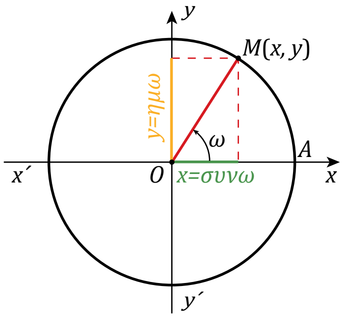
Ο τριγωνομετρικός κύκλος

Στο εξής θα υποθέσουμε ότι κάθε γωνία θ γράφεται από την περιστροφή του ημιάξονα Ox ενός συστήματος συντεταγμένων Oxy γύρω από την αρχή του Ο κατά τη θετική φορά ή την αρνητική φορά. Σύμφωνα με τα παραπάνω η θέση της τελικής πλευράς της γωνίας είναι εκείνη που καθορίζει τις τιμές των τριγωνομετρικών αριθμών της γωνίας θ. Για τον υπολογισμό των τριγωνομετρικών αριθμών των γωνιών, αλλά και για άλλους σκοπούς, θα διατηρήσουμε το καρτεσιανό σύστημα, καθώς και τη βασική αρχή, ότι όλες τις γωνίες θα τις τοποθετούμε με την κορυφή τους στην αρχή του συστήματος O και την αρχική τους πλευρά στο θετικό ημιάξονα Ox, με μία σημαντική, όπως θα φανεί στη συνέχεια, προσθήκη. Στο σύστημα συντεταγμένων θα προσαρμόσουμε έναν κύκλο με κέντρο την αρχή Ο και ακτίνα ίση με τη μονάδα, διατηρώντας τον προσανατολισμό (θετική και αρνητική φορά) στις γωνίες. Για παράδειγμα, λέμε ότι η γωνία 40° γράφεται κατά τη θετική φορά, ενώ η γωνία –25° γράφεται κατά την αρνητική φορά. Ο κύκλος αυτός λέγεται **τριγωνομετρικός κύκλος** και θα αποτελεί στο εξής τη βάση μελέτης κάθε προβλήματος που σχετίζεται με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

Θα δούμε, αμέσως τώρα, ότι με τη βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου οι τύποι που μας δίνουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μίας γωνίας ω όχι μόνο απλοποιούνται αλλά αποκτούν ένα περισσότερο διαισθητικό περιεχόμενο.

Έστω ω μία γωνία της οποίας η τελική πλευρά τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο $M(x, y)$. Επειδή η ακτίνα του κύκλου ρ είναι ίση με 1, θα έχουμε



$$\eta\mu\,\omega = \frac{y}{1} = y \text{ και } \sigma\upsilon\nu\,\omega = \frac{x}{1} = x$$

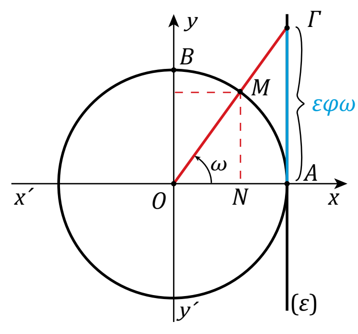
Επομένως, για κάθε γωνία ω που η τελική της πλευρά τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο $M(x, y)$, θα έχουμε

ημω=y=τεταγμένη του σημείου M

συνω=x=τετμημένη του σημείου M

Ο άξονας xx' λέγεται **άξονας των συνημιτόνων**.
Ο άξονας yy' λέγεται **άξονας των ημιτόνων**.

Θεωρούμε τον τριγωνομετρικό κύκλο και μία γωνία ω που η τελική της πλευρά τον τέμνει στο σημείο M. Φέρουμε την εφαπτομένη ε του τριγωνομετρικού κύκλου στο σημείο A, η οποία τέμνει την προέκταση της OM στο Γ.



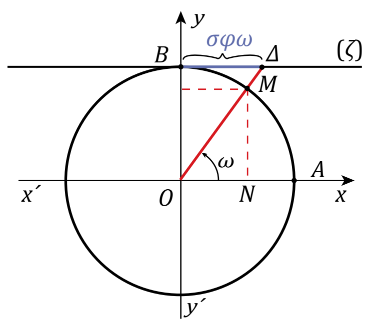
Παρατηρούμε ότι τα ορθογώνια τρίγωνα OMN και $OA\Gamma$ έχουν μία οξεία γωνία κοινή την ω, οπότε και οι άλλες οξείες γωνίες τους θα είναι ίσες, δηλαδή, όλες οι γωνίες τους είναι ίσες, που σημαίνει ότι είναι όμοια. Γνωρίζουμε από το Γυμνάσιο ότι, αν δύο τρίγωνα είναι όμοια, οι λόγοι των πλευρών που βρίσκονται απέναντι από ίσες γωνίες είναι ίσοι.

Λόγω της ομοιότητας των ορθογωνίων τριγώνων OMN και $OA\Gamma$ έχουμε

$$\frac{(MN)}{(ON)} = \frac{(A\Gamma)}{(OA)} \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{(A\Gamma)}{1}$$

Άρα,

$$\varepsilon\varphi\omega = (A\Gamma)$$

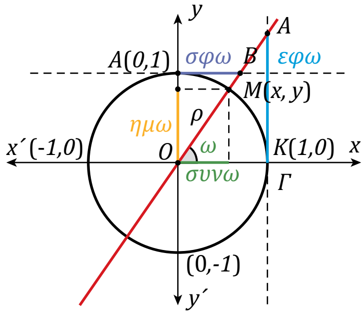


Η ευθεία ε λέγεται **άξονας των εφαπτομένων**.

Αν φέρουμε την εφαπτομένη στον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο του B αυτή τέμνει την προέκταση της OM στο $Δ$. Όμοια με παραπάνω αποδεικνύεται ότι

$$σφω=(BΔ)$$

Η ευθεία $ζ$ λέγεται **άξονας των συνεφαπτομένων**.



Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι άξονες όλων των τριγωνομετρικών γωνιών.

Από τα παραπάνω προκύπτουν άμεσα τα εξής

1. $-1 \le συνω \le 1$ και $-1 \le ημω \le 1$.
2. Οι εφω και σφω παίρνουν τιμές σε όλο το $\mathbb{R}$.

Τίτλος: Ο τριγωνομετρικός κύκλος
Έκδοση: 1.0
Συντ. ανάπτυξης & σχεδιασμού: **Κέλλυ Σαρρή Πασχαλίδη**
Δημιουργία: **ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΓΡΑΦΗ**