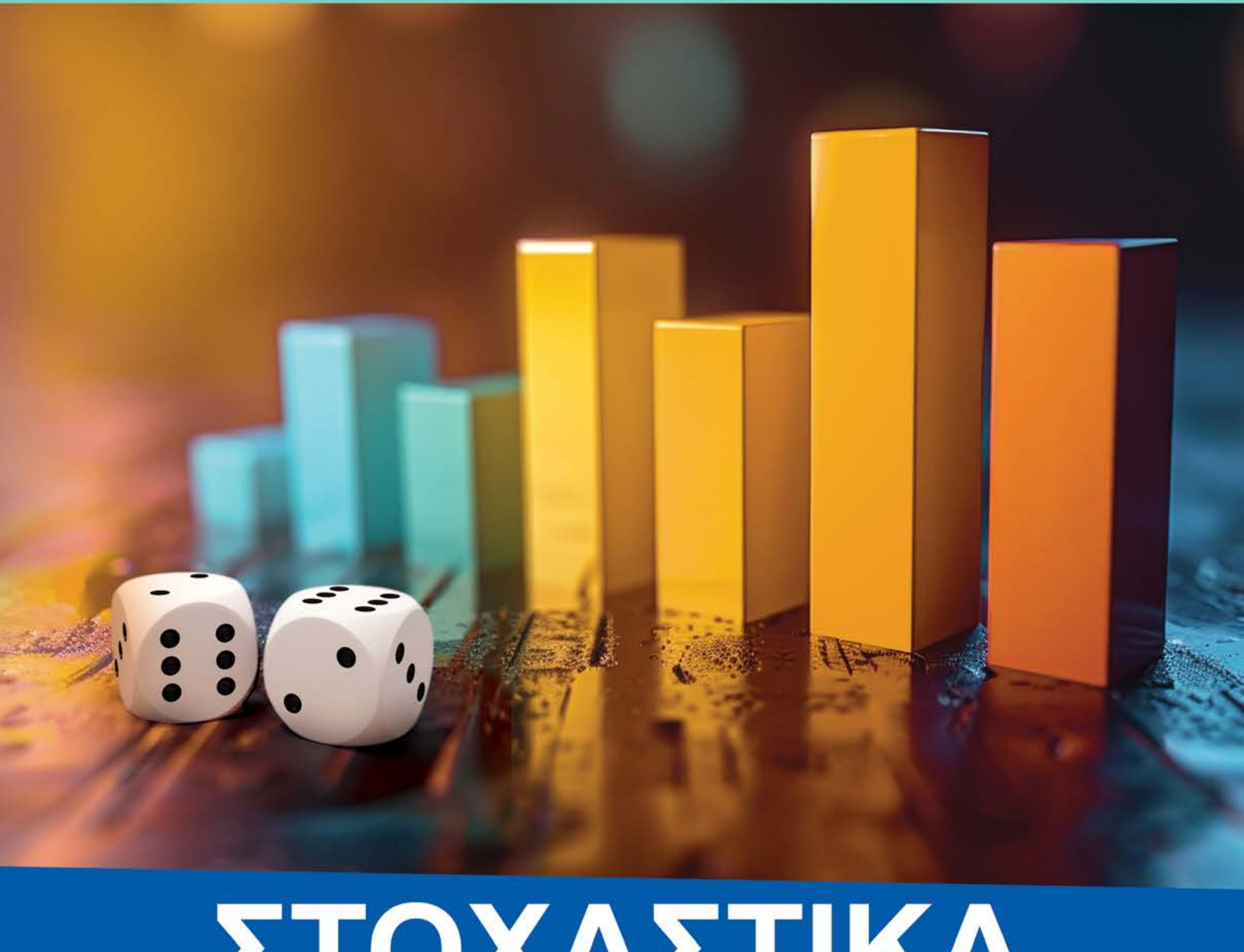
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Γιώργος Μπαραλός Μιχάλης Τζούμας Σωτήρης Χασάπης
Μαρία Ελένη Πούλου Μιχάλης Φιλιππάκης



ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Επιστημονική Επιτροπή Αξιολόγησης Συντονιστής / Αξιολογητής	**Μπατσίδης Απόστολος** Εν ενεργεία μέλος Διδακτικού Ερευνητικού Προσωπικού Πανεπιστημίου Ιωαννίνων
Αξιολογητής	**Φωτιάδης Νικόλαος** Εν ενεργεία Εκπαιδευτικός
Αξιολογήτρια	**Τσιάρα Θεοχαρία** Εν ενεργεία Εκπαιδευτικός
Τεχνικός Εμπειρογνώμονας	**Σγουρόπουλος Κυριάκος** Πτυχιούχος Πληροφορικής
Επικουρικός Εμπειρογνώμονας	**Σιδηρά Μαρία** Διπλωματούχος Τεχνολογίας Γραφικών Τεχνών
Υπεύθυνος/η του μαθήματος/γνωστικού αντικειμένου στο πλαίσιο της Πράξης	**Ειρήνη Γεωργάκη, Σύμβουλος Α΄ ΙΕΠ, ,** μέλος της Επιστημονικής Ομάδας Έργου (ΕΟΕ) της Πράξης

Πράξη με τίτλο: «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ 6010165 στο Πρόγραμμα «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή» 2021-2027

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ
Σπυρίδων Δουκάκης
Πρόεδρος του Δ.Σ. του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Υπεύθυνη Πράξης
Πολυξένη Μπίλλα
Σύμβουλος Α΄ του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής
Προϊσταμένη Τμήματος Β΄ Προγραμμάτων Σπουδών και Εκπαιδευτικού Υλικού

Αναπληρώτρια Υπεύθυνη Πράξης
Άννα-Αικατερίνη Λυκούρη
Σύμβουλος Α΄ του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

«Με τη συγχρηματοδότηση της Ευρωπαϊκής Ένωσης»
και το Πρόγραμμα «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή»

Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας, Θρησκευμάτων και Αθλητισμού
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2021-2027
Πρόγραμμα Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Γιώργος Μπαραλός
Μιχάλης Τζούμας
Σωτήρης Χασάπης
Μαρία Ελένη Πούλου
Μιχάλης Φιλιππάκης

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

εκδόσεις πουκαμισάς

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΥΓΓΡΑΦΗΣ

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ	**Γιώργος Μπαραλός**
	Επιτ. Σχ. Σύμβουλος Μαθηματικών
	Μιχάλης Τζούμας
	Επιτ. Σχ. Σύμβουλος Μαθηματικών
	Σωτήρης Χασάπης
	Μαθηματικός, Δ/ντης Πρότυπου ΓΕΛ Αγ. Αναργύρων
	Μαρία Ελένη Πούλου
	Επίκουρη Καθηγήτρια Πανεπιστημίου Δυτ. Αττικής
	Μιχάλης Φιλιππάκης
	Καθηγητής Πανεπιστημίου Πειραιά - ΠΑΠΕΙ
ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ	**Γιώργος Μπαραλός**
ΣΕΛΙΔΟΠΟΙΗΣΗ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΕΞΩΦΥΛΛΟΥ	**Τμήμα Εκδόσεων Πουκαμισάς**

Περιεχόμενα

Ταυτότητα του Βιβλίου

Το βιβλίο αυτό αποτελεί υλοποίηση των νέων Προγραμμάτων Σπουδών για τα Στοχαστικά Μαθηματικά της Πρώτης Λυκείου και κατά τη συγγραφή του λάβαμε υπόψη μας όλες τις σχετικές οδηγίες του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (ΙΕΠ).

Στο βιβλίο αναπτύσσονται, κυρίως, έργα που συναντούν τις εμπειρίες των μαθητών/τριών, ώστε να εμπλέκονται δημιουργικά στην αναζήτηση ιδιοτήτων και σχέσεων, στη δημιουργία διασυνδέσεων, καθώς και σε δράσεις διερεύνησης, πειραματισμού και αναστοχασμού σε συνδυασμό με το αντίστοιχο θεωρητικό πλαίσιο.

Για τον σκοπό αυτό παραθέτουμε εισαγωγικές διερευνήσεις σε κάθε ενότητα, οι οποίες χρησιμεύουν ως προκαταβολικοί οργανωτές, διευκολύνουν τον διδακτικό μετασχηματισμό και υποστηρίζονται από πολλές ψηφιακές εφαρμογές και ψηφιακά δομήματα.

Καινοτόμα στοιχεία του βιβλίου είναι:

1. Η έμφαση στην ενεργό εμπλοκή των μαθητών/τριών μέσα από ένα πλήθος διερευνήσεων, οι οποίες συνδέουν τις υπάρχουσες με τις νέες γνώσεις.

2. Οι ψηφιακές δραστηριότητες, οι οποίες παρέχουν ευκαιρίες έρευνας, αξιολόγησης, εξάσκησης και διεύρυνσης των νέων γνώσεων, με τρόπο εύχρηστο από διδάσκοντες/ουσες και μαθητές/τριες.

3. Οι πολλές και στοχευμένες εφαρμογές, που παρέχουν παραδείγματα επίλυσης ασκήσεων και προβλημάτων, περιγράφοντας αναλυτικά τις σχετικές διαδικασίες για την επιτυχή αντιμετώπιση νέων προβλημάτων.

4. Η ποικιλία των προβλημάτων ρεαλιστικού πλαισίου σε συνδυασμό με την εισαγωγή στον κύκλο της μοντελοποίησης.

5. Η παράθεση έργων αυτοαξιολόγησης, ψηφιακών κουίζ και προβλημάτων.

Ειδικότερα, η υλοποίηση των νέων προγραμμάτων σπουδών ως προς τους βασικούς άξονες, περιεχόμενο, μάθηση και διδασκαλία, δομή και οργάνωση, συμπληρωματικό υλικό, διαρθρώνεται ως εξής:

Περιεχόμενο

Για την επίτευξη των Προσδοκώμενων Μαθησιακών Αποτελεσμάτων (ΠΜΑ) υιοθετήθηκε η σύγχρονη αντίληψη ότι στην τάξη των Μαθηματικών η μάθηση και η διδασκαλία εξελίσσονται, τόσο σε ατομικό όσο και σε συλλογικό επίπεδο, μέσα σε διερευνητικά περιβάλλοντα μάθησης τα οποία δίνουν τη δυνατότητα σύνδεσης της γνώσης και του περιεχομένου των Μαθηματικών με την εφαρμογή των εννοιών και τις διαδικασίες τους.

Τα ΠΜΑ παρατίθενται αναλυτικά σε κάθε διδακτική ενότητα, προσδιορίζοντας τους επιμέρους στόχους που πρέπει να επιτευχθούν σε αντιστοίχιση με τα επιμέρους μαθηματικά περιεχόμενα. Για την αξιολόγηση της επίτευξης των ΠΜΑ παραθέτουμε:

Α. Στο τέλος κάθε ενότητας: Ερωτήσεις αυτοαξιολόγησης, Ασκήσεις και προβλήματα συνδεδεμένα με εμπειρίες των μαθητών/τριών.

Β. Στο τέλος κάθε κεφαλαίου: Ανακεφαλαίωση και Επαναληπτικές ασκήσεις.

Γ. Στο τέλος του βιβλίου: Υποδείξεις και απαντήσεις των προτεινόμενων ασκήσεων.

Οι διδακτικές ενότητες και η πρότασή μας για τη σειρά διαχείρισής τους αποτυπώνονται στην ενότητα των περιεχομένων.

Μάθηση και Διδασκαλία

Ως βασική διδακτική αρχή υιοθετήθηκε η μάθηση μέσω της καθοδηγούμενης ανακάλυψης, η οποία έχει ως συνέπεια τη δημιουργία και παράθεση έργων εμπλοκής των μαθητών/τριών, τα οποία λαμβάνουν υπόψη τους τη διεύρυνση της γνωστικής τους δυνατότητας με την παροχή βοήθειας (ζώνη επικείμενης ανάπτυξης).

Κατά τη συγγραφή λάβαμε υπόψη μας βασικά συμπεράσματα της διδακτικής των Μαθηματικών, καθώς και των Παιδαγωγικών, όπως:

- Τη μάθηση μέσα από τη διερεύνηση και ανακάλυψη των νέων ιδεών με την ενεργό συμμετοχή των μαθητών/τριών.
- Τη διαπίστωση ότι η μάθηση και η διδασκαλία εξελίσσονται ταυτόχρονα, τόσο σε ατομικό όσο και σε συλλογικό επίπεδο.
- Την ένταξη πλούσιων έργων μάθησης και ρεαλιστικών προβλημάτων που υπηρετούν μεγάλες ιδέες των Μαθηματικών και υποστηρίζουν συνεργατικές-συμμετοχικές διαδικασίες των μαθητών/τριών, αναπτύσσοντας τη μαθηματική σκέψη και τη συγκρότηση των μαθηματικών νοημάτων.

- Την υποστήριξη της γνωστικής - ατομικής και της κοινωνικοπολιτισμικής συμμετοχικής προσέγγισης στη μάθηση των Μαθηματικών, τις οποίες θεωρούμε ως συμπληρωματικές και σε συνεχή αλληλεπίδραση.
- Την υποστήριξη διδακτικών στρατηγικών συμπερίληψης και διαφοροποίησης, παραθέτοντας διαφοροποιημένα έργα με ποικίλα πλαίσια αναφοράς.
- Τον καθοριστικό και καίριας σημασίας ρόλο του/της εκπαιδευτικού για τον μετασχηματισμό της διδακτέας ύλης σε διδακτική πράξη στο εκάστοτε πλαίσιο αναφοράς.

Δομή και Οργάνωση

Η διδακτέα ύλη των ενοτήτων επιμερίζεται σε κεφάλαια και διαρθρώνεται σε υποενότητες.

Κάθε υποενότητα περιέχει:

- Διατύπωση μαθησιακών στόχων (ΠΜΑ).
- Διερευνήσεις με στόχο την ανάκληση πρότερων γνώσεων και την αναγνώριση της ανάγκης διεύρυνσής τους για την επίλυση νέων προβλημάτων.
- Ψηφιακά δομήματα που ενθαρρύνουν την εμπλοκή των μαθητών/τριών και βοηθούν τη διερεύνηση.
- Ανάλυση του μαθηματικού περιεχομένου.
- Εφαρμογές του μαθηματικού περιεχομένου.
- Ερωτήσεις αυτοαξιολόγησης.
- Ασκήσεις και προβλήματα για την αξιολόγηση της επίτευξης των μαθησιακών στόχων.

Η ανάπτυξη της ύλης πλαισιώνεται με:

- Συμπληρωματικό υλικό που αναπτύσσεται παράλληλα ως ψηφιακό, με τη μορφή γραμμωτού κώδικα και είναι διαθέσιμο μέσω διαδικτύου.
- Ανακεφαλαίωση-Επανάληψη σε κάθε κεφάλαιο.
- Ασκήσεις αυτοαξιολόγησης για περισσότερη εξάσκηση.

Συμπληρωματικό υλικό

Το συμπληρωματικό υλικό περιλαμβάνει:

- Ψηφιακά δομήματα, τα οποία δίνουν τη δυνατότητα για ποικίλες επιπλέον διερευνήσεις, δημιουργία εικασιών, εξάσκηση και αξιολόγηση επίτευξης γνωστικών στόχων. Αναπτύσσονται παράλληλα με το μαθηματικό περιεχόμενο και μπορούν να χρησιμοποιηθούν επιλεκτικά από τους/τις διδάσκοντες/ουσες και από τους μαθητές και τις μαθήτριες.
- Ιστορικά σημειώματα, τα οποία συνδυάζονται με εργασίες που αποσκοπούν στην ανάδειξη της συνοχής και της διαχρονικής εξέλιξης των μαθηματικών εννοιών.
- Ευκαιρίες εξοικείωσης με το περιβάλλον χρήσιμων λογισμικών.
- Ασκήσεις αξιολόγησης για μεγαλύτερη εξάσκηση και εμβάθυνση στις σχετικές έννοιες.

Πιστεύουμε ότι κανένα έργο δεν μπορεί να υλοποιηθεί αποτελεσματικά χωρίς την ανεκτίμητη βοήθεια των συναδέλφων εκπαιδευτικών της τάξης, οι οποίοι είμαστε βέβαιοι ότι θα ζωντανέψουν τις ιδέες που εμπεριέχονται στο βιβλίο αυτό.

Προσπαθήσαμε για το καλύτερο, αλλά αυτό δεν μας απαλλάσσει από όποια ενδεχόμενη αστοχία για την οποία αναλαμβάνουμε την αποκλειστική ευθύνη. Ευχαριστούμε εκ των προτέρων όποιον/α επικοινωνήσει μαζί μας με προτάσεις για τη βελτίωση του παρόντος βιβλίου.

Οι Συγγραφείς

Διδακτική διαχείριση και μαθηματική δραστηριότητα μαθητών/τριών.

Πλοήγηση στο συμπληρωματικό υλικό. Διασύνδεση έργων με ΠΣ.

Στατιστική

- Θηκογράμματα-Οριακές τιμές
- Μέτρα θέσης και μεταβλητότητας
- Συντελεστής μεταβλητότητας
- Σχέσεις εξάρτησης μεταξύ δύο μεταβλητών

1 • Θηκογράμματα - Οριακές τιμές

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν να:

1. Διατυπώνουν ερωτήματα που αφορούν σε σχέσεις εξάρτησης μεταξύ ενός ποσοτικού και ενός κατηγορικού χαρακτηριστικού του πληθυσμού.
2. Κατασκευάζουν πολλαπλά θηκογράμματα, υπολογίζοντας και οριακές τιμές, για να περιγράψουν τις τιμές ενός ποσοτικού χαρακτηριστικού σε κάθε στάθμη ενός κατηγορικού χαρακτηριστικού του υπό μελέτη πληθυσμού.

Βασικό αντικείμενο της Στατιστικής είναι η συλλογή και η καταγραφή δεδομένων που προκύπτουν από μετρήσεις ή παρατηρήσεις, καθώς και η επεξεργασία τους, προκειμένου να προκύψουν πληροφορίες με τη βοήθεια των οποίων εξάγονται χρήσιμα συμπεράσματα και δίνονται απαντήσεις σε σχετικά ερωτήματα.
Τα δεδομένα χωρίζονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες. Στα ποσοτικά δεδομένα και στα κατηγορικά ή ποιοτικά δεδομένα.

Διερεύνηση 1

1. Στα παρακάτω ερωτήματα να βρείτε ποιο είναι το ποσοτικό και ποιο το κατηγορικό χαρακτηριστικό, προτείνοντας σε κάθε περίπτωση το πλήθος των σταθμών του κατηγορικού χαρακτηριστικού.
   α. Εξαρτάται το ύψος των μαθητών από το φύλο;
   β. Εξαρτάται ο αριθμός των τροχαίων ατυχημάτων από το μέσο μεταφοράς;
   γ. Εξαρτάται η τιμή των δημητριακών ίδιας ποσότητας από την εταιρεία παρασκευής τους;
2. Να διατυπώσετε τρία ερωτήματα που αφορούν σχέσεις εξάρτησης μεταξύ ενός ποσοτικού και ενός κατηγορικού χαρακτηριστικού ενός πληθυσμού.

Τα δεδομένα προκύπτουν από την εξέταση των στοιχείων ενός πληθυσμού ή ενός δείγματος ως προς κάποια χαρακτηριστικά τους, τα οποία ονομάζονται **μεταβλητές** και διακρίνονται στις:

- **Ποσοτικές μεταβλητές**, των οποίων οι τιμές είναι αριθμοί, όπως το αποτέλεσμα της ρίψης ενός ζαριού (1,2,...6), το ύψος των μαθητών μιας τάξης ή ο χρόνος συνομιλίας δύο ατόμων.
- **Ποιοτικές ή κατηγορικές μεταβλητές**, των οποίων οι τιμές δεν είναι αριθμοί, όπως το φύλο (αγόρι, κορίτσι) ή το χρώμα των αυτοκινήτων σε ένα πάρκινγκ.

Εφαρμογή 1

1. Στα παρακάτω ερωτήματα να βρείτε ποιο είναι το ποσοτικό και ποιο το κατηγορικό χαρακτηριστικό:
   α. Εξαρτάται το βάρος των μαθητών από το φύλο;
   β. Εξαρτάται ο μισθός ενός εργαζομένου από το επίπεδο εκπαίδευσής του;
   γ. Εξαρτάται η τιμή του ενοικίου ενός διαμερίσματος ίδιων τετραγωνικών από την περιοχή στην οποία βρίσκεται;
2. Να διατυπώσετε τρία ερωτήματα που αφορούν σχέσεις εξάρτησης μεταξύ ενός ποσοτικού και ενός κατηγορικού χαρακτηριστικού ενός πληθυσμού.

Απάντηση:

1. α. Το ποσοτικό χαρακτηριστικό (ποσοτική μεταβλητή) είναι το βάρος και το κατηγορικό χαρακτηριστικό (ποιοτική μεταβλητή) είναι το φύλο με δύο στάθμες (κατηγορίες): Άνδρας - Γυναίκα.

β. Το ποσοτικό χαρακτηριστικό (ποσοτική μεταβλητή) είναι ο μισθός και το κατηγορικό χαρακτηριστικό (ποιοτική μεταβλητή) είναι το επίπεδο εκπαίδευσης του εργαζομένου, το οποίο θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι έχει τις ακόλουθες τρεις στάθμες: Στοιχειώδης εκπαίδευση (Δημοτικό), Μέση εκπαίδευση (Γυμνάσιο - Λύκειο) και Ανώτατη εκπαίδευση (Πανεπιστήμιο).

γ. Το ποσοτικό χαρακτηριστικό (ποσοτική μεταβλητή) είναι η τιμή του ενοικίου ενός διαμερίσματος και το κατηγορικό χαρακτηριστικό (ποιοτική μεταβλητή) είναι η περιοχή στην οποία βρίσκεται το διαμέρισμα και θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι έχει τις ακόλουθες τρεις στάθμες: Αστική περιοχή, Ημιαστική περιοχή, Αγροτική περιοχή.

2. Τρία ερωτήματα που αφορούν σε σχέσεις εξάρτησης μεταξύ ενός ποσοτικού και ενός κατηγορικού χαρακτηριστικού ενός πληθυσμού θα μπορούσαν να είναι:

1. Εξαρτάται η βαθμολογία που επιτυγχάνει στα μαθήματα ένας μαθητής από το επίπεδο διαβάσματος;
2. Εξαρτάται ο χρόνος του ταξιδιού από την Αθήνα στη Θεσσαλονίκη από το μέσο μεταφοράς;
3. Εξαρτάται η κατανάλωση βενζίνης ενός αυτοκινήτου από το μέγεθος του αυτοκινήτου;

Διερεύνηση 2

Σε ένα παιχνίδι μιας ομάδας μπάσκετ, οι παίκτες που χρησιμοποιήθηκαν σημείωσαν τους ακόλουθους πόντους:

5	6	8	8	10
5	7	8	9	13
5	7	8	9	15

α. Να βρείτε τη διάμεσο των πόντων.
β. Να υπολογίσετε τα τεταρτημόρια Q_1, Q_2 και Q_3.
γ. Να υπολογίσετε: το ενδοτεταρτημοριακό εύρος IQR και τις τιμές: $Q_1 - 1{,}5IQR$ και $Q_3 + 1{,}5IQR$.
δ. Υπάρχει παίκτης που σημείωσε:
Λιγότερους πόντους από $Q_1 - 1{,}5IQR$; Περισσότερους πόντους από $Q_3 + 1{,}5IQR$;
ε. Να κατασκευάσετε θηκόγραμμα με την περίληψη των πέντε αριθμών για τους πόντους του πίνακα.
στ. Αν στο προηγούμενο ερώτημα βρήκατε τιμή μικρότερη από $Q_1 - 1{,}5IQR$ ή μεγαλύτερη από $Q_3 + 1{,}5IQR$, να την αφαιρέσετε από τις τιμές του πίνακα και να κατασκευάσετε για τις υπόλοιπες τιμές θηκόγραμμα με την περίληψη των πέντε αριθμών.
ζ. Να συγκρίνετε τα θηκογράμματα που κατασκευάσατε στα προηγούμενα ερωτήματα (ε) και (στ).

Τι παρατηρείτε;

Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες μάθησης

Για τη μελέτη των πληροφοριών είναι αναγκαία η ύπαρξη ορισμένων δεικτών. Ήδη από το Γυμνάσιο είναι γνωστοί τέτοιοι δείκτες, όπως για παράδειγμα, η μέση τιμή, η διάμεσος, τα τεταρτημόρια (Q_1, $Q_2 = δ$, Q_3), το ενδοτεταρτημοριακό εύρος ($IQR = Q_3 - Q_1$) και το απλό θηκόγραμμα.

Διάμεσος

Διάμεσος (δ) ενός συνόλου παρατηρήσεων, οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά, λέγεται:
• η «μεσαία» παρατήρηση, όταν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττός αριθμός ή
• το ημιάθροισμα των δύο «μεσαίων» παρατηρήσεων, όταν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιος αριθμός.

Δηλαδή, η διάμεσος χωρίζει τις παρατηρήσεις ενός δείγματος σε δύο ισοπληθείς ομάδες. Η διάμεσος δ αποτελεί ένα μέτρο θέσης της κατανομής των δεδομένων.

Παράδειγμα: Η διάμεσος των αριθμών: 2, 3, 4, **5**, 7, 9, 12 είναι δ = 5, ενώ η διάμεσος των αριθμών 3, **4**, **7**, 9 είναι $\delta = \frac{4+7}{2} = 5{,}5$.

Σημείωση

Η διάμεσος, όπως ορίστηκε, ενός συνόλου παρατηρήσεων είναι η τιμή για την οποία το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτήν και το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από αυτήν.

Τεταρτημόρια

Τεταρτημόρια ονομάζονται οι παρατηρήσεις οι οποίες χωρίζουν ένα σύνολο διατεταγμένων παρατηρήσεων σε τέσσερις ομάδες, καθεμία από τις οποίες περιλαμβάνει το πολύ 25% των παρατηρήσεων.

Πρώτο τεταρτημόριο (Q_1) λέγεται η τιμή πριν από την οποία βρίσκεται το πολύ 25% του συνόλου των παρατηρήσεων και μετά από αυτήν το πολύ 75%. Βρίσκεται υπολογίζοντας τη διάμεσο του πολύ των 50% των μικρότερων παρατηρήσεων.

Δεύτερο τεταρτημόριο (Q_2) λέγεται η διάμεσος **δ ($Q_2 = \delta$)**. Πριν από το Q_2 βρίσκεται το πολύ το 50% του συνολικού αριθμού των παρατηρήσεων και μετά από αυτό το πολύ το 50%.

Τρίτο τεταρτημόριο (Q_3) λέγεται η τιμή πριν από την οποία βρίσκεται το πολύ 75% του συνολικού αριθμού των παρατηρήσεων και μετά από αυτήν το πολύ 25%. Βρίσκεται υπολογίζοντας τη διάμεσο του πολύ των 50% των μεγαλύτερων παρατηρήσεων.

Σημείωση

Τα τεταρτημόρια χωρίζουν τις παρατηρήσεις σε τέσσερα ίσα τμήματα, με την έννοια ότι περιέχουν ίσα ποσοστά παρατηρήσεων, αλλά δεν είναι αναγκαία ίσα με την έννοια της γεωμετρικής απόστασης.

Παρατήρηση

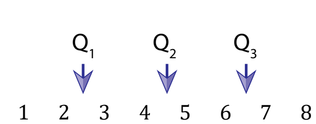
Όταν το πλήθος των διατεταγμένων παρατηρήσεων είναι άρτιος αριθμός (2ν) τις χωρίζουμε στη μέση, ενώ όταν το πλήθος τους είναι περιττός αριθμός (2ν+1) εξαιρούμε τη διάμεσο, οπότε Q_1 είναι η διάμεσος των ν μικρότερων παρατηρήσεων και Q_3 η διάμεσος των ν μεγαλύτερων.

Παραδείγματα: Το πλήθος των παρατηρήσεων 3,4,7,8,8,8,8,9,10,11,12 είναι $11 = 2 \cdot 5 + 1$ (ν = 5), οπότε δ = 8 (μεσαία παρατήρηση), $Q_1 = 7$ (διάμεσος των 3,4,7,8,8) και $Q_3 = 10$ (διάμεσος των 8,9,10,11,12).

Το πλήθος των παρατηρήσεων 2,3,6,6,6,8,8,10 είναι $8 = 2 \cdot 4$ (ν = 4) οπότε, δ=6, $Q_1 = 4{,}5$ και $Q_3 = 8$.

Σημείωση

Τα τεταρτημόρια, με την έννοια ότι περιέχουν κατά προσέγγιση ίσα ποσοστά, δεν ταυτίζονται αναγκαία με κάποια παρατήρηση. Για παράδειγμα, για τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 έχουμε: $Q_1 = 2{,}5$, $\delta = Q_2 = 4{,}5$ και $Q_3 = 6{,}5$.



Ακραίες τιμές

Στο Γυμνάσιο είχαμε αναφέρει ότι:
Ακραίες τιμές λέγονται αυτές που απέχουν πολύ από τις άλλες τιμές/παρατηρήσεις και φαίνονται «απομονωμένες» από τον κύριο όγκο των δεδομένων.

Στη συνέχεια θα επεκτείνουμε αυτήν τη γενική περιγραφή χαρακτηρισμού των ακραίων τιμών, εισάγοντας τις έννοιες του «φράχτη» και της «οριακής τιμής».

Οι ακραίες τιμές μπορεί να εμφανισθούν για διάφορους λόγους, όπως:
Σφάλματα μέτρησης που οφείλονται σε ατέλειες των οργάνων μέτρησης, ή σε λανθασμένες μετρήσεις των ερευνητών ή στη φύση των μεταβλητών που μετριούνται (π.χ. η πίεση αίματος) κ.ά.

Στο Γυμνάσιο μάθαμε το **απλό θηκόγραμμα** ή το διάγραμμα της «**περίληψης των πέντε αριθμών**», το οποίο είναι μια γραφική αναπαράσταση της μεταβλητότητας ενός συνόλου δεδομένων. Συγκεκριμένα, στα απλά θηκογράμματα απεικονίζονται:

Το πρώτο τεταρτημόριο Q_1, η διάμεσος δ ή το δεύτερο τεταρτημόριο Q_2 ($δ = Q_2$), το τρίτο τεταρτημόριο Q_3, η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή.

Η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή του συνόλου των δεδομένων τοποθετούνται στα άκρα του απλού θηκογράμματος (μουστάκια).

Απλό Θηκόγραμμα

Ωστόσο η ύπαρξη *ακραίων*[1] ή *απόμακρων* ή *έκτροπων* τιμών στα δεδομένα έχει ως συνέπεια την αύξηση της μεταβλητότητας των δεδομένων, «παραμορφώνοντας» τη μελέτη του κύριου όγκου των δεδομένων, με αποτέλεσμα να εξάγονται συμπεράσματα τα οποία δεν δίνουν μια ακριβή εικόνα για αυτά. Για την αναγνώριση των ακραίων τιμών και την εμφάνισή τους σε ένα θηκόγραμμα χρησιμοποιούνται, ως κριτήρια διαχωρισμού αυτών των τιμών από τις υπόλοιπες τιμές, οι φράχτες.

Οποιαδήποτε τιμή έξω από τους φράχτες χαρακτηρίζεται ως ακραία και σημειώνεται σε ένα θηκόγραμμα με ένα από τα σύμβολα: ○, ●, ∗, ×.

Ορισμοί

- **Κάτω φράχτης** σε ένα θηκόγραμμα είναι η τιμή **$Q_1 - 1{,}5 \cdot IQR$,** όπου Q_1 το πρώτο τεταρτημόριο και $IQR = Q_3 - Q_1$ το ενδοτεταρτημοριακό εύρος.
- **Πάνω φράχτης** σε ένα θηκόγραμμα είναι η τιμή **$Q_3 + 1{,}5 \cdot IQR$,** όπου Q_3 το τρίτο τεταρτημόριο και $IQR = Q_3 - Q_1$ το ενδοτεταρτημοριακό εύρος.
- **Οριακή κάτω τιμή** είναι η μικρότερη τιμή των δεδομένων που είναι μεγαλύτερη ή ίση από τον κάτω φράχτη.
- **Οριακή πάνω τιμή** είναι η μεγαλύτερη τιμή των δεδομένων που είναι μικρότερη ή ίση με τον πάνω φράχτη.

Μετά τους παραπάνω ορισμούς, δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό για τον χαρακτηρισμό μιας ακραίας τιμής:
Ακραία ή απόμακρη ή έκτροπη τιμή είναι κάθε τιμή που δεν ανήκει στο διάστημα **$[Q_1 - 1{,}5IQR\,,\, Q_3 + 1{,}5IQR]$**.

Από τον ορισμό αυτό είναι φανερό ότι **ακραία ή απόμακρη ή έκτροπη** τιμή είναι κάθε τιμή που είναι μεγαλύτερη από την τιμή του πάνω φράχτη ή μικρότερη από την τιμή του κάτω φράχτη.

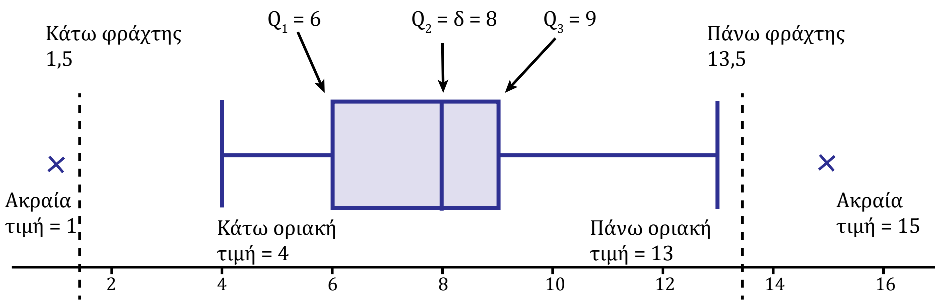
Παράδειγμα: Για τα δεδομένα 1, 4, 5, 6, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 10, 13, 15 έχουμε:

- *Τεταρτημόρια:* Το πλήθος τους είναι περιττός αριθμός (15) οπότε:
  Διάμεσος είναι η μεσαία παρατήρηση, δηλαδή: $δ = Q_2 = 8$.
  Το πρώτο τεταρτημόριο είναι η διάμεσος των 7 μικρότερων παρατηρήσεων, οπότε: $Q_1 = 6$.
  Το τρίτο τεταρτημόριο είναι η διάμεσος των 7 μεγαλύτερων παρατηρήσεων, οπότε: $Q_3 = 9$.
  Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος είναι $IQR = Q_3 - Q_1 = 9 - 6 = 3$.
- *Φράχτες:*
  Κάτω φράχτης: $Q_1 - 1{,}5IQR = 6 - 1{,}5 \cdot 3 = 1{,}5$. *Πάνω φράχτης:* $Q_3 + 1{,}5IQR = 9 + 1{,}5 \cdot 3 = 13{,}5$.
- *Οριακές τιμές:*
  - *Κάτω οριακή τιμή* είναι ο αριθμός 4, αφού είναι η μικρότερη τιμή των δεδομένων που είναι μεγαλύτερη ή ίση από τον κάτω φράχτη 1,5.
  - *Πάνω οριακή τιμή* είναι ο αριθμός 13, αφού είναι η μεγαλύτερη τιμή των δεδομένων που είναι μικρότερη ή ίση από τον πάνω φράχτη 13,5.

[1]Στα επόμενα κεφάλαια οι όροι: «ακραία τιμή», «απόμακρη τιμή» και «έκτροπη τιμή» θα χρησιμοποιούνται με το ίδιο νόημα.

• *Ακραίες τιμές:* Οι τιμές 1 και 15 είναι ακραίες (απόμακρες) γιατί δεν ανήκουν στο διάστημα [1,5, 13,5].

Με τη βοήθεια των παραπάνω έχουμε:



Για να πειραματιστείτε και να εξασκηθείτε στην κατασκευή θηκογράμματος και στον εντοπισμό ακραίων τιμών, ανοίξτε την παραπάνω εφαρμογή.

Σημειώσεις

Σε ένα θηκόγραμμα:
- Το μήκος του ορθογώνιου είναι το ενδοτεταρτημοριακό εύρος IQR.
- Το πλάτος του επιλέγεται αυθαίρετα.

Μεταβλητότητα

Η ύπαρξη ακραίων τιμών επιδρά στη μεταβλητότητα ενός συνόλου δεδομένων και ο εντοπισμός τους διευκολύνεται με την κατασκευή θηκογραμμάτων όπως περιγράψαμε παραπάνω.

Αν εντοπίσουμε μία ακραία τιμή, τότε αυτή μπορεί να οφείλεται είτε σε λανθασμένη μέτρηση ή καταχώριση είτε στη φυσική μεταβλητότητα των δεδομένων. Αν επιβεβαιώσουμε ότι οφείλεται σε λάθος, τότε το διορθώνουμε. Αν όχι, ενδεικτικοί τρόποι αντιμετώπισης είναι η αντικατάστασή της από τη μέση τιμή, τη διάμεσο ή την επικρατούσα τιμή, ο μετασχηματισμός των παρατηρήσεων ή ακόμα και η διαγραφή της υπό όρους.

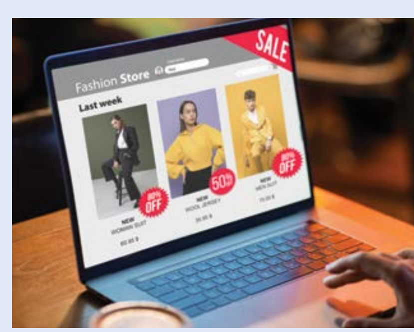
Για να ελέγξετε αν κατανοήσατε τη θεωρία σχετικά με τις ακραίες τιμές, ανοίξτε το σχετικό Quiz στην παραπάνω εφαρμογή.

Σημείωση

Ο τρόπος εύρεσης των τεταρτημορίων μπορεί να είναι διαφορετικός σε κάποια λογισμικά ή σε άλλα συγγράμματα, χωρίς όμως αυτό να σημαίνει πως είναι εσφαλμένος. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να προκύπτουν διαφοροποιημένα αποτελέσματα όταν έχουμε μικρό αριθμό παρατηρήσεων, αλλά γενικά οι διαφορές είναι μικρές για μεγάλο αριθμό παρατηρήσεων.

Εφαρμογή 2

Οι ετήσιοι μισθοί, σε χιλιάδες ευρώ, των εργαζομένων σε μια εταιρεία ηλεκτρονικού εμπορίου (e-shop) παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα:



8	16	16	16	14
13	15	15	15	11
14	13	13	13	17
15	16	17	14	18
16	17	13	16	32
12	18	12	13	25

α. Να κατασκευάσετε απλό θηκόγραμμα με την περίληψη των πέντε αριθμών για τους μισθούς του πίνακα. Πόσο είναι το εύρος και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος;

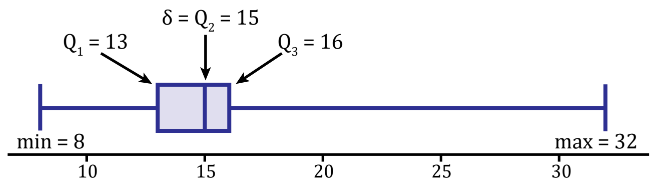
β. Να κατασκευάσετε θηκόγραμμα με οριακές τιμές για τους μισθούς του πίνακα.

γ. Να κατασκευάσετε το θηκόγραμμα αφού αφαιρέσετε τις ακραίες τιμές.

δ. Να περιγράψετε τη μεταβλητότητα των μισθών στα δύο θηκογράμματα που κατασκευάσατε στα ερωτήματα (α) και (β). Τι παρατηρείτε;

Απάντηση

α. Για τους μισθούς του πίνακα βρίσκουμε την περίληψη των πέντε αριθμών. Είναι: min = 8, max = 32, Q_1 = 13, δ = Q_2 = 15, Q_3 = 16 και, κατά τα γνωστά, κατασκευάζουμε το ακόλουθο απλό θηκόγραμμα:



Το εύρος είναι R = 32 – 8 = 24 και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος IQR = Q_3 – Q_1 = 16 – 13 = 3.

β. Για να κατασκευάσουμε το θηκόγραμμα με οριακές τιμές:

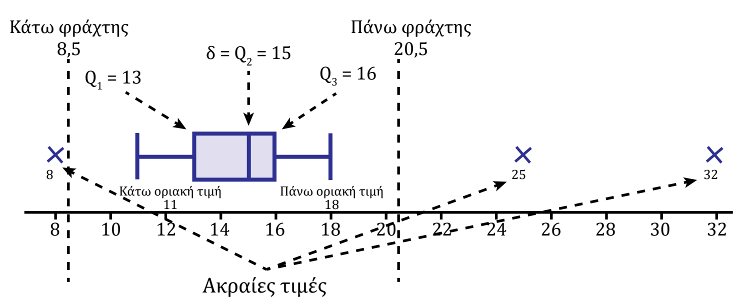
▶ Αρχικά προσδιορίζουμε τους φράχτες.
- *Κάτω φράχτης:* Q_1 – 1,5IQR = 13 – 1,5 · 3 = 8,5.
- *Πάνω φράχτης*: Q_3 + 1,5IQR = 16 + 1,5 · 3 = 20,5.

Με τη βοήθεια των φραχτών προσδιορίζουμε:

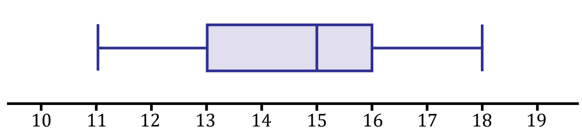
▶ Τις οριακές τιμές:
- *Κάτω οριακή τιμή*: ο κατώτερος ετήσιος μισθός που είναι μεγαλύτερος ή ίσος από την τιμή του κάτω φράκτη είναι ίσος με 11 χιλιάδες ευρώ, οπότε αυτή η τιμή είναι η κάτω οριακή τιμή.
- *Πάνω οριακή τιμή*: ο μεγαλύτερος ετήσιος μισθός που είναι μικρότερος ή ίσος από την τιμή του πάνω φράκτη είναι ίσος με 20,5 χιλιάδες ευρώ, οπότε αυτή η τιμή είναι η πάνω οριακή τιμή.

▶ Τις ακραίες (απόμακρες) τιμές:
- Ο μισθός 8 είναι μικρότερος από τον κάτω φράχτη 8,5, οπότε είναι ακραία τιμή.
- Οι μισθοί 25 και 32 είναι μεγαλύτεροι από τον πάνω φράχτη 20,5, οπότε είναι ακραίες τιμές.

Με τη βοήθεια των παραπάνω κατασκευάζουμε το θηκόγραμμα:



γ. Εξαιρώντας τις απόμακρες τιμές, είναι: min=11, Q_1=13, Q_2=15, Q_3 =16, max=18.



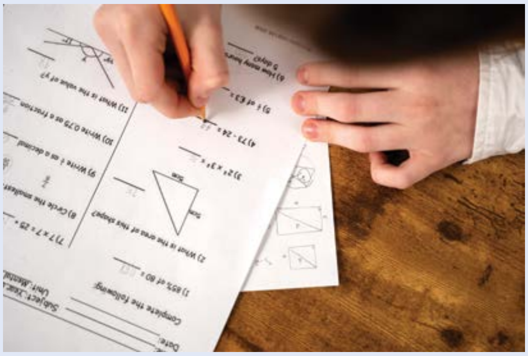
δ. Όπως παρατηρούμε από τα δύο θηκογράμματα:
- Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος είναι το ίδιο και στα δύο θηκογράμματα.
- Το εύρος, στο απλό θηκόγραμμα παρουσιάζεται συγκριτικά μεγαλύτερο (R = 24), έναντι του εύρους χωρίς τις απόμακρες τιμές με εύρος (R = 7).
- Το εύρος στο διάστημα (ελάχιστη παρατήρηση, Q_1), όπως και στο διάστημα (Q_3, μέγιστη παρατήρηση), στο απλό θηκόγραμμα είναι μικρότερο σε σχέση με το αντίστοιχο στο θηκόγραμμα των οριακών τιμών.
- Η εξάπλωση των τιμών στο απλό θηκόγραμμα και οι διαφορές στη μεταβλητότητα, σε σχέση με το θηκόγραμμα με οριακές τιμές, οφείλονται στις απόμακρες τιμές 8, 25 και 32.
- Συμπερασματικά, το θηκόγραμμα με οριακές τιμές, στο οποίο εμφανίζονται και οι απόμακρες τιμές, δίνει μια πιο ακριβή εικόνα των μισθών σε σχέση με το αντίστοιχο στο θηκόγραμμα χωρίς τις απόμακρες τιμές.

Εφαρμογή 3

Οι βαθμολογίες που πήραν μια χρονιά οι μαθητές ενός πειραματικού και ενός μουσικού σχολείου που συμμετείχαν στον διαγωνισμό Μαθηματικών «Θαλής» της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας ήταν:

ΜΟΥΣΙΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ: 14 9 19 13 12 12 13 14 14 13 14 12 17 12 12 14 13 14 13 15.
ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ: 10 16 12 16 18 16 14 17 17 12 16 15 18 17 18 13 18 16 8 16.

Να απεικονίσετε σε ένα διπλό θηκόγραμμα με οριακές τιμές την κατανομή των βαθμολογιών στα σχολεία.



Απάντηση
Η βαθμολογία είναι ποσοτική μεταβλητή και η μεταβλητή «Τύπος σχολείου» κατηγορική με δύο στάθμες (κατηγορίες): «Μουσικό σχολείο» και «Πειραματικό σχολείο».

ΜΟΥΣΙΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ:

▶ Για την κατασκευή του θηκογράμματος με οριακές τιμές των τιμών της βαθμολογίας έχουμε: min = 9, max = 19, $Q_1 = 12$, $\delta = Q_2 = 13$, $Q_3 = 14$ και ενδοτεταρτημοριακό εύρος $IQR = Q_3 - Q_1 = 14 - 12 = 2$.

Φράχτες:
- *Κάτω φράχτης:* $Q_1 - 1{,}5IQR = 12 - 1{,}5 \cdot 2 = 9$.
- *Πάνω φράχτης:* $Q_3 + 1{,}5IQR = 14 + 1{,}5 \cdot 2 = 17$.

Οριακές τιμές:
- *Κάτω οριακή τιμή:* Η βαθμολογία 9, αφού είναι η μικρότερη τιμή που είναι μεγαλύτερη ή ίση από τον κάτω φράχτη 9.
- *Πάνω οριακή τιμή:* Η βαθμολογία 17, αφού είναι η μεγαλύτερη τιμή που είναι μικρότερη ή ίση από τον πάνω φράχτη 17.

Ακραίες (Απόμακρες) τιμές:
- Η τιμή 19, επειδή είναι μεγαλύτερη από τον πάνω φράχτη 17.

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ:

▶ Για την κατασκευή του θηκογράμματος, με οριακές τιμές, της βαθμολογίας στο πειραματικό σχολείο έχουμε: min = 8, max = 18, $Q_1 = 13{,}5$, $\delta = Q_2 = 16$, $Q_3 = 17$ και ενδοτεταρτημοριακό εύρος $IQR = Q_3 - Q_1 = 17 - 13{,}5 = 3{,}5$.

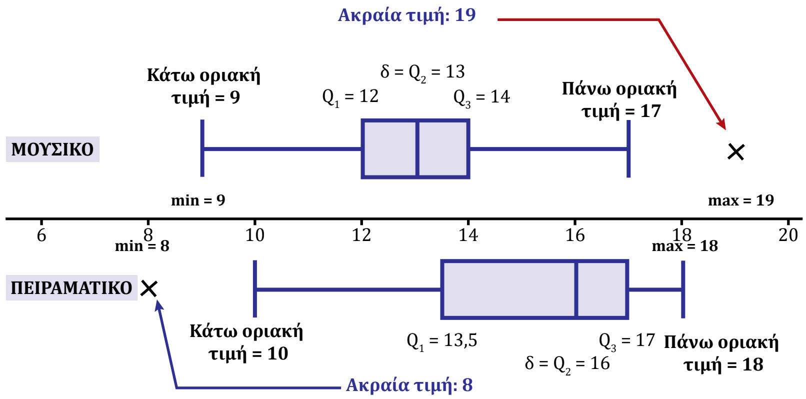
Φράχτες:
- *Κάτω φράχτης:* $Q_1 - 1{,}5IQR = 13{,}5 - 1{,}5 \cdot 3{,}5 = 8{,}25$.
- *Πάνω φράχτης:* $Q_3 + 1{,}5IQR = 17 + 1{,}5 \cdot 3{,}5 = 22{,}25$.

Οριακές τιμές:
- *Κάτω οριακή τιμή:* Η βαθμολογία 10, αφού είναι η μικρότερη τιμή που είναι μεγαλύτερη είτε ίση με τον κάτω φράχτη 8,25.
- *Πάνω οριακή τιμή:* Η βαθμολογία 18, αφού είναι η μεγαλύτερη τιμή που είναι μικρότερη είτε ίση με τον πάνω φράχτη 22,25.

Ακραίες (Απόμακρες) τιμές:
- Η τιμή 8, γιατί είναι μικρότερη από τον κάτω φράχτη 8,25.

Να αντιστοιχίσετε τις κάρτες με τα διαγράμματα συχνοτήτων στις κάρτες με τα θηκογράμματα.

Με τη βοήθεια των παραπάνω στοιχείων, το διπλό θηκόγραμμα για την κατανομή των βαθμολογιών στα δύο σχολεία είναι:



Για να ερευνήσετε περισσότερο τα θηκογράμματα και να εξασκηθείτε, χρησιμοποιήστε την παραπάνω ψηφιακή εφαρμογή.

Εφαρμογή 4

Οι τιμές πώλησης κινητών τηλεφώνων σε τρία καταστήματα μιας περιοχής έχουν ως εξής:

Κατάστημα Α΄: 100, 450, 180, 150, 390, 520, 300, 20, 400, 40, 600, 410.

Κατάστημα Β΄: 500, 700, 350, 400, 290, 600, 720, 400, 300, 510, 1300, 1000.

Κατάστημα Γ΄: 700, 900, 850, 670, 890, 1400, 2100, 990, 1220, 840, 290.

α. Να κατασκευάσετε ένα θηκόγραμμα με οριακές τιμές για την κατανομή των τιμών πώλησης των κινητών. Αν υπάρχουν ακραίες τιμές, να τις προσδιορίσετε.

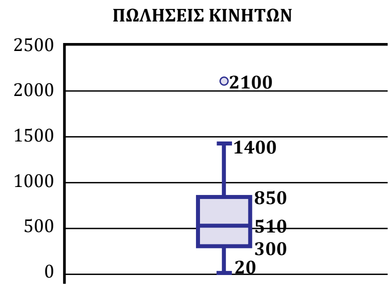
β. Να κατασκευάσετε ένα θηκόγραμμα με οριακές τιμές για τις τιμές πώλησης των κινητών τηλεφώνων σε κάθε κατάστημα. Αν υπάρχουν ακραίες τιμές, να τις προσδιορίσετε. Τι παρατηρείτε;

(*Υπόδειξη*: Για την κατασκευή των θηκογραμμάτων μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το Excel ή το Geogebra).

Απάντηση

Η μεταβλητή «τιμές πώλησης κινητών» είναι ποσοτική μεταβλητή και η μεταβλητή «Κατάστημα κινητών τηλεφώνων» κατηγορική με τρεις στάθμες (κατηγορίες): «Κατάστημα Α΄», «Κατάστημα Β΄» και «Κατάστημα Γ΄». Για την κατανομή των τιμών πώλησης των κινητών τηλεφώνων, συνολικά και στα τρία καταστήματα, σε κάθε κατάστημα, καθώς και την κατασκευή του θηκογράμματος, έχουμε:

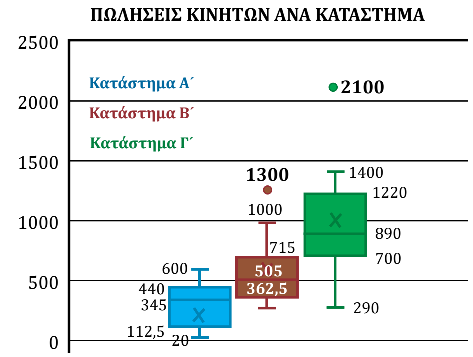
α. Για την κατασκευή του θηκογράμματος με οριακές τιμές μπορούμε να εργαστούμε όπως στην Εφαρμογή 2. Κατασκευάζοντας στο Excel το θηκόγραμμα για τις τιμές πώλησης των κινητών τηλεφώνων, συνολικά και στα τρία καταστήματα, όπως περιγράφεται στο συμπληρωματικό υλικό, παίρνουμε το διπλανό διάγραμμα.



Από το θηκόγραμμα διαπιστώνουμε ότι:
- Η διάμεση τιμή πώλησης είναι: 510 €.
- Το εύρος των τιμών πώλησης είναι 1400 – 20 = 1380€ με οριακές τιμές και 2100-20 = 2080€ χωρίς οριακές τιμές.
- Το εύρος του κεντρικού 50% (ενδοτεταρτημοριακό εύρος) των τιμών πώλησης των κινητών είναι: 850 – 300 = 550€.
- Υπάρχει μια απόμακρη τιμή που αντιστοιχεί σε τιμή πώλησης κινητού 2100€.

Για να δημιουργήσετε τα δικά σας θηκογράμματα με ψηφιακά μέσα, ανοίξτε τις ψηφιακές εφαρμογές που υπάρχουν εδώ.

β. Για να κατασκευάσουμε ένα τριπλό θηκόγραμμα με οριακές τιμές για τις τιμές πώλησης των κινητών τηλεφώνων σε κάθε κατάστημα, μπορούμε να εργαστούμε όπως στην προηγούμενη Εφαρμογή 3. Κατασκευάζοντας στο Excel το θηκόγραμμα για τις τιμές πώλησης των κινητών τηλεφώνων στα τρία καταστήματα, όπως περιγράφεται στο συμπληρωματικό υλικό, παίρνουμε το διπλανό διάγραμμα.



Από το τριπλό θηκόγραμμα διαπιστώνουμε ενδεικτικά ότι:

- Οι διάμεσες τιμές πώλησης είναι: 345€, 505€ και 890€ για τα καταστήματα Α΄, Β΄ και Γ΄ αντίστοιχα.
- Το μεγαλύτερο εύρος τιμών πώλησης με οριακές τιμές παρουσιάζεται στο κατάστημα Γ΄ και είναι 1400 – 290 = 1110€.
- Το μικρότερο εύρος τιμών πώλησης με οριακές τιμές παρουσιάζεται στο κατάστημα Α΄ και είναι 600 – 20 = 580€.
- Απόμακρες τιμές παρουσιάζονται:
  Στο κατάστημα Γ΄ και αντιστοιχεί σε τιμή πώλησης κινητού 2100€.
  Στο κατάστημα Β΄ και αντιστοιχεί σε τιμή πώλησης κινητού 1300€.

Για να εξασκηθείτε στην κατασκευή τριπλού θηκογράμματος με ψηφιακά μέσα, ανοίξτε την εφαρμογή.

Όπως φαίνεται στο διάγραμμα, η κατασκευή του θηκογράμματος μας έδωσε τη δυνατότητα να διαπιστώσουμε ότι:

- Η ακραία τιμή 2100€, που είδαμε στο θηκόγραμμα για όλες μαζί τις τιμές πώλησης και στα τρία καταστήματα, εντοπίζεται στο κατάστημα Γ΄.
- Υπάρχει ακραία τιμή πώλησης 1300€ στο κατάστημα Β' που δεν εμφανιζόταν στο θηκόγραμμα για όλες μαζί τις τιμές πώλησης.

Να ανοίξετε τη διπλανή εφαρμογή για να ερευνήσετε το θηκόγραμμα σε συνδυασμό με σημειόγραμμα.

Ασκήσεις

1. Σε μια εταιρεία, οι μισθοί 15 εργαζομένων (σε ευρώ) είναι: 1000, 1200, 1400, 1500, 1600, 1700, 1800, 1900, 2000, 2100, 2200, 2300, 2400, 2500, 2600.

α. Υπολογίστε τα τεταρτημόρια Q_1, Q_2, Q_3.

β. Ποιο είναι περίπου το ποσοστό των εργαζομένων που λαμβάνουν μισθό άνω του Q_3;

γ. Να εξετάσετε αν υπάρχουν ακραίες τιμές.

2. Σε έναν αγώνα δρόμου, 30 δρομείς τερμάτισαν σε χρόνους (σε λεπτά): 20, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 52, 53, 58, 67.

α. Υπολογίστε τα τεταρτημόρια Q_1, Q_2, Q_3.

β. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις ακραίες τιμές.

γ. Ποιος είναι ο μέσος χρόνος τερματισμού για τους δρομείς του 50% των πιο γρήγορων δρομέων του αγώνα;

3. Μετρήθηκε το ύψος 15 σκύλων, με τα ακόλουθα αποτελέσματα (σε εκατοστά): 34, 40, 43, 48, 48, 48, 50, 53, 53, 55, 56, 56, 60, 63, 70.

α. Υπολογίστε τα τεταρτημόρια Q_1, Q_2, Q_3.

β. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις ακραίες τιμές.

γ. Ποιο είναι το εύρος (R) των υψών των σκύλων με και χωρίς ακραίες τιμές;

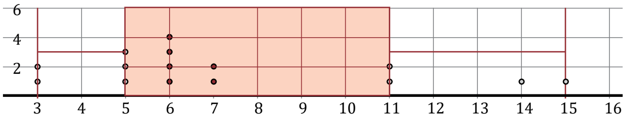
4. Σε μια μετεωρολογική υπηρεσία καταγράφηκαν οι θερμοκρασίες 7 ημερών: 18°C, 20°C, 22°C, 24°C, 26°C, 28°C, 30°C.

α. Υπολογίστε τα τεταρτημόρια Q_1, Q_2, Q_3. Ποιο είναι το εύρος των θερμοκρασιών;

β. Ποια είναι η διαφορά μεταξύ Q_3 και Q_1;

γ. Να εξετάσετε αν υπάρχουν ακραίες τιμές.

5. Σε μια εταιρεία καταγράφηκαν τα έτη προϋπηρεσίας 15 εργαζομένων, όπως φαίνονται στην παρακάτω εικόνα:



α. Υπολογίστε τα τεταρτημόρια Q_1, Q_2, Q_3.

β. Ποια είναι η διαφορά μεταξύ Q_3 και Q_1;

γ. Ποια είναι η διαφορά μεταξύ των τιμών της μέσης τιμής του 20% των εργαζομένων με τα λιγότερα χρόνια υπηρεσίας από το 20% των εργαζομένων με τα περισσότερα χρόνια υπηρεσίας;

6. Παρακάτω εμφανίζονται οι βαθμοί, με άριστα το 20, 27 μαθητών της Β΄ λυκείου σε ένα διαγώνισμα Άλγεβρας γενικής παιδείας, ταξινομημένοι ανά προσανατολισμό σπουδών κάθε μαθητή/τριας

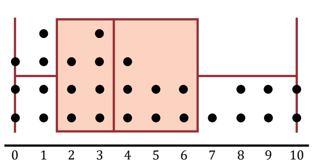
Θετικών Σπουδών: 18, 16, 17, 15, 14, 16, 10, 13, 09, 11, 19, 20, 20, 18, 16.

Ανθρωπιστικών Σπουδών: 09, 09, 11, 12, 13, 08, 17, 20, 17, 17, 12, 13.

α. Ποιο το ποσοτικό και ποιο το κατηγορικό χαρακτηριστικό; Υπάρχουν στάθμες; Ποιες είναι αυτές;

β. Διατυπώστε ένα ερώτημα που αφορά σχέση εξάρτησης μεταξύ του ποσοτικού και του κατηγορικού χαρακτηριστικού.

7. Το διπλανό σημειόγραμμα και θηκόγραμμα έχουν γίνει από ένα δείγμα 28 παρατηρήσεων.



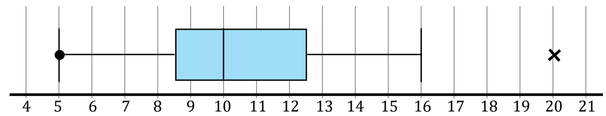
α. Να προσδιορίσετε τα Q_1, Q_2 και Q_3.

β. Να προσδιορίσετε τις παρατηρήσεις που είναι μικρότερες από το Q_1.

γ. Να προσδιορίσετε τις παρατηρήσεις που ανήκουν στο διάστημα (Q_1, Q_3).

Για να βοηθηθείτε ή για να επαληθεύσετε τις επιλογές σας, ανοίξτε τη διπλανή ψηφιακή εφαρμογή.

8. Παρουσιάστηκε το ακόλουθο θηκόγραμμα για τις ηλικίες των παιδιών και των νέων που παρακολούθησαν μια εκδήλωση:



α. Ποιο ήταν το εύρος των ηλικιών των παιδιών και των νέων που παρακολούθησαν την εκδήλωση;

β. Ποια είναι η διάμεσος των ηλικιών;

γ. Ποιες είναι οι οριακές τιμές στο θηκόγραμμα;

δ. Υπάρχουν ακραίες ηλικίες; Αν ναι, ποιες;

ε. Αν εξαιρέσουμε τις ακραίες τιμές:

i. Ποιο ποσοστό των ηλικιών των παιδιών και των νέων που παρακολούθησε την εκδήλωση ήταν κάτω από 12,5 έτη, κατά προσέγγιση;

ii. Ποιο, κατά προσέγγιση, ποσοστό των ατόμων που παρακολούθησαν την εκδήλωση ήταν ηλικίας από 8,5 έως 12,5 έτη;

iii. Ποιες ηλικίες συμπεριλαμβάνονται στο πολύ το 75% των παιδιών και των νέων με τις μεγαλύτερες ηλικίες;

9. α. Όταν το μέγεθος ενός δείγματος είναι 15, τότε η διάμεσος δ και τα τεταρτημόρια Q_1, Q_3 είναι τιμές του δείγματος; Να δώσετε ένα παράδειγμα.

β. Να ερευνήσετε τι ισχύει για τα τεταρτημόρια όταν το μέγεθος του δείγματος είναι: 16, 17 και 18.

γ. Τι ισχύει για τη διάμεσο και τα τεταρτημόρια Q_1 Q_3 όταν το μέγεθος του δείγματος είναι: 90, 91, 92, και 93;

Να ανοίξετε τη διπλανή εφαρμογή και να λύσετε την ψηφιακή άσκηση.

Να ανοίξετε τη διπλανή εφαρμογή για να βοηθηθείτε στη λύση των ασκήσεων.

2 • Μέτρα θέσης και μεταβλητότητας

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν να:

1. Περιγράφουν και προσδιορίζουν τη διασπορά και την τυπική απόκλιση ποσοτικών δεδομένων, χρησιμοποιώντας τετραγωνικές και απόλυτες αποκλίσεις.
2. Διερευνούν πώς επηρεάζεται η διασπορά και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος από την ύπαρξη απόμακρων τιμών.
3. Περιγράφουν και προσδιορίζουν τη μέση τιμή και τη διάμεσο, καθώς και τη διασπορά, την τυπική απόκλιση και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος των τιμών ενός ποσοτικού χαρακτηριστικού, σε κάθε στάθμη ενός κατηγορικού χαρακτηριστικού, του υπό μελέτη πληθυσμού.

2.1 Μέτρα θέσης

Μέτρα θέσης όπως έχουμε μάθει στο Γυμνάσιο είναι: η μέση τιμή, η διάμεσος και τα τεταρτημόρια.

Στην ψηφιακή εφαρμογή θα βρείτε οδηγίες για να εργαστείτε σε προβλήματα Στατιστικής.

Μέση τιμή

Η **μέση τιμή** ή ο **μέσος όρος** ενός συνόλου παρατηρήσεων $x_1, x_2, x_3, ..., x_\nu$ συμβολίζεται με $\bar{x}$ και βρίσκεται με τον τύπο:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_\nu}{\nu}. \qquad (1)$$

Από τον τύπο (1) προκύπτει ότι:

$$\mathbf{x_1 + x_2 + ... + x_\nu = \nu \cdot \bar{x}.}$$

Δηλαδή, το άθροισμα όλων των τιμών ενός ποσοτικού χαρακτηριστικού είναι ίσο με το γινόμενο του πλήθους αυτών επί τη μέση τιμή.

Επίσης, έχουμε δει ότι **συχνότητα** της τιμής x_i ενός ποσοτικού χαρακτηριστικού είναι το πλήθος ν_i των φορών που αυτή εμφανίζεται στο δείγμα. Έτσι, αν γνωρίζουμε τις συχνότητες $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_k$ των διαφορετικών τιμών ενός ποσοτικού χαρακτηριστικού, η μέση τιμή θα δίνεται από τον τύπο

$$\mathbf{\bar{x} = \frac{\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + ... + \nu_k x_k}{\nu}}. \qquad (2)$$

Ακόμα, έχουμε δει ότι η σχετική συχνότητα της τιμής x_i ορίζεται από τον τύπο $\mathbf{f_i = \frac{\nu_i}{\nu}}$ οπότε

από τον τύπο (2) της μέσης τιμής προκύπτει ότι:

$$\bar{x} = \frac{\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \cdots + \nu_\kappa x_\kappa}{\nu} = \frac{\nu_1 x_1}{\nu} + \frac{\nu_2 x_2}{\nu} + \cdots + \frac{\nu_\kappa x_\kappa}{\nu} \Leftrightarrow$$

$$\bar{x} = \frac{\nu_1}{\nu} x_1 + \frac{\nu_2}{\nu} x_2 + \cdots + \frac{\nu_\kappa}{\nu} x_\kappa = f_1 x_1 + f_2 x_2 + \cdots + f_\kappa x_\kappa,$$

όπου $f_1, f_2, ..., f_k$ είναι οι σχετικές συχνότητες των διαφορετικών τιμών του ποσοτικού χαρακτηριστικού.

Επομένως:

$$\mathbf{\bar{x} = f_1 x_1 + f_2 x_2 + \cdots + f_k x_k}. \qquad (3)$$

Σημείωση

Επικρατούσα τιμή ενός συνόλου παρατηρήσεων είναι η τιμή που εμφανίζεται τις περισσότερες φορές, δηλαδή η τιμή με τη μεγαλύτερη συχνότητα.

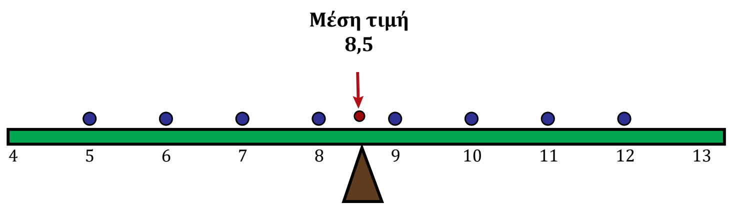
Τόσο η μέση τιμή όσο και η διάμεσος εκλαμβάνονται ως εκπρόσωποι ενός συνόλου παρατηρήσεων, ανάλογα με τα χαρακτηριστικά του δείγματος.

Όταν δεν υπάρχουν ακραίες (απόμακρες) τιμές, η μέση τιμή είναι αντιπροσωπευτικός δείκτης του δείγματος.

Όταν υπάρχουν ακραίες (απόμακρες) τιμές, τότε η διάμεσος είναι καλύτερος αντιπροσωπευτικός δείκτης του δείγματος.

Για παράδειγμα, το κατά κεφαλήν εισόδημα μιας χώρας με μεγάλες ανισότητες εισοδημάτων, εκφράζεται καλύτερα από τη διάμεσο, ενώ το ύψος των βροχοπτώσεων του καλοκαιριού εκφράζεται καλύτερα από τον μέσο όρο.

Η **μέση τιμή**, από φυσική άποψη, προσδιορίζει τη θέση του «κέντρου βάρους» των παρατηρήσεων.



Ασκήσεις

1. Έξι μαθητές μέτρησαν το ύψος τους και βρήκαν τα ακόλουθα αποτελέσματα (σε εκατοστά): 157, 178, 178, 182, 170, 173.

α. Να βρεθεί η μέση τιμή και η διάμεσος του ύψους τους πριν και μετά την αφαίρεση της ακραίας τιμής.

β. Τι παρατηρείτε;

2. Ένας ποδηλάτης μέτρησε τον χρόνο που χρειάστηκε για να διανύσει 5 διαδρομές, με τα ακόλουθα αποτελέσματα (σε λεπτά): 25, 28, 23, 27, 26. Ποιος είναι ο μέσος χρόνος που χρειάστηκε για να ολοκληρώσει μια διαδρομή; Ποια είναι η διαφορά του χρόνου της πιο αργής διαδρομής από τη μέση τιμή;

3. Οι πόντοι που σημείωσαν 11 παίκτες μιας ομάδας μπάσκετ είναι: 2, 3, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 8, 10, 16.

α. Να βρεθούν οι σχετικές συχνότητες των πόντων και με τη βοήθειά τους η μέση τιμή τους.

β. Να ελέγξετε αν υπάρχει ακραία τιμή.

γ. Να βρείτε τη μέση τιμή των πόντων μετά την αφαίρεση της ακραίας τιμής, αν υπάρχει. Τι παρατηρείτε;

4. Σε μια πόλη, την τελευταία πενταετία είχαμε αριθμό γεννήσεων: 120, 135, 110, 145, 125 και αριθμό θανάτων 63, 72, 55, 89, 35, αντίστοιχα. Να βρεθεί η μέση και η διάμεση τιμή αύξησης του πληθυσμού της πόλης.

5. Να βρεθούν 10 διαδοχικοί ακέραιοι αριθμοί:

α. Όταν η μέση τιμή τους είναι 15,5.

β. Όταν η διάμεσός τους είναι 15,5.

6. Η μέση τιμή 10 διαδοχικών άρτιων αριθμών είναι 17. Να βρείτε τα τεταρτημόρια Q_1 και Q_3.

7. Σε ένα Λύκειο υπάρχουν 350 μαθητές με μέση τιμή ηλικίας 16,3. Η Α΄ τάξη έχει 150 μαθητές με μέσο όρο ηλικίας 15,5 χρόνια, ενώ η Β΄ τάξη έχει 120 μαθητές με μέσο όρο ηλικίας 16,5 χρόνια. Οι μαθητές της Γ΄ τάξης, τι μέσο όρο ηλικίας έχουν;

8. Η μέση τιμή 30 παρατηρήσεων είναι 20. Αν από αυτές οι 8 μειωθούν κατά 3 μονάδες και οι 9 αυξηθούν κατά 5 μονάδες, να βρεθεί η νέα μέση τιμή.

9. Μια κάλπη έχει ίδιου βάρους κόκκινες, μπλε και πράσινες μπάλες σε αναλογία 25%, 35% και 40%, αντίστοιχα. Μια κόκκινη μπάλα ζυγίζει 15 gr, μια μπλε μπάλα 20 gr και μια πράσινη 25 gr. Να βρείτε τη μέση τιμή του βάρους για όλες τις μπάλες. Αν οι πράσινες μπάλες είναι 8, τι βάρος έχουν οι κόκκινες και τι βάρος έχουν οι μπλε μπάλες;

2.2 Μέτρα μεταβλητότητας

Διερεύνηση 1

Στον πίνακα παρουσιάζεται ο αριθμός των διαγωνισμάτων που τέθηκαν στα 19 τμήματα ενός σχολείου κατά το πρώτο τετράμηνο ενός σχολικού έτους.

Διαγωνίσματα	9	10	11	12	13	15	16	18
Τμήματα	1	1	3	4	4	3	2	1

α. Να βρείτε τη μέση τιμή του αριθμού των διαγωνισμάτων.
β. Να βρείτε το άθροισμα των διαφορών του αριθμού των διαγωνισμάτων από τη μέση τιμή.
γ. Να βρείτε το άθροισμα των απολύτων τιμών των διαφορών του αριθμού των διαγωνισμάτων από τη μέση τιμή.
δ. Να βρείτε το άθροισμα των τετραγώνων του αριθμού των διαφορών των διαγωνισμάτων από τη μέση τιμή.
ε. Να συζητήσετε στην τάξη ποιο από τα τρία αθροίσματα θα χρησιμοποιούσατε για να εκφράσετε τη μεταβλητότητα της βαθμολογίας.

Οι μετρήσεις της μέσης τιμής και της διαμέσου δεν αποκαλύπτουν την πλήρη εικόνα ενός συνόλου δεδομένων. Δύο σύνολα δεδομένων με τον ίδιο μέσο όρο μπορεί να έχουν εντελώς διαφορετική μεταβλητότητα. Δηλαδή, η εξάπλωση των τιμών των παρατηρήσεων στο ένα σύνολο δεδομένων μπορεί να είναι πολύ μεγαλύτερη ή μικρότερη από ό,τι για το άλλο σύνολο δεδομένων.

Ως παράδειγμα αναφέρουμε τα δεδομένα σχετικά με τις ηλικίες (σε χρόνια) των εργαζομένων που εργάζονται σε δύο μικρές εταιρείες. Αυτά είναι:
Εταιρεία Α: 47 38 35 40 36 45 39.
Εταιρεία Β: 70 33 18 52 27 28 52.

Η μέση ηλικία των εργαζομένων στις δύο αυτές εταιρείες είναι η ίδια, 40 έτη. Ωστόσο, μόνο με αυτό το στοιχείο δεν μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα για τους εργαζόμενους στις δύο εταιρείες και ιδιαίτερα για το πώς κατανέμονται οι ηλικίες τους.

Κατά τη μελέτη της συμπεριφοράς του πληθυσμού και των δεδομένων που αντλούνται από τη συλλογή των στοιχείων, σημαντικό ρόλο παίζει η **μεταβλητότητα** του δείγματος, η οποία προκύπτει από φυσικά αίτια, από μετρήσεις, από κάποιον ειδικό παράγοντα ή ακόμη και από τον ίδιο τον πληθυσμό, όπως στο παράδειγμά μας.

Μια πρώτη εκτίμηση για το πόσο «απλώνονται» οι τιμές ενός δείγματος μπορεί να προκύψει από το εύρος R του δείγματος.

Μια δεύτερη προσέγγιση, σχετικά με τη μεταβλητότητα των παρατηρήσεών μας, έχουμε βρίσκοντας τη συγκέντρωση των παρατηρήσεων στα δύο σύνολα που η διάμεσος χωρίζει το δείγμα. Δηλαδή, σε ποιο από τα δύο σύνολα που αυτή χωρίζει το σύνολο των δεδομένων παρουσιάζεται μεγαλύτερη «πύκνωση» ή «αραίωση».

Καλύτερη εκτίμηση, σχετικά με τη μεταβλητότητα του δείγματος, μπορούμε να έχουμε κατασκευάζοντας, όπως ήδη έχουμε αναφέρει, το θηκόγραμμά του, από το οποίο βρίσκουμε τα τεταρτημόρια.

Ωστόσο, ούτε το εύρος ούτε το ενδοτεταρτημοριακό εύρος μάς δίνουν πληροφορίες για το πώς κυμαίνονται οι παρατηρήσεις μας σε σχέση με τη μέση τιμή, δηλαδή πώς διασπείρονται οι παρατηρήσεις.

Η μέση τιμή, όπως και η διάμεσος, λειτουργούν ως εκπρόσωποι του δείγματος. Το πόσο καλός εκπρόσωπος του δείγματος είναι η μέση τιμή εξαρτάται από το πόσο κοντά σε αυτή είναι οι τιμές του δείγματος ή πόσο αυτή αποκλίνει από αυτές. Έτσι, είναι χρήσιμο να μελετήσουμε τις αποκλίσεις της δειγματικής μέσης τιμής από τις τιμές του δείγματος.

Η απόκλιση της μέσης τιμής $\overline{x}$ από μία πραγματική τιμή x_i βρίσκεται αν αφαιρέσουμε τη μέση τιμή από την πραγματική. Όμως το άθροισμα των διαφορών των τιμών ενός δείγματος από τη μέση τιμή $\overline{x}$ είναι μηδέν, αφού:

$$(\bar{x}-x_1)+(\bar{x}-x_2)+\cdots+(\bar{x}-x_\nu) = \underbrace{\bar{x}+\bar{x}+\cdots+\bar{x}}_{\nu}-(x_1+x_2+\cdots+x_\nu)$$
$$=\nu\cdot\bar{x}-\nu\cdot\bar{x} = 0.$$

Αυτό σημαίνει ότι το άθροισμα των διαφορών των τιμών x_i ενός δείγματος από τη μέση τιμή $\bar{x}$ δεν μας δίνει πληροφορίες αν οι πραγματικές τιμές x_i βρίσκονται κοντά ή μακριά από τη μέση τιμή.

Έτσι, αντί της μέσης τιμής των αποκλίσεων, χρησιμοποιούμε δύο άλλους δείκτες: Τη **μέση απόλυτη απόκλιση** (ΜΑΑ) και τη **μέση τετραγωνική απόκλιση** (ΜΤΑ) ή **διακύμανση** (s^2).

Ορισμός

Μέση απόλυτη απόκλιση (ΜΑΑ) ονομάζουμε τη μέση τιμή των απόλυτων τιμών των αποκλίσεων της μέσης τιμής $\bar{x}$ από κάθε παρατηρούμενη τιμή x_i και δίνεται από τον τύπο:

$$\text{ΜΑΑ} = \frac{|x_1-\bar{x}|+|x_2-\bar{x}|+\cdots+|x_\nu-\bar{x}|}{\nu}.$$

Ωστόσο, επειδή η ΜΑΑ περιέχει απόλυτες τιμές, είναι δύσχρηστη και γι' αυτό στη μελέτη στατιστικών στοιχείων χρησιμοποιείται η μέση τετραγωνική απόκλιση ή διακύμανση.

Ορισμός

Μέση τετραγωνική απόκλιση ή **διακύμανση** ή **διασπορά** ονομάζουμε τη μέση τιμή των τετραγώνων των αποκλίσεων της μέσης τιμής $\bar{x}$ ενός δείγματος από τις τιμές του και τη συμβολίζουμε με $\mathbf{s^2}$.

Η διακύμανση μας δίνει τη διασπορά των τιμών του δείγματος από τη μέση του τιμή και υπολογίζεται με τον τύπο:

$$s^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_\nu-\bar{x})^2}{\nu}.$$

Αν η παρατήρηση x_1 εμφανίζεται ν_1 φορές, η παρατήρηση x_2 εμφανίζεται ν_2 φορές ... και η παρατήρηση x_k εμφανίζεται ν_k φορές, τότε λαμβάνοντας υπόψη μας τις αντίστοιχες συχνότητες, παίρνουμε τους επόμενους τύπους για τη μέση απόλυτη απόκλιση και τη διακύμανση:

$$\text{ΜΑΑ} = \frac{\nu_1|x_1-\bar{x}|+\nu_2|x_2-\bar{x}|+\cdots+\nu_k|x_k-\bar{x}|}{\nu}.$$
$$s^2 = \frac{\nu_1(x_1-\bar{x})^2+\nu_2(x_2-\bar{x})^2+\cdots+\nu_k(x_k-\bar{x})^2}{\nu}.$$

Η ΜΑΑ και η διακύμανση δείχνουν πώς μεταβάλλονται οι τιμές του δείγματος σε σχέση με τη μέση τιμή.

Έτσι, η ΜΑΑ, η διακύμανση, το εύρος και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος λέγονται **μέτρα της μεταβλητότητας** ή **διασποράς**.

Σχόλιο

Τόσο η ΜΑΑ, όσο και η διακύμανση $\mathbf{s^2}$ εκφράζουν πόσο κοντά στη μέση τιμή συγκεντρώνονται οι τιμές των δεδομένων μας.

Γενικά, μια μικρή τιμή της διακύμανσης ή της ΜΑΑ για ένα σύνολο δεδομένων υποδεικνύει ότι οι τιμές αυτού του συνόλου δεδομένων κατανέμονται σε ένα μικρό σχετικά εύρος γύρω από τον μέσο όρο. Αντίθετα, μια μεγάλη τιμή της ΜΑΑ ή της διακύμανσης για ένα σύνολο δεδομένων υποδεικνύει ότι οι τιμές αυτού του συνόλου δεδομένων κατανέμονται σε σχετικά μεγαλύτερο εύρος γύρω από τον μέσο όρο.

Το μειονέκτημα της διακύμανσης σε σχέση με τη μέση απόλυτη απόκλιση είναι ότι έχει διαφορετικές μονάδες από εκείνες της μέσης τιμής. Έτσι, προκειμένου να έχουμε στη μέτρηση της διασποράς τις ίδιες μονάδες με τις τιμές του πληθυσμού, χρησιμοποιούμε για τη μέτρησή της την τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης, που είναι θετικός αριθμός. Γι' αυτόν τον σκοπό ορίζουμε την τυπική απόκλιση που έχει τις ίδιες μονάδες με τον πληθυσμό.

Ορισμός

Τυπική απόκλιση s ονομάζουμε την τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης. Δηλαδή,

$$\mathbf{s} = \sqrt{\mathbf{s}^2}\,.$$

Για τον υπολογισμό της διακύμανσης και της τυπικής απόκλισης είναι ευκολότερο και πιο αποτελεσματικό να χρησιμοποιούμε τύπους με λιγότερες πράξεις, μειώνοντας τον χρόνο υπολογισμού και την πιθανότητα λάθους.

Πρόταση 1

Για τη διακύμανση s^2 ισχύει ότι:

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_\nu^2\right) - \overline{x}^2 = \overline{(x^2)} - \overline{x}^2\,,$$

δηλαδή η διακύμανση ισούται με τη μέση τιμή των τετραγώνων των τιμών του ποσοτικού χαρακτηριστικού μείον το τετράγωνο της μέσης τιμής.

Απόδειξη

Από τον τύπο της διακύμανσης έχουμε:

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\left[(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \cdots + (x_\nu - \overline{x})^2\right] \Leftrightarrow$$

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\left[\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_\nu^2\right) - 2\overline{x}(x_1 + x_2 + \cdots + x_\nu) + \left(\underbrace{\overline{x}^2 + \overline{x}^2 + \cdots + \overline{x}^2}_{\nu}\right)\right] \Leftrightarrow$$

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_\nu^2\right) - 2\overline{x}\frac{1}{\nu}(x_1 + x_2 + \cdots + x_\nu) + \frac{1}{\nu}\left(\underbrace{\overline{x}^2 + \overline{x}^2 + \cdots + \overline{x}^2}_{\nu}\right) \Leftrightarrow$$

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_\nu^2\right) - 2\,\overline{x}^2 + \overline{x}^2 \Leftrightarrow$$

$$s^2 = \overline{(x^2)} - \overline{x}^2\,.$$

Σημείωση

> Αν η παρατήρηση x_1 εμφανίζεται ν_1 φορές, η παρατήρηση x_2 εμφανίζεται ν_2 φορές και η παρατήρηση x_k εμφανίζεται ν_k φορές, τότε, λαμβάνοντας υπόψη τις αντίστοιχες συχνότητες, παίρνουμε τον επόμενο τύπο:
>
> $$s^2 = \frac{1}{\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_k}\left(\nu_1 x_1^2 + \nu_2 x_2^2 + \cdots + \nu_k x_k^2\right) - \overline{x}^2\,.$$

Πρόταση 2

Αν δύο ποσοτικά χαρακτηριστικά Χ και Υ συνδέονται με τη σχέση $y = \alpha \cdot x + \beta$, τότε για τις μέσες τιμές και τις διακυμάνσεις αυτών ισχύει:

$$\overline{y} = \alpha \cdot \overline{x} + \beta\,.$$

$$s_y^2 = \alpha^2 s_x^2 \text{ ή } s_y = |\alpha|\, s_x\,.$$

Απόδειξη

- Χρησιμοποιώντας τον τύπο της μέσης τιμής και κάνοντας αντικατάσταση από τη δοσμένη σχέση, για τη μέση τιμή του ποσοτικού χαρακτηριστικού Υ παίρνουμε:

$$\overline{y} = \frac{1}{\nu}(y_1 + y_2 + \cdots + y_\nu) \Leftrightarrow$$

$$\overline{y} = \frac{1}{\nu}[(\alpha x_1 + \beta) + (\alpha x_2 + \beta) + \cdots + (\alpha x_\nu + \beta)] \Leftrightarrow$$

$$\overline{y} = \frac{1}{\nu}\Big[(\alpha x_1 + \alpha x_2 + \cdots + \alpha x_\nu) + \underbrace{(\beta + \beta + \cdots + \beta)}_{\nu}\Big] \Leftrightarrow$$

$$\overline{y} = \alpha\frac{1}{\nu}(x_1 + x_2 + \cdots + x_\nu) + \frac{1}{\nu}\nu\beta \Leftrightarrow$$

$$\overline{y} = \alpha\overline{x} + \beta.$$

- Χρησιμοποιώντας τον τύπο της διακύμανσης και τον τύπο $\overline{y} = \alpha \cdot \overline{x} + \beta$ έχουμε:

$$s_y^2 = \frac{1}{\nu}[(y_1 - \overline{y})^2 + (y_2 - \overline{y})^2 + \cdots + (y_\nu - \overline{y})^2] \Leftrightarrow$$

$$s_y^2 = \frac{1}{\nu}[(\alpha x_1 + \beta - \alpha\overline{x} - \beta)^2 + (\alpha x_1 + \beta - \alpha\overline{x} - \beta)^2 + \cdots + (\alpha x_1 + \beta - \alpha\overline{x} - \beta)^2] \Leftrightarrow$$

$$s_y^2 = \frac{1}{\nu}[(\alpha x_1 - \alpha\overline{x})^2 + (\alpha x_1 - \alpha\overline{x})^2 + \cdots + (\alpha x_1 - \alpha\overline{x})^2] \Leftrightarrow$$

$$s_y^2 = \frac{1}{\nu}[\alpha^2 (x_1 - \overline{x})^2 + \alpha^2 (x_1 - \overline{x})^2 + \cdots + \alpha^2 (x_1 - \overline{x})^2] \Leftrightarrow$$

$$s_y^2 = \alpha^2 \frac{1}{\nu}[(x_1 - \overline{x})^2 + (x_1 - \overline{x})^2 + \cdots + (x_1 - \overline{x})^2] \Leftrightarrow$$

$$s_y^2 = \alpha^2 s_x^2.$$

Να πειραματιστείτε, κάνοντας τα δικά σας παραδείγματα, με την παραπάνω εφαρμογή.

Παρατήρηση

- Αν όλες οι τιμές ενός χαρακτηριστικού πολλαπλασιαστούν με τον ίδιο αριθμό α, τότε από τους τύπους παίρνουμε: $\overline{y} = \alpha \cdot \overline{x}$ και $s_y = |\alpha| \cdot s_x$.
- Αν σε όλες τις τιμές ενός χαρακτηριστικού προσθέσουμε τον ίδιο αριθμό β, τότε από τους τύπους παίρνουμε: $\overline{y} = \overline{x} + \beta$ και $s_y = s_x$.

Για τους υπολογισμούς της διακύμανσης και, κατ' επέκταση της τυπικής απόκλισης, διευκολύνει η χρήση ενός πίνακα, όπως φαίνεται στην επόμενη εφαρμογή.

Εφαρμογή 1

Στην πρώτη στήλη του πίνακα αναφέρεται το πλήθος των άρθρων που δημοσίευσαν οι Καθηγητές μιας Σχολής σε ένα Πανεπιστήμιο μια ακαδημαϊκή χρονιά και στη δεύτερη οι συχνότητες.

x_i	ν_i	$\nu_i x_i$	$x_i - \overline{x}$	$\nu_i (x_i - \overline{x})$	$\nu_i (x_i - \overline{x})^2$	$\nu_i \lvert x_i - \overline{x}\rvert$
9	1					
10	1					
12	3					
13	4					
14	5					
15	4					
17	2					
19	1					
Αθροίσματα	$\Sigma\nu_i = 21$					

Να συμπληρώσετε τις στήλες του πίνακα και να βρείτε:
α. Τη μέση τιμή. **β.** Τη μέση απόλυτη απόκλιση (ΜΑΑ). **γ.** Τη διακύμανση s^2 και την τυπική απόκλιση s.

Απάντηση

Συμπληρώνουμε τα υπόλοιπα κελιά του πίνακα ξεκινώντας από την τρίτη στήλη:

x_i	ν_i	$\nu_i x_i$	$x_i - \bar{x}$	$\nu_i (x_i - \bar{x})$	$\nu_i (x_i - \bar{x})^2$	$\nu_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert$
9	1	9	-4,81	-4,81	23,13	4,81
10	1	10	-3,81	-3,81	14,51	3,81
12	3	36	-1,81	-5,43	9,82	5,43
13	4	52	-0,81	-3,24	2,62	3,24
14	5	70	0,19	0,95	0,18	0,95
15	4	60	1,19	4,76	5,67	4,76
17	2	34	3,19	6,38	20,36	6,38
19	1	19	5,19	5,19	26,94	5,19
Αθροίσματα	21	290		0,00	103,24	34,57

α. Με τη βοήθεια του αντίστοιχου τύπου, βρίσκουμε τη μέση τιμή $\bar{x} = \frac{290}{21} = 13{,}81$.

β. Με τη βοήθεια του αντίστοιχου τύπου $\text{MAA} = \frac{34{,}57}{21} = 1{,}65$.

γ. Εφαρμόζοντας τους σχετικούς τύπους για τη διακύμανση s^2 και την τυπική απόκλιση s, παίρνουμε:

$$s^2 = \frac{103{,}24}{21} = 4{,}92 \text{ και } s = \sqrt{4{,}92} = 2{,}22.$$

Διερεύνηση 2

Ο προπονητής μιας ομάδας μπάσκετ χρησιμοποίησε τους 17 παίκτες της ομάδας κυκλικά στα φιλικά της παιχνίδια. Όλοι οι παίκτες έπαιξαν συνολικά τον ίδιο χρόνο στους αγώνες και σημείωσαν ο καθένας συνολικά τους εξής πόντους:

8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 10, 11, 11, 11, 11, 12, 12, 13, 19, 20

1. Να βρείτε:

α. Τα Q_1, Q_2 (=δ), Q_3, το ενδοτεταρτημοριακό εύρος και να κάνετε το θηκόγραμμα με οριακές τιμές.

β. Αν υπάρχουν, τις ακραίες (απόμακρες) τιμές.

γ. Τη μέση τιμή, τη διακύμανση και τη MAA του δείγματος.

Να γράψετε εκ νέου τους πόντους που σημείωσαν οι παίκτες, παραλείποντας τις ακραίες τιμές, αν υπάρχουν.

2. Στο νέο σύνολο δεδομένων, να βρείτε:

α. Τα Q_1, Q_2 (=δ), Q_3, το ενδοτεταρτημοριακό εύρος.

β. Τη μέση τιμή, τη διακύμανση και τη MAA του δείγματος.

3. Να ερευνήσετε πώς οι απόμακρες τιμές επηρεάζουν:

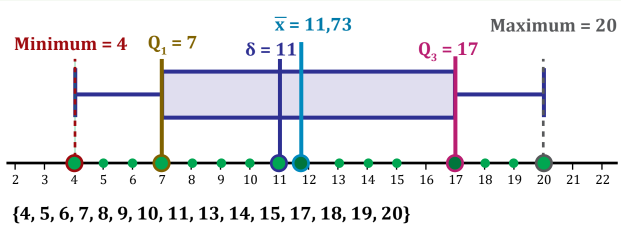
α. Τη διάμεσο και τη μέση τιμή.

β. Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος και τη διακύμανση.

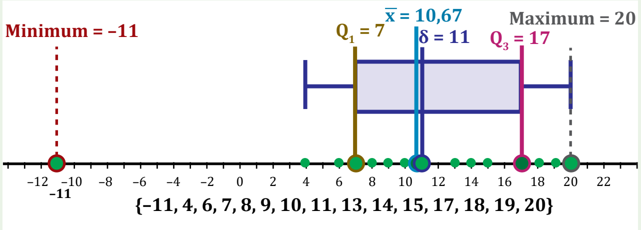
Να συζητήσετε στην τάξη τα προβλήματα που δημιουργούνται.

Διερεύνηση 3

Να παρατηρήσετε τα ακόλουθα θηκογράμματα που παρουσιάστηκαν για μια έρευνα και να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα:



(Σχήμα 1)



(Σχήμα 2)

α. Τα τεταρτημόρια Q_1, Q_3 και η διάμεσος δ χωρίζουν το δείγμα σε τέσσερα υποσύνολα. Ποια είναι;

β. Στο θηκόγραμμα του Σχήματος 1, το σημείο με τετμημένη 5 που βρίσκεται αριστερά του Q_1 αντικαθίσταται από άλλο σημείο με τετμημένη –11 (Σχήμα 2).
- Η τιμή αυτή είναι ακραία;
- Ποια από τα μέτρα θέσης και μεταβλητότητας παραμένουν ίδια και ποια αλλάζουν;
- Πώς διαμορφώνονται όσα αλλάζουν;

γ. Να επαναλάβετε τη διαδικασία του ερωτήματος β για άλλες τιμές δεξιά του Q_3. Να διατυπώσετε και να απαντήσετε σχετικά ερωτήματα.

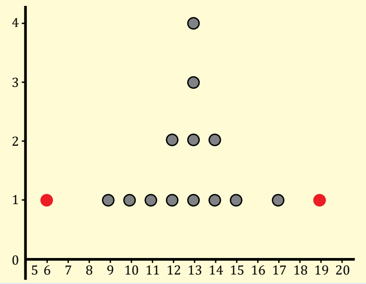
δ. Τι παρατηρείτε;

Για να απαντήσετε τα ερωτήματα της «Διερεύνησης 3», μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την ψηφιακή εφαρμογή.

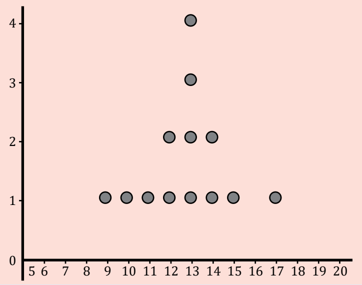
Η μέση τιμή, η ΜΑΑ, η διακύμανση και η τυπική απόκλιση είναι μέτρα ευαίσθητα στις απόμακρες τιμές, σε αντίθεση με τη διάμεσο και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος που είναι αρκετά ισχυρά σε αυτές, όπως θα δούμε στην επόμενη εφαρμογή.

Εφαρμογή 2

Στα παρακάτω δύο σημειογράμματα παρουσιάζεται ο αριθμός των απουσιών 15 μαθητών ενός τμήματος σε ένα σχολείο (στο δεύτερο έχουν αφαιρεθεί οι ακραίες τιμές).



Σημειόγραμμα 1



Σημειόγραμμα 2

α. Να καταγράψετε τα δεδομένα των δύο σημειογραμμάτων.

β. Να βρείτε την τυπική απόκλιση στις δύο περιπτώσεις και να κάνετε τα θηκογράμματά τους με και χωρίς ακραίες τιμές.

γ. Ποια σχέση συνδέει τα δύο σημειογράμματα;

Απάντηση

α. Τα δεδομένα στο πρώτο σημειόγραμμα είναι 6, 9, 10, 11, 12, 12, 13, 13, 13, 13, 14, 14, 15, 17, 19, οπότε το μέγεθος του δείγματος είναι 15.
Τα δεδομένα στο δεύτερο σημειόγραμμα είναι: 9, 10, 11, 12, 12, 13, 13, 13, 13, 14, 14, 15, 17, οπότε το πλήθος τους είναι 13.

β. Στο πρώτο σημειόγραμμα

Για τη μέση τιμή $\bar{x}$ έχουμε: $\bar{x} = \dfrac{6 + 9 + 10 + 11 + 2 \cdot 12 + 4 \cdot 13 + 2 \cdot 14 + 15 + 17 + 19}{15} = \dfrac{191}{15} = 12{,}73.$

Για τη διακύμανση δημιουργούμε τον πίνακα:

x_i	ν_i	x_i^2	$\nu_i \cdot x_i^2$
6	1	36	36
9	1	81	81
10	1	100	100
11	1	121	121
12	2	144	288
13	4	169	676
14	2	196	392
15	1	225	225
17	1	289	289
19	1	361	361
Άθροισμα			2569

Από τον τύπο της Πρότασης 1 παίρνουμε ότι

$$s^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{15}^2}{15} - (12{,}73)^2 \Leftrightarrow$$

$$s^2 = \frac{2569}{15} - (12{,}73)^2 = 9{,}21.$$

Έτσι, η τυπική απόκλιση είναι: $s = \sqrt{9{,}21} \approx 3{,}04$.

Τα τεταρτημόρια είναι: $Q_1 = 11$, $Q_2 = 13$ και $Q_3 = 14$, οπότε για το ενδοτεταρτημοριακό εύρος έχουμε: $IQR = 14 - 11 = 3$.

Η ελάχιστη τιμή είναι 6 και η μέγιστη 19.

Φράχτες, οριακές και ακραίες τιμές:
Κάτω φράχτης: $Q_1 - 1{,}5 \cdot IQR = 11 - 1{,}5 \cdot 3 = 6{,}5$, οπότε η τιμή 6 είναι ακραία και η τιμή 9 είναι κάτω οριακή.
Πάνω φράχτης: $Q_3 + 1{,}5 \cdot IQR = 14 + 1{,}5 \cdot 2 = 17$, οπότε η τιμή 19 είναι ακραία και η τιμή 17 είναι πάνω οριακή.

Επομένως, η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή είναι ακραίες (απόμακρες) τιμές.

Στο δεύτερο σημειόγραμμα

Τα δεδομένα του δεύτερου σημειογράμματος είναι ίδια με εκείνα του πρώτου, εκτός από τις τιμές 6 και 19 που, όπως είδαμε, ήταν ακραίες τιμές για το πρώτο σύνολο δεδομένων.

Για τη μέση τιμή $\bar{x}$ έχουμε: $\bar{x} = \dfrac{9 + 10 + 11 + 2 \cdot 12 + 4 \cdot 13 + 2 \cdot 14 + 15 + 17}{13} = \dfrac{166}{13} = 12{,}77.$

Για τη διακύμανση, από τον τύπο της Πρότασης 1 παίρνουμε ότι:

x_i	ν_i	x_i^2	$\nu_i \cdot x_i^2$
9	1	81	81
10	1	100	100
11	1	121	121
12	2	144	288
13	4	169	676
14	2	196	392
15	1	225	225
17	1	289	289
Άθροισμα			2172

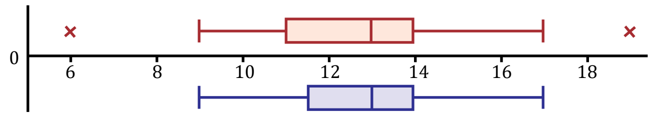
$$s^2 = \frac{x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_{14}^2}{13} - 12{,}77^2 = \frac{2172}{13} - 12{,}77^2 = 4{,}00.$$

Επομένως: $s = \sqrt{4{,}00} = 2{,}00$.

Τα τεταρτημόρια είναι: $Q_1 = 11{,}5$, $Q_2 = 13$ και $Q_3 = 14$, οπότε το ενδοτεταρτημοριακό εύρος IQR είναι: $IQR = 14 - 11{,}5 = 2{,}5$.

Φράχτες, οριακές και ακραίες τιμές:
Κάτω φράχτης: $Q_1 - 1{,}5 \cdot IQR = 11{,}5 - 1{,}5 \cdot 2{,}5 = 7{,}75$, οπότε δεν υπάρχει κάτω ακραία τιμή και η τιμή 9 είναι κάτω οριακή.
Πάνω φράχτης: $Q_3 + 1{,}5 \cdot IQR = 14 + 1{,}5 \cdot 2{,}5 = 17{,}75$, οπότε δεν υπάρχει πάνω ακραία τιμή και η τιμή 17 είναι πάνω οριακή.

Το θηκόγραμμα για το πρώτο σημειόγραμμα είναι πάνω από τον οριζόντιο άξονα και για το δεύτερο κάτω από τον άξονα.



γ. Παρατηρούμε ότι η απομάκρυνση των ακραίων τιμών από τα δεδομένα επέφερε τις ακόλουθες αλλαγές:
- Η μέση τιμή άλλαξε από 12,73 σε 12,77.
- Η διακύμανση μειώθηκε δραστικά από 9,21 σε 4.
- Η διάμεσος παρέμεινε αμετάβλητη.
- Το πρώτο τεταρτημόριο μεταβλήθηκε από 11 σε 11,5.
- Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος μειώθηκε από 3 σε 2,5.

Για να διερευνήσετε και να εξασκηθείτε στην έννοια της μεταβλητότητας, πειραματιστείτε με τη διπλανή ψηφιακή εφαρμογή.

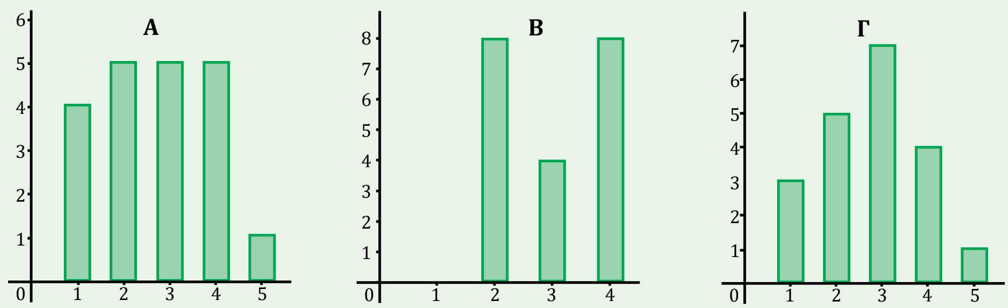
Διερεύνηση 4

Στην παρακάτω εικόνα υπάρχουν τα διαγράμματα των τιμών ενός ποσοτικού χαρακτηριστικού στις τρεις στάθμες ενός κατηγορικού χαρακτηριστικού ενός πληθυσμού:

α. Να προσδιορίσετε το μέγεθος του δείγματος σε κάθε στάθμη και συνολικά.

β. Να εκτιμήσετε από τα διαγράμματα τη θέση της μέσης τιμής σε σχέση με τη διάμεσο σε κάθε στάθμη.

γ. Ποιο από τα τρία δείγματα έχει τη μικρότερη και ποιο τη μεγαλύτερη διακύμανση;



δ. Να επαληθεύσετε τις εκτιμήσεις για τη μέση τιμή και τη διάμεσο.

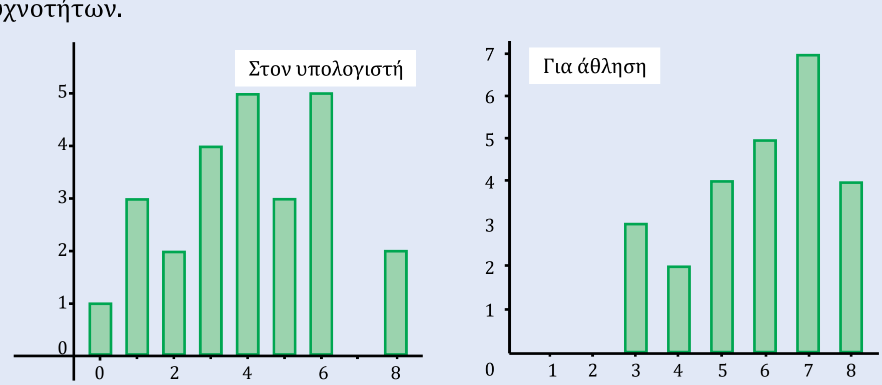
ε. Να επαληθεύσετε τις εκτιμήσεις για τη μεγαλύτερη διακύμανση.

Για να πειραματιστείτε και να διερευνήσετε τα τρία διαγράμματα, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τη διπλανή εφαρμογή.

Όταν θέλουμε να μελετήσουμε με μεγαλύτερη λεπτομέρεια τη συμπεριφορά ενός ποσοτικού χαρακτηριστικού μέσα σε κάποιες ομάδες (στάθμες), εργαζόμαστε ανάλογα, βρίσκοντας μέτρα θέσης και διασποράς μέσα σε κάθε ομάδα (στάθμη). Τα μέτρα θέσης που εξετάζουμε είναι η διάμεσος, η μέση τιμή, η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή καθώς και τα τεταρτημόρια, προσδιορίζοντας συνήθως από το θηκόγραμμα τις ακραίες τιμές. Τα μέτρα μεταβλητότητας που εξετάζουμε είναι η μέση απόλυτη απόκλιση ΜΑΑ, η διακύμανση s^2 και η τυπική απόκλιση, το εύρος και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος.

Εφαρμογή 3

Οι μαθητές ενός τμήματος ρωτήθηκαν για τον χρόνο που αφιερώνουν, κατά μέσο όρο, μπροστά στον υπολογιστή τους, κατά τη διάρκεια μιας εβδομάδας, ασχολούμενοι με τα μαθήματά τους και για τον χρόνο που αφιερώνουν για να αθληθούν με οποιονδήποτε τρόπο. Οι απαντήσεις είναι σε ώρες και παρουσιάζονται στα παρακάτω διαγράμματα συχνοτήτων.



1. Να προσδιορίσετε:

α. Το μέγεθος του δείγματος σε κάθε ομάδα.

β. Το ποσοτικό χαρακτηριστικό.

γ. Τις στάθμες του κατηγορικού χαρακτηριστικού.

2. Να δημιουργήσετε δύο πίνακες με τα δεδομένα των γραφικών παραστάσεων.

3. Να προσδιορίσετε τα μέτρα θέσης (min, max, Q_1, $\delta (= Q_2)$, Q_3, $\bar{x}$) του ποσοτικού χαρακτηριστικού σε κάθε στάθμη του κατηγορικού χαρακτηριστικού.

4. Να προσδιορίσετε όλα τα μέτρα μεταβλητότητας (s^2, IQR και R (Εύρος)) του ποσοτικού χαρακτηριστικού σε κάθε στάθμη του κατηγορικού χαρακτηριστικού.

5. Να κάνετε τα σχετικά θηκογράμματα.

6. Να σχολιάσετε τη μεταβλητότητα στις δύο στάθμες.

Απάντηση

1. Προσδιορισμός των στοιχείων της έρευνας.

α. Το μέγεθος του δείγματος προσδιορίζεται από το άθροισμα των υψών των ράβδων κάθε ραβδογράμματος και επομένως είναι 25.

β. Το ποσοτικό χαρακτηριστικό είναι οι ώρες που αφιερώνουν οι μαθητές.

γ. Το κατηγορικό χαρακτηριστικό είναι το αντικείμενο που επιλέγουν οι μαθητές για να απασχολούνται στον ελεύθερο χρόνο τους και αποτελείται από τις στάθμες (ομάδες), οι οποίες είναι: «Χρήση του υπολογιστή» και «Άθληση».

2. Από τα ραβδογράμματα προκύπτουν οι επόμενοι πίνακες.

Χρήση του υπολογιστή	
Πλήθος μαθητών/τριών	Ώρες απασχόλησης
1	0
3	1
2	2
4	3
5	4
3	5
5	6
2	8

Άθληση	
Πλήθος μαθητών/τριών	Ώρες απασχόλησης
3	3
2	4
4	5
5	6
7	7
4	8

3. Προσδιορισμός των μέτρων θέσης: min, max, Q_1, δ ($= Q_2$), Q_3, $\bar{x}$.

α. Χρήση του υπολογιστή:

Μέγιστη και ελάχιστη τιμή: min = 0 και max = 8.

Διάμεσος: Επειδή το πλήθος είναι 25 (περιττός αριθμός), διάμεσος δ είναι η μεσαία παρατήρηση που βρίσκεται στη θέση $\frac{25+1}{2} = 13$ και είναι $\delta = 4$ ώρες.

Παρατηρούμε ότι «το πολύ» 4 ώρες αφιερώνουν οι 15 μαθητές, ενώ «τουλάχιστον» 5 ώρες αφιερώνουν 10 μαθητές.

Τεταρτημόρια: Το πρώτο τεταρτημόριο Q_1 είναι η διάμεσος των 12 πρώτων παρατηρήσεων. Δηλαδή το ημιάθροισμα της 6ης και 7ης παρατήρησης, οπότε $Q_1 = \frac{2+3}{2} = 2{,}5$.

Ανάλογα, το Q_3 είναι το ημιάθροισμα της 19ης και 20ης παρατήρησης, οπότε $Q_3 = \frac{6+6}{2} = 6$.

Μέση τιμή: Κατά τα γνωστά: $\bar{x} = \frac{1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + 2 \cdot 8}{25} = \frac{100}{25} = 4$.

β. Άθληση

Ανάλογα, βρίσκουμε ότι:

min = 3, max = 8, $\delta = 6$, $Q_1 = \frac{5+5}{2} = 5$, $Q_3 = \frac{7+7}{2} = 7$ και $\bar{x} = \frac{148}{25} = 5{,}92$.

4. Προσδιορισμός των μέτρων μεταβλητότητας: s^2, IQR, R (Εύρος).

α. Χρήση του υπολογιστή:

Για τη διακύμανση και την τυπική απόκλιση δημιουργούμε τον σχετικό πίνακα. Η διακύμανση από τον τύπο της Πρότασης 1 είναι:

$$s^2 = \frac{510}{25} - \bar{x}^2 = 20{,}4 - 16 = 4{,}4.$$

Άρα, η τυπική απόκλιση είναι $s = \sqrt{4{,}4} \simeq 2{,}10$.

Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος θα είναι:

IQR = 6 – 2,5 = 3,5 και R = 8 – 0 = 8.

x_i	ν_i	x_i^2	$\nu_i \cdot x_i^2$
0	1	0	0
1	3	1	3
2	2	4	8
3	4	9	36
4	5	16	80
5	3	25	75
6	5	36	180
8	2	64	128
Άθροισμα			510

β. Άθληση:

Ανάλογα, βρίσκουμε ότι:

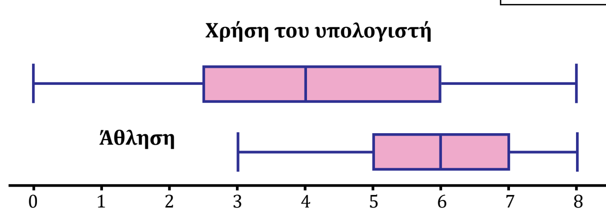
$$s^2 = \frac{938}{25} - \bar{x}^2 = 37{,}52 - 5{,}92^2 \approx 37{,}52 - 35{,}05 \approx 2{,}47.$$

Άρα: $s = \sqrt{2{,}47} \simeq 1{,}57$.

IQR = 7 – 5 = 2, Εύρος R= 8 – 3 = 5.

x_i	ν_i	x_i^2	$\nu_i \cdot x_i^2$
3	3	9	27
4	2	16	32
5	4	25	100
6	5	36	180
7	7	49	343
8	4	64	256
Άθροισμα			938

5. Τα δύο θηκογράμματα παρουσιάζονται στο σχήμα.



6. Το εύρος στη στάθμη «Χρήση υπολογιστή» είναι 5 ώρες και είναι μικρότερο από το εύρος των 8 ωρών για τη στάθμη «Άθληση».
Η τυπική απόκλιση στη στάθμη «Άθληση» είναι 1,57 ώρες και είναι μικρότερη της τυπικής απόκλισης 2,1 ώρες της στάθμης «Χρήση υπολογιστή».
Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος IQR στη στάθμη «Άθληση» είναι 2 ώρες και είναι μικρότερο κατά περίπου 43% του ενδοτεταρτημοριακού εύρους των 3,5 ωρών της στάθμης «Χρήση υπολογιστή».

Εφαρμογή 4

Σε καθένα από τα δύο λιμάνια μιας παραλιακής πόλης λειτουργούν μπαρ που παίζουν μουσική. Η καταγραφή της μέσης τιμής της έντασης της μουσικής σε ντεσιμπέλ (db), κατά τη διάρκεια ενός μήνα του καλοκαιριού, σε 40 μπαρ των δύο λιμανιών, που επιλέχθηκαν τυχαία, έδωσε τα παρακάτω αποτελέσματα:

Λιμάνι Α: 25, 32, 47, 55.5, 59, 68, 72, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 82, 84, 84.5, 86, 90, 99.
Λιμάνι Β: 45, 65, 68, 76, 78, 78, 79, 79, 80, 81, 83, 84, 85, 88, 89, 90, 90, 98, 98, 98.

1. Να μελετήσετε τα αποτελέσματα της έντασης της μουσικής στην πόλη.
  α. Να αναφέρετε ποιο είναι το δείγμα και ποιο το ποσοτικό χαρακτηριστικό ως προς το οποίο εξετάζεται.

β. Να βρεθούν τα μέτρα θέσης.

γ. Να βρεθούν τα μέτρα διασποράς.

2. Να μελετήσετε τα αποτελέσματα της έντασης της μουσικής στην πόλη, προσδιορίζοντας δύο στάθμες και να βρείτε τις διαφορές της έντασης της μουσικής που παρατηρούνται μεταξύ τους.

3. Να κάνετε τα θηκογράμματα της έντασης της μουσικής για κάθε στάθμη.

4. Να σχολιάσετε την ένταση και τη μεταβλητότητα της έντασης της μουσικής των μπαρ στα δύο λιμάνια.

5. Να σχολιάσετε την επίδραση της έντασης και της μεταβλητότητας της έντασης της μουσικής των μπαρ σε κάθε λιμάνι στην ένταση και στη μεταβλητότητα της έντασης της μουσικής στην πόλη.

Απάντηση

1. α. Το προς μελέτη δείγμα είναι τα μπαρ που παίζουν μουσική στην πόλη και ποσοτικό χαρακτηριστικό είναι η ένταση της μουσικής που παίζουν σε db. Από τα μπαρ της πόλης επιλέχθηκε ένα δείγμα μεγέθους 40 (20 μπαρ από κάθε λιμάνι).

β. Διατάσσοντας τις εντάσεις της μουσικής κατά αύξουσα σειρά, για τα μέτρα θέσης, $\bar{x}$, Q_1 , Q_2 (= δ) , Q_3 , min, max και τις ακραίες τιμές έχουμε:

Μέγιστη και ελάχιστη τιμή: min = 25 db και max = 99 db.

Για τη διάμεσο, επειδή το πλήθος των μπαρ είναι 40 (άρτιος αριθμός), οι μεσαίες παρατηρήσεις βρίσκονται στις θέσεις 20 και 21 και διάμεσος δ είναι το ημιάθροισμά τους. Άρα: δ = 80 db.

Για τα τεταρτημόρια, κατά τα γνωστά, έχουμε: $Q_1 = 74$ db και $Q_3 = 85{,}5$ db.

Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος είναι $IQR = Q_3 - Q_1 = 11{,}5$ οπότε οι φράχτες είναι: $Q_1 - 1{,}5 \cdot IQR = 56{,}75$ και $Q_3 + 1{,}5 \cdot IQR = 102{,}75$.

Οι εντάσεις: 25, 32, 45, 47 και 55,5 είναι μικρότερες από τον κάτω φράχτη, οπότε είναι ακραίες.

Η μέση τιμή, κατά τα γνωστά, είναι: $\bar{x} = \dfrac{25 + 32 + 45 + 47 + \cdots + 98 + 99}{40} = \dfrac{3069}{40} = 76{,}73$db.

γ. Για το εύρος έχουμε: R = max – min = 99 – 25 = 74 db.

Για τη διασπορά, χρησιμοποιώντας τους τύπους της Πρότασης 1, με μια αριθμομηχανή βρίσκουμε:

$$s^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{40}^2}{40} - \bar{x}^2 = \frac{246267{,}5}{40} - 76{,}73^2 \approx 6156{,}69 - 5887{,}49 = 269{,}20 \text{ db.}$$

Άρα, η τυπική απόκλιση είναι $s \approx 16{,}41$ db.

Μελετώντας τα αποτελέσματα βλέπουμε ότι η μέση τιμή είναι μικρότερη της διαμέσου και ότι υπάρχουν 5 μικρές ακραίες τιμές (περισσότερες από το 10% του δείγματος).

2. Για να εξετάσουμε την επίδραση της έντασης της μουσικής που παίζουν τα μπαρ σε κάθε λιμάνι στην ένταση της μουσικής στην πόλη, θεωρούμε ως κατηγορικό χαρακτηριστικό το «λιμάνι» και εξετάζουμε τα μέτρα θέσης και μεταβλητότητας του ποσοτικού χαρακτηριστικού «ένταση μουσικής» σε κάθε στάθμη του κατηγορικού χαρακτηριστικού, δηλαδή σε κάθε λιμάνι.

- Τα μέτρα θέσης min, max, Q_1, δ (= Q_2), Q_3, $\bar{x}$ υπολογίζονται κατά τα γνωστά και συγκεντρωτικά είναι:

	Λιμάνι Α	Λιμάνι Β
N	20	20
$\bar{x}$	71,9	81,6
min	25	45
Q_1	63,5	78
Q_2 (=δ)	78,5	82
Q_3	83	89,5
max	99	98

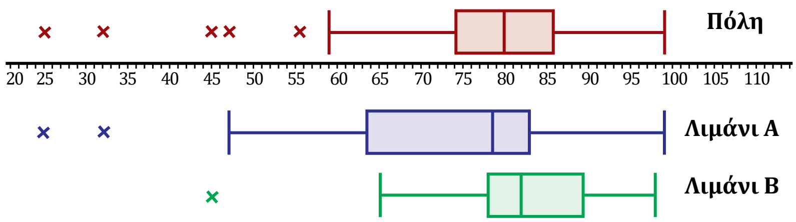
- Τα μέτρα μεταβλητότητας: s, IQR και Εύρος, καθώς και οι τιμές του πάνω και κάτω φράχτη, συγκεντρωτικά είναι:

	Λιμάνι Α	Λιμάνι Β
s	18,59	12,12
IQR	19,5	11,5
Εύρος	74	53
Κ.Φράχτης	34,25	60,75
Π.Φράχτης	112,25	106,75

Από τους κάτω και πάνω φράχτες βρίσκουμε ότι για το Λιμάνι Α ακραίες τιμές είναι οι 25 και 32, ενώ για το Λιμάνι Β ακραία τιμή είναι μόνο η 45.

Το εύρος χωρίς ακραίες τιμές στο λυμάνι Α είναι από R=99-47=52 και στο λιμάνι Β είναι R=98-65=33.

3. Τα σχετικά θηκογράμματα είναι:



4. Η μέση τιμή της έντασης της μουσικής στο λιμάνι Β είναι 81,6 db και είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη στο λιμάνι Α, η οποία είναι 71,9 db.

Από τα θηκογράμματα έντασης της μουσικής στα μπαρ σε κάθε λιμάνι, βλέπουμε ότι οι εντάσεις της μουσικής στο λιμάνι Α παρουσιάζουν μεγαλύτερη μεταβλητότητα σε σχέση με τις αντίστοιχες στο λιμάνι Β, κάτι που διαπιστώνουμε και από τις τυπικές τους αποκλίσεις.

Η τυπική απόκλιση της έντασης της μουσικής στο λιμάνι Α είναι 18,59 db, έναντι της τυπικής απόκλισης της έντασης της μουσικής στο λιμάνι Β που είναι 12,12 db. Επιπλέον, το ενδοτεταρτημοριακό εύρος της έντασης της μουσικής στο λιμάνι Α είναι 19,5 db και είναι μεγαλύτερο από το αντίστοιχο στο λιμάνι Β που είναι 11,5 db.

Με εξαίρεση τις ακραίες τιμές, το σύνολο των μπαρ στο λιμάνι Β παίζουν μουσική σε υψηλότερη ένταση από το 25% των μπαρ του λιμανιού Α, που παίζουν χαμηλότερης έντασης μουσική, ενώ το κεντρικό 50% των μπαρ του λιμανιού Β παίζουν μουσική σε υψηλότερη ένταση από το 50% των μπαρ του λιμανιού Α, που παίζουν χαμηλότερης έντασης μουσική. Ακόμα, το άνω 25% των μπαρ του λιμανιού Β παίζουν μουσική σε υψηλότερη ένταση από το κάτω 75% των μπαρ του λιμανιου Α. Επίσης, η μοναδική ακραία χαμηλή ένταση που παρατηρείται σε ένα μπαρ του λιμανιού Β είναι σχεδόν διπλάσιας έντασης από την ένταση της μουσικής σε δύο μπαρ που παίζουν τη χαμηλότερης έντασης μουσική στο λιμάνι Α.

5. Η ένταση της μουσικής στην πόλη είναι 76,73 db και επηρεάζεται αυξητικά από τη μέση ένταση 81,6 db της μουσικής στο λιμάνι Β, η οποία είναι συγκριτικά μεγαλύτερη από την αντίστοιχη στο λιμάνι Α, που είναι 71,9 db.

Η μεταβλητότητα της έντασης της μουσικής στα μπαρ των δύο λιμανιών επιδρά στη μεταβλητότητα της έντασης της μουσικής στην πόλη. Η μεγαλύτερη μεταβλητότητα στις τιμές έντασης της μουσικής στην πόλη προέρχεται από τη συγκριτικά μεγαλύτερη μεταβλητότητα στις τιμές έντασης της μουσικής στο λιμάνι Α. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να εμφανίζονται πέντε ακραίες τιμές έντασης της μουσικής στην πόλη, οι οποίες όμως ανήκουν στις χαμηλότερες τιμές έντασης της μουσικής (Σχήμα).

Αυτοαξιολόγηση

Να τοποθετήσετε δίπλα στις στήλες ΣΩΣΤΟ, ΛΑΘΟΣ ένα ✓ ανάλογα με το αν η πρόταση είναι σωστή ή λανθασμένη.

	ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ
1. Τα φυσικά αίτια και οι μετρήσεις δεν επηρεάζουν τη μεταβλητότητα του δείγματος.	☐	☐
2. Η μεταβλητότητα και η διασπορά είναι δύο διαφορετικές έννοιες της Στατιστικής.	☐	☐
3. Η μέση τιμή και η μέση απόλυτη απόκλιση είναι μέτρα θέσης.	☐	☐
4. Η διακύμανση, το εύρος και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος είναι μέτρα μεταβλητότητας.	☐	☐
5. Μια χαμηλή τιμή της διακύμανσης ή της ΜΑΑ για ένα σύνολο δεδομένων υποδεικνύει ότι οι τιμές αυτού του συνόλου δεδομένων κατανέμονται σε ένα σχετικά μικρό εύρος γύρω από το μέσο όρο.	☐	☐
6. Όταν η μέση απόλυτη απόκλιση (ΜΑΑ) ή η διακύμανση ενός δείγματος είναι ίση με μηδέν, τότε οι παρατηρήσεις είναι όλες ίσες.	☐	☐

Να συμπληρώσετε τα κενά με λέξεις ή φράσεις.

7. Η μέση τιμή των τετραγώνων των αποκλίσεων της μέσης τιμής $\overline{x}$ ενός δείγματος από τις τιμές του καλείται .... και συμβολίζεται με .... ,

8. Τυπική απόκλιση s ονομάζουμε την ....

9. Δύο ποσοτικά χαρακτηριστικά X και Y συνδέονται με τη σχέση $y = \alpha \cdot x + \beta$. Τότε για τις μέσες τιμές και τις διακυμάνσεις αυτών ισχύει ότι:

α. $\overline{y}$ = ... β. s_y^2 =.............

Για μια ψηφιακή αυτοαξιολόγηση, ανοίξτε την εφαρμογή.

Ασκήσεις

1. Οι τιμές που προκύπτουν σε ένα εργαστηριακό πείραμα της χημείας είναι:

9.32415 , 10.32415, 11.32415, 12.32415, 12.32415, 13.32415, 14.32415, 15.32415, 15.32415, 17.32415. Να βρείτε χωρίς τη βοήθεια αριθμομηχανής τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των μετρήσεων.

2. α. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των αριθμών 2, 5, 6, 9, 11, 15.

β. Με τη βοήθεια της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης που βρήκατε στο (α) ερώτημα, να προσδιορίσετε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των αριθμών στις ακόλουθες λίστες:

i. 4, 10, 12, 18, 22, 30
ii. -1, 2, 3, 6, 8, 12
iii. 1, 7, 9, 15, 19, 27

3. Ένας μαθητής αγόρασε 10 βιβλία, που κόστιζαν χωρίς Φ.Π.Α. 16, 20, 12, 12, 13, 16, 16, 20, 11, 18 ευρώ, αντίστοιχα.

α. Ποια είναι η μέση τιμή, η διακύμανση και η διάμεσος του κόστους των βιβλίων;

β. Πώς μεταβάλλονται οι απαντήσεις του ερωτήματος (α), αν προσθέσουμε και το Φ.Π.Α., που είναι 6%;

4. Σε ένα νοσοκομείο ο αριθμός των επισκέψεων που δέχτηκαν 30 ασθενείς, σε έναν μήνα είναι: 5, 7, 4, 5, 4, 6, 7, 5, 4, 4, 5, 4, 5, 3, 5, 5, 4, 6, 6, 4, 4, 6, 4, 5, 4, 4, 3, 7, 4, 3. Να κατασκευάσετε τον πίνακα συχνοτήτων και με τη χρήση του να βρείτε:

α. Τη διάμεσο, τον μέσο όρο και να ελέγξετε αν υπάρχει ακραία τιμή.

β. Να βρείτε την τυπική απόκλιση με και χωρίς τις ακραίες τιμές.

5. Η βαθμολογία στις Πανελλαδικές εξετάσεις των μαθητών της τελευταίας τάξης ενός επαρχιακού Λυκείου είναι η παρακάτω:

Βαθμολογία: 7, 11, 20, 25, 60, 67, 68, 73, 75, 78, 79, 82, 84, 85, 86, 88, 90, 92, 98, 99.

α. Να βρείτε τη διακύμανση, το ενδοτεταρτημοριακό εύρος και να ελέγξετε την ύπαρξη απόμακρων τιμών.

β. Να διαγράψετε τις απόμακρες τιμές και να υπολογίσετε εκ νέου τη διακύμανση και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος.

γ. Να αντικαταστήσετε τις απόμακρες τιμές πρώτα με τη μέση τιμή και μετά με τη διάμεσο και να υπολογίσετε εκ νέου τη διακύμανση και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος.

Χρησιμοποιήστε τη διπλανή ψηφιακή εφαρμογή για τα πειράματά σας.

6. Ένας τοπικός σύλλογος γκολφ διοργανώνει καλοκαιρινά πρωταθλήματα ανδρών και γυναικών. Τα ακόλουθα δεδομένα δίνουν τις βαθμολογίες για έναν γύρο 18 οπών γκολφ για 17 άνδρες και 15 γυναίκες που επιλέχθηκαν τυχαία από τα αντίστοιχα πρωταθλήματά τους.

Άνδρες: 87, 68, 92, 79, 83, 67, 71, 92, 112, 75, 77, 102, 79, 78, 85, 75, 72.

Γυναίκες: 101, 100, 87, 95, 98, 81, 117, 107, 103, 97, 90, 100, 99, 94, 94.

Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διακύμανση για κάθε δείγμα. Με βάση τη μέση τιμή και τη διακύμανση, τι θα λέγατε για καθεμία από τις δύο στάθμες;

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τη διπλανή ψηφιακή εφαρμογή για να κάνετε τα πειράματά σας και τις δοκιμές σας στην άσκηση 6.

7. Σε ένα δείγμα εργαζομένων σε μια δημόσια υπηρεσία προέκυψαν τα ακόλουθα αποτελέσματα, για τον χρόνο σε λεπτά που χρειάζονται οι εργαζόμενοι για τη μετακίνησή τους από το σπίτι στην υπηρεσία, ανάλογα με το μέσο μετακίνησης:

Μέσο Μαζικής Μεταφοράς (ΜΜΜ): 30, 30, 35, 40, 40, 40, 50, 55, 55, 60, 70, 70, 75, 75, 80.

Άλλο: 20, 25, 30, 40, 45, 45, 50, 50, 60, 65, 70, 80, 85, 90, 95.

α. Να προσδιορίσετε το μέγεθος του κάθε δείγματος, το ποσοτικό και το κατηγορικό χαρακτηριστικό, καθώς και τις στάθμες του κατηγορικού χαρακτηριστικού.

β. Να προσδιορίσετε όλα τα μέτρα μεταβλητότητας (s^2, IQR και R (Εύρος)) του ποσοτικού χαρακτηριστικού σε κάθε στάθμη του κατηγορικού χαρακτηριστικού.

γ. Να κάνετε τα σχετικά θηκογράμματα.

δ. Να σχολιάσετε τη μεταβλητότητα στις δύο στάθμες.

8. Η διάμεσος 6 διαδοχικών ακέραιων αριθμών είναι 11,5. Να υπολογίσετε τη διακύμανση.

9. α. Να αποδείξετε ότι, αν οι τιμές 6 παρατηρήσεων είναι συμμετρικές ως προς τη διάμεσο, τότε $\bar{x} = \delta$.

β. Να αποδείξετε με αντιπαράδειγμα ότι το αντίστροφο δεν ισχύει, δηλαδή, όταν $\bar{x} = \delta$, οι τιμές δεν είναι κατ' ανάγκη συμμετρικές ως προς τη διάμεσο.

γ. Αν οι παρατηρήσεις αυξηθούν κατά δ, τότε δείξτε ότι $\bar{x} = 2\delta$.

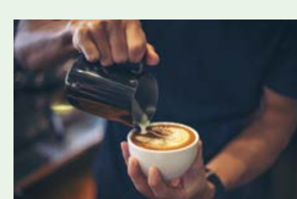
Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τη διπλανή ψηφιακή εφαρμογή για να κάνετε τα πειράματά σας.

3 • Συντελεστής μεταβλητότητας

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/ήτριες να μπορούν να:

1. Περιγράφουν και προσδιορίζουν τον συντελεστή μεταβλητότητας των τιμών ενός ποσοτικού χαρακτηριστικού σε κάθε στάθμη ενός κατηγορικού χαρακτηριστικού του υπό μελέτη δείγματος.
2. Αναγνωρίζουν τη χρησιμότητα του συντελεστή μεταβλητότητας στη σύγκριση της μεταβλητότητας ποσοτικών δεδομένων διαφορετικών ή ίδιων μονάδων μέτρησης.
3. Επιλέγουν κατάλληλα μέτρα θέσης και μέτρα μεταβλητότητας ποσοτικών δεδομένων ανάλογα με την ύπαρξη απόμακρων τιμών.

Διερεύνηση 1



Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι ώρες εργασίας την εβδομάδα ενός υπαλλήλου σε ένα κατάστημα πώλησης καφέδων κατά τις τελευταίες 16 εβδομάδες και ο αριθμός των καφέδων που πούλησε την αντίστοιχη εβδομάδα απασχόλησης.

1. Να βρεθεί η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση σε κάθε περίπτωση.
2. Να συγκριθεί η μεταβλητότητα των δύο δειγμάτων.

Ώρες εργασίας	8	10	10	11	11	12	12	12	12	14	15	15	16	17	17	18
Αριθμός καφέδων	55	80	85	60	40	50	50	60	70	60	60	60	55	90	75	85

Οι τυπικές αποκλίσεις των τιμών δύο μεταβλητών είναι δυνατόν να διαφέρουν πολύ. Αυτό σημαίνει ότι οι τιμές τους απέχουν διαφορετικές αποστάσεις από τη μέση τιμή τους. Ωστόσο, είναι διαφορετικό να έχουμε απόκλιση 2 βαθμών Κελσίου από μια μέση τιμή 8 βαθμών Κελσίου και άλλο να έχουμε απόκλιση 4 βαθμών Κελσίου από μια μέση τιμή 46 βαθμών Κελσίου.

Αντί λοιπόν να συγκρίνουμε τις τυπικές αποκλίσεις, οι οποίες εκφράζονται σε διαφορετικές μονάδες ή σε διαφορετικές κλίμακες, συγκρίνουμε τις τυπικές τους αποκλίσεις ως ποσοστό των αντίστοιχων μέσων τιμών.

Ο λόγος της τυπικής απόκλισης προς τη μέση τιμή είναι καθαρός αριθμός, απαλλαγμένος μονάδων, και χρησιμοποιείται για τη σύγκριση της μεταβλητότητας δύο ή περισσότερων μεταβλητών ή συνόλων δεδομένων.

Παράδειγμα

Στον επόμενο πίνακα φαίνονται οι θερμοκρασίες ενός 15ήμερου στην Αθήνα σε βαθμούς Κελσίου και στη Νέα Υόρκη σε βαθμούς Φαρενάιτ.

Θερμ. Αθηνών	5	5	6	6	6	7	7	8	8	9	10	10	10	11	12	12
Θερμ. Νέας Υόρκης	41	41	42	42	42	44	44	46	46	46	50	50	50	53	53	40

Οι θερμοκρασίες είναι μετρημένες σε διαφορετική κλίμακα, οπότε δεν μπορούμε να τις συγκρίνουμε. Ωστόσο, μπορούμε να βρούμε τι μέρος της τυπικής απόκλισης είναι η μέση τιμή της θερμοκρασίας σε κάθε πόλη.

Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση σε κάθε πόλη είναι:

- Για την Αθήνα

$$\bar{x}_A = \frac{2\cdot 5 + 3\cdot 6 + 2\cdot 7 + 2\cdot 8 + 9 + 10 + 10 + 10 + 11 + 12 + 12}{16} = 8{,}25.$$

$$s_A^2 = \frac{2\cdot(5-8{,}25)^2 + 3\cdot(6-8{,}25)^2 + \cdots + (11-8{,}25)^2 + 2\cdot(12-8{,}25)^2}{16} = 5{,}31.$$

Άρα: $s_A = \sqrt{5{,}31} = 2{,}30$.

- Για τη Νέα Υόρκη

$$\bar{x}_{NY} = \frac{2\cdot 41 + 3\cdot 42 + 2\cdot 44 + 3\cdot 46 + 3\cdot 50 + 2\cdot 53 + 40}{16} = 45{,}63.$$

$$s_{NY}^2 = \frac{2\cdot(41-45{,}63)^2 + 3\cdot(42-45{,}63)^2 + \cdots + 2\cdot(53-45{,}63)^2 + (40-45{,}63)^2}{16} = 17{,}86.$$

Άρα: $s_{NY} = \sqrt{17{,}86} = 4{,}23$.

Επομένως, η τυπική απόκλιση στην Αθήνα ως ποσοστό της μέσης τιμής είναι $\frac{2{,}30}{8{,}25} = 0{,}28$, ενώ το αντίστοιχο ποσοστό για τη Νέα Υόρκη είναι $\frac{4{,}23}{45{,}63} = 0{,}093$.

Ορισμός

Ονομάζουμε **συντελεστή μεταβλητότητας** ενός συνόλου δεδομένων και συμβολίζουμε με CV τον λόγο της τυπικής απόκλισης προς την απόλυτη τιμή της μέσης τιμής. Δηλαδή: $CV = \frac{s}{|\bar{x}|}$, με $\bar{x} \neq 0$.

Συγκρίνοντας πλέον τους συντελεστές μεταβλητότητας των θερμοκρασιών στην Αθήνα και στη Νέα Υόρκη, βλέπουμε ότι οι θερμοκρασίες της Αθήνας με συντελεστή μεταβλητότητας $CV_A = \frac{2,3}{8,25} = 0,28$ παρουσιάζουν πολύ μεγαλύτερη μεταβλητότητα σε σχέση με τις αντίστοιχες θερμοκρασίες της Νέας Υόρκης με συντελεστή μεταβλητότητας $CV_{NY} = \frac{4,23}{45,63} = 0,093$. Ακριβέστερα, περίπου τρεις φορές μεγαλύτερη, αφού $\frac{CV_A}{CV_{NA}} = \frac{0,28}{0,093} \approx 3,01$.

Παρατήρηση 1

Από τον ορισμό του, ο συντελεστής μεταβλητότητας είναι πάντα θετικός αριθμός και δεν έχει μονάδες, δηλαδή είναι καθαρός αριθμός.

Παρατήρηση 2

Αν οι τιμές ενός ποσοτικού χαρακτηριστικού πολλαπλασιαστούν με τον ίδιο αριθμό α≠ 0, ο συντελεστής μεταβλητότητας δεν αλλάζει, αφού ο πολλαπλασιασμός όλων των τιμών με έναν αριθμό α πολλαπλασιάζει τη μέση τιμή με α και την τυπική απόκλιση με |α|, οπότε:

$$CV_y = \frac{s_y}{|\overline{y}|} = \frac{|\alpha|\, s_x}{|\alpha\overline{x}|} = \frac{|\alpha|\, s_x}{|\alpha||\overline{x}|} = \frac{s_x}{|\overline{x}|} = CV_x,\ \overline{x} \neq 0.$$

Παρατήρηση 3

Ο συντελεστής μεταβλητότητας χρησιμοποιείται για τη σύγκριση της ομοιογένειας συνόλων δεδομένων μόνο όταν έχουμε διαφορετικές μέσες τιμές. Διαφορετικά, μας αρκεί η τυπική αποκλιση.

Κριτήριο ομοιογένειας

Ένα δείγμα θεωρείται **ομοιογενές** όταν οι τιμές του συγκεντρώνονται γύρω από τη μέση τιμή του. Ως μέτρο ομοιογένειας επιλέγεται ο συντελεστής μεταβλητότητας. Όσο μικρότερος είναι ο συντελεστής μεταβλητότητας, τόσο περισσότερη ομοιογένεια υπάρχει στις τιμές του χαρακτηριστικού που μας ενδιαφέρει.

Στο παράδειγμά μας, ο συντελεστής μεταβλητότητας των θερμοκρασιών στην Αθήνα είναι $CV_A = 0,28 > 0,093 = CV_{NY}$, οπότε η διασπορά των τιμών της θερμοκρασίας στην Αθήνα είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη διασπορά των τιμών της θερμοκρασίας στη Νέα Υόρκη, σε σχέση με τη μέση τιμή. Επομένως, οι τιμές των θερμοκρασιών στη Νέα Υόρκη παρουσιάζουν μεγαλύτερη ομοιογένεια από τις τιμές των θερμοκρασιών στην Αθήνα.

Γενικά, **ένα δείγμα χαρακτηρίζεται ως ομοιογενές** όταν ο συντελεστής μεταβλητότητάς του είναι μικρότερος από το 0,1, ή σε ποσοστό, μικρότερος από το 10%, δηλαδή όταν $CV < 0,1$.

Έτσι, στο παράδειγμα των θερμοκρασιών, το δείγμα των θερμοκρασιών της Νέας Υόρκης χαρακτηρίζεται ως ομοιογενές, αφού $CV_{NY} = 0,093 < 0,1$.

Εφαρμογή 1

Οι μισθοί, σε ευρώ, μιας εταιρείας έχουν μέση τιμή $\overline{x} = 1200$ και τυπική απόκλιση $s = 300$.

α. Χαρακτηρίζονται οι μισθοί της εταιρείας από ομοιογένεια;

β. Η εταιρεία κάνει αύξηση στις αποδοχές των υπαλλήλων της 7%. Ποιος είναι ο νέος μέσος μισθός και ποιος ο νέος συντελεστής μεταβλητότητας των μισθών;

γ. Η εταιρεία δίνει εφάπαξ αύξηση σε όλους τους εργαζόμενους ένα ποσό ώστε ο μέσος όρος των μισθών να γίνει ίσος με τον μέσο μισθό μετά την αύξηση του 7%. Ποιος είναι ο νέος συντελεστής μεταβλητότητας;

δ. Ποιους φαίνεται να συμφέρει η κάθε περίπτωση αύξησης;

Απάντηση

α. Ο δειγματικός συντελεστής μεταβλητότητας των μισθών της εταιρείας είναι $CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{300}{1200} = 0{,}25 > 0{,}1$, οπότε το δείγμα των μισθών δεν είναι ομοιογενές.

β. Αύξηση 7% στις αποδοχές των υπαλλήλων της σημαίνει ότι αν x_i είναι οι μισθοί και y_i οι νέοι μισθοί μετά την αύξηση, τότε θα ισχύει ότι $y_i = 1{,}07 \cdot x_i$.

Από τις Προτάσεις 1 και 2 της υποενότητας 2.2 βρίσκουμε ότι ο νέος μέσος μισθός και η νέα τυπική απόκλιση θα είναι: $\bar{y} = 1{,}07 \cdot \bar{x} = 1{,}07 \cdot 1200 = 1284$€ και $s_y = 1{,}07 \cdot s_x = 1{,}07 \cdot 300 = 321$€.

Έτσι, $CV_{νέα} = \frac{s_y}{|\bar{y}|} = \frac{1{,}07 \cdot s_x}{|1{,}07 \cdot \bar{x}|} = \frac{1{,}07 \cdot s_x}{1{,}07 \cdot |\bar{x}|} = \frac{s_x}{\bar{x}} = CV = 0{,}25$, δηλαδή ο συντελεστής μεταβλητότητας των μισθών παρέμεινε ο ίδιος.

γ. Αν **α** είναι η οριζόντια αύξηση, τότε αφού έχουμε τον ίδιο μέσο όρο αύξησης μισθών με την αύξηση του 7%, θα πρέπει να ισχύει $\bar{x} + α = 1284 \Rightarrow 1200 + α = 1284 \Rightarrow α = 84$.

Συνεπώς, αν x_i είναι οι μισθοί και y_i οι νέοι μισθοί μετά την αύξηση, τότε θα ισχύει ότι $y_i = x_i + 84$. Άρα: $\bar{y} = \bar{x} + 84 = 1284$ και $s_y = 1 \cdot s_x = 300$.

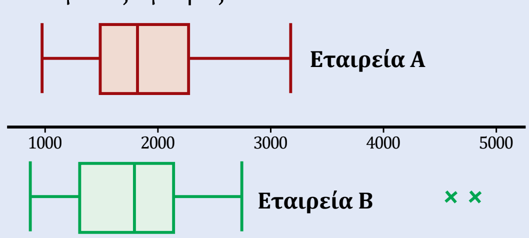
Επομένως: $CV_{νέα} = \frac{s_y}{\bar{y}} = \frac{300}{1284} = 0{,}23$.

δ. Στη συγκεκριμένη εταιρεία η ποσοστιαία αύξηση φαίνεται ότι συμφέρει τους υψηλόμισθους, αφού έχουν υψηλές αμοιβές (μεγαλύτερες του μέσου όρου), ενώ η οριζόντια αύξηση συμφέρει τους χαμηλόμισθους (αμοιβές μικρότερες του μέσου όρου), αφού θα παίρνουν αναλογικά μεγαλύτερα ποσά της ποσοστιαίας αύξησης.

Εφαρμογή 2

Δύο εταιρείες Α και Β έχουν διαφορετική πολιτική για τις αμοιβές σε ευρώ των εργαζομένων τους. Τα μέτρα θέσης και διασποράς των μισθών των εργαζομένων στις δύο εταιρείες φαίνονται στον διπλανό πίνακα και στα αντίστοιχα θηκογράμματα παρακάτω.

Με βάση τα στοιχεία αυτά να σχολιάσετε την πολιτική των δύο εταιρειών σχετικά με τις αμοιβές.



	Εταιρεία Α	Εταιρεία Β
N	20	20
$\bar{x}$	1925,20	1963,95
s	645,47	1020,47
min	972,00	875
Q_1	1488,50	1350
$Q_2(=δ)$	1821,00	1788
Q_3	2266,50	2140,5
max	3172,00	4800
Ακ. Τιμή1		4600
Ακ. Τιμή 2		4800

Απάντηση.

Οι δύο εταιρείες απασχολούν 20 εργαζόμενους η καθεμία.

Ο μέσος μισθός σε ευρώ των εργαζομένων στις δύο εταιρείες είναι 1925,20€ για την εταιρεία Α και 1963,95€ για την εταιρεία Β. Ο μέσος μισθός των εργαζομένων στην Β εταιρεία φαίνεται μεγαλύτερος από τον μέσο μισθό των εργαζομένων της Α εταιρείας. Ωστόσο, η τυπική απόκλιση των μισθών των εργαζομένων της εταιρείας Α είναι 645,47€, ενώ η τυπική απόκλιση των μισθών των εργαζομένων της εταιρείας Β είναι ίση με 1020,47€, οπότε η διακύμανση των μισθών των εργαζομένων στην εταιρεία Β είναι πολύ μεγαλύτερη από την αντίστοιχη των μισθών των εργαζομένων στην εταιρεία Α.

Εξετάζοντας την ομοιογένεια των μισθών στις δύο εταιρείες, βλέπουμε ότι για την εταιρεία Α έχουμε $CV_A = \frac{645{,}47}{1925{,}20} = 0{,}34$, ενώ για την εταιρεία Β έχουμε $CV_B = \frac{1020{,}47}{1963{,}95} = 0{,}52$, δηλαδή η Α εταιρεία έχει μεγαλύτερη ομοιογένεια στους μισθούς της.

Αυτό οφείλεται κατά ένα μεγάλο μέρος στις δύο ακραίες και συγκριτικά πολύ μεγάλες τιμές των αμοιβών δύο στελεχών της Β εταιρείας.

Οι διάμεσοι των μισθών των δύο εταιρειών είναι 1821€ για την εταιρεία Α και 1788€ για την εταιρεία Β. Η διαφορά των διαμέσων δεν φαίνεται μεγάλη και το ίδιο συμβαίνει με τις αμοιβές του μεσαίου 50% στις δύο εταιρείες (ενδοτεταρτημοριακό εύρος) το οποίο είναι $IQR_A = 778$€ για την Α εταιρεία και $IQR_B = 790{,}50$€ για τη Β εταιρεία. Ωστόσο, αν κοιτάξουμε προσεκτικά τα θηκογράμματα παρατηρούμε ότι με εξαίρεση τις ακραίες τιμές, σε όλα τα τεταρτημόρια από τους πλέον χαμηλόμισθους μέχρι τους πλέον υψηλόμισθους, οι αμοιβές στην Α εταιρεία είναι υψηλότερες από ό,τι στην εταιρεία Β.

Για παράδειγμα, το χαμηλότερο 25% των μισθών της εταιρείας Α αμείβεται καλύτερα από το αντίστοιχο 25% της εταιρείας Β. Το ίδιο συμβαίνει και για το 25% των υψηλότερων αμοιβών.

Συμπερασματικά, η πολιτική αμοιβών της εταιρείας Α είναι να αμείβει όλους τους εργαζόμενους σε αυτήν ικανοποιητικά, ενώ η πολιτική αμοιβών της εταιρείας Β είναι να αμείβει πλουσιοπάροχα τα πολύ υψηλόβαθμα στελέχη της.

Εφαρμογή 3

Αν στην προηγούμενη εφαρμογή αφαιρέσουμε τις ακραίες τιμές της Β εταιρείας:

α. Να βρείτε τη νέα μέση τιμή.
β. Να βρείτε τη νέα τυπική απόκλιση.
γ. Να βρείτε τον νέο συντελεστή μεταβλητότητας.
δ. Να εξετάσετε την ομοιογένεια των μισθών.
ε. Ποια μέτρα θέσης και μεταβλητότητας θα επιλέγατε για να συγκρίνετε τις δύο εταιρείες; Για ποιον λόγο;

Απάντηση
Αφαιρώντας τις ακραίες τιμές από τους μισθούς της Β εταιρείας, υπολογίζουμε εκ νέου τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση.

α. Για τη νέα μέση τιμή των αμοιβών:
Το άθροισμα των 20 μισθών είναι $20 \cdot \bar{x} = 20 \cdot 1963{,}95 = 39279$. Αφαιρώντας τους ακραίους μισθούς έχουμε: $39279 - 4600 - 4800 = 29879$, οπότε βρίσκουμε ότι ο νέος μέσος μισθός για τους 18 εργαζόμενους είναι: $\bar{x} = \dfrac{29879}{18} \approx 1659{,}9$, που είναι μικρότερος από τον μέσο μισθό της εταιρείας Α.

β. Για τη νέα τυπική απόκλιση των αμοιβών των 18 εργαζόμενων στην εταιρεία Β, μετά την απομάκρυνση των ακραίων τιμών έχουμε:

$$s^2 = \frac{1}{18}\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{18}^2\right) - \bar{x}^2 \text{ ή } s^2 = \frac{1}{18}\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{18}^2\right) - (1659{,}9)^2. \qquad (1)$$

Από τον τύπο της Πρότασης 2 της ενότητας 1, έχουμε: $s^2 = \dfrac{1}{20}\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{20}^2\right) - \bar{x}^2$ και αντικαθιστώντας για την εταιρεία Β τις τιμές της τυπικής απόκλισης και της μέσης τιμής από τον πίνακα, παίρνουμε:

$$(1020{,}47)^2 = \frac{1}{20}\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{20}^2\right) - (1963{,}95)^2 \text{ ή } 1041359 = \frac{1}{20}\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{20}^2\right) - 3857099{,}6$$

$$\text{ή } x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{20}^2 = 97969172. \qquad (2)$$

Από τον πίνακα έχουμε ότι οι δύο ακραίες τιμές είναι 4600 και 4800 οπότε $4600^2 + 4800^2 = 44200000$ και επομένως η (2) γράφεται:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{20}^2 = 97969172 \text{ ή } x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{18}^2 = 97969172 - 44200000 = 53769172.$$

Έτσι λοιπόν η (1) γίνεται:

$$s^2 = \frac{1}{18} \cdot 53769172 - (1659{,}9)^2 \Leftrightarrow$$
$$s^2 = \frac{1}{18} \cdot 53769172 - 2755268 \Leftrightarrow$$
$$s^2 = 231908{,}2.$$

Άρα $s^2 \approx 231908$ ή $s \approx 481{,}57$.

γ. Ο νέος συντελεστής μεταβλητότητας είναι: $CV_B' = \dfrac{481{,}57}{1659{,}9} \approx 0{,}29$ και είναι μικρότερος από τον συντελεστή μεταβλητότητας της εταιρείας Α ($CV_A = 0{,}34$).

δ. Παρατηρούμε ότι μετά την αφαίρεση των δύο ακραίων μισθών, οι μισθοί της εταιρείας Β παρουσιάζουν μεγαλύτερη ομοιογένεια απ' ό,τι οι μισθοί της εταιρείας Α.

ε. Παρατηρήσαμε ότι η ύπαρξη ακραίων τιμών στην εταιρεία Β αυξάνει τη μεταβλητότητα και τον συντελεστή μεταβλητότητας. Επομένως, καλύτερος δείκτης της μελέτης των μισθών στις δύο εταιρείες είναι η διάμεσος, γιατί είναι περισσότερο ανθεκτική στις ακραίες τιμές.

Για να κάνετε αυτοαξιολόγηση στην έννοια της μεταβλητότητας, ανοίξτε την εφαρμογή.

Ασκήσεις

1. Ένας επενδυτής θέλει να επενδύσει σε δύο μετοχές. Η μετοχή Α έχει μέση ετήσια απόδοση 10% και τυπική απόκλιση 5%, ενώ η μετοχή Β έχει μέση ετήσια απόδοση 12% και τυπική απόκλιση 8%. Ποια μετοχή θα προτείνατε στον επενδυτή;

2. Μια εταιρεία θέλει να συγκρίνει την αποτελεσματικότητα δύο διαφορετικών μεθόδων παραγωγής. Χρησιμοποιεί τη μέθοδο Α για να παράγει 100 προϊόντα και τη μέθοδο Β για να παράγει 100 προϊόντα. Η μέση τιμή παραγωγής για τη μέθοδο Α είναι 100 μονάδες/ώρα και η τυπική απόκλιση 10 μονάδες/ώρα, ενώ η μέση τιμή παραγωγής για τη μέθοδο Β είναι 110 μονάδες/ώρα και η τυπική απόκλιση 15 μονάδες/ώρα. Ποια μέθοδος είναι πιο αποτελεσματική;

3. Δύο εταιρείες έχουν τον ίδιο μέσο όρο ετήσιων κερδών. Η εταιρεία Α έχει τυπική απόκλιση 20% και η εταιρεία Β τυπική απόκλιση 30%. Ποια εταιρεία παρουσιάζει μεγαλύτερη μεταβλητότητα στα κέρδη;

4. Ζυγίσαμε δυο ομάδες παιδιών και πήραμε τα εξής βάρη σε κιλά.

Αγόρια: 46, 51, 56, 60, 60, 61, 62, 65, 66, 66, 68, 68, 75, 77, 79.

Κορίτσια: 45, 47, 47, 49, 49, 52, 55, 57, 62, 64, 66, 68, 68, 70, 70.

Να εξετάσετε αν υπάρχουν ακραίες τιμές στα δύο δείγματα και να βρείτε ποιο δείγμα έχει μεγαλύτερη ομοιογένεια πριν και μετά την αφαίρεση των απόμακρων τιμών.

5. Στις εξετάσεις 50 ατόμων ως προς την αρτηριακή πίεση βρέθηκε: Μέσος όρος 120 mm Hg και τυπική απόκλιση 15 mm Hg.

α. Να εξετάσετε αν είναι ομοιογενές το δείγμα.

β. Αν μειώσουμε την τυπική απόκλιση s, πόση, το πολύ, πρέπει να γίνει, ώστε το δείγμα να μετατραπεί σε ομοιογενές, υπό την προϋπόθεση ότι η δειγματική μέση τιμή παραμένει σταθερή;

γ. Αν αυξήσουμε τη δειγματική μέση τιμή, πόση τουλάχιστον πρέπει να γίνει, ώστε το δείγμα να μετατραπεί σε ομοιογενές, υπό την προϋπόθεση ότι η δειγματική τυπική απόκλιση παρέμεινε σταθερή;

4 • Σχέσεις εξάρτησης μεταξύ δύο μεταβλητών

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν να:

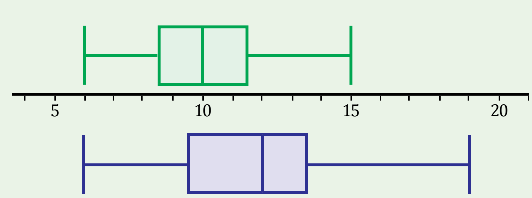
1. Κάνουν συγκρίσεις και να εξάγουν συμπεράσματα σχετικά με τα μέτρα θέσης και μεταβλητότητας που έχουν οι τιμές του ποσοτικού χαρακτηριστικού σε κάθε στάθμη του κατηγορικού χαρακτηριστικού τού υπό μελέτη δείγματος με τη βοήθεια των θηκογραμμάτων.

2. Ανακαλύπτουν και να εξηγούν με παραδείγματα ότι ένα ποσοτικό και ένα κατηγορικό χαρακτηριστικό δεν διέπονται απαραίτητα από μια σχέση αιτίας – αιτιατού.

Διερεύνηση

Δύο παίκτες μιας ομάδας μπάσκετ πέτυχαν σε 20 αγώνες τους παρακάτω πόντους:

Παίκτης Α: 6 7 7 7 8 9 9 10 10 10 10 10 11 11 11 12 13 13 13 15.
Παίκτης Β: 6 6 8 9 9 10 10 11 11 12 12 12 12 12 13 14 14 14 15 19.



Τα σχετικά θηκογράμματα φαίνονται στη διπλανή εικόνα.

1. Να προσδιοριστεί
  α. Το υπό μελέτη δείγμα, το δείγμα και το μέγεθός του.
  β. Το ποσοτικό χαρακτηριστικό.
  γ. Το κατηγορικό χαρακτηριστικό και οι στάθμες του.

2. Να προσδιορίσετε ποιο θηκόγραμμα αντιστοιχεί σε κάθε παίκτη.

3. Να προσδιοριστούν όλα τα μέτρα θέσης (min, max, Q_1, δ (= Q_2), Q_3, $\overline{x}$) του ποσοτικού χαρακτηριστικού, σε κάθε στάθμη (κατηγορία) του κατηγορικού χαρακτηριστικού.

4. Να προσδιοριστούν όλα τα μέτρα μεταβλητότητας (s^2, IQR και R) του ποσοτικού χαρακτηριστικού, σε κάθε στάθμη του κατηγορικού χαρακτηριστικού.

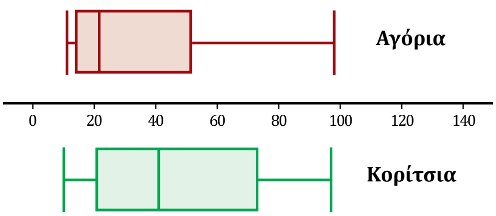
5. Να συγκρίνετε τους δύο παίκτες, βγάζοντας συμπεράσματα σχετικά με τα μέτρα θέσης και μεταβλητότητας που έχουν οι τιμές του ποσοτικού χαρακτηριστικού, σε κάθε στάθμη του κατηγορικού χαρακτηριστικού του υπό μελέτη δείγματος.

Να συζητήσετε τα συμπεράσματά σας με τους/τις συμμαθητές/συμμαθήτριές σας στην τάξη.

Είδαμε ότι με τη βοήθεια των θηκογραμμάτων μπορούμε να κάνουμε συγκρίσεις και να εξάγουμε συμπεράσματα, σχετικά με τα μέτρα θέσης και μεταβλητότητας που έχουν οι τιμές του ποσοτικού χαρακτηριστικού σε κάθε στάθμη (κατηγορία, ομάδα) ενός κατηγορικού χαρακτηριστικού του υπό μελέτη δείγματος. Ωστόσο, είναι αναγκαίο, όταν πρόκειται να κάνουμε συγκρίσεις, να είμαστε ιδιαίτερα προσεκτικοί σχετικά με τη διατύπωση των συμπερασμάτων μας.

Γενικά, ένα ποσοτικό και ένα κατηγορικό χαρακτηριστικό δεν διέπονται απαραίτητα από μια σχέση αιτίας – αιτιατού. Το γεγονός ότι οι στάθμες ενός κατηγορικού χαρακτηριστικού σχετίζονται με τα ποσοτικά δεδομένα μιας ποσοτικής μεταβλητής είναι λάθος να ερμηνεύεται με όρους αιτίου και αποτελέσματος, ότι δηλαδή το κατηγορικό χαρακτηριστικό είναι η αιτία που προκλήθηκε το αποτέλεσμα στο ποσοτικό χαρακτηριστικό.

Για παράδειγμα, στα επόμενα θηκογράμματα φαίνονται τα αποτελέσματα (κλίμακα 0–100) μιας έρευνας για το πόσες φορές, κατά τη διάρκεια ενός σχολικού έτους, οι μαθητές/τριες ενός σχολείου ζήτησαν βοήθεια από κάποιον/α συμμαθητή/τριά τους για ένα προσωπικό τους θέμα.



Στη συγκεκριμένη έρευνα, όπως φαίνεται στα θηκογράμματα, τα κορίτσια απευθύνονται σε μεγαλύτερο βαθμό για βοήθεια σε ένα προσωπικό τους θέμα σε κάποιον/α συμμαθητή/τριά τους σε σύγκριση με τα αγόρια στο εν λόγω σχολείο.

Ωστόσο, δεν είναι σωστό να ερμηνεύσουμε το αποτέλεσμα λέγοντας ότι το φύλο του/της κάθε μαθητή/τριας ήταν η αιτία για το πλήθος αιτημάτων βοήθειας για ένα προσωπικό ζήτημα ενός/μιας μαθητή/τριας. Δηλαδή, το φύλο και το πλήθος αιτημάτων βοήθειας για ένα προσωπικό ζήτημα ενός/μιας μαθητή/τριας δεν διέπονται απαραίτητα από μια σχέση αιτίας – αιτιατού.

Σε μια τέτοια περίπτωση μπορεί:
- το χαρακτηριστικό Α να είναι η αιτία για το χαρακτηριστικό Β,
- το χαρακτηριστικό Β να είναι η αιτία για το χαρακτηριστικό Α,
- να υπάρχει ένας τρίτος παράγοντας ο οποίος να είναι η αιτία τόσο για το Α όσο και για το Β,
- το χαρακτηριστικό Α να είναι η αιτία για ένα χαρακτηριστικό Γ και το χαρακτηριστικό Γ να είναι η αιτία για ένα χαρακτηριστικό Β,
- να είναι απλά μια σύμπτωση, δηλαδή να συνέβη τυχαία, ενώ στην πραγματικότητα τα δύο χαρακτηριστικά δεν έχουν καμία σχέση.

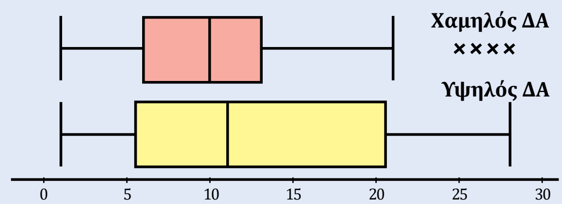
Στις παρακάτω εφαρμογές θα δούμε σχετικά παραδείγματα.

Εφαρμογή 1

Σε μία μικρή έρευνα, σε ένα τοπικό κέντρο υγείας, ζητήθηκε από 100 μαθητές να συμπληρώσουν ένα ερωτηματολόγιο αυτοεκτίμησης και να απαντήσουν πόσες ώρες τον μήνα συναντούν φίλους τους για βόλτα εκτός σχολείου.

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα και τα θηκογράμματα.

	Χαμηλός ΔΑ	Υψηλός ΔΑ
N	55	45
$\bar{x}$	10,38	12,84
s	7,00	8,18
min	1	1
Q_1	6	5,5
Q_2 (=δ)	10	11
Q_3	13	20,5
max	28	28



Να σχολιάσετε τα αποτελέσματα παραθέτοντας τις διαφορές που παρατηρείτε στις στάθμες του κατηγορικού χαρακτηριστικού. Υπάρχει σχέση αιτίου–αποτελέσματος (αιτίου-αιτιατού);

Απάντηση
Από τον πίνακα και τα θηκογράμματα έχουμε:

Στην έρευνα συμμετείχαν 100 συνολικά μαθητές, από τους οποίους, με βάση το ερωτηματολόγιο, οι 45 είχαν υψηλό δείκτη αυτοεκτίμησης (ΔΑ) και 55 είχαν χαμηλό δείκτη αυτοεκτίμησης.

Έχουμε δύο στάθμες, που είναι τα επίπεδα αυτοεκτίμησης (χαμηλό–υψηλό), και ποσοτικό χαρακτηριστικό τον αριθμό των ωρών του μήνα που οι μαθητές συναντιούνται για βόλτα με φίλους τους εκτός σχολείου.

Οι μαθητές με χαμηλό δείκτη αυτοεκτίμησης βγαίνουν για βόλτα με φίλους τους εκτός σχολείου κατά μέσο όρο 10,38 ώρες τον μήνα και οι μαθητές με υψηλό δείκτη αυτοεκτίμησης 12,84 ώρες κατά μέσο όρο. Επομένως, οι μαθητές με υψηλό δείκτη αυτοεκτίμησης βγαίνουν συγκριτικά περισσότερες ώρες.

Ωστόσο, επειδή υπάρχουν ακραίες τιμές, όπως φαίνεται από το θηκόγραμμα για τον αριθμό των ωρών που οι μαθητές με χαμηλό δείκτη αυτοεκτίμησης βγαίνουν για βόλτα με φίλους τους εκτός σχολείου, συγκρίνουμε και τις τιμές των διαμέσων, οι οποίες είναι καταλληλότερες σε τέτοιες περιπτώσεις.

Η κατάσταση όμως δεν αλλάζει, αφού και η διάμεση τιμή για τους μαθητές με υψηλό δείκτη αυτοεκτίμησης είναι μεγαλύτερη και ειδικότερα 11 έναντι της διάμεσης τιμής 10 για τους μαθητές με χαμηλό δείκτη αυτοεκτίμησης.

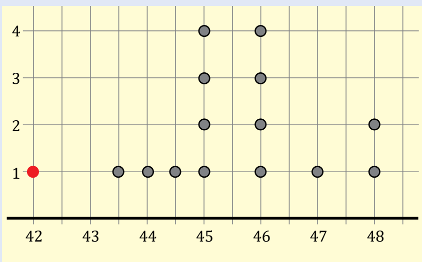
Επίσης, η τυπική απόκλιση, το ενδοτεταρτημοριακό εύρος και το εύρος είναι μικρότερα για τους μαθητές με χαμηλό δείκτη αυτοεκτίμησης, εμφανίζοντας μια περισσότερο ομοιογενή ομάδα, με χαμηλότερες συγκριτικά τιμές θέσης, όπως αναφέραμε, έναντι της ομάδας των μαθητών με υψηλό δείκτη αυτοεκτίμησης.

Ωστόσο, για τους συγκεκριμένους μαθητές δεν μπορούμε να αποδώσουμε ως αίτιο της μικρότερης κοινωνικοποίησής τους τη χαμηλότερη αυτοεκτίμηση. Δηλαδή, δεν ξέρουμε αν η κοινωνικοποίηση των μαθητών αυξάνει την αυτοεκτίμηση ή η αυτοεκτίμηση αυξάνει την κοινωνικοποίησή τους και χρειάζονται περισσότερο εξειδικευμένες έρευνες γι' αυτό.

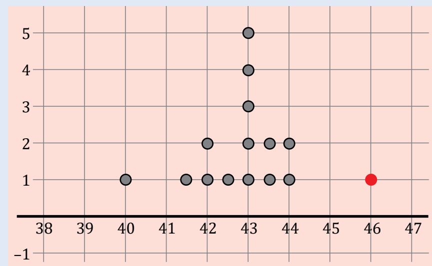
Εφαρμογή 2

Σε μια έρευνα που έγινε στην τελευταία τάξη ενός Λυκείου υπήρχαν δύο ερωτήματα που αναφέρονταν στο νούμερο παπουτσιού που φορά ένας μαθητής και στο άθλημα που συμμετέχει.

Η απομόνωση των δύο ερωτημάτων και ο διαχωρισμός τους ανά άθλημα μας δίνει τα παρακάτω δεδομένα με τη μορφή σημειογραμμάτων.



Νούμερο παπουτσιού–Μπάσκετ



Νούμερο παπουτσιού–Ποδόσφαιρο

α. Να αναφέρετε το δείγμα, τις στάθμες του κατηγορικού χαρακτηριστικού καθώς και το ποσοτικό χαρακτηριστικό ως προς το οποίο εξετάζονται οι στάθμες.

β. Να υπολογίσετε τα μέτρα θέσης.

γ. Να υπολογίσετε τα μέτρα διασποράς.

δ. Να κατασκευάσετε τα θηκογράμματα. Ποιες είναι οι ακραίες τιμές;

ε. Να σχολιαστούν τα αποτελέσματα και να αιτιολογήσετε τις διαφορές που παρατηρείτε βάσει του κατηγορικού χαρακτηριστικού.

Απάντηση

α. Το μέγεθος του δείγματος των μαθητών είναι 30, ποσοτικό χαρακτηριστικό είναι το μέγεθος των παπουτσιών και κατηγορικό χαρακτηριστικό με δύο κατηγορίες (στάθμες) το είδος του αθλήματος.

β. Δημιουργώντας μια αύξουσα λίστα τιμών για κάθε στάθμη, κατά τα γνωστά, έχουμε:

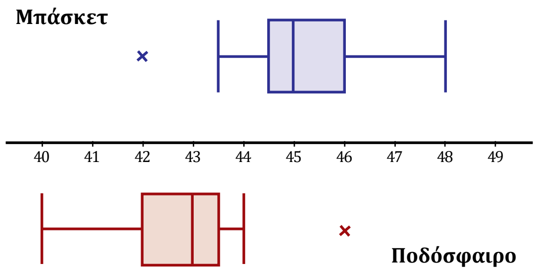
▶ σχετικά με το νούμερο παπουτσιών που φορούν όσοι αγωνίζονται στο μπάσκετ βρίσκουμε ότι:
- $\bar{x}_{ΜΠ} = 45{,}4$.
- Η διάμεσος είναι η όγδοη τιμή σε μια αύξουσα διάταξη των 15 παρατηρήσεων και είναι $δ = 45$.
- $Q_1 = 44{,}5$ και $Q_3 = 46$.

▶ Σχετικά με το νούμερο παπουτσιών που φορούν όσοι αγωνίζονται στο ποδόσφαιρο βρίσκουμε ότι:
- $\bar{x}_{Π} = 42{,}93$.
- Η διάμεσος είναι η όγδοη τιμή σε μια αύξουσα διάταξη των 15 παρατηρήσεων και είναι $δ = 43$.
- $Q_1 = 42$ και $Q_3 = 43{,}5$.

γ. Για τα μέτρα διασποράς σχετικά με το νούμερο παπουτσιών που φορούν όσοι αγωνίζονται στο μπάσκετ έχουμε
- $s = 1{,}55$.
- $IQR = Q_3 - Q_1 = 46 - 44{,}5 = 1{,}5$.
- Εύρος $R = \max - \min = 48 - 42 = 6$.

Για τα μέτρα διασποράς σχετικά με το νούμερο παπουτσιών που φορούν όσοι αγωνίζονται στο ποδόσφαιρο έχουμε
- $s = 1{,}29$.
- $IQR = Q_3 - Q_1 = 43{,}5 - 42 = 1{,}5$.
- Εύρος $R = \max - \min = 46 - 40 = 6$.

δ. Με τα παραπάνω στοιχεία έχουμε:



• Φράχτες στο Μπάσκετ:
$Q_1 - 1{,}5 \cdot IQR = 42{,}25$ και $Q_3 + 1{,}5 \cdot IQR = 48{,}25$, οπότε ακραία τιμή είναι η 42.

• Φράχτες στο Ποδόσφαιρο:
$Q_1 - 1{,}5 \cdot IQR = 39{,}75$ και $Q_3 + 1{,}5 \cdot IQR = 45{,}75$, οπότε ακραία τιμή είναι η 46.

ε. Τα δείγματα είναι ομοιογενή και οι τιμές είναι πολύ συγκεντρωμένες γύρω από τον μέσο όρο, αφού $CV_{ΜΠ} = \dfrac{1{,}55}{45{,}4} = 0{,}03$ και $CV_{Π} = \dfrac{1{,}29}{42{,}93} = 0{,}03$. Με εξαίρεση τις ακραίες τιμές, οι μαθητές που παίζουν μπάσκετ φορούν παπούτσια με νούμερο μεγαλύτερο από το 75% από εκείνους που αγωνίζονται στο ποδόσφαιρο. Στην έρευνα αυτή λοιπόν, όσοι αγωνίζονται στο μπάσκετ φορούν παπούτσια με μεγαλύτερο νούμερο από όσους αγωνίζονται στο ποδόσφαιρο. Ωστόσο, είναι λάθος να σκεφτούμε ότι η αιτία γι' αυτό είναι το μπάσκετ, δηλαδή ότι υπάρχει σχέση αιτίας – αιτιατού.

Αυτό που συμβαίνει είναι ότι, λόγω της φύσης του αθλήματος, μπάσκετ παίζουν πιο υψηλόσωμοι μαθητές, οι οποίοι έχουν μεγαλύτερη σωματική διάπλαση σε σύγκριση με τους μαθητές που παίζουν ποδόσφαιρο και αυτό είναι η αιτία για τα μεγαλύτερα μεγέθη παπουτσιών.

Εφαρμογή 3

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι βαθμολογίες ενός δείγματος μαθητών/τριών της Α΄ Λυκείου σε καθένα από τα τρία επαναληπτικά διαγωνίσματα στο μάθημα των Μαθηματικών. Οι βαθμολογίες είναι το άθροισμα των μονάδων σε πέντε ασκήσεις που περιλάμβανε το διαγώνισμα, καθεμία από τις οποίες βαθμολογούνταν από 0 έως 20.

Α	5, 5, 6, 25, 27, 29, 31, 41, 44, 44, 53, 59, 66, 67, 68, 72, 80, 84, 90, 91, 93, 94, 96, 97, 97, 99
Β	7, 9, 13, 20, 23, 23, 28, 28, 29, 31, 33, 37, 44, 45, 48, 51, 61, 63, 65, 67, 72, 77, 80, 94, 95, 97
Γ	9, 12, 17, 27, 36, 37, 41, 43, 55, 57, 59, 61, 62, 63, 65, 72, 80, 82, 84, 85, 86, 95, 95, 97, 98, 98

1. Να προσδιοριστεί
 α. Ο υπό μελέτη πληθυσμός.
 β. Το ποσοτικό χαρακτηριστικό.
 γ. Το κατηγορικό χαρακτηριστικό και οι στάθμες του.

2. Να προσδιοριστούν όλα τα μέτρα θέσης (min, max, Q_1, δ (= Q_2), Q_3, $\bar{x}$) του ποσοτικού χαρακτηριστικού, σε κάθε στάθμη του κατηγορικού χαρακτηριστικού.

3. Να προσδιοριστούν όλα τα μέτρα μεταβλητότητας (s^2, IQR και R) του ποσοτικού χαρακτηριστικού, σε κάθε στάθμη του κατηγορικού χαρακτηριστικού.

4. Να κάνετε τα σχετικά θηκογράμματα.

5. Να βγάλετε συμπεράσματα σχετικά με τα μέτρα θέσης και μεταβλητότητας που έχουν οι τιμές του ποσοτικού χαρακτηριστικού σε κάθε στάθμη του κατηγορικού χαρακτηριστικού του υπό μελέτη πληθυσμού.

6. Να υπολογίσετε τον CV για τις τρεις στάθμες του δείγματος και να συγκρίνετε την ομοιογένεια των τριών δειγμάτων.

Απάντηση

1. α. Ο υπό μελέτη πληθυσμός είναι οι μαθητές της Α΄ Λυκείου. Από αυτόν τον πληθυσμό έχουμε επιλέξει τυχαία ένα δείγμα μεγέθους 26.

 β. Το ποσοτικό χαρακτηριστικό είναι η βαθμολογία στα Μαθηματικά στο επαναληπτικό διαγώνισμα.

 γ. Το κατηγορικό χαρακτηριστικό είναι τα επαναληπτικά διαγωνίσματα και έχει τρεις στάθμες.

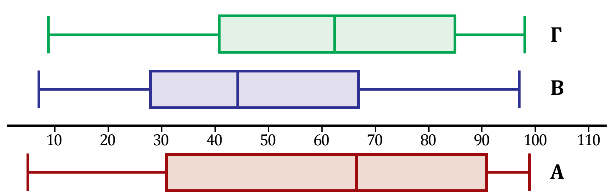
2. Τα μέτρα θέσης (min, max, Q_1, δ (= Q_2), Q_3, $\bar{x}$) υπολογίζονται κατά τα γνωστά και είναι:

	Α	Β	Γ
$\bar{x}$	60,12	47,69	62,15
min	5	7	9
Q_1	31	28	41
δ	66,5	44.5	62,5
Q_3	91	67	85
max	99	97	98

3. Τα μέτρα μεταβλητότητας: s^2, s, IQR και εύρος υπολογίζονται κατά τα γνωστά και είναι:

	Α	Β	Γ
s^2	959,03	711,52	737,05
s	30,97	26,67	27,15
IQR	60	39	44
Εύρος	94	90	89

4. Τα αντίστοιχα θηκογράμματα φαίνονται στην επόμενη εικόνα.



5. Σχετικά με τη μέση τιμή, καλύτερα είναι τα αποτελέσματα του 3ου διαγωνίσματος. Επειδή δεν υπάρχουν ακραίες τιμές, συμπεραίνουμε ότι οι βαθμολογίες στο 3ο διαγώνισμα είναι καλύτερες. Εξάλλου, στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε και με τις διάμεσες βαθμολογίες.

Σε σχέση με τη μεταβλητότητα, οι βαθμολογίες στα τρία διαγωνίσματα παρουσιάζουν περίπου ίδιες τυπικές αποκλίσεις, με λίγο χειρότερη αυτήν του 1ου διαγωνίσματος. Η βαθμολογία του 2ου διαγωνίσματος είναι περισσότερο συγκεντρωμένη γύρω από τη μέση τιμή και τη διάμεσο, οι οποίες όμως είναι συγκριτικά οι χαμηλότερες.

Το μικρότερο εύρος παρατηρείται στις βαθμολογίες του 3ου διαγωνίσματος.

Συμπερασματικά, οι μαθητές έγραψαν συγκριτικά καλύτερα στο 3ο διαγώνισμα.

6. Κατά τα γνωστά βρίσκουμε: $CV_A = \dfrac{30,97}{60,12} = 0,52$, $CV_B = \dfrac{26,67}{47,69} = 0,56$ και $CV_\Gamma = \dfrac{27,15}{62,15} = 0,44$. Η μεγαλύτερη ομοιογένεια παρατηρείται στη στάθμη Γ, ενώ η μικρότερη στη στάθμη Β.

Εφαρμογή 4

Ένα ιατρικό κέντρο κατέγραψε τα αποτελέσματα των εξετάσεων οστικής πυκνότητας σε εκατοντάβαθμη κλίμακα πλήθους εξετασθέντων και τα ομαδοποίησε όπως παρακάτω:

«Διαβητικοί»: 30, 35, 40, 40, 45, 50, 50, 50, 50, 50, 55, 55, 60, 60, 70.
«Μη διαβητικοί»: 42, 46, 46, 50, 53, 57, 57, 65, 65, 65, 65, 72, 80, 80, 87.

α. Να αναφέρετε ποιο είναι το ποσοτικό και ποιο το κατηγορικό χαρακτηριστικό.

β. Να βρεθούν τα μέτρα θέσης.

γ. Να βρεθούν τα μέτρα διασποράς.

δ. Να γίνουν τα δύο θηκογράμματα.

Να σχολιάσετε τα αποτελέσματα και τις διαφορές που παρατηρείτε στις στάθμες του κατηγορικού χαρακτηριστικού.

Απάντηση

α. Το χαρακτηριστικό «Μέτρηση οστικής πυκνότητας» είναι ποσοτικό χαρακτηριστικό, ενώ ο χαρακτηρισμός «Διαβητικός – Μη διαβητικός» είναι κατηγορικό χαρακτηριστικό.

β. Τα μέτρα θέσης σχετικά με την οστική πυκνότητα της ομάδας «Διαβητικοί» είναι:

- $\bar{x} = 49{,}33$.
- $\delta = Q_2 = 50$, αφού το πλήθος των τιμών είναι 15 και ο 8ος όρος είναι 50 σε μια αύξουσα διάταξη των παρατηρήσεων.
- $Q_1 = 40$, δηλαδή η διάμεσος των επτά μικρότερων της διαμέσου τιμών (4ος όρος).
- $Q_3 = 55$, δηλαδή η διάμεσος των επτά μεγαλύτερων της διαμέσου τιμών (12ος όρος).

Τα μέτρα θέσης σχετικά με την οστική πυκνότητα της ομάδας «Μη διαβητικοί» είναι:

- $\bar{x} = 62$.
- $\delta = 65$, αφού το πλήθος των τιμών είναι 15 και ο 8ος όρος είναι 65 σε μια αύξουσα διάταξη των παρατηρήσεων.
- $Q_1 = 50$, δηλαδή η διάμεσος των επτά μικρότερων της διαμέσου τιμών (4ος όρος).
- $Q_3 = 72$, δηλαδή η διάμεσος των επτά μεγαλύτερων της διαμέσου τιμών (12ος όρος).

γ. Για τα μέτρα διασποράς της ομάδας «Διαβητικοί» έχουμε:

- $s = 9{,}98$.
- $IQR = 15$, αφού $IQR = Q_3 - Q_1 = 55 - 40$.
- $R = 40$, αφού $R = \max - \min = 70 - 30$.

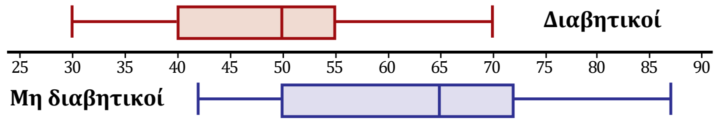
Για τα μέτρα διασποράς της ομάδας «Μη διαβητικοί» έχουμε:

- $s = 13{,}16$.
- $IQR = 22$, αφού $IQR = Q_3 - Q_1 = 72 - 50$.
- $R = 45$, αφού $R = \max - \min = 87 - 42$.

δ. *Φράχτες, Οριακές τιμές, Ακραίες τιμές* για κάθε στάθμη του κατηγορικού χαρακτηριστικού.

- Ομάδα «Διαβητικοί»: $Q_1 - 1{,}5 \cdot IQR = 17{,}5$ και $Q_3 + 1{,}5 \cdot IQR = 77{,}5$.
  Κάτω φράχτης 17,5, οριακή κάτω τιμή = 30, δεν έχει κάτω ακραία τιμή.
  Πάνω φράχτης 77,5, οριακή πάνω τιμή = 70, δεν έχει πάνω ακραία τιμή.
- Ομάδα «Μη Διαβητικοί»: $Q_1 - 1{,}5 \cdot IQR = 17$ και $Q_3 + 1{,}5 \cdot IQR = 105$.
  Κάτω φράχτης 17, οριακή κάτω τιμή = 42, δεν έχει κάτω ακραία τιμή.
  Πάνω φράχτης 105, οριακή πάνω τιμή = 87, δεν έχει πάνω ακραία τιμή.

Με βάση τα ευρήματα σχεδιάζουμε τα δύο θηκογράμματα.



ε. Από τα θηκογράμματα φαίνεται ότι και στις δύο στάθμες υπάρχει μια σχετική συμμετρία ως προς τη διάμεσο. Επίσης, μια συγκέντρωση όσον αφορά το τρίτο τεταρτημοριακό διάστημα και μια μεγαλύτερη διασπορά στο δεύτερο τεταρτημοριακό διάστημα.

Φαίνεται ότι οι εξετασθέντες της ομάδας «Μη διαβητικοί» είχαν καλύτερες μετρήσεις οστικής πυκνότητας σε σύγκριση με την ομάδα «Διαβητικοί». Ωστόσο, δεν μπορούμε να βγάλουμε το συμπέρασμα ότι η αιτία για τις καλύτερες τιμές οστικής πυκνότητας ήταν ο μη διαγνωσμένος διαβήτης («Μη διαβητικοί»), επειδή μπορεί να συμβαίνει το αντίθετο, δηλαδή η μεγαλύτερη οστική πυκνότητα να είναι η αιτία που οι εξετασθέντες δεν είχαν διαβήτη ή μια άλλη τρίτη μεταβλητή να επηρεάζει και τις δύο.

Εφαρμογή 5

Στους προκριματικούς των Πανελλήνιων αγώνων στίβου το 2019, στο άλμα εις μήκος των Κορασίδων (14 και 15 ετών) είχαμε τις παρακάτω επιδόσεις σε μέτρα:

5,17 4,95 4,87 4,36 3,98 5,19 5,17 5,06 5,05 5,00 5,00 4,97 4,91 4,89 4,88 4,67 4,67.

Στο άλμα εις μήκος των Νεανίδων (17, 18 και 19 ετών), επίσης, είχαμε:

5,53 5,49 5,30 4,92 4,92 5,97 5,36 5,33 4,99 4,68 5,23 5,22 5,16 4,63.

Στο ίδιο αγώνισμα, τα αποτελέσματα των Γυναικών (23–33 ετών) ήταν:

6,47 6,41 6,32 6,28 6,25 6,01 5,93 5,76 5,75 5,67 5,65 5,12.

α. Να αναφέρετε ένα ποσοτικό χαρακτηριστικό και ένα κατηγορικό χαρακτηριστικό, ως προς τις στάθμες του οποίου να εξετάσετε τις τιμές του ποσοτικού χαρακτηριστικού.
β. Να βρεθούν τα μέτρα θέσης για κάθε στάθμη του κατηγορικού χαρακτηριστικού.
γ. Να βρεθούν τα μέτρα διασποράς για κάθε στάθμη του κατηγορικού χαρακτηριστικού.
δ. Να γίνουν τα θηκογράμματα για κάθε στάθμη του κατηγορικού χαρακτηριστικού.
ε. Να σχολιάσετε τα αποτελέσματα και τις διαφορές που παρατηρείτε στις στάθμες του κατηγορικού χαρακτηριστικού.

Απάντηση

α. Ποσοτικό χαρακτηριστικό είναι οι «επιδόσεις» και κατηγορικό χαρακτηριστικό η «ηλικιακή ομάδα» με τρεις στάθμες: Κορασίδες, Νεάνιδες και Γυναίκες.

β. Για τα μέτρα θέσης των Κορασίδων:
- $\bar{x} = 4{,}87$.
- $\delta = 4{,}95$, αφού το πλήθος των τιμών είναι 17, αυτός είναι ο 9ος όρος.
- $Q_1 = 4{,}77$, επειδή το πλήθος των τιμών των μικρότερων της διαμέσου είναι 8, το Q_1 είναι το ημιάθροισμα του 4ου και 5ου όρου.
- $Q_3 = 5{,}06$, αφού το πλήθος των τιμών των μεγαλύτερων της διαμέσου είναι 8 όροι, το Q_3 είναι το ημιάθροισμα του 13ου και 14ου όρου.

Για τα μέτρα θέσης των Νεανίδων, ανάλογα, έχουμε:
$\bar{x} = 5{,}20$, $\delta = 5{,}23$, $Q_1 = 4{,}92$, $Q_3 = 5{,}36$.

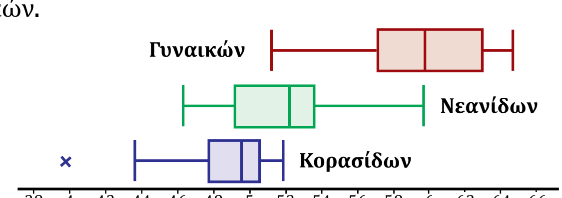
Για τα μέτρα θέσης των Γυναικών, ανάλογα, βρίσκουμε:
$\bar{x} = 5{,}97$, $\delta = 5{,}97$, $Q_1 = 5{,}71$, $Q_3 = 6{,}3$.

γ. Για τα μέτρα διασποράς των Κορασίδων βρίσκουμε
- $s = 0{,}30$.
- $IQR = 0{,}29$, αφού: $IQR = Q_3 - Q_1$.
- $R = 1{,}21$, αφού: R = μέγιστη τιμή – ελάχιστη τιμή.

Ανάλογα, για τα μέτρα διασποράς των Νεανίδων βρίσκουμε $s = 0{,}34$, $IQR = 0{,}44$, $R = 1{,}34$ και για τα μέτρα διασποράς των Γυναικών $s = 0{,}38$, $IQR = 0{,}59$, $R = 1{,}35$.

δ. Με τα παραπάνω στοιχεία υπολογίζουμε: *Φράχτες*, *Οριακές τιμές* και *Ακραίες τιμές* για κάθε στάθμη του κατηγορικού χαρακτηριστικού.
- Γυναίκες: *Κάτω φράχτης* $Q_1 - 1{,}5 \cdot IQR = 4{,}83$. *Πάνω φράχτης* $Q_3 + 1{,}5 \cdot IQR = 7{,}19$.
  Δεν υπάρχει ακραία τιμή. Οι οριακές τιμές απεικονίζονται στο θηκόγραμμα.
- Νεανίδες: *Κάτω φράχτης* $Q_1 - 1{,}5 \cdot IQR = 4{,}26$. *Πάνω φράχτης* $Q_3 + 1{,}5 \cdot IQR = 6{,}02$.
  Δεν υπάρχει ακραία τιμή. Οι οριακές τιμές απεικονίζονται στο θηκόγραμμα.
- Κορασίδες: *Κάτω φράχτης* $Q_1 - 1{,}5 \cdot IQR = 4{,}34$. *Πάνω φράχτης* $Q_3 + 1{,}5 \cdot IQR = 5{,}48$.
  Υπάρχει κάτω ακραία τιμή το 3,98, γιατί είναι μικρότερη από την τιμή 4,34 του κάτω φράχτη. Οι οριακές τιμές απεικονίζονται στο θηκόγραμμα.

Με βάση τα ευρήματα και τις παρατηρήσεις μας σχεδιάζουμε τρία θηκογράμματα, για τις επιδόσεις των Κορασίδων, Νεανίδων και Γυναικών.



ε. Παρατηρούμε ότι:

Οι επιδόσεις των Γυναικών είναι καλύτερες από αυτές των Νεανίδων και Κορασίδων, ενώ των Νεανίδων είναι καλύτερες από τις αντίστοιχες των Κορασίδων. Το συμπέρασμα αυτό υποστηρίζεται από την αντίστοιχη διάταξη τόσο των μέσων τιμών όσο και των διαμέσων για τις τρεις στάθμες.

Το μικρότερο ενδοτεταρτημοριακό εύρος αντιστοιχεί στις επιδόσεις των Κορασίδων και δείχνει ότι οι επιδόσεις τους δεν έχουν μεγάλη μεταβλητότητα. Η μεγαλύτερη μεταβλητότητα εμφανίζεται στις επιδόσεις των Γυναικών.

Με βάση τα ευρήματα θα μπορούσε για τις συγκεκριμένες αθλήτριες να υποστηριχθεί ότι οι καλύτερες συγκριτικά επιδόσεις αποδίδονται στην προοδευτική εξέλιξη της σωματικής διάπλασης, με την αύξηση της ηλικίας και στον περισσότερο χρόνο εκγύμνασης.

Πρέπει να είμαστε ιδιαίτερα προσεκτικοί, σχετικά με την εξαγωγή συμπερασμάτων, μετά από την καταγραφή και τη μελέτη της συλλογής των αποτελεσμάτων των παρατηρήσεών μας. Απλοϊκές γενικεύσεις της μελέτης των παρατηρήσεών μας μπορεί να μας οδηγήσουν σε λανθασμένα συμπεράσματα, σχετικά με την απόδοση σχέσης αιτίας–αιτιατού, ιδιαίτερα σε περιπτώσεις όπου φαίνεται να σχετίζονται τα αποτελέσματα του ποσοτικού και του κατηγορικού χαρακτηριστικού. Στην πράξη, οι ειδικοί αναλύουν περισσότερο τέτοιες καταστάσεις εφαρμόζοντας πειραματικούς σχεδιασμούς και εξειδικευμένους στατιστικούς ελέγχους.

Ανακεφαλαίωση Στατιστικής

Μέτρα θέσης:

- **Μέση τιμή:** $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_\nu}{\nu}$.
- **Διάμεσος:** μιας συλλογής δεδομένων που έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά είναι η μεσαία τιμή των παρατηρήσεών μας, όταν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττός αριθμός, ή το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων όταν το πλήθος αυτών είναι άρτιος.
- **Πρώτο τεταρτημόριο (Q_1)** λέγεται η τιμή πριν από την οποία βρίσκεται το πολύ 25% του συνόλου των παρατηρήσεων και μετά από αυτήν το πολύ 75%. Βρίσκεται υπολογίζοντας τη διάμεσο του 50% των μικρότερων παρατηρήσεων.
- **Δεύτερο τεταρτημόριο (Q_2)** λέγεται η διάμεσος δ (Q_2= δ). Πριν από το Q_2 βρίσκεται το πολύ το 50% του συνολικού αριθμού των παρατηρήσεων και μετά από αυτό το πολύ το 50%.
- **Τρίτο τεταρτημόριο (Q_3)** λέγεται η τιμή πριν από την οποία βρίσκεται το πολύ το 75% του συνολικού αριθμού των παρατηρήσεων και μετά από αυτήν το πολύ το 25%. Βρίσκεται υπολογίζοντας τη διάμεσο του 50% των μεγαλύτερων παρατηρήσεων.
- **Ενδοτεταρτημοριακό εύρος:** $IQR = Q_3 - Q_1$.

Φράχτες:

- **Κάτω φράχτης** σε ένα **θηκόγραμμα** είναι η τιμή $\mathbf{Q_1 - 1{,}5 \cdot IQR}$, όπου Q_1 το πρώτο τεταρτημόριο και $IQR = Q_3 - Q_1$ το ενδοτεταρτημοριακό εύρος.
- **Πάνω φράχτης** σε ένα θηκόγραμμα είναι η τιμή $\mathbf{Q_3 + 1{,}5 \cdot IQR}$, όπου Q_3 το τρίτο τεταρτημόριο και $IQR = Q_3 - Q_1$ το ενδοτεταρτημοριακό εύρος.

Οριακές τιμές:

- **Οριακή κάτω τιμή** είναι η μικρότερη τιμή των δεδομένων που είναι μεγαλύτερη ή ίση από τον κάτω φράχτη.
- **Οριακή πάνω τιμή** είναι η μεγαλύτερη τιμή των δεδομένων που είναι μικρότερη ή ίση από τον πάνω φράχτη.
- **Ακραία** ή **απόμακρη** ή **έκτροπη τιμή** είναι κάθε τιμή που δεν ανήκει στο διάστημα $\mathbf{[Q_1 - 1{,}5 \cdot IQR,\ Q_3 + 1{,}5 \cdot IQR]}$.

Μέτρα διασποράς:

- **Μέση απόλυτη απόκλιση** (MAA) ονομάζουμε τη μέση τιμή των απόλυτων τιμών των αποκλίσεων της μέσης τιμής $\bar{x}$ από τις πραγματικές x_i και δίνεται από τον τύπο:

$$MAA = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \cdots + |x_\nu - \bar{x}|}{\nu}.$$

- **Μέση τετραγωνική απόκλιση** ή **διακύμανση** ονομάζουμε τη μέση τιμή των τετραγώνων των αποκλίσεων της μέσης τιμής $\overline{x}$ ενός δείγματος από τις τιμές του και τη συμβολίζουμε με $\mathbf{s^2}$ και δίνεται από τον τύπο:

$$s^2 = \frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_\nu-\overline{x})^2}{\nu}.$$

- **Τυπική απόκλιση s** ονομάζουμε την τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης. Δηλαδή, $s = \sqrt{s^2}$.
- **Μέση τιμή και τυπική απόκλιση της y = αx + β** :
  Όταν δύο ποσοτικά χαρακτηριστικά X και Y συνδέονται με τη σχέση $y = \alpha \cdot x + \beta$, τότε για τις μέσες τιμές και τις διακυμάνσεις τους ισχύει: $\mathbf{\overline{y} = \alpha \cdot \overline{x} + \beta}$ και $\mathbf{s_y^2 = \alpha^2 s_x^2}$ ή $\mathbf{s_y = |\alpha|\, s_x}$.
- **Ονομάζουμε συντελεστή μεταβλητότητας** και συμβολίζουμε με CV τον λόγο της τυπικής απόκλισης ως προς την απόλυτη τιμή της μέσης τιμής. Δηλαδή: $CV = \frac{s}{|\overline{x}|}$ με μέση τιμή διαφορετική από το 0.
- Όταν οι **στάθμες** ενός κατηγορικού χαρακτηριστικού σχετίζονται με τα ποσοτικά δεδομένα μιας ποσοτικής μεταβλητής δεν διέπονται απαραίτητα από μια σχέση αιτίας – αιτιατού. Σε μια τέτοια περίπτωση μπορεί:
  - ✓ το χαρακτηριστικό Α να είναι η αιτία για το χαρακτηριστικό Β,
  - ✓ το χαρακτηριστικό Β να είναι η αιτία για το χαρακτηριστικό Α,
  - ✓ να υπάρχει ένας τρίτος παράγοντας ο οποίος να είναι η αιτία τόσο για το Α όσο και για το Β,
  - ✓ το χαρακτηριστικό Α να είναι η αιτία για ένα χαρακτηριστικό Γ και το χαρακτηριστικό Γ να είναι η αιτία για ένα χαρακτηριστικό Β,
  - ✓ να είναι απλά μια σύμπτωση, δηλαδή να συνέβη τυχαία, ενώ στην πραγματικότητα τα δύο χαρακτηριστικά δεν έχουν καμία σχέση.

Αυτοαξιολόγηση

1. Όταν η διακύμανση είναι μηδέν, τι συμβαίνει με τις τιμές του ποσοτικού χαρακτηριστικού;

2. Όταν η διακύμανση είναι σχετικά μικρή, τι συμβαίνει με τις τιμές του ποσοτικού χαρακτηριστικού;

3. Όταν διπλασιάζονται οι τιμές ενός ποσοτικού χαρακτηριστικού, διπλασιάζεται η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση αυτού; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

4. Η μέση τιμή δεκαέξι διαδοχικών άρτιων αριθμών είναι:
α. άρτιος αριθμός **β.** περιττός αριθμός **γ.** κανένα από τα δύο προηγούμενα

5. Σε 15 διαδοχικούς περιττούς αριθμούς:
α. Η μέση τιμή είναι μεγαλύτερη της διαμέσου.
β. Η μέση τιμή είναι μικρότερη της διαμέσου.
γ. Η μέση τιμή και η διάμεσος ταυτίζονται.

6. Όσο μεγαλύτερη είναι η διαφορά της διαμέσου από το Q_3 τόσο μεγαλύτερη είναι η μεταβλητότητα στο διάστημα (Q_2, Q_3); Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

7. Οι απόμακρες τιμές ενός δείγματος επηρεάζουν το ίδιο τη διάμεσο και τη μέση τιμή; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

8. Αν η ελάχιστη τιμή ενός δείγματος αυξηθεί κατά 2, η μέγιστη μειωθεί κατά 3, τότε η μέση τιμή μειώνεται κατά 1; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

9. Οι τιμές x και y συνδέονται με τη σχέση $y = \alpha \cdot x + \beta$. Πότε οι συντελεστές μεταβλητότητας των x και y συνδέονται με τη σχέση: $CV_x = CV_y$. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

10. Ο καθηγητής των Μαθηματικών αναφέρει στην τάξη «Το 60% των μαθητών έγραψε πάνω από τη διάμεσο». Σωστό ή λάθος και γιατί;

11. Ο καθηγητής των Μαθηματικών, ερχόμενος στην τάξη αναφέρει «Το 60% των μαθητών έγραψε κάτω από τον μέσο όρο». Μπορεί να είναι σωστό; Εξηγήστε γιατί.

12. Σε ένα πολυκατάστημα παρατηρήθηκε μεγάλη αύξηση πελατών που αγόραζαν γυαλιά ηλίου και συγχρόνως αγόραζαν παγωτό, σε σχέση με εκείνους οι οποίοι με την αγορά γυαλιών ηλίου δεν έπαιρναν παγωτό. Είναι η κατανάλωση παγωτού η αιτία για την αύξηση των πωλήσεων των γυαλιών ηλίου;

13. Την άνοιξη αυξάνονται οι αλλεργίες. Είναι η εποχή της άνοιξης η αιτία;

Για επιπλέον αυτοαξιολόγηση, ανοίξτε την ψηφιακή εφαρμογή.

Ασκήσεις και προβλήματα

1. Η μέση τιμή 12 διαδοχικών ακέραιων αριθμών είναι 23,5. Να υπολογισθεί η διάμεσος.

2. Έστω, ένα δείγμα με πλήθος στοιχείων N=15, 16, 17, 18, 19, 20. Για ποιες τιμές του N η διάμεσος και τα τεταρτημόρια ταυτίζονται με τιμή των παρατηρήσεων;

Για να βοηθηθείτε στη διερεύνηση της Άσκησης 2, ανοίξτε τη διπλανή ψηφιακή εφαρμογή.

3. Η μέση ηλικία των παικτών μιας ποδοσφαιρικής ομάδας είναι 28 έτη με τυπική απόκλιση 4 έτη. Εάν δεν γίνουν αγορές ή πωλήσεις παικτών, να βρεθεί η μέση ηλικία και η τυπική απόκλιση των παικτών της ομάδας μετά από μια τριετία.

4. Τα παρακάτω δεδομένα είναι οι βαθμολογίες δύο τμημάτων στο διαγώνισμα των Μαθηματικών στο ίδιο μάθημα με τα ίδια θέματα.

1ο Τμήμα				
x_i	ν_i	$\nu_i \cdot x_i$	$x_i - \bar{x}$	$\nu_i \cdot (x_i - \bar{x})^2$
5	1			
13	1			
14	1			
15	3			
16	6			
17	3			
18	3			
20	2			

2ο Τμήμα				
x_i	ν_i	$\nu_i \cdot x_i$	$x_i - \bar{x}$	$\nu_i \cdot (x_i - \bar{x})^2$
11	2			
13	2			
14	1			
15	2			
16	6			
17	1			
18	5			
20	1			

α. Να συμπληρωθούν οι πίνακες, για να βρεθούν η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της βαθμολογίας στο διαγώνισμα κάθε τμήματος.
β. Να γίνουν τα αντίστοιχα θηκογράμματα των βαθμολογιών των δύο τμημάτων.
γ. Να συγκριθούν οι βαθμολογίες των δύο τμημάτων ως προς την ομοιογένεια.

5. Τα παρακάτω δεδομένα δείχνουν τον αριθμό των μηνών που συνήθως περιμένουν οι ασθενείς σε μια λίστα μεταμοσχεύσεων πριν υποβληθούν σε χειρουργική επέμβαση. Τα δεδομένα έχουν ταξινομηθεί από το μικρότερο στο μεγαλύτερο. Να υπολογισθεί:
α. Η μέση τιμή και η διάμεσος.
β. Η τυπική απόκλιση και τα Q_1 και Q_3.

Αρ. μηνών	10	12	13	15	17	19	21	22	24
Συχνότητα	5	2	2	3	1	4	2	2	4

γ. Να βρεθεί ο συντελεστής μεταβλητότητας. Είναι ομοιογενές το δείγμα;

6. Έξι ένορκοι πρέπει να επιδικάσουν αποζημίωση σε έναν ενάγοντα και αποφάσισαν να χρησιμοποιήσουν τον μέσο όρο των ποσών που θα προτείνουν.
α. Ο ένας εξ αυτών πιστεύει ότι ο ενάγων θα πρέπει να λάβει 20.000€, αλλά πιστεύει ότι ο μέσος όρος των προτάσεων των άλλων πέντε ενόρκων θα είναι περίπου 12.000€. Αποφασίζει, λοιπόν, να προτείνει ένα αυξημένο ποσό, ώστε ο μέσος όρος και για τους έξι ενόρκους να είναι 20.000€. Τι ποσό θα πρέπει να προτείνει;
β. Τι θα προτείνατε να κάνει η επιτροπή για να αποτρέψει έναν ένορκο από το να προτείνει ένα πολύ μεγάλο ή πολύ μικρό ποσό αποζημίωσης;

7. Οι τιμές x_i ενός ποσοτικού χαρακτηριστικού αυξάνονται (μειώνονται) κατά 15%. Ποια είναι η καινούρια μέση τιμή και ποια η καινούρια τυπική απόκλιση του δείγματος;

8. Παρακάτω φαίνονται οι μέσες θερμοκρασίες των ημερών του Ιανουαρίου 2022, στον σταθμό της Αγίας Παρασκευής.

Θερμ.	0,8	1,2	3	5	6	7,5	8,2	9	10
Ημέρες	2	2	4	4	5	3	6	3	2

α. Να βρεθεί η μέση τιμή και η διακύμανση των θερμοκρασιών του μήνα αυτού.

β. Να βρεθούν αυτές οι θερμοκρασίες σε βαθμούς Φαρενάιτ, όταν ξέρουμε ότι η σχέση που συνδέει τις κλίμακες μέτρησης της θερμοκρασίας Φαρενάιτ και Κελσίου είναι $F = \frac{9}{5}C + 32$.

γ. Να εξεταστούν ως προς την ομοιογένεια οι θερμοκρασίες στις δυο περιπτώσεις.

9. Να δειχθεί ότι αν δύο ποσοτικά χαρακτηριστικά X και Y:

α. συνδέονται με τη σχέση $y = α \cdot x$, τότε για τη διάμεσό τους ισχύει: $δ_y = α \cdot δ_x$,

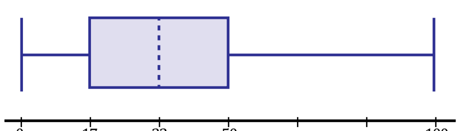
β. ενώ, αν συνδέονται με τη σχέση $y = x + β$, τότε για τη διάμεσό τους ισχύει: $δ_y = δ_x + β$.

10. Στον επόμενο πίνακα φαίνονται οι μέσες τιμές ενός ποσοτικού χαρακτηριστικού σε τρία ξένα μεταξύ τους ανά δύο υποσύνολα Α, Β, Γ από τα οποία αποτελείται ένα δείγμα.

ΣΥΝΟΛΟ	ΠΟΣΟΣΤΟ	ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ
Α	15%	3
Β	15%	5
Γ		6

Να βρεθεί η μέση τιμή όλων των παρατηρήσεων.

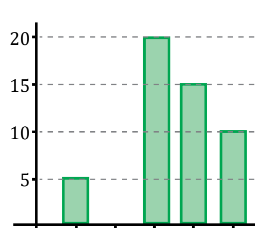
11. Το ακόλουθο θηκόγραμμα δείχνει τις ηλικίες του πληθυσμού μιας ευρωπαϊκής χώρας για το 1990.



α. Υπάρχουν λιγότερα ή περισσότερα παιδιά (ηλικίας 17 ετών και κάτω) από τους ηλικιωμένους (ηλικίας 65 ετών και άνω); Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

β. Δεδομένου ότι περίπου το 12,6% είναι ηλικίας 65 ετών και άνω, τι ποσοστό περίπου του πληθυσμού ανήκει στην ηλικιακή ομάδα 17 έως 65 ετών;

12. Στο διάγραμμα συχνοτήτων φαίνονται τα ποσοστά καθεμιάς από τις τιμές 1, 2, 3, 4, 5 ενός ποσοτικού χαρακτηριστικού. Να υπολογίσετε το ποσοστό των παρατηρήσεων κάθε ορθογωνίου και να βρεθεί η μέση τιμή του δείγματος.



13. Σε ένα ταξίδι απόστασης 520 χιλιομέτρων με αυτοκίνητο, ο κ. Γιώργος είχε μέση ταχύτητα 75 km/h για τα πρώτα 120 km, 100 km/h για τα επόμενα 200 km και 80km/h για τα τελευταία 200 km.

α. Πόσο διήρκεσε το ταξίδι;

β. Θα μπορούσατε να βρείτε τη μέση ταχύτητα του αυτοκινήτου του κ. Γιώργου για το ταξίδι των 520 km υπολογίζοντας (75 + 100 + 80)/3; Εάν όχι, βρείτε τη σωστή μέση ταχύτητα για το ταξίδι.

14. Οι παρακάτω παρατηρήσεις είναι οι μέσοι μισθοί, στρογγυλεμένοι στις εκατοντάδες, σε 10 χώρες της Ευρωπαϊκής Ένωσης με τις υψηλότερες αμοιβές το 2014 για άντρες και γυναίκες.

Γυναίκες: 3300, 2800, 2600, 2800, 2600, 2400, 2400, 2200, 2200, 2300.

Άντρες: 3600, 3400, 3400, 3100, 3100, 3000, 3000, 2900, 3000, 2800.

α. Να βρεθούν τα μέτρα θέσης.

β. Να βρεθούν τα μέτρα διασποράς.

γ. Να γίνουν τα δύο θηκογράμματα.

δ. Να αναφέρετε ποιο είναι το ποσοτικό και ποιο το κατηγορικό χαρακτηριστικό.

ε. Να σχολιαστούν τα αποτελέσματα.

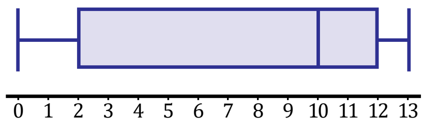
στ. Μπορούμε να πούμε ότι το φύλο επιδρά στους μισθούς;

15. Το 1ο τμήμα της Α΄ τάξης ενός Λυκείου έχει 20 μαθητές και το 1ο τετράμηνο είχαν μέσο όρο βαθμολογίας 16. Το δεύτερο τετράμηνο 4 μαθητές μείωσαν τη βαθμολογία τους κατά 2 βαθμούς και 6 μαθητές την αύξησαν κατά 3 βαθμούς. Ποιος είναι ο μέσος όρος της βαθμολογίας το δεύτερο τετράμηνο; Ποιος ο μέσος όρος της βαθμολογίας των μαθητών για όλη τη χρονιά;

Για να πειραματιστείτε και να διευκολυνθείτε, ανοίξτε την εφαρμογή που βρίσκεται εδώ.

16. Θεωρούμε τις παρατηρήσεις $x_1 < x_2 < x_3$. Να αποδειχθεί ότι η μέση απόλυτη απόκλιση είναι μικρότερη ή ίση από την τυπική απόκλιση (ΜΑΑ $\leq$ s).

17. Δίνεται το επόμενο θηκόγραμμα:



α. Ποιο από τα διαστήματα (Q_1, Q_2), (Q_2, Q_3) έχει τη μικρότερη διασπορά;

β. Ποιο από τα παραπάνω διαστήματα έχει τη μεγαλύτερη διασπορά;

γ. Να βρεθεί το ενδοτεταρτημοριακό εύρος.

δ. Υπάρχουν περισσότερα δεδομένα στο διάστημα [2, 10] ή στο διάστημα [10, 13]; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

ε. Η μέση τιμή είναι αριστερά ή δεξιά της διαμέσου; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

18. Σε μια τάξη 24 από τους 25 μαθητές έγραψαν διαγώνισμα στα Μαθηματικά και ένας μαθητής που απουσίαζε την ημέρα της εξέτασης έγραψε μόνος του την επόμενη μέρα. Ο καθηγητής βαθμολόγησε τα 24 γραπτά και βρήκε μέσο όρο βαθμολογίας 15 μονάδες με διακύμανση 9. Ο μαθητής που έδωσε εξετάσεις την επόμενη μέρα βαθμολογήθηκε με 13.

α. Η βαθμολογία του νέου μαθητή αυξάνει ή μειώνει τη μέση βαθμολογία; Ποια η νέα μέση τιμή των γραπτών;

β. Η βαθμολογία του νέου μαθητή αυξάνει ή μειώνει τη διακύμανση των βαθμολογιών;

19. Οι τιμές ενός δείγματος είναι 11, 7, κ, 13, 11, 10, όπου κ > 0. Ο συντελεστής μεταβλητότητας του δείγματος είναι CV = 20% και η διακύμανσή του είναι $s^2 = 4$.

α. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ του παραπάνω δείγματος.

β. Να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού κ.

γ. Να υπολογίσετε τη διάμεσο (δ) και το εύρος (R) του παραπάνω δείγματος.

δ. Αν από κάθε τιμή του παραπάνω δείγματος αφαιρεθεί ο αριθμός 2, να εξετάσετε αν το δείγμα των νέων τιμών είναι ομοιογενές και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας (Πανελλαδικές εξετάσεις ΕΠΑΛ 2019).

20. Η μέση τιμή έξι θετικών ακέραιων αριθμών είναι 7. Οι τέσσερις μεγαλύτεροι έχουν μέση τιμή 9, ενώ οι τέσσερις μικρότεροι 4,5. Να βρεθεί η διάμεσος των αριθμών.

21. Σε μία εταιρεία, οι εργαζόμενοι είναι διαβαθμισμένοι σε πέντε κλίμακες, από τον βοηθό μέχρι τον Διευθυντή. Οι μισθοί από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο σε ευρώ (€) είναι οι ακόλουθοι:

920, 1100, 1250, 1400, 1700.

Η πολιτική της εταιρείας αλλάζει και, θέλοντας να δώσουν κίνητρα στους εργαζόμενους για να εξελιχθούν, αποφασίζουν να διπλασιάσουν την τυπική απόκλιση, χωρίς να αλλάξει ο κατώτατος μισθός της εταιρείας. Να προταθεί ένα μοντέλο που θα μπορούσε να εφαρμόσει η διοίκηση της εταιρείας. Να βρεθούν οι νέοι μισθοί των υπαλλήλων.

Για μία επανάληψη των εννοιών της Στατιστικής, ανοίξτε την ψηφιακή εφαρμογή.

Να ανοίξετε την ψηφιακή εφαρμογή και να πειραματιστείτε για να ανακαλύψετε μία ιδιότητα της ΜΑΑ.

Να ανοίξετε την ψηφιακή εφαρμογή και να πειραματιστείτε για να ανακαλύψετε μία ιδιότητα της Μ.Τ.

Ερευνητική Εργασία

Με αφορμή το πλήθος αναφορών που γίνεται στο διαδίκτυο για το πόσο σημαντικό είναι το πρωινό για την απόδοση των μαθητών/τριών στις εξετάσεις, να σχεδιάσετε και να κάνετε μια έρευνα μεταξύ των συμμαθητών/τριών σας. Το ερώτημα, ενδεικτικά, θα μπορούσε να είναι: «Να συγκριθούν οι βαθμολογίες στο διαγώνισμα των Μαθηματικών των μαθητών/τριών που τρώνε συστηματικά πρωινό με εκείνες των μαθητών/τριών που δεν τρώνε πρωινό». Η συλλογή δεδομένων μπορεί να γίνει από ένα τμήμα ή μια τάξη. Η αναπαράσταση των δεδομένων μπορεί να γίνει με σημειόγραμμα ή/και διάγραμμα συχνοτήτων κ.λπ. Για την ανάλυση μπορούν να χρησιμοποιηθούν θηκογράμματα και τα μέτρα θέσης και διασποράς προκειμένου να προσδιοριστούν τα μέτρα θέσης και μεταβλητότητας των δειγμάτων σε κάθε στάθμη του ποιοτικού/κατηγορικού χαρακτηριστικού.

Για να διευκολυνθείτε στην επεξεργασία και τη μελέτη του πληθυσμού, να ανοίξετε και να χρησιμοποιήσετε την ψηφιακή εφαρμογή.

Πιθανότητες

- **Πειράματα τύχης και ενδεχόμενα**
- **Μη ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα**
- **Αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας**
- **Προβλήματα πιθανοτήτων**

1 • Πειράματα τύχης και ενδεχόμενα

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

- Να περιγράφουν πειράματα τύχης και να αναγνωρίζουν τη χρησιμότητα των πιθανοθεωρητικών μοντέλων για τη μελέτη πολύπλοκων φαινομένων.
- Να μεταγράφουν ενδεχόμενα και σχέσεις ενδεχομένων που είναι διατυπωμένες σε φυσική γλώσσα, στη γλώσσα των συνόλων και αντίστροφα.

1.1 Πειράματα τύχης

Πείραμα είναι η μεθοδική αναπαραγωγή ενός φαινομένου με σκοπό τον έλεγχο μιας θεωρητικής γνώσης ή την ανακάλυψη των αιτίων που το προκαλούν. Τα πειράματα διακρίνονται σε αιτιοκρατικά και σε στοχαστικά. Για παράδειγμα, η μέτρηση της θερμοκρασίας του νερού που βράζει είναι ένα **αιτιοκρατικό πείραμα**, καθώς ο βρασμός του νερού οφείλεται στην αύξηση της θερμοκρασίας και συμβαίνει κάθε φορά που η θερμοκρασία φτάνει στους $100^{o}C$.

Πείραμα τύχης είναι ένα πείραμα το οποίο μπορεί να επαναληφθεί όσες φορές θέλουμε, υπό τις ίδιες (φαινομενικά τουλάχιστον) συνθήκες, αλλά δεν μπορούμε να προβλέψουμε το αποτέλεσμα. Για παράδειγμα, η ρίψη ενός ζαριού είναι ένα πείραμα τύχης. Μπορούμε να ρίξουμε όσες φορές θέλουμε ένα ζάρι, αλλά δεν μπορούμε να προβλέψουμε ποιος αριθμός θα εμφανισθεί, ακόμα κι αν γνωρίζουμε ότι ο αριθμός θα είναι ένας από τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Κάθε φορά που ρίχνουμε ένα ζάρι ή στρίβουμε ένα νόμισμα εκτελούμε ένα πείραμα τύχης.

Για να χαρακτηρίσουμε ένα πείραμα ως πείραμα τύχης, πρέπει:
- Να μπορούμε να το επαναλάβουμε με τις ίδιες συνθήκες όσες φορές θέλουμε.
- Να μην μπορούμε να προβλέψουμε το αποτέλεσμα σε κάθε εκτέλεση του πειράματος.

Σε ένα πείραμα τύχης ξέρουμε ή μπορούμε να βρούμε όλα τα δυνατά αποτελέσματα, αλλά δεν ξέρουμε ποιο θα πραγματοποιηθεί σε μια εκτέλεσή του.

Διερεύνηση 1

Ποια από τα παρακάτω είναι πειράματα τύχης;

α. Ο αριθμός των ατυχημάτων με αυτοκίνητο που συμβαίνουν κάθε μήνα στην πόλη μας.
β. Το πλήθος των αδελφών που έχει κάθε μαθητής/τρια του σχολείου μας.
γ. Η ένδειξη που εμφανίζεται όταν ρίχνουμε το ζάρι.
δ. Το αποτέλεσμα της κλήρωσης του ΛΟΤΤΟ.
ε. Η διάρκεια μιας τηλεφωνικής κλήσης.
στ. Ο χρόνος καθυστέρησης ενός λεωφορείου.
ζ. Ο αριθμός των ψήφων που θα πάρει ένα κόμμα στις εκλογές.
η. Ο αριθμός των ταξί που θα περάσουν, ώσπου ένα να σταματήσει στο σήμα που κάνουμε.

Δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης ονομάζεται το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων του πειράματος τύχης και συμβολίζεται με Ω.
Ενδεχόμενο ή **συμβάν** ενός δειγματικού χώρου ονομάζεται κάθε υποσύνολο αυτού του δειγματικού χώρου.

Για παράδειγμα, η ρίψη δύο φορές ενός νομίσματος είναι ένα πείραμα τύχης γιατί μπορεί να επαναληφθεί όσες φορές θέλουμε και το αποτέλεσμα δεν είναι γνωστό εξαρχής. Ο δειγματικός του χώρος, όταν καταγράφουμε την όψη του νομίσματος που εμφανίστηκε, είναι Ω = {ΚΚ,ΚΓ,ΓΚ,ΓΓ} και ενδεχόμενα του πειράματος τύχης είναι, για παράδειγμα, τα: {ΓΚ}, {ΚΚ, ΓΚ}, {ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ}.

Εφαρμογή 1

Με χρήση των συνθηκών και των αντικειμένων που περιγράφονται σε καθεμία από τις επόμενες περιπτώσεις, να περιγράψετε ένα πείραμα τύχης όταν:

α. Σας δίνεται ένα ζάρι και ένα πλαστικό ποτήρι.

β. Έχετε διαθέσιμο ένα βιβλίο 817 σελίδων.

Στη συνέχεια περιγράφονται ενδεικτικά κάποια πειράματα τύχης:

α. Τοποθετούμε το ζάρι μέσα στο πλαστικό ποτήρι, το οποίο ανακινούμε καλά και αφήνουμε το ζάρι να πέσει πάνω σε ένα τραπέζι καταγράφοντας τον αριθμό της πάνω έδρας του. Η διαδικασία αυτή περιγράφει ένα πείραμα τύχης, διότι:

i. μπορεί να επαναληφθεί όσες φορές θέλουμε, υπό τις ίδιες συνθήκες, και

ii. δεν μπορούμε να προβλέψουμε εκ των προτέρων ποια όψη (αριθμός) θα προκύψει.

Σημείωση

Ο δειγματικός χώρος του πειράματος τύχης είναι το σύνολο {1,2,3,4,5,6}.

β. Ανοίγουμε ένα βιβλίο 817 σελίδων τυχαία και βλέπουμε τον αριθμό της δεξιάς σελίδας. Η διαδικασία αυτή περιγράφει ένα πείραμα τύχης, διότι:

i. το άνοιγμα του βιβλίου μπορεί να επαναληφθεί όσες φορές θέλουμε, υπό τις ίδιες συνθήκες, και

ii. δεν μπορούμε να προβλέψουμε εκ των προτέρων ποιος θα είναι ο αριθμός της δεξιάς σελίδας.

Σημείωση

Ο δειγματικός χώρος του πειράματος τύχης είναι γνωστός και θα είναι το σύνολο των περιττών φυσικών αριθμών του διαστήματος [1, 817].

Το σύνολο των αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης μπορεί να είναι πεπερασμένο σε πλήθος ή άπειρο. Στο βιβλίο αυτό θα ασχοληθούμε με **πεπερασμένους δειγματικούς χώρους**, δηλαδή με δειγματικούς χώρους που αποτελούνται από ν ακριβώς στοιχεία, όπου ν μη μηδενικός φυσικός αριθμός.

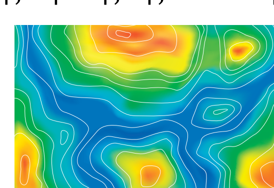
Πιθανοθεωρητικά μοντέλα

Τα πειράματα τύχης έχουν το χαρακτηριστικό ότι μπορούν να εκτελούνται πολλές φορές, κάτω από τις ίδιες συνθήκες και δεν γνωρίζουμε το αποτέλεσμα, αλλά ξέρουμε ότι ανήκει σε ένα σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων, χωρίς να μπορούμε να προβλέψουμε το αποτέλεσμα του πειράματος.

Η σχετική συχνότητα της πραγματοποίησης ενός ενδεχόμενου, όπως έχουμε μάθει, είναι η **πειραματική πιθανότητα** εμφάνισης του ενδεχόμενου αυτού. Όσο μεγαλώνει το πλήθος των επαναλήψεων του πειράματος, τόσο πλησιάζουμε στον προσδιορισμό της τιμής της πιθανότητας (Νόμος Μεγάλων Αριθμών).

Ωστόσο, τέτοιες διαδικασίες δεν είναι πάντα εφαρμόσιμες, είτε επειδή είναι χρονοβόρες είτε για άλλους πρακτικούς λόγους. Για παράδειγμα, αν θέλουμε να εξετάσουμε τη διάρκεια ζωής μιας λάμπας φωτισμού που παράγει ένα εργοστάσιο, δεν μπορούμε να δοκιμάσουμε όλες τις λάμπες γιατί θα καταστρέφαμε την παραγωγή.

Σε τέτοιες περιπτώσεις δημιουργούνται **θεωρητικά μοντέλα** για τον προσδιορισμό της εύρεσης της πιθανότητας να πραγματοποιηθεί ένα ενδεχόμενο. Ένα παράδειγμα είναι τα μοντέλα πρόγνωσης καιρού και στην εικόνα απεικονίζονται οι πιθανές θερμοκρασίες για μια περιοχή με χρωματικές αποχρώσεις, που δείχνουν από συνηθισμένη για την εποχή θερμοκρασία (μπλε χρώμα) έως πολύ υψηλή (κόκκινο χρώμα). Τέτοιου είδους μοντέλα, τα οποία χρησιμοποιούνται σε πολλές επιστημονικές αλλά και καθημερινές δραστηριότητες, με σκοπό την πρόβλεψη, ονομάζονται **πιθανοθεωρητικά μοντέλα**.



Γενικά, μέσω ενός μοντέλου προσπαθούμε να προσεγγίσουμε την πραγματικότητα, ώστε να εξαχθούν συμπεράσματα.

Εφαρμογή 2

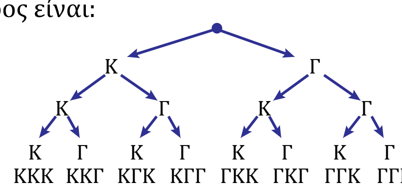
Ρίχνουμε ένα νόμισμα 3 φορές.

α. Αν μας ενδιαφέρει η εμφάνιση της ένδειξης *κεφαλή ή γράμματα*, τότε να καταγράψετε τον δειγματικό χώρο του πειράματος τύχης. Πόσα είναι τα στοιχεία του;

β. Αν μας ενδιαφέρει πόσες φορές εμφανίσθηκε η ένδειξη *κεφαλή*, τότε να καταγράψετε τον δειγματικό χώρο του πειράματος τύχης.

Απάντηση

α. Με τη βοήθεια του δενδροδιαγράμματος βρίσκουμε ότι ο δειγματικός χώρος είναι:
Ω={ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ, ΓΚΚ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ}.
Για το πλήθος των στοιχείων του Ω έχουμε $N(\Omega) = 8$.



β. Ως δειγματικό χώρο του πειράματος τύχης, για το πόσες φορές εμφανίστηκε η ένδειξη κεφαλή σε 3 ρίψεις ενός νομίσματος, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον $\Omega_1 = \{0, 1, 2, 3\}$.
Παρατηρήστε όμως ότι και ο δειγματικός χώρος Ω θα μπορούσε επίσης να χρησιμοποιηθεί (γιατί;).

Σημείωση

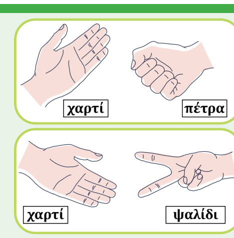
Ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης δεν καταγράφεται με μοναδικό τρόπο και επιλέγεται ανάλογα με τα ερωτήματα που τίθενται κάθε φορά. Επισημαίνεται ότι σε ένα πείραμα τύχης μπορούν να αντιστοιχηθούν περισσότεροι από ένας δειγματικοί χώροι. Σε αυτό το πλαίσιο θα δούμε παρακάτω ένα σχετικό πρόβλημα που αντιμετώπισε ο μεγάλος μαθηματικός D' Alembert.

Στην ψηφιακή εφαρμογή μπορείτε να εξασκηθείτε στους δειγματικούς χώρους.

1.2 Ενδεχόμενα και σύνολα

Διερεύνηση 2

Στο παιχνίδι Πέτρα – Ψαλίδι – Χαρτί, δύο παίκτες δηλώνουν συμβολικά με την παλάμη τους, πέτρα, ψαλίδι, χαρτί, όπως στις εικόνες. Η πέτρα κερδίζει το ψαλίδι, το ψαλίδι κερδίζει το χαρτί και το χαρτί κερδίζει την πέτρα. Ο Γιώργος και η Ιωάννα παίζουν το παιχνίδι Πέτρα – Ψαλίδι – Χαρτί.
Να καταγράψετε τον δειγματικό χώρο και το ενδεχόμενο στο οποίο κερδίζει ο Γιώργος.



Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες

Ενδεχόμενο ονομάζουμε κάθε υποσύνολο του δειγματικού χώρου. Για παράδειγμα, στο πείραμα τύχης της ρίψης ενός ζαριού, ο δειγματικός χώρος είναι Ω={1,2,3,4,5,6} και κάποια ενδεχόμενά του είναι τα Α={1,2,3}, Β={1}, Γ={3,4,5,6}.

Λέμε ότι «**πραγματοποιήθηκε το Α**» ή «**συνέβη το Α**» ή «**εμφανίστηκε το Α**», όταν το αποτέλεσμα μίας εκτέλεσης του πειράματος τύχης ανήκει στο Α. Για παράδειγμα, όταν το αποτέλεσμα της ρίψης του ζαριού είναι 1, τότε πραγματοποιούνται τα ενδεχόμενα Α, Β και δεν πραγματοποιείται το ενδεχόμενο Γ.

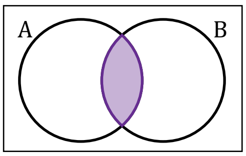
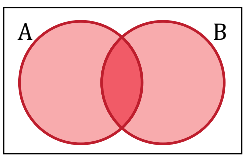
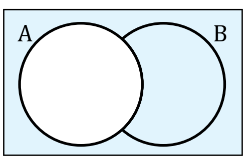
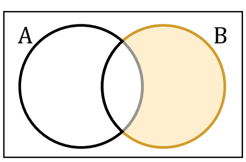
Βέβαιο ενδεχόμενο λέγεται το ενδεχόμενο Ω, διότι πραγματοποιείται σε κάθε εκτέλεση ενός πειράματος.

Αδύνατο ενδεχόμενο λέγεται το ενδεχόμενο το οποίο δεν περιέχει κανένα από τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος τύχης, οπότε δεν πραγματοποιείται ποτέ και συμβολίζεται με $\emptyset$ ή { }.

Απλό ενδεχόμενο λέγεται ένα ενδεχόμενο όταν έχει ένα μόνο στοιχείο. Για παράδειγμα, το Β={1} στη ρίψη ενός ζαριού.

Σύνθετο ενδεχόμενο λέγεται ένα ενδεχόμενο A το οποίο αποτελείται από περισσότερα του ενός απλά ενδεχόμενα. Για παράδειγμα, το A={1,2,3} στη ρίψη ενός ζαριού.

Αφού τα ενδεχόμενα είναι σύνολα, ισχύουν γι' αυτά οι γνωστές πράξεις των συνόλων και μπορούμε να τα παριστάνουμε με διαγράμματα του Venn. Συνοπτικά, αναφέρουμε:

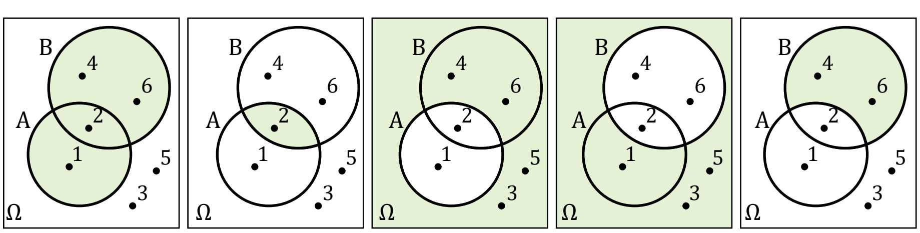
	**Φυσική γλώσσα: A τομή B:** τα στοιχεία του ενδεχόμενου A που ανήκουν και στο ενδεχόμενο B. **Πραγματοποιούνται** τα ενδεχόμενα A και B ταυτόχρονα. **Γλώσσα συνόλων:** $A \cap B = \{x \in A \text{ και } x \in B\}$.
	**Φυσική γλώσσα: A ένωση B:** τα στοιχεία του δειγματικού χώρου Ω που ανήκουν είτε στο ενδεχόμενο A ή στο ενδεχόμενο B ή και στα δύο. **Πραγματοποιείται** το ενδεχόμενο A ή πραγματοποιείται το ενδεχόμενο B ή πραγματοποιούνται και τα δύο ενδεχόμενα. **Γλώσσα συνόλων:** $A \cup B = \{x \in A \text{ ή } x \in B\}$.
	**Φυσική γλώσσα: Συμπληρωματικό ενδεχόμενο του A:** τα στοιχεία του δειγματικού χώρου Ω που δεν ανήκουν στο ενδεχόμενο A. **Δεν** πραγματοποιείται το ενδεχόμενο A. **Γλώσσα συνόλων:** $A' = \{x \in \Omega \text{ και } x \notin A\}$.
	**Φυσική γλώσσα: Διαφορά του A από το B:** τα στοιχεία του ενδεχόμενου B που δεν ανήκουν στο ενδεχόμενο A. **Πραγματοποιείται** το B και δεν πραγματοποιείται το A. **Γλώσσα συνόλων:** $B - A = \{x \in B \text{ και } x \notin A\}$. ***Σημείωση:*** *Όπως φαίνεται και στο διάγραμμα Venn, ισχύει ότι:* $B - A = B \cap A'$.

Παράδειγμα

Ο δειγματικός χώρος Ω της ρίψης ενός ζαριού είναι $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Αν A = {το αποτέλεσμα είναι αριθμός μικρότερος του 3} = {1,2} και
B = {το αποτέλεσμα είναι άρτιος αριθμός} = {2,4,6} , τότε:

- Η **ένωση** των δύο συνόλων είναι το $A \cup B = \{1, 2, 4, 6\}$.
- Η **τομή** των δύο συνόλων είναι το $A \cap B = \{2\}$.
- Το **συμπλήρωμα του A** είναι $A' = \{3,4,5,6\}$ και του **B**, $B' = \{1,3,5\}$.
- Η **διαφορά** του A από το B είναι $B - A = B \cap A' = \{4, 6\}$.

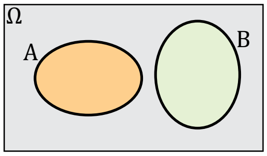


A∪B A∩B A′ B′ B – A

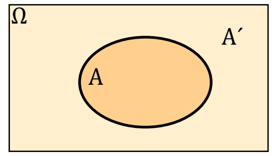
Για να εξασκηθείτε στις πράξεις ενδεχομένων, να ανοίξετε την αντίστοιχη ψηφιακή δραστηριότητα.

Πληθάριθμος ενός συνόλου A ονομάζεται το πλήθος των στοιχείων του και συμβολίζεται με N(A).
Για τα παραπάνω σύνολα είναι:
$N(\Omega) = 6$, $N(A) = 2$, $N(B) = 3$, $N(A \cap B) = 1$, $N(A \cup B) = 4$, $N(B') = 3$, $N(B - A) = 2$, $N(A') = 4$.

Ασυμβίβαστα ή **ξένα μεταξύ τους** ονομάζονται δύο ενδεχόμενα A και B όταν δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα, δηλαδή, όταν δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο και επομένως ισχύει ότι: $A \cap B = \emptyset$. Για παράδειγμα, τα ενδεχόμενα A και A΄ είναι ασυμβίβαστα, αφού $A \cap A΄ = \emptyset$.



Τα σύνολα A, B δεν έχουν κοινά στοιχεία.
Ισχύει ότι $A \cap B = \emptyset$.



Τα σύνολα A, A΄ δεν έχουν κοινά στοιχεία.
Ισχύει ότι $A \cap A΄ = \emptyset$.
Επιπλέον $A \cup A΄ = \Omega$.

Να ταιριάξετε κάθε εικόνα διαγράμματος Venn με την αντίστοιχη πράξη ενδεχομένων.

Βασικές ιδιότητες στις πράξεις συνόλων

Με τη βοήθεια διαγραμμάτων Venn μπορούμε να επαληθεύσουμε τις ακόλουθες χρήσιμες ιδιότητες:

$A \cup A = A$	$A \cap A = A$	Πράξεις με το A
$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$	Αντιμεταθετική ιδιότητα
$A \cup (B \cup \Gamma) = (A \cup B) \cup \Gamma$	$A \cap (B \cap \Gamma) = (A \cap B) \cap \Gamma$	Προσεταιριστική ιδιότητα
$A \cup \emptyset = A$	$A \cap \emptyset = \emptyset$	Πράξεις με το κενό σύνολο
$A \cup \Omega = \Omega$	$A \cap \Omega = A$	Πράξεις με τον δ.χ. Ω
$A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$	$A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$	Επιμεριστική ιδιότητα
$(A \cup B)΄ = A΄ \cap B΄$	$(A \cap B)΄ = A΄ \cup B΄$	Τύποι De Morgan

Από τις λέξεις στα σύνολα

Διερεύνηση 3

Σε ένα σχολείο όλοι/όλες οι μαθητές/τριες ασχολούνται με αθλήματα. Επιλέγουμε έναν/μια μαθητή/τρια στην τύχη και ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

A: “ασχολείται με το ποδόσφαιρο”
B: “ασχολείται με την καλαθοσφαίριση”
Γ: “ασχολείται με τον στίβο”
Δ: “ασχολείται με τον χορό”
Ε: “ασχολείται με κάποιο άλλο άθλημα”

Με βάση τα παραπάνω ενδεχόμενα, A, B, Γ, Δ, Ε, να γράψετε τα επόμενα αποτελέσματα του πειράματος τύχης με τη βοήθεια των συνόλων και των πράξεών τους.

α. Ο/η μαθητής/τρια ασχολείται με το ποδόσφαιρο και την καλαθοσφαίριση.
β. Ο/η μαθητής/τρια ασχολείται με το ποδόσφαιρο ή τον στίβο.
γ. Ο/η μαθητής/τρια ασχολείται με το ποδόσφαιρο ή τον στίβο ή άλλο άθλημα.
δ. Ο/η μαθητής/τρια δεν ασχολείται με τον χορό.
ε. Ο/η μαθητής/τρια ασχολείται με κάποιο άλλο άθλημα, αλλά όχι με το ποδόσφαιρο.
στ. Ο/η μαθητής/τρια δεν ασχολείται ούτε με το ποδόσφαιρο ούτε με την καλαθοσφαίριση.
ζ. Ο/η μαθητής/τρια δεν ασχολείται με το ποδόσφαιρο, τον στίβο και τον χορό.

Σε όλα τα παραπάνω παραδείγματα της διερεύνησης διατυπώνεται ένα πρόβλημα με την καθημερινή γλώσσα και ζητείται η «μετάφρασή» του στη γλώσσα των συνόλων και των ενδεχομένων. Η διαδικασία αυτή μας βοηθάει να μοντελοποιήσουμε ένα πρόβλημα χρησιμοποιώντας τους κανόνες των συνόλων.

Εφαρμογή 3

Σε ένα λύκειο επιλέγεται με τυχαίο τρόπο ένας/μία μαθητής/τρια για μια επιτροπή. Το άτομο που επιλέγεται μπορεί να είναι αγόρι ή κορίτσι και να φοιτά στην Α΄, Β΄ ή στη Γ΄ τάξη Λυκείου. Να ορίσετε κατάλληλα ενδεχόμενα και να καταγράψετε τις παρακάτω περιπτώσεις τυχαίων επιλογών για τη συγκεκριμένη επιτροπή:

α. Το άτομο που επιλέχθηκε δεν είναι αγόρι και φοιτά στη Β΄ Λυκείου.
β. Το άτομο που επιλέχθηκε είναι κορίτσι και δεν φοιτά στη Β΄ Λυκείου.
γ. Το άτομο που επιλέχθηκε είναι αγόρι ή φοιτά στη Γ΄ Λυκείου.
δ. Το άτομο που επιλέχθηκε είναι αγόρι ή κορίτσι και φοιτά στην Α΄ Λυκείου.

Απάντηση

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα: Α = “το άτομο που επιλέγεται είναι αγόρι”, Β = “το άτομο που επιλέγεται είναι κορίτσι”, Γ = “το άτομο που επιλέγεται φοιτά στην Α’ Λυκείου”, Δ = “το άτομο που επιλέγεται φοιτά στη Β΄ Λυκείου”, Ε = “το άτομο που επιλέγεται φοιτά στη Γ΄ Λυκείου”.

α. Αφού το άτομο που επιλέγεται δεν είναι αγόρι, αυτό σημαίνει ότι δεν πραγματοποιείται το ενδεχόμενο Α, οπότε πραγματοποιείται το συμπληρωματικό του, Α΄. Επιπλέον, εφόσον ανήκει στη δευτέρα τάξη, θα πραγματοποιείται και το ενδεχόμενο Δ. Επομένως, θα πραγματοποιείται το ενδεχόμενο: $A'\cap\Delta$.

β. Αφού το άτομο που επιλέχθηκε είναι κορίτσι, τότε πραγματοποιείται το ενδεχόμενο Β. Δεν φοιτά στη Β’ Λυκείου, οπότε δεν πραγματοποιείται το ενδεχόμενο Δ. Επομένως, πραγματοποιείται το συμπληρωματικό του, Δ΄. Άρα, θα πραγματοποιείται το ενδεχόμενο: $B\cap\Delta'$.

γ. Αν το άτομο που επιλέχθηκε είναι αγόρι, θα πραγματοποιείται το ενδεχόμενο Α. Αν το άτομο που επιλέγεται φοιτά στην Γ΄ τάξη, θα πραγματοποιείται το ενδεχόμενο Ε. Συνεπώς. πραγματοποιείται το $A\cup E$.

δ. Αφού το άτομο που επιλέχθηκε είναι αγόρι ή κορίτσι, θα πραγματοποιείται το $A\cup B$. Επιπλέον, αφού φοιτά στη Γ΄ τάξη, θα πραγματοποιείται ταυτόχρονα και το Γ. Συνεπώς, πραγματοποιείται το $(A\cup B)\cap\Gamma$, που εδώ ταυτίζεται με το Γ.

Από τα σύνολα στις λέξεις

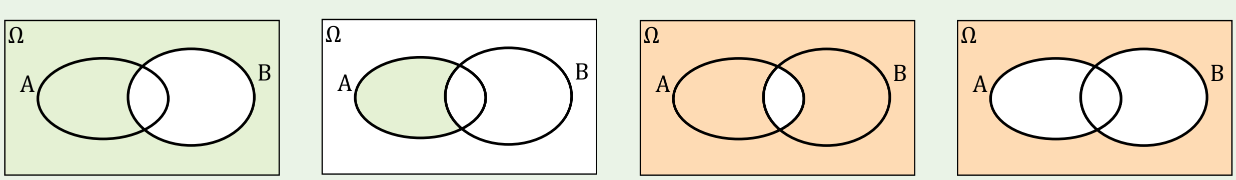
Αντιστοιχίστε τα διαγράμματα Venn με τις πράξεις ενδεχομένων.

Διερεύνηση 4

Σε ένα πείραμα τύχης ένας/μια μαθητής/τρια επιλέγει τυχαία ένα βιβλίο από ένα ράφι. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:
Α: “το βιβλίο που επιλέχθηκε ανήκει στα αγαπημένα του/της”.
Β: “το βιβλίο που επιλέχθηκε είναι βιβλίο Μαθηματικών”.

Να διατυπώσετε σε φυσική γλώσσα:

α. Τα ενδεχόμενα $A\cap B$, $A\cap B'$, $(A\cup B)'$, $A - B$, $(A\cap B)'$.
β. Τα ενδεχόμενα που είναι γραμμοσκιασμένα στα διαγράμματα Venn που ακολουθούν:



Η μοντελοποίηση του προβλήματος και η επίλυσή του με τους κανόνες των συνόλων οδηγεί σε λύση η οποία εκφράζεται με τη γλώσσα των συνόλων και αριθμούς. Η λύση αυτή πρέπει να μεταφραστεί στη φυσική γλώσσα για να γίνει περισσότερο κατανοητή. Στην επόμενη εφαρμογή φαίνεται ακριβώς αυτή η διαδικασία.

Εφαρμογή 4

Σε μια επιχείρηση εμπορίας αυτοκινήτων, ένας/μια αγοραστής/τρια μπορεί να επιλέξει αυτοκίνητο μεταξύ των διατιθέμενων, έχοντας τις εξής επιλογές:
Α: “αυτοκίνητο με ηλεκτρικό κινητήρα”,
Β: “αυτοκίνητο με βενζίνη”,
Γ: “γαλλικό αυτοκίνητο”,
Δ: “ιαπωνικό αυτοκίνητο”.

Να εκφράσετε τα επόμενα ενδεχόμενα στη φυσική γλώσσα.

α. Τι σημαίνουν τα ενδεχόμενα $A \cup B$, $A \cap \Gamma$, $\Delta - A$.

β. Αν τα ενδεχόμενα Γ και Δ είναι ασυμβίβαστα, τι σημαίνει αυτό για τα αυτοκίνητα που διαθέτει η επιχείρηση;

γ. Τι σημαίνει το ενδεχόμενο $(A - B) \cup (B - A)$;

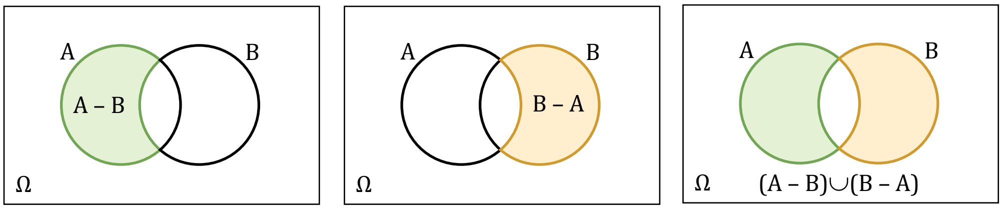
Απάντηση

α. Αφού Α είναι το ενδεχόμενο επιλογής ενός αυτοκινήτου με ηλεκτρικό κινητήρα και Β ενός αυτοκινήτου με βενζίνη, τότε:

- Το ενδεχόμενο της ένωσης $A \cup B$ των Α και Β εκφράζει ένα αυτοκίνητο που θα είναι ηλεκτρικό, με βενζίνη ή θα λειτουργεί και με τους δύο τύπους παροχής ενέργειας.
- Το ενδεχόμενο της τομής $A \cap \Gamma$ των Α και Γ εκφράζει ένα ηλεκτρικό αυτοκίνητο από τη Γαλλία.
- Το ενδεχόμενο της διαφοράς $\Delta - A$ εκφράζει ένα ιαπωνικό αυτοκίνητο που δεν είναι ηλεκτρικό.

β. Αν τα ενδεχόμενα Γ και Δ είναι ασυμβίβαστα, αυτό σημαίνει ότι τα αυτοκίνητα που μπορούν να επιλεχθούν από τη συγκεκριμένη επιχείρηση δεν μπορούν να είναι ταυτόχρονα γαλλικής και ιαπωνικής προέλευσης, δηλαδή δεν μπορεί να προέρχονται από συνεργασία κατασκευαστών των δύο χωρών.

γ. Το ενδεχόμενο $A - B$ αποτελείται από εκείνα τα αυτοκίνητα, τα οποία έχουν ηλεκτροκινητήρα και δεν καίνε βενζίνη, δηλαδή είναι αυστηρά ηλεκτροκίνητα, και απεικονίζεται στο παρακάτω διάγραμμα Venn της πρώτης εικόνας.



Το ενδεχόμενο $B - A$ αποτελείται από εκείνα τα αυτοκίνητα τα οποία διαθέτουν κινητήρα βενζίνης και δεν διαθέτουν κινητήρα ηλεκτρικό, δηλαδή αυστηρά είναι αυτοκίνητα με βενζίνη, και απεικονίζεται στο παραπάνω διάγραμμα Venn της δεύτερης εικόνας.

Επειδή τα σύνολα $(A - B)$ και $(B - A)$ δεν έχουν κοινά στοιχεία, το ενδεχόμενο $(A - B) \cup (B - A)$ σημαίνει ότι το αυτοκίνητο έχει μόνο ηλεκτροκινητήρα ή μόνο κινητήρα εσωτερικής καύσης, όπως φαίνεται στην τρίτη παραπάνω εικόνα.

Μπορείτε να εξασκηθείτε στην αντιστοίχιση πράξεων ενδεχομένων και διαγραμμάτων Venn με την ψηφιακή εφαρμογή.

Ο παρακάτω πίνακας περιέχει συνοπτικά τη διαδικασία μετάφρασης από τη φυσική γλώσσα στη γλώσσα των συνόλων και αντίστροφα.

Στα παρακάτω παραδείγματα θεωρούμε: Ω= {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}, Α= {2, 3, 4, 5} και Β= {0, 1, 2, 3}.		
Γλώσσα συνόλων	**Φυσική γλώσσα**	**Παραδείγματα**
$\omega \in A$	Πραγματοποιείται το ενδεχόμενο Α.	Αν $\omega \in \{2, 3, 4, 5\}$, τότε το ενδεχόμενο Α πραγματοποιείται.
$\omega \in A'$	Πραγματοποιείται το συμπληρωματικό Α΄ του Α.	Αν $\omega \notin \{2, 3, 4, 5\}$, τότε το ενδεχόμενο Α δεν πραγματοποιείται, άρα πραγματοποιείται το Α΄.
$\omega \in A \cup B$	Πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα Α ή Β.	Αν $\omega \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, τότε πραγματοποιείται το ενδεχόμενο $A \cup B$.
$\omega \in A \cap B$	Πραγματοποιούνται και τα δύο ενδεχόμενα Α και Β.	Αν $\omega \in \{2, 3\}$, τότε πραγματοποιείται το $A \cap B$.
$\omega \in \Gamma \subseteq B$	Αν πραγματοποιείται το Γ, τότε πραγματοποιείται το Β.	Αν $\omega \in \Gamma = \{0, 1\}$, τότε $\omega \in B$, οπότε πραγματοποιείται και το Β.
Αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι ιδιότητες στην πρώτη στήλη, για τις οποίες παραθέτουμε αντιστοιχίσεις και σε φυσική γλώσσα που διευκολύνουν την επίλυση προβλημάτων.		
$\omega \in A - B = A \cap B'$	Πραγματοποιείται **μόνο το Α και όχι το Β.**	Αν $\omega \in \{4, 5\}$, τότε πραγματοποιείται το $A - B$.
$\omega \in (A - B) \cup (B - A)$	Πραγματοποιείται μόνο το Α ή μόνο το Β. Δηλαδή, πραγματοποιείται **ακριβώς ένα από τα Α και Β.**	Αν $\omega \in \{4, 5\} \cup \{0, 1\} = \{0, 1, 4, 5\}$, τότε πραγματοποιείται μόνο το Α ή μόνο το Β.
$\omega \in (A \cup B)' = A' \cap B'$	Δεν πραγματοποιείται **κανένα** από τα Α, Β. Δηλαδή, πραγματοποιούνται τα Α΄ και Β΄.	$A' = \{0, 1, 6, 7, 8\}$, $B' = \{4, 5, 6, 7, 8\}$. Αν $\omega \in \{6, 7, 8\}$, τότε πραγματοποιείται το $(A \cup B)' = A' \cap B' = \{6, 7, 8\}$.
$\omega \in (A \cap B)' = (A' \cup B')$	Δεν πραγματοποιείται το Α ή δεν πραγματοποιείται το Β. Δηλαδή, πραγματοποιείται **το πολύ ένα από τα Α, Β.**	$A' = \{0, 1, 6, 7, 8\}$, $B' = \{4, 5, 6, 7, 8\}$, $A' \cup B' = \{0, 1, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $(A \cap B)' = \{2, 3\}' = \{0, 1, 4, 5, 6, 7, 8\} = A' \cup B'$.

Πληροφορίες για τον θεμελιωτή της θεωρίας των συνόλων G. Cantor, μπορείτε να βρείτε στο συμπληρωματικό υλικό.

Ασκήσεις

1. Να αιτιολογήσετε ποια από τα επόμενα είναι πειράματα τύχης, ποια όχι και γιατί:

α. Επιλέγω τυχαία μια μπάλα από ένα κουτί.
β. Επιλέγω τυχαία ένα τραπουλόχαρτο.
γ. Να πληρώσω εισιτήριο για να μπω σε ένα θέατρο.
δ. Να είναι πράσινο το πρώτο φανάρι που θα συναντήσω.
ε. Να βρω στις 12 μ.μ., μια καλοκαιρινή ημέρα σε μια πολυσύχναστη παραλία, ομπρέλα ελεύθερη.
στ. Να κολλήσω κορονοϊό, όταν δεν παίρνω μέτρα προφύλαξης.
ζ. Να βρω πάρκινγκ μπροστά στο σπίτι μου.
η. Να πληρώσω τον λογαριασμό τηλεφώνου.
θ. Να επιλέξω με κλειστά μάτια ένα βιβλίο Μαθηματικών από τη βιβλιοθήκη του σχολείου.

2. Χρησιμοποιώντας τις καταστάσεις και τα αντικείμενα που δίνονται σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να περιγράψετε τις συνθήκες και τον τρόπο εκτέλεσης ενός πειράματος τύχης.

α. Έχετε διαθέσιμες 4 κόκκινες μπάλες, 3 μπλε και 2 μαύρες.

β. Οι μήνες γενεθλίων των μαθητών του σχολείου σας.

γ. Σε μία κάλπη είναι τοποθετημένα 10 καρτελάκια: 3 χρώματος κόκκινου, 3 χρώματος πράσινου, 2 χρώματος λευκού και 2 χρώματος πορτοκαλί.

δ. Έχω τρία κλειδιά στην τσέπη μου για να ανοίξω την πόρτα του σπιτιού μου.

ε. Μια κληρωτίδα και μπάλες αριθμημένες από 1 έως 100.

3. Συμβαίνει μόνο ένα από δύο ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω.

α. Να γίνει διάγραμμα Venn για το παραπάνω ενδεχόμενο.

β. Να διατυπωθεί με πράξεις συνόλων το ενδεχόμενο αυτό.

4. Σε ένα πείραμα τύχης, επιλέγεται αγόρι ή κορίτσι, το οποίο έχει ή όχι ξανθά μαλλιά.

Δίνονται τα ενδεχόμενα:

Α: “αγόρι”

Β: “έχει ξανθά μαλλιά”

Γ: “Δεν επιλέχθηκε αγόρι, ούτε άτομο με ξανθά μαλλιά”

Δ: “Δεν επιλέχθηκε αγόρι ή άτομο με ξανθά μαλλιά”

α. Να εκφράσετε τα ενδεχόμενα Γ, Δ με τη βοήθεια των Α, Β.

β. Να απεικονίσετε τα δύο ενδεχόμενα με διαγράμματα Venn.

γ. Τι συμπεραίνετε για τα δύο ενδεχόμενα;

5. Ρίχνουμε ένα νόμισμα τρεις διαδοχικες φορές, καταγράφουμε την ένδειξη «κεφαλή» ή «γράμματα» και θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

Κ= “κεφαλή”, Γ=“γράμματα”.

α. Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος.

β. Να παρασταθούν με αναγραφή των στοιχείων τους τα ενδεχόμενα:

E_1: “Ο αριθμός των Κ δεν υπερβαίνει τον αριθμό των Γ”,

E_2: “Ο αριθμός των Γ είναι 2 σε δύο συνεχόμενες ρίψεις”,

E_3: “Ο αριθμός των Κ είναι τουλάχιστον 2”,

E_4: “Ο αριθμός των Γ είναι το πολύ 2”,

E_5: “Στην τελευταία ρίψη φέρνουμε Γ”.

γ. Να βρεθούν τα ενδεχόμενα E_3', $E_1 \cap E_5$, $E_4 - E_5$.

6. Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές και καταγράφουμε το άθροισμα των ενδείξεων.

α. Να περιγράψετε τον δειγματικό χώρο του πειράματος τύχης.

β. Να καταγράψετε το ενδεχόμενο Α: “το άθροισμα των ενδείξεων του πειράματος τύχης να είναι άρτιος αριθμός”.

γ. Να καταγράψετε το ενδεχόμενο Β: “το αποτέλεσμα του πειράματος τύχης να είναι αριθμός μεγαλύτερος του 7”.

δ. Να προσδιορίσετε τα ενδεχόμενα $A \cap B$ και $A - B$.

7. Αν Α, Β είναι δύο ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης, τότε:

α. Να περιγράψετε, λεκτικά, τα ενδεχόμενα: $A \cap B'$ και $A' - B'$.

β. Να επαληθεύσετε χρησιμοποιώντας διαγράμματα Venn, ότι $A \cap B' = A - B$ και $A' - B' = B - A$.

8. Ρίχνουμε ένα ζάρι και τραβάμε, τυχαία, ένα φύλλο από μία τράπουλα. Στη συνέχεια καταγράφουμε πρώτα την άνω έδρα του ζαριού και έπειτα το φύλλο που επιλέχθηκε.

α. Πόσα απλά ενδεχόμενα έχει ο δειγματικός χώρος;

β. Το ενδεχόμενο: “ο αριθμός της πάνω έδρας του ζαριού είναι μεγαλύτερος από το 3 και το φύλλο είναι φιγούρα”, πόσα απλά ενδεχόμενα έχει;

γ. Να γράψετε με αναγραφή τα ενδεχόμενα:

Α: “Πάνω έδρα περιττός και φύλλο καρδιά με άρτιο αριθμό”

Β: ”Πάνω έδρα άρτιος και φύλλο Ντάμα σπαθί”

Γ: “Πάνω έδρα μεγαλύτερος του 4 και φύλλο Ρήγας σπαθί”[1]

$B \cup \Gamma$, $B \cap \Gamma$.

9. Ένας αντιπρόσωπος πρόκειται να επισκεφτεί διαδοχικά τρεις πόλεις Α, Β, Γ προκειμένου να πάρει παραγγελίες για την εταιρεία του.

Να γράψετε με αναγραφή των στοιχείων:

α. Τον δειγματικό χώρο.

β. Το ενδεχόμενο Κ: “ο αντιπρόσωπος επισκέπτεται στο τέλος την πόλη Γ”.

γ. Το ενδεχόμενο Λ: “ο αντιπρόσωπος ξεκινάει από την πόλη Α και τελειώνει με την πόλη Β”.

δ. Το ενδεχόμενο Μ: “ο αντιπρόσωπος επισκέπτεται διαδοχικά τις πόλεις Β και Γ”.

10. Σε ένα σχολείο όλοι/όλες οι μαθητές/τριες κάνουν Αγγλικά ή Γαλλικά ή ασχολούνται με τη μουσική ή ασχολούνται με το θέατρο. Επιλέγουμε έναν/μια μαθητή/τρια στην τύχη και ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

- Α: “κάνει Αγγλικά”.
- Β: “κάνει Γαλλικά”.
- Γ: “ασχολείται με τη μουσική”.
- Δ: “ασχολείται με το θέατρο”.

Με βάση τα παραπάνω ενδεχόμενα Α, Β, Γ, Δ, να γράψετε τα επόμενα αποτελέσματα του πειρά-

[1] Σε μια τράπουλα υπάρχουν 52 κάρτες χωρισμένες σε 4 ομάδες: τις κούπες ♥, τα σπαθιά ♣, τα καρό ♦ και τα μπαστούνια ♠.
Σε κάθε ομάδα υπάρχει ένας άσος (Α), οι αριθμοί από το 2 έως και το 10, ο βαλές (J), η ντάμα (Q) και ο ρήγας (K).

ματος τύχης με τη βοήθεια των συνόλων και των πράξεών τους.

α. Το άτομο που επιλέγεται κάνει Αγγλικά και ασχολείται με τη μουσική.
β. Το άτομο που επιλέγεται κάνει Γαλλικά ή ασχολείται με τη μουσική.
γ. Το άτομο που επιλέγεται ασχολείται με τη μουσική ή το θέατρο ή κάνει Αγγλικά.
δ. Το άτομο που επιλέγεται δεν ασχολείται με το θέατρο.
ε. Το άτομο που επιλέγεται ασχολείται με τη μουσική, αλλά δεν κάνει Γαλλικά.
στ. Το άτομο που επιλέγεται δεν ασχολείται ούτε με το θέατρο, ούτε με τη μουσική.
ζ. Το άτομο που επιλέγεται κάνει Αγγλικά, αλλά δεν κάνει Γαλλικά.

11. Η Μαρία κάνει κέικ σε ταψί ή σε φόρμα ή σε πυρέξ, χρησιμοποιώντας καρύδια ή αμύγδαλα. Να ορίσετε κατάλληλα ενδεχόμενα και να καταγράψετε τις παρακάτω περιπτώσεις τυχαίων επιλογών για το κέικ:

α. Να γίνει σε ταψί χωρίς καρύδια.
β. Να μην γίνει σε ταψί και να μην έχει αμύγδαλα.
γ. Να έχει καρύδια ή να γίνει σε πυρέξ.
δ. Να έχει αμύγδαλα ή καρύδια και να γίνει σε φόρμα.

12. Ο Μιχάλης, πηγαίνοντας για κούρεμα, βλέπει ότι υπάρχουν οι παρακάτω επιλογές:

Α: “Κούρεμα κοντό”
Β: “Κούρεμα μέτριο”
Γ: “Με λούσιμο”
Δ: “Με ζελέ”.

Αν υπάρχουν προσφορές για τις παρακάτω επιλογές, βοηθήστε τον να τις μεταφράσει, για να αποφασίσει ποια τον ενδιαφέρει:
$A \cup B$, $A \cap \Gamma$, $\Delta - A$, $(A - B) \cup (B - A)$, $A \cap B'$, $A' \cap \Gamma'$.

2 • Μη ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα

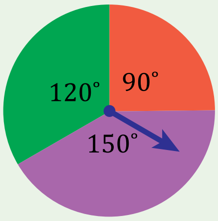
Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

- Να περιγράφουν πειράματα τύχης και με μη ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα.
- Να διατυπώνουν υποθέσεις για τους κανόνες που αναμένεται να ισχύουν στον λογισμό των πιθανοτήτων.

Πειράματα τύχης με μη ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα

Διερεύνηση 1

Περιστρέφουμε μία φορά τον τροχό της τύχης που παρουσιάζεται στη διπλανή εικόνα. Αν κατά την περιστροφή ο δείκτης βρεθεί ακριβώς στο διαχωριστικό μεταξύ των δύο χρωμάτων, ξαναγυρνάμε τον τροχό.



α. Να γράψετε τον δειγματικό χώρο.
β. Να διατυπώσετε μία εικασία για το ποιο χρώμα θα εμφανιστεί τις περισσότερες και ποιο τις λιγότερες φορές σε ένα πλήθος περιστροφών.
γ. Να γυρίσετε τον τροχό 50, 100, 1000 φορές. Υπολογίστε την πιθανότητα εμφάνισης κάθε χρώματος. Τι παρατηρείτε;
δ. Να μοντελοποιήσετε το πείραμα, αποδίδοντας πιθανότητες σε κάθε έκβαση.

Για τη διερεύνηση, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την προσομοίωση που θα βρείτε εδώ.

Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες

Βάφουμε κόκκινες τις έδρες ενός ζαριού με ένδειξη 1, 2, 3, πράσινες τις έδρες με ένδειξη 4, 5 και μπλε την έδρα με ένδειξη 6. Αν ρίξουμε μία φορά το ζάρι, τότε ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος είναι: Ω={**1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6**}. Ωστόσο, αν μας ενδιαφέρει μόνο το χρώμα της έδρας, ως δειγματικός χώρος μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ο $Ω_1$={Κ, Π, Μ}, όπου **Κ: "κόκκινη έδρα"**, **Π: "πράσινη έδρα"** και **Μ: "μπλε έδρα"**.

Αναρωτιόμαστε ποια είναι η πιθανότητα να προκύψει σε μια ρίψη ζαριού κόκκινη, πράσινη ή μπλε έδρα.
Χρησιμοποιώντας τον δειγματικό χώρο Ω, έχουμε φανερά ότι:

$P(Κ)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $P(Π)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ και $P(Μ)=\frac{1}{6}$.

Χρησιμοποιώντας όμως τον δειγματικό χώρο $Ω_1$, θα μπορούσε κάποιος να ισχυριστεί εσφαλμένα ότι:

$P(Κ)=P(Π)=P(Μ)=\frac{1}{3}$.

Γιατί όμως αποτυγχάνουμε να προσδιορίσουμε σωστά τις πιθανότητες χρησιμοποιώντας τον δειγματικό χώρο $Ω_1$;

Η απάντηση στο ερώτημα αυτό είναι ότι τα ενδεχόμενα **Κ: "κόκκινη έδρα"**, **Π: "πράσινη έδρα"** και **Μ: "μπλε έδρα"** δεν έχουν την ίδια πιθανότητα να πραγματοποιηθούν.

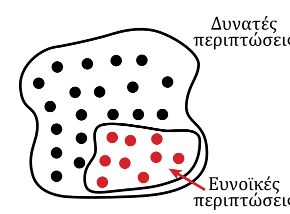
Στην περίπτωση ρίψης ενός αμερόληπτου ζαριού ή στριψίματος ενός «δίκαιου» νομίσματος, τα απλά ενδεχόμενα του πειράματος τύχης σε ένα μεγάλο πλήθος επαναλήψεων, εμφανίζονται με το ίδιο περίπου πλήθος το καθένα. Δηλαδή, στην περίπτωση του ζαριού, η πιθανότητα εμφάνισης κάθε έδρας είναι $\frac{1}{6}$ και στην περίπτωση του νομίσματος είναι $\frac{1}{2}$.

Σε τέτοιες περιπτώσεις λέμε ότι ο δειγματικός χώρος αποτελείται από **ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα**. Αντίθετα, στην περίπτωση του ζαριού με 3 κόκκινες έδρες, 2 πράσινες και 1 μπλε, οι πιθανότητες εμφάνισης των εδρών δεν είναι ίσες και σε τέτοιες περιπτώσεις λέμε ότι ο δειγματικός χώρος αποτελείται από **μη ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα**.

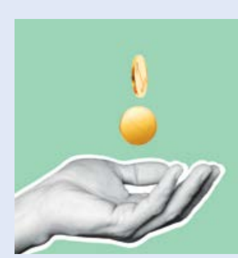
Κλασικός ορισμός πιθανότητας

Όπως έχουμε μάθει στο Γυμνάσιο, για κάθε ενδεχόμενο Α ενός δειγματικού χώρου Ω με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα ισχύει ο ακόλουθος κλασικός ορισμός για την πιθανότητα P(A):

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(Ω)}=\frac{\text{Πλήθος Ευνοϊκών Περιπτώσεων}}{\text{Πλήθος Δυνατών Περιπτώσεων}}.$$



Εφαρμογή 1. (Η πλάνη του D' Alembert)



Ο Γεράσιμος και η Βενετία αναρωτιούνται ποια είναι η πιθανότητα να προκύψει μία ακριβώς φορά κεφαλή, αν στρίψουν ένα νόμισμα 2 φορές.

Η Βενετία φτιάχνει έναν πίνακα διπλής εισόδου για τον δειγματικό χώρο από τον οποίο συμπεραίνει ότι η πιθανότητα να προκύψει μία ακριβώς φορά κεφαλή αν στρίψουμε δύο φορές το νόμισμα είναι 0,5.

Ο Γεράσιμος λέει πως όταν στρίψουμε ένα νόμισμα μπορεί να εμφανισθεί 0 φορές κεφαλή, 1 φορά κεφαλή ή 2 φορές κεφαλή, οπότε ο δειγματικός χώρος είναι Ω = {0, 1, 2}.

Άρα, η πιθανότητα να εμφανισθεί 1 ακριβώς φορά κεφαλή είναι $\frac{1}{3}$.

α. Ποιος έχει δίκιο; Ο Γεράσιμος ή η Βενετία;

β. Να διορθώσετε την απάντηση του μαθητή/της μαθήτριας που κάνει λάθος, ώστε να προκύψει σωστή απάντηση.

Απάντηση

α. Ο πίνακας διπλής εισόδου για το στρίψιμο ενός νομίσματος είναι:

	Κ	Γ
Κ	ΚΚ	ΚΓ
Γ	ΓΚ	ΓΓ

Από αυτόν προκύπτει ότι ο δειγματικός χώρος Ω_1 είναι Ω_1= {ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ} και το ενδεχόμενο Λ: "μία ακριβώς φορά κεφαλή" είναι Λ = {ΚΓ, ΓΚ}.

Ο δειγματικός χώρος Ω_1 αποτελείται από ισοπίθανα ενδεχόμενα και επομένως σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας, παίρνουμε:

$$P(\Lambda) = \frac{\text{Πλήθος στοιχείων του } \Lambda}{\text{Πλήθος στοιχείων του } \Omega} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Άρα, η απάντηση της Βενετίας είναι σωστή.

Ο Γεράσιμος θεωρεί ότι ο δειγματικός χώρος είναι Ω = {0, 1, 2}, οπότε η απάντησή του είναι λάθος, γιατί θεωρεί λανθασμένα ότι τα ενδεχόμενα {0}, {1}, {2} του δειγματικού χώρου είναι ισοπίθανα.

β. Επειδή ο δειγματικός χώρος Ω δεν αποτελείται από ισοπίθανα ενδεχόμενα, για να διορθωθεί το λάθος του Γεράσιμου πρέπει να εκχωρηθούν στα ενδεχόμενα {0}, {1}, {2} του δειγματικού χώρου Ω οι πιθανότητες:

$P(0)=\frac{1}{4} = 0{,}25$, $P(2)=\frac{1}{4} = 0{,}25$ και $P(1)=\frac{1}{2} = 0{,}5$.

Σημείωση

Όπως καταγράφεται ιστορικά, ο διάσημος μαθηματικός D' Alembert (1717 – 1783) για να απαντήσει στο παραπάνω ερώτημα έκανε το ίδιο ακριβώς λάθος με τον Γεράσιμο. Θεώρησε τον δειγματικό χώρο Ω={0,1,2} με ισοπίθανα τα ενδεχόμενα {0}, {1} και {2}.

Για περισσότερες πληροφορίες, ανοίξτε τον σύνδεσμο.

Εφαρμογή 2

Έχουμε ένα ζάρι το οποίο έχει χρωματισμένες κόκκινες τις τρεις έδρες του με ένδειξη 1, 2, 3, πράσινες τις δύο έδρες του με ένδειξη 4, 5 και μπλε την έδρα του με ένδειξη 6. Ρίχνουμε δύο φορές το ζάρι και καταγράφουμε τα αποτελέσματα εμφάνισης των εδρών.

1. Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος, αν μας ενδιαφέρει η εμφάνιση και όχι το χρώμα των αριθμών στις έδρες.

2. Να βρείτε δύο δειγματικούς χώρους, αν μας ενδιαφέρει το χρώμα εμφάνισης των εδρών.

3. Να βρεθεί η πιθανότητα του ενδεχομένου Α: "Κόκκινο χρώμα και στις δύο ρίψεις" με τους δειγματικούς χώρους που προσδιορίσατε στα ερωτήματα (α) και (β). Αν οι τιμές που προκύπτουν δεν συμφωνούν:

  α. Να εξηγήσετε γιατί υπάρχει ασυμφωνία και να εντοπίσετε το λάθος.

  β. Να κάνετε όποια διόρθωση χρειάζεται, ώστε να προκύπτει το ίδιο αποτέλεσμα και με τους δύο δειγματικούς χώρους.

4. Τι συμπεραίνετε;

Απάντηση

1. Με δενδροδιάγραμμα ή πίνακα διπλής εισόδου βρίσκουμε τον δειγματικό χώρο του πειράματος της ρίψης του ζαριού δύο φορές:

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Με τη βοήθεια του πίνακα βρίσκουμε ότι ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι: Ω = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), ..., (3,1), ..., (4,1), ..., (5,1), ..., (6,1), ..., (6,6)}.

2. Αν θεωρήσουμε ότι οι αριθμοί στις έδρες του ζαριού έχουν το χρώμα της έδρας στην οποία βρίσκονται, τότε οι αριθμοί στις έδρες θα είναι: **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6**, οπότε ο προηγούμενος πίνακας διπλής εισόδου διαμορφώνεται όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα και ο δειγματικός χώρος γράφεται:

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Ω = {(**1**,**1**), (**1**,**2**), (**1**,**3**), (**1**,**4**), (**1**,**5**), (**1**,**6**), (**2**,**1**), ..., (**3**,**1**), ..., (**4**,**1**), ..., (**5**,**1**), ..., (**6**,**1**), ..., (**6**,**6**)}.

Από αυτή τη μορφή και τον σχετικό δειγματικό χώρο μπορούμε να ξέρουμε το χρώμα κάθε αποτελέσματος.

Αν θέσουμε **Κ: "κόκκινο"**, **Π: "πράσινο"**, **Μ: "Μπλε"**, τότε ένας άλλος δειγματικός χώρος είναι Ω_1: {ΚΚ, ΚΠ, ΚΜ, ΠΠ, ΠΚ, ΠΜ, ΜΚ, ΜΠ, ΜΜ}.

3. Από τον δειγματικό χώρο Ω ή/και τον αντίστοιχο πίνακα διπλής εισόδου βρίσκουμε ότι η πιθανότητα του ενδεχομένου Α: “Κόκκινο χρώμα και στις δύο ρίψεις” είναι: $P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

Από τον δειγματικό χώρο $Ω_1$, αν θεωρήσουμε ισοπίθανα τα αποτελέσματα, παίρνουμε ότι $P(A) = \frac{1}{9}$.

α. Η τιμή αυτή δεν είναι σωστή και το λάθος οφείλεται στο ότι θεωρούμε ως ισοπίθανα τα ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου $Ω_1$.

β. Το λάθος διορθώνεται αν αποδώσουμε σε κάθε ενδεχόμενο του $Ω_1$ τη σωστή πιθανότητα.
Από τον πίνακα διπλής εισόδου ή/και από τον δειγματικό χώρο του (β) ερωτήματος, διαπιστώνουμε ότι:
$P(ΚΠ) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, $P(ΚΜ) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$, $P(ΠΠ) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$, $P(ΠΚ) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, $P(ΚΚ) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$, $P(ΠΜ) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$,
$P(ΜΜ) = \frac{1}{36}$, $P(ΜΚ) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ και $P(ΜΠ) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

4. Μπορούμε να πάρουμε τα ίδια αποτελέσματα χρησιμοποιώντας κατάλληλα διαφορετικούς δειγματικούς χώρους. Στη συγκεκριμένη περίπτωση:
- με δειγματικό χώρο τον Ω, θεωρώντας τα απλά ενδεχόμενα ισοπίθανα, και
- με δειγματικό χώρο τον $Ω_1$, αποδίδοντας στα απλά ενδεχόμενα τις παραπάνω πιθανότητες.

Πειραματιστείτε σε ένα παρόμοιο πρόβλημα, χρησιμοποιώντας την ψηφιακή δραστηριότητα.

Σημείωση

Σε μη ισοπίθανα ενδεχόμενα, οι πιθανότητες των απλών ενδεχομένων προσδιορίζονται συνήθως πειραματικά.

Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες

Ιδιότητες

Από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας προκύπτουν οι ακόλουθες βασικές ιδιότητες:

1. $P(A) \geq 0$, για οποιοδήποτε ενδεχόμενο Α.

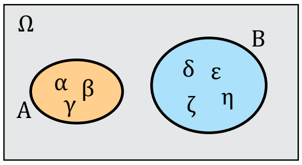
Πράγματι: $N(A) \geq 0$ και $N(Ω) > 0$ οπότε: $P(A) = \frac{N(A)}{N(Ω)} \geq 0$.

2. $P(Ω) = 1$.

Πράγματι: $P(Ω) = \frac{N(Ω)}{N(Ω)} = 1$.

3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, όταν $A \cap B = \emptyset$ ***(Απλός προσθετικός νόμος)***

Πράγματι: $P(A \cup B) = \frac{N(A \cup B)}{N(Ω)} = \frac{N(A) + N(B)}{N(Ω)} = \frac{N(A)}{N(Ω)} + \frac{N(B)}{N(Ω)} = P(A) + P(B)$.

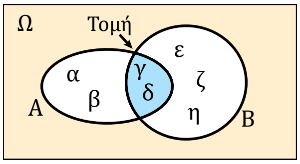


4. $P(\emptyset) = 0$.

Πράγματι: $P(\emptyset) = \frac{N(\emptyset)}{N(Ω)} = \frac{0}{N(Ω)} = 0$.

5. $P(A) \leq 1$.

Πράγματι: $P(A) = \frac{N(A)}{N(Ω)} \leq \frac{N(Ω)}{N(Ω)} = 1$.



6. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ***(Προσθετικός νόμος)***

Πράγματι: $N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$.

Για να διερευνήσετε τον προσθετικό νόμο, να ανοίξετε την ψηφιακή εφαρμογή.

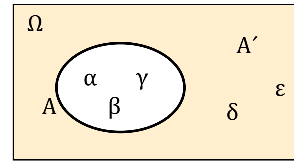
αφού στο άθροισμα των στοιχείων των συνόλων Α, Β περιλαμβάνεται δύο φορές το πλήθος των στοιχείων του συνόλου Α∩Β. Επομένως:

$$P(A\cup B) = \frac{N(A\cup B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)+N(B)-N(A\cap B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} - \frac{N(A\cap B)}{N(\Omega)} = P(A)+P(B)-P(A\cap B).$$

7. $P(A) + P(A') = 1$, όπου Α, Α′ συμπληρωματικά ενδεχόμενα.

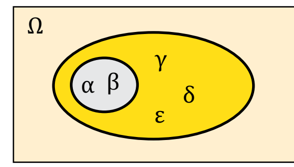
Πράγματι: Αφού Α, Α′ είναι συμπληρωματικά σύνολα τότε $A\cup A' = \Omega$ και $A\cap A' = \emptyset$, οπότε από τον απλό προσθετικό νόμο (Ιδιότητα 3) και την Ιδιότητα 2, παίρνουμε:

$P(A\cup A') = P(\Omega)$ ή $P(A) + P(A') = 1$ ή $P(A') = 1 - P(A)$.



8. Αν $A \subseteq B$, τότε $P(A) \le P(B)$ για ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα.

Πράγματι: $A \subseteq B \Rightarrow N(A) \le N(B) \Rightarrow \frac{N(A)}{N(\Omega)} \le \frac{N(B)}{N(\Omega)}$ ή $P(A) \le P(B)$.



Σημείωση

Αν $A \subset B$, τότε $P(A) < P(B)$, όταν τα απλά ενδεχόμενα έχουν μη μηδενική πιθανότητα.

Εφαρμογή 3

Τρεις πεζοπόροι, οι οποίοι δεν ξεκινούν την ίδια στιγμή από την ίδια αφετηρία, βαδίζουν με την ίδια ταχύτητα, χωρίς να σταματήσουν, σε ένα κλειστό μονοπάτι σε ένα δάσος. Καθένας από τους πεζοπόρους έχει την ίδια πιθανότητα να κινηθεί δεξιόστροφα ή αριστερόστροφα.

α. Ποια είναι η πιθανότητα να μην διασταυρωθούν οι πεζοπόροι;

β. Ποια είναι η πιθανότητα να διασταυρωθούν σε μια πλήρη διαδρομή οι πεζοπόροι;

Απάντηση

Συμβολίζουμε με Δ το ενδεχόμενο να κινείται δεξιόστροφα ένας πεζοπόρος και με Α το ενδεχόμενο να κινείται αριστερόστροφα. Για να βρούμε τον δειγματικό χώρο του πειράματος, σχηματίζουμε έναν πίνακα διασταυρώσεων ή ένα δεντροδιάγραμμα. Από τον πίνακα διασταυρώσεων βλέπουμε ότι υπάρχουν οκτώ δυνατές περιπτώσεις διαδρομών για τους οδοιπόρους.

	Δ	Α	Δ	Α	Δ	Α	Δ	Α
	Δ	Δ	Α	Α	Δ	Δ	Α	Α
	Δ	Δ	Δ	Δ	Α	Α	Α	Α

α. Από τον πίνακα διασταυρώσεων των διαδρομών βλέπουμε ότι σε δύο μόνο περιπτώσεις δεν προκύπτει διασταύρωση. Όταν προχωρούν και οι τρεις δεξιόστροφα (ενδεχόμενο ΔΔΔ) ή όταν προχωρούν και οι τρεις αριστερόστροφα (ενδεχόμενο ΑΑΑ).

Άρα η πιθανότητα να μην προκύψει διασταύρωση, δηλαδή η πιθανότητα του ενδεχομένου ΔΔΔ∪ΑΑΑ, είναι

$P(ΔΔΔ\cup AAA) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0{,}25$ ή 25%.

β. Η πιθανότητα του ενδεχομένου Ε να διασταυρωθούν είναι η πιθανότητα του συμπληρωματικού ενδεχόμενου να μην διασταυρωθούν. Επομένως:

$P(E) = 1 - P(ΔΔΔ\cup AAA) = 1 - \frac{2}{8} = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$ ή 75%.

Εφαρμογή 4

Σε ένα βάζο περιέχονται 40 χρωματιστές καραμέλες. Από αυτές 15 είναι κόκκινες, 5 μπλε, 10 πράσινες και 10 κίτρινες. Επιλέγετε στην τύχη μία καραμέλα και σημειώνετε το χρώμα της.
Να προσδιορίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:
α. Η καραμέλα είναι κόκκινη.
β. Η καραμέλα είναι μπλε ή πράσινη.
γ. Η καραμέλα δεν είναι ούτε μπλε ούτε πράσινη.

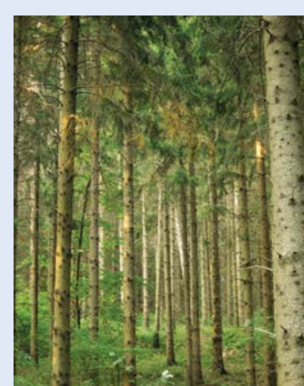
Απάντηση
Αν Ω είναι ο δειγματικός χώρος, τότε $N(\Omega) = 40$.
Για το ενδεχόμενο Κ: "καραμέλα κόκκινη" είναι $N(K) = 15$.
Για το ενδεχόμενο Μ: "καραμέλα μπλε" είναι $N(M) = 5$.
Για το ενδεχόμενο Π: "καραμέλα πράσινη" είναι $N(\Pi) = 10$.
Για το ενδεχόμενο Ι: "καραμέλα κίτρινη" είναι $N(I) = 10$.

α. Για το ενδεχόμενο Κ έχουμε $P(K) = \dfrac{N(K)}{N(\Omega)} = \dfrac{15}{40} = \dfrac{3}{8}$.

β. Το ενδεχόμενο η καραμέλα να είναι μπλε ή πράσινη είναι το $M \cup \Pi$. Επειδή $M \cap \Pi = \emptyset$, από τον απλό προσθετικό νόμο παίρνουμε: $P(M \cup \Pi) = P(M) + P(\Pi) = \dfrac{5}{40} + \dfrac{10}{40} = \dfrac{15}{40} = \dfrac{3}{8}$.

γ. Το ενδεχόμενο η καραμέλα να μην είναι ούτε μπλε, ούτε πράσινη, είναι το συμπληρωματικό ενδεχόμενο του ενδεχόμενου $M \cup \Pi$ οπότε έχουμε:
$P(M \cup \Pi) = 1 - P(M \cup \Pi) = 1 - \dfrac{3}{8} = \dfrac{5}{8}$.
Μία άλλη αντιμετώπιση είναι ότι εφόσον δεν είναι ούτε μπλε ούτε πράσινη τότε θα είναι κίτρινη ή κόκκινη, άρα θα είναι ίση με $P(I \cup K) = \dfrac{25}{40} = \dfrac{5}{8}$.

Εφαρμογή 5



Οι βοτανολόγοι διαπιστώνουν ότι από τα 200 δέντρα ενός αλσυλλίου, μια ομάδα 50 δέντρων δεν μεγαλώνουν κανονικά. Εξετάζοντάς τα, προσδιορίζουν ότι 30 από αυτά έχουν προσβληθεί από μία ασθένεια ή έχουν αποικίες από έντομα. Από την ομάδα των 50 δέντρων που δεν μεγαλώνουν κανονικά, 15 έχουν προσβληθεί από ασθένεια και 20 έχουν αποικίες από έντομα.
1. Ποια είναι η πιθανότητα, αν επιλέξουμε στην τύχη ένα δέντρο από το αλσύλλιο:
α. Να μεγαλώνει κανονικά;
β. Να μην έχει αποικία εντόμων;
2. Αν επιλέξουμε στην τύχη ένα δέντρο από αυτά που δεν μεγαλώνουν κανονικά, ποια είναι η πιθανότητα να έχει προσβληθεί από την ασθένεια και να έχει αποικίες από έντομα;

Απάντηση
1. α. Αν Α το ενδεχόμενο να μεγαλώνει κανονικά ένα δέντρο, τότε αφού 50 από τα 200 δεν μεγαλώνουν κανονικά, είναι $N(A) = 150$ και επομένως: $P(A) = \dfrac{N(A)}{200} = \dfrac{150}{200} = \dfrac{3}{4}$ ή 75%.
β. Αν Β' το ενδεχόμενο να μην έχει αποικία εντόμων ένα δέντρο, τότε αφού 20 δέντρα έχουν αποικίες από έντομα, είναι $N(B') = 180$ και επομένως: $P(B') = \dfrac{N(B')}{200} = \dfrac{180}{200} = \dfrac{9}{10}$ ή 90%.

2. Έστω Ω_1 ο δειγματικός χώρος των δέντρων που δεν μεγαλώνουν κανονικά, με $N(\Omega_1)=50$. Σε αυτόν τον δειγματικό χώρο, έστω Γ το ενδεχόμενο ένα δέντρο να έχει προσβληθεί από μία ασθένεια και Δ το ενδεχόμενο το δέντρο να έχει αποικία από έντομα. Τότε αναζητάμε την πιθανότητα $P(\Gamma \cap \Delta)$.

Από τα δεδομένα έχουμε ότι: $P(\Gamma)=\frac{15}{50}=0{,}3$, $P(\Delta)=\frac{20}{50}=0{,}4$ και $P(\Gamma$ ή $\Delta)=P(\Gamma\cup\Delta)=\frac{30}{50}=0{,}6$.
Επειδή τα ενδεχόμενα Γ, Δ δεν είναι ασυμβίβαστα, παίρνουμε:

$P(\Gamma\cup\Delta)=P(\Gamma)+P(\Delta)-P(\Gamma\cap\Delta)$ ή $0{,}6=0{,}3+0{,}4-P(\Gamma\cap\Delta)$ ή $P(\Gamma\cap\Delta)=0{,}1$ ή 10%.

Διατύπωση υποθέσεων λογισμού των πιθανοτήτων.

Για να βρούμε με τον κλασικό ορισμό την πιθανότητα ενός ενδεχομένου, πρέπει τα απλά ενδεχόμενα να είναι ισοπίθανα και ο δειγματικός χώρος να μην έχει άπειρα στοιχεία. Ωστόσο, οι συνθήκες αυτές ισχύουν σε λίγες σχετικά περιπτώσεις και γι' αυτό οι Μαθηματικοί προσπάθησαν να διαμορφώσουν έναν ορισμό της πιθανότητας ο οποίος θα έλυνε τα προβλήματα αυτά.

Τι θα θέλαμε να περιέχει ένας τέτοιος ορισμός;
Ένας τέτοιος ορισμός θα θέλαμε βέβαια να αντιμετωπίζει τα παραπάνω προβλήματα, αλλά επίσης να περιλαμβάνει και την περίπτωση των ισοπίθανων ενδεχόμενων, δηλαδή να είναι μια επέκταση του κλασικού ορισμού της πιθανότητας.

Επομένως, θα θέλαμε να περιλαμβάνει:

1. Τις βασικές ιδιότητες που αναφέραμε (Ιδιότητες 1,2,3).
2. Όλες τις ιδιότητες που προκύπτουν από τις βασικές ιδιότητες, όπως οι ιδιότητες 4,5,6,7 και 8.
3. Να εφαρμόζεται και σε μη ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα.
4. Να ισχύει και για δειγματικούς χώρους με άπειρα στοιχεία.

Αυτοαξιολόγηση

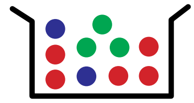
Να βρείτε αν είναι σωστές ή λανθασμένες οι παρακάτω προτάσεις και να το αιτιολογήσετε:

α. Αν Α,Β είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, τα οποία έχουν δύο στοιχεία το καθένα, τότε έχουν και την ίδια πιθανότητα, δηλαδή $P(A)=P(B)$.
β. Ισχύει πάντα ότι $P(A)=1-P(A')$ για οποιοδήποτε ενδεχόμενο Α του δειγματικού χώρου Ω.
γ. Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω με $A \subset B$ ισχύει πάντα ότι $P(A) < P(B)$.
δ. Στη ρίψη ενός αμερόληπτου νομίσματος 3 φορές, η πιθανότητα να εμφανιστεί τουλάχιστον 2 φορές “κεφαλή” είναι $\frac{1}{2}$.
ε. Στη ρίψη ενός αμερόληπτου νομίσματος 3 φορές, τα ενδεχόμενα “να έρθει δύο φορές κεφαλή” και “να έρθει δύο φορές γράμματα” είναι ισοπίθανα.

Στην ψηφιακή εφαρμογή, συμπληρώστε τις ιδιότητες που αφορούν στον λογισμό πιθανοτήτων.

Ασκήσεις

1. Σε ένα κουτί υπάρχουν 5 κόκκινα, 3 πράσινα και 2 μπλε μπαλάκια. Βάζουμε το χέρι μας στο κουτί και πιάνουμε στην τύχη ένα μπαλάκι.

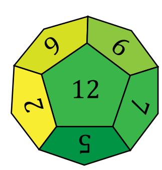


   α. Να γράψετε τον δειγματικό χώρο Ω.
   β. Είναι τα ενδεχόμενα ισοπίθανα; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
   γ. Αν πάρω στην τύχη ένα μπαλάκι, ποια πιθανότητα έχουν τα ενδεχόμενα:
   Α: "τραβάω ένα οποιοδήποτε μπαλάκι".
   Β: "τραβάω ένα κόκκινο μπαλάκι".
   Γ: "τραβάω ένα πράσινο μπαλάκι".
   Δ: "τραβάω ένα μπλε μπαλάκι".

2. Ρίχνουμε όλα τα πιόνια από ένα σκάκι σε μια σακούλα και τραβάμε στην τύχη ένα.[1] Να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων:

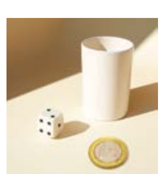
   Α: "Το πιόνι είναι στρατιώτης".
   Β: "Το πιόνι είναι λευκός στρατιώτης".
   Γ: "Το πιόνι είναι πύργος".
   Δ: "Το πιόνι είναι μαύρος αξιωματικός".
   Ε: "Το πιόνι είναι λευκός βασιλιάς,
   $Z = A \cup B$, $H = B' \cup E'$.

3. Στην εικόνα παρουσιάζονται οι 6 από τις 12 έδρες, οι οποίες είναι αριθμημένες από 1 έως 12, ενός δίκαιου ζαριού με σχήμα δωδεκάεδρου. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:



   α. Αν ρίξω το ζάρι να προκύψει ζυγός αριθμός.
   β. Α: "1, 2, 3, 4", Β: "2, 4, 5, 6, 8".
   γ. $A \cup B$, $A \cap B$, $B - A$, $A' \cup B'$, $A \cap B'$.

4. Βάζουμε μέσα σε ένα ποτήρι ένα ζάρι και ένα κέρμα τα οποία είναι αμερόληπτα. Κουνάμε καλά και αφήνουμε το κέρμα και το ζάρι να πέσουν στο τραπέζι και καταγράφουμε το ζεύγος των ενδείξεων της άνω έδρας του κέρματος και του ζαριού.



   α. Να προσδιορίσετε τον δειγματικό χώρο του πειράματος τύχης.
   β. Να αιτιολογήσετε αν τα απλά ενδεχόμενα είναι ή όχι ισοπίθανα.
   γ. Να εξετάσετε αν το ενδεχόμενο Α: "Το νόμισμα φέρνει κεφαλή" και το ενδεχόμενο Β: "Το ζάρι φέρνει τον αριθμό 1" είναι ισοπίθανα.

5. Σε ένα αδιαφανές κουτί έχουμε 20 μπάλες αριθμημένες με τους αριθμούς από το 1 μέχρι το 20 και επιλέγουμε τυχαία μία από αυτές. Για τα ενδεχόμενα Α: "Ο αριθμός είναι πολλαπλάσιο του 2" και Β: "Ο αριθμός είναι πολλαπλάσιο του 3" να υπολογίσετε τις πιθανότητες:
   α. $P(A)$ και $P(B)$.
   β. $P(A \cap B)$ και $P(A \cup B)$.
   γ. $P(A - B)$.
   δ. Με τη χρήση διαγραμμάτων Venn, να αιτιολογήσετε τη σχέση $P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$.

6. Αν για δύο ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει ότι $P(A) = P(B) = 0{,}7$ δείξτε ότι $P(A \cap B) \geq 0{,}4$.

7. Η τροχαία ανακοίνωσε ότι από τα στοιχεία που έχει διαχρονικά, στους ύποπτους οδηγούς για ακατάλληλη οδήγηση που σταματάει, το 80% υποβάλλεται σε έλεγχο τύπου Α, 20% σε έλεγχο τύπου Β και 10% και στους δύο ελέγχους. Να προσδιορίσετε τις πιθανότητες:

   α. Ένας ύποπτος οδηγός υποβάλλεται σε έλεγχο τύπου Α ή Β, ή και στους δύο.
   β. Ένας ύποπτος οδηγός υποβάλλεται σε έλεγχο τύπου Α ή Β, αλλά όχι και στους δύο.
   γ. Ένας ύποπτος οδηγός δεν υποβάλλεται σε έλεγχο τύπου Α ούτε σε έλεγχο τύπου Β.

8. Οι απαντήσεις των 25 μαθητών/τριών μια τάξης σχετικά με το πόσα αδέλφια έχουν δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Πλήθος μαθητών	3	8	6	4	3	0	1
Πλήθος αδελφών	0	1	2	3	4	5	6

[1] Σε ένα σκάκι υπάρχουν 32 πιόνια. Τα 16 είναι λευκά, από τα οποία 8 στρατιώτες, 2 πύργοι, 2 ίπποι, 2 αξιωματικοί, 1 βασιλιάς και 1 βασίλισσα. Αντίστοιχα είναι και τα μαύρα.

Επιλέγεται στην τύχη ένα άτομο από τους/τις μαθητές/τριες και καταγράφουμε πόσα αδέλφια έχει.

α. Να καταγράψετε τον δειγματικό χώρο του πειράματος τύχης.

β. Ο δειγματικός χώρος αποτελείται από ισοπίθανα ή μη, απλά ενδεχόμενα; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

γ. Να βρείτε την πιθανότητα το άτομο που επιλέγεται τυχαία να έχει περισσότερα από 4 αδέλφια.

δ. Να βρείτε την πιθανότητα το άτομο που επιλέγεται τυχαία να έχει 4 ή 6 αδέλφια.

9. Ρίχνουμε ένα δίκαιο ζάρι δύο φορές και καταγράφουμε το αποτέλεσμα των ρίψεων. Να βρεθεί η πιθανότητα των ενδεχομένων:

α. Α: "Στην πρώτη ρίψη, η ένδειξη του ζαριού είναι μεγαλύτερη από την ένδειξη του ζαριού στη δεύτερη ρίψη".

β. Β: "Εμφανίζεται η ένδειξη 4 τουλάχιστον σε μία από τις δύο ρίψεις".

γ. $A \cap B$.

10. Σε μια συναυλία υπάρχουν 300 θεατές. Από αυτούς, 150 είναι ηλικίας 15-20 ετών, 100 ηλικίας 20-40 και οι υπόλοιποι μεγαλύτεροι των 40 ετών. Αν επιλέξουμε στην τύχη έναν/μια θεατή, να προσδιοριστούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων:

α. Το άτομο που επιλέγεται να είναι 15-20 ετών.

β. Το άτομο που επιλέγεται να μην είναι μεγαλύτερο από 40 ετών.

γ. Το άτομο που επιλέγεται να είναι 15-20 ετών ή 20-40 ετών.

δ. Το άτομο που επιλέγεται να μην είναι 15-20 ετών ούτε 20-40 ετών.

11. Από τους 300 πελάτες ενός πολυκαταστήματος, οι 100 αγοράζουν μπλούζες. Από αυτούς που αγοράζουν μπλούζες, 60 αγοράζουν λευκή ή μαύρη μπλούζα, 40 αγοράζουν λευκή και 30 αγοράζουν μαύρη μπλούζα.

α. Ποια είναι η πιθανότητα, αν επιλέξουμε στην τύχη έναν πελάτη από τους 300:

i. Να μην αγοράζει μπλούζα;

ii. Να μην αγοράζει λευκή μπλούζα;

β. Αν επιλέξουμε στην τύχη έναν από τους 100 πελάτες που αγοράζουν μπλούζα, ποια είναι η πιθανότητα να αγοράζει μια λευκή και μια μαύρη μπλούζα;

12. Ο Γιάννης και η Ελένη ρίχνουν από ένα ζάρι, καταγράφουν τις ενδείξεις τους και στη συνέχεια βρίσκουν το γινόμενο των αριθμών που εμφανίζονται στις πάνω έδρες τους. Ο Γιάννης κερδίζει όταν το γινόμενο είναι μικρότερο ή ίσο του 18 και η Ελένη όταν το γινόμενο είναι από 19 έως 36. Ο Γιάννης ισχυρίζεται ότι η πιθανότητα να κερδίσει κάποιος από τους δύο είναι η ίδια και για τους δύο παίκτες. Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του; Αιτιολογήστε τη σκέψη σας.

3 • Αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

- Να διατυπώνουν τον γενικό (αξιωματικό) ορισμό της πιθανότητας για έναν πεπερασμένο δειγματικό χώρο.
- Να αναγνωρίζουν τις διαφορές μεταξύ του αξιωματικού και του κλασικού ορισμού της πιθανότητας.
- Να αποδεικνύουν κανόνες λογισμού με τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας.

Αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας

Οι μαθηματικοί χρειάστηκαν περισσότερα από 100 χρόνια από τη διατύπωση του κλασικού ορισμού της πιθανότητας από τον Laplace (1812), μέχρι την εμφάνιση του ακόλουθου αξιωματικού ορισμού της πιθανότητας από τον Kolmogorov (1933).

Αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας

Ο αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας υλοποιεί τις υποθέσεις που διατυπώθηκαν στην προηγούμενη ενότητα και περιλαμβάνει τις τρεις βασικές ιδιότητες που είδαμε στον κλασικό ορισμό ως αξιώματα.
Ειδικότερα, ο αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας για πεπερασμένους δειγματικούς χώρους είναι ο εξής:

Ορισμός

Έστω $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, ..., \omega_\nu\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Σε κάθε ενδεχόμενο Α του δειγματικού χώρου Ω αντιστοιχίζουμε έναν μοναδικό πραγματικό αριθμό P(A), ο οποίος ονομάζεται **πιθανότητα του ενδεχομένου Α** όταν ικανοποιούνται τα ακόλουθα τρία αξιώματα:

1. $0 \le P(A)$, για κάθε $A \subseteq \Omega$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. Για οποιαδήποτε Α, Β ξένα (ασυμβίβαστα) μεταξύ τους ενδεχόμενα του Ω, ισχύει ο απλός προσθετικός νόμος. Δηλαδή, αν $A,B \subseteq \Omega$, με $A\cap B = \emptyset$, τότε $P(A\cup B) = P(A) + P(B)$.

Επειδή $\Omega =\{\omega_1\}\cup\{\omega_2\}\cup\{\omega_3\}\cup\ldots\cup\{\omega_\nu\}$ και τα ενδεχόμενα $\{\omega_1\},\{\omega_2\},\{\omega_3\},\ldots,\{\omega_\nu\}$ είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους, από το τρίτο αξίωμα προκύπτει: $P(\Omega)= P(\omega_1)+P(\omega_2)+P(\omega_3)+\ldots+P(\omega_\nu)$ και από το δεύτερο ότι:

$$P(\omega_1)+P(\omega_2)+P(\omega_3)+\ldots+P(\omega_\nu) = 1.$$

Ανάλογα, για τα απλά ενδεχόμενα του $A=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_\kappa\}$,

$$\mathbf{P(A) = P(\alpha_1) + P(\alpha_2) + P(\alpha_3) + \ldots + P(\alpha_\kappa).}$$

Σημείωση

Η πιθανότητα στον αξιωματικό ορισμό είναι μια συνάρτηση η οποία σε κάθε ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου ενός πειράματος τύχης αντιστοιχίζει έναν πραγματικό αριθμό του διαστήματος [0,1].

Ο αξιωματικός ορισμός δεν υποδεικνύει κάποιον τρόπο εύρεσης της πιθανότητας ενός ενδεχομένου, αλλά περιγράφει τις ιδιότητες που πρέπει να έχει μια αντιστοίχιση, ώστε να μπορεί να θεωρηθεί ως «πιθανότητα».

Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες

Ο αξιωματικός ορισμός γενικεύει τον κλασικό ορισμό

Θεωρούμε έναν δειγματικό χώρο $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_\nu\}$, ο οποίος αποτελείται από ν ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Από το δεύτερο αξίωμα έχουμε ότι: $P(\Omega)=1$ απ' όπου χρησιμοποιώντας το τρίτο αξίωμα παίρνουμε: $P(\omega_1)+P(\omega_2)+\cdots+P(\omega_\nu)=1$.

Αφού τα ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα, θα ισχύει $P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots=P(\omega_\nu)=p$, οπότε η προηγούμενη σχέση γίνεται: $\nu\cdot p=1 \Leftrightarrow p=\frac{1}{\nu}$.

Αν $A\subseteq\Omega$ ένα ενδεχόμενο του Ω που περιέχει κ από τα απλά ενδεχόμενα του Ω, τότε:

$$P(A)=\underbrace{p+p+\cdots+p}_{\kappa}=\kappa\cdot p=\kappa\cdot\frac{1}{\nu}=\frac{\kappa}{\nu}=\frac{N(A)}{N(\Omega)} \quad \text{(κλασικός ορισμός).}$$

Επομένως, ο αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας είναι επέκταση του κλασικού ορισμού.

Ομοιότητες και διαφορές του κλασικού και του αξιωματικού ορισμού

Κλασικός ορισμός	Αξιωματικός ορισμός
• Ισχύει μόνο σε πεπερασμένους δειγματικούς χώρους.	• Ισχύει και σε χώρους με άπειρο πλήθος απλών ενδεχομένων.
• Εφαρμόζεται μόνο για ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα.	• Εφαρμόζεται και για μη ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα.
• Η πιθανότητα ενός ενδεχομένου ορίζεται ως λόγος.	• Η πιθανότητα ενός ενδεχομένου ορίζεται ως αντιστοίχιση.
• Από τον ορισμό προκύπτουν οι βασικές ιδιότητες: $P(A)\ge 0$, $P(\Omega)=1$, Προσθετικός νόμος. (Α: ενδεχόμενο, Ω: δειγματικός χώρος).	• Οι τρεις βασικές ιδιότητες του κλασικού ορισμού είναι αξιώματα στον αξιωματικό ορισμό.
• Η πιθανότητα ενός ενδεχομένου είναι αριθμός του διαστήματος [0, 1].	• Η πιθανότητα ενός ενδεχομένου είναι αριθμός του διαστήματος [0, 1].

Με τον αξιωματικό ορισμό ισχύουν όλες οι ιδιότητες που έχουμε αναφέρει στον κλασικό ορισμό. Οι τρεις πρώτες ιδιότητες που αναφέραμε στον κλασικό ορισμό είναι τα τρία αξιώματα του αξιωματικού ορισμού. Συνήθως, με βάση τον αξιωματικό ορισμό των πιθανοτήτων, στόχος μας είναι να γράφουμε κάθε ενδεχόμενο ως ένωση ξένων ενδεχομένων και να εφαρμόζουμε τον απλό προσθετικό νόμο.
Οι άλλες ιδιότητες που αναφέρθηκαν στον κλασικό ορισμό αποδεικνύονται, όπως ακολουθεί:

Ιδιότητες Λογισμού Πιθανοτήτων

Πρόταση 1

$$P(\emptyset) = 0.$$

Απόδειξη
Ισχύει ότι $\emptyset \cup \Omega = \Omega$ και $\emptyset \cap \Omega = \emptyset$ (δηλαδή το $\emptyset$ και το Ω είναι ξένα μεταξύ τους), οπότε:
από το δεύτερο αξίωμα έχουμε $P(\Omega) = 1$ ή $P(\emptyset \cup \Omega) = 1$ και από το τρίτο αξίωμα παίρνουμε:
$P(\emptyset \cup \Omega) = 1$ ή $P(\emptyset) + P(\Omega) = 1$ ή $P(\emptyset) + 1 = 1$ ή $P(\emptyset) = 0$.

Πρόταση 2

$$P(A') = 1 - P(A).$$

Απόδειξη
Για τα συμπληρωματικά ενδεχόμενα Α, Α′ ισχύει ότι: $A \cup A' = \Omega$ και $A \cap A' = \emptyset$, οπότε:
από το δεύτερο αξίωμα έχουμε $P(\Omega) = 1$ ή $P(A \cup A') = 1$ και από το τρίτο αξίωμα παίρνουμε:
$P(A \cup A') = 1$ ή $P(A) + P(A') = 1$ ή $P(A') = 1 - P(A)$.

Πρόταση 3

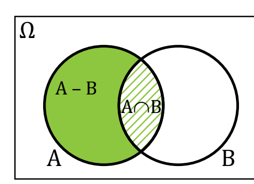
$$P(A) \leq 1.$$

Απόδειξη
Έστω δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα Α και Α′.
Από το πρώτο αξίωμα ισχύει ότι $0 \leq P(A')$ και από την Πρόταση 2 έχουμε $P(A') = 1 - P(A)$.
Επομένως: $1 - P(A) \geq 0$ ή $P(A) \leq 1$.
Από τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας και από το αποτέλεσμα αυτής της πρότασης έχουμε: $0 \leq P(A) \leq 1$.

Πρόταση 4

α. $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.
β. Αν $A \subseteq B$, τότε $P(A) \leq P(B)$.

Απόδειξη

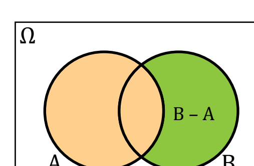


α. Από το διάγραμμα Venn διαπιστώνουμε ότι $A = (A - B) \cup (A \cap B)$ και $(A - B) \cap (A \cap B) = \emptyset$.
Επομένως, από το τρίτο αξίωμα έχουμε ότι: $P(A) = P((A - B) \cup (A \cap B))$ ή
$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.
β. Αν $A \subseteq B$ τότε $A \cap B = A$, οπότε: $P(A) = P(A \cap B)$.
Εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα α αυτής της πρότασης, έχουμε $P(B - A) = P(B) - P(A)$ και, επειδή από το πρώτο αξίωμα ισχύει ότι: $P(B - A) \geq 0$, παίρνουμε: $P(B) - P(A) \geq 0$ ή $P(A) \leq P(B)$.

Πρόταση 5

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{ (προσθετικός νόμος).}$$

Απόδειξη



Ισχύει ότι $A \cup B = A \cup (B - A)$ και $A \cap (B - A) = \emptyset$, οπότε από το τρίτο αξίωμα έχουμε:

$$P(A \cup B) = P(A \cup (B - A)) = P(A) + P(B - A). \quad (1)$$

Από την Πρόταση 4 έχουμε ότι $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$
και επομένως από την (1) παίρνουμε:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - A) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Σημείωση

Από τον προσθετικό νόμο προκύπτει ότι: $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$, αφού απο την Πρόταση 3, $0 \leq P(A \cap B) \leq 1$.

Εφαρμογή 1

Σε ένα παιχνίδι που παίζουν στο σχολείο η Λυδία, η Μαρία και η Όλγα, η πιθανότητα να κερδίσει η Λυδία είναι $\frac{1}{2}$ και η πιθανότητα να κερδίσει η Μαρία είναι $\frac{1}{3}$. Να βρείτε την πιθανότητα:

α. Να κερδίσει η Όλγα.

β. Να κερδίσει η Λυδία ή η Όλγα.

Σημείωση: Το παιχνίδι μπορεί να κερδίσει μόνο μία από τις τρεις μαθήτριες.

Απάντηση

Ο δειγματικός χώρος αποτελείται από τα ενδεχόμενα Λ, Μ και Ο, όπου Λ το ενδεχόμενο να κερδίσει η Λυδία, Μ το ενδεχόμενο να κερδίσει η Μαρία και Ο το ενδεχόμενο να κερδίσει η Όλγα.
Άρα, $\Omega = \{Λ, Μ, Ο\}$ με $P(Λ) = \frac{1}{2}$ και $P(Μ) = \frac{1}{3}$.

α. Τα ενδεχόμενα Λ, Μ, Ο δεν είναι ισοπίθανα. Από το δεύτερο και το τρίτο αξίωμα του ορισμού, έχουμε:

$$P(\Omega) = 1 \;\; ή \;\; P(Λ) + P(Μ) + P(Ο) = 1 \;\; ή \;\; \frac{1}{2}+\frac{1}{3} + P(Ο) = 1 \;\; ή \;\; P(Ο) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \;\; ή \;\; P(Ο) = \frac{1}{6},$$

οπότε η πιθανότητα να κερδίσει η Όλγα είναι $\frac{1}{6}$.

β. Η πιθανότητα να κερδίσει η Λυδία ή η Όλγα είναι η πιθανότητα πραγματοποίησης του ενδεχομένου $Λ \cup Ο$ και επειδή τα ενδεχόμενα Λ, Ο είναι ξένα μεταξύ τους, παίρνουμε:

$$P(Λ \cup Ο) = P(Λ) + P(Ο) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

Εφαρμογή 2

Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης.

1. Να εξετάσετε αν ικανοποιεί τα δύο πρώτα αξιώματα του αξιωματικού ορισμού η αντιστοίχιση, η οποία ικανοποιεί τον προσθετικό νόμο και ορίζεται ως εξής:

α. $P(\omega_1) = 0{,}1$, $P(\omega_2) = 0{,}2$, $P(\omega_3) = 0{,}4$ και $P(\omega_4) = 40\%$.

β. $P(\omega_1) = 0{,}5$, $P(\omega_2) = 0{,}3$, $P(\omega_3) = 0{,}2$ και $P(\omega_4) = 0$.

2. Αν P είναι πιθανότητα με δειγματικό χώρο Ω που ικανοποιεί τις σχέσεις $P(\omega_1) = 0{,}2$, $P(\omega_2) = 0{,}3$, $P(\omega_3) = x$ και $P(\omega_4) = x + 0{,}1$, τότε να αποδείξετε ότι η τιμή 0,2 είναι η μοναδική πιθανή τιμή για το x.

Απάντηση

1. α. Το πρώτο αξίωμα του αξιωματικού ορισμού της πιθανότητας ικανοποιείται αφού: $P(\omega_1) = 0{,}1 \geq 0$, $P(\omega_2) = 0{,}2 \geq 0$, $P(\omega_3) = 0{,}4 \geq 0$ και $P(\omega_4) = 0{,}4 \geq 0$.
Ωστόσο: $P(\Omega) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}4 + 0{,}4 = 1{,}1 > 1$, που δεν ισχύει, αφού $P(\Omega)=1$ και επομένως δεν ικανοποιείται το δεύτερο αξίωμα.

β. Τα δύο πρώτα αξιώματα του αξιωματικού ορισμού ικανοποιούνται, αφού:

- $P(\omega_1) = 0{,}5 \geq 0$, $P(\omega_2) = 0{,}3 \geq 0$, $P(\omega_3) = 0{,}2 \geq 0$ και $P(\omega_4) = 0 \geq 0$ *(πρώτο αξίωμα).*
- $P(\Omega) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4) = 0{,}5 + 0{,}3 + 0{,}2 + 0 = 1$ *(δεύτερο αξίωμα).*

2. Αφού η P είναι πιθανότητα με δειγματικό χώρο Ω, ικανοποιούνται τα αξιώματα του ορισμού.

- Από το δεύτερο αξίωμα έχουμε:
  $P(\Omega) = 1 \Rightarrow 0{,}2 + 0{,}3 + x + x + 0{,}1 = 1 \Rightarrow 2x + 0{,}6 = 1 \Rightarrow x = 0{,}2$.
- Για $x=0{,}2$, είναι $P(\omega_1) = 0{,}2 > 0$, $P(\omega_2) = 0{,}3 > 0$, $P(\omega_3) = 0{,}2 > 0$ και $P(\omega_4) = 0{,}3 > 0$, οπότε ικανοποιείται και το πρώτο αξίωμα.
  Άρα, $x = 0{,}2$.

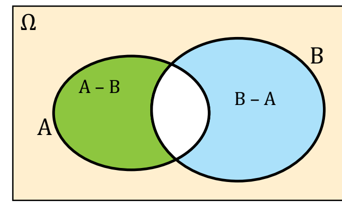
Εφαρμογή 3

Αν Α, Β είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου, να αποδειχθεί:

α. Τα ενδεχόμενα $A - B$ και $B - A$ είναι ασυμβίβαστα με τη βοήθεια διαγράμματος Venn.

β. $P((A - B)\cup(B - A)) = P(A) + P(B) - 2P(A\cap B)$.

Απάντηση



α. Από το διάγραμμα Venn διαπιστώνουμε ότι τα ενδεχόμενα $A - B$ και $B - A$ δεν έχουν κοινά στοιχεία και επομένως είναι ασυμβίβαστα.

β. Τα $A - B$ και $B - A$ είναι ασυμβίβαστα (ερώτημα (α)), οπότε έχουμε:
$P((A - B)\cup(B - A)) = P(A - B) + P(B - A)$. (1)
Επειδή, $P(A - B) = P(A) - P(A\cap B)$ και $P(B - A) = P(B) - P(B\cap A)$
(Πρόταση 4), από την (1) παίρνουμε:

$$P((A - B)\cup(B - A)) = P(A) - P(A\cap B) + P(B) - P(B\cap A) = P(A) + P(B) - 2P(A\cap B),$$

αφού $A\cap B = B\cap A \Rightarrow P(A\cap B) = P(B\cap A)$.

Εφαρμογή 4

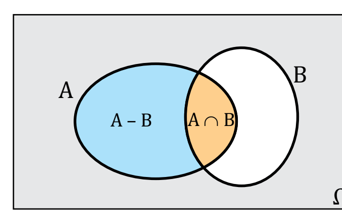
Αν Α, Β είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A)=0{,}4$, $P(B)=0{,}3$ και $P(A\cap B) = 0{,}1$, να βρεθεί η πιθανότητα των ενδεχομένων:

α. Να πραγματοποιηθεί το Α και να μην πραγματοποιηθεί το Β.

β. Να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα Α, Β.

γ. Να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα Α, Β.

Απάντηση



α. Για την πιθανότητα $A - B$ έχουμε:
$P(A - B) = P(A) - P(A\cap B) = 0{,}4 - 0{,}1 = 0{,}3$.

β. Το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα Α, Β είναι το

$$(A - B)\cup(B - A)$$

και επειδή τα ενδεχόμενα $A - B$ και $B - A$ είναι ξένα μεταξύ τους, από τον απλό προσθετικό νόμο (τρίτο αξίωμα), όπως είδαμε και στην Εφαρμογή 3, έχουμε:
$P((A - B)\cup(B - A)) = P(A) + P(B) - 2P(A\cap B)$.
Άρα: $P((A - B)\cup(B - A)) = 0{,}4+0{,}3 - 2\cdot(0{,}1) = 0{,}5$.

γ. Το ενδεχόμενο να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα Α, Β είναι το ενδεχόμενο $A'\cap B'=(A\cup B)'$, δηλαδή το συμπλήρωμα του ενδεχομένου $A\cup B$ και επομένως:
$P(A'\cap B')=P((A\cup B)') = 1- P(A\cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A\cap B)) = 1 - (0{,}4 + 0{,}3 - 0{,}1) = 0{,}4$.

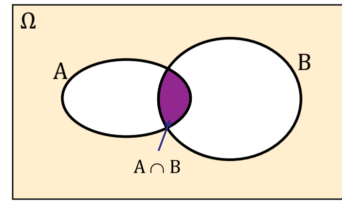
Εφαρμογή 5

Για δύο ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου ισχύει ότι $P(A) = 0{,}5$ και $P(B) = 0{,}8$.

α. Να εξετάσετε αν τα Α, Β είναι ασυμβίβαστα.

β. Να αποδείξετε ότι: $0{,}3 \le P(A\cap B) \le 0{,}5$.

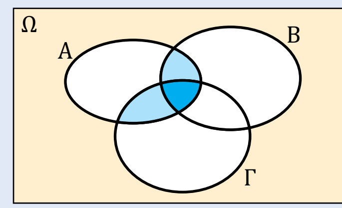
Απάντηση



α. Έστω ότι τα Α, Β είναι ασυμβίβαστα. Τότε, από τον προσθετικό νόμο (αξίωμα 3) έχουμε:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0{,}5 + 0{,}8 = 1{,}3 > 1$, που είναι άτοπο (αξίωμα 1).
Άρα τα Α, Β δεν είναι ασυμβίβαστα.

β. Είναι $A \cap B \subseteq A$ (σχήμα), οπότε $P(A \cap B) \le P(A)$ (Πρόταση 4) και επομένως:
$P(A \cap B) \le 0{,}5$. (1)
Επειδή $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ είναι $P(A \cup B) = 0{,}5 + 0{,}8 - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cup B) = 1{,}3 - P(A \cap B)$.
Εξάλλου, $P(A \cup B) \le 1$ οπότε: $1{,}3 - P(A \cap B) \le 1 \Rightarrow P(A \cap B) \ge 0{,}3$. (2)
Από τις (1), (2) πλέον παίρνουμε: $0{,}3 \le P(A \cap B) \le 0{,}5$.

Εφαρμογή 6



Δίνονται τα ενδεχόμενα Α, Β, Γ του διπλανού διαγράμματος Venn:

1. Με τη χρήση του διαγράμματος Venn να δείξετε ότι:
α. $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$ και **β.** $(A \cap B) \cap (A \cap \Gamma) = A \cap B \cap \Gamma$.

2. $P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma) - P(A \cap B) - P(A \cap \Gamma) - P(B \cap \Gamma) + P(A \cap B \cap \Gamma)$.

Απάντηση

1. Από το παραπάνω διάγραμμα Venn προκύπτει άμεσα ότι:
α. $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$.
β. $(A \cap B) \cap (A \cap \Gamma) = A \cap B \cap \Gamma$.

2. Εφαρμόζοντας τον προσθετικό νόμο για τα ενδεχόμενα Α και $B \cup \Gamma$ έχουμε:
$P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A \cup (B \cup \Gamma)) = P(A) + P(B \cup \Gamma) - P(A \cap (B \cup \Gamma))$. (1)
Εφαρμόζοντας πάλι τον προσθετικό νόμο, για τα ενδεχόμενα Β και Γ, παίρνουμε:
$P(B \cup \Gamma) = P(B) + P(\Gamma) - P(B \cap \Gamma)$ και επομένως η (1) γράφεται:
$P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma) - P(B \cap \Gamma) - P(A \cap (B \cup \Gamma))$. (2)

Η τελευταία, λόγω του ερωτήματος 1/α, γίνεται:
$P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma) - P(B \cap \Gamma) - P((A \cap B) \cup (A \cap \Gamma))$. (3)

Εφαρμόζοντας ακόμα μια φορά τον προσθετικό νόμο, για τα ενδεχόμενα $A \cap B$ και $A \cap \Gamma$ και αντικαθιστώντας στη σχέση (3), έχουμε:
$P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma) - P(B \cap \Gamma) - P(A \cap B) - P(A \cap \Gamma) + P((A \cap B) \cap (A \cap \Gamma))$
και λόγω του ερωτήματος 1/β παίρνουμε:
$P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma) - P(A \cap B) - P(B \cap \Gamma) - P(A \cap \Gamma) + P(A \cap B \cap \Gamma)$.

Σημειώσεις

- Αν τα Α, Β, Γ είναι ανά δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα, τότε από το (β) ερώτημα προκύπτει ότι: $P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma)$.
- Δοκιμάστε να αποδείξετε το (β) ερώτημα θεωρώντας και άλλες περιπτώσεις διαγραμμάτων Venn.

Να κάνετε τη σωστή επιλογή σε καθεμία ερώτηση της ψηφιακής εφαρμογής ώστε να ισχύει ο αντίστοιχος κανόνας λογισμού πιθανοτήτων.

Αυτοαξιολόγηση

Να αιτιολογήσετε αν είναι σωστές ή λανθασμένες οι παρακάτω προτάσεις:

α. Έστω ο δειγματικός χώρος των απλών ενδεχομένων $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ με $P(\omega_1) = 0{,}5$, $P(\omega_2) = 0{,}3$, $P(\omega_3) = 0{,}2$. Για να βρούμε την πιθανότητα ενός ενδεχομένου του Ω εφαρμόζουμε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας;

β. Έστω ο δειγματικός χώρος των απλών ενδεχομένων $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Μπορεί για την πιθανότητα P να ισχύει ότι: $P(\omega_1) = x$, $P(\omega_2) = x+1$, $P(\omega_3) = x+2$;

γ. Μια διαφορά του αξιωματικού ορισμού της πιθανότητας από τον ορισμό της κλασικής πιθανότητας είναι ότι μπορεί να εφαρμοστεί και σε δειγματικούς χώρους με άπειρα στοιχεία.

δ. Ο αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας εφαρμόζεται μόνο για μη ισοπίθανα ενδεχόμενα σε αντίθεση με τον κλασικό ορισμό που εφαρμόζεται και στις δύο περιπτώσεις.

ε. Για ένα ενδεχόμενο A του δειγματικού χώρου Ω ισχύει πάντα $P(\Omega - A)=1-P(\Omega - A')$.

στ. Αν A ενδεχόμενο του πεπερασμένου δειγματικού χώρου Ω, διαφορετικό του κενού, τότε μπορεί να ισχύει ότι $P(A) = 0$;

ζ. Αν $P(A) = P(B)$, τότε $A = B$.

η. Αν $B \subseteq A$, τότε $P(A - B) = P(A) - P(B)$.

θ. Αν A, B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω τότε, $P(A - B) + P(B - A) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$.

ι. Ο κλασικός και ο αξιωματικός ορισμός ισχύουν σε οποιονδήποτε δειγματικό χώρο.

ια. Η πιθανότητα ενός ενδεχομένου με τον αξιωματικό ορισμό μπορεί να λαμβάνει τιμές μεγαλύτερες του 1, αφού ισχύει και για δειγματικούς χώρους με μη πεπερασμένο πλήθος στοιχείων.

Ασκήσεις

1. Έστω $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Να εξετάσετε αν ικανοποιεί τα δύο πρώτα αξιώματα του αξιωματικού ορισμού η αντιστοίχιση η οποία ορίζεται ως εξής:

i. $P(\omega_1) = \frac{4}{7}$, $P(\omega_2) = \frac{2}{7}$ και $P(\omega_3) = \frac{1}{7}$.

ii. $P(\omega_1) = \frac{4}{7}$, $P(\omega_2) = \frac{2}{7}$ και $P(\omega_3) = \frac{2}{7}$.

2. Ομοίως:

i. $P(\omega_1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $P(\omega_2) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ και $P(\omega_3) = 0$.

ii. $P(\omega_1) = 0{,}5$, $P(\omega_2) = 0{,}382$ και $P(\omega_3) = 0{,}117$.

3. Θεωρούμε τον δειγματικό χώρο $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ και την πιθανότητα P με $P(\omega_1) = 15\%$, $P(\{\omega_1, \omega_2\}) = 0{,}5$, $P(\omega_2) = 0{,}2 \cdot P(\omega_3)$ και $P(\omega_3) = x$. Να βρεθεί αν υπάρχει τέτοιο x.

4. Θεωρούμε τον δειγματικό χώρο $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ και την πιθανότητα P με $P(\omega_1) = 0{,}15$, $P(\omega_2) = 0{,}25$ και $P(\omega_4) = 0{,}4$. Να βρείτε την $P(\omega_3)$.

5. Θεωρούμε τον δειγματικό χώρο $\Omega = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ και την πιθανότητα P, με $P(\beta) = 3P(\alpha)$, $P(\gamma) = 2P(\delta)$ και $P(\delta) = 2P(\alpha)$. Να προσδιορίσετε τις $P(\alpha)$, $P(\beta)$, $P(\gamma)$, $P(\delta)$.

6. Θεωρούμε τον δειγματικό χώρο $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ και την πιθανότητα P με $P(\omega_1) = 0{,}2$, $P(\omega_2) = 0{,}3$ και $P(\omega_3) = 0{,}25$.

α. Να βρείτε την $P(\omega_4)$.

β. Έστω $A = \{\omega_1, \omega_2\}$ και $B = \{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}$.

i. Να βρείτε τις $P(A)$, $P(A \cap B)$.

ii. Να δείξετε ότι $P(A \cup B) =1$.

7. Θεωρούμε τον δειγματικό χώρο $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ και την πιθανότητα P με $P(\omega_1) = 15\%$, $P(\omega_2) = 0{,}2$, $P(\omega_3) = x$ και $P(\{\omega_1, \omega_4\}) = 0{,}5$. Να προσδιορίσετε το x, ώστε να μπορεί η P να είναι πιθανότητα με δειγματικό χώρο τον Ω.

8. Θεωρούμε A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, για τα οποία ισχύει ότι: $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}6$.

α. Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα A, B είναι ξένα μεταξύ τους.

β. Αν $P(A \cup B) = 0{,}7$ να βρείτε την $P(A \cap B)$.

9. Αν για τα ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου ισχύει ότι $P(A) = 0{,}3$ και $P(B) = 0{,}9$ να αποδειχθεί ότι:

α. Τα A, B δεν είναι ασυμβίβαστα.

β. $P(A \cup B) \geq 0{,}9$.

γ. $P(A \cap B) \leq 0{,}3$.

10. Για δύο ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου ισχύει ότι $P(A) = 0{,}4$ και $P(B) = 0{,}7$.

α. Να εξετάσετε αν τα A, B είναι ασυμβίβαστα.

β. Να αποδείξετε ότι: $0{,}1 \leq P(A \cap B) \leq 0{,}4$.

11. Αν A, B είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, για τα οποία ισχύει ότι: $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = 0{,}6$ και $P(A \cap B) = 0{,}35$, τότε να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(A \cup B)$.

12. Αν A, B είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, για τα οποία ισχύει ότι: $P(A) = 0{,}4$, $P(B') = 0{,}8$ και $P(A \cup B) = 0{,}5$, να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(A \cap B)$.

13. Αν Α, Β είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, για τα οποία ισχύει ότι: $P(A) = 0{,}4$, $P(A \cup B) = 0{,}7$ και $P(A \cap B) = 25\%$, τότε να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(B)$.

14. Αν Α, Β είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A)=0{,}4$, $P(B)=0{,}3$ και $P(A \cap B) = 0{,}1$ να βρεθεί η πιθανότητα των ενδεχομένων:

α. Να πραγματοποιηθεί το Α και να μην πραγματοποιηθεί το Β.

β. Να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα Α, Β.

γ. Να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα Α, Β.

15. Σε ένα σχολείο λειτουργούν δύο όμιλοι. Ο όμιλος τεχνολογίας και ο όμιλος φιλαναγνωσίας. Οι μαθητές/τριες πρέπει να επιλέξουν τουλάχιστον έναν από τους δύο. Αν το 70% επιλέγει τον όμιλο τεχνολογίας, ενώ το 20% επιλέγει και τους δύο, τότε αν πάρουμε στην τύχη έναν/μια μαθητή/τρια, ποια είναι η πιθανότητα να συμμετέχει μόνο στον όμιλο τεχνολογίας;

16. Σε ένα κουτί είναι τοποθετημένες 6 κόκκινες, 4 πράσινες και 3 κίτρινες μπάλες ίδιου μεγέθους και υφής. Επιλέγουμε, χωρίς να βλέπουμε, μία μπάλα στην τύχη. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

α. Α: "να επιλεχθεί κόκκινη μπάλα".

β. Β: "να επιλεχθεί κίτρινη μπάλα".

γ. Γ: "να μην επιλεχθεί πράσινη μπάλα".

δ. Δ: "να επιλεχθεί κόκκινη ή κίτρινη μπάλα".

ε. Ε: "η μπάλα που θα επιλεχθεί να μην είναι ούτε κόκκινη ούτε κίτρινη".

17. Δύο μαθητές/τριες ρίχνουν ένα νόμισμα τρεις φορές και καταγράφουν τα διαφορετικά αποτελέσματα. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:

α. Α: “ να εμφανιστεί και τις τρεις φορές γράμματα”.

β. Β: “να εμφανιστεί τουλάχιστον δύο φορές γράμματα”.

γ. Γ: “να εμφανιστεί το ίδιο αποτέλεσμα και στις τρεις ρίψεις”.

δ. Δ: “να μην εμφανιστεί και τις τρεις φορές κεφαλή”.

18. Σε μια εξέταση των υπαλλήλων μιας εταιρείας βρέθηκε ότι το 40% είχε προσβληθεί από κορονοϊό, το 25% από γρίπη και το 20% και από τα δύο. Αν επιλεχθεί ένας υπάλληλος στην τύχη, να βρεθεί η πιθανότητα:

α. Να έχει προσβληθεί από κορονοϊό ή από γρίπη.

β. Να έχει προσβληθεί μόνο από μία από τις δύο ασθένειες.

19. Αν ισχύει ότι $P(A) - P(A') = 0{,}2$, τότε να υπολογίσετε τις πιθανότητες των $P(A)$ και $P(A')$.

20. Αν Α, Β είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου, να δείξετε ότι: $P(A \cup B) + P(A') \geq P(B)$.

21. Αν Α, Β είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου, να δείξετε ότι: $P(A') + P(B') \geq 1 - P(A \cup B)$.

22. Έστω ότι Α, Β είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου για τα οποία ισχύει ότι: $P(B - A) = 0{,}25$ και $P(B') = \frac{1}{3}$.

α. Να βρείτε την πιθανότητα $P(A \cap B)$.

β. Να δείξετε ότι: $5 \leq 12P(A) \leq 9$.

γ. Να δείξετε ότι: $1 \leq 4P(A \cup B)$.

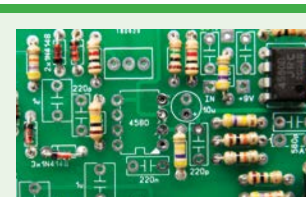
Διερευνήστε τα ερωτήματα του ψηφιακού προβλήματος.

4 • Προβλήματα πιθανοτήτων

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

• Να λύνουν προβλήματα χρησιμοποιώντας τους κανόνες λογισμού πιθανοτήτων.

Διερεύνηση



Σε ένα εργοστάσιο παραγωγής ηλεκτρονικών εξαρτημάτων, ο ποιοτικός έλεγχος σε μια παρτίδα παραγωγής έδειξε ότι κάποια εξαρτήματα είναι ελαττωματικά. Από αυτά, 2 στα 10 δεν είχαν την απαιτούμενη διάρκεια ζωής, 1 στα 3 υπερθερμαινόταν, ενώ 1 στα 5 δεν είχε την απαιτούμενη διάρκεια ζωής και υπερθερμαινόταν.

α. Αν Ω είναι ο δειγματικός χώρος των εξαρτημάτων, να κατασκευάσετε ένα διάγραμμα Venn, στο οποίο να καταγράφονται τα παραπάνω ενδεχόμενα.

β. Να υπολογίσετε την πιθανότητα ένα εξάρτημα να είναι ελαττωματικό.

γ. Αν το σύνολο των εξαρτημάτων που παρήχθησαν από το εργοστάσιο τη συγκεκριμένη ημέρα ήταν 300, να εκτιμήσετε πόσα μπορεί να ήταν ελαττωματικά.

Οργάνωση της διαδικασίας επίλυσης ενός προβλήματος

Για να λύσουμε ένα πρόβλημα στις πιθανότητες διαμορφώνουμε ένα μοντέλο, κάνοντας κάποιες παραδοχές. Για παράδειγμα, όταν ρίχνουμε ένα ζάρι και θέλουμε να προβλέψουμε πόσο πιθανό είναι να προκύψει μια ένδειξη, χωρίς να δίνεται καμία άλλη πληροφορία, τότε κάνουμε τις εξής παραδοχές:

α. Η ρίψη του ζαριού γίνεται με τυχαίο τρόπο.

β. Θεωρούμε ότι το ζάρι είναι αμερόληπτο, δηλαδή ότι όλες του οι πλευρές έχουν την ίδια πιθανότητα εμφάνισης, $\frac{1}{6}$.

Μια ενδεικτική πορεία για την επίλυση ενός προβλήματος πιθανοτήτων είναι:

α. Μελετούμε το πρόβλημα, διαβάζοντάς το αρκετές φορές, ώστε να κατανοήσουμε και να διαχωρίσουμε τα δεδομένα από τα ζητούμενα. Πολλές φορές είναι χρήσιμο για την κατανόηση του προβλήματος να δημιουργούμε ένα σχέδιο, ένα σχήμα, ένα διάγραμμα Venn ή ένα δενδροδιάγραμμα.

β. Καταγράφουμε τα δεδομένα και τα ζητούμενα.

γ. Επισημαίνουμε ποιες υποθέσεις έχουν γίνει ή ποιες πρέπει να κάνουμε εμείς για τα δεδομένα του προβλήματος (για παράδειγμα, αν πρόκειται για το στρίψιμο ενός νομίσματος και δεν αναφέρεται διαφορετικά, μπορούμε να υποθέσουμε ότι πρόκειται για «δίκαιο» νόμισμα, δηλαδή ότι όλες οι όψεις του έχουν την ίδια πιθανότητα να εμφανιστούν).

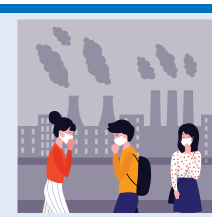
δ. Καταγράφουμε τον δειγματικό χώρο και τα ενδεχόμενα που εμπλέκονται στο πρόβλημα.

ε. Γράφουμε τα δεδομένα και τα ζητούμενα με τη βοήθεια των ενδεχομένων αυτών.

στ. Βρίσκουμε σχέσεις μεταξύ των ενδεχομένων που αξιοποιούν τα δεδομένα και προσδιορίζουν τα ζητούμενα.

ζ. Εφαρμόζουμε τους κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων προκειμένου να απαντήσουμε στα ερωτήματα που δίνονται.

Εφαρμογή 1



Τα αποτελέσματα των ετήσιων ελέγχων κατά τα τελευταία είκοσι έτη στα εργοστάσια μιας πόλης για την παραβίαση των ορίων ρύπων στην ατμόσφαιρα και λυμάτων, παρουσιάζονται στον πίνακα:

Επιλέγουμε τυχαία έναν έλεγχο από αυτούς που πραγματοποιήθηκαν. Να υπολογιστεί η πιθανότητα να έχει καταγραφεί:

α. “παραβίαση του ορίου ρύπων;”,

β. “παραβίαση του ορίου ρύπων και παραβίαση του ορίου λυμάτων;”, και

γ. “παραβίαση του ορίου ρύπων ή παραβίαση του ορίου λυμάτων;”.

	Παραβίαση ορίου ρύπων	Μη παραβίαση ορίου ρύπων	Σύνολο
Παραβίαση ορίου λυμάτων	180	120	300
Μη παραβίαση ορίου λυμάτων	70	480	550
Σύνολο	250	600	850

Απάντηση

Για να απαντήσουμε στα ερωτήματα, χρησιμοποιούμε τις πειραματικές πιθανότητες (σχετικές συχνότητες) που προκύπτουν από τα δεδομένα του πίνακα.

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα: Α: “παραβίαση ορίου ρύπων” και Β: “παραβίαση ορίου λυμάτων” του δειγματικού χώρου Ω των παραβάσεων, οπότε η πιθανότητα να έχει καταγραφεί:

α. παραβίαση του ορίου ρύπων είναι:

$$P(A) = \frac{\mathbf{250}}{\mathbf{850}} \approx 0{,}2941 \text{ ή περίπου } 29{,}41\%.$$

β. παραβίαση του ορίου ρύπων και παραβίαση του ορίου λυμάτων είναι:

$P(A\cap B) = \dfrac{\mathbf{180}}{\mathbf{850}} \approx 0{,}2117$ ή περίπου 21,17%.

γ. παραβίαση του ορίου ρύπων ή παραβίαση του ορίου λυμάτων είναι:

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = \frac{250}{850} + \frac{300}{850} - \frac{180}{850} = \frac{370}{850} \approx 0{,}4353 \text{ ή περίπου } 43{,}53\%.$$

Εφαρμογή 2

Σε μια έρευνα που έκανε η τροχαία σε έναν μεγάλο αριθμό οδηγών μια ημέρα σε έναν κεντρικό δρόμο, βρέθηκε ότι το 60% δεν φορούσε ζώνη ασφαλείας, το 50% οδηγούσε αυτοκίνητο με φθαρμένα λάστιχα και το 40% έκανε και τις δύο παραβάσεις.
Την επόμενη ημέρα, η τροχαία σταματάει στην τύχη έναν οδηγό στον ίδιο δρόμο.
Αν A το ενδεχόμενο «ο οδηγός δεν φοράει ζώνη ασφαλείας» και B το ενδεχόμενο «το αυτοκίνητο που οδηγεί έχει φθαρμένα λάστιχα», να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων: $A\cup B$, $A - B$, $A'\cup B'$, $A\cup B'$, $A'\cap B$.

Απάντηση

Επειδή η έρευνα έγινε σε μεγάλο αριθμό οδηγών, μπορούμε να θεωρήσουμε ως μια εκτίμηση των αντίστοιχων πιθανοτήτων τα ποσοστά των παραβάσεων που κατέγραψε η τροχαία. Έτσι, λοιπόν, έχουμε:
$P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}5$ και $P(A\cap B) = 0{,}4$, οπότε προκύπτουν τα ακόλουθα:

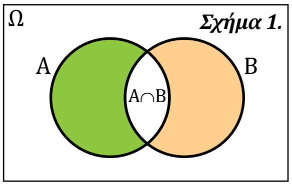
- $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = 0{,}6 + 0{,}5 - 0{,}4 = 0{,}7$.
- $P(A - B) = P(A) - P(A\cap B) = 0{,}6 - 0{,}4 = 0{,}2$ *(Πρόταση 4)*
- $P(A'\cup B') = P\big((A\cap B)'\big) = 1 - P(A\cap B) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$.
- $P(A\cup B') = P(A) + P(B') - P(A\cap B')$ και επειδή
  $P(A\cap B') = P(A - B) = 0{,}2$, $P(B') = 1 - P(B) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$, παίρνουμε:
  $P(A\cup B') = P(A) + P(B') - P(A\cap B') = 0{,}6 + 0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}9$.
- $P(A'\cap B) = P(B\cap A') = P(B - A) = P(B) - P(A\cap B) = 0{,}5 - 0{,}4 = 0{,}1$ (*Πρόταση 4*).

Εφαρμογή 3

Ένα νοσοκομείο ανέφερε ότι το 2023, μεταξύ των ασθενών που προσήλθαν με συμπτώματα ασθένειας, το 80% ελέγχθηκε για κορονοϊό, το 20% για γρίπη, ενώ το 10% αυτών και για τα δύο. Αν επιλέξουμε στην τύχη έναν από αυτούς τους ασθενείς, να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

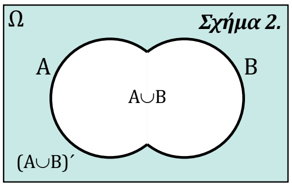
α. Ο/Η ασθενής να ελέγχθηκε για κορονοϊό, για γρίπη ή και για τα δύο.
β. Ο/Η ασθενής να ελέγχθηκε για κορονοϊό ή γρίπη, αλλά όχι και για τα δύο.
γ. Ο/Η ασθενής δεν ελέγχθηκε ούτε για γρίπη ούτε για κορονοϊό.

Απάντηση



Σχήμα 1.

α. Αν A το ενδεχόμενο να ελέγχθηκε για κορονοϊό και B για γρίπη, τότε το ζητούμενο ενδεχόμενο είναι το $A\cup B$. Δίνεται ότι $P(A) = 0{,}8$, $P(B) = 0{,}2$ και $P(A\cap B) = 0{,}1$ οπότε από τον προσθετικό νόμο (Πρόταση 5) παίρνουμε:
$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = 0{,}8 + 0{,}2 - 0{,}1 = 0{,}9$.



Σχήμα 2.

β. Το ζητούμενο ενδεχόμενο είναι “Ο/Η ασθενής να ελέγχθηκε μόνο για κορονοϊό ή μόνο για γρίπη”, δηλαδή το $(A - B)\cup(B - A)$.
Επειδή τα ενδεχόμενα $A - B$ και $B - A$ είναι ξένα μεταξύ τους, από τον απλό προσθετικό νόμο έχουμε:
$P((A - B)\cup(B - A)) = P(A - B) + P(B - A) = P(A) - P(A\cap B) + P(B) - P(A\cap B) = P(A) + P(B) - 2P(A\cap B)$.
Άρα: $P((A - B)\cup(B - A)) = 0{,}8 + 0{,}2 - 2\cdot(0{,}1) = 0{,}8$.

Σημείωση:

Εναλλακτικά, το ζητούμενο ενδεχόμενο όπως προκύπτει από το διάγραμμα Venn (Σχήμα 1), είναι $(A \cup B) - (A \cap B)$. Από την Πρόταση 4 έχουμε: $P((A \cup B) - (A \cap B)) = P(A \cup B) - P((A \cup B) \cap (A \cap B))$. (1)
Εξάλλου $(A \cap B) \subseteq (A \cup B)$ (Σχήμα 1) και επομένως από την (1) παίρνουμε:
$P((A \cup B) - (A \cap B)) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0{,}9 - 0{,}1 = 0{,}8$.

γ. Το ζητούμενο ενδεχόμενο, όπως προκύπτει και από το διάγραμμα Venn (Σχήμα 2), είναι το $A' \cap B' = (A \cup B)'$, οπότε: $P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$.

Εφαρμογή 4 (Προσομοίωση)

Η πιθανότητα να κερδίσει ο Πέτρος ένα επιτραπέζιο παιχνίδι είναι 60% και ένα παιχνίδι με χαρτιά 20%. Να εκτιμήσετε με τη βοήθεια μιας προσομοίωσης την πιθανότητα ο Πέτρος:

α. Να κερδίσει και στους δύο τύπους παιχνιδιών που θα παίξει με την παρέα του.
β. Να κερδίσει τουλάχιστον σε ένα από τα δύο παιχνίδια.
γ. Να κερδίσει μόνο σε ένα από τα δύο παιχνίδια.

Απάντηση

α. Έστω Α το ενδεχόμενο να κερδίσει ο Πέτρος σε ένα επιτραπέζιο παιχνίδι και Β το ενδεχόμενο να κερδίσει σε ένα παιχνίδι με χαρτιά. Ξέρουμε ότι $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}2$ και αναζητάμε την πιθανότητα $P(A \cap B)$.
Τα δεδομένα αυτά όμως δεν είναι αρκετά για να βρούμε την ζητούμενη πιθανότητα με τους κανόνες λογισμού.
Επειδή ζητείται εκτίμηση και όχι υπολογισμός, σε περιπτώσεις όπως αυτές μπορούμε να σχεδιάσουμε και να χρησιμοποιήσουμε μια κατάλληλη προσομοίωση.
Μια προσομοίωση που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι να βρούμε αρκετούς διψήφιους τυχαίους αριθμούς (π.χ. 09, 12, 14, ...), θεωρώντας ότι όσοι από αυτούς έχουν ψηφίο δεκάδων αριθμό από 1 έως 6 και ψηφίο μονάδων 1 ή 2 αναπαριστούν τη νίκη του Πέτρου και στα δύο παιχνίδια και επομένως είναι στοιχεία του ενδεχομένου $A \cap B$.
Αρκεί πλέον να βρούμε αρκετούς διψήφιους τυχαίους αριθμούς με τα ψηφία από 0 έως 9. Αυτό μπορεί να γίνει με ένα πίνακα τυχαίων αριθμών, όπως αυτός που παρατίθεται στο τέλος του βιβλίου και περιγράφεται στο συμπληρωματικό υλικό ή με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής στον διπλανό σύνδεσμο.
Δημιουργούμε λοιπόν 50 τέτοιους τυχαίους διψήφιους αριθμούς οι οποίοι παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

- Επιλέγουμε διψήφιους αριθμούς γιατί θέλουμε να δούμε τι συμβαίνει σε δύο παιχνίδια.
- Η επιλογή αναπαράστασης των έξι ψηφίων από 1 έως 6 στη θέση των δεκάδων γίνεται γιατί η πιθανότητα να κερδίσει ο Πέτρος στο ένα από τα δύο παιχνίδια (επιτραπέζιο) είναι 60% ή 6 στις 10 φορές. Η πιθανότητα 60% αναπαρίσταται επιλέγοντας έξι από τα δέκα ψηφία (0 έως 9).
- Η επιλογή αναπαράστασης των δύο ψηφίων από 1 ή 2 στη θέση των μονάδων έγινε γιατί η πιθανότητα να κερδίσει ο Πέτρος στο άλλο από τα δύο παιχνίδια (παιχνίδι χαρτιών) είναι 20% ή 2 στις 10 φορές. Η πιθανότητα αυτή αναπαρίσταται με την επιλογή δύο από τα δέκα ψηφία (0 έως 9).

Στην ψηφιακή εφαρμογή δημιουργήστε δικό σας πίνακα τυχαίων διψήφιων αριθμών.

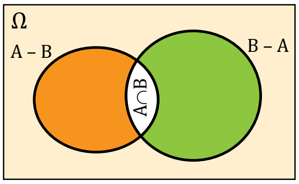
70	27	66	**32**	58	99	67	76	**21**	71
87	20	3	3	28	8	75	**21**	56	57
13	**32**	**12**	29	80	**62**	54	97	68	14
43	55	63	90	**11**	**12**	64	87	57	98
28	20	97	18	28	58	63	95	0	58

Από τον πίνακα βρίσκουμε ότι υπάρχουν 8 διψήφιοι αριθμοί με τα παραπάνω χαρακτηριστικά (ευνοϊκές περιπτώσεις) και επομένως η πειραματική πιθανότητα για το ενδεχόμενο Α∩Β είναι $P(A \cap B) = \frac{8}{50} = 0{,}16$.
Επομένως, μια εκτίμηση για την πιθανότητα να κερδίσει ο Πέτρος και στους δύο τύπους παιχνιδιών που θα παίξει με την παρέα του είναι 0,16 ή 16%.

Σημείωση

Αν πάρουμε άλλο δείγμα, τότε θα βρούμε μια άλλη εκτίμηση. Ωστόσο, όσο μεγαλώνει ο αριθμός των δοκιμών (επαναλήψεων - πειραμάτων) τόσο βελτιώνεται η εκτίμηση (Νόμος Μεγάλων Αριθμών).

β. Αναζητάμε την πιθανότητα $P(A \cup B)$, οπότε από τον προσθετικό νόμο παίρνουμε:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}6 + 0{,}2 - 0{,}16 = 0{,}64$ ή 64%.



γ. Αναζητάμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $(A - B) \cup (B - A)$ και επειδή τα ενδεχόμενα $A - B$ και $B - A$ είναι ασυμβίβαστα, έχουμε:
$P\big((A - B) \cup (B - A)\big) = P(A - B) + P(B - A)$. (1)

Από την Πρόταση 4 ή από το διάγραμμα έχουμε:

$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}6 - 0{,}16 = 0{,}44$ και
$P(B - A) = P(B) - P(B \cap A) = 0{,}2 - 0{,}16 = 0{,}04$.

Επομένως από την (1) παίρνουμε:
$P\big((A - B) \cup (B - A)\big) = P(A - B) + P(B - A) = 0{,}44 + 0{,}04 =$ 0,48 ή 48%.

Στην ψηφιακή δραστηριότητα **Εννοιολόγιο-γλωσσάριο** πιθανοτήτων, μπορείτε να περιηγηθείτε σε μία σύνοψη των εννοιών του κεφαλαίου.

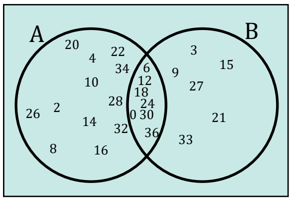
Εφαρμογή 5

Μία ρουλέτα αποτελείται από έναν κυκλικό περιστρεφόμενο δίσκο, ο οποίος είναι χωρισμένος σε αριθμημένες θέσεις, όπου μπορεί να σταθεροποιηθεί μία μπίλια που κινείται ελεύθερα όσο περιστρέφεται. Περιφερειακά, σε ίσες αποστάσεις περιέχεται το μηδέν και οι αριθμοί 1 έως 36 σε αντίστοιχες θέσεις.
Σε κάθε περιστροφή της ρουλέτας, η μπίλια σταματά σε έναν μόνο αριθμό. Να βρεθεί η πιθανότητα του ενδεχομένου η μπίλια να σταματήσει:

α. σε ζυγό αριθμό,
β. σε ζυγό αριθμό, ο οποίος να διαιρείται από το 3,
γ. σε αριθμό ο οποίος να διαιρείται από το 3 ή από το 2,
δ. σε αριθμό ο οποίος να διαιρείται από το 3 και όχι από το 2.

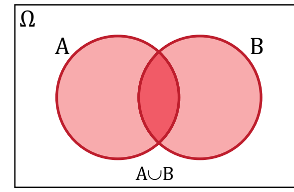
Απάντηση

α. Ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος τύχης είναι $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots, 36\}$ και αποτελείται από 37 απλά ενδεχόμενα, δηλαδή $N(\Omega) = 37$.
Το ενδεχόμενο "το αποτέλεσμα να είναι ζυγός αριθμός" είναι $A = \{0, 2, 4, \ldots, 36\}$ και το πλήθος των στοιχείων του είναι 19, δηλαδή $N(A) = 19$.
Επειδή τα ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα, από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας παίρνουμε:



$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{19}{37} \approx 0{,}5135$ ή περίπου 51,35%.

β. Το σύνολο των ζυγών αριθμών του Ω είναι $A = \{0, 2, 4, \ldots 36\}$ και το σύνολο των πολλαπλασίων του 3 είναι $B = \{0, 3, 6, \ldots, 36\}$, με $N(B) = 13$.
Το ζητούμενο ενδεχόμενο είναι $A \cap B = \{0, 6, 12, 18, 24, 30, 36\}$ με $N(A \cap B) = 7$ και επομένως η πιθανότητα να σταματήσει η μπίλια σε ζυγό αριθμό, ο οποίος να διαιρείται από το 3 είναι: $P(A \cap B) = \frac{7}{37} \approx 0{,}1892$ ή περίπου 18,92%.



γ. Το ενδεχόμενο ο αριθμός που θα προκύψει να διαιρείται από το 2 ή από το 3, είναι το ενδεχόμενο Α∪Β. Τα ενδεχόμενα Α και Β δεν είναι ξένα μεταξύ τους, αφού, για παράδειγμα, ο αριθμός 6 διαιρείται από το 2 και από το 3. Άρα η πιθανότητα του ενδεχομένου αυτού από τον προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων είναι:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{19 + 13 - 7}{37} = \frac{25}{37} \approx 0{,}6757$ ή περίπου 67,57%.

Εναλλακτικά, μπορούμε να ελέγξουμε και να μετρήσουμε όλους τους αριθμούς που διαιρούνται από το 2 ή το 3.

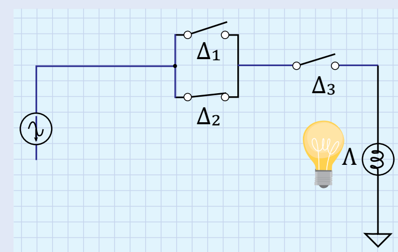
δ. Ένα στοιχείο του Ω, για να διαιρείται από το 3 και όχι από το 2, πρέπει να ανήκει στο ενδεχόμενο Β και όχι στο Α. Άρα, ζητείται η πιθανότητα του ενδεχομένου Β – Α, οπότε από την Πρόταση 4 έχουμε:

$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{13}{37} - \frac{7}{37} = \frac{13 - 7}{37} = \frac{6}{37} \approx 0{,}1622$ ή περίπου 16,22%.

Σημείωση

Εναλλακτικά, Β – Α = {3, 9, 15, 21, 27, 33}, οπότε $P(B - A) = \frac{6}{37}$.

Εφαρμογή 6



Στο διπλανό σχήμα απεικονίζεται το σχεδιάγραμμα ενός ηλεκτρικού κυκλώματος. Η λάμπα Λ που υπάρχει στο κύκλωμα θα ανάψει, αν τουλάχιστον ένας από τους διακόπτες $Δ_1$ ή $Δ_2$ είναι κλειστός και ο διακόπτης $Δ_3$ είναι, επίσης, κλειστός. Το μηδέν (0) αντιστοιχεί σε διακόπτη ανοιχτό από τον οποίο δεν διέρχεται ρεύμα και το ένα (1) σε διακόπτη κλειστό από τον οποίο διέρχεται ρεύμα. Μια διατεταγμένη τριάδα (α,β,γ) περιγράφει την κατάσταση των τριών διακοπτών στη σειρά. Για παράδειγμα, η τριάδα (1, 0, 1) αντιστοιχεί σε κλειστό διακόπτη $Δ_1$, σε ανοιχτό διακόπτη $Δ_2$ και σε κλειστό διακόπτη $Δ_3$.
Πατάμε στην τύχη τους τρεις διακόπτες, χωρίς να γνωρίζουμε την προηγούμενη κατάστασή τους και χωρίς να βλέπουμε τη λάμπα.

1. Να καταγράψετε τον δειγματικό χώρο του πειράματος τύχης.

2. Αν Α, Β και Γ συμβολίσουμε τα ενδεχόμενα να είναι κλειστοί οι διακόπτες $Δ_1$, $Δ_2$ και $Δ_3$, αντίστοιχα.
 α. Να γράψετε με αναγραφή τα ενδεχόμενα Α, Β, Γ.
 β. Να εκφράσετε με τη βοήθεια των Α, Β, Γ το ενδεχόμενο Λ: "η λάμπα Λ ανάβει".

3. Να υπολογίσετε με δύο τρόπους την πιθανότητα, αν πατήσουμε στην τύχη τους διακόπτες, να ανάψει η λάμπα Λ αυτού του κυκλώματος.

Απάντηση

1. Εφόσον οι διατεταγμένες τριάδες (α, β, γ) αναπαριστούν την κατάσταση των διακοπτών $Δ_1$, $Δ_2$,$Δ_3$, αντίστοιχα και η κατάσταση των διακοπτών αυτών επιλέγεται με τυχαίο τρόπο, ο δειγματικός χώρος του πειράματος τύχης θα αποτελείται από οχτώ απλά ενδεχόμενα, τα οποία προσδιορίζονται με ένα δενδροδιάγραμμα και είναι:
Ω = {(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 0, 0)}.

2. α. Είναι: Α = {(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1), (1, 0, 1)}, Β={(1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 0)} και Γ={(1,1,1), (1,0,1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)}.

 β. Για να ανάβει η λάμπα Λ, θα πρέπει τουλάχιστον ένας από τους διακόπτες $Δ_1$, $Δ_2$ να είναι κλειστός, ώστε να επιτρέπει τη διέλευση ρεύματος, δηλαδή θα πρέπει να πραγματοποιείται τουλάχιστον ένα από τα ενδεχόμενα Α και Β. Αυτό αντιστοιχεί στην πραγματοποίηση της ένωσης των ενδεχομένων Α, Β, δηλαδή στην πραγματοποίηση του ενδεχομένου Α∪Β.

Για να ανάψει όμως η λάμπα, πρέπει ταυτόχρονα και ο διακόπτης $Δ_3$ να είναι κλειστός, ώστε να διέρχεται ρεύμα και από αυτόν, δηλαδή, θα πρέπει να πραγματοποιείται και το ενδεχόμενο Γ.
Άρα, Λ= (Α∪Β)∩Γ.

3. α. Από την αναγραφή των ενδεχομένων Α, Β, Γ έχουμε: Λ = (Α∪Β)∩Γ = {(1, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 1, 1)} και επειδή $N(Ω) = 8$, παίρνουμε $P(Λ) = \frac{3}{8}$.

β. Από τον προσθετικό νόμο έχουμε:

$P(\Lambda) = P((A\cup B)\cap \Gamma) = P(A\cup B) + P(\Gamma) - P((A\cup B)\cup \Gamma) = P(A\cup B) + P(\Gamma) - P(A\cup B\cup \Gamma)$.

Εξάλλου: $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = \frac{4}{8} + \frac{4}{8} - \frac{2}{8} = \frac{6}{8}$ και $P((A\cup B)\cup \Gamma) = \frac{7}{8}$,

οπότε και με αυτό τον τρόπο βρίσκουμε ότι:

$P(\Lambda) = P((A\cup B)\cap \Gamma) = P(A\cup B) + P(\Gamma) - P(A\cup B)\cup \Gamma) = \frac{6}{8} + \frac{4}{8} - \frac{7}{8} = \frac{3}{8}$.

Άρα, η πιθανότητα να ανάψει η λάμπα Λ του κυκλώματος πατώντας στην τύχη τους διακόπτες Δ_1, Δ_2 ,Δ_3 είναι $P(\Lambda) = \frac{3}{8} = 0{,}375$ ή 37,5%.

Αυτοαξιολόγηση

α. Αν ρίξουμε ένα νόμισμα δύο φορές, τότε μπορεί να έρθει μία φορά «γράμματα», δύο φορές «γράμματα» ή καμία φορά «γράμματα». Άρα, ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι $\Omega = \{0, 1, 2\}$ και τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα. Σωστό ή λάθος και γιατί;

β. Αν δύο ενδεχόμενα Α,Β είναι ξένα μεταξύ τους, τότε και τα συμπληρωματικά τους A', B' είναι ξένα μεταξύ τους. Σωστό ή λάθος και γιατί;

γ. Αν $P(A) = 0$ και τα απλά ενδεχόμενα δεν είναι ισοπίθανα, τότε ισχύει πάντα ότι: $A= \emptyset$. Σωστό ή λάθος και γιατί;

δ. Αν $P(A) = P(B)$, ισχύει πάντα ότι: $A = B$. Σωστό ή λάθος και γιατί;

ε. Αν για τα ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου ισχύει ότι $P(A) = 0{,}6$ και $P(B) = 0{,}3$, τότε μπορεί να είναι $P(A\cap B) = 0{,}5$;

στ. Αν για τα ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου ισχύει ότι $P(A\cap B) = 0$, τότε $P(A - B) = P(A)$. Σωστό ή λάθος και γιατί.

ζ. Αν τα ενδεχόμενα Α, Β είναι ασυμβίβαστα, τότε $P(A') + P(B') \geq 1$. Σωστό ή λάθος και γιατί;

η. Αν τα ενδεχόμενα Α, Β είναι ασυμβίβαστα, τότε $P(A)+P(B)=1{,}01$. Σωστό ή λάθος και γιατί;

θ. Αν για δύο ενδεχόμενα Α, Β ισχύει ότι $A \subseteq B$, τότε:
i. $A\cap B = B$ **ii.** $A\cup B = B$ **iii.** $A\cap B = A$ **iv.** $A\cup B = A$ **v.** $P(B - A) = P(B) - P(A)$
Να κυκλώσετε τις σωστές απαντήσεις και να εξηγήσετε γιατί.

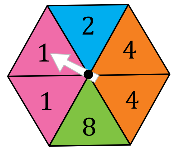
ι. Αν $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ και $P(A\cap B) = \frac{5}{12}$, τότε η $P(A\cup B)$ είναι:
i. $\frac{1}{12}$. **ii.** $\frac{1}{3}$. **iii.** 0,4. **iv.** $\frac{1}{6}$.
Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση και να εξηγήσετε γιατί.

ια. Αν Α, Β δύο ενδεχόμενα, τότε:
i. $P(A - B) + P(B - A) + P(A\cap B) = P(A\cup B)$. **ii.** $P(A) + P(B) = P(A\cup B) + P(A\cap B)$.
Σωστό ή λάθος και γιατί;

Για να αξιολογήσετε τις γνώσεις σας στις πιθανότητες, να ανοίξετε την ψηφιακή εφαρμογή.

Ασκήσεις

1. Περιστρέφουμε τον διπλανό τροχό της τύχης. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:



α. να έρθει μπλε,
β. να έρθει πράσινο,
γ. να έρθει πορτοκαλί,
δ. να έρθει μπλε ή ροζ,
ε. να έρθει 1 ή 2,
στ. να έρθει 2 ή 4,
ζ. να μην έρθει 2, ούτε πράσινο.

2. Τα αποτελέσματα μιας μελέτης στο τέλος του έτους, σε μια πόλη για τα ετήσια αυτοκινητιστικά ατυχήματα σε σχέση με τους παράγοντες "χρήση κινητού τηλεφώνου" και "παραβίαση ορίου ταχύτητας" παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα:

	Παραβίαση ορίου ταχύτητας	Μη Παραβίαση ορίου ταχύτητας	Σύνολο
Χρήση κινητού τηλεφώνου	400	300	700
Μη χρήση κινητού τηλεφώνου	200	200	400
Σύνολο	600	500	1100

α. Ποια είναι η πιθανότητα σε ένα αυτοκινητιστικό ατύχημα που συνέβη στην πόλη να έγινε χρήση κινητού ή μη παραβίαση ταχύτητας;
β. Ποια είναι η πιθανότητα σε ένα αυτοκινητιστικό ατύχημα που συνέβη στην πόλη να έγινε παραβίαση ταχύτητας ή μη χρήση κινητού;

3. Σε ένα εργοστάσιο παραγωγής κινητών τηλεφώνων, ο ποιοτικός έλεγχος σε μια παρτίδα παραγωγής έδειξε ότι σε κάποια κινητά παρουσιάζονταν τα προβλήματα: "έκλειναν ξαφνικά", "έκαναν διακοπές". Από αυτά, 1 στα 10 έκλεινε ξαφνικά, 1 στα 5 έκανε διακοπές, ενώ 1 στα 20 έκλεινε ξαφνικά και έκανε διακοπές.

α. Αν Ω είναι ο δειγματικός χώρος των κινητών τηλεφώνων, να κατασκευάσετε ένα διάγραμμα Venn, στο οποίο να καταγράφονται τα παραπάνω ενδεχόμενα.

β. Να βρείτε την πιθανότητα ένα κινητό να παρουσιάζει πρόβλημα.
γ. Αν το σύνολο των κινητών που παρήχθησαν από το εργοστάσιο τη συγκεκριμένη ημέρα ήταν 500, να εκτιμήσετε πόσα από αυτά μπορεί να παρουσίαζαν πρόβλημα.

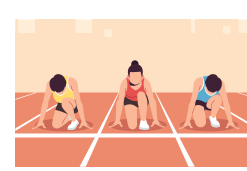
4. Σε μια έρευνα που έκανε ο ιατρικός σύλλογος σε έναν μεγάλο αριθμό υπερηλίκων μιας πόλης βρέθηκε ότι το 40% είχε καταρράκτη, το 30% αυξημένη πίεση και το 20% και τα δύο.

Αν Α το ενδεχόμενο "έχει καταρράκτη", Β το ενδεχόμενο "έχει αυξημένη πίεση" και επιλεχθεί τυχαία ένας υπερήλικας στην πόλη αυτή, να υπολογισθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων:
$A\cup B$, $A - B$, $A'\cup B'$, $A\cup B'$, $A'\cap B$.

5. Το Ινστιτούτο του Καταναλωτή ανακοίνωσε ότι σε έλεγχο που έγινε στις τιμές στα σουπερμάρκετ μιας πόλης το 2024, το 20% δεν είχαν ενημερωμένες τιμές, το 10% δεν είχαν ταμπέλες με τις τιμές των προϊόντων και το 5% και τα δύο. Αν επιλέξουμε στην τύχη ένα σουπερμάρκετ αυτής της πόλης, να βρείτε τις πιθανότητες:

α. Το σουπερμάρκετ να μην είχε ενημερωμένες τιμές ή να μην είχαν όλα τα προϊόντα ταμπέλες με τιμές ή και τα δύο.
β. Το σουπερμάρκετ να μην είχε ενημερωμένες τιμές ή να μην είχαν όλα τα προϊόντα ταμπέλες με τιμές, αλλά όχι και τα δύο.
γ. Το σουπερμάρκετ να είχε ενημερωμένες τιμές και να είχαν όλα τα προϊόντα ταμπέλες με τιμές.

6. Η Αμαλία συμμετέχει σε αγώνες δρόμου 100 και 400 μέτρων. Η πιθανότητα να κερδίσει στα 100 μέτρα είναι 80% και στα 400 μέτρα 50%. Να εκτιμήσετε με τη βοήθεια μιας προσομοίωσης την πιθανότητα η Αμαλία:



α. Να κερδίσει και στους δύο αγώνες δρόμου που θα συμμετάσχει.
β. Να κερδίσει τουλάχιστον σε έναν από τους δύο αγώνες δρόμου.

γ. Να κερδίσει μόνο σε έναν από τους δύο αγώνες δρόμου.

7. Στους ημιτελικούς αγώνες ποδοσφαίρου του Champions League βρέθηκαν δύο αγγλικές και δύο ισπανικές ομάδες και γίνεται κλήρωση για το ζευγάρι των ομάδων που θα παίξουν πρώτοι μεταξύ τους.

α. Να βρείτε όλα τα δυνατά ζεύγη ομάδων που μπορεί να προκύψουν με ένα δενδροδιάγραμμα ή με έναν πίνακα διπλής εισόδου.

β. Να βρείτε έναν δειγματικό χώρο με ισοπίθανα αποτελέσματα και στη συνέχεια να βρείτε την πιθανότητα να κληρωθεί:

i. Μία αγγλική ομάδα.
ii. Δύο αγγλικές ομάδες.
iii. Καμία αγγλική ομάδα.

γ. Να βρείτε έναν δειγματικό χώρο με μη ισοπίθανα αποτελέσματα και στη συνέχεια να βρείτε την πιθανότητα να κληρωθεί:

i. Μία αγγλική ομάδα.
ii. Δύο αγγλικές ομάδες.
iii. Καμία αγγλική ομάδα.
iv. Μία τουλάχιστον αγγλική ομάδα.

8. Ένας παίκτης του μπάσκετ έχει ποσοστό επιτυχίας 70% στα δίποντα και 20% στα τρίποντα. Να εκτιμήσετε, με τη βοήθεια μιας προσομοίωσης, την πιθανότητα ο παίκτης σε δύο προσπάθειες για σουτ (τριών και δύο πόντων):

α. Να πετύχει ένα δίποντο και ένα τρίποντο.
β. Να πετύχει τουλάχιστον ένα δίποντο ή ένα τρίποντο.
γ. Να πετύχει μόνο ένα δίποντο ή μόνο ένα τρίποντο.

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε έναν πίνακα τυχαίων αριθμών, όπως παρουσιάζεται στο συμπληρωματικό υλικό.

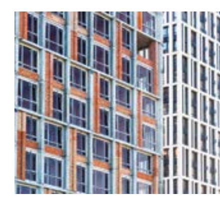
9. Μία φράση ονομάζεται «καρκινική» ή «παλίνδρομη» αν μπορεί να διαβαστεί με τον ίδιο τρόπο είτε από τα αριστερά προς τα δεξιά είτε από τα δεξιά προς τα αριστερά. Αν δίνεται η μισή από τα αριστερά προς τα δεξιά φράση:

«ΝΙΨΟΝ ΑΝΟΜΗΜΑ -Τ- ____________» ,[1]

όπου το μεσαίο γράμμα Τ δεν περιλαμβάνεται σε κανένα από τα δύο μέρη της φράσης, τότε:

α. Να υπολογίσετε την πιθανότητα, αν επιλέξουμε τυχαία ένα γράμμα της φράσης, τότε αυτό να είναι Ψ, χωρίς να συμπληρώσετε τη φράση.
β. Να συμπληρώσετε το υπόλοιπο μέρος της φράσης.
γ. Αν η πιθανότητα ένα γράμμα που επιλέγεται τυχαία από ολόκληρη τη φράση να είναι φωνήεν είναι ίση με 48%, να υπολογίσετε την πιθανότητα να είναι σύμφωνο.

10. Η πιθανότητα ένας κάτοικος διαμερίσματος πολυκατοικίας να χρειαστεί κατά τη διάρκεια ενός έτους υδραυλικό είναι 25% και ηλεκτρολόγο 15%. Να εκτιμήσετε, με τη βοήθεια προσομοίωσης, την πιθανότητα ο κάτοικος σε δύο διαδοχικά έτη:



α. Να χρειαστεί έναν υδραυλικό και έναν ηλεκτρολόγο.
β. Να χρειαστεί τουλάχιστον έναν υδραυλικό ή έναν ηλεκτρολόγο.
γ. Να χρειαστεί μόνο υδραυλικό ή μόνο ηλεκτρολόγο.

Για τη δημιουργία πίνακα διψήφιων αριθμών και σχετική βοήθεια μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την ψηφιακή εφαρμογή.

[1]Η φράση αποδίδεται στον Άγιο Γρηγόριο τον Ναζιανζηνό και προτρέπει «να πλένουμε τις αμαρτίες μας και όχι μόνο το πρόσωπό μας». Γράφτηκε για πρώτη φορά έξω από την Αγία Σοφία, στην Κωνσταντινούπολη. Εδώ, απεικονίζεται σε μια βρύση στην Ιερά Μονή Μαλεβής Αρκαδίας.

Ανακεφαλαίωση Πιθανοτήτων

- **Πείραμα** είναι η μεθοδική αναπαραγωγή ενός φαινομένου με σκοπό τον έλεγχο μιας θεωρητικής γνώσης ή την ανακάλυψη των αιτίων που το προκαλούν. Τα πειράματα διακρίνονται σε αιτιοκρατικά και σε στοχαστικά. Για παράδειγμα, η μέτρηση της θερμοκρασίας του νερού που βράζει είναι ένα αιτιοκρατικό πείραμα, καθώς ο βρασμός του νερού οφείλεται στην αύξηση της θερμοκρασίας και συμβαίνει κάθε φορά που η θερμοκρασία φτάνει στους $100^{o}C$.
  Το αποτέλεσμα της ρίψης ενός νομίσματος είναι ένα **στοχαστικό πείραμα**, γιατί δεν είναι γνωστό το αποτέλεσμα (κεφαλή ή γράμματα) κάθε φορά που στρίβουμε το νόμισμα.
- **Πείραμα τύχης** είναι ένα πείραμα το οποίο μπορεί να επαναληφθεί όσες φορές θέλουμε, υπό τις ίδιες (φαινομενικά τουλάχιστον) συνθήκες, αλλά δεν μπορούμε να προβλέψουμε το αποτέλεσμα. Για παράδειγμα, η ρίψη ενός ζαριού είναι ένα πείραμα τύχης. Μπορούμε να ρίξουμε όσες φορές θέλουμε ένα ζάρι, αλλά δεν μπορούμε να προβλέψουμε ποιος αριθμός θα εμφανισθεί, ακόμα κι αν γνωρίζουμε ότι ο αριθμός θα είναι μεταξύ των 1, 2, 3, 4, 5 ή 6.
- **Δειγματικός χώρος** ενός πειράματος τύχης ονομάζεται το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων και συμβολίζεται με Ω.
- **Ενδεχόμενο** ή **συμβάν** ονομάζεται κάθε υποσύνολο ενός δειγματικού χώρου.
- **Βέβαιο ενδεχόμενο** λέγεται το ενδεχόμενο Ω, διότι πραγματοποιείται σε κάθε εκτέλεση ενός πειράματος.
- **Αδύνατο ενδεχόμενο** ενός δ.χ. λέγεται το ενδεχόμενο το οποίο δεν περιέχει κανένα από τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος τύχης, οπότε δεν πραγματοποιείται ποτέ και συμβολίζεται με $\emptyset$ ή $\{\ \}$.
- **Απλό ενδεχόμενο** ενός δ.χ. λέγεται ένα ενδεχόμενο όταν έχει ένα μόνο στοιχείο. Για παράδειγμα, το $B = \{1\}$ στη ρίψη ενός ζαριού.
- **Σύνθετο ενδεχόμενο** ενός δ.χ. λέγεται ένα ενδεχόμενο Α, το οποίο αποτελείται από περισσότερα του ενός απλά ενδεχόμενα. Για παράδειγμα, το $A = \{1, 2, 3\}$ στη ρίψη ενός ζαριού.
- **Ασυμβίβαστα** ή **ξένα μεταξύ τους** ονομάζονται δύο ενδεχόμενα Α και Β, όταν δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα, δηλαδή, όταν δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο και επομένως ισχύει ότι: $A \cap B = \emptyset$.
- **Κλασικός ορισμός πιθανότητας**: $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{\text{Πλήθος Ευνοϊκών Περιπτώσεων}}{\text{Πλήθος Δυνατών Περιπτώσεων}}$.
- **Αξιωματικός ορισμός πιθανότητας**

  Σε κάθε ενδεχόμενο Α ενός πεπερασμένου δειγματικού χώρου Ω αντιστοιχίζουμε έναν μοναδικό πραγματικό αριθμό P(A), ο οποίος ονομάζεται ***πιθανότητα του ενδεχομένου Α***, όταν ικανοποιούνται τα ακόλουθα τρία αξιώματα:

  1. $0 \le P(A)$, για κάθε $A \subseteq \Omega$.
  2. $P(\Omega) = 1$.
  3. Για οποιαδήποτε Α, Β ξένα (ασυμβίβαστα) μεταξύ τους ενδεχόμενα του Ω, ισχύει ο απλός προσθετικός νόμος. Δηλαδή, αν $A, B \subseteq \Omega$, με $A \cap B = \emptyset$, τότε $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- Προσθετικός νόμος: $\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$.

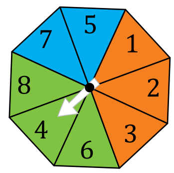
Για μια επανάληψη στις έννοιες των Πιθανοτήτων, ανοίξτε την ψηφιακή εφαρμογή.

Για μια επανάληψη στις έννοιες των Στοχαστικών Μαθηματικών, ανοίξτε την εφαρμογή.

Ασκήσεις ανακεφαλαίωσης

1. Περιστρέφουμε τον διπλανό τροχό της τύχης. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

α. να έρθει μπλε,
β. να έρθει πράσινο,
γ. να έρθει πορτοκαλί,
δ. να έρθει μπλε ή πράσινο,
ε. να έρθει αριθμός μικρότερος από το 3 και πορτοκαλί,
στ. να έρθει άρτιος και πράσινο,
ζ. να μην έρθει πορτοκαλί ούτε μπλε.



2. Αν Α, Β είναι δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, τότε να αποδείξετε ότι:
α. $A \subseteq B'$.
β. $P(A) + P(B) \leq 1$.

3. Αν για τα ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου ισχύει ότι $P(A) = 0{,}7$ και $P(B) = 0{,}8$, να αποδειχθεί ότι $0{,}5 \leq P(A \cap B) \leq 0{,}7$.

4. Δύο μαθητές ρίχνουν ταυτόχρονα από ένα ζάρι και σημειώνουν τη διαφορά Δ της μικρότερης από τη μεγαλύτερη ένδειξη. Αν $\Delta \in \{0, 1, 2\}$, κερδίζει ο πρώτος μαθητής, ενώ αν $\Delta \in \{3, 4, 5\}$, κερδίζει ο δεύτερος μαθητής.

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

α. Να καταγράψετε τον δειγματικό χώρο του πειράματος τύχης «ρίψη δύο ζαριών ταυτόχρονα».
β. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες νίκης κάθε παίκτη.

5. Υποθέτουμε ότι οι ομάδες αίματος Α, Β, Ο, ΑΒ κατανέμονται στον πληθυσμό σε ποσοστά 40%, 14%, 43% και 3%, αντίστοιχα. Είναι γνωστό ότι ένας ασθενής με ομάδα αίματος Α μπορεί να λάβει αίμα μόνο από τις ομάδες Ο και Α. Αν υποθέσουμε ότι ένας εθελοντής αιμοδότης έρχεται να δώσει αίμα για ασθενή της ομάδας Α, τότε ποια είναι η πιθανότητα να είναι το αίμα συμβατό;

6. Μέσα σε ένα ποτήρι υπάρχει ένα ζάρι και ένα κέρμα. Παίρνετε το ποτήρι στο χέρι σας, κλείνετε την ανοικτή πλευρά και το ανακινείτε καλά. Στο τέλος, το γυρίζετε ανάποδα και αφήνετε το κέρμα και το ζάρι να πέσουν στο τραπέζι και καταγράφετε την ένδειξη του ζεύγους κέρμα – ζάρι.

α. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου Α: “κεφαλή και άρτιος”.
β. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου Α: “κεφαλή και άρτιος” ή Β: “γράμματα και περιττός”.

7. Η πιθανότητα να επανέλθει στον επόμενο αγώνα ένας ποδοσφαιριστής που τραυματίστηκε, προς την πιθανότητα να μην επιστρέψει στον επόμενο αγώνα είναι $\frac{1}{2}$. Να βρεθεί η πιθανότητα ο παίκτης να επιστρέψει στον επόμενο αγώνα.

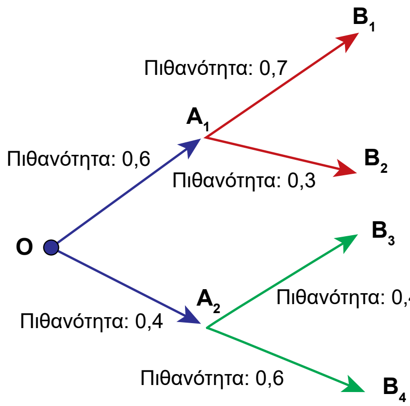
8. Δύο μαθητές ρίχνουν ένα νόμισμα τρεις φορές και καταγράφουν τα διαφορετικά αποτελέσματα. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:
α. Α: “τρεις φορές γράμματα”.
β. Β: “τουλάχιστον δύο φορές γράμματα”.
γ. Γ: “το ίδιο αποτέλεσμα και στις τρεις ρίψεις”.
δ. $A \cap B$ και $A - B$.
ε. Να μην συμβεί κανένα από τα ενδεχόμενα Β και Γ.

9. Δίνεται η παράσταση $M = \frac{1}{P(A)} + \frac{1}{P(A')}$, όπου P(A) η πιθανότητα ενός ενδεχομένου Α.
α. Να βρείτε για ποιες τιμές P(A) ορίζεται η παράσταση Μ.
β. Να αποδείξετε ότι $M \geq 4$.

10. Σε μια σακούλα υπάρχουν μαύρες, κόκκινες και λευκές μπάλες. Παίρνουμε μία στην τύχη. Αν η πιθανότητα να είναι λευκή είναι 0,6, η πιθανότητα να είναι μαύρη είναι $\frac{x-1}{x+1}$ και η πιθανότητα να είναι λευκή ή μαύρη είναι 0,8, τότε να βρεθεί:
α. Η τιμή του x.
β. Η πιθανότητα να είναι μαύρη.
γ. Η πιθανότητα να είναι κόκκινη.

11. Θεωρούμε το σύνολο των ισοπίθανων απλών ενδεχομένων $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ και την εξίσωση $x^2 - 5x + \kappa = 0$, $\kappa \in \Omega$. Να βρεθεί η πιθανότητα να είναι οι ρίζες της εξίσωσης ρητοί αριθμοί.

12. Χίλια τρωκτικά εισέρχονται σε έναν λαβύρινθο, στον οποίο μπορούν να ακολουθήσουν τις διαδρομές που φαίνονται στο σχήμα.



Από τον αρχικό κόμβο Ο μετακινούνται προς τους κόμβους A_1 και A_2 με πιθανότητες 0,6 και 0,4, αντίστοιχα. Από τον κόμβο A_1 προς τους B_1 και B_2 με πιθανότητες 0,7 και 0,3 αντίστοιχα, ενώ από τον κόμβο A_2 προς τους B_3 και B_4 με πιθανότητες 0,4 και 0,6, αντίστοιχα.

α. Να υπολογίσετε πόσα τρωκτικά αναμένεται να βρεθούν στους κόμβους A_1 και A_2, αντίστοιχα.

β. Να υπολογίσετε πόσα τρωκτικά αναμένεται να βρεθούν στους κόμβους B_1, B_2, B_3 και B_4.

Για να διερευνήσετε μια γενίκευση της άσκησης αυτής, να ανοίξετε την ψηφιακή εφαρμογή.

13. Από μία κληρωτίδα με 6 σφαιρίδια, τα οποία δεν έχουν όλα το ίδιο χρώμα, βγάζετε ένα σφαιρίδιο και σημειώνετε το χρώμα του. Αν τρία σφαιρίδια είναι κόκκινα, δύο μπλε και ένα πράσινο, τότε:

α. Να εκτιμήσετε τις αντίστοιχες πειραματικές πιθανότητες, χρησιμοποιώντας την ψηφιακή εφαρμογή.

β. Να υπολογίσετε τις θεωρητικές πιθανότητες να βγει κόκκινο, μπλε, πράσινο σφαιρίδιο.

γ. Ταυτίζονται οι δύο εκτιμήσεις που κάνατε; Εξηγήστε.

14. Ο Αχιλλέας παίζει ρίχνοντας με τυχαίο τρόπο βελάκια σε στόχο που αποτελείται από τρεις ομόκεντρους κύκλους, ακτίνας 2εκ., 5εκ. και 13 εκατοστών, που βρίσκονται σε τετράγωνο το οποίο εφάπτεται στον εξωτερικό κύκλο (σχήμα στην ψηφιακή εφαρμογή). Όλες οι ρίψεις πέφτουν εντός του στόχου. Η πιθανότητα ένα βέλος να βρεθεί σε κάποια περιοχή του στόχου είναι ανάλογη του εμβαδού της περιοχής αυτής.

α. Αν υποθέσουμε ότι κάνει 1000 ρίψεις, να εκτιμήσετε με τη βοήθεια της προσομοίωσης, που θα βρείτε στην παρακάτω ψηφιακή εφαρμογή, πόσες από τις ρίψεις αναμένεται να βρεθούν εντός του μικρού κύκλου.

β. Βρείτε την πιθανότητα μία ρίψη να βρεθεί στον πιο μικρό κύκλο, χρησιμοποιώντας την αναλογία των εμβαδών.

Στην ψηφιακή εφαρμογή μπορείτε να διερευνήσετε μία γενίκευση της παραπάνω άσκησης.

15. Σε έναν δειγματικό χώρο Ω, τα ενδεχόμενα Α και Β έχουν πιθανότητες $P(A)= 0{,}7$ και $P(B)=0{,}5$, αντίστοιχα.

α. Μπορεί να είναι ασυμβίβαστα τα ενδεχόμενα Α και Β; Αιτιολογήστε.

β. Στην ψηφιακή εφαρμογή τοποθετήστε τα απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω, ώστε να ισχύουν οι δοσμένες σχέσεις. Τι παρατηρείτε;

Εργασίες

1. Οι δαπάνες για την Υγεία σε κάθε χώρα είναι ένα από τα σημαντικότερα στοιχεία που συλλέγονται κάθε χρόνο από τις χώρες της Ευρωπαϊκής Ένωσης και τη Eurostat. Στην Ελλάδα αυτά τα στοιχεία συγκεντρώνονται από την Ελληνική Στατιστική Αρχή. Εργαστείτε στα στοιχεία του 2022 και απαντήστε τα σχετικά ερωτήματα που θα βρείτε στην ψηφιακή εφαρμογή.

2. Σε αρκετά σχολεία της Ελλάδας υπάρχουν ημέρες μέσα στη σχολική χρονιά κατά τις οποίες τα μαθήματα ακυρώνονται λόγω καιρού. Να εκτιμήσετε την πιθανότητα στα επόμενα τέσσερα έτη να ακυρωθούν μαθήματα για τρία συνεχόμενα έτη, χρησιμοποιώντας την προσομοίωση.

Υποδείξεις – Απαντήσεις

1. Θηκογράμματα - Οριακές τιμές

1. α. $Q_1 = 1500$, $Q_2 = \delta = 1900$, $Q_3 = 2300$. **β.** το πολύ 25%. **γ.** δεν υπάρχουν α.τ.
2. α. $Q_1 = 29$, $Q_2 = \delta = 36{,}5$, $Q_3 = 44$ **β.** κφ = 6,5, πφ = 66,5, α.τ. 67. **γ.** $\bar{x} = 28{,}8$.
3. α. 48, 53, 56 αντίστοιχα. **β.** 34, 70. **γ.** Με α.τ: 36 & χωρίς α.τ: 23.
4. α. 20,24,28. **β.** IQR = 8. **γ.** δεν υπάρχουν α.τ.
5. α. $Q_1 = 5$, $Q_2 = \delta = 6$, $Q_3 = 11$. **β.** IQR = 6. **γ.** 9.67.
6. α. Το ποσοτικό χαρακτηριστικό είναι η βαθμολογία και το κατηγορικό ο προσανατολισμός.
β. Εξαρτάται η βαθμολογία των μαθητών από τον προσανατολισμό που έχουν επιλέξει.
7. α. $Q_1 = 1{,}5$, $\delta = Q_2 = 3{,}5$, $Q_3 = 6{,}5$. **β.** {0,0,0,1,1,1,1},
γ. {2,2,2,3,3,3,3,4,4,4,5,5,6,7}.
8. α.15. **β.** δ = 10. **γ.** κο = 5, πο = 16. **δ.** Η τιμή 20 είναι α.τ.. **ε.** κάτω από 12,5 περίπου 75%, από 8,5 έως 12,5 έτη είναι περίπου 50%, στο 75% οι ηλικίες από 8,5 μέχρι 16.
9. Να διακρίνετε τις περιπτώσεις άρτιος, περιττός για το μέγεθος του δείγματος. Το ίδιο να κάνετε για τα υποσύνολα του δείγματος που η διάμεσος δημιουργεί.

2.1 Μέτρα θέσης

1. α. Με α.τ: $\bar{x} = 173$, $\delta = 175{,}5$. Χωρίς α.τ.: $\bar{x} = 176{,}2$, $\delta = 178$.
β. Αυξάνονται.
2. $\bar{x} = 25{,}8$, διαφορά: 2,2 λεπτά.
3. α. μέση τιμή: 6,09. **β.** Ακραία τιμή: 16. **γ.** Νέα μέση τιμή: 5,1.
4. $\bar{x} = 64{,}2$ και $\delta = 57$.
5. α. $\frac{10x + 45}{10} = 15{,}5$ απ΄ όπου $x = 11$. **β.** $\frac{\alpha_5 + \alpha_5 + 1}{2} = 15{,}5$ απ΄ όπου οπότε $\alpha_5 = 15$.
6. Λύνουμε την εξίσωση $\frac{10x + 90}{10} = 17$, οπότε $x = \alpha_1 = 8$. Στη συνέχεια $Q_1 = 12$ και $Q_3 = 22$.
7. Πρώτα να βρείτε το άθροισμα των ηλικιών των τάξεων Α και Β κλπ. $\bar{x}_\Gamma = 17{,}5$.
8. $\bar{x} = \frac{621}{30} = 20{,}7$.
9. Για το μέσο βάρος: $\bar{\beta} = 20{,}75$ γραμμάρια. Συνολικά οι μπάλες είναι 20, οπότε 5 κόκκινες, 7 μπλε και 8 πράσινες. Τα βάρη είναι 75, 140.

2.2 Μέτρα μεταβλητότητας

Απαντήσεις Αυτοαξιολόγησης
Λ, Λ, Λ, Σ, Σ, Σ, διακύμανση, s^2, $\sqrt{s^2}$, $\alpha\bar{x} + \beta$, $\alpha^2 s_x^2$

Ασκήσεις

1. $y = x+0.32415$ με x: 9, 10, 11, 12, 12, 13, 14, 15, 15, 17.
Άρα $\bar{y} = \bar{x}+0.32415$, $s_y = s_x$.
2. α. $\bar{x} = 8$, $s = 4{,}24$. **β.** i. $y = 2x$ ii. $y = x–3$ **iii.** $y = 2x–3$.
3. α. $\bar{x} = 15{,}4$, $s^2 = 9{,}84$, $\delta = 16$.
β. $\bar{y} = 1{,}06 \cdot 15{,}4 = 16{,}32$, $s_y^2 = 1{,}06^2 \cdot s^2 = 11{,}056$, $\delta_y = 1{,}06 \cdot \delta = 19{,}84$.
4. α. $\delta = 4{,}5$, $\bar{x} = 4{,}73$, α.τ. = 7. **β.** s = 1,12 και s = 0,88.
5. α. s^2=793,33, IQR = 23.5. Κάτω φράχτης 28,25 και πάνω φράχτης 122,25. Οι τιμές 7, 11, 20 και 25 είναι α.τ. **β.** $s^2 = 114{,}38$ και IQR = 15. **γ.** Αντικατάσταση των α.τ. με Μ.Τ.: $s^2 = 119{,}168$ και IQR = 18,65, αντικατάσταση των α.τ. με δ: $s^2 = 92{,}94$ και IQR = 10,5.
6. Άντρες: $\bar{x} = 82$, $s^2 = 137{,}3$, Γυναίκες: $\bar{x} = 97{,}5$, $s^2 = 66{,}5$. Δέκα άνδρες επιτυγχάνουν βαθμολογία μικρότερη από τον μέσο όρο, ενώ στις γυναίκες 7.**7. α.** 15 σε κάθε ομάδα, Χρόνος, Μέσο, ΜΜΜ-Άλλο. **β-γ.** Όπως εφαρμογή 4, σελ. 31, **δ.** Μικρότερη μεταβλητότητα στα ΜΜΜ.
8. Επειδή είναι διαδοχικοί ακέραιοι $\delta = \bar{x}$, $\alpha_1 = 9$, $s^2 = 2{,}92$.
9. α. Αν δ η διάμεσος, οι παρατηρήσεις είναι δ + α, δ - α, δ + β, δ - β κ.ο.κ. **β.** Αν οι τιμές είναι 1,3,3,3,4,4 είναι $\bar{x}=3 = \delta$, αλλά δεν υπάρχει συμμετρία. **γ.** y = x + δ.

3. Συντελεστής μεταβλητότητας

1. $CV_A = \frac{0{,}05}{0{,}1} = 0{,}5$, $CV_B = \frac{0{,}08}{0{,}12} = 0{,}67$. Την Α μετοχή.
2. $CV_A = \frac{10}{100} = 0{,}1$, $CV_B = \frac{15}{110} = 0{,}14$. Η πρώτη μέθοδος περισσότερο αποτελεσματική.
3. Η Β εταιρεία έχει μεγαλύτερη μεταβλητότητα κερδών.
4. Αγόρια: $\delta = 65$, $Q_1 = 60$, $Q_3 = 68$, IQR = 8, Πάνω φράχτης: 80, κάτω φράχτης: 48, α.τ.: 46, $\bar{x} = 64$, s = 8,79, CV = 0,14, Κορίτσια: $\delta = 57$, $Q_1 = 49$, $Q_3 = 68$, IQR = 19, πάνω φράχτης: 98,5, κάτω φράχτης: 20,5, δεν υπάρχει α.τ., $\bar{x} = 57{,}93$, s = 9,03, CV = 0,16. Χωρίς α.τ: Αγόρια: $\delta = 65{,}5$, $Q_1 = 60$, $Q_3 = 68$, IQR = 8, Πάνω φράχτης: 80, κάτω φράχτης: 48, δεν υπάρχει α.τ., $\bar{x} = 65{,}29$, s = 7,61, CV = 0,12. Το δείγμα των αγοριών έχει μεγαλύτερη ομοιογένεια.
5. α. Είναι $CV = \frac{15}{120} = 0{,}125>0{,}10$ οπότε το δείγμα δεν είναι ομοιογενές **β.** Για να είναι το δείγμα ομοιογενές πρέπει $\frac{s}{120} \le 0{,}1$ή $s \le 12$.
γ. Ανάλογα πρέπει $\frac{15}{\bar{x}} \le 0{,}1$ ή $\bar{x} \ge 150$.

Απαντήσεις Αυτοαξιολόγησης
1. Είναι ίσες. **2.** Είναι κοντά στη μέση τιμή. **3.** Ναι. **4.** β. **5.** γ. **6.** Δεν μπορούμε να συμπεράνουμε. **7.** Όχι. Επηρεάζουν περισσότερο τη μέση τιμή. **8.** Όχι. Μειώνεται κατά 1/ν. **9.** Όταν β = 0. **10.** Λάθος. **11.** Ναι. **12.** Όχι. Τρίτος παράγοντας. **13.** Όχι. Τρίτος παράγοντας.

Ασκήσεις και προβλήματα

1. δ = 23,5.
2. Ν = 15 ή 19.
3. Να βρεθούν για y = x+3.
4. α. $\bar{x}$=15,9, s = 3,03, $\bar{x}$= 15,75, s = 2,34. **β.** Υποδ. Να βρείτε τα τους 5 χαρακτηριστικούς αριθμούς. **γ.** $CV_1 = 0{,}19$, $CV_2 = 0{,}15$.
5. α. $\bar{x} = 16{,}8$, δ = 17. **β.** s = 5,028, $Q_1 = 12$, $Q_3 = 21{,}5$. **γ.** CV = 0,299, όχι.
6. α. $\frac{5 \cdot 12000 + x}{6} = 20000$. Άρα 60.000. **β.** Θα προτείναμε να αντικαταστήσουν την α.τ. με τη διάμεσο των υπολοίπων προτάσεων των ενόρκων.
7. Είναι:1,15 · $\bar{x}$ και 1,15 · s (0,85 $\bar{x}$ και 0,85s).
8. α. $\bar{x}_C = 5{,}958$, $s_C = 2{,}753$, $CV_C = 0{,}462$. **β.** $\bar{x}_F = 42{,}724$, $s_F = 4{,}955$, $CV_F = 0{,}116$. **γ.** $CV_F < CV_C$.
9. α. Η θέση της διαμέσου δεν αλλάζει αν πολλαπλασιαστούν οι τιμές με έναν αριθμό $\alpha \neq 0$. **β.** Η θέση της διαμέσου δεν αλλάζει αν προσθέσουμε στις τιμές έναν αριθμό.
10. $\bar{x} = 5{,}4$.
11. α. Περισσότεροι είναι οι νέοι παρά οι ηλικιωμένοι. **β.** Στην ηλικιακή ομάδα 17 έως 65 είναι περίπου το 62,4%.
12. Το ποσοστό στο 2 είναι 50%, $\bar{x} = 2{,}75$.
13. α. 6 ώρες και 6 λεπτά. **β.** Η μέση ταχύτητα είναι 86,54.
14. α. Γυναίκες: $\bar{x} = 2560$, δ = 2500, $Q_1 = 2300$, $Q_3 = 2800$. Άντρες: $\bar{x} = 3130$, $Q_1 = 3000$, δ = 3050, $Q_3 = 3400$. **β.** Γυναίκες: $s_\Gamma = 323{,}11$, $IQR_\Gamma = 500$. Άντρες: $s_A = 241{,}04$, $IQR_A = 400$. **γ.** Κατά τα γνωστά. **δ.** Ποσοτικό: Οι μισθοί. Κατηγορικό: Το φύλο. **ε.** Οι άντρες φαίνεται ότι είναι καλύτερα αμειβόμενοι από τις γυναίκες. **στ.** Όχι.
15. Ο μέσος όρος του Β τετραμήνου είναι 16,5. Ο μέσος όρος του τμήματος είναι 16,25.
16. Θέτουμε $y_i = |x_i - \bar{x}|$ και χρησιμοποιούμε τη σχέση

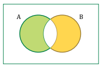
$$s_y^2 = (1/3)\left(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2\right) - \bar{y}^2 \ \ge \ 0.$$

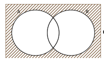
17. α. $[Q_2, Q_3]$. **β.** $[Q_1, \delta]$. **γ.** IQR = 12–2 = 10. **δ.** [10, 13] **ε.** Αριστερά.
18. α. Νέα μέση τιμή = 14,92. **β.** Το άθροισμα των τετραγώνων των βαθμών των 24 μαθητών είναι 5616 και η διακύμανση από τον τύπο της Πρότασης 1 είναι 8,79.
19. α. $\bar{x}$ = 10. **β.** κ = 8. **γ.** δ = 10,5. **δ.** CV = 25%, Εύρος = 6, οπότε το δείγμα δεν είναι ομοιογενές (η μέση τιμή μειώνεται ενώ η διακύμανση μένει ίδια).
20. $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_6 = 42$, $\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 = 36$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 18$, οπότε $\alpha_3 + \alpha_4 = 12$. δ = 6.
21. Θεωρήστε ότι το μοντέλο είναι y = αx + b. Είναι y = 2x – 920. Οι μισθοί: 920, 1280, 1580, 1880, 2480.

Πειράματα τύχης και ενδεχόμενα

1. α. π.τ.. **β.** π.τ. **γ.** όχι. **δ.** π.τ. **ε.** π.τ **στ.** π.τ. **ζ.** π.τ. **η.** όχι **θ.** π.τ.
2. α. τυχαία επιλογή μπάλας από ένα δοχείο. **β.** επιλέγεται τυχαία ένας μαθητής και καταγράφεται ο μήνας γέννησής του. **γ.** επιλέγεται τυχαία ένα από τα 10 καρτελάκια από την κάλπη. **δ.** επιλέγω τυ-

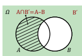
χαία ένα κλειδί και δοκιμάζω αν ανοίγει την πόρτα. **ε.** εξάγεται τυχαία από την κληρωτίδα μία μπάλα.

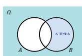
3. α.  **β.** $(A\cup B)-(A\cap B)=(A\cap B')\cup(B\cap A')$.

4. α. $A'\cap B', (A\cup B)'$. **β.** . **γ.** ταυτίζονται.

5. α. Ω = {ΚΚΚ, ΚΚΓ, ..., ΓΓΓ}. **β.** E_1 = {ΓΓΓ, ΚΓΓ, ΓΚΓ, ΓΓΚ}, E_2 = {ΓΓΚ, ΚΓΓ}, E_3 = {ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΓΚΚ, ΚΚΚ}, E_4 = {ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΓΚΚ, ΓΓΚ, ΓΚΓ, ΚΓΓ}, E_5 = {ΚΚΓ, ΚΓΓ, ΓΚΓ, ΓΓΓ}. **γ.** E_3' = {ΓΓΚ, ΓΚΓ, ΚΓΓ, ΓΓΓ}, E_4-E_5 = { ΚΚΚ, ΚΓΚ, ΓΚΚ, ΓΓΚ}, $E_1\cap E_5$= { ΚΓΓ, ΓΚΓ, ΓΓΓ}

6. α. Ω = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}. **β.** Α = {2, 4, 6, 8, 10, 12}, **γ.** Β = {8, 9, 10, 11, 12}. **δ.** {8, 10, 12}, Α–Β = {2, 4, 6}.

7. α.  $(A\cap B')$ πραγματοποιείται το Α, αλλά όχι το Β.

β.  $A'-B'$ πραγματοποιείται το Β και όχι το Α.

8. Ρίχνουμε ένα ζάρι και τραβάμε ένα φύλλο από μία τράπουλα. **α.** 312. **β.** 36. **γ.** A = {(1,2), (1,4), (1,6), (1,8), (1,10), (3,2), (3,4), (3,6), (3,8), (3,10),(5,2),(5,4),(5,6),(5,8),(5,10)}, B = {(2,Q),(4,Q),(6,Q)}, Γ = {(5,K),(6,K)}, Β∪Γ = {(2,Q),(4,Q),(6,Q),(5,K),(6,K)}, Β∩Γ = ∅.

9. α.{ΑΒΓ, ΑΓΒ, ΒΑΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ, ΓΒΑ}. **β.** Κ = {ΑΒΓ, ΒΑΓ}. **γ.** Λ = {ΑΓΒ}. **δ.** Μ = {ΑΒΓ, ΑΓΒ, ΒΓΑ, ΓΒΑ}.

10. α. Α∩Γ. **β.** Β∪Γ. **γ.** (Γ∪Δ)∪Α. **δ.** Δ′. **ε.** Γ∩Β′. **στ.** Δ′∩Γ′, **ζ.** Α∩Β′ = Α–Β.

11. α. Τ = "ταψί", Φ = "φόρμα", Π = "πυρέξ", Κ = "καρύδια", Α = "αμύγδαλα", Τ∩Κ′ = Τ–Κ, **β.** Τ′∩Α′. **γ.** Π∪Κ. **δ.** (Α∪Κ)∩Φ.

12. κούρεμα κοντό ή μέτριο, κούρεμα κοντό με λούσιμο, κούρεμα με ζελέ όχι κοντό, κούρεμα κοντό ή κούρεμα μέτριο, κούρεμα κοντό και όχι μέτριο, όχι κοντό κούρεμα και χωρίς λούσιμο.

Μη ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα

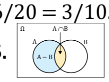
Απαντήσεις Αυτοαξιολόγησης
α. Λάθος. **β.** Σωστό. **γ.** Λάθος. **δ.** Σωστό. **ε.** Σωστό

1. α. Ω = {Κ, Π, Μ}. **β.** Όχι, διότι δεν υπάρχει ίσος αριθμός των διαφορετικών χρωμάτων. **γ.** P(Α) = 1, P(Β) = 0,5, P(Γ) = 0,3, P(Δ) = 0,2.

2. P(Α) = 0,5, P(Β) = 0,25, P(Γ) = 0,125, P(Δ) = 0,0625, P(Ε) = 0,03125, P(Ζ) = 0,5, P(Η) = 1.

3. α. ρ = 0,5. **β.** P(Α) = 1/3, P(Β) = 5/12, **γ.** P(Α∪Β) = 7/12, P(Α∩Β) = 1/6, P(Β–Α) = 1/4, P(Α′∪Β′) = 5/6, P(Α∩Β′) = 1/6.

4. α. Ω = {Κ1,Κ2,Κ3,Κ4,Κ5,Κ6,Γ1,Γ2,Γ3,Γ4,Γ5,Γ6}. **β.** Είναι ισοπίθανα. **γ.** Δεν είναι ισοπίθανα: P(Κ) = 6/12 και P(1) = 2/12 = 1/6.

5. α. P(Α) = 10/20 = 1/2, P(Β) = 6/20 = 3/10. **β.** P(Α∩Β) = 3/20, P(Α ∪Β) = 13/20. **γ.** P(Α–Β) = 7/20. **δ.** 

6. Να γίνει χρήση του προσθετικού νόμου. Η πιθανότητα της ένωσης είναι μεγαλύτερη ή ίση από μηδέν.

7. α. P(Α∪Β) = 0,8+0,2–0,1 = 0,9.
β. P(Α∪Β)–P(Α∩Β) = P(Α∩Β′)+P(Β∩Α′) = 0,8.
γ. P((Α∪Β)′) = 1–P(Α∪Β) = 0,1.

8. α. Ω={0,1,2,3,4,5,6}. **β.** Μη ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. **γ.** P (περισσότερα από 4 αδέλφια) = 1/25. **δ.** P(4 ή 6) = 4/25 = 0,16.

9. α. $P(A)=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$. **β.** P(Β) = 11/36. **γ.** P(Α∩Β) = 5/36.

10. α. p = 0.5. **β.** p = 5/6. **γ.** p = 5/6. **δ.** p = 1/6.

11. α. i. p = 2/3, **ii.** p = 13/15. **β.** p = 0,1.

12. Η Ελένη κερδίζει μόνο στις 8 περιπτώσεις : 20,20,24,24,25,30,30,36. Άρα δεν έχει δίκιο ο Γιάννης.

Αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας

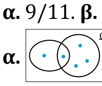
Απαντήσεις Αυτοαξιολόγησης
α. Λάθος. β. Λάθος. γ. Σωστό. δ. Λάθος. ε. Σωστό. στ. Ναι για μη ισοπίθανα ενδεχόμενα. ζ. Λάθος. η. Σωστό. θ. Σωστό. ι. Λάθος. ια. Λάθος.

1. i. Ναι, μπορεί, **ii.** Όχι, δεν μπορεί.
2. i. Ναι, μπορεί, **ii.** Όχι, δεν μπορεί.
3. Δεν υπάρχει τέτοιο x.
4. $P(\omega_3)=0{,}2$.
5. P(α) = 0,1, P(β) = 0,3, P(γ) = 0,4, P(δ) = 0,2.
6. α. $P(\omega_4)=0{,}25$. **β.** P(Α) = 0,5, P(Β) = 0,7, P(Α∩Β) = 0,2.
7. x = 0,3.
8. α. Δεν είναι ξένα διότι διαφορετικά P(Α∪Β) = P(Α)+P(Β)=1,1 > 1, αδύνατο. **β.** P(Α∩Β) = 0,4.
9. Προσθετικός νόμος – ιδιότητες. **β.** η ένωση είναι υπερσύνολο κάθε ενός συνόλου, άρα η πιθανότητά της μεγαλύτερη ή ίση από τις πιθανότητες και των δύο. **γ.** η τομή είναι υποσύνολο καθενός συνόλου, άρα η πιθανότητά της είναι μικρότερη ή ίση από τις πιθανότητες και των δύο.
10. α. Δεν είναι ασυμβίβαστα. **β.** Προσθετικός νόμος και μονοτονία.
11. P(Α∪Β) = 0,75.
12. P(Α∩Β) = 0,1.
13. P(Β) = 0,55.
14. α. P(Α–Β) = 0,3. **β.** P((Α∪Β)– (Α∩Β)) = 0,5. **γ.** P((Α∪Β)′) = 0,4.
15. P(Α–Β) = P(Α) – P(Α∩Β) = 0,7 – 0,2 = 0,5.
16. α. P(Α) = 6/13. **β.** P(Β) = 3/13. **γ.** P(Γ) = 9/13. **δ.** P(Α∪Β) = 9/13. **ε.** P((Α∪Β)′) = 4/13.
17. α. P(Α) = 1/8. **β.** P(Β) = 0,5. **γ.** P(Γ) = 0,25. **δ.** P(Δ) = 7/8.
18. α. p = 0,45. **β.** p = 0,25.
19. P(Α) = 0,6, P(Α′) = 0,4.
20. Με προσθετικό νόμο και με πράξεις έχουμε ότι η πιθανότητα της τομής είναι μικρότερη ή ίση από 1, που ισχύει.
21. Δες 20.
22. α. P(Α∩Β) = 5/12. **β.** Ισχύει ότι P(Α∪Β) = P(Α) + 3/12 ⇒ P(Α) + 3/12 ≤ 1 ⇔ P(Α) ≤ 9/12. Επίσης P(Α) ≥ P(Α∩Β) = 5/12.
γ. Ισχύει ότι Α∪Β υπερσύνολο του Β – Α, άρα P(Α∪Β) ≥ P(Β–Α) = 1/4.

Προβλήματα πιθανοτήτων

Απαντήσεις Αυτοαξιολόγησης
α. Λάθος. **β.** Λάθος. **γ.** Λάθος. Μπορεί Α ≠ ∅ και P(Α) = 0 (Αξ. ορισμός). **δ.** Λάθος. **ε.** Όχι. **στ.** Σωστό. **ζ.** Σωστό. **η.** Λάθος. **θ.** Σ(ii, iii,v), Λ(i, iv). **ι.** iv. **ια.** i) Σωστό, ii) Σωστό

Ασκήσεις και προβλήματα

1. α.1/6. **β.** 1/6. **γ.**1/3. **δ.** ½. **ε.** ½ **στ.** ½ **ζ.** 2/3.
2. α. 9/11. **β.** 8/11.
3. α.  **β.** 0,25. **γ.** 125.
4. P(Α∪Β) = 0,5, P(Α-Β) = 0,2, P(Α′∪Β′) = 0,8, P(Α∪Β′) = 0,9, P(Α′∩Β) = 0,1.
5. α. 0,25. **β.** 0,2. **γ.** 0,75.
6. Δείτε εφαρμογή 4 σελ.83.
7. α.

	Α1	Α2	Ι1	Ι2
Α1	-	Α1Α2	Α1Ι1	Α1Ι2
Α2	Α2Α1	-	Α2Ι1	Α2Ι2
Ι1	Ι1Α1	Ι1Α2	-	Ι1Ι2
Ι2	Ι2Α1	Ι2Α2	Ι2Ι1	-

β. Ω = {Α1Α2, Α1Ι1, Α1Ι2, Α2Ι1, Α2Ι2, Ι1Ι2} **βi.** 4/6 **βii.** 1/6 **βiii.** 1/6.
γ. Ω = {πλήθος αγγλικών ομάδων} = {0, 1, 2}.
γi. 4/6. **γii.** 1/6. **γiii.** 1/6. **γiv.** 5/6.
8. Δείτε εφαρμογή 4 σελ.83.
9. α. 2/25. **β.** ΝΙΨΟΝ ΑΝΟΜΗΜΑΤΑ ΜΗ ΜΟΝΑΝ ΟΨΙΝ. **γ.** 52%.
10. Δείτε εφαρμογή 4 σελ. 83.

Ασκήσεις ανακεφαλαίωσης

1. α. 1/4. **β.** 3/8. **γ.** 3/8. **δ.** 5/8. **ε.** 1/4. **στ.** 3/8. **ζ.** 3/8.
2. α. x∈Α ⇒ x∉Β ⇒ x∈Β′. **β.** P(Α∪Β) = P(Α)+P(Β).
3. Α∩Β⊆Α,P(Α∪Β) = P(Α)+P(Β)–P(Α∩Β)≤1.
4. α. βλ. εφαρμογή 2 σελ.67. **β.** Αυτός που διάλεξε {0,1,2} κερδίζει περισσότερες φορές.
5. Α∩Ο = ∅,P(Α∩Ο) = P(Α)+P(Ο) = 0,83.
6. α. Δειγματικός χώρος Ω = {Κ1,Κ2,Κ3,Κ4,Κ5,Κ6,Γ1,Γ2,Γ3,Γ4,Γ5,Γ6}, 3/12 = 1/4. **β.** 1/2.
7. 1/3.
8. α. 1/8. **β.** ½. **γ.** ¼. **δ.** 1/8, 0. **ε.** 3/8.
9. α. 0<P(Α)<1. **β.** Αρκεί $M=\frac{1}{P(A)}+\frac{1}{1-P(A)}\geq 4 \Leftrightarrow 1-P(A)+P(A)\geq 4P(A)\,(1-P(A))\Leftrightarrow (2P(A)-1)^2\geq 0$.
10. α. x = 1,5. **β.** 0,2. **γ.** 0,2.
11. κ = 4 ή 6, p = 2/9.
12. α. 600, 400. **β.** 420, 180, 160, 240.
13. α. ψηφιακή εφαρμογή. **β.** 0,5, 1/3, 1/6.
14. α. 200. **β.** 0,02.
15. α. Όχι, δεν μπορούν, διότι το άθροισμα των πιθανοτήτων θα ήταν μεγαλύτερο του 1. **β.** ψηφιακή εφαρμογή.

Πίνακας τυχαίων αριθμών

Πίνακας 500 τυχαίων πενταψήφιων αριθμών										
1	55748	76816	64465	18826	31439	62231	93499	20073	45821	69514
2	45487	19583	66505	55003	79091	25899	80000	43160	36643	58482
3	41412	51723	61327	38862	41391	87878	70832	20440	64274	74990
4	78001	5565	15326	60008	36501	13748	35299	20136	42448	23647
5	71951	47747	75511	88801	86925	80378	00239	80975	77929	02099
6	37182	27615	89609	61755	90906	30135	42543	98809	06338	72993
7	81285	28065	43189	92296	75740	43644	49266	03358	40200	14204
8	01564	98914	98636	80535	00192	42716	55715	50762	78407	17849
9	40439	64568	10422	56179	78343	14915	35322	92004	62708	49759
10	90148	05807	58916	65855	95525	43031	98445	74023	68007	2688
11	24695	70312	14526	98215	77732	29879	52826	62613	84825	70328
12	85168	01571	30319	30623	99361	99567	93242	07746	43212	61176
13	17081	34101	00139	43617	38334	49887	41507	43356	87909	62731
14	54855	39805	79554	28155	03453	51003	64158	32813	07607	95616
15	32041	22116	54127	17440	33729	00839	62768	07545	37720	48080
16	17917	80063	05506	66812	97700	94689	31617	84752	19891	32328
17	21978	94314	78409	39490	63614	68662	93112	62724	85250	76711
18	59342	11441	89530	30845	33020	99432	65884	10649	64385	13232
19	80277	13359	51598	70416	22990	74993	08276	35381	91714	80523
20	67187	14156	81208	95070	22081	33004	07568	29084	09290	93330
21	50011	74156	97342	80990	11604	80003	71472	40374	26382	53150
22	82289	65317	09462	69310	71004	27658	79163	55297	26890	61932
23	61936	18960	91103	01682	83854	98736	94770	48561	69587	37118
24	82355	09789	59268	88833	24721	94558	02967	89455	46319	97198
25	66264	9683	63595	11053	26332	52054	14897	29363	61084	81346
26	92294	39528	59622	24186	63912	26211	15915	38331	71778	55988
27	91801	86759	38762	85032	07198	27617	06508	63921	46568	28025
28	79321	06935	11273	22208	49274	88793	61413	69872	04253	42375
29	54468	85401	10917	01627	56201	06716	27793	54740	93376	64220
30	80601	90191	04364	01167	72453	33815	36642	4412	44046	26578
31	60142	69964	30111	13827	26940	21818	14999	21800	29701	22003
32	29266	56637	05473	20935	28970	57883	78694	87518	73471	56339
33	03106	64818	27475	90830	22439	14792	07245	58688	55628	88891
34	32645	19880	24531	26933	51129	23873	88288	94173	40706	41256
35	44456	30384	45909	84632	98142	82660	67589	92465	10741	27102
36	99593	37815	04695	76891	74201	80132	16025	28563	02161	42534
37	64010	98105	17640	93231	56687	63713	33184	29321	14897	03138
38	39589	03929	56384	11051	70619	22777	66496	47000	17063	30259
40	51715	03019	09025	98629	89993	94006	12164	74887	51878	20809
41	12279	88845	28963	27027	48716	72076	93665	35646	74039	94565
42	05075	94146	72751	40010	44875	47386	21027	31721	17072	38076
43	17564	36153	58985	12793	57603	10147	58257	10487	34906	21086
44	31187	50946	34391	38304	00781	02541	38019	88981	75534	79829
45	41063	62080	64111	10860	49828	14386	59456	44519	97883	05131
46	07145	01780	56250	52136	29962	21604	67329	28073	48486	98276
47	76072	90156	21600	27572	27861	64234	71288	32095	31320	58013
48	76566	29231	82987	90434	82515	74208	47274	66518	69574	36587
49	55683	23878	38276	35086	27234	21354	91221	98514	61475	42402
50	34161	97114	94566	09174	24475	35151	12048	24590	42263	64732

Ευρετήριο Όρων

Πηγές εικόνων

Γκέοργκ Καντόρ, σελ. 63. Αποθετήριο πολυμέσων Wikimedia: **https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%93%CE%BA%CE%AD%CE%BF%CF%81%CE%B3%CE%BA_%CE%9A%CE%AC%CE%BD%CF%84%CE%BF%CF%81#/media/%CE%91%CF%81%CF%87%CE%B5%CE%AF%CE%BF:Georg_Cantor2.jpg**

ΝΙΨΟΝΑΝΟΜΗΜΑΤΑΜΗΜΟΝΑΝΟΨΙΝ, σελ 88. Creative Commons άδειες και αποθετήριο πολυμέσων. **Christina Kekka from Athens, Greece Light correction by Basile Morin**, **CC BY 2.0**, via Wikimedia Commons. URL: **https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ambigram_palindrome_%CE%9D%CE%99%CE%A8%CE%9F%CE%9D%CE%91%CE%9D%CE%9F%CE%9C%CE%97%CE%9C%CE%91%CE%A4%CE%91%CE%9C%CE%97%CE%9C%CE%9F%CE%9D%CE%91%CE%9D%CE%9F%CE%A8%CE%99%CE%9D_(Wash_your_sins,_not_only_your_face,_in_Greek).jpg**