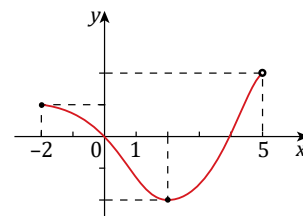


Παραδείγματα Ενότητας 2.4.4

Παράδειγμα 2.4.4.5

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης  $f$ . Να βρείτε

- (i) το πεδίο ορισμού  $A$  και το σύνολο τιμών  $f(A)$  της  $f$ .
- (ii) τα σημεία στα οποία η  $C_f$  τέμνει τους άξονες.
- (iii) τα διαστήματα όπου η  $C_f$  βρίσκεται πάνω από τον άξονα  $x'$ .



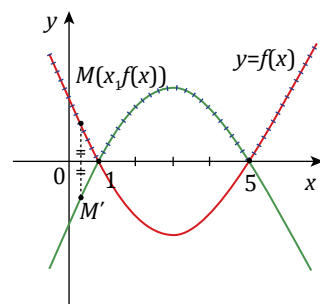
**Επισημάνση:** Η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης αν τέμνει τον άξονα  $y'y$ , τον τέμνει σε ένα μόνο σημείο το  $(0, f(0))$  και αυτό συμβαίνει όταν το 0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της.

**Λύση**

- (i) Από τη γραφική παράσταση της  $f$  προκύπτει ότι  $A=[-2,5]$  και  $f(A)=[-2,2]$ .
- (ii) Η  $C_f$  τέμνει τον άξονα  $x'$  στα σημεία με τετμημένες 0 και 4, οπότε οι συντεταγμένες τους είναι  $(0,0)$  και  $(4,0)$ . Το  $(0,0)$  είναι και το σημείο τομής της  $C_f$  με τον άξονα  $y'y$ .
- (iii) Έχουμε  $f(x)>0 \Leftrightarrow -2 \leq x < 0$  ή  $4 < x < 5$ . Επομένως, η  $C_f$  βρίσκεται πάνω από τον άξονα  $x'$  για κάθε  $x \in [-2,0) \cup (4,5]$ .

Παράδειγμα 2.4.4.6

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης  $f$  (η γραφική με κόκκινο χρώμα) και η γραφική παράσταση μία άλλης συνάρτησης (της οποίας δεν έχουμε δώσει όνομα) (η γραφική με πράσινο χρώμα). Όπως φαίνεται και στο σχήμα τα σημεία  $M(x, f(x))$  και  $M'$  της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  και της «ανώνυμης» συνάρτησης είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα  $x'$ .



- (i) Να εκφράσετε τις τιμές της «ανώνυμης» συνάρτησης, ως συναρτήσεις των τιμών της  $f$ .
- (ii) Ποιος συμβολισμός είναι καταλληλότερος για αυτή τη συνάρτηση και ποιος θα είναι τότε ο τύπος της;
- (iii) Αν θεωρήσουμε ότι τα οδοντωτά τμήματα των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων αποτελούν τη γραφική παράσταση μίας άλλης συνάρτησης ποια είναι αυτή η συνάρτηση;

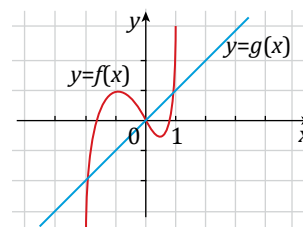
**Λύση**

- (i) Επειδή τα σημεία  $M(x, f(x))$  και  $M'$  είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα  $x'$  έχουν ίδιες τετμημένες και αντίθετες τεταγμένες. Επομένως, το τυχόν σημείο  $M'$  έχει τετμημένη  $x$  και τεταγμένη  $-f(x)$  και επειδή το σημείο  $M'$  είναι τυχόν, αυτό συμβαίνει για όλα τα σημεία της συνάρτησης. Άρα, η γραφική παράσταση της «ανώνυμης» θα αποτελείται από τα σημεία της μορφής  $M'(x, -f(x))$ .
- (ii) Ο τρόπος που δίνεται η τιμή της συνάρτησης σε κάθε σημείο  $x$  μας επιβάλλει να την συμβολίσουμε με  $-f$  με τύπο  $(-f)(x) = -f(x)$ .
- (iii) Παρατηρούμε ότι η καμπύλη που αποτελείται από τα οδοντωτά τμήματα των  $C_f$  και  $C_{-f}$  αποτελούν γραφική παράσταση συνάρτησης. (Κάθε κατακόρυφη ευθεία που την τέμνει, την τέμνει σε ένα σημείο.)

Παρατηρούμε ακόμα ότι το οδοντωτό τμήμα της  $C_{-f}$  είναι συμμετρικό ως προς τον άξονα  $x'$  του μη οδοντωτού τμήματος της  $C_f$ . Επειδή, κάθε σημείο του μη οδοντωτού τμήματος της  $C_f$  έχει αρνητική τεταγμένη, είναι δηλαδή,  $f(x) < 0$  το συμμετρικό του που είναι τμήμα της  $C_{-f}$  είναι θετικό, δηλαδή,  $-f(x) > 0$ . Άρα, η συνάρτηση, με γραφική παράσταση την οδοντωτή καμπύλη έχει τύπο ίδιο με την  $f$ , αν  $f(x) > 0$  και ίδιο με την  $-f$ , αν  $f(x) < 0$ , οπότε η τιμή της σε κάθε  $x$  είναι ίση με  $|f(x)|$  (βλ. Ορισμός της απόλυτης τιμής). Τη συνάρτηση αυτή τη συμβολίζουμε με  $|f|$  και τη λέμε συνάρτηση απόλυτη τιμή.

**Παράδειγμα 2.4.4.7**

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση δύο συναρτήσεων  $f$  και  $g$  (με κόκκινο και μπλε χρώμα αντίστοιχα). Να λύσετε γραφικά



- (i) την εξίσωση  $f(x)=g(x)$ .
- (ii) την ανίσωση  $f(x)\leq g(x)$
- (iii) την εξίσωση  $f(x)=|g(x)|$ .

**Λύση**

- (i) Οι λύσεις της εξίσωσης  $f(x)=g(x)$  είναι οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων  $f$  και  $g$ . Από το σχήμα προκύπτει ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$  και  $g$  τέμνονται στα σημεία με τετμημένες τους αριθμούς  $-2, 0$  και  $1$  οι οποίοι είναι και οι λύσεις της εξίσωσης.
- (ii) Οι λύσεις της ανίσωσης  $f(x)\leq g(x)$  είναι τα διαστήματα του άξονα  $x'$  στα οποία η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνει τη γραφική παράσταση της  $g$  ή βρίσκεται κάτω (χαμηλότερα) από αυτή. Από το σχήμα προκύπτει ότι αυτό συμβαίνει για κάθε  $x\in(-\infty,-2]\cup[0,1]$ .
- (iii) Επειδή, για κάθε  $x\geq 0$  η  $C_g$  βρίσκεται πάνω από τον οριζόντιο άξονα έχουμε  $g(x)\geq 0$ , οπότε  $|g(x)|=g(x)$ . Επομένως, για  $x\geq 0$ , η δοθείσα εξίσωση είναι ισοδύναμη με την  $f(x)=g(x)$  της οποίας σε αυτή την περίπτωση οι λύσεις είναι το  $0$  και το  $1$ .

Για  $x<0$  η  $C_g$  βρίσκεται κάτω από τον άξονα  $x'$ , οπότε είναι  $g(x)<0$  και επομένως,  $|g(x)|=-g(x)>0$ . Επομένως, για  $x<0$ , η δοθείσα εξίσωση είναι ισοδύναμη με την  $f(x)=-g(x)$ . Η γραφική παράσταση όμως της  $-g$  είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της  $g$  ως προς τον άξονα  $x'$  (βλ. Παράδειγμα 2.4.4.6) και επειδή το συμμετρικό του σημείου  $(-1,-1)$  είναι το  $(-1,1)$  το οποίο είναι το μοναδικό κοινό σημείο των  $C_{-g}$  και  $C_f$  (επιβεβαιώστε το γραφικά) η μοναδική λύση της εξίσωσης, για  $x<0$ , είναι η  $-1$ .

Τίτλος: «**Παραδείγματα Ενότητας 2.4.4**»

Έκδοση: **1.5**

Ημερομηνία: **10/09/2025**

Συντονιστής ομάδας σχεδιασμού και ανάπτυξης: **Κέλλυ Σαρρή Πασχαλίδη**

Δημιουργία: **ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΓΡΑΦΗ**



*Το παρόν αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της Πράξης «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ (ΜΙΣ) 6010165, του Προγράμματος «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή 2021-2027» που υλοποιείται από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής και συγχρηματοδοτείται από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο.*



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
Υπουργείο Παιδείας, Θρησκευμάτων  
και Αθλητισμού



Με τη συγχρηματοδότηση  
της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Πρόγραμμα  
Ανθρώπινο Δυναμικό και  
Κοινωνική Συνοχή