Παραδείγματα Ενότητας 1.1.5

Παράδειγμα 1

Αν $|\alpha-\beta|=|\alpha|+|\beta|$ και $|\alpha\beta|\neq 0$, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι ετερόσημοι.

Λύση

Έχουμε

$|\alpha-\beta|=|\alpha|+|\beta| \Leftrightarrow |\alpha-\beta|^2=(|\alpha|+|\beta|)^2$ (Υψώνουμε στο τετράγωνο)

$\Leftrightarrow \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=|\alpha|^2+2|\alpha||\beta|+|\beta|^2$ (Εκτελούμε τις πράξεις)

$\Leftrightarrow \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=\alpha^2+2|\alpha\beta|+\beta^2$ (Εφαρμόζουμε ιδιότητες)

$\Leftrightarrow |\alpha\beta|=-\alpha\beta$ (Εκτελούμε τις πράξεις)

$\Leftrightarrow \alpha\beta\leq 0$ (Συνέπεια του ορισμού της απόλυτης τιμής)

Όμως, λόγω της αρχικής υπόθεσης, έχουμε $\alpha\beta\neq 0$, οπότε $\alpha\beta<0$ και έτσι οι μη μηδενικοί αριθμοί α και β είναι ετερόσημοι.

Παράδειγμα 2

Αν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha+\beta\neq 0$, να αποδείξετε ότι

$$\left|\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right|+\left|\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right|\geq 1$$

Λύση

Έχουμε

$$\left|\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right|+\left|\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right|\geq\left|\frac{\alpha}{\alpha+\beta}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right|$$ (Εφαρμογή της ιδιότητας $|\alpha+\beta|\leq|\alpha|+|\beta|$)

$$\geq\left|\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta}\right|=|1|=1$$ (Εκτέλεση των πράξεων)

Παράδειγμα 3

Αν $|x-y|<\varepsilon$ και $|y-z|<\varepsilon$, όπου $\varepsilon>0$, να δείξετε ότι $|x-z|<2\varepsilon$.

Λύση

Έχουμε

$|x-z|=|x-y+y-z|$ (Αφαιρούμε και προσθέτουμε το y)

$|x-z|\leq|x-y|+|y-z|$ ($|\alpha+\beta|\leq|\alpha|+|\beta|$)

$\Leftrightarrow |x-z|<\varepsilon+\varepsilon$ ($|x-y|<\varepsilon$ και $|y-z|<\varepsilon$)

$\Leftrightarrow |x-z|<2\varepsilon$

Παράδειγμα 4

Για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι $|x|-|y|\leq|x+y|$.

Λύση

Αν $|x|<|y|$, η ανισότητα είναι προφανής.
(Κάθε αρνητικός αριθμός είναι μικρότερος από κάθε θετικό αριθμό.)

Αν $|x|>|y|$, τότε $|x|-|y|>0$, οπότε μπορούμε να υψώσουμε τη δοθείσα ανισότητα στο τετράγωνο και επομένως παίρνουμε διαδοχικά.

$|x|-|y|\le|x+y|\Leftrightarrow(|x|-|y|)^2\le|x+y|^2$ (Υψώνουμε στο τετράγωνο)

$\Leftrightarrow|x|^2-2|x||y|+|y|^2\le x^2+2xy+y^2$ (Εκτελούμε τις πράξεις)

$\Leftrightarrow x^2-2|xy|+y^2\le x^2+2xy+y^2$ (Εκτελούμε τις πράξεις)

$\Leftrightarrow -2|xy|\le+2xy$ (Διαιρούμε κατά μέλη με το -2)

$\Leftrightarrow|xy|\ge-xy$, αληθής (Εφαρμόζουμε ιδιότητα)

Παράδειγμα 5

Αν $xy\neq0$ να αποδείξετε ότι

$$\left|\frac{x}{y}\right|+\left|\frac{y}{x}\right|\ge2$$

Λύση

Έχουμε

$$\left|\frac{x}{y}\right|+\left|\frac{y}{x}\right|\ge2\Leftrightarrow\frac{|x|}{|y|}+\frac{|y|}{|x|}\ge2$$

$$\Leftrightarrow|x|^2+|y|^2\ge2|x||y|$$

$$\Leftrightarrow|x|^2+|y|^2-2|x||y|\ge0$$

$$\Leftrightarrow(|x|-|y|)^2\ge0$$

αληθής, άρα και η αρχική είναι αληθής. (Προσπαθήστε να δικαιολογήσετε όλα τα παραπάνω βήματα.)

Τίτλος: «**Παραδείγματα Ενότητας 1.1.5**»

Έκδοση: **1.5**

Ημερομηνία: **10/09/2025**

Συντονιστής ομάδας σχεδιασμού και ανάπτυξης: **Κέλλυ Σαρρή Πασχαλίδη**

Δημιουργία: **ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΓΡΑΦΗ**

Το παρόν αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της Πράξης «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ (MIS) 6010165, του Προγράμματος «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή 2021-2027» που υλοποιείται από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής και συγχρηματοδοτείται από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο.