=1, β=5, οπότε έχουμε: $y = x + 5$

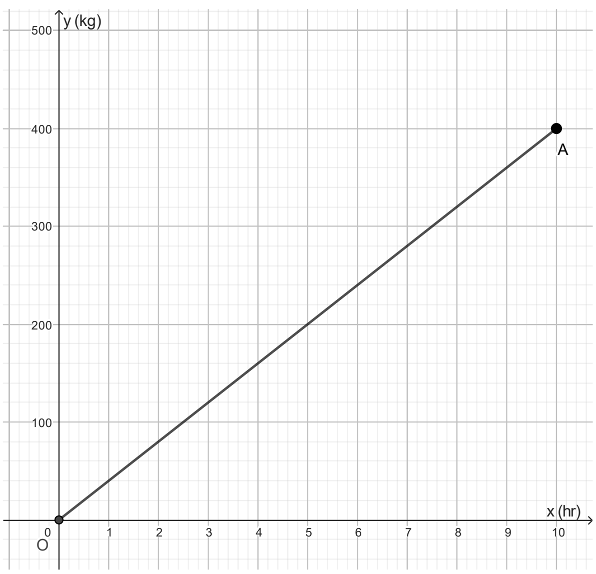
4) Αρχικά έχουμε την περιγραφή της ευθείας $y = x$ (διχοτόμος του 1^{ου} και 3^{ου} τεταρτημορίου, διερχόμενη εκ του (0, 0).

5) Τελικά έχουμε την ευθεία $y = x + 5$, όπου το α=1 δηλώνει την κλίση της ευθείας και το β=5 την παράλληλη μεταφορά της γραφικής παράστασης της $y = x$, κατά 5 μονάδες προς τα αριστερά.

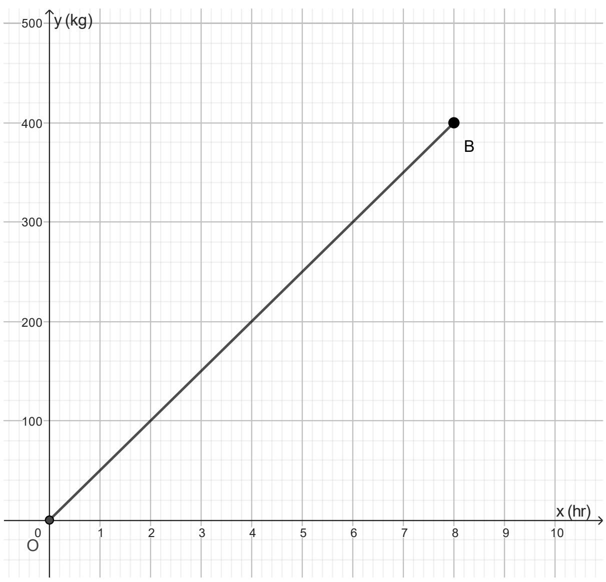
6) Ευκλείδης και Descartes…

Επιπλέον δραστηριότητα 3

Ένα εργοστάσιο κατεψυγμένης ζύμης έχει δύο μηχανές ζύμωσης (ζυμωτήρια) Α και Β, οι οποίες παράγουν 400 κιλά ζύμης καθημερινά, με σταθερό ρυθμό. Η μηχανή Α παράγει τα 400 κιλά σε 10 ώρες, ενώ η μηχανή Β σε 8 ώρες. Για κάθε μηχανή έχουμε τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις, όπου παριστάνονται τα κιλά της ζύμης y, σε σχέση με το χρόνο, x (σε ώρες).



ΜΗΧΑΝΗ Α

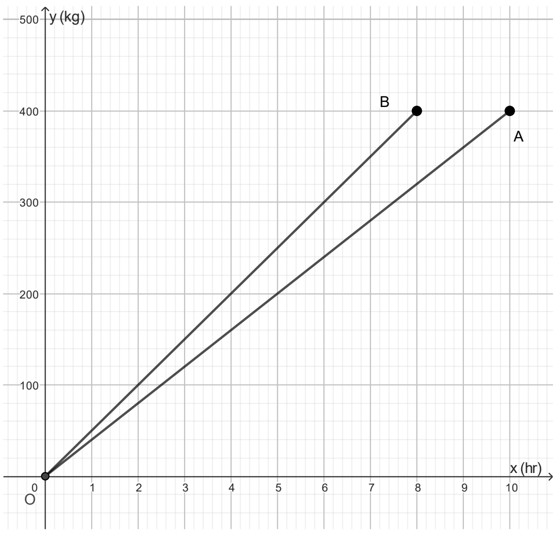


ΜΗΧΑΝΗ Β

i) Μπορείτε να βρείτε πόση ζύμη παράγει η κάθε μηχανή στη διάρκεια της μίας ώρας;

ii) Να βρείτε τους τύπους των συναρτήσεων (ευθειών) που μοντελοποιούν Μαθηματικά τη λειτουργία των μηχανών Α και Β αντίστοιχα.

iii) Αν παραστήσουμε και τις δύο μηχανές γραφικά στο ίδιο σύστημα αξόνων, ποια γραφική παράσταση είναι πιο «απότομη», δηλαδή πόσο πιο απότομα «ανεβαίνει», καθώς αυξάνει ο χρόνος;



iv) Ποιος παράγοντας ρυθμίζει το πόσο «απότομη» είναι η γραφική παράσταση μιας ευθείας;

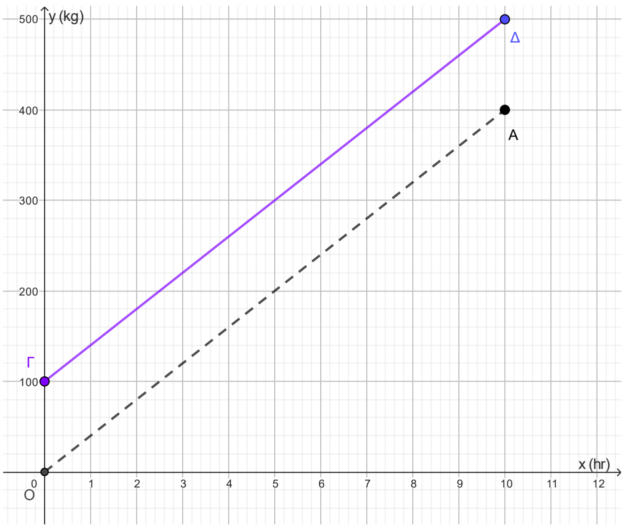
v) Θυμόμαστε από το Γυμνάσιο ότι η ………….. μιας ευθείας είναι ο λόγος της μεταβολής ………………., ως προς τη ……………………..μεταβολή……………………………………..................................

vi) Χρησιμοποιώντας τους παρακάτω πίνακες αντιστοίχων τιμών, επαληθεύστε τις απαντήσεις που δώσατε στα προηγούμενα ερωτήματα :

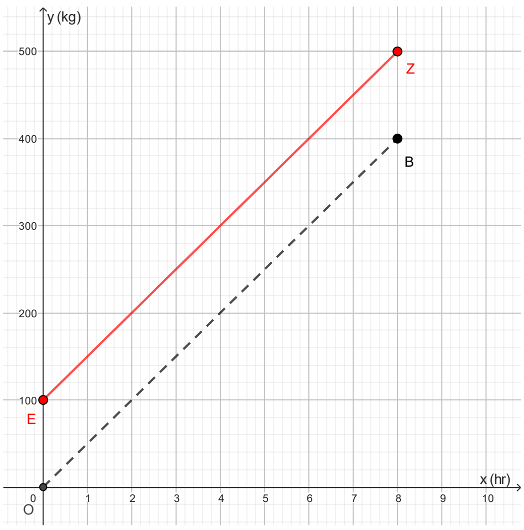
	x (hr)	y (kg)
A	2	80
	3	120

	x (hr)	y (kg)
B	2	100
	3	150

Αν ένα βράδυ, πριν κλείσουμε τις μηχανές κρατήσουμε τα τελευταία 100 κιλά μέσα σε καθένα από τα ζυμωτήρια Α, Β ως προζύμι για την αρχή της επόμενης ημέρας, τότε οι γραφικές παραστάσεις της παραγωγής των μηχανών θα είναι αντίστοιχα:



ΜΗΧΑΝΗ Α



ΜΗΧΑΝΗ Β

vii) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που μοντελοποιούν Μαθηματικά τη λειτουργία των μηχανών Α και Β στην περίπτωση αυτή. Ποιος ο ρόλος του προζυμιού στην περίπτωση αυτή; Πως επηρεάζει τις αρχικές γραφικές παραστάσεις;

Ανάλυση δραστηριότητας

Το σύνολο της δραστηριότητας καλύπτει τα ΠΜΑ Αλ.Σρ.10.5 και Αλ.Σρ.10.6

i) Οι μαθητές χρησιμοποιώντας είτε άμεσα τις γραφικές παραστάσεις, είτε απλό συλλογισμό αναλογίας (για παράδειγμα: η μηχανή Α παράγει σε 10 ώρες 400 κιλά ζύμης, σε 1 ώρα πόσα κιλά ζύμης παράγει;), βρίσκουν ότι η Μηχανή Α παράγει 40 κιλά ζύμης την ώρα, ενώ η Μηχανή Β παράγει 50 κιλά ζύμης την ώρα

ii) **Μηχανή Α:** $y = 40 \cdot x$ **Μηχανή Β:** $y = 50 \cdot x$ (ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων)

iii) Η γραφική παράσταση της Μηχανής Β

iv) Η κλίση των ευθειών.

v) Η κλίση μιας ευθείας είναι ο λόγος της μεταβολής του y προς τη μοναδιαία μεταβολή του x.

vi) Οι μαθητές μέσω των πινάκων αντιστοίχων τιμών μπορούν να επαληθεύσουν όλα τα προηγούμενα ερωτήματα.

vii) **Μηχανή Α:** $y = 40 \cdot x + 100$ **Μηχανή Β:** $y = 50 \cdot x + 100$. Η ύπαρξη του προζυμιού έχει ως αποτέλεσμα την έναρξη λειτουργίας των μηχανών από το σημείο $(0, 100)$. Επιφέρει παράλληλη μεταφορά (προς τα πάνω) των αρχικών γραφικών παραστάσεων (εδώ με διακεκομμένη γραμμή).

Στο ψηφιακό συμπληρωματικό υλικό στη παράγραφο 2.2 μπορείτε να βρείτε

- εφαρμογές στη Φυσική
- επιπλέον εφαρμογές

2.3 Η συνάρτηση $f(x)=\alpha\cdot x^2+\beta\cdot x+\gamma$

Τι καινούργιο υπάρχει στη παράγραφο

Στην παράγραφο αυτή θα:

1) Χρησιμοποιούμε πολυωνυμικές συναρτήσεις 1ου και 2ου βαθμού, στη μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων. (ΠΜΑ: Αλ.Σρ.10.7)

2) Προσδιορίζουν αλγεβρικά και ερμηνεύουν γραφικά το πρόσημο της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ (ΠΜΑ: Αλ.Σρ.10.8)

3) Χρησιμοποιούμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ για την εύρεση του προσήμου της f . (ΠΜΑ: Αλ.Σρ.10.9)

Εισαγωγική δραστηριότητα (σελ. 65)

Τα ερωτήματα Α1, Α2 και Β1 καλύπτουν το ΠΜΑ Αλ.Σρ.10.7, το ερώτημα Β3 καλύπτει το ΠΜΑ Αλ.Σρ.10.8, ενώ το ερώτημα Β3 καλύπτει το ΠΜΑ Αλ.Σρ.10.9

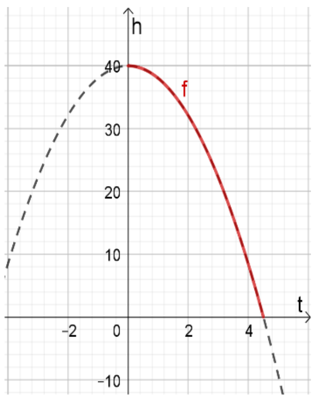
Μέρος Α

Α1: Υποθέτοντας ζεύγη θερμοκρασίας (C^o, F^o), έχουμε (0, 32) και (100, 212), οπότε αν το μοντέλο περιγράφεται από την ευθεία: $F=\alpha\cdot C+\beta$, έχουμε σταδιακά: $32=\alpha\cdot 0+\beta$, άρα β = 32 και τελικά $212=100\cdot\alpha+32$, οπότε α = 1.8. Συνεπώς: $F=1.8\cdot C+32$

Α2: Για $F=75$, έχουμε: $75=1.8\cdot C+32$, άρα $C=23.9$ βαθμοί Celsius.

Μέρος Β

Β1: Με τη βοήθεια του Καθηγητή, ο μαθητής διαπιστώνει πως μπορεί να θεωρήσει κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων και να περιγράψει την τροχιά του κολυμβητή, όπως στο ακόλουθο σχήμα:



Ξεκινώντας από την παραβολή $y=\alpha t^2$ με α<0, ο μαθητής μπορεί (διαισθητικά) να οδηγηθεί στη γενική μορφή: $y=\alpha t^2+40$ και καθώς το σημείο με συντεταγμένες $(4.5,\ 0)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της παραβολική τροχιάς, θα έχουμε: $0=\alpha(4.5)^2+40$ άρα $\alpha=-1.97$. Τελικά $h(t)=-1{,}97t^2+40,\quad t\geq 0$

Β2: Για $t=2$, $h(2)=-1.97\left(2^2-20.3\right)=32m$

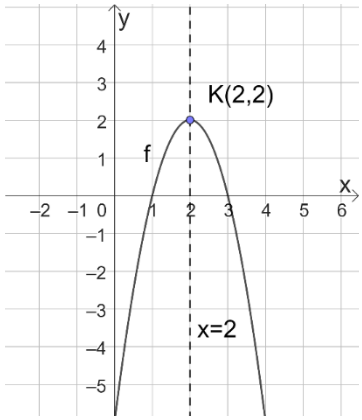
Β3: Για $h=20m$, $20=-1{,}97\left(t^2-20{,}3\right)$ επομένως $t=3.2sec$

Β4: Μετά τα 4.5sec (σημείο τομής της παραβολής με τον άξονα του χρόνου), ο κολυμβητής βρίσκεται κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας.

Ανάλυση δραστηριότητας (σελ. 69)

Με τη βοήθεια του λογισμικού Geogebra χαράσσουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

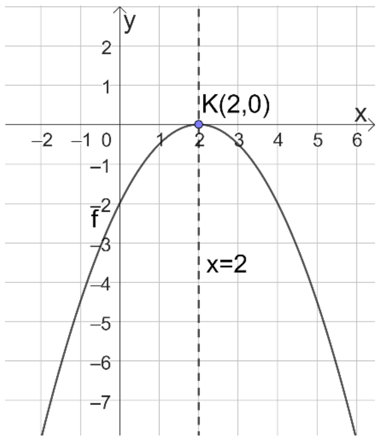
α) $f(x) = -2x^2 + 8x - 6$ που φαίνεται στο διπλανό σχήμα:



Διαπιστώνουμε ότι η γραφική παράσταση είναι παραβολή και:

- Έχει κορυφή το σημείο $K(2,2)$
- Έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = 2$
- Είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 2]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[2, +\infty)$
- Παρουσιάζει μέγιστη τιμή στο $x_0 = 2$ την τιμή $f(2) = 2$
- Τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία με τετμημένες $x_1 = 1$ και $x_2 = 3$ που είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ δηλαδή της εξίσωσης $-2x^2 + 8x - 6 = 0$, αφού $f(1) = 0$ και $f(3) = 0$
- Οι τιμές της είναι αρνητικές για $x < 1$ ή $x > 3$ και θετικές για $1 < x < 3$

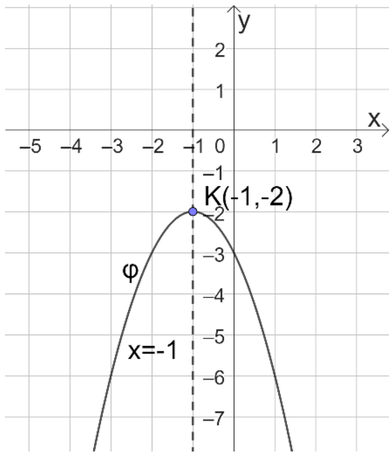
β) $h(x) = -0{,}5x^2 + 2x - 2$ που φαίνεται στο διπλανό σχήμα:



Διαπιστώνουμε ότι η γραφική παράσταση είναι παραβολή και:

- Έχει κορυφή το σημείο $K(2,0)$
- Έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = 2$
- Είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 2]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2, +\infty)$
- Παρουσιάζει ελάχιστη τιμή στο $x_0 = 2$ την τιμή $h(2) = 0$
- Εφάπτεται στον άξονα x΄x στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 2$ που είναι διπλή ρίζα της εξίσωσης $h(x) = 0$ δηλαδή της εξίσωσης $0{,}5x^2 - 2x + 2 = 0$, αφού $h(2) = 0$
- Οι τιμές της είναι θετικές για κάθε τιμή του $x \neq 2$

γ) $\varphi(x) = x^2 + 2x + 3$ που φαίνεται στο διπλανό σχήμα:



Διαπιστώνουμε ότι η γραφική παράσταση είναι παραβολή και:

- Έχει κορυφή το σημείο $K(-1,2)$
- Έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -1$
- Είναι γνησίως φθίουσα στο διάστημα $(-\infty, -1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1, +\infty)$
- Παρουσιάζει ελάχιστη τιμή στο $x_0 = -1$ την τιμή $\varphi(-1) = 2$
- Δεν τέμνει τον άξονα x΄x οπότε η εξίσωση $\varphi(x) = 0$ δεν έχει ρίζες
- Οι τιμές της είναι θετικές για κάθε τιμή του x

Στο ψηφιακό συμπληρωματικό υλικό στη παράγραφο 2.3 μπορείτε να βρείτε

- τη διαδικασία της χάραξης της γραφικής παράστασης της $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha \neq 0$ με μετατοπίσεις
- επιπλέον εφαρμογές
- επιπλέον ασκήσεις
- θέματα κριτικής σκέψης

2.4 Τριγωνομετρία

Τι καινούργιο υπάρχει στη παράγραφο

Στη παράγραφο αυτή θα:

1) Ορίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνίας μεταξύ 0° και 360° με τη βοήθεια συστήματος συντεταγμένων. (ΠΜΑ: Αλ.Σρ.10.10)

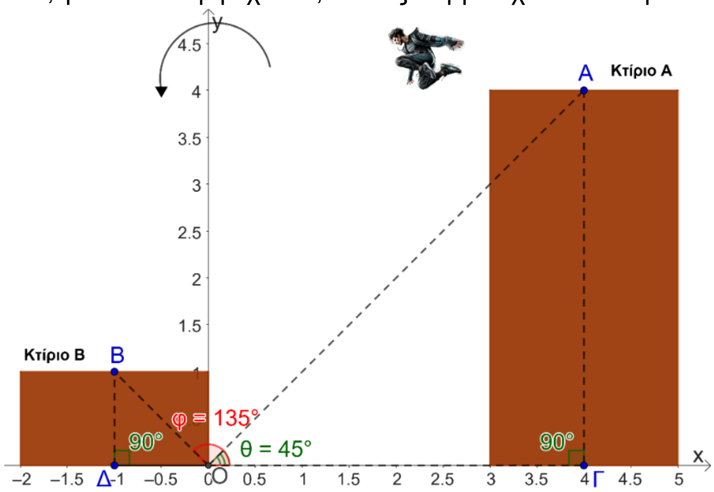
2) Αποδείξουμε τις βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες ($εφx = \dfrac{ημx}{συνx}$, $σφx = \dfrac{συνx}{ημx}$, $ημ^2x + συν^2x = 1$) και θα υπολογίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας γωνίας όταν ένας από αυτούς είναι γνωστός. (ΠΜΑ: Αλ.Σρ.10.11)

Εισαγωγική δραστηριότητα (σελ.74)

Η Δραστηριότητα καλύπτει το ΠΜΑ Αλ.Σρ.10.10

(Δημιουργία AI: Chat GPT)

Η Ειρήνη ακολούθησε στη Σαντορίνη το φίλο της Νίκο, για να τον εμψυχώσει, καθώς συμμετέχει στον ετήσιο διαγωνισμό parkour. Καθώς όμως της αρέσουν τα Μαθηματικά, αποφασίζει να δει αν μπορεί να τα συνδυάσει με το συγκεκριμένο άθλημα. Ανεβαίνει στο καμπαναριό της Εκκλησίας και παρατηρεί τις διάφορες θέσεις του Νίκου στις ταράτσες των σπιτιών. Ταυτόχρονα, θεωρεί κατάλληλο σύστημα Καρτεσιανών αξόνων με αρχή τη θέση της ίδιας (στο σημείο Ο), οπότε και βλέπει τις θέσεις του φίλου της μέσω συντεταγμένων.



A) Καθώς ο Νίκος βρίσκεται στο Κτίριο Α, γνωρίζοντας τα μήκη των πλευρών ……. και …… η Ειρήνη χρησιμοποίησε τον τριγωνομετρικό αριθμό ………………... και υπολόγισε τη γωνία ΑΟΓ, η οποία είναι τελικά ……. μοίρες (………. γωνία).

B) Στη συνέχεια παρατήρησε ότι αν: Θεωρήσει τις συντεταγμένες του σημείου Α που είναι ……… και μετρήσει την απόσταση ΟΑ χρησιμοποιώντας το …………………….. Θεώρημα, θα έχει ………………………………………………………………………………………………………

Τότε, πειραματιζόμενη βρήκε ότι για το ημίτονο της οξείας γωνίας θ, ο λόγος της τεταγμένης του σημείου Α προς την απόσταση ΟΑ δίνει το σωστό αποτέλεσμα:

……………………………..…………………………………………

Αντίστοιχα έκανε το πείραμα για το συνημίτονο της γωνίας θ, με το λόγο της τετμημένης του σημείου Α προς την απόσταση ΟΑ και βρήκε πάλι σωστό αποτέλεσμα : ……………………………………………………………

Τέλος, το επανάλαβε για την εφαπτομένη της γωνίας θ, χρησιμοποιώντας το λόγο της τεταγμένης προς την τετμημένη του σημείου Α και βρήκε για άλλη μία φορά το σωστό αποτέλεσμα: …………………………………….

Έτσι, διατυπώνει την ακόλουθη εικασία, ως έναν άλλο τρόπο υπολογισμού των τριγωνομετρικών αριθμών οξείας γωνίας: «Χρησιμοποιώ τις συντεταγμένες του σημείου Α (που βρίσκεται στην ………πλευρά της οξείας γωνίας ΓΟΑ), καθώς και την απόσταση ΟΑ για να ορίσω τους ακόλουθους τριγωνομετρικούς αριθμούς:

ημθ = …….. , συνθ = …….., εφθ = …… »

Γ) Στη συνέχεια η Ειρήνη, παρακολουθώντας με το βλέμμα της το Νίκο να περνάει στο Κτίριο Β, αναρωτιέται αν η εικασία της θα είναι λειτουργική και στην περίπτωση όπου η γωνία είναι αμβλεία. Δοκιμάζει τη μέθοδό για τη γωνία ΓΟΒ και έχει:

Συντεταγμένες σημείου Β:……………………..

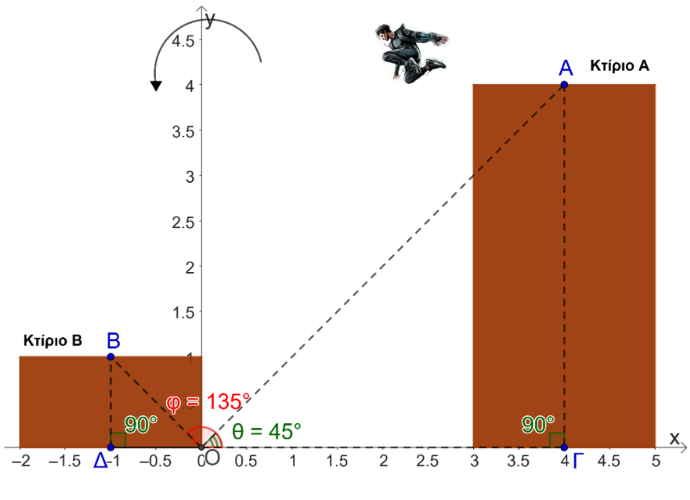
Μήκος τμήματος ΟΒ:………………………….

ημφ = …….. , συνφ = …….., εφφ = ……...

Τα αποτελέσματα που πήρε την έδωσαν μεγάλη χαρά, καθώς χρησιμοποιώντας πίνακα τριγωνομετρικών αριθμών, επιβεβαίωσε πως ήταν τα σωστά!

Ανάλυση δραστηριότητας:

Η Ειρήνη ακολούθησε στη Σαντορίνη το φίλο της Νίκο, για να τον εμψυχώσει, καθώς συμμετέχει στον ετήσιο διαγωνισμό parkour. Καθώς όμως της αρέσουν τα Μαθηματικά, αποφασίζει να δει αν μπορεί να τα συνδυάσει με το συγκεκριμένο άθλημα. Ανεβαίνει στο καμπαναριό της Εκκλησίας και παρατηρεί τις διάφορες θέσεις του Νίκου στις ταράτσες των σπιτιών. Ταυτόχρονα, θεωρεί κατάλληλο σύστημα Καρτεσιανών αξόνων με αρχή τη θέση της ίδιας (στο σημείο Ο), οπότε και βλέπει τις θέσεις του φίλου της μέσω συντεταγμένων.



1) Καθώς ο Νίκος βρίσκεται στο Κτίριο Α, γνωρίζοντας τα μήκη των πλευρών **ΟΓ** και **ΑΓ** η Ειρήνη χρησιμοποίησε τον τριγωνομετρικό αριθμό **εφαπτομένη** και υπολόγισε τη γωνία ΑΟΓ, η οποία είναι τελικά **45** μοίρες (**οξεία** γωνία).

2) Στη συνέχεια παρατήρησε ότι αν: Θεωρήσει τις συντεταγμένες του σημείου Α που είναι **(4,4)** και μετρήσει την απόσταση ΟΑ χρησιμοποιώντας το **Πυθαγόρειο** Θεώρημα, θα έχει

$$(ΟΑ)^2 = (ΑΓ)^2 + (ΟΓ)^2 = 4^2 + 4^2 = 16 + 16 = 32, \text{ δηλαδή: } (ΟΑ) = \sqrt{32}$$

Τότε, πειραματιζόμενη βρήκε ότι για το ημίτονο της οξείας γωνίας θ, ο λόγος της τεταγμένης του σημείου Α προς την απόσταση ΟΑ δίνει το σωστό αποτέλεσμα: $ημθ = \frac{ΑΓ}{ΟΑ} = \frac{4}{\sqrt{32}} = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \left(= ημ45^o\right)$

Αντίστοιχα έκανε το πείραμα για το συνημίτονο της γωνίας θ, με το λόγο της τετμημένης του σημείου Α προς την απόσταση ΟΑ και βρήκε πάλι σωστό αποτέλεσμα : $συνθ = \frac{ΟΓ}{ΟΑ} = \frac{4}{\sqrt{32}} = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \left(= συν45^o\right)$

Τέλος, το επανάλαβε για την εφαπτομένη της γωνίας θ, χρησιμοποιώντας το λόγο της τεταγμένης προς την τετμημένη του σημείου Α και βρήκε για άλλη μία φορά το σωστό αποτέλεσμα: $εφθ = \frac{ΑΓ}{ΟΓ} = \frac{4}{4} = 1 \quad \left(= εφ45^o\right)$

Έτσι, διατυπώνει την ακόλουθη εικασία, ως έναν άλλο τρόπο υπολογισμού των τριγωνομετρικών αριθμών οξείας γωνίας: «Χρησιμοποιώ τις συντεταγμένες του σημείου $Α(x_Α, y_Α)$ (που βρίσκεται στην **τελική** πλευρά της οξείας γωνίας ΓΟΑ), καθώς και την απόσταση ΟΑ για να ορίσω τους ακόλουθους τριγωνομετρικούς αριθμούς: $ημθ = \frac{y_Α}{(ΟΑ)}, συνθ = \frac{x_Α}{(ΟΑ)}, εφθ = \frac{y_Α}{x_Α}$ »

3) Στη συνέχεια η Ειρήνη, παρακολουθώντας με το βλέμμα της το Νίκο να περνάει στο Κτίριο Β, αναρωτιέται αν η εικασία της θα είναι λειτουργική και στην περίπτωση όπου η γωνία είναι **αμβλεία** (εδώ 135°). Δοκιμάζει τη μέθοδό για τη γωνία ΓΟΒ και έχει:

- Συντεταγμένες σημείου Β: (-1, 1)
- Μήκος τμήματος ΟΒ: $(ΟΒ)^2 = 1^2 + 1^2$, δηλαδή: $(ΟΒ) = \sqrt{2}$
- $ημφ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad συνφ = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad εφφ = \frac{1}{-1} = -1$

Τα αποτελέσματα που πήρε την έδωσαν μεγάλη χαρά, καθώς χρησιμοποιώντας πίνακα τριγωνομετρικών αριθμών, επιβεβαίωσε πως ήταν τα σωστά, για τη γωνία των 135°!

Η δραστηριότητα ξεκινά με μια απλή εφαρμογή τριγωνομετρικών αριθμών σε ορθογώνιο τρίγωνο, ενώ στη συνέχεια ο μαθητής θα πρέπει να παρατηρήσει πως παίρνει τα ίδια αποτελέσματα, όταν χρησιμοποιήσει κατάλληλα τις συντεταγμένες σημείου στην τελική πλευρά της οξείας γωνίας. Τέλος, επιχειρεί να εφαρμόσει την εικασία του και σε αμβλεία γωνία και το κάνει με επιτυχία!

Στο ψηφιακό συμπληρωματικό υλικό στην παράγραφο 2.4 μπορείτε να βρείτε

- ιστορικό σημείωμα και
- επιπλέον ασκήσεις

Κεφάλαιο 3ο

3ο κεφ.: ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

3.1 Αλγεβρικές ταυτότητες

Τι καινούργιο υπάρχει στη παράγραφο

Στην παράγραφο αυτή θα:

1) Αποδείξουμε τις ταυτότητες που σχετίζονται με τις παραστάσεις $(\alpha \pm \beta)^3$ και $\alpha^3 \pm \beta^3$ (ΠΜΑ: Αλ.Π.10.1)

2) Χρησιμοποιήσουμε τις ταυτότητες και τις ιδιότητες των ν-οστών ριζών και γενικότερα των δυνάμεων με ρητό εκθέτη στον μετασχηματισμό αλγεβρικών παραστάσεων (ΠΜΑ: Αλ.Π.10.2)

Ανάλυση εισαγωγικής δραστηριότητας (σελ.86)

Το σύνολο της δραστηριότητας καλύπτει το ΠΜΑ Αλ.Π.10.1

Ο κύβος έχει πλευρά $\alpha+\beta$, με τον όγκο του να είναι: $V=(\alpha+\beta)^3$

Ο κύβος αποτελείται από ένα παραλληλεπίπεδο (στο βάθος) με βάση τετράγωνο πλευράς α και ύψος $\alpha+\beta$, από ένα κύβο (μπροστά) πλευράς β, από δύο παραλληλεπίπεδα με βάση τετράγωνο πλευράς α και ύψος β και τρία παραλληλεπίπεδα με βάση τετράγωνο πλευράς β και ύψος α.

Άρα: $V=\alpha^2\cdot(\alpha+\beta)+\beta^3+2\cdot\alpha^2\cdot\beta+3\cdot\beta^2\cdot\alpha=\alpha^3+\alpha^2\beta+\beta^3+2\alpha^2\beta+3\beta^2\alpha=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

Παρατηρούμε ότι: $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

Αλγεβρικά:

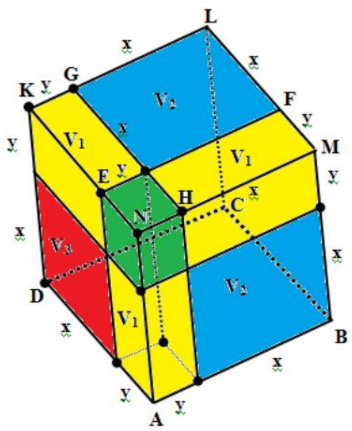
$$(\alpha+\beta)^3=(\alpha+\beta)^2\cdot(\alpha+\beta)=(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)\cdot(\alpha+\beta)=\alpha^3+\alpha^2\beta+2\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2+\beta^2\alpha+\beta^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$$

Μια πιο αναλυτική παρουσίαση της εισαγωγικής δραστηριότητας (σελ.86)

Το σύνολο της δραστηριότητας καλύπτει το ΠΜΑ Αλ.Π.10.1

ΜΕΡΟΣ Α

Θεωρούμε κύβο διάστασης $(x+y)$ μονάδων τον οποίο διαμερίζουμε σε οκτώ γεωμετρικά στερεά: δύο διαφορετικούς κύβους και έξι ορθογώνια παραλληλεπίπεδα, σχεδιάζοντας τα ευθύγραμμα τμήματα EF και GH.



Ο όγκος του κύβου είναι ίσος με: $V_{(x+y)}=$.........., ενώ για τα οκτώ γεωμετρικά στερεά της διαμέρισης έχουμε:

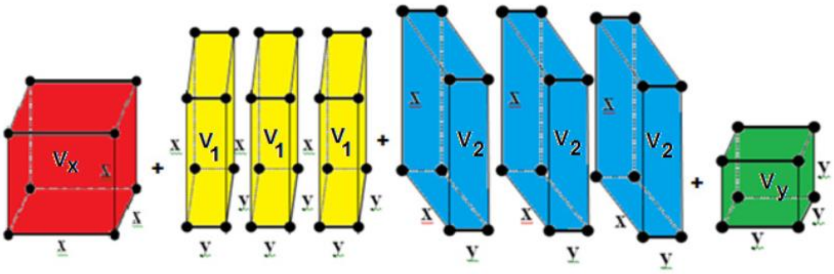
$V_x=$.................
$V_1=$.................
$V_2=$.................
$V_y=$.................

, οπότε ο συνολικός όγκος θα ισούται με:

$V_{ΟΛΙΚΟ}=$.........+..........+.........+...........=

=.........+..........+.........+...........

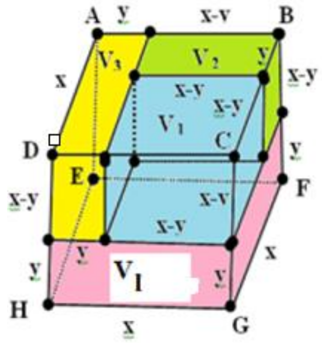
όπου ο συνολικός όγκος προκύπτει από το άθροισμα των επιμέρους όγκων των στερεών διαμέρισης:



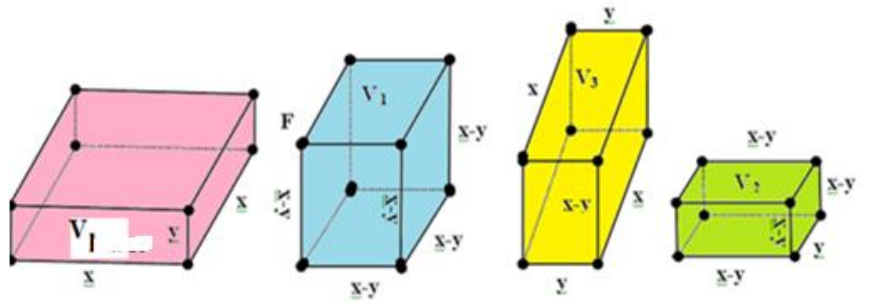
Τι παρατηρείτε, σε σχέση με τον όγκο του αρχικού κύβου και του αθροίσματος των όγκων των επιμέρους στερεών;

ΜΕΡΟΣ Β

Με δεδομένο τον ακόλουθο κύβο:



και την αντίστοιχη διαμέριση του στα ακόλουθα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα:



Να διατυπώσετε μια εικασία για το ποια ταυτότητα μπορεί να περιγράφει η παραπάνω διαδικασία.

ΜΕΡΟΣ Γ

Θεωρούμε κύβο διάστασης x μονάδων από τον οποίο αφαιρούμε κύβο διάστασης y μονάδων.

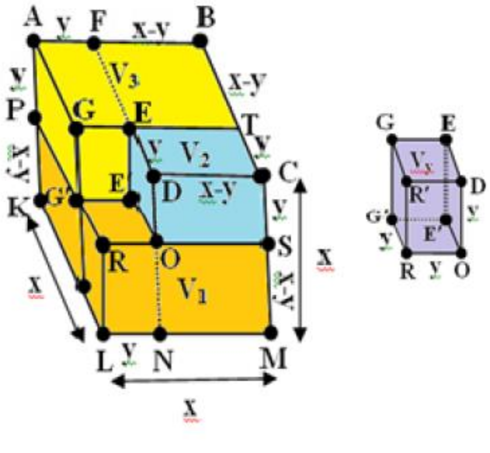
Οι όγκοι των κύβων με μήκη πλευρών x, y είναι ίσοι με:

$V_x = \dots\dots\dots\dots\dots$

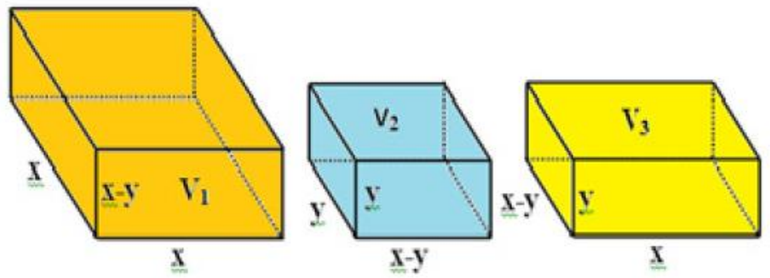
$V_y = \dots\dots\dots\dots\dots$

ενώ ο όγκος του στερεού που απομένει, υπολογίζεται αφού πρώτα αφαιρέσουμε από τον όγκο του αρχικού κύβου τον όγκο του κύβου πλευράς y:

$V = V_x - V_y = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ (*)



Αν διαμερίσουμε το στερεό που απέμεινε σε τρία ορθογώνια παραλληλεπίπεδα, σύμφωνα με το ακόλουθο σχήμα, οι αντίστοιχοι όγκοι θα είναι ίσοι με:



(1) **(2)** **(3)**

$V_1 = ...$

$V_2 = ...$

$V_3 = ...$

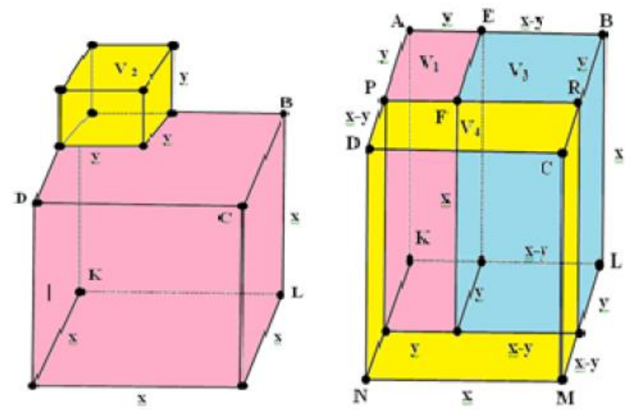
Αν τώρα αθροίσουμε τους όγκους των στερεών (1), (2) και (3) θα έχουμε:

$V = V_1 + V_2 + V_3 = ...$ (!)

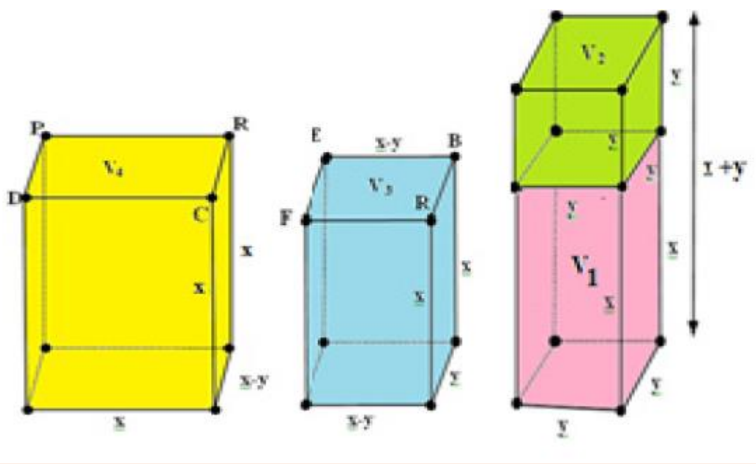
Τι παρατηρείτε από τις σχέσεις (*) και (!), οι οποίες και οι δυο περιγράφουν τον όγκο του στερεού που απέμεινε;

ΜΕΡΟΣ Δ

Με δεδομένους τους ακόλουθους κύβους:



και την αντίστοιχη διαμέριση τους στα ακόλουθα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα:



Να διατυπώσετε μια εικασία για το ποια ταυτότητα μπορεί να περιγράφει η παραπάνω διαδικασία.

Ανάλυση δραστηριότητας (σελ. 86)

ΜΕΡΟΣ Α

Με τη βοήθεια του Καθηγητή ή χρησιμοποιώντας προηγούμενη γνώση πάνω στον όγκο στερεών, (αλλά και την εποπτεία/διαίσθηση), ο μαθητής μπορεί να συμπληρώσει τους ακόλουθους τύπους:

$V_{x+y} = (x+y)^3$, $V_x = x^3$, $V_1 = xy^2$, $V_2 = x^2y$, $V_y = y^3$ και τελικά να συνθέσει την ταυτότητα:

$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

ΜΕΡΟΣ Β

Με παρόμοια διαδικασία κι επιχειρηματολογία, ο μαθητής αναμένουμε να ανακαλύψει την ταυτότητα:

$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$.

ΜΕΡΟΣ Γ

Με τη βοήθεια του Καθηγητή ή χρησιμοποιώντας προηγούμενη γνώση πάνω στον όγκο στερεών, (αλλά και την εποπτεία/διαίσθηση), ο μαθητής μπορεί να συμπληρώσει τους ακόλουθους τύπους:

$V_x = x^3$, $V_y = y^3$, $V = V_x - V_y = x^3 - y^3$, $V_1 = x^2(x-y)$, $V_2 = y^2(x-y)$, $V_3 = xy(x-y)$

και τελικά να συνθέσει την ταυτότητα: $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$.

ΜΕΡΟΣ Δ

Με παρόμοια διαδικασία κι επιχειρηματολογία, ο μαθητής αναμένουμε να ανακαλύψει την ταυτότητα:

$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$

Στο ψηφιακό συμπληρωματικό υλικό στη παράγραφο 3.1 μπορείτε να βρείτε

- επιπλέον εφαρμογές
- επιπλέον ασκήσεις

Κεφάλαιο 4ο

4ο κεφ.: ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

4.1 Εξισώσεις 1ου βαθμού

Τι καινούργιο υπάρχει στη παράγραφο αυτή;

Στην παράγραφο αυτή θα επιλύσουμε απλές παραμετρικές εξισώσεις 1ου βαθμού και ρεαλιστικά προβλήματα που ανάγονται σε εξισώσεις αυτής της μορφής . (ΠΜΑ: Αλ.Σχ.10.1)

Ανάλυση εισαγωγικής δραστηριότητας (σελ.94)

Το σύνολο της δραστηριότητας καλύπτει το ΠΜΑ Αλ.Σχ.10.1

i) Ο Enrico έθεσε $P=10$ και $\delta=40$ και υπολόγισε το λ: $10=\lambda\cdot 40-34$ άρα $\lambda=\frac{44}{40}=1{,}1$

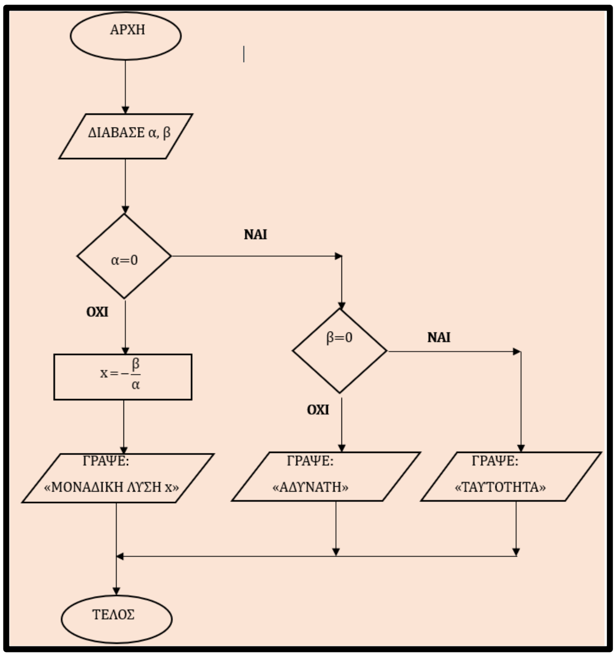
ii) Για $\lambda=1{,}1$, η οικογενειακή πίτσα των 55 εκατοστών θα κοστίζει: $P=1{,}1\cdot 55-34=26{,}5$ ευρώ.

iii) Αν έφτιαχνε πίτσες διαμέτρου το πολύ 30 εκατοστών, τότε θα είχε το ακόλουθο πρόβλημα τιμολόγησης: (έστω $\delta=30$) $P=1{,}1\cdot 30-34=33-34=-1<0$

iv) Αν ο Enrico αλλάξει την τιμή της παραμέτρου λ, θα αλλάξει συνολικά η δυνατότητα παρασκευής διαφόρων μεγεθών, αλλά και η τιμολόγηση για τις πίτσες. Στο 3ο ερώτημα γίνεται φανερό ότι το λ εκφράζει τη σχέση κόστους και κέρδους και στο 4ο ερώτημα φαίνεται ότι μπορεί να πάρει άλλη τιμή για λόγους όπως είναι η αύξηση του κόστους (υλικών) ή την αύξηση του κέρδους.

Επιπλέον δραστηριότητα 1

Ο Καθηγητής Πληροφορικής Λυκείου, κατά την παράδοση της παραγράφου "Η Έννοια του Αλγορίθμου» στους μαθητές του, έδωσε το ακόλουθο διάγραμμα ροής, για την επίλυση εξίσωσης της μορφής $\alpha x+\beta=0$: Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας για παράδειγμα την εξίσωση: $\lambda(\lambda-1)x+(1-\lambda)(\lambda-2)=0$,όπου $\lambda\in R$ ζήτησε από τους μαθητές του να απαντήσουν στα ακόλουθα ερωτήματα:



i) Το ρόλο του α της εξίσωσης, στο συγκεκριμένο παράδειγμα έχει ο……………….

ii) Το ρόλο του β της εξίσωσης, στο συγκεκριμένο παράδειγμα έχει ο……………….

iii) Για τις ακόλουθες τιμές του $\lambda\in R$, να διατυπώσετε τα συμπεράσματά σας για την εξίσωση, ελέγχοντας τη λειτουργία του διαγράμματος ροής:

(1) Για $\lambda=-1$, η εξίσωση:

……

(2) Για $\lambda = 0$, η εξίσωση

……………………………………………………………………………………………………….

(3) Για $\lambda = 1$ η εξίσωση

……

(4) Για $\lambda = 2$: η εξίσωση

………………………………………………………………………………………………………..

iv) Να λύσετε την εξίσωση για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in R$.

v) Θα μπορούσαμε να απλοποιήσουμε αρχικά τον παράγοντα (λ-1) και η εξίσωση να λυθεί αφού πάρει τη μορφή $\lambda x = \lambda - 2$;

Ανάλυση δραστηριότητας

Το σύνολο της δραστηριότητας καλύπτει το ΠΜΑ Αλ.Σχ.10.1

i), ii) Με τη βοήθεια του Καθηγητή και του δεδομένου διαγράμματος ροής, οι μαθητές πρέπει να αναγνωρίσουν ότι $\alpha = \lambda(\lambda - 1)$ και $\beta = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$.

iii) Αντίστοιχα, για τις τιμές της δραστηριότητας θα έχουμε:

(1) λ=-1: η εξίσωση έχει μοναδική λύση $x = 3$

(2) λ=0: η εξίσωση είναι αδύνατη

(3) λ=1: η εξίσωση είναι ταυτότητα

(4) λ=2: η εξίσωση έχει μοναδική λύση $x = 0$

iv) Αναμένουμε τη γενική διερεύνηση, σύμφωνα με το διάγραμμα ροής.

v) Δεν είναι σωστό, αφού έτσι θα περιορίσουμε το εύρος της διερεύνησης.

Επιπλέον δραστηριότητα 2

Α) Ο διαχειριστής μιας πολυκατοικίας προτίθεται να προμηθευτεί πετρέλαιο θέρμανσης. Διαθέτει για το σκοπό αυτό 1200 ευρώ και απευθύνεται σε τρεις προμηθευτές. Ο πρώτος πουλάει με 1,8 ευρώ το λίτρο. Ο δεύτερος με 1,75 και ο τρίτος με 1.68 το λίτρο. Αν αγοράσει x τα λίτρα πετρελαίου βρείτε τη τιμή του x αν ψωνίσει από καθέναν προμηθευτή χωριστά;

Β) Στο παραπάνω πρόβλημα η ποσότητα x του πετρελαίου που θα αγοραστεί εξαρτάται προφανώς από τη τιμή πώλησης κάθε προμηθευτή. Αν συμβολίσουμε με α τι τιμή πώλησης κάθε πωλητή να σχηματίσετε μια εξίσωση ως προς x που θα εκφράζει τη παραπάνω ενέργεια. Στην εξίσωση αυτή ποιος είναι ο ρόλος του x και ποιος του α;

Ανάλυση δραστηριότητας

Το σύνολο της δραστηριότητας εξυπηρετεί το ΠΜΑ Αλ.Σχ, 10.1.

Στη συγκεκριμένη δραστηριότητα, με ένα απλό αλλά ρεαλιστικό πρόβλημα εισάγουμε τους μαθητές στην έννοια της παραμέτρου. Δηλαδή μιας μεταβλητής α που βρίσκεται στην εξίσωση αλλά δεν είναι ο άγνωστος της εξίσωσης.

Η λύση όμως της εξίσωσης εξαρτάται από αυτή τη μεταβλητή που λέγεται **παράμετρος** της εξίσωσης:

Α) Στο ερώτημα αυτό είναι εύκολο να δημιουργήσουν τις εξισώσεις που θα δώσουν τη λύση και στις τρεις περιπτώσεις Για τον πρώτο προμηθευτεί ισχύει: $1{,}8 \cdot x = 1200$ που σημαίνει $x = 1200 \div 1{,}8 = 666{,}6$ λίτρα. Για τον δεύτερο προμηθευτεί ισχύει: $1,75 \cdot x = 1200$ που σημαίνει $x = 1200 \div 1,75 = 685,7$ λίτρα και για τον τρίτο $1,68 \cdot x = 1200$ που σημαίνει $x = 1200 \div 1,68 = 714,2$ λίτρα

Β) Αν συμβολίσουμε τώρα με α (παράμετρος) τη τιμή πώλησης κάθε προμηθευτή τότε η εξίσωση ως προς x, δηλαδή ως προς τη ποσότητα του πετρελαίου που θα αγοράσει ο διαχειριστής γίνεται: $\alpha \cdot x = 1200$ με $\alpha = 1,8$ ή $\alpha = 1,75$ ή $\alpha = 1,68$.

Παρατηρούμε ότι στην εξίσωση αυτή υπάρχουν δύο μεταβλητές: α και χ. Η μεταβλητή x είναι ο άγνωστος της οποίας η τιμή εξαρτάται από τη τιμή της μεταβλητής α που λέγεται παράμετρος (παρα- μετρώ) και παίρνει τιμές από το σύνολο: $\{1,8\ ,\ 1,75\ ,\ 1,68\}$. Σε κάθε περίπτωση η λύση είναι μοναδική και ίση με $x = \frac{1200}{\alpha}$.

Θέματα κριτικής σκέψης

1) Να λυθεί η σύντομα εξίσωση: $(x-1)^2 + (2x-2)^2 = 0$

2) Να λυθεί σύντομα η εξίσωση: $(x-2)^3 + (3x-1)^3 + (3-4x)^3 = 0$

(Υπόδειξη: Να χρησιμοποιήσετε την ταυτότητα EULER)

3) Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{x-2025}{1} + \frac{x-2024}{2} + \frac{x-2023}{3} = \frac{x-2022}{4} + \frac{x-2021}{5} + \frac{x-2020}{6}$

4) Δίνεται η εξίσωση: $-4x + \lambda x + 2\mu = 8$. Να βρείτε για ποιες τιμές των πραγματικών παραμέτρων λ, μ, η παραπάνω εξίσωση:

i) έχει μοναδική λύση

ii) είναι αδύνατη

iii) είναι ταυτότητα

iv) έχει τουλάχιστον μία λύση

Στο ψηφιακό συμπληρωματικό υλικό στη παράγραφο 4.1 μπορείτε να βρείτε

- επιπλέον δραστηριότητα (κλασματικές εξισώσεις)
- επιπλέον ασκήσεις και προβλήματα

4.2 Ανισότητες, Ανισώσεις 1ου βαθμού και Εξισώσεις - Ανισώσεις με απόλυτες τιμές

Τι καινούργιο υπάρχει στη παράγραφο

Στην παράγραφο αυτή:

1) Θα διερευνήσουμε τις ιδιότητες που συνδέουν τη διάταξη με τις πράξεις και αποδεικνύουμε ανισοτικές σχέσεις (ΠΜΑ: Αλ.Σχ.10.2)

2) Θα επιλύσουμε αλγεβρικά και γεωμετρικά απλές εξισώσεις, ανισώσεις και προβλήματα, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της απόλυτης τιμής (ΠΜΑ: Αλ.Σχ.10.3)

Ιδιότητες ανισοτικών σχέσεων- διάταξη και πράξεις

Ανάλυση εισαγωγικής δραστηριότητας (σελ. 102)

Το σύνολο της δραστηριότητας καλύπτει το ΠΜΑ Αλ.Σχ.10.2

Με τη δραστηριότητα αυτή οι μαθητές /τριες θα συνειδητοποιήσουν την γεωμετρική ερμηνεία της απόλυτης τιμής της διαφοράς δύο αριθμών δηλαδή την απόστασή τους πάνω στην αριθμογραμμή και θα εισαχθούν στη γεωμετρική αλλά και αλγεβρική λύση εξισώσεων και ανισώσεων με απόλυτα

Στο 1^{ο} ερώτημα θα φτιάξουν την αριθμογραμμή και θα σημειώσουν τα όρια του μήκους της ράβδου προσθέτοντας και αφαιρώντας το σφάλμα από την αρχική μέτρηση. Έτσι θα έχουν:

Στο 2^{ο} ερώτημα θα γράψουν με τη βοήθεια της απόλυτης τιμή ότι το μήκος της ράβδου d θα απέχει από τη μέτρηση: 3dm λιγότερο ή ίσο από 0,1 dm άρα: $|d-3| \leq 0{,}1$

Στο 3^{ο} ερώτημα θα εφαρμόσουν αυτό που έμαθαν στο 1^{ο} κεφάλαιο και θα διαπιστώσουν ότι: $3-0{,}1 \leq d < 3+0{,}1$ δηλαδή $2{,}99 \leq d \leq 3{,}01$. Οι τιμές 2,99 και 3,01 είναι αντίστοιχα το μικρότερο και μεγαλύτερο μήκος της ράβδου.

Ανισώσεις πρώτου βαθμού

Ανάλυση δραστηριότητας (σελ. 105)

Το σύνολο της δραστηριότητας καλύπτει το ΠΜΑ Αλ.Σχ.10.2

Με τη δραστηριότητα αυτή οι μαθητές/τριες θα δούν παραστατικά την επίλυση μιας ανίσωσης 1ου βαθμού:

A) Ερμηνεύοντας το σχ.1 οι μαθητές και οι μαθήτριες θα γράψουν την ανισοτική σχέση: $2x+3<x+5$ (ή $x+5>2x+3$)

B)

• Κάνοντας το ίδιο για το σχ.2 θα γράψουν την ανισοτική σχέση: $2x+1<5$

• Αν παρατηρήσουν το σχ.3 τα παιδιά θα δουν ότι αν βγάλουν και από τους δύο δίσκους ένα κουτί του ενός κιλού (αφαιρέσουν τον αριθμό ένα) η σχέση (ανισότητα) δεν αλλάζει. Έτσι θα γράψουν: $2x+1-1<5-1$ που σημαίνει ότι $2x<4$.

• Στη συνέχεια παρατηρώντας το σχ.4 θα δουν ότι αν μοιράσουμε τα βάρη και των δύο δίσκων στη μέση (διαιρέσουν με δύο) η σχέση (ανισότητα) πάλι δεν αλλάζει. Έτσι θα γράψουν: $\frac{2x}{2}<\frac{4}{2}$ που σημαίνει $x<2$

Επιπλέον δραστηριότητα

Με λένε Κωνσταντίνα, θέλω να κατέβω με το αυτοκίνητό μου στο κέντρο της πόλης, για να αγοράσω δώρα για τα Χριστούγεννα και ζητώ τη βοήθειά σας ως προς την πιο συμφέρουσα επιλογή parking:

Parking A: Στο χώρο Α, η στάθμευση κοστίζει 80 λεπτά την πρώτη ώρα και επιπλέον 50 λεπτά για κάθε ώρα πλέον της πρώτης.

Parking B: Στο χώρο Β, η στάθμευση κοστίζει 1,5 ευρώ την πρώτη ώρα και επιπλέον 30 λεπτά για κάθε ώρα πλέον της πρώτης.

Ποιο parking μου προτείνετε να χρησιμοποιήσω;

Ανάλυση δραστηριότητας;

Έστω ότι θα μείνει στο κέντρο της πόλης x ώρες επιπλέον της πρώτης ώρας.

Αν επιλέξει το parking A το κόστος θα είναι: $0{,}8+0{,}5\cdot x$ ενώ αν επιλέξει το parking B το κόστος θα είναι: $1{,}5+0{,}3\cdot x$

Λύνοντας την ανίσωση: $(0{,}8+0{,}5\cdot x)-(1{,}5+0{,}3\cdot x)>0$ έχουμε: $x>3{,}5$ που σημαίνει ότι: αν παραμείνει στο κέντρο περισσότερο από 4,5 ώρες συνολικά συμφέρει το parking B.

Στο ψηφιακό συμπληρωματικό υλικό στη παράγραφο 4.2 μπορείτε να βρείτε

- Επιπλέον εφαρμογές και
- επιπλέον ασκήσεις και προβλήματα

4.3 Εξισώσεις 2ου βαθμού

Τι καινούργιο υπάρχει στη παράγραφο

Στην παράγραφο αυτή θα μάθουμε:

1) Να επιλύουμε εξισώσεις της μορφής: $x^{\nu}=\alpha$ (ΠΜΑ: Αλ.Σχ.10.4)

2) Να επιλύουμε αλγεβρικά εξισώσεις $2^{ου}$ βαθμού (ΠΜΑ: Αλ.Σχ.10.5)

3) Να επιλύουμε απλές εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις $2^{ου}$ βαθμού (ΠΜΑ: Αλ.Σχ.10.6)

4) Να χρησιμοποιούμε εξισώσεις $2^{ου}$ βαθμού στη μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων **(ΠΜΑ: Αλ.Σχ.10.7)**

Εισαγωγική δραστηριότητα (σελ. 113)

Το σύνολο της δραστηριότητας καλύπτει τα ΠΜΑ Αλ.Σχ.10.5 και Αλ.Σχ.10.7

Για το ερώτημα Α) θα μοντελοποιήσουμε το πρόβλημα με μια πολυωνυμική παράσταση 2ου βαθμού για να λύσουμε στη συνέχεια την εξίσωση:

Α) Ο θεατής σκέφτεται έναν αριθμό έστω x. Τον τετραγωνίζει: x^2. Από το τετράγωνο αφαιρεί το διπλάσιο του αριθμού x: x^2-2x. Στη συνέχεια από το αποτέλεσμα αφαιρεί τον αριθμό 3: x^2-2x-3. Έτσι σχηματίζουμε τη συνάρτηση: $\varphi(x)=x^2-2x-3$. Για $x=5$, ο θεατής έβγαλε το αποτέλεσμα: $\varphi(5)=5^2-2\cdot5-3=12$.

Β) Αν ο μάγος άλλαζε τον αριθμό 3 με τον αριθμό 4 δηλαδή η συνάρτηση γινόταν: $\varphi(x)=x^2-2x-4$, τότε ο θεατής θα έβρισκε 11 αλλά ο μάγος πάλι θα μάντευε τον αριθμό 5 (γιατί;).

Την απάντηση θα δώσει το επόμενο ερώτημα:

Γ) Για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει: $\varphi(x)=x^2-2x-3=(x^2-2x+1)-1-3=(x-1)^2-4$.

Δ) Άρα ο μάγος για να λύσει την εξίσωση: $\varphi(x)=12$ έλυσε την εξίσωση: $(x-1)^2-4=12$ που σημαίνει $(x-1)^2=16$ και συνεπώς $x=5$ ή $x=-3$. Όμως ο μάγος ζήτησε θετικό ακέραιο, οπότε τελικά $x=5$.

Ε) …

Ανάλυση δραστηριότητας (σελ. 116)

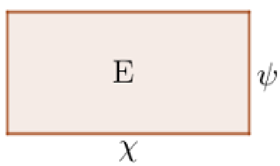
Το σύνολο της δραστηριότητας καλύπτει το ΠΜΑ Αλ.Σχ.10.7

Για να υπάρχουν αριθμοί με άθροισμα S και γινόμενο P πρέπει και αρκεί η εξίσωση: $x^2-S\cdot x+P=0$ να έχει λύσεις (ρίζες). Αυτό σημαίνει ότι πρέπει και αρκεί να έχει διακρίνουσα μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός.

Δηλαδή $(-S)^2-4P\geq0$, δηλαδή: $S^2\geq4P$. Για παράδειγμα δεν υπάρχουν αριθμοί με άθροισμα 10 και γινόμενο 26 αφού $10^2-4\cdot26=-24<0$.

Εδώ μπορούν να γίνουν προβλήματα εύρεσης μέγιστης και ελάχιστης τιμής αθροίσματος και γινομένου όπως για παράδειγμα το παρακάτω:

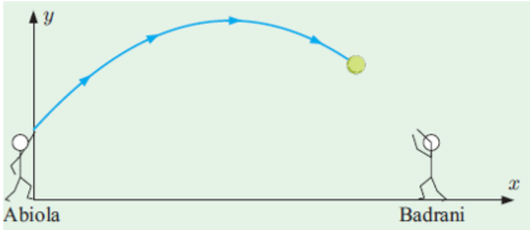
«Από όλα τα ορθογώνια με εμβαδόν 16 τ.μ. να βρεθεί αυτό που έχει την ελάχιστη περίμετρο»



Έστω x και y οι διαστάσεις του ζητούμενου ορθογωνίου. Από την υπόθεση ισχύει $E=x\cdot y=16(=P)$. Επειδή η περίμετρος είναι $\Pi=2(x_1+x_2)(=2\cdot S)$, το μισό της περιμέτρου (ημιπερίμετρος) θα είναι: $x_1+x_2(=S)$. Η περίμετρος όμως θα γίνει ελάχιστη όταν η ημιπερίμετρος θα γίνει ελάχιστη. Οι διαστάσεις του ζητούμενου ορθογωνίου θα οι λύσεις της εξίσωσης: $x^2-Sx+P=0$, δηλαδή της εξίσωσης: $x^2-Sx+16=0$. Όμως για να έχει λύση η εξίσωση αυτή πρέπει και αρκεί να ισχύει: $S^2 \geq 4P = 4 \cdot 16 = 64$ που σημαίνει $S \geq 8$. Άρα η ελάχιστη τιμή του S θα είναι $S = 8$. Η εξίσωση τότε γίνεται: $x^2 - 8x + 16 = 0$ που έχει διπλή ρίζα την $x_1 = x_2 = 4$. Άρα ελάχιστη περίμετρο έχει το τετράγωνο με πλευρά 4 μ.μ.

Επιπλέον δραστηριότητα

Δύο φίλοι, ο Abiola και ο Badrani βρίσκονται σε απόσταση 40 μέτρων και θα παίξουν ένα παιχνίδι κατά το οποίο θα πετάνε μια μπάλα ο ένας στον άλλον. Ο Abiola ρίχνει πρώτος τη μπάλα, η οποία διαγράφει την τροχιά του παρακάτω σχήματος, όπου x η οριζόντια μετατόπιση και y το ύψος της, σε μέτρα. Ο πίνακας που ακολουθεί, δίνει αντίστοιχες τιμές των x, y, κατά τη διάρκεια του πρώτου πετάγματος της μπάλας.



x (m)	0	5	10	15	20	25	30
y (m)	1.25	10	16.25	20	21.25	20	16.25

i) Χρησιμοποιώντας λογισμικό Μαθηματικών (π.χ. Geogebra), να παραστήσετε τα σημεία που εμφανίζονται στον πίνακα τιμών, στο Καρτεσιανό επίπεδο.

ii) Αναγνωρίζετε κάποια γνώριμη γραφική παράσταση συνάρτησης;

iii) Ποιο το μέγιστο ύψος που φτάνει η μπάλα;

iv) Μπορείτε να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης που περιγράφει το παιχνίδι;

v) Θα φτάσει η μπάλα στον Badrani, προτού χτυπήσει στο έδαφος και αναπηδήσει;

Ανάλυση δραστηριότητας

Τα ερωτήματα i), ii) καλύπτουν το ΠΜΑ Αλ.Σχ.10.7, ενώ το ερώτημα v) της δραστηριότητας καλύπτει το ΠΜΑ Αλ.Σχ.10.5

i), ii) Με τη βοήθεια του Καθηγητή, οι μαθητές πρέπει να μεταγλωττίσουν το πρόβλημα σε γλώσσα Μαθηματικών. Αναμένουμε να αναγνωρίσουν τη γραφική παράσταση μιας παραβολής.

iii) Απλή εφαρμογή που προκύπτει άμεσα από τον πίνακα τιμών.

iv) Χρησιμοποιώντας τον πίνακα τιμών, οι μαθητές αναμένεται να βρουν, από τη γενική μορφή της παραβολής: $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$, $\alpha, \beta, \gamma \in R$, θα βρουν: $\alpha = -0{,}05$, $\beta = 2$, $\gamma = 1{,}25$.

v) Οι μαθητές λύνοντας την αντίστοιχη δευτεροβάθμια εξίσωση: $0 = -0{,}05x^2 + 2x + 1{,}25$, θα βρουν την απάντηση στο ερώτημα.

Θέματα κριτικής σκέψης

1) Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2 - x - 2 = 0$

β) $(x-1)^2 - \sqrt{x^2 - 2x + 1} - 2 = 0$

γ) $x^2 - 4x - |x-2| + 2 = 0$

δ) $x^2 + \dfrac{1}{x^2} - \left|x - \dfrac{1}{x}\right| = 0$

2) **Α)** Αν η εξίσωση $2026 \cdot x^2 + \kappa x + \lambda = 0$ με κ, λ πραγματικούς αριθμούς και $\lambda \neq 0$ έχει δύο ρίζες ρ_1 και ρ_2 να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\lambda x^2 + \kappa x + 2026 = 0$ έχει ρίζες τις αντίστροφες των ριζών της πρώτης εξίσωσης.

Β) Αν αλλάζατε τον αριθμό 2026 με τη χρονολογία γέννησής σας θα άλλαζε κάτι στο ερώτημα Α);

3) Αν κ, λ, μ είναι μήκη πλευρών τριγώνου, να δείξετε ότι η εξίσωση $\kappa x^2 - 2(\lambda + \mu)x + \kappa = 0$, έχει δύο ρίζες θετικές και άνισες.

4) Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ με μήκος 2α. Επάνω στην ΑΒ, να βρεθεί σημείο Γ ώστε, αν κατασκευάσουμε μέσα στο ημικύκλιο ΑΒ ημικύκλια με διαμέτρους ΑΓ, ΒΓ, η επιφάνεια που περιέχεται μεταξύ αυτών να είναι ίσου εμβαδού κύκλου ακτίνας $\dfrac{\alpha}{2}$.

5) Α) Αν x, y ρητοί, $\lambda > 0$ και $\sqrt{\lambda}$ άρρητος, να αποδείξετε ότι: αν $x + y \cdot \sqrt{\lambda} = 0$, τότε $x = 0$ και $y = 0$ και αντίστροφα.

Β) Να δειχθεί ότι αν α, β, γ, κ, ρητοί αριθμοί, $\lambda > 0$, $\sqrt{\lambda}$ άρρητος και η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,\ \alpha \neq 0$ έχει ρίζα τον αριθμό $\kappa + \sqrt{\lambda}$, τότε η εξίσωση αυτή έχει για ρίζα και τον συζυγή του, $\kappa - \sqrt{\lambda}$

Στο ψηφιακό συμπληρωματικό υλικό στη παράγραφο 4.3 μπορείτε να βρείτε

- Επιπλέον ανάλυση των τύπων VIETA
- επιπλέον εφαρμογές, ασκήσεις και προβλήματα

4.4 Ανισώσεις 2ου βαθμού

Τι καινούργιο υπάρχει στην παράγραφο

Στη παράγραφο αυτή θα μάθουμε να:

1) Επιλύουμε ανισώσεις 2ου βαθμού αλγεβρικά ή/και γραφικά (ΠΜΑ: Αλ.Σχ,10.8)

2) Αξιοποιούμε ανισώσεις 2ου βαθμού στην επίλυση προβλημάτων (ΠΜΑ: Αλ.Σχ.10.9)

3) Κατασκευάζουμε δικά μας προβλήματα που επιλύονται με εξισώσεις ή/και ανισώσεις δευτέρου βαθμού (ΠΜΑ: Αλ.Σχ.10.10)

Ανάλυση εισαγωγικής δραστηριότητας (σελ. 120)

Τα ερωτήματα i) και ii) καλύπτουν το ΠΜΑ Αλ.Σχ.10.8, ενώ το ερώτημα i) καλύπτει τα ΠΜΑ Αλ.Σχ.10.9 και το ΠΜΑ Αλ.Σχ.10.10.

i) Με τη βοήθεια του Καθηγητή, οι μαθητές πρέπει να μεταγλωττίσουν το πρόβλημα σε γλώσσα Μαθηματικών. Αναμένουμε αφού πρώτα αναφερθούν στη γενική μορφή μιας παραβολής $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \ \alpha\neq 0$, χρησιμοποιώντας τα τρία σημεία A, B, C να βρουν τη συνάρτηση: $h(t)=-16t^2+784$, επιλύοντας το αντίστοιχο σύστημα.

ii) Οι μαθητές θα πρέπει να θεωρήσουν τις αντίστοιχες -οριζόντιες- ευθείες που περιγράφουν τα ύψη 720 και 384 μέτρων, οπότε γραφικά, οι τετμημένες των σημείων τομής με την παραβολική τροχιά, θα δώσουν το ζητούμενο χρονικό διάστημα: $t_1=2$ και $t_2=5$ δευτερόλεπτα.

iii) Οι μαθητές, αφού πρώτα οδηγηθούν στη συνθήκη: $-16t^2+112t+29\geq 200$, θα πρέπει να δουν αλγεβρικά πως οι τιμές που τη μηδενίζουν είναι οι 2.25 και 4,75 και στη συνέχεια με δοκιμές τιμών μέσα ή έξω από το διάστημα [2,25, 4,75], να ελέγξουν το πρόσημο της συνθήκης, επιβεβαιώνοντας τη δοσμένη γραφική παράσταση.

Θέματα κριτικής σκέψης

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2+2\alpha x+16$ και $g(x)=\sqrt{f(x)}$, όπου α πραγματικός αριθμός.

A) Να βρείτε το πρόσημο της διακρίνουσας της συνάρτησης f για τις διάφορες τιμές του α

B) Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η συνάρτηση g έχει πεδίο ορισμού όλο το σύνολο $\mathbb{R}$

Γ) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων που προκύπτουν από την f για $\alpha=-4$ και $\alpha=4$. Στη συνέχεια να προσδιορίσετε αλγεβρικά τις συντεταγμένες των κοινών τους σημείων

Δ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g για $\alpha=-4$ και να βρείτε γραφικά τις συντεταγμένες των σημείων που η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της g

Ε) Να επαναλάβετε το ερώτημα Δ) για $\alpha=4$

ΣΤ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g για $\alpha=-4$ και $\alpha=4$ να βρείτε γραφικά τις συντεταγμένες των κοινών τους σημείων και να επαληθεύσετε τα αποτελέσματα και αλγεβρικά

Στο ψηφιακό συμπληρωματικό υλικό στη παράγραφο 4.4 μπορείτε να βρείτε

- Αλγεβρική απόδειξη του προσήμου του τριωνύμου
- επιπλέον εφαρμογές

Κεφάλαιο 5ο

5ο κεφ.: ΣΥΝΟΛΑ

5.1 Η έννοια του συνόλου

Τι καινούργιο υπάρχει στην παράγραφο

Στην παράγραφο αυτή θα μάθουμε να:

1) Αναγνωρίζουμε αν μια ιδιότητα ορίζει ένα σύνολο (ΠΜΑ: Αλ.Σν.10.1)

2) Αναπαριστάνουμε τα σύνολα με διάφορους τρόπους (αναγραφή, περιγραφή, διαγράμματα Venn) (ΠΜΑ: Αλ.Σν.10.2)

3) Εξετάζουμε αν ένα αντικείμενο ανήκει ή όχι σε ένα σύνολο και να δηλώνουμε τη σχέση συμβολικά. (ΠΜΑ: Αλ.Σν.10.3)

4) Αναγνωρίζουν και δηλώνουν σχέσεις και πράξεις μεταξύ συνόλων με χρήση διαφορετικών αναπαραστάσεων και λεκτικά με κατάλληλη χρήση των συνδέσμων «ή» και «και» (ΠΜΑ: Αλ.Σν.10.4)

Ανάλυση εισαγωγικής δραστηριότητας (σελ. 132)

Τα ερωτήματα 1), 2) καλύπτουν το ΠΜΑ Αλ.Σν.10.1, τα ερωτήματα 3), 5) καλύπτουν το ΠΜΑ Αλ.Σν.10.2, ενώ τα ερωτήματα 4) και 6) καλύπτουν το ΠΜΑ Αλ.Σν.10.3.

Αρχικά έχουμε τα ακόλουθα σύνολα:

Καλλιτεχνική Ομάδα: $\text{ΚΟ} = \{\text{Ζ, Φ, Κ, Θ}\}$

Ομάδα Εικαστικών: $\text{ΟΕ} = \{\text{Ζ, Φ}\}$

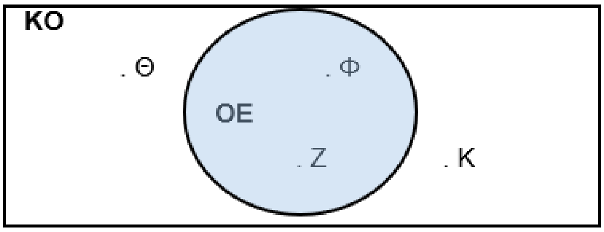
1) Όχι, καθώς δεν είναι ξεκάθαρο ποια τέχνη τους αρέσει συγκεκριμένα.

2) Οι πληροφορίες Π_1 και Π_2.

3) Η ομάδα των εικαστικών είναι υποσύνολο της ομάδας των κα λλιτεχνικών.

4) Ναι οι μαθητές «Βασίλης» και «Ηρώ».

5) $\text{ΟΕ} = \{\text{Ζ, Φ}\}$ **ή** Ομάδα Εικαστικών: περιλαμβάνει τη Ζωγραφική και τη Φωτογραφία **ή**



6) Η μαθήτρια «Μαργαρίτα» δε φαίνεται να έχει καμία σχέση με την ομάδα των εικαστικών, άρα δεν ανήκει σε αυτή την ομάδα/σύνολο.

5.2 Πράξεις συνόλων

Τι καινούργιο υπάρχει στη παράγραφο αυτή

Στην παράγραφο αυτή θα μάθουμε να:

Αναγνωρίζουμε και να δηλώνουμε σχέσεις και πράξεις μεταξύ συνόλων, με χρήση διαφορετικών αναπαραστάσεων, καθώς και λεκτικά με κατάλληλη χρήση των συνδέσμων «ή» και «και». (ΠΜΑ: Αλ.Σν.10.4)

Ανάλυση εισαγωγικών δραστηριοτήτων (σελ. 136)

Το σύνολο των δραστηριοτήτων καλύπτει το ΠΜΑ Αλ.Σν.10.4

1.

- Όλα τα τετράγωνα είναι ρόμβοι, ενώ όλοι οι ρόμβοι δεν είναι τετράγωνα.
- Ένας ρόμβος που είναι και ορθογώνιο είναι τελικά τετράγωνο. Αντίστροφα, κάθε τετράγωνο είναι ρόμβος και ορθογώνιο.
- Όλοι οι ρόμβοι, τα ορθογώνια και τα τετράγωνα είναι παραλληλόγραμμα, ενώ όλα τα παραλληλόγραμμα δεν είναι ρόμβοι, ορθογώνια και τετράγωνα.

2. **i)** Και τις δύο τελετές: $A \cap B$

ii) Μία τουλάχιστον τελετή: $A \cup B$

iii) Την τελετή έναρξης και όχι την τελετή λήξης: $A - B$

Ανάλυση δραστηριότητας (σελ. 140)

Το σύνολο της δραστηριότητας καλύπτει το ΠΜΑ Αλ.Σχ.10.4

1η)

Α) **1)** $A \cup B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$ $(= B \cup A)$

2) $(A \cup B) \cup \Gamma = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta\}$ $(= A \cup (B \cup \Gamma))$

3) $A \cup \varnothing = A$, προφανές

4) $A \cup A = A$, προφανές

Β) $\Delta = \{\alpha, \beta\}$, άρα $A \cup \Delta = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ $(= A)$

2η)

Α) **1)** $A \cap B = \{\gamma\}$ $(= B \cap A)$

2) $(A \cap B) \cap \Gamma = \{\gamma\}$ $(= A \cap (B \cap \Gamma))$

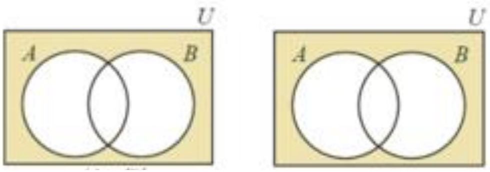
3) $A \cap \varnothing = \varnothing$, προφανές

4) $A \cap A = A$, προφανές

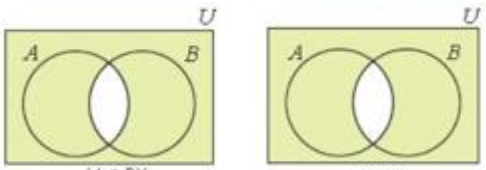
Β) $\Delta = \{\alpha, \beta\}$, άρα $A \cap \Delta = \{\alpha, \beta\}$ $(= \Delta)$

3η) Α)

(1)

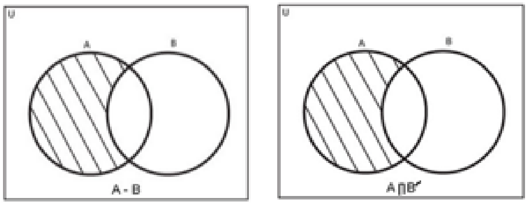


(2)



$(A \cap B)'$ $A' \cup B'$

Β)



Στο ψηφιακό συμπληρωματικό υλικό στη παράγραφο 4.4 μπορείτε να βρείτε

- Επιπλέον δραστηριότητες και
- Θέματα κριτικής σκέψης

ΣΧΕΔΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

Η προετοιμασία ενός σχεδίου μαθήματος στην Α λυκείου απαιτεί διάφορες βασικές εργασίες που συμβάλλουν στην ποιότητα και αποτελεσματικότητα του διδακτικού προγράμματος. Ακολούθως παραθέτουμε μερικές βασικές εργασίες που πρέπει να πραγματοποιηθούν:

1. **Καθορισμός Στόχων Μαθήματος:**
    - Καθορισμός των βασικών μαθησιακών στόχων και επιδιώξεων του μαθήματος.
    - Διαμόρφωση συγκεκριμένων, μετρήσιμων και εφικτών στόχων για τους μαθητές.

2. **Ανάλυση Προγράμματος Σπουδών:**
    - Εξέταση των περιεχομένων του προγράμματος σπουδών για το συγκεκριμένο επίπεδο της Α λυκείου.
    - Αναγνώριση των θεμάτων που πρέπει να καλυφθούν.

3. **Επιλογή Διδακτικών Υλικών:**
    - Εύρεση κατάλληλων διδακτικών βοηθημάτων, βιβλίων, ηλεκτρονικών πηγών και άλλων υλικών.
    - Εξέταση της εγκυρότητας και ποιότητας των υλικών.

4. **Καθορισμός Διδακτικών Μεθόδων:**
    - Επιλογή των κατάλληλων διδακτικών μεθόδων που θα χρησιμοποιηθούν για την ενίσχυση της κατανόησης και εφαρμογής των μαθηματικών αρχών.
    - Προετοιμασία διαδραστικών δραστηριοτήτων και προβολών.

5. **Κατάρτιση Σχεδίου Μαθήματος:**
    - Δομή του σχεδίου και των διαφανειών/παρουσιάσεων.
    - Χρήση ποικίλων μεθόδων για τη διατήρηση της προσοχής των μαθητών.

6. **Κατασκευή Αξιολογήσεων:**
    - Δημιουργία ερωτήσεων, ασκήσεων και άλλων μέσων αξιολόγησης.
    - Καθορισμός κριτηρίων αξιολόγησης.

7. **Συνεχής Αξιολόγηση και Προσαρμογή:**
    - Συνεχής παρακολούθηση της απόδοσης των μαθητών και προσαρμογή του σχεδίου ανάλογα με τις ανάγκες της τάξης.

Αυτές οι εργασίες συμβάλλουν στη σταθερή βάση για τη δημιουργία ενός σχεδίου μαθήματος που θα είναι ενδιαφέρον, εκπαιδευτικό και αποδοτικό.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟ ΣΧΕΔΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

Οι διάφορες μορφές της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \ \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R},\ \ \alpha\neq 0$

ΜΕΡΟΣ Α

Α.1 Χρησιμοποιήστε το λογισμικό Geogebra για να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

1. $y=(x-1)(x-3)$

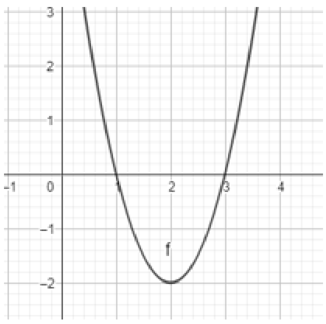
2. $y=2(x-1)(x-3)$

3. $y=-(x-1)(x-3)$

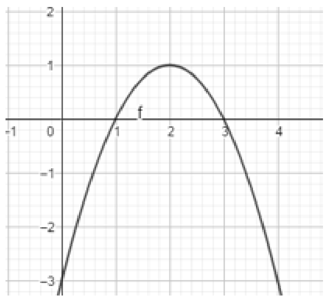
4. $y=-3(x-1)(x-3)$

5. $y=-\frac{1}{2}(x-1)(x-3)$

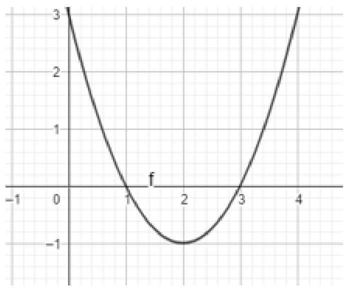
Α.2 Αν δυσκολευτήκατε στο ερώτημα Α.1, με τη χρήση του λογισμικού, να αντιστοιχίσετε τις παραπάνω συναρτήσεις με τις ακόλουθες γραφικές παραστάσεις:



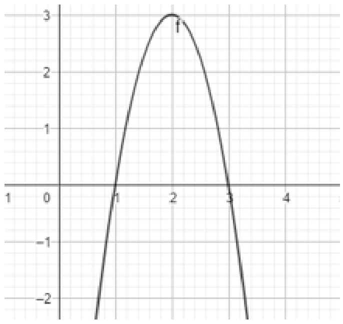
[ ]



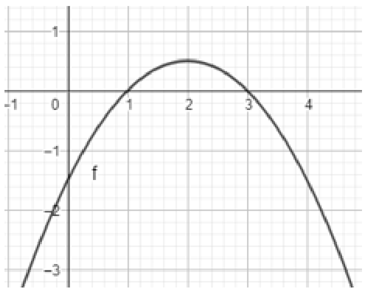
[ ]



[ ]



[ ]



[ ]

Α.3 Ποια είναι τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων του ερωτήματος Α.1, με τον άξονα x'x, αντίστοιχα;

1. …

2. …

3. …

4. …

5. …

Α.4 Ποια η γεωμετρική σημασία του α στη γενική μορφή $y=\alpha(x-1)(x-3)$;

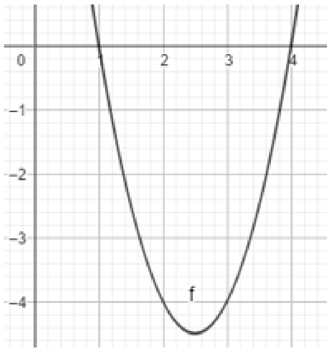
………

………

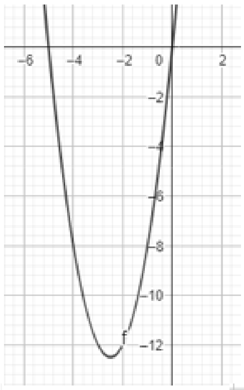
Α.5 Χρησιμοποιήστε το λογισμικό Geogebra για να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

1. $y = 2(x-1)(x-4)$
2. $y = 2(x-3)(x-5)$
3. $y = 2(x+1)(x-2)$
4. $y = 2x(x+5)$
5. $y = 2(x+2)(x+4)$

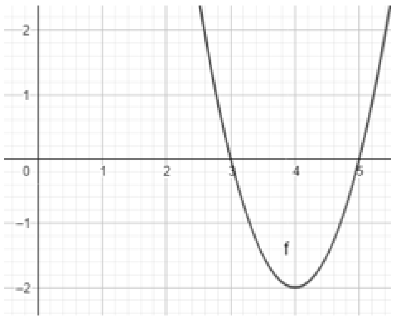
A.6 Αν δυσκολευτήκατε στο ερώτημα Α.5, με τη χρήση του λογισμικού, να αντιστοιχίσετε τις παραπάνω συναρτήσεις με τις ακόλουθες γραφικές παραστάσεις:



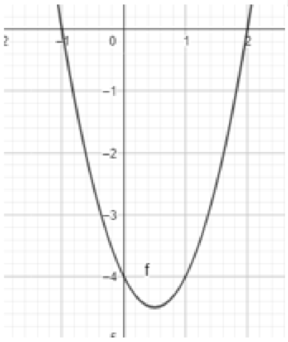
[ ]



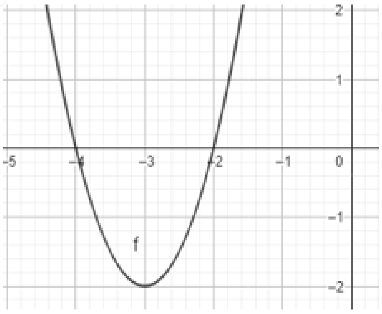
[ ]



[ ]



[ ]



[ ]

A.7 Ποια είναι τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων του ερωτήματος Α.5, με τον άξονα x'x, αντίστοιχα;

1. …
2. …
3. …
4. …
5. …

A.8 Ποια η γεωμετρική σημασία των α, β στη γενική μορφή $y = 2(x-\alpha)(x-\beta)$;

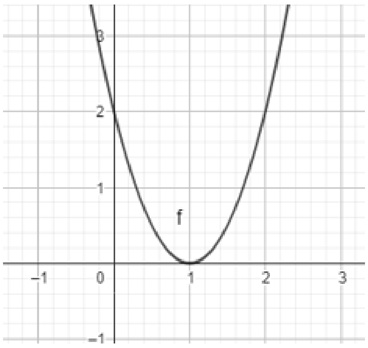
………

……………………………………………………………………………………………

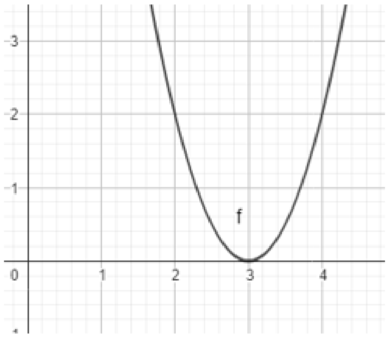
A.9 Χρησιμοποιήστε το λογισμικό Geogebra για να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

1. $y = 2(x-1)^2$
2. $y = 2(x-3)^2$
3. $y = 2(x+2)^2$
4. $y = 2x^2$

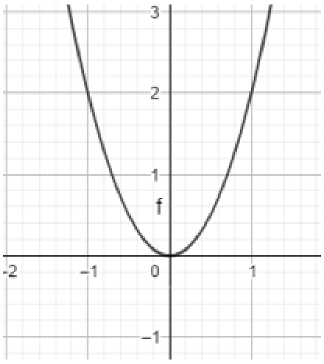
A.10 Αν δυσκολευτήκατε στο ερώτημα Α.9, με τη χρήση του λογισμικού, να αντιστοιχίσετε τις παραπάνω συναρτήσεις με τις ακόλουθες γραφικές παραστάσεις:



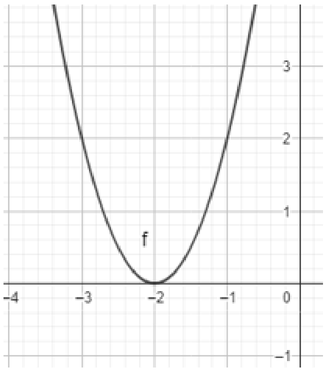
[ ]



[ ]



[ ]



[ ]

A.11 Ποια είναι τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων του ερωτήματος Α.9, με τον άξονα x’x, αντίστοιχα;

1. …
2. …
3. …
4. …

A.12 Ποια η γεωμετρική σημασία του α στη γενική μορφή $y=2(x-\alpha)^2$;

……

……

A.13 Συμπληρώστε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

- Αν η συνάρτηση έχει τη μορφή $y=\alpha(x-\beta)(x-\gamma)$, τότε ……………………………………….. τον άξονα x’x στα σημεία με τετμημένες …………………………………………………………………………………………..
- Αν η συνάρτηση έχει τη μορφή $y=\alpha(x-\beta)^2$, τότε ……………………………………………… τον άξονα x’x στο σημείο με τετμηνένη ……………………………………………………………………………………

ΜΕΡΟΣ Β

B.1 Χρησιμοποιήστε το λογισμικό Geogebra για να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

1. $y=(x-3)^2+2$

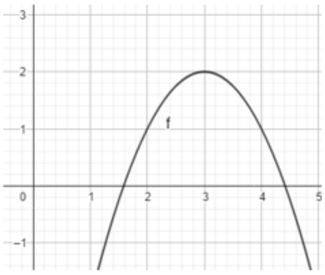
2. $y=2(x-3)^2+2$

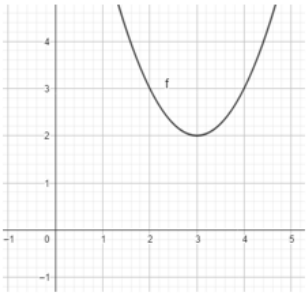
3. $y=-2(x-3)^2+2$

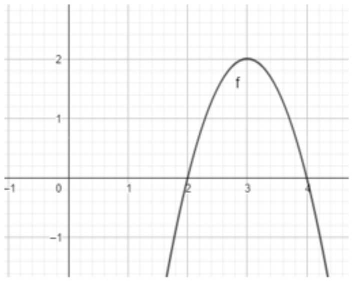
4. $y=-(x-3)^2+2$

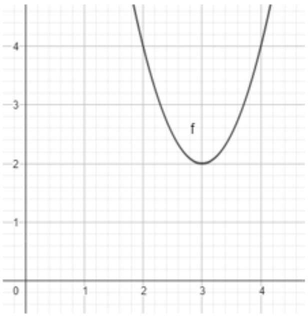
5. $y=-\frac{1}{3}(x-3)^2+2$

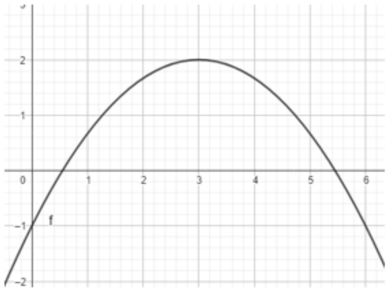
B.2 Αν δυσκολευτήκατε στο ερώτημα Β.1, με τη χρήση του λογισμικού, να αντιστοιχίσετε τις παραπάνω συναρτήσεις με τις ακόλουθες γραφικές παραστάσεις:


[ ]


[ ]


[ ]


[ ]


[ ]

B.3

Ποιες είναι οι συντεταγμένες των κορυφών των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων του ερωτήματος Β.1;

1. …

2. …

3. …

4. …

5. …

B.4 Ποια η γεωμετρική σημασία του α στη γενική μορφή $y=\alpha(x-3)^2+2$;

………

………

B.5 Χρησιμοποιήστε το λογισμικό Geogebra για να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

1. $y=2(x-1)^2+3$

2. $y=2(x-2)^2+4$

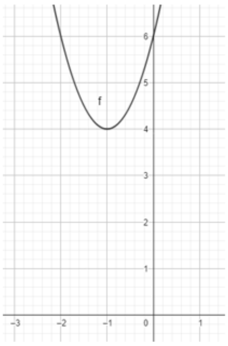
3. $y=2(x-3)^2+1$

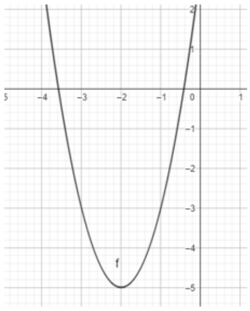
4. $y=2(x+1)^2+4$

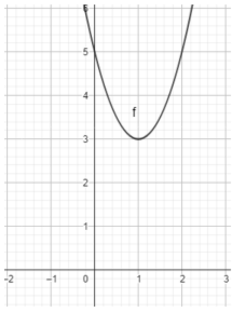
5. $y=2(x+2)^2-5$

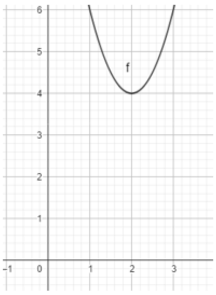
6. $y=2(x+3)^2-2$

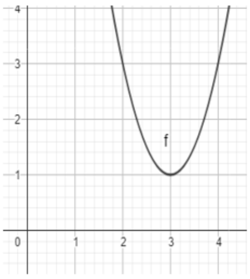
B.6 Αν δυσκολευτήκατε στο ερώτημα Β.5, με τη χρήση του λογισμικού, να αντιστοιχίσετε τις παραπάνω συναρτήσεις με τις ακόλουθες γραφικές παραστάσεις:

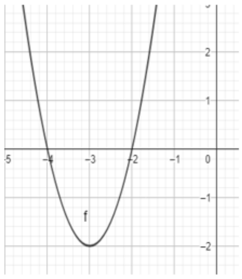

[ ]


[ ]


[ ]


[ ]


[ ]


[ ]

B.7 Ποιες είναι οι συντεταγμένες των κορυφών των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων του ερωτήματος Β.5;

1. …

2. …

3. …

4. …

5. …

6. …

B.8 Ποια η γεωμετρική σημασία των α, β στη γενική μορφή $y = 2(x-\alpha)^2 + \beta$;

……

……

B.9 Συμπληρώστε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

- Αν η συνάρτηση έχει τη μορφή $y = \alpha(x-\beta)^2 + \gamma$, τότε οι συντεταγμένες της κορυφής είναι ………..
- Αν η συνάρτηση έχει τη μορφή $y = \alpha(x-\beta)^2 + \gamma$, τότε η γραφική της παράσταση είναι μια …….. της γραφικής παράστασης της $y = \alpha x^2$ κατά ……. μονάδες ………………………………… και κατά ………. μονάδες προς τα ……………………………………

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Για να προσεγγίσετε το θέμα των **δραστηριοτήτων** στα βιβλία μαθηματικών του λυκείου, μπορείτε να ανατρέξετε σε σχετική ελληνική και ξενόγλωσση βιβλιογραφία. Εδώ παραθέτουμε μερικούς πιθανούς τίτλους που μπορεί να σας ενδιαφέρουν:

Ελληνική Βιβλιογραφία:

1. Βασάκος Θ.: Η έννοια της συνάρτησης στους μαθητές του Λυκείου και ενέργειες κατανόησης. Εμπόδια που σχετίζονται με τον ορισμό της συνάρτησης, (Γαγάτσης Αθ. Διδακτική των Μαθηματικών. Θεωρία-Έρευνα» εκδόσεις Art of text A.E, σελ 239-258, Θεσσαλονίκη 1995)
2. Γαγάτσης Α.- Ηλία Ι.- Ανδρέου Σ.: Αναπαραστάσεις και μάθηση των Μαθηματικών Συναρτήσεις και Αριθμητική Γραμμή, περιοδικό Ευκλείδης γ τεύχος 59, 2003.
3. Καλαβάσης Φ – Μεϊμάρης Μ: Θέματα Διδακτικής Μαθηματικών. Προτάσεις, Αθήνα 1992.
4. Καλδρυμίδου Μ. - Οικονόμου Α.: Πρόταση Αναλυτικού Προγράμματος Συναρτήσεων. Οι βασικοί άξονες. Σχέδιο αναλυτικού προγράμματος για τα Μαθηματικά. Θεσσαλονίκη 1993.

Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία:

1. Jo Boaler, "Mathematical Mindsets: Unleashing Students' Potential through Creative Math, Inspiring Messages and Innovative Teaching," Wiley, 2016.
2. Dan Meyer, "Teach Like a PIRATE: Increase Student Engagement, Boost Your Creativity, and Transform Your Life as an Educator," Dave Burgess Consulting, 2012.
3. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), "Principles to Actions: Ensuring Mathematical Success for All," NCTM, 2014.
4. Sfard A: Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification. The case of function in “The concept of Function:aspects of epistemology and Pedagogy” by Dubinsky Ed. and Harrel G.(eds). Mathematical Association of America U.S vol 25, pp. 25-58, 1992.
5. Sierpinska A: On understanding the Notion of function in “The concept of Function:aspects of epistemology and Pedagogy” by Dubinsky Ed. and Harrel G.(eds), M.A.A vol 25, pp.59- 84, 1992.
6. Vinner S: Consept definition, consept image and the notion of function, Journal for research in Mathematics education, 14 pp. 239-305, 1983

Για να προσεγγίσετε το θέμα των **διαθεματικής προσέγγισης και μοντελοποίησης** στα βιβλία μαθηματικών του λυκείου, μπορείτε να ανατρέξετε σε σχετική ελληνική και ξενόγλωσση βιβλιογραφία. Εδώ παραθέτουμε μερικούς πιθανούς τίτλους που μπορεί να σας ενδιαφέρουν:

Ελληνική Βιβλιογραφία:

1. Βαρνάβα-Σκούρα Τ., “Διαθεματική Προσέγγιση στη Διδασκαλία”, Παιδαγωγική και Ψυχολογική Εγκυκλοπαίδεια, Ελληνικά Γράμματα, Αθήνα, 1991.
2. Κλαουδάτος Ν., “Η Μοντελοποίηση στη Διδακτική Πράξη”, Διδακτορική Διατριβή, Πανεπιστήμιο Αθηνών, 1992.
3. Ματσαγγούρας Η., “Η Διαθεματικότητα στη Σχολική Γνώση. Εννοιοκεντρική Αναπλαισίωση και Σχέδια Εργασίας”, Εκδόσεις Γρηγόρης, Αθήνα, 2002.

Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία:

1. Doig, Brian, et al. *Interdisciplinary Mathematics Education: A State of the Art.* Information Age Publishing, 2021.
2. Eisenberg, Theodore, and Elizabeth Stump. *Mathematics and Interdisciplinary Research.* Springer, 2020.
3. Hannon, Jane. *Interdisciplinary Teaching and Learning in Higher Education.* Sage Publications, 2019.
4. Moss, David M. *Interdisciplinary Education: A Guide to Theory and Practice.* Jossey-Bass, 2017.

Για να προσεγγίσετε το θέμα της **ύλης των μαθηματικών** στα βιβλία της πρώτης τάξης του λυκείου, μπορείτε να ανατρέξετε σε σχετική ελληνική και ξενόγλωσση βιβλιογραφία. Εδώ παραθέτουμε μερικούς πιθανούς τίτλους που μπορεί να σας ενδιαφέρουν:

Ελληνική Βιβλιογραφία:

1. Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας , "Αξιολόγηση των μαθητών της Α' Λυκείου στα Μαθηματικά", Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων, Αθήνα, 1998.
2. Ανδρεαδάκης Σ., Κατσαργύρης Β. κ.α.: "Άλγεβρα Α' Γενικού Λυκείου", Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων, Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα, 1998.
3. Ανδρεαδάκης Σ., Κατσαργύρης Β. κ.α.: "Άλγεβρα και Στοιχεία Παιθανοτήτων Α' Γενικού Λυκείου", Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων, Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα, 2011.
4. Βαρουχάκης Ν., Αδαμόπουλος Λ. κ.α.: "Άλγεβρα Α' Λυκείου", Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα, 1986.
5. Περιοδικό «Ευκλείδης Β΄» Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία
6. Φυσική Γ΄Λυκείου (index), Μ. Μαραγκάκης, Χ. Νικολάου, Χ. Κυργιάκης, Εκδόσεις Λιβάνη

Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία:

1. Haese Mathematics: Mathematics for the International Student: Mathematics Analysis and Approaches HL/SL (Core) (3rd ed.). Haese Mathematics Publishers, 2019.
2. Haese Mathematics: Mathematics for the International Student: Mathematics Analysis and Approaches HL (3rd ed.). Haese Mathematics Publishers, 2019.
3. Haese Mathematics: Mathematics for the International Student: Mathematics Analysis and Approaches SL (3rd ed.). Haese Mathematics Publishers, 2019.
4. Cambridge University Press: Mathematics Analysis and Approaches for the IB Diploma (Standard Level). Cambridge University Press, 2018.
5. Pearson: IB Mathematics: Analysis and Approaches, Higher Level, for the IB Diploma. Pearson Education, 2018.
6. Oxford University Press: IB Mathematics: analysis and approaches, Standard Level, for the IB Diploma. Oxford University Press, 2019.
7. Besser in Mathematik, Gymnasium 7,8,9,10 Klasse. Alexander Spahn. Cornelsen SCRIPTON.
8. Hahn, D., & Dzewas, K. Mathematik 7,8,9. Westermann.
9. Malle, G., Woschitz, H., Koth, G., & Salzger, E. Mathematik verstehen. ōbv.
10. LS 7,8,9, Nordrhein-Westfalen. LAMBACHER SCHWEIZER.
11. MATHS 1de, 2de. lelivrescolaire.fr.
12. Maths 1reES.L. Bordas.
13. Maths repères 1reS. Hachette.
14. Mathematiques 2de. Hyperbole, Nathan.
15. Matematik 9, Ders Kitabi. Erhan Karakuyu, & Oktay Bağci.
16. Matematik 10, Ders Kitabi. Turgut Erel.
17. Matematik 1, Ders Kitabi. Abdullah Aydm Üllü, & Harun Er.

Για να προσεγγίσετε θέματα **ιστορίας μαθηματικών** στα βιβλία της πρώτης τάξης του λυκείου, μπορείτε να ανατρέξετε σε σχετική ελληνική και ξενόγλωσση βιβλιογραφία. Εδώ παραθέτουμε μερικούς πιθανούς τίτλους που μπορεί να σας ενδιαφέρουν:

Ελληνική Βιβλιογραφία:

1. Bunt, Lukas N.H., Phillip S. Jones, and Jack D. Bedient. Οι Ιστορικές ρίζες των στοιχειωδών Μαθηματικών.
2. Ευαγγέλου Σπανδάγου, Τα Μαθηματικά των Αρχαίων Ελλήνων, Εκδόσεις "ΑΙΘΡΑ".
3. Bell, E. T. Οι μαθηματικοί. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία:

1. Boyer, C. B., and Merzbach, U. C. A History of Mathematics. John Wiley & Sons, 2011.
2. Burton, D. M. The History of Mathematics: An Introduction. McGraw-Hill Education, 2011.
3. Katz, V. J., editor. The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam: A Sourcebook. Princeton University Press, 2009.
4. Kline, M. Mathematics: The Loss of Certainty. Oxford University Press, 1990.
5. Maor, E. To Infinity and Beyond: A Cultural History of the Infinite. Princeton University Press, 1991.
6. Kline, Morris. Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. Oxford University Press, 1972.
7. Peterson, I. The Mathematical Tourist: Snapshots of Modern Mathematics. Macmillan, 1995.
8. Van Brummelen, G. The Mathematics of the Heavens and the Earth: The Early History of Trigonometry. Princeton University Press, 2010.

Αυτοί οι τίτλοι αντιπροσωπεύουν μια μικρή επιλογή και μπορείτε να επεκτείνετε την έρευνά σας βασιζόμενοι στα ενδιαφέροντα και τις ανάγκες σας. Επίσης, μπορείτε να αναζητήσετε περαιτέρω εργασίες και άρθρα σε επιστημονικά περιοδικά και ιστοσελίδες εκπαιδευτικών οργανισμών.