ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Α΄ Γυμνασίου

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Δημήτρης Διαμαντίδης • Ελισσάβετ Καλογερία • Ειρήνη Περυσινάκη
Γιάννης Σταμπόλας • Κώστας Στουραΐτης • Βαγγέλης Φακούδης

Επιστημονικός υπεύθυνος:
Γιώργος Ψυχάρης



ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Επιστημονική Επιτροπή Αξιολόγησης	
Συντονίστρια / Αξιολογήτρια	**Τριανταφύλλου Χρυσαυγή** Εν ενεργεία μέλος Διδακτικού Ερευνητικού Προσωπικού Πανεπιστημίου
Αξιολογητής	**Παναγιώτου Νικόλαος** Εν ενεργεία Εκπαιδευτικός
Αξιολογητής	**Ψάλτης Προκόπιος** Εν ενεργεία Εκπαιδευτικός
Τεχνικός Εμπειρογνώμονας	**Ρέτσας Χρήστος** Πτυχιούχος Πληροφορικής
Επικουρικός Εμπειρογνώμονας	**Αντζόπουλος Νικόλαος** Διπλωματούχος Τεχνολογίας Γραφικών Τεχνών
Υπεύθυνη του μαθήματος / γνωστικού αντικειμένου στο πλαίσιο της Πράξης	**Ειρήνη Γεωργάκη**, Σύμβουλος Α΄ ΙΕΠ, μέλος της Επιστημονικής Ομάδας Έργου (ΕΟΕ) της Πράξης

Πράξη με τίτλο: «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ 6010165 στο Πρόγραμμα «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή» 2021-2027

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ
Σπυρίδων Δουκάκης
Πρόεδρος του Δ.Σ. του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Υπεύθυνη Πράξης
Πολυξένη Μπίλλα
Σύμβουλος Α΄ του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής
Προϊσταμένη Τμήματος Β΄ Προγραμμάτων Σπουδών και Εκπαιδευτικού Υλικού

Αναπληρώτρια Υπεύθυνη Πράξης
Άννα-Αικατερίνη Λυκούρη
Σύμβουλος Α΄ του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

«Με τη συγχρηματοδότηση της Ευρωπαϊκής Ένωσης»
και το Πρόγραμμα «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή»

Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας, Θρησκευμάτων και Αθλητισμού
ΙΕΠ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2021-2027
Πρόγραμμα Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Δ. Διαμαντίδης, Ε. Καλογερία, Ε. Περυσινάκη, Γ. Σταμπόλας,
Κ. Στουραΐτης, Β. Φακούδης, Γ. Ψυχάρης

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΤΑΚΗ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΚΔΟΣΗΣ

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ	**Δημήτρης Διαμαντίδης**, *Δρ Διδακτικής Μαθηματικών, Εκπαιδευτικός Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης* **Ελισσάβετ Καλογερία**, *Δρ Διδακτικής Μαθηματικών, Σύμβουλος Εκπαίδευσης* **Ειρήνη Περυσινάκη**, *Δρ Μαθηματικών, Σύμβουλος Εκπαίδευσης* **Γιάννης Σταμπόλας**, *Δρ Μαθηματικών, Σύμβουλος Εκπαίδευσης* **Κώστας Στουραΐτης**, *Δρ Διδακτικής Μαθηματικών, Εκπαιδευτικός Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης* **Βαγγέλης Φακούδης**, *MSc στα Μαθηματικά και τις Φυσικές Επιστήμες, Εκπαιδευτικός Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης* **Γιώργος Ψυχάρης**, *Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ*
ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟΣ ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ	**Γιώργος Ψυχάρης**
ΣΧΕΔΙΑΣΗ - ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΧΗΜΑΤΩΝ	**Έφη Κανελλοπούλου**, *Γραφίστρια* **Μαρίνα Π. Ρένεση**, *Γραφίστρια*
ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΣΗ	**Κωνσταντίνος Ξύγκας**, *Εικονογράφος*
ΣΕΛΙΔΟΠΟΙΗΣΗ	**Σπύρος Ρένεσης**, *Γραφίστας*
ΦΙΛΟΛΟΓΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ	**Κωνσταντίνα Κουτσουρούμπα**, *Φιλόλογος*
ΠΡΟΕΚΤΥΠΩΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ	ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΤΑΚΗ
ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ ΠΡΟΕΚΤΥΠΩΤΙΚΩΝ ΕΡΓΑΣΙΩΝ	**Βαγγέλης Μπακλαβάς**, *Φιλόλογος* **Δημήτρης Πλακάκης**, *Μαθηματικός*
ΦΩΤΟΓΡΑΦΙΕΣ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΥ	**Dreamstime.com**, *Freepik.com*
ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΕΞΩΦΥΛΛΟΥ	**Έφη Κανελλοπούλου**, *Γραφίστρια*
ΦΩΤΟΓΡΑΦΙΑ ΕΞΩΦΥΛΛΟΥ	**Dreamstime.com**

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Ταυτότητα του βιβλίου 7

ΜΕΡΟΣ Α: ΑΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ ΑΛΓΕΒΡΑ

Θεματική ενότητα 1: Φυσικοί αριθμοί 17

1.1 Φυσικοί αριθμοί – Δυνάμεις φυσικών 18
1.2 Ευκλείδεια διαίρεση – Διαιρετότητα 21
1.3 Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (ΜΚΔ) 26
1.4 Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ) 29
1.5 Το δυαδικό σύστημα αρίθμησης 31
Ανακεφαλαίωση 33

Θεματική ενότητα 2: Ακέραιοι αριθμοί 37

2.1 Οι ακέραιοι αριθμοί 38
2.2 Πρόσθεση στο σύνολο των ακέραιων αριθμών 43
2.3 Αφαίρεση ακέραιων αριθμών 51
2.4 Πολλαπλασιασμός ακέραιων αριθμών 57
Ανακεφαλαίωση 64

Θεματική ενότητα 3: Ρητοί αριθμοί 67

3.1 Οι ρητοί αριθμοί 68
3.2 Πρόσθεση και αφαίρεση ρητών αριθμών 76
3.3 Πολλαπλασιασμός και διαίρεση ρητών αριθμών 84
3.4 Δυνάμεις και παραστάσεις ρητών αριθμών 94
Ανακεφαλαίωση 100

Θεματική ενότητα 4: Κανονικότητες 103

4.1 Κανονικότητες και φυσικοί αριθμοί 104
4.2 Κανονικότητες και αριθμητικά μοτίβα 108
4.3 Προβλήματα με κανονικότητες 111
Ανακεφαλαίωση 113

Θεματική ενότητα 5: Αλγεβρικές παραστάσεις 115

5.1 Περιγραφή καταστάσεων με αλγεβρικές παραστάσεις 116
5.2 Αλγεβρικές παραστάσεις και προβλήματα 120
5.3 Η επιμεριστική ιδιότητα 123
Ανακεφαλαίωση 129

Θεματική ενότητα 6: Αλγεβρικές σχέσεις 133

6.1 Η εξίσωση και η λύση της 134
6.2 Επίλυση εξίσωσης 140
6.3 Προβλήματα που λύνονται με εξισώσεις 144
Ανακεφαλαίωση 147

ΜΕΡΟΣ Β: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΚΑΙ ΜΕΤΡΗΣΗ

Θεματική ενότητα 7: Γεωμετρία του επιπέδου – Μέτρηση ... 149

7.1 Βασικά επίπεδα σχήματα ... 150
7.2 Μήκος ευθύγραμμου τμήματος – Μονάδες μέτρησης μήκους ... 153
7.3 Σύγκριση, πρόσθεση και αφαίρεση ευθύγραμμων τμημάτων ... 157
7.4 Ο κύκλος και τα στοιχεία του ... 162
7.5 Επίκεντρες γωνίες – Μέτρηση τόξων και επίκεντρων γωνιών ... 165
7.6 Διχοτόμος γωνίας ... 169
7.7 Είδη γωνιών ... 171
7.8 Πρόσθεση και αφαίρεση γωνιών ... 174
7.9 Συμπληρωματικές και παραπληρωματικές γωνίες ... 177
7.10 Κατακορυφήν γωνίες ... 179
7.11 Σχετικές θέσεις ευθειών στο επίπεδο ... 182
7.12 Χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων της διχοτόμου ... 186
7.13 Γωνίες από παράλληλες και τέμνουσα ... 188
7.14 Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου ... 191
7.15 Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος ... 193
7.16 Είδη τριγώνων και στοιχεία τους ... 195
7.17 Άθροισμα γωνιών τριγώνου ... 200
7.18 Τα τετράπλευρα και τα είδη τους ... 202
Ανακεφαλαίωση ... 210

Θεματική ενότητα 8: Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί ... 213

8.1 Συμμετρία σχημάτων ως προς άξονα ... 214
8.2 Σχήματα με άξονα συμμετρίας ... 221
Ανακεφαλαίωση ... 225

Θεματική ενότητα 9: Γεωμετρία του χώρου ... 227

9.1 Πρίσμα και πυραμίδα ... 228
9.2 Κύλινδρος, κώνος και σφαίρα ... 236
Ανακεφαλαίωση ... 240

ΜΕΡΟΣ Γ: ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ – ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ)

Θεματική ενότητα 10: Στατιστική – Διαχείριση δεδομένων και μέτρα θέσης και μεταβλητότητας ... 241

10.1 Διαχείριση δεδομένων ... 242
10.2 Μέτρα θέσης και μεταβλητότητας ... 253
Ανακεφαλαίωση ... 261

Θεματική ενότητα 11: Πειράματα τύχης, ενδεχόμενα και πιθανότητες ενδεχομένων ... 263

11.1 Πειράματα τύχης και καταγραφή των δυνατών αποτελεσμάτων τους ... 264
11.2 Πειράματα τύχης και πιθανότητες ενδεχομένων ... 269
Ανακεφαλαίωση ... 274

ΜΕΡΟΣ Δ: ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Απαντήσεις – υποδείξεις ασκήσεων ... 276
Αλφαβητικό ευρετήριο όρων ... 299

Ταυτότητα του βιβλίου

Αγαπητέ μαθητή, αγαπητή μαθήτρια,

Το βιβλίο που κρατάς στα χέρια σου δημιουργήθηκε με βάση τις κατευθύνσεις του Προγράμματος Σπουδών των Μαθηματικών. Κάθε στοιχείο του (έργα διερεύνησης, διατύπωση μαθηματικού περιεχομένου, εφαρμογές κτλ.) συνδέεται με ένα ή περισσότερα Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ). Τα έργα διερεύνησης, τα παραδείγματα και οι ασκήσεις έχουν επιλεγεί ώστε να σε βοηθήσουν να αναπτύξεις πλούσια μαθηματική δραστηριότητα και μαθηματικό συλλογισμό και να αξιοποιήσεις τα μαθηματικά για να ερμηνεύσεις κριτικά διάφορα φαινόμενα του φυσικού και κοινωνικού κόσμου.

Το βιβλίο οργανώνεται σε θεματικές ενότητες και αυτές χωρίζονται σε διδακτικές ενότητες.

Οι **διδακτικές ενότητες** έχουν δομηθεί με παρόμοιο τρόπο.

- Στην αρχή υπάρχει ένα έργο Διερεύνησης (που αριθμείται ως Δ1, Δ2, …), πάνω στο οποίο προτείνεται να συνεργαστείτε ανά ομάδες και στη συνέχεια να συζητήσετε στην τάξη.
- Ακολουθεί το «Συζητάμε», που είναι μια συζήτηση ή/και κάποιο λυμένο παράδειγμα παρόμοιο με εκείνο της Διερεύνησης. Αυτό μπορεί να το συζητήσετε στην τάξη ή να το μελετήσεις στο σπίτι, ή και τα δύο.
- Το «Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις» περιέχει το βασικό μαθηματικό περιεχόμενο της διδακτικής ενότητας.
- Στη συνέχεια, υπάρχουν λυμένες εφαρμογές και παραδείγματα.
- Το «Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε» είναι μικρές ή μεγαλύτερες εργασίες που προτείνεται να γίνουν από ομάδες παιδιών στο σπίτι ή στην τάξη και να παρουσιαστούν στην τάξη.
- Οι ασκήσεις είναι χωρισμένες σε δύο ομάδες.
  - Στο «Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις» βρίσκουμε ερωτήσεις και ασκήσεις άμεσης εφαρμογής.
  - Στο «Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα» υπάρχουν πιο σύνθετα έργα και, ίσως, με περισσότερα ερωτήματα. Έχει καταβληθεί προσπάθεια να είναι τέτοια τα προτεινόμενα έργα, ώστε να μπορούν να ασχοληθούν με αυτά όσο το δυνατόν περισσότερα παιδιά. Σε κάθε περίπτωση θα βρεις ερωτήσεις, ασκήσεις, παραδείγματα και υλικό που θα σου κινήσουν το ενδιαφέρον και θα μπορείς να τα επεξεργαστείς.

Στο τέλος κάθε θεματικής ενότητας υπάρχει μια **ανακεφαλαιωτική ενότητα**, η οποία περιέχει ποικιλία έργων. Αρκετά από αυτά μπορείς να τα αξιοποιήσεις για να ελέγξεις τι έμαθες και τι μπορείς να κάνεις. Με κάποια άλλα μπορείς να εμβαθύνεις σε αυτά που έμαθες και να τα συνδέσεις με θέματα έξω από τη συγκεκριμένη ενότητα ή και έξω από τα μαθηματικά. Κάποια από αυτά προτείνονται για να εργαστείτε ομαδικά.

Στο βιβλίο θα βρεις και **ψηφιακό υλικό**. Υπάρχουν δύο κατηγορίες τέτοιου υλικού. Η πρώτη περιλαμβάνει αρχεία που μεταφέρουν πληροφορίες (π.χ. εικόνες, ιστορικά σημειώματα, λυμένα παραδείγματα κ.ά.) ή επιπλέον υλικό (π.χ. επιπλέον ασκήσεις). Η δεύτερη αποτελείται από εφαρμογές που απαιτούν τη δική σου δραστηριότητα (π.χ. χρήση του GeoGebra ή λογιστικού φύλλου, συμπλήρωση πίνακα έννοιας κ.ά.), ώστε να πειραματιστείς και να βγάλεις συμπεράσματα. Το ψηφιακό υλικό μπορεί να χρησιμοποιηθεί είτε στην τάξη είτε στο σπίτι, για την ατομική ή την ομαδική εργασία. Ωστόσο, προτείνουμε, όσο είναι δυνατόν, να αξιοποιείται για τη διερεύνηση και τη συζήτηση στην τάξη.

Μία ομάδα σημειωμάτων στο βιβλίο και στο ψηφιακό υλικό είναι τα **ιστορικά σημειώματα**. Αυτά τα σημειώματα, μαζί με έργα από την Ιστορία των μαθηματικών (π.χ. η διερεύνηση Δ1 της διδακτικής ενότητας 5.3 για τη χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας από τους αρχαίους Αιγυπτίους), έχουν στόχο να αναδείξουν ότι τα μαθηματικά είναι ένα ανθρώπινο δημιούργημα και να σου δώσουν επιπλέον ευκαιρίες σύνδεσης των μαθηματικών με την καθημερινή ζωή των ανθρώπων. Οι πηγές που φαίνονται με τη μορφή αριθμών στα ιστορικά σημειώματα αναφέρονται στον πίνακα πηγών.

Πίνακας πηγών

Αγαπητοί εκπαιδευτικοί, αγαπητοί γονείς,

Το παρόν βιβλίο στηρίζεται στο Πρόγραμμα Σπουδών (ΠΣ) των Μαθηματικών του Γυμνασίου (ΦΕΚ 235/Β/20-01-2023). Αποτελεί μια προσπάθεια υλοποίησης των κατευθύνσεων του ΠΣ και κάθε στοιχείο του (έργα διερεύνησης, διατύπωση μαθηματικού περιεχομένου, εφαρμογές κτλ.) συνδέεται με ένα ή περισσότερα Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ). Έχουν ληφθεί υπόψη οι στοχεύσεις του ΠΣ για τις προηγούμενες τάξεις (του Δημοτικού σχολείου) και τις επόμενες. Οι προτάσεις έργων διερεύνησης, τα παραδείγματα και οι ασκήσεις έχουν επιλεγεί ώστε με την κατάλληλη διαχείριση στην τάξη να υποστηρίξουν την εμπλοκή των παιδιών σε πλούσια μαθηματική δραστηριότητα και διερεύνηση, την ανάπτυξη του μαθηματικού συλλογισμού και την καλλιέργεια της ικανότητας αξιοποίησης των μαθηματικών στην κριτική ερμηνεία φαινομένων του φυσικού και κοινωνικού κόσμου. Στο πλαίσιο της μαθηματικής δραστηριότητας των παιδιών θεωρείται απαραίτητη η αξιοποίηση ποικίλων αλλά κατάλληλων εργαλείων, που μπορεί να είναι χειραπτικά (όπως χαρτί και μολύβι, γεωμετρικά όργανα, διαφανές χαρτί κ.ά.) και ψηφιακά (όπως λογιστικά φύλλα, χρήση διαδικτύου, GeoGebra κ.ά.). Προτείνεται, και σε αρκετά έργα αναφέρεται ρητά, ένας συνδυασμός ατομικής και ομαδικής εργασίας και συζήτησης σε μικρές ομάδες και στη συνέχεια στην τάξη. Ένας τέτοιος συνδυασμός μπορεί να προωθήσει τη μαθηματική επικοινωνία, τη συμπερίληψη όλων των παιδιών στις μαθηματικές πρακτικές, αλλά και την ανάπτυξη αυτοπεποίθησης και θετικών στάσεων προς τα μαθηματικά.

Το βιβλίο οργανώνεται σε θεματικές ενότητες, αντίστοιχες με τις θεματικές ενότητες του ΠΣ. Οι θεματικές ενότητες αποτελούνται από διδακτικές ενότητες, οι οποίες αποτελούν αυτόνομες μονάδες διδασκαλίας μίας ή περισσότερων διδακτικών ωρών. Για παράδειγμα, η διδακτική ενότητα «10.1 Διαχείριση δεδομένων» είναι η ενότητα με τον μεγαλύτερο αριθμό διδακτικών ωρών (5 ενδεικτικές ώρες), ενώ αρκετές ενότητες μπορούν να συζητηθούν σε μία διδακτική ώρα.

Σε ειδικές περιπτώσεις, για διδακτικούς λόγους, δύο ή περισσότερες θεματικές ενότητες του ΠΣ αποτελούν το αντικείμενο της ίδιας θεματικής ενότητας στο βιβλίο. Έτσι, η Γεωμετρία του επιπέδου μαζί με το Μήκος και το Μέτρο γωνιών αποτέλεσαν μια ενιαία θεματική ενότητα, ενώ στα Στοχαστικά Μαθηματικά δημιουργήθηκαν δύο θεματικές ενότητες, μία για όλη τη Στατιστική και μία για όλες τις Πιθανότητες.

Προτεινόμενη σειρά διδακτικής διαχείρισης των διδακτικών ενοτήτων

Με βάση τα ΠΜΑ, η σειρά διδασκαλίας για την Άλγεβρα προτείνεται να είναι ίδια με τη σειρά των ενοτήτων (δηλαδή 1, 2, 3, 4, 5, 6). Για τη Γεωμετρία, προτείνεται να προηγηθεί η ενότητα 7 (Γεωμετρία του επιπέδου) και να ακολουθήσουν οι άλλες δύο ενότητες (Μετασχηματισμοί και Γεωμετρία του χώρου) με οποιαδήποτε σειρά. Στα Στοχαστικά Μαθηματικά, μπορεί να διδαχτεί πρώτα η Στατιστική και μετά οι Πιθανότητες, ή το αντίθετο. Είναι σημαντικό όμως η διδασκαλία κάθε θεματικού πεδίου να απλώνεται σε όσο το δυνατόν μεγαλύτερο μέρος του σχολικού έτους. Για παράδειγμα, η διδασκαλία της Γεωμετρίας – Μέτρησης θα πρέπει να απλώνεται στη διάρκεια του χρόνου και να μην περιορίζεται σε ένα μικρό μέρος του σχολικού έτους. Αυτό μπορεί να γίνεται είτε με παράλληλη διδασκαλία δύο διαφορετικών θεματικών ενοτήτων μέσα σε κάθε εβδομάδα (π.χ. δύο ώρες Άλγεβρα και δύο ώρες Γεωμετρία ή Στοχαστικά Μαθηματικά) είτε με διαδοχική διδασκαλία διδακτικών ενοτήτων από διαφορετικά πεδία (π.χ. διδάσκονται διαδοχικά κατά σειρά οι ενότητες 1, 2, 7.1-7.4, 3, 4, 10, 7.5-7.13, …).

Ενημέρωση των εκπαιδευτικών για το βιβλίο

Πλοηγός αντιστοίχισης των ΨΜΑ με τα ΠΜΑ

Οι Θεματικές και οι Διδακτικές ενότητες και τα Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ)

Παρακάτω αναφέρονται τα ΠΜΑ που υποστηρίζονται σε κάθε διδακτική ενότητα, ώστε οι εκπαιδευτικοί να μπορούν να ανατρέχουν σε αυτά όταν σχεδιάζουν τη διδασκαλία.

Στο τέλος κάθε διδακτικής ενότητας οι μαθητές και οι μαθήτριες είναι σε θέση:

Θεματική ενότητα 1: Φυσικοί αριθμοί

1.1 Φυσικοί αριθμοί – Δυνάμεις φυσικών

- Να προσδιορίζουν το σύνολο των φυσικών αριθμών 0, 1, 2, 3, …, καθώς και τους άρτιους και περιττούς φυσικούς αριθμούς. [Αρ.Φ.7.1.]
- Να διατυπώνουν και να χρησιμοποιούν τον ορισμό των δυνάμεων με βάση φυσικό και εκθέτη φυσικό $\nu > 0$ σε υπολογισμούς. [Αρ.Φ.7.7.]

1.2 Ευκλείδεια διαίρεση – Διαιρετότητα

- Να αναγνωρίζουν και να εκφράζουν συμβολικά την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης και να τη χρησιμοποιούν στην επίλυση προβλημάτων. [Αρ.Φ.7.2.]
- Να εφαρμόζουν την έννοια της διαιρετότητας για να λύνουν προβλήματα. [Αρ.Φ.7.3.]

1.3 Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (ΜΚΔ)

- Να αναγνωρίζουν τον τρόπο λειτουργίας του αλγορίθμου του Ευκλείδη για την εύρεση του ΜΚΔ των φυσικών αριθμών. [Αρ.Φ.7.4.]
- Να υπολογίζουν το ΕΚΠ και τον ΜΚΔ με ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. [Αρ.Φ.7.5.]

1.4 Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ)

- Να υπολογίζουν το ΕΚΠ και τον ΜΚΔ με ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. [Αρ.Φ.7.5.]

1.5 Το δυαδικό σύστημα αρίθμησης

- Να διερευνούν το δυαδικό σύστημα αρίθμησης φυσικών αριθμών και να το συγκρίνουν με το δεκαδικό κάνοντας μετατροπές μεταξύ τους. [Αρ.Φ.7.6.]

Θεματική ενότητα 2: Ακέραιοι αριθμοί

2.1 Οι ακέραιοι αριθμοί

- Να αναγνωρίζουν την ανάγκη εισαγωγής των ακέραιων αριθμών στην επίλυση προβλημάτων που δε λύνονται στο πλαίσιο των φυσικών αριθμών. [Αρ.Α.7.1.]
- Να διακρίνουν θετικούς και αρνητικούς ακεραίους, καθώς και ομόσημους και ετερόσημους. [Αρ.Α.7.2.]
- Να διερευνούν τη σχέση των ακεραίων με τους φυσικούς αριθμούς. [Αρ.Α.7.3.]
- Να αναγνωρίζουν την απόλυτη τιμή ακέραιων αριθμών ως την απόστασή τους από το μηδέν (0) στην αριθμογραμμή. [Αρ.Α.7.4.]
- Να περιγράφουν τα χαρακτηριστικά δύο αντίθετων αριθμών. [Αρ.Α.7.5.]
- Να ερμηνεύουν τις πολλαπλές σημασίες των συμβόλων «+» και «–». [Αρ.Α.7.9.]

2.2 Πρόσθεση στο σύνολο ακέραιων αριθμών

- Να προσθέτουν και να αφαιρούν ακέραιους αριθμούς χρησιμοποιώντας στην αρχή εποπτικά μοντέλα και ύστερα μαθηματικές ισότητες για να περιγράφουν προσθέσεις και αφαιρέσεις. [Αρ.Α.7.6.]
- Να ερμηνεύουν τις πολλαπλές σημασίες των συμβόλων «+» και «–». [Αρ.Α.7.9.]
- Να συγκρίνουν το νόημα της πρόσθεσης ως αύξησης και της αφαίρεσης ως ελάττωσης στους φυσικούς με το νόημα των αντίστοιχων πράξεων στους ακεραίους. [Αρ.Α.7.10.]
- Να μοντελοποιούν και να λύνουν προβλήματα με ακεραίους σε πραγματικά και μαθηματικά πλαίσια. [Αρ.Α.7.11.]

2.3 Αφαίρεση ακέραιων αριθμών

- Να προσθέτουν και να αφαιρούν ακέραιους αριθμούς χρησιμοποιώντας στην αρχή εποπτικά μοντέλα και ύστερα μαθηματικές ισότητες για να περιγράφουν προσθέσεις και αφαιρέσεις. [Αρ.Α.7.6.]
- Να ερμηνεύουν τις πολλαπλές σημασίες των συμβόλων «+» και «–». [Αρ.Α.7.9.]
- Να συγκρίνουν το νόημα της πρόσθεσης ως αύξησης και της αφαίρεσης ως ελάττωσης στους φυσικούς με το νόημα των αντίστοιχων πράξεων στους ακεραίους. [Αρ.Α.7.10.]
- Να μοντελοποιούν και να λύνουν προβλήματα με ακεραίους σε πραγματικά και μαθηματικά πλαίσια. [Αρ.Α.7.11.]

2.4 Πολλαπλασιασμός ακέραιων αριθμών

- Να πολλαπλασιάζουν ακέραιους αριθμούς χρησιμοποιώντας εποπτικά μοντέλα και να καταλήγουν στον ορισμό του πολλαπλασιασμού ακεραίων. [Αρ.Α.7.7.]
- Να διατυπώνουν και να χρησιμοποιούν τον ορισμό των δυνάμεων με βάση ακέραιο και εκθέτη φυσικό $\nu > 0$ σε υπολογισμούς. [Αρ.Α.7.8.]
- Να μοντελοποιούν και να λύνουν προβλήματα με ακεραίους σε πραγματικά και μαθηματικά πλαίσια. [Αρ.Α.7.11.]

Θεματική ενότητα 3: Ρητοί αριθμοί

3.1 Οι Ρητοί αριθμοί

- Να αναγνωρίζουν την ανάγκη εισαγωγής των ρητών αριθμών για την επίλυση προβλημάτων που δε λύνονται στο πλαίσιο των ακεραίων. [Αρ.Ρ.7.1.]
- Να διερευνούν διαφορετικές αναπαραστάσεις ρητών αριθμών (δεκαδική, κλασματική) και να κάνουν μετατροπές από τη μία μορφή στην άλλη. [Αρ.Ρ.7.2.]
- Να συγκρίνουν και να διατάσσουν ρητούς, να τους αναπαριστούν στην αριθμογραμμή και να αναγνωρίζουν ότι ένας ρητός δεν έχει επόμενο. [Αρ.Ρ.7.3.]
- Να αναγνωρίζουν την απόλυτη τιμή ρητών αριθμών ως την απόστασή τους από το μηδέν (0) στην αριθμογραμμή. [Αρ.Ρ.7.4.]
- Να χρησιμοποιούν τους ρητούς στην επίλυση προβλημάτων σε μαθηματικό και ρεαλιστικό πλαίσιο. [Αρ.Ρ.7.13.]

3.2 Πρόσθεση και αφαίρεση ρητών αριθμών

- Να επεκτείνουν στους ρητούς την πρόσθεση, την αφαίρεση και τον πολλαπλασιασμό των ακεραίων. [Αρ.Ρ.7.5.]
- Να κάνουν πράξεις μεταξύ ρητών αριθμών, σε κλασματική ή δεκαδική μορφή. [Αρ.Ρ.7.7.]

- Να επεκτείνουν τις ιδιότητες των πράξεων των ακεραίων στους ρητούς. [Αρ.Ρ.7.8.]
- Να χρησιμοποιούν τους ρητούς στην επίλυση προβλημάτων σε μαθηματικό και ρεαλιστικό πλαίσιο. [Αρ.Ρ.7.13.]

3.3 Πολλαπλασιασμός και διαίρεση ρητών αριθμών

- Να επεκτείνουν στους ρητούς την πρόσθεση, την αφαίρεση και τον πολλαπλασιασμό των ακεραίων. [Αρ.Ρ.7.5.]
- Να διαιρούν ρητούς μέσω του πολλαπλασιασμού του ενός με τον αντίστροφο του άλλου. [Αρ.Ρ.7.6.]
- Να κάνουν πράξεις μεταξύ ρητών αριθμών, σε κλασματική ή δεκαδική μορφή. [Αρ.Ρ.7.7.]
- Να επεκτείνουν τις ιδιότητες των πράξεων των ακεραίων στους ρητούς. [Αρ.Ρ.7.8.]
- Να χρησιμοποιούν τους ρητούς στην επίλυση προβλημάτων σε μαθηματικό και ρεαλιστικό πλαίσιο. [Αρ.Ρ.7.13.]

3.4 Δυνάμεις και παραστάσεις ρητών αριθμών

- Να διατυπώνουν και να χρησιμοποιούν τον ορισμό των δυνάμεων με βάση ρητό και εκθέτη φυσικό $\nu > 0$. [Αρ.Ρ.7.9.]
- Να προσδιορίζουν το πρόσημο της δύναμης ρητού αριθμού με βάση τον ορισμό. [Αρ.Ρ.7.10.]
- Να υπολογίζουν την τιμή μιας αριθμητικής παράστασης με ρητούς κάνοντας χρήση της προτεραιότητας των πράξεων (μπορεί να περιέχει δυνάμεις με εκθέτη φυσικό και παρενθέσεις). [Αρ.Ρ.7.11.]
- Να αξιοποιούν την τυποποιημένη μορφή των ρητών αριθμών για την αναπαράσταση φυσικών μεγεθών μεγάλου μεγέθους. [Αρ.Ρ.7.12.]
- Να χρησιμοποιούν τους ρητούς στην επίλυση προβλημάτων σε μαθηματικό και ρεαλιστικό πλαίσιο. [Αρ.Ρ.7.13.]

Θεματική ενότητα 4: Κανονικότητες

4.1 Κανονικότητες και φυσικοί αριθμοί

- Να αναγνωρίζουν, να συγκρίνουν, να περιγράφουν κανονικότητες και να τις εκφράζουν ως αριθμητικές κανονικότητες με φυσικούς αριθμούς. [Αλ.Κ.7.1.]
- Να συμπληρώνουν, να επεκτείνουν και να δημιουργούν αριθμητικές κανονικότητες με φυσικούς αριθμούς. [Αλ.Κ.7.2.]
- Να αναπαριστούν κανονικότητες με διάφορους τρόπους, όπως εικόνες ή γεωμετρικά σχήματα, πίνακες τιμών και σημεία σε σύστημα αξόνων, και να μεταβαίνουν από τη μία αναπαράσταση στην άλλη. [Αλ.Κ.7.3.]

4.2 Κανονικότητες και αριθμητικά μοτίβα

- Να διερευνούν κανονικότητες που μπορούν να εκφραστούν στη μορφή $\alpha \cdot \nu$ (με α ρητό και ν τη σειρά του όρου) και να διατυπώνουν τον γενικό τους όρο λεκτικά και συμβολικά. [Αλ.Κ.7.4.]

4.3 Προβλήματα με κανονικότητες

- Να λύνουν προβλήματα που συναντούν στα μαθηματικά και στην καθημερινή ζωή με κανονικότητες. [Αλ.Κ.7.5.]

Θεματική ενότητα 5: Αλγεβρικές παραστάσεις

5.1 Περιγραφή καταστάσεων με αλγεβρικές παραστάσεις

- Να μεταφράζουν από λεκτικές εκφράσεις σε απλές αλγεβρικές παραστάσεις και αντίστροφα. [Αλ.Π.7.1.]
- Να διακρίνουν τα στοιχεία μιας αλγεβρικής παράστασης. [Αλ.Π.7.2.]
- Να υπολογίζουν την αριθμητική τιμή μιας αλγεβρικής παράστασης για συγκεκριμένες τιμές των μεταβλητών και να κατασκευάζουν πίνακες τιμών. [Αλ.Π.7.5.]

5.2 Αλγεβρικές παραστάσεις και προβλήματα

- Να λύνουν πραγματικά και μαθηματικά προβλήματα χρησιμοποιώντας αριθμητικές και αλγεβρικές παραστάσεις. [Αλ.Π.7.3.]
- Να συνθέτουν προβλήματα τα οποία λύνονται με χρήση αριθμητικών και αλγεβρικών παραστάσεων. [Αλ.Π.7.4.]

5.3 Η επιμεριστική ιδιότητα

- Να χρησιμοποιούν την επιμεριστική ιδιότητα $\alpha(\beta \pm \gamma) = \alpha\beta \pm \alpha\gamma$ για να μετατρέπουν αλγεβρικές παραστάσεις σε απλούστερη μορφή. [Αλ.Π.7.6.]
- Να ερμηνεύουν γεωμετρικά την επιμεριστική ιδιότητα: $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$, με α, β και γ θετικούς. [Αλ.Π.7.7.]

Θεματική ενότητα 6: Αλγεβρικές σχέσεις

6.1 Η εξίσωση και η λύση της

- Να διερευνούν και να διατυπώνουν τις ιδιότητες της ισότητας με βάση μοντέλα – μεταφορές. [Αλ.Σχ.7.1.]
- Να αναγνωρίζουν την εξίσωση με έναν άγνωστο αριθμό x ως μια μαθηματική ισότητα η οποία ισχύει για συγκεκριμένες τιμές του x, καθώς και τους όρους της. [Αλ.Σχ.7.2.]
- Να αναγνωρίζουν ότι μια εξίσωση είναι ισοδύναμη με μια άλλη όταν έχουν τις ίδιες λύσεις. [Αλ.Σχ.7.3.]

6.2 Επίλυση εξίσωσης

- Να εφαρμόζουν ιδιότητες διατήρησης της ισότητας για να μετασχηματίσουν εξισώσεις της μορφής $\alpha x + \beta = \gamma$ με ρητούς συντελεστές σε ισοδύναμες μορφές. [Αλ.Σχ.7.4.]
- Να επιλύουν εξισώσεις της μορφής $\alpha x + \beta = \gamma$ με εφαρμογή των ιδιοτήτων της διατήρησης της ισότητας και των πράξεων. [Αλ.Σχ.7.5.]

6.3 Προβλήματα που λύνονται με εξισώσεις

- Να επιλύουν προβλήματα της καθημερινής ζωής με εξισώσεις της μορφής $\alpha x + \beta = \gamma$, αριθμητικά μέσω κατάλληλων μοντέλων και αλγεβρικά με τις ιδιότητες της ισότητας. [Αλ.Σχ.7.6.]
- Να συνθέτουν προβλήματα που επιλύονται με εξισώσεις της μορφής $\alpha x + \beta = \gamma$. [Αλ. Σχ.7.7.]

Θεματική ενότητα 7: Γεωμετρία του επιπέδου – Μέτρηση

7.1 Βασικά επίπεδα σχήματα

- Να αναγνωρίζουν και να περιγράφουν βασικές γεωμετρικές έννοιες (σημείο, ευθεία, ημιευθεία, ευθύγραμμο τμήμα, γωνία) σε απλά και σύνθετα γεωμετρικά σχήματα. [Γ.Ε.7.1.]

7.2 Μήκος ευθύγραμμου τμήματος – Μονάδες μέτρησης μήκους

- Να επιλέγουν τις κατάλληλες μονάδες μέτρησης μήκους και να κάνουν μετατροπές από τη μία μονάδα στην άλλη. [Μ.Μ.7.1.]
- Να επιλύουν προβλήματα που αφορούν μήκη τμημάτων και περιμέτρους ευθύγραμμων σχημάτων με τη χρήση κατάλληλων μονάδων μέτρησης. [Μ.Μ.7.6.]

7.3 Σύγκριση, πρόσθεση και αφαίρεση ευθύγραμμων τμημάτων

- Να επιλέγουν τις κατάλληλες μονάδες μέτρησης μήκους και να κάνουν μετατροπές από τη μία μονάδα στην άλλη. [Μ.Μ.7.1.]
- Να προσθέτουν και να αφαιρούν ευθύγραμμα τμήματα χρησιμοποιώντας γεωμετρικά όργανα. [Μ.Μ.7.2.]
- Να προσδιορίζουν τη σχέση του μέτρου του αθροίσματος, της διαφοράς με τα μέτρα των σχετιζόμενων τμημάτων. [Μ.Μ.7.3.]
- Να υπολογίζουν μήκη πλευρών και περιμέτρους πολυγώνων χρησιμοποιώντας ιδιότητες ή σχέσεις. [Μ.Μ.7.4.]
- Να επιλύουν προβλήματα που αφορούν τη σύγκριση τμημάτων μέσω του μήκους τους χρησιμοποιώντας κατάλληλες μονάδες μέτρησης. [Μ.Μ.7.5.]
- Να επιλύουν προβλήματα που αφορούν μήκη τμημάτων και περιμέτρους ευθύγραμμων σχημάτων με τη χρήση κατάλληλων μονάδων μέτρησης. [Μ.Μ.7.6.]

7.4 Ο κύκλος και τα στοιχεία του

- Να προσδιορίζουν τη χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων του κύκλου και να περιγράφουν τα στοιχεία του κύκλου. [Γ.Ε.7.17.]

7.5 Επίκεντρες γωνίες – Μέτρηση τόξων και επίκεντρων γωνιών

- Να συνδέουν το μέτρο της επίκεντρης γωνίας και του αντίστοιχου τόξου του ίδιου κύκλου ή ίσων κύκλων. [Μ.Γ.7.2.]

7.6 Διχοτόμος γωνίας

- Να σχεδιάζουν με γεωμετρικά όργανα τη διχοτόμο γωνίας, τη μεσοκάθετο ευθύγραμμου τμήματος και να περιγράφουν τη διαδικασία. [Γ.Ε.7.5.]

7.7 Είδη γωνιών

- Να προσδιορίζουν είδη γωνιών και να διατυπώνουν τους σχετικούς ορισμούς. [Γ.Ε.7.2.]

7.8 Πρόσθεση και αφαίρεση γωνιών

- Να προσθέτουν και να αφαιρούν γωνίες με επίθεση. [Μ.Γ.7.1.]

7.9 Συμπληρωματικές και παραπληρωματικές γωνίες

- Να διερευνούν και να προσδιορίζουν σχέσεις μεταξύ γωνιών (κατακορυφήν, συμπληρωματικές και παραπληρωματικές). [Γ.Ε.7.6.]
- Να προσθέτουν και να αφαιρούν γωνίες με επίθεση. [Μ.Γ.7.1.]
- Να υπολογίζουν γωνίες χρησιμοποιώντας ιδιότητες ή σχέσεις. [Μ.Γ.7.3.]

7.10 Κατακορυφήν γωνίες

- Να διερευνούν και να προσδιορίζουν σχέσεις μεταξύ γωνιών (κατακορυφήν, συμπληρωματικές και παραπληρωματικές). [Γ.Ε.7.6.]
- Να υπολογίζουν γωνίες χρησιμοποιώντας ιδιότητες ή σχέσεις. [Μ.Γ.7.3.]

7.11 Σχετικές θέσεις ευθειών στο επίπεδο

- Να διερευνούν και να περιγράφουν τις σχετικές θέσεις ευθειών στο επίπεδο. [Γ.Ε.7.7.]

7.12 Χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων της διχοτόμου

- Να αναγνωρίζουν και να περιγράφουν τη χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων της μεσοκαθέτου ευθύγραμμου τμήματος και την ιδιότητα των σημείων της διχοτόμου γωνίας. [Γ.Ε.7.3.]

7.13 Γωνίες από παράλληλες και τέμνουσα

- Να προσδιορίζουν σχέσεις γωνιών που σχηματίζονται από παράλληλες ευθείες και μια τέμνουσά τους και να τις εφαρμόζουν σε απλά προβλήματα. [Γ.Ε.7.8.]
- Να υπολογίζουν γωνίες χρησιμοποιώντας ιδιότητες ή σχέσεις. [Μ.Γ.7.3.]

7.14 Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου

- Να σχεδιάζουν με τη χρήση του γνώμονα την εφαπτομένη κύκλου σε σημείο του. [Γ.Ε.7.18.]
- Να διερευνούν και να προσδιορίζουν τις σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου. [Γ.Ε.7.19.]

7.15 Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος

- Να αναγνωρίζουν και να περιγράφουν τη χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων της μεσοκαθέτου ευθύγραμμου τμήματος και την ιδιότητα των σημείων της διχοτόμου γωνίας. [Γ.Ε.7.3.]
- Να σχεδιάζουν με γεωμετρικά όργανα τη διχοτόμο γωνίας, τη μεσοκάθετο ευθύγραμμου τμήματος και να περιγράφουν τη διαδικασία. [Γ.Ε.7.5.]
- Να αξιοποιούν τις ιδιότητες της μεσοκαθέτου, της παραλληλίας και της καθετότητας ευθειών και των παραλληλογράμμων στην επίλυση απλών προβλημάτων. [Γ.Ε.7.16.]
- Να διερευνούν και να εντοπίζουν τις ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά των σχημάτων που παραμένουν αναλλοίωτα από έναν μετασχηματισμό συμμετρίας ως προς άξονα. [Γ.Μ.7.3.]

7.16 Είδη τριγώνων και στοιχεία τους

- Να εφαρμόζουν τη χαρακτηριστική ιδιότητα της μεσοκαθέτου ευθύγραμμου τμήματος για να αναγνωρίζουν ιδιότητες του ισοσκελούς και του ισόπλευρου τριγώνου. [Γ.Ε.7.4.]
- Να αναγνωρίζουν είδη τριγώνων και να τα ταξινομούν με βάση σχέσεις των πλευρών και το είδος των γωνιών τους. [Γ.Ε.7.9.]
- Να χρησιμοποιούν γεωμετρικά όργανα και ψηφιακά μέσα για να διατυπώνουν και να ελέγχουν εικασίες σχετικά με ιδιότητες που αφορούν τα κύρια και τα δευτερεύοντα στοιχεία του τριγώνου. [Γ.Ε.7.10.]
- Να σχεδιάζουν με γεωμετρικά όργανα τρίγωνα και παραλληλόγραμμα με δεδομένα χαρακτηριστικά και να περιγράφουν τα βήματα της σχεδίασης. [Γ.Ε.7.15.]

7.17 Άθροισμα γωνιών τριγώνου

- Να αναπτύσσουν λογικούς συλλογισμούς για να τεκμηριώσουν ότι το άθροισμα γωνιών τριγώνου είναι 180 μοίρες. [Γ.Ε.7.11.]
- Να υπολογίζουν γωνίες χρησιμοποιώντας ιδιότητες ή σχέσεις. [Μ.Γ.7.3.]

7.18 Τα τετράπλευρα και τα είδη τους

- Να διερευνούν είδη τετράπλευρων (παραλληλόγραμμα, τραπέζια) και να διατυπώνουν σχετικούς ορισμούς. [Γ.Ε.7.12.]
- Να χρησιμοποιούν γεωμετρικά όργανα και ψηφιακά εργαλεία για να διατυπώσουν και να ελέγξουν εικασίες σχετικά με τις ιδιότητες παραλληλογράμμου, ορθογωνίου, ρόμβου και τετραγώνου, τις οποίες να τεκμηριώνουν αναπτύσσοντας λογικούς συλλογισμούς. [Γ.Ε.7.13.]

- Να ταξινομούν τα είδη των τετραπλεύρων με βάση τις ιδιότητές τους. [Γ.Ε.7.14.]
- Να σχεδιάζουν με γεωμετρικά όργανα παραλληλόγραμμα με δεδομένα χαρακτηριστικά και να περιγράφουν τα βήματα της σχεδίασης. [Γ.Ε.7.15.]
- Να αξιοποιούν τις ιδιότητες της μεσοκαθέτου, της παραλληλίας και της καθετότητας ευθειών και των παραλληλογράμμων στην επίλυση απλών προβλημάτων. [Γ.Ε.7.16.]
- Να υπολογίζουν μήκη πλευρών και περιμέτρους πολυγώνων χρησιμοποιώντας ιδιότητες ή σχέσεις. [Μ.Μ.7.4.]
- Να επιλύουν προβλήματα που αφορούν τη σύγκριση τμημάτων μέσω του μήκους τους χρησιμοποιώντας κατάλληλες μονάδες μέτρησης. [Μ.Μ.7.5.]
- Να επιλύουν προβλήματα που αφορούν μήκη τμημάτων και περιμέτρους ευθύγραμμων σχημάτων με τη χρήση κατάλληλων μονάδων μέτρησης. [Μ.Μ.7.6.]

Θεματική ενότητα 8: Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί

8.1 Συμμετρία σχημάτων ως προς άξονα

- Να αναγνωρίζουν μετασχηματισμούς συμμετρίας ως προς άξονα και να καθορίζουν τα στοιχεία και τα χαρακτηριστικά τους. [Γ.Μ.7.1.]
- Να διερευνούν και να εντοπίζουν τις ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά των σχημάτων που παραμένουν αναλλοίωτα από έναν μετασχηματισμό συμμετρίας ως προς άξονα. [Γ.Μ.7.3.]
- Να σχεδιάζουν τα συμμετρικά γεωμετρικών σχημάτων ως προς διάφορους άξονες χρησιμοποιώντας μια ποικιλία εργαλείων και στρατηγικών. [Γ.Μ.7.5.]

8.2 Σχήματα με άξονα συμμετρίας

- Να αναγνωρίζουν σχήματα με άξονα συμμετρίας και να σχεδιάζουν τους άξονες συμμετρίας σε αυτά. [Γ.Μ.7.2.]
- Να αξιοποιούν τις ιδιότητες της αξονικής συμμετρίας στον σχεδιασμό σχημάτων και στην αιτιολόγηση ιδιοτήτων τους. [Γ.Μ.7.4.]
- Να σχεδιάζουν τα συμμετρικά γεωμετρικών σχημάτων ως προς διάφορους άξονες χρησιμοποιώντας μια ποικιλία εργαλείων και στρατηγικών. [Γ.Μ.7.5.]

Θεματική ενότητα 9: Γεωμετρία του χώρου

9.1 Πρίσμα και πυραμίδα

- Να αναγνωρίζουν τα βασικά γεωμετρικά στερεά (ορθό πρίσμα, παραλληλεπίπεδο, κύβος, πυραμίδα) και να προσδιορίζουν τα στοιχεία τους. [Γ.Χ.7.1.]
- Να σχεδιάζουν τις όψεις και τα αναπτύγματα ορθών πρισμάτων και πυραμίδων με ψηφιακά εργαλεία, ισομετρικό χαρτί, γεωπίνακα ή με ελεύθερη σχεδίαση. [Γ.Χ.7.2.]

9.2 Κύλινδρος, κώνος και σφαίρα

- Να αναγνωρίζουν τα στερεά (κύλινδρο, κώνο και σφαίρα) και να προσδιορίζουν τα στοιχεία τους. [Γ.Χ.7.3.]
- Να διερευνούν και να αναγνωρίζουν τον κύλινδρο, τον κώνο και τη σφαίρα ως στερεά που παράγονται από τη στροφή βασικών γεωμετρικών σχημάτων. [Γ.Χ.7.4.]
- Να σχεδιάζουν τις όψεις και τα αναπτύγματα κυλίνδρων και κώνων με ψηφιακά εργαλεία ή με ελεύθερη σχεδίαση. [Γ.Χ.7.5.]

Θεματική ενότητα 10: Στατιστική

10.1 Διαχείριση δεδομένων

- Να διατυπώνουν ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με συνεχή ποσοτικά δεδομένα από το οικείο περιβάλλον τους. [Σ.Δ.7.1.]
- Να χαρακτηρίζουν δεδομένα που έχουν προκύψει από απογραφή σε έναν πληθυσμό ως κατηγορικά, διακριτά ή συνεχή ποσοτικά. [Σ.Δ.7.2.]
- Να κατασκευάζουν κυκλικά διαγράμματα για κατηγορικά δεδομένα. [Σ.Δ.7.3.]
- Να κατασκευάζουν ιστογράμματα συχνοτήτων ίσου πλάτους, με δεδομένο πλήθος κλάσεων για συνεχή ποσοτικά δεδομένα. [Σ.Δ.7.4.]
- Να επιλέγουν πληροφορίες από διαφορετικές αναπαραστάσεις ποσοτικών δεδομένων και να καταλήγουν σε συμπεράσματα. [Σ.Δ.7.5.]
- Να επιλέγουν κατάλληλες μορφές αναπαράστασης και να επιχειρηματολογούν για τις επιλογές τους. [Σ.Δ.7.6.]

10.2 Μέτρα θέσης και μεταβλητότητας

- Να χρησιμοποιούν τα μέτρα θέσης για να περιγράψουν δεδομένα, να κάνουν συγκρίσεις και να εξαγάγουν συμπεράσματα. [Σ.Μ.7.1.]
- Να περιγράφουν χαρακτηριστικά των δεδομένων όπως το εύρος, η ύπαρξη πολλαπλών κορυφών και οι απόμακρες τιμές από ένα ιστόγραμμα συχνοτήτων. [Σ.Μ.7.2.]
- Να διερευνούν πιθανές ερμηνείες για χαρακτηριστικά των δεδομένων, όπως λόγοι ύπαρξης απόμακρων τιμών, ή πιθανούς λόγους για τη μεταβλητότητα των δεδομένων. [Σ.Μ.7.3.]

Θεματική ενότητα 11: Πειράματα τύχης, ενδεχόμενα και πιθανότητες ενδεχομένων

11.1 Πειράματα τύχης και καταγραφή των δυνατών αποτελεσμάτων τους

- Να προσδιορίζουν και να περιγράφουν τον δειγματικό χώρο ενός πειράματος τύχης που πραγματοποιείται σε ένα ή περισσότερα στάδια χρησιμοποιώντας αναπαραστάσεις του δειγματικού χώρου σε πίνακες ή δενδροδιαγράμματα. [Π.Π.7.1.]
- Να μεταφράζουν τα ενδεχόμενα από τη φυσική γλώσσα σε στοιχεία του δειγματικού χώρου. [Π.Π.7.2.]

11.2 Πειράματα τύχης και πιθανότητες ενδεχομένων

- Να χρησιμοποιούν τον κλασικό ορισμό των πιθανοτήτων για να υπολογίσουν την πιθανότητα ενός σύνθετου ενδεχομένου. [Π.Π.7.3.]
- Να συγκρίνουν την πιθανότητα ενδεχομένου με τη σχετική συχνότητα του ενδεχομένου η οποία προκύπτει από αυξανόμενο αριθμό επαναλήψεων του πειράματος ή από προσομοίωση. [Π.Π.7.4.]

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ 1:

Φυσικοί αριθμοί

Οι αριθμοί 0, 1, 2, ..., 9, 10, 11, ... είναι φυσικοί αριθμοί. Φυσικοί είναι οι αριθμοί που χρησιμοποιούμε για να μετράμε πλήθος, π.χ. οι σελίδες ενός βιβλίου είναι 106, οι ημέρες της εβδομάδας είναι 7 και μία ημέρα έχει 24 ώρες ή 1.440 λεπτά ή 86.400 δευτερόλεπτα. Με τους φυσικούς αριθμούς και τις πράξεις τους ασχοληθήκαμε σε όλη τη διάρκεια του Δημοτικού σχολείου.

Εδώ, θα εστιάσουμε περισσότερο σε ιδιότητες των φυσικών αριθμών που σχετίζονται με τις πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης.

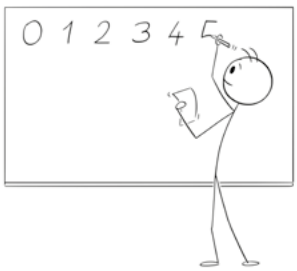
Επιπλέον, θα μάθουμε να γράφουμε αριθμούς χρησιμοποιώντας μόνο δύο ψηφία, το 0 και το 1, δηλαδή θα γνωρίσουμε το δυαδικό σύστημα αρίθμησης.

ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΕΝΟΤΗΤΕΣ:

1.1 Φυσικοί αριθμοί – Δυνάμεις φυσικών
1.2 Ευκλείδεια διαίρεση – Διαιρετότητα
1.3 Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (ΜΚΔ)
1.4 Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ)
1.5 Το δυαδικό σύστημα αρίθμησης

1.1 Φυσικοί αριθμοί – Δυνάμεις φυσικών

Δ1. Κάνουμε πράξεις με φυσικούς



Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $1+2+3+4+5$ β) $45+0$

γ) $45+(10-5)$ δ) $5\cdot(11-9)$

ε) $(12+9)(15-5)$ στ) $2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3$

Συζητήστε με τους συμμαθητές και τις συμμαθήτριές σας τον τρόπο με τον οποίο εργαστήκατε.

Συζητάμε

…για φυσικούς αριθμούς και πράξεις

Το αποτέλεσμα της πρόσθεσης δύο ή περισσότερων αριθμών το λέμε **άθροισμα**.

Παρόμοια, το αποτέλεσμα της αφαίρεσης δύο αριθμών, όπως της $25-10$, το λέμε **διαφορά** του 10 από το 25.

Γινόμενο ονομάζουμε το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού δύο (ή περισσότερων αριθμών). Οι αριθμοί α και β είναι **παράγοντες** του γινομένου $\alpha\cdot\beta$.

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Το σύνολο των φυσικών αριθμών

Τους αριθμούς 0, 1, …, 10, 11, … τους ονομάζουμε φυσικούς και με αυτούς εκφράζουμε πλήθος αντικειμένων, σειρά, τιμή κάποιου μεγέθους κτλ.

Μπορεί ένα κλάσμα να ανήκει στο σύνολο των φυσικών αριθμών;

Οι φυσικοί αριθμοί είναι **άπειροι (δεν τελειώνουν)**, καθώς για κάθε φυσικό υπάρχει ένας **επόμενος**.

Διαδοχικούς ονομάζουμε δύο ή περισσότερους φυσικούς αριθμούς που, αν τοποθετηθούν σε αύξουσα ή φθίνουσα σειρά, ο καθένας διαφέρει κατά μία μονάδα από τους γειτονικούς του.

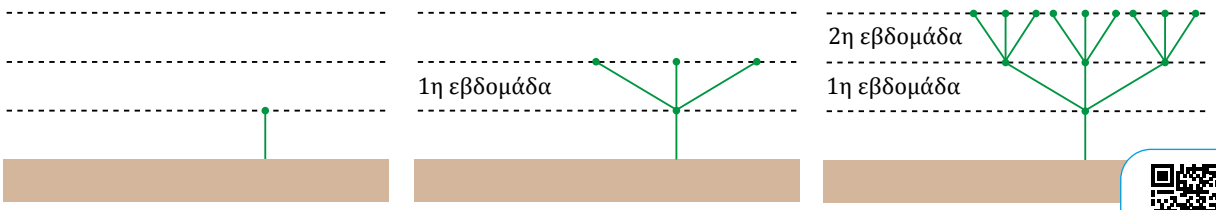
Οι αριθμοί στην αρχαιότητα

Δ2. Υπολογίζουμε το πλήθος

Ένα είδος φυτού έχει την ιδιότητα από κάθε κορυφή του να αναπτύσσονται κάθε εβδομάδα τρία νέα κλαδιά. Αρχικά υπάρχει ένα κλαδί με μία κορυφή.

Πόσες κορυφές θα έχει το φυτό μετά από 1, 2, 3 εβδομάδες;

Ποιο γινόμενο πρέπει να υπολογίσουμε, για να βρούμε πόσες κορυφές θα έχει το φυτό μετά από 8 εβδομάδες;



Η ανάπτυξη ενός φυτού

Συζητάμε

…για δυνάμεις

Συχνά εμφανίζονται γινόμενα που αποτελούνται από τον ίδιο παράγοντα. Για παράδειγμα, το γινόμενο $\underbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2\cdot 2}_{\text{15 παράγοντες ίσοι με 2}}$

Αντί να γράφουμε 15 παράγοντες του 2, το συμβολίζουμε με $\mathbf{2^{15}}$ και το ονομάζουμε δύναμη με βάση το 2 και εκθέτη το 15.

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Αν ο α είναι ένας φυσικός αριθμός και ο ν ένας φυσικός αριθμός διαφορετικός από το 0, τότε με α^{ν} συμβολίζουμε το γινόμενο $\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\ldots\cdot\alpha$ με ν παράγοντες.

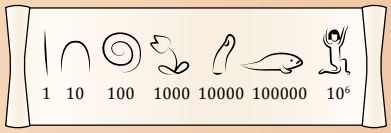
Το α^{ν} το ονομάζουμε «**δύναμη του α στη ν**» ή «ν-οστή δύναμη του α».

Το α το λέμε **βάση** και το ν **εκθέτη** της δύναμης α^{ν}.

Με αριθμούς	Με λέξεις
3^2	τρία στη δευτέρα ή τρία στο τετράγωνο
3^3	τρία στην τρίτη ή τρία στον κύβο
3^4	τρία στην τετάρτη

Οι αρχαίοι Αιγύπτιοι είχαν τον δικό τους τρόπο να συμβολίζουν τις δυνάμεις! Ο Έλληνας Διόφαντος (3ος αιώνας μ.Χ.) χρησιμοποίησε για τις δυνάμεις σύμβολα που προσεγγίζουν τους σημερινούς συμβολισμούς.

Πηγή: [21]*



Τα σύμβολα των δυνάμεων

Πίνακας πηγών

* Στα ιστορικά σημειώματα υπάρχει ένας αριθμός που δηλώνει την πηγή. Ο πίνακας όλων των πηγών υπάρχει εδώ:

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. **Να γράψετε τα ακόλουθα γινόμενα με τη βοήθεια δυνάμεων: α) $5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5$ β) $2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3$**

Απάντηση

α) $5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5=5^8$ **β)** $2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3=2^3\cdot3^4$

2. **Να κάνετε τις πράξεις $2^3+3^2-\left(4^1-2^2\right)\cdot2^5+1^{3.000}$.**

Απάντηση

$2^3+3^2-\left(4^1-2^2\right)\cdot2^5+1^{3.000}=$
$=8+9-(4-4)\cdot32+1=$
$=17-0\cdot32+1=$
$=17-0+1=18$

Η σειρά εκτέλεσης των πράξεων είναι η εξής:

- υπολογίζουμε δυνάμεις,
- κάνουμε πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις,
- κάνουμε προσθέσεις και αφαιρέσεις.

Αν υπάρχουν παρενθέσεις, κάνουμε πρώτα τις πράξεις μέσα σε αυτές με την ίδια σειρά.

3. **Να υπολογίσετε τις τιμές των δυνάμεων 2^2, 2^3 και 2^5. Στη συνέχεια να συμπληρώσετε την ισότητα $\ldots\ldots\cdot2^3=2^5$.**

Απάντηση

$2^2=4$, $2^3=2\cdot2\cdot2=8$ και $2^5=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=32$. Επίσης, $2^2\cdot2^3=4\cdot8=32$. Άρα $4\cdot2^3=2^5$ ή $2^2\cdot2^3=2^5$.

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Ποιοι από τους αριθμούς 1, 0, $\frac{3}{4}$, 512 και 1,03 είναι φυσικοί;

2. Να γράψετε τα ακόλουθα γινόμενα ως δυνάμεις:
α) $5\cdot5\cdot5$ **β)** $7\cdot7\cdot7\cdot7\cdot7$ **γ)** $11\cdot11\cdot11\cdot11$

3. Να υπολογίσετε την τιμή των δυνάμεων:
α) 5^2 **β)** 5^4 **γ)** 2^3 **δ)** 3^5

4. Να γράψετε τα ακόλουθα γινόμενα ως γινόμενα δυνάμεων:
α) $2\cdot2\cdot2\cdot5\cdot5$ **β)** $3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot7\cdot7$ **γ)** $2\cdot3\cdot2\cdot3\cdot3\cdot2$

Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

5. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:
α) 5^2-2^3 **β)** $3^2\left(3^2-2^3\right)$
γ) $5^2-4^2+4^2\cdot\left(3^2-2^3\right)$
δ) $10^5:10^3-10^2+6^2:2$ **ε)** $\left(2^4-4^2\right)\cdot3^2$
στ) $1^{3.000}+(6-5)^{1.000}+(12-10)^3$

6. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες, χρησιμοποιώντας δυνάμεις:
α) $\ldots\ldots\cdot2^2=2^5$ **β)** $\ldots\ldots\cdot3^2=3^4$
γ) $2^3\cdot\ldots\ldots=2^4$ **δ)** $5\cdot\ldots\ldots=5^3$

1.2 Ευκλείδεια διαίρεση – Διαιρετότητα

Δ1. Χωρίζουμε ίδια αντικείμενα σε ισοδύναμες ομάδες

Σε μια μικρή πτηνοτροφική μονάδα τοποθετούν τα αυγά σε τριών ειδών μικρές συσκευασίες, των 4, 6 ή 8 αυγών.

α) Θέλουν να τοποθετήσουν 91 αυγά σε συσκευασίες του ίδιου είδους. Ποια συσκευασία θα επιλέξουν, ώστε να μείνουν όσο το δυνατόν λιγότερα αυγά εκτός συσκευασίας;

β) Ποιο είδος συσκευασίας θα πρέπει να επιλέξουν, ώστε, όσα αυγά κι αν θέλουν να συσκευάσουν, να μη μένουν περισσότερα από 3 αυγά εκτός συσκευασίας;

Συζητήστε στις ομάδες και μετά στην τάξη.

Συζητάμε

…για την ευκλείδεια διαίρεση

Αν υποθέσουμε ότι το πλήθος των παιδιών ενός τμήματος είναι 23 και θέλουμε να σχηματίσουν ομάδες των 4, τότε ο μεγαλύτερος αριθμός ομάδων που μπορούν να φτιάξουν είναι το 5, διότι:

$23 = (4+4+4+4+4)+3$, δηλαδή $23 = 4\cdot 5+3$.

Επομένως, αν συμβολίσουμε $\Delta = 23$, $\delta = 4$, $\pi = 5$ και $\upsilon = 3$,

τότε $\Delta = \underbrace{(\delta+\delta+\ldots+\delta)}_{\pi \text{ φορές το } \delta}+\upsilon$ ή $\Delta = \delta\cdot\pi+\upsilon$.

Το υ συμβολίζει τον αριθμό των παιδιών που περισσεύουν και δε φτάνουν για να φτιάξουν ομάδα.

Αφού $23 = 4\cdot 3+11$, θα μπορούσε το π να είναι 3 και το υ να είναι 11; Δηλαδή, χωρίζοντας τα παιδιά σε τετράδες, θα μπορούσαν να περισσεύουν 11 παιδιά;

Φτιάχνω ισοδύναμες ομάδες

Εφαρμογή στην ευκλείδεια διαίρεση

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να κάνουμε τη διαίρεση ενός φυσικού αριθμού Δ (διαιρετέος) με έναν άλλο φυσικό αριθμό δ (διαιρέτης). Βρίσκουμε τον φυσικό αριθμό π (πηλίκο), που είναι οι περισσότερες φορές που χωράει ο δ στον Δ. Τότε μπορεί να περισσεύει ένας αριθμός υ (υπόλοιπο) που είναι μικρότερος από τον δ.

Σε αυτή την περίπτωση ισχύει ότι:

$$\Delta = \delta\cdot\pi+\upsilon \text{ με } \upsilon < \delta$$

Τη διαδικασία με την οποία βρίσκουμε τους αριθμούς π και υ την ονομάζουμε **ευκλείδεια διαίρεση** του Δ με τον δ.

Τη σχέση $\Delta = \delta\cdot\pi+\upsilon$ την ονομάζουμε **ταυτότητα** της ευκλείδειας διαίρεσης.

Ο διαιρέτης δ δεν μπορεί να είναι ο αριθμός 0.

Για να βρούμε το πηλίκο π και το υπόλοιπο υ του $\Delta = 54$ με τον $\delta = 5$, κάνουμε τη διαίρεση:

$\Delta = 54$	$5 = \delta$
$5\downarrow$	$10 = \pi$
$\upsilon = 4$	

Ο αλγόριθμος της ευκλείδειας διαίρεσης

Τέλεια ονομάζουμε μια ευκλείδεια διαίρεση με **υπόλοιπο 0**. Δηλαδή ισχύει $\Delta = \delta \cdot \pi$.
Τότε λέμε ότι ο δ είναι **παράγοντας** (ή **διαιρέτης**) του Δ και αντίστοιχα ότι ο Δ είναι **πολλαπλάσιο** του δ.

Η λέξη **διαιρέτης** χρησιμοποιείται με δύο τρόπους:

- Αν $\Delta = 23$ και $\delta = 4$, τότε $23 = 4 \cdot 5 + 3$ και λέμε ότι ο 4 είναι ο διαιρέτης στη συγκεκριμένη ευκλείδεια διαίρεση.
- Επειδή $20 = 4 \cdot 5$, λέμε ότι ο 4 και ο 5 είναι παράγοντες ή διαιρέτες του 20.

- **Πρώτους** ονομάζουμε τους φυσικούς αριθμούς που έχουν παράγοντα (διαιρέτη) μόνο το 1 και τον εαυτό τους.
- **Σύνθετους** ονομάζουμε τους φυσικούς αριθμούς που εκτός από το 1 και τον εαυτό τους έχουν και άλλους παράγοντες.

Μερικοί πρώτοι αριθμοί:
2, 3, 23

Μερικοί σύνθετοι αριθμοί:
$9 = 3 \cdot 3$, $12 = 3 \cdot 4$

Οι **πρώτοι αριθμοί** αποτέλεσαν αντικείμενο μελέτης από την αρχαιότητα έως σήμερα, όχι μόνο διότι προκαλούσαν την ανθρώπινη περιέργεια, αλλά και γιατί αξιοποιήθηκαν σε ένα τεράστιο πεδίο εφαρμογών, για παράδειγμα στην κρυπτογράφηση. Επίσης, η σύγχρονη υπολογιστική τεχνολογία, αναζητώντας ολοένα και πιο μεγάλους πρώτους αριθμούς, εξελίσσει διαρκώς τους αλγορίθμους της. Στις 7/12/2018 ανακοινώθηκε **ο μεγαλύτερος πρώτος που έχει βρεθεί έως τώρα: $2^{82.589.933} - 1$**.

Πηγές: [1], [18], [19], [21], [22]

Διαιρετότητα - πρώτοι αριθμοί

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. **Να γράψετε όλες τις δυνάμεις του 2 που είναι παράγοντες του 32.**

Απάντηση

Είναι $32 = 2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, άρα:

$$32 = 2^1 \cdot 2^4 \quad \text{ή} \quad 32 = 2^2 \cdot 2^3 \quad \text{ή} \quad 32 = 1 \cdot 2^5$$

Οι δυνάμεις $2^1, 2^2, 2^3, 2^4$ και 2^5 είναι παράγοντες του 32.
Δηλαδή όλες οι δυνάμεις του 2 με εκθέτη που είναι μικρότερος ή ίσος του 5 είναι παράγοντες του 32.

2. **Σε ένα παιχνίδι συμμετέχουν 45 παίκτες που πρέπει να χωριστούν σε ισοδύναμες μεταξύ τους ομάδες χωρίς να περισσεύει κανένας. Πόσες δυνατές περιπτώσεις υπάρχουν;**



Απάντηση

Πρέπει το υπόλοιπο της διαίρεσης του 45 με τον αριθμό των ομάδων να είναι 0. Άρα ο αριθμός των ομάδων πρέπει να είναι παράγοντας (δηλαδή διαιρέτης) του 45.
Για να βρούμε όλους τους παράγοντες του 45, κάνουμε τα εξής:

- Αναλύουμε το 45 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων:

$$45 = 3 \cdot 3 \cdot 5 = 3^2 \cdot 5$$

Το γινόμενο αυτό είναι η ανάλυση πρώτων παραγόντων του αριθμού.

Πρώτοι παράγοντες ενός φυσικού αριθμού είναι οι διαιρέτες του που είναι πρώτοι αριθμοί.

- Γράφουμε καθέναν από τους πρώτους παράγοντες και όλα τα δυνατά γινόμενα που μπορούμε να σχηματίσουμε με αυτούς:

$$3, \qquad 5, \qquad 3 \cdot 3 = 3^2 = 9, \qquad 3 \cdot 5 = 15$$

που μαζί με το 1 και το 45 είναι όλοι οι διαιρέτες του 45.
Άρα έχουμε τις περιπτώσεις:

Στην ανάλυση του 45 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων έχουμε δύο παράγοντες ίσους με 3. Άρα θα σχηματίσουμε γινόμενα που περιέχουν το 3 το πολύ δύο φορές.

- $45 = 3 \cdot 15$, δηλαδή 3 ομάδες των 15 ατόμων ή 15 ομάδες των 3 ατόμων,
- $45 = 5 \cdot 9$, δηλαδή 5 ομάδες των 9 ατόμων ή 9 ομάδες των 5 ατόμων.

Μπορούμε να βρούμε όλους τους παράγοντες (διαιρέτες) ενός φυσικού αριθμού σε δύο βήματα. Αρχικά αναλύουμε τον αριθμό σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Στη συνέχεια φτιάχνουμε όλα τα δυνατά γινόμενα αυτών, χρησιμοποιώντας κάθε παράγοντα το πολύ τόσες φορές όσες εμφανίζεται στην ανάλυση πρώτων παραγόντων του αριθμού.

3. **Στην εκδρομή του σχολείου θα συμμετάσχουν από 14 έως 23 παιδιά. Θα διανυκτερεύσουν σε ξενώνα με δίκλινα δωμάτια και, αν χρειαστεί, θα χρησιμοποιήσουν και ένα μονόκλινο. Σε ποιες περιπτώσεις δε χρειάζεται το μονόκλινο;**

Απάντηση

Για να σχηματιστούν ζευγάρια χωρίς να περισσεύει κάποιο παιδί, θα πρέπει το πλήθος τους να διαιρείται με το 2, χωρίς υπόλοιπο. Αυτό συμβαίνει όταν τα παιδιά είναι 14, 16, 18, 20 και 22. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις το υπόλοιπο της διαίρεσης με το 2 είναι 1, άρα θα περισσεύει κάποιο παιδί και θα χρησιμοποιηθεί το μονόκλινο.



Τους αριθμούς που διαιρούνται με το 2 (με υπόλοιπο 0) τους ονομάζουμε **άρτιους** (ή **ζυγούς**). Τους αριθμούς που, όταν διαιρούνται με το 2, αφήνουν υπόλοιπο 1 τους ονομάζουμε **περιττούς** (ή **μονούς**).

Οι άρτιοι αριθμοί τελειώνουν σε 0, 2, 4, 6, 8, ενώ οι περιττοί σε 1, 3, 5, 7, 9.

Ο **Πυθαγόρας** και οι μαθητές του ασχολήθηκαν ιδιαίτερα με **τους άρτιους και περιττούς** αριθμούς. Υπάρχουν πολλές απόψεις-θρύλοι για το πρόσωπο και τη ζωή του Πυθαγόρα (περίπου 572-497 π.Χ.), όπως ότι γεννήθηκε στη Σάμο και πέρασε πολύ χρόνο στην Αίγυπτο και στη Βαβυλωνία. Γύρω στο 530 π.Χ. εγκαταστάθηκε στον Κρότωνα (ελληνική πόλη στη νότια Ιταλία). Εκεί δημιούργησε μια ομάδα μαθητών, που αργότερα ονομάστηκαν **Πυθαγόρειοι** και θεωρούνταν μυστικιστικό θρησκευτικό τάγμα και φιλοσοφική σχολή. Δε σώζονται τα ίδια τα έργα του Πυθαγόρα ή των Πυθαγορείων, αλλά βιογραφίες που γράφτηκαν αιώνες μετά τον θάνατό του.

- Οι Πυθαγόρειοι έβλεπαν **το άρτιο και το περιττό ως προέλευση των πάντων**.
- **Οι άρτιοι ονομάζονταν θήλεις** και **οι περιττοί άρρενες**.
- **Ο αριθμός 5 θεωρούνταν σύμβολο του γάμου,** ως άθροισμα του πρώτου άρρενος αριθμού (του 3) και του πρώτου θήλεος (του 2).

Πηγή: [22]

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του Δ με το δ και να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $\Delta = 29, \delta = 4$ **β)** $\Delta = 29, \delta = 6$

γ) $\Delta = 157, \delta = 11$

2. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα, όπως στην πρώτη γραμμή.

Διαιρετέος (Δ)	Διαιρέτης (δ)	Πηλίκο (π)	Υπόλοιπο (υ)	Ταυτότητα ευκλείδειας διαίρεσης
37	7	5	2	$37 = 7 \cdot 5 + 2$
83	9			
177	12			
216		19	7	
	13	4	9	

3. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω ισότητες αντιστοιχούν σε ευκλείδειες διαιρέσεις και να προσδιορίσετε τον διαιρετέο και τον διαιρέτη τους.

α) $28 = 9 \cdot 3 + 1$ **β)** $43 = 5 \cdot 7 + 8$

γ) $143 = 13 \cdot 11$ **δ)** $118 = 12 \cdot 9 + 10$

4. Ποιες τιμές μπορεί να πάρει το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός αριθμού με τον 6;

5. Να γράψετε όλους τους παράγοντες του 24.

6. Να γράψετε όλες τις δυνάμεις του 3 που είναι παράγοντες του 81.

Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

7. Να βρείτε τρεις δυνάμεις που να έχουν τιμές ανάμεσα στο 120 και το 130.

8. Στην άκρη ενός δρόμου μήκους 255 m (μέτρων) πρέπει να φτιαχτούν θέσεις στάθμευσης τουριστικών λεωφορείων. Αν για κάθε θέση απαιτούνται 19 m, πόσες θέσεις μπορούν να φτιαχτούν;

9. Ο καθηγητής φυσικής αγωγής παρέταξε, για την παρέλαση, τους 118 μαθητές του σχολείου σε 29 γραμμές, αλλά περισσεύουν 2 μαθητές. Πόσοι μαθητές είναι σε κάθε γραμμή;

10. Τρεις φίλοι έχουν 130 ευρώ σε κέρματα των δύο ευρώ και θέλουν να τα μοιραστούν. Πόσα ευρώ μπορεί να πάρει ο καθένας, ώστε να έχουν όλοι τα ίδια χρήματα, και πόσα κέρματα περισσεύουν;

11. Μια βιομηχανία μπορεί να παράγει από 400 έως 420 χυμούς την ημέρα. Όταν τους συσκευάζει σε τετράδες, περισσεύουν 3, ενώ, όταν τους συσκευάζει σε πεντάδες, περισσεύουν 2. Πόσους χυμούς παράγει η βιομηχανία την ημέρα;

12. Αν η Πρωτοχρονιά φέτος είναι ημέρα Τρίτη, τι ημέρα θα έχουμε Πρωτοχρονιά το επόμενο έτος; (Με δεδομένο ότι αυτό το έτος δεν είναι δίσεκτο, δηλαδή έχει 365 ημέρες.)

1.3 Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (ΜΚΔ)

Δ1. Βρίσκουμε τον ΜΚΔ

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ότι όλοι οι διαιρέτες ενός φυσικού αριθμού μπορούν να γραφούν ως γινόμενα των πρώτων παραγόντων του.

- Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τους πρώτους παράγοντες των αριθμών 60 και 72, για να βρείτε κοινούς τους διαιρέτες;
- Περιγράψτε έναν τρόπο, ώστε να μπορεί να βρεθεί ο ΜΚΔ των αριθμών αυτών χωρίς να χρειάζεται να υπολογιστούν όλοι οι κοινοί τους διαιρέτες. Συζητήστε αυτό τον τρόπο στην τάξη.

Συζητάμε

…για τον Μέγιστο Κοινό Διαιρέτη

Για να βρούμε τον ΜΚΔ δύο ή περισσότερων αριθμών, χρειαζόμαστε όλους τους κοινούς διαιρέτες τους. Σε αυτό μπορεί να μας βοηθήσει η ανάλυση των αριθμών σε γινόμενα πρώτων παραγόντων. Για παράδειγμα, ο ΜΚΔ των αριθμών $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ και $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$ είναι το γινόμενο των κοινών πρώτων παραγόντων τους, δηλαδή ο αριθμός $2 \cdot 3 = 6$.

Μέγιστο Κοινό Διαιρέτη (ΜΚΔ) δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών **α** και **β** ονομάζουμε τον μεγαλύτερο από τους κοινούς τους διαιρέτες και τον συμβολίζουμε $\text{ΜΚΔ}(\alpha, \beta)$.

Βρίσκω τον ΜΚΔ

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Ο **Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (ΜΚΔ)** δύο φυσικών αριθμών μπορεί να βρεθεί σχηματίζοντας το γινόμενο όλων των κοινών τους πρώτων παραγόντων. Αν κατά την ανάλυση των φυσικών αριθμών σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ένας κοινός παράγοντας εμφανίζεται ως βάση δύναμης, επιλέγουμε τη δύναμή του με τον μικρότερο εκθέτη.

Π.χ. $12 = 2^2 \cdot 3$ και $16 = 2^4$, άρα $\text{ΜΚΔ}(12, 16) = 2^2 = 4$.

Αν δύο αριθμοί α και β έχουν μοναδικό κοινό διαιρέτη το 1, λέμε ότι είναι **πρώτοι μεταξύ τους**.

Αν δύο αριθμοί είναι πρώτοι μεταξύ τους, ο μέγιστος κοινός διαιρέτης τους είναι ο 1.

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. **Μια εταιρεία παράγει 1.080 μπουκάλια με χυμό πορτοκάλι και 336 μπουκάλια με χυμό μήλο την ώρα. Στη συνέχεια συσκευάζει τους χυμούς αυτούς σε πακέτα που περιέχουν και από τα δύο είδη χυμών. Πόσα το πολύ ίδια μεταξύ τους πακέτα μπορεί να φτιάχνει κάθε ώρα, ώστε να μην περισσεύει κανένα μπουκάλι με χυμό;**



Απάντηση

Για να μην περισσεύει κανένα μπουκάλι με χυμό, πρέπει το πλήθος των πακέτων να είναι κοινός διαιρέτης των 1.080 και 336. Άρα το μεγαλύτερο πλήθος ίδιων πακέτων που μπορεί να φτιάξει η εταιρεία είναι ο ΜΚΔ των 1.080 και 336.

Αναλύουμε τους 1.080 και 336 σε γινόμενα πρώτων παραγόντων:

1.080	2
540	2
270	2
135	3
45	3
15	3
5	5
1	

336	2
168	2
84	2
42	2
21	3
7	7
1	

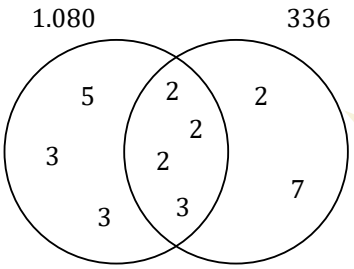
Βρίσκω κοινούς παράγοντες

Επομένως:

$1.080 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 5$ και

$336 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 7$

Άρα $\text{ΜΚΔ}(1.080, 336) = 2^3\cdot 3 = 24$.



Μπορείτε να βρείτε κοινούς διαιρέτες των 1.080 και 336 που να μη διαιρούν τον $\text{ΜΚΔ}(1.080, 336) = 24$; Πώς το εξηγείτε;

Μπορούμε να βρούμε τον ΜΚΔ μεγάλων αριθμών, όπως είναι ο 1.080 και ο 336, και με τον **αλγόριθμο του Ευκλείδη**. Ο αλγόριθμος είναι ο εξής:

	Πηλίκο της διαίρεσης του Α με τον Β	Α	Β	Υπόλοιπο της διαίρεσης του Α με τον Β
1	3	1.080	336	72
2	4	336	72	48
3	1	72	48	24
4	2	48	24	0
5		24	0	

Ο αλγόριθμος του Ευκλείδη για τον ΜΚΔ

Αλγόριθμος του Ευκλείδη

Στη γραμμή 1 τοποθετούμε τον μεγαλύτερο αριθμό κάτω από το Α και τον μικρότερο αριθμό κάτω από το Β.

Στην ίδια γραμμή γράφουμε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του Α με το Β.

Συνεχίζουμε στη δεύτερη γραμμή, μεταφέροντας τους αριθμούς όπως δείχνουν τα βέλη.

Ο αλγόριθμος σταματάει όταν στη στήλη Β εμφανιστεί το 0. Τότε ο τελευταίος αριθμός της στήλης Α είναι ο ΜΚΔ των Α και Β.

Άρα ο ΜΚΔ$(1.080, 336)$ είναι ο 24.

Με ανάλυση πρώτων παραγόντων έχουμε ότι:
$336 = 2^4 \cdot 3 \cdot 7$ και $72 = 2^3 \cdot 3^2$.
Άρα ΜΚΔ$(336, 72) = 2^3 \cdot 3 = 24$.
Παρατηρούμε ότι ΜΚΔ$(1.080, 336) =$ ΜΚΔ$(336, 72)$.
Ισχύει κάτι αντίστοιχο για τα άλλα ζεύγη αριθμών στις στήλες Α και Β του πίνακα;
Μπορείτε να το ερμηνεύσετε;

Βρίσκω τον ΜΚΔ τριών αριθμών

Παιδιά σε παράταξη

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Να γράψετε έναν αριθμό με πρώτους παράγοντες 2, 3 και 5.

2. Ποιοι είναι οι κοινοί πρώτοι παράγοντες των γινομένων $2^3 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 7$ και $2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^3$; Ποιος είναι ο μικρότερος εκθέτης του κάθε κοινού παράγοντα;

3. Ποιοι είναι οι πρώτοι παράγοντες καθενός από τους παρακάτω αριθμούς;
α) 6 **β)** 14 **γ)** 35 **δ)** 15 **ε)** 12
στ) 18 **ζ)** 36 **η)** 100 **θ)** 37

4. Να γράψετε την ανάλυση πρώτων παραγόντων για καθέναν από τους αριθμούς:
α) 12 **β)** 30 **γ)** 54 **δ)** 72
ε) 81 **στ)** 150

5. Να υπολογίσετε τον ΜΚΔ των παρακάτω αριθμών, χρησιμοποιώντας την ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων:
α) 6, 15 **β)** 39, 65 **γ)** 51, 85
δ) 42, 60 **ε)** 72, 80 και 96

Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

6. Να βρείτε τον ΜΚΔ των αριθμών 660, 630 και 420.

7. Ποιοι από τους επόμενους αριθμούς είναι διαιρέτες του $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$;
α) 16 **β)** 24 **γ)** 18 **δ)** 81 **ε)** 25

8. Ο καθηγητής ενός σχολείου θέλει να σχηματίσει ανάμεικτες ομάδες αγοριών και κοριτσιών χωρίς να περισσέψει κανένα παιδί. Πόσες το πολύ ίδιες μεταξύ τους ομάδες μπορεί να φτιάξει, αν το σχολείο έχει συνολικά 168 αγόρια και 180 κορίτσια;

9. Έχουμε στη διάθεσή μας 140 μήλα, 165 πορτοκάλια και 154 μπανάνες. Εξηγήστε γιατί δεν μπορούμε να τα μοιράσουμε σε όμοια μεταξύ τους κουτιά.

10. Να βρείτε δύο φυσικούς αριθμούς που να έχουν ΜΚΔ τον αριθμό 12. Εξηγήστε πώς σκεφτήκατε.

11. Δύο αριθμοί έχουν ΜΚΔ τον αριθμό 18. Να βρείτε όλους τους κοινούς τους διαιρέτες. Εξηγήστε πώς σκεφτήκατε.

12. Δύο αριθμοί είναι πρώτοι μεταξύ τους. Μπορεί να είναι και οι δύο ζυγοί; Εξηγήστε την απάντησή σας.

1.4 Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ)

Δ1. Βρίσκουμε το ΕΚΠ



Η καθηγήτρια ζήτησε από τα παιδιά να βρουν το ελάχιστο από τα κοινά πολλαπλάσια των αριθμών 12 και 88.

Ο Πέτρος παρατήρησε ότι όλοι οι παράγοντες του 12 είναι αναγκαστικά και παράγοντες των πολλαπλασίων του. Το ίδιο ισχύει και για το 88.

- Μπορείτε, με βάση την παρατήρηση του Πέτρου, να χρησιμοποιήσετε τους πρώτους παράγοντες του 12 και του 88 για να βρείτε κοινά πολλαπλάσιά τους;
- Με ποιον τρόπο μπορούμε να βρούμε άμεσα το ελάχιστο από τα κοινά πολλαπλάσια των αριθμών 12 και 88;

Να συζητήσετε στις ομάδες σας και να παρουσιάσετε στην τάξη τον τρόπο με τον οποίο εργαστήκατε.

Συζητάμε

…για το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο

Βρίσκω κοινά πολλαπλάσια

Ένας αριθμός είναι το ΕΚΠ δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών, όταν είναι ο μικρότερος από τους αριθμούς που έχουν παράγοντες όλους τους παράγοντες των αριθμών αυτών. Η ανάλυση πρώτων παραγόντων μάς βοηθά να εντοπίζουμε τους παράγοντες αυτούς.

Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ) δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών **α** και **β** ονομάζουμε το μικρότερο από τα κοινά τους πολλαπλάσια και το συμβολίζουμε **ΕΚΠ(α, β)**.

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Για να βρούμε το **Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ)** δύο φυσικών αριθμών, σχηματίζουμε το γινόμενο όλων των πρώτων παραγόντων (κοινών και μη κοινών) των αριθμών αυτών. Αν κατά την ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ένας πρώτος παράγοντας εμφανίζεται στον έναν ή και στους δύο αριθμούς ως βάση δύναμης, επιλέγουμε τη δύναμη με τον μεγαλύτερο εκθέτη.

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. Ένας φάρος ανάβει κάθε 120 sec, ενώ ένας άλλος κάθε 252 sec. Αν κάποια στιγμή άναψαν ταυτόχρονα, μετά από πόση ώρα θα ανάψουν και πάλι μαζί;

Απάντηση

Ο πρώτος φάρος ανάβει κάθε φορά που ο χρόνος που έχει περάσει είναι πολλαπλάσιο του 120, ενώ ο δεύτερος ανάβει κάθε φορά που ο χρόνος είναι πολλαπλάσιο του 252. Η επόμενη στιγμή που θα ανάψουν μαζί είναι όταν

περάσει χρόνος ίσος με το ΕΚΠ(252, 120). Για να το βρούμε, αναλύουμε τους αριθμούς σε γινόμενα πρώτων παραγόντων:

252	2
126	2
63	3
21	3
7	7
1	

120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

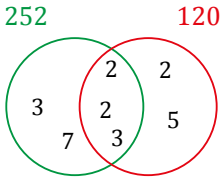
Χαλασμένο ρολόι

Επομένως:

$252 = 2 \cdot 2 \cdot \mathbf{3} \cdot \mathbf{3} \cdot \mathbf{7} = 2^2 \cdot \mathbf{3^2} \cdot \mathbf{7}$ και $120 = \mathbf{2} \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{2} \cdot 3 \cdot \mathbf{5} = \mathbf{2^3} \cdot 3 \cdot \mathbf{5}$.

Άρα ΕΚΠ(252, 120) $= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2.520$.

Συνεπώς οι δύο φάροι θα ανάψουν ξανά μαζί μετά από 2.520 sec.



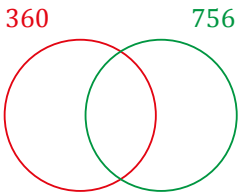
Βρίσκω το ΕΚΠ γρήγορα

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Στα γινόμενα $2^3 \cdot 3^2$ και $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$ ποιοι είναι οι πρώτοι παράγοντες; Ποιος είναι ο μέγιστος εκθέτης του καθενός;

2. Να υπολογίσετε το ΕΚΠ των $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2$ και $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$ χωρίς να υπολογίσετε δυνάμεις και γινόμενα.

3. Να συμπληρώσετε το διπλανό σχήμα κάνοντας την ανάλυση πρώτων παραγόντων των αριθμών 360 και 756.



4. Να βρείτε το ΕΚΠ των φυσικών αριθμών:
α) 15 και 18 **β)** 12 και 40 **γ)** 75 και 135

Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

5. Να βρείτε το ΕΚΠ των φυσικών αριθμών:
α) 15, 18 και 20
β) 12, 40 και 50
γ) 75, 300 και 135

6. **α)** Να περιγράψετε πώς μπορούμε να βρούμε το ΕΚΠ δύο πρώτων αριθμών. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
β) Πώς μπορούμε να βρούμε το ΕΚΠ δύο αριθμών που είναι πρώτοι μεταξύ τους;

7. Δύο αθλητές Α και Β ξεκινάνε από τη γραμμή εκκίνησης σε έναν αγώνα στίβου 10 km. Ο αθλητής Α συμπληρώνει έναν γύρο κάθε 84 sec, ενώ ο αθλητής Β κάθε 72 sec. Πόσος χρόνος χρειάζεται, ώστε οι δύο αθλητές να βρεθούν ξανά μαζί στη γραμμή εκκίνησης;

8. Από έναν σταθμό τρένων περνάνε τρεις γραμμές. Στις 10:45 έφτασαν ταυτόχρονα και τα τρία τρένα στον σταθμό. Με βάση τον διπλανό πίνακα, ποια ώρα τα τρία τρένα θα ξαναφτάσουν ταυτόχρονα στον σταθμό;

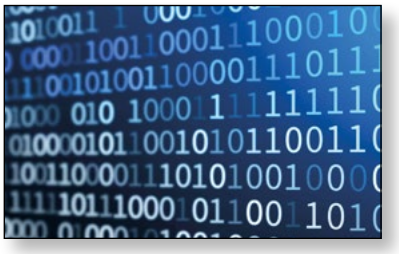
ΓΡΑΜΜΗ	ΧΡΟΝΟΣ ΑΦΙΞΗΣ
Α	κάθε 10 λεπτά
Β	κάθε 12 λεπτά
Γ	κάθε 15 λεπτά

9. **α)** Να βρείτε τον ΜΚΔ και το ΕΚΠ των:
i) 4 και 7 **ii)** 7 και 12 **iii)** 4 και 15
β) Δύο φυσικοί αριθμοί έχουν ως ΜΚΔ το 1. Ποιο είναι το ΕΚΠ τους;

1.5 Το δυαδικό σύστημα αρίθμησης

Δ1. Δυαδικός κώδικας

Ο ηλεκτρονικός υπολογιστής «διαβάζει» δυαδικό κώδικα, δηλαδή μόνο τα ψηφία 0 και 1.



Στον δυαδικό κώδικα το 110 αντιστοιχεί στον αριθμό 6:

Ψηφίο	1	1	0
Αξία ψηφίου ως δύναμη	2^2	2^1	1
Αξία ψηφίου ως φυσικός αριθμός	4	2	1
Σύνολο	$\mathbf{1\cdot 4+1\cdot 2+0\cdot 1=6}$		

Να υπολογίσετε τον αριθμό 1011 του δυαδικού κώδικα με τη βοήθεια του πίνακα.

Ψηφίο	0	0	0	0	0	1	0	1	1
Αξία ψηφίου ως δύναμη	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	1

Να συζητήσετε τα αποτελέσματά σας στις ομάδες και μετά σε όλη την τάξη.

Συζητάμε

…για συστήματα αρίθμησης

Ο αριθμός 1010 περιέχει 0 μονάδες, 1 δεκάδα, 0 εκατοντάδες και 1 χιλιάδα.

1	0	1	0
1000άδες	100άδες	10άδες	Μονάδες

Στον δυαδικό κώδικα (ή δυαδικό σύστημα) το 1010 περιέχει 0 μονάδες, 1 δυάδα, 0 τετράδες και 1 οκτάδα.

1	0	1	0
8άδες	4άδες	2άδες	Μονάδες

Στο **δυαδικό σύστημα** γράφουμε $1010_{(2)}$, δηλαδή «1010 με δείκτη 2».

Ο αριθμός $1010_{(2)}$ στο δεκαδικό σύστημα αντιστοιχεί στον 10, γιατί $1\cdot 8+0\cdot 4+1\cdot 2+0\cdot 1=10$.

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Για να γράψουμε τους φυσικούς αριθμούς με το **δυαδικό σύστημα**, χρησιμοποιούμε τα ψηφία 0 και 1. Η **θέση** που έχει το κάθε ψηφίο στον αριθμό εκφράζει το πλήθος των μονάδων, δυάδων, τετράδων, οκτάδων κτλ., άρα την **αξία** του αριθμού.

…	Δεκαεξάδες	Οκτάδες	Τετράδες	Δυάδες	Μονάδες
…	$2^4=16$	$2^3=8$	$2^2=4$	$2^1=2$	1

Ο αριθμός $1101_{(2)}$ γράφεται:

$1101_{(2)}=1\cdot 2^3+1\cdot 2^2+0\cdot 2^1+1\cdot 1$

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. **Να γράψετε:**
α) το $10101_{(2)}$ στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης, β) το 45 στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης.

Απάντηση

α) $10101_{(2)} = 1\cdot 16 + 0\cdot 8 + 1\cdot 4 + 0\cdot 2 + 1\cdot 1 = 21$

16άδες	8άδες	4άδες	2άδες	Μονάδες
1	0	1	0	1

β) Στο δυαδικό σύστημα έχουμε:

...	64άδες	32άδες	16άδες	8άδες	4άδες	2άδες	Μονάδες
...	$2^6 = 64$	$2^5 = 32$	$2^4 = 16$	$2^3 = 8$	$2^2 = 4$	$2^1 = 2$	1

Το 45 είναι μεγαλύτερο από το 32 και μικρότερο από το 64, άρα έχει **μία 32άδα** και περισσεύουν 13, καθώς $45 = 32\cdot 1 + 13$.
Το 13 έχει **μία 8άδα** και περισσεύουν 5.
Το 5 έχει **μία 4άδα** και μένει 1 **μονάδα**.
Άρα $45 = 101101_{(2)}$.
$101101_{(2)} = 1\cdot 32 + 0\cdot 16 + 1\cdot 8 + 1\cdot 4 + 0\cdot 2 + 1\cdot 1 = 45$

32άδες	16άδες	8άδες	4άδες	2άδες	Μονάδες
1	0	1	1	0	1

Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε

Να γράψετε έναν πενταψήφιο αριθμό στο δυαδικό σύστημα και τον αριθμό με την ίδια αξία στο δυαδικό σύστημα. Να εξηγήσετε πώς επιλέξατε τους αριθμούς.

Το σύστημα ASCII / Unicode

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Ποια είναι η αξία του ψηφίου 1 σε καθέναν από τους παρακάτω αριθμούς;
α) 123 **β)** $10_{(2)}$ **γ)** 401 **δ)** $1000_{(2)}$

2. Ο Χρήστος έγραψε τον αριθμό $1201_{(2)}$. Είναι σωστός ο τρόπος γραφής του αριθμού;

3. Να γράψετε τους αριθμούς $1_{(2)}$, $10_{(2)}$ και $101_{(2)}$ στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης.

4. Ποιος είναι μεγαλύτερος από τους αριθμούς $100_{(2)}$ και $110_{(2)}$ και πόσο;

5. Να γράψετε τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 και 9 στο δυαδικό σύστημα.

Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

6. Ποιος είναι μεγαλύτερος από τους αριθμούς $1010_{(2)}$ και $1101_{(2)}$ και πόσο;

7. Να γράψετε τους αριθμούς $10101_{(2)}$, $1010_{(2)}$, $111_{(2)}$, $10_{(2)}$, $1111_{(2)}$ και $10111_{(2)}$ από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο.

8. Να αλλάξετε τη σειρά των ψηφίων των αριθμών $11010_{(2)}$ και $110_{(2)}$, ώστε να προκύψουν ένας πενταψήφιος και ένας τριψήφιος αριθμός που η διαφορά τους να είναι η μεγαλύτερη δυνατή.

Δυαδικό σύστημα και επεκτάσεις

Ανακεφαλαίωση

Φυσικοί αριθμοί

Ερωτήσεις – ασκήσεις – προβλήματα

1. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ).

α) $2^4 = 4^2$. Σ Λ

β) $3^2 = 2^3$. Σ Λ

γ) Η δύναμη 2^5 είναι ίση με $5 \cdot 2$. Σ Λ

δ) Το 2^5 είναι μεγαλύτερο από το 3^4, γιατί έχει μεγαλύτερο εκθέτη. Σ Λ

ε) Ο αριθμός $\frac{6}{3}$ δεν είναι φυσικός. Σ Λ

στ) Κάθε φυσικός αριθμός μπορεί να γραφεί ως κλάσμα. Σ Λ

ζ) Ισχύει ότι $(5-2)^3 = 5^3 - 2^3$. Σ Λ

η) Υπάρχει ένας φυσικός αριθμός που είναι μεγαλύτερος από όλους τους άλλους. Σ Λ

2. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ).

α) Οι παράγοντες του 16 είναι οι 1, 2, 4, 8, 16. Σ Λ

β) Διαιρέτες του 21 είναι μόνο το 3 και το 7. Σ Λ

γ) Οι παράγοντες ενός αριθμού είναι και διαιρέτες του. Σ Λ

δ) Πρώτο παράγοντα ενός αριθμού λέμε τον μικρότερο από τους παράγοντές του. Σ Λ

ε) Ο αριθμός 9 είναι πρώτος. Σ Λ

στ) Το γινόμενο δύο ή περισσότερων πρώτων παραγόντων ενός αριθμού είναι διαιρέτης του αριθμού αυτού. Σ Λ

ζ) Σύνθετους ονομάζουμε τους αριθμούς που είναι άθροισμα άλλων αριθμών. Σ Λ

3. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ).

α) Η ισότητα $27 = 3 \cdot 7 + 6$ εκφράζει ευκλείδεια διαίρεση. Σ Λ

β) Η ισότητα $29 = 3 \cdot 7 + 8$ εκφράζει ευκλείδεια διαίρεση. Σ Λ

γ) Σε κάθε ευκλείδεια διαίρεση, ο διαιρέτης ενός αριθμού είναι πάντα μεγαλύτερος από το πηλίκο της διαίρεσης. Σ Λ

δ) Σε μια ευκλείδεια διαίρεση, ο διαιρέτης μπορεί να είναι οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός. Σ Λ

ε) Στην ευκλείδεια διαίρεση $131 = 12 \cdot 10 + 11$ διαιρέτης είναι το 12. Σ Λ

4. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ).

α) Ο ΜΚΔ των 25 και 50 είναι 5. Σ Λ

β) Οι αριθμοί 13 και 17 δεν έχουν ΜΚΔ. Σ Λ

γ) Το ΕΚΠ των αριθμών 5, 15 και 10 είναι 150. Σ Λ

δ) Το ΕΚΠ δύο πρώτων αριθμών είναι ίσο με το γινόμενό τους. Σ Λ

ε) Το ΕΚΠ των $2^4 \cdot 3^5$ και $2^5 \cdot 3^4$ είναι ίσο με $2^4 \cdot 3^4$. Σ Λ

στ) Ο ΜΚΔ των $2^4 \cdot 3^5$ και $2^5 \cdot 3^4$ είναι ίσος με $2^4 \cdot 3^4$. Σ Λ

ζ) Για να βρούμε το ΕΚΠ δύο αριθμών, χρησιμοποιούμε μόνο τους κοινούς πρώτους παράγοντες των αριθμών αυτών. Σ Λ

η) Με τον αλγόριθμο του Ευκλείδη βρίσκουμε τον ΜΚΔ δύο αριθμών. Σ Λ

θ) Ο ΜΚΔ διαιρεί το ΕΚΠ δύο αριθμών. Σ Λ

5. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις.

α) Έναν αριθμό τον ονομάζουμε πρώτο όταν διαιρείται μόνο από το ..... και τον ..... του.

β) Μία διαίρεση ονομάζεται τέλεια όταν έχει ..... μηδέν.

γ) Στην ευκλείδεια διαίρεση, ο ..... ισούται με τον ..... επί το ..... συν το ..... .

δ) Μπορούμε να βρούμε τον ΜΚΔ δύο αριθμών σχηματίζοντας το γινόμενο όλων των ..... τους ..... παραγόντων.

6. Να αντιστοιχίσετε τις πράξεις της αριστερής στήλης με την ονομασία του αποτελέσματος στη δεξιά στήλη.

Πράξη	Αποτέλεσμα της πράξης
Πρόσθεση	Γινόμενο
Πολλαπλασιασμός	Διαφορά
Αφαίρεση	Άθροισμα

7. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $2^3 \cdot \left(2^3 - 2^2\right) + 3^2 \cdot 2^3$.

8. Ένα αρτοποιείο αγόρασε 70 kg αλεύρι. Από αυτά χρησιμοποίησε 12 kg για κουλούρια, 9 kg για κρουασάν και 14 kg για βουτήματα. Πόσα κιλά αλεύρι έμειναν για να φτιάξει ψωμί;

9. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις, αφού αναλύσετε τους αριθμούς σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, να βρείτε το ΕΚΠ και τον ΜΚΔ τους.

α) 360 και 6 **β)** 128 και 48 **γ)** 192 και 256 **δ)** 17 και 7 **ε)** 12, 18 και 15 **στ)** 12, 18 και 9

10. Να γράψετε σε μορφή γινομένου πρώτων παραγόντων το ΕΚΠ και τον ΜΚΔ των αριθμών που προκύπτουν από τα γινόμενα $2^{50} \cdot 3^2 \cdot 5^{31} \cdot 7^3$ και $2^3 \cdot 3^{40} \cdot 5^2 \cdot 7^{30}$.

11. **α)** Αν το ΕΚΠ δύο αριθμών είναι 145, ποιο είναι το ΕΚΠ των διπλάσιων αυτών των αριθμών;

β) Αν ο ΜΚΔ δύο αριθμών είναι 32, ποιος είναι ο ΜΚΔ των διπλάσιων αυτών των αριθμών;

Συνδέσεις και επεκτάσεις

12. Να υπολογίσετε και να γράψετε το άθροισμα και τη διαφορά των αριθμών $10101_{(2)}$ και $1010_{(2)}$ στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης.

13. Οι αριθμοί 2 και 60 έχουν ΜΚΔ = 2 και ΕΚΠ = 60. Αλλά ΜΚΔ = 2 και ΕΚΠ = 60 έχουν και οι αριθμοί 10 και 12. Εξετάστε αν υπάρχουν δύο αριθμοί διαφορετικοί από 17 και 51 με ΜΚΔ = 17 και ΕΚΠ = 51.

14. Να υπολογίσετε την τιμή των δυνάμεων 3^4 και 9^2. Ερμηνεύστε τον τρόπο με τον οποίο σχετίζονται οι τιμές που βρήκατε.

Διερευνώ με το ΕΚΠ και τον ΜΚΔ

Εμβαθύνω στις δυνάμεις

15. Στο σύστημα ASCII/Unicode, που χρησιμοποιούν οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές, κάθε γράμμα αντιστοιχεί σε έναν αριθμό στο δυαδικό σύστημα, προκειμένου να μπορεί ο ηλεκτρονικός υπολογιστής να το χειριστεί. Η αντιστοιχία γραμμάτων και αριθμών φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.



Γράμμα	Δυαδικό σύστημα	Γράμμα	Δυαδικό σύστημα	Γράμμα	Δυαδικό σύστημα	Γράμμα	Δυαδικό σύστημα
Α	11000001	Η	11000111	Ν	11001101	Τ	11010100
Β	11000010	Θ	11001000	Ξ	11001110	Υ	11010101
Γ	11000011	Ι	11001001	Ο	11001111	Φ	11010110
Δ	11000100	Κ	11001010	Π	11010000	Χ	11010111
Ε	11000101	Λ	11001011	Ρ	11010001	Ψ	11011000
Ζ	11000110	Μ	11001100	Σ	11010011	Ω	11011001

Να γράψετε το όνομά σας χρησιμοποιώντας αριθμούς του δυαδικού συστήματος και στη συνέχεια να τους μετατρέψετε σε αριθμούς του δεκαδικού συστήματος.

Ομαδική εργασία

16. Να σκεφτείτε και να γράψετε ένα πρόβλημα που να λύνεται με ευκλείδεια διαίρεση η οποία να αντιστοιχεί στην ισότητα $48 = 8 \cdot 5 + 6$. Στη συνέχεια να παρουσιάσετε το πρόβλημα στην τάξη σας.

17. Η αποστολή κωδικοποιημένων μηνυμάτων έχει τις ρίζες της βαθιά πίσω στον χρόνο και ο ρόλος της ήταν κρίσιμος για την εξέλιξη της Ιστορίας σε διάφορες περιόδους και για την εξέλιξη της επικοινωνίας. Σήμερα, η λειτουργία του ηλεκτρονικού ταχυδρομείου και οι αυτοματοποιημένες συναλλαγές (π.χ. αγορές μέσω διαδικτύου) βασίζονται σε μεγάλο βαθμό στα επιτεύγματα κωδικοποίησης.

Στόχος της κωδικοποίησης είναι να μπορεί ο παραλήπτης ενός μηνύματος να το λάβει, χωρίς αυτό να υποκλαπεί μέχρι να φτάσει σε αυτόν. Τα Μαθηματικά έχουν ίσως τον πιο κρίσιμο ρόλο για την επίτευξη αυτού του στόχου, από τις πιο περίπλοκες και απαιτητικές διαδικασίες κωδικοποίησης μέχρι και πολύ απλές.

Πώς μπορώ να στείλω ένα κρυπτογραφημένο μήνυμα μέσω υπολογιστή, ώστε να μην μπορεί να το υποκλέψει ένας τρίτος; Ένας σχετικά απλός τρόπος είναι να αντικαταστήσω τα γράμματα του μηνύματος με άλλα, ακολουθώντας την παρακάτω διαδικασία:

Επιλέγω έναν κρυφό αριθμό-κλειδί, τον οποίο γνωρίζω μόνο εγώ (ο αποστολέας) και ο παραλήπτης του μηνύματος. Στη συνέχεια προσθέτω τον αριθμό αυτό στον αριθμό του κάθε γράμματος στον κώδικα ASCII που δίνεται στην άσκηση 15. Στέλνω το μήνυμα έχοντας αντικαταστήσει το κάθε γράμμα με τον νέο αριθμό που βρήκα γι' αυτό. Ο παραλήπτης αφαιρεί τον αριθμό-κλειδί από κάθε αριθμό-γράμμα του κωδικοποιημένου μηνύματος, βρίσκει τα αρχικά γράμματα και διαβάζει το μήνυμα.

Για παράδειγμα, ας πούμε ότι θέλω να στείλω το όνομα Άννα και έχω επιλέξει ως κρυφό αριθμό-κλειδί το 3.

Το γράμμα Α αντιστοιχεί στον κώδικα ASCII στον αριθμό 11000001, που στο δεκαδικό σύστημα είναι ο 193, και το Ν αντιστοιχεί στον 11001101, που στο δεκαδικό σύστημα είναι ο αριθμός 205.

Για το γράμμα Α βρίσκω $193+3=196$, που στο δυαδικό σύστημα γράφεται 11000100. Αντίστοιχα για το Ν βρίσκω $205+3=208$, που στο δυαδικό σύστημα γράφεται 1101000.
Άρα το όνομα Άννα κωδικοποιημένο γράφεται 11000100 1101000 1101000 11000100.
Ο παραλήπτης ακολουθεί την αντίστροφη διαδικασία:
11000100 ⟶ 196, $196-3=193$ και 193 ⟶ 11000001 ⟶ Α κτλ.

Α) Χωριστείτε σε ομάδες, γράψτε μια μικρή λέξη ή ένα μικρό μήνυμα, κωδικοποιήστε το και στείλτε το στην ομάδα με την οποία συνεργάζεστε για να το διαβάσει. Προσπαθήστε να αποκωδικοποιήσετε τα μηνύματα των άλλων ομάδων χωρίς να γνωρίζετε τον αριθμό-κλειδί τους.

Β) Στη μέθοδο αυτή υπάρχει μια δυσκολία. Θα πρέπει και ο αποστολέας και ο παραλήπτης να γνωρίζουν τον αριθμό-κλειδί χωρίς να το στείλει ο ένας στον άλλο. Αν ο αριθμός-κλειδί αποσταλεί, τότε θεωρητικά και αυτός κινδυνεύει να υποκλαπεί.

Πώς μπορούν αποστολέας και παραλήπτης να έχουν κοινό αριθμό-κλειδί χωρίς να υπάρχει κίνδυνος να υποκλαπεί; Τα βήματα της διαδικασίας που μπορούν να ακολουθήσουν οι δύο ομάδες περιγράφονται στον παρακάτω πίνακα:

	Ομάδα Α	**Ομάδα Β**
Βήμα 1	Επιλέγονται τυχαία δύο αριθμοί, ας πούμε ο **3** και ο **5**. Οι αριθμοί αυτοί είναι φανεροί.	
Βήμα 2	Η ομάδα Α επιλέγει έναν αριθμό, π.χ. το 4, και τον κρατά κρυφό. Ονομάζουμε τον αριθμό αυτό Α.	Η ομάδα Β επιλέγει έναν αριθμό, π.χ. το 2, και τον κρατά κρυφό. Ονομάζουμε τον αριθμό αυτό Β.
Βήμα 3	Βρίσκει το υπόλοιπο της διαίρεσης του $3^4=81$ με το 5: $81=5\cdot 16+1$, άρα $\upsilon_A=1$, και το στέλνει φανερά στην ομάδα Β.	Βρίσκει το υπόλοιπο της διαίρεσης του $3^2=9$ με το 5: $9=5\cdot 1+4$, άρα $\upsilon_B=4$, και το στέλνει φανερά στην ομάδα Α.
Βήμα 4	Υπολογίζει το υπόλοιπο της διαίρεσης του $\upsilon_B^A=4^4=256$ με το 5: $256=5\cdot 51+1$, άρα $\upsilon=1$.	Υπολογίζει το υπόλοιπο της διαίρεσης του $\upsilon_A^B=1^2=1$ με το 5: $1=0\cdot 5+1$, άρα $\upsilon=1$.
Ο κρυφός αριθμός-κλειδί είναι ο **1**.		

Χωριστείτε σε ομάδες, επιλέξτε τους δικούς σας αριθμούς και επαναλάβετε την παραπάνω διαδικασία, για να ανταλλάξετε κρυπτογραφημένα μηνύματα.

Μάντεψε τον αριθμό

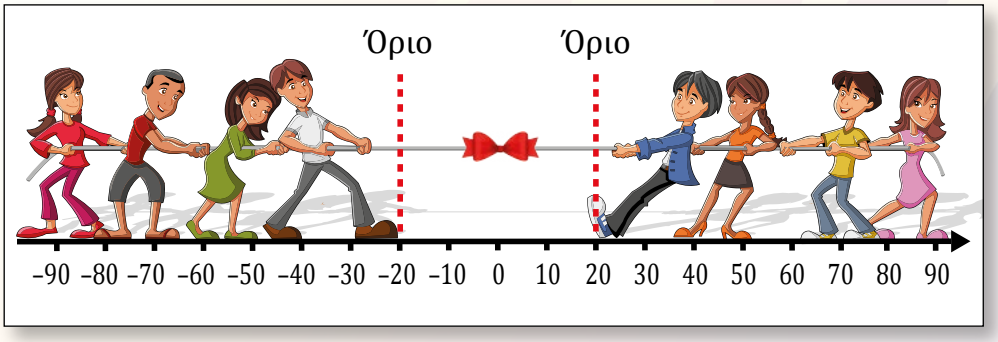
Τα αιγυπτιακά μαθηματικά και οι πάπυροι

Τα βαβυλωνιακά μαθηματικά

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ 2:

Ακέραιοι αριθμοί

Η διελκυστίνδα είναι ένα άθλημα που παίζεται μεταξύ δύο ομάδων, οι οποίες τραβούν ένα σχοινί προσπαθώντας η μία να τραβήξει την άλλη προς το μέρος της. Νικήτρια είναι η ομάδα που θα καταφέρει να τραβήξει την άλλη ομάδα πέρα από το όριο που έχει οριστεί. Ο φιόγκος στη μέση του σκοινιού είναι στο 0. Κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού ο φιόγκος μετακινήθηκε 15 cm προς τα αριστερά, μετά 25 cm προς τα δεξιά και στη συνέχεια 28 cm προς τα αριστερά. Νίκησε κάποια ομάδα; Αν όχι, ποια ομάδα είναι πιο κοντά να κερδίσει και πόσα cm πρέπει να μετακινήσει το σκοινί;



Οι αριθμοί που έχουμε γνωρίσει μέχρι τώρα είναι οι φυσικοί, που είναι όλοι μεγαλύτεροι από το 0. Όμως, στην καθημερινότητά μας πολλές φορές χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε αριθμούς που είναι μικρότεροι από το 0, όπως η ένδειξη στο ασανσέρ για κάθε όροφο που βρίσκεται κάτω από το ισόγειο ενός κτιρίου.

Αυτούς τους αριθμούς θα μελετήσουμε στην ενότητα αυτή, θα τους δώσουμε ονομασία, θα γνωρίσουμε τη σχέση τους με τους φυσικούς, θα τους παραστήσουμε πάνω σε μια ευθεία και θα μάθουμε να κάνουμε τις μεταξύ τους πράξεις.

ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΕΝΟΤΗΤΕΣ:

2.1 Οι ακέραιοι αριθμοί
2.2 Πρόσθεση στο σύνολο των ακέραιων αριθμών
2.3 Αφαίρεση ακέραιων αριθμών
2.4 Πολλαπλασιασμός ακέραιων αριθμών

2.1 Οι ακέραιοι αριθμοί

Δ1. Σύγκριση θερμοκρασιών

Μια ημέρα του Δεκεμβρίου στις 10 π.μ. οι θερμοκρασίες στις παρακάτω ευρωπαϊκές πρωτεύουσες ήταν:

Αθήνα	15 °C	Βιέννη	0 °C
Σόφια	5 °C	Μόσχα	7 °C κάτω από το 0
Μαδρίτη	12 °C	Όσλο	15 °C κάτω από το 0
Κίεβο	2 °C κάτω από το 0	Άμστερνταμ	4 °C κάτω από το 0



Α. Ποια πόλη είχε την υψηλότερη και ποια τη χαμηλότερη θερμοκρασία;

Β. Στα σχεδιασμένα σημεία της ευθείας να τοποθετήσετε τους αριθμούς που αντιστοιχούν στις θερμοκρασίες των πόλεων.



Γ. Βλέποντας τους αριθμούς στην ευθεία, ποιες πληροφορίες παίρνουμε με μια ματιά; Συζητήστε τις ιδέες σας στην τάξη.

Ακέραιος στην καθημερινή γλώσσα σημαίνει ολόκληρος, πλήρης, αυτός που δεν του λείπει κάτι.

Συζητάμε για τη διάταξη στους ακέραιους αριθμούς

Ακραίες θερμοκρασίες στο Σύμπαν

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Τους αριθμούς ..., −3, −2, −1, 0, +1, +2, +3, ... τους ονομάζουμε **ακέραιους αριθμούς** ή απλά **ακέραιους**.
Οι αριθμοί +1, +2, +3, ... είναι οι **θετικοί** και οι −1, −2, −3, ... είναι οι **αρνητικοί ακέραιοι**.
Το 0 είναι ακέραιος, αλλά δεν είναι θετικός, ούτε αρνητικός.
Οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός είναι θετικός ακέραιος ή 0.

Για να διακρίνουμε τους αρνητικούς από τους θετικούς, χρησιμοποιήσαμε τα «−», «+», δηλαδή τα **πρόσημα** των αριθμών. Στους θετικούς βάζουμε πρόσημο «+» και στους αρνητικούς «−». Τους θετικούς τούς γράφουμε και χωρίς το πρόσημο «+». Π.χ. 4 ή +4.

Δύο ή περισσότερους αριθμούς που έχουν το ίδιο πρόσημο, π.χ. τους +3 και +10 ή τους −4, −1 και −100, τους ονομάζουμε **ομόσημους**, ενώ **δύο** αριθμούς με διαφορετικό πρόσημο, π.χ. τους −3 και 2, τους λέμε **ετερόσημους**.

Πού έχετε δει ξανά τα σύμβολα συν (+) και πλην (−); Τι συμβόλιζαν τότε;

Από δύο αριθμούς πάνω στην αριθμογραμμή, λέμε ότι μεγαλύτερος είναι **αυτός που βρίσκεται δεξιότερα**.
Οι ακέραιοι αριθμοί μπορεί να είναι όσο μεγάλοι ή όσο μικροί θέλουμε.
Γράφουμε:

- **α > β, αν ο α είναι μεγαλύτερος του β**
- **α < β, αν ο α είναι μικρότερος του β**

Από όλους τους θετικούς ακεραίους υπάρχει κάποιος που είναι μικρότερος;

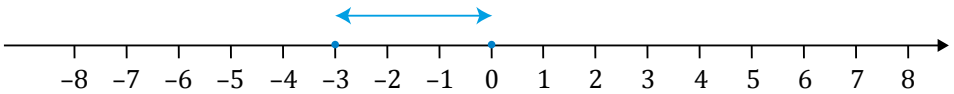
Από όλους τους αρνητικούς ακεραίους υπάρχει κάποιος που είναι μεγαλύτερος;

Το 1489 ο Γερμανός Widmann εξέδωσε ένα βιβλίο εμπορικής αριθμητικής στο οποίο χρησιμοποίησε **για πρώτη φορά τα σύμβολα «+» και «–»**, κυρίως για να δηλώσει πλεόνασμα ή έλλειμμα στις μετρήσεις των αποθηκών. Γύρω στο **1520, τα σύμβολα «+» και «–»** μπήκαν για πρώτη φορά σε ένα κείμενο από τον Γερμανό Rudolff, για να αναπαραστήσουν **την πρόσθεση και την αφαίρεση μεταξύ δύο αριθμών**.

Πηγή: [1]

Δ2. Η απόσταση των ακεραίων από το 0

- Ποια είναι η απόσταση του –3 από το 0;

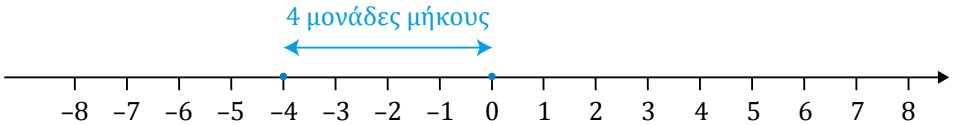


- Υπάρχει άλλος αριθμός που απέχει το ίδιο από το 0; Αν ναι, να περιγράψετε τη θέση του σε σχέση με τον –3.
- Πόσο απέχουν από το 0 οι αριθμοί 5, – 5, + 7 και –100;
- Για καθέναν από τους παραπάνω αριθμούς να βρείτε έναν άλλον που έχει την ίδια απόσταση από το 0.

Συζητάμε

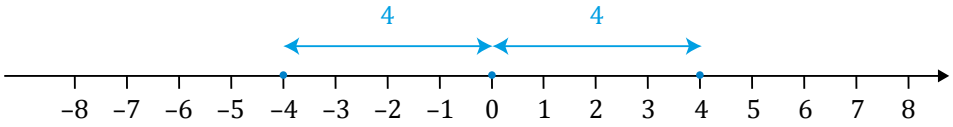
…για τις αποστάσεις αριθμών από το 0

- Μπορούμε να μετρήσουμε τις αποστάσεις στην αριθμογραμμή χρησιμοποιώντας ως μονάδα μήκους την απόσταση δύο οποιωνδήποτε διαδοχικών αριθμών, π.χ. την απόσταση των **0** και **1** ή των **–3** και **–2**. Έτσι, η απόσταση του **–4** αλλά και του **4** από το **0** είναι ίση με **4**.



Όσο μεγαλύτερος είναι ένας θετικός αριθμός ή όσο μικρότερος είναι ένας αρνητικός αριθμός, τόσο μεγαλύτερη απόσταση έχει από το 0.

- Οι αριθμοί 4 και −4, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, στην αριθμογραμμή είναι συμμετρικοί ως προς το 0. Δηλαδή έχουν την ίδια απόσταση από το 0, αλλά βρίσκονται ο ένας στα αριστερά του και ο άλλος στα δεξιά του.



Τέτοιους αριθμούς τούς ονομάζουμε **αντίθετους**.

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Την απόσταση ενός αριθμού α από το 0 την ονομάζουμε **απόλυτη τιμή** του α και τη συμβολίζουμε με $\lvert\alpha\rvert$. Η απόλυτη τιμή ενός αριθμού είναι θετικός αριθμός ή 0.	$\lvert-2\rvert=2, \lvert+4\rvert=4, \lvert5\rvert=5,$ $\lvert-100\rvert=100$
Αν δύο αριθμοί είναι ετερόσημοι και έχουν την ίδια απόλυτη τιμή, τότε τους ονομάζουμε **αντίθετους**. Επιπλέον, ο αντίθετος του 0 είναι το 0. Γενικά, με **−α** συμβολίζουμε τον αντίθετο του **α**.	Ο αντίθετος του +3 είναι ο −3 και τον συμβολίζουμε $-(+3)$. Ο αντίθετος του −3 είναι ο +3 και τον συμβολίζουμε $-(-3)$. Στον συμβολισμό $-(-3)$, το πλην $(-)$ που βρίσκεται εκτός της παρένθεσης δηλώνει τον αντίθετο του αριθμού −3, ενώ το πλην που βρίσκεται εντός της παρένθεσης δηλώνει το αρνητικό πρόσημο.

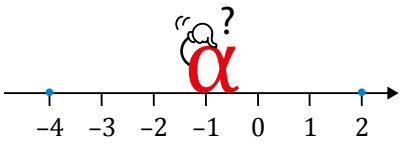
Οι αρνητικοί αριθμοί συναντώνται για πρώτη φορά σε κινέζικα μαθηματικά κάπου ανάμεσα στο 200 π.Χ. και το 200 μ.Χ. Από τότε, πολλοί διάσημοι μαθηματικοί τούς συναντούσαν σε πράξεις, όμως τους θεωρούσαν παράλογους αριθμούς. Στην Ευρώπη άρχισαν να αναγνωρίζονται γύρω στο 1500 μ.Χ. και καθιερώθηκαν τον 19ο αιώνα.

Πηγές: [1], [9], [18], [22]

Η περιπέτεια των αρνητικών αριθμών

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. **Ένας ακέραιος αριθμός α βρίσκεται ανάμεσα στο −4 και το 2. Ποιος μπορεί να είναι;**



Απάντηση

Οι ακέραιοι αριθμοί που είναι μεγαλύτεροι από το −4 και μικρότεροι από το 2 βρίσκονται στην αριθμογραμμή δεξιά από το −4 και αριστερά από το 2. Άρα α = −3 ή α = −2 ή α = −1 ή α = 0 ή α = 1.

Παρατηρούμε ότι ένα γράμμα μπορεί να συμβολίζει θετικό αριθμό, αρνητικό αριθμό ή 0, χωρίς να έχει + ή −. Το + ή το − «κρύβεται» μέσα στο γράμμα.

Ποιο είναι το μεγαλύτερο χρέος;

Αντικαθιστώντας τον άγνωστο σε παραστάσεις με απόλυτα

Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε

- Πώς έχουμε χρησιμοποιήσει μέχρι τώρα τα σύμβολα «+» και «−»;
- Γιατί η απόλυτη τιμή δεν μπορεί να είναι αρνητικός αριθμός;
- Η Θεοδώρα υποστηρίζει ότι ο −α είναι αρνητικός, γιατί έχει μπροστά το σύμβολο «−». Έχει δίκιο; Γιατί;
- Δείτε παρακάτω έναν **πίνακα έννοιας** για τους ετερόσημους αριθμούς. Ανά ομάδα να παρουσιάσετε έναν αντίστοιχο πίνακα για μία από τις έννοιες: **α)** ομόσημοι αριθμοί, **β)** απόλυτη τιμή αριθμού, **γ)** αντίθετοι αριθμοί. Συζητώντας με όλη την τάξη, κατασκευάστε έναν πίνακα για κάθε έννοια και αναρτήστε τον στην τάξη ή στην ιστοσελίδα του σχολείου.

Στο εξής θα χρησιμοποιούμε τον όρο «πίνακας έννοιας» για πίνακες σαν τον παρακάτω.

Ετερόσημοι αριθμοί

Τι είναι	**Χαρακτηριστικά**
Δύο αριθμοί που έχουν διαφορετικό πρόσημο.	Ο ένας είναι αρνητικός και ο άλλος θετικός. Ο ένας βρίσκεται αριστερά του μηδενός και ο άλλος δεξιά.
Παραδείγματα είναι	**Παραδείγματα δεν είναι**
4 και −2 −10 και 7	5 και 11 −2 και −27 7 και 0 4, 5 και −3

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Να χρησιμοποιήσετε ακέραιους αριθμούς για να εκφράσετε καθεμία από τις παρακάτω καταστάσεις: **α)** αύξηση κατά 5 cm, **β)** χρέος 100 €, **γ)** 10 μέτρα κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας, **δ)** κέρδος 15 €, **ε)** μείωση του εμβαδού κατά 20 m^2, **στ)** η αποθήκη είναι στο 3ο υπόγειο.

2. Ποιος (ή ποιοι) από τους παρακάτω αριθμούς δεν είναι ακέραιος (ή ακέραιοι);

$$-3,\ 45,\ -5,\ 0{,}2,\ 8,\ -\frac{1}{3},\ \frac{10}{2}$$

3. Να γράψετε με μαθηματικά σύμβολα τις παρακάτω φράσεις:

α) Ο αριθμός −10 είναι μεγαλύτερος του −50.

β) Η θερμοκρασία −4 °C είναι πιο χαμηλή από τους 0 °C.

γ) Όταν η θερμοκρασία είναι −5 °C, είναι πιο ζεστά απ' ό,τι όταν είναι −15 °C.

4. Να συμπληρώσετε τα κενά με αριθμούς:

α) ομόσημους: ___ και ___, ___ και ___, ___ και ___ και ___

β) ετερόσημους: ___ και ___, ___ και ___, ___ και ___

5. Να βρείτε την απόλυτη τιμή των αριθμών:

α) −10 **β)** 3 **γ)** −25 **δ)** 17

6. Να εξηγήσετε γιατί η απόλυτη τιμή του 0 είναι το 0.

7. Τα τέσσερα από τα παρακάτω πέντε ζευγάρια αριθμών έχουν μια ιδιότητα που δεν την έχει το άλλο ζευγάρι. Ποια είναι η ιδιότητα και ποιο είναι το ζευγάρι που δεν την έχει;

α) 6 και −6 **β)** 5 και −5 **γ)** −18 και 18

δ) 20 και −19 **ε)** −100 και 100

8. Να γράψετε τους αντίθετους των αριθμών:

$$4,\ -8,\ +11,\ -100,\ 0,\ 300$$

9. Να γράψετε δίπλα σε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις αν ισχύει πάντα ή μερικές φορές ή ποτέ.

α) Το μηδέν είναι μικρότερο από κάθε θετικό ακέραιο. _____

β) Ο αντίθετος ενός αρνητικού αριθμού είναι μικρότερος του 100. _____

γ) Η απόλυτη τιμή ενός ακέραιου αριθμού είναι μικρότερη από το 0. _____

Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

10. Να γράψετε παραδείγματα πραγματικών καταστάσεων που θα μπορούσαμε να εκφράσουμε με τους ακόλουθους αριθμούς: $4, -3, +7, -2.000, +15$.

11. Να συμπληρώσετε τα κενά μεταξύ των αριθμών με τα σύμβολα «<» ή «>»:

-2 ___ 0, 0 ___ 17, -2 ___ -1, 15 ___ 4,
-3 ___ 3, -199 ___ 12, -3 ___ -4

12. Η μέση επιφανειακή θερμοκρασία στον πλανήτη Άρη είναι −63 °C, ενώ στον Δία είναι −162 °C. Ποιος πλανήτης έχει τη χαμηλότερη μέση επιφανειακή θερμοκρασία;

13. Να τοποθετήσετε σε αύξουσα σειρά την κάθε ομάδα αριθμών:

α) $-3, 0, 5, -4, 10$ **β)** $-2, -8, 0, 10, -11$

γ) $86, -54, 201, -576, -999$

14. Να γράψετε 7 αριθμούς κατ' αύξουσα σειρά. Από κάτω να γράψετε τους αντίθετούς τους αριθμούς. Τι παρατηρείτε;

15. Να συμπληρώσετε τα κενά:

$|-2| =$ ___, $|+5| =$ ___, $|-100| =$ ___

16. Να βρείτε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων όταν $x = -8$.

α) $-x$ **β)** $15 - |x|$ **γ)** $|x| + 3$ **δ)** $|x| - 5$

17. **α)** Ποια είναι η σημασία του κάθε συμβόλου «−» σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις;

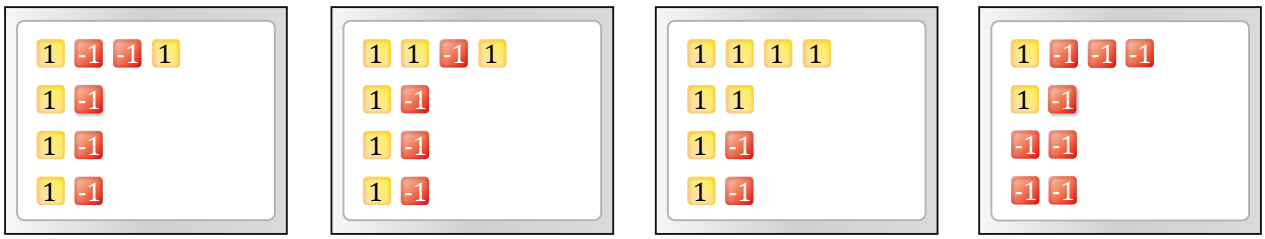
$$-3,\ -(-5),\ -\left[-(-2)\right]$$

β) Πώς συμβολίζουμε τον αντίθετο του αντίθετου ενός αριθμού x;

Ο αντίθετος του αντίθετου

2.2 Πρόσθεση στο σύνολο των ακέραιων αριθμών

Η μαθηματικός παίζει ένα παιχνίδι ερωτήσεων με τα παιδιά της τάξης χωρισμένα σε τέσσερις ομάδες. Σε κάθε γύρο η μαθηματικός ρωτάει από μία ερώτηση κάθε ομάδα. Αν απαντήσουν σωστά, παίρνουν μία θετική κάρτα $(+1$ ή $1)$, αλλιώς παίρνουν μία αρνητική κάρτα (-1). Μετά από 10 γύρους οι τέσσερις ομάδες (1η, 2η, 3η και 4η), ξεκινώντας από αριστερά, έχουν τις παρακάτω κάρτες. Για τον υπολογισμό της συνολικής βαθμολογίας μιας ομάδας, μία θετική κάρτα με μία αρνητική κάρτα διαγράφονται.



Έτσι, η 1η ομάδα έχει 5 θετικές και 5 αρνητικές κάρτες, άρα 0 βαθμούς. Η 2η ομάδα έχει 6 θετικές και 4 αρνητικές κάρτες, οπότε οι 4 θετικές και οι 4 αρνητικές διαγράφονται, άρα η ομάδα έχει βαθμολογία $+2$. Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι η 3η ομάδα έχει βαθμολογία $+6$, ενώ η 4η έχει βαθμολογία -6.

Μία θετική και μία αρνητική κάρτα έχουν άθροισμα 0. Έτσι το 0 μπορεί να γραφεί ως άθροισμα ίδιου αριθμού θετικών και αρνητικών καρτών.

Για παράδειγμα, $0=(+2)+(-2)$ ή $0=(+5)+(-5)$. Όταν γράφουμε το 0 με αυτό τον τρόπο, λέμε ότι αναλύουμε το 0 σε «ζευγάρια του μηδενός».

Πώς μπορούμε να ορίσουμε δύο αντίθετους αριθμούς χωρίς τη χρήση της απόλυτης τιμής;

Δ1. Η βαθμολογία στο παιχνίδι με τις κάρτες

Αν μια ομάδα έχει 3 αρνητικές κάρτες και πάρει άλλες 5 αρνητικές, τότε η τελική βαθμολογία της είναι -8.

Το ίδιο αποτέλεσμα έχει και η πρόσθεση των ακεραίων -3 και -5.

Δηλαδή γράφουμε $(-3)+(-5)=-8$.



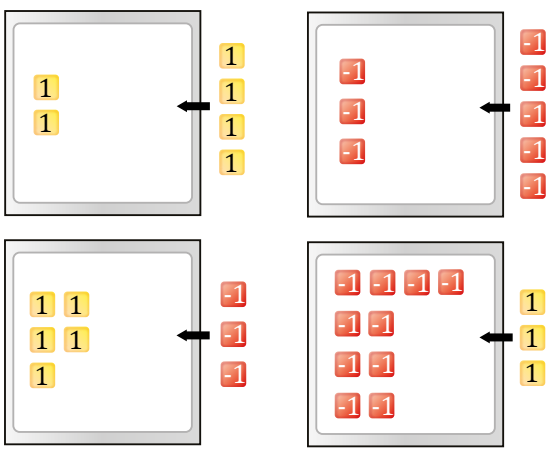
α) Με την ίδια λογική να γράψετε για κάθε εικόνα την αντίστοιχη πρόσθεση και με τη βοήθειά της να βρείτε τη συνολική βαθμολογία.

β) Να βρείτε το αποτέλεσμα των προσθέσεων:

$(+3)+(+2)$, $(+4)+(-1)$, $(-6)+(-2)$,

$(-6)+(-5)$, $(+10)+(-4)$

Μπορείτε να περιγράψετε καθεμία από τις παραπάνω προσθέσεις χρησιμοποιώντας κάρτες;



γ) Με ποιον τρόπο θα χωρίζατε τις προηγούμενες προσθέσεις σε δύο κατηγορίες;

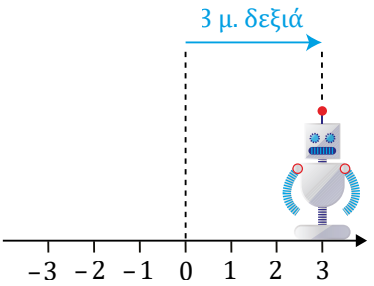
δ) Να σκεφτείτε και να συζητήσετε με τους συμμαθητές και τις συμμαθήτριές σας αν η τελική βαθμολογία είναι θετική ή αρνητική στις παρακάτω περιπτώσεις:

- Όταν έχουμε θετικές κάρτες και πάρουμε κι άλλες θετικές κάρτες.
- Όταν έχουμε αρνητικές κάρτες και πάρουμε κι άλλες αρνητικές κάρτες.
- Όταν έχουμε θετικές κάρτες και πάρουμε αρνητικές κάρτες.

Άθροισμα ακεραίων με το παιχνίδι με τις κάρτες

Δ2. Η κίνηση στην αριθμογραμμή

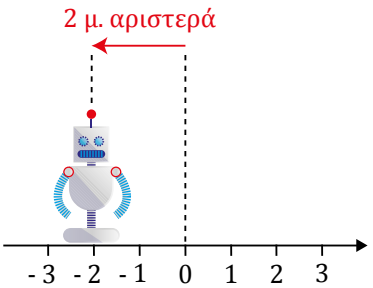
Ένα ρομπότ είναι συνδεδεμένο με έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή. Το ρομπότ κινείται με τον παρακάτω τρόπο: Αρχικά το τοποθετούμε στο 0 μιας αριθμογραμμής και σε ειδική εφαρμογή στον υπολογιστή πληκτρολογούμε έναν ακέραιο αριθμό, π.χ. 3 ή +3, και πατάμε το κουμπί «κίνηση» στην οθόνη. Τότε το ρομπότ προχωρά 3 μονάδες προς τα δεξιά.

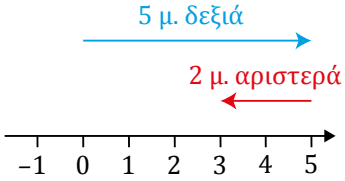


Όταν πληκτρολογούμε έναν αρνητικό αριθμό, π.χ. –2, το ρομπότ προχωρά 2 μονάδες προς τα αριστερά.

Επίσης, μπορούμε να πληκτρολογήσουμε και άθροισμα αριθμών και να πατήσουμε «κίνηση».

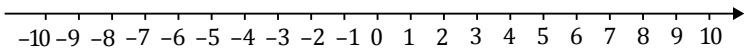
Για παράδειγμα, για το άθροισμα $(+5)+(-2)$, αφού πατήσουμε «κίνηση», το ρομπότ θα κάνει 5 μονάδες δεξιά και μετά 2 μονάδες αριστερά. Τελικά θα βρεθεί σε αριθμό ίσο με το άθροισμα που πληκτρολογήσαμε.





Ρομπότ στην αριθμογραμμή

α) Παρακάτω φαίνεται τι έχουμε πληκτρολογήσει στον υπολογιστή, πριν πατήσουμε «κίνηση». Με τη βοήθεια της αριθμογραμμής να συμπληρώσετε τα κενά:



$4+3=$ _____, $(-5)+(-3)=$ _____, $(-6)+4=$ _____, $5+(-8)=$ _____

β) Να υπολογίσετε τα παρακάτω αθροίσματα χρησιμοποιώντας τον τρόπο με τον οποίο κινείται το ρομπότ:

$(+3)+(+5)$, $(-2)+(-8)$, $(-5)+(-5)$, $(+5)+(-4)$, $(-50)+(+20)$, $(-10)+(-20)$, $(-100)+(+200)$, $(+300)+(-500)$.

Το ρομπότ βρίσκει το άθροισμα στην αριθμογραμμή

γ) Να σκεφτείτε και να συζητήσετε με τους συμμαθητές και τις συμμαθήτριές σας τι μπορούμε να πούμε για τη θέση του ρομπότ, αν πληκτρολογήσουμε:

i) άθροισμα θετικών αριθμών,

ii) άθροισμα αρνητικών αριθμών,

iii) έναν θετικό και έναν αρνητικό αριθμό.

Δ3. Η πρόσθεση των ακεραίων

α) Χωρίς ρομπότ και βαθμολογία με κάρτες μπορείτε να περιγράψετε πώς προσθέτουμε δύο ακέραιους αριθμούς;
β) Είναι σωστός ο κανόνας που είναι γραμμένος δεξιά;
γ) Να διατυπώσετε έναν κανόνα με τον οποίο να συμφωνήσετε στην ομάδα σας και μετά να τον συζητήσετε στην τάξη.
δ) Θεωρείτε ότι είναι απαραίτητοι οι κανόνες της πρόσθεσης; Γιατί;

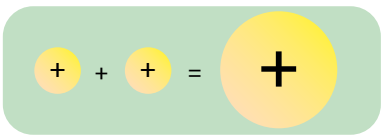
2ⁿ Εμείς σκεφτήκαμε ότι στους ομόσημους βάζουμε το πρόσημό τους και προσθέτουμε τους αριθμούς, ενώ στους ετερόσημους βάζουμε το πρόσημο του μεγαλύτερου αριθμού και μετά αφαιρούμε τους αριθμούς χωρίς το πρόσημο.

Συζητάμε

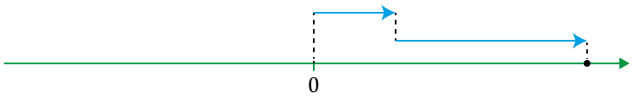
...για την πρόσθεση

Όταν οι αριθμοί που προσθέτουμε είναι **ομόσημοι**:

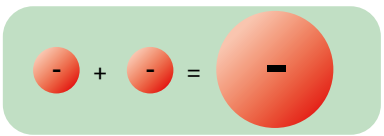
- Αν έχουμε θετικές κάρτες και πάρουμε κι άλλες θετικές κάρτες, τότε θα έχουμε θετική βαθμολογία.



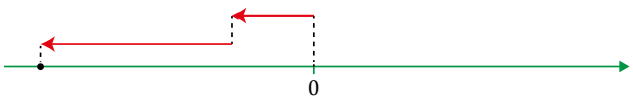
Αν το ρομπότ κινηθεί δεξιά και μετά πάλι δεξιά, τότε θα βρίσκεται δεξιά του μηδενός, δηλαδή στους θετικούς.



- Αν έχουμε αρνητικές κάρτες και πάρουμε κι άλλες αρνητικές κάρτες, τότε θα έχουμε αρνητική βαθμολογία.

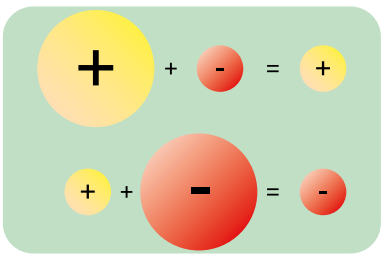


Αν το ρομπότ κινηθεί αριστερά και μετά πάλι αριστερά, τότε θα βρίσκεται αριστερά του μηδενός, δηλαδή στους αρνητικούς.

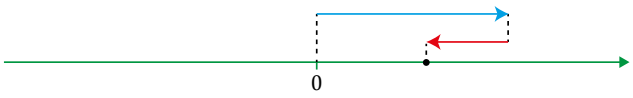


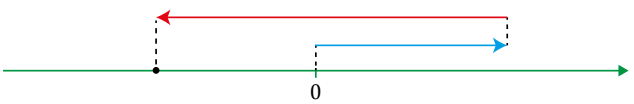
Όταν οι αριθμοί που προσθέτουμε είναι **ετερόσημοι**:

- Ως πρόσημο της συνολικής βαθμολογίας μιας ομάδας χρησιμοποιούμε το πρόσημο «+», αν είναι περισσότερες οι θετικές κάρτες που έχει η ομάδα, και το πρόσημο «–», αν είναι περισσότερες οι αρνητικές κάρτες.



- Ως πρόσημο της τελικής θέσης του ρομπότ έχουμε το «+», αν στο άθροισμα ο θετικός έχει μεγαλύτερη απόλυτη τιμή από τον αρνητικό. Αντίθετα, έχουμε «–», αν ο αρνητικός έχει μεγαλύτερη απόλυτη τιμή από τον θετικό.





Συζητάμε για την πρόσθεση ακεραίων

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Κανόνες πρόσθεσης ακέραιων αριθμών	
Για να προσθέσουμε δύο ή περισσότερους ομόσημους ακεραίους: • γράφουμε το κοινό πρόσημο και • προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους.	$(-2)+(-7)=-(\lvert-2\rvert+\lvert-7\rvert)=-(2+7)=-9$ $(+5)+(+8)=+(\lvert+5\rvert+\lvert+8\rvert)=+(5+8)=+13$
Για να προσθέσουμε δύο ετερόσημους ακεραίους: • γράφουμε το πρόσημο του αριθμού με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή και • από τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή αφαιρούμε τη μικρότερη.	$(-8)+(+3)=-(\lvert-8\rvert-\lvert+3\rvert)=-(8-3)=-5$ $(-17)+(+20)=+(\lvert+20\rvert-\lvert-17\rvert)=$ $=+(20-17)=+3$

Δ4. Οι ιδιότητες της πρόσθεσης: από τους φυσικούς στους ακεραίους

Α. Δίνονται οι ιδιότητες της πρόσθεσης των φυσικών.

- Το άθροισμα ενός οποιουδήποτε φυσικού α με το 0 είναι α, δηλαδή $\alpha+0=0+\alpha=\alpha$, π.χ. $3+0=0+3=3$.
- Για το άθροισμα δύο οποιωνδήποτε φυσικών α και β ισχύει $\alpha+\beta=\beta+\alpha$. Μπορείτε να δώσετε ένα παράδειγμα;
- Για τρεις οποιουσδήποτε φυσικούς α, β και γ ισχύει $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$. Μπορείτε να δώσετε ένα παράδειγμα;

Ισχύουν οι ιδιότητες αυτές στους ακεραίους; Να συζητήσετε στην ομάδα σας και να γράψετε σχετικά παραδείγματα.

Β. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα $(-2)+(+2), (+3)+(-3)$.

Μπορείτε να γράψετε δύο διαφορετικούς φυσικούς αριθμούς που έχουν άθροισμα 0;

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Ιδιότητες της πρόσθεσης των ακεραίων	
Αντιμεταθετική ιδιότητα: για να βρούμε το άθροισμα δύο ακεραίων, μπορούμε να τους προσθέσουμε με όποια σειρά θέλουμε, δηλαδή $\alpha+\beta=\beta+\alpha$.	**α)** $(-7)+(-5)=(-5)+(-7)$, αφού και τα δύο κάνουν -12 **β)** $(-2)+(+3)=+1$ και $(+3)+(-2)=+1$

Προσεταιριστική ιδιότητα: το άθροισμα τριών ακεραίων δεν αλλάζει είτε κάνουμε πρώτα την πρόσθεση των δύο στα αριστερά, είτε κάνουμε πρώτα την πρόσθεση των δύο στα δεξιά, δηλαδή $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$.	$-1+[+2+(-5)]=-1+(-3)=-4$ και $[-1+(+2)]+(-5)=+1+(-5)=-4$ Συμπέρασμα: Με όποια σειρά και αν κάνουμε την πρόσθεση σε τρεις (ή περισσότερους) προσθετέους, το άθροισμα παραμένει ίδιο.
Το άθροισμα του μηδενός με οποιονδήποτε ακέραιο αριθμό είναι ίσο με αυτό τον αριθμό.	$-10+0=-10$ $0+(+5)=+5$
Το άθροισμα δύο αντίθετων αριθμών είναι 0.	$-11+(+11)=0$ Μπορούμε να ορίσουμε τους αντίθετους αριθμούς με τη βοήθεια της πρόσθεσης ακεραίων: **Αντίθετοι** είναι δύο αριθμοί που το άθροισμά τους είναι 0.

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. **Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:** **α)** $(+2.598)+(-2.822)$ **β)** $(-8)+(-2)+(-4)+(-5)$

Απάντηση

α) Χρησιμοποιώντας τους κανόνες της πρόσθεσης, βρίσκουμε:

$$(+2.598)+(-2.822)=-(2.822-2.598)=+224$$

β) Όλοι οι προσθετέοι είναι ομόσημοι, άρα γράφουμε το κοινό τους πρόσημο και προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους:

$$(-8)+(-2)+(-4)+(-5)=-(8+2+4+5)=-19$$

Στην περίπτωση των ομόσημων αριθμών μπορούμε να εφαρμόσουμε τους κανόνες της πρόσθεσης ακεραίων σε περισσότερους από δύο προσθετέους.

2. **Να υπολογίσετε το άθροισμα** $(+5)+(-3)+(+7)+(-5)+(-3)$.

Απάντηση

Μπορούμε να το υπολογίσουμε με πολλούς τρόπους, για παράδειγμα:

1ος τρόπος

Με τη σειρά που βλέπουμε τους προσθετέους:

$$(+5)+(-3)+(+7)+(-5)+(-3)=(+2)+(+7)+(-5)+(-3)=(+9)+(-5)+(-3)=(+4)+(-3)=1$$

2ος τρόπος

Αλλάζουμε τη σειρά που γράφονται οι προσθετέοι, για να προσθέσουμε θετικούς με θετικούς και αρνητικούς με αρνητικούς:

$$5+(-3)+(+7)+(-5)+(-3)=$$
$$=5+(+7)+(-3)+(-5)+(-3)=$$
$$=(+12)+(-11)=1$$

Ποιος από τους δύο τρόπους νομίζετε ότι είναι πιο βολικός;

Σύμφωνα με ποια ιδιότητα αλλάξαμε θέση στα −3 και +7;

3. **Να υπολογίσετε το άθροισμα $(+7)+(-7)+(-6)+(+3)+(-2)+(+5)$ και να εξηγήσετε την ιδιότητα των ακεραίων που χρησιμοποιείτε κάθε φορά.**

Απάντηση

$$(+7)+(-7)+(-6)+(+3)+(-2)+(+5)=$$
$$=(+7)+(-7)+(-6)+(+3)+(-2)+(+5)=$$
$$=(-6)+(+3)+(-2)+(+5)=$$
$$=(-6)+(-2)+(+3)+(+5)=$$
$$=[(-6)+(-2)]+[(+3)+(+5)]=$$
$$=(-8)+(+8)=0$$

Οι αντίθετοι αριθμοί έχουν άθροισμα 0 και γι' αυτό τους διαγράφουμε.

Αντιμεταθετική ιδιότητα.

4. **Ο Μιχάλης είπε: «Όταν προσθέτουμε αριθμούς, το αποτέλεσμα είναι μεγαλύτερο από κάθε προσθετέο. Για παράδειγμα, $(+3)+(+4)=+7$». Ο Ομέρ λέει: «Όχι, αυτό είναι λάθος. Για παράδειγμα, στην πρόσθεση $(+3)+(-2)=+1$ το αποτέλεσμα είναι μικρότερο από τον έναν προσθετέο». Ποιος έχει δίκιο;**

Απάντηση

Όταν προσθέτουμε φυσικούς αριθμούς, τότε το άθροισμά τους είναι μεγαλύτερο από κάθε προσθετέο. Για παράδειγμα, $2+5+7=14$. Το 14 είναι μεγαλύτερο από τα 2, 5 και 7.

Αυτό δε συμβαίνει απαραίτητα όταν προσθέτουμε ακέραιους αριθμούς. Για παράδειγμα, $-2+(-3)+(-8)=-(2+3+8)=-13$, όπου το −13 είναι μικρότερο από τον κάθε προσθετέο. Ένα ακόμα παράδειγμα είναι αυτό που αναφέρει ο Ομέρ.

Με παραδείγματα όπως αυτό που αναφέρει ο Μιχάλης δεν μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι ένας ισχυρισμός ισχύει πάντα, εκτός και αν εξετάσουμε όλες τις περιπτώσεις (κάτι που δε γίνεται εδώ).

Αντίθετα, όταν βρίσκουμε ένα παράδειγμα στο οποίο δεν αληθεύει ο ισχυρισμός, όπως αυτό που αναφέρει ο Ομέρ, τότε αυτό αρκεί για να πούμε ότι ο ισχυρισμός **δεν είναι αληθής**.

Ένα τέτοιο παράδειγμα το ονομάζουμε στα μαθηματικά **αντιπαράδειγμα**.

Να διατυπώσετε μια πρόταση που δεν ισχύει και να χρησιμοποιήσετε ένα αντιπαράδειγμα για να τεκμηριώσετε ότι δεν είναι αληθής.

5. **Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $x+(-4)$ για:** **α)** $x=-2$ **β)** $x=0$ **γ)** $x=8$

Απάντηση

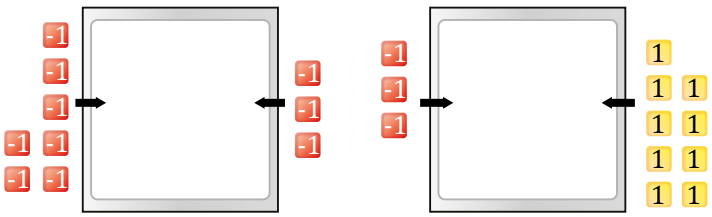
α) Βάζουμε στη θέση του x (δηλαδή αντικαθιστούμε) τον αριθμό -2 και έχουμε
$x+(-4)=(-2)+(-4)=-(2+4)=-6$.

β) Αντικαθιστούμε το x με τον αριθμό 0 και έχουμε $x+(-4)=0+(-4)=-4$.

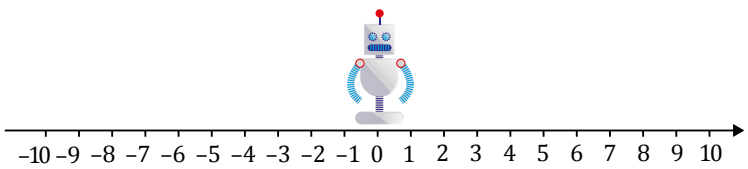
γ) Αντικαθιστούμε το x με τον αριθμό 8 και έχουμε $x+(-4)=8+(-4)=+(8-4)=4$.

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Να γράψετε για κάθε εικόνα την αντίστοιχη πρόσθεση και να βρείτε το αποτέλεσμα.



2. Με τη βοήθεια της κίνησης του ρομπότ στην αριθμογραμμή να βρείτε το αποτέλεσμα των προσθέσεων:
α) $(-9)+(+3)$ **β)** $(+4)+(-12)$



Βρίσκουμε το άθροισμα στην αριθμογραμμή

3. Ποια είναι η σημασία του κάθε «+» και «–» στην παράσταση $(-8)+(+3)+(-7)+(+6)$;

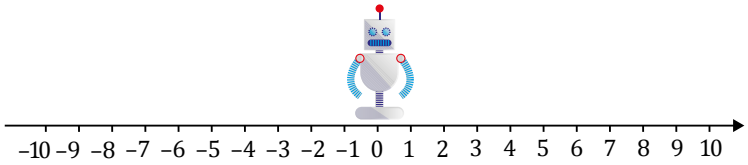
4. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς και ποιες είναι ψευδείς; Αν κάποια πρόταση είναι ψευδής, να αναφέρετε ένα αντιπαράδειγμα.
α) Το άθροισμα δύο θετικών αριθμών είναι θετικός.
β) Το άθροισμα δύο αρνητικών αριθμών είναι αρνητικός.
γ) Το άθροισμα ενός θετικού αριθμού και ενός αρνητικού είναι θετικός.

Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

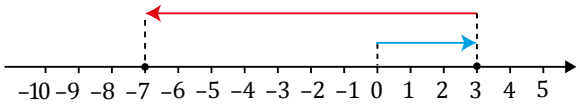
5. Να βρείτε τα παρακάτω αθροίσματα χρησιμοποιώντας το μοντέλο των καρτών.
$(+4)+(+6)$, $(-5)+(-10)$, $(+15)+(-6)$, $(-20)+(+16)$, $(+23)+(-13)$, $(-40)+(-60)$

6. Να βρείτε τα παρακάτω αθροίσματα με την κίνηση του ρομπότ στην αριθμογραμμή.

$(+2)+(+3)$, $(-4)+(-1)$, $(+10)+(-20)$, $(-3)+(+13)$, $(+40)+(-50)$, $(-100)+(-200)$



7. **α)** Να γράψετε ένα άθροισμα που να περιγράφει την παρακάτω κίνηση στην αριθμογραμμή.



β) Να σχεδιάσετε τα βέλη της κίνησης του ρομπότ στην αριθμογραμμή όταν αλλάξουμε σειρά στους όρους του αθροίσματος. Τι παρατηρείτε για το νέο άθροισμα;

γ) Να γράψετε τρεις άλλες προσθέσεις που θα έδιναν το ίδιο αποτέλεσμα.

8. Να συμπληρώσετε τον πίνακα προσθέτοντας τα αντίστοιχα στοιχεία γραμμής και στήλης.

+	+2	0	−4	−10
+5				
−3				
−7				

9. Να βρείτε τα αθροίσματα:

α) $(-4)+(+4)+(-10)+(+5)$

β) $(-20)+(+6)+(-2)+(+7)$

γ) $(+4)+(-5)+(-7)+(-3)+(+7)$

δ) $(-11)+(+24)+(-17)+(-13)+(+53)$

10. Ο λογαριασμός της πιστωτικής κάρτας της Αθηνάς γράφει ως τελικό υπόλοιπο −220 €. Στη συνέχεια η Αθηνά έκανε κατάθεση 340 € και ανάληψη 110 €. Ποιο είναι το νέο υπόλοιπο του λογαριασμού της κάρτας;

11. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $|(-5)+(-4)|$

β) $|(+22)+(-15)|$

γ) $|(-42)+(+30)|$

Η νύχτα της Σελήνης

12. Να γράψετε τον αριθμό −7 ως άθροισμα δύο προσθετέων με τρεις διαφορετικούς τρόπους. Πόσοι άλλοι τρόποι υπάρχουν;

13. Να συμπληρώσετε τα κενά:

$(-2)+\square=-8$, $(+4)+\square=+10$, $(+1)+\square=-5$,

$(+3)+\square=0$, $(+10)+\square=-20$, $(-8)+\square=18$, $(+14)+\square=-4$

2.3 Αφαίρεση ακέραιων αριθμών

Δ1. Τα ζευγάρια του μηδενός

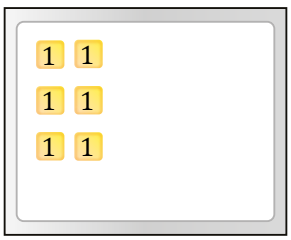
α) Στο παιχνίδι με τις ερωτήσεις και τις κάρτες, μια ομάδα είχε 6 θετικές κάρτες και καμία αρνητική, δηλαδή βαθμολογία +6. Στη συνέχεια απάντησε λάθος σε 4 ερωτήσεις και άρα έπρεπε να πάρει 4 αρνητικές κάρτες, αλλά η καθηγήτρια δεν είχε άλλες.
Η Ελισάβετ πρότεινε στην καθηγήτρια να πάρει από κάθε ομάδα τόσες θετικές όσες και αρνητικές κάρτες, ώστε να μπορεί να συνεχιστεί το παιχνίδι.
Αυτό που προτείνει η Ελισάβετ θα αλλάξει τη βαθμολογία των ομάδων;

β) Οι κάρτες των ομάδων μπερδεύτηκαν και πρέπει να γίνουν αλλαγές.

i) Από την 1η ομάδα, που έχει 6 θετικές κάρτες $(+6)$, θα πρέπει να αφαιρεθούν οι 4. Ποια θα είναι η βαθμολογία της ομάδας;
Γράψτε το με μία αφαίρεση.

ii) Για τη 2η ομάδα, η αλλαγή στις κάρτες εκφράζεται με την αφαίρεση $(-6)-(-4)$. Τι κάρτες είχε η 2η ομάδα και τι αλλαγή έγινε; Ποια είναι η βαθμολογία της τελικά;

iii) Ο Δημήτρης είπε: «Αν μια ομάδα έχει μόνο 6 θετικές κάρτες και θέλουμε να πάρουμε 4 αρνητικές, δεν μπορούμε, γιατί δεν έχει αρνητικές κάρτες, άρα η πράξη $(+6)-(-4)$ δεν μπορεί να γίνει».
Η Κατερίνα διαφώνησε: «Γίνεται η πράξη, αφού μπορεί να αποκτήσει 4 αρνητικές κάρτες χωρίς να αλλάξει η βαθμολογία της».
Εσείς τι νομίζετε; Μπορεί να γίνει η αφαίρεση $(+6)-(-4)$ και γιατί;



γ) Πώς γίνεται η αφαίρεση $(-6)-(+4)$ με κάρτες; Ποια είναι η βαθμολογία και ποιο το αποτέλεσμα της αφαίρεσης;

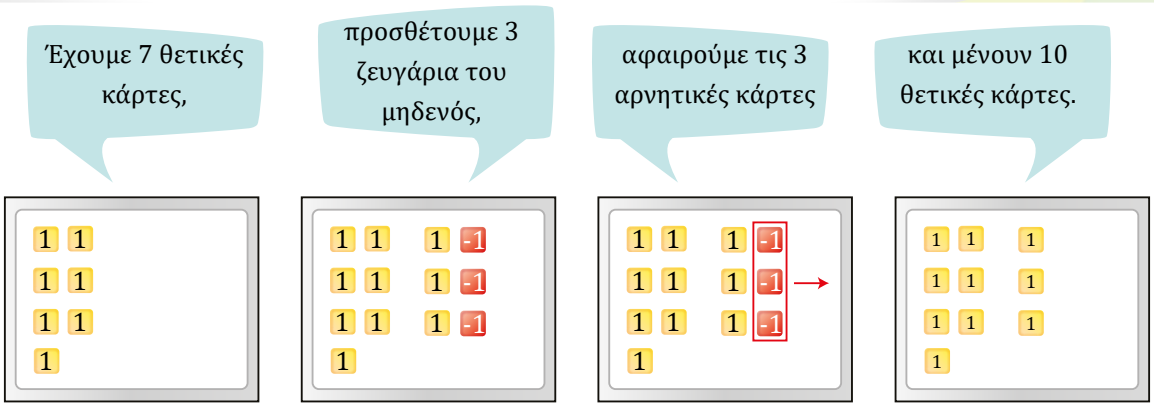
δ) Να κάνετε τις αφαιρέσεις $(+2)-(-5)$, $(-5)-(-8)$, $(+10)-(+12)$ με τη βοήθεια των καρτών.

Συζητήστε πρώτα στις ομάδες σας και μετά σε όλη την τάξη.

Συζητάμε

…για την αφαίρεση

- Για να κάνουμε την αφαίρεση $(+7)-(+3)$, από τις **7** θετικές κάρτες αφαιρούμε τις **3** και το αποτέλεσμα είναι **4** θετικές κάρτες.
- Όμοια, για την αφαίρεση $(-7)-(-3)$, από τις **7** αρνητικές κάρτες αφαιρούμε τις **3** αρνητικές και θα μείνουν **4** αρνητικές.
- Αν όμως έχουμε $(+7)-(-3)$, τότε δεν έχουμε αρνητικές κάρτες να αφαιρέσουμε. Μπορούμε όμως να προσθέσουμε 3 ζευγάρια του μηδενός, δηλαδή:



Μπορούμε να γράψουμε τα παραπάνω με πράξεις:

$(+7)-(-3)=(+7)+\ \mathbf{0}\ -(-3)=(+7)+\ \mathbf{(+3)+(-3)}\ -(-3)=$

$=(+7)+(+3)+\ \mathbf{(-3)-(-3)}\ =(+7)+(+3)=+10$

- Όμοια, για την αφαίρεση $(-7)-(+3)$:

$(-7)-(+3)=(-7)+(-3)+(+3)-(+3)=(-10)+0=-10$

Αφαίρεση με την κίνηση στην αριθμογραμμή

Δ2. Η αφαίρεση ως πρόσθεση

α) Η Καλλιόπη είπε: «Μπορούμε να κάνουμε κάτι πιο απλό για την αφαίρεση $(-6)-(+4)$. **Αντί να αφαιρέσουμε 4 θετικές κάρτες, μπορούμε να προσθέσουμε 4 αρνητικές.** Η βαθμολογία είναι ίδια».
Έχει δίκιο η Καλλιόπη;
Πώς μπορούμε να σκεφτούμε αντίστοιχα για την αφαίρεση $(+5)-(-2)$;

β) Μπορείτε να γράψετε την αντίστοιχη πρόσθεση για καθεμία από τις παρακάτω αφαιρέσεις;

$(+9)-(-4)=$ ..... $(-4)-(+5)=$ .....

$(+2)-(-6)=$ ..... $(-5)-(+2)=$ .....

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, να διατυπώσετε έναν κανόνα, ώστε μια αφαίρεση να γράφεται ως πρόσθεση με το ίδιο αποτέλεσμα. Να συζητήσετε τον κανόνα πρώτα στην ομάδα σας και μετά στην τάξη.

Συζητάμε

…για την αφαίρεση ως πρόσθεση

Μπορούμε να γράψουμε μια αφαίρεση δύο ακεραίων με τη βοήθεια της πρόσθεσης ως εξής:

$(+10)-(+4)=(+10)+(-4)=6$ $(+10)-(-4)=(+10)+(+4)=14$

$(-10)-(-4)=(-10)+(+4)=-6$ $(-10)-(+4)=(-10)+(-4)=-14$

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Για να αφαιρέσουμε τον β από τον α, προσθέτουμε τον α με τον αντίθετο του β.

Έτσι, η **αφαίρεση** ακεραίων γίνεται με τη βοήθεια της πρόσθεσης ως εξής:

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$$

Η διαφορά του β από τον α είναι ίση με το άθροισμα του α με τον αντίθετο του β.

$(-10)-(+12)=(-10)+\mathbf{(-12)}=-22$

$(+20)-(-32)=(-20)+\mathbf{(+32)}=+12$

Διαφορά ονομάζουμε το αποτέλεσμα μιας αφαίρεσης δύο αριθμών. Π.χ.:
«Η διαφορά του 5 από το 20 είναι 15».
«Η διαφορά $20-5$ είναι ίση με 15».

Δ3. Η «σημασία» των «+» και «–»

Δίνονται οι παραστάσεις $(+5)-(-11)$, $-(+4)+(-7)$.

α) Σε ποιες περιπτώσεις το «+» εκφράζει:

i) θετικό αριθμό;

ii) πρόσθεση;

β) Σε ποιες περιπτώσεις το «–» εκφράζει:

i) αρνητικό αριθμό;

ii) αφαίρεση;

iii) τον αντίθετο ενός αριθμού;

Συζητάμε

…για τη σημασία των «+» και «–» και τις παρενθέσεις

Στην αριθμητική παράσταση $-(+3)-[-(-5)]+(-8)$ το κάθε «+» και «–» εκφράζει:

$$-\ (+3)\ -\ [-(-5)]\ +\ (-8)$$

αντίθετο

$-(+3)$, ο αντίθετος του $+3$

$-(-5)$, ο αντίθετος του -5

πρόσημα αριθμών

ο $+3$ είναι θετικός

ο -5 είναι αρνητικός

ο -8 είναι αρνητικός

πράξεις μεταξύ αριθμών

Μπορούμε να υπολογίσουμε την παράσταση ως εξής:

$-(+3)-[-(-5)]+(-8)=$ ο αντίθετος του $+3$ είναι ο -3 και ο αντίθετος του -5 είναι ο $+5$

$=(-3)-(+5)+(-8)=$ η αφαίρεση $(-3)-(+5)$ γράφεται ως πρόσθεση $(-3)+(-5)$

$=(-3)+(-5)+(-8)=-16$ πρόσθεση ομόσημων

- Στο τελευταίο βήμα έχουμε μόνο προσθέσεις.
  Τότε μπορούμε να παραλείπουμε τα «+» της πρόσθεσης, γνωρίζοντας πως πρόκειται για αθροίσματα, δηλαδή να γράφουμε $(-3)+(-5)+(-8)=-3-5-8$.
  Υπολογίζουμε το άθροισμα όπως όταν υπάρχει το «+» της πρόσθεσης.

  Παραδείγματα

  $$(-5)+(+7)+(-9)=(-14)+(+7)=-7 \quad \text{ή} \quad -5+7-9=-14+7=-7$$
  $$-(+3)-(+5)+(-8)= \mathbf{(-3)+(-5)+(-8)} =-3-5-8=-16$$

  Στο δεύτερο παράδειγμα μπορούμε να παραλείψουμε την ισότητα με τους αριθμούς με έντονη γραφή.

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Απαλοιφή παρενθέσεων και υπολογισμός αθροισμάτων	
Όταν μπροστά (αριστερά) από μια παρένθεση υπάρχει «+», τότε μπορούμε: • να «παραλείψουμε» το «+» και την παρένθεση και • να γράψουμε τον αριθμό που είναι μέσα σε αυτή. Όταν μπροστά (αριστερά) από μια παρένθεση υπάρχει «–», τότε μπορούμε: • να «παραλείψουμε» το «–» και την παρένθεση και • να γράψουμε τον αντίθετο του αριθμού που είναι μέσα σε αυτή.	$(-3)+(+5)=-3+5$ $(+2)+(-4)=2-4$ $-(+2)-(-9)=-2+9$

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. **Αφαιρώντας τον φυσικό β από τον φυσικό α, «ο α ελαττώνεται». Δηλαδή «*η διαφορά των δύο αριθμών είναι μικρότερη από τον α*». Για παράδειγμα, η διαφορά του 4 από το 9 είναι 5 $(9-4=5)$, δηλαδή είναι μικρότερη από το 9. Ο Άρμπεν λέει ότι το ίδιο ισχύει και για την αφαίρεση των ακέραιων αριθμών. Συμφωνείτε; Αν όχι, να αναφέρετε ένα αντιπαράδειγμα.**

Απάντηση

Στην αφαίρεση $(+4)-(+2)$ η διαφορά είναι 2, που πράγματι είναι μικρότερη από το $(+4)$. Στην αφαίρεση όμως $(+4)-(-2)$ η διαφορά είναι $(+4)+(+2)=6$, που είναι μεγαλύτερη από το $(+4)$.

Άρα στους ακέραιους αριθμούς η αφαίρεση του ακεραίου β από τον αριθμό α δε σημαίνει κατ' ανάγκη ελάττωση του αριθμού α.

2. **Να υπολογίσετε:**

α) τη διαφορά του −3 από το −10, **β) την τιμή της παράστασης** $-(-3)+(-8)-\left[-(-2)\right]$.

Απάντηση

α) Η διαφορά αυτή εκφράζεται με την αφαίρεση $(-10)-(-3)$.

- 1ος τρόπος: $(-10)-(-3)=(-10)+(+3)=-(10-3)=-7$
- 2ος τρόπος: $(-10)-(-3)=-10+3=-7$

β) $-(-3)+(-8)-\left[-(-2)\right]=-(-3)+(-8)-(+2)=3-8-2=3-10=-7$

Οι αριθμοί με έντονη γραφή έχουν μπροστά τους «−» και, για να απαλείψουμε την παρένθεση, τους αλλάξαμε πρόσημο. Προσέξτε ότι μετατρέψαμε την αγκύλη σε παρένθεση!

3. **Ποια είναι η τιμή της παράστασης** $x-y-z$, **αν** $x=-3$, $y=-7$ **και** $z=8$;

Απάντηση

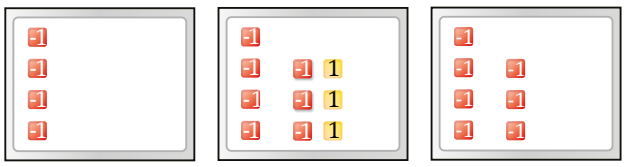
$x-y-z=(-3)-(-7)-(+8)=-3+7-8=-11+7=-4$

Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε

- Ισχύει η αντιμεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα για την αφαίρεση ακεραίων; Αιτιολογήστε τις απόψεις σας.
- Να υπολογίσετε με 2 διαφορετικούς τρόπους το αποτέλεσμα μιας αφαίρεσης.
- Να γράψετε μια αριθμητική παράσταση και, αφού περιγράψετε το νόημα των συμβόλων «+» και «−», να βγάλετε τις παρενθέσεις και να υπολογίσετε την παράσταση.
- Να γράψετε μια ερώτηση για κάτι που δεν έχετε κατανοήσει. Δώστε το κείμενό σας σε έναν συμμαθητή ή σε μία συμμαθήτριά σας και συζητήστε τις απαντήσεις που θα σας δώσει.

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Για την αφαίρεση $(-4)-(+3)$, η Αλεξάνδρα έκανε τα παρακάτω βήματα με κάρτες. Τι έκανε σε κάθε βήμα και ποιο είναι το αποτέλεσμα;



2. Στην παράσταση $-\left[-(-4)\right]-(-2)$ να προσδιορίσετε τα σύμβολα «−» που νομίζετε ότι συμβολίζουν τον αντίθετο ενός αριθμού, αναφέροντας τον αριθμό αυτό.

3. Ποια παράσταση από τις παρακάτω είναι ίση με την $-(-4)+(-2)-(+7)$;

α) $-4-2-7$ **β)** $4-2-7$

γ) $4+2+7$ **δ)** $4-2+7$

4. Ποια από τις παρακάτω παραστάσεις με παρενθέσεις είναι ίση με την $-2+7-5$;

α) $-(-2)-(-7)-(+5)$ **β)** $(-2)-(-7)-(-5)$

γ) $-(+2)-(-7)-(+5)$

5. Αν υπάρχουν λάθη σε αυτά που έγραψε ο Γιώργος, διορθώστε τα.

$8-(+4)=$
$=-8-4=-12$

$-(+3)-(-2)=$
$=-3-2=$
$=-5$

Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

6. Να κάνετε τις αφαιρέσεις $(-5)-(-2), (+3)-(+2), (-4)-(+2), (+4)-(-3), (-5)-(+8)$:

α) χρησιμοποιώντας τις θετικές και τις αρνητικές κάρτες,

β) μετατρέποντας την αφαίρεση σε πρόσθεση.

7. Να υπολογίσετε τις αριθμητικές παραστάσεις:

α) $(-3)+(-8)-(-6)$

β) $(-10)-(+3)-[-(-5)]$

γ) $(+20)-(-40)+(+10)-(+50)$

8. **α)** Ποιο είναι το νόημα του κάθε συμβόλου «+» και «−» στις παρακάτω παραστάσεις;

i) $-(+2)+(-3)$

ii) $-(-7)+(+6)-(+10)$

iii) $-(-8)-[-(+3)]-[-(-5)]$

β) Να απαλείψετε τις παρενθέσεις και να υπολογίσετε την καθεμία από τις προηγούμενες αριθμητικές παραστάσεις.

9. Ο πίνακας δείχνει τη μέση θερμοκρασία στις 10 Ιανουαρίου και στις 10 Ιουνίου ενός έτους σε 4 πόλεις της Ελλάδας.

Πόλεις	10 Ιανουαρίου	10 Ιουνίου
Ηράκλειο	15 °C	36 °C
Φλώρινα	−8 °C	31 °C
Κέρκυρα	2 °C	32 °C
Σουφλί	−10 °C	28 °C

α) Ποια ήταν η άνοδος της θερμοκρασίας από τις 10 Ιανουαρίου στις 10 Ιουνίου σε κάθε πόλη;

β) Ποια πόλη είχε τη μεγαλύτερη διαφορά θερμοκρασίας;

10. Ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα στην αφαίρεση ακεραίων; Για παράδειγμα, ισχύει ότι $(-4)-(+3)=(+3)-(-4)$; Αν όχι, μπορείτε να αλλάξετε ένα σύμβολο, όπου χρειάζεται στην παραπάνω ισότητα, για να είναι αληθής;

11. Να γράψετε τον αριθμό −5 ως διαφορά δύο ακέραιων αριθμών με τρεις διαφορετικούς τρόπους.

12. Για καθένα από τα παρακάτω μοτίβα, να γράψετε τους επόμενους 3 όρους του. Στη συνέχεια να προσδιορίσετε την αφαίρεση με την οποία προκύπτει κάθε νέος αριθμός από τον προηγούμενό του.

α) $10, 4, -2,$ ___, ___, ___

β) $-9, -1, 7,$ ___, ___, ___

γ) $12, -2, -16,$ ___, ___, ___

13. Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις για $x=-2$, $y=5$ και $z=-10$:

α) $x-4$ **β)** $4-y$ **γ)** $x-z$

δ) $z-x$ **ε)** $x-y+z$ **στ)** $z-y-x$

14. Σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις η διαφορά των αριθμών είναι πάντα θετική;

α) Δύο θετικών ακεραίων.

β) Δύο αρνητικών ακεραίων.

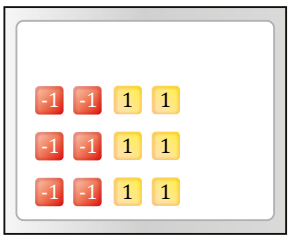
γ) Ενός αρνητικού από έναν θετικό ακέραιο.

δ) Ενός θετικού από έναν αρνητικό ακέραιο.

Να εξηγήσετε αναλυτικά τις σκέψεις σας.

2.4 Πολλαπλασιασμός ακέραιων αριθμών

Δ1. Οι κάρτες... πολλαπλασιάζονται



α) Στη βαθμολογία με κάρτες (όπως στα προηγούμενα), μια ομάδα έχει 6 θετικές και 6 αρνητικές κάρτες, άρα 0 βαθμούς. Ποια θα είναι η βαθμολογία της ομάδας σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις; Συζητήστε στην τάξη.

i) Αν προσθέσουμε 2 στήλες των τριών θετικών καρτών, η βαθμολογία θα γίνει ____.

Δηλαδή $0+2\cdot(+3)$ ή $+2\cdot(+3)=$ ____.

ii) Αν αφαιρέσουμε 2 στήλες των τριών θετικών καρτών, η βαθμολογία θα γίνει ____.

Δηλαδή $0-2\cdot(+3)$ ή $-2\cdot(+3)=$ ____.

iii) Αν προσθέσουμε 2 στήλες των τριών αρνητικών καρτών, η βαθμολογία θα γίνει ____.

Δηλαδή $+2\cdot(-3)=$ ____.

iv) Αν αφαιρέσουμε 2 στήλες των τριών αρνητικών καρτών, η βαθμολογία θα γίνει ____.

Δηλαδή $-2\cdot(-3)=$ ____.

β) Να περιγράψετε πόσες στήλες και από τι είδους κάρτες προσθέτουμε ή αφαιρούμε για καθένα από τα παρακάτω γινόμενα. Στη συνέχεια να συμπληρώσετε τα αποτελέσματα.

$4\cdot(+3)=$ ____ $\quad -5\cdot(+6)=$ ____ $\quad 2\cdot(-8)=$ ____ $\quad -5\cdot(-10)=$ ____

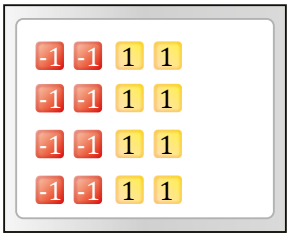
$10\cdot(-5)=$ ____ $\quad -2\cdot(+9)=$ ____ $\quad -20\cdot(-5)=$ ____ $\quad 7\cdot(+100)=$ ____

γ) Σε ποιες περιπτώσεις το γινόμενο δύο ακεραίων είναι θετικό και σε ποιες αρνητικό;

Συζητάμε

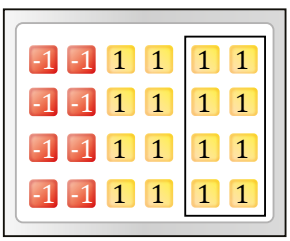
...για τον πολλαπλασιασμό

Μια ομάδα έχει 8 θετικές και 8 αρνητικές κάρτες, δηλαδή 0 βαθμούς.



i) Προσθέτουμε 2 στήλες των 4 θετικών καρτών, άρα η βαθμολογία της ομάδας γίνεται +8.

Δηλαδή $+2\cdot(+4)=+8$.

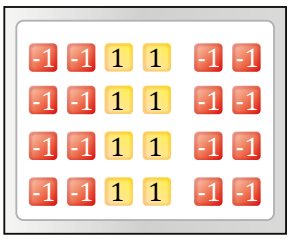


ii) Αφαιρούμε 2 στήλες των 4 θετικών καρτών, άρα η βαθμολογία γίνεται −8.

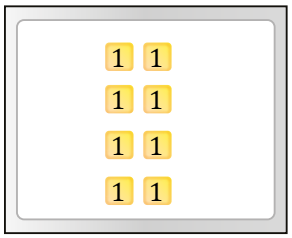
Δηλαδή $0-2\cdot(+4)=-2\cdot(+4)=-8$.



iii) Προσθέτουμε 2 στήλες των 4 αρνητικών καρτών, άρα η βαθμολογία γίνεται -8.
Δηλαδή $+2\cdot(-4)=-8$.



iv) Αφαιρούμε 2 στήλες των 4 αρνητικών καρτών, άρα η βαθμολογία γίνεται 8.
Δηλαδή $-2\cdot(-4)=+8$.



Η βαθμολογία αυξάνεται και από μηδέν γίνεται θετική, όταν:

- προσθέτουμε στήλες θετικών καρτών, π.χ. $+2\cdot(+4)=+8$,
- αφαιρούμε στήλες αρνητικών καρτών, π.χ. $-2\cdot(-4)=+8$.

Η βαθμολογία μειώνεται και από μηδέν γίνεται αρνητική, όταν:

- προσθέτουμε στήλες αρνητικών καρτών, π.χ. $+2\cdot(-4)=-8$,
- αφαιρούμε στήλες θετικών καρτών, π.χ. $-2\cdot(+4)=-8$.

Πολλαπλασιασμός ακεραίων με το μοντέλο της κίνησης στην αριθμογραμμή

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ακεραίους:

- βάζουμε το πρόσημο «+», αν είναι ομόσημοι, ή το πρόσημο «–», αν είναι ετερόσημοι, και
- πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους.

- $0\cdot(-18)=0$
  $0\cdot 0=0$
- $(-6)\cdot(-3)=+(6\cdot 3)=+18$, αφού οι (-6) και (-3) είναι ομόσημοι.
- $(+4)\cdot(-5)=-(4\cdot 5)=-20$, αφού οι $(+4)$ και (-5) είναι ετερόσημοι.

- Αν ένας τουλάχιστον είναι ίσος με 0, τότε το γινόμενο είναι ίσο με 0.
- Αν είναι ομόσημοι, το γινόμενό τους είναι θετικό.
- Αν είναι ετερόσημοι, το γινόμενό τους είναι αρνητικό.

(+) • (+) = (+)
(+) • (−) = (−)
(−) • (+) = (−)
(−) • (−) = (+)

Δ2. Δυνάμεις με βάση ακέραιο

Το $\underbrace{(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)}_{\text{5 παράγοντες ίσοι με } (-3)}$ είναι ένα γινόμενο 5 ίσων παραγόντων, του −3.

Όπως στους φυσικούς, το γράφουμε ως δύναμη $(-3)^5$ με **βάση** −3 και **εκθέτη** 5.

α) Να γράψετε τα παρακάτω γινόμενα ως δυνάμεις:

$(-5)\cdot(-5)\cdot(-5)$, $(-102)\cdot(-102)\cdot(-102)\cdot(-102)$, $x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x$, $\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\beta\cdot\beta$

β) Να υπολογίσετε τις δυνάμεις $(-3)^2$, $(-2)^5$, $(+3)^2$, $(+2)^5$.

Συζητάμε

…για τις δυνάμεις

- Όταν έχουμε γινόμενα ίσων παραγόντων, τότε μπορούμε να τα γράφουμε ως δυνάμεις. Για παράδειγμα:

  $(-45)\cdot(-45)\cdot(-45)\cdot(-45)\cdot(-45)=(-45)^5$, $6\cdot6\cdot6\cdot6\cdot6\cdot x\cdot x\cdot x=6^5\cdot x^3$,

  $x\cdot x\cdot y\cdot x\cdot y\cdot z\cdot x\cdot z\cdot y=x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot y\cdot y\cdot y\cdot z\cdot z=x^4\cdot y^3\cdot z^2$

- Υπολογίζουμε δυνάμεις με αρνητική βάση ως εξής:

  $(-4)^2=(-4)\cdot(-4)=16$, $(-3)^3=(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)=-27$

Να υπολογίσετε το -4^2. Είναι ίσο με το $(-4)^2$ ή όχι; Γιατί;

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Το γινόμενο ν ίσων ακέραιων παραγόντων α μπορούμε να το γράφουμε α^ν και το ονομάζουμε **δύναμη** με βάση το α και εκθέτη το ν. Επίσης, ορίζουμε ότι $\alpha^1=\alpha$.	$\underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\ldots\cdot\alpha}_{\nu \text{ παράγοντες ίσοι με } \alpha}=\alpha^\nu$ για $\nu>1$ $\alpha^1=\alpha$

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. Μπορείτε να βρείτε κανόνες για να κάνετε τη διαίρεση ακεραίων στην περίπτωση που αυτή είναι τέλεια;

Απάντηση

Η διαίρεση είναι η αντίστροφη πράξη του πολλαπλασιασμού. Για παράδειγμα:

$(+2)\cdot(+5)=+10$, άρα $(+10):(+2)=+5$ και $(+10):(+5)=+2$

$(-2)\cdot(+5)=-10$, άρα $(-10):(-2)=+5$ και $(-10):(+5)=-2$

$(+2)\cdot(-5)=-10$, άρα $(-10):(+2)=-5$ και $(-10):(-5)=+2$

$(-2)\cdot(-5)=+10$, άρα $(+10):(-2)=-5$ και $(+10):(-5)=-2$

Με την ίδια λογική να συμπληρώσετε τα κενά:

$(+8):(+2)=$ ____ $(-15):(-3)=$ ____

$(+10):(-2)=$ ____ $(-8):(+4)=$ ____

Άρα, για να κάνουμε τη διαίρεση δύο ακέραιων αριθμών:

- βάζουμε το πρόσημο «+», αν είναι ομόσημοι, ή το πρόσημο «–», αν είναι ετερόσημοι, και
- διαιρούμε τις απόλυτες τιμές τους.

2. **Η θερμοκρασία είναι 5 °C και πέφτει 2 °C κάθε ώρα. Μετά από 9 ώρες ποια θα είναι η θερμοκρασία;**



Απάντηση

Σε 9 ώρες η θερμοκρασία θα μεταβληθεί κατά $9\cdot(-2)=-18$ °C και θα γίνει $5+9\cdot(-2)=5-18=-13$, άρα –13 °C.

3. **Να υπολογίσετε τις τιμές των αριθμητικών παραστάσεων:**

α) $-2+4\cdot(-5)$ **β)** $4\cdot(-3)-6\cdot(-5)^2$

Απάντηση

α) Στην παράσταση $-2+4\cdot(-5)$ πρώτα θα υπολογίσουμε το γινόμενο $+4\cdot(-5)$ και μετά το άθροισμα. Έτσι:

$-2+4\cdot(-5)=-2-20=-22$

β) Στην παράσταση $4\cdot(-3)-6\cdot(-5)^2$ πρώτα θα υπολογίσουμε τη δύναμη, μετά τα δύο γινόμενα και μετά την αφαίρεση. Έτσι:

$4\cdot(-3)-6\cdot(-5)\cdot(-5)=4\cdot(-3)-6\cdot(+25)=-12-(+150)=-12-150=-162$

Για να υπολογίσουμε την **τιμή** μιας αριθμητικής παράστασης, η σειρά με την οποία εκτελούμε τις πράξεις είναι η εξής:

1. υπολογίζουμε τις δυνάμεις,
2. κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις,
3. κάνουμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις.

Αν υπάρχουν παρενθέσεις, τότε κάνουμε τις πράξεις πρώτα μέσα σ' αυτές, με την ίδια προτεραιότητα.

4. **α) Να βρείτε τα γινόμενα:**

i) $(+3)\cdot(+5)$ **και** $(+5)\cdot(+3)$ **ii)** $(+2)\cdot(-10)$ **και** $(-10)\cdot(+2)$ **iii)** $(-4)\cdot(-8)$ **και** $(-8)\cdot(-4)$

Νομίζετε ότι ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα στον πολλαπλασιασμό ακεραίων;

β) Να βρείτε τα γινόμενα $\big[3\cdot(-5)\big]\cdot(-2)$ **και** $3\cdot\big[(-5)\cdot(-2)\big]$.

Νομίζετε ότι ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα στον πολλαπλασιασμό ακεραίων;

Απάντηση

α) i) $(+3)\cdot(+5)=15=(+5)\cdot(+3)$ **ii)** $(+2)\cdot(-10)=-20=(-10)\cdot(+2)$ **iii)** $(-4)\cdot(-8)=32=(-8)\cdot(-4)$

Παρατηρούμε ότι τα γινόμενα είναι ίσα σε κάθε περίπτωση. Γενικά, η **αντιμεταθετική ιδιότητα, $\alpha\beta=\beta\alpha$**, ισχύει στον πολλαπλασιασμό ακεραίων, αφού η αλλαγή της σειράς των παραγόντων δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού.

β) Παρατηρούμε ότι $\big[3\cdot(-5)\big]\cdot(-2)=(-15)\cdot(-2)=30$ και $3\cdot\big[(-5)\cdot(-2)\big]=3\cdot10=30$.

Γενικά, η **προσεταιριστική ιδιότητα, $(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)$**, ισχύει στον πολλαπλασιασμό ακεραίων, αφού το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού δεν αλλάζει, είτε υπολογιστεί πρώτα το αβ είτε υπολογιστεί πρώτα το βγ.

5. **α) Να βρείτε το πρόσημο του γινομένου** $(-1)\cdot(+2)\cdot(-3)\cdot(-5)\cdot(-10)\cdot(-4)$ **χωρίς να υπολογίσετε την τιμή του.**

β) Να βρείτε αν το αποτέλεσμα των παρακάτω γινομένων είναι θετικός ή αρνητικός αριθμός.

i) $(-2)\cdot(-5)\cdot(-4)$ **ii)** $(-1)\cdot(-3)\cdot(-2)\cdot(-5)\cdot(+2)$ **iii)** $2\cdot(-1)\cdot3\cdot\alpha$**, με α αρνητικό ακέραιο**

Απάντηση

α) Στο γινόμενο $(-1)\cdot(+2)\cdot(-3)\cdot(-5)\cdot(-10)\cdot(-4)$ έχουμε 5 αρνητικούς, άρα οι 4 από αυτούς, σε ζευγάρια, έχουν θετικό γινόμενο:

$$(-1)\cdot(+2)\cdot\underbrace{(-3)\cdot(-5)}_{+}\cdot\underbrace{(-10)\cdot(-4)}_{+}$$

Κάθε ζευγάρι αρνητικών ακεραίων έχει θετικό γινόμενο.

Τελικά έχουμε τρεις θετικούς και έναν αρνητικό, άρα το γινόμενο έχει αρνητικό πρόσημο.
Όπως φάνηκε, ο αριθμός $(+2)$ δεν άλλαξε το πρόσημο του γινομένου. Έτσι:

Για να βρούμε το πρόσημο του γινομένου πολλών μη μηδενικών παραγόντων, μετράμε τους αρνητικούς παράγοντες. Αν το πλήθος τους είναι:

- άρτιο, τότε το γινόμενο θα είναι θετικός αριθμός,
- περιττό, τότε το γινόμενο θα είναι αρνητικός αριθμός.

β) i) Η παράσταση $(-2)\cdot(-5)\cdot(-4)$ έχει 3 αρνητικούς παράγοντες, άρα το γινόμενο θα είναι αρνητικός αριθμός.

ii) Η παράσταση $(-1)\cdot(-3)\cdot(-2)\cdot(-5)\cdot(+2)$ έχει 4 αρνητικούς παράγοντες, άρα το γινόμενο θα είναι θετικός αριθμός.

iii) Η παράσταση $2\cdot(-1)\cdot3\cdot\alpha$ έχει δύο αρνητικούς παράγοντες, άρα το γινόμενο θα είναι θετικός αριθμός.

6. **Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:** **α)** $-3\cdot 5\cdot x$ **β)** $5\cdot(-7\cdot x)\cdot y$

Απάντηση

Με την προσεταιριστική ιδιότητα αλλάζουμε τη σειρά των παραγόντων, ώστε να πολλαπλασιάσουμε τους αριθμούς μεταξύ τους. Δηλαδή:

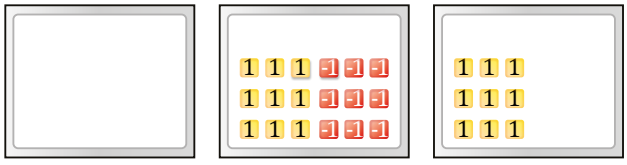
α) $-3\cdot 5x=(-3\cdot 5)x=-15x$

β) $5\cdot(-7x)y=\left[5\cdot(-7)\right]xy=-35xy$

Μπορούμε να παραλείπουμε το σύμβολο του πολλαπλασιασμού μεταξύ αριθμών και γραμμάτων ή μεταξύ γραμμάτων. Οι παραπάνω παραστάσεις μπορούν να γραφούν $-3\cdot 5x$ και $5\cdot(-7x)y$.

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Ένας μαθητής, για να βρει τον πολλαπλασιασμό $-3\cdot(-3)$ με κάρτες, έκανε τα βήματα της εικόνας. Στο πρώτο βήμα σκέφτηκε ότι ξεκινάει από το 0. Τι έκανε σε καθένα από τα επόμενα βήματα και ποιο είναι το αποτέλεσμα;



2. Να γράψετε τον αντίστοιχο πολλαπλασιασμό και να βρείτε το αποτέλεσμα για καθεμία από τις επόμενες προτάσεις. Σε μια ομάδα που έχει 0 βαθμούς:

α) προσθέτουμε 4 γραμμές των 5 θετικών καρτών,

β) αφαιρούμε 5 γραμμές των 3 θετικών καρτών,

γ) προσθέτουμε 6 γραμμές των 4 αρνητικών καρτών,

δ) αφαιρούμε 3 γραμμές των 7 αρνητικών καρτών.

3. Να συμπληρώσετε τα κενά του πίνακα σύμφωνα με το μοτίβο της κάθε στήλης.

Συμφωνούν τα αποτελέσματα αυτά με τον κανόνα του πολλαπλασιασμού ακεραίων;

A	B
$(+2)\cdot(+3)=6$	$(+2)\cdot(-3)=-6$
$(+2)\cdot(+2)=4$	$(+1)\cdot(-3)=-3$
$(+2)\cdot(+1)=2$	$0\cdot(-3)=0$
$(+2)\cdot 0=0$	$(-1)\cdot(-3)=____$
$(+2)\cdot(-1)=____$	$(-2)\cdot(-3)=____$
$(+2)\cdot(-2)=____$	$(-3)\cdot(-3)=____$
$(+2)\cdot(-3)=____$	$(-4)\cdot(-3)=____$

Γ
$(-4)\cdot(-3)=12$
$(-4)\cdot(-2)=8$
$(-4)\cdot(-1)=4$
$(-4)\cdot 0=$
$(-4)\cdot(+1)=$
$(-4)\cdot(+2)=$
$(-4)\cdot(+3)=$

4. Έκανε σωστά τις πράξεις ο Μιχάλης; Αν όχι, διορθώστε τον. Ποιον κανόνα νομίζετε ότι ακολούθησε σε κάθε περίπτωση; Είναι σωστός ο κανόνας;

$(-3)\cdot(+7)=21$
$(+2)\cdot(-4)=-6$

5. Για τον υπολογισμό της τιμής της παράστασης $(-1)\cdot(+3)-(-2)\cdot(-4)$ ο Δημήτρης έκανε τις παρακάτω πράξεις. Έκανε κάποιο λάθος ο Δημήτρης; Αν ναι, διορθώστε το.

$(-1)\cdot(+3)-(-2)\cdot(-4)=$
$=-3\cdot(-8)=$
$=24$

Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

6. Να βρείτε τα γινόμενα $-4\cdot(+5), 3\cdot(+5), -6\cdot(-2), -9\cdot(+2)$ χρησιμοποιώντας το μοντέλο των καρτών και να επαληθεύσετε τα αποτελέσματα με τον κανόνα του πολλαπλασιασμού ακέραιων αριθμών.

7. Να συμπληρώσετε τα κενά στα παρακάτω αριθμητικά μοτίβα και να εξηγήσετε πώς βρήκατε τους όρους που λείπουν.

α) $-2, -4, -8, __, __, __$

β) $4, -4, 4, -4, __, __, __$

γ) $3, -6, 12, __, __, __$

8. Να συμπληρώσετε τον πίνακα πολλαπλασιάζοντας τα αντίστοιχα στοιχεία γραμμής και στήλης και στη συνέχεια να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις.

	+2	−1	−2	−4	−10
4					
1					
0					
−5					
−8					

α) Ποιος αριθμός, όταν πολλαπλασιάζεται με έναν άλλο, δίνει αυτόν τον άλλο αριθμό ως αποτέλεσμα;

β) Ποιος αριθμός είναι ο ίδιος το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού με οποιονδήποτε άλλο αριθμό και αν πολλαπλασιαστεί;

9. Ένα δελφίνι βρίσκεται −5 m από την επιφάνεια της θάλασσας. Αν μία φάλαινα βρίσκεται σε βάθος 8 φορές μεγαλύτερο, ποια είναι η θέση της φάλαινας;

10. Να βρείτε όλες τις περιπτώσεις δύο ακέραιων αριθμών που έχουν γινόμενο −24. Από όλα αυτά τα ζευγάρια, ποιο έχει το πιο μικρό άθροισμα;

11. Η Αϊσέ βοηθά τον πατέρα της να αδειάσει μια δεξαμενή νερού που έχει ύψος 2,1 m. Κάθε λεπτό κατεβαίνει η στάθμη του νερού 3 cm. Να γράψετε μια αριθμητική παράσταση για το ύψος του νερού μετά από 1 ώρα. Σε πόση ώρα θα αδειάσει η δεξαμενή;

12. **α)** Αν το χαρτζιλίκι του Φοίβου είναι 30 € τον μήνα και κάθε βδομάδα ξοδεύει 5 €, ποια από τις παρακάτω αριθμητικές παραστάσεις εκφράζει τα χρήματα που θα έχει σε 4 εβδομάδες;

i) $30-4\cdot(-5)$

ii) $30+4\cdot(-5)$

iii) $-30-4\cdot(-5)$

iv) $-30+4\cdot(+5)$

β) Να διατυπώσετε ένα πρόβλημα που για τη λύση του θα πρέπει να προσθέσουμε στο 30 ένα πολλαπλάσιο του (-2) και να γράψετε την αντίστοιχη αριθμητική παράσταση.

13. Να γράψετε το −100 ως γινόμενο τριών παραγόντων με τουλάχιστον 4 διαφορετικούς τρόπους.

14. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $-7+3\cdot(-5)$

β) $-2\cdot(-4)+6\cdot(-2)$

γ) $-3\cdot(+2)-(-10)\cdot(-1)$

δ) $-4^2\cdot(-3)-4\cdot(-2)^3$

15. Να βρείτε την αριθμητική τιμή των παρακάτω παραστάσεων για $x=-2$, $y=-4$ και $z=-5$.

α) $-5x$ **β)** $-xy$

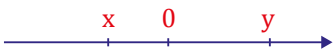
γ) x^2+3 **δ)** $-2x+y-z$

16. Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων του πολλαπλασιασμού να γράψετε πιο απλά τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $8(-3)x$ **β)** $-2\cdot 3x$ **γ)** $-4(-3)\big[(-1)x\big]$

17. Οι x και y είναι δύο ακέραιοι αριθμοί στην αριθμογραμμή, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να βρείτε τα πρόσημα των παρακάτω παραστάσεων:

α) xy **β)** $x-y$ **γ)** $xy(y-x)$



Ανακεφαλαίωση

Ακέραιοι αριθμοί

Ερωτήσεις – ασκήσεις – προβλήματα

1. Να γράψετε αν οι παρακάτω προτάσεις ισχύουν πάντα ή μερικές φορές ή ποτέ.

α) Το μηδέν είναι μικρότερο από έναν τυχαίο θετικό ακέραιο. _____

β) Ο αντίθετος ενός αρνητικού αριθμού είναι μικρότερος του 100. _____

γ) Η απόλυτη τιμή ενός ακέραιου αριθμού είναι αρνητικός αριθμός. _____

2. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ).

α) Ο μικρότερος θετικός ακέραιος είναι ο 0. Σ Λ

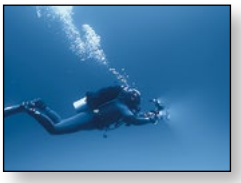
β) Ο μεγαλύτερος ακέραιος είναι το 1.000.000.000.000.000. Σ Λ

γ) Ο μεγαλύτερος αρνητικός ακέραιος είναι ο –1. Σ Λ

δ) Δεν υπάρχει ελάχιστος ακέραιος αριθμός. Σ Λ

3. Να γράψετε τις παρακάτω προτάσεις ως άθροισμα και στη συνέχεια να βρείτε το αποτέλεσμα.

α) Ένας δύτης κάποια χρονική στιγμή ήταν στα –15 μέτρα, μετά ανέβηκε 5 μέτρα και μετά κατέβηκε άλλα 13 μέτρα.



β) Η θερμοκρασία το πρωί ήταν –5 °C, το μεσημέρι ανέβηκε 12 °C και το βράδυ έπεσε 10 °C.

γ) Στην αφετηρία ενός λεωφορείου ανέβηκαν 20 άτομα, στην 1η στάση κατέβηκαν 12 άτομα και ανέβηκαν 10, στη 2η στάση κατέβηκαν 8 άτομα και ανέβηκαν 4 άτομα.

4. Ποιος από τους παρακάτω υπολογισμούς είναι σωστός;

α) $-4+3\cdot(-2)=-1(-2)=2$

β) $-4+3(-2)=-1-6=-7$

γ) $-4+3(-2)=-4-6=-10$

Να περιγράψετε το λάθος που έγινε στους άλλους δύο.

5. Δύο αριθμοί α και β είναι αντίθετοι και ο γ είναι ανάμεσα στο β και το 0. Ανάμεσα σε ποιους αριθμούς βρίσκεται ο αντίθετος του γ;

6. Ποιοι αριθμοί έχουν απόλυτη τιμή ίση με 5; Τι σχέση έχουν μεταξύ τους;

7. Αν οι α και β είναι ακέραιοι αριθμοί, να βρείτε πότε το άθροισμα α + β είναι:

α) άρτιος αριθμός,

β) περιττός αριθμός.

(Ένας ακέραιος αριθμός είναι άρτιος, αν η απόλυτη τιμή του είναι άρτιος, δηλαδή πολλαπλάσιο του 2.)

8. Σε ένα μαγικό τετράγωνο, το άθροισμα όλων των γραμμών, των στηλών και των διαγώνιων στοιχείων είναι το ίδιο. Συμπληρώστε τους αριθμούς που λείπουν στα δύο μαγικά τετράγωνα.

–3		–1
	0	
		+3

–3		–5
		0
		–1

9. Να υπολογίσετε τις αριθμητικές παραστάσεις απαλείφοντας πρώτα τις παρενθέσεις.

α) $(-2)-(+8)+(-2)$

β) $-(+4)+(+3)-8$

γ) $(-2)+(-10)-3-\left[-(-4)\right]$

10. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $(-15)+(+25)$ **β)** $(-4)+(-11)$

γ) $-4-6+7-5$ **δ)** $2\cdot(-3)$

ε) $-5\cdot(-4)$ **στ)** $(-2)\cdot(+5)\cdot(-4)$

ζ) $10:(-2)$ **η)** $-50:(-5)$

11. 

Το ψηλότερο σημείο στην Ελλάδα είναι η κορυφή Μύτικας στον Όλυμπο με ύψος 2.917 μέτρα. Το βαθύτερο σημείο της Ελλάδας (και της Μεσογείου) είναι στην τάφρο των Οινουσσών στο Ιόνιο Πέλαγος, νοτιοδυτικά της Πύλου, με βάθος 5.269 μέτρα. Ποια είναι η κατακόρυφη απόσταση του βαθύτερου από το ψηλότερο σημείο και πώς μπορείτε να την εκφράσετε με μια αφαίρεση;

12. Έχουμε το άθροισμα ακεραίων $5+4+3+\ldots$, όπου κάθε όρος είναι μια μονάδα μικρότερος από τον προηγούμενο. Ποιος είναι ο τελευταίος όρος του αθροίσματος, αν γνωρίζουμε ότι το άθροισμα είναι 0; Πώς το σκεφτήκατε;

13. Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις για $x=-3$, $y=8$ και $z=-10$.

α) $x+5$ **β)** $z+y+(-5)$

γ) $x+(-10)+y+z$

14. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $|-\alpha+(-12)|+(-4)$, όταν $\alpha=+10$.

15. Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $-4+5\cdot(-3)$

β) $5\cdot(-10)-2\cdot(-7)$

γ) $-15:(+3)-10:(-10)$

δ) $-2^4\cdot(-3)-4\cdot(-2)^3$

16. Στο παιχνίδι με τις κάρτες, η καθηγήτρια δίνει για τις δύσκολες ερωτήσεις που απαντήθηκαν σωστά δύο θετικές κάρτες και για τις εύκολες μία θετική κάρτα, ενώ για τις εύκολες ερωτήσεις που απαντήθηκαν λανθασμένα δύο αρνητικές κάρτες και για τις δύσκολες μία αρνητική κάρτα. Μια ομάδα απάντησε σωστά σε 3 δύσκολες ερωτήσεις και σε 2 εύκολες, ενώ απάντησε λανθασμένα σε 4 εύκολες ερωτήσεις και σε 3 δύσκολες. Να γράψετε μια αριθμητική παράσταση για τις κάρτες που πήρε και να βρείτε τη βαθμολογία της ομάδας.

17. 

Ένα κινητό τηλέφωνο, όταν βγήκε στην αγορά, κόστιζε 180 €. Λόγω αύξησης των πωλήσεων, πέφτει η τιμή του κάθε εβδομάδα κατά 7 €, με την προϋπόθεση ότι δε θα πέσει κάτω από 110 €.

α) Ποια θα είναι η τιμή του κινητού 1, 3, 5 εβδομάδες μετά την κυκλοφορία του στην αγορά;

β) Αν x είναι ο αριθμός των εβδομάδων, γράψτε μια αριθμητική παράσταση της τιμής του κινητού τη x εβδομάδα μετά την κυκλοφορία του. Από ποια βδομάδα και μετά η τιμή του τηλεφώνου θα παραμένει η ίδια;

18. Οι α, β και γ είναι τρεις ακέραιοι αριθμοί στην αριθμογραμμή, όπως φαίνεται στο σχήμα. Βρείτε τα πρόσημα των παραστάσεων:



α) $\alpha\beta\gamma$ **β)** $-\alpha^2\beta^{10}\gamma^{152}$ **γ)** $-\dfrac{\alpha^{41}}{\beta^3\gamma^{15}}$

Συνδέσεις και επεκτάσεις

19. Υπάρχει αριθμός x τέτοιος ώστε το $-x$ να είναι μεγαλύτερο από το x; Εξηγήστε τον συλλογισμό σας.

20. Να συμπληρώσετε τα κενά:

Αν $x \geq 0$, τότε $|x| =$ ___, ενώ, αν $x < 0$, τότε $|x| =$ ___.

21. Για ποιες τιμές του αριθμού α ισχύει ότι $|\alpha| + \alpha = 0$;

Αιτιολογήστε την άποψή σας.

22. Ισχύει η πρόταση: «Το άθροισμα δύο ακέραιων αριθμών $\alpha + \beta$ είναι σε κάθε περίπτωση μεγαλύτερο από τη διαφορά τους $\alpha - \beta$»; Στην περίπτωση που είναι λάθος, να αναφέρετε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα που δεν ισχύει αυτό (αντιπαράδειγμα).

23. Αν ο x είναι ένας θετικός ακέραιος και ο y ένας αρνητικός ακέραιος, να βρείτε αν οι παρακάτω παραστάσεις είναι θετικοί ή αρνητικοί αριθμοί.

α) $x - y$ **β)** $y - x$ **γ)** $|x| + |y|$

24. Να εξετάσετε αν η ισότητα $|\alpha - \beta| = |\beta - \alpha|$ είναι αληθής ή ψευδής για όλους τους αριθμούς α, β. Αιτιολογήστε την άποψή σας.

25. Το άθροισμα των αριθμών (-1), (-2), (-3), (-4) και (-5) είναι -15.

Μπορείτε να βρείτε πότε το αποτέλεσμα θα είναι -11, αν χρησιμοποιήσετε τον κάθε αριθμό μόνο μία φορά, είτε με πρόσθεση είτε με αφαίρεση μεταξύ τους;

Με την ίδια λογική, πότε το αποτέλεσμα θα είναι $-9, -5, -1$; Αν αναπτύξατε μια στρατηγική για να λύσετε το πρόβλημα, περιγράψτε τη. Μπορεί το αποτέλεσμα να είναι ποτέ άρτιος αριθμός;

26. Τι συμπέρασμα βγάζετε για τους αριθμούς α και β, αν γνωρίζετε ότι ο αριθμός $-\alpha\beta$ είναι θετικός;

Ομαδική εργασία (παιχνίδι σε δυάδες)

27. Χωριστείτε σε δυάδες και παίξτε το παρακάτω παιχνίδι με τους ακόλουθους κανόνες:

Ο πρώτος παίκτης σκέφτεται μία θερμοκρασία από -40 °C έως και -1 °C και τη γράφει κρυφά στο τετράδιό του.

Ο δεύτερος παίκτης προσπαθεί να μαντέψει τη θερμοκρασία που σκέφτηκε ο πρώτος και λέει μία θερμοκρασία.

Ο πρώτος παίκτης τού λέει αν βρήκε τη θερμοκρασία ή αν αυτή που είπε ήταν πιο υψηλή ή πιο χαμηλή θερμοκρασία από αυτήν που έχει σκεφτεί.

Καταγράφονται οι προσπάθειες με τις οποίες βρέθηκε η ζητούμενη θερμοκρασία και μετά αλλάζουν ρόλο οι 2 παίκτες. Κερδίζει αυτός που βρήκε τη θερμοκρασία με τις λιγότερες προσπάθειες. Μετά από 5 γύρους ανακηρύσσεται νικητής ένας από τους 2 παίκτες.

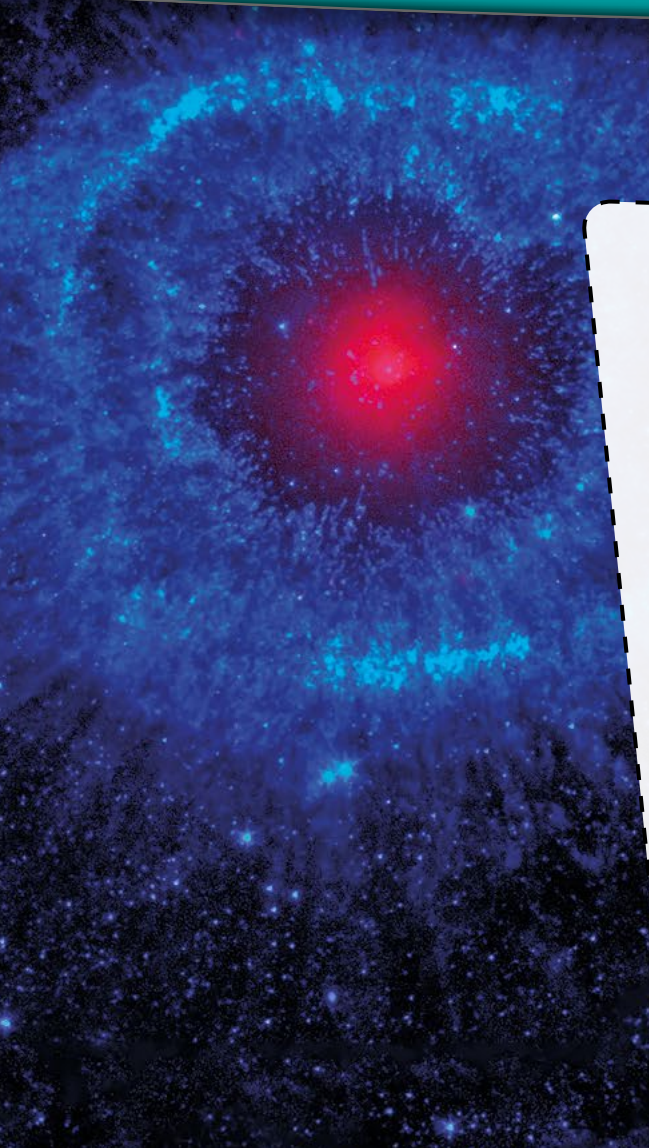
Η Κατερίνα λέει ότι βρήκε μια στρατηγική, ώστε το πολύ σε 6 φορές να έχει βρει τον αριθμό. Τι σκέφτηκε η Κατερίνα;



Τι πράξη είναι;

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ 3:

Ρητοί αριθμοί



Το πλανητικό νεφέλωμα «Μάτι της Γάτας» (Cat's Eye Nebula), που βρίσκεται στον αστερισμό του Δράκου, απέχει από τη Γη 3.262 έτη φωτός. Το έτος φωτός είναι μονάδα μέτρησης απόστασης (η απόσταση που ταξιδεύει το φως σε έναν χρόνο) και είναι 9,4607 τρισεκατομμύρια km.

Ποια είναι η απόσταση της Γης από το «Μάτι της Γάτας» σε χιλιόμετρα;

Πολλές φορές συναντάμε αριθμούς που δεν είναι ούτε φυσικοί ούτε ακέραιοι και τους οποίους μπορούμε να τους γράψουμε με μορφή κλάσματος ή ως δεκαδικούς, όπως μάθαμε στο Δημοτικό.

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε να κάνουμε μετατροπές από τη μία μορφή στην άλλη, να τους συγκρίνουμε, να τους τοποθετούμε πάνω σε μια ευθεία μαζί με τους ακεραίους και να κάνουμε πράξεις μεταξύ τους.

ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΕΝΟΤΗΤΕΣ:

3.1 Οι ρητοί αριθμοί
3.2 Πρόσθεση και αφαίρεση ρητών αριθμών
3.3 Πολλαπλασιασμός και διαίρεση ρητών αριθμών
3.4 Δυνάμεις και παραστάσεις ρητών αριθμών

3.1 Οι ρητοί αριθμοί

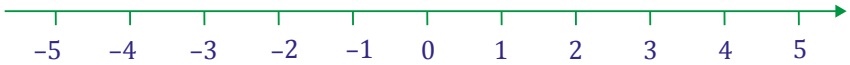
Στις προηγούμενες διδακτικές ενότητες μιλήσαμε για τους φυσικούς και τους ακέραιους αριθμούς. Μπορούμε άραγε να περιγράψουμε όλες τις πιθανές καταστάσεις μόνο με τους αριθμούς αυτούς;

Δ1. Ύψος βροχής στα Ιωάννινα

Οι μαθητές και οι μαθήτριες της Α΄ τάξης στο 3ο Γυμνάσιο των Ιωαννίνων κατασκεύασαν έναν μετεωρολογικό σταθμό και μετρούν κάθε μήνα το ύψος της βροχής (σε cm). Τον Μάιο παρουσίασαν σε όλο το σχολείο τη διαφορά του ύψους της βροχής των τελευταίων μηνών σε σχέση με την προηγούμενη χρονιά.



Ιανουάριος	Φεβρουάριος	Μάρτιος	Απρίλιος
$-3{,}5$ cm	$\frac{3}{11}$ cm	2,8 cm	$-\frac{30}{11}$ cm



α) Τοποθετήστε (κατά προσέγγιση) τις τιμές αυτές στην αριθμογραμμή. Περιγράψτε τον τρόπο με τον οποίο σκεφτήκατε.

β) Σκεφτείτε και συζητήστε με τους συμμαθητές και τις συμμαθήτριές σας:

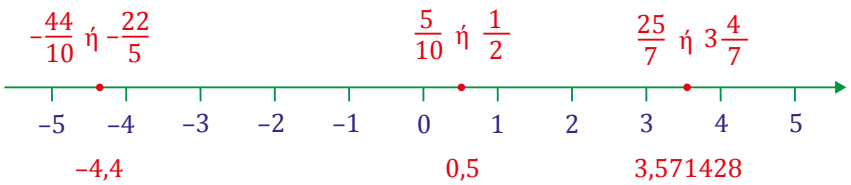
i) Πώς γράφεται το $\frac{3}{11}$ ως δεκαδικός αριθμός;

ii) Μπορείτε να γράψετε έναν δεκαδικό αριθμό με πεπερασμένο πλήθος ψηφίων που να είναι ίσος με $\frac{3}{11}$;

Συζητάμε

…για ρητούς αριθμούς

Στην αριθμογραμμή, ο αριθμός $-4{,}4$ είναι ανάμεσα στο -5 και το -4, και συγκεκριμένα είναι τέσσερα δέκατα αριστερά του -4. Στην ίδια θέση είναι ο κλασματικός $-\frac{44}{10}$, αλλά και κάθε κλάσμα ισοδύναμο με αυτόν, όπως το ανάγωγο κλάσμα $-\frac{22}{5}$. Ο κλασματικός αριθμός $\frac{1}{2}$ γράφεται ισοδύναμα $\frac{5}{10}$ και είναι ο δεκαδικός 0,5.



- Όλοι οι δεκαδικοί αριθμοί με πεπερασμένο πλήθος ψηφίων μπορούν να γραφούν ως κλάσμα, για παράδειγμα:

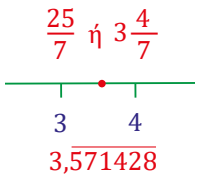
$$1{,}7=\frac{17}{10},\ -3{,}54=-\frac{354}{100},\ 0{,}045=\frac{45}{1.000}$$

- Υπάρχουν όμως κλασματικοί αριθμοί τους οποίους δεν μπορούμε να τους γράψουμε ως δεκαδικούς με πεπερασμένο πλήθος ψηφίων. Για παράδειγμα, στο κλάσμα $\frac{2}{3}$, αν κάνουμε τη διαίρεση 2 : 3, θα βρούμε 0,6666666... Τα ψηφία του πηλίκου δεν τελειώνουν ποτέ και επαναλαμβάνεται συνεχώς ο αριθμός **6**.

Σε μια αριθμομηχανή, η διαίρεση 2 : 3 θα εμφανίσει 0,66666666667, γιατί γίνεται στρογγυλοποίηση στο τελευταίο ψηφίο που εμφανίζει.

- Αυτούς τους αριθμούς τούς ονομάζουμε **περιοδικούς δεκαδικούς** αριθμούς και το μέρος που επαναλαμβάνεται συνεχώς το ονομάζουμε **περίοδο**. Ο αριθμός 0,6666666... γράφεται $0,\overline{6}$.

- Ο αριθμός $\frac{25}{7}$ είναι ο περιοδικός δεκαδικός $3,\overline{571428}$ και βρίσκεται ανάμεσα στο 3,5 και το 3,6. Μπορούμε να τον τοποθετήσουμε σε μία αριθμογραμμή χρησιμοποιώντας γεωμετρικά όργανα, όπως θα μάθουμε σε επόμενη τάξη.



Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Κάθε κλασματικός αριθμός (θετικός ή αρνητικός) μπορεί να γραφεί ως δεκαδικός με πεπερασμένο πλήθος ψηφίων ή ως περιοδικός δεκαδικός.
Και αντίστροφα:
Κάθε δεκαδικός με πεπερασμένο πλήθος ψηφίων ή περιοδικός δεκαδικός μπορεί να γραφεί ως κλάσμα.
Αυτούς τους αριθμούς τούς ονομάζουμε **ρητούς**.

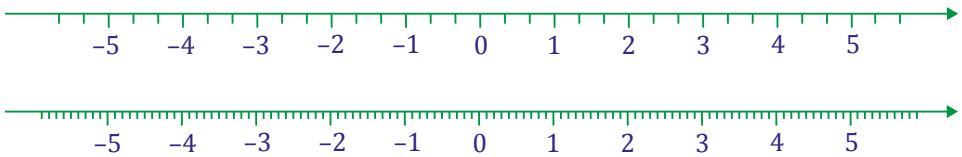
«**Ρητός**» στην καθημερινή γλώσσα είναι αυτός που μπορεί να ειπωθεί. Αν μπορεί να γραφεί ως κλάσμα, τότε μπορεί και να ειπωθεί.

Δ2. Επέκταση εννοιών στους ρητούς

Έχουμε τους παρακάτω 15 αριθμούς:

$$\frac{1}{3},\ -1{,}6,\ 4{,}1,\ \frac{11}{3},\ -2{,}4,\ 1{,}7,\ -\frac{4}{3},\ -0{,}1,\ \frac{8}{3},\ -\frac{14}{3},\ -3{,}2,\ -\frac{11}{3},\ -\frac{2}{5},\ -\frac{8}{3},\ \frac{8}{5}$$

Ρητοί αριθμοί



Τοποθετήστε τον κάθε αριθμό στην αριθμογραμμή που θεωρείτε ως πιο κατάλληλη. Εξηγήστε πώς σκεφτήκατε.

α) Υπάρχουν αντίθετοι ανάμεσα στους παραπάνω αριθμούς;

β) Βάλτε τους 15 αριθμούς σε σειρά από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο.

γ) Ποιος από τους αριθμούς που τοποθετήσατε στην 1η αριθμογραμμή έχει τη μεγαλύτερη τιμή και ποιος τη μικρότερη; Εξετάστε το ίδιο για τη 2η αριθμογραμμή.

δ) Βρείτε ποιος από τους 15 αριθμούς:

i) είναι ο μεγαλύτερος, **ii)** είναι ο μικρότερος,

iii) έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή, **iv)** έχει τη μικρότερη απόλυτη τιμή.

Συζητάμε

…για απόλυτες τιμές και για διάταξη ρητών

Η απόλυτη τιμή στους ρητούς αριθμούς έχει την ίδια έννοια που έχει και στους ακέραιους αριθμούς και συμβολίζεται με τον ίδιο τρόπο: |αριθμός|.

Έτσι έχουμε: $|-1{,}2| = 1{,}2$, $\left|-\frac{34}{15}\right| = \frac{34}{15}$, $|8{,}4876| = 8{,}4876$ και $\left|\frac{4}{23}\right| = \frac{4}{23}$.

- Δύο αριθμοί είναι αντίθετοι όταν είναι ετερόσημοι και έχουν την ίδια απόλυτη τιμή (είναι συμμετρικοί δηλαδή ως προς το 0).

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Μεγαλύτερος ανάμεσα σε δύο ρητούς αριθμούς είναι **όποιος βρίσκεται πιο δεξιά** στην αριθμογραμμή.

Ως **απόλυτη τιμή** ενός ρητού αριθμού α ορίζουμε την απόστασή του από το 0 και τη συμβολίζουμε με $|\alpha|$.

Δύο αριθμοί λέμε ότι είναι **αντίθετοι** όταν είναι ετερόσημοι και έχουν την ίδια απόλυτη τιμή. Τον αντίθετο του α τον συμβολίζουμε με $-\alpha$.

Αν  τότε $\alpha < \beta$

$|-3{,}2| = 3{,}2$ $\left|\frac{3}{20}\right| = \frac{3}{20}$ $|0| = 0$

$-(+2{,}9) = -2{,}9$ $-\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}$

Μεγαλύτερος είναι ο ρητός που βρίσκεται δεξιότερα στην αριθμογραμμή

Δ3. Οι μπάμπουσκες των αριθμών

Συζητήστε στις ομάδες σας και μετά στην τάξη αν οι παρακάτω προτάσεις είναι σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ). Για τις λανθασμένες προτάσεις χρησιμοποιήστε ένα αντιπαράδειγμα (ένα παράδειγμα δηλαδή όπου δεν ισχύει η πρόταση).

Κάθε φυσικός αριθμός είναι ακέραιος.

Κάθε ακέραιος αριθμός είναι φυσικός.

Κάθε ρητός αριθμός είναι ακέραιος.

Κάθε ακέραιος αριθμός είναι ρητός.

Κάθε φυσικός αριθμός είναι ρητός.

Κάθε ρητός αριθμός είναι φυσικός.

Συζητάμε

...για τους αριθμούς που γνωρίζουμε

Οι αριθμοί που γνωρίζουμε μέχρι τώρα είναι:

Φυσικοί αριθμοί: 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...

Ακέραιοι αριθμοί: ..., −5, −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...

Ρητοί αριθμοί: π.χ. $\underbrace{-2{,}09,\ -5,\ \frac{1}{4},\ 2.030,\ -143}_{\text{Δεκαδικοί αριθμοί με πεπερασμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων}}$ $\underbrace{0{,}\overline{135},\ 0{,}\overline{81},\ 0{,}\overline{1527},\ -\frac{1}{3}}_{\text{Δεκαδικοί περιοδικοί αριθμοί}}$

Οι μπάμπουσκες των αριθμών

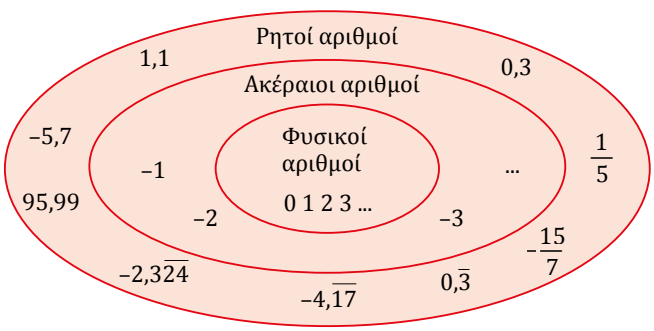
- Οι αριθμοί 54 και −10 είναι ρητοί, γιατί γράφονται ως $\frac{54}{1}$ και $-\frac{10}{1}$.
- Οι αριθμοί −4,127 και 0,13 είναι ρητοί, γιατί γράφονται ως $-\frac{4.127}{1.000}$ και $\frac{13}{100}$.
- Οι αριθμοί $5{,}\overline{27}$ και $-19{,}\overline{307692}$ είναι ρητοί, γιατί γράφονται ως $\frac{58}{11}$ και $-\frac{251}{13}$.

Οι αριθμοί 0,13 και $\frac{13}{100}$ δεν είναι διαφορετικοί. Είναι ο ίδιος αριθμός γραμμένος με διαφορετικό τρόπο.

Το ίδιο συμβαίνει με κάθε ρητό: μπορούμε να τον γράψουμε και ως κλάσμα και ως δεκαδικό.

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Οι φυσικοί αριθμοί περιέχονται μέσα στους ακέραιους αριθμούς και οι ακέραιοι αριθμοί περιέχονται μέσα στους ρητούς.



Δ4. Η «γειτονιά» ενός ρητού

Ο επόμενος (ο αμέσως μεγαλύτερος) ακέραιος αριθμός του 2 είναι ο 3. Μπορείτε να βρείτε τον επόμενο ρητό αριθμό του 2;

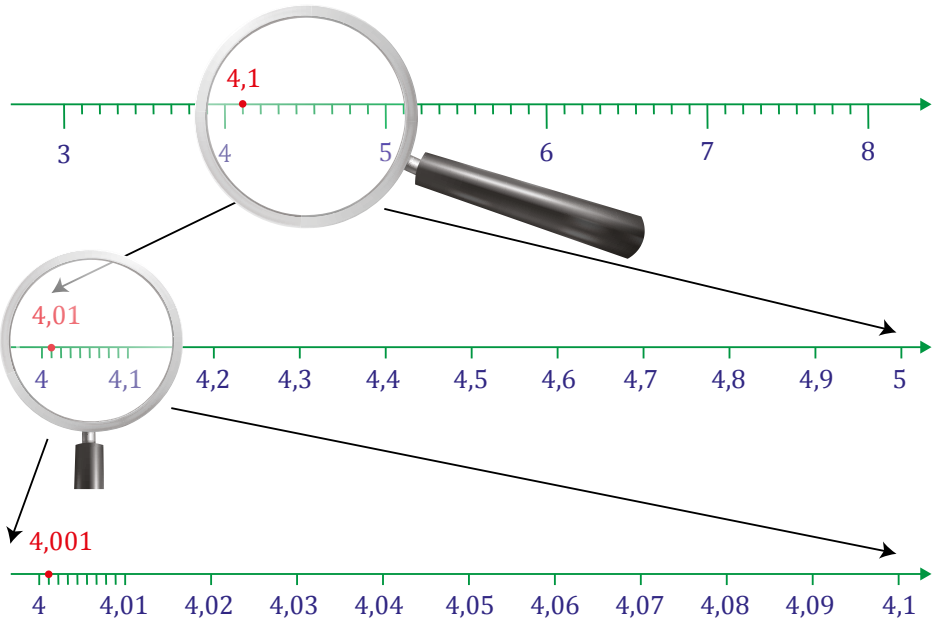
Υπάρχει ο αμέσως επόμενος ρητός;

Συζητάμε

…για τον επόμενο ενός αριθμού

Κάθε ακέραιος αριθμός έχει έναν επόμενο (τον αμέσως μεγαλύτερο) και έναν προηγούμενο (τον αμέσως μικρότερο). Για παράδειγμα, ο επόμενος του -4 είναι ο $-4+1=-3$ και ο προηγούμενος είναι ο $-4-1=-5$.

Ψάχνοντας για τον αμέσως επόμενο του 4 στους ρητούς αριθμούς, θα χωρίσουμε αρχικά το διάστημα από 4 έως 5 σε 10 ίσα διαστήματα και έτσι ο αμέσως μεγαλύτερος σε επίπεδο δεκάτου είναι ο 4,1. Αν μεγεθύνουμε ξανά σε επίπεδο εκατοστού, είναι ο 4,01, ενώ σε επίπεδο χιλιοστού είναι ο 4,001.



Αν συνεχίσουμε με την ίδια λογική, θα βρούμε τον 4,0001, τον 4,00001 κ.ο.κ. Αυτή η διαδικασία δεν έχει τέλος.

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Οι ρητοί αριθμοί δεν έχουν ούτε επόμενο (αμέσως μεγαλύτερο) ούτε προηγούμενο (αμέσως μικρότερο) ρητό αριθμό.

Ανάμεσα σε δύο ρητούς αριθμούς υπάρχει ατελείωτο πλήθος ρητών αριθμών.

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. **Να γράψετε τον περιοδικό δεκαδικό $0,\overline{38}$ ως κλασματικό αριθμό γνωρίζοντας ότι $0,010101\ldots = \frac{1}{99}$.**

Απάντηση

$0,\overline{38} = 0,3838\ldots = 0,3030\ldots + 0,0808\ldots = 3 \cdot 0,1010 + 8 \cdot 0,0101\ldots =$

$= 3 \cdot 10 \cdot 0,0101\ldots + 8 \cdot 0,0101\ldots =$

$= 30 \cdot 0,0101\ldots + 8 \cdot 0,0101\ldots =$

$= 30 \cdot \frac{1}{99} + 8 \cdot \frac{1}{99} =$

$= \frac{30}{99} + \frac{8}{99} = \frac{38}{99}$

Γνωρίζοντας ότι $0,11111\ldots = \frac{1}{9}$, μπορείτε να βρείτε έναν αριθμό ανάμεσα στον $0,\overline{9}$ και τον 1;
Η Κατερίνα ισχυρίζεται ότι ο αριθμός $0,\overline{9}$ είναι ο 1. Συμφωνείτε;

Οι περιοδικοί δεκαδικοί είναι κλάσματα

Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε τους ρητούς αριθμούς

Προβλήματα παρεμβολής

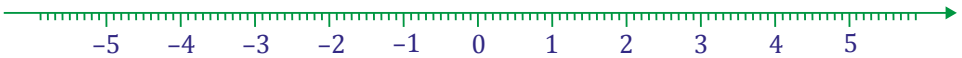
Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε

Να κατασκευάσετε έναν πίνακα έννοιας για τους ρητούς αριθμούς.

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

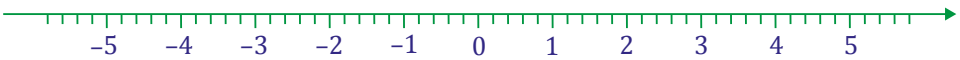
1. Να τοποθετήσετε στην παρακάτω αριθμογραμμή τους αριθμούς:

$-0,7 \quad 3,2 \quad -3,6 \quad 1,9 \quad -0,6 \quad -4,7 \quad 70\% \quad -250\%$



2. Να τοποθετήσετε στην παρακάτω αριθμογραμμή τους αριθμούς:

$-\frac{3}{5} \quad \frac{16}{5} \quad -\frac{23}{5} \quad -3,8 \quad 370\% \quad -2,9 \quad -20\%$



3. Ποιος δεκαδικός αριθμός είναι ίσος με $\frac{4}{9}$;

α) 0,4 **β)** 2,25 **γ)** $0,\overline{4}$ **δ)** 0,49

4. Ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι ρητοί αλλά όχι ακέραιοι;

α) -5 **β)** $17{,}3$ **γ)** $\frac{3}{7}$ **δ)** 0 **ε)** $0{,}2\overline{398}$ **στ)** 1.000 **ζ)** $-\frac{21}{3}$ **η)** -19 **θ)** $0{,}001$

5. Ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι ρητοί αλλά όχι δεκαδικοί με πεπερασμένα ψηφία;

α) -8 **β)** $0{,}001$ **γ)** $\frac{2}{11}$ **δ)** 0 **ε)** $14{,}52\overline{803}$ **στ)** $\frac{1}{12}$ **ζ)** $-\frac{17}{20}$ **η)** $-\frac{35}{5}$

6. Να συμπληρώσετε τον αντίθετο του κάθε αριθμού:

α) $5,$ _____ **β)** $-9{,}8,$ _____ **γ)** $4{,}1\overline{3},$ _____ **δ)** $\frac{12}{5},$ _____

7. Η Αλεξάνδρα έγραψε τρεις μαθηματικές προτάσεις. Είναι σωστές ή όχι; Εξηγήστε γιατί.

α) $|-10{,}2| = 10{,}2$

β) $\left|-\frac{2}{3}\right| < -1$

γ) $|-8{,}4| < |8{,}3|$

8. Σημείο πήξης ενός σώματος είναι η θερμοκρασία στην οποία ένα υγρό γίνεται στερεό. Ποιο υγρό από τον παρακάτω πίνακα έχει το χαμηλότερο σημείο πήξης; Ποιο από αυτά έχει τη μικρότερη απόλυτη τιμή;

Υγρό	Μέλι	Κερί	Πετρέλαιο	Βενζίνη	Βούτυρο
Σημείο πήξης (°C)	-3	$53{,}1$	$-34{,}2$	-107	35

9. Ποιος αριθμός είναι διαφορετικός από τους άλλους τρεις;

$$4{,}1, \quad |4{,}1|, \quad -4{,}1, \quad |-4{,}1|$$

Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

10. Να γράψετε τους παρακάτω αριθμούς σε κλασματική μορφή:

α) -8 **β)** $0{,}7$ **γ)** $-1{,}23$ **δ)** $3{,}402$ **ε)** $-15{,}0045$ **στ)** 0

11. Να γράψετε τους παρακάτω κλασματικούς αριθμούς ως δεκαδικούς με πεπερασμένα ψηφία ή ως περιοδικούς δεκαδικούς:

α) $-\frac{3}{5}$ **β)** $\frac{15}{4}$ **γ)** $-\frac{4}{11}$ **δ)** $\frac{31}{7}$

12. Να γράψετε τα παρακάτω ποσοστά ως δεκαδικούς αριθμούς:

α) 5% **β)** -7% **γ)** 80% **δ)** $0{,}4\%$ **ε)** 153% **στ)** -256% **ζ)** -1.050%

13. Να τοποθετήσετε το σωστό σύμβολο σύγκρισης $(<, =, >)$ ανάμεσα στους αριθμούς:

α) -7 ____ -8 **β)** $5{,}604$ ___ $5{,}64$ **γ)** $-2{,}34$ ____ $-2{,}43$ **δ)** $4{,}15$ ___ $4{,}150$ **ε)** $-\frac{3}{7}$ ____ $-\frac{4}{7}$

14. Μια χειμωνιάτικη μέρα, ο Ομέρ μετρούσε τη θερμοκρασία του αέρα κάθε δύο ώρες με ένα ηλεκτρονικό θερμόμετρο. Ποια ώρα είχε τη χαμηλότερη θερμοκρασία; Ποια ώρα η θερμοκρασία ήταν πιο κοντά στο 0;

Ώρα	9:00	11:00	13:00	15:00	17:00	19:00	21:00	23:00
Θερμοκρασία (°C)	−4,5	−3,1	−0,2	0,5	−1	−2,3	−5	−6,2

15. Σε καθένα από τα παρακάτω ζεύγη αριθμών να βρείτε ποιος είναι μεγαλύτερος και ποιος είναι πιο κοντά στο 0.

α) 2 και −1,4 **β)** −4,3 και $\frac{17}{4}$ **γ)** $-\frac{7}{3}$ και −2,45

16. Να συμπληρώσετε τα κενά:

α) $|-2| =$ ____ **β)** $|3{,}01| =$ ____ **γ)** $|-4{,}302| =$ ____ **δ)** $\left|-\frac{2}{11}\right| =$ ____ **ε)** $\left|\frac{5}{7}\right| =$ ____

17. Να τοποθετήσετε το σωστό σύμβολο σύγκρισης $(<, =, >)$ ανάμεσα στους αριθμούς:

α) $|-3|$ ___ $|3|$ **β)** $\left|-\frac{16}{17}\right|$ ___ 1,1 **γ)** $\left|-\frac{11}{3}\right|$ ___ $\left|-\frac{21}{5}\right|$

18. Να τοποθετήσετε τους αριθμούς από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο:

$$|-5{,}3| \quad -4{,}01 \quad -|-5{,}03| \quad \frac{16}{3} \quad \left|-\frac{15}{4}\right| \quad -\left|-\frac{21}{5}\right| \quad -\frac{27}{5}$$

19. Να συμπληρώσετε τα κενά με κατάλληλους αριθμούς:

α) $3{,}4 <$ ___ $< 3{,}6$ **β)** $4{,}1 <$ ___ $< 4{,}2$ **γ)** $-7{,}453 <$ ___ $< -7{,}452$

20. Να βρείτε έναν περιοδικό δεκαδικό αριθμό που να βρίσκεται ανάμεσα στους αριθμούς $-\frac{1}{2}$ και $-\frac{1}{3}$.

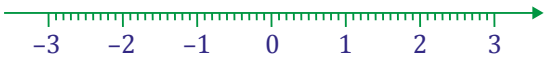
3.2 Πρόσθεση και αφαίρεση ρητών αριθμών

Στους ακέραιους αριθμούς διερευνήσαμε την πράξη της πρόσθεσης με τις θετικές-αρνητικές κάρτες και την κίνηση στην αριθμογραμμή. Στους ρητούς θα διερευνήσουμε την πρόσθεση με την κίνηση στην αριθμογραμμή.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις κάρτες για την πρόσθεση των ρητών;

Δ1. Προσθέτουμε ρητούς

α) Το ηλεκτρονικό θερμόμετρο έδειχνε το μεσημέρι 2,4 °C. Το βράδυ η θερμοκρασία έπεσε κατά 4,7 °C. Τι ένδειξη έδειχνε το θερμόμετρο το βράδυ; Χρησιμοποιήστε το μοντέλο της κίνησης στην αριθμογραμμή. Γράψτε αυτή τη μεταβολή της θερμοκρασίας ως πρόσθεση ρητών αριθμών.



β) Να κάνετε την παρακάτω πρόσθεση χρησιμοποιώντας το μοντέλο της κίνησης στην αριθμογραμμή:

$\left(+\frac{5}{3}\right)+\left(-\frac{13}{6}\right)+\left(-\frac{5}{2}\right)$



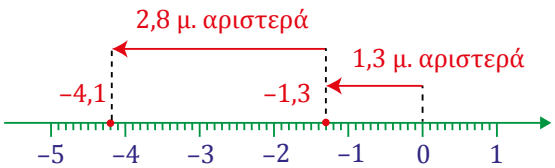
Ισχύουν οι κανόνες της πρόσθεσης ακέραιων αριθμών στην πρόσθεση δεκαδικών ή κλασματικών αριθμών; Συζητήστε με τις συμμαθήτριες και τους συμμαθητές σας.

Συζητάμε

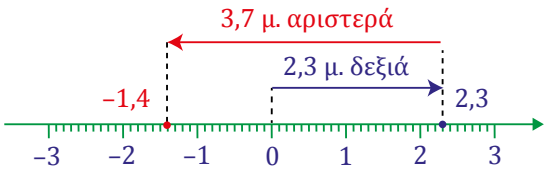
…για την πρόσθεση ρητών

Για να κάνουμε πράξεις με δεκαδικούς ή κλασματικούς αριθμούς, ας σκεφτούμε την κίνηση στην αριθμογραμμή:

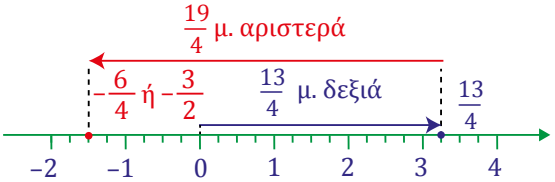
- Το άθροισμα $(-1,3)+(-2,8)$ είναι $-4,1$.



- Το άθροισμα $2,3+(-3,7)$ είναι $-1,4$.



- Για την πρόσθεση $\frac{13}{4}+\left(-\frac{19}{4}\right)$ το αποτέλεσμα είναι $-\frac{6}{4}$ ή ισοδύναμα $-\frac{3}{2}$.

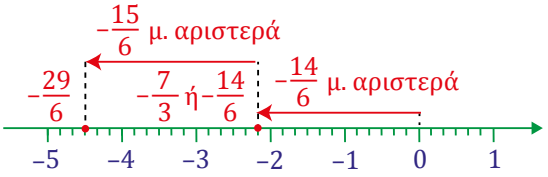


Πρόσθεση ρητών στην αριθμογραμμή

- Για την πρόσθεση $\left(-\frac{7}{3}\right)+\left(-\frac{5}{2}\right)$ θα πρέπει να κάνουμε τα κλάσματα ομώνυμα. ΕΚΠ$(2,3)=6$. Έτσι,

$$\left(-\frac{7}{3}\right)+\left(-\frac{5}{2}\right)=\left(-\frac{7\cdot 2}{3\cdot 2}\right)+\left(-\frac{5\cdot 3}{2\cdot 3}\right)=\left(-\frac{14}{6}\right)+\left(-\frac{15}{6}\right).$$

Το αποτέλεσμα είναι $-\frac{29}{6}$.



Παρατηρούμε ότι η πρόσθεση στους δεκαδικούς ή κλασματικούς αριθμούς έχει την ίδια λογική με την πρόσθεση των ακέραιων αριθμών. Δηλαδή:

- Αν είναι ομόσημοι:

$$(-1,3)+(-2,8) \;=\; -\,(\mathbf{1,3+2,8}) \;=\; -4,1$$

Γράφουμε το κοινό πρόσημο. — Προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές.

$$\left(-\frac{14}{6}\right)+\left(-\frac{15}{6}\right) \;=\; -\left(\frac{\mathbf{14}}{\mathbf{6}}+\frac{\mathbf{15}}{\mathbf{6}}\right) \;=\; -\frac{14+15}{6}=-\frac{29}{6}$$

- Αν είναι ετερόσημοι:

$$(+2,3)+(-3,7) \;=\; -\,(\mathbf{3,7-2,3}) \;=\; -1,4$$

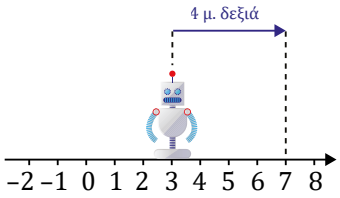
Γράφουμε το πρόσημο του αριθμού με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή. — Αφαιρούμε από τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή τη μικρότερη.

$$\frac{13}{4}+\left(-\frac{19}{4}\right) \;=\; -\left(\frac{\mathbf{19}}{\mathbf{4}}-\frac{\mathbf{13}}{\mathbf{4}}\right) \;=\; -\frac{19-13}{4}=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2}$$

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Κανόνες πρόσθεσης ρητών αριθμών Για να προσθέσουμε δύο ή περισσότερους ομόσημους ρητούς αριθμούς: • γράφουμε το κοινό πρόσημο και • προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους.	$(-2,5)+(-5,8)=-(2,5+5,8)=-8,3$ $\left(-\frac{3}{5}\right)+\left(-\frac{7}{5}\right)=-\left(\frac{3}{5}+\frac{7}{5}\right)=-\frac{10}{5}=-2$
Για να προσθέσουμε ετερόσημους ρητούς αριθμούς: • γράφουμε το πρόσημο του αριθμού με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή και • αφαιρούμε από τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή τη μικρότερη.	$(-2,5)+(+5,8)=+(5,8-2,5)=+2,3$ $\left(+\frac{3}{5}\right)+\left(-\frac{7}{5}\right)=-\left(\frac{7}{5}-\frac{3}{5}\right)=-\frac{4}{5}$

Δ2. Η αφαίρεση στους ρητούς



Σε προηγούμενη διδακτική ενότητα, για να κάνουμε την αφαίρεση ακεραίων $(+7)-(+3)$, είχαμε σκεφτεί: «Τι πρέπει να προσθέσουμε στο $(+3)$, για να γίνει $(+7)$;». Η απάντηση ήταν +4.

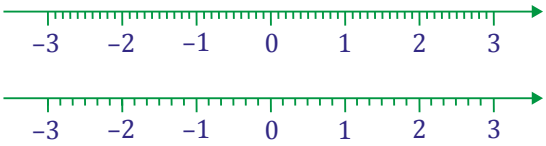
Στη συνέχεια είχαμε συμπεράνει ότι, αντί να κάνουμε την αφαίρεση του β από τον α, μπορούμε να κάνουμε πρόσθεση του α με τον αντίθετο του β, δηλαδή $\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$.

Συζητήστε αν ισχύει το ίδιο και για τους ρητούς αριθμούς.

Δοκιμάστε με τις πράξεις:

$(-0,4)-(-2,7)$

$\left(-\frac{5}{3}\right)-\left(+\frac{3}{2}\right)$



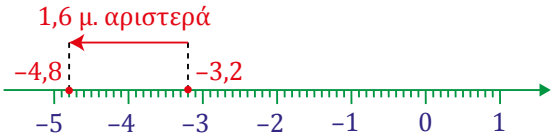
Συζητάμε

…για την αφαίρεση ρητών

Για την αφαίρεση $(-4,8)-(-3,2)$ μπορούμε να σκεφτούμε: «Τι πρέπει να προσθέσουμε στο −3,2, ώστε να πάμε στο −4,8;».

Όπως φαίνεται στο σχήμα, θα κινηθούμε αριστερά 1,6, άρα:

$(-4,8)-(-3,2)=-1,6$



Η πρόσθεση του −4,8 με τον αντίθετο του −3,2 δίνει το ίδιο αποτέλεσμα: $(-4,8)+(+3,2)=-(4,8-3,2)=-1,6$

Με τον ίδιο τρόπο, η αφαίρεση $\frac{2}{5}-\left(+\frac{3}{7}\right)$ μπορεί να γίνει:

$$\frac{2}{5}-\left(+\frac{3}{7}\right)=\frac{2}{5}+\left(-\frac{3}{7}\right)=\frac{14}{35}+\left(-\frac{15}{35}\right)=-\left(\frac{15}{35}-\frac{14}{35}\right)=-\frac{1}{35}$$

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Η αφαίρεση ρητών αριθμών γίνεται όπως ακριβώς η αφαίρεση ακεραίων. Η διαφορά του β από τον α είναι ίση με το άθροισμα των α και −β: $\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$	$(-2,1)-(+1,2)=(-2,1)+(-1,2)=-3,3$ $(-4,2)-(-3,5)=(-4,2)+(+3,5)=-0,7$

Δ3. Χωρίς παρενθέσεις

α) Χρησιμοποιήστε αυτά που μάθαμε στους ακεραίους, για να γράψετε χωρίς παρενθέσεις τις παρακάτω αριθμητικές παραστάσεις και να κάνετε τις πράξεις:

$-(-2,3)-(-1,2)+(-4,5)$, $\quad \frac{3}{4}-\left(+\frac{7}{4}\right)-\left(-\frac{11}{4}\right)$

β) Να γράψετε ως πρόσθεση ρητών αριθμών την παράσταση $-2,3+7,2-9,81$.

Συζητάμε

…για την απαλοιφή παρενθέσεων

Την αριθμητική παράσταση $-(+4,15)+(+7,25)-(+8,54)$ μπορούμε να τη γράψουμε χωρίς παρενθέσεις, ως:

$-4,15+7,25-8,54=+(7,25-4,15)-8,54=3,1-8,54=-5,44.$

Την αριθμητική παράσταση $\left(-\frac{5}{3}\right)-\left(+\frac{11}{4}\right)-\left(-\frac{23}{6}\right)$ μπορούμε να τη γράψουμε πιο απλά:

$$-\frac{5}{3}-\frac{11}{4}+\frac{23}{6}=-\frac{20}{12}-\frac{33}{12}+\frac{46}{12}=-\frac{53}{12}+\frac{46}{12}=$$

$$-\left(\frac{53}{12}-\frac{46}{12}\right)=-\frac{53-46}{12}=-\frac{7}{12}$$

Μία παράσταση χωρίς παρενθέσεις μπορούμε να τη γράψουμε ως πρόσθεση ρητών, π.χ. $-7,2-4,2+5,6=(-7,2)+(-4,2)+(+5,6)$. Μπορεί επίσης να γραφεί και $-(+7,2)-(+4,2)-(-5,6)$ ή με οποιονδήποτε συνδυασμό που οδηγεί μετά την απαλοιφή παρενθέσεων στην ίδια παράσταση.

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Απαλοιφή παρενθέσεων

Για να κάνουμε πιο απλές τις αριθμητικές παραστάσεις με ρητούς, μπορούμε να απαλείφουμε τις παρενθέσεις όπως και στους ακεραίους.

Όταν μπροστά (αριστερά) από μια παρένθεση υπάρχει «+», τότε μπορούμε:

- να «παραλείψουμε» το «+» και την παρένθεση και
- να γράψουμε τον αριθμό που είναι μέσα σε αυτή.

Όταν μπροστά (αριστερά) από μια παρένθεση υπάρχει «–», τότε μπορούμε:

- να «παραλείψουμε» το «–» και την παρένθεση και
- να γράψουμε τον αντίθετο του αριθμού που είναι μέσα σε αυτή.

$-(+5,2)+(-7,4)-(+9,1)=$
$=-5,2-7,4-9,1$

$-\left(-\frac{4}{5}\right)-\left(+\frac{2}{7}\right)+\left(-\frac{1}{6}\right)=$
$=\frac{4}{5}-\frac{2}{7}-\frac{1}{6}$

Δ4. Ιδιότητες της πρόσθεσης και της αφαίρεσης στους ρητούς

Συζητήστε τα παρακάτω θέματα πρώτα στις ομάδες σας και στη συνέχεια στην τάξη:

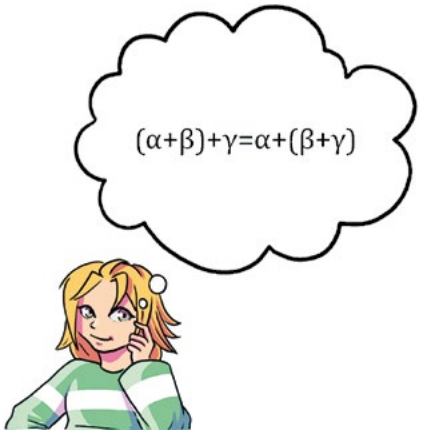
α) Στους ακεραίους, η πρόσθεση του μηδενός σε κάθε αριθμό δίνει ως αποτέλεσμα τον ίδιο αριθμό, π.χ. $4+0=0$. Ισχύει αυτή η ιδιότητα για τους ρητούς;

β) Το άθροισμα δύο οποιωνδήποτε ακεραίων α και β δεν αλλάζει, αν αλλάξουμε τη σειρά με την οποία είναι γραμμένοι. Ισχύει το ίδιο για τους ρητούς;

γ) Στους ακεραίους ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα. Ισχύει το ίδιο για τους ρητούς;

δ) Στους ακεραίους, για κάθε αριθμό υπάρχει ένας άλλος αριθμός, ο αντίθετός του, που το άθροισμά τους είναι 0. Ισχύει το ίδιο για τους ρητούς;

ε) Εξετάστε αν ισχύει η αντιμεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα στην αφαίρεση ρητών.



Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Ιδιότητες της πρόσθεσης και της αφαίρεσης στους ρητούς

Για την πρόσθεση ρητών αριθμών ισχύουν οι ιδιότητες:

- Αντιμεταθετική ιδιότητα: για να βρούμε το άθροισμα δύο ρητών, μπορούμε να τους προσθέσουμε με όποια σειρά θέλουμε.
- Προσεταιριστική ιδιότητα: το άθροισμα τριών ρητών δεν αλλάζει είτε κάνουμε πρώτα την πρόσθεση των δύο στα αριστερά είτε των δύο στα δεξιά.
- Το άθροισμα του μηδενός με οποιονδήποτε ρητό αριθμό είναι ίσο με αυτό τον αριθμό.
- Το άθροισμα δύο αντίθετων αριθμών είναι 0.

Στην αφαίρεση ρητών δεν ισχύει η αντιμεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα.

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha$$

$$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$$

$$\alpha+0=0+\alpha=\alpha$$

$$\alpha+(-\alpha)=(-\alpha)+\alpha=0$$

Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε

1. Ο καθηγητής ρώτησε σε ένα τμήμα της Α΄ τάξης αν η πρόσθεση $\alpha+\beta$ (με α και β ρητούς) σημαίνει αύξηση για τον αριθμό α, ενώ η αφαίρεση $\alpha-\beta$ σημαίνει μείωση του αριθμού α. Ο Γιώργος είπε: «Ναι, γιατί το ίδιο ισχύει και στους φυσικούς αριθμούς». Έχει δίκιο ο Γιώργος; Γιατί ναι ή γιατί όχι;

2. Πότε το άθροισμα δύο ετερόσημων ρητών αριθμών είναι θετικός αριθμός, πότε είναι αρνητικός και πότε είναι μηδέν;

3. Πότε η διαφορά δύο δεκαδικών είναι ακέραιος;

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. **Να εκτιμήσετε το αποτέλεσμα της πράξης $-\frac{15}{4}-\left(-\frac{17}{8}\right)$ χρησιμοποιώντας κατά προσέγγιση δεκαδικούς. Στη συνέχεια να ελέγξετε την εκτίμησή σας με πράξεις κλασμάτων.**

Απάντηση

Το $\frac{15}{4}$ είναι περίπου 4 και το $\frac{17}{8}$ είναι περίπου 2. Έτσι, αναμένουμε ότι το αποτέλεσμα θα είναι περίπου $-4-(-2)=-4+2=-2$.

$$-\frac{15}{4}-\left(-\frac{17}{8}\right)=-\frac{15}{4}+\frac{17}{8}=-\frac{30}{8}+\frac{17}{8}=-\frac{13}{8}$$

Ο αριθμός $-\frac{13}{8}$ είναι πράγματι κοντά στην εκτίμησή μας (δηλαδή στο -2).

Παράδειγμα πρόσθεσης ρητών αριθμών

2. **Μια εταιρεία πληροφορικής παρουσίασε τα κέρδη της για τα έτη 2018-2022. Οι αριθμοί είναι σε εκατοντάδες χιλιάδες ευρώ, ενώ το αρνητικό κέρδος δείχνει ότι η εταιρεία είχε ζημιά εκείνη τη χρονιά. Ποια ήταν τα συνολικά κέρδη της πενταετίας σε ευρώ;**

Έτος	2018	2019	2020	2021	2022
Κέρδη (σε εκατοντάδες χιλιάδες €)	−2,34	1,16	−3,17	2,58	6,7



Απάντηση

Θα βρούμε το άθροισμα των κερδών:

$(-2,34)+(+1,16)+(-3,17)+(+2,58)+(+6,7)=$ (διώχνουμε τις παρενθέσεις)

$=-2,34\ +1,16\ -3,17\ +2,58+6,7=$ (αντιμεταθετική ιδιότητα)

$=-2,34-3,17\ +1,16+2,58+6,7=$ (προσθέτουμε τους ομόσημους)

$=-5,51+10,44=+(10,44-5,51)=4,93$ (προσθέτουμε τους ετερόσημους)

Άρα τα κέρδη της πενταετίας ήταν 4,93 εκατοντάδες χιλιάδες ευρώ, δηλαδή 493.000 €.

Αν θέλουμε, μπορούμε να το γράψουμε κατευθείαν, όπως είναι γραμμένο στην τρίτη γραμμή.

3. **Η απόσταση δύο αριθμών x και y πάνω στην αριθμογραμμή δίνεται από τον τύπο $|x-y|$. Βρείτε την απόσταση των αριθμών $x=-4,2$, $y=-1,3$.**

Απάντηση

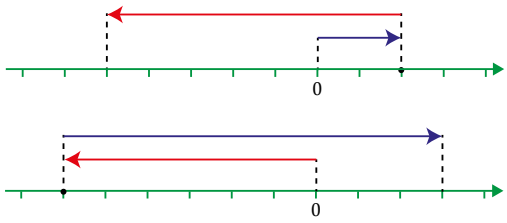
Θέτουμε στην αλγεβρική παράσταση τις τιμές που δίνονται και έχουμε:

$|x-y|=|-4,2-(-1,3)|=|-4,2+1,3|=|-2,9|=2,9$

Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί η $|x-y|$ δίνει την απόσταση των x και y;

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Για τις δύο παρακάτω αριθμογραμμές, στην πρώτη γραμμή δεξιά του μηδενός βάλτε όποια κλασματική μονάδα θέλετε και στη συνέχεια γράψτε την κίνηση στην αριθμογραμμή ως πρόσθεση, κάντε τις πράξεις και επαληθεύστε το αποτέλεσμα από την αριθμογραμμή.



2. Ποια αριθμητική παράσταση από τις παρακάτω δεν είναι ίση με 0;

α) $9,3+(-9,3)$ **β)** $8,4-(-8,4)$

γ) $-\frac{2}{5}+\frac{2}{5}$ **δ)** $\frac{16}{5}-\left(+\frac{16}{5}\right)$

3. Η Θεοδώρα έγραψε στο τετράδιό της τις παρακάτω πράξεις. Αν έχει κάνει κάπου λάθος, διορθώστε το.

α) $-2,3+(-0,7)=|-2,3|+|-0,7|=$
$=2,3+0,7=3$

β) $\frac{5}{3}-\frac{8}{3}=\left|\frac{5}{3}\right|+\left|\frac{8}{3}\right|=\frac{13}{3}$

4. Ποια είναι η τιμή της παράστασης $|-4-(+2,5)|$;

α) $-6,5$ **β)** $6,5$ **γ)** $1,5$ **δ)** $-1,5$

5. Οι τρεις από τις τέσσερις παρακάτω προτάσεις δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα. Ποια δίνει διαφορετικό;

α) Πρόσθεσε τους $-2,5$ και $5,5$.

β) Βρες τη διαφορά του $5,5$ από το $-2,5$.

γ) Το $-2,5$ μειώνεται κατά $5,5$.

δ) Υπολόγισε το άθροισμα των $-2,5$ και $-5,5$.

6. Να βρείτε με νοερούς υπολογισμούς ποια από τις παρακάτω παραστάσεις είναι αρνητικός αριθμός:

α) $|-12,1-7,4|$ **β)** $3-|-5-4|$

γ) $2+\left|-\frac{13}{11}-\frac{23}{5}\right|$ **δ)** $50-|-12,3-14|$

Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

7. Να βρείτε τα αθροίσματα:

α) $(-1,2)+(-0,4)$ **β)** $0,23+(-1,5)$

γ) $13,23+(-11,35)$ **δ)** $(-132,1)+(-87,4)$

ε) $(-2.741,7)+3.429,2$ **στ)** $\frac{1}{4}+\left(-\frac{5}{4}\right)$

ζ) $\left(-\frac{2}{5}\right)+\left(-\frac{7}{10}\right)$ **η)** $\frac{1}{2}+\left(-\frac{5}{3}\right)$

θ) $-\frac{13}{6}+\left(-\frac{13}{4}\right)$ **ι)** $\frac{29}{7}+\left(-\frac{5}{2}\right)$

ια) $2,4+\left(-\frac{8}{3}\right)$

8. Να βρείτε τις διαφορές:

α) $-9,2-(-4,1)$ **β)** $(-15,52)-(+34,99)$

γ) $(-444,2)-(-2.322,1)$ **δ)** $\frac{4}{5}-\left(-\frac{1}{5}\right)$

ε) $\left(-\frac{5}{6}\right)-\left(-\frac{5}{3}\right)$ **στ)** $\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{2}\right)$

ζ) $-\frac{16}{3}-\left(-\frac{9}{4}\right)$ **η)** $\frac{7}{5}-\left(-\frac{22}{3}\right)$

θ) $5,7+\left(-\frac{15}{4}\right)$

9. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

α) $3,2+(-4,1)+(-3,2)+(-1,7)$

β) $-\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\right)$

γ) $\frac{21}{4}+\left(-\frac{10}{3}\right)+\left(-5\frac{1}{4}\right)$

10. Να απαλείψετε τις παρενθέσεις και στη συνέχεια να κάνετε τις πράξεις:

α) $-(+4,5)+(-3,4)-(-8,2)$

β) $-(-0,2)-(+0,1)-[-(-0,4)]$

11. Μία παράσταση που έχει το ίδιο αποτέλεσμα με την $-1,2+5,9-8,1$ είναι η $-(+1,2)-(-5,9)+(-8,1)$. Να γράψετε άλλες δύο παραστάσεις με παρενθέσεις που να έχουν το ίδιο αποτέλεσμα.

12. Ένα ξενοδοχείο υπολόγισε τα κέρδη που είχε τη θερινή περίοδο. Ποιο ήταν το συνολικό κέρδος που είχε τους πέντε μήνες;

Μήνας	Μάιος	Ιούνιος	Ιούλιος	Αύγουστος	Σεπτέμβριος
Κέρδη (σε χιλιάδες €)	$-2,4$	1,45	6,18	7,05	$-1,2$

13. Η δεξαμενή πετρελαίου του Γυμνασίου Σουφλίου στις 10 Ιανουαρίου ήταν γεμάτη κατά τα $\frac{5}{6}$. Στις 25 Ιανουαρίου ήταν γεμάτη κατά τα $\frac{3}{10}$.

α) Τι μέρος της δεξαμενής καταναλώθηκε σε 15 ημέρες;

β) Αν η δεξαμενή έχει χωρητικότητα 6.000 λίτρα, πόσα λίτρα καταναλώθηκαν στις 15 ημέρες;

14. Να υπολογίσετε την παράσταση $|x-y|+|y-z|$ για τις τιμές $x=5$, $y=-2,5$ και $z=-5,2$.

15. Να βρείτε τρία διαφορετικά ζεύγη ρητών αριθμών x και y, έτσι ώστε $x-y=-1,2$.

16. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι σωστές «πάντα», «μερικές φορές» ή «ποτέ». Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

α) Η διαφορά δύο αρνητικών ρητών είναι θετική.

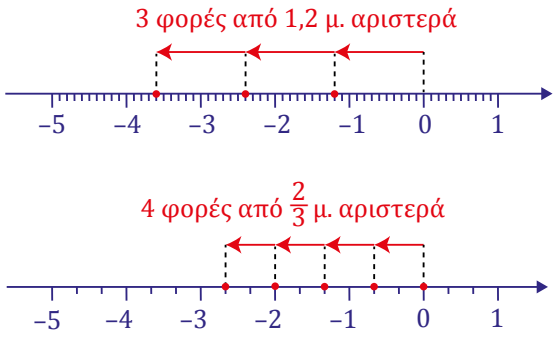
β) Η διαφορά ενός θετικού ρητού από έναν αρνητικό ρητό είναι θετική.

γ) Η διαφορά ενός αρνητικού ρητού από έναν θετικό ρητό είναι θετική.

3.3 Πολλαπλασιασμός και διαίρεση ρητών αριθμών

Δ1. Πολλαπλασιασμός ρητών

α) Γράψτε ως πολλαπλασιασμό ρητών αριθμών τις διπλανές κινήσεις στην αριθμογραμμή και βρείτε το αποτέλεσμα.
Νομίζετε ότι ισχύουν οι κανόνες πολλαπλασιασμού των ετερόσημων ακεραίων στους ρητούς;

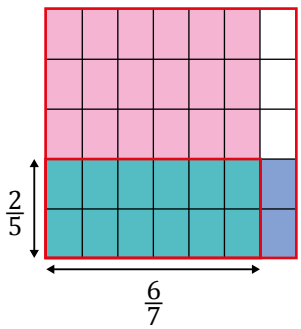


β) Για να βρούμε το γινόμενο $(-3)\cdot(-2,1)$, μπορούμε να σκεφτούμε με βάση το διπλανό μοτίβο. Συμπληρώστε το και βρείτε το αποτέλεσμα.
Ισχύουν οι κανόνες πολλαπλασιασμού των ομόσημων ακεραίων στους ρητούς; Συζητήστε στις ομάδες σας και μετά σε όλη την τάξη.

$(+3)\cdot(-2,1) = -6,3$
$(+2)\cdot(-2,1) = -4,2$
$(+1)\cdot(-2,1) = -2,1$
$0\cdot(-2,1) = 0$
$(-1)\cdot(-2,1) =$ _____
$(-2)\cdot(-2,1) =$ _____
$(-3)\cdot(-2,1) =$ _____

γ) Για να βρούμε το γινόμενο $\frac{2}{5}\cdot\frac{6}{7}$, μπορούμε να σκεφτούμε με τις διαμερίσεις του διπλανού τετραγώνου. Τι μέρος του τετραγώνου είναι το κοινό μέρος (πράσινο) των δύο διαμερίσεων; Τι σχέση έχει αυτό το κλάσμα με τα αρχικά κλάσματα;

Πώς μπορούμε να σκεφτούμε για το γινόμενο $\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}$;



δ) Λαμβάνοντας υπόψη τα προηγούμενα ερωτήματα, βρείτε τα παρακάτω γινόμενα και μετατρέψτε τα σε ανάγωγα κλάσματα:

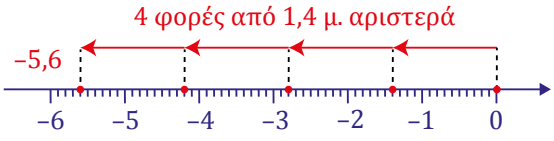
$\left(-\frac{5}{3}\right)\cdot\frac{3}{7}$, $\left(-\frac{10}{3}\right)\cdot\left(-\frac{9}{14}\right)$, $\frac{4}{21}\cdot\left(-\frac{35}{12}\right)$.

Συζητάμε

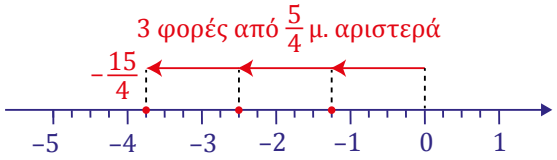
…για τον πολλαπλασιασμό ρητών

Για τον πολλαπλασιασμό ρητών αριθμών μπορούμε να σκεφτούμε:

- Το γινόμενο $\mathbf{4\cdot(-1,4)}$ είναι τέσσερις φορές μετατόπιση κατά **1,4** προς τα αριστερά. Το αποτέλεσμα είναι **−5,6**.



- Το γινόμενο $\mathbf{3}\cdot\left(-\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{4}}\right)$ είναι $-\frac{\mathbf{15}}{\mathbf{4}}$.



- Για να βρούμε το γινόμενο δύο αρνητικών ρητών, θα συμπληρώσουμε το μοτίβο:

$(+3)\cdot(-1{,}2)=-3{,}6,\ (+2)\cdot(-1{,}2)=-2{,}4,\ (+1)\cdot(-1{,}2)=-1{,}2,\ 0\cdot(-1{,}2)=0,$

Αύξηση κάθε φορά κατά 1,2, οπότε με την ίδια λογική συμπληρώνουμε την κάτω γραμμή:

$(-1)\cdot(-1{,}2)=1{,}2,\ (-2)\cdot(-1{,}2)=2{,}4,\ (-3)\cdot(-1{,}2)=3{,}6$

Παρατηρούμε ότι οι κανόνες του πολλαπλασιασμού των ρητών αριθμών είναι ίδιοι με τους κανόνες των ακεραίων.

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ρητούς αριθμούς:

- βάζουμε το πρόσημο «+», αν είναι ομόσημοι, ή το πρόσημο «−», αν είναι ετερόσημοι, και
- πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους.

Αν ένας τουλάχιστον παράγοντας είναι το 0, τότε το γινόμενο είναι 0.

Όταν θέλουμε να πολλαπλασιάσουμε δύο κλασματικούς αριθμούς, εξυπηρετεί καλύτερα να κάνουμε πρώτα απλοποιήσεις και μετά πολλαπλασιασμούς.

$(+)\cdot(+)=(+)$
$(+)\cdot(-)=(-)$
$(-)\cdot(+)=(-)$
$(-)\cdot(-)=(+)$

$$\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\cdot\gamma}{\beta\cdot\delta}$$

$\left(-\frac{15}{16}\right)\cdot\frac{32}{45}=-\frac{15\cdot32}{16\cdot45}=-\frac{480}{720}$ και τώρα πρέπει να βρούμε αριθμούς που να διαιρούν τους δύο αριθμούς, ενώ έτσι: $\left(-\frac{15}{16}\right)\cdot\frac{32}{45}=-\frac{\overset{1}{\cancel{15}}\cdot\overset{2}{\cancel{32}}}{\underset{1}{\cancel{16}}\cdot\underset{3}{\cancel{45}}}=-\frac{2}{3}$ είναι πολύ πιο εύκολο.

Δ2. Γινόμενα που κάνουν 1

Συζητήστε στις ομάδες σας και βρείτε με ποιους αριθμούς θα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε τους $\frac{3}{5}$, -1, $-\frac{10}{7}$, $\frac{1}{23}$ και 0,5, ώστε το αποτέλεσμα να είναι κάθε φορά 1.

Δύο αριθμούς τούς ονομάζουμε αντίστροφους όταν το γινόμενό τους είναι 1.

Βρείτε τους αντίστροφους των αριθμών $\frac{3}{5}$, -1, $-\frac{10}{7}$ και $\frac{1}{23}$.

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Πίνακας έννοιας των αντίστροφων αριθμών

Αντίστροφοι αριθμοί

Ορισμός

Οι αριθμοί που έχουν γινόμενο 1.

Το 0 δεν έχει αντίστροφο.

Χαρακτηριστικά

Ο αντίστροφος του α συμβολίζεται $\frac{1}{\alpha}$.

Αν ο ένας είναι ο $\frac{\alpha}{\beta}$, ο άλλος είναι ο $\frac{\beta}{\alpha}$.

Πάντα είναι ομόσημοι.

Παραδείγματα είναι

$\frac{5}{7}$ και $\frac{7}{5}$, 4 και 0,25

2 και $\frac{1}{2}$ (το 2 γράφεται $\frac{2}{1}$)

$-\frac{35}{9}$ και $-\frac{9}{35}$, -1 και -1

Παραδείγματα δεν είναι

5 και -5

3 και $\frac{1}{2}$

$\frac{5}{7}$ και $-\frac{7}{5}$

Δ3. Διαίρεση ρητών

α) Προσπαθήστε να συμπληρώσετε τα κενά και αιτιολογήστε:

$(+10,5):(+2,1) =$ _____, γιατί $(+2.1)\cdot$ _____ $= +10,5$

$(-10,5):(-2,1) =$ _____, γιατί .....

$(-10,5):(+2,1) =$ _____, γιατί .....

$(+10,5):(-2,1) =$ _____, γιατί .....

Με την ίδια λογική συμπληρώστε τα κενά:

$(+8,4):(+2,1) =$ _____ $(-15,3):(-3) =$ _____ $(+10):(-2,5) =$ _____ $(-8,4):(+4,2) =$ _____

Διατυπώστε έναν κανόνα για τη διαίρεση ρητών αριθμών και συζητήστε τον στην τάξη.

β) Για τους ρητούς αριθμούς α και β $(\beta \neq 0)$ μπορούμε να σκεφτούμε όπως είχαμε μάθει για τα κλάσματα στο δημοτικό: $\alpha : \beta = \frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$.

Κάντε τις διαιρέσεις: $2:\left(-\frac{1}{3}\right)$, $\left(-\frac{1}{7}\right):\left(+\frac{1}{2}\right)$, $\frac{3}{7}:\left(-\frac{9}{14}\right)$, $\left(-\frac{15}{8}\right):\left(-\frac{25}{12}\right)$.

Συζητάμε

…για τη διαίρεση ρητών

Η διαίρεση ρητών αριθμών ακολουθεί παρόμοιο κανόνα με τον πολλαπλασιασμό των ρητών. Για παράδειγμα:

$$(-1{,}2):(-0{,}2)=+(1{,}2:0{,}2)=+\frac{1{,}2}{0{,}2}=\frac{12}{2}=6$$

Είναι ομόσημοι, άρα βάζουμε μπροστά «+» και διαιρούμε τις απόλυτες τιμές.

$$\left(-\frac{12}{25}\right):\left(+\frac{16}{35}\right) = -\left(\frac{12}{25}:\frac{16}{35}\right)=-\left(\frac{12}{25}\cdot\frac{35}{16}\right)=-\frac{\overset{3}{\cancel{12}}\cdot\overset{7}{\cancel{35}}}{\underset{5}{\cancel{25}}\cdot\underset{4}{\cancel{16}}}=-\frac{3\cdot7}{5\cdot4}=-\frac{21}{20}$$

Είναι ετερόσημοι, άρα βάζουμε μπροστά «–» και διαιρούμε τις απόλυτες τιμές.

Η διαίρεση γίνεται πολλαπλασιασμός με τον αντίστροφο του διαιρέτη.

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Για να διαιρέσουμε δύο ρητούς αριθμούς:

- βάζουμε το πρόσημο «+», αν είναι ομόσημοι, ή το πρόσημο «–», αν είναι ετερόσημοι, και
- διαιρούμε τις απόλυτες τιμές τους.

(+) : (+) = (+)
(+) : (−) = (−)
(−) : (+) = (−)
(−) : (−) = (+)

Για να διαιρέσουμε τον α με τον β, μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε τον α με τον αντίστροφο του β, δηλαδή $\alpha:\beta=\frac{\alpha}{\beta}=\alpha\cdot\frac{1}{\beta}$.

Δ4. Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού στους ρητούς

Συζητήστε τις παρακάτω ερωτήσεις:

α) Υπάρχει ρητός αριθμός α που, όταν πολλαπλασιάζεται με οποιονδήποτε ρητό αριθμό, π.χ. τον $-\frac{5}{6}$, δίνει ως αποτέλεσμα τον ίδιο τον α;

β) Με ποιον ρητό αριθμό πρέπει να πολλαπλασιάσουμε το $-\frac{2}{3}$, ώστε το αποτέλεσμα να είναι $-\frac{2}{3}$;

γ) Εξετάστε αν το γινόμενο $\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)$ είναι ίσο με το γινόμενο $\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)$.

δ) Υπολογίστε το γινόμενο $\left(\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{5}{3}$. Η σειρά των πράξεων που ακολουθήσατε είναι ο βολικότερος τρόπος για να υπολογίσουμε το γινόμενο;

ε) Αν έχουμε έναν μη μηδενικό αριθμό α, μπορούμε πάντα να βρούμε έναν αριθμό τέτοιο ώστε το γινόμενό του με τον α να είναι 1;

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού στους ρητούς

Για τον πολλαπλασιασμό ρητών αριθμών ισχύουν οι ιδιότητες:

- Αντιμεταθετική ιδιότητα: μπορούμε να αλλάζουμε τη σειρά των παραγόντων σε ένα γινόμενο. $\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$
- Προσεταιριστική ιδιότητα: το γινόμενο τριών ακεραίων δεν αλλάζει είτε κάνουμε πρώτα τον πολλαπλασιασμό των δύο στα αριστερά είτε των δύο στα δεξιά. $\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)=(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma$
- Όταν πολλαπλασιάζουμε οποιονδήποτε αριθμό με το 1, παίρνουμε αποτέλεσμα τον ίδιο αριθμό. $\alpha\cdot1=1\cdot\alpha=\alpha$
- Όταν πολλαπλασιάζουμε οποιονδήποτε αριθμό με το 0, παίρνουμε αποτέλεσμα 0. $\alpha\cdot0=0\cdot\alpha=0$
- Όλοι οι αριθμοί, εκτός από το μηδέν, έχουν αντίστροφο. $\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\alpha}\cdot\alpha=1$, με $\alpha\neq0$

Δ5. Πολλαπλασιασμοί που μικραίνουν και διαιρέσεις που μεγαλώνουν

Στους φυσικούς αριθμούς, ο πολλαπλασιασμός μεγαλώνει έναν μη μηδενικό αριθμό, ενώ η διαίρεση τον μικραίνει. Ισχύει το ίδιο στους ρητούς αριθμούς; Ανακοινώστε και συζητήστε στην τάξη τα συμπεράσματα της ομάδας σας.

Συζητάμε

…για τα αποτελέσματα πολλαπλασιασμών και διαιρέσεων

Ας δούμε κάποια παραδείγματα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης των αριθμών 10 και –10 με τους αριθμούς της κάθε στήλης.

	–2	–1	–0,5	0	0,5	1	2
10·	–20	–10	–5	0	5	10	20
(–10)·	20	10	5	0	–5	–10	–20

	–2	–1	–0,5	0	0,5	1	2
10:	–5	–10	–20		20	10	5
(–10):	5	10	20		–20	–10	–5

Παρατηρούμε ότι τόσο στον πολλαπλασιασμό όσο και στη διαίρεση άλλες φορές το αποτέλεσμα είναι αριθμός μεγαλύτερος (γαλάζιο χρώμα) και άλλες φορές μικρότερος (κόκκινο χρώμα).

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Ο πολλαπλασιασμός ενός ρητού μη μηδενικού αριθμού με άλλο ρητό αριθμό άλλες φορές τον μεγαλώνει και άλλες τον μικραίνει. Όμοια και με τη διαίρεση.

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. **Να υπολογίσετε το γινόμενο** $\left(-\frac{15}{8}\right)\cdot\left(-\frac{12}{35}\right)$.

Απάντηση

$$\left(-\frac{15}{8}\right)\cdot\left(-\frac{12}{35}\right)=+\frac{15}{8}\cdot\frac{12}{35}=\frac{15\cdot12}{8\cdot35}=\frac{\overset{3}{\cancel{15}}\cdot\overset{3}{\cancel{12}}}{\underset{2}{\cancel{8}}\cdot\underset{7}{\cancel{35}}}=\frac{3\cdot3}{2\cdot7}=\frac{9}{14}$$

Είναι ομόσημοι, άρα βάζουμε μπροστά «+» και πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές.

Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή με αριθμητή και παρονομαστή με παρονομαστή.

Διαιρούμε 15 και 35 με το 5, και 8 και 12 με το 4.

Ένας άλλος τρόπος για την απλοποίηση είναι η ανάλυση των αριθμών σε γινόμενα παραγόντων:

$$\frac{15\cdot12}{8\cdot35}=\frac{3\cdot\cancel{5}\cdot3\cdot\cancel{4}}{2\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{5}\cdot7}=\frac{9}{14}$$

Γιατί όμως προτιμήσαμε να κάνουμε απλοποιήσεις αντί να βρούμε τα γινόμενα $15\cdot12$ και $8\cdot35$;

2. **Να υπολογίσετε την παράσταση** $\dfrac{-\frac{15}{9}}{-1+\frac{5}{6}}$.

Απάντηση

$$\frac{-\frac{15}{9}}{-1+\frac{5}{6}}=\left(-\frac{15}{9}\right):\left(-1+\frac{5}{6}\right)=$$ (το κλάσμα γράφεται ως διαίρεση)

$$=\left(-\frac{15}{9}\right):\left(-\frac{6}{6}+\frac{5}{6}\right)=$$ (κάνουμε ομώνυμα τα -1 και $\frac{5}{6}$)

$=\left(-\frac{15}{9}\right):\left(\frac{-6}{6}+\frac{5}{6}\right)=$ (το $-\frac{6}{6}$ γράφεται $\frac{-6}{6}$)

γενικά ισχύει $\frac{-\alpha}{\beta}=\frac{\alpha}{-\beta}=-\frac{\alpha}{\beta}$

$=\left(-\frac{15}{9}\right):\frac{-6+5}{6}=$ (προσθέτουμε τα ομώνυμα κλάσματα)

$=\left(-\frac{15}{9}\right):\frac{-1}{6}=$ (διαίρεση ακεραίων, το $\frac{-1}{6}$ γίνεται $-\frac{1}{6}$)

$=\left(-\frac{15}{9}\right):\left(-\frac{1}{6}\right)=$ (διαίρεση ομόσημων ρητών)

$=\frac{15}{9}:\frac{1}{6}=\frac{15}{9}\cdot\frac{6}{1}=\frac{\overset{5}{\cancel{15}}\cdot 6}{\underset{3}{\cancel{9}}\cdot 1}=\frac{5\cdot\overset{2}{\cancel{6}}}{\underset{1}{\cancel{3}}}=10$ (η διαίρεση γίνεται πολλαπλασιασμός, πολλαπλασιάζουμε τα κλάσματα και απλοποιούμε)

Τα σύνθετα κλάσματα $\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}}$ μπορούν να γίνουν απλά κι έτσι: $\frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\delta}{\gamma}=\frac{\alpha\cdot\delta}{\beta\cdot\gamma}$, δηλαδή $\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}}=\frac{\alpha\cdot\delta}{\beta\cdot\gamma}$.

3. **Αιτιολογήστε αν είναι θετικό ή αρνητικό το γινόμενο $\left(-\frac{1}{11}\right)\cdot(-6)\cdot\left(-\frac{14}{3}\cdot\frac{22}{105}\right)$ και στη συνέχεια υπολογίστε το.**

Απάντηση

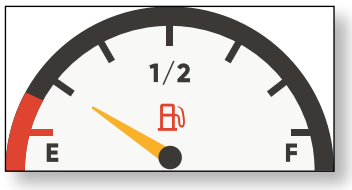
Παρατηρούμε ότι υπάρχουν 3 αρνητικοί παράγοντες, άρα το αποτέλεσμα θα είναι αρνητικός αριθμός.

$\left(-\frac{1}{11}\right)\cdot(-6)\cdot\left(-\frac{14}{3}\cdot\frac{22}{105}\right)=\left(-\frac{1}{11}\right)\cdot(-6)\cdot\left(-\frac{14\cdot22}{3\cdot105}\right)=-\frac{1}{11}\cdot\frac{6}{1}\cdot\frac{14\cdot22}{3\cdot105}=-\frac{6\cdot14\cdot22}{11\cdot3\cdot105}=-\frac{\overset{2}{\cancel{6}}\cdot\overset{2}{\cancel{14}}\cdot\overset{2}{\cancel{22}}}{\underset{1}{\cancel{11}}\cdot\underset{1}{\cancel{3}}\cdot\underset{15}{\cancel{105}}}=-\frac{8}{15}$

Όπως και στους ακεραίους, το γινόμενο πολλών παραγόντων είναι:

- θετικός αριθμός, αν οι αρνητικοί παράγοντες έχουν άρτιο πλήθος, και
- αρνητικός αριθμός, αν οι αρνητικοί παράγοντες έχουν περιττό πλήθος.

4. **Στη δεξαμενή πετρελαίου του 2ου Γυμνασίου Καστοριάς η στάθμη του πετρελαίου στις 22 Ιανουαρίου είχε ύψος 0,89 m.**



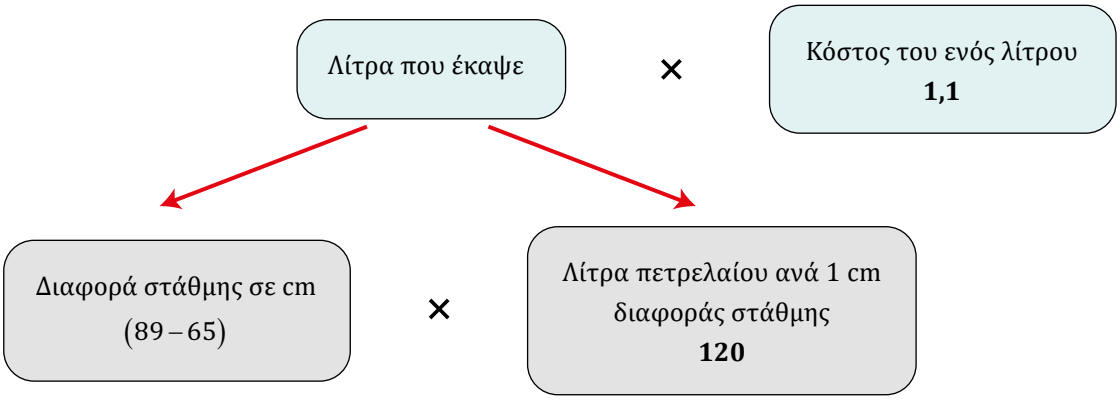
α) Αν κάθε μέρα το ύψος μεταβάλλεται κατά –0,016 m, να βρείτε το ύψος μετά από 15 εργάσιμες ημέρες.

β) Αν κάθε εκατοστό της δεξαμενής είναι 120 λίτρα και το κόστος του πετρελαίου είναι 1,1 €/λίτρο, πόσο κόστισε το πετρέλαιο αυτές τις 15 ημέρες;

Απάντηση

α) Η αριθμητική παράσταση του ύψους του πετρελαίου είναι $0,89+15\cdot(-0,016)$. Προτεραιότητα έχει ο πολλαπλασιασμός, άρα γίνεται $0,89+15\cdot(-0,016)=0,89-0,24=0,65$ m.

β) Το κόστος του πετρελαίου είναι:



Δηλαδή $(89-65)\cdot 120\cdot 1,1$. Προτεραιότητα έχουν οι πράξεις στην παρένθεση, οπότε θα γίνει $24\cdot 120\cdot 1,1=3.168$. Επομένως 3.168 € ήταν το κόστος του πετρελαίου των 15 εργάσιμων ημερών.

Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε

1. Μπορείτε να αποδείξετε ότι δεν ισχύει η αντιμεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα στη διαίρεση των ρητών;

2. Για να κάνει την πράξη $-\frac{3}{4}+\frac{2}{4}$ ένας μαθητής, αντί να εφαρμόσει τον κανόνα ετερόσημων αριθμών της πρόσθεσης, έγραψε $\frac{-3}{4}+\frac{2}{4}=\frac{-3+2}{4}=\frac{-1}{4}=-\frac{1}{4}$. Είναι σωστός αυτός ο συλλογισμός; Αιτιολογήστε γιατί ναι ή γιατί όχι.

3. Πότε ένας ρητός αριθμός α μεγαλώνει όταν πολλαπλασιάζεται με έναν άλλο ρητό β και πότε μικραίνει; Εξετάστε όμοια για τη διαίρεση.

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Χωρίς να κάνετε τις πράξεις, εξετάστε αν το αποτέλεσμα είναι θετικός αριθμός (Θ), αρνητικός αριθμός (Α) ή μηδέν (0) σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $-2\cdot(-3,1)$ **β)** $0\cdot(-11,2)$

γ) $5,3\cdot(-8,2)$ **δ)** $-(-4)\cdot(-10,34)$

ε) $\left(-\frac{1}{12}\right)\cdot\frac{5}{4}$ **στ)** $\left(-\frac{13}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)$

ζ) $0\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)$ **η)** $-\left[-\left(-\frac{3}{5}\right)\right]\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)$

2. Ο Γιάννης έκανε δύο πράξεις και αναρωτιέται αν είναι σωστές. Ελέγξτε τις πράξεις που έκανε και, αν έχει κάνει λάθη, διορθώστε τα.

$-2,3\cdot(-4,1)=-9,43$

$\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{4}{6}\right)=\frac{\overset{1}{\cancel{3}}\cdot\cancel{4}}{\cancel{4}\cdot\cancel{6}_{3}}=\frac{1}{3}$

3. Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς είναι ο αντίστροφος του $-\frac{3}{5}$;

α) $-\frac{3}{5}$ **β)** $\frac{3}{5}$ **γ)** 1 **δ)** $-\frac{5}{3}$

4. Χωρίς να κάνετε τις πράξεις, εξετάστε αν το αποτέλεσμα είναι θετικός αριθμός (Θ), αρνητικός αριθμός (Α) ή μηδέν (0) σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $-1,4:(-4,2)$ **β)** $1,7:(-2,7)$

γ) $(-8):(-13,9)$ **δ)** $\left(-\frac{1}{2}\right):\frac{2}{3}$

ε) $\left(-\frac{3}{5}\right):\left(-\frac{1}{7}\right)$ **στ)** $0:\left(-\frac{4}{9}\right)$

5. Η Καλλιόπη έκανε δύο πράξεις και αναρωτιέται αν είναι σωστές. Ελέγξτε τις πράξεις που έκανε και, αν χρειάζεται, διορθώστε τες.

$-6,08:1,6=3,8$

$-\frac{3}{4}:\frac{4}{6}=-\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{6}=-\frac{\overset{1}{\cancel{3}}\cdot\cancel{4}}{\cancel{4}\cdot\cancel{6}_{2}}=-\frac{1}{2}$

6. Ποια ιδιότητα αναγνωρίζετε σε καθεμιά από τις παρακάτω ισότητες;

α) $(-2)\cdot 9,4=9,4\cdot(-2)$

β) $3\cdot\left[(-2)\cdot 7,1\right]=\left[3\cdot(-2)\right]\cdot 7,1$

7. Να αιτιολογήσετε αν είναι θετική ή αρνητική καθεμιά από τις παρακάτω παραστάσεις.

α) $\left(-\frac{5}{7}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot(-2)\cdot 7$

β) $8,3\cdot(-7)\cdot\left[-(-0,3)\right]\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)$

γ) $(-2)\cdot\left(-\frac{4}{-5}\right)\cdot(-7):(-0,5)$

8. Ποια είναι η τιμή (το αποτέλεσμα των πράξεων) της αριθμητικής παράστασης $-3,1+2\cdot(-1)$;

α) $1,1$ **β)** $-5,1$ **γ)** $-2,1$

9. Δύο μαθητές έκαναν την πρόσθεση $-\frac{14}{3}+\frac{5}{3}$ με διαφορετικούς τρόπους, αλλά έφτασαν στο ίδιο αποτέλεσμα. Αναγνωρίζετε λάθη σε κάποιον από αυτούς;

$-\frac{14}{3}+\frac{5}{3}=-\left(\frac{14}{3}-\frac{5}{3}\right)=$

$=-\frac{14-5}{3}=-\frac{9}{3}=-3$

$-\frac{14}{3}+\frac{5}{3}=\frac{14}{-3}+\frac{5}{-3}=$

$=\frac{14-5}{-3}=\frac{9}{-3}=-3$

Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

10. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $2\cdot(-4{,}2)$ **β)** $-3\cdot(-0{,}12)$ **γ)** $3{,}05\cdot(-7{,}21)$

δ) $\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{3}{8}$ **ε)** $\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{20}{9}\right)$ **στ)** $\frac{15}{21}\cdot\left(-\frac{14}{30}\right)$

ζ) $\left(-\frac{11}{5}\right)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)$ **η)** $-\left(-\frac{13}{27}\right)\cdot\left(-\frac{45}{26}\right)$

θ) $-\frac{24}{25}\cdot\left(-\frac{36}{21}\right)\cdot\left(-\frac{35}{32}\right)$

11. Να γράψετε δύο κλάσματα με γινόμενο $-\frac{15}{14}$. Πόσα άλλα τέτοια ζεύγη μπορείτε να βρείτε;

12. Να συμπληρώσετε τους αντίστροφους των αριθμών:

α) 5 _____ **β)** $-6{,}2$ _____

γ) $\frac{3}{7}$ _____ **δ)** $-\frac{11}{8}$ _____

13. Ποιοι αριθμοί είναι ίσοι με τον αντίστροφό τους;

14. Να κάνετε τις διαιρέσεις:

α) $-0{,}25:0{,}05$ **β)** $-16{,}2:(-12)$

γ) $4{,}4:(-1{,}1)$ **δ)** $-8{,}96:6{,}4$

ε) $\left(-\frac{1}{4}\right):\left(-\frac{5}{8}\right)$ **στ)** $\frac{14}{15}:\left(-\frac{21}{45}\right)$

ζ) $\left(-\frac{35}{7}\right):\left(-\frac{28}{49}\right)$ **η)** $-\left(-\frac{18}{5}\right):\left(-\frac{7}{4}\right)$

15. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\frac{-3}{2}-\frac{1}{3}$ **β)** $\frac{4}{-5}+\frac{-5}{-2}$

γ) $-\frac{-9}{-4}-\frac{-2}{-3}$ **δ)** $\frac{3}{-7}-\frac{-1}{-2}+\frac{-5}{14}$

16. Να κάνετε τις πράξεις εφαρμόζοντας ιδιότητες του πολλαπλασιασμού, ώστε να τις υπολογίσετε πιο γρήγορα:

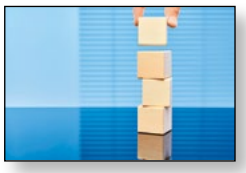
α) $(0{,}1\cdot 34)\cdot(-20)$ **β)** $(-0{,}01)\cdot[2{,}3\cdot(-300)]$

γ) $[(-15{,}3)\cdot 2{,}5]\cdot(-4)$ **δ)** $\left(-\frac{2}{3}\cdot\frac{17}{15}\right)\cdot\frac{3}{2}$

ε) $\left(-\frac{1}{11}\cdot\frac{3}{17}\right)\cdot\left[(-11)\cdot\frac{17}{3}\right]$

17. Η Ελισάβετ χρησιμοποιεί την κάρτα της για να αγοράσει μπλουζάκια. Μετά την αγορά, ο λογαριασμός της κάρτας άλλαξε κατά $-46{,}9$ €. Αν αγόρασε 7 ίδια μπλουζάκια, πόσο πλήρωσε για το καθένα;

18. Ο Γιώργος κατασκευάζει πύργους με κύβους που έχουν πλευρά 1,25 cm. Πόσους κύβους πρέπει να βάλει, για να έχει ο πύργος ύψος 7,5 εκ.;



19. Ένα ναυάγιο βρίσκεται σε βάθος 140 m. Ένα υποβρύχιο βρίσκεται στα $\frac{4}{7}$ αυτού του βάθους. Ποιο είναι το βάθος του υποβρυχίου;

20. Ένας επιχειρηματίας έχει ποσοστό 35% σε μια εταιρεία. Το κέρδος της εταιρείας τη φετινή χρονιά ήταν 13,7 χιλιάδες ευρώ. Πόσα ευρώ τού αναλογούν;

21. Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων: **α)** $x:y$, **β)** $\frac{yz}{x}$, **γ)** $\frac{x-5y}{z}$, όταν $x=8$, $y=-2$ και $z=0{,}5$.

22. Ο μικρότερος χρόνος στον αγώνα των 100 μέτρων που κάνουν οι μαθητές ενός γυμνασίου είναι 22,45 sec. Αν κάθε χρόνο μειώνεται αυτός ο χρόνος κατά 0,07 sec, ποιος θα είναι ο χρόνος μετά από 13 χρόνια;



23. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $-0{,}36:(-0{,}6)+0{,}05$ **β)** $\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{3}{5}$

γ) $\frac{5}{3}:\left(-\frac{20}{9}\right)+\frac{3}{5}$ **δ)** $-\frac{18}{22}:\left(-\frac{27}{33}\right)+\frac{14}{3}\cdot\frac{15}{21}$

24. Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης $\frac{x}{yz-\frac{1}{4}}$, όταν $x=-3$, $y=\frac{4}{5}$ και $z=-\frac{15}{8}$.

3.4 Δυνάμεις και παραστάσεις ρητών αριθμών

Δ1. Δύναμη ρητού αριθμού

Ο όγκος ενός κύβου με πλευρά 2,1 cm είναι $\underbrace{2,1\cdot 2,1\cdot 2,1}_{\text{3 παράγοντες ίσοι με 2,1}}$ cm^3. Είναι ένα γινόμενο τριών ίσων παραγόντων.

Αυτό το γινόμενο το γράφουμε $2,1^3$ και το ονομάζουμε **δύναμη** με **βάση** το 2,1 και **εκθέτη** το 3.

α) Γράψτε τα παρακάτω γινόμενα ως δυνάμεις:

$(-0,2)\cdot(-0,2)\cdot(-0,2)$, $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}$, $(-1,04)\cdot(-1,04)\cdot(-1,04)\cdot(-1,04)$, $x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x$, $\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\beta\cdot\beta$

β) Υπολογίστε τις δυνάμεις $1,1^2$, $(-0,2)^4$, $\left(-\frac{2}{5}\right)^3$.

Συζητάμε

…για δυνάμεις ρητών αριθμών

- Όταν έχουμε γινόμενα ρητών αριθμών ή μεταβλητών όπου κάποιοι παράγοντες είναι ίδιοι, τότε μπορούμε να τα γράφουμε πιο απλά χρησιμοποιώντας τις δυνάμεις. Για παράδειγμα:

  $(-3,45)\cdot(-3,45)\cdot(-3,45)\cdot(-3,45)\cdot(-3,45)=(-3,45)^5$,

  $\frac{5}{7}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{3}{11}\cdot\frac{3}{11}=\left(\frac{5}{7}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{11}\right)^2$, $6\cdot6\cdot6\cdot6\cdot6\cdot x\cdot x\cdot x=6^5\cdot x^3$,

  $x\cdot x\cdot y\cdot x\cdot y\cdot z\cdot x\cdot z\cdot y=x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot y\cdot y\cdot y\cdot z\cdot z=x^4\cdot y^3\cdot z^2$

Μπορούμε να υπολογίσουμε δυνάμεις, αφού πρώτα τις εκφράσουμε ως γινόμενα. Για παράδειγμα:

$4^2=4\cdot4=16$,

$(-0,3)^3=(-0,3)\cdot(-0,3)(-0,3)=-0,027$,

$\left(-\frac{2}{3}\right)^3=\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=-\frac{2\cdot2\cdot2}{3\cdot3\cdot3}=-\frac{8}{27}$

Σε μια επιστημονική αριθμομηχανή, αν θέλουμε να υπολογίσουμε το $\mathbf{1,4^{10}}$, θα γράψουμε 1,4, θα πατήσουμε το κουμπί x^y και μετά θα γράψουμε τον εκθέτη 10. Το αποτέλεσμα είναι 28,9254654976.

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Το γινόμενο ν ίσων ρητών παραγόντων α μπορούμε να το γράφουμε α^ν. Το ονομάζουμε **δύναμη** με **βάση** το α και **εκθέτη** το ν.
Ορίζουμε επίσης ότι $\alpha^1=\alpha$.

$$\underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\ldots\cdot\alpha}_{\text{ν παράγοντες ίσοι με α}}=\alpha^\nu \text{ για } \nu>1$$

$$\alpha^1=\alpha$$

Τη δύναμη 3^2 τη διαβάζουμε «τρία στη δευτέρα» ή «τρία στο τετράγωνο».
Τη δύναμη 5^3 τη διαβάζουμε «πέντε στην τρίτη» ή «πέντε στον κύβο».

Δ2. Πρόσημο δύναμης

α) Υπολογίστε τις δυνάμεις $(-1)^2$, $(-1)^3$, $(-1)^4$, $(-1)^5$, $(-1)^6$.

β) Πότε η δύναμη $(-1)^\nu$ με ν θετικό φυσικό αριθμό είναι θετικός αριθμός και πότε είναι αρνητικός αριθμός;

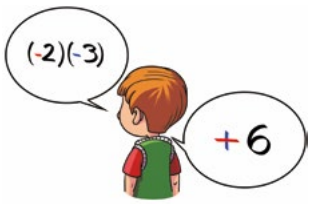
γ) Αν ο α είναι αρνητικός ρητός και ο β θετικός ρητός, εξετάστε το πρόσημο των παραστάσεων α^5, $\alpha^{1.000}$, $\alpha^7\beta^{15}\alpha^5$. Συζητήστε στην ομάδα σας και στη συνέχεια στην τάξη.

Συζητάμε

…για το πρόσημο δυνάμεων

Αν θέλουμε να βρούμε το πρόσημο της δύναμης $(-2,1)^5$, θα σκεφτούμε ότι η δύναμη αυτή αντιστοιχεί σε ένα γινόμενο με πέντε αρνητικούς παράγοντες. Το γινόμενο δύο αρνητικών παραγόντων είναι θετικός αριθμός. Έτσι, με τους πέντε παράγοντες έχουμε δύο ζευγάρια και ένας παράγοντας περισσεύει. Άρα το γινόμενο θα είναι αρνητικός.

Δηλαδή $(-2,1)^5 = (-2,1)\cdot(-2,1)\cdot(-2,1)\cdot(-2,1)\cdot(-2,1) < 0$



Με την ίδια λογική, η δύναμη $x^{2.200}$, με x αρνητικό ρητό αριθμό, έχει άρτιο πλήθος αρνητικών παραγόντων, άρα η δύναμη είναι θετικός αριθμός.

Για παράδειγμα, η παράσταση $-(-2)^{385}3^{23}$ έχει θετικό αποτέλεσμα, διότι:

- Ο παράγοντας 3^{23} είναι σίγουρα θετικός, άρα δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα.
- Το -2 είναι υψωμένο σε περιττό εκθέτη (τον 385), άρα είναι αρνητικός.
- Το «–» μπροστά από το $(-2)^{385}$ δηλώνει τον αντίθετό του, δηλαδή τον αντίθετο ενός αρνητικού.

Άρα το αποτέλεσμα είναι θετικό.

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Πρόσημο δύναμης	
Για να βρούμε το πρόσημο μιας δύναμης ενός μη μηδενικού ρητού αριθμού, σκεφτόμαστε ως εξής:	
• Αν η βάση είναι θετικός ρητός, τότε και η δύναμη είναι θετικός ρητός αριθμός.	Αν $\alpha > 0$, τότε $\alpha^\nu > 0$.
• Αν η βάση είναι αρνητικός ρητός και ο εκθέτης είναι:	Αν $\alpha < 0$:
◦ άρτιος αριθμός, τότε η δύναμη είναι θετικός αριθμός,	• αν ν άρτιος, τότε $\alpha^\nu > 0$,
◦ περιττός αριθμός, τότε η δύναμη είναι αρνητικός αριθμός.	• αν ν περιττός, τότε $\alpha^\nu < 0$.

Δ3. Υπολογισμός αριθμητικών παραστάσεων

Εφαρμόζοντας την προτεραιότητα των πράξεων (όπως τη μάθαμε στους φυσικούς και ακέραιους αριθμούς), να υπολογίσετε την τιμή των παρακάτω παραστάσεων και να συγκρίνετε τα αποτελέσματά σας στην τάξη.

α) $5\cdot(-2,2)-(-10):(-2)$

β) $\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot\frac{3}{4}-\left(-\frac{5}{2}\right):\left(\frac{4}{5}\right)$

γ) $-2^3-(-3,1+2,2)-(-2,3)^3$

δ) $\left(-2\cdot4,1+3^2\right):(-0,2)^2$

Συζητάμε

…για την προτεραιότητα των πράξεων

Εφαρμόζοντας την προτεραιότητα των πράξεων, έχουμε:

α) $(-3,2)\cdot(-0,1)-8:(-2)=$ (κάνουμε πρώτα τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις)

$=0,32-(-4)=$

$=0,32+4=4,32$

β) $\left(-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)-\left(-\frac{4}{15}\right):\frac{8}{45}=\frac{1\cdot3}{5\cdot2}-\left(-\frac{4}{15}\right)\cdot\frac{45}{8}=\frac{3}{10}+\frac{\cancel{4}^{1}\cdot\cancel{45}^{3}}{\cancel{15}^{1}\cdot\cancel{8}^{2}}=\frac{3}{10}+\frac{3}{2}=\frac{3}{10}+\frac{15}{10}=\frac{\cancel{18}^{9}}{\cancel{10}^{2}}=\frac{9}{2}$

γ) $(-3)^2-(3,4-5,1)-3^2=(-3)^2-(-1,7)-3^2=(-3)\cdot(-3)-(-1,7)-3\cdot3=$

$=9-(-1,7)-9=\cancel{9}+1,7-\cancel{9}=1,7$

δ) $\left(4^2-3\cdot1,2\right):(3\cdot0,6-2)^2=(16-3,6):(1,8-2)^2=12,4:(-0,2)^2=12,4:0,04=1.240:4=310$

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Προτεραιότητα πράξεων

Για να υπολογίσουμε την τιμή μιας αριθμητικής παράστασης, η σειρά με την οποία εκτελούμε τις πράξεις είναι η εξής:

1. υπολογίζουμε τις δυνάμεις,
2. κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις,
3. κάνουμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις.

Αν υπάρχουν παρενθέσεις, τότε κάνουμε τις πράξεις πρώτα μέσα σ' αυτές, με την ίδια προτεραιότητα.

Δ4. Τυποποιημένη μορφή μεγάλων αριθμών

Το φως στο κενό ταξιδεύει περίπου με 300.000 km ανά δευτερόλεπτο (sec). Αν κάτι κινούνταν με αυτή την ταχύτητα, θα ολοκλήρωνε έναν γύρο της Γης στον Ισημερινό σε 0,13 sec. Για να φτάσει το φως από τον Ήλιο στη Γη, χρειάζεται 8,3 λεπτά (min) περίπου. Για μεγάλες αποστάσεις μεταξύ αστεριών χρησιμοποιούμε ως μονάδα απόστασης το **έτος φωτός**, που ισοδυναμεί με 9.460.700.000.000.000 m. Τέτοιους μεγάλους αριθμούς μπορούμε να τους γράφουμε πιο εύκολα χρησιμοποιώντας δυνάμεις, π.χ. $946{,}07 \cdot 10^{13}$ ή $94{,}607 \cdot 10^{14}$ ή $9{,}4607 \cdot 10^{15}$. Την τελευταία μορφή την ονομάζουμε **τυποποιημένη**. Είναι το γινόμενο:

- ενός δεκαδικού αριθμού μεγαλύτερου ή ίσου του **1** και μικρότερου του **10**, και
- μιας δύναμης του **10**.

Γράψτε σε τυποποιημένη μορφή τους παρακάτω μεγάλους αριθμούς:

α) Ένας ενήλικας έχει περίπου 25.000.000.000.000 ερυθρά αιμοσφαίρια.

β) Η απόσταση Γης-Σελήνης είναι περίπου 384.400.000 m.

γ) Ένας άνθρωπος 70 κιλών με ύψος 1,72 έχει περίπου 37.200.000.000.000 κύτταρα στον οργανισμό του.

δ) Η μάζα του Ήλιου είναι περίπου 1.989.100.000.000.000.000.000.000.000.000 kg.

Συζητάμε

…για την τυποποιημένη μορφή

Για να μετατρέψουμε έναν μεγάλο αριθμό σε τυποποιημένη μορφή, θα πρέπει να μεταφέρουμε την υποδιαστολή μετά το πρώτο μη μηδενικό ψηφίο του αριθμού από τα αριστερά. Ο αριθμός των θέσεων που μεταφέρουμε την υποδιαστολή προς τα αριστερά είναι ο εκθέτης του 10.

Για παράδειγμα, η μάζα της Γης είναι:

$5.973.600.000.000.000.000.000.000$ kg.

24 ψηφία μετά από το 5

Τον αριθμό αυτό μπορούμε να τον γράψουμε:

$5{,}9736 \cdot 1.000.000.000.000.000.000.000.000$ ή $5{,}9736 \cdot 10^{24}$ kg.



Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Τυποποιημένη μορφή ρητού αριθμού

Ορισμός

Έναν πολύ μεγάλο αριθμό μπορούμε να τον γράψουμε σε τυποποιημένη μορφή, δηλαδή ως γινόμενο:

- ενός αριθμού α μεγαλύτερου ή ίσου με το 1 και μικρότερου του 10, και
- μιας δύναμης του 10.

Χαρακτηριστικά

Μπορούμε να τον γράψουμε στη μορφή $\alpha \cdot 10^{\nu}$, με $\alpha \geq 1$ και $\alpha < 10$ και ν θετικός φυσικός αριθμός. Μας είναι χρήσιμη στη γραφή των αριθμών, στη σύγκριση και στις πράξεις.

Παραδείγματα είναι

$563.000 = 5{,}63 \cdot 10^5$, $1.000 = 1 \cdot 10^3 = 10^3$

$-19.803.000.000.000 = -1{,}9803 \cdot 10^{13}$

Παραδείγματα δεν είναι

$21{,}1 \cdot 10^4$, $0{,}1051 \cdot 10^5$, $147 \cdot 10^{20}$

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. **Μια μπάλα πέφτει από ύψος 1,8 m. Σε κάθε αναπήδηση η μπάλα φτάνει στο 60% του προηγούμενου ύψους. Να χρησιμοποιήσετε δυνάμεις, για να βρείτε το ύψος της μπάλας μετά από την 3η αναπήδηση και στη συνέχεια να το υπολογίσετε.**

Απάντηση

Στην 1η αναπήδηση φτάνει σε ύψος $60\% \cdot 1{,}8 = 0{,}6 \cdot 1{,}8$ m.

Στη 2η αναπήδηση φτάνει σε ύψος $60\% \cdot (0{,}6 \cdot 1{,}8) = 0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 1{,}8 = 0{,}6^2 \cdot 1{,}8$ m.

Όμοια, στην 3η αναπήδηση φτάνει σε ύψος $0{,}6^3 \cdot 1{,}8 = 0{,}216 \cdot 1{,}8 = 0{,}3888 \cong 39$ cm.

2. **Ο Δίας, που είναι ένας γίγαντας αερίων, έχει όγκο 1.431.300.000.000.000 km³, 1.321 φορές μεγαλύτερο όγκο από τον όγκο της Γης. Γράψτε τον όγκο του Δία σε τυποποιημένη μορφή.**



Απάντηση

$1.431.300.000.000.000 = 1{,}4313 \cdot 1.000.000.000.000.000 = 1{,}4313 \cdot 10^{15}$ km³

3. **Αν ο α είναι θετικός ρητός και ο β αρνητικός ρητός, βρείτε το πρόσημο του γινομένου $-(-17)^7 \alpha^{13} \beta^{23}$.**

Απάντηση

Το μείον στην αρχή είναι ένας αρνητικός παράγοντας. Το $(-17)^7$ είναι 7 αρνητικοί παράγοντες. Και το β^{23} είναι ακόμα 23 αρνητικοί παράγοντες. Δηλαδή συνολικά οι αρνητικοί παράγοντες είναι $1 + 7 + 23 = 31$, άρα το γινόμενο είναι αρνητικός αριθμός.

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Να γράψετε πιο σύντομα τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}5$

β) $5{,}9 \cdot 5{,}9 \cdot 5{,}9$

γ) $\frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7}$

δ) $\left(-\frac{5}{8}\right) \cdot \left(-\frac{5}{8}\right) \cdot \left(-\frac{5}{8}\right) \cdot \left(-\frac{5}{8}\right) \cdot \left(-\frac{5}{8}\right)$

ε) $1{,}2 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}2 \cdot 7{,}3 \cdot 7{,}3 \cdot 7{,}3$

2. Ο Έκτορας υπολόγισε τέσσερις δυνάμεις. Έκανε κάπου λάθος; Αν ναι, διορθώστε το.

$-2^2 = -4$, $(-1{,}1)^2 = 2{,}2$

$1{,}01^2 = 1{,}0201$

$(-10)^3 = 1000$

3. Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς είναι η δύναμη $0{,}2^3$;

α) 0,6 **β)** 0,8 **γ)** 0,08 **δ)** 0,008

4. Η Κατερίνα ισχυρίζεται ότι όλες οι παρακάτω δυνάμεις είναι θετικοί αριθμοί:

$(-2)^4$, $(-7)^8$, $(-0{,}1)^{16}$, $(-2{,}67)^9$, $\left(-0{,}3\bar{5}\right)^8$

Έχει δίκιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

5. Ποια είναι η τιμή της παράστασης $(-2)+(-5,5):(-1)$;

α) 7,5 **β)** −7,5 **γ)** 3,5

6. Ποια είναι η τιμή της παράστασης $-0,12+(-0,1)^2$;

α) 0 **β)** −0,11 **γ)** −1,1

7. Να υπολογίσετε την παράσταση $(-5,35+1,35)^2$.

8. Ποια ή ποιες από τις παρακάτω παραστάσεις δεν είναι σε τυποποιημένη μορφή;

α) $1,18\cdot10^{20}$ **β)** $11,4\cdot10^{13}$

γ) $0,18\cdot10^{17}$ **δ)** $9,9\cdot10^{8}$

Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

9. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις:

α) 3^2 **β)** $(-3)^2$ **γ)** 4^3 **δ)** $1^{5.027}$

ε) $1,2^3$ **στ)** $\left(\frac{2}{3}\right)^3$ **ζ)** $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$

10. Να γράψετε πιο σύντομα τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha$, **β)** $x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x$

γ) $x\cdot x\cdot x\cdot y\cdot y\cdot y\cdot y$ **δ)** $\alpha\cdot\beta\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot y\cdot y\cdot\alpha$

11. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις:

α) $(-1)^5$ **β)** $(-1)^8$ **γ)** $(-1)^7$ **δ)** $(-1)^{13}$

ε) $(-1)^{200}$ **στ)** $(-1)^{569}$ **ζ)** $(-1)^{1.654}$ **η)** $(-1)^{2.633}$

12. Αν ο x είναι αρνητικός ρητός και ο y θετικός ρητός, να βρείτε το πρόσημο των παρακάτω παραστάσεων:

α) x^4 **β)** y^3 **γ)** $(-y)^5$

δ) x^9y^{15} **ε)** $-(-2)^5xy$

13. Αν ο μ είναι θετικός άρτιος αριθμός και ο ν θετικός περιττός αριθμός, να υπολογίσετε τις δυνάμεις:

α) $(-1)^{\mu}$ **β)** $(-1)^{\nu}$ **γ)** $(-1)^{\mu\nu}$

14. Αν ο μ είναι θετικός άρτιος αριθμός και ο ν θετικός περιττός αριθμός, να βρείτε το πρόσημο των παρακάτω παραστάσεων:

α) $(-2)^{\mu}$ **β)** $(-3)^{\nu}$ **γ)** $-(-5,8)^{\mu}\cdot(-0,01)^{\nu}$

15. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $-2^2-(-8,4)\cdot(-10)$ **β)** $-(-4,2):(-2)-(-3)^2$

γ) $1,7^2-(-2,1)\cdot7,2$ **δ)** $\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{5}$

ε) $-\left(\frac{1}{2}\right)^3:\left(-\frac{1}{6}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)^4$

16. Να μετατρέψετε τις παρακάτω προσεγγιστικές μετρήσεις σε τυποποιημένη μορφή. Η Γη:

α) έχει ηλικία 4.500.000.000 χρόνια,

β) έχει έκταση 148.900.000 km^2,

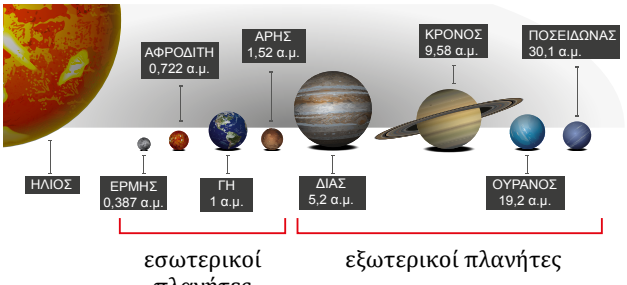
γ) απέχει από τον Ήλιο 148.900.000 km^2.

17. **α)** Να γράψετε τους αριθμούς που είναι γραμμένοι σε τυποποιημένη μορφή ως μεγάλους φυσικούς αριθμούς:

i) Τις αποστάσεις στο ηλιακό σύστημα οι αστρονόμοι τις μετρούν με την αστρονομική μονάδα (α.μ.). Η α.μ. είναι η μέση απόσταση του Ήλιου από τη Γη και είναι περίπου $1,5\cdot10^8$ km.

ii) Ένα έτος φωτός (η απόσταση που διανύει το φως σε ένα έτος) ισοδυναμεί με $9,4607\cdot10^{12}$ km.

β) Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζονται οι πλανήτες του ηλιακού συστήματος και η απόστασή τους από τον Ήλιο σε αστρονομικές μονάδες. Να υπολογίσετε την απόσταση του Ποσειδώνα από τον Ήλιο σε km και να τη γράψετε σε τυποποιημένη μορφή.



Αποστάσεις στο Σύμπαν

Ανακεφαλαίωση

Ρητοί αριθμοί

Ερωτήσεις – ασκήσεις – προβλήματα

1. Ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι ρητοί αλλά όχι ακέραιοι;

$$-\frac{3}{7} \quad 11 \quad 0{,}012 \quad 100 \quad -4 \quad 0 \quad 0{,}\overline{3} \quad -\frac{15}{5}$$

2. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ).

α) Η απόλυτη τιμή κάθε ρητού αριθμού είναι θετικός αριθμός. Σ Λ

β) Κάθε ρητός αριθμός είναι ακέραιος. Σ Λ

γ) Κάθε φυσικός αριθμός είναι ρητός. Σ Λ

δ) Ανάμεσα στους αριθμούς $-2{,}202$ και $-2{,}201$ δεν υπάρχουν άλλοι ρητοί αριθμοί. Σ Λ

ε) Ο αριθμός $-1{,}\overline{23}$ είναι ο $1{,}23123123123123123\ldots$ Σ Λ

3. Να γράψετε τους παρακάτω κλασματικούς αριθμούς ως δεκαδικούς με πεπερασμένο αριθμό ψηφίων ή περιοδικούς δεκαδικούς:

α) $-\frac{13}{4}$ **β)** $\frac{7}{3}$ **γ)** $-\frac{24}{11}$

4. Να συμπληρώσετε τα κενά με κατάλληλους αριθμούς:

α) $2{,}7 < ____ < 2{,}8$

β) $-10{,}2 < ____ < -10{,}1$

γ) $-8{,}373 < ____ < -8{,}372$

5. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $(-2{,}4)+1{,}3$ **β)** $(-10{,}52)-(-8)$

γ) $1{,}4+\left(-\frac{7}{5}\right)$ **δ)** $0{,}018+(-0{,}02)$

ε) $\left(-\frac{4}{7}\right)+\left(-\frac{10}{21}\right)$

στ) $-\left[-(+2{,}1)\right]-(+2{,}9)+(-0{,}02)$

6. Χωρίς να κάνετε τις πράξεις, συμπληρώστε αν το αποτέλεσμα σε κάθε περίπτωση είναι θετικός αριθμός (Θ), αρνητικός (Α) ή μηδέν (0).

α) $-5{,}7\cdot 3{,}5$ _____ **β)** $\left(-\frac{1}{2}\right):\frac{2}{3}$ _____

γ) $0:(-3{,}2)$ _____ **δ)** $\frac{5}{8}:\left(-\frac{11}{7}\right)$ _____

7. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $0{,}3\cdot(-3{,}2)$ **β)** $-10:(-0{,}1)$

γ) $-0{,}49:0{,}007$ **δ)** $\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{2}{5}$

ε) $\left(-\frac{4}{7}\right)\cdot\frac{21}{12}$ **στ)** $\frac{35}{18}:\left(-\frac{40}{21}\right)$

8. Πόσα σακουλάκια των 3,75 γραμμαρίων θα γεμίσετε με 562,5 γραμμάρια ζάχαρης;

9. Να επιλέξετε την τιμή της παράστασης $-5:(2{,}5-2)$.

α) -3 **β)** 10 **γ)** -10

10. Να γράψετε σε πιο σύντομη μορφή τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $1{,}2+1{,}2+1{,}2$ **β)** $0{,}7\cdot 0{,}7\cdot 0{,}7$

γ) $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$

δ) $\left(-\frac{3}{7}\right)\cdot\left(-\frac{3}{7}\right)\cdot\left(-\frac{3}{7}\right)\cdot\left(-\frac{3}{7}\right)\cdot\left(-\frac{3}{7}\right)\cdot\left(-\frac{3}{7}\right)$

ε) $3{,}2\cdot 3{,}2\cdot 4{,}7\cdot 4{,}7\cdot 3{,}2\cdot 3{,}2\cdot 4{,}7$

11. Να μετατρέψετε τις παρακάτω προσεγγιστικές μετρήσεις σε τυποποιημένη μορφή.

α) Ο πλανήτης Ερμής έχει ηλικία 4.500.000.000 χρόνια.

β) Ο πλανήτης Ερμής έχει έκταση $74.800.000\ \text{km}^2$.

γ) Η κοντινότερη απόσταση του Ερμή από τον Ήλιο είναι 46.000.000 km.

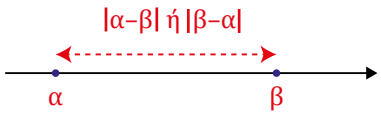
12. Να υπολογίσετε την παράσταση $\dfrac{-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}{\left(\frac{3}{4}+\frac{11}{-8}\right)\cdot\frac{3}{5}}$.

13. Να γράψετε έναν περιοδικό δεκαδικό αριθμό που να βρίσκεται ανάμεσα στους αριθμούς $-\frac{4}{3}$ και $-\frac{5}{4}$.

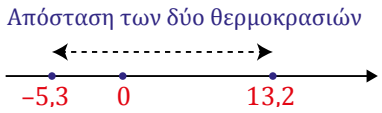
14. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $-3^2-2{,}1\cdot(-10)$ **β)** $-(-6{,}6):(-3)-(-2)^3$

15. Η απόσταση ανάμεσα σε δύο αριθμούς α και β στην αριθμογραμμή είναι η απόλυτη διαφορά των δύο αριθμών $|\alpha-\beta|$.



α) Οι θερμοκρασίες μια μέρα στη Φλώρινα, στις 4:00 π.μ. και στις 4:00 μ.μ., σημειώνονται πάνω στην αριθμογραμμή. Ποια είναι η απόσταση των αριθμών που αντιστοιχούν στις δύο μετρήσεις;



β) Να βρείτε τις αποστάσεις των παρακάτω αριθμών στην αριθμογραμμή.

i) -45 και -13 **ii)** $-15{,}8$ και $11{,}23$

iii) $-2\frac{1}{4}$ και $11\frac{1}{2}$

γ) Ένα δελφίνι βρίσκεται 2,4 m πάνω από τη θάλασσα. Μετά από 3 λεπτά βρίσκεται 48,3 m κάτω από το νερό. Ποια είναι η απόσταση κατακόρυφα αυτών των δύο θέσεων του δελφινιού;

16. Να υπολογίσετε την παράσταση $|\alpha-\beta|-|\gamma|$ για τις τιμές $\alpha=2{,}3$, $\beta=-4$ και $\gamma=-1{,}7$.

17. Η μέγιστη θερμοκρασία κάθε ημέρας σε μία εβδομάδα ήταν: 2,4 −0,8 2,8 4 −2,3 −4,2 −1,2 Ποιος είναι ο μέσος όρος των μέγιστων θερμοκρασιών αυτή την εβδομάδα;

18. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $\dfrac{-\frac{12}{21}}{\frac{-16}{15}}$ **β)** $\dfrac{-5}{-\frac{25}{3}}$ **γ)** $\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}\cdot\frac{25}{8}}$ **δ)** $\dfrac{-\frac{5}{6}-\frac{1}{4}}{-\frac{1}{4}+\frac{5}{12}}$

19. Η Ειρήνη είχε 50 € στην κάρτα της και αγόρασε 3 στιλό, 2 μολύβια, 3 ξύστρες, ένα μπλοκ ζωγραφικής, 10 τετράδια και 2 φακέλους. Τα στιλό κοστίζουν 1,6 €, τα μολύβια 0,38 €, οι ξύστρες 1,4 €, τα μπλοκ ζωγραφικής 2,49 €, τα τετράδια 0,9 € και οι φάκελοι 0,85 €.

α) Πόσα χρήματα έμειναν στην κάρτα;

β) Τι ποσοστό των αρχικών χρημάτων έχει ξοδέψει;

Συνδέσεις και επεκτάσεις

20. Για δύο ομόσημους αριθμούς α και β ισχύει ότι $\alpha<\beta$ και $|\alpha|>|\beta|$. Τι συμπέρασμα βγάζετε για τους αριθμούς αυτούς;

21. Να υπολογίσετε την παράσταση:

$$\frac{15}{16}+\left(-\frac{14}{16}\right)+\frac{13}{16}+\left(-\frac{12}{16}\right)+\ldots+\frac{3}{16}+\left(-\frac{2}{16}\right)+\frac{1}{16}$$

22. Ποιον αριθμό πρέπει να θέσουμε στο κενό, για να ισχύει η ισότητα $2{,}4+\dfrac{-0{,}12}{\square}=3$;

23. Να βρείτε δύο κλάσματα που το γινόμενό τους να είναι ανάμεσα στο 0 και το 1 και το άθροισμά τους να είναι αρνητικός αριθμός.

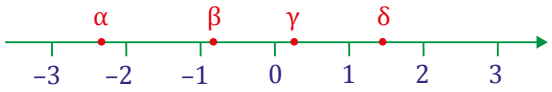
24. Να βρείτε τους άγνωστους ρητούς αριθμούς x:

α) $|x| = 2,8$ **β)** $|x| = 0$ **γ)** $|x| = -\frac{2}{3}$

Μπορείτε να γενικεύσετε για τις λύσεις των εξισώσεων της μορφής $|x| = \alpha$, με α ρητό;

25. Η σχέση $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$ ισχύει στους ρητούς αριθμούς; Αν δεν ισχύει πάντα, εξετάστε πότε ισχύει και πότε όχι.

26. Δίνονται τέσσερις αριθμοί α, β, γ και δ πάνω στην αριθμογραμμή.



α) Να επιλέξετε από τα επόμενα αθροίσματα αυτό με τη μεγαλύτερη τιμή:

i) $\alpha + \beta$ **ii)** $\alpha + \delta$

iii) $\beta + \gamma$ **iv)** $\gamma + \delta$

β) Να επιλέξετε από τις επόμενες απόλυτες τιμές αυτή με τη μεγαλύτερη τιμή:

i) $|\alpha + \beta|$ **ii)** $|\alpha + \delta|$

iii) $|\beta + \gamma|$ **iv)** $|\gamma + \delta|$

γ) Να επιλέξετε από τις επόμενες απόλυτες τιμές αυτή με τη μεγαλύτερη τιμή:

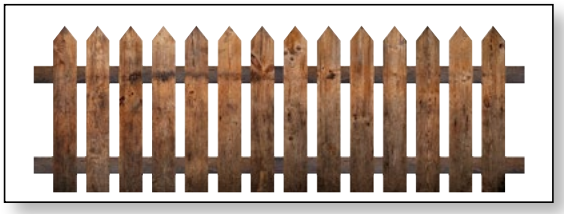
i) $|\alpha - \beta|$ **ii)** $|\alpha - \delta|$

iii) $|\beta - \gamma|$ **iv)** $|\gamma - \delta|$

Πότε ένα κλάσμα γράφεται ως περιοδικός δεκαδικός αριθμός;

Ομαδική εργασία

27. Θέλουμε να κατασκευάσουμε έναν φράκτη όπως αυτός της εικόνας (όλες οι σανίδες είναι ίδιες, τα κενά ανάμεσά τους είναι ίσα, ενώ στις άκρες έχει διπλό κενό). Το μήκος του φράκτη είναι 6,39 m. Η κάθε σανίδα που θα χρησιμοποιήσουμε έχει πλάτος 0,15 m και έχουμε στη διάθεσή μας 35 τέτοιες σανίδες. Πόσο πρέπει να είναι το κενό ανάμεσα στις σανίδες;



Συνεργαστείτε σε ομάδες και παρουσιάστε στην τάξη τις ιδέες σας για τη λύση του προβλήματος.

Ταξινομούμε ρητούς αριθμούς

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ 4:

Κανονικότητες

Κανονικότητες ή μοτίβα αναγνωρίζουμε σε πολλές καταστάσεις γύρω μας.

Συχνά σχεδιάζουμε μοτίβα για να επικοινωνήσουμε ή να οργανώσουμε τη ζωή μας.

Η διερεύνηση με μοτίβα μάς βοηθά να απαντήσουμε απλά και πιο σύνθετα ερωτήματα:

- Η πρώτη ημέρα του μήνα είναι Τρίτη. Η 20ή ημέρα του μήνα ποια μέρα της εβδομάδας θα είναι;
- Πόσες κονσέρβες μπορούν να τοποθετηθούν σε έναν σωρό, σε σχήμα «πυραμίδας», που θέλουμε να φτάσει σε συγκεκριμένο ύψος;

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε να αναγνωρίζουμε κανονικότητες, να τις επεκτείνουμε, να τις συμπληρώνουμε και να δημιουργούμε δικές μας. Θα μάθουμε επίσης να τις αναπαριστούμε με αριθμούς, σχήματα, πίνακες τιμών και σημεία, να μεταβαίνουμε από τη μία αναπαράσταση στην άλλη και να λύνουμε προβλήματα με αυτές.

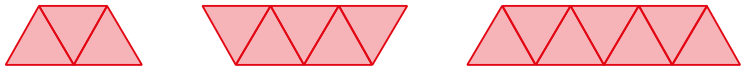
ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΕΝΟΤΗΤΕΣ:

4.1 Κανονικότητες και φυσικοί αριθμοί
4.2 Κανονικότητες και αριθμητικά μοτίβα
4.3 Προβλήματα με κανονικότητες

4.1 Κανονικότητες και φυσικοί αριθμοί

Δ1. Πώς συνεχίζεται το μοτίβο;

Στην εικόνα φαίνονται τα πρώτα τρία από μια σειρά σχημάτων.



α) Από πόσα τρίγωνα αποτελείται το τέταρτο σχήμα;
β) Από πόσα τρίγωνα αποτελείται το δέκατο σχήμα;
γ) Να περιγράψετε το μοτίβο και να συζητήσετε τις περιγραφές σας στην τάξη.

Συζητάμε

...για κανονικότητες

Κανονικότητες αναγνωρίζουμε σε πολλές καταστάσεις γύρω μας, κυρίως σε μοτίβα. Βρίσκοντας τον κανόνα που ακολουθούν οι όροι ενός μοτίβου, μπορούμε να βρούμε τους επόμενους όρους του. Σε ένα μοτίβο με σωρούς από κονσέρβες, ο πρώτος όρος του μοτίβου (δηλαδή πρώτος σωρός) έχει 1 κονσέρβα, ο δεύτερος 3 και ο τρίτος 6 κονσέρβες.

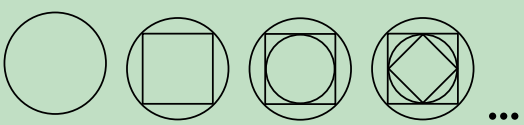


Παρατηρούμε ότι ο τρίτος όρος σχηματίζεται τοποθετώντας 3 επιπλέον κονσέρβες κάτω από τις υπόλοιπες. Άρα ο τέταρτος όρος θα έχει 4 επιπλέον, συνολικά $6+4=10$.
Πόσες κονσέρβες θα έχει ο όγδοος όρος;
Θα ξεκινήσουμε υπολογίζοντας τις κονσέρβες όλων των προηγούμενων όρων.
Ο πέμπτος όρος χρειάζεται 5 επιπλέον κονσέρβες, άρα $10+5=15$.
Ο έκτος όρος έχει $15+6=21$, ο έβδομος $21+7=28$ και ο όγδοος $28+8=36$ κονσέρβες.
Το μοτίβο με τις κονσέρβες αντιστοιχεί στο αντίστοιχο **αριθμητικό** μοτίβο: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, ...
Παρατηρούμε ότι οι όροι του μοτίβου μπορεί να προκύψουν και με άλλο τρόπο:
Πρώτος όρος: 1
Δεύτερος όρος: $1+2=3$
Τρίτος όρος: $1+2+3=6$
Τέταρτος όρος: $1+2+3+4=10$
Πέμπτος όρος: $1+2+3+4+5=15$ ...

Μπορείτε να σκεφτείτε άλλο τρόπο για να προκύψουν οι όροι του μοτίβου;

Μοτίβα με κονσέρβες

Υπάρχουν και μοτίβα που δεν περιγράφονται με έναν αριθμητικό κανόνα, όπως το παρακάτω:

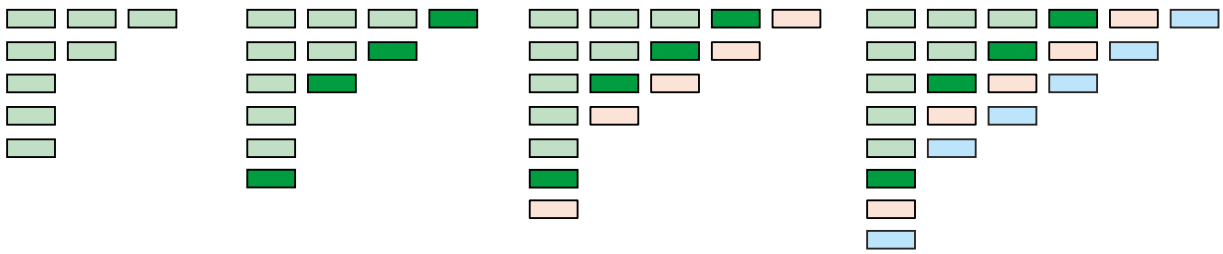


Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Κανονικότητες μπορούμε να αναγνωρίσουμε συνήθως σε μοτίβα σχημάτων ή αριθμών, περιγράφοντάς τα με έναν κανόνα. Η **τάξη** του όρου του μοτίβου, δηλαδή η θέση του στη σειρά, μπορεί να μας βοηθήσει να τον βρούμε.	Ας σκεφτούμε το αριθμητικό μοτίβο 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, ... Δύο κανόνες για να το περιγράψουμε είναι οι εξής: • Για τον δεύτερο όρο προσθέτω 2 στον πρώτο, για τον τρίτο προσθέτω 3 στον δεύτερο κτλ. • Ο δεύτερος όρος είναι $1+2$, ο τρίτος είναι $1+2+3$ κτλ.

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. **Στο σχήμα φαίνονται οι τέσσερις πρώτοι όροι ενός μοτίβου.**



Να γράψετε το αντίστοιχο αριθμητικό μοτίβο.

Απάντηση

Για τους όρους του μοτίβου που βλέπουμε παρατηρούμε ότι:

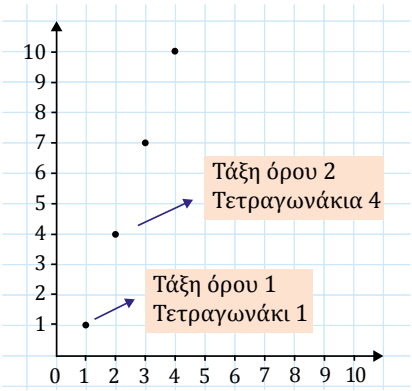
Τάξη	Κουτάκια	Προσθέτουμε	Επόμενος όρος
Πρώτος	8	4	$8+4=12$
Δεύτερος	12	5	$12+5=17$
Τρίτος	17	6	$17+6=23$
Τέταρτος	23		

Άρα οι τέσσερις πρώτοι όροι του αντίστοιχου αριθμητικού μοτίβου είναι 8, 12, 17, 23. Από τη στήλη «Προσθέτουμε» μπορούμε να καταλάβουμε πώς θα συνεχίσουμε το μοτίβο: αυξάνοντας κατά 1 τον αριθμό που προσθέτουμε κάθε φορά.

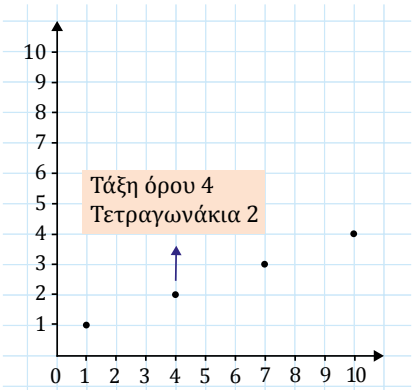
Τέταρτος	23	7	$23+7=30$
Πέμπτος	30	8	$30+8=38$
...	...	...	...

Επομένως το αντίστοιχο αριθμητικό μοτίβο είναι 8, 12, 17, 23, 30, 38, ...

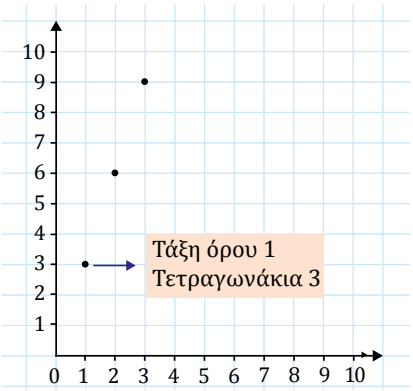
2. **Τα παρακάτω διαγράμματα αντιστοιχούν σε τρία μοτίβα που αποτελούνται από τετραγωνάκια. Η τεταγμένη (οριζόντιος άξονας) αντιστοιχεί στην τάξη, ενώ η τετμημένη (κατακόρυφος άξονας) στο πλήθος των τετραγώνων του όρου. Ποιο από τα διαγράμματα αντιστοιχεί στο αριθμητικό μοτίβο 1, 4, 7, ...;**



Διάγραμμα 1



Διάγραμμα 2



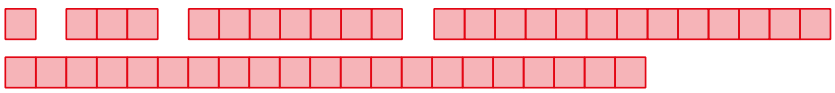
Διάγραμμα 3

Απάντηση

Όπως φαίνεται στο διάγραμμα 1, ο πρώτος όρος του μοτίβου έχει 1 τετραγωνάκι, ο δεύτερος έχει 4 και ο τρίτος 7, κάτι που ταιριάζει με το αριθμητικό μοτίβο 1, 4, 7, ...
Αντίστοιχα, τα διαγράμματα 2 και 3 δεν ταιριάζουν με το μοτίβο 1, 4, 7, ...

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

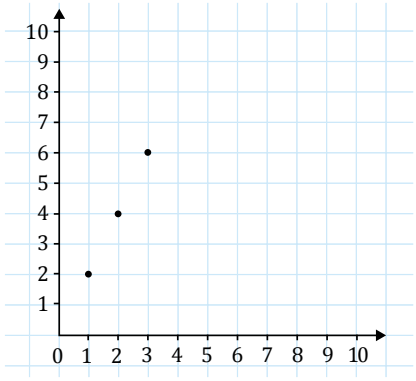
1. Δίνονται οι πέντε πρώτοι όροι ενός μοτίβου:



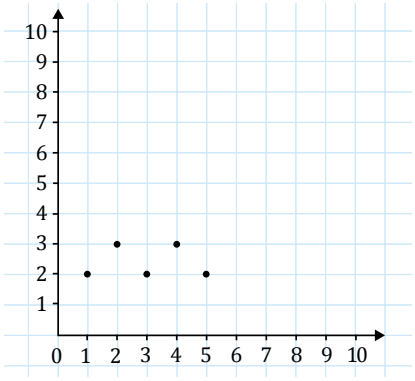
α) Ποιος είναι ο 3ος όρος του μοτίβου;
β) Ποιος είναι ο 3ος όρος του αντίστοιχου αριθμητικού μοτίβου;

2. Ποιο από τα παρακάτω αριθμητικά μοτίβα αντιστοιχεί στο μοτίβο της άσκησης 1;
α) 1, 3, 5, 7, 9 **β)** 1, 3, 7, 13, 21 **γ)** 1, 3, 7, 11, 15 **δ)** 1, 3, 7, 15, 31

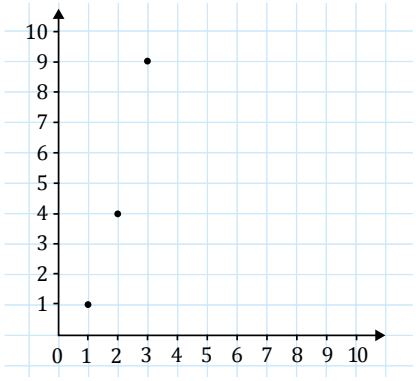
3. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται τρία μοτίβα, ένα σε κάθε διάγραμμα. Να γράψετε με τη σειρά τους όρους τάξης 1, 2 και 3 κάθε μοτίβου.



(α)



(β)



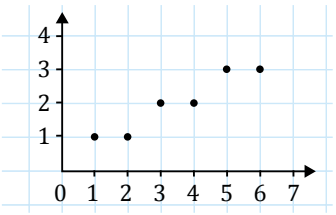
(γ)

4. Να παρουσιάσετε σε ένα διάγραμμα τους όρους του μοτίβου 2, 5, 8, 11, 14, ...

5. Στο διπλανό διάγραμμα παριστάνονται όροι ενός αριθμητικού μοτίβου.

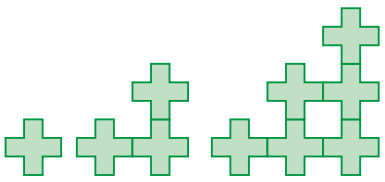
α) Πόσοι όροι παριστάνονται;

β) Να γράψετε τους όρους του αριθμητικού μοτίβου που παριστάνονται στο διάγραμμα και την τάξη κάθε όρου.



Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

6. Στην εικόνα φαίνονται οι τρεις πρώτοι όροι ενός μοτίβου. Να γράψετε το αντίστοιχο αριθμητικό μοτίβο και να υπολογίσετε τον τέταρτο και τον πέμπτο όρο του.



7. Το αριθμητικό μοτίβο 1, 2, 6, 24, 120, ... ακολουθεί τον εξής κανόνα: ο πρώτος όρος είναι 1, ο δεύτερος είναι $1 \cdot 2$, ο τρίτος $1 \cdot 2 \cdot 3$, ο τέταρτος $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$.

α) Πώς θα γράφαμε τον πέμπτο όρο αντίστοιχα;

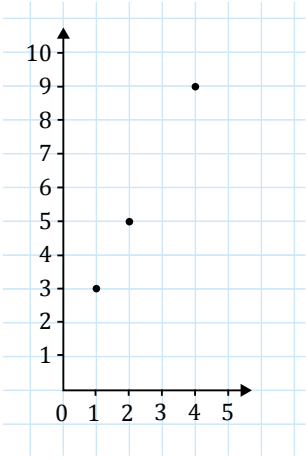
β) Να υπολογίσετε τον έκτο όρο του μοτίβου.

8. Η σημερινή προπόνηση ενός αθλητή είχε εναλλάξ 5 λεπτά τρέξιμο και 2,5 λεπτά περπάτημα σε τέσσερις επαναλήψεις, άρα συνολική διάρκεια 30 λεπτά. Χτες ο αθλητής έκανε τέσσερις επαναλήψεις από 4 λεπτά τρέξιμο και 2 λεπτά περπάτημα εναλλάξ. Αύριο θα ακολουθήσει παρόμοιο πρόγραμμα, ξεκινώντας με 6 λεπτά τρέξιμο. Ποια θα είναι η συνολική διάρκεια της προπόνησής του αύριο;

9. Στο διάγραμμα παριστάνονται ο πρώτος, ο δεύτερος και ο τέταρτος όρος ενός μοτίβου.

α) Να γράψετε τους δύο πρώτους όρους.

β) Να βρείτε τον τρίτο όρο και να τον παραστήσετε στο διάγραμμα.



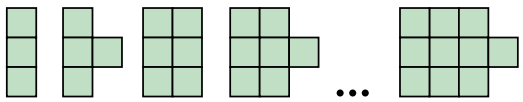
10. Να βρείτε τον όρο που λείπει σε καθένα από τα παρακάτω μοτίβα:

α) 1, 10, 100, ..., 10.000, 100.000

β) 11, 9, ..., 5, 3

γ) ..., 5, 9, 13, 17

δ)



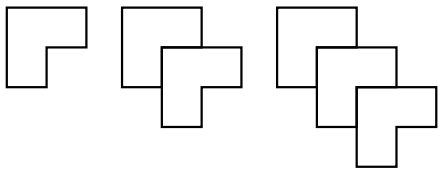
Οι αριθμοί Fibonacci

4.2 Κανονικότητες και αριθμητικά μοτίβα

Δ1. Η κατασκευή της Κυριακής

Η Κυριακή φτιάχνει μια κατασκευή. Στο σχήμα φαίνονται τα τρία πρώτα βήματα της κατασκευής, η οποία αποτελείται από σχήματα μορφής Γ, εμβαδού 3 cm^2. Πόσο είναι το εμβαδόν της κατασκευής μετά από 10 βήματα;

Συζητήστε στην ομάδα σας και παρουσιάστε τα αποτελέσματά σας στην τάξη.



Συζητάμε

...για αριθμητικά μοτίβα

Στο μοτίβο $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$, 2, ... όλοι οι όροι είναι πολλαπλάσια του $\frac{1}{2}$. Κάθε όρος προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε την τάξη του με το $\frac{1}{2}$. Π.χ. ο πρώτος όρος είναι $\frac{1}{2}\cdot 1$, ο δεύτερος είναι $\frac{1}{2}\cdot 2 = 1$ κτλ.

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Συχνά μπορούμε να αντιστοιχίσουμε μια κανονικότητα με ένα αριθμητικό μοτίβο. Αυτό μπορεί να μας βοηθήσει να υπολογίσουμε με πράξεις οποιονδήποτε όρο του μοτίβου, αν γνωρίζουμε την τάξη του.

Για παράδειγμα, αν κάθε όρος ενός μοτίβου είναι το γινόμενο της τάξης του με το $\frac{2}{3}$, τότε τον όρο τάξης ν μπορούμε να τον γράψουμε $\frac{2}{3}\cdot \nu$.

Έτσι ο 10ος όρος του μοτίβου είναι $\frac{2}{3}\cdot 10 = \frac{20}{3}$.

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. **Να γράψετε τον 100ό όρο του μοτίβου 0,25, 0,5, 0,75, 1, ...**

Απάντηση

Κάθε όρος του μοτίβου προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε την τάξη του με 0,25.
Για τον πρώτο όρο είναι $1\cdot 0{,}25 = 0{,}25$, για τον δεύτερο $2\cdot 0{,}25 = 0{,}5$ κτλ.
Άρα για τον 100ό όρο είναι $100\cdot 0{,}25 = 25$.

Γενικά, αν ν είναι η τάξη του όρου, τότε οποιοσδήποτε όρος του μοτίβου είναι:

$\nu\cdot 0{,}25$ ή $0{,}25\cdot \nu$

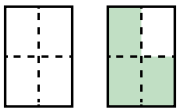
Την παράσταση $\nu\cdot 0{,}25$ ή $0{,}25\cdot \nu$ την ονομάζουμε **γενικό όρο** του παραπάνω μοτίβου. Με τον γενικό όρο ενός μοτίβου μπορούμε να υπολογίσουμε τον όρο οποιασδήποτε τάξης.

2. **α)** **Από πόσα μέρη του ορθογωνίου στα αριστερά αποτελείται ο 13ος όρος του παρακάτω μοτίβου;**
β) **Να γράψετε τους 13 πρώτους όρους του αντίστοιχου αριθμητικού μοτίβου.**
γ) **Να περιγράψετε λεκτικά τον γενικό όρο του αριθμητικού μοτίβου.**



1ος 2ος 3ος 4ος 5ος 6ος

Απάντηση



α) Ο 1ος όρος του μοτίβου αποτελείται από τα $\frac{3}{4}$ του ορθογωνίου.

Ο 2ος όρος αντιστοιχεί στο διπλάσιο, δηλαδή $2\cdot\frac{3}{4}=\frac{6}{4}=1\frac{1}{2}$, άρα 1 ορθογώνιο και μισό.

Ο 3ος όρος αντιστοιχεί στο τριπλάσιο, δηλαδή $3\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{4}=2\frac{1}{4}$, άρα 2 ορθογώνια και $\frac{1}{4}$ του ορθογωνίου.

Επομένως ο 13ος όρος είναι $13\cdot\frac{3}{4}=\frac{39}{4}=9\frac{3}{4}$, άρα 9 ορθογώνια και $\frac{3}{4}$ του ορθογωνίου.

Ο γενικός όρος τάξης ν του αντίστοιχου αριθμητικού μοτίβου είναι $\nu\cdot\frac{3}{4}$ ή $\frac{3}{4}\cdot\nu$.

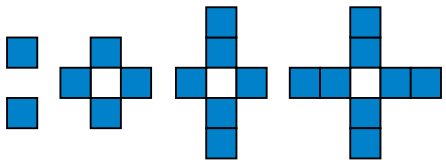
β) Το αντίστοιχο αριθμητικό μοτίβο είναι το $\frac{3}{4}, \frac{6}{4}, \frac{9}{4}, \ldots, \frac{39}{4}$.

γ) Περιγράφοντάς το με λόγια, ο κάθε όρος του μοτίβου είναι ίσος με το γινόμενο της τάξης του επί το $\frac{3}{4}$.

Μπορείτε να σχεδιάσετε τον 10ο όρο του μοτίβου;

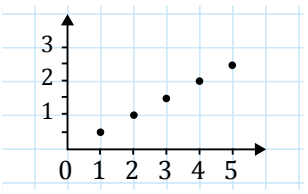
Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. **α)** Γιατί το αριθμητικό μοτίβο 2, 4, 6, 8, ... αντιστοιχεί στο παρακάτω μοτίβο σχημάτων;

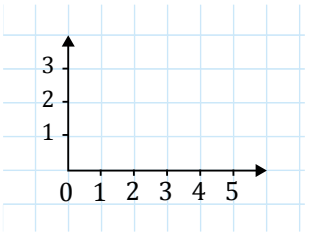


β) Να περιγράψετε πώς προκύπτει κάθε όρος του μοτίβου από τον προηγούμενο.

2. **α)** Να γράψετε ένα αριθμητικό μοτίβο που να αντιστοιχεί στο διπλανό διάγραμμα.



β) Να παραστήσετε με ένα διάγραμμα το μοτίβο:
i) 1, 5, 9, 13, ...,
ii) που κάθε όρος του είναι γινόμενο της τάξης του με 0,75,
iii) με πρώτο όρο 2 και διαφορά 2 μεταξύ των διαδοχικών όρων του.



3. Δίνεται το μοτίβο $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2, \ldots$

α) Ο επόμενος όρος είναι 3 ή $\frac{7}{3}$;

β) Να υπολογίσετε τη διαφορά μεταξύ των διαδοχικών όρων του μοτίβου.

4. Να υπολογίσετε τον 10ο όρο του μοτίβου με γενικό όρο:

α) $2 \cdot \nu + 1$ **β)** $\frac{1}{2} \cdot \nu$

Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

5. Να υπολογίσετε τους 3 πρώτους όρους καθενός από τα αριθμητικά μοτίβα με τους παρακάτω γενικούς όρους:

α) $1{,}7 \cdot \nu$ **β)** $\frac{1}{5} \cdot \nu$ **γ)** $2 \cdot \nu - 1$ **δ)** $3 \cdot \nu$

6. Ο Γιάννης αυξάνει κάθε ημέρα τον χρόνο που βαδίζει κατά 0,5 λεπτά. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ).

α) Μετά από 1 ημέρα βαδίζει 0,5 λεπτά παραπάνω. Σ Λ

β) Μετά από 2 ημέρες βαδίζει 2 λεπτά. Σ Λ

γ) ν ημέρες μετά από την πρώτη βαδίζει $0{,}5 \cdot \nu$ λεπτά παραπάνω. Σ Λ

Μοτίβο σχημάτων και αριθμών

Ειδικής μορφής μοτίβο

7. Ένα αριθμητικό μοτίβο έχει γενικό όρο $\nu \cdot \frac{4}{3}$.

α) Να υπολογίσετε τον πρώτο όρο του και τον 10ο όρο του.

β) Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών.

Τάξη όρου	2	3	4	5	6	15	
Όρος μοτίβου							40

8. Δίνεται το μοτίβο ..., 1, $\frac{3}{2}$, 2, $\frac{5}{2}$, ... Αν ο 1 είναι ο δεύτερος όρος του μοτίβου, τότε:

α) να υπολογίσετε τον πρώτο όρο του μοτίβου,

β) να βρείτε την τάξη του επόμενου όρου από το $\frac{5}{2}$ και να υπολογίσετε τον όρο αυτό,

γ) να γράψετε τον γενικό όρο του μοτίβου.

4.3 Προβλήματα με κανονικότητες

Δ1. Κόστος διαδρομής με ταξί

Το κόστος για μια διαδρομή με ταξί σε μια πόλη είναι 1,2 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο.

α) Ποια είναι η χρέωση για μια διαδρομή 12 χιλιομέτρων;

β) Να εκφράσετε, για ν χιλιόμετρα, το ποσό της χρέωσης με τη βοήθεια του ν. Συζητήστε τις απαντήσεις σας στην τάξη.

Συζητάμε

…για προβλήματα με κανονικότητες

Για να λύσουμε ένα πρόβλημα με κανονικότητες, μπορεί να μας φανεί χρήσιμο:

- να σκεφτούμε πώς από έναν όρο μεταβαίνουμε στον επόμενο,
- να βρούμε έναν κανόνα (ή γενικό τύπο),
- να σχεδιάσουμε ένα σχήμα ή έναν πίνακα τιμών.

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. Η Ράνια αποφάσισε να βάζει κάθε εβδομάδα στον καινούριο κουμπαρά της 1,5 ευρώ. Αν στον κουμπαρά δεν μπαίνουν άλλα χρήματα:

α) να υπολογίσετε πόσα χρήματα θα έχει ο κουμπαράς της σε 3 εβδομάδες,

β) να γράψετε τους όρους και τον γενικό όρο ενός μοτίβου που αντιστοιχεί στα χρήματα του κουμπαρά της Ράνιας μετά από 1, 2, 3, 4, 5 εβδομάδες,

γ) να υπολογίσετε σε πόσες εβδομάδες θα μπορεί να αγοράσει με τα χρήματα αυτά ένα δώρο αξίας 18,5 ευρώ για την αδερφή της.



Απάντηση

α) Ο κουμπαράς της θα έχει $3 \cdot 1{,}5 = 4{,}5$ ευρώ σε 3 εβδομάδες.

β) Μετά από 1 εβδομάδα ο κουμπαράς θα έχει $1 \cdot 1{,}5 = 1{,}5$ ευρώ, μετά από 2 εβδομάδες θα έχει $2 \cdot 1{,}5 = 3$ ευρώ, μετά από 3 θα έχει $3 \cdot 1{,}5$ ευρώ κτλ. Γενικά μετά από ν εβδομάδες θα έχει $\nu \cdot 1{,}5$ ή $1{,}5 \cdot \nu$ ευρώ.
Άρα το αντίστοιχο αριθμητικό μοτίβο είναι 1,5, 3, 4,5, 6, …, με γενικό όρο $1{,}5 \cdot \nu$.

γ) Διερευνούμε την τιμή του $1{,}5 \cdot \nu$ για διάφορες τιμές του ν (μέχρι $\nu = 4$ το έχουμε κάνει στο β ερώτημα):
Για $\nu = 5$ είναι $1{,}5 \cdot 5 = 7{,}5$.
…
Για $\nu = 10$ είναι $1{,}5 \cdot 10 = 15$.
Για $\nu = 11$ είναι $1{,}5 \cdot 11 = 16{,}5$.
Για $\nu = 12$ είναι $1{,}5 \cdot 12 = 18$.
Για $\nu = 13$ είναι $1{,}5 \cdot 13 = 19{,}5$.
Επομένως χρειάζονται 13 εβδομάδες, για να συγκεντρώσει στον κουμπαρά 19,5 ευρώ, ώστε να έχει 18,5 για το δώρο. Θα περισσέψει και 1 ευρώ.

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Μια επιχείρηση ενοικιαζόμενων δωματίων σε ένα νησί χρησιμοποιούσε κάθε ημέρα του Ιουνίου 2 φορές το πλυντήριο ρούχων. Ο ιδιοκτήτης διαπίστωσε ότι σε κάθε πλύση δαπανούσε 151,25 λίτρα νερό.



α) Να υπολογίσετε πόσα λίτρα νερό θα χρησιμοποιήσει σε 1, σε 2 και σε ν ημέρες του Ιουνίου.

β) Να γράψετε το αντίστοιχο αριθμητικό μοτίβο.

2. Το κόστος για μια διαδρομή με ταξί σε μια μικρή πόλη είναι 0,9 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο. Να γράψετε ένα αριθμητικό μοτίβο που ο 1ος όρος του να αντιστοιχεί στο κόστος διαδρομής 1 χιλιομέτρου, ο 2ος σε διαδρομή 2 χιλιομέτρων κτλ. Ποιος είναι και σε τι αντιστοιχεί ο γενικός όρος του μοτίβου;

Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

3. **α)** Σε ποιο αριθμητικό μοτίβο αντιστοιχεί το σχήμα με τις κονσέρβες;

β) Μπορούμε να έχουμε κάποιον όρο αυτού του μοτίβου με 10 κονσέρβες;

γ) Να γράψετε τον γενικό όρο του μοτίβου.



4. Σε ένα νησί του Αιγαίου, ένας επισκέπτης παρατήρησε ότι τα λεωφορεία για τον γιαλό ξεκινούν από την αφετηρία στις 12:05, 12:25, 13:00, 13:20, 13:55, 14:15, 14:50, 15:10, 15:45, 16:05, ...

α) Να περιγράψετε το μοτίβο που φαίνεται να ακολουθούν οι ώρες αναχώρησης.

β) Αν οι ώρες αναχώρησης και πριν τις 12:05 ακολουθούν το ίδιο μοτίβο, τι ώρα αναχώρησε από την αφετηρία το αμέσως προηγούμενο λεωφορείο από εκείνο που αναχώρησε στις 12:05 μ.μ.;

Ανακεφαλαίωση

Κανονικότητες

Ερωτήσεις – ασκήσεις – προβλήματα

1. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ).

α) Ο επόμενος όρος του μοτίβου 1, 5, 9, 13, 17, ... είναι ο 21. Σ Λ

β) Ο γενικός όρος του μοτίβου $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$, 2, ... είναι $\nu+\frac{1}{2}$. Σ Λ

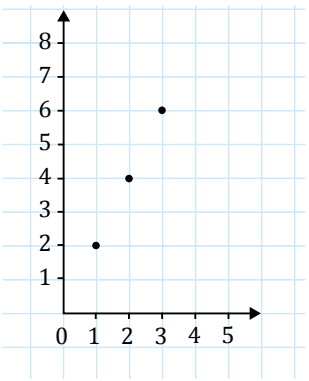
γ) Ο γενικός όρος του μοτίβου 0,4, 0,8, 1,2, 1,6, ... είναι $\nu\cdot 0{,}4$. Σ Λ

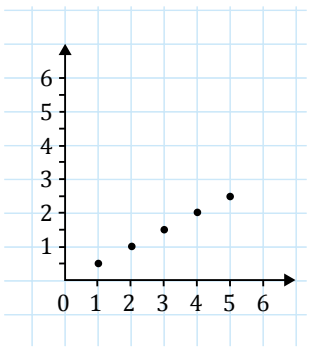
δ) Ο επόμενος όρος του παρακάτω μοτίβου έχει 14 τετράγωνα. Σ Λ



ε) Κάθε όρος του μοτίβου 3, 7, 10, 14, 17, 20, ... διαφέρει από τον επόμενο κατά 3. Σ Λ

2. Να συμπληρώσετε τα διαγράμματα με τον επόμενο όρο του μοτίβου σε κάθε περίπτωση.





3. Δίνεται ο παρακάτω πίνακας με όρους ενός μοτίβου.

Τάξη	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Όρος		3,6		7,2	9				

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

β) Να σχεδιάσετε σε ένα διάγραμμα τους 5 πρώτους όρους του μοτίβου.

γ) Ποιος από τους παρακάτω είναι ο γενικός όρος του μοτίβου;

i) $2\cdot\nu$ **ii)** $2\cdot\nu+1{,}8$

iii) $1{,}8\cdot\nu+2$ **iv)** $1{,}8\cdot\nu$

4. Να παραστήσετε σε διάγραμμα τους 5 πρώτους όρους του αριθμητικού μοτίβου που αντιστοιχεί στο παρακάτω:



Ποιος είναι ο γενικός όρος του μοτίβου;

5. **α)** Να συμπληρώσετε τον όρο που λείπει από κάθε μοτίβο:

i) ..., 5, 7,5, 10, ... (λείπει ο πρώτος όρος)

ii) $\frac{3}{5}$, ..., $\frac{9}{5}$, $\frac{12}{5}$, ... (λείπει ο δεύτερος όρος)

β) Να γράψετε τον γενικό όρο καθενός από τα παραπάνω μοτίβα.

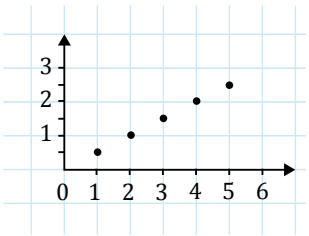
γ) Να παραστήσετε σε διάγραμμα καθένα από τα παραπάνω μοτίβα.

6. Το μοτίβο $\frac{3}{5}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{9}{5}$, $\frac{12}{5}$, ... έχει γενικό όρο $\nu\cdot\frac{3}{5}$. Ποιος είναι ο γενικός όρος των παρακάτω μοτίβων;

α) $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$, 2, $\frac{8}{3}$, $\frac{10}{3}$, ... **β)** 0,3, 0,6, 0,9, 1,2, ...

7. **α)** Να παραστήσετε τον επόμενο όρο του μοτίβου στο διάγραμμα.

β) Να γράψετε τους 10 πρώτους όρους του μοτίβου σε πίνακα τιμών.

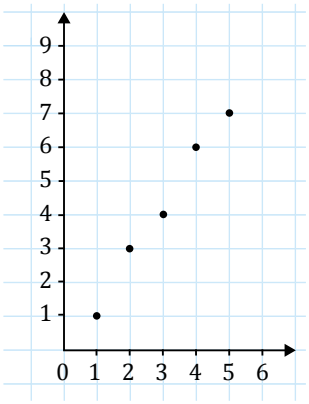


8. Οι υπεύθυνοι μιας αποθήκης τροφίμων θέλουν να τοποθετήσουν κονσέρβες τόνου σε σωρούς, όπως στο σχήμα, χωρίς κενά σε κάθε επίπεδο. Ένας σωρός με ύψος 4 κονσέρβες από πόσες κονσέρβες αποτελείται;



Συνδέσεις και επεκτάσεις

9. Στο διάγραμμα παριστάνονται οι πέντε πρώτοι όροι ενός αριθμητικού μοτίβου.



α) Να γράψετε τον όρο τάξης 6 του μοτίβου.

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Τάξη	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Όρος									

γ) Αλλάζοντας δύο από τους πέντε όρους του μοτίβου στο διάγραμμα, να κατασκευάσετε ένα μοτίβο με σταθερή διαφορά.

10. Η Χριστίνα γέμισε το ρεζερβουάρ του αυτοκινήτου της με καύσιμα, για να πάει στο χωριό της. Όταν έφτασε, κοίταξε να δει πόσα καύσιμα είχε καταναλώσει. Η ένδειξη φαίνεται στο σχήμα.



α) Τι μέρος ενός γεμάτου ρεζερβουάρ καταναλώσε;

β) Αν έχει ακριβώς την ίδια κατανάλωση καυσίμου κάθε φορά:

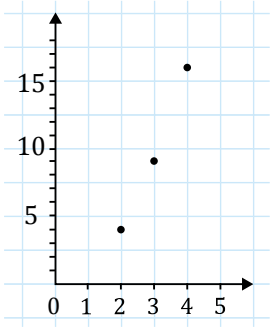
i) να υπολογίσετε πόσα γεμάτα ρεζερβουάρ θα χρειαζόταν, για να πάει και να γυρίσει από το χωριό,

ii) να υπολογίσετε πόσα καύσιμα χρειάζεται για τα ταξίδια της, αν όλο το καλοκαίρι σχεδιάζει να πάει 5 φορές στο χωριό,

iii) να γράψετε το αριθμητικό μοτίβο του οποίου κάθε όρος αντιστοιχεί στα καύσιμα που κατανάλωσε η Χριστίνα σε 1, 2, 3, ... ταξίδια από και προς το χωριό, καθώς και τον γενικό του όρο.

γ) Το ρεζερβουάρ του αυτοκινήτου της Χριστίνας χωράει 50 λίτρα καυσίμου. Η Χριστίνα δε θέλει να ξοδέψει πάνω από 850 ευρώ για τα ταξίδια της στο χωριό το καλοκαίρι. Με τιμή καυσίμου 1,8 ευρώ το λίτρο, πόσες φορές μπορεί να πάει στο χωριό και να γυρίσει;

11. Στο διάγραμμα παριστάνονται ο δεύτερος, ο τρίτος και ο τέταρτος όρος ενός μοτίβου. Επίσης, ο παρακάτω πίνακας αντιστοιχεί στο ίδιο μοτίβο.



Τάξη	5	6	7
Όρος	25	36	49

Να παραστήσετε τον πρώτο όρο του μοτίβου στο ίδιο διάγραμμα.

Κρυπτογραφία

Κατασκευάζουμε μοτίβα

Αναγνωρίζουμε μοτίβα

Διερευνούμε μοτίβα: επεκτάσεις



ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ 5:

Αλγεβρικές παραστάσεις

$x+3y$

$(3+x)(\alpha+\beta)$

Αν σε μια μαγειρική συνταγή χρησιμοποιούμε τριπλάσια ποσότητα νερού από ρύζι, μετρημένα σε κούπες, πώς μπορούμε να το γράψουμε αυτό με μια μαθηματική σχέση και με τη βοήθεια γραμμάτων;

Στα Μαθηματικά, όπως έχουμε δει, για να συμβολίσουμε αριθμούς, χρησιμοποιούμε γράμματα. Με τη βοήθειά τους γράφουμε παραστάσεις που εκφράζουν καταστάσεις της καθημερινής μας ζωής.

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε να διακρίνουμε τα στοιχεία των παραστάσεων, να φτιάχνουμε πίνακες τιμών και να μετατρέπουμε τις παραστάσεις σε απλούστερη μορφή. Επίσης, θα μάθουμε να τις χρησιμοποιούμε για να λύνουμε αλλά και να συνθέτουμε προβλήματα.

ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΕΝΟΤΗΤΕΣ:

5.1 Περιγραφή καταστάσεων με αλγεβρικές παραστάσεις
5.2 Αλγεβρικές παραστάσεις και προβλήματα
5.3 Η επιμεριστική ιδιότητα

5.1 Περιγραφή καταστάσεων με αλγεβρικές παραστάσεις

Δ1. Πόσο κοστίζουν τα ψώνια;

Η Χρύσα αγόρασε:

- πατάτες που κοστίζουν 0,80 ευρώ το κιλό,
- μήλα που κοστίζουν 2 ευρώ το κιλό,
- αμύγδαλα που κοστίζουν 16 ευρώ το κιλό.

α) Να γράψετε μια μαθηματική σχέση για το ποσό που πλήρωσε η Χρύσα, ανάλογα με το πόσες πατάτες, μήλα και αμύγδαλα αγόρασε. Συζητήστε τις ιδέες σας πρώτα στην ομάδα σας και μετά σε όλη την τάξη.

β) Να υπολογίσετε πόσα θα πληρώσει η Χρύσα, αν αγόρασε 5 κιλά πατάτες, 2 κιλά μήλα και $\frac{1}{2}$ του κιλού αμύγδαλα.



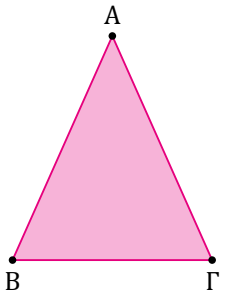
Συζητάμε

...για αλγεβρικές παραστάσεις

Πολλές φορές, όπως και στην περίπτωση της Χρύσας, είναι χρήσιμο να περιγράψουμε μια κατάσταση με γενικό τρόπο, χρησιμοποιώντας μαθηματικές σχέσεις ανάμεσα σε αριθμούς και γράμματα.

Το τρίγωνο του σχήματος είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$.

Μπορούμε να γράψουμε την περίμετρό του με τη βοήθεια γραμμάτων, τα οποία συμβολίζουν αριθμούς.



Περίμετρος ισοσκελούς τριγώνου

Αν τα μήκη των πλευρών ΑΒ και ΑΓ είναι κ και της πλευράς ΒΓ είναι λ, η περίμετρος Π του τριγώνου είναι:

$$\Pi = 2 \cdot \kappa + \lambda \text{ ή } \Pi = 2\kappa + \lambda$$

Στη θέση των γραμμάτων μπορούμε να βάλουμε αριθμούς. Αν $\kappa = 5$ και $\lambda = 3$, η τιμή της παράστασης (δηλαδή η περίμετρος του τριγώνου) είναι $\Pi = 2 \cdot 5 + 3 = 13$.

Μπορούμε να παραλείπουμε το σύμβολο του πολλαπλασιασμού:

- μεταξύ αριθμού και γράμματος,
- μεταξύ γραμμάτων,
- μεταξύ αριθμού ή γράμματος και παρένθεσης.

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Παραστάσεις στις οποίες χρησιμοποιούμε γράμματα που συμβολίζουν αριθμούς τις ονομάζουμε **αλγεβρικές παραστάσεις**. Οι αλγεβρικές παραστάσεις μπορεί επίσης να περιέχουν αριθμούς, πράξεις και παρενθέσεις.	Αλγεβρικές παραστάσεις: $x+2$, $2(\alpha+\beta)+1$, $2\kappa+\lambda\cdot\mu$ ή $2\kappa+\lambda\mu$. Τα γράμματα συμβολίζουν αριθμούς.
Αντικαθιστώντας τα γράμματα με αριθμούς, υπολογίζουμε την **τιμή** της αλγεβρικής παράστασης.	Η τιμή της $A=2(\alpha+\beta)+1$ για $\alpha=1$ και $\beta=0,5$ είναι $A=2(1+0,5)+1=4$.

Περίμετρος παραλληλογράμμου

Πώς διαβάζονται;

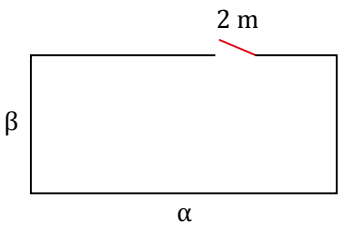
Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. **Στο σχήμα φαίνεται η κάτοψη ενός περιβολιού σχήματος ορθογωνίου, το οποίο θα περιφραχθεί με σύρμα. Το περιβόλι έχει μια σιδερένια πόρτα μήκους 2 μέτρων.**

α) Να γράψετε με παράσταση το μήκος του σύρματος που θα χρειαστεί.

β) Να υπολογίσετε το μήκος του σύρματος, αν οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι:

i) 10 και 15 ii) 12,5 και 17,5 iii) 12 και 12



Απάντηση

Το σχήμα του περιβολιού είναι ορθογώνιο, άρα οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες. Αν συμβολίσουμε με α το μήκος μιας πλευράς, και η απέναντι πλευρά θα έχει μήκος α. Ομοίως συμβολίζουμε με β τα μήκη των άλλων δύο πλευρών.

α) Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι:

$2\alpha+2\beta$ (1ος τρόπος) ή $2(\alpha+\beta)$ (2ος τρόπος)

Για την πόρτα δε χρειάζεται σύρμα, επομένως πρέπει να μειωθεί κατά 2 μέτρα. Άρα χρειάζεται σύρμα μήκους:

$2\alpha+2\beta-2$ ή $2(\alpha+\beta)-2$

Χρησιμοποιήσαμε διαφορετικά γράμματα α και β για τα μήκη των δύο πλευρών.

Αυτό σημαίνει ότι οι τιμές των α και β μπορεί να είναι άνισες, χωρίς να αποκλείεται να είναι και ίσες.

β) i) Για $\alpha=10$ και $\beta=15$ έχουμε:

1ος τρόπος

$2\cdot10+2\cdot15-2=20+30-2=48$ μέτρα.

2ος τρόπος

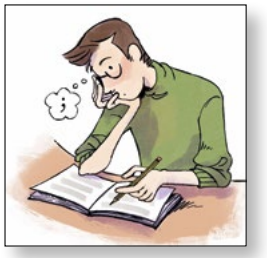
$2\cdot(10+15)-2=2\cdot25-2=48$ μέτρα.

Αν αντικαταστήσουμε $\alpha=15$ και $\beta=10$, δεν επηρεάζεται το αποτέλεσμα, καθώς δεν έχει σημασία το μήκος ποιας πλευράς ονομάσαμε α και ποιας β.

Συνεχίζοντας με τις περιπτώσεις (ii) και (iii), συμπληρώνουμε την τελευταία γραμμή του πίνακα.

		(i)	(ii)	(iii)
Ποιος από τους δύο τρόπους είναι απλούστερος για την περίπτωση (ii);	**α**	10	12,5	12
	β	15	17,5	12
	Μήκος σύρματος	**48**	**58**	**46**

2. **Ο αριθμός Α είναι τριπλάσιος του x. Ο Β είναι μεγαλύτερος κατά 2 από το τριπλάσιο του x. Ο Γ είναι τριπλάσιος από έναν αριθμό που είναι μικρότερος του x κατά 1.**
Να γράψετε με τη μορφή παραστάσεων τους αριθμούς Α, Β και Γ.
Στη συνέχεια να υπολογίσετε την τιμή κάθε αριθμού για $x = 2,5$ και $x = -2$.



Απάντηση

Εφόσον ο Α είναι τριπλάσιος του x, γράφουμε $A = 3x$.
Ο Β είναι μεγαλύτερος κατά 2 από το $3x$, άρα $B = 3x + 2$.
Ο αριθμός που είναι μικρότερος του x κατά 1 γράφεται $x - 1$.
Άρα $\Gamma = 3(x - 1)$.

- Γράφοντας $3x + 2$, έχουμε αυξήσει το $3x$ κατά 2.
- Γράφοντας $x - 1$, έχουμε μειώσει το x κατά 1.

Για $x = 2,5$:

$$A = 3 \cdot 2,5 = 7,5$$
$$B = 3 \cdot 2,5 + 2 = 7,5 + 2 = 9,5$$
$$\Gamma = 3(2,5 - 1) = 3 \cdot 1,5 = 4,5$$

Για $x = -2$:

$$A = 3(-2) = -6$$
$$B = 3(-2) + 2 = -6 + 2 = -4$$
$$\Gamma = 3(-2 - 1) = 3(-3) = -9$$

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Ο αριθμός x είναι διπλάσιος του y. Να επιλέξετε το σωστό.

α) $y = 2x$ **β)** $x = 2y$
γ) $x = y + 2$ **δ)** $y = x + 2$

2. Το τετραπλάσιο ενός αριθμού x μειωμένο κατά 3,5 είναι:

α) $(4 - 3,5)x$ **β)** $4x - 3,5$ **γ)** $4(x - 3,5)$
δ) $3,5x - 4$ **ε)** $4x + 3,5$

3. Ποιο από τα επόμενα είναι σωστό για την παράσταση $2A - 3B$;



α) Είναι ίση με το διπλάσιο του Α και με το τριπλάσιο του Β.
β) Είναι ίση με τη διαφορά του 2Α από το 3Β.
γ) Είναι ίση με τη διαφορά του 3Β από το 2Α.

4. Να εκφράσετε την περίμετρο ενός ισοσκελούς τριγώνου χρησιμοποιώντας το α για το μήκος της βάσης του και το β για το μήκος καθεμίας από τις ίσες πλευρές του.

5. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $2x + \frac{1}{2}$ για $x = 0,1$, $\frac{1}{2}$, -1 και $2,4$.

6. Για την παράσταση $2x+3y$ να επιλέξετε τις σωστές από τις παρακάτω προτάσεις:

α) Εκφράζει το άθροισμα του διπλάσιου του x και του τριπλάσιου του y.

β) Τα x και y εκφράζουν δύο συγκεκριμένους αριθμούς.

γ) Τα x και y εκφράζουν δύο αριθμούς όχι συγκεκριμένους.

δ) Τα x και y δεν εκφράζουν αριθμούς.

7. Για κάθε αλγεβρική παράσταση της στήλης Α να επιλέξετε μία έκφραση από τη στήλη Β, ώστε να προκύπτει η ακριβέστερη περιγραφή. Για παράδειγμα, «Η παράσταση $5x$ είναι ένα γινόμενο».

	Α		Β
Η παράσταση	$5x$ $x+2$ $\alpha\cdot\beta$ $2x+3y$ $15-\alpha$ $(3+x)(\alpha+\beta)$	είναι ένα	• άθροισμα • γινόμενο • άθροισμα γινομένων • γινόμενο αθροισμάτων

Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

8. Οι τιμές στο μανάβικο είναι:

- Πορτοκάλια 1,3 ευρώ το κιλό.
- Αχλάδια 1,8 ευρώ το κιλό.
- Μήλα 1,6 ευρώ το κιλό.
- Μαρούλια 0,75 το ένα.



Ένας πελάτης αγόρασε και από τα τέσσερα προϊόντα. Πόσο πλήρωσε;

9. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών.

x	1	2	1	−1,5	1	$\frac{1}{3}$	0
y	2	2,5	1,5	3	−1,5	$\frac{1}{4}$	0
$3x-y+1$							
$2(x+y)$							
$xy-0,5$							

10. Να γράψετε:

α) τον αντίθετο του x,

β) το τριπλάσιο του x,

γ) το μισό του x,

δ) το $\frac{1}{4}$ του x,

ε) το πενταπλάσιο του x αυξημένο κατά 2,

στ) το τετραπλάσιο του x μειωμένο κατά 2,

ζ) το γινόμενο του x με το 5 αυξημένο κατά 3,

η) το τριπλάσιο της διαφοράς του 4 από το x,

θ) το πενταπλάσιο της διαφοράς του x από το 4.

11. Να γράψετε με λόγια τις αλγεβρικές παραστάσεις:

α) $x+1$ **β)** $2x$ **γ)** $3x+1$ **δ)** $4x-2$

12. Δύο αριθμοί έχουν άθροισμα 145.

α) Αν ο ένας είναι 43, ο άλλος ποιος είναι;

β) Αν ο ένας είναι ο x, πώς θα γράψετε τον άλλο;

13. Το άθροισμα δύο αριθμών Α και Β είναι 13. Πώς θα εκφράσετε τον Α με τη βοήθεια του Β;

Γενικοί αριθμοί

Γενικοί αριθμοί και πρόσημα

Γνωστό άθροισμα, άγνωστο γινόμενο

5.2 Αλγεβρικές παραστάσεις και προβλήματα

Δ1. Ποια ομάδα νίκησε;



α) Στο μπάσκετ μια ομάδα μπορεί να σημειώσει 1 πόντο με κάθε ελεύθερη βολή και 2 ή 3 πόντους με εύστοχα σουτ. Να γράψετε μια αλγεβρική παράσταση που να εκφράζει το σύνολο των πόντων που σημείωσε μια ομάδα μπάσκετ σε έναν αγώνα.

β) Σε έναν αγώνα μπάσκετ έπαιξαν οι γαλάζιες αλεπούδες με τα πορτοκαλί δελφίνια. Οι αλεπούδες ήταν εύστοχες σε 30 σουτ και 12 ελεύθερες βολές, ενώ τα δελφίνια σε 24 σουτ και 20 ελεύθερες βολές.

i) Θα μπορούσαν να έχουν νικήσει τα δελφίνια;

ii) Να βρείτε τρεις τρόπους με τους οποίους θα μπορούσαν να έχουν νικήσει οι αλεπούδες.

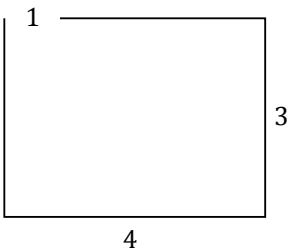
iii) Να βρείτε δύο τρόπους με τους οποίους θα μπορούσε να έχει έρθει ισοπαλία.

Συζητήστε στην τάξη τον τρόπο με τον οποίο εργαστήκατε.

Συζητάμε

…προβλήματα με αλγεβρικές παραστάσεις

Με τη βοήθεια αλγεβρικών παραστάσεων μπορούμε να μελετήσουμε πολλά ερωτήματα, ειδικά όταν τα αριθμητικά δεδομένα ενός προβλήματος παίρνουν διάφορες τιμές.



Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η κάτοψη ενός δωματίου σχήματος ορθογωνίου, το οποίο έχει εμβαδόν 12 τετραγωνικά μέτρα και οι τοίχοι του έχουν συνολικό μήκος 13 μέτρα (το άνοιγμα 1 μέτρου είναι πόρτα).

Για να τοποθετήσουμε μοκέτα και να βάψουμε το συγκεκριμένο δωμάτιο, έχουμε τις εξής επιλογές:

Μοκέτες	Τιμή ανά τετραγωνικό μέτρο
Τύπου Α	25 ευρώ
Τύπου Β	33 ευρώ
Τύπου Γ	50 ευρώ

Χρώματα	Τιμή ανά μέτρο τοίχου
Τύπου 1	9 ευρώ
Τύπου 2	12 ευρώ
Τύπου 3	15 ευρώ

Άρα το συνολικό κόστος για τη μοκέτα και το βάψιμο θα είναι $12x + 13y$ ευρώ, όπου το x είναι η τιμή της μοκέτας ανά τετραγωνικό μέτρο και το y είναι η τιμή του χρώματος ανά μέτρο τοίχου.

Με αυτή την αλγεβρική παράσταση μπορούμε να υπολογίσουμε το κόστος που αντιστοιχεί σε κάθε επιλογή υλικού.

Δ2. Δημιουργήστε ένα πρόβλημα

Να γράψετε ένα δικό σας πρόβλημα που να αντιστοιχεί στην αλγεβρική παράσταση $2\alpha + 5$.

Δείκτης απόδοσης στο μπάσκετ

Μία παράσταση, τέσσερα προβλήματα

Τρία προβλήματα, μία παράσταση

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. **Η Αλίνα έχει μια επιχείρηση ενοικίασης φορτηγών αυτοκινήτων. Κάθε 50.000 χιλιόμετρα πρέπει να αλλάζει τα ελαστικά των οχημάτων. Έχει υπολογίσει ότι κάθε φορτηγό κάνει περίπου 100.000 χιλιόμετρα τον χρόνο.**

α) **Να γράψετε μια αλγεβρική παράσταση που να εκφράζει πόσες φορές αλλάζει ελαστικά σε όλα τα φορτηγά σε 10 χρόνια.**

β) **Αν έχει 12 φορτηγά, πόσες αλλαγές ελαστικών θα γίνουν σε 10 χρόνια;**

Απάντηση

α) Κάθε φορτηγό αλλάζει ελαστικά 2 φορές τον χρόνο, επομένως 20 φορές σε 10 χρόνια.
Αν έχει α φορτηγά, τότε σε 10 χρόνια χρειάζονται 20α αλλαγές ελαστικών.

β) Εφόσον έχει 12 φορτηγά, τότε χρειάζονται $20 \cdot 12 = 240$ αλλαγές ελαστικών.

2. **Σε ένα τουρνουά επιτραπέζιας αντισφαίρισης κάθε παίκτης παίζει με όλους τους άλλους από 1 φορά. Η οργανωτική επιτροπή δε γνωρίζει τον αριθμό των συμμετεχόντων ακόμα, αλλά θέλει να προετοιμαστεί. Πώς μπορεί να βρίσκει πόσοι αγώνες αναμένεται να γίνουν;**



Απάντηση

Αρχικά, σκεφτόμαστε με έναν συγκεκριμένο αριθμό παικτών. Με Α, Β, Γ, Δ και Ε συμβολίζουμε τους παίκτες.
Για να μη μετρήσουμε έναν αγώνα δύο φορές, π.χ Α-Β και Β-Α, έχουμε βάλει Χ στα αντίστοιχα κελιά του πίνακα.
Έτσι, μετράμε μόνο τα κελιά με ✓.
Αν στο τουρνουά λαμβάνουν μέρος 4 παίκτες, οι Α, Β, Γ και Δ, τότε οι αγώνες είναι 6, ενώ για 5 παίκτες οι αγώνες είναι 10.
Παρατηρώντας τον πίνακα, βλέπουμε ότι:

	Α	Β	Γ	Δ	Ε
Α		Χ	Χ	Χ	Χ
Β	✓		Χ	Χ	Χ
Γ	✓	✓		Χ	Χ
Δ	✓	✓	✓		Χ
Ε	✓	✓	✓	✓	

- Για 3 παίκτες έχουμε το μαύρο τετράγωνο του πίνακα, που έχει $3^2 = 9$ κελιά.
  Τα 3 διαγώνια μαυρισμένα κελιά δεν αντιστοιχούν σε αγώνες.
  Από τα υπόλοιπα μετράμε τα μισά (αυτά που έχουν ✓).

  Άρα πρώτα υπολογίζουμε 3^2, μετά $3^2 - 3$ και τέλος $\frac{3^2-3}{2}$, που είναι ίσο με $\frac{9-3}{2} = \frac{6}{2} = 3$.

Αντίστοιχα:

- Για 4 παίκτες (κόκκινο τετράγωνο) οι αγώνες είναι $\frac{4^2-4}{2} = \frac{16-4}{2} = \frac{12}{2} = 6$.
- Για 5 παίκτες (πράσινο τετράγωνο) οι αγώνες είναι $\frac{5^2-5}{2} = \frac{25-5}{2} = \frac{20}{2} = 10$.
- Για ν παίκτες οι αγώνες είναι $\frac{\nu^2-\nu}{2}$.

Η οργανωτική επιτροπή μπορεί να χρησιμοποιήσει την παράσταση $\frac{\nu^2-\nu}{2}$, ώστε να υπολογίσει το πλήθος των αγώνων, αν γνωρίζει το πλήθος ν των συμμετεχόντων.

Αριθμός αγώνων τουρνουά

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Αγοράσαμε 2 κιλά μήλα προς 1,8 ευρώ το κιλό, 3 κιλά πορτοκάλια προς 1,2 ευρώ το κιλό και 1 μαρούλι που κόστιζε 0,7 ευρώ.

α) Ποια από τις παρακάτω αριθμητικές παραστάσεις εκφράζει το κόστος;

i) $3\cdot 1{,}8+2\cdot 1{,}2+1$ **ii)** $5\cdot(1{,}8+1{,}2)+0{,}7$

iii) $2\cdot 1{,}8+3\cdot 1{,}2+0{,}7$ **iv)** $(2+3)(1{,}8+1{,}2+1)$

β) Να υπολογίσετε το κόστος.

2. Ένα ορθογώνιο έχει βάση 11 cm και ύψος 8 cm.

α) Ποια από τις παρακάτω αριθμητικές παραστάσεις εκφράζει την περίμετρό του;

i) $11+8$ **ii)** $4\cdot 11+4\cdot 8$

iii) $2\cdot 11\cdot 8$ **iv)** $2(11+8)$

β) Να υπολογίσετε την περίμετρο του ορθογωνίου.

3. Να βρείτε δύο ακέραιους αριθμούς α και β, ώστε η τιμή της αλγεβρικής παράστασης $2\alpha+\frac{\beta}{2}$ να είναι:

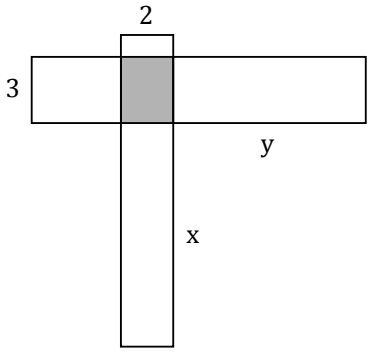
α) 3 **β)** 6 **γ)** 4 **δ)** 5

Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

4. Αν $x=1, 2, 3, 4$ ή 5 και $y=0, 1, 2, 3$ ή 4, να υπολογίσετε τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη τιμή των παραστάσεων:

α) $2x+y$ **β)** $2x-y$

5. Το σχήμα αποτελείται από δύο ορθογώνια, το Α διαστάσεων 2 και x και το Β διαστάσεων 3 και y, σε cm. Τα ορθογώνια τέμνονται και σχηματίζουν ένα νέο ορθογώνιο.



α) Να γράψετε με παράσταση το εμβαδόν:

i) του Α, **ii)** του Β, **iii)** του σχήματος.

β) Αν $2x+3y=40$, ποιο είναι το εμβαδόν του σχήματος;

γ) Να γράψετε μια αλγεβρική παράσταση που να αντιστοιχεί στην περίμετρο του σχήματος.

6. Αν το άθροισμα των φυσικών αριθμών α και β είναι 7, να υπολογίσετε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης $3\alpha+2\beta$.

7. Τοποθετήσαμε αυγά σε δύο ειδών αυγοθήκες: τύπου Α με 6 θέσεις και τύπου Β με 10 θέσεις. Γεμίσαμε x αυγοθήκες τύπου Α και y αυγοθήκες τύπου Β.



α) Να γράψετε μια παράσταση που να εκφράζει το σύνολο των αυγών που τοποθετήσαμε.

β) Αν γεμίσαμε συνολικά 10 αυγοθήκες, τότε:

i) με τι είναι ίσο το $x+y$;

ii) ποιος μπορεί να είναι ο μικρότερος και ποιος ο μεγαλύτερος αριθμός αυγών που τοποθετήσαμε;

8. Να γράψετε ένα πρόβλημα που να περιγράφεται με τη βοήθεια της παράστασης:

α) $2x+y$ **β)** $2(x+y)$

γ) $xy+1$ **δ)** $1{,}2x+1{,}6y+0{,}8$

5.3 Η επιμεριστική ιδιότητα

Δ1. Ο πολλαπλασιασμός αλλιώς

Σύμφωνα με μελετητές, οι αρχαίοι Αιγύπτιοι είχαν έναν ιδιαίτερο τρόπο να κάνουν πολλαπλασιασμό.

Για παράδειγμα, για να υπολογίσουν το γινόμενο $18\cdot17$, επέλεγαν τον μεγαλύτερο από τους δύο αριθμούς, δηλαδή το 18, και σε μια στήλη έγραφαν τους διαδοχικούς διπλασιασμούς του, όπως στον πίνακα. Στη συνέχεια, έβρισκαν ότι 1 φορά το 18 και 16 φορές το 18 κάνει 17 φορές το 18.

Διπλασιάζω διαδοχικά	Πόσες φορές επί 18
18	1
36	2
72	4
144	8
288	16
...	...

α) Με τη βοήθεια του πίνακα να υπολογίσετε το γινόμενο $18\cdot17$.

β) Στη συνέχεια να υπολογίσετε, με τον ίδιο τρόπο, τα γινόμενα $18\cdot12$ και $18\cdot11$.

γ) Ποιες πράξεις κάνατε σε κάθε περίπτωση; Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

i) $18\cdot17=18\cdot...+18\cdot...$ **ii)** $18\cdot12=18\cdot...+18\cdot...$ **iii)** $18\cdot11=18\cdot...+18\cdot...+18\cdot...$

Επιμεριστική των αρχαίων Αιγυπτίων

Συζητάμε

...για την επιμεριστική ιδιότητα

Για να υπολογίσουμε το γινόμενο $23\cdot11$ χωρίς να κάνουμε τον πολλαπλασιασμό κάθετα, μπορούμε να σκεφτούμε περίπου όπως οι αρχαίοι Αιγύπτιοι:

$$23\cdot11=23(10+1)=23\cdot10+23\cdot1=230+23=253$$

Κάτι παρόμοιο μπορούμε να κάνουμε και για το γινόμενο $21\cdot99$:

$$21\cdot99=21\cdot(100-1)=21\cdot100-21\cdot1=2.100-21=2.079$$

Αυτός ο τρόπος μάς βοηθά να κάνουμε πολλαπλασιασμούς με το μυαλό.

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Την ισότητα $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$ την ονομάζουμε **επιμεριστική ιδιότητα** του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση.

Αντίστοιχα, η επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την αφαίρεση είναι η $\alpha(\beta-\gamma)=\alpha\beta-\alpha\gamma$.

Τα γράμματα α, β και γ συμβολίζουν οποιουσδήποτε αριθμούς, δηλαδή η επιμεριστική ιδιότητα ισχύει όποιοι και αν είναι οι αριθμοί.

$$2\left(0,5+\frac{3}{2}\right)=2\cdot0,5+2\cdot\frac{3}{2}=1+3=4$$

$$2(\alpha+4,5)=2\alpha+2\cdot4,5=2\alpha+9$$

$$4\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{2}\right)=4\cdot\frac{1}{4}-4\cdot\frac{1}{2}=1-2=-1$$

$$\alpha(11-\beta)=\alpha\cdot11-\alpha\cdot\beta=11\alpha-\alpha\beta$$

Επιμεριστική από τον Ευκλείδη στους Ινδούς

Με την επιμεριστική ιδιότητα μπορούμε να μετασχηματίσουμε:

- ένα γινόμενο σε άθροισμα ή διαφορά, όπως στα παραδείγματα,
- ένα άθροισμα σε γινόμενο, όπως στο:

$2\alpha+3\alpha=$

$=(2+3)\alpha=$

$=5\alpha$

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. **Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας.**

α) i) $2\left(\frac{1}{2}+0,6\right)$ **ii)** $-3\left(0,5+\frac{7}{3}\right)$ **iii)** $7\left(-\frac{1}{14}+0,5\right)$

β) i) $4\left(\frac{3}{4}-0,7\right)$ **ii)** $-6\left(1,5-\frac{1}{3}\right)$ **iii)** $5\left(-\frac{1}{5}-0,5\right)$

Απάντηση

α) Θα χρησιμοποιήσουμε την επιμεριστική ιδιότητα της μορφής $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$.

i) $2\left(\frac{1}{2}+0,6\right)=2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot 0,6=1+1,2=2,2$

ii) $-3\left(0,5+\frac{7}{3}\right)=-3\cdot 0,5+(-3)\cdot\frac{7}{3}=-1,5-\frac{21}{3}=-1,5-7=-8,5$

iii) $7\left(-\frac{1}{14}+0,5\right)=7\cdot\left(-\frac{1}{14}\right)+7\cdot 0,5=-\frac{1}{2}+3,5=-0,5+3,5=3$

Στην τελευταία περίπτωση το $7\left(-\frac{1}{14}+0,5\right)$ θα μπορούσαμε να το γράψουμε $7\left(0,5-\frac{1}{14}\right)$, ώστε να είναι της μορφής $\alpha(\beta-\gamma)=\alpha\beta-\alpha\gamma$.

β) Θα χρησιμοποιήσουμε την επιμεριστική ιδιότητα της μορφής $\alpha(\beta-\gamma)=\alpha\beta-\alpha\gamma$.

i) $4\left(\frac{3}{4}-0,7\right)=4\cdot\frac{3}{4}-4\cdot 0,7=3-2,8=0,2$

ii) $-6\left(1,5-\frac{1}{3}\right)=-6\cdot 1,5-(-6)\cdot\frac{1}{3}=-9+\frac{6}{3}=-9+2=-7$

iii) $5\left(-\frac{1}{5}-0,5\right)=5\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)-5\cdot 0,5=-\frac{5}{5}-2,5=-3,5$

Επιμεριστική και πρόσημα

2. **Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς παρένθεση, με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας.**

α) $6\left(\alpha-\frac{5}{3}\right)$ **β)** $-2\left(x+\frac{1}{2}\right)$ **γ)** $-3(x-0,5)$ **δ)** $5(-x+4)$

Απάντηση

α) $6\left(\alpha-\frac{5}{3}\right)=6\alpha-6\cdot\frac{5}{3}=6\alpha-\frac{30}{3}=6\alpha-10$

β) $-2\left(x+\frac{1}{2}\right)=-2x+(-2)\cdot\frac{1}{2}=-2x-\frac{2}{2}=-2x-1$

Επιμεριστική και γράμματα με πρόσημα

Σύμφωνα με την ισότητα $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$, το α είναι το -2.

γ) $-3(x-0,5) = -3x-(-3)\cdot 0,5 = -3x+1,5$

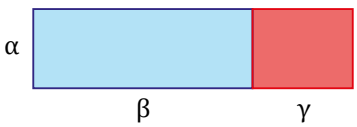
Επιμεριστική με τρεις προσθετέους

δ) $5(-x+4) = 5(-x)+5\cdot 4 = -5x+20$

$5(-x) = -5x$, γιατί το γινόμενο έχει έναν παράγοντα με πλην. Αυτό δε σημαίνει απαραίτητα ότι ο $-5x$ είναι αρνητικός.

Επιμεριστική και αλγεβρικοί χειρισμοί

3. **Στο σχήμα φαίνεται ένα ορθογώνιο που έχει χωριστεί σε δύο ορθογώνια διαφορετικού χρώματος. Να εκφράσετε με τη μορφή αλγεβρικής παράστασης το εμβαδόν του ορθογωνίου. Τι συμπεραίνετε;**



Απάντηση

1ος τρόπος

Το ορθογώνιο έχει βάση μήκους $\beta+\gamma$ και ύψος μήκους α. Άρα:

$$E = (\beta+\gamma)\alpha \quad \text{ή} \quad E = \alpha(\beta+\gamma)$$

Το εμβαδόν κάθε ορθογωνίου είναι ίσο με το γινόμενο μηκών της βάσης και του ύψους του. Δηλαδή:

$$E = \text{βάση}\cdot\text{ύψος}$$

2ος τρόπος

Μπορούμε να υπολογίσουμε ξεχωριστά το εμβαδόν καθενός από τα δύο ορθογώνια διαφορετικού χρώματος και στη συνέχεια να τα προσθέσουμε. Έτσι έχουμε:

$$E_{\text{γαλάζιου}} = \beta\alpha \quad \text{ή} \quad E_{\text{γαλάζιου}} = \alpha\beta$$

$$E_{\text{κόκκινου}} = \gamma\alpha \quad \text{ή} \quad E_{\text{κόκκινου}} = \alpha\gamma$$

Άρα το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E = E_{\text{γαλάζιου}} + E_{\text{κόκκινου}} = \alpha\beta+\alpha\gamma$.

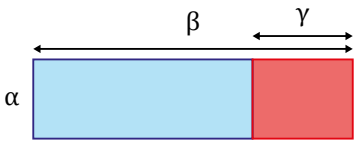
Καθώς το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου είναι το ίδιο με οποιονδήποτε τρόπο υπολογισμού, συμπεραίνουμε ότι:

$$\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta+\alpha\gamma$$

Η παραπάνω ισότητα αντιστοιχεί στην επιμεριστική ιδιότητα.

Με όμοιο τρόπο, με βάση το διπλανό σχήμα, προκύπτει ότι:

$$\alpha(\beta-\gamma) = \alpha\beta-\alpha\gamma$$



Η πρόταση 1 του βιβλίου ΙΙ των Στοιχείων

Επιμεριστική ιδιότητα και εμβαδά

4. **Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα.**

$$2(x+4)+3x$$

Απάντηση

Η παράσταση γράφεται:

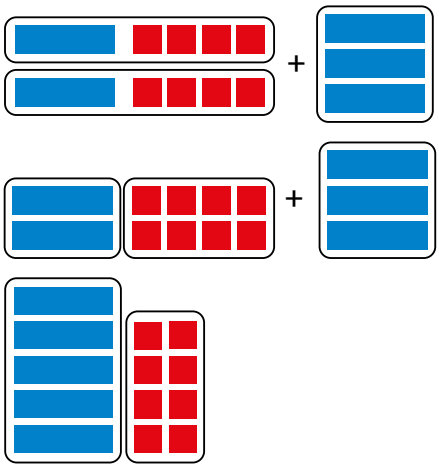
$2(x+4)+3x=$

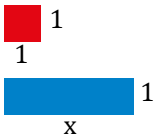
$=2x+2\cdot 4+3x=$

$=2x+3x+8=$

$=(2+3)x+8=$

$=5x+8$





Μπορούμε να αναπαραστήσουμε τις πράξεις με τη βοήθεια των παραπάνω εμβαδών.

Χρησιμοποιούμε την επιμεριστική ιδιότητα:

- στη μορφή $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$, για να μετασχηματίσουμε το γινόμενο σε άθροισμα,
- στη μορφή $\beta\alpha+\gamma\alpha=(\beta+\gamma)\alpha$, για να μετασχηματίσουμε το άθροισμα σε γινόμενο.

Στο παραπάνω παράδειγμα μετασχηματίσαμε το $2(x+4)$ σε $2x+2\cdot 4$ και το $2x+3x$ σε $(2+3)x$ ή $5x$.

5. **Ένα ορθογώνιο έχει βάση μήκους β και ύψος μήκους υ. Αν το άθροισμα των μηκών βάσης και ύψους είναι ίσο με 5:**
α) να εκφράσετε με αλγεβρική παράσταση την περίμετρο του ορθογωνίου,
β) να υπολογίσετε την περίμετρο του ορθογωνίου.



Απάντηση

Εφόσον το άθροισμα των β και υ είναι ίσο με 5, γράφουμε $\beta+\upsilon=5$.

α) Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι ίση με $2\beta+2\upsilon$. Χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα στη μορφή $\alpha\beta+\alpha\gamma=\alpha(\beta+\gamma)$, έχουμε:

$$2\beta+2\upsilon=2(\beta+\upsilon)$$

β) Στην παράσταση $2(\beta+\upsilon)$ αντικαθιστούμε το $\beta+\upsilon$ με 5 και έχουμε $2(\beta+\upsilon)=2\cdot 5=10$.
Επομένως η περίμετρος του ορθογωνίου είναι ίση με 10.

Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε

1. Αφού μελετήσετε την εφαρμογή 3, να γράψετε ένα αντίστοιχο παράδειγμα ορθογωνίου χωρισμένου σε δύο μικρότερα που να αντιστοιχεί στην επιμεριστική ιδιότητα $4(5+3)$.

2. Μπορεί να μας βοηθήσει η επιμεριστική ιδιότητα $2(x+y)=2x+2y$ για να απλοποιήσουμε το κλάσμα $\frac{2x+2y}{2}$;

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω παραστάσεις:



α) $x(y+__)=xy+x\omega$

β) $2(\alpha-\beta)=2\alpha-___$

γ) $\frac{1}{2}(x+y)=\frac{x}{2}+___$

δ) $3\alpha-3\beta=3_____$

2. Να υπολογίσετε με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας, συμπληρώνοντας τα κενά, τα παρακάτω γινόμενα:

α) $23\cdot101=23(___+1)=_____$

β) $35\cdot999=35(1.000___)=_____$

γ) $99\cdot101=99(100___)=_____$

δ) $99\cdot101=(100___)\cdot101=_____$

3. Να κάνετε τις πράξεις, σε κάθε περίπτωση, με δύο τρόπους: πρώτα ακολουθώντας την προτεραιότητα των πράξεων και μετά χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα. Ποιον από τους δύο τρόπους θεωρείτε πιο εύκολο;

α) $2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$ **β)** $6\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)$

γ) $5\left(\frac{1}{5}-0,5\right)$ **δ)** $\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)$

4. Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας.

α) $5x+7x$ **β)** $7y+4y$ **γ)** $11x-3x$

δ) $\frac{7}{2}x+\frac{3}{2}x$ **ε)** $\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}x$ **στ)** $7x+x$

ζ) $11y-y$

Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

5. Να κάνετε τις πράξεις με τον πιο βολικό τρόπο: είτε με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας είτε χωρίς.

α) i) $3\left(1+\frac{1}{3}\right)$ **ii)** $2\left(\frac{3}{2}+1,5\right)$

iii) $-5\left(0,5+\frac{7}{5}\right)$ **iv)** $5\left(-\frac{1}{10}+0,1\right)$

v) $-1\left(6+\frac{1}{2}\right)$

β) i) $7\left(\frac{1}{7}-0,1\right)$ **ii)** $2\left(\frac{5}{2}-1,5\right)$ **iii)** $-3\left(2,5-\frac{2}{3}\right)$

iv) $-6\left(-\frac{1}{2}-0,5\right)$ **v)** $-1\left(1-\frac{3}{2}\right)$

Εξηγήστε γιατί θεωρείτε πιο βολικό τον τρόπο που επιλέξατε.

6. Να γράψετε τις πράξεις χωρίς παρένθεση, με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας.

α) $5\left(x+\frac{1}{5}\right)$ **β)** $3\left(\frac{2}{3}+x\right)$ **γ)** $4(x-0,2)$

δ) $-5(x-4)$ **ε)** $-1(-x+3)$

7. Να κάνετε τις πράξεις χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα όσες φορές χρειάζεται.

α) $3(x+y)+2x$

β) $4x+3(x-y)$

γ) $5x+2(y-x)$

δ) $5(x+1)+4(x+2)$

ε) $3\left(x+\frac{1}{6}\right)+4\left(x+\frac{1}{8}\right)$

στ) $7(x-y)+3\left(x-\frac{1}{9}\right)+\frac{2}{3}$

ζ) $10(x+y)+5(x-y)$

η) $9(x+y)+12(x-y)$

θ) $\frac{3}{2}x+2(x+y)+3y$

8. Με α και β συμβολίζουμε τα μήκη δύο πλευρών ενός ορθογωνίου, οι οποίες είναι άνισες μεταξύ τους.

α) Να εκφράσετε την περίμετρο του ορθογωνίου με τη μορφή αλγεβρικής παράστασης.

β) Αν το άθροισμα των α και β είναι ίσο με 17:

i) να υπολογίσετε την περίμετρο του ορθογωνίου,

ii) να εκφράσετε το μήκος α με τη βοήθεια του β,

iii) να γράψετε με τη βοήθεια του β μόνο, σε μορφή αλγεβρικής παράστασης, το εμβαδόν του ορθογωνίου. Μπορείτε να το γράψετε χωρίς τη χρήση παρενθέσεων;

9. Να γράψετε ένα πρόβλημα που να λύνεται με τη βοήθεια της αλγεβρικής παράστασης $5(\alpha+\beta)+3\alpha$.

Ανακεφαλαίωση

Αλγεβρικές παραστάσεις

Ερωτήσεις – ασκήσεις – προβλήματα

1. Να κάνετε τις πράξεις με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας.

α) $93\cdot101$ **β)** $109\cdot99$ **γ)** $999\cdot1001$

2. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω ισότητες ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ).

α) $2(x+1)=2x+1$ Σ Λ

β) $3x+3=3(x+1)$ Σ Λ

γ) $\frac{1}{2}(4-x)=2-x$ Σ Λ

δ) $5(x+y)-4y=5x+y$ Σ Λ

ε) $20(\alpha-\beta)+10(\alpha+\beta)=30\alpha+30\beta$ Σ Λ

στ) $4x-3x=(4-3)x=x$ Σ Λ

ζ) $3x-4x=x$ Σ Λ

η) $4x-x=(4-1)x=3x$ Σ Λ

θ) $5x+x=5x$ Σ Λ

ι) $8y+y=(8+1)y$ Σ Λ

ια) $15y+y=16y$ Σ Λ

3. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ).

α) Η τιμή του $2x$ είναι διπλάσια της τιμής του x. Σ Λ

β) Η τιμή του y είναι τριπλάσια της τιμής του $3y$ (το y δεν είναι 0). Σ Λ

γ) Η τιμή της παράστασης $2\alpha-1$ είναι μικρότερη κατά 1 από το διπλάσιο του α. Σ Λ

δ) Η τιμή της παράστασης $3(\alpha+1)$ είναι μεγαλύτερη κατά 1 από το τριπλάσιο του α. Σ Λ

4. Το άθροισμα των α και β είναι ίσο με 18. Ποια από τα παρακάτω είναι σωστά;

α) $\alpha+\beta=18$.

β) Το β είναι ίσο με $18-\alpha$.

γ) Το β είναι ίσο με $\alpha-18$.

δ) $\alpha=18-\beta$.

ε) $\alpha=\beta-18$.

5. Να υπολογίσετε την τιμή καθεμίας από τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $3\alpha+2\beta-0{,}5\gamma$, για $\alpha=1{,}5$, $\beta=2{,}5$ και $\gamma=4$.

β) $2x+\frac{1}{2}\cdot y+\frac{1}{4}$, για $x=1$ και $y=2$.

γ) $3\alpha+0{,}5\beta+\frac{1}{3}\cdot\beta$, για $\alpha=-1$ και $\beta=6$.

δ) $4x-2y+1{,}5$, για $x=-1{,}2$ και $y=0{,}4$.

ε) $3x-1-2x-4y$, για $x=-4$ και $y=-1{,}5$.

στ) $5(x-1)+2\left(y-\frac{3}{2}\right)$, για $x=1{,}5$ και $y=2$.

ζ) $4(\alpha-2)+3\left(\beta+\frac{1}{3}\right)$, για $\alpha=1$ και $\beta=-\frac{5}{3}$.

6. **α)** Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας.

i) $3(x+y)+2x$ **ii)** $0{,}7(\alpha+\beta)+1{,}3(\beta+\alpha)$

iii) $2(x+y)+2(x-y)$ **iv)** $\frac{3}{2}(x+y)+\frac{1}{2}\cdot x$

β) Να υπολογίσετε τις τιμές των παραπάνω παραστάσεων για:

i) $x=0{,}35$, $y=1$ **ii)** $\alpha=-2$, $\beta=1{,}5$

iii) $x=-3{,}5$, $y=-1{,}313$ **iv)** $x=-0{,}5$, $y=0{,}4$

7. Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις με δύο τρόπους:

- Ακολουθώντας την προτεραιότητα των πράξεων.
- Χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα.

α) $2\left(3-\frac{1}{2}\right)+0,6\left(1,2+\frac{3}{2}\right)$

β) $-3(4+1,5)+2,4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$

γ) $3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+5,5\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{11}\right)+9\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{9}\right)$

8. Να γράψετε με τη βοήθεια αλγεβρικής παράστασης το άθροισμα:

α) ακέραιου αριθμού x με τον επόμενό του,

β) δύο διαδοχικών ακέραιων αριθμών,

γ) του διπλάσιου ενός ακέραιου αριθμού με τον τριπλάσιο του επόμενού του.

9. Σε ένα τουρνουά ποδοσφαίρου κάθε ομάδα παίζει με τις άλλες από 2 φορές.



α) Πόσοι αγώνες αναμένεται να γίνουν;

β) Αν συμμετέχουν 15 ομάδες, πόσοι αγώνες θα γίνουν;

10. Το άθροισμα του x με το τριπλάσιο του y, αυξημένο κατά 3 είναι ίσο με Α.

α) Να εκφράσετε το Α με τη βοήθεια παράστασης.

Έκφραση με σύμβολα

β) Να υπολογίσετε την τιμή του Α, αν $x=7,2$ και $y=\frac{2}{3}$.

11. Για τη μετακίνησή του ο Γιώργος χρησιμοποιεί μετρό, αυτοκίνητο, μοτοσικλέτα και ταξί.

Κατά μέσο όρο ξοδεύει:

- Κάθε φορά που παίρνει αυτοκίνητο, 5,5 ευρώ για βενζίνη.
- Κάθε φορά που παίρνει μοτοσικλέτα, 1,5 ευρώ για βενζίνη.
- Κάθε φορά που παίρνει ταξί, 8 ευρώ.

Για το μετρό πληρώνει 30 ευρώ συνολικά τον μήνα.

α) Να γράψετε μια παράσταση για τα μηνιαία έξοδα μετακίνησης του Γιώργου.

β) Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται πόσες φορές χρησιμοποίησε κάθε μεταφορικό μέσο κατά τη διάρκεια τριών μηνών. Να υπολογίσετε τα έξοδά του για μετακινήσεις για καθέναν από αυτούς τους μήνες.

	Απρίλιος	Μάιος	Ιούνιος
Αυτοκίνητο	20	11	8
Μοτοσικλέτα	5	13	16
Ταξί	4	5	3
Μετρό	18	11	12

Συνδέσεις και επεκτάσεις

12. Για να υπολογίσουμε τον όρο ενός αριθμητικού μοτίβου από το δεκαπλάσιο της τάξης του, αφαιρούμε την τάξη του αυξημένη κατά 2. Για παράδειγμα, ο 4ος όρος του μοτίβου είναι ίσος με $10\cdot 4-(4+2)=40-6=34$.

α) Να γράψετε τον γενικό όρο του μοτίβου.

β) Να υπολογίσετε τον 101ο όρο του μοτίβου.

13. Χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα, να απλοποιήσετε το κλάσμα $\frac{3x-3y+9}{3}$. Μπορείτε να σκεφτείτε άλλον τρόπο;

Απλοποιώ με δύο τρόπους

Ομαδική εργασία

14. **α)** Να σχεδιάσετε ορθογώνια που τα εμβαδά τους να αντιστοιχούν στις παρακάτω ισότητες:

i) $3(7+4)$ **ii)** $2{,}1(3{,}3+1{,}7)$ **iii)** $5(10+5+0{,}5)$ **iv)** $7(3+7)+5(5+5)$

β) Να εκφράσετε με τη βοήθεια εμβαδών ορθογωνίων την ισότητα:

$$5(10-2)$$

γ) Να αιτιολογήσετε την $\alpha(\beta-\gamma)=\alpha\beta-\alpha\gamma$ με τη βοήθεια εμβαδών ορθογωνίων.

15. Να εντοπίσετε περιπτώσεις όπου χρησιμοποιούμε την επιμεριστική ιδιότητα στη μορφή:

$$\beta\alpha+\gamma\alpha=(\beta+\gamma)\alpha \quad \text{ή} \quad \beta\alpha-\gamma\alpha=(\beta-\gamma)\alpha$$

16. Σε πολλές οικονομικές συναλλαγές της καθημερινότητας συναντούμε αλγεβρικές παραστάσεις, τις περισσότερες φορές χωρίς να το συνειδητοποιούμε.

- Σε λογαριασμούς όπως του ηλεκτρικού ρεύματος, υπηρεσιών τηλεπικοινωνίας (τηλέφωνο, ίντερνετ) και άλλους, το οφειλόμενο ποσό υπολογίζεται με τη βοήθεια τύπων, που θα μπορούσε κανείς να τους γράψει με τη μορφή αλγεβρικών παραστάσεων.
  Διαβάζοντας αναλυτικά έναν λογαριασμό υπηρεσιών σταθερής τηλεφωνίας, μπορείτε να βρείτε την ανάλυση του οφειλόμενου ποσού και να σκεφτείτε την αλγεβρική παράσταση που «κρύβεται» πίσω από τον υπολογισμό του συνόλου του λογαριασμού.
  Δείτε ενδεικτικά τον παρακάτω αναλυτικό λογαριασμό σταθερής τηλεφωνίας.

	Ποσό σε ευρώ
Πάγιες χρεώσεις	40,00
Τηλεφωνική γραμμή για το διάστημα από ... έως ...	26,50
Υπηρεσίες ίντερνετ για το διάστημα από ... έως ...	13,50
Επιπλέον χρεώσεις (χωρίς φόρους και τέλη)	5,30
Σύνολο λογαριασμού (χωρίς φόρους)	45,30
Τέλος συνδρομητών (ποσοστό 5% επί του συνόλου χωρίς φόρους)	2,265
Σύνολο λογαριασμού, συμπεριλαμβανομένου τέλους συνδρομητών (χωρίς φόρους)	47,565
Σύνολο φόρων (ποσοστό 24% επί του συνόλου, συμπεριλαμβανομένου του τέλους συνδρομητών)	11,4156
Σύνολο λογαριασμού (με φόρους)	58,9806
Οφειλόμενο ποσό	**58,98**

- Σε οικήματα στα οποία κατοικούν ένοικοι σε διαφορετικά διαμερίσματα (όπως πολυκατοικίες), συχνά υπάρχει κοινή δεξαμενή για την αποθήκευση πετρελαίου θέρμανσης.
  Χρησιμοποιώντας πετρέλαιο από την κοινή δεξαμενή, θερμαίνεται το νερό που βρίσκεται στους σωλήνες του καλοριφέρ και έτσι θερμαίνονται όλα τα διαμερίσματα του οικήματος.
  Ωστόσο, δε θερμαίνονται όλα τα διαμερίσματα το ίδιο εύκολα. Άλλα διαμερίσματα χρειάζονται περισσότερο ζεστό νερό, άρα καταναλώνουν περισσότερο πετρέλαιο, και άλλα χρειάζονται λιγότερο, άρα καταναλώνουν λιγότερο πετρέλαιο.

Όμως η δεξαμενή πετρελαίου είναι κοινή, οπότε αυτή η διαφορά δεν μπορεί να μετρηθεί άμεσα. Πώς υπολογίζεται λοιπόν το μέρος του πετρελαίου που καταναλώνει κάθε διαμέρισμα; Αυτό γίνεται με τη βοήθεια ενός ειδικού μετρητή, που μετρά τον όγκο του θερμού νερού που εισάγεται σε κάθε διαμέρισμα.
Ας υποθέσουμε ότι σε ένα οίκημα τριών διαμερισμάτων έχουμε τις εξής μετρήσεις:

Ενδείξεις μετρητών	1η Ιανουαρίου	31η Μαρτίου του ίδιου έτους
Διαμέρισμα Α	124.206	158.011
Διαμέρισμα Β	251.342	291.239
Διαμέρισμα Γ	87.601	105.203
Ύψος πετρελαίου στη δεξαμενή	125	62

Κάθε εκατοστό ύψους στη δεξαμενή αντιστοιχεί σε 20 λίτρα πετρελαίου.

Ο διαχειριστής του οικήματος υπολόγισε το πετρέλαιο που κατανάλωσε κάθε διαμέρισμα στο διάστημα από την 1η Ιανουαρίου έως την 31η Μαρτίου του ίδιου έτους ως εξής:

Διαμέρισμα Α: $\frac{33.805}{91.304} \cdot 63 \cdot 20 \simeq 0{,}37 \cdot 63 \cdot 20 = 23{,}31 \cdot 20 = 466{,}2$ λίτρα.

Διαμέρισμα Β: $\frac{39.897}{91.304} \cdot 63 \cdot 20 \simeq 0{,}437 \cdot 63 \cdot 20 = 27{,}531 \cdot 20 = 550{,}62$ λίτρα.

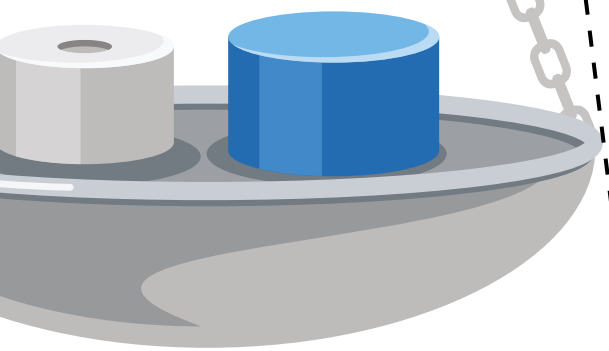
Διαμέρισμα Γ: $\frac{17.602}{91.304} \cdot 63 \cdot 20 \simeq 0{,}193 \cdot 63 \cdot 20 = 12{,}159 \cdot 20 = 243{,}18$ λίτρα.

α) Πώς μπορεί να γραφτεί ο τρόπος υπολογισμού του οφειλόμενου ποσού για υπηρεσίες τηλεφωνίας και του όγκου πετρελαίου που κατανάλωσε κάθε διαμέρισμα σε καθεμία από τις παραπάνω περιπτώσεις;

β) Να βρείτε δικά σας παρόμοια παραδείγματα χρήσης αλγεβρικών παραστάσεων στην καθημερινότητα και να τα παρουσιάσετε στην τάξη σας, μαζί με τις αντίστοιχες αλγεβρικές παραστάσεις.

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ 6:

Αλγεβρικές σχέσεις



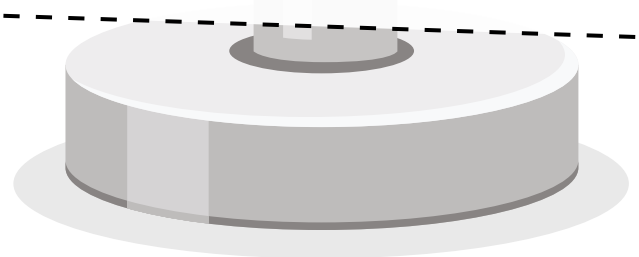
Ο Γιώργος διοργανώνει έναν αγώνα αντοχής στη μικρή πόλη που μένει. Για τους συμμετέχοντες θα αγοράσει μπουκάλια νερό σε εξάδες. Έχει επίσης στο ψυγείο του άλλα 13 μπουκάλια, τα οποία θα χρησιμοποιήσει. Στον αγώνα συμμετέχουν 112 αθλητές και αθλήτριες. Αν τους δώσει από 1 μπουκάλι μετά τον αγώνα, πόσες εξάδες πρέπει να αγοράσει;

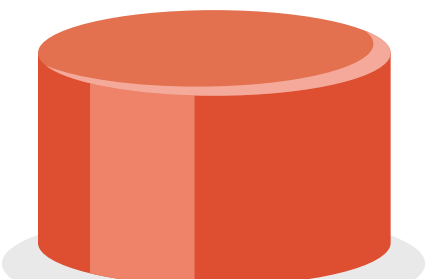
Με τη βοήθεια της εξίσωσης $6x + 13 = 112$ μπορούμε να εκφράσουμε το ερώτημα του προβλήματος. Στη συνέχεια, λύνοντας την εξίσωση, μπορούμε να απαντήσουμε στο ερώτημα.

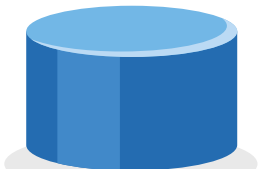
Σε αυτή την ενότητα, εκτός από τα προβλήματα που θα λύσουμε, θα δούμε με ποια βήματα λύνουμε μια τέτοια εξίσωση και τι σημαίνει κάθε βήμα της λύσης.

ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΕΝΟΤΗΤΕΣ:

6.1 Η εξίσωση και η λύση της
6.2 Επίλυση εξίσωσης
6.3 Προβλήματα που λύνονται με εξισώσεις



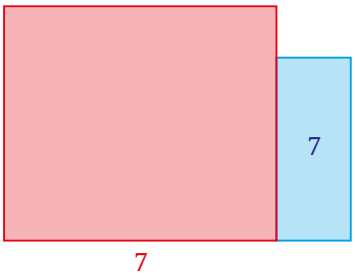






6.1 Η εξίσωση και η λύση της

Δ1. Επίπεδα σχήματα με ίσα εμβαδά



Για τα ορθογώνια του σχήματος ισχύουν τα εξής:

- Το πορτοκαλί έχει βάση 7 μονάδων μήκους.
- Το γαλάζιο έχει επιφάνεια 7 μονάδων εμβαδού.

α) Να εκφράσετε με μια αλγεβρική παράσταση το συνολικό εμβαδόν των ορθογωνίων του σχήματος.

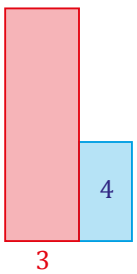
β) Τα δύο ορθογώνια έχουν συνολικό εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν τετραγώνου με πλευρά 6 μονάδων μήκους. Να γράψετε μια εξίσωση που να εκφράζει αυτή τη σχέση εμβαδών και στη συνέχεια να υπολογίσετε το ύψος του πορτοκαλί ορθογωνίου.

Διατυπώστε τις απαντήσεις σας σε κάθε ομάδα και συζητήστε τες σε όλη την τάξη.

Οι εξισώσεις στην αρχαιότητα

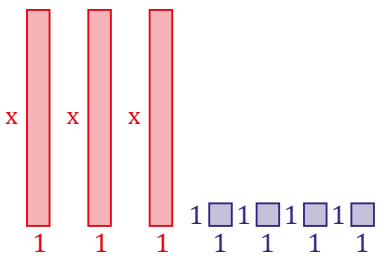
Συζητάμε

...για εξισώσεις και αγνώστους



Όπως είδαμε και στην προηγούμενη ενότητα, ορισμένες αλγεβρικές παραστάσεις αντιστοιχούν σε εμβαδά επίπεδων σχημάτων. Στο διπλανό σχήμα το άθροισμα των εμβαδών των δύο ορθογωνίων εκφράζεται με την αλγεβρική παράσταση $3x + 4$, καθώς το πορτοκαλί ορθογώνιο έχει βάση και ύψος με μήκη 3 και x αντίστοιχα, ενώ το εμβαδόν του γαλάζιου είναι ίσο με 4.

Η ίδια αλγεβρική παράσταση εκφράζεται με άθροισμα εμβαδών και με άλλους τρόπους. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται:



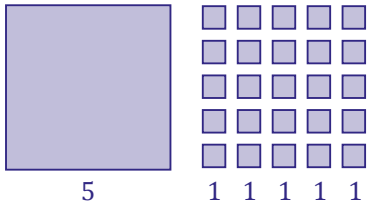
- 3 ορθογώνια με βάση 1 και ύψος x, άρα με εμβαδόν $1 \cdot x$, ή απλά x, το καθένα,
- 4 τετράγωνα πλευράς 1, άρα με εμβαδόν $1 \cdot 1 = 1$ το καθένα.

Το συνολικό εμβαδόν τους είναι:

$$3 \cdot (\text{εμβαδόν ορθογωνίου}) + 4 \cdot (\text{εμβαδόν τετραγώνου}) = 3x + 4 \cdot 1 = 3x + 4$$

Αντίστοιχα, όλοι οι θετικοί αριθμοί μπορούν να εκφραστούν με εμβαδά σχημάτων.

Για παράδειγμα, ο αριθμός 25 αντιστοιχεί στο εμβαδόν ενός τετραγώνου με πλευρά 5, ή στο εμβαδόν 25 τετραγώνων με πλευρά 1, ή και σε εμβαδά άλλων σχημάτων.

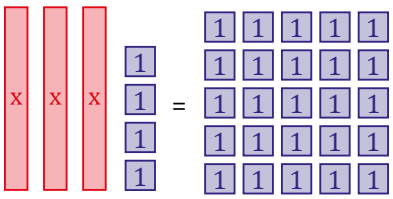
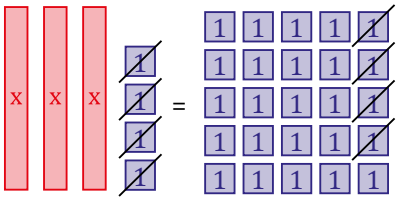
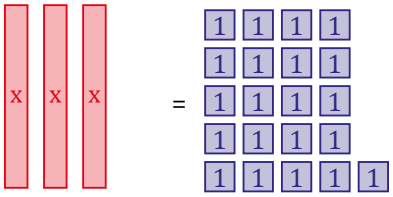
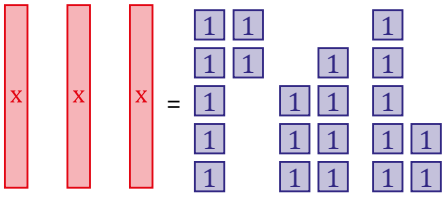
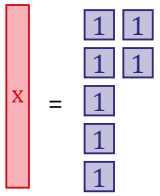


Η εξίσωση $3x + 4 = 25$ με **άγνωστο** το x εκφράζει με τη βοήθεια εμβαδών το εξής ερώτημα:



«Το τριπλάσιο του εμβαδού x ενός ορθογωνίου, όπως στο σχήμα, αυξημένο κατά το εμβαδόν τεσσάρων τετραγώνων πλευράς 1 είναι ίσο με το εμβαδόν 25 τετραγώνων πλευράς 1. Να βρείτε το x».

Συμβολικά, γράφουμε την εξίσωση με τη βοήθεια εμβαδών, όπως στον παρακάτω πίνακα.

με τη βοήθεια εμβαδών…	…με εξίσωση…	…και λεκτικά
	$3x+4=25$	Γράφουμε την εξίσωση με τη βοήθεια εμβαδών σχημάτων.
	$3x+4-4=25-4$	Αφαιρούμε 4 από κάθε μέλος της εξίσωσης.
	$3x=21$	Κάνουμε τις πράξεις σε κάθε μέλος της εξίσωσης.
	$\frac{3x}{3}=\frac{21}{3}$	Διαιρούμε με 3 κάθε μέλος της εξίσωσης.
	$x=7$	

Το **πρώτο μέλος** μιας εξίσωσης είναι αριστερά του ίσον. Εδώ είναι το $3x+4$. Το **δεύτερο μέλος** είναι δεξιά του ίσον. Εδώ είναι το 25.

Η λύση της εξίσωσης είναι ο αριθμός 7, που σημαίνει ότι την επαληθεύει.

Πράγματι, αντικαθιστώντας το x με το 7 στην εξίσωση, βρίσκουμε ότι τα δύο μέλη είναι ίσα:

1ο μέλος	2ο μέλος
$3\cdot 7+4$	25
$21+4$	25
25	25

Αν στην εξίσωση αντικαταστήσουμε το x με οποιονδήποτε άλλο αριθμό, π.χ. με 10, θα διαπιστώσουμε ότι δεν επαληθεύεται, δηλαδή τα δύο μέλη δεν είναι ίσα:

1ο μέλος	2ο μέλος
$3\cdot 10+4$	25
$30+4$	25
34	25

Η εξίσωση επαληθεύεται μόνο για τον αριθμό που είναι η λύση της.

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

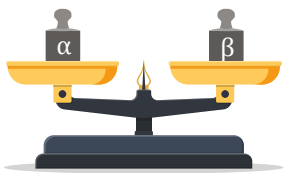
Η **εξίσωση** είναι μια ισότητα που περιέχει αγνώστους (γράμματα). Για να λύσουμε μια εξίσωση, πρέπει να βρούμε τον αριθμό που την επαληθεύει, δηλαδή τον αριθμό που, αν τον βάλουμε στη θέση του αγνώστου, δίνει μια ισότητα που ισχύει. Μια εξίσωση μπορεί να επαληθεύεται για περισσότερους από έναν αριθμούς. Όλους αυτούς τους αριθμούς τούς λέμε **λύσεις** της εξίσωσης.	Η εξίσωση $2x+1=10$ επαληθεύεται για τον αριθμό 4,5, γιατί: $2\cdot 4{,}5+1=10$ Επίσης, δεν επαληθεύεται από κανέναν άλλο αριθμό, άρα ο 4,5 είναι η λύση της εξίσωσης. Ο άγνωστος είναι ένα γράμμα που εκφράζει τον αριθμό που επαληθεύει την εξίσωση.
Δύο εξισώσεις που έχουν τις ίδιες λύσεις τις ονομάζουμε **ισοδύναμες**.	Οι παρακάτω εξισώσεις είναι ισοδύναμες, γιατί έχουν την ίδια λύση, που είναι ο αριθμός 2: $x=2$ $2x=4$ $3x-1=5$

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

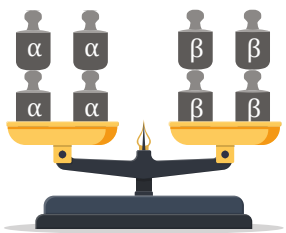
1. **Η Μαρία έχει τοποθετήσει δύο βαρίδια α και β σε έναν ζυγό και αυτός ισορροπεί (Εικόνα Ι). Για τα βάρη των βαριδιών γράφει την ισότητα $\alpha=\beta$.**

α) Στη συνέχεια τοποθέτησε από ένα ίδιο βαρίδι γ σε κάθε μέρος του ζυγού. Να σχεδιάσετε το γ στον ζυγό. Ποια είναι η αντίστοιχη ισότητα;

β) Ο Βαγγέλης αφαίρεσε το βαρίδι γ και τοποθέτησε άλλα βαρίδια. Έτσι προέκυψε ο ζυγός που φαίνεται στην Εικόνα ΙΙ.
Γιατί ο ζυγός ισορροπεί; Ποια είναι η αντίστοιχη ισότητα;



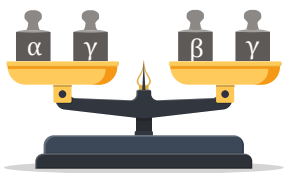
Εικόνα Ι



Εικόνα ΙΙ

Απάντηση

α) Σχεδιάζουμε έναν ζυγό που ισορροπεί, όπως στην εικόνα, γιατί προσθέσαμε ένα βαρίδι γ ίσου βάρους σε κάθε μέρος του ζυγού. Η αρχική ισότητα $\alpha=\beta$ γράφεται τώρα $\alpha+\gamma=\beta+\gamma$.



β) Ο Βαγγέλης τετραπλασίασε τα βάρη και στα δύο μέρη του ζυγού. Εφόσον ο ζυγός ισορροπούσε, θα ισορροπεί και μετά τον τετραπλασιασμό. Η ισότητα $\alpha=\beta$ μετασχηματίζεται στην ισότητα $4\alpha=4\beta$.

Ιδιότητες που διατηρούν την ισότητα

Αν έχουμε μια ισότητα $\alpha = \beta$, τότε, όπως συμβαίνει και με την ισορροπία του ζυγού, η ισότητα διατηρείται:

- αν προσθέσουμε έναν αριθμό γ, τον ίδιο και στα δύο μέλη της, δηλαδή $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$,
- αν πολλαπλασιάσουμε με τον ίδιο αριθμό γ και τα δύο μέλη της, δηλαδή $\alpha\gamma = \beta\gamma$.

Επίσης, όπως είδαμε στο «Συζητάμε», η ισότητα διατηρείται:

- αν αφαιρέσουμε έναν αριθμό γ, τον ίδιο και από τα δύο μέλη της, δηλαδή $\alpha - \gamma = \beta - \gamma$,
- αν διαιρέσουμε με έναν αριθμό γ (όχι μηδέν) και τα δύο μέλη της, δηλαδή $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma}$.

Στις διπλανές σχέσεις τα γράμματα εκφράζουν οποιονδήποτε αριθμό.

2. **Στις παρακάτω εικόνες εμφανίζονται όμοιοι κύβοι βάρους x και όμοιοι κύβοι βάρους 1 κιλού ο καθένας, επάνω σε έναν ζυγό.**

α) Πόσο είναι το x σε κιλά;

β) Να γράψετε την εξίσωση που αντιστοιχεί σε κάθε εικόνα ζυγού που ισορροπεί.

γ) Με ποιον τρόπο πήγαμε από την 1η στη 2η και από τη 2η στην 3η εικόνα;

δ) Να επαληθεύσετε ότι ο αριθμός 2 επαληθεύει τις τρεις εξισώσεις που γράψατε.



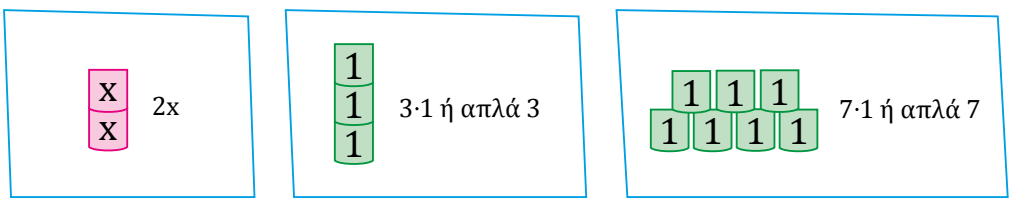
1η εικόνα | 2η εικόνα | 3η εικόνα

Απάντηση

α) Όπως φαίνεται στην 3η εικόνα, ένας κύβος βάρους x έχει το ίδιο βάρος με 2 κύβους βάρους 1 κιλού. Άρα το x αντιστοιχεί σε 2 κιλά.

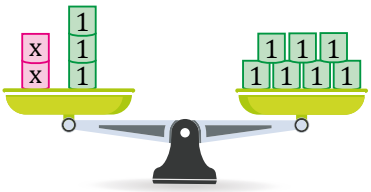
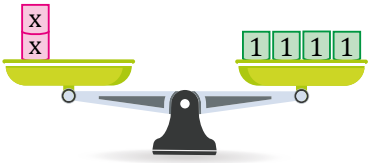
Μπορούμε να γράψουμε $x = 2$.

β) Για την 1η εικόνα, στο 1ο μέλος και στο 2ο μέλος της εξίσωσης θα γράψουμε τα δύο μέρη που ισορροπούν, χρησιμοποιώντας τους παρακάτω συμβολισμούς.



Έτσι, έχουμε για την 1η εικόνα την εξίσωση $2x + 3 = 7$, για τη 2η την εξίσωση $2x = 4$ και για την 3η την εξίσωση $x = 2$.

γ) Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται πώς από την 1η εικόνα πήγαμε στη 2η και πώς από τη 2η εικόνα πήγαμε στην 3η.

1η εικόνα	2η εικόνα	3η εικόνα
		
$2x+3=7$	$2x=4$	$x=2$

$2x+3-3=7-3$

Αφαιρέσαμε 3 από τα δύο μέλη της εξίσωσης, ή αλλιώς αφαιρέσαμε 3 κύβους βάρους 1 κιλού από κάθε μέρος της ζυγαριάς.

$\frac{2x}{2}=\frac{4}{2}$

Διαιρέσαμε με 2 και τα δύο μέλη της εξίσωσης, ή αλλιώς αφήσαμε τους μισούς κύβους σε κάθε μέρος της ζυγαριάς.

δ) Αντικαθιστώντας το x με 2 σε κάθε εξίσωση, έχουμε:
1η εικόνα: $2\cdot 2+3=7$.
2η εικόνα: $2\cdot 2=4$.
3η εικόνα: $2=2$.
Και οι τρεις εξισώσεις επαληθεύονται.

Ο αριθμός 2 είναι ο μοναδικός που επαληθεύει καθεμία από τις τρεις εξισώσεις.

Οι εξισώσεις έχουν την ίδια λύση και συνεπώς είναι ισοδύναμες.

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Ποιες από τις παρακάτω είναι εξισώσεις;

α) $3+4=7$ **β)** $2x+4$

γ) $-2x+5=\frac{1}{2}$ **δ)** $2,4=\alpha-\frac{3}{2}$

2. Να γράψετε το πρώτο μέλος, το δεύτερο και τον άγνωστο καθεμιάς από τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $4x-1=8$ **β)** $\frac{3}{2}\cdot x+1=\frac{7}{2}$ **γ)** $4y+5=11$

δ) $11-x=1$ **ε)** $15=3x+3$

3. Να εξετάσετε αν ο αριθμός που δίνεται είναι λύση της αντίστοιχης εξίσωσης:

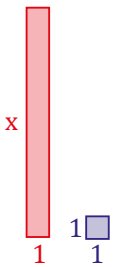
α) το 1 για την εξίσωση $3x-1=2$,

β) το 3 για την εξίσωση $2x-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$,

γ) το -1 για την εξίσωση $4+x=3$,

δ) το $\frac{3}{2}$ για την εξίσωση $\frac{5}{2}-x=2$.

4. Χρησιμοποιώντας ορθογώνια εμβαδού x και τετράγωνα εμβαδού 1 σαν τα διπλανά, να εκφράσετε τις παρακάτω εξισώσεις:



α) $2x+3=11$ **β)** $3x+1=7$

γ) $7=3+x$ **δ)** $10+5x=16$

5. Με βάση τον ζυγό της εικόνας που ισορροπεί, να γράψετε ποια από τις παρακάτω ισότητες είναι σωστή (Σ) και ποια λανθασμένη (Λ).



α) $\alpha - 2 = \beta + 2$ Σ Λ

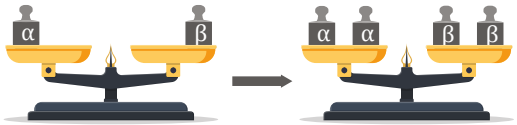
β) $3\alpha = 3\beta$ Σ Λ

γ) $2\alpha + \gamma = 2\beta + \gamma$ Σ Λ

δ) $\frac{1}{2}\alpha - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}\alpha - \frac{2}{3}$ Σ Λ

Το γ είναι το βάρος ενός άλλου βαριδιού.

6. Οι ζυγοί ισορροπούν.

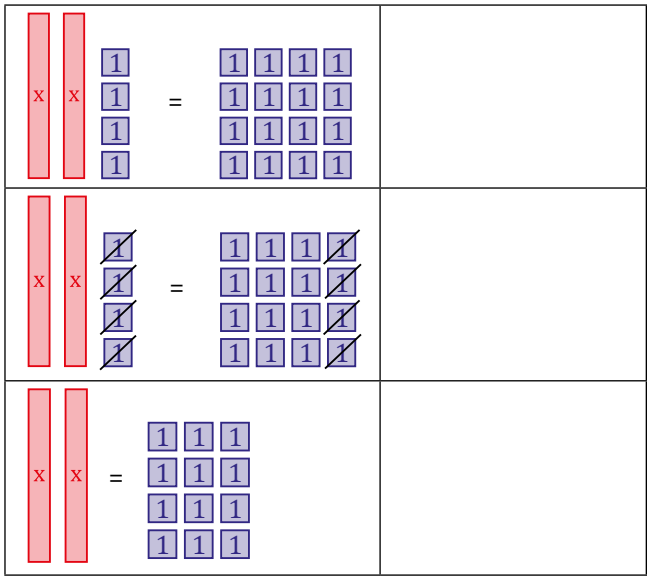


α) Να τους περιγράψετε με ισότητες.

β) Τι πρέπει να αλλάξουμε στον ζυγό στα αριστερά, ώστε να έχουμε την ισορροπία του ζυγού στα δεξιά;

Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

7. Στην εικόνα φαίνονται τα πρώτα βήματα της λύσης μιας εξίσωσης.



α) Ποια είναι η εξίσωση αρχικά;

β) Να γράψετε τις εξισώσεις που αντιστοιχούν σε κάθε εικόνα και να περιγράψετε με λέξεις πώς από το κάθε βήμα πάμε στο επόμενο.

γ) Να συνεχίσετε στα επόμενα βήματα, μέχρι να φτάσετε στη λύση της εξίσωσης.

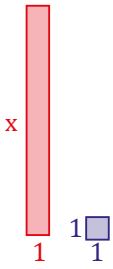
8. Τα βήματα για τη λύση της εξίσωσης $4x + 1 = 5$ δίνονται παρακάτω. Χρησιμοποιώντας το ορθογώνιο και το τετράγωνο της εικόνας να σχεδιάσετε κάθε βήμα της λύσης και να γράψετε με λέξεις πώς πάμε από το ένα στο άλλο.

$4x + 1 - 1 = 5 - 1$

$4x = 4$

$\frac{4x}{4} = \frac{4}{4}$

$x = 1$



9. Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω ορθογώνια και τετράγωνα, να γράψετε τις παρακάτω εξισώσεις και στη συνέχεια να γράψετε όλα τα βήματα της λύσης τους.

α) $x + 3 = 5$ **β)** $2x + 1 = 7$

γ) $5 = 3 + 2x$ **δ)** $1 + 5x = 11$

10. Στην ερώτηση «Πώς πήγαμε από την ισότητα $\alpha = \beta$ στην ισότητα $\alpha - 2 = \beta - 2$;» η Θεοδώρα απάντησε ότι αφαιρέσαμε και από τα δύο μέλη το 2, άρα διατηρείται η ισότητα. Η Αλίνα είπε ότι προσθέσαμε στα δύο μέλη το -2 και έτσι, πάλι, διατηρείται η ισότητα. Να εξετάσετε αν είναι σωστό αυτό που είπε η Αλίνα.

11. Να περιγράψετε με εικόνες ζυγών πώς από την ισότητα $4\alpha + \gamma = 4\beta + \gamma$ φτάνουμε στην $\alpha = \beta$.

12. Ποια ιδιότητα της ισότητας εφαρμόζεται στην $\alpha = \beta$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις;

α) $\alpha + \lambda = \beta + \lambda$ **β)** $\alpha - \delta = \beta - \delta$

γ) $3\alpha = 3\beta$ **δ)** $\frac{\alpha}{4} = \frac{\beta}{4}$

ε) $3\alpha + \gamma = 3\beta + \gamma$ **στ)** $5\alpha - \delta = 5\beta - \delta$

6.2 Επίλυση εξίσωσης

Δ1. Ποιες ιδιότητες εφαρμόσαμε;

Παρακάτω φαίνονται τα βήματα της λύσης μιας εξίσωσης με τη βοήθεια των ιδιοτήτων της ισότητας.
Συζητήστε στην τάξη ποια ιδιότητα εφαρμόζεται σε κάθε βήμα.

$$2{,}5x - 12 = 13$$
$$2{,}5x - 12 + 12 = 13 + 12$$
$$2{,}5x = 25$$
$$\frac{2{,}5x}{2{,}5} = \frac{2{,}5}{2{,}5}$$
$$x = 10$$



Συζητάμε

...για την επίλυση μιας εξίσωσης

Για να λύσουμε μια εξίσωση, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες της ισότητας.
Ας δούμε την εξίσωση $3x + 12{,}2 = 5{,}9$.

Επίλυση εξίσωσης ονομάζουμε το σύνολο των βημάτων που ακολουθούμε για να τη λύσουμε.

Ιδιότητες της ισότητας

Παρακάτω φαίνονται τα βήματα επίλυσης. Σε κάθε βήμα **μετασχηματίζουμε** την αρχική σε μια νέα εξίσωση που είναι ισοδύναμη με την προηγούμενη, λόγω των ιδιοτήτων της ισότητας.

Αρχική εξίσωση $3x - 11{,}2 = 5{,}9$	**Ποια ιδιότητα χρησιμοποιούμε**	
Νέες, ισοδύναμες εξισώσεις	**αλγεβρικά...**	**...λεκτικά**
$3x - 11{,}2 + 11{,}2 = 5{,}9 + 11{,}2$ $3x = 17{,}1$	$\alpha + \gamma = \beta + \gamma$	Προσθέτουμε σε κάθε μέλος τον ίδιο αριθμό, δηλαδή 11,2.
$\frac{3x}{3} = \frac{17{,}1}{3}$ $x = 5{,}7$	$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma}$ Με γ όχι μηδέν.	Διαιρούμε κάθε μέλος με τον ίδιο αριθμό, δηλαδή με 3.

Την παραπάνω εξίσωση την ονομάζουμε **πρώτου βαθμού**. Πρόκειται για εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος δεν είναι υψωμένος σε εκθέτη και βρίσκουμε τη λύση τους εφαρμόζοντας τις ιδιότητες της ισότητας.

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. **Να λύσετε την εξίσωση** $\frac{3}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{4}$.

Απάντηση

Με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας βγάζουμε την παρένθεση:

$\frac{3}{2}\cdot x-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{4}$ ή $\frac{3}{2}\cdot x-\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$

Προσθέτουμε και στα δύο μέλη το $\frac{3}{4}$: $\frac{3}{2}\cdot x-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}+\frac{3}{4}$ ή

$\frac{3}{2}\cdot x=\frac{8}{4}$ ή $\frac{3}{2}\cdot x=2$

Διαιρούμε τα δύο μέλη με $\frac{3}{2}$:

$\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}}\cdot x=\frac{2}{\frac{3}{2}}$ ή $1\cdot x=\frac{\frac{2}{1}}{\frac{3}{2}}$ ή $x=\frac{2\cdot 2}{3\cdot 1}$ ή $x=\frac{4}{3}$

Η λύση της εξίσωσης είναι $\frac{4}{3}$.

Συνδέουμε με το «ή» δύο εξισώσεις που είναι ισοδύναμες. Εδώ το «ή» έχει το νόημα του «ή αλλιώς». Επίσης, μπορούμε να γράφουμε τις ισοδύναμες εξισώσεις τη μία κάτω από την άλλη.

2ος τρόπος

Πολλαπλασιάζοντας με $\frac{2}{3}$ τα δύο μέλη της $\frac{3}{2}\cdot x=2$,

έχουμε: $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot x=\frac{2}{3}\cdot 2$ ή $\frac{6}{6}\cdot x=\frac{4}{3}$ ή $x=\frac{4}{3}$

Με «χιαστί γινόμενα»

Συχνά στην επίλυση εξισώσεων χρησιμοποιούμε τα χιαστί γινόμενα, δηλαδή την παρακάτω ιδιότητα:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \text{ ή } \alpha\delta=\beta\gamma$$

Για παράδειγμα, στην εφαρμογή 1, έχοντας φτάσει στην εξίσωση $\frac{3}{2}\cdot x=2$, μπορούμε να συνεχίσουμε ως εξής (3ος τρόπος):

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{x}{1}=\frac{2}{1} \text{ ή } \frac{3x}{2}=\frac{2}{1} \text{ ή } 3x\cdot 1=2\cdot 2 \text{ ή } 3x\cdot 1=4 \text{ ή } \frac{3x}{3}=\frac{4}{3} \text{ ή } x=\frac{4}{3}$$

Επίλυση εξίσωσης χιαστί

Χιαστί γινόμενα

2. **Να ελέγξετε αν είναι σωστοί οι μετασχηματισμοί της εξίσωσης** $\frac{1}{3}-5x=\frac{1}{2}$, **όπως φαίνονται παρακάτω:**

$-5x=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$ ή $-5x=\frac{3}{6}-\frac{2}{6}$ ή $-5x=\frac{1}{6}$ ή $6(-5)x=1$ ή $-30x=1$ ή $x=\frac{1}{-30}$ ή $x=-\frac{1}{30}$

Βήμα (1) (2) (3) (4) (5) (6) (7)

Απάντηση

Στο βήμα (1) αφαιρέσαμε το $\frac{1}{3}$ από κάθε μέλος. Έτσι, «εξαφανίσαμε» το $\frac{1}{3}$ από το πρώτο μέλος και «εμφανίσαμε» το $-\frac{1}{3}$ στο δεύτερο μέλος:

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-5x=\frac{1}{2}-\frac{1}{3} \quad \text{ή} \quad -5x=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$

Άρα η εξίσωση στο βήμα (1) είναι ισοδύναμη με την αρχική.

Στο βήμα (2) κάναμε τα κλάσματα ομώνυμα και στο βήμα (3) υπολογίσαμε τη διαφορά τους.

Στο βήμα (4) κάναμε τα χιαστί γινόμενα και στο βήμα (5) κάναμε τον πολλαπλασιασμό $6\cdot(-5)=-30$.

Στο βήμα (6) διαιρέσαμε τα δύο μέλη με το -30 και στο βήμα (7) υπολογίσαμε το πρόσημο του κλάσματος:

$$\frac{-30x}{-30}=\frac{1}{-30} \quad \text{ή} \quad \frac{-30}{-30}\cdot x=\frac{1}{-30} \quad \text{ή} \quad 1\cdot x=\frac{1}{-30} \quad \text{ή} \quad x=-\frac{1}{30}$$

Σε όλα τα βήματα είτε χρησιμοποιήσαμε ιδιότητες της ισότητας είτε κάναμε πράξεις. Άρα οι μετασχηματισμοί είναι σωστοί και οι εξισώσεις ισοδύναμες. Η λύση της εξίσωσης είναι το $-\frac{1}{30}$.

«Αλλάζει μέλος; Αλλάζει πρόσημο»

Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιήθηκε στο βήμα (1), στην εφαρμογή 2.
Ισοδυναμεί με την πρόσθεση ή την αφαίρεση του ίδιου αριθμού από τα δύο μέλη μιας ισότητας.

Αλλάζω μέλος, αλλάζω πρόσημο 1

Αλλάζω μέλος, αλλάζω πρόσημο 2

3. **Να λύσετε την εξίσωση $\frac{2x+1}{4}=1,7$ με τις ιδιότητες της ισότητας.**

Απάντηση

$4\cdot\frac{2x+1}{4}=4\cdot 1,7$ ή $\frac{4(2x+1)}{4}=6,8$ ή $\frac{4}{4}\cdot(2x+1)=6,8$ ή

$2x+1=6,8$ ή $2x+1-1=6,8-1$ ή

$2x=5,8$ ή $\frac{2x}{2}=\frac{5,8}{2}$ ή $x=2,9$

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Ποιες ιδιότητες της ισότητας χρησιμοποιούνται σε κάθε περίπτωση;

α) $4x=8$ ή $\frac{4x}{4}=\frac{8}{4}$ ή $x=2$

β) $x-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ ή $x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}$ ή $x=\frac{4}{2}$ ή $x=2$

γ) $\frac{3}{4}\cdot x=\frac{1}{2}$ ή $\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot x=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}$ ή $\frac{12}{12}\cdot x=\frac{4}{6}$ ή $x=\frac{2}{3}$

2. Ποιες από τις εξισώσεις της προηγούμενης άσκησης είναι ισοδύναμες;

3. Να γράψετε τι γίνεται σε κάθε βήμα της παρακάτω επίλυσης της εξίσωσης $x:0,5+1,5=3,5$.

$$x:0,5+1,5-1,5=3,5-1,5 \text{ ή } \frac{x}{0,5}=2 \text{ ή } 0,5\cdot\frac{x}{0,5}=0,5\cdot 2 \text{ ή } x=1$$

Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

4. Είναι σωστοί (Σ) ή λανθασμένοι (Λ) οι μετασχηματισμοί καθεμίας από τις παρακάτω εξισώσεις; Στους λανθασμένους να εντοπίσετε το λάθος.

α) $3x=1$ ή $\frac{3x}{3}=1$ ή $x=1$ Σ Λ

β) $\frac{4}{3}\cdot x=\frac{1}{6}$ ή $\frac{12}{12}\cdot x=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6}$ ή $x=\frac{1}{8}$ Σ Λ

γ) $5x=25$ ή $\frac{5x}{5}=\frac{25}{5}$ ή $\frac{5}{5}\cdot\frac{x}{5}=5$ ή $\frac{x}{5}=5$ ή $x=25$ Σ Λ

δ) $10-3x=11$ ή $3x=11+10$ ή $3x=21$ ή $\frac{3x}{3}=\frac{21}{3}$ ή $x=7$ Σ Λ

5. Να εξηγήσετε τα βήματα επίλυσης της παρακάτω εξίσωσης:

$$\frac{3x}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6} \text{ ή } \frac{3x}{2}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3} \text{ ή } \frac{3x}{2}=\frac{3}{6} \text{ ή } \frac{3x}{2}=\frac{1}{2} \text{ ή } 3x=1 \text{ ή } \frac{3x}{3}=\frac{1}{3} \text{ ή } x=\frac{1}{3}$$

6. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $7x+0,5=8,2$ **β)** $11+x=12$

γ) $2\left(x-\frac{1}{3}\right)=1$ **δ)** $\frac{1}{3}(2x-1)=\frac{1}{4}$

ε) $1,2-3x=2,4$ **στ)** $\frac{3x-1}{2}=7$

ζ) $\frac{2-0,2x}{4}=\frac{1}{2}$ **η)** $\frac{1}{2}+\frac{x}{4}=2\left(3-\frac{1}{2}\right)$

θ) $\frac{-7x}{5}+\frac{6}{5}=-5$

7. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $-1,2+2x=1,2$ **β)** $2-x=10$

γ) $3x-1=-1$ **δ)** $\frac{3x-2}{3}=\frac{1}{3}$

ε) $7,05x+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ **στ)** $-1\cdot x=1$

ζ) $\frac{1}{3}+\frac{x}{3}=0$



6.3 Προβλήματα που λύνονται με εξισώσεις

Δ1. Κόστος αποστολής δέματος

Μια εταιρεία χρεώνει την αποστολή δεμάτων εντός της πόλης:

- 2,5 ευρώ για 1 δέμα,
- 0,5 ευρώ για κάθε δέμα επιπλέον του ενός, από τον ίδιο αποστολέα, στην ίδια διεύθυνση, την ίδια ημέρα.

Ένας πελάτης πλήρωσε 8 ευρώ για αποστολή δεμάτων στην ίδια διεύθυνση, την ίδια ημέρα.

α) Να γράψετε μια εξίσωση για το πρόβλημα.

β) Να υπολογίσετε πόσα δέματα έστειλε ο πελάτης. Να δοκιμάσετε διαφορετικούς τρόπους και να τους συζητήσετε στην τάξη.

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. Ένα κατάστημα πουλάει φιστίκια προς 11,5 ευρώ το κιλό, άψητα. Χρεώνει 1,5 ευρώ επιπλέον, για να μπουν σε ειδική συσκευασία, ανεξαρτήτως της ποσότητάς τους. Ο Ομέρ πλήρωσε 6,1 ευρώ για φιστίκια σε ειδική συσκευασία. Πόσα φιστίκια αγόρασε;

Απάντηση

1ος τρόπος: με εξίσωση

Αν ο Ομέρ αγόρασε x κιλά φιστίκια, πλήρωσε $11,5x+1,5$ ευρώ, που αντιστοιχεί σε 6,1 ευρώ.

Άρα: $11,5x+1,5=6,1$

Λύνουμε την εξίσωση χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες διατήρησης της ισότητας:

$$11,5x+1,5-1,5=6,1-1,5 \quad \text{ή} \quad 11,5x=4,6 \quad \text{ή} \quad \frac{11,5x}{11,5}=\frac{4,6}{11,5} \quad \text{ή} \quad x=0,4$$

Άρα αγόρασε 0,4 κιλά ή 400 γραμμάρια φιστίκια.

2ος τρόπος: αριθμητικά

Εφόσον το ένα κιλό φιστίκια κοστίζει 11,5 ευρώ, χωρίς συσκευασία, τα 100 γραμμάρια κοστίζουν $11,5:10=1,15$ ευρώ.

Ο Ομέρ πλήρωσε 6,1 ευρώ για φιστίκια σε ειδική συσκευασία.

Αφαιρώντας 1,5 ευρώ (για τη συσκευασία), το κόστος των φιστικιών ήταν $6,1-1,5=4,6$ ευρώ.

Εφόσον $4,6:1,15=4$, ο Ομέρ αγόρασε $4\cdot 100=400$ γραμμάρια φιστίκια.



3ος τρόπος: με μοτίβο

Όπως είδαμε, τα 100 γραμμάρια φιστίκια κοστίζουν 1,15 ευρώ.

Συνεπώς σε συσκευασία κοστίζουν $1,15+1,5=2,65$ ευρώ.

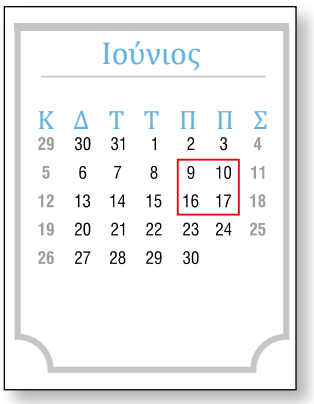
Αν προσθέσουμε 100 γραμμάρια, το κόστος ανεβαίνει κατά 1,15 ευρώ.

Με αντίστοιχους υπολογισμούς έχουμε:

Βάρος σε γραμμάρια	100	200	300	400
Τιμή σε ευρώ	$1,15+1,5=2,65$	$2,65+1,15=3,80$	$3,80+1,15=4,95$	$4,95+1,15=6,1$

Άρα ο Ομέρ αγόρασε 400 γραμμάρια φιστίκια.

2. **Στην εικόνα με το ημερολόγιο κάθε γραμμή είναι μια εβδομάδα. Οι ημερομηνίες τεσσάρων ημερών οι οποίες είναι μέσα σε ένα τετράγωνο, όπως στην εικόνα, έχουν άθροισμα 96. Μπορείτε να βρείτε ποιες ημερομηνίες είναι;**



Απάντηση

Αν x είναι η πρώτη ημερομηνία εντός του τετραγώνου, η επόμενη είναι $x+1$. Οι άλλες δύο είναι μια εβδομάδα μετά, άρα $x+7$ και $x+8$. Δηλαδή:

x	$x+1$
$x+7$	$x+8$

Εφόσον το άθροισμά τους είναι 96, είναι:

$$x+(x+1)+(x+7)+(x+8)=96$$
$$x+x+1+x+7+x+8=96$$
$$4x+16=96$$
$$4x+16-16=96-16$$
$$4x=80$$
$$\frac{4x}{4}=\frac{80}{4}$$
$$x=20$$

Άρα οι ημερομηνίες είναι 20, 21, 27 και 28.

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Σε ποια εξίσωση αντιστοιχεί η πρόταση «αν αυξήσουμε το x κατά 1,2, βρίσκουμε 3,4»;

2. Κάθε κουτί χωράει 0,75 κιλά καφέ. Σε x κουτιά έχουμε 6,75 κιλά καφέ. Ποια εξίσωση μπορεί να μας βοηθήσει να βρούμε το x;

3. **α)** Να επιλέξετε το σωστό από τα παρακάτω. Αν στο πενταπλάσιο του x προσθέσουμε το $\frac{1}{2}$, τότε έχουμε:

i) $5+\frac{1}{2}$ **ii)** $5x+\frac{1}{2}$ **iii)** $5\left(x+\frac{1}{2}\right)$

β) Προσθέσαμε στο πενταπλάσιο του x το $\frac{1}{2}$ και βρήκαμε 8. Ποια εξίσωση μας βοηθάει να βρούμε το x;

i) $x=8-\left(5+\frac{1}{2}\right)$ **ii)** $5x+\frac{1}{2}=8$

iii) $5\left(x+\frac{1}{2}\right)=8$

4. Η διαφορά του x από το 5,9 είναι 3,2. Ποια από τις παρακάτω εξισώσεις μάς βοηθάει να βρούμε το x;

α) $x-5,9=3,2$ **β)** $x-3,2=5,9$

γ) $5,9-x=3,2$ **δ)** $3,2-x=5,9$

5. Κάθε μαρούλι κοστίζει 0,7 ευρώ. Για 3,5 κιλά μήλα και 2 μαρούλια πληρώσαμε 7 ευρώ. Αν ονομάσουμε x την τιμή των μήλων ανά κιλό, τότε με ποια από τις παρακάτω εξισώσεις μπορούμε να βρούμε το x;

α) $3,5x+0,7=7$ **β)** $(3,5+0,7)x=7$

γ) $x=(7-1,4):3,5$ **δ)** $3,5x+1,4=7$

6. Ένα ποτήρι χωράει 0,22 λίτρα νερό. Για να γεμίσουμε ένα δοχείο που χωράει 2,5 λίτρα νερό, αδειάσαμε x γεμάτα ποτήρια με νερό στο δοχείο και προσθέσαμε 0,08 λίτρα επιπλέον.

α) Το x είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από 10;

β) Τι εκφράζει η παράσταση $0,22x+0,08$;

γ) Να βρείτε το x.



Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

7. Σε ένα ζαχαροπλαστείο το παγωτό κοστίζει 2 ευρώ η μπάλα. Για να μη λιώσει το παγωτό κατά τη μεταφορά, ο πελάτης μπορεί να αγοράσει μια ειδική συσκευασία που κοστίζει 0,5 ευρώ και χωράει 10 μπάλες. Κάποιος αγόρασε μερικές μπάλες παγωτό (λιγότερες από 10) στην ειδική συσκευασία και πλήρωσε 14,5 ευρώ.

α) Ποια από τις παρακάτω εξισώσεις αντιστοιχεί στο πρόβλημα;

i) $2(x+0,5)=14,5$ **ii)** $2x=14,5+0,5$

iii) $2,5x=14,5$ **iv)** $2x+0,5=14,5$

β) Πόσες μπάλες αγόρασε ο πελάτης;

8. Ένα ισοσκελές τρίγωνο έχει περίμετρο 15 cm. Καθεμία από τις ίσες πλευρές του έχει διπλάσιο μήκος από τη βάση του. Αν ονομάσουμε x το μήκος της βάσης, να επιλέξετε την εξίσωση που περιγράφει το πρόβλημα και να τη λύσετε.

α) $3x=15$ **β)** $5x=15$

γ) $4x=15$ **δ)** $2x+\frac{x}{2}=15$

9. Οι ίσες πλευρές ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι κατά 2 εκ. μεγαλύτερες από τη βάση του. Αν η περίμετρος του τριγώνου είναι 40 εκ., μπορείτε να βρείτε το μήκος της μικρότερης πλευράς;

10. Το άθροισμα των αριθμών της τελευταίας και της προτελευταίας σελίδας ενός βιβλίου είναι 359.

α) Να γράψετε μια εξίσωση με άγνωστο το πλήθος των σελίδων του βιβλίου.

β) Πόσες σελίδες έχει το βιβλίο;

11. Ένα τρίγωνο έχει πλευρές ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ.

- Η ΑΓ είναι μεγαλύτερη κατά 6 εκ. από το μισό της ΑΒ.
- Η ΒΓ είναι μικρότερη κατά 4 εκ. από το διπλάσιο της ΑΒ.
- Η περίμετρος του τριγώνου είναι 30 εκ.

Να βρείτε το μήκος της ΑΒ.

12. Από ένα μπουκάλι με 2 λίτρα νερό πίνουμε ακριβώς δύο και μισό ποτήρια. Αν στο μπουκάλι έμειναν 1,55 λίτρα, πόσα λίτρα νερό χωράει ένα ποτήρι; Να γράψετε την αντίστοιχη εξίσωση και να τη λύσετε.

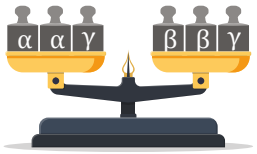
13. Ο Μιχάλης την περίοδο των εξετάσεων καταναλώνει μπλοκ χαρτιού, για να λύνει ασκήσεις. Όσο πλησιάζει η ημέρα της εξέτασης, αρχίζει να καταναλώνει περισσότερα. Η εξέταση του μαθήματος είναι την Παρασκευή. Την Τρίτη κατανάλωσε 1 μπλοκ. Την Τετάρτη κατανάλωσε 10 φύλλα λιγότερα από το διπλάσιο του χαρτιού της Τρίτης. Την Πέμπτη κατανάλωσε το τριπλάσιο του χαρτιού της Τετάρτης και 10 φύλλα ακόμα. Αν συνολικά τις τρεις αυτές ημέρες (Τρίτη – Τετάρτη – Πέμπτη) κατανάλωσε 180 φύλλα, πόσο χαρτί κατανάλωσε την Τρίτη;

Ανακεφαλαίωση

Αλγεβρικές σχέσεις

Ερωτήσεις – ασκήσεις – προβλήματα

1. Ο ζυγός της εικόνας ισορροπεί. Ποιες από τις παρακάτω ισότητες είναι σωστές και ποιες λανθασμένες;



α) $2\alpha+\gamma=2\beta+\gamma$ Σ Λ

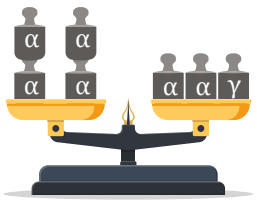
β) $\gamma=2\alpha$ Σ Λ

γ) $\alpha+\gamma=\beta+\gamma$ Σ Λ

δ) $\alpha=\beta$ Σ Λ

ε) $2\alpha+2\beta=2\gamma$ Σ Λ

2. Ο ζυγός της εικόνας ισορροπεί. Ποιες από τις παρακάτω ισότητες είναι σωστές;



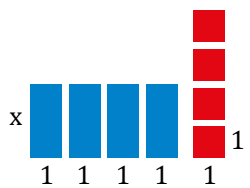
α) $\gamma=2\alpha$ Σ Λ

β) $\alpha=2\gamma$ Σ Λ

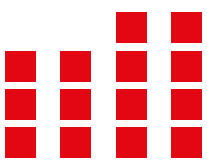
γ) $\gamma=\frac{\alpha}{2}$ Σ Λ

δ) $\alpha=\frac{\gamma}{2}$ Σ Λ

3. Αν το συνολικό εμβαδόν του σχήματος 1 είναι ίσο με το συνολικό εμβαδόν του σχήματος 2, να γράψετε την αντίστοιχη εξίσωση και να βρείτε το x.



σχήμα 1



σχήμα 2

4. Σε καθεμία από τις επόμενες περιπτώσεις να γράψετε τι έχει γίνει στην εξίσωση κάθε γραμμής, ώστε να φτάσουμε στην εξίσωση της αμέσως επόμενης γραμμής.

α)
$-2x+\frac{5}{2}=\frac{1}{2}$
$-2x+\frac{5}{2}-\frac{5}{2}=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}$
$-2x=-\frac{4}{2}$
$-2x=-2$
$\frac{-2x}{-2}=\frac{-2}{-2}$
$x=1$

β)
$2\left(x+\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}$
$2x+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$
$2x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}$
$2x+0=\frac{3}{4}-\frac{2}{4}$
$2x=\frac{1}{4}$
$\frac{2x}{2}=\frac{\frac{1}{4}}{2}$
$x=\frac{1}{8}$

γ)
$2x-4,8=3,2$
$2x-4,8+4,8=4,8+3,2$
$2x=4,8+3,2$
$2x=8$
$x=\frac{8}{2}$
$x=4$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $1,2x-2,4=3,6$ **β)** $5,2-0,8x=0,4$

γ) $7x-2,1=0$ **δ)** $2(x-1)-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

ε) $\frac{1}{6}+x=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}$ **στ)** $\frac{7}{2}\left(\frac{1}{2}-x\right)=0$

ζ) $1,5(x-1)=3$ **η)** $\frac{1}{2}x-5^2=\frac{15}{2}$

θ) $2^3x+2^4=2^5$

6. **α)** Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $10x+0,5=18,5$ **ii)** $10(x+0,5)=18,5$

iii) $10(x-0,5)=18,5$

β) Να γράψετε ένα πρόβλημα που να αντιστοιχεί σε καθεμία από τις εξισώσεις του (α).

7. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{3x}{2}=\frac{5}{4}$ **β)** $\frac{x}{7}+1=2$ **γ)** $-\frac{x}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$

δ) $\frac{2x+1}{3}+1=\frac{14}{6}$ **ε)** $\frac{6-2x}{2}=0$

8. **α)** Να λύσετε την εξίσωση $2x-\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$.

β) Ποιες από τις επόμενες εξισώσεις είναι ισοδύναμες με την εξίσωση του (α);

i) $2x=2,5$ **ii)** $-x=-1,25$

iii) $x=-1,25$ **iv)** $2x+1=1,25$

v) $2(x+1,25)=5$

9. Η μία πλευρά ενός ορθογωνίου έχει μήκος 7,2 εκ. και είναι κατά 3,5 εκ. μικρότερη από το διπλάσιο του μήκους της άλλης.

α) Αν x είναι το άγνωστο μήκος πλευράς του ορθογωνίου, ποια από τις παρακάτω εξισώσεις είναι σωστή;

i) $2x-3,5=7,2$ **ii)** $2\cdot 7,2+3,5=x$

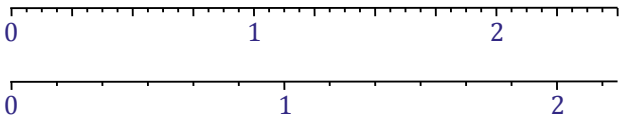
iii) $2(x-3,5)=7,2$

β) Να εντοπίσετε το λάθος στην απάντηση που έδωσε κάποιος για το άγνωστο μήκος πλευράς του ορθογωνίου:
$x=7,2+3,5=10,7:2=5,35$.

Ο ρόλος των γραμμάτων

Συνδέσεις και επεκτάσεις

10. Η μονάδα του επάνω άξονα έχει μήκος Α και η μονάδα του κάτω άξονα έχει μήκος Β.



α) Ποιες από τις παρακάτω ισότητες είναι σωστές;

i) $2A=2,25B$ **ii)** $2B=2,25A$

iii) $B=1,125A$ **iv)** $A=1,125B$

β) Ένα ξύλο έχει μήκος 11Α. Τι μήκος έχει σε Β;

γ) Ένας σιδερένιος σωλήνας έχει μήκος 11Β. Τι μήκος έχει σε Α;

11. Έχουμε δύο μονάδες Χ και Υ μέτρησης βάρους. Αν θέλουμε να υπολογίσουμε με τη μονάδα Υ το βάρος ενός αντικειμένου που είναι μετρημένο με τη μονάδα Χ, τότε το πολλαπλασιάζουμε με 1,2.

α) Ποια μονάδα είναι μεγαλύτερη σε βάρος, η Χ ή η Υ;

β) Τι μέρος της μεγάλης μονάδας είναι η μικρή μονάδα;

γ) Να γράψετε την απάντησή σας στο (β) με τη μορφή ισότητας.

δ) Μετρήσαμε το βάρος ενός αντικειμένου και βρήκαμε 50Υ. Πόσο είναι το βάρος μετρημένο σε Χ;

Ομαδική εργασία

12. **α)** Να γράψετε μια εξίσωση και να τη λύσετε:

i) με τη βοήθεια εμβαδών, **ii)** με χρήση ιδιοτήτων της ισότητας.

β) Να περιγράψετε ένα πρόβλημα που να λύνεται με την εξίσωση $3x+2=11$.



ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ 7:

Γεωμετρία του επιπέδου – Μέτρηση

Η Γεωμετρία που διδάσκεται σε όλες τις χώρες του κόσμου ονομάστηκε «Ευκλείδεια» από τον άνθρωπο που τη θεμελίωσε, τον Ευκλείδη.

Στο μεγαλειώδες έργο του *Στοιχεία*, ο Ευκλείδης συγκέντρωσε, κατέγραψε, οργάνωσε, συμπλήρωσε και τελειοποίησε τα επιτεύγματα των Ελλήνων μαθηματικών από την εποχή του Θαλή (γύρω στο 650 π.Χ.) μέχρι την εποχή που έζησε και άκμασε ο ίδιος (γύρω στο 300 π.Χ.). Η εκτύπωση των *Στοιχείων* έγινε για πρώτη φορά το 1482 μ.Χ. και είναι ένα από τα πιο πολυδιαβασμένα βιβλία στον κόσμο.

Ευκλείδης - Ευκλείδεια γεωμετρία

Το **σημείο**, η **ευθεία**, η **γωνία**, ο **κύκλος** είναι έννοιες που συναντάμε στην καθημερινή μας ζωή.

Η τέχνη της γεωμετρίας των Ελλήνων

Ακολουθώντας τα βήματα του Ευκλείδη, στον δρόμο για τη γνώση, θα χρησιμοποιήσουμε τις έννοιες αυτές ως θεμέλια για να δημιουργήσουμε καινούριες, πιο σύνθετες.

Ο δρόμος για τη γνώση

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε τις έννοιες αυτές και θα μάθουμε να σχεδιάζουμε απλά και πιο σύνθετα σχήματα στο επίπεδο, να αναγνωρίζουμε ιδιότητες και σχέσεις τους, αλλά και να κάνουμε μετρήσεις και συγκρίσεις χρησιμοποιώντας κατάλληλες μονάδες. Έτσι, με τη βοήθεια λογικών συλλογισμών θα χτίσουμε σταδιακά το οικοδόμημα της Γεωμετρίας του επιπέδου!

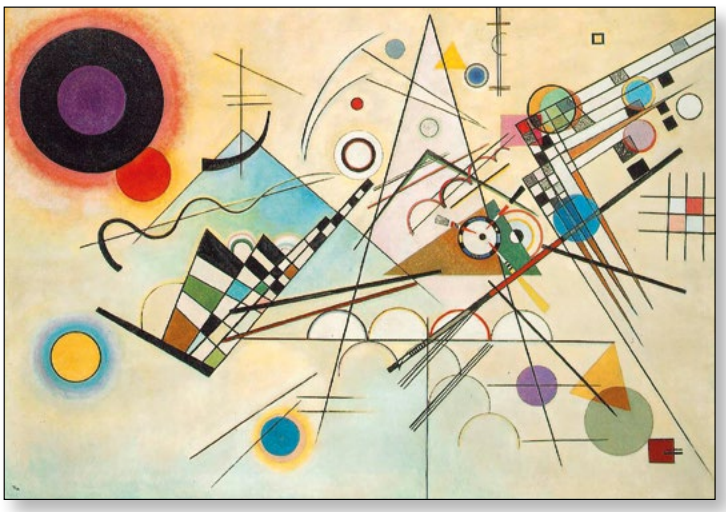
ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΕΝΟΤΗΤΕΣ:

7.1 Βασικά επίπεδα σχήματα
7.2 Μήκος ευθύγραμμου τμήματος – Μονάδες μέτρησης μήκους
7.3 Σύγκριση, πρόσθεση και αφαίρεση ευθύγραμμων τμημάτων
7.4 Ο κύκλος και τα στοιχεία του
7.5 Επίκεντρες γωνίες – Μέτρηση τόξων και επίκεντρων γωνιών
7.6 Διχοτόμος γωνίας
7.7 Είδη γωνιών
7.8 Πρόσθεση και αφαίρεση γωνιών
7.9 Συμπληρωματικές και παραπληρωματικές γωνίες
7.10 Κατακορυφήν γωνίες
7.11 Σχετικές θέσεις ευθειών στο επίπεδο
7.12 Χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων της διχοτόμου
7.13 Γωνίες από παράλληλες και τέμνουσα
7.14 Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου
7.15 Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος
7.16 Είδη τριγώνων και στοιχεία τους
7.17 Άθροισμα γωνιών τριγώνου
7.18 Τα τετράπλευρα και τα είδη τους

7.1 Βασικά επίπεδα σχήματα

Δ1. Σχήματα σε πίνακα

Παρατηρήστε το έργο του Kandinsky (Ρώσος ζωγράφος, 1866-1944). Αναγνωρίζετε κάποια γεωμετρικά σχήματα; Ειδικότερα, αναγνωρίζετε ευθύγραμμα τμήματα, ημιευθείες, ευθείες, γωνίες, τρίγωνα, τετράπλευρα, κύκλους, ημικύκλια, τόξα; Αν θέλετε, μπορείτε κι εσείς να φτιάξετε μια δική σας παρόμοια σύνθεση.



Συζητάμε

…για τα βασικά γεωμετρικά σχήματα

Τα σύνθετα σχήματα, όπως τα τρίγωνα, τα τετράπλευρα, οι τεθλασμένες γραμμές, αλλά και πολλές εικαστικές συνθέσεις, αποτελούνται από απλούστερα γεωμετρικά σχήματα.

Τέτοια απλούστερα γεωμετρικά σχήματα είναι τα σημεία, οι ευθείες, οι ημιευθείες, τα ευθύγραμμα τμήματα, οι γωνίες, οι κύκλοι, τα τόξα.

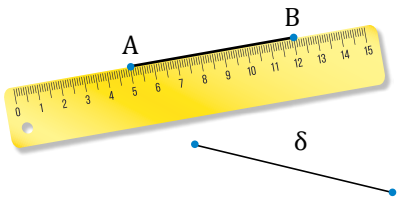
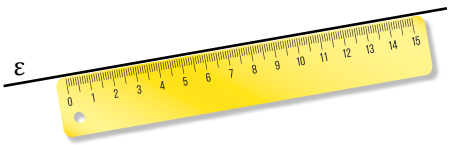
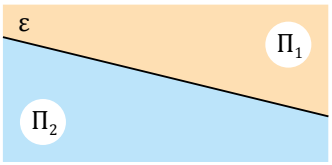
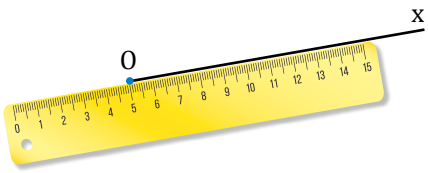
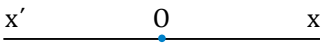
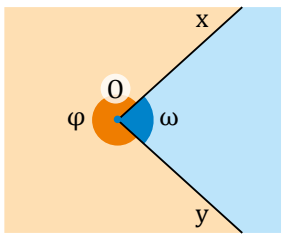
Στη Γεωμετρία, όλα τα επίπεδα σχήματα τα σχεδιάζουμε με γεωμετρικά όργανα και χρησιμοποιούμε ένα ή περισσότερα γράμματα για να αναφερθούμε σε αυτά.

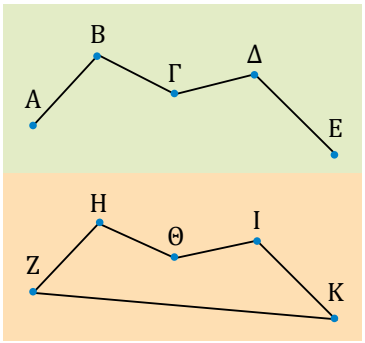
Από την Ιστορία των Μαθηματικών μαθαίνουμε ότι στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη οι έννοιες του σημείου και της γραμμής ορίζονται με άρνηση:

- «**Το σημείο** δεν έχει μέρος, είναι αμερές».
- «**Η γραμμή** έχει μήκος, αλλά όχι πλάτος».

Η λέξη «**ευθεία**» συνδέεται με το ρήμα «ευθειάζω», δηλαδή «ισιώνω», και σχετίζεται με εργασία που γινόταν με τεντωμένο σχοινί, κυρίως για τον διαχωρισμό εκτάσεων.

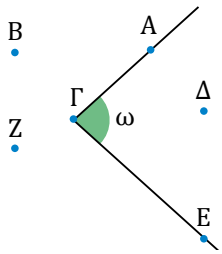
Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

λεκτικά…	…και με σχήμα
Τα **σημεία** τα ονομάζουμε πάντα με κεφαλαίο γράμμα. Το επίπεδο έχει άπειρα σημεία. Σημεία σε κίνηση	
Αν ενώσουμε με χάρακα τα σημεία Α και Β, παίρνουμε το **(ευθύγραμμο) τμήμα ΑΒ**. Τα σημεία Α και Β τα λέμε **άκρα** του τμήματος. Ένα ευθύγραμμο τμήμα συμβολίζεται συχνά και με ένα μικρό γράμμα του ελληνικού αλφαβήτου, π.χ. δ, α, β κτλ.	
Την **ευθεία** τη σχεδιάζουμε κι αυτή με τον χάρακα. Φανταζόμαστε όμως ότι εκτείνεται απεριόριστα και προς τις δύο κατευθύνσεις. Παντογράφος 1	
Κάθε ευθεία χωρίζει το επίπεδο σε δύο **ημιεπίπεδα**.	
Η **ημιευθεία** έχει **αρχή** ένα σημείο και εκτείνεται απεριόριστα προς μία κατεύθυνση, όπως μια ακτίνα φωτός. Τέτοια είναι η ημιευθεία Ox στο σχήμα. 	
Κάθε σημείο της ευθείας τη χωρίζει σε δύο ημιευθείες, που τις λέμε **αντικείμενες**. Στο σχήμα, οι ημιευθείες Ox και Ox′ είναι αντικείμενες, αφού είναι τα δύο «κομμάτια» της ευθείας x′x. 	
Παρατηρούμε ότι δύο ημιευθείες με κοινή αρχή σχηματίζουν δύο περιοχές του επιπέδου. Καθεμία από αυτές τις περιοχές, μαζί με τις ημιευθείες, τη λέμε **γωνία**. Τις ημιευθείες τις λέμε **πλευρές** της γωνίας και την κοινή αρχή τους **κορυφή** της γωνίας. Στο σχήμα, οι ημιευθείες Ox και Oy σχηματίζουν τις γωνίες $\hat{\omega}$ (γαλάζια περιοχή) και $\hat{\varphi}$ (πορτοκαλί περιοχή). Την πιο μικρή (την $\hat{\omega}$) τη λέμε **κυρτή γωνία $x\hat{O}y$**, ενώ την πιο μεγάλη (τη $\hat{\varphi}$) τη λέμε **μη κυρτή γωνία $x\hat{O}y$**.	 Σημείο σε γωνία

λεκτικά…	…και με σχήμα
Αν συνδέσουμε σημεία με ευθύγραμμα τμήματα, θα προκύψει μια **τεθλασμένη γραμμή**. Μπορεί να είναι είτε **ανοιχτή**, είτε **κλειστή** όταν το πρώτο σημείο συνδεθεί με το τελευταίο. Τα σημεία που συνδέουμε τα λέμε **κορυφές** της τεθλασμένης γραμμής, ενώ τα ευθύγραμμα τμήματα τα λέμε **πλευρές**. Μια κλειστή τεθλασμένη γραμμή τη λέμε απλούστερα **πολύγωνο**.	

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Ποια από τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε και Ζ ανήκουν στη γωνία $\widehat{\omega}$;



2. Πόσες ημιευθείες με αρχή ένα συγκεκριμένο σημείο του επιπέδου μπορούμε να σχεδιάσουμε;

3. Πόσες ευθείες που διέρχονται ταυτόχρονα από δύο συγκεκριμένα σημεία του επιπέδου μπορούμε να σχεδιάσουμε;

4. Πώς ονομάζουμε ένα πολύγωνο με 3, 4, 5 ή 6 πλευρές;

5. Να σχεδιάσετε την αντικείμενη ημιευθεία της Ox που δίνεται στο σχήμα και να περιγράψετε πώς κάνατε την κατασκευή σας.



6. Να σχεδιάσετε ένα σημείο Α και δύο διαφορετικές ευθείες που διέρχονται από αυτό.

7. Σε ευθεία x′x παίρνουμε σημεία Α και Β. Πόσα ζευγάρια αντικείμενων ημιευθειών παρατηρείτε στο σχήμα;

Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

8. Σε μια ημιευθεία Ox να πάρετε ένα σημείο Α διαφορετικό του Ο. Η ημιευθεία Ax είναι ίδια με την ημιευθεία Ox; Εξηγήστε τη σκέψη σας.

9. Να σχεδιάσετε 4 σημεία Α, Β, Γ, Δ, έτσι ώστε να μην υπάρχει τριάδα σημείων στην ίδια ευθεία. Με κόκκινο χρώμα σχεδιάστε την ανοιχτή τεθλασμένη ΑΒΓΔ και με μπλε χρώμα την ανοιχτή τεθλασμένη ΑΒΔΓ. Είναι ίδιες ή διαφορετικές;

10. Να σχεδιάσετε ένα πεντάγωνο και όλες τις διαγωνίους του (τα ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν δύο μη διαδοχικές κορυφές του). Πόσες είναι συνολικά;

7.2 Μήκος ευθύγραμμου τμήματος – Μονάδες μέτρησης μήκους

Δ1. Πρόσοψη σπιτιού

Για το μοβ σπίτι της παρακάτω φωτογραφίας γνωρίζουμε ότι οι πλάκες πεζοδρομίου έχουν πλάτος 1 m. Παρατηρούμε επίσης ότι σε κάθε πλάκα αντιστοιχούν περίπου τέσσερα κάγκελα. Μπορείτε να προσδιορίσετε πόσο είναι το μήκος της πρόσοψης του σπιτιού και πόσο το άνοιγμα της αυλόπορτας; Συζητήστε στην τάξη τον τρόπο με τον οποίο εργαστήκατε.



Όπως έχουμε μάθει στο Δημοτικό, για να μετρήσουμε το μήκος ευθύγραμμων τμημάτων, χρησιμοποιούμε κάποιο ευθύγραμμο τμήμα με συγκεκριμένο μήκος, το οποίο και ορίζουμε ως μονάδα μέτρησης. Το 1791 στις περισσότερες χώρες του κόσμου καθιερώθηκε το **μέτρο (1 m)** ως μονάδα μήκους.

Μονάδες μέτρησης μήκους

Η ανάγκη για μέτρηση μηκών παρουσιάστηκε πριν από περίπου 10.000 χρόνια, όταν ο άνθρωπος συνδύαζε πλέον το κυνήγι και το ψάρεμα με τη γεωργία, το εμπόριο, τις πρώιμες μορφές τέχνης, αλλά και τη δημιουργία απλών αριθμητικών όρων και λέξεων.

Μέτρηση

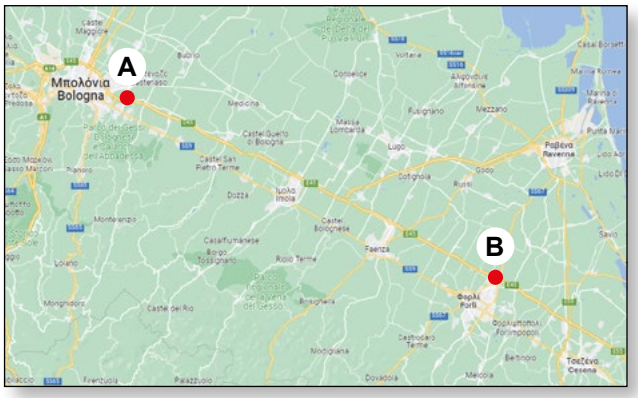


Δ2. Το μήκος της ελάχιστης διαδρομής

Χρησιμοποιήστε τον διπλανό χάρτη, για να συζητήσετε τα παρακάτω ερωτήματα:

α) Πόσο απέχει το σημείο Α από το σημείο Β στον χάρτη;

β) Να βρείτε την πραγματική απόσταση του σημείου Α από το σημείο Β, αν γνωρίζουμε ότι 1 cm στον χάρτη αντιστοιχεί σε 7.600 m. Ποια μονάδα μήκους θα επιλέγατε για να ανακοινώσετε το αποτέλεσμα σε κάποιον που θέλει να ταξιδέψει από το Α στο Β; Συζητήστε τις ιδέες σας.



Συζητάμε

…για μέτρηση μήκους

Μετρώντας το μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος, υπολογίζουμε το μήκος του συντομότερου δρόμου ανάμεσα στα άκρα του. Αυτό το μήκος το ονομάζουμε απόσταση των δύο άκρων του ευθύγραμμου τμήματος.

Πολλές φορές χρειάζεται να μετρήσουμε αποστάσεις μικρότερες του ενός μέτρου ή αποστάσεις που δεν αντιστοιχούν σε ακέραιο αριθμό μέτρων.

Για τον λόγο αυτό, ακολουθώντας το δεκαδικό σύστημα, διαιρέσαμε το μέτρο σε δέκατα (dm), εκατοστά (cm) και χιλιοστά (mm).

Αν η απόσταση που θέλουμε να μετρήσουμε είναι πολύ μεγάλη, είναι χρήσιμο να την εκφράζουμε σε πολλαπλάσια του μέτρου. Για τον λόγο αυτό χρησιμοποιούμε ως μονάδα μήκους το χιλιόμετρο (1 km).

Συνήθως το μήκος του τμήματος ΑΒ το συμβολίζουμε με (ΑΒ), ώστε να το διαχωρίζουμε από το ίδιο το τμήμα ΑΒ. Στη συνέχεια όμως, για λόγους απλότητας, θα χρησιμοποιούμε την ίδια ονομασία, ΑΒ, και για τα δύο.



Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Ένα μέτρο το διαιρούμε σε: δέκατα (dm), εκατοστά (cm) και χιλιοστά (mm).	**Υποδιαιρέσεις του μέτρου**	
	Υποδιαίρεση του μέτρου	**Σχέση με το 1 m**
	Δέκατο (dm)	$1\ \text{dm} = \frac{1}{10}\ \text{m} = 0{,}1\ \text{m}$
	Εκατοστό (cm)	$1\ \text{cm} = \frac{1}{100}\ \text{m} = 0{,}01\ \text{m}$
	Χιλιοστό (mm)	$1\ \text{mm} = \frac{1}{1.000}\ \text{m} = 0{,}001\ \text{m}$
Τις μεγάλες αποστάσεις τις μετράμε σε χιλιόμετρα (km). Ισχύει ότι: 1 km = 1.000 m.		

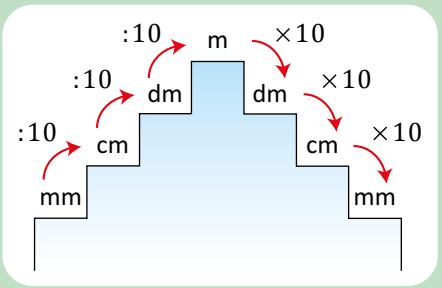
Από τον παραπάνω πίνακα μπορούμε να βρούμε τις εξής σχέσεις μεταξύ των υποδιαιρέσεων του μέτρου:

- $1\ \text{mm} = \frac{1}{10}\ \text{cm} = \frac{1}{100}\ \text{dm} = \frac{1}{1.000}\ \text{m}$
- $1\ \text{cm} = \frac{1}{10}\ \text{dm} = \frac{1}{100}\ \text{m}$

Αντίστροφα, από τις παραπάνω σχέσεις βρίσκουμε ότι:

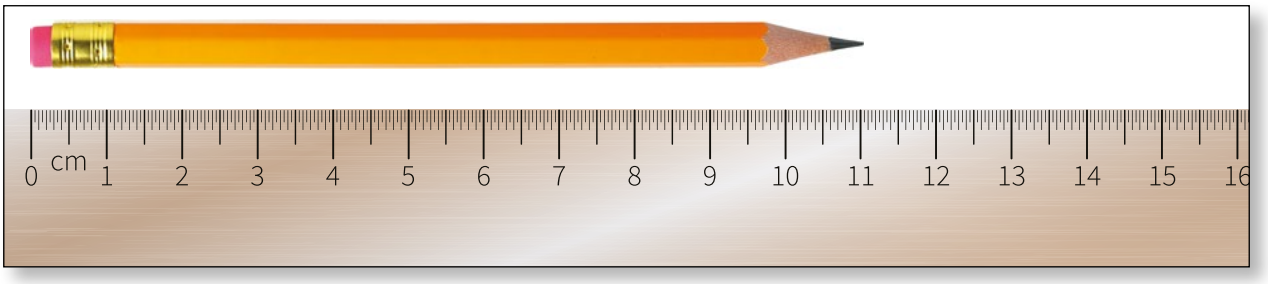
- $1\ \text{m} = 10\ \text{dm} = 100\ \text{cm} = 1.000\ \text{mm}$
- $1\ \text{dm} = 10\ \text{cm} = 100\ \text{mm}$
- $1\ \text{cm} = 10\ \text{mm}$

Σχηματικά μπορούμε να αναπαραστήσουμε τη μετατροπή των mm σε cm, των cm σε dm, των dm σε m, αλλά και αντίστροφα, με την ακόλουθη «σκάλα».



Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. **Από τις παρακάτω μετρήσεις κάποιες αντιστοιχούν στο μήκος του μολυβιού και κάποιες αντιστοιχούν στο μήκος της μύτης του. Επίσης, κάποιες δεν αντιστοιχούν σε κανένα από τα παραπάνω. Συμπληρώστε τη δεύτερη στήλη του πίνακα με τις μετρήσεις που αντιστοιχούν στην κάθε περίπτωση.**



Μετρήσεις:

1) 11 cm
2) 0,5 cm
3) 1,1 dm
4) 0,5 dm
5) 0,110 mm
6) 0,05 m
7) 0,005 m

Μολύβι	
Μύτη μολυβιού	
Κανένα από τα παραπάνω	

Απάντηση

Από την εικόνα φαίνεται ότι το μολύβι έχει μήκος 11 cm και η μύτη του έχει μήκος 5 mm. Από τις σχέσεις ανάμεσα στις υποδιαιρέσεις του μέτρου βρίσκουμε ότι:

$$11\text{ cm} = 110\text{ mm},\ 11\text{ cm} = 1{,}1\text{ dm} \text{ και } 11\text{ cm} = 0{,}11\text{ m}$$
$$5\text{ mm} = 0{,}5\text{ cm},\ 5\text{ mm} = 0{,}05\text{ dm} \text{ και } 5\text{ mm} = 0{,}005\text{ m}$$

Μολύβι	1) 11 cm	3) 1,1 dm	
Μύτη μολυβιού	2) 0,5 cm	7) 0,005 m	
Κανένα από τα παραπάνω	4) 0,5 dm	5) 0,110 mm	6) 0,05 m

Ίσα τμήματα

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Συμπληρώστε τα κενά στις παρακάτω σχέσεις:

i) 1 dm = ... mm **ii)** 1 mm = ... cm **iii)** 1 cm = ... dm **iv)** 1 m = ... mm

2. Αντιστοιχίστε τα παρακάτω μεγέθη με τη μέτρηση που θεωρείτε πιο κατάλληλη για κάθε περίπτωση.

α)	Μήκος ενός αυτοκινήτου	1)	25 km
β)	Απόσταση δύο πόλεων	2)	11 mm
γ)	Πλάτος ενός τετραδίου	3)	8 dm
δ)	Απόσταση δύο σπιτιών της ίδιας πόλης	4)	21 cm
ε)	Πλάτος ενός συνδετήρα	5)	1.200 m
στ)	Πλάτος ενός γραφείου (επίπλου)	6)	4,3 m

3. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

mm	cm	dm	m
155			
		9,3	
	103,4		
			1,15

4. Χρησιμοποιήστε το υποδεκάμετρο, για να κατασκευάσετε ένα ευθύγραμμο τμήμα 0,075 m.

Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

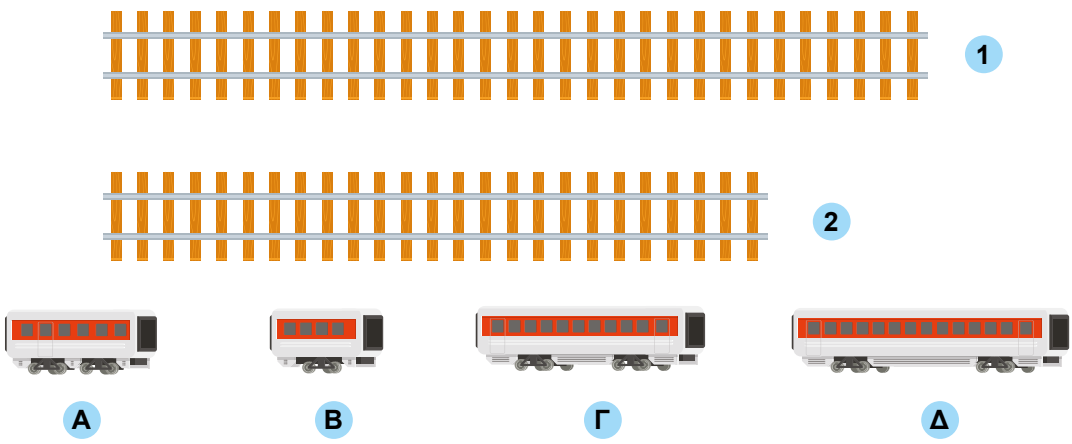
5. Ένα ύφασμα κοστίζει 10 € το μέτρο. Πόσο κοστίζουν 345 cm υφάσματος;

6. Ένα αυτοκίνητο καταναλώνει 8 lt βενζίνης ανά 100 km. Πόση βενζίνη θα χρειαστεί, για να καλύψει απόσταση 250.000 m;

7.3 Σύγκριση, πρόσθεση και αφαίρεση ευθύγραμμων τμημάτων

Δ1. Τοποθετώ τα βαγόνια στις ράγες

Ο Μιχάλης και η Αλίνα πρέπει να συναρμολογήσουν πάνω σε μία από τις γραμμές 1 ή 2 της παρακάτω εικόνας ένα τρένο που θα αποτελείται από τα βαγόνια Α, Β, Γ και Δ. Τα βαγόνια πρέπει να τοποθετηθούν με βάση το μήκος τους, από το μεγαλύτερο προς το μικρότερο.



Α. Μπορείτε, με τη χρήση διαβήτη ή και υποδεκάμετρου, να βοηθήσετε τον Μιχάλη και την Αλίνα να βάλουν τα βαγόνια του τρένου στη σωστή σειρά; Περιγράψτε τον τρόπο με τον οποίο εργαστήκατε.

Β. Το τρένο μπορεί να χωρέσει σε οποιαδήποτε από τις δύο γραμμές;

Συζητάμε

…για σύγκριση, πρόσθεση και αφαίρεση τμημάτων

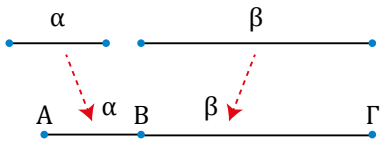
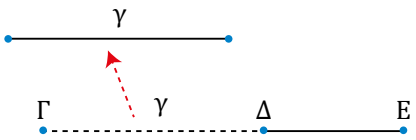
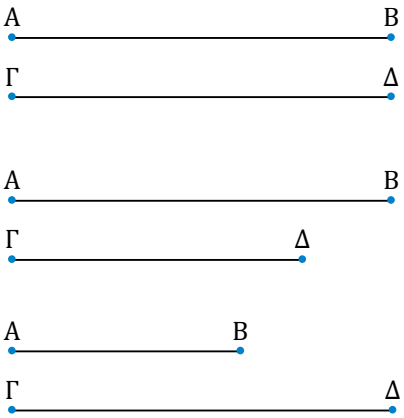
Μπορούμε να προσθέσουμε και να αφαιρέσουμε δύο ευθύγραμμα τμήματα με δύο τρόπους:

α) τοποθετώντας τα κατάλληλα πάνω στην ίδια ευθεία με τον διαβήτη,

β) μετρώντας τα μήκη τους και κατασκευάζοντας ένα ευθύγραμμο τμήμα με μήκος όσο το άθροισμα ή, αντίστοιχα, η διαφορά των μηκών των τμημάτων.

Επίσης, μπορούμε να συγκρίνουμε ως προς το μήκος τους δύο ευθύγραμμα τμήματα μετρώντας τα ή τοποθετώντας κατάλληλα το ένα πάνω στο άλλο.

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

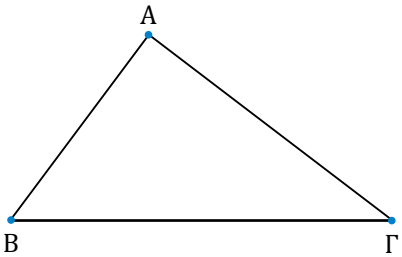
λεκτικά…	…και με σχήμα
Το **άθροισμα** των τμημάτων α και β του διπλανού σχήματος είναι το τμήμα ΑΓ. Γράφουμε: $$ΑΓ = ΑΒ + ΒΓ$$	
Το τμήμα ΔΕ το ονομάζουμε **διαφορά** των τμημάτων ΓΕ και ΓΔ και γράφουμε: $$ΔΕ = ΓΕ - ΓΔ$$	
Δύο ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ μπορεί να έχουν: • το ίδιο μήκος, οπότε λέμε ότι είναι **ίσα**: $$ΑΒ = ΓΔ$$ • το μήκος του ΑΒ να είναι μεγαλύτερο του ΓΔ: $$ΑΒ > ΓΔ$$ • το μήκος του ΑΒ να είναι μικρότερο του ΓΔ: $$ΑΒ < ΓΔ$$	

Μετράω με πρόσθεση ή και αφαίρεση

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. **α) Να κατασκευάσετε ένα ευθύγραμμο τμήμα που να είναι ίσο με την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ.**

β) Να συγκρίνετε τα τμήματα ΑΒ και ΒΓ και στη συνέχεια να κατασκευάσετε ένα ευθύγραμμο τμήμα που να είναι ίσο με τη διαφορά τους.

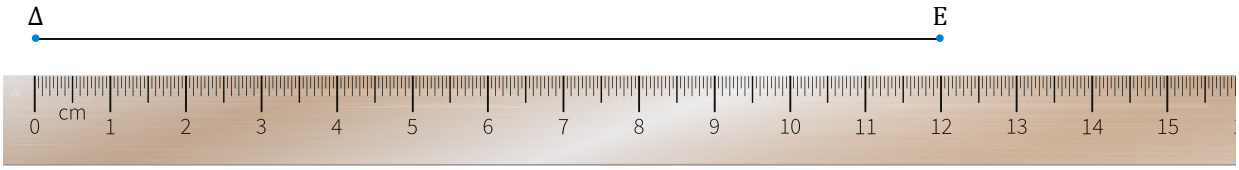


Περίμετρο ενός ευθύγραμμου σχήματος (δηλαδή ενός σχήματος που οι πλευρές του είναι ευθύγραμμα τμήματα) ονομάζουμε το **άθροισμα των πλευρών** του.

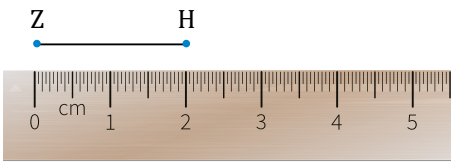
Απάντηση

1ος τρόπος: με υποδεκάμετρο

α) Με το υποδεκάμετρο μετράμε τις πλευρές του τριγώνου και βρίσκουμε $AB = 3$ cm, $B\Gamma = 5$ cm και $A\Gamma = 4$ cm. Άρα το τρίγωνο έχει περίμετρο $\Pi = 3\text{ cm} + 5\text{ cm} + 4\text{ cm} = 12$ cm. Στη συνέχεια, πάλι με το υποδεκάμετρο, σχεδιάζουμε ευθύγραμμο τμήμα ΔE ίσο με 12 cm.

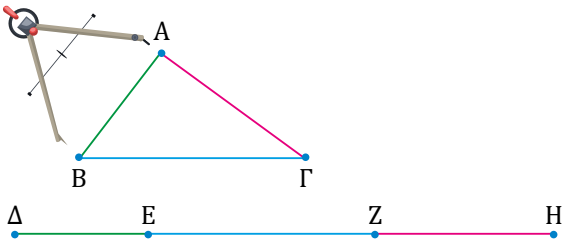


β) Είναι $AB = 3$ cm και $B\Gamma = 5$ cm, οπότε $AB < B\Gamma$. Η διαφορά των τμημάτων AB και $B\Gamma$ είναι $5\text{ cm} - 3\text{ cm} = 2$ cm. Με το υποδεκάμετρο σχεδιάζουμε τμήμα $ZH = 2$ cm.

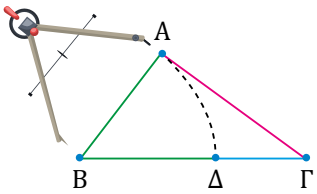


2ος τρόπος: με διαβήτη

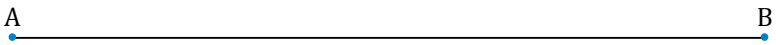
α) Με τη βοήθεια του διαβήτη, πάνω στην ίδια ευθεία παίρνουμε διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα $\Delta E = AB$, $EZ = B\Gamma$ και $ZH = A\Gamma$. Το ζητούμενο τμήμα είναι το ΔH.



β) Με αρχή το σημείο Β και με τη βοήθεια του διαβήτη, πάνω στην ευθεία $B\Gamma$ και προς τη μεριά του Γ παίρνουμε τμήμα $B\Delta = AB$. Διαπιστώνουμε ότι το σημείο Δ είναι εσωτερικό του $B\Gamma$, οπότε $AB < B\Gamma$. Επίσης, $B\Gamma - AB = \Delta\Gamma$.



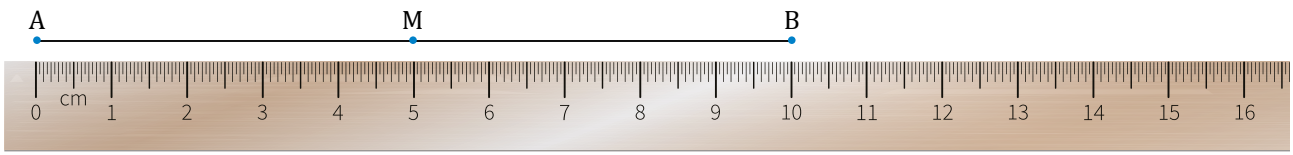
2. **Να βρείτε ένα σημείο Μ του παρακάτω τμήματος ΑΒ τέτοιο ώστε ΑΜ = ΜΒ.**



Φτιάχνω αθροίσματα και διαφορές

Απάντηση

Με το υποδεκάμετρο μετράμε το μήκος του τμήματος ΑΒ και βρίσκουμε ότι είναι 10 cm. Στη συνέχεια τοποθετούμε το σημείο Μ στο τμήμα ΑΒ, ώστε $AM = \frac{10}{2}\text{ cm} = 5\text{ cm}$.



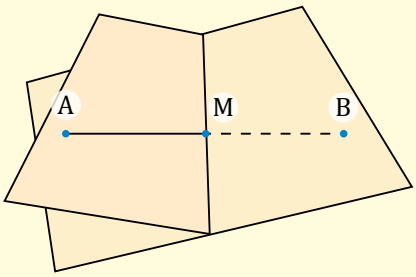
Επομένως έχουμε $AM = MB = 5$ cm.

Το σημείο Μ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ για το οποίο ισχύει:

ΑΜ = ΜΒ

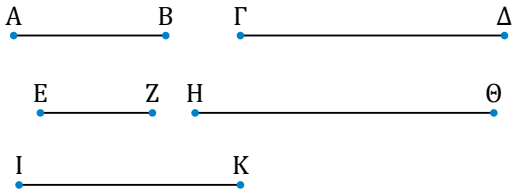
το ονομάζουμε **μέσο** του ΑΒ.

Ένας άλλος τρόπος για να βρούμε το μέσο ενός τμήματος ΑΒ είναι να διπλώσουμε το χαρτί, ώστε το ένα άκρο του ΑΒ να πέσει πάνω στο άλλο.



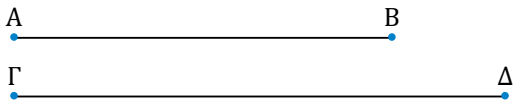
Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Βάλτε σε σειρά, από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο, τα παρακάτω ευθύγραμμα τμήματα. Μπορείτε να βρείτε δύο τμήματα που το άθροισμά τους να είναι μικρότερο από κάποιο άλλο τμήμα;

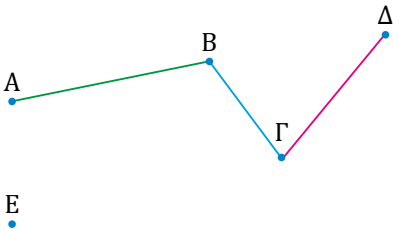


2. Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει πλευρές ΑΒ = 11 cm, ΒΓ = 75 mm και ΑΓ = 1 dm. Πόση είναι η περίμετρός του;

3. Να κατασκευάσετε ένα ευθύγραμμο τμήμα ίσο με το άθροισμα των τμημάτων ΑΒ και ΓΔ του επόμενου σχήματος και ένα άλλο ίσο με τη διαφορά τους.



4. Ξεκινώντας από το σημείο Ε, κατασκευάστε ένα ευθύγραμμο τμήμα ίσο με το άθροισμα των ΑΒ, ΒΓ και ΓΔ.

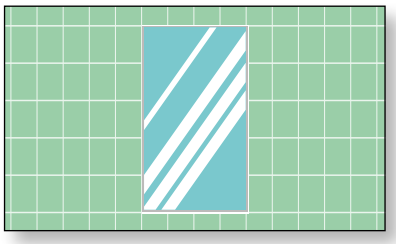


5. Πάνω σε μία ευθεία τοποθετήστε τρία σημεία Α, Β και Γ τέτοια ώστε το ΑΓ = 33 mm και το Γ να είναι το μέσο του ΑΒ. Πόσα cm είναι το ΑΒ;

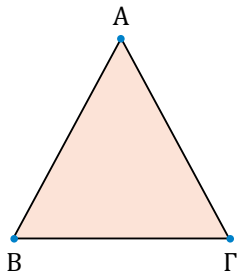
Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

6. Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει βάση 5 cm και ύψος 18 mm. Πόση είναι η περίμετρός του;

7. Τα πλακάκια της διπλανής εικόνας έχουν 2 dm πλάτος και 35 cm ύψος. Πόση είναι η περίμετρος της κορνίζας του καθρέφτη;



8. Το παρακάτω τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, δηλαδή έχει τρεις πλευρές ίσες. Να κατασκευάσετε ευθύγραμμο τμήμα ίσο με την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ.



9. Ένα αυτοκίνητο μπορεί να διανύσει 620 km χωρίς να χρειαστεί να ξαναβάλει βενζίνη. Ο οδηγός του αυτοκινήτου θέλει, ξεκινώντας από την πόλη Α, να πάει αρχικά στην πόλη Β και στη συνέχεια στην πόλη Γ. Η πόλη Α απέχει από την πόλη Β 150.000 m και η πόλη Β απέχει από την πόλη Γ 440 km. Θα μπορέσει ο οδηγός να ολοκληρώσει τη διαδρομή χωρίς να χρειαστεί να ξαναβάλει βενζίνη;

10. Ένα τρένο αποτελείται από τα βαγόνια Α, Β, Γ και Δ, το μήκος των οποίων δίνεται στον παρακάτω πίνακα:

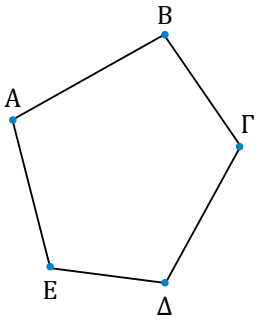
Βαγόνι	Μήκος
Α	12,4 m
Β	9 m και 30 cm
Γ	134 dm
Δ	15 m και 5 dm

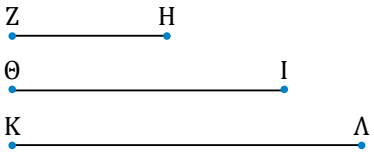
α) Με ποια σειρά πρέπει να μπουν τα βαγόνια, ώστε να τοποθετηθούν από το μεγαλύτερο προς το μικρότερο;

β) Το τρένο πρέπει να σταθμεύσει σε μια γραμμή με μήκος 55,8 m. Χωράει το τρένο να τοποθετηθεί στη γραμμή; Αν ναι, πόσο είναι το μήκος της γραμμής που θα περισσέψει;

11. Το μέγιστο επιτρεπτό ύψος μιας πολυκατοικίας είναι 27 m. Ένας μηχανικός σχεδίασε μια πολυκατοικία της οποίας η είσοδος-ισόγειο έχει ύψος 4,5 m και οι υπόλοιποι όροφοι από 2 m και 75 cm ο καθένας. Μπορεί η πολυκατοικία εκτός από το ισόγειο να έχει 8 ορόφους;

12. Ένας αγρότης θέλει να περιφράξει το χωράφι ΑΒΓΔΕ με συρματόπλεγμα. Έχει στη διάθεσή του τρία κομμάτια συρματόπλεγμα, τα ΖΗ, ΘΙ, ΚΛ. Φτάνουν τα κομμάτια αυτά για να περιφράξει όλο το χωράφι;





13. Πάνω σε μια ημιευθεία Αx βρείτε σημεία Β, Γ και Δ τέτοια ώστε $AB = 3\,cm$, $A\Gamma = 0{,}45\,dm$ και $A\Delta = 60\,mm$. Να συγκρίνετε το μήκος των τμημάτων ΑΒ και ΒΔ, καθώς και των τμημάτων ΒΓ και ΓΔ. Τι συμπεραίνετε για τη θέση του σημείου Γ στο ευθύγραμμο τμήμα ΒΔ;

7.4 Ο κύκλος και τα στοιχεία του

Στην καθημερινή μας ζωή συναντάμε παντού αντικείμενα με κυκλικό σχήμα, όπως για παράδειγμα πιάτα, δαχτυλίδια, ρόδες, αλλά και αντικείμενα που περιέχουν επίπεδα μέρη που είναι κυκλικά, όπως ποτήρια, μπουκάλια, βαρέλια. Σε αυτή την ενότητα θα ονομάσουμε και θα μελετήσουμε τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του κύκλου. Πολλά από αυτά τα έχουμε ξανασυζητήσει στο Δημοτικό.

Δ1. Τα εγκαίνια του παιδότοπου



Στον χάρτη βλέπετε σημειωμένη με το γράμμα Ε την κεντρική πλατεία ενός προαστίου της Αθήνας. Στον χώρο της πλατείας δημιουργήθηκε ένας σύγχρονος παιδότοπος. Για τα εγκαίνια, αποφασίστηκε να γίνει μια συναυλία. Δεν υπήρχαν ούτε φυσικά ούτε καιρικά εμπόδια, κι έτσι οι υπεύθυνοι κατά τη δοκιμή των ηχείων ρώτησαν κάποιους κατοίκους αν ακούνε τον ήχο.

Α. Κάτοικοι που μένουν σε απόσταση 180 m (όπως ο Α) απάντησαν ότι ακούνε πολύ καλά. Σχεδιάστε σε ολόκληρο τον χάρτη το σχήμα που φτιάχνουν τα σπίτια των κατοίκων αυτών. Συγκρίνετε το σχέδιό σας με το σχέδιο των συμμαθητών και των συμμαθητριών σας.

Β. Κάτοικοι που μένουν σε απόσταση 260 m (όπως ο Β) απάντησαν ότι και αυτοί ακούνε. Σχεδιάστε στον χάρτη το σχήμα που φτιάχνουν τα σπίτια αυτά.

Γ. Ποια σπίτια νομίζετε ότι ακούνε σίγουρα τον ήχο; Γραμμοσκιάστε το μέρος του χάρτη που από κάθε σημείο του οι κάτοικοι μπορούν να ακούσουν τον ήχο.

Δ. Ο κάτοικος Χ, που μένει σε απόσταση 310 m από την πλατεία Ε, ανέφερε ότι δεν ακούει τον ήχο. Με βάση τη μαρτυρία του Χ, ποιες περιοχές του χάρτη νομίζετε ότι σίγουρα δεν ακούνε; Συζητήστε στην τάξη.

Ε. Στην οδό Άπω Ανατολής περπατούν η Μαρία (Μ) και ο Νίκος (Ν).

α) Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα ΜΝ, που δείχνει την απόστασή τους στον χάρτη. Πότε η απόσταση αυτή παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή;

β) Σχεδιάστε με άλλο χρώμα το μέρος της οδού Άπω Ανατολής που περιλαμβάνεται ανάμεσα στα Μ και Ν. Πότε αυτό το σχήμα γίνεται μεγαλύτερο;

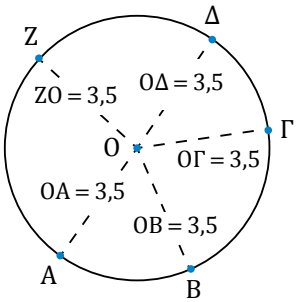
Περπάτημα σε κυκλικό δρόμο

Συζητάμε

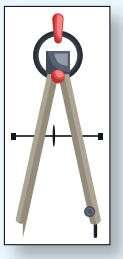
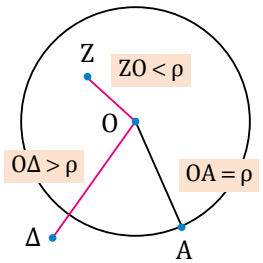
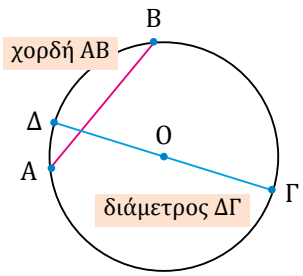
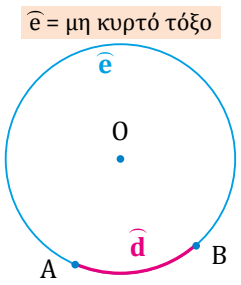
...για τον κύκλο

Σχεδιάζουμε ένα σημείο Ο του επιπέδου και διάφορα σημεία που απέχουν απόσταση 3,5 cm από αυτό. Αν ενώσουμε αυτά τα σημεία, φτιάχνουμε έναν **κύκλο** με κέντρο Ο και ακτίνα 3,5 cm.

Τα σημεία αυτού του κύκλου μαζί με το μέρος του επιπέδου που βρίσκεται μέσα σε αυτόν αποτελούν τον **κυκλικό δίσκο** με κέντρο Ο και ακτίνα 3,5 cm.



Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

λεκτικά...	...και με σχήμα
Αν το Ο είναι ένα σημείο του επιπέδου, τότε ονομάζουμε **κύκλο με κέντρο το Ο και ακτίνα ρ** όλα τα σημεία που απέχουν από το Ο απόσταση ίση με ρ. Τον συμβολίζουμε **(Ο, ρ)** και μπορούμε να τον σχεδιάσουμε με τον **διαβήτη**. Όλα τα σημεία του επιπέδου (όπως το Ζ) που απέχουν από το Ο απόσταση μικρότερη από την ακτίνα λέμε ότι είναι **εσωτερικά** του κύκλου. Τα σημεία του κύκλου μαζί με τα εσωτερικά του αποτελούν τον **κυκλικό δίσκο (Ο, ρ)**. 	
Συνδέοντας δύο σημεία Α και Β ενός κύκλου, δημιουργούμε ένα ευθύγραμμο τμήμα που το ονομάζουμε **χορδή ΑΒ**. Αν μια χορδή περνάει από το κέντρο του κύκλου, όπως η ΔΓ, τη λέμε **διάμετρο** και είναι η μεγαλύτερη χορδή του κύκλου. Κάθε διάμετρος χωρίζει τον κύκλο σε δύο ίσα μέρη που τα λέμε **ημικύκλια**. Η συνεισφορά του Θαλή	
Αν πάρουμε δύο σημεία Α και Β πάνω σε έναν κύκλο, το κομμάτι του κύκλου που βρίσκεται ανάμεσά τους το ονομάζουμε **τόξο $\overset{\frown}{AB}$.** Στο σχήμα βλέπουμε δύο τέτοια τόξα. Το μικρότερο το λέμε **κυρτό** και το μεγαλύτερο **μη κυρτό**.	

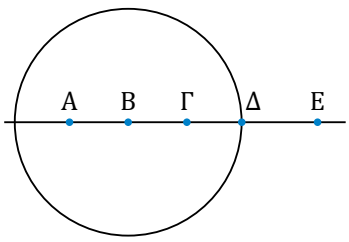
Ο ευθύγραμμος θαλασσινός ορίζοντας, οι ακτίνες του ήλιου και οι κυκλικοί δίσκοι του Ήλιου και της Σελήνης ήταν τα πρώτα γεωμετρικά σχήματα που έπεσαν στην αντίληψη των ανθρώπων και απέκτησαν «**θεία**» σημασία. Οι Έλληνες πίστευαν ότι η **ευθεία** εκφράζει τη γέννηση, την ανάπτυξη και τον θάνατο, δηλαδή καθετί το **φθαρτό**. Για τον **κύκλο**, που δεν έχει αρχή και τέλος, πίστευαν ότι εκφράζει το ατελείωτο, το άφθαρτο, το αθάνατο, δηλαδή το «**θείο**».

Πηγή: [20]

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. **Σχεδιάστε πάνω σε μια ευθεία τέσσερα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα $AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta E = 2$ cm και κατασκευάστε τον κύκλο (Β, 4 cm). Ποια από τα σημεία Α, Γ, Δ ανήκουν σε αυτό τον κύκλο και ποια είναι εσωτερικά του;**

Απάντηση



- Το Δ ανήκει στον κύκλο αυτό, διότι: $B\Delta = B\Gamma + \Gamma\Delta = 2\text{ cm} + 2\text{ cm} = 4\text{ cm}$. Τον κύκλο (Β, 4 cm) τον λέμε και (Β, ΒΔ).
- Τα Α και Γ είναι εσωτερικά του, διότι: $AB = B\Gamma = 2\text{ cm} < 4\text{ cm}$.

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Κατασκευάστε τους κύκλους (Ο, 2 cm), (Ο, 3 cm) και (Ο, 4 cm) (οι κύκλοι αυτοί λέγονται ομόκεντροι). Χρωματίστε το μέρος του σχήματος που απέχει από το Ο περισσότερο από 3 cm και λιγότερο από 4 cm.

Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

2. Κατασκευάστε ευθύγραμμο τμήμα $AB = 3$ cm και στη συνέχεια έναν κύκλο με διάμετρο ΑΒ.

3. Σχεδιάστε τον κύκλο (Ο, 3 cm) και πάρτε ένα σημείο του Α. Με άκρο το σημείο Α, πόσες χορδές $AE = 2$ cm μπορείτε να κατασκευάσετε; Γιατί;

4. Κατασκευάστε κύκλο (Ο, 2 cm) και ένα σημείο Α πάνω σε αυτόν. Από τα παρακάτω ευθύγραμμα τμήματα με ένα άκρο το Α, σχεδιάστε αυτά που μπορούν να είναι χορδές του κύκλου (Ο, 2 cm):
$AB = 1$ cm, $A\Gamma = 2$ cm, $A\Delta = 4$ cm, $AE = 5$ cm.

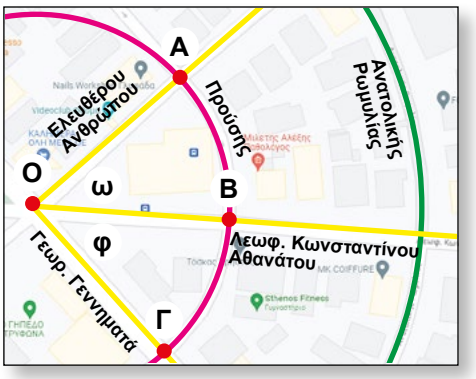
5. Η Ελένη και ο Μανόλης θέλουν να παίξουν στην παραλία ένα παιχνίδι που λέγεται «ξυλίκι» και χρειάζεται να φτιάξουν στην άμμο έναν κύκλο, στο κέντρο του οποίου θα στέκεται το ένα παιδί. Εκεί φυσικά δεν υπάρχει διαβήτης! Μπορείτε να τους προτείνετε τρόπους κατασκευής με άλλα υλικά;

Σχεδιάζω κύκλους στο GeoGebra

7.5 Επίκεντρες γωνίες – Μέτρηση τόξων και επίκεντρων γωνιών

Δ1. Και οι γωνίες βλέπουν

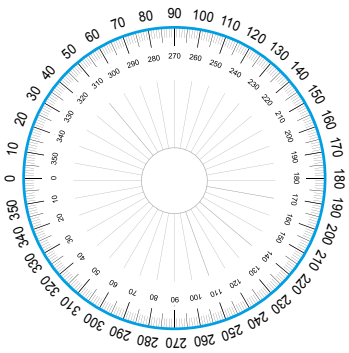
Στον διπλανό χάρτη η γωνία $\hat{\omega}$ σχηματίζεται από δύο δρόμους μιας περιοχής: την οδό Ελευθέρου Ανθρώπου και τη Λεωφόρο Κωνσταντίνου Αθανάτου. Οι οδοί Προύσης και Ανατολικής Ρωμυλίας είναι κομμάτια κύκλων. Ποιο μέρος της οδού Προύσης «βλέπει» το άνοιγμα της γωνίας $\hat{\omega}$; Ποιο μέρος της οδού Προύσης «βλέπει» το άνοιγμα της γωνίας $\hat{\varphi}$;

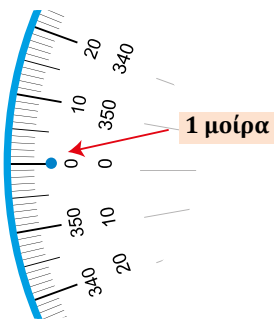


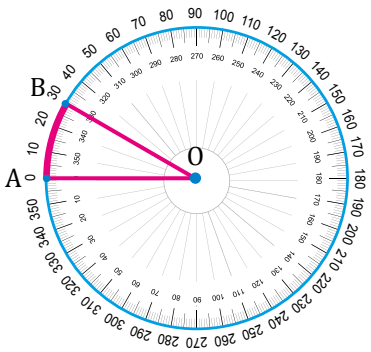
Συζητάμε

…για μέτρηση γωνιών με τη βοήθεια του κύκλου

Το άνοιγμα καθεμιάς από τις γωνίες $\hat{\omega}$ και $\hat{\varphi}$ «βλέπει» ένα διαφορετικό τόξο της οδού Προύσης. Τις γωνίες αυτές τις ονομάζουμε **επίκεντρες**. Αν αλλάξουμε το άνοιγμα μιας επίκεντρης γωνίας, αλλάζει και το τόξο που «βλέπει». Δηλαδή σε κάθε άνοιγμα της επίκεντρης γωνίας $A\hat{O}B$ αντιστοιχεί και διαφορετικό τόξο. Άρα, για να μετρήσουμε μια επίκεντρη γωνία, αρκεί να μετρήσουμε το τόξο το οποίο «βλέπει». Με ποιον τρόπο όμως μετράμε τα τόξα και με ποια μονάδα; Αν χωρίσουμε έναν κύκλο σε 360 ίσα μέρη (δηλαδή σε 360 ίσα τόξα), τότε το καθένα από αυτά το λέμε **μοίρα** και το συμβολίζουμε 1°. Δηλαδή $1° = \frac{1}{360}$ **του κύκλου**.



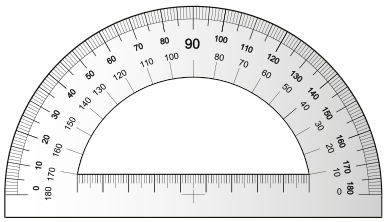


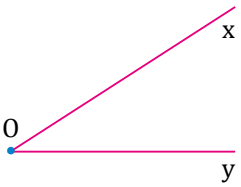


Έτσι, για να μετρήσουμε ένα τόξο, αρκεί να βρούμε πόσες φορές χωράει η 1° σε αυτό. Ο αριθμός που βρίσκουμε είναι το **μέτρο του τόξου**. Στη διπλανή εικόνα το τόξο $\overset{\frown}{AB}$ έχει μέτρο 30°. Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι και **η επίκεντρη γωνία** $A\hat{O}B$ **έχει μέτρο** 30°.

Δ2. Τα τόξα του μοιρογνωμόνιου

Έχουμε στη διάθεσή μας ένα **μοιρογνωμόνιο**, δηλαδή ένα όργανο που είναι το μισό ενός κυκλικού δίσκου και έχει σημάδια που το χωρίζουν σε 180°.





α) Συζητήστε με τους συμμαθητές και τις συμμαθήτριές σας τι σχέση έχουν τα δύο τόξα του μοιρογνωμόνιου (δηλαδή το εσωτερικό με το εξωτερικό).

β) Μετρήστε τη γωνία $x\hat{O}y$ χρησιμοποιώντας το μοιρογνωμόνιο. Περιγράψτε τον τρόπο με τον οποίο εργαστήκατε.

Μετρώ γωνίες στο GeoGebra

Μοιρογνωμόνιο

Γιατί χωρίστηκε ο κύκλος σε 360°;

Η υποδιαίρεση του κύκλου σε 360 μοίρες χρονολογείται από την εποχή των Σουμερίων (μέχρι το 1500 π.Χ.). Κάποιες πηγές θεωρούν πως **οι 360° είναι μια προσέγγιση των 365°**, μιας και τα ουράνια σώματα έμοιαζαν να αλλάζουν θέση πάνω σε έναν κύκλο και να ολοκληρώνουν τη μετακίνησή τους σε αυτό που τελικά ονομάστηκε «έτος», δηλαδή 365 ημέρες.

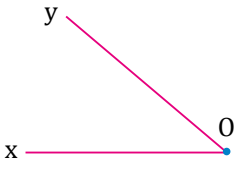
Ακόμα, **ο αριθμός 360** είναι βολικός, διότι **έχει 23 συνολικά διαιρέτες**! Από αυτούς, είχε μεγάλη σημασία το 90, διότι η ορθή γωνία θεωρούνταν ως η αρχή κάθε κατασκευής.

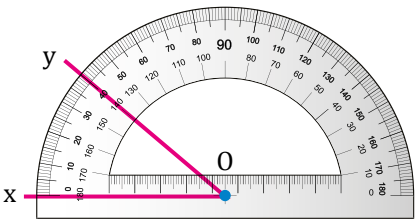
Πηγές: [9], [18]

Συζητάμε

…για μέτρηση γωνιών με το μοιρογνωμόνιο

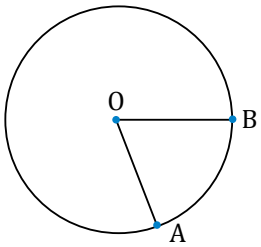
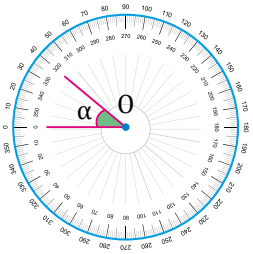
Το **μοιρογνωμόνιο** μας βοηθά να μετρήσουμε μια γωνία, **κάνοντάς την επίκεντρη**:





- Τοποθετούμε το κέντρο του (δηλαδή την ένδειξη 0) στην κορυφή της γωνίας.
- Εφαρμόζουμε τη διάμετρό του πάνω σε μία από τις πλευρές της γωνίας.
- Μετράμε το άνοιγμα της γωνίας πάνω στο ένα από τα δύο τόξα του μοιρογνωμόνιου.

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

λεκτικά…	…και με σχήμα
Επίκεντρη ονομάζουμε κάθε γωνία που έχει κορυφή το κέντρο ενός κύκλου. Λέμε ότι η επίκεντρη γωνία $A\hat{O}B$ **βαίνει** στο τόξο $\overset{\frown}{AB}$ ή ότι η γωνία $A\hat{O}B$ έχει **αντίστοιχο τόξο** το $\overset{\frown}{AB}$.	
Το μέτρο μιας επίκεντρης γωνίας είναι ίσο με το μέτρο του αντίστοιχου τόξου της. Στο διπλανό σχήμα, η γωνία $\hat{\alpha} = 40°$.	

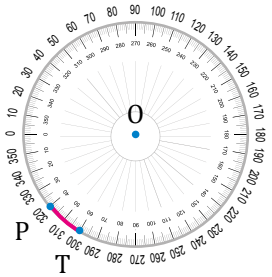
Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. **Στο διπλανό σχήμα:**

α) **να κατασκευάσετε μια επίκεντρη γωνία $K\hat{O}M = 25°$,**

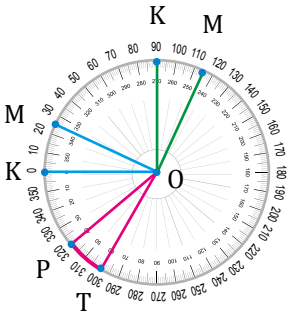
β) **να βρείτε το μέτρο του κυρτού τόξου $\overset{\frown}{TP}$,**

γ) **να φέρετε τις ακτίνες ΟΡ και ΟΤ και να βρείτε το μέτρο της κυρτής επίκεντρης γωνίας $T\hat{O}P$, καθώς και το μέτρο της μη κυρτής γωνίας $T\hat{O}P$.**



Απάντηση

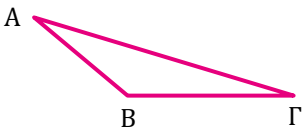
α) Μπορούμε να σχεδιάσουμε τη γωνία $K\hat{O}M = 25°$ σε οποιαδήποτε θέση εντός του κύκλου, αρκεί το τόξο $\overset{\frown}{KM}$ να έχει μέτρο 25° (όπως είναι, για παράδειγμα, η γαλάζια γωνία και η πράσινη).



β) Το τόξο $\overset{\frown}{TP}$ εκτείνεται από τις 300° έως τις 320°, άρα το μέτρο του είναι 20°.

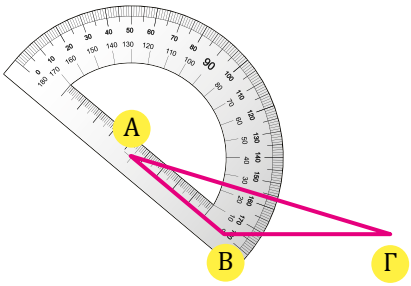
γ) Συνδέουμε τα σημεία Τ και Ρ με το Ο και κατασκευάζουμε την επίκεντρη γωνία $T\hat{O}P$. Η γωνία $T\hat{O}P = 20°$, όσο και το μέτρο του τόξου στο οποίο βαίνει. Αντίστοιχα, η μη κυρτή $T\hat{O}P$ βαίνει σε τόξο $360° - 20° = 340°$.

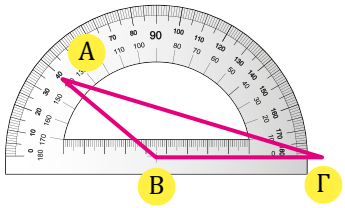
2. **Να μετρήσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.**

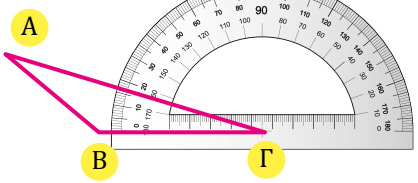


Απάντηση

Τοποθετώντας κατάλληλα το μοιρογνωμόνιο, βρίσκουμε $\hat{A}=24°$, $\hat{B}=140°$, $\hat{\Gamma}=16°$.



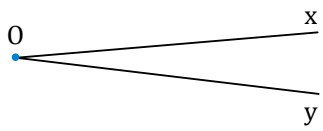




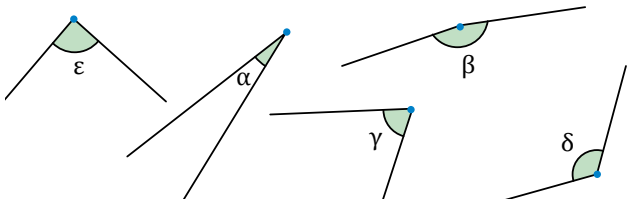
Σύγκριση γωνιών χωρίς μοιρογνωμόνιο

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Στο παρακάτω σχήμα να κάνετε τη γωνία $x\hat{O}y$ επίκεντρη: **α)** σε κύκλο με ακτίνα 2 cm, **β)** σε κύκλο με ακτίνα 3 cm.



2. Να μετρήσετε με το μοιρογνωμόνιό σας τις επόμενες γωνίες και να τις διατάξετε από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη.



3. Να σχεδιάσετε με το μοιρογνωμόνιό σας τις γωνίες $\hat{\alpha}=35°$, $\hat{\beta}=62°$, $\hat{\gamma}=88°$, $\hat{\delta}=130°$, $\hat{\varepsilon}=179°$.

Κατασκευάζω γωνίες στο GeoGebra

Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

4. Στο διπλανό σχήμα να σχεδιάσετε:
α) δύο διαφορετικές επίκεντρες γωνίες,
β) δύο ίσες επίκεντρες γωνίες,
γ) δύο ίσα τόξα,
δ) δύο ίσες χορδές και στη συνέχεια να συγκρίνετε τα αντίστοιχα τόξα και τις αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες.



5. Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ και στη συνέχεια να κάνετε τη γωνία $\hat{A}$ επίκεντρη σε κύκλο με ακτίνα ΑΒ. Αυτός ο κύκλος θα περνάει από το Γ; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Κύκλος με κέντρο κορυφή τριγώνου

6. Να κατασκευάσετε έναν κύκλο με ακτίνα μεγαλύτερη από την ακτίνα του μοιρογνωμονίου σας. Πάρτε δύο σημεία Α και Β του κύκλου. Πώς θα μετρήσετε το τόξο $\overset{\frown}{AB}$;

7. Να κατασκευάσετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=40°$ και $\hat{B}=80°$.

8. Σε κύκλο (Ο, ρ) κατασκευάστε ένα τόξο ΑΒ. Πώς θα μπορούσατε να κατασκευάσετε πάνω στον ίδιο κύκλο ένα τόξο $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ ίσο με το $\overset{\frown}{AB}$;

Κατασκευή ίσων τόξων

9. Ποιο είναι το μέτρο της γωνίας που σχηματίζουν οι δείκτες ενός ρολογιού όταν η ώρα είναι:
α) 3 π.μ. **β)** 5 π.μ. **γ)** 6 π.μ.

7.6 Διχοτόμος γωνίας

Δ1. Μοιράζοντας την τούρτα

Το τελευταίο κομμάτι μιας τούρτας θέλουμε να το μοιράσουμε στην Ελισάβετ και στην Ειρήνη, δίνοντάς τους δύο κομμάτια με το ίδιο σχήμα. Πώς μπορούμε να κάνουμε δίκαιη τη μοιρασιά; Συζητήστε αν υπάρχουν εναλλακτικές λύσεις.

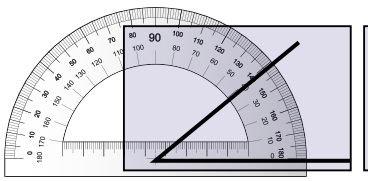


Συζητάμε

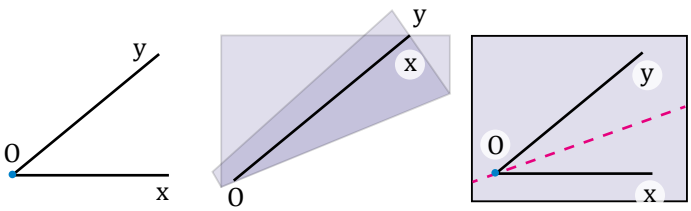
…για την κατασκευή της διχοτόμου

Την ημιευθεία που φέραμε στο προηγούμενο σχήμα τη λέμε **διχοτόμο**. Για κάθε γωνία $x\hat{O}y$ μπορούμε να σχεδιάσουμε μία **μοναδική** διχοτόμο. Πώς όμως μπορούμε να κατασκευάσουμε τη διχοτόμο μιας γωνίας;

α) Με το μοιρογνωμόνιο: Μετράμε τη γωνία με το μοιρογνωμόνιο και εντοπίζουμε το μισό της, όπως φαίνεται στα διπλανά σχήματα.

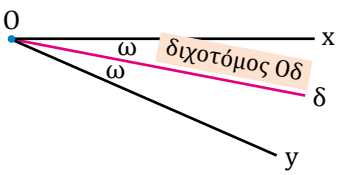


β) Με δίπλωση και διαφανές χαρτί: Διπλώνουμε το χαρτί ξεκινώντας από την κορυφή Ο της γωνίας $x\hat{O}y$ (1ο σχήμα δίπλα) και φέρνοντας την πλευρά Ox να εφαρμόσει επάνω στην πλευρά Oy (2ο σχήμα). Ξεδιπλώνουμε. Η τσάκιση δημιουργεί την κόκκινη γραμμή, η οποία διχοτομεί τη γωνία μας, δηλαδή τη χωρίζει σε δύο ίσες γωνίες (3ο σχήμα).



Διχοτόμος γωνίας με δίπλωση

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

λεκτικά…	…και με σχήμα
Η διχοτόμος μιας γωνίας είναι μια ημιευθεία που τη χωρίζει σε δύο ίσες γωνίες. $x\hat{O}\delta = \delta\hat{O}y = \hat{\omega}$	

Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε

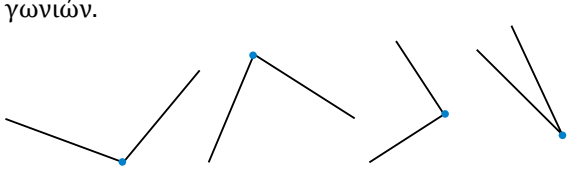


1. Συζητήστε με τους συμμαθητές και τις συμμαθήτριές σας ποια (ή ποιες) από τις παρακάτω μοιρασιές της πίτσας θα μπορούσατε να κάνετε πιο εύκολα: **α)** σε 8 ίσα κομμάτια, **β)** σε 10 ίσα κομμάτια, **γ)** σε 12 ίσα κομμάτια, **δ)** σε 16 ίσα κομμάτια.

2. Να κατασκευάσετε έναν πίνακα έννοιας για τη διχοτόμο γωνίας.

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Να κατασκευάσετε τις διχοτόμους των παρακάτω γωνιών.



2. Να σχεδιάσετε τις γωνίες $\hat{\alpha} = 30°$, $\hat{\beta} = 110°$ και στη συνέχεια να φέρετε τις διχοτόμους τους.

Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

3. Να κατασκευάσετε τις διχοτόμους των γωνιών ενός τριγώνου ΑΒΓ.

4. Να σχεδιάσετε μια ημιευθεία Οδ. Να κατασκευάσετε μια γωνία $x\hat{O}y = 50°$, έτσι ώστε η Οδ να είναι διχοτόμος της.

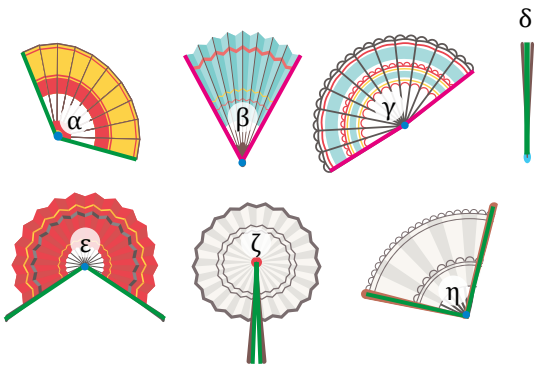
Διχοτόμοι γωνιών τριγώνου

5. Να σχεδιάσετε μια γωνία $x\hat{O}y = 80°$. Να φέρετε τη διχοτόμο της Οδ και στη συνέχεια να κατασκευάσετε τη διχοτόμο της γωνίας $x\hat{O}δ$.

7.7 Είδη γωνιών

Δ1. Βεντάλιες και γωνίες

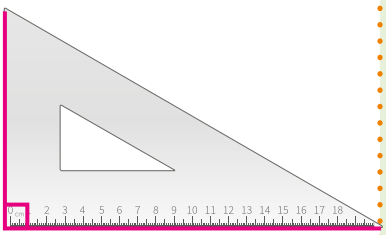
Οι βεντάλιες που βλέπουμε στις διπλανές εικόνες έχουν διαφορετικά ανοίγματα, που αντιστοιχούν σε διαφορετικά είδη γωνιών. Συζητήστε με τους συμμαθητές και τις συμμαθήτριές σας σχετικά με το μέγεθός τους και ταξινομήστε τες από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη.



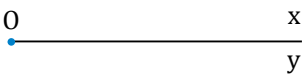
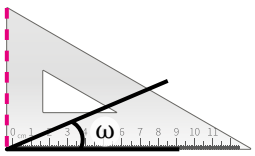
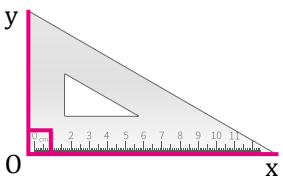
Συζητάμε

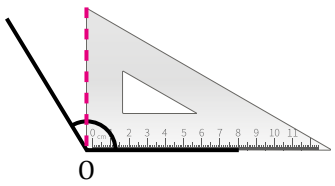
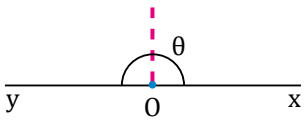
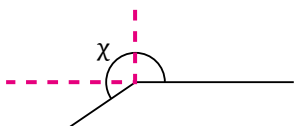
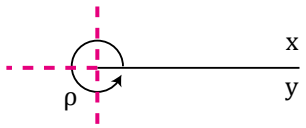
…για είδη γωνιών ως προς το μέτρο τους

Οι γωνίες που συναντάμε στην καθημερινή μας ζωή έχουν άνοιγμα από 0° έως 360°. Η γωνία που μας βοηθά να τις κατατάξουμε σε είδη είναι η **ορθή**, της οποίας το μέτρο είναι 90°. Στα παραπάνω σχήματα η γωνία $\hat{\eta}$ είναι ορθή. Στον χώρο που μας περιβάλλει, το είδος που συναντάμε συχνότερα είναι η ορθή γωνία. Ο **γνώμονας** είναι ένα τρίγωνο με μια ορθή γωνία, με το οποίο μπορούμε να κατασκευάζουμε εύκολα ορθές γωνίες αλλά και να συγκρίνουμε οποιαδήποτε γωνία με την ορθή.



Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

λεκτικά…	…και με σχήμα
Μηδενική ονομάζουμε κάθε γωνία $x\hat{O}y$ με μέτρο 0°: $x\hat{O}y = 0°$. Οι πλευρές της μηδενικής γωνίας συμπίπτουν.	
Οξεία ονομάζουμε κάθε γωνία $\hat{\omega}$ που είναι μεγαλύτερη από τη μηδενική και μικρότερη από την ορθή: $0° < \hat{\omega} < 90°$.	
Ορθή ονομάζουμε κάθε γωνία $x\hat{O}y$ με μέτρο 90°: $x\hat{O}y = 90°$. Λέμε ότι οι πλευρές Ox και Oy της ορθής γωνίας είναι **κάθετες μεταξύ τους** και συμβολίζουμε $Ox \perp Oy$.	

λεκτικά…	…και με σχήμα
Αμβλεία ονομάζουμε κάθε γωνία $\hat{\varphi}$ που είναι μεγαλύτερη από την ορθή και μικρότερη από 180°: $90° < \hat{\varphi} < 180°$.	
Ευθεία ονομάζουμε κάθε γωνία $\hat{\theta}$ με μέτρο 180°, δηλαδή $\hat{\theta} = 180°$. Οι πλευρές της Ox και Oy είναι **αντικείμενες ημιευθείες**.	
Μη κυρτή ονομάζουμε κάθε γωνία $\hat{\chi}$ με μέτρο μεγαλύτερο από 180°: $\hat{\chi} > 180°$.	
Πλήρη ονομάζουμε κάθε γωνία $\hat{\rho}$ με μέτρο 360°: $\hat{\rho} = 360°$. Η πλευρά της Oy συμπίπτει με την Ox, όπως της μηδενικής, έχοντας όμως διαγράψει μια ολόκληρη περιστροφή, δηλαδή 360°.	

Στην ελληνική γλώσσα…

Οξύ λέμε κάτι που είναι μυτερό, αιχμηρό, αλλά και κάτι έντονο, διαπεραστικό, δυνατό, σφοδρό, όπως για παράδειγμα έναν ήχο, μια γεύση, μια ασθένεια, ένα καιρικό φαινόμενο, μια αντιπαράθεση…

Αμβλύ είναι αυτό που έχει πλατύ άκρο, όχι μυτερό, χωρίς μεγάλη ένταση, πιο άτονο, πιο εξασθενημένο, σε αντίθεση με το οξύ…

Τρίλιζα με τα είδη γωνιών

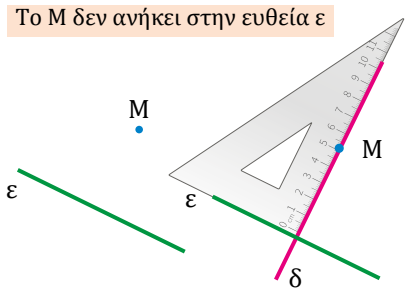
Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. **Να σχεδιάσετε μια ευθεία ε και ένα σημείο Μ. Να κατασκευάσετε ευθεία δ που να περνάει από το Μ και να είναι κάθετη στην ε.**

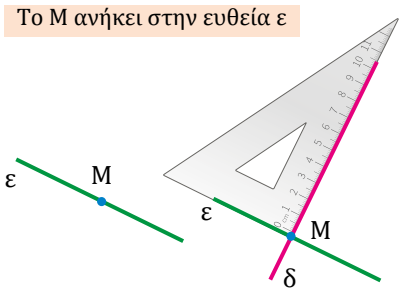
Απάντηση

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Το Μ δεν ανήκει στην ευθεία ε



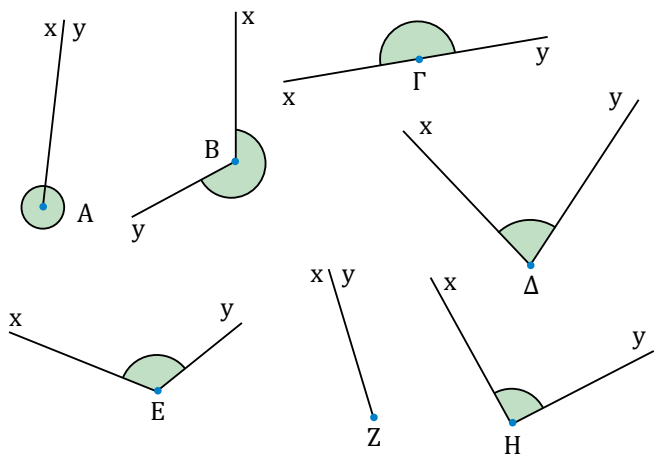
Το Μ ανήκει στην ευθεία ε



Κάθετες στο GeoGebra

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

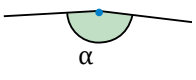
1. **α)** Να μετρήσετε προσεκτικά τις παρακάτω γωνίες και να συμπληρώσετε τον πίνακα 1.
β) Στη συνέχεια να αντιστοιχίσετε την καθεμία από αυτές με ένα από τα είδη του πίνακα 2.



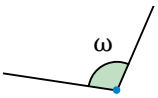
Πίνακας 1	
Γωνία	**Μέτρο**
$x\hat{A}y$	
$x\hat{B}y$	
$x\hat{\Gamma}y$	
$x\hat{\Delta}y$	
$x\hat{E}y$	
$x\hat{Z}y$	
$x\hat{H}y$	

Πίνακας 2
Είδη γωνιών
Αμβλεία
Μη κυρτή
Ορθή
Πλήρης
Ευθεία
Οξεία
Μηδενική

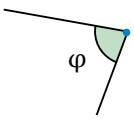
2. Να εκτιμήσετε (χωρίς να μετρήσετε) το μέτρο των παρακάτω γωνιών.



α. $\hat{\alpha} = 100°$
β. $\hat{\alpha} = 145°$
γ. $\hat{\alpha} = 170°$



α. $\hat{\omega} = 140°$
β. $\hat{\omega} = 105°$
γ. $\hat{\omega} = 90°$



α. $\hat{\varphi} = 50°$
β. $\hat{\varphi} = 90°$
γ. $\hat{\varphi} = 80°$

Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

3. Να σχεδιάσετε γωνία $x\hat{O}y = 90°$ και μια ημιευθεία Οδ, έτσι ώστε η γωνία $x\hat{O}\delta$ να είναι:
α) οξεία, **β)** αμβλεία.

4. Να σχεδιάσετε μια ευθεία γωνία $x\hat{O}y$ και στη συνέχεια τη γωνία $y\hat{O}z = 40°$. Υπολογίστε τη μη κυρτή γωνία $x\hat{O}z$.

Κατασκευάζω γωνίες διαφόρων ειδών

5. Να σχεδιάσετε μια ημιευθεία Ox. Να κατασκευάσετε ευθεία ε κάθετη στην Ox στο σημείο O.

6. Να σχεδιάσετε δύο ημιευθείες Ox και Oy κάθετες μεταξύ τους. Στο εσωτερικό της γωνίας να πάρετε ένα σημείο A και να φτιάξετε το ευθύγραμμο τμήμα OA. Στη συνέχεια να φέρετε ευθεία ε κάθετη στο OA στο A.

7.8 Πρόσθεση και αφαίρεση γωνιών

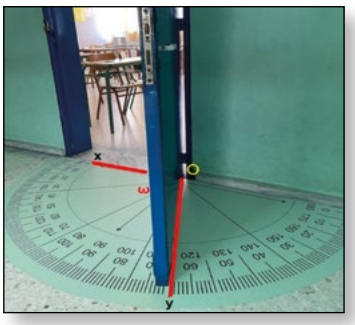
Δ1. Το άνοιγμα της πόρτας

Η πόρτα μιας αίθουσας του σχολείου μας έχει ανοίξει περίπου κατά τη γωνία $\hat{\omega} = 115°$.

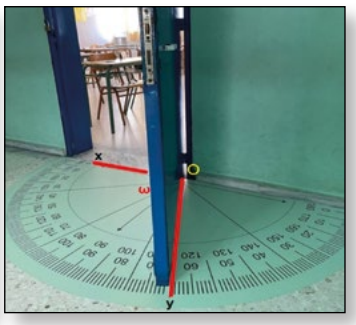
α) Αν την ανοίξουμε ακόμη κατά $\hat{\varphi} = 30°$, σχεδιάστε στην εικόνα 1 το τελικό της άνοιγμα και υπολογίστε το.

β) Αν την κλείσουμε κατά $\hat{\alpha} = 45°$, σχεδιάστε στην εικόνα 2 το τελικό της άνοιγμα και υπολογίστε το.

Συζητήστε τα ευρήματά σας στην τάξη.



Εικόνα 1



Εικόνα 2

Πόρτα που ανοιγοκλείνει

Συζητάμε

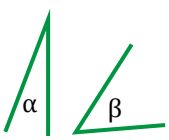
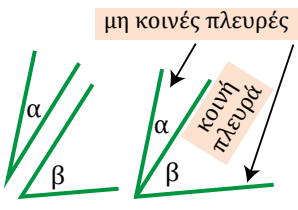
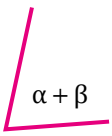
…για το άθροισμα και τη διαφορά δύο γωνιών

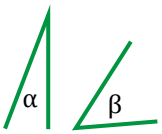
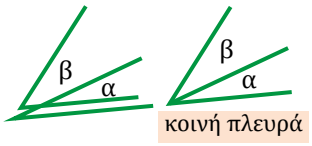
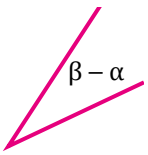
Στην εικόνα 1 η γωνία $\hat{\varphi}$ τοποθετείται «**δίπλα**» στην $\hat{\omega}$ και το τελικό άνοιγμα της πόρτας το λέμε **άθροισμα των γωνιών $\hat{\omega}$ και $\hat{\varphi}$**.

Στην εικόνα 2 η γωνία $\hat{\alpha}$ τοποθετείται «**μέσα**» στην $\hat{\omega}$ και το τελικό άνοιγμα της πόρτας το λέμε **διαφορά των γωνιών $\hat{\omega}$ και $\hat{\varphi}$**.

Δύο γωνίες που η μία ακολουθεί την άλλη (δύο συνεχόμενες γωνίες) λέγονται **εφεξής**. Η λέξη αυτή είναι μια λόγια έκφραση που χρησιμοποίησαν ο Πλάτωνας και ο Αριστοτέλης σε πολλά κείμενά τους.

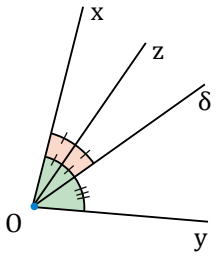
Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

λεκτικά…	…και με σχήμα		
Για να βρούμε το **άθροισμα δύο γωνιών**, τις τοποθετούμε έτσι ώστε να έχουν κοινή κορυφή, μία κοινή πλευρά και κανένα άλλο κοινό σημείο. Η γωνία που αποτελείται από τις μη κοινές πλευρές τους είναι το άθροισμά τους. • Όταν τοποθετούμε με αυτό τον τρόπο δύο ή περισσότερες γωνίες για να τις προσθέσουμε, λέμε ότι τις κάνουμε **διαδοχικές**.	Οι γωνίες	Η διαδικασία τοποθέτησης για άθροισμα	Το άθροισμα
			

λεκτικά…	…και με σχήμα		
Για να βρούμε τη **διαφορά δύο γωνιών**, τις τοποθετούμε έτσι ώστε να έχουν κοινή κορυφή, μία κοινή πλευρά και η μικρότερη να βρίσκεται στο εσωτερικό της μεγαλύτερης. Το υπόλοιπο μέρος της μεγαλύτερης γωνίας είναι η **διαφορά** των δύο γωνιών. • Για να αφαιρέσουμε μία γωνία από μία άλλη, τις τοποθετούμε με τον ίδιο τρόπο όπως και για να τις συγκρίνουμε.	Οι γωνίες	Η διαδικασία τοποθέτησης για άθροισμα	Η διαφορά
			

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. **Να σχεδιάσετε μια γωνία $x\hat{O}y = 80°$. Να φέρετε τη διχοτόμο της Οδ και στη συνέχεια να κατασκευάσετε τη διχοτόμο Oz της γωνίας $x\hat{O}\delta$. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $z\hat{O}y$.**



Απάντηση

Η Οδ είναι διχοτόμος της $x\hat{O}y$, άρα $x\hat{O}\delta = \delta\hat{O}y = \frac{x\hat{O}y}{2} = \frac{80°}{2} = 40°$.

Η Oz είναι διχοτόμος της $x\hat{O}\delta$, άρα $x\hat{O}z = z\hat{O}\delta = \frac{x\hat{O}\delta}{2} = \frac{40°}{2} = 20°$. Επίσης, $z\hat{O}y = z\hat{O}\delta + \delta\hat{O}y$. Άρα $z\hat{O}y = 20° + 40° = 60°$.

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ).

α) Το άθροισμα μιας οξείας και μιας ορθής είναι αμβλεία γωνία.

β) Το άθροισμα μιας οξείας και μιας αμβλείας είναι αμβλεία ή ευθεία ή μη κυρτή γωνία.

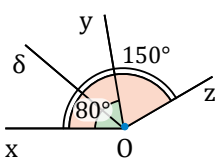
γ) Η διαφορά μιας οξείας από μια αμβλεία γωνία είναι πάντα οξεία γωνία.

2. Να κατασκευάσετε τρεις οξείες γωνίες $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$ και στη συνέχεια να κατασκευάσετε τη γωνία που παριστάνει το άθροισμά τους.

Άθροισμα και διαφορά γωνιών

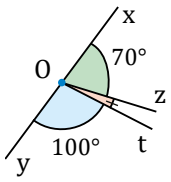
Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

3. Στο διπλανό σχήμα είναι $x\hat{O}z = 150°$, $x\hat{O}y = 80°$ και Οδ η διχοτόμος της $x\hat{O}y$. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $\delta\hat{O}z$.



4. Να σχεδιάσετε μια γωνία $x\hat{O}y = 100°$. Να φέρετε τη διχοτόμο της Οδ και στη συνέχεια να κατασκευάσετε τη διχοτόμο Oz της γωνίας $x\hat{O}\delta$. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $z\hat{O}y$.

5. Στο διπλανό σχήμα είναι $x\hat{O}z = 70°$ και $t\hat{O}y = 100°$. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $t\hat{O}z$, αν ξέρουμε ότι οι ημιευθείες Ox και Oy είναι αντικείμενες.



6. Να διερευνήσετε ποιο μπορεί να είναι το είδος των γωνιών $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$, αν το άθροισμά τους ισούται: **α)** με 70°, **β)** με 180°.

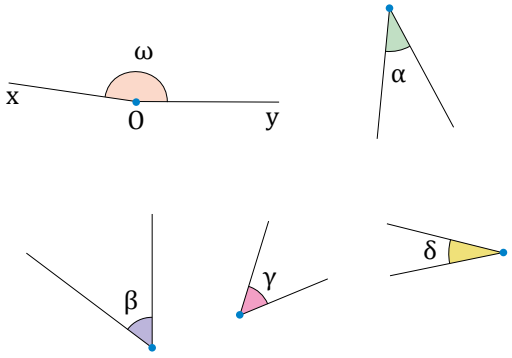
7. Η διαφορά δύο κυρτών γωνιών $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ είναι 40°. Τι μπορείτε να συμπεράνετε για το είδος τους;

Γωνίες με δοσμένη διαφορά

8. Να κατασκευάσετε διαδοχικά τις γωνίες $x\hat{O}y = 60°$, $y\hat{O}z = 30°$, $z\hat{O}t = 45°$ και $t\hat{O}v = 35°$. Να βρείτε τα μέτρα των γωνιών:

α) $y\hat{O}v$ **β)** $x\hat{O}v - t\hat{O}v$

9. Με τη βοήθεια διαφανούς χαρτιού, να προσθέσετε τις γωνίες $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$ και $\hat{\delta}$. Στη συνέχεια, με κορυφή το O και πλευρά την Ox, να ελέγξετε αν το άθροισμα που βρήκατε «χωράει» μέσα στη γωνία $x\hat{O}y$.



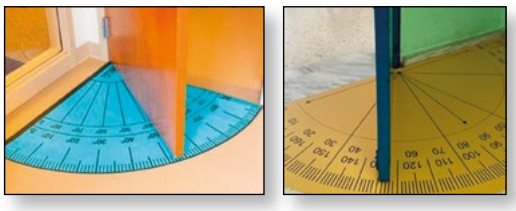
7.9 Συμπληρωματικές και παραπληρωματικές γωνίες

Δ1. Οι γωνίες στο άνοιγμα της πόρτας

Α. Στο καθένα από τα διπλανά σχήματα το άνοιγμα της πόρτας είναι 52°. Πόσες ακόμη μοίρες πρέπει να ανοίξει, ώστε να ακουμπήσει στον τοίχο;

Β. Να σχεδιάσετε το άθροισμα των γωνιών:

α) $\hat{\omega}=30°$ και $\hat{\varphi}=60°$, **β)** $\hat{\alpha}=110°$ και $\hat{\beta}=70°$.



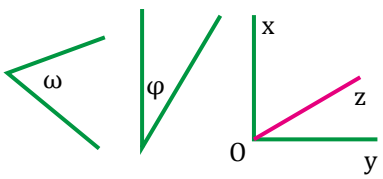
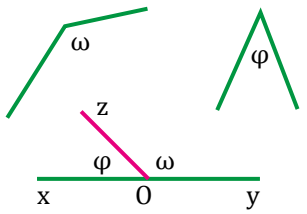
Συζητάμε

…για δύο γωνίες με άθροισμα 90° ή 180°

Δύο γωνίες όπως αυτές του 1ου σχήματος της Δ1 ή όπως οι $\hat{\omega}$ και $\hat{\varphi}$, που, αν τις προσθέσουμε, έχουν άθροισμα 90°, λέγονται **συμπληρωματικές**.

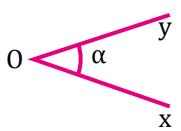
Δύο γωνίες όπως αυτές του 2ου σχήματος της Δ1 ή όπως οι $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$, που, αν τις προσθέσουμε, έχουν άθροισμα 180°, λέγονται **παραπληρωματικές**.

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

λεκτικά…	…και με σχήμα
Συμπληρωματικές ονομάζουμε δύο γωνίες που έχουν άθροισμα 90°. $\hat{\omega}+\hat{\varphi}=x\hat{O}z+z\hat{O}y=90°$ • Παρατηρούμε ότι, όταν τις κάνουμε διαδοχικές, οι μη κοινές πλευρές τους είναι κάθετες.	
Παραπληρωματικές ονομάζουμε δύο γωνίες που έχουν άθροισμα 180°. $\hat{\omega}+\hat{\varphi}=x\hat{O}z+z\hat{O}y=180°$ • Παρατηρούμε ότι, όταν τις κάνουμε διαδοχικές, οι μη κοινές πλευρές τους είναι αντικείμενες ημιευθείες.	

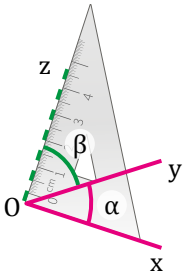
Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. **Χωρίς να μετρήσετε τη γωνία $\hat{\alpha}$ του διπλανού σχήματος, να κατασκευάσετε: α) τη συμπληρωματική της γωνία, β) την παραπληρωματική της γωνία.**

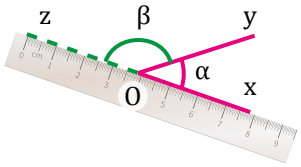


Απάντηση

α) Γνωρίζουμε ότι, αν κάνουμε διαδοχικές δύο συμπληρωματικές γωνίες, οι μη κοινές πλευρές τους είναι κάθετες. Άρα, για να κατασκευάσουμε τη συμπληρωματική της $\hat{\alpha}$, φέρνουμε με τον γνώμονα την κάθετη Oz στο σημείο O της πλευράς Ox. Η $\hat{\beta}$ είναι η συμπληρωματική της $\hat{\alpha}$.



β) Γνωρίζουμε ότι, αν κάνουμε διαδοχικές δύο παραπληρωματικές γωνίες, οι μη κοινές πλευρές τους είναι αντικείμενες ημιευθείες. Άρα, για να κατασκευάσουμε την παραπληρωματική της $\hat{\alpha}$, κατασκευάζουμε την Oz αντικείμενη ημιευθεία της Ox. Η $\hat{\beta}$ είναι η παραπληρωματική της $\hat{\alpha}$.

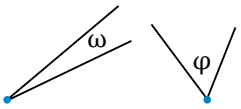




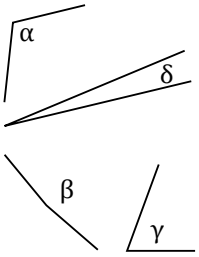
Κατασκευάζω συμπληρωματικές και παραπληρωματικές γωνίες

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Να σχεδιάσετε τη συμπληρωματική της γωνίας $\hat{\omega}$ και την παραπληρωματική της γωνίας $\hat{\varphi}$.



2. Στο διπλανό σχήμα υπάρχουν δύο ζευγάρια παραπληρωματικών γωνιών και ένα ζευγάρι συμπληρωματικών. Μπορείτε να τα βρείτε χωρίς να μετρήσετε τις γωνίες;

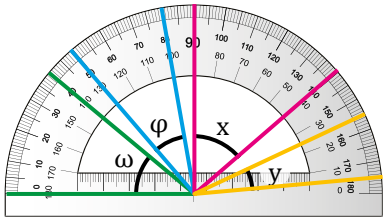


3. Ανάμεσα στις γωνίες $\hat{\omega}$, $\hat{\varphi}$, $\hat{x}$ και $\hat{y}$ του παρακάτω σχήματος να βρείτε:

α) ένα ζευγάρι συμπληρωματικών γωνιών,

β) αν είναι κάποιες από αυτές παραπληρωματικές γωνίες.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

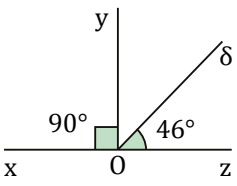
4. Να σχεδιάσετε δύο διαδοχικές γωνίες με άθροισμα 90°, καθώς και τις διχοτόμους τους. Υπολογίστε το μέτρο της γωνίας των διχοτόμων.



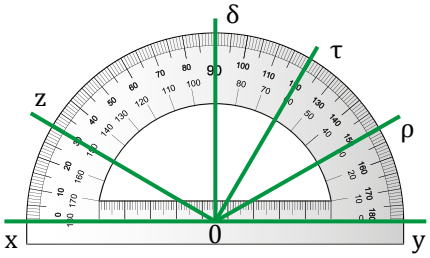
Διχοτόμοι συμπληρωματικών γωνιών

5. Να σχεδιάσετε δύο διαδοχικές γωνίες με άθροισμα 180° (διαδοχικές και παραπληρωματικές), καθώς και τις διχοτόμους τους. Υπολογίστε το μέτρο της γωνίας των διχοτόμων.

6. Στο διπλανό σχήμα η Oδ είναι διχοτόμος της $y\hat{O}z$ και η $\delta\hat{O}z = 46°$. Εξηγήστε για ποιο λόγο η γωνία $x\hat{O}z$ δεν είναι ευθεία γωνία. Τι θα αλλάζατε στο σχήμα, ώστε η $x\hat{O}z$ να γίνει ευθεία;



7. Στο παρακάτω σχήμα να βρείτε: **α)** ζευγάρια παραπληρωματικών γωνιών, **β)** ζευγάρια συμπληρωματικών γωνιών.

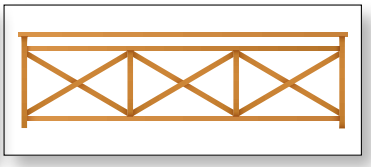
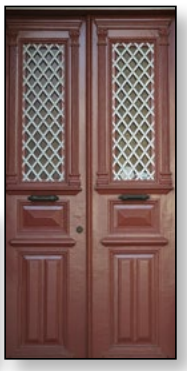


7.10 Κατακορυφήν γωνίες

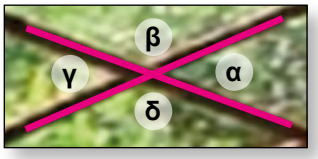
Δ1. Τι κοινό έχει ένα κάγκελο και μια πολυθρόνα;

Α. Συζητήστε για το κοινό χαρακτηριστικό που διακρίνετε στα αντικείμενα των παρακάτω εικόνων (καρέκλα σκηνοθέτη, ξύλινη πέργκολα, τραπεζάκι, κάγκελα, διακόσμηση εξώπορτας). Υπάρχει σε κάποια από αυτά κάποια χρησιμότητα που προκύπτει από τον τρόπο κατασκευής τους;



Β. Ονομάζουμε $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$, $\hat{\delta}$ τις γωνίες που σχηματίζουν τα ξυλάκια της πέργκολας πάνω στο διπλανό σχήμα. Αν γνωρίζουμε ότι $\hat{\alpha}=50°$, ερευνήστε τη σχέση της $\hat{\alpha}$ με τη $\hat{\gamma}$ και της $\hat{\beta}$ με τη $\hat{\delta}$. Περιγράψτε και συζητήστε τα ευρήματά σας στην τάξη.

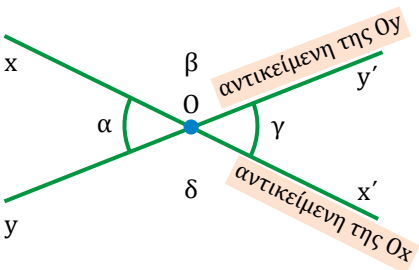
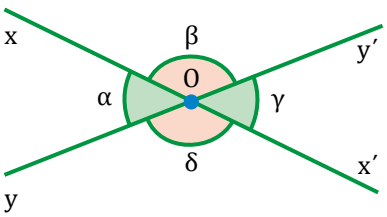


Συζητάμε

…για τις γωνίες σε σχήμα Χ

Σε κάθε σχήμα όπως αυτό που σχηματίζουν τα ξυλάκια της πέργκολας (Δ1.Β) υπάρχουν τέσσερις γωνίες. Τις γωνίες που δεν είναι διαδοχικές τις λέμε **κατακορυφήν**.

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

λεκτικά…	…και με σχήμα
Κατακορυφήν ονομάζουμε δύο γωνίες που έχουν κοινή κορυφή και οι πλευρές τους είναι αντικείμενες ημιευθείες. Στο σχήμα μας κατακορυφήν είναι: • οι οξείες γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\gamma}$, • οι αμβλείες γωνίες $\hat{\beta}$ και $\hat{\delta}$.	
Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες, δηλαδή: • $\hat{\alpha}=\hat{\gamma}$, • $\hat{\beta}=\hat{\delta}$.	

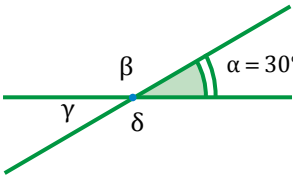
Αντικείμενες ημιευθείες στο GeoGebra

Προσπαθήστε να εντοπίσετε στον χώρο που σας περιβάλλει αντικείμενα που περιλαμβάνουν κατακορυφήν γωνίες και συζητήστε γι' αυτά.

Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες;

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

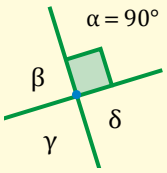
1. **Στο διπλανό σχήμα είναι $\hat{\alpha}=30°$. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$ και $\hat{\delta}$.**



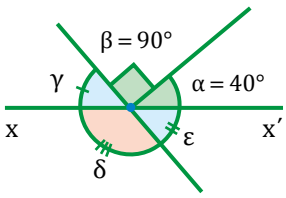
Απάντηση

Ισχύει $\hat{\alpha}+\hat{\beta}=180°$, άρα $\hat{\beta}=180°-\hat{\alpha}=180°-30°=150°$. Έχουμε $\hat{\alpha}=\hat{\gamma}$ ως κατακορυφήν, επομένως $\hat{\gamma}=30°$ και $\hat{\beta}=\hat{\delta}$ ως κατακορυφήν, άρα $\hat{\delta}=150°$.

1. Με τον ίδιο τρόπο, σε αντίστοιχη περίπτωση, αν γνωρίζουμε μία από τις τέσσερις γωνίες, μπορούμε να υπολογίσουμε τις υπόλοιπες τρεις.
2. Ομοίως, αν η μία από τις τέσσερις γωνίες του διπλανού σχήματος είναι ορθή, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι και οι υπόλοιπες γωνίες θα είναι ορθές. Δηλαδή, αν $\hat{\alpha}=90°$, τότε $\hat{\beta}=\hat{\gamma}=\hat{\delta}=90°$.



2. **Στο διπλανό σχήμα είναι $\hat{\alpha}=40°$ και $\hat{\beta}=90°$. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\gamma}$, $\hat{\delta}$ και $\hat{\varepsilon}$.**



Απάντηση

Ισχύει $\hat{\alpha}+\hat{\beta}+\hat{\gamma}=180°$, άρα

$\hat{\gamma}=180°-(\hat{\alpha}+\hat{\beta})=180°-(40°+90°)=50°$. Έχουμε $\hat{\varepsilon}=\hat{\gamma}$ ως κατακορυφήν, επομένως $\hat{\varepsilon}=50°$ και

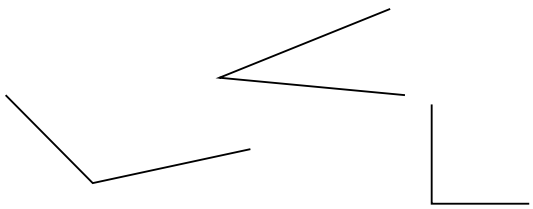
$\hat{\delta}+\hat{\varepsilon}=180°$, άρα $\hat{\delta}=180°-\hat{\varepsilon}=180°-50°=130°$.

Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε

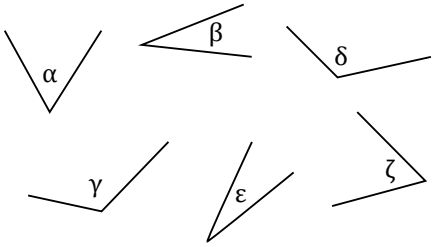
Να κατασκευάσετε έναν πίνακα έννοιας για τις κατακορυφήν γωνίες.

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Να κατασκευάσετε τις κατακορυφήν γωνίες των παρακάτω γωνιών.



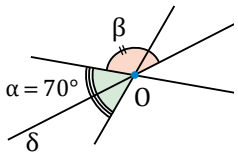
2. Χρησιμοποιήστε διαφανές χαρτί, για να βρείτε αν υπάρχουν ανάμεσα στις γωνίες του σχήματος ζευγάρια γωνιών που θα μπορούσαν να γίνουν κατακορυφήν, εάν τους αλλάζαμε θέση.



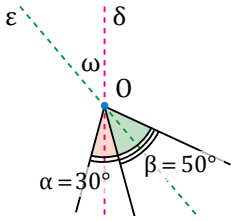
Μπορούν να γίνουν κατακορυφήν;

Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

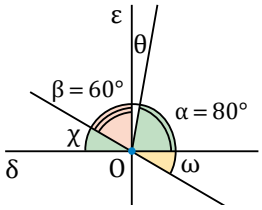
3. Στο παρακάτω σχήμα είναι $\hat{\alpha} = 70°$ και η ημιευθεία Οδ είναι η διχοτόμος της $\hat{\alpha}$. Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\beta}$.



4. Στο παρακάτω σχήμα είναι $\hat{\alpha} = 30°$, $\hat{\beta} = 50°$, η ευθεία δ διχοτομεί την $\hat{\alpha}$ και η ευθεία ε διχοτομεί τη $\hat{\beta}$. Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\omega}$.

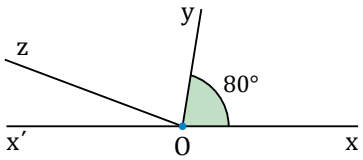


5. Οι ευθείες δ και ε στο παρακάτω σχήμα είναι κάθετες, $\hat{\alpha} = 80°$ και $\hat{\beta} = 60°$. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\theta}$, $\hat{\chi}$ και $\hat{\omega}$.



Διχοτόμοι κατακορυφήν γωνιών

6. Στο παρακάτω σχήμα η γωνία $x'\hat{O}x$ είναι ευθεία. Επίσης, η Oy είναι διχοτόμος της $x\hat{O}z$ και $x\hat{O}y = 80°$. Να βρείτε τα μέτρα των γωνιών $y\hat{O}z$ και $z\hat{O}x'$.



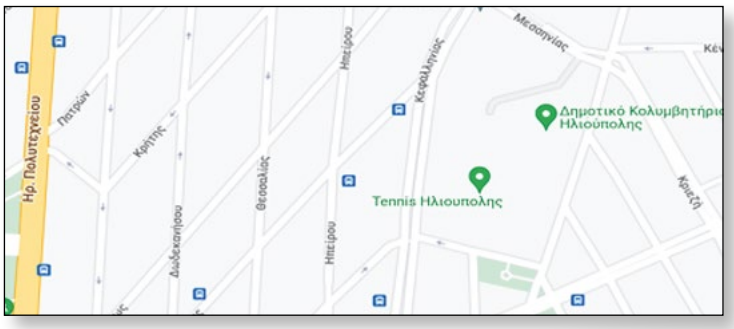
7.11 Σχετικές θέσεις ευθειών στο επίπεδο

Δ1. Θα συναντηθούμε;

Η Μαρία και η Δώρα περπατούν σε διαφορετικούς δρόμους της Άνω Ηλιούπολης. Σχεδιάστε με ευθείες πάνω στους αντίστοιχους δρόμους από μία περίπτωση πιθανών διαδρομών τους με την οποία:

α) θα συναντηθούν σίγουρα,

β) θα κινούνται σε δρόμους που δε συναντώνται ποτέ.

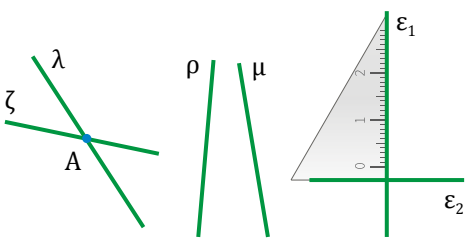
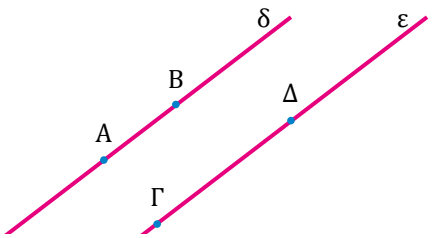


Συζητάμε

…για ευθείες παράλληλες και ευθείες τεμνόμενες

Στον χώρο που μας περιβάλλει υπάρχουν ευθείες του ίδιου επιπέδου που δε συναντώνται ποτέ, για παράδειγμα τα αντικριστά πεζοδρόμια ενός δρόμου, οι ράγες ενός τρένου, οι γραμμές ενός τετραδίου. Τις ευθείες αυτές τις λέμε **παράλληλες**. Επίσης, στο ίδιο επίπεδο μπορεί να υπάρχουν ευθείες που η μία συναντά την άλλη, για παράδειγμα οι πλευρές της γωνίας ενός φύλλου του τετραδίου μας ή τα ανοιχτά δάχτυλα της μιας παλάμης. Τις ευθείες αυτές τις λέμε **τεμνόμενες**.

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

λεκτικά…	…και με σχήμα
Δύο ευθείες του ίδιου επιπέδου που έχουν ένα κοινό σημείο τις ονομάζουμε **τεμνόμενες** και το σημείο αυτό το λέμε **σημείο τομής**. Στο διπλανό σχήμα: • Το σημείο τομής των ευθειών ζ και λ είναι το Α. • Το σημείο τομής των ευθειών ρ και μ δε φαίνεται, γιατί βρίσκεται στις προεκτάσεις τους. • Οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ είναι κάθετες και είναι μια ειδική περίπτωση τεμνόμενων ευθειών.	
Δύο ευθείες του ίδιου επιπέδου που δεν έχουν κοινά σημεία τις ονομάζουμε **παράλληλες**. Στο διπλανό σχήμα: • Οι ευθείες δ και ε είναι παράλληλες (συμβολίζουμε δ//ε). • Δύο ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ που ανήκουν σε παράλληλες ευθείες τα ονομάζουμε παράλληλα: ΑΒ// ΓΔ.	

Ο Ευκλείδης στα *Στοιχεία* ονομάζει παράλληλες τις ευθείες που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και προεκτεινόμενες απεριόριστα (**έκβαλλόμενες** είς ἄπειρον) και από τα δύο μέρη δεν τέμνονται ποτέ μεταξύ τους.

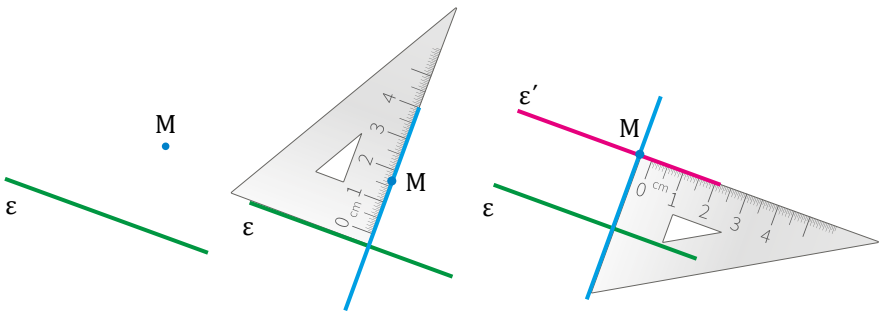
Πηγή: [19]

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. **Να σχεδιάσετε μια ευθεία ε και ένα σημείο Μ έξω από αυτήν. Στη συνέχεια να κατασκευάσετε μια ευθεία ε′ που να περνάει από το Μ και να είναι παράλληλη με την ε.**

Απάντηση

- Σχεδιάζουμε από το σημείο Μ μια βοηθητική ευθεία (τη γαλάζια στο σχήμα) κάθετη στην ε.
- Για να σχεδιάσουμε την ευθεία ε′, φέρνουμε κάθετη στη γαλάζια ευθεία στο σημείο Μ.



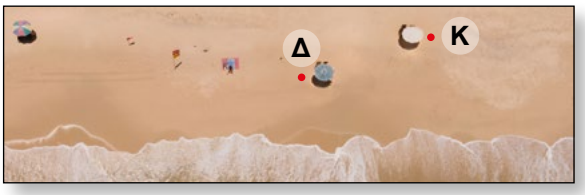
Δύο ευθείες που είναι κάθετες σε μία τρίτη ευθεία είναι παράλληλες μεταξύ τους. Με τον τρόπο αυτό κατασκευάζουμε δύο ευθείες παράλληλες μεταξύ τους.

Κατασκευή παραλλήλων

2. **Ο Κώστας και ο Δημήτρης βρίσκονται αντίστοιχα στα σημεία Κ και Δ της παραλίας.**

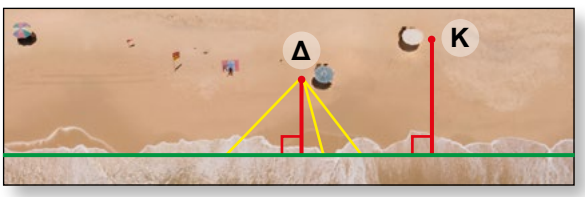
α) Με τα γεωμετρικά σας όργανα να προσδιορίσετε τη μικρότερη δυνατή διαδρομή που πρέπει να ακολουθήσει ο καθένας για να φτάσει στη θάλασσα.

β) Να βρείτε σε ποια σημεία της παραλίας μπορεί να μετακινηθεί ο Κώστας, ώστε να απέχει από τη θάλασσα όσο και ο Δημήτρης.

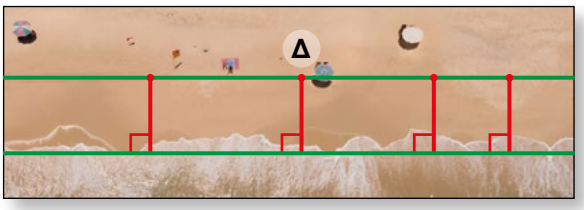


Απάντηση

α) Η κόκκινη διαδρομή του Δημήτρη, δηλαδή η κάθετη στην ακτογραμμή, είναι συντομότερη από κάθε άλλη (κίτρινη στο σχήμα).



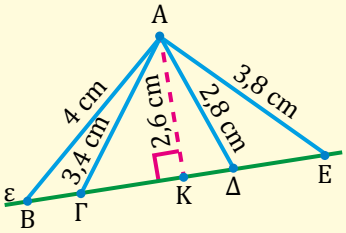
β) Αν ενώσουμε τα σημεία της παραλίας που απέχουν από τη θάλασσα όσο ο Δημήτρης, βλέπουμε ότι ανήκουν σε ευθεία παράλληλη στην ακτογραμμή, που στο σχήμα είναι η πράσινη γραμμή. Ο Κώστας θα πρέπει να μετακινηθεί σε οποιοδήποτε σημείο της γραμμής αυτής, ώστε να απέχει από τη θάλασσα όσο ο Δημήτρης.



Γενικότερα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι:

Το κάθετο τμήμα από ένα σημείο προς μία ευθεία είναι μικρότερο από κάθε άλλο «πλάγιο» τμήμα που συνδέει το σημείο με την ευθεία.

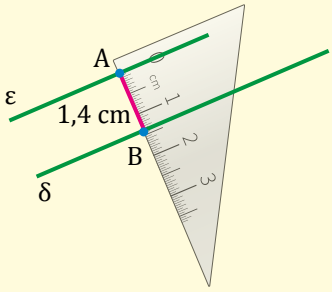
Το μήκος αυτού του κάθετου τμήματος το ονομάζουμε **απόσταση του σημείου από την ευθεία**.



Στίβος κωπηλασίας

Απόσταση δύο παράλληλων ευθειών ονομάζουμε το μήκος κάθε ευθύγραμμου τμήματος που έχει τα άκρα του στις παράλληλες και είναι κάθετο σε αυτές.

Δηλαδή απόσταση δύο παράλληλων ευθειών λέμε την απόσταση που έχει κάποιο σημείο της μίας ευθείας από την άλλη.



Βρίσκω αποστάσεις στο GeoGebra

Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε

Να κατασκευάσετε έναν πίνακα έννοιας για τις παράλληλες ευθείες.

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ).

α) Δύο τεμνόμενες ευθείες μπορεί να είναι κάθετες στην ίδια ευθεία.

β) Δύο παράλληλες ευθείες μπορεί να έχουν κοινά σημεία.

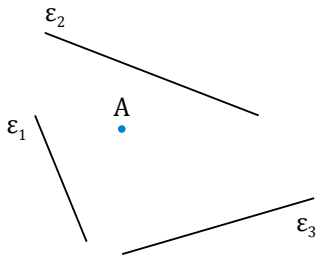
γ) Δύο ευθείες του επιπέδου που δεν έχουν κοινό σημείο είναι παράλληλες.

2. Να συζητήσετε με τους συμμαθητές και τις συμμαθήτριές σας ποιους δρόμους της περιοχής του σχολείου σας θεωρείτε τεμνόμενους και ποιους παράλληλους.

3. Στην επόμενη εικόνα να αναγνωρίσετε τρεις τουλάχιστον περιπτώσεις κάθετων και τρεις τουλάχιστον περιπτώσεις παράλληλων μεταξύ τους γραμμών. Βρείτε γραμμές που να μην είναι ούτε παράλληλες ούτε κάθετες μεταξύ τους.

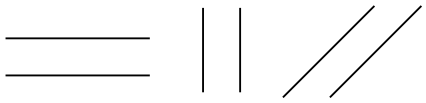


4. Να βρείτε τις αποστάσεις του σημείου Α από τις ευθείες $ε_1$, $ε_2$ και $ε_3$.



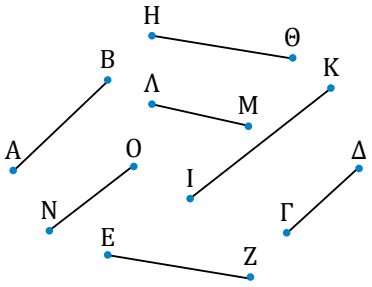
Αποστάσεις σημείου από πλευρές τριγώνου

5. Να βρείτε την απόσταση των παράλληλων ευθειών στις παρακάτω περιπτώσεις.



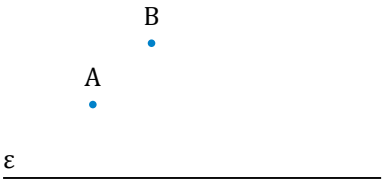
Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

6. Στο παρακάτω σχήμα να εκτιμήσετε ποια ευθύγραμμα τμήματα είναι παράλληλα μεταξύ τους. Επιβεβαιώστε την εκτίμησή σας με χρήση κατάλληλων γεωμετρικών οργάνων.

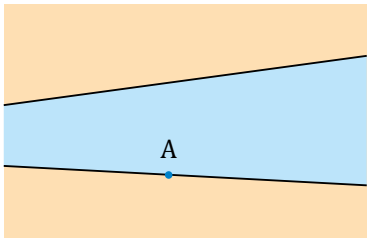


7. Να σχεδιάσετε τρεις παράλληλες μεταξύ τους ευθείες $ε_1$, $ε_2$ και $ε_3$, έτσι ώστε η απόσταση της $ε_1$ από την $ε_2$ να είναι 3 cm και της $ε_2$ από την $ε_3$ να είναι 2 cm. Πόση είναι η απόσταση της $ε_1$ από την $ε_3$; Διερευνήστε όλες τις δυνατές περιπτώσεις.

8. Από τα σημεία Α και Β να σχεδιάσετε ευθείες παράλληλες με την ευθεία ε. Ελέγξτε αν οι ευθείες που σχεδιάσατε είναι παράλληλες μεταξύ τους.



9. Ένας βαρκάρης βρίσκεται στη θέση Α. Σε ποιο σημείο της απέναντι ακτής πρέπει να πάει, ώστε να κάνει την ελάχιστη διαδρομή;



Η ελάχιστη διαδρομή του βαρκάρη

Το κοντινότερο σημείο της απέναντι όχθης

10. Η οδός Δωδεκανήσου είναι ένας δρόμος με αρκετά τροχαία και θύματα πεζούς. Ο δήμος αποφάσισε να κατασκευαστεί σε όλο το μήκος του δρόμου ένα παρτέρι με φυτά που να εμποδίζει τους περαστικούς να διασχίζουν τον δρόμο σε άλλα σημεία εκτός από τα φανάρια με διαβάσεις πεζών. Ποιος θα ήταν ο πιο «δίκαιος» τρόπος κατασκευής, ώστε και οι δύο αντίθετες λωρίδες αυτοκινήτων να έχουν το ίδιο πλάτος; Σχεδιάστε τη θέση του.



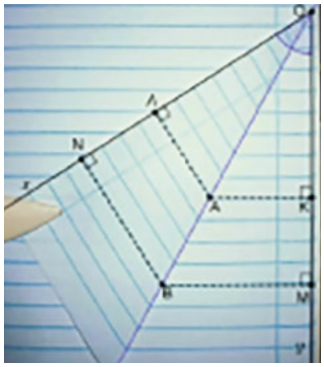
7.12 Χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων της διχοτόμου

Δ1. Η διπλωμένη σελίδα

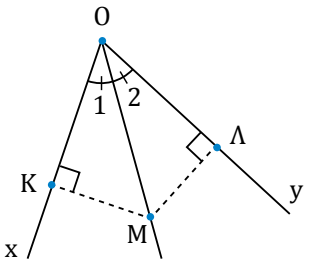
Μια σελίδα από το τετράδιο της Φανής κατά λάθος διπλώθηκε όπως φαίνεται στη διπλανή φωτογραφία. Αυτή ήταν η αφορμή για να κάνει η Φανή μια σπουδαία ανακάλυψη για τα σημεία της διχοτόμου της γωνίας $x\hat{O}y$ που σχηματίζουν οι δύο πλευρές των σελίδων, της διπλωμένης και της επόμενης.

α) Να εξηγήσετε γιατί η δίπλωση (γαλάζια γραμμή) είναι η διχοτόμος της γωνίας $x\hat{O}y$.

β) Ποια πιστεύετε ότι είναι η ανακάλυψη της Φανής για τα σημεία της διχοτόμου της γωνίας, όπως τα σημεία Α και Β;

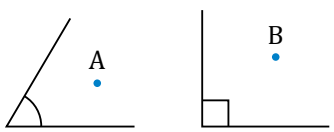


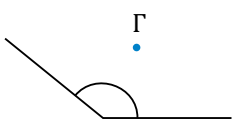
Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

λεκτικά…	…και με σχήμα
Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας **ισαπέχει** από τις πλευρές της γωνίας. • Αν $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$, τότε ΜΚ = ΜΛ. Αν ένα σημείο βρίσκεται στο εσωτερικό μιας γωνίας και ισαπέχει από τις πλευρές της, τότε αυτό ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας. • Αν ΜΚ = ΜΛ, τότε $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$. Σημεία στη διχοτόμο γωνίας	

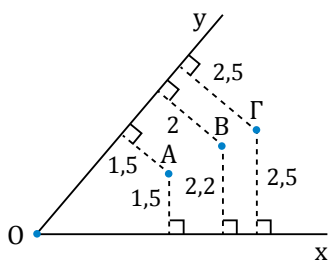
Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Σε καθένα από τα τρία σχήματα να σχεδιάσετε τις αποστάσεις του σημείου από τις πλευρές της γωνίας.

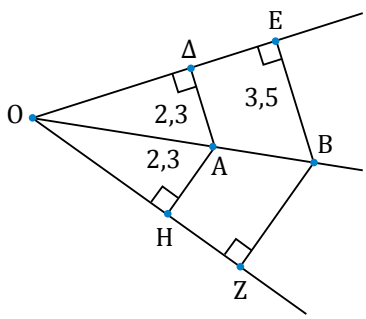




2. Ποια από τα σημεία Α, Β και Γ του διπλανού σχήματος είναι σημεία της διχοτόμου της $x\hat{O}y$;

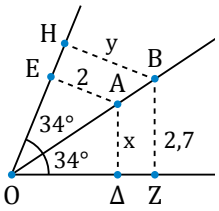


3. Να δικαιολογήσετε γιατί η ΟΒ είναι διχοτόμος της παρακάτω γωνίας. Πόσο είναι το μήκος του τμήματος ΒΖ;

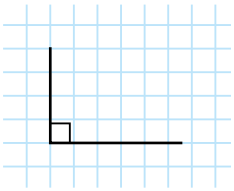


Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

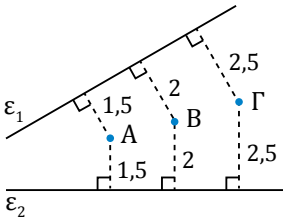
4. Να υπολογίσετε τα μήκη x και y στο διπλανό σχήμα.



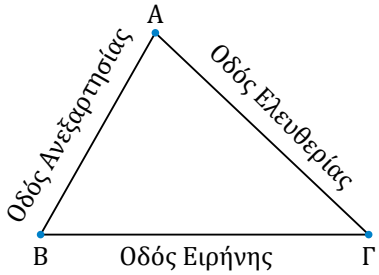
5. Να σχεδιάσετε τη διχοτόμο της ορθής γωνίας στο τετραγωνικό πλέγμα χωρίς να μετρήσετε με το μοιρογνωμόνιο. Πώς σκεφτήκατε;



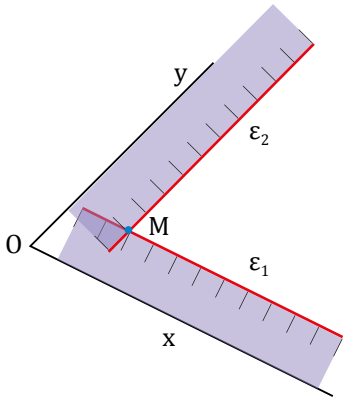
6. Να εξηγήσετε γιατί τα σημεία Α, Β και Γ του παρακάτω σχήματος είναι συνευθειακά.



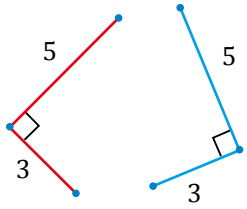
7. Το τριγωνικό οικόπεδο της οικογένειας Παπαδοπούλου περιβάλλεται από τις οδούς Ανεξαρτησίας, Ελευθερίας και Ειρήνης. Η οικογένεια αποφάσισε να χτίσει ένα σπίτι στο οικόπεδο και ζήτησε από τον μηχανικό να τοποθετηθεί σε ένα σημείο του οικοπέδου που να έχει ίσες αποστάσεις από τις τρεις οδούς. Ποιο νομίζετε ότι πρέπει να είναι το σημείο αυτό και γιατί;



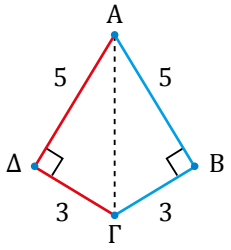
8. Η Μαρία βρέθηκε στη δυσάρεστη θέση να πρέπει να σχεδιάσει τη διχοτόμο της γωνίας $x\hat{O}y$ έχοντας μαζί της μόνο τον χάρακά της. Σκέφτηκε λοιπόν να τον τοποθετήσει κατά μήκος κάθε πλευράς της γωνίας και να σχεδιάσει διαδοχικά τις ευθείες ε_1 και ε_2 (κόκκινες στο σχήμα). Πιστεύει ότι το σημείο τομής τους Μ είναι σημείο της διχοτόμου της γωνίας, οπότε η ΟΜ είναι η διχοτόμος. Είναι όμως σωστή η ιδέα της; Μπορείτε να την υποστηρίξετε ή να την απορρίψετε με επιχειρήματα;



9. Σχεδιάσαμε τις δύο τεθλασμένες γραμμές που φαίνονται στο σχήμα 1 σε ξεχωριστά διαφανή χαρτιά και έπειτα ενώσαμε τα άκρα τους όπως φαίνεται στο σχήμα 2, ώστε να σχηματιστεί το τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Τι συμπέρασμα βγάζουμε για τη διαγώνιό του ΑΓ;



Σχήμα 1



Σχήμα 2

7.13 Γωνίες από παράλληλες και τέμνουσα

Δ1. Σταυροδρόμια

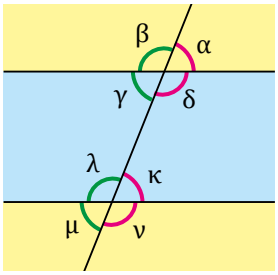
Οι οδοί Θήρας και Γραβιάς είναι παράλληλες και η οδός Βύρωνος τις τέμνει.
Σημειώστε πάνω στο σχήμα τις γωνίες που σχηματίζονται και μετρήστε τες.
Διατυπώστε τα συμπεράσματα στα οποία καταλήξατε στην ομάδα σας και συζητήστε τα στην τάξη.



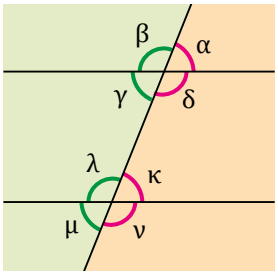
Συζητάμε

…για δύο παράλληλες ευθείες που τέμνονται από μία τρίτη ευθεία

Όταν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από μία τρίτη ευθεία (τέμνουσα), δημιουργούνται οκτώ γωνίες. Στον παραπάνω χάρτη, οι τέσσερις από αυτές είναι στη διασταύρωση Βύρωνος και Θήρας και οι άλλες τέσσερις στη διασταύρωση Βύρωνος και Γραβιάς. Επιλέγοντας μία γωνία από τη μία διασταύρωση και μία γωνία από την άλλη διασταύρωση, διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:



- Αν οι γωνίες βρίσκονται ανάμεσα στις οδούς Θήρας και Γραβιάς, τις ονομάζουμε «**εντός**» (γαλάζιο μέρος: $\hat{\gamma}, \hat{\delta}, \hat{\lambda}, \hat{\kappa}$). Όλες τις υπόλοιπες τις λέμε «**εκτός**» (κίτρινο μέρος: $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\mu}, \hat{\nu}$).



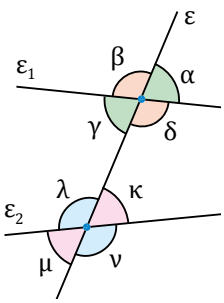
- Αν οι δύο γωνίες βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της οδού Βύρωνος, τις ονομάζουμε «**επί τα αυτά**» (π.χ. δύο γωνίες που βρίσκονται στο πράσινο ημιεπίπεδο). Αν οι δύο γωνίες βρίσκονται σε διαφορετικές μεριές σε σχέση με την οδό Βύρωνος, τότε λέμε ότι είναι «**εναλλάξ**» (π.χ. μια γωνία στο πράσινο και μια στο πορτοκαλί ημιεπίπεδο).

Επιλέγοντας ένα ζευγάρι γωνιών (μία από κάθε διασταύρωση), μπορούμε να έχουμε συνδυασμούς από τις παραπάνω περιπτώσεις. Οι πιο χρήσιμοι είναι οι εξής:

- **Εντός εναλλάξ:** οι γωνίες $\hat{\gamma}$ και $\hat{\kappa}$, οι $\hat{\delta}$ και $\hat{\lambda}$.
- **Εντός και επί τα αυτά:** οι γωνίες $\hat{\delta}$ και $\hat{\kappa}$, οι $\hat{\gamma}$ και $\hat{\lambda}$.
- **Εντός εκτός και επί τα αυτά:** οι γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\kappa}$, οι $\hat{\delta}$ και $\hat{\nu}$, οι $\hat{\beta}$ και $\hat{\lambda}$, οι $\hat{\gamma}$ και $\hat{\mu}$.

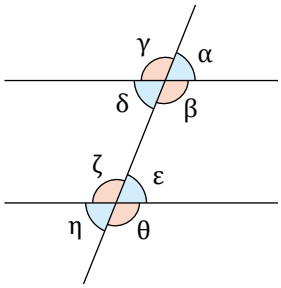
Μετρώντας διαπιστώνουμε ότι οι γωνίες αυτές είναι είτε ίσες μεταξύ τους είτε παραπληρωματικές.

Τις ίδιες ονομασίες μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ακόμα και όταν οι ευθείες δεν είναι παράλληλες, όπως στο διπλανό σχήμα. Για παράδειγμα, οι γωνίες $\hat{\gamma}$ και $\hat{\kappa}$ είναι εντός εναλλάξ, ενώ οι γωνίες $\hat{\delta}$ και $\hat{\nu}$ είναι εντός εκτός και επί τα αυτά.



Το 5ο αίτημα του Ευκλείδη

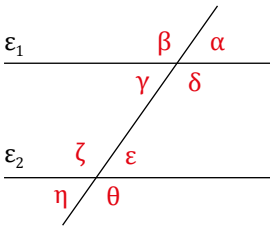
Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

λεκτικά…	…και με σχήμα
Οι γωνίες που σχηματίζονται όταν δύο **παράλληλες** ευθείες τέμνονται από μία τρίτη είναι είτε ίσες είτε παραπληρωματικές μεταξύ τους. Συγκεκριμένα: • Οι **εντός εναλλάξ** είναι **ίσες μεταξύ τους**, π.χ. $\hat{\zeta} = \hat{\beta}$ ως εντός (και οι δύο) εναλλάξ. • Οι **εντός εκτός και επί τα αυτά** είναι **ίσες μεταξύ τους**, π.χ. $\hat{\varepsilon} = \hat{\alpha}$ ως εντός (η $\hat{\varepsilon}$) εκτός (η $\hat{\alpha}$) και επί τα αυτά, • οι **εντός και επί τα αυτά γωνίες** είναι **παραπληρωματικές**, π.χ. $\hat{\beta} + \hat{\varepsilon} = 180°$ ως εντός (και οι δύο) και επί τα αυτά.	

Τηλεκατευθυνόμενο

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. **Στο διπλανό σχήμα η γωνία $\hat{\beta}$ είναι $120°$ και οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες.**



α) Να γράψετε τα ζεύγη γωνιών του σχήματος που είναι μεταξύ τους: i) εντός εναλλάξ, ii) εντός εκτός και επί τα αυτά.

β) Να βρείτε τις άλλες τρεις γωνίες που είναι $120°$. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

γ) Ποιο είναι το μέτρο των υπόλοιπων γωνιών;

Απάντηση

α) i) Εντός εναλλάξ είναι η $\hat{\varepsilon}$ με τη $\hat{\gamma}$ και η $\hat{\delta}$ με τη $\hat{\zeta}$.

ii) Εντός εκτός και επί τα αυτά είναι η $\hat{\varepsilon}$ με την $\hat{\alpha}$, η $\hat{\zeta}$ με τη $\hat{\beta}$, η $\hat{\gamma}$ με την $\hat{\eta}$ και η $\hat{\delta}$ με τη $\hat{\theta}$.

β) Ίσες με $120°$ είναι:

η γωνία $\hat{\zeta}$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά με τη $\hat{\beta}$,

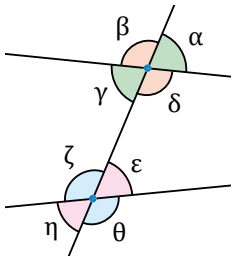
η γωνία $\hat{\delta}$ ως κατακορυφήν με τη $\hat{\beta}$ ή ως εντός εναλλάξ με τη $\hat{\zeta}$ και

η γωνία $\hat{\theta}$ ως κατακορυφήν με τη $\hat{\zeta}$ ή ως εντός εκτός και επί τα αυτά με τη $\hat{\delta}$.

γ) Οι υπόλοιπες γωνίες $\hat{\alpha}$, $\hat{\gamma}$, $\hat{\varepsilon}$ και $\hat{\eta}$ είναι $60°$ ως παραπληρωματικές των γωνιών του ερωτήματος (β).

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

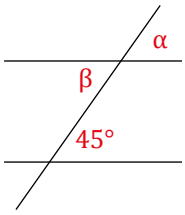
1. Να αντιστοιχίσετε καθένα από τα ζεύγη των γωνιών της στήλης Α του διπλανού σχήματος με έναν από τους χαρακτηρισμούς της στήλης Β.



Στήλη Α	Στήλη Β
1. $\hat{\delta}$, $\hat{\varepsilon}$	α. εντός εκτός και επί τα αυτά
2. $\hat{\alpha}$, $\hat{\eta}$	β. εντός εναλλάξ
3. $\hat{\gamma}$, $\hat{\eta}$	γ. εντός και επί τα αυτά
4. $\hat{\gamma}$, $\hat{\varepsilon}$	δ. εκτός και επί τα αυτά
5. $\hat{\beta}$, $\hat{\eta}$	ε. εκτός εναλλάξ

1	2	3	4	5

2. Να βρείτε το μέτρο των γωνιών $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ που σχηματίζονται από δύο παράλληλες και μία τέμνουσα στο διπλανό σχήμα.

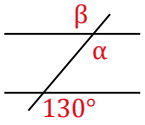


Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

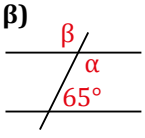
3. Να σχεδιάσετε μία γωνία $x\hat{O}y$ και ένα σημείο Α πάνω στην ημιευθεία Ox. Από το Α να φέρετε ημιευθεία Αδ//Oy (στο ίδιο μέρος του επιπέδου με την Oy). Να συγκρίνετε τις γωνίες $x\hat{O}y$ και $\delta\hat{A}O$.

4. Να βρείτε το μέτρο των γωνιών $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ που σχηματίζονται από δύο παράλληλες ευθείες και μία τέμνουσα στις παρακάτω περιπτώσεις. Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

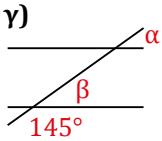
α)



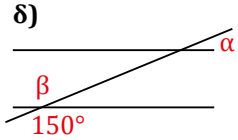
β)



γ)

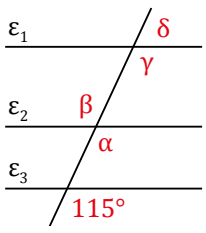


δ)

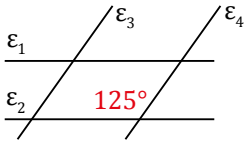



Γωνίες από παράλληλες και τέμνουσα

5. Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες ε_1, ε_2 και ε_3 είναι παράλληλες μεταξύ τους. Να βρείτε τα μέτρα των γωνιών $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$ και $\hat{\delta}$.



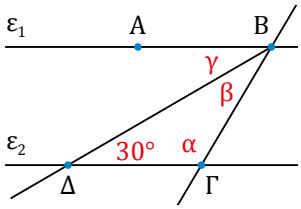
6. Στο παρακάτω σχήμα η ευθεία ε_1 είναι παράλληλη με την ε_2 και η ε_3 με την ε_4. Να βρείτε το μέτρο των υπόλοιπων γωνιών του σχήματος.




Φτιάχνω γωνίες με παράλληλες πλευρές

7. Πόσο πρέπει να είναι το μέτρο των γωνιών που σχηματίζονται από δύο παράλληλες ευθείες και μία τέμνουσα, ώστε να είναι όλες ίσες μεταξύ τους;

8. Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες μεταξύ τους και η ημιευθεία ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{B}\Gamma$. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ και $\hat{\gamma}$.




Διχοτόμοι εντός και επί τα αυτά γωνιών

7.14 Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου

Δ1. Το σημείο συνάντησης

Η Άννα, η Ελένη και η Γεωργία θέλουν να συναντηθούν στην κυκλική οδό Άπω Ανατολής, όμως διαφωνούν για το ακριβές σημείο συνάντησης. Η Άννα προτείνει να βρεθούν «Λευκωσίας και Άπω Ανατολής», η Ελένη «Ήβης και Άπω Ανατολής» και η Γεωργία «Καβάλας και Άπω Ανατολής».

Συζητήστε τις προτάσεις τους και διατυπώστε ένα συμπέρασμα για το πιο σαφές σημείο συνάντησης.

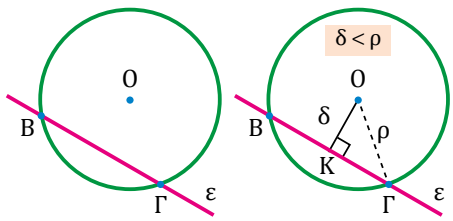
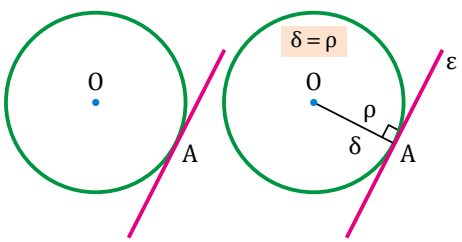
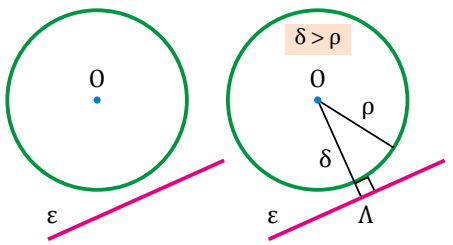


Συζητάμε

…για τη θέση μιας ευθείας σε σχέση με έναν κύκλο

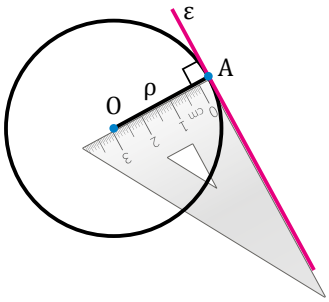
Στο παραπάνω σχήμα λέμε ότι η Λευκωσίας **τέμνει** την Άπω Ανατολής, η Ήβης **εφάπτεται** σε αυτήν, ενώ η Καβάλας είναι **εξωτερική** της.

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

λεκτικά…	…και με σχήμα
Όταν μια ευθεία και ένας κύκλος έχουν δύο κοινά σημεία, τότε λέμε ότι η ευθεία **τέμνει** τον κύκλο ή ότι είναι **τέμνουσα** του κύκλου. Τα κοινά τους σημεία Β και Γ τα ονομάζουμε **σημεία τομής**. Η απόσταση δ του κέντρου του κύκλου από την τέμνουσα ε είναι μικρότερη από την ακτίνα ρ.	
Όταν μια ευθεία και ένας κύκλος έχουν ένα κοινό σημείο, τότε λέμε ότι η ευθεία **εφάπτεται** στον κύκλο ή ότι είναι **εφαπτομένη** του κύκλου. Το κοινό τους σημείο Α το ονομάζουμε **σημείο επαφής**. Η απόσταση δ του κέντρου του κύκλου από την εφαπτομένη ε είναι ίση με την ακτίνα ρ. Άρα η εφαπτομένη σε ένα σημείο του κύκλου είναι **κάθετη στην ακτίνα στο σημείο αυτό**.	
Όταν μια ευθεία και ένας κύκλος δεν έχουν κοινό σημείο, τότε λέμε ότι η ευθεία είναι **εξωτερική** του κύκλου. Η απόσταση δ του κέντρου του κύκλου από την ε είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα. Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου	

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. **Να σχεδιάσετε έναν κύκλο (Ο, ρ) και ένα σημείο του Α. Κατασκευάστε την εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Α.**



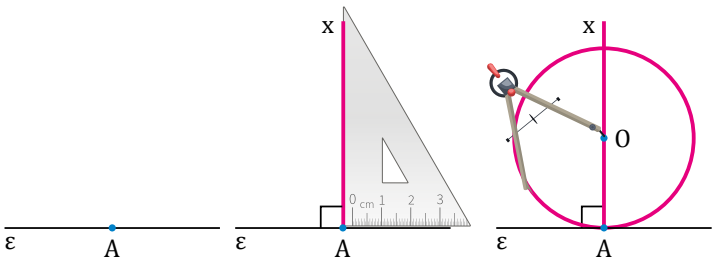
Απάντηση

Όπως μάθαμε, η εφαπτομένη σε ένα σημείο του κύκλου είναι κάθετη στην ακτίνα. Άρα σχεδιάζουμε την ακτίνα ΟΑ και φέρνουμε κάθετη στο άκρο της Α.

2. **Να σχεδιάσετε μια ευθεία ε και ένα σημείο της Α. Κατασκευάστε κύκλο που εφάπτεται με την ε στο σημείο Α.**

Απάντηση

Κατασκευάζουμε την ημιευθεία Αx κάθετη στην ε στο σημείο Α. Το Α θα είναι το άκρο της ακτίνας και το κέντρο του κύκλου μπορεί να είναι οποιοδήποτε σημείο Ο της Αx. Με κέντρο Ο και ακτίνα ΟΑ γράφουμε κύκλο. Ο κύκλος (Ο, ΟΑ) εφάπτεται της ε στο σημείο Α.



Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Οι κυκλικές γειτονιές στην πόλη Brøndby της Δανίας φτιάχτηκαν με στόχο την τόνωση των σχέσεων μεταξύ των κατοίκων, αλλά και της σχέσης των ανθρώπων με τη φύση. Γύρω γύρω στους ίσους κύκλους βρίσκονται τα σπίτια, που είναι όλα ίδια μεταξύ τους, και στη μέση βρίσκεται το πάρκινγκ των αυτοκινήτων. Σχεδιάστε πάνω στην εικόνα κομμάτια δρόμων, μονοπατιών ή πεζοδρομίων, ώστε:

α) να εφάπτονται σε έναν από τους κύκλους,

β) να τέμνουν έναν από τους κύκλους,

γ) να μην έχουν κοινά σημεία με έναν από τους κύκλους.

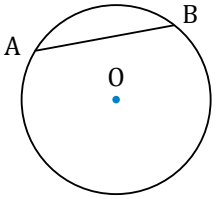


Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

2. Στον κύκλο της διπλανής εικόνας να κατασκευάσετε μια ευθεία ε παράλληλη με την ΑΒ, έτσι ώστε:

α) η ε να είναι εφαπτομένη του κύκλου,

β) η ε να είναι εξωτερική του κύκλου.

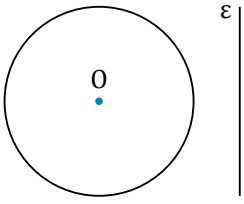


Ευθεία παράλληλη με χορδή κύκλου

3. Στον κύκλο της διπλανής εικόνας να κατασκευάσετε μια ευθεία παράλληλη με την ε, ώστε να είναι:

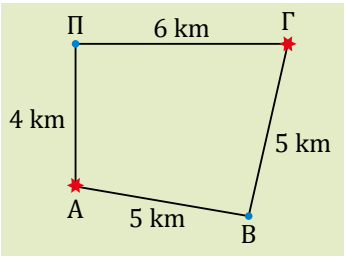
α) εφαπτομένη του κύκλου,

β) τέμνουσα του κύκλου.



7.15 Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος

Δ1. Οι πυροσβεστικοί σταθμοί



Στον χάρτη ενός δάσους σημειώθηκαν οι θέσεις των πυροσβεστικών σταθμών Α και Γ, του γερο-πλάτανου Π, του ψηλού βράχου Β, καθώς και οι μεταξύ τους αποστάσεις.

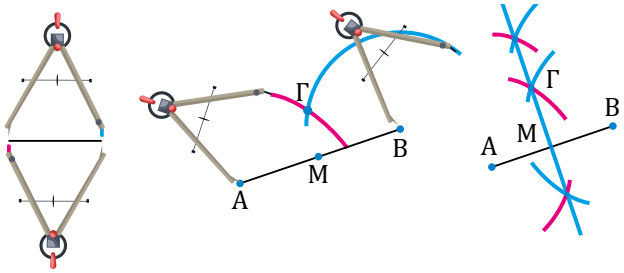
α) Άραγε, ποιος από τους δύο πυροσβεστικούς σταθμούς θα εξυπηρετούσε πιο άμεσα τον γερο-πλάτανο; Να εξηγήσετε τη σκέψη σας.

β) Η Πολιτική Προστασία ανέθεσε σε μηχανικό να σχεδιάσει στον χάρτη ένα σύνορο που να χωρίζει το δάσος σε δύο περιοχές ελέγχου των πυροσβεστικών σταθμών, με βάση την ιδέα ότι κάθε περιοχή ελέγχεται από τον πιο κοντινό σταθμό. Πώς θα σχεδιάζατε εσείς το σύνορο; Συζητήστε στην τάξη τις προτάσεις σας.

Συζητάμε

…για σημεία που απέχουν εξίσου από τα άκρα ενός τμήματος

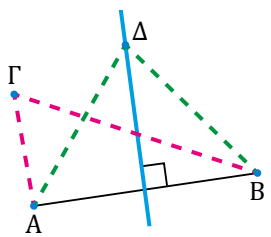
Ας πάρουμε δύο σημεία Α και Β. Για να εντοπίσουμε ένα σημείο που **ισαπέχει** από αυτά (διαφορετικό από το μέσο του ΑΒ), εργαζόμαστε ως εξής:



1. Με κέντρα τα σημεία Α και Β σχεδιάζουμε στο ίδιο ημιεπίπεδο τόξα ίσων κύκλων (με ίσες ακτίνες).
2. Το σημείο Γ, στο οποίο τέμνονται τα τόξα, ισαπέχει από τα Α και Β, αφού ΓΑ = ΓΒ.

Εντοπίζοντας πολλά τέτοια σημεία, διαπιστώνουμε ότι όλα βρίσκονται σε ευθεία κάθετη στο τμήμα ΑΒ που διέρχεται από το μέσο του. Η ευθεία αυτή είναι η **μεσοκάθετος** του ΑΒ.

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

λεκτικά…	…και με σχήμα
Η **μεσοκάθετος** ενός τμήματος είναι μια ευθεία: • κάθετη στο τμήμα, • που διέρχεται από το μέσο του τμήματος. Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός τμήματος **ισαπέχει** από τα άκρα του τμήματος (στο σχήμα ΔΑ = ΔΒ). Αν κάποιο σημείο ισαπέχει από τα άκρα του τμήματος, τότε είναι σημείο της μεσοκαθέτου του τμήματος.	

Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος

Ένα σημείο που δεν ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος (όπως το Γ στο σχήμα) δεν ισαπέχει από τα άκρα του τμήματος:

ΓΑ ≠ ΓΒ

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

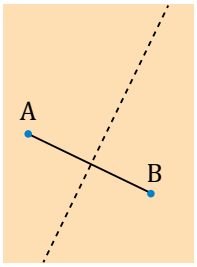
1. **Να κατασκευάσετε τη μεσοκάθετο ενός ευθύγραμμου τμήματος.**

Απάντηση

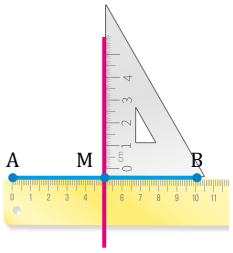
Υπάρχουν τρεις τρόποι:

α) Διπλώνουμε το χαρτί έτσι ώστε το μισό τμήμα να πέσει πάνω στο άλλο μισό. Η τσάκιση είναι η μεσοκάθετος του τμήματος.

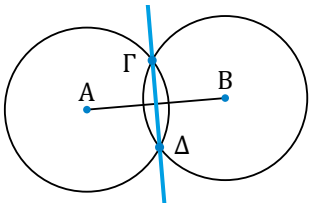
Μεσοκάθετος με δίπλωση



β) Βρίσκουμε το μέσο Μ του τμήματος μετρώντας. Φέρνουμε την κάθετη στο τμήμα που διέρχεται από το Μ. Αυτή είναι η μεσοκάθετος.

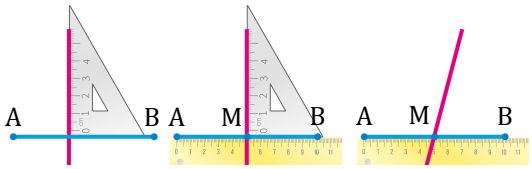


γ) Με κέντρα τα άκρα του τμήματος κατασκευάζουμε δύο **ίσους** κύκλους, αρκετά μεγάλους ώστε να τέμνονται. Η μεσοκάθετος διέρχεται από τα σημεία τομής των κύκλων.



Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Σε ποιο από τα τρία σχήματα ο μαθητής σχεδίασε τη μεσοκάθετο του ΑΒ; Τι λάθη έγιναν στις άλλες δύο κατασκευές;

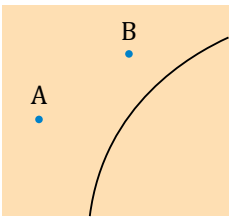


2. Αν το σημείο Σ ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος ΔΕ, τότε ισχύει ότι ΣΔ ..... ΣΕ.

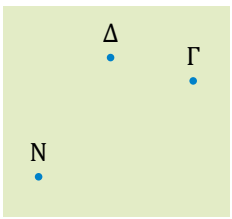
Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

3. Να αποτυπώσετε με κάποιο κυκλικό αντικείμενο έναν κύκλο και να σχεδιάσετε με γεωμετρικά όργανα μία διάμετρό του. (Υπόδειξη: Σχεδιάστε τη μεσοκάθετο ενός τμήματος. Ποιου;)

4. Οι κάτοικοι των χωριών Α και Β στον διπλανό χάρτη συμφώνησαν να κατασκευάσουν έναν σταθμό για το υπεραστικό λεωφορείο επάνω στον επαρχιακό δρόμο (μαύρη καμπύλη), σε σημείο που να απέχει εξίσου από τα δύο χωριά. Να προσδιορίσετε τη θέση του σταθμού στον χάρτη. Αιτιολογήστε την επιλογή σας.



5. Οι θείοι σας μετακόμισαν σε καινούρια πόλη και αναζητούν σπίτι. Θα επιθυμούσαν το νέο τους σπίτι να βρίσκεται σε ίσες αποστάσεις από τα σχολεία των παιδιών, το Νηπιαγωγείο, το Δημοτικό και το Γυμνάσιο (σημεία Ν, Δ και Γ στον χάρτη). Βοηθήστε τους υποδεικνύοντας την κατάλληλη θέση. Έπειτα γράψτε τους μήνυμα εξηγώντας πώς σκεφτήκατε τη λύση σας.



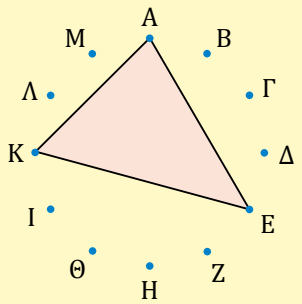
7.16 Είδη τριγώνων και στοιχεία τους

Δ1. Η πρόκληση με τις κουκκίδες

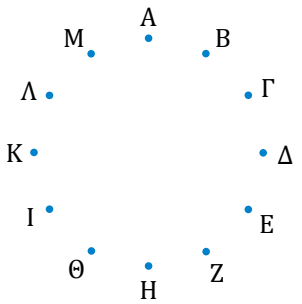
Οι κουκκίδες είναι 12 σε κυκλική διάταξη (όπως σε ένα ρολόι) και σας προκαλούν σε 5 + 1 γρίφους (ο ένας λυμένος).

Ενώστε τρεις κουκκίδες, για να κατασκευάσετε ένα τρίγωνο με...

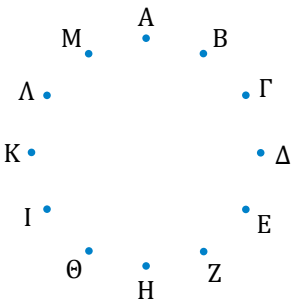
άνισες πλευρές και τρεις οξείες γωνίες



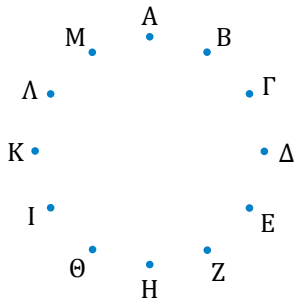
άνισες πλευρές και μία ορθή γωνία



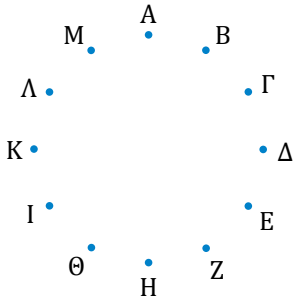
άνισες πλευρές και μία αμβλεία γωνία



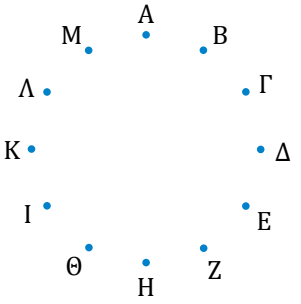
δύο ή τρεις ίσες πλευρές και οξείες γωνίες



δύο ίσες πλευρές και μία ορθή γωνία



δύο ίσες πλευρές και μία αμβλεία γωνία



Να συγκρίνετε τα τρίγωνα που σχεδιάσατε με τα τρίγωνα των συμμαθητών και των συμμαθητριών σας.

Κυκλικός γεωπίνακας

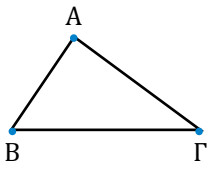
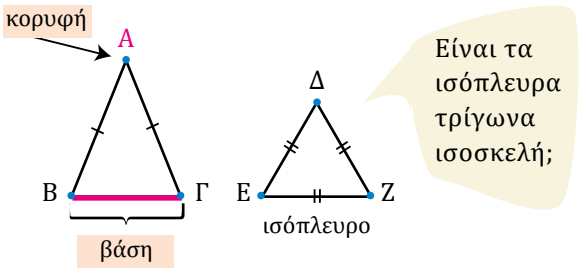
Συζητάμε

...για κοινά χαρακτηριστικά των τριγώνων

Τα τρίγωνα εμφανίζουν μεγάλη ποικιλία ως προς τις πλευρές και τις γωνίες τους. Μπορεί να έχουν ίσες πλευρές ή να έχουν όλες τις πλευρές τους άνισες, να έχουν κάποια ορθή ή αμβλεία γωνία ή να έχουν μόνο οξείες γωνίες.

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

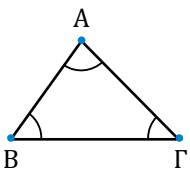
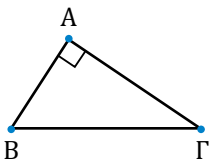
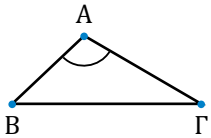
Ας παρατηρήσουμε τα τρίγωνα, ως προς τις πλευρές, σε κάθε γραμμή της «πρόκλησης».

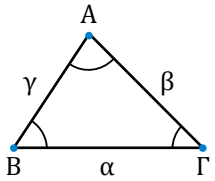
λεκτικά…	…και με σχήμα
Στην πρώτη γραμμή όλα τα τρίγωνα έχουν άνισες πλευρές – τα ονομάζουμε **σκαληνά**.	
Στη δεύτερη γραμμή όλα τα τρίγωνα έχουν δύο ίσες πλευρές – τα ονομάζουμε **ισοσκελή**. **Ισόπλευρα** λέμε τα τρίγωνα που έχουν τρεις ίσες πλευρές. **Κορυφή του ισοσκελούς τριγώνου** ονομάζουμε την κορυφή όπου ενώνονται οι δύο ίσες πλευρές. Η **βάση του ισοσκελούς τριγώνου** είναι η πλευρά απέναντι από την κορυφή.	

Σύμφωνα με τους Πυθαγόρειους, **το ισόπλευρο τρίγωνο** λόγω της ισότητας – τιμιότητας των πλευρών και γωνιών του συμβόλιζε την εικόνα της πρώτης ψυχής πριν μετεμψυχωθεί.

Πηγή: [20]

Τώρα ας παρατηρήσουμε τα τρίγωνα, ως προς τις γωνίες, σε κάθε στήλη της «πρόκλησης».

λεκτικά…	…και με σχήμα
Στην πρώτη στήλη τα τρίγωνα έχουν και τις τρεις γωνίες οξείες – τα ονομάζουμε **οξυγώνια**.	
Στη δεύτερη στήλη τα τρίγωνα έχουν μία ορθή γωνία – τα ονομάζουμε **ορθογώνια**. Τις πλευρές που σχηματίζουν την ορθή γωνία τις λέμε **κάθετες πλευρές** του ορθογωνίου, ενώ την πλευρά που βρίσκεται απέναντι από την ορθή γωνία την ονομάζουμε **υποτείνουσα**.	 Κάθετες πλευρές: ΑΒ, ΑΓ Υποτείνουσα: ΒΓ
Στην τρίτη στήλη τα τρίγωνα έχουν μία αμβλεία γωνία – τα ονομάζουμε **αμβλυγώνια**.	

λεκτικά…	…και με σχήμα
Οι πλευρές και οι γωνίες ενός τριγώνου ονομάζονται **κύρια στοιχεία** του τριγώνου. Έτσι το τρίγωνο ΑΒΓ έχει τρεις γωνίες, τις $\hat{A}$, $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$, και τρεις πλευρές, τις ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ. Τις πλευρές τις συμβολίζουμε και με μικρό γράμμα, το ίδιο με το γράμμα της απέναντι κορυφής, π.χ. ΒΓ = α.	

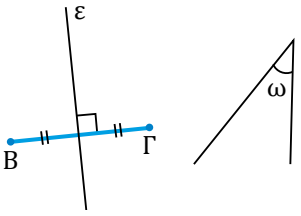
Τα **δευτερεύοντα στοιχεία** ενός τριγώνου είναι οι **διάμεσοι,** οι **διχοτόμοι** και τα **ύψη** του τριγώνου. Από κάθε κορυφή του ξεκινά μία διάμεσος, μία διχοτόμος και ένα ύψος και καταλήγει σε ένα σημείο στην απέναντι πλευρά (ή στην ευθεία που βρίσκεται η απέναντι πλευρά). Η διαδικασία κατασκευής περιγράφεται στην εφαρμογή 1.

Τα δευτερεύοντα στοιχεία του τριγώνου

Δ2. Κατασκευή ισοσκελών τριγώνων με δοσμένα στοιχεία

Αν σας δινόταν ένα τμήμα ΒΓ και η μεσοκάθετός του ε, πώς θα μπορούσατε να κατασκευάσετε ένα ισοσκελές τρίγωνο με βάση το ΒΓ; Να εξηγήσετε την ιδέα σας.

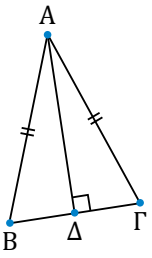
Αν σας δίναμε μια γωνία $\hat{\omega}$, πώς θα μπορούσατε να κατασκευάσετε ένα ισοσκελές τρίγωνο με γωνία κορυφής την ω και ίσες πλευρές 3 cm; Να εξηγήσετε την ιδέα σας.



Κατασκευή ισοσκελούς τριγώνου

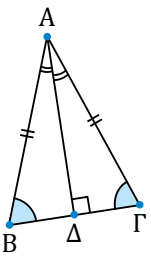
Δ3. Ανακαλύπτουμε τις ιδιότητες του ισοσκελούς τριγώνου

Σχεδιάστε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και το ύψος ΑΔ που αντιστοιχεί στη βάση του. Διπλώστε το χαρτί κατά μήκος του ύψους ΑΔ. Ποια τμήματα συμπίπτουν μεταξύ τους; Ποιες γωνίες συμπίπτουν μεταξύ τους;

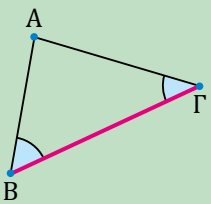


Διπλώνω το ισοσκελές τρίγωνο και παρατηρώ

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

λεκτικά…	…και με σχήμα
Το ύψος που αντιστοιχεί στη βάση ισοσκελούς τριγώνου είναι: • ύψος, • διάμεσος, • διχοτόμος (για τη γωνία της κορυφής), • μεσοκάθετος της βάσης. Στο ισοσκελές τρίγωνο, οι προσκείμενες γωνίες στη βάση του είναι ίσες.	

Οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$, που έχουν κοινή πλευρά τη ΒΓ, μπορούν να αναφερθούν ως **προσκείμενες γωνίες στην πλευρά ΒΓ**.

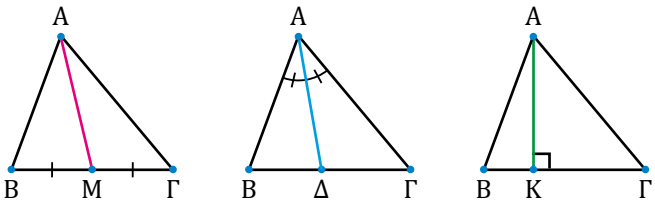


Ο πρώτος που απέδειξε ότι οι προσκείμενες γωνίες στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες ήταν ο **Θαλής**, ο οποίος γεννήθηκε το 640 ή το 624 π.Χ. στη Μίλητο, την πιο ανεπτυγμένη πόλη των παραλίων της Ιωνίας. Ο Θαλής ο Μιλήσιος θεωρείται ο πατέρας της μαθηματικής απόδειξης!

Θαλής ο Μιλήσιος

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. **Να περιγράψετε πώς κατασκευάσαμε τη διάμεσο ΑΜ, τη διχοτόμο ΑΔ και το ύψος ΑΚ του τριγώνου ΑΒΓ στα διπλανά σχήματα.**



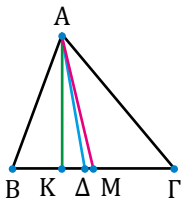
Απάντηση

Για τη διάμεσο, ενώνουμε με ευθύγραμμο τμήμα την κορυφή Α και το μέσο Μ της απέναντι πλευράς ΒΓ.

Για τη διχοτόμο, βρίσκουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\widehat{A}$, η οποία διέρχεται από το σημείο Δ της απέναντι πλευράς ΒΓ. Το τμήμα ΑΔ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$ του τριγώνου.

Για το ύψος, φέρνουμε το κάθετο τμήμα από την κορυφή Α προς την ευθεία της απέναντι πλευράς ΒΓ.

Και τα τρία τμήματα στην ίδια εικόνα:



Υπάρχει τρίγωνο στο οποίο το ύψος, η διχοτόμος και η διάμεσος που ξεκινούν από την ίδια κορυφή του να ταυτίζονται;

Οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου

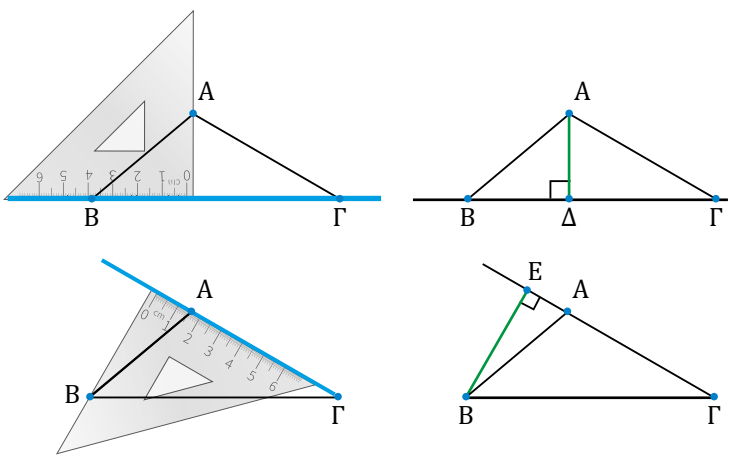
Φέρνω το ύψος τριγώνου

2. **Να κατασκευάσετε τα ύψη ΑΔ και ΒΕ ενός τριγώνου ΑΒΓ που η γωνία $\widehat{A}$ είναι αμβλεία.**

Απάντηση

Για να κατασκευάσουμε τα ύψη ενός τριγώνου, θα πρέπει να φέρουμε από την κορυφή τμήμα κάθετο προς την ευθεία της απέναντι πλευράς. Για τον σκοπό αυτό θα πρέπει να εξασκηθούμε, ώστε να βλέπουμε μόνο την κορυφή του τριγώνου και την ευθεία της απέναντι πλευράς (μπλε στα σχήματα δίπλα).

Για να φέρουμε το κάθετο τμήμα, θα πρέπει αρχικά να εφαρμόσουμε τη μία κάθετη πλευρά του γνώμονα στην ευθεία. Έπειτα θα πρέπει να σύρουμε τον γνώμονα, ώστε η άλλη κάθετη πλευρά του να περάσει από την κορυφή του τριγώνου.

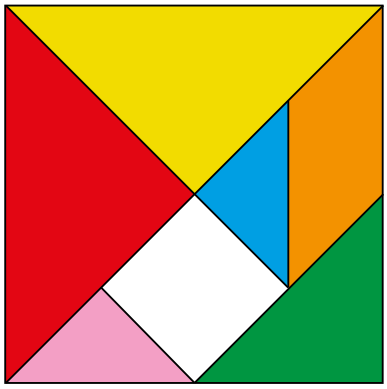


Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε

Να κατασκευάσετε από έναν πίνακα έννοιας για καθένα από τα παρακάτω:
ισοσκελές τρίγωνο, ορθογώνιο τρίγωνο, διάμεσος τριγώνου, διχοτόμος τριγώνου.

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Χρησιμοποιήστε γεωμετρικά όργανα για να επαληθεύσετε ότι τα τρίγωνα που εμφανίζονται στο παιχνίδι tangram είναι όλα ισοσκελή ορθογώνια. Προσπαθήστε έπειτα να κατασκευάσετε το δικό σας tangram με χαρτόνι.



2. Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο σε ρυζόχαρτο και να κατασκευάσετε τις διχοτόμους του με δίπλωση. Τι παρατηρείτε;

3. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ).

α) Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο, το ύψος που αντιστοιχεί στη βάση είναι διάμεσος και διχοτόμος.

β) Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο, η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος.

γ) Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο, η διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση του είναι διχοτόμος και ύψος.

δ) Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο, οι διάμεσοι είναι και ύψη.

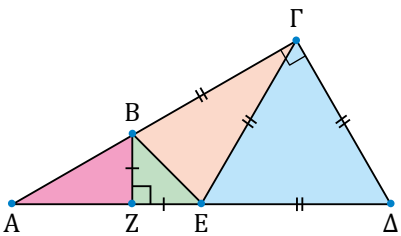
ε) Σε ένα ισόπλευρο τρίγωνο, κάθε ύψος του είναι και διάμεσος και διχοτόμος.

στ) Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο, οι κάθετες πλευρές του είναι και ύψη του.

Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

4. Παρακάτω φαίνεται μια αλυσίδα από τρίγωνα: τα χρωματιστά ΑΒΖ, ΒΕΖ, ΒΓΕ, ΓΔΕ και η «σύνθεσή» τους, που είναι το (ορθογώνιο) τρίγωνο ΑΓΔ. Υπάρχουν επίσης δύο «κρυμμένα» τρίγωνα, τα ΑΒΕ και ΑΓΕ. Να ταξινομήσετε και τα επτά τρίγωνα ως προς τις πλευρές και τις γωνίες τους. Αν σε κάποιο τρίγωνο δε δηλώνονται τα στοιχεία του, θα πρέπει να υπολογίσετε/εκτιμήσετε το είδος των γωνιών του και να συγκρίνετε τις πλευρές του (π.χ. με επιθέσεις ή μετρήσεις).

Αλυσίδα από τρίγωνα



5. Να σχεδιάσετε τμήμα ΑΒ και τους κύκλους (Α, ΑΒ), (Β, ΑΒ). Στη συνέχεια ονομάστε Γ και Δ τα σημεία τομής των δύο κύκλων (κοινά σημεία) και εξηγήστε γιατί τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ είναι ισόπλευρα.

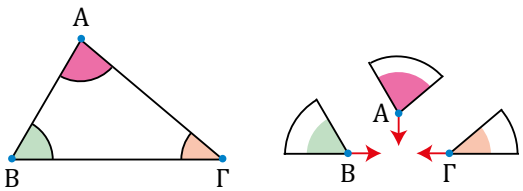
6. Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο και τις τρεις διαμέσους του. Τι παρατηρείτε;

7. Να προτείνετε τουλάχιστον έναν τρόπο για να σχεδιάσουμε ισοσκελές τρίγωνο με ίσες πλευρές 4 cm και βάση 3 cm. Για παράδειγμα: α) να κατασκευάσετε πρώτα μία από τις δύο ίσες πλευρές του ή β) να κατασκευάσετε πρώτα τη βάση του.

7.17 Άθροισμα γωνιών τριγώνου

Δ1. Πειραματισμός με τις γωνίες ενός τριγώνου

- Σχεδιάστε ένα τυχαίο τρίγωνο.
- Χρωματίστε με διαφορετικό χρώμα τις τρεις γωνίες του.
- Κόψτε τις γωνίες και τοποθετήστε τες έτσι ώστε να γίνουν διαδοχικές.



Τι παρατηρείτε; Επαναλάβετε το πείραμά σας και με άλλα τρίγωνα, οξυγώνια, ορθογώνια ή αμβλυγώνια. Μπορείτε να διατυπώσετε μια γενική εικασία; Συζητήστε την πρότασή σας στην τάξη.

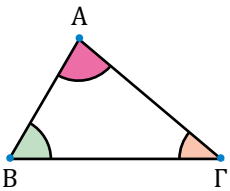
Συζητάμε

…για το άθροισμα γωνιών ενός τριγώνου

Οι κομμένες γωνίες του τριγώνου, όταν γίνονται διαδοχικές, σχηματίζουν μια μεγαλύτερη γωνία, το άθροισμά τους. Είναι πολύ ενδιαφέρον ότι αυτό το άθροισμα είναι πάντα μια ευθεία γωνία, δηλαδή 180°.

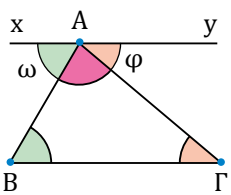
Διπλώνοντας ένα τρίγωνο

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

λεκτικά…	…και με σχήμα
Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι πάντα 180°. Μετρώντας τις γωνίες του τριγώνου	 $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180°$

Γιατί σε ένα τρίγωνο δε γίνεται να έχουμε: δύο ορθές γωνίες ή δύο αμβλείες γωνίες ή μία ορθή και μία αμβλεία γωνία;

Είναι απαραίτητο να κόψουμε τις γωνίες, για να δούμε ποιο είναι το άθροισμά τους; Παρατηρήστε στο διπλανό σχήμα μια άλλη ιδέα: Φέραμε μια ευθεία που διέρχεται από το Α και είναι παράλληλη στη ΒΓ.



Σκεφτείτε τα εξής:

1. Γιατί $\hat{\omega}=\hat{B}$ και $\hat{\varphi}=\hat{\Gamma}$;
2. Πώς από το σχήμα καταλαβαίνουμε ότι $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180°$;

Ποιο από τα δύο θα μπορούσε να θεωρηθεί απόδειξη, το πείραμα με τις κομμένες γωνίες στη Δ1 ή η διπλανή ιδέα μαζί με τις απαντήσεις στα ερωτήματα;

Άθροισμα γωνιών τριγώνου

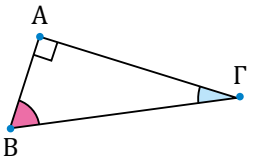
Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. **Να αποδείξετε ότι σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο οι οξείες γωνίες είναι συμπληρωματικές.**

Απάντηση

Αν στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A} = 90°$, τότε η σχέση $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180°$ γίνεται $90° + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180°$ ή αλλιώς $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90°$.

Άρα οι οξείες γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου είναι συμπληρωματικές.



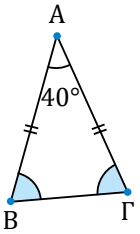
2. **Να υπολογίσετε τις γωνίες ενός ισοσκελούς τριγώνου, αν η γωνία κορυφής του είναι 40°.**

Απάντηση

Εφόσον το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου είναι 180°, οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ θα έχουν άθροισμα $180° - 40° = 140°$.

Οι $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ είναι οι προσκείμενες γωνίες στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου, άρα θα είναι ίσες, δηλαδή η καθεμία θα είναι 70°.

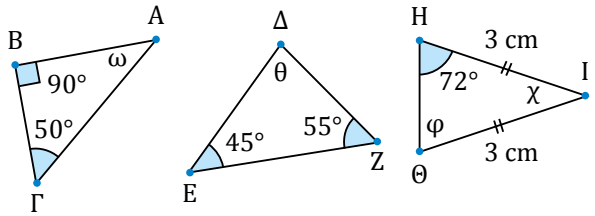
Επομένως οι γωνίες του ισοσκελούς τριγώνου είναι $\hat{A} = 40°$, $\hat{B} = 70°$ και $\hat{\Gamma} = 70°$.



Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Η Ελένη είπε ότι σχεδίασε ένα τρίγωνο που τα μέτρα των τριών γωνιών του ήταν 65°, 35° και 77°. Αληθεύει ο ισχυρισμός της; Εξηγήστε τη σκέψη σας.

2. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\omega}$, $\hat{\theta}$, $\hat{\varphi}$ και $\hat{\chi}$ στα παρακάτω τρίγωνα.



Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

3. Να εξηγήσετε γιατί οι γωνίες ενός ισόπλευρου τριγώνου είναι 60° η καθεμία.

4. Να υπολογίσετε τις γωνίες ενός ισοσκελούς και ορθογώνιου τριγώνου.

5. Να σχεδιάσετε ημικύκλιο διαμέτρου ΒΓ και κέντρου Ο. Στη συνέχεια να κατασκευάσετε ακτίνα ΟΑ κάθετη στη διάμετρο ΒΓ.

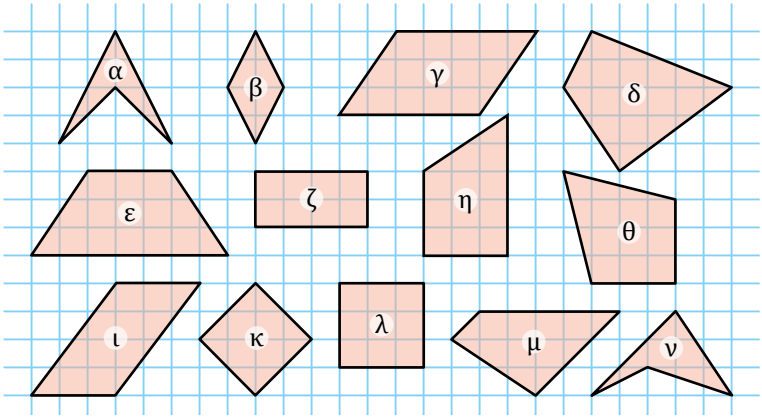
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων ΟΑΒ και ΟΑΓ.

β) Ποιο είναι το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τις γωνίες;

7.18 Τα τετράπλευρα και τα είδη τους

Δ1. Ταξινόμηση τετραπλεύρων

Α. Σε τι μοιάζουν και σε τι διαφέρουν τα διπλανά σχήματα; Επιλέξτε κάποια κριτήρια για να τα ταξινομήσετε. Συγκρίνετε την ταξινόμηση και τα κριτήρια που χρησιμοποιήσατε με εκείνα των συμμαθητών και των συμμαθητριών σας.



Β. Τι κοινό έχουν τα σχήματα β, γ, ζ, ι, κ, λ; Σε τι διαφέρουν μεταξύ τους;
Τι κοινό έχουν τα σχήματα ε, η, μ; Σε τι διαφέρουν μεταξύ τους;
Τι κοινό έχουν τα σχήματα α και θ; Σε τι διαφέρουν μεταξύ τους; Σε τι διαφέρουν από το γ;

Συζητάμε

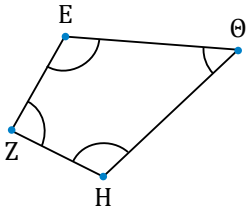
…για τετράπλευρα

Μπορούμε να ταξινομήσουμε τα τετράπλευρα με κριτήριο τις πλευρές τους ή τις γωνίες τους. Για παράδειγμα, μπορούμε να εξετάσουμε αν έχουν παράλληλες πλευρές ή όχι. Και για τα τετράπλευρα που έχουν παράλληλες πλευρές, μπορούμε να εξετάσουμε αν έχουν ένα ή δύο ζευγάρια παράλληλων πλευρών.

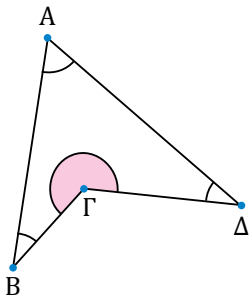
Επίσης, μπορούμε να ταξινομήσουμε τα τετράπλευρα εξετάζοντας αν έχουν ίσες πλευρές ή όχι. Μπορούμε να βρούμε τετράπλευρα με ένα ζευγάρι ίσων πλευρών, με δύο ζευγάρια ίσων πλευρών, αλλά μπορούμε να βρούμε και τετράπλευρα των οποίων όλες οι πλευρές είναι μεταξύ τους ίσες.

Ως προς τις γωνίες, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε για κριτήριο αν έχουν ίσες γωνίες, αν έχουν ορθές γωνίες, ή αν εκτός από κυρτές γωνίες υπάρχουν και μη κυρτές.

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

λεκτικά…	…και με σχήμα
Κυρτά και μη κυρτά τετράπλευρα Τα τετράπλευρα είναι πολύγωνα που έχουν τέσσερις πλευρές. Κάθε τετράπλευρο που έχει όλες τις γωνίες του μικρότερες από 180° το λέμε **κυρτό τετράπλευρο**. • Έτσι, στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι ένα κυρτό τετράπλευρο.	

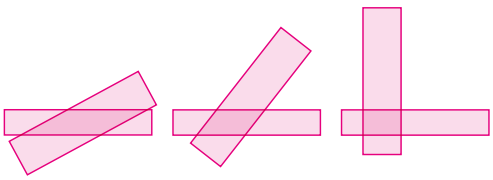
Όταν λέμε «η γωνία του τετραπλεύρου», εννοούμε πάντα την εσωτερική γωνία του τετραπλεύρου.

λεκτικά…	…και με σχήμα
Αν σε ένα τετράπλευρο υπάρχει γωνία που είναι μεγαλύτερη από 180°, το λέμε **μη κυρτό τετράπλευρο**. • Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι μη κυρτό, αφού $\hat{\Gamma} > 180°$.	

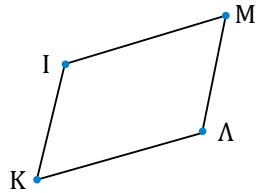
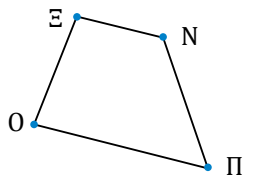
Όταν ονομάζουμε ένα πολύγωνο με τις κορυφές του, τις αναφέρουμε πάντα κυκλικά. Έτσι, το διπλανό πολύγωνο μπορούμε να το ονομάσουμε ΑΒΓΔ ή ΒΓΔΑ ή ΑΔΓΒ, αλλά όχι ΑΓΒΔ.

Δ2. Τετράπλευρα από λωρίδες διαφανούς χαρτιού

Κόψτε δύο λωρίδες διαφανούς χαρτιού (π.χ. μία λωρίδα 3 cm φαρδιά και μία άλλη 2 cm φαρδιά). Βάλτε τη μία πάνω στην άλλη, όπως στην εικόνα. Μετακινήστε τις λωρίδες έτσι ώστε το κοινό τους μέρος να είναι τετράπλευρο. Με κάθε μετακίνηση έχουμε στο κοινό τους μέρος ένα διαφορετικό τετράπλευρο. Ποιες κοινές ιδιότητες βλέπετε να έχουν όλα αυτά τα τετράπλευρα;



Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

λεκτικά…	…και με σχήμα
Παραλληλόγραμμα – Τραπέζια Αν ένα τετράπλευρο έχει δύο ζευγάρια παράλληλων πλευρών, τότε το λέμε **παραλληλόγραμμο**. • Το ΙΚΛΜ είναι παραλληλόγραμμο, διότι έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, δηλαδή ΚΛ // ΙΜ και ΚΙ // ΛΜ.	
Αν ένα τετράπλευρο έχει μόνο ένα ζευγάρι παράλληλων πλευρών, τότε το λέμε **τραπέζιο**. Τις παράλληλες πλευρές τις λέμε βάσεις του τραπεζίου. • Το τετράπλευρο ΞΟΠΝ είναι τραπέζιο, διότι ΝΞ // ΠΟ, αλλά οι ΞΟ και ΝΠ δεν είναι παράλληλες. Οι ΝΞ και ΟΠ είναι οι βάσεις του τραπεζίου.	

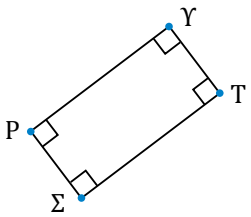
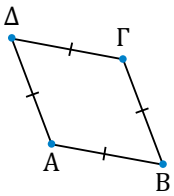
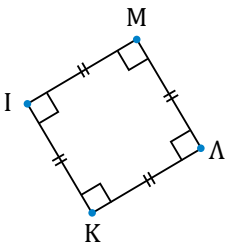
Δ3. Διακοσμητική γεωμετρία

Στο Πυργί της Χίου πολλά σπίτια είναι διακοσμημένα με χαραγμένα σχέδια που τα λένε «ξυστά». Στη φωτογραφία βλέπουμε ένα σπίτι διακοσμημένο με ξυστά γεωμετρικά σχήματα. Σχεδιάστε πάνω στη φωτογραφία τα τετράπλευρα που βλέπετε. Συζητήστε για τα είδη των τετραπλεύρων. Ποια είδη αναγνωρίζετε;



Το Πυργί και τα ξυστά

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

λεκτικά…	…και με σχήμα
Είδη παραλληλογράμμων Ένα παραλληλόγραμμο που έχει τις γωνίες του ορθές το λέμε **ορθογώνιο παραλληλόγραμμο** ή απλώς **ορθογώνιο**. • Το ΡΣΤΥ είναι ορθογώνιο, αφού έχει όλες τις γωνίες του ορθές.	
Ένα παραλληλόγραμμο που όλες οι πλευρές του είναι ίσες το λέμε **ρόμβο**. • Το σχήμα ΑΒΓΔ είναι ρόμβος, επειδή οι πλευρές του είναι ίσες, δηλαδή ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ΔΑ.	
Ένα παραλληλόγραμμο με ορθές γωνίες και ίσες όλες τις πλευρές το λέμε **τετράγωνο**. • Το ΙΚΛΜ είναι ένα τετράγωνο. Έχει τις γωνίες του ορθές και τις πλευρές του ίσες. Κατασκευή παραλληλογράμμου	

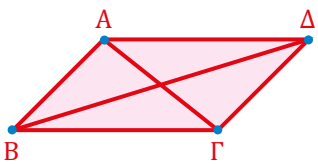
Ο Ευκλείδης στα *Στοιχεία* χωρίζει τα τετράπλευρα σε:
- **τετράγωνα**, που έχουν όλες τις πλευρές ίσες και τις γωνίες ορθές,
- **ετερομήκη** (ορθογώνια), που έχουν τις γωνίες ορθές, αλλά δεν έχουν όλες τις πλευρές ίσες,
- **ρόμβους**, που έχουν όλες τις πλευρές ίσες, αλλά δεν έχουν τις γωνίες ορθές,
- **ρομβοειδή** (παραλληλόγραμμα), που έχουν τις απέναντι πλευρές ίσες και τις απέναντι γωνίες ίσες.

Τα υπόλοιπα τετράπλευρα τα ονόμαζε τραπέζια!

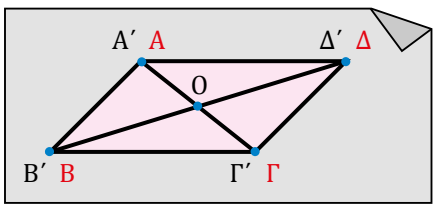
Πηγή: [19]

Δ4. Ιδιότητες παραλληλογράμμων

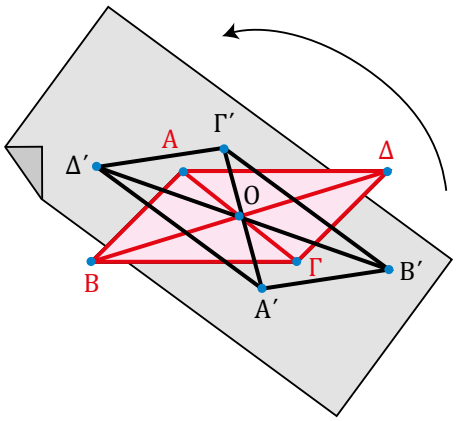
Σχεδιάστε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τις διαγωνίους του ΑΓ και ΒΔ.



Αντιγράψτε το σε διαφανές χαρτί. Κατασκευάστε έτσι το Α΄Β΄Γ΄Δ΄.
Σχεδιάστε και τις διαγωνίους του Α΄Γ΄ και Β΄Δ΄.

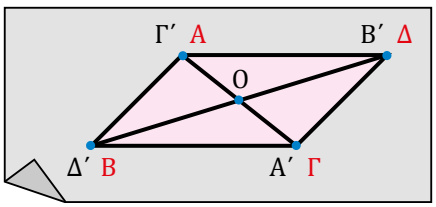


Περιστρέψτε το διαφανές χαρτί γύρω από το σημείο τομής Ο των διαγωνίων.



Τι σχέση νομίζετε πως έχουν τα μήκη των απέναντι πλευρών του αρχικού παραλληλογράμμου;
Τι μπορείτε να πείτε για τις διαγωνίους του;
Καταγράψτε στην ομάδα σας όσα συμπεράσματα μπορείτε να βγάλετε και συζητήστε τα στην τάξη.

Ολοκληρώστε τη στροφή των 180° γύρω από το σημείο Ο. Τι παρατηρείτε;



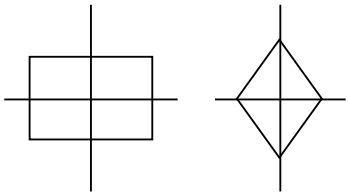
Περιστροφή παραλληλογράμμου 1

Περιστροφή παραλληλογράμμου 2

Μπορούμε να διαπιστώσουμε αν δύο τμήματα **είναι ίσα** μετρώντας τα μήκη τους. Επίσης, μπορούμε να εξετάσουμε αν δύο σχήματα είναι ίσα «μεταφέροντας» το ένα πάνω στο άλλο, με διαφανές χαρτί. Αν συμπίπτουν, τότε είναι ίσα.

Δ5. Ιδιότητες ορθογωνίων, ρόμβων, τετραγώνων

Ας χρησιμοποιήσουμε τώρα κάποιες γνώσεις μας από το Δημοτικό: Το παραλληλόγραμμο είναι ένα σχήμα με κέντρο συμμετρίας. Το ορθογώνιο και ο ρόμβος είναι σχήματα που έχουν και άξονες συμμετρίας. Χρησιμοποιήστε τους άξονες συμμετρίας του ορθογωνίου και του ρόμβου για να ανακαλύψετε κι άλλες ιδιότητες που έχουν αυτά τα δύο σχήματα.



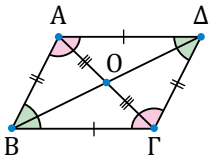
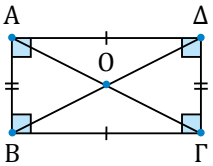
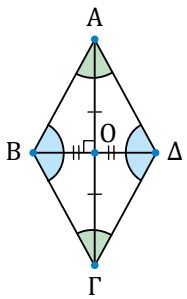
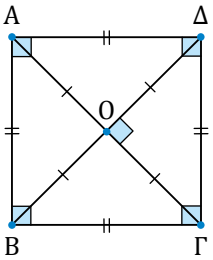
Ποιες ιδιότητες έχει το τετράγωνο; Συζητήστε στην τάξη, ώστε να συγκεντρώσετε όσο το δυνατόν περισσότερες ιδιότητες για κάθε σχήμα.

Συζητάμε

…για τρόπους διερεύνησης των ιδιοτήτων των παραλληλογράμμων

Ξέρουμε από το Δημοτικό ότι δύο σχήματα που το ένα προκύπτει από το άλλο με στροφή ή με συμμετρία ως προς άξονα είναι ίσα. Μπορούμε λοιπόν να χρησιμοποιήσουμε τις συμμετρίες των παραλληλογράμμων για να συμπεράνουμε κάποιες ιδιότητές τους. Αυτές οι ιδιότητες περιλαμβάνουν ισότητες γωνιών και ισότητες μηκών, δηλαδή ισότητες πλευρών ή/και διαγωνίων.

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

λεκτικά…	…και με σχήμα
Ιδιότητες παραλληλογράμμων Σε κάθε παραλληλόγραμμο: • οι απέναντι πλευρές είναι ίσες: $AB = \Gamma\Delta$ και $A\Delta = B\Gamma$, • οι απέναντι γωνίες είναι ίσες: $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{B} = \hat{\Delta}$ • οι διαγώνιοι διχοτομούνται (δηλαδή η καθεμιά περνά από το μέσο της άλλης): $OA = O\Gamma$ και $OB = O\Delta$. Πίνακας έννοιας παραλληλογράμμου	
Ιδιότητες ορθογωνίων Σε κάθε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο: • οι διαγώνιοι είναι ίσες: $A\Gamma = B\Delta$. Επιπλέον, εφόσον κάθε ορθογώνιο είναι παραλληλόγραμμο, θα έχει και όλες τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου.	
Ιδιότητες ρόμβων Σε κάθε ρόμβο: • οι διαγώνιοι είναι κάθετες και διχοτομούν τις γωνίες του: $A\Gamma \perp B\Delta$ και $B\hat{A}\Gamma = \Gamma\hat{A}\Delta$ κτλ. Επιπλέον, εφόσον κάθε ρόμβος είναι παραλληλόγραμμο, θα έχει και όλες τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου.	
Ιδιότητες τετραγώνων Τα τετράγωνα είναι συγχρόνως παραλληλόγραμμα, ορθογώνια και ρόμβοι. Άρα έχουν όλες τις ιδιότητες των παραλληλογράμμων, των ορθογωνίων και των ρόμβων. Για παράδειγμα, οι διαγώνιοι του τετραγώνου διχοτομούνται (αφού είναι παραλληλόγραμμο), είναι ίσες (αφού είναι ορθογώνιο), είναι κάθετες και διχοτομούν τις γωνίες του (αφού είναι ρόμβος).	

Είδη παραλληλογράμμων - Πίνακες έννοιας

Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε

Καταγράψτε διαφορές ανάμεσα στα παραλληλόγραμμα και τα τραπέζια και συζητήστε τες στην τάξη.

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

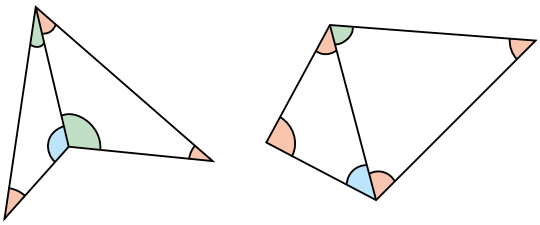
1. Ο Δημήτρης σχεδίασε ένα τετράπλευρο και μία διαγώνιό του. Ισχυρίζεται ότι με αυτό τον τρόπο μπορεί να υπολογίσει το άθροισμα όλων των γωνιών του τετραπλεύρου. Μπορείτε να εξηγήσετε πώς; Νομίζετε ότι το συμπέρασμα ισχύει μόνο σε αυτό το τετράπλευρο ή σε όλα τα τετράπλευρα, κυρτά και μη κυρτά; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.



Απάντηση

Αν σχεδιάσουμε τη διαγώνιο ενός τετραπλεύρου, σχηματίζονται δύο τρίγωνα. Οι τέσσερις γωνίες του τετραπλεύρου αποτελούνται από τις γωνίες των δύο τριγώνων. Επομένως, για να βρούμε το άθροισμα των γωνιών του τετραπλεύρου, βρίσκουμε το άθροισμα των γωνιών των δύο τριγώνων. Άρα το άθροισμα των γωνιών του τετραπλεύρου είναι $180° + 180° = 360°$.

Αυτό συμβαίνει πάντα, αφού οποιοδήποτε τετράπλευρο μπορούμε να το χωρίσουμε σε δύο τρίγωνα με μία διαγώνιό του.



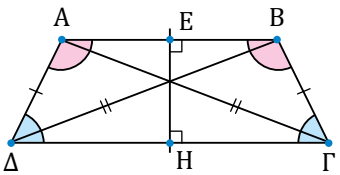
Το άθροισμα των γωνιών οποιουδήποτε τετραπλεύρου είναι $360°$.

2. Έχουμε ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ και ΓΔ. Η ευθεία που ενώνει τα μέσα των βάσεών του είναι άξονας συμμετρίας του. Τι συμπεράσματα βγαίνουν για τις πλευρές και τις γωνίες του τραπεζίου;

Απάντηση

Ονομάζουμε Ε και Η τα μέσα των δύο βάσεων του τραπεζίου. Εφόσον η ευθεία ΕΗ είναι άξονας συμμετρίας του τραπεζίου, μπορούμε να συμπεράνουμε τα εξής:

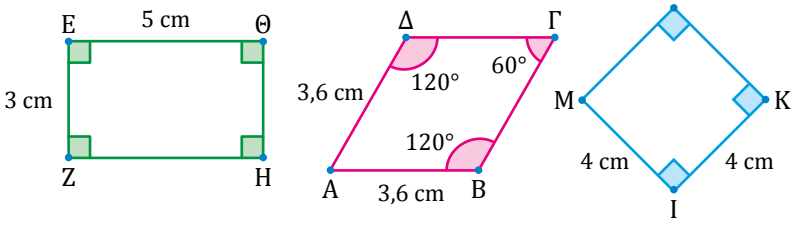
- Η ΕΗ θα είναι κάθετη στις βάσεις ΑΒ και ΓΔ (εφόσον είναι άξονας συμμετρίας των τμημάτων ΑΒ και ΓΔ).
- Οι μη παράλληλες πλευρές ΑΔ και ΒΓ είναι ίσες (εφόσον η μία είναι συμμετρική της άλλης).
- Οι γωνίες $\hat{\Gamma}$ και $\hat{\Delta}$ είναι μεταξύ τους ίσες (εφόσον η μία είναι συμμετρική της άλλης). Το ίδιο συμβαίνει και για τις $\hat{A}$ και $\hat{B}$.



Ένα τραπέζιο με αυτά τα χαρακτηριστικά το λέμε ισοσκελές τραπέζιο.

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται τρία παραλληλόγραμμα. Κάποιες πληροφορίες είναι σημειωμένες για τις πλευρές και τις γωνίες τους. Να βρείτε το είδος των παραλληλογράμμων και τις υπόλοιπες πλευρές και γωνίες τους.

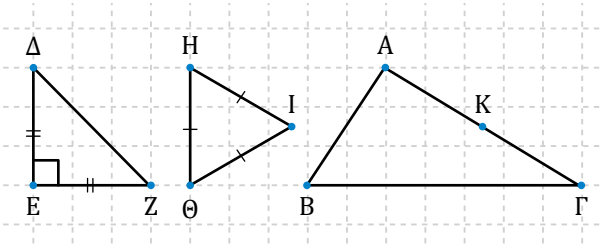


2. Παρακάτω φαίνονται τρία τρίγωνα. Να μεταφέρετε καθένα από αυτά σε τετραγωνισμένο χαρτί.

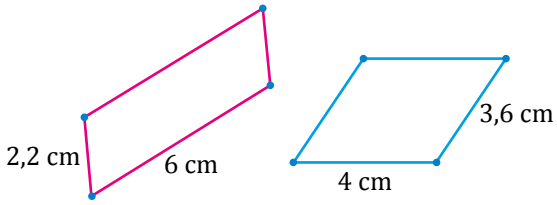
α) Να βρείτε το συμμετρικό του ΕΔΖ με άξονα συμμετρίας τη ΔΖ. Τι είδους τετράπλευρο σχηματίζεται από τα δύο τρίγωνα;

β) Να βρείτε το συμμετρικό του ΗΘΙ με άξονα συμμετρίας την ΗΙ. Τι είδους τετράπλευρο σχηματίζεται από τα δύο τρίγωνα;

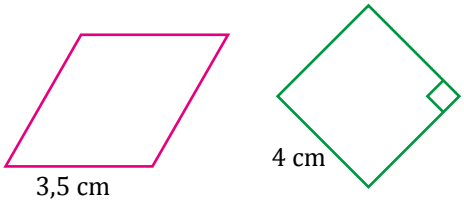
γ) Το Κ είναι το μέσο της ΑΓ. Να βρείτε το συμμετρικό του ΑΒΓ με κέντρο συμμετρίας το Κ (δηλαδή να στρέψετε το ΑΒΓ κατά 180° γύρω από το Κ). Τι είδους τετράπλευρο σχηματίζεται από τα δύο τρίγωνα;



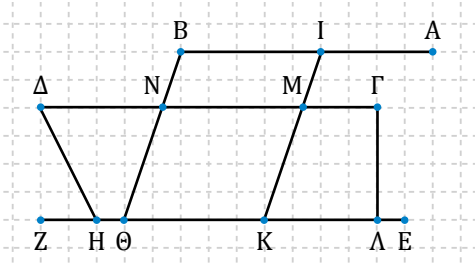
3. Να βρείτε την περίμετρο των παρακάτω παραλληλογράμμων.



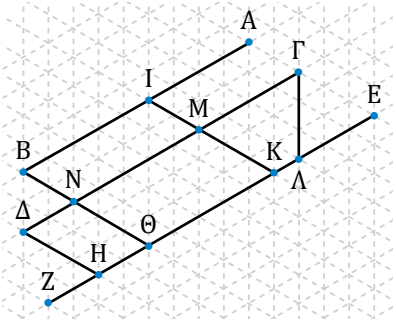
4. Να βρείτε την περίμετρο των παρακάτω ρόμβων.



5. Στο τετραγωνισμένο χαρτί έχουμε σχεδιάσει κάποια ευθύγραμμα τμήματα. Να εντοπίσετε και να καταγράψετε όσο περισσότερα τετράπλευρα μπορείτε, σημειώνοντας και το είδος τους. Συγκρίνετε αυτά που βρήκατε με εκείνα που βρήκαν οι συμμαθητές και οι συμμαθήτριές σας.



6. Το παρακάτω πλέγμα είναι φτιαγμένο από μικρά ισόπλευρα τρίγωνα. Σε αυτό έχουν σχεδιαστεί κάποια ευθύγραμμα τμήματα. Να εντοπίσετε και να καταγράψετε όσο περισσότερα τετράπλευρα μπορείτε, σημειώνοντας και το είδος τους. Συγκρίνετε αυτά που βρήκατε με εκείνα που βρήκαν οι συμμαθητές και οι συμμαθήτριές σας.



Τρίλιζα στα παραλληλόγραμμα

Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

7. Να σχεδιάσετε τα παρακάτω σχήματα:

α) ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AB = 5$ cm, $AΔ = 3$ cm και $\hat{A} = 60°$,

β) ένα παραλληλόγραμμο ΕΖΗΘ με $EZ = 4$ cm, $ZH = 3{,}5$ cm και $\hat{Z} = 130°$,

γ) ένα ορθογώνιο με μία πλευρά 4 cm και την άλλη 3 cm,

δ) ένα τετράγωνο με πλευρά 2,5 cm,

ε) έναν ρόμβο με μία πλευρά 3 cm και μία γωνία 60°.

8. Να σχεδιάσετε ένα παραλληλόγραμμο που να μην είναι ορθογώνιο, ούτε ρόμβος. Σχεδιάστε και τη μία διαγώνιό του. Έχετε σχεδιάσει έτσι δύο τρίγωνα. Είναι μεταξύ τους ίσα; Σχεδιάστε και την άλλη διαγώνιο. Τώρα έχετε σχεδιάσει τέσσερα μικρότερα τρίγωνα. Είναι μεταξύ τους ίσα; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας. Εξετάστε τα ίδια ερωτήματα, αν το αρχικό παραλληλόγραμμο είναι:

α) ορθογώνιο, **β)** ρόμβος,

γ) τετράγωνο.

Τρίγωνα μέσα στο παραλληλόγραμμο

9. Πρόκειται να σχεδιάσουμε ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ στο οποίο το μήκος να είναι διπλάσιο από το πλάτος. Επιπλέον, θέλουμε η περίμετρός του να είναι 27 cm.

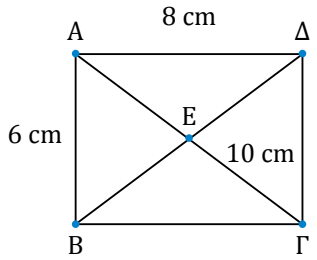
α) Κατασκευάστε μια εξίσωση που να περιγράφει το πρόβλημα.

β) Βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου.

10. Να σχεδιάσετε ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ. Με διάμετρο τη διαγώνιό του ΑΓ σχεδιάστε έναν κύκλο. Θα περνάει αυτός ο κύκλος από τα σημεία Β και Δ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

11. Να σχεδιάσετε δύο ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΒΔ τα οποία να τέμνονται σε ένα σημείο Μ. Ενώστε τα άκρα τους και σχηματίστε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Πώς πρέπει να σχεδιάσετε τα αρχικά τμήματα ΑΓ και ΒΔ, ώστε το ΑΒΓΔ να είναι παραλληλόγραμμο;

12. Ο Μιχάλης σχεδίασε ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ και μέτρησε μερικά ευθύγραμμα τμήματα. Βρήκε ότι $AB = 6$ cm, $AΔ = 8$ cm και $AΓ = 10$ cm. Ο Άρμπεν λέει ότι δε χρειάζεται άλλη μέτρηση. Αυτές του αρκούν για να υπολογίσει την περίμετρο του ορθογωνίου και τις περιμέτρους όλων των τριγώνων που σχηματίζονται. Μπορείτε να εξηγήσετε πώς μπορεί να γίνει αυτό; Πόσο είναι οι περίμετροι αυτές;



13. Ένα οποιοδήποτε τετράγωνο είναι πάντα ρόμβος; Ένας τυχαίος ρόμβος είναι πάντα τετράγωνο; Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

14. Αν ένα τετράπλευρο έχει κάθετες διαγωνίους, τότε είναι ρόμβος. Συμφωνείτε ή διαφωνείτε; Αν συμφωνείτε, εξηγήστε γιατί. Αν διαφωνείτε, δώστε ένα αντιπαράδειγμα.

Κάθετες διαγώνιοι

Παντογράφος 2

Ανακεφαλαίωση

Γεωμετρία του επιπέδου – Μέτρηση

Ερωτήσεις – ασκήσεις – προβλήματα

1. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) και να συζητήσετε στην τάξη την αιτιολόγηση των επιλογών σας.

α) Κάθε διάμετρος είναι χορδή του κύκλου.

β) Κάθε χορδή του κύκλου είναι διάμετρος.

γ) Η συντομότερη διαδρομή ανάμεσα σε δύο σημεία Α και Β ενός κύκλου είναι η χορδή ΑΒ.

δ) Δύο σημεία ενός κύκλου ορίζουν ένα μοναδικό τόξο.

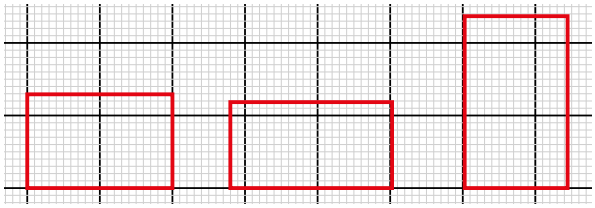
ε) Αν ένα σημείο απέχει από το κέντρο του κύκλου απόσταση μικρότερη από την ακτίνα του, τότε το σημείο αυτό είναι εξωτερικό του κύκλου.

στ) Η διάμετρος ενός κύκλου είναι η μεγαλύτερη χορδή του.

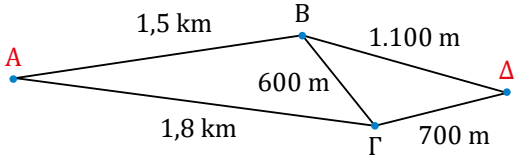
ζ) Σε κάθε τόξο με άκρα Α και Β αντιστοιχεί μία μοναδική χορδή.

η) Σε κάθε χορδή ΑΒ αντιστοιχεί ένα μοναδικό τόξο.

2. Ποιο από τα παρακάτω ορθογώνια έχει τη μεγαλύτερη και ποιο τη μικρότερη περίμετρο;



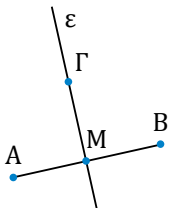
3. Ποια είναι η συντομότερη διαδρομή από την πόλη Α στην πόλη Δ;



4. Σε ένα τετραγωνισμένο (millimetre) χαρτί να σχεδιάσετε δύο διαφορετικά ορθογώνια με περίμετρο 1,18 dm.

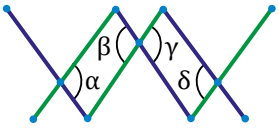
5. Ένας σχεδιαστής επίπλων θέλει να σχεδιάσει ένα τραπέζι στο οποίο να χωράνε να καθίσουν 10 άτομα. Αν για κάθε άτομο χρειάζονται 85 cm, πόσα μέτρα πρέπει να είναι η περίμετρος του τραπεζιού;

6. Στο διπλανό σχήμα η ευθεία ε είναι η μεσοκάθετος του τμήματος ΑΒ. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

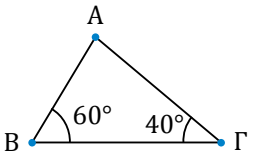


Ζεύγος σχημάτων	Σχέση μεταξύ τους	Αιτιολογία
ΜΑ, ΜΒ		
$\Gamma\hat{M}A$, $\Gamma\hat{M}B$		
ΓΑ, ΓΒ		
$\Gamma\hat{A}M$, $\Gamma\hat{B}M$		
$A\hat{\Gamma}M$, $B\hat{\Gamma}M$		

7. Στο διπλανό σχήμα όλα τα πράσινα τμήματα είναι παράλληλα και όλα τα μπλε τμήματα είναι παράλληλα. Αν η γωνία $\hat{\alpha}$ είναι 110°, να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\delta}$.



8. Στο διπλανό σχήμα αναζητάμε τρία «κρυμμένα» σημεία που το καθένα μαζί με τις κορυφές Α, Β και Γ του τριγώνου ΑΒΓ να σχηματίζει ένα παραλληλόγραμμο.



α) Να εντοπίσετε αυτά τα «κρυμμένα σημεία» και να τα ονομάσετε Δ, Ε και Ζ.

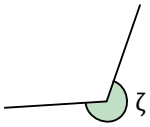
β) Να εντοπίσετε στο σχήμα γωνίες που είναι διαδοχικές με κάποια από τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ και να τις υπολογίσετε.

γ) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΔΕΖ.

9. Να σχεδιάσετε δύο ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΒΔ τα οποία να έχουν κοινό μέσο το σημείο Μ. Ενώστε τα άκρα τους και σχηματίστε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Μπορείτε να δικαιολογήσετε γιατί το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο; Πώς πρέπει να σχεδιάσετε τα ΑΓ και ΒΔ, ώστε το ΑΒΓΔ να είναι ορθογώνιο; Πώς για να είναι ρόμβος; Πώς για να είναι τετράγωνο;

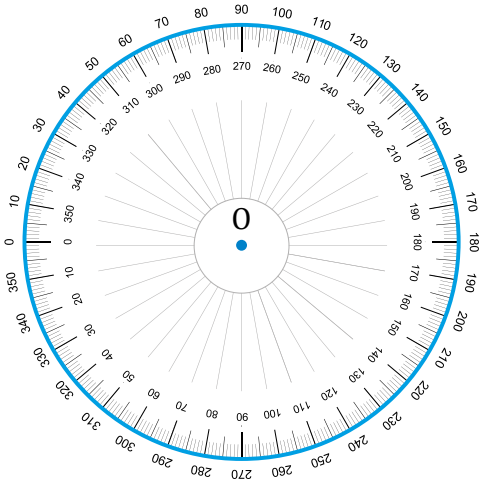
Συνδέσεις και επεκτάσεις

10. **α)** Η γωνία $\hat{\zeta}$ που βλέπετε στο διπλανό σχήμα είναι μη κυρτή. Περιγράψτε δύο τρόπους με τους οποίους μπορείτε να τη μετρήσετε και στη συνέχεια μετρήστε τη.



β) Σχεδιάστε μια γωνία $\hat{\varphi} = 300°$.

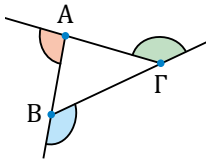
11. Πάνω στον παρακάτω κύκλο να σχεδιάσετε δύο τόξα $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ με το ίδιο μέτρο (για παράδειγμα, 40°). Κατασκευάστε τις χορδές ΑΒ και ΓΔ και μετρήστε τες. Τι συμπέρασμα βγάζετε για το μέτρο τους; Μπορείτε να διατυπώσετε ένα γενικότερο συμπέρασμα;



12. Να σχεδιάσετε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με μήκος 4,5 cm. Πάνω στην ευθεία ΑΒ βρείτε ένα σημείο Γ τέτοιο ώστε ΒΓ = 30 mm και η απόστασή του από το Β να είναι μεγαλύτερη από την απόστασή του από το Α. Πόσο είναι το μήκος του τμήματος ΑΓ;

13. Σε ένα τρίγωνο, μία γωνία που είναι διαδοχική και παραπληρωματική με γωνία ενός τριγώνου λέγεται εξωτερική γωνία του τριγώνου.

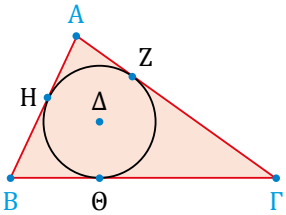
Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε τρεις εξωτερικές γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ που δηλώνονται ως $\hat{A}_{\varepsilon\xi}$, $\hat{B}_{\varepsilon\xi}$ και $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}$. Ποιο είναι το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών $\hat{A}_{\varepsilon\xi} + \hat{B}_{\varepsilon\xi} + \hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}$ του τριγώνου;



14. Στην εικόνα της πόλης Brøndby η οδός ΓΔ εφάπτεται ταυτόχρονα στα δύο ίσα κυκλικά οικόπεδα με κέντρα Α και Β. Μπορείτε να βρείτε τη σχέση της ευθείας ΓΔ με το τμήμα ΑΒ;



15. Στο διπλανό τρίγωνο ΑΒΓ οι πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ είναι εφαπτόμενες του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο Δ.



α) Να σχεδιάσετε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ και να μετρήσετε τις γωνίες $B\hat{A}\Delta$ και $\Delta\hat{A}\Gamma$. Τι παρατηρείτε;

β) Να επαναλάβετε τη διαδικασία για τα τμήματα ΒΔ και ΓΔ. Μπορείτε να βγάλετε κάποιο συμπέρασμα;

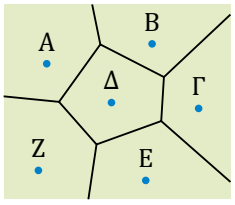
Ομαδική εργασία

16. Κόψτε τέσσερα καλαμάκια ή ξυλάκια μήκους 3,5 cm, 0,4 dm, 90 mm και 5 cm. Δημιουργήστε όσο περισσότερα τρίγωνα μπορείτε, επιλέγοντας κάθε φορά τρία από αυτά.

α) Μπορέσατε να δημιουργήσετε τρίγωνα σε όλες τις περιπτώσεις, κι αν όχι, ποιος ήταν ο λόγος; Τι θα αλλάζατε, ώστε να δημιουργείται τρίγωνο με οποιαδήποτε τριάδα από καλαμάκια κι αν επιλέξετε;

β) Πόση είναι η περίμετρος του τριγώνου ή των τριγώνων που δημιουργήσατε;

17. Στον χάρτη ενός δάσους που απεικονίζεται στο διπλανό σχήμα έχουν σημειωθεί οι θέσεις έξι πυροσβεστικών σταθμών, τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε και Ζ. Επίσης, φαίνονται οι περιοχές που ελέγχει ο κάθε σταθμός, με βάση την ιδέα ότι κάθε σημείο του δάσους ελέγχεται από τον σταθμό που είναι πιο κοντά.

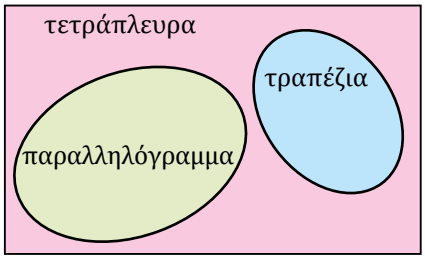


Αυτό το «πλέγμα» καλείται διάγραμμα Voronoi. Τα σημεία (οι σταθμοί) λέγονται κέντρα των περιοχών.

Επιλέξτε δύο γειτονικές περιοχές. Πώς νομίζετε ότι έχει χαραχτεί το σύνορό τους;

Πυροσβεστικοί σταθμοί

18. Στο σχήμα έχουμε σχεδιάσει το σύνολο των τετραπλεύρων και μέσα σε αυτό έχουμε σχεδιάσει το σύνολο των παραλληλογράμμων και το σύνολο των τραπεζίων. Ένα τέτοιο διάγραμμα το λέμε διάγραμμα Venn (από τον John Venn, 1834-1923, που το επινόησε).



α) Γιατί νομίζετε ότι τα τραπέζια και τα παραλληλόγραμμα έχουν σχεδιαστεί ξεχωριστά το ένα από το άλλο;

β) Σχεδιάστε το σύνολο των ορθογωνίων, το σύνολο των ρόμβων και το σύνολο των τετραγώνων. Εξηγήστε γιατί επιλέξατε να τα σχεδιάσετε έτσι.

19. Για το παρακάτω σχήμα ο Γιώργος σχολίασε: «Η επίκεντρη γωνία $A\hat{O}B$ βλέπει το τόξο $\overset{\frown}{AB}$ αλλά και το τόξο $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$. Άρα τα τόξα αυτά είναι ίσα». Η Μαρία διαφώνησε και είπε: «Τα τόξα αυτά δεν είναι ίσα, γιατί ο εξωτερικός κύκλος έχει μεγαλύτερη ακτίνα από τον πρώτο, δηλαδή το $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ είναι μεγαλύτερο από το $\overset{\frown}{AB}$». Συμφωνείτε με κάποιο από τα δύο παιδιά; Εξηγήστε την άποψή σας.



Σχεδιάζουμε παραλληλόγραμμα

Ταξινομούμε γωνίες

Ταξινομούμε πολύγωνα

Quiz στη Γεωμετρία επιπέδου

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ 8:

Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί



Οι συμμετρικές εικόνες πάντα τραβούν την προσοχή μας, είτε επειδή προκαλούν την περιέργειά μας είτε επειδή συνδέονται με την αίσθηση της ομορφιάς και της αρμονίας.

Σε αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε με ένα είδος συμμετρίας, εκείνη που μοιάζει με ανάκλαση σε έναν καθρέφτη. Θα κατασκευάσουμε συμμετρικά σχήματα και θα μελετήσουμε ιδιότητες που συνδέονται με τη συμμετρία.

ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΕΝΟΤΗΤΕΣ:

8.1 Συμμετρία σχημάτων ως προς άξονα
8.2 Σχήματα με άξονα συμμετρίας

8.1 Συμμετρία σχημάτων ως προς άξονα

Δ1. Οι εικόνες... διπλασιάζονται

Α. Παρατηρήστε τη διπλανή φωτογραφία. Τι σχέση έχει κάποιο από τα δέντρα με την εικόνα του στο νερό; Ποιο φαινόμενο νομίζετε ότι ήθελε να αποτυπώσει ο φωτογράφος; Μπορείτε να σκεφτείτε άλλα στιγμιότυπα ή καταστάσεις στις οποίες εμφανίζεται το ίδιο φαινόμενο;



Β. Αν είχαμε τα δέντρα σε ένα σκίτσο σε διαφανές χαρτί, πώς θα σχεδιάζαμε την αντανάκλασή τους στο νερό; Συζητήστε τις ιδέες σας στην τάξη.

Αντανακλάσεις στη λίμνη Κερκίνη



Συζητάμε

...για συμμετρικά σχήματα

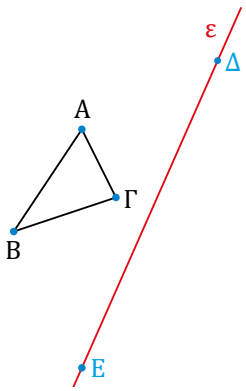
Μπορούμε να βρούμε το συμμετρικό ενός σχήματος διπλώνοντας το χαρτί κατά μήκος της ευθείας που είναι ο άξονας συμμετρίας. Π.χ., για το διπλανό σχήμα, που έχουμε το τρίγωνο ΑΒΓ και μια ευθεία:

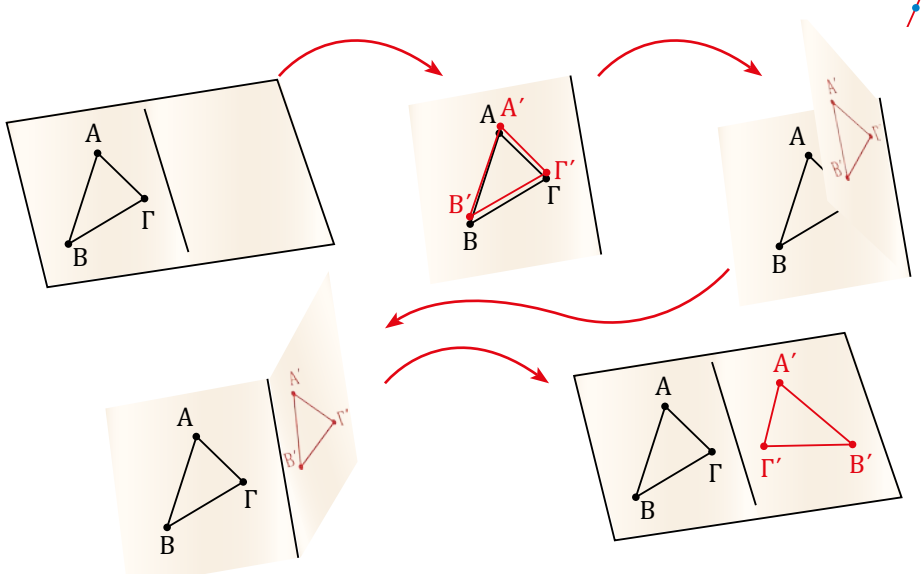
α) αντιγράφουμε το τρίγωνο ΑΒΓ και την ευθεία σε διαφανές χαρτί,

β) διπλώνουμε το χαρτί κατά μήκος της ευθείας,

γ) αντιγράφουμε το τρίγωνο ΑΒΓ στο άλλο μισό του χαρτιού κι έτσι έχουμε το τρίγωνο Α′Β′Γ′,

δ) ξεδιπλώνουμε το διαφανές χαρτί κι έτσι έχουμε το τρίγωνο ΑΒΓ και το συμμετρικό του Α′Β′Γ′ ως προς τον συγκεκριμένο άξονα.

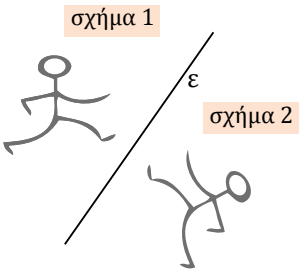




Διπλώνω - ξεδιπλώνω

Συμμετρικό με διαφανές χαρτί

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

λεκτικά…	…και με σχήμα
Συμμετρικό ενός σχήματος ως προς μια ευθεία ε λέμε το σχήμα με το οποίο θα συμπέσει το αρχικό, όταν διπλώσουμε το χαρτί κατά μήκος της ευθείας ε. Την ευθεία ε την ονομάζουμε **άξονα συμμετρίας** και το καινούριο σχήμα το λέμε **εικόνα** του αρχικού σχήματος. • Στη διπλανή εικόνα, το σχήμα 2 είναι η εικόνα του σχήματος 1 ως προς άξονα συμμετρίας την ευθεία ε.	

Και ποιο είναι το συμμετρικό του συμμετρικού ως προς τον ίδιο άξονα;

Δ2. Μελετώντας τα συμμετρικά σχήματα

Σε ένα διαφανές χαρτί σχεδιάστε ένα τρίγωνο ΚΛΜ. Έξω από αυτό σχεδιάστε μια ευθεία δ. Βρείτε το συμμετρικό του ΚΛΜ ως προς την ευθεία δ. Ονομάστε το καινούριο τρίγωνο Κ′Λ′Μ′ (το Κ′ είναι το συμμετρικό του Κ, το Λ′ του Λ και το Μ′ του Μ).

Α. Τι σχέση έχουν οι πλευρές και οι γωνίες του τριγώνου ΚΛΜ με τις αντίστοιχες της εικόνας του; Γιατί νομίζετε ότι συμβαίνει αυτό;

Β. Τι σχέση έχει η ευθεία δ με καθένα από τα τμήματα ΚΚ′, ΛΛ′, ΜΜ′; Πώς μπορούμε να χρησιμοποιούμε αυτή τη σχέση για να κατασκευάζουμε συμμετρικά σχήματα χωρίς διαφανές χαρτί;

Δοκιμάστε τα συμπεράσματά σας: Στο τετράδιό σας σχεδιάστε ένα οποιοδήποτε σχήμα και μια ευθεία. Βρείτε το συμμετρικό του σχήματος χωρίς διαφανές χαρτί, χρησιμοποιώντας γεωμετρικά όργανα. Περιγράψτε στην τάξη και συζητήστε τον τρόπο με τον οποίο εργαστήκατε.

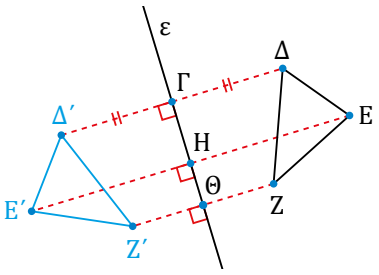
Γ. Στο GeoGebra σχεδιάστε ένα τρίγωνο ΚΛΜ και μια ευθεία δ. Βρείτε το συμμετρικό του ΚΛΜ ως προς την ευθεία δ. Πειραματιστείτε μετακινώντας την ευθεία δ.

Συμμετρικό στο GeoGebra

Συζητάμε

…για ιδιότητες των συμμετρικών σχημάτων

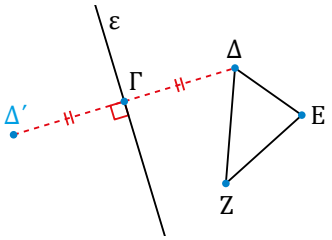
Αν κατασκευάσουμε δύο τρίγωνα ΔΕΖ και Δ′Ε′Ζ′ συμμετρικά ως προς ευθεία ε και διπλώσουμε το χαρτί κατά μήκος της ε, τα δύο τρίγωνα θα συμπέσουν. Έτσι το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ θα συμπέσει με το Δ′Ε′, το ΕΖ με το Ε′Ζ′ και το ΖΔ με το Ζ′Δ′. Επομένως οι πλευρές των δύο τριγώνων θα είναι ίσες. Για τον ίδιο λόγο οι γωνίες $E\hat{\Delta}Z$ και $E'\hat{\Delta}'Z'$ θα συμπέσουν, άρα θα είναι ίσες. Το ίδιο θα συμβαίνει και για τις άλλες γωνίες των δύο τριγώνων.



Επιπλέον, η ευθεία ε είναι μεσοκάθετος των τμημάτων ΔΔ′, ΕΕ′ και ΖΖ′.

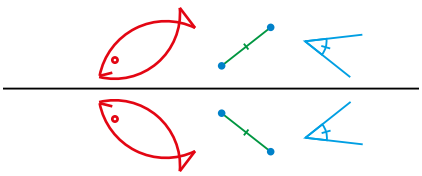
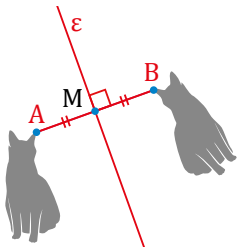
Αυτή η ιδιότητα μας βοηθάει να κατασκευάσουμε το συμμετρικό Δ΄Ε΄Ζ΄ με γεωμετρικά όργανα, ως εξής:

- Φέρνουμε από το Δ κάθετη στην ευθεία ε. Αυτή τέμνει την ε στο Γ.
- Προεκτείνουμε το τμήμα ΔΓ και παίρνουμε ίσο τμήμα ΓΔ΄. Δηλαδή είναι $ΔΔ' \perp ε$ και $ΔΓ = ΓΔ'$.



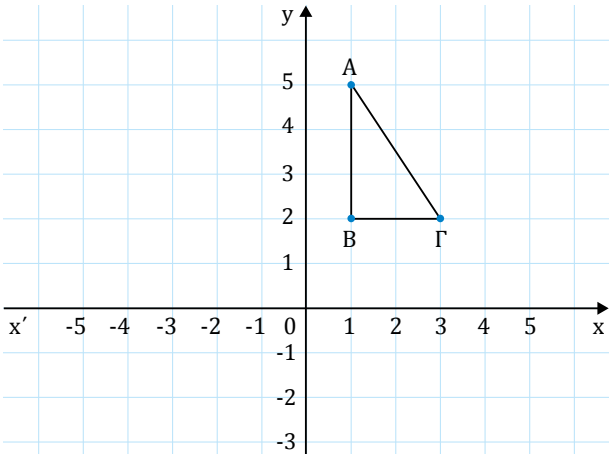
Το Δ΄ είναι το συμμετρικό του Δ ως προς την ευθεία ε. Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε τα συμμετρικά Ε΄ και Ζ΄ των Ε και Ζ. Έτσι μπορούμε να κατασκευάσουμε τα δύο συμμετρικά τρίγωνα ως προς τον άξονα ε χωρίς δίπλωση.

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

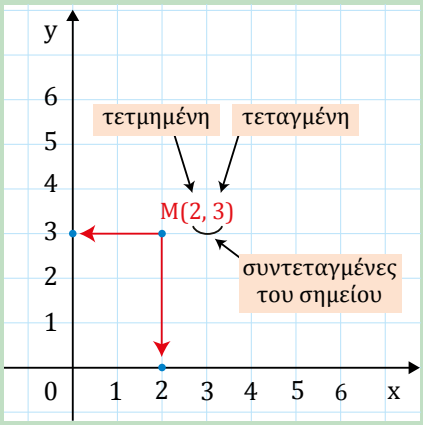
λεκτικά…	…και με σχήμα
• Δύο συμμετρικά σχήματα είναι μεταξύ τους ίσα. • Δύο συμμετρικά ευθύγραμμα τμήματα είναι μεταξύ τους ίσα (έχουν το ίδιο μήκος). • Δύο συμμετρικές γωνίες είναι μεταξύ τους ίσες (έχουν ίσα μέτρα).	
Αν επιλέξουμε κάποιο σημείο ενός σχήματος και το αντίστοιχο σημείο στο συμμετρικό σχήμα, δημιουργούμε ένα ευθύγραμμο τμήμα. Κάθε τέτοιο ευθύγραμμο τμήμα έχει για μεσοκάθετο τον άξονα συμμετρίας των δύο σχημάτων.	

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. **Στο διπλανό σχήμα έχουμε το τρίγωνο ΑΒΓ σχεδιασμένο σε σύστημα συντεταγμένων. Να βρείτε το συμμετρικό του ΑΒΓ ως προς τον άξονα x΄x και το συμμετρικό του ΑΒΓ ως προς τον άξονα y΄y. Ποιες είναι οι συντεταγμένες των κορυφών των εικόνων του αρχικού τριγώνου;**



Με το σύστημα συντεταγμένων μπορούμε να προσδιορίζουμε κάθε σημείο στο επίπεδο χρησιμοποιώντας δύο αριθμούς: τον πρώτο (το x του σημείου), που δείχνει τον αριθμό του άξονα x′x στον οποίο «πέφτει» η κατακόρυφη γραμμή από το σημείο, και τον δεύτερο (το y του σημείου), που δείχνει τον αριθμό του άξονα y′y στον οποίο «πέφτει» η οριζόντια γραμμή από το σημείο.

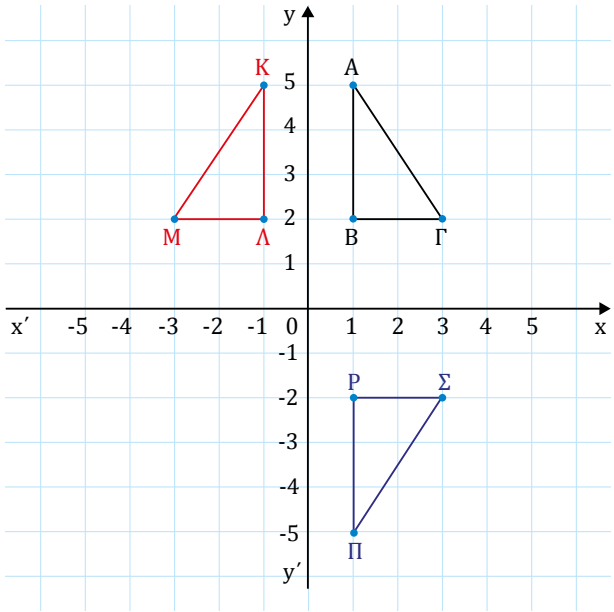


Απάντηση

Οι συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου είναι Α(1, 5), Β(1, 2) και Γ(3, 2).

Είτε με δίπλωση, είτε χρησιμοποιώντας το τετραγωνισμένο χαρτί, είτε με γεωμετρικά όργανα βρίσκουμε το τρίγωνο ΠΡΣ, που είναι το συμμετρικό του ΑΒΓ ως προς τον άξονα x′x, και το τρίγωνο ΚΛΜ, που είναι το συμμετρικό του ΑΒΓ ως προς τον άξονα y′y.

Οι συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου ΠΡΣ είναι Π(1, −5), Ρ(1, −2) και Σ(3, −2).



Γενικά, το συμμετρικό ενός σημείου ως προς τον άξονα x′x έχει την ίδια τετμημένη x και αντίθετη τεταγμένη y σε σχέση με το αρχικό σημείο.

Οι συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου ΚΛΜ είναι Κ(−1, 5), Λ(−1, 2) και Μ(−3, 2).

Γενικά, το συμμετρικό ενός σημείου ως προς τον άξονα y′y έχει την ίδια τεταγμένη y και αντίθετη τετμημένη x σε σχέση με το αρχικό σημείο.

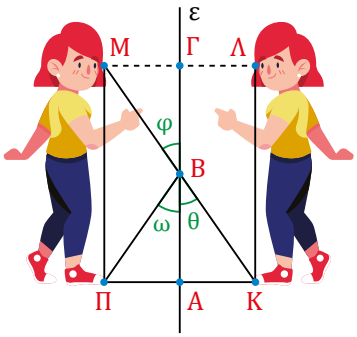
2. Ένα κορίτσι είναι όρθιο και κοιτάζει το είδωλό του στον καθρέφτη. Ποιο πρέπει να είναι το ύψος του καθρέφτη, ώστε το κορίτσι να μπορεί να δει τα παπούτσια του;



Απάντηση

Το κορίτσι βλέπει το είδωλό του στον καθρέφτη. Το είδωλο είναι σαν ένα άλλο κορίτσι που στέκεται πίσω από τον καθρέφτη. Για να μελετήσουμε το ερώτημα, κατασκευάζουμε ένα γεωμετρικό σχήμα, δηλαδή ένα γεωμετρικό μοντέλο της πραγματικότητας.

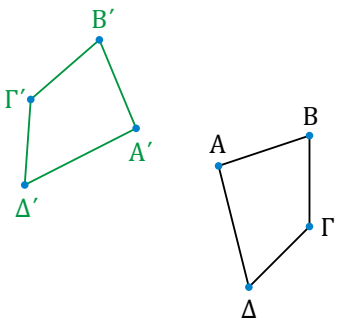
Η απόσταση του ειδώλου από τον καθρέφτη είναι ίση με την απόσταση του κοριτσιού από τον καθρέφτη. Μιλώντας με τη γλώσσα της Γεωμετρίας, το ΚΛ είναι το συμμετρικό του ΠΜ με άξονα συμμετρίας την ευθεία ε. Ας υποθέσουμε ότι το κορίτσι βλέπει τα παπούτσια του. Δηλαδή το φως που ξεκινάει από τα παπούτσια Π ανακλάται στον καθρέφτη ε στο σημείο Β και φτάνει στα μάτια Μ του κοριτσιού.



Από τη Φυσική ξέρουμε ότι η γωνία με την οποία πέφτει το φως στον καθρέφτη (η $\widehat{\omega}$) είναι ίση με τη γωνία με την οποία ανακλάται (τη $\widehat{\varphi}$). Λόγω συμμετρίας η $\widehat{\omega}$ είναι ίση με τη $\widehat{\theta}$ και τελικά οι $\widehat{\varphi}$ και $\widehat{\theta}$ είναι ίσες. Άρα η ΚΒΜ είναι μια ευθεία. Δηλαδή είναι σαν το φως να ξεκινούσε από τα παπούτσια του ειδώλου Κ και να έφτανε στα μάτια του κοριτσιού Μ περνώντας από το σημείο Β του καθρέφτη.

Υποθέτουμε ότι το κορίτσι στέκεται όρθιο, δηλαδή ότι ΠΜ ⊥ ΠΚ. Έτσι, λόγω της συμμετρίας το ΠΚΛΜ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και το Β είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του. Άρα το Β είναι το μέσο του ΑΓ και το ΓΒ είναι το μισό του ΑΓ. Επομένως, για να βλέπει το κορίτσι τον εαυτό του ολόκληρο στον καθρέφτη, άρα και τα παπούτσια του, θα πρέπει ο καθρέφτης να καλύπτει το ΓΒ, δηλαδή το μισό του ύψους του κοριτσιού μέχρι τα μάτια του.

3. **Η Ελένη σχεδίασε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ και το συμμετρικό του Α′Β′Γ′Δ′, αλλά δε σχεδίασε τον άξονα συμμετρίας. Πώς μπορούμε να βρούμε τον άξονα συμμετρίας των δύο σχημάτων;**



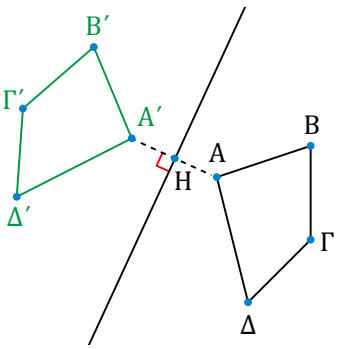
Απάντηση

Μπορούμε να αντιγράψουμε τα δύο σχήματα σε διαφανές χαρτί. Διπλώνουμε το διαφανές χαρτί έτσι ώστε το ΑΒΓΔ και το Α′Β′Γ′Δ′ να συμπέσουν. Η τσάκιση του διαφανούς χαρτιού θα είναι ο άξονας συμμετρίας.

Χωρίς διαφανές χαρτί, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι ο άξονας συμμετρίας είναι η μεσοκάθετος κάθε ευθύγραμμου τμήματος που έχει άκρα ένα σημείο του αρχικού σχήματος και το συμμετρικό του. Έτσι μπορούμε να εργαστούμε ως εξής:

Δίπλωση για τον άξονα συμμετρίας

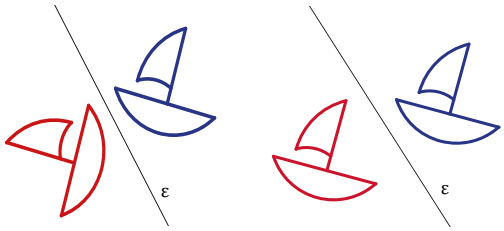
Σχεδιάζουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα που έχει άκρα ένα σημείο του αρχικού σχήματος και το συμμετρικό του. Για παράδειγμα, σχεδιάζουμε το ΑΑ′. Βρίσκουμε το μέσον του Η και φέρνουμε την ευθεία που είναι κάθετη στο ΑΑ′ και περνάει από το Η. Αυτή η ευθεία είναι ο άξονας συμμετρίας.



Άραγε, αν παίρναμε ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα, π.χ. το ΔΔ′, θα βρίσκαμε την ίδια ευθεία;

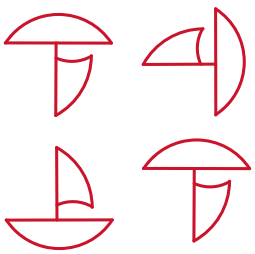
Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Σε μία από τις δύο εικόνες το κόκκινο σχήμα είναι το συμμετρικό του μπλε σχήματος ως προς την ευθεία ε. Ποια είναι αυτή; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.



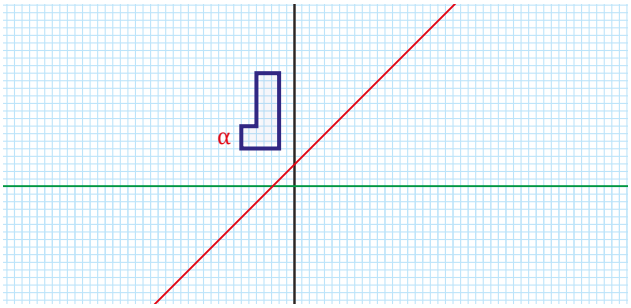
Εικόνα α Εικόνα β

2. Στο διπλανό σχήμα δύο από τις βαρκούλες είναι συμμετρικές. Βρείτε ποιες είναι και σχεδιάστε τον άξονα συμμετρίας τους.

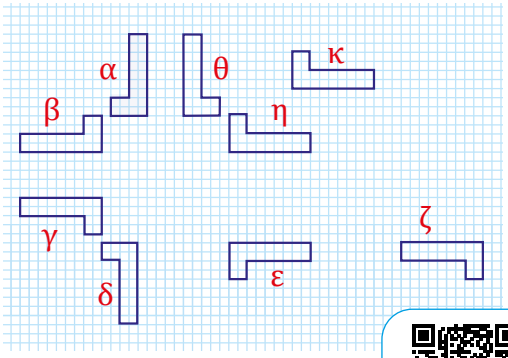


3. Στο τετραγωνισμένο χαρτί του σχήματος που ακολουθεί σχεδιάστε το συμμετρικό του σχήματος α:

- ως προς τη μαύρη ευθεία,
- ως προς την πράσινη ευθεία,
- ως προς την κόκκινη ευθεία.



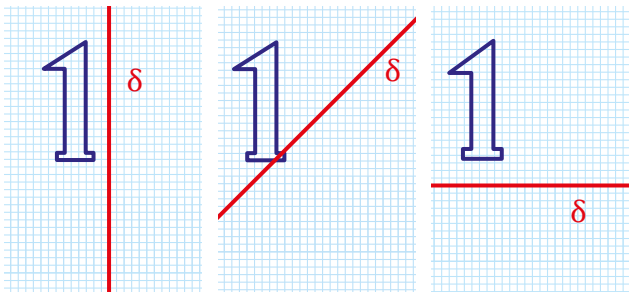
4. Στο παρακάτω σχήμα υπάρχουν εννέα σχήματα. Κάποια από αυτά είναι ανά δύο συμμετρικά. Για παράδειγμα, το α και το θ είναι συμμετρικά ως προς την κατακόρυφη ευθεία που βρίσκεται ανάμεσά τους. Βρείτε όσο περισσότερα τέτοια ζευγάρια μπορείτε, προσδιορίζοντας και τον άξονα συμμετρίας τους.



Τρίλιζα στην αξονική συμμετρία

Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

5. Στις παρακάτω περιπτώσεις να βρείτε το συμμετρικό του μπλε σχήματος (που εικονίζει ένα «1») ως προς την κόκκινη ευθεία δ.



α β γ

Και στις τρεις περιπτώσεις εργαστείτε με δύο τρόπους:

α) Χρησιμοποιήστε διαφανές χαρτί για να αντιγράψετε τα σχήματα και να βρείτε τα συμμετρικά τους με δίπλωση (σε αυτή την περίπτωση δε θα χρησιμοποιήσετε το τετραγωνισμένο χαρτί).

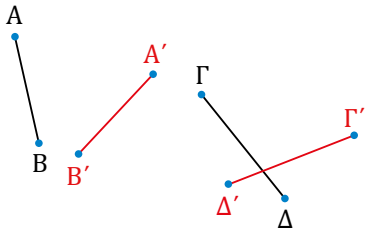
β) Χρησιμοποιήστε μόνο το τετραγωνισμένο χαρτί (και όχι διαφανές χαρτί).

Συγκρίνετε τους δύο τρόπους. Ποιος νομίζετε ότι είναι ευκολότερος; Είναι ο ίδιος για όλες τις περιπτώσεις;

6. Να σχεδιάσετε ένα τυχαίο τετράπλευρο ΑΒΓΔ και μια ευθεία η οποία δεν το τέμνει. Χρησιμοποιήστε διαφανές χαρτί για να βρείτε το συμμετρικό Α′Β′Γ′Δ′ του ΑΒΓΔ ως προς την ευθεία. Γράψτε τις ισότητες που ισχύουν ανάμεσα σε στοιχεία του αρχικού σχήματος (πλευρές, γωνίες) και στα αντίστοιχα στοιχεία της εικόνας του.

Ποια είναι ίσα;

7. Στο παρακάτω σχήμα το Α′Β′ είναι το συμμετρικό του ΑΒ ως προς κάποια ευθεία ε. Επίσης, το Γ′Δ′ είναι το συμμετρικό του ΓΔ ως προς κάποια ευθεία δ. Να αντιγράψετε τα σχήματα στο τετράδιό σας και να βρείτε την ευθεία ε και την ευθεία δ με όσο περισσότερους τρόπους μπορείτε.



8. Σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων πάρτε τα σημεία Α(1, 2), Β(3, 0) και Γ(0, 4). Σχεδιάστε και βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων που είναι συμμετρικά των Α, Β, Γ ως προς:

α) τον άξονα x′x,

β) τον άξονα y′y.

9. Σε σύστημα συντεταγμένων σχεδιάστε ένα οποιοδήποτε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και καταγράψτε τις συντεταγμένες των Α και Β. Βρείτε το συμμετρικό του ΑΒ ως προς τον άξονα x′x και ονομάστε το A_1B_1. Βρείτε το συμμετρικό του A_1B_1 ως προς τον άξονα y′y και ονομάστε το A_2B_2. Βρείτε το συμμετρικό του A_2B_2 ως προς τον άξονα x′x και ονομάστε το A_3B_3. Ποιο είναι το συμμετρικό του A_3B_3 ως προς τον άξονα y′y; Γιατί νομίζετε ότι συμβαίνει αυτό; Μπορείτε, αν θέλετε, να χρησιμοποιήσετε το GeoGebra.

10. Σε ένα σύστημα συντεταγμένων πάρτε τα σημεία Α(1, 2), Β(4, 7), Γ(1, 6), Δ(2, 1), Ε(7, 4) και Ζ(6, 1). Εξετάστε αν τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι συμμετρικά. Αν είναι, βρείτε τον άξονα συμμετρίας τους. Διατυπώστε έναν κανόνα για τον τρόπο με τον οποίο συνδέονται οι συντεταγμένες δύο σημείων που είναι συμμετρικά ως προς αυτό τον άξονα συμμετρίας.

Συντεταγμένες συμμετρικών

11. Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ και μια ευθεία ε έξω από αυτό. Κατασκευάστε το συμμετρικό του ΑΒΓ με άξονα συμμετρίας την ευθεία ε χρησιμοποιώντας μόνο γνώμονα και διαβήτη.

12. Να κάνετε την κατασκευή της προηγούμενης άσκησης με δύο διαφορετικές παραλλαγές:

α) η ε να διέρχεται από το Α και να μην έχει κανένα άλλο κοινό σημείο με το τρίγωνο,

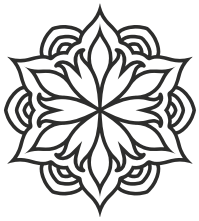
β) η ε να τέμνει δύο πλευρές του τριγώνου.

8.2 Σχήματα με άξονα συμμετρίας

Δ1. Σχήματα με «χαρακτήρα»

Παρατηρήστε τα παρακάτω σχήματα. Εξετάστε αν υπάρχει ευθεία που να τα χωρίζει σε δύο κομμάτια, έτσι ώστε το ένα να είναι συμμετρικό του άλλου. Βρείτε όσες τέτοιες ευθείες υπάρχουν. Συζητήστε στην τάξη τα ευρήματά σας.



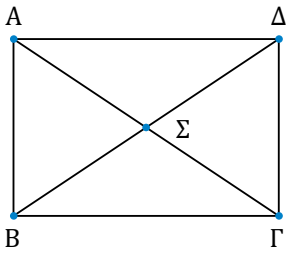



Δ2. Δικαιολόγηση ιδιοτήτων

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του.

Εξετάστε αν έχει άξονες συμμετρίας. Πώς μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τις συμμετρίες του ορθογωνίου για να δικαιολογήσετε ότι οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες; Συζητήστε στην ομάδα σας και μετά στην τάξη.

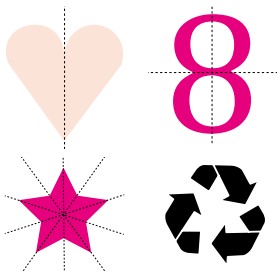
Ποιες άλλες ιδιότητες μπορείτε να δικαιολογήσετε χρησιμοποιώντας τους άξονες συμμετρίας του ορθογωνίου;



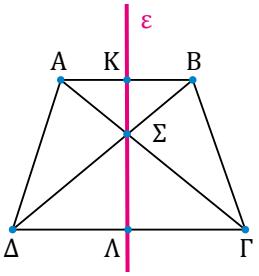
Συζητάμε

…για σχήματα με άξονα συμμετρίας

Υπάρχουν σχήματα που, αν διπλώσουμε στα δύο το χαρτί στο οποίο είναι σχεδιασμένα, το μισό τους θα συμπέσει με το άλλο μισό. Λέμε ότι αυτά τα σχήματα έχουν άξονα συμμετρίας την ευθεία κατά μήκος της οποίας κάνουμε τη δίπλωση. Υπάρχουν σχήματα που έχουν έναν, δύο, ή περισσότερους άξονες συμμετρίας. Αλλά υπάρχουν και σχήματα που δεν έχουν άξονες συμμετρίας (για παράδειγμα, το σύμβολο της ανακύκλωσης).

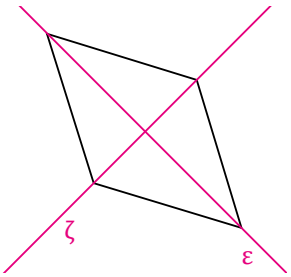


Όταν ένα σχήμα έχει άξονα συμμετρίας, μπορούμε να τον αξιοποιήσουμε για να συμπεράνουμε και να εξηγήσουμε κάποιες από τις ιδιότητές του. Για παράδειγμα, αν ξέρουμε ότι το τραπέζιο ΑΒΓΔ έχει ως άξονα συμμετρίας την ευθεία ε, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι:



- $A\Delta = B\Gamma$, δηλαδή το τραπέζιο είναι ισοσκελές.
- $A\Sigma = B\Sigma$ και $\Delta\Sigma = \Gamma\Sigma$, οπότε και ολόκληρες οι διαγώνιοι είναι ίσες, δηλαδή $A\Gamma = B\Delta$.
- $A\hat{\Delta}\Gamma = B\hat{\Gamma}\Delta$, δηλαδή οι γωνίες που είναι προσκείμενες σε κάθε βάση είναι ίσες.
- Εφόσον τα σημεία Α και Β είναι συμμετρικά ως προς την ε, η ε θα είναι η μεσοκάθετος του ΑΒ. Για τον ίδιο λόγο η ε είναι μεσοκάθετος του ΓΔ.

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

λεκτικά…	…και με σχήμα
Μερικές φορές, αν διπλώσουμε ένα σχήμα κατά μήκος μιας ευθείας, τα δύο μέρη του συμπίπτουν. Τότε λέμε ότι το σχήμα έχει **άξονα συμμετρίας** την ευθεία αυτή. • Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες ε και ζ είναι άξονες συμμετρίας του ρόμβου.	

Αν ένα σχήμα έχει άξονες συμμετρίας, τότε αποτελείται από ίσα μέρη. Επομένως κάποια στοιχεία του είναι ίσα με κάποια άλλα, για παράδειγμα κάποια ευθύγραμμα τμήματα είναι ίσα κ.ο.κ.

Ένα σχήμα έχει άξονα συμμετρίας μια ευθεία. Ποιο είναι το συμμετρικό του ως προς αυτό τον άξονα;

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

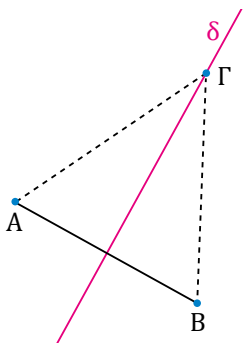
1. **Να αποδείξετε ότι οποιοδήποτε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.**

Απάντηση

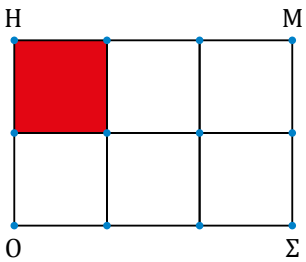
Έχουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και τη μεσοκάθετό του δ. Η δ είναι άξονας συμμετρίας του ΑΒ, εφόσον, αν διπλώσουμε το χαρτί πάνω σε αυτήν, το σημείο Α και το σημείο Β θα συμπέσουν.

Αν πάρουμε ένα σημείο Γ πάνω στη μεσοκάθετο, με τη δίπλωση τα τμήματα ΓΑ και ΓΒ θα συμπέσουν. Άρα είναι ίσα. Αυτό σημαίνει ότι το Γ ισαπέχει από τα άκρα του ΑΒ.

Αυτό συμβαίνει για ένα τυχαίο σημείο Γ (πάνω στη δ), δηλαδή για οποιοδήποτε σημείο Γ της δ. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ισχύει για όλα τα σημεία της μεσοκαθέτου.

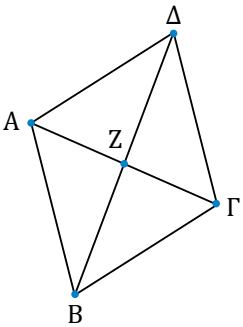


2. **Χρησιμοποιώντας ένα αρχικό σχήμα και τα συμμετρικά του, μπορούμε να φτιάξουμε πιο πολύπλοκα σχήματα. Για παράδειγμα, με διαδοχικές συμμετρίες μπορούμε από το κόκκινο τετράγωνο να κατασκευάσουμε τα υπόλοιπα πέντε τετράγωνα και τελικά το ορθογώνιο ΟΣΜΗ.**
Ποιο είναι το μικρότερο σχήμα που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ως «δομικό στοιχείο» για να κατασκευάσουμε έναν ρόμβο;



Απάντηση

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε έναν ρόμβο ΑΒΓΔ. Γνωρίζουμε ότι οι διαγώνιοί του είναι κάθετες, διχοτομούνται και διχοτομούν τις γωνίες του. Επομένως με ένα από τα ορθογώνια τρίγωνα μπορούμε να κατασκευάσουμε τον ρόμβο. Για παράδειγμα, ξεκινώντας από το ΑΒΖ, κατασκευάζουμε τα συμμετρικά του ως προς την ΑΖ (δηλαδή το ΑΔΖ) και τη ΒΖ (δηλαδή το ΓΒΖ). Τέλος, κατασκευάζουμε το συμμετρικό του ΑΔΖ ως προς τη ΔΖ (δηλαδή το ΔΖΓ) και έχουμε κατασκευάσει τον ρόμβο.



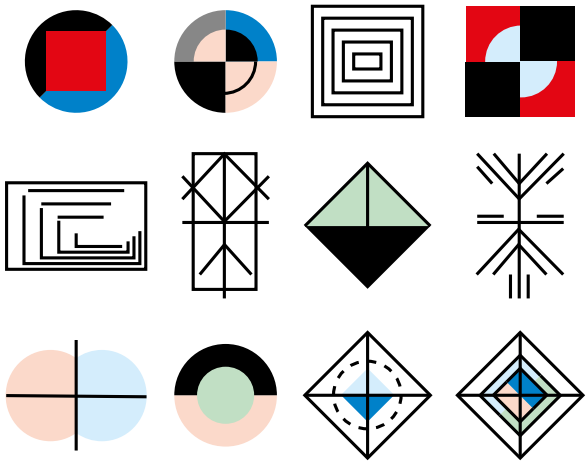
Δομικό στοιχείο ρόμβου

Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε

Ποιοι είναι οι άξονες συμμετρίας ενός ευθύγραμμου τμήματος; Μιας γωνίας; Ενός κύκλου; Συζητήστε στις ομάδες σας, παρουσιάστε και δικαιολογήστε τα αποτελέσματά σας στην τάξη.

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Να εξετάσετε αν τα παρακάτω σχήματα έχουν άξονα ή άξονες συμμετρίας. Αν έχουν, να τους σχεδιάσετε.

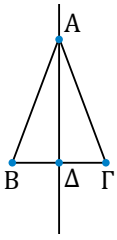


2. Να σχεδιάσετε δύο ίσους κύκλους οι οποίοι να τέμνονται. Σκεφτείτε τους δύο αυτούς κύκλους ως ένα ενιαίο σχήμα. Βρείτε και σχεδιάστε όλους τους άξονες συμμετρίας τους.

3. Το ανθρώπινο πρόσωπο μοιάζει να είναι συμμετρικό. Ωστόσο, το ένα μισό δεν είναι απολύτως συμμετρικό με το άλλο μισό. Στις εικόνες έχουμε μια πραγματική φωτογραφία ενός άντρα και μια επεξεργασμένη εικόνα στην οποία έχουμε αντικαταστήσει το μισό του προσώπου του με το συμμετρικό του άλλου μισού. Ποια από τις δύο είναι η πραγματική φωτογραφία του άντρα; Εξηγήστε γιατί.



4. Στο διπλανό σχήμα έχουμε ένα τρίγωνο ΑΒΓ που έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία ΑΔ. Χρησιμοποιήστε τη συμμετρία του τριγώνου για να δικαιολογήσετε όσο περισσότερες ισότητες ευθύγραμμων τμημάτων και γωνιών μπορείτε.

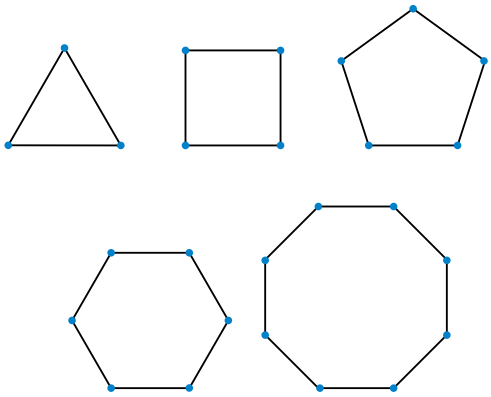


Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

5. Να ταξινομήσετε τα κεφαλαία γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου με κριτήριο πόσους άξονες συμμετρίας έχουν. Για παράδειγμα, το Γ δεν έχει άξονες συμμετρίας, το Α έχει έναν άξονα συμμετρίας και το Χ έχει δύο.



6. Καθένα από τα παρακάτω πολύγωνα έχει ίσες πλευρές και ίσες γωνίες (τέτοια πολύγωνα λέγονται κανονικά). Βρείτε όλους τους άξονες συμμετρίας για καθένα από αυτά.



Μπορείτε να προβλέψετε πόσους άξονες συμμετρίας θα έχει ένα κανονικό 7-γωνο; Ένα κανονικό 58-γωνο; Αν αντί για πολύγωνο είχαμε κύκλο, πόσους άξονες συμμετρίας θα είχαμε;

7. Να σχεδιάσετε τρίγωνα που να έχουν μόνο έναν άξονα συμμετρίας. Τι είδους τρίγωνα είναι αυτά που σχεδιάσατε; Σχεδιάστε άλλα τρίγωνα που να έχουν περισσότερους από έναν άξονες συμμετρίας. Τι είδους τρίγωνα είναι αυτά; Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

8. Να σχεδιάσετε ένα ορθογώνιο και να βρείτε τους άξονες συμμετρίας του. Με βάση τις συμμετρίες, δικαιολογήστε τις παρακάτω προτάσεις:

α) Οι απέναντι πλευρές είναι ίσες.

β) Οι διαγώνιοι είναι ίσες.

γ) Υπάρχει κύκλος που διέρχεται από τις κορυφές του ορθογωνίου.

9. **α)** Να σχεδιάσετε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και να βρείτε όλους τους άξονες συμμετρίας του.

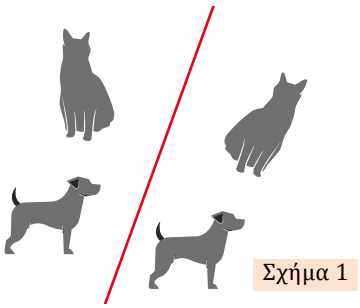
β) Να σχεδιάσετε έναν ρόμβο και να βρείτε όλους τους άξονες συμμετρίας του.

γ) Να σχεδιάσετε ένα τετράγωνο και να βρείτε όλους τους άξονες συμμετρίας του.

Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί

Ερωτήσεις – ασκήσεις – προβλήματα

1. Στο σχήμα 1 ποια ζώα είναι συμμετρικά ως προς την κόκκινη ευθεία;



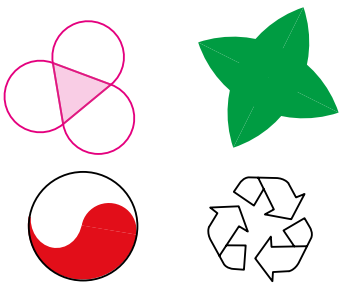
Σχήμα 1

2. Στο σχήμα 2 οι δύο γάτες είναι συμμετρικές, αλλά δεν είναι σχεδιασμένος ο άξονας συμμετρίας. Υπάρχουν δύο τρόποι για να τον σχεδιάσουμε. Περιγράψτε και τους δύο τρόπους και εφαρμόστε τον ένα από τους δύο για να τον σχεδιάσετε.



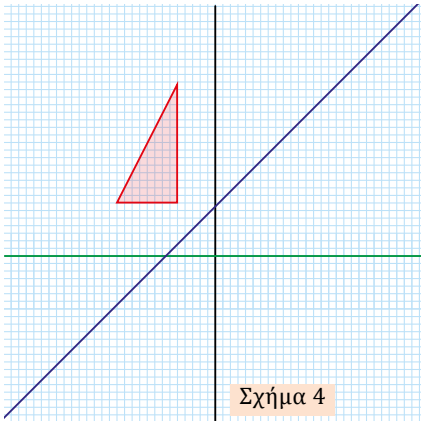
Σχήμα 2

3. Να εξετάσετε αν οι εικόνες του σχήματος 3 έχουν άξονες συμμετρίας. Να βρείτε τους άξονες για κάθε εικόνα που έχει άξονες συμμετρίας.



Σχήμα 3

4. Στο σχήμα 4 υπάρχει ένα κόκκινο τρίγωνο και τρεις ευθείες, μία μαύρη, μία πράσινη και μία μπλε. Να σχεδιάσετε τα συμμετρικά του τριγώνου ως προς τις τρεις ευθείες. Χρωματίστε τα συμμετρικά του κόκκινου τριγώνου με μαύρο, πράσινο, μπλε χρώμα, ανάλογα με τον άξονα συμμετρίας. Ονομάστε τις κορυφές όλων των τριγώνων. Να γράψετε ποια στοιχεία (πλευρές και γωνίες) του κόκκινου τριγώνου είναι ίσα με τα στοιχεία των άλλων τριγώνων.



Σχήμα 4

5. Να σχεδιάσετε ένα γεωμετρικό σχήμα:

α) που να μην έχει κανέναν άξονα συμμετρίας,

β) που να έχει έναν μόνο άξονα συμμετρίας,

γ) που να έχει ακριβώς δύο άξονες συμμετρίας,

δ) που να έχει ακριβώς τρεις άξονες συμμετρίας,

ε) που να έχει άπειρους άξονες συμμετρίας.

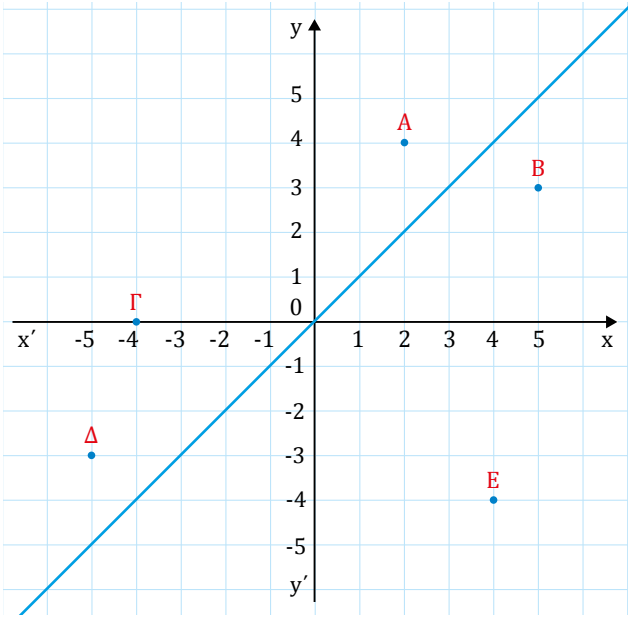
6. Σχεδιάστε έναν ρόμβο ΑΒΓΔ και τους άξονες συμμετρίας του. Χρησιμοποιώντας τους άξονες συμμετρίας, εξηγήστε γιατί:

α) οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες,

β) οι διαγώνιοί του είναι κάθετες και διχοτομούν τις γωνίες του.

Συνδέσεις και επεκτάσεις

7. Στο σύστημα συντεταγμένων του διπλανού σχήματος είναι σημειωμένα τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε.



α) Να γράψετε τις συντεταγμένες των σημείων αυτών.

β) i) Να βρείτε τα συμμετρικά των σημείων Α, ..., Ε ως προς τον άξονα x′x και να τα ονομάσετε A_2, ..., E_2. Να βρείτε τις συντεταγμένες των A_2, ..., E_2.

ii) Να συγκρίνετε τις συντεταγμένες των αρχικών σημείων με τις συντεταγμένες των A_2, ..., E_2. Διατυπώστε τον κανόνα που πρέπει να εφαρμόσουμε στις συντεταγμένες (x, y) των αρχικών σημείων για να προκύψουν οι συντεταγμένες (x′, y′) των συμμετρικών τους ως προς τον άξονα x′x. Γράψτε τον κανόνα στη μορφή: (x, y) ⟶ (..., ...).

γ) i) Να βρείτε τα συμμετρικά των σημείων Α, ..., Ε ως προς τη γαλάζια ευθεία (είναι η διχοτόμος της γωνίας των αξόνων) και να τα ονομάσετε A_3, ..., E_3. Να βρείτε τις συντεταγμένες των A_3, ..., E_3.

ii) Να συγκρίνετε τις συντεταγμένες των αρχικών σημείων με τις συντεταγμένες των A_3, ..., E_3. Διατυπώστε τον κανόνα που πρέπει να εφαρμόσουμε στις συντεταγμένες (x, y) των αρχικών σημείων για να προκύψουν οι συντεταγμένες (x′, y′) των συμμετρικών τους ως προς τη γαλάζια ευθεία. Γράψτε τον κανόνα στη μορφή: (x, y) ⟶ (..., ...).

Συντεταγμένες συμμετρικών - κανόνες

Ομαδική εργασία

8. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την αξονική συμμετρία για να σχεδιάσουμε διάφορα σχήματα και να βρούμε διάφορα σημεία. Χρησιμοποιήστε διαφανές χαρτί και τη μέθοδο της δίπλωσης (με την οποία βρίσκουμε τον άξονα συμμετρίας) για τα παρακάτω:

α) Για να σχεδιάσετε τη μεσοκάθετο ενός ευθύγραμμου τμήματος και να βρείτε το μέσον του χωρίς να μετρήσετε το μήκος του.

β) Για να σχεδιάσετε τη διχοτόμο της γωνίας δύο ευθειών που τέμνονται έξω από τα όρια του χαρτιού.

γ) Για να σχεδιάσετε τις τρεις μεσοκαθέτους των πλευρών ενός τριγώνου. Τι παρατηρείτε;

δ) Για να σχεδιάσετε έναν ρόμβο χωρίς να μετρήσετε τίποτα (ούτε πλευρές ούτε γωνίες).

ε) Για να βρείτε το κέντρο ενός κύκλου που τον σχεδιάσαμε με ένα κυκλικό αντικείμενο (π.χ. με ένα ποτήρι).

Περιγράψτε τον τρόπο με τον οποίο εργαστήκατε.

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ 9:

Γεωμετρία του χώρου



Οι άνθρωποι σε όλο τον κόσμο χτίζουν τα σπίτια τους και άλλα κτίρια σε διάφορα σχήματα, χρώματα και μορφές. Στην ανεξάντλητη φαντασία που πάντα είχαν οι άνθρωποι προστέθηκε η δημιουργικότητα των αρχιτεκτόνων. Έτσι, ακόμα και σε ένα μικρό χωριό βλέπουμε κτίσματα κυβικά, κυλινδρικά, παραλληλεπίπεδα, πυραμιδικά, ακόμα και σφαιρικά.

Σε αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε με τα γεωμετρικά σχήματα του χώρου μας. Θα μελετήσουμε μερικά στερεά σχήματα και τα στοιχεία τους, θα μάθουμε να τα αναγνωρίζουμε, να σχεδιάζουμε τις όψεις και τα αναπτύγματά τους και θα διερευνήσουμε τρόπους κατασκευής τους.

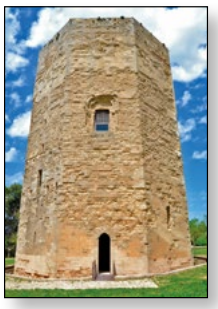
ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΕΝΟΤΗΤΕΣ:

9.1 Πρίσμα και πυραμίδα
9.2 Κύλινδρος, κώνος και σφαίρα

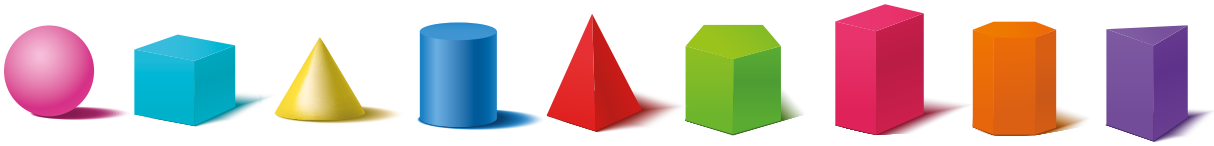
9.1 Πρίσμα και πυραμίδα

Δ1. Σχήματα σε τρεις διαστάσεις

Παρατηρήστε τις φωτογραφίες. Αντιστοιχίστε κάθε φωτογραφία με ένα από τα παρακάτω γεωμετρικά σχήματα. Για τα γεωμετρικά σχήματα που δεν υπάρχουν φωτογραφίες, προσπαθήστε να αναφέρετε κάποια πραγματικά αντικείμενα που έχουν αυτά τα σχήματα. Συζητήστε στην τάξη πώς ονομάζουμε το καθένα από αυτά τα σχήματα.





Συζητάμε

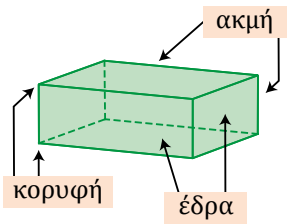
...για πρίσματα και πυραμίδες

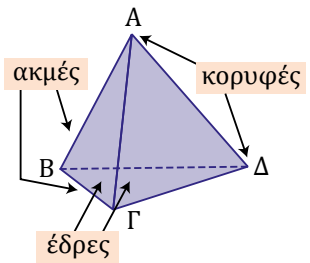
Τα αντικείμενα του φυσικού μας κόσμου είναι στερεά και έχουν τρεις διαστάσεις. Για πολλά από αυτά, ανάλογα με το σχήμα τους και τον τρόπο που είναι τοποθετημένα, λέμε ότι έχουν μήκος, πλάτος (ή βάθος) και ύψος. Μερικά από αυτά έχουν σχήμα συμμετρικό, αλλά τα περισσότερα είναι ακανόνιστα.

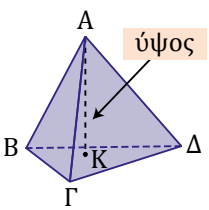
Με αφετηρία τα στερεά σχήματα του κόσμου μας, στη γεωμετρία μελετάμε κάποια συγκεκριμένα από αυτά, που τα λέμε γεωμετρικά στερεά. Μερικά αποτελούνται από επίπεδες επιφάνειες, ενώ άλλα έχουν καμπύλες επιφάνειες.

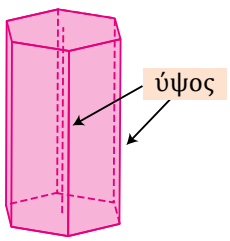
Αν ένα σχήμα αποτελείται από επίπεδες επιφάνειες, τότε κάθε τέτοια επιφάνεια τη λέμε έδρα. Δύο έδρες τέμνονται σε ένα ευθύγραμμο τμήμα, που το λέμε ακμή. Τρεις (ή περισσότερες) ακμές συναντιούνται σε ένα σημείο, που το λέμε κορυφή.

Σε ένα στερεό συχνά μας ενδιαφέρει το ύψος του, δηλαδή η απόσταση μιας κορυφής από τη βάση του ή η απόσταση των δύο παράλληλων βάσεων.





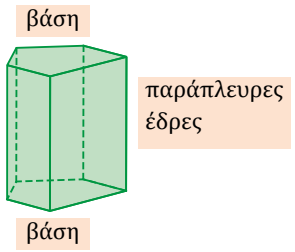
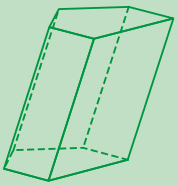
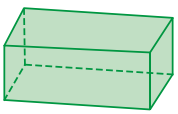
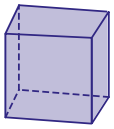
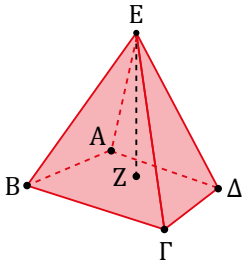




Στοιχεία πρίσματος

Στοιχεία πυραμίδας

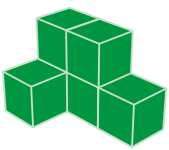
Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

λεκτικά...	...και με σχήμα
Το **πρίσμα** αποτελείται: • από δύο ίσα πολύγωνα, που βρίσκονται σε παράλληλα επίπεδα και τα λέμε **βάσεις** του πρίσματος, • από τις υπόλοιπες έδρες του, που είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα και τις ονομάζουμε **παράπλευρες έδρες**. Όλες μαζί αποτελούν την **παράπλευρη επιφάνεια**. Ανάλογα με το αν οι βάσεις είναι τρίγωνα, τετράπλευρα κ.ο.κ., ένα πρίσμα το ονομάζουμε τριγωνικό, τετραπλευρικό κ.ο.κ. Στο διπλανό σχήμα έχουμε ένα πενταγωνικό πρίσμα. Την απόσταση των δύο βάσεων τη λέμε **ύψος** του πρίσματος.	 Ένα πρίσμα μπορεί να είναι πλάγιο, όπως αυτό της διπλανής εικόνας. Εμείς όμως θα ασχοληθούμε μόνο με ορθά πρίσματα, δηλαδή με πρίσματα που οι παράπλευρες έδρες τους είναι όλες **ορθογώνια** παραλληλόγραμμα. Κι όταν λέμε πρίσματα, θα εννοούμε τα ορθά πρίσματα. 
Μια ειδική περίπτωση του πρίσματος είναι το **ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο**, δηλαδή ένα σχήμα που οι βάσεις του και οι παράπλευρες έδρες του είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα. Αν όλες οι έδρες του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου είναι τετράγωνα, λέμε ότι είναι **κύβος**.	 ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο  κύβος Σε ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, άρα και στον κύβο, μπορούμε να θεωρήσουμε ως βάσεις οποιεσδήποτε απέναντι έδρες του.
Πυραμίδα λέμε το στερεό που η μία έδρα του είναι ένα πολύγωνο και όλες οι άλλες είναι τρίγωνα που έχουν μια κοινή κορυφή. Το πολύγωνο το λέμε **βάση** της πυραμίδας, ενώ τα τρίγωνα τα λέμε **παράπλευρες έδρες**. Η κοινή κορυφή των τριγώνων είναι η **κορυφή** της πυραμίδας και η απόσταση της κορυφής από τη βάση είναι το **ύψος** της πυραμίδας. Ανάλογα με το πολύγωνο της βάσης, μια πυραμίδα την ονομάζουμε τριγωνική, πενταγωνική κ.ο.κ. Στο διπλανό σχήμα έχουμε μια τετραπλευρική πυραμίδα με κορυφή το Ε, βάση το τετράπλευρο ΑΒΓΔ και ύψος το ΕΖ.	 Όταν λέμε «κορυφή της πυραμίδας», εννοούμε το σημείο στο οποίο ενώνονται όλα τα τρίγωνα που είναι παράπλευρες έδρες της. Όμως, η πυραμίδα έχει κι άλλες κορυφές, τις κορυφές του πολυγώνου που έχει για βάση. Όταν θέλουμε να μιλήσουμε γι' αυτές, μπορούμε να τις λέμε «κορυφές της βάσης της πυραμίδας».

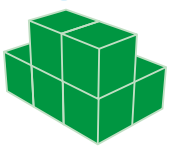
Δ2. Σχεδιάζοντας σε δύο διαστάσεις

Α. Ένα στερεό σχήμα έχει τρεις διαστάσεις. Για να το σχεδιάσουμε στο χαρτί (δηλαδή στις δύο διαστάσεις), χρησιμοποιούμε διάφορες τεχνικές. Οι πολιτικοί μηχανικοί σχεδιάζουν την κάτοψη, την πρόσοψη και την πλάγια όψη του κτιρίου. Η κάτοψη απεικονίζει το κτίριο σαν να το βλέπουμε από πάνω. Η πρόσοψη δείχνει την μπροστινή του όψη. Η πλάγια όψη δείχνει το κτίριο είτε από τη δεξιά πλευρά είτε από την αριστερή. Όπως οι μηχανικοί, για το στερεό που φαίνεται υπό γωνία στα σχήματα 1α (από μπροστά) και 1β (από πίσω), μπορούμε να σχεδιάσουμε την κάτοψή του (σχήμα 2), την μπροστινή του όψη (σχήμα 3) και την πλάγια όψη του (σχήμα 4). Η πίσω όψη του στερεού φαίνεται στο σχήμα 5.

1α



1β



2



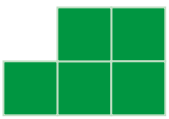
3



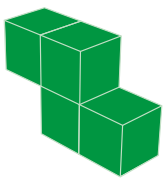
4



5



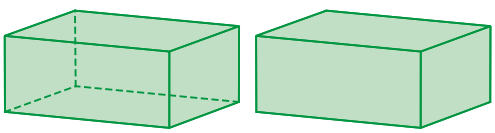
Σχεδιάστε την κάτοψη, την πρόσοψη και την πλάγια όψη ενός αντικειμένου σας (π.χ. μιας γόμας) και τις τρεις όψεις του διπλανού στερεού.



Συγκρίνετε τα σχέδιά σας με τα σχέδια των συμμαθητών και των συμμαθητριών σας.

Περιστρεφόμενο αντικείμενο 1

Β1. Συχνά, όταν σχεδιάζουμε ένα στερεό σχήμα στο χαρτί, θέλουμε να φαίνεται η τρίτη διάσταση. Δηλαδή να μπορεί εκείνος που το βλέπει να φανταστεί το βάθος. Για τον λόγο αυτό χρησιμοποιούνται διάφορες τεχνικές που μας βοηθούν. Μία από αυτές είναι να σχεδιάζουμε τις ακμές του στερεού που βρίσκονται στην πίσω όψη του με διακεκομμένες γραμμές ή να μην τις σχεδιάζουμε καθόλου (να τις σβήνουμε). Χρησιμοποιήστε αυτή την τεχνική για να σχεδιάσετε έναν κύβο και μια πενταγωνική πυραμίδα.



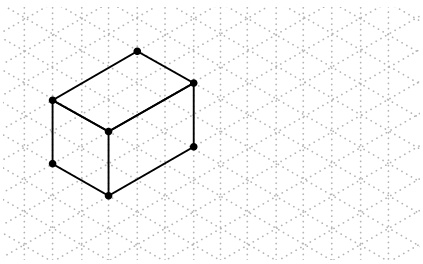
Βλέπουμε τις διαφορετικές όψεις ενός στερεού υπό διαφορετικές γωνίες. Έτσι, όταν σχεδιάζουμε έναν κύβο, οι τετραγωνικές έδρες του μοιάζουν με ρόμβους, οι ορθές γωνίες μπορεί να μοιάζουν με οξείες ή με αμβλείες κτλ.

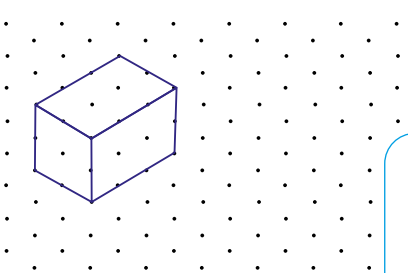
Β2. Μια άλλη τεχνική είναι να χρησιμοποιήσουμε ισομετρικό χαρτί, δηλαδή χαρτί που έχει κουκκίδες σε ίσες αποστάσεις ή γραμμές που σχηματίζουν ισόπλευρα τρίγωνα. Το ισομετρικό χαρτί δεν είναι ίδιο με το τετραγωνισμένο χαρτί. Η εικόνα που σχεδιάζουμε με βάση το ισομετρικό χαρτί μοιάζει να δείχνει τρεις έδρες του στερεού. Ωστόσο, με το ισομετρικό χαρτί μπορούμε να σχεδιάσουμε μόνο ορθογώνια παραλληλεπίπεδα.

Να χρησιμοποιήσετε ισομετρικό χαρτί για να σχεδιάσετε:

α) έναν κύβο,

β) ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο που οι τρεις διαστάσεις του να είναι μεταξύ τους διαφορετικές.

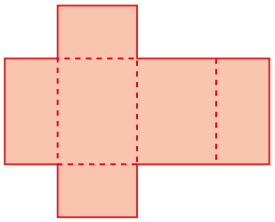




Χαρτί ισομετρικό και τετραγωνισμένο

Δ3. Διπλώνω – ξεδιπλώνω

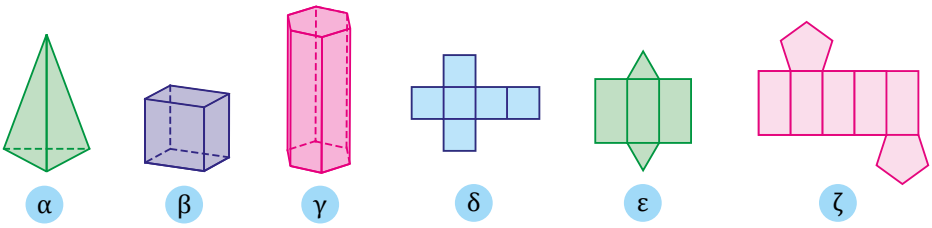




Η Θεοδώρα θέλει να κατασκευάσει ένα χαρτόκουτο. Γι' αυτό άνοιξε ένα τέτοιο κουτί και το άπλωσε στο πάτωμα. Το σχήμα του ξεδιπλωμένου χαρτονιού είναι αυτό που φαίνεται δίπλα στο κανονικό κουτί. Αυτό το επίπεδο σχήμα το λέμε ανάπτυγμα του στερεού.

Α. Να σχεδιάσετε ένα ανάπτυγμα για καθένα από τα στερεά α, β και γ. Σχεδιάσατε όλοι και όλες το ίδιο σχήμα;

Β. Να περιγράψετε, να σχεδιάσετε και να ονομάσετε τα στερεά σχήματα που θα δημιουργηθούν από τα αναπτύγματα δ, ε και ζ.



Κατασκευή πρίσματος και ανάπτυγμα

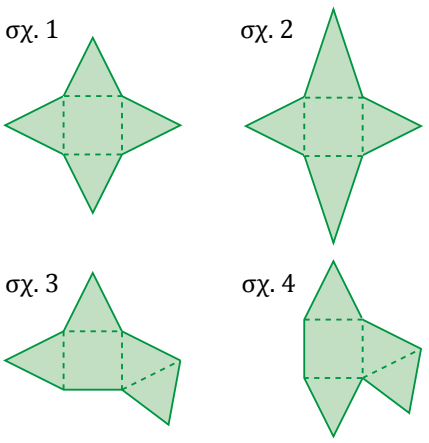
Ανάπτυγμα πυραμίδας

Γ. Να κόψετε ένα χαρτί έτσι ώστε να φτιάξετε ένα στερεό που θέλετε.

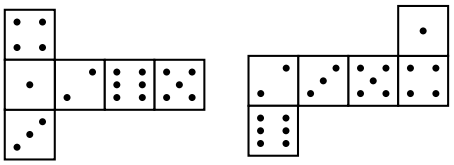
Συζητάμε

…για αναπτύγματα στερεών σχημάτων

Μπορούμε να φανταστούμε και να σχεδιάσουμε το ανάπτυγμα ενός στερεού, δηλαδή το επίπεδο σχήμα που προκύπτει αν ξεδιπλώσουμε τις επιφάνειες του στερεού. Επίσης, μπορούμε να σκεφτούμε αν ένα επίπεδο σχήμα είναι ανάπτυγμα κάποιου στερεού ή όχι. Για παράδειγμα, το σχ. 1 φαίνεται ότι είναι ανάπτυγμα μιας τετραγωνικής πυραμίδας. Αλλά και το σχ. 3 είναι το ανάπτυγμα της ίδιας πυραμίδας. Αντίθετα, τα σχ. 2 και 4 δεν είναι αναπτύγματα, είτε επειδή δεν «κλείνουν» είτε επειδή κάποια κομμάτια πέφτουν το ένα πάνω στο άλλο.



Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

λεκτικά…	…και με σχήμα
Το επίπεδο σχήμα που δημιουργείται από το ξεδίπλωμα ενός στερεού το λέμε **ανάπτυγμα**. Το ανάπτυγμα ενός στερεού δεν είναι μοναδικό, δηλαδή μπορούμε να ξεδιπλώσουμε ένα στερεό με διαφορετικούς τρόπους. Για παράδειγμα, στη διπλανή εικόνα βλέπουμε δύο αναπτύγματα του ίδιου ζαριού.	

Στην αρχαία Ελλάδα –από την εποχή των Πυθαγορείων– υπήρχαν πέντε γεωμετρικά στερεά με ιδιαίτερη σημασία για την ερμηνεία του κόσμου: το **τετράεδρο**, το **εξάεδρο (κύβος)**, το **οκτάεδρο**, το **δωδεκάεδρο** και το **εικοσάεδρο**.

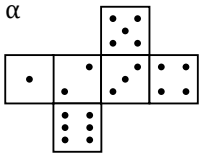


Πλατωνικά στερεά

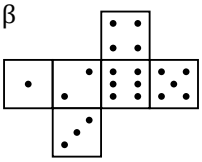
Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. **Ένα συνηθισμένο ζάρι είναι ένας κύβος που στις έξι έδρες του έχει 1, 2, 3, 4, 5, 6 κουκκίδες. Το άθροισμα δύο απέναντι εδρών είναι 7. Ποια από τα διπλανά σχήματα δείχνουν ανάπτυγμα ενός τέτοιου ζαριού;**

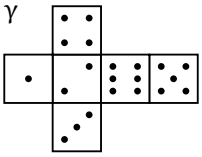
α



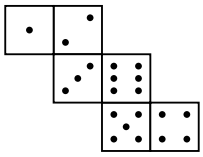
β



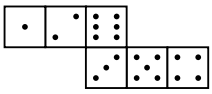
γ



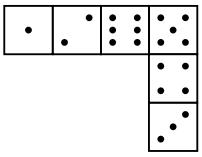
δ



ε



στ



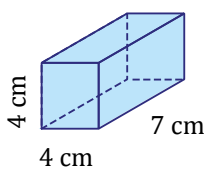
Απάντηση

Το α δεν είναι ανάπτυγμα του ζαριού που θέλουμε, γιατί, όταν το διπλώσουμε σε κύβο, υπάρχουν απέναντι έδρες που δεν έχουν άθροισμα 7. Για παράδειγμα, το 1 θα είναι απέναντι από το 3.

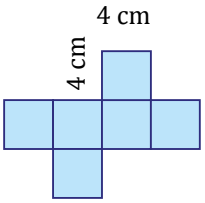
Το στ δεν είναι ανάπτυγμα κύβου, αφού, όταν το διπλώσουμε, η έδρα με το 3 θα συμπέσει με την έδρα με το 2, ενώ απέναντι από το 4 θα υπάρχει κενό.

Τα β, γ, δ και ε είναι αναπτύγματα του ζαριού που θέλουμε. Για να το επιβεβαιώσουμε, μπορούμε να κόψουμε χαρτί σε αυτά τα σχήματα και να κατασκευάσουμε ζάρια.

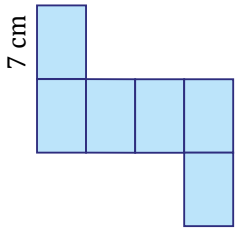
2. **Παρακάτω φαίνονται ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με τις διαστάσεις του και τρία αναπτύγματα. Ποιο ή ποια από τα τρία αναπτύγματα αντιστοιχούν στο συγκεκριμένο στερεό;**



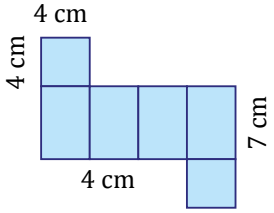
α



β



γ



Απάντηση

Το ανάπτυγμα α αντιστοιχεί σε κύβο, διότι έχει ίσες ακμές, άρα δεν είναι το ανάπτυγμα του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου.

Το ανάπτυγμα β δεν είναι ανάπτυγμα στερεού, εφόσον όλες οι έδρες είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα διαστάσεων 4 cm και 7 cm, ενώ οι δύο έδρες θα έπρεπε να είναι τετράγωνα πλευράς 4 cm.

Το ανάπτυγμα γ αντιστοιχεί στο στερεό του σχήματος, εφόσον είναι ανάπτυγμα ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις 4 cm, 4 cm και 7 cm.

Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε

Να κατασκευάσετε από έναν πίνακα έννοιας για το πρίσμα και την πυραμίδα.

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Να καταγράψετε αντικείμενα της πραγματικότητας που να έχουν σχήμα:

α) κύβου,

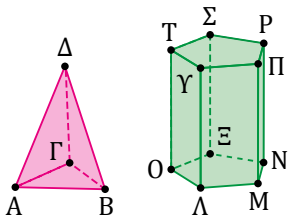
β) ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου,

γ) τριγωνικού πρίσματος,

δ) πρίσματος με βάση πολύγωνο με περισσότερες από τέσσερις πλευρές,

ε) πυραμίδας.

2. Παρακάτω φαίνονται μια τριγωνική πυραμίδα και ένα πενταγωνικό πρίσμα.



α) Να ονομάσετε όλες τις έδρες της πυραμίδας (π.χ. μια έδρα είναι το τρίγωνο ΑΓΔ). Ποια είναι η βάση της πυραμίδας;

β) Να ονομάσετε την κορυφή της πυραμίδας και τις κορυφές της βάσης της.

γ) Να ονομάσετε τις ακμές της πυραμίδας.

δ) Να ονομάσετε όλες τις έδρες του πρίσματος. Ποιες είναι οι βάσεις του;

ε) Να ονομάσετε όλες τις κορυφές του πρίσματος.

στ) Να ονομάσετε όλες τις ακμές του πρίσματος.

ζ) Υπάρχει ακμή του πρίσματος που το μήκος της είναι το ύψος του πρίσματος; Υπάρχει τέτοια ακμή για την πυραμίδα;

Στοιχεία πρίσματος και πυραμίδας

3. Να χρησιμοποιήσετε ισομετρικό χαρτί (με κουκκίδες ή με πλέγμα) για να σχεδιάσετε:

α) τρεις κύβους με διαφορετικό μήκος πλευράς,

β) ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με διαστάσεις διαφορετικές μεταξύ τους.

4. Να σχεδιάσετε χωρίς ισομετρικό χαρτί και με διακεκομμένες γραμμές για τις ακμές που δε φαίνονται:

α) έναν κύβο κι ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο,

β) μια τριγωνική και μια τετραγωνική πυραμίδα,

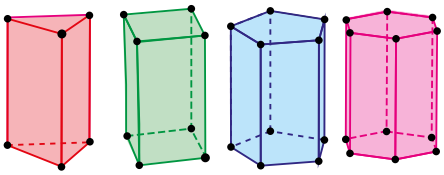
γ) ένα τριγωνικό, ένα πενταγωνικό και ένα εξαγωνικό πρίσμα.

5. Να σχεδιάσετε ένα ανάπτυγμα για την πυραμίδα και το πρίσμα της άσκησης 2.

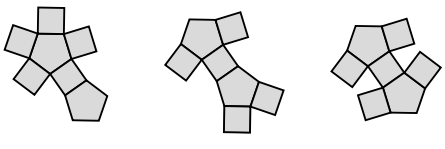
Τρίλιζα με πρίσμα και πυραμίδα

Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

6. Δίπλα φαίνονται τέσσερα πρίσματα: τριγωνικό, τετραγωνικό, πενταγωνικό και εξαγωνικό. Σε κάθε πρίσμα, το πολύγωνο της βάσης του έχει όλες τις πλευρές του ίσες και όλες τις γωνίες του ίσες (τέτοια πολύγωνα λέγονται κανονικά). Για κάθε πρίσμα να σχεδιάσετε δύο διαφορετικά αναπτύγματά του.

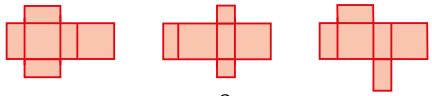


7. Σε καθεμιά από τις τέσσερις ομάδες σχημάτων (1, 2, 3 και 4) να εξετάσετε ποια είναι αναπτύγματα στερεού. Αν κάποιο είναι ανάπτυγμα στερεού, να ονομάσετε το είδος του στερεού. Αν κάποιο δεν είναι, να εξηγήσετε γιατί δεν είναι.



α β γ

ομάδα 1



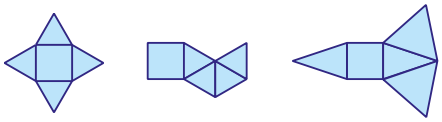
α β γ

ομάδα 2



α β γ

ομάδα 3



α β γ

ομάδα 4

8. Να σχεδιάσετε μια τριγωνική, μια τετραπλευρική, μια πενταγωνική και μια εξαγωνική πυραμίδα. Στη συνέχεια να συμπληρώσετε τον πίνακα και να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις.

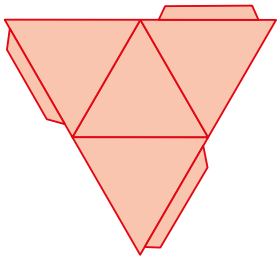
	Τριγωνική πυραμίδα	Τετραπλευρική πυραμίδα	Πενταγωνική πυραμίδα	Εξαγωνική πυραμίδα
Πλήθος κορυφών βάσης				
Πλήθος όλων των κορυφών				
Πλήθος εδρών				
Πλήθος ακμών				

α) Ποια σχέση νομίζετε ότι έχει το πλήθος των κορυφών της βάσης με το πλήθος όλων των κορυφών μιας πυραμίδας; Ισχύει αυτή η σχέση και για μία δωδεκαγωνική πυραμίδα; Εξηγήστε.

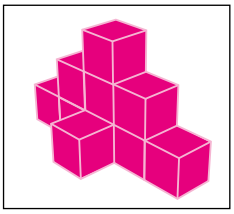
β) Ποια σχέση νομίζετε ότι έχει το πλήθος των κορυφών της βάσης με το πλήθος των εδρών μιας πυραμίδας; Ισχύει αυτή η σχέση και για μία 23γωνική πυραμίδα; Εξηγήστε.

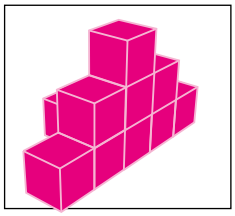
γ) Ποια σχέση νομίζετε ότι έχει το πλήθος των κορυφών της βάσης με το πλήθος των ακμών μιας πυραμίδας; Ισχύει αυτή η σχέση και για μία 30γωνική πυραμίδα; Εξηγήστε.

9. Για να κατασκευάσουμε μια τριγωνική πυραμίδα από χαρτόνι, πρέπει να σχεδιάσουμε το ανάπτυγμά της και να προβλέψουμε κάποιον τρόπο για να σταθεροποιήσουμε τις έδρες μεταξύ τους. Για τον σκοπό αυτό μπορούμε είτε να χρησιμοποιήσουμε κολλητική ταινία είτε να αφήσουμε λίγο επιπλέον χαρτόνι σε μερικά σημεία, όπως φαίνεται στο σχήμα. Κάτι τέτοιο κάνουν και οι κατασκευαστές κιβωτίων. Δοκιμάστε να κατασκευάσετε μια πυραμίδα, ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και έναν κύβο από χαρτόνι.



10. Στις δύο εικόνες φαίνεται το ίδιο στερεό από δύο οπτικές γωνίες. Να σχεδιάσετε την κάτοψή του, την πρόσοψή του και την πλάγια όψη του.

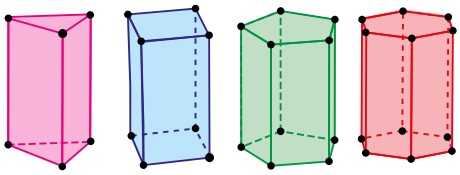




Περιστρεφόμενο αντικείμενο 2

11. Να σχεδιάσετε έναν κύβο, ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και μια τετραγωνική πυραμίδα. Στη συνέχεια να σχεδιάσετε τις όψεις τους (κάτοψη, πρόσοψη και πλάγια όψη). Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ήδη υπάρχοντα σχήματα του βιβλίου. Θα χρειαστεί να ορίσετε ποια είναι η μπροστινή πλευρά κάθε σχήματος.

12. Να συμπληρώσετε τον πίνακα για το τριγωνικό, το τετραπλευρικό, το πενταγωνικό και το εξαγωνικό πρίσμα. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τα διπλανά σχήματα.



	Τριγωνικό πρίσμα	Τετραπλευρικό πρίσμα	Πενταγωνικό πρίσμα	Εξαγωνικό πρίσμα
Πλήθος κορυφών βάσης				
Πλήθος όλων των κορυφών				
Πλήθος εδρών				
Πλήθος ακμών				

Να συζητήσετε με την ομάδα σας και να απαντήσετε στις επόμενες ερωτήσεις.

α) Ποια σχέση νομίζετε ότι έχει το πλήθος των κορυφών της βάσης με το πλήθος όλων των κορυφών ενός πρίσματος; Ισχύει αυτή η σχέση και για ένα δεκαγωνικό πρίσμα; Εξηγήστε.

β) Ποια σχέση νομίζετε ότι έχει το πλήθος των κορυφών της βάσης με το πλήθος των εδρών ενός πρίσματος; Ισχύει αυτή η σχέση και για ένα 15γωνικό πρίσμα; Εξηγήστε.

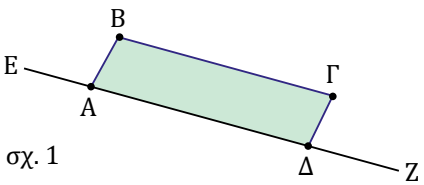
γ) Ποια σχέση νομίζετε ότι έχει το πλήθος των κορυφών της βάσης με το πλήθος των ακμών ενός πρίσματος; Ισχύει αυτή η σχέση και για ένα 23γωνικό πρίσμα; Εξηγήστε.

Τρεις πυραμίδες κάνουν έναν κύβο

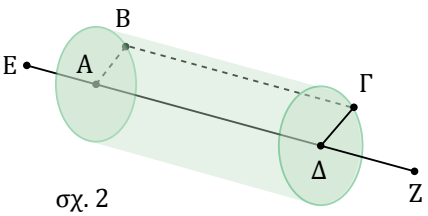
9.2 Κύλινδρος, κώνος και σφαίρα

Δ1. Από επίπεδο σχήμα σε στερεό

Η Ειρήνη και ο Μοχάμεντ πειραματίζονται με τα στερεά. Τυχαία ανακάλυψαν ότι στο GeoGebra μπορούν να περιστρέψουν ένα επίπεδο σχήμα γύρω από κάποιον άξονα κι έτσι να δημιουργήσουν ένα στερεό. Ξεκίνησαν με ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, το ΑΒΓΔ (σχ. 1), το οποίο περιστρέψανε γύρω από την ευθεία ΕΖ. Το αποτέλεσμα ήταν το στερεό που φαίνεται στο σχ. 2. Τι στερεό είναι αυτό; Πειραματιστείτε κι εσείς με το GeoGebra και συζητήστε με τις συμμαθήτριες και τους συμμαθητές σας.



σχ. 1

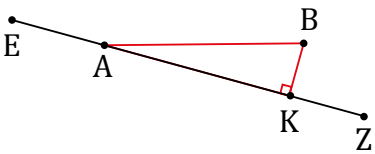


σχ. 2

Χωρίς ψηφιακές συσκευές, με καθημερινά υλικά, μπορούμε να κολλήσουμε με σελοτέιπ ένα ορθογώνιο κομμάτι χαρτί σε ένα καλαμάκι. Περιστρέφοντας το καλαμάκι, θα έχουμε κάτι σαν το σχ. 2.

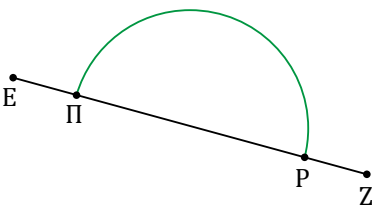
Κύλινδρος από περιστροφή

Αν περιστρέψουμε το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΚ γύρω από την ευθεία ΕΖ, τι στερεό σχήμα θα προκύψει; Πειραματιστείτε με το GeoGebra.



Κώνος από περιστροφή

Αν περιστρέψουμε το ημικύκλιο ΠΡ γύρω από την ευθεία ΕΖ, τι στερεό σχήμα θα προκύψει;



Σφαίρα από περιστροφή

Δ2. Και από στερεό σχήμα σε επίπεδο

Κόψτε ένα φύλλο χαρτί και κατασκευάστε με αυτό έναν κύλινδρο. Στη συνέχεια φανταστείτε να ξεδιπλώνετε ένα κυλινδρικό κουτί αναψυκτικού. Σχεδιάστε το ανάπτυγμά του. Κάνατε όλες και όλοι το ίδιο σχήμα;



Ανάπτυγμα κυλίνδρου

Με ένα φύλλο χαρτί κατασκευάστε έναν κώνο (χωνί). Στη συνέχεια φανταστείτε να ξεδιπλώνετε ένα κωνικό περιτύλιγμα παγωτού. Σχεδιάστε το ανάπτυγμά του. Συγκρίνετε το σχήμα που κάνατε με το σχήμα των συμμαθητών και των συμμαθητριών σας.

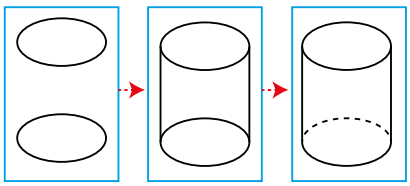


Ανάπτυγμα κώνου

Συζητάμε

…για κυλίνδρους, κώνους και σφαίρες

Περιστρέφοντας ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, παίρνουμε έναν κύλινδρο.



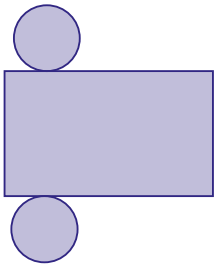
Μπορούμε να σχεδιάσουμε έναν κύλινδρο ως εξής:

α) σχεδιάζουμε τις κυκλικές βάσεις του (επειδή τις βλέπουμε από το πλάι, τις σχεδιάζουμε σαν ελλείψεις),

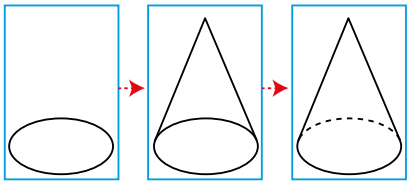
β) τις ενώνουμε,

γ) κάνουμε διακεκομμένη τη γραμμή που βρίσκεται στην πίσω όψη του κυλίνδρου.

Το ανάπτυγμα ενός κυλίνδρου αποτελείται από ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (που είναι η παράπλευρη επιφάνειά του όταν ξετυλιχτεί) και από δύο κυκλικούς δίσκους (που είναι οι βάσεις του).

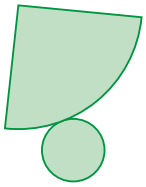


Περιστρέφοντας ένα ορθογώνιο τρίγωνο γύρω από τη μία κάθετη πλευρά του, παίρνουμε έναν κώνο.

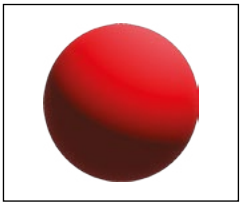


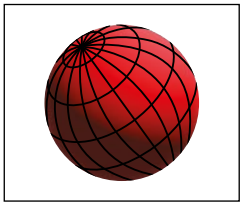
Μπορούμε να σχεδιάσουμε έναν κώνο όπως σχεδιάζουμε τον κύλινδρο. Το ανάπτυγμά του είναι:

- ένας κυκλικός δίσκος (η βάση του) και
- ένα μέρος ενός άλλου κυκλικού δίσκου, που αποτελείται από μια επίκεντρη γωνία και το τόξο της (η καμπύλη επιφάνεια του κυλίνδρου όταν ξετυλιχτεί).



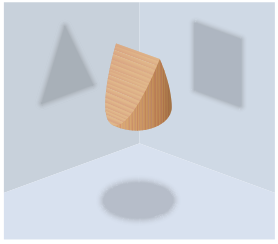
Περιστρέφοντας ένα ημικύκλιο γύρω από τη διάμετρό του, παίρνουμε μια σφαίρα.





Για να σχεδιάσουμε μια σφαίρα, σχεδιάζουμε έναν κύκλο. Από όπου κι αν δούμε τη σφαίρα, βλέπουμε την ίδια εικόνα. Για τον λόγο αυτό δεν μπορούμε να αποδώσουμε το βάθος με απλές σχεδιαστικές τεχνικές.

Η σφαίρα δεν μπορεί να ξετυλιχτεί και να πάρουμε ένα επίπεδο σχήμα, δηλαδή δεν έχει επίπεδο ανάπτυγμα.

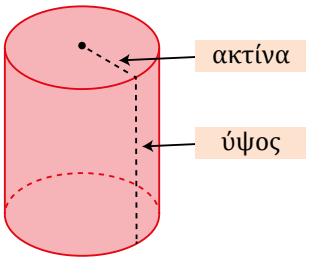
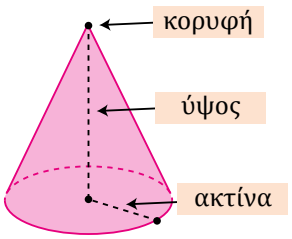
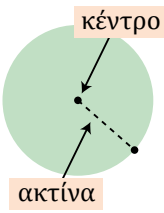


Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε τις τρεις διαφορετικές σκιές του ίδιου αντικειμένου, ανάλογα με το από πού φωτίζεται.

Φανταστείτε ότι στη θέση αυτού του αντικειμένου βρίσκεται ένας κύλινδρος. Τι σχήμα θα είχε καθεμιά από τις σκιές του;

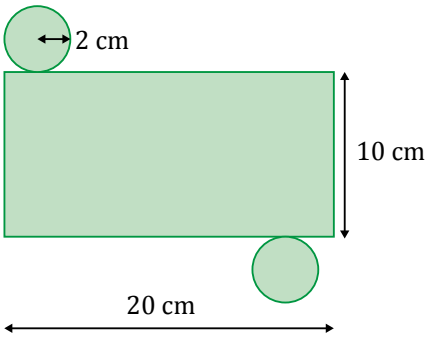
Αν το σχήμα ήταν κώνος; Αν το σχήμα ήταν σφαίρα;

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

λεκτικά…	…και με σχήμα
Ο **κύλινδρος** έχει ως βάσεις δύο ίσους κυκλικούς δίσκους και η παράπλευρη επιφάνειά του, αν ξετυλιχτεί, είναι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. **Ακτίνα** του κυλίνδρου λέμε την ακτίνα της βάσης του. **Ύψος** του κυλίνδρου λέμε την απόσταση μεταξύ των βάσεών του.	
Ο **κώνος** έχει ως βάση έναν κυκλικό δίσκο και ως κορυφή ένα σημείο. Στους κώνους που θα μελετήσουμε, η ευθεία που ενώνει την κορυφή με το κέντρο του κυκλικού δίσκου είναι κάθετη στον κυκλικό δίσκο. **Ακτίνα** του κώνου λέμε την ακτίνα της βάσης του. **Ύψος** του κώνου λέμε την απόσταση της κορυφής του από τη βάση του.	
Η **σφαίρα** αποτελείται από όλα τα σημεία του χώρου που έχουν την ίδια απόσταση από το **κέντρο** της. Την απόσταση αυτή τη λέμε **ακτίνα** της σφαίρας.	
Ο κύλινδρος και ο κώνος έχουν επίπεδα αναπτύγματα. Η σφαίρα δεν έχει επίπεδο ανάπτυγμα.	

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. **Ο Φοίβος θέλει να σχεδιάσει το ανάπτυγμα ενός κυλίνδρου. Έτσι, σχεδίασε δύο κύκλους με ακτίνα 2 cm κι ένα ορθογώνιο με διαστάσεις 10 cm και 20 cm. Η Αϊσέ ισχυρίστηκε ότι υπάρχει κάποιο λάθος. Έχει δίκιο;**



Απάντηση

Καθώς τυλίγουμε την παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου, η μία πλευρά του ορθογωνίου θα συμπέσει με την περιφέρεια της κυκλικής βάσης του κυλίνδρου. Επομένως πρέπει το μήκος αυτής της πλευράς να είναι ίσο με το μήκος της περιφέρειας του κύκλου. Με ακτίνα 2 cm, οι κυκλικές βάσεις του κυλίνδρου θα έχουν μήκος περιφέρειας $2 \cdot 3{,}14 \cdot 2\,\text{cm} = 12{,}56\,\text{cm}$ και έτσι δεν «ταιριάζουν» με την πλευρά μήκους 20 cm του ορθογωνίου.

Η Αϊσέ λοιπόν έχει δίκιο.

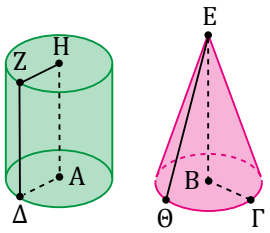
Για να υπολογίσουμε το μήκος της περιφέρειας ενός κύκλου με ακτίνα ρ, χρησιμοποιούμε τον τύπο που μάθαμε στο Δημοτικό:

$$L = 2 \cdot 3{,}14 \cdot \rho$$

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Να καταγράψετε τρία τουλάχιστον αντικείμενα της πραγματικότητας που να έχουν σχήμα:
α) κυλίνδρου, **β)** κώνου, **γ)** σφαίρας.

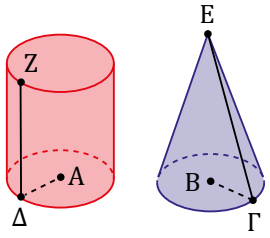
2. Δίπλα φαίνονται ένας κύλινδρος και ένας κώνος. Να ονομάσετε:
α) τις βάσεις του κυλίνδρου και τη βάση του κώνου.
β) την κορυφή του κώνου,
γ) τα ευθύγραμμα τμήματα που το μήκος τους είναι το ύψος του κυλίνδρου και του κώνου.



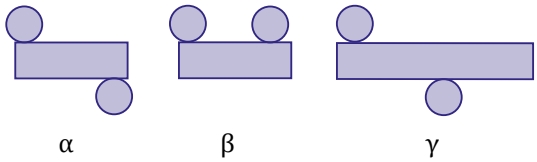
Στοιχεία κώνου και κυλίνδρου

3. Να σχεδιάσετε ελεύθερα (με διακεκομμένες γραμμές όπου χρειάζεται):
α) δύο κυλίνδρους με διαφορετικές διαστάσεις,
β) δύο κώνους με διαφορετικές διαστάσεις.

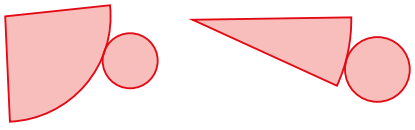
4. Δίπλα φαίνονται ένας κύλινδρος και ένας κώνος. Έχουμε μετρήσει μερικά ευθύγραμμα τμήματα: $ΑΔ = 1$ cm, $ΔΖ = 2$ cm, $ΒΓ = 1{,}2$ cm και $ΕΓ = 2$ cm. Με βάση αυτά τα δεδομένα, να σχεδιάσετε (προσεγγιστικά) τα αναπτύγματα του κυλίνδρου και του κώνου.



5. Να εξετάσετε ποια από τα παρακάτω σχήματα είναι αναπτύγματα στερεού. Αν κάποιο είναι ανάπτυγμα στερεού, να ονομάσετε το είδος του στερεού. Αν κάποιο δεν είναι, να εξηγήσετε γιατί δεν είναι.



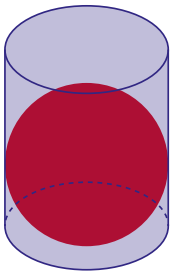
6. Να εξετάσετε ποια από τα παρακάτω σχήματα είναι αναπτύγματα στερεού. Αν κάποιο είναι ανάπτυγμα στερεού, να ονομάσετε το είδος του στερεού. Αν κάποιο δεν είναι, να εξηγήσετε γιατί δεν είναι. (Ίσως χρειαστεί να εκτιμήσετε προσεγγιστικά το μήκος κάποιας καμπύλης.)



Τρίλιζα με κύλινδρο, κώνο, σφαίρα

Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

7. Σε ένα κυλινδρικό δοχείο με ακτίνα 2 cm και ύψος 5,2 cm υπάρχει μια σφαίρα που ακουμπάει στην κάτω βάση και στα γύρω τοιχώματα του δοχείου. Πόσο απέχει η σφαίρα από την πάνω βάση του κυλίνδρου;



8. Θέλουμε να κατασκευάσουμε διαφανή κυλινδρικά δοχεία τα οποία να χωρούν ακριβώς τέσσερα μπαλάκια του τένις. Τα μπαλάκια έχουν διάμετρο 6,3 εκατοστά. Τι διαστάσεις θα έχουν τα δοχεία εσωτερικά;



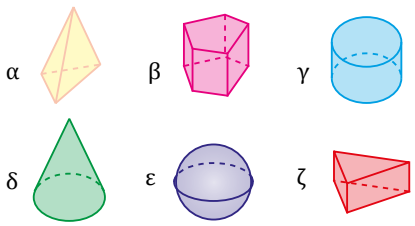
9. Να σχεδιάσετε την πρόσοψη, την κάτοψη και την πλάγια όψη του κυλίνδρου και του κώνου της άσκησης 2. Θα πρέπει πρώτα τα ορίσετε την μπροστινή πλευρά (ώστε να σχεδιάσετε την πρόσοψη). Σε τι διαφέρει η πρόσοψη από την πλάγια όψη;

Ανακεφαλαίωση

Γεωμετρία του χώρου

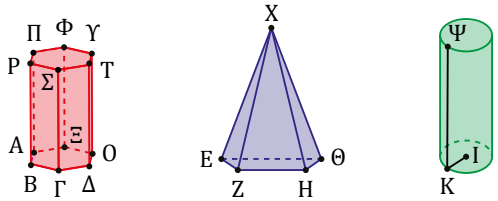
Ερωτήσεις – ασκήσεις – προβλήματα

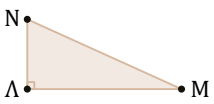
1. Να ονομάσετε τα σχήματα α, β, γ, δ, ε και ζ του σχήματος 1.



σχήμα 1

2. Με βάση το σχήμα 2, να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις.





σχήμα 2

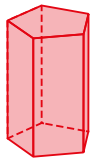
Μία βάση του πρίσματος είναι το _____. Οι παράπλευρες έδρες του πρίσματος είναι όλες _____ παραλληλόγραμμα. Δύο από αυτές είναι οι _____ και _____. Το πλήθος των παράπλευρων εδρών του πρίσματος είναι _____. Δύο ακμές του πρίσματος είναι οι _____ και _____. Ύψος του πρίσματος είναι το _____.

Στο σχήμα φαίνεται μια _____ πυραμίδα. Η βάση της είναι το _____ _____. Το σημείο __ λέγεται _____ της πυραμίδας. Το πλήθος των εδρών της πυραμίδας είναι _____.

Μία βάση του κυλίνδρου είναι ο _____ με κέντρο _____ και ακτίνα _____. Το ύψος του κυλίνδρου είναι η απόσταση _____.

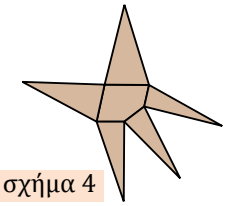
Αν περιστρέψουμε το ορθογώνιο τρίγωνο ΛΜΝ γύρω από το ΛΜ, θα προκύψει ένας _____ που θα έχει ως βάση τον κύκλο με κέντρο _____ και ακτίνα _____ και θα έχει κορυφή το σημείο _____.

3. Να σχεδιάσετε το ανάπτυγμα του πρίσματος που φαίνεται στο σχήμα 3.



σχήμα 3

4. Στο σχήμα 4 φαίνεται το ανάπτυγμα ενός στερεού. Για τι στερεό πρόκειται;



σχήμα 4

5. Να σχεδιάσετε έναν κύλινδρο και το ανάπτυγμά του.

Συνδέσεις και επεκτάσεις

6. [ομαδική εργασία] Όπως έχει αναφερθεί, η σφαίρα δεν έχει επίπεδο ανάπτυγμα. Αυτό ίσως το έχετε διαπιστώσει προσπαθώντας να κάνετε επίπεδο ένα κομμάτι από μπάλα ή από μπαλόνι. Πώς όμως γίνεται να κατασκευάζουμε επίπεδους χάρτες της Γης; Αναζητήστε πληροφορίες για τους χάρτες και τους τρόπους αποτύπωσης της Γης σε αυτούς. Ως αποτέλεσμα της μελέτης σας γράψτε ένα κείμενο μίας έως δύο σελίδων.

Ταξινομούμε στερεά



ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ 10:

Στατιστική
Διαχείριση δεδομένων και μέτρα θέσης και μεταβλητότητας

Μια σχολή χορού έχει 50 σπουδαστές και σπουδάστριες με τις παρακάτω ηλικίες: 16, 16, 15, 5, 10, 6, 7, 7, 9, 19, 15, 16, 16, 21, 21, 24, 23, 22, 12, 11, 29, 18, 20, 15, 19, 10, 11, 12, 11, 13, 14, 13, 16, 15, 14, 12, 8, 12, 14, 15, 12, 10, 10, 5, 8, 9, 6, 25, 25, 10. Επειδή υπάρχουν πολλές διαφορετικές ηλικίες, πώς μπορούμε να τις παρουσιάσουμε συνοπτικά;

Σε ένα τουρνουά μπάσκετ κοριτσιών, οι 7 παίκτριες της ομάδας της Α΄ Γυμνασίου πέτυχαν τους εξής πόντους: 18, 16, 9, 5, 22, 12, 35. Στο ίδιο τουρνουά, οι 9 παίκτριες της ομάδας της Β΄ Γυμνασίου πέτυχαν τους παρακάτω πόντους: 10, 18, 23, 10, 12, 30, 2, 5, 20. Πώς μπορούμε να συγκρίνουμε την απόδοση των δύο ομάδων;

Στις επόμενες ενότητες θα ασχοληθούμε με τρόπους παρουσίασης των δεδομένων που έχουμε συλλέξει σε μια στατιστική έρευνα. Επίσης, θα δούμε πώς μπορούμε να περιγράψουμε συνοπτικά ορισμένα χαρακτηριστικά τους (π.χ. αν κυμαίνονται γύρω από κάποιον αριθμό και πόσο διάσπαρτα είναι).

ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΕΝΟΤΗΤΕΣ:

10.1 Διαχείριση δεδομένων
10.2 Μέτρα θέσης και μεταβλητότητας

10.1 Διαχείριση δεδομένων

Δ1. Αθλήματα και ύψος αθλητών

Μια παρέα παιδιών του Α3 συζητούσαν για τα ομαδικά αθλήματα που προτιμούν. Ο Έκτορας παρατήρησε ότι πολλοί φίλοι του που προτιμούσαν το μπάσκετ ήταν μάλλον ψηλοί. Η Αλίνα δε συμφωνούσε ότι αυτό ισχύει για όλους. Με αφορμή αυτή τη συζήτηση, αποφάσισαν να κάνουν μια έρευνα. Ζήτησαν από όλα τα παιδιά του τμήματός τους να γράψουν σε ένα χαρτί το φύλο τους, το ομαδικό άθλημα που προτιμούν να παίζουν και το ύψος τους. Οι απαντήσεις που πήραν φαίνονται στον πίνακα.



Φ	Αθ	Υ
Α	Μ	142
Α	Π	144
Κ	Μ	155
Α	Β	149
Κ	Β	157
Κ	Π	159
Κ	Χ	154
Α	Μ	165
Α	Μ	163
Κ	Μ	156

Φ	Αθ	Υ
Κ	Β	169
Α	Χ	148
Κ	Π	149
Κ	Β	157
Α	Π	158
Κ	Β	152
Α	Π	162
Κ	Μ	160
Α	Μ	164
Κ	Β	152

Υπόμνημα

Στον πίνακα χρησιμοποιούνται οι συμβολισμοί:

Φ: φύλο
Αθ: άθλημα που προτιμά
Μ: μπάσκετ
Π: ποδόσφαιρο
Β: βόλεϊ
Χ: χάντμπολ
Υ: ύψος σε cm

Κάθε συγκεκριμένη απάντηση λέγεται παρατήρηση. Για παράδειγμα, τα
Α, Α, Κ, Α, Κ, Κ, Κ, Α, Α, Κ, Κ, Α, Κ, Κ, Α, Κ, Α, Κ, Α, Κ
είναι οι 20 παρατηρήσεις που μας δείχνουν το φύλο των παιδιών.

Α. Μπορείτε να βοηθήσετε τον Έκτορα και την Αλίνα συμπληρώνοντας τους πίνακες συχνοτήτων για το φύλο και το άθλημα;

Φύλο	Συχνότητα (αριθμός παιδιών)	Σχετική συχνότητα (ποσοστό)
Κορίτσια		
Αγόρια		
Σύνολο		

Άθλημα	Συχνότητα (αριθμός παιδιών)	Σχετική συχνότητα (ποσοστό)

Β. Τα παιδιά προβληματίστηκαν για τον τρόπο που θα έφτιαχναν έναν αντίστοιχο πίνακα για το ύψος. Ο Έκτορας είπε ότι οι περισσότεροι έχουν διαφορετικό ύψος και γι' αυτό θα έπρεπε να φτιάξουν έναν πίνακα με πολλές γραμμές. Η Ελένη πρότεινε έναν πίνακα με λιγότερες γραμμές κάνοντας ομάδες υψών. Μπορείτε να συμπληρώσετε έναν πίνακα όπως προτείνει η Ελένη; Αποφασίστε πρώτα πόσες ομάδες υψών θα έχετε, για να κάνετε το αντίστοιχο πλήθος γραμμών στον πίνακα. Συγκρίνετε στην τάξη τους πίνακες που κατασκευάσατε.

Ύψος	Συχνότητα (αριθμός παιδιών)	Σχετική συχνότητα (ποσοστό)
. . .	. . .	. . .

Θα μπορούσατε να κάνετε την ίδια έρευνα στην τάξη σας και να χρησιμοποιήσετε τα δικά σας δεδομένα.

Συζητάμε

...για στατιστικές έρευνες και δεδομένα

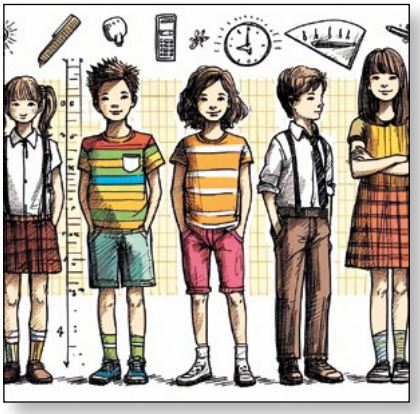
Μια έρευνα σαν κι αυτή που έκαναν η Αλίνα κι ο Έκτορας τη λέμε στατιστική έρευνα. Σε μια στατιστική έρευνα συγκεντρώνουμε στοιχεία για κάποιο χαρακτηριστικό, τα επεξεργαζόμαστε, τα παρουσιάζουμε και βγάζουμε συμπεράσματα.

Στο παράδειγμά μας, τα παιδιά ενδιαφέρονταν για κάποια χαρακτηριστικά των μαθητών και των μαθητριών του Α3. Για τον σκοπό αυτό ρώτησαν όλους τους μαθητές και τις μαθήτριες του Α3. Απευθύνθηκαν, όπως λέμε, σε όλο τον πληθυσμό, δηλαδή έκαναν απογραφή. Αν ο πληθυσμός τους ήταν μεγάλος, θα μπορούσαν να συλλέξουν δεδομένα από ένα μικρότερο μέρος του πληθυσμού, δηλαδή από ένα δείγμα.

Δεν κάνουμε στατιστική έρευνα για κάθε ερώτημα που μπορούμε να σκεφτούμε. Για παράδειγμα, το ύψος ενός συγκεκριμένου παιδιού ή το όνομα του παιδιού που είναι πρώτο στον κατάλογο του τμήματος απαντώνται χωρίς στατιστική έρευνα.

Συνήθως, τα δεδομένα που συλλέγουμε σε μια στατιστική έρευνα τα οργανώνουμε σε πίνακες συχνοτήτων. Όταν τα δεδομένα είναι πολλά και διαφορετικά μεταξύ τους (π.χ. το ύψος των παιδιών του Α3), τα χωρίζουμε σε ομάδες που τις λέμε κλάσεις. Για παράδειγμα, για το ύψος των παιδιών ενός άλλου τμήματος φτιάξαμε τον παρακάτω πίνακα:

Ύψος	Συχνότητα (αριθμός μαθητών)	Σχετική συχνότητα (ποσοστό)
141-147	3	12%
147-153	6	24%
153-159	7	28%
159-165	5	20%
165-171	4	16%
Σύνολο	25	100%



Φαίνεται ότι ομαδοποιήσαμε τα ύψη σε 5 ομάδες που όλες έχουν πλάτος 6 cm (από 141 cm μέχρι 147 cm κτλ.). Επιλέξαμε τις ομάδες έτσι ώστε να περιλαμβάνουν όλες τις παρατηρήσεις. Συνηθίζουμε σε κάθε ομάδα να περιλαμβάνουμε το κάτω άκρο της αλλά όχι το πάνω άκρο της. Έτσι, το ύψος 159 cm θα το υπολογίσουμε στην ομάδα 159-165 και όχι στην ομάδα 153-159.

Παράδειγμα στους πίνακες συχνοτήτων

Η λέξη ***στατιστική*** προέρχεται από τη λατινική λέξη ***status***, που σημαίνει ***κράτος***, διότι αρχικά δήλωνε συλλογή στοιχείων για τις κρατικές ανάγκες (έκταση, παραγωγή, πληθυσμό κτλ.).

Εξέλιξη της Στατιστικής

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Στατιστική έρευνα – απογραφή

Όταν αναζητούμε πληροφορίες για κάποιο χαρακτηριστικό ενός πληθυσμού, συχνά κάνουμε **στατιστική έρευνα**. Σε μια τέτοια στατιστική έρευνα συλλέγουμε δεδομένα από κάποιον αριθμό ατόμων ή στοιχείων του πληθυσμού. Αν απευθυνόμαστε σε όλο τον **πληθυσμό** που μας ενδιαφέρει, λέμε ότι κάνουμε **απογραφή**. Τα δεδομένα που συλλέγουμε αφορούν το χαρακτηριστικό που μας ενδιαφέρει.

Είδη δεδομένων

Γενικά, τα δεδομένα μας μπορεί να είναι:

- **κατηγορικά (ή ποιοτικά)**, αν αναφέρονται σε ένα ποιοτικό χαρακτηριστικό, όπως είναι το χρώμα των ματιών των παιδιών ή το άθλημα που προτιμούν, ή
- **ποσοτικά,** αν αναφέρονται σε κάποιο ποσοτικό χαρακτηριστικό, όπως είναι ο αριθμός των αδελφιών και το ύψος των παιδιών της τάξης.

Είδη δεδομένων

Τα ποσοτικά δεδομένα λέμε ότι είναι **διακριτά**, αν παίρνουν μεμονωμένες τιμές (όπως ο αριθμός των αδελφιών: 0, 1, 2, 3, ...), ή **συνεχή**, αν παίρνουν οποιαδήποτε τιμή μέσα σε ένα διάστημα (όπως το ύψος των παιδιών).

Ομαδοποίηση δεδομένων σε κλάσεις

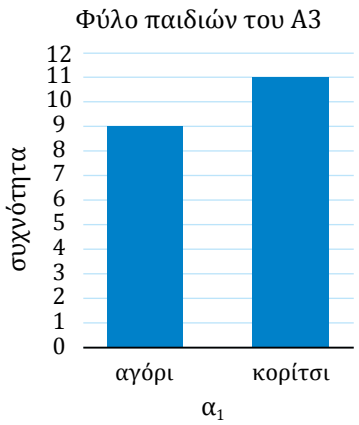
Όταν έχουμε μεγάλο αριθμό ποσοτικών δεδομένων με πολλές διαφορετικές τιμές, είναι καλύτερο να τα συγκεντρώνουμε σε ομάδες (όπως τα ύψη των παιδιών του Α3). Τότε λέμε ότι κάνουμε **ομαδοποίηση** σε **κλάσεις**.

Συνήθως επιλέγουμε κλάσεις με ίσο **πλάτος**.

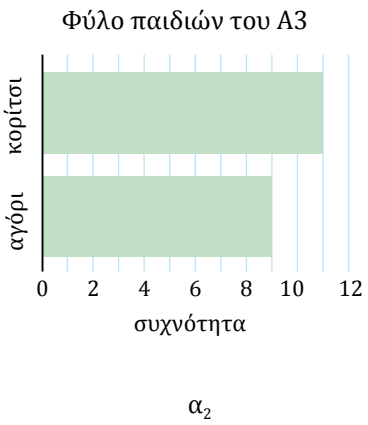
Πρέπει να επιλέξουμε τις κλάσεις με τέτοιο τρόπο, ώστε να μην αλληλοεπικαλύπτονται και να περιέχουν τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη παρατήρηση.

Δ2. Στατιστικά διαγράμματα

Ο Έκτορας αναζήτησε τρόπους να παρουσιάσει με πιο βολικό τρόπο τα αποτελέσματα της έρευνάς τους. Χρησιμοποίησε ένα υπολογιστικό φύλλο και είδε ότι θα έπρεπε να διαλέξει ανάμεσα σε πολλά διαγράμματα. Δοκιμάζοντας, για το φύλο των παιδιών του Α3 έφτιαξε τα παρακάτω (α_1, α_2 και β).



α_1



α_2



β

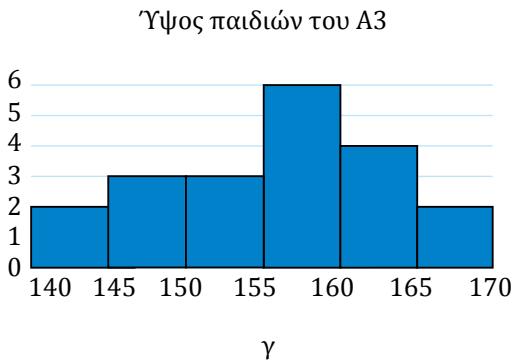
Διαγράμματα με υπολογιστικό

Για το ύψος όμως, είδε ότι προτείνεται κάτι (το γ) που έμοιαζε με το πρώτο αλλά είχε και διαφορές.

Α. Να σχεδιάσετε διαγράμματα όπως τα α_1 και β για τις σχετικές συχνότητες του φύλου, τις συχνότητες και τις σχετικές συχνότητες του αθλήματος. Χρησιμοποιήστε τα δεδομένα του Α3 που συνέλεξαν η Αλίνα και ο Έκτορας.

Β. Να συζητήσετε στις ομάδες σας για τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα του α_1 (ή του α_2) και του β.

Γ. Να συζητήσετε για τις ομοιότητες και τις διαφορές του α_1 με το γ.



γ

Συζητάμε

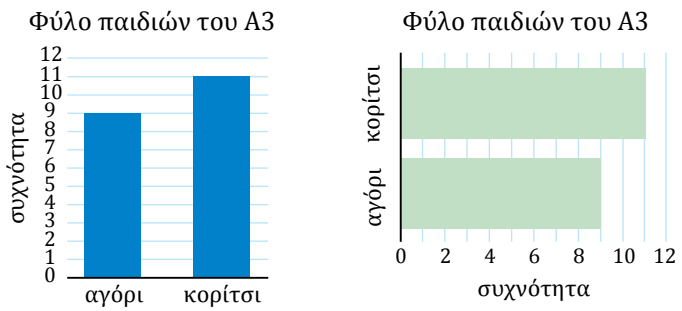
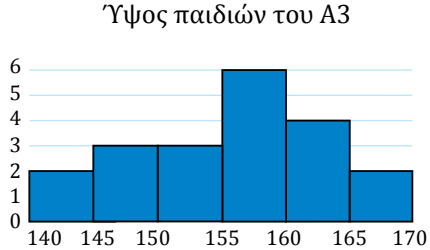
…για στατιστικά διαγράμματα

Παρατηρούμε ότι τα διαγράμματα α_1 και α_2 αποτελούνται από ορθογώνιες κατακόρυφες στήλες (ή οριζόντιες γραμμές) που δείχνουν τη συχνότητα. Στο σχήμα α_1, το ύψος της στήλης που αντιστοιχεί στα αγόρια είναι 9 και στα κορίτσια είναι 11. Ένα τέτοιο διάγραμμα το λέμε ραβδόγραμμα.

Ένα διάγραμμα όπως το β το λέμε κυκλικό διάγραμμα (ή πίτα). Στο σχήμα β, ο κύκλος παριστάνει το σύνολο των παιδιών (δηλαδή οι 360° αντιστοιχούν στα 20 παιδιά) και η κάθε επίκεντρη γωνία παριστάνει το μέρος του κύκλου που αντιστοιχεί στα αγόρια ή στα κορίτσια. Η γωνία που αντιστοιχεί στα κορίτσια είναι τα $\frac{11}{20}$ των 360°, δηλαδή 198° $\left(\frac{11}{20}\cdot 360 = 198\right)$. Αν γνωρίζουμε τις σχετικές συχνότητες, μπορούμε να υπολογίσουμε τη γωνία με βάση αυτές. Για παράδειγμα, τα κορίτσια είναι $\frac{11}{20} = 55\%$, άρα η γωνία του γαλάζιου μέρους (που αντιστοιχεί στα κορίτσια) είναι το 55% των 360° $\left(\frac{55}{100}\cdot 360 = 198\right)$.

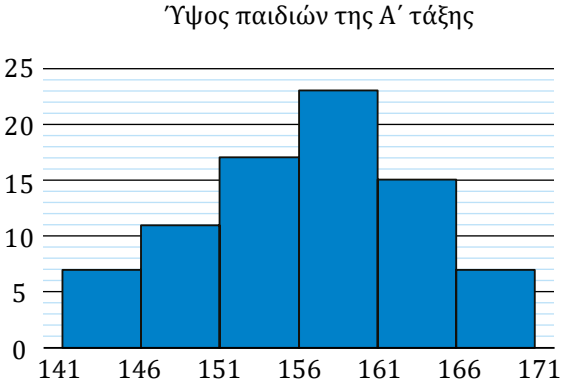
Στο διάγραμμα γ παρατηρούμε ορθογώνιες κατακόρυφες στήλες που περιγράφουν τις διαφορετικές κλάσεις στις οποίες ομαδοποιήθηκαν τα ύψη των παιδιών του Α3. Οι στήλες δεν έχουν αποστάσεις η μία από την άλλη και έχουν ύψος όσο η συχνότητα της κάθε ομάδας. Έτσι, η στήλη που αντιστοιχεί στην ομάδα υψών 160-165 έχει ύψος 4, διότι 1 παιδί έχει ύψος 160 cm και 3 παιδιά έχουν ύψος λιγότερο από 165 cm, δηλαδή συνολικά 4 παιδιά έχουν ύψος από 160 cm αλλά λιγότερο από 165 cm. Το διάγραμμα αυτό το λέμε ιστόγραμμα.

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

λεκτικά…	…και με σχήμα
Το **ραβδόγραμμα** είναι ένα διάγραμμα που αποτελείται από ορθογώνιες κατακόρυφες στήλες (ή οριζόντιες γραμμές) που έχουν ύψος όσο η συχνότητα ή η σχετική συχνότητα.	
Το διάγραμμα που αποτελείται από έναν κυκλικό δίσκο χωρισμένο με επίκεντρες γωνίες λέγεται **κυκλικό διάγραμμα** (ή **πίτα**). Το κυκλικό διάγραμμα συνήθως χρησιμοποιείται για κατηγορικά δεδομένα, αλλά μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για ποσοτικά. Κάθε γωνία είναι ανάλογη της συχνότητας και της σχετικής συχνότητας. Δηλαδή για την κατηγορία που έχει σχετική συχνότητα 55%, η γωνία θα είναι το 55% των 360°.	 Η επιλογή του τρόπου παρουσίασης των δεδομένων μας εξαρτάται από το είδος τους, το ακροατήριο στο οποίο απευθυνόμαστε, τις δικές μας προτιμήσεις κ.ά.
Για να παραστήσουμε δεδομένα που τα έχουμε ομαδοποιήσει, χρησιμοποιούμε ένα διάγραμμα που το λέμε **ιστόγραμμα**. Τα ιστογράμματα αποτελούνται από ορθογώνιες κατακόρυφες στήλες (ή οριζόντιες γραμμές) που δεν έχουν αποστάσεις η μία από την άλλη και έχουν ύψος όσο η συχνότητα ή η σχετική συχνότητα της κάθε ομάδας.	 Σε ένα ιστόγραμμα οι κατακόρυφες στήλες δεν έχουν αποστάσεις η μία από την άλλη. Αντίθετα, σε ένα ραβδόγραμμα έχουν κάποια απόσταση μεταξύ τους. Γιατί νομίζετε ότι συμβαίνει αυτό;

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. **Η Ειρήνη μάζεψε στοιχεία για το ύψος των μαθητών και των μαθητριών της Α΄ τάξης και τα παρουσίασε με το παρακάτω ιστόγραμμα συχνοτήτων.**



Παράδειγμα με φυλλόγραμμα

α) Πόσα είναι όλα τα παιδιά της Α΄ τάξης;

β) Πόσα είναι τα παιδιά που έχουν ύψος από 161 cm και πάνω;

γ) Ποιο είναι το ποσοστό των παιδιών που έχουν ύψος από 151 cm και πάνω;

δ) Ποιο είναι το ύψος που έχει το ψηλότερο παιδί;

ε) Ένας μαθητής είπε ότι «αφού το ύψος 146 cm περιλαμβάνεται στην κλάση 146-151, μπορούμε να πούμε ότι 73 παιδιά είναι ψηλότερα από 145 cm». Συμφωνείτε με την άποψή του;

Απάντηση

α) Από το ιστόγραμμα μπορούμε να δούμε ότι στην κλάση 141-146 εντάσσονται 7 παιδιά, στην κλάση 146-151 εντάσσονται 11 παιδιά κ.ο.κ. Έτσι συμπληρώνουμε τον διπλανό πίνακα συχνοτήτων.

Προσθέτοντας τις συχνότητες όλων των κλάσεων, βρίσκουμε ότι το σύνολο των παιδιών της Α΄ τάξης είναι 80.

Ύψος παιδιών (σε cm)	Συχνότητες
141-146	7
146-151	11
151-156	17
156-161	23
161-166	15
166-171	7
Σύνολο	80

β) Ύψος από 161 cm και πάνω έχουν $15+7=22$ παιδιά.

γ) Ύψος από 151 cm και πάνω έχουν $17+23+15+7=62$ παιδιά. Για να βρούμε το ποσοστό των παιδιών αυτών στο σύνολο των παιδιών της Α΄ τάξης, υπολογίζουμε ποιο μέρος των 80 παιδιών είναι τα 62 και το εκφράζουμε σε ποσοστό:

$$\frac{62}{80}=0{,}775=77{,}5\%$$

Δηλαδή το 77,5% των παιδιών της Α΄ τάξης έχει ύψος από 151 cm και πάνω.

δ) Τα ψηλότερα παιδιά της τάξης είναι τα 7 παιδιά που το ύψος τους ανήκει στην κλάση 166-171. Δηλαδή το ψηλότερο παιδί έχει ύψος τουλάχιστον 166 cm και λιγότερο από 171 cm, αλλά δεν μπορούμε να ξέρουμε το ακριβές ύψος του. Η παρουσίαση των υψών σε ομάδες έχει το μειονέκτημα ότι δε μας πληροφορεί για το ακριβές ύψος κάθε παιδιού.

ε) Στην κλάση 141-146 ανήκουν 7 παιδιά. Αυτό σημαίνει ότι τα παιδιά που έχουν ύψος από 146 cm και πάνω είναι $80 - 7 = 73$.

Ωστόσο, η άποψη του μαθητή δεν είναι σωστή, γιατί στην κλάση 141-146 μπορεί να υπάρχουν παιδιά με ύψος μεγαλύτερο από 145 cm (αλλά μικρότερο από 146 cm), π.χ. 145,5 cm. Άρα τα παιδιά που είναι ψηλότερα από 145 cm μπορεί να είναι περισσότερα από 73.

Διαφορετικά ιστογράμματα - εργασία

Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε

Να κατασκευάσετε έναν πίνακα έννοιας για το ιστόγραμμα.

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Σε ποια από τα παρακάτω ερωτήματα θα χρειαζόταν να κάνετε στατιστική έρευνα για να απαντήσετε; Σε ποια από τις περιπτώσεις αυτές η στατιστική έρευνα θα μπορούσε να γίνει με απογραφή;

α) Ποιο είναι το μικρό όνομα της μαθήτριας που εμφανίζεται πρώτο στον αλφαβητικό κατάλογο του τμήματός σας;

β) Ποιο είναι το πιο συνηθισμένο όνομα των μαθητριών του σχολείου σας;

γ) Ποιο είναι το ύψος των ενήλικων ανδρών στην Ελλάδα;

δ) Τι ώρα ακριβώς θα ανατείλει ο ήλιος την επόμενη Δευτέρα στο σχολείο σας;

ε) Πόση επιτυχία στα τρίποντα είχαν οι αθλητές μιας ομάδας μπάσκετ στον τελευταίο αγώνα;

2. Σκεφτείτε τρία διαφορετικά ερωτήματα τα οποία οδηγούν σε δεδομένα:

α) ποιοτικά, **β)** διακριτά ποσοτικά, **γ)** συνεχή ποσοτικά.

Συζητήστε με τους συμμαθητές και τις συμμαθήτριές σας τις προτάσεις σας.

3. Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

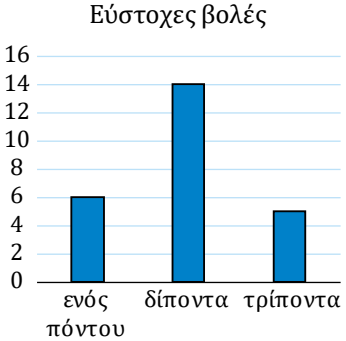
Τιμές	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα	Σχετική συχνότητα %
2	4		
3	19		
4	15		
5	12		
Σύνολο			

4. Η ομάδα μπάσκετ του σχολείου έδωσε έναν φιλικό αγώνα. Στο ραβδόγραμμα φαίνονται οι εύστοχες βολές που πέτυχαν οι παίκτες της ομάδας.

α) Σε πόσες βολές του ενός πόντου ευστόχησαν οι παίκτες της ομάδας;

β) Πόσες εύστοχες βολές πέτυχαν συνολικά οι παίκτες;

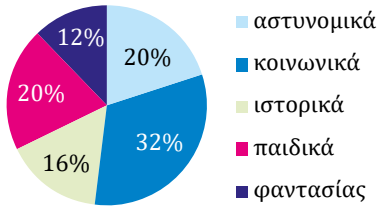
γ) Πόσους πόντους πέτυχε η ομάδα σε αυτό τον αγώνα;



Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

5. Σε ένα βιβλιοπωλείο, τα λογοτεχνικά βιβλία είναι ταξινομημένα σε πέντε μεγάλες κατηγορίες: αστυνομικά, κοινωνικά, ιστορικά, παιδικά και φαντασίας. Στο κυκλικό διάγραμμα φαίνεται το ποσοστό που αντιστοιχεί σε κάθε κατηγορία.

Κατηγορίες λογοτεχνικών βιβλίων

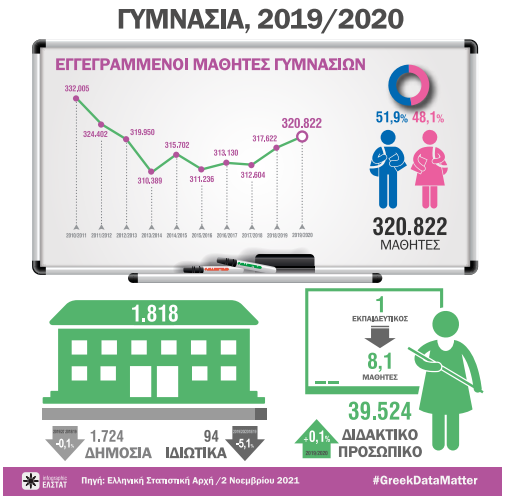


α) Σε ποια κατηγορία υπάρχουν τα περισσότερα βιβλία και σε ποια τα λιγότερα;

β) Ο Γιώργος ισχυρίστηκε ότι η κατηγορία των βιβλίων κοινωνικού περιεχομένου έχει τον μεγαλύτερο αριθμό βιβλίων. Συμφωνείτε ή όχι και γιατί;

γ) Αν ξέρουμε ότι στο βιβλιοπωλείο υπάρχουν 500 λογοτεχνικά βιβλία, πόσα από αυτά είναι αστυνομικά και πόσα φαντασίας;

6. Τον Νοέμβριο του 2021 η ΕΛΣΤΑΤ (Ελληνική Στατιστική Αρχή) αποτύπωσε κάποια στοιχεία σχετικά με τα γυμνάσια στην Ελλάδα στο διπλανό γράφημα (infographics).



α) Σε ποια σχολική χρονιά αναφέρεται η έρευνα;

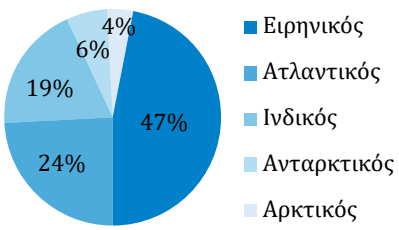
β) Ποιο είναι το ποσοστό των παιδιών των γυμνασίων που είναι κορίτσια;

γ) Πόσα είναι όλα τα παιδιά; Πόσα είναι τα αγόρια και πόσα τα κορίτσια;

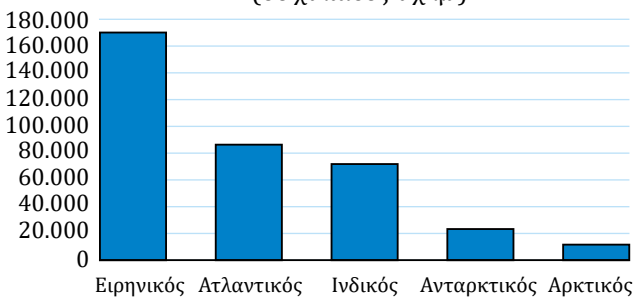
δ) Να γράψετε κάτι που δεν το ξέρατε και το μάθατε από αυτό το γράφημα. Να σχολιάσετε κάτι που σας έκανε εντύπωση. Ρωτήστε τους συμμαθητές και τις συμμαθήτριές σας ή τον καθηγητή/την καθηγήτριά σας για κάτι που δεν καταλαβαίνετε.

7. Παρακάτω φαίνονται στοιχεία για τους πέντε ωκεανούς της Γης.

Έκταση ωκεανών
(ποσοστό επί του συνόλου)



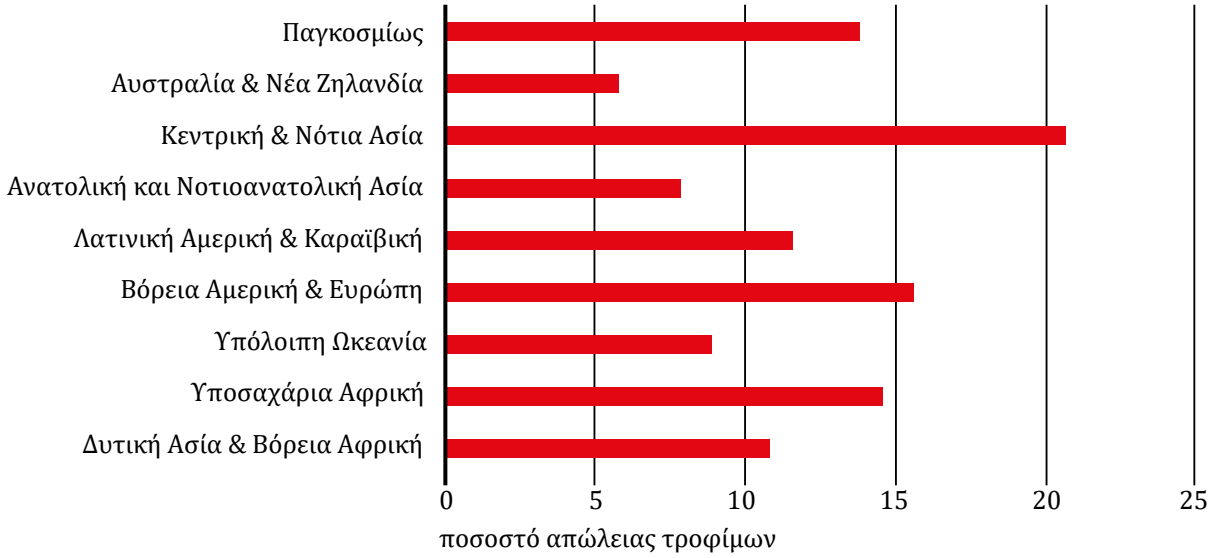
Έκταση ωκεανών
(σε χιλιάδες τ.χλμ.)



Για την εύρεση της έκτασης των ωκεανών δεν κάνουμε στατιστική έρευνα. Μπορούμε όμως να χρησιμοποιήσουμε διαγράμματα όπως τα παραπάνω. Με βάση αυτά τα διαγράμματα, να απαντήσετε στις ερωτήσεις που ακολουθούν.

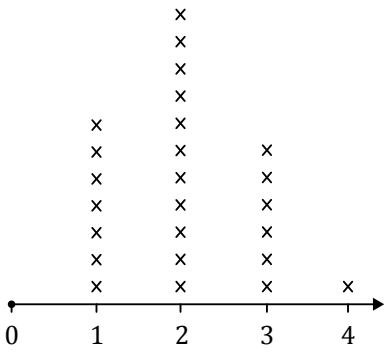
α) Ποιος είναι ο μεγαλύτερος ωκεανός και πόση έκταση καταλαμβάνει;
β) Ποιος είναι ο μικρότερος ωκεανός και πόση έκταση καταλαμβάνει;
γ) Πόσες φορές μεγαλύτερος του Αρκτικού είναι ο Ατλαντικός ωκεανός;
δ) Πόση έκταση καταλαμβάνουν οι πέντε ωκεανοί μαζί;

8. Σύμφωνα με τον FAO (Οργάνωση Τροφίμων και Γεωργίας του ΟΗΕ), η απώλεια και η σπατάλη τροφίμων είναι ένα από τα μεγαλύτερα διεθνή περιβαλλοντικά προβλήματα και συνδέεται με την πρόσβαση στην τροφή, τις τιμές κ.ά. Μια παλιότερη εκτίμηση του FAO (από το 2011) είναι ότι περίπου το 30% των τροφίμων χάνεται ή πετιέται χωρίς να καταναλωθεί. Το 2019 εκτιμήθηκε ότι η απώλεια τροφίμων πριν αυτά φτάσουν στους καταναλωτές είναι περίπου 14%. Στην ιστοσελίδα του FAO (https://www.fao.org/state-of-food-agriculture/2019/en/) και στις σχετικές εκδόσεις του μπορεί κανείς να δει το εξής διάγραμμα:



α) Σε ποια περιοχή του πλανήτη παρατηρείται η μεγαλύτερη απώλεια τροφίμων και σε ποια η μικρότερη;
β) Σε ποιες περιοχές του πλανήτη τα ποσοστά απώλειας τροφίμων είναι μεγαλύτερα από τα παγκόσμια;
γ) Να σκεφτείτε και να συζητήσετε γιατί εμφανίζονται αυτές οι διαφορές ανάμεσα σε διαφορετικές περιοχές του πλανήτη. Τι θα μπορούσε να γίνει για να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα;

9. Ο Γιάννης ρώτησε τους συμμαθητές και τις συμμαθήτριές του πόσα παιδιά υπάρχουν στην οικογένειά τους. Κατέγραψε τις απαντήσεις τους στο διπλανό σημειόγραμμα.



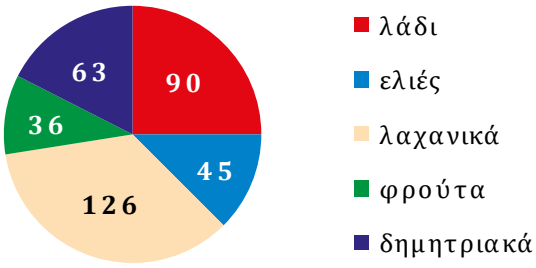
α) Πόσα είναι τα παιδιά του τμήματος του Γιάννη;
β) Να φτιάξετε έναν πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.
γ) Να φτιάξετε ένα ραβδόγραμμα συχνοτήτων και ένα κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων.
δ) Ποιον από όλους τους παραπάνω τρόπους παρουσίασης προτείνετε να χρησιμοποιήσει ο Γιάννης για να δείξει τα αποτελέσματα της έρευνας στο τμήμα του; Γιατί προτείνετε αυτό τον τρόπο; Συζητήστε τις προτάσεις σας με τους συμμαθητές και τις συμμαθήτριές σας.

10. Ένα κυκλικό διάγραμμα δείχνει την πηγή των εισοδημάτων από γεωργικές καλλιέργειες σε μια περιοχή. Από λάθος, αντί να εμφανίζονται τα ποσοστά, εμφανίζονται τα μέτρα των γωνιών. Για παράδειγμα, το 90 δείχνει ότι η γωνία που αντιστοιχεί στα εισοδήματα από λάδι είναι 90°.

α) Να μετατρέψετε το κυκλικό διάγραμμα σε πίνακα σχετικών συχνοτήτων.

β) Να γράψετε δύο συμπεράσματα που προκύπτουν από το συγκεκριμένο διάγραμμα σχετικά με τα εισοδήματα από τις γεωργικές καλλιέργειες.

Εισοδήματα από γεωργικές καλλιέργειες



11. Μία σχολή χορού έχει 50 σπουδαστές με τις παρακάτω ηλικίες:

16	16	15	5	10	6	7	7	9	19	15	16	16	21	21	24	23	22	12	11	29	18	20	15	19
10	11	12	11	13	14	13	16	15	14	12	8	12	14	15	12	10	10	5	8	9	6	25	25	10

α) Να ομαδοποιήσετε τις ηλικίες σε πέντε κλάσεις: μικρότερη από 10 ετών, από 10 έως 15 ετών, από 15 έως 20 ετών, από 20 έως 25 ετών και από 25 ετών και πάνω.

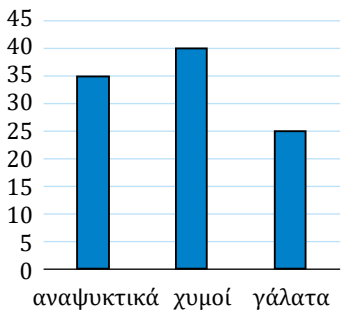
β) Να κάνετε έναν πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.

γ) Να κάνετε ένα ιστόγραμμα συχνοτήτων ή σχετικών συχνοτήτων.

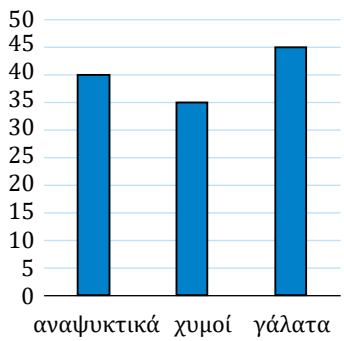
δ) Θα μπορούσαμε να παρουσιάσουμε τα δεδομένα (ηλικίες) με ένα σημειόγραμμα; Με ένα φυλλόγραμμα; Τι θα επιλέγατε εσείς; Εξηγήστε την επιλογή σας.

12. Στα ραβδογράμματα φαίνονται τα αναψυκτικά, οι χυμοί και τα γάλατα που κατανάλωσαν τα παιδιά των δύο πρώτων τάξεων ενός γυμνασίου σε μία μέρα.

Κατανάλωση από μαθητές Α΄ τάξης



Κατανάλωση από μαθητές Β΄ τάξης



α) Πόσα από αυτά καταναλώθηκαν από τα παιδιά κάθε τάξης;

β) Ποιο είδος είναι περισσότερο δημοφιλές σε κάθε τάξη;

γ) Σε ποια τάξη ήταν μεγαλύτερη η κατανάλωση αναψυκτικών;

δ) Ένας μαθητής ισχυρίστηκε ότι η Α΄ τάξη έχει μεγαλύτερη κατανάλωση αναψυκτικών αναλογικά με τη συνολική κατανάλωση σε αναψυκτικά, χυμούς και γάλατα. Συμφωνείτε ή όχι; Εξηγήστε την απάντησή σας.

ε) Ο υπεύθυνος του κυλικείου ζήτησε τη βοήθειά σας για να παραγγείλει γάλατα για την επόμενη μέρα. Ξέρουμε ότι τα παιδιά της Γ΄ τάξης καταναλώνουν γάλατα αντίστοιχης ποσότητας με τα παιδιά της Β΄ τάξης. Τι παραγγελία θα προτείνατε στον υπεύθυνο του κυλικείου να κάνει;

13. Στην οικογένεια της Μαρίας συνηθίζεται να γίνεται μια οικογενειακή συγκέντρωση κάθε καλοκαίρι. Το προηγούμενο καλοκαίρι στην οικογενειακή συγκέντρωση είχαν μαζευτεί 50 συγγενείς (μαζί με τη Μαρία) από τέσσερις γενιές. Η Μαρία κατέγραψε τις ηλικίες τους κι έφτιαξε ένα φυλλόγραμμα.

0 |	1 1 3 5 8 9
1 |	0 1 1 2 3 5 8 8 9 9
2 |	1 2 2 3 3 4 6 6 7 8
3 |	2 6 7 7 8 9
4 |	1 2 2 3 4 5 6 8
5 |	2 3 4 5 8
6 |	3 5 7
7 |	6 9

Υπόμνημα

Το 0 | 1 σημαίνει 1 έτους.
Το 5 | 2 σημαίνει 52 ετών.

α) Να ομαδοποιήσετε τα δεδομένα σε κλάσεις με τον πιο βολικό τρόπο (με βάση τον τρόπο που κατέγραψε η Μαρία τις ηλικίες).

β) Να κατασκευάσετε ένα ιστόγραμμα συχνοτήτων. Σε τι μοιάζει και σε τι διαφέρει από το φυλλόγραμμα;

γ) Ο θείος Μιχάλης είδε το φυλλόγραμμα που έφτιαξε η Μαρία και ισχυρίστηκε ότι μετά από μία δύο δεκαετίες οι οικογενειακές συγκεντρώσεις θα έχουν πολύ περισσότερους συμμετέχοντες, μπορεί και διπλάσιους. Πώς νομίζετε ότι σκέφτηκε ο θείος Μιχάλης, ώστε να κάνει αυτή την πρόβλεψη;

14. Η κατανομή του αριθμού των γυμνασίων ανά πλήθος εγγεγραμμένων μαθητών/μαθητριών στο τέλος της χρονιάς 2019-2020 φαίνεται στον παρακάτω πίνακα. Συγκεκριμένα, φαίνονται στοιχεία για το σύνολο της χώρας και για τρεις από τις δεκατρείς περιφέρειες (πηγή: ΕΛΣΤΑΤ).

Περιφέρεια	Αριθμός γυμνασίων	Αριθμός εγγεγραμμένων μαθητών/μαθητριών το 2020					
		μέχρι 100	101-200	201-300	301-400	401-500	501 και άνω
Σύνολο χώρας	1.724	522	461	524	184	26	7
Δυτ. Μακεδονία	69	41	12	16	0	0	0
Αττική	425	26	94	230	70	5	0
Βόρ. Αιγαίο	54	31	18	5	0	0	0

α) Με βάση τον πίνακα αυτό, να κατασκευάσετε έναν πίνακα συχνοτήτων για το σύνολο της χώρας.

β) Να επιλέξετε έναν τρόπο (πίνακα συχνοτήτων ή διάγραμμα) για να παρουσιάσετε τα στοιχεία για το σύνολο της χώρας σε κάποιον που δεν είναι εξοικειωμένος με τη Στατιστική.

γ) Να βρείτε τη σχετική συχνότητα των γυμνασίων που έχουν μέχρι 100 μαθητές/μαθήτριες στο σύνολο της χώρας και στις τρεις επιμέρους περιφέρειες του πίνακα. Βλέπετε διαφορές; Γράψτε ένα κείμενο μιας παραγράφου για να δώσετε πιθανές ερμηνείες.

15. Η Καλλιόπη αποφάσισε να συγκεντρώσει μερικά στοιχεία από τη ζωή της οικογένειάς της κατά τη διάρκεια των επόμενων δύο μηνών. Αποφάσισε λοιπόν:



α) να καταγράψει πόσο χρόνο περνάει καθημερινά ο αδερφός της μπροστά στον υπολογιστή,

β) να μετρήσει πόσες φορές παίρνει ο ύπνος τη γιαγιά της μπροστά στην τηλεόραση κάθε βράδυ,

γ) να μετρήσει πόσες φορές μαγείρεψε η μαμά της, πόσες ο μπαμπάς της και πόσες η ίδια,

δ) να υπολογίσει τον συνολικό χρόνο που αφιέρωσε για ύπνο (και γενικά ξεκούραση), μελέτη (και εργασίες), διασκέδαση, μετακινήσεις, φαγητό, επικοινωνία με φίλους και φίλες (συμπεριλαμβανομένων των μέσων κοινωνικής δικτύωσης).

Να σκεφτείτε και να προτείνετε τρόπους για να παρουσιάσει τα δεδομένα η Καλλιόπη. Συζητήστε με τους συμμαθητές και τις συμμαθήτριές σας και υποστηρίξτε τις επιλογές σας.

10.2 Μέτρα θέσης και μεταβλητότητας

Δ1. Ομάδες ποδοσφαίρου και μπάσκετ



Α. Η Κατερίνα συμμετέχει στην ποδοσφαιρική ομάδα κοριτσιών του σχολείου της. Κατά τη διάρκεια του χρόνου, ο αριθμός των γκολ που έβαλε η ομάδα σε καθέναν από τους 10 αγώνες που έδωσε είναι:

2, 1, 0, 2, 1, 3, 2, 6, 1, 2

Η Κατερίνα αναζητούσε τρόπο να εκφράσει συνοπτικά πόσα γκολ έβαλε η ομάδα ανά αγώνα. Θυμήθηκε ότι στο δημοτικό είχε μάθει ότι για αυτό μπορεί να χρησιμοποιήσει τον μέσο όρο, τη διάμεσο και την επικρατούσα τιμή. Ποιος από τους τρεις αυτούς δείκτες νομίζετε ότι είναι καλύτερος για να χρησιμοποιήσει η Κατερίνα;

Β. Σε έναν αγώνα του τοπικού πρωταθλήματος, οι εννέα παίκτες δύο ομάδων ανδρών πέτυχαν τους εξής πόντους:

Ομάδα «Ασβοί»	5, 2, 6, 4, 5, 6, 34, 4, 6
Ομάδα «Κουνάβια»	9, 6, 7, 8, 6, 11, 7, 12, 6

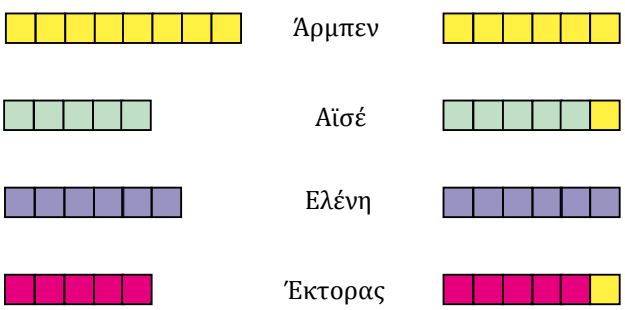
Ποιος από τους τρεις δείκτες (μέσος όρος, διάμεσος, επικρατούσα τιμή) νομίζετε ότι περιγράφει καλύτερα το πόσα περίπου καλάθια έβαλε κάθε παίκτης για κάθε ομάδα χωριστά;

Γ. Ο Έκτορας ισχυρίστηκε ότι τα «Κουνάβια» είναι καλύτερη ομάδα, γιατί όλοι οι παίκτες της έχουν πετύχει περίπου τον ίδιο αριθμό πόντων. Πώς θα μπορούσαμε να περιγράψουμε αριθμητικά την παρατήρηση του Έκτορα; Συζητήστε και προτείνετε τρόπους για να περιγράψουμε πόσο διάσπαρτα είναι τα δεδομένα για τις δύο ομάδες.

Επιλογή συνόλου αριθμών

Δ2. Η δίκαιη μοιρασιά

Ο Έκτορας, η Ελένη, η Αϊσέ και ο Άρμπεν μέτρησαν ο καθένας τα μέλη της οικογένειάς του και έγραψαν το πλήθος τους: 5, 6, 5, 8. Ο Έκτορας έκανε τα εξής σχήματα:



Είπε: «Να, εδώ φαίνεται ότι ο μέσος όρος είναι 6».

Πώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτά τα σχήματα για να συμπεράνουμε τον μέσο όρο;

Συζητάμε

...για μέτρα θέσης

Αν θέλουμε να περιγράψουμε σύντομα πόσα περίπου γκολ έβαλε η ποδοσφαιρική ομάδα σε κάθε αγώνα, μπορούμε να υπολογίσουμε κάποιους δείκτες, όπως είναι η μέση τιμή (ή μέσος όρος), η διάμεσος και η επικρατούσα τιμή.

Για παράδειγμα, αν σε 10 αγώνες έχουμε 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3 γκολ, τότε η μέση τιμή είναι

$$\frac{0+0+1+1+1+2+2+2+2+3}{10}=\frac{14}{10}=1{,}4,$$

η διάμεσος είναι ο μέσος όρος της 5ης και της 6ης παρατήρησης, δηλαδή 1,5, και η επικρατούσα τιμή είναι το 2.

Παράδειγμα στα μέτρα θέσης

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Μέτρα θέσης

Αν έχουμε ένα σύνολο ποσοτικών δεδομένων, μπορούμε να βρούμε τη μέση τιμή και τη διάμεσο.

Για να βρούμε τη **μέση τιμή** (ή **μέσο όρο**), προσθέτουμε όλες τις παρατηρήσεις και διαιρούμε το άθροισμα με το πλήθος των παρατηρήσεων.

Η μέση τιμή και η διάμεσος έχουν νόημα μόνο όταν έχουμε ποσοτικά δεδομένα. Για παράδειγμα, δεν μπορούμε να βρούμε τη μέση τιμή σε δεδομένα που αφορούν το χρώμα των ματιών ή την προτίμηση αθλήματος.

Για να βρούμε τη **διάμεσο**, βάζουμε τις παρατηρήσεις μας σε σειρά (αύξουσα ή φθίνουσα) και βρίσκουμε τη μεσαία παρατήρηση. Αν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιο (ζυγό), η διάμεσος είναι ο μέσος όρος των δύο μεσαίων παρατηρήσεων.

Σε κάθε είδος δεδομένων (ποσοτικά ή ποιοτικά) μπορούμε να βρούμε την **επικρατούσα τιμή**, δηλαδή την τιμή των δεδομένων μας που έχει τη μεγαλύτερη συχνότητα.

Αν έχουμε περισσότερες από μία επικρατούσες τιμές, λέμε ότι έχουμε πολλαπλές κορυφές.

Με τη μέση τιμή, τη διάμεσο και την επικρατούσα τιμή βλέπουμε πού περίπου βρίσκονται τα δεδομένα σε μια νοητή ευθεία αριθμών, γι' αυτό λέμε ότι είναι **μέτρα θέσης**.

Μέτρα μεταβλητότητας

Σε ποσοτικά δεδομένα μπορούμε να βρούμε το **εύρος**, που είναι η διαφορά της μικρότερης τιμής από τη μεγαλύτερη.

Σε ποιοτικά δεδομένα δεν ορίζουμε εύρος.

Με το εύρος βλέπουμε πόσο διάσπαρτα είναι τα δεδομένα, γι' αυτό λέμε ότι είναι ένα **μέτρο μεταβλητότητας**.

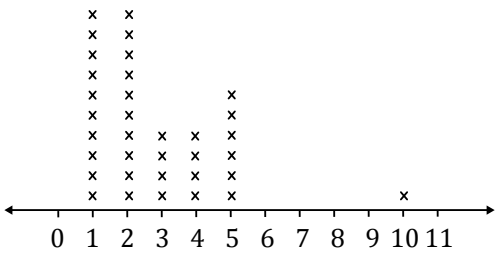
Υπάρχουν κι άλλα μέτρα θέσης και μεταβλητότητας που θα μάθουμε σε επόμενες τάξεις.

Μπορούμε να βρούμε μέτρα θέσης και μέτρα μεταβλητότητας με ψηφιακές εφαρμογές όπως είναι τα υπολογιστικά φύλλα.

Μέτρα θέσης με υπολογιστικό

Δ3. Ζωγραφική τοίχων

Τα παιδιά της Α΄ τάξης αποφάσισαν να ζωγραφίσουν τους τοίχους του σχολείου. Για να μαζέψουν χρήματα, κάθε μέρα όποιος μαθητής ήθελε έδινε ένα ποσό στον ταμία της τάξης. Μία μέρα έδωσαν χρήματα 35 μαθητές και τα ποσά που έδωσαν φαίνονται στο διπλανό σημειόγραμμα.



Α. Ποια είναι η μέση τιμή; Ποια είναι η διάμεσος; Ποιο είναι το εύρος;

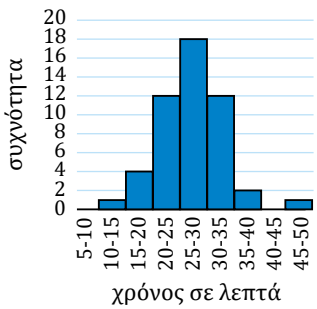
Β. Ποια είναι η επικρατούσα τιμή; Γιατί υπάρχουν δύο κορυφές κατά τη γνώμη σας;

Γ. Συζητήστε σχετικά με το πού θα μπορούσε να οφείλεται η ύπαρξη της παρατήρησης με τιμή 10.

Δ4. Πόσο χρόνο στο λεωφορείο;

Η Μαρία χρονομέτρησε τον χρόνο που περνούσε μέσα στο λεωφορείο για να πάει από το σπίτι στο σχολείο κάθε πρωί για πενήντα μέρες. Με τα δεδομένα αυτά έφτιαξε το διπλανό ιστόγραμμα και υπολόγισε ότι η μέση τιμή είναι 21,5 λεπτά.

Χρόνος της Μαρίας στο λεωφορείο





Α. Ο Γιάννης τής είπε ότι τα δεδομένα τού φαίνονται αρκετά «μαζεμένα στη μέση». Μπορείτε να εξηγήσετε τι βλέπει ο Γιάννης και το λέει αυτό; Ποιο είναι το εύρος των παρατηρήσεων;

Β. Πού μπορεί να οφείλεται η απόμακρη τιμή; Συζητήστε πιθανές ερμηνείες.

Γ. Μπορείτε να βρείτε τη διάμεσο;

Δ. Ο Δημήτρης, που χρησιμοποιεί άλλο λεωφορείο, μαζεύοντας τα αντίστοιχα στοιχεία για τις ίδιες πενήντα μέρες, έφτιαξε ένα άλλο ιστόγραμμα.

Ποιο είναι το εύρος των παρατηρήσεων; Ποια είναι η επικρατούσα κλάση; Πού μπορεί να οφείλεται η ύπαρξη δύο «κορυφών»;

Χρόνος του Δημήτρη στο λεωφορείο



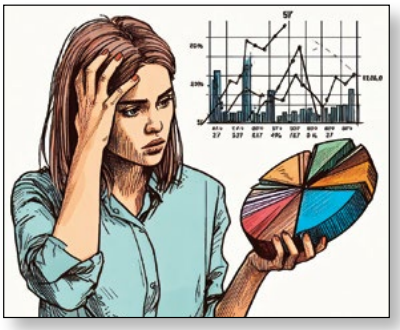
Συζητάμε

...για απόμακρες τιμές και ομαδοποιημένα δεδομένα

Μέτρα θέσης και διαγράμματα

Σε έναν αγώνα δρόμου με εμπόδια, οι χρόνοι 5 αθλητών είναι 120 s, 122 s, 118 s, 210 s, 130 s. Ο χρόνος του 4ου αθλητή, δηλαδή τα 210 s, είναι πολύ μεγαλύτερος από τους υπόλοιπους. Μπορεί να οφείλεται σε μια πτώση ή σε κάποιον άλλο λόγο. Τη λέμε απόμακρη τιμή.

Από τα διαγράμματα συχνά μπορούμε να βρούμε κάποια ή και όλα τα μέτρα θέσης και μεταβλητότητας. Για να το κάνουμε αυτό, μπορεί να χρειαστεί να «μεταφέρουμε» τις παρατηρήσεις από το διάγραμμα (π.χ. ένα ραβδόγραμμα) σε έναν πίνακα συχνοτήτων.



Στην περίπτωση που έχουμε ιστόγραμμα ομαδοποιημένων δεδομένων, δεν έχουμε ακρίβεια στην εύρεση των μέτρων θέσης και μεταβλητότητας, αφού δε γνωρίζουμε τις παρατηρήσεις, αλλά τις κλάσεις στις οποίες βρίσκονται.

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Απόμακρες τιμές

Σε ποσοτικά δεδομένα συχνά υπάρχουν παρατηρήσεις που είναι πολύ μικρές ή πολύ μεγάλες σε σύγκριση με τις υπόλοιπες. Τέτοιες παρατηρήσεις τις λέμε **απόμακρες τιμές**.

Μπορεί να υπάρχουν διαφορετικοί λόγοι ύπαρξης απόμακρων τιμών. Ανάμεσα σε αυτούς είναι η ύπαρξη κάποιων εξαιρετικών περιπτώσεων, αλλά και τα λάθη στις μετρήσεις.

Μέτρα θέσης και μεταβλητότητας σε ομαδοποιημένα δεδομένα

Όταν έχουμε δεδομένα ομαδοποιημένα σε κλάσεις ή δεδομένα που παρουσιάζονται με ένα ιστόγραμμα, μπορούμε να βρούμε κάποια από τα μέτρα θέσης και μεταβλητότητας προσεγγιστικά.

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. **Μια επιχείρηση έχει τον ιδιοκτήτη της (που είναι και διευθυντής της), τον υποδιευθυντή, τον λογιστή και 7 υπαλλήλους. Οι μηνιαίοι μισθοί τους φαίνονται στον διπλανό πίνακα.**

α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο.

β) Ποιο από τα δύο μέτρα θέσης θα προτείνατε να χρησιμοποιήσει κάποιος:

- **για να διαφημίσει την επιχείρηση;**
- **για να επιχειρηματολογήσει ότι η επιχείρηση πρέπει να αυξήσει τις αμοιβές των εργαζομένων;**

Θέση	Μηνιαίος μισθός
Ιδιοκτήτης-διευθυντής	10.000 €
Υποδιευθυντής	3.500 €
Λογιστής	2.500 €
Επτά υπάλληλοι	700 € (ο καθένας)

Απάντηση

α) Υπολογίζουμε τη μέση τιμή: $\frac{10.000+3.500+2.500+7\cdot 700}{10}=\frac{20.900}{10}=2.090$

Δηλαδή ο μέσος μηνιαίος μισθός στην επιχείρηση είναι 2.090 €.

Για να βρούμε τη διάμεσο, βάζουμε σε σειρά τους 10 μισθούς και παίρνουμε τον μέσο όρο του 5ου και του 6ου:

$$700, 700, 700, 700, \underbrace{700, 700}, 700, 2.500, 3.500, 10.000$$

Επομένως η διάμεσος είναι 700 €.

β) Η μέση τιμή (2.090 €) δίνει μια εικόνα για τα έξοδα της επιχείρησης σε μισθούς. Η μέση τιμή επηρεάζεται από τους πολύ υψηλούς μισθούς. Γι' αυτό δίνει μια «καλύτερη» εικόνα από ό,τι η διάμεσος.

Η διάμεσος είναι πιο κοντά στην πραγματικότητα των επτά υπαλλήλων. Έτσι, για μια διαφήμιση της επιχείρησης πιθανότερο είναι να χρησιμοποιήσει κανείς τη μέση τιμή, ενώ για να επιχειρηματολογήσει ότι η επιχείρηση πρέπει να αυξήσει τις αμοιβές των εργαζόμενων, θα χρησιμοποιήσει τη διάμεσο.

Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε

1. Ανά ομάδες καταγράψτε πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα της μέσης τιμής και της διαμέσου. Ανακοινώστε στην τάξη τις απόψεις σας και συζητήστε τες.

2. Να κατασκευάσετε έναν πίνακα έννοιας για τη διάμεσο και έναν για το εύρος.

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Να βρείτε τη μέση τιμή, τη διάμεσο, την επικρατούσα τιμή και το εύρος για τις παρακάτω παρατηρήσεις:

α) χρόνος αναμονής λεωφορείου (σε λεπτά):
1, 2, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 15,

β) αριθμός παιδιών στην οικογένεια:
1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4,

γ) ηλικίες παικτών ομάδας μπάσκετ (σε χρόνια):
17, 19, 22, 23, 24, 26, 27, 28.

2. Να βρείτε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και το εύρος για τα παρακάτω σύνολα δεδομένων:

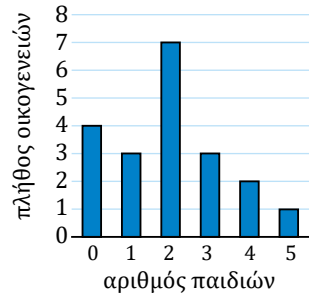
Α: 1, 3, 5, 7, 9 Β: 1, 1, 5, 9, 9

Γ: 4, 4, 5, 6, 6 Δ: 1, 3, 5, 7, 24

Τι ομοιότητες και τι διαφορές παρατηρείτε;

3. Να βρείτε τη μέση τιμή, τη διάμεσο, την επικρατούσα τιμή και το εύρος για τα σύνολα των παρατηρήσεων που αντιστοιχούν στα παρακάτω ραβδογράμματα:

α)



β)



4. Να βρείτε τη διάμεσο σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α)

Τιμές	Συχνότητα
1	4
2	3
3	3

β)

Τιμές	Συχνότητα
1	5
2	3
3	2

γ)

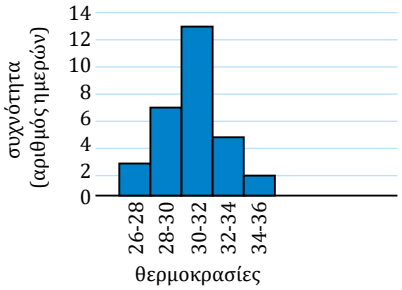
Τιμές	Συχνότητα
1	2
2	3
3	6

Τρίλιζα με τα μέτρα θέσης

Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

5. Στο ιστόγραμμα φαίνεται η μέγιστη θερμοκρασία που κατέγραψε κάθε μέρα του Ιουνίου ένας μετεωρολογικός σταθμός στο λιμάνι της Αλεξανδρούπολης. Να εκτιμήσετε τη διάμεσο και το εύρος των παρατηρήσεων από το ιστόγραμμα.

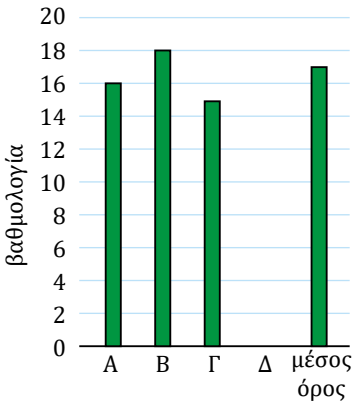
Θερμοκρασία στο λιμάνι της Αλεξανδρούπολης



6. Η Ελισάβετ έχει γράψει στα Μαθηματικά τέσσερα τεστ. Το ραβδόγραμμα παρουσιάζει τη βαθμολογία της στα τεστ Α, Β και Γ, καθώς και τον μέσο όρο όλων των τεστ.

α) Ένας άλλος μαθητής, ο Γιάννης, έγραψε κι αυτός τα τέσσερα τεστ και έχει τον ίδιο μέσο όρο με την Ελισάβετ. Οι βαθμοί του όμως στα τέσσερα τεστ ήταν ίσοι μεταξύ τους. Να σχεδιάσετε πάνω στο ίδιο διάγραμμα και δίπλα στη βαθμολογία της Ελισάβετ τη βαθμολογία που έχει ο Γιάννης.

β) Με βάση το νέο διάγραμμα που φτιάξατε, μπορείτε να σχεδιάσετε τη βαθμολογία που έχει η Ελισάβετ στο τεστ Δ; Εξηγήστε τον τρόπο με τον οποίο σκεφτήκατε.



7. Το Τσεπέλοβο είναι ένα ορεινό χωριό του νομού Ιωαννίνων. Οι υψηλότερες θερμοκρασίες κάθε ημέρας του Ιανουαρίου 2022, όπως καταγράφηκαν από τον μετεωρολογικό σταθμό του χωριού, είναι οι παρακάτω (πηγή: https://meteosearch.meteo.gr):

17,8	14,8	12,7	9,3	11,1	10,1	7,8	8,6	10,5	6,4	6,3	3,5	3,5	11,8	15,3	9,9
8,1	8,2	7,8	6,5	5,4	2,0	1,4	−2,4	2,3	5,6	6,4	8,2	3,4	10,1	9,2	

α) Να βρείτε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και το εύρος των θερμοκρασιών αυτών.

β) Υπάρχουν απόμακρες τιμές; Αν ναι, ποιες είναι; Συζητήστε με τους συμμαθητές και τις συμμαθήτριές σας.

8. Παρακάτω φαίνονται δύο infographics της ΕΛΣΤΑΤ (https://www.statistics.gr/el/elstat-infographics) για διαφορετικά θέματα. Ένα για τα γυμνάσια στην Ελλάδα και ένα για τη γιορτή της μητέρας. Μελετήστε τα και απαντήστε στις ερωτήσεις:

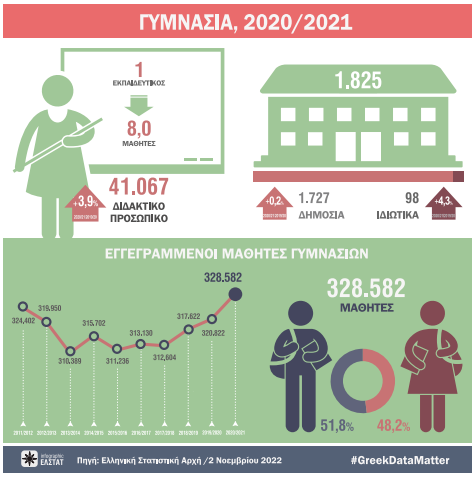
α) Για το σχολικό έτος 2020-21:

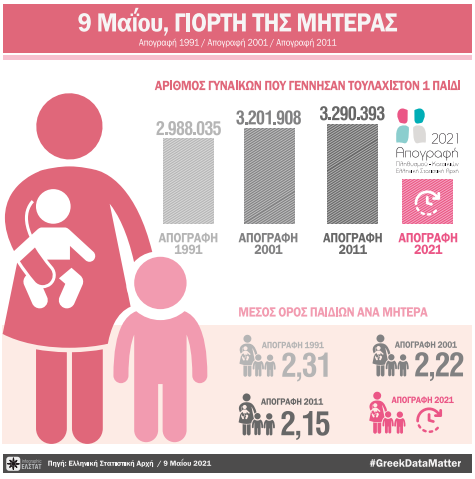
i) πόσοι ήταν κατά μέσο όρο οι μαθητές ανά γυμνάσιο;

ii) πόσοι ήταν οι εκπαιδευτικοί ανά γυμνάσιο;

iii) πόσοι ήταν οι μαθητές ανά εκπαιδευτικό γυμνασίου;

β) Ποιος ήταν ο μέσος όρος παιδιών ανά μητέρα το 1991, το 2001, το 2011; Τι δείχνει αυτή η αλλαγή; Συζητήστε με τους συμμαθητές και τις συμμαθήτριές σας.





9. Η διάμεσος των 9 παρατηρήσεων 1, 2, 6, 4, 3, 1, 1, 3, x είναι το 3. Ποιος αριθμός μπορεί να είναι το x; Ποιοι αριθμοί αποκλείεται να είναι το x;

10. Στο διπλανό ιστόγραμμα φαίνεται η συγκέντρωση (σε mgr/cm^3) ενός ρύπου στον αέρα 50 πόλεων της Ευρώπης.

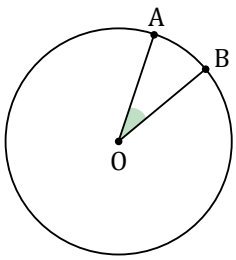
α) Ποιο είναι το εύρος των παρατηρήσεων;

β) Ποια είναι η επικρατούσα κλάση;

γ) Ποια είναι η απόμακρη τιμή και πού νομίζετε ότι μπορεί να οφείλεται;



11. Ένας δάσκαλος έδωσε σε 10 μαθητές έναν κύκλο με μια επίκεντρη γωνία, την $A\hat{O}B$. Στη συνέχεια τους ζήτησε να τη μετρήσουν. Τα αποτελέσματα που βρήκαν ήταν: 34°, 33°, 35°, 37°, 31°, 31°, 35°, 33°, 36°, 32°.



α) Πού νομίζετε ότι οφείλονται οι διαφορετικές μετρήσεις;

β) Μπορείτε να εκτιμήσετε πόσες μοίρες είναι η γωνία $A\hat{O}B$;

12. Έχουμε τα δεδομένα: 2, 5, 1, 7, 6, 5, 2, 3, 7, 4.

α) Να βρείτε τη μέση τιμή και τη διάμεσο.

β) Να αλλάξετε μία τιμή έτσι ώστε η διάμεσος να παραμείνει ίδια, αλλά η μέση τιμή να αυξηθεί κατά 1. Πόσο μεγάλη μπορείτε να κάνετε τη μέση τιμή αλλάζοντας μόνο μία τιμή (και η διάμεσος να παραμένει ίδια);

13. Ο Βαγγέλης μετράει τη θερμοκρασία κάθε μέρα στις 12 το μεσημέρι. Τις έξι πρώτες μέρες της εβδομάδας η μέση θερμοκρασία ήταν 18 °C. Την έβδομη μέρα η θερμοκρασία ήταν 20 °C. Ο Βαγγέλης ισχυρίστηκε ότι η μέση θερμοκρασία της εβδομάδας ήταν 19 °C, επειδή ο μέσος όρος του 18 και του 20 είναι το 19. Συμφωνείτε; Εξηγήστε την άποψή σας.

14. Σε ένα τεστ στα Μαθηματικά, ένα τμήμα 25 μαθητών έχει μέσο όρο 14. Στο ίδιο τεστ, ένα άλλο τμήμα 20 μαθητών έχει μέσο όρο 16. Ο μέσος όρος των 45 μαθητών θα είναι μεγαλύτερος ή μικρότερος του 15; Αφού απαντήσετε στην ερώτηση, προσπαθήστε να τον υπολογίσετε.

15. Η Αλεξάνδρα κατέγραψε τον χρόνο που πέρασε μέσα στο λεωφορείο πηγαίνοντας στο σχολείο κάθε μέρα για έναν μήνα. Οι χρόνοι αυτοί σε λεπτά είναι: 15, 18, 19, 21, 15, 15, 14, 20, 90, 18, 21, 14, 16, 19, 16, 14, 22, 22, 15, 18.

α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, τη διάμεσο, την επικρατούσα τιμή και το εύρος.

β) Να εντοπίσετε την απόμακρη τιμή. Πού νομίζετε ότι μπορεί να οφείλεται;

γ) Στην ερώτηση «πόσο χρόνο πέρασε η Αλεξάνδρα καθημερινά κατά μέσο όρο στο λεωφορείο;» τι θα απαντούσατε. Εξηγήστε την απάντησή σας.

16. Στο ιστόγραμμα φαίνονται οι ηλικίες 50 φοιτητών σε ένα πρόγραμμα μεταπτυχιακών σπουδών.



α) Να κάνετε μια εκτίμηση για τη διάμεσο και το εύρος των ηλικιών.

β) Από το ιστόγραμμα φαίνεται να υπάρχουν απόμακρες τιμές. Ποιες είναι; Πού νομίζετε ότι οφείλονται;

Ασκήσεις στα μέτρα θέσης

Ανακεφαλαίωση

Στατιστική

Ερωτήσεις – ασκήσεις – προβλήματα

1. Συλλέγουμε δεδομένα για τα παιδιά ενός σχολείου. Αντιστοιχίστε καθένα από τα δεδομένα της πρώτης στήλης με το είδος τους που φαίνεται στη δεύτερη στήλη (σε κάθε είδος αντιστοιχίζονται περισσότερα από ένα δεδομένα).

Δεδομένα	Είδος δεδομένων
χρώμα ματιών	κατηγορικά (ποιοτικά)
ύψος	
αριθμός παιδιών στην οικογένεια	ποσοτικά διακριτά
απόσταση του σπιτιού από το σχολείο	
αγαπημένο είδος ζώου	ποσοτικά συνεχή

2. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ).

α) Όταν, για να μελετήσουμε το ύψος των παιδιών του σχολείου μας, παίρνουμε δεδομένα από όλα τα παιδιά του σχολείου, κάνουμε απογραφή. Σ Λ

β) Το ύψος των παιδιών είναι κατηγορικό δεδομένο, διότι με βάση αυτό φτιάχνουμε τις κατηγορίες των κοντών και των ψηλών παιδιών. Σ Λ

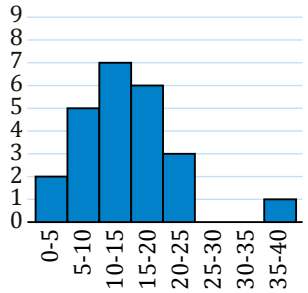
γ) Το ραβδόγραμμα, το κυκλικό διάγραμμα και το ιστόγραμμα είναι διαγράμματα με τα οποία μπορούμε να παρουσιάσουμε τα δεδομένα μιας έρευνας. Σ Λ

δ) Η διάμεσος των αριθμών 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3 είναι 2,5. Σ Λ

ε) Η διάμεσος των αριθμών 11, 9, 17, 3, 12 είναι $\delta = 17$. Σ Λ

3. Στο ιστόγραμμα που ακολουθεί φαίνεται ο χρόνος που περπατούν τα παιδιά του Α3 για να φτάσουν από το σπίτι στο σχολείο.

Χρόνος που περπατούν τα παιδιά του Α3 από το σπίτι στο σχολείο



α) Πόσα είναι τα παιδιά του Α3;

β) Πόσα παιδιά περπατούν λιγότερο από 15 λεπτά για να φτάσουν στο σχολείο;

γ) Πόσα παιδιά περπατούν περισσότερο από 25 λεπτά;

δ) Φτιάξτε έναν πίνακα συχνοτήτων.

ε) Ποιο είναι περίπου το εύρος των δεδομένων; Υπάρχουν απόμακρες τιμές; Αν ναι, ποιες είναι και τι εκφράζουν;

στ) Γράψτε δύο συμπεράσματα που βγάζετε από τα δεδομένα αυτά.

4. Το χρώμα μαλλιών των 24 παιδιών του Α2 φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Χρώμα μαλλιών	Συχνότητα
μαύρο	4
καστανό σκούρο	12
καστανό ανοιχτό	6
ξανθό	2

Φτιάξτε ένα κυκλικό διάγραμμα για το χρώμα των μαλλιών.

5. Τα 10 μέλη ενός χορευτικού συγκροτήματος παραδοσιακών χορών έχουν τις εξής ηλικίες:

16, 29, 18, 21, 27, 30, 31, 36, 24, 44

α) Να κάνετε έναν πίνακα συχνοτήτων χρησιμοποιώντας τις κλάσεις 10-20, 20-30, 30-40 και 40-50.

β) Να σχεδιάσετε ένα ιστόγραμμα.

γ) Να βρείτε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και το εύρος των δεδομένων.

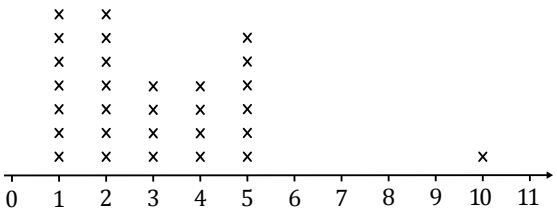
6. Οι παρακάτω παρατηρήσεις δείχνουν τον αριθμό των παιδιών που έχουν 10 οικογένειες:

1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 5

Να βρείτε τη μέση τιμή, τη διάμεσο, την επικρατούσα τιμή και το εύρος των παρατηρήσεων. Να εξηγήσετε τι δείχνει καθένας από αυτούς τους δείκτες.

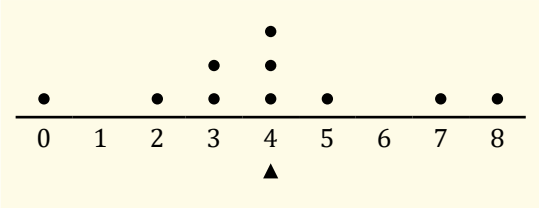
Συνδέσεις και επεκτάσεις

7. Μαζεύοντας χρήματα για να ζωγραφίσουν τους τοίχους του σχολείου, μια μέρα έδωσαν χρήματα 35 μαθητές και μαθήτριες. Τα ποσά που έδωσαν φαίνονται στο παρακάτω σημειόγραμμα:



Ο Ομέρ, θέλοντας να βρει τον μέσο όρο, αποφάσισε να διαγράψει την παρατήρηση 10 και να βρει τον μέσο όρο των υπόλοιπων παρατηρήσεων. Είπε ότι στη Στατιστική συχνά διαγράφουμε τις παρατηρήσεις που είναι πολύ μεγάλες ή πολύ μικρές, τις οποίες οι στατιστικοί τις λένε απόμακρες τιμές. Σκεφτείτε ένα επιχείρημα υπέρ της ενέργειας του Ομέρ και ένα επιχείρημα κατά. Καταγράψτε περιπτώσεις που είναι προτιμότερο να διαγράφουμε τις απόμακρες τιμές και περιπτώσεις που είναι προτιμότερο να μην τις διαγράφουμε. Προτείνεται να εργαστείτε σε ομάδες.

8. Σε κάποιο ερώτημα, οι πιθανές απαντήσεις είναι 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Ρωτήθηκαν 10 άνθρωποι και οι απαντήσεις τους παριστάνονται στο σημειόγραμμα που ακολουθεί:



α) Να καταγράψετε τη συχνότητα κάθε τιμής.

β) Να βρείτε τη μέση τιμή.

γ) Αν οι κουκκίδες ήταν βαρίδια ίσου βάρους πάνω σε μία ράβδο, κάποιος ισχυρίζεται ότι, για να ισορροπήσει η ράβδος, πρέπει να τοποθετήσουμε μία σφήνα στο 4 (όπως στο σχήμα). Συμφωνείτε; Εξηγήστε την απάντησή σας. Πειραματιστείτε με την εφαρμογή και βρείτε ποια σχέση υπάρχει ανάμεσα στη θέση της σφήνας όταν ισορροπεί η ράβδος και στη μέση τιμή των παρατηρήσεων.

Μέση τιμή - ισορροπία

δ) Τι θα συμβεί αν μετακινήσουμε μία κουκκίδα από το 4 στο 1;

ε) Πώς γίνεται, μετακινώντας δύο βαρίδια, η ράβδος να ισορροπεί στο 3; Συζητήστε με τους συμμαθητές και τις συμμαθήτριές σας. Βρήκατε όλοι/όλες τον ίδιο τρόπο;

Ομαδική εργασία

9. Να σχεδιάσετε και να εκτελέσετε μια στατιστική έρευνα στην οποία να μελετήσετε ένα συνεχές ποσοτικό χαρακτηριστικό. Ξεκινήστε επιλέγοντας το ερώτημα. Επιλέξτε τον πληθυσμό στον οποίο θα απευθυνθείτε. Συλλέξτε τα δεδομένα. Οργανώστε τα σε πίνακα συχνοτήτων (αφού επιλέξετε πρώτα τις κλάσεις στις οποίες θα τα ομαδοποιήσετε). Παρουσιάστε τα με κατάλληλα διαγράμματα. Γράψτε τα συμπεράσματά σας από την έρευνα. Υπήρχαν αποτελέσματα που σας εξέπληξαν;

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ 11:

Πειράματα τύχης, ενδεχόμενα και πιθανότητες ενδεχομένων





«Θέλω να τηλεφωνήσω σε έναν συμμαθητή μου, αλλά δε θυμάμαι τα 2 τελευταία ψηφία του τηλεφώνου του. Θυμάμαι μόνο ότι το τελευταίο ψηφίο είναι ή 4 ή 8. Πόσο πιθανό είναι να πετύχω τον αριθμό στην τύχη με την πρώτη προσπάθεια;»

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε φαινόμενα που το αποτέλεσμά τους είναι τυχαίο.

Θα λύσουμε προβλήματα με πολύπλοκα φαινόμενα τα οποία έχουν αβέβαιο αποτέλεσμα. Το αποτέλεσμά τους εξαρτάται από πολλούς παράγοντες και μπορεί να αλλάξει πολύ εύκολα, όταν ένας από τους παράγοντες μεταβληθεί ελάχιστα, όπως για παράδειγμα όταν ρίχνουμε ένα ζάρι. Για τον λόγο αυτό, το αποτέλεσμα φαίνεται να είναι τυχαίο.

ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΕΝΟΤΗΤΕΣ:

11.1 Πειράματα τύχης και καταγραφή των δυνατών αποτελεσμάτων τους
11.2 Πειράματα τύχης και πιθανότητες ενδεχομένων

11.1 Πειράματα τύχης και καταγραφή των δυνατών αποτελεσμάτων τους

Δ1. Τα αποτελέσματα της κλήρωσης

Σε μια πολυήμερη σχολική εκδρομή, τα παιδιά που συμμετέχουν θα διανυκτερεύσουν στους ξενώνες «Κέδρος» και «Νούφαρο». Κάθε ξενώνας έχει δωμάτια με 4 και με 6 κρεβάτια, σε στιλ κουκέτας (διώροφα).

Ποιες είναι όλες οι δυνατές περιπτώσεις για τη διανυκτέρευση ενός παιδιού, ως προς τον ξενώνα, το δωμάτιο και το κρεβάτι (πάνω ή κάτω) που θα κοιμηθεί; Συζητήστε τις ιδέες σας στην τάξη.

Συζητάμε

...για τη μελέτη των πειραμάτων τύχης

Συχνά, συναντάμε καταστάσεις που, για να τις κατανοήσουμε και να τις μελετήσουμε, χρειάζεται να καταγράψουμε όλες τις δυνατές περιπτώσεις, όπως στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Ένα στάδιο έχει στην κερκίδα 9 σειρές των 10 θέσεων, δηλαδή 90 θέσεις, αριθμημένες ως εξής:



- Η κάθε σειρά με ένα από τα λατινικά γράμματα A, B, C, D, E, F, G, H, I, ξεκινώντας από κάτω.
- Η θέση κάθε σειράς με έναν αριθμό από 1 έως 10, ξεκινώντας από αριστερά.

Μπορούμε να καταγράψουμε όλες τις δυνατές θέσεις με τον παρακάτω **πίνακα διπλής εισόδου**.

Σειρά \ Αριθμός θέσης	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10
B	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10
C	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10
D	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9	D10
E	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10
F	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10
G	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9	G10
H	H1	H2	H3	H4	H5	H6	H7	H8	H9	H10
I	I1	I2	I3	I4	I5	I6	I7	I8	I9	I10

Η μία είσοδος του πίνακα (μπλε χρώμα) αντιστοιχεί στο γράμμα της σειράς και η άλλη είσοδος (κόκκινο χρώμα) αντιστοιχεί στον αριθμό της θέσης σε κάθε σειρά. Ο πίνακας μπορεί να μετατραπεί σε σχεδιάγραμμα, το οποίο θα τοποθετηθεί στην είσοδο της κερκίδας, ώστε οι θεατές να βλέπουν πού βρίσκεται η κάθε θέση.

Παραδείγματα μελέτης πειραμάτων τύχης

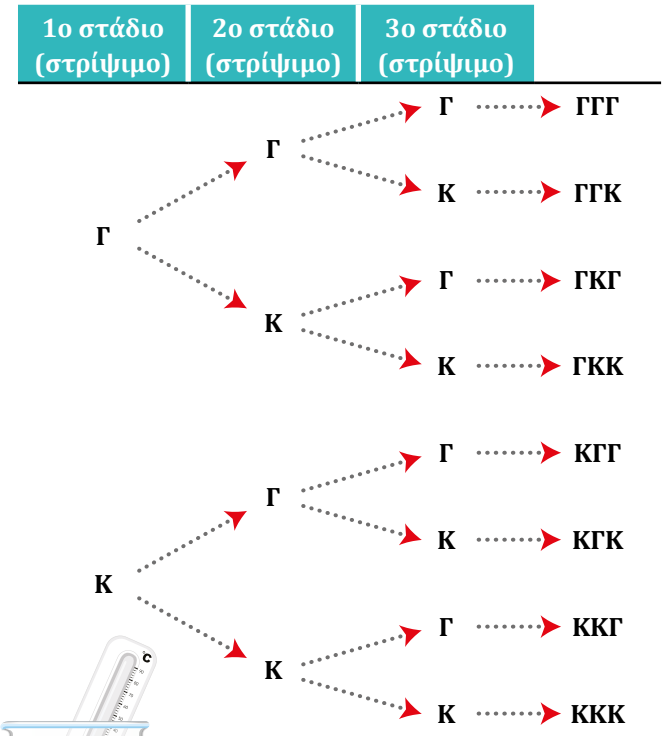
Σε περιπτώσεις που υπάρχουν τρεις ή περισσότερες επιλογές (π.χ. ξενώνας, δωμάτιο, κρεβάτι) ή τρία στάδια σε μια διαδικασία, είναι χρήσιμα τα **δενδροδιαγράμματα**.

Ας δούμε το στρίψιμο ενός κέρματος 3 φορές, όπου το Γ σημαίνει «γράμματα» και το Κ «κεφαλή».

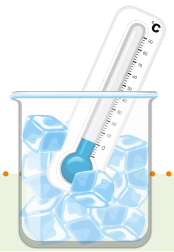


Υπάρχουν 8 δυνατά αποτελέσματα, τα ΓΓΓ, ΓΓΚ, ΓΚΓ, ΓΚΚ, ΚΓΓ, ΚΓΚ, ΚΚΓ, ΚΚΚ.

Υπάρχουν φαινόμενα, όπως το στρίψιμο ενός κέρματος, που δεν μπορούμε να προβλέψουμε με βεβαιότητα το αποτέλεσμά τους, ακόμα κι αν προσπαθήσουμε να τα επαναλάβουμε με τον ίδιο ακριβώς τρόπο. Αυτά τα φαινόμενα ονομάζονται **πειράματα τύχης** και τα μελετάμε καταγράφοντας όλα τα δυνατά αποτελέσματά τους.



Φαινόμενα που μπορούμε να προβλέψουμε με βεβαιότητα την εξέλιξή τους, π.χ. το λιώσιμο του πάγου σε συγκεκριμένη θερμοκρασία, τα ονομάζουμε **αιτιοκρατικά**.



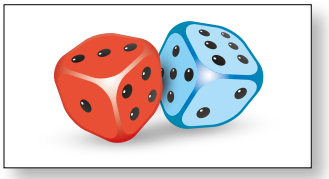
Ταξινομούμε φαινόμενα

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης το ονομάζουμε **δειγματικό χώρο** του πειράματος τύχης.	Για να συμβολίσουμε τον δειγματικό χώρο, συνήθως χρησιμοποιούμε το Ω.
Ένα αποτέλεσμα ή ένα σύνολο αποτελεσμάτων του πειράματος τύχης το λέμε **ενδεχόμενο** του πειράματος τύχης.	Στρίβουμε τρεις φορές ένα συνηθισμένο κέρμα, με όψεις Κ και Γ, και καταγράφουμε τις ενδείξεις του. Δύο τρόποι να καταγράψουμε τα δυνατά αποτελέσματα είναι: {ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ, ΓΚΚ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ} και {0Κ, 1Κ, 2Κ, 3Κ} Μερικά ενδεχόμενα είναι τα εξής: ΚΓΓ, ΓΚΚ, ή το 1Κ, το οποίο αντιστοιχεί στο {ΚΓΓ, ΓΚΓ, ΓΓΚ}. Δεν είναι ενδεχόμενο το ΓΓΓΓ, αφού στρίψαμε το κέρμα τρεις φορές και όχι τέσσερις.

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. **Ρίχνουμε δύο συνηθισμένα ζάρια και καταγράφουμε τις ενδείξεις τους. Να καταγράψετε όλα τα δυνατά αποτελέσματα.**



Απάντηση

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον παρακάτω πίνακα διπλής εισόδου.

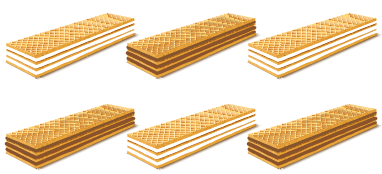
Ζάρι 1 \ Ζάρι 2	1	2	3	4	5	6
1	11	12	13	14	15	16
2	21	22	23	24	25	26
3	31	32	33	34	35	36
4	41	42	43	44	45	46
5	51	52	53	54	55	56
6	61	62	63	64	65	66

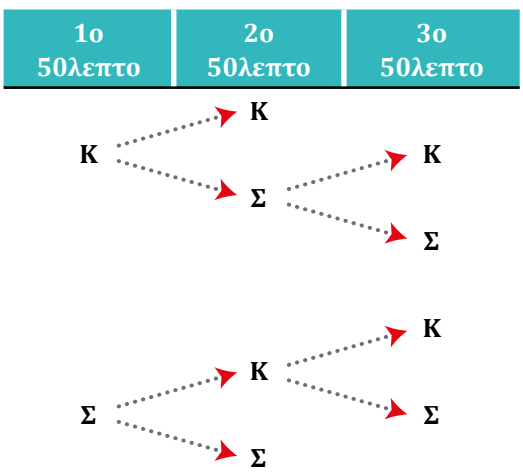
2. **Σε έναν αυτόματο πωλητή γκοφρέτας, οι γκοφρέτες έχουν δύο γεύσεις, κρέμα (Κ) και σοκολάτα (Σ). Βάζοντας 50 λεπτά του ευρώ, ο πωλητής βγάζει αυτόματα μία συσκευασία γκοφρέτας, τυχαία (το ίδιο πιθανό είναι να επιλεγεί οποιαδήποτε από τις δύο γεύσεις). Η Κωνσταντίνα πηγαίνει στον αυτόματο πωλητή και θέλει να πάρει δύο γκοφρέτες ίδιας γεύσης για τα παιδιά της. Πόσα χρήματα θα ξοδέψει;**

Απάντηση

Η Κωνσταντίνα βάζει πεντηντάλεπτα στον πωλητή και παίρνει γκοφρέτες, μέχρι να πάρει δύο ίδιας γεύσης. Στο διπλανό δενδροδιάγραμμα φαίνονται όλα τα δυνατά αποτελέσματα.

Με 2 πενηντάλεπτα, δηλαδή 1 ευρώ, η Κωνσταντίνα μπορεί να πάρει δύο γκοφρέτες ίδιας γεύσης (ΚΚ ή ΣΣ), αλλά μπορεί και όχι, αν, για παράδειγμα, οι δύο πρώτες γκοφρέτες είναι ΚΣ ή ΣΚ. Τότε θα χρειαστεί να πάρει και τρίτη. Επομένως θα ξοδέψει 1,5 ευρώ.





Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Ποια από τα παρακάτω είναι κατάλληλα για να τα μελετήσουμε ως πειράματα τύχης;

α) Αφήνουμε ένα κέρμα να πέσει στο έδαφος από ύψος ενός μέτρου και θέλουμε να προβλέψουμε σε πόσο χρόνο θα φτάσει στο έδαφος.

β) Αυξάνουμε τη θερμοκρασία ενός δοχείου «καθαρού» νερού πάνω από τους 100 °C και θέλουμε να δούμε σε τι φυσική κατάσταση θα βρεθεί.

γ) Στρίβουμε τρία συνηθισμένα κέρματα και θέλουμε να προβλέψουμε τις όψεις τους όταν σταματήσουν.

δ) Σε ένα μαιευτήριο, σήμερα έχουν γεννηθεί 20 παιδιά. Επιλέγουμε τυχαία ένα από αυτά, από μια λίστα που αναφέρει μόνο την ώρα γέννησης, και θέλουμε να προβλέψουμε το φύλο του.

2. Στρίβουμε τρεις φορές ένα συνηθισμένο κέρμα, με όψεις Κ (κεφαλή) και Γ (γράμματα). Ένας δειγματικός χώρος του πειράματος τύχης είναι:

$$\Omega = \{ΚΚΚ, ΓΓΓ, ΚΓΓ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΓΚΚ, ΓΓΚ, ΓΚΓ\}$$

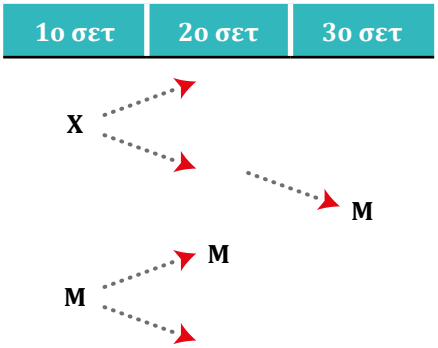
Να βρείτε ποια από τα στοιχεία του Ω αντιστοιχούν στα ενδεχόμενα:

α) «εμφανίζεται ακριβώς δύο φορές Γ»,

β) «εμφανίζεται τουλάχιστον δύο φορές Κ».

3. Η Χριστίνα και ο Μιχάλης παίζουν τένις και ο αγώνας τελειώνει όταν κάποιος κερδίσει δύο σετ. Αν το Χ σημαίνει ότι το σετ το κέρδισε η Χριστίνα και το Μ ότι το κέρδισε ο Μιχάλης, να συμπληρώσετε το δενδροδιάγραμμα με γράμματα και βέλη όπου χρειάζεται.





4. Έχουμε τρεις κάρτες με τους αριθμούς 1, 2 και 3. Οι κάρτες είναι κλειστές (δε φαίνεται, ούτε γνωρίζουμε τον αριθμό κάθε κάρτας). Επιλέγουμε τυχαία δύο κάρτες, τη μία μετά την άλλη, και καταγράφουμε τα αποτελέσματα του πειράματος τύχης στον εξής δειγματικό χώρο:

$$\Omega = \{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)\}$$

Σε ποιο ή σε ποια από τα στοιχεία του Ω αντιστοιχεί καθένα από τα παρακάτω ενδεχόμενα;

α) Επιλέξαμε πρώτα την κάρτα με τον αριθμό 2 και μετά την κάρτα με τον αριθμό 1.

β) Επιλέξαμε πρώτα την κάρτα με τον αριθμό 1 και μετά την κάρτα με τον αριθμό 2.

γ) Επιλέξαμε τις κάρτες με τους αριθμούς 1 και 2.

δ) Επιλέξαμε την κάρτα με τον αριθμό 3.

5. Ρίχνουμε ένα συνηθισμένο ζάρι 2 φορές και καταγράφουμε τους αριθμούς που έρχονται.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί την παραπάνω διαδικασία μπορούμε να τη μελετήσουμε ως πείραμα τύχης.

β) Πόσα είναι τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος τύχης;

γ) Πόσα και ποια αποτελέσματα αντιστοιχούν σε «διπλή ζαριά»;

Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

6. Δεν υπάρχουν μόνο ζάρια με έξι έδρες. Αν ρίξουμε δύο φορές ένα ζάρι με οκτώ έδρες (που έχουν τους αριθμούς από 1 έως 8), τότε να περιγράψετε με έναν δειγματικό χώρο όλα τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος τύχης.



7. Έχουμε τις κάρτες της άσκησης 4. Αυτή τη φορά επιλέγουμε τυχαία μία κάρτα, καταγράφουμε τον αριθμό της, την ξανακλείνουμε, ανακατεύουμε τις κάρτες, ώστε πάλι να μη γνωρίζουμε ποιος αριθμός κρύβεται σε κάθε κάρτα, και επιλέγουμε πάλι τυχαία μία κάρτα από τις τρεις.

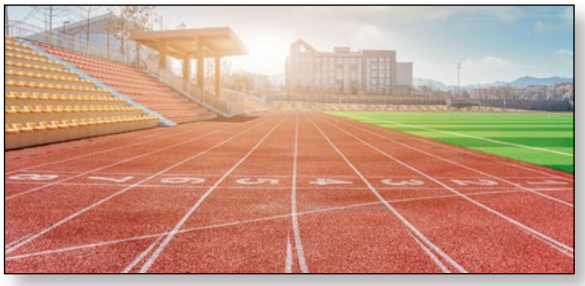
α) Να περιγράψετε με έναν δειγματικό χώρο όλα τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος τύχης.

β) Το ενδεχόμενο $\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ είναι ένα από τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος τύχης; Πώς θα περιγράφατε λεκτικά αυτό το ενδεχόμενο;

γ) Το ενδεχόμενο $\{(1,2,3)\}$ είναι ένα από τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος τύχης;

8. Στρίβουμε τέσσερα συνηθισμένα κέρματα το ένα μετά το άλλο και καταγράφουμε τις όψεις τους όταν σταματήσουν. Πόσα και ποια είναι όλα τα δυνατά αποτελέσματα;

9. Η Ζωή έχει δηλώσει συμμετοχή, ως δρομέας, στο σχολικό πρωτάθλημα δρόμου ημιαντοχής 800 μέτρων. Ο κανονισμός λέει ότι κάθε δρομέας θα τρέξει τρεις φορές. Ο στίβος του σταδίου έχει 7 διαδρομές, τις 1, 2, 3, 4, 5, 6 και 7, και η διαδρομή για κάθε δρομέα επιλέγεται τυχαία κάθε φορά (με κλήρωση). Πόσες διαφορετικές τριάδες διαδρομών υπάρχουν για τις τρεις φορές που θα τρέξει η Ζωή;



10. Σε ένα κουτί υπάρχουν 7 μονόχρωμες μπάλες που διαφέρουν μόνο ως προς το χρώμα τους. Υπάρχουν 2 κόκκινες, 2 μπλε και 3 πράσινες. Δεν μπορούμε να δούμε τις μπάλες, αλλά μπορούμε να τις πιάσουμε από ένα άνοιγμα στο πάνω μέρος του κουτιού. Επιλέγουμε τυχαία δύο μπάλες, τις βγάζουμε από το κουτί τη μία μετά την άλλη και καταγράφουμε το χρώμα τους. Ποια είναι όλα τα δυνατά αποτελέσματα; Ποια θα ήταν τα δυνατά αποτελέσματα, αν επιστρέφαμε στο κουτί την πρώτη μπάλα πριν επιλέξουμε τη δεύτερη;

Τρίλιζα με πειράματα τύχης

11.2 Πειράματα τύχης και πιθανότητες ενδεχομένων

Δ1. Γενέθλια

Επιλέξτε τυχαία έναν μήνα του χρόνου και έναν αριθμό που να αντιστοιχεί σε μια ημέρα αυτού του μήνα. Πόσο πιθανό είναι τα γενέθλια του συμμαθητή ή της συμμαθήτριάς σας που κάθεται πιο κοντά σας να είναι την ημερομηνία που επιλέξατε; Συζητήστε τις απαντήσεις σας στην τάξη.

Συζητάμε

...για πιθανότητες

Ας πάρουμε το παράδειγμα των θέσεων της κερκίδας της προηγούμενης ενότητας.

Η κερκίδα είναι άδεια και ένας θεατής επιλέγει **τυχαία** μια θέση (δεν έχουμε λόγο να σκεφτούμε ότι η επιλογή κάποιας θέσης είναι πιθανότερη από την επιλογή κάποιας άλλης). Δηλαδή έχουμε 90 εξίσου πιθανές επιλογές θέσης ή αλλιώς 90 **ισοπίθανα** αποτελέσματα του πειράματος τύχης.

I1	I2	I3	I4	I5	I6	I7	I8	I9	I10
H1	H2	H3	H4	H5	H6	H7	H8	H9	H10
G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9	G10
F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10
E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10
D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9	D10
C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10
B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10
A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10

Κερκίδα →
Κενός χώρος →
Γήπεδο →

Ερώτημα 1: Πόσο πιθανό είναι ο θεατής να επιλέξει τη θέση D3;
Η επιλογή της D3 είναι ένα από τα 90 ισοπίθανα αποτελέσματα του πειράματος τύχης. Γι' αυτό θεωρούμε την **πιθανότητα ίση με** $\frac{1}{90}$.

Ερώτημα 2: Πόσο πιθανό είναι ο θεατής να επιλέξει θέση που είναι στη σειρά Ε; Αυτό συμβαίνει αν επιλέξει μία από τις θέσεις Ε1, Ε2, ..., Ε10.

Η πιθανότητα αυτή είναι ίση με $\frac{10}{90}$ ή $\frac{1}{9}$.

Τα Ε1, Ε2, ..., Ε10 είναι όλα τα **ευνοϊκά** αποτελέσματα του **ενδεχομένου** ο θεατής να επιλέξει θέση στη σειρά Ε. Άρα γράφουμε:

$$\frac{\text{ευνοϊκά αποτελέσματα}}{\text{όλα τα δυνατά αποτελέσματα}} = \frac{10}{90} = \frac{1}{9}$$

Για το **ερώτημα 2** μπορούμε να σκεφτούμε και αλλιώς:
Καταγράφουμε μόνο τη σειρά της θέσης που επιλέγει ο θεατής. Για παράδειγμα, αν επιλέξει τη Β8, καταγράφουμε Β. Τότε τα δυνατά αποτελέσματα είναι 9, τα οποία είναι ισοπίθανα, καθώς κάθε σειρά έχει 10 θέσεις. Επομένως η πιθανότητα ο θεατής να επιλέξει θέση στη σειρά Ε είναι $\frac{1}{9}$.

Γράφουμε:

$$\frac{\text{ευνοϊκά αποτελέσματα}}{\text{όλα τα δυνατά αποτελέσματα}} = \frac{1}{9}$$

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Πιθανότητα ενδεχομένου ενός πειράματος τύχης ονομάζουμε τον αριθμό από 0 έως 1 που εκφράζει τον βαθμό βεβαιότητάς μας για την πραγματοποίηση του ενδεχομένου.

Υπάρχουν πειράματα τύχης που μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έχουν **ισοπίθανα** αποτελέσματα πλήθους δ. Τότε, για να υπολογίσουμε την πιθανότητα $P(A)$ ενός ενδεχομένου Α, με ευνοϊκά αποτελέσματα πλήθους ε, χρησιμοποιούμε τον **κλασικό ορισμό πιθανότητας**:

$$P(A)=\frac{\text{πλήθος ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το A}}{\text{πλήθος όλων των αποτελεσμάτων}}=\frac{\varepsilon}{\delta}$$

Σύντομη αναδρομή στην ιστορία των πιθανοτήτων

Στο στρίψιμο ενός συνηθισμένου κέρματος τρεις φορές, καθένα από τα ενδεχόμενα $\{ΚΓΓ\}$ και $\{ΓΚΚ\}$ έχει πιθανότητα $\frac{1}{8}$, το $\{ΚΚΚ, ΓΓΓ\}$ έχει πιθανότητα $\frac{1}{4}$ και το $\{ΚΚΓ, ΓΚΓ, ΓΓΚ\}$ έχει πιθανότητα $\frac{3}{8}$. Γράφουμε τα παραπάνω ως εξής:

$$P(\{ΚΓΓ\})=\frac{1}{8}$$

$$P(\{ΓΚΚ\})=\frac{1}{8}$$

$$P(\{ΚΚΚ, ΓΓΓ\})=\frac{1}{4}$$

$$P(\{ΚΚΓ, ΓΚΓ, ΓΓΚ\})=\frac{3}{8}$$

Το τίμιο κέρμα

Γιατί νομίζετε ότι η πιθανότητα είναι ένας αριθμός από 0 έως 1; Για παράδειγμα, γιατί δεν είναι μεγαλύτερος από 1;

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. Ρίχνουμε δύο συνηθισμένα ζάρια. Ποια είναι η πιθανότητα να φέρουμε:

α) δύο εξάρια;

β) ένα εξάρι και ένα πεντάρι;

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

Απάντηση

Στον πίνακα φαίνονται όλα τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος τύχης (δειγματικός χώρος). Είναι συνολικά 36.

Τα ζάρια είναι συνηθισμένα, άρα θεωρούμε τα 36 αποτελέσματα ισοπίθανα και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας.

α) Αν Α είναι το ενδεχόμενο «και τα δύο ζάρια φέρνουν 6», τότε $A=\{66\}$.

Η πιθανότητα του ενδεχομένου Α είναι $P(A)=\frac{1}{36}$.

Όταν ένα ζάρι είναι «συνηθισμένο», μοιάζει με αυτά που γνωρίζουμε και μπορούμε να το θεωρήσουμε **τίμιο**. Δηλαδή δεν έχουμε λόγους να θεωρούμε κάποια από τις έδρες πιο πιθανή ως αποτέλεσμα.

β) Ονομάζουμε Β το ενδεχόμενο «το ένα ζάρι φέρνει 5 και το άλλο 6», το οποίο είναι $B=\{56, 65\}$.

Σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας:

$$P(B)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$$

Άλλος τρόπος για το ερώτημα (β):
Το Β έχει διπλάσια ευνοϊκά αποτελέσματα από το Α, άρα $P(B)=2\cdot\frac{1}{36}=\frac{2}{36}$.

2. Σε ένα κουτί υπάρχουν 3 μονόχρωμες μπάλες, 1 κόκκινη και 2 μπλε, οι οποίες διαφέρουν μόνο ως προς το χρώμα τους. Επιλέγουμε τυχαία δύο μπάλες. Να υπολογίσετε την πιθανότητα οι μπάλες να είναι μπλε σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) Βγάζουμε δύο μπάλες από το κουτί, τη μία μετά την άλλη.

β) Επιλέγουμε τυχαία μια μπάλα, καταγράφουμε το χρώμα της και την ξαναβάζουμε στο κουτί. Στη συνέχεια επιλέγουμε τυχαία πάλι μια μπάλα από το κουτί και καταγράφουμε το χρώμα της.

Απάντηση

Έχουμε 1 κόκκινη (Κ) και 2 μπλε (M_1, M_2).

α) Ένας δειγματικός χώρος του πειράματος τύχης είναι ο $\{KM_1, KM_2, M_1K, M_1M_2, M_2K, M_2M_1\}$.

Το ευνοϊκό αποτέλεσμα (ενδεχόμενο) για το ερώτημα είναι το $\{M_1M_2, M_2M_1\}$. Εφόσον η επιλογή είναι τυχαία, κάθε αποτέλεσμα είναι ισοπίθανο, άρα σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό:

$$P(\{M_1M_2, M_2M_1\})=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

β) Η μπάλα που επιλέγουμε αρχικά ξαναμπαίνει στο κουτί και μπορεί να την ξαναεπιλέξουμε. Άρα υπάρχουν επιπλέον τα αποτελέσματα ΚΚ, M_1M_1 και M_2M_2. Ένας δειγματικός χώρος είναι:

$$\{KM_1, KM_2, M_1K, M_1M_2, M_2K, M_2M_1, KK, M_1M_1, M_2M_2\}$$

Το ευνοϊκό αποτέλεσμα (ενδεχόμενο), σύμφωνα με το ερώτημα, είναι το $\{M_1M_2, M_2M_1, M_1M_1, M_2M_2\}$. Σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό:

$$P(\{M_1M_2, M_2M_1, M_1M_1, M_2M_2\})=\frac{4}{9}$$

Παραδείγματα για εμβάθυνση στις πιθανότητες

Τρίλιζα με τις πιθανότητες

Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε

Να κατασκευάσετε έναν πίνακα έννοιας για την πιθανότητα ενδεχομένου.

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Στρίβουμε τρεις φορές ένα συνηθισμένο κέρμα. Χρησιμοποιώντας τον δειγματικό χώρο:

$\{ΚΚΚ, ΓΓΓ, ΚΓΓ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΓΚΚ, ΓΓΚ, ΓΚΓ\}$

να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

α) ΚΚΓ,

β) $\{ΚΚΚ, ΓΓΓ\}$,

γ) «έρχεται ακριβώς 1 φορά Κ».

2. Στρίβουμε ένα συνηθισμένο ζάρι. Είναι τα ενδεχόμενα Α και Β ισοπίθανα σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις;

α) Α: έρχεται άρτιο αποτέλεσμα,
Β: έρχεται περιττό αποτέλεσμα.

β) Α: έρχεται 1, Β: έρχεται 2 ή 3.

γ) Α: έρχεται αποτέλεσμα μεγαλύτερο του 3,
Β: έρχεται αποτέλεσμα μικρότερο του 3.

3. **α)** Στρίβουμε ένα συνηθισμένο κέρμα. Ποια είναι η πιθανότητα να έρθει γράμματα (Γ);

β) Πέντε παιδιά έστριψαν ένα συνηθισμένο κέρμα 1.000 φορές το καθένα.

	Μαρία	Κώστας	Τζο	Μελίνα	Κριστιάν
Κ	480	502	496	487	507
Γ	520	498	504	513	493

Με τη βοήθεια του πίνακα, να υπολογίσετε τη σχετική συχνότητα του ενδεχομένου «ήρθε Γ» για κάθε παιδί και τη διαφορά της από την απάντησή σας στο ερώτημα (α).

Στρίψιμο κέρματος

4. Η Αθηνά στρίβει ένα συνηθισμένο κέρμα 10 φορές. Τις 5 πρώτες φορές ήρθε γράμματα. Είναι σωστή η πρόβλεψη «θα έρθει κεφαλή τις επόμενες 5 φορές»;

5. Έχουμε τρεις κάρτες με τους αριθμούς 1, 2 και 3. Επιλέγουμε τυχαία δύο κάρτες, χωρίς να γνωρίζουμε τον αριθμό τους. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον δειγματικό χώρο:

$$\Omega = \{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)\}$$

για να απαντήσουμε στο ερώτημα «ποια είναι η πιθανότητα να επιλέξουμε τις κάρτες με τους αριθμούς 1 και 2»;

Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

6. Στρίβουμε 4 συνηθισμένα κέρματα. Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου:

α) Ακριβώς 1 από τα κέρματα δείχνει «γράμματα».

β) Ακριβώς 1 από τα κέρματα δείχνει «κεφαλή».

γ) Ακριβώς 2 διαδοχικά από τα 4 στριψίματα έχουν διαφορετική ένδειξη.

δ) Όλα τα διαδοχικά στριψίματα έχουν διαφορετική ένδειξη.

7. Δύο παίκτες, Α και Β, παίζουν ένα παιχνίδι. Κάποιος από τους δύο στρίβει δύο νομίσματα του 1 ευρώ και ένα των 2 ευρώ. Ο παίκτης Α κερδίζει έναν πόντο στις περιπτώσεις που έρχεται:

α) «γράμματα» στο νόμισμα των 2 ευρώ, ή

β) «γράμματα» και στα δύο νομίσματα του 1 ευρώ.

Σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση κερδίζει ο παίκτης Β.

Έχουν και οι δύο παίκτες την ίδια πιθανότητα να κερδίσουν πόντο;

8. Σε ένα κουτί υπάρχουν 4 κόκκινες, 2 μπλε και 3 πράσινες μπάλες, που διαφέρουν μόνο ως προς το χρώμα τους. Δεν μπορούμε να δούμε τις μπάλες, αλλά μπορούμε να τις πιάσουμε από ένα άνοιγμα στο πάνω μέρος του κουτιού.



α) Επιλέγουμε τυχαία μία από τις μπάλες. Τι χρώμα είναι πιθανότερο να έχει;

β) Επιλέγουμε τυχαία δύο μπάλες.

i) Πόσα είναι τα δυνατά αποτελέσματα του παραπάνω πειράματος τύχης;

ii) Ποια είναι η πιθανότητα οι δύο μπάλες να έχουν το ίδιο χρώμα;

γ) Επιλέγουμε τυχαία μία μπάλα, καταγράφουμε το χρώμα της και την ξαναβάζουμε στο κουτί. Στη συνέχεια επιλέγουμε τυχαία πάλι μία μπάλα από το κουτί. Να απαντήσετε στα ίδια ερωτήματα με το (β).

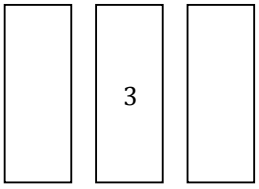
9. 

Από τα παιδιά ενός σχολείου, το 30% παίζει μπάσκετ και το 40% παίζει ποδόσφαιρο. Δεν υπάρχει κάποιο παιδί που να παίζει και τα δύο αθλήματα. Επιλέγουμε ένα παιδί τυχαία. Ποια είναι η πιθανότητα το παιδί που επιλέξαμε:

α) να παίζει μπάσκετ;

β) να παίζει μπάσκετ ή ποδόσφαιρο;

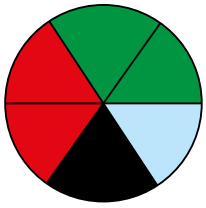
γ) να μην παίζει ούτε μπάσκετ ούτε ποδόσφαιρο;

10. 

Η Στέλλα και η Καλλιόπη παίζουν ένα παιχνίδι. Έχουν έξι κάρτες με τους αριθμούς 1 έως 6, με τους οποίους θα φτιάξουν έναν τριψήφιο αριθμό. Επιλέγουν στην τύχη μία κάρτα και γράφουν τον αριθμό σε μία από τρεις θέσεις, χωρίς η μία να βλέπει την άλλη. Βάζουν στην άκρη αυτή την κάρτα και συνεχίζουν με την επόμενη και μετά με την τρίτη. Κερδίζει όποια σχηματίσει τον μεγαλύτερο αριθμό.

Την πρώτη φορά έφεραν 3 και το έγραψαν στις δεκάδες και οι δύο. Στη δεύτερη ρίψη έφεραν 5. Η Στέλλα το έγραψε στις εκατοντάδες και η Καλλιόπη στις μονάδες. Ποια από τις δύο έχει περισσότερες πιθανότητες να κερδίσει;

11. Ο Βασίλης παίζει τάβλι με την Αθανασία και είναι η σειρά του να ρίξει τα ζάρια. Αν φέρει σύνολο 3, θα χάσει σίγουρα, ενώ αν φέρει εξάρες (6 και 6), θα κερδίσει σίγουρα. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις το παιχνίδι συνεχίζεται. Η Αθανασία λέει στον Βασίλη πριν ρίξει τα ζάρια: «Όσο πιθανό είναι να χάσεις, αλλό τόσο πιθανό είναι να κερδίσεις». Συμφωνείτε με την Αθανασία;

12. 

Ο τροχός της τύχης του σχήματος είναι χωρισμένος σε 6 ίσα μέρη: 2 κόκκινα, 2 πράσινα, 1 γαλάζιο και 1 μαύρο. Στρίβουμε τον τροχό 3 φορές και καταγράφουμε τα χρώματα που έρχονται. Να υπολογίσετε την πιθανότητα να έρθει:

α) και τις τρεις φορές γαλάζιο,

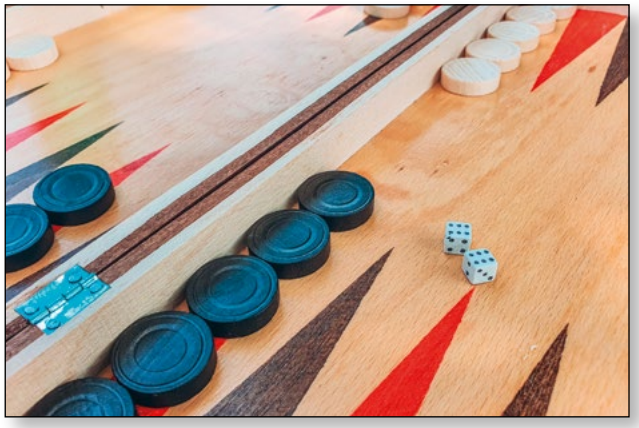
β) και τις τρεις φορές πράσινο,

γ) μαύρο, γαλάζιο, μαύρο,

δ) πράσινο, κόκκινο, πράσινο.

Βρείτε τις πιθανότητες

Η τυχαιότητα



Πειράματα τύχης, ενδεχόμενα και πιθανότητες ενδεχομένων

Ερωτήσεις – ασκήσεις – προβλήματα

1. Για τους σχολικούς αγώνες ποδηλασίας, η πινακίδα κάθε ποδηλάτου έχει δύο φωνήεντα.



α) Να καταγράψετε όλες τις δυνατές πινακίδες σε πίνακα διπλής εισόδου.

β) Αν οι πινακίδες είχαν δύο γράμματα (όχι μόνο φωνήεντα) και έναν αριθμό από 1 έως 9, πόσες θα ήταν όλες οι δυνατές πινακίδες;

2. Στρίβουμε δύο συνηθισμένα κέρματα και ένα συνηθισμένο ζάρι. Καταγράφουμε τα αποτελέσματα, π.χ. ΚΓ5. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις προτάσεις που ακολουθούν ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ).

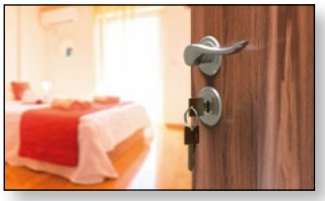
α) Το Κ15 είναι ένα δυνατό αποτέλεσμα. Σ Λ

β) Το ΚΓ5 είναι πιο πιθανό από το ΚΓ6. Σ Λ

γ) Το ΓΓ5 είναι το ίδιο πιθανό με το ΚΚ1. Σ Λ

δ) Η πιθανότητα του ενδεχομένου {ΚΚ1, ΚΓ1, ΓΚ1, ΓΓ1} είναι $\frac{1}{6}$. Σ Λ

3. Ένα ξενοδοχείο έχει 3 ορόφους. Σε κάθε όροφο υπάρχουν 6 δωμάτια χωρίς μπαλκόνι και 5 με μπαλκόνι. Επιλέγουμε το κλειδί ενός δωματίου τυχαία. Να υπολογίσετε την πιθανότητα το δωμάτιο να είναι στον 3ο όροφο και να έχει μπαλκόνι.



4. Ρίχνουμε ένα συνηθισμένο ζάρι 2 φορές και καταγράφουμε τους αριθμούς.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί την παραπάνω διαδικασία μπορούμε να τη μελετήσουμε ως πείραμα τύχης.

β) Πόσα είναι τα δυνατά αποτελέσματά του;

γ) Να υπολογίσετε την πιθανότητα να έρθει «διπλή ζαριά».

δ) Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου «το πρώτο ζάρι φέρνει αριθμό μεγαλύτερο από το δεύτερο ζάρι».

5. Έχουμε τρεις κάρτες με τους αριθμούς 1, 2 και 3. Οι κάρτες είναι κλειστές. Επιλέγουμε τυχαία μία κάρτα, καταγράφουμε τον αριθμό της, την επανατοποθετούμε κλειστή μαζί με τις άλλες δύο και τις ανακατεύουμε. Στη συνέχεια επιλέγουμε πάλι μία κάρτα και καταγράφουμε τον αριθμό της.

α) Ο δειγματικός χώρος:

$$\Omega = \{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)\}$$

περιγράφει όλα τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος τύχης;

β) Ποια είναι η πιθανότητα οι δύο αριθμοί που καταγράψαμε να είναι οι 1 και 2;

6. Σε ένα συρτάρι έχουμε 2 στιλό κόκκινου χρώματος και 1 μπλε χρώματος.

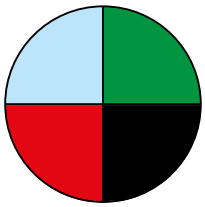
α) Επιλέγουμε τυχαία ένα στιλό, το επιστρέφουμε στο συρτάρι και επιλέγουμε τυχαία άλλο ένα. Να υπολογίσετε την πιθανότητα:

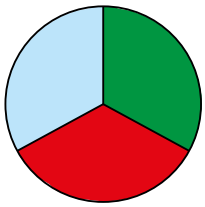
i) τα στιλό να είναι κόκκινα,

ii) τα στιλό να είναι του ίδιου χρώματος.

β) Να απαντήσετε στο (i) του ερωτήματος (α), αν επιλέγουμε τυχαία και τα δύο στιλό μαζί.

7. Δύο τροχοί της τύχης είναι χωρισμένοι ως εξής: ο πρώτος σε 4 ίσα μέρη πράσινου, κόκκινου, γαλάζιου και μαύρου χρώματος και ο δεύτερος σε 3 ίσα μέρη πράσινου, κόκκινου και γαλάζιου χρώματος. Στρίβουμε μία φορά τον πρώτο τροχό και στη συνέχεια δύο φορές τον δεύτερο τροχό. Καταγράφουμε με τη σειρά τα χρώματα που έρχονται.





Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ).

α) Το κόκκινο, γαλάζιο, μαύρο είναι ένα δυνατό αποτέλεσμα. Σ Λ

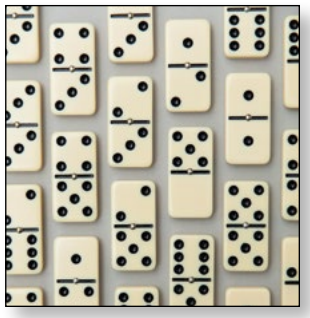
β) Το γαλάζιο, πράσινο, κόκκινο είναι πιο πιθανό από το μαύρο, πράσινο, κόκκινο. Σ Λ

γ) Το γαλάζιο, κόκκινο, κόκκινο είναι το ίδιο πιθανό με το κόκκινο, γαλάζιο, κόκκινο. Σ Λ

δ) Το να έρθει κόκκινο στο πρώτο στρίψιμο είναι πιο πιθανό από το να έρθει κόκκινο στο τελευταίο στρίψιμο. Σ Λ

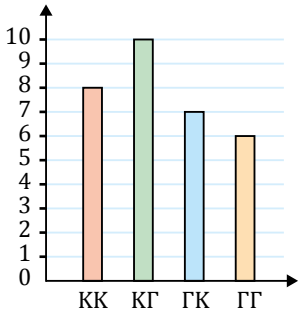
Συνδέσεις και επεκτάσεις

8. Τα ντόμινο έχουν αριθμούς από 0 έως 6.



Αν επιλέξουμε τυχαία ένα από αυτά τα κομμάτια, ποια είναι η πιθανότητα το άθροισμα των δύο αριθμών να είναι άρτιο;

9. Επαναλάβαμε μερικές φορές το παρακάτω πείραμα τύχης: «Στρίβουμε ένα συνηθισμένο κέρμα δύο φορές και καταγράφουμε το αποτέλεσμα».



Τα αποτελέσματα των επαναλήψεων φαίνονται στο ραβδόγραμμα.

α) Πόσες φορές επαναλάβαμε το πείραμα τύχης;

β) Να υπολογίσετε τις σχετικές συχνότητες των ΚΚ, ΓΓ, ΚΓ και ΓΚ με βάση τα αποτελέσματα και να τις συγκρίνετε με τις πιθανότητες των αντίστοιχων ενδεχομένων.

γ) Ποια είναι η σχετική συχνότητα του ενδεχομένου «έρχεται διαφορετικό αποτέλεσμα σε καθένα από τα δύο στριψίματα»;

δ) i) Πόσα στριψίματα του κέρματος κάναμε σε όλες τις επαναλήψεις συνολικά;

ii) Πόσες φορές ήρθε Κ και πόσες Γ;

iii) Να υπολογίσετε τις σχετικές συχνότητες των Κ και Γ.

10. Έχουμε ένα κουτί με μαύρες, άσπρες, κόκκινες και πράσινες κάλτσες, δύο κάλτσες από κάθε χρώμα. Επιλέγουμε τυχαία μία κάλτσα.

α) Ποια είναι η πιθανότητα να είναι κόκκινη;

β) Η κάλτσα που επιλέξαμε ήταν πράσινη. Ποια είναι η πιθανότητα η επόμενη κάλτσα που θα επιλέξουμε τυχαία να είναι επίσης πράσινη:

i) αν επιστρέψουμε την πρώτη κάλτσα στο κουτί πριν από την επιλογή της δεύτερης;

ii) αν δεν επιστρέψουμε την πρώτη κάλτσα στο κουτί πριν από την επιλογή της δεύτερης;

Ασκήσεις για εμβάθυνση στις πιθανότητες

Ένα γνωστό πρόβλημα πιθανοτήτων

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ – ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

Φυσικοί αριθμοί

1.1 Φυσικοί αριθμοί – Δυνάμεις φυσικών

1. 1, 0, 512

2. **α)** 5^3 **β)** 7^5 **γ)** 11^4

3. **α)** 25 **β)** 625 **γ)** 8 **δ)** 243

4. **α)** $2^3 5^2$ **β)** $3^4 7^2$ **γ)** $2^3 3^3$

5. **α)** 17 **β)** 9 **γ)** 25 **δ)** 18
ε) 0 **στ)** 10

6. **α)** 2^3 **β)** 3^2 **γ)** 2 **δ)** 5^2

1.2 Ευκλείδεια διαίρεση – Διαιρετότητα

1. **α)** $\pi = 7,\ \upsilon = 1,\ 29 = 4 \cdot 7 + 1$
β) $\pi = 4,\ \upsilon = 5,\ 29 = 6 \cdot 4 + 5$
γ) $\pi = 14,\ \upsilon = 3,\ 157 = 11 \cdot 14 + 3$

2.

Διαιρετέος (Δ)	Διαιρέτης (δ)	Πηλίκο (π)	Υπόλοιπο (υ)	Ταυτότητα ευκλείδειας διαίρεσης
37	7	5	2	$37 = 7 \cdot 5 + 2$
83	9	9	2	$83 = 9 \cdot 9 + 2$
177	12	14	9	$177 = 12 \cdot 14 + 9$
216	11	19	7	$216 = 11 \cdot 19 + 7$
61	13	4	9	$61 = 13 \cdot 4 + 9$

3. Είναι οι **α)** με $\Delta = 28$ και $\delta = 9$ ή $\delta = 3$,
γ) με $\Delta = 143$ και $\delta = 13$ ή $\delta = 11$ και
δ) με $\Delta = 118$ και $\delta = 12$.

4. Το υπόλοιπο μπορεί να είναι 0, 1, 2, 3, 4 και 5.

5. Ισχύει ότι $24 = 2^3 3$, άρα έχει παράγοντες τους 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.

6. Ισχύει ότι $81 = 3^4$. Οι παράγοντες του 81 που είναι οι δυνάμεις του 3 είναι: $3^1,\ 3^2,\ 3^3,\ 3^4$.

7. $2^7,\ 5^3,\ 11^2$

8. Μπορούν να φτιαχτούν 13 θέσεις.

9. 4 μαθητές

10. Ο καθένας μπορεί να πάρει 21 κέρματα και περισσεύουν 2.

11. 407

12. Τετάρτη.

1.3 Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (ΜΚΔ)

1. Για παράδειγμα, ο $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

2. Ο 2 με εκθέτη 3, ο 3 με εκθέτη 3 και ο 5 με εκθέτη 1.

3. **α)** 2, 3 **β)** 2, 7 **γ)** 5, 7
δ) 3, 5 **ε)** 2, 3 **στ)** 2, 3
ζ) 2, 3 **η)** 2, 5 **θ)** 37

4. **α)** $2^2 \cdot 3$ **β)** $2 \cdot 3 \cdot 5$ **γ)** $2 \cdot 3^3$
δ) $2^3 \cdot 3^2$ **ε)** 3^4 **στ)** $2 \cdot 3 \cdot 5^2$

5. **α)** 3 **β)** 13 **γ)** 17 **δ)** 6 **ε)** 8

6. 30

7. Είναι οι **β)** 24 και **γ)** 18.

8. Είναι $\text{ΜΚΔ}(168, 180) = 12$.

9. Γιατί $\text{ΜΚΔ}(140, 165, 154) = 1$.

10. Για παράδειγμα, οι $7 \cdot 12 = 84$ και $5 \cdot 12 = 60$, αφού δεν έχουν άλλο κοινό πρώτο παράγοντα.

11. Οι κοινοί διαιρέτες δύο αριθμών είναι γινόμενα των κοινών τους παραγόντων, άρα των παραγόντων του ΜΚΔ, δηλαδή του 18. Επομένως θα είναι οι διαιρέτες του 18, που είναι οι 2, 3, 6, 9 και 18.

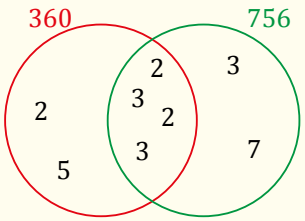
12. Δεν μπορεί να είναι και οι δύο ζυγοί, γιατί εκτός από το 1 θα είχαν κοινό διαιρέτη και το 2.

1.4 Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ)

1. Είναι ο 2 με εκθέτη 3, ο 3 με εκθέτη 3 και ο 5 με εκθέτη 1.

2. $2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 75.600$

3.



4. **α)** 90 **β)** 120 **γ)** 675

5. **α)** 180 **β)** 600 **γ)** 2.700

6. Να σκεφτείτε αν οι αριθμοί αυτοί έχουν κοινούς πρώτους παράγοντες.

7. Χρειάζονται 504 sec.

8. Στις 11:45.

9. **α) i)** 1 και 28 **ii)** 1 και 84 **iii)** 1 και 60.
β) Το ΕΚΠ των δύο αυτών αριθμών είναι το γινόμενό τους.

1.5 Το δυαδικό σύστημα αρίθμησης

1. **α)** 100 **β)** 2 **γ)** 1 **δ)** 8

2. Όχι, γιατί στο δυαδικό σύστημα δεν υπάρχει το ψηφίο 2.

3. $1_{(2)}=1,\ 10_{(2)}=2,\ 101_{(2)}=5$

4. Ο $110_{(2)}$ είναι μεγαλύτερος του $100_{(2)}$ κατά 2.

5. $1_{(2)},\ 01_{(2)},\ 11_{(2)},\ 100_{(2)},\ 101_{(2)},\ 110_{(2)},\ 111_{(2)},\ 1000_{(2)},\ 1001_{(2)}$

6. Ο $1101_{(2)}$ είναι μεγαλύτερος του $1010_{(2)}$ κατά 3.

7. $10_{(2)},\ 111_{(2)},\ 1010_{(2)},\ 1111_{(2)},\ 10101_{(2)},\ 10111_{(2)}$

8. $11100_{(2)},\ 101_{(2)}$

Ανακεφαλαίωση: Φυσικοί αριθμοί

1. **α)** Σ **β)** Λ **γ)** Λ **δ)** Λ **ε)** Λ **στ)** Σ **ζ)** Λ **η)** Λ

2. **α)** Σ **β)** Λ **γ)** Σ **δ)** Λ **ε)** Λ **στ)** Σ **ζ)** Λ

3. **α)** Σ **β)** Λ **γ)** Λ **δ)** Λ **ε)** Σ

4. **α)** Λ **β)** Λ **γ)** Λ **δ)** Σ **ε)** Λ **στ)** Σ **ζ)** Λ **η)** Σ **θ)** Σ

5. **α)** ένα, εαυτό **β)** υπόλοιπο
γ) διαιρετέος, διαιρέτη, πηλίκο, υπόλοιπο
δ) κοινών, πρώτων

6. Πρόσθεση – Άθροισμα, Πολλαπλασιασμός – Γινόμενο, Αφαίρεση – Διαφορά

7. 104

8. 35 κιλά

9. **α)** $360=2^3\cdot3^2\cdot5,\ 6=2\cdot3,\ \text{ΕΚΠ}(360,\ 6)=360,\ \text{ΜΚΔ}(360,\ 6)=6$

β) $128=2^7,\ 48=2^4\cdot3,\ \text{ΕΚΠ}(128,\ 48)=384,\ \text{ΜΚΔ}(128,\ 48)=16$

γ) $192=2^6\cdot3,\ 256=2^8,\ \text{ΕΚΠ}(192,\ 256)=768,\ \text{ΜΚΔ}(192,\ 256)=64$

δ) Είναι πρώτοι αριθμοί, $\text{ΕΚΠ}(7,\ 17)=119,\ \text{ΜΚΔ}(7,\ 17)=1$

ε) $12=2^2\cdot3,\ 18=2\cdot3^2,\ 15=3\cdot5,\ \text{ΕΚΠ}(12,\ 18,\ 15)=180,\ \text{ΜΚΔ}(12,\ 18,\ 15)=3$

στ) $12=2^2\cdot3,\ 18=2\cdot3^2,\ 9=3^2,\ \text{ΕΚΠ}(12,\ 18,\ 9)=36,\ \text{ΜΚΔ}(12,\ 18,\ 15)=3$

10. $\text{ΕΚΠ}\left(2^{50}\cdot3^2\cdot5^{31}\cdot7^3,\ 2^3\cdot3^{40}\cdot5^2\cdot7^{30}\right)=2^{50}3^{40}5^{31}7^{30},$
$\text{ΜΚΔ}\left(2^{50}\cdot3^2\cdot5^{31}\cdot7^3,\ 2^3\cdot3^{40}\cdot5^2\cdot7^{30}\right)=2^3\cdot3^2\cdot5^2\cdot7^3$

11. **α)** 290 **β)** 64

12. $10101_{(2)}+1010_{(2)}=11111_{(2)},$
$10101_{(2)}-1010_{(2)}=1011_{(2)}$

13. Όχι, γιατί δεν υπάρχουν άλλοι αριθμοί που να είναι ταυτόχρονα και πολλαπλάσια του 17 και διαιρέτες του 51.

14. $3^4=81$ και $9^2=81.$
Είναι $3^4=3\cdot3\cdot3\cdot3=(3\cdot3)\cdot(3\cdot3)=9\cdot9=9^2.$

15. Επιλέξτε τους αντίστοιχους αριθμούς από τον πίνακα και στη συνέχεια μετατρέψτε τους σε δεκαδική μορφή.

Ομαδική εργασία

16. Επειδή $5<6$, ο 5 δεν μπορεί να είναι διαιρέτης. Άρα διαιρέτης είναι ο 8. Σκεφτείτε ένα πρόβλημα στο οποίο να πρέπει να χωρίσουμε 48 αντικείμενα σε ομάδες των 8.

Ακέραιοι αριθμοί

2.1 Οι ακέραιοι αριθμοί

1. **α)** +5 **β)** −100 **γ)** −10 **δ)** +15 **ε)** −20 **στ)** −3

2. Δεν είναι ακέραιοι οι 0,2 και $-\frac{1}{3}$.

3. **α)** $-10>-50$ **β)** $-4<0$ **γ)** $-5>-15$

5. **α)** 10 **β)** 3 **γ)** 25 **δ)** 17

6. Γιατί η απόσταση από τον εαυτό του είναι 0.

7. Το δ.

8. −4, +8, −11, +100, 0, −300

9. **α)** πάντα **β)** μερικές φορές **γ)** ποτέ

11. $-2<0,\ 0<17,\ -2<-1,\ 15>4,\ -3<3,\ -199<12,\ -3<-4$

12. Ο Δίας.

13. **α)** −4, −3, 0, 5, 10 **β)** −11, −8, −2, 0, 10 **γ)** −999, −576, −54, 86, 201

15. 2, 5, 100

16. **α)** 8 **β)** 7 **γ)** 11 **δ)** 3

17. **α)** −3: συμβολίζει πρόσημο. $-(-5)$: το πρώτο συμβολίζει αντίθετο και το δεύτερο πρόσημο.

$-\left[-(-2)\right]$: το πρώτο συμβολίζει αντίθετο, το δεύτερο συμβολίζει αντίθετο και το τρίτο πρόσημο. **β)** $-(-x)$

2.2 Πρόσθεση στο σύνολο των ακέραιων αριθμών

1. $(-7)+(-3)=-10,\ (-3)+(+9)=+6$

2. **α)** -6 **β)** -8

3. Κατά σειρά τα 7 «–» και «+» δηλώνουν: πρόσημο, πρόσθεση, πρόσημο, πρόσθεση, πρόσημο, πρόσθεση, πρόσημο.

4. **α)** αληθής **β)** αληθής **γ)** ψευδής

5. 10, −15, 9, −4, 10, −100

6. 5, −5, −10, 10, −10, −300

7. **α)** $(+3)+(-10)$ **β)** είναι το ίδιο

γ) π.χ. $(-2)+(-5)$

8.

+	+2	0	−4	−10
+5	7	5	1	−5
−3	−1	−3	−7	−13
−7	−5	−7	−11	−17

9. **α)** -5 **β)** -9 **γ)** -4 **δ)** 36

10. 10 €

11. **α)** 9 **β)** 7 **γ)** 12

13. −6, +6, −6, −3, −30, +26, −18

2.3 Αφαίρεση ακέραιων αριθμών

1. Στο 2ο βήμα πρόσθεσε 3 ζευγάρια του μηδενός και μετά αφαίρεσε 3 θετικές κάρτες. Το αποτέλεσμα είναι −7.

2. Τα δύο πρώτα «–» συμβολίζουν τον αντίθετο.

3. Η β.

4. Η γ.

5. $8-(+4)=8-4=4$ και $-(+3)-(-2)=-3+2=-1$

6. $(-5)-(-2)=(-5)+(+2)=-3$. Όμοια για τις υπόλοιπες αφαιρέσεις βρίσκουμε: 1, −6, 7, −13.

7. **α)** -5 **β)** -18 **γ)** 20

8. **α) i)** Κατά σειρά: το αντίθετο, πρόσημο, πρόσθεση, πρόσημο.

ii) Κατά σειρά: το αντίθετο, πρόσημο, πρόσθεση, πρόσημο, αφαίρεση, πρόσημο.

iii) Κατά σειρά: το αντίθετο, πρόσημο, αφαίρεση, το αντίθετο, πρόσημο, αφαίρεση, το αντίθετο, πρόσημο.

9. **α)** Ηράκλειο: 21, Φλώρινα: 39, Κέρκυρα: 30, Σουφλί: 38.

β) Το Σουφλί.

10. Όχι, δεν ισχύει. $(-4)+(+3)=(+3)+(-4)$

11. π.χ. $-5=(+10)-(+15)$

12. **α)** 10, 4, −2, −8, −14, −20. Αφαιρούμε κάθε φορά τον αριθμό +6.

β) −9, −1, 7, 15, 23, 31. Αφαιρούμε κάθε φορά τον αριθμό −8.

γ) 12, −2, −16, −30, −44, −58. Αφαιρούμε κάθε φορά τον αριθμό +14.

13. **α)** −6 **β)** −1 **γ)** 8 **δ)** −8 **ε)** −17 **στ)** −13

14. Στην περίπτωση (γ).

2.4 Πολλαπλασιασμός ακέραιων αριθμών

1. Πρόσθεσε 9 ζευγάρια του μηδενός, μετά αφαίρεσε 3 στήλες των 3 αρνητικών καρτών και το αποτέλεσμα είναι +9.

2. **α)** $+4\cdot(+5)=20$ **β)** $-5\cdot(+3)=-15$

γ) $+6\cdot(-4)=-24$ **δ)** $-3\cdot(-7)=21$

3. Παρατηρούμε ότι το μοτίβο είναι: Α. μείωση των αριθμών κατά 2, Β. αύξηση των αριθμών κατά 3, Γ. μείωση των αριθμών κατά 4.

4. $(-3)\cdot(+7)=-21,\ (+2)\cdot(-4)=-8$

5. $(-1)\cdot(+3)-(-2)\cdot(-4)=-3-(+8)=-3-8=-11$

6. Όπως το «Συζητάμε» στο Δ1.

7. **α)** −2, −4, −8, −16, −32, −64. Πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο με το 2.

β) 4, −4, 4, −4, 4, −4, 4. Πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο με το −1.

γ) 3, −6, 12, −24, 48, −96. Πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο με το −2.

8. Κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς σύμφωνα με τον κανόνα.

α) Ο αριθμός 1. **β)** Ο αριθμός 0.

9. $8\cdot(-5)=-40$

10. Μία τέτοια περίπτωση είναι οι αριθμοί 2 και −12, που έχουν άθροισμα −10.

11. Μετά από 1 ώρα η στάθμη είναι $210-3\cdot60=$ $=210-180=30$ cm. Αυτά τα 30 cm θα γίνουν 0 μετά από 10 min. Άρα θα χρειαστεί 1 h και 10 min.

12. **α)** Η ii.

13. Ένας τρόπος είναι: $-100=2\cdot(-5)\cdot10$.

14. **α)** −22 **β)** −4 **γ)** −16 **δ)** 80

15. **α)** 10 **β)** −8 **γ)** 7 **δ)** 5

16. **α)** $-24x$ **β)** $-6x$ **γ)** $-12x$

17. Σκεφτόμαστε ότι: **α)** οι αριθμοί είναι ετερόσημοι, **β)** ο x είναι αρνητικός, όπως και ο −y,

γ) έχουμε βρει το πρόσημο του xy. Το $(y-x)$ τι σχέση έχει με το $x-y$;

Ανακεφαλαίωση: Ακέραιοι αριθμοί

1. **α)** πάντα **β)** μερικές φορές **γ)** ποτέ

2. **α)** Λ **β)** Λ **γ)** Σ **δ)** Σ

3. **α)** $(-15)+(+5)+(-13)=-23$

β) $(-5)+(+12)+(-10)=-3$

γ) $(+20)+(-12)+(+10)+(-8)+(+4)=14$

4. Σωστός είναι ο υπολογισμός γ. Στον υπολογισμό α έγινε πρώτα η πρόσθεση, ενώ έπρεπε να γίνει ο πολλαπλασιασμός. Θα ήταν σωστός δηλαδή αν δινόταν έτσι: $(-4+3)(-2)$. Στον υπολογισμό β σωστά έγινε ο πολλαπλασιασμός του 3 με το (-2), αλλά έγινε και το λάθος του υπολογισμού α.

5. Ο αντίθετος του γ βρίσκεται ανάμεσα στο 0 και το α.

6. Σκεφτόμαστε ποιοι αριθμοί έχουν απόσταση 5 από το 0.

7. **α)** Αν και οι δύο αριθμοί είναι άρτιοι ή αν και οι δύο αριθμοί είναι περιττοί.

β) Αν ένας μόνο αριθμός είναι περιττός.

8. Στον αριστερό πίνακα, από τη μία διαγώνιο βρίσκουμε ότι το άθροισμα είναι 0 και συμπληρώνουμε την άλλη διαγώνιο και κάθε γραμμή ή στήλη, ώστε να βγαίνει πάντα άθροισμα 0. Όμοια συμπληρώνουμε και τον δεξιό πίνακα, όπου το άθροισμα είναι –6.

9. **α)** $(-2)-(+8)+(-2)=-2-8-2=-12$

β) $-(+4)+(+3)-8=-4+3-8=-9$

γ) $(-2)+(-10)-3-\left[-(-4)\right]=-2-10-3-4=-19$

10. **α)** 10 **β)** –15 **γ)** –8 **δ)** –6 **ε)** 20 **στ)** 40 **ζ)** –5 **η)** 10

11. $2.917-(-5.269)=8.186$

12. Σκεφτόμαστε ότι, για να είναι το άθροισμα 0, για κάθε αριθμό υπάρχει και ο αντίθετός του.

13. **α)** 2 **β)** –7 **γ)** –15

14. 18

15. **α)** –19 **β)** –36 **γ)** –4 **δ)** 80

16. $3\cdot(+2)+2\cdot(+1)+4\cdot(-2)+3\cdot(-2)=-6$

17. **α)** Η τιμή μετά από μία εβδομάδα θα είναι $180-1\cdot7=173$, μετά από 3 εβδομάδες θα είναι $180-3\cdot7=159$ και μετά από 5 εβδομάδες θα είναι $180-5\cdot7=145$.

β) Μετά από x εβδομάδες θα είναι $180-x\cdot7$. Μετά από 10 εβδομάδες η τιμή θα σταθεροποιηθεί στα 110 €.

18. Από την αριθμογραμμή καταλαβαίνουμε ότι οι αριθμοί α και γ είναι αρνητικοί. Για να βρούμε το πρόσημο της κάθε παράστασης, μετράμε το πλήθος των αρνητικών παραγόντων. Το α έχει δύο αρνητικούς παράγοντες, άρα είναι θετικός αριθμός.

19. Το «–» στο $-x$ δεν είναι πρόσημο, αλλά δηλώνει τον αντίθετο του x. Εξετάστε τι συμβαίνει αν το x είναι θετικός και αν είναι αρνητικός.

20. Αν ο x είναι θετικός, η απόλυτη τιμή του είναι ίδια με τον αριθμό, ενώ αν είναι αρνητικός, τότε είναι ο αντίθετός του.

21. Χρησιμοποιήστε την απάντηση της προηγούμενης άσκησης.

22. Εξετάστε τι συμβαίνει αν ο β είναι θετικός και αν είναι αρνητικός.

23. **α)** θετικός **β)** αρνητικός **γ)** θετικός

24. Οι δύο παραστάσεις είναι αντίθετες, άρα έχουν την ίδια απόλυτη τιμή.

25. Σκεφτείτε ότι τον ίδιο αριθμό, αντί να τον προσθέτουμε όπου το αποτέλεσμα είναι –15, τον αφαιρούμε. Άρα, για να βρούμε το νέο άθροισμα, μπορούμε να τον αφαιρέσουμε δύο φορές από το –15.

26. Αφού ο $-\alpha\beta$ είναι θετικός, ο αβ είναι αρνητικός.

27. Σκεφτείτε το εξής: Σε κάθε διάστημα που βρίσκουμε ότι ανήκει ο ζητούμενος αριθμός, να επιλέγουμε το μέσον ή τον ακέραιο αριθμό που είναι πιο κοντά στο μέσον. Εξετάστε όλες τις περιπτώσεις.

Ρητοί αριθμοί

3.1 Οι ρητοί αριθμοί

1. Ο αριθμός –0,7 είναι ανάμεσα στο 0 και το –1. Για να τον τοποθετήσουμε, μετράμε 7 γραμμές αριστερά από το 0 (ή τρεις δεξιά από το –1). Ο αριθμός 70% είναι ο 0,7, ενώ ο –250% είναι ο –2,5.

2. Η κάθε μονάδα της αριθμογραμμής χωρίζεται σε πέμπτα, άρα ο αριθμός $-\frac{3}{5}$ είναι τρεις γραμμές αριστερά του μηδενός. Ο αριθμός $\frac{16}{5}$ μπορεί

να γραφεί και $3\frac{1}{5}$, άρα μπορούμε να τον τοποθετήσουμε μία γραμμή δεξιά του 3.

3. $0,\overline{4}$

4. $17,3,\ \frac{3}{7},\ 0,2\overline{398},\ 0,001$

5. $\frac{2}{11},\ 14,52\overline{803},\ \frac{1}{12}$

6. **α)** -5 **β)** $9,8$ **γ)** $-4,1\overline{3}$ **δ)** $-\frac{12}{5}$

7. Το $\left|-\frac{2}{3}\right|$ είναι θετικός αριθμός και το $|-8,4|=8,4>8,3=|8,3|$.

8. Η βενζίνη έχει το χαμηλότερο σημείο πήξης και το μέλι έχει τη μικρότερη απόλυτη τιμή.

9. Οι τρεις από τους τέσσερις αριθμούς είναι ίσοι με 4,1. Ποιος δεν είναι;

10. **α)** $-8=-\frac{16}{2}$ **β)** $0,7=\frac{7}{10}$

γ) $-1,23=-\frac{123}{100}$ **δ)** $3,402=\frac{3.402}{1.000}$

ε) $-15,0045=-\frac{150.045}{10.000}$ **στ)** $\frac{0}{1}$

11. **α)** $-0,6$ **β)** $3,75$ **γ)** $-0,\overline{36}$ **δ)** $4,\overline{428571}$

12. **α)** $0,05$ **β)** $-0,07$ **γ)** $0,8$ **δ)** $0,004$
ε) $1,53$ **στ)** $-2,56$ **ζ)** $-10,5$

13. **α)** $-7>-8$ **β)** $5,604<5,64$
γ) $-2,34>-2,43$ **δ)** $4,15=4,150$
ε) $-\frac{3}{7}>-\frac{4}{7}$

14. Τη χαμηλότερη θερμοκρασία τη μέτρησε στις 23:00. Η θερμοκρασία που ήταν πιο κοντά στο 0 ήταν στις 13:00.

15. Μεγαλύτερος: **α)** 2 **β)** $\frac{17}{4}$ **γ)** $-\frac{7}{3}$

Πιο κοντά στο 0: **α)** $-1,4$ **β)** $\frac{17}{4}$ **γ)** $-\frac{7}{3}$

16. **α)** 2 **β)** $3,01$ **γ)** $4,302$ **δ)** $\frac{2}{11}$ **ε)** $\frac{5}{7}$

17. **α)** $|-3|=|3|$ **β)** $\left|-\frac{16}{17}\right|<1,1$ **γ)** $\left|-\frac{11}{3}\right|<\left|-\frac{21}{5}\right|$

18. $-\frac{27}{5}<-|-5,03|<-\left|-\frac{21}{5}\right|<-4,01<\left|-\frac{15}{4}\right|<$
$<|-5,3|<\frac{16}{3}$

19. Υπάρχουν άπειροι αριθμοί. Ενδεικτικές απαντήσεις: **α)** $3,4<3,42<3,6$ **β)** $4,1<4,17<4,2$,
γ) $-7,453<-7,4523<-7,452$

20. Ένας τρόπος να σκεφτούμε είναι: $-\frac{1}{2}=-0,5$ και $-\frac{1}{3}=-0,\overline{3}$. Άρα κάποιοι περιοδικοί αριθμοί που βρίσκονται ανάμεσά τους είναι: $-0,\overline{37}$, $-0,\overline{4}$, $-0,\overline{42501}$ κ.ο.κ.

3.2 Πρόσθεση και αφαίρεση ρητών αριθμών

1. Αν τοποθετήσουμε στην πρώτη γραμμή δεξιά του μηδενός το $\frac{1}{3}$, τότε η πρόσθεση που δείχνει η κίνηση στην 1η αριθμογραμμή είναι η $\left(+\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{7}{3}\right)$, ενώ το αποτέλεσμα είναι $-\frac{5}{3}$.

2. Δεν είναι ίση με 0 η αριθμητική παράσταση $8,4-(-8,4)$.

3. **α)** $-2,3+(-0,7)=-(|-2,3|+|-0,7|)=$
$=-(2,3+0,7)=-3$

β) $\frac{5}{3}-\frac{8}{3}=-\left(\left|\frac{8}{3}\right|-\left|\frac{5}{3}\right|\right)=-\frac{3}{3}=-1$

4. β **5.** α **6.** β

7. **α)** $-1,6$ **β)** $-1,27$ **γ)** $1,88$ **δ)** $-219,5$
ε) $687,5$ **στ)** -1 **ζ)** $-\frac{11}{10}$ **η)** $-\frac{2}{3}$
θ) $-\frac{65}{12}$ **ι)** $\frac{23}{14}$ **ια)** $-\frac{4}{15}$

8. **α)** $-5,1$ **β)** $-50,51$ **γ)** $1877,9$ **δ)** 1
ε) $\frac{5}{6}$ **στ)** $\frac{5}{6}$ **ζ)** $-\frac{37}{12}$ **η)** $\frac{131}{15}$ **θ)** $1,95$

9. **α)** $-5,8$ **β)** $\frac{5}{12}$ **γ)** $-\frac{10}{3}$

10. **α)** $0,3$ **β)** $-0,3$

11. $(-1,2)+(+5,9)+(-8,1)$ ή
$(-1,2)-(-5,9)-(+8,1)$ κτλ.

12. 11.080 € **13.** **α)** $\frac{8}{15}$ **β)** 3.200 lt **14.** 10,2

15. Δώστε μία τιμή στο x και μία τιμή στο y μεγαλύτερη κατά 1,2.

16. **α)** μερικές φορές **β)** ποτέ **γ)** πάντα

3.3 Πολλαπλασιασμός και διαίρεση ρητών αριθμών

1. **α)** Θ **β)** 0 **γ)** Α **δ)** Α **ε)** Α **στ)** Θ **ζ)** 0 **η)** Θ

2. Τα σωστά αποτελέσματα είναι: 9,43, $\frac{1}{2}$.

3. δ

4. **α)** Θ **β)** Α **γ)** Θ **δ)** Α **ε)** Θ **στ)** 0

5. Οι σωστές απαντήσεις είναι: $-3,8$ και $-\frac{9}{8}$.

6. **α)** αντιμεταθετική **β)** προσεταιριστική

7. **α)** αρνητική, αφού έχει 3 αρνητικούς παράγοντες,
β) θετική, γιατί έχει 2 αρνητικούς παράγοντες,
γ) αρνητική, αφού έχει 3 αρνητικούς παράγοντες.

8. β

9. Ο μαθητής στα δεξιά γράφει το $\frac{5}{3}$ ως $\frac{5}{-3}$, που είναι λάθος, και στη συνέχεια το γράφει $\frac{14-5}{-3}$. Κάνει δύο φορές λάθος στο πρόσημο του ίδιου αριθμού, γι' αυτό τελικά το αποτέλεσμα βγαίνει σωστό.

10. **α)** $-8,4$ **β)** $+0,36$ **γ)** $-21,9905$
δ) $-\frac{3}{16}$ **ε)** $\frac{4}{3}$ **στ)** $-\frac{1}{3}$ **ζ)** $\frac{11}{3}$
η) $-\frac{5}{6}$ **θ)** $-\frac{9}{5}$

11. Ένα ζεύγος είναι: -3 και $\frac{5}{14}$. Μπορούμε να βρούμε άπειρα ζεύγη.

12. **α)** $\frac{1}{5}$ **β)** $-\frac{10}{62}$ ή $-\frac{5}{31}$ **γ)** $\frac{7}{3}$ **δ)** $-\frac{8}{11}$

13. Οι αριθμοί 1 και -1.

14. **α)** -5 **β)** 1,35 **γ)** -4 **δ)** $-1,4$ **ε)** $\frac{2}{5}$
στ) -2 **ζ)** $\frac{35}{4}$ **η)** $-\frac{72}{35}$

15. **α)** $-\frac{11}{6}$ **β)** $\frac{17}{10}$ **γ)** $-\frac{35}{12}$ **δ)** $-\frac{9}{7}$

16. **α)** -68 **β)** 6,9 **γ)** 153 **δ)** $-\frac{17}{15}$ **ε)** 1

17. 6,7 € **18.** 6 κύβους **19.** 80 m **20.** 4.795 €

21. **α)** -4 **β)** $-\frac{1}{8}$ **γ)** 36

22. 21,54 sec

23. **α)** 0,65 **β)** 0,7 **γ)** $-\frac{3}{20}$ **δ)** $\frac{13}{3}$

24. $\frac{12}{7}$

3.4 Δυνάμεις και παραστάσεις ρητών αριθμών

1. **α)** $3\cdot 0,5$ **β)** $5,9^3$ **γ)** $6\cdot\frac{1}{7}$
δ) $\left(-\frac{5}{8}\right)^5$ **ε)** $1,2^4\cdot 7,3^3$

2. Τα λάθη που έκανε είναι: $(-1,1)^2 = 1,21$, $(-10)^3 = -1.000$.

3. δ

4. Κάνει λάθος στη δύναμη $(-2,67)^9$, η οποία έχει περιττό αριθμό αρνητικών παράγοντων, άρα είναι αρνητική.

5. γ **6.** β **7.** 16

8. Δεν είναι η β και η γ.

9. **α)** 9 **β)** 9 **γ)** 64 **δ)** 1 **ε)** 1,728
στ) $\frac{8}{27}$ **ζ)** $\frac{16}{81}$

10. **α)** α^4 **β)** x^5 **γ)** $x^3\cdot y^4$ **δ)** $\alpha^4\cdot\beta\cdot y^2$

11. Όποια από τις δυνάμεις είναι υψωμένη σε εκθέτη άρτιο αριθμό δίνει 1, ενώ όποια είναι υψωμένη σε περιττό δίνει -1.

12. Θετικό πρόσημο έχουν οι παραστάσεις α, β. Αρνητικό πρόσημο οι παραστάσεις γ, δ, ε.

13. **α)** $(-1)^\mu = 1$ **β)** $(-1)^\nu = -1$ **γ)** $(-1)^{\mu\nu} = 1$

14. Θετικό πρόσημο έχουν οι παραστάσεις α, γ. Αρνητικό πρόσημο η παράσταση β.

15. **α)** -88 **β)** $-11,1$ **γ)** 18,01 **δ)** $-\frac{3}{20}$ **ε)** $\frac{13}{16}$

16. **α)** $4,5\cdot 10^9$ **β)** $1,489\cdot 10^8$ **γ)** $1,496\cdot 10^8$

17. **α) i)** $1,5\cdot 10^8 = 150.000.000$,
ii) $9,4607\cdot 10^{12} = 9.460.700.000.000$
β) $4,515\cdot 10^9$ km

Ανακεφαλαίωση: Ρητοί αριθμοί

1. $-\frac{3}{7}$, $0,\overline{3}$

2. **α)** Λ **β)** Λ **γ)** Σ **δ)** Λ **ε)** Λ

3. **α)** $-3,25$ **β)** $2,\overline{3}$ **γ)** $-2,\overline{18}$

4. Ενδεικτικές απαντήσεις:
α) $2,7 < 2,701 < 2,8$
β) $-10,2 < -10,13 < -10,1$
γ) $-8,373 < -8,3721 < -8,372$

5. **α)** $-1,1$ **β)** $-2,52$ **γ)** 0 **δ)** $-0,002$
ε) $-\frac{22}{21}$ **στ)** $-0,82$

6. **α)** Α **β)** Α **γ)** 0 **δ)** Α

7. **α)** $-0,96$ **β)** 100 **γ)** -70 **δ)** $-0,1$

ε) -1 **στ)** $-\frac{49}{48}$

8. 150 σακουλάκια

9. γ

10. **α)** $3\cdot 1,2$ **β)** $0,7^3$ **γ)** $5\cdot\frac{1}{3}$ **δ)** $\left(-\frac{3}{7}\right)^6$

ε) $3,2^4\cdot 4,7^3$

11. **α)** $4,5\cdot 10^9$ **β)** $7,48\cdot 10^7$ **γ)** $4,6\cdot 10^7$

12. $-\frac{4}{9}$ **13.** $-\frac{31}{24}=1,291\overline{6}$

14. **α)** 12 **β)** 5,8

15. **α)** $|13,2-(-5,3)|=18,5$

β) **i)** 32, **ii)** 27,03, **iii)** $\frac{55}{4}=13,75$

γ) 50,7

16. 4,6 **17.** 0,1

18. **α)** $\frac{15}{28}$ **β)** $\frac{3}{5}$ **γ)** $-\frac{1}{5}$ **δ)** $-\frac{13}{2}$

19. **α)** 27,05 € **β)** 45,9%

20. Οι α και β είναι αρνητικοί.

21. 0,5 **22.** $-0,2$

23. Για παράδειγμα, βρείτε δύο αρνητικά κλάσματα που το γινόμενό τους είναι $\frac{9}{40}$ (σκεφτείτε γιατί).

24. **α)** 2,8 και $-2,8$ **β)** 0

γ) Δεν υπάρχει τέτοιος ρητός. Εξετάστε τι συμβαίνει αν ο αριθμός α είναι θετικός, μηδέν ή αρνητικός.

25. Εξετάστε τι συμβαίνει αν οι δύο αριθμοί είναι: **α)** και οι δύο θετικοί, **β)** ετερόσημοι, **γ)** και οι δύο αρνητικοί.

26. **α)** iv **β)** i

γ) Η απόλυτη τιμή της διαφοράς δύο αριθμών είναι η απόστασή τους στην αριθμογραμμή, οπότε σωστή απάντηση είναι η ii.

27. Οι 3 σανίδες έχουν 2 κενά ανάμεσά τους, οι 4 έχουν 3 κενά, ..., οι 35 έχουν 34 κενά. Σκεφτείτε ότι το μήκος του φράκτη είναι 6,39 m και έχετε συνολικά 38 κενά και 35 σανίδες με μήκος 0,15 m.

Κανονικότητες

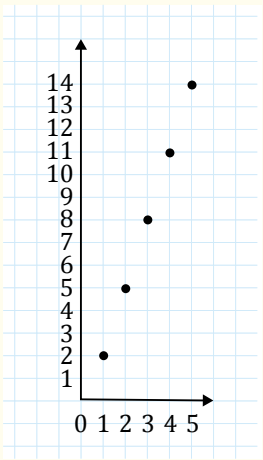
4.1 Κανονικότητες και φυσικοί αριθμοί

1. **α)**  **β)** 7

2. Το β.

3. Στο (α): 2, 4, 6. Στο (β): 2, 3, 2. Στο (γ): 1, 4, 9.

4.



5. **α)** 6 **β)** 1, 1, 2, 2, 3, 3

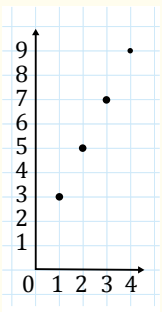
6. Μοτίβο: 1, 3, 6. 4ος όρος $1+2+3+4=10$, 5ος όρος $1+2+3+4+5=15$

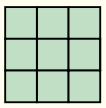
7. **α)** $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5$ **β)** 720

8. Φαίνεται ότι η διάρκεια του τρεξίματος είναι διπλάσια του περπατήματος, άρα 36 λεπτά.

9. **α)** 3 και 5

β) Φαίνεται ότι ο κάθε όρος αυξάνεται κατά 2 από τον προηγούμενο:



10. **α)** 1.000 **β)** 7 **γ)** 1 **δ)** 

4.2 Κανονικότητες και αριθμητικά μοτίβα

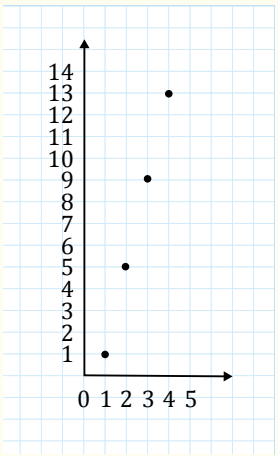
1. **α)** Αντιστοιχεί στο πλήθος των τετραγώνων κάθε όρου.

β) Ένας τρόπος κατασκευής: Προστίθενται στον προηγούμενο όρο δύο τετράγωνα τη μία

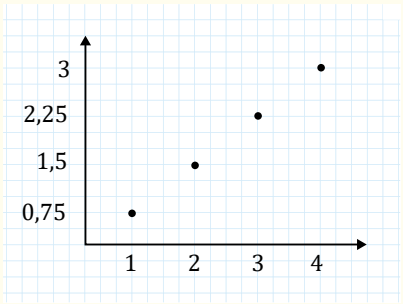
φορά, ένα δεξιά, ένα αριστερά, και την άλλη φορά ένα πάνω, ένα κάτω, εναλλάξ.

2. **α)** 0,5, 1, 1,5, 2, 2,5

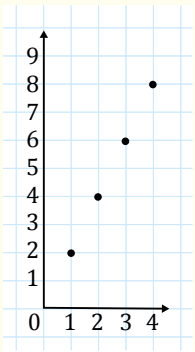
β)



i)



ii)



iii)

3. **α)** $2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$ **β)** $\frac{1}{3}$

4. **α)** 21 **β)** 5

5. **α)** 1,7, 3,4, 5,1 **β)** $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}$ **γ)** 1, 3, 5 **δ)** 3, 6, 9

6. **α)** Σ **β)** Λ **γ)** Σ

7. **α)** $\frac{4}{3}$ και $\frac{40}{3}$

β)

Τάξη όρου	2	3	4	5	6	15	30
Όρος μοτίβου	$\frac{8}{3}$	4	$\frac{16}{3}$	$\frac{20}{3}$	8	20	40

8. **α)** $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ **β)** Είναι τάξης 6. Ο όρος είναι 3.

γ) $\frac{1}{2}\cdot\nu$

4.3 Προβλήματα με κανονικότητες

1. **α)** Σε 1 ημέρα: $2\cdot151{,}25=302{,}5$ λίτρα, σε 2 ημέρες: $302{,}5+302{,}5=605$ λίτρα, σε ν ημέρες: $302{,}5\nu$.

β) 302,5, 605, 907,5, ...

2. 0,9, 1,8, 2,7, ..., το κόστος σε ευρώ για μια διαδρομή ν χιλιομέτρων $0{,}9\cdot\nu$.

3. **α)** 4, 8, 12, ... **β)** Όχι. Από τις 8 πάμε στις 12.

γ) 4ν

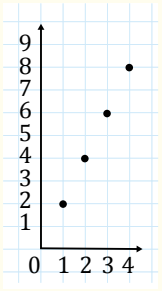
4. **α)** Το πρώτο ξεκινάει στις 12:05, το δεύτερο σε 20 λεπτά, το τρίτο σε 35 λεπτά, το τέταρτο πάλι σε 20 λεπτά, το πέμπτο πάλι σε 35 λεπτά κτλ.

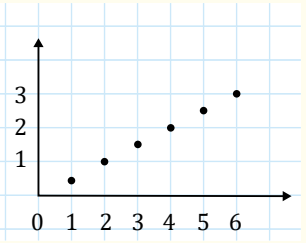
β) 11:30 π.μ.

Ανακεφαλαίωση: Κανονικότητες

1. **α)** Σ **β)** Λ **γ)** Σ **δ)** Λ **ε)** Λ

2.



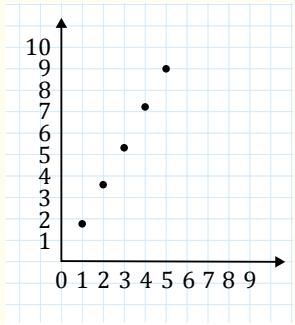


(πολλαπλασιάζουμε την τάξη του όρου με 0,5)

3. **α)**

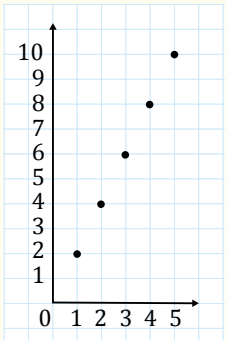
Τάξη	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Όρος	1,8	3,6	5,4	7,2	9	10,8	12,6	14,4	16,2

β)



γ) iv

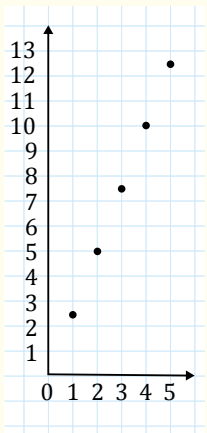
4. Γενικός όρος 2ν



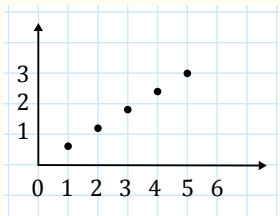
5. **α) i)** 2,5, **ii)** $\frac{6}{5}$

β) μοτίβο (i): 2,5ν, μοτίβο (ii): $\frac{3}{5}\cdot\nu$

γ)



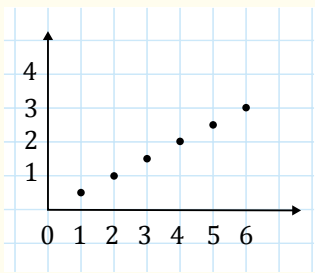
i



ii

6. **α)** $\nu\cdot\frac{2}{3}$ **β)** $\nu\cdot 0{,}3$

7. **α)**



β) 0,5, 1, 1,5, 2, 2,5, 3, 3,5, 4, 4,5, 5

8. $1+(1+2)+(1+2+3)+(1+2+3+4)=20$

9. **α)** 9

β)

Τάξη	1	2	3	4	5	6	7	8
Όρος	1	3	4	6	7	9	10	12

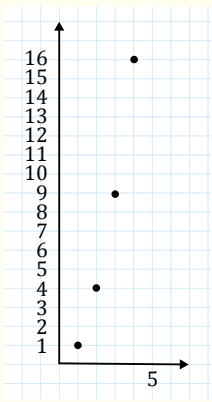
γ) 1, 2,5, 4, 5,5, 7

10. **α)** $\frac{3}{4}$ του γεμάτου ρεζερβουάρ

β) i) $2\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$ ενός γεμάτου ρεζερβουάρ, άρα 2 γεμίσματα, **ii)** $\frac{15}{2}=7\frac{1}{2}$ ενός γεμάτου ρεζερβουάρ, **iii)** $\frac{3}{2}$, 3, $\frac{9}{2}$, ..., γεμάτα ρεζερβουάρ με γενικό όρο $\frac{3}{2}\cdot\nu$, όπου ν είναι το πλήθος των ταξιδιών.

γ) Ένα γέμισμα κοστίζει 90 ευρώ. Άρα για ένα ταξίδι στο χωριό η Χριστίνα χρειάζεται 135 ευρώ. Μπορεί να κάνει 6 ταξίδια.

11. Είναι $1^2=1$, $2^2=4$, $3^2=9$, ...



Αλγεβρικές παραστάσεις

5.1 Περιγραφή καταστάσεων με αλγεβρικές παραστάσεις

1. β **2.** β **3.** γ **4.** $\alpha+2\beta$

5. 0,7, $\frac{3}{2}$, $-\frac{3}{2}$, 5,3 **6.** α, γ

7. $x+2$ - άθροισμα, $\alpha\cdot\beta$ - γινόμενο, $2x+3y$ - άθροισμα γινομένων, $15-\alpha$ - άθροισμα (των 15 και $-\alpha$), $(3+x)(\alpha+\beta)$ - γινόμενο αθροισμάτων

8. Αν αγόρασε x, y, ω κιλά από κάθε προϊόν και ν μαρούλια, τότε:
$1{,}3x+1{,}8y+1{,}6\omega+0{,}75\nu$.

9.

x	1	2	1	−1,5	1	$\frac{1}{3}$	0
y	2	2,5	1,5	3	−1,5	$\frac{1}{4}$	0
$3x-y+1$	2	4,5	2,5	−6,5	5,5	$\frac{7}{4}$	1
$2(x+y)$	6	9	5	3	−1	$\frac{7}{6}$	0
$xy-0{,}5$	1,5,	4,5	1	−5	−2	$-\frac{5}{12}$	−0,5

10. **α)** $-x$ **β)** $3x$ **γ)** $\frac{x}{2}$ **δ)** $\frac{x}{4}$
ε) $5x+2$ **στ)** $4x-2$ **ζ)** $5\cdot x+3$ **η)** $3(x-4)$
θ) $5(4-x)$

11. Ενδεικτικές απαντήσεις:
α) το x αυξημένο κατά 1
β) το διπλάσιο του x
γ) το τριπλάσιο του x αυξημένο κατά 1
δ) το τετραπλάσιο του x μειωμένο κατά 2

12. **α)** $145-43=102$ **β)** $145-x$

13. $A=13-B$

5.2 Αλγεβρικές παραστάσεις και προβλήματα

1. **α)** iii **β)** 7,9 ευρώ

2. **α)** iv **β)** 38 cm

3. Ενδεικτικές απαντήσεις:
α) $\alpha=1,\ \beta=2$ **β)** $\alpha=4,\ \beta=-4$
γ) $\alpha=1,\ \beta=4$ **δ)** $\alpha=3,\ \beta=-2$

4. **α)** Μεγαλύτερη τιμή 14 για $x=5$ και $y=4$.
Μικρότερη τιμή 2 για $x=1$ και $y=0$.
β) Μεγαλύτερη τιμή 10 για $x=5$ και $y=0$.
Μικρότερη τιμή -2 για $x=1$ και $y=4$.

5. **α) i)** 2x, **ii)** 3y, **iii)** $2x+3y-2\cdot3$
β) Αντικαθιστώντας το $2x+3y$ με 40, είναι $40-6=34$.
γ) $2x+2y$

6. Κάνοντας υπολογισμούς για όλα τα πιθανά ζεύγη α και β, βρίσκουμε τη μέγιστη τιμή.

α	0	1	2	3	4	5	6	7
β	7	6	5	4	3	2	1	0
$3\alpha+2\beta$	14	15	16	17	18	19	20	21

7. **α)** $6x+10y$
β) i) $x+y=10$.
ii) Ο μεγαλύτερος αριθμός αυγών είναι 100 για $x=0$ και $y=10$. Ο μικρότερος αριθμός αυγών είναι 60 για $x=10$ και $y=0$.

8. **α)** Ενδεικτική απάντηση: Να γράψετε το εμβαδόν ενός ισοσκελούς τριγώνου με βάση μήκους y και ίσες πλευρές μήκους x.
β) Υπόδειξη: Σκεφτείτε με παρόμοιο τρόπο για ορθογώνιο.
γ) Υπόδειξη: Το γινόμενο μπορεί να εκφράζει εμβαδόν ορθογωνίου.
δ) Υπόδειξη: Δείτε την άσκηση 1.

5.3 Η επιμεριστική ιδιότητα

1. **α)** $x(y+\omega)=xy+x\omega$ **β)** $2(\alpha-\beta)=2\alpha-2\beta$
γ) $\frac{1}{2}(x+y)=\frac{x}{2}+\frac{y}{2}$ **δ)** $3\alpha-3\beta=3(\alpha-\beta)$

2. **α)** $23\cdot101=23(100+1)=2.300+23=2.323$
β) $35\cdot999=35(1.000-1)=35.000-35=\ldots$
γ) $99\cdot101=99(100+1)=9.900+99=\ldots$
δ) $99\cdot101=(100-1)\cdot101=10.100-101=\ldots$

3. **α)** $2\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{3}$ ή $1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$ **β)** $6\cdot\frac{1}{6}=1$ ή $2-1=1$
γ) $5\cdot(-0{,}3)=-1{,}5$ ή $1-2{,}5=-1{,}5$
δ) $\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}=1$ ή $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1$

4. **α)** $(5+7)x=12$ **β)** $(7+4)y=\ldots$
γ) $(11-3)x=\ldots$ **δ)** $\left(\frac{7}{2}+\frac{3}{2}\right)x=5x$

ε) $\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\right)x=\ldots$ **στ)** $(7+1)x=\ldots$

ζ) $(11-1)y=\ldots$

5. Μπορείτε να δοκιμάσετε και τους δύο τρόπους και να δείτε ποιος είναι ο βολικότερος και γιατί.

α) i) 4, **ii)** 6, **iii)** −9,5, **iv)** 0, **v)** −6,5

β) i) 0,3, **ii)** 2, **iii)** $-\frac{11}{2}(\text{ή}-5,5)$, **iv)** 6, **v)** $\frac{1}{2}$

6. **α)** $5x+1$ **β)** $2+3x$ **γ)** $4x-0,8$
δ) $-5x+20$ **ε)** $x-3$

7. **α)** $3x+3y+2x=(3+2)x+3y=5x+3y$

β) $7x-3$ **γ)** $5x+2y-2x=(5-2)x+2y=3x+2y$

δ) $9x+13$ **ε)** $7x+1$ **στ)** $10x-7y+\frac{1}{3}$

ζ) $\ldots=(10+5)x+(10-5)y=15x+5y$

η) $21x-3$ **θ)** $\frac{7}{2}x+5y$

8. **α)** $2\alpha+2\beta$ ή $2(\alpha+\beta)$

β) i) $2(\alpha+\beta)=2\cdot 17=34$, **ii)** $\alpha=17-\beta$,

iii) $\alpha\cdot\beta=(17-\beta)\beta=17\beta-\beta^2$

9. Ενδεικτική απάντηση: Το εισιτήριο ενός λεωφορείου κοστίζει 5 ευρώ, ενώ η μεταφορά βαλίτσας κοστίζει 3 ευρώ επιπλέον. Αν α επιβάτες έχουν βαλίτσα και β επιβάτες δεν έχουν, πόσο είναι το συνολικό κόστος για όλους;

Ανακεφαλαίωση: Αλγεβρικές παραστάσεις

1. **α)** $93(100+1)=9.300+93=9.393$

β) $109(100-1)=\ldots$

γ) $999(1.000+1)=\ldots$ ή $(1.000-1)1.001=\ldots$

2. **α)** Λ **β)** Σ **γ)** Λ **δ)** Σ **ε)** Λ **στ)** Σ
ζ) Λ **η)** Σ **θ)** Λ **ι)** Σ **ια)** Σ

3. **α)** Σ **β)** Λ **γ)** Σ **δ)** Λ

4. **α)** Σ **β)** Σ **γ)** Λ **δ)** Σ **ε)** Λ

5. **α)** 7,5 **β)** $\frac{13}{4}$ **γ)** 2 **δ)** −4,1

ε) 1 (με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας γράφεται $x-1-4y$)

στ) 3,5 **ζ)** −8

6. **α) i)** $5x+3y$, **ii)** $2(\alpha+\beta)$, **iii)** $4x$, **iv)** $2x+\frac{3}{2}y$

β) i) 4,75, **ii)** −1, **iii)** −14, **iv)** −0,4

7. **α)** 6,62 **β)** −16,1 **γ)** 3,1

8. **α)** $x+x+1=2x+1$

β) Για x, $x+1$ είναι όπως το α, ενώ για $x-1$, x είναι $2x-1$.

γ) Αν x και $x+1$, τότε είναι $2x+3(x+1)=5x+3$.

9. Αν σκεφτούμε όπως στην εφαρμογή 2 της διδακτικής ενότητας 5.2, βρίσκουμε την αντίστοιχη αλγεβρική παράσταση για ν ομάδες.

α) $\nu^2-\nu$ **β)** 210

10. **α)** $A=x+3y+3$ **β)** $A=12,2$

11. **α)** $5,5x+1,5y+8\omega+30$, αν πήρε x φορές αυτοκίνητο, y φορές μοτοσικλέτα και ω φορές ταξί τον μήνα.

β) Αντικαθιστώντας στην αλγεβρική παράσταση του ερωτήματος (α) τους αριθμούς, εκτός από εκείνους που αφορούν το μετρό (καθώς το κόστος είναι πάγιο), έχουμε: Απρίλιος 179,5 ευρώ, Μάιος 150 ευρώ και Ιούνιος 122 ευρώ.

12. **α)** $10\nu-(\nu+2)$ **β)** Αντικαθιστώντας έχουμε $1.010-(101+2)=907$.

13. 1ος τρόπος:

$$\frac{3x-3y+9}{3}=\frac{3(x-y+3)}{3}=\frac{3}{3}(x-y+3)=x-y+3$$

2ος τρόπος: $\frac{3x-3y+9}{3}=\frac{3x}{3}-\frac{3y}{3}+\frac{9}{3}=x-y+3$

Αλγεβρικές σχέσεις

6.1 Η εξίσωση και η λύση της

1. γ και δ

2. Ενδεικτικά και ως υποδείξεις για τις υπόλοιπες παρουσιάζονται οι (α) και (δ):

α) Πρώτο μέλος $4x-1$, δεύτερο μέλος 8, άγνωστος x.

δ) Πρώτο μέλος $11-x$, δεύτερο μέλος 1, άγνωστος x.

3. Αντικαθιστώντας στο μέλος που περιέχει τον άγνωστο και κάνοντας πράξεις, απαντάμε στα ερωτήματα. Ενδεικτικά και ως υπόδειξη αναφέρεται η λύση στο (α).

α) $3\cdot 1-1=3-1=2$, άρα η εξίσωση επαληθεύεται. Ο αριθμός είναι λύση της εξίσωσης.

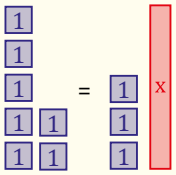
β) Ο αριθμός δεν είναι λύση της εξίσωσης.

γ) Ο αριθμός είναι λύση της εξίσωσης.

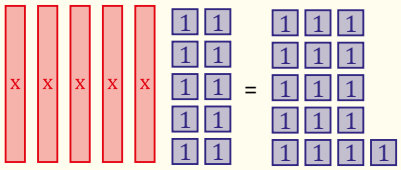
δ) Ο αριθμός δεν είναι λύση της εξίσωσης.

4. Ενδεικτικά και ως υποδείξεις για τις υπόλοιπες παρουσιάζονται οι (γ) και (δ):

γ)



δ)



5. **α)** Λ **β)** Σ **γ)** Σ
δ) Σ (η οποία είναι σωστή, ανεξάρτητα από τον ζυγό της εικόνας)

6. **α)** 1ος ζυγός: $\alpha = \beta$, 2ος ζυγός: $2\alpha = 2\beta$
β) Διπλασιάζοντας τα βάρη σε κάθε μέρος του 1ου ζυγού ή πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη της 1ης ισότητας με 2.

7. **α)** $2x + 4 = 16$
β) 1η ⟶ 2η εικόνα: αφαιρούμε 4 τετράγωνα εμβαδού 1 από κάθε μεριά ή αφαιρούμε 4 από κάθε μέλος της εξίσωσης. Εξίσωση 2ης εικόνας: $2x + 4 - 4 = 16 - 4$. 2η ⟶ 3η εικόνα: σβήνουμε τα τετράγωνα που αφαιρέθηκαν. Εξίσωση 3ης εικόνας: $2x = 12$.
γ) Διαιρούμε με το 2 κάθε μέλος της εξίσωσης και έτσι μένει 1 ορθογώνιο στο πρώτο μέλος και 6 τετράγωνα στο δεύτερο.

8. Εργαστείτε όπως στο «Συζητάμε» αυτής της διδακτικής ενότητας.

9. Εργαστείτε όπως στο «Συζητάμε» αυτής της διδακτικής ενότητας. Οι λύσεις των εξισώσεων είναι:
α) $x = 2$ **β)** $x = 3$ **γ)** $1 = x$ ή $x = 1$ **δ)** $x = 2$

10. Είναι σωστό, γιατί γράφουμε $\alpha + (-2) = \beta + (-2)$.

11. Εργαστείτε αντίστροφα από το παράδειγμα 1. Ξεκινήστε από έναν ζυγό που ισορροπεί με 4 βαρίδια α και 1 βαρίδι γ στο ένα μέρος και με 4 βαρίδια β και 1 βαρίδι γ στο άλλο μέρος. Αρχικά αφαιρέστε το γ από κάθε μέρος. Στη συνέχεια πρέπει να μείνει το $\frac{1}{4}$ από τα βαρίδια σε κάθε μέρος.

12. Χρησιμοποιήστε τις ιδιότητες που αναφέρονται στο παράδειγμα 1. Σε κάποιες περιπτώσεις μπορεί να χρησιμοποιούνται περισσότερες από μία ιδιότητες. Π.χ. στο (ε) πρώτα πολλαπλασιάζουμε τα δύο μέλη με 3 και στη συνέχεια προσθέτουμε στα δύο μέλη το γ.

6.2 Επίλυση εξίσωσης

1. Χρησιμοποιήστε τις ιδιότητες της προηγούμενης διδακτικής ενότητας (μετά το παράδειγμα 1), όπως στο «Συζητάμε» αυτής της διδακτικής ενότητας.
α) Διαιρούμε κάθε μέλος με 4.
β) Προσθέτουμε σε κάθε μέλος το $\frac{1}{2}$.
γ) Πολλαπλασιάζουμε κάθε μέλος με $\frac{4}{3}$.

2. Όλες οι εξισώσεις των (α) και (β) είναι ισοδύναμες. Μπορούμε με ιδιότητες της ισότητας να μεταβούμε από τη μία στην άλλη. Ομοίως και για όλες τις εξισώσεις του (γ).

3. Αφαιρούμε 1,5 από κάθε μέλος ⟶ κάνουμε τις πράξεις ⟶ πολλαπλασιάζουμε με 0,5 κάθε μέλος ⟶ κάνουμε τις πράξεις.

4. **α)** Λ **β)** Σ **γ)** Λ **δ)** Λ

5. 1ο βήμα (από την πρώτη στη δεύτερη εξίσωση): Προσθέτουμε $\frac{1}{3}$ στα δύο μέλη ή μεταφέρουμε το $-\frac{1}{3}$ στο δεύτερο μέλος και αλλάζει πρόσημο.
2ο βήμα: Προσθέτουμε τα κλάσματα στο δεύτερο μέλος.
Συνεχίζουμε με παρόμοιο τρόπο.

6. **α)** $x = 1{,}1$ **β)** $x = 1$ **γ)** $x = \frac{5}{6}$ **δ)** $x = \frac{7}{8}$
ε) $x = -0{,}4$ **στ)** $x = 5$ **ζ)** $x = 0$ **η)** $x = 18$
θ) $x = \frac{31}{7}$

7. **α)** $x = 1{,}2$ **β)** $x = -8$ **γ)** $x = 0$ **δ)** $x = 1$
ε) $x = 0$ **στ)** $x = -1$ **ζ)** $x = -1$

6.3 Προβλήματα που λύνονται με εξισώσεις

1. $x + 1{,}2 = 3{,}4$ **2.** $0{,}75x = 6{,}75$

3. **α)** ii **β)** ii **4.** γ **5.** δ

6. Υποδείξεις:
α) $0{,}22 \cdot 10 = 2{,}2$ λίτρα. $2{,}2 + 0{,}08 = 2{,}28$ λίτρα. Άρα τα 10 ποτήρια δεν επαρκούν για να γεμίσει το δοχείο.
β) Σκεφτείτε ότι x είναι το πλήθος των γεμάτων ποτηριών που χρησιμοποιήσαμε. Τι εκφράζει το $0{,}22 \cdot x$; Γιατί σε αυτό προσθέτουμε 0,08;
γ) $x = 11$

7. **α)** iv **β)** $x = 7$

8. β. Λύνοντας την εξίσωση $5x = 15$, βρίσκουμε $x = 3$.

9. Λύνοντας την εξίσωση $2(x+2)+x=40$, βρίσκουμε $x=12$.

10. **α)** $x+(x-1)=359$ **β)** $x=180$

11. Λύνοντας την εξίσωση $x+\frac{x}{2}+6+2x-4=30$, βρίσκουμε $x=8$.

12. $2-2{,}5x=1{,}55$. Λύνοντας την εξίσωση, βρίσκουμε $x=0{,}18$ λίτρα.

13. Αν x φύλλα κατανάλωσε την Τρίτη, τότε $x+2x-10+3(2x-10)+10=186$ και λύνοντας βρίσκουμε $x=24$.

Ανακεφαλαίωση: Αλγεβρικές σχέσεις

1. **α)** Σ **β)** Λ **γ)** Σ **δ)** Σ **ε)** Λ

2. **α)** Σ **β)** Λ **γ)** Λ **δ)** Σ

3. $4x+4=14$. Λύνοντας, βρίσκουμε $x=2{,}5$.

4. Εργαστείτε όπως στο παράδειγμα 2 της διδακτικής ενότητας 6.2.
Ενδεικτικά παρουσιάζουμε την απάντηση στο β: Από την πρώτη στη δεύτερη: επιμεριστική ιδιότητα. Από τη δεύτερη στην τρίτη: αφαιρούμε $\frac{1}{2}$ από τα δύο μέλη. Από την τρίτη στην τέταρτη και στην πέμπτη: κάνουμε τις πράξεις. Από την πέμπτη στην έκτη: διαιρούμε κάθε μέλος με 2. Από την έκτη στην τελευταία: κάνουμε τις πράξεις.

5. **α)** $x=5$ **β)** $x=6$ **γ)** $x=0{,}3$ **δ)** $x=\frac{5}{4}$
ε) $x=\frac{5}{24}$ **στ)** $x=\frac{1}{2}$ **ζ)** $x=3$ **η)** $x=65$
θ) $x=2$

6. **α)** **i)** $x=1{,}8$, **ii)** $x=1{,}35$, **iii)** $x=2{,}35$
β) Υπόδειξη: Προσέξτε την προτεραιότητα των πράξεων σε κάθε περίπτωση. Π.χ. στην (i) πρώτα υπολογίζεται το δεκαπλάσιο του x και στη συνέχεια αυξάνεται κατά 0,5, ενώ στη (ii) πρώτα αυξάνεται το x κατά 0,5 και στη συνέχεια δεκαπλασιάζεται το αποτέλεσμα.

7. **α)** $x=\frac{5}{6}$ **β)** $x=7$ **γ)** $x=-1$
δ) $x=\frac{3}{2}$ **ε)** $x=3$

8. **α)** $x=\frac{5}{4}$ ή $x=1{,}25$ **β)** i, ii, v

9. **α)** i.
β) Υπόδειξη: Ξεκινώντας από την εξίσωση του (α), εξετάστε αν όλες οι ισότητες είναι αληθείς (σύμφωνα με τις ιδιότητες της ισότητας).

10. **α)** Υπόδειξη: Σκεφτείτε ποια από τις δύο μονάδες είναι μεγαλύτερη σε μήκος.
Για τα επόμενα ερωτήματα, σκεφτείτε πότε αντιστοιχεί μεγαλύτερος αριθμός στο μήκος ενός αντικειμένου. Όταν το μετράμε με τη μονάδα Α ή όταν το μετράμε με τη μονάδα Β;
β) $11:1{,}125\cong 8{,}9$B **γ)** $11\cdot 1{,}125=12{,}375$A

11. **α)** Η Χ.
β) Αν x είναι το βάρος της Χ και y είναι το βάρος της Υ, τότε $x=1{,}2y$ ή $x=\frac{6}{5}y$. Βρίσκουμε ότι η y είναι τα $\frac{5}{6}$ της x.
γ) $y=\frac{5}{6}x$ **δ)** $50:1{,}2\cong 41{,}7$Χ

Γεωμετρία του επιπέδου – Μέτρηση

7.1 Βασικά επίπεδα σχήματα

1. Α, Γ, Δ, Ε. **2.** Άπειρες. **3.** Μόνο μία.

4. Τρίγωνο, τετράπλευρο, πεντάγωνο, εξάγωνο.

5. Να προεκτείνετε την ημιευθεία Ox προς το O.

6. Οι δύο ευθείες σχηματίζουν «Χ».

7. Είναι δύο ζεύγη: τα Ax, Ax′ και τα Bx, Bx′.

8. Οι δύο ημιευθείες δεν είναι ίδιες. Ένας λόγος είναι ότι δεν έχουν την ίδια αρχή: η μία έχει το O και η άλλη έχει το A.

9. Είναι διαφορετικές.

10. Οι διαγώνιοι ενός πενταγώνου είναι συνολικά 5.

7.2 Μήκος ευθύγραμμου τμήματος – Μονάδες μέτρησης μήκους

1. **i)** 1 dm = 100 mm **ii)** 1 mm = 0,1 cm
iii) 1 cm = 0,1 dm **iv)** 1 m = 1.000 mm

2. α-6 β-1 γ-4 δ-5 ε-2 στ-3

3.

mm	cm	dm	m
155	15,5	1,55	0,155
930	93	9,3	0,93
1.034	103,4	10,34	1,034
1.150	115	11,5	1,15

4. Μετράμε 7 cm και 5 mm.
5. 34,5 €
6. 20 lt

7.3 Σύγκριση, πρόσθεση και αφαίρεση ευθύγραμμων τμημάτων

1. Με χρήση του υποδεκάμετρου ή του διαβήτη βρίσκουμε $EZ < AB < IK < \Gamma\Delta < H\Theta$.
2. Είναι $B\Gamma = 7{,}5$ cm και $A\Gamma = 10$ cm. Άρα η περίμετρος είναι $AB + B\Gamma + A\Gamma = 11 + 7{,}5 + 10 = 28{,}5$ cm.
3. Με το υποδεκάμετρο βρίσκουμε $AB = 5$ cm και $\Gamma\Delta = 6{,}5$ cm. Κατασκευάζουμε τμήματα $AB + \Gamma\Delta = 11{,}5$ cm και $\Gamma\Delta - AB = 1{,}5$ cm.
4. Με τον διαβήτη ή το υποδεκάμετρο σε ημιευθεία από το Ε παίρνουμε διαδοχικά τμήματα ίσα με ΑΒ, ΒΓ και ΓΔ.
5. $AB = 2A\Gamma$, $AB = 2 \cdot 33$ mm $= 66$ mm $= 6{,}6$ cm
6. Επειδή 18 mm $= 1{,}8$ cm, η περίμετρος είναι $2 \cdot 5$ cm $+ 2 \cdot 1{,}8$ cm $= 13{,}6$ cm.
7. Η κορνίζα έχει ύψος $5 \cdot 35$ cm $= 175$ cm, πλάτος $4 \cdot 2$ dm $= 8$ dm $= 80$ cm και περίμετρο $2 \cdot 175$ cm $+ 2 \cdot 80$ cm $= 510$ cm.
8. Με το υποδεκάμετρο ή τον διαβήτη κατασκευάζουμε ευθύγραμμο τμήμα ίσο με το τριπλάσιο της μιας πλευράς.
9. Είναι $AB + B\Gamma = 150$ km $+ 440$ km $=$ $= 590$ km < 620 km. Άρα ο οδηγός θα μπορέσει να ολοκληρώσει τη διαδρομή.
10. **α)** Δ, Γ, Α, Β.
    β) Το συνολικό μήκος είναι 50,6 m. Άρα το τρένο χωράει στη γραμμή και περισσεύουν $55{,}8 - 50{,}6 = 5{,}2$ m.
11. Η πολυκατοικία μπορεί να έχει 8 ορόφους, καθώς το συνολικό της ύψος θα είναι 26,5 m.
12. Συγκρίνουμε το μήκος $ZH + \Theta I + K\Lambda$ με το $AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta E + EA$.
13. Είναι $AB = B\Delta$ και $B\Gamma = \Gamma\Delta$. Το σημείο Γ είναι το μέσο του τμήματος ΒΔ.

7.4 Ο κύκλος και τα στοιχεία του

1. Χρωματίστε το μέρος ανάμεσα στον δεύτερο και τον τρίτο κύκλο.
2. Βρίσκουμε το μέσο Ο του ΑΒ και κατασκευάζουμε τον κύκλο (Ο, ΟΑ).
3. Δύο χορδές, στα σημεία που ο κύκλος (Α, ΑΕ) συναντά τον κύκλο (Ο, 3 cm).
4. Σκεφτείτε ότι η μεγαλύτερη χορδή του κύκλου είναι η διάμετρος.
5. Δένουμε ένα σχοινάκι σε ένα ξύλο και το περιστρέφουμε γύρω από αυτό. Ή περιστρέφουμε ένα ξύλο γύρω από ένα σταθερό άκρο του.

7.5 Επίκεντρες γωνίες – Μέτρηση τόξων και επίκεντρων γωνιών

1. Γράφουμε τους κύκλους: **α)** (Ο, 2 cm), **β)** (Ο, 3 cm).
2. $\hat{\alpha} = 20°$, $\hat{\gamma} = 70°$, $\hat{\varepsilon} = 90°$, $\hat{\delta} = 120°$, $\hat{\beta} = 170°$
4. **α)** Να μην έχουν ίσα μέτρα, π.χ. 30° και 50°.
   β) Να έχουν ίσα μέτρα, π.χ. 40°.
   γ) και **δ)** Με βάση τις κουκκίδες στον κύκλο.
5. Θα περνάει από το Γ μόνο αν $AB = A\Gamma$, διότι τότε η ΑΓ θα είναι ακτίνα του κύκλου.
6. Σχεδιάζουμε και μετράμε την επίκεντρη γωνία $A\hat{O}B$, όπου Ο το κέντρο του κύκλου.
7. Σχεδιάζουμε το τμήμα ΑΒ. Με μία πλευρά την ΑΒ και κορυφές τα Α, Β κατασκευάζουμε τις γωνίες. Εκεί που τέμνονται οι μη κοινές πλευρές τους είναι το Γ.
8. Είτε με το άνοιγμα του διαβήτη είτε σχεδιάζοντας και μετρώντας την επίκεντρη γωνία του τόξου ΑΒ.
9. **α)** 90° **β)** 150° **γ)** 180°

7.6 Διχοτόμος γωνίας

1. Βρίσκουμε το μέτρο τους και διαιρούμε διά 2.
2. Ομοίως.
3. Ομοίως.
4. Δεξιά και αριστερά της Οδ κατασκευάζουμε αντίστοιχα τις γωνίες $\delta\hat{O}x = 25°$ και $\delta\hat{O}y = 25°$.
5. Οι γωνίες $x\hat{O}\delta$ και $\delta\hat{O}y$ θα είναι 40 μοίρες, άρα η διχοτόμος της γωνίας $x\hat{O}\delta$ θα τη χωρίζει σε δύο ίσες γωνίες 20 μοιρών.

7.7 Είδη γωνιών

1. **β)** $x\hat{A}y$ - πλήρης, $x\hat{B}y$ - μη κυρτή, $x\hat{\Gamma}y$ - ευθεία, $x\hat{\Delta}y$ - οξεία, $x\hat{E}y$ - αμβλεία, $x\hat{Z}y$ - μηδενική, $x\hat{H}y$ - ορθή
2. $\hat{\alpha} = 170°$, $\hat{\omega} = 105°$, $\hat{\varphi} = 80°$

3. **α)** Η Οδ εσωτερική της γωνίας $x\hat{O}y$.

β) Η Οδ εξωτερική της γωνίας $x\hat{O}y$, προς το μέρος της Oy.

4. $220°$

7.8 Πρόσθεση και αφαίρεση γωνιών

1. **α)** Σ **β)** Σ **γ)** Λ

2. Κάνουμε τις γωνίες διαδοχικές.

3. $\delta\hat{O}z = \delta\hat{O}y + y\hat{O}z = 40° + (150° - 80°) = 110°$

4. $\zeta\hat{O}y = \zeta\hat{O}\delta + \delta\hat{O}y = 25° + 50° = 75°$

5. $t\hat{O}z = 180° - (100° + 70°) = 10°$

6. **α)** Οξείες.

β) Ή ορθές ή η μία οξεία και η άλλη αμβλεία.

7. Ορθή και οξεία, ή και οι δύο οξείες, ή η μία αμβλεία και η άλλη οξεία, ή και οι δύο αμβλείες, ή η μία ορθή και η άλλη αμβλεία.

8. **α)** $y\hat{O}v = y\hat{O}z + z\hat{O}t + t\hat{O}v = 30° + 45° + 35° = 110°$,

β) $x\hat{O}v - t\hat{O}v = (60° + 30° + 45° + 35°) - 35° = 135°$

7.9 Συμπληρωματικές και παραπληρωματικές γωνίες

1. Για τη συμπληρωματική φέρνουμε κάθετη σε μία από τις δύο πλευρές στην κορυφή της γωνίας. Για την παραπληρωματική φέρνουμε την αντικείμενη ημιευθεία της μιας από τις δύο πλευρές.

2. $\hat{\alpha} + \hat{\gamma} = 180°$, $\hat{\beta} + \hat{\delta} = 180°$, $\hat{\gamma} + \hat{\delta} = 90°$

3. **α)** $\hat{\omega} + \hat{x} = 40° + 50° = 90°$

β) Όχι, διότι όλες είναι οξείες.

4. Έστω $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ οι δύο γωνίες. Η γωνία των διχοτόμων είναι $\frac{\hat{\alpha}}{2} + \frac{\hat{\beta}}{2} = \frac{\hat{\alpha} + \hat{\beta}}{2} = \frac{90°}{2} = 45°$.

5. Έστω $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ οι δύο γωνίες. Η γωνία των διχοτόμων είναι $\frac{\hat{\alpha}}{2} + \frac{\hat{\beta}}{2} = \frac{\hat{\alpha} + \hat{\beta}}{2} = \frac{180°}{2} = 90°$.

6. $x\hat{O}z = x\hat{O}y + y\hat{O}\delta + \delta\hat{O}z = 90° + 46° + 46° = 182°$.

Αν ήταν $\delta\hat{O}z = 45°$, τότε η $x\hat{O}z$ θα ήταν ευθεία.

7. **α)** $x\hat{O}z + z\hat{O}y = 180°$, $z\hat{O}\tau + x\hat{O}\delta = 180°$

β) $z\hat{O}\delta + \delta\hat{O}\tau = 90°$, $\delta\hat{O}\rho + x\hat{O}z = 90°$

7.10 Κατακορυφήν γωνίες

1. Κατασκευάζουμε τις αντικείμενες ημιευθείες των πλευρών.

2. Ελέγξτε με το διαφανές χαρτί αν είναι ίσες ή αν οι πλευρές της μιας είναι προεκτάσεις των πλευρών της άλλης σε σχέση με την κορυφή.

3. $\hat{\alpha} = 70°$, άρα $\frac{\hat{\alpha}}{2} = 35°$ και

$\hat{\beta} = 180° - \frac{\hat{\alpha}}{2} = 180° - 35° = 145°$.

4. Η κατακορυφήν της $\hat{\omega}$ είναι ίση με

$\frac{\hat{\alpha}}{2} + \frac{\hat{\beta}}{2} = 15° + 25° = 40°$. Άρα $\hat{\omega} = 40°$.

5. $\hat{\theta} = 90° - \hat{\alpha} = 90° - 80° = 10°$,

$\hat{\chi} = 90° - \hat{\beta} = 90° - 60° = 30°$ και $\hat{\omega} = \hat{\chi} = 30°$ ως κατακορυφήν.

6. Λόγω της διχοτόμου Oy έχουμε $x\hat{O}y = y\hat{O}z = 80°$.

Επίσης, $x'\hat{O}x = 180°$, άρα $z\hat{O}x' = 180° - 2 \cdot 80° = 20°$.

7.11 Σχετικές θέσεις ευθειών στο επίπεδο

1. **α)** Λ **β)** Λ **γ)** Σ

2. Βρείτε παραδείγματα δρόμων που τέμνονται οι ίδιοι ή οι προεκτάσεις τους και αντίστοιχα βρείτε παραδείγματα δρόμων που δεν τέμνονται ούτε οι ίδιοι αλλά ούτε και οι προεκτάσεις τους.

3. Για παράδειγμα, οι ευθείες της κάθε διάβασης είναι παράλληλες μεταξύ τους, δύο διαδοχικές πλευρές του κίτρινου τετραγώνου είναι κάθετες μεταξύ τους, ενώ οι εσωτερικές γραμμές του τετραγώνου με τις πλευρές του δεν είναι ούτε κάθετες ούτε παράλληλες μεταξύ τους.

4. Από το σημείο Α κατασκευάστε ευθύγραμμα τμήματα κάθετα στις ευθείες και μετρήστε το μήκος τους.

5. Κατασκευάστε ένα ευθύγραμμο τμήμα με τα άκρα του στις δύο ευθείες και κάθετο σε αυτές και μετρήστε το μήκος του.

6. Παράλληλα είναι το ΑΒ με το ΓΔ, το ΗΘ με το ΕΖ και το ΝΟ με το ΙΚ.

7. Αν η ευθεία ε_2 είναι ανάμεσα στις ε_1 και ε_3, η απόσταση της ε_1 από την ε_3 είναι 5 cm. Αν η ευθεία ε_3 είναι ανάμεσα στις ε_2 και ε_1, η απόσταση της ε_1 από την ε_3 είναι 1 cm.

8. Από το σημείο Α φέρτε ευθεία κάθετη προς την ε και στη συνέχεια κάθετη προς την ευθεία αυτή. Ακολουθήστε την ίδια διαδικασία για το σημείο Β. Ελέγξτε αν μια ευθεία που είναι κάθετη σε μία από τις δύο ευθείες είναι κάθετη και στην άλλη.

9. Από το σημείο Α φέρνουμε κάθετη προς την απέναντι ακτή.

10. Από το μέσο τμήματος που είναι κάθετο στις δύο άκρες του δρόμου σχεδιάστε ευθεία παράλληλη σε αυτές.

7.12 Χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων της διχοτόμου

1. Φέρνουμε τα κάθετα τμήματα και τα μετράμε.

2. Τα Α και Γ, διότι ισαπέχουν από τις πλευρές της γωνίας.

3. Διότι το σημείο Α ισαπέχει από τις πλευρές ΟΕ και ΟΖ της γωνίας. Είναι ΒΕ = ΒΖ = 3,5.

4. x = 2 και y = 2,7

5. Φέρνουμε τη διαγώνιο του μικρού τετραγώνου που ξεκινά από την κορυφή της ορθής. Η κορυφή αυτή του τετραγώνου ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας.

6. Ανήκουν όλα στη διχοτόμο της γωνίας που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_2, διότι ισαπέχουν από αυτές.

7. Για να ισαπέχει από τις ΑΒ και ΑΓ, θα πρέπει να βρίσκεται πάνω στη διχοτόμο της γωνίας $\widehat{A}$. Ομοίως, για να ισαπέχει από τις ΑΒ και ΒΓ θα πρέπει να βρίσκεται πάνω στη διχοτόμο της γωνίας $\widehat{B}$. Άρα βρίσκουμε το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών $\widehat{A}$ και $\widehat{B}$, οπότε και η διχοτόμος της $\widehat{\Gamma}$ θα περνάει από αυτό (αφού θα ισαπέχει από τις πλευρές της).

8. Είναι σωστή. Το Μ απέχει από τις πλευρές της γωνίας απόσταση ίση με το πλάτος του χάρακα.

9. Το Α ισαπέχει από τις πλευρές της $\widehat{\Gamma}$ και το Γ ισαπέχει από τις πλευρές της $\widehat{A}$. Άρα η ΑΓ είναι διχοτόμος των $\widehat{A}$ και $\widehat{\Gamma}$.

7.13 Γωνίες από παράλληλες και τέμνουσα

1. 1-γ 2-ε 3-α 4-β 5-δ

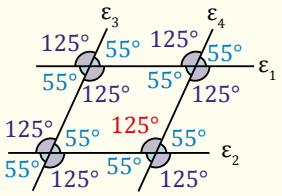
2. $\hat{\alpha} = 45°$, $\hat{\beta} = 45°$

3. Οι γωνίες είναι παραπληρωματικές.

4. **α)** $\hat{\alpha} = 130°$, $\hat{\beta} = 130°$ **β)** $\hat{\alpha} = 115°$, $\hat{\beta} = 115°$
γ) $\hat{\alpha} = 35°$, $\hat{\beta} = 35°$ **δ)** $\hat{\alpha} = 30°$, $\hat{\beta} = 150°$

5. $\hat{\alpha} = 115°$, $\hat{\beta} = 115°$, $\hat{\gamma} = 115°$, $\hat{\delta} = 65°$

6.



7. Πρέπει να είναι 90°.

8. $\hat{\alpha} = 120°$, $\hat{\beta} = 30°$, $\hat{\gamma} = 30°$

7.14 Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου

2. Φέρνουμε τη μεσοκάθετο ε της ΑΒ, που τέμνει τον κύκλο στο Γ.
α) Φέρνουμε κάθετη στην ε στο σημείο Γ.
β) Φέρνουμε κάθετη στην ε σε σημείο εκτός του κύκλου.

3. Φέρνουμε κάθετη δ από το Ο προς την ε.
α) Στο σημείο Μ, που η δ τέμνει τον κύκλο, φέρνουμε κάθετη στη δ.
β) Σε σημείο Κ, ανάμεσα στα Μ και Ο, φέρνουμε κάθετη στη δ.

7.15 Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος

1. Η μεσοκάθετος του τμήματος ΑΒ έχει σχεδιαστεί σωστά στο μεσαίο σχήμα.

2. ΣΔ = ΣΕ

3. Σχεδιάστε τη μεσοκάθετο μιας τυχαίας χορδής του κύκλου. Αυτή διέρχεται από το κέντρο του κύκλου.

4. Σχεδιάστε τη μεσοκάθετο του ΑΒ και εντοπίστε το σημείο της που βρίσκεται στον δρόμο.

5. Σκεφτείτε ότι, αν σχεδιάσετε τη μεσοκάθετο του ΓΔ, τότε έχετε όλα τα σημεία που ισαπέχουν από τα σημεία Γ και Δ στον χάρτη.

7.16 Είδη τριγώνων και στοιχεία τους

1. Υπάρχουν πέντε τρίγωνα στο παιχνίδι tangram, με χρώμα κόκκινο, κίτρινο, πράσινο, γαλάζιο και ροζ.

2. Δείτε το βίντεο «Οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου» στη σελ. 198. Οι τρεις διχοτόμοι διέρχονται από το ίδιο σημείο.

3. **α)** Σ **β)** Σ **γ)** Σ **δ)** Λ **ε)** Σ **στ)** Σ

4. ΑΒΖ ορθογώνιο σκαληνό, ΒΕΖ ορθογώνιο ισοσκελές, ΒΓΕ οξυγώνιο ισοσκελές, ΓΔΕ ισόπλευρο, ΑΓΔ ορθογώνιο σκαληνό, ΑΒΕ αμβλυγώνιο σκαληνό, ΑΓΕ αμβλυγώνιο ισοσκελές.

5. Τα τμήματα ΑΓ, ΑΒ, ΑΔ είναι ακτίνες του κύκλου (Α, ΑΒ), ενώ τα τμήματα ΒΓ, ΑΒ, ΒΔ είναι ακτίνες του κύκλου (Β, ΑΒ). Εφόσον οι δύο κύκλοι είναι

ίσοι, θα είναι ίσες και όλες οι ακτίνες τους, οπότε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ είναι ισόπλευρα.

6. Και οι τρεις διάμεσοι διέρχονται από το ίδιο σημείο.
7. Ενδεικτικά, η μία κορυφή του ζητούμενου τριγώνου θα μπορούσε να είναι το κέντρο ενός κύκλου ακτίνας 4 cm και οι άλλες δύο κορυφές να είναι σημεία του κύκλου που απέχουν 3 cm.

7.17 Άθροισμα γωνιών τριγώνου

1. Επειδή $65° + 35° + 77° = 177°$, ο ισχυρισμός της Ελένης είναι λανθασμένος – δεν υπάρχει τέτοιο τρίγωνο. Ίσως να μέτρησε λάθος τις γωνίες του τριγώνου που σχεδίασε.
2. $\hat{\omega} = 40°$, $\hat{\theta} = 80°$, $\hat{\varphi} = 72°$ και $\hat{\chi} = 36°$.
3. Οι γωνίες του ισόπλευρου τριγώνου είναι ίσες. Το άθροισμά τους είναι 180°. Άρα η καθεμία θα είναι $180° : 3 = 60°$.
4. Στο ισοσκελές και ορθογώνιο τρίγωνο οι δύο οξείες γωνίες είναι ίσες και έχουν άθροισμα 90°. Άρα η καθεμία θα είναι $90° : 2 = 45°$.
5. Τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΑΓ είναι ισοσκελή και ορθογώνια, οπότε δείτε βοηθητικά την άσκηση 4.

7.18 Τα τετράπλευρα και τα είδη τους

1. Το ΕΖΗΘ είναι ορθογώνιο, το ΑΒΓΔ ρόμβος και το ΚΛΜΙ τετράγωνο.
   $\Theta H = 3$ cm, $ZH = 5$ cm, $\Delta\Gamma = 3{,}6$ cm, $B\Gamma = 3{,}6$ cm, $\hat{A} = 60°$, $K\Lambda = \Lambda M = 4$ cm, $\hat{M} = 90°$.
2. **α)** τετράγωνο **β)** ρόμβος **γ)** παραλληλόγραμμο
3. Του κόκκινου είναι 16,4 cm και του γαλάζιου είναι 15,2 cm.
4. Του κόκκινου είναι 14 cm και του πράσινου είναι 16 cm.
5. Μερικά τετράπλευρα (ενδεικτικά) είναι τα ΜΝΘΚ (παραλληλόγραμμο), ΓΔΗΛ (τραπέζιο).
6. Μερικά τετράπλευρα (ενδεικτικά) είναι τα ΚΘΒΙ (ρόμβος), ΓΔΗΛ (τραπέζιο).
7. **α)** Ξεκινήστε με τη γωνία $\hat{A} = 60°$.
   β) Όπως στο (α).
   γ) Ξεκινήστε με μία ορθή γωνία.
   δ) Όπως στο (γ).
   ε) Ξεκινήστε με μία γωνία 60° ή κατασκευάστε δύο ισόπλευρα τρίγωνα με πλευρά 3 cm.
8. Σκεφτείτε αν κάποιο τρίγωνο συμπίπτει με κάποιο άλλο μετά από συμμετρία ως προς άξονα ή στροφή.
9. **α)** Μια εξίσωση είναι η $x + 2x + x + 2x = 27$.
   β) 4,5 cm και 9 cm.
10. Σκεφτείτε τις ιδιότητες των διαγωνίων του ορθογωνίου.
11. Σκεφτείτε την ιδιότητα των διαγωνίων του παραλληλογράμμου
12. Σκεφτείτε τις ιδιότητες των πλευρών και των διαγωνίων του ορθογωνίου.
13. Σκεφτείτε τους ορισμούς. Βρείτε έναν ρόμβο που δεν είναι τετράγωνο.
14. Σκεφτείτε τι συμβαίνει αν οι διαγώνιοι δε διχοτομούνται.

Ανακεφαλαίωση: Γεωμετρία του επιπέδου – Μέτρηση

1. **α)** Σ **β)** Λ **γ)** Σ **δ)** Λ **ε)** Λ **στ)** Σ **ζ)** Σ **η)** Λ
2. Χρησιμοποιώντας πλέγμα, υπολογίζουμε ότι το ορθογώνιο στα δεξιά έχει τη μεγαλύτερη περίμετρο και το ορθογώνιο στα αριστερά τη μικρότερη.
3. Η ΑΓΔ, με μήκος 2,5 km.
4. Το ένα θα μπορούσε να είναι τετράγωνο, ενώ το άλλο όχι.
5. Θα πρέπει να λάβουμε υπόψη και τις τέσσερις γωνίες του τραπεζιού, όπου δεν κάθονται άτομα. Μελετήστε πόσο κενό αφήνουν συνήθως οι επιπλοποιοί για τις γωνίες σε ένα τραπέζι.
6. Σε κάθε ζεύγος, τα σχήματα είναι ίσα. Σκεφτείτε το γιατί.
7. $\hat{\delta} = 110°$
8. Οι γωνίες που εμφανίζονται στα ερωτήματα (β) και (γ) είναι ίσες με τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.
9. Σκεφτείτε τις ιδιότητες που έχουν οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου, του ορθογωνίου, του ρόμβου και του τετραγώνου.
10. **α)** Π.χ. μετρήστε την κυρτή γωνία με τις ίδιες πλευρές.
    β) Παρατηρήστε ότι $300° = 180° + 120°$.
11. $AB = \Gamma\Delta$
12. Το σημείο Γ θα πρέπει να είναι εσωτερικό σημείο του τμήματος ΑΒ.
13. Σκεφτείτε ότι οι εξωτερικές γωνίες του τριγώνου είναι παραπληρωματικές με τις εσωτερικές γωνίες του τριγώνου. Άρα το άθροισμα όλων (εσωτερικών και εξωτερικών) είναι $3 \cdot 180° = 540°$.
14. Η ευθεία ΓΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΒ (παρατηρήστε ότι το κοινό σημείο των κυκλικών οικοπέδων είναι το σημείο όπου εφάπτεται η ΓΔ με τους κύκλους).

15. **α)** Οι γωνίες είναι ίσες.

β) Το Δ ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας $\widehat{A}$ (αφού $\Delta H = \Delta Z$), γι' αυτό και βρίσκεται στη διχοτόμο της γωνίας $\widehat{A}$.

16. **α)** Κάποιες τριάδες δε δημιουργούν τρίγωνα, όπως τα ξυλάκια μήκους 3,5 cm, 0,4 dm, 90 mm.

β) Υπολογίστε αθροίσματα πλευρών, αφού πρώτα μετατρέψετε τα μήκη στην ίδια μονάδα μέτρησης.

17. Δοκιμάστε να σχεδιάσετε τη μεσοκάθετο ενός τμήματος με άκρα τα κέντρα δύο γειτονικών περιοχών.

18. **α)** Στα τραπέζια έχουμε μόνο ένα ζεύγος παράλληλων πλευρών.

β) Σκεφτείτε ότι τα τετράγωνα είναι και ορθογώνια και ρόμβοι.

19. Σκεφτείτε ότι δύο τόξα μπορούν να έχουν το ίδιο μέτρο και να βρίσκονται σε άνισους κύκλους.

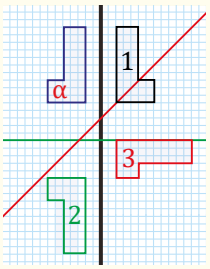
Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί

8.1 Συμμετρία σχημάτων ως προς άξονα

1. Στην εικόνα α.

2. Η πάνω αριστερά και η κάτω αριστερά.

3. Τα συμμετρικά του σχήματος α ως προς τη μαύρη, την πράσινη και την κόκκινη ευθεία είναι τα σχήματα 1, 2 και 3 αντίστοιχα.



4. Μερικά (ενδεικτικά) ζευγάρια συμμετρικών σχημάτων είναι: το η με το δ, το β με το γ, το κ με το δ. Για να βρείτε τους άξονες συμμετρίας, σκεφτείτε τη δίπλωση.

5. Η χρήση του τετραγωνισμένου χαρτιού διευκολύνει στις περιπτώσεις α και β.

6. Σκεφτείτε ότι τα συμμετρικά ευθύγραμμα τμήματα είναι ίσα και το ίδιο ισχύει για τις γωνίες.

7. Μπορείτε να βρείτε τις ε και δ είτε με δίπλωση είτε βρίσκοντας τις μεσοκαθέτους του ΑΑ′ και του ΓΓ′.

8. **α)** $A'(1,-2)$, $B(3,0)$ και $\Gamma'(0,-4)$

β) $A''(-1,2)$, $B''(-3,0)$ και $\Gamma(0,4)$

9. Το συμμετρικό του A_3B_3 ως προς τον άξονα y′y είναι το αρχικό τμήμα ΑΒ.

10. Ο άξονας συμμετρίας είναι η ευθεία που περνάει από τα σημεία $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,2)$ κτλ.

11. Χρησιμοποιήστε τον γνώμονα για να φέρετε κάθετες στην ε από τα Α, Β, Γ και τον διαβήτη για να πάρετε ίσα τμήματα στις προεκτάσεις των καθέτων.

12. Όπως στην 11.

8.2 Σχήματα με άξονα συμμετρίας

1. Ενδεικτικά, στην πρώτη γραμμή, το πρώτο σχήμα έχει έναν άξονα συμμετρίας, το δεύτερο κανέναν, το τρίτο έχει δύο και το τέταρτο δύο.

2. Το σχήμα έχει δύο άξονες συμμετρίας: την ευθεία που περνάει από τα κέντρα και την κοινή χορδή.

3. Η φωτογραφία στα αριστερά είναι η πραγματική.

4. Μερικές ισότητες (ενδεικτικά) είναι οι: $B\Delta = \Delta\Gamma$, $B\widehat{A}\Delta = \Gamma\widehat{A}\Delta$ κτλ. Η δικαιολόγηση μπορεί να στηρίζεται στη συμμετρία.

5. Ενδεικτικά, στην κατηγορία των γραμμάτων με δύο άξονες συμμετρίας είναι τα: Η, Θ, Ι, Ξ, Χ.

6. Σκεφτείτε πώς φτιάχνετε τους άξονες συμμετρίας σε ένα πολύγωνο με περιττό πλήθος πλευρών (τρίγωνο, πεντάγωνο) και πώς σε ένα πολύγωνο με άρτιο πλήθος πλευρών (τετράγωνο, εξάγωνο).

7. Σκεφτείτε, αν έχουν έναν άξονα συμμετρίας, πόσες πλευρές έχουν σίγουρα ίσες.

8. Δικαιολογήστε τις προτάσεις χρησιμοποιώντας ότι κάποια τμήματα είναι ίσα με τα συμμετρικά τους.

9. Το ορθογώνιο και ο ρόμβος έχουν από δύο άξονες συμμετρίας και το τετράγωνο έχει τέσσερις.

Ανακεφαλαίωση: Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί

1. Οι δύο γάτες.

2. Ο ένας τρόπος είναι η δίπλωση και ο άλλος να κατασκευάσουμε τη μεσοκάθετο ενός τμήματος που συνδέει δύο συμμετρικά σημεία (π.χ. τα δύο άκρα των αυτιών).

3. Τα δύο σχήματα που είναι κάτω δεν έχουν άξονες συμμετρίας.

4. Σκεφτείτε ότι οι γωνίες που είναι συμμετρικές είναι ίσες. Το ίδιο ισχύει και για τις πλευρές.

5. Ενδεικτικά, τρεις άξονες συμμετρίας μπορεί να έχει ένα τρίγωνο (τι είδους;) και άπειρους μπορεί να έχει ο κύκλος (γιατί;).

6. Χρησιμοποιήστε τα στοιχεία που είναι ίσα επειδή είναι συμμετρικά.

7. Απάντηση μόνο για το σημείο Α:

α) $A(2, 4)$ **β) i)** $A_2(2, -4)$, **ii)** $(x, y) \to (x, -y)$

γ) i) $A_3(4, 2)$, **ii)** $(x, y) \to (y, x)$

Γεωμετρία του χώρου

9.1 Πρίσμα και πυραμίδα

1. Ενδεικτικά, κάποιες γόμες έχουν σχήμα τριγωνικού πρίσματος, οι πυραμίδες της Αιγύπτου είναι τετραγωνικές πυραμίδες.

2. **α)** Βάση της πυραμίδας είναι το τρίγωνο ΑΒΓ.

β) Κορυφή της πυραμίδας είναι το Δ και κορυφές της βάσης της είναι τα Α, Β και Γ.

γ) Μία ακμή είναι η ΑΓ.

δ) Μία έδρα είναι το ορθογώνιο ΤΥΛΟ. Μία βάση του είναι η ΠΡΣΤΥ.

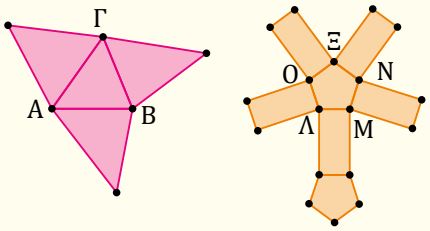
στ) Μία ακμή είναι η ΛΜ και μία άλλη είναι η ΣΞ.

ζ) Η ΠΜ είναι μία ακμή που είναι και ύψος του πρίσματος. Για την πυραμίδα δεν υπάρχει πάντα ακμή που να είναι ύψος.

3. **β)** Ενδεικτικά, μπορείτε να σχεδιάσετε ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με πλευρές 1, 2 και 3 μονάδες.

4. Δείτε αντίστοιχα σχήματα στο βιβλίο.

5.



6. Ενδεικτικά, δύο αναπτύγματα του πενταγωνικού πρίσματος φαίνονται στα σχήματα 1α και 1β της άσκησης 7.

7. Στην ομάδα σχημάτων 1, το γ δεν είναι ανάπτυγμα στερεού. Στην ομάδα 2, το β δεν είναι. Στην ομάδα 3, το γ δεν είναι. Στην ομάδα 4, το γ δεν είναι.

8. **α)** (πλήθος κορυφών) = (πλήθος κορυφών βάσης) +1

β) (πλήθος εδρών) = (πλήθος κορυφών βάσης) +1

γ) (πλήθος ακμών) = (πλήθος κορυφών βάσης) ×2

9. Θα χρειαστείτε χαρτόνι, ψαλίδι και κολλητική ταινία. Σχεδιάστε το ανάπτυγμα στο χαρτόνι, κόψτε το και διπλώστε το, ώστε να σχηματιστεί το στερεό που θέλετε.

10. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το GeoGebra.

11. Σκεφτείτε αντίστοιχα σχήματα που υπάρχουν στο βιβλίο.

12. **α)** (πλήθος κορυφών) = (πλήθος κορυφών βάσης) ×2

β) (πλήθος εδρών) = (πλήθος κορυφών βάσης) +2

γ) (πλήθος ακμών) = (πλήθος κορυφών βάσης) ×3

9.2 Κύλινδρος, κώνος και σφαίρα

1. Ενδεικτικά, κώνος είναι το χωνάκι του παγωτού, σφαίρα είναι μία μπάλα κτλ.

2. **α)** Μία βάση του κυλίνδρου είναι ο κύκλος με κέντρο Η και ακτίνα ΗΖ. **β)** Ε

γ) Ύψος του κυλίνδρου είναι το μήκος του ΖΔ (ποιου άλλου;). Ύψος του κώνου είναι το ΕΒ.

3. Δείτε παρόμοια σχήματα στο βιβλίο.

4. Το ανάπτυγμα του κώνου θα περιλαμβάνει ένα ορθογώνιο διαστάσεων 2 cm και 6,28 cm και δύο κυκλικούς δίσκους ακτίνας 1 cm.

5. Τα β και γ δεν είναι αναπτύγματα κυλίνδρου.

6. Το β δεν είναι ανάπτυγμα κώνου.

7. 1,2 cm

8. Ακτίνα 3,15 cm και ύψος 25,2 cm.

9. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το GeoGebra.

Ανακεφαλαίωση: Γεωμετρία του χώρου

1. **α)** τριγωνική πυραμίδα **β)** πενταγωνικό πρίσμα
γ) κύλινδρος **δ)** κώνος
ε) σφαίρα **ζ)** τριγωνικό πρίσμα

2. ΠΡΣΤΥΦ, ορθογώνια, ΡΣΓΒ (ή άλλη), ΓΔΤΣ (ή άλλη), 6, ΣΤ (ή άλλη), ΦΞ (ή άλλη), ΡΒ (ή άλλο), τετραπλευρική, τετράπλευρο, ΕΖΗΘ, Χ, κορυφή, 5, κύκλος, Ι, ΙΚ, ΚΨ, κώνος, Λ, ΛΝ, Μ

3. Δείτε παρόμοια αναπτύγματα στο βιβλίο.

4. Πρόκειται για πενταγωνική πυραμίδα.

5. Δείτε παρόμοια σχήματα στο βιβλίο.

Στατιστική

10.1 Διαχείριση δεδομένων

1. Στατιστική έρευνα για τα ερωτήματα (β), (γ) και (ε). Απογραφή για τα ερωτήματα (β) και (ε).

2. Ανατρέξτε σε παρόμοια παραδείγματα του βιβλίου.

3.

Τιμές	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα	Σχετική συχνότητα %
2	4	0,08	8%
3	19	0,38	38%
4	15	0,3	30%
5	12	0,24	24%
Σύνολο	50	1,00	100%

4. **α)** 6 **β)** 25 **γ)** 49

5. **α)** Τα περισσότερα είναι κοινωνικά και τα λιγότερα φαντασίας.

β) Έχει δίκιο ο Γιώργος.

γ) 100 αστυνομικά και 60 φαντασίας.

6. **α)** 2019-2020 **β)** 48,1%

γ) 320.822 (σύνολο), 166.507 αγόρια, 154.315 κορίτσια

7. **α)** Ειρηνικός, 168.000 χιλιάδες τ.χλμ. περίπου

β) Αρκτικός, 16.000 χιλιάδες τ.χλμ. περίπου

γ) 6 φορές

δ) περίπου 360.000 χιλιάδες τ.χλμ.

8. **α)** Η μεγαλύτερη στην Κεντρική και Νότια Ασία, η μικρότερη στην Αυστραλία και Νέα Ζηλανδία.

β) Κεντρική και Νότια Ασία, Βόρεια Αμερική και Ευρώπη, Υποσαχάρια Αφρική.

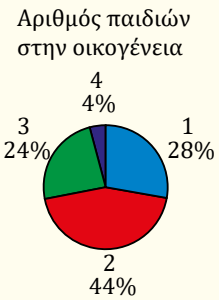
9. **α)** 25

β)

Αριθμός παιδιών στην οικογένεια	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα
1	7	28%
2	11	44%
3	6	24%
4	1	4%
Σύνολο	25	100%

γ)





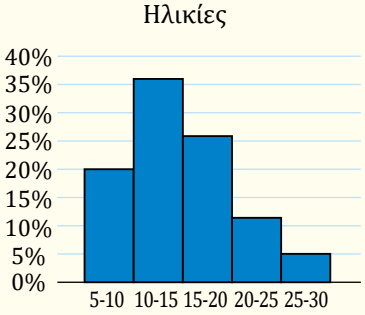
10. **α)**

λάδι	25,0%
ελιές	12,5%
λαχανικά	35,0%
φρούτα	10,0%
δημητριακά	17,5%
Σύνολο	100%

11. **β)**

Κλάση	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα
5-10	10	20%
10-15	18	36%
15-20	13	26%
20-25	6	12%
25-30	3	6%
Σύνολο	50	100%

γ)



12. **α)**

	Α΄ τάξη		Β΄ τάξη	
αναψυκτικά	35	35%	40	33%
χυμοί	40	40%	35	29%
γάλατα	25	25%	45	38%
Σύνολο	100	100%	120	100%

β) Στην Α΄ τάξη οι χυμοί, στη Β΄ τάξη τα γάλατα.

γ) Περισσότερα αναψυκτικά κατανάλωσαν τα παιδιά της Β΄ τάξης.

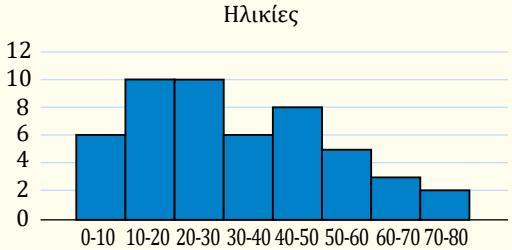
δ) Ο μαθητής έχει δίκιο.

ε) Ξέρουμε ότι το 38% των ειδών που καταναλώνουν τα παιδιά της Γ΄ τάξης είναι γάλατα, αλλά δεν ξέρουμε πόσα είναι τα παιδιά. Κάντε μια λογική υπόθεση για τον αριθμό των παιδιών, για να κάνετε μια πρόταση.

13. **α)**

Κλάση	Συχνότητα
0-10	6
10-20	10
20-30	10
30-40	6
40-50	8
50-60	5
60-70	3
70-80	2
Σύνολο	50

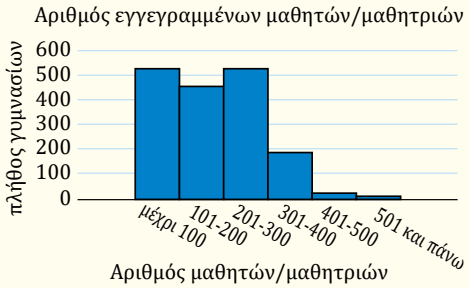
β)



14. **α)**

Κλάσεις (αριθμός εγγεγραμμένων μαθητών/μαθητριών το 2020)	Συχνότητα (αριθμός γυμνασίων)
μέχρι 100	522
101-200	461
201-300	524
301-400	184
401-500	26
501 και πάνω	7
Σύνολο	1.724

β)



γ) Με τη σειρά: 30%, 60%, 6% και 57% περίπου.

15. Ενδεικτικά, για τα ερωτήματα (β) και (γ) θα μπορούσε να χρησιμοποιήσει ραβδογράμματα, για το ερώτημα (α) ιστόγραμμα και για το ερώτημα (δ) κυκλικό διάγραμμα.

10.2 Μέτρα θέσης και μεταβλητότητας

1.

Ερώτημα	Μέση τιμή	Διάμεσος	Επικρατούσα τιμή	Εύρος
α)	5,2	5	5	14
β)	2,2	2	1 και 2	3
γ)	23,25	23,5	–	11

2.

Σύνολο δεδομένων	Μέση τιμή	Διάμεσος	Εύρος
Α	5	5	8
Β	5	5	8
Γ	5	5	2
Δ	8	5	23

3.

Ερώτημα	Μέση τιμή	Διάμεσος	Επικρατούσα τιμή	Εύρος
α)	1,95	2	2	5
β)	27,7	28	27 και 29	5

4. **α)** 2 **β)** 1,5 **γ)** 3

5. Η διάμεσος είναι στην κλάση 30-32 και το εύρος είναι περίπου 10.

6. **α)** Σχεδιάστε τέσσερις ράβδους με ύψος 17.
β) Η Ελισάβετ θα έχει 19 στο τεστ Δ.

7. **α)** Η μέση τιμή είναι 7,8, η διάμεσος είναι 8,1 και το εύρος είναι 20,2.
β) Ως απόμακρες τιμές θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε τις θερμοκρασίες –2,4 και 17,8.

8. **α)** **i)** περίπου 180, **ii)** περίπου 22,5, **iii)** 8
β) 2,31, 2,22 και 2,15 αντίστοιχα

9. Το x θα μπορούσε να είναι οποιοσδήποτε αριθμός μεγαλύτερος ή και ίσος με το 3.

10. **α)** 30 **β)** 15-20
γ) απόμακρη είναι η τιμή στην κλάση 35-40

11. **α)** Οι μετρήσεις που γίνονται με γεωμετρικά όργανα δεν έχουν απόλυτη ακρίβεια.
β) Μια εκτίμηση μπορεί να είναι η μέση τιμή, δηλαδή 33,7°.

12. **α)** Η μέση τιμή είναι 4,2 και η διάμεσος 4,5.
β) Αν αντικαταστήσουμε το ένα από τα δύο 7 με 17, η μέση τιμή θα γίνει 5,2, αλλά η διάμεσος δε θα αλλάξει.

13. Ο Βαγγέλης δεν έχει δίκιο.

14. Μικρότερος του 15.

15. **α)** Μέση τιμή: 21,1, διάμεσος: 18, επικρατούσα τιμή: 15, εύρος: 76.
β) Απόμακρη τιμή είναι το 90.

16. **α)** Η διάμεσος είναι περίπου 26 ή 27 και το εύρος είναι περίπου 18 έτη.

Ανακεφαλαίωση: Στατιστική

1. Τα δεδομένα για το χρώμα ματιών και το αγαπημένο είδος ζώου είναι κατηγορικά (ποιοτικά). Ο αριθμός παιδιών είναι ποσοτικό διακριτό. Το ύψος και η απόσταση είναι ποσοτικά συνεχή.

2. **α)** Σ **β)** Λ **γ)** Σ **δ)** Λ **ε)** Λ

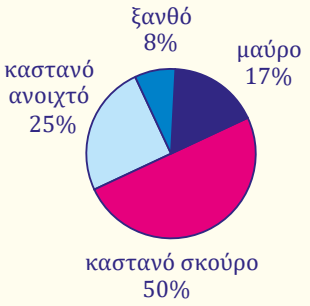
3. **α)** 24 **β)** 14 **γ)** 1

δ)

Κλάση	Συχνότητα
0-5	2
5-10	5
10-15	7
15-20	6
20-25	3
25-30	0
30-35	0
35-40	1
Σύνολο	24

ε) Το εύρος είναι περίπου 40.

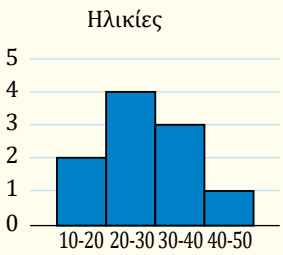
4.



5. **α)**

Κλάσεις	Συχνότητα
10-20	2
20-30	4
30-40	3
40-50	1
Σύνολο	10

β)



γ) Μέση τιμή 27,6, διάμεσος 28, εύρος 28

6. Μέση τιμή: 2,5 παιδιά. Διάμεσος: 2 παιδιά. Επικρατούσα τιμή: 2 παιδιά. Εύρος: 4.

7. Συνήθως διαγράφουμε τις απόμακρες τιμές όταν αυτές είναι πιθανό να προέκυψαν από λάθος.

8. **β)** 4

ε) Σκεφτείτε τρόπους να αλλάξετε δύο τιμές, ώστε η μέση τιμή να γίνει 3.

Πειράματα τύχης, ενδεχόμενα και πιθανότητες ενδεχομένων

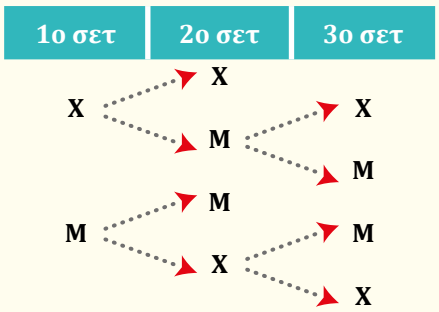
11.1 Πειράματα τύχης και καταγραφή των δυνατών αποτελεσμάτων τους

1. (γ) και (δ)

2. **α)** ΚΓΓ, ΓΓΚ, ΓΚΓ

β) ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΓΚΚ

3.



4. **α)** $(2,1)$ **β)** $(1,2)$ **γ)** $(1,2)$, $(2,1)$

δ) $(1,3)$, $(2,3)$, $(3,1)$, $(3,2)$

5. **α)** Δεν μπορούμε να προβλέψουμε το αποτέλεσμα με βεβαιότητα.

β) 36

γ) 6, τα εξής: $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$, $(4,4)$, $(5,5)$, $(6,6)$

6.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)	(1, 7)	(1, 8)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)	(2, 7)	(2, 8)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)	(3, 7)	(3, 8)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)	(4, 7)	(4, 8)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)	(5, 7)	(5, 8)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)	(6, 7)	(6, 8)
7	(7, 1)	(7, 2)	(7, 3)	(7, 4)	(7, 5)	(7, 6)	(7, 7)	(7, 8)
8	(8, 1)	(8, 2)	(8, 3)	(8, 4)	(8, 5)	(8, 6)	(8, 7)	(8, 8)

7. **α)** $\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$

β) Ναι. «Επιλέγουμε και τις δύο φορές την ίδια κάρτα».

γ) Όχι (δεν επιλέγουμε τρεις κάρτες).

8. 16, $\Omega = \{$ΚΚΚΚ, ΚΚΚΓ, ΚΚΓΚ, ΚΚΓΓ, ΚΓΚΚ, ΚΓΚΓ, ΚΓΓΚ, ΚΓΓΓ, ΓΚΚΚ, ΓΚΚΓ, ΓΚΓΚ, ΓΚΓΓ, ΓΓΚΚ, ΓΓΚΓ, ΓΓΓΚ, ΓΓΓΓ$\}$

9. $7^3 = 343$

10. (Κ, Μ), (Κ, Π), (Μ, Κ), (Μ, Π), (Π, Κ), (Π, Μ).

Αν επιστρέφαμε στο κουτί την πρώτη μπάλα, τότε (Κ, Κ), (Κ, Μ), (Κ, Π), (Μ, Μ), (Μ, Κ), (Μ, Π), (Π, Π), (Π, Κ), (Π, Μ).

11.2 Πειράματα τύχης και πιθανότητες ενδεχομένων

1. **α)** $\frac{1}{8}$ **β)** $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ **γ)** $\frac{3}{8}$

2. **α)** Ναι **β)** Όχι **γ)** Όχι

3. **α)** $\frac{1}{2}$

β) Για παράδειγμα, Μαρία: πιθανότητα 0,52 και διαφορά $0,5-0,48=0,02$.

4. Όχι, το αποτέλεσμα κάθε στριψίματος είναι ανεξάρτητο από τα υπόλοιπα.

5. Ναι.

6. **α)** $\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$ **β)** $\frac{1}{4}$

γ) $\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$ {ΚΚΚΓ, ΚΚΓΓ, ΚΓΓΓ, ΓΚΚΚ, ΓΓΚΚ, ΓΓΓΚ}

δ) $\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$

7. Όχι.

8. **α)** Κόκκινο.

β) **i)** Αν μας ενδιαφέρει ποιες μπάλες βγήκαν και με ποια σειρά, τότε 72. Αν μας ενδιαφέρει ποιο ζεύγος χρωμάτων βγήκε, τότε 6.

ii) $\frac{20}{72}=\frac{5}{18}$

γ) **i)** 81 και 6 αντίστοιχα, **ii)** $\frac{29}{81}$

9. **α)** 0,3 **β)** 0,4 **γ)** 0,3

10. Η Στέλλα με $\frac{3}{4}$, ενώ η Καλλιόπη έχει $\frac{1}{4}$.

11. Όχι, η πιθανότητα να κερδίσει είναι $\frac{1}{36}$ και να χάσει $\frac{2}{36}$.

12. **α)** $\frac{1}{216}$ **β)** $\frac{8}{216}$ **γ)** $\frac{1}{216}$ **δ)** $\frac{8}{216}$

Ανακεφαλαίωση: Πειράματα τύχης, ενδεχόμενα και πιθανότητες ενδεχομένων

1. **α)**

	Α	**Ε**	**Η**	**Ι**	**Ο**	**Υ**	**Ω**
Α	ΑΑ	ΑΕ	ΑΗ	ΑΙ	ΑΟ	ΑΥ	ΑΩ
Ε	ΕΑ	ΕΕ	ΕΗ	ΕΙ	ΕΟ	ΕΥ	ΕΩ
Η	ΗΑ	ΗΕ	ΗΗ	ΗΙ	ΗΟ	ΗΥ	ΗΩ
Ι	ΙΑ	ΙΕ	ΙΗ	ΙΙ	ΙΟ	ΙΥ	ΙΩ
Ο	ΟΑ	ΟΕ	ΟΗ	ΟΙ	ΟΟ	ΟΥ	ΟΩ
Υ	ΥΑ	ΥΕ	ΥΗ	ΥΙ	ΥΟ	ΥΥ	ΥΩ
Ω	ΩΑ	ΩΕ	ΩΗ	ΩΙ	ΩΟ	ΩΥ	ΩΩ

β) $24\cdot24\cdot9=5.184$

2. **α)** Λ **β)** Λ **γ)** Σ **δ)** Σ

3. $\frac{5}{33}$

4. **α)** Γιατί δεν μπορούμε να προβλέψουμε με ακρίβεια το αποτέλεσμα.

β) 36 διαφορετικά ζευγάρια, αν μας ενδιαφέρει η σειρά των αριθμών.

γ) $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$ **δ)** $\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$

5. **α)** Όχι. Είναι $\Omega=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$.

β) $\frac{2}{9}$

6. **α)** **i)** $\frac{4}{9}$, **ii)** $\frac{5}{9}$

β) Είναι σαν να μην επιστρέφουμε το πρώτο στιλό που επιλέξαμε: $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

7. **α)** Λ **β)** Λ **γ)** Σ **δ)** Λ

8. $\frac{16}{28}$. Τα ζεύγη αριθμών σε όλα τα κομμάτια του ντόμινο:

	0	1	2	3	4	5	6
0	(0, 0)	(0, 1)	(0, 2)	(0, 3)	(0, 4)	(0, 5)	(0, 6)
1		(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2			(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3				(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4					(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5						(5, 5)	(5, 6)
6							(6, 6)

9. **α)** 31

β) ΚΚ: $\frac{8}{31}>\frac{1}{4}$, ΓΓ: $\frac{6}{31}<\frac{1}{4}$,

ΚΓ: $\frac{10}{31}>\frac{1}{4}$, ΓΚ: $\frac{7}{31}<\frac{1}{4}$

γ) $\frac{17}{31}$ **δ)** **i)** 62, **ii)** 33 και 29, **iii)** $\frac{33}{62}$ και $\frac{29}{62}$

10. **α)** $\frac{1}{4}$ **β)** **i)** $\frac{1}{4}$, **ii)** $\frac{1}{7}$

Αλφαβητικό ευρετήριο όρων

άγνωστος: 134
άθροισμα: 18, 158, 174
άθροισμα γωνιών τριγώνου: 200
αιτιοκρατικά φαινόμενα: 265
ακέραιοι αριθμοί: 38
ακτίνα: 163, 238
αλγεβρική παράσταση: 117
αλγόριθμος του Ευκλείδη (για τον ΜΚΔ): 27
αμβλεία γωνία: 172
αμβλυγώνιο τρίγωνο: 196
ανάπτυγμα στερεού: 231
αντίθετοι αριθμοί: 40, 70
αντικείμενες ημιευθείες: 151, 172
αντιμεταθετική ιδιότητα: 46, 80, 88
αντίστροφοι αριθμοί: 85
άξονας συμμετρίας: 215
απαλοιφή παρενθέσεων: 54, 79
απογραφή: 244
απόλυτη τιμή: 40, 70
απόμακρες τιμές: 256
απόσταση: 184
αρνητικοί: 38
άρτιος αριθμός: 23, 95
αφαίρεση: 51, 78
βάσεις κυλίνδρου: 238
βάση ισοσκελούς τριγώνου: 196
βάση πρίσματος: 229
βάση πυραμίδας: 229
βάση της δύναμης: 19
γινόμενο: 18
γωνία: 151
δειγματικός χώρος: 265
δενδροδιάγραμμα: 265
διάγραμμα Venn: 212
διαγώνιος: 206
διαδοχικές γωνίες: 174
διαδοχικοί φυσικοί: 18
διαίρεση: 21, 87
διαιρετέος: 21
διαιρέτης (αριθμού): 21
διάμεσος (μέτρο θέσης): 254
διάμεσος (τριγώνου): 197
διάμετρος: 163
διαφορά: 18, 158, 175
διχοτόμος: 169, 197
δυαδικό σύστημα αρίθμησης: 31
δύναμη: 19, 59, 94
δυνατά αποτελέσματα: 269
εικόνα σχήματος: 215
εκθέτης της δύναμης: 19
εκτός (γωνίες): 188
Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ): 29
εναλλάξ (γωνίες): 188
ενδεχόμενο: 265
εντός (γωνίες): 188
εξίσωση: 136
επί τα αυτά (γωνίες): 188
επίκεντρη γωνία: 165
επικρατούσα τιμή: 254
επιμεριστική ιδιότητα: 123
επίπεδο: 151
ετερόσημοι αριθμοί: 38
ευθεία: 151
ευθεία γωνία: 172
ευθύγραμμο τμήμα: 151
ευκλείδεια διαίρεση: 21
ευνοϊκά αποτελέσματα: 269
εύρος: 255
εφαπτομένη κύκλου: 191
ημιεπίπεδο: 151
ημιευθεία: 151
ημικύκλιο: 163
θετικοί: 38
ιδιότητες τετραπλεύρων: 206
ιδιότητες της ισότητας: 137
ίσα ευθύγραμμα τμήματα: 158
ισοδύναμες εξισώσεις: 136
ισοπίθανα αποτελέσματα: 269, 270
ισόπλευρο τρίγωνο: 196
ισοσκελές τραπέζιο: 207
ισοσκελές τρίγωνο: 196
ιστόγραμμα: 246
κανονικότητες: 104
κατακορυφήν γωνίες: 179
κατηγορικά (ποιοτικά) δεδομένα: 244
κέντρο: 163, 238
κλάσεις δεδομένων: 244
κλασικός ορισμός πιθανότητας: 270
κορυφή: 151, 152, 196, 229, 238
κύβος: 229
κυκλικό διάγραμμα: 245, 246
κυκλικός δίσκος: 163
κύκλος: 163
κύλινδρος: 238
κυρτή γωνία: 151
κώνος: 238
λύση εξίσωσης: 136
Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (ΜΚΔ): 26
μέση τιμή: 254
μέσο ευθύγραμμου τμήματος: 160
μεσοκάθετος: 193
μέτρα θέσης: 254
μέτρα μεταβλητότητας: 255
μέτρο επίκεντρης γωνίας: 165
μη κυρτή γωνία: 151, 172
μηδενική γωνία: 171
μήκος ευθύγραμμου τμήματος: 153
μοτίβα: 104
ομόσημοι αριθμοί: 38
οξεία γωνία: 171
οξυγώνιο τρίγωνο: 196
ορθή γωνία: 171
ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο: 229
ορθογώνιο παραλληλόγραμμο: 204
ορθογώνιο τρίγωνο: 196
παράγοντας φυσικού αριθμού: 18
παράλληλες ευθείες: 182
παραλληλόγραμμο: 203
παράπλευρες έδρες: 229
παραπληρωματικές γωνίες: 177
πειράματα τύχης: 265
περίμετρος: 158
περιοδικός δεκαδικός αριθμός: 69
περιττός αριθμός: 23, 95
πηλίκο αριθμών: 21
πιθανότητα ενδεχομένου: 270
πίνακας διπλής εισόδου: 264
πίνακας έννοιας: 41
πίνακες συχνοτήτων: 242
πλάτος κλάσης: 244
πληθυσμός: 244
πλήρης γωνία: 172
πολλαπλασιασμός: 58, 85
πολλαπλάσιο: 22
πολύγωνο: 152
ποσοτικά δεδομένα: 244
ποσοτικά διακριτά δεδομένα: 244
ποσοτικά συνεχή δεδομένα: 244
πρίσμα: 229
προσεταιριστική ιδιότητα: 47, 80, 88
πρόσημο: 38
πρόσθεση: 76
προτεραιότητα των πράξεων: 20, 96
πρώτοι μεταξύ τους (αριθμοί): 26
πρώτος αριθμός: 22
πυραμίδα: 229
ραβδόγραμμα: 246
ρητοί αριθμοί: 69
ρόμβος: 204
σημείο: 151
σημείο τομής: 182, 191
σημείο επαφής: 191
σκαληνό τρίγωνο: 196
στατιστική έρευνα: 244
συμμετρικά σχήματα: 215
συμπληρωματικές γωνίες: 177
σύνθετος αριθμός: 22
σύνθετο κλάσμα: 90
σφαίρα: 238
ταυτότητα ευκλείδειας διαίρεσης: 21
τεθλασμένη γραμμή: 152
τεμνόμενες ευθείες: 182
τέμνουσα του κύκλου: 191
τεταγμένη: 217
τετμημένη: 217
τετράγωνο: 204
τετράπλευρο: 202
τιμή αλγεβρικής παράστασης: 117
τιμή αριθμητικής παράστασης: 96
τόξο (κυρτό, μη κυρτό): 163
τραπέζιο: 203
τυποποιημένη μορφή μεγάλου αριθμού: 97
υποτείνουσα: 196
ύψος: 197, 229, 238
φυσικοί αριθμοί: 18
χιαστί γινόμενα: 141
χορδή: 163