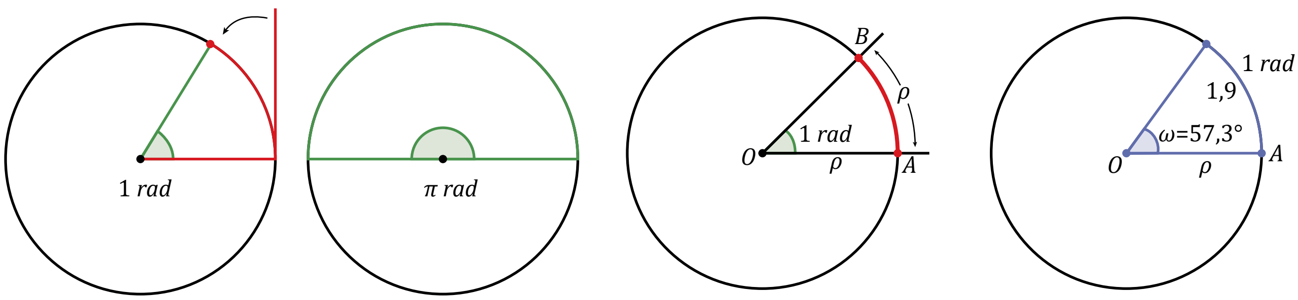
Το ακτίνιο ως μονάδα μέτρησης γωνιών

Έχουμε συνηθίσει να χρησιμοποιούμε ως μονάδα μέτρησης των τόξων και των γωνιών τη μοίρα, μία μονάδα που χρησιμοποιείται από την αρχαιότητα, ωστόσο έχουμε γνωρίσει στο Γυμνάσιο ότι το ακτίνιο είναι επίσης μία μονάδα μέτρησης τόξων και γωνιών. Για το ακτίνιο έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Με βάση τον ορισμό του ακτινίου μπορούμε να βρούμε τη σχέση μεταξύ ακτινίου και μοίρας ως μονάδες μέτρησης γωνιών (ή τόξων). Έστω ότι μία γωνία ω είναι $\mu°$ και α ακτίνια.

Ορισμός

Ακτίνιο (rad) ονομάζουμε τη γωνία που, όταν γίνει επίκεντρη σε ένα κύκλο (O,ρ), βαίνει σε τόξο που έχει μήκος ίσο με την ακτίνα ρ του κύκλου αυτού. Τότε λέμε ότι και το τόξο αυτό είναι ενός ακτινίου.



Επειδή το μήκος κύκλου ακτίνας ρ είναι $2\pi\rho$, η γωνία των 360° είναι 2π ακτίνια. Επομένως, η γωνία 1 ακτίνιο είναι ίση με $\frac{360}{2\pi}=\frac{180}{\pi}$ μοίρες, οπότε η γωνία α ακτίνια είναι $\alpha\cdot\frac{180°}{\pi}$ μοίρες. Άρα, $\mu=\alpha\cdot\frac{180°}{\pi}$ ή $\frac{\alpha}{\pi}=\frac{\mu}{180°}$.

Για παράδειγμα, αν έχουμε μία γωνία $\mu=30°$ τότε από τον τύπο $\frac{\alpha}{\pi}=\frac{\mu}{180°}$ θα έχουμε $\frac{\alpha}{\pi}=\frac{30}{180}\Leftrightarrow\alpha=\frac{30}{180}\pi$ ή $\alpha=\frac{\pi}{6}$.

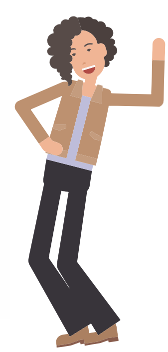
Άρα, οι 30° είναι $\frac{\pi}{6}$ ακτίνια.

Αν έχουμε μία γωνία $\alpha=\frac{\pi}{15}$ ακτίνια τότε από τον τύπο $\frac{\alpha}{\pi}=\frac{\mu}{180°}$ θα έχουμε $\frac{\frac{\pi}{15}}{\pi}=\frac{\mu}{180}\Leftrightarrow\frac{1}{15}=\frac{\mu}{180}\Leftrightarrow\mu=\frac{180}{15}$ ή $\mu=12$

Άρα, τα $\alpha=\frac{\pi}{15}$ ακτίνια είναι 12°.

Από τα παραπάνω προκύπτουν τα εξής:

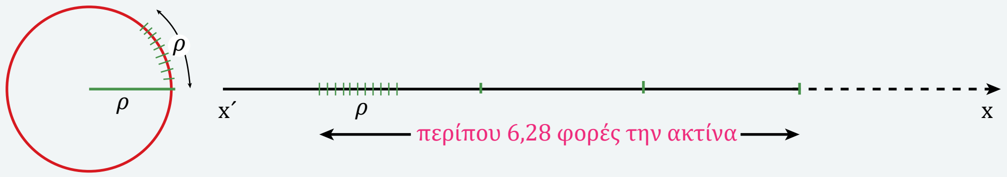
- Το μήκος ενός κύκλου είναι ίσο με 6,28 φορές την ακτίνα του.
  (Το μήκος κύκλου ακτίνας ρ είναι $2\pi\rho$ ή $2\pi\rho\simeq 2\cdot 3{,}14=6{,}28$ φορές την ακτίνα του ρ.)
- Η γωνία 1 ακτίνιο είναι περίπου ίση με 57,3°.
  (Η γωνία 1 ακτίνιο είναι ίση με $\frac{180}{\pi}=\frac{180}{3.14}\simeq 57{,}3°$.)



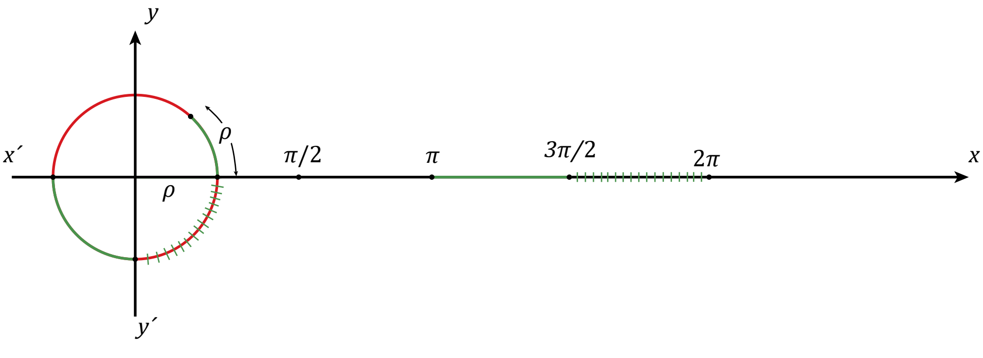
Στον πίνακα που ακολουθεί επαναλαμβάνουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μερικών γωνιών που είναι γνωστοί από το Γυμνάσιο και οι οποίοι είναι ιδιαίτερα χρήσιμοι στις διάφορες εφαρμογές.

Γωνία ω		**Τριγωνομετρικοί αριθμοί**			
σε μοίρες	σε rad	ημω	συνω	εφω	σφω
0°	0	0	1	0	Δεν ορίζεται
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	Δεν ορίζεται	0

Στο εξής όταν γράφουμε ημx, συνx, εφx κ.λπ., θα εννοούμε ημ(x rad), συν(x rad), εφ(x rad) ενώ αν έχουμε τη γωνία x σε μοίρες θα γράφουμε ημx°, συνx°, εφx° κ.λπ. Η μοίρα ορίζεται ως το $\frac{1}{360}$ του κύκλου (ή της πλήρους γωνίας) και μετράει το άνοιγμα τόξου (ή της γωνίας). (Αναζητήστε το λόγο που η μοίρα ορίζεται ως το 1/360 του κύκλου.) Ωστόσο, με δεδομένο ότι το βασικό σύνολο των αριθμών είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι λογικό να θέλουμε να μετράμε τα τόξα (ή τις γωνίες) με κάποιο τρόπο ώστε να θεωρούμε τα ανοίγματα των τόξων (ή των γωνιών) ως πραγματικούς αριθμούς. Αυτή τη δυνατότητα μας την παρέχει η μέτρηση των τόξων (ή των γωνιών) σε ακτίνια. Αυτό που στην πραγματικότητα κάνουμε σε αυτή την περίπτωση είναι να θεωρούμε ότι το μήκος ενός τόξου είναι ένας πραγματικός αριθμός και επομένως ένα σημείο της πραγματικής ευθείας. Αν «ξετυλίξουμε» ένα κύκλο και το ένα άκρο του ευθυγράμμου τμήματος που θα πάρουμε το τοποθετήσουμε στην πραγματική ευθεία όπου έχουμε ορίσει τη μονάδα ίση με την ακτίνα του κύκλου, τότε το άλλο άκρο θα συμπέσει με «αρκετά καλή» προσέγγιση με τον αριθμό 6,28 (=2 επί 3,14) (*βλ. σχήμα*).



Στο σχήμα που ακολουθεί έχουμε σχεδιάσει τον τριγωνομετρικό κύκλο (ρ=1) και τους πραγματικούς αριθμούς $\pi/2$, π, $3\pi/2$ και 2π που αντιστοιχούν στις γωνίες 90°, 180°, 270° και 360° και των οποίων οι θέσεις λαμβάνονται «ξεδιπλώνοντας» τον κύκλο πάνω στον πραγματικό άξονα.



Παράδειγμα 2.4.10.5

Να εκφραστεί
(i) γωνία 72° και 1° σε ακτίνια (ii) γωνία $\frac{11\pi}{12}$ ακτίνια και 1 ακτίνιο σε μοίρες

Λύση

Χρησιμοποιούμε τον τύπο $\frac{\alpha}{\pi}=\frac{\mu}{180}$.

(i) Έχουμε $\mu=72°$, οπότε

$$\frac{\alpha}{\pi}=\frac{72}{180} \Leftrightarrow \alpha=\frac{72}{180}\pi \Leftrightarrow \alpha=\frac{2\pi}{5}$$

Έχουμε $\mu=1°$, οπότε

$$\frac{\alpha}{\pi}=\frac{1}{180} \Leftrightarrow \alpha=\frac{1}{180}\pi \Leftrightarrow \alpha=\frac{\pi}{180}$$

(ii) Έχουμε $\alpha=\frac{11\pi}{12}$, οπότε

$$\frac{\frac{11\pi}{12}}{\pi}=\frac{\mu}{180} \Leftrightarrow \mu=\frac{11}{12}\cdot 180 \Leftrightarrow \mu=165°$$

Έχουμε $\alpha=1$, οπότε

$$\frac{1}{\pi}=\frac{\mu}{180} \Leftrightarrow \mu=\frac{180}{\pi} \simeq \frac{180}{3{,}14} \Leftrightarrow \mu \simeq 57{,}3°$$

Παράδειγμα 2.4.10.6

Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών
(i) 1140° (ii) –2115° (iii) 37π (iv) -21π

Λύση

(i) Είναι 1140°=3·360°+60° οπότε οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας 1140° ταυτίζονται με τους αντίστοιχους της γωνίας 60°. Άρα

- $ημ1140°=ημ60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $συν1140°=συν60°=\frac{1}{2}$
- $εφ1140°=εφ60°=\sqrt{3}$
- $σφ1140°=σφ60°=\frac{\sqrt{3}}{3}$

(ii) Είναι –2115°=(–6)·360°+45°. Άρα

- $ημ(-2115°)=ημ45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$
- $συν(-2115°)=συν45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$
- $εφ(-2115°)=εφ45°=1$
- $σφ(-2115°)=σφ45°=1$

(iii) Είναι $37\pi=36\pi+\pi=18\cdot 2\pi+\pi$. Οπότε:

$ημ37\pi=ημ\pi=0$, $συν37\pi=συν\pi=-1$, $εφ37\pi=εφ\pi=0$. Η $σφ\pi$ δεν ορίζεται.

(iv) Είναι $-21\pi=-22\pi+\pi=-11\cdot 2\pi+\pi$. Οπότε οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας -21π είναι οι ίδιοι με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας π.

Παράδειγμα 2.4.10.7

Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών

(i) $\frac{25\pi}{6}$ (ii) $-\frac{15\pi}{2}$

Λύση

(i) Είναι $\frac{25\pi}{6}=\frac{25}{12}\cdot 2\pi$ και από την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης έχουμε $25=2\cdot 12+1$, οπότε με διαίρεση κατά μέλη με το 2 παίρνουμε

$$\frac{25}{12}=2+\frac{1}{12} \Leftrightarrow \frac{25}{12}\cdot 2\pi=2\cdot 2\pi+\frac{1}{12}\cdot 2\pi \Leftrightarrow \frac{25\pi}{6}=2\cdot 2\pi+\frac{\pi}{6}$$

Άρα,

- $\eta\mu\frac{25\pi}{6}=\eta\mu\left(2\cdot 2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\eta\mu\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$
- $\sigma\upsilon\nu\frac{25\pi}{6}=\sigma\upsilon\nu\left(2\cdot 2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\varepsilon\varphi\frac{25\pi}{6}=\varepsilon\varphi\left(2\cdot 2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$
- $\sigma\varphi\frac{25\pi}{6}=\sigma\varphi\left(2\cdot 2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\sigma\varphi\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$

(ii) Είναι

$$\frac{15\pi}{2}=\frac{-16\pi+\pi}{2}=-\frac{16\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=-8\pi+\frac{\pi}{2}=-4\cdot 2\pi+\frac{\pi}{2},$$

οπότε

- $\eta\mu\left(-\frac{15\pi}{2}\right)=\eta\mu\left(-4\cdot 2\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\eta\mu\frac{\pi}{2}=1$
- $\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{15\pi}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(-4\cdot 2\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}=0$
- $\varepsilon\varphi\left(-\frac{15\pi}{2}\right)$ δεν ορίζεται
- $\sigma\varphi\left(-\frac{15\pi}{2}\right)=\sigma\varphi\left(-4\cdot 2\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\sigma\varphi\frac{\pi}{2}=0$

Τίτλος: «**Το ακτίνιο ως μονάδα μέτρησης γωνιών**»

Έκδοση: **1.5**

Ημερομηνία: **10/09/2025**

Συντονιστής ομάδας σχεδιασμού και ανάπτυξης: **Κέλλυ Σαρρή Πασχαλίδη**

Δημιουργία: **ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΓΡΑΦΗ**

Το παρόν αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της Πράξης «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ (MIS) 6010165, του Προγράμματος «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή 2021-2027» που υλοποιείται από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής και συγχρηματοδοτείται από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο.