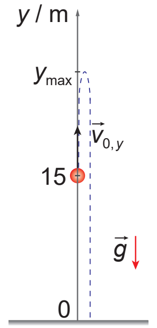
Παράδειγμα 14

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ από ύψος 15 m από το έδαφος, εκτοξεύουμε μια μικρή μπάλα κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα μέτρου 10 m/s. Για το παράδειγμα αυτό, μπορούμε να θέσουμε το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας ίσο με 10 m/s^2 και να αγνοήσουμε την αντίσταση του αέρα.



Μικρή μπάλα εκτελεί κατακόρυφη βολή.

α) Σε ποιο ύψος από το έδαφος θα βρίσκεται η μπάλα μετά από $0{,}50\text{ s}$ και πόση ταχύτητα θα έχει τότε;

β) Σε ποιο ύψος από το έδαφος θα βρίσκεται η μπάλα μετά από $1{,}50\text{ s}$ και πόση ταχύτητα θα έχει τότε;

γ) Ποια χρονική στιγμή θα φτάσει η μπάλα στο ανώτατο σημείο της τροχιάς της και πού βρίσκεται αυτό;

δ) Ποια χρονική στιγμή και με πόση ταχύτητα θα φτάσει η μπάλα στο έδαφος;

ε) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις ταχύτητας-χρόνου και θέσης-χρόνου για όλη την κίνηση της μπάλας.

Λύση

Σε όλη τη λύση θα αγνοήσουμε την επίδραση του αέρα, παρά το ότι κάτι τέτοιο είναι απολύτως μη ρεαλιστικό για τις ταχύτητες και τις αποστάσεις που εμπλέκονται.

α) Θεωρούμε πως η αρχή $y = 0\text{ m}$ βρίσκεται στο επίπεδο του εδάφους. Η μπάλα ξεκινάει από τη θέση $y_0 = +15\text{ m}$ με ταχύτητα $v_{0,y} = +10\text{ m/s}$, ενώ η επιτάχυνση είναι $a_y = -10\text{ m/s}^2$.

Από την **εξίσωση 2.11** για $\Delta t = 0{,}50\text{ s}$ έχουμε:

$$y = y_0 + v_{0,y}\Delta t + \frac{1}{2}a_y(\Delta t)^2 = \left[+15 + (+10)(0{,}50) + \frac{1}{2}(-10)(0{,}50)^2\right]\text{m} \approx 19\text{ m}$$

Από την **εξίσωση 2.10** για $\Delta t = 0{,}50\text{ s}$ έχουμε:

$$v_y = v_{0,y} + a_y\Delta t = +10\,\frac{\text{m}}{\text{s}} + \left(-10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(0{,}50\text{ s}) = +5\text{ m/s}$$

Η θετική τιμή της ταχύτητας δείχνει πως η μπάλα συνεχίζει να ανεβαίνει μετά από $0{,}50\text{ s}$.

β) Από την **εξίσωση 2.11** για $\Delta t = 1{,}50\text{ s}$ έχουμε:

$$y = y_0 + v_{0,y}\Delta t + \frac{1}{2}a_y(\Delta t)^2 = \left[+15 + (+10)(1{,}50) + \frac{1}{2}(-10)(1{,}50)^2\right]\text{m} \approx 19\text{ m}$$

Από την **εξίσωση 2.10** για $\Delta t = 1{,}50\text{ s}$ έχουμε:

$$v_y = v_{0,y} + a_y\Delta t = +10\,\frac{\text{m}}{\text{s}} + \left(-10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(1{,}50\text{ s}) = -5\text{ m/s}$$

Η αρνητική τιμή της ταχύτητας δείχνει πως η μπάλα κατεβαίνει.

γ) Έστω t_1 η ζητούμενη χρονική στιγμή. Η μπάλα θα σταματήσει να ανεβαίνει όταν $v_y = 0$. Αντικαθιστώντας $v_y = 0$ και $\Delta t = t_1$ στην **εξίσωση 2.10** έχουμε:

$$v_y = v_{0,y} + a_y t_1$$

$$0\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = +10\,\frac{\text{m}}{\text{s}} + \left(-10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)t_1$$

$$t_1 = 1{,}0\text{ s}$$

Η θέση στην οποία θα φτάσει η μπάλα (μέγιστο ύψος) είναι:

$$y_{\max} = y_0 + v_{0,y}t_1 + \frac{1}{2}a_y t_1^2 = \left[+15 + (+10)(1{,}0) + \frac{1}{2}(-10)(1{,}0)^2\right]\text{m} = 20\ \text{m}$$

Τα αποτελέσματα αυτά είναι συμβατά με εκείνα των ερωτημάτων α) και β). Πράγματι, στο α) βρήκαμε πως μετά από $0{,}50\ \text{s}$ η μπάλα συνεχίζει να ανεβαίνει, στο β) πως μετά από $1{,}50\ \text{s}$ η μπάλα ήδη κατεβαίνει, ενώ στο γ) πως τη χρονική στιγμή $1{,}0\ \text{s}$, που είναι ανάμεσα στα άλλα δύο αποτελέσματα, η μπάλα έφτασε στο υψηλότερο σημείο. Επίσης, στο γ) βρήκαμε θέση υψηλότερη από ό,τι στα α) και β), όπως έπρεπε.

δ) Έστω t_2 η ζητούμενη χρονική στιγμή. Στο έδαφος είναι $y = 0\ \text{m}$. Εφαρμόζοντας την **εξίσωση 2.11** με $y = 0\ \text{m}$ και $\Delta t = t_2$ έχουμε:

$$y = y_0 + v_{0,y}t_2 + \frac{1}{2}a_y t_2^2$$

$$0\ \text{m} = +15\ \text{m} + \left(+10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)t_2 + \frac{1}{2}\left(-10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)t_2^2$$

Από την επίλυση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης βρίσκουμε:

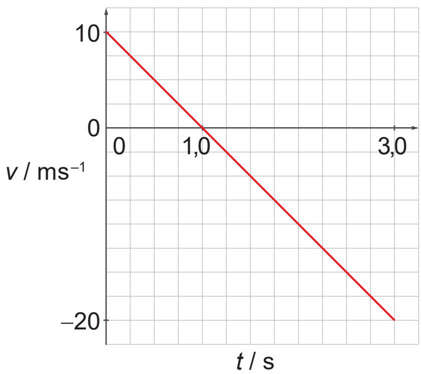
$$t_2 = 3{,}0\ \text{s} \quad \text{ή} \quad t_2 = -1{,}0\ \text{s}$$

Η αρνητική λύση απορρίπτεται (δεν έχει άμεση φυσική σημασία), άρα η μπάλα θα φτάσει στο έδαφος τη χρονική στιγμή $t_2 = 3{,}0\ \text{s}$.

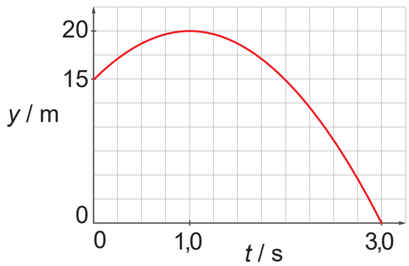
Η ταχύτητα με την οποία θα χτυπήσει στο έδαφος είναι:

$$v_y = v_{0,y} + a_y t_2 = +10\ \frac{\text{m}}{\text{s}} + \left(-10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(3{,}0\ \text{s}) = -20\ \text{m/s}$$

ε) Με βάση τα αποτελέσματα κατασκευάζουμε τα ζητούμενα διαγράμματα.



Το διάγραμμα ταχύτητας–χρόνου



Το διάγραμμα θέσης–χρόνου

Τα διαγράμματα αυτά έχουν τις ιδιότητες που έχουμε ήδη περιγράψει:

- Η κλίση στο διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου ισούται με την επιτάχυνση. Πράγματι:

$$\text{Κλίση} = \frac{-20\ \frac{\text{m}}{\text{s}} - 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{3{,}0\ \text{s}} = -10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

  που είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας (μέτρο $10\ \text{m/s}^2$).

- Το «εμβαδόν» στη γραφική παράσταση ταχύτητας-χρόνου ισούται με τη μετατόπιση. Πράγματι, σχηματίζονται δύο τρίγωνα και το «εμβαδόν» καθενός είναι:

$$\frac{(1{,}0\ \text{s})\left(10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)}{2} = 5\ \text{m}$$

$$\frac{(2{,}0\ \text{s})\left(-20\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)}{2} = -20\ \text{m}$$

- Το «εμβαδόν» του πρώτου τριγώνου είναι η μετατόπιση από το σημείο εκτόξευσης έως το υψηλότερο σημείο (που πράγματι είναι $20\ \text{m} - 15\ \text{m} = 5\ \text{m}$).
- Το «εμβαδόν» του δεύτερου τριγώνου είναι η μετατόπιση από το υψηλότερο σημείο έως το έδαφος (που είναι $0\ \text{m} - 20\ \text{m} = -20\ \text{m}$).
- Προσθέτοντας τα δύο «εμβαδά» (το δεύτερο εκφράζει μετακίνηση προς την αρνητική κατεύθυνση) βρίσκουμε $5\ \text{m} - 20\ \text{m} = -15\ \text{m}$ που είναι η συνολική μετατόπιση.