

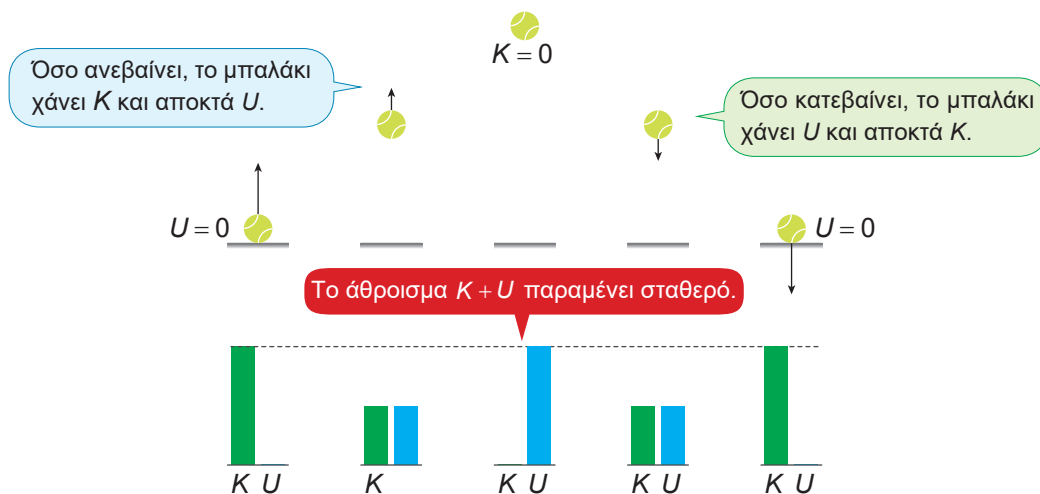
Γενίκευση

Βήμα 5ο: Γενικεύσεις – Ερμηνείες – Διαθεματικότητα

II. Λύση προβλήματος

Αναπαράσταση εννοιών με ραβδόγραμμα

1. Θα κατασκευάσουμε ραβδόγραμμα ενέργειας για ένα μπαλάκι του πινγκ πονγκ που πετάμε στον αέρα.



Το παραπάνω γράφημα είναι ένα ραβδόγραμμα ενέργειας που πολλές φορές μας βοηθά στην επίλυση προβλημάτων. Συγκεκριμένα, είναι μια γραφική αναπαράσταση της εξίσωσης διατήρησης της ενέργειας:

$$K_{\text{τελ}} + U_{\text{τελ}} = K_{\text{αρχ}} + U_{\text{αρχ}}$$

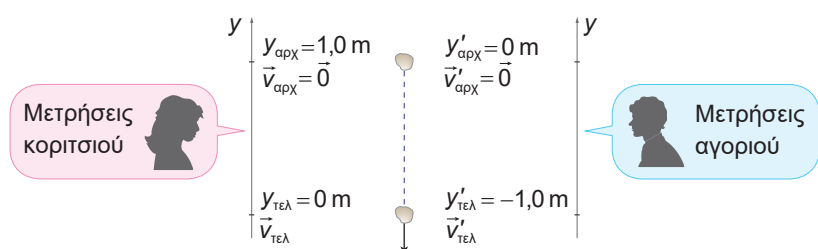
2. Θα μελετήσουμε με ραβδόγραμμα την αλλαγή του επιπέδου αναφοράς της δυναμικής ενέργειας βαρύτητας.

Πρόβλημα

Μια πέτρα μάζας 1 kg αφήνεται να πέσει στο έδαφος από ύψος 1 m. Ένα κορίτσι και ένα αγόρι μελετούν την κίνηση της πέτρας σε ένα σύστημα κατακόρυφου άξονα με αρχή το έδαφος για το κορίτσι και το σημείο εκκίνησης της πέτρας για το αγόρι. Θα χρησιμοποιήσουμε τις οπτικές γωνίες του κοριτσιού και του αγοριού, για να υπολογίσουμε την ταχύτητα της πέτρας πριν χτυπήσει στο έδαφος.

Οπτικοποίηση

Το γράφημα δείχνει την οπτική αναπαράσταση των συστημάτων αναφοράς του κοριτσιού και του αγοριού για την κίνηση της πέτρας.



Το αγόρι και το κορίτσι συμφωνούν ότι η αρχική κινητική ενέργεια της πέτρας ισούται με 0, επειδή η πέτρα αφέθηκε να πέσει.

Η εξίσωση διατήρησης της ενέργειας είναι:

$$K_{\text{τελ}} + U_{\text{τελ}} = K_{\text{αρχ}} + U_{\text{αρχ}} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}mv^2 = U_{\text{αρχ}} - U_{\text{τελ}} \quad \text{ή} \quad v = \sqrt{\frac{-2\Delta U}{m}}$$

Θα υπολογίσουμε τη ΔU στο σύστημα αναφοράς του κοριτσιού και του αγοριού.

Σύμφωνα με το κορίτσι:

$$U_{\text{αρχ}} = mgy_{\text{αρχ}} = 10 \text{ J} \text{ και } U_{\text{τελ}} = mgy_{\text{τελ}} = 0 \text{ J}$$

Επομένως:

$$\Delta U = U_{\text{τελ}} - U_{\text{αρχ}} = -10 \text{ J}$$

Σύμφωνα με το αγόρι:

$$U'_{\text{αρχ}} = mgy'_{\text{αρχ}} = 0 \text{ J} \text{ και } U'_{\text{τελ}} = mgy'_{\text{τελ}} = -10 \text{ J}$$

Επομένως:

$$\Delta U' = U'_{\text{τελ}} - U'_{\text{αρχ}} = -10 \text{ J}$$

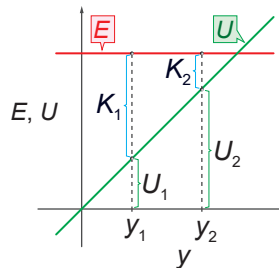
Άρα και οι δύο συμφωνούν ότι η πέτρα φτάνει στο έδαφος με ταχύτητα:

$$v = \sqrt{\frac{-2(-10 \text{ J})}{1 \text{ kg}}} = 2\sqrt{5} \text{ m/s}$$

Διαθεματικότητα

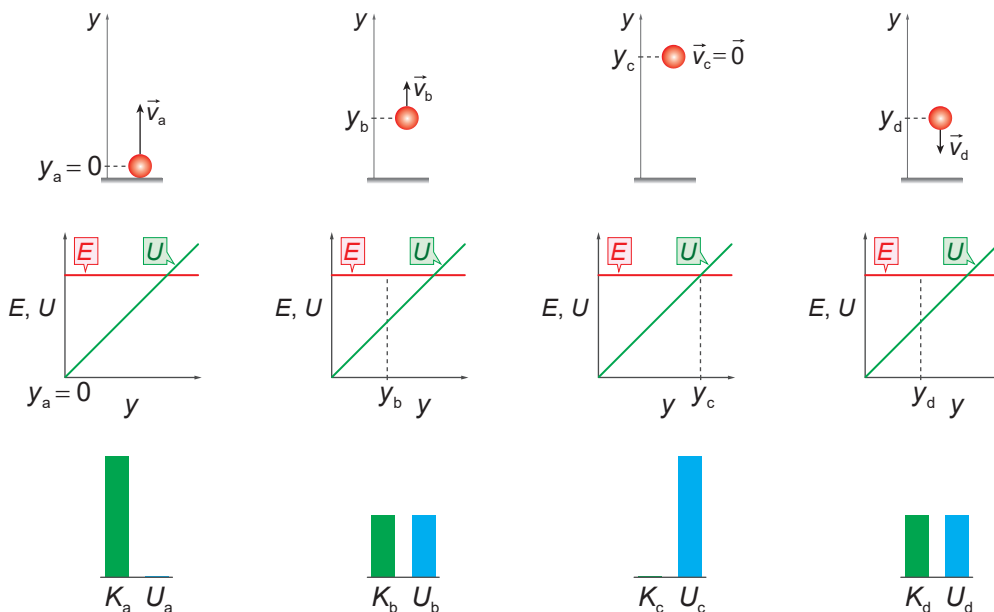
1. Το διπλανό γράφημα είναι το διάγραμμα ενέργειας ενός σώματος που εκτελεί ελεύθερη πτώση.

Η βαρυτική δυναμική ενέργεια $U = mgy$ παριστάνεται με ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και η κλίση της είναι mg . Η καμπύλη της μηχανικής ενέργειας E είναι οριζόντια ευθεία που δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων, επειδή η μηχανική ενέργεια του σώματος διατηρείται. Δηλαδή, η μηχανική ενέργεια E του σώματος για κάθε θέση έχει την ίδια τιμή.



Καθώς το σώμα κινείται από τη θέση y_1 στη θέση y_2 τα K , U μεταβάλλονται, αλλά το άθροισμά τους παραμένει σταθερό $E = K + U$.

2. Δίνεται το διάγραμμα τεσσάρων θέσεων ενός σώματος που βάλλεται κατακόρυφα από το έδαφος και στη συνέχεια εκτελεί ελεύθερη πτώση.



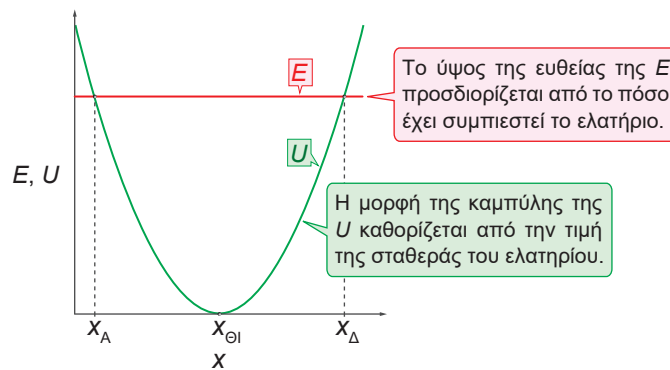
Οπτικοποιήσεις

Η πρώτη απεικόνιση δείχνει το σώμα με το διάνυσμα της ταχύτητάς του να έχει κατακόρυφη διεύθυνση με φορά προς τα πάνω. Το σώμα εκκινεί από τη θέση $y = 0$ έχοντας κινητική ενέργεια K . Αρχικά, το σώμα έχει μόνο κινητική ενέργεια ($U = 0$). Καθώς το σώμα ανεβαίνει, το μέτρο της ταχύτητάς του μειώνεται, η κινητική του ενέργεια μειώνεται και η δυναμική του ενέργεια αυξάνεται.

Στην τρίτη απεικόνιση το σώμα έχει φτάσει στο σημείο της μέγιστης απομάκρυνσής του από το έδαφος. Στο σημείο αυτό, το σώμα ακινητοποιείται στιγμιαία και η κινητική του ενέργεια είναι μηδενική. Η δυναμική του ενέργεια λαμβάνει τότε τη μέγιστη τιμή της (ίση με την αρχική κινητική ενέργεια του σώματος). Τέλος, στην τέταρτη απεικόνιση βλέπουμε το σώμα να επιστρέφει στο έδαφος. Στη φάση αυτή η κινητική του ενέργεια αυξάνεται και η δυναμική του ενέργεια μειώνεται.

Η παραπάνω περιγραφή αναπαρίσταται με διαγράμματα ενέργειας και ραβδογράμματα.

3. Δίνεται το ενεργειακό διάγραμμα μιας μάζας που είναι προσδεμένη σε οριζόντιο ελατήριο.



Η καμπύλη της δυναμικής ενέργειας περιγράφεται από την εξίσωση:

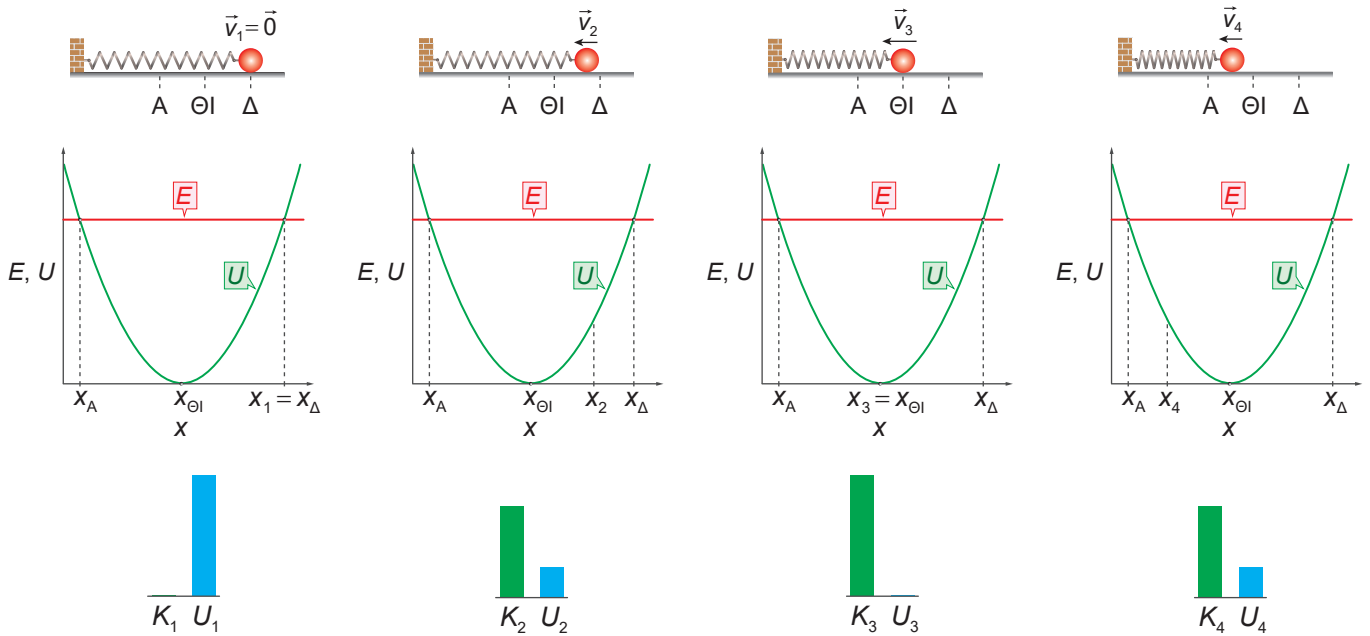
$$U = \frac{1}{2}k(x - x_{\Theta I})^2$$

και είναι παραβολή με κορυφή της βρίσκεται στο σημείο με συντεταγμένη $x_{\Theta I}$ (θέση ισορροπίας). Η μορφή της καθορίζεται από την τιμή της σταθεράς k του ελατηρίου. Δεν μπορείτε να μεταβάλλετε τη μορφή της παραβολής (ουσιαστικά τη σταθερά του ελατηρίου), άλλα μπορείτε να καθορίσετε την ολική ενέργεια E , εκτρέποντας ανάλογα το ελατήριο από τη θέση ισορροπίας του. Στο σχήμα έχει σημειωθεί μια πιθανή ευθεία ολικής ενέργειας E .

Ας υποθέσουμε ότι εκτρέπτε τη μάζα από τη θέση ισορροπίας της προς τα δεξιά μέχρι το σημείο Δ και στη συνέχεια την αφήνετε ελεύθερη. Το παρακάτω διάγραμμα τεσσάρων θέσεων μας δίνει μια εικόνα της κίνησής της. Αρχικά, η ενέργεια είναι εξ ολοκλήρου δυναμική (U) και η δύναμη επαναφοράς του ελατηρίου αναγκάζει τη μάζα να κινηθεί προς τη θέση ισορροπίας. Κατά την κίνηση αυτήν μειώνεται η δυναμική ενέργεια και αυξάνεται η κινητική. Στη θέση ισορροπίας η μάζα αποκτά ταχύτητα μέγιστου μέτρου και στη συνέχεια το μέτρο της ταχύτητας μειώνεται, καθώς το ελατήριο αρχίζει να συμπιέζεται.

Η κίνηση συνεχίζεται και η μάζα φτάνει μέχρι το σημείο A όπου ακινητοποιείται στιγμιαία. Στο σημείο αυτό η ταχύτητα και η κινητική ενέργεια θα είναι μηδενικές. Στη συνέχεια, η μάζα αρχίζει να κινείται προς τη θέση ισορροπίας, αυξάνοντας το μέτρο της ταχύτητάς της, το οποίο γίνεται μέγιστο στη θέση ισορροπίας. Μετά, το μέτρο της ταχύτητας μειώνεται μέχρι το σημείο Δ όπου μηδενίζεται. Η κίνηση επαναλαμβάνεται, με τη μάζα να εκτελεί περιοδική κίνηση μεταξύ των σημείων με συντεταγμένες x_A και x_{Δ} .

Ενεργειακό διάγραμμα



Η κινητική ενέργεια του σώματος στα σημεία A, Δ είναι μηδέν, οπότε η οριζόντια ευθεία της ολικής ενέργειας E θα πρέπει να τέμνει την καμπύλη της δυναμικής ενέργειας U στα x_A , x_Δ (διαμόρφωση 1). Η U στη θέση ισορροπίας είναι μηδέν (ελάχιστο), οπότε η κορυφή της παραβολής είναι στο x_{Θ} (διαμόρφωση 3). Στη διαμόρφωση 2 το σώμα βρίσκεται στο σημείο με συντεταγμένη x_2 και, καθώς κινείται προς τη θέση ισορροπίας, η U μειώνεται και η K αυξάνεται. Στη διαμόρφωση 4 το σώμα βρίσκεται στο σημείο με συντεταγμένη x_4 και, καθώς απομακρύνεται από τη θέση ισορροπίας, η U αυξάνεται και η K μειώνεται.

Τα παραπάνω απεικονίζονται και με ραβδογράμματα.

Συγγραφείς: **Αθανάσιος Βελέντζας**, Φυσικός, Δρ. ΕΚΠΑ, ΕΔΙΠ – ΕΜΠ
Ευστράτιος Καπότης, Φυσικός, Δρ. ΕΚΠΑ
Αλέξανδρος Π. Κατέρης, Σύμβουλος Εκπαίδευσης, Δρ ΕΚΠΑ
Βασίλειος Νούσης, Φυσικός, Υπ. ΕΚΦΕ Θεσπρωτίας
Αργύριος Πάσχος, Διευθυντής Λυκείου, Δρ. ΕΚΠΑ
Γεώργιος Πολυζώης, Διευθυντής Λυκείου, Δρ. Πανεπιστημίου Ιωαννίνων
Πάυλος Γ. Τζαμαλής, ΕΔΙΠ, Εργαστήριο Φυσικής, Τμήμα Βιοτεχνολογίας, ΓΠΑ

Ημερομηνία
Δημιουργίας: 18/05/2025

Έκδοση: v1.0