

Κλαδικές συναρτήσεις

Πολλές φορές μία συνάρτηση περιγράφεται ανά τμήματα του πεδίου ορισμού της, τα οποία ονομάζονται μέρη ή κλάδοι, όπως η συνάρτηση του παραδείγματος (στ). Αυτές οι συναρτήσεις λέγονται **κλαδικές συναρτήσεις** και μπορεί να έχουν δύο κλάδους όπως έχει ο τύπος της f στο παράδειγμα αυτό ή και περισσότερους από δύο κλάδους. Για να υπολογίσουμε τιμές μίας τέτοιας συνάρτησης, επιλέγουμε ποιον κλάδο θα χρησιμοποιήσουμε, με βάση τον τύπο της.

Για παράδειγμα, για να υπολογίσουμε τις τιμές της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} x^2-1, & \text{αν } x < 0 \\ x+1, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$ στα σημεία $-1, 0$ και 1 εργαζόμαστε ως εξής:

- Για την τιμή της f στο $x=-1 < 0$, παίρνουμε τον κλάδο $f(x)=x^2-1$, οπότε, έχουμε

$$f(-1) = (-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0.$$

- Για την τιμή της f στο $x=0$, παίρνουμε τον κλάδο $f(x)=x+1$, οπότε, έχουμε

$$f(0) = 0 + 1 = 1.$$

- Για την τιμή της f στο $x=1$, παίρνουμε τον κλάδο $f(x)=x+1$, οπότε, έχουμε



Παράδειγμα 2.4.3.5

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3 + \alpha, & \text{αν } x \geq 0 \\ -x^2 + 2 - \alpha, & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$.

(i) Να βρείτε την τιμή του α .

(ii) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-2)$, $f(0)$ και $f(2)$.

(iii) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει (α) $f(x)=65$ (β) $f(x)=-15$.

Λύση

(i) Παρατηρούμε ότι η τιμή της συνάρτησης στο 0 δίνεται και από τους δύο κλάδους της συνάρτησης. Όμως, για x στο πεδίο ορισμού μίας συνάρτησης υπάρχει ακριβώς ένα y στο οποίο αντιστοιχίζεται (βλ. Ορισμός Συνάρτησης). Επομένως, για $x=0$ και οι δύο κλάδοι του τύπου πρέπει να δίνουν την ίδια τιμή. Άρα, ισχύει

$$0^3 + \alpha = -0^2 + 2 - \alpha \Leftrightarrow \alpha = 2 - \alpha \Leftrightarrow \alpha + \alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha = 1.$$

Για $\alpha=1$ ο τύπος της f γράφεται

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & \text{αν } x \geq 0 \\ -x^2 + 1, & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$$

(ii) Για $x=-2 < 0$ έχουμε

$$f(-2) = -(-2)^2 + 1 = -4 + 1 = -3$$

Για $x=0$ έχουμε

$$f(0) = 0 \quad (\text{Προκύπτει και από τους δύο κλάδους})$$

Για $x=2 > 0$ έχουμε

$$f(2) = 2^3 + 1 = 8 + 1 = 9$$

(iii) (α) Παρατηρούμε ότι ο δεύτερος κλάδος του τύπου δεν είναι δυνατό να δώσει τιμή ίση με το 65 . (Επιβεβαιώστε το.) Επομένως, θα χρησιμοποιήσουμε τον πρώτο κλάδο. Έχουμε

$$f(x) = 65 \Leftrightarrow x^3 + 1 = 65 \Leftrightarrow x^3 = 64 \Leftrightarrow x^3 = 4^3 \Leftrightarrow x = 4.$$

(β) Παρατηρούμε ότι ο πρώτος κλάδος του τύπου δεν είναι δυνατό να δώσει τιμή ίση με το -15 .

(Επιβεβαιώστε το.) Επομένως, θα χρησιμοποιήσουμε τον δεύτερο κλάδο. Έχουμε

$$f(x) = -15 \Leftrightarrow -x^2 + 1 = -15 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 4$$

και επειδή $x \leq 0$, η λύση $x=4$ απορρίπτεται, οπότε έχουμε τελικά $x=-4$.

Τίτλος: «**Κλαδικές συναρτήσεις**»

Έκδοση: **1.5**

Ημερομηνία: **10/09/2025**

Συντονιστής ομάδας σχεδιασμού και ανάπτυξης: **Κέλλυ Σαρρή Πασχαλίδη**

Δημιουργία: **ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΓΡΑΦΗ**



Το παρόν αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της Πράξης «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ (ΜΙΣ) 6010165, του Προγράμματος «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή 2021-2027» που υλοποιείται από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής και συγχρηματοδοτείται από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο.



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας, Θρησκευμάτων
και Αθλητισμού

ΙΕΠ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ
ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ



Με τη συγχρηματοδότηση
της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Πρόγραμμα
Ανθρώπινο Δυναμικό και
Κοινωνική Συνοχή