

Τριγωνομετρικοί Αριθμοί

Ανάλογα, ας υποθέσουμε ότι ο ημίμαξονας Ox ενός συστήματος συντεταγμένων Oxy περιστρέφεται γύρω από το O κατά την αρνητική φορά (ίδια με τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού). Αν πραγματοποιήσει μία πλήρη περιστροφή και περιστραφεί επιπλέον και κατά γωνία μέτρου 30° , τότε λέμε ότι ο Ox έχει $\omega = -(360^\circ + 30^\circ) = -390^\circ$. Αν πραγματοποιήσει δύο πλήρεις περιστροφές και περιστραφεί επιπλέον και κατά γωνία μέτρου 30° , τότε ο άξονας Ox έχει διαγράψει γωνία $\omega = -(2 \cdot 360^\circ + 30^\circ) = -(720^\circ + 30^\circ) = -750^\circ$.

Γενικά, αν πραγματοποιήσει n πλήρεις περιστροφές και περιστραφεί επιπλέον και κατά γωνία μέτρου 30° , τότε η γωνία που διαγράφει ο ημίμαξονας Ox είναι

$$\omega = -(k \cdot 360^\circ + 30^\circ), \text{ όπου } k \in \mathbb{N}^*.$$

Επομένως, οι γωνίες που είναι μικρότερες από -360° μπορούν να πάρουν τη μορφή $\omega = -(k \cdot 360^\circ + \theta^\circ)$, όπου $k \in \mathbb{N}^*$ και $-0^\circ < \theta^\circ < 360^\circ$.

Από την πλευρά της γεωμετρίας (ή της διαισθητικής κατανόησης) το παραπάνω συμπέρασμα σημαίνει ότι η γωνία ω° έχει την ίδια τελική πλευρά με τη γωνία $-\theta^\circ$ οπότε, οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της ω° θα είναι οι ίδιοι με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας θ° .

Αυτό από πρακτικής πλευράς, μας λέει ότι

Αν γνωρίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών από 0° έως 360° , τότε γνωρίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς οποιασδήποτε γωνίας είτε γράφεται κατά τη θετική είτε κατά την αρνητική φορά.

Με βάση τα παραπάνω όλες οι γωνίες της μορφής $k \cdot 360^\circ + \theta$, $k \in \mathbb{Z}$ (παρατηρήστε ότι εδώ μπορούμε να γράφουμε θ αντί για θ°) έχουν την ίδια τελική πλευρά, συνεπώς έχουν τους ίδιους πραγματικούς αριθμούς με τη γωνία θ .

Άρα, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ ισχύει

$$\begin{aligned} \eta\mu(k \cdot 360^\circ + \theta) &= \eta\mu\theta & \text{συν}(k \cdot 360^\circ + \theta) &= \text{συν}\theta \\ \epsilon\phi(k \cdot 360^\circ + \theta) &= \epsilon\phi\theta & \sigma\phi(k \cdot 360^\circ + \theta) &= \sigma\phi\theta \end{aligned}$$

Για παράδειγμα

$$\begin{aligned} \eta\mu 730^\circ &= \eta\mu(2 \cdot 360^\circ + 10^\circ) = \eta\mu 10^\circ & \text{συν} 730^\circ &= \text{συν}(2 \cdot 360^\circ + 10^\circ) = \text{συν} 10^\circ \\ \epsilon\phi 730^\circ &= \epsilon\phi(2 \cdot 360^\circ + 10^\circ) = \epsilon\phi 10^\circ & \sigma\phi 730^\circ &= \sigma\phi(2 \cdot 360^\circ + 10^\circ) = \sigma\phi 10^\circ \\ \eta\mu(-800^\circ) &= \eta\mu(-2 \cdot 360^\circ - 80^\circ) = \eta\mu(-80^\circ) & \text{συν}(-800^\circ) &= \text{συν}(-2 \cdot 360^\circ - 80^\circ) = \text{συν}(-80^\circ) \\ \epsilon\phi(-800^\circ) &= \epsilon\phi(-2 \cdot 360^\circ - 80^\circ) = \epsilon\phi(-80^\circ) & \sigma\phi(-800^\circ) &= \sigma\phi(-2 \cdot 360^\circ - 80^\circ) = \sigma\phi(-80^\circ) \end{aligned}$$



Παράδειγμα 2.4.10.1

Να σχεδιάσετε δύο ζεύγη γωνιών με κορυφή την αρχή των αξόνων και αρχικές πλευρές στον θετικό ημίμαξονα (στο εξής θα σχεδιάζουμε τις γωνίες πάντα με αυτό τον τρόπο) οι οποίες να έχουν την ίδια τελική πλευρά αλλά να μην είναι ίσες.

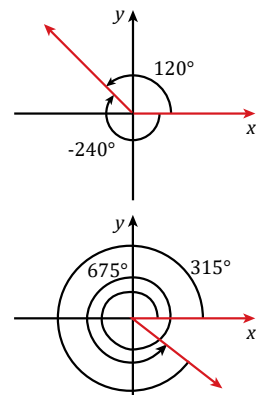
Λύση

Η γωνία 120° έχει την ίδια τελική πλευρά με τη γωνία -240° , αφού $-240^\circ = -360^\circ + 120^\circ$.

Η γωνία 315° έχει την ίδια τελική πλευρά με τη γωνία 675° , αφού $675^\circ = 360^\circ + 315^\circ$.

Επίσης, η γωνία 315° έχει την ίδια τελική πλευρά με τη γωνία -45° , αφού $-45^\circ = -360^\circ + 315^\circ$.

Οι γωνίες που η θέση της τελικής τους πλευράς λαμβάνεται από την περιστροφή του ημίμαξονα Ox αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού λέμε ότι είναι **θετικά προσανατολισμένες**, ενώ οι γωνίες που η θέση της τελικής τους πλευράς λαμβάνεται από την περιστροφή του ημίμαξονα Ox με την ίδια φορά με τους δείκτες του ρολογιού λέμε ότι είναι **αρνητικά προσανατολισμένες**.



Τίτλος: «**Τριγωνομετρικοί Αριθμοί**»

Έκδοση: **1.5**

Ημερομηνία: **10/09/2025**

Συντονιστής ομάδας σχεδιασμού και ανάπτυξης: **Κέλλυ Σαρρή Πασχαλίδη**

Δημιουργία: **ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΓΡΑΦΗ**



Το παρόν αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της Πράξης «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ (ΜΙΣ) 6010165, του Προγράμματος «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή 2021-2027» που υλοποιείται από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής και συγχρηματοδοτείται από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο.



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας, Θρησκευμάτων
και Αθλητισμού



Με τη συγχρηματοδότηση
της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Πρόγραμμα
Ανθρώπινο Δυναμικό και
Κοινωνική Συνοχή