Εισαγωγή Ενότητας

2.4.6 Σχετικές θέσεις δύο ευθειών

Θα μάθουμε:

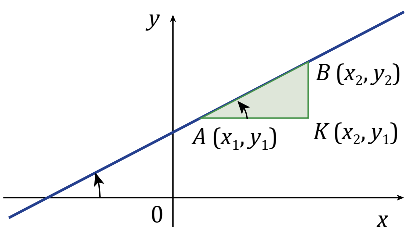
- να αντλούμε από τη γραφική παράσταση μίας συνάρτησης της μορφής $f(x) = αx + β$ πληροφορίες για τη συνάρτηση, όπως η κλίση της και η εξίσωσή της.

Στην προηγούμενη ενότητα δείξαμε ότι κάθε ευθεία που *δεν* είναι κάθετη στον άξονα $x'x$ έχει εξίσωση της μορφής $f(x) = αx + β$ καθώς και ότι κάθε κατακόρυφη (*κάθετη στον άξονα* $x'x$) έχει εξίσωση της μορφής $x = x_0$, η οποία, ωστόσο, δεν ορίζει συνάρτηση. Στη συνέχεια μελετήσαμε και αποσαφηνίσαμε τους ρόλους των αριθμών $α$ και $β$ που εμφανίζονται στον τύπο της συνάρτησης $f(x) = αx + β$. Τέλος παρουσιάσαμε κάποιες ειδικές περιπτώσεις συναρτήσεων, οι οποίες παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον όπως, για παράδειγμα, η $y = x$ και η $y = -x$.

Σε αυτή την ενότητα θα εργαστούμε κατά κάποια έννοια ''αντίστροφα''. Θα «μελετήσουμε» τη συνάρτηση με έναν τρόπο «*διαισθητικό*». Θα ασχοληθούμε με *συμπεράσματα που προκύπτουν από την μορφή της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης, ή και περισσοτέρων συναρτήσεων και τη θέση τους σε σχέση με τους άξονες ή και μεταξύ τους, όταν είναι χαραγμένες στο ίδιο σύστημα αξόνων*. Ωστόσο, θα ασχοληθούμε ειδικότερα με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = αx + β$. Η εύρεση των σημείων τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες, η εύρεση της κλίσης, η εύρεση της εξίσωσης της συνάρτησης είναι κάποια από τα προβλήματα που θα μας απασχολήσουν.

Με τον όρο «μελέτη» μίας συνάρτησης στα μαθηματικά συνήθως εννοούμε το σύνολο των εργασιών που κάνουμε για να κατασκευάσουμε τη γραφική της παράσταση. Ωστόσο, το νόημα που αποδίδεται στον όρο σε αυτή την ενότητα είναι διαφορετικό. Μελετάμε το πού και πώς είναι τοποθετημένη μία ευθεία στο καρτεσιανό επίπεδο (και γενικά, η γραφική παράστασης μίας οποιασδήποτε συνάρτησης) με στόχο την εξαγωγή συμπερασμάτων που αφορούν στην ευθεία (και γενικά, τη συνάρτηση).

Ας υποθέσουμε ότι δίνεται η γραφική παράσταση της ευθείας $y = αx + β$ που φαίνεται στο διπλανό σχήμα και ας θεωρήσουμε ότι είναι γνωστά δύο τυχαία σημεία της $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$.



Τότε θα ισχύει

$$y_1 = αx_1 + β \qquad \text{και} \qquad y_2 = αx_2 + β,$$

οπότε με αφαίρεση κατά μέλη, θα έχουμε

$$y_2 - y_1 = (αx_2 + β) - (αx_1 + β) = αx_2 + β - αx_1 - β = αx_2 - αx_1 = α(x_2 - x_1)$$

αφού η ευθεία δεν είναι κάθετη στον $x'x$ ισχύει ότι $x_1 \neq x_2$. Επομένως, θα είναι

$$α = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Αποδείξαμε το εξής:

> Αν τα $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ είναι σημεία μίας ευθείας (που δεν είναι κάθετη στον άξονα $x'x$), τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας είναι ίσος με $α = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Για παράδειγμα, η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(-1,2)$ και $B(3,6)$ έχει κλίση $α = \dfrac{6-2}{3-(-1)} = 1$. Επομένως, η ευθεία αυτή σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $ω$ με εφ$ω = 1$, οπότε θα είναι $ω = 45^{o}$.

Παρατήρηση

Από την παραπάνω διαδικασία προκύπτει ότι αν γνωρίζουμε δύο σημεία μίας ευθείας, τότε μπορούμε να βρούμε την εξίσωσή της, δηλαδή, ότι δύο σημεία (διαφορετικά μεταξύ τους) ορίζουν μία *ακριβώς* ευθεία, όπως ισχυρίζεται και η Ευκλείδεια Γεωμετρία.

Για $\alpha = 1$, η εξίσωση της ευθείας $y = \alpha x + \beta$ γράφεται $y = 1x + \beta$ ή $y = x + \beta$.

Από την τελευταία και από το ότι το σημείο $A(-1,2)$ (*θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε και το* $B(3,6)$) είναι σημείο της ευθείας, παίρνουμε $2 = -1 + \beta \Leftrightarrow \beta = 3$. Άρα, η εξίσωση της ευθείας είναι η $y = x + 3$.

Παράδειγμα

Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία

(i) $A(-1,1)$ και $B(1,-1)$ (ii) $A(-1,2)$ και $B(3,-2)$

(iii) $A(-2,2)$ και $B(2,2)$ (iv) $A(-1,3)$ και $B(-1,-4)$

Λύση

(i) Παρατηρούμε ότι τα σημεία $A(-1,1)$ και $B(1,-1)$ δεν έχουν την ίδια τετμημένη. Επομένως, η ευθεία ε δεν είναι κάθετη στον άξονα $x'x$, οπότε η εξίσωσή της έχει τη μορφή $y = \alpha x + \beta$ και επειδή τα σημεία A και B είναι σημεία της οι συντεταγμένες τους θα την επαληθεύουν. Δηλαδή, θα έχουμε τις ισότητες

$$1 = \alpha\cdot(-1) + \beta \quad \text{και} \quad -1 = \alpha\cdot 1 + \beta.$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των ισοτήτων παίρνουμε $2\beta = 0$, οπότε $\beta = 0$. Αντικαθιστώντας σε μία από τις δύο ισότητες το β με το 0 βρίσκουμε $\alpha = -1$. Άρα, η εξίσωση της ευθείας ε είναι $y = -x$.

Θα μπορούσαμε να δώσουμε μία πολύ πιο σύντομη απάντηση στο ερώτημα αυτό αν παρατηρούσαμε ότι τα σημεία A και B ανήκουν στις διχοτόμους των γωνιών yOx' και $y'Ox$, αντιστοίχως. Η ευθεία, ωστόσο, που διχοτομεί τις γωνίες του πρώτου και τρίτου τεταρτημορίου είναι η $y = -x$.

(ii) Παρατηρούμε ότι τα σημεία $A(-1,2)$ και $B(3,-2)$ δεν έχουν την ίδια τετμημένη. Επομένως, η ευθεία ε δεν είναι κάθετη στον άξονα $x'x$, και επομένως, ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσής της ότι είναι ίσος με $\alpha = \dfrac{-2-2}{3-(-1)} = \dfrac{-4}{4} = -1$.

Επομένως, η ευθεία ε θα έχει εξίσωση της μορφής $y = -x + \beta$ και επειδή το σημείο $A(-1,2)$ είναι σημείο της, οι συντεταγμένες του θα την επαληθεύουν. Άρα, θα έχουμε την ισότητα $2 = -(-1) + \beta$, οπότε, $\beta = 1$. Άρα η εξίσωση της ευθείας ε είναι $y = -x + 1$.

(iii) Παρατηρούμε ότι τα σημεία A και B έχουν την ίδια τεταγμένη 2. Επομένως, η ευθεία ε είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ και έχει εξίσωση $y = 2$.

(iv) Παρατηρούμε ότι τα σημεία A και B έχουν την ίδια τετμημένη -1. Επομένως, η ευθεία ε είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$ και έχει εξίσωση $x = -1$.

Για την εύρεση της εξίσωσης της ευθείας ε θα μπορούσαμε να ακολουθήσουμε και τη διαδικασία του (i) ερωτήματος.

Σχετικές θέσεις δύο ευθειών

Ας θεωρήσουμε δύο ευθείες ε_1 και ε_2 με εξισώσεις $y = \alpha_1 x + \beta_1$ και $y = \alpha_2 x + \beta_2$, αντιστοίχως και ας υποθέσουμε ότι οι ευθείες αυτές σχηματίζουν με τον άξονα $x'x$ γωνίες ω_1 και ω_2, αντιστοίχως. Αν $\varepsilon\varphi\omega_1 \neq \varepsilon\varphi\omega_2$, οπότε $\omega_1 \neq \omega_2$, και επομένως οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται (βλ. Σχήμα (α)). Ιδιαίτερο, ωστόσο, ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι παράλληλες ευθείες καθώς και οι κάθετες ευθείες.

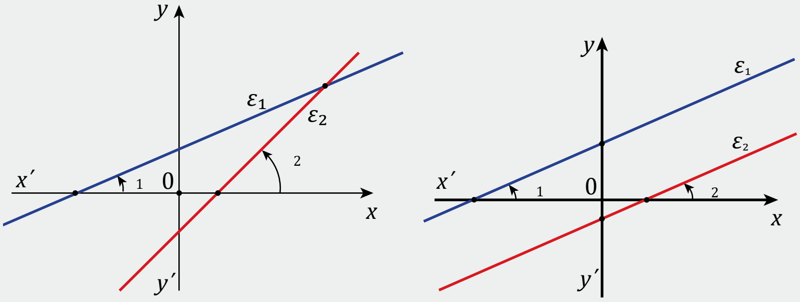
Ευθείες παράλληλες

Αν $\alpha_1 = \alpha_2$, $\varepsilon\varphi\omega_1 = \varepsilon\varphi\omega_2$, οπότε $\omega_1 = \omega_2$ και επομένως οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες ή συμπίπτουν (βλ. Σχήμα (β)). Ειδικότερα, ισχύει η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 2.4.6.1

Έστω οι ευθείες με συντελεστές διεύθυνσης α_1 και α_2.

- Αν $\alpha_1 = \alpha_2$, και $\beta_1 \neq \beta_2$, τότε οι ευθείες είναι παράλληλες και αντίστροφα, ενώ,
- Αν $\alpha_1 = \alpha_2$ και $\beta_1 = \beta_2$, τότε οι ευθείες ταυτίζονται και αντίστροφα.



Τίτλος: «**Εισαγωγή Ενότητας**»

Έκδοση: **2**

Ημερομηνία: **10/09/2024**

Συντονιστής ομάδας σχεδιασμού και ανάπτυξης: **Κέλλυ Σαρρή Πασχαλίδη**

Δημιουργία: **ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΓΡΑΦΗ**

Το παρόν αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της Πράξης «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ (MIS) 6010165, του Προγράμματος «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή 2021-2027» που υλοποιείται από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής και συγχρηματοδοτείται από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο.