

Ρίζες

Αν $\beta \neq 0$ και $\gamma \neq 0$ η εξίσωση λέγεται **πλήρης**.

Αν $\beta=0$ ή $\gamma=0$ η εξίσωση λέγεται **ελλιπής**.

Οι λύσεις της εξίσωσης λέγονται και **ρίζες**.

Στη συνέχεια θα επιλύσουμε την εξίσωση δευτέρου βαθμού στη γενική της μορφή με τη μέθοδο της «**συμπλήρωσης του τετραγώνου**» (wikipedia). Έχουμε

Στο εξής θα κάνουμε περισσότερο χρήση του όρου «ρίζα» παρά του όρου «λύση» και ο λόγος είναι ότι ο πρώτος έχει πιο πλούσιο περιεχόμενο από τον δεύτερο.

$ax^2+bx+\gamma=0, a \neq 0$	Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με $4a$
$4a \cdot ax^2+4a \cdot bx+4a \cdot \gamma=0$	
$4a^2x^2+4abx=-4a\gamma$	Μεταφέρουμε το $4a \cdot \gamma$ στο δεύτερο μέλος
$4a^2x^2+4abx+\beta^2=\beta^2-4a\gamma$	Προσθέτουμε και στα δύο μέλη το β^2
$(2ax)^2+2 \cdot 2ax \cdot \beta+\beta^2=\beta^2-4a\gamma$	Παρατηρούμε ότι το πρώτο μέλος είναι τέλειο τετράγωνο
$(2ax+\beta)^2=\beta^2-4a\gamma$	

- Αν $\beta^2-4a\gamma \geq 0$, τότε χρησιμοποιώντας την ιδιότητα των ριζών $\alpha = (\sqrt{\alpha})^2, \alpha \geq 0$ από την τελευταία παίρνουμε $(2ax+\beta)^2 = (\sqrt{\beta^2-4a\gamma})^2$

οπότε

$$\begin{aligned} & (2ax+\beta = \sqrt{\beta^2-4a\gamma} \quad \text{ή} \quad 2ax+\beta = -\sqrt{\beta^2-4a\gamma}) \Leftrightarrow \\ & (2ax = -\beta + \sqrt{\beta^2-4a\gamma} \quad \text{ή} \quad 2ax = -\beta - \sqrt{\beta^2-4a\gamma}) \Leftrightarrow \\ & x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2-4a\gamma}}{2a} \quad \text{ή} \quad x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2-4a\gamma}}{2a} \end{aligned}$$

Επομένως, η εξίσωση $ax^2+bx+\gamma=0, a \neq 0$ έχει δύο πραγματικές ρίζες $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2-4a\gamma}}{2a}$.

- Αν $\beta^2-4a\gamma = 0$, τότε από την τελευταία παίρνουμε

$$(2ax+\beta)^2 = 0 \Leftrightarrow 2ax+\beta = 0 \Leftrightarrow 2ax = -\beta \Leftrightarrow x = -\frac{\beta}{2a} \text{ (διπλή ρίζα)}$$

Επομένως, η εξίσωση $ax^2+bx+\gamma=0, a \neq 0$ έχει μία διπλή πραγματική ρίζα $x_{1,2} = \frac{-\beta}{2a}$.

- Αν $\beta^2-4a\gamma < 0$, τότε η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.



Η μέθοδος που χρησιμοποιήσαμε για την επίλυση της εξίσωσης δευτέρου βαθμού επινοήθηκε στην Ινδία και αποδίδεται στον Sridhara (1025 μ.Χ. περίπου) και η απλότητά της έγκειται στο γεγονός ότι το κλάσμα δεν εμφανίζεται παρά μόνο στο τελευταίο βήμα. Σημειώνουμε ότι η επίλυση της εξίσωσης 2ου βαθμού έχει πολύ μεγάλη ιστορία και έχει απασχολήσει πολλούς μαθηματικούς, ιδιαίτερα στα πρώτα βήματα της εξέλιξης της Άλγεβρας. Αναφορικά με την διαδικασία επίλυσης έχουν προταθεί αρκετές μέθοδοι.

Από την παραπάνω διαδικασία επίλυσης της εξίσωσης $ax^2+bx+\gamma=0, a \neq 0$ είναι προφανές ότι για να διαπιστώσουμε αν η εξίσωση έχει ρίζες και στην περίπτωση που έχει πόσες έχει, πρέπει να βρούμε το πρόσημο της παράστασης $\beta^2-4a\gamma$. Με άλλα λόγια το κριτήριο για να διακρίνουμε αν η εξίσωση έχει ρίζες και πόσες έχει είναι το πρόσημο της παράστασης $\beta^2-4a\gamma$, και για αυτό το λέμε **διακρίνουσα** της εξίσωσης $ax^2+bx+\gamma=0, a \neq 0$ (ή και διακρίνουσα του τριωνύμου $ax^2+bx+\gamma, a \neq 0$) και τη συμβολίζουμε με Δ . Δηλαδή, είναι $\Delta = \beta^2-4a\gamma$.

Τίτλος: «**Ρίζες**»

Έκδοση: **1.5**

Ημερομηνία: **10/09/2025**

Συντονιστής ομάδας σχεδιασμού και ανάπτυξης: **Κέλλυ Σαρρή Πασχαλίδη**

Δημιουργία: **ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΓΡΑΦΗ**



Το παρόν αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της Πράξης «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ (ΜΙΣ) 6010165, του Προγράμματος «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή 2021-2027» που υλοποιείται από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής και συγχρηματοδοτείται από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο.



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας, Θρησκευμάτων
και Αθλητισμού



Με τη συγχρηματοδότηση
της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Πρόγραμμα
Ανθρώπινο Δυναμικό και
Κοινωνική Συνοχή