

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

### 1.1

#### ΜΗ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΕΣ

Πιστεύεται από αρκετούς ερευνητές ότι πριν τη διατύπωση του πέμπτου αιτήματος των «Στοιχείων» του Ευκλείδη υπήρξαν προσπάθειες να αποδειχθεί, αλλά οι πληροφορίες που έχουμε είναι ελάχιστες και δεν το τεκμηριώνουν. Το πέμπτο αίτημα θεωρήθηκε ότι δεν είναι διαισθητικά προφανές και διατυπώθηκε η εικασία πως δεν είναι αξίωμα αλλά θεώρημα. Για σχεδόν 2000 χρόνια οι μαθηματικοί προσπαθούσαν να αποδείξουν ότι το 5ο αίτημα προκύπτει από τα προηγούμενα. Κάθε φορά όμως έβρισκαν απλώς υποκατάστατα. Αυτοί που ασχολούνταν με τη γεωμετρία ήταν προβληματισμένοι από την ανόμοια πολυπλοκότητα του πέμπτου αξιώματος, και πίστευαν ότι μπορούσε να αποδειχθεί ως ένα θεώρημα που προέρχεται από τα άλλα τέσσερα αξιώματα. Πολλοί προσπάθησαν να βρουν απόδειξη, χρησιμοποιώντας την εις άτοπον απαγωγή, αρχικά ο Πρόκλος (410-485) και στη συνέχεια οι Ιμπν αλ-Χαϊτάμ (11ος αιώνας), Ομάρ Καγιάμ (12ος αιώνας), Νασίρ αλ-Ντιν αλ-Τουσίν (13ος αιώνας), και Τζοβάνι Τζιρόλαμο Σακέρι (Giovanni Girolamo Saccheri (18ος αιώνας). Από τις προσπάθειες αυτές γεννήθηκαν η Ελλειπτική και η Υπερβολική Γεωμετρία οι οποίες ονομάζονται και μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες.

#### Ελλειπτική Γεωμετρία



Friedrich Bernhard Riemann

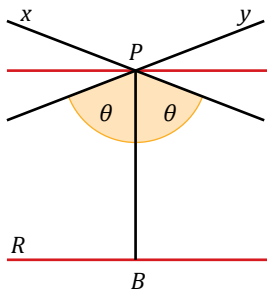
Αν δεχτούμε λοιπόν ότι: από σημείο εκτός ευθείας δεν περνά καμία παράλληλη προς αυτή παίρνουμε την ελλειπτική γεωμετρία. Η Ελλειπτική Γεωμετρία αν εφαρμοστεί στην επιφάνεια μίας σφαίρας μας δίνει την σφαιρική γεωμετρία, η οποία χρησιμοποιείται στην αστρονομία. Στην γεωμετρία αυτή δεν υπάρχουν παράλληλες και επίσης ισχύει ότι όλες οι ευθείες έχουν το ίδιο μήκος.

#### Υπερβολική Γεωμετρία (Γεωμετρία των Bolyai - Lobatschevski)



Nikolai Lobachevsky

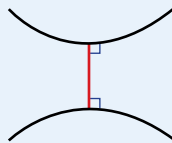
Αν δεχτούμε ότι από ένα σημείο εκτός μιας ευθείας μπορούν να περάσουν τουλάχιστον δύο παράλληλες προς αυτήν γραμμές, τότε εισερχόμαστε στο πεδίο της Υπερβολικής Γεωμετρίας, γνωστής και ως Γεωμετρίας του Λομπατσέφσκι. Αυτή η γεωμετρία αποτέλεσε το θεμέλιο για την κατανόηση του χώρου και του χρόνου, όπως το ανέλυσαν οι Einstein και Minkowski, παρέχοντας το γεωμετρικό υπόβαθρο για τη σχετικιστική φυσική. Κατά τις πρώτες δεκαετίες του 20ού αιώνα, η υπερβολική γεωμετρία θεωρείτο απαραίτητη γνώση για τους μαθηματικούς και τους φυσικούς.



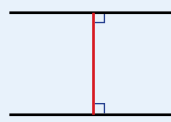
Στην υπερβολική γεωμετρία υπάρχουν τουλάχιστον δύο ξεχωριστές γραμμές που διέρχονται από το  $P$  και οι οποίες δεν τέμνουν την  $R$ , οπότε το αξίωμα των παραλλήλων ευθειών είναι για την υπερβολική γεωμετρία εσφαλμένο. Έχουν κατασκευαστεί μοντέλα εντός της ευκλείδειας που υπακούν στα αξιώματα της υπερβολικής γεωμετρίας, το οποίο δείχνει ότι το αξίωμα των παραλλήλων είναι ανεξάρτητο από τα άλλα αξιώματα του Ευκλείδη.

### Σημείωση

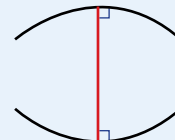
Ένας άλλος τρόπος να περιγράψουμε τη διαφορά μεταξύ της Ευκλείδειας και της Υπερβολικής Γεωμετρίας είναι να εξετάσουμε δύο ευθείες που επεκτείνονται απεριόριστα σε ένα δισδιάστατο επίπεδο και είναι αμφοτέρως κάθετες σε μία τρίτη ευθεία:



Υπερβολική



Ευκλείδεια



Ελλειπτική

[Υπερβολική γεωμετρία](#) (wikipedia)

[Σημειώσεις Υπερβολικής Γεωμετρίας](#) (wikipedia)

[Ελλειπτική γεωμετρία](#) (wikipedia)

[Ευκλείδεια γεωμετρία](#) (wikipedia)

### «Προβολική γεωμετρία: Η κρυφή γεωμετρία των ζωγράφων»



Στον [πίνακα](#) (wikipedia) του Ιακωβίδη, βλέπουμε ότι ευθείες που στην πραγματικότητα είναι παράλληλες, στη ζωγραφική μπορεί να συγκλίνουν (π.χ. οι γραμμές του πατώματος). Το σημείο στο οποίο τέμνονται ονομάζεται «σημείο φυγής». Μπορείτε να βρείτε ένα σημείο φυγής σε αυτόν τον πίνακα; Μπορείτε να κάνετε την αντιστοίχιση με τις ακτίνες του ηλίου που όταν φτάνουν στη γη θεωρούνται μεταξύ τους παράλληλες;

Τίτλος: «**Μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες**»

Έκδοση: **1.5**

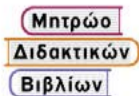
Ημερομηνία: **10/09/2024**

Συντονιστής ομάδας σχεδιασμού και ανάπτυξης: **Κέλλυ Σαρρή Πασχαλίδη**

Δημιουργία: **ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΓΡΑΦΗ**



*Το παρόν αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της Πράξης «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ (ΜΙΣ) 6010165, του Προγράμματος «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή 2021-2027» που υλοποιείται από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής και συγχρηματοδοτείται από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο.*



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
Υπουργείο Παιδείας, Θρησκευμάτων  
και Αθλητισμού

ΙΕΠ  
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ  
ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ  
ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ



Με τη συγχρηματοδότηση  
της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Πρόγραμμα  
Ανθρώπινο Δυναμικό και  
Κοινωνική Συνοχή