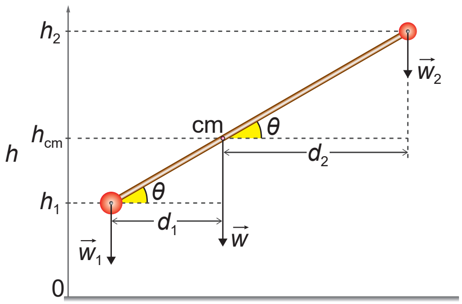
Απόδειξη της σχέσης $U_{βαρ} = Mgh_{cm}$

Θα αποδείξουμε τη σχέση $U_{βαρ} = Mgh_{cm}$ στην απλή περίπτωση που το εκτεταμένο σώμα αποτελείται από μια αβαρή ράβδο στα άκρα της οποίας υπάρχουν δύο σημειακές μάζες m_1 και m_2, όπως στο **σχήμα**. Συνεπώς, η μάζα του σώματος είναι:

$$M = m_1 + m_2$$

Όπως αναφέρθηκε, στο ομογενές βαρυτικό πεδίο το κέντρο μάζας ταυτίζεται με το κέντρο βάρους, Η συνισταμένη των βαρών των δύο μαζών εφαρμόζεται στο κέντρο βάρους-μάζας του σώματος. Από το θεώρημα των ροπών ως προς το κέντρο μάζας ισχύει:

$$\tau_W = \tau_{W_1} + \tau_{W_2}$$



Σχήμα Μια αβαρής ράβδος και δύο σημειακές μάζες συγκροτούν ένα εκτεταμένο σώμα.

οπότε:

$$0 = m_1 g d_1 - m_2 g d_2 \qquad \textbf{(i)}$$

Από το **σχήμα** εφαρμόζοντας τις γνώσεις μας από την τριγωνομετρία προκύπτει:

$$d_1 = \frac{h_{cm} - h_1}{εφ\theta} \qquad \textbf{(ii)}$$

και

$$d_2 = \frac{h_2 - h_{cm}}{εφ\theta} \qquad \textbf{(iii)}$$

Από τις **σχέσεις** (**i**), (**ii**) και (**iii**) έχουμε:

$$0 = m_1 g \frac{h_{cm} - h_1}{εφ\theta} - m_2 g \frac{h_2 - h_{cm}}{εφ\theta} \quad ή \quad m_2 g\left(h_2 - h_{cm}\right) = m_1 g\left(h_{cm} - h_1\right) \quad ή \quad m_1 g h_1 + m_2 g h_2 = \left(m_1 + m_2\right) g h_{cm}$$

Άρα:

$$U_{βαρ} = Mgh_{cm}$$

Η σχέση αυτή μπορεί να γενικευτεί και στην περίπτωση που το σώμα αποτελείται από οποιοδήποτε πλήθος σημειακών μαζών.