

Παράδειγμα Ενότητας 2.4.2

Παράδειγμα 2.4.2.4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$.

- (i) Για ποιες τιμές του x ορίζεται το $f\left(\frac{1}{x}\right)$; (ii) Να βρείτε το $f\left(\frac{1}{x}\right)$.
 (iii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = 5$.

Λύση

Θα βρούμε πρώτα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Πρέπει

$$1-x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$$

Άρα, $A = \mathbb{R} - \{1\}$.

- (i) Το $\frac{1}{x}$ ορίζεται για κάθε $x \neq 0$. Επειδή, το $f(x)$ ορίζεται για όλα τα $x \in A = \mathbb{R} - \{1\}$, δηλαδή, για $x \neq 1$, για να ορίζεται το $f\left(\frac{1}{x}\right)$ πρέπει $\frac{1}{x} \neq 1$, δηλαδή $x \neq 1$. Επομένως, το $f\left(\frac{1}{x}\right)$ ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$.
 (ii) Έχουμε

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} \quad (\text{Στον τύπο της } f \text{ αντικαθιστούμε το } x \text{ με το } \frac{1}{x})$$

$$= \frac{\frac{x}{x} + \frac{1}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}} \quad (\text{Μετατρέπουμε τα κλάσματα σε ομώνυμα})$$

$$= \frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{x-1}{x}} \quad (\text{Προσθέτουμε τα ομώνυμα κλάσματα})$$

$$= \frac{x+1}{x-1} \quad (\text{Απλοποιούμε το σύνθετο κλάσμα})$$

- (iii) Αντικαθιστούμε τα $f(x)$ και $f\left(\frac{1}{x}\right)$, οπότε η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$\frac{1+x}{1-x} - \frac{1+x}{x-1} = 5 \Leftrightarrow \frac{1+x}{1-x} - \frac{1+x}{-(1-x)} = 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+x}{1-x} + \frac{1+x}{1-x} = 5 \quad (\text{Προσθέτουμε τα ομώνυμα κλάσματα})$$

$$\Leftrightarrow 2 \frac{1+x}{1-x} = 5 \quad (\text{Διαιρούμε με το 2 και τα δύο μέλη})$$

$$\Leftrightarrow 2(1+x) = 5(1-x) \quad \left(\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma\right)$$

$$\Leftrightarrow 2+2x = 5-5x \quad (\text{Κάνουμε πράξεις})$$

$$\Leftrightarrow 2x+5x = 5-2 \quad (\text{Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους})$$

$$\Leftrightarrow 7x = 3 \quad (\text{Κάνουμε αναγωγές ομοίων όρων})$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{7} \quad (\text{Γράφουμε τη λύση})$$

Η λύση $x = \frac{3}{7}$ είναι αποδεκτή, γιατί ικανοποιεί τον περιορισμό $x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$, που έχει επιβληθεί στο (ii).