

Ασκήσεις Β' Ομάδας Ενότητας 2.2.1

Β' ΟΜΑΔΑ

- 8 (i) Αν $\alpha\beta + |\alpha\beta| = \alpha|\beta| + \beta|\alpha|$, να δείξετε ότι $\alpha \geq 0$ ή $\beta \geq 0$.
(ii) Αν $\alpha^2 - \delta^2 = \gamma^2 - \beta^2 = 1$, να δειχθεί ότι $|\alpha\gamma + \beta\delta| \geq 1$. (Υπόδειξη: $(\alpha^2 - \delta^2)(\gamma^2 - \beta^2) = 1$ και $|\alpha\gamma + \beta\delta|^2 \geq 1^2 \Leftrightarrow (\alpha\gamma + \beta\delta)^2 \geq 1^2 \Leftrightarrow (\alpha\gamma + \beta\delta)^2 \geq (\alpha^2 - \delta^2)(\gamma^2 - \beta^2) \Leftrightarrow \dots$)
- 9 Αν $\alpha = \sqrt[3]{2\sqrt{3} + 2} - \sqrt[3]{2\sqrt{3} - 2}$, να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $\alpha^3 + 6\alpha$. Στη συνέχεια, να βρεθεί μία ρίζα της εξίσωσης $x^3 + 6x - 4 = 0$.
- 10 Αφού υπολογίσετε τα αναπτύγματα $(3 + 2\sqrt{2})^3$ και $(3 - 2\sqrt{2})^3$, να αποδείξετε ότι $\sqrt[3]{99 + 70\sqrt{2}} + \sqrt[3]{99 - 70\sqrt{2}} = 6$ και $\sqrt[3]{99 + 70\sqrt{2}} - \sqrt[3]{99 - 70\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$.
- 11 Να γίνουν οι πράξεις (i) $\sqrt{7 - 3\sqrt{5}} + \sqrt{7 + 3\sqrt{5}}$ (ii) $\sqrt{3 - \sqrt{5}} - \sqrt{3 + \sqrt{5}}$
(Υπόδειξη: Να υπολογίσετε το τετράγωνο κάθε παράστασης, δηλαδή το τετράγωνο του αθροίσματος και της διαφοράς.)
- 12 Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{x + 2\sqrt{x} + 1} + 2\sqrt{x - 2\sqrt{x} + 1} = 3$. (Υπόδειξη: Είναι $x + 2\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x} + 1)^2$.)
- 13 Το άθροισμα δύο αριθμών είναι $\sqrt{18}$ και η διαφορά τους $\sqrt{14}$. Δείξτε ότι οι αριθμοί είναι αντίστροφοι. (Δεν είναι απαραίτητο να βρείτε τους αριθμούς.)
- 14 Να δειχθεί ότι $\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{6}$.
- 15 Αν $\alpha > 0$ και $\alpha - \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$, δείξτε ότι $\alpha + \frac{1}{\alpha} = 3$ και $\alpha - \frac{1}{\alpha} = \sqrt{5}$.
(Υπόδειξη: Είναι $\alpha - \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \Leftrightarrow \left(\sqrt{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)\left(\sqrt{\alpha} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) = \sqrt{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \Leftrightarrow \sqrt{\alpha} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = 1$ κ.λπ.)
- 16 Αν $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$, να παραγοντοποιήσετε την παράσταση $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$.
- 17 Τα μέτρα των πλευρών α, β, γ τριγώνου $AB\Gamma$ ικανοποιούν τη σχέση $\frac{\alpha - \beta}{\gamma} + \frac{\beta - \gamma}{\alpha} + \frac{\gamma - \alpha}{\beta} = 0$. Να βρεθεί το είδος του τριγώνου.
- 18 Να απλοποιηθεί το $\sqrt{7 + \sqrt{13}}$. (Υπόδειξη: $\sqrt{7 + \sqrt{13}} = \sqrt{\frac{14 + 2\sqrt{13}}{2}}$ κ.λπ.)
- 19 (i) Αν $x = \sqrt[3]{\alpha} + \frac{1}{\sqrt[3]{\alpha}}$, δείξτε ότι $x^3 - 3x = \alpha + \frac{1}{\alpha}$.
(ii) Να δειχθεί ότι ο αριθμός $\sqrt[3]{100} + \frac{1}{\sqrt[3]{100}}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $100x^3 - 300x - 10001 = 0$.
- 20 Αν $x + y + z = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{3}$ και $xyz = \frac{1}{27}$, υπολογίστε το $x^3 + y^3 + z^3$. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την ταυτότητα του Euler.)
- 21 Να δειχθεί ότι ο αριθμός $16^4 + 2^{11}$ διαιρείται με το 33 καθώς και με το 512. Μπορείτε να βρείτε και άλλους διαιρέτες του αριθμού αυτού;

Τίτλος: «**Ασκήσεις Β' Ομάδας Ενότητας 2.2.1**»

Έκδοση: **1.5**

Ημερομηνία: **10/09/2025**

Συντονιστής ομάδας σχεδιασμού και ανάπτυξης: **Κέλλυ Σαρρή Πασχαλίδη**

Δημιουργία: **ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΓΡΑΦΗ**



Το παρόν αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της Πράξης «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ (ΜΙΣ) 6010165, του Προγράμματος «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή 2021-2027» που υλοποιείται από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής και συγχρηματοδοτείται από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο.



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας, Θρησκευμάτων
και Αθλητισμού

ΙΕΠ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ
ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ



Με τη συγχρηματοδότηση
της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Πρόγραμμα
Ανθρώπινο Δυναμικό και
Κοινωνική Συνοχή