Παραγοντοποίηση τριωνύμου

Η παράσταση $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$, όπου τα α, β και γ είναι γνωστοί πραγματικοί αριθμοί και το x είναι μία μεταβλητή που παίρνει πραγματικές τιμές, όπως αναφέραμε και παραπάνω, λέγεται τριώνυμο 2ου βαθμού ή απλά τριώνυμο. Η διακρίνουσα και οι ρίζες της αντίστοιχης εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha\neq 0$ λέγονται και διακρίνουσα και ρίζες του τριωνύμου, αντίστοιχα.

Το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$ μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}\right)$$

$$=\alpha\left[x^2+2\cdot x\frac{\beta}{2\alpha}+\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{\gamma}{\alpha}\right] \quad \text{Συμπλήρωση τετραγώνου}$$

$$=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\beta^2}{2\alpha^2}+\frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\right] \quad \text{Τετράγωνο αθροίσματος}$$

$$=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\right] \quad \text{Πρόσθεση ομονύμων κλασμάτων}$$

$$=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\Delta}{4\alpha^2}\right] \quad \Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$$

Επομένως

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\Delta}{4\alpha^2}\right] \quad (1)$$

Διακρίνουμε σε αυτό το σημείο τις περιπτώσεις:

- $\Delta>0$. Τότε ισχύει $\Delta=\left(\sqrt{\Delta}\right)^2$, οπότε από την ισότητα (1) παίρνουμε

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4\alpha^2}\right]$$

$$=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)^2\right] \quad \text{Διαφορά τετραγώνων}$$

$$=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)$$

$$=\alpha\left(x-\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)\left(x-\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right) \quad x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

$$=\alpha(x-x_1)(x-x_2)$$

Επομένως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x_1)(x-x_2)$ όπου x_1,x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου.

Άρα:

Κάθε τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$ με $\Delta>0$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί σε γινόμενο δύο πρωτοβάθμιων παραγόντων.

- $\Delta=0$. Τότε από την ισότητα (1) παίρνουμε

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 \quad x_{1,2}=-\frac{\beta}{2\alpha}$$

$$=\alpha(x-x_{1,2})^2$$

Άρα:

> Κάθε τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$ με $\Delta=0$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί σε γινόμενο του α επί ένα τέλειο τετράγωνο.

• $\Delta<0$. Τότε $|\Delta|=-\Delta$, οπότε από την ισότητα (1) παίρνουμε

$$\begin{aligned}\alpha x^2+\beta x+\gamma &=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{-\Delta}{4\alpha^2}\right]\\ &=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right]\end{aligned}$$

Επειδή για κάθε $x\in\mathbb{R}$, η παράσταση μέσα στην αγκύλη είναι θετική, το τριώνυμο δεν αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων.

Άρα:

> Αν ένα τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$ έχει $\Delta<0$ δεν παραγοντοποιείται.

Για παράδειγμα:

- Για το τριώνυμο $2x^2-x-1$ έχουμε

  $$\Delta=(-1)^2-4\cdot 2\cdot(-1)=1+8=9,\ x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2\cdot 2}=\frac{1\pm 3}{4}\Rightarrow x_1=1,\ x_2=-\frac{1}{2}.$$

  Επομένως,

  $$2x^2-x-1=2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)=(x-1)2\left(x+\frac{1}{2}\right)=(x-1)(2x+1)$$

- Για το τριώνυμο $4x^2-4x+1$ έχουμε $\Delta=0$ και $x_{1,2}=\frac{1}{2}$, οπότε

  $$4x^2-4x+1=4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=(2x-1)^2.$$

  (Ή αλλιώς $4x^2-4x+1=(2x)^2-2\cdot 2x\cdot 1+1^2=(2x-1)^2$.)
- Για το τριώνυμο x^2+2x+2 έχουμε $\Delta=-4<0$, οπότε έχουμε

  $$x^2+2x+2=1\cdot\left[\left(x+\frac{2}{2\cdot 1}\right)^2+\frac{|-4|}{4\cdot 1}\right]=(x+1)^2+1.$$

  (Ή αλλιώς $x^2+2x+2=x^2+2x+1+1=x^2+2\cdot x\cdot 1+1^2+1=(x+1)^2+1$.)

Παράδειγμα 2.3.8.1

Να απλοποιηθεί το κλάσμα $\frac{2x^2-x-1}{4x^2+4x+1}$.

Λύση

Έχουμε δείξει στο πιο πάνω παράδειγμα ότι $2x^2-x-1=(x-1)(2x+1)$.
Ακόμα έχουμε $4x^2+4x+1=(2x)^2+2\cdot 2x\cdot 1+1^2=(2x+1)^2$.
Επομένως, έχουμε

$$\frac{2x^2-x-1}{4x^2+4x+1}=\frac{(x-1)(2x+1)}{(2x+1)^2}=\frac{x-1}{2x+1},\ x\neq-\frac{1}{2}.$$

Τίτλος: Παραγοντοποίηση τριωνύμου
Έκδοση: 1.0
Συντ. ανάπτυξης & σχεδιασμού: **Κέλλυ Σαρρή Πασχαλίδη**
Δημιουργία: **ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΓΡΑΦΗ**