Χρήσιμες ταυτότητες

Μερικές ακόμα χρήσιμες ταυτότητες

Από τις ταυτότητες 1 και 2 προκύπτουν αντίστοιχα οι ταυτότητες

9. (α) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
   (β) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta$

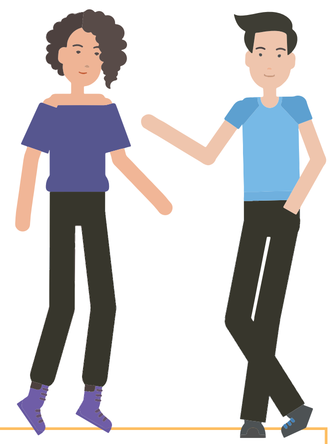
Από τις ταυτότητες 4, 5, 6 και 7 προκύπτουν αντίστοιχα οι ταυτότητες

10. (α) $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)$
    (β) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$
    και
11. (α) $(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-\beta^3-3\alpha\beta(\alpha-\beta)$
    (β) $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)^3+3\alpha\beta(\alpha-\beta)$

Από την ταυτότητα 8 προκύπτει η ταυτότητα

$$(\alpha-\beta+\gamma)^2=[\alpha+(-\beta)+\gamma]^2=\alpha^2+(-\beta)^2+\gamma^2+2\alpha(-\beta)+2(-\beta)\gamma+2\gamma\alpha$$
$$=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma+2\gamma\alpha$$

Κυκλικά μπορούμε να πάρουμε αντίστοιχες ταυτότητες και για τα $(\alpha+\beta-\gamma)^2$,$(-\alpha+\beta+\gamma)^2$ αλλά και για το $(\alpha-\beta-\gamma)^2$. Διατυπώστε ένα μνημονικό κανόνα για όλες αυτές τις περιπτώσεις.



Παράδειγμα 2.2.1.4

Αν $\alpha+\beta=2$ και $\alpha\beta=-2$ να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων
(α) $\alpha^2+\beta^2$ (β) $\alpha^3+\beta^3$ (γ) $(\alpha-\beta)^2$ (δ) $\alpha^2-\beta^2$

Λύση

(α) Από την ταυτότητα 9 (α) έχουμε $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=2^2-2(-2)=4+4=8$

(β) Από την ταυτότητα 10 (β) έχουμε $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=2^3-3\cdot(-2)\cdot 2=8+12=20$

(γ) Έχουμε $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\overset{(\alpha)}{=}8-2\cdot(-2)=8+4=12$

(δ) Από το (γ) έχουμε $\alpha-\beta=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ ή $\alpha-\beta=-2\sqrt{3}$, οπότε $\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=2(\pm 2\sqrt{3})=\pm 4\sqrt{3}$

Ακόμα μερικές ταυτότητες

12. Κάνοντας τις πράξεις στο β' μέλος διαπιστώνουμε εύκολα ότι ισχύουν οι ταυτότητες

(i) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{1}{2}\left[(\alpha+\beta)^2+(\beta+\gamma)^2+(\gamma+\alpha)^2\right]$

(ii) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=\frac{1}{2}\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right]$

13. Κάνοντας τις πράξεις στο β' μέλος και χρησιμοποιώντας την 12(ii) αποδεικνύουμε την ακόλουθη ταυτότητα, γνωστή και ως ταυτότητα του Euler

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$$
$$=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2]$$

Άμεση συνέπεια της ταυτότητας του Euler είναι η ακόλουθη

14. Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$ ή $\alpha=\beta=\gamma$,τότε $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$ και αντιστρόφως.

Τέτοιες ταυτότητες που ισχύουν για κάποιους αριθμούς που ικανοποιούν κάποια(-ες) συνθήκη(-ες) είναι γνωστές ως **ταυτότητες υπό συνθήκη**(-ες).

Το ευθύ της ταυτότητας 14 προκύπτει από τη 13 αν θέσουμε $\alpha+\beta+\gamma=0$ στην πρώτη γραμμή του β' μέλους της ή $\alpha=\beta=\gamma$ στη δεύτερη γραμμή. Για το αντίστροφο, έχουμε

$$\begin{aligned}\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma &\Rightarrow \alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=0\\ &\overset{(13)}{\Rightarrow} \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2]=0\\ &\Rightarrow \alpha+\beta+\gamma=0 \quad \text{ή} \quad (\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2=0\\ &\Rightarrow \alpha+\beta+\gamma=0 \quad \text{ή} \quad \alpha=\beta=\gamma\end{aligned}$$

15. $\alpha^\nu-\beta^\nu=(\alpha-\beta)(\alpha^{\nu-1}+\alpha^{\nu-2}\beta+\alpha^{\nu-3}\beta^2+\ldots+\alpha\beta^{\nu-2}+\beta^{\nu-1})$, ν θετικός φυσικός

16. $\alpha^\nu+\beta^\nu=(\alpha+\beta)(\alpha^{\nu-1}-\alpha^{\nu-2}\beta+\alpha^{\nu-3}\beta^2-\ldots-\alpha\beta^{\nu-2}+\beta^{\nu-1})$, ν περιττός φυσικός

Παράδειγμα 2.2.1.5

Αν $x+y+z=3$, $x^2+y^2+z^2=5$ και $x^3+y^3+z^3=15$ να υπολογίσετε το xyz.

Λύση

Έχουμε διαδοχικά

$$x+y+z=3, \quad (x+y+z)^2=3^2, \quad x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=9,$$
$$5+2(xy+yz+zx)=9, \quad 2(xy+yz+zx)=9-5, \quad 2(xy+yz+zx)=4,$$
$$xy+yz+zx=2$$

Σύμφωνα με την ταυτότητα του Euler έχουμε

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

οπότε με αντικατάσταση παίρνουμε

$$15-3xyz=3(5-2), \quad 15-3xyz=9, \quad 3xyz=15-9, \quad 3xyz=6, \quad xyz=2$$

Παράδειγμα 2.2.1.6

Παράδειγμα 2.2.1.6

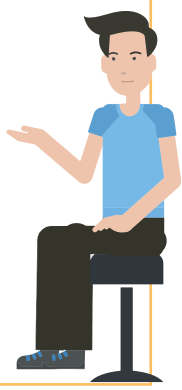
Να δείξετε ότι ο αριθμός $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $x^3-6x-6=0$.

Λύση

Ένας αριθμός είναι ρίζα μίας εξίσωσης αν την επαληθεύει. Επομένως, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)^3-6\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)-6=0$.

Έχουμε

$$\begin{aligned}\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)^3 &= \left(\sqrt[3]{2}\right)^3+3\left(\sqrt[3]{2}\right)^2\sqrt[3]{4}+3\sqrt[3]{2}\left(\sqrt[3]{4}\right)^2+\left(\sqrt[3]{4}\right)^3\\ &=2+3\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{4}+3\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{16}+4\\ &=6+3\sqrt[3]{16}+3\sqrt[3]{32}\\ &=6+3\sqrt[3]{8}\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{8}\sqrt[3]{4}\\ &=6+3\cdot 2\sqrt[3]{2}+3\cdot 2\sqrt[3]{4}\\ &=6+6\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)\end{aligned}$$



Τίτλος: «**Χρήσιμες ταυτότητες** »

Έκδοση: **1.5**

Ημερομηνία: **10/09/2025**

Συντονιστής ομάδας σχεδιασμού και ανάπτυξης: **Κέλλυ Σαρρή Πασχαλίδη**

Δημιουργία: **ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΓΡΑΦΗ**

Το παρόν αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της Πράξης «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ (MIS) 6010165, του Προγράμματος «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή 2021-2027» που υλοποιείται από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής και συγχρηματοδοτείται από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο.