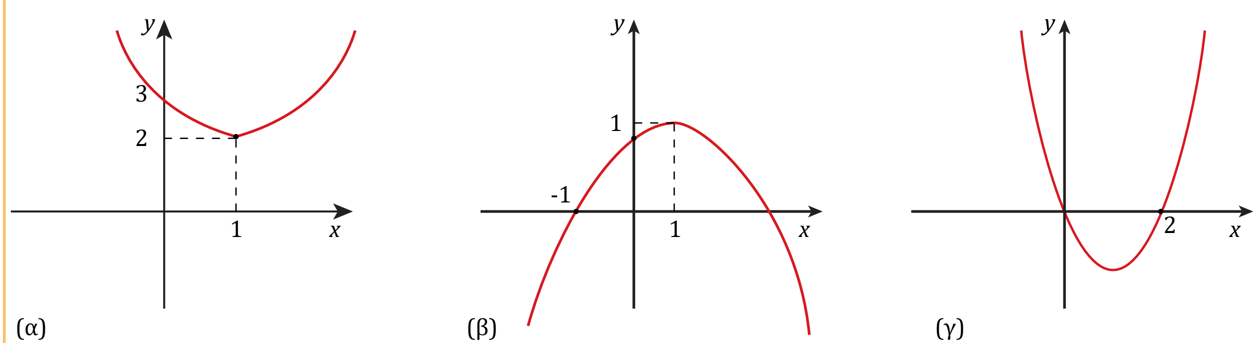
Παράδειγμα Ενότητας 2.4.8

Παράδειγμα 2.4.8.2

Με βάση τα παρακάτω σχήματα να βρείτε σε κάθε περίπτωση τους συντελεστές α, β και γ σε όποιες από τις περιπτώσεις μπορούν να καθοριστούν και να μελετήσετε το πρόσημο του τριωνύμου $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$ για τις διάφορες τιμές του x, $x\in\mathbb{R}$.



(α) (β) (γ)

Λύση

(α) Είναι $\gamma=3$, $-\dfrac{\beta}{2\alpha}=1 \Leftrightarrow \beta=-2\alpha$ και $-\dfrac{\Delta}{4\alpha}=2$. Η τελευταία γράφεται ισοδύναμα

$$-\frac{(\beta^2-4\alpha\gamma)}{4\alpha}=2 \Leftrightarrow \beta^2-4\alpha\gamma=-8\alpha \Leftrightarrow (-2\alpha)^2-4\alpha\cdot 3=-8\alpha$$
$$\Leftrightarrow 4\alpha^2-12\alpha=-8\alpha \Leftrightarrow 4\alpha^2-4\alpha=0$$
$$\Leftrightarrow 4\alpha(\alpha-1)=0 \Leftrightarrow \alpha=1 \text{ (γιατί } \alpha\neq 0)$$

Για $\alpha=1$ παίρνουμε $\beta=-2$. Άρα, $f(x)=x^2-2x+3$. Από το σχήμα (*βλ. σχήμα (α)*) συμπεραίνουμε ότι $f(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(β) Έχουμε $\gamma=1$, $-\dfrac{\beta}{2\alpha}=1 \Leftrightarrow \beta=-2\alpha$ και $f(-1)=0$. Η τελευταία γράφεται ισοδύναμα

$$\alpha(-1)^2+\beta(-1)+\gamma=0 \Leftrightarrow \alpha-(-2\alpha)+1=0 \Leftrightarrow 3\alpha=-1 \Leftrightarrow \alpha=-\frac{1}{3}$$

Για $\alpha=-\dfrac{1}{3}$ παίρνουμε $\beta=\dfrac{2}{3}$. Άρα, $f(x)=-\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{2}{3}x+1$.

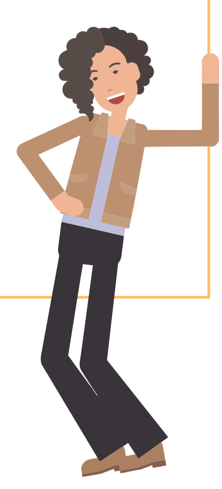
Εύκολα βρίσκουμε ότι η άλλη ρίζα του είναι το 3, οπότε από το σχήμα (*βλ. σχήμα (β)*) συμπεραίνουμε ότι $f(x)>0$, για κάθε $x\in(-1,3)$, $f(x)<0$, για κάθε $x\in(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$ και $f(-1)=f(3)=0$.

(γ) Οι ρίζες του τριωνύμου είναι το 0 και το 2 (τα σημεία τομής της παραβολής με τον άξονα $x'x$), και ο άξονας συμμετρίας της παραβολής είναι η ευθεία $x=1$ (δηλαδή, η κάθετη στον άξονα $x'x$ στο μέσο του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία (0,0) και (2,0)).

Επομένως, η μορφή του θα είναι

$$f(x)=\alpha(x-0)(x-2)=\alpha x(x-2)=\alpha(x^2-2x)=\alpha x^2-2\alpha x+0.$$

Επειδή το $\gamma=0$ (είναι $\gamma=f(0)=0$, (*βλ. σχήμα* (γ)) δεν μπορεί να προσδιοριστεί το α. (Εξάλλου υπάρχουν άπειρα τριώνυμα με ρίζες το 0 και το 2 και άξονα συμμετρίας την ευθεία $x=1$.) Ωστόσο, για όλα αυτά τα τριώνυμα έχουμε $f(x)>0$, για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$, $f(x)<0$, για κάθε $x\in(0,2)$ και $f(0)=f(2)=0$.



Τίτλος: «**Παράδειγμα Ενότητας 2.4.8**»

Έκδοση: **1.5**

Ημερομηνία: **10/09/2025**

Συντονιστής ομάδας σχεδιασμού και ανάπτυξης: **Κέλλυ Σαρρή Πασχαλίδη**

Δημιουργία: **ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΓΡΑΦΗ**

Το παρόν αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της Πράξης «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ (MIS) 6010165, του Προγράμματος «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή 2021-2027» που υλοποιείται από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής και συγχρηματοδοτείται από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο.