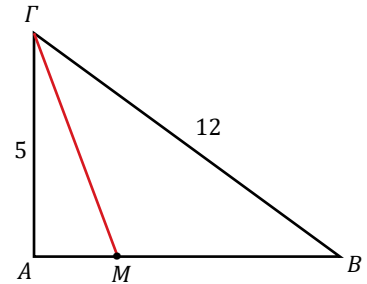


## Ασκήσεις Β' Ομάδας Ενότητας 2.4.3

## Β' ΟΜΑΔΑ

- 5 Να προσδιορίσετε το  $\lambda$  ώστε οι συναρτήσεις  $f(x) = \frac{2x}{2x+\lambda}$  και  $g(x) = \frac{x}{x-\lambda+3}$  να έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού και να δείξετε ότι για κάθε  $x$  στο κοινό πεδίο ορισμού τους  $f(x) = g(x)$ . Τέτοιες συναρτήσεις λέγονται ίσες. Οι συναρτήσεις  $f(x) = \sqrt{x^2}$  και  $g(x) = \sqrt{x^2}$  είναι ίσες;

- 6 Ένα σημείο  $M$  κινείται κατά μήκος της πλευράς  $AB$  του ορθογωνίου τριγώνου που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Έστω  $(AM) = x$  και έστω  $f$  η συνάρτηση που δίνει την απόστασή του από το  $\Gamma$  ως συνάρτηση του  $x$ .



(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$  και τον τύπο της.

(β) Να βρείτε τη θέση του σημείου  $M$  ώστε να είναι  $(\Gamma M) = 2\sqrt{21}$ .

- 7 Αν  $f(x) = \frac{x-3}{x-1}$ , να αποδείξετε ότι  $f(f(x)) = x$ , για κάθε  $x$  στο πεδίο ορισμού της  $A$ . (Παρατηρήστε ότι για κάθε  $x \in A$  στο πεδίο ορισμού της  $f$ , το  $f(x) \in A$ ).

- 8 Αν  $(f(x))^2 - 2f(x) = x^2 - 1$  και  $f(x) > 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης  $f$ .

- 9 Αν  $f(x)^2 = 2x - 1$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , να δείξετε ότι  $f(f(x)) = 4x - 3$  και να λύσετε την εξίσωση  $f(f(f(x))) = 1$ .

- 10 Για τη συνάρτηση  $f(x) = x - \frac{1}{x}$ , να αποδείξετε ότι

(α)  $f(x) + f(-x) = 0$ , για κάθε  $x$  στο πεδίο ορισμού της  $A$ . (Παρατηρήστε ότι για κάθε  $x \in A$  το  $-x \in A$ .) Ποια γεωμετρική ιδιότητα εκφράζει αυτή η ισότητα; (Παρατηρήστε ότι τα σημεία  $f(x, f(x))$  και  $(-x, f(x))$  είναι συμμετρικά ως προς την αρχή  $O$  των αξόνων.)

(β)  $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ , για κάθε  $x$  στο πεδίο ορισμού της  $A$ . (Παρατηρήστε ότι για κάθε  $x \in A$  στο πεδίο ορισμού της  $f$ , το  $\frac{1}{x} \in A$ .)

- 11 Για τη συνάρτηση  $f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}$ , να αποδείξετε ότι

(α)  $f(x) - f(-x) = 0$ , για κάθε  $x$  στο πεδίο ορισμού της  $A$ . (Παρατηρήστε ότι για κάθε  $x \in A$  το  $-x \in A$ .) Ποια γεωμετρική ιδιότητα εκφράζει αυτή η ισότητα; (Παρατηρήστε ότι τα σημεία  $(x, f(x))$  και  $(-x, -f(x))$  είναι συμμετρικά ως προς την αρχή  $O$  των αξόνων.)

(β)  $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ , για κάθε  $x$  στο πεδίο ορισμού της  $A$ . (Παρατηρήστε ότι για κάθε  $x \in A$  στο πεδίο ορισμού της  $f$ , το  $\frac{1}{x} \in A$ .)

- 12 Για τη συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ , να αποδείξετε ότι για κάθε  $x \neq 0$ ,  $f\left(x - \frac{1}{x}\right) = \left|x + \frac{1}{x}\right|$ .

- 13 Για τη συνάρτηση  $f$  δίνεται ότι  $f(x+3) = x^2 + 1$ , για κάθε  $x$  στο  $\mathbb{R}$ . Να βρείτε τον τύπο της  $f$  και το σύνολο τιμών της.

(Για να βρούμε τον τύπο της  $f$  αρκεί να θυμηθούμε (βλ. Σχόλιο παραπάνω) ότι στο  $f(x)$  το  $x$  καταλαμβάνει μία «κενή θέση», οπότε, στη θέση του μπορούμε να βάλουμε ό,τι θέλουμε, αρκεί να ανήκει στο πεδίο ορισμού της  $f$ . Επομένως, μπορούμε να θέσουμε  $x+3=t$  και στη συνέχεια να θέσουμε όπου

$t$  το  $x$ , επειδή η ανεξάρτητη μεταβλητή συνηθίζεται να συμβολίζεται με το γράμμα  $x$ . Βρίσκοντας τον τύπο της  $f$  μπορούμε να βρούμε το σύνολο τιμών, ωστόσο, το σύνολο τιμών μπορεί να βρεθεί χωρίς τη χρήση του τύπου. Σκεφτείτε το.)

14

Έστω  $f$  η συνάρτηση που σε κάθε φυσικό αριθμό αντιστοιχίζει το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το 4.

(α) Να βρείτε τις τιμές  $f(1)$ ,  $f(3)$ ,  $f(4)$ ,  $f(9)$  και  $f(10)$ .

(β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .

(γ) Να αποδείξετε ότι η διαφορά δύο οποιωνδήποτε φυσικών αριθμών που αντιστοιχίζονται με την  $f$  στον ίδιο αριθμό, διαιρείται με το 4.



Τίτλος: «**Ασκήσεις Β' Ομάδας Ενότητας 2.4.3**»

Έκδοση: **1.5**

Ημερομηνία: **10/09/2025**

Συντονιστής ομάδας σχεδιασμού και ανάπτυξης: **Κέλλυ Σαρρή Πασχαλίδη**

Δημιουργία: **ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΓΡΑΦΗ**



*Το παρόν αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της Πράξης «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ (ΜΙΣ) 6010165, του Προγράμματος «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή 2021-2027» που υλοποιείται από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής και συγχρηματοδοτείται από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο.*



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
Υπουργείο Παιδείας, Θρησκευμάτων  
και Αθλητισμού



Με τη συγχρηματοδότηση  
της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Πρόγραμμα  
Ανθρώπινο Δυναμικό και  
Κοινωνική Συνοχή