

1.1.1. Τι είναι οι πραγματικοί αριθμοί;**Α' ΟΜΑΔΑ**

1. Δεκαδικός, δεκαδικός περιοδικός, δεκαδικός, δεκαδικός περιοδικός,
2. Κάθε αρνητικός ακέραιος είναι αντίθετος ενός φυσικού και επομένως το πλήθος των αρνητικών ακεραίων είναι άπειρο, οπότε και οι ακέραιοι θα είναι άπειροι.
3. Το σύνολο αυτών των κλασμάτων της μορφής $1/n, n=1,2,...$ είναι άπειρο γιατί ο παρονομαστής τους παίρνει άπειρες τιμές: $n=1,2,...$. Το σύνολο των θετικών ρητών που είναι μικρότεροι από το 1 είναι άπειρο γιατί περιέχει το άπειρο σύνολο των κλασμάτων της μορφής $1/\omega, \omega=1,2,3,...$ που είναι άπειρο.

Β' ΟΜΑΔΑ

1. Παίρνοντας ακόμα ένα ψηφίο θα πάρουμε μια καλύτερη προσέγγιση του $\sqrt{2}$ από την προηγούμενη, η οποία, ωστόσο, πάντοτε παραμένει να είναι μικρότερη του $\sqrt{2}$. Επομένως με κάθε πάτημα του πλήκτρου enter και αυτό «θεωρητικά» μπορούμε να το κάνουμε άπειρες φορές παίρνοντας ακόμα ένα δεκαδικό ψηφίο αλλά πάντα ένα αριθμό μικρότερο από το $\sqrt{2}$.
2. Θεωρούμε το σημείο O στο 0 της πραγματικής ευθείας και το σημείο A στο 1. Φέρουμε την κάθετη στο σημείο A και παίρνουμε πάνω σε αυτή ευθύγραμμο τμήμα AM μήκους 1 (κατασκευάστε το σχήμα). Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο OAM έχει έχουμε $OM^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, οπότε $OM = \sqrt{2}$. Στη συνέχεια με το διαβήτη μετράμε επάνω στην πραγματική ευθεία με αρχή το 0 μήκος OB ίσο με το OM . Ο αριθμός $\sqrt{2}$ βρίσκεται στο B .

1.1.2. Πυκνότητα και διαδοχικότητα πραγματικών αριθμών**Α' ΟΜΑΔΑ**

1. Δύο πραγματικοί αριθμοί α και β με $\alpha < \beta$ ορίζουν στην πραγματική ευθεία ένα διάστημα με άκρα του αριθμούς αυτούς και όλα τα σημεία που βρίσκονται στα δεξιά του α και στα αριστερά του β είναι σημεία του διαστήματος αυτού και επομένως αντιπροσωπεύουν ένα αριθμό μεγαλύτερο από το α και μικρότερο από το β . Ένας τέτοιος αριθμός είναι αυτός που αντιστοιχεί στο μέσον του διαστήματος, δηλαδή, ο $(\alpha + \beta)/2$ (γιατί;)
2. Ένας τέτοιος αριθμός είναι το $(0,3333 + 0,3334)/2 = 0,33335$.
3. Εργαζόμαστε με ανάλογο τρόπο και παρόμοια επιχειρήματα όπως στην Άσκηση 1. Έστω A και B τα σημεία της πραγματικής ευθείας που αναπαριστούν τους αριθμούς $\sqrt{2}$ και του $\sqrt{3}$. Χωρίζουμε το ευθύγραμμο τμήμα AB (είναι μια ωραία γεωμετρική κατασκευή αυτή) σε 5 ίσα διαστήματα με τα σημεία K, L, M, N . Το μήκος του AB είναι $\sqrt{3} - \sqrt{2}$, οπότε θα έχουμε $AK = KL = LM = MN = NB = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{5}$ και τα σημεία K, L, M και N θα αντιπροσωπεύουν τους αριθμούς $\sqrt{2} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{5}$, $\sqrt{2} + 2 \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{5}$, $\sqrt{2} + 3 \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{5}$ και $\sqrt{2} + 4 \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{5}$.

Β' ΟΜΑΔΑ

1. Αν A και B είναι τα σημεία που αντιπροσωπεύουν τους ρητούς 1,414 και του 1,415 τότε το μέσον M του AB που αντιπροσωπεύεται από το ρητό $(1,414 + 1,415)/2 = 1,4145$ βρίσκεται μεταξύ των A και M .

Όμοια το μέσον N του AM βρίσκεται μεταξύ του A και M και επομένως μεταξύ του A και B κοκ. Αυτή η διαδικασία θεωρητικά μπορεί να συνεχιστεί άπειρες φορές γιατί κάθε έχουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα του οποίου παίρνουμε το μέσον και προφανώς όλα τα ευθύγραμμα τμήματα έχουν μέσον όσο μικρά και αν είναι. Παρατηρήστε ότι αν στο δεκαδικό αριθμό 1,414 προσθέσουμε οποιοδήποτε πλήθος δεκαδικών ψηφίων ο αριθμός που προκύπτει είναι πάντοτε μικρότερος από τον 1,415. Επομένως, προσθέτοντας ένα οποιαδήποτε πλήθος δεκαδικών μη περιοδικών ψηφίων βρίσκουμε ένα άρρητο αριθμό μεταξύ του 1,414 και του 1,415.

2. Αν A και B τα σημεία της ευθείας που αντιπροσωπεύουν τους αριθμούς $\pi-0,1$ και π τότε ο αριθμός $\frac{(\pi-0,1)+\pi}{2}$ αντιπροσωπεύει το μέσο M του AB και τότε ο αριθμός $(\pi-0,1)+\frac{(\pi-0,1)+\pi}{3}$ αντιπροσωπεύει το σημείο N που βρίσκεται στο $1/3$ της διαδρομής από το A στο B . (βλ. και Ασκήσεις 1,2 και 3).
3. $c+(a+b)/2, c=(0,9999+1)/2=1,4999$

1.1.3. Διάταξη πραγματικών αριθμών

Α' ΟΜΑΔΑ

1. (α) $x=6$ ή $x=-4$ (β) $x=2$ (γ) $x=2$ (δ) $x=-3$ ή $x=-\frac{7}{3}$
2. (α) $x=-3$ ή $x=7$ (β) $x=8$ ή $x=6$ (γ) $x=-40$ ή $x=0$ (δ) $x=5,6$ ή $x=-20/3$ ή $x=-0,8$

Β' ΟΜΑΔΑ

1. (α) $-1/2 < x < 1/2$ (β) $x < -3/5$ ή $x > 3/5$ (γ) $5/4 < x < 11/4$ (δ) $x \leq -\frac{17}{5}$ ή $x > -\frac{13}{5}$
2. $x=-12$ ή $x=0$ (Χρησιμοποιήστε την πραγματική ευθεία.)
3. $\alpha/\beta < 1 < \beta/\alpha$ και αν $1 < \alpha < \beta$ τότε ο α/β είναι πιο κοντά στο 1 από τον β/α .

1.1.4. Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

Α' ΟΜΑΔΑ

1. (α) $\sqrt{2}-1$ (β) $-\sqrt{2}+\sqrt{3}$ (γ) $2\pi-7$ (δ) $11-\pi^2$
2. 0
3. (α) $-x$ αν $x < 0$, x αν $x > 0$, 0 αν $x=0$ (β) $x-1$ αν $x > 0$ ή $x=0$, $-x+1$ αν $x < 0$ (γ) x^2+1 (δ) x^2+1
4. $4\alpha-3\beta-\gamma$
5. (α) $x=1/2$ ή $x=-1/2$ (β) $x=-1$ ή $x=-3$ (γ) $x \in \mathbb{R}$ (δ) $x=0$

Β' ΟΜΑΔΑ

1. Ετερόσημοι ή ένας τουλάχιστον είναι 0
2. 3, x, y θετικοί.
3. (α) $2x$ αν $x > 0$ ή $x=0$, 0 αν $x < 0$ (β) x^2 αν $x > 0$ ή $x=0$, $-x^2$ αν $x < 0$, (γ) $2x$, αν $x > 0$ ή $x=0$, 2, αν $-1 < x < 1$ ή $x=-1$ και $-2x-2$ αν $x < -1$ (δ) $3x$ αν $x \geq 2,4$ αν $-2 \leq x < 2$ και $-3x-4$ αν $x < -2$

1.1.5. Ιδιότητες απόλυτης τιμής

Α' ΟΜΑΔΑ

2. Είναι $|x^3 - x^2 + x - 1| = |x^3 + (-x^2) + x + (-1)| = |x|^3 + |x|^2 + |x| + 1 \leq 3^3 + 3^2 + 3 + 1 = 40$
3. (α) 5 (β) $\frac{6}{5}$ (γ) $\frac{1}{2}$ (δ) $0, \frac{2}{3}$
4. (α) $1 < x < 2$ (β) $x \leq 0$ ή $x \geq 3$ (γ) $x \neq 1$ (δ) $-1 \leq x < 1$ ή $3 < x \leq 5$
5. (α) $|5(x-3)| \leq 15$ (β) $-\frac{12}{5} \leq x \leq \frac{18}{5}$ (γ) $x < \frac{1}{2}$ ή $x > \frac{3}{2}$ (δ) $x < -\frac{9}{4}$ ή $x > \frac{15}{4}$

Β' ΟΜΑΔΑ

1. $\alpha = 1$
2. $\alpha = 4, \beta = 2$

1.1.6. Ν-οστή ρίζα πραγματικού αριθμού

Α' ΟΜΑΔΑ

1. (α) 2 (β) 32 (γ) 7 (δ) 5
2. (α) $|x|$ (β) x (γ) x^2 (δ) $2x^2$
3. $\varphi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$
4. (α) $3\sqrt{2}$ (β) 0 (γ) $\sqrt[15]{3^{13}}$ (δ) $2 - \sqrt{3}$
5. (α) $8\sqrt{5}$ (β) 2 (γ) $\sqrt{2} - 1$ (δ) 5
6. (α) $48\sqrt{2}$ (β) 30 (γ) $8\sqrt[4]{27}$

Β' ΟΜΑΔΑ

1. (α) $\sqrt[3]{\alpha}$ (β) $\sqrt[10]{\alpha^7}$ (γ) $\sqrt[4]{3}$
2. $\pi = 2\sqrt{2} - \sqrt{3}$
3. (α) $2\sqrt{2}$ (β) $\sqrt{2\sqrt{2}}$ (γ) 1 (δ) $2\sqrt[4]{2}$
4. Έστω ότι $\sqrt{3} - \sqrt{2} = \rho$, όπου ρ ένας ρητός. Τότε $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = \rho^2 \Leftrightarrow 3 + 2 - 2\sqrt{6} = \rho^2 \Rightarrow \sqrt{6} = \frac{5 - \rho^2}{2}$. Η τελευταία ισότητα ωστόσο δεν μπορεί να ισχύει αφού το πρώτο μέλος της είναι άρρητος και το β' μέλος ρητός.
5. Έχουμε $\sqrt{7} - \sqrt{5} > \sqrt{5} - \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{7} + \sqrt{3} > 2\sqrt{5} \Leftrightarrow (\sqrt{7} + \sqrt{3})^2 > (2\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow 7 + 3 + 2\sqrt{21} > 20 \Leftrightarrow \sqrt{21} > 5 \Leftrightarrow 21 > 25$, το οποίο είναι ψευδές.

1.1.7. Δυνάμεις με ρητό εκθέτη

Α' ΟΜΑΔΑ

1. (α) $3^{\frac{2}{3}}$ (β) $2^{\frac{1}{2}}$ (γ) $3^{\frac{2}{3}}$ (δ) $2^{\frac{3}{2}}$

2. (α) 3 (β) $1/3$ (γ) 3 (δ) 16
3. (α) $1/3$ (β) $8\sqrt[3]{2}$ (γ) $1/3$ (δ) $9/4$
4. A=5
5. (α) 2 (β) 4 (γ) $7\sqrt{2}$ (δ) $4\sqrt{2}$
6. (α) $x=9$ (β) $x=4\sqrt{2}$ (γ) $x=2$ (δ) $x=3$

Β' ΟΜΑΔΑ

1. Οι λύσεις των εξισώσεων είναι $x=\pm 8k$ και $x=8$, αντίστοιχα. Οι εξισώσεις δεν είναι ισοδύναμες γιατί η 1^η έχει νόημα, για κάθε x , αφού $x^2 \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ενώ η 2η μόνο για $x > 0$.
2. (α) $\alpha - \beta$ (β) $\alpha + \beta - 2\sqrt{\alpha\beta}$ (γ) $\alpha\sqrt{\beta} + \beta\sqrt{\alpha}$
3. (α) $(\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta})^3$ (β) $\alpha^2 + \alpha + 1$ (γ) $\alpha^{\frac{1}{3}} + 2\alpha^{\frac{1}{3}} + 1$

1.1.8. Αλγεβρικές παραστάσεις με ρίζες

Α' ΟΜΑΔΑ

1. $xy=16$
2. (α) $2\sqrt{2}$ (β) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (γ) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (δ) $3\sqrt{6}$
3. (α) $3(\sqrt{2}+1)$ (β) $\sqrt{2}+1$ (γ) $2\sqrt{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$ (δ) $\frac{5\sqrt{5+3\sqrt{3}}}{14}$

Β' ΟΜΑΔΑ

1. (α) 6 (β) 2 (γ) $2\sqrt{2}$ (δ) $2\sqrt{2}$
2. Χρησιμοποιήστε την ισοδυναμία $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma$
3. Χρησιμοποιήστε την ισοδυναμία $\alpha' = \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha\alpha' = 1$

2.1.1. Εισαγωγή στα σύνολα

Α' ΟΜΑΔΑ

1. Δίας, Ήρα, Ποσειδώνας, Δήμητρα, Αθηνά, Απόλλωνας, Άρτεμις, Άρης, Ήφαιστος, Αφροδίτη, Ερμής, Διόνυσος.
2. Η μεγάλη πυραμίδα της Γκίζας, Οι Κρεμαστοί κήποι της Βαβυλώνας, Το Χρυσελεφάντινο άγαλμα του Ολυμπίου Διός, Ο Ναός της Αρτέμιδος στην Έφεσο, Το Μαυσωλείο της Αλικαρνασσού, Ο Κολοσσός της Ρόδου, Ο Φάρος της Αλεξάνδρειας.
3. 11
4. Όχι, γιατί κάθε στοιχείο ενός συνόλου είναι γραμμένο μια φορά. Επομένως, για χρησιμοποιήσουμε το συγκεκριμένο πρόγραμμα πρέπει να εντοπίσουμε και να διαγράψουμε τις υπάρχουσες διπλοεγγραφές.
5. 7, 6
6. 12



Β' ΟΜΑΔΑ

7. 15.
8. 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400, 441, 484, 529, 625, 676, 729, 784, 841, 900
9. Τα στοιχεία του συνόλου είναι οι αριθμοί 2,3,5, 7 και 11
10. Το ζητούμενο σύνολο περιέχει τα ζεύγη: (2,3), (2,5), (2,7), (3,4),(3,5),(3,7), (4,5),(4,7), (5,6),(5,7) και (6,7)
11. Το ζητούμενο σύνολο περιέχει τα στοιχεία: 3,6 και 9. Κανένα
12. Το σύνολο των πολλαπλασίων του 7 αποτελείται από όλους τους φυσικούς αριθμούς της μορφής $7 \cdot n, n=1,2,\dots$. Επομένως, το σύνολο που αποτελείται από στοιχεία αυτής της μορφής έχει το ίδιο πλήθος στοιχείων με το σύνολο των φυσικών αριθμών αφού κάθε στοιχείο του αντιστοιχίζεται σε ένα φυσικό αριθμό. Το $7 \cdot 1$ στο 1, το $7 \cdot 2$ στο 2, το $7 \cdot 3$ στο 3 κ.ο.κ. Γενικά, δύο σύνολα που τα στοιχεία τους μπορούν αντιστοιχιστούν ένα προς ένα έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων.

2.1.2. Αναπαράσταση συνόλων**Α' ΟΜΑΔΑ**

1. $\Sigma = \{9,16,25,36,49,64,81\}$
2. $B = \{9, 15\}$
3. $A = \{1,3,5,7,9,11\}$
4. $\Sigma = \{-9,-6,-3,0,3,6,9\}$
5. $K = \{2,4,8,16,32\}$
6. **(α)** $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x \leq 3\}$ **(β)** $B = \{x = 2k \mid -1 \leq k \leq 4\}$.

Β' ΟΜΑΔΑ

1. **(α)** $\Gamma = \{x \mid x = 2n - 1, n = 1, 2, \dots\}$ **(β)** $\Delta = \{x = 4n - 3, n = 1, 2, \dots\}$.
2. **(α)** $A = \{3, 6, 9\}$ **(β)** $B = \{2\}$
3. **(α)** $\Gamma = \{-2, 2\}$ **(β)** $\Delta = \{20, 50, 100\}$
4. $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$. Τα A και B έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία. Λέμε ότι είναι ίσα σύνολα
5. **(α)** Το 11 είναι στοιχείο του A αλλά όχι του B, γιατί $11 = 2 \cdot 5 + 1$ και $11 = 4 \cdot 2 + 3$. **(β)** Κάθε στοιχείο του συνόλου B είναι και στοιχείο του A, αφού οι αριθμοί που διαιρούνται με το 4 και αφήνουν υπόλοιπο 1, διαιρούνται και με το 2 και αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο. **(γ)** Έχουν άπειρο πλήθος στοιχείων, γιατί για κάθε στοιχείο του καθενός χρησιμοποιείτε έναν φυσικό αριθμό n. Επομένως και τα δύο έχουν τόσα στοιχεία όσα και το σύνολο των φυσικών αριθμών, δηλαδή άπειρα. Το «παράξενο» συμπέρασμα είναι ότι το B περιέχει ένα μέρος των στοιχείων του A έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων.

2.1.3. Τα σύμβολα \in και \notin **Α' ΟΜΑΔΑ**

1. Το $\{2\} \in A$ ενώ το $2 \notin A$. Το A περιέχει σύνολα και όχι αριθμούς.

2. Το $12 \notin A$ γιατί δεν είναι δύναμη του 2. Το $64 = 2^6 \in A$.
3. Το $2 \notin A$ ενώ το $1 \in A$. Επίσης, στο A ανήκουν το 0 και το $1/3$, γιατί το A περιέχει τις ρίζες της εξίσωσης $3x^3 - 4x^2 + x = 0$ που είναι το 0, το 1 και το $1/3$ (επιβεβαιώστε το).
4. **(α)** $2 \in \{1, 2, 3\}$ **(β)** $\{2\} \notin \{1, 2, 3\}$ **(γ)** $\{2\} \subset \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ **(δ)** $2 \notin \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$
5. **(α)** $\emptyset \subset \{1, 2, 3\}$ **(β)** $\{\emptyset\} \notin \{1, 2, 3\}$ **(γ)** $\{\emptyset\} \notin \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ **(δ)** $\{\{\emptyset\}\} \subset \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$

Β' ΟΜΑΔΑ

1. Έχουν το 0, γιατί $A = \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}$ και $B = \{0\}$
2. $A = B = \{-1, 0, 1\}, \Gamma = \emptyset$
3. Το $1024 \notin A$, γιατί $1024 = 4 \cdot 256$. Το $514 \in A$, γιατί $514 = 4 \cdot 128 + 2$
4. Έστω ότι το x είναι κοινό. Τότε $x = 4\kappa + 3$ και $x = 6\lambda + 2$ όπου τα κ, λ είναι κ φυσικοί. Επομένως, θα έχουμε:
 $4\kappa + 3 = 6\lambda + 2 \Leftrightarrow 6\lambda - 4\kappa = 1 \Leftrightarrow 2(3\lambda - 2\kappa) = 1 \Leftrightarrow 3\lambda - 2\kappa = \frac{1}{2}$. Η τελευταία ισότητα όμως είναι αδύνατη γιατί το α' μέλος είναι ακέραιος και το β' μέλος είναι κλάσμα.
5. Έχουν κοινό το 2 (γιατί είναι ο μοναδικός άρτιος που είναι πρώτος και το A αποτελείται από όλους τους άρτιους. Εφόσον όλοι οι πρώτοι εκτός από το 2 είναι περιττοί, προσθέτοντας το 1 σε κάθε στοιχείο του B παίρνουμε έναν άρτιο, επομένως στοιχείο του A , εκτός από το $3 = 2 + 1$ που είναι περιττός. Επομένως το 3 είναι το μόνο στοιχείο του Γ που δεν ανήκει στο A και που ανήκει στο B .

2.1.4. Σχέσεις και πράξεις μεταξύ συνόλων

Α' ΟΜΑΔΑ

1. Είναι $A = \{-1, 0, 1\} = B$
2. Για να ορίζεται το A αρκεί $\lambda^3 - \lambda \neq 6 \Leftrightarrow \lambda \neq 2[\lambda^3 - \lambda - 6 \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda^3 - 8) - (\lambda - 2) \neq 0 \text{ κ.λπ.}]$, γιατί ΔΕΝ επιτρέπεται ένα στοιχείο ενός συνόλου να είναι γραμμένο 2 φορές. Για $\lambda \neq 2$ και $A = B$ αρκεί $\mu = 1$.

1. **(α)** 21 **(β)** Άπειρο
2. **(α)** Άπειρο **(β)** 8
3. 6, 3, 2
4. 13, 1, 7

Β' ΟΜΑΔΑ

1. $E \cap P = \{2\}$, Οι άρτιοι εκτός από το 2 και οι περιττοί που δεν είναι πρώτοι.
2. $A \cap B = \{0\}, A \cup B = \mathbb{R}$
3. **(α)** $A = B$ **(β)** $A \neq B$
4. Είναι σωστό. $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$

2.2.1. Αξιοσημείωτες ταυτότητες

Α' ΟΜΑΔΑ

3. $1/2, -3/5$
4. $xy=0, (x=\sqrt{2} \text{ και } y=0) \text{ ή } (x=0 \text{ και } y=\sqrt{2})$
5. $7, 7\sqrt{3}$
6. $\frac{3\sqrt{7}}{2} - 1$

Β' ΟΜΑΔΑ

1. $-\frac{1}{2}$
4. (ii) $13 \cdot 41 = (2^2 + 3^2)(4^2 + 5^2)$
5. Θεωρείστε τους διαδοχικούς φυσικούς $n, n+1, n+2, n+3$ κ.λπ...

2.2.2. Παραγοντοποίηση - Μετασχηματισμός αλγεβρικών παραστάσεων

Α' ΟΜΑΔΑ

1. (α) $999^2 = (10^4 - 1)(10^4 + 1) = \dots$ (β) $(1111 - 111)(1111 + 111) = \dots$ (γ) $(100 - 2)(100 + 2) = \dots$
(δ) $\frac{(2,18 - 0,82)(2,18 + 0,82)}{136} = \dots$
2. Ορθογώνιο
3. (α) $x(x-1)(x+1)$ (β) $-(14x+27y)(22x+15y)$ (γ) $-(x+1)(7x^2-4x+1)$ (δ) $(xy^2+z)(x^2y^4-xy^2z+z)$
4. (α) $-\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^2$ (β) 1 (γ) $\frac{1}{(x-1)(x+1)}$ (δ) $\frac{x-2}{(x-1)(x+1)^2}$
5. 6, 76

Β' ΟΜΑΔΑ

1. (α) 13 (β) $\frac{13}{4}$ (γ) -45 (δ) 161
2. 20,15
3. 12,16,20
4. $1/12, 3/11$
5. (α) $(2\alpha\beta - 4\alpha - 1)(2\alpha\beta + 4\alpha - 1)$ (β) $(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$ (γ) $(\alpha - \beta)(\alpha + 3\beta)$
(δ) $\alpha^4 - 9\alpha^2 + 18 = \alpha^4 - 3\alpha^2 - 6\alpha^2 + 18 = \dots = (\alpha - \sqrt{3})(\alpha + \sqrt{3})(\alpha - \sqrt{6})(\alpha + \sqrt{6})$
6. (α) Πρέπει $xy > 0$ και $|x| > |y|$. (β) Άπειρα. (γ) Για κάθε x, y με $xy > 0$ και $|x| > |y|$ οι αριθμοί $\alpha = x^2 + y^2, \beta = 2xy$ και $\gamma = x^2 - y^2$ αποτελούν πλευρές ορθογωνίου τριγώνου.
7. Ναι, γιατί το εμβαδόν του έγχρωμου τμήματος του πρώτου σχήματος είναι ίσο με $\alpha^2 - \beta^2$ και ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των τραπεζιών στο δεύτερο σχήμα ή με το εμβαδόν του ορθογωνίου στο τελευταίο σχήμα που είναι ίσο με $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$.
8. Ναι. Χρησιμοποιήστε ανάλογα επιχειρήματα με εκείνα της Άσκησης 7.

2.3.1. Εξισώσεις 1ου βαθμού

Α' ΟΜΑΔΑ

- (α) $17/26$ (β) 3 (γ) $0, 1$ (δ) -1
- (α) $x = \frac{1}{\lambda-1}$, $\lambda \neq \pm 1$, αόριστη για $\lambda = -1$, αδύνατη για $\lambda = 1$ (β) $x = \frac{1}{\lambda}$, $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$, αόριστη για $\lambda = 1$, αδύνατη για $\lambda = 0$ (γ) $x = \frac{\lambda}{\lambda-1}$, $\lambda \neq -1$ και $\lambda \neq 1$, αόριστη για $\lambda = -1$, αδύνατη για $\lambda = 1$
- (α) $x = \frac{9}{\lambda+9}$, $\lambda \neq -9$, αδύνατη για $\lambda = -9$ (β) $x = 1$, $\lambda \neq -4$, αόριστη για $\lambda = -4$ (γ) αόριστη για $\lambda = 0$ ή $\lambda = 1$, αδύνατη για $\lambda \neq 0$ ή $\lambda \neq 1$ (δ) $x = \lambda - 4$, $\lambda \neq -4$, αόριστη για $\lambda = 4$
- (α) $\alpha = 4$, $\beta = -2$ (β) $\alpha = 5$, $\beta = -1$

Β' ΟΜΑΔΑ

- 9, 11, 13
- 14, 16, 18.
- 1, 2, 3.
- $\lambda = 1$
- $\lambda = -1$ ή $\lambda = 1/2$. Για $\lambda = -1$ το 2 είναι μοναδική λύση, ενώ για $\lambda = 1/2$ υπάρχουν άπειρες λύσεις.
- (α) $-1, -1$. (β) -3 (γ) $-7, 7$ (δ) $x = 0$ (διπλή ρίζα) ή $x = \pm \sqrt{14}$
- $x = \alpha/2$, $x = \alpha/3$

2.3.2. Ανισοτικές σχέσεις και διάταξη

Α' ΟΜΑΔΑ

- (α) $(\alpha-3)^2 + 1 > 0$ (β) $(\alpha+1)^2 + (\beta+1)^2 \geq 0$
- (α) $x = 1, y = -2$ (β) $x = 2, y = -2$
- $10 < \Pi < 24$, $6 < E < 36$
- $\frac{\alpha}{R} < 1 \Rightarrow \frac{\alpha+\gamma}{R+\nu} > \frac{\alpha}{R}$
- (α) $8,7 < 2x+3y < 12,2$ (β) $-2,8 < 3x-2y < -0,3$ (γ) $\frac{1}{1,3} + \frac{1}{3,2} < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} < \frac{1}{1,2} + \frac{1}{2,1}$ (δ) $\frac{1,2}{3,2} < \frac{x}{y} < \frac{1,3}{2,1}$
- (α) $-\frac{1}{3} < x-y < 0$ (β) $\frac{12}{36} < x^2+y^2 < \frac{25}{36}$ (γ) $\frac{13}{30} < \frac{x^2+y^2}{x+y} < \frac{25}{42}$ (δ) $-\frac{13}{12} < \frac{x^2+y^2}{x-y} < \frac{25}{6}$

Β' ΟΜΑΔΑ

- $\alpha^3 - \beta > \alpha^2 \beta - \alpha$
- $\alpha^3 + \beta^3 \geq \alpha^2 \beta + \alpha \beta^2$
- Αν $\alpha < 1$ και $\beta < 1$ τότε $\alpha + \beta < \alpha\beta + 1$ και το 1 βρίσκεται μεταξύ των α και β τα τότε $\alpha + \beta > \alpha\beta + 1$
- Είναι $\beta\gamma - \alpha\delta = \beta\gamma - \alpha\beta + \alpha\beta - \alpha\delta = \beta(\gamma - \alpha) - \alpha(\delta - \beta)$ και επειδή $\beta + \gamma = \alpha + \delta$ έχουμε $\delta - \beta = \gamma - \alpha$, οπότε $\beta\gamma - \alpha\delta = \beta(\gamma - \alpha) - \alpha(\gamma - \alpha) = (\gamma - \alpha)(\beta - \alpha) > 0$.

$$10. \left(\frac{5}{7}\right)^3 + \left(\frac{6}{7}\right)^3 = \frac{125}{343} + \frac{216}{343} = \frac{341}{343} < 1 \quad \text{και} \quad \left(\frac{5}{7}\right)^{100} + \left(\frac{6}{7}\right)^{100} < \left(\frac{5}{7}\right)^3 + \left(\frac{6}{7}\right)^3 < 1$$

2.3.3. Εξισώσεις και ανισώσεις με απόλυτες τιμές

Α' ΟΜΑΔΑ

1. (α) $x = -3$ ή $x = 5$ (β) $y = -3$ ή $y = 11/2$
2. (α) $x = -2$ ή $x = 5/4$ (β) $y = -3$ ή $y = 1$ ή $y = 5$
3. (α) $x < -3$ ή $x > 11$ (β) $-5 < y < 11/3$
4. (α) $x < -2$ ή $\frac{1}{2} < x < 2$ (β) $y \leq -\frac{3}{7}$ ή $y \geq \frac{3}{2}$
5. (α) $x \neq 1$ (β) $-1 \leq x < 1$ ή $3 < x \leq 5$
6. $x = -1$ και $x = 2$

Β' ΟΜΑΔΑ

1. (α) $-\frac{12}{5} \leq x \leq \frac{18}{5}$ ή $x \in \left[-\frac{12}{5}, \frac{18}{5}\right]$ (β) $\left(x < -\frac{9}{4} \text{ ή } x > \frac{15}{4}\right)$ ή $x \in \left(-\infty, -\frac{9}{4}\right) \cup \left(\frac{15}{4}, \infty\right)$
2. $x = -2, x = -1$ και $x = 2$
3. $x = 1$
4. (α) $x = 1/2$ (β) $x = 2/3$
5. (α) $x = -\frac{11}{2}$ ή $x = \frac{9}{2}$ (β) $x = -\frac{11}{2}$ ή $x = -2$ ή $x = \frac{9}{2}$
6. $x = \pm\sqrt{4-\lambda}, \lambda \leq 4$
7. $-\sqrt{\mu-1} < x < \sqrt{\mu-1}, \mu > 1$

2.3.4. Εξισώσεις της μορφής $x^y = \alpha$

Α' ΟΜΑΔΑ

1. (α) 10 (β) 3 (γ) 2 (δ) 0,01
2. (α) 5 (β) 1 (γ) -3 (δ) -100
3. (α) 10 (β) 2 (γ) 2 (δ) αδύνατη
4. (α) $\pm\sqrt{5}$ (β) ± 2 (γ) $\pm\sqrt{2}$ (δ) $\pm\sqrt{10}$

Β' ΟΜΑΔΑ

1. (α) $0, \pm 1$ (β) $-1, 0$ (γ) $0, 0, \pm \frac{1}{2}$ (δ) $0, \pm 2$
2. (α) $-2/3$ (β) αδύνατη (γ) $0, -4$ (δ) $-1, 1$
3. (α) $-4, 2$ (β) 5 (γ) $1, 2$ (δ) $-7, 3$.
4. (α) $0, 1$ (β) $0, 243$ (γ) $0, 16$ (δ) 1

2.3.5. Εξισώσεις 2ου βαθμού

Α' ΟΜΑΔΑ

1. (α) 0, 1/2 (β) 0, 2 (γ) -2, 2 (δ) 3/4, 1 (ε) 1/2, 1/2 (στ) $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$
2. (α) -1, 4 (β) -1/2, 3/2 (γ) 1, 3 (δ) $-\sqrt{2}, 2\sqrt{2}$ (ε) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (στ) $\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}$
3. (α) -1, 2024 (β) 0, 23, 0, 32 (γ) $\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}$ (δ) $-3, \sqrt{2}$ (ε) $-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}$ (στ) $-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$
4. (α) $\Delta=(4\alpha+\beta)^2 \geq 0$ (β) $\Delta=(2\alpha-3\beta)^2 \geq 0$
5. (α) $-\alpha-\alpha\beta, \beta$ (β) $2\alpha, -3\beta$ (γ) $\alpha, -2\beta$
6. (α) $\frac{-1 \pm \lambda}{1-\lambda^2}$ (β) $\frac{1}{\lambda-1}, -\frac{1}{\lambda}, \lambda \neq 0, \lambda \neq 1$ (γ) $\frac{-2\lambda+3 \pm \sqrt{4\lambda^2+37}}{2}$. (α) ποτέ, (β) $\lambda=1$ (γ) ποτέ.

Β' ΟΜΑΔΑ

1. (α) $-1, \frac{\beta}{3\alpha}$ (β) $3(\beta+\alpha), 2(\beta-\alpha)$
2. (α) $\lambda > 0$ (β) $\lambda = 0$ (γ) $\lambda < 0$
3. $\lambda = 3$ και -2
4. (α) $3/2$ (β) $\lambda < -3$ ή $\lambda > 1$
5. (δ) $x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$ (ε) $x^2 - 10x + 1 = 0$
6. (α) $x_1 < x_2 < 0$ (β) $x_1 < 0 < x_2, |x_1| < |x_2|$ (γ) $x_1 < 0 < x_2, |x_1| > |x_2|$ (δ) (i) αν $\lambda = 0, x_1 = -1, x_2 = 1$
(ii) αν $\lambda \in (-\infty, 0) \cup (0, 1), x_1 < 0 < x_2$ (iii) αν $\lambda \in (1, \infty), x_1 < x_2 < 0$

2.3.6. Αναγωγή σε εξισώσεις 2ου βαθμού

Α' ΟΜΑΔΑ

1. (α) -4, 4 (β) -1, 3 (γ) -2, -1, 2, 3 (δ) 2
2. (α) -1, 1, -2, 2. (β) -1/2, 1/2, -2, 2

Β' ΟΜΑΔΑ

1. (α) $-1, 1-\sqrt{2}, \sqrt{2}$ (β) -2, 2 (γ) $\pm\sqrt{2}$ (δ) αδύνατη.
2. Αν $\lambda = -1, x = -1$ ή $x+1$, αν $-1 < \lambda < 1, x = \pm\sqrt{\frac{2+\sqrt{2+2\lambda}}{2}}$ ή $x = \pm\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+2\lambda}}{2}}$. Αν $\lambda = 1, x = 0$ ή $\pm\sqrt{2}$ και αν $\lambda > 1,$
 $x = \pm\sqrt{\frac{2+\sqrt{2+2\lambda}}{2}}$
3. Η διακρίνουσα της επιλύουσας της δοσμένης εξίσωσης, δηλαδή της $y^2 - (\lambda+1)\sqrt{2-\lambda}y + 2-\lambda = 0$ είναι ίση με $\Delta = (\lambda+1)^2(2-\lambda) - 4(2-\lambda) = (2-\lambda)[(\lambda+1)^2 - 4] = (2-\lambda)(\lambda+1-2)(\lambda+1+2) = (2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+3)$, οπότε έχει ρίζες τις $\lambda=2,$ $\lambda=1$ και $\lambda=-3$
4. Για $\lambda=2, x=0$ (τετραπλή ρίζα), για $\lambda=1, x=-1$ ή $x=1$ (διπλές ρίζες) και για $\lambda=-3$ είναι αδύνατη.

2.3.7. Εφαρμογές εξισώσεων 2ου βαθμού

Α' ΟΜΑΔΑ

1. 40, 75
2. 196
3. 21.
4. 7, 9
5. 3.
6. 6, 8

Β' ΟΜΑΔΑ

1. 8
2. 824
3. $x \leq 2, x = 2$
4. Αν x, y οι διαστάσεις του ορθογωνίου, τότε $E = xy$ και $\Pi = 2\left(x + \frac{E}{x}\right) = 2\left[\left(\sqrt{x}\right)^2 + \left(\frac{E}{x}\right)^2\right] \geq 2 \cdot 2\sqrt{x} \sqrt{\frac{E}{x}}$ και η ισότητα ισχύει όταν $\sqrt{x} = \sqrt{\frac{E}{x}} \Leftrightarrow x = \frac{E}{x} \Leftrightarrow x = y$
5. Αν x, y είναι η κάθετες πλευρές του τριγώνου και a είναι η υποτείνουσα, η περίμετρος γίνεται μέγιστη όταν το $x+y$ γίνεται μέγιστο, οπότε από την ανισότητα $(x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2) = 2a^2$ παίρνουμε ότι $x+y \leq a\sqrt{2}$ και η ισότητα λαμβάνεται όταν η ανισότητα γίνεται ισότητα, δηλαδή, όταν $x=y$.
6. 48

2.3.8. Ανισώσεις 2^{ου} βαθμού

Α' ΟΜΑΔΑ

1. (α) $(\alpha + 1)(\alpha - 12)$ (β) $(2\beta + 1)(\beta - 2)$ (γ) $(7x + 2)(3x - 1)$ (δ) $(3x + 2)(x - 1)$ (ε) $(x - 2y)(x + y)$ (στ) $(x - 2y + 2z)(x - 2y - 2z)$
2. (α) $\frac{\alpha - 12}{\alpha - 1}$ (β) $\frac{\beta - 2}{\beta - 1}$ (γ) $\frac{3x - 1}{3x + 2}$
3. (α) $(x - \sqrt{2})(x + 2\sqrt{2})$ (β) $(k - 0,2)(k - 0,03)$ (γ) $(4\alpha + 4\beta + 3)(3\alpha + 3\beta - 2)$ (δ) $3\alpha^2 - 5\alpha\beta - 2\beta^2$
4. (α) $\frac{4\sqrt{\alpha + 3}}{\sqrt{\alpha + 1}}$ (β) $\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}$ (γ) $(3x + 1)(x - 2)$
5. (i) $\lambda < -9$ ή $\lambda > -1$ (ii) $\lambda = -9$ ή $\lambda = -1$ (iii) $-9 < \lambda < -1$
6. (α) θετικό για $x < -1$ ή $x > 1/3$ (β) θετικό για $-1/2 < x < 1$ (γ) θετικό για κάθε $x \neq 0,25$ (δ) αρνητικό για κάθε $x \neq 2$ (ε) θετικό για κάθε x (στ) Αρνητικό για κάθε x .
7. (α) αρνητικό για κάθε x . (β) αρνητικό για κάθε $x: \sqrt{2} < x < \sqrt{3}$ (γ) θετικό για κάθε x εκτός του διαστήματος με άκρα τα 2α και β (δ) ομόσημο του α για κάθε x εκτός του διαστήματος με άκρα τα α και β
8. $1 < \lambda < 3$

9. $\Delta > 0$, για κάθε $\lambda \neq \frac{1}{3}$
10. (α) $x < -1/4$ ή $x > 1$ (β) $-2/5 < x < 1$ (γ) $1 < x < \sqrt{2}$ (δ) $x = 0$ (ε) $x \neq 3$ (στ) αδύνατη.
11. (α) $-2 \leq x \leq 0$ ή $x \geq 1$ (β) $0 \leq x \leq 1$ ή $x \geq 2$ (γ) $x < -2$ ή $1 < x < 2$ (δ) $x \leq -3$ ή $1 \leq x \leq 3$
12. (α) $x < -3$ ή $x > 2$ (β) $x \leq -\frac{1}{2}$ ή $x > 4$ (γ) $x \leq -2$ ή $x > 1$ (δ) $1 \leq x \leq \frac{2}{3}$
13. (α) $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (4, \infty)$ (β) $x \in (-3, -\frac{1}{3}) \cup (1, \infty)$ (γ) $x \in (-5, -\frac{1}{3}) \cup (1, \infty)$
 (δ) $x \in (-\infty, -4) \cup (1, 2) \cup (1, \infty)$

Β' ΟΜΑΔΑ

1. (α) $-1 < \lambda < 3$ (β) $\lambda + 1$ ή $\lambda = 3$ (γ) $\lambda = 7/2$.
3. Τα τριώνυμα έχουν αρνητικές διακρίνουσες, οπότε είναι ομόσημα του α τους.
4. $\lambda < -2$ ή $\lambda > 3$
5. $-1 - \sqrt{5} < x < -1 + \sqrt{5}$

2.3.9. Εφαρμογές ανισώσεων 2ου βαθμού

Α' ΟΜΑΔΑ

1. (α) $x < -1$ ή $0 < x < 1$ (β) $x > x^2 \Leftrightarrow 0 < x < 1$ κ.λπ. (γ) $x < -1$ ή $0 < x < 1$
2. 8, 8
3. 49

Β' ΟΜΑΔΑ

1. $AM = 6$.
2. $x > 2$. 7, 12, 17. Το τρίγωνο δεν είναι ισοσκελές για καμία τιμή του x .
3. (α) 20 m (β) 4 sec
4. Έχουμε $h = 20t - 5t^2 = -5t^2 + 20t - 20 + 20 = -5(t-2)^2 + 20 \leq 20$ και $h_{\max} = 20$ m για $t = 2$. Είναι οι χρονικές στιγμές που διέρχεται από το σημείο που βρίσκεται σε ύψος 15 m ανερχόμενο και κατερχόμενο. $t_{\text{ολ}} = 4$ sec.

2.3.10. Προβλήματα με ανισώσεις 2ου βαθμού

Α' ΟΜΑΔΑ

1. (Απαντ. Ένα τετράγωνο οικόπεδο έχει εμβαδόν που δεν ξεπερνά τα 25 m². Ποια μπορεί να είναι η πλευρά του;)
2. (Απαντ. Σκέφτομαι έναν αριθμό. Αν υψώσω τον αριθμό αυτόν στο τετράγωνο, το αποτέλεσμα είναι ίσο με το άθροισμα του αριθμού με τον αριθμό 2. Ποιος είναι ο αριθμός;)
3. (Απαντ. Βρείτε τις διαστάσεις ενός ορθογωνίου αν οι πλευρές του διαφέρουν κατά 2 και το εμβαδόν του δεν υπερβαίνει το 8.)
4. (Απαντ. Η περίμετρος ενός ορθογωνίου είναι 22 m και το εμβαδόν του είναι 28 m. Να βρεθούν οι διαστάσεις του ορθογωνίου.)



5. (Απαντ. Οι πλευρές ενός ορθογωνίου διαφέρουν κατά 3 και το εμβαδόν του είναι 40. Βρείτε το μήκος της διαγωνίου του.)
6. 30, 60/13.
7. $0 < x < 3$, $x=3$, $x=4$
8. 13
9. $x=1$
10. $x=2$
11. 180 m

Β' ΟΜΑΔΑ

1. 30, 40, 50
2. Έχουμε $E = \frac{(10+x)(20-x)}{2} = \frac{-x^2+10x+200}{2} = \frac{-x^2+10x-25+225}{2} = \frac{-(x-5)^2+225}{2}$, οπότε $x=5$ $E_{\max}=112,5$.
3. Το κέρδος είναι $E-K=(4x-x^2)-(15-4x)=-x^2+8x-15=-x^2+8x-15$, οπότε πρέπει $-x^2+8x-15 > 0 \Leftrightarrow 3 < x < 5$ και επειδή $-x^2+8x-15 = -(x-4)^2+1 \leq 1$ γίνεται μέγιστο όταν $x=4$
4. Έχουμε: $P=2(2x+y)=2\left(2x+\frac{2500}{2x}\right)=4\left(\sqrt{x}+\sqrt{\frac{2500}{x}}\right) \geq 4 \cdot 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{\frac{2500}{x}}=400$ και η ελάχιστη τιμή της είναι 400 m και λαμβάνεται όταν $x=50$ m
5. $1 < x < 2$
6. $\lambda=1$
7. 83
8. (Απαντ. Ένας κηπουρός φτιάχνει ένα ορθογώνιο παρτέρι. Αν η μία πλευρά έχει μήκος x m, για ποιες τιμές του x το τετράγωνο του μήκους μείον 8 φορές το μήκος συν 15 γίνεται μηδέν;)
9. (Απαντ. Μια εταιρεία κατασκευάζει ορθογώνια πλακάκια. Το μήκος κάθε πλακιδίου είναι 7 cm μεγαλύτερο από το πλάτος του. Να βρεθεί το ελάχιστο πλάτος που εξασφαλίζει ότι το εμβαδόν του πλακιδίου θα είναι τουλάχιστον 30 cm^2 .)
10. (Απάντ. Εξίσωση . Δύο φίλοι έχουν συνολικά 7 ευρώ. Το γινόμενο των χρημάτων τους είναι 10 ευρώ. Πόσα ευρώ έχει ο καθένας;)
11. (Απαντ. Ένα ορθογώνιο δωμάτιο θέλουμε να έχει μήκος 4 m μεγαλύτερο από το πλάτος του. Να βρεθούν τα πλάτη για τα οποία το εμβαδόν του δωματίου είναι: **(α)** τουλάχιστον 21 m². **(β)** το πολύ 21 m².)

2.4.1. Η έννοια της συνάρτησης

Α' ΟΜΑΔΑ

1. **(α)** $f(x)=x^2+1$ **(β)** $f(x)=x-2$ **(γ)** $f(x)=x^2-1$
2. **(α)** $f(x)=\frac{1}{x}$ **(β)** $f(x)=\frac{1}{x(x-1)}$ **(γ)** $f(x)=\frac{1}{(x+1)(x-2)}$

Β' ΟΜΑΔΑ

- (α) $f(x)=\sqrt{1-|x|}$ (β) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-|x|}}$
- (α) $f(x)=\sqrt{x}$ (β) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$
- Με τη διαδικασία αυτή κάθε θετικός αριθμός θα αντιστοιχίζεται σε δύο αριθμούς. Για παράδειγμα το 4 θα αντιστοιχίζεται στο -2 και στο 2 . Επομένως, η διαδικασία αυτή δεν είναι συνάρτηση. Ωστόσο, κάθε μια από τις $f(x)=\sqrt{x}$ και $f(x)=-\sqrt{x}$. Επίσης, συνάρτηση είναι κάθε διαδικασία της μορφής $f(x)=\sqrt[n]{x}$, $x \geq 0$ και n περιττό (γιατί;)

2.4.2. Πότε μια σχέση είναι συνάρτηση;

Α' ΟΜΑΔΑ

- Σύμφωνα με τον ορισμό συναρτήσεων ορίζουν τα διαγράμματα (β) και (δ)
- Όλα. (β) $f(x)=(-1)^x$ (γ) $f(x)=1$ (δ) $f(x)=x$
- Γιατί: (α) Στο 2 αντιστοιχούν 2 τιμές (β), (γ), (δ) Στο 3 δεν αντιστοιχεί τιμή.
- (α) $f(x)=2$ (β) $f(x)=x^2$ (γ) $f(x)=-x^2$ (δ) $f(x)=\frac{1}{x}$
- (i) (α) $\mathbb{R}-\{3\}$, $f(x)=\frac{x-1}{x-3}$ (β) Δεν υπάρχει (γ) $-\infty, -2 \cup 2, \infty$ (δ) Δεν υπάρχει. (ii) (α) $x=5$
(β) $x=-\frac{14}{5}$ (γ) Δεν υπάρχει (δ) $x=0$ (iii) (α) $x=5$ (β) Δεν υπάρχει (γ) Δεν υπάρχει (δ) $x=0$

Β' ΟΜΑΔΑ

- (α) $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$ (β) $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$ (γ) $\mathbb{R}-\{0, \pm 1\}$ (δ) $(-\infty, 0)$
- (α) $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ (β) $-\infty-1 \cup 3, \infty$ (γ) $-\infty, -4 \cup \{0\} 4, \infty$ (δ) $-\infty, 0$.
- (α) $\mathbb{R}-\{\pm 1\}$ (β) $\mathbb{R}-\{0, \pm 1\}$ (γ) $\mathbb{R}-\{0, 1, 2\}$ (δ) $\mathbb{R}-\{0, \pm\sqrt{2}\}$
- (α) $\mathbb{R}, 0, \infty$ (β) $\mathbb{R} 0, \infty, 0, \infty$, (γ) $\mathbb{R}, 0, \infty$ (δ) $\mathbb{R}, 0, \infty$
- (α) $\mathbb{R}-\{1\}, \{-1, 1\}$ (β) $(0, \infty), \{1\}$ (γ) $\{2\}, \{0\}$ (δ) $\{1\}, \{0\}$.
- (α) $\mathbb{R}, f(x)=|x|$ (β) $(0, \infty), f(x)=x\sqrt{x}$ (γ) $(-\infty, 0), f(x)=\frac{1}{2x}$ (δ) $\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x^2+1}+x$

2.4.3. Τρόποι αναπαράστασης μιας συνάρτησης

Α' ΟΜΑΔΑ

- $v(x)=\frac{x\sqrt{3}}{2}, E(x)=\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$
- $E(x)=x^2 (\alpha-x)^2, \delta(x)=\sqrt{x^2+(\alpha-x)^2}$
- $E(x)=x^2-2x, 3 \leq E(x) \leq 24 \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 4, x=4$
- $\alpha=-2, x=-3$ ή $x=4$
- (α) $f(-2)=0, f(0)=-4, f(2)=-1, -(4)=11$ (β) $x=3$
- (α) $f(-1)=0, f(0)=1, f(\frac{1}{2})=2, f(\frac{3}{4})=\frac{3}{2}, f(1)=2$ (β) $x=4$

Β' ΟΜΑΔΑ

- $\alpha=1, \beta=-1$

2. **(α)** $f(-1)=1, f(0)=1, f\left(\frac{1}{3}\right)=1, f(1)=1, f(\sqrt{2})=0, f(\pi)=0$ **(β)** $x=0$ ή $x=\frac{2}{3}$
3. $\alpha=1/2$ $x=1/4$.
4. **(α)** $f(-2)=10, f(-1)=5, f(0)=2, f(1)=1, f(2)=2$ **(β)** $f(x)=x^2-2x+2$.

2.4.4. Γραφική παράσταση συνάρτησης

Α' ΟΜΑΔΑ

1. **(i)** $(-3, -2)$ **(ii)** $(3, 2)$ **(iii)** $(3, -2)$ **(iv)** $(2, -3)$
2. 2 **(i)** $\lambda=-1$ ή $\lambda=1$ **(ii)** $\mu=-1$
3. $x=7$ ή $x=-5$
4. $AG=BG$, Ορθογώνιο
5. $AB=AG$ για $x+3$ και $AG=BG$ για $x+2/7$
6. **(β)** \mathbb{R}, \mathbb{R} **(γ)** $\mathbb{R}-\{x_0\}$, όπου x_0 είναι το σημείο τομής της διακεκομμένης ευθείας με τον άξονα xx' , \mathbb{R} **(ε)** $(-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, \infty)$, $\mathbb{R}-\{y_0\}$, όπου y_0 είναι το σημείο τομής προέκτασης του οριζόντιου κλάδου της γραφικής παράστασης με τον άξονα yy' . **(στ)** $\mathbb{R}, \{2\}$.

Β' ΟΜΑΔΑ

1. **(i)** $\rightarrow(\delta), \mathbb{R}, \mathbb{R}$ **(ii)** $\rightarrow(\beta), [0, \infty), [0, \infty)$ **(iii)** $\rightarrow(\alpha), \mathbb{R}, [f(0), \infty)$ **(iv)** $\rightarrow(\sigma\tau), \mathbb{R}, \mathbb{R}$ **(v)** $\rightarrow(\epsilon), [0, \infty), (-\infty, 0]$ **(vi)** $\rightarrow(\gamma), \mathbb{R}, \mathbb{R}$
2. **(i)** 4 **(ii)** 2 **(iii)** 2 **(iv)** 2
3. $(3, 15), (-3, 3), x < -3$ ή $x > 3$
4. **(i)** 3 **(ii)** 10

2.4.5. Η συνάρτηση $f(x)=ax+\beta$

Α' ΟΜΑΔΑ

1. **(α)** 3 **(β)** 1 **(γ)** -2 **(δ)** 0
2. **(i)** $\pi/3$ **(ii)** $5\pi/6$ **(iii)** 0 **(iv)** $\pi/2$
3. **(i)** $y=x+\kappa, \kappa \in \mathbb{R}$ **(ii)** $y=\sqrt{3}x+\kappa, \kappa \in \mathbb{R}$ **(iii)** $x=x_0, x_0 \in \mathbb{R}$ **(iv)** $y=y_0, y_0 \in \mathbb{R}$
4. **(i)** $y=-2x-2$ **(ii)** $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x-1$ **(iii)** $y=3x+12$ **(iv)** **(α)** $y=1$ **(β)** $x=2$
5. **(i)** (a) $-1/2$ **(β)** 0 **(ii)** **(α)** 1 **(β)** -1
6. **(i)** $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **(ii)** $y=2$ **(iii)** $y=-x+3$ **(iv)** $y=-\frac{1}{2}x$
7. 6 τετραγωνικές μονάδες.

Β' ΟΜΑΔΑ

1. $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+2, y=-\sqrt{3}x+6, E=6\sqrt{3}$
2. $\lambda=1, y=-1, \lambda=-1/2, x=4, \lambda \neq -\frac{1}{2}, y=-\frac{\lambda-1}{2\lambda+1}x+\frac{2\lambda-5}{2\lambda+1}$
3. $\lambda=1$ ή $\lambda=3$

5. $y = -3x + 5$
 6. **(α)** (i) $\lambda = -3/2$ (ii) $\lambda = 4$ **(β)** (2,3) **(γ)** $x = 2$

2.4.6. Γραφική παράσταση της $f(x) = ax + \beta$

Α' ΟΜΑΔΑ

1. **(α)** $y = -\frac{7}{6}x + \frac{19}{12}$ **(β)** $y = \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$
 2. **(α)** $\lambda = 1$ ή $\lambda = -1/3$ **(β)** $\lambda = -1$ ή $\lambda = 2$
 3. **(α)** $y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$ **(β)** $y = -5x + 21$
 4. Για $\lambda \neq 0$ υπάρχουν άπειρες ευθείες (δέσμη ευθειών), ενώ για $\lambda = 0$ δεν υπάρχει ευθεία.

Β' ΟΜΑΔΑ

1. $\alpha = 0$
 2. **(α)** $\kappa = 1$ και $\lambda \neq -2$ **(β)** $\kappa \neq 1$ και $\lambda = -2$
 3. **(α)** 4 **(β)** 15/2.
 4. 4, 2

2.4.7. Η συνάρτηση $f(x) = ax^2 + bx + \gamma, a \neq 0$

Α' ΟΜΑΔΑ

1. **(i)** κατακόρυφα 3 μονάδες προς τα κάτω **(ii)** οριζόντια 7 μονάδες προς τα δεξιά **(iii)** οριζόντια 5 μονάδες προς τα αριστερά και κατακόρυφα 5 μονάδες προς τα κάτω.
 5. $x = 1$
 6. $f(x) = x^2 - 4x + 5$

Β' ΟΜΑΔΑ

1. $f(x) = x^2 + 2x$
 2. 2 αν $\lambda < -2$ ή $\lambda > 2$, 1 αν $\lambda = -2$ ή $\lambda = 2$, κανένα αν $-2 < \lambda < 2$
 3. 3/2, -5/2
 4. $\lambda = 1$
 5. $\left(\frac{2 \pm \sqrt{1-\kappa}}{2}, (2 \pm \sqrt{1-\kappa})\right), \kappa \geq 1$

2.4.8. Το πρόσημο της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + \gamma, a \neq 0$

Α' ΟΜΑΔΑ

1. **(i)** θετικό για κάθε x διάφορο από το 0, 0 για $x = 0$ **(ii)** αρνητικό για κάθε x διάφορο από το 0, 0 για $x = 0$
(iii) θετικό για κάθε x **(iv)** αρνητικό για κάθε x **(v)** θετικό για κάθε x διάφορο από το -1, 0 για $x = -1$
(vi) αρνητικό για κάθε x διάφορο από το 7, 0 για $x = 7$.

2. **(i)** θετικό αν $x < -4$ ή $x > 3, 0$ αν $x = -4$ ή $x = 3$, αρνητικό αν $-4 < x < 3$ **(ii)** αρνητικό αν $x < -\frac{9}{2}$ ή $x > \frac{2}{3}, 0$ αν $x = -\frac{9}{2}$ ή $x = \frac{2}{3}$, θετικό αν $-\frac{9}{2} < x < \frac{2}{3}$ **(iii)** αρνητικό αν $x < -3$ ή $x > 3, 0$ αν $x = -3$ ή $x = 3$, θετικό αν $-3 < x < 3$ **(iv)** αρνητικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$ **(v)** θετικό αν $x < -6$ ή $x > 9, 0$ αν $x = 26$ ή $x = 9$, αρνητικό αν $-6 < x < 9$ **(vi)** θετικό αν $x < 8 - 2\sqrt{11}$ ή $x > 8 + 2\sqrt{11}, 0$ αν $x = 8 - 2\sqrt{11}$ ή $8 + 2\sqrt{11}$, αρνητικό αν $8 - 2\sqrt{11} < x < 8 + 2\sqrt{11}$
3. **(i)** θετικό αν $x < -3$ ή $x > 4$ **(ii)** αρνητικό αν $x < -5/2$ ή $x > 1$ **(iii)** θετικό για κάθε $x \neq 1/2$ $4x^2 - 6x + \frac{9}{2} \frac{1}{8} x^2 - x + \frac{1}{4}$
4. **(i)** αρνητικό για $x < 1$, **(ii)** θετικό για κάθε $x \neq 3/2$ **(iii)** θετικό για $x < -4$ ή $x > 8$ (Οι πίνακες κατασκευάζονται εύκολα).
5. **(i)** $-1 < x < \sqrt{3}$ **(ii)** $x < \sqrt{2}$ ή $x > 2\sqrt{2}$ **(iii)** $x \neq \frac{\sqrt{2}}{4}$

Β' ΟΜΑΔΑ

1. Αφού το τριώνυμο έχει μέγιστη τιμή θα έχουμε $a < 0$ (δεν είναι απαραίτητο να βρείτε το a). Άρα, αν $x < -1$ ή $x > 3, f(x) > 0$, αν $-1 < x < 3, f(x) < 0$ και $f(-1) = f(3) = 0$
2. $f(1) = 0$ και $f(x) > 0$ για κάθε άλλη τιμή του x
3. $f(-5) = f(3) = 0, f(x) > 0$ αν $x < -5$ ή $x > 3$ και $f(x) < 0$ αν $-5 < x < 3$
4. $1/4 < x < 1/2$
5. **(α)** $\Delta > 0$ για $\lambda > 1, \Delta = 0$, για $\lambda = 1$ και $\Delta < 0$, για $\lambda < 1$ **(β)** **(i)** $\lambda > 1$ **(ii)** $\lambda = 1$
6. Για $a \neq -2$
7. **(α)** **(i)** θετικό αν $x < -2$ ή $x > 4$, αρνητικό αν $-2 < x < 4$ και 0 για $x = -2$ ή $x = 4$ **(ii)** αρνητικό αν $x < -3$ ή $x > 2$, θετικό αν $-3 < x < 2$ και 0 για $x = -3$ ή $x = 2$ **(iii)** θετικό αν $x \neq 0$ και 0 αν $x = -2$.
8. **(β)** **(i)** $(-\infty, -2] \cup [4, \infty)$ **(ii)** $-3 < x < 2$ **(iii)** \mathbb{R}

2.4.9. Προβλήματα με συναρτήσεις 1ου και 2ου βαθμού

Α' ΟΜΑΔΑ

1. **(i)** $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ **(ii)** $0 \leq x \leq \frac{2}{3}$ **(iii)** $-1 < x < 0$ **(iv)** $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
2. **(i)** $x \leq \frac{3-\sqrt{2}}{7}$ ή $x \geq \frac{3+\sqrt{2}}{7}$ **(ii)** $x \neq 2$ **(iii)** $x = 3$ **(iv)** $x \neq -1$
3. **(i)** $-2 \leq x < 0$ ή $0 < x \leq 2$ **(ii)** $-3 \leq x \leq 3$ **(iii)** $x = \pm 1$ **(iv)** $x < -4$ ή $x > 4$
4. **(i)** $x < -6$ ή $x > 7$ **(ii)** $x < -\frac{4}{5}$ ή $x > 1$ **(iii)** $x = \frac{1}{100}$
5. $-|x| \leq x \leq |x|$

Β' ΟΜΑΔΑ

1. **(β)** Αν $0 < x < 1$, τότε $x^3 < x^2 < x < \sqrt{x}$ και αν $x > 1$, τότε τότε $\sqrt{x} < x < x^2 < x^3$ **(γ)** Εργαστείτε όπως στο **(β)**
2. Είναι $f(x) = -x^2 - x + 2$
3. Όχι

4. $5/4$ για $\lambda=3/2$
5. **(β)** $x < -3/2$ ή $x > 3/2$

2.4.10. Τριγωνομετρικοί αριθμοί

Α' ΟΜΑΔΑ

1. $\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\sqrt{3}$
2. $\Delta B = \frac{9}{4}, \Delta \Gamma = \frac{27}{4}, A\Delta = \frac{9\sqrt{3}}{4}, \frac{A\Delta}{A\Gamma} = \frac{1}{3}$
6. **(α)** $\eta\mu 210^\circ = -\frac{1}{2}, \sigma\upsilon\nu 210^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \epsilon\varphi 210^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, \sigma\varphi 210^\circ = \sqrt{3}$
(β) $\eta\mu(-45^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \sigma\upsilon\nu(-45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \epsilon\varphi(-45^\circ) = -1 = \sigma\varphi(-45^\circ)$
(γ) $\eta\mu 450^\circ = 1, \sigma\upsilon\nu 450^\circ = 0, \epsilon\varphi 450^\circ$ δεν ορίζεται, $\sigma\varphi 450^\circ = 0$
(δ) $\eta\mu(-210^\circ) = \frac{1}{2}, \sigma\upsilon\nu(-210^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \epsilon\varphi(-210^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \sigma\varphi(-210^\circ) = -\sqrt{3}$
7. Ίδιοι με τους αντίστοιχους της ω , ίδιοι με τους αντίστοιχους των 0° , ίδιοι με τους αντίστοιχους της ω , ίδιοι με τους αντίστοιχους της $-\omega$

Β' ΟΜΑΔΑ

1. $\eta\mu\theta = \sigma\upsilon\nu\omega, \sigma\upsilon\nu\theta = \eta\mu\omega, \epsilon\varphi\theta = \sigma\varphi\omega$
2. $\alpha = \eta\mu\theta, \delta = \sigma\upsilon\nu\theta, \beta = \epsilon\varphi\theta, \gamma = 1/\sigma\upsilon\nu\theta$
5. **(i)** $1110^\circ = 3 \cdot 360^\circ + 30^\circ$ κ.λπ. **(ii)** $-1020^\circ = -3 \cdot 360^\circ + 60^\circ$ κ.λπ. **(iii)** $1990\pi/3 = 331 \cdot 2\pi + \pi + \pi/3$ **(iv)** $-215\pi/6 = -18 \cdot 2\pi + \pi/6$ κ.λπ.
6. **(i)** Ίδιοι με το $\frac{\pi}{2}$ **(ii)** Ίδιοι με το $-\frac{\pi}{2}$ **(iii)** Ίδιοι με το $\frac{\pi}{3}$ **(iv)** Ίδιοι με το $-\frac{\pi}{4}$
7. $109\pi/3$ μονάδες μήκους, $109\pi/6$ μονάδες μήκους
8. Είναι $\sqrt{2} + \sqrt{3} > \sqrt{5}$

2.4.11. Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες

Α' ΟΜΑΔΑ

1. **(α)** $\eta\mu 155^\circ + \eta\mu(90^\circ + 65^\circ) = \sigma\upsilon\nu 65^\circ$ **(β)** $\sigma\upsilon\nu 110^\circ + \sigma\upsilon\nu(90^\circ + 20^\circ) = -\eta\mu 20^\circ$ **(γ)** $\epsilon\varphi 140^\circ = \epsilon\varphi(90^\circ + 50^\circ) = -\sigma\varphi 50^\circ$ **(δ)** $\sigma\varphi 95^\circ = \sigma\varphi(90^\circ + 5^\circ) = -\epsilon\varphi 5^\circ$
2. **(α)** $x = 60^\circ$ ή $x = 120^\circ$ **(β)** $x = 160^\circ$ **(γ)** αδύνατη **(δ)** $x = 165^\circ$
3. **(α)** $x = 30^\circ$ ή $x = 150^\circ$ **(β)** $x = 135^\circ$ **(γ)** $x = 120^\circ$ **(δ)** $x = 150^\circ$
4. **(α)** $\eta\mu(\alpha - 270^\circ) = -12/13, \epsilon\varphi(360^\circ - \alpha) = -5/12$ **(β)** $-\sqrt{15}, \sigma\varphi(\beta - 90^\circ) = \sqrt{15}$
7. **(i)** $-\eta\mu\alpha$ **(ii)** 1

Β' ΟΜΑΔΑ

- 1.
2. $\sin\theta = -9/41$, $\cos\theta = -40/41$, $\tan\theta = 40/41$, $\eta\mu(108^\circ - \theta) = 40/41$, $\sigma\upsilon\nu(108^\circ - \theta) = 9/41$, $\epsilon\varphi(108^\circ - \theta) = 40/41$,
 $\sigma\varphi(108^\circ - \theta) = 41/40$
3. $\eta\mu\theta = 7/25$, $\sigma\upsilon\nu\theta = -24/25$, $\sigma\varphi\theta = 25/7$
4. $x = 3\pi/4$

Τίτλος: «**Απαντήσεις των Ασκήσεων**»

Έκδοση: **1.5**

Ημερομηνία: **10/09/2025**

Συντονιστής ομάδας σχεδιασμού και ανάπτυξης: **Κέλλυ Σαρρή Πασχαλίδη**

Δημιουργία: **ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΓΡΑΦΗ**



Το παρόν αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της Πράξης «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ (ΜΙΣ) 6010165, του Προγράμματος «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή 2021-2027» που υλοποιείται από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής και συγχρηματοδοτείται από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο.



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας, Θρησκευμάτων
και Αθλητισμού



ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ
ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ



Με τη συγχρηματοδότηση
της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Πρόγραμμα
Ανθρώπινο Δυναμικό και
Κοινωνική Συνοχή