

## Διατήρηση της μηχανικής ενέργειας

### Απόδειξη

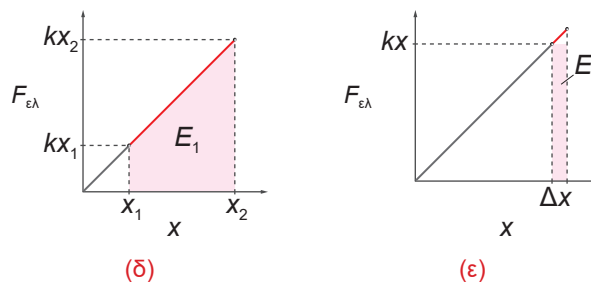
Στο **σχήμα** φαίνεται η κίνηση ενός σώματος που είναι προσδεμένο στο ένα άκρο ιδανικού οριζόντιου ελατηρίου, το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο σε κατακόρυφο τοίχο. Η κίνηση πραγματοποιείται σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Στο **στιγμιότυπο (α)** φαίνεται το ελατήριο στη θέση φυσικού μήκους, ενώ στα **στιγμιότυπα (β)** και **(γ)** φαίνονται δύο τυχαίες θέσεις  $\bar{x}_1$  και  $\bar{x}_2$  από τις οποίες διέρχεται το σώμα με ταχύτητες  $\vec{v}_1$  και  $\vec{v}_2$  τις χρονικές στιγμές  $t_1$  και  $t_2$  αντίστοιχα. Θεωρούμε ως σύστημα συντεταγμένων την ευθεία της κίνησης με αρχή ( $x = 0$ ) το ελεύθερο άκρο του ελατηρίου στη θέση φυσικού μήκους και θετική φορά προς τα δεξιά, οπότε:

$$x_1 < x_2 \text{ και } v_1 > v_2$$

Γνωρίζουμε ότι το μέτρο της δύναμης του ελατηρίου δίνεται από τη σχέση:

$$F_{\varepsilon\lambda} = kx \quad (i)$$

όπου  $k$  η σταθερά του ελατηρίου. Στα **σχήματα (δ)** και **(ε)** φαίνονται δύο γραφικές παραστάσεις της **σχέσης (i)**. Στο **σχήμα (δ)** φαίνονται οι θέσεις  $\bar{x}_1$  και  $\bar{x}_2$  του σώματος (είναι οι απομακρύνσεις του ελατηρίου από τη θέση φυσικού του μήκους τις χρονικές στιγμές  $t_1$  και  $t_2$  αντίστοιχα) και οι δυνάμεις που δέχεται το σώμα από το ελατήριο, ενώ στο **σχήμα (ε)** οι θέσεις είναι πάρα πολύ κοντά (στοιχειώδης μετατόπιση  $\Delta x$ ).



**Σχήμα** Διάγραμμα  $F_{\varepsilon\lambda} - x$  (δ) για τη συνολική παραμόρφωση, (ε) για μια στοιχειώδη παραμόρφωση

Στο **σχήμα (δ)** το γραμμοσκιασμένο τμήμα με εμβαδόν  $E_1$  έχει σχήμα τραπεζιού. Έχουμε:

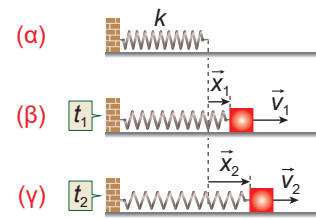
$$E_1 = \frac{B + \beta}{2} \cdot u = \frac{kx_2 + kx_1}{2} (x_2 - x_1)$$

οπότε:

$$E_1 = \frac{1}{2} kx_2^2 - \frac{1}{2} kx_1^2 \quad (ii)$$

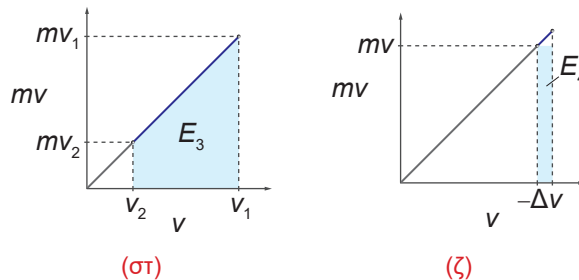
Στο **σχήμα (ε)**, επειδή η μετατόπιση είναι στοιχειώδης, το γραμμοσκιασμένο τμήμα μπορεί να θεωρηθεί ορθογώνιο με εμβαδόν  $E_2$ , οπότε ισχύει:

$$E_2 = kx \Delta x \quad (iii)$$



**Σχήμα** (α) Ένα ελατήριο στη θέση φυσικού μήκους. (β), (γ) Ένα σώμα κινείται σε λείο δάπεδο προσδεμένο στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου.

Στα **σχήματα (στ)** και **(ζ)** φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις της φυσικής ποσότητας  $mv$ , η οποία προφανώς είναι ανάλογη με την ταχύτητα  $v$ , αφού η μάζα του σώματος είναι σταθερή. Στο **σχήμα (στ)** φαίνονται οι ταχύτητες  $v_1$  και  $v_2$  του σώματος (τις χρονικές στιγμές  $t_1$  και  $t_2$  αντίστοιχα) και τα γινόμενά τους με τη μάζα του σώματος, ενώ στο **σχήμα (ζ)** οι ταχύτητες είναι πάρα πολύ κοντά (στοιχειώδης μεταβολή ταχύτητας  $\Delta v$ ).



**Σχήμα** Διάγραμμα  $mv-v$  **(στ)** για τη συνολική μεταβολή ταχύτητας, **(ζ)** για μια στοιχειώδη μεταβολή ταχύτητας

Στο **σχήμα (στ)** το γραμμοσκιασμένο τμήμα με εμβαδόν  $E_3$  έχει σχήμα τραπέζιου. Έχουμε:

$$E_3 = \frac{B + \beta}{2} u = \frac{mv_1 + mv_2}{2} (v_1 - v_2)$$

οπότε:

$$E_3 = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_2^2 \quad \text{(iv)}$$

Στο **σχήμα (ζ)**, επειδή η μεταβολή της ταχύτητας είναι στοιχειώδης, το γραμμοσκιασμένο τμήμα μπορεί να θεωρηθεί ορθογώνιο με εμβαδόν  $E_4$ , οπότε ισχύει:

$$E_4 = -mv\Delta v \quad \text{(v)}$$

Εφαρμόζοντας τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα για το σώμα στον άξονα της κίνησής του έχουμε:

$$\Sigma \vec{F}_x = m\vec{a}_x \quad \text{ή} \quad F_s = ma_x$$

οπότε:

$$-kx = ma_x \quad \text{(vi)}$$

Από τις **(iii)** και **(vi)** καταλήγουμε στην **(v)** ως εξής:

$$E_2 = kx\Delta x = -ma_x\Delta x = -m\frac{\Delta v}{\Delta t}\Delta x = -m\frac{\Delta x}{\Delta t}\Delta v = -mv\Delta v = E_4$$

Άρα, τα εμβαδά  $E_1$  και  $E_3$  θα είναι και αυτά ίσα, οπότε:

$$E_1 = E_3 \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_2^2 \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}mv_2^2$$