

Β΄ Γυμνασίου

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Δημήτρης Διαμαντίδης
Γιάννης Σταμπόλας

• Ελισσάβετ Καλογερία
• Κώστας Στουραϊτης

• Ειρήνη Περυσινάκη
• Βαγγέλης Φακούδης

Επιστημονικός υπεύθυνος:
Γιώργος Ψυχάρης



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Επιστημονική Επιτροπή Αξιολόγησης
Συντονιστής/τρια / Αξιολογητής/τρια

Αξιολογητής/τρια

Αξιολογητής/τρια

Τεχνικός Εμπειρογνώμονας

Επικουρικός Εμπειρογνώμονας

**Υπεύθυνος/η του μαθήματος/γνωστικού
αντικειμένου στο πλαίσιο της Πράξης**

Κρισιωτάκης Ευάγγελος

Εν ενεργεία μέλος Διδακτικού Ερευνητικού
Προσωπικού Πανεπιστημίου

Τσίτσα Πολυξένη

Εν ενεργεία Εκπαιδευτικός

Σταχτέας Χαράλαμπος

Εν ενεργεία Εκπαιδευτικός

Γώγουλου Αικατερίνη

Πτυχιούχος Πληροφορικής

Παπαδάτου Ψημάρη Χαραλαμπία

Πτυχιούχος Γραφιστικής

Ειρήνη Γεωργάκη, Σύμβουλος Α΄ ΙΕΠ,

μέλος της Επιστημονικής Ομάδας Έργου (ΕΟΕ) της Πράξης

Πράξη με τίτλο: «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ 6010165 στο Πρόγραμμα «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή» 2021-2027

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Σπυρίδων Δουκάκης

Πρόεδρος του Δ.Σ. του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Υπεύθυνη Πράξης

Πολυξένη Μπίλλα

Σύμβουλος Α΄ του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Προϊσταμένη Τμήματος Β΄ Προγραμμάτων Σπουδών και Εκπαιδευτικού Υλικού

Αναπληρώτρια Υπεύθυνη Πράξης

Άννα-Αικατερίνη Λυκούρη

Σύμβουλος Α΄ του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**«Με τη συγχρηματοδότηση της Ευρωπαϊκής Ένωσης»
και το Πρόγραμμα «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή»**

**Μητρώο
Διδακτικών
Βιβλίων**



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας, Θρησκευμάτων
και Αθλητισμού

ΙΕΠ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ
ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ



Με τη συγχρηματοδότηση
της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΕΣΠΑ
2021-2027
European Regional Development Fund

Πρόγραμμα
Ανθρώπινο Δυναμικό και
Κοινωνική Συνοχή

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Δ. Διαμαντίδης, Ε. Καλογερία, Ε. Περυσινάκη, Γ. Σταμπόλας,
Κ. Στουραϊτής, Β. Φακούδης, Γ. Ψυχάρης

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ



ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΚΔΟΣΗΣ

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ **Δημήτρης Διαμαντίδης**, Δρ Διδακτικής Μαθηματικών,
Εκπαιδευτικός Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης
Ελισσάβη Καλογερία, Δρ Διδακτικής Μαθηματικών,
Σύμβουλος Εκπαίδευσης
Ειρήνη Περυσινάκη, Δρ Μαθηματικών,
Σύμβουλος Εκπαίδευσης
Γιάννης Σταμπόλας, Δρ Μαθηματικών,
Σύμβουλος Εκπαίδευσης
Κώστας Στουραϊτής, Δρ Διδακτικής Μαθηματικών,
Εκπαιδευτικός Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης.
Βαγγέλης Φακούδης, MSc στα Μαθηματικά και τις
Φυσικές Επιστήμες, Εκπαιδευτικός Δευτεροβάθμιας
Εκπαίδευσης
Γιώργος Ψυχάρης, Αναπληρωτής Καθηγητής,
Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟΣ ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ **Γιώργος Ψυχάρης**

ΣΧΕΔΙΑΣΗ - ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΧΗΜΑΤΩΝ **Έφη Κανελλοπούλου**, Γραφίστρια
Μαρίνα Π. Ρένεση, Γραφίστρια

ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΣΗ **Κωνσταντίνος Ξύγκας**, Εικονογράφος

ΣΕΛΙΔΟΠΟΙΗΣΗ **Σπύρος Ρένεσης**, Γραφίστας
Χρύσα Τσάμη, Γραφίστρια

ΦΙΛΟΛΟΓΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ **Κωνσταντίνα Κουτσουρούμπα**, Φιλόλογος

ΠΡΟΕΚΤΥΠΩΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ  **ΕΚΔΟΣΕΙΣ**
ΠΑΤΑΚΗ

ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ ΠΡΟΕΚΤΥΠΩΤΙΚΩΝ ΕΡΓΑΣΙΩΝ **Βαγγέλης Μπακλαβάς**, Φιλόλογος
Δημήτρης Πλακάκης, Μαθηματικός

ΦΩΤΟΓΡΑΦΙΕΣ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΥ **Dreamstime.com**, **Freepik.com**
ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΕΞΩΦΥΛΛΟΥ **Έφη Κανελλοπούλου**, Γραφίστρια

ΦΩΤΟΓΡΑΦΙΑ ΕΞΩΦΥΛΛΟΥ **Dreamstime.com**

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Ταυτότητα του βιβλίου	7
-----------------------------	---

ΜΕΡΟΣ Α: ΑΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ ΑΛΓΕΒΡΑ

Θεματική ενότητα 1: Αριθμοί	15
1.1 Ιδιότητες δυνάμεων ρητών αριθμών με εκθέτη θετικό ακέραιο	16
1.2 Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη ακέραιο	23
1.3 Τετραγωνικές ρίζες	30
1.4 Άρρητοι αριθμοί	36
1.5 Πραγματικοί αριθμοί	43
Ανακεφαλαίωση	49

Θεματική ενότητα 2: Κανονικότητες, αλγεβρικές παραστάσεις και σχέσεις	51
2.1 Κανονικότητες	52
2.2 Αλγεβρικές παραστάσεις	59
2.3 Η εξίσωση και η επίλυσή της	70
2.4 Εξισώσεις και προβλήματα	80
Ανακεφαλαίωση	86

Θεματική ενότητα 3: Συναρτήσεις	89
3.1 Η έννοια της συνάρτησης	90
3.2 Γραφική παράσταση συνάρτησης	97
3.3 Ανάλογα ποσά – Η συνάρτηση $y = ax$	104
3.4 Η συνάρτηση $y = ax + \beta$	111
3.5 Αντιστρόφως ανάλογα ποσά – Η συνάρτηση $y = \frac{a}{x}$	118
Ανακεφαλαίωση	124

ΜΕΡΟΣ Β: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ, ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Θεματική ενότητα 4: Γεωμετρία του επιπέδου και εμβαδά	127
4.1 Η έννοια του εμβαδού, μονάδες μέτρησης	128
4.2 Εμβαδά βασικών πολυγώνων	134
4.3 Πυθαγόρειο θεώρημα	144
Ανακεφαλαίωση	152

Θεματική ενότητα 5: Γεωμετρία του επιπέδου και μέτρηση στον κύκλο	155
5.1 Εγγεγραμμένες γωνίες	156
5.2 Κανονικά πολύγωνα	160
5.3 Μήκος κύκλου	166
5.4 Εμβαδόν κυκλικού δίσκου και κυκλικού τομέα	171
Ανακεφαλαίωση	179

Θεματική ενότητα 6: Στοιχεία Αναλυτικής Γεωμετρίας και γεωμετρικοί μετασχηματισμοί	183
6.1 Διανύσματα	184
6.2 Μεταφορά	190
6.3 Στροφή	198
6.4 Σχήματα με περιστροφική και κεντρική συμμετρία	207
6.5 Σχεδίαση και συλλογισμός με μετασχηματισμούς	209
Ανακεφαλαίωση	214

ΜΕΡΟΣ Γ: ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ – ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ)

Θεματική ενότητα 7: Στατιστική	219
7.1 Διαχείριση δεδομένων	220
7.2 Μέτρα θέσης και μεταβλητότητας	227
7.3 Θηκογράμματα	234
Ανακεφαλαίωση	238
Θεματική ενότητα 8: Πειράματα τύχης και πιθανότητες	241
8.1 Βασική αρχή απαρίθμησης: η πολλαπλασιαστική αρχή	242
8.2 Ασυμβίβαστα ενδεχόμενα	246
Ανακεφαλαίωση	252

ΜΕΡΟΣ Δ: ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Απαντήσεις – υποδείξεις ασκήσεων	255
Αλφαβητικό ευρετήριο όρων	278

Ταυτότητα του βιβλίου

Αγαπητέ μαθητή, αγαπητή μαθήτριά,

Το βιβλίο που κρατάς στα χέρια σου δημιουργήθηκε με βάση τις κατευθύνσεις του Προγράμματος Σπουδών των Μαθηματικών. Κάθε στοιχείο του (έργα διερεύνησης, διατύπωση μαθηματικού περιεχομένου, εφαρμογές κτλ.) συνδέεται με ένα ή περισσότερα Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ). Τα έργα διερεύνησης, τα παραδείγματα και οι ασκήσεις έχουν επιλεγεί ώστε να σε βοηθήσουν να αναπτύξεις πλούσια μαθηματική δραστηριότητα και μαθηματικό συλλογισμό και να αξιοποιήσεις τα μαθηματικά για να ερμηνεύσεις κριτικά διάφορα φαινόμενα του φυσικού και κοινωνικού κόσμου.

Το βιβλίο οργανώνεται σε θεματικές ενότητες και αυτές χωρίζονται σε διδακτικές ενότητες.

Οι **διδακτικές ενότητες** έχουν δομηθεί με παρόμοιο τρόπο.

- Στην αρχή υπάρχει ένα έργο Διερεύνησης (που αριθμείται ως Δ1, Δ2, ...), πάνω στο οποίο προτείνεται να συνεργαστείτε ανά ομάδες και στη συνέχεια να συζητήσετε στην τάξη.
- Ακολουθεί το «Συζητάμε», που είναι μια συζήτηση ή/και κάποιο λυμένο παράδειγμα παρόμοιο με εκείνο της Διερεύνησης. Αυτό μπορεί να το συζητήσετε στην τάξη ή να το μελετήσετε στο σπίτι, ή και τα δύο.
- Το «Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις» περιέχει το βασικό μαθηματικό περιεχόμενο της διδακτικής ενότητας.
- Στη συνέχεια, υπάρχουν λυμένες εφαρμογές και παραδείγματα.
- Το «Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε» είναι μικρές ή μεγαλύτερες εργασίες που προτείνεται να γίνουν από ομάδες παιδιών στο σπίτι ή στην τάξη και να παρουσιαστούν στην τάξη.
- Οι ασκήσεις είναι χωρισμένες σε δύο ομάδες.
 - Στο «Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις» βρίσκουμε ερωτήσεις και ασκήσεις άμεσης εφαρμογής.
 - Στο «Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα» υπάρχουν πιο σύνθετα έργα και, ίσως, με περισσότερα ερωτήματα. Έχει καταβληθεί προσπάθεια να είναι τέτοια τα προτεινόμενα έργα, ώστε να μπορούν να ασχοληθούν με αυτά όσο το δυνατόν περισσότερα παιδιά. Σε κάθε περίπτωση θα βρεις ερωτήσεις, ασκήσεις, παραδείγματα και υλικό που θα κινήσουν το ενδιαφέρον σου και θα μπορείς να τα επεξεργαστείς.

Στο τέλος κάθε θεματικής ενότητας υπάρχει μια **ανακεφαλαιωτική ενότητα**, η οποία περιέχει ποικιλία έργων. Αρκετά από αυτά μπορείς να τα αξιοποιήσεις για να ελέγξεις τι έμαθες και τι μπορείς να κάνεις. Με κάποια άλλα μπορείς να εμβαθύνεις σε αυτά που έμαθες και να τα συνδέσεις με θέματα έξω από τη συγκεκριμένη ενότητα ή και έξω από τα μαθηματικά. Κάποια από αυτά προτείνονται για να εργαστείτε ομαδικά.

Στο βιβλίο θα βρεις και **ψηφιακό υλικό**. Υπάρχουν δύο κατηγορίες τέτοιου υλικού. Η πρώτη περιλαμβάνει αρχεία που μεταφέρουν πληροφορίες (π.χ. εικόνες, ιστορικά σημειώματα, λυμένα παραδείγματα κ.ά.) ή επιπλέον υλικό (π.χ. επιπλέον ασκήσεις). Η δεύτερη αποτελείται από εφαρμογές που απαιτούν τη δική σου δραστηριότητα (π.χ. χρήση του GeoGebra ή λογιστικού φύλλου, συμπλήρωση πίνακα έννοιας κ.ά.), ώστε να πειραματιστείς και να βγάλεις συμπεράσματα. Το ψηφιακό υλικό μπορεί να χρησιμοποιηθεί είτε στην τάξη είτε στο σπίτι, για την ατομική ή την ομαδική εργασία. Ωστόσο, προτείνουμε, όσο είναι δυνατόν, να αξιοποιείται για τη διερεύνηση και τη συζήτηση στην τάξη.

Μία ομάδα σημειωμάτων στο βιβλίο και στο ψηφιακό υλικό είναι τα **ιστορικά σημειώματα**. Αυτά τα σημειώματα μαζί με έργα από την Ιστορία των μαθηματικών (π.χ. η διερεύνηση Δ1 της διδακτικής ενότητας 1.4, που ξεκινάει από έναν διάλογο που έγραψε ο Πλάτωνας) έχουν στόχο να αναδείξουν ότι τα μαθηματικά είναι ένα ανθρώπινο δημιούργημα και να σου δώσουν επιπλέον ευκαιρίες σύνδεσης των μαθηματικών με την καθημερινή ζωή των ανθρώπων. Οι πηγές που φαίνονται με τη μορφή αριθμών στα ιστορικά σημειώματα αναφέρονται στον πίνακα πηγών.



Πίνακας πηγών

Αγαπητοί εκπαιδευτικοί, αγαπητοί γονείς,

Το παρόν βιβλίο στηρίζεται στο Πρόγραμμα Σπουδών (ΠΣ) των Μαθηματικών του Γυμνασίου (ΦΕΚ 235/Β/20-01-2023). Αποτελεί μια προσπάθεια υλοποίησης των κατευθύνσεων του ΠΣ και κάθε στοιχείο του (έργα διερεύνησης, διατύπωση μαθηματικού περιεχομένου, εφαρμογές κτλ.) συνδέεται με ένα ή περισσότερα Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ). Έχουν ληφθεί υπόψη οι στοχεύσεις του ΠΣ για τις προηγούμενες τάξεις (του Δημοτικού σχολείου και κυρίως της Α' Γυμνασίου) και τις επόμενες. Οι προτάσεις έργων διερεύνησης, τα παραδείγματα και οι ασκήσεις έχουν επιλεγεί ώστε με την κατάλληλη διαχείριση στην τάξη να υποστηρίξουν την εμπλοκή των παιδιών σε πλούσια μαθηματική δραστηριότητα και διερεύνηση, την ανάπτυξη του μαθηματικού συλλογισμού και την καλλιέργεια της ικανότητας αξιοποίησης των μαθηματικών στην κριτική ερμηνεία φαινομένων του φυσικού και κοινωνικού κόσμου. Στο πλαίσιο της μαθηματικής δραστηριότητας των παιδιών θεωρείται απαραίτητη η αξιοποίηση ποικίλων αλλά κατάλληλων εργαλείων, που μπορεί να είναι χειραπτικά (όπως χαρτί και μολύβι, γεωμετρικά όργανα, διαφανές χαρτί κ.ά.) και ψηφιακά (όπως λογιστικά φύλλα, χρήση διαδικτύου, GeoGebra κ.ά.). Προτείνεται, και σε αρκετά έργα αναφέρεται ρητά, ένας συνδυασμός ατομικής και ομαδικής εργασίας και συζήτησης σε μικρές ομάδες και στη συνέχεια στην τάξη. Ένας τέτοιος συνδυασμός μπορεί να προωθήσει τη μαθηματική επικοινωνία, τη συμπερίληψη όλων των παιδιών στις μαθηματικές πρακτικές, αλλά και την ανάπτυξη αυτοπεποίθησης και θετικών στάσεων προς τα μαθηματικά.

Το βιβλίο οργανώνεται σε θεματικές ενότητες, αντίστοιχες με τις θεματικές ενότητες του ΠΣ. Οι θεματικές ενότητες αποτελούνται από διδακτικές ενότητες, οι οποίες αποτελούν αυτόνομες μονάδες διδασκαλίας μίας ή περισσότερων διδακτικών ωρών. Για παράδειγμα, η διδακτική ενότητα «2.4 Εξισώσεις και προβλήματα» είναι η ενότητα με τον μεγαλύτερο αριθμό διδακτικών ωρών (5 ενδεικτικές ώρες), ενώ αρκετές ενότητες μπορούν να συζητηθούν σε μία διδακτική ώρα.

Σε ειδικές περιπτώσεις, για διδακτικούς λόγους, δύο ή περισσότερες θεματικές ενότητες του ΠΣ αποτελούν το αντικείμενο της ίδιας θεματικής ενότητας στο βιβλίο. Έτσι, στην Άλγεβρα, οι θεματικές ενότητες των Ρητών και των πραγματικών αριθμών συμπεριλήφθηκαν στην ενιαία θεματική ενότητα Αριθμοί και οι θεματικές ενότητες Κανονικότητες, αλγεβρικές παραστάσεις και σχέσεις διαπραγματεύονται σε μία ενιαία θεματική ενότητα. Η Γεωμετρία του επιπέδου συνδυάστηκε με τις Μετρήσεις και δημιουργήθηκαν η θεματική ενότητα Γεωμετρία του επιπέδου και εμβαδά (που περιλαμβάνει το Πυθαγόρειο θεώρημα) και η θεματική ενότητα Γεωμετρία του επιπέδου και μέτρηση στον κύκλο. Η ενότητα Διανύσματα ενσωματώθηκε στη θεματική ενότητα των Γεωμετρικών Μετασχηματισμών. Τέλος, στα Στοχαστικά Μαθηματικά δημιουργήθηκαν δύο θεματικές ενότητες, μία για όλη τη Στατιστική και μία για όλες τις Πιθανότητες.

Προτεινόμενη σειρά διδακτικής διαχείρισης των διδακτικών ενοτήτων

Με βάση τα ΠΜΑ, η σειρά διδασκαλίας για την Άλγεβρα προτείνεται να είναι ίδια με τη σειρά των ενοτήτων (δηλαδή 1, 2, 3). Για τη Γεωμετρία, η ενότητα 4 προτείνεται να προηγηθεί της ενότητας 5. Η ενότητα 4 προτείνεται να προηγηθεί και της διδακτικής ενότητας 1.3 (Τετραγωνικές ρίζες), εφόσον στη διδασκαλία των ριζών χρησιμοποιείται το Πυθαγόρειο θεώρημα. Η ενότητα 6 (Στοιχεία Αναλυτικής Γεωμετρίας και Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί) μπορεί να διδαχτεί ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες ενότητες. Στα Στοχαστικά Μαθηματικά, μπορεί να διδαχτεί πρώτα η Στατιστική και μετά οι Πιθανότητες, ή το αντίθετο. Είναι σημαντικό όμως η διδασκαλία κάθε θεματικού πεδίου να απλώνεται σε όσο το δυνατόν μεγαλύτερο μέρος του σχολικού έτους. Για παράδειγμα, η διδασκαλία της Γεωμετρίας – Μέτρησης θα πρέπει να απλώνεται στη διάρκεια του χρόνου και να μην

περιορίζεται σε ένα μικρό μέρος του σχολικού έτους. Αυτό μπορεί να γίνεται είτε με παράλληλη διδασκαλία δύο διαφορετικών θεματικών ενοτήτων μέσα σε κάθε εβδομάδα (π.χ. δύο ώρες Άλγεβρα και δύο ώρες Γεωμετρία ή Στοχαστικά Μαθηματικά) είτε με διαδοχική διδασκαλία διδακτικών ενοτήτων από διαφορετικά πεδία (π.χ. διδάσκονται διαδοχικά κατά σειρά οι ενότητες 1.1, 1.2, 4.1-4.3, 1.3-1.5, 8.1, 8.2, 2.1-2.4, 6.1-6.5, 5.1-5.4, 7.1-7.3, 3.1-3.5).

Ενημέρωση των εκπαιδευτικών για το βιβλίο



Οι Θεματικές και οι Διδακτικές ενότητες και τα Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ)

Παρακάτω αναφέρονται τα ΠΜΑ που υποστηρίζονται σε κάθε διδακτική ενότητα, ώστε οι εκπαιδευτικοί να μπορούν να ανατρέχουν σε αυτά όταν σχεδιάζουν τη διδασκαλία.

Στο τέλος κάθε διδακτικής ενότητας οι μαθητές και οι μαθήτριες είναι σε θέση:

Θεματική ενότητα 1: Αριθμοί

1.1 Ιδιότητες δυνάμεων ρητών αριθμών με εκθέτη θετικό ακέραιο

- Να διερευνούν τις ιδιότητες των δυνάμεων με βάση ρητό και εκθέτη θετικό ακέραιο, να τις διατυπώνουν συμβολικά και να τις αιτιολογούν χρησιμοποιώντας τον ορισμό της δύναμης. [Αρ.Ρ.8.1.]

1.2 Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη ακέραιο

- Να επεκτείνουν τον ορισμό και τις ιδιότητες της δύναμης στην περίπτωση του ακέραιου εκθέτη. [Αρ.Ρ.8.2.]
- Να αξιοποιούν την τυποποιημένη μορφή των ρητών αριθμών για την αναπαράσταση φυσικών μεγεθών μικρού μεγέθους και την επίλυση ποικίλων προβλημάτων. [Αρ.Ρ.8.3.]
- Να υπολογίζουν την τιμή απλών αριθμητικών παραστάσεων με τις τέσσερις πράξεις και δυνάμεις. Να εκτελούν τις πράξεις με την απαιτούμενη προτεραιότητα. [Αρ.Ρ.8.4.]

1.3 Τετραγωνικές ρίζες

- Να υπολογίζουν την τιμή απλών αριθμητικών παραστάσεων με τις τέσσερις πράξεις και δυνάμεις. Να εκτελούν τις πράξεις με την απαιτούμενη προτεραιότητα. [Αρ.Ρ.8.4.]
- Να αναγνωρίζουν, μέσα από προβλήματα, την αναγκαιότητα εισαγωγής και χρήσης των τετραγωνικών ριζών θετικών αριθμών. Να προσδιορίζουν τις τετραγωνικές ρίζες τέλειων τετραγώνων. [Αρ.Π.8.1.]

1.4 Άρρητοι αριθμοί

- Να διερευνούν την ύπαρξη αριθμών που δεν είναι ρητοί και να αναγνωρίζουν τους άρρητους. [Αρ.Π.8.2.]
- Να τοποθετούν άρρητους αριθμούς στην ευθεία των πραγματικών αριθμών. [Αρ.Π.8.3.]
- Να διερευνούν και να διακρίνουν τις δεκαδικές αναπαραστάσεις των ρητών και άρρητων αριθμών. [Αρ.Π.8.4.]

1.5 Πραγματικοί αριθμοί

- Να επεκτείνουν τον ορισμό της δύναμης με βάση πραγματικό αριθμό και εκθέτη ακέραιο. [Αρ.Π.8.5.]
- Να διερευνούν και να αποδεικνύουν αλγεβρικά και γεωμετρικά την ιδιότητα:
 $(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta$. [Αρ.Π.8.6.]
- Να λύνουν προβλήματα με τη χρήση πραγματικών αριθμών. [Αρ.Π.8.7.]

Θεματική ενότητα 2: Κανονικότητες, αλγεβρικές παραστάσεις και σχέσεις

2.1 Κανονικότητες

- Να λύνουν προβλήματα που συναντούν στα Μαθηματικά και στην καθημερινή ζωή με κανονικότητες της μορφής $a \cdot n + b$, όπου a και b ρητοί αριθμοί. [Αλ.Κ.8.1.]
- Να διατυπώνουν επιχειρήματα και να αιτιολογούν τους συλλογισμούς τους σχετικά με τον προσδιορισμό μιας κανονικότητας. [Αλ.Κ.8.2.]

2.2 Αλγεβρικές παραστάσεις

- Να υπολογίζουν την αριθμητική τιμή μιας αλγεβρικής παράστασης για δεδομένες τιμές των μεταβλητών. [Αλ.Π.8.1.]
- Να αναγνωρίζουν μια αλγεβρική παράσταση ως γινόμενο ή άθροισμα ή άθροισμα γινομένων. [Αλ.Π.8.2.]
- Να απλοποιούν απλές αλγεβρικές παραστάσεις με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας (απαλοιφή παρένθεσης και αναγωγή όμοιων όρων). [Αλ.Π.8.3.]

2.3 Η εξίσωση και η επίλυσή της

- Να αναγνωρίζουν τους όρους: εξίσωση πρώτου βαθμού, πρώτο και δεύτερο μέλος, ισοδύναμες εξισώσεις, άγνωστος, λύση ή ρίζα. [Αλ.Σχ.8.1.]
- Να αναγνωρίζουν αν ένας αριθμός είναι λύση της εξίσωσης ή/και του αντίστοιχου προβλήματος. [Αλ.Σχ.8.2.]
- Να επιλύουν εξισώσεις της μορφής $ax + b = \gamma x + \delta$ με εφαρμογή των ιδιοτήτων διατήρησης της ισότητας και των πράξεων. [Αλ.Σχ.8.3.]
- Να αναγνωρίζουν ότι μια εξίσωση μπορεί να έχει άπειρες λύσεις ή καμία λύση. [Αλ.Σχ.8.4.]
- Να επιλύουν ρεαλιστικά προβλήματα με εξισώσεις της μορφής $ax + b = \gamma x + \delta$ με άγνωστο και στα δύο μέλη. [Αλ.Σχ.8.5.]

2.4 Εξισώσεις και προβλήματα

- Να επιλύουν εξισώσεις της μορφής $ax + b = \gamma x + \delta$ με εφαρμογή των ιδιοτήτων διατήρησης της ισότητας και των πράξεων. [Αλ.Σχ.8.3.]
- Να αναγνωρίζουν ότι μια εξίσωση μπορεί να έχει άπειρες λύσεις ή καμία λύση. [Αλ.Σχ.8.4.]
- Να επιλύουν ρεαλιστικά προβλήματα με εξισώσεις της μορφής $ax + b = \gamma x + \delta$ με άγνωστο και στα δύο μέλη. [Αλ.Σχ.8.5.]
- Να συνθέτουν ρεαλιστικά προβλήματα που επιλύονται με εξισώσεις της μορφής $ax + b = \gamma x + \delta$ με άγνωστο και στα δύο μέλη. [Αλ.Σχ.8.6.]

Θεματική ενότητα 3: Συναρτήσεις

3.1 Η έννοια της συνάρτησης

- Να αναγνωρίζουν σε καταστάσεις της καθημερινότητας μεγέθη που συµμεταβάλλονται και να διακρίνουν ποιο μέγεθος καθορίζει το άλλο. [Αλ.Σρ.8.1.]
- Να αναγνωρίζουν τις σχέσεις που τα μεγέθη συµμεταβάλλονται ως συναρτήσεις και να τις διακρίνουν από σχέσεις που δεν είναι συναρτήσεις. [Αλ.Σρ.8.2.]
- Να εκφράζουν μια κατάσταση με μια συνάρτηση λεκτικά, αριθμητικά (με πίνακα τιμών), γραφικά και συμβολικά (με τύπο). [Αλ.Σρ.8.3.]

3.2 Γραφική παράσταση συνάρτησης

- Να χρησιμοποιούν τις αναπαραστάσεις των συναρτήσεων (γραφικές παραστάσεις, πίνακες τιμών, τύπους) και να μεταβαίνουν από τη μία αναπαράσταση στην άλλη (όπου είναι δυνατόν). [Αλ.Σρ.8.4.]
- Να εξετάζουν αν ένα σημείο (διατεταγμένο ζεύγος) ανήκει στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης. [Αλ.Σρ.8.5.]
- Να υπολογίζουν αλγεβρικά και να εκτιμούν γραφικά τις τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής για δεδομένες τιμές της ανεξάρτητης και αντιστρόφως. [Αλ.Σρ.8.6.]

3.3 Ανάλογα ποσά – Η συνάρτηση $y = ax$

- Να αναγνωρίζουν μέσα σε ποικίλα πλαίσια τη σχέση που συνδέει δύο ανάλογα ποσά ως σχέση αναλογίας. [Αλ.Σρ.8.7.]
- Να αναπαριστούν τις σχέσεις αναλογίας που εμφανίζονται σε διάφορα πλαίσια ως σχέση της μορφής $y = ax$. [Αλ.Σρ.8.8.]
- Να σχεδιάζουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax$ και να διαπιστώνουν ότι είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. [Αλ.Σρ.8.9.]
- Να ερμηνεύουν τη σταθερά αναλογίας (κλίση της ευθείας) ως μεταβολή του y που αντιστοιχεί σε μοναδιαία αύξηση του x . [Αλ.Σρ.8.10.]

3.4 Η συνάρτηση $y = ax + \beta$

- Να σχεδιάζουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax + \beta$ και να εξηγούν τη σημασία των a και β . [Αλ.Σρ.8.11.]
- Να επιλύουν (γραφικά και αλγεβρικά) προβλήματα χρησιμοποιώντας τις αναπαραστάσεις της συνάρτησης $y = ax + \beta$. [Αλ.Σρ.8.12.]
- Να επιλύουν γραφικά εξισώσεις της μορφής $ax + \beta = \gamma$. [Αλ.Σρ.8.13.]

3.5 Αντιστρόφως ανάλογα ποσά – Η συνάρτηση $y = \frac{\alpha}{x}$

- Να διερευνούν μέσα από προβλήματα τη σχέση που συνδέει δύο αντιστρόφως ανάλογα ποσά. [Αλ.Σρ.8.14.]
- Να εκφράζουν τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά που ανακύπτουν σε προβλήματα της καθημερινής ζωής στη μορφή $y = \frac{\alpha}{x}$. [Αλ.Σρ.8.15.]
- Να διερευνούν αν στη συνάρτηση $y = \frac{\alpha}{x}$, $\alpha \neq 0$, αυξάνεται ή μειώνεται το y όταν αυξάνεται το x για $\alpha > 0$ και $\alpha < 0$. [Αλ.Σρ.8.16.]
- Να επιλύουν προβλήματα αντιστρόφως ανάλογων ποσών με τη συνάρτηση $y = \frac{\alpha}{x}$. [Αλ.Σρ.8.17.]

Θεματική ενότητα 4: Γεωμετρία του επιπέδου και εμβαδά

4.1 Η έννοια του εμβαδού, μονάδες μέτρησης

- Να μετασχηματίζουν επιφάνειες σε ισοδύναμες με τη διαδικασία διάσπασης και ανασύνθεσης επιφάνειας. [Μ.Ε.8.1.]
- Να επιλέγουν τις κατάλληλες μονάδες μέτρησης εμβαδού επιφάνειας και να κάνουν μετατροπές από τη μία μονάδα μέτρησης στην άλλη. [Μ.Ε.8.2.]

4.2 Εμβαδά βασικών πολυγώνων

- Να επικυρώνουν τους τύπους εμβαδού τετραγώνου και ορθογώνιου παραλληλογράμμου επιλέγοντας κατάλληλη μονάδα μέτρησης. [Μ.Ε.8.3.]
- Να χρησιμοποιούν τη διάσπαση και ανασύνθεση επιφανειών για τον προσδιορισμό του τύπου του εμβαδού παραλληλογράμμου, τριγώνου και τραπεζίου. [Μ.Ε.8.4.]

4.3 Πυθαγόρειο θεώρημα

- Να διερευνούν και να διατυπώνουν το Πυθαγόρειο θεώρημα και το αντίστροφό του και να τα χρησιμοποιούν για τον υπολογισμό μηκών και τον προσδιορισμό ορθής γωνίας τριγώνου αντίστοιχα. [Γ.Ε.8.2.]
- Να αξιοποιούν την έννοια του εμβαδού για την εξήγηση του Πυθαγόρειου θεωρήματος. [Μ.Ε.8.8.]

Θεματική ενότητα 5: Γεωμετρία του επιπέδου και μέτρηση στον κύκλο

5.1 Εγγεγραμμένες γωνίες

- Να διερευνούν και να αιτιολογούν εμπειρικά τις σχέσεις εγγεγραμμένης και επίκεντρης γωνίας που βγαίνουν στο ίδιο τόξο. [Γ.Ε.8.4.]

5.2 Κανονικά πολύγωνα

- Να αναγνωρίζουν και να διακρίνουν ένα κανονικό από ένα μη κανονικό πολύγωνο και να διαμορφώνουν σχετικούς ορισμούς. [Γ.Ε.8.1.]
- Να σχεδιάζουν κανονικά πολύγωνα χρησιμοποιώντας γεωμετρικά όργανα ή ψηφιακά εργαλεία. [Γ.Ε.8.3.]
- Να προσδιορίζουν την κεντρική γωνία κανονικών n -γώνων και τη γωνία κανονικού n -γώνου (με $n = 3, 4, 5$). [Μ.Γ.8.1.]

5.3 Μήκος κύκλου

- Να υπολογίζουν τα μήκη των τόξων ως μέρη του μήκους του κύκλου τους. [Μ.Μ.8.1.]
- Να χρησιμοποιούν τον τύπο για το μήκος κύκλου στην επίλυση προβλημάτων. [Μ.Μ.8.2.]

5.4 Εμβαδόν κυκλικού δίσκου και κυκλικού τομέα

- Να υπολογίζουν το εμβαδόν ενός κυκλικού δίσκου όταν γνωρίζουν την ακτίνα ή τη διάμετρο του κύκλου. [Μ.Ε.8.5.]
- Να υπολογίζουν τα εμβαδά κυκλικών τομέων ως μέρη του εμβαδού του κυκλικού δίσκου τους. [Μ.Ε.8.6.]
- Να επιλύουν προβλήματα υπολογισμού εμβαδού μεικτόγραμμων σχημάτων αξιοποιώντας ποικιλία μεθόδων και στρατηγικών. [Μ.Ε.8.7.]

Θεματική ενότητα 6: Στοιχεία Αναλυτικής Γεωμετρίας και γεωμετρικοί μετασχηματισμοί

6.1 Διανύσματα

- Να αναπαριστούν θέσεις, διευθύνσεις και διαδρομές με τη βοήθεια διανυσμάτων. [ΑΓ.Δ.8.1.]
- Να συνδέουν τα διανύσματα με φυσικά διανυσματικά μεγέθη και να προσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά τους αναγνωρίζοντας τη διαφορά ανάμεσα σε ευθύγραμμο τμήμα και διάνυσμα. [ΑΓ.Δ.8.2.]

6.2 Μεταφορά

- Να αναγνωρίζουν μετασχηματισμούς μεταφοράς και να καθορίζουν τα στοιχεία και τα χαρακτηριστικά τους. [Γ.Μ.8.1.]
- Να διερευνούν και να εντοπίζουν τις ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά των σχημάτων που παραμένουν αναλλοίωτα από έναν μετασχηματισμό μεταφοράς. [Γ.Μ.8.2.]
- Να σχεδιάζουν το σχήμα που προκύπτει από τη μεταφορά ενός σχήματος κατά διάνυσμα χρησιμοποιώντας μια ποικιλία εργαλείων και στρατηγικών. [Γ.Μ.8.4.]
- Να αναγνωρίζουν και να περιγράφουν μετασχηματισμούς σε ένα γεωμετρικό μοτίβο, ένα σχέδιο, ένα έργο τέχνης ή μια πλακόστρωση. [Γ.Μ.8.11.]

6.3 Στροφή

- Να αναγνωρίζουν μετασχηματισμούς στροφής και να καθορίζουν τα στοιχεία και τα χαρακτηριστικά τους. [Γ.Μ.8.5.]
- Να αναγνωρίζουν την κεντρική συμμετρία ως ειδική περίπτωση μετασχηματισμού στροφής κατά 180 μοίρες. [Γ.Μ.8.6.]
- Να διερευνούν και να εντοπίζουν τις ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά των σχημάτων που παραμένουν αναλλοίωτα από έναν μετασχηματισμό στροφής ως προς κέντρο και γωνία στροφής. [Γ.Μ.8.8.]
- Να σχεδιάζουν με ποικιλία εργαλείων και στρατηγικών το σχήμα που προκύπτει από τη στροφή δεδομένου σχήματος ως προς κέντρο και συγκεκριμένη γωνία στροφής αξιοποιώντας τις ιδιότητες του μετασχηματισμού. [Γ.Μ.8.10.]
- Να αναγνωρίζουν και να περιγράφουν μετασχηματισμούς σε ένα γεωμετρικό μοτίβο, ένα σχέδιο, ένα έργο τέχνης ή μια πλακόστρωση. [Γ.Μ.8.11.]

6.4 Σχήματα με περιστροφική και κεντρική συμμετρία

- Να αναγνωρίζουν σχήματα με κέντρο συμμετρίας και να προσδιορίζουν το κέντρο συμμετρίας τους. [Γ.Μ.8.7.]
- Να αναγνωρίζουν και να περιγράφουν μετασχηματισμούς σε ένα γεωμετρικό μοτίβο, ένα σχέδιο, ένα έργο τέχνης ή μια πλακόστρωση. [Γ.Μ.8.11.]

6.5 Σχεδίαση και συλλογισμός με μετασχηματισμούς

- Να διερευνούν και να εντοπίζουν τις ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά των σχημάτων που παραμένουν αναλλοίωτα από έναν μετασχηματισμό μεταφοράς. [Γ.Μ.8.2.]
- Να αξιοποιούν τις ιδιότητες του μετασχηματισμού μεταφοράς κατά διάνυσμα στον σχεδιασμό σχημάτων και στην αιτιολόγηση ιδιοτήτων τους. [Γ.Μ.8.3.]
- Να διερευνούν και να εντοπίζουν τις ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά των σχημάτων που παραμένουν αναλλοίωτα από έναν μετασχηματισμό στροφής ως προς κέντρο και γωνία στροφής. [Γ.Μ.8.8.]
- Να αξιοποιούν τις ιδιότητες του μετασχηματισμού στροφής ως προς κέντρο και γωνία στροφής στον σχεδιασμό σχημάτων και στην αιτιολόγηση ιδιοτήτων τους. [Γ.Μ.8.9.]

Θεματική ενότητα 7: Στατιστική

7.1 Διαχείριση δεδομένων

- Να διατυπώνουν ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με απογραφικά χρονικά δεδομένα. [Σ.Δ.8.1.]
- Να συλλέγουν χρονικά δεδομένα που προκύπτουν από επαναλαμβανόμενες μετρήσεις κάποιου χαρακτηριστικού. [Σ.Δ.8.2.]
- Να κατασκευάζουν χρονοδιαγράμματα για χρονικά δεδομένα. [Σ.Δ.8.3.]
- Να επιλέγουν πληροφορίες από διαφορετικές αναπαραστάσεις συνεχών ποσοτικών και χρονικών δεδομένων και να καταλήγουν σε συμπεράσματα. [Σ.Δ.8.5.]
- Να εντοπίζουν παραδείγματα χρήσης στατιστικών διαγραμμάτων που μπορούν να οδηγήσουν σε εσφαλμένα συμπεράσματα και να παραπλανήσουν. [Σ.Δ.8.6.]

7.2 Μέτρα θέσης και μεταβλητότητας

- Να περιγράφουν και να προσδιορίζουν τα τεταρτημόρια και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος ενός συνόλου δεδομένων. [Σ.Μ.8.1.]
- Να διερευνούν ιδιότητες της μέσης τιμής, όπως τη μεταβολή της όταν προστίθενται ή πολλαπλασιάζονται όλα τα δεδομένα με τον ίδιο αριθμό. [Σ.Μ.8.2.]
- Να διερευνούν πώς επηρεάζονται η μέση τιμή και η διάμεσος από την ύπαρξη απόμακρων τιμών. [Σ.Μ.8.3.]
- Να διερευνούν την έννοια της μεταβλητότητας χρησιμοποιώντας το ενδοτεταρτημοριακό εύρος. [Σ.Μ.8.4.]
- Να περιγράφουν τα δεδομένα με βάση την περίληψη των πέντε αριθμών: ελάχιστη τιμή, τεταρτημόρια και μέγιστη τιμή. [Σ.Μ.8.5.]

7.3 Θηκογράμματα

- Να κατασκευάζουν απλά θηκογράμματα, χρησιμοποιώντας την «περίληψη πέντε αριθμών» (ελάχιστη τιμή, τεταρτημόρια και μέγιστη τιμή), για συνεχή ποσοτικά δεδομένα. [Σ.Δ.8.4.]

Θεματική ενότητα 8: Πειράματα τύχης και πιθανότητες

8.1 Βασική αρχή απαρίθμησης: η πολλαπλασιαστική αρχή

- Να απαριθμούν το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου με χρήση της Βασικής Αρχής Απαρίθμησης (BAA) και να υπολογίζουν την αντίστοιχη πιθανότητα. [Π.Π.8.2.]
- Να χρησιμοποιούν τον απλό προσθετικό νόμο για να υπολογίσουν την πιθανότητα σύνθετων ενδεχομένων. [Π.Π.8.3.]

8.2 Ασυμβίβαστα ενδεχόμενα

- Να ελέγχουν αν δύο ενδεχόμενα είναι ασυμβίβαστα. [Π.Π.8.1.]
- Να χρησιμοποιούν τον απλό προσθετικό νόμο για να υπολογίσουν την πιθανότητα σύνθετων ενδεχομένων. [Π.Π.8.3.]



ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ 1:

Αριθμοί

Η ενέργεια που εκλύεται κατά τη διάρκεια ενός σεισμού μετρίεται με την κλίμακα Ρίχτερ (R). Ένας σεισμός μεγέθους 3 R είναι 10^2 φορές μεγαλύτερος από έναν σεισμό μεγέθους 1 R. Ένας σεισμός μεγέθους 7 R είναι 10^6 φορές μεγαλύτερος από έναν σεισμό μεγέθους 1 R.

Πόσες φορές ισχυρότερος είναι ένας σεισμός 7 R από έναν σεισμό 3 R;

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε αριθμούς που μας βοηθούν να περιγράψουμε φαινόμενα και καταστάσεις από την καθημερινή ζωή και τις επιστήμες. Θα χρησιμοποιήσουμε αριθμούς που δε γνωρίζαμε ως τώρα, όπως δυνάμεις ρητών και ρίζες.

ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΕΝΟΤΗΤΕΣ:

- 1.1 Ιδιότητες δυνάμεων ρητών αριθμών με εκθέτη θετικό ακέραιο
- 1.2 Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη ακέραιο
- 1.3 Τετραγωνικές ρίζες
- 1.4 Άρρητοι αριθμοί
- 1.5 Πραγματικοί αριθμοί

Ιδιότητες δυνάμεων ρητών αριθμών με εκθέτη θετικό ακέραιο

Έχουμε ορίσει ότι $\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha}_n = \alpha^n$, με α ρητό και n θετικό ακέραιο, και $\alpha^1 = \alpha$. Για παράδειγμα:

$$(-1,2) \cdot (-1,2) \cdot (-1,2) = (-1,2)^3, \quad \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{3} = \left(\frac{5}{3}\right)^4, \quad 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot y \cdot y \cdot y = 7^5 \cdot y^3$$

Στη συνέχεια θα διερευνήσουμε ιδιότητες των δυνάμεων που θα μας βοηθήσουν να γράφουμε σε πιο απλή μορφή και να υπολογίζουμε πιο εύκολα παραστάσεις που έχουν δυνάμεις.

Δ1. Οι δυνάμεις... δυναμώνουν

α) Η ενέργεια που εκλύεται κατά τη διάρκεια ενός σεισμού μετρείται με την κλίμακα Ρίχτερ (R). Η αύξηση κατά μία μονάδα σημαίνει 10 φορές πιο ισχυρό σεισμό. Παρατηρήστε τον παρακάτω πίνακα. Τι παρατηρείτε στην 3η στήλη σχετικά με το γινόμενο δυνάμεων που έχουν την ίδια βάση;



Σεισμός μεγέθους (σε R)	Είναι ισχυρότερος από έναν σεισμό μεγέθους 2 R	Με χρήση δυνάμεων
3	10 φορές	10^1
4	$10 \cdot 10 = 100$ φορές	$10^1 \cdot 10^1 = 10^2$
5	$10 \cdot 100 = 1.000$ φορές	$10^1 \cdot 10^2 = 10^3$
6	$10 \cdot 1.000 = 10.000$ φορές	$10^1 \cdot 10^3 = 10^4$

β) Να γράψετε ως μία δύναμη τα γινόμενα:

$$7^2 \cdot 7^6, \quad \left(-\frac{5}{4}\right) \cdot \left(-\frac{5}{4}\right)^4 \cdot \left(-\frac{5}{4}\right)^6, \quad \alpha^5 \cdot \alpha^6, \quad x \cdot x^7 \cdot x^2$$

γ) Πώς μπορεί να γραφτεί ως μία δύναμη το γινόμενο $\alpha^m \cdot \alpha^n$; Συζητήστε τις προτάσεις σας στην τάξη.

Συζητάμε

...για το γινόμενο δυνάμεων με την ίδια βάση

Για να γράψουμε ως μία δύναμη ένα γινόμενο δυνάμεων που έχουν την ίδια βάση, μπορούμε να σκεφτούμε ως εξής:

$$2^3 \cdot 2^4 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3 \text{ παράγοντες ίσοι με } 2} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{4 \text{ παράγοντες ίσοι με } 2} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{7 \text{ παράγοντες ίσοι με } 2} = 2^7$$

Παρατηρούμε ότι ο νέος εκθέτης είναι το 7, που είναι το άθροισμα των 3 και 4.

$$\text{Γενικότερα: } \alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha}_{\mu \text{ παράγοντες ίσοι με } \alpha} \cdot \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha}_{\nu \text{ παράγοντες ίσοι με } \alpha} = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha}_{\mu+\nu \text{ παράγοντες ίσοι με } \alpha} = \alpha^{\mu+\nu}.$$

$$\text{Για παράδειγμα: } \left(-\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^{10} = \left(-\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^1 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^{10} = \left(-\frac{1}{5}\right)^{3+1+10} = \left(-\frac{1}{5}\right)^{14}.$$



Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Γινόμενο δυνάμεων με την ίδια βάση

Όταν πολλαπλασιάζουμε δύο ή περισσότερες δυνάμεις με την ίδια βάση, τότε το γινόμενο είναι μία δύναμη με την ίδια βάση και εκθέτη το άθροισμα των εκθετών. Δηλαδή $\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}$, με μ, ν θετικούς ακεραίους.

Δ2. Οι δυνάμεις... εξασθενούν

α) Η ένταση του ήχου της κυκλοφοριακής κίνησης είναι 10^8 φορές μεγαλύτερη από την πιο χαμηλή ένταση ήχου που μπορεί να αντιληφθεί ένας άνθρωπος (όριο ακοής). Η ένταση του ήχου στην εκτόξευση ενός πυραύλου είναι 10^{18} φορές μεγαλύτερη από την ένταση του ήχου του κατώτερου ορίου ακοής. Πόσες φορές μεγαλύτερη είναι η ένταση του ήχου κατά την εκτόξευση ενός πυραύλου από την ένταση του ήχου της κυκλοφοριακής κίνησης;

β) Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί $\frac{10^{20}}{10^{12}} = 10^8$;

γ) Να γράψετε ως μία δύναμη τα πηλικά δυνάμεων: $\frac{2^7}{2^5}$, $\frac{(-1,3)^9}{(-1,3)^2}$, $\frac{\alpha^{30}}{\alpha^{20}}$, $\frac{x^{12}}{x^2}$.

δ) Να γράψετε ως μία δύναμη το πηλίκο $\frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}}$, με α ρητό διάφορο του μηδενός, μ, ν θετικούς ακεραίους και $\mu > \nu$, αιτιολογώντας το συμπέρασμά σας. Συζητήστε τις αιτιολογήσεις σας στην τάξη.



Συζητάμε

...για το πηλίκο δυνάμεων με την ίδια βάση

Για να γράψουμε ως μία δύναμη ένα πηλίκο δυνάμεων με την ίδια βάση όπου ο εκθέτης του αριθμητή είναι μεγαλύτερος από τον εκθέτη του παρονομαστή, μπορούμε να σκεφτούμε όπως στο παράδειγμα:

$$\frac{3^5}{3^2} = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{\cancel{3} \cdot \cancel{3}} = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3 = 3^{5-2}.$$



Συζητάμε για το πηλίκο δυνάμεων με την ίδια βάση



Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Πηλίκο δυνάμεων με την ίδια βάση

Όταν διαιρούμε δύο δυνάμεις με την ίδια βάση, τότε το πηλίκο είναι μία δύναμη με την ίδια βάση και εκθέτη τη διαφορά των εκθετών.

Δηλαδή $\frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}} = \alpha^{\mu-\nu}$, με μ, ν θετικούς ακεραίους, $\mu > \nu$ και $\alpha \neq 0$.

Δ3. Δυναμο... δυνάμεις

- α) Πώς θα γράφατε τον κύβο του 2 στην πέμπτη δύναμη; Γράφεται ο προηγούμενος αριθμός ως δύναμη του 2;
 β) Να γράψετε ως μία δύναμη καθεμιά από τις δυνάμεις: $(4^5)^3$, $(1,7^5)^{10}$, $(x^2)^7$.
 γ) Αν μ και ν θετικοί ακέραιοι, πώς μπορεί να γραφτεί ως μία δύναμη το $(\alpha^{\mu})^{\nu}$; Συζητήστε τις ιδέες σας στην τάξη.

Συζητάμε

...για δύναμη υψωμένη σε εκθέτη

Για να γράψουμε μία δύναμη σε εκθέτη ως μία δύναμη, μπορούμε να σκεφτούμε όπως στο παράδειγμα:

$$(\alpha^2)^3 = \alpha^2 \cdot \alpha^2 \cdot \alpha^2 = \alpha^{2+2+2} = \alpha^{3 \cdot 2} \text{ ή } \alpha^6$$

Γενικότερα: $(\alpha^{\mu})^{\nu} = \underbrace{\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} \cdot \dots \cdot \alpha^{\mu}}_{\nu \text{ ίσοι παράγοντες}} = \alpha^{\overbrace{\mu+\mu+\dots+\mu}^{\nu \text{ ίσοι όροι}}} = \alpha^{\mu \cdot \nu}$.

Για παράδειγμα: $(4^4)^2 = 4^{4 \cdot 2} = 4^8$, $\left(\left(-\frac{2}{7}\right)^{100}\right)^5 = \left(-\frac{2}{7}\right)^{500}$.



Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Δύναμη υψωμένη σε εκθέτη

Μία δύναμη υψωμένη σε εκθέτη μπορεί να γραφτεί ως μία δύναμη με βάση την αρχική βάση της δύναμης και εκθέτη το γινόμενο των εκθετών.

Δηλαδή $(\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu \cdot \nu}$, με μ και ν θετικούς ακεραίους.

Δ4. Δυνάμεις με ίδιους εκθέτες

- α) Να γράψετε ως μία δύναμη τα γινόμενα δυνάμεων: $2^3 \cdot 4^3$, $\alpha^5 \cdot \beta^5$, $x^{10} \cdot y^{10} \cdot z^{10}$.
 β) Πώς μπορεί να γραφτεί ως μία δύναμη το $\alpha^{\nu} \cdot \beta^{\nu}$ (ν θετικός ακέραιος); Συζητήστε τις ιδέες σας στην τάξη.

Συζητάμε

...για το γινόμενο δυνάμεων με τον ίδιο εκθέτη

Για να γράψουμε το γινόμενο $5^3 \cdot \alpha^3$ ως μία δύναμη, θα σκεφτούμε ως εξής:

$$\begin{aligned} 5^3 \cdot \alpha^3 &= (5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot (\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha) = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha = \\ &= 5 \cdot \alpha \cdot 5 \cdot \alpha \cdot 5 \cdot \alpha = (5 \cdot \alpha) \cdot (5 \cdot \alpha) \cdot (5 \cdot \alpha) = (5 \cdot \alpha)^3 \end{aligned}$$

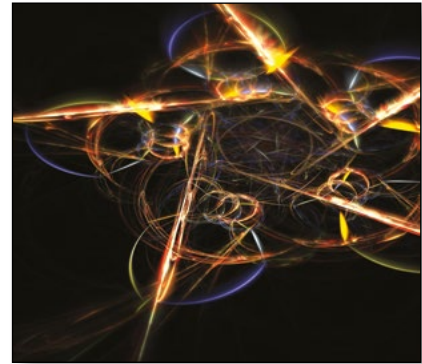
Γενικότερα:

$$\alpha^{\nu} \cdot \beta^{\nu} = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha}_{\nu \text{ ίσοι παράγοντες}} \cdot \underbrace{\beta \cdot \beta \cdot \dots \cdot \beta}_{\nu \text{ ίσοι παράγοντες}} = \underbrace{(\alpha \cdot \beta) \cdot (\alpha \cdot \beta) \cdot \dots \cdot (\alpha \cdot \beta)}_{\nu \text{ ίσοι παράγοντες}} = (\alpha \cdot \beta)^{\nu}$$

Για παράδειγμα:

- $2^6 \cdot 5^6 = (2 \cdot 5)^6$, που ισούται με $10^6 = 1.000.000$
- $0,4^{12} \cdot 25^{12} = (0,4 \cdot 25)^{12} = 1^{12} = 1$
- $3^7 \cdot x^7 \cdot \alpha^7 = (3 \cdot \alpha \cdot x)^7$

Πολύ συχνά εφαρμόζουμε την ιδιότητα αυτή και προς την άλλη κατεύθυνση, δηλαδή $(\alpha \cdot \beta)^{\nu} = \alpha^{\nu} \cdot \beta^{\nu}$. Για παράδειγμα: $(2 \cdot 7)^4 = 2^4 \cdot 7^4$, $(5 \cdot \alpha)^8 = 5^8 \cdot \alpha^8$, $(2 \cdot \pi \cdot \rho)^{\alpha} = 2^{\alpha} \cdot \pi^{\alpha} \cdot \rho^{\alpha}$.



Η εφαρμογή της ιδιότητας σε τέτοιες περιπτώσεις μάς επιτρέπει να βρούμε γρήγορα το αποτέλεσμα χωρίς να κάνουμε πολλές ή δύσκολες πράξεις.



Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Γινόμενο δυνάμεων με τον ίδιο εκθέτη

Το γινόμενο δύο ή περισσότερων δυνάμεων με τον ίδιο εκθέτη μπορεί να γραφτεί ως μία δύναμη με βάση το γινόμενο των βάσεων και εκθέτη τον ίδιο.

Δηλαδή $(\alpha \cdot \beta)^{\nu} = \alpha^{\nu} \cdot \beta^{\nu}$, με α, β ρητούς και μ, ν θετικούς ακεραίους.

Δ5. Πηλίκo δυνάμεων με τον ίδιο εκθέτη

α) Να γράψετε ως μία δύναμη τα πηλικά δυνάμεων: $\frac{2^3}{7^3}, \frac{(-30)^5}{(-3)^5}, \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{10}}{\left(\frac{2}{5}\right)^{10}}$.

β) Αν ν θετικός ακέραιος, πώς μπορεί να γραφτεί ως μία δύναμη το $\frac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}}$;

γ) Να εφαρμόσετε την ιδιότητα στην οποία καταλήξατε στο προηγούμενο ερώτημα και να γράψετε ως μία δύναμη τα πηλικά $\frac{50^3}{5^3}, \frac{5^3}{4^3}, \frac{12^9}{1,2^9}$. Αν θέλαμε να κάνουμε πράξεις για να βρούμε ένα τελικό αποτέλεσμα, σε ποιες από αυτές τις αριθμητικές παραστάσεις η ιδιότητα μας βοηθά; Συζητήστε τις προτάσεις σας στην τάξη.

Συζητάμε

...για το πηλίκο δυνάμεων με τον ίδιο εκθέτη

Αν σκεφτούμε με παρόμοιο τρόπο με τη Δ5, μπορούμε να γράψουμε ως μία δύναμη το $\frac{15^4}{6^4}$ ως εξής:

$$\frac{15^4}{6^4} = \frac{15 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 15}{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{15}{6} \cdot \frac{15}{6} \cdot \frac{15}{6} \cdot \frac{15}{6} = \underbrace{\left(\frac{15}{6}\right)^4}_{4 \text{ ίσοι παράγοντες}} = \left(\frac{5}{2}\right)^4$$



Συζητάμε για πηλίκο δυνάμεων με τον ίδιο εκθέτη



Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Πηλίκο δυνάμεων με τον ίδιο εκθέτη

Το πηλίκο δύο δυνάμεων με τον ίδιο εκθέτη μπορεί να γραφτεί ως μία δύναμη με βάση το πηλίκο των βάσεων και εκθέτη τον ίδιο.

Δηλαδή $\frac{\alpha^v}{\beta^v} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^v$, με v θετικό ακέραιο και $\beta \neq 0$.



Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. Να εφαρμόσετε τις ιδιότητες των δυνάμεων στις παρακάτω παραστάσεις:

α) $x^3 \cdot y^8 \cdot x^5 \cdot y \cdot z$ β) $\frac{\alpha^3 \cdot \alpha^6}{\alpha^5}$ γ) $\frac{x^{13} \cdot y^3}{x^5 \cdot y}$ δ) $\alpha^3 \cdot (\alpha \cdot \beta^2)^4$

Απάντηση

α) $x^3 \cdot y^8 \cdot x^5 \cdot y \cdot z = x^3 \cdot x^5 \cdot y^8 \cdot y^1 \cdot z = x^{3+5} \cdot y^{8+1} \cdot z = x^8 \cdot y^9 \cdot z$

β) $\frac{\alpha^3 \cdot \alpha^6}{\alpha^5} = \frac{\alpha^{3+6}}{\alpha^5} = \frac{\alpha^9}{\alpha^5} = \alpha^4$

γ) $\frac{x^{13} \cdot y^3}{x^5 \cdot y} = \frac{x^{13}}{x^5} \cdot \frac{y^3}{y^1} = x^8 \cdot y^2$

δ) $\alpha^3 \cdot (\alpha \cdot \beta^2)^4 = \alpha^3 \cdot \alpha^4 \cdot (\beta^2)^4 = \alpha^7 \cdot \beta^8$



Πόσα αρχεία χωράει ο σκληρός δίσκος;

2. Αν α και β ρητοί με $\alpha > 0$ και $\beta < 0$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις και να βρείτε το πρόσημό τους:

α) $-\frac{\alpha^2 \cdot \beta^{14} \cdot \alpha^8}{\beta^5}$

β) $-\frac{\alpha^{100}}{\beta^{15}} \cdot (\alpha^3 \cdot \beta^5)^9$

Απάντηση

Όπως γνωρίζουμε, το πρόσημο μιας παράστασης εξαρτάται από το πλήθος των αρνητικών παραγόντων. Αν το πλήθος είναι άρτιος αριθμός, τότε η παράσταση είναι θετική, ενώ, αν το πλήθος είναι περιττός αριθμός, τότε η παράσταση είναι αρνητική.

$$\alpha) \frac{\alpha^2 \cdot \beta^{14} \cdot \alpha^8}{\beta^5} = \frac{\alpha^{2+8} \cdot \beta^{14}}{\beta^5} = -\alpha^{10} \cdot \beta^{14-5} = -\alpha^{10} \cdot \beta^9$$

Το α^{10} είναι θετικό. Το β^9 είναι αρνητικό, γιατί έχει 9 αρνητικούς παράγοντες, άρα το $\alpha^{10} \cdot \beta^9$ είναι αρνητικό. Επομένως το τελικό αποτέλεσμα (το $-\alpha^{10} \cdot \beta^9$) είναι θετικό.

$$\beta) \frac{\alpha^{100}}{\beta^{15}} \cdot (\alpha^3 \cdot \beta^5)^9 = \frac{\alpha^{100}}{\beta^{15}} \cdot (\alpha^3)^9 \cdot (\beta^5)^9 = \frac{\alpha^{100}}{\beta^{15}} \cdot \alpha^{27} \cdot \beta^{45} = -\alpha^{127} \cdot \beta^{30}$$

Το α^{127} είναι θετικό. Η παράσταση $\alpha^{127} \cdot \beta^{30}$ είναι θετική, γιατί έχει 30 αρνητικούς παράγοντες, άρα η $-\alpha^{127} \cdot \beta^{30}$ είναι αρνητική.



Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

- Ποια από τις παρακάτω δυνάμεις είναι ίση με την παράσταση $7^4 \cdot 7^3$;
 α) 7^{12} β) 14^7 γ) 7^7 δ) 49^{12}
- Να γράψετε με δύο διαφορετικούς τρόπους το 5^{10} ως γινόμενο δύο δυνάμεων με την ίδια βάση.
- Ποια από τις παρακάτω δυνάμεις είναι ίση με την παράσταση $\frac{9^{10}}{9^5}$;
 α) 9^5 β) 1^2 γ) 0^5 δ) 9^2
- Να γράψετε με δύο διαφορετικούς τρόπους το $(-2)^{11}$ ως πηλίκο δύο δυνάμεων με την ίδια βάση.
- Ποια από τις παρακάτω δυνάμεις είναι ίση με την παράσταση $(2^4)^2$;
 α) 2^{16} β) 2^8 γ) 2^6 δ) 2^{16}
- Να γράψετε το 3^{100} ως μία δύναμη σε εκθέτη.
- Να βρείτε για κάθε περίπτωση μία δύναμη που να είναι ίση:
 α) με το γινόμενο $\alpha^4 \cdot \beta^4$, β) με το πηλίκο $\frac{x^{10}}{y^{10}}$.
- Ο Ανδρέας έκανε τις παρακάτω πράξεις. Διορθώστε τα λάθη που έκανε.

$$2^3 \cdot 2^4 = 4^7$$

$$(x^2)^6 = x^8$$

$$4^2 \cdot 2^3 = 8^5$$

$$\frac{10^5}{2^4} = 5^1 = 5$$

- Ποιο είναι το πρόσημο του αριθμού $(-1,2)^{1.076}$;



Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

10. Να εφαρμόσετε ιδιότητες των δυνάμεων, για να γράψετε πιο απλά τις παρακάτω παραστάσεις (χωρίς να υπολογίσετε τις δυνάμεις):

α) $3^3 \cdot 3^2$	β) $(-5,1)^5 \cdot (-5,1)^2$	γ) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{11} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^9$	δ) $\alpha^4 \cdot \alpha^7$	ε) $x^3 \cdot x \cdot x^5$
στ) $\frac{2^7}{2^4}$	ζ) $\frac{(-5)^{10}}{(-5)^5}$	η) $\frac{1,42^{20}}{1,42^7}$	θ) $\frac{\alpha^{500}}{\alpha^{200}}$	ι) $\frac{x^{15} \cdot x}{x^4}$
ια) $(3^5)^2$	ιβ) $(2,6^2)^7$	ιγ) $(\alpha^3)^{10}$	ιδ) $(r^{10})^{20}$	ιε) $(\alpha^2)^m$

11. Το ορατό σύμπαν περιέχει περίπου $5 \cdot 10^{22}$ άστρα σε περίπου $8 \cdot 10^{10}$ γαλαξίες. Πόσα άστρα έχει κατά μέσο όρο ένας γαλαξίας;



12. Να γράψετε τη δύναμη α^{20} :

α) ως γινόμενο δύο δυνάμεων, β) ως πηλίκο δύο δυνάμεων, γ) ως δύναμη σε εκθέτη.
Σε ποια ή ποιες περιπτώσεις υπάρχουν άπειροι τρόποι γραφής;

13. Να γράψετε ως μία δύναμη τις παραστάσεις:

α) $5^2 \cdot 10^2$	β) $(-2)^4 \cdot (-7)^4$	γ) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^4$	δ) $x^5 \cdot y^5$	ε) $x^{10} \cdot z^{10} \cdot r^{10}$
στ) $\frac{5^4}{4^4}$	ζ) $\frac{(-8)^9}{9^9}$	η) $\frac{\alpha^{10}}{2^{10}}$	θ) $\frac{x^{12} \cdot x}{\alpha^{13}}$	ι) $\frac{(\alpha^4)^5}{\beta^{20}}$

14. Να γράψετε τη δύναμη 10^{20} :

α) ως γινόμενο δύο δυνάμεων με εκθέτη το 20,
β) ως πηλίκο δύο δυνάμεων με εκθέτη το 20.
Σε ποια ή ποιες περιπτώσεις υπάρχουν άπειροι τρόποι γραφής;

15. Να χρησιμοποιήσετε τις ιδιότητες των δυνάμεων, για να βρείτε τις παρακάτω αριθμητικές παραστάσεις:

α) $2^4 \cdot 5^4$	β) $\frac{(-8)^5}{(-4)^5}$	γ) $\left(\frac{2}{3}\right)^{100} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^{100}$	δ) $(-2,5)^7 \cdot (-4)^7$	ε) $\frac{(-0,05)^5 \cdot 100^5}{(-5)^3}$
--------------------	----------------------------	---	----------------------------	---

16. Να χρησιμοποιήσετε τις ιδιότητες των δυνάμεων, για να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\frac{\alpha^7 \cdot \beta^4}{\beta^3 \cdot \alpha^5}$	β) $\frac{x^2 \cdot x^5}{x^3}$	γ) $(\varphi^5)^4 \cdot \varphi^3$	δ) $\frac{\kappa^8}{(\kappa^2)^3}$	ε) $\frac{(\alpha^2)^{20}}{(\alpha^4)^6}$	στ) $\frac{\alpha^{10} \cdot \beta^{20}}{(\alpha \cdot \beta^5)^4}$
--	--------------------------------	------------------------------------	------------------------------------	---	---

17. Αν x και y αρνητικοί ρητοί, να απλοποιήσετε την παράσταση $-x \cdot y^{14} \cdot y^9 (x^3 \cdot y^5)^5$ και να βρείτε το πρόσημό της.

Δ1. Με τη βοήθεια του μοτίβου

- α) Στον διπλανό πίνακα είναι γραμμένες κάποιες δυνάμεις και η τιμή τους. Συ-
νεχίστε το μοτίβο για τις τιμές που λείπουν.
- β) Μπορείτε να δώσετε ορισμούς για τις δυνάμεις α^0 και α^{-v} , με α ρητό και
 $\alpha \neq 0$; Συζητήστε τους στην τάξη.
- γ) Εφαρμόστε τους ορισμούς στους οποίους καταλήξατε, για να υπολογίσετε
τις δυνάμεις: 2^{-3} , $(-3)^{-2}$, $\left(\frac{5}{2}\right)^{-2}$.

Δύναμη	Τιμή
2^4	16
2^3	8
2^2	4
2^1	2
;	;
;	;
;	;

Συζητάμε

...για τις δυνάμεις με εκθέτη ακέραιο

Στον διπλανό πίνακα παρατηρούμε ότι:

- Στην πρώτη στήλη ο εκθέτης μειώνεται συνεχώς κατά 1, οπότε οι επό-
μενες τιμές θα ήταν: 3^0 , 3^{-1} , 3^{-2} .
- Στη δεύτερη στήλη κάθε φορά διαιρούμε με το 3. Έτσι, οι επόμενες τι-
μές είναι: 1 , $\frac{1}{3}$ και $\frac{1}{9}$ ή $\frac{1}{3^2}$.

Άρα $3^0 = 1$, $3^{-1} = \frac{1}{3}$ και $3^{-2} = \frac{1}{3^2}$. Γενικότερα, ορίζουμε ότι $\alpha^0 = 1$ και $\alpha^{-v} = \frac{1}{\alpha^v}$,

με $\alpha \neq 0$.

Με βάση τα παραπάνω, η ιδιότητα $\frac{\alpha^\mu}{\alpha^v} = \alpha^{\mu-v}$, εκτός από $\mu > v$, ισχύει και
για:

- $\mu = v$, αφού, για παράδειγμα, $\frac{4^8}{4^8} = 1$, ενώ, αν εφαρμόσουμε την ιδιότητα, έχουμε $\frac{4^8}{4^8} = 4^{8-8} = 4^0 = 1$.
- $\mu < v$, π.χ. $\frac{\alpha^2}{\alpha^5} = \frac{\cancel{\alpha \cdot \alpha}}{\cancel{\alpha \cdot \alpha} \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha} = \frac{1}{\alpha^3}$, ενώ, αν εφαρμόσουμε την ιδιότητα, έχουμε $\frac{\alpha^2}{\alpha^5} = \alpha^{2-5} = \alpha^{-3} = \frac{1}{\alpha^3}$.

Τελικά μπορούμε να εφαρμόζουμε την ιδιότητα $\frac{\alpha^\mu}{\alpha^v} = \alpha^{\mu-v}$ για οποιεσδήποτε τιμές των θετικών ακέραιων
αριθμών μ και v .

Όλες οι ιδιότητες που μάθαμε στην προηγούμενη ενότητα με μ και v θετικούς ακεραίους ισχύουν για
όλους τους ακεραίους. Για παράδειγμα:

$$\alpha^3 \cdot \alpha^{-2} = \alpha^3 \cdot \frac{1}{\alpha^2} = \frac{\alpha^3}{\alpha^2} = \alpha^{3-2} = \alpha^{3+(-2)}$$

πάλι δηλαδή προσθέτουμε τους εκθέτες.

Επιβεβαιώστε ότι ισχύει η ιδιότητα

$$\frac{\alpha^\mu}{\alpha^v} = \alpha^{\mu-v} \text{ για } \mu = 5 \text{ και } v = -7.$$

Δύναμη	Τιμή
3^4	81
3^3	27
3^2	9
3^1	3
;	;
;	;
;	;

Οι λαοί της Μεσοποταμίας κατοικούσαν πριν από 10.000 χρόνια περίπου εκεί που βρίσκεται το σημερινό Ιράκ. Έγραφαν τα κείμενά τους σε πήλινες πινακίδες, τις οποίες στη συνέχεια έψηναν, κάνοντάς τες άφθαρτες στον χρόνο. Έτσι, έχουμε μαθηματικά κείμενα των λαών αυτών που χρονολογούνται από το 2100 π.Χ. Σε τέτοιες λοιπόν πινακίδες υπάρχουν σφηνοειδή σύμβολα που δηλώνουν τους αριθμούς 1, 60, 3.600, 60^{-1} και 60^{-2} !

Πηγή: [18]*



Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Συνοψίζοντας τους ορισμούς και τις ιδιότητες των δυνάμεων, έχουμε:

Ορισμοί

Για κάθε ρητό αριθμό α και κάθε θετικό ακέραιο n έχουμε:

- $\alpha^n = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha}_{n \text{ ίσοι παράγοντες}}$
- $\alpha^1 = \alpha$
- $\alpha^0 = 1$, με $\alpha \neq 0$
- $\alpha^{-n} = \frac{1}{\alpha^n}$, με $\alpha \neq 0$

Ιδιότητες

Για κάθε ρητό α και ακεραίους μ και n ισχύουν οι ιδιότητες:

- $\alpha^\mu \cdot \alpha^n = \alpha^{\mu+n}$
- $\frac{\alpha^\mu}{\alpha^n} = \alpha^{\mu-n}$, με $\alpha \neq 0$
- $(\alpha^\mu)^n = \alpha^{\mu \cdot n}$ Δύναμη υψωμένη σε εκθέτη
- $\alpha^\nu \cdot \beta^\nu = (\alpha \cdot \beta)^\nu$
- $\frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu$, με $\beta \neq 0$ Ίδιος εκθέτης

$$2^{10} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{10 \text{ ίσοι παράγοντες}}$$

$$(-3)^1 = -3$$

$$(-5)^0 = 1$$

$$9^{-2} = \frac{1}{9^2}$$

$$5^4 \cdot 5^2 = 5^{5+2} = 5^7$$

$$\frac{4^7}{4^3} = 4^{7-3} = 4^4$$

$$(7^2)^6 = 7^{2 \cdot 6} = 7^{12}$$

$$5^{-3} \cdot 3^{-3} = (5 \cdot 3)^{-3} = 15^{-3}$$

$$\frac{2^7}{5^7} = \left(\frac{2}{5}\right)^7$$

Δ2. Τυποποιημένη μορφή μικρών αριθμών

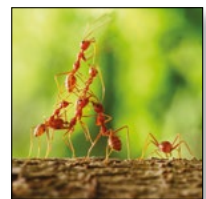
α) Να γράψετε τους αριθμούς 0,1, 0,01, 0,001, 0,0001 ως δυνάμεις του 10.

β) Η απόσταση Γης-Σελήνης είναι περίπου 384.400.000 m και μπορεί να γραφτεί σε τυποποιημένη μορφή ως $3,844 \cdot 10^8$ m. Δηλαδή ως γινόμενο του 3,844 (που είναι αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος του 1 και μικρότερος του 10) και μιας δύναμης του 10.

Με την ίδια λογική μετατρέψτε τις παρακάτω μετρήσεις μήκους (μικρών αριθμών) σε τυποποιημένη μορφή:

- Το μήκος ενός μυρμηγκιού είναι 0,0041 m.
- Το κύτταρο του ανθρώπινου δέρματος είναι 0,000035 m.
- Το άτομο του άνθρακα έχει μήκος 0,0000000016 m.
- Το άτομο του πιο απλού στοιχείου στο σύμπαν, του υδρογόνου, έχει μήκος 0,00000000031 m.
- Ο πυρήνας του ατόμου του ουρανίου έχει μήκος 0,0000000000015 m.

γ) Να μετατρέψετε στη δεκαδική τους μορφή τους ακόλουθους αριθμούς που είναι σε τυποποιημένη μορφή: $1,22 \cdot 10^{-6}$, $9,805 \cdot 10^{-5}$.



* Στα ιστορικά σημειώματα υπάρχει ένας αριθμός που δηλώνει την πηγή. Ο κατάλογος όλων των πηγών υπάρχει εδώ: <https://ebooksdl.cti.gr/handle/20.500.14040/26827>.

Συζητάμε

...για την τυποποιημένη μορφή μικρών αριθμών

Ξέρουμε ότι $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1.000$, ο εκθέτης δηλαδή του 10 δείχνει τον αριθμό των μηδενικών όταν γράψουμε τον αριθμό στην κανονική του μορφή.

Οι αριθμοί 0,1, 0,01, 0,001 γράφονται αντίστοιχα $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10^2}$, $\frac{1}{10^3}$ ή $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1.000}$ ή 10^{-1} , 10^{-2} , 10^{-3} .

Για να μετατρέψουμε έναν πολύ μικρό αριθμό σε τυποποιημένη μορφή, θα πρέπει να μεταφέρουμε την υποδιαστολή μετά το πρώτο σημαντικό ψηφίο (το πρώτο δηλαδή μη μηδενικό δεκαδικό ψηφίο). Και για να μην αλλάξει ο αριθμός, πολλαπλασιάζουμε με τη δύναμη του 10 με εκθέτη τον αντίθετο του αριθμού των θέσεων που μεταφέραμε την υποδιαστολή.

Για παράδειγμα, η μάζα του ηλεκτρονίου (σε gr) είναι:

0,000 000 000 000 000 000 000 000 000 910 94

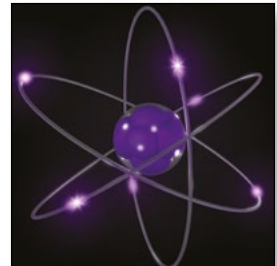
 28 θέσεις

που μπορεί να γραφτεί $9,1094 \cdot 10^{-28}$ (μεταφέραμε 28 θέσεις την υποδιαστολή δεξιά).

Πιο αναλυτικά, σε άλλο παράδειγμα: $0,00045 = \frac{4,5}{10.000} = \frac{4,5}{10^4} = 4,5 \cdot 10^{-4}$.

Για να μετατρέψουμε σε δεκαδική μορφή έναν αριθμό που είναι σε τυποποιημένη μορφή, για παράδειγμα τον $4,309 \cdot 10^{-6}$, σκεφτόμαστε ως εξής:

Ο αριθμός 4,309 διαιρείται με το 10^6 , άρα θα μεταφέρουμε 6 θέσεις την υποδιαστολή προς τα αριστερά και θα γίνει 0,000004309.



Όταν σε μία αριθμομηχανή δε χωρούν τα ψηφία μετά από μία πράξη, τότε ο αριθμός εμφανίζεται στην τυποποιημένη του μορφή. Π.χ., όταν γράφει 2,17e-12 (ή 2,17E-12), είναι ο αριθμός $2,17 \cdot 10^{-12}$.



Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Ένας πίνακας έννοιας για την τυποποιημένη μορφή είναι ο εξής:

Ορισμός

Έναν πολύ μικρό αριθμό μπορούμε να τον γράψουμε σε τυποποιημένη μορφή, δηλαδή ως γινόμενο:

- ενός αριθμού α μεγαλύτερου ή ίσου με το 1 και μικρότερου του 10 και
- μιας αρνητικής δύναμης του 10.

Χαρακτηριστικά

Μπορούμε να τον γράψουμε στη μορφή $\alpha \cdot 10^v$, με $\alpha \geq 1$ και $\alpha < 10$ και v αρνητικός ακέραιος. Αυτή η γραφή των αριθμών μάς είναι χρήσιμη στη σύγκριση και στις πράξεις.

Τυποποιημένη μορφή μικρών αριθμών**Παραδείγματα είναι**

$0,0034 = 3,4 \cdot 10^{-3}$
 $0,00001 = 1 \cdot 10^{-5} = 10^{-5}$
 $0,00000000003023 = 3,023 \cdot 10^{-11}$

Παραδείγματα δεν είναι

$32,1 \cdot 10^{-4}$
 $0,22 \cdot 10^{-5}$
 $10 \cdot 10^{-20}$



Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) \frac{\alpha^4}{\alpha^{-5}} \quad \beta) \frac{\alpha^{-3}}{\alpha^{-1}} \quad \gamma) \frac{(\alpha^3 \cdot \beta)^{-2}}{(\alpha^2 \cdot \beta^3)^{-4}}$$

Απάντηση

$$\alpha) \frac{\alpha^4}{\alpha^{-5}} = \alpha^{4-(-5)} = \alpha^{4+5} = \alpha^9$$

$$\beta) \text{ 1ος τρόπος: Εφαρμόζουμε αρχικά τον ορισμό } \alpha^{-v} = \frac{1}{\alpha^v}, \frac{\alpha^{-3}}{\alpha^{-1}} = \frac{\frac{1}{\alpha^3}}{\frac{1}{\alpha}} = \frac{\alpha}{\alpha^3} = \alpha^{1-3} = \alpha^{-2} = \frac{1}{\alpha^2}.$$

$$\text{2ος τρόπος: Εφαρμόζουμε στο τέλος τον ορισμό } \alpha^{-v} = \frac{1}{\alpha^v}, \frac{\alpha^{-3}}{\alpha^{-1}} = \alpha^{-3+1} = \alpha^{-2} = \frac{1}{\alpha^2}.$$

$$\gamma) \frac{(\alpha^3 \cdot \beta)^{-2}}{(\alpha^2 \cdot \beta^3)^{-4}} = \frac{(\alpha^3)^{-2} \cdot \beta^{-2}}{(\alpha^2)^{-4} \cdot (\beta^3)^{-4}} = \frac{\alpha^{-6} \cdot \beta^{-2}}{\alpha^{-8} \cdot \beta^{12}} = \alpha^{-6+8} \cdot \beta^{-2-12} = \alpha^2 \cdot \beta^{-14} = \frac{\alpha^2}{\beta^{14}}$$

Συνήθως, ο πιο εύκολος τρόπος σε τέτοιες παραστάσεις είναι να εφαρμόζουμε στο τέλος τον ορισμό $\alpha^{-v} = \frac{1}{\alpha^v}$.

2. Η πολική περιφέρεια της Γης (ένας νοητός κύκλος που περνάει από τους πόλους) είναι 39.940,638 km. Να γράψετε αυτό τον αριθμό ως ανάπτυγμα δυνάμεων του 10.

Απάντηση

Ο αριθμός αυτός γράφεται:

$$\begin{aligned} 39.940,638 &= 30.000 + 9.000 + 900 + 40 + 0 + 0,6 + 0,03 + 0,008 = \\ &= 3 \cdot 10.000 + 9 \cdot 1.000 + 9 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 0 \cdot 1 + 6 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,01 + 8 \cdot 0,001 = \\ &= 3 \cdot 10^4 + 9 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + 8 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$



3. Ο όγκος ενός κύβου με πλευρά α δίνεται από τον τύπο α^3 . Ποιος είναι ο όγκος ενός κύβου πάγου με πλευρά 10^{-3} m;

Απάντηση

$$\text{Ο κύβος πάγου έχει όγκο } (10^{-3} \text{ m})^3 = (10^{-3})^3 \cdot \text{m}^3 = 10^{-9} \cdot \text{m}^3 = \frac{1}{10^9} \text{ m}^3 = 0,000000001 \text{ m}^3.$$

4. Να δείξετε ότι καθεμιά από τις παραστάσεις $\frac{1}{3^{-4} \cdot 2^7}$, $\frac{2^{-7}}{3^{-4}}$ και $3^4 \cdot 2^{-7}$ είναι ίση με την $\frac{3^4}{2^7}$.

Απάντηση

$$\frac{1}{3^{-4} \cdot 2^7} = \frac{1}{\frac{1}{3^4} \cdot 2^7} = \frac{1}{\frac{2^7}{3^4}} = \frac{3^4}{2^7}, \quad \frac{2^{-7}}{3^{-4}} = \frac{\frac{1}{2^7}}{\frac{1}{3^4}} = \frac{3^4}{2^7}, \quad 3^4 \cdot 2^{-7} = 3^4 \cdot \frac{1}{2^7} = \frac{3^4}{2^7}$$

Για να μεταφέρουμε έναν παράγοντα από τον αριθμητή στον παρονομαστή και ανάποδα, δεν έχουμε παρά να αλλάξουμε το πρόσημο του εκθέτη του, π.χ. $\frac{7^{13}}{13^9} = \frac{1}{7^{-13} \cdot 13^9} = \frac{13^{-9}}{7^{-13}} = 7^{13} \cdot 13^{-9}$.

5. Να γίνουν οι πράξεις:

$$\alpha) 4 \cdot (-3)^2 - 10^2 : (-25) \quad \beta) (-0,25)^7 \cdot 4^7 - \frac{(-8)^4}{(-4)^4} - 2^2 \cdot (-2)^{-2}$$

Απάντηση

$$\alpha) 4 \cdot (-3)^2 - 10^2 : (-25) = 4 \cdot (+9) - 100 : (-25) = 36 - (-4) = 36 + 4 = 40$$

β) Αντί να υπολογίζουμε τις δυνάμεις, μερικές φορές είναι πιο εύκολο να εφαρμόσουμε ιδιότητες των δυνάμεων, όπως:

$$\begin{aligned} (-0,25)^7 \cdot 4^7 - \frac{(-8)^4}{(-4)^4} - 2^2 \cdot (-2)^{-2} &= (-0,25 \cdot 4)^7 - \left(\frac{-8}{-4}\right)^4 - 2^2 \cdot \frac{1}{(-2)^2} = (-1)^7 - 2^4 - \frac{2^2}{(-2)^2} = \\ &= -1 - 16 - \left(\frac{2}{-2}\right)^2 = -17 - (-1)^2 = -17 - 1 = -18 \end{aligned}$$

6. Να βρείτε το πρόσημο των παρακάτω παραστάσεων και να συμπληρώσετε τον πίνακα:

Παράσταση	$(-3)^{-40}$	$(-5)^{-31}$	$(-0,3)^{81}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-80}$	$- \left(-\frac{1}{2}\right)^{-90}$	$\left[- \left(-\frac{5}{4}\right)\right]^{-101}$	-2^{-100}	-2^{-101}
Πρόσημο								

Απάντηση

- Η δύναμη $(-3)^{-40}$ έχει αρνητική βάση και άρτιο εκθέτη, άρα η τιμή της είναι θετική.
- Η δύναμη $(-5)^{-31}$ έχει αρνητική βάση και περιττό εκθέτη, άρα η τιμή της είναι αρνητική.
- Η δύναμη $(-0,3)^{81}$ έχει αρνητική βάση και περιττό εκθέτη, άρα η τιμή της είναι αρνητική.
- Η δύναμη $\left(\frac{2}{3}\right)^{-80}$ έχει θετική βάση, άρα η τιμή της είναι θετική.
- Η δύναμη $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-90}$ έχει αρνητική βάση και άρτιο εκθέτη, άρα η τιμή της είναι θετική. Επομένως η παράσταση $- \left(-\frac{1}{2}\right)^{-90}$ έχει το αντίθετο πρόσημο, δηλαδή αρνητικό.
- Η δύναμη $\left[- \left(-\frac{5}{4}\right)\right]^{-101}$ γράφεται ως $\left(\frac{5}{4}\right)^{-101}$, άρα έχει θετική βάση. Επομένως η τιμή της είναι θετική.
- Στην παράσταση -2^{-100} , το πλην (-) δεν είναι πρόσημο του 2, δηλαδή δεν είναι πρόσημο της βάσης. Η βάση

Θυμόμαστε ότι:

Αν $\alpha > 0$, τότε $\alpha^v > 0$.

Αν $\alpha < 0$, τότε:

• αν v περιττός, τότε $\alpha^v > 0$.

• αν v άρτιος, τότε $\alpha^v < 0$.

της δύναμης είναι 2, άρα η παράσταση θα μπορούσε να γραφτεί και ως $-(2^{-100})$. Η δύναμη 2^{-100} έχει θετική βάση, άρα και θετική τιμή. Επομένως το πρόσημο της παράστασης -2^{-100} είναι το αντίθετο, άρα αρνητικό.

- Ομοίως με το προηγούμενο, η βάση της δύναμης είναι 2, άρα θετική. Επομένως η τιμή της είναι επίσης θετική. Άρα το πρόσημο της παράστασης -2^{-101} είναι αρνητικό.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, ο πίνακας συμπληρώνεται ως εξής:

Παράσταση	$(-3)^{-40}$	$(-5)^{-31}$	$(-0,3)^{81}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-80}$	$-\left(-\frac{1}{2}\right)^{-90}$	$\left[-\left(-\frac{5}{4}\right)\right]^{-101}$	-2^{-100}	-2^{-101}
Πρόσημο	+	-	-	+	-	+	-	-

Ας θυμηθούμε ότι για να υπολογίσουμε μία αριθμητική παράσταση:

- πρώτα υπολογίζουμε τις δυνάμεις,
- μετά κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις,
- τέλος κάνουμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις.

Αν υπάρχουν παρενθέσεις, τότε κάνουμε τις πράξεις πρώτα μέσα σε αυτές, με την ίδια προτεραιότητα.

Για να υπολογίσουμε τις δυνάμεις, μερικές φορές είναι πιο εύκολο να εφαρμόζουμε πρώτα κάποιες από τις ιδιότητες των δυνάμεων.



Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε

1. Η ιδιότητα $(\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu \cdot \nu}$ ισχύει για θετικούς ακεραίους. Επιβεβαιώστε ότι ισχύει και για αρνητικούς ακεραίους για $\mu = -3$ και $\nu = -4$.
2. Γιατί στον ορισμό $\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^{\nu}}$ θα πρέπει $\alpha \neq 0$;
3. Να βρείτε δύο διαφορετικές δυνάμεις με αρνητικό εκθέτη που να έχουν την ίδια τιμή.
4. Ένας μικρός αριθμός είναι γραμμένος σε τυποποιημένη μορφή. Αν μειώσετε τον εκθέτη του 10 κατά 2, ποια άλλη αλλαγή πρέπει να κάνετε για να παραμείνει ίδιος ο αριθμός;
5. Μπορείτε να γράψετε πιο απλά το $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu}$;



Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Να γράψετε το $\frac{1}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}$ ως μία δύναμη με αρνητικό εκθέτη.
2. Έκανε κάπου λάθος η Ασπασία; Αν ναι, διορθώστε το.
3. Ποια είναι η τιμή της παράστασης $(-5)^7 \cdot (-5)^{-8}$;

$$2^{-3} = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$$

α) $-\frac{1}{5}$

β) -5

γ) 1

δ) $-\frac{1}{25}$

ε) $\frac{1}{5}$

4. Ποια από τις παρακάτω παραστάσεις δεν είναι ίση με τις άλλες;
 α) $\alpha^8 \cdot \alpha^{-10}$ β) α^2 γ) α^{-2} δ) $\frac{1}{\alpha^2}$ ε) $\alpha^4 \cdot \alpha^{-12} \cdot \alpha^2$ ζ) $\frac{\alpha^{-2} \cdot \alpha^{-1}}{\alpha^3}$ η) $(\alpha^{-2})^{-3}$ θ) $\frac{1}{\alpha^6}$
5. Ποια είναι η τιμή της παράστασης $2^{-4} \cdot 5^{-4}$;
 α) $\frac{1}{10}$ β) 10.000 γ) -40 δ) $\frac{1}{10.000}$
6. Ποιος ή ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι γραμμένοι σε τυποποιημένη μορφή;
 α) $0,43 \cdot 10^{-3}$ β) $9,99 \cdot 10^{-8}$ γ) $7,98 \cdot 10^7$ δ) 10^{-10} ε) $10,1 \cdot 10^{-1}$
7. Ο Νίκος έγραψε $4,54 \cdot 10^{-4} = 45.400$. Συμφωνείτε; Ναι ή όχι και γιατί;



Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

8. Να γράψετε τις παρακάτω εκφράσεις χρησιμοποιώντας μόνο θετικούς εκθέτες:
 α) $5 \cdot \alpha^{-2}$ β) $x^0 \cdot y^{-8}$ γ) $\frac{3^{-5}}{x^{-4}}$
9. Να βρείτε την τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:
 α) $\frac{(-2)^5}{(-2)^5}$ β) $(-3)^6 (-3)^{-6}$ γ) 4^{-3} δ) $\frac{7^9}{7^{11}}$ ε) $(-5)^{-2}$
 στ) $\frac{-2}{(-2)^4}$ ζ) $\frac{1}{4^{-4}} \cdot \frac{1}{4^2}$ η) $\frac{1}{4^4} \cdot \frac{1}{4^{-2}}$ θ) $\frac{1,2^{-3} \cdot 1,2^{-5}}{1,2^{-9}}$ ι) $\frac{(10^{-2})^{-2}}{(10^{-1})^{-5}}$
10. Να χρησιμοποιήσετε τις ιδιότητες των δυνάμεων, για να υπολογίσετε τις παρακάτω αριθμητικές παραστάσεις:
 α) $5^{-3} \cdot 2^{-3}$ β) $\frac{(-50)^{-2}}{(-5)^{-2}}$ γ) $(-8)^{-4} (-1,25)^{-4}$ δ) $\left(-\frac{3}{7}\right)^{1.200} \cdot \left(\frac{7}{3}\right)^{1.200}$ ε) $\frac{(-0,05)^{-2} \cdot 2^{-2}}{(-0,1)^4}$
11. Να χρησιμοποιήσετε τις ιδιότητες των δυνάμεων, για να γράψετε πιο απλά τις παραστάσεις. Στην τελική παράσταση, οι εκθέτες των δυνάμεων να είναι θετικοί ακέραιοι.
 α) $\alpha^9 \cdot \alpha^{-5}$ β) $\frac{x^4}{x^{-2}}$ γ) $b^{-5} \cdot b^{-4} \cdot b^8$ δ) $\frac{y^{-2} \cdot y^5 \cdot y^{-1}}{y^{-3}}$
 ε) $(n^4)^{-6}$ στ) $(\alpha^3 \cdot \beta^{-2})^4$ ζ) $(\alpha \cdot \beta^{-2})^4 \cdot \beta^3$
12. Να γίνουν οι πράξεις:
 α) $(-2)^4 : (-2) - (-15) : (-3)$ β) $-(-3)^6 (-3)^{-5} + (-50)^5 : 25^5$ γ) $((-7)^{-3})^{-2} : (-7)^5 + (-1)^{1.001}$
 δ) $(-2)^8 : (-2)^3 + 2^5 : (-2)^5$ ε) $(-3)^{10} : (-3)^5 - 3^{10} \cdot (-3)^{-5}$
13. Να γράψετε τον αριθμό 305.834,2653 ως ανάπτυγμα δυνάμεων του 10.
14. Μια βρύση στάζει μία σταγόνα κάθε ένα δευτερόλεπτο. Κάθε σταγόνα νερού είναι $2 \cdot 10^{-4}$ λίτρα. Αν ένας άνθρωπος πίνει περίπου 2 λίτρα νερό την ημέρα, πόσες ημέρες θα του φτάσει το νερό που χύνεται από μία βρύση η οποία στάζει συνεχώς επί ένα χρόνο;
15. Να βρείτε το πρόσημο των παρακάτω παραστάσεων και να συμπληρώσετε τον πίνακα:

Παράσταση	$(-5)^{-41}$	$\left(-\frac{2}{3}\right)^{-30}$	$(1-1,5)^{80}$	$\left(\frac{4}{5}\right)^{-81}$	$-\left(+\frac{3}{2}\right)^{-1.000}$	$[-(+3)]^{-201}$	-10^{-90}	-10^{-31}
Πρόσημο								

Δ1. Πολλές ιδέες

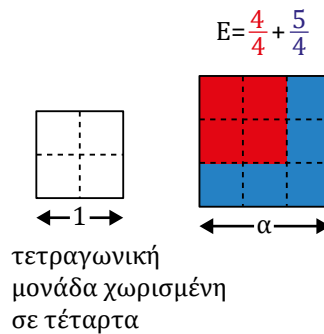
Παρακάτω υπάρχει ένα στιγμιότυπο από μια τάξη:

Καθηγήτρια: Μπορείτε να βρείτε έναν θετικό αριθμό που το τετράγωνό του να είναι $\frac{9}{4}$;

Αγγελική: Ο αριθμός αυτός θα έχει σχέση με το 3 και το 2, αφού $3^2 = 9$ και $2^2 = 4$.

Δήμητρα: Εγώ βρήκα δύο αριθμούς: το $\frac{3}{2}$ και το $-\frac{3}{2}$.

Καθηγήτρια: Πριν συζητήσουμε τις απαντήσεις σας, ας σκεφτούμε και το εξής γεωμετρικό πρόβλημα: Στο παρακάτω σχήμα βλέπετε ένα χρωματισμένο τετράγωνο με εμβαδόν $\frac{9}{4} = \frac{4}{4} + \frac{5}{4}$. Μας βοηθάει αυτή η κατασκευή στην εύρεση ενός θετικού αριθμού με τετράγωνο $\frac{9}{4}$;



Θανάσης: Από τον τύπο του εμβαδού τετραγώνου $E = \alpha^2$, θα έχουμε $\alpha^2 = \frac{9}{4}$. Προτείνω λοιπόν να βρούμε το μήκος της πλευράς α του τετραγώνου.

Νίκος: Κυρία, δεν αντέχω τα προβλήματα με τις χιλιάδες απαντήσεις!

α) Εσείς πώς θα απαντούσατε στο πρώτο ερώτημα της καθηγήτριας;

β) Πώς σχολιάζετε τις ιδέες των μαθητών και των μαθητριών;

γ) Τελικά, η κάθε ιδέα οδηγεί σε διαφορετική απάντηση; Δηλαδή υπάρχουν πολλοί θετικοί αριθμοί με τετράγωνο $\frac{9}{4}$;

Συζητάμε**...για τις τετραγωνικές ρίζες**

Γνωρίζουμε ότι $5^2 = 25$. Δηλαδή από τον αριθμό 5 προέκυψε ο αριθμός 25 ως το τετράγωνό του. Αντίστροφα, αν αναρωτηθούμε «ποιος θετικός αριθμός υψώνεται στο τετράγωνο και δίνει το 25», θα βρούμε τον αριθμό 5. Βρίσκουμε δηλαδή την πλευρά του τετραγώνου ή, όπως λέμε, βρίσκουμε την «τετραγωνική ρίζα του». Τη σχέση «η τετραγωνική ρίζα του 25 είναι το 5» τη συμβολίζουμε με $\sqrt{25} = 5$. Η τετραγωνική ρίζα είναι ένα ακόμη σύμβολο που επινόησαν οι άνθρωποι, όπως οι δυνάμεις και τα κλάσματα.

Με τον ίδιο τρόπο:

- Για τον θετικό αριθμό $\frac{4}{3}$ έχουμε $\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{16}{9}$. Επομένως η τετραγωνική ρίζα του $\frac{16}{9}$ είναι το $\frac{4}{3}$ και συμβολίζουμε $\sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$.
- Για τον θετικό αριθμό 2,24 υπολογίζουμε ότι $2,24^2 = 5,0176$. Επομένως η τετραγωνική ρίζα του 5,0176 είναι το 2,24 και γράφουμε $\sqrt{5,0176} = 2,24$.

Θα λέγαμε ότι, όταν βρίσκουμε την τετραγωνική ρίζα, κάνουμε την αντίστροφη διαδικασία από αυτή που ακολουθούμε όταν υψώνουμε έναν θετικό αριθμό στο τετράγωνο.

Ίσως το τελευταίο παράδειγμα να μας οδηγεί στο ερώτημα αν υπάρχει και το $\sqrt{5}$, μιας και μπορούμε να βρούμε αριθμούς που το τετράγωνό τους να είναι κοντά στο 5, όπως στο παράδειγμα. Είναι όμως ένα θέμα που θα το συζητήσουμε στην επόμενη διδακτική ενότητα.



Ο συμβολισμός της τετραγωνικής ρίζας



Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

<ul style="list-style-type: none"> • Τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού α ονομάζουμε τον θετικό αριθμό που υψωμένος στο τετράγωνο δίνει τον α. • Η τετραγωνική ρίζα συμβολίζεται με $\sqrt{\alpha}$. 	$\sqrt{81} = 9$, αφού $9 > 0$ και $9^2 = 81$.
<ul style="list-style-type: none"> • Ορίζουμε $\sqrt{0} = 0$. 	$\sqrt{0} = 0$, γιατί $0^2 = 0$.
<ul style="list-style-type: none"> • Με βάση τον ορισμό ισχύει $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$. 	$(\sqrt{49})^2 = 49$.
<ul style="list-style-type: none"> • Δεν ορίζουμε τετραγωνική ρίζα για αρνητικούς αριθμούς. 	Το $\sqrt{-81}$ δεν ορίζεται.

Στην παράσταση $\sqrt{\alpha}$ το α το λέμε **υπόρριξη ποσότητα**.

Η ρίζα κάθε μη αρνητικού αριθμού είναι μοναδική.

Άραγε γιατί;



Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. Να προσδιορίσετε τις ρίζες $\sqrt{121}$, $\sqrt{324}$, $\sqrt{3,61}$.

Απάντηση

$$\sqrt{121} = 11, \text{ αφού } 11^2 = 121.$$

Μια καλή πρακτική είναι να γνωρίζουμε τα τετράγωνα των αριθμών από το 1 ως το 15: $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, ..., $15^2 = 225$. Επομένως αντίστοιχα θα έχουμε: $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, ..., $\sqrt{225} = 15$.

Για το $\sqrt{324}$ καταλαβαίνουμε ότι θα είναι ένας αριθμός μεγαλύτερος του 15, αφού $15^2 = 225$, αλλά μικρότερος του 20, αφού $20^2 = 400$.

Με δοκιμές βρίσκουμε:

$$16^2 = 196 \quad 17^2 = 289 \quad 18^2 = 324$$

Επομένως $\sqrt{324} = 18$.

Για το $\sqrt{3,61}$ καταλαβαίνουμε ότι θα είναι:

- ένας δεκαδικός αριθμός ανάμεσα στο 1 και το 2, αφού $1^2 = 1$ και $2^2 = 4$, και
- θα έχει μόνο ένα δεκαδικό ψηφίο, που θα είναι είτε το 1 είτε το 9, εφόσον ο αριθμός 3,61 έχει δύο δεκαδικά ψηφία, με το τελευταίο να είναι το 1.

Λαμβάνοντας υπόψη το τελευταίο ψηφίο, περιορίζουμε αρκετά τους αριθμούς που δοκιμάζουμε, κάτι που θα μπορούσαμε να είχαμε κάνει και για τη $\sqrt{324}$.

Με δοκιμές βρίσκουμε:

$$1,1^2 = 1,21$$

$$1,9^2 = 3,61$$

Αυτή η ιδέα θα έχει πάντα επιτυχία;

Συνεπώς $\sqrt{3,61} = 1,9$.

- 2. Ο ιδιοκτήτης ενός τετράγωνου αγροτεμαχίου θέλει να το περιφράξει με συρματοπλέγμα. Ποιο θα πρέπει να είναι το μήκος του συρματοπλέγματος, αν γνωρίζουμε ότι το αγροτεμάχιο έχει εμβαδόν 1.024 τετραγωνικά μέτρα (κάτι παραπάνω από ένα στρέμμα);**

Απάντηση

Το συρματοπλέγμα θα πρέπει να έχει μήκος όσο το μήκος της περιμέτρου του τετραγωνικού αγροτεμαχίου, δηλαδή το τετραπλάσιο της πλευράς του.

Αν α είναι η πλευρά του τετραγωνικού αγροτεμαχίου, επειδή έχει εμβαδόν 1.024 m^2 , θα ισχύει:

$$\alpha^2 = 1.024 \text{ m}^2$$

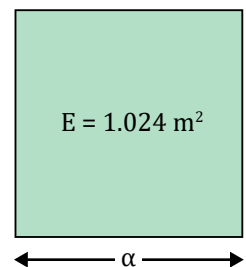
ή

$$\alpha = \sqrt{1.024} \text{ m}$$

δηλαδή:

$$\alpha = 32 \text{ m}$$

Επομένως το συρματοπλέγμα θα έχει μήκος $4 \cdot 32 \text{ m} = 128 \text{ m}$.

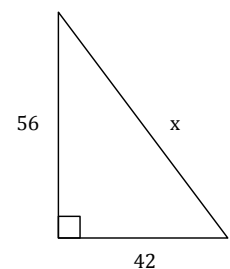


- 3. Να υπολογίσετε την υποτείνουσα του εικονιζόμενου ορθογώνιου τριγώνου.**

Απάντηση

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$\begin{aligned} x^2 &= 56^2 + 42^2 \\ x^2 &= 3.136 + 1.764 \\ x^2 &= 4.900 \\ x &= \sqrt{4.900} \\ x &= 70 \end{aligned}$$





Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε

Να αξιοποιήσετε την ανάλυση του αριθμού 324 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων:

$$324 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

για να βρείτε τη ρίζα του, $\sqrt{324}$. Μπορείτε να γενικεύσετε τη μέθοδό σας και να την εφαρμόσετε και σε άλλα τετράγωνα, όπως στον αριθμό 1.024;



Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Να επιλέξετε ανάμεσα στις 4 απαντήσεις τη μία σωστή απάντηση.

	α	β	γ	δ
$\sqrt{81} =$	8	-8	9	-9
$\sqrt{4} =$	16	-2	2	-16
$\sqrt{-25} =$	-5	5	50	δεν ορίζεται
$\sqrt{\frac{25}{16}} =$	$\frac{5}{4}$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{5}{4}$	δεν ορίζεται
$\sqrt{0,0016} =$	0,004	0,04	-0,004	-0,04

2. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ).

	Σ	Λ
α) Το $\sqrt{0}$ δεν ορίζεται.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
β) Ισχύει ότι $\sqrt{\alpha} > 0$ για κάθε θετικό αριθμό α .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
γ) Ισχύει ότι $(\sqrt{\theta})^2 = \theta$ για κάθε θετικό αριθμό θ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

3. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις:

- α) Αν $\sqrt{\alpha} = 8$, τότε $\alpha =$
- β) Αν $\sqrt{\theta} = 20$, τότε $\theta =$
- γ) Αν $\sqrt{\beta} = 0,1$, τότε $\beta =$
- δ) Αν $\sqrt{x} = 1,5$, τότε $x =$
- ε) Αν $\sqrt{y} = \frac{7}{8}$, τότε $y =$



Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

4. Να υπολογίσετε τις παρακάτω ρίζες:

$$\sqrt{1}$$

$$\sqrt{100}$$

$$\sqrt{10.000}$$

$$\sqrt{0,01}$$

$$\sqrt{0,0001}$$

$$\sqrt{4}$$

$$\sqrt{400}$$

$$\sqrt{40.000}$$

$$\sqrt{0,04}$$

$$\sqrt{0,0004}$$

$$\sqrt{144}$$

$$\sqrt{14.400}$$

$$\sqrt{1.440.000}$$

$$\sqrt{1,44}$$

$$\sqrt{0,0144}$$

$$\sqrt{\frac{16}{9}}$$

$$\sqrt{\frac{49}{100}}$$

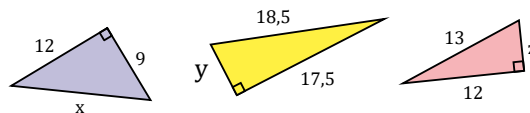
$$\sqrt{13^2}$$

$$\sqrt{12^2}$$

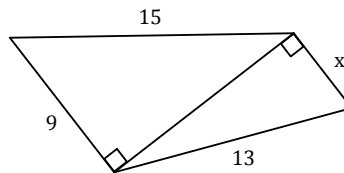
$$\sqrt{2,3^2}$$

5. Κάποιος αρτοποιός στη Γερμανία κατάφερε να μπει στο βιβλίο Guinness διότι έφτιαξε το μεγαλύτερο τoστ στον κόσμο με τετράγωνο ψωμί, που είχε εμβαδόν επιφάνειας 289 m^2 . Ποιο θα πρέπει να είναι το μήκος x κάθε πλευράς του τετράγωνου ψωμιού;

6. Να υπολογίσετε την άγνωστη πλευρά στα ακόλουθα ορθογώνια τρίγωνα:



7. Να υπολογίσετε το μήκος x στο σχήμα:



8. Η εξίσωση $x^2 = 16$ έχει:

α) μία μόνο λύση, τη $x = 4$,

β) δύο λύσεις, τις $x = 4$ και $x = -4$.

Επιλέξτε μία από τις δύο απαντήσεις και αιτιολογήστε την επιλογή σας.

9. Πόσους αριθμούς (θετικούς ή αρνητικούς) μπορείτε να βρείτε που το τετράγωνό τους να είναι 64;

10. Η τετραγωνική ρίζα μπορεί να εμφανιστεί και σε αριθμητικές παραστάσεις. Τότε εγείρονται κάποια ερωτήματα:

α) Η Ελένη υποστηρίζει ότι $\sqrt{(-5)^2} = -5$. Είναι σωστή η σκέψη της;

β) Ο Γιάννης θέλει να γράψει σε αριθμητική παράσταση την τετραγωνική ρίζα του αθροίσματος $5 + 11$. Πώς προτείνετε να τη γράψει;

γ) Ο Νίκος έκανε τον εξής υπολογισμό: $\sqrt{9} \cdot 4 = \sqrt{36} = 6$. Είναι σωστός;

δ) Η Αθηνά αναρωτιέται αν το $\sqrt{64} + \sqrt{36}$ είναι ίδιο με το $\sqrt{64 + 36}$. Εσείς τι λέτε;

11. Να υπολογίσετε την τιμή στις ακόλουθες αλγεβρικές παραστάσεις:

α) $\sqrt{13 - \sqrt{15^2 - 9^2}}$

β) $\sqrt{13^2 - \sqrt{15^2 - 9^2}}$

γ) $\sqrt{13^2 - (15^2 - 9^2)}$

- 12.** Να υπολογίσετε την τιμή των αριθμητικών παραστάσεων και να διατυπώσετε έναν γενικό κανόνα για την προτεραιότητα των πράξεων, όταν εμφανίζονται πράξεις (προσθέσεις, αφαιρέσεις, πολλαπλασιασμοί, διαιρέσεις), δυνάμεις, ρίζες και παρενθέσεις.

α) $5 \cdot \sqrt{49} - 4 \cdot 2^3$

β) $\sqrt{9^2 - 12} \cdot 5 + 4$

γ) $\frac{\sqrt{3^2 + 4^2}}{2} + \frac{1}{\sqrt{4}}$

δ) $\sqrt{1 + \sqrt{9}}$

ε) $5 \left((\sqrt{25})^2 - \sqrt{15^2} \right)$

- 13.** Να συμπληρώσετε τον ακόλουθο πίνακα:

α	β	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha \cdot \beta}$
9	25				
4	100				
16	36				

Τι φαίνεται να ισχύει;

- 14.** Να συμπληρώσετε τον ακόλουθο πίνακα:

α	β	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$	$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$
9	25				
4	100				
16	36				

Τι φαίνεται να ισχύει;

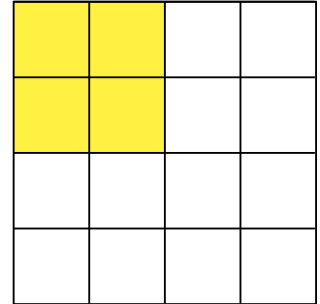
Δ1. Μήκη που βλέπουμε, αλλά δεν μπορούμε να τα... πούμε

Στον διάλογο του Πλάτωνα «Μένων», ο Σωκράτης θέτει το εξής πρόβλημα σε έναν νεαρό δούλο: «Έχουμε ένα τετράγωνο πλευράς δύο ποδιών. Πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα άλλο τετράγωνο με διπλάσιο εμβαδόν;».

Ο νέος αρχικά προτείνει να διπλασιαστεί κάθε πλευρά. Συζητήστε σε ομάδες αυτή την πρόταση και ανακοινώστε στην ολομέλεια τα ευρήματά σας.

Ο Σωκράτης τον οδήγησε στη συνέχεια να σχεδιάσει μια διαγώνιο του αρχικού τετραγώνου και να κατασκευάσει ένα τετράγωνο με πλευρά αυτή τη διαγώνιο.

- α) Ας υποθέσουμε ότι το πρώτο τετράγωνο είναι το κίτρινο του διπλανού σχήματος. Να κατασκευάσετε το δεύτερο τετράγωνο της ιστορίας και να βρείτε το εμβαδόν του. Ποια είναι η σχέση των δύο εμβαδών;
- β) Πώς θα γράφατε την πλευρά του δεύτερου τετραγώνου, αν χρησιμοποιούσατε την έννοια της τετραγωνικής ρίζας;
- γ) Μετρήστε σε κάθε ομάδα με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ακρίβεια το μήκος αυτής της πλευράς και ανακοινώστε στην ολομέλεια τις μετρήσεις σας.



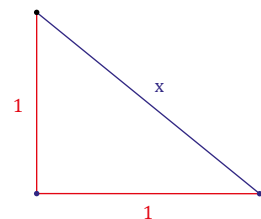
Ο διπλασιασμός του τετραγώνου

**Συζητάμε**

...για τον υπολογισμό των τετραγωνικών ριζών

Πολύ συχνά, στα γεωμετρικά σχήματα συναντάμε μήκη πλευρών τα οποία δεν μπορούμε να εκφράσουμε με τα είδη των αριθμών που έχουμε γνωρίσει ως τώρα. Για παράδειγμα, την υποτείνουσα x ενός ορθογώνιου και ισοσκελούς τριγώνου με κάθετες πλευρές ίσες με 1, όπως φαίνεται δίπλα, μπορούμε να τη βρούμε μόνο με προσέγγιση.

Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα, έχουμε $x^2 = 1^2 + 1^2$ και καταλήγουμε στο $x^2 = 2$. Συμπεραίνουμε ότι $x = \sqrt{2}$ και προσπαθούμε να βρούμε τον αριθμό $\sqrt{2}$.



Διαδοχικές προσεγγίσεις του αριθμού $\sqrt{2}$ με ρητούς αριθμούς	
$1^2 = 1$ $2^2 = 4$	$1 < \sqrt{2} < 2$
$1,4^2 = 1,96$ $1,5^2 = 2,25$	$1,4 < \sqrt{2} < 1,5$
$1,41^2 = 1,9881$ $1,42^2 = 2,0164$	$1,41 < \sqrt{2} < 1,42$
$1,411^2 = 1,990921$ $1,412^2 = 1,993744$ $1,413^2 = 1,996569$ $1,414^2 = 1,999396$ $1,415^2 = 2,002225$	$1,414 < \sqrt{2} < 1,415$
$1,4141^2 = 1,99967881$ $1,4142^2 = 1,99996164$ $1,4143^2 = 2,00024449$	$1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143$
$1,41421^2 = 1,9999899241$ $1,41422^2 = 2,0000182084$	$1,41421 < \sqrt{2} < 1,41422$

Η προσπάθεια αυτή είναι ατελείωτη. Οδηγεί σε δεκαδικούς με ολοένα και περισσότερα δεκαδικά ψηφία. Τα τετράγωνά τους προσεγγίζουν το 2: άλλοτε είναι ελάχιστα μικρότερα από αυτό και άλλοτε ελάχιστα μεγαλύτερα.

Άρα τον αριθμό $\sqrt{2}$ μπορούμε να τον εκφράσουμε μόνο μέσα από **ρητές προσεγγίσεις** του ως εξής:

1,41 (προσέγγιση εκατοστού)

1,414 (προσέγγιση χιλιοστού)

1,4142 (προσέγγιση δεκάκις χιλιοστού) κτλ.

Δηλαδή ο αριθμός $\sqrt{2}$, ενώ εκφράζει το μήκος του παραδείγματος που είδαμε, δεν μπορεί να ειπωθεί με ακρίβεια! Αυτή η ανακάλυψη έγινε 400-450 χρόνια π.Χ. από τους Πυθαγόρειους.

Μπορείτε με παρόμοιο τρόπο να βρείτε τον αριθμό $\sqrt{3}$;



Σύμφωνα με τους Πυθαγόρειους, οι ακέραιοι αριθμοί (οι θετικοί ακέραιοι, εφόσον δεν είχαν αρνητικούς), οι ιδιότητες και οι λόγοι τους (δηλαδή τα κλάσματα) αποτελούσαν τη βάση όχι μόνο για τη Γεωμετρία, αλλά και για να εξηγήσουν όλες τις θεωρητικές τους αναζητήσεις. Η ανακάλυψη όμως ότι οι ακέραιοι αριθμοί και οι λόγοι τους δεν αρκούσαν για να εξηγήσουν κάποιες φαινομενικά απλές γεωμετρικές ιδιότητες προκάλεσε μεγάλη αναστάτωση στην ελληνική μαθηματική κοινότητα εκείνης της εποχής.

Πολλοί μελετητές της Ιστορίας των Μαθηματικών (αρκετοί διαφωνούν) αναφέρουν ότι ο **Ίππασος** από τον Κρότωνα της Ν. Ιταλίας (ή από το Μεταπόντιο), που έζησε στα τέλη του 6ου και στις αρχές του 5ου αιώνα π.Χ., ήταν ο πρώτος που ανακάλυψε την ύπαρξη των άρρητων αριθμών.

Πηγή: [1]



Λίγα λόγια για τον Ίππασο

Οι αριθμοί μπορούν να χωριστούν σε δύο μεγάλες κατηγορίες: σε αυτούς που μπορούν να ειπωθούν (παρασταθούν) με ακρίβεια και τους οποίους ονομάζουμε **ρητούς** και σε αυτούς που δεν μπορούν να ειπωθούν (παρασταθούν) με ακρίβεια, διότι έχουν άπειρο πλήθος δεκαδικών ψηφίων και δεν είναι περιοδικοί, και τους οποίους ονομάζουμε **άρρητους**. Όλους μαζί τους λέμε **πραγματικούς** αριθμούς.

Η λέξη **ρητός** προέρχεται από το ρήμα **είρω**, που σημαίνει **λέγω** (αόριστος: λέξω και ερώ, παρακείμενος: είρηκα – στη μέση φωνή, ενεστώτας: είρημαι, μετοχή παρακείμενου: ειρημένος).

Ρητός λοιπόν είναι αυτός που μπορεί να λεχθεί, ο ειπωμένος, ο σαφής, ο ακριβής.

Αντίθετα, **άρρητος** είναι αυτός που δε λέγεται, ο ασαφής, ο μη ακριβής.



Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Άρρητο ονομάζουμε κάθε αριθμό (θετικό ή αρνητικό) που δεν μπορεί να γραφτεί με τη μορφή $\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ, ν ακέραιοι με $\nu \neq 0$.

- Αν ένας αριθμός δεν είναι ρητός, θα είναι υποχρεωτικά άρρητος.
- Οι τετραγωνικές ρίζες των φυσικών που είναι τέλεια τετράγωνα είναι ρητοί αριθμοί. Οι τετραγωνικές ρίζες όλων των άλλων φυσικών αριθμών είναι άρρητοι αριθμοί.
- Γενικότερα, οι τετραγωνικές ρίζες αριθμών που είναι τετράγωνα ρητών είναι ρητοί αριθμοί. Οι τετραγωνικές ρίζες όλων των άλλων ρητών είναι άρρητοι αριθμοί.

Ο αριθμός $\sqrt{9}$ είναι ρητός, διότι $9 = 3^2$.

Ο αριθμός $\sqrt{10}$ είναι άρρητος, διότι το 10 δεν είναι τέλειο τετράγωνο.

Οι αριθμοί $\sqrt{0,25} = 0,5$

και $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ είναι ρητοί.

- Εκτός από τις ρίζες υπάρχουν κι άλλοι άρρητοι αριθμοί, όπως ο αριθμός π . Μια ρητή προσέγγιση του π είναι το 3,14.

- Ρητοί και άρρητοι αριθμοί δημιουργούν το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Πραγματικοί αριθμοί

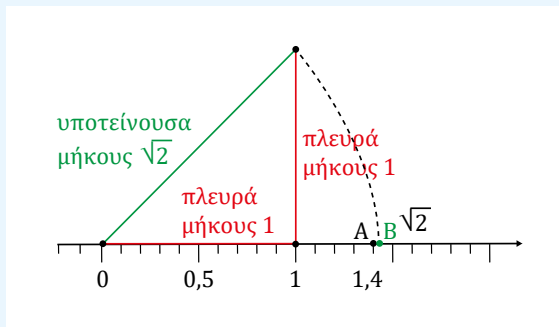
Ρητοί (μπορούν να γραφτούν ως κλάσματα)

- Φυσικοί
- Ακέραιοι
- Δεκαδικοί με πεπερασμένο πλήθος ψηφίων ή περιοδικοί
- Κλάσματα ακεραίων

Άρρητοι (δεν μπορούν να γραφτούν ως κλάσματα)

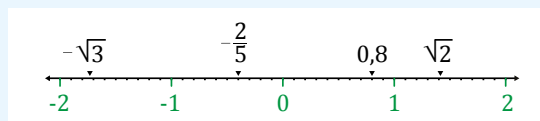
- Δεκαδική μορφή με άπειρο πλήθος ψηφίων, μη περιοδικό

- Οι άρρητοι αριθμοί που είναι ρίζες φυσικών μπορούν να παρασταθούν πάνω στην ευθεία των αριθμών. Για παράδειγμα, ο αριθμός $\sqrt{2}$ μπορεί να μεταφερθεί με διαβήτη, ως υποτείνουσα ενός ορθογώνιου και ισοσκελούς τριγώνου με κάθετες πλευρές μήκους 1.

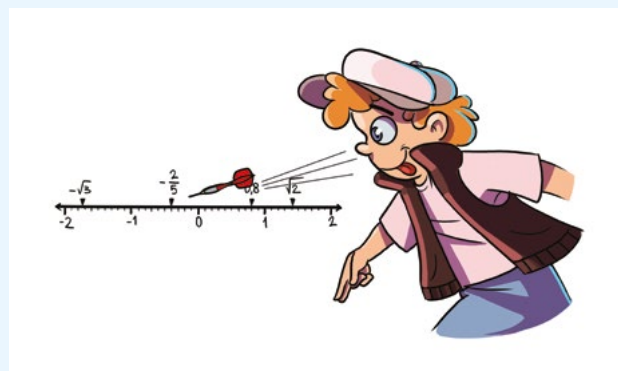


Αν στρογγυλοποιήσουμε τον αριθμό $\sqrt{2}$ ως δεκαδικό με προσέγγιση ενός δεκαδικού ψηφίου, θα τοποθετηθεί στο σημείο A με τετμημένη 1,4. Αν όμως κάνουμε την κατασκευή με διαβήτη, ο αριθμός $\sqrt{2}$ θα τοποθετηθεί με μεγαλύτερη ακρίβεια στη θέση B, χωρίς ωστόσο να μπορούμε να πούμε με ακρίβεια την τετμημένη του.

- Την ευθεία που περιλαμβάνει ρητούς και άρρητους τη λέμε **ευθεία των πραγματικών αριθμών**.



Αν διαλέγαμε στην τύχη ένα σημείο της ευθείας των πραγματικών αριθμών, το πιο πιθανό θα ήταν να είναι άρρητος.



Σύμφωνα με τον Πλάτωνα, ο δάσκαλός του Θεόδωρος ο Κυρηναίος ήταν ο πρώτος που απέδειξε την ασυμμετρία (ή αρρητότητα) των τετραγωνικών ριζών των αριθμών που δεν είναι τέλεια τετράγωνα από το 3 έως το 17. Δε γνωρίζουμε όμως για ποιο λόγο σταμάτησε τις αποδείξεις του στο 17. Απλώς εικάζουμε...

Πηγή: [1]



Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. Να χρησιμοποιήσετε μια αριθμομηχανή, για να βρείτε μια δεκαδική προσέγγιση για τον αριθμό $\sqrt{2}$.

Απάντηση

Πατάμε διαδοχικά τα πλήκτρα $\boxed{2}$ (η υπόριζη ποσότητα) και $\boxed{\sqrt{\quad}}$ (ή το πλήκτρο $\boxed{\sqrt{\quad}}$ αλλού).

Σε κάποιες αριθμομηχανές πατάμε πρώτα τη ρίζα και μετά την υπόριζη ποσότητα. Το αποτέλεσμα 1,414213562373095 που βλέπουμε στην οθόνη είναι σε στρογγυλοποιημένη μορφή.



Προσεγγίζουμε
ρίζες με
τετράγωνα
πλακάκια

2. Να τοποθετήσετε προσεγγιστικά τους αριθμούς $\sqrt{12}$ και $\sqrt{13}$ στην παρακάτω ευθεία.



Απάντηση

Με βάση το σχήμα, θα προσεγγίσουμε τους δύο αριθμούς με ακρίβεια εκατοστού.

Χρησιμοποιούμε την αριθμομηχανή και βρίσκουμε ότι $\sqrt{12} \approx 3,46410161$ και $\sqrt{13} \approx 3,60555127$.

Στρογγυλοποιώντας στο τρίτο δεκαδικό ψηφίο, βρίσκουμε ότι $\sqrt{12} \approx 3,464$ και $\sqrt{13} \approx 3,606$.

Άρα θα τοποθετήσουμε τον αριθμό $\sqrt{12}$ ανάμεσα στους αριθμούς 3,46 και 3,47.

Ομοίως θα τοποθετήσουμε τον αριθμό $\sqrt{13}$ ανάμεσα στους αριθμούς 3,6 και 3,61.



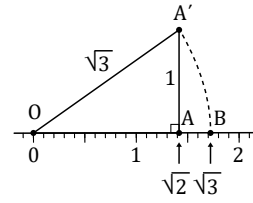
3. Να χρησιμοποιήσετε γεωμετρικά όργανα, για να τοποθετήσετε με ακρίβεια τις ρίζες $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, ... στην ευθεία των πραγματικών αριθμών.

Απάντηση

Η κατασκευή θα γίνει αναδρομικά, δηλαδή από τη μία ρίζα στην επόμενη. Για παράδειγμα, από τη $\sqrt{2}$ κατασκευάζουμε τη $\sqrt{3}$.

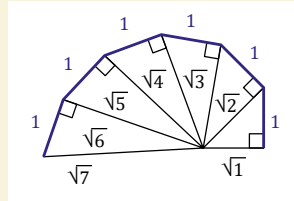
Αν το σημείο A στην ευθεία των πραγματικών αριθμών έχει τετημημένη $\sqrt{2}$, τότε:

- Σχεδιάζουμε ορθογώνιο τρίγωνο OAA' με κάθετες πλευρές $OA = \sqrt{2}$ και $AA' = 1$.
- Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα, έχουμε $OA'^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2$, δηλαδή $OA'^2 = 2 + 1 = 3$, $OA' = \sqrt{3}$.
- Με τον διαβήτη μεταφέρουμε το OA' στην ευθεία των πραγματικών αριθμών ως OB . Το B έχει τετμημένη $\sqrt{3}$.



Η τοποθέτηση των ριζών στον άξονα των πραγματικών

Εδώ βλέπουμε την έλικα των ριζών (από τη μία ρίζα κατασκευάζεται η επόμενη). Από ποιον αριθμό και μετά αρχίζουν οι επικαλύψεις των τριγώνων;



Η έλικα των ριζών

4. Να διατάξετε κατά αύξουσα σειρά τους αριθμούς: $4,2$, $\frac{19}{4}$, $\sqrt{21}$ και $\frac{13}{3}$.

Απάντηση

Τα τετράγωνα των αριθμών είναι:

$$4,2^2 = 17,64 \quad \left(\frac{19}{4}\right)^2 = \frac{361}{16} = 22,5625 \quad (\sqrt{21})^2 = 21 \quad \left(\frac{13}{3}\right)^2 = \frac{169}{9} = 18,7$$

Επειδή $4,2^2 < \left(\frac{13}{3}\right)^2 < (\sqrt{21})^2 < \left(\frac{19}{4}\right)^2$, θα ισχύει $4,2 < \frac{13}{3} < \sqrt{21} < \frac{19}{4}$.



Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε

1. Να μετρήσετε σε χιλιοστά τις διαστάσεις ενός φωτοτυπικού χαρτιού A4. Στη συνέχεια να υπολογίσετε (με αριθμομηχανή) τον λόγο της μεγάλης πλευράς προς τη μικρή και να τον συγκρίνετε με τον αριθμό $\sqrt{2}$. Να επαναλάβετε τη διαδικασία με χαρτί A3.
2. Να κατασκευάσετε έναν πίνακα έννοιας των άρρητων αριθμών.



Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Να χρησιμοποιήσετε αριθμομηχανή, για να βρείτε τη $\sqrt{15}$ με προσέγγιση: **α)** εκατοστού, **β)** χιλιοστού.

2. Να βρείτε ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι ρητοί και ποιοι άρρητοι.

$$-\sqrt{7}, -\sqrt{16}, \sqrt{\frac{3}{4}}, \sqrt{\frac{72}{2}}, \sqrt{\frac{9}{25}}, 6,28, 6,\overline{28}, 2\pi, -\sqrt{37^2}, \sqrt{(-3)^2}$$

3. Να αντιστοιχίσετε τους αριθμούς της 1ης στήλης με τα κενά στις ανισότητες της 2ης στήλης.

1. $\sqrt{17}$	α. $5 < \dots < 6$	1.	
2. $\sqrt{14}$	β. $4 < \dots < 5$	2.	
3. $\sqrt{50}$	γ. $3 < \dots < 4$	3.	
4. $\sqrt{29}$	δ. $7 < \dots < 8$	4.	

4. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ).
 α) Η τετραγωνική ρίζα ενός φυσικού είναι πάντα άρρητος.
 β) Οι πραγματικοί αριθμοί είναι οι ρητοί και οι άρρητοι μαζί.
 γ) Οι άρρητοι αριθμοί είναι οι ρίζες των ρητών που δεν είναι τέλεια τετράγωνα.

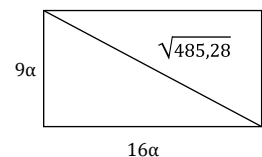


Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

5. Να βρείτε μεταξύ ποιων διαδοχικών ακέραιων αριθμών πρέπει να τοποθετηθούν οι παρακάτω άρρητοι αριθμοί:
 α) $\dots < \sqrt{8} < \dots$ β) $\dots < \sqrt{20} < \dots$ γ) $\dots < \sqrt{35} < \dots$
6. Να βρείτε με την αριθμομηχανή τον αριθμό $\sqrt{5}$ και να τον συγκρίνετε με τον αριθμό 2,23. Στη συνέχεια να βρείτε με προσέγγιση εκατοστού τον αριθμό $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, που είναι επίσης άρρητος.
7. Να τοποθετήσετε προσεγγιστικά τους αριθμούς $\sqrt{27}$ και $\sqrt{30}$ στον άξονα που σας δίνεται.



8. Σε ένα τετραγωνικό πλέγμα που η πλευρά των τετραγώνων είναι 1, να κατασκευάσετε ευθύγραμμο τμήμα με μήκος $\sqrt{5}$ και $\sqrt{13}$.
9. Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ενός τετραγώνου, αν γνωρίζουμε ότι η διαγώνιός του είναι $\sqrt{10}$ cm.
10. Η οθόνη ενός υπολογιστή, η οποία παριστάνεται στο διπλανό σχήμα, είναι $\sqrt{485,28} = 22,029$ ίντσες (22'') και ο λόγος των διαστάσεών της είναι 16:9 (το πλάτος προς το ύψος). Να υπολογίσετε σε ίντσες τις διαστάσεις της οθόνης.
11. Να υπολογίσετε το ύψος ισόπλευρου τριγώνου με πλευρά 2 cm.



Δ1. Αθροισμα ή γινόμενο;

- A. Η Άννα και ο Κώστας ανέλαβαν να υπολογίσουν το συνολικό κόστος για την εκδρομή των τμημάτων B1 και B2. Για τους υπολογισμούς τους είχαν στη διάθεσή τους τον παρακάτω βοηθητικό πίνακα.

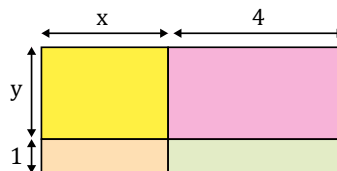
	Έξοδα μετακίνησης ανά άτομο: 120 €	Έξοδα διαμονής ανά άτομο: 80 €
Τμήμα B1: 20 μαθητές		
Τμήμα B2: 25 μαθητές		

Η Άννα σκέφτηκε να σχηματίσει όλα τα γινόμενα, δηλαδή $20 \cdot 120$ (μετακίνηση του B1), $20 \cdot 80$ (διαμονή του B1), $25 \cdot 120$ (μετακίνηση του B2) και $25 \cdot 80$ (διαμονή του B2), και να τα προσθέσει. Ο Κώστας πρότεινε εναλλακτικά, αντί για το άθροισμα των γινομένων, να σχηματίσουν ένα γινόμενο δύο αθροισμάτων.

Τι ακριβώς σκέφτηκε ο Κώστας; Θα μπορούσαν και οι δύο τρόποι να δώσουν το συνολικό κόστος της εκδρομής; Εσείς ποιον τρόπο θα προτιμούσατε για τον υπολογισμό σας;

- B. Να συζητήσετε στην ομάδα σας και μετά σε όλη την τάξη αν το γινόμενο $(x+4)(y+1)$ μπορεί να πάρει τη μορφή $xy + x + 4y + 4$ στις εξής περιπτώσεις:

α) Αν οι αριθμοί x και y είναι θετικοί, χρησιμοποιώντας το σχήμα:



- β) Αν οι αριθμοί x και y είναι οποιοδήποτε πραγματικοί, χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα που γνωρίζετε από την Α' Γυμνασίου: $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.

Συζητάμε

...για την επιμεριστική ιδιότητα

Στην Α' Γυμνασίου είδαμε την επιμεριστική ιδιότητα, σύμφωνα με την οποία:

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$$

Υπάρχει όμως και η πιο σύνθετη μορφή της:

$$(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta$$

Παρατηρούμε ότι αριστερά πολλαπλασιάζουμε δύο αθροίσματα, ενώ δεξιά έχουμε ένα άθροισμα που αποτελείται από επιμέρους γινόμενα, όπου κάθε όρος του πρώτου αθροίσματος πολλαπλασιάστηκε με κάθε όρο του δεύτερου αθροίσματος. Σχηματικά:

$$(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta$$

Το δεύτερο μέλος της ισότητας προκύπτει και από τον πίνακα πολλαπλασιασμού:

·	γ	δ
α	$\alpha\gamma$	$\alpha\delta$
β	$\beta\gamma$	$\beta\delta$

Μπορούμε να αποδείξουμε την παραπάνω ισότητα με δύο τρόπους.

Γεωμετρικά:

Στο διπλανό σχήμα έχουμε ένα ορθογώνιο διαστάσεων $\alpha + \beta$ και $\gamma + \delta$ και το διαιρούμε σε τέσσερα ορθογώνια. Το εμβαδόν E του αρχικού ορθογώνιου μπορεί να υπολογιστεί με δύο τρόπους:

α) $E = \text{πλάτος} \times \text{μήκος} = (\alpha + \beta)(\gamma + \delta)$

β) $E = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 = \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta$

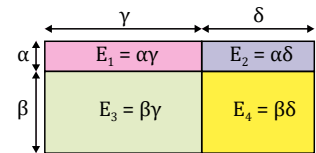
Συνεπώς ισχύει ότι:

$$(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta$$

Αλγεβρικά:

Θεωρώντας το άθροισμα $\alpha + \beta$ ως έναν αριθμό, μπορούμε να εφαρμόσουμε δύο φορές την απλή επιμεριστική ιδιότητα και να πάρουμε:

$$(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = (\alpha + \beta) \cdot \gamma + (\alpha + \beta) \cdot \delta = \alpha\gamma + \beta\gamma + \alpha\delta + \beta\delta$$



Στη διερεύνηση Δ1 υπολογίζουμε τα συνολικά έξοδα του Β1 και τα συνολικά έξοδα του Β2. Με ποια παράσταση από τις τρεις που εμφανίζονται στην αλγεβρική απόδειξη ταιριάζει αυτό;



Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Επιμεριστική ιδιότητα

Το γινόμενο δύο αθροισμάτων είναι ίσο με το άθροισμα γινομένων των όρων του πρώτου αθροίσματος με κάθε όρο του δεύτερου αθροίσματος.

$$(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta$$

Δ2. Και οι πραγματικοί αριθμοί έχουν δυνάμεις

Τι μπορεί να σημαίνει το $(\sqrt{2})^4$; Το $(\sqrt{2})^{-6}$; Ποιος είναι ο αντίστροφος του $\sqrt{2}$;

Συζητάμε

...για τις δυνάμεις των πραγματικών αριθμών

Στις ενότητες 1.1 και 1.2 μελετήσαμε τις δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη οποιονδήποτε ακέραιο και τις ιδιότητες που έχουν αυτές οι δυνάμεις. Οι δυνάμεις και οι ιδιότητές τους επεκτείνονται και ισχύουν σε όλους τους πραγματικούς αριθμούς. Για παράδειγμα, έχουμε:

$$(\sqrt{5})^{-2} = \frac{1}{(\sqrt{5})^2} = \frac{1}{5}$$

$$\pi^2 \cdot \pi^3 = \pi^{2+3} = \pi^5$$

$$(\sqrt{3})^6 = \left((\sqrt{3})^2 \right)^3 = 3^3 = 27$$



Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Οι ορισμοί και οι ιδιότητες των δυνάμεων ισχύουν και για τους πραγματικούς αριθμούς.

Ορισμοί

Για κάθε πραγματικό αριθμό α και κάθε θετικό ακέραιο n έχουμε:

- $\alpha^n = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha}_{n \text{ ίσοι παράγοντες}}$
- $\alpha^1 = \alpha$
- $\alpha^0 = 1$, με $\alpha \neq 0$
- $\alpha^{-n} = \frac{1}{\alpha^n}$, με $\alpha \neq 0$

Ιδιότητες

Για κάθε πραγματικό α και ακεραίους μ και ν ισχύουν οι ιδιότητες:

- $\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$
- $\frac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$, με $\alpha \neq 0$
- $(\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu \cdot \nu}$
- $\alpha^\nu \cdot \beta^\nu = (\alpha \cdot \beta)^\nu$
- $\frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu} = \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^\nu$, με $\beta \neq 0$

$$(\sqrt{2})^{10} = \underbrace{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \dots \cdot \sqrt{2}}_{10 \text{ ίσοι παράγοντες}}$$

$$(-\sqrt{3})^1 = -\sqrt{3}$$

$$(-\sqrt{2})^0 = 1$$

$$\pi^{-2} = \frac{1}{\pi^2}$$

$$0,2^4 \cdot 0,2^3 = 0,2^{4+3} = 0,2^7$$

$$\frac{\pi^6}{\pi^2} = \pi^{6-2} = \pi^4$$

$$(7^2)^6 = 7^{2 \cdot 6} = 7^{12}$$

$$5^{-3} \cdot 3^{-3} = (5 \cdot 3)^{-3} = 15^{-3}$$

$$\frac{(\sqrt{3})^7}{(\sqrt{2})^7} = \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right)^7$$



Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. Να μετατρέψετε τα παρακάτω γινόμενα σε αθροίσματα, χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα:

α) $(\alpha - \beta) \cdot (\gamma + \delta) = \dots$ β) $(\kappa - \lambda) \cdot (\mu - \nu) = \dots$

Απάντηση

Χρησιμοποιούμε την επιμεριστική ιδιότητα $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ και έχουμε:

α) $(\alpha - \beta) \cdot (\gamma + \delta) = (\alpha - \beta) \cdot \gamma + (\alpha - \beta) \cdot \delta = \alpha\gamma - \beta\gamma + \alpha\delta - \beta\delta$

β) $(\kappa - \lambda) \cdot (\mu - \nu) = (\kappa - \lambda) \cdot \mu + (\kappa - \lambda) \cdot (-\nu) = (\kappa - \lambda) \cdot \mu - (\kappa - \lambda) \cdot \nu = \kappa\mu - \lambda\mu - (\kappa\nu - \lambda\nu) = \kappa\mu - \lambda\mu - \kappa\nu + \lambda\nu$

2. Οι αριθμοί $\sqrt{2} + 1$ και $\sqrt{2} - 1$ είναι δύο άρρητοι. Να αποδείξετε ότι είναι αντίστροφοι.

Απάντηση

Όπως γνωρίζουμε, αντίστροφοι είναι οι αριθμοί που το γινόμενό τους είναι 1.

Για τους $\sqrt{2} + 1$ και $\sqrt{2} - 1$ έχουμε:

$$(\sqrt{2} + 1) \cdot (\sqrt{2} - 1) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot 1 + 1 \cdot \sqrt{2} - 1 \cdot 1 = (\sqrt{2})^2 - \sqrt{2} + \sqrt{2} - 1 = 2 - 1 = 1$$

Επομένως οι αριθμοί $\sqrt{2} + 1$ και $\sqrt{2} - 1$ είναι αντίστροφοι.



3. Σε έναν πίνακα γινομένου γνωρίζουμε τα αποτελέσματα:

·
...	2α	4
...	α^2	2α

α) Μπορείτε να συμπληρώσετε τον πίνακα γινομένου;

β) Μπορείτε να γράψετε το άθροισμα $\alpha^2 + 4\alpha + 4$ ως γινόμενο;

Απάντηση

- α) Οι όροι της 2ης γραμμής 2α και 4 είναι πολλαπλάσια του 2, που είναι ο αριθμός που θα βάλουμε αριστερά. Ομοίως, οι όροι της 3ης γραμμής α^2 και 2α είναι πολλαπλάσια του α , που είναι ο αριθμός που θα βάλουμε στην 3η γραμμή αριστερά.

Αν εργαστούμε με τον ίδιο τρόπο ανά στήλη, βρίσκουμε:

·	α	2
2	2α	4
α	α^2	2α

- β) Παρατηρούμε ότι, αν προσθέσουμε τα κελιά του αρχικού πίνακα, βρίσκουμε $\alpha^2 + 4\alpha + 4$. Επομένως γράφουμε $\alpha^2 + 4\alpha + 4 = 2\alpha + 4 + \alpha^2 + 2\alpha = (2 + \alpha)(\alpha + 2)$.

Ή αλλιώς: $\alpha^2 + 4\alpha + 4 = (\alpha + 2)^2$.



Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε

Να εξηγήσετε με διάφορους τρόπους (σχηματικά, με παραδείγματα) την επιμεριστική ιδιότητα $(\alpha + \beta)(\gamma + \delta + \epsilon) = \alpha\gamma + \alpha\delta + \alpha\epsilon + \beta\gamma + \beta\delta + \beta\epsilon$.



Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Αφού συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα πολλαπλασιασμού, συμπληρώστε την ισότητα.

·	2	-α
α		
2		

$$(\alpha + 2)(2 - \alpha) = \dots\dots\dots$$

2. Για καθέναν από τους πολλαπλασιασμούς $25 \cdot 13$ και $23 \cdot 33$:

α) αφού γράψετε κάθε αριθμό ως άθροισμα των δεκάδων και των μονάδων του, να κατασκευάσετε έναν πίνακα πολλαπλασιασμού,

β) να γράψετε την ισότητα που αντιστοιχεί στον πίνακα που κατασκευάσατε και περιγράψτε την επιμεριστική ιδιότητα.

3. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ).

	Σ	Λ
α) $(\alpha + \gamma)(\beta + \delta) = \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
β) $(\alpha + 1)(\beta + 1) = \alpha + \beta + 1$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
γ) $\alpha x + \alpha y + \beta x + \beta y = (\alpha + \beta)(x + y)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

4. Να υπολογίσετε τα αποτελέσματα:

α) $(\sqrt{2})^2 = \dots$ β) $(\sqrt{2})^{-2} = \dots$ γ) $(\sqrt{2})^4 = \dots$ δ) $(\sqrt{2})^{-4} = \dots$

5. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $(\sqrt{2})^3 \cdot \sqrt{2} = \dots$ β) $\frac{(\sqrt{2})^6}{(\sqrt{2})^4} = \dots$ γ) $3 + (\sqrt{2})^2 = \dots$

δ) $5 - (\sqrt{3})^2 = \dots$ ε) $(2 \cdot \sqrt{3})^2 = \dots$ στ) $\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)^2 = \dots$



Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

6. Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

α) $(\sqrt{2} + 2)(\sqrt{2} - 2)$ β) $(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2})$ γ) $(3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})$

7. Να γράψετε τα παρακάτω γινόμενα ως αθροίσματα:

α) $(x - 5)(x + 5)$ β) $(x + 5)^2$ γ) $(x - 5)^2$ δ) $(x + 1)(2 - x)$



Υπολογίζω
γινόμενα

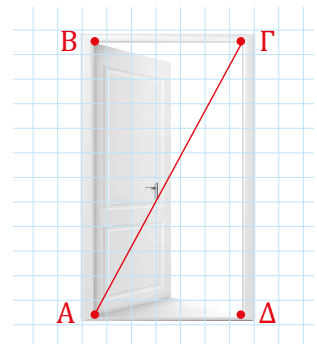
8. Έχουμε ένα τετράγωνο με πλευρά x . Αυξάνουμε τη μία πλευρά του κατά 3 και μειώνουμε την άλλη κατά 3. Παίρνουμε έτσι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με εμβαδόν 16. Ποιο ήταν το μήκος της πλευράς του τετραγώνου;
9. Έχουμε έναν αριθμό x . Αν πάρουμε τους δύο αριθμούς που διαφέρουν από αυτόν κατά 3 μονάδες (ο ένας μικρότερός του και ο άλλος μεγαλύτερός του) και τους πολλαπλασιάσουμε, το αποτέλεσμα είναι 16. Ποιος είναι ο αρχικός αριθμός; Πόσους τέτοιους αριθμούς βρήκατε; Σε τι μοιάζει και σε τι διαφέρει αυτό το πρόβλημα από το πρόβλημα της άσκησης 8;
10. Να κάνετε τις πράξεις:
- α) $(\sqrt{6}-5)(\sqrt{6}+5)+2=...$ β) $2\sqrt{3}+\sqrt{3}\cdot(\sqrt{3}-2)=...$ γ) $5-2\cdot(\sqrt{3})^2=...$
11. Να συμπληρώσετε τον πίνακα πολλαπλασιασμού και να γράψετε το άθροισμα $\alpha^2+5\alpha+6$ ως γινόμενο.

·
...	α^2	3α
...	2α	6

12. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ και $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ είναι αντίστροφοι.
13. Ένα φορτηγάκι (βαν) έχει χώρο φόρτωσης με διαστάσεις (σε cm) $185 \times 162 \times 125$ (μήκος \times πλάτος \times ύψος). Ο ιδιοκτήτης θέλει να φορτώσει μια σκάλα που έχει μήκος 240 cm. Χωράει η σκάλα στο φορτηγάκι;



14. Ένας τεχνίτης, για να τοποθετήσει μια πόρτα ύψους 215 cm και πλάτους 70 cm, πρέπει να εξασφαλίσει ότι η κάσα (δηλαδή το πλαίσιο της πόρτας) θα πρέπει να είναι ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Για τον σκοπό αυτό, στήνει την κάσα σε μορφή Π. Γνωρίζει ότι τα μήκη AB και ΓΔ είναι 215 cm και το ΒΓ είναι 70 cm. Μετράει την απόσταση ΑΔ, ώστε να είναι και αυτή 70 cm. Τέλος, μετράει με ένα σκοινάκι την απόσταση ΑΓ. Πόσα εκατοστά πρέπει να είναι η ΑΓ, ώστε η γωνία ΑΒΓ να είναι ορθή; Με ποιον άλλο τρόπο θα μπορούσε να το εξασφαλίσει αυτό;



15. Ο Νίκος υπολόγισε το ύψος ενός ισόπλευρου τριγώνου με πλευρά 2 cm και βρήκε ότι είναι $\sqrt{3}$ cm. Η Ζαχρά υπολόγισε με το κομπιουτεράκι της το $\sqrt{3}$ και είπε: «Δηλαδή περίπου 1,73 cm». Εξηγήστε γιατί και τα δύο παιδιά έχουν δίκιο. Ποιο είναι το πλεονέκτημα της απάντησης του Νίκου και ποιο είναι το πλεονέκτημα της απάντησης της Ζαχρά;



Ανακεφαλαίωση

Αριθμοί

Ερωτήσεις – ασκήσεις – προβλήματα

1. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ).

α) Ισχύει η ισότητα $2^3 \cdot 3^2 = 6^5$.

β) Ισχύει η ισότητα $\frac{7^5}{7^2} = 7^3$.

γ) Ισχύει η ισότητα $3^{-2} = \frac{1}{3^2}$.

δ) Η τετραγωνική ρίζα του 9 είναι οι αριθμοί 3 και -3, δηλαδή $\sqrt{9} = 3$ ή -3.

ε) Δεν υπάρχει τετραγωνική ρίζα αρνητικού αριθμού.

στ) Οι τετραγωνικές ρίζες όλων των ακέραιων αριθμών είναι άρρητοι αριθμοί.
2. Να γράψετε ως μία δύναμη τα παρακάτω γινόμενα:

α) $4^3 \cdot 4^2$ β) $(-3)^2 \cdot (-3)^5$

γ) $\left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7$ δ) $\left(-\frac{2}{11}\right)^{10} \cdot \left(-\frac{2}{11}\right)^{12}$
3. Να γράψετε ως μία δύναμη τα παρακάτω πηλικά δυνάμεων:

α) $\frac{3^5}{3^2}$ β) $\frac{(-2)^7}{(-2)^3}$ γ) $\frac{2,7^{10}}{2,7^4}$ δ) $\frac{\left(\frac{1}{7}\right)^{20}}{\frac{1}{7}}$
4. Ο Θανάσης έγραψε: $2^5 = 2^2 + 2^3$. Είναι σωστό ή όχι; Αν είναι σωστό, εξηγήστε την ιδιότητα στην οποία βασίζεται. Αν είναι λάθος, εξηγήστε γιατί και διορθώστε το.
5. Είναι ίδιοι οι αριθμοί $(3^2)^3$ και 3^{2^3} ; Εξηγήστε την άποψή σας.
6. Ποια από τις παρακάτω εκφράσεις είναι η τυποποιημένη μορφή για το 0,000012;

α) $1,2 \cdot 10^{-5}$ β) $12 \cdot 10^{-6}$ γ) $1,2 \cdot 10^{-3}$ δ) $0,12 \cdot 10^{-4}$
7. Να υπολογίσετε τις παρακάτω ρίζες:

$\sqrt{9}$ $\sqrt{900}$ $\sqrt{90.000}$ $\sqrt{0,09}$ $\sqrt{0,0009}$

$\sqrt{\frac{25}{9}}$ $\sqrt{\frac{81}{64}}$ $\sqrt{15^2}$ $\sqrt{1,2^2}$ $\sqrt{1001^2}$
8. Να βρείτε ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι ρητοί και ποιοι είναι άρρητοι:

$\sqrt{7}$ $-\sqrt{144}$ $\sqrt{\frac{3}{2}}$ $\sqrt{\frac{18}{2}}$ $\sqrt{\frac{16}{49}}$

5,4 $6,\overline{12}$ $\sqrt{31^2}$ $\sqrt{(-5)^2}$
9. α) Να υπολογίσετε το μήκος της διαγωνίου ενός τετραγώνου, αν γνωρίζουμε ότι η πλευρά του είναι 3 cm.

β) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ενός τετραγώνου, αν γνωρίζουμε ότι η διαγώνιάς του είναι $\sqrt{6}$ cm.
10. Ένα ορθογώνιο έχει διαστάσεις 3 cm και 5 cm. Να βρείτε το μήκος της διαγωνίου του με προσέγγιση εκατοστού. Χρησιμοποιήστε κομπιουτεράκι.
11. Παρακάτω φαίνονται δύο έλικες με ορθογώνια τρίγωνα, όπου η υποτείνουσα του ενός τριγώνου είναι η κάθετη πλευρά του επόμενου τριγώνου.

α) Στην πρώτη έλικα, που οι υποτείνουσες είναι οι φυσικοί αριθμοί 1, 2, 3, ..., να υπολογίσετε ποιοι αριθμοί είναι οι μπλε κάθετες πλευρές των τριγώνων x_1, x_2, x_3, \dots

β) Στη δεύτερη έλικα, που οι υποτείνουσες είναι οι αριθμοί 0,5, 1,5, 2,5, ..., να υπολογίσετε ποιοι αριθμοί είναι οι κόκκινες κάθετες πλευρές των τριγώνων y_1, y_2, y_3, \dots

γ) Μπορείτε να προτείνετε έναν γεωμετρικό τρόπο κατασκευής για τις ρίζες $\sqrt{17}$, $\sqrt{18}$ χωρίς να χρειάζεται να κατασκευάσετε όλες τις προηγούμενες ρίζες;

12. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $2 - \sqrt{3}$ και $2 + \sqrt{3}$ είναι αντίστροφοι.

13. Να χρησιμοποιήσετε την επιμεριστική ιδιότητα για να αποδείξετε ότι:

$$(x + 1,2)^2 = x^2 + 2,4x + 1,44$$

Συνδέσεις και επεκτάσεις

14. Η Ελένη πολλαπλασίασε στην αριθμομηχανή της τους αριθμούς 0,0000000002 και 0,00000000000004 και έβγαλε αποτέλεσμα $8e - 26$ (ή $8E - 26$).

α) Μπορείτε να εξηγήσετε τι είναι αυτό που έβγαλε η αριθμομηχανή;

β) Να βρείτε το αποτέλεσμα, αφού μετατρέψετε τον κάθε αριθμό στην τυποποιημένη του μορφή.

15. Οι επιστήμονες χρησιμοποιούν τον άνθρακα ^{14}C (ραδιοϊσότοπο του άνθρακα) για να προσδιορίσουν την ηλικία ενός οργανικού υλικού. Η ποσότητα 100 gr του ^{14}C που μένει μετά από t χρόνια δίνεται από τον τύπο $^{14}C = 100 \cdot (0,99988)^t$. Χρησιμοποιήστε μια επιστημονική αριθμομηχανή για να υπολογίσετε τα gr του ^{14}C που έχουν μείνει μετά από 1.500 χρόνια. Πόσο τοις εκατό έχει μειωθεί ο ^{14}C ;

16. Να βρείτε δύο αριθμούς x και y οι οποίοι να επαληθεύουν την ισότητα $\frac{8^x}{8^y} = 8^3$. Πόσα τέτοια ζευγάρια αριθμών υπάρχουν;

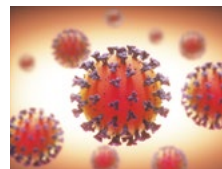
17. Στον πίνακα υπάρχουν υποδιαιρέσεις του μέτρου (m).

Ονομασία	Συμβολισμός	Μήκος (σε m)
Δεκατόμετρο (decimeter)	dm	10^{-1}
Εκατοστόμετρο (centimeter)	cm	10^{-2}
Χιλιοστόμετρο (millimeter)	mm	10^{-3}
Μικρόμετρο (micrometer)	μm	10^{-6}
Νανόμετρο (nanometer)	nm	10^{-9}
Πικόμετρο (picometer)	pm	10^{-12}

- α) Πόσα μm είναι 1 m; β) Πόσα pm είναι 1 μm ;
 γ) Πόσα μm είναι 1 mm; δ) Πόσα mm είναι 1 pm;
 ε) Ένα είδος βακτηρίου έχει μήκος 10 μm . Ένας ιός έχει μήκος 10.000 φορές μικρότερο από ένα βακτήριο. Γράψτε το μήκος του ιού σε m.



Βακτήριο



Ο κορονοϊός Covid-19



Ταξινομούμε αριθμούς

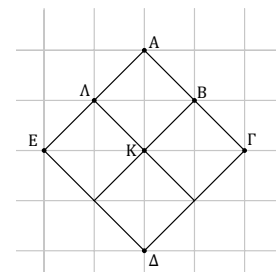
Ομαδική εργασία

18. Το διπλανό σχήμα είναι σχεδιασμένο σε πλέγμα τετραγώνων πλευράς 1.

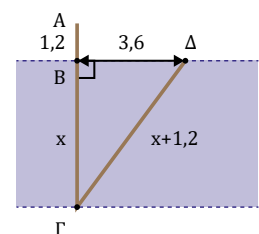
α) Από πόσα μοναδιαία τετράγωνα αποτελείται το ABKA; Ποιο είναι το εμβαδόν του και ποιο το μήκος της πλευράς AB του τετραγώνου;

β) Από πόσα μοναδιαία τετράγωνα αποτελείται το AΓΔΕ; Ποιο είναι το εμβαδόν του και ποιο το μήκος της πλευράς AΓ του τετραγώνου;

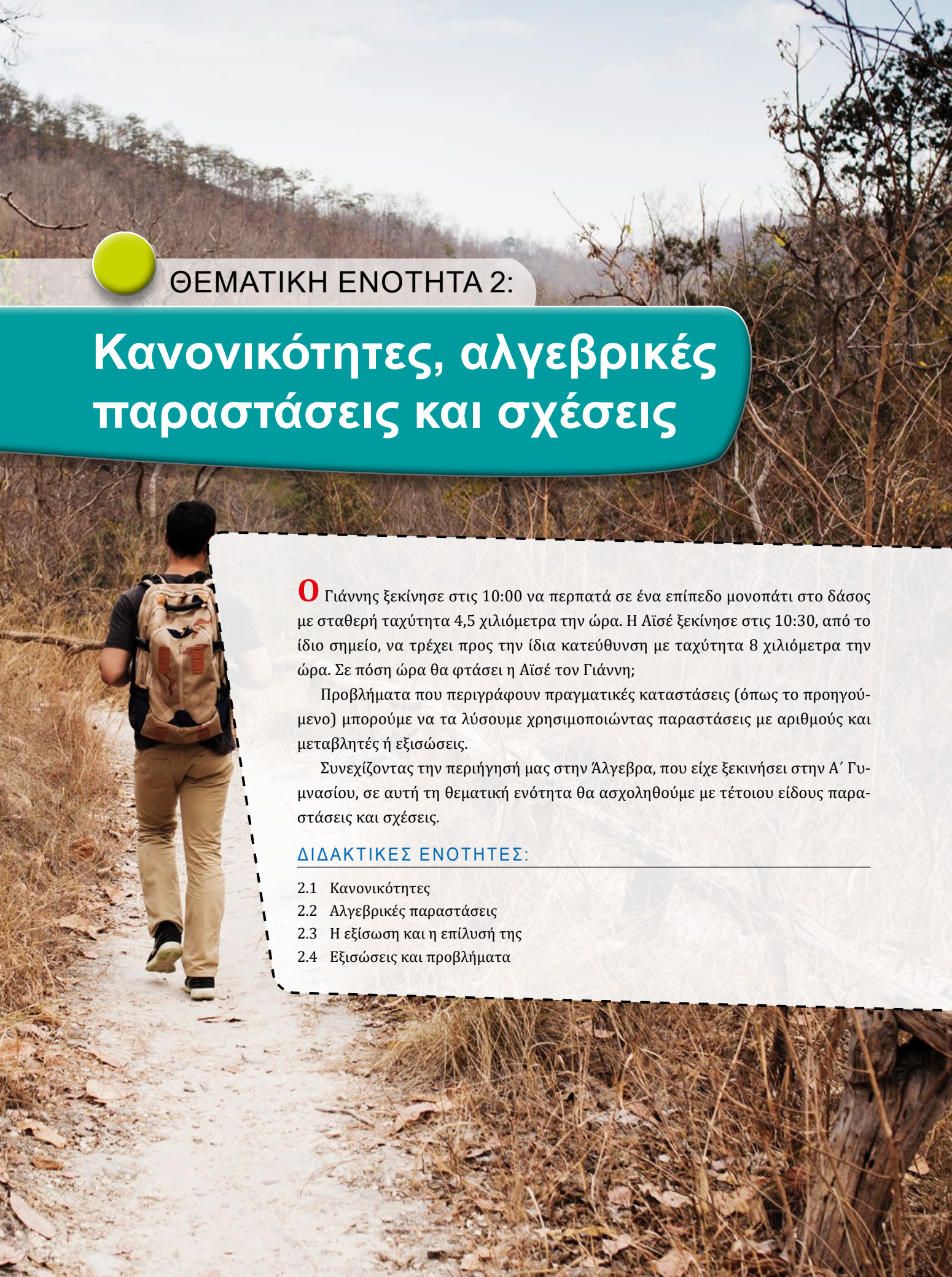
γ) Ποια γεωμετρική σχέση έχουν τα τμήματα AB και AΓ; Πώς αυτή «μεταφράζεται» σε αλγεβρική ανάμεσα στους αριθμούς που εκφράζουν τα μήκη των τμημάτων;



19. Πώς θα βρίσκαμε το βάθος ενός ποταμού με ένα καλάμι; Υπάρχει η εξής τεχνική, που φαίνεται να χρησιμοποιούσαν οι Βαβυλώνιοι: Το καλάμι έχει τη ρίζα του στον πυθμένα του ποταμού (σημείο Γ) και εξέρχεται ένα τμήμα του από το νερό, το $AB = 1,2$ m. Αν τραβήξουμε το καλάμι πλάγιως, έτσι ώστε η κορυφή του να βυθιστεί, αυτό παίρνει τη θέση ΓΔ. Μπορείτε να βρείτε το βάθος του ποταμού x από τις μετρήσεις (σε μέτρα) που φαίνονται στο σχήμα;



Προβλήματα ανακεφαλαίωσης



ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ 2:

Κανονικότητες, αλγεβρικές παραστάσεις και σχέσεις

Ο Γιάννης ξεκίνησε στις 10:00 να περπατά σε ένα επίπεδο μονοπάτι στο δάσος με σταθερή ταχύτητα 4,5 χιλιόμετρα την ώρα. Η Αϊσέ ξεκίνησε στις 10:30, από το ίδιο σημείο, να τρέχει προς την ίδια κατεύθυνση με ταχύτητα 8 χιλιόμετρα την ώρα. Σε πόση ώρα θα φτάσει η Αϊσέ τον Γιάννη;

Προβλήματα που περιγράφουν πραγματικές καταστάσεις (όπως το προηγούμενο) μπορούμε να τα λύσουμε χρησιμοποιώντας παραστάσεις με αριθμούς και μεταβλητές ή εξισώσεις.

Συνεχίζοντας την περιήγησή μας στην Άλγεβρα, που είχε ξεκινήσει στην Α' Γυμνασίου, σε αυτή τη θεματική ενότητα θα ασχοληθούμε με τέτοιου είδους παραστάσεις και σχέσεις.

ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΕΝΟΤΗΤΕΣ:

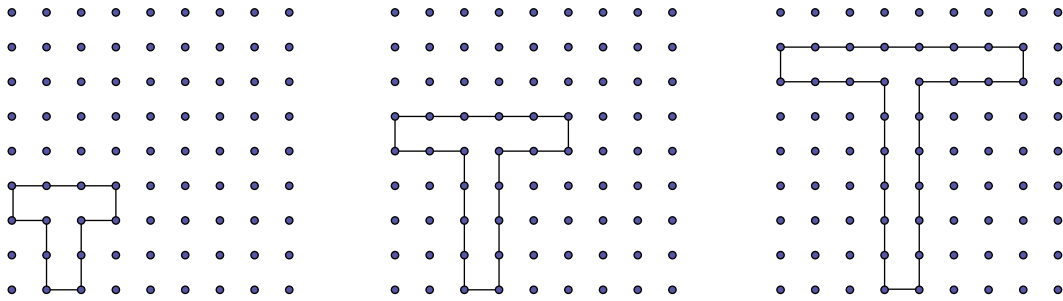
- 2.1 Κανονικότητες
- 2.2 Αλγεβρικές παραστάσεις
- 2.3 Η εξίσωση και η επίλυσή της
- 2.4 Εξισώσεις και προβλήματα

Δ1. Πώς συνεχίζεται το μοτίβο;

Έχουμε σχεδιάσει τους τρεις πρώτους όρους ενός μοτίβου σχήματος «T» σε έναν καμβά.

α) Ποιος είναι ο επόμενος όρος του μοτίβου;

β) Να περιγράψετε τον τυχαίο όρο του μοτίβου, αιτιολογώντας την περιγραφή σας.



Συζητήστε στην τάξη τις προτάσεις σας.

Συζητάμε

...για κανονικότητες σε μοτίβα

Παρατηρώντας ένα μοτίβο, μπορούμε να αναγνωρίσουμε κάποιον κανόνα που προσδιορίζει τους όρους του.

Ο κανόνας αυτός μπορεί να μην είναι ο μοναδικός. Δηλαδή μπορούμε να βρούμε περισσότερους από έναν κανόνες για το ίδιο μοτίβο.

Ας θυμηθούμε ότι:

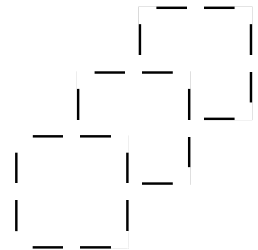
Κανονικότητες αναγνωρίζουμε συνήθως σε μοτίβα σχημάτων ή αριθμών, περιγράφοντάς τα με έναν κανόνα. Με τον γενικό όρο ενός αριθμητικού μοτίβου υπολογίζουμε τον όρο του, οποιασδήποτε τάξης.

Δ2. Επικαλυπτόμενα τετράγωνα: Μοτίβο με ξυλάκια

Δίπλα βλέπετε τα τρία πρώτα βήματα μιας κατασκευής, η οποία αποτελείται από 20 ξυλάκια.

Από πόσα ξυλάκια θα αποτελείται η κατασκευή μετά από 10 βήματα;

Εξηγήστε και συζητήστε στην τάξη τον τρόπο με τον οποίο εργαστήκατε.



Συζητάμε

...για μοτίβα με σταθερή διαφορά

Κάθε όρος του μοτίβου 1,5, 2, 2,5, 3, ... έχει σταθερή διαφορά 0,5 από τον προηγούμενο. Έτσι, ο 5ος όρος θα είναι $3 + 0,5 = 3,5$ και ο 6ος θα είναι $3,5 + 0,5 = 4$. Ένας άλλος τρόπος για να υπολογίσουμε έναν οποιονδήποτε όρο είναι να προσθέσουμε στον πρώτο όρο, όσες φορές χρειάζεται, το 0,5. Για παράδειγμα, ο 6ος όρος είναι $1,5 + 5 \cdot 0,5 = 4$ και ο 10ος όρος είναι $1,5 + (10 - 1) \cdot 0,5 = 1,5 + 9 \cdot 0,5 = 6$.

Όταν λέμε **σταθερή διαφορά**, θα εννοούμε τη διαφορά κάθε όρου από τον προηγούμενο σε τάξη, δηλαδή από τον προηγούμενο στη σειρά όρο, εκτός αν διευκρινίζεται διαφορετικά. Έτσι, η σταθερή διαφορά των όρων 10, 8, 6, 4, 2, ... είναι -2 .



Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Μοτίβα με σταθερή διαφορά

Μπορούμε να βρούμε οποιονδήποτε όρο ενός μοτίβου με σταθερή διαφορά, αν γνωρίζουμε:

- τον πρώτο όρο του μοτίβου και
- τη σταθερή διαφορά κάθε όρου από τον προηγούμενο.

Ένα μοτίβο έχει πρώτο όρο 0,3 και σταθερή διαφορά 0,2.

Για να βρούμε τον 20ό όρο του μοτίβου, θα υπολογίσουμε:

$$0,3 + (20 - 1) \cdot 0,2 = 0,3 + 19 \cdot 0,2 = 4,1$$

**Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές****1. Να βρείτε έναν κανόνα που να προσδιορίζει το παρακάτω μοτίβο:**

2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, ...

Απάντηση

Παρατηρώντας τους όρους του μοτίβου, βρίσκουμε ότι:

Ο πρώτος όρος είναι $1 \cdot 2 = 2$.

Ο τέταρτος είναι $4 \cdot 5 = 20$.

Ο έβδομος είναι $7 \cdot 8 = 56$.

Ο δεύτερος είναι $2 \cdot 3 = 6$.

Ο πέμπτος είναι $5 \cdot 6 = 30$.

Ακολουθώντας τον ίδιο κανόνα:

Ο τρίτος είναι $3 \cdot 4 = 12$.

Ο έκτος είναι $6 \cdot 7 = 42$.

Ο όγδοος είναι $8 \cdot 9 = 72$.

Άρα ο κάθε όρος προκύπτει πολλαπλασιάζοντας την τάξη του με τον επόμενο φυσικό αριθμό.

Γενικά, αν η τάξη του όρου είναι n , τότε ο επόμενος φυσικός είναι ο $n + 1$ και ο όρος τάξης n του μοτίβου είναι $n \cdot (n + 1)$.

Ωστόσο, εναλλακτικά μπορούμε να βρούμε το ίδιο μοτίβο ως εξής:

Ονομάζουμε το $n \cdot (n + 1)$ γενικό όρο του μοτίβου.

Ο πρώτος όρος είναι 2.

Ο τέταρτος είναι $12 + 8 = 20$.

Ο έβδομος είναι $42 + 14 = 56$.

Ο δεύτερος είναι $2 + 4 = 6$.

Ο πέμπτος είναι $20 + 10 = 30$.

Ο όγδοος είναι $56 + 16 = 72$.

Ο τρίτος είναι $6 + 6 = 12$.

Ο έκτος είναι $30 + 12 = 42$.

Βλέπετε να υπάρχει κάποιος κανόνας στον εναλλακτικό τρόπο υπολογισμού;

2. Να γράψετε τον επόμενο, τον γενικό όρο και τον 100ό όρο του μοτίβου 1, 2,5, 4, 5,5, 7, ...

Απάντηση

Οι διαδοχικοί όροι του μοτίβου έχουν σταθερή διαφορά 1,5, καθώς:

$$2,5 - 1 = 1,5$$

$$4 - 2,5 = 1,5$$

$$5,5 - 4 = 1,5$$

$$7 - 5,5 = 1,5$$

Άρα ο επόμενος όρος είναι $7 + 1,5 = 8,5$.

Παρατηρούμε ότι:

Για τον 2ο όρο προσθέτουμε στον πρώτο όρο, δηλαδή στο 1, μία φορά το 1,5:

$$1 + 1 \cdot 1,5 = 2,5$$

Για τον 3ο όρο, δηλαδή για τον όρο με τάξη 3, προσθέτουμε στον πρώτο όρο, δηλαδή στο 1, δύο φορές το 1,5:

$$1 + 2 \cdot 1,5 = 4$$

Για τον 4ο όρο, δηλαδή για τον όρο με τάξη 4, προσθέτουμε στον πρώτο όρο, δηλαδή στο 1, τρεις φορές το 1,5:

$$1 + 3 \cdot 1,5 = 5,5$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, για τον όρο με τάξη n προσθέτουμε $n - 1$ φορές το 1,5 στο 1:

$$1 + (n - 1) \cdot 1,5$$

ή αλλιώς:

$$1 + 1,5n - 1,5 = 1,5n - 0,5$$

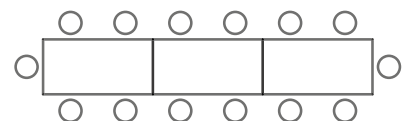
Άρα ο γενικός όρος του μοτίβου είναι $1 + (n - 1) \cdot 1,5$ ή $1,5n - 0,5$.

Ο 100ός όρος είναι $1 + (100 - 1) \cdot 1,5 = 1 + 99 \cdot 1,5 = 149,5$.



Παραδείγματα
μοτίβων με
σταθερή
διαφορά

3. Ένα ξενοδοχείο έχει τραπέζια σχήματος ορθογωνίου. Ενώνοντας 3 τραπέζια και τοποθετώντας τα το ένα δίπλα στο άλλο, όπως στο διπλανό σχήμα, κάθονται 14 άτομα.



α) Πόσα άτομα κάθονται:

i) σε 1 τραπέζι;

ii) αν ενώσουμε 10 τραπέζια;

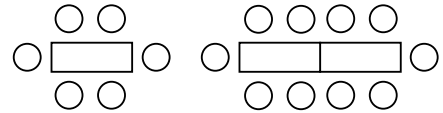
iii) αν ενώσουμε n τραπέζια;

- β) Ποιο είναι το αντίστοιχο αριθμητικό μοτίβο και ο γενικός όρος του;
 γ) Πόσα τραπέζια χρειάζονται για να καθίσουν 32 άτομα με αυτό τον τρόπο;



Απάντηση

α) i) Όπως φαίνεται στο σχήμα, σε 1 τραπέζι κάθονται $4 + 2 = 6$ άτομα. Τα 4 άτομα κάθονται στις μεγάλες πλευρές και τα 2 στις μικρές πλευρές του τραπέζιού.



ii) Σε 2 τραπέζια κάθονται $4 \cdot 2 + 2 = 10$ άτομα.

Σε 3 τραπέζια κάθονται $4 \cdot 3 + 2 = 14$ άτομα.

Επομένως, με το ίδιο σκεπτικό, σε 10 τραπέζια κάθονται $4 \cdot 10 + 2 = 42$ άτομα.

iii) Σε n τραπέζια κάθονται $4n + 2$.

β) Το αντίστοιχο αριθμητικό μοτίβο είναι το 6, 10, 14, 18, ...

Παρατηρούμε ότι έχει σταθερή διαφορά 4 και η τάξη κάθε όρου αντιστοιχεί στο πλήθος των τραπέζιων.

Αν οι όροι ενός μοτίβου έχουν σταθερή διαφορά ω και α είναι ο πρώτος όρος, τότε μπορούμε να γράψουμε τον γενικό όρο ως εξής:

$$\alpha + (n-1) \cdot \omega$$

Δηλαδή, για να βρούμε τον όρο τάξης n , στον πρώτο όρο α προσθέτουμε $n-1$ φορές τη σταθερή διαφορά ω .

Ο πρώτος όρος είναι $\alpha = 6$ και η σταθερή διαφορά είναι $\omega = 4$.

Άρα ο γενικός όρος είναι $6 + (n-1) \cdot 4$ ή, κάνοντας πράξεις, $6 + 4n - 4 = 4n + 2$, κάτι που συμφωνεί με την απάντηση στο (iii) του ερωτήματος (α).

γ) Για να καθίσουν 32 άτομα, χρειαζόμαστε 32 θέσεις.

Λύνουμε την εξίσωση $4n + 2 = 32$ ή $4n + 2 - 2 = 32 - 2$ ή $4n = 30$ ή $\frac{4n}{4} = \frac{30}{4}$ ή $n = 7,5$.

Το πλήθος τραπέζιων n είναι φυσικός αριθμός, άρα δεν μπορεί να είναι 7,5.

Για $n = 8$ έχουμε 34 θέσεις, οι οποίες επαρκούν.

Για $n = 7$ θα είχαμε 30 θέσεις, οι οποίες δεν επαρκούν.

Συνεπώς, για να καθίσουν 32 άτομα, χρειάζονται 8 τραπέζια.

4. Το κόστος για μια διαδρομή με ταξί σε μια πόλη είναι 1,2 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο, ενώ υπάρχει αρχικά χρέωση (σημαία) επιπλέον 1,8 ευρώ ανεξαρτήτως διαδρομής.

α) Να εκφράσετε, για n χιλιόμετρα, το ποσό της χρέωσης με τη βοήθεια του n .

β) Να παραστήσετε σε ένα διάγραμμα το κόστος για διαδρομές 1, 2, 3, 4 και 5 χιλιομέτρων.

Απάντηση

α) Για το πρώτο χιλιόμετρο το κόστος είναι $1,8 + 1,2 = 3$.

Για κάθε επιπλέον χιλιόμετρο το κόστος αυξάνεται κατά 1,2 ευρώ.

Άρα το κόστος αντιστοιχεί σε ένα αριθμητικό μοτίβο με πρώτο όρο 3 και σταθερή διαφορά 1,2. Η τάξη κάθε όρου αντιστοιχεί στα χιλιόμετρα της διαδρομής. Έτσι:

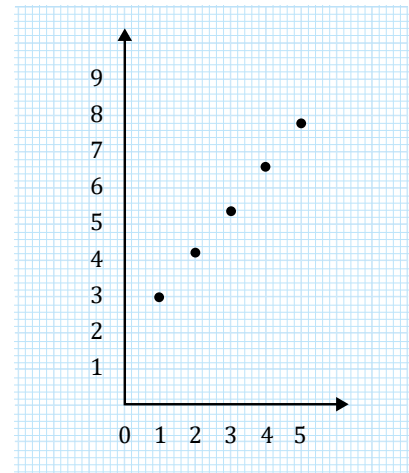
Χιλιόμετρα ή τάξη του όρου	1	2	3	4	5	...
Κόστος	3	4,2	5,4	6,6	7,8	...

Ο γενικός όρος είναι $3 + (n-1) \cdot 1,2 = 3 + 1,2n - 1,2 = 1,2n + 1,8$.

β) Παριστάνουμε σε διάγραμμα τα κόστη που βρήκαμε στον παραπάνω πίνακα τιμών. Στον οριζόντιο άξονα παριστάνεται η τάξη του κάθε όρου (τα χιλιόμετρα) και στον κατακόρυφο άξονα το αντίστοιχο κόστος.

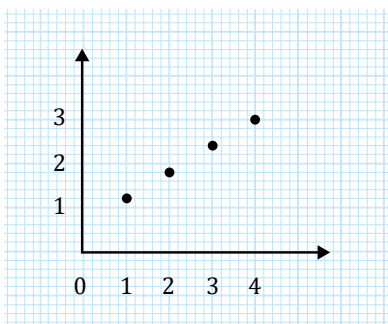
Παρατηρούμε ότι όλα τα σημεία του διαγράμματος βρίσκονται σε μια νοητή ευθεία.

Αυτό συμβαίνει με όλα τα μοτίβα με σταθερή διαφορά.



Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε

Στο διάγραμμα παριστάνεται ένα μοτίβο με σταθερή διαφορά. Να σχεδιάσετε ένα άλλο μοτίβο με σταθερή διαφορά, που ο δέκατος όρος του να είναι ίσος με τον δέκατο όρο αυτού του μοτίβου.



Μοτίβο και
ευθεία



Μοτίβα και
ευθείες



Ασκήσεις
με μοτίβα



Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Να γράψετε τους πέντε πρώτους όρους των μοτίβων που προσδιορίζονται από τους εξής κανόνες:
 - α) Ο γενικός όρος του μοτίβου είναι $n(n+2)$, όπου n είναι η τάξη του μοτίβου.
 - β) Κάθε όρος του μοτίβου προκύπτει από το άθροισμα της τάξης του με το διπλάσιο αυτής.
 - γ) Τα πολλαπλάσια του 3, ξεκινώντας από το 3.
 - δ) Ο πρώτος όρος του μοτίβου είναι 5 και κάθε επόμενος όρος είναι μεγαλύτερος κατά το διπλάσιο της τάξης του από τον προηγούμενο.

2. Ποια από τα παρακάτω είναι μοτίβα με σταθερή διαφορά;

α) 1, 3, 5, 7, 9, ...

β) 4, 8, 16, 32, 64, ...

γ) $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots$

δ) $\frac{5}{2}, 2, \frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}, \dots$

ε) $0, \frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \dots$

3. Δίνεται το μοτίβο $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \dots$

α) Ποιος είναι ο επόμενος όρος του;

β) Ποια από τις παραστάσεις $\frac{1}{2} \cdot n$ και $n - \frac{1}{2}$ είναι ο γενικός όρος του;

4. α) Να γράψετε τον επόμενο, τον 10ο και τον γενικό όρο του μοτίβου $\frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, 3, \dots$

β) Να υπολογίσετε τον 100ό όρο του.

5. Να βρείτε τον πρώτο όρο και τη σταθερή διαφορά στα μοτίβα με γενικούς όρους:

α) $1 + 0,5(v-1)$

β) $-2 + 2,5(v-1)$

γ) $\frac{1}{2} - 3(v-1)$

δ) $0,5 + (v-1)$



Τρίλιζα με μοτίβα



Ερωτήσεις
αυτοαξιολόγησης -
μοτίβα



Μοτίβα:
άσκηση Ι



Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

6. Να βρείτε τον πρώτο όρο, τη σταθερή διαφορά και τον γενικό όρο καθενός από τα παρακάτω μοτίβα:

α) 0,1, 0,7, 1,3, 1,9, 2,5, ... β) $\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{10}{3}, \frac{13}{3}, \dots$

γ) $-2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0, \dots$ δ) 1,8, 1,4, 1, 0,6, 0,2, ...

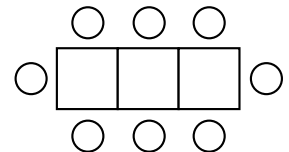
7. Ένα ξενοδοχείο έχει τραπέζια σχήματος τετραγώνου. Ενώνοντας στη σειρά 3 τραπέζια, κάθονται 8 άτομα.

α) Να υπολογίσετε πόσα άτομα κάθονται σε 1, σε 2 και σε n τραπέζια.

β) Πόσα τραπέζια στη σειρά χρειάζονται για να καθίσουν:

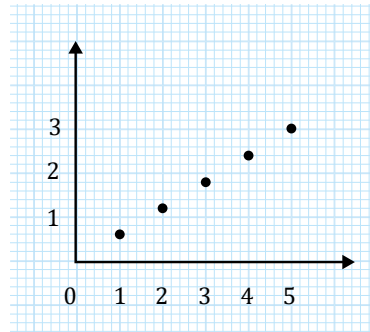
i) 16 άτομα;

ii) 21 άτομα;



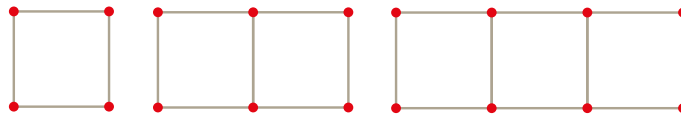
Αριθμός θέσεων
σε διάφορα
τραπέζια

8. α) Να παραστήσετε τον επόμενο όρο στο διάγραμμα.
β) Να γράψετε τους 10 πρώτους όρους σε πίνακα τιμών.
γ) Να γράψετε τον γενικό όρο του μοτίβου.



Μοτίβα:
άσκηση II

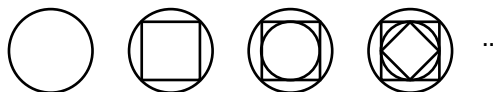
9. Δίνεται το παρακάτω μοτίβο από σπίρτα:



Μοτίβο
με σπίρτα

- α) Πόσα σπίρτα έχει ο τέταρτος όρος του μοτίβου;
β) Ποιος είναι ο γενικός όρος του αντίστοιχου αριθμητικού μοτίβου;
γ) Πόσα σπίρτα χρειαζόμαστε για να σχηματίσουμε 20 τετράγωνα και πόσα για 400 τετράγωνα;
δ) Ποιος όρος του μοτίβου έχει 22 και ποιος 334 σπίρτα;
ε) Υπάρχει όρος του μοτίβου με ακριβώς 999 σπίρτα;
10. Να γράψετε τον κανόνα και τον γενικό όρο καθενός από τα παρακάτω μοτίβα:
α) 3, 7, 11, 15, 19, ...
β) 10, 6, 2, -2, -6, ...
γ) 0, 3, 8, 15, 24, ...

11. Να περιγράψετε τους όρους του παρακάτω μοτίβου:



Γεωμετρικό
μοτίβο

12. Ποιοι από τους παρακάτω λεκτικούς κανόνες αντιστοιχούν στο μοτίβο με γενικό όρο $2 + 3n$;
α) Ο πρώτος όρος είναι 5 και κάθε επόμενος, τάξης n , είναι μεγαλύτερος κατά $3n$ από τον πρώτο όρο.
β) Ο πρώτος όρος είναι 5 και κάθε επόμενος, τάξης n , είναι μεγαλύτερος από τον προηγούμενο κατά $3n$.
γ) Κάθε όρος είναι ίσος με το τριπλάσιο της τάξης του αυξημένο κατά 2.
δ) Ο πρώτος όρος είναι 5 και κάθε επόμενος, τάξης n , είναι μεγαλύτερος κατά $3(n-1)$ από τον πρώτο όρο.
13. Να εξηγήσετε γιατί οι κανόνες (β) και (γ) της άσκησης 1 προσδιορίζουν το ίδιο μοτίβο.

Δ1. Υπολογισμός των συνολικών πόντων

Σε έναν αγώνα μπάσκετ οι παίκτες μπορούν να σημειώσουν καλάθια 1 πόντου (ελεύθερες βολές), δίποντα και τρίποντα.

Έχουμε φτιάξει ένα υπολογιστικό φύλλο, για να υπολογίζουμε το σύνολο των πόντων κάθε παίκτη.

α) Αν A οι ελεύθερες βολές, B τα δίποντα και C τα τρίποντα που σημείωσε κάποιος, να γράψετε την αλγεβρική παράσταση που χρησιμοποιούμε για να υπολογίσουμε το σύνολο των πόντων κάθε παίκτη. Συζητήστε στην τάξη τις προτάσεις σας.

β) Χρησιμοποιώντας την αλγεβρική παράσταση του (α), να υπολογίσετε το σύνολο των πόντων για κάθε παίκτη του πίνακα (κάθε γραμμή αντιστοιχεί στα καλάθια που σημείωσε ένας παίκτης).



Ελεύθερες βολές	Δίποντα	Τρίποντα	Σύνολο πόντων
4	5	2	20
1	2	2	
6	1	1	
0	4	0	
1	5	1	

Συζητάμε

...για αλγεβρικές παραστάσεις

Πολύ συχνά, όπως στην περίπτωση του υπολογισμού των συνολικών πόντων καλαθοσφαιριστών και καλαθοσφαιριστριών, χρειάζεται να επαναλάβουμε παρόμοιους υπολογισμούς αρκετές φορές. Τότε, όπως έχουμε δει και στην Α' Γυμνασίου, είναι χρήσιμο να περιγράψουμε αυτούς τους υπολογισμούς με έναν γενικό τρόπο, χρησιμοποιώντας σχέσεις ανάμεσα σε αριθμούς και γράμματα. Αυτό γίνεται με τις **αλγεβρικές παραστάσεις**.

Για παράδειγμα, η αλγεβρική παράσταση $x + 3y$ εκφράζει τους συνολικούς βαθμούς μιας ομάδας ποδοσφαίρου που έχει x ισοπαλίες και y νίκες, εφόσον κάθε νίκη αντιστοιχεί σε 3 βαθμούς και κάθε ισοπαλία σε 1 βαθμό, ενώ οι ήττες δε βαθμολογούνται.

Έτσι, για μια ομάδα που έχει 5 ισοπαλίες, 6 νίκες και 3 ήττες, αντικαθιστώντας $x = 5$ και $y = 6$, βρίσκουμε την τιμή της αλγεβρικής παράστασης, δηλαδή $5 + 3 \cdot 6 = 23$. Άρα η ομάδα έχει συγκεντρώσει 23 βαθμούς.

Θυμόμαστε ότι αλγεβρικές ονομάζουμε τις παραστάσεις στις οποίες χρησιμοποιούμε γράμματα που συμβολίζουν αριθμούς. Τα γράμματα αυτά τα ονομάζουμε **μεταβλητές**. Αντικαθιστώντας τα γράμματα με αριθμούς, υπολογίζουμε την τιμή της αλγεβρικής παράστασης.

Δ2. Οι πράξεις σε μια αλγεβρική παράσταση

α) Πώς θα χαρακτηρίζατε την αλγεβρική παράσταση με βάση τις πράξεις που περιέχει; Άθροισμα ή γινόμενο;

$$3x + 5\left(x - \frac{3}{4}\right)$$

β) Ποιες από τις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις είναι γινόμενα και ποιοι είναι οι παράγοντές τους;

i) $2(x-1)$ ii) $(3+x)\left(2x-\frac{1}{2}\right)$ iii) $4x-5y$ iv) $(x-3,5)(y+\sqrt{3})$ v) $\sqrt{2}x+5(x+1)$

Συζητάμε

...για τη δομή των αλγεβρικών παραστάσεων

Μια αλγεβρική παράσταση περιέχει πράξεις μεταξύ αριθμών και γραμμάτων ή μεταξύ γραμμάτων που συμβολίζουν αριθμούς. Για παράδειγμα, η αλγεβρική παράσταση $4x + 2(1-x)$ είναι άθροισμα με όρους $4x$ και $2(1-x)$. Αυτοί οι δύο όροι είναι δύο γινόμενα. Το $4x$ έχει παράγοντες 4 και x , ενώ το $2(1-x)$ έχει παράγοντες 2 και $1-x$.

Συνολικά λέμε ότι το $4x + 2(1-x)$ είναι άθροισμα δύο γινομένων, των $4x$ και $2(1-x)$.

Αντίστοιχα, το $(x+1)(x+2)$ είναι γινόμενο των αθροισμάτων $x+1$ και $x+2$.



Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Μια αλγεβρική παράσταση μπορεί να είναι:

- άθροισμα, αν είναι της μορφής $\alpha + \beta$,
- γινόμενο, αν είναι της μορφής $\alpha \cdot \beta$.

Ειδικές περιπτώσεις των παραπάνω είναι οι ακόλουθες:

- Άθροισμα γινομένων, αν είναι της μορφής $\alpha \cdot \beta + \gamma \cdot \delta$.
- Γινόμενο αθροισμάτων, αν είναι της μορφής $(\alpha + \beta)(\gamma + \delta)$.

Τα α , β , γ και δ μπορούν να είναι είτε γράμματα που συμβολίζουν αριθμούς (π.χ. μεταβλητές) είτε παραστάσεις.

- Το $x+3$ είναι άθροισμα των x και 3 .
- Το $\sqrt{2} \cdot x$ είναι γινόμενο των $\sqrt{2}$ και x .
- Το $4x+3,5y$ είναι άθροισμα των γινομένων $4x$ και $3,5y$.
- Το $(x+\sqrt{3})(x+2)$ είναι γινόμενο των αθροισμάτων $x+\sqrt{3}$ και $x+2$.

Επειδή η αφαίρεση είναι η πρόσθεση με τον αντίθετο, όταν αναφερόμαστε σε αθροίσματα συμπεριλαμβάνουμε και τις διαφορές. Π.χ. η παράσταση $3x-5y$ μπορεί να θεωρηθεί άθροισμα γινομένων, αφού γράφεται $3x+(-5y)$.

Παρατηρούμε τα εξής:

- Στο $4x+3,5y$, σύμφωνα με την προτεραιότητα των πράξεων προηγούνται τα γινόμενα και έπεται το άθροισμα. Θα τη χαρακτηρίζαμε ως άθροισμα γινομένων.
- Στο $(x+\sqrt{3})(x+2)$, σύμφωνα με την προτεραιότητα των πράξεων προηγούνται οι πράξεις στις παρενθέσεις, δηλαδή τα αθροίσματα, και έπεται το γινόμενο. Θα τη χαρακτηρίζαμε ως γινόμενο αθροισμάτων.



Δ3. Απλοποίηση αλγεβρικής παράστασης

Με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας να απλοποιήσετε τις αλγεβρικές παραστάσεις, βγάζοντας τις παρενθέσεις και κάνοντας πράξεις, όπου γίνονται:

α) $3(x-1)+5(x-3)$

β) $(4x-3)\left(x+\frac{1}{3}\right)$

γ) $\sqrt{2}(\sqrt{2}x-\sqrt{8})$

Να συγκρίνετε τα αποτελέσματά σας με τα αποτελέσματα των συμμαθητών και των συμμαθητριών σας.



Συζητάμε

...για την απλοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων

Χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα, μπορούμε να κάνουμε πράξεις μεταξύ των όρων μιας αλγεβρικής παράστασης και να τη φέρουμε σε απλούστερη, ισοδύναμη μορφή. Για παράδειγμα:

- Η παράσταση $3(x+2)-x$ γίνεται:

$$3x+6-x=3x-1x+6=(3-1)x+6=2x+6$$

- Η παράσταση $(2x-3)(x+0,5)$ γίνεται:

$$\begin{aligned} 2x \cdot x + 2x \cdot 0,5 - 3x - 3 \cdot 0,5 &= 2x^2 + 2 \cdot 0,5x - 3x - 1,5 = \\ &= 2x^2 + x - 3x - 1,5 = 2x^2 + (1-3)x - 1,5 = \\ &= 2x^2 + (-2)x - 1,5 = 2x^2 - 2x - 1,5 \end{aligned}$$

Όπως φαίνεται, χρησιμοποιούμε την επιμεριστική ιδιότητα με διαφορετικό τρόπο, ανάλογα με τον στόχο μας. Αρχικά, τη χρησιμοποιούμε για να βγάλουμε ή -όπως λέμε- να απαλείψουμε τις παρενθέσεις. Έτσι γράψαμε:

- την παράσταση $3(x+2)-x$ ως $3x+6-x$,
- την παράσταση $(2x-3)(x+0,5)$ ως $2x^2+x-3x-1,5$.

Στη συνέχεια, τη χρησιμοποιούμε για να κάνουμε πράξεις μεταξύ των όμοιων όρων της κάθε παράστασης. Έτσι:

- Στην παράσταση $3x-1x+6$, οι όμοιοι όροι είναι οι $3x$ και $-1x$. Με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας, τη γράψαμε ως $(3-1)x+6$ και στη συνέχεια ως $2x+6$.
- Στην παράσταση $2x^2+x-3x-1,5$, οι όμοιοι όροι είναι οι x και $-3x$. Με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας, τη γράψαμε ως $2x^2+(1-3)x-1,5$ και τελικά ως $2x^2-2x-1,5$.



Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας:

- μπορούμε να κάνουμε απαλοιφή παρενθέσεων σε μια αλγεβρική παράσταση,
- μπορούμε να κάνουμε πρόσθεση ή αφαίρεση μεταξύ των όμοιων όρων μιας αλγεβρικής παράστασης (**αναγωγή όμοιων όρων**).

Απαλοιφή παρενθέσεων:

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

$$2\left(x - \frac{1}{2}\right) = 2x - 1$$

Αναγωγή όμοιων όρων:

$$\alpha\beta + \alpha\gamma = \alpha(\beta + \gamma)$$

$$3x - 2,5x = (3 - 2,5)x = 0,5x$$

Ονομάζουμε όμοιους όρους μιας αλγεβρικής παράστασης:

- είτε τους αριθμούς μεταξύ τους, π.χ. οι $\frac{1}{2}$, 3 και $\sqrt{2}$ είναι όμοιοι όροι,
- είτε τα γινόμενα αριθμού με το ίδιο γράμμα, τις ίδιες δυνάμεις γραμμάτων ή τα ίδια γινόμενα γραμμάτων, π.χ. οι x , $-2x$, $5x$, $\sqrt{2}x$ είναι όμοιοι όροι. Ομοίως οι xy , $2yx$ και $-3xy$ είναι όμοιοι όροι.



Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $x\left(x - \frac{1}{2}\right)$ για $x = 1$, $x = 1,5$, $x = 2^3$, $x = 3^{-2}$.

Απάντηση

Για $x = 1$:

$$1\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1\left(\frac{2}{2} - \frac{1}{2}\right) = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Για $x = 1,5$:

$$1,5\left(1,5 - \frac{1}{2}\right) = 1,5(1,5 - 0,5) = 1,5 \cdot 1 = 1,5$$

Για $x = 2^3$:

$$2^3\left(2^3 - \frac{1}{2}\right) = 8\left(8 - \frac{1}{2}\right) = 8\left(\frac{16}{2} - \frac{1}{2}\right) = 8 \cdot \frac{15}{2} = \frac{8}{2} \cdot 15 = 4 \cdot 15 = 60$$

Για $x = 3^{-2}$:

$$3^{-2}\left(3^{-2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{9}\left(\frac{2}{18} - \frac{9}{18}\right) = \frac{1}{9}\left(-\frac{7}{18}\right) = -\frac{1 \cdot 7}{9 \cdot 18} = -\frac{7}{162}$$

Εναλλακτικά, με την επιμεριστική ιδιότητα βρίσκουμε ότι $x\left(x - \frac{1}{2}\right) = x^2 - \frac{x}{2}$ και στη συνέχεια κάνουμε αντικατάσταση και πράξεις. Για παράδειγμα, για $x = 1$ βρίσκουμε $1^2 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Απάντηση

α) Για έναν οποιονδήποτε παίκτη χρησιμοποιούμε τους παρακάτω συμβολισμούς:

Σουτ	Ελεύθερες βολές	Δίποντα	Τρίποντα
Εύστοχα	x	y	z
Συνολικά	a	b	c

Τότε το σύνολο των εύστοχων πόντων είναι $x + 2y + 3z$.

Το σύνολο όλων των πόντων που επιχείρησε να πετύχει είναι $a + 2b + 3c$.

Άρα το σύνολο των εύστοχων πόντων ως ποσοστό των πόντων που επιχείρησε να πετύχει ο παίκτης είναι:

$$\frac{100(x + 2y + 3z)}{a + 2b + 3c} \%$$

Για να βρούμε τι ποσοστό του B είναι το A, υπολογίζουμε:

$$\frac{A}{B} \cdot 100 \% \text{ ή } \frac{100A}{B} \%$$

β) Υπολογίζουμε την τιμή της παράστασης:

- Για $x = 3, y = 3, z = 1$ και $a = 4, b = 5, c = 2$:

$$\frac{100(3 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1)}{4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 2} = \frac{100 \cdot 12}{20} = 60\%$$

- Για $x = 2, y = 1, z = 1$ και $a = 5, b = 1, c = 1$:

$$\frac{100(2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1)}{5 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1} = \frac{100 \cdot 7}{10} = 70\%$$

- Για $x = 7, y = 4, z = 3$ και $a = 7, b = 7, c = 3$:

$$\frac{100(7 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3)}{7 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 3} = \frac{100 \cdot 24}{30} = 80\%$$

γ) Από τις τιμές της παράστασης στο ερώτημα (β) συμπεραίνουμε την αποτελεσματικότητα στο σκορ κάθε παίκτη, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Αριθμός παίκτη	Αποτελεσματικότητα στο σκοράρισμα
6	60%
5	70%
8	80%

4. Να αναγνωρίσετε τους όμοιους όρους σε καθεμία από τις παρακάτω παραστάσεις και στη συνέχεια να κάνετε πράξεις μεταξύ τους με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας.

α) $3x^2 + 0,5x - 2 + 1,5x - 1,5$

β) $4x^2 - x + 1 - 3x^2 + 7x + 3 + \sqrt{3}$

γ) $2x + 3y - 4x - y + 2\sqrt{2} + \sqrt{2}$

Απάντηση

α) Οι όμοιοι όροι της παράστασης είναι οι:

- $0,5x$ και $1,5x$
- -2 και $-1,5$

Με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας:

$$3x^2 + 0,5x - 2 + 1,5x - 1,5 = 3x^2 + (0,5 + 1,5)x - 2 - 1,5 = 3x^2 + 2x + (-3,5) = 3x^2 + 2x - 3,5$$

β) Οι όμοιοι όροι της παράστασης είναι οι:

- $4x^2$ και $-3x^2$
- $-x$ και $7x$
- $1, 3$ και $\sqrt{3}$

Με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας:

$$4x^2 - x + 1 - 3x^2 + 7x + 3 + \sqrt{3} = (4 - 3)x^2 + (7 - 1)x + 1 + 3 + \sqrt{3} = x^2 + 6x + 4 + \sqrt{3}$$

γ) Οι όμοιοι όροι της παράστασης είναι οι:

- $2x$ και $-4x$
- $3y$ και $-y$
- $2\sqrt{2}$ και $\sqrt{2}$

Με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας:

$$2x + 3y - 4x - y + 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = (2 - 4)x + (3 - 1)y + (2 + 1)\sqrt{2} = -2x + 2y + 3\sqrt{2}$$



Παραδείγματα
με αλγεβρικές
παραστάσεις

5. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $8\left(x - \frac{1}{2}\right) + 5(2x - 0,2)$

β) $1,5(x - 10) - 2(x - 1)$

γ) $(x - 1)(x + 2) + (2x + 5)(x - 1)$

δ) $\left(x - \frac{1}{2}\right)(y + 4) - 3x(1 + y)$

Απάντηση

α) $8x - 8 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot 2x - 5 \cdot 0,2 = 8x - 4 + 10x - 1 = (10 + 8)x - 5 = 18x - 5$

Για συντομία, μπορούμε να γράψουμε κατευθείαν $8x - 4 + 10x - 1 = 18x - 5$, δηλαδή παραλείπουμε το ενδιάμεσο βήμα $(10 + 8)x - 5$.

β) $1,5(x - 10) - 2(x - 1) = 1,5x - 1,5 \cdot 10 - 2x - 2(-1) = 1,5x - 15 - 2x + 2 = (1,5 - 2)x - 13 = -0,5x - 13$

Για συντομία γράφουμε το $-2(x - 1)$ κατευθείαν ως $-2x + 2$.

γ) $(x - 1)(x + 2) + (2x + 5)(x - 1) = x^2 + 2x - x - 2 + 2x^2 - 2x + 5x - 5 = (1 + 2)x^2 + (2 - 1 - 2 + 5)x - 2 - 5 = 3x^2 + 4x - 7$

Μπορούμε να απλοποιήσουμε την παράσταση συντομότερα:

$$(x - 1)(x + 2) + (2x + 5)(x - 1) = x^2 + \cancel{2x} - x - 2 + 2x^2 - \cancel{2x} + 5x - 5 = 3x^2 + 4x - 7$$

δ) $\left(x - \frac{1}{2}\right)(y + 4) - 3x(1 + y) = xy + 4x - \frac{1}{2}y - \frac{4}{2} - 3x - 3xy = (1 - 3)xy + (4 - 3)x - \frac{1}{2}y - 2 = -2xy + x - \frac{1}{2}y - 2$

6. Δίνονται τα παρακάτω μοτίβα με σταθερή διαφορά:

Μοτίβο 1: 5, 9, 13, ...

Μοτίβο 2: -3, 0, 3, ...

Να βρείτε:

α) τον γενικό όρο κάθε μοτίβου,

β) τα γινόμενα των δέκατων, των δέκατων πέμπτων και των εικοστών όρων των μοτίβων.

Απάντηση

α) Ο πρώτος όρος του μοτίβου 1 είναι $\alpha = 5$ και η σταθερή διαφορά των διαδοχικών όρων του είναι:

$$\omega = 9 - 5 = 4$$

Άρα ο γενικός όρος του μοτίβου είναι:

$$5 + (v-1) \cdot 4 = 5 + 4v - 4 = 4v + 1$$

Ομοίως, ο πρώτος όρος του μοτίβου 2 είναι $\alpha = -3$ και η σταθερή διαφορά $\omega = 0 - (-3) = 3$.

Επομένως ο γενικός όρος του μοτίβου 2 είναι:

$$-3 + (v-1) \cdot 3 = -3 + 3v - 3 = 3v - 6$$

β) Το γινόμενο των γενικών όρων των μοτίβων είναι:

$$(4v+1)(3v-6) = 4v \cdot 3v - 4v \cdot 6 + 1 \cdot 3v - 1 \cdot 6 = 12v^2 - 24v + 3v - 6 = 12v^2 - 21v - 6$$

Η τιμή της παραπάνω αλγεβρικής παράστασης για οποιαδήποτε τιμή του v αντιστοιχεί στο γινόμενο των όρων της ίδιας τάξης των δύο μοτίβων. Άρα:

Το γινόμενο των όρων τάξης 10 είναι:

$$12 \cdot 10^2 - 21 \cdot 10 - 6 = 1.200 - 210 - 6 = 984$$

Το γινόμενο των όρων τάξης 15 είναι:

$$12 \cdot 15^2 - 21 \cdot 15 - 6 = 2.700 - 315 - 6 = 2.379$$

Το γινόμενο των όρων τάξης 20 είναι:

$$12 \cdot 20^2 - 21 \cdot 20 - 6 = 4.800 - 420 - 6 = 4.374$$

Το ίδιο προκύπτει αν υπολογίσουμε τη διαφορά $\omega = 13 - 9 = 4$.

Θυμόμαστε ότι ο γενικός όρος ενός μοτίβου με σταθερή διαφορά είναι $\alpha + (v-1)\omega$.



Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε

<p>Ορισμός Μια αλγεβρική παράσταση της μορφής: $A \cdot B + \Gamma \cdot \Delta$</p>	<p>Χαρακτηριστικά Ως προς την προτεραιότητα των πράξεων, προηγούνται τα γινόμενα AB και $\Gamma\Delta$ και έπεται η πρόσθεση των δύο γινομένων.</p>
<p>Παραδείγματα είναι $2x + 2y$ $-4x + 2(x-1)$ $7(2x+1) + 3(x-1)$</p>	<p>Παραδείγματα δεν είναι $4 + x$ $2(x+1)$ $3x(2x)$ $(x-1)(3+x)$</p>

Αλγεβρική παράσταση που είναι άθροισμα γινομένων

Παραπάνω φαίνεται ο πίνακας της έννοιας «άθροισμα γινομένων».

α) Να κατασκευάσετε έναν πίνακα έννοιας για το «γινόμενο αθροισμάτων» και να τον παρουσιάσετε.

β) Αν έχετε άλλες ιδέες, να συμπληρώσετε με αυτές τον πίνακα της έννοιας «άθροισμα γινομένων».



Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω αλγεβρικών παραστάσεων για τις δεδομένες τιμές των μεταβλητών σε κάθε περίπτωση:

α) $2x+3$ για $x=1$ **β)** $4x+3y$ για $x=-2$ και $y=-\frac{1}{2}$ **γ)** $2,5x(x+1)$ για $x=-1$
δ) $-\left(x-\frac{1}{3}\right)$ για $x=\frac{2}{3}$ **ε)** $(x+1)(y-2)$ για $x=2$ και $y=1$ **στ)** $2(x-1)-3(x+1)$ για $x=1,5$

2. Ποιες από τις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις είναι γινόμενα και ποιες αθροίσματα;

α) $2x$ **β)** $x+5$ **γ)** $2x+1$ **δ)** $11\left(x-\frac{1}{2}\right)$ **ε)** $5x+\sqrt{2}$

3. Ποιες από τις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις είναι αθροίσματα γινομένων και ποιες γινόμενα αθροισμάτων;

α) $5x+7y$ **β)** $(2x+1)(x+5)$ **γ)** $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{2})$ **δ)** $5(x+1)+7(x-2)$

4. Να αντιστοιχίσετε τις φράσεις της 1ης στήλης με τις παραστάσεις της 2ης στήλης.

1η στήλη	2η στήλη
1. Αθροισμα γινομένων	α. $-1,2x$
2. Γινόμενο αθροισμάτων	β. xy
3. Αθροισμα μεταβλητών	γ. $2x+4y$
4. Γινόμενο μεταβλητών	δ. $(x+1)(5x+4)$
5. Αθροισμα μεταβλητής με αριθμό	ε. $x+y$
6. Γινόμενο μεταβλητής με αριθμό	στ. $y+\sqrt{2}$

5. Να αναγνωρίσετε τους όμοιους όρους σε καθεμία από τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $2x-3+5x+1$ **β)** $5x+\sqrt{3}-2x+\frac{5}{2}+x$ **γ)** $10,4-11x+3y+5,1x-y+7,1$

6. Να κάνετε τις πράξεις μεταξύ των όμοιων όρων σε καθεμία από τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $7x-1+3x+5$ **β)** $11,2x-5,1-1,2x-0,9$ **γ)** $4x+3y-x+y+1+5x+3,1$

7. Να κάνετε απαλοιφή των παρενθέσεων με χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας:

α) $5(x-1)$ **β)** $3(2x-4)$ **γ)** $-2(x-5)$ **δ)** $3\left(y-\frac{2}{3}\right)$ **ε)** $-5\left(2x-\frac{7}{5}\right)$ **στ)** $-3\left(-2x-\frac{4}{3}\right)$

8. Να κάνετε απαλοιφή των παρενθέσεων με χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας:

α) $(x+2)(x+3)$ **β)** $(x+4)(x-4)$ **γ)** $\left(x+\frac{1}{2}\right)(2x+4)$ **δ)** $(2x-3)(-x+1,5)$

9. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $10(x-1)+6(x+2)$ **β)** $0,5(2x-10)+2(x+1,5)$ **γ)** $(x+12)(2x+3)$ **δ)** $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)$

10. Ποιες από τις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις είναι γινόμενα και ποιες αθροίσματα;

α) $\frac{x}{2}(3+x)$ **β)** x^2+5x **γ)** $2x^3+xy+1$ **δ)** $2(10-x)\left(2x-\frac{5}{2}\right)$

11. Ποια από τις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις είναι άθροισμα γινομένων και ποια γινόμενο αθροισμάτων;
 α) $2x^2y + 7(x-1)$ β) $[2x + (x+1)] \cdot [(3x-1)+2]$
12. Να αντιστοιχίσετε τις φράσεις της 1ης στήλης με τις παραστάσεις της 2ης στήλης.

1η στήλη	2η στήλη
1. Άθροισμα γινομένων	α. $7x - 4y$
2. Γινόμενο αθροισμάτων	β. $\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 4)$
3. Διαφορά γινομένων	γ. $\left(5x - \frac{1}{2}\right)(x - 5)$
4. Διαφορά αθροισμάτων	δ. $2x^2 + (x - 1)$
5. Γινόμενο διαφορών	ε. $(2x + 1)(-x + 1)(y + \sqrt{3})$
6. Γινόμενο αθροίσματος με διαφορά	στ. $(x^2 + 5) - (x + y)$

13. Ένα κατάστημα κάνει έκπτωση 20% στα παντελόνια τζιν. Η αρχική τιμή ενός παντελονιού ήταν x ευρώ. Ποια ή ποιες από τις παρακάτω παραστάσεις εκφράζουν το ποσό της μείωσης της τιμής λόγω της έκπτωσης και ποια (ή ποιες) παραστάσεις εκφράζουν την τελική τιμή του παντελονιού; Εξηγήστε τις επιλογές σας.
- α) $x - 20\%$ β) 20% γ) -20% δ) $\frac{20}{100} \cdot x$
 ε) $0,2x$ στ) $x - 20\% \cdot x$ ζ) $x - 20$ η) $0,8 \cdot x$

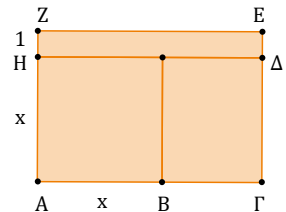


Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

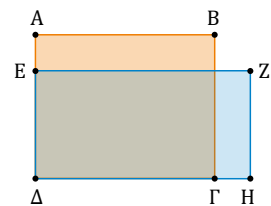
14. Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω αλγεβρικών παραστάσεων για τις τιμές των μεταβλητών που δίνονται κάθε φορά.
- α) $x(-x + 0,5)$ για $x = -0,5$ β) $3x(1 - 3y)$ για $x = -1$ και $y = -\frac{1}{3}$ γ) $(1,5 + 1,5x)(x - 2)$ για $x = -2$
 δ) $(2x - 1)\left(2x - \frac{1}{4}\right)$ για $x = -\frac{3}{2}$ ε) $(x + \sqrt{3})(y - \sqrt{2})$ για $x = \sqrt{3}$ και $y = \sqrt{2}$
 στ) $-(x - 1)(2x + 1) + 3(x - 2)(x + 1)$ για $x = 3$ ζ) $(x - 7)(2x - 1)\left(3x + \frac{1}{2}\right)$ για $x = 1,5$
15. Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω αλγεβρικών παραστάσεων για τις τιμές των μεταβλητών που δίνονται κάθε φορά.
- α) $x^2 - (x + 1) + \frac{1}{2}$ για $x = 1$ β) $3x^2 - 5x + 1$ για $x = -\frac{1}{2}$ γ) $x^2 - 2x - 2^2$ για $x = 2^3$
16. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:
- α) $(2x - 4) - 5(x - 0,5)$ β) $-1,5(2x + 4) - 2(-x + 1)$ γ) $(3x - 11,5)(2x + 4) - \left(x - \frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$
17. Να αναγνωρίσετε τους όμοιους όρους σε καθεμία από τις παρακάτω παραστάσεις και στη συνέχεια να κάνετε πράξεις μεταξύ τους με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας.
- α) $5x^2 - 1,5x + 3,5x + 0,5 + x - 1$ β) $-7x^2 - 2x + 13x^2 + 2x + 3 - x + \sqrt{2}$
 γ) $2,5x + 2\sqrt{3} + 1,3y - 4,5x + 0,7y + 3\sqrt{3}$ δ) $x^2 + 5x + 7 - 3x^2 + 7y + 3y^2 - 1 + 4x$

- 18.** Αυτό τον μήνα θα κάνω 2 προπονήσεις περισσότερες από τον προηγούμενο και θα αυξήσω τη διάρκεια κάθε προπόνησης κατά 10%. Αν τον προηγούμενο μήνα έκανα x προπονήσεις διάρκειας y η καθεμία:
- α)** πόσες θα είναι οι προπονήσεις αυτό τον μήνα και πόση η διάρκεια κάθε προπόνησης;
- β)** ποια θα είναι η συνολική διάρκεια των προπονήσεών μου τον προηγούμενο και αυτό τον μήνα;

- 19.** Αν το μήκος της ΒΓ είναι ίσο με τα $\frac{4}{5}$ της ΑΒ, να γράψετε, με τη βοήθεια του x , το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΓΕΖ.



- 20.** Η πλευρά ΑΔ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι μικρότερη κατά 1 από τη ΓΔ. Η πλευρά ΔΕ του ορθογωνίου ΕΖΗΔ είναι μικρότερη κατά 1 από την ΑΔ, ενώ η ΔΗ είναι μεγαλύτερη κατά 1 από τη ΓΔ. Να εκφράσετε με αλγεβρικές παραστάσεις, με την ίδια μεταβλητή:
- α)** το εμβαδόν του ΑΒΓΔ,
- β)** το εμβαδόν του ΕΖΗΔ,
- γ)** το εμβαδόν της κοινής επιφάνειας των εμβαδών των δύο ορθογωνίων,
- δ)** το άθροισμα των εμβαδών των δύο ορθογωνίων.



- 21.** Στο διπλανό υπολογιστικό φύλλο, η τιμή στο κελί D1 προκύπτει από έναν τύπο. Ο σχεδιαστής του φύλλου έχει ξεχάσει ποιον από τους παρακάτω δύο τύπους χρησιμοποίησε:

$$2 * A1 + (2 * B1 - 1) * (B1 - 2) + 3(A1 + C1) \quad \text{ή}$$

$$2 * B1 + (2 * A1 - 1) * (A1 - 2) + 3(B1 + C1).$$

Μπορείτε να βρείτε ποιον από τους δύο τύπους χρησιμοποίησε; (Το σύμβολο * αντιστοιχεί στην πράξη του πολλαπλασιασμού.)

	A	B	C	D
1	5	4	-2	33
2				
3				
4				
5				
6				

- 22.** Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας:

$$\alpha) \frac{1}{2}(4x - 6y + 8z) - \frac{2}{3}(9x + 12y - 3z)$$

$$\beta) \frac{8\alpha - 10\beta + 4\gamma}{2} + \frac{1}{5}(10\beta - 5\gamma + 20\alpha)$$

- 23. α)** Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$i) (2x + 1)(x + 2)$$

$$ii) x(2x + 3) + 2(x + 1)$$

- β)** Να γράψετε το $(2x + 1)(x + 2)$ ως άθροισμα γινομένων.

- 24.** Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες:

$$\alpha) 3(x \dots) = 3x + 6$$

$$\beta) -4\left(\dots + \frac{1}{2}\right) = x - 2$$

$$\gamma) (x - 2)(x + \dots) = x^2 \dots - 2$$

$$\delta) (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{8}) = x^2 + \dots - \dots - 4$$

- 25.** Δίνονται τα παρακάτω μοτίβα με σταθερή διαφορά:

$$\text{Μοτίβο 1: } 3, \frac{11}{3}, \frac{13}{3}, \dots$$

$$\text{Μοτίβο 2: } 10, 8, 6, \dots$$

Να βρείτε:

- α)** τον γενικό όρο κάθε μοτίβου,

- β)** το γινόμενο των δέκατων, των δέκατων πέμπτων και των εικοστών όρων των μοτίβων.



Ασκήσεις
με αλγεβρικές
παραστάσεις



Τρίλιζα
με αλγεβρικές
παραστάσεις

Δ1. Η έννοια της εξίσωσης

Η Δήμητρα παρακολουθεί τους αγώνες μιας αθλητικής ομάδας και οι επιλογές που έχει ως προς την πληρωμή είναι:

1η επιλογή: Να δίνει 40 € συνδρομή τον χρόνο και να πληρώνει 3 € για κάθε αγώνα που παρακολουθεί.

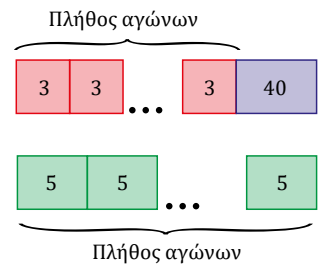
2η επιλογή: Να πληρώνει 5 € για κάθε αγώνα που παρακολουθεί.

Θέλει να βρει πόσους αγώνες τον χρόνο πρέπει να παρακολουθήσει, ώστε το ποσό που θα πλήρωνε και στις δύο επιλογές να είναι το ίδιο.

α) Για να μπορέσει να λύσει το πρόβλημα, η Δήμητρα έκανε το διπλανό σχήμα.

Η φίλη της Δήμητρας, η Ιωάννα, είπε: «Ας βάλουμε ένα γράμμα για το πλήθος των αγώνων και ας εκφράσουμε το πρόβλημα με μία ισότητα». Μπορείτε να εφαρμόσετε αυτό που προτείνει η Ιωάννα;

β) Η Ιωάννα ισχυρίζεται ότι η Δήμητρα πρέπει να παρακολουθήσει 20 αγώνες τον χρόνο για να της κοστίσει το ίδιο, ενώ η Δήμητρα λέει 25 αγώνες. Έχει δίκιο κάποια από τις δύο; Συζητήστε τις σκέψεις σας στην τάξη.



Συζητάμε

...για την εξίσωση και τους όρους της

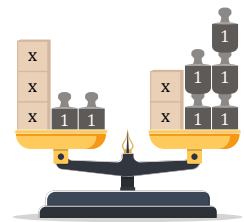
Μπορούμε να εκφράσουμε ένα πρόβλημα που περιέχει έναν άγνωστο με πολλούς τρόπους. Τον άγνωστο τον συμβολίζουμε με ένα γράμμα, συνήθως x .

Για παράδειγμα, το πρόβλημα «Αν στο τριπλάσιο ενός αριθμού προσθέσουμε 2, προκύπτει το ίδιο αποτέλεσμα με το αν στο διπλάσιο του αριθμού προσθέσουμε 5» μπορεί να αναπαρασταθεί:

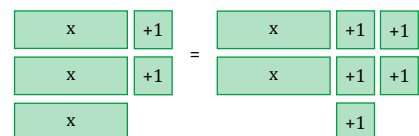
• Με δύο ορθογώνια που έχουν συνολικά το ίδιο μήκος και πλάτος.



• Με έναν ζυγό που ισορροπεί.



• Με αλγεβρικά πλακίδια. Συμβολίζουμε τον αριθμό +1 με ένα πράσινο τετράγωνο πλακίδιο, το -1 με ένα κόκκινο τετράγωνο πλακίδιο, τον άγνωστο x με ένα πράσινο ορθογώνιο πλακίδιο, ενώ τον αντίθετό του $-x$ με ένα κόκκινο ορθογώνιο πλακίδιο. Σε αυτό το παράδειγμα δεν εμφανίζονται κόκκινα πλακίδια, αφού υπάρχουν μόνο θετικές ποσότητες και x .



Αλγεβρικά, παριστάνουμε αυτό το πρόβλημα με την εξίσωση $3x + 2 = 2x + 5$. Πρώτο μέλος της εξίσωσης είναι το $3x + 2$ και δεύτερο μέλος το $2x + 5$. Τα $3x$, 2 , $2x$ και 5 τα λέμε **όρους** της εξίσωσης. Η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις όρους, δύο στο πρώτο και δύο στο δεύτερο μέλος. Τους όρους $3x$ και $2x$ τους ονομάζουμε **άγνωστους όρους**, αφού περιέχουν τον άγνωστο αριθμό x , και τους αριθμούς 2 και 5 τους ονομάζουμε **γνωστούς όρους**.

Η εξίσωση $3x + 2 = 2x + 5$ έχει **λύση** ή **ρίζα** τον αριθμό 3 , γιατί, αν αντικαταστήσουμε το x με τον αριθμό 3 , έχουμε ότι:

$$3 \cdot 3 + 2 = 2 \cdot 3 + 5 \quad \text{ή} \quad 9 + 2 = 6 + 5 \quad \text{ή} \quad 11 = 11$$

δηλαδή από την αρχική εξίσωση προκύπτει μια ισότητα που ισχύει.

Αν αντικαταστήσουμε το x με τον αριθμό 5 , τότε:

$$3 \cdot 5 + 2 = 2 \cdot 5 + 5 \quad \text{ή} \quad 15 + 2 = 10 + 5 \quad \text{ή} \quad 17 = 15$$

που δεν ισχύει. Επομένως ο αριθμός 5 δεν είναι λύση ή ρίζα της εξίσωσης.



Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Μια ισότητα που περιέχει έναν τουλάχιστον **άγνωστο**, την τιμή του οποίου θέλουμε να βρούμε, τη λέμε **εξίσωση**.

Πρώτο μέλος της εξίσωσης είναι η παράσταση που βρίσκεται στα αριστερά του « $=$ » και **δεύτερο μέλος** αυτή που βρίσκεται στα δεξιά.

Έναν αριθμό που επαληθεύει την εξίσωση τον λέμε **λύση** ή **ρίζα** της εξίσωσης.

Γνωστοί όροι Άγνωστοι όροι

Εξίσωση: $4x + 7 = 7x - 8$

Πρώτο μέλος Δεύτερο μέλος

Το 5 είναι λύση της εξίσωσης, αφού, αν αντικαταστήσουμε όπου x το 5 , έχουμε ότι $4 \cdot 5 + 7 = 7 \cdot 5 - 8$ ή $27 = 27$, δηλαδή μια ισότητα που ισχύει.

Δ2. Ισοδύναμες εξισώσεις

α) i) Αν σε έναν ζυγό που ισορροπεί προσθέσουμε το ίδιο βάρος σε καθέναν από τους δύο δίσκους, η ισορροπία θα παραμείνει; Αν αφαιρέσουμε το ίδιο βάρος; Αν διπλασιάσουμε τα βάρη σε κάθε δίσκο; Αν αφήσουμε σε κάθε δίσκο το μισό του βάρους που υπήρχε (δηλαδή αν υποδιπλασιάσουμε κάθε βάρος);

ii) Αν τα δύο προηγούμενα βάρη τα συμβολίσουμε με α και β (άρα $\alpha = \beta$), πώς εκφράζονται με μαθηματικά σύμβολα οι προηγούμενες ενέργειες; Αυτές τις εκφράσεις τις ονομάσαμε ιδιότητες της ισότητας.

β) Να χρησιμοποιήσετε ιδιότητες της ισότητας, για να δείξετε ότι η εξίσωση $4x + 8 = -2x - 4$ μπορεί να πάρει καθεμία από τις παρακάτω μορφές:

i) $6x + 8 = -4$ **ii)** $8 = -6x - 4$ **iii)** $4x = -2x - 12$ **iv)** $8x + 16 = -4x - 8$ **v)** $x + 2 = -\frac{x}{2} - 1$

γ) Η εξίσωση $4x + 8 = -2x - 4$ έχει λύση τον αριθμό -2 . Εξετάστε αν και οι υπόλοιπες εξισώσεις του ερωτήματος (β) έχουν λύση τον ίδιο αριθμό.



Συζητάμε

...για ισοδύναμες εξισώσεις

Μάθαμε στην Α' Γυμνασίου ότι μια ισότητα συνεχίζει να ισχύει:

- αν προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε και στα δύο μέλη τον ίδιο αριθμό,
- αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με τον ίδιο αριθμό.

Για παράδειγμα, αν $\alpha = \beta$, τότε

$$\begin{cases} \alpha + 5 = \beta + 5 \\ \alpha - 8 = \beta - 8 \\ 5\alpha = 5\beta \\ -3\alpha = -3\beta \\ \frac{\alpha}{7} = \frac{\beta}{7} \end{cases}$$

Θυμόμαστε ότι δε διαιρούμε με το μηδέν.

Αυτές είναι οι ιδιότητες της ισότητας και μπορούμε να τις χρησιμοποιούμε για να λύσουμε μια εξίσωση. Για παράδειγμα, η εξίσωση $-2x + 6 = 8x - 14$ μπορεί να γραφτεί ισοδύναμα με πολλούς διαφορετικούς τρόπους:

Η εξίσωση γίνεται	Ιδιότητα που εφαρμόσαμε	Μετά από πράξεις
$-2x + 6 + 3 = 8x - 14 + 3$	προσθέσαμε και στα δύο μέλη το 3	$-2x + 9 = 8x - 11$
$-2x + 6 - 8x = 8x - 14 - 8x$	αφαιρέσαμε και από τα δύο μέλη το 8x	$-10x + 6 = -14$
$\frac{-2x + 6}{2} = \frac{8x - 14}{2}$	διαιρέσαμε και τα δύο μέλη με 2	$\frac{-2x}{2} + \frac{6}{2} = \frac{8x}{2} - \frac{14}{2}$ $-x + 3 = 4x - 7$

Η εξίσωση $-2x + 6 = 8x - 14$ έχει λύση τον αριθμό 2, αφού το 2 επαληθεύει την εξίσωση $-2 \cdot 2 + 6 = 8 \cdot 2 - 14$ ή $-4 + 6 = 16 - 14$ ή $2 = 2$.

Παρατηρούμε ότι το 2 επαληθεύει και τις υπόλοιπες εξισώσεις, π.χ. $-x + 3 = 4x - 7$ ή $-2 + 3 = 4 \cdot 2 - 7$ ή $1 = 8 - 7$ ή $1 = 1$.



Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Χρησιμοποιώντας ιδιότητες της ισότητας, μετασχηματίζουμε μία εξίσωση σε **ισοδύναμες** με αυτή.

Η λύση μιας εξίσωσης είναι λύση και οποιασδήποτε άλλης εξίσωσης ισοδύναμης με αυτή.

Παραδείγματα ισοδύναμων εξισώσεων

$$\begin{aligned} 2x - 4 &= 3x + 2 && \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} +5x \\ 7x - 4 &= 8x + 2 && \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} -7x \\ -4 &= x + 2 && \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \cdot 2 \\ -8 &= 2x + 4 && \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} : 4 \\ \frac{-8}{4} &= \frac{2x+4}{4} \text{ ή } -2 = \frac{x}{2} + 1 \end{aligned}$$

Δ3. Από τον ζυγό στην εξίσωση

Στον διπλανό ζυγό που ισορροπεί, τα βάρη είναι σε γραμμάρια. Πόσα γραμμάρια είναι το άγνωστο βάρος x ;

α) Να λύσετε το πρόβλημα με αλλαγές που μπορείτε να κάνετε στη ζυγαριά χωρίς να χαλάσει η ισορροπία. Για κάθε αλλαγή που κάνετε στη ζυγαριά, γράψτε και την αντίστοιχη εξίσωση.

β) Να εξηγήσετε κάθε αλλαγή στην εξίσωση με τις ιδιότητες της ισότητας.

Να συγκρίνετε τις απαντήσεις σας με τις απαντήσεις των συμμαθητριών και των συμμαθητών σας, συζητώντας στην τάξη.



Από την ισορροπία
ζυγού
στην εξίσωση



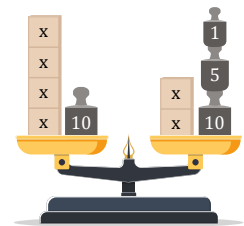
Ισορροπία ζυγού
και επίλυση
εξίσωσης

Συζητάμε

...για εξισώσεις και ζυγαριές

Η διπλανή ζυγαριά ισορροπεί, δηλαδή τα βάρη (σε gr) στους δύο δίσκους είναι ίσα.

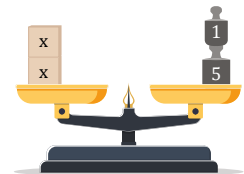
Η εξίσωση που εκφράζει αυτή η ισορροπία είναι $4x + 10 = 2x + 16$.



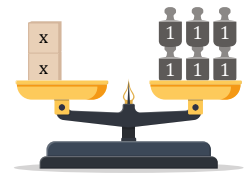
Αν και από τους δύο δίσκους αφαιρέσουμε το βάρος των 10 gr, τότε δε θα αλλάξει η ισορροπία του ζυγού. Στην εξίσωση, αυτό μπορούμε να το εκφράσουμε αφαιρώντας και από τα δύο μέλη τον ίδιο αριθμό $4x + 10 - 10 = 2x + 16 - 10$ ή απλώς $4x = 2x + 6$.



Για να βρούμε το άγνωστο βάρος x , θα πρέπει να έχουμε το άγνωστο βάρος μόνο στον έναν δίσκο. Αν αφαιρέσουμε και από τους δύο δίσκους τα $2x$, ο ζυγός θα ισορροπεί. Αντίστοιχα, στην εξίσωση θα έχουμε $4x - 2x = 2x + 6 - 2x$ ή $2x = 6$.



Το βάρος των 6 gr μπορούμε να το αντικαταστήσουμε με 6 βάρη του 1 gr. Τώρα μπορούμε να πάρουμε τα μισά από κάθε δίσκο. Στην εξίσωση διαιρούμε και τα δύο μέλη με το 2 και έχουμε $\frac{2x}{2} = \frac{6}{2}$.



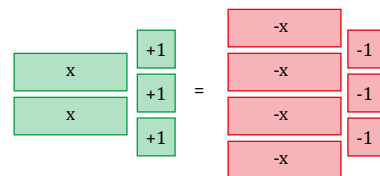
Έτσι, βρίσκουμε ότι $x = 3$ gr.

Πράγματι το 3 είναι λύση της αρχικής εξίσωσης, αφού, αν στην εξίσωση αντικαταστήσουμε το x με 3, η ισότητα ισχύει: $4 \cdot 3 + 10 = 2 \cdot 3 + 16$ ή $22 = 22$.



Δ4. Εξίσωση και αλγεβρικά πλακίδια

Στο διπλανό σχήμα μια εξίσωση έχει παρασταθεί με αλγεβρικά πλακίδια.



α) Ποια εξίσωση εκφράζει αυτή η ισότητα;

β) Να βρείτε το x κάνοντας αλλαγές στα δύο μέλη, έτσι ώστε να διατηρείται η ισότητα. Περιγράψτε σε κάθε βήμα τις αλλαγές που γίνονται στα αλγεβρικά πλακίδια και γράψτε την αντίστοιχη εξίσωση.

γ) Μπορείτε να διατυπώσετε τις στρατηγικές που ακολουθούμε, για να λύσουμε εξισώσεις της μορφής $ax + b = cx + d$; Συζητήστε τις ιδέες σας στην ομάδα και στη συνέχεια στην ολομέλεια της τάξης.

Συζητάμε

...για εξισώσεις και αλγεβρικά πλακίδια

Στον παρακάτω πίνακα μπορούμε να δούμε τη λύση μιας εξίσωσης με πλακίδια στην 1η στήλη και με αλγεβρικό συμβολισμό στη 2η στήλη.

	Έχουμε την εξίσωση: $x - 2 = -3x + 6$
	$x - 2 + 3x = -3x + 6 + 3x$ (προσθέσαμε και στα δύο μέλη $3x$)
	$4x - 2 = 6$
	$4x - 2 + 2 = 6 + 2$ (προσθέσαμε και στα δύο μέλη $+2$)
	$4x = 8$
	$\frac{4x}{4} = \frac{8}{4}$ ή $x = 2$ (διαιρέσαμε με τον συντελεστή του αγνώστου, δηλαδή τον αριθμό που πολλαπλασιάζεται με το x)



Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Διαδικασία επίλυσης μιας εξίσωσης

- Εφαρμόζουμε τις ιδιότητες της ισότητας, έτσι ώστε οι άγνωστοι όροι να είναι στο ένα μέλος της εξίσωσης και οι γνωστοί όροι στο άλλο μέλος.
- Επειδή θέλουμε να βρούμε το $1x$, διαιρούμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με τον συντελεστή του x , αρκεί να μην είναι 0.

$$3x + 10 = -6x - 8$$

$$\dots$$

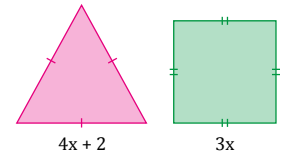
$$9x = -18$$

$$\frac{9x}{9} = \frac{-18}{9}$$

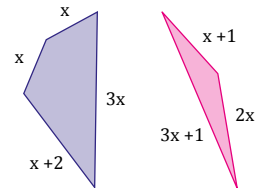
$$x = -2$$

Δ5. Ειδικές περιπτώσεις εξισώσεων

α) Να βρείτε το x , ώστε το τετράγωνο και το ισόπλευρο τρίγωνο στο διπλανό σχήμα να έχουν την ίδια περίμετρο. Πόσες λύσεις υπάρχουν;



β) Να βρείτε το x , ώστε το τετράπλευρο και το τρίγωνο στο διπλανό σχήμα να έχουν την ίδια περίμετρο. Πόσες λύσεις υπάρχουν;



Συζητάμε

...για εξισώσεις με «διαφορετικές» λύσεις

- Θέλουμε να εξετάσουμε για ποια τιμή του x τα διπλανά σχήματα έχουν την ίδια περίμετρο. Η περίμετρος του τετραγώνου είναι $4 \cdot 2x$ και του τραapeζίου είναι $2x + 2x + 2x + 2x + 2$, άρα θα πρέπει:

$$8x = 8x + 2 \quad \text{ή} \quad 8x - 8x = 8x + 2 - 8x \quad \text{ή} \quad 0x = 2$$

Όποιον αριθμό και αν βάλουμε στη θέση του x , πάντα το πρώτο μέλος θα είναι 0, ενώ το δεύτερο θα είναι 2. Δηλαδή δεν υπάρχει αριθμός που να είναι λύση της εξίσωσης. Μια τέτοια εξίσωση τη λέμε **αδύνατη**.

- Θέλουμε να εξετάσουμε για ποια τιμή του x τα διπλανά σχήματα έχουν την ίδια περίμετρο. Η περίμετρος του ισόπλευρου τριγώνου είναι $3 \cdot (2x + 4)$ και του τραapeζίου είναι $3x + 5 + 3x + 4 + 3$, άρα θα πρέπει:

$$3(2x + 4) = 3x + 5 + 3x + 4 + 3$$

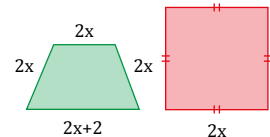
$$6x + 12 = 6x + 12 \quad \text{ή} \quad 6x + 12 - 6x = 6x + 12 - 6x$$

$$0x + 12 = 12 \quad \text{ή} \quad 0x + 12 - 12 = 12 - 12 \quad \text{ή} \quad 0x = 0$$

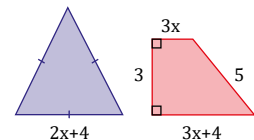
Παρατηρούμε ότι όποιον αριθμό και αν βάλουμε στη θέση του x η εξίσωση θα επαληθεύεται, π.χ.:

$$0 \cdot 1 = 0, \quad 0 \cdot (-2,3) = 0, \quad 0 \cdot \frac{1}{4} = 0$$

Η εξίσωση αυτή έχει άπειρες λύσεις. Μια τέτοια εξίσωση την ονομάζουμε **αόριστη** ή **ταυτότητα**.



Με το «ή» δηλώνουμε ότι δύο εξισώσεις είναι ισοδύναμες. Επίσης, μπορούμε να γράφουμε τις ισοδύναμες εξισώσεις τη μία κάτω από την άλλη.





Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Μια εξίσωση που δεν έχει λύσεις την ονομάζουμε **αδύνατη**.

Μια εξίσωση που έχει λύσεις όλους τους αριθμούς (δηλαδή έχει άπειρες λύσεις) την ονομάζουμε **ταυτότητα** ή **αόριστη**.

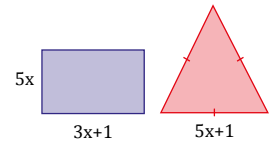
Η εξίσωση $2x+2=2x+1$ γίνεται $0x=-1$ και δεν έχει λύσεις, αφού πάντα $0x=0$ και δεν ισχύει $0=-1$.

Η εξίσωση $2x+2=2x+2$ γίνεται $0x=0$ και έχει λύσεις όλους τους αριθμούς, αφού η ισότητα ισχύει για οποιονδήποτε αριθμό.



Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. Στο σχήμα η περίμετρος του ορθογωνίου είναι ίση με την περίμετρο του ισόπλευρου τριγώνου. Σχηματίστε μια εξίσωση και απλοποιήστε την όσο το δυνατόν περισσότερο. Ποιος από τους αριθμούς 1, 2, 3, 4 είναι λύση αυτής της εξίσωσης; Ποιο είναι το μήκος των πλευρών του ορθογωνίου και του τριγώνου;



Απάντηση

Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι $2 \cdot 5x + 2 \cdot (3x + 1)$, ενώ του ισόπλευρου τριγώνου είναι $3 \cdot (5x + 1)$.

Άρα η εξίσωση είναι $2 \cdot 5x + 2 \cdot (3x + 1) = 3 \cdot (5x + 1)$.

Μπορούμε να απλοποιήσουμε την εξίσωση εφαρμόζοντας την επιμεριστική ιδιότητα και κάνοντας τις πράξεις:

$$10x + 2 \cdot 3x + 2 \cdot 1 = 3 \cdot 5x + 3 \cdot 1$$

$$10x + 6x + 2 = 15x + 3$$

$$16x + 2 = 15x + 3$$

Παρατηρούμε ότι από τους αριθμούς που δίνονται ο 1 είναι λύση, γιατί $16 \cdot 1 + 2 = 15 \cdot 1 + 3$ ή $18 = 18$.

Άρα οι πλευρές του ορθογωνίου είναι 5 και 4, ενώ του ισόπλευρου τριγώνου είναι 6.

2. Ποιες από τις παρακάτω αριθμητικές και αλγεβρικές εκφράσεις είναι εξισώσεις;

$$5 = \frac{20}{5} + 1, \quad 9x - 3, \quad 5x - 20 = 0, \quad x^2 - 3 = x, \quad (x - 2) \cdot (2x - 1), \quad 2x + 4 = \frac{x}{3} + 9$$

Στις εκφράσεις που είναι εξισώσεις εντοπίστε το πρώτο και το δεύτερο μέλος της εξίσωσης και βρείτε τους γνωστούς και τους άγνωστους όρους της εξίσωσης.

Απάντηση

Εξισώσεις είναι όσες από τις ισότητες περιέχουν τουλάχιστον έναν άγνωστο, δηλαδή οι: $5x - 20 = 0$, $x^2 - 3 = x$ και $2x + 4 = \frac{x}{3} + 9$.

Εξίσωση	Πρώτο μέλος	Δεύτερο μέλος	Γνωστοί όροι	Άγνωστοι όροι
$5x - 20 = 0$	$5x - 20$	0	-20, 0	5x
$x^2 - 3 = x$	$x^2 - 3$	x	-3	x^2 , x
$2x + 4 = \frac{x}{3} + 9$	$2x + 4$	$\frac{x}{3} + 9$	4, 9	$2x$, $\frac{x}{3}$

Από τις προηγούμενες εξισώσεις, πρώτου βαθμού είναι οι $5x - 20 = 0$ και $2x + 4 = \frac{x}{3} + 9$, όπου το x έχει εκθέτη 1, ενώ η εξίσωση $x^2 - 3 = x$ είναι δευτέρου βαθμού.

Η εξίσωση $2x^2 = -x + 1 + 2x^2$ είναι πρώτου βαθμού και όχι δευτέρου. Γιατί;



Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε

1. Η Γεωργία λέει ότι, όταν σε μια ισότητα εφαρμόζουμε ιδιότητες της ισότητας και γράφουμε τη μία εξίσωση δίπλα στην άλλη, γράφουμε ανάμεσά τους τον σύνδεσμο «ή», «γιατί έτσι δείχνουμε ότι η νέα εξίσωση είναι ισοδύναμη και καταλαβαίνουμε επίσης ποιο είναι το πρώτο και ποιο είναι το δεύτερο μέλος». Συμφωνείτε με την άποψη της Γεωργίας;
2. Να δημιουργήσετε συνεργατικά τον πίνακα έννοιας της εξίσωσης 1ου βαθμού.
3. Ποια είναι η διαφορά στον τρόπο επίλυσης μιας εξίσωσης που έχει αγνώστους και στα δύο μέλη σε σχέση με μια εξίσωση που έχει τον άγνωστο μόνο στο ένα μέλος;



Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Να γράψετε την ισορροπία του ζυγού με τη μορφή εξίσωσης.



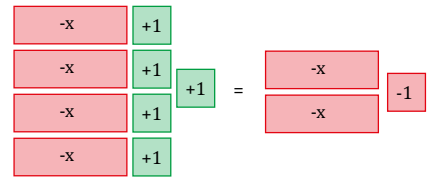
2. Να γράψετε την ισότητα των αλγεβρικών πλακιδίων με τη μορφή εξίσωσης.

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline -x & +1 & +1 \\ \hline -x & +1 & +1 \\ \hline & +1 & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline +x & -1 \\ \hline +x & -1 \\ \hline +x & -1 \\ \hline \end{array}$$

3. Να γράψετε με τη μορφή εξίσωσης το πρόβλημα: «Ένας αριθμός αυξάνεται κατά 4 και ισούται με το τριπλάσιο του αριθμού μειωμένο κατά 2».
4. Ποιο είναι το πρώτο και ποιο το δεύτερο μέλος σε κάθε εξίσωση;

α) $-x + 7 = 1 - 4x$ β) $0 = 3 + 5x$ γ) $9x + 4 = -2x$

5. Να υπογραμμίσετε τους γνωστούς όρους και να βάλετε σε κύκλο τους άγνωστους όρους της εξίσωσης $-5x+2-7x=-4+11x+12$.
6. Να εξετάσετε αν καθεμία από τις παρακάτω εξισώσεις έχει λύση τον αριθμό που δίνεται.
 α) $-2x+3=3x$, $x=1$ β) $5x-2=x-2$, $x=0$ γ) $-4x+7=-3x-5$, $x=12$
7. Στην εξίσωση $3x-6=9x+12$ έχουμε εφαρμόσει μία από τις ιδιότητες της ισότητας. Συμπληρώστε τα κενά, ώστε να έχουμε μια εξίσωση ισοδύναμη με την αρχική.
 α) $3x-7=9x+ \underline{\hspace{1cm}}$ β) $6x-12=18x+ \underline{\hspace{1cm}}$ γ) $x-2=3x+ \underline{\hspace{1cm}}$
8. Ποια ή ποιες από τις παρακάτω αλγεβρικές εκφράσεις είναι εξισώσεις 1ου βαθμού;
 α) $-2x-12=0$ β) $-3x+5$ γ) $3x^2-2x=4x$ δ) $(2-x) \cdot 3x$
9. Ποια εξίσωση εκφράζει η ισότητα των αλγεβρικών πλακιδίων; Εί-
 ναι ο αριθμός 3 λύση της εξίσωσης αυτής;



10. Ο Αλέξανδρος έλυσε τη διπλανή εξίσωση. Αναγνωρίζετε κάποιο λάθος;

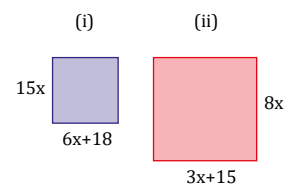
$$\begin{aligned}
 2x-2 &= 5x-1 \\
 &= 2x-2+2=5x-1+2 \\
 &= 2x=5x+1 \\
 &= 2x-5x=5x-1-5x \\
 &= -3x=1 \\
 &= \frac{-3x}{-3} = \frac{1}{-3} = x = -\frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

11. Για καθεμία από τις παρακάτω εξισώσεις να εξετάσετε αν έχει λύση, αν είναι αδύνατη, ή αν έχει άπειρες λύσεις.
 α) $0x=3$ β) $3x=4$ γ) $-2x=0$ δ) $0x=0$



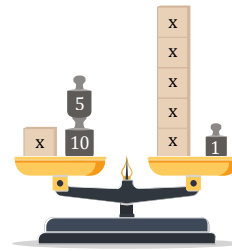
Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

12. Να αναπαραστήσετε:
 α) την εξίσωση $3x+5=x+9$ με έναν ζυγό,
 β) την εξίσωση $-4x+1=3x+5$ με αλγεβρικά πλακίδια.
13. Τα διπλανά σχήματα είναι τετράγωνα.
 α) Να γράψετε μία εξίσωση για το καθένα.
 β) Να εξετάσετε ποιος από τους αριθμούς 1, 2 και 3 είναι λύση της κάθε εξίσωσης.
 γ) Ποια είναι η περίμετρος του κάθε τετραγώνου;

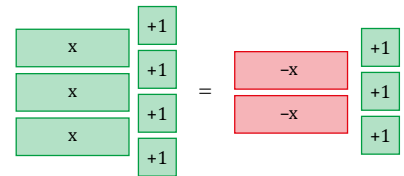


14. Να γράψετε μια εξίσωση για καθένα από τα παρακάτω προβλήματα. Να περιγράψετε ποιο είναι το 1ο και το 2ο μέλος της εξίσωσης, ποιοι είναι οι γνωστοί και οι άγνωστοι όροι και να εξετάσετε αν κάποιος από τους αριθμούς $-2, 0, 3$ και 4 είναι λύση του προβλήματος και επαληθεύει την εξίσωση.
 α) Το τετραπλάσιο ενός αριθμού μειωμένο κατά τρία ισούται με το 15 μειωμένο κατά το διπλάσιο του αριθμού.
 β) Το τριπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 3 ισούται με το εννεαπλάσιο του αριθμού αυξημένο κατά 3.

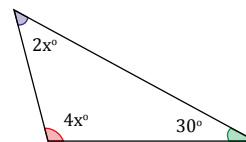
15. Να γράψετε 4 ισοδύναμες εξισώσεις με την εξίσωση $-2x - 4 = 3x + 11$.
16. Να διατυπώσετε λεκτικά την εξίσωση $2x + 7 = 5x - 2$.
17. Στον διπλανό ζυγό που ισορροπεί να βρείτε:
 α) την εξίσωση που εκφράζει την ισορροπία του,
 β) το άγνωστο βάρος x .



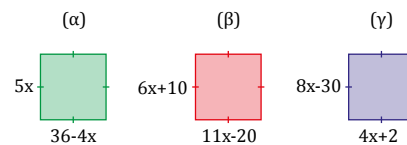
18. Να βρείτε την εξίσωση που εκφράζει η ισότητα με τα αλγεβρικά πλακίδια και στη συνέχεια τον αριθμό x .



19. Να γράψετε τις παρακάτω προτάσεις ως εξισώσεις και να τις λύσετε.
 α) Το διπλάσιο ενός αριθμού μειωμένο κατά 3 είναι ίσο με το 12 μειωμένο κατά το τριπλάσιο του αριθμού.
 β) Το 4 μειωμένο κατά το επταπλάσιο ενός αριθμού ισούται με το πενταπλάσιο του αριθμού.
20. Να βρείτε τις γωνίες του διπλανού τριγώνου.



21. Να βρείτε την περίμετρο του κάθε τετραγώνου.



22. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $x + 5 = 3x - 5$

β) $-5v + 2 = 12 - 3v$

γ) $-2v + 4 = 2 - 5v$

δ) $3\alpha + 7 = 2 + 3\alpha$

ε) $4\lambda - 5 = -5 + 4\lambda$

στ) $0,3\mu - 5 = \mu + 1,2$

Δ1. Επίλυση προβλήματος

Η αδερφή της Αναστασίας εργάζεται ωρομίσθια σε μια ταβέρνα. Την Πέμπτη εργάστηκε 5 ώρες και είχε φιλοδώρημα 20 €. Την Παρασκευή εργάστηκε 3 ώρες και είχε φιλοδώρημα 32 €. Αν τα χρήματα που κέρδισε τις δύο ημέρες ήταν τα ίδια, πόσο αμείβεται την ώρα;

Συζητήστε στην τάξη τον τρόπο με τον οποίο εργαστήκατε σε κάθε ομάδα.

**Συζητάμε**

...για προβλήματα που λύνονται με εξισώσεις

Ένα κατάστημα ηλεκτρικών ειδών κάνει τις εξής διευκολύνσεις για την αγορά ενός ψυγείου:

Στην 1η περίπτωση ο πελάτης δίνει αρχικά 100 € και στη συνέχεια 30 € κάθε μήνα.

Στη 2η περίπτωση ο πελάτης δίνει αρχικά 30 € και στη συνέχεια 40 € τον μήνα.

Αν γνωρίζουμε ότι και στις δύο περιπτώσεις το ψυγείο εξοφλείται στον ίδιο αριθμό μηνών, χωρίς να αλλάζει το συνολικό του κόστος, πόσο κοστίζει το ψυγείο;

Αν συμβολίσουμε με x τους μήνες εξόφλησης, τότε στην 1η περίπτωση θα πληρώσει ο πελάτης $100 + 30x$ €, ενώ στη 2η περίπτωση θα πληρώσει $30 + 40x$ €.

Και στις δύο περιπτώσεις το ποσό που θα εξοφληθεί θα είναι το ίδιο, άρα $100 + 30x = 30 + 40x$.

Λύνουμε την εξίσωση χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της ισότητας:

$$100 + 30x = 30 + 40x \quad \text{ή} \quad 100 + 30x - 40x = 30 + 40x - 40x \quad \text{ή} \quad 100 - 10x = 30$$

$$100 - 10x - 100 = 30 - 100 \quad \text{ή} \quad -10x = -70 \quad \text{ή} \quad \frac{-10x}{-10} = \frac{-70}{-10} \quad \text{ή} \quad x = 7$$

Άρα το χρέος θα έχει εξοφληθεί σε 7 μήνες και η τιμή του ψυγείου είναι $100 + 30 \cdot 7$ ή 310 €.

**Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις****Για να λύσουμε ένα πρόβλημα:**

- διαβάζουμε προσεκτικά το πρόβλημα και εντοπίζουμε τον άγνωστο ή τους αγνώστους (αν είναι πολλοί),
- συμβολίζουμε με ένα γράμμα (συνήθως x) έναν από τους αγνώστους,
- προσπαθούμε να εκφράσουμε και άλλα μεγέθη του προβλήματος με τη βοήθεια του x ,
- σκεφτόμαστε τι παραμένει το ίδιο, ώστε να σχηματίσουμε μια ισότητα που θα μας οδηγήσει στην εξίσωση,
- λύνουμε την εξίσωση,
- ελέγχουμε αν η λύση που βρήκαμε επαληθεύει το πρόβλημα και αν η λύση είναι λογική,
- απαντούμε στα ερωτήματα που έχουν τεθεί.



Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. Οι μαθητές της Β' τάξης του 3ου Γυμνασίου της Κομοτηνής θέλουν να κάνουν κατάβαση του ποταμού Νέστου με βάρκες. Το κόστος για τη βάρκα και τον εξοπλισμό είναι 7 € το άτομο και το λεωφορείο για τη μετακίνηση θα κοστίσει 120 €. Αν θέλουμε ο κάθε μαθητής να πληρώσει 12 €, πόσοι μαθητές θα συμμετάσχουν στη δράση;



Απάντηση

Το συνολικό κόστος της εκδρομής είναι: (συνολικό κόστος ανά μαθητή) · (αριθμός μαθητών). Δηλαδή, αν συμβολίσουμε με x τον αριθμό των μαθητών που θα συμμετάσχουν, τότε το συνολικό κόστος είναι $12x$.

Το συνολικό κόστος μπορούμε να το βρούμε και ως εξής:

(κόστος βάρκας ανά μαθητή) · (αριθμός μαθητών) + (κόστος λεωφορείου), δηλαδή $7x + 120$

Το κόστος είναι ίδιο, με όποιον τρόπο κι αν το υπολογίσουμε, οπότε η εξίσωση είναι:

$$12x = 7x + 120$$

Λύνουμε την εξίσωση:

$$\begin{aligned} 12x &= 7x + 120 \\ 12x - 7x &= 7x + 120 - 7x \\ 5x &= 120 \\ \frac{5x}{5} &= \frac{120}{5} \\ x &= 24 \end{aligned}$$

Το πρόβλημα μπορεί να λυθεί και με πρακτική αριθμητική. Για παράδειγμα, μπορούμε να σκεφτούμε: «Από τα 12 € κάθε μαθητή, τα 7 € είναι για τη βάρκα. Άρα τα υπόλοιπα 5 € είναι για το λεωφορείο. Επομένως οι μαθητές είναι $120 : 5 = 24$ ». Μπορείτε να αντιστοιχίσετε τα βήματα αυτής της λύσης με τα αντίστοιχα βήματα επίλυσης της εξίσωσης;

Άρα στη δραστηριότητα θα συμμετάσχουν 24 μαθητές.

2. Να λύσετε την εξίσωση $2(3x - 2) - 6 = -4(2x - 5)$.

Απάντηση

$$\begin{aligned} 2(3x - 2) - 6 &= -4(2x - 5) \\ 2 \cdot 3x - 2 \cdot 2 - 6 &= -4 \cdot 2x - 4 \cdot (-5) && \left. \begin{array}{l} \text{απαλοιφή παρενθέσεων με την επιμεριστική ιδιότητα} \\ \text{εκτέλεση πολλαπλασιασμών} \end{array} \right\} \\ 6x - 4 - 6 &= -8x + 20 \\ 6x - 4 - 6 + 8x &= -8x + 20 + 8x && \left. \begin{array}{l} \text{προσθέτουμε και στα δύο μέλη το } 8x \\ \text{προσθέτουμε το } 4 \text{ και το } 6 \text{ και στα δύο μέλη} \end{array} \right\} \\ 6x - 4 - 6 + 8x + 4 + 6 &= 20 + 4 + 6 \\ (6 + 8)x &= 30 \quad \text{ή} \quad 14x = 30 \\ \frac{14x}{14} &= \frac{30}{14} && \left. \begin{array}{l} \text{εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα και κάνουμε την πρόσθεση} \\ \text{διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου} \end{array} \right\} \\ 1x &= \frac{30:2}{14:2} \quad \text{ή} \quad x = \frac{15}{7} \end{aligned}$$

Άρα η λύση της εξίσωσης είναι $x = \frac{15}{7}$.

- 3. Μία μητέρα μοίρασε στα 3 παιδιά της ένα χρηματικό ποσό. Ο Διονύσης πήρε το $\frac{1}{4}$ του ποσού και 17 €, ο Δημοσθένης πήρε το $\frac{1}{5}$ του ποσού και 20 € και η Βιργινία πήρε το $\frac{1}{6}$ του ποσού και 9 €. Ποιο ήταν το χρηματικό ποσό και πόσα χρήματα πήρε το κάθε παιδί;**

Απάντηση

Αν x € είναι το ποσό που μοίρασε η μητέρα, τότε ο Διονύσης πήρε $\frac{x}{4} + 17$ €, ο Δημοσθένης πήρε $\frac{x}{5} + 20$ € και η Βιργινία πήρε $\frac{x}{6} + 9$ €. Δηλαδή $\frac{x}{4} + 17 + \frac{x}{5} + 20 + \frac{x}{6} + 9 = x$ ή $\frac{x}{4} + \frac{x}{5} + \frac{x}{6} + 46 = x$.

Για να λύσουμε την εξίσωση, ένας τρόπος είναι να πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη με το ΕΚΠ των παρονομαστών, ώστε να μην έχουμε κλασματικούς αριθμούς:

$$\begin{aligned} 60 \cdot \left(\frac{x}{4} + \frac{x}{5} + \frac{x}{6} + 46 \right) &= 60 \cdot x \\ 60 \cdot \frac{x}{4} + 60 \cdot \frac{x}{5} + 60 \cdot \frac{x}{6} + 60 \cdot 46 &= 60 \cdot x \\ 15x + 12x + 10x + 2.760 &= 60x \\ 37x + 2.760 &= 60x \quad \text{ή} \quad 37x + 2.760 - 37x = 60x - 37x \quad \text{ή} \\ 2.760 &= 23x \quad \text{ή} \quad \frac{2.760}{23} = \frac{23x}{23} \quad \text{ή} \quad x = 120 \text{ €} \end{aligned}$$

Θα μπορούσαμε να παραλείψουμε την πράξη $60 \cdot \left(\frac{x}{4} + \frac{x}{5} + \frac{x}{6} + 46 \right) = 60 \cdot x$ και να πολλαπλασιάσουμε με το ΕΚΠ κάθε όρο της εξίσωσης.

Άρα ο Διονύσης πήρε $\frac{120}{4} + 17 = 47$ €, ο Δημοσθένης πήρε $\frac{120}{5} + 20 = 44$ € και η Βιργινία πήρε $\frac{120}{6} + 9 = 29$ €.

- 4. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{1-2x}{3} = 2 + \frac{7x}{6}$.**

Απάντηση

Σε αυτή την εξίσωση θα πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της με το ΕΚΠ των παρονομαστών και έτσι θα έχουμε μια εξίσωση χωρίς παρονομαστές.

$$\begin{aligned} 6 \left(\frac{x}{2} - \frac{1-2x}{3} \right) &= 6 \left(2 + \frac{7x}{6} \right) && \text{πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με το 6 και κάνουμε απαλοιφή παρενθέσεων} \\ 6 \cdot \frac{x}{2} - 6 \cdot \frac{1-2x}{3} &= 6 \cdot 2 + 6 \cdot \frac{7x}{6} && \text{απλοποιούμε τα κλάσματα και κάνουμε πράξεις} \\ 3x - 2(1-2x) &= 12 + 7x && \text{κάνουμε απαλοιφή παρενθέσεων} \\ 3x - 2 + 4x &= 12 + 7x && \text{αφαιρούμε το 7x και προσθέτουμε το 2 και στα δύο μέλη} \\ 3x - 2 + 4x - 7x + 2 &= 12 + 7x - 7x + 2 && \text{απαλοιφή αντίθετων όρων} \\ 3x + 4x - 7x &= 12 + 2 && \text{επιμεριστική ιδιότητα και πράξεις} \\ (3 + 4 - 7)x &= 14 \quad \text{ή} \quad 0x = 14 \end{aligned}$$

Η εξίσωση δεν έχει λύση, είναι αδύνατη.

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση $3x - 2 + 4x = 12 + 7x$ (τέταρτο βήμα της εξίσωσης) μετά την εφαρμογή των ιδιοτήτων της ισότητας έγινε $3x + 4x - 7x = 12 + 2$. Το -2 στο πρώτο μέλος έγινε $+2$ στο δεύτερο μέλος, ενώ το $+7x$ στο δεύτερο μέλος έγινε $-7x$ στο πρώτο μέλος.

Για λόγους συντομίας, μπορούμε να μη γράφουμε αναλυτικά τη διαδικασία, αλλά να μεταφέρουμε έναν όρο από ένα μέλος στο άλλο αλλάζοντας το πρόσημό του. Λέμε ότι «**χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους**».

Για τους όρους μιας εξίσωσης ισχύει ο εξής πρακτικός κανόνας:

ΑΛΛΑΖΩ ΜΕΛΟΣ - ΑΛΛΑΖΩ ΠΡΟΣΗΜΟ

$$\begin{array}{l} -2x + 4 = 3x - 5 \\ \quad \quad \quad \swarrow \quad \searrow \\ -2x - 3x = -5 - 4 \end{array}$$



Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε

Συζητήστε και πείτε την άποψή σας στην ολομέλεια της τάξης:

Στη λυμένη εξίσωση του παραδείγματος 4 σκεφτείτε τότε και με ποιο στόχο χρησιμοποιήσαμε κάθε φορά την επιμεριστική ιδιότητα.



Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

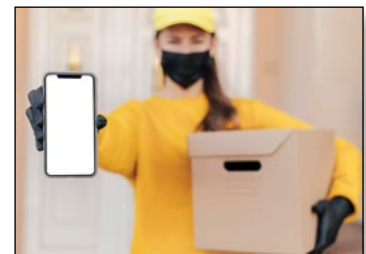
1. Ποια εξίσωση παίρνουμε μετά την απαλοιφή παρενθέσεων της εξίσωσης $-2(3x - 1) = 4(-2x + 3)$; Επιλέξτε τη σωστή απάντηση.
 α) $-6x + 2 = 8x + 7$ β) $-6x + 2 = -8x + 12$ γ) $-6x + 1 = -8x + 7$
2. Ποια εξίσωση παίρνουμε όταν χωρίσουμε γνωστούς από αγνώστους στην εξίσωση $-5x - 2 = -3x + 7$; Επιλέξτε τη σωστή απάντηση.
 α) $-5x + 3x = -2 + 7$ β) $3x - 5x = 2 - 7$ γ) $-7 - 2 = -3x + 5x$
3. Να βρείτε ποια εξίσωση εκφράζει το ακόλουθο πρόβλημα: «Το τριπλάσιο του προηγούμενου ενός φυσικού αριθμού v είναι ίσο με το διπλάσιο του επόμενου του v ».
 α) $3v = 2(v + 1)$ β) $3(v - 1) = 2(v + 1)$ γ) $3(v + 1) = 2(v - 1)$ δ) $3(v - 1) = 2v$
4. Η Ελίρα ξεκίνησε να λύνει στον πίνακα την εξίσωση $\frac{x}{4} + \frac{x}{3} = 7$ ως εξής: $12 \cdot \frac{x}{4} + 12 \cdot \frac{x}{3} = 12 \cdot 7$. Ο Θανάσης διαφώνησε, γιατί, όπως είπε, στο πρώτο μέλος η Ελίρα πολλαπλασίασε δύο φορές με 12, ενώ στο δεύτερο μέλος πολλαπλασίασε μία φορά. Έχει δίκιο ο Θανάσης;
5. Ο Φίλιππος, θέλοντας να χωρίσει γνωστούς από αγνώστους στην εξίσωση $5x - 2 = -4x + 10$, έγραψε $x + 4x = 10 - 5 + 2$. Είναι σωστό αυτό που έκανε ο Φίλιππος; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.



Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

6. Η Γεωργία έχει 15 € και κάθε εβδομάδα αποταμιεύει 12 € επιπλέον. Ο αδερφός της ο Νίκος έχει 35 € και αποταμιεύει κάθε εβδομάδα 8 €. Αν ξεκίνησαν μαζί, σε πόσες εβδομάδες θα έχουν αποταμιεύσει το ίδιο ποσό και ποιο είναι αυτό;

- 7.** Ο Φίλιππος έχει δύο επιλογές για να κατεβάζει τραγούδια από το διαδίκτυο. Στην πρώτη επιλογή θα δίνει τον μήνα συνδρομή 20 € και θα πληρώνει για κάθε τραγούδι που θα κατεβάζει 0,4 €. Στη δεύτερη περίπτωση θα πληρώνει για κάθε τραγούδι 1,2 €. Πόσα τραγούδια πρέπει να κατεβάσει τον μήνα, ώστε να πληρώσει το ίδιο ποσό και με τις δύο επιλογές;
- 8.** Ένας παρασκευαστής χειρός για ζυμαρικά κοστίζει 40 € και τα υλικά που απαιτούνται κάθε φορά για να φάει μια εξαμελής οικογένεια χειροποίητα ζυμαρικά κοστίζουν 0,4 €. Όταν η οικογένεια αγοράζει την ίδια ποσότητα ζυμαρικών συσκευασμένα, της κοστίζουν 2,4 €. Αν μια οικογένεια αγοράσει τον παρασκευαστή, πόσες φορές πρέπει να τον χρησιμοποιήσει για να βγάλει τα χρήματα που πλήρωσε (για να κάνει, όπως λέμε, απόσβεση);
- 9.** Ένα ιστιοπλοϊκό ταξίδεψε από την Ικαρία στη Χίο σε 4,5 ώρες. Στην επιστροφή έκανε 1,5 ώρα περισσότερο και η ταχύτητά του ήταν κατά 5 κόμβους μικρότερη σε σχέση με πριν, λόγω του ανέμου (1 κόμβος είναι ένα ναυτικό μίλι την ώρα). Με ποια ταχύτητα ταξίδεψε σε κάθε διαδρομή; Πόσα ναυτικά μίλια απέχει η Ικαρία από τη Χίο;
- 10.** Ο Μουσταφά και η οικογένειά του ξεκίνησαν από τον Πετρόλοφο του Έβρου, για να πάνε με το αυτοκίνητό τους στην Αθήνα, που απέχει 810 km. Ταξιδεύουν με μέσο όρο ταχύτητας 90 km / h.
- α)** Να εκφράσετε την απόσταση από το σπίτι τους μετά από t ώρες που έχουν ταξιδέψει.
β) Να εκφράσετε την απόστασή τους από την Αθήνα t ώρες από την ώρα που ξεκίνησαν.
γ) Σε πόση ώρα από τη στιγμή που ξεκίνησαν θα απέχουν το ίδιο από το σπίτι τους και από την Αθήνα;
- 11.** Ποιο είναι το εμβαδόν ενός ορθογωνίου, όταν η περιμέτρος του είναι 36 cm και το μήκος είναι 4 cm μεγαλύτερο από το πλάτος του;
- 12.** Η Αγγελική και η Γεωργία εργάζονται σε ένα εργοστάσιο. Τοποθετούν μικρές συσκευασίες κινητών τηλεφώνων σε κουτιά και τα στέλνουν στα καταστήματα. Και οι δύο έχουν τον ίδιο αριθμό κινητών τηλεφώνων και το ίδιο μέγεθος κουτιών. Στον ίδιο χρόνο η Αγγελική έχει συσκευάσει 5 κουτιά και της έχουν περισσέψει 4 τηλέφωνα, ενώ η Γεωργία έχει συσκευάσει 3 κουτιά και της έχουν περισσέψει 20 τηλέφωνα. Πόσα τηλέφωνα χωράει το κάθε κουτί και πόσα κινητά τηλέφωνα είχαν για τοποθέτηση;
- 13.** Ο Παναγιώτης έφυγε από τα Ιωάννινα προς την Αθήνα και ταξιδεύει με 90 km / h. Ο Κώστας έφυγε από το ίδιο σημείο μετά από μία ώρα και ταξιδεύει προς την ίδια κατεύθυνση με 120 km / h. Σε πόση απόσταση από τα Ιωάννινα θα συναντηθούν;
- 14.** Να διατυπώσετε ένα πρόβλημα από την καθημερινή ζωή που να λύνεται με την εξίσωση $2x + 12 = 5x + 3$. Στη συνέχεια να λύσετε το πρόβλημα και να κάνετε την επαλήθευση.
- 15.** Το τριπλάσιο της παράστασης $k + 5$ είναι ίσο με πέντε φορές την παράσταση $k - 1$. Ποια είναι η τιμή του k ;
- 16.** Το μισό του αθροίσματος τριών διαδοχικών ακέραιων αριθμών είναι ίσο με -9 . Ποιοι είναι οι αριθμοί;



17. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2(x+6)=3x-1$

β) $3(\alpha-2)=7\alpha-3$

γ) $5-2y=-(y+4)$

δ) $10\lambda-5(9+2\lambda)=0$

ε) $-5(2x-1)+3x-1=0$

στ) $5-4(2-3\kappa)=3(1-5\kappa)+4$

ζ) $-3(2x-2)+1=2(2-3x)$

η) $4(2x+1,5)=-5(x-1)$

θ) $0=-3(\mu-5)+5(\mu+3)$

18. Ο τύπος $F = \frac{9}{5}C + 32$ δίνει τη θερμοκρασία σε βαθμούς Φαρενάιτ ($^{\circ}F$), όταν είναι γνωστή η θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}C$).

α) Να βρείτε τη θερμοκρασία σε βαθμούς Φαρενάιτ, όταν στην κλίμακα Κελσίου είναι $100^{\circ}C$.

β) Να βρείτε τη θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου, όταν στην κλίμακα Φαρενάιτ είναι $32^{\circ}F$.

γ) Υπάρχει κάποια θερμοκρασία στην οποία οι δύο κλίμακες έχουν την ίδια τιμή;



19. Ο Κώστας άρχισε να περπατά με 4 km/h , ενώ ο Παναγιώτης έφυγε μισή ώρα μετά τον Κώστα, από το ίδιο σημείο και προς την ίδια κατεύθυνση, τρέχοντας με 7 km/h .

α) Αν συμβολίσουμε με t τον χρόνο που περπατά ο Κώστας, ποια είναι η σωστή εξίσωση για να βρούμε σε πόση ώρα από τη στιγμή που ξεκίνησε ο Κώστας θα συναντηθούν;

i) $4t = 7t - \frac{1}{2}$ ii) $4t = 7\left(t - \frac{1}{2}\right)$ iii) $4t = 7t$ iv) $7t = 4\left(t - \frac{1}{2}\right)$

β) Να βρείτε σε πόση ώρα από τη στιγμή που ξεκίνησε ο Κώστας θα συναντηθούν.

20. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις και να γράψετε σε κάθε βήμα της επίλυσης τι ακριβώς κάνατε.

α) $4x = 1 + \frac{1}{2}(2x-5)$

β) $\frac{z+6}{3} - z = -5$

γ) $0,4\mu = 2\mu + 1,24$

δ) $\frac{\alpha}{2} + \frac{2-\alpha}{3} = \frac{\alpha}{6} - 1$

ε) $\frac{1}{4} + \frac{1-3x}{2} - \frac{x}{3} + 5 = 0$

στ) $0 = 3\frac{y-1}{4} - 5\frac{2-4y}{2} + 3$

21. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{x}{2} - \frac{2-x}{6} = \frac{x+1}{3} - 1$. Κατόπιν, αλλάξτε κάτι και δημιουργήστε ένα λάθος. Ανταλλάξτε τα τετράδιά σας με έναν συμμαθητή ή μία συμμαθήτριά σας για να εντοπίσετε τα λάθη που έγιναν και συζητήστε τα.



Τρέχουν και οι δύο βρύσες



Ταξίδι στη Σαμοθράκη



Εξισώσεις με παρονομαστές



Επίλυση εξισώσεων και πρόσθεση κλασμάτων

Ανακεφαλαίωση

Κανονικότητες, αλγεβρικές παραστάσεις και σχέσεις

Ερωτήσεις – ασκήσεις – προβλήματα

1. Να υπολογίσετε τον επόμενο όρο των μοτίβων:

α) $1, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, 3, \dots$ β) $11, \frac{21}{2}, 10, \dots$ γ) $-2, -3, 5, -5, \dots$

2. Να υπολογίσετε την τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις για $x = -\frac{1}{2}$.

α) $2x\left(\frac{1}{2} + x\right)$ β) $(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)$ γ) $x^2 + x(x-2^2)$

3. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ).

α) Οι διαδοχικοί όροι του μοτίβου $1+2(v-1)$ έχουν σταθερή διαφορά 1.

β) Το $x(x+1)$ είναι γινόμενο.

γ) Το $(y+1)(z+2)$ είναι άθροισμα γινομένων.

δ) Η εξίσωση $2x+1=2x+2$ είναι αδύνατη.

ε) Η εξίσωση $3x+2=4x+2$ είναι αδύνατη.

στ) Δεν μπορούμε να βρούμε τη λύση της εξίσωσης $0x=0$.

ζ) Η αριθμητική παράσταση $5(-2+1)(2^2+1)$ είναι ίση με την τιμή της αλγεβρικής παράστασης $5(x+1)(x^2+1)$ για $x=-2$.

η) Η αριθμητική παράσταση $2(-3+1)+2 \cdot 3^2$ είναι ίση με την τιμή της αλγεβρικής παράστασης $2(x+1)-2x^2$ για $x=-3$.

θ) $-3x+x = -(3+1)x = -4x$

ι) $-5y-2y = (-5-2)y = -7y$

ια) $-2x-3x = -(2+3)x = -5x$

4. Ποια εξίσωση εκφράζει την ισορροπία του ζυγού; Είναι ο αριθμός 2 λύση της εξίσωσης αυτής;



5. Να εξετάσετε αν καθεμία από τις εξισώσεις που ακολουθούν έχει λύση τον αριθμό που δίνεται.

α) $-5x+4=3x, x=0$

β) $-3x+4=4x-3, x=1$

γ) $x-2=5x+10, x=-3$



Η δομή των αλγεβρικών παραστάσεων I

6. Ποιος αριθμός από τους παρακάτω είναι λύση της εξίσωσης $2x-5=x-2$;

α) $x=2$ β) $x=-4$ γ) $x=3$ δ) $x=4$

7. Ένα μοτίβο έχει γενικό όρο $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}(v-1)$.

α) Έχουν οι διαδοχικοί όροι του μοτίβου σταθερή διαφορά;

β) Συμφωνείτε ότι ο γενικός όρος του μοτίβου είναι ίσος με $\frac{2v-1}{3}$;

8. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω παραστάσεις ως άθροισμα, γινόμενο ή άθροισμα γινομένων.

α) $2xyz$ β) $x+x^2+7$

γ) $(2x+1)(5x-1)$ δ) $5x+2(x-1)$

ε) $(x^2-2)(y^2-1)$ στ) $-3xy+2x+5y$

9. Να αντιστοιχίσετε τους όρους κάθε μοτίβου της αριστερής στήλης με τον αντίστοιχο γενικό όρο της δεξιάς στήλης.

Μοτίβο	Γενικός όρος
1. 0, 3, 6, 9, 12, ...	α. $10+0,8(v-1)$
2. $-1, \frac{1}{2}, 2, 3\frac{1}{2}, 5, \dots$	β. $1+6(v-1)$
3. 10, 9,2, 8,6, 7,8, 7, ...	γ. $3v-3$
4. -7, -2, 3, 8, 13, ...	δ. $10,8-0,8v$
5. 10, 10,8, 11,6, 12,4, ...	ε. $5v-12$
6. 1, 7, 13, 19, ...	στ. $1,5(v-1)-1$

10. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $3x - 2 = 7x + 2$

β) $-2z + 3 = -1 - 5z$

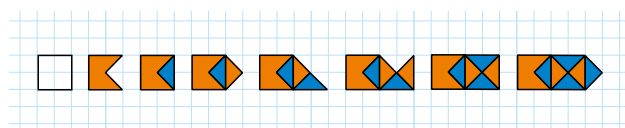
γ) $-2(x - 3) = -3x - 1$

δ) $3 - 4(1 - 5b) = -(2 + 3b) - 6$

ε) $-\frac{2}{3}x = \frac{1}{3}(-2x + 3) - 2$

στ) $\frac{t-2}{3} - 1 = 3\frac{2-4t}{4}$

11. Ο πρώτος όρος του παρακάτω μοτίβου είναι το πορτοκαλί σχήμα, το οποίο είναι μέρος του τετραγώνου στα αριστερά. Το τετράγωνο έχει εμβαδόν 1. Οι επόμενοι όροι του μοτίβου φαίνονται με τη σειρά, στα δεξιά του πρώτου όρου.



Συνδέσεις και επεκτάσεις

14. Δίνονται οι παραστάσεις $(x+1)(x+2)$ και $x(x+1)+5(2-x)$.

α) Ποια από τις δύο είναι γινόμενο αθροισμάτων και ποια άθροισμα γινομένων;

β) Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων για $x = -1$, $x = 2$, $x = -2$, $x = \frac{1}{2}$.

γ) Για ποια τιμή του x οι παραστάσεις έχουν την ίδια τιμή;

15. Να εξετάσετε αν υπάρχει ορθογώνιο που η μία πλευρά του να είναι μεγαλύτερη από την άλλη κατά 2 και να ισχύει το εξής: Αν μειώσουμε κατά 1 τη μικρότερη πλευρά του και αυξήσουμε κατά 1 τη μεγαλύτερη, προκύπτει ορθογώνιο που έχει εμβαδόν ίσο με το αρχικό.

16. Ποια ή ποιες από τις παρακάτω εξισώσεις είναι ισοδύναμες με την εξίσωση $ax - \beta = \gamma$;

α) $2ax - \beta = ax + \gamma$ β) $ax - \beta + \gamma = 0$

γ) $-ax = -\beta - \gamma$ δ) $x = \frac{\beta + \gamma}{\alpha}$

Αιτιολογήστε τις απόψεις σας.

α) Να γράψετε ένα αριθμητικό μοτίβο που να αντιστοιχεί στα εμβαδά των όρων του παραπάνω μοτίβου.

β) Να γράψετε τον γενικό όρο του μοτίβου του ερωτήματος (α).

γ) Ποιος όρος του μοτίβου έχει εμβαδόν 2;

δ) Υπάρχει όρος του μοτίβου των σχημάτων με εμβαδόν 8,125;

12. Ο πατέρας του Ιβάν πρέπει να πάει στο συνεργείο το αυτοκίνητό του, για να αντικαταστήσει ένα ανταλλακτικό. Η αντιπροσωπεία χρεώνει 150 € το ανταλλακτικό και 40 € για κάθε ώρα εργασίας για την επισκευή. Το συνεργείο της γειτονιάς του χρεώνει 210 € το ανταλλακτικό και 25 € για κάθε ώρα εργασίας. Για πόσες ώρες εργασίας επισκευής το ποσό που θα πληρώσει στις δύο περιπτώσεις θα είναι το ίδιο;

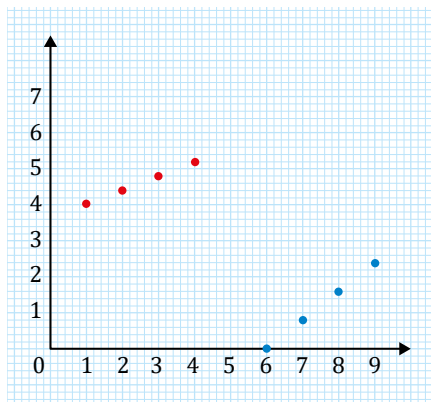
13. Να γράψετε δύο εξισώσεις της μορφής $ax + \beta = \gamma x + \delta$ που οι λύσεις τους να μην είναι ακέραιοι αριθμοί.

17. Ποια πρέπει να είναι η τιμή του α , ώστε η εξίσωση $ax - 2 = 3x + 5$ να είναι αδύνατη;

18. Ποιες πρέπει να είναι οι τιμές των α και β , ώστε η εξίσωση $6 - ax = 3x - \beta$ να είναι ταυτότητα;

19. Στο διάγραμμα παριστάνονται:

- Οι τέσσερις πρώτοι όροι ενός μοτίβου με σταθερή διαφορά (κόκκινα σημεία).
- Ο έκτος, ο έβδομος, ο όγδοος και ο ένατος όρος ενός άλλου μοτίβου με σταθερή διαφορά (μπλε σημεία).



Η δομή των αλγεβρικών παραστάσεων II



Αναγνωρίζουμε μοτίβα

- α) Να γράψετε τους όρους κάθε μοτίβου μέχρι τον 10ο.
 β) Να γράψετε τους γενικούς όρους κάθε μοτίβου.
 γ) Υπάρχει κάποιος όρος των δύο μοτίβων που να είναι κοινός (δηλαδή για κάποια τάξη n τα μοτίβα να έχουν τον ίδιο όρο);
- 20.** Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές x και y έχει περίμετρο Π που δίνεται από τον τύπο $\Pi = 2(x + y)$. Αν τα Π και y είναι γνωστά, να βρείτε τον άγνωστο x .
- 21.** Να γράψετε μια εξίσωση με αγνώστους και στα δύο μέλη, που να έχει λύση το -10 .
- 22.** Δύο εργάτες σκάβουν ένα αμπέλι. Ο πρώτος θέλει 10 ημέρες για να το τελειώσει μόνος του, ενώ ο δεύτερος θέλει 8 ημέρες. Ο δεύτερος ξεκίνησε μία ημέρα μετά από την ημέρα που ξεκίνησε ο πρώτος. Σε πόσες ημέρες από τότε που ξεκίνησε ο πρώτος θα έχουν ολοκληρώσει το σκάψιμο;



Μαθηματικά
παράδοξα: όλοι οι
αριθμοί είναι ίσοι

Ομαδική εργασία

- 23.** Στο υπολογιστικό φύλλο της εικόνας, η τιμή του κελιού D1 της στήλης D υπολογίζεται με τον τύπο:

$$A1 * B1 - 2 * A1 * C1$$

(το * αντιστοιχεί στον πολλαπλασιασμό).

Με αντίστοιχο τρόπο υπολογίζεται η τιμή των κελιών D2, D3 κτλ.

Παρατηρώντας τις τιμές των στηλών A, B και C, να γράψετε μια αλγεβρική παράσταση με μία μόνο μεταβλητή που να χρησιμεύει για τον υπολογισμό των τιμών της στήλης D.

	A	B	C	D
1	1	4	8	-12
2	2	5	10	-30
3	3	6	12	-54
4	4	7	14	-84
5	5	8	16	-120
6	6	9	18	-162
7	7	10	20	-210
8	8	11	22	-264
9	9	12	24	-324
10	10	13	26	-390
11	11	14	28	-462
12	12	15	30	-540
13	13	16	32	-624
14	14	17	34	-714
15	15	18	36	-810

- 24.** Να επιλέξετε έναν προορισμό και να κάνετε μια μικρή έρευνα για τον τρόπο υπολογισμού του κόστους μιας εκδρομής από ένα τουριστικό γραφείο. Στη συνέχεια να γράψετε έναν ή περισσότερους (εφόσον χρειάζεται) αλγεβρικούς τύπους που να έχουν ως μεταβλητή το πλήθος των ατόμων που συμμετέχουν στην εκδρομή και ως αποτέλεσμα το συνολικό κόστος της εκδρομής.
 Μπορείτε να δημιουργήσετε ένα υπολογιστικό φύλλο που να σας βοηθά να υπολογίσετε το κόστος της εκδρομής για διαφορετικές τιμές του πλήθους των ατόμων που συμμετέχουν στην εκδρομή;
 Να συγκρίνετε το κόστος της δικής σας εκδρομής με τις εκδρομές άλλων ομάδων της τάξης σας.

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ 3:

Συναρτήσεις

Πόσο ψηλά θα φτάσει ένα μήλο, όταν ξέρουμε την ταχύτητα με την οποία το πετάμε προς τα πάνω; Ποιος είναι ο όγκος μιας κυβικής δεξαμενής που γνωρίζουμε την πλευρά της; Ποια θα είναι η τελική τιμή κάθε προϊόντος μιας εταιρείας, όταν κάνει έκπτωση 10%;

Για να απαντήσουμε στα παραπάνω ερωτήματα, πρέπει να βρούμε μια σχέση ή μια διαδικασία μέσω της οποίας να μπορούμε σε κάποια τιμή ενός μεγέθους (π.χ. της ταχύτητας με την οποία πετάμε το μήλο προς τα πάνω) να αντιστοιχίσουμε μία μοναδική τιμή ενός άλλου (π.χ. του ύψους στο οποίο θα φτάσει).

Σε αυτή τη θεματική ενότητα θα ασχοληθούμε με τη διερεύνηση τέτοιων σχέσεων, θα τις εκφράσουμε γραφικά και με αλγεβρικά σύμβολα και θα λύσουμε σχετικά προβλήματα.

ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΕΝΟΤΗΤΕΣ:

- 3.1 Η έννοια της συνάρτησης
- 3.2 Γραφική παράσταση συνάρτησης
- 3.3 Ανάλογα ποσά - Η συνάρτηση $y = ax$
- 3.4 Η συνάρτηση $y = ax + \beta$
- 3.5 Αντιστρόφως ανάλογα ποσά - Η συνάρτηση $y = \frac{\alpha}{x}$

Δ1. Αλλάζοντας τις διαστάσεις

Με ένα σχοινί μήκους 20 cm και πάνω σε τετραγωνισμένο χαρτί σχηματίστε ορθογώνια, όπως φαίνεται στην εικόνα, που η βάση τους να έχει πλάτος 2 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm και 8 cm. Μετρήστε και καταγράψτε στον διπλανό πίνακα το εμβαδόν για κάθε τιμή του πλάτους.

α) Ποια από τις παρακάτω σχέσεις θα χρησιμοποιήσετε για να βρείτε το εμβαδόν y , όταν γνωρίζετε το πλάτος x ;

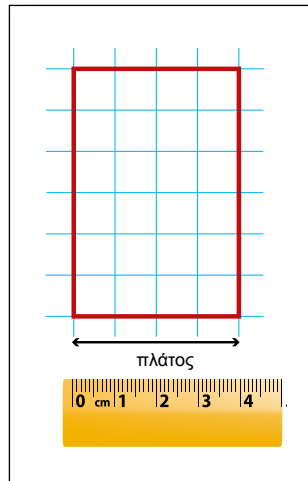
i) $y = x^2 + 10$ ii) $y = x(10 - x)$

iii) $y = x^2 - 10x$ iv) $y = x(20 - x)$

Εξηγήστε τον τρόπο με τον οποίο σκεφτήκατε και συζητήστε τον στην τάξη.

β) Μπορεί το πλάτος x να είναι 11 cm; Εξηγήστε γιατί.

γ) Μπορούμε να βρούμε ποιο είναι το πλάτος, όταν το εμβαδόν είναι 24 cm^2 ;



Πλάτος	Εμβαδόν
2 cm	
4 cm	24 cm^2
5 cm	
6 cm	
8 cm	

Δ2. Τιμές τροφίμων

Σε έναν υπάλληλο σουπερμάρκετ δόθηκε ο παρακάτω πίνακας, ώστε να βάλει αυτοκόλλητα με τιμή στα προϊόντα. Ο υπάλληλος όμως εντόπισε κάποια λάθη.

				
1 lt γάλα	1 kg τυρί	1 kg μέλι	1 kg ρύζι	250 gr καφές
1,6 €	10 €	10 €	0,8 € 3 €	

α) Ποια είναι τα λάθη που εντόπισε ο υπάλληλος; Πώς πιστεύετε ότι έπρεπε να είναι ο πίνακας;

β) Ένας πελάτης αγόρασε 2 kg μέλι και 1 lt γάλα. Πόσα χρήματα πλήρωσε;

γ) Ένα παιδί θυμόταν ότι έπρεπε να αγοράσει ένα προϊόν που κοστίζει 10 €, αλλά δεν μπορούσε να θυμηθεί ποιο. Μπορεί να βρει ποιο προϊόν είναι αυτό;

Συζητάμε

...για συναρτήσεις

Στην καθημερινή μας ζωή συχνά συζητάμε για σχέσεις μεταξύ προσώπων (όπως της μητέρας με το παιδί), εννοιών (όπως της δημοκρατίας με την ελευθερία), μεγεθών (όπως της ποσότητας ενός προϊόντος με το κόστος αγοράς του) κτλ. Στα Μαθηματικά θα ασχοληθούμε με εκείνες τις σχέσεις που δείχνουν κάποια μορφή εξάρτησης ανάμεσα σε δύο ποσότητες ή στοιχεία συνόλων.

Σε πολλές περιπτώσεις, όταν γνωρίζουμε την τιμή ενός μεγέθους, μπορούμε, με τη βοήθεια κάποιων δεδομένων, να βρούμε την τιμή ενός άλλου. Για παράδειγμα, όταν γνωρίζουμε ότι η πλευρά x ενός τετραγώνου είναι 5 cm, μέσω της σχέσης $E = x^2$ βρίσκουμε ότι το εμβαδόν του E είναι $5^2 \text{ cm}^2 = 25 \text{ cm}^2$. Αντίστοιχα, από πίνακες καταγραφής θερμοκρασιών μπορούμε να βρούμε τη θερμοκρασία θ που είχε καταγραφεί σε μια πόλη στις 12:00 το μεσημέρι, όταν γνωρίζουμε την ημερομηνία x .

Τέτοιου είδους **σχέσεις εξάρτησης** τις ονομάζουμε **συναρτήσεις**.



Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Όταν σε μια σχέση για κάθε τιμή μιας μεταβλητής x μπορούμε να βρούμε ακριβώς μία τιμή μιας μεταβλητής y , τότε τη σχέση αυτή των x και y την ονομάζουμε **συνάρτηση**.

Σε αυτή τη συνάρτηση, τη μεταβλητή x τη λέμε **ανεξάρτητη** και τη μεταβλητή y τη λέμε **εξαρτημένη**.

Λέμε επίσης ότι «η μεταβλητή y εκφράζεται ως συνάρτηση της μεταβλητής x ».



Ορισμοί της συνάρτησης



Οι απαρχές της έννοιας της συνάρτησης



Η μηχανή της συνάρτησης

Με την έκφραση «η συνάρτηση $y = 3x$ » εννοούμε ότι η μεταβλητή y εκφράζεται ως συνάρτηση της μεταβλητής x μέσω της αλγεβρικής σχέσης $y = 3x$.

Τη σχέση $y = 3x$ την ονομάζουμε **τύπο** της συνάρτησης.

Κάποιοι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να περιγράψουμε μια συνάρτηση είναι η **λεκτική διατύπωση**, ο **πίνακας τιμών** και ο **αλγεβρικός τύπος**.

Για παράδειγμα, η έκφραση «το αποτέλεσμα είναι διπλάσιο του αριθμού μειωμένο κατά 3» και η σχέση $y = 2x - 3$ περιγράφουν την ίδια συνάρτηση.

Αντίστοιχα, για μια άλλη συνάρτηση, μέσω του διπλανού πίνακα τιμών, για $x = -1$ βρίσκουμε $y = -3$ κτλ.

Επίσης, μπορούμε να λέμε ότι «η αντίστοιχη τιμή της συνάρτησης για $x = -1$ είναι η $y = -3$ ».

x	-1	$\frac{1}{2}$	3	4,3	6
y	-3	2	4	2	0

Οι τιμές της μεταβλητής y σε έναν πίνακα τιμών δεν προκύπτουν απαραίτητα από κάποιον αλγεβρικό τύπο. Για παράδειγμα, μέσω ενός πίνακα βαθμολογιών, για κάθε αριθμό μητρώου ενός μαθητή μπορούμε να βρούμε τον βαθμό του στα Μαθηματικά, ο οποίος όμως δεν προκύπτει από κάποιον τύπο.

Μπορούμε όμως για μία συνάρτηση όπως η $y = 2x - 3$ να δημιουργήσουμε έναν πίνακα τιμών για συγκεκριμένες τιμές της μεταβλητής x . Για παράδειγμα:

x	1	2	3
y	$2 \cdot 1 - 3 = -1$	$2 \cdot 2 - 3 = 1$	$2 \cdot 3 - 3 = 3$



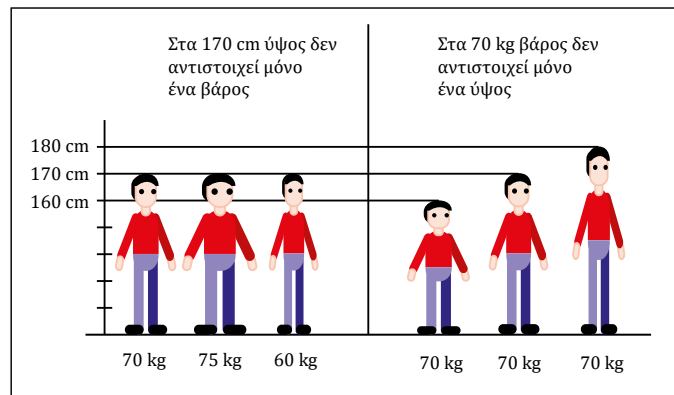
Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. α) Σε ποιες από τις περιπτώσεις του παρακάτω πίνακα θεωρείτε ότι υπάρχει κάποια σχέση ανάμεσα στα δύο μεγέθη;
- β) Σε ποιες περιπτώσεις η σχέση αυτή είναι συνάρτηση; Στις περιπτώσεις αυτές, ποιο από τα δύο μεγέθη καθορίζει την τιμή του άλλου;

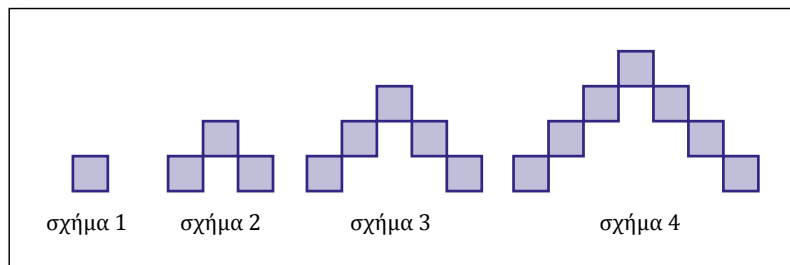
i.	ύψος ενός ανθρώπου	βάρος του ανθρώπου
ii.	ύψος πατέρα	αριθμός παιδιών
iii.	θερμοκρασία που καταγράφηκε σε έναν μετεωρολογικό σταθμό κατά τη διάρκεια μιας ημέρας	ώρα της ημέρας

Απάντηση

- α) Με βάση την εμπειρία μας από την καθημερινή ζωή, στις περιπτώσεις (i) και (iii) υπάρχει κάποια σχέση ανάμεσα στα δύο μεγέθη. Για παράδειγμα, αναμένουμε, σε γενικές γραμμές, όσο αυξάνεται το ύψος ενός ανθρώπου, να αυξάνεται και το βάρος του. Αντίθετα, δεν υπάρχει σχέση ανάμεσα στο ύψος του πατέρα και τον αριθμό παιδιών που έχει.
- β) Η σχέση στην περίπτωση (i) δεν είναι συνάρτηση, καθώς σε μία τιμή του ύψους δεν αντιστοιχεί μία μόνο τιμή για το βάρος, αλλά και σε μία τιμή του βάρους δεν αντιστοιχεί μία μόνο τιμή για το ύψος. Στην περίπτωση (iii), για κάθε ώρα της ημέρας βρίσκουμε ακριβώς μία θερμοκρασία, άρα η σχέση είναι συνάρτηση. Ωστόσο, η ίδια θερμοκρασία μπορεί να καταγραφεί δύο ή και περισσότερες ώρες της ημέρας. Επομένως το μέγεθος που καθορίζει την τιμή του άλλου είναι η ώρα της ημέρας και όχι η θερμοκρασία.



2. Παρακάτω δίνονται τα τέσσερα πρώτα σχήματα ενός μοτίβου.



α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών.

Αριθμός σχήματος (ν)	1	2	3	4	5	6
Πλήθος τετραγώνων (τ)	1	3	5			

β) Αν ν είναι ο αριθμός του σχήματος και τ το πλήθος των τετραγώνων του, γράψτε τον τύπο της συνάρτησης με βάση τον οποίο στον αριθμό ν κάθε σχήματος να μπορούμε να αντιστοιχίσουμε τον αριθμό τ των τετραγώνων του.

γ) Πόσα τετράγωνα θα έχει το σχήμα 32;

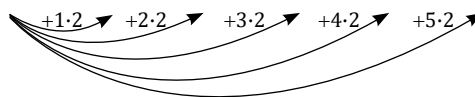
Απάντηση

α) Παρατηρούμε ότι κάθε σχήμα έχει δύο περισσότερα τετράγωνα από το προηγούμενό του:

Αριθμός σχήματος (ν)	1	2	3	4	5	6
Πλήθος τετραγώνων (τ)	1	$\xrightarrow{+2}$ 3	$\xrightarrow{+2}$ 5	$\xrightarrow{+2}$ 7	$\xrightarrow{+2}$ 9	$\xrightarrow{+2}$ 11

β) Ξεκινώντας κάθε φορά από το σχήμα 1, για να βρούμε πόσα τετράγωνα έχει το σχήμα 2, θα προσθέσουμε μία φορά το 2, για το σχήμα 3 θα προσθέσουμε δύο φορές το 2 κ.ο.κ.

Αριθμός σχήματος (ν)	1	2	3	4	5	6
Πλήθος τετραγώνων (τ)	1	3	5	7	9	11



Δηλαδή $3=1+1\cdot 2$, $5=1+2\cdot 2$, $7=1+3\cdot 2$ κ.ο.κ.

Γενικά, για να βρούμε πόσα τετράγωνα έχει το σχήμα ν, θα προσθέσουμε ν-1 φορές το 2. Άρα η ζητούμενη σχέση είναι:

$$\tau = 1 + (n - 1) \cdot 2$$

γ) Για να βρούμε πόσα τετράγωνα θα έχει το σχήμα 32, στην παραπάνω σχέση βάζουμε το 32 στη θέση του ν και έχουμε:

$$\tau = 1 + (32 - 1) \cdot 2 = 1 + 31 \cdot 2 = 63$$

Άρα το σχήμα 32 θα έχει 63 τετράγωνα.



Παιχνίδι ρόλων
για τη συνάρτηση



Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε

Να κατασκευάσετε έναν πίνακα έννοιας για τη συνάρτηση.



Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις να βρείτε την τιμή της μεταβλητής y για τις τιμές της x που δίνονται:

α) $y = 2x - 1, x = 3$ β) $y = \frac{2}{x} + 1, x = -1$ γ) $y = (x - 2)^2 + 1, x = 4$

2. Στις παρακάτω περιπτώσεις ποιο από τα δύο μεγέθη εκφράζεται ως συνάρτηση του άλλου;

α) κόστος αγοράς - είδος προϊόντος

β) εμβαδόν ενός δωματίου ξενοδοχείου - αριθμός δωματίου

γ) αριθμός εμφάνισης (μπλούζας) του αθλητή μιας ομάδας - ύψος του αθλητή

3. Να χρησιμοποιήσετε μεταβλητές, για να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης που περιγράφεται στις παρακάτω φράσεις:

α) Το αποτέλεσμα είναι τριπλάσιο του αριθμού αυξημένο κατά 12.

β) Το αποτέλεσμα είναι το μισό του αριθμού μειωμένο κατά τρία.

γ) Το αποτέλεσμα είναι ίσο με το άθροισμα του αριθμού με το 3, πολλαπλασιασμένο με τον ίδιο τον αριθμό.

4. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης $y = x^2 - 1$.

x	-2	-1	0	1	2
y					



Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

5. Να αντιστοιχίσετε στις συναρτήσεις της στήλης Α τους πίνακες τιμών της στήλης Β.

A	B												
α. $y = 2x - 1$	i. <table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>-2</td> <td>-1</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>4</td> <td>3</td> <td>2</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> </table>	x	-2	-1	0	1	2	y	4	3	2	1	0
	x	-2	-1	0	1	2							
y	4	3	2	1	0								
β. $y = 2 - x^2$	ii. <table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>-2</td> <td>-1</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>-5</td> <td>-3</td> <td>-1</td> <td>1</td> <td>3</td> </tr> </table>	x	-2	-1	0	1	2	y	-5	-3	-1	1	3
x	-2	-1	0	1	2								
y	-5	-3	-1	1	3								
γ. $y = 2 - x$	iii. <table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>-2</td> <td>-1</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>-2</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>1</td> <td>-2</td> </tr> </table>	x	-2	-1	0	1	2	y	-2	1	2	1	-2
x	-2	-1	0	1	2								
y	-2	1	2	1	-2								

6. Μια εταιρεία, για να υπολογίσει την τελική τιμή ενός προϊόντος, βρίσκει το διπλάσιο του κόστους των υλικών που χρειάζονται για την παρασκευή του και προσθέτει επιπλέον 5 €. Αν T είναι η τιμή του προϊόντος και Y το κόστος των υλικών, να γράψετε μια σχέση που να εκφράζει την T ως συνάρτηση του Y .
7. Σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις θεωρείτε ότι υπάρχει κάποια σχέση ανάμεσα στα δύο μεγέθη; Σε ποιες περιπτώσεις η σχέση αυτή είναι συνάρτηση;
- α) ώρες μελέτης – βαθμός στο διαγώνισμα
β) ταχύτητα – χρώμα αυτοκινήτου
γ) ακτίνα – περίμετρος κύκλου
δ) ποσοστό ευστοχίας στην προπόνηση – ποσοστό ευστοχίας στον αγώνα
8. Γνωρίζουμε ότι η μεταβλητή y εκφράζεται ως συνάρτηση της μεταβλητής x . Ποιος ή ποιοι από τους παρακάτω πίνακες μπορεί να είναι ο πίνακας ή οι πίνακες τιμών της συνάρτησης;

α)

x	y
3,5	-2
2,5	3
-1	7
4	7
1	4

β)

x	y
1	-2
2,5	3
-2	7
-0,5	$\frac{1}{3}$
-0,5	4

γ)

x	y
-3	9
-2	9
0	9
2	9
-1	9

9. Το διάστημα S (σε km) που διανύει σε χρόνο t (σε ώρες) ένα αυτοκίνητο που κινείται με ταχύτητα 80 km/h δίνεται από τη σχέση $S = 80t$. Πόση απόσταση θα έχει διανύσει το αυτοκίνητο μετά από 2,5 h;
10. Ένα κατάστημα κάνει έκπτωση 10% σε όλα τα είδη του.
- α) Αν ϵ είναι το ποσό της έκπτωσης σε € και α η αρχική τιμή ενός προϊόντος, να γράψετε μια σχέση που να εκφράζει το ποσό ϵ ως συνάρτηση της τιμής α .
- β) Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών:

Αρχική τιμή α	60 €	90 €	100 €	130 €	140 €
Ποσό έκπτωσης €					

11. Ένας χώρος στάθμευσης αυτοκινήτων χρεώνει με 3 € την είσοδο και με 2 € κάθε ώρα παραμονής. Ποια από τις παρακάτω σχέσεις εκφράζει το κόστος y ως συνάρτηση του χρόνου x παραμονής στον χώρο στάθμευσης;
- α) $y = 3x + 2$ β) $y = 2x + 3$ γ) $y = 3 + \frac{x}{2}$ δ) $y = 2x - 3$
12. Σε μια συνάρτηση, κάθε φυσικός αριθμός x αντιστοιχεί σε έναν αριθμό y . Παρακάτω δίνεται ένας πίνακας τιμών της συνάρτησης αυτής.

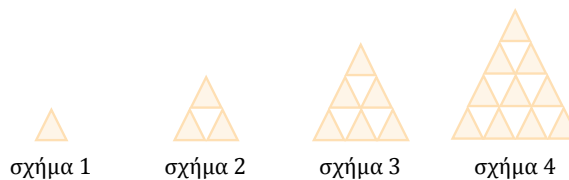
x	1	2	3	4	5
y	2	4	6	8	10

Ποιον τύπο θα μπορούσε να έχει η συνάρτηση αυτή; Ποιος αριθμός y αντιστοιχεί στον $x = 23$;

- 13.** Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές x και y έχει εμβαδόν 20 cm .
- α)** Να βρείτε μια σχέση που να εκφράζει το μήκος y ως συνάρτηση του μήκους x .
- β)** Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	1	2	4	5	10
y					

- 14.** Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές x και y έχει περίμετρο 30 cm . Να βρείτε μια σχέση που να εκφράζει:
- α)** το μήκος y ως συνάρτηση του μήκους x ,
- β)** το εμβαδόν E ως συνάρτηση του μήκους x .
- 15.** Παρακάτω φαίνονται τα πρώτα τέσσερα σχήματα ενός μοτίβου.



- α)** Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών.

Αριθμός σχήματος (n)	1	2	3	4	5	6
Πλήθος μικρών τριγώνων (τ)	1	4	9	16		

- β)** Αν n ο αριθμός του σχήματος και τ το πλήθος των μικρών τριγώνων, να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης με βάση τον οποίο στον αριθμό n κάθε σχήματος να μπορούμε να αντιστοιχίσουμε τον αριθμό τ των τριγώνων του.
- γ)** Πόσα μικρά τρίγωνα θα έχει το σχήμα 10;

Δ1. Σημεία και αριθμοί στον χάρτη

Ένας πειρατής μοίρασε τον θησαυρό του και τον έκρυψε σε τρία διαφορετικά σημεία Α, Β και Γ με τον εξής τρόπο:

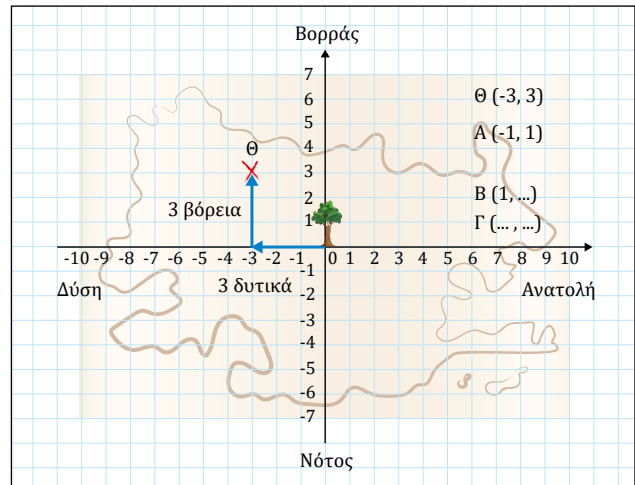
Για κάθε σημείο, ξεκίνησε από το μεγαλύτερο δέντρο του νησιού (το 0 των δύο αξόνων). Αρχικά περπάτησε κατά μήκος του άξονα δύση-ανατολή (άλλες φορές προς τα ανατολικά και άλλες προς τα δυτικά). Όταν πήγαινε κάποια απόσταση δυτικά, έστριβε και συνέχιζε την ίδια απόσταση προς τα βόρεια, ενώ, όταν πήγαινε ανατολικά, έστριβε και συνέχιζε την ίδια απόσταση προς τα νότια. Για παράδειγμα, για να φτάσει στο σημείο Θ, θα έπρεπε να περπατήσει 3 km προς τα δυτικά και μετά την ίδια απόσταση, δηλαδή 3 km, προς τα βόρεια.

Στη συνέχεια έφτιαξε τον διπλανό χάρτη, όπου σημείωσε μόνο ένα παραπλανητικό σημείο Θ, ενώ για τα πραγματικά σημεία Α, Β και Γ του θησαυρού έγραψε τις πληροφορίες που φαίνονται στην επάνω δεξιά γωνία, από τις οποίες όμως κάποιες σβήστηκαν.

α) Πού βρίσκονται τα σημεία Α και Β του θησαυρού στον χάρτη;

β) Ακολουθήστε την ίδια διαδικασία με τον πειρατή για διάφορες τιμές της απόστασης από το δέντρο στον άξονα δύση-ανατολή, ώστε να βρείτε διάφορες πιθανές θέσεις για το σημείο Γ, και σημειώστε τις στον χάρτη.

γ) Αν πούμε x τον πρώτο αριθμό της θέσης του σημείου Γ και y τον δεύτερο, να εκφράσετε τον y ως συνάρτηση του x . Τι σχήμα υποθέτετε ότι θα προκύψει αν σημειώσετε όλες τις πιθανές θέσεις του σημείου Γ;

**Συζητάμε**

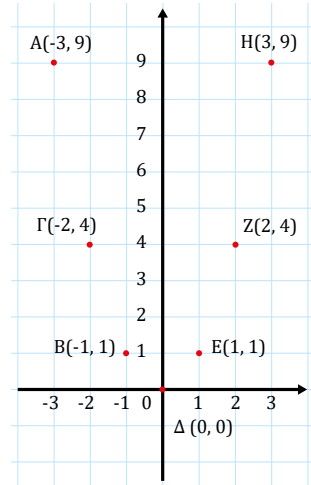
...για τη γραφική παράσταση

Ας υποθέσουμε ότι μια μεταβλητή y εκφράζεται ως συνάρτηση μιας μεταβλητής x . Τότε μπορούμε να βρούμε όλα τα σημεία του επιπέδου με συντεταγμένες (x, y) , αρκεί να γνωρίζουμε μόνο την τιμή του x . Επιλέγοντας διάφορες τιμές για τη μεταβλητή x , βρίσκουμε αντίστοιχα σημεία.

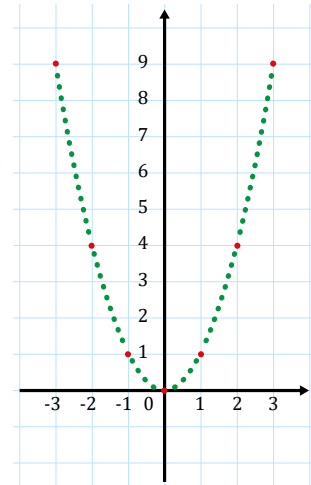
Για παράδειγμα, αν $y = x^2$, από τον πίνακα:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^2$	$(-3)^2 = 9$	$(-2)^2 = 4$	$(-1)^2 = 1$	$0^2 = 0$	$1^2 = 1$	$2^2 = 4$	$3^2 = 9$
(x, y)	$(-3, 9)$	$(-2, 4)$	$(-1, 1)$	$(0, 0)$	$(1, 1)$	$(2, 4)$	$(3, 9)$

προκύπτουν τα σημεία που φαίνονται στο διπλανό σχήμα.



Παίρνοντας όλο και περισσότερα σημεία της συνάρτησης $y = x^2$, βλέπουμε ότι σχηματίζεται μια καμπύλη γραμμής.



Όπως έχουμε μάθει σε προηγούμενες τάξεις, με τη βοήθεια ενός **καρτεσιανού** συστήματος αξόνων, σε κάθε ζεύγος αριθμών αντιστοιχεί ένα σημείο του επιπέδου και αντίστροφα.

Τους αριθμούς αυτούς τους ονομάζουμε **συντεταγμένες του σημείου**. Τον πρώτο τον ονομάζουμε **τετμημένη** και τον δεύτερο **τεταγμένη**.

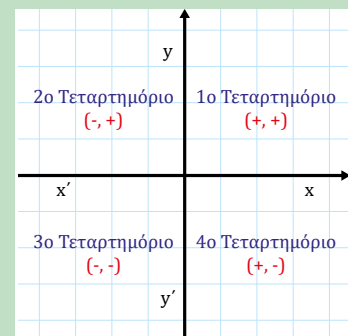
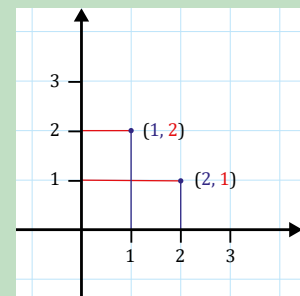
Ένα ζεύγος συντεταγμένων είναι **διατεταγμένο**, δηλαδή έχει σημασία ποιος αριθμός είναι πρώτος και ποιος δεύτερος.

Για παράδειγμα, τα σημεία $(2, 1)$ και $(1, 2)$ είναι διαφορετικά.

Η τετμημένη δείχνει πόσο δεξιά ή αριστερά βρίσκεται το σημείο από τον κατακόρυφο άξονα.

Η τεταγμένη δείχνει πόσο πάνω ή κάτω βρίσκεται το σημείο από τον οριζόντιο άξονα.

Ένα σύστημα αξόνων χωρίζει το επίπεδο σε τέσσερα μέρη, τα οποία ονομάζουμε **τεταρτημόρια**. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το πρόσημο της τετμημένης και το πρόσημο της τεταγμένης σε καθένα από αυτά.





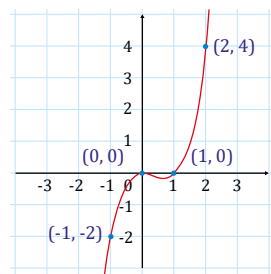
Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Ονομάζουμε **γραφική παράσταση** μιας συνάρτησης τα σημεία (x, y) του επιπέδου των οποίων η τιμή της τεταγμένης y προκύπτει, μέσω της συνάρτησης, από την τιμή της τετμημένης x .

Γιατί ένα σημείο που είναι στον οριζόντιο άξονα έχει τεταγμένη 0; Και γιατί ένα σημείο του κατακόρυφου άξονα έχει τετμημένη 0;

Κάποια από τα σημεία της γραφικής παράστασης της $y = x^2(x - 1)$ είναι τα παρακάτω:

x	y
-1	-2
0	0
1	0
2	4



Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. Ποια από τα σημεία A, B και Γ του διπλανού σχήματος ανήκουν στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 3 - x$;

Απάντηση

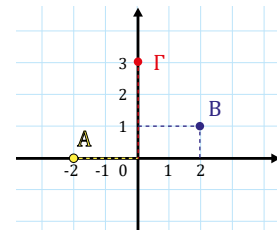
Οι συντεταγμένες των σημείων είναι $A(-2, 0)$, $B(2, 1)$, $\Gamma(0, 3)$.

Για να ανήκει ένα σημείο στη γραφική παράσταση της συνάρτησης, θα πρέπει η τιμή της τεταγμένης να είναι αυτή που προκύπτει από τη σχέση $y = 3 - x$, αν αντικαταστήσουμε το x με την τιμή της τετμημένης του σημείου.

Για το $A(-2, 0)$: $y = 3 - (-2) = 3 + 2 = 5$, που είναι διαφορετικό του 0, άρα δεν ανήκει στη γραφική παράσταση.

Για το $B(2, 1)$: $y = 3 - 1 = 2$, άρα ανήκει στη γραφική παράσταση.

Για το $\Gamma(0, 3)$: $y = 3 - 0 = 3$, άρα ανήκει στη γραφική παράσταση.

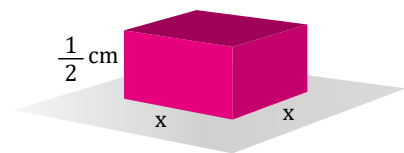


2. Ένα κουτί σχήματος ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου έχει τετράγωνη βάση πλευράς x cm και ύψος $\frac{1}{2}$ cm. Το μήκος x της πλευράς της βάσης είναι από 1 cm μέχρι και 4 cm.

α) Να βρείτε μια σχέση που να συνδέει τον όγκο y του κουτιού με το μήκος x της πλευράς.

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης που συνδέει τον όγκο y με το μήκος x της πλευράς της βάσης, όταν:

i) το μήκος x μπορεί να είναι 1, 2, 3 ή 4, ii) το μήκος x παίρνει όλες τις τιμές από 1 έως 4.



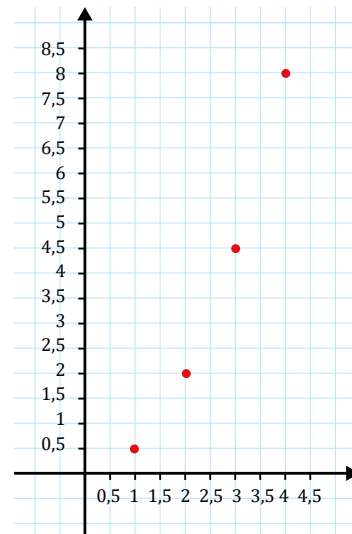
Απάντηση

- α) Ο όγκος ενός ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου είναι ίσος με το ύψος επί το εμβαδόν της βάσης του. Το ύψος είναι $\frac{1}{2}$ cm και η βάση είναι τετράγωνο με πλευρά x και εμβαδόν x^2 . Άρα ο όγκος y δίνεται από τη σχέση

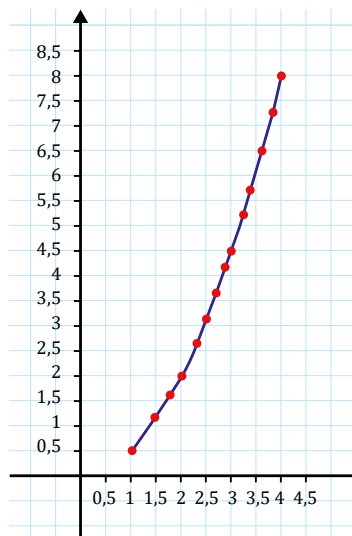
$$y = \frac{1}{2}x^2.$$

β) i) Η γραφική παράσταση αποτελείται από τα σημεία που προκύπτουν για $x = 1, 2, 3$ και 4 :

Μήκος x	Όγκος $y = \frac{1}{2}x^2$	Ζεύγος (x, y)
1	0,5	(1, 0,5)
2	2	(2, 2)
3	4,5	(3, 4,5)
4	8	(4, 8)



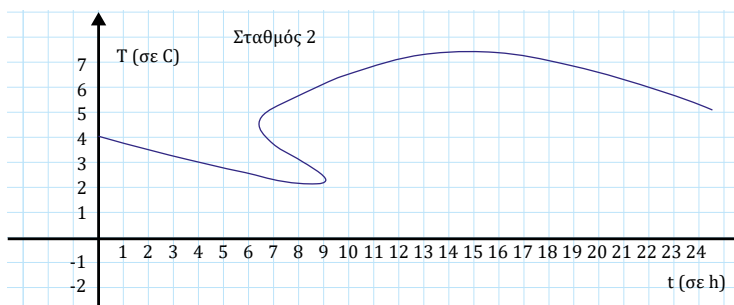
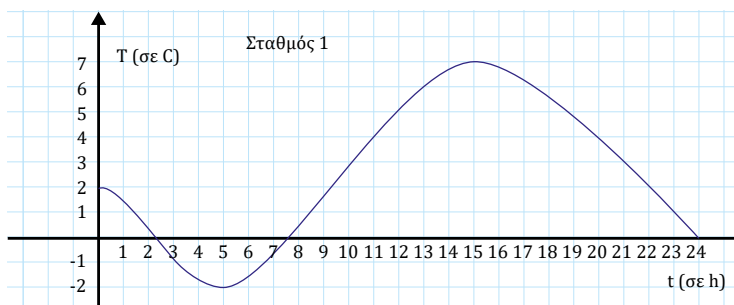
ii) Στην περίπτωση αυτή, εκτός από τα σημεία του ερωτήματος (βι) πρέπει να συμπεριληφθούν και όλα τα ενδιάμεσα. Μπορούμε να βρούμε μερικά επιπλέον σημεία, όμως είναι αδύνατο να τα βρούμε όλα, αφού είναι άπειρα. Περιοριζόμαστε λοιπόν σε τόσα σημεία, όσα χρειάζονται ώστε να αρχίσει να εμφανίζεται η μορφή της καμπύλης.



Το μήκος x της πλευράς είναι από 1 cm έως 4 cm, άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης δεν έχει σημεία με τετμημένη έξω από το διάστημα αυτό.



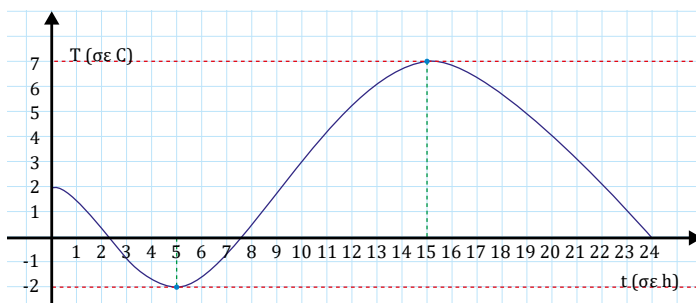
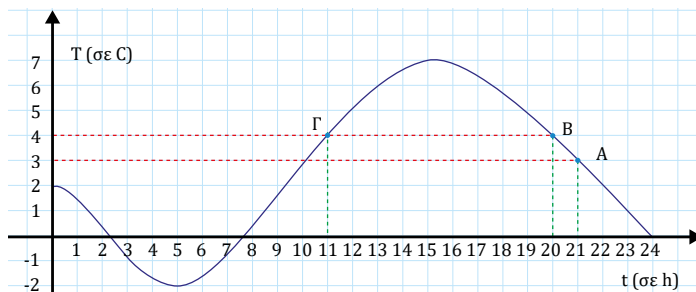
3. Στο κέντρο μιας πόλης υπάρχουν δύο μετεωρολογικοί σταθμοί που κατέγραψαν τη θερμοκρασία κατά τη διάρκεια ενός εικοσιτετραώρου. Το όργανο καταγραφής (θερμογράφος) κάθε σταθμού αποτύπωσε τις θερμοκρασίες σε γραφικές παραστάσεις, όπως φαίνονται δίπλα. Ο ένας όμως από τους δύο σταθμούς δε λειτούργησε σωστά.



- α) Ποιο από τα δύο όργανα δε λειτούργησε σωστά και πώς φαίνεται αυτό;
 β) i) Ποια ήταν η θερμοκρασία στις 21:00;
 ii) Ποια ή ποιες ώρες της ημέρας η θερμοκρασία ήταν $4\text{ }^{\circ}\text{C}$;
 γ) Ποια ώρα της ημέρας καταγράφηκε η μεγαλύτερη θερμοκρασία και ποια ώρα η μικρότερη; Ποιες ήταν οι θερμοκρασίες αυτές;

Απάντηση

- α) Ο σταθμός που δε λειτούργησε σωστά ήταν ο σταθμός 2, γιατί σε κάποιες ώρες της ημέρας, για παράδειγμα στις 08:00, αντιστοιχούν περισσότερες από μία θερμοκρασίες.
 β) i) Το σημείο A της γραφικής παράστασης με τεταγμένη $t = 21$ έχει τεταγμένη περίπου 3. Άρα η θερμοκρασία στις 21:00 ήταν περίπου $3\text{ }^{\circ}\text{C}$.
 ii) Βρίσκουμε τα σημεία της γραφικής παράστασης με τεταγμένη 4. Παρατηρούμε ότι υπάρχουν δύο τέτοια σημεία, τα B και Γ. Βρίσκουμε ότι οι τεταγμένες τους είναι 20 και 11. Άρα η θερμοκρασία ήταν $4\text{ }^{\circ}\text{C}$ στις 11:00 και στις 20:00.
 γ) Από τη γραφική παράσταση διαπιστώνουμε ότι η χαμηλότερη θερμοκρασία ήταν $-2\text{ }^{\circ}\text{C}$ και καταγράφηκε στις 5:00 και η υψηλότερη ήταν $7\text{ }^{\circ}\text{C}$ και καταγράφηκε στις 15:00.



Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης μας δίνει μια συνοπτική εικόνα της, από την οποία μπορούμε να αντλήσουμε πληροφορίες γι' αυτήν.



Βρίσκω τη θερμοκρασία

4. Τα A, B και Γ του σχήματος είναι σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τύπο $y = \frac{6-x}{2}$. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες τους.

Απάντηση

Το σημείο A είναι στον κατακόρυφο άξονα, άρα η τεταγμένη του είναι 0. Αντικαθιστώντας στον τύπο της συνάρτησης όπου x το 0, έχουμε:

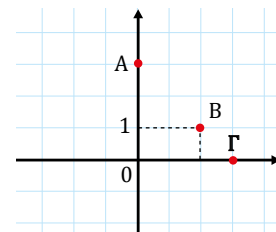
$$y = \frac{6-0}{2} = 3$$

Επομένως οι συντεταγμένες του A είναι $(0, 3)$.

Το σημείο B έχει τεταγμένη 1, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αντικαθιστώντας στον τύπο της συνάρτησης όπου y το 1, έχουμε την παρακάτω εξίσωση, με άγνωστο την τεταγμένη του B, την οποία λύνουμε:

$$1 = \frac{6-x}{2} \quad \text{ή} \quad 1 \cdot 2 = 6 - x \quad \text{ή} \quad 2 = 6 - x \quad \text{ή} \quad x = 6 - 2 \quad \text{ή} \quad x = 4$$

Επομένως οι συντεταγμένες του B είναι $(4, 1)$.



Το σημείο Γ είναι στον οριζόντιο άξονα, άρα η τεταγμένη του είναι 0. Αντικαθιστώντας στον τύπο της συνάρτησης όπου y το 0, έχουμε την παρακάτω εξίσωση, την οποία λύνουμε και βρίσκουμε την τεταγμένη του Γ:

$$0 = \frac{6-x}{2} \text{ ή } 6-x=0 \text{ ή } -x=-6 \text{ ή } x=6$$

Επομένως το Γ είναι το σημείο (6, 0).



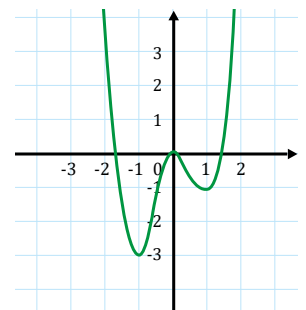
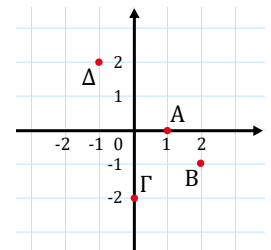
Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε

1. Με ποιους τρόπους μπορούμε να αναπαραστήσουμε μια συνάρτηση; Δώστε παραδείγματα.
2. Μπορούμε να αναπαραστήσουμε κάθε συνάρτηση με όλους τους δυνατούς τρόπους;



Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Ποια από τα σημεία $A(2, 3)$, $B(-1, 3)$, $\Gamma(-3, 0)$ και $\Delta(0, 1)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x + 1$;
2. Ποια από τα σημεία του διπλανού σχήματος ανήκουν στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -x + 1$;
3. Ποια από τα σημεία $A(2, -2)$, $B(0, 0)$, $\Gamma(-1, -3)$ και $\Delta(-1, 1)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της συνάρτησης που δίνεται στο διπλανό σχήμα;

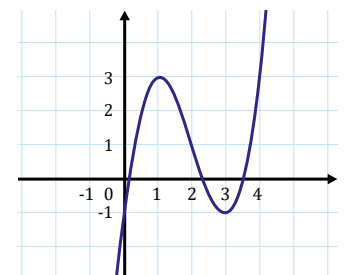


Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

4. Για τη συνάρτηση του διπλανού σχήματος:
α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών:

x	1	2	3	4
y				

- β) Να βρείτε τις τιμές της μεταβλητής x για τις οποίες $y = -1$.



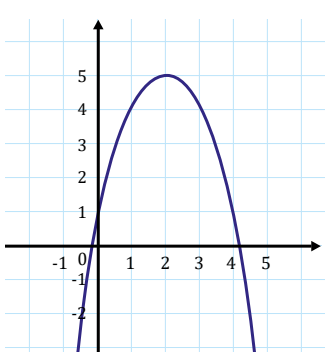
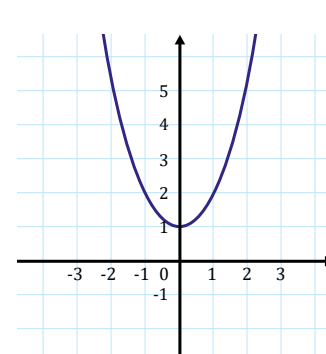
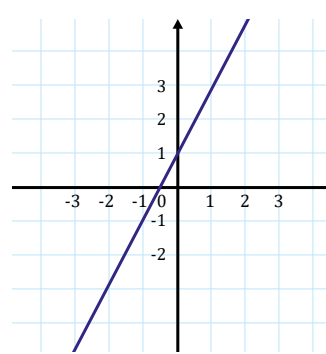
5. Στις παρακάτω περιπτώσεις, να συμπληρώσετε τις συντεταγμένες των σημείων A και B, ώστε να ανήκουν στη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

α) $y = 2x - 1$, A(2, ...), B(..., 5)

β) $y = \frac{1}{x}$, A(2, ...), B(..., 1)

γ) $y = -3x + 2$, A(-1, ...), B(..., 4)

6. Να αντιστοιχίσετε τις συναρτήσεις της γραμμής A με τις γραφικές παραστάσεις της γραμμής B.

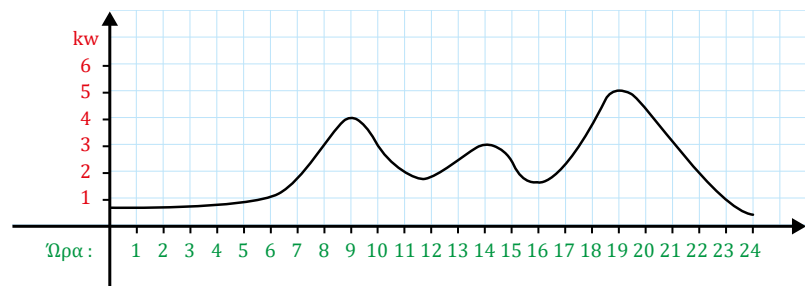
A	α. $y = 2x + 1$	β. $y = x^2 + 1$	γ. $y = 1 + 4x - x^2$
B	i. 	ii. 	iii. 

7. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ο ρυθμός κατανάλωσης, σε kw, ηλεκτρικής ενέργειας ενός νοικοκυριού ως συνάρτηση του χρόνου, κατά τη διάρκεια ενός εικοσιτετραώρου.

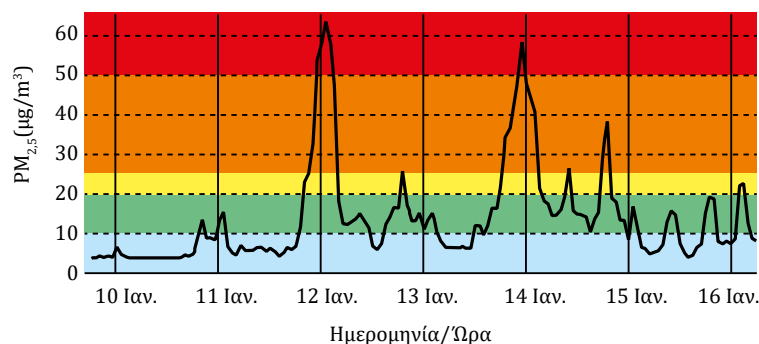
α) Ποιος ήταν ο ρυθμός κατανάλωσης στις 06:00;

β) Ποιες ώρες της ημέρας ο ρυθμός κατανάλωσης ήταν 3 kw;

γ) Ποια ώρα της ημέρας είχαμε τον μέγιστο ρυθμό κατανάλωσης και ποιος ήταν αυτός;



8. Στο σχήμα δίνεται η συγκέντρωση μικροσωματιδίων στην ατμόσφαιρα σε $\mu\text{g}/\text{m}^3$, σε μια αστική περιοχή, από τις 10 έως και τις 15 Ιανουαρίου (οι κατακόρυφες γραμμές αντιστοιχούν στην ώρα 00:00).

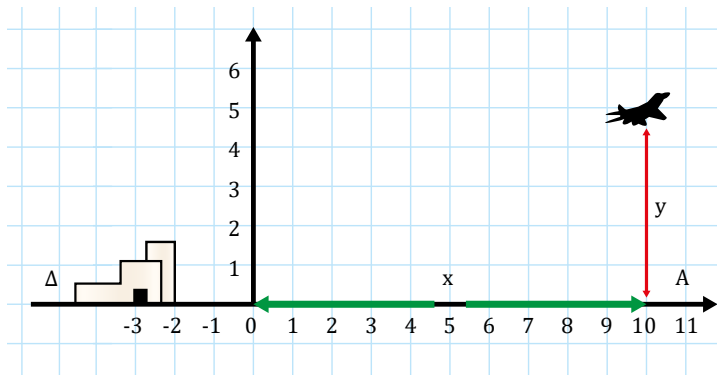


α) Ποια ήταν η συγκέντρωση στις 15 Ιανουαρίου και ώρα 00:00;

β) Κατά τη διάρκεια ποιας ημέρας καταγράφηκε η μεγαλύτερη συγκέντρωση και πόση ήταν αυτή;

Δ1. Απογείωση αεροπλάνου

Σε ένα αεροδρόμιο, τα αεροπλάνα προσγειώνονται και απογειώνονται κινούμενα από δυτικά προς ανατολικά. Ο πύργος ελέγχου, για να ελέγχει την κυκλοφορία, σημειώνει τη θέση κάθε αεροπλάνου στο παρακάτω σχεδιάγραμμα.



Ένα μαχητικό αεροπλάνο κατά τη διάρκεια της απογείωσής του κινείται με τέτοιο τρόπο, ώστε το ύψος του y από το έδαφος να είναι το μισό από την οριζόντια απομάκρυνσή του x από το αεροδρόμιο.

- α) Να εκφράσετε το ύψος y ως συνάρτηση της απομάκρυνσης x .
 β) Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών και να σημειώσετε τις αντίστοιχες θέσεις του αεροπλάνου στο σχεδιάγραμμα.

Απομάκρυνση x	2 km	3 km	4 km	5 km	8 km
Ύψος y					

- γ) Με βάση τα σημεία που προκύπτουν από τον πίνακα του ερωτήματος (β), να σχεδιάσετε την τροχιά του αεροπλάνου. Τι είδους γραμμή είναι;
 δ) Πόσο μεταβάλλεται το ύψος y του αεροπλάνου, όταν η οριζόντια απόσταση x αυξάνεται κατά 1 km;



Συζητάμε

...για τη συνάρτηση $y = ax$

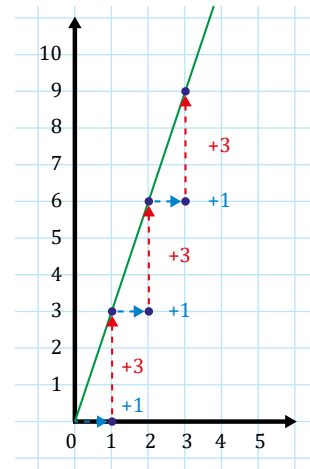
Όταν δύο ποσά είναι ανάλογα, ο λόγος τους είναι σταθερός. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον λόγο αυτό, ώστε να εκφράσουμε το ένα ποσό ως συνάρτηση του άλλου.

Για παράδειγμα, σε μια συνταγή για ψωμί, για κάθε 1 kg αλεύρι χρειάζονται 0,6 kg νερό, δηλαδή ο λόγος νερού N προς αλεύρι A είναι $\frac{N}{A} = 0,6$. Άρα για 2 kg αλεύρι θα χρειαστούν $0,6 \cdot 2$ kg νερό, για 3 kg αλεύρι θα χρειαστούν $0,6 \cdot 3$ kg νερό κτλ. Γενικά, για A kg αλεύρι χρειάζονται $N = 0,6 \cdot A$ kg νερό.

Άρα δύο ανάλογα ποσά x και y με λόγο $\frac{y}{x} = \alpha$ συνδέονται με μια σχέση της μορφής $y = ax$.

Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση μιας τέτοιας συνάρτησης είναι μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Επίσης, βλέπουμε ότι ο συντελεστής αναλογίας α δείχνει πόσο μεταβάλλεται η τιμή του y για κάθε μονάδα που αυξάνεται η τιμή του x .

Για παράδειγμα, η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 3x$ είναι μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και για κάθε μονάδα που αυξάνεται η τιμή του x η τιμή του y αυξάνεται κατά 3.



Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

- Δύο **ανάλογα ποσά x και y** μεταβάλλονται με τέτοιον τρόπο, ώστε ο λόγος $\frac{y}{x} = \alpha$ να παραμένει **σταθερός**. Τον αριθμό α τον ονομάζουμε **σταθερά αναλογίας**.
- Αν τα ποσά x και y είναι **ανάλογα**, μπορούμε να εκφράσουμε το y ως συνάρτηση του x με τη σχέση $y = ax$, όπου a η σταθερά αναλογίας.

Αν δύο ποσά είναι ανάλογα και πολλαπλασιάσουμε το ένα με έναν αριθμό, τότε πολλαπλασιάζεται με τον ίδιο αριθμό και το άλλο.

Η γραφική παράσταση $y = ax$ της συνάρτησης είναι μια **ευθεία** που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Τη σχέση $y = ax$ την ονομάζουμε και **εξίσωση της ευθείας**. Μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η ευθεία $y = ax$ περνάει από την αρχή των αξόνων και από το γεγονός ότι οι συντεταγμένες $(0, 0)$ της αρχής επαληθεύουν τη σχέση $0 = a \cdot 0$.

Τον αριθμό α τον ονομάζουμε **κλίση** της ευθείας.

Όταν αυξάνεται η τιμή της μεταβλητής x κατά μία μονάδα, τότε η τιμή της y μεταβάλλεται σταθερά κατά α , δηλαδή όσο είναι η κλίση της ευθείας. Ειδικά όταν $\alpha = 0$, η τιμή της μεταβλητής y είναι σταθερή και ίση με 0. Στην περίπτωση αυτή, η ευθεία συμπίπτει με τον άξονα x' .

Στη συνέχεια, όταν θα αναφερόμαστε στην ευθεία που είναι γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax$, θα λέμε η ευθεία με εξίσωση $y = ax$ ή απλώς η ευθεία $y = ax$.



Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. Η συνταγή για παντεσπάνι της μαγείρισσας της Μαρίας Αντουανέτας ανάμεσα σε άλλα αναφέρει: «Προσθέτουμε 5 μέρη αλεύρι και 4 μέρη ζάχαρη». Αν Z είναι η ποσότητα της ζάχαρης και A η ποσότητα του αλευριού, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Αλεύρι A	500 gr	800 gr		
Ζάχαρη Z			200 gr	300 gr

Απάντηση

Εκφράζουμε την ποσότητα Z ως συνάρτηση της A . Από τη συνταγή συμπεραίνουμε ότι η σταθερά αναλογίας είναι

$$\alpha = \frac{Z}{A} = \frac{4}{5} = 0,8. \text{ Άρα } Z = 0,8 \cdot A.$$

Επομένως:

- για $A = 500$ gr βρίσκουμε $Z = 0,8 \cdot 500 = 400$ gr,
- για $A = 800$ gr βρίσκουμε $Z = 0,8 \cdot 800 = 640$ gr.

Αντίστοιχα, εκφράζουμε την ποσότητα A ως συνάρτηση της Z . Εδώ η σταθερά αναλογίας α' δίνεται από τη

$$\text{σχέση } \alpha' = \frac{A}{Z} = \frac{5}{4} = 1,2. \text{ Άρα } A = 1,2 \cdot Z.$$

Επομένως:

- για $Z = 200$ gr βρίσκουμε $A = 1,2 \cdot 200 = 240$ gr,
- για $Z = 300$ gr βρίσκουμε $A = 1,2 \cdot 300 = 360$ gr.

Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι:

Αλεύρι A	500 gr	800 gr	240 gr	360 gr
Ζάχαρη Z	400 gr	640 gr	200 gr	300 gr

2. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης της οποίας η γραφική παράσταση είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και η τιμή του y μειώνεται κατά 2 μονάδες για κάθε μονάδα που αυξάνεται η τιμή του x . Στη συνέχεια να σχεδιάσετε την ευθεία αυτή σε ένα καρτεσιανό σύστημα αξόνων.

Απάντηση

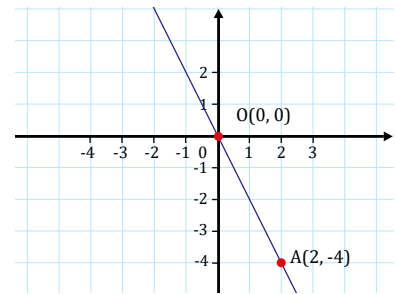
Η κλίση της ευθείας είναι ίση με τη μεταβολή του y , για κάθε μονάδα που αυξάνεται η τιμή του x . Η μεταβολή αυτή είναι αρνητική, αφού η τιμή του y μειώνεται, άρα $\alpha = -2$. Επομένως η συνάρτηση είναι η $y = -2x$.

Για να τη σχεδιάσουμε, εκτός από την αρχή των αξόνων πρέπει να βρούμε ακόμα ένα σημείο της.

Επιλέγουμε τυχαία $x = 2$ και βρίσκουμε $y = -2 \cdot 2 = -4$. Επομένως ένα δεύτερο σημείο είναι το $A(2, -4)$.

Επιλέξαμε τυχαία την τιμή $x = 2$ καθώς, για να σχεδιάσουμε μια ευθεία, αρκεί να βρούμε δύο οποιαδήποτε σημεία της. Για παράδειγμα, θα μπορούσαμε να θέσουμε $x = 1$ και να βρούμε το σημείο $B(1, -2)$.

Σημειώνουμε τα σημεία στο καρτεσιανό επίπεδο και σχεδιάζουμε την ευθεία.

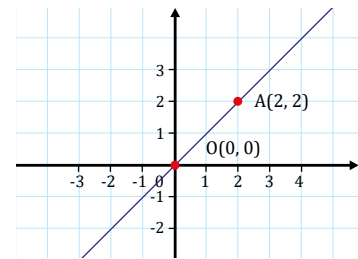


- 3. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο διπλανό σχήμα.**

Απάντηση

Η γραφική παράσταση είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, οπότε ο τύπος της συνάρτησης είναι της μορφής $y = ax$.

Το σημείο $A(2, 2)$ ανήκει στην ευθεία, άρα για $x = 2$ και $y = 2$ βρίσκουμε τη σταθερά αναλογίας $a = \frac{2}{2} = 1$. Επομένως ο τύπος της συνάρτησης είναι ο $y = x$.



Βρείτε την κλίση



Ξαναπατάω στην ευθεία

Μπορούμε επίσης να βρούμε ότι η κλίση είναι 1 από τη γραφική παράσταση, καθώς παρατηρούμε ότι, όταν η τιμή του x αυξάνεται κατά 1, τότε και η αντίστοιχη τιμή του y αυξάνεται κατά 1.

Η ευθεία $y = x$ είναι η διχοτόμος της 1ης και της 3ης γωνίας (δηλαδή του 1ου και του 3ου τεταρτημορίου) των αξόνων, καθώς τα σημεία της ισαπέχουν από τους άξονες.

Μπορείτε να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης που αντιστοιχεί στη διχοτόμο της 2ης και της 4ης γωνίας των αξόνων;

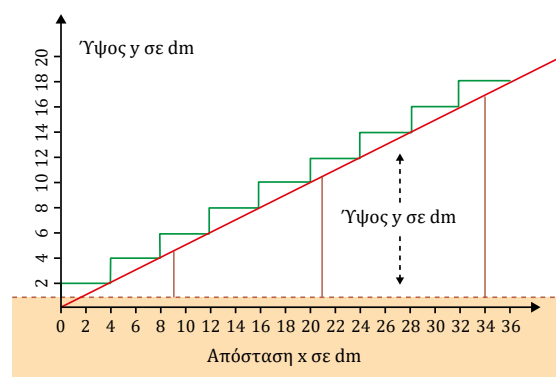
- 4. Στη σκάλα του διπλανού σχήματος κάθε σκαλοπάτι έχει πλάτος 4 dm και ύψος 2 dm. Ένας μηχανικός θέλει να τοποθετήσει τρία υποστύλωματα σε απόσταση 9 dm, 21 dm και 34 dm από την αρχή της. Πόσο ύψος πρέπει να έχει το καθένα από αυτά;**

Απάντηση

Για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε το ύψος των υποστυλωμάτων, πρέπει να εκφράσουμε το y της σκάλας ως συνάρτηση της απόστασης x από την αρχή της. Η βάση της σκάλας είναι ευθεία που περνάει από το $(0, 0)$, άρα η συνάρτηση είναι της μορφής $y = ax$.

Επειδή το κάθε σκαλοπάτι έχει πλάτος 4 dm και ύψος 2 dm, για κάθε 1 dm που αυξάνεται η απόσταση x το ύψος y αυξάνεται κατά $\frac{2}{4} = 0,5$ dm. Άρα $a = 0,5$ και $y = 0,5x$.

Επομένως το ύψος των υποστυλωμάτων πρέπει να είναι $0,5 \cdot 9 = 4,5$ dm, $0,5 \cdot 21 = 10,5$ dm και $0,5 \cdot 34 = 17$ dm.



Στηρίζω τη σκάλα



Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε

Να κατασκευάσετε έναν πίνακα έννοιας για τα ανάλογα ποσά και έναν για τη συνάρτηση $y = ax$.



Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Ποιος είναι ο συντελεστής αναλογίας της πλευράς x ενός τετραγώνου με την περιμέτρο του y ; Να εκφράσετε την περίμετρο y του τετραγώνου ως συνάρτηση της πλευράς x .
2. Ένα αντισηπτικό διάλυμα περιέχει 70% αλκοόλ. Πόσα ml αλκοόλ περιέχουν τα 300 ml διαλύματος;
3. Τα ποσά x και y είναι ανάλογα με συντελεστή αναλογίας $\frac{y}{x} = 3$. Να συμπληρώσετε τον ακόλουθο πίνακα τιμών.

x	2	1,5	-2	-3
y				

4. Να συμπληρώσετε τον ακόλουθο πίνακα τιμών, αν γνωρίζουμε ότι 1 kg ζάχαρη κοστίζει 2 €.

Ποσότητα ζάχαρης x	3 kg	4 kg	5,5 kg	7 kg
Κόστος y				

5. Να αντιστοιχίσετε τη μεταβολή του y για κάθε μοναδιαία αύξηση του x με την κλίση της ευθείας στον παρακάτω πίνακα.

Για κάθε μονάδα που αυξάνεται η τιμή της μεταβλητής x , η τιμή της y :	Κλίση της ευθείας
1. αυξάνεται κατά δύο.	$\alpha. \alpha = 0$
2. μειώνεται κατά τρία.	$\beta. \alpha = 2$
3. μένει σταθερή.	$\gamma. \alpha = \frac{1}{3}$
4. αυξάνεται κατά ένα τρίτο.	$\delta. \alpha = -3$

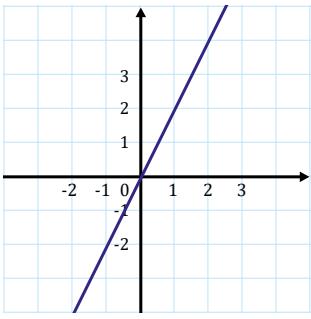
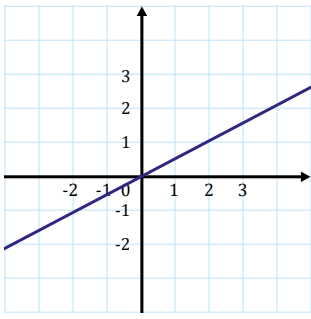
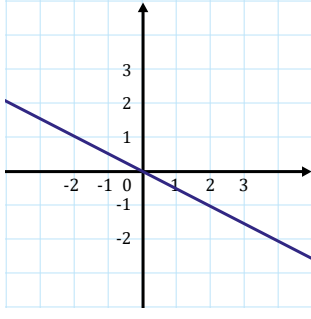


Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

6. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της στήλης A με τα στοιχεία της στήλης B του παρακάτω πίνακα.

A Η ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο:	B Σταθερά αναλογίας (κλίση της ευθείας)
1. A(4, 2)	$\alpha. \alpha = \frac{2}{3}$
2. A(3, 2)	$\beta. \alpha = \frac{1}{2}$
3. A(-3, 1)	$\gamma. \alpha = 2$
4. A(2, 6)	$\delta. \alpha = -\frac{1}{3}$
	$\epsilon. \alpha = \frac{1}{3}$
	$\sigma\tau. \alpha = 3$

7. Να αντιστοιχίσετε τις γραφικές παραστάσεις με τις συναρτήσεις του παρακάτω πίνακα.

<p>1.</p> 	<p>2.</p> 	<p>3.</p> 
<p>α. $y = \frac{1}{2}x$</p>	<p>β. $y = -\frac{1}{2}x$</p>	<p>γ. $y = 2x$</p>

8. Σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -2$.

9. Ένας ελαιοπαραγωγός σημείωνε σε ένα χαρτί την ποσότητα Ε των ελιών που πήγαινε κάθε φορά στο ελαιοτριβείο και την ποσότητα Λ του λαδιού που έπαιρνε. Η περιεκτικότητα του καρπού ελιάς σε λάδι είναι 20%.

α) Να βρείτε τις σταθερές αναλογίας α και α' στις σχέσεις $\Lambda = \alpha \cdot E$ και $E = \alpha' \cdot \Lambda$.

β) Να συμπληρώσετε στον παρακάτω πίνακα τα κενά κελιά.

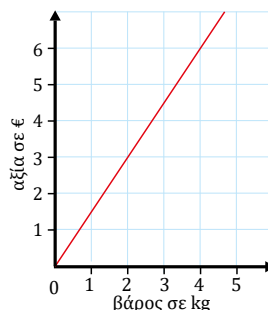
Λάδι	100 kg	80 kg	130 kg		140 kg	60 kg
Ελιές				300 kg		

10. Ένα κατάστημα κάνει έκπτωση α% σε όλα τα είδη του. Ένα προϊόν που έχει αρχική τιμή 20 € πωλείται για 16 €.

α) Να βρείτε το ποσοστό α% της έκπτωσης.

β) Να εκφράσετε την τελική τιμή y ενός προϊόντος ως συνάρτηση της αρχικής τιμής του x.

11. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η αξία y σε € σε σχέση με το βάρος x σε kg ενός προϊόντος.



Γραφική
παράσταση
σχέσης
αναλογίας

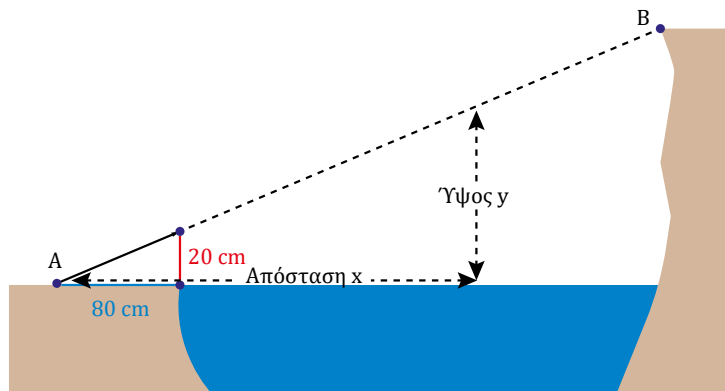
α) Πόση είναι η αξία ενός kg του προϊόντος;

β) Να εκφράσετε την αξία y ως συνάρτηση του βάρους x.

12. Σε κάθε συνάρτηση του παρακάτω πίνακα να αντιστοιχίσετε την ευθεία του σχήματος που είναι η γραφική της παράσταση.

Συνάρτηση	
1. $y = 2x$	
2. $y = -x$	
3. $y = -2x$	
4. $y = x$	

13. Ένας μηχανικός πρέπει να κατασκευάσει μια γέφυρα-σκάλα που να ενώνει τις όχθες ενός ποταμού ξεκινώντας από το σημείο A, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Σημαδεύοντας την απέναντι άκρη, μπόρεσε να μετρήσει ότι μετά από 80 cm το ύψος θα είναι 20 cm.

- α) Να εκφράσετε το ύψος y από το ποτάμι ως συνάρτηση της απόστασης x από το σημείο A.
 β) Να βρείτε πόσο ύψος πρέπει να έχει κάθε σκαλοπάτι, αν το πλάτος του είναι 1 m.

Δ1. Κόστος διαδρομής

Η εταιρεία ταξί «Κένταυρος» χρεώνει 0,5 € για κάθε χιλιόμετρο διαδρομής, ενώ η εταιρεία «Πήγασος» χρεώνει και 2 € επιπλέον για την επιβίβαση.

α) Για καθεμία από τις εταιρείες να εκφράσετε το κόστος y σε € ως συνάρτηση των χιλιομέτρων x της διαδρομής και να συμπληρώσετε τους παρακάτω πίνακες τιμών.

«Κένταυρος» $y =$				
Χιλιόμετρα x	2	4	5	6
Κόστος y				

«Πήγασος» $y =$				
Χιλιόμετρα x	2	4	5	6
Κόστος y				

β) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων στο ίδιο σύστημα αξόνων και να συζητήσετε τα επόμενα ερωτήματα.

- Τι σχέση έχουν οι δύο γραφικές παραστάσεις μεταξύ τους;
- Σε ποιο σημείο τέμνει η κάθε γραφική παράσταση τον άξονα y' ;

Συζητάμε

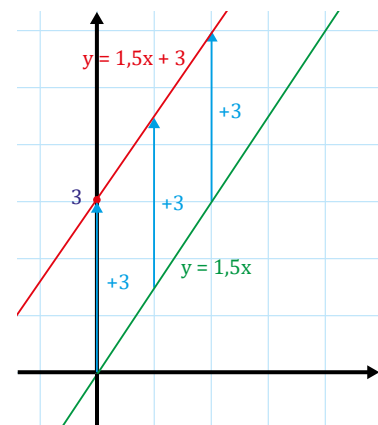
...για τη συνάρτηση $y = ax + \beta$

Όπως μάθαμε στην προηγούμενη διδακτική ενότητα, η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης όπως η $y = 1,5x$ είναι μια ευθεία που περνάει από την αρχή των αξόνων.

Παρατηρούμε ότι για το ίδιο x το y της συνάρτησης $y = 1,5x + 3$ είναι 3 μονάδες μεγαλύτερο από το αντίστοιχο y της $y = 1,5x$.

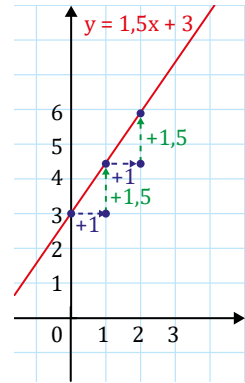
Άρα η γραφική παράσταση της $y = 1,5x + 3$ προκύπτει από αυτήν της $y = 1,5x$, αν τη μετατοπίσουμε κατά 3 μονάδες προς τα πάνω.

Με τον τρόπο αυτό προκύπτει μια ευθεία που είναι παράλληλη στην $y = 1,5x$ και η οποία δεν περνάει από την αρχή των αξόνων, αλλά τέμνει τον άξονα y' στο σημείο $(0, 3)$.



Όπως στην $y = 1,5x$, έτσι και στην $y = 1,5x + 3$ ο συντελεστής 1,5 δείχνει ότι: για κάθε μονάδα που αυξάνεται η τιμή του x , η τιμή του y αυξάνεται κατά 1,5.

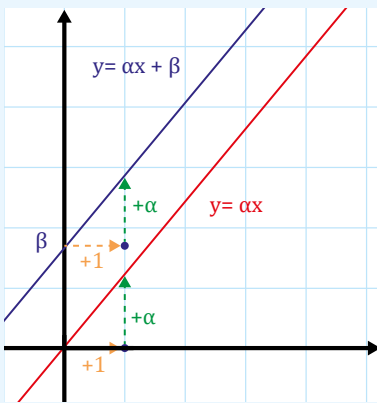
Πώς θα ερμηνεύατε έναν αρνητικό συντελεστή του x , όπως για παράδειγμα στην $y = -2x + 3$;



Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

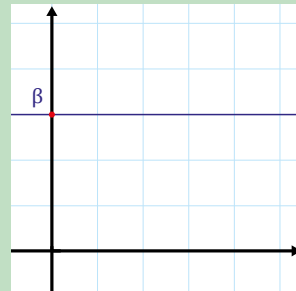
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax + \beta$, $\beta \neq 0$, είναι μια **ευθεία** που διέρχεται από το σημείο $(0, \beta)$ του άξονα y και είναι παράλληλη στην $y = ax$.

Όπως και στην $y = ax$, ο συντελεστής a δείχνει πόσο μεταβάλλεται η τιμή της μεταβλητής y για κάθε μονάδα που αυξάνεται η τιμή της x και τον ονομάζουμε **κλίση της ευθείας**.



Δύο ευθείες που έχουν την ίδια κλίση είναι παράλληλες μεταξύ τους.

Όταν η κλίση a είναι 0, δηλαδή όταν ο τύπος της συνάρτησης είναι $y = \beta$, η γραφική της παράσταση είναι μια ευθεία παράλληλη στον x 'α που τέμνει τον y 'α στο β .



Μεταβάλλω τις ευθείες

Τη σχέση $y = ax + \beta$ την ονομάζουμε και **εξίσωση της ευθείας**.



Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

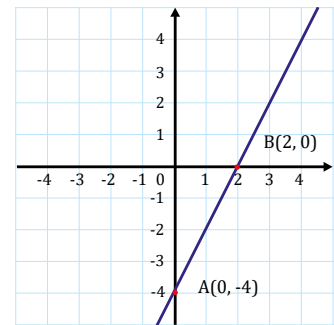
1. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y = 2x - 4$ με τους άξονες και να τη σχεδιάσετε.

Απάντηση

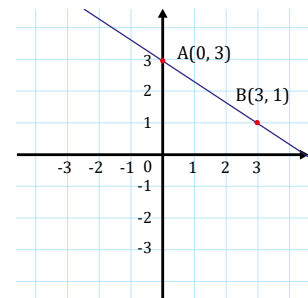
Γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 2x - 4$ είναι ευθεία που τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, -4)$.

Το σημείο στο οποίο η $y = 2x - 4$ τέμνει τον άξονα $x'x$ θα έχει τετμημένη έναν αριθμό x και τεταγμένη $y = 0$. Αντικαθιστώντας στον τύπο της συνάρτησης, έχουμε $0 = 2x - 4$, άρα $2x = 4$, απ' όπου βρίσκουμε $x = 2$. Επομένως η ευθεία τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(2, 0)$.

Στη συνέχεια σημειώνουμε τα σημεία στο καρτεσιανό επίπεδο και σχεδιάζουμε την ευθεία.



- 2. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο διπλανό σχήμα.**



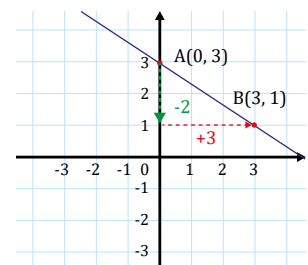
Απάντηση

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι ευθεία που δε διέρχεται από την αρχή των αξόνων, οπότε ο τύπος της συνάρτησης είναι της μορφής $y = ax + \beta$.

Επειδή η ευθεία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο 3, συμπεραίνουμε ότι $\beta = 3$.

Επίσης, για $x = 0$ είναι $y = 3$ και για $x = 3$ είναι $y = 1$. Άρα, όταν η τιμή της μεταβλητής x αυξάνεται κατά 3 μονάδες, από το 0 στο 3, η τιμή της y μειώνεται κατά δύο μονάδες, από το 3 στο 1. Δηλαδή η μεταβολή της y είναι -2 .

Άρα για κάθε μονάδα που αυξάνεται η τιμή της x , η τιμή της y μεταβάλλεται κατά $-\frac{2}{3}$. Επομένως η κλίση της ευθείας είναι $\alpha = -\frac{2}{3}$ και ο τύπος της συνάρτησης είναι $o\ y = -\frac{2}{3}x + 3$.

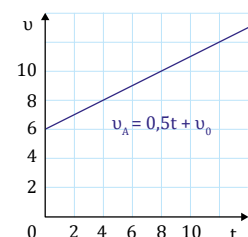


Σημείωση: Ένας άλλος τρόπος για να βρούμε το α είναι να αντικαταστήσουμε $x = 3$ και $y = 1$ στην $y = ax + 3$.

Έτσι, έχουμε την εξίσωση $1 = 3\alpha + 3$. Τη λύνουμε και παίρνουμε $1 - 3 = 3\alpha$ ή $-2 = 3\alpha$ ή $\alpha = -\frac{2}{3}$.

- 3. Η ταχύτητα v_A (σε m/s) ενός αυτοκινήτου A, το οποίο επιταχύνεται, δίνεται από τη σχέση $v_A = 0,5t + v_0$ (1), όπου t είναι ο χρόνος (σε s) που πέρασε από τη στιγμή που το αυτοκίνητο A άρχισε να επιταχύνεται και v_0 είναι η αρχική του ταχύτητα. Η γραφική της παράσταση δίνεται στο διπλανό σχήμα. Ένα δεύτερο αυτοκίνητο B κινείται με σταθερή ταχύτητα $v_B = 10$ m/s.**

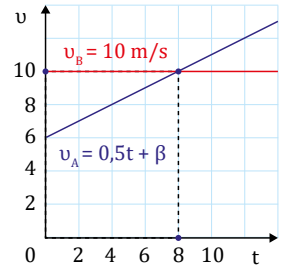
- α) i) Ποια ήταν η τιμή της αρχικής ταχύτητας v_0 ;
 ii) Πόσο αυξάνεται η ταχύτητα v_A κάθε δευτερόλεπτο;
 β) Να παραστήσετε γραφικά, στο ίδιο σύστημα αξόνων με την ταχύτητα v_A , την ταχύτητα v_B ως συνάρτηση του χρόνου t .



- γ) Με βάση τη γραφική παράσταση, να εκτιμήσετε μετά από πόσο χρόνο το αυτοκίνητο Α σε σχέση με το αυτοκίνητο Β θα έχει:
- i) την ίδια ταχύτητα, ii) μικρότερη ταχύτητα, iii) μεγαλύτερη ταχύτητα.
- δ) Από τις σχέσεις $v_A = 0,5t + 6$ και $v_B = 10 \text{ m/s}$ να βρείτε τη χρονική στιγμή για την οποία $v_A = v_B$ και να συγκρίνετε το αποτέλεσμα με την απάντηση του ερωτήματος (β).

Απάντηση

- α) i) Η αρχική ταχύτητα v_0 του αυτοκινήτου Α φαίνεται από το σημείο τομής της ευθείας με τον άξονα y/y (όπου ο χρόνος είναι $t = 0$) και είναι $v_0 = 6 \text{ m/s}$.
- ii) Η κλίση της ευθείας είναι 0,5, άρα η ταχύτητα v_A κάθε δευτερόλεπτο αυξάνεται κατά $0,5 \text{ m/s}$.
- β) Επειδή οποιαδήποτε χρονική στιγμή η ταχύτητα v_B είναι σταθερή και ίση με 10 m/s , όλα τα σημεία της γραφικής της παράστασης έχουν τεταγμένη 10. Άρα η γραφική παράσταση είναι ευθεία παράλληλη στον άξονα t/t που τέμνει τον άξονα των ταχυτήτων στο 10.
- γ) Η ταχύτητα του κάθε αυτοκινήτου μια χρονική στιγμή t είναι η τεταγμένη του αντίστοιχου σημείου της γραφικής της παράστασης.
- i) Τα δύο αυτοκίνητα έχουν την ίδια ταχύτητα τη χρονική στιγμή που αντιστοιχεί στο κοινό σημείο των δύο γραφικών παραστάσεων. Από το σχήμα βλέπουμε ότι το αυτοκίνητο Α θα έχει την ίδια ταχύτητα με το αυτοκίνητο Β μετά από 8 s.
- ii) Το αυτοκίνητο Α έχει μικρότερη ταχύτητα από το αυτοκίνητο Β το διάστημα κατά το οποίο οι τεταγμένες των σημείων της γραφικής παράστασης της v_A είναι μικρότερες από αυτές της v_B . Δηλαδή εκεί που η γραφική παράσταση της v_A είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της v_B . Από το σχήμα βλέπουμε ότι αυτό συμβαίνει τα πρώτα 8 s.
- iii) Αντίστοιχα, από το σχήμα διαπιστώνουμε ότι οι τεταγμένες της γραφικής παράστασης της v_A είναι μεγαλύτερες από αυτές της v_B μετά τα 8 s. Άρα η ταχύτητα του αυτοκινήτου Α είναι μεγαλύτερη από αυτή του Β μετά τα 8 s.
- δ) Από τις σχέσεις $v_A = 0,5t + 6$ και $v_B = 10 \text{ m/s}$ έχουμε ότι $v_A = v_B$, όταν $0,5t + 6 = 10$, οπότε $0,5t = 4$, άρα $t = 8$. Το αποτέλεσμα αυτό συμφωνεί με την εκτίμηση από το ερώτημα (β).



Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

- Να βρείτε την τιμή του y για τη δεδομένη τιμή του x στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $y = -x + 3, x = 3$ β) $y = \frac{1}{2}x - 7, x = -4$ γ) $y = 3x + 2, x = -1$
- Να βρείτε την κλίση και το σημείο τομής με τον άξονα y/y των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $y = -2x + 1$ β) $y = x + 7$ γ) $y = 3x$ δ) $y = -x - 1$
- Να βρείτε τους τύπους των συναρτήσεων στις παρακάτω περιπτώσεις:

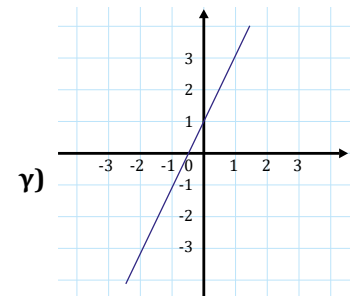
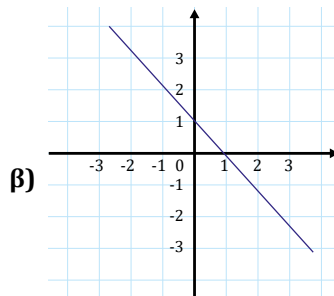
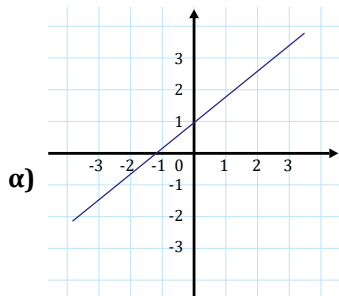
α) Η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα y/y στο σημείο $(0, -1)$ και για κάθε μονάδα που αυξάνεται η τιμή της μεταβλητής x η τιμή της μεταβλητής y αυξάνεται κατά δύο μονάδες.

- β) Η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, 2)$ και για κάθε μονάδα που αυξάνεται η τιμή της μεταβλητής x η τιμή της μεταβλητής y μειώνεται κατά τρεις μονάδες.
- γ) Η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, 6)$ και η τιμή της μεταβλητής y παραμένει σταθερή.

4. Στον παρακάτω πίνακα να αντιστοιχίσετε τις συναρτήσεις με τις γραφικές παραστάσεις.

Συνάρτηση	1. $y = \frac{1}{2}x - 1$	2. $y = \frac{1}{2}x + 2$	3. $y = \frac{1}{2}x + 1$
Γραφική παράσταση	α.	β.	γ.

5. Να βρείτε την κλίση των παρακάτω ευθειών:



6. Στο ίδιο καρτεσιανό σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

α) $y = 2x$

β) $y = 2x + 2$

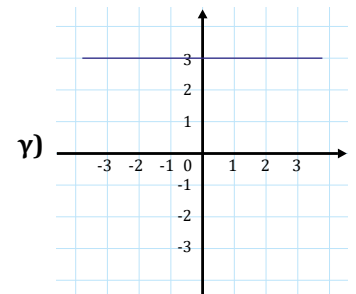
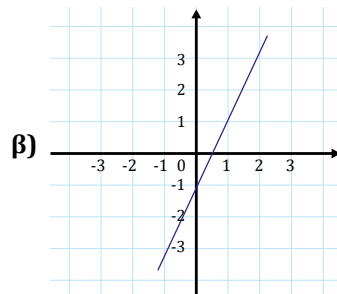
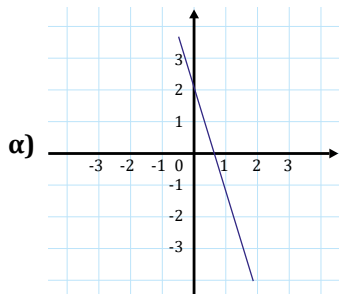
γ) $y = 2x - 2$



Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

7. Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y = 5x + 10$ με τον άξονα $x'x$ και στη συνέχεια να τη σχεδιάσετε.

8. Να γράψετε τους τύπους των συναρτήσεων των παρακάτω γραφικών παραστάσεων:



9. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της στήλης A με τα στοιχεία της στήλης B του παρακάτω πίνακα.

Η γραφική παράσταση της $y = ax + \beta$ διέρχεται από τα σημεία:	Κλίση της ευθείας
1. A(4, 2) και B(5, 4)	α. $\alpha = -3$
2. A(3, 2) και B(5, 4)	β. $\alpha = 1$
3. A(-3, 1) και B(0, 2)	γ. $\alpha = 2$
4. A(2, 6) και B(3, 3)	δ. $\alpha = \frac{1}{3}$

10. α) Σε κάθε συνάρτηση του παρακάτω πίνακα να αντιστοιχίσετε τον τύπο κάθε συνάρτησης με την ευθεία του σχήματος που είναι η γραφική της παράσταση.

β) Να βρείτε την τιμή του β.

1. $y = 2x + 2$	
2. $y = -2x + 2$	
3. $y = -x + 2$	
4. $y = x + 2$	

1.	
2.	
3.	
4.	

11. Όταν αυξάνεται το υψόμετρο, η θερμοκρασία της ατμόσφαιρας μειώνεται. Για τα πρώτα 10 km η θερμοκρασία μειώνεται κατά 6°C για κάθε km. Σε μια περιοχή η θερμοκρασία στην επιφάνεια της θάλασσας είναι 12°C .

α) Αν ονομάσουμε T τη θερμοκρασία και h το υψόμετρο, να γράψετε μία σχέση που να συνδέει την T με το h.

β) Σε ποιο υψόμετρο η θερμοκρασία θα είναι 0°C ;

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της θερμοκρασίας σε σχέση με το υψόμετρο.

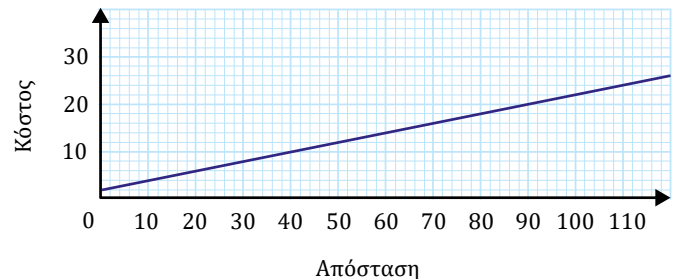
12. Να συμπληρώσετε τις συντεταγμένες του σημείου A στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $y = 2x - 3, A(2, \dots)$

β) $y = -x + 2, A(\dots, 4)$

γ) $y = \frac{1}{2}x + 7, A(\dots, 8)$

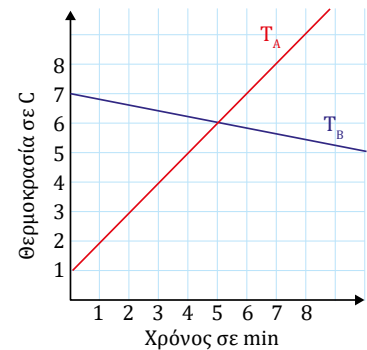
13. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση του ημερήσιου κόστους ενοικίασης ενός αυτοκινήτου σε σχέση με τα χιλιόμετρα που διανύει.



- α) Πόσα χιλιόμετρα μπορεί να διανύσει το αυτοκίνητο με 20 €;
 β) Πόσο θα κοστίσει, αν το αυτοκίνητο τελικά παραμείνει ακίνητο;
 γ) Πόσο θα κοστίσει, αν το αυτοκίνητο διανύσει 40 km;

14. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των θερμοκρασιών $T_A = t + 1$ και $T_B = -0,2t + 7$ δύο υλικών A και B σε σχέση με τον χρόνο t σε λεπτά.

- α) Παρατηρώντας τις γραφικές παραστάσεις, εκτιμήστε πότε η θερμοκρασία του υλικού A ήταν:
 i) μικρότερη, ii) ίση, iii) μεγαλύτερη από αυτή του υλικού B.
 β) Με βάση τους τύπους των T_A και T_B , γράψτε μια εξίσωση για να βρείτε ποια χρονική στιγμή τα δύο υλικά θα έχουν την ίδια θερμοκρασία. Συμφωνεί το αποτέλεσμα με αυτό του ερωτήματος (α);

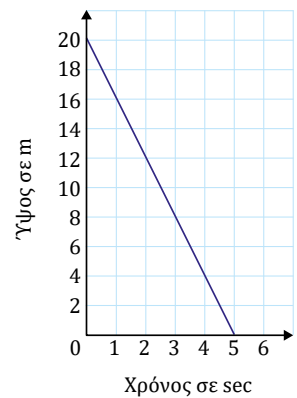


15. Ένα δοχείο A, που αρχικά περιέχει 10 lt υγρού, αδειάζει με σταθερό ρυθμό 2 lt το λεπτό. Σε ένα άλλο δοχείο B, ο όγκος του υγρού που περιέχει παραμένει σταθερός και ίσος με 4 lt.

- α) Ονομάζουμε V_A τον όγκο του υγρού στο δοχείο A και V_B τον όγκο του υγρού στο δοχείο B. Να εκφράσετε τους όγκους V_A και V_B ως συνάρτηση του χρόνου t και να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις στο ίδιο σύστημα αξόνων.
 β) Με βάση τις γραφικές παραστάσεις, να εκτιμήσετε μετά από πόσο χρόνο τα δύο δοχεία θα έχουν τον ίδιο όγκο υγρού.

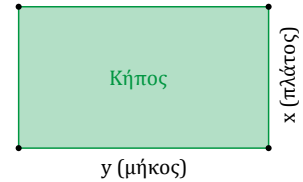
16. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η απόσταση από το έδαφος ενός αλεξιπτωτιστή σε σχέση με τον χρόνο κατά τα τελευταία 20 m της πτώσης του. Το ίδιο διάστημα ένα τηλεκατευθυνόμενο αεροπλάνο πετάει σε σταθερό ύψος 8 m.

- α) Πόσα μέτρα μειώνεται η απόσταση του αλεξιπτωτιστή από το έδαφος κάθε δευτερόλεπτο;
 β) Ποια χρονική στιγμή ο αλεξιπτωτιστής θα βρεθεί στο ίδιο ύψος με το τηλεκατευθυνόμενο αεροπλάνο;



Δ1. Οι διαστάσεις του κήπου

Η ομάδα περιβαλλοντικού προγράμματος ενός γυμνασίου θέλει να κατασκευάσει έναν ορθογώνιο κήπο. Η διεύθυνση του σχολείου είπε στους μαθητές ότι μπορούν να καλύψουν 24 m^2 . Ονομάζουμε x το πλάτος του ορθογωνίου και y το μήκος.



α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα με τις πιθανές διαστάσεις του ορθογώνιου κήπου.

x (πλάτος σε m)	1	1,5	2	3	12	16	24
y (μήκος σε m)							

β) Να περιγράψετε τη σχέση των δύο μεγεθών x και y . Κατασκευάστε έναν ακόμα πίνακα τιμών με δύο ποσά που να έχουν μια παρόμοια σχέση με αυτή που έχουν τα x και y .

γ) Να γράψετε το μήκος του ορθογωνίου y ως συνάρτηση του πλάτους x . Να συζητήσετε στην τάξη τις προτάσεις σας.

Συζητάμε

...για αντιστρόφως ανάλογα ποσά

Ο Κώστας είναι αθλητής, μένει στην Πάτρα και πηγαίνει συχνά στα Λεχαινά. Έχει διανύσει την απόσταση αυτή με διάφορους τρόπους: με ποδήλατο, με μηχανάκι, με αυτοκίνητο. Στον πίνακα φαίνεται η ταχύτητα με την οποία κινείται και ο χρόνος που χρειάζεται σε κάθε περίπτωση για να καλύψει αυτή την απόσταση.

v (σε km/h)	15	60	120
t (χρόνος σε h)	4	1	0,5

- Παρατηρούμε από τον πίνακα ότι, όταν το ένα ποσό αυξάνεται, το άλλο μειώνεται, αλλά όχι με οποιονδήποτε τρόπο. Για παράδειγμα, όταν η ταχύτητα v από 15 γίνεται 60 (πολλαπλασιάζεται με 4), τότε ο χρόνος t από 4 γίνεται 1 (διαιρείται με 4). Αν πολλαπλασιάσουμε μια τιμή του ενός ποσού με έναν αριθμό, τότε η αντίστοιχη τιμή του άλλου ποσού διαιρείται με τον ίδιο αριθμό. Έτσι, όταν το ένα αυξάνεται, τότε το άλλο μειώνεται, ώστε το γινόμενό τους να παραμένει σταθερό. Αυτά τα ποσά τα ονομάζουμε αντιστρόφως ανάλογα.

v (σε km/h)	15	60	120
t (χρόνος σε h)	4	1	0,5

Diagram showing relationships between values in the table above:

- From 15 to 60: $\cdot 4$
- From 60 to 120: $\cdot 2$
- From 4 to 1: $: 4$
- From 1 to 0,5: $: 2$

- Το γινόμενο της ταχύτητας του Κώστα με τον χρόνο της κίνησής του είναι ίσο με την απόσταση που διάνυσε, δηλαδή $v \cdot t = 60 \text{ km}$. Η συνάρτηση που εκφράζει τον χρόνο t ως προς την ταχύτητα v είναι η $t = \frac{60}{v}$.



Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Δύο ποσά x και y τα ονομάζουμε **αντιστρόφως ανάλογα** όταν, πολλαπλασιάζοντας τις τιμές του ενός ποσού με έναν αριθμό, οι αντίστοιχες τιμές του άλλου διαιρούνται με τον ίδιο αριθμό.

Το γινόμενο των αντίστοιχων τιμών παραμένει πάντα σταθερό, δηλαδή $x \cdot y = \alpha$, με $\alpha \neq 0$.

Η συνάρτηση του y ως προς το x δίνεται από τον τύπο $y = \frac{\alpha}{x}$, με $\alpha \neq 0$.

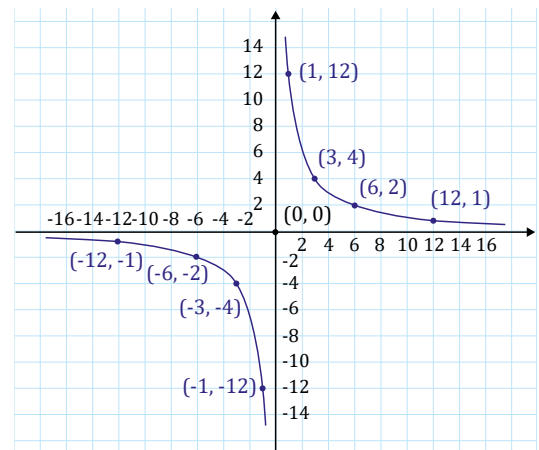
Δ2. Σχεδιάζοντας δύο αντιστρόφως ανάλογα ποσά

Δίνεται η συνάρτηση $y = \frac{12}{x}$.

- α)** Μπορεί κάποιο από τα x και y να πάρει την τιμή 0;
β) Η Δήμητρα ισχυρίζεται ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{12}{x}$ είναι η διπλανή. Ποια είναι η δική σας άποψη; Αιτιολογήστε την.
γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -\frac{12}{x}$.
δ) Ποια χαρακτηριστικά αναγνωρίζετε σε καθεμία από αυτές τις γραφικές παραστάσεις;

- ε)** Όταν το x αυξάνεται από πολύ μικρές αρνητικές τιμές έως πολύ κοντά στο 0, τι συμβαίνει με το y ; Αυξάνεται ή μειώνεται; Εξετάστε πώς μεταβάλλεται το y όταν το x αυξάνεται παίρνοντας θετικές τιμές.

Εξετάστε τα παραπάνω ερωτήματα και για τις δύο γραφικές παραστάσεις, δηλαδή της $y = \frac{12}{x}$ και της $y = -\frac{12}{x}$. Να συγκεντρώσετε τα συμπεράσματά σας σε έναν πίνακα και να τα συζητήσετε στην τάξη.



Ο ρόλος του α στην $y = \frac{\alpha}{x}$



Η μεταβολή της τεταγμένης στη γραφική παράσταση αντιστρόφως ανάλογων ποσών

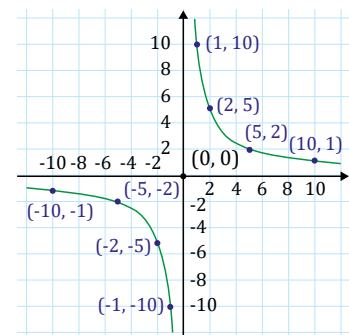
Συζητάμε

...για τη γραφική παράσταση της $y = \frac{\alpha}{x}$

Η συνάρτηση $y = \frac{10}{x}$ εκφράζει δύο αντιστρόφως ανάλογα ποσά, αφού μπορεί να γραφτεί και ως $x \cdot y = 10$. Αφού το γινόμενό τους είναι 10, τα x και y δεν μπορούν να είναι 0. Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης δεν μπορεί να τέμνει τους άξονες x' και y' .

Για να κάνουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{10}{x}$, κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών.

x	-10	-5	-2	-1	1	2	5	10
y	-1	-2	-5	-10	10	5	2	1



Τοποθετούμε αυτά τα σημεία και σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση γνωρίζοντας ότι δεν τέμνει τους δύο άξονες.

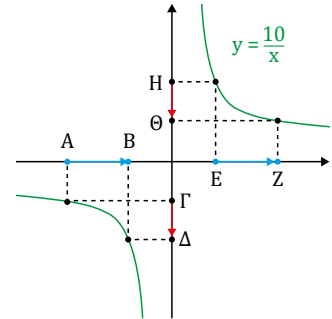
Μπορούμε να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση χρησιμοποιώντας κάποιο λογισμικό, για παράδειγμα το GeoGebra.



Γραφική παράσταση αντιστρόφως ανάλογων ποσών

Για τη γραφική παράσταση παρατηρούμε ότι:

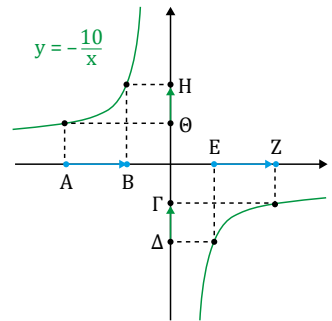
- Αποτελείται από δύο μέρη, ένα στο 1ο και ένα στο 3ο τεταρτημόριο.
- Για $x < 0$, όταν αυξάνεται το x (π.χ. από το Α στο Β), το y μειώνεται (π.χ. από το Γ στο Δ).
- Για $x > 0$, όταν αυξάνεται το x (π.χ. από το Ε στο Ζ), το y μειώνεται (π.χ. από το Η στο Θ).



Σε παρόμοια συμπεράσματα καταλήγουμε για τη μορφή της γραφικής

παράστασης $y = -\frac{10}{x}$, με τη διαφορά ότι:

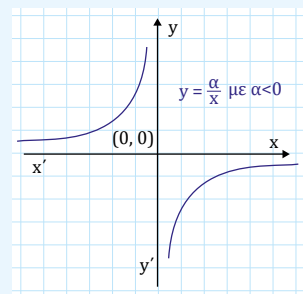
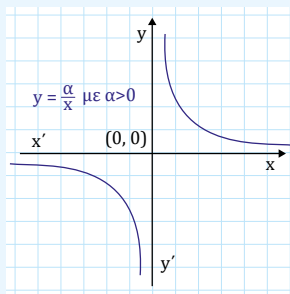
- Βρίσκεται στο 2ο και στο 4ο τεταρτημόριο.
- Για $x < 0$, όταν αυξάνεται το x , αυξάνεται και το y .
- Για $x > 0$, όταν αυξάνεται το x , αυξάνεται και το y .



Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{\alpha}{x}$, με α και x διαφορετικά του μηδενός, παρατηρούμε ότι:

- Αν $\alpha > 0$:
 - βρίσκεται στο 1ο και στο 3ο τεταρτημόριο,
 - αν $x < 0$, όταν αυξάνεται το x , το y μειώνεται,
 - αν $x > 0$, όταν αυξάνεται το x , το y μειώνεται.
- Αν $\alpha < 0$:
 - βρίσκεται στο 2ο και στο 4ο τεταρτημόριο,
 - αν $x < 0$, όταν αυξάνεται το x , αυξάνεται και το y ,
 - αν $x > 0$, όταν αυξάνεται το x , αυξάνεται και το y .





Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. Το Γυμνάσιο Δικαίων Έβρου έκανε μια διερεύνηση του κόστους για μια ημερήσια εκδρομή της Β' τάξης στο Δέλτα του Έβρου. Οι μαθητές που φοιτούν στη Β' τάξη είναι 40, αλλά δεν είναι γνωστό ακόμη πόσοι θα συμμετάσχουν στην εκδρομή. Το πρακτορείο Α είπε ότι το κόστος θα είναι 16 € ανά μαθητή. Το πρακτορείο Β είπε ότι τα χρήματα που θέλει συνολικά είναι 400 €. Πόσοι μαθητές πρέπει να συμμετάσχουν στην εκδρομή, ώστε το κόστος ανά μαθητή να είναι το ίδιο και στα δύο πρακτορεία; Πόσοι μαθητές πρέπει να συμμετάσχουν, ώστε να συμφέρει το Α ή το Β πρακτορείο; Λύστε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας συναρτήσεις και τις γραφικές παραστάσεις τους.

Απάντηση

Θα χρησιμοποιήσουμε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων όπου η τετμημένη x είναι ο αριθμός των μαθητών και y είναι το κόστος ανά μαθητή.

Για το πρακτορείο Α το κόστος ανά μαθητή είναι πάντα 16 €. Αυτό αντιστοιχεί στη συνάρτηση $y = 16$, από το σημείο $(0, 16)$ έως το σημείο $(40, 16)$, δηλαδή είναι το μπλε ευθύγραμμο τμήμα του σχήματος.

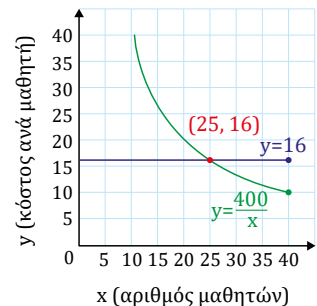
Για το πρακτορείο Β ξέρουμε ότι το συνολικό κόστος είναι 400 €, δηλαδή:

(κόστος ανά μαθητή) · (μαθητές) = 400 € ή $y \cdot x = 400$ ή $y = \frac{400}{x}$, που είναι η πράσινη καμπύλη του σχήματος.

Παρατηρούμε ότι οι δύο γραφικές παραστάσεις τέμνονται στο σημείο $(25, 16)$, άρα, αν συμμετάσχουν 25 μαθητές, θα πληρώσουν το ίδιο και στα δύο πρακτορεία.

Αν συμμετάσχουν λιγότεροι μαθητές, τότε η ευθεία βρίσκεται «κάτω» από την καμπύλη, άρα συμφέρει το πρακτορείο Α, ενώ, αν συμμετάσχουν πάνω από 25 μαθητές, η καμπύλη είναι «κάτω» από την ευθεία, άρα συμφέρει το πρακτορείο Β.

Παρατηρούμε ότι στο πρόβλημα αντιστοιχούν τα σημεία των γραφικών παραστάσεων στις οποίες το x είναι φυσικός αριθμός, αφού εκφράζει το πλήθος των παιδιών που θα συμμετάσχουν.



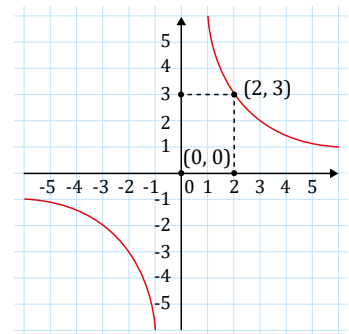
2. Δύο αντιστρόφως ανάλογα ποσά x και y έχουν τη διπλανή γραφική παράσταση. Μπορείτε να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης;

Απάντηση

Τα x και y είναι ποσά αντιστρόφως ανάλογα, άρα η συνάρτηση έχει τύπο της μορφής $y = \frac{\alpha}{x}$. Η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $(2, 3)$, άρα, όταν το x είναι 2, το y είναι 3.

Τα x και y έχουν σταθερό γινόμενο, το οποίο είναι $2 \cdot 3 = 6$, άρα $\alpha = 6$.

Επομένως ο τύπος της συνάρτησης είναι $y = \frac{6}{x}$.



Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε για αντιστρόφως ανάλογα ποσά



Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε

Να κατασκευάσετε έναν πίνακα έννοιας για τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά και έναν για τη συνάρτηση $y = \frac{\alpha}{x}$.



Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Ο Παναγιώτης ισχυρίζεται ότι ο παρακάτω πίνακας εκφράζει αντιστρόφως ανάλογα ποσά, γιατί «όσο μεγαλώνει το ένα, το άλλο μειώνεται». Συμφωνείτε μαζί του;

x	10	9	8	7	6	5
y	1	2	3	4	5	6

2. Να εξετάσετε αν τα ποσά α και β στον παρακάτω πίνακα είναι ποσά αντιστρόφως ανάλογα.

α	-2	$\frac{1}{4}$	1	-7	5
β	10	-80	-20	$\frac{20}{7}$	-4

3. Να συμπληρώσετε τον πίνακα, ώστε τα ποσά x και y να είναι αντιστρόφως ανάλογα.

x	3	1	-12		$\frac{12}{5}$	
y	-8			6		$\frac{3}{2}$

4. Να εξετάσετε αν τα ποσά σε καθέναν από τους παρακάτω πίνακες εκφράζουν ποσά ανάλογα, αντιστρόφως ανάλογα ή τίποτα από τα δύο.

x	8	2	2,5
y	5	20	16

x	3	2	1
y	15	10	5

x	1	2	4
y	20	40	50

5. Για το χτίσιμο μιας πέτρινης μάντρας απαιτούνται 240 εργατοώρες. Ο αριθμός των εργατών που θα εργαστούν (όλοι δουλεύουν τις ίδιες ώρες) και οι ώρες εργασίας του καθενός είναι ποσά ανάλογα, αντιστρόφως ανάλογα ή τίποτα από τα δύο; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

6. Να εξετάσετε σε καθεμία από τις παρακάτω σχέσεις αν τα x και y εκφράζουν ποσά ανάλογα, αντιστρόφως ανάλογα ή τίποτα από τα δύο.

α) $x \cdot y = 4$

β) $y = x - 1$

γ) $-3 = \frac{x}{y}$

δ) $y = 2x$

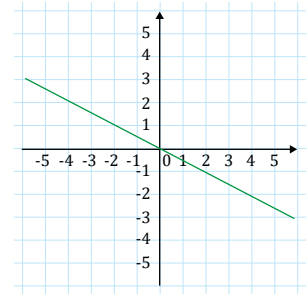
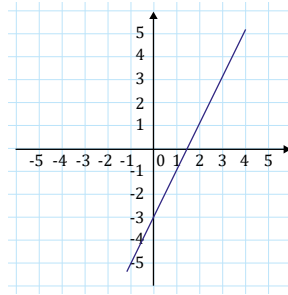
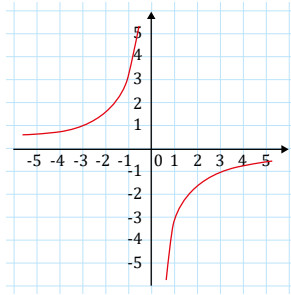
ε) $-y = \frac{2}{x}$

στ) $x + 2y = 3$

7. Να αντιστοιχίσετε τις διπλάνες γραφικές παραστάσεις με έναν από τους τύπους:

$$y = -\frac{1}{2}x, \quad y = 2x - 3$$

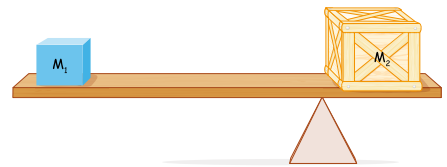
$$\text{και } y = -\frac{3}{x}$$



Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

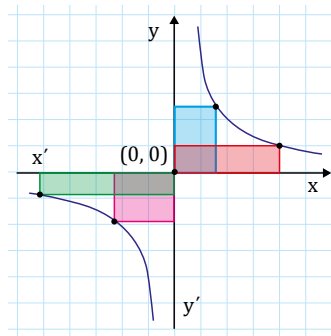
8. Ένα MP3 player περιέχει 4.000 τραγούδια μέσου μεγέθους 4 MB. Πόσα τραγούδια μπορεί να περιέχει, αν τα τραγούδια έχουν μέσο μέγεθος:
α) 2,5 MB; **β)** 2 MB; **γ)** 5 MB;
9. Δέκα εργάτες χρειάζονται 15 ώρες για να καθαρίσουν μια αποθήκη. Πόσες ώρες θα χρειαστούν έξι εργάτες;

10. Για να ισορροπεί μια τραμπάλα, πρέπει το γινόμενο του βάρους με την απόστασή του από το σημείο ισορροπίας να είναι το ίδιο και από τα δύο μέρη (αυτό το γινόμενο στη Φυσική είναι το μέτρο της ροπής). Αν σε μια τραμπάλα βρίσκεται ένα κουτί M_1 βάρους 20 kg και απέχει 2 μέτρα από το σημείο στήριξης της τραμπάλας, πού πρέπει να βρίσκεται το κουτί M_2 , που έχει βάρος 50 kg, ώστε να ισορροπεί η τραμπάλα;



11. Να γίνουν στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:
α) $y = \frac{1}{x}$ **β)** $y = -\frac{1}{x}$ **γ)** $y = \frac{6}{x}$ **δ)** $y = -\frac{6}{x}$

12. Δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης της μορφής $y = \frac{\alpha}{x}$, όπου είναι σχεδιασμένα τέσσερα ορθογώνια με τη μία κορυφή τους πάνω στη γραφική της παράσταση. Ο Ιβάν ισχυρίζεται ότι τα τέσσερα ορθογώνια έχουν το ίδιο εμβαδόν. Συμφωνείτε με την άποψη του Ιβάν; Αιτιολογήστε την άποψή σας.



Ορθογώνιο στη γραφική παράσταση αντιστρόφως ανάλογων ποσών

13. Να βρείτε τον τύπο μιας συνάρτησης της μορφής $y = \frac{\alpha}{x}$ για καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

- α)** διέρχεται από το σημείο (3, 5),
β) διέρχεται από το σημείο (-2, 10).



Φαινόμενο μέγεθος

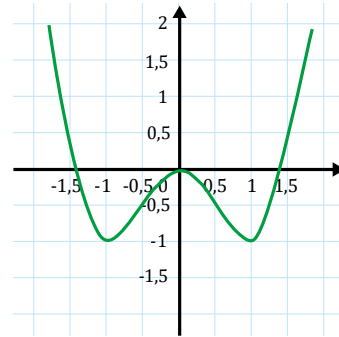
Συναρτήσεις

Ερωτήσεις – ασκήσεις – προβλήματα

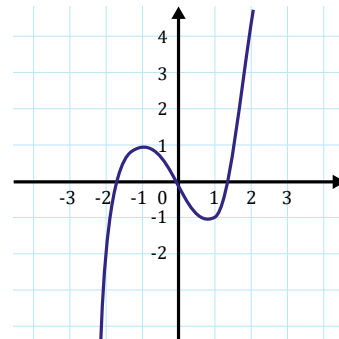
- Από τις παρακάτω περιπτώσεις να επιλέξετε αυτές που η σχέση μεταξύ των μεγεθών, αν υπάρχει, είναι συνάρτηση. Ποια είναι η εξαρτημένη και ποια η ανεξάρτητη μεταβλητή σε καθεμία από τις σχέσεις αυτές;
 - Πλευρά τετραγώνου, εμβαδόν τετραγώνου.
 - Υψόμετρο, γεωγραφική θέση.
 - Χρώμα αυτοκινήτου, τιμή του αυτοκινήτου.
 - Ώρες μελέτης ενός μαθητή, βαθμός προαγωγής.
- Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ).
 - Στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης μπορεί να υπάρχουν περισσότερα από ένα σημεία με την ίδια τετμημένη.
 - Στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης μπορεί να υπάρχουν περισσότερα από ένα σημεία με την ίδια τεταγμένη.
 - Αν $y = 3x + 2$, τότε τα ποσά x και y είναι ανάλογα με σταθερά αναλογίας 3.
 - Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -2x + 1$ είναι ευθεία που τέμνει τον άξονα y' στο 1.
- Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης $y = \frac{x}{2} + 1$.

x	-4	0		6
y			2	

- Στις περιπτώσεις που ακολουθούν να συμπληρώσετε τις συντεταγμένες των σημείων A, B και Γ, ώστε να ανήκουν στη γραφική παράσταση που δίνεται.



A(-1, ...), B(0, ...), Γ(1,5, ...)



A(-1, ...), B(0, ...), Γ(..., 4)



A(1, ...), B(2, ...), Γ(..., 2)

- α) Για τη συνάρτηση $y = x^2 + 2x$ να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
y							

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης με βάση τα σημεία που προκύπτουν από τον πίνακα τιμών.

6. Να βρείτε τα σημεία τομής με τους άξονες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y = 2x - 4$ και στη συνέχεια να τη σχεδιάσετε.

7. Μια εταιρεία κάνει έκπτωση 20% σε όλα τα προϊόντα της. Ποια από τις παρακάτω σχέσεις εκφράζει την τελική τιμή τ ως συνάρτηση της αρχικής τιμής α ;

α) $\tau = \alpha + \frac{20}{100}$

β) $\tau = \alpha - \frac{20}{100}\alpha$

γ) $\tau = \alpha \cdot 20 - 100$

δ) $\tau = \frac{20}{100}\alpha$

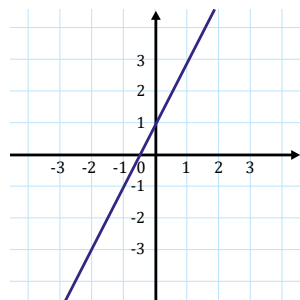
8. Στην επιφάνεια του νερού (0 m βάθος) η πίεση που ασκείται είναι 1 ατμόσφαιρα (1 atm). Για κάθε μέτρο που βυθιζόμαστε η πίεση αυξάνεται κατά 0,1 atm.

α) Να εκφράσετε την πίεση P ως συνάρτηση του βάθους h και να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση.

β) Μέχρι ποιο βάθος μπορεί να φτάσει ένα υποβρύχιο, αν η μέγιστη πίεση που αντέχει είναι 22 atm;

9. Κάθε φορά που το ποσό x αυξάνεται κατά 1, το ποσό y μειώνεται κατά 2. Επίσης, για $x = 0$ είναι $y = -1$. Να εκφράσετε το ποσό y ως συνάρτηση του ποσού x .

10. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \alpha x + \beta$.



α) Πόσο μεταβάλλεται η τιμή του y για κάθε μονάδα που αυξάνεται η τιμή του x ;

β) Να βρείτε την τιμή των α και β .

11. Να εξετάσετε αν τα ποσά σε κάθε πίνακα εκφράζουν ποσά ανάλογα, αντιστρόφως ανάλογα ή τίποτα από τα δύο.

x	-4	-3	-2	1
y	3	4	6	-12

x	2	4	6	10
y	5	10	15	25

x	3	6	9	12
y	20	15	10	5

12. Για καθεμία από τις παρακάτω σχέσεις να εξετάσετε αν τα x και y εκφράζουν ποσά ανάλογα, αντιστρόφως ανάλογα ή τίποτα από τα δύο.

α) $x \cdot y = 1$ **β)** $y = 2x - 1$ **γ)** $\frac{y}{x} = -2$

δ) $y = -x$ **ε)** $y = -\frac{3}{2x}$ **στ)** $3x - 2y = 0$

13. Να βρείτε ποια από τις παρακάτω προτάσεις διαφέρει από τις υπόλοιπες. Εξηγήστε την επιλογή σας.

α) Δύο ποσά είναι ανάλογα με σταθερά αναλογίας $\alpha = 2$.

β) Η γραφική παράσταση είναι ευθεία που διέρχεται από το $(0, 0)$ και, όταν το x αυξάνεται κατά 1, το y αυξάνεται κατά 2.

γ) Δύο ποσά συνδέονται με τη σχέση $x \cdot y = 2$.

δ) Η συνάρτηση είναι η $y = 2x$.

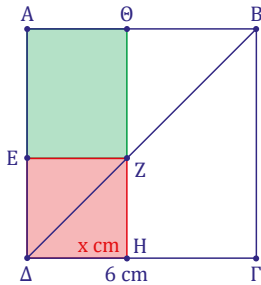
14. Ο ιδιοκτήτης ενός μαγαζιού που πουλάει παγωτά έχει κέρδος 2 € για κάθε κιλό παγωτό που πουλάει.

α) Αν y είναι το συνολικό κέρδος και x η ποσότητα (σε kg) παγωτού που πούλησε, να εκφράσετε το y ως συνάρτηση του x .

β) Αν για κάθε μέρα πληρώνει ενοίκιο 20 €, πόσα κιλά παγωτό πρέπει να πουλήσει, ώστε να μπορεί να το πληρώσει;

Συνδέσεις και επεκτάσεις

15. Ένα ποσό x είναι αντιστρόφως ανάλογο με ένα ποσό y , το οποίο είναι ανάλογο με το ποσό z . Τι ποσά είναι τα x και z ; Αιτιολογήστε την άποψή σας.
16. Στο παρακάτω σχήμα το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ έχει πλευρά 6 cm , ενώ η πλευρά του τετραγώνου $EZH\Delta$ είναι $x\text{ cm}$ και μεταβάλλεται καθώς το σημείο H κινείται κατά μήκος της πλευράς $\Gamma\Delta$.



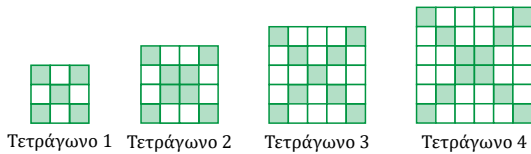
- α) Να εκφράσετε το μήκος y του τμήματος AE ως συνάρτηση του x .
- β) Να εκφράσετε το εμβαδόν E του ορθογωνίου $A\Theta ZE$ ως συνάρτηση του x .
- γ) Να συμπληρώσετε τον ακόλουθο πίνακα τιμών.

Μήκος x	0	1	2	3	4	5	6
Εμβαδόν E							

- δ) Με βάση τα σημεία που προκύπτουν από τον πίνακα τιμών του ερωτήματος (γ), να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση του εμβαδού E και να εκτιμήσετε για ποια τιμή του μήκους x παίρνει τη μέγιστη τιμή του.

Ομαδική εργασία

17. Στα παρακάτω τετράγωνα, τα πλακίδια των διαγωνίων τους είναι πράσινα. Να βρείτε πόσα πράσινα πλακίδια θα έχει το τετράγωνο 20 και πόσα το τετράγωνο 21. Εξηγήστε τον τρόπο με τον οποίο σκεφτήκατε. Συζητήστε με τις άλλες ομάδες τον τρόπο με τον οποίο σκέφτηκε κάθε ομάδα.





ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ 4:

Γεωμετρία του επιπέδου και εμβαδά

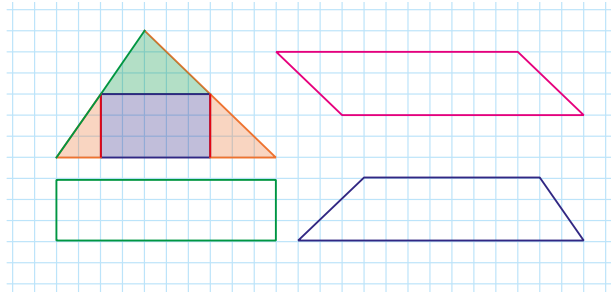
Ο υπολογισμός εμβαδών ήταν από τα αρχαία χρόνια μία από τις πολλές εφαρμογές των Μαθηματικών στην καθημερινή ζωή. Στην ενότητα αυτή θα δούμε την έννοια του εμβαδού και τρόπους για να υπολογίζουμε εμβαδά βασικών γεωμετρικών σχημάτων. Με βάση τα εμβαδά θα μελετήσουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα, ένα από τα πιο «διάσημα» θεωρήματα στην Ιστορία των Μαθηματικών, που φαίνεται να έχει τις ρίζες του στα βάθη της αρχαιότητας, σε πολλούς διαφορετικούς πολιτισμούς.

ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΕΝΟΤΗΤΕΣ:

- 4.1 Η έννοια του εμβαδού, μονάδες μέτρησης
- 4.2 Εμβαδά βασικών πολυγώνων
- 4.3 Πυθαγόρειο θεώρημα

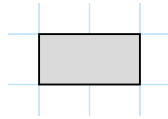
Δ1. Τριγωνοπαράλληλογραμμοτραπέζια

α) Η Ιωάννα ισχυρίζεται ότι, κόβοντας ένα τρίγωνο όπως φαίνεται στη διπλανή εικόνα, με τα κομμάτια μπορεί να κατασκευάσει το παραλληλόγραμμο, το ορθογώνιο και το τραπέζιο που είναι σχεδιασμένα. Εξετάστε αν η άποψή της είναι σωστή. Συζητήστε τις ιδέες σας στην τάξη. (Μπορείτε να πειραματιστείτε κόβοντας αντίστοιχα κομμάτια από χαρτί.)

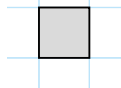


β) Ποιο είναι το εμβαδόν καθενός από τα σχήματα της εικόνας, αν θεωρήσουμε ως μονάδα μέτρησης επιφάνειας:

i) τα δύο τετράγωνα του καμβά;



ii) το ένα τετράγωνο του καμβά;

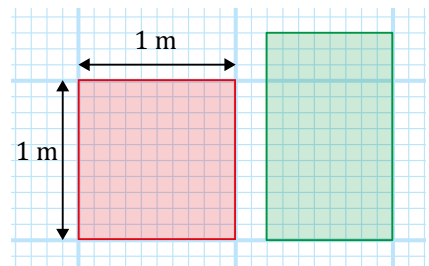


Διασπώ και ανασυνθέτω σχήματα

Δ2. Συγκρίνοντας επιφάνειες

Ποιο από τα δύο σχήματα έχει τη μεγαλύτερη επιφάνεια; Πόση είναι η διαφορά τους;

(Το κάθε μικρό τετράγωνο έχει πλευρά $\frac{1}{10}$ m = 1 dm.)



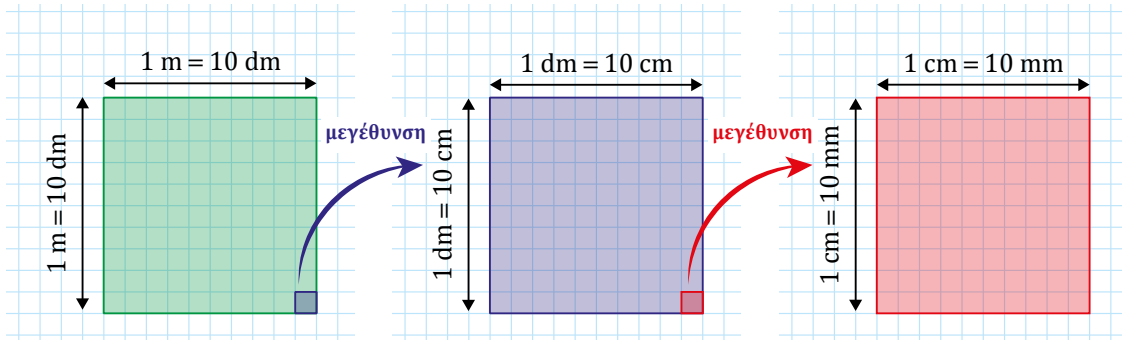
Συζητάμε

...για το εμβαδόν

Μια βολική μονάδα μέτρησης για το μέγεθος μιας επίπεδης επιφάνειας είναι μια επιφάνεια σχήματος τετραγώνου. Βασιζόμενοι στη μονάδα μέτρησης μήκους, χρησιμοποιούμε ως μονάδα ένα τετράγωνο με πλευρά 1 m. Το τετράγωνο αυτό το ονομάζουμε τετραγωνικό μέτρο και το συμβολίζουμε 1 m^2 .

Πολλές φορές χρειάζεται να μετρήσουμε επιφάνειες μικρότερες από 1 m^2 ή επιφάνειες που δεν αντιστοιχούν σε ακέραιο αριθμό τετραγωνικών μέτρων. Για τον λόγο αυτό χρησιμοποιούμε τις υποδιαίρεσεις του μέτρου (dm, cm, mm), για να σχηματίσουμε μικρότερα τετράγωνα. Έτσι σχηματίζουμε τετραγωνικά δέκατα (dm^2), τετραγωνικά εκατοστά (cm^2) και τετραγωνικά χιλιοστά (mm^2).

Όταν διαιρούμε την κάθε πλευρά ενός m^2 σε 10 dm , το τετραγωνικό μέτρο χωρίζεται σε 10 οριζόντιες σειρές των 10 dm^2 η καθεμία. Άρα 1 m^2 χωρίζεται σε $10 \cdot 10\text{ dm}^2 = 100\text{ dm}^2$. Το ίδιο συμβαίνει όταν χωρίζουμε 1 dm^2 σε cm^2 και 1 cm^2 σε mm^2 .



Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Το αποτέλεσμα της μέτρησης μιας επιφάνειας το ονομάζουμε **εμβαδόν**. Το εμβαδόν είναι ένας θετικός αριθμός που εκφράζει την έκταση που καταλαμβάνει αυτή στο επίπεδο. Ο αριθμός αυτός εξαρτάται από τη μονάδα μέτρησης που χρησιμοποιούμε.

Έχει καθιερωθεί να χρησιμοποιούμε ως μονάδα μέτρησης της επιφάνειας ένα τετράγωνο με πλευρά 1 m , το οποίο ονομάζουμε **τετραγωνικό μέτρο** (1 m^2).

Υποδιαιρέσεις του τετραγωνικού μέτρου

Ένα τετραγωνικό μέτρο το διαιρούμε σε:

- τετράγωνα με πλευρά 1 dm , τα οποία ονομάζουμε **τετραγωνικά δέκατα** (dm^2),
- τετράγωνα με πλευρά 1 cm , τα οποία ονομάζουμε **τετραγωνικά εκατοστά** (cm^2),
- τετράγωνα με πλευρά 1 mm , τα οποία ονομάζουμε **τετραγωνικά χιλιοστά** (mm^2).

Ισχύει ότι: $1\text{ m}^2 = 10\text{ dm} \cdot 10\text{ dm} = 100\text{ dm}^2$, $1\text{ dm}^2 = 100\text{ cm}^2$ και $1\text{ cm}^2 = 100\text{ mm}^2$

Πολλαπλάσια του τετραγωνικού μέτρου

Τις μεγάλες επιφάνειες τις μετράμε σε:

- τετραγωνικά χιλιόμετρα (km^2), κυρίως όταν πρόκειται για την έκταση ενός κράτους ή ενός νομού,
- στρέμματα, όταν πρόκειται για οικοπέδα ή χωράφια.

Ισχύει ότι: $1\text{ km}^2 = 1.000.000\text{ m}^2$, $1\text{ στρέμμα} = 1.000\text{ m}^2$

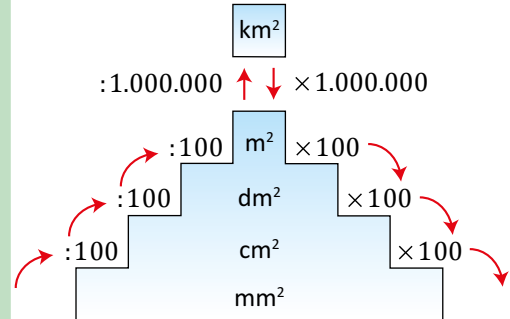
Από τα παραπάνω μπορούμε να βρούμε τις εξής σχέσεις μεταξύ των υποδιαϊρέσεων του τετραγωνικού μέτρου:

$1 \text{ m}^2 =$	$100 \text{ dm}^2 =$	$10.000 \text{ cm}^2 =$	$1.000.000 \text{ mm}^2$
	$1 \text{ dm}^2 =$	$100 \text{ cm}^2 =$	10.000 mm^2
		$1 \text{ cm}^2 =$	100 mm^2

Αντίστροφα, έχουμε ότι:

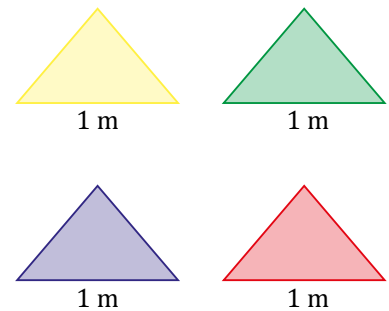
$1 \text{ mm}^2 =$	$0,01 \text{ cm}^2 =$	$0,0001 \text{ dm}^2 =$	$0,000001 \text{ m}^2$
	$1 \text{ cm}^2 =$	$0,01 \text{ dm}^2 =$	$0,0001 \text{ m}^2$
		$1 \text{ dm}^2 =$	$0,01 \text{ m}^2$

Σχηματικά μπορούμε να αναπαραστήσουμε τις μετατροπές από τη μία μονάδα στην άλλη με την ακόλουθη «σκάλα».



Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

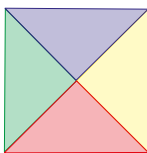
1. Δίνονται τέσσερα ίσα μεταξύ τους ορθογώνια ισοσκελή τρίγωνα. Η υποτεινούσα καθενός από αυτά έχει μήκος 1 m.
 - α) Να χρησιμοποιήσετε τα τρίγωνα αυτά, για να κατασκευάσετε ένα τετράγωνο, ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, ένα πλάγιο παραλληλόγραμμο, ένα ορθογώνιο τρίγωνο και ένα τραπέζιο.
 - β) Ποιο είναι το εμβαδόν καθενός από τα σχήματα που κατασκευάσατε;
 - γ) Πόσα dm^2 είναι η επιφάνεια του κάθε τριγώνου;



Απάντηση

α)

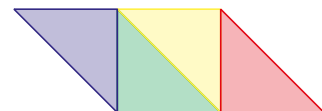
Τετράγωνο



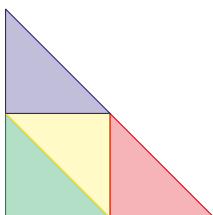
Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο



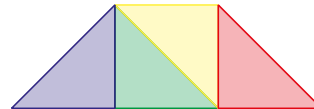
Πλάγιο παραλληλόγραμμο



Ορθογώνιο τρίγωνο



Τραπέζιο



- β) Επειδή όλα τα σχήματα αποτελούνται από τα ίδια κομμάτια, έχουν το ίδιο εμβαδόν. Το τετράγωνο έχει πλευρά 1 m, άρα το εμβαδόν του είναι 1 m^2 . Επομένως όλα τα σχήματα έχουν εμβαδόν 1 m^2 .
- γ) Τα τρίγωνα είναι ίσα μεταξύ τους, οπότε έχουν και το ίδιο εμβαδόν E. Επειδή και τα τέσσερα μαζί έχουν εμβαδόν 1 m^2 , το καθένα από αυτά έχει εμβαδόν $E = \frac{1}{4} \text{ m}^2$. Αλλά $1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2$, άρα $E = \frac{1}{4} \cdot 100 \text{ dm}^2 = 25 \text{ dm}^2$.

2. Έχουμε στη διάθεσή μας 200 πλακάκια επιφάνειας 1.200 cm^2 το καθένα. Είναι αρκετά για να στρώσουμε ένα δωμάτιο 25 m^2 ;

Απάντηση

Με τα 200 πλακάκια μπορούμε να στρώσουμε επιφάνεια $200 \cdot 1.200 \text{ cm}^2 = 240.000 \text{ cm}^2$, τα οποία αντιστοιχούν σε $0,0001 \cdot 240.000 \text{ m}^2 = \frac{1}{10.000} \cdot 240.000 \text{ m}^2 = 24 \text{ m}^2$.

Άρα τα πλακάκια δε φτάνουν για να στρώσουμε όλο το δωμάτιο.

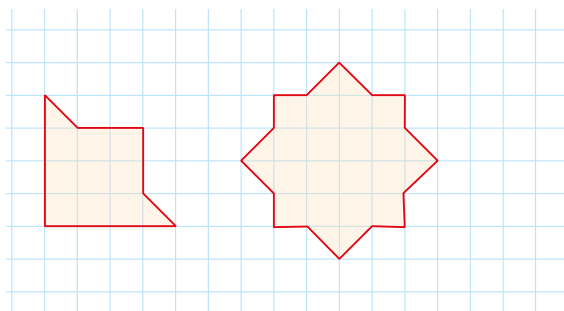


Μετράω με διαφορετικές μονάδες

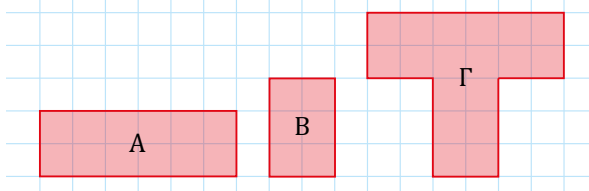


Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

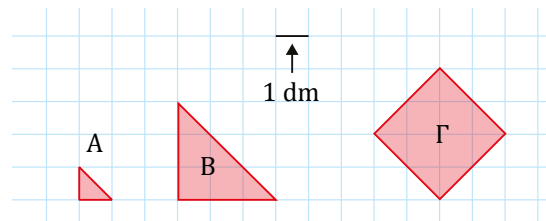
1. Να υπολογίσετε το εμβαδόν των παρακάτω σχημάτων χρησιμοποιώντας ως μονάδα μέτρησης εμβαδού:



2. Αν κάθε τετράγωνο του πλέγματος έχει πλευρά 1 cm, να υπολογίσετε το εμβαδόν των A, B και Γ. Πώς σχετίζεται το εμβαδόν των σχημάτων A και B με το εμβαδόν του Γ; Ποιος είναι ο λόγος που συμβαίνει αυτό;



3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν των παρακάτω σχημάτων, αν το κάθε τετράγωνο του πλέγματος έχει πλευρά 1 dm.



4. Να αντιστοιχίσετε τα παρακάτω μεγέθη με τη μέτρηση που θεωρείτε πιο λογική για κάθε περίπτωση.

α) Εμβαδόν ενός σπιτιού	1) 25 km^2
β) Εμβαδόν ενός οικοπέδου	2) 135 mm^2
γ) Εμβαδόν ενός φύλλου χαρτιού	3) 96 dm^2
δ) Εμβαδόν ενός νησιού	4) 320 cm^2
ε) Εμβαδόν ενός γραμματοσήμου	5) 130 m^2
στ) Εμβαδόν ενός τραπεζιού	6) 1,2 στρέμματα

5. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Για να μετατρέψουμε:

i. cm^2 σε mm^2 :

- α. διαιρούμε με 100
- β. πολλαπλασιάζουμε με 100
- γ. πολλαπλασιάζουμε με 10

ii. dm^2 σε cm^2 :

- α. διαιρούμε με 10
- β. πολλαπλασιάζουμε με 100
- γ. διαιρούμε με 100

iii. dm^2 σε mm^2 :

- α. διαιρούμε με 1.000
- β. πολλαπλασιάζουμε με 10.000
- γ. διαιρούμε με 10.000

iv. cm^2 σε m^2 :

- α. πολλαπλασιάζουμε με 100
- β. διαιρούμε με 10.000
- γ. πολλαπλασιάζουμε με 10.000

v. mm^2 σε m^2 :

- α. πολλαπλασιάζουμε με 1.000.000
- β. διαιρούμε με 1.000
- γ. διαιρούμε με 1.000.000

6. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

mm^2	cm^2	dm^2	m^2
40.000			
		150	
	2.000		
			1,2

7. Να μετατρέψετε σε m^2 τα παρακάτω εμβαδά:

$3,5 \text{ km}^2$, 150.000 cm^2 , 580 dm^2 ,
 $25.500.000 \text{ mm}^2$

8. Να βάλετε σε σειρά από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τα παρακάτω εμβαδά:

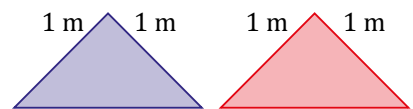
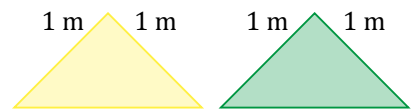
$3,7 \text{ dm}^2$, 290 cm^2 , 4.200 mm^2 , $1,15 \text{ m}^2$



Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

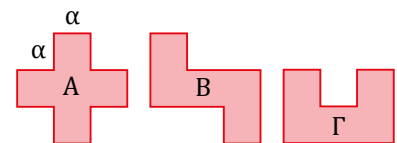
9. Δίνονται τέσσερα ορθογώνια ισοσκελή τρίγωνα με κάθετες πλευρές μήκους 1 m.

- α) Να χρησιμοποιήσετε δύο από αυτά, για να κατασκευάσετε ένα τρίγωνο και ένα τετράγωνο. Ποιο είναι το εμβαδόν των σχημάτων που κατασκευάσατε;
- β) Να χρησιμοποιήσετε και τα τέσσερα τρίγωνα, για να κατασκευάσετε ένα ορθογώνιο, ένα τετράγωνο και ένα τραπέζιο. Ποιο είναι το εμβαδόν των σχημάτων που κατασκευάσατε;



10. α) Με ποιον τρόπο (ή με ποιους τρόπους) μπορούμε να διασπάσουμε το σχήμα Α, ώστε με τα κομμάτια που θα προκύψουν να κατασκευάσουμε τα σχήματα Β και Γ;

β) Αν $\alpha = 1 \text{ cm}$, ποιο είναι το εμβαδόν των Α, Β και Γ;

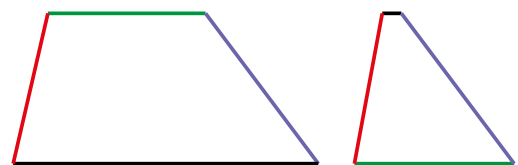


11. Οι μπλε, οι πράσινες και οι κόκκινες πλευρές των διπλανών τραpezίων είναι μεταξύ τους ίσες και παράλληλες.

α) Να μετακινήσετε ή να περιστρέψετε (ή να κάνετε και τα δύο) τα διπλανά τραπέζια, ώστε να κατασκευάσετε:

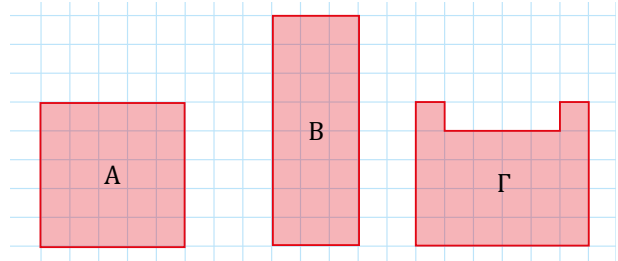
i) ένα τραπέζιο, ii) ένα παραλληλόγραμμο.

β) Να περιγράψετε έναν τρόπο με τον οποίο μπορείτε να διασπάσετε ένα τραπέζιο, ώστε με τα μέρη που θα προκύψουν να κατασκευάσετε ένα παραλληλόγραμμο.

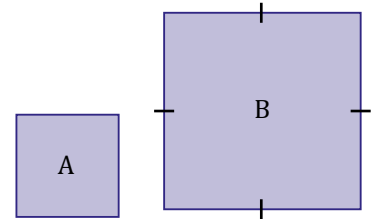


12. Να κατατάξετε τα διπλανά σχήματα από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο με βάση:

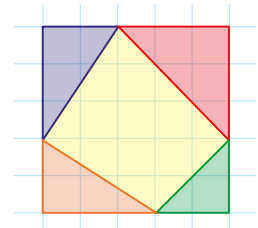
α) την περίμετρό τους,
β) το εμβαδόν τους.



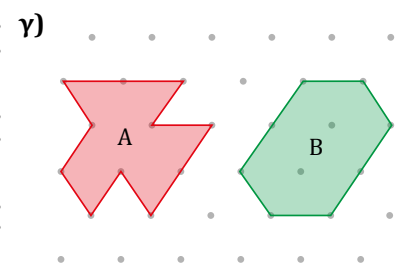
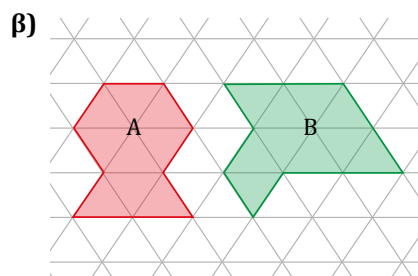
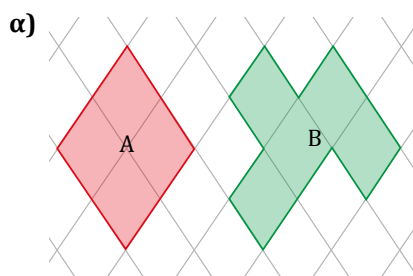
13. Ο Θανάσης υποστηρίζει ότι, επειδή το τετράγωνο Β του διπλανού σχήματος έχει διπλάσια πλευρά από το τετράγωνο Α, θα έχει και διπλάσιο εμβαδόν. Συμφωνείτε με την άποψη του Θανάση; Αν ναι, αιτιολογήστε γιατί. Αν όχι, ποια είναι η σχέση των εμβαδών των δύο τετραγώνων;



14. Για να κατασκευαστεί 1 cm^2 του υφάσματος ενός σεντονιού, χρειάζονται $0,4 \text{ m}$ κλωστής. Πόσα μέτρα κλωστής χρειάζονται για να κατασκευαστεί ένα σεντόνι επιφάνειας $4,8 \text{ m}^2$;
15. Ένας κηπουρός για κάθε m^2 του κήπου χρειάζεται 15 gr λίπασμα. Πόσο λίπασμα θα χρειαστεί, αν ο κήπος έχει έκταση $0,6$ στρέμματα;
16. Για να πλακοστρώσουμε μια αυλή, έχουμε στη διάθεσή μας δύο ειδών πλακάκια. Το κάθε πλακάκι του είδους Α έχει επιφάνεια $0,2 \text{ m}^2$ και κοστίζει 20 € , ενώ το κάθε πλακάκι του είδους Β έχει επιφάνεια 10 dm^2 και κοστίζει 12 € . Ποιο από τα δύο είδη συμφέρει να επιλέξουμε;
17. Αν κάθε τετράγωνο του πλέγματος έχει πλευρά 1 cm , να βρείτε πόσα cm^2 είναι η επιφάνεια των τριγώνων και του κίτρινου τετραπλεύρου του σχήματος.



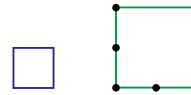
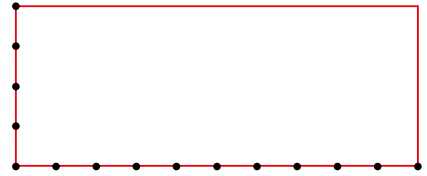
18. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις να επιλέξετε ή να σχεδιάσετε τη μονάδα μέτρησης που θεωρείτε πιο βολική, ώστε να μετρήσετε και να συγκρίνετε το εμβαδόν των σχημάτων Α και Β.



Μετρώ
επιφάνειες με
κατάλληλες
μονάδες

Δ1. Μέτρηση εμβαδού ορθογωνίου

- α) Να μετρήσετε το εμβαδόν του πράσινου τετραγώνου χρησιμοποιώντας ως μονάδα μέτρησης το μπλε τετράγωνο.
- β) Να μετρήσετε το εμβαδόν του ορθογώνιου παραλληλογράμμου χρησιμοποιώντας ως μονάδα μέτρησης το μπλε ή το πράσινο τετράγωνο.
- γ) Η βάση ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου είναι 25 φορές μεγαλύτερη από την πλευρά του μπλε τετραγώνου και το ύψος του 14 φορές μεγαλύτερο από την πλευρά του μπλε τετραγώνου. Να μετρήσετε το εμβαδόν του με μονάδα μέτρησης το εμβαδόν του μπλε τετραγώνου. Συζητήστε στην τάξη τον τρόπο με τον οποίο σκεφτήκατε.

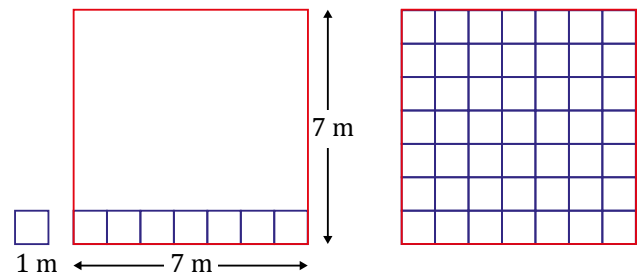


Συζητάμε

...για το εμβαδόν του τετραγώνου

Το μπλε (μικρό) τετράγωνο έχει πλευρά με μήκος 1 m, δηλαδή εμβαδόν 1 m^2 .

Κάθε πλευρά του κόκκινου τετραγώνου έχει πλευρά 7 m. Άρα επάνω σε αυτή χωράει ακριβώς μία σειρά από 7 μπλε τετράγωνα. Επομένως σε ολόκληρο το τετράγωνο θα έχουμε 7 σειρές από 7 τετράγωνα.



Υπολογίζοντας $7^2 = 7 \cdot 7 = 49$, βρίσκουμε πόσα μπλε τετράγωνα χωράνε ακριβώς στο κόκκινο τετράγωνο.

Άρα το κόκκινο τετράγωνο έχει εμβαδόν όσο $7^2 = 49$ μπλε τετράγωνα, δηλαδή 49 m^2 .

Αντίστοιχα, αν η πλευρά του κόκκινου τετραγώνου ήταν 7,5 m, τότε το εμβαδόν του τετραγώνου θα ήταν ίσο με το εμβαδόν $7,5^2 = 56,25$ μπλε τετραγώνων ή αλλιώς με $56,25 \text{ m}^2$.



Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

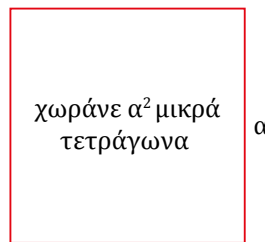
Εμβαδόν τετραγώνου

Αν η πλευρά ενός τετραγώνου έχει μήκος a , τότε αυτό έχει εμβαδόν όσο a^2 τετράγωνα με εμβαδόν 1 το καθένα.

Το εμβαδόν E ενός τετραγώνου με πλευρά a είναι ίσο με a^2 , δηλαδή $E = a^2$.



1



α

α

Εδώ μήκη και εμβαδά αναφέρονται σε μονάδες αντίστοιχες μεταξύ τους. Π.χ.:

- Αν το μήκος της πλευράς είναι μετρημένο σε m, τότε το εμβαδόν είναι σε m^2 .
- Αν το μήκος είναι σε dm, το εμβαδόν είναι σε dm^2 κτλ.

Σε μήκη και εμβαδά που δεν αναφέρονται οι μονάδες μέτρησης, θεωρούμε ότι και τα δύο εκφράζονται σε αντίστοιχες μονάδες (π.χ. m και m^2 ή cm και cm^2 κτλ.).

Συζητάμε

...για το εμβαδόν του ορθογώνιου

Το διπλανό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει βάση μήκους 8 dm και ύψος 3 dm. Με παρόμοιο τρόπο σκέψης όπως στην περίπτωση του τετραγώνου μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν του ορθογώνιου.

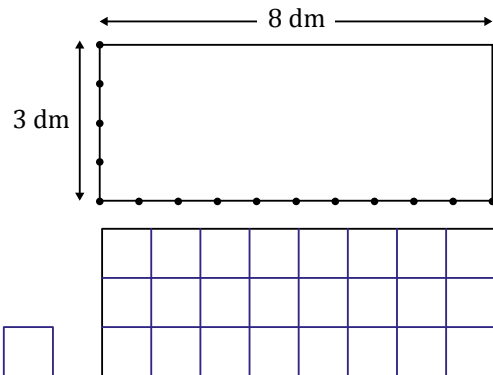
Ας θεωρήσουμε ότι το μπλε τετραγωνάκι έχει πλευρά μήκους 1 dm, δηλαδή εμβαδόν ίσο με $1 dm^2$.

Πάνω στη βάση του ορθογώνιου χωράει ακριβώς μια σειρά από 8 τέτοια τετράγωνα.

Εφόσον το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει ύψος 3 dm, συμπεραίνουμε ότι χωράνε ακριβώς 3 τέτοιες σειρές σε όλο το ορθογώνιο. Άρα το εμβαδόν του ορθογώνιου είναι ίσο με το εμβαδόν $3 \cdot 8 = 24$ μικρών τετραγώνων, δηλαδή $24 dm^2$.

Όπως στο τετράγωνο, έτσι και στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο μπορούμε να υπολογίσουμε σε πόσα τετράγωνα με εμβαδόν 1 αντιστοιχεί το εμβαδόν του. Στην περίπτωση του ορθογώνιου παραλληλόγραμμου χρησιμοποιούμε το γινόμενο των μηκών της βάσης και του ύψους του.

Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο το ονομάζουμε απλά ορθογώνιο.



Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

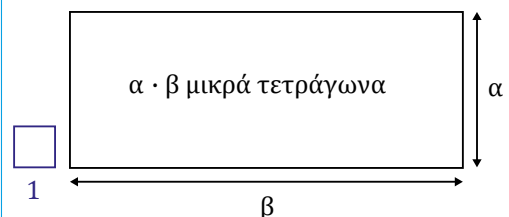
λεκτικά...

Εμβαδόν ορθογώνιου

Αν οι πλευρές ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου έχουν μήκη α και β , τότε αυτό έχει εμβαδόν όσο $\alpha\beta$ τετράγωνα με εμβαδόν 1 το καθένα.

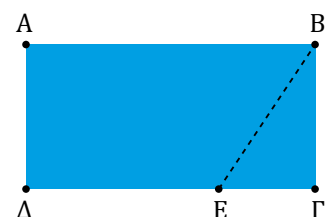
Το εμβαδόν E του ορθογώνιου παραλληλογράμμου με μήκη πλευρών α και β είναι ίσο με $\alpha\beta$, δηλαδή $E = \alpha \cdot \beta$.

...και με σχήμα



Δ2. Από παραλληλόγραμμο σε ορθογώνιο

Το διπλανό τετράπλευρο ABΓΔ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Να το διασπάσετε και να το ανασυνθέσετε, ώστε να σχηματιστεί ένα παραλληλόγραμμο που να μην είναι ορθογώνιο αλλά να έχει ίση βάση και ίσο ύψος με το αρχικό. Συζητήστε στην τάξη τις προτάσεις κάθε ομάδας.



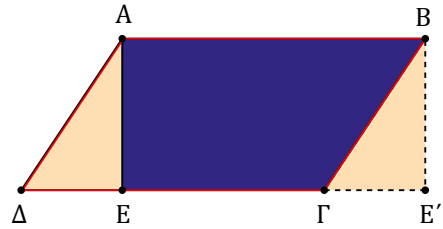
Συζητάμε

...για το εμβαδόν του παραλληλογράμμου

Διασπώντας το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, μπορούμε να το ανασυνθέσουμε σε ορθογώνιο, ώστε να υπολογίσουμε το εμβαδόν του.

Αυτό γίνεται ως εξής:

Αποκόπτουμε το τρίγωνο ΑΔΕ και το μεταφέρουμε όπως στο διπλανό σχήμα, ώστε να σχηματιστεί το ορθογώνιο ΑΒΕ'Ε. Το συνολικό εμβαδόν δεν έχει αλλάξει, γιατί δεν υπάρχουν επικαλύψεις, ούτε κενά. Έτσι, το εμβαδόν (ΑΒΕ'Ε) του ορθογωνίου είναι ίσο με αυτό του παραλληλογράμμου, δηλαδή με το (ΑΒΓΔ).



Το εμβαδόν ενός σχήματος L θα το συμβολίζουμε με (L), δηλαδή γράφοντας το όνομα του σχήματος μέσα σε παρένθεση.



Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

λεκτικά...	...και με σχήμα
<p>Εμβαδόν παραλληλογράμμου</p> <p>Διασπώντας το παραλληλόγραμμο με κατάλληλο τρόπο σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο και ένα τετράπλευρο, το ανασυνθέτουμε σε ορθογώνιο με ίση βάση μήκους β και ίσο ύψος μήκους υ.</p> <p>Άρα το εμβαδόν E του παραλληλογράμμου είναι ίσο με το εμβαδόν του ορθογωνίου με μήκη πλευρών β και υ, δηλαδή $E = \beta \cdot υ$.</p>	

Θα χρησιμοποιήσουμε το $\beta \cdot υ$ και για το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου, θεωρώντας τη μία του πλευρά ως βάση και την άλλη ως ύψος.

Προσοχή: Κάθε πλευρά του παραλληλογράμμου μπορεί να θεωρηθεί βάση του και τότε για τον υπολογισμό του εμβαδού χρησιμοποιούμε το αντίστοιχο ύψος, που είναι κάθετο σε αυτή.



Το ύψος του παραλληλογράμμου



Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε

Να διασπάσετε και να ανασυνθέσετε το παραλληλόγραμμο σε ορθογώνιο, ώστε να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

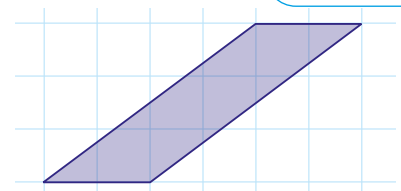
Να παρουσιάσετε τις ιδέες και τις λύσεις σας.



Εμβαδόν παραλληλογράμμου

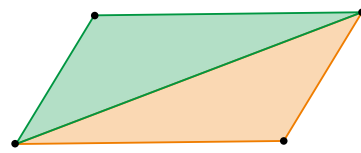


Ποιο εμβαδόν είναι μεγαλύτερο;



Δ3. Από παραλληλόγραμμο σε τρίγωνο

Κόβουμε ένα παραλληλόγραμμο με εμβαδόν 10 σε δύο τρίγωνα, όπως στο σχήμα. Να υπολογίσετε το εμβαδόν κάθε τριγώνου.



Εμβαδόν τριγώνου από παραλληλόγραμμο (1)

Συζητάμε

...για το εμβαδόν του τριγώνου

Όπως φαίνεται στη Δ3, μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν ενός τριγώνου με τη βοήθεια του εμβαδού ενός παραλληλογράμμου.

Περιστρέφουμε το τρίγωνο $AB\Gamma$ του σχήματος γύρω από το μέσο M της πλευράς $A\Gamma$, έτσι ώστε να σχηματιστεί το $AB\Gamma B'$.

Το $AB\Gamma B'$ είναι παραλληλόγραμμο, καθώς οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.

Επιπλέον, το άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων $AB\Gamma$ και $AB'\Gamma$ είναι ίσο με το εμβαδόν του $AB\Gamma B'$.

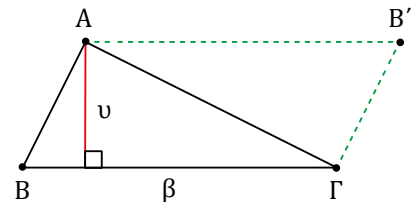
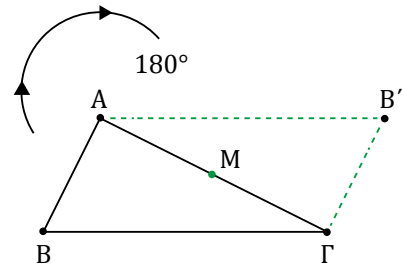
Όμως τα δύο τρίγωνα έχουν ίσα εμβαδά, άρα:

$$(AB\Gamma) = \frac{(AB\Gamma B')}{2}$$

Αν β είναι η βάση του παραλληλογράμμου και υ το ύψος του, τότε:

$$(AB\Gamma) = \frac{(AB\Gamma B')}{2} = \frac{\beta \cdot \upsilon}{2}$$

Όμως η β είναι κοινή βάση παραλληλογράμμου και τριγώνου, όπως και το υ είναι το κοινό τους ύψος.



Εμβαδόν τριγώνου από παραλληλόγραμμο (2)



Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Λεκτικά...

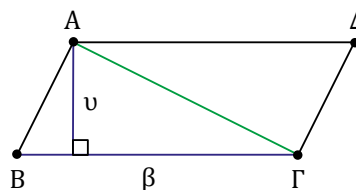
Εμβαδόν τριγώνου

Μπορούμε να βρούμε το εμβαδόν ενός τριγώνου με τη βοήθεια ενός παραλληλογράμμου με κοινή βάση β και κοινό ύψος υ με το τρίγωνο.

Το εμβαδόν E του τριγώνου είναι ίσο με το μισό του εμβαδού του παραλληλογράμμου, δηλαδή με:

$$E = \frac{\beta \cdot \upsilon}{2}$$

...και με σχήμα



$$(AB\Gamma) = \frac{(AB\Gamma\Delta)}{2} = \frac{\beta \cdot \upsilon}{2}$$

Μπορείτε να τεκμηριώσετε τον τύπο υπολογισμού του εμβαδού τριγώνου χρησιμοποιώντας άλλες ιδέες;

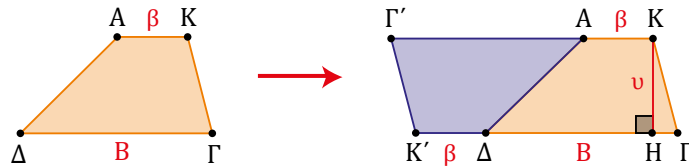


Εμβαδόν τριγώνου από ορθογώνιο

Συζητάμε

...για το εμβαδόν του τραpezίου

Δουλεύοντας παρόμοια με την περίπτωση του τριγώνου, μπορούμε να βρούμε τον τρόπο υπολογισμού του εμβαδού ενός τραpezίου.



Ένας τρόπος να το πετύχουμε είναι όπως στο παραπάνω σχήμα.

Έχουμε ονομάσει «μεγάλη βάση Β» τη ΔΓ και «μικρή βάση β» την ΑΚ του τραpezίου.

Μετασχηματίζουμε το σχήμα με τον παρακάτω τρόπο:

- Αντιγράφουμε το τραpezείο και το προσαρμόζουμε στο ΑΚΓΔ, ώστε η πλευρά ΑΔ να είναι κοινή στα δύο τραpezία. Έτσι σχηματίζεται το τετράπλευρο ΚΓΚ'Γ'.
- Το ΚΓΚ'Γ' είναι παραλληλόγραμμο με βάση Κ'Γ = Β + β.
- Σχεδιάζουμε το ύψος ΚΗ του παραλληλογράμμου.
- Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου είναι (ΚΓΚ'Γ') = Κ'Γ · ΚΗ = (Β + β)υ.
- Όμως, το παραλληλόγραμμο αποτελείται από δύο τραpezία με το ίδιο εμβαδόν. Επομένως το εμβαδόν του τραpezίου είναι ίσο με το μισό του εμβαδού του παραλληλογράμμου. Δηλαδή:

$$(ΑΚΓΔ) = \frac{(ΚΓΚ'Γ')}{2} = \frac{(Β + β) \cdot υ}{2}$$



Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

λεκτικά...

Εμβαδόν τραpezίου

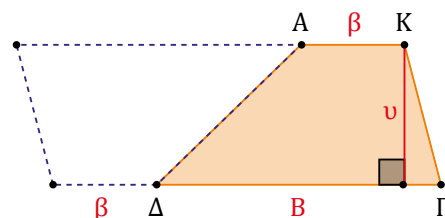
Μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν ενός τραpezίου σχηματίζοντας από αυτό ένα παραλληλόγραμμο με διπλάσιο εμβαδόν από το τραpezίο. Το παραλληλόγραμμο αυτό έχει:

- βάση ίση με το άθροισμα των βάσεων Β και β του τραpezίου, δηλαδή Β + β,
- το ίδιο ύψος υ με αυτό του τραpezίου.

Άρα το εμβαδόν Ε του τραpezίου είναι ίσο με:

$$Ε = \frac{(Β + β) \cdot υ}{2}$$

...και με σχήμα



$$(ΑΚΓΔ) = \frac{(Β + β) \cdot υ}{2}$$

Μπορείτε να τεκμηριώσετε τον τύπο υπολογισμού του εμβαδού τραpezίου χρησιμοποιώντας άλλες ιδέες;



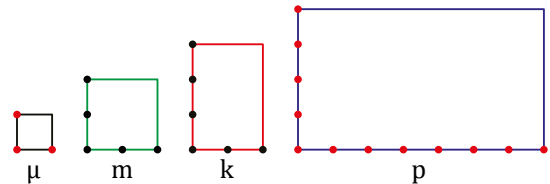
Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει βάση μήκους 4,2 cm και ύψος 15 mm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του ορθογωνίου.

Απάντηση

Αν βείναι το μήκος της βάσης και $υ$ του ύψους του ορθογωνίου, τότε $β = 4,2 \text{ cm}$ και $υ = 15 \text{ mm} = 15 : 10 \text{ cm} = 1,5 \text{ cm}$. Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι ίσο με $β \cdot υ = 4,2 \cdot 1,5 = 6,3 \text{ cm}^2$.

2. Τα $μ$ και m είναι τετράγωνα, ενώ τα k και p είναι ορθογώνια. Πόσες φορές μεγαλύτερο είναι:
- το εμβαδόν του p από το εμβαδόν του m ;
 - το εμβαδόν του p από το εμβαδόν του k ;



Απάντηση

Θα χρησιμοποιήσουμε την πλευρά του $μ$ ως μονάδα μέτρησης μήκους και το εμβαδόν του $μ$ ως μονάδα μέτρησης εμβαδού. Έτσι:

- Το εμβαδόν του m είναι $2^2 = 4$.
- Το εμβαδόν του k είναι $2 \cdot 3 = 6$.
- Το εμβαδόν του p είναι $7 \cdot 4 = 28$.

Άρα γράφουμε $(m) = 4$, $(k) = 6$ και $(p) = 28$ με μονάδα μέτρησης το $(μ)$.

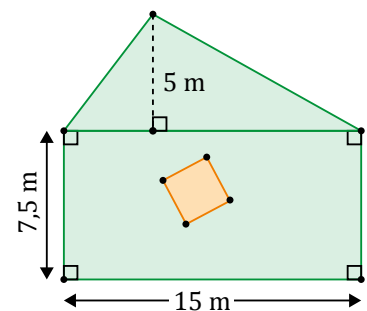
- α) Βρίσκουμε πόσες φορές μεγαλύτερο είναι το (p) από το (m) :

$$(p) : (m) = 28 : 4 = 7$$

Άρα το (p) είναι 7 φορές μεγαλύτερο από το (m) .

- β) Ομοίως, $(p) : (k) = \frac{28}{6} = \frac{14}{3}$. Άρα το (p) είναι $\frac{14}{3}$ ή 4,7 φορές περίπου μεγαλύτερο από το (m) .

3. Το Δημοτικό Συμβούλιο αποφάσισε να κατασκευάσει ένα περίπτερο με τετράγωνη βάση πλευράς 2,5 m μέσα σε ένα μικρό πάρκο, το οποίο καλύπτεται με γκαζόν, όπως στο σχήμα. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του πάρκου που καλύπτεται με γκαζόν μετά την κατασκευή του περιπτέρου.



Απάντηση

Το πάρκο αποτελείται από ένα ορθογώνιο και ένα τρίγωνο. Ονομάζουμε $AB\Gamma\Delta$ το ορθογώνιο, ABE το τρίγωνο και $K\Lambda MN$ το τετράγωνο που αντιστοιχεί στο περιπτερο. Για τα εμβαδά ισχύει:

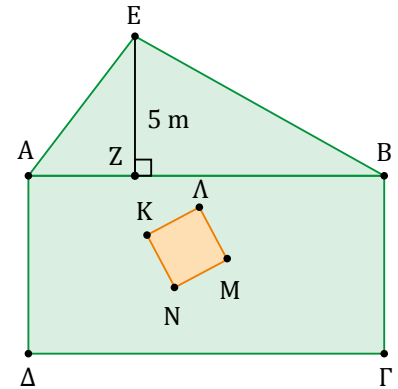
$$(AB\Gamma\Delta) = 15 \cdot 7,5 = 112,5 \text{ m}^2$$

$$(ABE) = \frac{15 \cdot 5}{2} = \frac{75}{2} = 37,5 \text{ m}^2$$

$$(K\Lambda MN) = 2,5^2 = 6,25 \text{ m}^2$$

Επομένως το μέρος του πάρκου που καλύπτεται με γκαζόν μετά την κατασκευή του περιπτερού έχει εμβαδόν:

$$(AB\Gamma\Delta) + (ABE) - (K\Lambda MN) = 112,5 + 37,5 - 6,25 = 143,75 \text{ m}^2$$



4. Να αιτιολογήσετε με διάσπαση και ανασύνθεση γιατί το εμβαδόν ενός ρόμβου είναι ίσο με το μισό του γινομένου των διαγωνίων του.

Απάντηση

Αρχικά σχεδιάζουμε τις διαγωνίους $A\Gamma$ και $B\Delta$ του ρόμβου.

Επειδή οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται κάθετα, σχηματίζονται τέσσερα ορθογώνια τρίγωνα, τα ABK , $A\Delta K$, $B\Gamma K$ και $\Gamma\Delta K$.

Ανασυνθέτουμε το σχήμα όπως στην εικόνα και έτσι σχηματίζεται το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $\Delta BK'K''$, το οποίο έχει ίσο εμβαδόν με τον ρόμβο $AB\Gamma\Delta$, γιατί δεν υπάρχουν επικαλύψεις, ούτε κενά.

Το $\Delta BK'K''$ έχει βάση $K'K''$ ίση με τη μεγάλη διαγώνιο του ρόμβου, τη $B\Delta$. Το ύψος BK' του ορθογωνίου έχει μήκος ίσο με το μισό της διαγωνίου $A\Gamma$ του ρόμβου, δηλαδή $BK' = \frac{A\Gamma}{2}$.

Το εμβαδόν του $\Delta BK'K''$ είναι:

$$(\Delta BK'K'') = \beta \cdot \upsilon = K'K'' \cdot BK' = B\Delta \cdot \frac{A\Gamma}{2} = \frac{B\Delta \cdot A\Gamma}{2}$$

Όμως το εμβαδόν του ρόμβου είναι ίσο με το εμβαδόν του $\Delta BK'K''$, άρα:

$$(AB\Gamma\Delta) = \frac{B\Delta \cdot A\Gamma}{2}$$

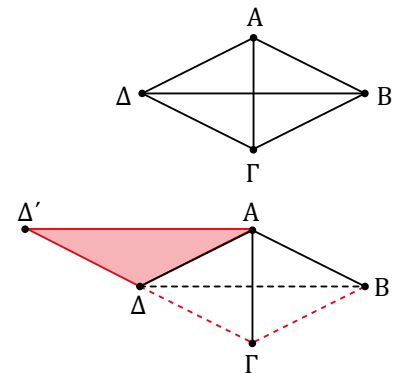
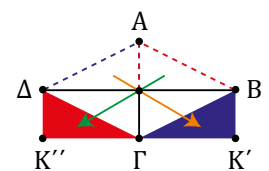
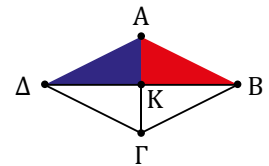
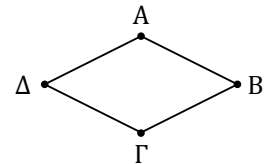
Δηλαδή το εμβαδόν του ρόμβου είναι ίσο με το μισό του γινομένου των διαγωνίων του.

Άλλος τρόπος

Χρησιμοποιώντας και εδώ τις διαγωνίους του ρόμβου, αποκόπτουμε το τρίγωνο $\Delta B\Gamma$ και ανασυνθέτουμε το σχήμα όπως φαίνεται στη δεύτερη εικόνα.

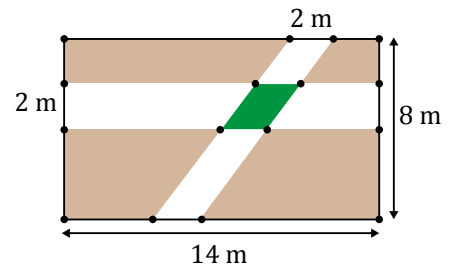
Έτσι προκύπτει το παραλληλόγραμμο $AB\Delta\Delta'$, το οποίο έχει ίσο εμβαδόν με τον ρόμβο, βάση $B\Delta$ και ύψος ίσο με το μισό της διαγωνίου $A\Gamma$ του ρόμβου. Άρα:

$$(AB\Gamma\Delta) = (AB\Delta\Delta') = \frac{B\Delta \cdot A\Gamma}{2}$$



Παράδειγμα και ασκήσεις στο εμβαδόν ρόμβου

5. Στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο του διπλανού σχήματος υπάρχουν δύο λευκές λωρίδες σχήματος ορθογώνιου παραλληλόγραμμου η μία και παραλληλογράμμου η άλλη. Η κοινή τους επιφάνεια είναι χρωματισμένη με πράσινο. Χρησιμοποιώντας τα μήκη που δίνονται στο σχήμα, να υπολογίσετε το εμβαδόν του καφέ μέρους του ορθογώνιου.



Απάντηση

Αρχικά ονομάζουμε:

- $AB\Gamma\Delta$ το αρχικό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο,
- $K\Lambda MN$ την ορθογώνια λευκή λωρίδα,
- ΘEZH τη λευκή λωρίδα σχήματος παραλληλογράμμου,
- $OΠP\Sigma$ το πράσινο παραλληλόγραμμο.

Από τα μήκη που δίνονται έχουμε:

$$A\Delta = 8 \text{ m}, \quad \Delta\Gamma = MN = 14 \text{ m}, \quad KN = 2 \text{ m} \text{ και } HZ = \Sigma P = 2 \text{ m}.$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τα παρακάτω εμβαδά:

$$(AB\Gamma\Delta) = \Delta\Gamma \cdot A\Delta = 14 \cdot 8 = 112 \text{ m}^2$$

$$(K\Lambda MN) = MN \cdot KN = 14 \cdot 2 = 28 \text{ m}^2$$

Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν της λευκής λωρίδας ΘEZH , σχεδιάζουμε το ύψος της $u_1 = A\Delta = 8 \text{ m}$.

$$\text{Άρα } (\Theta EZH) = HZ \cdot u_1 = 2 \cdot 8 = 16 \text{ m}^2.$$

Για να βρούμε το ζητούμενο εμβαδόν, χρειάζεται να αφαιρέσουμε από το εμβαδόν του καφέ ορθογώνιου τις λευκές λωρίδες:

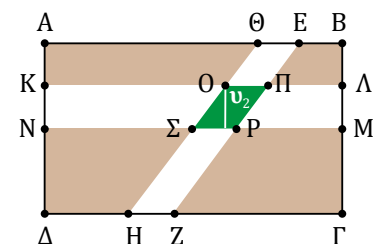
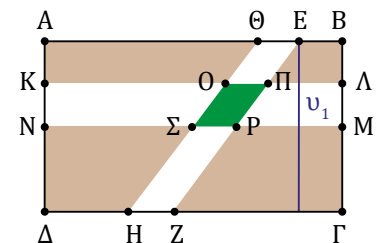
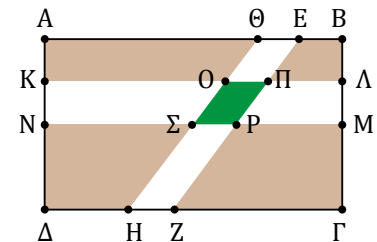
$$(AB\Gamma\Delta) - (K\Lambda MN) - (\Theta EZH) = 112 - 28 - 16 = 68 \text{ m}^2$$

Ωστόσο, αφαιρώντας τις λευκές λωρίδες, η κοινή τους επιφάνεια που αντιστοιχεί στο $OΠP\Sigma$ έχει αφαιρεθεί δύο φορές. Άρα θα πρέπει να προσθέσουμε το εμβαδόν που αντιστοιχεί σε αυτή.

Γι' αυτό σχεδιάζουμε το ύψος του $OΠP\Sigma$, $u_2 = KN = 2 \text{ m}$.

$$\text{Επομένως } (OΠP\Sigma) = \Sigma P \cdot u_2 = 2 \cdot 2 = 4 \text{ m}^2.$$

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο με $68 + 4 = 72 \text{ m}^2$.



Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε

Με ανασύνθεση του τραpezίου σε παραλληλόγραμμο αιτιολογήσαμε τον τύπο υπολογισμού του εμβαδού του. Μπορείτε να σκεφτείτε άλλους τρόπους για να αιτιολογήσετε τον τύπο αυτό; Να καταγράψετε όσους διαφορετικούς τρόπους βρείτε.



Ο Ευκλείδης και τα εμβαδά



Πείραμα με το εμβαδόν παραλληλογράμμων

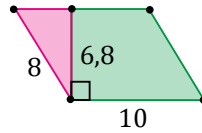


Το θεώρημα του Pick

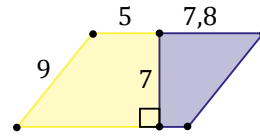


Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

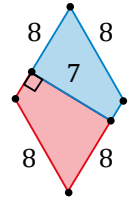
1. Αν διασπάσουμε τα διπλανά παραλληλόγραμμα όπως φαίνεται στα σχήματα και τα ανασυνθέσουμε σε ορθογώνια με το ίδιο εμβαδόν, ποια θα είναι τα μήκη των πλευρών των ορθογωνίων και ποια τα εμβαδά τους;



(α)

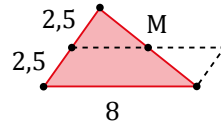


(β)

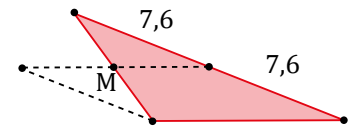


(γ)

2. Αν μετασχηματίσουμε τα διπλανά τρίγωνα σε παραλληλόγραμμα με το ίδιο εμβαδόν, σύμφωνα με τις διακεκομμένες γραμμές, ποια θα είναι τα μήκη των πλευρών των παραλληλογράμων; (Το σημείο M είναι μέσο της αντίστοιχης πλευράς σε κάθε περίπτωση.)



(α)



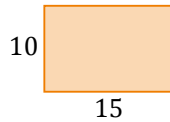
(β)

3. Να υπολογίσετε τα εμβαδά των παρακάτω σχημάτων χρησιμοποιώντας τα μήκη που δίνονται.

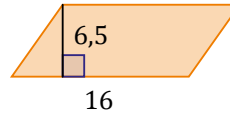
α) Τετράγωνο



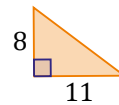
β) Ορθογώνιο



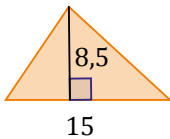
γ) Παραλληλόγραμμα



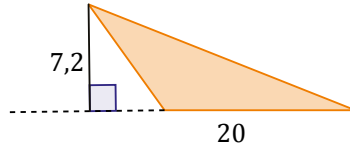
δ) Ορθογώνιο τρίγωνο



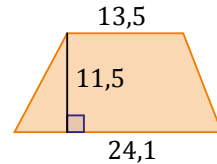
ε) Οξυγώνιο τρίγωνο



στ) Αμβλυγώνιο τρίγωνο

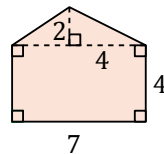


ζ) Τραπεζίτιο

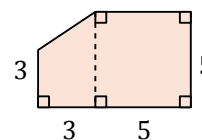


Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

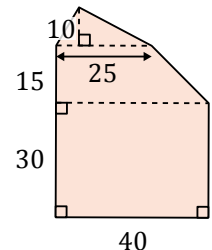
4. Να υπολογίσετε τα εμβαδά των διπλανών σχημάτων χρησιμοποιώντας τα δεδομένα κάθε σχήματος.



(α)



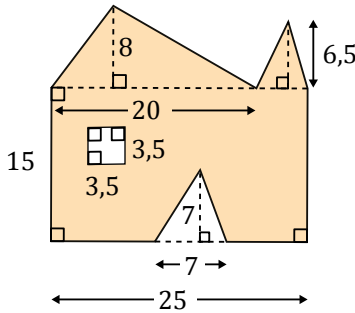
(β)



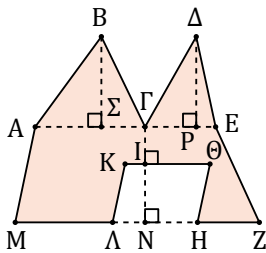
(γ)

5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χρωματισμένου μέρους των παρακάτω σχημάτων.

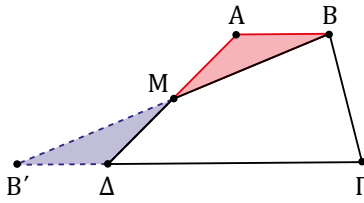
α)



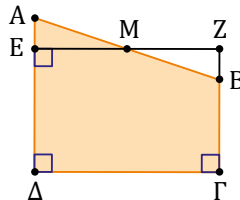
β) Το ΚΘΗΛ είναι παραλληλόγραμμο και το ΑΕΖΜ τραπέζιο. Επιπλέον δίνονται τα μήκη $MZ = 23$, $\Lambda H = 8$, $NI = 5,5$, $I\Gamma = 3,5$, $AE = 17$ και $B\Sigma = \Delta P = 8,5$.



6. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος είναι τραπέζιο με βάσεις ΑΒ και ΓΔ. Επίσης, το Μ είναι μέσο της πλευράς ΑΔ του τραpezίου. Το τρίγωνο ΔΜΒ' έχει προκύψει από την περιστροφή του τριγώνου ΑΒΜ γύρω από το Μ. Να αιτιολογήσετε τον τύπο υπολογισμού του εμβαδού του τραpezίου με τη βοήθεια του σχήματος.



7. Το ΕΖΓΔ είναι ορθογώνιο και το ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο με εμβαδόν 96. Το σημείο Μ είναι το μέσο των πλευρών ΑΒ και ΕΖ (δηλαδή οι ΑΒ και ΕΖ διχοτομούνται στο Μ).



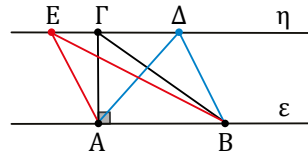
α) Να βρείτε το εμβαδόν του ΕΖΓΔ.

β) Αν επιπλέον $A\Delta = 10$ και $AE = 2$, να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΔΓ και το εμβαδόν του ΕΜΒΓΔ.

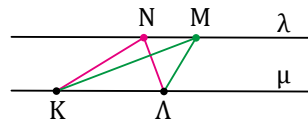


Εμβαδόν τραpezίου

8. α) Οι ευθείες ε και η είναι παράλληλες. Αν $AB = 7$ και $A\Gamma = 5$, να υπολογίσετε τα εμβαδά των τριγώνων ΑΒΓ, ΑΕΒ και ΑΔΒ.

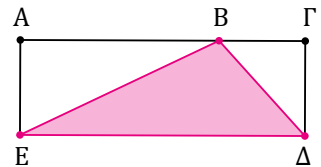


β) Οι ευθείες μ και λ είναι παράλληλες. Αν το εμβαδόν του τριγώνου ΚΛΝ είναι 9, να υπολογίσετε το εμβαδόν του ΚΛΜ.

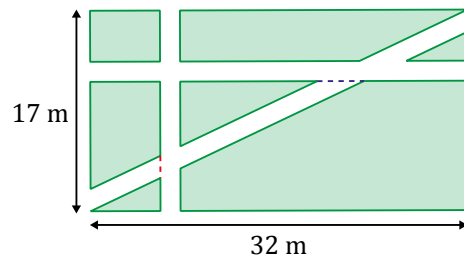


Πρόταση 1.35
Στοιχείων Ευκλείδη

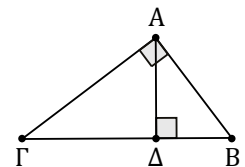
9. Το ορθογώνιο ΑΓΔΕ έχει εμβαδόν 27. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΒΕΔ.



10. Σε ένα πάρκο με γκαζόν σχήματος ορθογωνίου, με διαστάσεις 32 m και 17 m, συναντιούνται 3 ποδηλατόδρομοι, όπως στο σχήμα. Κάθε ποδηλατόδρομος έχει πλάτος 170 cm. Επίσης, οι αποστάσεις που παριστάνονται με την κόκκινη και την μπλε διακεκομμένη γραμμή είναι ίσες με 188 cm και 398 cm αντίστοιχα. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του πάρκου που είναι φυτεμένο με γκαζόν.



11. Για το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος ισχύει ότι $AB = 6$, $A\Gamma = 8$ και $B\Gamma = 10$. Να υπολογίσετε το μήκος του ΑΔ.



Τρίλιζα με εμβαδά

Δ1. Η πρόκληση του παππού

Η Μαρία βρήκε στη συλλογή γραμματοσήμων του παππού της ένα γραμματόσημο του 1955 με μια σύνθεση τετραγώνων που την εντυπωσίασε. Ο παππούς τότε βρήκε την ευκαιρία να της βάλει το εξής πρόβλημα:

Της ζήτησε να σχεδιάσει σε χαρτί μιλιμετρέ ένα ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 3 cm και 4 cm.

Έπειτα της είπε: «Μπορείς, χωρίς να μετρήσεις την υποτείνουσα του τριγώνου, ναμαντέψεις πόσο είναι το μήκος της; Θα σε βοηθήσει το γραμματόσημο!».

α) Εσείς μπορείτε να απαντήσετε στην πρόκληση του παππού;

β) Ποια σχέση συνδέει τα εμβαδά των τριών (μεγάλων) τετραγώνων στο γραμματόσημο; Πώς η σχέση αυτή μεταφράζεται σε σχέση των πλευρών του τριγώνου που σχεδίασε η Μαρία; Συζητήστε στην τάξη τις ιδέες σας.



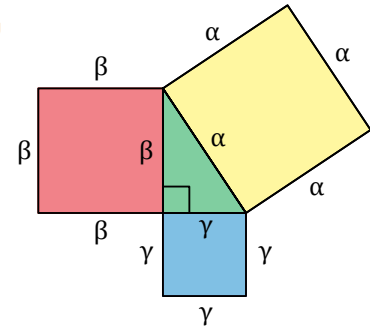
Μαθαίνουμε από το γραμματόσημο

Συζητάμε

...για τα τετράγωνα στις πλευρές ενός ορθογώνιου τριγώνου

Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε:

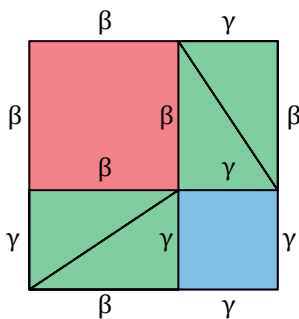
1. ένα πράσινο ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα α και κάθετες πλευρές β και γ ,
2. ένα κίτρινο τετράγωνο πλευράς α ,
3. ένα κόκκινο τετράγωνο πλευράς β ,
4. ένα γαλάζιο τετράγωνο πλευράς γ .



Δηλαδή σχεδιάσαμε τα τετράγωνα που έχουν ως πλευρές τις πλευρές του ορθογώνιου τριγώνου.

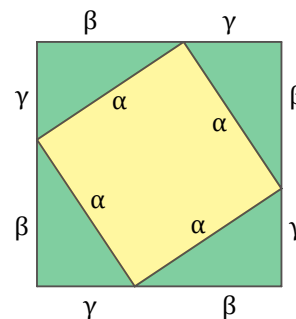
Στη συνέχεια φαίνονται δύο τρόποι με τους οποίους μπορούμε να καλύψουμε ένα τετράγωνο πλευράς $\beta + \gamma$ με κάποια από τα παραπάνω σχήματα:

1ος τρόπος



με τέσσερα τρίγωνα και τα τετράγωνα των κάθετων πλευρών

2ος τρόπος



με τέσσερα τρίγωνα και το τετράγωνο της υποτείνουσας

Αυτές οι δύο περιπτώσεις είναι επικαλύψεις του ίδιου τετραγώνου. Επίσης, και οι δύο περιέχουν από τέσσερα πράσινα τρίγωνα. Άρα και τα υπόλοιπα εμβαδά θα είναι ίσα. Δηλαδή, όση επιφάνεια καταλαμβάνουν τα τετράγωνα των κάθετων πλευρών (το κόκκινο και το γαλάζιο), τόση επιφάνεια καταλαμβάνει το τετράγωνο της υποτεινούςας (το κίτρινο).

$$E_{\text{κόκκινου τετραγώνου}} + E_{\text{γαλάζιου τετραγώνου}} = E_{\text{κίτρινου τετραγώνου}}$$

ή αλλιώς:

$$\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$$

Η σχέση αυτή που βρήκαμε ισχύει για κάθε ορθογώνιο τρίγωνο. Το συμπέρασμα αυτό είναι **το Πυθαγόρειο θεώρημα**. Η σειρά των λογικών επιχειρημάτων που μας βεβαιώνουν ότι το συμπέρασμα ισχύει λέμε ότι είναι μια **απόδειξη** του.

Στα Μαθηματικά, κάποια σημαντικά συμπεράσματα, για τα οποία έχουμε μια απόδειξη ότι ισχύουν, τα λέμε **θεωρήματα**.

Υπάρχει μια παράδοση που λέει ότι ο Πυθαγόρας, όταν ανακάλυψε την απόδειξη του θεωρήματος, θυσίασε εκατό βόδια, με αποτέλεσμα το θεώρημα αυτό να λέγεται και «θεώρημα της εκατόμβης»! Κατά τον Βιτρούβιο, θυσιάστηκε ένας ταύρος όταν ανακαλύφθηκε η πυθαγόρεια τριάδα 3, 4 και 5. Όμως, άλλοι ιστορικοί το θεωρούν απίθανο, διότι ο Πυθαγόρας ήταν απολύτως αντίθετος με τη θανάτωση και τη θυσία ζώων και ιδιαίτερα του ταύρου.

Πηγή: [16]



Η εκατόμβη του Πυθαγόρα



Μία απόδειξη του Πυθαγόρειου θεωρήματος



Κόψε-ράψε τα τετράγωνα (1)



Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Λεκτικά...

Πυθαγόρειο θεώρημα

(σχέση εμβαδών) Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά την υποτεινούσα είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων που σχηματίζονται από τις κάθετες πλευρές.

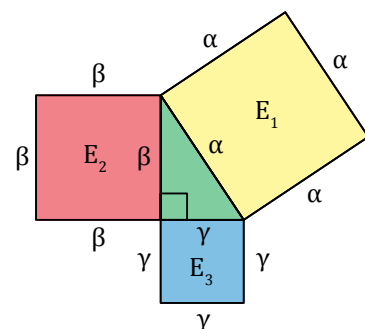
Ή αλλιώς:

(σχέση πλευρών) Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο της υποτεινούςας είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών.



Ο Αϊνστάϊν και το ΠΘ

...και με σχήμα



$$E_1 = E_2 + E_3$$

ή αλλιώς:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

Το Πυθαγόρειο θεώρημα αποδίδεται στον Πυθαγόρα, διότι **ήταν ο πρώτος που το απέδειξε, όχι όμως ο πρώτος που το ανακάλυψε**. Πλέον, είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε ότι το θεώρημα ήταν ήδη γνωστό στους Βαβυλώνιους (πιθανόν και στους Κινέζους) τουλάχιστον 1.000 χρόνια πριν από τον Πυθαγόρα.

Μέχρι σήμερα είναι γνωστές περισσότερες από 400 αποδείξεις του και ο αριθμός αυτός ολοένα και αυξάνεται. Κάποιες από αυτές είναι εντυπωσιακά απλές και κάποιες άλλες απίστευτα πολύπλοκες. Λέγεται ότι στον Μεσαίωνα όποιος φοιτητής επιθυμούσε να αποκτήσει μεταπτυχιακό τίτλο στα Μαθηματικά όφειλε να δημιουργήσει μια νέα και πρωτότυπη απόδειξη του Πυθαγόρειου θεωρήματος.

Πηγή: [16]



Πυθαγόρειες
τριάδες και
Βαβυλώνιοι

Δ2. Πειραματισμοί με ένα σκοινί

Να πάρετε ένα σκοινί και να κάνετε σε αυτό 13 κόμπους, ώστε να σχηματιστούν 12 ίσα τμήματα. Με αυτά να κατασκευάσετε τρίγωνο με πλευρές με 3, 4 και 5 τμήματα, όπως φαίνεται στη φωτογραφία.

Ποιο είναι το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του; Προσέξτε να είναι τεντωμένο το σκοινί.



Συζητάμε

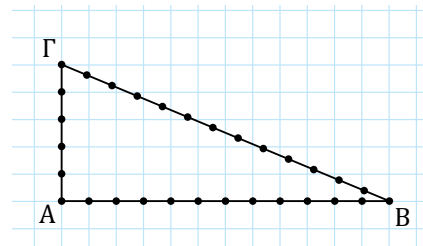
...για κατασκευή ορθογώνιων τριγώνων χωρίς γνώμονα

Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε ένα τρίγωνο με πλευρές 5, 12 και 13. Παρατηρούμε ότι ισχύει:

$$13^2 = 12^2 + 5^2$$

Αν μετρήσουμε τη γωνία \hat{A} , θα δούμε ότι είναι ορθή. Δηλαδή η σχέση των τετραγώνων των πλευρών εξασφαλίζει την ύπαρξη της ορθής γωνίας.

Κάποιοι ιστορικοί αναφέρουν ότι στην Αρχαία Αίγυπτο οι λεγόμενοι «αρπεδονάπτες» είχαν ως ασχολία (μεταξύ άλλων) την κατασκευή ορθών γωνιών σε αγροτεμάχια. Για να το πετύχουν αυτό, χρησιμοποιούσαν σκοινιά και κόμπους, ώστε να σχηματίσουν τρίγωνα με τα σωστά μήκη πλευρών, εξασφαλίζοντας έτσι ότι θα είναι ορθογώνια. Σήμερα εξακολουθεί να εφαρμόζεται η ίδια μέθοδος στο λεγόμενο «γώνιασμα» του χωραφιού, όταν, για παράδειγμα, θέλουμε να διαμορφώσουμε ορθογώνιες συστάδες δέντρων.



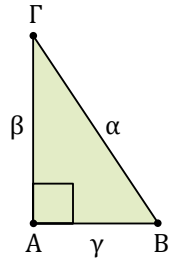
Αρπεδονάπτες



Το αντίστροφο
του Πυθαγόρειου
θεωρήματος



Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

λεκτικά...	...και με σχήμα
<p>Αντίστροφο Πυθαγόρειου θεωρήματος</p> <p>Αν σε ένα τρίγωνο το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς του είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δύο πλευρών, τότε το τρίγωνο αυτό είναι ορθογώνιο. Η ορθή γωνία βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά.</p>	 <p>Αν $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$, τότε $\hat{A} = 90^\circ$.</p>



Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. Μία σκάλα ενός πυροσβεστικού οχήματος έχει μέγιστο μήκος 29 m. Το κάτω άκρο της απέχει 3,4 m από ένα κτίριο, ενώ το πάνω άκρο της ακουμπάει στο κτίριο. Σε ποιο ύψος υψώθηκε η σκάλα;

Απάντηση

Ο τοίχος όπου ακουμπάει η σκάλα, το οριζόντιο έδαφος και η σκάλα σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετη πλευρά 3,4 m και υποτείνουσα 29 m. Το ζητούμενο ύψος είναι το μήκος x της δεύτερης κάθετης πλευράς. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα ισχύει:

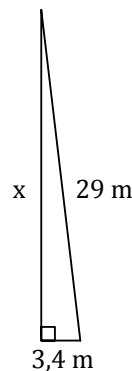
$$x^2 + 3,4^2 = 29^2$$

$$x^2 + 11,56 = 841$$

$$x^2 = 841 - 11,56$$

$$x^2 = 829,44$$

Άρα $x = 28,8$ m.



Αν ένας αριθμός έχει ένα δεκαδικό ψηφίο, το τετράγωνό του θα έχει δύο. Αν ο αριθμός έχει δύο δεκαδικά ψηφία, το τετράγωνό του θα έχει τέσσερα. Επομένως και αντίστροφα, αν το τετράγωνο ενός δεκαδικού αριθμού έχει δύο δεκαδικά ψηφία, τότε ο αριθμός θα έχει ένα δεκαδικό ψηφίο.

Έτσι, βρίσκουμε τον αριθμό με εκτιμήσεις και δοκιμές, λαμβάνοντας υπόψη το τελευταίο ψηφίο του τετραγώνου του.

Εδώ οι πιθανοί αριθμοί ήταν οι 28,2 και 28,8 (μεγαλύτεροι του 28, αλλά μικρότεροι του 29, που είναι η υποτείνουσα).

2. Θα μπορέσουν οι μεταφορείς να σηκώσουν ένα ψυγείο του οποίου η πλάγια όψη έχει διαστάσεις 60 cm × 175 cm, δεδομένου ότι το υπόγειο όπου τοποθετείται έχει ύψος 1,9 cm;

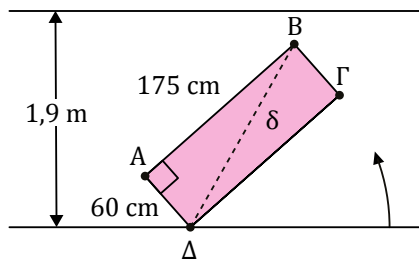
Απάντηση

Οι μεταφορείς θα μπορέσουν να στρέψουν το ψυγείο στην όρθια θέση, αν η διαγώνιός του δ δεν ξεπερνά τα 190 cm (1,9 m).

Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Delta$:

$$\begin{aligned}\delta^2 &= 60^2 + 175^2 \\ \delta^2 &= 3.600 + 30.625 \\ \delta^2 &= 34.225 \\ \delta^2 &= 5^2 \cdot 37^2 \\ \delta &= 5 \cdot 37 = 185\end{aligned}$$

Άρα $\delta = 185$ cm.



Μας βοήθησε η ανάλυση του αριθμού 34.225 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων για να βρούμε το δ ;



Ανόρθωση ψυγείου

Συνεπώς οι μεταφορείς θα μπορέσουν να στρέψουν το ψυγείο στην όρθια θέση.

- 3.** Ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο με περίμετρο 28 (μονάδες μήκους), διαγώνιο $A\Gamma = 10$ και πλευρά $\Gamma\Delta = 8$. Ποιο είναι το είδος του παραλληλογράμμου;

Απάντηση

Οι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου είναι ίσες, όπως εικονίζεται στο σχήμα. Από τη σχέση της περιμέτρου παίρνουμε:

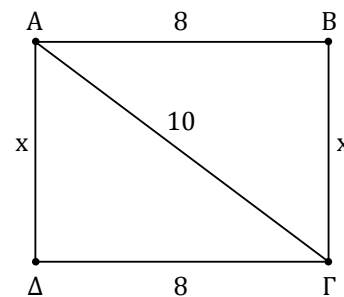
$$\begin{aligned}2 \cdot x + 2 \cdot 8 &= 28 \\ 2x + 16 &= 28 \\ 2x &= 28 - 16 \\ 2x &= 12 \\ x &= 6\end{aligned}$$

Συνεπώς $AD = 6$. Παρατηρούμε ότι στο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ ισχύει:

$$AD^2 + \Delta\Gamma^2 = 6^2 + 8^2 = 100 = A\Gamma^2$$

Επομένως από το αντίστροφο του Πυθαγόρειου θεωρήματος συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο με $\Delta = 90^\circ$.

Άρα το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ θα είναι ορθογώνιο.



- 4.** Δίνονται ένα κόκκινο και ένα μεγαλύτερο πράσινο τετράγωνο με εμβαδά E_κ και E_π αντίστοιχα. Να κατασκευάσετε:

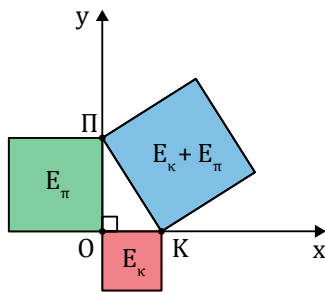
- α) ένα τετράγωνο με εμβαδόν το άθροισμα των εμβαδών $E_\kappa + E_\pi$,
β) ένα τετράγωνο με εμβαδόν τη διαφορά των εμβαδών $E_\pi - E_\kappa$.

Απάντηση

Η ιδέα της κατασκευής φαίνεται στα επόμενα σχήματα. Και στις δύο περιπτώσεις ξεκινάμε με μια ορθή γωνία $\hat{x}\hat{O}\hat{y}$ και με το κόκκινο τετράγωνο. Όμως το πράσινο τετράγωνο τοποθετείται διαφορετικά: είτε για να φτιάξουμε την άλλη κάθετη είτε για να φτιάξουμε την υποτείνουσα.

Οι σχέσεις που αναγράφονται προκύπτουν από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο OKΠ.

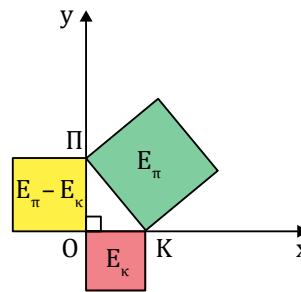
α)



$$ΚΠ^2 = OK^2 + OΠ^2$$

$$E_{\gammaαλάζιου} = E_{\kappa} + E_{\pi}$$

β)



$$OΠ^2 = ΚΠ^2 - OK^2$$

$$E_{κίτρινου} = E_{\pi} - E_{\kappa}$$



Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα ως άθροισμα εμβαδών



Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε

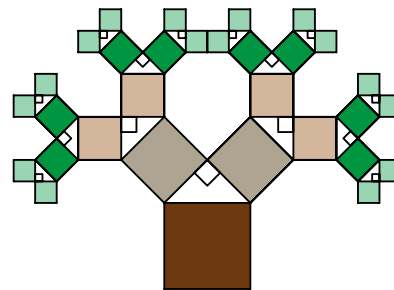
1. Να αναζητήσετε και άλλες αποδείξεις του Πυθαγόρειου θεωρήματος και να τις παρουσιάσετε.



Κόψε-ράψε τα τετράγωνα (2)

2. Το εικονιζόμενο είναι ένα «πυθαγόρειο δέντρο», που το συνθέτουν τετράγωνα διαφόρων μεγεθών και ισοσκελή ορθογώνια τρίγωνα. Τα τετράγωνα ίδιου μεγέθους έχουν χρωματιστεί με το ίδιο χρώμα (σκούρο καφέ / καφέ / ώχρα / πράσινο / ανοιχτό πράσινο). Αν υποθέσουμε ότι το εμβαδόν του μεγαλύτερου τετραγώνου είναι 16, να διερευνήσετε τα ακόλουθα:

- β) Ποιο είναι το συνολικό εμβαδόν καθεμιάς από τις πέντε ομάδες τετραγώνων του ίδιου μεγέθους/χρώματος;



Πυθαγόρειο δέντρο

- α) Ποιο είναι το εμβαδόν του μικρότερου τετραγώνου;

3. Τριάδες θετικών ακεραίων όπως η 3, 4, 5 και η 5, 12, 13 τις λέμε πυθαγόρειες τριάδες, γιατί είναι μήκη πλευρών ορθογώνιων τριγώνων. Να επιβεβαιώσετε ότι τα τρίγωνα με αυτές τις πλευρές είναι ορθογώνια και να βρείτε κι άλλες τέτοιες τριάδες.

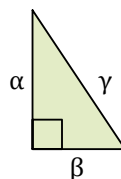


Πυθαγόρειες τριάδες



Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Να συμπληρώσετε τις σχέσεις πλευρών του εικονιζόμενου τριγώνου.

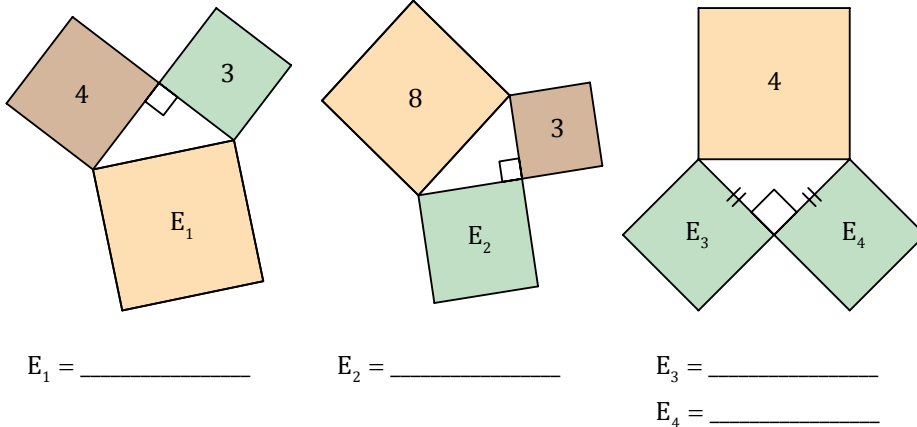


$$\alpha^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\beta^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

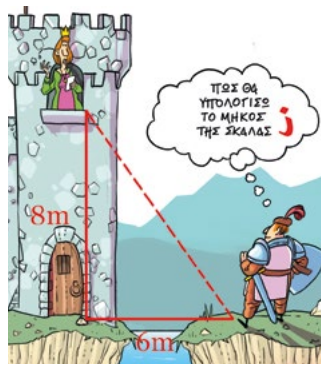
$$\gamma^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

2. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ).
- α) Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ είναι $\alpha = \beta + \gamma$.
- β) Αν στο τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$.
- γ) Αν στο τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\hat{\Gamma} = 90^\circ$.
3. Σε καθένα από τα ακόλουθα σχήματα, τα νούμερα δηλώνουν το εμβαδόν των τετραγώνων. Να υπολογίσετε το ζητούμενο εμβαδόν σε κάθε περίπτωση.

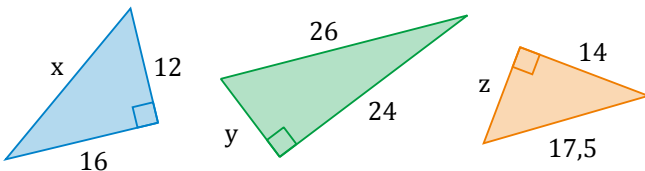


Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

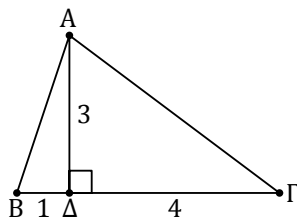
4. Ο Ερωτόκριτος θέλει να υπολογίσει το μήκος της σκάλας για να φτάσει στην αγαπημένη του Αρετούσα. Πόσα μέτρα σκάλα θα χρειαστεί;



5. Σε καθένα από τα ακόλουθα ορθογώνια τρίγωνα να υπολογίσετε την άγνωστη πλευρά.

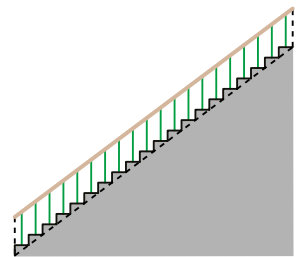


6. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

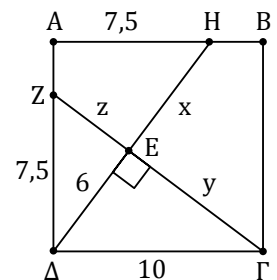


7. Η τάξη λέει ότι η ακόλουθη πρόταση είναι σωστή, ενώ η Ελένη λέει ότι είναι λάθος: «Αν στο τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\alpha^2 \neq \beta^2 + \gamma^2$, τότε το τρίγωνο δεν είναι ορθογώνιο». Ποια είναι η δική σας άποψη; Μπορείτε να την αιτιολογήσετε;

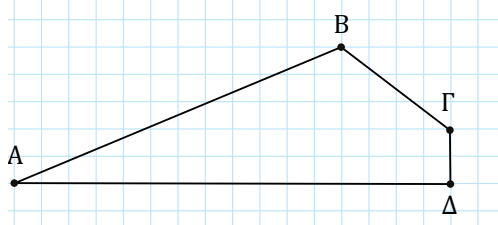
8. Μπορείτε να υπολογίσετε το μήκος της κουραστικής (καφέ γραμμή) της εικονιζόμενης σκάλας, η οποία έχει 20 σκαλοπάτια με ρίχτι (ύψος) 18,9 cm και πάτημα (πλάτος) 25,2 cm;



9. Το διπλανό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο. Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων x , y και z . (Υπόδειξη: Να εντοπίσετε τα κατάλληλα ορθογώνια τρίγωνα στο σχήμα.)

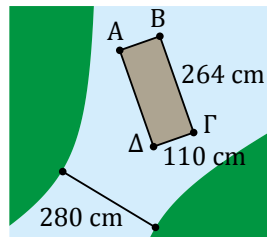


10. Στον παρακάτω χάρτη, η πλευρά κάθε μικρού τετραγώνου είναι 1 km.

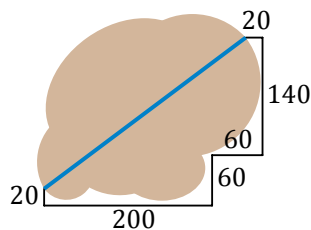


- α) Να υπολογίσετε το μήκος του AB.
- β) Ποια είναι η συντομότερη διαδρομή, η ABΓ ή η AΔΓ;

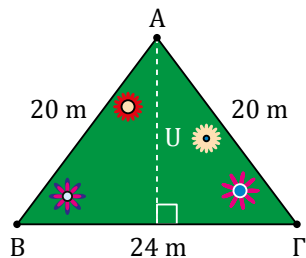
11. Μια σχεδία σχήματος ορθογώνιου παραλληλογράμμου διαστάσεων 110 cm × 264 cm έχει παρασυρθεί από το ρεύμα και κατευθύνεται προς το στένεμα του ποταμού, πλάτους 280 cm. Να εξετάσετε αν υπάρχει περίπτωση η σχεδία να σφηνώσει στο στένεμα.



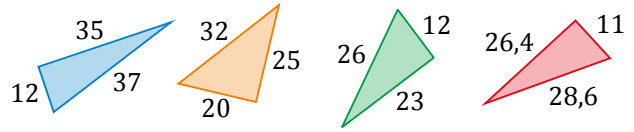
12. Το διπλανό σχήμα είναι το σχέδιο ενός μηχανικού. Η τεθλασμένη (μαύρη γραμμή) που σχεδίασε έχει οριζόντιες και κατακόρυφες πλευρές και τα μήκη τους είναι μετρημένα σε μέτρα. Μπορείτε να βοηθήσετε τον μηχανικό να υπολογίσει το μήκος της σήραγγας (γαλάζια γραμμή) που πρέπει να διανοιχτεί στο βουνό;



13. Η Ζαχρά έχει έναν κήπο που είναι ισοσκελές τρίγωνο. Θέλει να βρει το εμβαδόν του. Μπορείτε να τη βοηθήσετε;

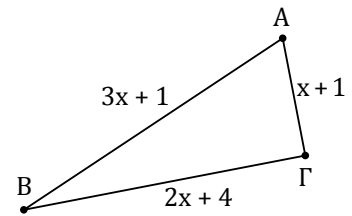


14. Να εξετάσετε ποια από τα εικονιζόμενα τρίγωνα είναι ορθογώνια.

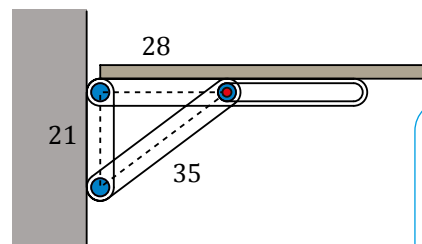


15. Αν το ABΓ είναι ορθογώνιο με την $\hat{A} = 90^\circ$, να εξετάσετε αν ένα τρίγωνο με πλευρές 3α, 3β και 3γ είναι ορθογώνιο (δηλαδή το δεύτερο τρίγωνο έχει τριπλάσιες πλευρές από το πρώτο).

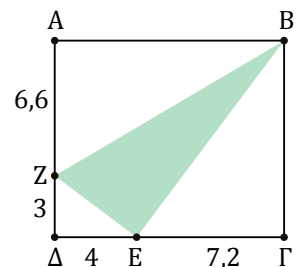
16. Αν το τρίγωνο ABΓ έχει περίμετρο 30, να εξετάσετε αν είναι ορθογώνιο, αφού πρώτα υπολογίσετε το x.



17. Στο σχήμα απεικονίζεται η διατομή ενός μηχανισμού που υποστηρίζει πτυσσόμενο τραπεζάκι τοίχου. Όταν ο μηχανισμός «κλειδώσει», τα αρθρωτά μέλη του σχηματίζουν τρίγωνο με μήκη πλευρών (σε cm) 21, 28 και 35. Θα είναι οριζόντιο το τραπεζάκι σε αυτή τη θέση;



18. Το τετράπλευρο ABΓΔ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Να εξετάσετε αν το τρίγωνο BEZ είναι ορθογώνιο.



Γεωμετρία του επιπέδου και εμβαδά

Ερωτήσεις – ασκήσεις – προβλήματα

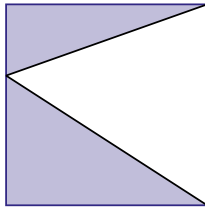
1. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες:

- α) $1 \text{ dm}^2 = \dots \text{ mm}^2$ β) $1.000 \text{ mm}^2 = \dots \text{ cm}^2$
 γ) $1 \text{ m}^2 = \dots \text{ cm}^2$ δ) $1 \text{ m}^2 = \dots \text{ mm}^2$
 ε) $10.000 \text{ cm}^2 = \dots \text{ dm}^2$

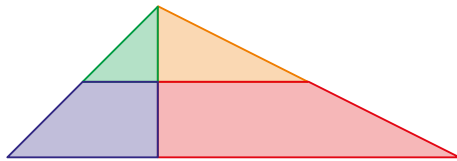
2. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες:

- α) $1 \dots = 10.000 \text{ mm}^2$
 β) $10.000 \text{ cm}^2 = 1 \dots$
 γ) $100 \dots = 1.000.000 \text{ mm}^2$
 δ) $10 \text{ dm}^2 = 1.000 \dots$
 ε) $10.000 \text{ cm}^2 = 1.000.000 \dots$

3. Το εμβαδόν του διπλανού τετραγώνου είναι 3,7. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χρωματισμένου μέρους του τετραγώνου.

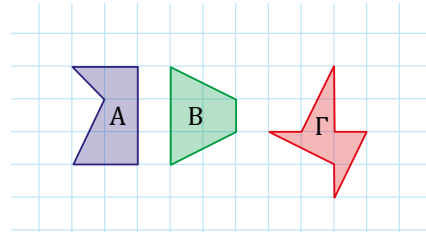


4. Να χρησιμοποιήσετε όλα τα μέρη στα οποία είναι χωρισμένο το παρακάτω τρίγωνο, για να κατασκευάσετε:

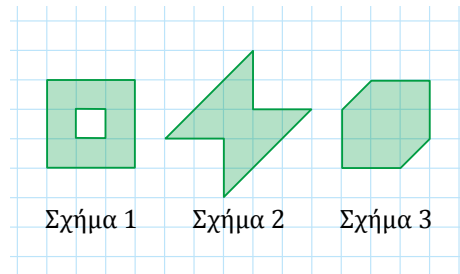


- α) ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο,
 β) ένα πλάγιο παραλληλόγραμμο,
 γ) ένα τραπέζιο.
 (Μπορείτε να κόψετε τα κομμάτια αφού τα αντιγράψετε σε ένα χαρτί.)

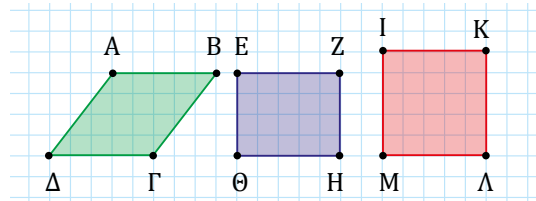
5. Να συγκρίνετε τα εμβαδά των παρακάτω σχημάτων.



6. Το τετραγωνικό πλέγμα αποτελείται από τετράγωνα πλευράς 1 cm. Πόσο είναι το εμβαδόν των επιφανειών (χρωματιστές περιοχές) στα τρία σχήματα; Προσπαθήστε να υπολογίσετε κάθε εμβαδόν με δύο τρόπους τουλάχιστον.



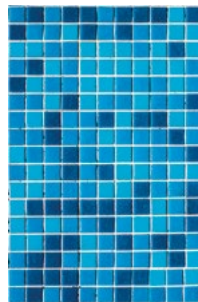
7. Κάθε τετράγωνο του παρακάτω πλέγματος έχει πλευρά 1 cm.



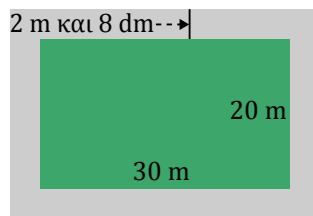
- α) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΑΔ.
 β) Να συγκρίνετε τα παραπάνω παραλληλόγραμμα ως προς:
 i) την περίμετρο, ii) το εμβαδόν.

8. Ένα γήπεδο ποδοσφαίρου έχει επιφάνεια 6,4 στρεμμάτων. Πόσα χρήματα θα χρειαστούν για την αλλαγή του χλοοτάπητα, αν το ένα τετραγωνικό μέτρο κοστίζει 7 ευρώ;

9. Για τη δημιουργία ενός ψηφιδωτού όπως αυτού της εικόνας χρησιμοποιούνται τετράγωνα ψηφίδες με πλευρά 1 cm. Πόσες ψηφίδες θα χρειαστούν για να καλυφθεί ένας τοίχος πλάτους 3 m και 4 dm και ύψους 2 m και 60 cm;

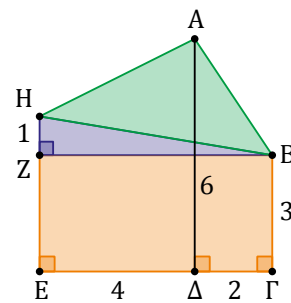


10. Περιμετρικά μιας πλατείας σχήματος ορθογώνιου παραλληλογράμμου διαστάσεων 30×20 m κατασκευάζεται πεζοδρόμιο πλάτους 2 m και 8 dm το οποίο θα στρωθεί με τετράγωνα πλακάκια.

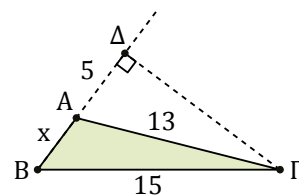


- α) Πόσα m^2 είναι η επιφάνεια του πεζοδρομίου;
β) Πόσες πλακάκια πεζοδρομίου θα χρειαστούν, αν κάθε πλακάκι έχει πλευρά 40 cm;

11. Στο διπλανό σχήμα είναι $AD = 6$, $HZ = 1$, $ED = 4$, $\Delta\Gamma = 2$ και $B\Gamma = 3$. Να υπολογίσετε τα εμβαδά $(BΓΕΖ)$, (BZH) , $(ABΓΕΗ)$ και (ABH) .

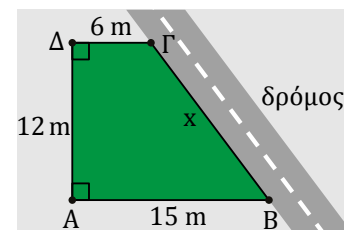


12. Για το εικονιζόμενο τρίγωνο ABΓ να υπολογίσετε:



- α) το ύψος του $\Gamma\Delta$ και την πλευρά του $AB = x$,
β) το εμβαδόν του.

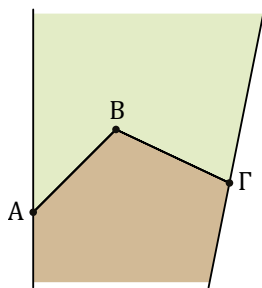
13. Ο Δημοσθένης έχει ένα οικόπεδο, του οποίου το σχήμα φαίνεται δίπλα.



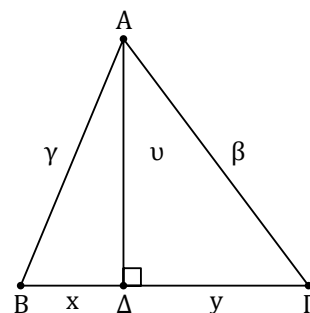
- α) Τι σχήμα έχει το οικόπεδο;
β) Ποιο είναι το εμβαδόν του οικόπεδου;
γ) Ο Δημοσθένης θέλει να βρει την απόσταση BΓ, που «βλέπει» στον δρόμο. Μπορείτε να τον βοηθήσετε;

Συνδέσεις και επεκτάσεις

14. Οι ιδιοκτήτες των δύο χωραφιών (πράσινη και καφέ περιοχή) συμφώνησαν να καταστρέψουν το σύνορο ABΓ και στη θέση του να βάλουν ένα άλλο σύνορο που θα αποτελείται από ένα ευθύγραμμο τμήμα (και όχι τεθλασμένη γραμμή). Βοηθήστε τους να σχεδιάσουν το σύνορο-τμήμα, έτσι ώστε τα νέα χωράφια που θα οριστούν να έχουν το ίδιο εμβαδόν με τα παλιά χωράφια.

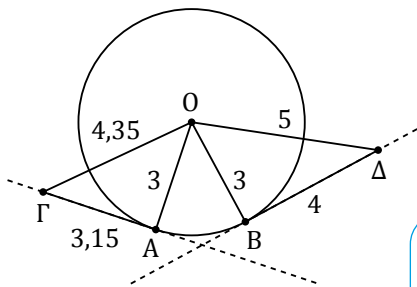


15. Στο οξυγώνιο τρίγωνο ABΓ του σχήματος, το ύψος του AD διαιρεί την πλευρά BΓ στα τμήματα x και y.

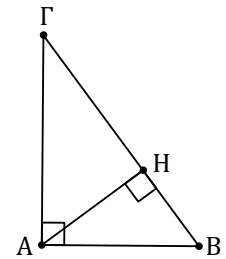


- α) Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί $\gamma^2 - x^2 = \beta^2 - y^2$;
β) Αν είναι $\beta = 15$, $\gamma = 13$ και $y = 1,8x$, να υπολογίσετε την πλευρά BΓ του τριγώνου και το εμβαδόν του.

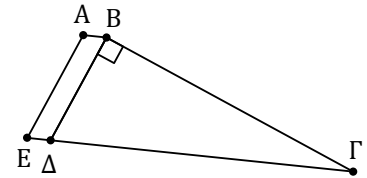
16. Να εξετάσετε αν οι ευθείες ΑΓ και ΒΔ του σχήματος είναι εφαπτόμενες του κύκλου (O,3) στα σημεία του Α και Β αντίστοιχα.



17. Να βρείτε το ύψος ΑΗ του ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ του σχήματος, αν $AB = 6$ και $AG = 8$.

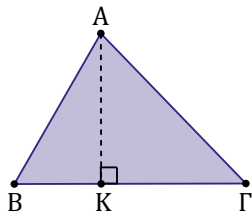


18. Το ΑΒΔΕ του διπλανού σχήματος είναι παραλληλόγραμμο. Επίσης, $AE = 5$, $AB = 1$, $BΓ = 12$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του ΑΒΓΕ.

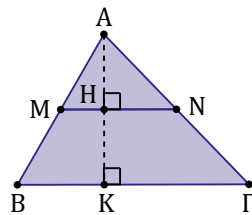


Ομαδική εργασία

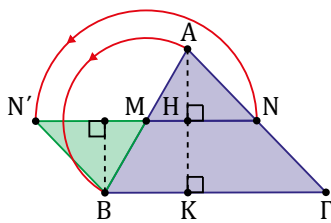
19. Στο παρακάτω σχήμα 1 παριστάνεται ένα τρίγωνο με βάση ΒΓ και ύψος ΑΚ.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

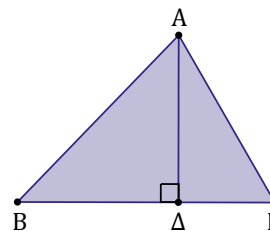


Σχήμα 3

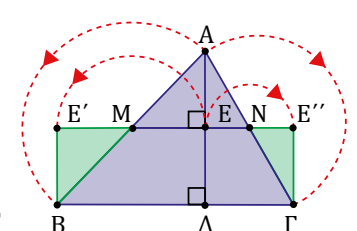
Στο σχήμα 2 έχουμε σχεδιάσει τα Μ και Ν, που είναι μέσα των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Το ΑΗ είναι ύψος του τριγώνου ΑΜΝ. Στο σχήμα 3 έχουμε περιστρέψει κατά 180° το τρίγωνο ΑΜΝ γύρω από το Μ και έχει σχηματιστεί το τρίγωνο ΒΜΝ'. Χρησιμοποιώντας το σχήμα 3, να συγκρίνετε τα εμβαδά του τριγώνου ΑΒΓ και του τετραπλεύρου ΒΓΝΝ'. Εξηγήστε πώς μπορούμε να χρησιμοποιή-

σουμε τα παραπάνω για να αποδείξουμε τον τύπο για το εμβαδόν τριγώνου. Αν θέλετε, μπορείτε να επαναλάβετε το σχέδιο στο τετράδιό σας.

20. Το τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος 1 έχει βάση ΒΓ και ύψος ΑΔ. Στο σχήμα 2 έχουμε σχεδιάσει τα μέσα Μ και Ν των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα και το ύψος ΑΕ του τριγώνου ΑΜΝ. Επίσης, το τρίγωνο ΑΜΕ έχει περιστραφεί κατά 180° γύρω από το Μ και έτσι έχει σχηματιστεί το ΒΜΕ'. Με παρόμοιο τρόπο έχει σχηματιστεί το ΓΝΕ'' από το ΑΝΕ. Χρησιμοποιώντας το σχήμα 2, να συγκρίνετε τα εμβαδά του τριγώνου ΑΒΓ και του τετραπλεύρου ΒΓΕ''Ε'. Εξηγήστε πώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα παραπάνω για να αποδείξουμε τον τύπο για το εμβαδόν τριγώνου. Αν θέλετε, μπορείτε να επαναλάβετε το σχέδιο στο τετράδιό σας.



Σχήμα 1



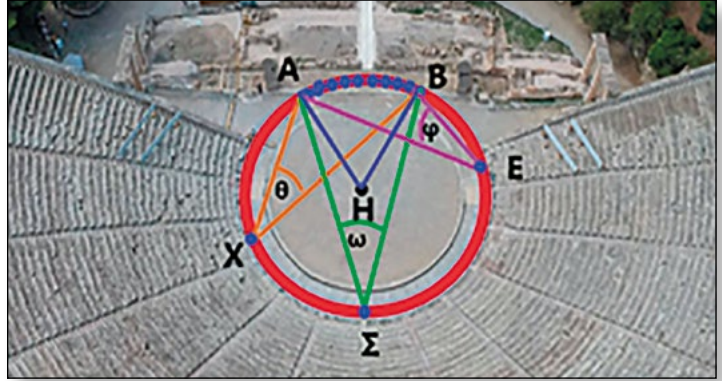
Σχήμα 2

Δ1. Παρακολουθώντας μια παράσταση στο αρχαίο θέατρο της Επιδαύρου

Τα περισσότερα θέατρα στην αρχαιότητα είχαν σχήμα κυκλικό, όπως αυτό της Επιδαύρου στη διπλανή εικόνα. Συζητήστε σε ομάδες κάποιους πιθανούς λόγους.

Στο θέατρο αυτό ο σκηνοθέτης (Σ), ο χορογράφος (X) και η ενδυματολόγος (E) παρακολουθούν την πρόβα του χορού στο τόξο AB από τα σημεία Σ , X και E αντίστοιχα. Ένας ηθοποιός (H) βρίσκεται στο κέντρο H του κύκλου. Οι γωνίες υπό τις οποίες παρατηρούν αυτό το μέρος της σκηνής είναι οι $\hat{\omega}$, $\hat{\theta}$ και $\hat{\varphi}$ αντίστοιχα.

- α)** Να συζητήσετε στην ομάδα σας για τα μεγέθη των γωνιών αυτών. Ποια πιστεύετε ότι είναι η μεγαλύτερη;
- β)** Να συγκρίνετε τις γωνίες αυτές με τη γωνία $\hat{A}HB$, υπό την οποία παρατηρεί ο ηθοποιός τον χορό.



Ο σκηνοθέτης παρατηρεί

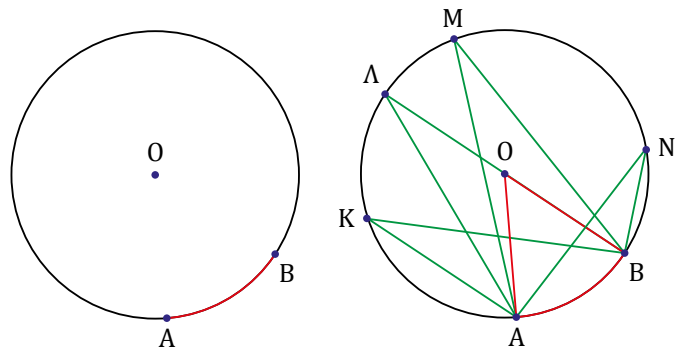
Συζητάμε

...για γωνίες στον κύκλο

Στο παραπάνω σχήμα η γωνία $\hat{\theta}$, για παράδειγμα, έχει ως κορυφή το σημείο X του κύκλου και «βλέπει» «παρατηρεί» ένα μέρος του κύκλου (το τόξο \widehat{AB}) που ορίζεται από τις χορδές XA και XB . Κάθε γωνία όπως η $\hat{\theta}$ ονομάζεται **εγγεγραμμένη**.

Επειδή το άνοιγμα της εγγεγραμμένης «βλέπει» ένα τόξο (το \widehat{AB}), χρησιμοποιούμε την έκφραση «**η εγγεγραμμένη γωνία $\hat{\theta}$ βαίνει στο τόξο \widehat{AB} ή έχει αντίστοιχο τόξο το \widehat{AB}** ».

Στον κύκλο με κέντρο O του διπλανού σχήματος μπορούμε να σχεδιάσουμε άπειρες εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο \widehat{AB} . Μερικές από αυτές είναι οι \hat{K} , $\hat{\Lambda}$, \hat{M} , \hat{N} . Ωστόσο, στο ίδιο τόξο βαίνει μόνο μία επίκεντρη, η $\hat{A}OB$.





Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

λεκτικά...	...και με σχήμα
<p>Εγγεγραμμένη λέμε κάθε γωνία που η κορυφή της είναι σημείο ενός κύκλου και οι πλευρές της είναι τμήνουςες του κύκλου (ή χορδές του κύκλου).</p> <ul style="list-style-type: none"> • Λέμε ότι η εγγεγραμμένη γωνία $\hat{\omega}$ βαίνει στο τόξο d. • Μπορούμε επίσης να πούμε ότι η εγγεγραμμένη γωνία $\hat{\omega}$ έχει αντίστοιχο τόξο το d. 	
<p>Το μέτρο μιας εγγεγραμμένης γωνίας είναι ίσο με το μισό του μέτρου του τόξου στο οποίο βαίνει.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Στο διπλανό σχήμα η κόκκινη εγγεγραμμένη γωνία βαίνει σε τόξο 40° και είναι ίση με 20°. • Το μέτρο της επίκεντρης $\widehat{A\hat{O}B}$ (με πράσινο) είναι ίσο με το μέτρο του τόξου \widehat{AB} στο οποίο βαίνει, δηλαδή 40°. 	
<p>Το μέτρο μιας εγγεγραμμένης είναι ίσο με το μισό της επίκεντρης που βαίνει στο ίδιο τόξο.</p> <p>$\widehat{B\hat{O}\Gamma} = \widehat{B\hat{\Gamma}} = 60^\circ$, ενώ η εγγεγραμμένη</p> $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = \frac{\widehat{B\hat{\Gamma}}}{2} = 30^\circ.$ <p>Άρα $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = \frac{\widehat{B\hat{O}\Gamma}}{2}$.</p> <div style="text-align: center;"> <p>Σχέση επίκεντρης-εγγεγραμμένης</p> </div>	<p>Τι σχέση έχουν οι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο; Γιατί;</p>

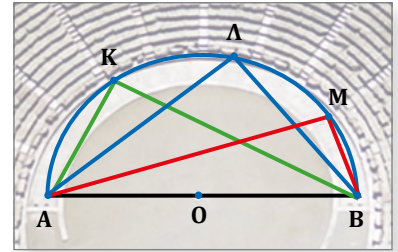


Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. Στη διπλανή εικόνα οι ηθοποιοί έχουν παραταχθεί κατά μήκος της διαμέτρου AB . Να συγκρίνετε τις γωνίες παρατήρησης των θεατών στις θέσεις K , Λ και M και να βρείτε τα μέτρα τους.



Παρατηρώντας τη διάμετρο



Απάντηση

$$\begin{aligned} \widehat{AKB} &= \widehat{ALB} = \widehat{AMB} \text{ (εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο)} = \frac{\widehat{AOB}}{2} = \\ &= \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ \text{ (εγγεγραμμένη και επίκεντρη που βαίνουν στο ίδιο τόξο)}. \end{aligned}$$

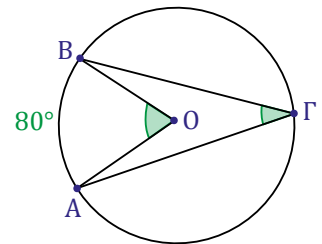
Γενικά: Όλες οι εγγεγραμμένες που βαίνουν σε ημικύκλιο είναι ορθές.

2. Στον διπλανό κύκλο το μέτρο του τόξου \widehat{AB} είναι 80° . Να υπολογίσετε τα μέτρα των γωνιών \widehat{AOB} και \widehat{AGB} .

Απάντηση

Το μέτρο της επίκεντρης είναι ίσο με το μέτρο του αντίστοιχου τόξου της, άρα $\widehat{AOB} = \widehat{AB} = 80^\circ$.

Το μέτρο της εγγεγραμμένης είναι ίσο με το μισό του αντίστοιχου τόξου της, άρα $\widehat{AGB} = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$.



3. Στο διπλανό σχήμα οι ΔB και $E\Gamma$ είναι διάμετροι, $\widehat{G\Delta} = \widehat{\omega}$ και $\widehat{B\Lambda\Gamma} = 2\widehat{\omega}$. Να υπολογίσετε τα μέτρα: α) των τόξων $\widehat{G\Delta}$, $\widehat{B\Gamma}$, β) των γωνιών \widehat{E}_1 , \widehat{E}_2 .

Απάντηση

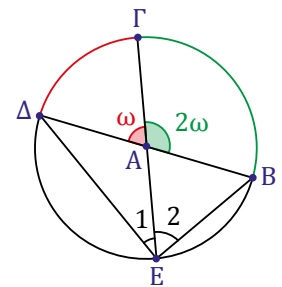
α) Το A είναι το κέντρο του κύκλου, διότι είναι το σημείο τομής των διαμέτρων. Αφού η $B\Delta$ είναι διάμετρος, θα έχουμε $\widehat{B\Delta} = 180^\circ$, οπότε $\widehat{\omega} + 2\widehat{\omega} = 180^\circ$,

$$\text{δηλαδή } 3\widehat{\omega} = 180^\circ, \text{ άρα } \widehat{\omega} = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ.$$

Η $\widehat{G\Delta}$ είναι επίκεντρη που βαίνει στο $\widehat{G\Delta}$, άρα $\widehat{G\Delta} = \widehat{G\Delta} = \widehat{\omega} = 60^\circ$. Ομοίως $\widehat{B\Lambda\Gamma} = \widehat{B\Gamma} = 2\widehat{\omega} = 120^\circ$.

β) $\widehat{E}_1 = \frac{\widehat{G\Delta}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$ (εγγεγραμμένη που βαίνει στο $\widehat{G\Delta}$) και $\widehat{E}_2 = \frac{\widehat{B\Gamma}}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$.

Άλλος τρόπος υπολογισμού της \widehat{E}_2 : $\widehat{B\Delta} = 90^\circ$ (εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο), άρα $\widehat{E}_2 = 90^\circ - \widehat{E}_1 = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.



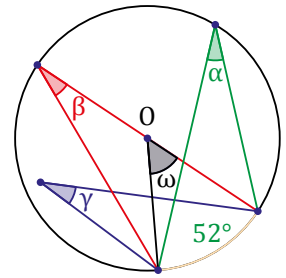
Σχέσεις
εγγεγραμμένων



Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

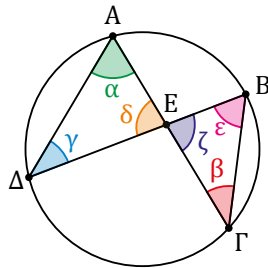
1. Ποιες από τις προτάσεις που αναφέρονται στον διπλανό κύκλο με κέντρο O είναι σωστές (Σ) και ποιες λανθασμένες (Λ); Εξηγήστε γιατί.

- α) Οι γωνίες $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$ είναι εγγεγραμμένες. δ) Οι γωνίες $\hat{\gamma}$, $\hat{\omega}$ είναι επίκεντρες.
 β) $\hat{\alpha} = 26^\circ$. ε) $\hat{\alpha} = 52^\circ$.
 γ) $\hat{\omega} = 2\hat{\gamma} = 52^\circ$. στ) $\hat{\omega} = 26^\circ$.

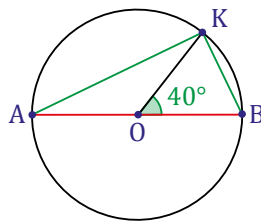


Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

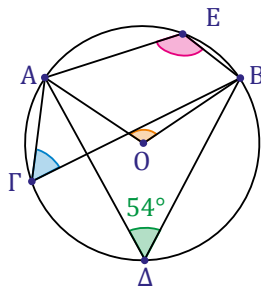
2. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι γωνίες $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$, $\hat{\delta}$, $\hat{\epsilon}$, $\hat{\zeta}$. Να τις χωρίσετε σε τρία ζεύγη ίσων γωνιών, αιτιολογώντας την απάντησή σας.



3. Στο διπλανό σχήμα η AB είναι διάμετρος και $\widehat{KOB} = 40^\circ$. Να υπολογίσετε τα μέτρα των γωνιών \widehat{AKB} και \widehat{KAB} .



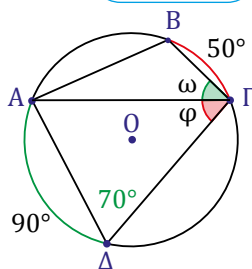
4. Να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών \hat{O} , $\hat{\Gamma}$ και \hat{E} , αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας.



5. Να σχεδιάσετε έναν κύκλο και δύο διαμέτρους του AG και BD . Τι είδους τετράπλευρο είναι το $ABGD$; Εξηγήστε πώς το σκεφτήκατε.

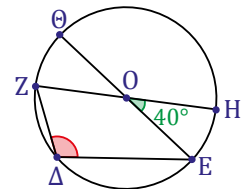


6. Στο διπλανό σχήμα έχουμε $\widehat{B\Gamma} = 50^\circ$, $\widehat{AD} = 90^\circ$ και $\Delta = 70^\circ$. Να συγκρίνετε τις γωνίες $\hat{\omega}$ και $\hat{\phi}$.

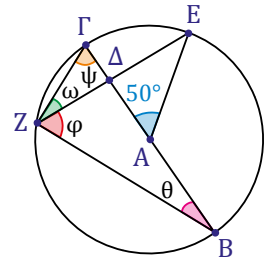


7. Οι ZH και ΘE είναι διαμέτροι και $\widehat{EOH} = 40^\circ$. Να υπολογίσετε τα μέτρα:

- α) των τόξων $\widehat{\Theta H}$ και $\widehat{\Theta Z}$,
 β) της γωνίας $\widehat{Z\Delta E}$.

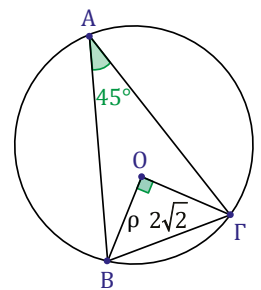


8. Στον κύκλο με κέντρο A του διπλανού σχήματος η διάμετρος $B\Gamma$ και η χορδή ZE τέμνονται κάθετα. Να βρείτε τις γωνίες $\hat{\omega}$, $\hat{\psi}$, $\hat{\phi}$ και $\hat{\theta}$.

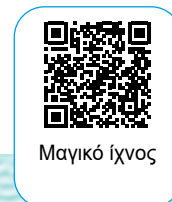
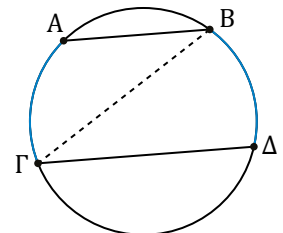


9. Στον κύκλο (O, ρ) είναι $\hat{A} = 45^\circ$ και $B\Gamma = 2\sqrt{2}$. Να υπολογίσετε (με αιτιολόγηση):

- α) τη γωνία $\widehat{B\Theta\Gamma}$,
 β) την ακτίνα ρ του κύκλου.

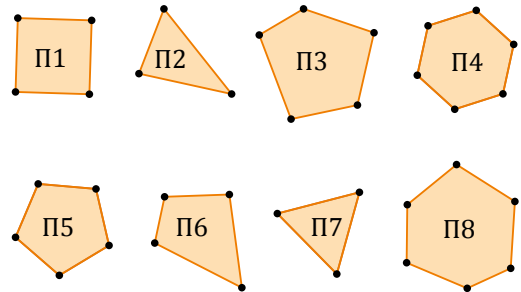


10. Στο διπλανό σχήμα οι χορδές AB και $\Gamma\Delta$ είναι παράλληλες. Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί τα τόξα $\widehat{A\Gamma}$ και $\widehat{B\Delta}$ που βρίσκονται ανάμεσα στις χορδές είναι ίσα;



Δ1. Ταξινομώντας πολύγωνα

Στο διπλανό σχήμα βλέπετε οκτώ διαφορετικά πολύγωνα. Ταξινομήστε τα με όσο το δυνατόν περισσότερους τρόπους, χρησιμοποιώντας διαφορετικά κριτήρια. Παρουσιάστε τις ταξινομήσεις σας στην τάξη.

**Δ2. Πολύγωνα στα ψηφιδωτά της Πάφου**

Τα αριστουργηματικά ψηφιδωτά των παρακάτω εικόνων κατασκευάστηκαν γύρω στον 2ο με 3ο αιώνα μ.Χ., βρίσκονται στο Αρχαιολογικό Πάρκο της Πάφου και έχουν συμπεριληφθεί στον κατάλογο των Μνημείων Παγκόσμιας Πολιτιστικής Κληρονομιάς της UNESCO. Να σχεδιάσετε σε αυτά τα ψηφιδωτά τα πολύγωνα που διακρίνετε (ή που μπορείτε να φτιάξετε) και να περιγράψετε τα χαρακτηριστικά τους.

**Συζητάμε**

...για πολύγωνα στη φύση και όχι μόνο!

Στη φύση και στα ανθρώπινα δημιουργήματα συχνά διακρίνουμε τον σχηματισμό πολυγώνων με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά. Ας μελετήσουμε δύο τέτοια παραδείγματα!

Οι εργάτριες μέλισσες φτιάχνουν χώρους για να αποθηκεύουν το μέλι τους. Οι χώροι αυτοί είναι οι κηρήθρες, οι οποίες αποτελούνται από κελιά με σχήμα μικρών εξαγώνων, με ίσες πλευρές και ίσες γωνίες. Παρατηρώντας, διακρίνουμε ότι καλύπτουν πλήρως το επίπεδο της κηρήθρας.



Το ίδιο ακριβώς μπορούμε να διαπιστώσουμε και στη διπλανή εικόνα, που είναι από το Αρχαιολογικό Μουσείο της Νάπολης, στο οποίο υπάρχουν εκπληκτικής ομορφιάς ψηφιδωτά από πόλεις της Μεγάλης Ελλάδας. Εδώ, το επίπεδο καλύπτεται με συνδυασμό πολυγώνων. Παρατηρήστε το είδος τους και τη σχέση των πλευρών τους!



Τα πολυγωνικά σχήματα των δύο παραδειγμάτων, που έχουν όλες τους τις πλευρές ίσες και όλες τους τις γωνίες ίσες, τα λέμε **κανονικά πολύγωνα**.



Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

λεκτικά...	...και με σχήμα
<p>Ένα πολύγωνο που έχει όλες του τις πλευρές ίσες και όλες του τις γωνίες ίσες το λέμε κανονικό.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Το «κανονικό τρίγωνο» είναι το ισόπλευρο. • Το «κανονικό τετράπλευρο» είναι το τετράγωνο. 	<p>60°</p> <p>60° 60°</p>
<p>Αν ονομάσουμε n το πλήθος των πλευρών ενός κανονικού πολυγώνου, τότε:</p> <ul style="list-style-type: none"> • για $n = 5$ έχουμε κανονικό πεντάγωνο, • για $n = 6$ έχουμε κανονικό εξάγωνο, • για $n = 7$ έχουμε κανονικό επτάγωνο κτλ. 	

Δ3. Ας κατασκευάσουμε κανονικά πολύγωνα!

Το καπάκι ενός μπουκαλιού αποτελείται από 20 δοντάκια που ισαπέχουν. Αν σας ζητούσαν να σχεδιάσετε ένα παρόμοιο καπάκι, περιγράψτε ποιες ενέργειες θα κάνατε. Συζητήστε τις περιγραφές σας στην τάξη.

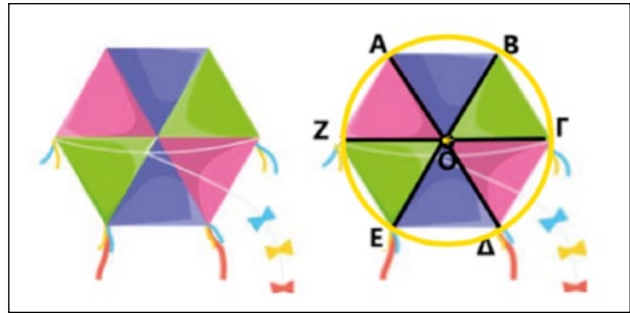


Συζητάμε

...για κατασκευή κανονικών πολυγώνων με τη βοήθεια του κύκλου

Παρατηρώντας την κατασκευή ενός εξαγωνικού χαρταετού, βλέπουμε ότι οι κορυφές A, B, Γ, Δ, E και Z ισαπέχουν από ένα σημείο O στο κέντρο του χαρταετού. Άρα ανήκουν σε κύκλο με κέντρο το σημείο αυτό.

Όμως, εφόσον $AB = BΓ = ΓΔ = ΔE = EZ = ZA$ ως πλευρές κανονικού πολυγώνου, τότε θα είναι και τα αντίστοιχα τόξα ίσα, δηλαδή $\widehat{AB} = \widehat{BΓ} = \widehat{ΓΔ} = \widehat{ΔE} = \widehat{EZ} = \widehat{ZA}$. Επομένως ένα κανονικό εξάγωνο χωρίζει τον κύκλο σε 6 ίσα μέρη!

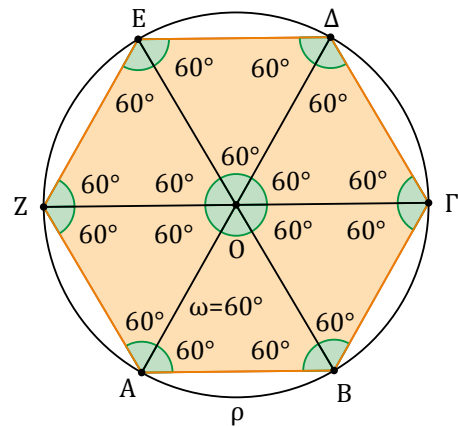


Χρησιμοποιώντας την αντίστροφη διαδικασία, μπορούμε να φτιάξουμε ένα κανονικό εξάγωνο. Χωρίζουμε τον κύκλο (O, ρ) σε 6 ίσα μέρη, κατασκευάζοντας έξι επίκεντρες γωνίες $\hat{\omega} = 60^\circ$. Έτσι έχουμε έξι ισόπλευρα τρίγωνα πλευράς ρ , από τα οποία προκύπτει ότι:

- $AB = BΓ = ΓΔ = ΔE = EZ = ZA = \rho$ και
- $\widehat{ABΓ} = \widehat{BΓΔ} = \widehat{ΓΔE} = \widehat{ΔEZ} = \widehat{EZA} = 120^\circ$.

Άρα το εξάγωνο ABΓΔEZ έχει όλες τις πλευρές του ίσες και όλες τις γωνίες του ίσες, δηλαδή είναι κανονικό.

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο μπορούμε να κατασκευάσουμε οποιοδήποτε κανονικό πολύγωνο.



Κατασκευή
κανονικού
εξαγώνου –
Εξήγηση



Κατασκευάζω
κανονικά
πολύγωνα στο
GeoGebra



Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

λεκτικά...	...και με σχήμα
<p>Για να κατασκευάσουμε ένα κανονικό πολύγωνο με πλήθος πλευρών n, αρκεί να χωρίσουμε τον κύκλο (O, ρ) σε n ίσα μέρη, κατασκευάζοντας n διαδοχικές επίκεντρες γωνίες $\hat{\omega} = \frac{360^\circ}{n}$. Λέμε ότι:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Η $\hat{\omega} = \frac{360^\circ}{n}$ είναι η κεντρική γωνία του κανονικού n-γώνου και το σημείο O είναι το κέντρο του. • Από τη σχέση $\hat{\omega} = \frac{360^\circ}{n}$, αν γνωρίζουμε την $\hat{\omega}$, μπορούμε να βρούμε το n. • Καθεμία από τις εγγεγραμμένες γωνίες $\widehat{AB\Gamma}$, $\widehat{B\Gamma\Delta}$, $\widehat{\Gamma\Delta E}$... την ονομάζουμε γωνία του κανονικού n-γώνου. • «Το πολύγωνο είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο» ή «ο κύκλος είναι περιγεγραμμένος στο πολύγωνο». <p>Παράδειγμα</p> <p>Για να κατασκευάσουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου O:</p> <ul style="list-style-type: none"> • φτιάχνουμε πρώτα την κεντρική γωνία $\hat{\omega} = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$ και • κατασκευάζουμε με τον διαβήτη διαδοχικά τα ίσα τόξα $\widehat{AB} = \widehat{B\Gamma} = \widehat{A\Gamma}$. 	

Αφού κατασκευάσουμε τη γωνία $\hat{\omega}$, ανοίγουμε τον διαβήτη όσο το τόξο στο οποίο βαίνει η $\hat{\omega}$ και κατασκευάζουμε n ίσα διαδοχικά τόξα.

Όλα τα τρίγωνα με κορυφή το O είναι **ισοσκελή** (οι δύο πλευρές τους είναι ακτίνες) με γωνία κορυφής $\hat{\omega}$.

Χρησιμοποιώντας τα ισοσκελή τρίγωνα και την κεντρική γωνία του κανονικού πολυγώνου, μπορούμε να υπολογίσουμε τη γωνία του.



Φτιάχνοντας κανονικά πολύγωνα με τη βοήθεια ισοσκελούς τριγώνου



Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

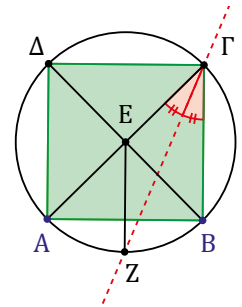
1. Σε ένα κανονικό πολύγωνο με κεντρική γωνία $\hat{\omega} = 15^\circ$: α) να βρείτε το πλήθος το πλευρών του, β) να υπολογίσετε το τόξο στο οποίο βαίνει κάθε γωνία του και να βρείτε το μέτρο της.

Απάντηση

α) Αντικαθιστούμε τη γωνία $\hat{\omega}$ στη σχέση $\hat{\omega} = \frac{360^\circ}{n}$ και έχουμε $15^\circ = \frac{360^\circ}{n}$, επομένως $n = \frac{360^\circ}{15^\circ} = 24$. Άρα είναι το κανονικό 24-γώνο.

β) Κάθε γωνία του 24-γώνου βαίνει σε τόξο $22 \cdot 15^\circ = 330^\circ$. Άρα η γωνία του θα είναι $\frac{330^\circ}{2} = 165^\circ$.

- 2.** Κατασκευάζουμε ένα τετράγωνο και τον περιγεγραμμένο του κύκλο. Φέρνουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\widehat{A\Gamma B}$ που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Z. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $\widehat{A\hat{E}Z}$.



Απάντηση

Η κεντρική γωνία του τετραγώνου είναι $\widehat{A\hat{E}B} = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$. Άρα η εγγεγραμμένη γωνία

$\widehat{A\hat{\Gamma}B}$ που βαίνει στο ίδιο τόξο \widehat{AB} θα είναι 45° . Συνεπώς $\widehat{A\hat{\Gamma}Z} = \widehat{Z\hat{\Gamma}B} = \frac{\widehat{A\hat{\Gamma}B}}{2} = 22,5^\circ$.

Επομένως η επίκεντρη γωνία $\widehat{A\hat{E}Z}$ θα είναι διπλάσια, δηλαδή $\widehat{A\hat{E}Z} = 45^\circ$.

(β' τρόπος: Για να δείξουμε ότι $\widehat{A\hat{E}B} = 90^\circ$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες του τετραγώνου.)

- 3.** Σε ένα κανονικό πεντάγωνο ABΓΔΕ να φέρετε τις διαγωνίους ΑΓ και ΑΔ. Να βρείτε το είδος των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΓ (ως προς τις πλευρές τους), καθώς και το μέτρο των γωνιών τους.

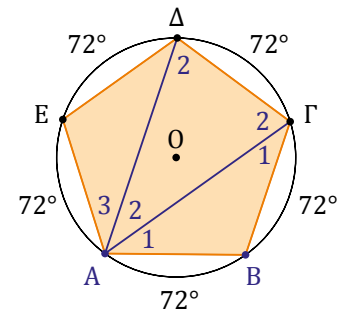
Απάντηση

Η κεντρική γωνία $\widehat{\omega}$ θα είναι $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$. Άρα και το τόξο $\widehat{AB} = 72^\circ$.

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, διότι $AB = B\Gamma$ ως πλευρές του κανονικού πενταγώνου. Άρα $\widehat{A}_1 = \widehat{\Gamma}_1$ ως προσκείμενες στη βάση ΑΓ. Οι \widehat{A}_1 και $\widehat{\Gamma}_1$ είναι εγγεγραμμένες που βαίνουν σε τόξα 72° , επομένως $\widehat{A}_1 = \widehat{\Gamma}_1 = 36^\circ$ και $\widehat{B} = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$.

Οι ΑΓ και ΑΔ είναι χορδές ίσων τόξων (τα κυρτά τόξα $\widehat{A\Gamma}$ και $\widehat{A\Delta}$ έχουν μέτρο $72^\circ + 72^\circ = 144^\circ$). Άρα το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισοσκελές (ως προς τις πλευρές του). Η \widehat{A}_2 είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε τόξο 72° , επομένως $\widehat{A}_2 = 36^\circ$.

Έτσι, $\widehat{\Gamma}_2 = \widehat{\Delta}_2 = 72^\circ$.



Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε

- Σε ένα χαρτόνι σχεδιάστε και κόψτε ένα ισοσκελές τρίγωνο με γωνία κορυφής 20° . Με τη βοήθεια αυτού του τριγώνου αιτιολογήστε αν μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα κανονικό πολύγωνο. Αν ναι, προχωρήστε στην κατασκευή, εξηγώντας τα βήματά σας.
- Έχουμε μια επίπεδη αυλή, την οποία θέλουμε να στρώσουμε με πλακάκια που θα έχουν σχήμα κανονικού πολυγώνου. Η Άννα πρότεινε να βρουν τετράγωνα πλακάκια και σχεδίασε σε χαρτί την ιδέα της. Μπορείτε να βρείτε και να σχεδιάσετε σε χαρτί και άλλα κανονικά πολύγωνα που να καλύπτουν πλήρως την αυλή μας;



Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα για τα στοιχεία ενός κανονικού πολυγώνου.

n (πλήθος πλευρών)	10			30
$\hat{\omega}$ (κεντρική γωνία σε μοίρες)		18	45	

2. Το περίγραμμα της φτερωτής του διπλανού ανεμόμυλου που βρίσκεται στην Πάρο έχει σχήμα κανονικού πολυγώνου. Να βρείτε την κεντρική του γωνία.



Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

3. Σε κύκλο (O, ρ) να κατασκευάσετε ένα εγγεγραμμένο τετράγωνο.
4. Εξετάστε ποια κανονικά πολύγωνα μπορείτε να σχεδιάσετε μόνο με γνώμονα και χάρακα, χωρίς μοιρογνώμονιο.
5. Υπάρχει κανονικό πολύγωνο με κεντρική γωνία 41° ; Διατυπώστε έναν κανόνα, ώστε ένας αριθμός να είναι μέτρο γωνίας κανονικού πολυγώνου.
6. Να κατασκευάσετε ένα κανονικό 9-γωνο και ένα κανονικό 10-γωνο.
7. Από την κορυφή A ενός κανονικού εξαγώνου φέρνουμε τρεις διαγωνίους που σχηματίζουν τέσσερα τρίγωνα. Να βρείτε το μέτρο των γωνιών των τριγώνων αυτών.

8. Στο διπλανό κανονικό οκτάγωνο:

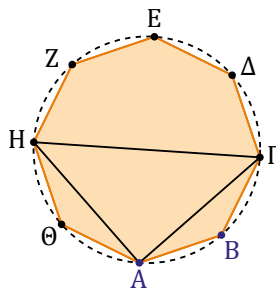
α) ποιο είναι το μέτρο

της γωνίας \widehat{GAH} ;

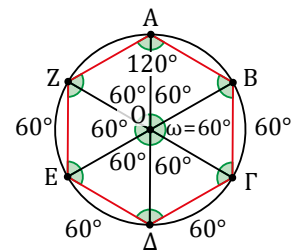
β) η AE είναι διάμετρος;

γ) η μεσοκάθετη της AH περνάει από το Θ ;

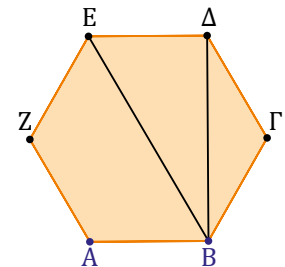
Να εξηγήσετε τις απαντήσεις σας.



9. Στο κανονικό εξαγώνο $AB\Gamma\Delta EZ$ να βρείτε τις ιδιότητες του τετραπλεύρου $AOEZ$.



10. Στο διπλανό κανονικό εξαγώνο να υπολογίσετε τα μέτρα των γωνιών του τριγώνου $B\Delta E$.



11. Στο διπλανό κανονικό οκτάγωνο οι προεκτάσεις των πλευρών $E\Delta$ και $B\Gamma$ τέμνονται στο K . Να υπολογίσετε:

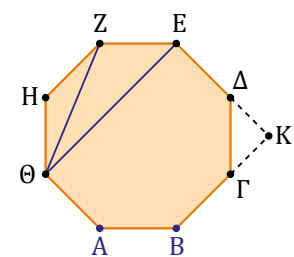
α) το μέτρο της γωνίας

$\widehat{K\Delta}$,

β) το μέτρο της γωνίας

$\widehat{E\Theta Z}$.

12. Να βρείτε τους άξονες συμμετρίας: **α)** ενός κανονικού πενταγώνου, **β)** ενός κανονικού εξαγώνου.



Οπτική απάτη



Παίζοντας με τα κανονικά πολύγωνα



Κανονικά πολύγωνα από χαρτί

Δ1. Το καπέλο της Ασπασίας

Η Ασπασία αποφάσισε να ομορφύνει το ψάθινο ολοστρόγγυλο καπέλο της! Σκέφτηκε να ράψει γύρω από το καθένα από τα δύο κυκλικά μέρη του μια χρωματιστή κορδέλα. Έπρεπε όμως να βρει το μήκος της περιφέρειας του κάθε κύκλου, ώστε να κόψει την κορδέλα σε αντίστοιχα μήκη.

- α)** Να της προτείνετε τρόπους και υλικά, για να μετρήσει την περιφέρεια του καπέλου.
- β)** Η διάμετρος του μικρού κύκλου του καπέλου είναι 16 cm και του μεγάλου 30 cm. Με κάποιο τρόπο η Ασπασία βρήκε ότι η περιφέρεια του μικρού κύκλου είναι 50,24 cm και του μεγάλου 94,2 cm. Διαιρέστε το μήκος του κάθε κύκλου με τη διάμετρό του και διατυπώστε τα συμπεράσματά σας. Να επαναλάβετε το πείραμα χρησιμοποιώντας κυκλικά αντικείμενα από τον χώρο σας και να διατυπώσετε έναν γενικό κανόνα. Να συζητήσετε τον κανόνα στην τάξη.
- γ)** Αν η Ασπασία ήθελε να βάλει κορδέλα μόνο στο μπροστινό μέρος του καπέλου, ας πούμε σε τόξο περίπου 120° , πώς θα μπορούσε να βρει το μήκος της κορδέλας;

**Συζητάμε**

...για μήκη κύκλων και τόξων

Στην καθημερινότητά μας μπορεί να χρειαστεί για κάποιο λόγο να βρούμε το μήκος ενός κύκλου, όπως στο παράδειγμα της λεκάνης για παραγάδι που χρησιμοποιεί ο ψαράς.

- α)** Στο πάνω κυκλικό μέρος της μπλε λεκάνης διαμέτρου 50 cm, η κίτρινη λωρίδα αφρολέξ στην οποία ο ψαράς καρφώνει τα αγκίστρια χάλασε και πρέπει να αντικατασταθεί. Τη μετρήσε με μια μεζούρα και βρήκε ότι ήταν 157 cm.

Ο γιος του είχε μια ιδέα: να πολλαπλασιάσει τη διάμετρο με 3,14. Πράγματι, ο ψαράς, πολλαπλασιάζοντας τα 50 cm της διαμέτρου με 3,14, εντυπωσιασμένος βρήκε ξανά 157 cm!

Αυτό σημαίνει ότι, αν διαιρέσουμε το 157 με τη διάμετρο, βρίσκουμε (περίπου) 3,14.

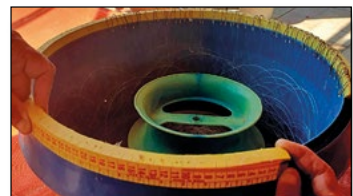
- β)** Ο ψαράς μας είχε μια άλλη ιδέα: αντί να αγοράσει ολόκληρη τη λωρίδα, να μετρήσει και να αγοράσει μόνο το μήκος από το κομμάτι που χάλασε!

Υπολόγισε ότι το μέτρο του τόξου είναι περίπου 60° . Σκέφτη-

Μέτρο τόξου	360°	60°
Μήκος τόξου	157 cm	;

κε λοιπόν ότι, αφού ολόκληρος ο κύκλος είχε μήκος 157 cm, οι 60°

(που είναι το $\frac{1}{6}$ του κύκλου) θα έχουν μήκος $\frac{157}{6} \approx 26,2$ cm.





Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

λεκτικά...

Αν ονομάσουμε L το μήκος ενός κύκλου με διάμετρο δ , τότε διαιρώντας το L με το δ βρίσκουμε έναν αριθμό περίπου ίσο με 3,14, ή με 3,14159, ..., ή με 3,1415926535897..., ανάλογα με την ακρίβεια που θέλουμε να έχουμε στους υπολογισμούς μας. Όπως έχουν αποδείξει οι μαθηματικοί, ο λόγος $\frac{L}{\delta}$ είναι **άρρητος** αριθμός, τον οποίο συμβόλισαν με το ελληνικό γράμμα π .

$$\frac{L}{\delta} = \pi$$

ή

$$L = \pi \cdot \delta$$

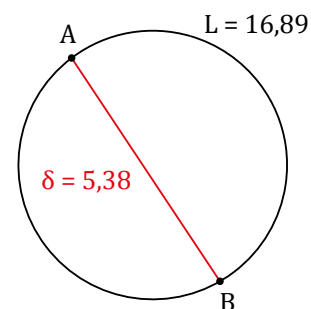
ή

$$L \approx 3,14 \cdot \delta$$

Τα ποσά L και δ είναι **ανάλογα**, διότι έχουν σταθερό λόγο ίσο με π .

- Στο σχήμα: $\frac{16,89}{5,38} \approx 3,14$.

...και με σχήμα



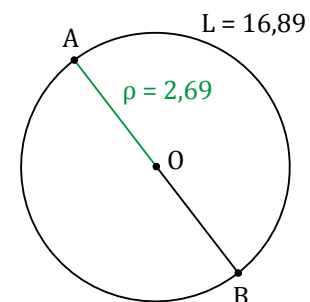
Αν η ακτίνα του είναι ρ , τότε:

$$\frac{L}{2\rho} = \pi$$

ή

$$L = 2\pi\rho$$

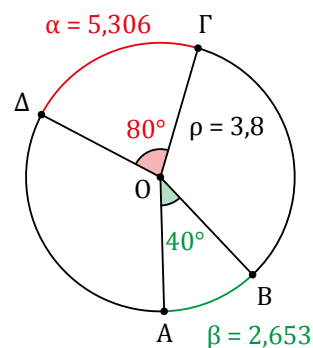
Η σχέση $L = 2\pi\rho$ είναι της μορφής $y = ax$, όπου $a = 2\pi = \text{σταθερό}$, και εκφράζει τη σχέση των ανάλογων ποσών L και ρ .



Το μήκος ℓ ενός τόξου είναι ανάλογο του μέτρου του τόξου.

Για παράδειγμα, όταν διπλασιάζουμε το μέτρο του τόξου, διπλασιάζεται και το μήκος του.

- Στο σχήμα: $\frac{80}{40} = \frac{5,306}{2,653} = 2$.



Πολλοί λαοί της αρχαιότητας είχαν διαπιστώσει ότι ο λόγος του μήκους του κύκλου προς τη διάμετρο είναι σταθερός. Οι Αιγύπτιοι, γύρω στο 1700 π.Χ., είχαν υπολογίσει εμπειρικά ότι $\pi \approx 3,1605$ και οι Βαβυλώνιοι ότι $\pi \approx 3$.

Οι αρχαίοι Έλληνες όμως δεν ήθελαν εμπειρικές κατασκευές! Προσπάθησαν λοιπόν να κατασκευάσουν το π με «γνώμονα και διαβήτη» αλλά και με λογικούς **συλλογισμούς**.

Ο **Αρχιμήδης**, χρησιμοποιώντας μια θαυμαστή μέθοδο, βρήκε ότι $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$, δηλαδή $3,1408 < \pi < 3,1428$, και αργότερα την ακόμα καλύτερη προσέγγιση $\frac{211875}{67444} < \pi < \frac{195888}{62351}$, δηλαδή $3,141495 < \pi < 3,141697$, άρα $\pi \approx 3,1416$!

Πηγή: [20]



Αρχιμήδης

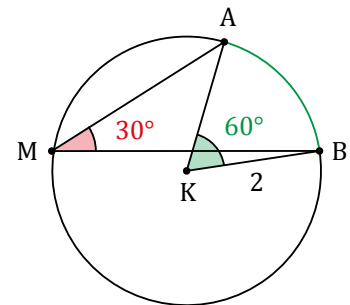


Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. α) Να βρείτε το μήκος του κύκλου ($K, 2 \text{ cm}$).
- β) Να κατασκευάσετε μια εγγεγραμμένη γωνία $\widehat{AMB} = 30^\circ$ και να βρείτε το μήκος α του τόξου \widehat{AB} με προσέγγιση δεκάτου.

Απάντηση

- α) Το μήκος του κύκλου θα είναι $L = 2\pi r = 2 \cdot 3,14 \cdot 2 \approx 12,56 \text{ cm}$.
- β) Εφόσον η εγγεγραμμένη γωνία $\widehat{AMB} = 30^\circ$, τότε η αντίστοιχη επίκεντρη θα είναι $\widehat{AKB} = 60^\circ$. Επειδή οι 60° είναι το $\frac{1}{6}$ των 360° , το μήκος α του τόξου \widehat{AB} θα είναι το $\frac{1}{6}$ του μήκους του κύκλου, δηλαδή $\alpha = \frac{12,56}{6} \approx 2,1 \text{ cm}$.



2. Η Ασπασία, κοιτάζοντας τις ομπρέλες θαλάσσης, παρατήρησε ότι, αν και έχουν σχήμα κανονικού πολυγώνου, μοιάζουν πολύ με κύκλο και σκέφτηκε ότι το άθροισμα των πλευρών τους θα πρέπει να είναι περίπου ίσο με το μήκος του κύκλου με την ίδια ακτίνα. Πώς μπορεί να ελέγξει τον συλλογισμό της χωρίς μετρήσεις;



Από τα κανονικά
πολύγωνα στον
κύκλο

Απάντηση

Η κεντρική γωνία μιας ομπρέλας κανονικού εξαγώνου είναι $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$, άρα τα τρίγωνα που δημιουργούνται είναι ισόπλευρα. Επομένως, αν η ακτίνα της εξαγωνικής ομπρέλας είναι ρ , τότε και οι πλευρές της θα είναι ίσες με ρ . Συνεπώς το άθροισμα των πλευρών του εξαγώνου είναι 6ρ .

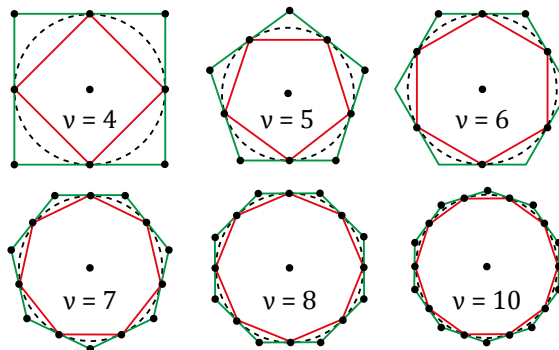


Άρα το πηλίκο $\frac{L}{2\rho} = \frac{6\rho}{2\rho} = 3$, δηλαδή αρκετά κοντά στο 3,14.



Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε

- Να συζητήσετε για την ορθότητα των παρακάτω προτάσεων και για τις προτάσεις που θεωρείτε λανθασμένες να αναφέρετε ένα αντιπαράδειγμα.
 - Δύο τόξα που έχουν το ίδιο μέτρο έχουν και το ίδιο μήκος.
 - Δύο τόξα που έχουν το ίδιο μήκος έχουν και το ίδιο μέτρο.
 - Δύο τόξα που βρίσκονται στον ίδιο κύκλο έχουν το ίδιο μήκος.
- Ο κύκλος με διακεκομμένη γραμμή είναι σε όλα τα παρακάτω σχήματα ο ίδιος. Σε κάθε σχήμα υπάρχει ένα κόκκινο εγγεγραμμένο κανονικό n -γωνο και ένα πράσινο περιγεγραμμένο. Προσπαθήστε να συσχετίσετε την περίμετρο των πολυγώνων αυτών με το μήκος του κύκλου. Διατυπώστε την εικασία σας.



Από τα πολύγωνα στο μήκος κύκλου

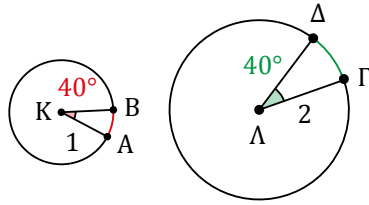
- Να κατασκευάσετε τους κύκλους $(K, 1 \text{ cm})$ και $(\Lambda, 2 \text{ cm})$ και τις επίκεντρες γωνίες $\widehat{AKB} = 40^\circ$ και $\widehat{\Gamma\Delta} = 40^\circ$ αντίστοιχα. Να βρείτε τα μέτρα των τόξων \widehat{AB} και $\widehat{\Gamma\Delta}$. Διατυπώστε έναν κανόνα για τη σχέση των ποσών «μήκος τόξου» και «ακτίνα».



Σύγκριση μήκους τόξων



Ακολουθώντας τα βήματα του Αρχιμήδη



Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις


1. Να βρείτε το μήκος κύκλου, αν η ακτίνα ρ είναι:
α) 3 cm,
β) $\sqrt{2}$ cm.
2. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

Μέτρο γωνίας	360°	45°	
Μήκος τόξου	80 cm		16 cm



Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

3. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

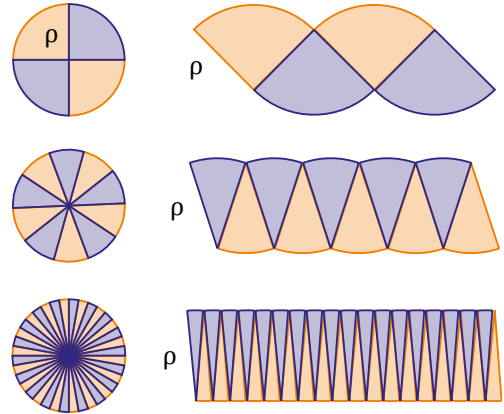
Ακτίνα		
Μήκος κύκλου	31,4	1,57
4. Στη διπλανή εικόνα βλέπετε τον κορμό διαμέτρου 0,5 m ενός τεράστιου φοίνικα που χρειάστηκε να κοπεί. Θέλουμε να τον τυλίξουμε με χρωματιστό πλέγμα για τις ανάγκες μιας γιορτής. Πόσο μήκος πλέγματος θα χρειαστούμε;
 
5. Ένα κανονικό πεντάγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας 3 cm. Να βρείτε το μήκος του τόξου που αντιστοιχεί στην πλευρά του.
6. Ένα κανονικό πολύγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας 2 cm. Αν το μήκος του τόξου που αντιστοιχεί στην πλευρά του είναι 1,256 cm, να βρείτε το πλήθος των πλευρών του πολυγώνου.

5.4

Εμβαδόν κυκλικού δίσκου και κυκλικού τομέα

Δ1. Το εμβαδόν κυκλικού δίσκου

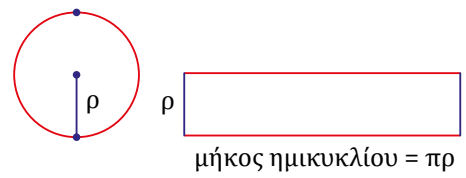
- α) Αν ένας κύκλος έχει ακτίνα $\rho = 5$, να υπολογίσετε το μήκος του L .
 - β) Ο κύκλος ακτίνας $\rho = 5$ έχει χωριστεί σε 4, 10 και 36 ίσα τόξα αντίστοιχα, όπως φαίνεται δίπλα. Να υπολογίσετε το μήκος κάθε τόξου.
 - γ) Στη συνέχεια τοποθετούμε με διαφορετικό τρόπο τα ίσα χρωματιστά κομμάτια, ώστε να δημιουργήσουμε τα τρία νέα σχήματα που φαίνονται στα δεξιά.
- Αν συνεχίσουμε την ίδια διαδικασία, χωρίζοντας τον κύκλο σε περισσότερα τόξα, παρατηρούμε ότι το νέο σχήμα που προκύπτει μοιάζει ολοένα και περισσότερο με ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Ποιο είναι το εμβαδόν αυτού του ορθογωνίου;
- δ) Μπορείτε να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου ακτίνας $\rho = 5$; Συζητήστε στην τάξη τα ευρήματά σας.



Συζητάμε

...για το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου

Με διαδικασίες όπως αυτή της Δ1 μπορούμε να προσεγγίσουμε το εμβαδόν ενός κυκλικού δίσκου.
Τελικά αποδεικνύεται ότι είναι ίσο με το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με βάση όσο ένα ημικύκλιο και ύψος όσο η ακτίνα του κύκλου.
Δηλαδή $\pi \cdot \rho = \pi \rho^2$.



Ο κυκλικός δίσκος περιλαμβάνει τα σημεία του κύκλου μαζί με το μέρος του επιπέδου που βρίσκεται στο εσωτερικό του (δηλαδή μαζί με τα εσωτερικά του σημεία).



Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

λεκτικά...	...και με σχήμα
Το εμβαδόν ενός κυκλικού δίσκου με ακτίνα ρ είναι ίσο με: $E = \pi \rho^2$	

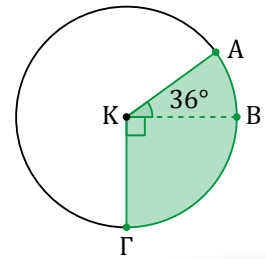
Θυμόμαστε ότι ο αριθμός π είναι ο σταθερός λόγος του μήκους (L) προς τη διάμετρο (δ) ενός κύκλου.
Ο π είναι άρρητος αριθμός, αλλά, για να κάνουμε υπολογισμούς, θεωρούμε προσεγγιστικά ότι $\pi = 3,14$.

Στη συνέχεια, για το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου θα χρησιμοποιούμε την έκφραση «εμβαδόν κύκλου».

Δ2. Το εμβαδόν μέρους του κύκλου

Ο κύκλος του σχήματος έχει ακτίνα ίση με 6. Να υπολογίσετε:

- το εμβαδόν του κύκλου,
- το εμβαδόν του χρωματισμένου μέρους του κύκλου που περικλείεται από τις ακτίνες KA και KΓ και το τόξο ABΓ. Περιγράψτε στην τάξη τον τρόπο με τον οποίο εργαστήκατε.



Συζητάμε

...για το εμβαδόν του κυκλικού τομέα

Το μέρος του κυκλικού δίσκου που μοιάζει με ένα κομμάτι πίτσας το ονομάζουμε **κυκλικό τομέα**. Ο κυκλικός τομέας περικλείεται μεταξύ δύο ακτίνων και ενός τόξου του κύκλου. Η ακτίνα του κύκλου είναι ακτίνα και του κυκλικού τομέα.

Μπορούμε να ονομάσουμε τον κυκλικό τομέα του σχήματος ως KAB.

Σε κάθε κυκλικό τομέα αντιστοιχεί μια επίκεντρη γωνία. Στο σχήμα, η επίκεντρη γωνία $\hat{\omega}$ αντιστοιχεί στον κυκλικό τομέα που είναι χρωματισμένος. Θα λέμε ότι ο κυκλικός τομέας είναι ω μοιρών.

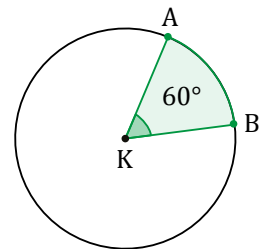
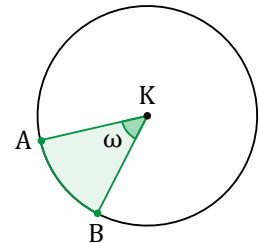
Για παράδειγμα, στο διπλανό σχήμα ο κυκλικός τομέας είναι 60° .

Άρα αντιστοιχεί στο $\frac{1}{6}$ των 360° , γιατί:

$$\frac{60}{360} = \frac{1}{6}$$

Επομένως το εμβαδόν του κυκλικού τομέα είναι ίσο με το $\frac{1}{6}$ του εμβαδού του κύκλου. Δηλαδή, αν E είναι το εμβαδόν του κύκλου, τότε:

$$(KAB) = \frac{1}{6} \cdot E$$



Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

λεκτικά...

Για το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα ακτίνας ρ και με επίκεντρη γωνία $\hat{\omega}$:

- Βρίσκουμε σε τι μέρος του κύκλου αντιστοιχεί ο κυκλικός τομέας με τη βοήθεια της επίκεντρης γωνίας του. Σε αυτό μπορεί να μας βοηθήσει το κλάσμα:

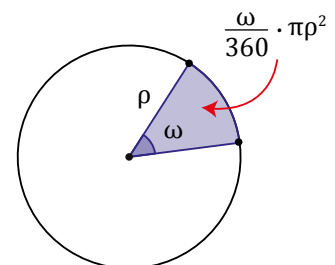
$$\frac{\hat{\omega}}{360}$$

- Υπολογίζουμε το εμβαδόν του κύκλου:

$$E = \pi \rho^2$$

- Υπολογίζουμε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα ως μέρος του κύκλου.

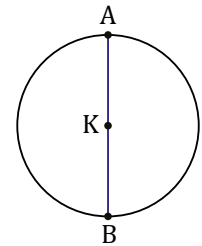
...και με σχήμα





Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. Ο κύκλος του σχήματος έχει διάμετρο $AB = 12 \text{ cm}$. Να υπολογίσετε:
- το εμβαδόν του κύκλου,
 - την ακτίνα ενός κύκλου με εννεαπλάσιο εμβαδόν από τον κύκλο του σχήματος.



Απάντηση

Το μήκος της ακτίνας ρ κάθε κύκλου είναι ίσο με το μισό της διαμέτρου. Άρα:

$$\rho = \frac{AB}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ cm}$$

- α) Επομένως το εμβαδόν του κύκλου είναι:

$$E = \pi \rho^2 = \pi \cdot 6^2 = 36\pi \text{ cm}^2$$

Και προσεγγιστικά:

$$E = 36 \cdot 3,14 = 113,04 \text{ cm}^2$$

- β) Το εννεαπλάσιο του εμβαδού του κύκλου είναι:

$$9 \cdot 36\pi = 324\pi \text{ cm}^2$$

Αν η ακτίνα του κύκλου με εμβαδόν $324\pi \text{ cm}^2$ έχει μήκος ρ , τότε:

$$\pi \rho^2 = 324\pi \text{ ή } \frac{\pi \rho^2}{\pi} = \frac{324\pi}{\pi} \text{ ή } \rho^2 = 324 \text{ ή } \rho = 18$$

Άρα το μήκος της ακτίνας του κύκλου με εμβαδόν $324\pi \text{ cm}^2$ είναι 18 cm.

Αν η ακτίνα διπλασιαζόταν, τι θα συνέβαινε με το εμβαδόν;

Αν η ακτίνα τετραπλασιαζόταν;

Γιατί νομίζετε ότι συμβαίνει αυτό;

Παρατηρούμε ότι, όταν η ακτίνα του κύκλου τριπλασιάστηκε, το εμβαδόν του εννεαπλασιάστηκε. Αυτό σημαίνει ότι το μήκος της ακτίνας του κύκλου και το εμβαδόν του δεν είναι ανάλογα ποσά.

2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κύκλου και του σκιασμένου κυκλικού τομέα του σχήματος.

Απάντηση

Ο κύκλος του σχήματος έχει ακτίνα $\rho = 2$. Άρα το εμβαδόν του είναι ίσο με:

$$E = \pi \rho^2 = \pi \cdot 2^2 = 4\pi$$

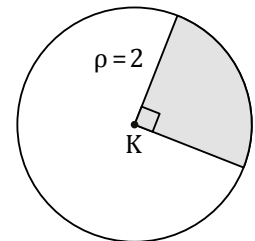
Προσεγγιστικά είναι $E = 4 \cdot 3,14 = 12,56$.

Ο κυκλικός τομέας αντιστοιχεί σε ορθή επίκεντρη γωνία, δηλαδή είναι 90° .

Επομένως είναι το $\frac{1}{4}$ του κύκλου, γιατί $\frac{90}{360} = \frac{1}{4}$. Άρα το εμβαδόν του κυκλι-

κού τομέα είναι $\frac{1}{4} \cdot E = \frac{1}{4} \cdot 4\pi = \pi$.

Προσεγγιστικά, το εμβαδόν του κυκλικού τομέα είναι 3,14.



Θυμόμαστε ότι σε μήκη και εμβαδά που δεν αναφέρονται οι μονάδες μέτρησης θεωρούμε ότι και τα δύο εκφράζονται σε αντίστοιχες μονάδες (π.χ. m και m^2 ή cm και cm^2 κτλ.).

3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα ακτίνας $\rho = 5$ του σχήματος.

Απάντηση

Υπολογίζουμε το κλάσμα:

$$\frac{240}{360} = \frac{240:120}{360:120} = \frac{2}{3}$$

Άρα ο κυκλικός τομέας είναι τα $\frac{2}{3}$ του κύκλου ακτίνας 5.

Το εμβαδόν κύκλου ακτίνας 5 είναι ίσο με:

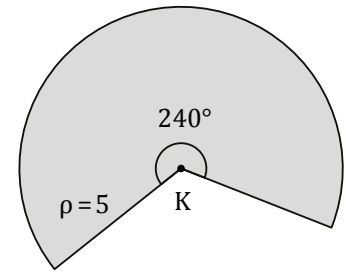
$$E = \pi \rho^2 = \pi \cdot 5^2 = 25\pi$$

Επομένως το εμβαδόν του κυκλικού τομέα είναι:

$$\frac{2}{3} \cdot E = \frac{2}{3} \cdot 25\pi = \frac{50}{3}\pi$$

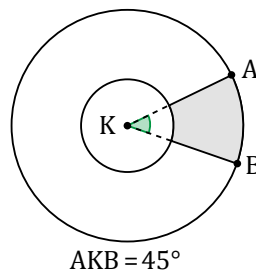
Και προσεγγιστικά:

$$E = \frac{50}{3} \cdot 3,14 = \frac{157}{3}$$



4. Στο διπλανό σχήμα οι δύο ομόκεντροι κύκλοι $(K, 2)$ και $(K, 5)$ σχηματίζουν έναν δακτύλιο. Η επίκεντρη γωνία \widehat{AKB} είναι 45° . Να υπολογίσετε:

- α) το εμβαδόν του δακτυλίου,
β) το εμβαδόν του χρωματισμένου μέρους του δακτυλίου.



Απάντηση

Θυμόμαστε ότι ο συμβολισμός (O, ρ) αντιστοιχεί σε έναν κύκλο με κέντρο O και ακτίνα ρ .

Άρα $(K, 2)$ είναι ο κύκλος με κέντρο K και ακτίνα 2, ενώ ο $(K, 5)$ έχει επίσης κέντρο K , αλλά ακτίνα 5.

- α) Αρχικά υπολογίζουμε τα εμβαδά των κύκλων.

Για τον κύκλο $(K, 2)$:

$$E_1 = \pi \rho^2 = \pi \cdot 2^2 = 4\pi \text{ ή περίπου } 4 \cdot 3,14 = 12,56$$

Για τον κύκλο $(K, 5)$:

$$E_2 = \pi \rho^2 = \pi \cdot 5^2 = 25\pi \text{ ή περίπου } 25 \cdot 3,14 = 78,5$$

Δακτύλιο ονομάζουμε το μέρος του επιπέδου μεταξύ δύο ομόκεντρων κύκλων, μαζί με τα σημεία των κύκλων αυτών.

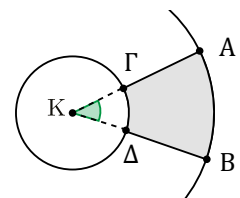
Το εμβαδόν του δακτυλίου είναι ίσο με τη διαφορά των εμβαδών των δύο κύκλων.

Άρα το εμβαδόν του δακτυλίου είναι:

$$E_2 - E_1 = 78,5 - 12,56 = 65,94$$

- β) Το εμβαδόν του χρωματισμένου μέρους του δακτυλίου είναι ίσο με τη διαφορά των εμβαδών δύο κυκλικών τομέων: του KAB με κέντρο K και ακτίνα 5 και του $K\Gamma\Delta$ με κέντρο K και ακτίνα 2. Δηλαδή:

$$(AB\Delta\Gamma) = (KAB) - (K\Gamma\Delta)$$



Υπολογίζουμε τα εμβαδά των δύο κυκλικών τομέων.

Ο κυκλικός τομέας ΚΓΔ είναι 45° . Εφόσον $\frac{45}{360} = \frac{1}{8}$, ο ΚΓΔ αντιστοιχεί στο $\frac{1}{8}$ του κύκλου (Κ, 2).

Άρα το εμβαδόν του κυκλικού τομέα ΚΓΔ είναι:

$$(ΚΓΔ) = \frac{1}{8} \cdot E_1 = \frac{1}{8} \cdot 12,56 = \frac{12,56}{8} = 1,57$$

Με παρόμοιο τρόπο υπολογίζουμε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα ΚΑΒ, ο οποίος είναι επίσης 45° , αλλά στον μεγαλύτερο κύκλο (Κ, 5):

$$(ΚΑΒ) = \frac{1}{8} \cdot E_2 = \frac{1}{8} \cdot 78,5 = \frac{78,5}{8} = 9,8125$$

Άρα το εμβαδόν του ΑΒΔΓ είναι:

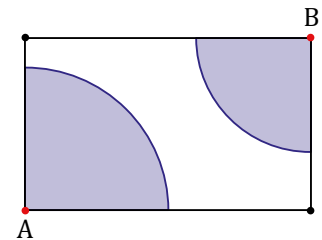
$$(ΑΒΔΓ) = 9,8125 - 1,57 = 8,2425$$

Άλλος τρόπος

Το χρωματισμένο μέρος του δακτυλίου, δηλαδή το ΑΒΔΓ, αντιστοιχεί στα $\frac{45}{360}$ ή αλλιώς στο $\frac{1}{8}$ του δακτυλίου.

$$\text{Άρα } (ΑΒΔΓ) = \frac{E_2 - E_1}{8} = \frac{65,94}{8} = 8,2425.$$

- 5.** Σε ένα ορθογώνιο οικοπέδο διαστάσεων 12 m και 20 m θέλουμε να φυτέψουμε γκαζόν. Στα σημεία Α και Β έχουμε αυτόματα μηχανήματα ποτίσματος, τα οποία περιστρέφονται. Το μηχάνημα στο Α έχει εμβέλεια 10 m, ενώ το μηχάνημα στο Β έχει εμβέλεια 8 m. Πόσο είναι το εμβαδόν του μέρους του οικοπέδου στο οποίο δε φτάνει το νερό;



Απάντηση

Το μέρος του οικοπέδου στο οποίο δε φτάνει το νερό είναι το ΓΜΝΔΛΚ.

Θα υπολογίσουμε το εμβαδόν του.

Το εμβαδόν του ορθογώνιου οικοπέδου είναι:

$$(ΑΓΒΔ) = 12 \cdot 20 = 240 \text{ m}^2$$

Το εμβαδόν του μέρους στο οποίο φτάνει το νερό είναι το άθροισμα των εμβαδών των δύο κυκλικών τομέων, του ΑΚΛ και του ΒΜΝ.

- Ο ΑΚΛ έχει κέντρο Α και ακτίνα 10.

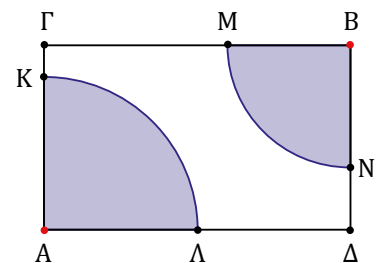
Εφόσον η γωνία $\widehat{Κ\hat{A}Λ}$ είναι ορθή, ο κυκλικός τομέας αντιστοιχεί στο $\frac{1}{4}$ του κύκλου με ακτίνα 10, άρα έχει εμβαδόν:

$$\frac{1}{4} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 10^2 = \frac{100}{4} \cdot \pi = 25\pi \text{ m}^2$$

- Ο ΒΜΝ έχει κέντρο Β και ακτίνα 8.

Ομοίως, πρόκειται για το $\frac{1}{4}$ του κύκλου με ακτίνα 8. Άρα έχει εμβαδόν:

$$\frac{1}{4} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 8^2 = \frac{64}{4} \cdot \pi = 16\pi \text{ m}^2$$



Επομένως:

$$(\Gamma\text{M}\text{N}\Delta\text{L}\text{K}) = (\text{A}\Gamma\text{B}\Delta) - (\text{A}\text{K}\text{L}) - (\text{B}\text{M}\text{N}) = 240 - 25\pi - 16\pi = 240 - 41\pi \text{ m}^2$$

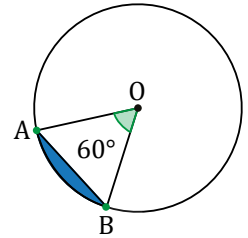
Προσεγγιστικά:

$$(\Gamma\text{M}\text{N}\Delta\text{L}\text{K}) = 240 - 41 \cdot 3,14 = 240 - 128,74 = 111,26 \text{ m}^2$$

Άρα $111,26 \text{ m}^2$ του οικοπέδου δεν ποτίζονται με νερό από τα αυτόματα μηχανήματα.

6. Ο κυκλικός τομέας του σχήματος με κέντρο O έχει ακτίνα 4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χρωματισμένου μέρους του κύκλου.

Απάντηση



Ο κυκλικός τομέας αντιστοιχεί στο $\frac{1}{6}$ του κύκλου. Υπολογίζουμε το εμβαδόν του:

$$\frac{1}{6} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 4^2 = \frac{1}{6} \cdot 16\pi = \frac{8\pi}{3}$$

Το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές, γιατί $OA = OB = 4$ (ακτίνες του κύκλου).

Άρα οι γωνίες της βάσης του OAB και του OBA είναι ίσες, με $\widehat{OAB} + \widehat{OBA} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Συνεπώς όλες οι γωνίες του τριγώνου είναι 60° .

Τελικά το τρίγωνο OAB είναι ισόπλευρο. Άρα $AB = 4$.

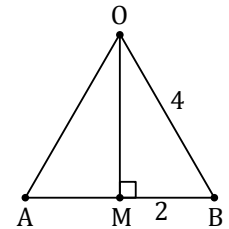
Φέρνουμε το ύψος OM της κορυφής O του τριγώνου. Το M είναι μέσο της AB, άρα $MB = 2$.

Με τη βοήθεια του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο τρίγωνο OMB βρίσκουμε ότι:

$$OM^2 = 4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12$$

$$OM = \sqrt{12}$$

Άρα το εμβαδόν του τριγώνου OAB είναι $\frac{1}{2} \cdot \beta \cdot \upsilon = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot OM = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{12} = 2\sqrt{12}$.



Συνεπώς το εμβαδόν του χρωματισμένου μέρους είναι ίσο με τη διαφορά του τριγώνου OAB από το εμβαδόν του κυκλικού τομέα OAB. Δηλαδή:

$$\frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{12}$$



Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κύκλου με:

α) ακτίνα $\rho = 2$, **β)** διάμετρο $\delta = 4$,

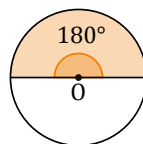
γ) ακτίνα $\rho = \frac{3}{2}$.

2. Τι μέρος του αντίστοιχου κύκλου είναι καθένας από τους κυκλικούς τομείς:

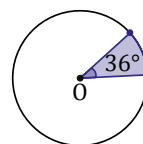
α) που έχει επίκεντρη γωνία:

i) 90° **ii)** 45° **iii)** 120° **iv)** 240°

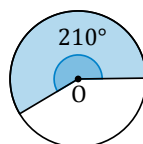
β) που φαίνεται στους παρακάτω κύκλους με κέντρο O.



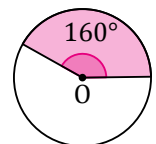
i)



ii)

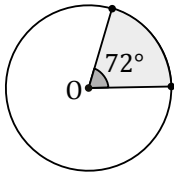


iii)

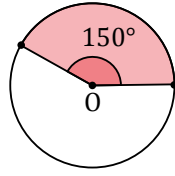


iv)

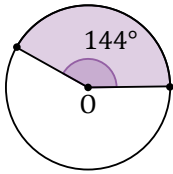
3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χρωματισμένου κυκλικού τομέα σε κάθε περίπτωση:



α) Το εμβαδόν του κύκλου είναι 10.



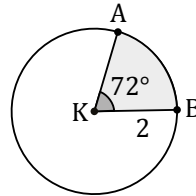
β) Το εμβαδόν του κύκλου είναι 12.



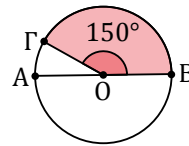
γ) Το εμβαδόν του κύκλου είναι 25.

4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα:

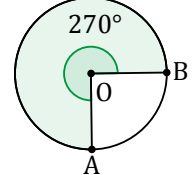
- α) με ακτίνα 2 και επίκεντρη γωνία 60° ,
 β) με ακτίνα 4 και ορθή επίκεντρη γωνία,
 γ) που ανήκει σε κύκλο διαμέτρου 10 και αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία 45° ,
 δ) με ακτίνα 5 και επίκεντρη γωνία 32° ,
 ε) με ακτίνα 10 και επίκεντρη γωνία 120° ,
 στ) με ακτίνα 8,2 και επίκεντρη γωνία 240° ,
 ζ) του σχήματος 1, με κέντρο K και ακτίνα 2,
 η) του σχήματος 2, με κέντρο O και διάμετρο 5,
 θ) του σχήματος 3, με κέντρο O και ακτίνα 1,2.



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

5. Να υπολογίσετε την ακτίνα του κύκλου με εμβαδόν:
 α) 78,5 β) 153,86 γ) 3,14

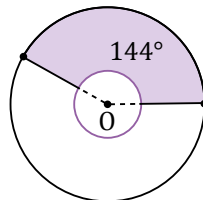
6. Να υπολογίσετε τη διάμετρο του κύκλου με εμβαδόν:
 α) 314 β) 12,56 γ) 50,24

7. Να υπολογίσετε την ακτίνα και τη διάμετρο του κύκλου με εμβαδόν:
 α) 9π β) 4π γ) 2π
 δ) 32π ε) 24π

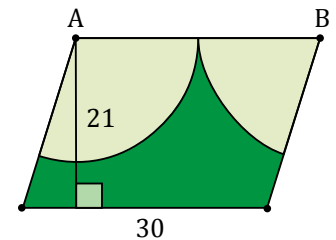
8. Ένας κύκλος έχει εμβαδόν 50,24 cm. Να υπολογίσετε:
 α) το εμβαδόν ενός κύκλου με τη διπλάσια ακτίνα,
 β) το εμβαδόν του κυκλικού τομέα 135° και στους δύο παραπάνω κύκλους.

9. Οι κύκλοι του διπλανού σχήματος έχουν ακτίνες 1 και 3. Να υπολογίσετε:

- α) το εμβαδόν του δακτυλίου,
 β) το εμβαδόν του χρωματισμένου μέρους του σχήματος.

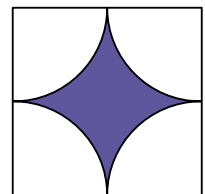


10. Η κάτοψη μιας αποθήκης έχει σχήμα παραλληλόγραμμο με βάση 30 και ύψος 21 m. Στα σημεία A και B είναι τοποθετημέ-

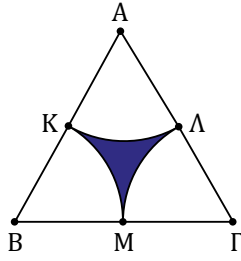


νοι δύο αισθητήρες που μπορούν να εντοπίσουν κινήσεις σε απόσταση 15 m ο καθένας. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας εντός της αποθήκης όπου οι αισθητήρες δεν μπορούν να εντοπίσουν κίνηση.

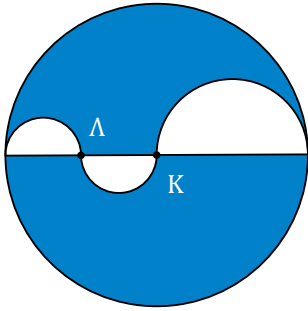
11. Το τετράγωνο του σχήματος έχει πλευρά 8. Οι κυκλικοί τομείς έχουν ίσες ακτίνες και κέντρα τις κορυφές του τετραγώνου. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χρωματισμένου μέρους του σχήματος.



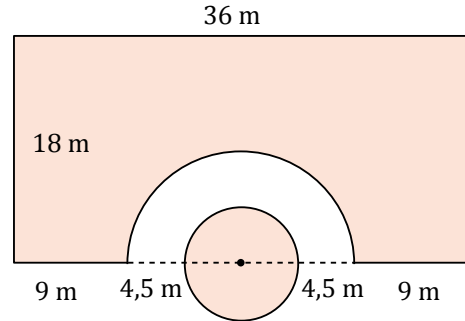
- 12.** Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο με περίμετρο 6 cm και τα K , Λ και M είναι μέσα των πλευρών του. Οι κυκλικοί τομείς στο εσωτερικό του τριγώνου έχουν κέντρα τα A , B και Γ . Να υπολογίσετε το χρωματισμένο μέρος του τριγώνου.



- 13.** Στο εσωτερικό του κύκλου (K , 16) έχουν σχεδιαστεί τρία ημικύκλια. Αν το μήκος της ΛK είναι ίσο με το μισό της ακτίνας του κύκλου (K , 16), να υπολογίσετε το εμβαδόν του χρωματισμένου μέρους του κύκλου.



- 14.** Στο σχήμα φαίνεται χρωματισμένη η κάτοψη της στέγης ενός μουσείου. Το λευκό μέρος αντιστοιχεί σε διάδρομο που δε στεγάζεται. Αν οι τέσσερις γωνίες της στέγης είναι ορθές, να υπολογίσετε το εμβαδόν της στέγης.

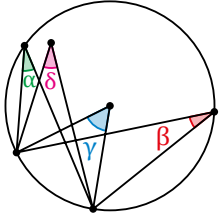


Γεωμετρία του επιπέδου και μέτρηση στον κύκλο

Ερωτήσεις – ασκήσεις – προβλήματα

1. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ).

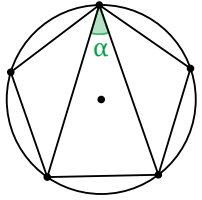
 - α) Το μέτρο μιας επίκεντρης γωνίας είναι διπλάσιο από το μέτρο μιας εγγεγραμμένης που βαίνει στο ίδιο τόξο.
 - β) Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.
 - γ) Το μέτρο μιας εγγεγραμμένης γωνίας είναι ίσο με το μέτρο του τόξου στο οποίο βαίνει.
 - δ) Στο ίδιο τόξο βαίνουν άπειρες επίκεντρες γωνίες.
 - ε) Το μήκος ενός κύκλου είναι ανάλογο της ακτίνας του.
 - στ) Δύο κύκλοι με ίσες διαμέτρους έχουν ίσα μήκη.
 - ζ) Το π είναι ένας περιοδικός αριθμός.
 - η) Το π είναι ο αριθμός 3,14.
 - θ) Το εμβαδόν ενός κύκλου με ακτίνα 2ρ είναι διπλάσιο από το εμβαδόν ενός κύκλου με ακτίνα ρ .
 - ι) Το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα 90° είναι ίσο με το $\frac{1}{4}$ του εμβαδού του αντίστοιχου κυκλικού δίσκου.
2. Ποιες από τις γωνίες $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\delta}$ του σχήματος είναι ίσες και γιατί;


3. Σε κανονικό πολύγωνο γνωρίζουμε την κεντρική του γωνία $\hat{\omega} = 15^\circ$. Ποιο είναι το πλήθος των πλευρών του;
4. Να εξετάσετε αν υπάρχει κανονικό πολύγωνο με κεντρική γωνία:

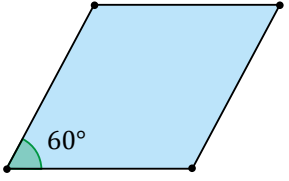
 - α) 8°
 - β) $22,5^\circ$
 - γ) 25°
5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν ενός κύκλου με:

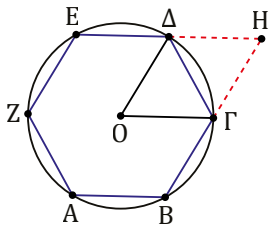
 - α) ακτίνα $\rho = 2$,
 - β) διάμετρο $\delta = 10$.
6. Να υπολογίσετε τη διάμετρο ενός κύκλου με εμβαδόν:

 - α) 16π,
 - β) 200,96. (Θεωρήστε $\pi = 3,14$.)
7. Στο κανονικό πεντάγωνο του διπλανού σχήματος να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $\hat{\alpha}$.


8. Να κατασκευάσετε ένα κανονικό εξάγωνο και με κατάλληλα (κάθε φορά) ευθύγραμμα τμήματα να το χωρίσετε:

 - α) σε τρεις ρόμβους,
 - β) σε δύο ισοσκελή τραπέζια,
 - γ) σε ένα ορθογώνιο και δύο ισοσκελή τρίγωνα.
9. Να εξετάσετε με ποιους μετασχηματισμούς θα μπορούσαμε από τον διπλανό ρόμβο να κατασκευάσουμε ένα κανονικό εξάγωνο.

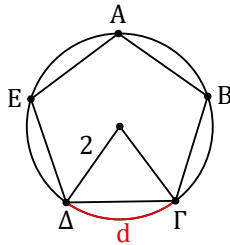

10. Στο διπλανό σχήμα, το ΑΒΓΔΕΖ είναι κανονικό εξάγωνο εγγεγραμμένο στον κύκλο με κέντρο Ο. Προεκτείνουμε τις πλευρές του ΕΔ και ΒΓ και ονομάζουμε Η το σημείο τομής τους. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΗΓ είναι ισόπλευρο.



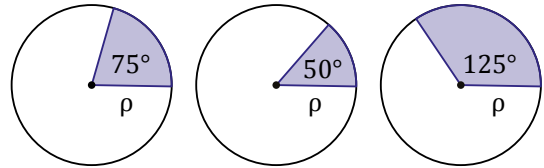
11. Θέλουμε να αντικαταστήσουμε τη μοβ κορδέλα που είναι κολλημένη στο κυκλικό καπάκι του διακοσμητικού κουτιού. Αν γνωρίζουμε ότι το καπάκι έχει διάμετρο 30 cm, ποιο είναι το μήκος της κορδέλας που θα χρησιμοποιήσουμε;



12. Ο κύκλος στον οποίο είναι εγγεγραμμένο το κανονικό πεντάγωνο του σχήματος έχει ακτίνα 2 cm. Να βρείτε το μήκος του τόξου d.



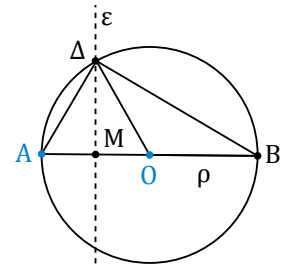
13. Αν ο κυκλικός τομέας 75° έχει εμβαδόν 18, να υπολογίσετε τα εμβαδά των υπόλοιπων κυκλικών τομέων και του κύκλου (και στα τρία σχήματα οι κύκλοι έχουν την ίδια ακτίνα ρ).



Συνδέσεις και επεκτάσεις

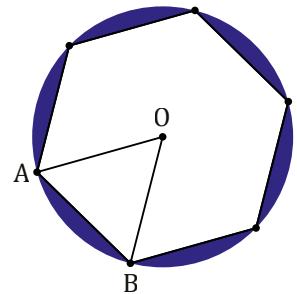
14. Στο διπλανό σχήμα η AB είναι διάμετρος του κύκλου (O, ρ) και η ευθεία ε είναι μεσοκάθετη του τμήματος AO.

- α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AOD είναι ισόπλευρο.
β) Να βρείτε το μέτρο της γωνίας $\widehat{A\hat{D}B}$.



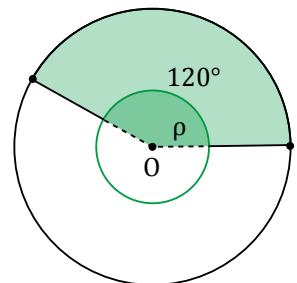
15. Το κανονικό εξάγωνο του σχήματος είναι εγγεγραμμένο σε έναν κύκλο ακτίνας 5.

- α) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς του AB.
β) Να σχεδιάσετε και να υπολογίσετε το ύψος του τριγώνου OAB.
γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χρωματισμένου μέρους του κύκλου.



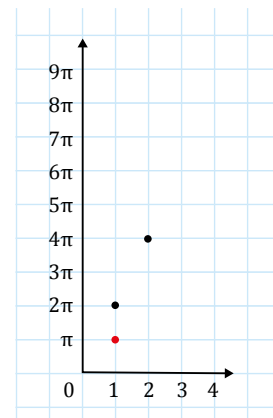
16. Οι κύκλοι του σχήματος έχουν το ίδιο κέντρο O. Η ακτίνα του μεγάλου κύκλου είναι 9. Αν το εμβαδόν του μικρού κύκλου είναι ίσο με το εμβαδόν του χρωματισμένου μέρους του δακτυλίου:

- α) να υπολογίσετε την ακτίνα ρ του μικρού κύκλου,
β) να βρείτε τη σχέση που έχουν τα μήκη των τόξων 120° των δύο κύκλων.



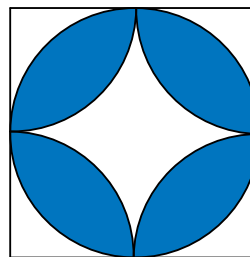
Εμβαδόν
πολυγώνου
και κύκλου

- 17. α)** Ένα τόξο l_1 του κύκλου (A, ρ) , μέτρου 72° , έχει το ίδιο μήκος με ένα τόξο l_2 του κύκλου $(B, 2\rho)$. Ποιο είναι το μέτρο του τόξου l_2 ;
- β)** Ένας κυκλικός τομέας T_1 του κύκλου (A, ρ) με επίκεντρη γωνία 60° έχει το ίδιο εμβαδόν με έναν κυκλικό τομέα T_2 του κύκλου $(B, 2\rho)$. Ποιο είναι το μέτρο της επίκεντρης γωνίας του T_2 ;
- 18.** Στο σχεδιάγραμμα, για τις συντεταγμένες των μπλε σημείων ισχύει ότι:
- Το x (στον οριζόντιο άξονα) αντιστοιχεί στο μήκος της ακτίνας ενός κύκλου.
 - Το y (στον κατακόρυφο άξονα) αντιστοιχεί στο μήκος του ίδιου κύκλου.
- Για τις συντεταγμένες του κόκκινου σημείου ισχύει ότι:
- Το x (στον οριζόντιο άξονα) αντιστοιχεί στο μήκος της ακτίνας ενός κύκλου.
 - Το y (στον κατακόρυφο άξονα) αντιστοιχεί στο εμβαδόν του ίδιου κύκλου.
- α)** Να συμπληρώσετε το σχεδιάγραμμα με δύο μπλε σημεία για κύκλους ακτίνας 3 και 4 και με δύο κόκκινα σημεία για κύκλους ακτίνας 2 και 3.
- β)** Τι παρατηρείτε;



Ομαδική εργασία

- 19.** Το διπλανό σχήμα είναι σχεδιασμένο μέσα σε ένα τετράγωνο. Να ξανασχεδιάσετε το σχήμα στο τετράδιό σας, χρησιμοποιώντας γεωμετρικά όργανα, με όποιο μήκος πλευράς τετραγώνου θέλετε εσείς. Στη συνέχεια να υπολογίσετε το εμβαδόν των σκιασμένων μερών του σχήμα σας. Σκεφτείτε αν υπάρχουν περισσότεροι τρόποι για αυτό.

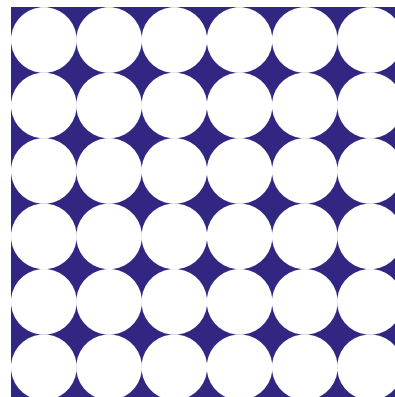


Σχεδιάζουμε
πολύγωνα και
κύκλους

- 20. α)** Χρησιμοποιώντας ένα τετράγωνο και κύκλους, έχουμε σχεδιάσει το διπλανό έργο. Ο σκοπός του σχεδίου ήταν αισθητικός: να δημιουργήσουμε κάτι που να μας αρέσει. Ταυτόχρονα το έργο αυτό αποτελείται από γνωστά μας σχήματα και μπορούν να γίνουν διάφοροι υπολογισμοί.

Για παράδειγμα, σκεφτείτε: Πώς μπορείτε να υπολογίσετε το εμβαδόν του χρωματισμένου μέρους του έργου; Να συζητήσετε τις ιδέες σας με τους συμμαθητές και τις συμμαθήτριες της ομάδας σας.

Αν η πλευρά του τετραγώνου είναι ίση με 6, πόσο είναι το εμβαδόν του χρωματισμένου μέρους του έργου;



β) Να συνεργαστείτε και να σχεδιάσετε ένα δικό σας παρόμοιο έργο, χρησιμοποιώντας κύκλους, τετράγωνα και άλλο ένα σχήμα της επιλογής σας.

Για παράδειγμα, στη διπλανή εικόνα φαίνεται ακόμα ένα τέτοιο έργο, για το οποίο έχουν χρησιμοποιηθεί ένας κύκλος, τετράγωνα και ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα.

Εσείς σχεδιάστε το δικό σας έργο.

Να χρωματίσετε ένα μέρος του έργου σας. Θυμηθείτε, στόχος του σχεδιασμού σας είναι το έργο να σας αρέσει.

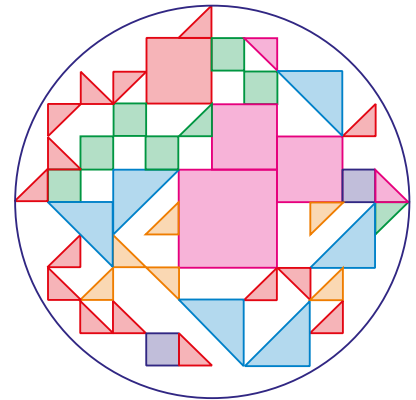
Στη συνέχεια, γράφοντας ένα σύντομο κείμενο με οδηγίες, να περιγράψετε τον τρόπο με τον οποίο μπορεί κανείς να σχεδιάσει το δικό σας έργο, αλλά χωρίς να το έχει δει.

Να δώσετε σε μια άλλη ομάδα της τάξης σας το κείμενο με τις οδηγίες, ώστε να προσπαθήσουν να σχεδιάσουν τη ζωγραφιά σας, αλλά χωρίς να την έχουν δει.

γ) Για το έργο σας μπορούν να γίνουν υπολογισμοί;

Σκεφτείτε και συζητήστε: Με ποιον τρόπο μπορεί κανείς να υπολογίσει το εμβαδόν του χρωματισμένου μέρους του έργου σας; Τι πρέπει να γνωρίζει;

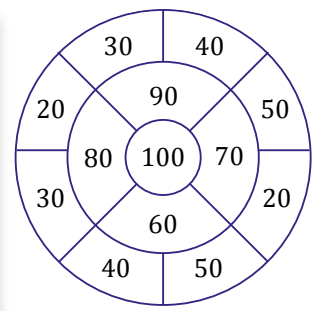
Μπορείτε να δώσετε τα απαραίτητα στοιχεία, ώστε να μπορούν να υπολογίσουν το εμβαδόν του χρωματισμένου μέρους του έργου σας;



21. Συχνά, σε δραστηριότητες της καθημερινής μας ζωής, συναντάμε κατασκευές που αποτελούνται από γνωστά μας σχήματα. Ένα παράδειγμα είναι το παιχνίδι με τον στόχο της εικόνας στα αριστερά. Η επιφάνεια του στόχου είναι από κατάλληλο υλικό, ώστε, όταν ο παίκτης πετάει ειδικές μπάλες, αυτές να κολλάνε επάνω του.

Ο παίκτης πετάει 3 τέτοιες μπάλες από κάποια απόσταση και κερδίζει τόσους πόντους, όσους γράφει το μέρος του στόχου στο οποίο βρίσκεται το μεγαλύτερο μέρος κάθε μπάλας που πέταξε.

Στην εικόνα που βρίσκεται δεξιά φαίνεται ο στόχος, σχεδιασμένος με τη βοήθεια κύκλων και ευθύγραμμων τμημάτων.



α) Να σχεδιάσετε με την ομάδα σας τον παραπάνω στόχο, αφού συζητήσετε πώς θα το κάνετε.

Γνωρίζετε όλα τα στοιχεία που σας χρειάζονται;

Αν όχι, να κάνετε υποθέσεις, ώστε να ολοκληρώσετε το σχέδιό σας.

Πώς θα μπορούσε κανείς να υπολογίσει το εμβαδόν κάθε επιφάνειας πόντων;

β) Να σκεφτείτε μια άλλη κατασκευή ή αντικείμενο της καθημερινής μας ζωής που αποτελείται από γνωστά σας σχήματα, να συλλέξετε φωτογραφίες του και να το σχεδιάσετε. Στη συνέχεια να παρουσιάσετε στους συμμαθητές και στις συμμαθήτριάς σας το σχέδιό σας και να εξηγήσετε πώς το κάνατε.

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ 6:

Στοιχεία Αναλυτικής Γεωμετρίας και γεωμετρικοί μετασχηματισμοί

Στην τέχνη αλλά και στην καθημερινή μας ζωή συναντάμε εικόνες που φτιάχνονται από μεταφορά, ανάκλαση και στροφή σχημάτων, αντικειμένων ή εικόνων.



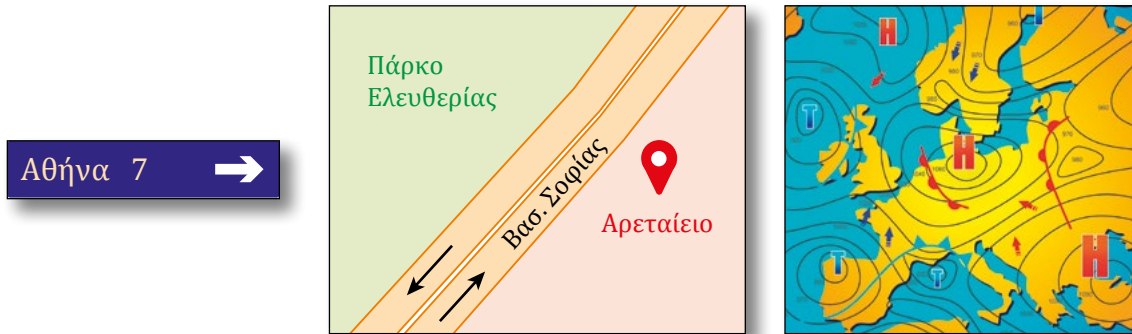
Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε δύο γεωμετρικούς μετασχηματισμούς, τη μεταφορά και τη στροφή.

ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΕΝΟΤΗΤΕΣ:

- 6.1 Διανύσματα
- 6.2 Μεταφορά
- 6.3 Στροφή
- 6.4 Σχήματα με περιστροφική και κεντρική συμμετρία
- 6.5 Σχεδίαση και συλλογισμός με μετασχηματισμούς

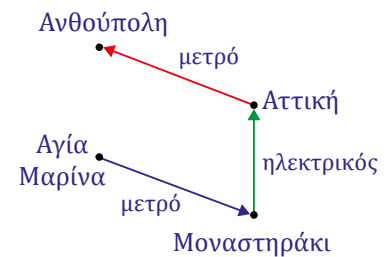
Δ1. Βελάκια με διαφορετικές σημασίες

Να συζητήσετε σε ομάδες για τις πληροφορίες που μας δίνουν τα βελάκια σε καθεμία από τις τρεις παρακάτω φωτογραφίες. Στη συνέχεια συζητήστε στην ολομέλεια της τάξης τα ευρήματά σας.



Δ2. Διαδρομές και μετατοπίσεις

Στη διπλανή εικόνα βλέπουμε τη διαδρομή που κάνει καθημερινά η Ασπασία από τη θέση «Αγία Μαρίνα», που είναι το σπίτι της, στη θέση «Ανθούπολη», που είναι η δουλειά της, χρησιμοποιώντας δύο διαφορετικές γραμμές του μετρό και μία του ηλεκτρικού σιδηροδρόμου. Πώς θα συμβολίζατε την αλλαγή θέσης της Ασπασίας από το σπίτι στη δουλειά της; Σε τι διαφέρει αυτό από την απόσταση ανάμεσα στην Αγία Μαρίνα και την Ανθούπολη;

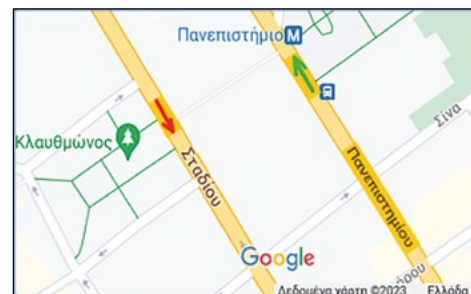


Συζητάμε

...για διευθύνσεις και μετατοπίσεις

Σε πολλές περιπτώσεις στην καθημερινή μας ζωή συναντάμε βελάκια, τα οποία ωστόσο στα Μαθηματικά και στη Φυσική έχουν διαφορετική σημασία. Ας συζητήσουμε τρεις διαφορετικές περιπτώσεις.

Οι οδοί Σταδίου και Πανεπιστημίου της διπλανής εικόνας είναι παράλληλες. Τα βελάκια μάς δείχνουν «προς τα πού» κινούνται τα αυτοκίνητα. Έχουν την ίδια **διεύθυνση** (δηλαδή τις νοητές παράλληλες ευθείες που ορίζονται από τους δύο δρόμους), αλλά **αντίθετη φορά**. Άρα εδώ τα βελάκια είναι γεωμετρικά εργαλεία, που μας πληροφορούν για την **κατεύθυνση** (διεύθυνση και φορά) κίνησης των αυτοκινήτων, αλλά όχι για την ταχύτητα του καθενός, ούτε για τη θέση του.



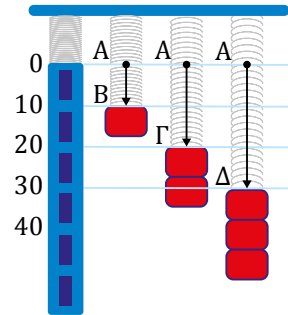
Στη διπλανή εικόνα το βελάκι μάς δείχνει: 1) το **σημείο** στο οποίο είναι δεμένο το σχοινί και εφαρμόζεται η δύναμη που ασκεί το παιδί στη βάρκα και 2) προς τα πού την τραβάει, δηλαδή τη **διεύθυνση** και τη **φορά** της. Δεν έχουμε ωστόσο πληροφορία για το πόσο μεγάλη είναι η δύναμη αυτή.



Στο ελατήριο του διπλανού σχήματος κρεμάμε αρχικά ένα σώμα βάρους X , το οποίο προκαλεί παραμόρφωση του ελατηρίου επιμηκύνοντάς το κατά 10 cm . Διπλασιάζοντας το βάρος, διπλασιάζεται η παραμόρφωση και, τριπλασιάζοντάς το, τριπλασιάζεται η παραμόρφωση.

Τα βελάκια που αντιστοιχούν στις επιμηκύνσεις 10 cm , 20 cm και 30 cm τα λέμε **διανύσματα**, τα συμβολίζουμε \overline{AB} , \overline{AG} , \overline{AD} και δίνουν τις εξής πληροφορίες:

- Το σημείο A , από το οποίο ξεκινά η παραμόρφωση και είναι η **αρχή** του διανύσματος, και το σημείο στο οποίο ολοκληρώνεται η παραμόρφωση και είναι το **τέλος** του.
- Την ευθεία πάνω στην οποία παραμορφώνεται το ελατήριο, που τη λέμε **διεύθυνση** του διανύσματος.
- Προς τα πού παραμορφώθηκε το ελατήριο, δηλαδή τη **φορά** του διανύσματος.
- Το μέγεθος της παραμόρφωσης, που φαίνεται από το μήκος του διανύσματος και το λέμε **μέτρο** του διανύσματος.



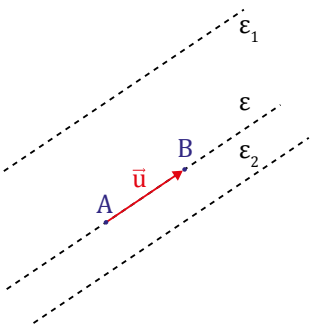

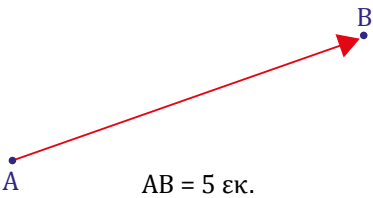
Το κάθε διάνυσμα παριστάνει τη **μετατόπιση** του σημείου στο οποίο κρεμάμε το σώμα, από τη θέση A στις θέσεις B , G και D αντίστοιχα.

Στη διπλανή εικόνα βλέπουμε αποτυπωμένη σε χάρτη τη διαδρομή που ακολούθησε ένα αεροπλάνο από την αρχική θέση A στον τελικό προορισμό B . Τα μπλε διανύσματα δείχνουν τις ενδιάμεσες μετατοπίσεις, ενώ το κίτρινο διάνυσμα \overline{AB} δείχνει τη μετατόπιση του αεροπλάνου από την αρχική θέση στον τελικό προορισμό.





Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

λεκτικά...	...και με σχήμα
<p>Ένα ευθύγραμμο τμήμα στο οποίο έχουμε ορίσει αρχή και τέλος το λέμε διάνυσμα. Το συμβολίζουμε \overline{AB} ή \vec{u}.</p>	<p>(τέλος του διανύσματος) B \vec{u} A (αρχή του διανύσματος)</p> <div style="border: 1px solid green; padding: 5px; background-color: #e0f2e0;"> <p>Προσοχή! Το ευθύγραμμο τμήμα AB έχει άκρα τα σημεία A και B, δεν έχει αρχή κάποιο από αυτά, ούτε τέλος το άλλο: $AB = BA$. Τα διανύσματα \overline{AB} και \overline{BA} είναι διαφορετικά. Για το \overline{BA} θα σχεδιάζαμε το βελάκι προς το μέρος του A.</p> </div>
<p>Αν δύο ή περισσότερα διανύσματα βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία ή σε παράλληλες ευθείες, λέμε ότι έχουν την ίδια διεύθυνση.</p>	 <div style="border: 1px solid #f0e68c; padding: 5px; background-color: #fff9c4;"> <p>Οι ευθείες ε, ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες. Αν πάνω στην ε_1 σχεδιάσουμε ένα τυχαίο διάνυσμα $\overline{\Gamma\Delta}$ και πάνω στην ε_2 ένα διάνυσμα $\overline{E\Z}$, ποια θα είναι η σχέση των διευθύνσεών τους;</p> </div>
<p>Η φορά ενός διανύσματος προσδιορίζεται πάντα από την αρχή προς το τέλος του.</p>	 <p>Φορά: \rightarrow (από την αρχή A προς το τέλος B)</p>
<p>Το μέτρο ενός διανύσματος \overline{AB} είναι ίσο με το μήκος του αντίστοιχου ευθύγραμμου τμήματος και το συμβολίζουμε \overline{AB}.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Ως μήκος τμήματος, δεν μπορεί ποτέ να πάρει αρνητική τιμή. • Στο σχήμα, $\overline{AB} = 5 \text{ cm}$. 	 <p>AB = 5 εκ.</p>

Δύο διανύσματα λέμε πως είναι **ίσα** όταν έχουν:

- ίδια διεύθυνση,
- ίδια φορά και
- ίσα μέτρα.

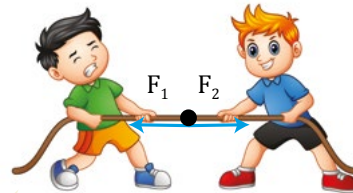
Οι δύο ίσοι κύβοι της διπλανής εικόνας κινούνται παράλληλα, διότι σε αυτούς ασκούνται ίσες δυνάμεις (σε αντίστοιχα σημεία εφαρμογής πάνω στην έδρα του κάθε κύβου).



Δύο διανύσματα λέμε πως είναι **αντίθετα** όταν έχουν:

- ίδια διεύθυνση,
- αντίθετη φορά και
- ίσα μέτρα.

Στη διπλανή εικόνα η σφαίρα δε μετακινείται, διότι τα δύο παιδιά τραβούν με αντίθετες δυνάμεις.



Πώς θα χαρακτηρίζατε δύο διανύσματα \overline{AB} και \overline{BA} ;

Τα διανύσματα χρησιμοποιούνται και στη Φυσική, στην οποία τα φυσικά μεγέθη χωρίζονται σε:

- 1) **Μονόμετρα:** για να τα προσδιορίσουμε, αρκεί να γνωρίζουμε μόνο το μέτρο τους και την αντίστοιχη μονάδα μέτρησης. Τέτοια μεγέθη είναι, π.χ., το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο γεγονότων, το μήκος μιας διαδρομής, η μάζα ενός αντικειμένου, η πυκνότητα ενός υλικού.
- 2) **Διανυσματικά:** για να τα προσδιορίσουμε, χρειαζόμαστε τη διεύθυνση και τη φορά (δηλαδή την κατεύθυνση), το μέτρο τους και την αρχή τους. Τέτοια μεγέθη είναι, π.χ., η ταχύτητα και η μετατόπιση ενός αντικειμένου.



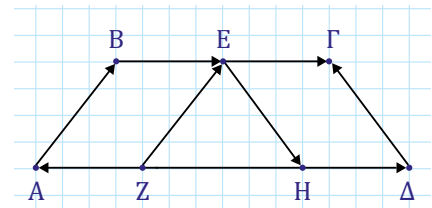
Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. Να βρείτε στο διπλανό σχήμα ποια διανύσματα είναι ίσα και ποια αντίθετα. Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

Απάντηση

Ίσα είναι τα διανύσματα:

- $\overline{BE} = \overline{E\Gamma} = \overline{H\Delta}$, διότι έχουν ίδια διεύθυνση και φορά και ίσα μέτρα $|\overline{BE}| = |\overline{E\Gamma}| = |\overline{H\Delta}| = 4$ μονάδες.
- $\overline{AB} = \overline{ZE}$ (όπως παραπάνω, με μέτρα $|\overline{AB}| = |\overline{ZE}| = 5$ μονάδες· υποτείνουσες ορθογώνιων τριγώνων με μήκη κάθετων πλευρών 3 και 4 μονάδες αντίστοιχα).



Βρίσκω ίσα διανύσματα

Αντίθετα είναι τα διανύσματα:

- \vec{EH} και $\vec{\Delta\Gamma}$, διότι έχουν ίδια διεύθυνση, αντίθετη φορά και ίσα μέτρα $|\vec{EH}| = |\vec{\Delta\Gamma}| = 5$ μονάδες.
- \vec{BE} και \vec{ZA} , $\vec{E\Gamma}$ και \vec{ZA} (όπως παραπάνω, με μέτρα $|\vec{BE}| = |\vec{ZA}| = |\vec{E\Gamma}| = 4$ μονάδες).



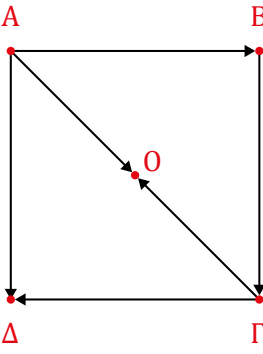
Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε

Να κατασκευάσετε έναν πίνακα έννοιας για το διάνυσμα.



Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Στο διπλανό τετράγωνο το O είναι το μέσο της διαγωνίου AG . Ποιες από τις παρακάτω σχέσεις/προτάσεις που αναφέρονται στο διπλανό τετράγωνο είναι σωστές (Σ) και ποιες λανθασμένες (Λ);



α) $\vec{A\Delta} = \vec{B\Gamma}$

β) $|\vec{AB}| = |\vec{B\Gamma}|$

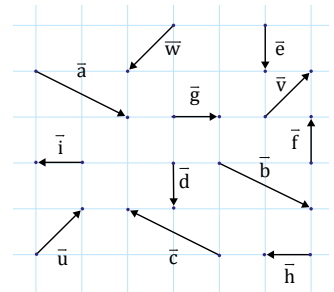
γ) Τα διανύσματα \vec{AB} και $\vec{\Gamma\Delta}$ είναι ίσα.

δ) Το \vec{AO} είναι αντίθετο με το $\vec{\Gamma O}$.

ε) Τα διανύσματα \vec{AO} και $\vec{\Gamma O}$ έχουν ίσα μέτρα.

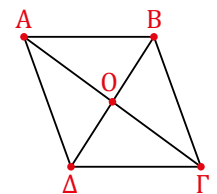
2. Ποια από τα μεγέθη που αναφέρονται στις παρακάτω προτάσεις είναι διανυσματικά, ποια μονόμετρα και γιατί;
 - α)** Το πλοίο κινείται νοτιοδυτικά με ταχύτητα 12 μίλια την ώρα.
 - β)** Ο Γιώργος, γυρνώντας από το σχολείο, περπάτησε μήκος διαδρομής 1.200 m.
 - γ)** Το βάρος ενός κιβωτίου είναι 30 N.
 - δ)** Το νοσοκομείο βρίσκεται 200 m νότια από το σχολείο.
 - ε)** Ο Γιώργος έσπρωξε τον Νίκο με δύναμη 100 N (δεν ξέρουμε προς τα πού).

3. Στο διπλανό σχήμα να βρείτε ζευγάρια ίσων διανυσμάτων και ζευγάρια αντίθετων διανυσμάτων.



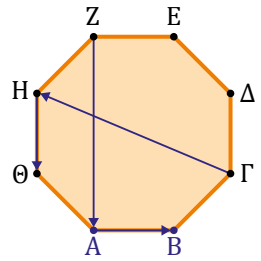
Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

4. Στον διπλανό ρόμβο να σχεδιάσετε ζευγάρια:
 - α)** ίσων διανυσμάτων,
 - β)** αντίθετων διανυσμάτων,
 - γ)** διανυσμάτων με το ίδιο μέτρο αλλά με διαφορετική διεύθυνση.



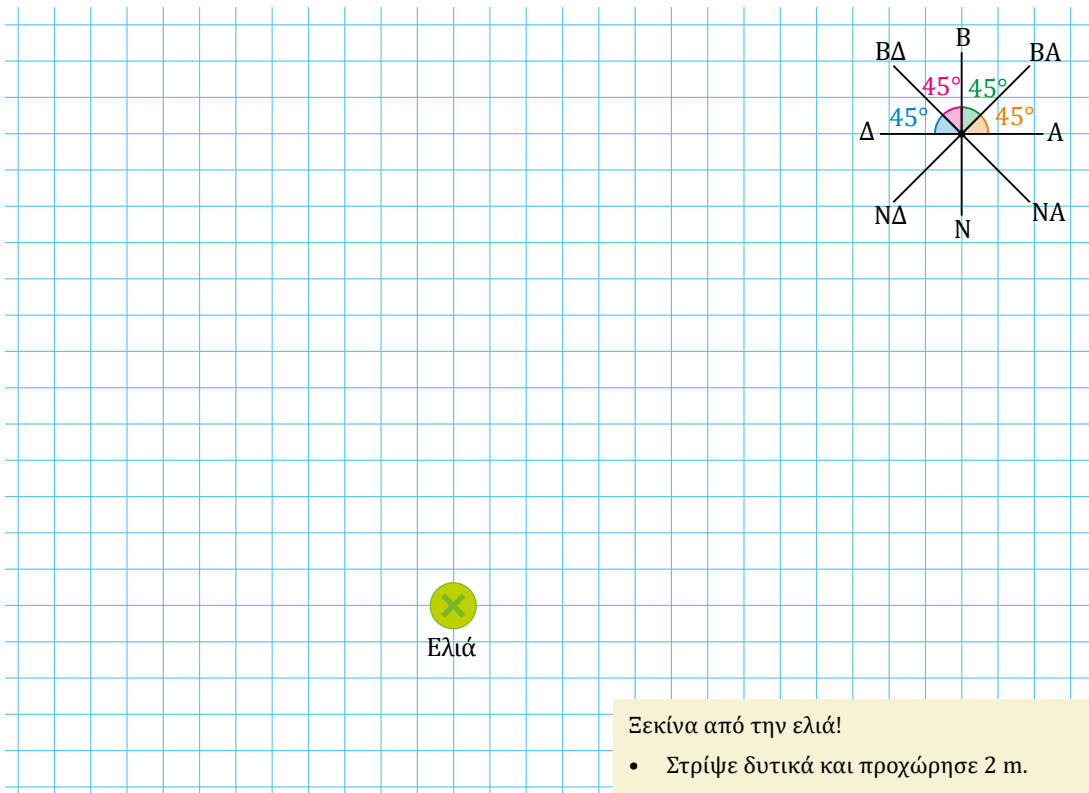
5. Στο διπλανό κανονικό οκτάγωνο να βρείτε ή να σχεδιάσετε ένα διάνυσμα:

- α) που να έχει ίσο μέτρο με το $\overrightarrow{H\Theta}$,
 β) ίσο με το \overrightarrow{ZA} ,
 γ) αντίθετο με το \overrightarrow{AB} ,
 δ) που να έχει ίσο μέτρο με το $\overrightarrow{\Gamma H}$.



6. Στο τετραγωνισμένο χαρτί κάθε τετραγωνάκι έχει πλευρά 1 m. Αποτυπώστε με διανύσματα τις οδηγίες για τον κρυμμένο θησαυρό και με τη βοήθεια της πυξίδας προσπαθήστε να τον βρείτε. (Υπόδειξη: Να υπολογίσετε πρώτα το μήκος της διαγωνίου του πλέγματος.)

Στη συνέχεια σχεδιάστε τη μετατόπιση από τη θέση της ελιάς στη θέση του θησαυρού.



Ελιά



Βρες τον
θησαυρό

Ξεκίνα από την ελιά!

- Στρίψε δυτικά και προχώρησε 2 m.
- Ακολούθησε το μονοπάτι που θα βρεις βορειο-δυτικά και προχώρησε $2\sqrt{2}$ m.
- Εκεί, θα βρεις ένα πηγάδι!
- Τώρα συνέχισε 3 m βόρεια.
- Στρίψε ανατολικά και περπάτησε $\sqrt{3}$ m.
- 1 m νότια θα σκάψεις και θα βρεις τον θησαυρό!

Δ1. Πουλιά ή ψάρια;

A. Παρατηρήστε την εικόνα (έργο του Ολλανδού Μάουριτς Κορνέλις Έσερ) και προσπαθήστε να την περιγράψετε. Επιλέξτε ένα από τα κόκκινα πουλιά και περιγράψτε την τοποθέτηση άλλων πουλιών σε σχέση με αυτό.

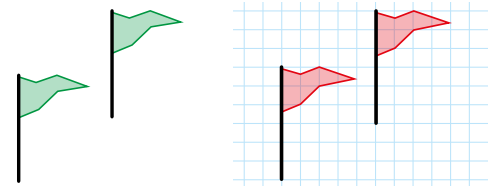


B. Περιγράψτε τη μετακίνηση της πράσινης σημαίας από τη μία θέση στην άλλη. Μπορείτε να ξεκινήσετε από την κάτω ή από την πάνω σημαία.

Κάντε το ίδιο για τις κόκκινες σημαίες.

Ποιες οδηγίες θα δίνατε σε έναν συμμαθητή σας για να τοποθετήσει με ακρίβεια τη δεύτερη πράσινη σημαία; Τη δεύτερη κόκκινη σημαία;

Γ. Σε τι διαφέρουν και σε τι δε διαφέρουν οι δύο πράσινες σημαίες; Συζητήστε στην ομάδα σας και μετά στην τάξη.

**Συζητάμε**

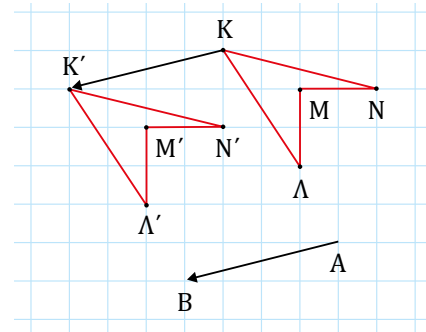
...για μεταφορές σχημάτων

Σε διακοσμητικά σχήματα και σε άλλες εικόνες, μερικές φορές υπάρχει ένα σχήμα που επαναλαμβάνεται με το ίδιο μέγεθος και τον ίδιο ακριβώς προσανατολισμό (χωρίς δηλαδή να έχει στραφεί). Αυτό σημαίνει ότι κάθε μέρος του σχήματος μετακινείται κατά τον ίδιο τρόπο, προς την ίδια κατεύθυνση και κατά την ίδια απόσταση. Τότε λέμε ότι έχουμε μεταφορά του σχήματος. Για να περιγράψουμε αυτή τη μεταφορά, πρέπει να προσδιορίσουμε την απόσταση και την κατεύθυνση της μετατόπισης. Γι' αυτό, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα διάνυσμα ή να πούμε με λόγια πόσο πάνω ή κάτω και πόσο δεξιά ή αριστερά μετακινήθηκε το σχήμα.

Αυτή η μεταφορά είναι ένας γεωμετρικός μετασχηματισμός.

Για παράδειγμα, το τετράπλευρο $KLMN$ μεταφέρθηκε κατά το διάνυσμα \overline{AB} (ή κατά το $\overline{KK'}$ ή κατά άλλο διάνυσμα ίσο με αυτά) και προέκυψε το τετράπλευρο $K'L'M'N'$. Τη μεταφορά αυτή θα μπορούσαμε να την περιγράψουμε λέγοντας ότι το $KLMN$ μετακινήθηκε 4 θέσεις αριστερά και 1 κάτω (ή 4 μονάδες αριστερά και 1 κάτω).

Κατά τη μεταφορά αυτή άλλαξε η θέση του σχήματος, αλλά δεν άλλαξε το μέγεθος, ούτε ο προσανατολισμός του. Για παράδειγμα, το ευθύγραμμο τμήμα KL είναι ίσο με το $K'L'$ και η γωνία \widehat{AKN} είναι ίση με τη γωνία $\widehat{A'K'N'}$.



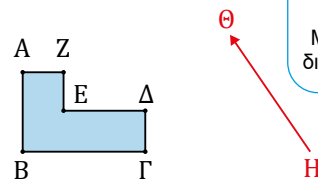


Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

λεκτικά...	...και με σχήμα
<p>Όταν μετακινούμε ένα σχήμα χωρίς να το στρέψουμε και χωρίς να του αλλάζουμε το μέγεθος, λέμε ότι έχουμε παράλληλη μεταφορά, ή απλά μεταφορά. Κατά τη μεταφορά ενός σχήματος, κάθε σημείο του μεταφέρεται προς την ίδια κατεύθυνση και κατά την ίδια απόσταση, Όπως σε όλους τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς, το τελικό σχήμα το λέμε εικόνα του αρχικού σχήματος.</p> <p>Για να προσδιορίσουμε τη μεταφορά, χρειάζεται να ξέρουμε το διάνυσμα που την περιγράφει.</p> <p>Το αρχικό σχήμα και η εικόνα του είναι μεταξύ τους ίσα. Δηλαδή, αν μεταφέρουμε το ένα πάνω στο άλλο, συμπίπτουν. Επίσης, τα ευθύγραμμα τμήματα του αρχικού σχήματος είναι παράλληλα με τις εικόνες τους.</p>	<div data-bbox="977 341 1162 507" data-label="Image"> </div> <p>Το κάτω αριστερά δελφίνι μεταφέρθηκε κατά το διάνυσμα \overline{AB}. Τα δύο δελφίνια έχουν το ίδιο μέγεθος και τον ίδιο προσανατολισμό.</p> <div data-bbox="751 679 1386 922" data-label="Text" style="background-color: #e0f2f1; padding: 10px; border-radius: 10px;"> <p>Το μήκος ενός τμήματος και το μήκος της εικόνας του είναι ίσα. Το μέτρο μιας γωνίας και το μέτρο της εικόνας της είναι ίσα. Επειδή η μεταφορά έχει αυτή την ιδιότητα, λέμε ότι είναι μια ισομετρία. Ισομετρία είναι και η συμμετρία ως προς άξονα.</p> </div>

Δ2. Μεταφέρουμε σχήματα

A. Να αντιγράψετε στο τετράδιό σας το πολύγωνο ΑΒΓΔΕΖ και το διάνυσμα $\overline{H\Theta}$. Χρησιμοποιήστε διαφανές χαρτί για να μεταφέρετε το πολύγωνο στην κατεύθυνση και στην απόσταση που προσδιορίζεται από το διάνυσμα. Ποιες πλευρές του νέου σχήματος αντιστοιχούν στις πλευρές ΑΒ και ΔΕ του αρχικού σχήματος;



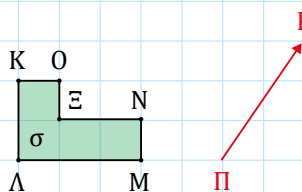
Μεταφορά με διαφανές χαρτί

B. Να αντιγράψετε σε τετραγωνισμένο χαρτί το σχήμα σ (το πολύγωνο ΚΛΜΝΕΟ) και το διάνυσμα $\overline{ΠΡ}$.

α) Να κάνετε τη μεταφορά του σχήματος σ κατά το διάνυσμα $\overline{ΠΡ}$. Ας ονομάσουμε α την εικόνα του σ. Για κάθε πλευρά του αρχικού σχήματος να γράψετε την αντίστοιχη πλευρά της εικόνας του.

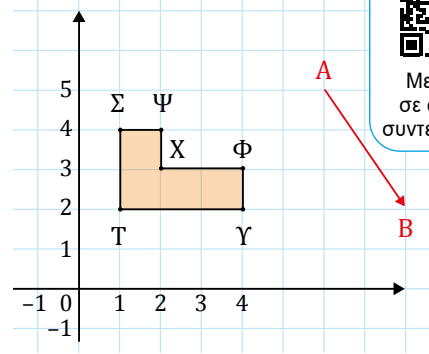
β) Να μεταφέρετε το σχήμα σ 4 μονάδες πάνω και 1 μονάδα αριστερά. Ας ονομάσουμε β την εικόνα του σ. Για κάθε πλευρά του αρχικού σχήματος να γράψετε την αντίστοιχη πλευρά της εικόνας του.

γ) Σκεφτείτε ποια μεταφορά θα έχει ως αρχικό το σχήμα α και ως εικόνα του το σχήμα β.



Μεταφορά σε τετραγωνισμένο χαρτί

Γ. Να σχεδιάσετε την εικόνα του πολυγώνου ΣΤΥΦΧΨ μετά τη μεταφορά του κατά το διάνυσμα \overline{AB} . Ποιες είναι οι συντεταγμένες των κορυφών του ΣΤΥΦΧΨ; Ποιες είναι οι συντεταγμένες των κορυφών της εικόνας του; Μπορείτε να βρείτε έναν κανόνα για να βρίσκουμε τις συντεταγμένες της εικόνας οποιουδήποτε σημείου όταν το μεταφέρουμε κατά το διάνυσμα \overline{AB} ; Συζητήστε τις προτάσεις σας στην τάξη.



Μεταφορά
σε σύστημα
συντεταγμένων

Δ. Χρησιμοποιήστε το GeoGebra για να δημιουργήσετε το δικό σας σχήμα και να το μεταφέρετε κατά ένα διάνυσμα της επιλογής σας.



Δημιουργία
και μεταφορά
σχήματος

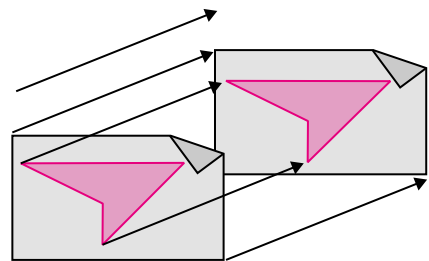
Συζητάμε

...για κατασκευή και σχεδίαση

Μπορούμε να κατασκευάσουμε την εικόνα ενός σχήματος μετά από μεταφορά με διάφορους τρόπους:

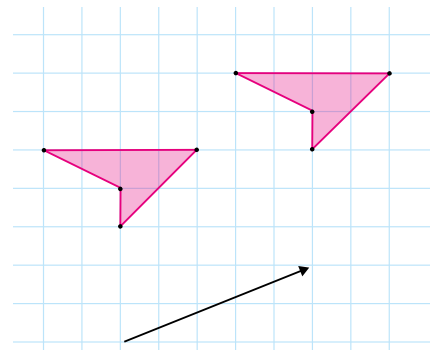
Με διαφανές χαρτί

Αντιγράφουμε το αρχικό σχήμα σε διαφανές χαρτί. Στη συνέχεια σύρουμε το διαφανές χαρτί πάνω στο χαρτί, στην κατεύθυνση και στην απόσταση που μας ορίζει το διάνυσμα μεταφοράς. Προσέχουμε να μην περιστρέψουμε το χαρτί κατά τη μετακίνησή του.



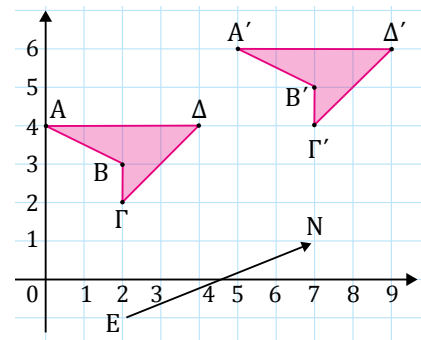
Σε τετραγωνισμένο χαρτί

Αν το σχήμα είναι σχεδιασμένο σε τετραγωνισμένο χαρτί, μπορούμε να βρούμε την εικόνα του κάνοντας τη μετατόπιση που ορίζει το διάνυσμα ή ακολουθώντας τις περιγραφές πόσο πάνω ή κάτω και πόσο δεξιά ή αριστερά πρέπει να μετατοπιστεί. Για παράδειγμα, στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο μετακινήθηκε 5 μονάδες δεξιά και 2 μονάδες πάνω.



Σε σύστημα συντεταγμένων

Αν το σχήμα είναι σχεδιασμένο σε σύστημα συντεταγμένων, μπορούμε να κάνουμε τη μεταφορά σαν να έχουμε απλό τετραγωνισμένο χαρτί. Αλλά μπορούμε να αξιοποιήσουμε και τις συντεταγμένες. Δηλαδή μπορούμε να βρούμε τη σχέση που έχουν οι συντεταγμένες των σημείων του αρχικού σχήματος με τις συντεταγμένες των αντίστοιχων σημείων της εικόνας του. Στο διπλανό σχήμα το σημείο Α έχει συντεταγμένες (0, 4) και η εικόνα του Α' έχει (5, 6). Επίσης, είναι Β(2, 3) και Β'(7, 5), ενώ το Γ(2, 2) έχει ως εικόνα το Γ'(7, 4). Παρατηρούμε λοιπόν ότι, αν ένα σημείο του αρχικού σχήματος έχει συντεταγμένες (x, y), η εικόνα του έχει (x + 5, y + 2). Αυτό εξάλλου δείχνει και το διάνυσμα \overline{EN} : μετακίνηση 5 δεξιά και 2 πάνω.

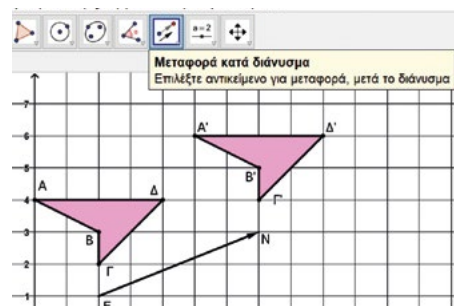


Τη μεταφορά του $AB\Gamma\Delta$ στο $A'B'\Gamma'\Delta'$ μπορούμε να την προσδιορίσουμε:

- α) με το διάνυσμα \overline{EN} ,
- β) με τη μετατόπιση «5 δεξιά και 2 πάνω»,
- γ) με τη μεταβολή των συντεταγμένων σύμφωνα με τον κανόνα $(x, y) \mapsto (x+5, y+2)$.

Σε λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας

Στην περίπτωση ενός σχήματος που έχει δημιουργηθεί σε ψηφιακό περιβάλλον, συνήθως μπορούμε να κάνουμε τη μεταφορά κατά διάνυσμα χρησιμοποιώντας συγκεκριμένα εργαλεία της εφαρμογής. Για παράδειγμα, στο GeoGebra 5 η μεταφορά κατά διάνυσμα γίνεται με το εργαλείο που φαίνεται στην εικόνα.



Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Για να σχεδιάσουμε την εικόνα ενός σχήματος μετά από μεταφορά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε διάφορα εργαλεία:

- διαφανές χαρτί
- τετραγωνισμένο χαρτί
- σύστημα συντεταγμένων
- ψηφιακά εργαλεία

Σε κάθε περίπτωση χρειαζόμαστε:

- το διάνυσμα κατά το οποίο γίνεται η μεταφορά, ή
- μια περιγραφή για το πόσο πάνω ή κάτω και πόσο δεξιά ή αριστερά μεταφέρεται το κάθε σημείο, ή
- έναν κανόνα που περιγράφει πώς συνδέονται οι συντεταγμένες ενός σημείου με εκείνες της εικόνας του.

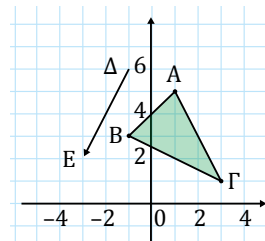


Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. Σε μια εργασία, η Ζαχρά ανέλαβε να βρει την εικόνα $A'B'Γ'$ του τριγώνου $ABΓ$ μετά από μεταφορά κατά το διάνυσμα $\overline{ΔΕ}$. Αποφάσισε να βρει πρώτα τις συντεταγμένες των εικόνων $A', B', Γ'$ των κορυφών $A, B, Γ$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των $A', B', Γ'$.

β) Όταν η Ζαχρά σχημάτισε το τρίγωνο $A'B'Γ'$, ο Φίλιππος είπε ότι έχει τον εξής προβληματισμό: «Το τρίγωνο $ABΓ$ έχει άπειρα σημεία και εμείς μεταφέρουμε μόνο τρία. Πώς είμαστε σίγουροι ότι, αν μεταφέρουμε κατά το $\overline{ΔΕ}$ όλα τα σημεία του $ABΓ$, θα πάρουμε τα σημεία του $A'B'Γ'$;».



Απάντηση

α) Το διάνυσμα $\overline{ΔΕ}$ περιγράφει τη μεταφορά του σχήματος κατά δύο μονάδες αριστερά και τέσσερις μονάδες κάτω. Ή αλλιώς $(x, y) \mapsto (x-2, y-4)$.

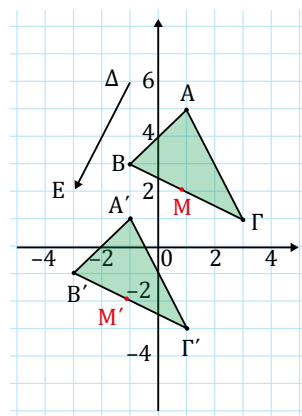
Οι συντεταγμένες των $A, B, Γ$ είναι $A(1, 5)$, $B(-1, 3)$ και $Γ(3, 1)$. Επομένως, με τη μεταφορά, οι συντεταγμένες του A' θα είναι $1-2 = -1$ και $5-4 = 1$, δηλαδή $A'(-1, 1)$. Ομοίως, $B'(-3, -1)$ και $Γ'(1, -3)$.

β) Ας πάρουμε ένα σημείο M της πλευράς $BΓ$ του $ABΓ$. Θα εξηγήσουμε γιατί η εικόνα M' του M θα είναι σημείο της $B'Γ'$.

Το τμήμα BM και η εικόνα του (το $B'M'$) είναι ίσα και παράλληλα. Το ίδιο συμβαίνει για το $BΓ$ και την εικόνα του, το $B'Γ'$. Εφόσον λοιπόν πήραμε τη BM πάνω στη $BΓ$, και το $B'M'$ θα είναι πάνω στη $B'Γ'$.

Το ίδιο συμβαίνει για οποιοδήποτε σημείο της $BΓ$. Δηλαδή όλα τα σημεία της $BΓ$ έχουν εικόνες πάνω στη $B'Γ'$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι, για να μεταφέρουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα κατά διάνυσμα, αρκεί να μεταφέρουμε τα δύο άκρα του και να ενώσουμε τις εικόνες τους.

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να εξηγήσουμε ότι, αν παίρνουμε ένα σημείο στο εσωτερικό του τριγώνου $ABΓ$, η εικόνα του θα ήταν στο εσωτερικό του $A'B'Γ'$.

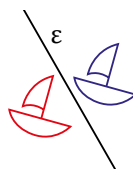


Μεταφορά με
κίνηση

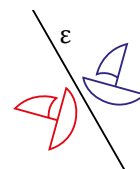


Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Σε μία από τις δύο εικόνες το κόκκινο σχήμα προήλθε από μεταφορά του μπλε σχήματος και στην άλλη από ανάκλαση. Εντοπίστε την εικόνα που αντιστοιχεί σε κάθε μετασχηματισμό. Στην περίπτωση της μεταφοράς, προσδιορίστε το διάνυσμα μεταφοράς.

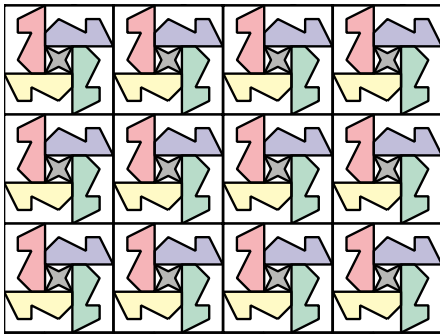


Εικόνα α



Εικόνα β

2. Να εντοπίσετε μετασχηματισμούς μεταφοράς στα παρακάτω σχήματα. Για κάθε μεταφορά που εντοπίζετε, να προσδιορίσετε το αρχικό σχήμα και το διάνυσμα μεταφοράς.



3. Όταν ένας άνθρωπος κινείται με ταχύτητα πάνω σε ένα σκέιτ χωρίς να στρίβει, μπορούμε να φανταστούμε ότι παράγει πολλούς διαδοχικούς μετασχηματισμούς μεταφοράς.



Να βρείτε άλλα παραδείγματα από την καθημερινή ζωή που να μπορούμε να τα σκεφτούμε ως μετασχηματισμό μεταφοράς.

4. Ο Έσερ (Maurits Cornelis Escher, 1898-1972) ήταν Ολλανδός εικαστικός καλλιτέχνης, του οποίου πολλά έργα ενσωματώνουν συμμετρίες, μεταφορές, στροφές και άλλους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς. Μπορείτε να εντοπίσετε στον πίνακα



Τρίλιζα στη μεταφορά

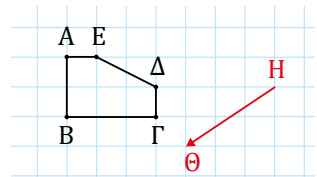
που ακολουθεί σχήματα που έχουν μεταφερθεί; Για τις μεταφορές που θα εντοπίσετε, σχεδιάστε ένα διάνυσμα που να περιγράφει τη μεταφορά.



5. Να εντοπίσετε ποιο ή ποια από τα σχήματα δείχνουν έναν μετασχηματισμό μεταφοράς. Εξηγήστε γιατί τα άλλα σχήματα δεν είναι μεταφορά.



6. Να κάνετε τη μεταφορά του $ABΓΔΕ$ κατά το διάνυσμα $\vec{HΘ}$ με τους εξής τρόπους:



- α) Αντιγράψτε το πεντάγωνο και το διάνυσμα στο τετράδιό σας και χρησιμοποιήστε διαφανές χαρτί.

- β) Αντιγράψτε το πεντάγωνο και το διάνυσμα σε τετραγωνισμένο χαρτί και σχεδιάστε την εικόνα του.



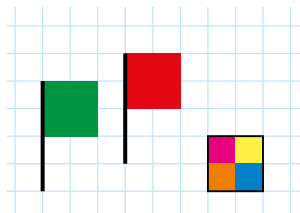
Ισότητες στη μεταφορά σε τετραγωνισμένο χαρτί

Σε κάθε περίπτωση, γράψτε τα ζευγάρια των αντίστοιχων πλευρών και τα ζευγάρια των αντίστοιχων γωνιών των δύο σχημάτων. Τι σχέση έχουν μεταξύ τους οι αντίστοιχες πλευρές; Οι αντίστοιχες γωνίες;



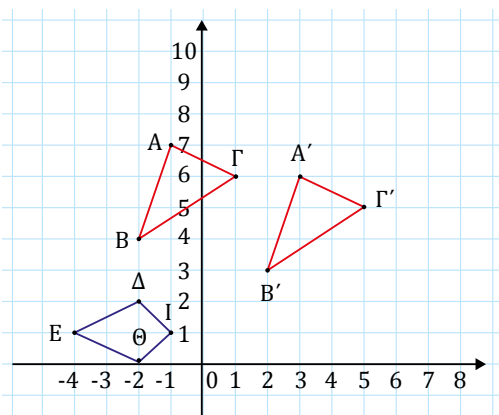
Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

7. Στο διπλανό σχήμα η κόκκινη σημαία είναι η εικόνα της πράσινης μετά από μεταφορά κατά ένα διάνυσμα που δε φαίνεται. Να αντιγράψετε το σχήμα σε τετραγωνισμένο χαρτί.



- α) Αν υποθέσουμε ότι το χρωματιστό τετράγωνο είναι το αρχικό σχήμα, ποια είναι η εικόνα του με βάση την ίδια μεταφορά;
- β) Αν υποθέσουμε ότι το χρωματιστό τετράγωνο είναι η εικόνα ενός σχήματος με βάση την ίδια μεταφορά, ποιο είναι το αρχικό σχήμα;

8. Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο $A'B'Γ'$ είναι η εικόνα του τριγώνου $ABΓ$ μετά από μεταφορά κατά ένα διάνυσμα.



- α) Να σχεδιάσετε το διάνυσμα μεταφοράς.
- β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών των τριγώνων $ABΓ$ και $A'B'Γ'$.
- γ) Να περιγράψετε έναν κανόνα για την αλλαγή των συντεταγμένων ενός σημείου μετά από αυτή τη μεταφορά.
- δ) Μεταφέρουμε το $ΕΔΙΘ$ κατά το ίδιο διάνυσμα. Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών της εικόνας του και στη συνέχεια να τη σχεδιάσετε.



Εύρεση
διανύσματος
και κανόνα

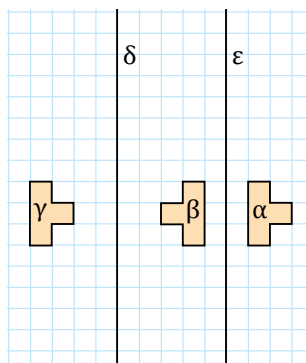
9. Σε ένα σύστημα συντεταγμένων να σημειώσετε τα σημεία $A(2, 4)$, $B(-2, 2)$ και $Γ(1, 1)$. Μια μεταφορά περιγράφεται ως εξής: «Μετατοπίζουμε το σχήμα δύο μονάδες αριστερά και τρεις μονάδες κάτω». Να βρείτε:

- α) την εικόνα του τριγώνου $ABΓ$ μετά τη μεταφορά,
- β) τον κανόνα με τον οποίο αλλάζουν οι συντεταγμένες οποιουδήποτε σημείου μετά από αυτή τη μεταφορά.

10. Σε τετραγωνισμένο χαρτί να σχεδιάσετε ένα τετράπλευρο $ABΓΔ$ και ένα διάνυσμα $\overline{ΚΛ}$.

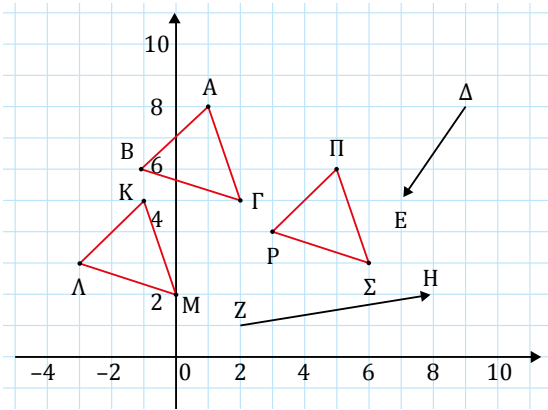
- α) Να σχεδιάσετε την εικόνα του $ABΓΔ$ μετά από μεταφορά κατά το διάνυσμα $\overline{ΚΛ}$.
- β) Να γράψετε τις ιδιότητες που ισχύουν ανάμεσα στις πλευρές του αρχικού τετραπλεύρου και τις αντίστοιχες πλευρές της εικόνας του. Να κάνετε το ίδιο για τις ίσες γωνίες.
- γ) Άλλαξε η περίμετρος του τετραπλεύρου κατά τη μεταφορά του; Το εμβαδόν του; Εξηγήστε την απάντησή σας.

11. Η Ελίρα δοκίμαζε διάφορους μετασχηματισμούς στο GeoGebra. Κάποια στιγμή χρησιμοποίησε δύο αξονικές συμμετρίες ως εξής: Βρήκε το συμμετρικό του α ως προς την ευθεία ϵ και το ονόμασε β . Στη συνέχεια βρήκε το συμμετρικό του β ως προς μια άλλη ευθεία δ και το ονόμασε γ . Οι ευθείες ϵ και δ ήταν παράλληλες. Αναρωτήθηκε αν θα μπορούσαμε να πάρουμε το γ από το α με έναν μόνο μετασχηματισμό. Εσείς τι λέτε; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.



Συμμετρικό του
συμμετρικού

- 12.** Η Ελίρα δοκίμασε να κάνει και διαδοχικές μεταφορές. Πρώτα έκανε τη μεταφορά του $\triangle AB\Gamma$ κατά το διάνυσμα $\overline{\Delta\Xi}$ και βρήκε το $\triangle K\Lambda\text{M}$ και μετά έκανε τη μεταφορά του $\triangle K\Lambda\text{M}$ κατά το $\overline{\text{Z}\text{H}}$ και βρήκε το $\triangle\Pi\Sigma$.

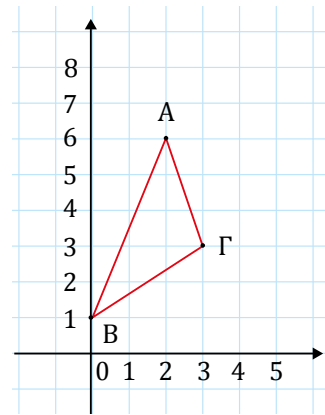


- α)** Με ποιον (έναν) γεωμετρικό μετασχηματισμό θα μπορούσε από το $\triangle AB\Gamma$ να πάρει το $\triangle\Pi\Sigma$;
- β)** Να περιγράψετε τους κανόνες με τους οποίους αλλάζουν οι συντεταγμένες κατά τις δύο μεταφορές και κατά τον μετασχηματισμό του προηγούμενου ερωτήματος.



Μεταφορά της μεταφοράς

- 13.** Μια μεταφορά περιγράφεται με τον κανόνα $(x, y) \mapsto (x-2, y+3)$.



- α)** Να αντιγράψετε το τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ σε σύστημα συντεταγμένων. Να βρείτε την εικόνα $\triangle A'B'\Gamma'$ του $\triangle AB\Gamma$ μετά την παραπάνω μεταφορά.
- β)** Η Ιωάννα βρήκε τις εικόνες των σημείων A, B και Γ , τις ονόμασε A', B' και Γ' και ένωσε τα τρία σημεία. Ο Γιάννης ισχυρίζεται ότι έτσι μόνο τα τρία σημεία μεταφέρθηκαν σωστά. Για τα υπόλοιπα όμως σημεία του τριγώνου δεν μπορούμε είμαστε σίγουροι. Συμφωνείτε ή όχι και γιατί;



Μεταφορά σημείων σχήματος

Δ1. Πλακάκια

A. Παρατηρήστε την εικόνα 1 και προσπαθήστε να περιγράψετε πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε τα κίτρινα σχήματα ξεκινώντας με ένα από αυτά (για παράδειγμα, με το πάνω αριστερά).

Στην εικόνα 2 φαίνεται η μεγέθυνση ενός μέρους της εικόνας 1. Προσπαθήστε να περιγράψετε με ποιον τρόπο πρέπει να μετακινήσουμε το κίτρινο σχήμα για να πάρουμε:

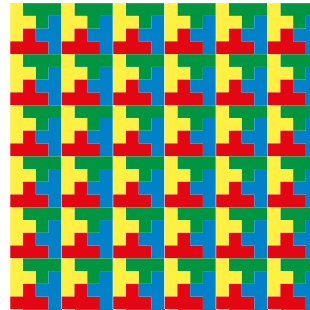
- α) το κόκκινο σχήμα,
- β) το γαλάζιο σχήμα,
- γ) το πράσινο σχήμα.

B. Περιγράψτε τον τρόπο με τον οποίο πρέπει να μετακινήσουμε την πράσινη σημαία από τη θέση α, ώστε:

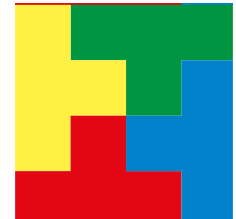
- α) να πάει στη θέση β,
- β) να πάει στη θέση γ.

Κάντε το ίδιο για τις κόκκινες σημαίες.

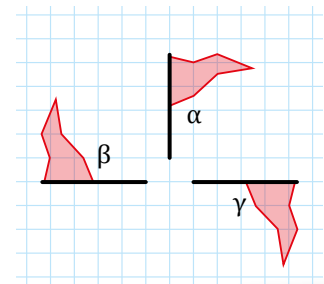
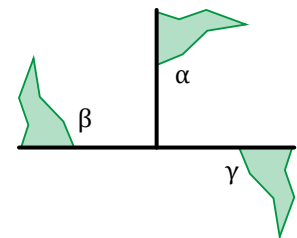
Γ. Σε τι διαφέρουν και σε τι δε διαφέρουν οι τρεις πράσινες σημαίες; Συζητήστε στην ομάδα σας και μετά στην τάξη.



Εικόνα 1



Εικόνα 2



Συζητάμε

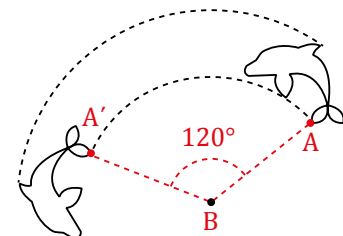
...για περιστροφές σχημάτων

Συχνά σε διακοσμητικά μοτίβα και σε άλλες εικόνες υπάρχει ένα σχήμα που επαναλαμβάνεται με στροφή γύρω από ένα σημείο. Για να περιγράψουμε γεωμετρικά αυτή τη στροφή, πρέπει να προσδιορίσουμε το σημείο γύρω από το οποίο στρέφουμε το σχήμα και τη γωνία κατά την οποία το στρέφουμε. Η γωνία μπορεί να είναι με τη φορά που κινούνται οι δείκτες του ρολογιού ή με την αντίθετη.

Αυτή η στροφή είναι ένας γεωμετρικός μετασχηματισμός.

Για παράδειγμα, στο διπλανό σχήμα περιστρέψαμε την εικόνα του δελφινιού γύρω από σημείο Β κατά 120° με φορά αντίστροφη από αυτή της κίνησης των δεικτών του ρολογιού. Μοιάζει να σύραμε το δελφίνι πάνω σε ένα μέρος μιας κυκλικής διαδρομής.

Κατά τη μεταφορά αυτή άλλαξε η θέση του σχήματος και ο προσανατολισμός του, αλλά δεν άλλαξε το μέγεθός του, ούτε η μορφή του.



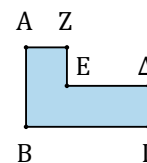


Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

λεκτικά...	...και με σχήμα
<p>Όταν περιστρέφουμε ένα σχήμα γύρω από ένα σημείο χωρίς να αλλάζουμε το μέγεθός του, λέμε ότι έχουμε στροφή. Στη στροφή, κάθε σημείο του σχήματος περιστρέφεται κατά την ίδια γωνία. Όπως σε όλους τους μετασχηματισμούς, το τελικό σχήμα το λέμε εικόνα του αρχικού σχήματος.</p> <p>Για να προσδιορίσουμε τη στροφή, χρειάζεται να ξέρουμε το σημείο γύρω από το οποίο περιστρέφουμε το σχήμα και τη γωνία στροφής. Το σημείο το λέμε κέντρο της στροφής. Τη γωνία τη λέμε γωνία στροφής. Ονομάζουμε θετική φορά της γωνίας την αντίστροφη της κίνησης των δεικτών του ρολογιού και αρνητική εκείνη που είναι σύμφωνη με την κίνηση των δεικτών του ρολογιού.</p> <p>Το αρχικό σχήμα και η εικόνα του είναι μεταξύ τους ίσα. Δηλαδή, αν τοποθετήσουμε κατάλληλα το ένα πάνω στο άλλο, συμπίπτουν.</p>	<div data-bbox="874 348 1182 646" data-label="Image"> </div> <p>Στρέψαμε το ευθύγραμμο τμήμα AB 120° κατά τη θετική φορά γύρω από το σημείο Δ. Το AB και η εικόνα του, δηλαδή το $A'B'$, είναι ίσα.</p> <p>Επίσης, το A και η εικόνα του A' απέχουν εξίσου από το Δ, δηλαδή $\Delta A = \Delta A'$.</p> <div data-bbox="674 890 1393 1212" data-label="Text" style="background-color: #e0f2f1; padding: 10px; border-radius: 10px;"> <p>Η συμμετρία ως προς ευθεία (που μάθαμε στην Α' Γυμνασίου), η μεταφορά (που μάθαμε στην ενότητα 6.2) και η στροφή είναι ισομετρίες.</p> <p>Στις ισομετρίες:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Το μήκος ενός τμήματος και το μήκος της εικόνας του είναι ίσα. • Το μέτρο μιας γωνίας και το μέτρο της εικόνας της είναι ίσα. </div>

Δ2. Στρέφουμε σχήματα

A. Να αντιγράψετε στο τετράδιό σας το πολύγωνο $ABΓΔΕΖ$ και το σημείο H . Χρησιμοποιήστε διαφανές χαρτί για να στρέψετε το πολύγωνο γύρω από το H κατά γωνία 80° κατά τη θετική φορά και 30° κατά την αρνητική φορά. Ποιες πλευρές των νέων σχημάτων αντιστοιχούν στις πλευρές AB και ΔE του αρχικού σχήματος;



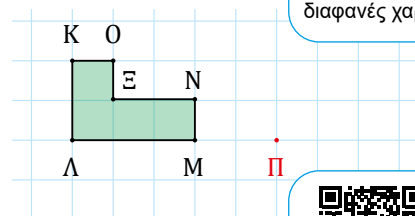
B. Να αντιγράψετε σε τετραγωνισμένο χαρτί το πολύγωνο $KΛΜΝΕΟ$ και το σημείο Π .

α) Να βρείτε την εικόνα του $KΛΜΝΕΟ$ μετά από στροφή γύρω από το σημείο M κατά γωνία:

i) 90° κατά τη θετική φορά, **ii)** 135° κατά την αρνητική φορά.

β) Να βρείτε την εικόνα του $KΛΜΝΕΟ$ μετά από στροφή γύρω από το σημείο Π κατά γωνία:

i) 90° κατά τη θετική φορά, **ii)** 180° κατά την αρνητική φορά.



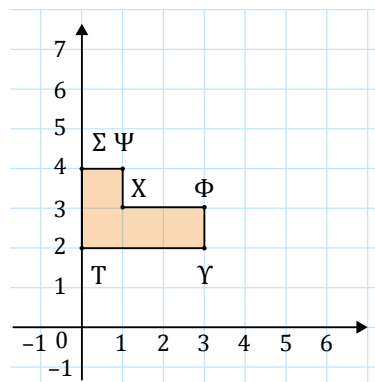
Γ. Να αντιγράψετε σε σύστημα συντεταγμένων το πολύγωνο ΣΤΥΦΧΨ.

α) Να βρείτε την εικόνα του ΣΤΥΦΧΨ μετά από στροφή γύρω από το σημείο Τ κατά γωνία:

- i) 90° κατά τη θετική φορά,
- ii) 135° κατά την αρνητική φορά.

β) Να βρείτε την εικόνα του ΣΤΥΦΧΨ μετά από στροφή γύρω από το σημείο Ο κατά γωνία:

- i) 90° κατά τη θετική φορά,
- ii) 180° κατά την αρνητική φορά.



Δ. Χρησιμοποιήστε το GeoGebra για να δημιουργήσετε το δικό σας σχήμα και να βρείτε την εικόνα του μετά από στροφή κατά μία γωνία της επιλογής σας γύρω από κάποιο σημείο.



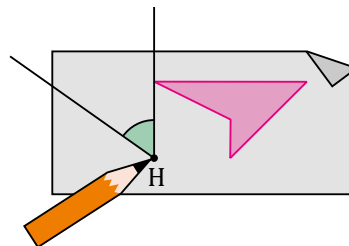
Συζητάμε

...για κατασκευή και σχεδίαση

Μπορούμε να κατασκευάσουμε την εικόνα ενός σχήματος μετά από στροφή με διάφορους τρόπους:

Με διαφανές χαρτί

Πρώτα σχεδιάζουμε μια γωνία ίση με τη γωνία στροφής, όπως στο διπλανό σχήμα. Αντιγράφουμε το αρχικό σχήμα σε διαφανές χαρτί. Στη συνέχεια πιέζουμε κατακόρυφα το μολύβι μας πάνω στο κέντρο της στροφής και περιστρέφουμε το διαφανές χαρτί γύρω από το κέντρο κατά τη γωνία που έχουμε σχεδιάσει.

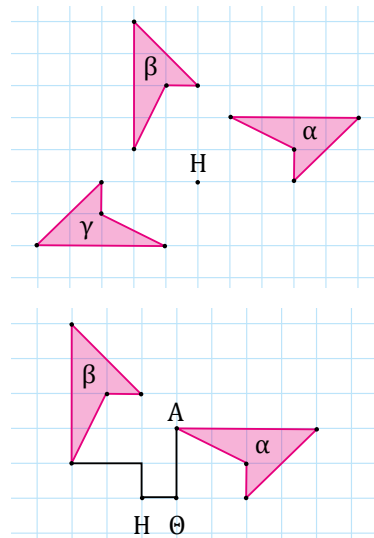


Σε τετραγωνισμένο χαρτί

Στο διπλανό σχήμα στρέψαμε το τετράπλευρο α 90° κατά τη θετική φορά γύρω από το Η και πήραμε το σχήμα β. Επίσης, το στρέψαμε 180° γύρω από το Η και πήραμε το σχήμα γ. Για τις στροφές αυτές μπορούμε να φανταστούμε τη νέα θέση του σχήματος χωρίς διαφανές χαρτί και χωρίς γεωμετρικά όργανα.

Αν δυσκολευόμαστε να φανταστούμε, για παράδειγμα, τη νέα θέση του Α, μπορούμε να σκεφτούμε ότι στρέφεται ολόκληρη η τετλασμένη ΗΘΑ γύρω από το Η.

Συνήθως, στο τετραγωνισμένο χαρτί μπορούμε να φανταστούμε τη νέα θέση μόνο για στροφές 90° ή 180° . Για άλλες γωνίες στροφής θα χρησιμοποιήσουμε διαφανές χαρτί.



Σε σύστημα συντεταγμένων

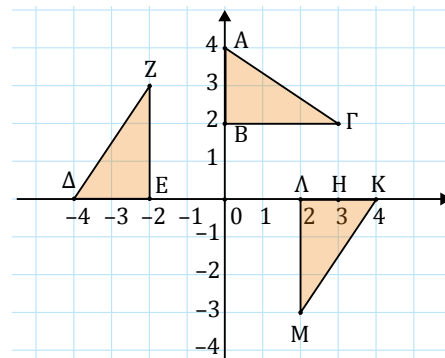
Αν το σχήμα είναι σχεδιασμένο σε σύστημα συντεταγμένων, μπορούμε να κάνουμε τη μεταφορά σαν να έχουμε απλό τετραγωνισμένο χαρτί. Επίσης, θα μπορούσαμε να αξιοποιήσουμε και τις συντεταγμένες.

Στο διπλανό σχήμα στρέψαμε το τρίγωνο $AB\Gamma$ 90° κατά τη θετική φορά γύρω από το σημείο O και βρήκαμε το ΔEZ . Επίσης, στρέψαμε το $AB\Gamma$ 90° κατά την αρνητική φορά γύρω από το O και βρήκαμε το $K\Lambda M$.

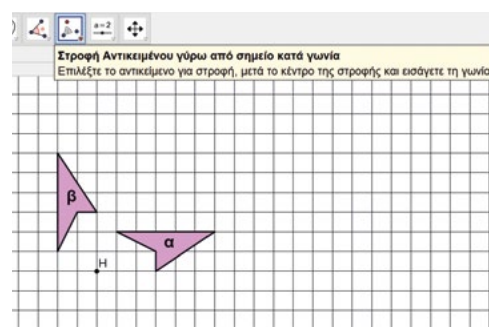
Για να βρούμε την εικόνα του Γ ως προς τη στροφή 90° κατά τη θετική φορά γύρω από το O , μπορεί να μας βοηθήσει η σκέψη ότι στρέφεται ολόκληρη η τεθλασμένη $OH\Gamma$ (ή η $OB\Gamma$).

Με λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας

Στην περίπτωση ενός σχήματος που έχει σχεδιαστεί με λογισμικό γεωμετρίας, συνήθως μπορούμε να κάνουμε τη στροφή κατά γωνία χρησιμοποιώντας συγκεκριμένα εργαλεία. Για παράδειγμα, στο GeoGebra5 η στροφή γίνεται με το εργαλείο που φαίνεται στην εικόνα.



Αφού κάνουμε την περιστροφή, μπορούμε να προσδιορίσουμε τις συντεταγμένες της εικόνας του σχήματος.



Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Για να σχεδιάσουμε την εικόνα ενός σχήματος μετά από στροφή, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε διάφορα εργαλεία:

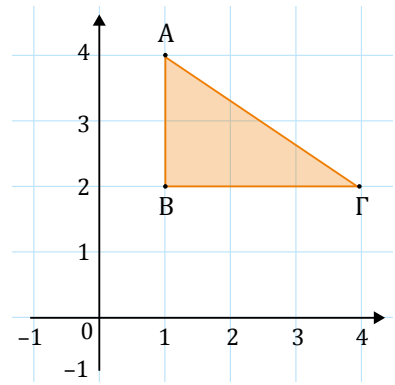
- διαφανές χαρτί
- τετραγωνισμένο χαρτί
- σύστημα συντεταγμένων
- ψηφιακά εργαλεία

Σε κάθε περίπτωση χρειαζόμαστε:

- το κέντρο της στροφής και
- τη γωνία στροφής (και αν είναι κατά τη θετική ή την αρνητική φορά).

Δ3. Τα πάνω κάτω και τα δεξιά αριστερά

- Να σχεδιάσετε την εικόνα του τριγώνου $AB\Gamma$ μετά από στροφή 180° γύρω από το σημείο Γ . Έχει σημασία αν η φορά είναι θετική ή αρνητική;
- Να σχεδιάσετε την εικόνα του τριγώνου $AB\Gamma$ μετά από στροφή 180° γύρω από το σημείο O . Βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του νέου τριγώνου.
- Πάρτε ένα οποιοδήποτε σημείο K του επιπέδου και βρείτε την εικόνα του K' μετά από στροφή 180° γύρω από σημείο O . Πειραματιστείτε με διαφορετικά σημεία για να βρείτε τον κανόνα που μας δίνει τις συντεταγμένες του K' από τις συντεταγμένες του K . Να κάνετε τη διερεύνηση στην ομάδα σας και να συζητήσετε τα ευρήματά σας στην τάξη.



Κεντρική
συμμετρία

Συζητάμε

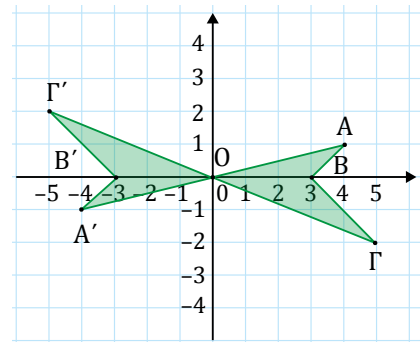
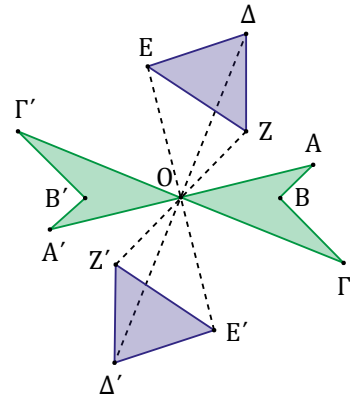
...για στροφές 180°

Η στροφή κατά 180° είναι μια ειδική περίπτωση στροφής.

Εκτός από τους τρόπους σχεδίασης που έχουμε για όλες τις στροφές, στην περίπτωση της στροφής κατά 180° έχουμε έναν ακόμα. Για παράδειγμα, για να στρέψουμε κατά 180° το τρίγωνο ΔEZ γύρω από το O , φέρνουμε το τμήμα ΔO , προεκτείνουμε και παίρνουμε ίσο τμήμα $O\Delta'$. Έτσι έχουμε στρέψει το σημείο Δ κατά 180° γύρω από το O . Κάνουμε το ίδιο με τα υπόλοιπα σημεία του τριγώνου και το $\Delta'E'Z'$ είναι η εικόνα του ΔEZ . Λέμε ότι τα ΔEZ και $\Delta'E'Z'$ είναι συμμετρικά ως προς το σημείο O . Ομοίως το $OA'B'\Gamma'$ είναι το συμμετρικό του $OAB\Gamma$ ως προς το O .

Στην περίπτωση που έχουμε τετραγωνισμένο χαρτί ή σύστημα συντεταγμένων για τη στροφή κατά 180° , μπορούμε να αξιοποιήσουμε το πλέγμα. Αν το κέντρο της στροφής είναι η αρχή των αξόνων, μπορούμε να βρούμε τις συντεταγμένες της εικόνας.

Π.χ. η εικόνα του $A(4, 1)$ είναι το $A'(-4, -1)$ κ.ο.κ.





Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

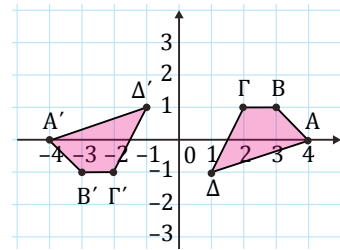
λεκτικά...

Όταν στρέφουμε ένα σχήμα κατά 180° γύρω από ένα σημείο O , λέμε ότι βρίσκουμε το συμμετρικό του σχήματος ως προς αυτό το σημείο. Τη συμμετρία αυτή τη λέμε **κεντρική συμμετρία** ή **συμμετρία ως προς κέντρο**.

Δύο ευθύγραμμα τμήματα συμμετρικά ως προς κέντρο είναι ίσα και παράλληλα.

Σε σύστημα συντεταγμένων, αν έχουμε ένα σημείο $K(x, y)$, το συμμετρικό του ως προς το κέντρο των αξόνων O είναι το $K'(-x, -y)$. Δηλαδή ο κανόνας μπορεί να γραφτεί: $(x, y) \mapsto (-x, -y)$.

...και με σχήμα



Το $A'B'Γ'$ είναι η εικόνα του $ABΓ$ μετά από στροφή 180° γύρω από το O .

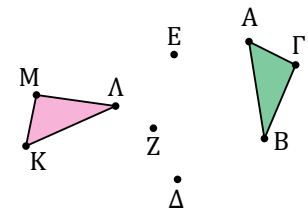
Οι συντεταγμένες του A είναι $(4, 0)$ και της εικόνας του είναι $A'(-4, 0)$.

Οι συντεταγμένες του Δ είναι $(1, -1)$ και της εικόνας του είναι $\Delta'(-1, 1)$.



Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. Έχουμε την πληροφορία ότι το τρίγωνο $K\Lambda M$ είναι η εικόνα του $AB\Gamma$ μετά από στροφή γύρω από ένα από τα σημεία Δ , E ή Z . Ποιο από τα τρία σημεία είναι το κέντρο της στροφής;

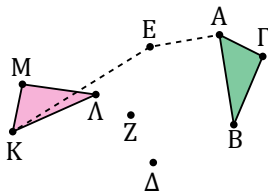


Απάντηση

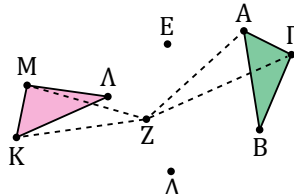
Από το σχήμα μπορούμε να υποθέσουμε ότι η εικόνα του A είναι το K , του B είναι το Λ και του Γ είναι το M .

Εξετάζουμε τα σημεία Δ , E και Z , για να δούμε ποιο είναι το κέντρο στροφής.

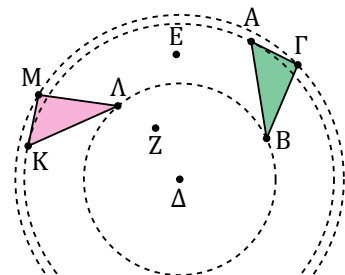
Αν ήταν το E , θα έπρεπε να ισαπέχει από το A και την εικόνα του (δηλαδή το K). Φέρνοντας τα τμήματα EA και EK (σχήμα 1), συγκρίνουμε με τον διαβήτη και παρατηρούμε ότι δεν είναι ίσα. Άρα το E δεν είναι το κέντρο στροφής.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

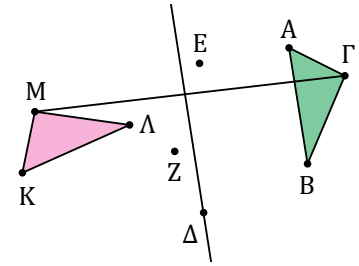


Σχήμα 3

Με όμοιο τρόπο (σχήμα 2) βρίσκουμε ότι ούτε το Z είναι το κέντρο της στροφής, αφού είναι $Z\Gamma > ZM$.

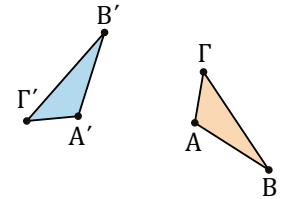
Εξετάζοντας το Δ (σχήμα 3), βλέπουμε ότι $\Delta A = \Delta K$, $\Delta B = \Delta \Lambda$ και $\Delta \Gamma = \Delta M$. Άρα το Δ είναι το κέντρο της στροφής.

Εναλλακτικά παρατηρούμε ότι το κέντρο της στροφής ισαπέχει από κάθε σημείο και την εικόνα του. Επομένως θα πρέπει να ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος που έχει άκρα ένα σημείο και την εικόνα του. Αν λοιπόν κατασκευάσουμε τη μεσοκάθετο του τμήματος $\Gamma\Delta$, παρατηρούμε ότι μόνο το σημείο Δ ανήκει σ' αυτήν, άρα μόνο αυτό μπορεί να είναι το κέντρο στροφής (σχήμα 4).



Σχήμα 4

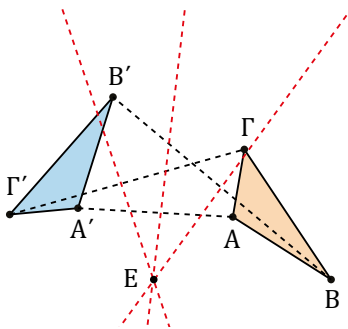
2. Το τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ είναι η εικόνα του $AB\Gamma$ μετά από στροφή. Αλλά δεν ξέρουμε ούτε τη γωνία ούτε το κέντρο της στροφής. Πώς θα μπορούσαμε να τα βρούμε;



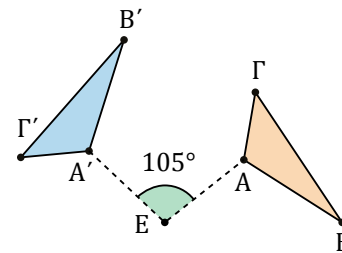
Απάντηση

Παρατηρώντας τα μήκη των πλευρών, συμπεραίνουμε ότι οι εικόνες των A, B, Γ είναι αντιστοίχως τα A', B', Γ' . Σύμφωνα με την προηγούμενη εφαρμογή, το κέντρο της στροφής θα πρέπει να ανήκει στις μεσοκαθέτους των AA', BB' και $\Gamma\Gamma'$.

Σχεδιάζουμε λοιπόν τις μεσοκαθέτους και εκεί που τέμνονται είναι το κέντρο της στροφής (σχήμα 1). Παρατηρούμε ότι αρκούν δύο μεσοκάθετοι για να βρούμε το κέντρο της στροφής.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Γνωρίζοντας το κέντρο της στροφής (το E), μπορούμε να βρούμε τη γωνία. Αυτή είναι η $\widehat{AEA'}$ (σχήμα 2), την οποία μπορούμε να μετρήσουμε.



Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε

1. Όταν κάνουμε μια στροφή 180° κατά τη θετική φορά και όταν κάνουμε μια στροφή 180° κατά την αρνητική φορά, παίρνουμε την ίδια εικόνα. Η στροφή 90° κατά τη θετική φορά με ποια άλλη στροφή δίνει την ίδια εικόνα;
2. Χρησιμοποιήστε σφραγίδες ή στάμπες για να κάνετε δύο ίδια σχήματα σε διαφορετικά σημεία με τρόπο που να μην είναι το ένα μεταφορά του άλλου. Διερευνήστε αν υπάρχει μια στροφή που έχει το ένα για αρχικό σχήμα και το άλλο για εικόνα.



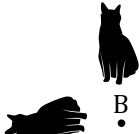
Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Σε ποια ή ποιες από τις εικόνες η μία γάτα είναι η εικόνα της άλλης μετά από στροφή;

α)



β)



γ)



2. Να εντοπίσετε μετασχηματισμούς στροφής στα σχήματα. Για κάθε στροφή που εντοπίζετε, προσδιορίστε το αρχικό σχήμα, το κέντρο στροφής και τη γωνία στροφής.



Τρίλιζα στη στροφή

3. Όταν ο πατέρας της εικόνας περιστρέφει το παιδί του, μπορούμε να φανταστούμε ότι παράγει πολλούς διαδοχικούς μετασχηματισμούς στροφής.

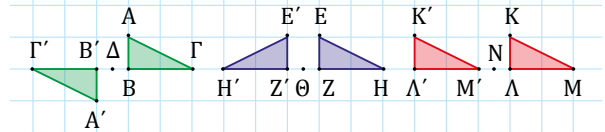


Βρείτε άλλα παραδείγματα από την καθημερινή ζωή που να μπορούμε να τα σκεφτούμε ως μετασχηματισμό στροφής.

4. Στη διπλανή εικόνα φαίνεται ένας πίνακας του Έσερ. Μπορείτε να εντοπίσετε σχήματα που έχουν στραφεί; Για τις στροφές που θα εντοπίσετε, προσδιορίστε το κέντρο της στροφής και τη γωνία της.

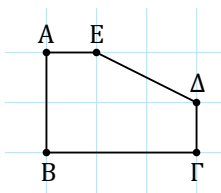


5. Να εντοπίσετε ποιο ή ποια από τα σχήματα δείχνουν έναν μετασχηματισμό στροφής 180° . Εξηγήστε γιατί τα υπόλοιπα σχήματα δε δείχνουν στροφή. Αν υπάρχει άλλου είδους μετασχηματισμός (συμμετρία ως προς άξονα ή μεταφορά), εντοπίστε τον.



Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

6. Να αντιγράψετε το πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ στο τετράδιό σας. Χρησιμοποιήστε διαφανές χαρτί για να σχεδιάσετε την εικόνα του ΑΒΓΔΕ μετά από στροφή:



- α) με κέντρο το Β και γωνία 90° κατά τη θετική φορά,
 β) με κέντρο το Β και γωνία 180° ,
 γ) με κέντρο το Α και γωνία 90° κατά την αρνητική φορά,
 δ) με κέντρο το Γ και γωνία 135° κατά τη θετική φορά.

Σε κάθε περίπτωση να γράψετε τα ζευγάρια των αντίστοιχων πλευρών και τα ζευγάρια των αντίστοιχων γωνιών των δύο σχημάτων. Τι σχέση έχουν μεταξύ τους οι αντίστοιχες πλευρές; Οι αντίστοιχες γωνίες;

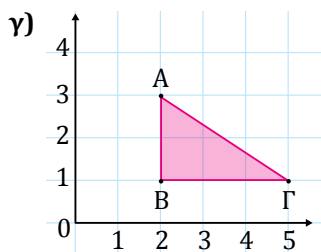
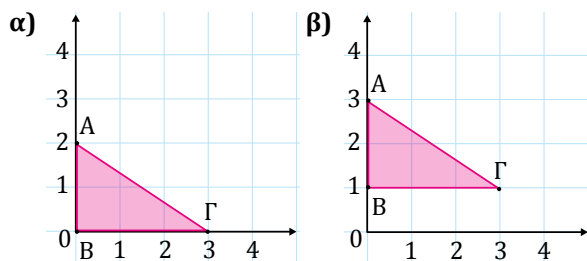


7. Να λύσετε την προηγούμενη άσκηση χρησιμοποιώντας τετραγωνισμένο χαρτί: αντιγράψτε το πεντάγωνο σε τετραγωνισμένο χαρτί και σχεδιάστε τις εικόνες του (χωρίς διαφανές χαρτί).

8. Στο διπλανό σχήμα το ένα δελφίνι είναι η εικόνα του άλλου μετά από στροφή. Να βρείτε το κέντρο της στροφής και τη γωνία της.

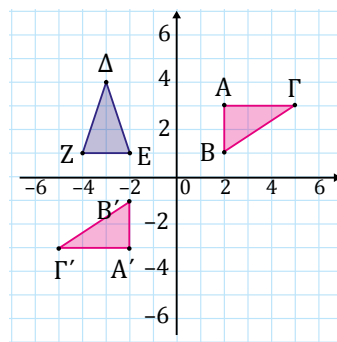


9. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να βρείτε την εικόνα του τριγώνου μετά από στροφή γύρω από το σημείο O κατά γωνία 90° , 180° και 270° .



Σε κάθε περίπτωση να γράψετε τις συντεταγμένες των κορυφών των εικόνων.

10. Με βάση το παρακάτω σχήμα:



α) να εξηγήσετε γιατί το $A'B'Γ'$ είναι το συμμετρικό του $ABΓ$ ως προς την αρχή των αξόνων, β) να βρείτε το συμμετρικό του $ΔEZ$ ως προς το O, γ) να βρείτε τις συντεταγμένες των εικόνων των δύο τριγώνων.

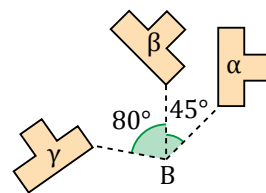
11. Σε τετραγωνισμένο χαρτί να σχεδιάσετε ένα τετράπλευρο $ABΓΔ$ και ένα σημείο O έξω από το $ABΓΔ$.

α) Να σχεδιάσετε την εικόνα του $ABΓΔ$ μετά από στροφή όποιας γωνίας θέλετε γύρω από το O. β) Να γράψετε τις ιδιότητες που ισχύουν ανάμεσα στις πλευρές του αρχικού τετραπλεύρου και τις αντίστοιχες πλευρές της εικόνας του. Να κάνετε το ίδιο για τις αντίστοιχες ίσες γωνίες.

γ) Άλλαξε η περίμετρος του τετραπλεύρου κατά τη στροφή του; Το εμβαδόν του; Εξηγήστε την απάντησή σας.



12. Η Ελίρα δοκίμασε να κάνει διαδοχικές στροφές στο GeoGebra. Πρώτα έκανε τη στροφή του α γύρω από το B κατά 45° και βρήκε το β. Μετά έκανε τη στροφή του β κατά 80° (όπως φαίνεται στο σχήμα) και βρήκε το γ. Με ποιον γεωμετρικό μετασχηματισμό θα μπορούσε από το α να πάρει το γ;



Σχήματα με περιστροφική και κεντρική συμμετρία

Δ1. Περιστρέφονται χωρίς να αλλάζουν

Μπορούμε να περιστρέψουμε τα παρακάτω σχήματα γύρω από κάποιο σημείο, ώστε η εικόνα να συμπίπτει με το αρχικό; (Η γωνία στροφής πρέπει να είναι μικρότερη από 360° .) Βρείτε τη μικρότερη γωνία στροφής για την οποία συμβαίνει αυτό. Αν υπάρχουν κι άλλες γωνίες στροφής για τις οποίες συμβαίνει αυτό, τι σχέση έχουν με τη μικρότερη; Συζητήστε τις ιδέες σας στην τάξη.



Περιστροφική
συμμετρία



Συζητάμε

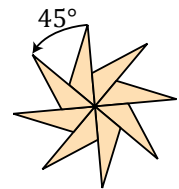
...για περιστρεφόμενα σχήματα

Πολύ συχνά βλέπουμε αντικείμενα, εικόνες και σχήματα που μπορούμε να τα περιστρέψουμε (λιγότερο από 360°) χωρίς να αλλάξει η μορφή τους.

Για παράδειγμα, το γράμμα Z, αν το στρέψουμε 180° γύρω από το κέντρο του, θα μοιάζει ίδιο με το αρχικό.

Το ίδιο συμβαίνει με το σήμα της ανακύκλωσης, αλλά για στροφή 120° . Για το σχήμα αυτό, το ίδιο συμβαίνει και για στροφή 240° .

Στο διπλανό σχήμα, η μικρότερη γωνία στροφής που αφήνει το σχήμα αμετάβλητο είναι 45° . Αλλά το ίδιο συμβαίνει και για οποιοδήποτε πολλαπλάσιο των 45° . Δηλαδή στροφές 90° , 135° , 180° , 225° , 270° , 315° αφήνουν επίσης το σχήμα αμετάβλητο.



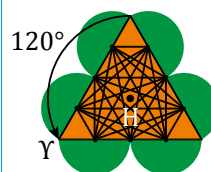
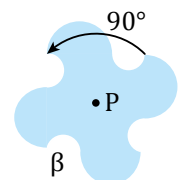
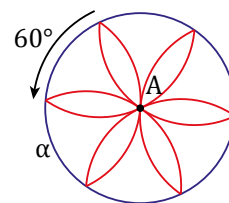
Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Λεκτικά...

Όταν περιστρέφουμε ένα σχήμα γύρω από ένα σημείο κατά γωνία ω° (μικρότερη από 360°) και συμπίπτει με το αρχικό, τότε λέμε ότι το σχήμα έχει **περιστροφική συμμετρία** ω° . Ως ω° επιλέγουμε πάντα τη μικρότερη από τις γωνίες στροφής που αφήνουν το σχήμα αμετάβλητο. Για παράδειγμα, το σχήμα α έχει περιστροφική συμμετρία 60° (εξήντα μοιρών), το β έχει 90° και το γ έχει 120° .

Αν κάποια από τις γωνίες που αφήνουν το σχήμα αμετάβλητο είναι 180° , λέμε ότι το σχήμα έχει **κεντρική συμμετρία** ή ότι έχει **κέντρο συμμετρίας**. Για παράδειγμα, τα σχήματα α και β έχουν κέντρο συμμετρίας, ενώ το γ δεν έχει.

...και με σχήμα



Η κεντρική συμμετρία είναι μια ειδική περίπτωση περιστροφικής συμμετρίας.



Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε

Να καταγράψετε αν τα παρακάτω γεωμετρικά σχήματα έχουν άξονες συμμετρίας και πόσους, αν παρουσιάζουν περιστροφική συμμετρία και πόσων μοιρών, καθώς και αν έχουν κέντρο συμμετρίας: ευθύγραμμο τμήμα, κύκλος, ισοσκελές (αλλά όχι ισόπλευρο) τρίγωνο, ισόπλευρο τρίγωνο, ορθογώνιο, ρόμβος.

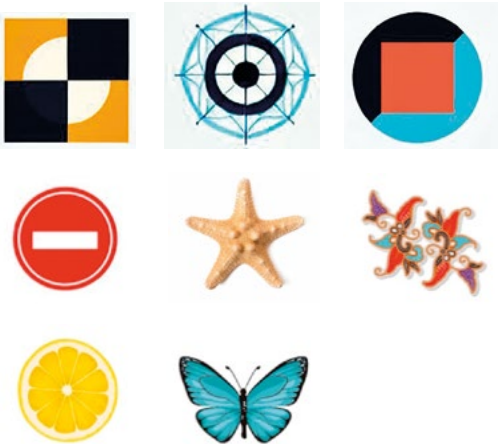


Περιστροφική
συμμετρία σε
σχήματα



Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Να εντοπίσετε ποια από τα παρακάτω σχήματα έχουν περιστροφική συμμετρία. Για όσα έχουν, να βρείτε τη σχετική γωνία. Να σημειώσετε ποια από αυτά έχουν κεντρική συμμετρία.



2. Να βρείτε τα γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου που έχουν περιστροφική συμμετρία και αυτά που

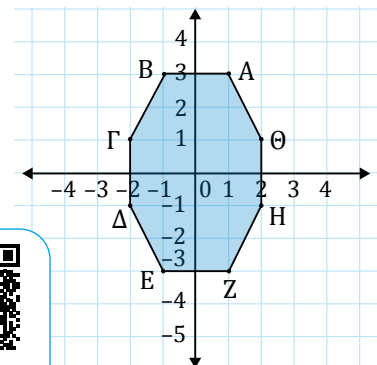
έχουν κεντρική συμμετρία. Μπορείτε να επεκταθείτε και σε άλλα αλφάβητα, για παράδειγμα στο κυριλλικό και στο λατινικό.

3. Να εξετάσετε αν ο πίνακας του Έσερ, που εικονίζεται παρακάτω, έχει περιστροφική και κεντρική συμμετρία. Αν έχει περιστροφική, να βρείτε τη γωνία στροφής.



Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

4. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένα οκτάγωνο ΑΒΓΔΕΖΗΘ.
 - α) Να εξετάσετε αν το οκτάγωνο έχει ως κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων. Πώς θα μπορούσατε να το αιτιολογήσετε χρησιμοποιώντας τις συντεταγμένες των κορυφών;
 - β) Πώς θα τροποποιούσατε το σχήμα (αλλά να παραμένει οκτάγωνο), ώστε να έχει περιστροφική συμμετρία 90° ;



Τρίλιζα στα σχήματα με συμμετρία στροφής



Συμμετρία σε οκτάγωνο

Σχεδίαση και συλλογισμός με μετασχηματισμούς

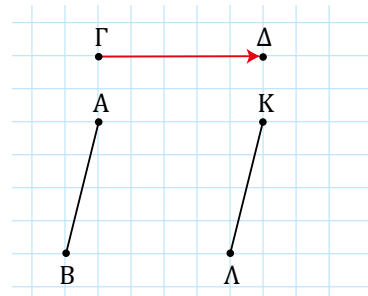
Δ1. Διπλασιάζονται...

Μεταφέρουμε το ευθύγραμμο τμήμα AB κατά το διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ και παίρνουμε το $K\Lambda$.

- α) Εξηγήστε γιατί το $AB\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο.
 β) Με βάση το παραπάνω, προσπαθήστε να περιγράψετε έναν τρόπο κατασκευής παραλληλογράμμου. Συζητήστε στην τάξη τις προτάσεις σας.



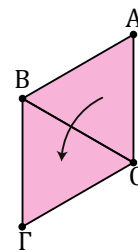
Κατασκευή παραλληλογράμμου από ευθύγραμμο τμήμα



Δ2. ...και πολλαπλασιάζονται...

Δίπλα βλέπουμε τα πρώτα στάδια της δημιουργίας ενός σχήματος. Ξεκινήσαμε από το ισόπλευρο τρίγωνο ABO με πλευρά $OA = 2\text{ cm}$. Το περιστρέψαμε 60° γύρω από το O κατά τη θετική φορά και κατασκευάσαμε το $OB\Gamma$.

- α) Η εικόνα της OA μοιάζει να είναι η OB . Νομίζετε ότι έτσι θα έπρεπε να είναι, ή μήπως είναι κάτι που έτυχε να συμβεί σε αυτό το σχήμα; Εξηγήστε τη γνώμη σας.
 β) Να συνεχίσετε την κατασκευή με τέσσερα επιπλέον τρίγωνα.
 γ) Νομίζετε ότι η τελευταία πλευρά του τελευταίου τριγώνου θα συμπέσει με την OA ή όχι; Εξηγήστε γιατί.
 δ) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τελικού πολυγώνου και την περίμετρό του. Να εξηγήσετε τη σκέψη σας χωρίς να μετρήσετε μήκη ή γωνίες.



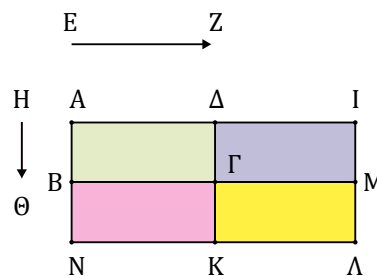
Κατασκευή εξαγώνου από τρίγωνο

Συζητάμε

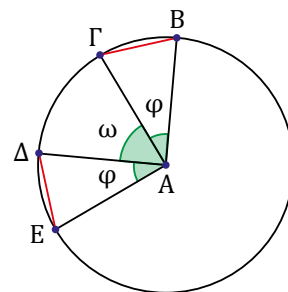
...για κατασκευές και αιτιολογήσεις

Χρησιμοποιώντας τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς της μεταφοράς και της στροφής (αλλά και της συμμετρίας ως προς άξονα που μάθαμε στην Α' Γυμνασίου), μπορούμε να σχεδιάζουμε σχήματα, να διερευνούμε τις ιδιότητές τους και να αιτιολογούμε ισχυρισμούς.

Ας δούμε ένα παράδειγμα σχεδίασης. Έχουμε το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ και θέλουμε να σχεδιάσουμε ένα ορθογώνιο με διπλάσιες πλευρές. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μεταφορές του $AB\Gamma\Delta$ κατά τα διανύσματα $\overrightarrow{E\Z}$ και $\overrightarrow{H\Theta}$ και να πάρουμε τα ορθογώνια $\Delta\Gamma MI$, $BNK\Gamma$ και $\Gamma K\Lambda M$, που είναι όλα ίσα με το αρχικό $AB\Gamma\Delta$. Έτσι, το $AN\Lambda I$ είναι κι αυτό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με διπλάσιο μήκος πλευρών από τις πλευρές του $AB\Gamma\Delta$.



Ας δούμε και ένα παράδειγμα αιτιολόγησης. Στο διπλανό σχήμα έχουμε δύο ίσες επίκεντρες γωνίες, τις $\widehat{B\hat{A}G}$ και $\widehat{D\hat{A}E}$. Τι σχέση έχουν οι αντίστοιχες χορδές, δηλαδή οι $B\Gamma$ και ΔE ; Μπορούμε να σκεφτούμε ότι, αν στρέψουμε το τρίγωνο $AB\Gamma$ κατά γωνία $\widehat{\omega} + \widehat{\varphi}$ (κατά τη θετική φορά) γύρω από το A , θα έρθει στη θέση του $A\Delta E$. Επομένως οι χορδές $B\Gamma$ και ΔE είναι ίσες.



Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Μπορούμε να χρησιμοποιούμε τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς που λέμε ισομετρίες (ανάκλαση, μεταφορά, στροφή):

- για να επεκτείνουμε ή να δημιουργούμε σχήματα και
- για να αναζητούμε και να αιτιολογούμε τις ιδιότητές τους.

Οι ιδιότητες που συνήθως χρησιμοποιούμε είναι ότι το αρχικό σχήμα και η εικόνα του είναι ίσα. Ειδικότερα, χρησιμοποιούμε ότι:

- τα ευθύγραμμα τμήματα και οι εικόνες τους έχουν ίσα μήκη,
- οι γωνίες και οι εικόνες τους έχουν ίσα μέτρα,
- κατά τη μεταφορά και κατά τη συμμετρία ως προς κέντρο, τα ευθύγραμμα τμήματα είναι παράλληλα με τις εικόνες τους.



Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. Πώς θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε γεωμετρικούς μετασχηματισμούς για να δημιουργήσουμε το σχήμα με τα ίχνη;

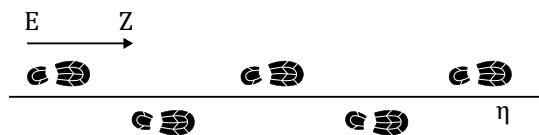


Απάντηση

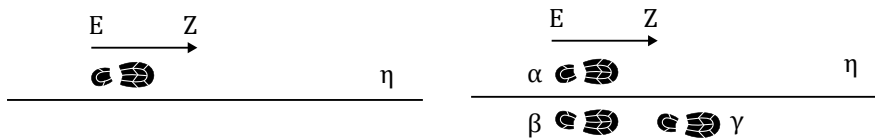
Όλες οι πατημασιές (ίχνη) του αριστερού ποδιού μπορούμε να φανταστούμε ότι σχηματίζονται με μεταφορά της πρώτης. Αλλά με την ίδια ή άλλη μεταφορά δε σχηματίζονται και οι πατημασιές του δεξιού ποδιού.

Μπορούμε λοιπόν να σκεφτούμε ως εξής:

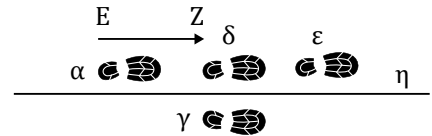
Σχεδιάζουμε μια ευθεία (την η), το πρώτο αριστερό ίχνη και ένα διάνυσμα $\vec{E\tilde{Z}}$ με μήκος το μισό της απόστασης δύο διαδοχικών αριστερών (ή δεξιών) ίχνων.



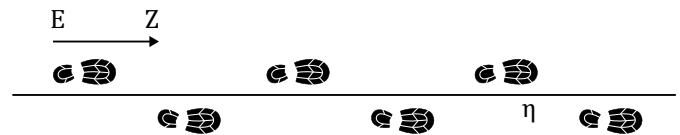
Ξεκινάμε από το ίχνος α και βρίσκουμε το συμμετρικό του ως προς την ευθεία η (δηλαδή το ίχνος β). Μεταφέρουμε το ίχνος β κατά το διάνυσμα \overline{EZ} και βρίσκουμε το ίχνος γ . Τώρα το ίχνος β δε μας χρειάζεται και το σβήνουμε.



Συνεχίζουμε με το συμμετρικό του γ ως προς την η (το δ), το οποίο το μεταφέρουμε κατά το διάνυσμα και παίρνουμε το ϵ . Τώρα το δ δε μας χρειάζεται και το σβήνουμε.

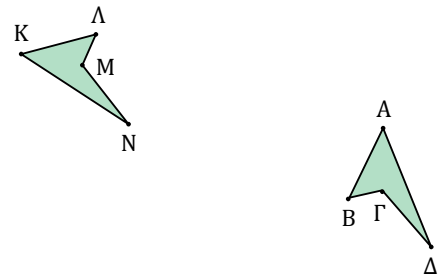


Με αυτό τον τρόπο, με διαδοχικές ανακλάσεις (συμμετρίες) ως προς την ευθεία (την η) και μεταφορές κατά το διάνυσμα \overline{EZ} , κατασκευάζουμε το σχήμα με τα ίχνη.



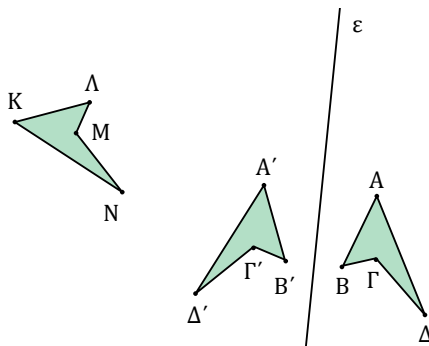
Θα μπορούσαμε βέβαια να ακολουθήσουμε άλλη πορεία κατασκευής. Για παράδειγμα, θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε το πρώτο ζευγάρι ιχνών και μετά να μεταφέρουμε αυτό κατά διάνυσμα διπλάσιου μήκους από το μήκος του \overline{EZ} .

2. Γνωρίζουμε ότι το ΚΛΜΝ έχει προέλθει από το ΑΒΓΔ μετά από διαδοχικούς γεωμετρικούς μετασχηματισμούς. Πώς μπορούμε να περιγράψουμε μια σειρά τέτοιων μετασχηματισμών;

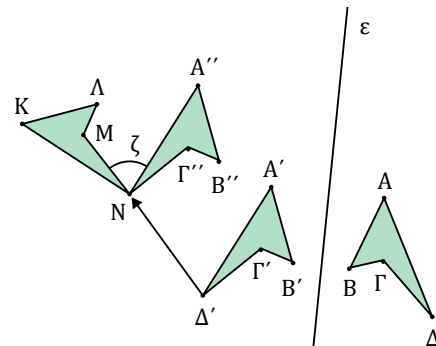


Απάντηση

Με βάση τη μορφή των σχημάτων, υποθέτουμε ότι αντίστοιχα των A, B, Γ, Δ είναι τα K, Λ, M, N (με αυτή τη σειρά). Επίσης, παρατηρούμε ότι το σχήμα θα πρέπει να ανακλαστεί, διότι ο προσανατολισμός του $K\Lambda M N$ δεν μπορεί να προκύψει από μια μεταφορά ή στροφή. Κάνουμε λοιπόν την ανάκλαση του $ΑΒΓΔ$ κατά μια τυχαία ευθεία ϵ και η εικόνα του είναι το $A'B'\Gamma'\Delta'$ (σχήμα 1).



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Στη συνέχεια μεταφέρουμε το $A'B'G'D'$ κατά το διάνυσμα $\overline{\Delta'N}$, ώστε να «αποκτήσει επαφή» με τον «στόχο» μας, που είναι το ΚΛΜΝ (σχήμα 2 της προηγούμενης σελίδας). Έχουμε λοιπόν το $A''B''G''N$. Αν στρέψουμε το τελευταίο κατά τη γωνία $\widehat{\Gamma''NM}$, θα συμπέσει με το ΚΛΜΝ.

Θα μπορούσαμε να βρούμε άλλη σειρά μετασχηματισμών. Για παράδειγμα, μετά την ανάκλαση, μπορούμε να αναζητήσουμε μία στροφή που θα κάνει το $A'B'G'D'$ να συμπέσει με το ΚΛΜΝ.



Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε

Πειραματιστείτε με την οπτική απόδειξη του Πυθαγόρειου θεωρήματος και αναζητήστε γεωμετρικούς μετασχηματισμούς σχημάτων (αν υπάρχουν).

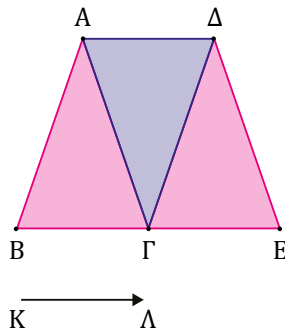


Μια απόδειξη
του Πυθαγόρειου
θεωρήματος



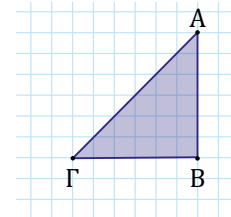
Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Στο διπλανό σχήμα ξεκινήσαμε από το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με μήκη πλευρών 3 cm και 2 cm. Το μεταφέραμε κατά το διάνυσμα $\overline{K\Lambda}$ κι έτσι κατασκευάσαμε το τρίγωνο $\Delta\Gamma E$.



- α) Τι σχήμα είναι το $AB\Gamma\Delta$;
β) Τι είδους τρίγωνο είναι το $A\Gamma\Delta$;

2. Το διπλανό τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. Το περιστρέφουμε γύρω από το B 90° και 180° κατά τη θετική φορά και 90° κατά την αρνητική φορά. Κατασκευάζουμε έτσι ένα τετράπλευρο.



Τι είδους τετράπλευρο είναι αυτό; Εξηγήστε την απάντησή σας.



Φενακιστοσκόπιο:
περιστροφές και
κινούμενα σχέδια



Μαγική κάρτα



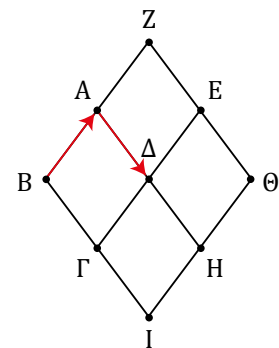
Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

3. Σε ένα σύστημα συντεταγμένων να πάρετε τα σημεία $A(3, 1)$, $B(-1, 1)$ και $\Gamma(0, -2)$.

- α) Να βρείτε τα συμμετρικά των A , B και Γ ως προς την αρχή των αξόνων, να τα ονομάσετε A' , B' και Γ' και να βρείτε τις συντεταγμένες τους.
β) Να βρείτε το συμμετρικό του τριγώνου $AB\Gamma$ ως προς την αρχή των αξόνων.
γ) Ο Ανδρέας απαντώντας στο ερώτημα (β) είπε ότι το συμμετρικό του $AB\Gamma$ είναι το $A'B'\Gamma'$. Η Αναστασία είπε ότι αυτό δεν είναι σωστό, γιατί το $AB\Gamma$ έχει άπειρα σημεία και όχι μόνο τα A , B και Γ . Έτσι, ο Ανδρέας θα έπρεπε να βρει τα συμμετρικά όλων των σημείων του $AB\Gamma$. Με

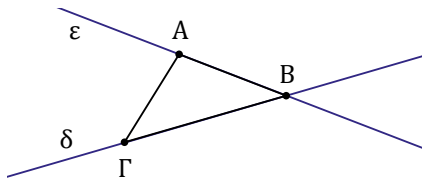
ποιο από τα δύο παιδιά συμφωνείτε; Εξηγήστε την άποψή σας.

4. Ξεκινάμε με τον ρόμβο $AB\Gamma\Delta$ και χρησιμοποιώντας μεταφορές κατά τα διανύσματα $\overline{B\Delta}$ και $\overline{A\Delta}$ κατασκευάζουμε τους ρόμβους $Z\Delta E$, $E\Delta H\Theta$ και $\Delta\Gamma\text{IH}$. Εξηγήστε γιατί οι ισχυρισμοί που ακολουθούν είναι σωστοί.



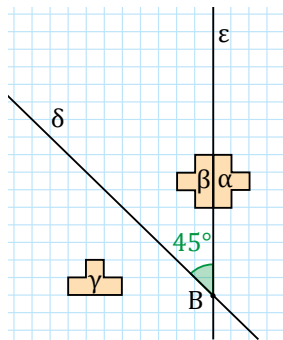
- α) Τα ευθύγραμμα τμήματα BA και AZ βρίσκονται στην ίδια ευθεία.
 β) Το σχήμα που αποτελείται από τους τέσσερις ρόμβους είναι και αυτό ρόμβος.
 γ) Η περίμετρος του ρόμβου ZBIΘ είναι διπλάσια της περιμέτρου του ρόμβου ABΓΔ.
 δ) Η περίμετρος του ZBIΘ είναι οκταπλάσια του μήκους του τμήματος ΑΔ.
 ε) Οι γωνίες $\widehat{B\hat{A}D}$, $\widehat{A\hat{Z}E}$, $\widehat{\Delta\hat{E}\Theta}$, $\widehat{\Gamma\hat{\Delta}H}$ και $\widehat{\Gamma\hat{I}H}$ είναι όλες ίσες μεταξύ τους.

5. Το τρίγωνο ABΓ έχει τις κορυφές του πάνω στις ευθείες ε και δ (όπως φαίνεται στο σχήμα). Το Β είναι το σημείο τομής των ε και δ. Αντιγράψτε το σχήμα στο τετράδιό σας.



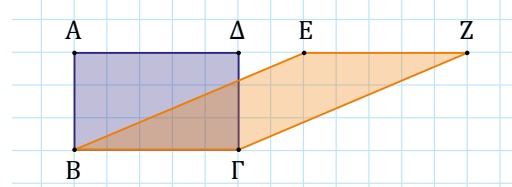
- α) Να βρείτε το συμμετρικό του ABΓ ως προς το Β και να το ονομάσετε Α'Β'Γ'. Περιγράψτε τις θέσεις των σημείων Α', Β' και Γ'.
 β) Ποια γωνία του Α'Β'Γ' είναι η αντίστοιχη της γωνίας $\widehat{A\hat{B}\Gamma}$ του ABΓ;
 γ) Ποια γεωμετρική ιδιότητα νομίζετε ότι μπορούμε να αιτιολογήσουμε με βάση τα παραπάνω; Διατυπώστε πλήρως την ιδιότητα και την αιτιολόγησή της.

6. Η Ελίρα συνέχισε να δοκιμάζει μετασχηματισμούς στο GeoGebra. Κάποια στιγμή βρήκε το συμμετρικό του α ως προς την ευθεία ε και το ονόμασε β. Στη συνέχεια βρήκε το συμμετρικό του β ως προς μια άλλη ευθεία δ και το ονόμασε γ. Οι ευθείες ε και δ σχημάτιζαν γωνία 45° . Αναρωτήθηκε αν θα μπορούσαμε να πάρουμε το γ από το α με έναν μόνο μετασχηματισμό. Εσείς τι λέτε; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.



Διαδοχικές αξονικές συμμετρίες

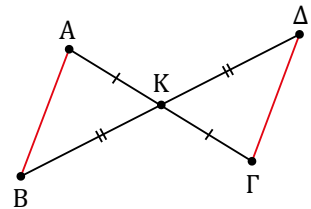
7. Έχουμε το ορθογώνιο ABΓΔ και μεταφέρουμε την πλευρά του ΑΔ κατά διάνυση παράλληλο με αυτήν. Έτσι σχηματίζουμε το EBΓΖ. Τι είδους τετράπλευρο είναι το EBΓΖ; Τι σχέση έχουν τα εμβαδά των ABΓΔ και EBΓΖ;



8. Ξεκινώντας από ένα ισοσκελές τρίγωνο OAB (με $OA = OB$), με διαδοχικές στροφές γύρω από το O θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα κανονικό εννιάγωνο ABΓΔΕΖΗΘΙ.

- α) Πόσες μοίρες πρέπει να είναι η γωνία $\widehat{A\hat{O}B}$;
 β) Να περιγράψετε σύντομα τη διαδικασία.
 γ) Να υπολογίσετε πόσες μοίρες είναι οι γωνίες του εννιαγώνου (για παράδειγμα, η γωνία $\widehat{A\hat{B}\Gamma}$).

9. Στο διπλανό σχήμα το Κ είναι το κοινό μέσο των ΑΓ και ΒΔ.



- α) Να εξηγήσετε γιατί τα ευθύγραμμα τμήματα AB και ΓΔ είναι συμμετρικά ως προς το σημείο Κ.
 β) Τι είδους τετράπλευρο είναι το ABΓΔ; Εξηγήστε την απάντησή σας.
 γ) Με βάση τα παραπάνω, να περιγράψετε έναν τρόπο κατασκευής παραλληλογράμμου.

10. Να σχεδιάσετε ένα παραλληλόγραμμο ABΓΔ και να ονομάσετε Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Μια ευθεία που περνάει από το Ο χωρίζει το ABΓΔ σε δύο τραπέζια. Εξετάστε αν αυτά τα δύο τραπέζια είναι ίσα. Εξηγήστε την απάντησή σας.

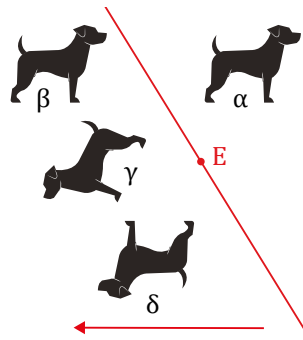


Τομή παραλληλογράμμου στα δύο

Στοιχεία Αναλυτικής Γεωμετρίας και γεωμετρικοί μετασχηματισμοί

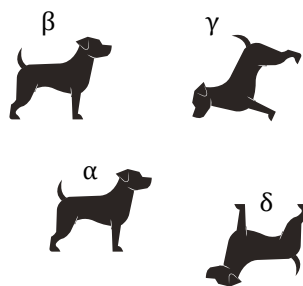
Ερωτήσεις – ασκήσεις – προβλήματα

1. Οι σκύλοι β, γ και δ που φαίνονται δίπλα έχουν προκύψει από την εικόνα του σκύλου α, μέσω ενός μετασχηματισμού. Συμπληρώστε τις παρακάτω προτάσεις:



- α) Μέσω συμμετρίας ως προς την ευθεία που φαίνεται έχει προκύψει ο σκύλος
- β) Μέσω στροφής γύρω από το σημείο E έχει προκύψει ο σκύλος
- γ) Μέσω μεταφοράς κατά το διάνυσμα που φαίνεται έχει προκύψει ο σκύλος

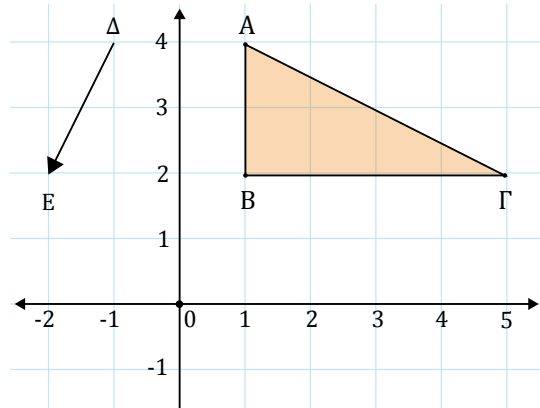
2. Να βρείτε τους μετασχηματισμούς με τους οποίους σχεδιάσαμε τους σκύλους β, γ και δ έχοντας ως αρχικό σχήμα τον σκύλο α. Για κάθε μετασχηματισμό να σχεδιάσετε τα στοιχεία του.



3. Να εντοπίσετε και να περιγράψετε ανακλάσεις (συμμετρίες ως προς ευθεία), μεταφορές και στροφές στα σχήματα του διπλανού διακοσμητικού. Υπάρχουν σχήματα που έχουν άξονα συμμετρίας ή περιστροφική συμμετρία ή κεντρική συμμετρία;



4. Να αντιγράψετε σε χαρτί με σύστημα συντεταγμένων το τρίγωνο ABΓ και το διάνυσμα $\overline{\Delta\text{E}}$ του παρακάτω σχήματος. Στη συνέχεια:

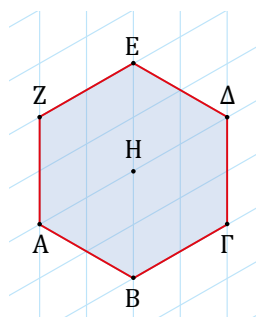


- α) Να σχεδιάσετε την εικόνα του ABΓ μετά τη μεταφορά του κατά το διάνυσμα $\overline{\Delta\text{E}}$ και να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του νέου τριγώνου.
- β) Να σχεδιάσετε την εικόνα του ABΓ μετά από στροφή 90° κατά τη θετική φορά γύρω από το A.
- γ) Να σχεδιάσετε το συμμετρικό του ABΓ ως προς τον άξονα x'x και το συμμετρικό του ABΓ ως προς την αρχή των αξόνων. Ποιες είναι οι συντεταγμένες των κορυφών των δύο νέων τριγώνων;
5. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω ισχυρισμοί είναι σωστοί (Σ) ή λανθασμένοι (Λ).
- α) Δύο διανύσματα που είναι αντίθετα έχουν το ίδιο μέτρο και την ίδια διεύθυνση.
- β) Αν δύο διανύσματα έχουν το ίδιο μέτρο, τότε είναι ή ίσα ή αντίθετα.

- γ) Στο αρχικό σχήμα και στην εικόνα του μετά από στροφή, τα μήκη των αντίστοιχων ευθύγραμμων τμημάτων είναι ίσα και τα μέτρα των αντίστοιχων γωνιών είναι ίσα.
- δ) Δύο ευθύγραμμα τμήματα που είναι συμμετρικά ως προς ένα σημείο είναι μεταξύ τους παράλληλα.
- ε) Δύο ευθύγραμμα τμήματα που είναι συμμετρικά ως προς μια ευθεία είναι μεταξύ τους παράλληλα.
- στ) Αν ένα σχήμα έχει περιστροφική συμμετρία, τότε απαραίτητα έχει και κεντρική συμμετρία.
- ζ) Αν ένα σχήμα έχει κεντρική συμμετρία, τότε απαραίτητα έχει και περιστροφική συμμετρία.

6. Στο διπλανό κανονικό εξάγωνο να σχεδιάσετε:

- α) τέσσερα ζευγάρια ίσων διανυσμάτων,
- β) δύο ζευγάρια αντίθετων διανυσμάτων με κοινή αρχή το H,
- γ) δύο διανύσματα που να μην είναι παράλληλα αλλά να έχουν το ίδιο μέτρο.



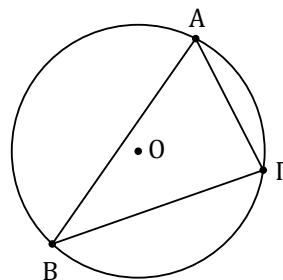
7. Έχουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα AB και το στρέφουμε με 80° κατά τη θετική φορά γύρω από το A. Η εικόνα του είναι το AG. Τι είδους τρίγωνο είναι το ABΓ;

8. Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο ABΓ με $\widehat{A} = 90^\circ$. Να σχεδιάσετε την εικόνα του ABΓ μετά από στροφή 90° γύρω από το B. Για κάθε πλευρά και κάθε γωνία του ABΓ υπάρχουν η αντίστοιχη πλευρά και η αντίστοιχη γωνία της εικόνας του. Να καταγράψετε αυτά τα ζευγάρια. Ποια σχέση έχουν οι αντίστοιχες πλευρές; Οι αντίστοιχες γωνίες;



Ισότητες σε τρίγωνα μετά από στροφή

9. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε το τρίγωνο ABΓ του οποίου οι κορυφές είναι σημεία ενός κύκλου. Να σχεδιάσετε το συμμετρικό $A'B'Γ'$ του ABΓ ως προς το κέντρο του κύκλου. Να περιγράψετε πώς το σχεδιάσατε. Να καταγράψετε τις αντίστοιχες πλευρές και τις αντίστοιχες γωνίες του ABΓ και της εικόνας του.



Τρίγωνα σε κύκλο

10. Να σχεδιάσετε τα παρακάτω σχήματα:

- α) Ένα τετράπλευρο που έχει άξονα συμμετρίας αλλά δεν είναι παραλληλόγραμμο.
- β) Ένα τετράπλευρο με κέντρο συμμετρίας και χωρίς άξονα συμμετρίας.
- γ) Ένα τρίγωνο με έναν μόνο άξονα συμμετρίας.
- δ) Ένα τρίγωνο με άξονα συμμετρίας και χωρίς περιστροφική συμμετρία.

11. Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο ABΓ και τη διάμεσό του AM (M είναι το μέσο της πλευράς BΓ). Προεκτείνουμε την AM κατά τμήμα ΜΔ, ίσο με το AM.

- α) Τι είδους συμμετρία συνδέει τα ευθύγραμμα τμήματα AB και ΓΔ; Τα AG και ΒΔ; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.
- β) Τι είδους συμμετρία συνδέει τα τρίγωνα ABΓ και ΔΓΒ; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.



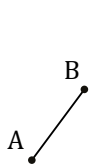
Πολλαπλοί μετασχηματισμοί



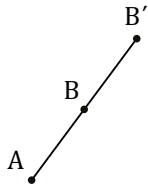
Ταξινομούμε γράμματα

Συνδέσεις και επεκτάσεις

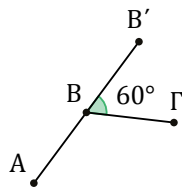
- 12.** Η Αγγελική, για να σχεδιάσει ένα κανονικό εξάγωνο, προγραμματίσει ένα λογισμικό να κάνει τα εξής βήματα: Ξεκινάει από ένα ευθύγραμμο τμήμα AB . Μεταφέρει το AB κατά διάνυσμα \overline{AB} και δημιουργεί το BB' . Στρέφει το BB' 60° κατά την αρνητική φορά και δημιουργεί το $B\Gamma$. Στη συνέχεια επαναλαμβάνει τα ίδια βήματα για το $B\Gamma$: το μεταφέρει κατά $\overline{B\Gamma}$, στρέφει την εικόνα του 60° κατά την αρνητική φορά και δημιουργεί το $\Gamma\Delta$.



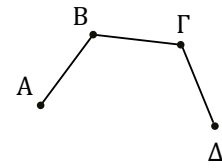
Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3



Σχήμα 4

- α)** Συνεχίζοντας με αυτό τον τρόπο, νομίζετε ότι θα σχεδιαστεί κανονικό εξάγωνο; Αν όχι, γιατί; Αν ναι, πόσα βήματα θα χρειαστεί συνολικά;
- β)** Τι αλλαγές θα πρέπει να κάνει η Αγγελική, ώστε να σχεδιάσει:
- i)** κανονικό πεντάγωνο; **ii)** κανονικό δεκάγωνο; **iii)** κανονικό δεκαεπτάγωνο;
- 13.** Να αναζητήσετε παραδείγματα στα οποία εμφανίζονται μετασχηματισμοί στην τέχνη (π.χ. ζωγραφική, γλυπτική), στη φύση και σε άλλες επιστήμες (π.χ. φυσική, χημεία, βιολογία).

Ομαδική εργασία

- 14.** Να σχεδιάσετε με διαφανές χαρτί δύο ίσα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $K\Lambda M$ με $\widehat{A} = 90^\circ$, $AB = 2\text{ cm}$, $A\Gamma = 3\text{ cm}$ και $\widehat{K} = 90^\circ$, $K\Lambda = 2\text{ cm}$, $KM = 3\text{ cm}$. Βρείτε έναν ή περισσότερους (διαδοχικούς) μετασχηματισμούς, ώστε το $K\Lambda M$ να είναι η εικόνα του $AB\Gamma$. Ποια κατά τη γνώμη σας είναι μια σχετική θέση των δύο τριγώνων, ώστε το πρόβλημα να είναι εύκολο; Εξετάστε και περιπτώσεις που δεν είναι εύκολες. Σε ποιες περιπτώσεις είναι απαραίτητη μια συμμετρία ως προς άξονα και σε ποιες δεν είναι;
- 15.** Όπως έχουμε πει, η συμμετρία έχει αξιοποιηθεί στο πλαίσιο της τέχνης για τη δημιουργία εικαστικών έργων, όπως πίνακες ζωγραφικής.
- Ο διάσημος Ολλανδός Μάουριτς Κορνέλις Έσερ (1898-1972) αξιοποίησε τη συμμετρία πρακτικά, στα σχέδιά του. Έργα του έχετε ήδη δει στις προηγούμενες σελίδες αυτής της ενότητας. Στα έργα του Ούγγρου ζωγράφου Βικτόρ Βαζαρελί (1906-1997), όπως το διπλανό, που κοσμεί την ταράτσα του αμφιθεάτρου συνεδριακού κέντρου στο Μονακό, διακρίνεται επίσης η παρουσία της συμμετρίας.



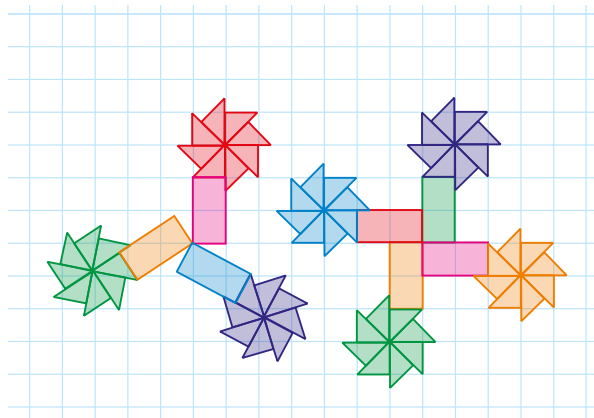
Σε παρόμοια έργα, εκτός από συμμετρίες μπορούμε να διακρίνουμε γεωμετρικά μοτίβα, τα οποία συνθέτουν σχέδια που έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

α) Να συνεργαστείτε ως ομάδα, να βρείτε τέτοια εικαστικά έργα και να τα παρουσιάσετε στην τάξη σας. Τι ήταν αυτό που σας άρεσε, ώστε να επιλέξετε αυτά τα έργα;

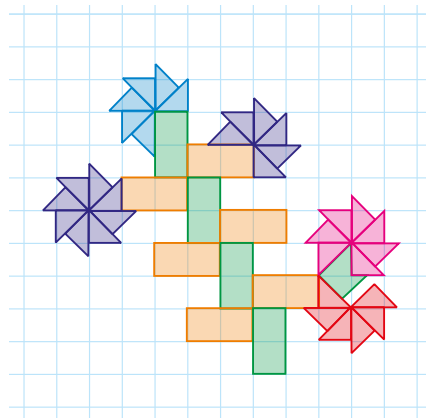
Εντοπίσατε συμμετρίες ή μοτίβα σε αυτά;

β) Χρησιμοποιώντας μετατόπιση και στροφή ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου και ενός ισοσκελούς και ορθογώνιου τριγώνου, έχουμε σχεδιάσει τα δύο παρακάτω έργα.

Το πλέγμα δεν είναι μέρος των έργων, αλλά χρησιμοποιήθηκε για να σχεδιαστούν τα συμμετρικά σχήματα.



Έργο 1



Έργο 2

Να σχεδιάσετε ένα δικό σας έργο, αξιοποιώντας τη στροφή, τη μετατόπιση, καθώς και άλλα στοιχεία (π.χ. άλλες συμμετρίες ή γεωμετρικά μοτίβα), και να το παρουσιάσετε στην τάξη σας, μαζί με οδηγίες για το πώς μπορεί κανείς να το σχεδιάσει.

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ 7:

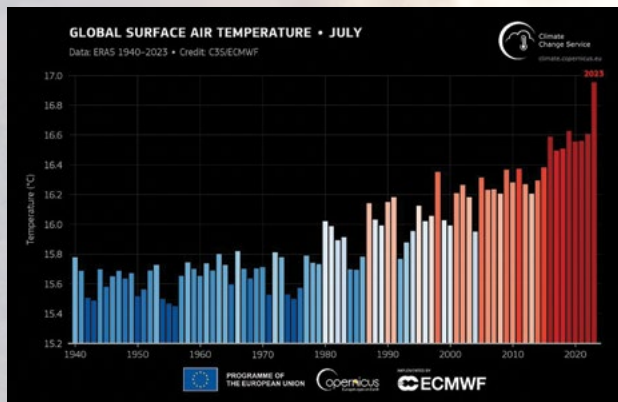
Στατιστική



Τα τελευταία χρόνια η θερμοκρασία του πλανήτη μας ανεβαίνει, με αποτέλεσμα το λιώσιμο των πάγων και ακραία φαινόμενα όπως καύσωνες, πλημμύρες, εκτεταμένες πυρκαγιές. Η κλιματική αλλαγή είναι εδώ και οι επιπτώσεις της στη ζωή μας γίνονται όλο και πιο σημαντικές.

Οι επιστήμονες που μελετούν το φαινόμενο χρησιμοποιούν στατιστικά διαγράμματα όπως το διπλανό (<https://climate.copernicus.eu/>). Σε αυτό το διάγραμμα φαίνεται η μέση θερμοκρασία όλης της Γης κάθε Ιούλιο από το 1940 μέχρι το 2023.

Η Στατιστική έχει ως αντικείμενο τη συλλογή και επεξεργασία δεδομένων, ώστε να παρουσιάζονται συνοπτικά, αποτελεσματικά και να μπορούμε να βγάλουμε συμπεράσματα. Επομένως μας βοηθάει να δημιουργούμε και να ερμηνεύουμε τέτοια διαγράμματα. Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε τρόπους για να περιγράψουμε στατιστικά δεδομένα. Θα ασχοληθούμε με ορισμένα στατιστικά διαγράμματα, με μέτρα θέσης και μέτρα μεταβλητότητας.



ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΕΝΟΤΗΤΕΣ:

- 7.1 Διαχείριση δεδομένων
- 7.2 Μέτρα θέσης και μεταβλητότητας
- 7.3 Θηκογράμματα

Δ1. Θερμοκρασίες του Ιανουαρίου

Η Αγγελική και η Δήμητρα ανέλαβαν να κάνουν μια εργασία σχετικά με τις θερμοκρασίες που είχε το χωριό τους τον χειμώνα, για να εξηγήσουν στο Δημοτικό Συμβούλιο τις ανάγκες του σχολείου για θέρμανση. Με ένα ψηφιακό θερμόμετρο κατέγραψαν την ελάχιστη (χαμηλότερη) και τη μέγιστη (ψηλότερη) θερμοκρασία κάθε ημέρας του Ιανουαρίου. Οι μέγιστες θερμοκρασίες κάθε ημέρας (με ημερολογιακή σειρά) φαίνονται στον πίνακα:

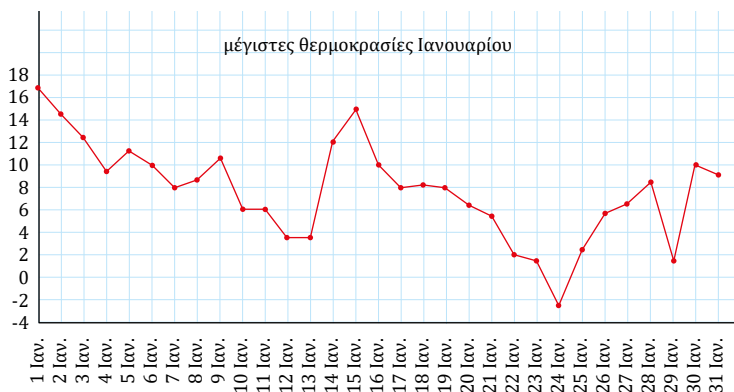


16,8	14,8	12,7	9,3	11,1	10,1	7,8	8,6	10,5	6,4	6,3	3,5	3,5	11,8	15,3	9,9
8,1	8,2	7,8	6,5	5,4	2,0	1,4	-2,3	2,3	5,6	6,4	8,2	3,4	10,1	9,2	

A. Τα κορίτσια θέλουν να παρουσιάσουν τα δεδομένα αυτά σε έναν πίνακα και σε ένα διάγραμμα. Βοηθήστε τα φτιάχνοντας έναν πίνακα συχνοτήτων και ένα ιστόγραμμα με τις κλάσεις από -3°C έως $+1^{\circ}\text{C}$, από 1°C έως 5°C , από 5°C έως 9°C , από 9°C έως 13°C και από 13°C έως 17°C . Θυμηθείτε ότι σε κάθε κλάση περιλαμβάνεται το κάτω άκρο της αλλά όχι το πάνω.

B. Ο συμμαθητής τους ο Ιβάν σκέφτηκε να παρουσιάσει την εξέλιξη της μέγιστης θερμοκρασίας από την αρχή μέχρι το τέλος του μήνα. Έφτιαξε λοιπόν το διπλανό διάγραμμα (που είδε ότι ονομάζεται χρονοδιάγραμμα).

Ποια σχόλια θα κάνατε βλέποντας αυτό το διάγραμμα; Σε τι νομίζετε ότι είναι χρήσιμο; Σε τι διαφέρει από το ιστόγραμμα που κατασκευάσατε στο προηγούμενο ερώτημα; Μπορείτε να διατυπώσετε ένα ερώτημα που για να το απαντήσουμε χρειαζόμαστε το χρονοδιάγραμμα; Συζητήστε με τους συμμαθητές και τις συμμαθήτριάς σας.



Γ. Μια άλλη ομάδα παιδιών στην Κρήτη κατέγραψε στον παρακάτω πίνακα τις μέγιστες θερμοκρασίες των πρώτων 10 ημερών του Ιανουαρίου στην κωμόπολή τους.

Ημέρα	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Μέγιστη θερμοκρασία	14,1	14,9	16,6	15,1	10,3	11,0	13,7	16,9	20,3	22,4

Να κατασκευάσετε ένα χρονοδιάγραμμα με αυτά τα δεδομένα και να το σχολιάσετε στην τάξη.



Κατασκευή χρονοδιαγράμματος

Συζητάμε

...για στατιστικά διαγράμματα

Ένα πλήθος δεδομένων (παρατηρήσεων) μπορούμε να το παρουσιάσουμε με πίνακες συχνοτήτων και με διαγράμματα. Τα διαγράμματα που έχουμε δει μέχρι τώρα είναι:

- το εικονόγραμμα,
- το ραβδόγραμμα,
- το σημειόγραμμα,
- το φυλλόγραμμα,
- το κυκλικό διάγραμμα,
- το ιστόγραμμα.



Στατιστικά
διαγράμματα –
παράδειγμα

Πολλές φορές όμως μας ενδιαφέρει πώς αλλάζει ένα χαρακτηριστικό ή ένα μέγεθος στον χρόνο. Τότε, συλλέγουμε μετρήσεις σε διαφορετικές χρονικές στιγμές, για παράδειγμα μετράμε τον πυρετό (θερμοκρασία) ενός ασθενούς την ίδια ώρα καθημερινά. Για να δείξουμε αυτή την εξέλιξη με εικόνα, χρησιμοποιούμε ένα διάγραμμα που το λέμε χρονοδιάγραμμα.

Μπορείτε να σκεφτείτε ερωτήματα που για να τα απαντήσουμε πρέπει να κάνουμε μετρήσεις σε διαφορετικές χρονικές στιγμές;



Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Όταν θέλουμε να μελετήσουμε πώς εξελίσσεται ένα χαρακτηριστικό ή ένα μέγεθος με το πέρασμα του χρόνου, συλλέγουμε δεδομένα που τα λέμε **χρονικά δεδομένα**. Τα χρονικά δεδομένα είναι οι μετρήσεις του χαρακτηριστικού σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές.

Τα χρονικά δεδομένα μπορούμε να τα απεικονίσουμε με το **χρονοδιάγραμμα**, στο οποίο:

- στον οριζόντιο άξονα τοποθετούμε τον χρόνο,
- στον κατακόρυφο άξονα τοποθετούμε τις αντίστοιχες μετρήσεις που καταγράψαμε.

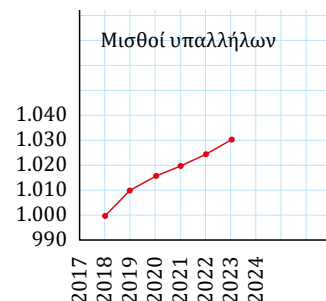
Δ2. Τα διαγράμματα λένε πάντα την αλήθεια;

A. Σε μια τηλεοπτική εκπομπή, ο κύριος Κ. ισχυρίστηκε ότι στο διπλανό χρονοδιάγραμμα φαίνεται καθαρά ότι οι μισθοί των υπαλλήλων μέσα σε πέντε χρόνια έχουν αυξηθεί πάρα πολύ.

Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του κυρίου Κ.;

Θα αλλάζατε κάτι στο διάγραμμα;

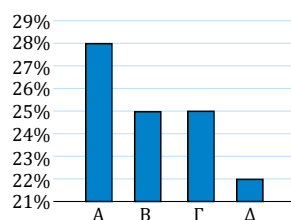
Συζητήστε τις ιδέες σας στην τάξη.



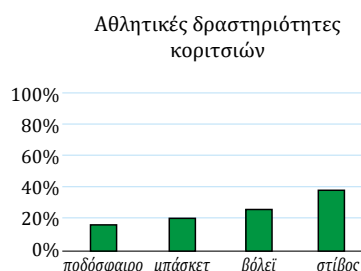
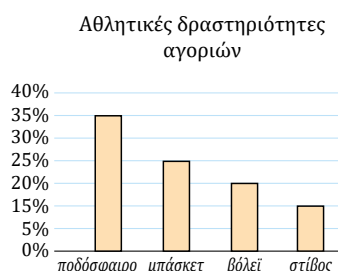
Β. Σε μια διαφήμιση, μια κυρία με λαμπερό χαμόγελο δείχνει το διπλανό διάγραμμα και λέει: «Οι νέες και οι νέοι προτιμούν την οδοντόκρεμα Α, με τεράστια διαφορά από τις άλλες οδοντόκρεμες».

- Συμφωνείτε με τη δήλωση της χαμογελαστής κυρίας;
- Θα αλλάζατε κάτι στο ραβδόγραμμα;
- Συζητήστε τις ιδέες σας στην τάξη.

Ποια οδοντόκρεμα προτιμάτε;



Γ. Παρατηρήστε και σχολιάστε τα δύο παρακάτω ραβδογράμματα. Ποια είναι η πρώτη εντύπωση που έχει κάποιος βλέποντας τα δύο διαγράμματα;



Συζητάμε

...για διαγράμματα που μπορεί να παραπλανούν

Μερικές φορές τα στατιστικά διαγράμματα που μας παρουσιάζονται μπορεί να είναι παραπλανητικά. Συχνά η λανθασμένη εντύπωση σχετίζεται με τον άξονα των τιμών (συνήθως τον κατακόρυφο), ο οποίος μπορεί:

- να μην ξεκινάει από το 0,
- να περιλαμβάνει πολύ μικρό εύρος τιμών,
- να μην είναι ίδιος ανάμεσα σε δύο διαγράμματα τα οποία συγκρίνουμε.

Βέβαια, μπορεί να σχεδιάσουμε διάγραμμα με κάποιο από αυτά τα χαρακτηριστικά χωρίς να δημιουργεί λανθασμένη εντύπωση.



Παραπλανητικά διαγράμματα – παράδειγμα



Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Ο τρόπος με τον οποίο παρουσιάζονται τα στατιστικά διαγράμματα μπορεί να παραπλανήσει. Γι' αυτό, συνήθως πρέπει να εστιάζουμε την προσοχή μας στις τιμές που αναγράφονται στον κατακόρυφο άξονα και συγκεκριμένα: από πού ξεκινούν, πού καταλήγουν, ποια είναι τα διαστήματα ανάμεσά τους, καθώς και ποια είναι η εντύπωση που δημιουργεί το γράφημα σε σχέση με τις τιμές αυτές.



Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. Η Δέσποινα είναι βιολονίστρια και κάνει πολλές ώρες εξάσκηση την εβδομάδα. Στα παρακάτω στατιστικά διαγράμματα μπορούμε να δούμε, για καθεμία από τις 52 εβδομάδες του χρόνου, πόσες ώρες έκανε εξάσκηση.



φυλλόγραμμα

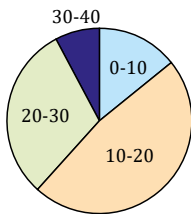
0		0 0 4 4 5 5 6
1		0 0 0 1 1 2 2 3 4 5 5 6 6 6 7 7 8 8 8 8 9 9 9 9 9
2		0 1 2 4 5 5 6 7 7 7 8 8 9 9 9 9
3		0 0 1 3

Υπόμνημα

Το 2 | 1 σημαίνει 21 ώρες.

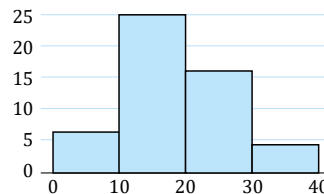
κυκλικό διάγραμμα

Ώρες εξάσκησης ανά εβδομάδα



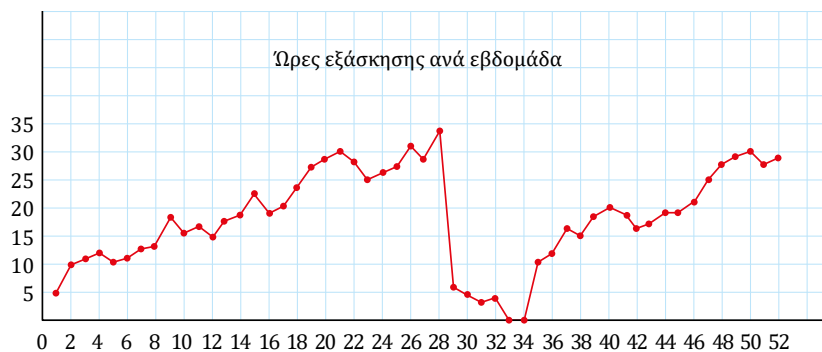
ιστόγραμμα

Ώρες εξάσκησης ανά εβδομάδα



Θυμίζουμε ότι συχνά, για πρακτικούς λόγους, γράφουμε στον οριζόντιο άξονα, κάτω από κάθε στήλη του ραβδογράμματος, τα δύο άκρα της αντίστοιχης κλάσης, δηλαδή 0-10, 10-20, 20-30, 30-40.

χρονοδιάγραμμα



Να απαντήσετε στις ακόλουθες ερωτήσεις, αναφέροντας ποιο από τα διαγράμματα χρησιμοποιήσατε.

- Πόσες εβδομάδες η Δέσποινα εξασκήθηκε 29 ώρες στο βιολί;
- Ποια από τις κλάσεις (0-10, 10-20, 20-30 και πάνω από 30 ώρες) περιλαμβάνει τις μισές περίπου εβδομάδες του χρόνου;
- Πόσες εβδομάδες η Δέσποινα ασκήθηκε από 10 έως 20 ώρες;
- Μέσα στον χρόνο αυτό η Δέσποινα συμμετείχε σε μια συναυλία, έδωσε εξετάσεις για ένα πτυχίο βιολιού υψηλού επιπέδου και πήγε και δύο εβδομάδες διακοπές. Πότε περίπου έγιναν αυτά;

Απάντηση

- α) Ζητάμε συχνότητα εμφάνισης συγκεκριμένου αριθμού ωρών. Αυτή την πληροφορία μπορεί να μας τη δώσει το φυλλάγραμμα. Στην τρίτη γραμμή μετράμε τέσσερα εννιάρια. Άρα το 29 εμφανίζεται τέσσερις φορές, δηλαδή η Δέσποινα ασκήθηκε 4 εβδομάδες από 29 ώρες.
- β) Στο κυκλικό διάγραμμα φαίνεται εύκολα ότι το κόκκινο κομμάτι καλύπτει το μισό περίπου του κυκλικού δίσκου. Άρα τις μισές περίπου εβδομάδες του χρόνου η Δέσποινα ασκήθηκε 10-20 ώρες.
- γ) Στο ιστόγραμμα, που δείχνει τη συχνότητα σε κάθε κλάση, φαίνεται ότι η Δέσποινα ασκήθηκε από 10 έως 20 ώρες 25 εβδομάδες.
- δ) Πριν από τη συναυλία και πριν από τις εξετάσεις η Δέσποινα θα είχε εντείνει την εξάσκησή της. Αυτό φαίνεται να συμβαίνει πριν από την 28η και πριν από την 52η εβδομάδα. Έτσι, είναι λογικό να υποθέσουμε ότι θα είχε τις εξετάσεις της περίπου την 28η εβδομάδα (στα μέσα Ιουλίου) και θα έδωσε τη συναυλία γύρω στην Πρωτοχρονιά του επόμενου έτους (ή μπορεί και αντίστροφα).
Επίσης, παρατηρούμε ότι την 33η και την 34η εβδομάδα η Δέσποινα δεν έκανε καθόλου εξάσκηση. Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι εκείνες τις δύο εβδομάδες (περίπου το δεύτερο μισό του Αυγούστου) η Δέσποινα πήγε διακοπές. Από τα άλλα διαγράμματα δε θα μπορούσαμε να βγάλουμε αυτά τα συμπεράσματα.



Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Να εξετάσετε αν τα δεδομένα που περιγράφονται παρακάτω είναι χρονικά ή όχι.
 - α) Το ύψος των μαθητών/μαθητριών του γυμνασίου.
 - β) Το ύψος ενός μαθητή κάθε δύο μήνες από την αρχή της Α΄ Γυμνασίου μέχρι το τέλος της Γ΄ Γυμνασίου.
 - γ) Οι γεννήσεις παιδιών σε ένα μαιευτήριο για κάθε μήνα ενός χρόνου.
 - δ) Οι συνολικές γεννήσεις παιδιών για κάθε μαιευτήριο της Αθήνας το έτος 2021.
 - ε) Οι μισθοί των υπαλλήλων του λογιστηρίου της επιχείρησης «ΝΑΔΑ».
 - στ) Ο μισθός ενός βοηθού λογιστή της «ΝΑΔΑ» τα τελευταία 10 χρόνια.
2. Παρατηρήστε το infographic της ΕΛΣΤΑΤ (Ελληνική Στατιστική Αρχή) και απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις:

2,6 εκατ.
+1,5%
3,8 εκατ. σύνολο νοικοκυριών Χώρας

πρόσβαση στο διαδίκτυο από την κατοικία

Έτος	Ποσοστό
2013	56,3%
2014	65,6%
2015	68,1%
2016	69,1%

 - α) Σε τι αναφέρεται το infographic;
 - β) Τι εκφράζουν οι αριθμοί 3,8 εκατ. και 2,6 εκατ.;
 - γ) Τι εκφράζει το ποσοστό 69,1%;
 - δ) Τι ποσοστό των νοικοκυριών της χώρας είχε πρόσβαση στο διαδίκτυο από την κατοικία το 2014 και τι ποσοστό είχε το 2016;
 - ε) Σύμφωνα με νεότερη έρευνα της ΕΛΣΤΑΤ, το αντίστοιχο ποσοστό για το 2022 ήταν 85,5%. Θεωρείτε ικανοποιητικά αυτά τα ποσοστά; Συζητήστε τις απόψεις σας.
3. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω ισχυρισμοί είναι σωστοί ή λανθασμένοι, με βάση το ραβδόγραμμα που δείχνει την προτίμηση σε χυμούς τεσσάρων εταιρειών.

Ποιο χυμό προτιμάτε;

Εταιρεία	Ποσοστό
A	26%
B	22%
Γ	24%
Δ	22%

 - α) Ο χυμός της εταιρείας Α συγκεντρώνει τριπλάσιες προτιμήσεις από τον χυμό της εταιρείας Β.
 - β) Οι χυμοί των εταιρειών Β και Δ συγκεντρώνουν τις ίδιες προτιμήσεις.

- γ) Οι προτιμήσεις των χυμών της εταιρείας Α είναι πολύ περισσότερες από τις προτιμήσεις των χυμών της εταιρείας Γ.
 δ) Το 24% αυτών που ρωτήθηκαν προτιμά τον χυμό της εταιρείας Γ.
 ε) Τα μισά άτομα από αυτά που ρωτήθηκαν προτιμούν τους χυμούς των εταιρειών Α ή Γ.

4. Στο χρονοδιάγραμμα εμφανίζεται ο αριθμός των παιδιών που γράφτηκαν στα νηπιαγωγεία όλης της χώρας για μία δεκαετία. Με βάση αυτό το χρονοδιάγραμμα, απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις:

- α) Πόσα περίπου παιδιά ήταν εγγεγραμμένα στα νηπιαγωγεία το σχολικό έτος 2012-13;
 β) Ποια σχολικά έτη έχουμε αύξηση των εγγεγραμμένων παιδιών από το προηγούμενο έτος;
 γ) Ποιο ή ποια σχολικά έτη τα εγγεγραμμένα παιδιά ήταν περίπου 165.000;

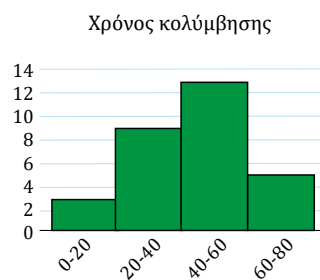


Τρίλιζα στη διαχείριση δεδομένων

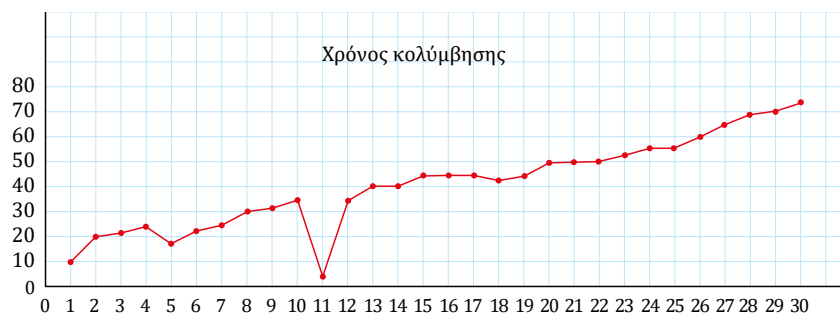
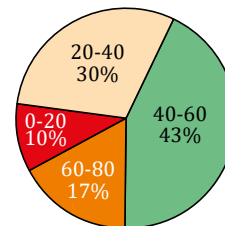


Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

5. Να διατυπώσετε δύο ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με χρονικά δεδομένα και δύο ερωτήματα που απαιτούν μη χρονικά δεδομένα. Συζητήστε τις προτάσεις σας στην τάξη.
 6. Σε ένα παιχνίδι μνήμης εμφανίζονται στον παίκτη 10 λέξεις για 20 δευτερόλεπτα και μετά εξαφανίζονται. Ο παίκτης πρέπει μέσα σε 1 λεπτό να γράψει όσο περισσότερες λέξεις μπορεί να θυμηθεί. Η Λαρίσσα παίζει αυτό το παιχνίδι 10 φορές και οι επιτυχίες της με τη σειρά είναι: 4, 5, 4, 6, 7, 6, 8, 7, 8, 8. Κατασκευάστε ένα χρονοδιάγραμμα και συζητήστε στην τάξη ό,τι θεωρείτε σημαντικό.
 7. Στα παρακάτω διαγράμματα φαίνεται ο χρόνος (σε λεπτά) που κολύπησε ο Ανδρέας καθεμία από τις 30 ημέρες που ήταν κοντά στη θάλασσα.



Χρόνος κολύμβησης



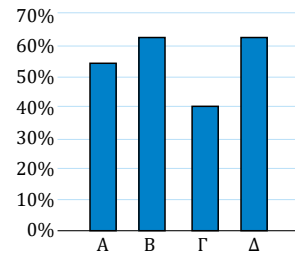
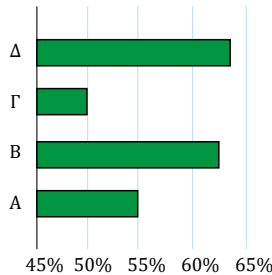
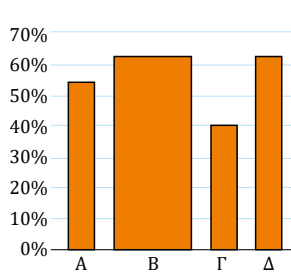
Απαντήστε στις ακόλουθες ερωτήσεις, εξηγώντας τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιήσατε τα διαγράμματα.

- α) Πόσες μέρες ο Ανδρέας κολύμπησε μισή ώρα ή λιγότερο;
- β) Είναι σωστό ότι ο Ανδρέας κολύμπησε 40 έως 60 λεπτά λίγο λιγότερες από τις μισές ημέρες;
- γ) Τι ποσοστό των ημερών κολύμπησε λιγότερο από 20 λεπτά;
- δ) Σκεφτείτε και γράψτε μια ιστορία (το πολύ 80 λέξεων) που να ταιριάζει με αυτά που φαίνονται στο χρονοδιάγραμμα. Συζητήστε στην τάξη τις διαφορετικές ιστορίες. Τι κοινό έχουν;

8. Να επιλέξετε ένα θέμα από τα παρακάτω, να αναζητήσετε δεδομένα και να τα παρουσιάσετε με τη μορφή χρονοδιαγράμματος.

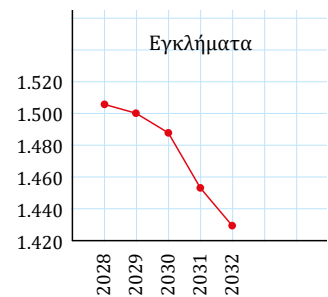
- α) Το ύψος σου τα πρώτα 10 χρόνια της ζωής σου.
- β) Οι λογαριασμοί ηλεκτρικού ρεύματος τον τελευταίο χρόνο.
- γ) Πόσα βήματα έκανες κάθε ημέρα την τελευταία εβδομάδα.

9. Όλα τα παρακάτω διαγράμματα αναπαριστούν τα ποσοστά των φοιτητών/φοιτητριών μιας σχολής που έχουν λογαριασμό στα μέσα κοινωνικής δικτύωσης Α, Β, Γ και Δ. Ποιο ή ποια νομίζετε ότι είναι παραπλανητικά και γιατί; Συζητήστε την άποψή σας με τους συμμαθητές και τις συμμαθήτριάς σας.



10. Ο δημοσιογράφος κ. Π. έδειξε το διάγραμμα και ισχυρίστηκε ότι η εγκληματικότητα τα τελευταία πέντε χρόνια κοντεύει να εξαλειφθεί χάρη στην αποτελεσματική πολιτική της κυβέρνησης.

Συμφωνείτε ή διαφωνείτε με τον κ. Π.; Εξηγήστε την άποψή σας σε κάποιον που δεν ξέρει Στατιστική.



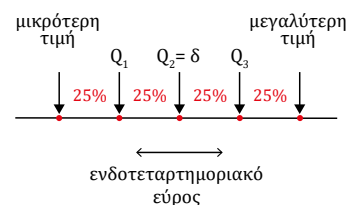
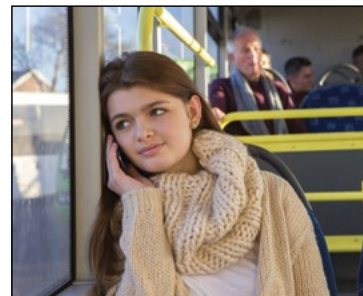
Τέσσερις ασκήσεις και προβλήματα στη Διαχείριση Δεδομένων

Δ1. Στο λεωφορείο για το σχολείο

Η Ασπασία κατέγραψε τον χρόνο που πέρασε μέσα στο λεωφορείο πηγαίνοντας στο σχολείο καθεμία από τις 21 ημέρες του Οκτωβρίου που είχε σχολείο. Οι χρόνοι αυτοί σε λεπτά είναι:

15, 18, 19, 21, 15, 15, 14, 20, 52, 18, 21, 14, 16, 19, 16, 14, 22, 22, 15, 18, 15

- A.** Ένας τρόπος συνοπτικής παρουσίασης αυτών των δεδομένων είναι τα μέτρα θέσης και μεταβλητότητας. Υπολογίστε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και το εύρος. Τι δείχνει καθένα από αυτά τα μέτρα σχετικά με τον χρόνο που περνά η Ασπασία μέσα στο λεωφορείο;
- B.** Η Ασπασία έκανε τους υπολογισμούς αυτούς και παρατήρησε ότι το εύρος ήταν πολύ μεγάλο, επειδή υπήρχε μία παρατήρηση πολύ μεγάλη. Έψαξε λοιπόν στο διαδίκτυο να βρει κι άλλα μέτρα θέσης και μεταβλητότητας που να επηρεάζονται λιγότερο από τις ακραίες τιμές. Βρήκε ότι οι στατιστικοί χρησιμοποιούν το πρώτο τεταρτημόριο Q_1 (που είναι η διάμεσος των μισών μικρότερων δεδομένων), το τρίτο τεταρτημόριο Q_3 (που είναι η διάμεσος των μισών μεγαλύτερων δεδομένων) και την απόσταση μεταξύ τους, που λέγεται ενδοτεταρτημοριακό εύρος. Βρήκε και το διπλανό σχήμα.



- Μπορείτε να βοηθήσετε την Ασπασία βρίσκοντας το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο, καθώς και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος;
- Γ.** Συζητήστε με τους συμμαθητές και τις συμμαθήτριάς σας τι δείχνει το ενδοτεταρτημοριακό εύρος και πόσο επηρεάζεται από το πόσο μεγάλες ή μικρές είναι οι ακραίες τιμές.



Παράδειγμα
εύρεσης μέτρων
θέσης

Συζητάμε

...για τρόπους συνοπτικής περιγραφής δεδομένων

Όταν τα δεδομένα μας είναι ποσοτικά, μπορούμε να τα περιγράψουμε συνοπτικά με τα μέτρα θέσης και τα μέτρα μεταβλητότητας. Τα μέτρα θέσης που έχουμε δει μέχρι τώρα είναι:

- η διάμεσος (δ),
- η μέση τιμή (\bar{x}),
- η επικρατούσα τιμή.

Το μέτρο μεταβλητότητας που έχουμε δει είναι το εύρος.

Ως μέτρα θέσης χρησιμοποιούνται επίσης τα τεταρτημόρια. Το πρώτο (Q_1), το δεύτερο ($Q_2 = \delta$, δηλαδή η διάμεσος) και το τρίτο (Q_3) τεταρτημόριο χωρίζουν τις παρατηρήσεις σε τέσσερα ίσα

Στην ελληνική γλώσσα...

τεταρτημόριο είναι το ένα από τα τέσσερα ίσα μέρη που έχουμε χωρίσει κάτι (μια ποσότητα, ένα μήκος, ένα σύνολο).

μέρη. Ο συμβολισμός Q προέρχεται από την αγγλική λέξη quartile, που σημαίνει τεταρτημόριο.

Ένα μέτρο μεταβλητότητας που δεν επηρεάζεται από τις ακραίες παρατηρήσεις είναι το ενδοτεταρτημοριακό εύρος (IQR, από το interquartile range). Το IQR είναι η απόσταση ανάμεσα στο πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο.

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι τα δεδομένα μας είναι οι 11 αριθμοί:

$$4, 7, 8, 9, 9, 10, 11, 13, 14, 18, 25$$

Έχουμε $Q_2 = 10$, $Q_1 = 8$, $Q_3 = 14$ και έτσι: $IQR = Q_3 - Q_1 = 14 - 8 = 6$.

Ανάμεσα στα δύο τεταρτημόρια βρίσκεται περίπου το 50% των παρατηρήσεων. Γι' αυτό, για κάποιο συγκεκριμένο εύρος, όσο μεγαλύτερο είναι το ενδοτεταρτημοριακό εύρος, τόσο μεγαλύτερη λέμε ότι είναι η μεταβλητότητα, δηλαδή τόσο πιο διάσπαρτα είναι τα δεδομένα.

Με τις δύο ακραίες τιμές και τα τρία τεταρτημόρια έχουμε μια συνοπτική εικόνα των δεδομένων μας. Γι' αυτό, τις πέντε αυτές τιμές τις λέμε «περίληψη των πέντε αριθμών».



Παράδειγμα
εύρεσης
τεταρτημορίων



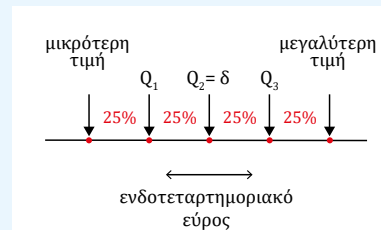
Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Στα μέτρα θέσης συμπεριλαμβάνονται το **πρώτο** και το **τρίτο τεταρτημόριο**.

- Το πρώτο τεταρτημόριο (Q_1) είναι ο αριθμός που κάτω από αυτόν είναι περίπου το 25% των δεδομένων μας και πάνω από αυτόν είναι περίπου το 75% των δεδομένων.
- Το τρίτο τεταρτημόριο (Q_3) είναι ο αριθμός που κάτω από αυτόν είναι περίπου το 75% των δεδομένων μας και πάνω από αυτόν είναι περίπου το 25% των δεδομένων.

Για να βρούμε κατά προσέγγιση τα Q_1 και Q_3 , βάζουμε σε σειρά τις παρατηρήσεις από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη και βρίσκουμε τη διάμεσο δ . Το Q_1 είναι η διάμεσος των παρατηρήσεων που βρίσκονται κάτω από τη δ . Το Q_3 είναι η διάμεσος των παρατηρήσεων που βρίσκονται πάνω από τη δ . Η διάμεσος δ είναι το δεύτερο τεταρτημόριο (δηλαδή $Q_2 = \delta$).

Λέμε **ενδοτεταρτημοριακό εύρος (IQR)** τη διαφορά του πρώτου από το τρίτο τεταρτημόριο. Δηλαδή $IQR = Q_3 - Q_1$. Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος είναι ένα μέτρο μεταβλητότητας. Όσο μικρότερο είναι το IQR σε σύγκριση με το εύρος των παρατηρήσεων, τόσο μικρότερη είναι η μεταβλητότητα.



Δ2. Στο λεωφορείο για το σχολείο (...η συνέχεια)

Α. Η Γεωργία χρησιμοποιεί το ίδιο λεωφορείο με την Ασπασία, αλλά μπαίνει στην προηγούμενη στάση. Έτσι, κάθε μέρα περνάει στο λεωφορείο 3 λεπτά περισσότερο από την Ασπασία. Για τον Οκτώβριο η μέση τιμή του χρόνου που πέρασε η Ασπασία στο λεωφορείο ήταν 19 λεπτά. Πόση θα είναι η μέση τιμή του αντίστοιχου χρόνου για τη Γεωργία;

Β. Η Ασπασία διάβασε σε έναν ενημερωτικό ιστότοπο ότι, αν είχαν ολοκληρωθεί κάποια έργα οδοποιίας, ο χρόνος στο λεωφορείο θα συντομευόταν κατά 20%. Σκέφτηκε ότι σε αυτή την περίπτωση οι χρόνοι που θα περνούσε κάθε μέρα του Οκτωβρίου στο λεωφορείο θα ήταν 0,8 επί τον χρόνο που πράγματι πέρασε.

Συμφωνείτε με την Ασπασία;

Ποια θα ήταν η μέση τιμή τότε;

- Γ.** Η απόμακρη τιμή 52 (η παρατήρηση της ένατης ημέρας) οφείλεται σε έκτακτη καθυστέρηση λόγω ενός τροχαίου ατυχήματος. Συζητώντας η Ασπασία με έναν συμμαθητή της, σκέφτηκαν ότι αυτή η απόμακρη τιμή επηρεάζει τα μέτρα θέσης. Βοηθήστε τους, εξετάζοντας πώς αλλάζουν η μέση τιμή και η διάμεσος:
- α)** αν διαγράψουμε την απόμακρη τιμή 52,
β) αν αντικαταστήσουμε την απόμακρη τιμή 52 με τη μεγαλύτερη από τις υπόλοιπες τιμές, δηλαδή με 22.



Συζητάμε

...για ιδιότητες της μέσης τιμής

Μερικές φορές οι τιμές όλων των ποσοτικών δεδομένων που έχουμε συλλέξει αυξάνονται κατά τον ίδιο αριθμό ή πολλαπλασιάζονται με τον ίδιο αριθμό. Σε αυτές τις περιπτώσεις η μέση τιμή μεταβάλλεται με τον ίδιο τρόπο, δηλαδή αυξάνεται κατά τον ίδιο αριθμό ή πολλαπλασιάζεται με τον ίδιο αριθμό. Το ίδιο συμβαίνει και για τη διάμεσο.

Η μέση τιμή είναι ένα μέτρο θέσης που επηρεάζεται από τις απόμακρες τιμές, ενώ η διάμεσος όχι. Για παράδειγμα, αν υπάρχει μια πολύ μεγάλη απόμακρη τιμή, τότε αυτή «αυξάνει» τη μέση τιμή αλλά όχι τη διάμεσο (αφού η μεσαία παρατήρηση παραμένει ίδια).



Παράδειγμα στις ιδιότητες της μέσης τιμής



Η επίδραση των απόμακρων τιμών



Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

- Αν όλα τα δεδομένα αυξηθούν κατά τον ίδιο αριθμό, τότε και η μέση τιμή τους θα αυξηθεί κατά τον αριθμό αυτό.
- Αν όλα τα δεδομένα πολλαπλασιαστούν με τον ίδιο αριθμό, τότε και η μέση τιμή τους θα πολλαπλασιαστεί με τον αριθμό αυτό.
- Η μέση τιμή είναι ένα μέτρο θέσης που επηρεάζεται από τις απόμακρες τιμές, ενώ η διάμεσος όχι.

Θυμόμαστε ότι απόμακρες τιμές λέμε τις παρατηρήσεις που είναι πολύ μικρές ή πολύ μεγάλες σε σχέση με τις υπόλοιπες.



Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. α) Τα 20 παιδιά του Β2 μέτρησαν ένα μήκος στο εργαστήριο Φυσικών Επιστημών. Τα αποτελέσματα των μετρήσεών τους (σε cm) ήταν:

31,3	27	32	31,5	36	32,5	32,1	31,9	32,7	32,4	31,7	32,1	32	32,3	31,7	32	31,9	32,2	32	31,8
------	----	----	------	----	------	------	------	------	------	------	------	----	------	------	----	------	------	----	------

Ο καθηγητής τούς πρότεινε να διαγράψουν τις απόμακρες τιμές και μετά να υπολογίσουν τη μέση τιμή. Τελικά πόσο πρέπει να θεωρήσουμε ότι είναι το συγκεκριμένο μήκος;

- β) Τα 20 παιδιά του Β2 συμμετείχαν σε έναν διαγωνισμό σκίτσου και τα έργα τους αξιολογήθηκαν με τις παρακάτω βαθμολογίες:

50	75	67	67	98	60	52	65	53	55	58	65	63	73	50	70	68	62	72	60
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

Πού οφείλεται η απόμακρη τιμή; Θα ήταν σωστό να διαγράψουμε την απόμακρη τιμή σε αυτή την περίπτωση;

Απάντηση

- α) Βάζουμε τις μετρήσεις στη σειρά από τη μικρότερη στη μεγαλύτερη και έχουμε:

27	31,3	31,5	31,7	31,7	31,8	31,9	31,9	32	32	32	32	32,1	32,1	32,2	32,3	32,4	32,5	32,7	36
----	------	------	------	------	------	------	------	----	----	----	----	------	------	------	------	------	------	------	----

Οι δύο απόμακρες τιμές είναι το 27 cm και το 36 cm, ενώ οι υπόλοιπες τιμές είναι από 31,3 cm μέχρι 32,7 cm. Το πιθανότερο είναι οι μετρήσεις 27 cm και 36 m να οφείλονται σε ανθρώπινο λάθος, για παράδειγμα λανθασμένη χρήση του εργαλείου μέτρησης. Ακριβώς γι' αυτό τον λόγο συνήθως διαγράφουμε τις απόμακρες τιμές πριν υπολογίσουμε τη μέση τιμή. Ως καλύτερη προσέγγιση του συγκεκριμένου μήκους μπορούμε να θεωρήσουμε τη μέση τιμή των υπόλοιπων 18 μετρήσεων, που είναι περίπου 32 cm.

- β) Η απόμακρη τιμή είναι το 98, ενώ οι υπόλοιπες βαθμολογίες είναι από 50 μέχρι 75. Η απόμακρη τιμή είναι πιθανόν να αντιστοιχεί σε ένα παιδί που έχει καλλιιεργήσει ιδιαίτερα τις ικανότητές του στο σκίτσο. Ακριβώς γι' αυτό τον λόγο δεν είναι επιθυμητή η διαγραφή της απόμακρης τιμής σε αυτή την περίπτωση, εφόσον περιέχει μια σημαντική πληροφορία.



Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε

Να κατασκευάσετε έναν πίνακα έννοιας για το ενδοτεταρτημοριακό εύρος.



Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Να βρείτε τη διάμεσο, το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος για τα παρακάτω σύνολα δεδομένων:

α) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

β) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

γ) 1, 1, 2, 4, 4, 5, 7

δ) 1, 3, 6, 9, 10, 10, 11, 12

- 2.** Με την «περίληψη των πέντε αριθμών» χωρίζουμε τα δεδομένα μιας στατιστικής έρευνας σε πέντε μέρη. Ποιο είναι περίπου το ποσοστό των δεδομένων που βρίσκεται:
- κάτω από τη διάμεσο;
 - ανάμεσα στη διάμεσο και το τρίτο τεταρτημόριο;
 - ανάμεσα στο πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο;
 - ανάμεσα στην ελάχιστη τιμή και το πρώτο τεταρτημόριο;
 - κάτω από το τρίτο τεταρτημόριο;
 - πάνω από το τρίτο τεταρτημόριο;
- 3.** Τα δεδομένα 4, 4, 6, 7, 8 έχουν μέση τιμή 5,8.
- Ποια είναι η μέση τιμή των δεδομένων που προκύπτουν αν στα προηγούμενα προσθέσουμε τον αριθμό 2, δηλαδή των δεδομένων 6, 6, 8, 9, 10;
 - Ποια είναι η μέση τιμή των δεδομένων που προκύπτουν αν πολλαπλασιάσουμε τα προηγούμενα με τον αριθμό 2, δηλαδή των δεδομένων 8, 8, 12, 14, 16;
- 4.** Από ένα σύνολο δεδομένων διαγράψαμε μια πολύ μεγάλη απόμακρη τιμή και προέκυψαν τα δεδομένα 4, 5, 5, 7, 9. Αυτά έχουν μέση τιμή 6, διάμεσο 5 και επικρατούσα τιμή 5. Για τα δεδομένα μαζί με την απόμακρη τιμή συζητήστε αν είναι σωστές ή λανθασμένες οι παρακάτω προτάσεις:
- Η μέση τιμή των δεδομένων μαζί με την απόμακρη τιμή είναι 6.
 - Η μέση τιμή των δεδομένων μαζί με την απόμακρη τιμή είναι μεγαλύτερη από 6.
 - Η διάμεσος των δεδομένων μαζί με την απόμακρη τιμή είναι 5.
 - Η διάμεσος των δεδομένων μαζί με την απόμακρη τιμή είναι 6.
 - Η επικρατούσα τιμή των δεδομένων μαζί με την απόμακρη τιμή παραμένει το 5.
 - Το εύρος των δεδομένων μαζί με την απόμακρη τιμή είναι μεγαλύτερο από το εύρος χωρίς την απόμακρη τιμή.



Ιδιότητες της μέσης τιμής



Τρίλιζα στα μέτρα θέσης



Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

- 5.** Οι πόντοι που πέτυχαν οι 11 καλαθοσφαιριστές της ομάδας «Θύελλα Ραχούλας» στο πρωτάθλημα της χρονιάς 2018-2019 είναι οι εξής:
- 31, 58, 130, 86, 17, 30, 67, 80, 22, 91, 98
- Να βρείτε τους πέντε αριθμούς: ελάχιστη και μέγιστη τιμή, διάμεσο, πρώτο και τρίτο τεταρτημόριο.
 - Το 2018-2019 είχαν πετύχει κατά μέσο όρο 64,5 πόντους ο καθένας. Την επόμενη χρονιά (2019-2020) κάθε παίκτης πέτυχε 10 πόντους περισσότερους από την προηγούμενη. Ποιος είναι ο νέος μέσος όρος των πόντων που πέτυχαν;
- 6.** Οι πόντοι που πέτυχαν οι 10 καλαθοσφαιριστές της ομάδας «Κεραυνός Χαραυγής» στο πρωτάθλημα της χρονιάς 2018-2019 είναι οι εξής:
- 102, 93, 59, 15, 33, 87, 67, 82, 22, 31
- Να βρείτε τους πέντε αριθμούς: ελάχιστη και μέγιστη τιμή, διάμεσο, πρώτο και τρίτο τεταρτημόριο.
 - Το 2018-2019 είχαν πετύχει κατά μέσο όρο 59,1 πόντους ο καθένας. Την επόμενη χρονιά (2019-2020) κάθε παίκτης αύξησε τους πόντους που πέτυχε κατά 10%. Ποιος είναι ο νέος μέσος όρος των πόντων που πέτυχαν;

7. Ποια από τις δύο ομάδες των προηγούμενων ασκήσεων (η Θύελλα ή ο Κεραυνός) έχει μικρότερη μεταβλητότητα στους πόντους που πέτυχαν οι παίκτες της; Χρησιμοποιήστε και τα δύο μέτρα μεταβλητότητας που γνωρίζετε και εξηγήστε την απάντησή σας.

8. Οι χρόνοι αναμονής σε ένα εστιατόριο γρήγορου φαγητού κάποιο μεσημέρι φαίνονται παρακάτω:

6, 7, 6, 1, 4, 5, 7, 8, 14, 5, 5, 6, 8, 15, 5, 5, 5, 6, 7, 7

α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και την επικρατούσα τιμή.

β) Να προσδιορίσετε τις απόμακρες τιμές (αν υπάρχουν). Εξηγήστε γιατί θεωρείτε αυτές τις τιμές απόμακρες και πού μπορεί να οφείλονται.

γ) Να διαγράψετε τις απόμακρες τιμές και να υπολογίσετε ξανά τη μέση τιμή και τη διάμεσο. Να τις συγκρίνετε με εκείνες του ερωτήματος (α).

9. Οι παρατηρήσεις 7, 8, 9, 9, 10, 10, 10, 11, 11, 12, 13 έχουν μέση τιμή 10 και διάμεσο 10.

α) Να προσθέσετε μια απόμακρη τιμή η οποία να αυξάνει σημαντικά τη μέση τιμή. Επηρεάζεται η διάμεσος;

β) Πόσες είναι οι λιγότερες απόμακρες τιμές που πρέπει να προσθέσουμε για να αλλάξει και η διάμεσος;

γ) Μπορούμε να προσθέσουμε δύο απόμακρες τιμές χωρίς να αλλάξει ούτε η μέση τιμή ούτε η διάμεσος;

10. Στο εργαστήριο της Φυσικής, οι μαθητές μέτρησαν τον χρόνο σε δευτερόλεπτα που χρειάστηκε να κυλήσει μια μεταλλική σφαίρα σε ένα λούκι με κλίση. Οι είκοσι μετρήσεις που έκαναν ήταν:

3,2	3,1	3,3	3,2	3,0	3,3	3,4	3,5	3,3	3,6	3,1	3,6	3,6	3,1	3,5	3,4	3,4	4,3	3,1	3,3
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Να εντοπίσετε την απόμακρη τιμή. Θέλουμε να βρούμε τη μέση τιμή και τη διάμεσο. Αποφασίστε αν πρέπει να διαγράψετε ή όχι την απόμακρη τιμή και στη συνέχεια υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διάμεσο. Τελικά, σε πόσο χρόνο κύλησε η σφαίρα στο λούκι;

11. α) Οι θερμοκρασίες που καταγράφηκαν ανά δύο ώρες σε δύο διαφορετικές πόλεις την 25η Απριλίου του 2035 ήταν:

Ώρα	00	02	04	06	08	10	12	14	16	18	20	22	24
Πόλη Α	15,2	13,7	12,5	11,3	13,2	16,8	19,2	22,5	21,1	18,9	17,6	16,2	15
Πόλη Β	15,2	13,1	11,7	10,5	13,1	17,1	19,5	21,6	23,2	21,1	19,3	17,5	15

Να υπολογίσετε το εύρος και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος. Σε ποια πόλη οι θερμοκρασίες έχουν μεγαλύτερη μεταβλητότητα (οι τιμές είναι περισσότερο διάσπαρτες); Εξηγήστε την άποψή σας.

β) Οι αντίστοιχες καταγραφές θερμοκρασίας για την 23η Μαΐου έχουν εύρος και ενδοτεταρτημοριακό εύρος που φαίνεται στον πίνακα:

	Εύρος	Ενδοτεταρτημοριακό εύρος
Πόλη Α	11,3	5,8
Πόλη Β	11,3	5,2

Σε ποια πόλη οι θερμοκρασίες την 23η Μαΐου είχαν μεγαλύτερη μεταβλητότητα (οι τιμές ήταν περισσότερο διάσπαρτες); Εξηγήστε την άποψή σας.



- 12.** Να δώσετε ένα τουλάχιστον παράδειγμα είδους δεδομένων στο οποίο, για να βρούμε τη μέση τιμή, είναι καλύτερα:
- α)** να διαγράψουμε τις απόμακρες τιμές,
 - β)** να μη διαγράψουμε τις απόμακρες τιμές.
- 13.** Οι ηλικίες των ανθρώπων που συμμετέχουν σε έναν χορευτικό σύλλογο φαίνονται στο παρακάτω φυλλάγραμμα:

1		1	2	3	4	4	4	6	9			
2		0	0	0	1	1	2	2	3	5	7	8
3		0	2	6	6	7	9					
4		1	2	4	5	6	8					
5		0	2	7	7	8	9	9				
6		0	0	1	1	2	3	4	5	6	6	7

Υπόμνημα

Το 2 | 1 σημαίνει 21.

- α)** Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή, τα τρία τεταρτημόρια, το εύρος και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος.
- β)** Ποιες ηλικίες αποτελούν το χαμηλότερο 25% των ηλικιών;
- γ)** Θεωρείτε ότι οι ηλικίες έχουν μεγάλη ή μικρή μεταβλητότητα; Εξηγήστε τα επιχειρήματά σας σε μία παράγραφο.

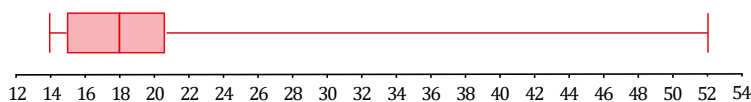


Επιλογή
στατιστικού
διαγράμματος

- 14.** Με βάση στοιχεία από την ΕΛΣΤΑΤ, το 2021 τα νοικοκυριά στην Ελλάδα δαπάνησαν κατά μέσο όρο 50,5 ευρώ τον μήνα για γαλακτοκομικά προϊόντα και αυγά και 48,7 ευρώ τον μήνα για αλεύρι, ψωμί και δημητριακά. Λόγω αυξήσεων των τιμών, την επόμενη χρονιά, κάθε νοικοκυριό αύξησε τις μηνιαίες δαπάνες για γαλακτοκομικά και αυγά κατά 8% και τις μηνιαίες δαπάνες για αλεύρι, ψωμί και δημητριακά κατά 4,3 ευρώ. Ποιοι είναι οι νέοι μέσοι όροι δαπανών για τα συγκεκριμένα είδη διατροφής;

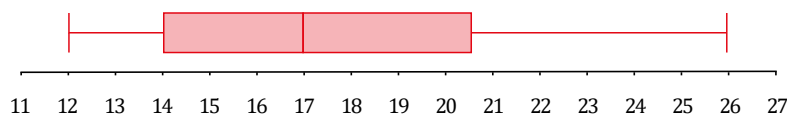
Δ1. Στο λεωφορείο για το σχολείο (...και πάλι)

A. Η Ασπασία αναζητούσε τρόπο να παρουσιάσει τα δεδομένα από την έρευνά της σχετικά με τον χρόνο που πέρασε μέσα στο λεωφορείο. Βρήκε την «περίληψη των πέντε αριθμών»: ελάχιστη τιμή 14, μέγιστη τιμή 52, πρώτο τεταρτημόριο 15, δεύτερο (διάμεσος) 18 και τρίτο τεταρτημόριο 20,5. Ο αδερφός της της έφτιαξε ένα διάγραμμα που λέγεται θηκογράμμα και είναι το παρακάτω:



Πώς σχετίζεται το διάγραμμα με την «περίληψη των πέντε αριθμών»; Συζητήστε στην τάξη.

B. Ο Θανάσης παρουσίασε για τον χρόνο που πέρασε ο ίδιος στο λεωφορείο το παρακάτω θηκογράμμα:



Με βάση αυτό το θηκογράμμα, ποια είναι η «περίληψη των πέντε αριθμών» για τα δεδομένα του Θανάση;

Γ. Ο Μουσταφά κατέγραψε τις θερμοκρασίες ενός εικοσιτετραώρου (ανά μία ώρα), μιας ανοιξιιάτικης ημέρας στην ορεινή Πελοπόννησο, και τις επεξεργάστηκε. Η ελάχιστη θερμοκρασία ήταν 11,3 °C, η μέγιστη 22,5 °C και τα τεταρτημόρια ήταν 13,5 °C, 16,7 °C, 19 °C. Κατασκευάστε ένα θηκογράμμα με βάση αυτούς τους πέντε αριθμούς.

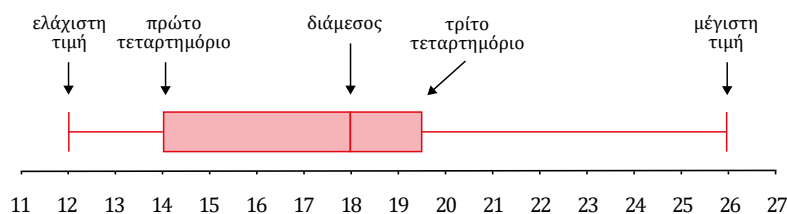
Συζητάμε

...για θηκογράμματα

Το θηκογράμμα είναι ένα διάγραμμα που αποτελείται από έναν άξονα στον οποίο φαίνονται οι τιμές των δεδομένων, από ένα ορθογώνιο που βρίσκεται πάνω από αυτό τον άξονα και από δύο οριζόντιες γραμμές που εκτείνονται έξω από το ορθογώνιο. Στο ορθογώνιο φαίνεται η διάμεσος και τα δύο τεταρτημόρια. Η μία οριζόντια γραμμή ξεκινάει από την ελάχιστη τιμή και φτάνει μέχρι το πρώτο τεταρτημόριο και η άλλη ξεκινάει από το τρίτο τεταρτημόριο και καταλήγει στη μέγιστη τιμή.

**Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις**

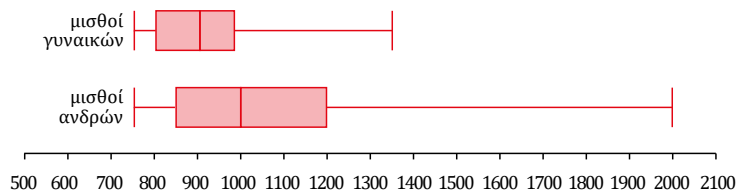
Το **θηκογράμμα** είναι ένα διάγραμμα που χρησιμοποιούμε για να περιγράψουμε σχηματικά την «περίληψη των πέντε αριθμών».





Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. Σύμφωνα με το Ευρωπαϊκό Κοινοβούλιο, «παρότι η αρχή της “ίσης αμοιβής για ίση εργασία” θεσμοθετήθηκε το 1957, με τη Συνθήκη της Ρώμης, το χάσμα αμοιβών μεταξύ των δύο φύλων παραμένει πεισματικά ευρύ, ...» (πηγή: <https://www.europarl.europa.eu/news/el/headlines/society/20200109STO69925>). Στα παρακάτω θηκογράμματα φαίνονται συνοπτικά οι μηνιαίες αποδοχές ανδρών και γυναικών (σε ευρώ) σε μια μεγάλη επιχείρηση. Γνωρίζουμε ότι η επιχείρηση απασχολεί 357 γυναίκες και 433 άνδρες και ότι όλες οι θέσεις εργασίας μπορούν να καλύπτονται είτε από γυναίκα είτε από άνδρα.



Αρκούν τα δεδομένα αυτά για να πούμε αν σε αυτή την επιχείρηση ισχύει ή όχι η αρχή της «ίσης αμοιβής για ίση εργασία»;

Απάντηση

Από τα θηκογράμματα φαίνεται ότι για τις αποδοχές των γυναικών τα τρία τεταρτημόρια είναι (περίπου) 800 ευρώ, 900 ευρώ και 980 ευρώ. Για τις αποδοχές των ανδρών τα τρία τεταρτημόρια είναι (περίπου) 850 ευρώ, 1.000 ευρώ και 1.200 ευρώ.

Από τα παραπάνω φαίνεται ότι το 50% των ανδρών έχει αμοιβές 1.000 ευρώ ή περισσότερα. Αντίθετα, οι γυναίκες που έχουν αμοιβές πάνω από 1.000 ευρώ είναι λιγότερες από το 25%.

Επίσης, παρατηρούμε ότι οι αμοιβές που βρίσκονται μεταξύ του πρώτου και του τρίτου τεταρτημορίου είναι για τους άνδρες από 850 μέχρι 1.200 ευρώ, ενώ για τις γυναίκες από 800 μέχρι 980 ευρώ. Δηλαδή οι αμοιβές του «μεσαίου» 50% για τις γυναίκες είναι χαμηλότερες από ό,τι για τους άνδρες.

Τέλος, οι μισθοί των ανδρών φτάνουν μέχρι τα 2.000 ευρώ, ενώ η μέγιστη τιμή των μισθών για τις γυναίκες είναι 1.350 ευρώ.

Με βάση τα παραπάνω, μπορούμε να πούμε ότι στην επιχείρηση αυτή δεν ισχύει η αρχή της «ίσης αμοιβής για ίση εργασία».



Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε

Οι ηλικίες των 50 ανθρώπων που μαθαίνουν ένα παραδοσιακό μουσικό όργανο σε ένα δημοτικό πολιτιστικό κέντρο φαίνονται στο διπλανό φυλλόγραμμα.

α) Να κατασκευάσετε ένα ιστόγραμμα (με κλάσεις όπως φαίνονται στο φυλλόγραμμα) και ένα θηκογράμμα για τα παραπάνω δεδομένα.

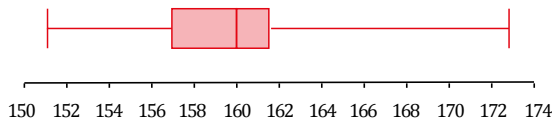
β) Πόσοι μαθητές παραδοσιακών οργάνων είναι κάτω

1		1	2	2	3	4	4	4	6	8	9
2		0	0	1	1	2	2	3	5	7	8
3		0	0	2	6	6	7	7	8	9	
4		1	2	2	4	5	6	6	7	8	
5		0	2	7	7	8	9				
6		0	0	1	2	4					

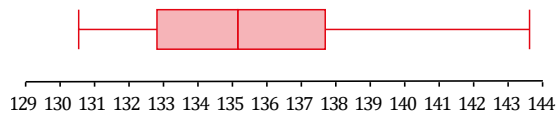
Υπόμνημα

Το 2 | 1 σημαίνει 21.

Χρόνοι γυναικών νικητριών Μαραθωνίου



Χρόνοι ανδρών νικητών Μαραθωνίου

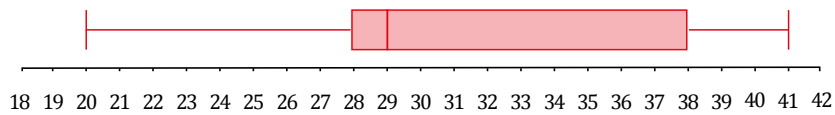


Με βάση αυτά τα θηκογράμματα, να βρείτε (προσεγγιστικά) την «περίληψη των πέντε αριθμών», το εύρος και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος για τους άνδρες και για τις γυναίκες.



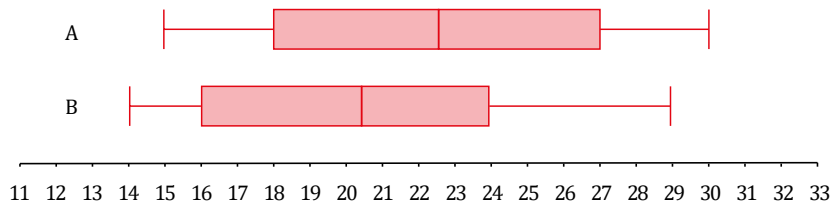
Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

5. Να βρείτε ποιο ή ποια από τα παρακάτω σύνολα δεδομένων μπορεί να αντιστοιχούν στο θηκογράμμα. Εξηγήστε την επιλογή σας και συζητήστε τη με τους συμμαθητές και τις συμμαθήτριάς σας.

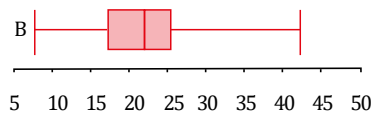
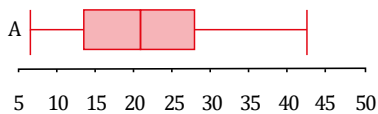
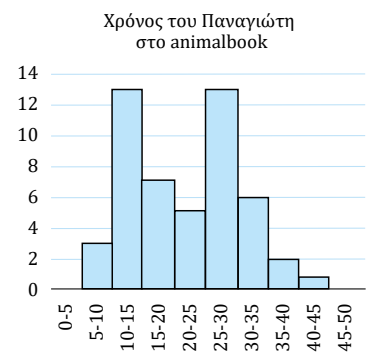
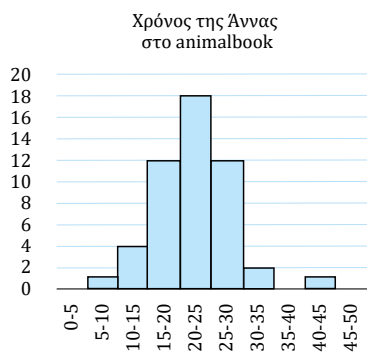


- α) 20, 26, 28, 28, 28, 30, 30, 38, 40, 41 β) 20, 21, 28, 28, 29, 29, 35, 38, 39, 41
 γ) 20, 21, 27, 28, 29, 29, 35, 38, 39, 41 δ) 20, 21, 28, 28, 28, 29, 35, 38, 39, 41

6. Στα παρακάτω θηκογράμματα παρουσιάζονται συνοπτικά δύο ομάδες δεδομένων, η ομάδα Α και η ομάδα Β. Ποιο από τα δύο έχει μεγαλύτερη μεταβλητότητα; Εξηγήστε την απάντησή σας.



7. Το animalbook είναι ένα φιλοζωικό κοινωνικό δίκτυο. Στα διπλανά ιστογράμματα φαίνονται οι χρόνοι που πέρασαν η Άννα και ο Παναγιώτης καθημερινά στο animalbook στη διάρκεια δύο μηνών. Τα δύο θηκογράμματα περιγράφουν συνοπτικά τα παραπάνω δεδομένα. Ποιο από τα θηκογράμματα αντιστοιχεί στον χρόνο της Άννας και ποιο στον χρόνο του Παναγιώτη; Εξηγήστε την απάντησή σας και συζητήστε τη στην τάξη.



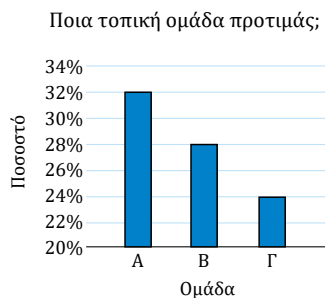
Στατιστική

Ερωτήσεις – ασκήσεις – προβλήματα

1. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω ισχυρισμοί είναι σωστοί ή λανθασμένοι.

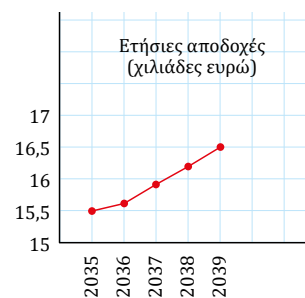
- α) Αν καταγράψουμε τον αριθμό των φύλλων που έχει ένα φυτό κάθε Δευτέρα ολόκληρου του χρόνου, τα δεδομένα που συλλέγουμε είναι χρονικά.
- β) Αν καταγράψουμε ανά τμήμα τον αριθμό των παιδιών ενός μεγάλου γυμνασίου, τα δεδομένα αυτά μπορούμε να τα αναπαραστήσουμε με ένα χρονοδιάγραμμα.
- γ) Ένα σύνολο στατιστικών δεδομένων μπορούμε να το αναπαραστήσουμε με ένα μόνο διάγραμμα.
- δ) Αν σε ένα σύνολο δεδομένων το πρώτο τεταρτημόριο είναι 5 και η διάμεσος είναι 10, το 50% των παρατηρήσεων είναι ανάμεσα στο 5 και το 10.
- ε) Αν γράψω σε όλα τα τεστ μία μονάδα παραπάνω, τότε και ο μέσος όρος των γραπτών θα ανέβει κατά μία μονάδα.
- στ) Το θηκόγραμμα είναι ένα διάγραμμα που μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε και για ποιοτικά δεδομένα.

2. Στο ραβδόγραμμα φαίνονται τα αποτελέσματα μιας μικρής έρευνας για την προτίμηση των παιδιών ενός γυμνασίου σε τοπικές ποδοσφαιρικές ομάδες.



Να εξετάσετε αν καθένας από τους παρακάτω ισχυρισμούς είναι σωστός ή λανθασμένος.

- α) Η ομάδα Γ έχει το ένα τρίτο των προτιμήσεων της Α.
 - β) Η ομάδα Β έχει τις διπλάσιες προτιμήσεις από τη Γ.
 - γ) Οι προτιμήσεις προς την ομάδα Α είναι πολύ περισσότερες από τις προτιμήσεις προς την ομάδα Β.
 - δ) Περίπου το ένα τρίτο εκείνων που ρωτήθηκαν προτιμούν την ομάδα Α.
 - ε) Υπάρχουν παιδιά που δεν προτιμούν καμία από τις ομάδες Α, Β και Γ.
3. Ένας επιχειρηματίας δείχνει στο σωματείο των εργαζομένων το παρακάτω χρονοδιάγραμμα. Ισχυρίζεται ότι οι ετήσιες αποδοχές των εργαζομένων του σημείωσαν πολύ μεγάλη αύξηση. Συμφωνείτε ή όχι με τον ισχυρισμό αυτό; Εξηγήστε την απάντησή σας.



4. Στο χρονοδιάγραμμα της επόμενης σελίδας φαίνεται η εξέλιξη των γεννήσεων παιδιών που οι μητέρες τους είχαν τόπο κατοικίας στον νομό Χαλκιδικής (πηγή: ΕΛΣΤΑΤ).



Με βάση αυτό το χρονοδιάγραμμα, απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις:

- α)** Ποιος ήταν ο μέγιστος και ποιος ο ελάχιστος αριθμός γεννήσεων και πότε συνέβησαν;
- β)** Είναι σωστός ή λανθασμένος ο ισχυρισμός: «το 1993 και το 2015 είχαμε περίπου ίσο αριθμό γεννήσεων»;
- γ)** Ποια ή ποιες χρονιές είχαμε περίπου 1.100 γεννήσεις;
- δ)** Να εντοπίσετε μια πενταετία που οι γεννήσεις αυξάνονταν και μια πενταετία που οι γεννήσεις μειώνονταν.
- 5.** Η μέση αξία κάποιων βιβλίων που αγόρασε ένα σχολείο ήταν 12 ευρώ. Αλλά επιπλέον πλήρωσε 20% ΦΠΑ για κάθε βιβλίο και 0,5 ευρώ για κάλυμμα κάθε βιβλίου. Ποιο είναι το μέσο κόστος του βιβλίου που πλήρωσε το σχολείο; Έχει διαφορά αν υπολογίσουμε πρώτα τον ΦΠΑ και μετά το κόστος για το κάλυμμα από το να το υπολογίσουμε αντίστροφα;

- 6.** Να βρείτε τη διάμεσο, το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος για τα παρακάτω σύνολα δεδομένων:

α) 2, 3, 5, 5, 8, 10, 10, 12

β) 5, 6, 6, 7, 9, 10, 10, 11, 11, 11, 12

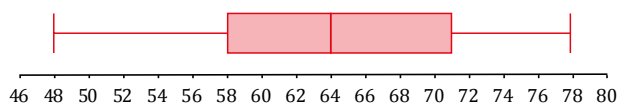
- 7.** Έχουμε τις μέγιστες θερμοκρασίες για τις 62 ημέρες του Ιουλίου και του Αυγούστου του 2022 στους Μολάους Λακωνίας. Αυτά τα δεδομένα έχουν ελάχιστη τιμή 27,9 °C, μέγιστη τιμή 40 °C, διάμεσο 34,4 °C, πρώτο τεταρτημόριο 32,2 °C και τρίτο τεταρτημόριο 36,1 °C (πηγή: <https://meteosearch.meteo.gr/>). Με βάση τα στοιχεία αυτά:

α) Ποιο ποσοστό των ημερών η μέγιστη θερμοκρασία ανέβηκε πάνω από 36,1 °C;

β) Ποιο ποσοστό των ημερών η μέγιστη θερμοκρασία ήταν μεταξύ 32,2 °C και 36,1 °C;

γ) Πόσες ημέρες η θερμοκρασία ήταν κάτω από 34,4 °C;

- 8.** Σε μια μικρή πτηνοτροφική μονάδα μέτρησαν το μέγεθος των αυγών (σε gr) που παράχθηκαν σε μία ημέρα. Τα αποτελέσματα φαίνονται συνοπτικά στο παρακάτω θηκόγραμμα:



α) Πόσα gr ήταν το μικρότερο αυγό και πόσα το μεγαλύτερο;

β) Ποιο είναι το μέγεθος του 50% των μεγαλύτερων αυγών;

γ) Αν γνωρίζουμε ότι μετρήθηκαν 1.000 αυγά, πόσα από αυτά είχαν μέγεθος:

i) κάτω από 58 gr; **ii)** από 58 gr έως 71 gr;

- 9.** Οι ηλικίες των ανδρών που συμμετέχουν ως παίκτες σε ένα τουρνουά βόλεϊ φαίνονται στο παρακάτω φυλλάγραμμα:

1		6	6	7	7	8	9	9	9							
2		0	0	0	1	1	2	2	3	5	6	6	7	8	8	9
3		1	2	3	4	4	5	6	7	7	8	9	9			
4		0	0	1	1	2										

Υπόμνημα

Το 2 | 1 σημαίνει 21.

α) Να κατασκευάσετε ένα ιστόγραμμα (με κλάσεις όπως φαίνονται στο φυλλάγραμμα) και ένα θηκόγραμμα για τα παραπάνω δεδομένα.

β) Πόσοι αθλητές είναι κάτω από 20 ετών; Πόσοι είναι από 30 και πάνω; Ποια είναι η διάμεση ηλικία; Ποιο είναι το ποσοστό των αθλητών που έχουν ηλικία από 20 έως 29; Ποιες είναι οι ηλικίες του 25% των νεότερων αθλητών; Σκεφτείτε

ποιο από τα τρία διαγράμματα (φυλλόγραμμα, ιστόγραμμα, θηκόγραμμα) είναι πιο χρήσιμο για να απαντηθούν αυτές οι ερωτήσεις.



Μέτρα θέσης και μεταβλητότητας

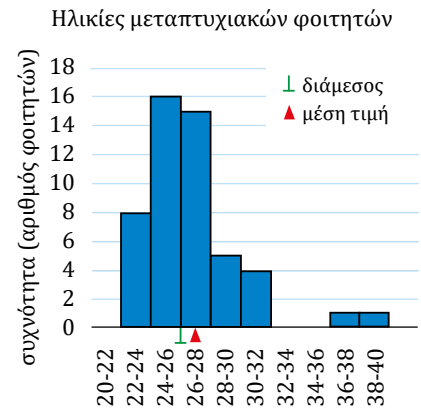
Συνδέσεις και επεκτάσεις

10. Στο διπλανό ιστόγραμμα φαίνονται οι ηλικίες 50 μεταπτυχιακών φοιτητών. Πάνω στο ιστόγραμμα είναι σημειωμένες η μέση τιμή (26,9 χρόνια) και η διάμεσος (26 χρόνια). Το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο είναι ίσα με 25 χρόνια και 27,8 χρόνια αντίστοιχα. Να γράψετε ένα μικρό κείμενο για να ερμηνεύσετε (με βάση το ιστόγραμμα):

- α) γιατί η μέση τιμή είναι δεξιότερα από τη διάμεσο,
- β) γιατί τα τεταρτημόρια είναι κοντά στη διάμεσο.



Δεδομένα και συμπεράσματα



Ομαδική εργασία

11. Να σχεδιάσετε και να υλοποιήσετε μια μικρή στατιστική έρευνα: Σκεφτείτε ένα θέμα, σχεδιάστε τα ερωτήματα και προσδιορίστε τον πληθυσμό από τον οποίο θα μαζέψετε τα δεδομένα. Μέρος ή και όλα τα δεδομένα σας πρέπει να είναι ποσοτικά. Συγκεντρώστε τα δεδομένα, αναλύστε τα και παρουσιάστε τα. Για μια αναλυτικότερη περιγραφή των διαδικασιών σχεδιασμού και υλοποίησης μιας στατιστικής έρευνας δείτε δίπλα το «Οδηγίες εκπόνησης στατιστικής έρευνας».



Οδηγίες εκπόνησης στατιστικής έρευνας



ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ 8:

Πειράματα τύχης και πιθανότητες

Για να λύσουμε προβλήματα με πειράματα τύχης, δηλαδή προβλήματα πιθανοτήτων, χρειάζεται να μετρήσουμε ή να υπολογίσουμε το πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων των πειραμάτων αυτών.

Συχνά η μέτρηση είναι όχι μόνο δύσκολη, αλλά και χρονοβόρα. Άρα είναι χρήσιμο να μπορούμε να βρούμε το πλήθος όλων των δυνατών τρόπων εξέλιξης τέτοιων πειραμάτων, ή ακόμα και τις πιθανότητες ενδεχομένων, χωρίς να κάνουμε καταγραφές ή μετρήσεις ένα προς ένα, αλλά με υπολογισμούς.

ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΕΝΟΤΗΤΕΣ:

- 8.1 Βασική αρχή απαρίθμησης: η πολλαπλασιαστική αρχή
- 8.2 Ασυμβίβαστα ενδεχόμενα

Δ1. Ο ιδανικός αριθμός

Ο αριθμός κυκλοφορίας του νέου αυτοκινήτου της Αναστασίας θα έχει πρώτα τα γράμματα ΗΚΙ και μετά 4 αριθμητικά ψηφία.

Αν οι αριθμοί επιλέγονται τυχαία, ποια είναι η πιθανότητα οι αριθμοί να αντιστοιχούν στην ημερομηνία γέννησης της Αναστασίας; Συζητήστε στην ομάδα σας και μετά στην τάξη.

Η Αναστασία έχει γεννηθεί στις 9/1/05 (δηλαδή στις 9 Ιανουαρίου του 2005).

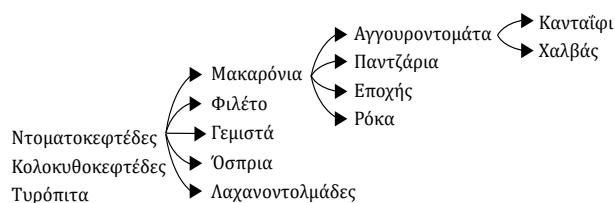


Συζητάμε

...για την απαρίθμηση

Ας σκεφτούμε μια διαδικασία επιλογής που μπορεί να πραγματοποιηθεί σε διαδοχικά στάδια, π.χ. την επιλογή γεύματος από τον κατάλογο του εστιατορίου «Τα πράσινα πιρούνια», όπου πρέπει να επιλέξουμε ένα πιάτο από κάθε κατηγορία. Η επιλογή κάθε πιάτου είναι ανεξάρτητη από τα υπόλοιπα πιάτα. Αν, για παράδειγμα, επιλέξουμε ως ορεκτικό τους ντοματοκεφτέδες, αυτή η επιλογή δε μας εμποδίζει να επιλέξουμε οποιοδήποτε από τα κυρίως πιάτα, τις σαλάτες και τα επιδόρπια.

Έτσι, μπορούμε να επιλέξουμε το ορεκτικό με 3 τρόπους (1ο στάδιο). Για καθέναν από αυτούς, μπορούμε να επιλέξουμε το κυρίως πιάτο με 5 τρόπους (2ο στάδιο). Άρα το ορεκτικό και το κυρίως πιάτο επιλέγονται με $3 \cdot 5 = 15$ τρόπους. Στη συνέχεια (3ο στάδιο) επιλέγουμε τη σαλάτα με 4 τρόπους. Άρα η επιλογή πιάτων εκτός επιδορπίου μπορεί να γίνει με $3 \cdot 5 \cdot 4 = 60$ τρόπους. Τέλος, επιλέγουμε το επιδόρπιο με 2 τρόπους (4ο στάδιο). Άρα η επιλογή του γεύματος μπορεί να γίνει με $3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 = 120$ τρόπους.



ΕΣΤΙΑΤΟΡΙΟ «ΤΑ ΠΡΑΣΙΝΑ ΠΙΡΟΥΝΙΑ»			
ΟΡΕΚΤΙΚΑ	ΚΥΡΙΩΣ ΠΙΑΤΑ	ΣΑΛΑΤΕΣ	ΕΠΙΔΟΡΠΙΑ
Ντοματοκεφτέδες	Μακαρόνια	Αγγουροντομάτα	Κανταΐφι
Κολοκυθοκεφτέδες	Φιλέτο	Παντζάρια	Χαλβάς
Τυρόπιτα	Γεμιστά	Εποχής	
	Όσπρια	Ρόκα	
	Λαχανοντολμάδες		

Ο παραπάνω υπολογισμός στηρίζεται στη **βασική αρχή απαρίθμησης** και συγκριμένα στην πολλαπλασιαστική αρχή.



Δενδροδιάγραμμα



Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Η πολλαπλασιαστική αρχή

Αν μια διαδικασία επιλογής πραγματοποιείται σε διαδοχικά στάδια, ανεξάρτητα μεταξύ τους, τότε, για να υπολογίσουμε το συνολικό πλήθος των τρόπων επιλογής, πολλαπλασιάζουμε τους τρόπους επιλογής κάθε σταδίου.

Στην παραπάνω επιλογή γεύματος, η επιλογή ενός πιάτου ήταν ανεξάρτητη από τις άλλες τρεις.

Αν υπάρχουν περιορισμοί, όπως ότι το κυρίως πιάτο «φιλέτο» συνοδεύεται μόνο από σαλάτα «ρόκα», τότε οι επιλογές δεν είναι ανεξάρτητες.



Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. Ένας πελάτης του εστιατορίου «Τα πράσινα πιρούνια» ζητά από τον σερβιτόρο να επιλέξει τυχαία ένα γεύμα τεσσάρων πιάτων (ορεκτικό, κυρίως πιάτο, σαλάτα, επιδόρπιο). Να υπολογίσετε την πιθανότητα το γεύμα να μην έχει ντοματοκεφτέδες, φιλέτο και κανταΐφι.

Απάντηση

Το σύνολο των πιθανών γευμάτων είναι 120.

Αν εξαιρέσουμε τους ντοματοκεφτέδες, το φιλέτο και το κανταΐφι, τότε:

- Μπορούμε να επιλέξουμε το ορεκτικό με $3 - 1 = 2$ τρόπους.
- Για καθέναν από αυτούς, το κυρίως πιάτο το επιλέγουμε με $5 - 1 = 4$ τρόπους.
- Στη συνέχεια επιλέγουμε τη σαλάτα με 4 τρόπους.
- Για το επιδόρπιο υπάρχει μόνο 1 επιλογή, ο χαλβάς, εφόσον εξαιρείται το κανταΐφι.



Θεωρούμε ότι η τυχαία επιλογή γεύματος είναι ένα πείραμα τύχης.

Θυμόμαστε ότι:

Η πιθανότητα $P(A)$ ενός ενδεχομένου A πειράματος τύχης εκφράζει τον βαθμό βεβαιότητάς μας για την πραγματοποίηση του ενδεχομένου A .

Σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό πιθανότητας, αν το πείραμα τύχης έχει ισοπίθανα αποτελέσματα πλήθους δ , και ϵ από αυτά είναι ευνοϊκά για το A , τότε: $P(A) = \frac{\text{πλήθος ευνοϊκών αποτελεσμάτων}}{\text{πλήθος όλων των αποτελεσμάτων}} = \frac{\epsilon}{\delta}$.

Σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή, το ενδεχόμενο «το γεύμα δεν έχει ντοματοκεφτέδες, φιλέτο και κανταΐφι» έχει $2 \cdot 4 \cdot 4 = 32$ ευνοϊκά αποτελέσματα.

Για το επιδόρπιο υπάρχει 1 επιλογή, άρα δεν επηρεάζει το πλήθος των τρόπων.

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\frac{32}{120} = \frac{4}{15}$$

Πιθανότητα ενδεχομένου:

$$\frac{\text{ευνοϊκά αποτελέσματα}}{\text{όλα τα αποτελέσματα}}$$

- 2. α)** Έχουμε 4 διαφορετικά δώρα, μια μπάλα, ένα επιτραπέζιο παιχνίδι, ένα ημερολόγιο και μια κούπα, και θέλουμε να τα δώσουμε σε 4 παιδιά. Μοιράζουμε τα δώρα στα παιδιά τυχαία.
- i)** Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να πάρουν τα παιδιά τα δώρα;
- ii)** Ένα από τα παιδιά είναι η Χριστίνα. Ποια είναι η πιθανότητα η Χριστίνα να πάρει το ημερολόγιο;
- β)** Να απαντήσετε στα υποερωτήματα (i) και (ii) του ερωτήματος (α), αν έχουμε δύο ακόμα δώρα, μια κασετίνα και ένα μπρελόκ.

Απάντηση

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα παιδιά παίρνουν τα δώρα τυχαία, το ένα μετά το άλλο.

- α) i)** Για το παιδί που παίρνει πρώτο υπάρχουν 4 επιλογές δώρου.

Για το παιδί που παίρνει δεύτερο υπάρχουν 3 επιλογές.

Για το τρίτο παιδί υπάρχουν 2 επιλογές, ενώ το τέταρτο έχει 1 επιλογή.

Σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή, υπάρχουν $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ τρόποι να μοιραστούν τα δώρα στα παιδιά.

- ii)** Ονομάζουμε το ενδεχόμενο A: «Η Χριστίνα παίρνει το ημερολόγιο».

Τα ευνοϊκά αποτελέσματα του A είναι εκείνα που η Χριστίνα παίρνει το ημερολόγιο, ενώ τα υπόλοιπα δώρα μοιράζονται με όλους τους δυνατούς τρόπους. Αυτούς μπορούμε να τους υπολογίσουμε αν θεωρήσουμε τη Χριστίνα ως το πρώτο παιδί που πήρε το δώρο του (το ημερολόγιο). Τότε, για το δεύτερο παιδί υπάρχουν 3 επιλογές, για το τρίτο υπάρχουν 2 επιλογές και για το τέταρτο 1 επιλογή. Δηλαδή, σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή, υπάρχουν $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ τρόποι για να πάρει η Χριστίνα το ημερολόγιο. Άρα τα ευνοϊκά αποτελέσματα του A είναι 6.

Σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό πιθανότητας, η πιθανότητα του ενδεχομένου A είναι ίση με:

$$P(A) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

- β)** Αυτό που αλλάζει είναι ότι τα διαθέσιμα δώρα είναι 6.

- i)** Άρα, σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή, οι δυνατοί τρόποι να μοιραστούν τα δώρα τυχαία είναι $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$.

- ii)** Οι τρόποι που μοιράζονται τυχαία τα δώρα και η Χριστίνα παίρνει το ημερολόγιο είναι $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$, σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή.

Η πιθανότητα να πάρει τυχαία η Χριστίνα το ημερολόγιο, σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό πιθανότητας, είναι:

$$\frac{60}{360} = \frac{1}{6}$$



Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

- 1.** Με πόσους τρόπους:

- α)** γράφουμε μια πινακίδα κυκλοφορίας με 2 ελληνικά γράμματα και μετά 3 αριθμητικά ψηφία;
- β)** απαντάμε τυχαία σε ένα τεστ 10 ερωτήσεων σωστού-λάθους;



Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

2. Ένας αγώνας τένις ολοκληρώνεται όταν ένας από τους παίκτες κερδίσει δύο σετ. Ο αγώνας τένις μεταξύ των παικτών Α και Β τελείωσε στα 3 σετ, αλλά δεν ξέρουμε το σκορ. Το σκορ Α-Β-Α θα σήμαινε ότι κέρδισε ο Α το πρώτο και το τρίτο σετ και ο Β το δεύτερο. Συμφωνείτε με την πρόταση: «Τα δυνατά σκορ είναι $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ »;
3. Το εστιατόριο «Οικογενειακόν» έχει 2 ορεκτικά, 4 κυρίως πιάτα και 3 σαλάτες, αλλά προτιμώ μόνο μία τριάδα πιάτων. Επιλέγοντας τυχαία ένα πιάτο από κάθε κατηγορία, ποια είναι η πιθανότητα να είναι το γεύμα που προτιμώ;
4. Η αριθμός της φοιτητικής μου ταυτότητας έχει 2 ελληνικά γράμματα και μετά 4 αριθμητικά ψηφία. Ποια είναι η πιθανότητα να βρει κάποιος τυχαία τον αριθμό με μία προσπάθεια;
5. Ποια είναι η πιθανότητα να πληκτρολογήσω τυχαία 10 αριθμούς και να χτυπήσει το τηλέφωνο του σπιτιού μου;
6. Η σχολική αθλητική ομάδα μιας πόλης θα εκπροσωπήσει την Ελλάδα σε έναν διεθνή διαγωνισμό. Ο υπεύθυνος της ομάδας χρειάζεται να επιλέξει παπούτσια, παντελόνι, πουκάμισο, μπλούζα και μπουφάν για την εμφάνιση (στολή) της ομάδας. Οι επιλογές του φαίνονται στη διπλανή λίστα. Αν η επιλογή έγινε τυχαία, τότε να υπολογίσετε την πιθανότητα να επέλεξε:
- α)** μαύρα παπούτσια,
β) μπλε παπούτσια και τζιν,
γ) ένα από τα (α) και (β).
7. Η Άννα και άλλα 4 παιδιά κάθονται σε έναν καναπέ 5 θέσεων.
- α)** Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν;
β) Αν πούμε στα παιδιά να καθίσουν τυχαία στις 5 θέσεις, ποια είναι η πιθανότητα να κάθεται η Άννα στη μεσαία θέση;

<u>Παπούτσια</u>	<u>Παντελόνι</u>	<u>Πουκάμισο</u>
Μαύρα	Τζιν	Καρό
Καφέ	Κοτλέ	Ριγέ
Άσπρα		Μονόχρωμο
Μπλε		

<u>Μπλούζα</u>	<u>Μπουφάν</u>
Γκρι	Μαύρο
Καφέ	Κόκκινο
Μπεζ	Γκρι
Πράσινη	



Μεταθέσεις και διατάξεις

Δ1. Ποια είναι η πιθανότητα;

Ρίχνουμε δύο συνηθισμένα ζάρια, ένα μπλε και ένα κόκκινο.

- α) Να γράψετε όλα τα δυνατά αποτελέσματα για καθένα από τα ενδεχόμενα:
- Τα ζάρια φέρνουν τον ίδιο αριθμό.
 - Το μπλε φέρνει μεγαλύτερο αριθμό από το κόκκινο ζάρι.
 - Το μπλε φέρνει μεγαλύτερο ή ίσο αριθμό με το κόκκινο ζάρι.
- β) Ποια από τα παραπάνω ενδεχόμενα έχουν κοινά αποτελέσματα;
- γ) Ποια είναι η πιθανότητα καθενός από τα παραπάνω ενδεχόμενα;



Συζητάμε

...για ασυμβίβαστα ενδεχόμενα

Ένα κουτί έχει 40 μονόχρωμες μπάλες, κόκκινες ή πράσινες. Κάθε κόκκινη μπάλα έχει έναν αριθμό από 1 έως 20 και κάθε πράσινη έχει έναν αριθμό από 21 έως 40. Επιλέγουμε τυχαία μια μπάλα.

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα: Α: η μπάλα είναι κόκκινη, Β: η μπάλα είναι πράσινη, Γ: η μπάλα έχει μονοψήφιο αριθμό. Παρατηρούμε ότι:

- Τα Α και Β δεν έχουν κοινά ευνοϊκά αποτελέσματα και γι' αυτό τα ονομάζουμε ασυμβίβαστα.
- Από τα ευνοϊκά αποτελέσματα των Α και Γ, εκείνα που είναι κοινά και για τα δύο ενδεχόμενα είναι οι κόκκινες μπάλες με αριθμούς 1 έως 9. Άρα τα Α και Γ δεν είναι ασυμβίβαστα.



Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Ασυμβίβαστα ενδεχόμενα

Αν δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός πειράματος τύχης δεν έχουν κοινά ευνοϊκά αποτελέσματα, τότε τα ονομάζουμε ασυμβίβαστα.

Ρίχνουμε ένα συνηθισμένο κέρμα 3 φορές.

Τα ενδεχόμενα Α: «έρχεται Κ τις δύο πρώτες φορές» και Β: «έρχεται Γ τις δύο πρώτες φορές» είναι ασυμβίβαστα. Πράγματι:

Αν $\Omega = \{KKK, KKΓ, KΓΚ, ΚΓΓ, ΓΓΓ, ΓΓΚ, ΓΚΓ, ΓΚΚ\}$ ο δειγματικός χώρος, τότε τα $A = \{KKK, KKΓ\}$ και $B = \{ΓΓΓ, ΓΓΚ\}$ δεν έχουν κοινά ευνοϊκά αποτελέσματα.

Απλός προσθετικός νόμος

Αν τα Α και Β είναι ασυμβίβαστα ενδεχόμενα, τότε η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το Α ή το Β είναι ίση με το άθροισμα των πιθανοτήτων του Α και του Β.

Γράφουμε:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Με $A \cup B$ συμβολίζουμε το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθεί κάποιο από τα Α και Β.

Οι πιθανότητες των Α και Β είναι $P(A) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ και $P(B) = \frac{1}{4}$ αντίστοιχα.

Η πιθανότητα του ενδεχομένου «πραγματοποιείται κάποιο από τα Α και Β» είναι:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Πράγματι, $A \cup B = \{KKK, KKΓ, ΓΓΓ, ΓΓΚ\}$. Άρα $P(A \cup B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

Το σύμβολο \cup που συνδέει τα ενδεχόμενα Α και Β το λέμε «ένωση». Δηλαδή διαβάζουμε: «Α ένωση Β».



Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

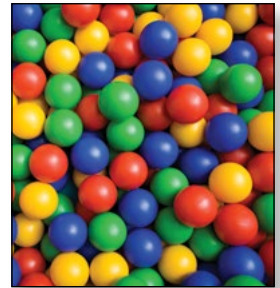
1. Ένα εστιατόριο σερβίρει στον εσωτερικό του χώρο και στην αυλή. Οι δύο σερβιτόροι του, ο Νίκος και ο Ιβάν, μοιράζουν τις παραγγελίες. Την Παρασκευή ο Νίκος σερβίρει ποτά και γλυκά και ο Ιβάν τα υπόλοιπα. Το Σάββατο ο Νίκος σερβίρει τα τραπέζια στον εσωτερικό χώρο και ο Ιβάν τα τραπέζια στην αυλή.
- α) Επιλέγουμε τυχαία ένα τραπέζι με πελάτες το Σάββατο και έχουμε τα ενδεχόμενα A: «σερβίρει ο Νίκος» και B: «σερβίρει ο Ιβάν». Είναι τα A και B ασυμβίβαστα;
- β) Ισχύει το ίδιο αν επιλέξουμε τυχαία ένα τραπέζι την Παρασκευή;



Απάντηση

- α) Το Σάββατο δεν υπάρχει κοινό τραπέζι και για τους δύο, γιατί δε γίνεται το ίδιο τραπέζι να βρίσκεται και στον εσωτερικό χώρο και στην αυλή του εστιατορίου. Άρα τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα.
- β) Την Παρασκευή, αν ένα τραπέζι παραγγείλει γλυκό και κυρίως πιάτο, τότε το σερβίρουν και οι δύο. Δηλαδή είναι κοινό ευνοϊκό αποτέλεσμα των A και B. Επομένως τα A και B δεν είναι ασυμβίβαστα.

2. Έχουμε ένα κουτί με 8 πράσινες, 5 κόκκινες και 7 άσπρες μπάλες. Επιλέγουμε τυχαία μία μπάλα. Να υπολογίσετε την πιθανότητα:
- α) να είναι πράσινη,
β) να είναι κόκκινη,
γ) να είναι πράσινη ή κόκκινη.



Απάντηση

Το κουτί περιέχει $8 + 5 + 7 = 20$ μπάλες.

- α) Σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό, η πιθανότητα η μπάλα να είναι πράσινη είναι $\frac{8}{20}$, γιατί οι πράσινες μπάλες είναι 8.
- β) Οι κόκκινες μπάλες είναι 5, άρα η πιθανότητα η μπάλα να είναι κόκκινη είναι $\frac{5}{20}$.

- γ) Τα ενδεχόμενα «η μπάλα είναι πράσινη» και «η μπάλα είναι κόκκινη» είναι ασυμβίβαστα, άρα η πιθανότητα του ενδεχομένου «η μπάλα είναι πράσινη ή κόκκινη» είναι $\frac{8}{20} + \frac{5}{20} = \frac{13}{20}$, σύμφωνα με τον απλό προσθετικό νόμο.

Ας θυμηθούμε ότι σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό η πιθανότητα ενός ενδεχομένου A είναι ίση με:

$$\frac{\text{ευνοϊκά αποτελέσματα του A}}{\text{όλα τα δυνατά αποτελέσματα}}$$



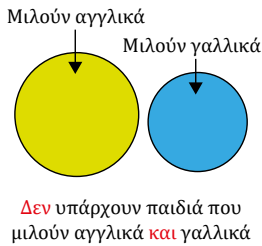
Παράδειγμα με κουτί και μπάλες

3. Επιλέγουμε τυχαία ένα παιδί από το γειτονικό γυμνάσιο. Τα ενδεχόμενα A: «το παιδί μιλά αγγλικά», Γ: «το παιδί μιλά γαλλικά» και $A \cup \Gamma$: «το παιδί μιλά αγγλικά ή γαλλικά» έχουν πιθανότητες $\frac{7}{10}$, $\frac{2}{10}$ και $\frac{8}{10}$ αντίστοιχα. Υπάρχουν παιδιά του γυμνασίου που μιλούν αγγλικά και γαλλικά;

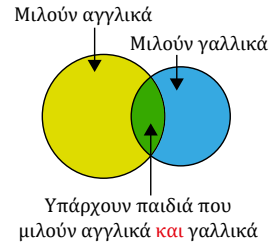
Απάντηση

Παρατηρούμε ότι $P(A) + P(B) = \frac{7}{10} + \frac{2}{10} = \frac{9}{10}$, ενώ $P(A \cup B) = \frac{8}{10}$, επομένως $P(A) + P(B) > P(A \cup B)$.

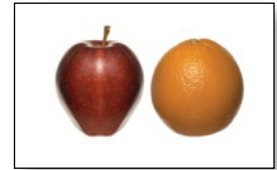
Αν τα A και Γ ήταν ασυμβίβαστα, θα ίσχυε ότι $P(A) + P(B) = P(A \cup B)$. Αυτό όμως δεν ισχύει, άρα δεν είναι ασυμβίβαστα. Συνεπώς υπάρχουν παιδιά που μιλούν αγγλικά και γαλλικά.



Τι από τα δύο ισχύει;



- 4.** Ο Κώστας ρώτησε την αδερφή του αν θέλει ένα φρούτο και εκείνη του είπε «δώσε μου ένα στην τύχη». Στο ψυγείο υπήρχαν μήλα και πορτοκάλια. Έπιασε τυχαία ένα φρούτο, χωρίς να κοιτάζει. Αν $\frac{3}{5}$ είναι η πιθανότητα να είναι μήλο, ποια είναι η πιθανότητα να είναι πορτοκάλι;



Απάντηση

Αν ονομάσουμε τα ενδεχόμενα M: «είναι μήλο» και Π: «είναι πορτοκάλι», τότε $M \cup \Pi$: «είναι μήλο ή πορτοκάλι». Τα M και Π είναι ασυμβίβαστα, άρα από τον απλό προσθετικό νόμο:

$$P(M \cup \Pi) = P(M) + P(\Pi) \quad \text{ή} \quad P(M \cup \Pi) = \frac{3}{5} + P(\Pi)$$

Όμως υπάρχουν μόνο μήλα και πορτοκάλια, άρα $P(M \cup \Pi) = 1$.

$$\Delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta} \frac{3}{5} + P(\Pi) = 1 \quad \text{ή} \quad P(\Pi) = 1 - \frac{3}{5} \quad \text{ή} \quad P(\Pi) = \frac{2}{5}.$$

- 5.** Επιλέγουμε τυχαία ένα στοιχείο 8 bit, δηλαδή έναν οκταψήφιο αριθμό του δυαδικού συστήματος. Ποια είναι η πιθανότητα τα τέσσερα πρώτα ή τα τέσσερα τελευταία ψηφία του να είναι 0, χωρίς να είναι το 00000000;

Στο δυαδικό σύστημα χρησιμοποιούμε μόνο τα ψηφία 0 και 1.

Απάντηση

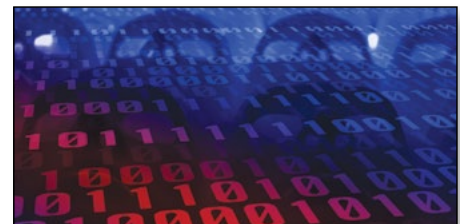
Κάθε ψηφίο από τα 8 μπορεί να επιλεγεί με 2 τρόπους και κάθε επιλογή είναι ανεξάρτητη από την προηγούμενη.

Άρα, σύμφωνα με τη βασική αρχή απαρίθμησης, ένα στοιχείο 8 bit επιλέγεται με $2^8 = 256$ τρόπους.

Ομοίως, ένα στοιχείο 8 bit που τα τέσσερα πρώτα του ψηφία είναι 0 μπορεί να επιλεγεί με $2^4 = 16$ τρόπους, γιατί καθένα από τα υπόλοιπα ψηφία του είναι 0 ή 1. Αν εξαιρέσουμε το 00000000, τότε είναι $16 - 1 = 15$ τρόποι.

Ομοίως για ένα στοιχείο 8 bit που τα τέσσερα τελευταία ψηφία του είναι 0.

Επιλέγουμε τυχαία ένα στοιχείο 8 bit. Έχουμε τα ενδεχόμενα: A: «το στοιχείο 8 bit δεν είναι το 00000000 και έχει τα τέσσερα πρώτα ψηφία του 0» και B: «το στοιχείο 8 bit δεν είναι το 00000000 και έχει τα τέσσερα τελευταία ψηφία του 0».



Όπως υπολογίσαμε, τα ευνοϊκά αποτελέσματα του A είναι 15, όπως και του B.
Άρα οι αντίστοιχες πιθανότητες είναι:

$$P(A) = \frac{15}{256} \quad P(B) = \frac{15}{256}$$

Τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα, καθώς δεν υπάρχει στοιχείο 8 bit που να έχει τα τέσσερα πρώτα και τα τέσσερα τελευταία ψηφία του 0, εκτός από το 00000000. Άρα, από τον απλό προσθετικό νόμο, η πιθανότητα του ενδεχομένου $A \cup B$: «τα τέσσερα πρώτα ή τα τέσσερα τελευταία ψηφία του στοιχείου 8 bit είναι 0, χωρίς να είναι το 00000000» είναι:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{30}{256} = \frac{15}{128}$$



Συμπλήρωμα
ενδεχομένου



Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

- Σε ποιες από τις επόμενες περιπτώσεις τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα;
 - Επιλέγετε τυχαία ένα βιβλίο από τη σχολική τσάντα σας.
 - A: «έχει μέχρι και 100 σελίδες», B: «έχει περισσότερες από 100 σελίδες».
 - A: «έχει μέχρι και 150 σελίδες», B: «έχει περισσότερες από 100 σελίδες».
 - Στρίβετε ένα συνηθισμένο κέρμα τρεις φορές:
 - A = {KKΓ, ΚΓΚ, ΓΚΚ}, B = {ΓΚΚ, ΓΚΓ, ΚΓΓ}.
 - A = {KKΓ, ΚΓΓ, ΓΚΓ, ΓΓΓ}, B = {KKK, ΚΓΓ, ΚΓΚ, ΚΚΓ}.
 - A: «έρχεται μία φορά Κ», B: «έρχεται μία φορά Γ».
- Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ).
 - Αν για δύο ενδεχόμενα ισχύει $P(A) = \frac{1}{2}$ και $P(B) = \frac{1}{3}$, τότε πάντοτε $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$.
 - Ρίχνουμε δύο συνηθισμένα ζάρια.
 - Για τα ενδεχόμενα «φέρνω άθροισμα μεγαλύτερο του 10» και «φέρνω άθροισμα μικρότερο του 6» ισχύει ο απλός προσθετικός νόμος.
 - Αν A: «έρχεται διπλή ζαριά» και B: «το άθροισμα των ενδείξεων είναι περιττός αριθμός», τότε $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- Μόλις τελείωσε η καταμέτρηση των ψηφοδελτίων για τις δημοτικές εκλογές στην πόλη σας, στην αίθουσα που κάνετε μάθημα. Τα ψηφοδέλτια είναι ανακατεμένα πάνω σε ένα τραπέζι, χωρίς να φαίνεται το όνομα του υποψήφιου δημάρχου ή του συνδυασμού. Αν πιάσουμε τυχαία ένα, τότε η πιθανότητα να ανήκει στον υποψήφιο A είναι $\frac{1}{4}$, ενώ η πιθανότητα να ανήκει στον υποψήφιο B είναι $\frac{1}{5}$. Να υπολογίσετε την πιθανότητα το ψηφοδέλτιο να ανήκει στον υποψήφιο A ή στον υποψήφιο B.



Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

4. Ρίχνω δύο συνηθισμένα ζάρια, το ένα μετά το άλλο. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες:

- α) Έρχεται διπλή ζαριά.
- β) Το πρώτο ζάρι φέρνει μεγαλύτερο αριθμό από το δεύτερο.
- γ) Το πρώτο ζάρι φέρνει ίσο ή μεγαλύτερο αριθμό από το δεύτερο.

		Δεύτερο ζάρι					
		1	2	3	4	5	6
Πρώτο ζάρι	1	11	12	13	14	15	16
	2	21	22	23	24	25	26
	3	31	32	33	34	35	36
	4	41	42	43	44	45	46
	5	51	52	53	54	55	56
	6	61	62	63	64	65	66

5. Τα ασυμβίβαστα ενδεχόμενα A και B ενός πειράματος τύχης έχουν πιθανότητες $\frac{1}{2}$ και $\frac{1}{4}$ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το A ή το B.

6. Έχω ένα τάπερ με ξηρούς καρπούς και επιλέγω έναν τυχαία. Η πιθανότητα να είναι αμύγδαλο είναι $\frac{1}{4}$, ενώ η πιθανότητα να είναι φιστίκι είναι $\frac{1}{5}$. Να υπολογίσετε την πιθανότητα:

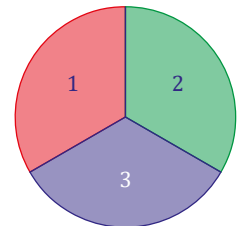
- α) Να είναι αμύγδαλο ή φιστίκι.
- β) Να μην είναι αμύγδαλο.
- γ) Να μην είναι ούτε αμύγδαλο ούτε φιστίκι.

7. Στρίβουμε ένα συνηθισμένο κέρμα τέσσερις φορές. Να γράψετε ένα ενδεχόμενο B που να είναι ασυμβίβαστο με το A: «έρχεται τουλάχιστον 3 φορές Κ (κεφαλή)». Στη συνέχεια να υπολογίσετε την πιθανότητα κάθε ενδεχομένου, όπως και του $A \cup B$.

8. Ο τροχός της τύχης του σχήματος είναι χωρισμένος σε 3 ίσα μέρη. Στρίβουμε τον τροχό δύο φορές και καταγράφουμε χρώμα και αριθμό.

Έχουμε τα ενδεχόμενα A: «έρχεται διαφορετικό χρώμα στα δύο στριψίματα», B: «το άθροισμα των δύο ενδείξεων είναι άρτιος» και Γ: «το άθροισμα των ενδείξεων είναι 2».

- α) Ποια από τα A, B και Γ είναι ασυμβίβαστα μεταξύ τους;
- β) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των A, B, Γ, $A \cup B$ και $A \cup \Gamma$.

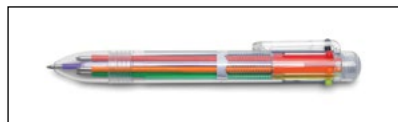


9. Ένα σχολικό λεωφορείο έχει 58 αριθμημένες θέσεις (από 1 έως 58). Οι 29 είναι δίπλα σε παράθυρο. Επιλέγουμε τυχαία μια θέση και ονομάζουμε τα ενδεχόμενα A: «αντιστοιχεί σε άρτιο αριθμό και είναι δίπλα σε παράθυρο» και B: «αντιστοιχεί σε περιττό αριθμό και είναι δίπλα σε παράθυρο».

- α) Είναι τα A και B ασυμβίβαστα;
- β) Να εκφράσετε λεκτικά το ενδεχόμενο $A \cup B$. Ποια είναι η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί;

γ) Αν $P(A) = \frac{7}{29}$, να υπολογίσετε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το B.

10. Επιλέγω τυχαία ένα στυλό από το συρτάρι μου. Η πιθανότητα να γράφει κόκκινο είναι $\frac{1}{2}$, η πιθανότητα να γράφει μπλε είναι $\frac{1}{3}$ και η πιθανότητα να γράφει κόκκινο ή μπλε είναι $\frac{2}{3}$. Υπάρχουν στυλό στο συρτάρι μου που γράφουν και μπλε και κόκκινο;



11. Δύο ενδεχόμενα A και B ενός πειράματος τύχης έχουν $P(A) = \frac{2}{3}$ και $P(B) = \frac{3}{4}$. Είναι τα ενδεχόμενα ασυμβίβαστα;
12. Στο φαρμακείο κάποια μέρα υπήρχαν διαγνωστικά τεστ ανίχνευσης των αντιγόνων A και B. Αν ο Παναγιώτης επέλεγε τυχαία ένα τεστ, τότε υπήρχε πιθανότητα $\frac{5}{8}$ να είναι για την ανίχνευση του A και $\frac{3}{4}$ να είναι για την ανίχνευση του B. Ένας πελάτης ζήτησε ένα τεστ ανίχνευσης και των δύο αντιγόνων. Υπήρχαν τέτοια τεστ στο φαρμακείο του Παναγιώτη εκείνη τη στιγμή;
13. Λόγω αγώνα δρόμου στο κέντρο της πόλης, το Σάββατο επιτρέπεται η κυκλοφορία των αυτοκινήτων με ζυγό αριθμό κυκλοφορίας και την Κυριακή με μονό. Όλοι οι ένοικοι ενός κτιριακού συγκροτήματος της πόλης έχουν αυτοκίνητα. Η πιθανότητα ένας ένοικος του συγκροτήματος να μπορεί να κυκλοφορήσει με αυτοκίνητο το Σάββατο είναι $\frac{2}{5}$. Είναι σωστή η πρόταση «Η αντίστοιχη πιθανότητα για την Κυριακή είναι $\frac{3}{5}$ »;



Τα διαγράμματα Venn

Πειράματα τύχης και πιθανότητες

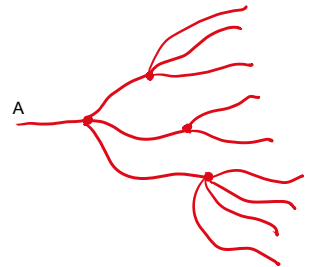
Ερωτήσεις – ασκήσεις – προβλήματα

- Σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις τα ενδεχόμενα A και B είναι πάντοτε ασυμβίβαστα;

 - Στρίβουμε τρία συνηθισμένα κέρματα. A: «έρχεται μόνο κεφαλή» και B: «έρχεται μόνο γράμματα».
 - Ρίχνουμε δύο συνηθισμένα ζάρια, ένα πράσινο και ένα κόκκινο. A: «το κόκκινο ζάρι φέρνει 6» και B: «το πράσινο ζάρι φέρνει 6».
 - Επιλέγουμε τυχαία ένα παιδί από ένα τμήμα της Α΄ Γυμνασίου. A: «είναι κορίτσι» και B: «κάθεται στο πρώτο θρανίο».
 - Βάζω το χέρι μου στη φρουτολεκάνη του ψυγείου και διαλέγω τυχαία ένα φρούτο. A: «είναι μήλο» και B: «είναι αχλάδι».
- Ποιες από τις επόμενες προτάσεις είναι σωστές (Σ) και ποιες λανθασμένες (Λ) για δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα A και B ενός πειράματος τύχης;

 - Δεν έχουν κοινά δυνατά αποτελέσματα.
 - $P(A) + P(B) = P(A \cup B)$.
 - Είναι το ίδιο πιθανό να πραγματοποιηθούν.
 - Δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν και τα δύο στην ίδια εκτέλεση του πειράματος τύχης.
 - Δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί το A και στην επόμενη εκτέλεση του πειράματος τύχης να πραγματοποιηθεί το B.
- Θέλετε να ταξιδέψετε από τη Θεσσαλονίκη στη Ρόδο μέσω Αθήνας. Από τη Θεσσαλονίκη στην Αθήνα μπορείτε να χρησιμοποιήσετε αυτοκίνητο, λεωφορείο, αεροπλάνο ή τρένο. Από την Αθήνα στη Ρόδο μπορείτε να χρησιμοποιήσετε πλοίο ή αεροπλάνο.
- Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορείτε να κάνετε το ταξίδι Θεσσαλονίκη – Αθήνα – Ρόδος;
- Ξεκινώντας να διερευνάτε το κόστος του ταξιδιού σας σε μια σχετική ιστοσελίδα, επιλέξατε τυχαία έναν τρόπο μετακίνησης. Ποια είναι η πιθανότητα ο τρόπος αυτός να περιλαμβάνει μετακίνηση με αεροπλάνο;
- Χρησιμοποιώντας τη βασική αρχή απαρίθμησης (πολλαπλασιαστική αρχή), να υπολογίσετε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν:

 - 5 παιδιά σε 5 διαδοχικές θέσεις,
 - 7 παιδιά σε 5 διαφορετικές θέσεις.
- Στο σχήμα φαίνεται ο χάρτης μονοπατιών με αφετηρία το σημείο A. Συμφωνείτε με την πρόταση: «Από τη βασική αρχή απαρίθμησης υπάρχουν $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 = 72$ διαφορετικές διαδρομές που μπορεί να ακολουθήσει κανείς»;
- Να σχεδιάσετε έναν δικό σας χάρτη, όπως της προηγούμενης άσκησης, στον οποίο οι διαφορετικές διαδρομές να είναι $3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 = 72$, σύμφωνα με τη βασική αρχή απαρίθμησης.
- Στον τελικό του σχολικού πρωταθλήματος μπάσκετ έχουν προκριθεί τα τμήματα Β5 και Γ2. Πρωταθλήτρια ομάδα είναι αυτή που θα κερδίσει στους τελικούς τρεις φορές την άλλη. Για παράδειγμα, στους δύο παρακάτω πίνακες καταγραφής των νικών κερδίζει το πρωτάθλημα το Γ2.



Τρίλιζα στις πιθανότητες

Αγώνας	1ος	2ος	3ος	4ος	5ος
Νικήτρια	Γ2	Β5	Β5	Γ2	Γ2

Αγώνας	1ος	2ος	3ος	4ος
Νικήτρια	B5	Γ2	Γ2	Γ2

Συμφωνείτε με την πρόταση: «Υπάρχουν $2^5 = 32$ διαφορετικοί πίνακες καταγραφής νικών που μπορεί να προκύψουν»;

Συνδέσεις και επεκτάσεις

8. Να υπολογίσετε την πιθανότητα: «ο τελικός του πρωταθλήματος μπάσκετ της προηγούμενης άσκησης τελειώνει σε 3 αγώνες».
9. Έχουμε 4 διαφορετικές επιστολές και 5 φακέλους διαφορετικών χρωμάτων.
- α) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε τις επιστολές στους φακέλους (μία σε κάθε φάκελο);
- β) Αν τα χρώματα των φακέλων είναι πράσινο, μπλε, κόκκινο, άσπρο και κίτρινο, να υπολογίσετε την πιθανότητα να μη χρησιμοποιηθεί ο άσπρος φάκελος. Στη συνέχεια να υπολογίσετε την πιθανότητα να χρησιμοποιηθεί ο άσπρος φάκελος.
10. Στην κλήρωση του λαχείου κληρώνεται η σειρά (από 1 έως 10) και τα ψηφία του αριθμού (πενταψήφιος από 00001 έως 99999). Για να κερδίσεις τον πρώτο αριθμό, πρέπει ο λαχνός σου να ανήκει στη σειρά και να έχει τον αριθμό που κληρώθηκε. Ποια είναι η πιθανότητα:
- α) να κερδίσεις τον πρώτο αριθμό;
- β) ο πρώτος αριθμός να ανήκει:
- i) στην 3η σειρά;
- ii) στην 3η, στην 5η ή στην 9η σειρά;
11. Το 40% των παιδιών ενός σχολείου παίζει μόνο μπάσκετ, το 50% παίζει μόνο ποδόσφαιρο και τα υπόλοιπα παιδιά δεν παίζουν κανένα άθλημα. Επίσης, το 35% των παιδιών του ίδιου σχολείου μιλάει γαλλικά και το 85% μιλάει αγγλικά.
- α) Να χωρίσετε τα παιδιά του σχολείου, ως προς ένα χαρακτηριστικό τους, σε δύο ομάδες A και B, που να μην έχουν κοινά στοιχεία μεταξύ τους.
- β) Επιλέγουμε τυχαία ένα παιδί του σχολείου. Ποια είναι η πιθανότητα το παιδί που επιλέξαμε να ανήκει στην ομάδα A του ερωτήματος (α);



Ομάδες



Πείραμα τύχης

Ομαδική εργασία

12. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα της έννοιας «ασυμβίβαστα ενδεχόμενα», γράφοντας τον ορισμό, επιπλέον χαρακτηριστικά και άλλα παραδείγματα ή «μη παραδείγματα». Στη συνέχεια να παρουσιάσετε τους πίνακές σας στην τάξη.

Ορισμός	Χαρακτηριστικά Αν A και B είναι ασυμβίβαστα, τότε $P(A) + P(B) = P(A \cup B)$.
Παραδείγματα είναι Στρίβουμε ένα κέρμα: $A = \{ΚΓ, ΓΚ\}$ και $B = \{ΚΚ, ΓΓ\}$	Παραδείγματα δεν είναι Επιλέγουμε τυχαία ένα παιδί από την τάξη μας. A είναι το ενδεχόμενο να παίζει μπάσκετ και B να παίζει ποδόσφαιρο, ενώ στην τάξη μας υπάρχουν παιδιά που παίζουν και τα δύο αθλήματα.

13. Να σχεδιάσετε τον πίνακα της έννοιας «μη ασυμβίβαστα ενδεχόμενα» με αντίστοιχο τρόπο όπως στην προηγούμενη άσκηση.

14. α) Μια επιχείρηση πώλησης οικιακών συσκευών (πλυντήρια, ψυγεία, κουζίνες κτλ.) έχει δύο καταστήματα στην ίδια πόλη, το ένα στην οδό Μ.Κ. και το άλλο στην οδό Δ.Λ. Η επιχείρηση έκανε μια έρευνα για την ικανοποίηση των πελατών της τον προηγούμενο μήνα. Έτσι, κάθε πελάτης συμπλήρωσε ένα σύντομο ανώνυμο ερωτηματολόγιο, δηλώνοντας ικανοποιημένος ή μη ικανοποιημένος (δεν υπήρχε άλλη επιλογή).

Τα αποτελέσματα της έρευνας συγκεντρώθηκαν και μελετήθηκαν από τους υπεύθυνους πωλήσεων και τη διεύθυνση τους καταστήματος.

Σύμφωνα με αυτά, υπολογίστηκαν οι πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων, για τους πελάτες που συμμετείχαν στην έρευνα:

- Ο τυχαίος πελάτης είναι ικανοποιημένος: πιθανότητα 83,6%.
- Ο τυχαίος πελάτης δεν είναι ικανοποιημένος: πιθανότητα 16,4%.
- Ο τυχαίος πελάτης εξυπηρετήθηκε στο κατάστημα της οδού Μ.Κ.: πιθανότητα 80%.
- Ο τυχαίος πελάτης εξυπηρετήθηκε στο κατάστημα της οδού Μ.Κ. και ήταν ικανοποιημένος: πιθανότητα 64%.
- Ο τυχαίος πελάτης εξυπηρετήθηκε στο κατάστημα της οδού Δ.Λ. και δεν ήταν ικανοποιημένος: πιθανότητα 0,4%.
- Ο τυχαίος πελάτης εξυπηρετήθηκε στο κατάστημα της οδού Μ.Κ. και δεν ήταν ικανοποιημένος: πιθανότητα 16%.

Ποια συμπεράσματα μπορείτε να βγάλετε από τις παραπάνω πιθανότητες για τη λειτουργία της επιχείρησης σε σχέση με τον βαθμό ικανοποίησης των πελατών;

Να παρουσιάσετε τα συμπεράσματά σας στην ολομέλεια της τάξης σας. Μπορείτε να σχεδιάσετε στατιστικά διαγράμματα, ώστε να στηρίξετε τα συμπεράσματά σας και να τα παρουσιάσετε πιο αποτελεσματικά;

β) Να διεξαγάγετε μια παρόμοια έρευνα, με ένα θέμα της επιλογής σας, και να την υλοποιήσετε.

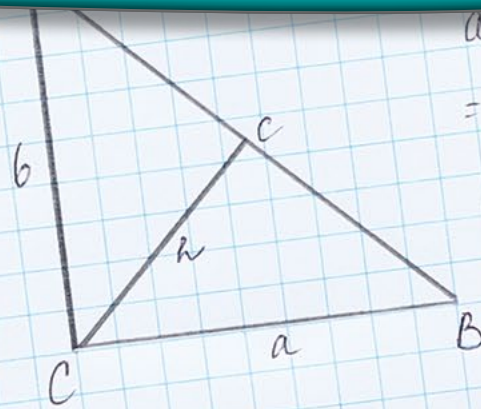
Να καταγράψετε:

- τους σκοπούς της έρευνάς σας,
- το ερώτημα της έρευνάς σας,
- τη μέθοδο που θα ακολουθήσετε για τη συλλογή δεδομένων και την ανάλυσή τους.

Να παρουσιάσετε:

- τα στοιχεία που συλλέξατε,
- τα συμπεράσματά σας.

Απαντήσεις – Υποδείξεις



$$a = c \cos \alpha \quad a = c \cos \beta = b \operatorname{tg} \alpha = b \operatorname{ctg} \beta$$

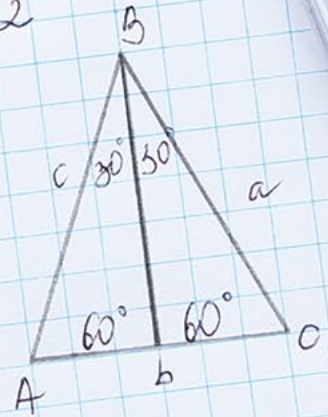
$$m_c = \frac{c}{2}, R = \frac{c}{2} \quad r = \frac{a+b+c}{2}$$

$$S = \frac{ab}{2} = \frac{ch}{2}$$

$$M = H = L = a \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$R = a \frac{\sqrt{3}}{3}, r = a \frac{\sqrt{3}}{6}, R$$

$$S = a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$



Αριθμοί

1.1 Ιδιότητες δυνάμεων ρητών αριθμών με εκθέτη θετικό ακέραιο

1. γ
2. $5^{10} = 5^2 \cdot 5^8$ κτλ. 3. α
4. $(-2)^{11} = \frac{(-2)^{15}}{(-2)^4}$ κτλ. 5. β
6. $3^{100} = (3^2)^{50}$
7. α) $(\alpha\beta)^4$ β) $\left(\frac{x}{y}\right)^{10}$
8. Στο 1ο παράδειγμα πολλαπλασιάζει τις βάσεις· η σωστή απάντηση είναι 2^7 . Στο 2ο προσθέτει τους εκθέτες, ενώ έπρεπε να τους πολλαπλασιάζει· η σωστή απάντηση είναι x^{12} . Στο 3ο πολλαπλασιάζει τις βάσεις ενώ δεν έχουν τον ίδιο εκθέτη και προσθέτει τους εκθέτες ενώ δεν έχουν τις ίδιες βάσεις· αν αναλύσουμε το 4 ως 2^2 , μπορεί να γίνει 2^7 . Στο 4ο διαιρεί τις βάσεις ενώ δεν έχουν τον ίδιο εκθέτη και ταυτόχρονα αφαιρεί τους εκθέτες ενώ δεν έχουν την ίδια βάση· θα μπορούσε να γίνει $\frac{10^5}{2^4} = \frac{2^5 \cdot 5^5}{2^4} = 2 \cdot 5^5$.
9. Οι αρνητικοί παράγοντες είναι άρτιου πλήθους, άρα το αποτέλεσμα είναι θετικός αριθμός.
10. α) 3^5 β) $(-5,1)^7$ γ) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{20}$ δ) α^{11}
 ε) x^9 στ) 2^3 ζ) $(-5)^5$ η) $1,42^{13}$
 θ) α^{300} ι) x^{12} ια) 3^{10} ιβ) $2,6^{14}$
 ιγ) α^{30} ιδ) r^{200} ιε) α^{2m}
11. $\frac{5 \cdot 10^{22}}{8 \cdot 10^{10}} = \frac{5}{8} 10^{12}$
12. α) $\alpha^{20} = \alpha^1 \cdot \alpha^{19}$ β) $\alpha^{20} = \frac{\alpha^{22}}{\alpha^2}$ γ) $\alpha^{20} = (\alpha^5)^4$
 Με τις γνώσεις που έχουμε μέχρι τώρα για τις δυνάμεις, μόνο στην περίπτωση (β) μπορούμε να το γράψουμε με άπειρους τρόπους.
13. α) 50^2 β) 14^4 γ) $\left(-\frac{4}{5}\right)^4$ δ) $(xy)^5$
 ε) $(xzt)^{10}$ στ) $\left(\frac{5}{4}\right)^4$ ζ) $\left(-\frac{8}{9}\right)^9$ η) $\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{10}$

$$\theta) \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{13} \quad \iota) \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{20}$$

$$14. \alpha) 10^{20} = 3^{20} \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^{20} \quad \beta) 10^{20} = \frac{20^{20}}{2^{20}}$$

Και στις δύο περιπτώσεις μπορούμε να το γράψουμε με άπειρους τρόπους.

$$15. \alpha) 10^4 = 10.000 \quad \beta) 2^5 = 32 \quad \gamma) 1$$

$$\delta) 10^7 = 10.000.000 \quad \epsilon) 25$$

$$16. \alpha) \frac{\alpha^7 \cdot \beta^4}{\alpha^5 \cdot \beta^3} = \alpha^2 \beta \quad \beta) \frac{x^7}{x^3} = x^4 \quad \gamma) \varphi^{20} \cdot \varphi^3 = \varphi^{23}$$

$$\delta) \frac{\kappa^8}{\kappa^6} = \kappa^2 \quad \epsilon) \frac{\alpha^{40}}{\alpha^{24}} = \alpha^{16}$$

$$\sigma\tau) \frac{\alpha^{10} \cdot \beta^{20}}{(\alpha \cdot \beta^5)^4} = \frac{\alpha^{10} \cdot \beta^{20}}{\alpha^4 \cdot (\beta^5)^4} = \frac{\alpha^{10} \cdot \beta^{20}}{\alpha^4 \cdot \beta^{20}} = \alpha^6$$

$$17. -x \cdot y^{14} \cdot y^9 (x^3 \cdot y^5)^5 = -x \cdot y^{14} \cdot y^9 \cdot x^{15} \cdot y^{25} = -x^{16} \cdot y^{48}$$

Η παράσταση είναι αρνητική.

1.2 Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη ακέραιο

1. $\frac{1}{5^4} = 5^{-4}$
2. $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$
3. α
4. α) ii β) iii
5. δ
6. β, γ και δ
7. Ο πολλαπλασιασμός με το 10^{-4} ισοδυναμεί με διαίρεση με το 10.000.
8. α) $\frac{5}{\alpha^2}$ β) $\frac{1}{y^8}$ γ) $\frac{x^4}{3^5}$
9. α) 1 β) 1 γ) $\frac{1}{64}$ δ) $\frac{1}{49}$ ε) $\frac{1}{25}$
 στ) $-\frac{1}{8}$ ζ) 16 η) $\frac{1}{16}$ θ) 1,2 ι) $\frac{1}{10}$
10. α) $\frac{1}{1.000}$ β) $\frac{1}{100}$ γ) $\frac{1}{10.000}$
 δ) 1 ε) $\frac{1}{0,000001} = 1.000.000$
11. α) α^4 β) x^6 γ) $\frac{1}{b}$ δ) y^5 ε) $\frac{1}{n^{24}}$ στ) $\frac{\alpha^{12}}{\beta^8}$ ζ) $\frac{\alpha^4}{\beta^5}$
12. α) $-8 - 5 = -13$ β) $-(-3) + (-2)^5 = 3 - 32 = -29$
 γ) $-7 - 1 = -8$
 δ) $(-2)^5 + \frac{2^5}{(-2)^5} = -32 + \left(\frac{2}{-2}\right)^5 = -32 + (-1)^5 = -32 - 1 = -33$

$$\epsilon) (-3)^5 - \frac{3^{10}}{(-3)^5} = (-3)^5 - \frac{(-3)^{10}}{(-3)^5} = (-3)^5 - (-3)^5 = 0$$

13. $3 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3} + 3 \cdot 10^{-4}$

14. Τα δευτερόλεπτα που έχει ένας χρόνος είναι $60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 360 = 31.104.000$, άρα τόσες είναι και οι σταγόνες. Το νερό αυτό είναι

$$31.104.000 \cdot \frac{2}{10^4} = 31.104.000 \cdot \frac{2}{10.000} = 6.220,8$$

λίτρα, που θα έφταναν σε έναν άνθρωπο για 3.110,4 ημέρες!

15. $(-5)^{-41} \rightarrow - \left(-\frac{2}{3}\right)^{-30} \rightarrow + (1-1,5)^{80} \rightarrow +$
 $\left(\frac{4}{5}\right)^{-81} \rightarrow + -\left(+\frac{3}{2}\right)^{-1000} \rightarrow -$
 $[-(+3)]^{-201} \rightarrow - -10^{-90} \rightarrow - -10^{-31} \rightarrow -$

1.3 Τετραγωνικές ρίζες

1. 9 2 δεν ορίζεται $\frac{5}{4}$ 0,04

2. α) Λ β) Σ γ) Σ

3. α) $\alpha = 64$ β) $\theta = 400$ γ) $\beta = 0,01$
 δ) $x = 2,25$ ε) $y = \frac{49}{64}$

4.

1	10	100	0,1	0,01
2	20	200	0,2	0,02
12	120	1.200	1,2	0,12
$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{10}$	13	12	2,3

5. $x = 17$ m

6. $x = 15, y = 6, z = 5$

7. $x = 5$

8. Σωστή απάντηση είναι η β.

9. Υπάρχουν δύο αριθμοί: οι 8 και -8.

10. α) είναι λάθος β) $\sqrt{5+11}$
 γ) είναι λάθος δ) είναι διαφορετικά

11. α) 1 β) 1 γ) 5

12. α) 3 β) 5 γ) 3 δ) 2 ε) 50

13. Ο πίνακας είναι:

α	β	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha \cdot \beta}$	$\sqrt{\alpha \cdot \beta}$
9	25	3	5	15	$\sqrt{225} = 15$
4	100	2	10	20	$\sqrt{400} = 20$
16	36	4	6	24	$\sqrt{576} = 24$

14. Ο πίνακας είναι:

α	β	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$	$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$
9	25	3	5	$\frac{3}{5}$	$\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$
4	100	2	10	$\frac{2}{10}$	$\sqrt{\frac{4}{100}} = \frac{2}{10}$
16	36	4	6	$\frac{4}{6}$	$\sqrt{\frac{16}{36}} = \frac{4}{6}$

1.4 Άρρητοι αριθμοί

1. α) 3,87 β) 3,873

2. Ρητοί είναι οι $-\sqrt{16}, \sqrt{\frac{72}{2}}, \sqrt{\frac{9}{25}}, 6,28, 6,\overline{28}, -\sqrt{37^2}$
 $\sqrt{(-3)^2}$ και άρρητοι οι $-\sqrt{7}, \sqrt{\frac{3}{4}}, 2\pi$.

3. 1-β 2-γ 3-δ 4-α

4. α) Λ β) Σ γ) Λ

5. α) $2 < \sqrt{8} < 3$ β) $4 < \sqrt{20} < 5$ γ) $5 < \sqrt{35} < 6$

6. $\sqrt{5} = 2,2360 \approx 2,24 > 2,23$ $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,62$

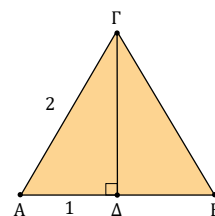
7. $\sqrt{27} \approx 5,2$ και $\sqrt{30} \approx 5,48$

8. Το $\sqrt{5}$ είναι υποτείνουσα ορθογώνιου τριγώνου με κάθετες πλευρές 2 και 1. Το $\sqrt{13}$ είναι η υποτείνουσα ορθογώνιου τριγώνου με κάθετες πλευρές 3 και 2.

9. Αν ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς α και ΑΓ η διαγώνιός του, τότε τα τρίγωνα ΑΓΔ, ΑΒΔ είναι ορθογώνια και ισοσκελή. Με Πυθαγόρειο θεώρημα στο ΑΒΓ: $2\alpha^2 = 10, \alpha^2 = 5, \alpha = \sqrt{5}$ cm.

10. Με Πυθαγόρειο θεώρημα σχηματίζουμε την εξίσωση $(9\alpha)^2 + (16\alpha)^2 = (\sqrt{485,28})^2$ και με πράξεις βρίσκουμε $\alpha = 1,2$.

11. Το ΓΔ είναι και διάμεσος, άρα $ΑΔ = 1$. Με Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΓΔ: $ΓΔ^2 = 2^2 - 1^2$ ή $ΓΔ = \sqrt{3}$.



1.5 Πραγματικοί αριθμοί

1. Από τον πίνακα πολλαπλασιασμού:

·	2	-α
α	2α	-α ²
2	4	-2α

παίρνουμε $(\alpha + 2)(2 - \alpha) = 4 - \alpha^2$.

2. **α), β)** Καθώς οι πίνακες πολλαπλασιασμού είναι

·	20	5
10	200	50
3	60	15

και

·	20	3
30	600	90
3	60	9

παίρνουμε $25 \cdot 13 = 200 + 50 + 60 + 15 = 325$ και $23 \cdot 33 = 600 + 90 + 60 + 9 = 759$.

3. **α)** Λ **β)** Λ **γ)** Σ
4. **α)** 2 **β)** $\frac{1}{2}$ **γ)** 4 **δ)** $\frac{1}{4}$
5. **α)** 4 **β)** 2 **γ)** 5 **δ)** 2 **ε)** 12 **στ)** $\frac{3}{5}$
6. **α)** -2 **β)** 3 **γ)** 7
7. **α)** $x^2 - 25$ **β)** $x^2 + 10x + 25$
γ) $x^2 - 10x + 25$ **δ)** $-x^2 + x + 2$
8. Οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι $x + 3$ και $x - 3$, άρα το εμβαδόν του θα είναι $(x + 3)(x - 3)$.
9. Ομοίως με το προηγούμενο πρόβλημα, αλλά υπάρχουν δύο λύσεις: $x = 5$ και $x = -5$.
10. **α)** -17 **β)** 3 **γ)** -1
11. $\alpha^2 + 5\alpha + 6 = (\alpha + 2)(\alpha + 3)$
12. Το γινόμενο τους είναι 1, δηλαδή $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 1$.
13. Το ορθογώνιο με διαστάσεις 185 cm και 162 cm έχει υποτείνουσα μεγαλύτερη από 245 cm, άρα θα χωρέσει η σκάλα στο φορτηγάκι.
14. Θα πρέπει $ΑΓ = \sqrt{51 \cdot 125} \approx 226,1$ cm.

Ανακεφαλαίωση: Αριθμοί

1. **α)** Λ **β)** Σ **γ)** Σ **δ)** Λ **ε)** Σ **στ)** Λ

2. **α)** 4^5 **β)** $(-3)^7$ **γ)** $\left(\frac{1}{3}\right)^{12}$ **δ)** $\left(-\frac{2}{11}\right)^{22}$

3. **α)** 3^3 **β)** $(-2)^4$ **γ)** $2,7^6$ **δ)** $\left(\frac{1}{7}\right)^{19}$

4. Λάθος, αφού $2^5 = 32$, ενώ $2^2 + 2^3 = 12$.

5. $(3^2)^3 = 3^6$, ενώ $3^{2^3} = 3^8$ (γιατί;).

6. Σωστή είναι η α.

7. $\sqrt{9} = 3$ $\sqrt{900} = 30$ $\sqrt{90.000} = 300$

$\sqrt{0,09} = 0,3$ $\sqrt{0,0009} = 0,03$ $\sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$

$\sqrt{\frac{81}{64}} = \frac{9}{8}$ $\sqrt{15^2} = 15$ $\sqrt{1,2^2} = 1,2$

$\sqrt{1.001^2} = 1.001$

8. Ρητοί είναι οι $-\sqrt{144}$, $\sqrt{\frac{18}{2}}$, $\sqrt{\frac{16}{49}}$, 5,4, $6\sqrt{12}$, $\sqrt{31^2}$,

$\sqrt{(-5)^2}$ και άρρητοι οι $\sqrt{7}$, $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

9. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα (σε ποια τρίγωνα;) και παίρνουμε: **α)** $\sqrt{18}$ **β)** $\sqrt{3}$

10. $\delta = \sqrt{34} \approx 5,83$ cm

11. **α)** Είναι $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{5}$, $x_3 = \sqrt{7}$, $x_4 = \sqrt{9}$, ...

β) Είναι $y_1 = \sqrt{2}$, $y_2 = \sqrt{4}$, $y_3 = \sqrt{6}$, $y_4 = \sqrt{8}$, ...

γ) Το $\sqrt{17}$ είναι η κάθετη πλευρά ορθογώνιου τριγώνου με υποτείνουσα 9 και δεύτερη κάθετη 8. Ομοίως, το $\sqrt{18}$ είναι η κάθετη πλευρά ορθογώνιου τριγώνου με υποτείνουσα 9,5 και δεύτερη κάθετη πλευρά 8,5. Ειδικά για το $\sqrt{18}$ παρατηρούμε ότι είναι η υποτείνουσα σε ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 3.

12. Δείχνουμε ότι το γινόμενό τους είναι 1, δηλαδή $(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 1$.

13. Γράφουμε $(x + 1,2)^2 = (x + 1,2)(x + 1,2) = x^2 + 1,2x + 1,2x + 1,2 \cdot 1,2 = \dots$

14. **α)** Το $8E - 26$ της αριθμομηχανής σημαίνει $8 \cdot 10^{-26}$.

β) $(2 \cdot 10^{-11}) \cdot (4 \cdot 10^{-15}) = 8 \cdot 10^{-26}$

15. Μετά από 1.500 χρόνια έχουν μείνει περίπου 83,53 gr και η μείωση είναι περίπου 16,47%.

16. Δύο τέτοιοι αριθμοί είναι οι $x = 5$ και $y = 2$. Υπάρχουν άπειρα τέτοια ζευγάρια.

17. **α)** $1 \text{ m} = 10^6 \mu\text{m}$ **β)** $1 \mu\text{m} = 10^6 \text{ pm}$

γ) $1 \text{ mm} = 10^3 \mu\text{m}$ **δ)** $1 \text{ pm} = 10^{-9} \text{ mm}$

ε) 10^{-9} m

18. **α)** Το ABKΛ αποτελείται από 2 μοναδιαία τετράγωνα, άρα $AB = \sqrt{2}$.

β) Το ΑΓΔΕ αποτελείται από 8 μοναδιαία τετράγωνα, άρα $ΑΓ = \sqrt{8}$.

γ) Επειδή $ΑΓ = 2ΑΒ$, θα ισχύει $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

- 19.** Από το Πυθαγόρειο θεώρημα βρίσκουμε $(x+1,2)^2 = x^2 + 3,6^2$ και τελικά $x = 4,8$ m.

Κανονικότητες, αλγεβρικές παραστάσεις και σχέσεις

2.1 Κανονικότητες

- 1.** **α)** 3, 8, 15, 24, 35
β) Πρόκειται για το ίδιο μοτίβο με το ερώτημα (α).
γ) 3, 6, 9, 12, 15
δ) $5, 5+2 \cdot 2=9, 9+2 \cdot 3=15, 15+2 \cdot 4=23, 23+2 \cdot 5=33$
- 2.** **α)** ναι, με διαφορά 2
β) όχι, γιατί $8-4=4$, ενώ $16-8=8$
γ) ναι, με διαφορά $\frac{1}{2}$
δ) ναι, με διαφορά $-\frac{1}{2}$
ε) όχι, γιατί $\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}$, ενώ $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$
- 3.** **α)** $\frac{9}{2}+1=\frac{11}{2}$
β) Η $v-\frac{1}{2}$. Η $\frac{1}{2} \cdot v$ δεν είναι, π.χ. για $v=2$ μας δίνει 1 και όχι $\frac{3}{2}$.
- 4.** **α)** Μοτίβο με πρώτο όρο $\frac{1}{3}$ και σταθερή διαφορά $\frac{2}{3}$, άρα ο επόμενος (έκτος) όρος είναι $3+\frac{2}{3}=\frac{11}{3}$, ο 10ος όρος είναι $\frac{11}{3}+4 \cdot \frac{2}{3}=\frac{11}{3}+\frac{8}{3}=\frac{19}{3}$ και ο γενικός όρος είναι $\frac{1}{3}+(v-1) \cdot \frac{2}{3}$.
β) Ο 100ός όρος είναι $\frac{199}{3}$.
- 5.** **α)** πρώτος όρος 1 και διαφορά 0,5
β) πρώτος όρος -2 και διαφορά 2,5
γ) πρώτος όρος $\frac{1}{2}$ και διαφορά -3
δ) πρώτος όρος 0,5 και διαφορά 1
- 6.** **α)** πρώτος όρος 0,1, διαφορά $0,7-0,1=0,6$, γενικός όρος $0,1+0,6(v-1)$

β) πρώτος όρος $\frac{1}{3}$, διαφορά $\frac{4}{3}-\frac{1}{3}=1$, γενικός όρος $\frac{1}{3}+(v-1)$

γ) πρώτος όρος -2, διαφορά $-\frac{3}{2}-(-2)=\frac{1}{2}$, γενικός όρος $-2+(v-1) \cdot \frac{1}{2}$

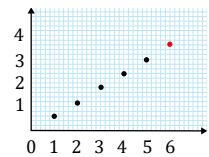
δ) πρώτος όρος 1,8, διαφορά $1,4-1,8=-0,4$, γενικός όρος $1,8-0,4(v-1)$

- 7.** **α)** Σε 1 τραπέζι κάθονται $2+2=4$ άτομα, σε 2 τραπέζια κάθονται $2+2 \cdot 2=6$ άτομα, σε v τραπέζια κάθονται $2+2v$ άτομα.

β) i) $2+2v=16$, άρα $v=7$ τραπέζια,

ii) $2+2v=21$ ή $v=\frac{19}{2}=9,5$, άρα χρειάζονται 10 τραπέζια

- 8.** **α)** Μοτίβο με πρώτο όρο 0,6 και σταθερή διαφορά 0,6. Στον οριζόντιο άξονα 6, στον κατακόρυφο $3+0,6=3,6$.



β)

Τάξη	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Όρος	0,6	1,2	1,8	2,4	3	3,6	4,2	4,8	5,4	6

γ) $0,6+0,6(v-1)$ ή $0,6v$

- 9.** **α)** 13
β) μοτίβο με πρώτο όρο 4 και διαφορά 3. $4+3(v-1)$ ή $3v+1$
γ) $3 \cdot 20+1=61, 3 \cdot 400+1=1.201$
δ) $3v+1=22$ ή $v=7$, άρα ο 7ος όρος, και $3v+1=334$ ή $v=111$, άρα ο 111ος όρος
ε) $3v+1=999$ ή $v=\frac{998}{3}$, άρα δεν υπάρχει τέτοιος όρος
- 10.** **α)** Μοτίβο με πρώτο όρο 3 και σταθερή διαφορά $4 \cdot 3+4(v-1)$.
β) Μοτίβο με πρώτο όρο 10 και σταθερή διαφορά $-4 \cdot 10-4(v-1)$.
γ) Πρώτος όρος 0. Για να βρούμε τον επόμενο, προσθέτουμε 3, για τον επόμενο 5, για τον επόμενο 7 κτλ. Άλλος τρόπος: $1^2-1=0, 2^2-1=3, 3^2-1=8, 4^2-1=15, 5^2-2=24, \dots$, άρα ο γενικός όρος είναι v^2-1 .
- 11.** Πρώτος όρος κύκλος. Για κάθε επόμενο όρο εγγράφουμε στον προηγούμενο εναλλάξ τετράγωνο ή κύκλο. Κάθε τετράγωνο εγγράφεται, ώστε

οι κορυφές του να είναι τα μέσα του προηγούμενου τετραγώνου.

12. Οι (γ) και (δ). Ο (α) αντιστοιχεί στο μοτίβο με γενικό όρο $5+3n$. Το (β) είναι λάθος, γιατί κάθε όρος του μοτίβου είναι μεγαλύτερος από τον προηγούμενο κατά 3 και όχι κατά 3n.
13. n είναι η τάξη του μοτίβου και 2n το διπλάσιό της. Το άθροισμά τους είναι 3n.

2.2 Αλγεβρικές παραστάσεις

1. α) 5 β) $-\frac{19}{2}$ γ) 0 δ) $-\frac{1}{3}$ ε) -3 στ) -6,5
2. α) γινόμενο β) άθροισμα γ) άθροισμα
δ) γινόμενο ε) άθροισμα
3. α) άθροισμα γινομένων
β) γινόμενο αθροισμάτων
γ) γινόμενο αθροισμάτων
δ) άθροισμα γινομένων
4. 1-γ 2-δ 3-ε 4-β 5-στ 6-α
5. α) 0 2x με τον 5x. 0 -3 με τον 1.
β) 0 5x με τον -2x και τον x. 0 $\sqrt{3}$ με τον $\frac{5}{2}$.
γ) 0 10,4 με τον 7,1. 0 -11x με τον 5,1x. 0 3y με τον -y.
6. α) $10x+4$ β) $10x-6$ γ) $8x+4y+4,1$
7. α) $5x-5$ β) $6x-12$ γ) $-2x+10$
δ) $3y-2$ ε) $-10x+7$ στ) $6x+4$
8. α) $x^2+2x+3x+6=x^2+5x+6$
β) $x^2+4x-4x-16=x^2-16$
γ) $2x^2+4x+x+2=2x^2+5x+2$
δ) $-2x^2+3x+3x-4,5=-2x^2+6x-4,5$
9. α) $10x-10+6x+12=16x+2$
β) $x-5+2x+3=3x-2$
γ) $2x^2+3x+24x+36=2x^2+27x+36$
δ) $x^2+\frac{x}{3}-\frac{x}{2}-\frac{1}{6}=x^2-\frac{x}{6}-\frac{1}{6}$
10. α) γινόμενο β) άθροισμα
γ) άθροισμα δ) γινόμενο
11. α) άθροισμα γινομένων
β) γινόμενο αθροισμάτων
12. 1-δ 2-ε 3-α 4-στ 5-γ 6-β
13. Ποσό της μείωσης: δ, ε. Τελική τιμή: στ, η.
14. α) -0,5 β) -6 γ) 6 δ) 13 ε) 0 στ) -2 ζ) -55
15. α) $-\frac{1}{2}$ β) $\frac{17}{4}$ γ) 44
16. α) $-3x-1,5$ β) $-x-8$ γ) $5x^2-8x-\frac{189}{4}$
17. α) $5x^2+3x-0,5$ β) $6x^2-x+3+\sqrt{2}$

$$\gamma) -2x+2y+(2+3)\sqrt{3}=-2x+2y+5\sqrt{3}$$

$$\delta) -2x^2+3y^2+9x+7y+6$$

18. α) $x+2$ προπονήσεις, 1,1y διάρκειας η καθεμία
β) $xy+1,1y(x+2)$

$$19. A\Gamma = \frac{9}{5}x. (A\Gamma E\Z) = \frac{9}{5}x(x+1)$$

20. Ενδεικτικά: $\Gamma\Delta = x$, $A\Delta = x-1$, $\Delta E = x-2$ και $\Delta H = x+1$.

$$\alpha) x(x-1)$$

$$\beta) (x+1)(x-2)$$

$$\gamma) x(x-2)$$

$$\delta) x(x-1)+(x+1)(x-2)$$

21. Οι τιμές στα κελιά επαληθεύουν μόνο τον τύπο $2 \cdot A1 + (2 \cdot B1 - 1) \cdot (B1 - 2) + 3(A1 + C1)$, γιατί $2 \cdot 5 + (2 \cdot 4 - 1)(4 - 2) + 3(5 - 2) = 33$.

$$22. \alpha) -4x - 11y + 6z$$

$$\beta) 4\alpha - 5\beta + 2\gamma + 2\beta - \gamma + 4\alpha = 8\alpha - 3\beta + \gamma$$

$$23. \alpha) i) 2x^2 + 5x + 2, ii) 2x^2 + 5x + 2$$

$$\beta) \text{ Από το (α): } (2x+1)(x+2) = x(2x+3) + 2(x+1)$$

$$24. \alpha) 3(x+2) = 3x+6$$

$$\beta) -4\left(-\frac{x}{4} + \frac{1}{2}\right) = x-2$$

$$\gamma) (x-2)(x+1) = x^2 - x - 2$$

$$\delta) (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{8}) = x^2 + \sqrt{8}x - \sqrt{2}x - 4$$

$$25. \alpha) \text{ Μοτίβο 1: } 3 + (v-1) \cdot \frac{2}{3} \text{ ή } \frac{7}{3} + \frac{2}{3}v$$

$$\text{Μοτίβο 2: } 10 - 2(v-1) \text{ ή } 12 - 2v$$

β) Γινόμενο γενικών όρων:

$$\left(\frac{7}{3} + \frac{2}{3}v\right)(12 - 2v) = \frac{84 + 10v - 4v^2}{3}$$

Για $v=10$,

$$\frac{84 + 10 \cdot 10 - 4 \cdot 10^2}{3} = \frac{184 - 400}{3} = -\frac{216}{3} = -72.$$

Για $v=15$,

$$\frac{84 + 10 \cdot 15 - 5 \cdot 15^2}{3} = -\frac{891}{3} = -297.$$

Για $v=20$,

$$\frac{84 + 10 \cdot 20 - 5 \cdot 20^2}{3} = -\frac{1.716}{3} = -572.$$

2.3 Η εξίσωση και η επίλυσή της

$$1. 2x+10=3x+5$$

$$2. -2x+5=3x-3$$

$$3. x+4=3x-2$$

$$4. \alpha) \text{ Πρώτο μέλος: } -x+7 \text{ και δεύτερο μέλος: } 1-4x.$$

$$\beta) 0 \text{ και } 3+5x \quad \gamma) 9x+4 \text{ και } -2x$$

$$5. \text{ Γνωστοί όροι: } 2, -4, 12. \text{ Άγνωστοί όροι: } -5x, -7x, 11x.$$

$$6. \alpha) \text{ όχι } \beta) \text{ ναι } \gamma) \text{ ναι}$$

$$7. \text{ Τα κενά είναι: } \alpha) 11 \quad \beta) 24 \quad \gamma) 4$$

8. α
9. $-4x + 5 = -2x - 1$. Ο αριθμός 3 είναι λύση της εξίσωσης.
10. Το λάθος είναι ότι δεν τηρήθηκε η δομή επίλυσης μιας εξίσωσης γράφοντας συνεχώς « \Rightarrow ». Αποτέλεσμα είναι να μη διαχωρίζεται το πρώτο από το δεύτερο μέλος σε κάθε μετασχηματισμό της εξίσωσης.
11. α) αδύνατη β) έχει λύση
γ) έχει λύση δ) έχει άπειρες λύσεις
12. Μελετήστε το «Συζητάμε» στο Δ1.
13. α) $15x = 6x + 18$ και $3x + 15 = 8x$
β) Για να βρούμε ποιος αριθμός είναι λύση, αντικαθιστούμε στη θέση του x τον αριθμό αυτό.
γ) Η περίμετρος είναι το τετραπλάσιο της πλευράς του κάθε τετραγώνου που προκύπτει από τη λύση που βρήκαμε στο ερώτημα (β).
14. α) $4x - 3 = 15 - 2x$, πρώτο μέλος: $4x - 3$, δεύτερο μέλος: $15 - 2x$, γνωστοί όροι: $-3, 15$, άγνωστοι όροι: $4x, -2x$. Έχει λύση το 3.
β) $3x + 3 = 9x + 3$, πρώτο μέλος: $3x + 3$, δεύτερο μέλος: $9x + 3$, γνωστοί όροι: $3, 3$, άγνωστοι όροι: $3x, 9x$. Έχει λύση το 0.
15. Εφαρμόζουμε τις ιδιότητες διατήρησης της ισότητας, π.χ. $-2x - 4 + 2 = 3x + 11 + 2$ ή $-2x - 2 = 3x + 13$.
16. Το διπλάσιο του αριθμού αυξημένο κατά 7 είναι ίσο με το πενταπλάσιο του αριθμού μειωμένο κατά 2.
17. α) $x + 15 = 5x + 1$ β) Η λύση είναι $x = 3,5$.
18. $3x + 4 = -2x + 3$. Η λύση είναι $x = -\frac{1}{5}$.
19. α) $2x - 3 = 12 - 3x$. Η λύση είναι $x = 3$.
β) $4 - 7x = 5x$. Η λύση είναι $x = \frac{1}{3}$.
20. $2x + 4x + 30 = 180$. Η λύση είναι $x = 25^\circ$. Άρα οι γωνίες είναι 50° και 100° .
21. Στο (α): $5x = 36 - 4x$, που έχει λύση $x = 4$, άρα η περίμετρος είναι 80. Ομοίως τα (β) και (γ).
22. α) Εφαρμόζοντας ιδιότητες της ισότητας, η πρώτη εξίσωση γίνεται $x - 3x = -5 - 5$ ή $-2x = -10$
ή $\frac{-2x}{-2} = \frac{-10}{-2}$ ή $x = 5$.
β) $v = -5$ γ) $v = -\frac{2}{3}$ δ) αδύνατη
ε) ταυτότητα στ) $\mu = -\frac{62}{7}$

2.4 Εξισώσεις και προβλήματα

1. β
2. γ

3. β
4. Η Ελίρα έχει δίκιο. Μία φορά έχει πολλαπλασιαστεί το πρώτο μέλος με το 12 και εφαρμόσε νοητά την επιμεριστική ιδιότητα, με αποτέλεσμα να πολλαπλασιαστεί το 12 με κάθε όρο του πρώτου μέλους.
5. Ο Φίλιππος έκανε λάθος. Το $5x$ είναι ένας όρος. Ο Φίλιππος το έκανε σαν να ήταν $5 + x$.
6. Αν x είναι οι εβδομάδες, τότε $12x + 15 = 8x + 35$ με λύση $x = 5$.
7. Αν x είναι τα τραγούδια που κατεβάζει κάθε μήνα, τότε $20 + 0,4x = 1,2x$ με λύση $x = 25$.
8. Αν x φορές χρησιμοποιήσει τον παρασκευαστή, τότε $40 + 0,4x = 2,4x$ με λύση $x = 20$.
9. Αν ταξίδεψε με x κόμβους από την Ικαρία προς τη Χίο, τότε η ταχύτητα του ιστιοπλοϊκού στην επιστροφή ήταν $x - 5$ κόμβοι. Η απόσταση παραμένει η ίδια, άρα $4,5x = 6(x - 5)$ με λύση $x = 20$. Η απόσταση είναι $4,5 \cdot 20 = 90$ ναυτικά μίλια.
10. α) 90t β) $810 - 90t$
γ) $90t = 810 - 90t$ με λύση $t = 4,5$ ώρες (ή μπορεί να λυθεί και με την εξίσωση $90t = \frac{810}{2}$).
11. Αν x είναι το πλάτος, τότε το μήκος είναι $x + 4$, άρα $2(x + x + 4) = 36$.
12. Αν x τηλέφωνα χωράει το κάθε κουτί, τότε $5x + 4 = 3x + 20$ και λύνουμε την εξίσωση.
13. Αν t είναι ο χρόνος από τη στιγμή που ξεκίνησε ο Παναγιώτης, τότε ο Παναγιώτης έκανε $90t$ km και ο Κώστας $120(t - 1)$ km.
14. Μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα πρόβλημα όπως τα προηγούμενα προβλήματα.
15. Λύνουμε την εξίσωση $3(k + 5) = 5(k - 1)$ ή $3k + 15 = 5k - 5$ ή ...
16. Αν με x συμβολίσουμε το μικρότερο, τότε οι επόμενοι αριθμοί είναι οι $x + 1$ και $x + 2$.
17. Οι λύσεις είναι:
α) $x = 13$ β) $x = -\frac{3}{4}$ γ) $y = 9$
δ) αδύνατη ε) $x = \frac{4}{7}$ στ) $\kappa = \frac{10}{27}$
ζ) αδύνατη η) $x = -\frac{5}{13}$ θ) $\mu = -15$
18. Λύνουμε τις εξισώσεις:
α) $F = \frac{9}{5}100 + 32$ β) $32 = \frac{9}{5}C + 32$
γ) $x = \frac{9}{5}x + 32$

19. α) ii β) Θα συναντηθούν σε 1 ώρα και 10 λεπτά.
20. α) $x = -\frac{1}{2}$ β) $z = \frac{21}{2}$ γ) $\mu = -\frac{31}{40}$
δ) αδύνατη ε) $x = \frac{69}{22}$ στ) $y = \frac{11}{43}$
21. Η εξίσωση έχει λύση $x = -1$.

**Ανακεφαλαίωση: Κανονικότητες,
αλγεβρικές παραστάσεις και σχέσεις**

1. α) $\frac{11}{3}$ β) $\frac{19}{2}$ γ) $-6,5$
2. α) 0 β) $\frac{3}{2}$ γ) $\frac{5}{8}$
3. α) Λ β) Σ γ) Λ δ) Σ ε) Λ στ) Λ
ζ) Σ η) Λ θ) Λ ι) Σ ια) Σ
4. $x + 12 = 3x + 8$, επαληθεύεται από το 2.
5. α) Όχι β) Ναι γ) Ναι
6. γ
7. α) Ναι, $\frac{2}{3}$ β) Ναι, γιατί είναι $\frac{1+2(v-1)}{3}$.
8. α) Γινόμενο
β) Άθροισμα
γ) Γινόμενο αθροισμάτων
δ) Άθροισμα γινομένων
ε) Γινόμενο αθροισμάτων
στ) Άθροισμα γινομένων
9. 1-γ 2-στ 3-δ 4-ε 5-α 6-β
10. α) $x = -1$ β) $z = -\frac{4}{3}$ γ) $x = -7$
δ) $b = -\frac{7}{23}$ ε) αδύνατη στ) $t = \frac{19}{20}$
11. α) $\frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{6}{4}, \frac{7}{4}, 2, \frac{9}{4}$ β) $\frac{3}{4} + \frac{1}{4}(v-1)$ ή $\frac{2+v}{4}$
γ) ο 6ος
δ) $\frac{2+v}{4} = 8,125$ ή $v = 30,5$, άρα δεν υπάρχει.
12. Αν x είναι οι ώρες εργασίας, τότε
 $150 + 40x = 210 + 25x$ με λύση $x = 4$.
13. Πρέπει το $\alpha - \gamma$ να μη χωράει ακριβώς στο $\delta - \beta$.
Π.χ. $\alpha = 5, \gamma = 1$, άρα $\alpha - \gamma = 4$ και $\delta = 10, \beta = 1$,
επομένως $\delta - \beta = 9$. Τότε $5x + 1 = x + 10$ ή $x = \frac{9}{4}$.
14. α) Γινόμενο αθροισμάτων το $(x+1)(x+2)$ και
άθροισμα γινομένων το $x(x+1) + 5(2-x)$.
β) Για $x = -1$:
 $(-1+1)(-1+2) = 0$
 $-1(-1+1) + 5[2 - (-1)] = 15$

Για $x = 2$:

$$(2+1)(2+2) = 12$$

$$2(2+1) + 5(2-2) = 6$$

Για $x = -2$:

$$(-2+1)(-2+2) = 0$$

$$-2(-2+1) + 5[2 - (-2)] = 22$$

Για $x = \frac{1}{2}$:

$$\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right) = \frac{15}{4}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) + 5\left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{33}{4}$$

γ) $(x+1)(x+2) = x^2 + 3x + 2$ και

$$x(x+1) + 5(2-x) = x^2 - 4x + 10.$$

Αν οι παραστάσεις έχουν την ίδια τιμή για κά-
ποιο x , τότε $x^2 + 3x + 2 = x^2 - 4x + 10$ ή

$$3x + 2 = -4x + 10 \text{ ή } 7x = 8 \text{ ή } x = \frac{8}{7}.$$

15. Οι πλευρές του αρχικού ορθογώνιου είναι x και
 $x + 2$ και το εμβαδόν του $x(x+2) = x^2 + 2x$. Τελικά
 $x - 1$ και $x + 3$, με εμβαδόν $(x-1)(x+3) = x^2 + 2x - 3$.
Για να είναι ίσα τα εμβαδά, πρέπει
 $x^2 + 2x = x^2 + 2x - 3$ ή $0x = -3$, που είναι αδύνατη,
άρα δεν υπάρχει τέτοιο ορθογώνιο.
16. Η α και η γ . Η δ είναι ισοδύναμη μόνο αν το $\alpha \neq 0$.
17. $\alpha = 3$
18. $\alpha = -3$ και $\beta = -6$
19. α) Κόκκινα: πρώτος όρος 4, σταθερή διαφορά 0,4,
άρα: 4, 4,4, 4,8, 5,2, 5,6, 6, 6,4, 6,8, 7,2, 7,6.
Μπλε: σταθερή διαφορά 0,8, άρα οι όροι είναι:
4, -3,2, -2,4, -1,6, -0,8, 0, 0,8, 2,4, 3,2.
β) Κόκκινο: $4 + 0,4(v-1)$ ή $3,6 + 0,4v$. Μπλε:
 $-4 + 0,8(v-1)$ ή $0,8v - 4,8$.
γ) $3,6 + 0,4v = 0,8v - 4,8$ ή $v = 21$. Άρα κοινός
όρος ο 21ος, δηλαδή 12.
20. $x = \frac{\Pi - 2\gamma}{2}$
21. Μπορούμε να σκεφτούμε αντίστροφα, π.χ.
 $x = -10$ ή $5x - 4x = 10 - 20$ ή $5x - 10 = 4x - 20$.
22. Αν x ημέρες δουλέψει ο πρώτος εργάτης, τότε ο
δεύτερος θα δουλέψει $x - 1$ ημέρες. Σε μία ημέρα
ο πρώτος κάνει το $\frac{1}{10}$ του αμπελιού, σε x ημέρες
τα $\frac{x}{10}$. Παρόμοια ο δεύτερος κάνει σε $x - 1$ ημέ-
ρες τα $\frac{x-1}{8}$. Άρα $\frac{x}{10} + \frac{x-1}{8} = 1$. Η απάντηση είναι
5 ημέρες.

Συναρτήσεις

3.1 Η έννοια της συνάρτησης

- α) 5 β) -1 γ) 5
- α) κόστος αγοράς
β) εμβαδόν ενός δωματίου ξενοδοχείου
γ) ύψος του αθλητή
- α) $y = 3x + 12$ β) $y = \frac{x}{2} - 3$ γ) $y = (x + 3)x$

4.

x	-2	-1	0	1	2
y	3	0	-1	0	3

- α-ii β-iii γ-i
- $T = 2Y + 5$
- Από την εμπειρία μας, σχέση φαίνεται να υπάρχει στις περιπτώσεις (α), (γ) και (δ). Από αυτές, η σχέση είναι συνάρτηση στην περίπτωση (γ).
- α, γ
- $S = 80 \cdot 2,5 \text{ km} = 200 \text{ km}$
- α) $\varepsilon = \frac{10}{100} \alpha$ ή $\varepsilon = 0,1\alpha$
β)

Αρχική τιμή α	60 €	90 €	100 €	130 €	140 €
Ποσό έκπτωσης €	6	9	10	13	14

- β
- Ο τύπος της συνάρτησης θα μπορούσε να είναι $y = 2x$. Στην περίπτωση αυτή, για $x = 23$ είναι $y = 2 \cdot 23 = 46$.
- α) $y = \frac{20}{x}$
β)

x	1	2	4	5	10
y	20	10	5	4	2
- α) $y = 15 - x$ β) $E = x \cdot (15 - x) = 15x - x^2$
- α)

Αριθμός σχήματος (ν)	1	2	3	4	5	6
Πλήθος μικρών τριγώνων (τ)	1	4	9	16	25	36

β) $\tau = v^2$
γ) $\tau = 10^2 = 100$

3.2 Γραφική παράσταση συνάρτησης

- A(2, 3) και Δ(0, 1)
- Δ, Α, Β
- B(0, 0), Γ(-1, -3)
- α)

x	1	2	3	4
y	3	1	-1	3

β) $x = 0$ και $x = 3$
- α) A(2, 3), B(3, 5) β) $A\left(2, \frac{1}{2}\right)$, B(1, 1)
γ) A(-1, 5), $B\left(-\frac{2}{3}, 4\right)$
- α-iii β-ii γ-i
- α) 1 kw
β) Στις 08:00, 10:00, 14:00, 17:30 και 21:00.
γ) Στις 19:00, που ήταν 5 kw.
- α) $10 \mu\text{g}/\text{m}^3$
β) Στις 12 Ιανουαρίου και ήταν $64 \mu\text{g}/\text{m}^3$ περίπου.

3.3 Ανάλογα ποσά – Η συνάρτηση

$$y = ax$$

- 4, $y = 4x$
- $300 \cdot \frac{70}{100} \text{ ml} = 210 \text{ ml}$
- | | | | | |
|---|---|-----|----|----|
| x | 2 | 1,5 | -2 | -3 |
| y | 6 | 4,5 | -6 | -9 |
- | | | | | |
|--------------------|------|------|--------|------|
| Ποσότητα ζάχαρης x | 3 kg | 4 kg | 5,5 kg | 7 kg |
| Κόστος y | 6 € | 8 € | 11 € | 14 € |
- 1-β 2-δ 3-α 4-γ
- 1-β 2-α 3-δ 4-στ
- 1-γ 2-α 3-β
-
- α) $\alpha = \frac{20}{100} = 0,2$, $\alpha' = \frac{100}{20} = 5$

β)

Λάδι	100 kg	80 kg	130 kg	60 kg	140 kg	60 kg
Ελιές	500 kg	400 kg	650 kg	300 kg	700 kg	300 kg

10. α) $\alpha\% = \frac{4}{20} \cdot 100\% = 20\%$

β) $y = \frac{80}{100}x$ ή $y = 0,8x$

11. α) 1,5 € β) $y = 1,5x$

12. 1-γ 2-α 3-β 4-δ

13. α) $y = 0,25x$ β) $0,25 \text{ m} = 25 \text{ cm}$

3.4 Η συνάρτηση $y = ax + \beta$

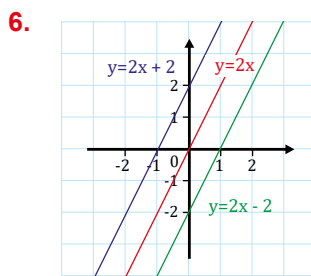
1. α) $y = 0$ β) $y = -9$ γ) $y = -1$

2. α) $-2, (0, 1)$ β) $1, (0, 7)$
γ) $3, (0, 0)$ δ) $-1, (0, -1)$

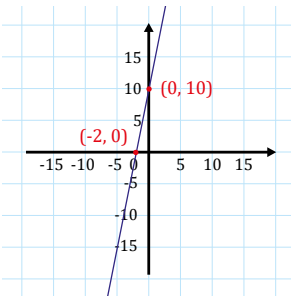
3. α) $y = 2x - 1$ β) $y = -3x + 2$ γ) $y = 6$

4. 1-β 2-γ 3-α

5. α) 1 β) -1 γ) 2



7. Το σημείο τομής με τον άξονα x'x είναι το $(-2, 0)$.



8. α) $y = -3x + 2$ β) $y = 2x - 1$ γ) $y = 3$

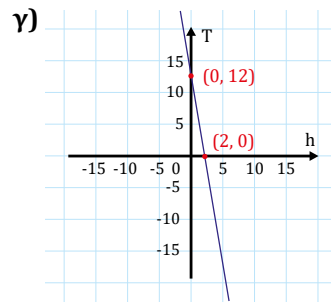
9. 1-γ 2-β 3-δ 4-α

10. α)

1	γ
2	β
3	α
4	δ

β) $\beta = 2$

11. α) $T = 12 - 6h$ β) $h = 2 \text{ km}$



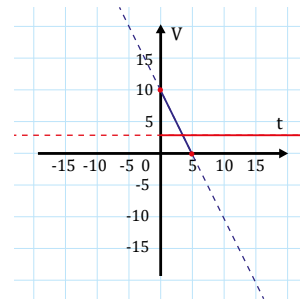
12. α) $A(2, 1)$ β) $A(-2, 4)$ γ) $A(2, 8)$

13. α) 90 km β) 2 € γ) 10 €

14. α) i) $t < 5 \text{ min}$ ii) $t = 5 \text{ min}$ iii) $t > 5 \text{ min}$

β) Πρέπει $T_A = T_B$, δηλαδή $t + 1 = -0,2t + 7$, οπότε $t = 5$. Το αποτέλεσμα συμφωνεί με την απάντηση στο α.

15. α) $V_A = -2t + 10$ και $V_B = 4$



β) Μετά από 3 λεπτά.

16. α) 4 μέτρα β) $t = 3 \text{ sec}$

3.5 Αντιστρόφως ανάλογα ποσά – Η συνάρτηση $y = \frac{\alpha}{x}$

1. Αν και, όσο μεγαλώνει το ένα, το άλλο μειώνεται, το γινόμενο των αντιστρόφως ανάλογων ποσών θα πρέπει να παραμένει σταθερό, κάτι που δεν ισχύει εδώ.

2. Είναι ποσά αντιστρόφως ανάλογα, αφού το γινόμενο τους είναι σταθερό και ίσο με -20 .

3.

x	3	1	-12	-4	$\frac{12}{5}$	-16
y	-8	-24	2	6	-10	$\frac{3}{2}$

4. Ανάλογα ποσά εκφράζει ο δεύτερος πίνακας και αντιστρόφως ανάλογα ο πρώτος πίνακας.

5. Αντιστρόφως ανάλογα, αφού το γινόμενο του αριθμού των εργατών επί τις ώρες εργασίας του καθενός είναι σταθερό και ίσο με 240.

6. Ποσά ανάλογα εκφράζουν οι σχέσεις γ και δ και αντιστρόφως ανάλογα οι σχέσεις α και ε . Γιατί;
7. Η $y = -\frac{1}{2}x$ αντιστοιχεί στην 3η γραφική παράσταση, η $y = 2x - 3$ στη 2η και η $y = -\frac{3}{x}$ στην 1η.
8. Τα ποσά «αριθμός τραγουδιών – μέσο μέγεθος» είναι ποσά αντιστρόφως ανάλογα. Το σταθερό γινόμενο είναι 16.000, άρα τα τραγούδια είναι αντίστοιχα:
- α) $\frac{16.000}{2,5} = 6.400$ β) $\frac{16.000}{2} = 8.000$
- γ) $\frac{16.000}{5} = 3.200$
9. $10 \cdot 15 = 6x$ ή $x = 25$
10. Αν x είναι η απόσταση του M_2 από το σημείο στήριξης, πρέπει $20 \cdot 2 = 50x$, άρα $x = \frac{4}{5}$ του μέτρου, δηλαδή 80 εκατοστά.
11. α) Συμπληρώνουμε τον πίνακα τιμών, τοποθετούμε αυτά τα σημεία και χαράσσουμε τη γραφική παράσταση γνωρίζοντας τη μορφή της $y = \frac{\alpha}{x}$.

x	-2	-1	-0,5	0,5	1	2
y	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	2	1	$\frac{1}{2}$

Ομοίως για τα ερωτήματα (β), (γ), (δ).

12. Αν η κορυφή του κάθε ορθογωνίου που βρίσκεται στη γραφική παράσταση της $y = \frac{\alpha}{x}$ είναι (x, y) , τότε $xy = \alpha$, που είναι σταθερός αριθμός. Αν το σημείο είναι στο 1ο τεταρτημόριο, τότε οι αριθμοί x και y είναι θετικοί. Το εμβαδόν είναι xy , άρα ίσο με α , που είναι σταθερός αριθμός. Αν η κορυφή είναι στο 3ο τεταρτημόριο, τότε οι αριθμοί x και y είναι αρνητικοί και το μήκος των πλευρών είναι $-x$ και $-y$, άρα το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E = (-x)(-y) = xy$, που επίσης είναι σταθερό και ίσο με α .
13. α) Όταν το x είναι 3, το y είναι 5. Τα x και y έχουν σταθερό γινόμενο, το οποίο είναι $\alpha = 3 \cdot 5 = 15$. Άρα ο τύπος της συνάρτησης είναι $y = \frac{15}{x}$.
- β) Ομοίως βρίσκουμε ότι ο τύπος της συνάρτησης είναι $y = -\frac{20}{x}$.

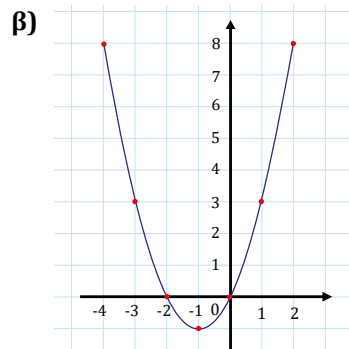
Ανακεφαλαίωση: Συναρτήσεις

1. Είναι η περίπτωση (α), με ανεξάρτητη μεταβλητή: πλευρά τετραγώνου, εξαρτημένη: εμβαδόν τετραγώνου, ή και αντίστροφα, και η περίπτωση (β), με ανεξάρτητη μεταβλητή: γεωγραφική θέση και εξαρτημένη: υψόμετρο.
2. α) Λ β) Σ γ) Λ δ) Σ
- 3.

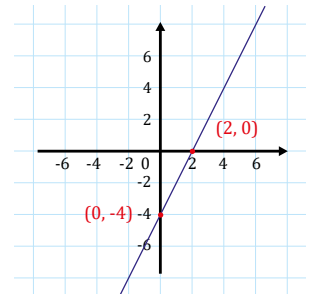
x	-4	0	2	6
y	-1	1	2	4

4. • $A(-1, -1)$, $B(0, 0)$, $\Gamma(1, 5, 0, 5)$
• $A(-1, 1)$, $B(0, 0)$, $\Gamma(2, 4)$
• $A(1, 6)$, $B(2, 3)$, $\Gamma(3, 2)$

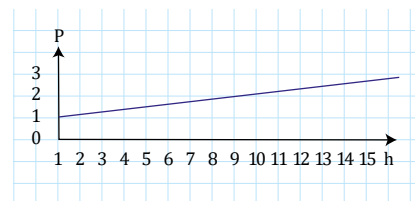
5. α)
- | | | | | | | | |
|---|----|----|----|----|---|---|---|
| x | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| y | 8 | 3 | 0 | -1 | 0 | 3 | 8 |



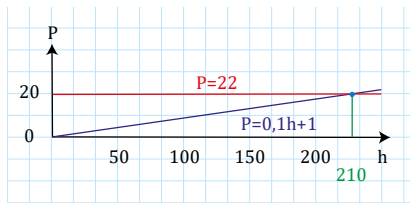
6. $A(2, 0)$ και $B(0, -4)$



7. β
8. α) $P = 0,1h + 1$



β) Για $P=22$ είναι $22=0,1h+1$, από όπου βρίσκουμε $h=210$. Αντίστοιχα, γραφικά είναι:

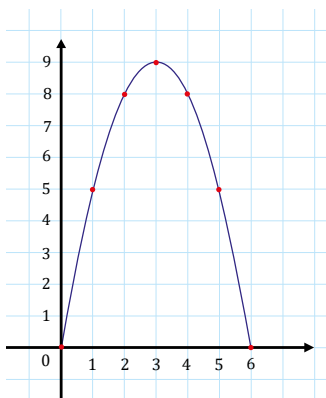


Άρα το υποβρύχιο μπορεί να φτάσει μέχρι 210 m βάθος.

9. $y = -2x - 1$
 10. α) 2 β) $\alpha = 2, \beta = 1$
 11. Στον πρώτο πίνακα τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα. Στον δεύτερο πίνακα τα ποσά είναι ανάλογα με σταθερά αναλογίας $\frac{y}{x} = \frac{5}{2}$. Στον τρίτο πίνακα τα ποσά δεν είναι ούτε ανάλογα ούτε αντιστρόφως ανάλογα.
 12. Αντιστρόφως ανάλογα: α, ϵ και $\sigma\tau$. Ανάλογα: γ και δ . Τίποτα από τα δύο: β .
 13. Διαφέρει η πρόταση γ , καθώς τα ποσά x και y είναι αντιστρόφως ανάλογα, ενώ σε όλες τις άλλες προτάσεις είναι ανάλογα με σταθερά αναλογίας και κλίση της αντίστοιχης ευθείας ίση με 2.
 14. α) $y = 2x$
 β) Πρέπει να πουλήσει τουλάχιστον 10 kg παγωτό.
 15. Τα ποσά x και z είναι αντιστρόφως ανάλογα, καθώς $x \cdot y = \alpha$ και $y = \beta \cdot z$, όπου α και β μη μηδενικοί σταθεροί αριθμοί. Άρα $x \cdot \beta \cdot z = \alpha$, οπότε $x \cdot z = \frac{\alpha}{\beta}$.
 16. α) $y = 6 - x$
 β) $E = x(6 - x)$
 γ)

Μήκος x	0	1	2	3	4	5	6
Εμβαδόν E	0	5	8	9	8	5	0

δ) Η μέγιστη τιμή είναι 9 για $x=3$.



17. Προσπαθήστε να βρείτε έναν τύπο-κανόνα για το πλήθος των πράσινων πλακιδίων όταν ο αριθμός του τετραγώνου είναι περιττός και έναν όταν ο αριθμός του τετραγώνου είναι άρτιος.

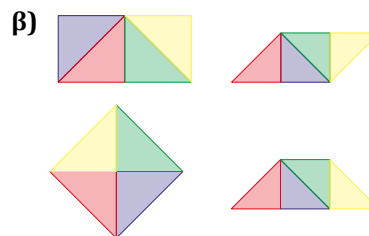
Γεωμετρία του επιπέδου και εμβαδά

4.1 Η έννοια του εμβαδού, μονάδες μέτρησης

1. α) 20 και 40 β) 10 και 20 γ) 5 και 10
 2. $A = 12 \text{ cm}^2, B = 6 \text{ cm}^2, \Gamma = 18 \text{ cm}^2$. Ισχύει ότι $\Gamma = A + B$, καθώς το Γ μπορεί να διασπαστεί στα A και B .
 3. $A = 0,5 \text{ dm}^2, B = 4,5 \text{ dm}^2, \Gamma = 8 \text{ dm}^2$
 4. $\alpha-5$ $\beta-6$ $\gamma-4$ $\delta-1$ $\epsilon-2$ $\sigma\tau-3$
 5. i-β ii-β iii-β iv-β v-γ

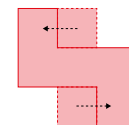
mm^2	cm^2	dm^2	m^2
40.000	400	4	0,04
1.500.000	15.000	150	1,5
200.000	2.000	20	0,2
1.200.000	12.000	120	1,2

7. $3.500.000 \text{ m}^2, 15 \text{ m}^2, 5,8 \text{ m}^2, 25,5 \text{ m}^2$
 8. $4.200 \text{ mm}^2, 290 \text{ cm}^2, 3,7 \text{ dm}^2, 1,15 \text{ m}^2$
 9. α) με εμβαδόν 1 m^2

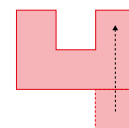


με εμβαδόν 2 m^2

10. α) Από το Α στο Β:

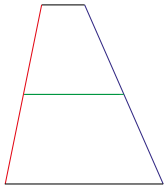


και από το Β στο Γ:

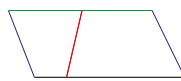


β) 5 cm^2

11. α) i)



ii)



β) Κόβουμε το τραπέζιο στο μέσο των μη παράλληλων πλευρών του, παράλληλα με τις βάσεις. Στη συνέχεια περιστρέφουμε το πάνω μέρος κατά 180° και το τοποθετούμε δίπλα στο κάτω μέρος.

12. α) Α, Β, Γ β) Β, Α, Γ

13. Ο Θανάσης δεν έχει δίκιο, καθώς χρειάζονται τέσσερα τετράγωνα όσο το Α για να φτιάξουμε το Β.

14. 19.200 m

15. 9.000 gr

16. Το Α, γιατί κοστίζει $100 \text{ €} / \text{m}^2$, ενώ το Β κοστίζει $120 \text{ €} / \text{m}^2$.

17. Μπλε και πορτοκαλί τρίγωνα 3 cm^2 , πράσινο τρίγωνο 2 cm^2 , κόκκινο τρίγωνο $4,5 \text{ cm}^2$ και κίτρινο τετράπλευρο $12,5 \text{ cm}^2$.

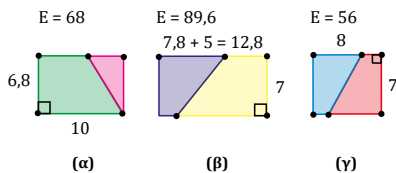
18. α) Το Α έχει εμβαδόν 4 και το Β έχει εμβαδόν 5 μονάδες.

β) Το Α έχει εμβαδόν 9 και το Β έχει εμβαδόν 10 μονάδες.

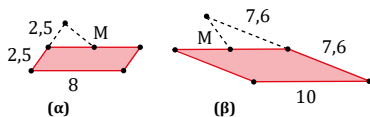
γ) Αν σχηματίσουμε πλέγμα όπως στην περίπτωση (α), είναι $A = 4,5$ και $B = 5$ μονάδες. Αν σχηματίσουμε πλέγμα όπως στην περίπτωση (β), είναι $A = 9$ και $B = 10$ μονάδες.

4.2 Εμβαδά βασικών πολυγώνων

1.



2.



8 και 2,5 10 και 7,6

3. α) $5^2 = 25$ β) $15 \cdot 10 = 150$

γ) $16 \cdot 6,5 = 104$ δ) $\frac{11 \cdot 8}{2} = 44$

ε) $\frac{15 \cdot 8,5}{2} = 63,75$ στ) $\frac{20 \cdot 7,2}{2} = 72$

ζ) $\frac{(24,1 + 13,5) \cdot 11,5}{2} = 216,2$

4. α) $7 \cdot 4 + \frac{7 \cdot 2}{2} = 35$ β) $5^2 + \frac{(5+3) \cdot 3}{2} = 37$

γ) $30 \cdot 40 + \frac{(40+25) \cdot 15}{2} + \frac{25 \cdot 10}{2} = 1.812,5$

5. α) Ορθογώνιο και τρίγωνα:

$$25 \cdot 15 + \frac{20 \cdot 8}{2} + \frac{5 \cdot 6,5}{2} = 471,25.$$

Μέρη που αφαιρούνται: $3,5^2 + \frac{7 \cdot 7}{2} = 36,75.$

Άρα $471,25 - 36,75 = 434,5.$

β) Το εμβαδόν των δύο τριγώνων συνολικά είναι

$$\frac{AE \cdot 8,5}{2} = \frac{17 \cdot 8,5}{2} = 72,25.$$

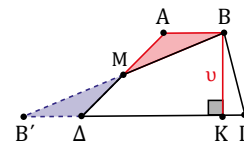
Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$\frac{(23+17) \cdot 9}{2} + 72,25 - 8 \cdot 5,5 = 208,25.$$

6. Ισχύει ότι $\Delta B' = AB$, άρα $B'G = \Delta G + AB$ και $BK = v$.

$$\text{Άρα } (B'G'B) = \frac{B'G \cdot v}{2} = \frac{(\Delta G + AB) \cdot v}{2}.$$

Επιπλέον, $(ABM) = (\Delta MB')$, άρα $(ABG\Delta) = (B'G'B).$



7. α) $(AME) = (BMZ)$, άρα $(EZG\Delta) = (ABG\Delta) = 96.$

β) $E\Delta = 8$, άρα $\Delta G = 96 : 8 = 12.$

$(BMZ) = 6$ και $(EMB'G\Delta) = (EZG\Delta) - (BMZ) = 90.$

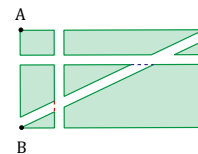
8. α) Τα τρίγωνα έχουν κοινή βάση AB και ίσα ύψη, άρα $(ABG) = (AEB) = (A\Delta B) = 17,5.$

β) Ομοίως $(K\Lambda N) = (K\Lambda M) = 9.$

9. $(BE\Delta) = \frac{\beta \cdot v}{2} = \frac{A\Gamma\Delta E}{2} = 13,5$

10. Εμβαδόν πάρκου: $32 \cdot 17 = 544.$ Εμβαδόν κατακόρυφου ποδηλατόδρομου: $17 \cdot 1,7 = 28,9.$ Εμβαδόν οριζόντιου ποδηλατόδρομου: $32 \cdot 1,7 = 54,4.$ Εμβαδόν πλάγιου ποδηλατόδρομου: $1,88 \cdot 32 = 60,16.$ Κοινά μέρη ποδηλατόδρομων: $1,7 \cdot 1,7 = 2,89,$ $1,88 \cdot 1,7 = 3,196,$ $3,98 \cdot 1,7 = 6,766.$ Εμβαδόν ποδηλατόδρομων (συνολικά):

$$28,9 + 54,4 + 60,16 - (2,89 + 3,196 + 6,766) = 130,608.$$



Εμβαδόν γκαζόν: $544 - 130,608 = 413,392.$

11. $(ABG) = 24$, άρα $\frac{10 \cdot A\Delta}{2} = 24$ ή $A\Delta = 4,8.$

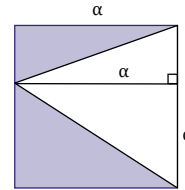
4.3 Πυθαγόρειο θεώρημα

- $\alpha^2 = \gamma^2 - \beta^2$, $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2$, $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$
- α) Λ β) Λ γ) Σ
- $E_1 = 7$, $E_2 = 5$ και $E_3 = E_4 = 2$
- 10 m
- $x = 20$, $y = 10$, $z = 10,5$
- Εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ.
- Θα μπορούσε να ισχύει η σχέση και το τρίγωνο να είναι ορθογώνιο με τη γωνία $\hat{B} = 90^\circ$.
- Η κουπαστή είναι ίση με την πλάγια διακεκομμένη γραμμή, η οποία είναι υποτείνουσα σε ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές $20 \cdot 25,2 = 504$ cm (η οριζόντια), $20 \cdot 18,9 = 378$ cm (η κατακόρυφη), άρα έχει μήκος 630 cm.
- Επιλέγεται τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΗ, ΕΔΓ, ΕΔΖ και βρίσκετε $x = 6,5$, $y = 8$ και $z = 4,5$.
- α) Χρησιμοποιούμε το τετραγωνικό πλέγμα, για να δούμε το ΑΒ ως υποτείνουσα ορθογώνιου τριγώνου με κάθετες πλευρές 12 km (η οριζόντια) και 5 km (η κατακόρυφη).
β) Και οι δύο διαδρομές έχουν το ίδιο μήκος, δηλαδή 18 km.
- Με το Πυθαγόρειο θεώρημα υπολογίζουμε ότι η διαγώνιος της σχεδιάς είναι 286 cm, συνεπώς υπάρχει περίπτωση να σφηνώσει στο στένεμα του ποταμού.
- Η σήραγγα είναι η υποτείνουσα ορθογώνιου τριγώνου με κάθετες πλευρές $200 + 60 - 20 = 240$ m (η οριζόντια) και $-20 + 60 + 140 = 180$ m (η κατακόρυφη).
- Το ύψος στο ισοσκελές τρίγωνο είναι και διάμεσος, άρα είναι η κάθετη πλευρά σε ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα 20 m και δεύτερη κάθετη πλευρά 12 m.
- Εξετάζουμε αν το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο μικρότερων πλευρών (αντίστροφο του Πυθαγόρειου θεωρήματος). Τελικά, μόνο το πρώτο και το τέταρτο τρίγωνο είναι ορθογώνια.
- Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ΑΒΓ ισχύει $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$, οπότε $9\alpha^2 = 9\beta^2 + 9\gamma^2$ κτλ.
- Βρίσκουμε ότι $x = 4$ και εφαρμόζουμε το αντίστροφο του Πυθαγόρειου θεωρήματος.
- Εφαρμόζουμε το αντίστροφο του Πυθαγόρειου θεωρήματος, για να δούμε αν είναι ορθογώνιο το τρίγωνο.

- Υπολογίζουμε (με Πυθαγόρειο θεώρημα στα ορθογώνια τρίγωνα ΔΕΖ, ΓΒΕ και ΑΒΖ) ότι $EZ = 5$, $EB = 12$ και $BZ = 13$. Ελέγχουμε αν το τρίγωνο ΒΕΖ είναι ορθογώνιο με το αντίστροφο του Πυθαγόρειου θεωρήματος.

Ανακεφαλαίωση: Γεωμετρία του επιπέδου και εμβαδά

- α) 10.000 β) 10 γ) 10.000
δ) 1.000.000 ε) 100
- α) dm^2 β) m^2 γ) dm^2 δ) cm^2 ε) mm^2
- Εφόσον το εμβαδόν του τετραγώνου είναι α^2 και του τριγώνου είναι $\frac{\alpha \cdot \alpha}{2}$, το εμβαδόν του τριγώνου είναι το μισό από το εμβαδόν του ορθογώνιου. Άρα το χρωματισμένο μέρος του σχήματος έχει εμβαδόν 1,85.



- α) Ορθογώνιο

β) Πλάγιο παραλληλόγραμμο



γ) Τραπέζιο



- Είναι $\Gamma < B < A$.
- Και στα τρία σχήματα το εμβαδόν είναι 8 cm^2 . Για τον υπολογισμό μπορούμε είτε να προσθέσουμε τα τετράγωνα και τα τρίγωνα (μισά τετράγωνα) που τα συνθέτουν είτε να αφαιρέσουμε από τετράγωνα που τα περιέχουν κάποια κομμάτια.
- α) Φέρνουμε το ύψος ΑΗ από την κορυφή Α προς τη ΔΓ και σχηματίζεται ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΗΔ με $AH = 4$ cm και $DH = 3$ cm. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα και βρίσκουμε $AD = 5$ cm.
β) i) Τα ΑΒΓΔ και ΙΚΛΜ έχουν περίμετρο 20 cm, μεγαλύτερη από την περίμετρο του ΕΖΗΘ, που είναι 18 cm.
ii) Τα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ έχουν εμβαδόν 20 cm^2 , που είναι μικρότερο από το εμβαδόν του ΙΚΛΜ, το οποίο είναι 25 cm^2 .
- 44.800 €
- 88.400 ψηφίδες
- α) $311,36 \text{ m}^2$ β) 1.946 πλάκες

11. $(ΒΓΕΖ) = 18, (ΒΖΗ) = 3,$
 $(ΑΒΓΕΗ) = (ΑΒΓΔ) + (ΑΔΕΗ) = 20 + 9 = 29,$
 $(ΑΒΗ) = (ΑΒΓΕΗ) - (ΒΓΕΖ) - (ΒΖΗ) = 29 - 18 - 3 = 8$
12. **α)** Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα, για να υπολογίσουμε σταδιακά τις πλευρές των ορθογώνιων τριγώνων ΑΔΓ και ΒΔΓ. Προκύπτει ότι $x = 4$. **β)** Το εμβαδόν του ΑΒΓ είναι 24.
13. **α)** Ορθογώνιο τραπέζιο **β)** 126 m^2
γ) Από το Γ φέρνουμε κάθετη προς την ΑΒ που την τέμνει στο σημείο Ε. Τότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΕΒ έχουμε $ΓΕ = 12 \text{ m}, ΕΒ = 9 \text{ m}$ και υπολογίζουμε με το Πυθαγόρειο θεώρημα ότι $ΒΓ = 15 \text{ m}$.
14. Από το σημείο Β φέρνουμε παράλληλη στην ΑΓ που τέμνει το σύνορο της πράσινης περιοχής στα σημεία Δ (αριστερά) και Ε (δεξιά). Τότε το εμβαδόν των τριγώνων ΑΒΓ, ΔΑΓ και ΕΑΓ είναι το ίδιο, άρα μπορούμε να πάρουμε είτε το ΑΕ είτε το ΔΓ ως νέο σύνορο.
15. **α)** Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ, για να βρούμε εκφράσεις του u^2 .
β) Χρησιμοποιούμε το α, για να γράψουμε μια εξίσωση με το x^2 .
16. Εφαρμόζουμε το αντίστροφο του Πυθαγόρειου θεωρήματος, για να διαπιστώσουμε αν οι γωνίες $Ο\hat{A}\Gamma, Ο\hat{B}\Delta$ είναι ορθές.
17. Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ: $ΒΓ^2 = 100$ ή $ΒΓ = 10$.
 Επίσης, το εμβαδόν του ΑΒΓ είναι $\frac{48}{2} = 24$. Επομένως $\frac{ΒΓ \cdot ΑΗ}{2} = 24$, άρα $ΑΗ = 4,8$.
18. Με Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΔ βρίσκουμε $ΓΔ = 13$.
 Επίσης, $(ΒΓΔ) = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30$. Άρα για το ύψος ΒΗ του τριγώνου (ΒΓΔ) ισχύει $ΒΗ = \frac{60}{13} = \frac{60}{13}$.
 Στη συνέχεια υπολογίζουμε το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΕ και είναι $\frac{450}{13}$.

Γεωμετρία του επιπέδου και μέτρηση στον κύκλο

5.1 Εγγεγραμμένες γωνίες

1. **α)** Λ **β)** Σ **γ)** Λ **δ)** Λ **ε)** Λ **στ)** Λ
 2. $\delta = \zeta$ (κατακορυφήν), $\hat{\epsilon} = \hat{\alpha}$ και $\hat{\beta} = \hat{\gamma}$ (εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο, $\hat{\Delta}\Gamma$ και $\hat{A}\hat{B}$ αντιστοίχα)

3. $A\hat{K}B = \frac{A\hat{O}B}{2} = 90^\circ$ και $K\hat{A}B = \frac{K\hat{O}B}{2} = 20^\circ$
4. $\hat{O} = 2\hat{\Delta} = 108^\circ$ (επίκεντρα και εγγεγραμμένη που βαίνουν στο ίδιο τόξο), $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 54^\circ$ (εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο), \hat{E} : εγγεγραμμένη στο μη κυρτό τόξο $\hat{A}\hat{B} = 360^\circ - 108^\circ = 252^\circ$, άρα $\hat{E} = \frac{252^\circ}{2} = 126^\circ$.
5. Οι εγγεγραμμένες γωνίες $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, διότι βαίνουν σε ημικόκλιο. Άρα το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο. Αν οι ΑΓ και ΒΔ είναι κάθετες, τότε το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο.
6. Η εγγεγραμμένη $\hat{\phi}$ βαίνει στο $\hat{A}\hat{\Delta}$, άρα $\hat{\phi} = 45^\circ$. Η εγγεγραμμένη $\hat{\Delta}$ βαίνει στο $\hat{A}\hat{\Gamma}$, άρα $\hat{A}\hat{\Gamma} = 2 \cdot 70^\circ = 140^\circ$. Το τόξο $\hat{A}\hat{B} = \hat{A}\hat{\Gamma} - \hat{B}\hat{\Gamma} = 140^\circ - 50^\circ = 90^\circ$. Άρα η εγγεγραμμένη $\hat{\omega} = 45^\circ = \hat{\phi}$.
7. **α)** Το μέτρο του τόξου $\hat{\Theta}\hat{H}$ είναι ίσο με το μέτρο της επίκεντρης $\hat{\Theta}\hat{O}H = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$ και το μέτρο του τόξου $\hat{\Theta}\hat{Z}$ είναι ίσο με το μέτρο της επίκεντρης $\hat{\Theta}\hat{O}Z = \hat{O}\hat{E}H = 40^\circ$.
β) Η εγγεγραμμένη $Z\hat{\Delta}E$ βαίνει στο μη κυρτό τόξο $\hat{Z}\hat{E} = \hat{\Theta}\hat{Z} + \hat{\Theta}\hat{E} = 220^\circ$. Άρα $Z\hat{\Delta}E = \frac{220^\circ}{2} = 110^\circ$.
8. Η εγγεγραμμένη $\hat{\omega}$ βαίνει στο τόξο $\hat{\Gamma}\hat{E} = 50^\circ$ (όσο και η επίκεντρα $\hat{\Gamma}\hat{A}E$), άρα $\hat{\omega} = 25^\circ$. Από το άθροισμα των γωνιών του ορθογώνιου τριγώνου ΖΔΓ βρίσκουμε $\hat{\psi} = 65^\circ$. Η εγγεγραμμένη $\hat{\Gamma}\hat{Z}B = 90^\circ$ (βαίνει σε ημικόκλιο), άρα $\hat{\phi} = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΓΖΒ βρίσκουμε $\hat{\theta} = 90^\circ - \hat{\psi} = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$.
9. **α)** Η εγγεγραμμένη $B\hat{O}\Gamma = 2 \cdot \hat{A} = 90^\circ$.
β) Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΒΟΓ: $2 \cdot \rho^2 = (2\sqrt{2})^2$ ή $2 \cdot \rho^2 = 8$ ή $\rho^2 = 4$, άρα $\rho = 2$.
10. Εφόσον $AB // \Gamma\Delta$, οι εντός εναλλάξ γωνίες $A\hat{B}\Gamma$ και $B\hat{\Gamma}\Delta$ θα είναι ίσες. Όμως οι $A\hat{B}\Gamma$ και $B\hat{\Gamma}\Delta$ είναι εγγεγραμμένες στον ίδιο κύκλο, άρα βαίνουν σε ίσα τόξα.

5.2 Κανονικά πολύγωνα

1. Όταν $n = 10$, τότε $\hat{\omega} = 36^\circ$. Όταν $\hat{\omega} = 18^\circ$, τότε $n = 20$ και, όταν $\hat{\omega} = 45^\circ$, τότε $n = 8$. Όταν $n = 30$, τότε $\hat{\omega} = 12^\circ$.
2. Είναι κανονικό δεκάγωνο, άρα $\hat{\omega} = 36^\circ$.
3. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τον τύπο $\hat{\omega} = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$ ή την ιδιότητα των διαγωνίων του τετραγώνου.
4. Με κάθετες διαγώνιες κατασκευάζουμε τετράγωνο, με τις μεσοκάθετες των πλευρών του κα-

τασκευάζουμε κανονικό οκτάγωνο και συνεχίζοντας κατασκευάζουμε διαδοχικά κανονικό δεκαεξάγωνο, τριανταδιάγωνο... Δηλαδή κανονικά πολύγωνα με πλήθος πλευρών 2^n , με $n \geq 2$.

5. Από τη σχέση $v = \frac{360^\circ}{\omega} = \frac{360^\circ}{41^\circ} \approx 8,78$. Όμως το v πρέπει να είναι φυσικός, άρα δεν υπάρχει τέτοιο πολύγωνο. Για να υπάρχει, θα πρέπει το μέτρο της κεντρικής γωνίας να είναι διαιρέτης του 360.
6. Κατασκευάζουμε κεντρικές γωνίες $\frac{360^\circ}{9} = 40^\circ$ και $\frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$ αντίστοιχα.
7. Γνωρίζουμε ότι οι γωνίες του κανονικού εξαγώνου είναι 120° . Από τα ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ και AZE βρίσκουμε ότι $Z\hat{A}E = Z\hat{E}A = \Gamma\hat{A}B = B\hat{A}\Gamma = 30^\circ$. Επίσης, στα ορθογώνια τρίγωνα $E\hat{A}D$ και $A\hat{G}D$, οι εγγεγραμμένες $E\hat{A}D$ και $\Gamma\hat{A}D$ βαίνουν σε τόξα 60° , άρα θα είναι 30° .
8. Στο κανονικό οκτάγωνο, κάθε τόξο του περιγεγραμμένου κύκλου είναι 45° , άρα: **α)** η $\Gamma\hat{A}H = 90^\circ$, διότι βαίνει σε τόξο $4 \cdot 45^\circ = 180^\circ$, **β)** η AE είναι διάμετρος, διότι καθένα από τα τόξα $\widehat{AE} = 4 \cdot 45^\circ = 180^\circ$, **γ)** $\theta A = \theta H$, άρα το θ ανήκει στη μεσοκάθετη της AH .
9. Το τετράπλευρο $AOEZ$ είναι ρόμβος (έχει πλευρές ίσες με την ακτίνα).
10. Σχεδιάζουμε τον περιγεγραμμένο κύκλο του εξαγώνου. Η εγγεγραμμένη $E\hat{A}B$ βαίνει σε τόξο $3 \cdot 60^\circ = 180^\circ$, άρα είναι ορθή. Η $E\hat{B}D = 30^\circ$, διότι βαίνει σε τόξο 60° , και η $B\hat{E}D = 60^\circ$, διότι βαίνει σε τόξο 120° .
11. **α)** $\Gamma\hat{K}D = 90^\circ$ **β)** $E\hat{\theta}Z = 22,5^\circ$
12. **α)** Το κανονικό πεντάγωνο θα έχει 5 άξονες συμμετρίας και **β)** το κανονικό εξάγωνο θα έχει 6.

5.3 Μήκος κύκλου

1. **α)** $L = 2\pi r \approx 6,28 \cdot 3 \approx 18,84$ cm
β) $L = 2\pi r \approx 6,28 \cdot \sqrt{2} \approx 8,85$ cm
2. Αν η γωνία είναι 45° , δηλαδή το $\frac{1}{8}$ των 360° , τότε και το τόξο θα είναι το $\frac{1}{8}$ του 80, δηλαδή 10 cm. Ομοίως τα 16 cm είναι το $\frac{1}{5}$ των 80 cm, άρα και η γωνία θα είναι το $\frac{1}{5}$ των 360° , δηλαδή 72° .
3. Αν $L = 31,4$, τότε $r = 5$ και, αν $L = 1,57$, τότε $r = 0,25$.

4. Από $L = 2\pi r \approx 6,28 \cdot 0,25 = 1,57$ m.
5. Κάθε τόξο θα έχει μήκος ίσο με το $\frac{1}{5}$ του μήκους L του κύκλου, δηλαδή $\frac{1}{5} \cdot 2\pi \cdot 3 \approx 3,768$ cm.
6. Από τη σχέση $L = 2\pi r$ βρίσκουμε το $L \approx 12,56$ cm. Το πλήθος των πλευρών θα είναι $12,56 : 1,256 = 10$.

5.4 Εμβαδόν κυκλικού δίσκου και κυκλικού τομέα

1. **α)** $4\pi \approx 12,56$
β) $\rho = \frac{4}{2} = 2$, άρα όπως στο (α).
γ) $\frac{9}{4}\pi \approx 7,065$
2. **α) i)** $\frac{90}{360} = \frac{1}{4}$ **ii)** $\frac{1}{8}$ **iii)** $\frac{1}{3}$ **iv)** $\frac{2}{3}$
β) i) $\frac{1}{2}$ **ii)** $\frac{1}{10}$ **iii)** $\frac{7}{12}$ **iv)** $\frac{4}{9}$
3. **α)** $\frac{1}{5} \cdot 10 = 2$ **β)** $\frac{5}{12} \cdot 12 = 5$ **γ)** $\frac{2}{5} \cdot 25 = 10$
4. **α)** $\frac{1}{6} \cdot 2^2 \pi \approx \frac{6,028}{3}$ **β)** $\frac{1}{4} \cdot 4^2 \pi = 4\pi \approx 12,56$
γ) $\frac{1}{8} \cdot 5^2 \pi \approx 9,8125$ **δ)** $\frac{32}{360} \cdot 5^2 \pi = \frac{20}{9} \cdot \pi \approx \frac{62,8}{9}$
ε) $\frac{1}{3} \cdot 10^2 \pi \approx \frac{314}{3}$ **στ)** $\frac{2}{3} \cdot 8,2^2 \pi \approx \frac{422,2672}{3}$
ζ) $\frac{1}{5} \cdot 2^2 \pi \approx 2,512$ **η)** $\frac{5}{12} \cdot 2,5^2 \pi \approx \frac{98,125}{12}$
θ) $\frac{3}{4} \cdot 1,2^2 \pi \approx 3,3912$
5. Αν θεωρήσουμε προσεγγιστικά ότι $\pi = 3,14$, ακτίνα ρ σε κάθε περίπτωση είναι:
α) $\rho^2 = \frac{78,5}{3,14}$ ή $\rho^2 = 25$ ή $\rho = 5$
β) $\rho^2 = \frac{153,86}{3,14}$ ή $\rho^2 = 49$ ή $\rho = 7$
γ) $\rho = 1$
6. Αν θεωρήσουμε προσεγγιστικά ότι $\pi = 3,14$, διάμετρος δ σε κάθε περίπτωση είναι:
α) $\delta = 2 \cdot 10 = 20$ **β)** $\delta = 2 \cdot 2 = 4$ **γ)** $\delta = 2 \cdot 4 = 8$
7. **α)** $\rho = 3$ και $\delta = 6$ **β)** $\rho = 2$ και $\delta = 4$
γ) $\rho = \sqrt{2}$ και $\delta = 2\sqrt{2}$
δ) $\rho = \sqrt{32}$ και $\delta = 2\sqrt{32}$
ε) $\rho = \sqrt{24}$ και $\delta = 2\sqrt{24}$
8. **α)** Αν ρ είναι η ακτίνα του κύκλου, τότε $\rho^2 = \frac{50,24}{3,14}$ ή $\rho^2 = 16$ ή $\rho = 4$. Ο κύκλος με τη διάπλασια ακτίνα έχει εμβαδόν $8^2 \pi \approx 200,96$, δηλαδή τετραπλάσιο του αρχικού κύκλου.

β) Στον κύκλο με ακτίνα 4 είναι $\frac{135}{360} \cdot 50,24 = \frac{3}{8} \cdot 50,24 = 18,84$. Αντίστοιχα στον κύκλο με ακτίνα 8 είναι 75,36.

9. α) Το εμβαδόν του δακτυλίου είναι ίσο με τη διαφορά των εμβαδών των δύο κύκλων: $3^2\pi - 1^2\pi = 8\pi \approx 25,12$.

β) $\frac{144}{360} \cdot 25,12 = \frac{2}{5} \cdot 25,12 = 10,048$

10. Εμβαδόν αποθήκης: $30 \cdot 21 = 630$. Το εμβαδόν των δύο τομέων μαζί αντιστοιχεί σε ημικύκλιο ακτίνας 15, δηλαδή $\frac{1}{2} \cdot 15^2\pi = \frac{225}{2}\pi \approx 353,25$. Το εμβαδόν της επιφάνειας όπου δε φτάνουν οι αισθητήρες είναι $630 - 353,23 = 276,75$.

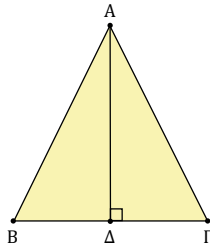
11. Εμβαδόν τετραγώνου: $8^2 = 64$. Το εμβαδόν των τεσσάρων κυκλικών τομέων αντιστοιχεί σε εμβαδόν κύκλου ακτίνας 4. Άρα $4^2\pi = 50,24$. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $64 - 50,24 = 13,76$.

12. Οι τρεις κυκλικοί τομείς αντιστοιχούν σε κυκλικό τομέα ακτίνας 1 με επίκεντρο γωνία $3 \cdot 60^\circ = 180^\circ$. Άρα έχουν συνολικό εμβαδόν $\frac{1}{2} \cdot \pi = 1,57$.

Φέρνουμε το ύψος ΑΔ του ισοσκελούς. Με Πυθαγόρειο θεώρημα βρίσκουμε ότι $ΑΔ = \sqrt{3}$ και στη συνέχεια

$(ΑΒΓ) = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \approx 1,73$. Άρα

το ζητούμενο εμβαδόν είναι $1,73 - 1,57 = 0,16$.



13. Ο κύκλος ακτίνας 16 έχει εμβαδόν 256π. Τα τρία ημικύκλια έχουν ακτίνες 8, 4 και 4 και άρα εμβαδά 32π, 8π και 8π αντίστοιχα. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $256\pi - (32\pi + 8\pi + 8\pi) = 208\pi \approx 653,12$.

14. Εμβαδόν ορθογωνίου: $18 \cdot 36 = 648$. Από το εμβαδόν του ορθογωνίου αφαιρούμε το εμβαδόν κύκλου με ακτίνα 9, που είναι $81\pi \approx 254,34$. Άρα $648 - 254,34 = 393,66$. Το κυκλικό μέρος της στέγης έχει ακτίνα 4,5 και εμβαδόν $20,25\pi \approx 63,585$. Άρα το συνολικό εμβαδόν της στέγης είναι 457,245.

Ανακεφαλαίωση: Γεωμετρία του επιπέδου και μέτρηση στον κύκλο

1. α) Σ **β)** Σ **γ)** Λ **δ)** Λ **ε)** Σ
στ) Σ **ζ)** Λ **η)** Λ **θ)** Λ **ι)** Σ

2. $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο.

3. $\nu = \frac{360^\circ}{15^\circ} = 24$

4. α) $\nu = \frac{360^\circ}{8^\circ} = 45$ **β)** $\nu = \frac{360^\circ}{22,5^\circ} = 16$

γ) $\frac{360^\circ}{25^\circ} = 14,4$, άρα δεν υπάρχει.

5. α) 4π **β)** 25π

6. α) Ακτίνα 4, άρα η διάμετρος είναι 8.

β) $\rho^2 = 64$. Η διάμετρος είναι 16.

7. Η $\hat{\alpha}$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε τόξο $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$, άρα $\hat{\alpha} = 36^\circ$.

8. α) Με τρεις μη διαδοχικές ακτίνες.

β) Με μία διάμετρο.

γ) Με δύο παράλληλες χορδές που ενώνουν αντίστοιχες κορυφές.

9. Σκεφτείτε στροφές του ρόμβου γύρω από κάποιες κορυφές του.

10. Τα τρίγωνα ΔΟΓ και ΔΕΟ είναι ισόπλευρα, άρα έχουν γωνίες 60° και έτσι $\hat{ΕΔΓ} = 120^\circ$. $\hat{ΗΔΓ} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$. Ομοίως $\hat{ΔΓΗ} = 60^\circ$. Άρα το τρίγωνο ΔΓΗ είναι ισόπλευρο.

11. $L \approx 3,14 \cdot 30 = 94,2$ cm

12. $d = \frac{L}{5} = \frac{2\pi \cdot 2}{5} = \frac{4\pi}{5} \approx 2,512$ cm

13. Ένας κυκλικός τομέας 25° του ίδιου κύκλου έχει εμβαδόν $18 : 3 = 6$.

Άρα ο κυκλικός τομέας 50° έχει εμβαδόν $2 \cdot 6 = 12$ και ο κυκλικός τομέας 125° έχει εμβαδόν $5 \cdot 6 = 30$.

14. α) $ΑΔ = ΔΟ$ (ΔΜ: μεσοκάθετη), $ΔΟ = \rho = ΟΑ$, άρα το τρίγωνο ΑΟΔ είναι ισόπλευρο.

β) $\hat{ΑΔΒ} = 90^\circ$, διότι είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο.

15. α) Το ΟΑΒ είναι ισόπλευρο τρίγωνο, άρα $ΑΒ = 5$.

β) Με Πυθαγόρειο θεώρημα βρίσκουμε ότι το ύψος είναι $\nu = \sqrt{5^2 - 2,5^2} = \sqrt{18,75} \approx 4,33$.

γ) Το εμβαδόν του ΟΑΒ είναι $\frac{5 \cdot 4,33}{2} = 10,825$.

Άρα το εμβαδόν του εξαγώνου είναι $6 \cdot 10,825 = 64,95$. Το εμβαδόν του κύκλου είναι ίσο με $25\pi \approx 78,5$. Για το εμβαδόν του χρωματισμένου μέρους: $78,5 - 64,95 \approx 13,55$.

16. α) Από τα δεδομένα προκύπτει η σχέση:

$$\pi\rho^2 = \frac{81}{3}\pi - \frac{\pi\rho^2}{3}$$

$$3\pi\rho^2 = 81\pi - \pi\rho^2$$

$$\rho^2 = \frac{81}{4}$$

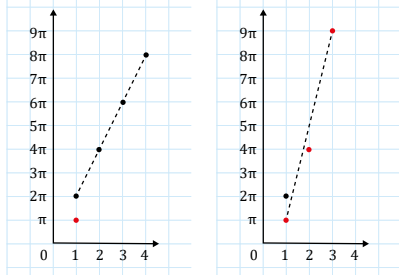
$$\rho = \frac{9}{2}$$

β) Εφόσον η ακτίνα είναι διπλάσια, το ίδιο ισχύει και για τα μήκη των τόξων.

17. α) Εφόσον ο κύκλος $(B, 2\rho)$ έχει διπλάσια ακτίνα από τον (A, ρ) , για να έχουν τα τόξα τους ίδια μήκη πρέπει το τόξο του $(B, 2\rho)$ να έχει το μισό μέτρο από το τόξο του (A, ρ) . Άρα το μέτρο του I_2 είναι 36° .

β) Εφόσον ο κυκλικός τομέας T_2 έχει τη διπλάσια ακτίνα, θα πρέπει η επίκεντρη γωνία του να αντιστοιχεί στο $\frac{1}{4}$ της επίκεντρης γωνίας του T_1 , ώστε να έχουν το ίδιο εμβαδόν. Άρα η επίκεντρη γωνία του T_2 είναι 15° .

18. α)

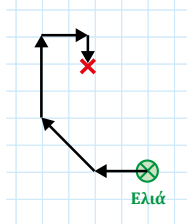


β) Παρατηρούμε ότι από τα μπλε σημεία περνάει η ίδια ευθεία, ενώ από τα κόκκινα όχι.

Στοιχεία Αναλυτικής Γεωμετρίας και γεωμετρικοί μετασχηματισμοί

6.1 Διανύσματα

- α) Σ β) Σ γ) Λ δ) Σ ε) Σ
- Στις προτάσεις β και ε δεν παριστάνονται διανυσματικά μεγέθη (δεν ορίζεται η κατεύθυνση). Στις προτάσεις α, γ και δ παριστάνονται διανυσματικά μεγέθη (γνωρίζουμε μέτρο, διεύθυνση και φορά).
- Ίσα: $\vec{a} = \vec{b}$, $\vec{u} = \vec{v}$, $\vec{i} = \vec{h}$, $\vec{e} = \vec{d}$. Αντίθετα: \vec{c} με \vec{a} και \vec{b} , \vec{f} με \vec{d} και \vec{e} , \vec{w} με \vec{v} και \vec{u} , \vec{g} με \vec{i} και \vec{h} .
- α) $\vec{AO} = \vec{OG}$, $\vec{BO} = \vec{OD}$, $\vec{AB} = \vec{DG}$, $\vec{AD} = \vec{BG}$
β) \vec{AO} με \vec{GO} , \vec{BO} με \vec{DO} , \vec{AB} με \vec{GD} , \vec{AD} με \vec{GB}
γ) \vec{AB} με \vec{AD} , \vec{DA} με \vec{DG} κ.ά.
- α) π.χ. \vec{ED} β) \vec{EB} γ) \vec{EZ} δ) π.χ. $\vec{D\Theta}$
-



6.2 Μεταφορά

- Το κόκκινο σχήμα στην εικόνα α προήλθε από μεταφορά του μπλε και στην εικόνα β από ανάκλαση.
- Ενδεικτικά, στο δεύτερο σχήμα, δύο κόκκινα σχήματα συνδέονται με μεταφορά.
- Ένα άλλο παράδειγμα μπορεί να είναι ένα αυτοκίνητο που κινείται ευθεία.
- Ένα παράδειγμα είναι το πάνω αριστερά και το πάνω δεξιά λευκό ψάρι. Μπορούμε να σχεδιάσουμε το διάνυσμα μεταφοράς ενώνοντας την ουρά του ενός (αρχή του διανύσματος) με το αντίστοιχο σημείο της ουράς του άλλου (τέλος του διανύσματος).
- Το σχήμα με το γράμμα Γ δείχνει μια μεταφορά.
- Οι αντίστοιχες πλευρές είναι ίσες και παράλληλες. Οι αντίστοιχες γωνίες είναι ίσες.
- Για να μεταφερθεί ένα σημείο (π.χ. η βάση) της πράσινης σημαίας στο αντίστοιχο της κόκκινης, πρέπει να μετακινηθεί 3 θέσεις δεξιά και 1 πάνω. Χρησιμοποιήστε αυτό τον κανόνα για να απαντήσετε στα ερωτήματα α και β.
- α) Ένα διάνυσμα μεταφοράς είναι το $\vec{AA'}$
β) $A(-1, 7)$, $A'(3, 6)$ κ.ο.κ.
γ) Ο κανόνας μπορεί να είναι «4 δεξιά και 1 κάτω» ή $(x, y) \mapsto (x+4, y-1)$.
δ) Η εικόνα του $E(-4, 1)$ είναι το $E'(0, 0)$ κ.ο.κ.
- β) $(x, y) \mapsto (x-2, y-3)$
- γ) Η περίμετρος και το εμβαδόν δεν αλλάζουν, εφόσον τα δύο τετράπλευρα είναι ίσα.
- Οι δύο διαδοχικές ανακλάσεις δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα με μία μεταφορά δέκα θέσεις αριστερά (διπλάσιο της απόστασης των δ και ε).
- α) Με μεταφορά κατά το διάνυσμα \vec{AP} .
β) Κατά σειρά, οι τρεις μεταφορές είναι:
 $(x, y) \mapsto (x-2, y-3)$, $(x, y) \mapsto (x+6, y+1)$,
 $(x, y) \mapsto (x+4, y-2)$.
- α) Είναι $A(2, 6)$ και $A'(0, 9)$ κ.ο.κ.
β) Να σκεφτείτε όπως στην εφαρμογή.

6.3 Στροφή

- Στην εικόνα β.
- Ενδεικτικά, στο πρώτο σχήμα, δύο οποιαδήποτε γειτονικά μαύρα τρίγωνα με βελάκια συνδέονται με στροφή 180° .

3. Ένα άλλο παράδειγμα στροφής είναι οι διαδοχικές θέσεις του λεπτοδείκτη σε ένα ρολόι.
4. Δύο γειτονικά λευκά φτερωτά ψάρια συνδέονται με μια στροφή με κέντρο το κοινό τους σημείο και γωνία 120° .
5. Στο πρώτο σχήμα, το $A'B'G'$ και το ABG συνδέονται με στροφή 180° γύρω από το Δ . Στα άλλα σχήματα έχουμε συμμετρία ως προς ευθεία (τα γαλάζια σχήματα) και μεταφορά (τα κόκκινα σχήματα).
6. Ακολουθήστε τις οδηγίες για τη σχεδίαση με χρήση διαφανούς χαρτιού. Οι αντίστοιχες πλευρές είναι ίσες.
7. Ομοίως.
8. Εργαστείτε όπως στην εφαρμογή 2.
9. Εργαστείτε όπως στο «Συζητάμε» για τη σχεδίαση σε σύστημα συντεταγμένων.
10. **α)** Η γωνία $\widehat{B'OB'}$ είναι ευθεία κτλ.
β) Μπορείτε να φέρετε την EO και να προεκτείνετε κατά ίσο τμήμα OE' κτλ.
11. **γ)** Τα δύο τετράπλευρα είναι ίσα, άρα έχουν ίσες περιμέτρους και ίσα εμβαδά.
12. Μια στροφή 125° γύρω από το B .

6.4 Σχήματα με περιστροφική και κεντρική συμμετρία

1. Στην πρώτη γραμμή, το πρώτο σχήμα έχει περιστροφική συμμετρία 180° (κεντρική συμμετρία). Το δεύτερο σχήμα έχει συμμετρία 45° και κεντρική συμμετρία.
2. Ενδεικτικά: το N έχει κεντρική συμμετρία, το Δ έχει περιστροφική συμμετρία 120° .
3. Έχει περιστροφική συμμετρία 45° .
4. **α)** Είναι $A(1,3)$ και $E(-1,-3)$ κτλ., άρα έχει κεντρική συμμετρία.
β) Θα πρέπει να μετατοπιστούν το Γ και το Δ μία μονάδα αριστερά και τα Θ και H μία μονάδα δεξιά.

6.5 Σχεδίαση και συλλογισμός με μετασχηματισμούς

1. **α)** Παραλληλόγραμμο **β)** Ισοσκελές
2. Είναι τετράγωνο, επειδή οι πλευρές του είναι ίσες και κάθετες.
3. **α)** $A'(-3, -1)$, $B(1, -1)$ κτλ.
β) Είναι το $A'B'G'$.
γ) Σκεφτείτε όπως στην εφαρμογή της διδακτικής ενότητας 6.2.

4. **α)** Γιατί $\overline{BA} = \overline{AZ}$.
β) Εξηγήστε γιατί έχει τέσσερις ίσες πλευρές.
γ) Συγκρίνετε τις πλευρές των δύο ρόμβων.
δ) Χρησιμοποιήστε το προηγούμενο.
ε) Είναι αντίστοιχες γωνίες των ρόμβων.
5. **α)** Το A' είναι σημείο της ευθείας ϵ , το Γ' είναι πάνω στη δ και το B' ταυτίζεται με το B . Επίσης, $AB = BA'$ και $\Gamma B = B\Gamma'$.
β) Η $A'B'G'$ (δηλαδή η $A'BG'$, εφόσον B και B' ταυτίζονται).
γ) Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες.
6. Με στροφή 90° κατά τη θετική φορά γύρω από το B .
7. Το $EBGZ$ είναι παραλληλόγραμμο και έχει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του $ABGD$, αφού έχουν κοινή βάση και ίσα ύψη.
8. **α)** 40° **γ)** $\widehat{ABG} = 140^\circ$
9. **α)** Τα A και Γ είναι συμμετρικά ως προς το K και το ίδιο συμβαίνει για τα B και Δ . Άρα...
β) Παραλληλόγραμμο.
10. Εξηγήστε γιατί οι κορυφές των τραπεζίων είναι συμμετρικές ως προς το O .

Ανακεφαλαίωση: Στοιχεία Αναλυτικής Γεωμετρίας και γεωμετρικοί μετασχηματισμοί

1. **α)** γ **β)** δ **γ)** β
2. Ο β προέκυψε μετά από μεταφορά του α , ο γ μετά από ανάκλαση του α και ο δ μετά από στροφή του α .
3. Ενδεικτικά, οι μαιάνδροι συνδέονται με μεταφορά.
4. **α)** Η εικόνα του A είναι το $(0, 2)$, του B το $(0, 0)$ κτλ.
β) Η εικόνα του A είναι το A , του B είναι το $(3, 4)$ κτλ.
γ) Το συμμετρικό του A ως προς τον άξονα $x'x$ είναι το $(1, -4)$ και ως προς την αρχή των αξόνων είναι το $(-1, -4)$.
5. **α)** Σ **β)** Λ **γ)** Σ **δ)** Σ **ε)** Λ **στ)** Λ **ζ)** Σ
6. Ενδεικτικά ένα ζευγάρι διανυσμάτων για κάθε ερώτημα:
α) $\overline{AB} = \overline{ED}$ **β)** \overline{HB} και \overline{HE} **γ)** \overline{AB} και \overline{BG}
7. Ισοσκελές.
8. Οι αντίστοιχες πλευρές έχουν ίσα μήκη και οι αντίστοιχες γωνίες έχουν ίσα μέτρα.
9. $AB = A'B'$ κτλ.
10. **α)** Θα μπορούσε να είναι ένα ισοσκελές τραπέζιο.
β) Θα μπορούσε να είναι ένα παραλληλόγραμμο που δεν είναι ούτε ρόμβος ούτε ορθογώνιο.
γ) Ισοσκελές και όχι ισόπλευρο τρίγωνο.
δ) Όπως στο ερώτημα γ .

11. **α)** Κεντρική συμμετρία.
β) Κεντρική συμμετρία γύρω από το Μ.
12. **α)** Σκεφτείτε τη γωνία του εξαγώνου και τη σχέση που έχει με τη γωνία στροφής.
14. Σκεφτείτε και περιπτώσεις που, αν είχαμε το σχήμα σε χαρτί, δε θα αρκούσε να το μεταφέρουμε ή να το στρέψουμε, αλλά θα χρειαζόταν και να το αναποδογυρίσουμε.

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

7.1 Διαχείριση δεδομένων

1. Χρονικά είναι τα δεδομένα στις περιπτώσεις (β), (γ) και (στ).
2. **β)** 3,8 εκατ. είναι το σύνολο των νοικοκυριών της χώρας και 2,6 εκατ. είναι τα νοικοκυριά που είχαν πρόσβαση στο διαδίκτυο από την κατοικία.
γ) 69,1% είναι το ποσοστό των νοικοκυριών που έχουν πρόσβαση στο διαδίκτυο από την κατοικία το έτος 2016.
3. **α)** Λ **β)** Σ **γ)** Λ **δ)** Σ **ε)** Σ
4. **α)** Περίπου 167.000.
β) Τα σχολικά έτη 2012-2013, 2014-2015, 2018-2019, 2019-2020 και 2020-2021.
γ) Το 2019-2020.
6. Πιθανά θέματα συζήτησης είναι η βελτίωση των επιτυχιών, αν θα μπορούσε να φτάσει στις 10 επιτυχίες, πόση είναι η «χωρητικότητα» της ανθρώπινης μνήμης κτλ.
7. **α)** 9 **β)** Είναι σωστό. **γ)** 10%
9. Παραπλανητικά είναι τα δύο πρώτα. Γιατί;
10. Από 1.505 το 2028, τα εγκλήματα περιορίστηκαν στα 1.430 το 2032. Η μείωση είναι περίπου 5%.

7.2 Μέτρα θέσης και μεταβλητότητας

1. Κατά σειρά η διάμεσος, το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος είναι:
α) 4, 2, 6, 4 **β)** 4,5, 2,5, 6,5, 4 **γ)** 4, 1, 5, 4
δ) 9,5, 4,5, 10,5, 6
2. **α)** 50% **β)** 25% **γ)** 50%
δ) 25% **ε)** 75% **στ)** 25%
3. **α)** 7,8 **β)** 11,6
4. **α)** Λ **β)** Σ **γ)** Λ **δ)** Σ **ε)** Σ **στ)** Σ
5. **α)** Ελάχιστη τιμή: 17, μέγιστη τιμή: 130, $\delta = 67$, $Q_1 = 30$ και $Q_3 = 91$.

- β)** 74,5
6. **α)** Ελάχιστη τιμή: 15, μέγιστη τιμή: 102, $\delta = 63$, $Q_1 = 31$ και $Q_3 = 87$.
β) 65,01
7. Η Θύελλα.
8. **α)** Μέση τιμή: 6,6, διάμεσος: 6, επικρατούσα τιμή: 5.
β) Μπορούμε να θεωρήσουμε ως απόμακρες τις τιμές 14 και 15.
γ) Νέα μέση τιμή: 5,7, νέα διάμεσος: 6.
9. **β)** Τουλάχιστον 3 μεγάλες ή 3 μικρές.
γ) Σκεφτείτε οι δύο απόμακρες τιμές να «ισορροπούν» τη μέση τιμή.
10. Η απόμακρη τιμή είναι το 4,3. Μετά τη διαγραφή της, η νέα μέση τιμή είναι 3,32 και η διάμεσος είναι 3,3. Η σφαίρα κύλησε στο λούκι περίπου 3,3 δευτερόλεπτα.
11. **α)** Εύρος: 11,2 για την Α και 12,7 για τη Β. Ενδοτεταρτημοριακό εύρος: 5,6 για την Α και 7,2 για τη Β. Μεγαλύτερη μεταβλητότητα στη Β.
β) Μεγαλύτερη μεταβλητότητα έχουν στην Α.
12. Σκεφτείτε όπως στην εφαρμογή.
13. **α)** Ελάχιστη τιμή το 11, μέγιστη το 67, $Q_1 = 21$, $\delta = 38$, $Q_3 = 59$, εύρος: 56 και ενδοτεταρτημοριακό εύρος: 38.
β) Μέχρι και 20 ετών.
14. $54,54 \approx 54,5$ ευρώ για γαλακτοκομικά κτλ. και 53 ευρώ για αλεύρι κτλ.

7.3 Θηκογράμματα

1. **α)** 10 και 28 **β)** 18 **γ)** 12 και 21 **δ)** 18 **ε)** 9
2. **α)** Σ **β)** Λ **γ)** Λ **δ)** Σ **ε)** Σ **στ)** Σ
3. **α)** 50% **β)** 50% **γ)** 75% **δ)** 50%
ε) από 25 μέχρι 28 **στ)** από 41 μέχρι 52
4. Ελάχιστη, Q_1 , δ , Q_3 και μέγιστη για τις γυναίκες: 151, 156,8, 160, 161,5, 173 και για τους άνδρες: 130,5, 132,6, 135,1, 137,8, 143,7.
5. Μπορεί να αντιστοιχεί στο σύνολο α ή στο σύνολο β.
6. Το Α (γιατί;).
7. Το Β αντιστοιχεί στην Άννα και το Α στον Παναγιώτη (γιατί;).

Ανακεφαλαίωση: Στατιστική

1. **α)** Σ **β)** Λ **γ)** Λ **δ)** Λ **ε)** Σ **στ)** Λ
2. **α)** Λ **β)** Λ **γ)** Λ **δ)** Σ **ε)** Σ
3. Η αύξηση (1.000 ευρώ σε 4 έτη) φαίνεται μεγά-

λη, διότι οι ετήσιες αποδοχές (στον κατακόρυφο άξονα) ξεκινούν να παριστάνονται από 15 χιλιάδες και όχι από 0.

4. **α)** Μέγιστος 1.250 (περίπου) το 2008. Ελάχιστος 720 (περίπου) το 2020.
β) Σωστός.
γ) Το 1980.
δ) Αυξάνονταν την πενταετία 2004-2008 και μειώνονταν την πενταετία 2011-2015.
5. 14,9. Έχει διαφορά.
6. **α)** $Q_1 = 4, \delta = 6,5, Q_3 = 10, IQR = 6$
β) $Q_1 = 6, \delta = 10, Q_3 = 11, IQR = 5$
7. **α)** Περίπου 25%.
β) Περίπου 50%.
γ) Περίπου 50%.
8. **α)** 48 gr και 78 gr
β) Από 64 gr μέχρι 78 gr.
γ) i) Περίπου 250 αυγά, **ii)** περίπου 500 αυγά.
9. **α)** Χρησιμοποιήστε τις κλάσεις 10-20, 20-30, 30-40, 40-50. Για το θηκόγραμμα χρησιμοποιήστε ότι $Q_1 = 20, \delta = 27,5, Q_3 = 36,5$.
10. **α)** Σκεφτείτε ότι η μέση τιμή επηρεάζεται από τις απόμακρες τιμές.
β) Σκεφτείτε ότι ανάμεσα στα Q_1 και Q_3 βρίσκουμε περίπου το 50% των δεδομένων.

Πειράματα τύχης και πιθανότητες

8.1 Βασική αρχή απαρίθμησης: η πολλαπλασιαστική αρχή

1. **α)** $24^2 \cdot 10^3 = 576.000$ **β)** $2^{10} = 1.024$
2. Όχι. Δεν είναι δυνατόν να υπάρξει σκορ Α-Α-Β ή Β-Β-Α (θα έχει τελειώσει ο αγώνας χωρίς να γίνει το 3ο σετ).
3. $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$ τριάδες πιάτων. Άρα $\frac{1}{24}$.
4. Πλήθος δυνατών αριθμών φοιτητικής ταυτότητας: $24^2 \cdot 10^4 = 5.760.000$. Άρα $\frac{1}{5.760.000}$.
5. $\frac{1}{10^{10}} = \frac{1}{10.000.000.000} = 0,0000000001$
6. Πλήθος πιθανών πεντάδων (Παπούτσια, Παντελόνι, Πουκάμισο, Μπλουζα): $4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = 288$.
α) Ευνοϊκές περιπτώσεις με μαύρα παπούτσια: $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = 72$, άρα $\frac{72}{288} = \frac{1}{4}$.

$$\beta) \text{ Ομοίως: } \frac{3 \cdot 4 \cdot 3}{288} = \frac{36}{288} = \frac{1}{8}.$$

$$\gamma) \frac{72 + 36}{288} = \frac{108}{288} = \frac{3}{8}$$

7. **α)** $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
β) Η Άννα στη μεσαία θέση: Οι τρόποι με τους οποίους γίνεται αυτό (δηλαδή κάθονται τα υπόλοιπα παιδιά) είναι $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Άρα η πιθανότητα να καθίσει η Άννα στη μεσαία θέση είναι $\frac{24}{120} = \frac{1}{5}$.

8.2 Ασυμβίβαστα ενδεχόμενα

1. Ασυμβίβαστα είναι μόνο στην περίπτωση α) i.
2. **α)** Λ **β) i)** Σ **ii)** Σ
3. $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{9}{20}$
4. **α)** $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ **β)** $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$
γ) $\frac{21}{36} = \frac{7}{12}$ ή με τον απλό προσθετικό νόμο $\frac{1}{6} + \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
6. **α)** $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{9}{20}$ **β)** $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ **γ)** $1 - \frac{9}{20} = \frac{11}{20}$
7. Ενδεικτικά: Β: «έρχεται ακριβώς 2 φορές κεφαλή» (θα μπορούσαμε να γράφαμε και άλλα, όπως «έρχεται ακριβώς 1 φορά κεφαλή» ή «έρχεται το πολύ 2 φορές κεφαλή» κτλ.).
 $\Omega = \{KKKK, KKKΓ, KKΓK, KΓKK, KΓKΓ, KΓΓK, KΓΓΓ, ΓKKK, ΓKΚK, ΓKΓK, ΓKΓΓ, ΓΓKK, ΓΓKΓ, ΓΓΓK, ΓΓΓΓ\}$.
 $A = \{KKKK, KKKΓ, KKΓK, KΓKK, ΓKKK\}$
 $B = \{KKΓΓ, KΓKΓ, KΓΓK, ΓKΚK, ΓKΓK, ΓΓKK\}$.
 $P(A) = \frac{5}{16}, P(B) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.
Τα ενδεχόμενα είναι ασυμβίβαστα, άρα
 $P(A \cup B) = \frac{5}{16} + \frac{6}{16} = \frac{11}{16}$.
8. Αν Κ: κόκκινο, Π: πράσινο και Μ: μπλε, έχουμε τα πιθανά αποτελέσματα ως προς χρώμα και αριθμό: Κ1, Π2, Μ3. Άρα
 $\Omega = \{K1K1, K1Π2, K1Μ3, Π2K1, Π2Π2, Π2Μ3, Μ3K1, Μ3Π2, Μ3Μ3\}$.
 $A = \{K1Π2, K1Μ3, Π2K1, Π2Μ3, Μ3K1, Μ3Π2\}$.
 $B = \{K1K1, K1Μ3, Π2Π2, Μ3K1, Μ3Μ3\}$.
 $\Gamma = \{K1K1\}$.

α) Ασυμβίβαστα είναι τα A και Γ.

$$\beta) P(A) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}, P(B) = \frac{5}{9}, P(\Gamma) = \frac{1}{9}.$$

Τα A και B δεν είναι ασυμβίβαστα, άρα δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τον απλό προσθετικό νόμο.

$$A \cup B = \{K1\Pi2, K1M3, \Pi2K1, \Pi2M3, M3K1, M3\Pi2, K1K1, \Pi2\Pi2, M3M3\} = \Omega, \text{ άρα } P(A \cup B) = 1.$$

Τα A και Γ είναι ασυμβίβαστα, άρα

$$P(A \cup \Gamma) = P(A) + P(\Gamma) = \frac{2}{3} + \frac{1}{9} = \frac{7}{9}.$$

9. α) Ναι, γιατί δε γίνεται η ίδια θέση να αντιστοιχεί σε περιττό και άρτιο αριθμό.

β) $A \cup B$: «η θέση είναι δίπλα σε παράθυρο».

$$P(A \cup B) = \frac{29}{58}.$$

γ) Από τον απλό προσθετικό νόμο:

$$P(B) = P(A \cup B) - P(A) = \frac{29}{58} - \frac{7}{29} = \frac{29}{58} - \frac{14}{58} = \frac{15}{58}.$$

10. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα A: «το στυλό γράφει κόκκινο», B: «το στυλό γράφει μπλε». Τότε $A \cup B$: «το στυλό γράφει μπλε ή κόκκινο». Αν δεν υπάρχουν στυλό που να γράφουν μπλε και κόκκινο, τότε τα A και B είναι ασυμβίβαστα και ισχύει ο απλός προσθετικός νόμος, δηλαδή

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}. \text{ Όμως,}$$

$P(A \cup B) = \frac{2}{3}$ από την εκφώνηση. Άρα τα A και B δεν είναι ασυμβίβαστα και υπάρχουν στυλό που γράφουν μπλε και κόκκινο.

11. Αν είναι ασυμβίβαστα, τότε $P(A \cup B) = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{17}{12} > 1$, αλλά δεν υπάρχει πιθανότητα μεγαλύτερη του 1. Άρα δεν είναι ασυμβίβαστα.

12. Αν δεν υπάρχουν τέτοια τεστ, τότε για τις δύο πιθανότητες εφαρμόζεται ο απλός προσθετικός νόμος: $\frac{5}{8} + \frac{3}{4} = \frac{11}{8} > 1$. Άρα με το σκεπτικό της άσκησης 11 υπάρχουν τέτοια τεστ.

13. Η πρόταση δεν είναι σωστή. Θα ήταν σωστή μόνο αν τα ενδεχόμενα «ο ένοικος έχει αυτοκίνητο με ζυγό αριθμό» και «ο ένοικος έχει αυτοκίνητο με μονό αριθμό» ήταν ασυμβίβαστα. Όμως, δεν αποκλείεται ένας ένοικος να έχει δύο αυτοκίνητα, ένα με μονό και ένα με ζυγό αριθμό.

Ανακεφαλαίωση: Πειράματα τύχης και πιθανότητες

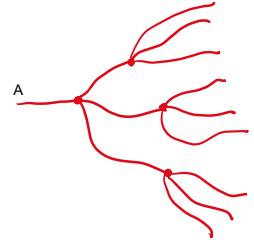
1. Ασυμβίβαστα είναι στις περιπτώσεις (α) και (δ).
2. α) Σ β) Σ γ) Λ δ) Σ ε) Λ

3. α) $4 \cdot 2 = 8$ διαφορετικοί τρόποι. β) $\frac{5}{8}$

4. α) $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ β) $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2.520$

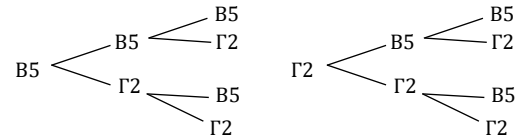
5. Όχι, οι διαφορετικές διαδρομές είναι $3 + 2 + 4 = 9$.

6. Ενδεικτικά: Στον διπλανό χάρτη υπάρχουν $3 \cdot 3$ διαφορετικές διαδρομές. Πρέπει κάθε κλάδος να συνεχιστεί, οπότε να υπάρχουν 4 διαφορετικές διαδρομές για καθεμία, ώστε οι διαδρομές συνολικά να γίνουν $3 \cdot 3 \cdot 4$. Με κατάλληλη συνέχεια θα προκύψουν οι $3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2$ διαδρομές.



7. Θα ήταν σωστό αν γίνονταν οπωσδήποτε 5 αγώνες. Όμως, όπως φαίνεται στον δεύτερο πίνακα, μπορεί να χρειαστούν 4 αγώνες, αλλά και 3 αγώνες (αν όλους τούς κερδίσει η ίδια ομάδα). Επομένως δε συμφωνούμε με την πρόταση.

8. Γίνονται τουλάχιστον 3 αγώνες. Σχεδιάζουμε το δενδροδιάγραμμα για τους 3 πρώτους αγώνες, σημειώνοντας την ομάδα που κερδίζει σε κάθε αγώνα.



Τα ευνοϊκά αποτελέσματα, για να τελειώσει ο τελικός σε 3 αγώνες, είναι τα B5B5B5 και Γ2Γ2Γ2, άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

9. α) Σκεφτόμαστε ότι επιλέγουμε φάκελο για κάθε επιστολή, άρα υπάρχουν $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$.

β) Αν A είναι το ενδεχόμενο «δε χρησιμοποιείται ο άσπρος φάκελος», τότε

$$P(A) = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{120} = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}. \text{ Η πιθανότητα να}$$

χρησιμοποιηθεί ο άσπρος φάκελος είναι

$$1 - P(A) = \frac{4}{5}.$$

10. Πιθανά λαχεία ως προς σειρά-αριθμό: $10 \cdot 99999 = 999990$.

$$\alpha) \frac{1}{999990} \quad \beta) \text{ i) } \frac{1}{10}, \text{ ii) } \frac{3}{10}$$

11. Ενδεικτικά:

α) A: τα παιδιά που παίζουν ποδόσφαιρο. B: τα παιδιά που παίζουν μπάσκετ ή που δεν κάνουν κανένα άθλημα.

β) 0,5. (Μπορούμε να απαντήσουμε στο ερώτημα α, άρα και στο β, και με άλλον τρόπο.)

Αλφαβητικό ευρετήριο όρων

- αδύνατη εξίσωση: 76
αλγεβρικά πλακίδια: 70
αλγεβρική παράσταση: 59
αλγεβρικός τύπος συνάρτησης: 91
ανάλογα ποσά: 105
ανεξάρτητη μεταβλητή: 91
αντίθετα διανύσματα: 187
αντιστρόφως ανάλογα ποσά: 119
αόριστη εξίσωση: 76
άρρητος αριθμός: 38
ασυμβίβαστα ενδεχόμενα: 246
βασική αρχή απαρίθμησης: 242
γενικός όρος μοτίβου: 53
γινόμενο δυνάμεων με την ίδια βάση:
17
γινόμενο δυνάμεων με τον ίδιο
εκθέτη: 19
γραφική παράσταση: 99
γωνία στροφής: 199
διάμεσος: 227
διάνυσμα: 186
διανυσματικά μεγέθη: 187
διανύσματος αρχή: 186
διανύσματος τέλος: 186
διεύθυνση διανύσματος: 186
δύναμη με εκθέτη ακέραιο: 23
δύναμη υψωμένη σε εκθέτη: 18
εγγεγραμμένη γωνία: 157
εγγεγραμμένο πολύγωνο σε κύκλο:
163
εικόνα σχήματος (μετά από
μετασχηματισμό): 191
ελάχιστη τιμή: 234
εμβαδόν: 129
εμβαδόν κυκλικού τομέα: 172
εμβαδόν κύκλου (κυκλικού δίσκου):
171
εμβαδόν ορθογωνίου: 135
εμβαδόν παραλληλογράμμου: 136
εμβαδόν τετραγώνου: 134
εμβαδόν τραπεζίου: 138
εμβαδόν τριγώνου: 137
ενδοτεταρτημοριακό εύρος: 228
εξαρτημένη μεταβλητή: 91
εξίσωση ευθείας: 105
επιμεριστική ιδιότητα: 44
ευθεία των πραγματικών αριθμών:
39
ζυγαριά: 73
θηκόγραμμα: 234
ίσα διανύσματα: 187
ισοδύναμες εξισώσεις: 72
κανονικό πολύγωνο: 161
κανονικότητες: 52
καρτεσιανό σύστημα
συντεταγμένων: 98
κεντρική γωνία κανονικού
πολυγώνου: 163
κεντρική συμμετρία: 203
κέντρο στροφής: 199
κλίση ευθείας: 105
κυκλικός δίσκος: 171
κυκλικός τομέας: 172
λύση (ρίζα) εξίσωσης: 71
μέγιστη τιμή: 234
μέλος εξίσωσης (πρώτο, δεύτερο):
71
μεταβλητές: 59
μεταφορά: 191
μέτρο διανύσματος: 186
μήκος κύκλου: 167
μήκος τόξου: 167
μονόμετρα μεγέθη: 187
μοτίβα: 52
όμοιοι όροι: 62
όροι εξίσωσης (άγνωστοι, γνωστοί):
71
παράλληλες ευθείες (συναρτήσεις):
112
παραπλανητικά διαγράμματα: 222
περιγεγραμμένος κύκλος σε
πολύγωνο: 163
περίληψη πέντε αριθμών: 228
περιστροφική συμμετρία: 207
πηλίο δυνάμεων με την ίδια βάση:
18
πηλίο δυνάμεων με τον ίδιο εκθέτη:
20
πίνακας τιμών: 91
πολλαπλασιαστική αρχή: 243
πραγματικός αριθμός: 39
πρόβλημα (επίλυση με εξίσωση): 80
προσθετικός νόμος (απλός): 246
πρώτο τεταρτημόριο: 228
πρώτου βαθμού εξίσωση: 77
Πυθαγόρειο θεώρημα: 145
ρητή προσέγγιση άρρητου: 37
ρητός αριθμός: 38
ρίζα (λύση) εξίσωσης: 71
σταθερά αναλογίας: 105
σταθερή διαφορά: 53
στρέμμα: 129
στροφή: 199
συνάρτηση: 91
συνάρτηση $y = ax + b$: 112
συνάρτηση $y = \frac{a}{x}$: 119
συνάρτηση $y = ax$: 105
συντεταγμένες σημείου: 98
ταυτότητα: 76
τεταγμένη: 98
τεταρτημόρια (στη Στατιστική): 228
τεταρτημόρια (στο σύστημα
συντεταγμένων): 98
τετμημένη: 98
τετραγωνική ρίζα: 31
τετραγωνικό δέκατο: 129
τετραγωνικό εκατοστό: 129
τετραγωνικό μέτρο: 129
τετραγωνικό χιλιόμετρο: 129
τετραγωνικό χιλιοστό: 129
τρίτο τεταρτημόριο: 228
τυποποιημένη μορφή αριθμού: 25
φορά διανύσματος: 186
χρονικά δεδομένα: 221
χρονοδιάγραμμα: 221

