

Παραδείγματα Ενότητας 2.3.6

Παράδειγμα 2.3.6.2

Να λυθούν οι εξισώσεις

(α) $9x^4 - 5x^2 - 4 = 0$

(β) $x\sqrt{x} - 2\sqrt[4]{x^3} - 3 = 0$

(γ) $x^2 + \frac{1}{x^2} - 8 = 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$

Λύση

(α) Θέτουμε $x^2 = y \geq 0$, οπότε η εξίσωση γράφεται $9y^2 - 5y - 4 = 0$.

Αυτή έχει ρίζες τις $y_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-4)}}{2 \cdot 9} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 144}}{18} = \frac{5 \pm \sqrt{169}}{18} = \frac{5 \pm 13}{18}$,

οπότε $y_1 = \frac{5+13}{18} = \frac{18}{18} = 1$ και $y_2 = \frac{5-13}{18} = \frac{-8}{18} = -\frac{4}{9}$. Επομένως, $x^2 = 1$ ή $x^2 = -\frac{4}{9}$. Η πρώτη δίνει $x = \pm 1$ και η δεύτερη είναι αδύνατη.(β) Για να έχουν νόημα οι ρίζες πρέπει να είναι $x \geq 0$ (οπότε και $x^3 \geq 0$). Παρατηρούμε ότι αν θέσουμε $\sqrt[4]{x^3} = y$, τότε $(\sqrt[4]{x^3})^2 = y^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^3} = y^2 \Leftrightarrow x\sqrt{x} = y^2$, οπότε η δοθείσα εξίσωση γράφεται $y^2 - 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 3 = -1$ ή $y^2 = 3$ (Γινόμενο -3 και Άθροισμα 2). Άρα, $\sqrt[4]{x^3} = -1$ ή $\sqrt[4]{x^3} = 3$. Η πρώτη εξίσωση είναι αδύνατη και η δεύτερη δίνει $(\sqrt[4]{x^3})^4 = 3^4 \Leftrightarrow x^3 = 3^4 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{3^4} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 3} = 3\sqrt[3]{3}$.(γ) Θέτουμε $x + \frac{1}{x} = y \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = y^2 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} + 2x \cdot \frac{1}{x} = y^2 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = y^2 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$ (για $x \neq 0$) και η εξίσωση γράφεται $y^2 - 2 - 8 = 3y \Leftrightarrow y^2 - 3y - 10 = 0 \Leftrightarrow y_1 = -2$ ή $y_2 = 5$ (Γινόμενο -10 και Άθροισμα 3).Άρα, έχουμε να λύσουμε τις εξισώσεις $x + \frac{1}{x} = -2$ και $x + \frac{1}{x} = 5$.Η πρώτη γράφεται $x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.Ενώ η δεύτερη γράφεται $x^2 - 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$.

Παράδειγμα 2.3.6.3

Να προσδιοριστεί ο πραγματικός αριθμός λ ώστε η εξίσωση $x^2 - 3x + 9\lambda = 0$

(i) να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(ii) να έχει μία διπλή ρίζα.

(iii) να μην έχει πραγματικές ρίζες.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι το πλήθος των πραγματικών ριζών μίας δευτεροβάθμιας εξίσωσης εξαρτάται από το πρόσημο της διακρίνουσας Δ και συγκεκριμένα, αν $\Delta > 0$ έχουμε δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, αν $\Delta = 0$, έχουμε μία διπλή πραγματική ρίζα και αν $\Delta < 0$ δεν έχουμε πραγματικές ρίζες.

Έχουμε

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9\lambda = 9 - 4 \cdot 9\lambda = 9(1 - 4\lambda)$$

οπότε θα πρέπει:

(i) $\Delta > 0 \Leftrightarrow 9(1 - 4\lambda) > 0 \Leftrightarrow 1 - 4\lambda > 0 \Leftrightarrow 1 > 4\lambda \Leftrightarrow \lambda < \frac{1}{4}$

(ii) $\Delta = 0 \Leftrightarrow 9(1 - 4\lambda) = 0 \Leftrightarrow 1 - 4\lambda = 0 \Leftrightarrow 1 = 4\lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{4}$

(iii) $\Delta < 0 \Leftrightarrow 9(1 - 4\lambda) < 0 \Leftrightarrow 1 - 4\lambda < 0 \Leftrightarrow 1 < 4\lambda \Leftrightarrow \lambda > \frac{1}{4}$



Παράδειγμα 2.3.6.4

Αν μία ρίζα της εξίσωσης $x^2 - 2(\lambda + 1)x + 2\lambda + 1 = 0$ είναι το 5 να προσδιορίσετε την τιμή του αριθμού λ καθώς και την άλλη ρίζα.

Λύση

Αφού το 5 είναι ρίζα της εξίσωσης θα την επαληθεύει, οπότε θα έχουμε

$$\begin{aligned} 5^2 - 2(\lambda + 1)5 + 2\lambda + 1 &= 0 \Leftrightarrow 25 - 10(\lambda + 1) + 2\lambda + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 25 - 10\lambda - 10 + 2\lambda + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow -10\lambda + 2\lambda = -25 + 10 - 1 \\ &\Leftrightarrow -8\lambda = -16 \Leftrightarrow \lambda = 2 \end{aligned}$$

Για $\lambda = 2$ η δοθείσα εξίσωση γράφεται

$$x^2 - 2(2+1)x + 2 \cdot 2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad \text{ή} \quad x = 5$$

Επομένως, η άλλη ρίζα είναι το 1.

Τίτλος: «**Παραδείγματα Ενότητας 2.3.6**»

Έκδοση: **1.5**

Ημερομηνία: **10/09/2025**

Συντονιστής ομάδας σχεδιασμού και ανάπτυξης: **Κέλλυ Σαρρή Πασχαλίδη**

Δημιουργία: **ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΓΡΑΦΗ**



Το παρόν αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της Πράξης «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ (ΜΙΣ) 6010165, του Προγράμματος «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή 2021-2027» που υλοποιείται από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής και συγχρηματοδοτείται από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο.



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας, Θρησκευμάτων
και Αθλητισμού

ΙΕΠ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ
ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ



Με τη συγχρηματοδότηση
της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Πρόγραμμα
Ανθρώπινο Δυναμικό και
Κοινωνική Συνοχή