ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Γ΄ Γυμνασίου

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Δημήτρης Διαμαντίδης • Ελισσάβετ Καλογερία • Ειρήνη Περυσινάκη
Γιάννης Σταμπόλας • Κώστας Στουραΐτης • Βαγγέλης Φακούδης

Επιστημονικός υπεύθυνος:
Γιώργος Ψυχάρης

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Επιστημονική Επιτροπή Αξιολόγησης

Συντονιστής / Αξιολογητής: **Φουσκάκης Δημήτριος**
Εν ενεργεία μέλος Διδακτικού Ερευνητικού Προσωπικού Πανεπιστημίου

Αξιολογήτρια: **Μιχαηλίδου Χριστίνα**
Εν ενεργεία Εκπαιδευτικός

Αξιολογήτρια: **Σιώπη Καλλιόπη**
Εν ενεργεία Εκπαιδευτικός

Τεχνικός Εμπειρογνώμονας: **Θεοτόκης Δημήτριος**
Πτυχιούχος Πληροφορικής

Επικουρικός Εμπειρογνώμονας: **Κεντρωτής Χρήστος**
Πτυχιούχος Γραφιστικής

Υπεύθυνη του μαθήματος/γνωστικού αντικειμένου στο πλαίσιο της Πράξης: **Ειρήνη Γεωργάκη**, Σύμβουλος Α΄ ΙΕΠ,
μέλος της Επιστημονικής Ομάδας Έργου (ΕΟΕ) της Πράξης

Πράξη με τίτλο: «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ 6010165 στο Πρόγραμμα «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή» 2021-2027

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ
Σπυρίδων Δουκάκης
Πρόεδρος του Δ.Σ. του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Υπεύθυνη Πράξης
Πολυξένη Μπίλλα
Σύμβουλος Α΄ του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής
Προϊσταμένη Τμήματος Β΄ Προγραμμάτων Σπουδών και Εκπαιδευτικού Υλικού

Αναπληρώτρια Υπεύθυνη Πράξης
Άννα-Αικατερίνη Λυκούρη
Σύμβουλος Α΄ του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

«Με τη συγχρηματοδότηση της Ευρωπαϊκής Ένωσης» και το Πρόγραμμα «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή»

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

**Δ. Διαμαντίδης, Ε. Καλογερία, Ε. Περυσινάκη, Γ. Σταμπόλας,
Κ. Στουραΐτης, Β. Φακούδης, Γ. Ψυχάρης**

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΤΑΚΗ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΚΔΟΣΗΣ

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ	**Δημήτρης Διαμαντίδης**, *Δρ Διδακτικής Μαθηματικών, Εκπαιδευτικός Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης* **Ελισσάβετ Καλογερία**, *Δρ Διδακτικής Μαθηματικών, Σύμβουλος Εκπαίδευσης* **Ειρήνη Περυσινάκη**, *Δρ Μαθηματικών, Σύμβουλος Εκπαίδευσης* **Γιάννης Σταμπόλας**, *Δρ Μαθηματικών, Σύμβουλος Εκπαίδευσης* **Κώστας Στουραΐτης**, *Δρ Διδακτικής Μαθηματικών, Εκπαιδευτικός Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης.* **Βαγγέλης Φακούδης**, *MSc στα Μαθηματικά και τις Φυσικές Επιστήμες, Εκπαιδευτικός Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης* **Γιώργος Ψυχάρης**, *Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ*
ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟΣ ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ	**Γιώργος Ψυχάρης**
ΣΧΕΔΙΑΣΗ - ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΧΗΜΑΤΩΝ	**Έφη Κανελλοπούλου**, *Γραφίστρια* **Μαρίνα Π. Ρένεση**, *Γραφίστρια*
ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΣΗ	**Κωνσταντίνος Ξύγκας**, *Εικονογράφος*
ΣΕΛΙΔΟΠΟΙΗΣΗ	**Γιώργος Χατζησπύρος**, *Γραφίστας* **Χρύσα Τσάμη**, *Γραφίστρια* **Σπύρος Ρένεσης**, *Γραφίστας*
ΦΙΛΟΛΟΓΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ	**Μάγδα Τικοπούλου**, *Φιλόλογος*
ΠΡΟΕΚΤΥΠΩΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ	ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΤΑΚΗ
ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ ΠΡΟΕΚΤΥΠΩΤΙΚΩΝ ΕΡΓΑΣΙΩΝ	**Βαγγέλης Μπακλαβάς**, *Φιλόλογος* **Δημήτρης Πλακάκης**, *Μαθηματικός*
ΦΩΤΟΓΡΑΦΙΕΣ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΥ	**Dreamstime.com**, *Freepik.com*
ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΕΞΩΦΥΛΛΟΥ	**Έφη Κανελλοπούλου**, *Γραφίστρια*
ΦΩΤΟΓΡΑΦΙΑ ΕΞΩΦΥΛΛΟΥ	**Dreamstime.com**

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Ταυτότητα του βιβλίου

Αγαπητέ μαθητή, αγαπητή μαθήτρια,

Το βιβλίο που κρατάς στα χέρια σου δημιουργήθηκε με βάση τις κατευθύνσεις του Προγράμματος Σπουδών των Μαθηματικών. Κάθε στοιχείο του (έργα διερεύνησης, διατύπωση μαθηματικού περιεχομένου, εφαρμογές κτλ.) συνδέεται με ένα ή περισσότερα Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ). Τα έργα διερεύνησης, τα παραδείγματα και οι ασκήσεις έχουν επιλεγεί ώστε να σε βοηθήσουν να αναπτύξεις πλούσια μαθηματική δραστηριότητα και μαθηματικό συλλογισμό και να αξιοποιήσεις τα μαθηματικά για να ερμηνεύσεις κριτικά διάφορα φαινόμενα του φυσικού και κοινωνικού κόσμου.

Το βιβλίο οργανώνεται σε θεματικές ενότητες και αυτές χωρίζονται σε διδακτικές ενότητες.

Οι **διδακτικές ενότητες** έχουν δομηθεί με παρόμοιο τρόπο.

- Στην αρχή υπάρχει ένα έργο Διερεύνησης (που αριθμείται ως Δ1, Δ2, ...), πάνω στο οποίο προτείνεται να συνεργαστείτε ανά ομάδες και στη συνέχεια να συζητήσετε στην τάξη.
- Ακολουθεί το «Συζητάμε», που είναι μια συζήτηση ή/και κάποιο λυμένο παράδειγμα παρόμοιο με εκείνο της Διερεύνησης. Αυτό μπορεί να το συζητήσετε στην τάξη ή να το μελετήσεις στο σπίτι, ή και τα δύο.
- Το «Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις» περιέχει το βασικό μαθηματικό περιεχόμενο της διδακτικής ενότητας.
- Στη συνέχεια, υπάρχουν λυμένες εφαρμογές και παραδείγματα.
- Το «Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε» είναι μικρές ή μεγαλύτερες εργασίες που προτείνεται να γίνουν από ομάδες παιδιών στο σπίτι ή στην τάξη και να παρουσιαστούν στην τάξη.
- Οι ασκήσεις είναι χωρισμένες σε δύο ομάδες.
  - Στο «Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις» βρίσκουμε ερωτήσεις και ασκήσεις άμεσης εφαρμογής.
  - Στο «Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα» υπάρχουν πιο σύνθετα έργα και, ίσως, με περισσότερα ερωτήματα. Έχει καταβληθεί προσπάθεια να είναι τέτοια τα προτεινόμενα έργα, ώστε να μπορούν να ασχοληθούν με αυτά όσο το δυνατόν περισσότερα παιδιά. Σε κάθε περίπτωση θα βρεις ερωτήσεις, ασκήσεις, παραδείγματα και υλικό που θα σου κινήσουν το ενδιαφέρον και θα μπορείς να τα επεξεργαστείς. Σε ασκήσεις που χρειάζονται πράξεις με δεκαδικούς ή μεγάλους αριθμούς, προτείνεται να χρησιμοποιείς αριθμομηχανή.

Στο τέλος κάθε θεματικής ενότητας υπάρχει μια **ανακεφαλαιωτική ενότητα**, η οποία περιέχει ποικιλία έργων. Αρκετά από αυτά μπορείς να τα αξιοποιήσεις για να ελέγξεις τι έμαθες και τι μπορείς να κάνεις. Με κάποια άλλα μπορείς να εμβαθύνεις σε αυτά που έμαθες και να τα συνδέσεις με θέματα έξω από τη συγκεκριμένη ενότητα ή και έξω από τα μαθηματικά. Κάποια από αυτά προτείνονται για να εργαστείτε ομαδικά.

Στο βιβλίο θα βρεις και **ψηφιακό υλικό**. Υπάρχουν δύο κατηγορίες τέτοιου υλικού. Η πρώτη περιλαμβάνει αρχεία που μεταφέρουν πληροφορίες (π.χ. εικόνες, ιστορικά σημειώματα, λυμένα παραδείγματα κ.ά.) ή επιπλέον υλικό (π.χ. επιπλέον ασκήσεις). Η δεύτερη αποτελείται από εφαρμογές που απαιτούν τη δική σου δραστηριότητα (π.χ. χρήση του Geogebra ή λογιστικού φύλλου, συμπλήρωση πίνακα έννοιας κ.ά.), ώστε να πειραματιστείς και να βγάλεις συμπεράσματα. Το ψηφιακό υλικό μπορεί να χρησιμοποιηθεί είτε στην τάξη είτε στο σπίτι, για την ατομική ή την ομαδική εργασία. Ωστόσο, προτείνουμε, όσο είναι δυνατόν, να αξιοποιείται για τη διερεύνηση και τη συζήτηση στην τάξη.

Μία ομάδα σημειωμάτων στο βιβλίο και στο ψηφιακό υλικό είναι τα **ιστορικά σημειώματα**. Αυτά τα σημειώματα, μαζί με έργα, εφαρμογές και ασκήσεις από την Ιστορία των μαθηματικών (π.χ. η εφαρμογή της ενότητας 5.3 η οποία αναφέρεται στον υπολογισμό του ύψους της πυραμίδας από τον Θαλή τον Μιλήσιο), έχουν στόχο να αναδείξουν ότι τα μαθηματικά είναι ένα ανθρώπινο δημιούργημα και να σου δώσουν επιπλέον ευκαιρίες σύνδεσης των μαθηματικών με την καθημερινή ζωή των ανθρώπων.

Αγαπητοί εκπαιδευτικοί, αγαπητοί γονείς,

Το παρόν βιβλίο στηρίζεται στο Πρόγραμμα Σπουδών (ΠΣ) των Μαθηματικών του Γυμνασίου (ΦΕΚ 235/Β/20-01-2023). Αποτελεί μια προσπάθεια υλοποίησης των κατευθύνσεων του ΠΣ και κάθε στοιχείο του (έργα διερεύνησης, διατύπωση μαθηματικού περιεχομένου, εφαρμογές κτλ.) συνδέεται με ένα ή περισσότερα Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ). Έχουν ληφθεί υπόψη οι στοχεύσεις του ΠΣ για τις προηγούμενες τάξεις (των δύο πρώτων τάξεων του Γυμνασίου αλλά και του Δημοτικού σχολείου) και τις επόμενες (δηλαδή για το Λύκειο). Οι προτάσεις έργων διερεύνησης, τα παραδείγματα και οι ασκήσεις έχουν επιλεγεί ώστε με την κατάλληλη διαχείριση στην τάξη να υποστηρίξουν την εμπλοκή των παιδιών σε πλούσια μαθηματική δραστηριότητα και διερεύνηση, την ανάπτυξη του μαθηματικού συλλογισμού και την καλλιέργεια της ικανότητας αξιοποίησης των μαθηματικών στην κριτική ερμηνεία φαινομένων του φυσικού και κοινωνικού κόσμου. Στο πλαίσιο της μαθηματικής δραστηριότητας των παιδιών θεωρείται απαραίτητη η αξιοποίηση ποικίλων αλλά κατάλληλων εργαλείων, που μπορεί να είναι χειραπτικά (όπως χαρτί και μολύβι, γεωμετρικά όργανα, διαφανές χαρτί κ.ά.) και ψηφιακά (όπως λογιστικά φύλλα, χρήση διαδικτύου, Geogebra κ.ά.). Προτείνεται, και σε αρκετά έργα αναφέρεται ρητά, ένας συνδυασμός ατομικής και ομαδικής εργασίας και συζήτησης σε μικρές ομάδες και στη συνέχεια στην τάξη. Ένας τέτοιος συνδυασμός μπορεί να προωθήσει τη μαθηματική επικοινωνία, τη συμπερίληψη όλων των παιδιών στις μαθηματικές πρακτικές, αλλά και την ανάπτυξη αυτοπεποίθησης και θετικών στάσεων προς τα μαθηματικά.

Το βιβλίο οργανώνεται σε θεματικές ενότητες, αντίστοιχες με τις θεματικές ενότητες του ΠΣ. Οι θεματικές ενότητες αποτελούνται από διδακτικές ενότητες, οι οποίες αποτελούν αυτόνομες μονάδες διδασκαλίας μίας ή περισσότερων διδακτικών ωρών. Για παράδειγμα, η διδακτική ενότητα «4.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού» είναι μια ενότητα που μπορεί να πραγματευτεί σε 5 διδακτικές ώρες (ενδεικτικά), ενώ αρκετές άλλες ενότητες μπορούν να συζητηθούν σε δύο διδακτικές ώρες.

Σε ειδικές περιπτώσεις, για διδακτικούς λόγους, δύο ή περισσότερες θεματικές ενότητες του ΠΣ αποτελούν το αντικείμενο της ίδιας θεματικής ενότητας στο βιβλίο. Έτσι, οι Κανονικότητες με τις Αλγεβρικές Παραστάσεις αποτέλεσαν μια ενιαία θεματική ενότητα, η οποία εστιάζει στις αλγεβρικές εκφράσεις και τους μετασχηματισμούς τους. Ομοίως, μέσα από την ενιαία θεματική ενότητα της Γεωμετρίας του Επιπέδου και των Γεωμετρικών Μετασχηματισμών αναδεικνύονται οι σχέσεις της ισότητας και της ομοιότητας των σχημάτων. Τέλος, στις Πιθανότητες δημιουργήθηκε μία θεματική ενότητα.

Προτεινόμενη σειρά διδακτικής διαχείρισης των διδακτικών ενοτήτων

Με βάση τα ΠΜΑ του πεδίου Αριθμοί-Άλγεβρα, οι Συναρτήσεις θα πρέπει να προηγηθούν των Αλγεβρικών Σχέσεων, εφόσον οι Γραμμικές Εξισώσεις υποστηρίζουν τα Γραμμικά Συστήματα. Αν και δεν υπάρχουν άλλα τέτοιου είδους προαπαιτούμενα, η σειρά διδασκαλίας για την Άλγεβρα προτείνεται να είναι ίδια με τη σειρά των ενοτήτων (δηλαδή 1, 2, 3, 4). Για τη Γεωμετρία, η Ομοιοθεσία και η Ομοιότητα θα πρέπει να προηγηθούν της Τριγωνομετρίας και για αυτό προτείνεται να προηγηθεί η ενότητα 5 (Γεωμετρία του επιπέδου και Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί) και να ακολουθήσουν οι ενότητες 6 (Τριγωνομετρία) και 7 (Εμβαδά και Όγκοι σε στερεά σχήματα) με οποιαδήποτε σειρά. Στα Στοχαστικά Μαθηματικά, μπορεί να διδαχτεί πρώτα η Στατιστική και μετά οι Πιθανότητες, ή το αντίθετο. Είναι σημαντικό όμως η διδασκαλία κάθε θεματικού πεδίου να απλώνεται σε όσο το δυνατόν μεγαλύτερο μέρος του σχολικού έτους. Για παράδειγμα, η διδασκαλία της Γεωμετρίας – Μέτρησης θα πρέπει να απλώνεται στη διάρκεια του χρόνου και να μην περιορίζεται σε ένα μικρό μέρος του σχολικού έτους. Αυτό μπορεί να γίνεται είτε με παράλληλη διδασκαλία δύο διαφορετικών θεματικών ενοτήτων μέσα σε κάθε εβδομάδα (π.χ. δύο ώρες Άλγεβρα και δύο ώρες Γεωμετρία ή Στοχαστικά Μαθηματικά) είτε με διαδοχική διδασκαλία διδακτικών ενοτήτων από διαφορετικά πεδία (π.χ. μια ενδεικτική σειρά ενοτήτων είναι η 1, 2, 5, 3, 4, 8, 6, 7, 9 αλλά και η 7, 1, 2, 5.1, 9, 3, 4, 5.2-5.3, 8, 6 και άλλες).

Ενημέρωση των εκπαιδευτικών για το βιβλίο

Οι Θεματικές και οι Διδακτικές ενότητες και τα Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ)

Παρακάτω αναφέρονται τα ΠΜΑ που υποστηρίζονται σε κάθε διδακτική ενότητα, ώστε οι εκπαιδευτικοί να μπορούν να ανατρέχουν σε αυτά όταν σχεδιάζουν τη διδασκαλία.

Στο τέλος κάθε διδακτικής ενότητας οι μαθητές και οι μαθήτριες είναι σε θέση:

Θεματική ενότητα 1: Πραγματικοί αριθμοί

1.1 Ιδιότητες των τετραγωνικών ριζών

- Να διερευνούν και να αποδεικνύουν τις ιδιότητες του γινομένου και του πηλίκου τετραγωνικών ριζών. [Αρ.Π.9.7]
- Να χρησιμοποιούν τις τετραγωνικές ρίζες και τις ιδιότητές τους στην απλοποίηση παραστάσεων και την επίλυση προβλημάτων. [Αρ.Π.9.8]

1.2 Ρητοί και άρρητοι αριθμοί

- Να διερευνούν και να διακρίνουν τις μορφές των κλασματικών και δεκαδικών αναπαραστάσεων των ρητών αριθμών και να κάνουν μετατροπές από τη μία μορφή στην άλλη. [Αρ.Π.9.1]
- Να αναγνωρίζουν την ανάγκη εισαγωγής των άρρητων αριθμών. [Αρ.Π.9.2]
- Να ορίζουν τους άρρητους αριθμούς. [Αρ.Π.9.3]
- Να αναγνωρίζουν τους άρρητους ως αριθμούς οι οποίοι έχουν άπειρο πλήθος δεκαδικών ψηφίων μη περιοδικών. [Αρ.Π.9.4]
- Να συγκρίνουν και να διατάσσουν πραγματικούς αριθμούς χρησιμοποιώντας την ευθεία των πραγματικών αριθμών. [Αρ.Π.9.9]
- Να χρησιμοποιούν τους πραγματικούς αριθμούς στην επίλυση προβλημάτων. [Αρ.Π.9.10]

1.3 Το σύνολο των πραγματικών αριθμών

- Να αναγνωρίζουν το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Να διερευνούν τις σχέσεις των συνόλων των φυσικών, των ακεραίων, των ρητών, των άρρητων και των πραγματικών. [Αρ.Π.9.5]
- Να επεκτείνουν τις πράξεις και τις δυνάμεις των ρητών και τις ιδιότητές τους στους πραγματικούς. [Αρ.Π.9.6]
- Να συγκρίνουν και να διατάσσουν πραγματικούς αριθμούς χρησιμοποιώντας την ευθεία των πραγματικών αριθμών. [Αρ.Π.9.9]
- Να χρησιμοποιούν τους πραγματικούς αριθμούς στην επίλυση προβλημάτων. [Αρ.Π.9.10]

Θεματική ενότητα 2: Κανονικότητες και Αλγεβρικές Παραστάσεις

2.1 Κανονικότητες

- Να διερευνούν μαθηματικές κανονικότητες και να τις εκφράζουν με αλγεβρικές παραστάσεις της μορφής $y = αν^2$, $α > 0$. [Αλ.Κ.9.1]

2.2 Μονώνυμα και Πολυώνυμα

- Να εκφράζουν ρεαλιστικές καταστάσεις με απλές αλγεβρικές παραστάσεις. [Αλ.Π.9.1]
- Να αναγνωρίζουν τα μονώνυμα και τα πολυώνυμα, τον βαθμό τους και να υπολογίζουν την αριθμητική τιμή ενός πολυωνύμου. [Αλ.Π.9.2]

2.3 Πράξεις πολυωνύμων

- Να εκφράζουν ρεαλιστικές καταστάσεις με απλές αλγεβρικές παραστάσεις. [Αλ.Π.9.1]
- Να υπολογίζουν το άθροισμα, τη διαφορά και το γινόμενο μονωνύμων και απλών πολυωνύμων κυρίως μιας μεταβλητής. [Αλ.Π.9.3]
- Να αναγνωρίζουν την επιμεριστική ιδιότητα ως το βασικό κοινό στοιχείο των πράξεων πολυωνύμων, των ταυτοτήτων και της παραγοντοποίησης. [Αλ.Π.9.6]
- Να παραγοντοποιούν απλά πολυώνυμα (κυρίως μιας μεταβλητής) με κοινό παράγοντα, ομαδοποίηση και χρήση ταυτοτήτων. [Αλ.Π.9.7]

2.4 Ταυτότητες

- Να διερευνούν και να αποδεικνύουν αλγεβρικά και να ερμηνεύουν (όπου είναι δυνατόν) γεωμετρικά τις ταυτότητες: $(α \pm β)^2 = α^2 \pm 2αβ + β^2$, $α^2 - β^2 = (α - β)(α + β)$. [Αλ.Π.9.4]
- Να χρησιμοποιούν τις ταυτότητες για να μετατρέπουν αλγεβρικές παραστάσεις σε άλλη μορφή. [Αλ.Π.9.5]
- Να αναγνωρίζουν την επιμεριστική ιδιότητα ως το βασικό κοινό στοιχείο των πράξεων πολυωνύμων, των ταυτοτήτων και της παραγοντοποίησης. [Αλ.Π.9.6]
- Να παραγοντοποιούν απλά πολυώνυμα (κυρίως μιας μεταβλητής) με κοινό παράγοντα, ομαδοποίηση και χρήση ταυτοτήτων. [Αλ.Π.9.7]

2.5 Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο πολυωνύμων

- Να προσδιορίζουν το ΕΚΠ μονωνύμων και απλών πολυωνύμων μιας μεταβλητής. [Αλ.Π.9.8]

2.6 Ρητές παραστάσεις

- Να υπολογίζουν το αποτέλεσμα των πράξεων με απλές ρητές παραστάσεις (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση). [Αλ.Π.9.9]
- Να απλοποιούν ρητές παραστάσεις. [Αλ.Π.9.10]

Θεματική ενότητα 3: Συναρτήσεις

3.1 Η συνάρτηση $y = \alpha x^2$

- Να διερευνούν, μέσω της γραφικής της παράστασης, τις ιδιότητες της $y = \alpha x^2$, $\alpha \neq 0$ και τον ρόλο της παραμέτρου α. [Αλ.Σρ.9.1]
- Να διερευνούν τη μεταβολή του y για οποιαδήποτε μοναδιαία αύξηση του x σε συναρτήσεις της μορφής $y = \alpha x^2$. [Αλ.Σρ.9.2]
- Να ερμηνεύουν και να επιλύουν γραφικά την εξίσωση $\alpha x^2 = \beta$. [Αλ.Σρ.9.3]
- Να επιλύουν προβλήματα χρησιμοποιώντας τις αναπαραστάσεις της συνάρτησης $y = \alpha x^2$, $\alpha \neq 0$. [Αλ.Σρ.9.4]

3.2 Γραμμικές εξισώσεις

- Να αναγνωρίζουν γραμμικές εξισώσεις της μορφής $\alpha x + \beta y = \gamma$ και να τις ερμηνεύουν γραφικά. [Αλ.Σρ.9.5]

Θεματική ενότητα 4: Αλγεβρικές Σχέσεις

4.1 Γραφική επίλυση γραμμικού συστήματος

- Να επιλύουν γραφικά προβλήματα με γραμμικά συστήματα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους. [Αλ.Σρ.9.6]
- Να διερευνούν και να ερμηνεύουν γραφικά ένα γραμμικό σύστημα και το πλήθος των λύσεών του. [Αλ.Σρ.9.7]
- Να αναγνωρίζουν ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους και να εξετάζουν αν ένα ζεύγος αριθμών είναι λύση του. [Αλ.Σχ.9.1]

4.2 Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος

- Να αναγνωρίζουν ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους και να εξετάζουν αν ένα ζεύγος αριθμών είναι λύση του. [Αλ.Σχ.9.1]
- Να επιλύουν το σύστημα αλγεβρικά με τις μεθόδους των αντίθετων συντελεστών και της αντικατάστασης και να επαληθεύουν τη λύση με βάση το πλαίσιο του προβλήματος. [Αλ.Σχ.9.2]

4.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού

- Να επιλύουν απλές πολυωνυμικές εξισώσεις δευτέρου βαθμού ελλιπούς ή και πλήρους μορφής, αλλά και μεγαλύτερου βαθμού με παραγοντοποίηση. [Αλ.Σχ.9.3]
- Να επιλύουν προβλήματα εξισώσεων 1ου και 2ου βαθμού (με παραγοντοποίηση) και να ερμηνεύουν τις λύσεις τους στο πλαίσιο του προβλήματος. [Αλ.Σχ.9.4]

4.4 Ανισώσεις πρώτου βαθμού

- Να διερευνούν (με μοντέλα – μεταφορές) και να διατυπώνουν τις βασικές ιδιότητες της διάταξης. [Αλ.Σχ.9.5]
- Να διακρίνουν τις διαφορές μεταξύ εξίσωσης και ανίσωσης. [Αλ.Σχ.9.6]
- Να μετατρέπουν πραγματικά προβλήματα σε ανισώσεις μορφής $\alpha x + \beta < \gamma$, να τις επιλύουν και να παριστάνουν τις λύσεις γραφικά και να εξετάζουν αν ένας αριθμός είναι λύση μιας ανίσωσης ή του προβλήματος. [Αλ.Σχ.9.7]
- Να βρίσκουν τις κοινές λύσεις δύο ανισώσεων χρησιμοποιώντας τον άξονα των πραγματικών αριθμών. [Αλ.Σχ.9.8]

Θεματική ενότητα 5: Γεωμετρία του Επιπέδου και Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί

5.1 Ίσα τρίγωνα

- Να διερευνούν τον ρόλο των κριτηρίων ισότητας τριγώνων στη σύγκριση τριγώνων και να τα συσχετίζουν με τον ορισμό της ισότητας των τριγώνων. [Γ.Ε.9.1]
- Να αξιοποιούν τα κριτήρια ισότητας τριγώνων για την αιτιολόγηση ιδιοτήτων γραμμών (μεσοκαθέτου ευθύγραμμου τμήματος, διχοτόμου γωνίας) και σχημάτων (για παράδειγμα παραλληλογράμμων). [Γ.Ε.9.2]

5.2 Ομοιοθεσία

- Να καθορίζουν τα χαρακτηριστικά στοιχεία του μετασχηματισμού της ομοιοθεσίας. [Γ.Μ.9.1]
- Να διαπιστώνουν και να περιγράφουν μεγεθύνσεις και σμικρύνσεις μέσω της ομοιοθεσίας χρησιμοποιώντας μια ποικιλία εργαλείων. [Γ.Μ.9.3]
- Να διερευνούν και να εντοπίζουν τις ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά των ομοιόθετων σχημάτων. [Γ.Μ.9.4]
- Να αξιοποιούν τις ιδιότητες της ομοιοθεσίας ως προς κέντρο και λόγο ομοιοθεσίας στον σχεδιασμό σχημάτων και στην αιτιολόγηση ιδιοτήτων τους. [Γ.Μ.9.5]
- Να σχεδιάζουν ομοιόθετα και όμοια σχήματα χρησιμοποιώντας μια ποικιλία υλικών, εργαλείων και στρατηγικών. [Γ.Μ.9.6]
- Να αναγνωρίζουν και να υπολογίζουν τον λόγο ευθύγραμμων τμημάτων ως λόγο των μηκών τους στην ίδια μονάδα μέτρησης. [Μ.Μ.9.1]

5.3 Όμοια σχήματα

- Να αναγνωρίζουν ως όμοια τα σχήματα που το ένα είναι μεγέθυνση ή σμίκρυνση του άλλου. [Γ.Μ.9.2]
- Να σχεδιάζουν ομοιόθετα και όμοια σχήματα χρησιμοποιώντας μια ποικιλία υλικών, εργαλείων και στρατηγικών. [Γ.Μ.9.6]
- Να διερευνούν τη σχέση των περιμέτρων και των εμβαδών όμοιων σχημάτων. [Γ.Ε.9.3]

Θεματική ενότητα 6: Τριγωνομετρία

6.1 Εφαπτομένη οξείας γωνίας

- Να αναγνωρίζουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς οξείας γωνίας ως τον σταθερό λόγο ζεύγους πλευρών ορθογώνιου τριγώνου. [Γ.Τ.9.1]
- Να χρησιμοποιούν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς για την εύρεση του μέτρου γωνίας αξιοποιώντας τους τριγωνομετρικούς πίνακες. [Γ.Τ.9.2]

6.2 Ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας

- Να αναγνωρίζουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς οξείας γωνίας ως τον σταθερό λόγο ζεύγους πλευρών ορθογώνιου τριγώνου. [Γ.Τ.9.1]
- Να χρησιμοποιούν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς για την εύρεση του μέτρου γωνίας αξιοποιώντας τους τριγωνομετρικούς πίνακες. [Γ.Τ.9.2]

Θεματική ενότητα 7: Εμβαδά και Όγκοι

7.1 Εμβαδόν επιφάνειας στερεού σχήματος

- Να αξιοποιούν τα αναπτύγματα ορθών πρισμάτων, πυραμίδων, κυλίνδρων και κώνων για να προσδιορίσουν το εμβαδόν της επιφάνειάς τους. [Μ.Ε.9.1.]
- Να επιλύουν προβλήματα υπολογισμού του εμβαδού της επιφάνειας ορθού πρίσματος, πυραμίδας, κυλίνδρου, κώνου και σφαίρας. [Μ.Ε.9.2.]

7.2 Όγκος πρίσματος και πυραμίδας

- Να υπολογίζουν τον όγκο του κύβου και του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου επιλέγοντας κατάλληλη μονάδα μέτρησης. [Μ.Ο.9.1.]
- Να συσχετίζουν τον όγκο ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου και κυλίνδρου, καθώς και πρίσματος και πυραμίδας, με την ίδια βάση και το ίδιο ύψος με εμπειρικούς τρόπους. [Μ.Ο.9.2.]
- Να επιλύουν προβλήματα υπολογισμού του όγκου σύνθετων στερεών σχημάτων αναπτύσσοντας ποικιλία μεθόδων και στρατηγικών. [Μ.Ο.9.4.]

7.3 Όγκος κυλίνδρου και κώνου

- Να συσχετίζουν τον όγκο ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου και κυλίνδρου, καθώς και πρίσματος και πυραμίδας, με την ίδια βάση και το ίδιο ύψος με εμπειρικούς τρόπους. [Μ.Ο.9.2.]
- Να συσχετίζουν τον όγκο κυλίνδρου και κώνου με την ίδια βάση και το ίδιο ύψος με εμπειρικούς τρόπους. [Μ.Ο.9.3.]
- Να επιλύουν προβλήματα υπολογισμού του όγκου σύνθετων στερεών σχημάτων αναπτύσσοντας ποικιλία μεθόδων και στρατηγικών. [Μ.Ο.9.4.]

7.4 Εμβαδόν και όγκος σφαίρας

- Να επιλύουν προβλήματα υπολογισμού του εμβαδού της επιφάνειας ορθού πρίσματος, πυραμίδας, κυλίνδρου, κώνου και σφαίρας. [Μ.Ε.9.2.]
- Να επιλύουν προβλήματα υπολογισμού του όγκου σύνθετων στερεών σχημάτων αναπτύσσοντας ποικιλία μεθόδων και στρατηγικών. [Μ.Ο.9.4.]

Θεματική ενότητα 8: Στατιστική

8.1 Διαχείριση δεδομένων, πληθυσμός και δείγμα

- Να διατυπώνουν ερωτήματα που αφορούν το ευρύτερο κοινωνικό περιβάλλον και απαντώνται με δεδομένα εκτός του οικείου περιβάλλοντός τους. [Σ.Δ.9.1]

8.2 Δείγμα και δειγματοληψία

- Να αναγνωρίζουν την αναγκαιότητα της χρήσης δείγματος και τη διαφορά του από τον πληθυσμό. [Σ.Δ.9.2]
- Να χρησιμοποιούν απλή τυχαία δειγματοληψία για την επιλογή ενός αντιπροσωπευτικού δείγματος. [Σ.Δ.9.3]
- Να αναγνωρίζουν τη δυνατότητα επαγωγικής εξαγωγής συμπερασμάτων για έναν πληθυσμό από ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα. [Σ.Δ.9.4]
- Να αναγνωρίζουν τη μεταβλητότητα στατιστικών δεικτών μεταξύ δειγμάτων. [Σ.Δ.9.5]

Θεματική ενότητα 9: Πιθανότητες

9.1 Πειράματα τύχης και πιθανότητες

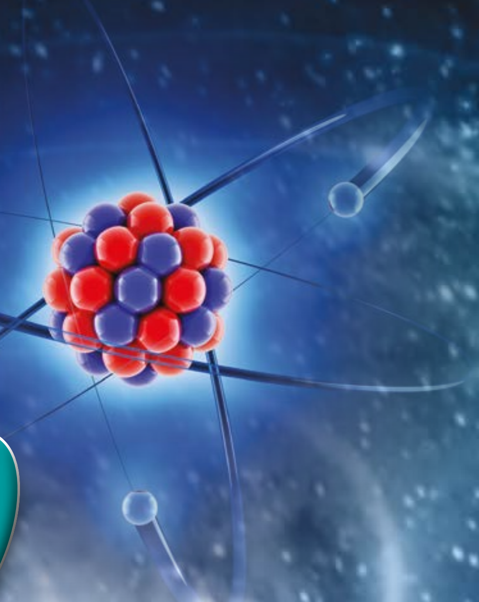
- Να αναγνωρίζουν μέσα από προσομοιώσεις με χρήση λογισμικού και εκτελώντας πειράματα τύχης, ότι η σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου πλησιάζει την τιμή της πιθανότητας, όταν έχουμε μεγάλο αριθμό εκτελέσεων του ίδιου πειράματος, (Νόμος των Μεγάλων Αριθμών) [Π.Π.9.1.]

9.2 Εξαρτημένα και ανεξάρτητα ενδεχόμενα

- Να διερευνούν την ανεξαρτησία ενδεχομένων μέσα από την εκτέλεση πειραμάτων τύχης και προσομοιώσεων. [Π.Σ.9.1.]

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ 1

Πραγματικοί Αριθμοί

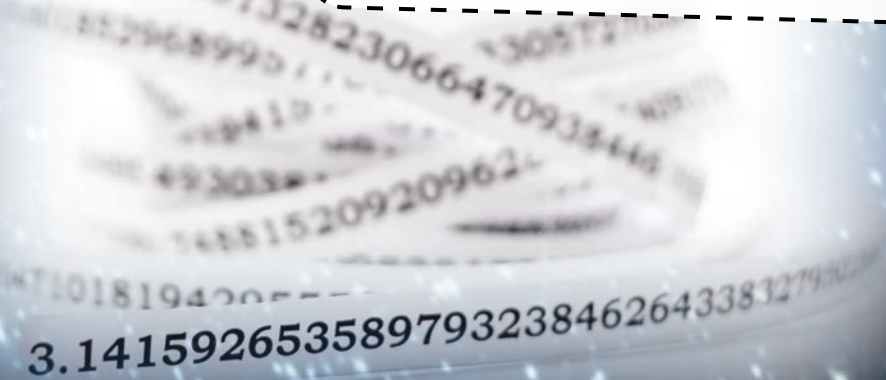


Από τις απαρχές του πολιτισμού μας, οι άνθρωποι χρησιμοποιούμε τους αριθμούς για να μετρήσουμε και να εκφράσουμε μεγέθη. Χρησιμοποιούμε αριθμούς μικρούς, όπως ο αριθμός που δείχνει τη μάζα του ατόμου ($9{,}1094 \cdot 10^{-31}$ kg), και μεγάλους, όπως η διάμετρος του γαλαξία μας (περίπου 100.000 έτη φωτός ή $9{,}5 \cdot 10^{17}$ Km). Αριθμούς ακέραιους, όπως το 2, δεκαδικούς, όπως το 0,333... αλλά και παράξενους αριθμούς, όπως ο $\sqrt{2}$ και ο π (ο λόγος της περιμέτρου προς τη διάμετρο ενός κύκλου).

Στην ενότητα αυτή θα διερευνήσουμε τις ιδιότητες των τετραγωνικών ριζών και θα μελετήσουμε τα είδη των πραγματικών αριθμών και την αναπαράστασή τους.

ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΕΝΟΤΗΤΕΣ

1.1. Ιδιότητες των τετραγωνικών ριζών
1.2. Ρητοί και άρρητοι αριθμοί
1.3. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών



1.1 Ιδιότητες των τετραγωνικών ριζών

Δ1. Υπολογισμοί με τετραγωνικές ρίζες

Α. Η Χριστίνα υπολόγισε το γινόμενο $\sqrt{3}\cdot\sqrt{75}$ και το βρήκε 15. Ο Θοδωρής ισχυρίστηκε ότι δεν μπορεί το αποτέλεσμα να είναι ακέραιος. Πώς νομίζετε ότι οδηγήθηκε ο Θοδωρής σε αυτό το συμπέρασμα; Ποια άποψη νομίζετε ότι είναι σωστή; Συζητήστε πρώτα στην ομάδα σας και μετά σε όλη την τάξη.

Β. Να συμπληρώσετε τα κελιά του παρακάτω πίνακα. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε αριθμομηχανή, αν χρειάζεται.

α	β	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$	$\alpha\cdot\beta$	$\sqrt{\alpha\cdot\beta}$	$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$
36	9	6	3	18	324	18	2	4	2
100	25								
900	100								
225	100								

Σε ποιες από τις στήλες του παραπάνω πίνακα υπάρχουν ίσες τιμές στα αντίστοιχα κελιά; Πότε συμβαίνει αυτό; Συζητήστε στις ομάδες σας για να διατυπώσετε έναν κανόνα.

Θυμόμαστε ότι τετραγωνική ρίζα $\sqrt{\alpha}$ ενός μη αρνητικού αριθμού α ονομάζουμε τον μη αρνητικό αριθμό που, όταν τον υψώσουμε στο τετράγωνο, δίνει τον α.
Επομένως, δεν ορίζουμε τετραγωνική ρίζα αρνητικών αριθμών.

Συζητάμε

...για τις ιδιότητες της τετραγωνικής ρίζας

Για τις ρίζες $\sqrt{9}=3$ και $\sqrt{16}=4$, παρατηρούμε ότι:
$\sqrt{9}\cdot\sqrt{16}=3\cdot 4=12$
Επίσης $\sqrt{9\cdot 16}=\sqrt{144}=12$
Δηλαδή, $\sqrt{9}\cdot\sqrt{16}=\sqrt{9\cdot 16}$
Κάτι παρόμοιο μπορούμε να κάνουμε και στην περίπτωση του πηλίκου:

$\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{4}}=\frac{10}{2}=5$ και $\sqrt{\frac{100}{4}}=\sqrt{25}=5$

Δηλαδή, $\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{4}}=\sqrt{\frac{100}{4}}$

Αν οι παραπάνω ιδιότητες είναι αληθείς, δηλαδή αν ισχύουν σε κάθε περίπτωση, τότε γράφουμε ότι:

$$\sqrt{\alpha\cdot\beta}=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta} \text{ και } \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}=\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$$

Θυμόμαστε ότι το α ονομάζεται υπόρριζη ποσότητα της $\sqrt{\alpha}$. Επομένως στην παράσταση $\sqrt{9\cdot 16}$, το γινόμενο $9\cdot 16$ είναι η υπόρριζη ποσότητα.

Η υπόρριζη ποσότητα της παράστασης $\sqrt{\frac{100}{4}}$ είναι το πηλίκο $\frac{100}{4}$.

Δ2. Διερευνούμε αν μια ισότητα είναι αληθής ή ψευδής

Ο Θοδωρής και η Χριστίνα συζητούν αν είναι αληθής ή ψευδής η ισότητα $\sqrt{\alpha+\beta}=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$.

- Ο Θοδωρής λέει ότι είναι αληθής, γιατί $\sqrt{5+0}=\sqrt{5}+\sqrt{0}$.
- Η Χριστίνα λέει ότι είναι ψευδής, γιατί $\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$, ενώ $\sqrt{4}+\sqrt{9}=2+3=5$ και $\sqrt{13}\neq 5$.

Εσείς συμφωνείτε με τον Θοδωρή ή τη Χριστίνα; Γιατί;
Συζητήστε πρώτα στην ομάδα σας και μετά σε όλη την τάξη.

Συζητάμε

…για την απόδειξη ιδιοτήτων των ριζών

Για να χαρακτηρίσουμε ως αληθείς τις **ιδιότητες της τετραγωνικής ρίζας**, δηλαδή τις ισότητες $\sqrt{\alpha\cdot\beta}=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$ και $\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}=\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$, δεν αρκούν παραδείγματα. Χρειάζεται να τις αποδείξουμε.

- Για οποιουσδήποτε αριθμούς α και β, με $\alpha\geq 0$ και $\beta\geq 0$, ισχύει ότι:
$$\left(\sqrt{\alpha\cdot\beta}\right)^2=\alpha\cdot\beta$$
Επίσης ισχύει $\left(\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}\right)^2=\left(\sqrt{\alpha}\right)^2\cdot\left(\sqrt{\beta}\right)^2=\alpha\cdot\beta$.

  Άρα οι αριθμοί $\left(\sqrt{\alpha\cdot\beta}\right)^2$ και $\left(\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}\right)^2$ είναι ίσοι μεταξύ τους.
  Πρόκειται για δύο τετράγωνα με βάσεις $\sqrt{\alpha\cdot\beta}$ και $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$, αντίστοιχα.
  Εφόσον οι βάσεις αυτές είναι θετικές ή μηδέν, θα είναι και ίσες, δηλαδή $\sqrt{\alpha\cdot\beta}=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$.
  Επομένως η ισότητα είναι αληθής.
- Με παρόμοιους συλλογισμούς και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $\left(\dfrac{\kappa}{\lambda}\right)^2=\dfrac{\kappa^2}{\lambda^2}$ μπορούμε να αποδείξουμε ότι η ισότητα $\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}=\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$ είναι αληθής.

Ίσες δυνάμεις με ίσους εκθέτες

Θυμόμαστε ότι:

- $\left(\sqrt{x}\right)^2=x$
- $(\kappa\cdot\lambda)^2=\kappa^2\cdot\lambda^2$

Αν δύο τετράγωνα είναι ίσα και έχουν θετικές βάσεις, τότε αυτές είναι ίσες.
Π.χ. αν οι αριθμοί x και y είναι θετικοί, με $x^2=25$ και $y^2=25$, τότε x = y = 5.

Απόδειξη ιδιότητας των ριζών

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

• Αν $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$, τότε ισχύει η ισότητα: $$\sqrt{\alpha \cdot \beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$$ • Αν $\alpha \geq 0$ και $\beta > 0$, τότε ισχύει η ισότητα: $$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$$	• $\sqrt{9 \cdot 25} = \sqrt{225} = 15$ και $\sqrt{9} \cdot \sqrt{25} = 3 \cdot 5 = 15$ Άρα $\sqrt{9 \cdot 25} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{25}$ • $\sqrt{\frac{64}{16}} = \sqrt{4} = 2$ και $\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{16}} = \frac{8}{4} = 2$ Άρα $\sqrt{\frac{64}{16}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{16}}$ Είναι απαραίτητες οι ανισότητες $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ για την πρώτη και $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$ για τη δεύτερη ιδιότητα; Γιατί στη δεύτερη έχουμε $\beta > 0$, ενώ στην πρώτη $\beta \geq 0$;

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. **Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων της τετραγωνικής ρίζας να εκφράσετε την τιμή κάθε παράστασης με τη χρήση λιγότερων ή απλούστερων ριζών.**

α) $\sqrt{50} + \sqrt{32}$ **β)** $\sqrt{18} + \sqrt{75} + \sqrt{72} - \sqrt{27}$ **γ)** $\sqrt{\frac{9}{4}} + \sqrt{\frac{25}{4}}$ **δ)** $\sqrt{0,25} + \sqrt{1.600}$

Απάντηση

Το 50 μπορούμε να το γράψουμε ως γινόμενο $5 \cdot 10$, αλλά και $25 \cdot 2$. Διαλέγουμε το δεύτερο, διότι περιέχει τον παράγοντα 25, του οποίου είναι εύκολο να βρούμε την τετραγωνική ρίζα. Ομοίως για το 75 επιλέγουμε το $3 \cdot 25$ και όχι το $5 \cdot 15$ κτλ.

α) $\sqrt{50} + \sqrt{32} = \sqrt{25 \cdot 2} + \sqrt{16 \cdot 2}$ και εφαρμόζοντας την ιδιότητα $\sqrt{\alpha \cdot \beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$ σε κάθε ρίζα έχουμε:

$$\sqrt{25} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2} + 4\sqrt{2}$$

Στη συνέχεια με την επιμεριστική ιδιότητα έχουμε:

$$(5+4)\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$$

β) Με παρόμοιους συλλογισμούς έχουμε:

$$\sqrt{18} + \sqrt{75} + \sqrt{72} - \sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 2} + \sqrt{25 \cdot 3} + \sqrt{36 \cdot 2} - \sqrt{9 \cdot 3} =$$

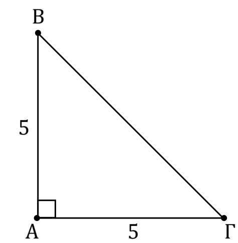
$$\sqrt{9} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{2} + 5\sqrt{3} + 6\sqrt{2} - 3\sqrt{3} = 3\sqrt{2} + 6\sqrt{2} + 5\sqrt{3} - 3\sqrt{3} =$$

$$= (3+6)\sqrt{2} + (5-3)\sqrt{3} = 9\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$$

γ) Εφαρμόζοντας σε κάθε ρίζα την ιδιότητα $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$ έχουμε: $\sqrt{\frac{9}{4}} + \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} + \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = \frac{8}{2} = 4$

δ) $\sqrt{0,25} + \sqrt{1.600} = \sqrt{\frac{25}{100}} + \sqrt{16 \cdot 100} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{100}} + \sqrt{16} \cdot \sqrt{100} = \frac{5}{10} + 4 \cdot 10 = 0,5 + 40 = 40,5$

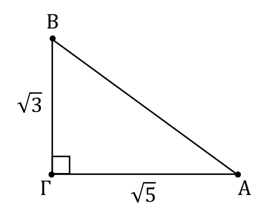
2. **Το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ έχει κάθετες πλευρές μήκους 5. Να βρείτε το μήκος της υποτείνουσας. Ποια είναι η σχέση του με το μήκος της κάθετης πλευράς;**



Απάντηση

Με το Πυθαγόρειο Θεώρημα βρίσκουμε $ΒΓ^2 = 5^2 + 5^2$ ή $ΒΓ^2 = 50$ ή $ΒΓ = \sqrt{50}$.
Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $\sqrt{α \cdot β} = \sqrt{α} \cdot \sqrt{β}$, έχουμε $ΒΓ = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$.
Άρα το μήκος της υποτείνουσας είναι ίσο με το μήκος της κάθετης πλευράς επί $\sqrt{2}$.

3. **Ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχει μήκη κάθετων πλευρών $ΑΓ = \sqrt{5}$ και $ΒΓ = \sqrt{3}$.**
α) Ποιο είναι το μήκος της πλευράς ΑΒ;
β) Εξετάστε αν ισχύει η ανισότητα $\sqrt{5+3} < \sqrt{3} + \sqrt{5}$.



Απάντηση

α) Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο Θεώρημα $ΑΒ^2 = ΑΓ^2 + ΒΓ^2$ ή $ΑΒ^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2$ ή $ΑΒ^2 = 5 + 3$ ή $ΑΒ = \sqrt{8}$.

β) Η ευθεία είναι ο συντομότερος δρόμος ανάμεσα σε δύο σημεία του επιπέδου. Για αυτό, σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα οποιωνδήποτε δύο πλευρών του είναι μεγαλύτερο από την τρίτη πλευρά.
Άρα $ΑΒ < ΑΓ + ΒΓ$ ή $ΑΒ < \sqrt{5} + \sqrt{3}$. Αντικαθιστώντας το ΑΒ με $\sqrt{5+3}$, έχουμε $\sqrt{5+3} < \sqrt{5} + \sqrt{3}$, άρα η ανισότητα είναι αληθής.

Αν οι κάθετες πλευρές του τριγώνου έχουν μήκη $\sqrt{α}$ και $\sqrt{β}$, τι προκύπτει;

4. **Η Θάλεια λέει ότι είναι λάθος να γράψουμε $\sqrt{(-3)^2}$, γιατί η υπόρριζη ποσότητα δεν είναι θετική.**
Η Ρίσα διαφωνεί και λέει ότι $\sqrt{(-3)^2} = 3$. Ποια έχει δίκιο;

Γενικά, για κάθε αριθμό α, θετικό, αρνητικό ή μηδέν, ισχύει $\sqrt{α^2} = |α|$.
Π.χ.:
$\sqrt{5^2} = |5| = 5$
$\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$

Απάντηση

Δίκιο έχει η Ρίσα, γιατί $(-3)^2 = 9$, άρα η υπόρριζη ποσότητα είναι θετική και $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$.

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Να αντιστοιχίσετε τις ιδιότητες στην πρώτη στήλη με τα παραδείγματα στη δεύτερη στήλη:

Ιδιότητες	Παραδείγματα
• $\left(\sqrt{\alpha}\right)^2=\alpha$, για κάθε $\alpha\ge 0$.	**1.** $\sqrt{2\cdot 3}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$
• $\sqrt{\alpha\cdot\beta}=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$, για κάθε $\alpha\ge 0$ και $\beta\ge 0$.	**2.** $\sqrt{(-10)^2}=10$
• $\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}=\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$, για κάθε $\alpha\ge 0$ και $\beta>0$.	**3.** $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\dfrac{10}{2}}=\sqrt{5}$
• $\sqrt{\alpha^2}=\lvert\alpha\rvert$, για κάθε α.	**4.** $\sqrt{5}^2=5$

2. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) η λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις παρακάτω ισότητες:

α) $\sqrt{2\cdot 3}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$ **β)** $\sqrt{(-3)\cdot(-5)}=\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-5}$ **γ)** $\sqrt{\dfrac{3}{5}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ **δ)** $\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **ε)** $\sqrt{\dfrac{5}{4}}=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$

3. Να εφαρμόσετε τις ιδιότητες της τετραγωνικής ρίζας:

α) $\sqrt{3\cdot 25}$ **β)** $\sqrt{16\cdot 5}$ **γ)** $\sqrt{\dfrac{16}{100}}$ **δ)** $\sqrt{\dfrac{1}{4}}$

4. Εφαρμόζοντας τις ιδιότητες της τετραγωνικής ρίζας να κάνετε τις πράξεις:

α) $\sqrt{25\cdot 2}+\sqrt{16\cdot 2}$ **β)** $\sqrt{9\cdot 3}+\sqrt{100\cdot 3}-\sqrt{49\cdot 3}$ **γ)** $\sqrt{\dfrac{81}{4}}+\sqrt{\dfrac{9}{4}}$ **δ)** $\sqrt{\dfrac{25}{9}}+\sqrt{\dfrac{49}{9}}-\sqrt{\dfrac{1}{9}}$

Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

5. Να αποδείξετε ότι $\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}=\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$, για κάθε $\alpha\ge 0$ και $\beta>0$.

6. Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων της τετραγωνικής ρίζας να υπολογίσετε τις ρίζες:

α) $\sqrt{2.500}$ **β)** $\sqrt{16.000.000}$ **γ)** $\sqrt{0{,}64}$ **δ)** $\sqrt{0{,}0144}$ **ε)** $\sqrt{2{,}25}$

7. Να υπολογίσετε την τιμή κάθε παράστασης με χρήση λιγότερων ή απλούστερων ριζών:

α) $\sqrt{48}+\sqrt{147}-\sqrt{3}$ **β)** $\sqrt{125}+\sqrt{5}+\sqrt{28}+\sqrt{175}-\sqrt{5}$ **γ)** $\sqrt{\dfrac{25}{16}}+\sqrt{\dfrac{1}{16}}$ **δ)** $\sqrt{\dfrac{144}{25}}+\sqrt{\dfrac{144}{49}}-\sqrt{\dfrac{1}{25}}-\sqrt{\dfrac{1}{49}}$

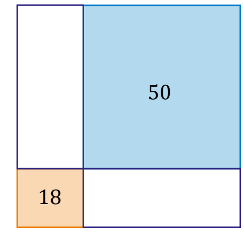
ε) $\sqrt{\dfrac{121}{7}}-\sqrt{\dfrac{100}{7}}-\sqrt{\dfrac{1}{7}}$ **στ)** $2\sqrt{50}+3\sqrt{32}-4\sqrt{98}$ **ζ)** $2\sqrt{22.500}-3\sqrt{8.100}+5\sqrt{0{,}16}$

8. Τα σκιασμένα μέρη του μεγάλου τετραγώνου είναι επίσης τετράγωνα με εμβαδά 18 και 50.

α) Να αποδείξετε ότι η πλευρά του μεγάλου τετραγώνου έχει μήκος $8\sqrt{2}$.

β) Να υπολογίσετε:

i. την περίμετρο καθενός από τα λευκά ορθογώνια, **ii.** το εμβαδόν του μεγάλου τετραγώνου.



9. Να αποδείξετε ότι:

α) Το ύψος ενός ισόπλευρου τριγώνου με μήκος πλευράς 4 είναι $\sqrt{12}$.

β) Το ύψος ενός ισόπλευρου τριγώνου με πλευρά 5 είναι $\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

γ) Το ύψος ενός ισόπλευρου τριγώνου με πλευρά α είναι $\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$.

10. Ο Χαράλαμπος λέει ότι η ισότητα $\sqrt{\alpha\cdot\beta}=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$ είναι αληθής για κάθε ζεύγος ομόσημων αριθμών α και β και φέρνει το εξής παράδειγμα: «Αν α = –4 και β = –25, τότε $\sqrt{-4\cdot(-25)}=\sqrt{100}=10$ και $\sqrt{4}\cdot\sqrt{25}=2\cdot5=10$. Άρα $\sqrt{\alpha\cdot\beta}=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$». Συμφωνείτε με τον Χαράλαμπο;

1.2 Ρητοί και άρρητοι αριθμοί

Δ1. Κλάσματα και δεκαδικοί

α) Να γράψετε τα παρακάτω κλάσματα σε μορφή δεκαδικού αριθμού: $\frac{23}{100}, \frac{24}{40}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{7}{4}, \frac{1}{8}, \frac{4}{3}$

β) Να γράψετε τους παρακάτω δεκαδικούς ως κλάσματα:

$0{,}18$ και $1{,}\overline{7}$

Να περιγράψετε τη διαδικασία που ακολουθήσατε σε κάθε περίπτωση.

Ρητό ονομάζουμε κάθε αριθμό που μπορεί να γραφτεί ως κλάσμα, δηλαδή στη μορφή $\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ, ν είναι ακέραιοι και $\nu \neq 0$.

Συζητάμε

...για τις μορφές των ρητών αριθμών

Οι ρητοί αριθμοί είτε γράφονται ως κλάσματα είτε ως δεκαδικοί και μπορούμε να τους μετατρέψουμε από τη μία μορφή στην άλλη.

Από κλάσμα σε δεκαδικό:

- $\frac{2}{3} = 2:3 = 0{,}66... = 0{,}\overline{6}$

Διαιρώντας αριθμητή με παρονομαστή.

$$\begin{array}{r|l} 2 & 3 \\ \hline & 0{,}66.. \end{array}$$

- $\frac{30}{50} = \frac{30:5}{50:5} = \frac{6}{10} = 0{,}6$
- $\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 125}{8 \cdot 125} = \frac{375}{1.000} = 0{,}375$

Σε κάποιες περιπτώσεις μπορούμε να το μετατρέψουμε πρώτα σε δεκαδικό κλάσμα, δηλαδή με παρονομαστή δύναμη του 10, π.χ. 10, 100, 1.000, ... και μετά σε δεκαδικό.
Αυτό το κάνουμε πολλαπλασιάζοντας ή διαιρώντας αριθμητή και παρονομαστή με τον κατάλληλο αριθμό.

- Κάθε ρητός γράφεται ως δεκαδικός με πεπερασμένο πλήθος ψηφίων, π.χ. $-1{,}23$, ή ως περιοδικός δεκαδικός $2{,}\overline{45}$.
- Κάθε δεκαδικός με πεπερασμένο πλήθος ψηφίων ή περιοδικός γράφεται ως κλάσμα.

Από δεκαδικό σε κλάσμα:

- $1{,}15 = \frac{115}{100}$

Τον μετατρέπουμε σε κλάσμα με παρονομαστή δύναμη του 10.
Ο παρονομαστής έχει τόσα μηδενικά όσα τα δεκαδικά ψηφία του αριθμού.

- Το $1{,}\overline{5}$ μετατρέπεται σε κλάσμα ως εξής:

  Θεωρούμε ότι $x = 1{,}\overline{5}$ ή $x = 1{,}555...$

  Τότε $10x = 15{,}555...$

  Αλλά $x = 1{,}555...$, άρα μπορούμε να αφαιρέσουμε το x και το 1,555... από το πρώτο και το δεύτερο μέλος της εξίσωσης αντίστοιχα:

  $$10x - x = 15{,}555... - 1{,}555... \quad ή \quad 9x = 14 \quad ή \quad \frac{9x}{9} = \frac{14}{9} \quad ή \quad x = \frac{14}{9}$$

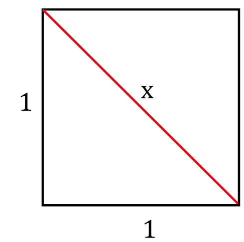
  Άρα $1{,}\overline{5} = \frac{14}{9}$

Δ2. Γράψε τον δεκαδικό

α) Ένας ξυλουργός έκοψε ένα κομμάτι ξύλο σε σχήμα τετραγώνου με πλευρά 1 m. Μέτρησε τη διαγώνιό του και τη βρήκε 1,41 m. Αναρωτήθηκε αν αυτή η μέτρηση είναι απόλυτα ακριβής. Εσείς τι νομίζετε; Ποια είναι η διαγώνιος του τετραγώνου ακριβώς; Θα μπορούσε ο ξυλουργός να τη μετρήσει με ακρίβεια;

β) Μπορείτε να γράψετε έναν δεκαδικό με άπειρα δεκαδικά ψηφία, χωρίς περιοδικό μέρος; Είναι ρητός ένας τέτοιος αριθμός;

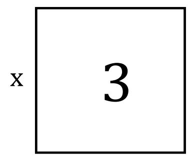
Συζητήστε τις ιδέες σας με τους συμμαθητές και τις συμμαθήτριές σας.



Συζητάμε

…για άρρητους αριθμούς.

Το τετράγωνο του σχήματος έχει εμβαδόν 3 και πλευρά μήκους x.
Τότε ισχύει ότι $x^2 = 3$.
Δηλαδή το x είναι ένας θετικός αριθμός που, αν τον υψώσουμε στο τετράγωνο, βρίσκουμε 3.



Άρρητο ονομάζουμε κάθε αριθμό που δεν είναι ρητός, δηλαδή που δεν μπορεί να γραφεί στη μορφή $\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ, ν είναι ακέραιοι και $\nu \neq 0$.

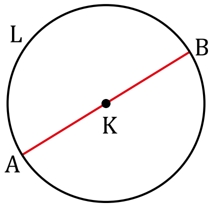
Προσπαθώντας να βρούμε το x ως δεκαδικό, παρατηρούμε ότι:
$1{,}7^2 = 2{,}89$ και $1{,}8^2 = 3{,}24$, άρα $1{,}7 < x < 1{,}8$.
$1{,}73^2 = 2{,}9929$ και $1{,}74^2 = 3{,}0276$, άρα $1{,}73 < x < 1{,}74$.
$1{,}732^2 = 2{,}999824$ και $1{,}733^2 = 3{,}003289$, άρα $1{,}732 < x < 1{,}733$.
Ίσως θυμόμαστε από τη Β΄ γυμνασίου ότι, όσο και να συνεχίσουμε αυτή τη διαδικασία, δηλαδή δοκιμάζοντας δεκαδικούς με όλο και περισσότερα δεκαδικά ψηφία, δε θα βρούμε κάποιον που το τετράγωνό του να είναι ίσο με 3.

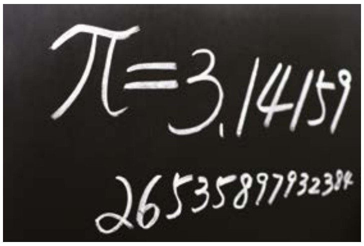
Ωστόσο αυτός ο αριθμός υπάρχει, είναι η $\sqrt{3}$ και αντιστοιχεί στο μήκος της πλευράς του τετραγώνου εμβαδού 3, αλλά δεν μπορούμε να τον γράψουμε με ακρίβεια ως δεκαδικό με πεπερασμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων.
Όμως γράφουμε $x = \sqrt{3}$.

- Τα δεκαδικά ψηφία των άρρητων αριθμών είναι άπειρα και δεν επαναλαμβάνονται περιοδικά.
- Οι τετραγωνικές ρίζες των φυσικών αριθμών που δεν είναι τέλεια τετράγωνα είναι άρρητοι.

Άρρητοι αριθμοί δεν είναι μόνο οι τετραγωνικές ρίζες.
Για παράδειγμα, θυμόμαστε ότι ο λόγος του μήκους προς τη διάμετρο του κύκλου έχει την ίδια τιμή (παραμένει σταθερός) για οποιονδήποτε κύκλο, η οποία είναι άρρητος αριθμός, ο π.
Ο π έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία που δεν επαναλαμβάνονται περιοδικά:

3,14159265358979323846262…





Συχνά στους υπολογισμούς μας χρησιμοποιούμε ρητές προσεγγίσεις των άρρητων αριθμών. Για παράδειγμα, χρησιμοποιούμε $\pi \simeq 3{,}14$, $\sqrt{2} \simeq 1{,}41$ ή $\sqrt{2} \simeq 1{,}4142$ (επιλέγοντας τον αριθμό των δεκαδικών ψηφίων με κριτήριο την ακρίβεια που θέλουμε).

Εφόσον ο π είναι ίσος με τον λόγο μήκους κύκλου προς διάμετρο, τότε $\pi = \frac{L}{AB}$.

Σκεφτείτε: «Εφόσον ο π είναι ίσος με $\frac{L}{AB}$, γιατί είναι άρρητος και όχι ρητός;».

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Οι άρρητοι αριθμοί έχουν άπειρο πλήθος δεκαδικών ψηφίων, τα οποία δεν επαναλαμβάνονται περιοδικά. Οι περιοδικοί δεκαδικοί αριθμοί είναι ρητοί.	• Άρρητοι αριθμοί: $\sqrt{2} = 1{,}41421356237...$ $\pi = 3{,}14159265389...$ $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803398....$	• Ρητοί αριθμοί: $1{,}25$ $1{,}\overline{6} = 1{,}6666...$

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

Η μέθοδος του Αρχύτα για την προσέγγιση ριζών

1. Να μετατρέψετε:

α) το κλάσμα $\frac{10}{16}$ σε δεκαδικό

β) τους δεκαδικούς 0,0101001 και $0{,}\overline{12}$ σε κλάσματα

Απάντηση

α) $\frac{10:2}{16:2} = \frac{5}{8} = \frac{5 \cdot 125}{8 \cdot 125} = \frac{625}{1.000} = 0{,}625$

β) $0{,}0101001 = \frac{101001}{10.000.000}$

Για το $x = 0{,}\overline{12} = 0{,}121212....$

Άρα $100x = 12{,}121212...$ ή $99x + x = 12 + 0{,}121212...$

Αφαιρούμε το x και το 0,121212... από το πρώτο και το δεύτερο μέλος αντίστοιχα:

$99x = 12$ ή $\frac{99x}{99} = \frac{12}{99}$ ή $x = \frac{12}{99}$, άρα $0{,}\overline{12} = \frac{12}{99}$

Να μετατρέψετε το $0{,}\overline{9}$ σε κλάσμα. Τι παρατηρείτε;

2. **Ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι ρητοί και ποιοι άρρητοι;**

$\mathbf{\frac{1}{3}}$, **2,11114**, $\mathbf{2{,}\overline{1}}$, $\mathbf{\sqrt{3}}$, **0,10100100010000100001...**, $\mathbf{\frac{\sqrt{3}}{2}}$, $\mathbf{\frac{1{,}2}{11}}$.

Απάντηση

- Το $\frac{1}{3}$ είναι ρητός, γιατί είναι κλάσμα (με αριθμητή και παρονομαστή ακέραιους).
- Το 2,11114 είναι ρητός, γιατί έχει πέντε δεκαδικά ψηφία.
- Το $2{,}\overline{1}$ είναι ρητός, γιατί είναι περιοδικός δεκαδικός.
- Το $\sqrt{3}$ είναι άρρητος, ως ρίζα φυσικού που δεν είναι τέλειο τετράγωνο.
- Ο 0,10100100010000100001... είναι άρρητος, γιατί έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία, μη περιοδικά.
- Το $\frac{\sqrt{3}}{2}$ είναι άρρητος, γιατί ισούται με το μισό ενός άρρητου, του $\sqrt{3}$.
- Το $\frac{1{,}2}{11}$ είναι ρητός: $\frac{1{,}2}{11}=\frac{1{,}2\cdot 5}{11\cdot 5}=\frac{6}{55}$, άρα γράφεται ως κλάσμα (με αριθμητή και παρονομαστή ακέραιους).

---

3. **α) Πόσες φορές μεγαλύτερη είναι η πλευρά ενός τετραγώνου με εμβαδόν 50 από την πλευρά τετραγώνου με εμβαδόν 8;**

β) Μπορείτε να κάνετε την ίδια σύγκριση για τις πλευρές τετραγώνων με εμβαδά 12 και 8;

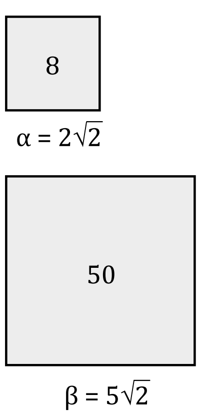
Απάντηση

α) Η πλευρά του τετραγώνου με εμβαδόν 8 είναι $\alpha=\sqrt{8}=\sqrt{4\cdot 2}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.
Ενώ για το τετράγωνο με εμβαδόν 50 είναι $\beta=\sqrt{50}=\sqrt{25\cdot 2}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{2}=5\sqrt{2}$.

Υπολογίζοντας τον λόγο των πλευρών, βρίσκουμε $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{5\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{5}{2}=2{,}5$, επομένως η πλευρά β είναι 2,5 φορές μεγαλύτερη από την πλευρά α.

β) Με παρόμοιους συλλογισμούς βρίσκουμε ότι η πλευρά του τετραγώνου με εμβαδόν 12 είναι $\gamma=2\sqrt{3}$.

Υπολογίζοντας τον λόγο των πλευρών, έχουμε $\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{2}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{3}{2}}$, που είναι άρρητος αριθμός.



Στο α) ερώτημα, οι πλευρές α και β, αν και έχουν ως μήκη άρρητους αριθμούς, είναι πολλαπλάσια του $\sqrt{2}$. Άρα με «κοινό μέτρο» το $\sqrt{2}$ η πλευρά β έχει μήκος 5 φορές το κοινό μέτρο, ενώ η α έχει μήκος 2 φορές το κοινό μέτρο, επομένως η β είναι 2,5 φορές μεγαλύτερη της α.
Στο β) ερώτημα, η πλευρά γ είναι πολλαπλάσιο του $\sqrt{3}$ ενώ η α είναι πολλαπλάσιο του $\sqrt{2}$. Έτσι, δεν μπορεί να βρεθεί κοινό μέτρο μεταξύ των γ και α.

Ασύμμετρα μεγέθη

4. **Να γράψετε από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους αριθμούς:**

$$\mathbf{4,\ \sqrt{10},\ \sqrt{5},\ \sqrt{20},\ 3\sqrt{6},\ -\sqrt{5},\ -\sqrt{10}}$$

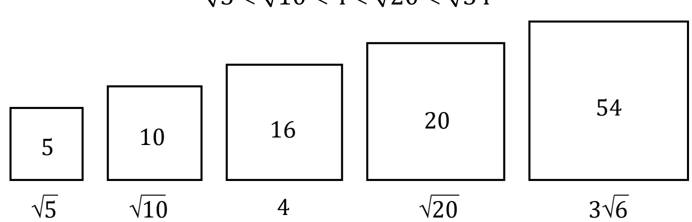
Απάντηση

Αρχικά ας συγκρίνουμε τους θετικούς μεταξύ τους, θεωρώντας τους ως μήκη πλευρών τετραγώνου:

Πλευρά	4	$\sqrt{10}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{20}$	$3\sqrt{6}$
Εμβαδόν τετραγώνου	$4^2=16$	$\left(\sqrt{10}\right)^2=10$	$\left(\sqrt{5}\right)^2=5$	$\left(\sqrt{20}\right)^2=20$	$\left(3\sqrt{6}\right)^2=3^2\left(\sqrt{6}\right)^2=9\cdot 6=54$

Εφόσον το μεγαλύτερο εμβαδόν αντιστοιχεί σε μεγαλύτερη πλευρά, ισχύει ότι:

$$\sqrt{5}<\sqrt{10}<4<\sqrt{20}<\sqrt{54}$$



Είναι $\sqrt{5}<\sqrt{10}$. Όμως οι $-\sqrt{5}$ και $-\sqrt{10}$ είναι αρνητικοί, άρα μεγαλύτερος είναι ο $-\sqrt{5}$, δηλαδή $-\sqrt{10}<-\sqrt{5}$.

Για δύο οποιουσδήποτε μη αρνητικούς αριθμούς α και β με $\alpha<\beta$ ισχύει ότι $\sqrt{\alpha}<\sqrt{\beta}$.
Το ίδιο ισχύει και για περισσότερους μη αρνητικούς αριθμούς: Αν $\alpha<\beta<\gamma<\delta$, τότε $\sqrt{\alpha}<\sqrt{\beta}<\sqrt{\gamma}<\sqrt{\delta}$.

5. **α) Μεταξύ ποιων ακέραιων βρίσκεται καθένας από τους αριθμούς $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{20}$ και $-\sqrt{5}$;**
β) Να τοποθετήσετε στην αριθμογραμμή:
i. τους αριθμούς του (α)
ii. τον αριθμό $\frac{10}{\sqrt{5}}$

Απάντηση

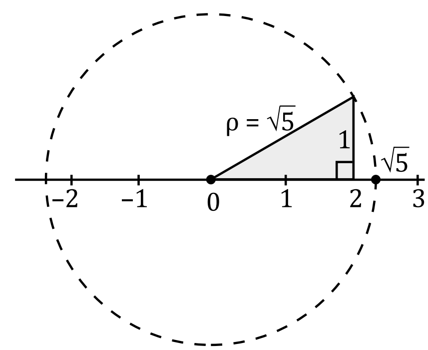
α) Εφόσον $4<5<9$, τότε $\sqrt{4}<\sqrt{5}<\sqrt{9}$ ή $2<\sqrt{5}<3$.
Άρα το $\sqrt{5}$ βρίσκεται μεταξύ 2 και 3, επομένως (λόγω συμμετρίας) το $-\sqrt{5}$ βρίσκεται μεταξύ των -3 και -2.
Με το ίδιο σκεπτικό βρίσκουμε ότι:

- $\sqrt{9}<\sqrt{10}<\sqrt{16}$ ή $3<\sqrt{10}<4$, δηλαδή η $\sqrt{10}$ βρίσκεται μεταξύ των 3 και 4.
- $\sqrt{16}<\sqrt{20}<\sqrt{25}$ ή $4<\sqrt{20}<5$, δηλαδή η $\sqrt{20}$ βρίσκεται μεταξύ των 4 και 5.

- Εδώ χρησιμοποιήσαμε τα 4 και 9, γιατί είναι τα δύο τέλεια τετράγωνα μεταξύ των οποίων βρίσκεται το 5.
- Τα αποτελέσματα «ταιριάζουν» με τις προσεγγιστικές τιμές που βρίσκουμε, αν χρησιμοποιήσουμε αριθμομηχανή:
$\sqrt{5}\cong 2{,}23606797749979$,
$\sqrt{10}\cong 3{,}162277660168379$ και
$\sqrt{20}\cong 4{,}472135954999579$

β) i. Για να τοποθετήσουμε με ακρίβεια τους αριθμούς στην αριθμογραμμή, χρησιμοποιούμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

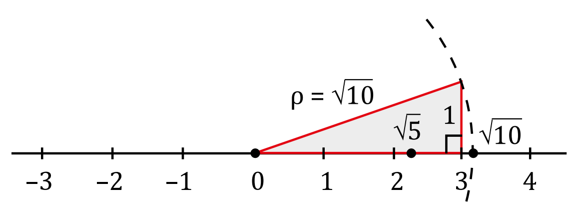
- Σχεδιάζουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 1 και 2 προσαρμοσμένο στην αριθμογραμμή, όπως στο σχήμα.
Η υποτείνουσά του είναι $\rho=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.
- Σχεδιάζουμε κύκλο με κέντρο το σημείο που αντιστοιχεί στο 0 της αριθμογραμμής και ακτίνα την υποτείνουσα του ορθογώνιου τριγώνου, δηλαδή $\sqrt{5}$.
Έτσι, βρίσκουμε το σημείο της αριθμογραμμής που η απόστασή του από το 0 είναι ίση με $\sqrt{5}$.
- Το σημείο αυτό αντιστοιχεί στον αριθμό $\sqrt{5}$.



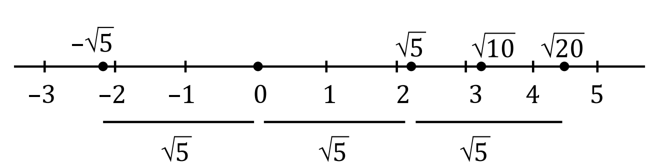
Παρόμοια εργαζόμαστε για το $\sqrt{10}$, αλλά σχεδιάζοντας ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 1 και 3.
Τότε, σύμφωνα με το Πυθαγόρειο Θεώρημα, είναι $\rho=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$.

Εντοπισμός ρίζας στον άξονα

Εντοπίζω ρίζα στον άξονα



Για το $\sqrt{20}$ παρατηρούμε ότι $\sqrt{20}=\sqrt{4\cdot 5}=2\sqrt{5}$. Άρα, αντί να παραστήσουμε το $\sqrt{20}$ στην αριθμογραμμή, μπορούμε να παραστήσουμε το $2\sqrt{5}$.
Η απόσταση του $2\sqrt{5}$ από το 0 είναι διπλάσια από αυτή του $\sqrt{5}$.
Με αυτόν τον τρόπο εντοπίζουμε το $\sqrt{20}$ στην αριθμογραμμή, όπως στο σχήμα.



Το $-\sqrt{5}$ είναι ο αντίθετος αριθμός του $\sqrt{5}$, επομένως βρίσκεται στην ίδια απόσταση από το 0, αλλά αριστερά από το 0. Δηλαδή το $-\sqrt{5}$ στην αριθμογραμμή είναι συμμετρικό του $\sqrt{5}$ ως προς κέντρο το 0, όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

ii. Μετασχηματίζουμε τον αριθμό $\frac{10}{\sqrt{5}}$ σε ισοδύναμό του χωρίς ρίζα στον παρονομαστή:

$$\frac{10}{\sqrt{5}}=\frac{10\sqrt{5}}{\sqrt{5}^2}=\frac{10\sqrt{5}}{5}=\frac{10}{5}\cdot\sqrt{5}=2\sqrt{5}$$

Επομένως ο $\frac{10}{\sqrt{5}}$ βρίσκεται στο ίδιο σημείο με τον $\sqrt{20}$ στην αριθμογραμμή.

6. Να γράψετε:

α) Έναν ρητό αριθμό:

i. μεταξύ των 1,1 και 1,2

ii. μεταξύ των $-\frac{1}{3}$ και $-\frac{1}{2}$

iii. μεταξύ των $\sqrt{2}$ και $\sqrt{3}$

β) Έναν άρρητο αριθμό:

i. μεταξύ των $\sqrt{2}$ και $\sqrt{3}$

ii. μεταξύ των $\sqrt{\frac{10}{9}}$ και $\sqrt{10}$

Απάντηση

α) i. Είναι $1,1=1,10$ και $1,2=1,20$, άρα ο ζητούμενος ρητός είναι οποιοσδήποτε μεταξύ των 1,10 και 1,20, π.χ. $1,1<1,13<1,2$.

ii. Μετασχηματίζουμε τα κλάσματα σε ισοδύναμα, ομώνυμα με μεγαλύτερο παρονομαστή, π.χ. $-\frac{1}{3}=-\frac{1\cdot 4}{3\cdot 4}=-\frac{4}{12}$ και $-\frac{1}{2}=-\frac{1\cdot 6}{2\cdot 6}=-\frac{6}{12}$.

Εφόσον $-\frac{6}{12}<-\frac{5}{12}<-\frac{4}{12}$, ο ρητός αριθμός $-\frac{5}{12}$ είναι μεταξύ των $-\frac{1}{2}$ και $-\frac{1}{3}$.

Γιατί επιλέξαμε ως κοινό παρονομαστή το 12 και όχι το 6;

iii. Χρησιμοποιώντας αριθμομηχανή βρίσκουμε ότι:

$$\sqrt{2}\cong 1,414 \text{ και } \sqrt{3}\cong 1,732$$

Άρα ένας ρητός αριθμός μεταξύ των $\sqrt{2}$ και $\sqrt{3}$ είναι ο 1,5.

β) i. 1ος τρόπος

Θέλουμε έναν δεκαδικό μεταξύ των $\sqrt{2}$ και $\sqrt{3}$ με άπειρα δεκαδικά ψηφία που να μην επαναλαμβάνονται περιοδικά. Ο αριθμός 1,505005000500005000005.... είναι μεταξύ των $\sqrt{2}$ και $\sqrt{3}$, όπως φαίνεται στο α) iii, και έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία, τα οποία δεν επαναλαμβάνονται περιοδικά: Μετά από κάθε 5 ακολουθεί διαφορετικό πλήθος από 0 (το πλήθος τους αυξάνεται κατά 1).

2ος τρόπος

Εφόσον $2<2,5<3$, το $\sqrt{2,5}$ είναι μεταξύ των $\sqrt{2}$ και $\sqrt{3}$.

ii. Είναι $\sqrt{\frac{10}{9}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{10}}{3}$, δηλαδή το $\sqrt{\frac{10}{9}}$ είναι το $\frac{1}{3}$ του $\sqrt{10}$.

Τα $\frac{2}{3}$ του $\sqrt{10}$ είναι μεταξύ των $\frac{\sqrt{10}}{3}$ και $\sqrt{10}$, δηλαδή $\frac{\sqrt{10}}{3} < \frac{2\sqrt{10}}{3} < \sqrt{10}$.

Επίσης ο $\frac{2\sqrt{10}}{3}$ είναι άρρητος, γιατί είναι γινόμενο ρητού (του $\frac{2}{3}$) με άρρητο (τον $\sqrt{10}$). Άρα ο $\frac{2\sqrt{10}}{3}$ είναι απάντηση στο ζητούμενο.

7. **Να βρείτε τους αριθμούς που επαληθεύουν την εξίσωση $x^2 = 3$.**

Απάντηση

Την εξίσωση επαληθεύει όποιος αριθμός υψώνεται στο τετράγωνο και ισούται με 3.

Γνωρίζουμε ότι $\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$.

Άρα η $\sqrt{3}$ επαληθεύει την εξίσωση και δεν υπάρχει άλλος θετικός αριθμός που να την επαληθεύει.

Επίσης $\left(-\sqrt{3}\right)^2 = \sqrt{3}^2 = 3$ και δεν υπάρχει άλλος αρνητικός αριθμός που να επαληθεύει την εξίσωση.

Άρα οι αριθμοί που επαληθεύουν τη $x^2 = 3$ είναι οι $\sqrt{3}$ και $-\sqrt{3}$.

Για κάθε θετικό αριθμό α ισχύει ότι:
Οι αριθμοί που επαληθεύουν την εξίσωση $x^2 = α$ είναι οι $\sqrt{α}$ και $-\sqrt{α}$. Μπορούμε να πούμε ότι η τετραγωνική ρίζα του α, δηλαδή η $\sqrt{α}$, είναι η θετική λύση της εξίσωσης $x^2 = α$.

8. **Καθώς ανακαλύπτονται νέοι, για εμάς, πλανήτες πέρα από το ηλιακό μας σύστημα, οι αστρονόμοι ερευνούν αν σε κάποιον από αυτούς μπορεί να υπάρχει νερό σε υγρή μορφή. Αυτό σημαίνει ότι η θερμοκρασία του πλανήτη πρέπει να είναι αρκετά υψηλή, ώστε να μετατραπεί το νερό από στερεό (πάγο) σε υγρό, αλλά όχι πολύ υψηλή, ώστε να μετατραπεί σε αέριο.**

Η θερμοκρασία του πλανήτη εξαρτάται από την απόστασή του από το άστρο-ήλιο του δικού του «ηλιακού συστήματος». Αν τ είναι η θερμοκρασία του άστρου (σε βαθμούς Kelvin), d η απόσταση του πλανήτη από το άστρο (σε χιλιόμετρα) και R η ακτίνα του άστρου (σε χιλιόμετρα), τότε η θερμοκρασία T του πλανήτη δίνεται από τον τύπο:

$$\mathbf{T = 0{,}6τ \cdot \sqrt{\frac{R}{d}}}$$

α) **Ένας πλανήτης απέχει από το άστρο 150.000.000 km, το οποίο έχει ακτίνα 700.000 km και θερμοκρασία 6.000 Kelvin. Μπορεί σε αυτόν να υπάρχει νερό σε υγρή μορφή;**

β) **Να γράψετε τον τύπο σε ισοδύναμη μορφή, ώστε να μπορεί να υπολογιστεί η απόσταση d.**

γ) Αν η θερμοκρασία ενός άστρου είναι τ = 5.770 βαθμοί Kelvin και η ακτίνα του R = 700.000 km, να υπολογίσετε σε ποια απόσταση από το άστρο ένας πλανήτης μπορεί να έχει νερό σε υγρή μορφή.
Να λάβετε υπόψη σας ότι το νερό γίνεται πάγος στους 273 και αέριο στους 373 βαθμούς Kelvin. (Βρίσκουμε τη θερμοκρασία σε βαθμούς Kelvin προσθέτοντας 273 στους βαθμούς Celsius.)

Απάντηση

α) Αντικαθιστώντας στον τύπο, έχουμε $T=0{,}6\cdot 6.000\cdot\sqrt{\dfrac{700.000}{150.000.000}}=3.600\cdot\sqrt{\dfrac{7}{1500}}=3.600\cdot\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{15}\cdot\sqrt{100}}\cong$

$\cong 3.600\cdot\dfrac{2{,}65}{3{,}87\cdot 10}\cong 247{,}5$ Kelvin. Άρα η θερμοκρασία του πλανήτη είναι μικρότερη των 273 Kelvin, που σημαίνει ότι ο πλανήτης είναι ψυχρός για να έχει νερό σε υγρή μορφή.

β) Γράφουμε τον τύπο ως εξής: $T=0{,}6\tau\cdot\dfrac{\sqrt{R}}{\sqrt{d}}$ ή $\sqrt{d}\cdot T=0{,}6\tau\cdot\dfrac{\sqrt{R}}{\sqrt{d}}\cdot\sqrt{d}$ ή $\sqrt{d}\cdot T=0{,}6\tau\cdot\dfrac{\sqrt{R}}{\cancel{\sqrt{d}}}\cdot\cancel{\sqrt{d}}$ ή $\sqrt{d}\cdot T=0{,}6\tau\sqrt{R}$

ή $\dfrac{\sqrt{d}\cdot T}{T}=\dfrac{0{,}6\tau\sqrt{R}}{T}$ ή $\dfrac{\sqrt{d}\cdot \cancel{T}}{\cancel{T}}=\dfrac{0{,}6\tau\sqrt{R}}{T}$ ή $\sqrt{d}=\dfrac{0{,}6\tau\sqrt{R}}{T}$ ή $\sqrt{d}^{\,2}=\left(\dfrac{0{,}6\tau\sqrt{R}}{T}\right)^2$ ή $d=\dfrac{0{,}6^2\tau^2\sqrt{R}^{\,2}}{T^2}$.

Άρα $d=\dfrac{0{,}36\cdot(\tau)^2 R}{T^2}$

Πολύ μεγάλοι ή πολύ μικροί αριθμοί

γ) Αντικαθιστώντας στον παραπάνω τύπο, βρίσκουμε ότι:

- Για τους 273 βαθμούς Kelvin $d=\dfrac{0{,}36\cdot 5770^2\cdot 700.000}{273^2}=\dfrac{8.389.810.800.000}{74.529}\cong 515.098.965{,}5$
- Για τους 373 βαθμούς Kelvin $d=\dfrac{0{,}36\cdot 5770^2\cdot 700.000}{373^2}=\dfrac{8.389.810.800.000}{139.129}\cong 60.302.386{,}99$.

Άρα η απόσταση από το άστρο στην οποία ο πλανήτης έχει νερό σε υγρή μορφή είναι μεταξύ 60.302.386,99 και 515.098.965,5 km.

Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε

Άρρητος αριθμός

Ορισμός	**Χαρακτηριστικά**
Κάθε αριθμός που δε γράφεται ως κλάσμα, δηλαδή στη μορφή $\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ, ν είναι ακέραιοι και $\nu\neq 0$.	Σε δεκαδική μορφή έχουν άπειρα δεκαδικά ψηφία που δεν επαναλαμβάνονται περιοδικά.
Παραδείγματα είναι	**Παραδείγματα δεν είναι**
$\sqrt{2}$, 1,01001000100001...	$\sqrt{9}$, $1{,}\overline{5}$

Παραπάνω φαίνεται ο πίνακας της έννοιας «Άρρητος αριθμός».

α) Να κατασκευάσετε από έναν πίνακα έννοιας για τις έννοιες «Ρητός αριθμός» και «Τετραγωνική ρίζα» και να τον παρουσιάσετε.

β) Αν έχετε άλλες ιδέες, να συμπληρώσετε με αυτές τον πίνακα της έννοιας «Άρρητος αριθμός».

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Να μετατρέψετε τους παρακάτω ρητούς αριθμούς από κλασματική σε δεκαδική μορφή ή αντίστροφα.

α) $\frac{13}{100}$ **β)** $\frac{113}{10}$ **γ)** $\frac{3}{2}$ **δ)** $\frac{3}{8}$ **ε)** $-\frac{3}{12}$ **στ)** $\frac{1}{3}$ **ζ) 1,15** **η) –0,35**

2. Ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι ρητοί και ποιοι άρρητοι;

α) $\frac{1}{3}$ **β)** $\sqrt{2}$ **γ) 1,25** **δ)** $3,\overline{5}$ **ε) –1,4** **στ) π** **ζ)** $-\sqrt{3}$

3. Να γράψετε:

α) το μήκος της πλευράς ενός τετραγώνου εμβαδού 5

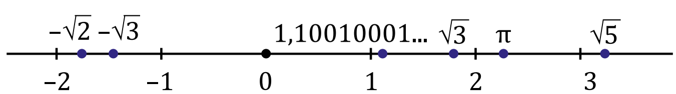
β) το μήκος της διαμέτρου ενός κύκλου με μήκος 10

4. Ποιος από τους παρακάτω δεκαδικούς αριθμούς με άπειρα δεκαδικά ψηφία είναι ρητός και ποιος άρρητος;
α) $1,\overline{1}$ **β)** $-0,\overline{3}$ **γ)** 1,234233423334233334… **δ)** 1,234562345623456….

5. Να γράψετε τους παρακάτω αριθμούς σε αύξουσα σειρά:

$$\sqrt{5}, -\sqrt{3}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, -\sqrt{2}, \sqrt{11}, -\sqrt{8}$$

6. Ποιο είναι το λάθος ή τα λάθη στην τοποθέτηση των αριθμών $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $-\sqrt{2}$, $-\sqrt{3}$, π και 1,10010001... στην αριθμογραμμή;



Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

7. Ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι ρητοί και ποιοι άρρητοι; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

α) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ **β)** $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}$ **γ)** $3,\overline{5}$ **δ)** $-\sqrt{4}$ **ε)** π – (1 + π) **στ)** 2,01011011101111…. **ζ)** 1,020020002

8. Να μετατρέψετε τους παρακάτω ρητούς από κλασματική σε δεκαδική μορφή ή αντίστροφα.

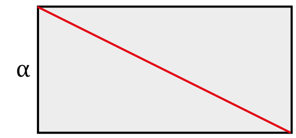
α) $8,\overline{9}$ **β)** $1,\overline{19}$ **γ)** $-1\frac{1}{2}$ **δ)** $0,\overline{6}$

9. Να βρείτε τη σχέση των αριθμών $\sqrt{3}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{27}$, $\sqrt{48}$ (π.χ. αν κάποιος είναι διπλάσιος, τριπλάσιος κτλ., κάποιου άλλου) και να τους τοποθετήσετε στην αριθμογραμμή:

10. **α)** Μεταξύ ποιων ακέραιων βρίσκεται καθένας από τους αριθμούς $\sqrt{7}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{21}$, $\sqrt{28}$, $-\sqrt{7}$, $-\sqrt{21}$, $-\sqrt{63}$ και $-\dfrac{14}{\sqrt{7}}$;

β) Να τοποθετήσετε στην αριθμογραμμή τους παραπάνω αριθμούς.

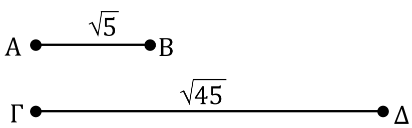
11. Η μια πλευρά ενός ορθογωνίου είναι διπλάσια από την άλλη.
Αν α είναι το μήκος της μικρότερης πλευράς του ορθογωνίου, να γράψετε με τη βοήθεια του α το μήκος της διαγωνίου του ορθογωνίου.



12. **α)** Πόσες φορές μεγαλύτερο είναι το ΓΔ από το ΑΒ;

β) Μπορείτε να βρείτε παρόμοια σχέση για το μήκος του ΓΔ και ενός ευθύγραμμου τμήματος $ΚΛ = \sqrt{3}$;

γ) Ποιος από τους $-\sqrt{12}$ και $-\sqrt{3}$ είναι πολλαπλάσιο του άλλου; Με ποιον αριθμό;



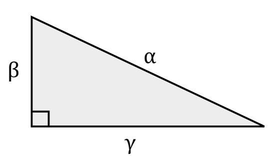
δ) Μπορείτε να βρείτε παρόμοια σχέση για κάποιους από τους αριθμούς $-\sqrt{28}$, $\sqrt{7}$ και $-\sqrt{5}$;

13. **α)** Να αποδείξετε ότι η υποτείνουσα ενός ορθογώνιου τριγώνου με μήκη κάθετων πλευρών 4 και 8 είναι διπλάσια από την υποτείνουσα ενός ορθογώνιου τριγώνου με μήκη κάθετων πλευρών 2 και 4.

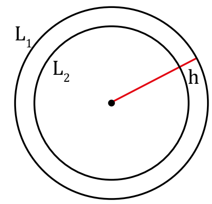
β) Ποια είναι η σχέση που έχει το α (του σχήματος) με το μήκος της υποτείνουσας ενός ορθογώνιου τριγώνου με κάθετες πλευρές:

i. 3β και 3γ

ii. $\sqrt{3}$β και $\sqrt{3}$γ



14. Το εξωτερικό μήκος της ρόδας ενός ποδηλάτου είναι $L_1 = 185$ cm, ενώ το εσωτερικό της μήκος είναι $L_2 = 173$ cm.
Ποιο είναι το πάχος της ρόδας του ποδηλάτου;



15. Η ταχύτητα του ήχου είναι διαφορετική όταν αυτός διαδίδεται μέσα σε διαφορετικό αέριο. Το αποτέλεσμα αυτής της ιδιότητας το καταλαβαίνουμε όταν ακούμε κάποιον να μιλάει σαν καρτούν έχοντας εισπνεύσει αέριο ήλιο. Η ταχύτητα του ήχου S, σε m/sec, υπολογίζεται από τον τύπο $S = 108\sqrt{\dfrac{T}{m}}$, όπου m είναι η μέση μοριακή μάζα του αερίου και T είναι η θερμοκρασία του σε βαθμούς Kelvin.

α) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του ήχου σε ένα αέριο με μέση μοριακή μάζα 2,02 (γραμμάρια ανά γραμμομόριο) στους 300 βαθμούς Kelvin.

β) Να γράψετε έναν τύπο για τον υπολογισμό της θερμοκρασίας του αερίου ως συνάρτηση της ταχύτητας του ήχου σε αυτό.

γ) Σε ένα αέριο σε θερμοκρασία 300 βαθμών Kelvin ο ήχος διαδίδεται με ταχύτητα $S = 450$ m / sec. Ποια είναι η μέση μοριακή μάζα του αερίου;

1.3 Το σύνολο των πραγματικών αριθμών

Δ1. Τι αριθμός είναι;

Να χαρακτηρίσετε τον καθένα από τους παρακάτω αριθμούς ως ρητό, άρρητο, φυσικό, ακέραιο.
Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε περισσότερους από έναν χαρακτηρισμούς για κάθε αριθμό.

$$\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}, \sqrt{2}, -2, +5, 1, -\sqrt{3}, -\sqrt{4}$$

Συζητήστε στις ομάδες σας και μετά στην τάξη τους χαρακτηρισμούς που επιλέξατε.

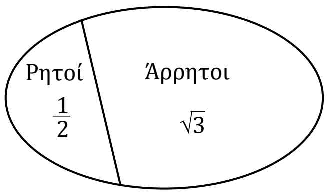
Θυμόμαστε ότι:
Τους αριθμούς 0, 1, ..., 10, 11, ... τους ονομάζουμε φυσικούς, ενώ τους ..., –2, –1, 0, +1, +2, +3, ..., τους ονομάζουμε ακέραιους.

Συζητάμε

...για σύνολα αριθμών

Ίσως θυμόμαστε τους **πραγματικούς αριθμούς** από τη Β΄ γυμνασίου. Ένας πραγματικός αριθμός είναι ρητός αν **μπορεί** να γραφεί ως κλάσμα ακεραίων, και άρρητος αν **δεν μπορεί** να γραφεί ως κλάσμα ακεραίων.

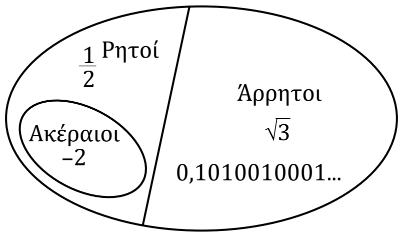
Επομένως δε γίνεται ο ίδιος αριθμός να είναι και ρητός και άρρητος.
Όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, ένας πραγματικός αριθμός βρίσκεται είτε στους ρητούς (π.χ. ο $\frac{1}{2}$) είτε στους άρρητους (π.χ. ο $\sqrt{3}$).



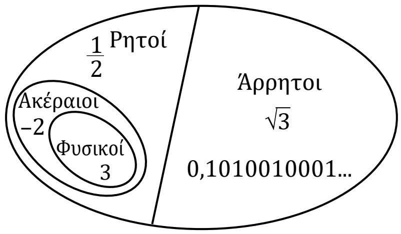
Κάθε ακέραιος είναι και ρητός, γιατί γράφεται ως κλάσμα. Για παράδειγμα, ο –2, που είναι ακέραιος, γράφεται $-\frac{2}{1}$ ή $\frac{4}{-2}$ ή $-\frac{6}{3}$ (ή και αλλιώς) και είναι ρητός. Το $\frac{1}{2}$ είναι ρητός και όχι ακέραιος.

Έτσι, στο διπλανό σχήμα:

- Οι ακέραιοι είναι μέσα στους ρητούς.
- Το –2 είναι μέσα στους ακεραίους, άρα και στους ρητούς.
- Το $\frac{1}{2}$ είναι μέσα στους ρητούς, χωρίς να είναι στους ακεραίους.



Επίσης κάθε φυσικός είναι και θετικός ακέραιος. Αυτό φαίνεται στο διπλανό σχήμα, που το 3 ή +3 είναι μέσα στους φυσικούς, άρα και στους ακέραιους.



Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών αποτελείται από τους ρητούς και τους άρρητους.
Οι ρητοί περιέχουν τους ακεραίους.
Οι ακέραιοι περιέχουν τους φυσικούς.
Άρα:
Ένας ρητός μπορεί να είναι ακέραιος και ένας ακέραιος μπορεί να είναι φυσικός.

	Άρρητος	Ρητός	Ακέραιος	Φυσικός
$\sqrt{3}$	✓			
$\frac{1}{3}$		✓		
-1		✓	✓	
2		✓	✓	✓
$0{,}2$		✓		

Δ2. Ιδιότητες των πράξεων

α) Με τη βοήθεια της προσεταιριστικής ιδιότητας να εξηγήσετε τις παρακάτω ισότητες:

$$6\sqrt{27}=\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}=9\sqrt{12}=18\sqrt{3}$$

β) Με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας να αποδείξετε ότι η τιμή της παράστασης $\sqrt{2}\left(\sqrt{8}+\sqrt{2}\right)$ είναι φυσικός αριθμός.

Θυμόμαστε:

- Προσεταιριστική ιδιότητα πολλαπλασιασμού: $\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$
- Επιμεριστική ιδιότητα:
  $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha(\beta+\gamma)$

Συζητάμε

…για τις ιδιότητες των πράξεων

Οι ιδιότητες των πράξεων μεταξύ πραγματικών αριθμών μπορούν να μας βοηθήσουν να κάνουμε σύντομα σωστούς υπολογισμούς, χωρίς να ακολουθούμε αναγκαστικά την προτεραιότητα των πράξεων. Για παράδειγμα, ας δούμε την επιμεριστική ιδιότητα.

Στην παράσταση $\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)$ προηγείται ο υπολογισμός της διαφοράς στην παρένθεση. Ωστόσο, πρόκειται για μια διαφορά μεταξύ του άρρητου $\sqrt{3}$ και του ρητού 1, που δεν μπορεί να «προχωρήσει», παρά μόνο προσεγγιστικά. Έτσι, για λόγους ακρίβειας είναι πιο αποτελεσματικό να κάνουμε ένα βήμα με την επιμεριστική ιδιότητα, δηλαδή:

$$\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)=\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}-\sqrt{3}\cdot 1=\sqrt{3}^{2}-\sqrt{3}=3-\sqrt{3}$$

Όπως έχουμε πει σε προηγούμενη παράγραφο, χρησιμοποιούμε την επιμεριστική ιδιότητα και στην εξής περίπτωση:

$$8\sqrt{2}-3\sqrt{2}=(8-3)\sqrt{2}=5\sqrt{2}$$

Για τους πραγματικούς αριθμούς ισχύουν οι ιδιότητες των πράξεων που ισχύουν για τους ρητούς αριθμούς.

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Για τους πραγματικούς αριθμούς ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

Αντιμεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης: $\alpha+\beta=\beta+\alpha$	$2-\sqrt{7}=-\sqrt{7}+2$
Αντιμεταθετική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού: $\alpha\beta=\beta\alpha$	$\pi\cdot 4=4\cdot\pi$
Προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης: $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$	$\sqrt{5}+\left(\sqrt{5}+1\right)=\left(\sqrt{5}+\sqrt{5}\right)+1=2\sqrt{5}+1$
Προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού: $\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$	$\sqrt{15}\cdot\sqrt{7}=\left(\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}\right)\cdot\sqrt{7}=\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}\right)=\sqrt{3}\cdot\sqrt{35}$
Επιμεριστική ιδιότητα: $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$, $(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)=\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta$	$\sqrt{3}+2\sqrt{3}+5\sqrt{3}=(1+2+5)\sqrt{3}=8\sqrt{3}$ $\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{8}+1\right)=\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot 1+1\cdot\sqrt{8}+1\cdot 1=$ $=\sqrt{16}+\sqrt{2}+\sqrt{8}+1=4+\sqrt{2}+\sqrt{8}+1=\sqrt{2}+\sqrt{8}+5$

Δ3. Δυνάμεις

Να υπολογίσετε την τιμή των παρακάτω παραστάσεων χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ριζών και των δυνάμεων:

α) $\left(\sqrt{2}\right)^4\cdot\left(\sqrt{8}\right)^4$ **β)** $\dfrac{\left(\sqrt{8}\right)^4}{\left(\sqrt{2}\right)^4}$

Να συζητήσετε στην τάξη για το αν υπάρχουν κι άλλοι τρόποι υπολογισμού και αν υπάρχουν να τους συγκρίνετε.

Θυμόμαστε:
Για πραγματικούς αριθμούς α και β και ν θετικό ακέραιο:

- $\alpha^\nu\cdot\beta^\nu=(\alpha\beta)^\nu$
- $\dfrac{\alpha^\nu}{\beta^\nu}=\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^\nu$, για $\beta\neq 0$

Συζητάμε

...για δυνάμεις με βάση πραγματικό αριθμό

Όπως έχουμε δει σε προηγούμενες τάξεις, η δύναμη $\left(\dfrac{1}{3}\right)^5$ με βάση τον ρητό αριθμό $\dfrac{1}{3}$ και εκθέτη τον θετικό ακέραιο 5 συμβολίζει το γινόμενο $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3^5}=\dfrac{1}{243}$.

Με αντίστοιχο τρόπο οι δυνάμεις με βάση άρρητο αριθμό συμβολίζουν γινόμενα όπως:

$$\left(\sqrt{3}\right)^5=\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}$$

Για τον υπολογισμό της τιμής της $\left(\sqrt{3}\right)^5$ μπορούμε να συνεχίσουμε ως εξής:

$$\left(\sqrt{3}\right)^5=\left(\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}\right)^2\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2\cdot\sqrt{3}=3\cdot 3\cdot\sqrt{3}=9\sqrt{3}$$

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Δυνάμεις με βάση πραγματικό αριθμό Για κάθε πραγματικό αριθμό α και για κάθε θετικό ακέραιο ν η δύναμη $α^ν$ συμβολίζει το εξής γινόμενο: $α^ν = \underbrace{α \cdot α \cdot \ldots \cdot α}_{ν\ \text{παράγοντες}}$	$π^4 = π \cdot π \cdot π \cdot π$ $\left(-\sqrt{2}\right)^3 = \left(-\sqrt{2}\right)\cdot\left(-\sqrt{2}\right)\cdot\left(-\sqrt{2}\right)$ $\left(-\sqrt{2}\right)^1 = -\sqrt{2}$
Για κάθε πραγματικό $α \neq 0$ έχουμε: • $α^0 = 1$. • $α^{-ν} = \dfrac{1}{α^ν}$, όπου ο ν είναι θετικός ακέραιος.	$\left(\sqrt{5}\right)^0 = 1$ $\left(\sqrt{3}\right)^{-2} = \dfrac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \dfrac{1}{3}$
Ιδιότητες Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α και β και οποιουσδήποτε ακεραίους μ και ν, όχι μηδέν, ισχύουν: • $α^μ \cdot α^ν = α^{μ+ν}$ • $\dfrac{α^μ}{α^ν} = α^{μ-ν}$ με $α \neq 0$ • $\left(α^μ\right)^ν = α^{μν}$ • $α^ν \cdot β^ν = (α \cdot β)^ν$ • $\dfrac{α^ν}{β^ν} = \left(\dfrac{α}{β}\right)^ν$ με $β \neq 0$	$0{,}25^3 \cdot 0{,}25^7 = 0{,}25^{3+7} = 0{,}25^{10}$ $\dfrac{\left(\sqrt{2}\right)^8}{\left(\sqrt{2}\right)^6} = \left(\sqrt{2}\right)^{8-6} = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$ $\left(π^2\right)^3 = π^{2\cdot 3} = π^6$ $\left(\sqrt{2}\right)^4 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^4 = \left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\right)^4 = \left(\sqrt{6}\right)^4$ $\dfrac{\left(\sqrt{10}\right)^5}{\left(\sqrt{2}\right)^5} = \left(\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}}\right)^5 = \left(\sqrt{\dfrac{10}{2}}\right)^5 = \left(\sqrt{5}\right)^5$

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. Δίνονται οι αριθμοί $α = \dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$, $β = -1\cdot(-3)$, $γ = 2\sqrt{3}$, $δ = -0{,}12$, $ε = 0{,}\overline{1}$ και ζ είναι ο λόγος του μήκους ενός κύκλου ακτίνας 4 προς το μήκος της διαμέτρου του.

α) Ποιοι από τους παραπάνω αριθμούς α, β, γ, δ, ε και ζ είναι ρητοί;

β) Ποιοι από τους ρητούς είναι ακέραιοι και ποιοι από αυτούς είναι φυσικοί;

Απάντηση

α) Κάνοντας τις πράξεις, όπου μπορούν να γίνουν, έχουμε:

$α = \dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{12}{3}} = \sqrt{4} = 2$, που είναι ρητός.

$β = +3$, που είναι ρητός.

Ο $γ = 2\sqrt{3}$ είναι άρρητος, ως το διπλάσιο του άρρητου $\sqrt{3}$ (όπως αναφέρθηκε στην ενότητα 1.2).

Ο δ = –0,12 είναι ρητός, ως δεκαδικός με πεπερασμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων.

Ο ε είναι ρητός ως περιοδικός δεκαδικός.

Τέλος, ο λόγος του μήκους οποιουδήποτε κύκλου προς τη διάμετρό του είναι π, που είναι άρρητος.

Άρα ρητοί είναι οι α, β, δ και ε.

β) Από αυτούς ακέραιοι είναι οι α = 2 και β = +3 ή 3, οι οποίοι είναι και οι δύο φυσικοί.

2. **Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των πράξεων να γράψετε τις παραστάσεις σε απλούστερη μορφή:**

α) $\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+\sqrt{12}\right)$, **β)** $\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{12}+2\right)$

Απάντηση

α) 1ος τρόπος: $\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+\sqrt{12}\right)=\left(\sqrt{3}\right)^2+\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}=3+\sqrt{3\cdot 12}=3+\sqrt{36}=3+6=9$

2ος τρόπος: $\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+\sqrt{12}\right)=\left(\sqrt{3}\right)^2+\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}=3+\sqrt{3}\cdot\sqrt{4\cdot 3}=3+\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}\right)=3+\left(\sqrt{3}\right)^2\cdot\sqrt{4}=3+3\cdot 2=9$

Στον 2ο τρόπο χρησιμοποιήσαμε την προσεταιριστική ιδιότητα γράφοντας το $\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}\right)$ ως $\left(\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{4}$ και στη συνέχεια $\left(\sqrt{3}\right)^2\cdot\sqrt{4}$.

β) $\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{12}+2\right)=\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}+2\sqrt{3}-1\cdot\sqrt{12}-2=\sqrt{36}+2\sqrt{3}-\sqrt{4\cdot 3}-2=6+2\sqrt{3}-\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}-2=$

$=6+2\sqrt{3}-2\sqrt{3}-2=4.$

Παρατηρούμε ότι το γινόμενο αρρήτων μπορεί να είναι ρητός. Το ίδιο ισχύει και για το πηλίκο αρρήτων.

3. **Να γράψετε τις παραστάσεις σε απλούστερη μορφή, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των δυνάμεων:**

α) $\left(\sqrt{3}\right)^3\cdot\sqrt{3}$ **β)** $\pi^{-2}\cdot\pi^3$ **γ)** $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{-4}$ **δ)** $\dfrac{\left(\sqrt{2}\right)^{-2}}{\left(\sqrt{5}\right)^{-2}}$

Πράξεις με ρίζες

Απάντηση

α) $\left(\sqrt{3}\right)^3\cdot\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}\right)^3\cdot\left(\sqrt{3}\right)^1=\left(\sqrt{3}\right)^{3+1}=\left(\sqrt{3}\right)^4$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $\alpha^{\mu}\cdot\alpha^{\nu}=\alpha^{\mu+\nu}$, γράφουμε $\left(\sqrt{3}\right)^4=\left(\sqrt{3}\right)^{2+2}=\left(\sqrt{3}\right)^2\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2=3\cdot 3=9$.

Εναλλακτικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα $\left(\alpha^{\mu}\right)^{\nu}=\alpha^{\mu\nu}$. Τότε γράφουμε $\left(\sqrt{3}\right)^4=\left[\left(\sqrt{3}\right)^2\right]^2$.

Το $\left(\sqrt{3}\right)^2$ μέσα στην αγκύλη γράφεται 3, άρα τελικά έχουμε $\left(\sqrt{3}\right)^4=\left[\left(\sqrt{3}\right)^2\right]^2=3^2=9$.

β) Έχουμε $\pi^{-2}\cdot\pi^{3}=\pi^{-2+3}=\pi^{1}=\pi$. Εναλλακτικά γράφουμε $\frac{1}{\pi^2}\cdot\pi^3=\frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{\pi^3}{1}=\frac{\pi^3}{\pi^2}=\pi^{3-2}=\pi^1=\pi$.

γ) Εφόσον $\alpha^{-\nu}=\frac{1}{\alpha^{\nu}}$, για $\alpha=\frac{2}{\sqrt{3}}$ έχουμε:

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{-4}=\frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{4}}=\frac{1}{\frac{2^4}{\left(\sqrt{3}\right)^4}}=\frac{\frac{1}{1}}{\frac{2^4}{\left(\sqrt{3}\right)^4}}=\frac{1\cdot\left(\sqrt{3}\right)^4}{1\cdot 2^4}=\frac{\left(\sqrt{3}\right)^4}{2^4}=\frac{9}{16}$$

Ένα σύνθετο κλάσμα γίνεται απλό ως εξής:

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}}=\frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\delta}{\gamma}=\frac{\alpha\cdot\delta}{\beta\cdot\gamma}$$

Χρησιμοποιήσαμε την απάντηση στο α), που υπολογίσαμε ότι $\left(\sqrt{3}\right)^4=9$.

Είδαμε ότι $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{-4}=\frac{\left(\sqrt{3}\right)^4}{2^4}$, ή αλλιώς $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{-4}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{4}$. Γενικά ισχύει ότι $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu}=\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu}$, με $\alpha\neq 0$ και $\beta\neq 0$.

δ) Έχουμε $\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{-2}}{\left(\sqrt{5}\right)^{-2}}=\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)^{-2}$.

Χρησιμοποιώντας την ισότητα $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu}=\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu}$, έχουμε $\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)^{-2}=\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)^{2}=\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^{2}=\frac{5}{2}$.

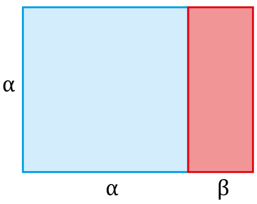
---

4. **α) Να αποδείξετε ότι $\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{2}{\sqrt{5}-1}$.**

β) Λέμε ότι δύο μεγέθη α και β βρίσκονται σε χρυσή αναλογία, αν $\frac{\alpha+\beta}{\alpha}=\frac{\alpha}{\beta}=\varphi$, με $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Στην εικόνα φαίνεται ένα τετράγωνο πλευράς α με εμβαδόν 16 και ένα ορθογώνιο με μια βάση $\beta=2\left(\sqrt{5}-1\right)$, τα οποία σχηματίζουν ένα μεγαλύτερο ορθογώνιο. Να αποδείξετε ότι οι διαστάσεις του μικρού ορθογωνίου βρίσκονται σε χρυσή αναλογία.

Μέθοδος απόδειξης



Απάντηση

α) Πολλαπλασιάζοντας χιαστί, έχουμε τις ισοδύναμες ισότητες:

$\left(1+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}-1\right)=2\cdot 2$ ή $\sqrt{5}-1+\left(\sqrt{5}\right)^2-\sqrt{5}=4$ ή $\cancel{\sqrt{5}}-\cancel{\sqrt{5}}-1+5=4$ ή $4=4$

Η τελευταία ισότητα είναι αληθής, επομένως είναι αληθής και η αρχική.

β) Εφόσον το τετράγωνο έχει εμβαδόν 16, έχουμε $\alpha=\sqrt{16}=4$. Υπολογίζουμε τους λόγους:

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha}=\frac{4+2\left(\sqrt{5}-1\right)}{4}=\frac{4+2\sqrt{5}-2}{4}=\frac{2+2\sqrt{5}}{4}=\frac{2}{4}+\frac{2\sqrt{5}}{4}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{4}{2\left(\sqrt{5}-1\right)}=\frac{2}{\sqrt{5}-1}$$

Η χρυσή τομή

Η χρυσή τομή σε υπολογιστικό φύλλο

Λόγω του ερωτήματος α) ισχύει $\frac{\alpha+\beta}{\alpha}=\frac{\alpha}{\beta}$, άρα οι διαστάσεις α και β βρίσκονται σε χρυσή αναλογία.

Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε

Να κατασκευάσετε έναν πίνακα έννοιας για τους πραγματικούς αριθμούς.

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Ποιοι από τους παρακάτω πραγματικούς αριθμούς είναι ρητοί; Ποιοι από αυτούς είναι ακέραιοι;

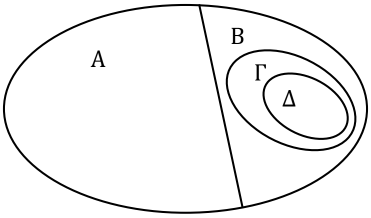
$$\sqrt{2},\quad -\sqrt{3},\quad \frac{1}{2},\quad \frac{\sqrt{2}}{2},\quad \sqrt{4},\quad -\sqrt{9},\quad -2,\quad \frac{3}{3}$$

2. Να κάνετε τις πράξεις χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα:

α) $2\left(\sqrt{2}+1\right)$ **β)** $2\left(\frac{1}{2}-\sqrt{2}\right)$ **γ)** $\sqrt{2}\left(\sqrt{8}-1\right)$ **δ)** $\sqrt{3}\left(\sqrt{27}-\sqrt{3}\right)$

3. Να αντιστοιχίσετε καθένα από τα γράμματα Α, Β, Γ και Δ με τις παρακάτω λέξεις που αντιστοιχούν σε σύνολα αριθμών:

Φυσικοί
Ακέραιοι
Ρητοί
Άρρητοι



4. Να γράψε τις παρακάτω παραστάσεις ως μία δύναμη, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των δυνάμεων:

α) $\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^7$ **β)** $\pi^3\cdot\pi^2$ **γ)** $\left(\sqrt{3}\right)^3\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2$ **δ)** $\left(\sqrt{3}\right)^{10}:\left(\sqrt{3}\right)^4$ **ε)** $\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{11}}{\left(\sqrt{2}\right)^6}$

5. Δίνεται η παράσταση $A=\left(\sqrt{2}\right)^5\cdot\left(\sqrt{8}\right)^5$.

α) Να γράψετε την παράσταση σαν μία δύναμη εφαρμόζοντας την ιδιότητα $\alpha^\nu\cdot\beta^\nu=(\alpha\cdot\beta)^\nu$.

β) Με τη βοήθεια της ιδιότητας $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha\cdot\beta}$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης Α.

Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

6. Να συμπληρώσετε τον πίνακα σημειώνοντας ✓ για καθέναν από τους αριθμούς της πρώτης στήλης, στα αντίστοιχα κελιά, αν είναι άρρητος, ρητός, ακέραιος, φυσικός.

	Άρρητος	Ρητός	Ακέραιος	Φυσικός
$-\sqrt{4}$				
$-\sqrt{2}$				
$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$				
1,5				
$\sqrt{5}\left(\sqrt{5}-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$				

7. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των πράξεων και, όπου χρειάζεται, και των ριζών, να γράψετε τις παραστάσεις σε απλούστερη μορφή.

α) $\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)$ **β)** $\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{20}+2\right)$ **γ)** $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}\cdot\sqrt{2}$ **δ)** $-\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}\cdot\sqrt{5}$

8. Να γράψετε τις παραστάσεις σε απλούστερη μορφή, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των δυνάμεων.

α) $\left(\sqrt{5}\right)^5\cdot\sqrt{5}$ **β)** $\dfrac{\pi^3}{\pi^{-2}}$ **γ)** $\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)^{-2}$ **δ)** $\left(\dfrac{5}{\sqrt{5}}\right)^{-4}$

ε) $\dfrac{\left(\sqrt{5}\right)^{-2}}{\left(\sqrt{3}\right)^{-2}}$ **στ)** $\left(\sqrt{3}\right)^4-\left(\sqrt{2}\right)^{-4}$ **ζ)** $\left(-\sqrt{7}\right)^2+\left(\sqrt{7}\right)^2$ **η)** $\dfrac{\pi^4\cdot\pi^2}{\pi^6}$

9. Στο σχήμα δίνεται η ευθεία $y=\sqrt{2}\cdot x$.

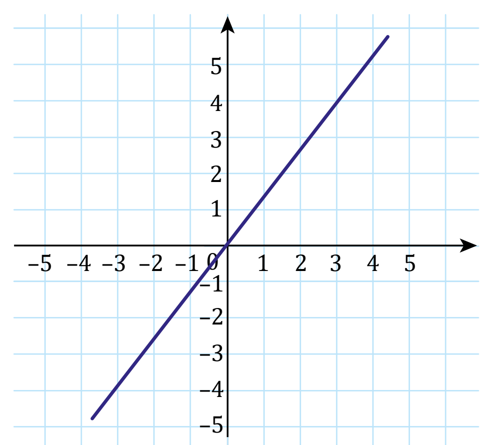
α) Να προσδιορίσετε ένα σημείο της γραφικής παράστασης που:

i. η τετμημένη του είναι ακέραιος και η τεταγμένη του άρρητος

ii. και οι δύο συντεταγμένες του είναι άρρητοι αριθμοί

iii. η τετμημένη του είναι άρρητος και η τεταγμένη του ακέραιος

β) Να εξηγήσετε γιατί δεν υπάρχει σημείο της ευθείας με ακέραιες συντεταγμένες εκτός από το $O(0,0)$.



Ανακεφαλαίωση

Πραγματικοί αριθμοί

Ερωτήσεις – ασκήσεις – προβλήματα

1. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις:

α) $\sqrt{12} = 4\sqrt{3}$ **β)** $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ **γ)** $\sqrt{0{,}016} = 0{,}4$

δ) $\sqrt{\dfrac{25}{36}} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$ **ε)** $\sqrt{11}^2 = 11$

στ) $\sqrt{(-2)\cdot(-3)} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$

2. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις:

α) Ο $0{,}\overline{12}$ είναι άρρητος αριθμός, γιατί έχει άπειρο πλήθος δεκαδικών ψηφίων.

β) Ο $\sqrt{8}$ είναι ρητός αριθμός γιατί $\sqrt{8} \cong 2{,}83$.

γ) Ο αριθμός 4 είναι ακέραιος, άρα δεν είναι ρητός.

δ) Ο 1,01001000100001000001... είναι άρρητος.

ε) Ο –3 είναι ακέραιος και όχι φυσικός.

στ) Το 0 δεν είναι ούτε ρητός ούτε άρρητος.

ζ) Ο 1,0100101001010010100 10... είναι άρρητος.

3. Να βρείτε την τιμή κάθε παράστασης και να τη γράψετε σε μορφή δεκαδικού.

α) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^2$ **β)** $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^3 + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

γ) $\left(\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{18}}{\sqrt{50}}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^{-2}$

4. Να συμπληρώσετε τον πίνακα σημειώνοντας ✓ για καθέναν από τους αριθμούς της πρώτης στήλης στα αντίστοιχα κελιά, αν είναι άρρητος, ρητός, ακέραιος, φυσικός.

	Άρρητος	Ρητός	Ακέραιος	Φυσικός
$-\dfrac{6}{3}$				
$\sqrt{8}$				
$\sqrt{4}\cdot\sqrt{9}$				
$\sqrt{4+9}$				
$\sqrt{4}+\sqrt{9}$				
$0{,}0\overline{2}$				
10,123				
π				
3,14				

Χωρίζουμε αριθμούς σε ρητούς και άρρητους

Ταξινομούμε πραγματικούς

5. Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων της τετραγωνικής ρίζας να υπολογίσετε τις ρίζες:

α) $\sqrt{900}$ **β)** $\sqrt{121.000.000}$

γ) $\sqrt{0{,}0025}$ **δ)** $\sqrt{6{,}25}$

ε) $\sqrt{2.250.000}$

6. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις ως μία δύναμη:

α) $2^3\cdot 2^4\cdot 2^5$ **β)** $(-3)^2\cdot(-3)^4\cdot(-3)^{11}$

γ) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^4:\left(\dfrac{1}{3}\right)^3$ **δ)** $5^2\cdot\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-3}$

ε) $\left(\pi^3\right)^2\cdot\pi^4:\pi^5$ **στ)** $\left(\sqrt{2}\right)^3\cdot\left(\sqrt{2}\right)^7$

7. Πόσες φορές μεγαλύτερος ή μικρότερος είναι ο αριθμός Α από τον Β σε κάθε περίπτωση;

α) $A = \sqrt{27}$ και $B = \sqrt{3}$

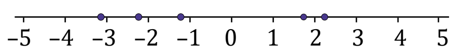
β) $A = \sqrt{50}$ και $B = \sqrt{2}$

γ) $A = \sqrt{128}$ και $B = \sqrt{32}$

δ) $A = \sqrt{12}$ και $B = \sqrt{48}$

ε) $A = -\sqrt{75}$ και $B = -\sqrt{3}$

8. Να αντιστοιχίσετε πέντε από τους αριθμούς $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $-\sqrt{5}$, $-1,\overline{2}$, $-\pi$ στα σημεία που είναι σημειωμένα στον παρακάτω άξονα των πραγματικών αριθμών.



9. Να κάνετε τις πράξεις, χωρίς να χρησιμοποιήσετε προσεγγιστικές τιμές των ριζών:

α) $\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)+2$

β) $\left(1-\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{27}\right)-1$

γ) $2\left(\sqrt{50}-\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{2}\right)$

10. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις ως μία δύναμη:

α) $\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 2^3\cdot 2^{-1}$ **β)** $3^2\cdot(-3)^4\cdot 3^{-1}$

γ) $5^4\cdot\frac{1}{5^2}\cdot\left(5^2\right)^2$ **δ)** $7^{-2}\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^2:\frac{1}{7^3}$

ε) $11^3\cdot\left(\frac{1}{11^2}\right)^{-3}:11^{-2}$ **στ)** $\left(\sqrt{2}\right)^4\cdot\left(\sqrt{2}\right)^3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^5$

ζ) $\left(\sqrt{3}\right)^5\left(\sqrt{3}\right)^2\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^{-3}$

11. Να κάνετε τις πράξεις εφαρμόζοντας τις ιδιότητες της τετραγωνικής ρίζας.

α) $\sqrt{75}+\sqrt{48}-\sqrt{12}$

β) $2\sqrt{50}-3\sqrt{200}+\sqrt{98}$

γ) $\sqrt{\frac{162}{8}}+\sqrt{\frac{75}{27}}$

δ) $3\sqrt{\frac{9}{4}}-2\sqrt{\frac{18}{8}}+5\sqrt{\frac{25}{9}}$

ε) $2\sqrt{4500000}+3\sqrt{16200}-110\sqrt{12,5}$

στ) $\sqrt{\frac{44}{4}}\cdot\left(\sqrt{\frac{225}{11}}+\sqrt{\frac{1250}{22}}-\sqrt{\frac{4}{11}}\right)$

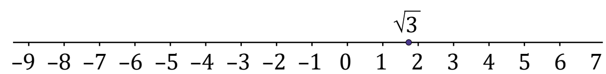
Ασκήσεις απλοποίησης παραστάσεων

12. Να κάνετε τις πράξεις εφαρμόζοντας τις ιδιότητες της τετραγωνικής ρίζας.

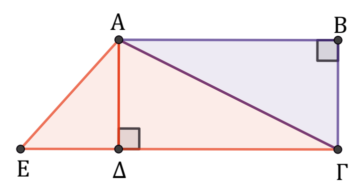
α) $\sqrt{\left(10+\sqrt{9}\right)\cdot\left(20+\sqrt{25}\right)}+\sqrt{\frac{\left(13+\sqrt{3}^2\right)}{\sqrt{4}}}$

β) $\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{9}}\cdot\sqrt{\frac{1}{13}}+\sqrt{\frac{1}{16}-\frac{1}{25}}$

13. Με τη βοήθεια του παρακάτω σχήματος και του σημείου που αντιστοιχεί στο $\sqrt{3}$ να τοποθετήσετε στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς $\sqrt{12}$, $-\sqrt{3}$ και $-\sqrt{27}$.



14. Στο σχήμα είναι ΑΕ = 3, ΕΔ = 2 και το ΔΓ είναι διπλάσιο του ΑΔ. Να υπολογίσετε:



α) το ύψος ΑΔ του τριγώνου ΑΕΓ

β) την περίμετρο του ορθογωνίου ΑΒΓΔ

15. Τα τετράγωνα του σχήματος έχουν εμβαδά 3, 27 και 48.

Να υπολογίσετε:

α) τα μήκη των πλευρών των τετραγώνων

β) τη διαφορά του μήκους των πλευρών:

i. μπλε και κόκκινου τετραγώνου

ii. πράσινου και μπλε τετραγώνου

iii. πράσινου και κόκκινου τετραγώνου

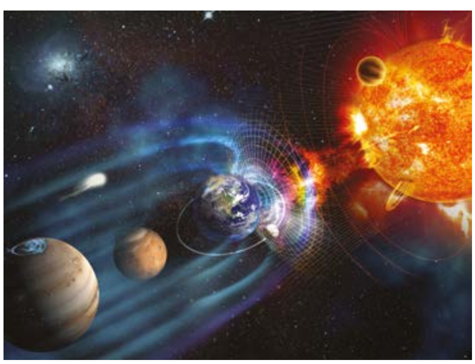
Συνδέσεις και επεκτάσεις

16. Όταν ο ηλιακός άνεμος περνά δίπλα από τη Γη, προκαλεί συμπίεση του μαγνητικού της πεδίου. Η απόσταση R από το κέντρο της Γης, μέχρι το σημείο που η πίεση από το μαγνητικό πεδίο της Γης εξισορροπεί την πίεση του ηλιακού ανέμου δίνεται από την εξίσωση:

$$R^6 = \frac{0{,}72}{8\pi D V^2}$$

Στην παραπάνω εξίσωση, D είναι η πυκνότητα του αερίου του ηλιακού ανέμου (σε gr/cm^2), V είναι η ταχύτητα του ηλιακού ανέμου (σε cm/sec). Η απόσταση R από το κέντρο της Γης μετριέται σε Re, όπου 1 Re αντιστοιχεί στην ακτίνα της Γης, δηλαδή 6.371 km περίπου.

Προβλήματα με μεγάλους ή μικρούς αριθμούς

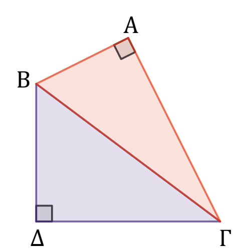


Η μεγαλύτερη ταχύτητα ηλιακού ανέμου, που προκαλείται από ένα «σύννεφο» ηλιακής καταιγίδας είναι 1.500 km/s. Ποια πρέπει να είναι η πυκνότητα για να εξισορροπηθεί η πίεση του ηλιακού ανέμου στα 6,6 Re από το κέντρο της Γης; (Τα 6,6 Re αντιστοιχούν σε 42.000 km περίπου και είναι η ακτίνα της τροχιάς των δορυφόρων επικοινωνίας.)

17. Να εντοπίσετε στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς που επαληθεύουν τις εξισώσεις:

α) $x^2 = 2$ **β)** $x^2 = 2{,}\overline{9}$

18. Για τα ορθογώνια τρίγωνα του σχήματος ισχύει ότι ΒΔ = 6, ΓΔ = 8 και το μήκος της ΑΓ είναι διπλάσιο από το μήκος της ΑΒ.



Τρίλιζα με πραγματικούς

Να υπολογίσετε το μήκος της ΑΒ.

Ομαδική εργασία

19. Να συνεργαστείτε, σε ομάδες, για να εντοπίσετε στον άξονα των αριθμών τους εξής αριθμούς: $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$ και $\sqrt{19}$.

Σκεφτείτε ότι, αν χρησιμοποιήσετε όλες οι ομάδες την ίδια μονάδα για τον άξονα, θα μπορείτε εύκολα να συγκρίνετε τις απαντήσεις σας.

Αν ο ρίζα 2 ήταν ρητός

- Απόδειξη με εις **άτοπον απαγωγή** ότι «η τετραγωνική ρίζα του δύο είναι άρρητη» ανακοίνωσε η Λέα με δυνατή φωνή. (...)
- Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει κάποιο κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ που το τετράγωνό του είναι ίσο με δύο, είπε ψιθυριστά, με συνωμοτικό ύφος, ο Ιωνάθαν στο ακροατήριο.
- Άρα $\frac{\alpha^2}{\beta^2}=2$, συνέχισε η Λέα, γράφοντας στον πίνακα.
- Ας πάρουμε το μικρότερο δυνατό τέτοιο κλάσμα, το ανάγωγο κλάσμα που έχει αυτή τη μορφή. Οι όροι του, το α και το β, είναι πρώτοι μεταξύ τους. Δηλαδή δεν υπάρχει αριθμός που να τους διαιρεί και τους δύο ταυτόχρονα.
- Επομένως, **επιμένω** ότι οι α και β δεν μπορούν να είναι και οι δύο άρτιοι! δήλωσε η Λέα.
- Και αφού $\frac{\alpha^2}{\beta^2}=2$, προκύπτει φυσιολογικά ότι $\alpha^2 = 2\beta^2$.
- Άρα ο α^2 είναι άρτιος, αφού είναι ίσος με το διπλάσιο κάποιου αριθμού, ανακοίνωσε η Λέα (...) και **επιμένω**, ο α είναι άρτιος.
- Άρα ο α είναι διπλάσιος κάποιου αριθμού. Ας πούμε του γ. $\alpha = 2\gamma$, έγραψε ο Ιωνάθαν στον πίνακα.
- Ας ξαναπάρουμε την ισότητα $\alpha^2 = 2\beta^2$. Αντικαθιστούμε το α με 2γ. $(2\gamma)^2 = 2\beta^2$. Άρα $4\gamma^2 = 2\beta^2$. Άρα $2\gamma^2 = \beta^2$.

  (...) Καθώς το β^2 είναι διπλάσιος κάποιου αριθμού, το β^2 είναι άρτιος.
- Όπως και πριν, το β είναι άρτιος και **επιμένω**! δήλωσε η Λέα.
- Ας ξαναδούμε τα τρία «**επιμένω**», που αποτελούν την εις άτοπο απαγωγή. Αφενός τα α και β δεν μπορούν να είναι ταυτόχρονα άρτιοι, και αφετέρου είναι και οι δύο άρτιοι. Αδύνατον! Ποιος προκάλεσε αυτόν τον παραλογισμό; ρώτησε ο Ιωνάθαν (....)
- Η υπόθεσή μου, ομολόγησε η Λέα, σκύβοντας ντροπιασμένη το κεφάλι
- Επαναλάβετέ τη λοιπόν αυτή την ψευδή υπόθεση, διέταξε ο Ιωνάθαν.
- Υπάρχει κάποιο κλάσμα που το τετράγωνό του είναι ίσο με 2, ψέλλισε η Λέα.
- Κατερρίφθη, ούρλιαξε ο Ιωνάθαν.

Απόσπασμα από το βιβλίο του Ντενί Γκετζ, Το Θεώρημα του παπαγάλου, Πόλις, σελ, 167-169.

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ 2

Κανονικότητες και αλγεβρικές παραστάσεις

Ένα αυτοκίνητο κινείται με ταχύτητα 90 χιλιομέτρων την ώρα και ο οδηγός αρχίζει να φρενάρει. Μπορούμε να υπολογίσουμε την απόσταση (σε m) που διανύει το αυτοκίνητο με την αλγεβρική παράσταση $25t-6{,}25t^2$ (t είναι ο χρόνος από τη στιγμή που ο οδηγός άρχισε να φρενάρει).

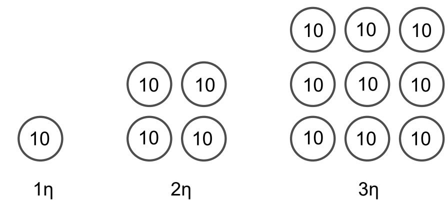
Οι ερευνητές που παρακολουθούσαν τη στάθμη του νερού σε μια λίμνη βρήκαν ότι το ύψος του νερού (σε dm) τον Σεπτέμβριο σε σύγκριση με τη στάθμη της θάλασσας υπολογιζόταν προσεγγιστικά με την αλγεβρική παράσταση $-\mu^2+40\mu$, όπου μ είναι η ημέρα του μήνα που μας ενδιαφέρει. Παρατήρησαν ότι η παράσταση αυτή, αν μετασχηματιστεί στην $400-(\mu-20)^2$, δείχνει ότι το ύψος δεν ξεπέρασε τα 40 m.

Σε πολλές περιπτώσεις σαν τις παραπάνω χρησιμοποιούμε παραστάσεις με μεταβλητές για να εκφράσουμε φαινόμενα και καταστάσεις στη γενική τους μορφή. Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε τέτοιες αλγεβρικές παραστάσεις και ειδικότερα πολυώνυμα. Αρχικά θα μελετήσουμε ορισμένες κανονικότητες που συνδέονται με τις αλγεβρικές παραστάσεις. Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τις έννοιες των μονωνύμων και των πολυωνύμων, τις πράξεις τους και τους τρόπους αναπαράστασής τους.

ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΕΝΟΤΗΤΕΣ

Δ1. Αποταμίευση

Κάθε ημέρα βάζω στον κουμπαρά μου κέρματα των 10 λεπτών του ευρώ. Την πρώτη ημέρα βάζω 1 κέρμα, τη δεύτερη 4 και συνεχίζω όπως στο μοτίβο του σχήματος.



α) Πόσα κέρματα θα βάλω στον κουμπαρά την 4η, την 5η και τη 10η ημέρα;

β) Μπορείτε να γράψετε έναν τύπο που να εκφράζει τα χρήματα που βάζω στον κουμπαρά τη ν-οστή ημέρα;

γ) Να απαντήσετε το β), αν αντί για κέρματα των 10 λεπτών βάζω κέρματα των 20 λεπτών, ακολουθώντας το ίδιο μοτίβο.

Συζητήστε στις ομάδες και μετά συγκρίνετε στην τάξη τους τρόπους σκέψης σας.

Συζητάμε

...για κανονικότητες και μοτίβα που εκφράζονται με τη βοήθεια του $ν^2$

Ας δούμε το παρακάτω αριθμητικό μοτίβο:

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, \ldots$$

Ένας κανόνας με τον οποίο μπορούμε να υπολογίσουμε κάθε όρο του μοτίβου με τη βοήθεια της τάξης του είναι ο εξής:

$$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2, \ldots$$

Σε αυτή την περίπτωση ο γενικός όρος του μοτίβου είναι $ν^2$.

Το $\frac{1}{2}, 2, \frac{9}{2}, 8, \frac{25}{2}, 18, \frac{49}{2}, 32, \frac{81}{2}, \ldots$ είναι ένα άλλο αριθμητικό μοτίβο που ο γενικός του όρος μπορεί να εκφραστεί με τη βοήθεια του $ν^2$.

Πράγματι, μπορούμε να γράψουμε τους όρους του μοτίβου ως εξής:

$$\frac{1}{2}, \frac{4}{2}, \frac{9}{2}, \frac{16}{2}, \frac{25}{2}, \frac{36}{2}, \frac{49}{2}, \frac{64}{2}, \frac{81}{2}, \ldots \quad ή$$

$$\frac{1}{2}, \frac{2^2}{2}, \frac{3^2}{2}, \frac{4^2}{2}, \frac{5^2}{2}, \frac{6^2}{2}, \frac{7^2}{2}, \frac{8^2}{2}, \frac{9^2}{2}, \ldots$$

Άρα ο γενικός όρος του μοτίβου είναι $\frac{ν^2}{2}$ ή $\frac{1}{2} \cdot ν^2$.

> Ας θυμηθούμε ότι:
> Κανονικότητες αναγνωρίζουμε συνήθως σε μοτίβα σχημάτων ή αριθμών, περιγράφοντάς τα με έναν κανόνα.
> Συμβολίζουμε ν την τάξη του όρου ενός μοτίβου.
> Με τον γενικό όρο ενός μοτίβου υπολογίζουμε τον όρο οποιασδήποτε τάξης ν. Για παράδειγμα, με τον $3ν+2$ υπολογίζουμε οποιονδήποτε όρο του αριθμητικού μοτίβου 5, 8, 11, 14, 17,...

Επίσης, παρατηρούμε ότι κάθε όρος του μοτίβου είναι μεγαλύτερος από τον προηγούμενο και η διαφορά μεταξύ δύο διαδοχικών όρων μεγαλώνει. Ενδεικτικά:

Η διαφορά πρώτου και δεύτερου: $\frac{4}{2}-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

Η διαφορά δεύτερου και τρίτου: $\frac{9}{2}-\frac{4}{2}=\frac{5}{2}$

Η διαφορά τρίτου και τέταρτου: $\frac{16}{2}-\frac{9}{2}=\frac{7}{2}$

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Συναντούμε μοτίβα που κάθε όρος τους συμβολίζεται ως γινόμενο ενός θετικού αριθμού α με το τετράγωνο της τάξης του ν. • Σε αυτές τις περιπτώσεις ο γενικός όρος του μοτίβου είναι $\alpha \cdot \nu^2$. • Όλοι οι όροι ενός τέτοιου μοτίβου είναι θετικοί. • Κάθε όρος του είναι μεγαλύτερος από τον προηγούμενο και η διαφορά τους μεγαλώνει καθώς αυξάνεται το ν.	Οι τέσσερις πρώτοι όροι του αριθμητικού μοτίβου με γενικό όρο $0{,}3\nu^2$ είναι οι εξής: $0{,}3\cdot 1^2 = 0{,}3\cdot 1 = 0{,}3$ $0{,}3\cdot 2^2 = 0{,}3\cdot 4 = 1{,}2$ $0{,}3\cdot 3^2 = 0{,}3\cdot 9 = 2{,}7$ Όπως βλέπουμε, $0{,}3 < 1{,}2 < 2{,}7$ και $1{,}2 - 0{,}3 = 0{,}9$, ενώ $2{,}7 - 1{,}2 = 1{,}5$.

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. Δίνεται το μοτίβο $\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 3, \frac{16}{3}, \frac{25}{3}, 12, \dots$

α) Να βρείτε τον γενικό όρο του μοτίβου.

β) Να υπολογίσετε το 100ό όρο του μοτίβου.

Απάντηση

α) Παρατηρούμε ότι οι αριθμητές γράφονται ως τέλεια τετράγωνα θετικών ακεραίων:

- Ο πρώτος όρος (ο όρος τάξης 1) γράφεται $\frac{1}{3} = \frac{1^2}{3}$.
- Ο όρος τάξης 2 γράφεται $\frac{4}{3} = \frac{2^2}{3}$.
- Ο όρος τάξης 3 γράφεται $3 = \frac{9}{3} = \frac{3^2}{3}$.
- Ο όρος τάξης 4 γράφεται $\frac{16}{3} = \frac{4^2}{3}$.
- Ο όρος τάξης 5 γράφεται $\frac{25}{3} = \frac{5^2}{3}$.
- Ο όρος τάξης 6 γράφεται $12 = \frac{36}{3} = \frac{6^2}{3}$.

Γενικεύοντας, ο όρος τάξης ν, δηλαδή ο γενικός όρος του μοτίβου, είναι $\frac{\nu^2}{3}$ ή $\frac{1}{3}\cdot\nu^2$.

β) Αντικαθιστώντας το ν με 100, έχουμε $\frac{100^2}{3} = \frac{10.000}{3}$.

2. α) Να υπολογίσετε τους 5 πρώτους όρους του μοτίβου $\sqrt{2}\cdot\nu^2$.

β) Οι όροι του μοτίβου είναι ρητοί ή άρρητοι;

Για συντομία, λέμε ή γράφουμε «το μοτίβο $\alpha\cdot\nu^2$» και εννοούμε το μοτίβο με γενικό όρο $\alpha\cdot\nu^2$, με $\alpha > 0$ και ν θετικό ακέραιο.

Απάντηση

α) Για $\nu=1$ έχουμε $\sqrt{2}\cdot 1^2=\sqrt{2}\cdot 1=\sqrt{2}$. Ομοίως:

Για $\nu=2$: $\sqrt{2}\cdot 2^2=\sqrt{2}\cdot 4=4\sqrt{2}$

Για $\nu=3$: $\sqrt{2}\cdot 3^2=9\sqrt{2}$

Για $\nu=4$: $\sqrt{2}\cdot 4^2=16\sqrt{2}$

Για $\nu=5$: $\sqrt{2}\cdot 5^2=25\sqrt{2}$

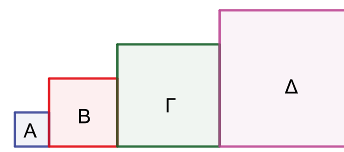
β) Οι όροι του μοτίβου είναι της μορφής $\nu^2\sqrt{2}$. Εφόσον το ν^2 είναι θετικός ακέραιος, το $\nu^2\sqrt{2}$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του $\sqrt{2}$, που είναι άρρητος.

Άρα κάθε όρος του μοτίβου είναι άρρητος.

> Το διπλάσιό του, το τριπλάσιό του, το τετραπλάσιό του κτλ. είναι ακέραια πολλαπλάσιά του.

---

3. Στο σχήμα απεικονίζονται οι τέσσερις πρώτοι όροι ενός μοτίβου τετραγώνων:



- **Η πλευρά του τετραγώνου Β έχει διπλάσιο μήκος από την πλευρά του Α.**
- **Η πλευρά του Γ έχει τριπλάσιο μήκος από του Α.**
- **Η πλευρά του Δ έχει τετραπλάσιο μήκος από του Α.**

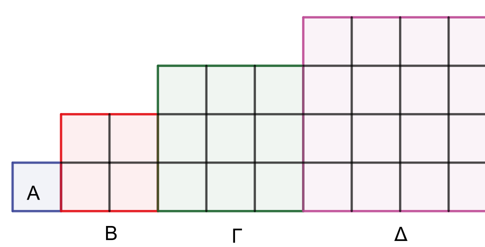
Το μοτίβο συνεχίζεται με τον ίδιο τρόπο.

α) Ποια είναι η σχέση της πλευράς του δέκατου τετραγώνου με την πλευρά του Α;

β) Πόσες φορές μεγαλύτερο είναι το εμβαδόν του Β, του Γ και του Δ από το εμβαδόν του Α;

γ) Πόσες φορές μεγαλύτερο είναι το εμβαδόν του δέκατου τετραγώνου του μοτίβου από το εμβαδόν του Α;

Απάντηση



α) Σύμφωνα με τον κανόνα του μοτίβου, η πλευρά του δεύτερου τετραγώνου είναι διπλάσια από την πλευρά του Α, του τρίτου τριπλάσια, του τέταρτου τετραπλάσια. Άρα η πλευρά του δέκατου τετραγώνου είναι δεκαπλάσια από την πλευρά του Α.

β) Με μονάδα μέτρησης μήκους την πλευρά του Α και μονάδα μέτρησης εμβαδού το εμβαδόν του Α έχουμε:

- Η πλευρά του Β, δηλαδή του δεύτερου τετραγώνου, είναι 2, άρα το εμβαδόν του είναι $2^2=4$.

Ομοίως:

- Το εμβαδόν του Γ, δηλαδή του τρίτου τετραγώνου, είναι $3^2=9$.
- Το εμβαδόν του Δ, δηλαδή του τέταρτου τετραγώνου, είναι $4^2=16$.

Άρα το εμβαδόν του Β είναι τετραπλάσιο του εμβαδού του Α, το εμβαδόν του Γ είναι εννεαπλάσιο και το εμβαδόν του Δ είναι δεκαεξαπλάσιο.

γ) Το εμβαδόν κάθε τετραγώνου του μοτίβου ακολουθεί τον κανόνα ν^2, όπου ν είναι η τάξη του τετραγώνου-όρου του μοτίβου (ή το μήκος της πλευράς του με μονάδα μέτρησης την πλευρά του Α).

Με βάση αυτό, η πλευρά του δέκατου τετραγώνου είναι 10 και το εμβαδόν του $10^2=100$.

Επομένως, το εμβαδόν του δέκατου τετραγώνου του μοτίβου είναι 100 φορές μεγαλύτερο από το εμβαδόν του Α.

4. **Στο διάγραμμα παριστάνονται οι πέντε πρώτοι όροι ενός αριθμητικού μοτίβου $\alpha \cdot \nu^2$.**

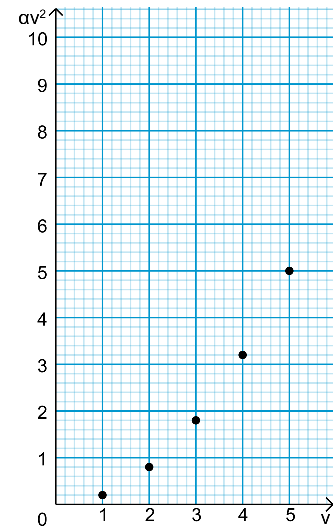
α) Να υπολογίσετε τη διαφορά των διαδοχικών όρων του μοτίβου. Τι παρατηρείτε;

β) Να υπολογίσετε την τιμή του α.

γ) Ποιος είναι ο 20ός όρος του μοτίβου;

δ) Να υπολογίσετε τη διαφορά του 21ου από τον 20ό όρο του μοτίβου.

ε) Να σχεδιάσετε στο ίδιο διάγραμμα τους 5 πρώτους όρους του μοτίβου $0{,}4\nu^2$. Να βρείτε τη σχέση που έχει η διαφορά των διαδοχικών όρων του με την αντίστοιχη διαφορά διαδοχικών όρων του $0{,}2\nu^2$.



Απάντηση

α) Σύμφωνα με το διάγραμμα, έχουμε τα παρακάτω σημεία, που αντιστοιχούν στους πέντε πρώτους όρους του μοτίβου.

Σημείο	$(1,\ 0{,}2)$	$(2,\ 0{,}8)$	$(3,\ 1{,}8)$	$(4,\ 3{,}2)$	$(5,\ 5)$
Τάξη	1	2	3	4	5
Όρος	0,2	0,8	1,8	3,2	5

Το (x, y) αντιστοιχεί στο σημείο με τετμημένη x (οριζόντιος άξονας) και τεταγμένη y (κατακόρυφος άξονας).

Η διαφορά των διαδοχικών όρων είναι:

Του πρώτου από τον δεύτερο $0{,}8-0{,}2=0{,}6$

Του δεύτερου από τον τρίτο $1{,}8-0{,}8=1$

Του τρίτου από τον τέταρτο $3{,}2-1{,}8=1{,}4$

Του τέταρτου από τον πέμπτο $5-3{,}2=1{,}8$

Παρατηρούμε ότι η διαφορά των διαδοχικών όρων δεν είναι σταθερή, αλλά αυξάνεται κατά 0,4 κάθε φορά.

β) Εφόσον μας είναι γνωστό ότι το μοτίβο είναι της μορφής $\alpha \cdot \nu^2$, επιλέγοντας οποιονδήποτε όρο του μοτίβου μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή του α. Π.χ. για τον όρο τάξης 1 πρέπει να ισχύει $\alpha \cdot 1^2 = 0{,}2$ ή $\alpha = 0{,}2$. Βρίσκουμε το ίδιο παίρνοντας οποιονδήποτε όρο του μοτίβου.

γ) Ο γενικός όρος του μοτίβου είναι $0{,}2\nu^2$.

Ο 20ός όρος του μοτίβου είναι για $\nu = 20$: $0{,}2 \cdot 20^2 = 0{,}2 \cdot 400 = 80$.

δ) **1ος τρόπος**

Ο 21ος όρος του μοτίβου είναι $0{,}2 \cdot 21^2 = 0{,}2 \cdot 441 = 88{,}2$. Άρα η διαφορά 20ού και 21ου όρου είναι $88{,}2 - 80 = 8{,}2$.

2ος τρόπος

Οι διαφορές των διαδοχικών όρων ακολουθούν το μοτίβο:

$$0{,}6,\ 1,\ 1{,}4,\ 1{,}8,\ ....$$

Αυτό είναι ένα μοτίβο με σταθερή διαφορά 0,4 και πρώτο όρο 0,6.

Ο γενικός του όρος είναι $0{,}6 + (\nu - 1) \cdot 0{,}4$.

Για τη διαφορά του πρώτου από τον δεύτερο όρο αντικαθιστούμε $\nu = 1$, του δεύτερου από τον τρίτο $\nu = 2$ κτλ.

Άρα για τη διαφορά του 20ού από τον 21ο αντικαθιστούμε $\nu = 20$ και έχουμε:

$$0{,}6 + (20-1) \cdot 0{,}4 = 0{,}6 + 19 \cdot 0{,}4 = 8{,}2$$

Θυμόμαστε ότι:
Ο γενικός όρος ενός μοτίβου με πρώτο όρο α και σταθερή διαφορά ω είναι:

$$\alpha + (\nu - 1) \cdot \omega$$

Γιατί οι διαφορές των διαδοχικών όρων του μοτίβου $0{,}2\nu^2$ ακολουθούν το παραπάνω μοτίβο με σταθερή διαφορά;

ε) Εφόσον $0,4v^2 = 2 \cdot 0,2v^2$, κάθε όρος του μοτίβου $0,4v^2$ είναι διπλάσιος από τον όρο ίδιας τάξης του $0,2v^2$. Επομένως:

Τάξη ν	1	2	3	4	5
Όρος του $0,2v^2$	0,2	0,8	1,8	3,2	5
Όρος $0,4v^2$	0,4	1,6	3,6	6,4	10

Άρα τα αντίστοιχα σημεία για το μοτίβο $0,4v^2$ είναι:

$$(1,\ 0,4)\ (2,\ 1,6)\ (3,\ 3,6)\ (4,\ 6,4)\ (5,\ 10)$$

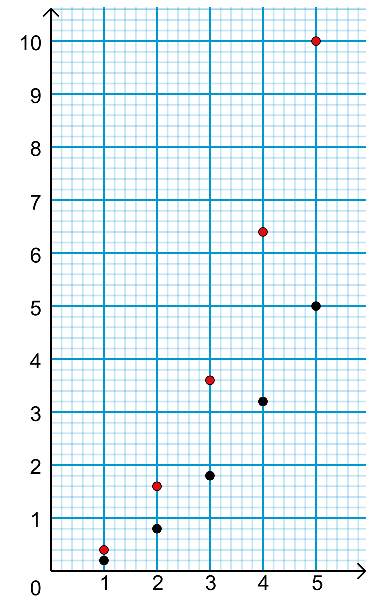
Αυτά φαίνονται με κόκκινο χρώμα στο αρχικό διάγραμμα, στο σχήμα.

Η διαφορά των διαδοχικών όρων του $0,4v^2$ είναι διπλάσια από τη διαφορά των διαδοχικών όρων του $0,2v^2$, γιατί $0,4 = 2 \cdot 0,2$.

Πράγματι, $1,6 - 0,4 = 1,2$, που είναι διπλάσιο του 0,6,

$3,6 - 1,6 = 2$, που είναι διπλάσιο του 1,

$6,4 - 3,6 = 2,8$, που είναι διπλάσιο του 1,4 κτλ.



Μοτίβο και διαφορά όρων

Μοτίβα και διαγράμματα

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:

α) Το μοτίβο 1, 4, 9, 16, 25, 49, 64,... είναι της μορφής $\alpha \cdot v^2$.

β) Το μοτίβο 3, 12, 27, 48, 75, 147, 192, ... έχει ως γενικό όρο $3v^2$.

γ) Ο γενικός όρος $0,5v^2$, όπου ν είναι θετικός ακέραιος, αντιστοιχεί στο μοτίβο 0,5, 0,25, 0,125,....

2. Τα παρακάτω μοτίβα είναι της μορφής $\alpha \cdot v^2$. Να βρείτε το α σε κάθε περίπτωση:

α) 5, 20, 45, 80, 125,... **β)** $\sqrt{3}, 4\sqrt{3}, 9\sqrt{3}, 16\sqrt{3}, ...$ **γ)** $\frac{1}{4}, 1, \frac{9}{4}, 4, \frac{25}{4}, ...$

3. Να αντιστοιχίσετε τα μοτίβα στην πρώτη στήλη με τους γενικούς όρους στη δεύτερη στήλη.

Μοτίβο	**Γενικός όρος**
1. 0,1, 0,4, 0,9, 1,6, 2,5,...	**α.** $0,5v^2$
2. $\frac{1}{2}, 2, \frac{9}{2}, 8, \frac{25}{2}, ...$	**β.** $\frac{\sqrt{3} \cdot v^2}{2}$
3. $\frac{\sqrt{3}}{2}, 2\sqrt{3}, 4,5\sqrt{3}, 8\sqrt{3}, ...$	**γ.** $0,25v^2$
4. 0,25, 1, 2,25, 4, 6,25,....	**δ.** $0,1v^2$

Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

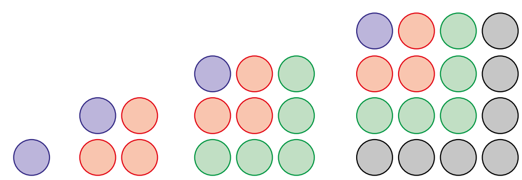
4. Να γράψετε ένα μοτίβο της μορφής $\alpha \cdot \nu^2$ που όλοι οι όροι του:

α) να είναι θετικοί ακέραιοι **β)** να είναι θετικοί ρητοί, αλλά όχι ακέραιοι **γ)** να είναι άρρητοι.

5. Να σχεδιάσετε στο ίδιο διάγραμμα τους 5 πρώτους όρους των μοτίβων:

α) $0{,}5 \cdot \nu^2$ **β)** $0{,}2 \cdot \nu^2$ **γ)** 1, 4, 9, 16,....

6. Κάθε όρος του μοτίβου της εικόνας αποτελείται από κύκλους διαφορετικών χρωμάτων. Το πλήθος των κύκλων κάθε όρου εκφράζεται με ένα αριθμητικό μοτίβο.



α) Να υπολογίσετε τους όρους τάξης 4 και 5 και τον γενικό όρο του αριθμητικού μοτίβου.

β) Να γράψετε ένα μοτίβο που οι όροι του να αντιστοιχούν στη διαφορά των διαδοχικών όρων του παραπάνω μοτίβου.

Μοτίβο με τέλεια τετράγωνα

7. α) Να περιγράψετε με λόγια τον κανόνα του μοτίβου $\frac{1}{5}\cdot 1$, $\frac{1}{5}\cdot(1+3)$, $\frac{1}{5}\cdot(1+3+5)$, $\frac{1}{5}\cdot(1+3+5+7)$, ...

β) Να εκφράσετε το μοτίβο του (α) στη μορφή $\alpha \cdot \nu^2$.

8. Στο υπολογιστικό φύλλο της εικόνας καταγράφονται:

- Στη στήλη A η τάξη των όρων ενός μοτίβου της μορφής $\alpha \cdot \nu^2$
- Στη στήλη B οι αντίστοιχοι όροι

α) Να γράψετε τον γενικό όρο του μοτίβου.

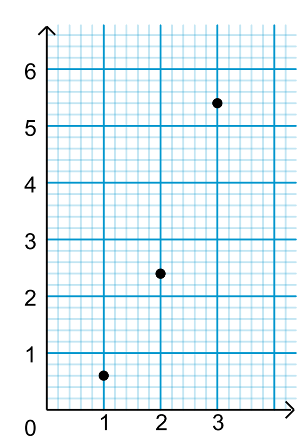
β) Τι εκφράζουν οι αριθμοί στη στήλη C; Ακολουθούν κάποιο μοτίβο;

	A	B	C
1	1	0,9	
2	2	3,6	2,7
3	3	8,1	4,5
4	4	14,4	6,3
5	5	22,5	8,1
6	6	32,4	9,1
7	7	44,1	11,7
8	8	57,6	13,5
9	9	72,9	15,3

9. Στο διάγραμμα παριστάνονται οι τρεις πρώτοι όροι ενός μοτίβου της μορφής $\alpha \cdot \nu^2$.

α) Να βρείτε την τιμή του α.

β) Να υπολογίσετε τους δύο επόμενους όρους του μοτίβου.

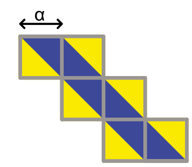


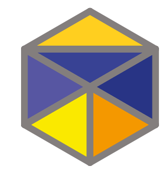
Μοτίβο σε υπολογιστικό φύλλο

Διάγραμμα μοτίβου

2.2 Μονώνυμα και Πολυώνυμα

Δ1. Δίχρωμος κύβος





Ένας σχεδιαστής διακοσμητικών κύβων χρησιμοποιεί το εικονιζόμενο δίχρωμο ανάπτυγμα ενός κύβου για να σχηματίσει κύβους με χρωματιστές «λωρίδες» από έξι «μισά» τετράγωνα (με μπλε χρώμα). Αν η ακμή του κύβου είναι α, τότε:

α) Ποια αλγεβρική παράσταση με μεταβλητή το α εκφράζει το εμβαδόν της λωρίδας;

β) Τι κοινό έχει και σε τι διαφέρει η παράσταση που βρήκατε με τις αλγεβρικές παραστάσεις $2\alpha^3$, $-6\alpha^2$, $\alpha+\alpha^2$; Συζητήστε στις ομάδες σας και μετά στην τάξη για τις ομοιότητες και τις διαφορές.

Δίχρωμος κύβος

Συζητάμε

...για τα μονώνυμα

Σε πολλές περιπτώσεις, χρησιμοποιούμε αλγεβρικές παραστάσεις που είναι το γινόμενο ενός αριθμού με δυνάμεις μιας μεταβλητής ή περισσότερων μεταβλητών με εκθέτη φυσικό αριθμό. Τέτοιες παραστάσεις λέγονται **μονώνυμα**. Για παράδειγμα:

$$15\beta^5,\ -33y^2,\ \frac{1}{2}\alpha x^2,\ \sqrt{5}y^2$$

Τα μονώνυμα $-33y^2$ και $\sqrt{5}y^2$ σχηματίστηκαν και τα δύο από την ίδια παράσταση y^2 πολλαπλασιασμένη με έναν αριθμό, γι' αυτό και λέμε ότι είναι **όμοια**.

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

✓ **Μονώνυμο** ονομάζουμε μια αλγεβρική παράσταση που είναι γινόμενο αριθμού και μεταβλητών. Οι μεταβλητές μπορεί να είναι υψωμένες σε δύναμη με εκθέτη θετικό ακέραιο. ✓ Δομικά το μονώνυμο έχει δύο μέρη: • τον **συντελεστή**, που είναι ο αριθμός που γράφεται συνήθως μπροστά, και • το **κύριο μέρος** που αποτελείται από τις μεταβλητές με τις δυνάμεις τους.	Στο μονώνυμο $-2x^2$ • το -2 είναι ο συντελεστής • το x^2 είναι το κύριο μέρος Στο μονώνυμο $3x^2y^3$ • το 3 είναι ο συντελεστής • το x^2y^3 είναι το κύριο μέρος
✓ Τα μονώνυμα με το ίδιο κύριο μέρος τα λέμε **όμοια**.	Τα μονώνυμα $-3xy^2$ και $\sqrt{2}xy^2$ είναι όμοια, αφού έχουν το ίδιο κύριο μέρος xy^2
✓ Ένας αριθμός θεωρείται και αυτός μονώνυμο. Τον λέμε **σταθερό** μονώνυμο. ✓ Ειδικά το μονώνυμο 0 το λέμε **μηδενικό**.	Μερικά σταθερά μονώνυμα: $25, -12, 0, \sqrt{5}$

Δ2. Γενικά και συγκεκριμένα τετράγωνα

Μπορείτε να εκφράσετε ως μονώνυμα την περίμετρο και το εμβαδόν τετραγώνου πλευράς 10x;

Αν το x πάρει τις τιμές $1, 2, \sqrt{5}, \frac{9}{2}$, τότε πόση είναι η περίμετρος και πόσο το εμβαδόν των συγκεκριμένων τετραγώνων; Συζητήστε με τις συμμαθήτριες και τους συμμαθητές σας για τον τρόπο που εργαστήκατε.

Μονώνυμο και κύβος

Συζητάμε

...για αριθμητικές τιμές και δυνάμεις

Ένας κύκλος ακτίνας ρ έχει μήκος $L = 2\pi\rho$ και εμβαδόν $E = \pi\rho^2$. Το μήκος του κύκλου και το εμβαδόν του είναι μονώνυμα με μεταβλητή την ακτίνα του ρ.

Όταν όμως πάρουμε συγκεκριμένους κύκλους με ακτίνες ρ = 1 cm ή 2 cm ή 3 cm..., τότε θα πρέπει να υπολογίσουμε την **αριθμητική τιμή** των μονωνύμων, δηλαδή:

Για ρ = 1 cm είναι $L = 2\pi \cdot 1 = 2\pi$ cm και $E = \pi \cdot 1^2 = \pi$ cm^2. Αν αντικαταστήσουμε το π με την προσεγγιστική τιμή του $\pi \simeq 3{,}14$, βρίσκουμε $L \simeq 6{,}28$ cm και $E \simeq 3{,}14$ cm^2.

Για ρ = 2 cm είναι $L = 2\pi \cdot 2 = 4\pi$ cm και $E = \pi \cdot 2^2 = 4\pi$ cm^2.

Για ρ = 3 cm είναι $L = 2\pi \cdot 3 = 6\pi$ cm και $E = \pi \cdot 3^2 = 9\pi$ cm^2.

Παρατηρούμε ότι στο μήκος του κύκλου η μεταβλητή ρ είναι υψωμένη στην πρώτη δύναμη, γι' αυτό λέμε ότι το μονώνυμο $L = 2\pi\rho$ είναι **πρώτου βαθμού**.

Όμοια λέμε ότι το μονώνυμο $E = \pi\rho^2$ είναι **δευτέρου βαθμού**, αφού η μεταβλητή ρ είναι υψωμένη στη δεύτερη δύναμη.

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

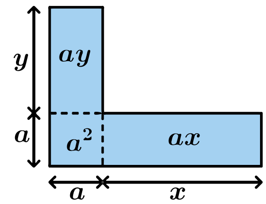
• Σε ένα μονώνυμο μιας μεταβλητής, ο **βαθμός** του είναι ο εκθέτης που έχει η δύναμη της μεταβλητής.	• Το μονώνυμο $-3x^5$ είναι 5ου βαθμού. • Το μονώνυμο 2^7y^3 είναι 3ου βαθμού.
• Σε ένα μονώνυμο με πολλές μεταβλητές ο **βαθμός** του προκύπτει από το άθροισμα των εκθετών των δυνάμεων των μεταβλητών του.	Το μονώνυμο $-2\alpha^3x^2y$ έχει βαθμό $3+2+1=6$.
• Τα σταθερά μονώνυμα (εκτός του μηδενικού) έχουν βαθμό 0.	Ο βαθμός των μονωνύμων $25, -10{,}2, \sqrt{5}$ είναι 0.
• Αν αντικαταστήσουμε κάθε μεταβλητή με έναν αριθμό, προκύπτει μια αριθμητική παράσταση της οποίας μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή. Αυτή την τιμή τη λέμε **αριθμητική τιμή** του μονωνύμου για τη συγκεκριμένη τιμή της μεταβλητής.	Η αριθμητική τιμή του μονωνύμου $8x^2y^3$ για $x = 0{,}5$ και $y = -2$ είναι $8 \cdot 0{,}5^2 \cdot (-2)^3 = 8 \cdot 0{,}25 \cdot (-8) = -16$.

Σημείωση: Για το μηδενικό μονώνυμο δεν ορίζουμε βαθμό.

Δ3. «Χτίζοντας» αλγεβρικές παραστάσεις με μονώνυμα

Μπορείτε να βρείτε μια αλγεβρική παράσταση που εκφράζει το εμβαδόν του εικονιζόμενου γνώμονα (ο γνώμονας είναι ένα πολύγωνο στη μορφή του γράμματος «L», όπου ανά δύο οι διαδοχικές πλευρές του είναι κάθετες).

Χρησιμοποιήσατε μονώνυμα στην έκφραση που γράψατε; Αν ναι, με ποια πράξη τα συνδέσατε;



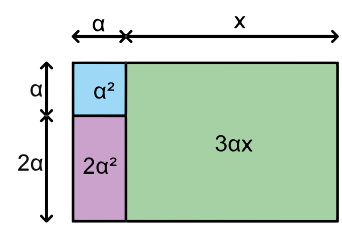
Πολυώνυμο και ανάπτυγμα στερεού

Συζητάμε

...για τα πολυώνυμα

Το εμβαδόν του ορθογωνίου στο σχήμα εκφράζεται ως άθροισμα μονωνύμων ως εξής:

$$\alpha^2 + 2\alpha^2 + 3\alpha x.$$



Ένα άθροισμα μονωνύμων το λέμε πολυώνυμο. Καθένα από τα μονώνυμα α^2, $2\alpha^2$, $3\alpha x$ που συνθέτουν το πολυώνυμο λέγεται **όρος** του πολυωνύμου.

Παρατηρούμε ότι στο πολυώνυμο $\alpha^2 + 2\alpha^2 + 3\alpha x$ οι όροι α^2 και $2\alpha^2$ είναι όμοιοι.

Επειδή $\alpha^2 + 2\alpha^2 = 3\alpha^2$, το πολυώνυμο γράφεται πιο απλά ως $3\alpha^2 + 3\alpha x$.

Όταν προσθέτουμε δύο ή περισσότερους όμοιους όρους, τότε λέμε ότι κάνουμε **αναγωγή όμοιων όρων**.

Μπορείτε να εξηγήσετε ποια ιδιότητα «κρύβεται» πίσω από την αναγωγή όμοιων όρων;

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

• Το άθροισμα μονωνύμων το λέμε **πολυώνυμο**. • Τα μονώνυμα που συνθέτουν το πολυώνυμο τα ονομάζουμε **όρους** του πολυωνύμου. • Τα μονώνυμα θεωρούνται πολυώνυμα που αποτελούνται από έναν όρο.	Το πολυώνυμο $x^2 - 2x + 11$ έχει όρους τα μονώνυμα x^2, $-2x$ και 11, ενώ οι όροι του πολυωνύμου $2xy^2 + 6xy - 3x^4$ είναι τα μονώνυμα $2xy^2$, $6xy$ και $-3x^4$.
• Για ένα πολυώνυμο που δεν έχει όμοιους όρους, ο βαθμός του είναι ο μεγαλύτερος **βαθμός** των όρων του.	Ο βαθμός του πολυωνύμου $2xy^2 + 6xy - 3x^4$ είναι 4, γιατί είναι ο μεγαλύτερος από τους αριθμούς 3, 2 και 4, που είναι οι βαθμοί των όρων του $2xy^2$, $6xy$ και $-3x^4$ αντίστοιχα.

Ένα πολυώνυμο **μιας μεταβλητής** συνήθως το γράφουμε κατά τις **φθίνουσες δυνάμεις** της μεταβλητής του.

Δηλαδή το πολυώνυμο $3x^3+7-8x-x^5$ προτιμούμε να το γράφουμε ως $-x^5+3x^3-8x+7$.

Η μορφή αυτή μας διευκολύνει να βρίσκουμε τον βαθμό του πολυωνύμου, να εντοπίζουμε τον όρο που έχει έναν συγκεκριμένο βαθμό και να διαπιστώνουμε αν έχουν γίνει όλες οι αναγωγές ομοίων όρων.

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. **Για όσες από τις ακόλουθες αλγεβρικές παραστάσεις είναι μονώνυμα να γράψετε τον συντελεστή και το κύριο μέρος τους:**

$$\sqrt{2}x,\ 4x^{-3}y^2,\ -\frac{15}{22}\alpha^3\beta\gamma,\ \left(1+\sqrt{5}\right)t,\ 5(x+y),\ \frac{x^2y}{z^3},\ x,\ (x-1)(x+1)$$

Απάντηση

- Το $\sqrt{2}x$ είναι μονώνυμο με συντελεστή το $\sqrt{2}$ και κύριο μέρος το x.
- Το $4x^{-3}y^2$ δεν είναι μονώνυμο, γιατί το x είναι υψωμένο σε αρνητικό εκθέτη.
- Το $-\frac{15}{22}\alpha^3\beta\gamma$ είναι μονώνυμο με συντελεστή το $-\frac{15}{22}$ και κύριο μέρος το $\alpha^3\beta\gamma$.
- Το $\left(1+\sqrt{5}\right)t$ είναι μονώνυμο με συντελεστή το $1+\sqrt{5}$ και κύριο μέρος το t.
- Το $5(x+y)$ δεν είναι μονώνυμο, γιατί στην παρένθεση έχουμε άθροισμα μεταβλητών.
- Το $\frac{x^2y}{z^3}$ δεν είναι μονώνυμο, γιατί έχουμε διαίρεση με το z^3.
- Το x είναι μονώνυμο με συντελεστή 1 και κύριο μέρος x.
- Το $(x-1)(x+1)$ δεν είναι μονώνυμο, γιατί οι μεταβλητές εμφανίζονται σε αθροίσματα και διαφορές.

2. **Να βρείτε τον βαθμό του πολυωνύμου $-2xy^4+\alpha^2xy+11y^2$.**

Απάντηση

Στον πίνακα σημειώσαμε ξεχωριστά τους όρους του πολυωνύμου και τους αντίστοιχους βαθμούς τους:

	$-2xy^4$	α^2xy	$11y^2$	**μέγιστος**
Βαθμός μονωνύμου	$1+4=5$	$2+1+1=4$	2	5

Βαθμός μονωνύμου I

Συνεπώς, ο βαθμός του πολυωνύμου $-2xy^4+\alpha^2xy+11y^2$ είναι 5.

3. **Να γράψετε το πολυώνυμο $12t-3t^4-8t^3+7+3t^4$ κατά τις φθίνουσες δυνάμεις της μεταβλητής του t και να βρείτε τον βαθμό του.**

Απάντηση

Το πολυώνυμο γράφεται κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του t ως εξής:

$$-3t^4+3t^4-8t^3+12t+7$$

Μετά την αναγωγή των όμοιων όρων του $-3t^4$ και $3t^4$ το πολυώνυμο γίνεται:

$$-8t^3+12t+7,$$

που είναι πολυώνυμο 3ου βαθμού.

4. **Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή του πολυωνύμου x^2+y^2-5xy για $x=-3$ και $y=0,2$.**

Απάντηση

Αντικαθιστώντας τις τιμές των x και y παίρνουμε:

$$(-3)^2+0,2^2-5\cdot(-3)\cdot 0,2=9+0,04+3=12,04$$

5. **Μια μπάλα χιονιού αρχικής ακτίνας 4 cm λιώνει με την πάροδο του χρόνου ομοιόμορφα (παραμένοντας μπάλα). Η ακτίνα της ρ μετά την πάροδο t sec δίνεται από τη σχέση $\rho=4-0,01t^2$. Ποια θα είναι η ακτίνα της λιωμένης μπάλας μετά από 10 sec και μετά από 20 sec;**

Απάντηση

Μετά από 10 sec η ακτίνα θα είναι $\rho_1=4-0,01\cdot 10^2=4-0,01\cdot 100=4-1=3$ cm.

Μετά από 20 sec η ακτίνα θα είναι $\rho_2=4-0,01\cdot 20^2=4-0,01\cdot 400=4-4=0$ cm, δηλαδή η χιονόμπαλα θα έχει λιώσει εντελώς!

Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε

1. Να διερευνήσετε τα ακόλουθα δύο ερωτήματα:

α) Ένα πολυώνυμο πρώτου βαθμού θα μπορούσε να έχει τρεις διαφορετικές μεταβλητές;

β) Να εντοπίσετε ποιοι από τους τύπους που δίνουν τα εμβαδά βασικών πολυγώνων (τετραγώνου, παραλληλογράμμου, τριγώνου, τραπεζίου) είναι πολυώνυμα και να βρείτε τον βαθμό τους.

2. Να κατασκευάσετε έναν πίνακα έννοιας για τα μονώνυμα και έναν για τα πολυώνυμα.

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Να εντοπίσετε ποιες από τις παρακάτω παραστάσεις είναι μονώνυμα. Για όσες δεν είναι να εξηγήσετε γιατί.

$$x^3 \quad 3x \quad x+3 \quad \frac{2\alpha^2}{3} \quad 12\alpha^{-5}\beta^3\gamma \quad x\cdot 2y \quad 0 \quad 2\pi$$

2. Να εντοπίσετε ποιες από τις παρακάτω παραστάσεις είναι πολυώνυμα. Για όσες δεν είναι να εξηγήσετε γιατί.

$$\frac{x^2+y^2}{2} \quad y^5+\frac{1}{y} \quad 2xy \quad y\cdot\frac{1}{y} \quad \sqrt{5}x+\sqrt{2}y \quad -8t^3+2t \quad \frac{2^5x}{2^3} \quad \frac{2x^5}{x^3}$$

3. Να χαρακτηρίσετε σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις ακόλουθες προτάσεις:

	Σ	Λ
α) Τα μονώνυμα xy^2 και yx^2 είναι όμοια.	☐	☐
β) Τα όμοια μονώνυμα έχουν τον ίδιο συντελεστή.	☐	☐
γ) Τα μονώνυμα είναι πολυώνυμα με έναν μοναδικό όρο.	☐	☐
δ) Το πολυώνυμο $3t^2-5t^3-2$ είναι τρίτου βαθμού.	☐	☐
ε) Το πολυώνυμο s^3+2s-s^3-8 είναι τρίτου βαθμού.	☐	☐

4. Να σχηματίσετε τουλάχιστον 4 μονώνυμα με συντελεστή και κύριο μέρος από τις επιλογές που δίνονται:

Συντελεστής: $-\frac{5}{4}$ ή $\sqrt{3}$

Κύριο μέρος: xy^2 ή $\alpha\beta$ ή t^5

Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

5. Να χωρίσετε τα μονώνυμα σε ομάδες όμοιων μονωνύμων:

$$7y,\ \frac{1}{2}xy^2,\ \sqrt{5}y,\ 3^2x^2y^2,\ 13x^5,\ -\sqrt{3}x^2,\ -\frac{8}{5}x^2y,\ -2x^5,\ 12x^2y,\ \sqrt{6}x^2y^2,\ -xy^2,\ 3x^2$$

6. Να υπολογίσετε τον βαθμό των πολυωνύμων:

α) $3-2x+3x^5+\sqrt{2}x^2$ **β)** $x+y+2z$ **γ)** $x^2yz-5xy^2+xz$

Βαθμός μονωνύμου ΙΙ

7. Να βρείτε τη ζητούμενη αριθμητική τιμή των πολυωνύμων:

α) $-2x^3+5x^2+x-10$, για $x=2$

β) $8x^2-12xy$, για $x=0$ και $y=1$

γ) $4r^2-5r-9$, για $r=-1$

δ) $-u^2v^2+v^3$, για $u=-1$ και $v=-2$

Προβλήματα με μονώνυμα Ι

Προβλήματα με μονώνυμα ΙΙ

8. Ο Αρχιμήδης απέδειξε ότι η επιφάνεια μιας σφαίρας ακτίνας ρ είναι ίση με το εμβαδόν τεσσάρων μέγιστων κύκλων. (Οι μέγιστοι κύκλοι μιας σφαίρας είναι οι τομές της σφαίρας με επίπεδο που διέρχεται από το κέντρο της. Οι μέγιστοι κύκλοι έχουν ακτίνα ίση με την ακτίνα της σφαίρας.) Μπορείτε να γράψετε ως μονώνυμο τον τύπο του εμβαδού της σφαίρας; Ποιος είναι ο συντελεστής και ποιο το κύριο μέρος του;

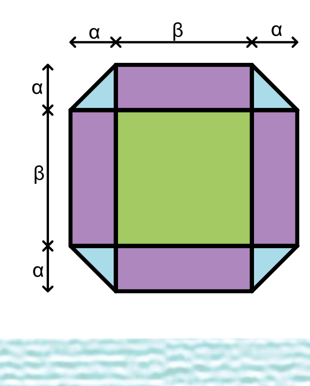
9. Να γράψετε καθένα από τα παρακάτω πολυώνυμα κατά τις φθίνουσες δυνάμεις και να βρείτε τον βαθμό του:

α) $-2x^3+x^4+3x+5-4x^2$

β) $8y-12y^3+y+12y^3-8$

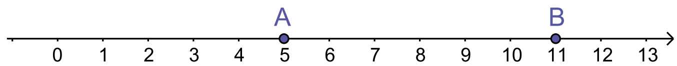
γ) $z^6+2z^5-z^3-2z^5-z^6+11z-3$

10. Να γράψετε ένα πολυώνυμο που να εκφράζει το εμβαδόν του οκταγώνου.



11. Στην παρακάτω αριθμογραμμή το σημείο Α αντιστοιχεί στον αριθμό 5, το Β στον αριθμό 11, ενώ όλοι οι ενδιάμεσοι αριθμοί μπορούν να εκφραστούν ως τιμές του πολυωνύμου

$$P = 11t + 5(1-t) \text{ για } 0<t<1.$$

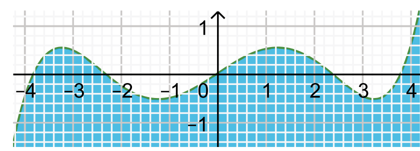


α) Να γράψετε το πολυώνυμο P κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του t.

β) Για $t=\frac{1}{2}$ ποιο σημείο της αριθμογραμμής παίρνουμε και ποια είναι η γεωμετρική σχέση του με τα σημεία Α και Β;

Σημείο στην αριθμογραμμή

12. Για την κατασκευή ενός κύματος με τα γραφικά υπολογιστή χρησιμοποιείται το πολυώνυμο $W=\frac{2x}{3}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$.



α) Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή του πολυωνύμου για $x=1$ και $x=-1$.

β) Να αποδείξετε ότι για αντίθετες τιμές της μεταβλητής x, οι τιμές του W είναι και αυτές αντίθετες.

13. Ένα αυτοκίνητο κινείται με ταχύτητα 25 m/s (ή αλλιώς 90 Km/h). Τη στιγμή $t=0$ ο οδηγός φρενάρει και το αυτοκίνητο αρχίζει να επιβραδύνει. Κατά την επιβράδυνση, η στιγμιαία ταχύτητα του αυτοκινήτου υ (σε m/s) και το διάστημα s (σε m) που διανύει περιγράφονται ως πολυώνυμα του χρόνου t από τις σχέσεις:

$$\upsilon = 25 - 12{,}5t \quad \text{και} \quad s = 25t - 6{,}25t^2$$

α) Να υπολογίσετε πόσα δευτερόλεπτα θα περάσουν για να ακινητοποιηθεί το αυτοκίνητο.

β) Πόσα μέτρα διένυσε το αυτοκίνητο από τη στιγμή που φρέναρε ο οδηγός μέχρι τη στιγμή που το αυτοκίνητο ακινητοποιήθηκε;

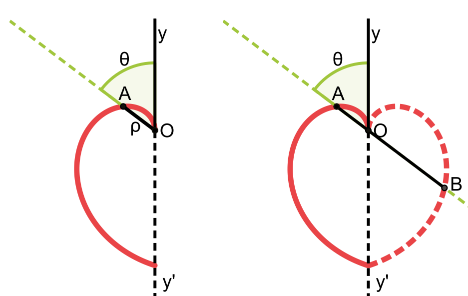
γ) Μπορείτε να εξηγήσετε το νόημα της «απόστασης ασφαλείας»;

14. Η έλικα του Αρχιμήδη είναι μια καμπύλη που περιγράφεται πολύ απλά ως εξής: Η «ακτίνα» της $\rho = OA$ (σε εκατοστά) είναι ανάλογη της γωνίας θ (σε μοίρες) που σχηματίζει η ακτίνα με τον ημιάξονα Oy. Ειδικότερα στο σχήμα έχουμε:

$$\rho = \frac{\theta}{45}, \text{ όπου } 0 \le \theta \le 180$$

α) Να υπολογίσετε τις τιμές του ρ όταν το θ παίρνει τις τιμές 0, 45, 90, 135 και 180.

β) Αν πάρουμε τη διπλή έλικα (δεύτερο σχήμα), να αποδείξετε ότι η «διάμετρος» AB είναι ανεξάρτητη από τη γωνία θ.



Έχουν οι μηχανές καρδιά;

2.3 Πράξεις πολυωνύμων

Δ1. Οχήματα σε αυτοκινητόδρομο

Δύο οχήματα κινούνται σε παράλληλες λωρίδες σε έναν αυτοκινητόδρομο και το διάστημα που διανύει το καθένα (σε χιλιόμετρα) περιγράφεται ως σχέση του χρόνου t (σε ώρες) ως εξής:

$$S_1 = 80t$$

$$S_2 = 84t$$

Υποθέτουμε ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ τα οχήματα βρίσκονται το ένα δίπλα στο άλλο.

α) Σε μία ώρα πόσα χιλιόμετρα θα έχει απομακρυνθεί το δεύτερο όχημα από το πρώτο; Ομοίως, πόσα χιλιόμετρα θα έχει απομακρυνθεί σε δύο ώρες;

β) Ποια παράσταση περιγράφει την απομάκρυνση του δεύτερου οχήματος από το πρώτο όχημα σε σχέση με τον χρόνο t; Συζητήστε στην ομάδα σας και ανακοινώστε στην τάξη τις απαντήσεις σας.

Συζητάμε

...για την πρόσθεση και την αφαίρεση πολυωνύμων

Σε πολλά προβλήματα το ζητούμενο είναι να υπολογίσουμε το άθροισμα ή τη διαφορά δύο πολυωνύμων και να τη γράψουμε ως ένα πολυώνυμο:

Για παράδειγμα, αν μας δώσουν τα πολυώνυμα:

$$P = x^3 - 2x^2 + 3x - 5$$

$$Q = x^3 + x - 8$$

Τότε, το άθροισμά τους $P + Q$ είναι:

$$\begin{aligned} P + Q &= \left(x^3 - 2x^2 + 3x - 5\right) + \left(x^3 + x - 8\right) \\ &= x^3 - 2x^2 + 3x - 5 + x^3 + x - 8 \\ &= x^3 + x^3 - 2x^2 + 3x + x - 5 - 8 \\ &= 2x^3 - 2x^2 + 4x - 13 \end{aligned}$$

Ενώ ή διαφορά $P - Q$ είναι:

$$\begin{aligned} P - Q &= \left(x^3 - 2x^2 + 3x - 5\right) - \left(x^3 + x - 8\right) \\ &= x^3 - 2x^2 + 3x - 5 - x^3 - x + 8 \\ &= x^3 - x^3 - 2x^2 + 3x - x - 5 + 8 \\ &= -2x^2 + 2x + 3 \end{aligned}$$

Παραπάνω γράψαμε τα πολυώνυμα κατά τις φθίνουσες δυνάμεις της μεταβλητής x και στο τέλος κάναμε την αναγωγή όμοιων όρων.

Πολυώνυμα με αντίθετους όρους, όπως τα $x^3 - 2x + 1$ και $-x^3 + 2x - 1$, που έχουν άθροισμα το μηδενικό πολυώνυμο, τα ονομάζουμε **αντίθετα** και γράφουμε απλά:

$$P = x^3 - 2x + 1$$

$$-P = -x^3 + 2x - 1$$

Αντί να αφαιρέσουμε ένα πολυώνυμο από ένα άλλο πολυώνυμο, μπορούμε να προσθέσουμε το αντίθετό του, δηλαδή:

$$P - Q = P + (-Q)$$

Δ2. Κοπάδι από πρόβατα

Ένας κτηνοτρόφος παρατήρησε ότι τα έξοδα για το κάθε πρόβατο (η εκτροφή του, η υγειονομική του φροντίδα, η μετακίνησή του) αυξάνονται από χρονιά σε χρονιά βάσει της σχέσης:

$$K = 1{,}2x + 300$$

όπου το x δηλώνει έτη, με $x = 0$ να είναι το τρέχον έτος.

α) Αν ο πληθυσμός των προβάτων του είναι $P = 100$ πρόβατα, τότε πόσα είναι τα έξοδα όλου του κοπαδιού κατά το τρέχον έτος $(x = 0)$ και πόσα θα είναι σε 10 χρόνια $(x = 10)$;

β) Αν ο πληθυσμός των προβάτων του αυξάνεται από χρόνο σε χρόνο, σύμφωνα με τη σχέση

$$P = 5x + 100$$

τότε πόσα θα είναι τα έξοδα όλου του κοπαδιού σε 10 χρόνια;

γ) Μπορείτε να βρείτε ένα πολυώνυμο που να εκφράζει το συνολικό κόστος για όλο το κοπάδι ως σχέση του χρόνου x;

Συζητήστε στην τάξη για τον τρόπο που εργαστήκατε σε κάθε ομάδα.

Συζητάμε

...για το γινόμενο πολυωνύμων

Συχνά χρειάζεται να σχηματίσουμε **το γινόμενο δύο πολυωνύμων**. Εφαρμόζοντας την **επιμεριστική ιδιότητα** (πολλαπλασιάζοντας δηλαδή κάθε όρο του πρώτου πολυωνύμου με κάθε όρο του δεύτερου πολυωνύμου και προσθέτοντας τα αντίστοιχα αποτελέσματα), διαπιστώνουμε ότι το γινόμενο δύο πολυωνύμων είναι και αυτό πολυώνυμο.

Για παράδειγμα, αν έχουμε τα πολυώνυμα:

$$P = 3x - 5$$
$$Q = x^3 + x^2$$

το γινόμενό τους είναι:

$$P \cdot Q = (3x-5)(x^3+x^2) = 3x \cdot x^3 + 3x \cdot x^2 - 5 \cdot x^3 - 5 \cdot x^2$$
$$= 3x^4 + 3x^3 - 5x^3 - 5x^2 = 3x^4 - 2x^3 - 5x^2$$

Θυμόμαστε τη σύνθετη επιμεριστική ιδιότητα

$$(\alpha+\beta)(\gamma+\delta) = \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta$$

και προσέχουμε το πρόσημο μπροστά από τα γινόμενα.

Τι σχέση έχει ο βαθμός του γινομένου δύο πολυωνύμων με τους βαθμούς των πολυωνύμων;

Δ3. Κέρδη και ζημιά

Μια επιχείρηση που κατασκευάζει προκατασκευασμένα σπίτια έχει καθαρά μηνιαία κέρδη (σε χιλιάδες ευρώ) που δίνονται από το πολυώνυμο:

$$P = 80x - 10x^2$$

όπου το x δηλώνει τον αριθμό των σπιτιών που κατασκευάζονται τον μήνα.

Αν η επιχείρηση θελήσει να κατασκευάσει πολλά σπίτια, τότε υπάρχει περίπτωση να έχει ζημιά, δηλαδή $P<0$ (επειδή για παράδειγμα αναγκάζεται να μισθώνει μηχανήματα που δεν της ανήκουν).

α) Να γράψετε ως γινόμενο δύο πρωτοβάθμιων πολυωνύμων το P, εφαρμόζοντας την επιμεριστική ιδιότητα.

β) Να εξηγήσετε από τη σχέση που γράψατε γιατί υπάρχει ζημιά στην εταιρεία εάν κατασκευάσει πάνω από 8 σπίτια τον μήνα.

Συζητάμε

...για την παραγοντοποίηση πολυωνύμων

Η επιμεριστική ιδιότητα έχει δύο τρόπους εφαρμογής

- για να μετατρέψουμε ένα γινόμενο σε άθροισμα, αλλά και αντίστροφα,
- για να μετατρέψουμε ένα άθροισμα σε γινόμενο.

Δηλαδή η σχέση

$$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$$

δηλώνει ότι το γινόμενο $\alpha(\beta+\gamma)$ μετατρέπεται στο άθροισμα $\alpha\beta+\alpha\gamma$, αλλά και αντίστροφα, ότι το άθροισμα $\alpha\beta+\alpha\gamma$ μετατρέπεται στο γινόμενο $\alpha(\beta+\gamma)$.

Θα δούμε πώς αυτή η ιδέα μάς βοηθά να **παραγοντοποιούμε** κάποιο πολυώνυμο, δηλαδή να το γράφουμε ως γινόμενο, επιδιώκοντας οι παράγοντές του να είναι πολυώνυμα **κατώτερων βαθμών**.

Ας πάρουμε το πολυώνυμο $P=x^2-2x$.

Παρατηρούμε ότι οι όροι του x^2 και $-2x$ έχουν **κοινό παράγοντα** το x, γι' αυτό γράφουμε:

$$P=x^2-2x=x\cdot x-2\cdot x=x(x-2)$$

> Δηλαδή το πολυώνυμο $2x^2+2x$ θεωρούμε ότι παραγοντοποιήθηκε αν το γράψουμε ως $2x(x+1)$ ενώ η μορφή $2(x^2+x)$ δε θεωρούμε ότι είναι επαρκώς παραγοντοποιημένη, παρόλο που είναι γινόμενο παραγόντων.

Ας δούμε ένα παράδειγμα που η παραγοντοποίηση γίνεται με δύο διαδοχικές εφαρμογές της επιμεριστικής ιδιότητας.

Στο πολυώνυμο $Q=x^3-3x^2+x-3$ χωρίζουμε τους όρους του σε δύο ομάδες που έχουν κοινό παράγοντα και γράφουμε ξεχωριστά κάθε ομάδα ως γινόμενο:

$$Q=\underbrace{x^3-3x^2}_{\text{1η ομάδα}}+\underbrace{x-3}_{\text{2η ομάδα}}$$

Στην 1η ομάδα ο κοινός παράγοντας είναι το x^2, ενώ στη 2η ομάδα είναι το 1.

$$Q=x^2(x-3)+1\cdot(x-3)=(x-3)(x^2+1)$$

Το $x-3$ είναι ένας νέος κοινός παράγοντας.

Την παραπάνω μέθοδο τη λέμε **παραγοντοποίηση κατά ομάδες**. Σε αυτήν εφαρμόζουμε διαδοχικά δύο φορές την απλή επιμεριστική ιδιότητα.

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

• Το άθροισμα ή η διαφορά δύο πολυωνύμων είναι ένα πολυώνυμο.	Αν $P = x-1,\ Q = -2x^2+x$ Τότε $P+Q = (x-1)+(-2x^2+x) = -2x^2+2x-1$ $P-Q = (x-1)-(-2x^2+x) = x-1+2x^2-x = 2x^2-1$
• Το γινόμενο δύο πολυωνύμων είναι ένα πολυώνυμο.	Αν $P = x-1,\ Q = -2x^2+x$ Τότε $P\cdot Q = (x-1)(-2x^2+x)$ $= x(-2x^2)+x\cdot x-1(-2x^2)-1\cdot x$ $= -2x^3+x^2+2x^2-x = -2x^3+3x^2-x$
• Όταν μετατρέπουμε ένα πολυώνυμο σε γινόμενο πολυωνύμων, τότε λέμε ότι το **παραγοντοποιούμε**. Επιδιώκουμε, αν γίνεται, η παραγοντοποίηση να οδηγεί σε γινόμενο πολυωνύμων μικρότερου βαθμού.	$x^2-2x = x(x-2)$ $x^3-3x^2+x-3 = x^2(x-3)+x-3 =$ $=(x-3)(x^2+1)$

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. **Να υπολογίσετε το άθροισμα και τη διαφορά των πολυωνύμων:**

$$\mathbf{P = 2x^3-3x^2+4x-1} \text{ και } \mathbf{Q = -x^4-4x+2}$$

Απάντηση

$$P+Q = (2x^3-3x^2+4x-1)+(-x^4-4x+2) = 2x^3-3x^2+4x-1-x^4-4x+2$$
$$= -x^4+2x^3-3x^2+4x-4x-1+2 = -x^4+2x^3-3x^2+1$$
$$P-Q = (2x^3-3x^2+4x-1)-(-x^4-4x+2) = 2x^3-3x^2+4x-1+x^4+4x-2$$
$$= x^4+2x^3-3x^2+4x+4x-1-2 = x^4+2x^3-3x^2+8x-3$$

2. **Να υπολογίσετε το γινόμενο των μονωνύμων $2\alpha^2xy^3$ και $-5x^2y$.**

Απάντηση

Εφαρμόζουμε αρχικά την αντιμεταθετική ιδιότητα για να αλλάξουμε σειρά στους παράγοντες:

$$(2\alpha^2xy^3)(-5x^2y) = 2\cdot\alpha^2\cdot x\cdot y^3\cdot(-5)\cdot x^2\cdot y$$
$$= 2\cdot(-5)\cdot\alpha^2\cdot x\cdot x^2\cdot y^3\cdot y = -10\alpha^2x^3y^4$$

Δηλαδή πολλαπλασιάζουμε τους συντελεστές των μονωνύμων και τις δυνάμεις με την ίδια βάση και γράφουμε το γινόμενό τους.

3. Να υπολογίσετε το γινόμενο $\left(-2x^2+5x-1\right)\left(-2x+3\right)$.

Απάντηση

$$\left(-2x^2+5x-1\right)\left(-2x+3\right)=+2x^2\cdot 2x-2x^2\cdot 3-5x\cdot 2x+5x\cdot 3+1\cdot 2x-1\cdot 3$$
$$=+4x^3-6x^2-10x^2+15x+2x-3=4x^3-16x^2+17x-3$$

4. Να κάνετε τις πράξεις και να βρείτε τον βαθμό του πολυωνύμου:

$$\left(3x-1\right)^2-\left(1{,}5x+1\right)\left(6x+2\right)$$

Απάντηση

$$\left(3x-1\right)^2-\left(1{,}5x+1\right)\left(6x+2\right)=\left(3x-1\right)\left(3x-1\right)-\left(1{,}5x+1\right)\left(6x+2\right)$$
$$=\left(3x\cdot 3x-3x\cdot 1-1\cdot 3x+1\right)-\left(1{,}5x\cdot 6x+1{,}5x\cdot 2+1\cdot 6x+2\right)=\left(9x^2-6x+1\right)-\left(9x^2+9x+2\right)$$
$$=9x^2-6x+1-9x^2-9x-2=9x^2-9x^2-6x-9x+1-2=-15x-1$$

Άρα το πολυώνυμο είναι πρώτου βαθμού.

5. Ο πληθυσμός της Γης από το 2000 και έπειτα δίνεται (σε δισεκατομμύρια) από το πολυώνυμο

$$P=0{,}08x-155$$

με το x να δηλώνει το έτος.

Το ενεργειακό αποτύπωμα ενός ατόμου εκφράζει τα κιλά του διοξειδίου του άνθρακα $\left(CO_2\right)$ που εκλύει στην ατμόσφαιρα από τη δραστηριότητά του σε ένα έτος. Ο Ευρωπαϊκός Οργανισμός Περιβάλλοντος πρότεινε μια δραστική μείωση του μέσου ενεργειακού αποτυπώματος ενός ατόμου για το έτος x $\left(x\geq 2000\right)$ βάσει του τύπου $F=85.000-40x$.

α) Να υπολογίσετε το συνολικό ενεργειακό αποτύπωμα της ανθρωπότητας τα έτη 2010 και 2040.

β) Να γράψετε ένα πολυώνυμο Q που να εκφράζει το συνολικό ενεργειακό αποτύπωμα της ανθρωπότητας το έτος x.

Απάντηση

α) Από τους τύπους υπολογίζουμε τον πληθυσμό της Γης το 2010 και το μέσο ενεργειακό αποτύπωμα ενός ατόμου:

$$P_1=0{,}08\cdot 2010-155=5{,}8$$
$$F_1=85.000-40\cdot 2010=4.600$$

Οπότε το ενεργειακό αποτύπωμα της ανθρωπότητας κατά το 2010 είναι το γινόμενο των δύο αριθμών P_1 και F_1, δηλαδή 26.680 δισεκατομμύρια κιλά CO_2 (ή 26.680 μεγατόνοι Mt).

Όμοια, για το έτος 2040 υπολογίζουμε τον πληθυσμό και το μέσο ενεργειακό αποτύπωμα:

$$P_2=0{,}08\cdot 2040-155=8{,}2$$
$$F_2=85.000-40\cdot 2040=3.400$$

Συνεπώς το ενεργειακό αποτύπωμα της ανθρωπότητας κατά το έτος 2040 αναμένεται να είναι το γινόμενο των αριθμών P_2, F_2, δηλαδή 27.880 δισεκατομμύρια κιλά CO_2 (ή 27.880 Mt).

β) Στη γενική περίπτωση που θέλουμε το ενεργειακό αποτύπωμα της ανθρωπότητας το έτος x, θα πρέπει να υπολογίσουμε το γινόμενο των πολυωνύμων P και F:

$$Q=\left(0{,}08x-155\right)\left(85.000-40x\right)=0{,}08x\cdot 85.000-0{,}08x\cdot 40x-155\cdot 85.000+155\cdot 40x$$
$$=6.800x-3{,}2x^2-13.175.000+6.200x=-3{,}2x^2+13.000x-13.175.000$$

σε δισεκατομμύρια κιλά CO_2.

6. Να παραγοντοποιήσετε τα πολυώνυμα:
α) $x^3 - 2x$ β) $\alpha x + \alpha y + 3x + 3y$ γ) $x^2 + xy + y^2x + y^3$

Απάντηση

α) Βγάζοντας κοινό παράγοντα το x παίρνουμε: $x^3 - 2x = x^2 \cdot x - 2 \cdot x = x(x^2 - 2)$
β) Με ομαδοποίηση παίρνουμε: $\alpha x + \alpha y + 3x + 3y = \alpha(x+y) + 3(x+y) = (\alpha+3)(x+y)$
γ) Με ομαδοποίηση παίρνουμε: $x^2 + xy + y^2x + y^3 = x \cdot x + x \cdot y + y^2 \cdot x + y^2 \cdot y = x(x+y) + y^2(x+y) = (x+y^2)(x+y)$

7. Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 5x = 0$.

Απάντηση

Το πολυώνυμο $x^2 - 5x$ γράφεται ως γινόμενο $x^2 - 5x = x(x-5)$. Οπότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $x(x-5) = 0$.
Παρατηρούμε ότι ένα γινόμενο είναι μηδέν, μόνο όταν τουλάχιστον ένας παράγοντας είναι μηδέν. Οπότε,

- αν ο παράγοντας x είναι μηδέν, τότε η λύση της εξίσωσης θα είναι $x = 0$, και
- αν ο παράγοντας $x - 5$ είναι μηδέν, τότε η λύση της εξίσωσης θα είναι $x = 5$.

Συνοψίζοντας, η αρχική εξίσωση έχει δύο λύσεις, τους αριθμούς 0 και 5.

Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε

Ο Χρήστος πρότεινε «κατακόρυφες» πράξεις για το άθροισμα, την αφαίρεση και το γινόμενο πολυωνύμων. Συζητήστε εάν η ιδέα του είναι σωστή ή λάθος, προσπαθώντας να καταλάβετε τη λογική του από τα παραδείγματα που έγραψε.

α) Θα υπολογίσω το άθροισμα $(x^4 - 3x^2 + 5x - 12) + (x^3 - 4x^2 + 5)$.

$$\begin{array}{rrrrrr} & x^4 & 0x^3 & -3x^2 & 5x & -12 \\ + & & +x^3 & -4x^2 & +0x & +5 \\ \hline & x^4 & +x^3 & -7x^2 & +5x & -7 \end{array}$$

Άρα είναι

$$(x^4 - 3x^2 + 5x - 12) + (x^3 - 4x^2 + 5) = x^4 + x^3 - 7x^2 + 5x - 7.$$

β) Θα υπολογίσω τη διαφορά $(x^4 - 3x^2 + 5x - 12) - (x^3 - 4x^2 + 5)$, που είναι το άθροισμα $(x^4 - 3x^2 + 5x - 12) + (-x^3 + 4x^2 - 5)$.

$$\begin{array}{rrrrrr} & x^4 & 0x^3 & -3x^2 & 5x & -12 \\ + & & -x^3 & +4x^2 & +0x & -5 \\ \hline & x^4 & -x^3 & +x^2 & +5x & -17 \end{array}$$

Οπότε $(x^4 - 3x^2 + 5x - 12) - (x^3 - 4x^2 + 5) = x^4 - x^3 + x^2 + 5x - 17$.

γ) Θα υπολογίσω το γινόμενο $(x^2 - 3x + 1)(x^2 - 2)$.

$$
\begin{array}{cccccccl}
 & & & x^2 & -3x & +1 & & \\
 & & \times & & x^2 & -2 & & \\
\hline
 & & & -2x^2 & +6x & -2 & & \text{Το πρώτο πολυώνυμο πολλαπλασιασμένο με } -2. \\
+ & x^4 & -3x^3 & x^2 & & & & \text{Το πρώτο πολυώνυμο πολλαπλασιασμένο με } x^2. \\
\hline
 & x^4 & -3x^3 & -x^2 & +6x & -2 & &
\end{array}
$$

Άρα $\left(x^2-3x+1\right)\left(x^2-2\right)=x^4-3x^3-x^2+6x-2.$

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Να χαρακτηρίσετε σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις ακόλουθες προτάσεις:

		Σ	Λ
α)	Τα αντίθετα πολυώνυμα έχουν άθροισμα το μηδενικό πολυώνυμο.	☐	☐
β)	Το άθροισμα $\left(x^2+x-5\right)+\left(-x^2+2\right)$, επειδή είναι άθροισμα πολυωνύμων δευτέρου βαθμού, είναι και αυτό πολυώνυμο δευτέρου βαθμού.	☐	☐
γ)	Συμβολίζουμε το άθροισμα των πολυωνύμων x^2-1 και $-5x+3$ με $x^2-1+-5x+3$.	☐	☐
δ)	Η διαφορά δύο πολυωνύμων μπορεί να μετατραπεί σε άθροισμα σύμφωνα με τη σχέση $P-Q=P+(-Q)$.	☐	☐
ε)	Το γινόμενο $\left(x^2-5\right)\left(x^3+1\right)$ θα είναι πολυώνυμο 5ου βαθμού.	☐	☐
στ)	Συμβολίζουμε το γινόμενο των πολυωνύμων $4x^2-1$ και $5x+2$ με $4x^2-1\cdot 5x+2$.	☐	☐
ζ)	Η παραγοντοποίηση ενός πολυωνύμου είναι η μετατροπή του σε γινόμενο πολυωνύμων μικρότερων βαθμών.	☐	☐
η)	Το πολυώνυμο $P=x^2+8$ δεν παραγοντοποιείται.	☐	☐
θ)	Αν γράψουμε $3x^2+3x=3\left(x^2+x\right)$, τότε ολοκληρώσαμε την παραγοντοποίηση του πολυωνύμου $3x^2+3x$.	☐	☐

2. Να εντοπίσετε το λάθος στις επόμενες πράξεις πολυωνύμων:

α) $\left(x^2-3x+1\right)-(2x-1)=x^2-3x+1-2x-1=x^2-5x$

β) $\left(x^2-1\right)(2-x)=x^2\cdot 2-x^2\cdot x-1\cdot 2-1\cdot x=2x^2-x^3-2-x=-x^3+2x^2-x-2$

3. Να συμπληρώσετε τους παράγοντες και τα σύμβολα των πράξεων (δηλαδή + ή − ανάλογα, όπου χρειάζεται) στις επόμενες παραγοντοποιήσεις:

α) $x^3-4x=\ldots\left(x^2-4\right)$

β) $9x^5+6x^3-3x=\ldots\left(3x^4+2x^2-1\right)$

γ) $-8x^3+2x=-2x(\ldots\ \ldots\ \ldots)$

δ) $x^2-2x-3x+6=(x-2)(x\ \ldots\ \ldots)$

Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

4. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα των πολυωνύμων:

α) $(8x^2-4x+1)+(-3x+2)$ **β)** $\left(-x^3+x^2-\frac{x}{4}+3\right)+\left(-2x^3-\frac{3x}{4}\right)$

γ) $(x+2x^2-x^3)+(x^3-2x^2-x)$ **δ)** $(3xy^2+2xy)+(-xy^2+y^2)$

5. Να υπολογίσετε τις διαφορές των πολυωνύμων:

α) $(x-2x^2)-(x^2+4)$ **β)** $(x+2x^2+x^3)-(x^3-2x^2-x)$

6. Να υπολογίσετε τα γινόμενα των μονωνύμων:

α) $(2x^2y)(4xy^2)$ **β)** $(5xy^3)(-2x^3y^3z)$

γ) $\left(\frac{2}{3}x^4y\right)\left(-\frac{3}{4}x^2y^2\right)$ **δ)** $(-4xy)\left(-\frac{1}{2}x^4y\right)$

7. Να υπολογίσετε τα γινόμενα των πολυωνύμων:

α) $(x+2)(x-3)$ **β)** $(x+5)^2$ **γ)** $(x^2+1)(2x+1)$

δ) $(10x+2)\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}\right)$ **ε)** $(\alpha x+y)(x-\alpha y)$

8. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $(3x^2-2x-1)-(5x^2+3x)+(2x^2-4)$ **β)** $(x+3)(-x+1)-(4x^2+3x)$

γ) $(2-x)^2+(1-x)(x+3)$ **δ)** $(4x^2+3)-(2x-1)^2$

9. Να παραγοντοποιήσετε τα πολυώνυμα:

α) $3x^2-4x$ **β)** $10x^4+20x^3+20x^2$

γ) $2\alpha x^5+3\alpha^2x^2$ **δ)** $2xy^3+8x^3y$

10. Να παραγοντοποιήσετε τα πολυώνυμα:

α) $4x+4y-x^2-xy$ **β)** $\alpha x-\alpha y-5x+5y$

γ) $\pi x^2+(1-\pi)x-1$ **δ)** $\sqrt{3}x^4+(\sqrt{3}+\sqrt{2})x^2+\sqrt{2}$

11. Να παραγοντοποιήσετε τα πολυώνυμα:

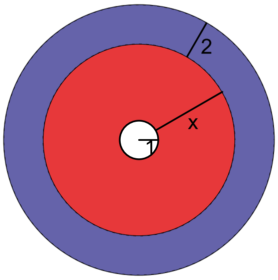
α) $15x^4+30x^3+2x^2+4x$ **β)** $-12x^5+20x^4-3x^3+5x^2$

γ) $\pi x^4-3\pi x^3-2\pi x^3+6\pi x^2$ **δ)** $x^4y^4+3x^3y^2-x^4y^5-3x^3y^3$

12. **α)** Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο x^3-3x^2+x-3 και έπειτα να βρείτε τις τιμές του x που το μηδενίζουν.

β) Όμοια και για το πολυώνυμο $4x^5-2x^4-2x^4+x^3$.

13. Στο σχήμα έχουμε τρεις ομόκεντρους κύκλους, όπου φαίνεται ότι η ακτίνα του μεσαίου κύκλου είναι 2 μονάδες μικρότερη από την ακτίνα του εξωτερικού κύκλου και x μονάδες μεγαλύτερη από την ακτίνα του εσωτερικού κύκλου, η οποία είναι 1 μονάδα.



α) Να εκφράσετε ως πολυώνυμα του x τα εμβαδά καθενός από τους δύο δακτυλίους του σχήματος, του κόκκινου και του μπλε.

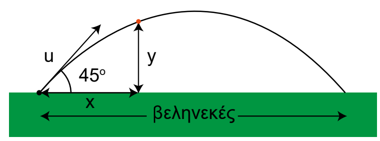
β) Να εκφράσετε ως πολυώνυμο του x τη διαφορά των εμβαδών των δύο δακτυλίων και να την παραγοντοποιήσετε.

γ) Για ποια τιμή του x η διαφορά γίνεται 0; Τι συμπέρασμα βγάζετε για τα εμβαδά των δύο δακτυλίων για αυτή την τιμή του x;

Άσπρο ή μαύρο;

Πρόβλημα μοδιστρικής

14. Ένα κανόνι εκτοξεύει ένα βλήμα με ταχύτητα $υ = 100 \text{ m/s}$ και με αρχική γωνία βολής 45°.



Σύμφωνα με τους νόμους της Μηχανικής, το βλήμα διαγράφει μια καμπύλη τροχιά στον αέρα που το κάθε σημείο της περιγράφεται από δύο μεγέθη: την οριζόντια απομάκρυνση x από το σημείο εκτόξευσης (σε μέτρα) και το ύψος y (σε μέτρα), τα οποία συνδέονται με τη σχέση:

$$y = -0{,}001x^2 + x$$

Αφού παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο που βρίσκεται στο δεύτερο μέλος της σχέσης, να υπολογίσετε το βεληνεκές του βλήματος, δηλαδή πόσο απέχει το σημείο πρόσκρουσης του βλήματος στο έδαφος από το σημείο εκτόξευσης (για το σημείο πρόσκρουσης είναι $y = 0$).

15. Τα καθαρά μηνιαία κέρδη (σε χιλιάδες ευρώ) ενός θερμοκηπίου που παράγει ντομάτες δίνονται από τη σχέση:

$$P = -x^3 + 5x^2 - x + 5$$

όπου το x δηλώνει τους τόνους της ντομάτας που παράγονται σε έναν μήνα. Ο ιδιοκτήτης παρατήρησε ότι η μεγάλη παραγωγή, επειδή δεν έχει εξίσου μεγάλη ζήτηση, τον ζημιώνει (αρνητικό κέρδος). Μπορείτε να επιβεβαιώσετε ότι, αν η παραγωγή υπερβεί τους 5 τόνους μηνιαίως, τότε η επιχείρηση θα έχει ζημιά;

16. Το υψόμετρο των υδάτων (σε dm) μιας λίμνης κατά τον μήνα Σεπτέμβριο δίνεται από τη σχέση:

$$h = -t^2 + 40t$$

όπου το t είναι ο χρόνος σε ημέρες, με $t = 1$ να είναι η 1η Σεπτεμβρίου. Διευκρινίζεται ότι «υψόμετρο μηδέν» $(h = 0)$ σημαίνει υψόμετρο ίδιο με την επιφάνεια της θάλασσας.

α) Να βρείτε ποιες ημερομηνίες το υψόμετρο ήταν 300 dm (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε ότι η εξίσωση $-t^2 + 40t = 300$ γράφεται $-t^2 + 10t + 30t - 300 = 0$).

β) Να αποδείξετε ότι το υψόμετρο δίνεται και από το πολυώνυμο $h = 400 - (t - 20)^2$.

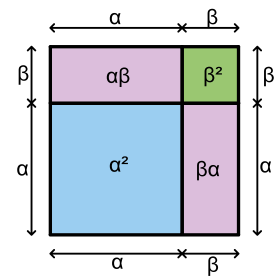
γ) Μπορείτε να εξηγήσετε από την προηγούμενη σχέση γιατί το υψόμετρο των υδάτων δεν ξεπέρασε τα 40 μέτρα όλο τον Σεπτέμβριο;

2.4 Ταυτότητες

Δ1. Ερμηνεύοντας ένα σχήμα

Παρατηρήστε το διπλανό σχήμα και αξιοποιήστε το για να βρείτε μια άλλη αλγεβρική έκφραση για το τετράγωνο του αθροίσματος δύο θετικών αριθμών $(\alpha+\beta)^2$.

Συζητήστε τις ιδέες σας στις ομάδες και στη συνέχεια σε όλη την τάξη.



Συζητάμε

...για το τετράγωνο αθροίσματος

Μπορούμε να εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα για να πάρουμε μια δεύτερη αλγεβρική έκφραση για το τετράγωνο αθροίσματος δύο αριθμών:

$$(\alpha+\beta)^2=(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2+\alpha\beta+\alpha\beta+\beta^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$$

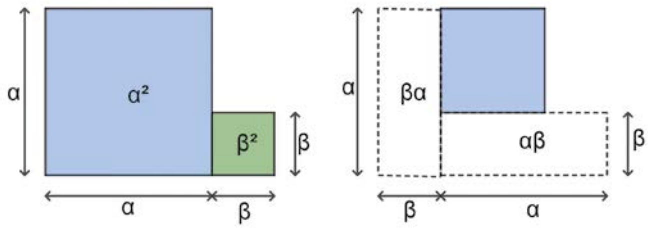
Η ισότητα $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ που αποδείξαμε ισχύει **για κάθε τιμή** των α και β, θετική, αρνητική ή 0.

- Για παράδειγμα, για $\alpha=9$ και $\beta=1$ ισχύει ότι $(9+1)^2=9^2+2\cdot 9\cdot 1+1^2$.
- Όμοια, για $\alpha=x$ και $\beta=3$ ισχύει ότι $(x+3)^2=x^2+2\cdot x\cdot 3+3^2$ ή αλλιώς $(x+3)^2=x^2+6x+9$.

Τετράγωνο αθροίσματος

Δ2. Αλληλουχία σχημάτων

Στο πρώτο σχήμα το συνολικό εμβαδόν είναι $\alpha^2+\beta^2$, ενώ στο δεύτερο σχήμα φαίνεται ότι αφαιρέσαμε από το $\alpha^2+\beta^2$ δύο φορές το αβ. Τι έμεινε; Συζητήστε στις ομάδες για να διατυπώσετε μια αλγεβρική σχέση που προκύπτει από την αλληλουχία των σχημάτων. Εξετάστε αν υπάρχουν διαφορετικές απαντήσεις.



Συζητάμε

...για το τετράγωνο διαφοράς

Όπως με το τετράγωνο του αθροίσματος, εφαρμόζοντας την επιμεριστική ιδιότητα παίρνουμε μια δεύτερη αλγεβρική έκφραση για το τετράγωνο διαφοράς:

$$(\alpha-\beta)^2=(\alpha-\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\alpha\beta-\alpha\beta+\beta^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$$

Η ισότητα που αποδείξαμε $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$ θα ισχύει και πάλι για κάθε τιμή των α και β.

- Για παράδειγμα, για $\alpha=11$ και $\beta=1$ ισχύει ότι $(11-1)^2=11^2-2\cdot 11\cdot 1+1^2$.
- Όμοια, για $\alpha=x$ και $\beta=2$ ισχύει ότι $(x-2)^2=x^2-2\cdot x\cdot 2+2^2$ ή αλλιώς $(x-2)^2=x^2-4x+4$.

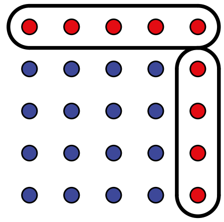
Τετράγωνο διαφοράς

Δ3. Γρήγορος υπολογισμός

Ο Ηλίας ισχυρίζεται ότι μπορεί αμέσως να υπολογίζει τις διαφορές των τετραγώνων δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών.

Σε δευτερόλεπτα, για παράδειγμα, υπολογίζει ότι:

$$1.133^2-1.132^2=2.265$$



α) Μπορείτε να ανακαλύψετε το κόλπο του Ηλία από το διπλανό σχεδιάγραμμα που κατασκεύασε για τον υπολογισμό του 5^2-4^2;

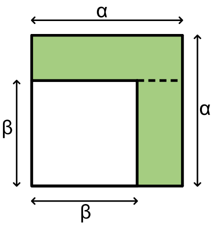
β) Μπορείτε να σκεφτείτε ένα παρόμοιο κόλπο για να υπολογίζετε τη διαφορά τετραγώνων φυσικών αριθμών που διαφέρουν κατά 2 μονάδες, όπως οι διαφορές 5^2-3^2, 8^2-6^2, ...;

Συζητήστε στην τάξη τις διαφορετικές ιδέες που μπορεί να υπάρχουν.

Συζητάμε

...για τη διαφορά τετραγώνων

Ας παρατηρήσουμε το διπλανό σχήμα. Το εμβαδόν της πράσινης περιοχής είναι η διαφορά των τετραγώνων $\alpha^2-\beta^2$.



Μπορείτε να εξηγήσετε γεωμετρικά γιατί η ίδια περιοχή εκφράζεται και ως το γινόμενο του αθροίσματος επί τη διαφορά των α και β, δηλαδή ως $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$;

Για την αλγεβρική απόδειξη, ξεκινάμε από το γινόμενο εφαρμόζοντας την επιμεριστική ιδιότητα:

$$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha\cdot\alpha-\alpha\cdot\beta+\beta\cdot\alpha-\beta\cdot\beta=\alpha^2-\alpha\beta+\alpha\beta-\beta^2=\alpha^2-\beta^2$$

Ας δούμε και εδώ κάποια παραδείγματα:

- Για $\alpha=2.000$ και $\beta=1$, $(2.000+1)(2.000-1)=2.000^2-1^2$, ή αλλιώς $2.001\cdot 1.999=3.999.999$
- Για $\alpha=x$ και $\beta=5$, $x^2-5^2=(x+5)(x-5)$

Διαφορά τετραγώνων

Συζητάμε

...για τις ταυτότητες

Το **τετράγωνο του αθροίσματος**, το **τετράγωνο της διαφοράς** και η **διαφορά τετραγώνων** είναι τρεις από τις πιο διάσημες μαθηματικές **ταυτότητες**.

Στα μαθηματικά, η **ταυτότητα** είναι μια ισότητα με μεταβλητές, η οποία αληθεύει για κάθε τιμή που είναι δυνατόν να πάρουν οι μεταβλητές. Για παράδειγμα, μία ταυτότητα είναι η $3\alpha + 2\alpha = 5\alpha$, που αληθεύει για οποιαδήποτε τιμή της μεταβλητής α, είτε θετική είτε αρνητική είτε μηδέν.

Βλέπουμε ότι οι ταυτότητες αυτές εξισώνουν ένα γινόμενο (και το τετράγωνο είναι γινόμενο) με ένα πολυώνυμο. Το γινόμενο είναι **η παραγοντοποιημένη μορφή** του πολυωνύμου, ενώ το πολυώνυμο είναι **η αναπτυγμένη μορφή** του γινομένου.

Μερικές ενδιαφέρουσες παρατηρήσεις

α) Για την απόδειξη των συγκεκριμένων ταυτοτήτων εφαρμόσαμε την επιμεριστική ιδιότητα στα γινόμενα:

$$(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)$$
$$(\alpha-\beta)(\alpha-\beta)$$
$$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$$

β) Όπως φάνηκε από τα παραδείγματα, οι ταυτότητες διευκολύνουν τους υπολογισμούς, αλλά βοηθούν και στην παραγοντοποίηση των πολυωνύμων. Εξάλλου, η γεωμετρική ερμηνεία στο τετράγωνο διαφοράς και στη διαφορά τετραγώνων είχε κατεύθυνση προς την παραγοντοποίηση πολυωνύμων.

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Ταυτότητα • Είναι ισότητα. • Έχει μεταβλητές. • Αληθεύει για κάθε τιμή που είναι δυνατόν να πάρουν οι μεταβλητές.	Παραδείγματα ταυτοτήτων: $0x = 0$ $2\alpha + 3\alpha = 5\alpha$
Τετράγωνο αθροίσματος Το τετράγωνο του αθροίσματος δύο αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο του πρώτου συν το τετράγωνο του δεύτερου αυξημένο κατά το διπλάσιο γινόμενό τους. $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$	ανάπτυγμα → $(9+1)^2 = 9^2 + 2\cdot 9\cdot 1 + 1^2$ $(x+3)^2 = x^2 + 2\cdot x\cdot 3 + 3^2$ ← παραγοντοποίηση

Τετράγωνο διαφοράς Το τετράγωνο της διαφοράς δύο αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο του πρώτου συν το τετράγωνο του δεύτερου μειωμένο κατά το διπλάσιο γινόμενό τους. $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$	ανάπτυγμα → $(11-1)^2=11^2-2\cdot 11\cdot 1+1^2$ $(x-2)^2=x^2-2\cdot x\cdot 2+2^2$ ← παραγοντοποίηση
Διαφορά τετραγώνων Η διαφορά των τετραγώνων δύο αριθμών είναι ίση με το γινόμενο της διαφοράς τους επί το άθροισμά τους. $\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$	ανάπτυγμα → $(2.000+1)(2.000-1)=2.000^2-1^2$ $(x+5)(x-5)=x^2-5^2$ ← παραγοντοποίηση

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. Να υπολογίσετε την τιμή των αριθμητικών παραστάσεων:

α) $6{,}875^2-3{,}125^2$

β) $6{,}875^2+2\cdot 6{,}875\cdot 3{,}125+3{,}125^2$

Απάντηση

α) Θα εφαρμόσουμε την ταυτότητα «διαφορά τετραγώνων» για τους αριθμούς 6,875 και 3,125:

$$6{,}875^2-3{,}125^2=(6{,}875-3{,}125)(6{,}875+3{,}125)=3{,}75\cdot 10=37{,}5$$

β) Θα εφαρμόσουμε την ταυτότητα «τετράγωνο αθροίσματος» για τους αριθμούς 6,875 και 3,125:

$$6{,}875^2+2\cdot 6{,}875\cdot 3{,}125+3{,}125^2=(6{,}875+3{,}125)^2=10^2=100$$

---

2. α) Να μετατρέψετε τις παρακάτω παραστάσεις σε αθροίσματα:

i) $(2x+3)^2$ **ii)** $(x^2-2y)^2$ **iii)** $(3x-5y)(3x+5y)$

β) Να παραγοντοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

i) $4\alpha^2+12\alpha\beta+9\beta^2$ **ii)** y^2+25x^2-10xy **iii)** x^4-4y^2

Απάντηση

α) i) Εφαρμόζουμε την ταυτότητα «τετράγωνο αθροίσματος» για το 2x και το 3.

$$(2x+3)^2=(2x)^2+2\cdot 2x\cdot 3+3^2=4x^2+12x+9$$

ii) Εφαρμόζουμε την ταυτότητα «τετράγωνο διαφοράς» για το x^2 και το 2y.

$$(x^2-2y)^2=(x^2)^2-2\cdot x^2\cdot 2y+(2y)^2=x^4-4x^2y+4y^2$$

iii) Εφαρμόζουμε την ταυτότητα «διαφορά τετραγώνων» για τα 3x και 5y.

$$(3x-5y)(3x+5y)=(3x)^2-(5y)^2=9x^2-25y^2$$

β) i) Εφαρμόζουμε την ταυτότητα «τετράγωνο αθροίσματος» για το 2α και το 3β.

$$4\alpha^2+12\alpha\beta+9\beta^2=(2\alpha)^2+2\cdot(2\alpha)\cdot(3\beta)+(3\beta)^2=(2\alpha+3\beta)^2$$

ii) Εφαρμόζουμε την ταυτότητα «τετράγωνο διαφοράς» για το y και το 5x.

$$y^2+25x^2-10xy=y^2+(5x)^2-2\cdot y\cdot 5x=(y-5x)^2$$

iii) Εφαρμόζουμε την ταυτότητα «διαφορά τετραγώνων» για τα x^2 και 2y.

$$x^4-4y^2=(x^2)^2-(2y)^2=(x^2-2y)(x^2+2y)$$

3. **Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει διαστάσεις 7 cm και 2 cm. Να περιγράψετε μια μέθοδο για να κατασκευάσετε γεωμετρικά ένα τετράγωνο με το ίδιο εμβαδόν.**

Απάντηση

Ας προσέξουμε ότι αυτό είναι ένα πρόβλημα γεωμετρικής κατασκευής και όχι αριθμητικού υπολογισμού.

Θέλουμε να κατασκευάσουμε την πλευρά ενός τετραγώνου, ας την πούμε x, που έχει εμβαδόν ίδιο με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου, δηλαδή:

$$x^2=7\cdot 2$$

Όμως:

$$7\cdot 2=(4{,}5+2{,}5)(4{,}5-2{,}5)=4{,}5^2-2{,}5^2$$

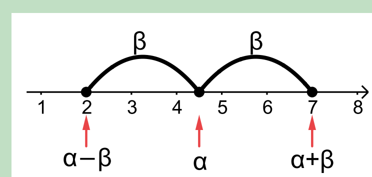
Άρα θα ισχύει:

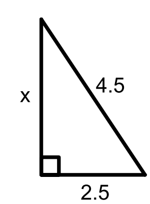
$$x^2=4{,}5^2-2{,}5^2$$

Οπότε το x μπορεί να κατασκευαστεί ως κάθετη πλευρά ορθογώνιου τριγώνου, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Θα μπορούσατε να εφαρμόσετε την παραπάνω μέθοδο για να κατασκευάσετε τετράγωνο ίσου εμβαδού με το εμβαδόν ορθογώνιου παραλληλογράμμου διαστάσεων 12 cm και 8 cm;

Ίσως αναρωτιόμαστε πώς βρήκαμε τους αριθμούς 4,5 και 2,5 για να γράψουμε το 7 και το 2 ως το άθροισμα και τη διαφορά τους. Το παρακάτω διάγραμμα δίνει μια ιδέα:





Η άρβηλος του Αρχιμήδη

4. **Να αποδείξετε τις ταυτότητες:**

α) $(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(\alpha-\beta)^2$ **β)** $(\alpha^2+1)^2-(\alpha^2-1)^2=4\alpha^2$

Απάντηση

α) Από τις ταυτότητες «τετράγωνο αθροίσματος» και «τετράγωνο διαφοράς» παίρνουμε:

$$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-4\alpha\beta=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha-\beta)^2$$

β) Από την ταυτότητα «διαφορά τετραγώνων» για τους αριθμούς α^2+1 και α^2-1 παίρνουμε:

$$(\alpha^2+1)^2-(\alpha^2-1)^2=\left[(\alpha^2+1)-(\alpha^2-1)\right]\left[(\alpha^2+1)+(\alpha^2-1)\right]=(\alpha^2+1-\alpha^2+1)(\alpha^2+1+\alpha^2-1)=2\cdot 2\alpha^2=4\alpha^2$$

Πώς αλλιώς μπορούμε να αποδείξουμε την ταυτότητα του β) ερωτήματος;

5. Να τοποθετήσετε στην αριθμογραμμή τον αριθμό $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$.

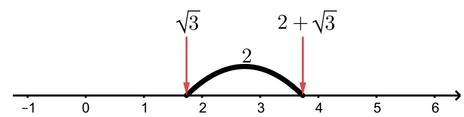
Απάντηση

Ένας τρόπος είναι να υπολογίσουμε μια προσέγγιση του $2-\sqrt{3}$ και στη συνέχεια του $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$. Έτσι, βρίσκουμε και τοποθετούμε στην αριθμογραμμή τον αριθμό 3,73.

Ένας άλλος τρόπος είναι να εργαστούμε έτσι ώστε να μπορούμε να κατασκευάσουμε γεωμετρικά τον αριθμό. Για να διευκολυνθούμε, θα εξαλείψουμε τα ριζικά από τον παρονομαστή, πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή με το $2+\sqrt{3}$:

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{1(2+\sqrt{3})}{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}=\frac{2+\sqrt{3}}{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}=\frac{2+\sqrt{3}}{1}=2+\sqrt{3}$$

Οπότε, αρχικά τοποθετούμε το $\sqrt{3}$ στην αριθμογραμμή (δες την ενότητα 1.2) και έπειτα προσθέτουμε σε αυτό δύο μονάδες για να «συναντήσουμε» το $2+\sqrt{3}$:

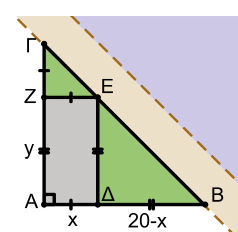


6. Ένας ιδιοκτήτης ενός παραθαλάσσιου οικοπέδου, σχήματος ισοσκελούς ορθογώνιου τριγώνου με κάθετες πλευρές 20m (το ΑΒΓ στο σχήμα), θέλει να οικοδομήσει ένα σπίτι με κάτοψη σχήματος ορθογώνιου παραλληλογράμμου (το ΑΔΕΖ), αφήνοντας δύο τριγωνικές αυλές στις δύο όψεις του (πράσινα τρίγωνα).

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της κάτοψης του σπιτιού δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{E=10^2-(10-x)^2}$$

β) Για ποια τιμή του x η κάτοψη του σπιτιού θα έχει το μέγιστο εμβαδόν;



Απάντηση

α) Επειδή $y=AZ=\Delta E=\Delta B$, θα έχουμε ότι $y=20-x$. Συνεπώς το εμβαδόν της κάτοψης του σπιτιού θα είναι $E=xy=x(20-x)$.

Από την άλλη, εφαρμόζοντας την ταυτότητα «διαφορά τετραγώνων» για τους αριθμούς 10 και $10-x$, παίρνουμε:

$$10^2-(10-x)^2=\left[10-(10-x)\right]\left[10+(10-x)\right]=(10-10+x)(10+10-x)=x(20-x),$$

που είναι το εμβαδόν της κάτοψης του σπιτιού.

β) Το εμβαδόν $E=10^2-(10-x)^2$ θα γίνει μέγιστο όταν το τετράγωνο $(10-x)^2$ που αφαιρούμε γίνει ελάχιστο, δηλαδή 0. Τότε όμως θα πρέπει $x=10$ μέτρα.

7. Να αποδείξετε ότι, όταν $\kappa>\lambda>0$, τότε το τρίγωνο με πλευρές $\alpha=\kappa^2+\lambda^2$, $\beta=\kappa^2-\lambda^2$ και $\gamma=2\kappa\lambda$ είναι ορθογώνιο τρίγωνο.

Απάντηση

Βλέπουμε ότι:

$$\beta^2+\gamma^2=\left(\kappa^2-\lambda^2\right)^2+4\kappa^2\lambda^2=\left(\kappa^2\right)^2-2\kappa^2\lambda^2+\left(\lambda^2\right)^2+4\kappa^2\lambda^2=\kappa^4-2\kappa^2\lambda^2+\lambda^4+4\kappa^2\lambda^2=\kappa^4+2\kappa^2\lambda^2+\lambda^4$$

Επίσης:

$$\alpha^2=\left(\kappa^2+\lambda^2\right)^2=\left(\kappa^2\right)^2+2\kappa^2\lambda^2+\left(\lambda^2\right)^2=\kappa^4+2\kappa^2\lambda^2+\lambda^4$$

Εφόσον $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$, από το αντίστροφο του Πυθαγόρειου Θεωρήματος, το τρίγωνο με πλευρές τα α, β και γ θα είναι ορθογώνιο.

Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε

Να κατασκευάσετε έναν πίνακα έννοιας για τις ταυτότητες.

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Να αντιστοιχίσετε κάθε γινόμενο της στήλης Α με το ανάπτυγμά του στη στήλη Β.

Στήλη Α: γινόμενα	Στήλη Β: αναπτύγματα
1. $(x+y)^2$	**α.** $4x^2-4xy+y^2$
2. $(y-x)(x+y)$	**β.** $x^2+2xy+y^2$
3. $(y-x)^2$	**γ.** x^2+y^2
4. $(2x+y)^2$	**δ.** $-4x^2-4xy+y^2$
5. $(-2x+y)^2$	**ε.** $4x^2+4xy+y^2$
	στ. y^2-x^2
	ζ. $x^2-2xy+y^2$

2. Να χαρακτηρίσετε σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις ακόλουθες προτάσεις:

	Σ	Λ
α) $(\alpha+5)^2=\alpha^2+5^2$	☐	☐
β) $\alpha^2+4\alpha\beta+4\beta^2=(\alpha+2\beta)^2$	☐	☐
γ) $(\alpha+8)(\alpha-8)=\alpha^2-8^2$	☐	☐
δ) $(x-z)^2=z^2-2xz+x^2$	☐	☐

3. Να συμπληρώσετε τα κενά:

α) $x^2+6x+9=(x+\_\_)^2$ **β)** $4y^2+4y+1=(\_\_+1)^2$

γ) $(\alpha-2)(\alpha+2)=\_\_^2-\_\_^2$ **δ)** $100-9z^2=(\_\_-\_\_)(\_\_+\_\_)$

Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

4. Ποιες από τις επόμενες ισότητες είναι ταυτότητες;

α) $3x=0$ **β)** $2\cdot 15+10=40$ **γ)** $3x+x=4x$

δ) $x^8x^2=x^{10}$ **ε)** $\alpha^2=(\alpha-1)^2$ **στ)** $4x^2-1=(2x-1)(2x+1)$

5. Να βρείτε τα αναπτύγματα των τετραγώνων:

α) $(x+1)^2$ **β)** $(x+y)^2$ **γ)** $(5+x)^2$ **δ)** $(2x+1)^2$ **ε)** $(x^2+2)^2$ **στ)** $\left(y+\frac{1}{y}\right)^2$

6. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) x^2+2x+1 **β)** x^4+2x^2+1 **γ)** $4y^2+4y+1$

δ) $\alpha^2+6\alpha+9$ **ε)** $\frac{x^2}{4}+2x+4$ **στ)** $2x^3+20x^2+50x$

7. Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων χρησιμοποιώντας ταυτότητες:

α) $\left(\sqrt{0{,}03}+\sqrt{3}\right)^2$ **β)** $\left(\sqrt{5}+\sqrt{\frac{4}{5}}\right)^2$ **γ)** $\left(\frac{15}{7}\right)^2+2\cdot\frac{15}{7}\cdot\frac{6}{7}+\left(\frac{6}{7}\right)^2$

8. Φανταστείτε ότι ένας φίλος σας ή μια φίλη σας ισχυρίζεται ότι $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2$. Έχει δίκιο; Αν δεν έχει, τότε πώς θα τον/τη μεταπείθατε;

9. Να βρείτε τα αναπτύγματα των τετραγώνων:

α) $(x-1)^2$ **β)** $(2x-1)^2$ **γ)** $(x-4)^2$ **δ)** $(2-3x)^2$ **ε)** $(-x+y)^2$ **στ)** $(3\alpha-\beta)^2$

10. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) y^2-4y+4 **β)** $16-8x+x^2$ **γ)** $x^2-10x+25$

δ) $-x^2+12x-36$ **ε)** $\frac{y^2}{9}-2y+9$ **στ)** $3x^4-24x^3+48x^2$

11. Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων χρησιμοποιώντας ταυτότητες:

α) $1{,}3^2-2\cdot1{,}3\cdot0{,}3+0{,}3^2$ **β)** $\left(\frac{5}{3}\right)^2-2\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2$ **γ)** $\left(1+\sqrt{2}\right)^2+\left(1-\sqrt{2}\right)^2$

12. Να αναπτύξετε τα γινόμενα, χρησιμοποιώντας ταυτότητες:

α) $(5y-2)(5y+2)$ **β)** $\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)$ **γ)** $\left(3x^2+1\right)\left(3x^2-1\right)$

13. Να μετατρέψετε σε γινόμενα τις αλγεβρικές παραστάσεις:

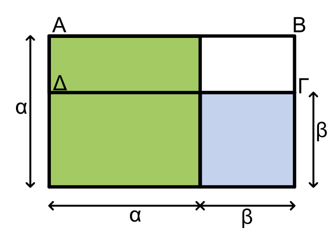
α) x^2-16 **β)** y^2-5 **γ)** $(z-1)^2-9$

δ) $121-9x^2$ **ε)** $12-75y^2$ **στ)** x^3-4x

14. Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων χρησιμοποιώντας ταυτότητες:

α) $7{,}7^2-2{,}3^2$ **β)** $\left(\sqrt{11}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{5}\right)$ **γ)** $\left(\sqrt{2}+3\right)\left(\sqrt{2}-3\right)$

15. Να εκφράσετε το εμβαδόν του ορθογώνιου παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ στο σχήμα ως σχέση των α^2 και β^2.

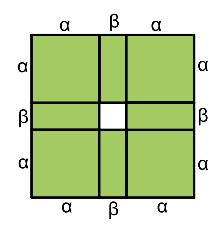


16. Στο σχήμα, από το μεγάλο τετράγωνο πλευράς $2\alpha+\beta$ αφαιρέσαμε το μικρό τετράγωνο πλευράς β.

α) Βασιστείτε στο σχήμα για να συμπληρώσετε την ισότητα με τα εμβαδά τετράπλευρων του σχήματος.

$$(2\alpha+\beta)^2-\beta^2=$$

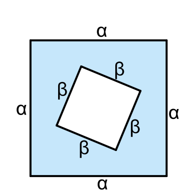
β) Να αποδείξετε αλγεβρικά τη σχέση που γράψατε στο α).



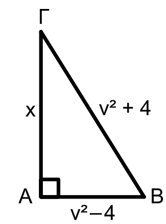
17. Τα δύο τετράγωνα πλευράς α και β του σχήματος οριοθετούν τη γαλάζια περιοχή.

α) Στην περίπτωση που $\alpha=7$ και $\beta=3$, ποιο είναι το εμβαδόν της γαλάζιας περιοχής; Θα μπορούσατε να βρείτε τις διαστάσεις ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου που να έχει το ίδιο εμβαδόν;

β) Στη γενική περίπτωση, θα μπορούσατε να βρείτε τις διαστάσεις ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου (ως σχέσεις των α και β) που να έχει το ίδιο εμβαδόν με τη γαλάζια περιοχή;



18. Να βρείτε το μονώνυμο του ν που περιγράφει την πλευρά ΑΓ του ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ.



19. Να κάνετε τις πράξεις και να γράψετε τα πολυώνυμα κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x:

α) $(2x-1)^2-4(x+2)^2+15$ **β)** $\left[(2x-1)^2-(2x+1)^2\right](x+3)(x-3)$

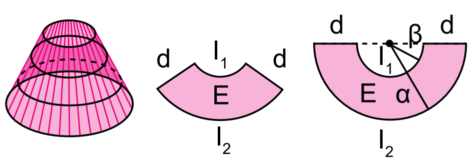
20. **α)** Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$xy=\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-\left(\frac{x-y}{2}\right)^2$$

Τι σχέση έχει η ταυτότητα που αποδείξατε με την εφαρμογή 2;

β) Να εξηγήσετε γιατί, όταν δύο αριθμοί x και y έχουν άθροισμα 24, τότε το γινόμενό τους είναι το πολύ 144 (όταν $x=y=12$).

21. Στο επόμενο σχήμα εικονίζεται ένας «κόλουρος κώνος», το ανάπτυγμα της επιφάνειάς του (σε γενική και ειδική περίπτωση) και ο τύπος για το εμβαδόν της.

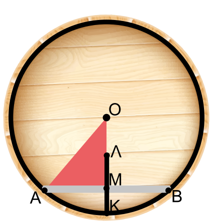


$$E=\frac{(l_1+l_2)d}{2}$$

Να επαληθεύσετε τον τύπο στην ειδική περίπτωση που τα δύο τόξα του αναπτύγματος είναι ημικύκλια ακτίνων α και β $(\alpha>\beta)$, αφού πρώτα γράψετε τα μήκη των τόξων l_1, l_2 και το απόστημα d ως αλγεβρικές εκφράσεις των α και β.

Η παράπλευρη επιφάνεια κόλουρου κώνου

22. Ένας οινοπαραγωγός επινόησε μια μέθοδο για να μετράει την ακτίνα της βάσης κυλινδρικών βαρελιών, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αρχικά εφαρμόζει τη ράβδο ΑΒ μήκους 20 cm στην κυκλική βάση. Έπειτα μετακινεί τη βελόνα ΚΛ, η οποία διαπερνά κάθετα τη ράβδο στο μέσο της Μ, έτσι ώστε η άκρη της Κ να ακουμπήσει στον κύκλο. Μετρώντας το ΚΜ, υπολογίζει την ακτίνα!



α) Ποια γεωμετρική σχέση έχει η ευθεία ΚΛ με το τμήμα ΑΒ; Γιατί το κέντρο Ο βρίσκεται πάνω στην ευθεία ΚΛ;

β) Αν ΚΜ = 1 cm και ρ είναι η ακτίνα της βάσης του βαρελιού, να εκφράσετε τις πλευρές ΟΑ και ΟΜ του τριγώνου ΟΑΜ ως πολυώνυμα πρώτου βαθμού του ρ.

γ) Να υπολογίσετε την ακτίνα ρ της κυκλικής βάσης, όταν ΚΜ = 1 cm.

Μέτρηση ακτίνας βαρελιού

2.5 Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο Πολυωνύμων

Δ1. Θυμάμαι το ΕΚΠ αριθμών και επεκτείνω

α) Να βρείτε το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ) των αριθμών στις παρακάτω περιπτώσεις:

i) $2^3 3^2$ και $2^2 3^4$ **ii)** $5^3 2^2$ και $5^2 2^4$ **iii)** $3^3 7^2$ και $3^2 7^4$

β) Με βάση τη διαδικασία για την εύρεση του ΕΚΠ αριθμών που εφαρμόσατε στο ερώτημα α), ποιο μονώνυμο θα είναι το ΕΚΠ των μονωνύμων x^3y^2 και x^2y^4;

γ) Με την ίδια λογική να βρείτε το ΕΚΠ των παραστάσεων στις παρακάτω περιπτώσεις:

i) $6x^3y^2$ και $9x^2y^5$ **ii)** $6(2x+1)^3(x-3)^2$ και $9(2x+1)^2(x-3)^5$

Συζητήστε στις ομάδες και συγκρίνετε στην τάξη τις ιδέες σας και τον τρόπο που εργαστήκατε.

Συζητάμε

...για το ΕΚΠ πολυωνύμων

Θυμόμαστε ότι για να βρούμε το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ) δύο αριθμών βρίσκουμε το γινόμενο των δυνάμεων όλων των πρώτων παραγόντων τους (κοινών και μη κοινών) με τον μεγαλύτερο εκθέτη.

Μια αντίστοιχη διαδικασία μπορούμε να ακολουθήσουμε για το ΕΚΠ των μονωνύμων και των πολυωνύμων.

Για παράδειγμα για τα μονώνυμα $10xy^3$ και $4x^3y^2$, αναλύουμε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τους αριθμητικούς παράγοντες και έχουμε:

$$10xy^3 = 2\cdot 5xy^3 \text{ και } 4x^3y^2 = 2^2x^3y^2$$

Επιλέγουμε όλες τις δυνάμεις (αριθμών και μεταβλητών) με τον μεγαλύτερο εκθέτη και βρίσκουμε το γινόμενο:

$$2^2 5x^3y^3 = 40x^3y^3$$

Το μονώνυμο αυτό έχει παράγοντες και τα δύο αρχικά μονώνυμα, καθώς μπορούμε να το γράψουμε ως $5(2^2x^3y^2)y$ ή ως $2(2\cdot 5xy^3)x^2$. Είναι δηλαδή κοινό τους πολλαπλάσιο.

Όπως και στους ακεραίους, λέμε ότι ένα πολυώνυμο P είναι **πολλαπλάσιο** του πολυωνύμου Q και του πολυωνύμου R, αν ισχύει:

$$P = Q\cdot R.$$

Αντίστοιχα, λέμε ότι τα πολυώνυμα Q και R είναι **παράγοντες** του P.

Για παράδειγμα, το πολυώνυμο $P = x^3 - x^2 + x - 1$ γράφεται:

$$P = x^3 - x^2 + x - 1 = (x+1)^2(x-1)$$
$$= (x+1)(x+1)(x-1)$$

Οπότε είναι πολλαπλάσιο των $(x-1)$, $(x+1)$, καθώς και του $(x+1)^2$, τα οποία έχει και παράγοντες.

Υπάρχει μονώνυμο με μικρότερους εκθέτες στις δυνάμεις του x ή του y που να είναι κοινό πολλαπλάσιο των $10xy^3$ και $4x^3y^2$; Αν ναι, δώστε ένα παράδειγμα. Αν όχι, αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Αντίστοιχα το ΕΚΠ των πολυωνύμων $P = 6x^2(x-2)(x+2) = 2\cdot 3\cdot x^2(x-2)(x+2)$ και $Q = 9x(x-2)^2 = 3^2x(x-2)^2$ είναι το ΕΚΠ $(P,Q) = 2\cdot 3^2x^2(x-2)^2(x+2) = 18x^2(x-2)^2(x+2)$.

Το πολυώνυμο αυτό είναι το κοινό πολλαπλάσιο των δύο πολυωνύμων με τον μικρότερο δυνατό βαθμό.

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Για να βρούμε το ΕΚΠ δύο ή περισσότερων πολυωνύμων, ακολουθούμε τα επόμενα βήματα: **1.** Παραγοντοποιούμε το κάθε πολυώνυμο. **2.** Βρίσκουμε το ΕΚΠ των αριθμητικών παραγόντων των πολυωνύμων. **3.** Επιλέγουμε από κάθε παράγοντα που περιέχει μεταβλητές τη δύναμή του με τον μεγαλύτερο εκθέτη. Το γινόμενο αυτών των παραγόντων στη μεγαλύτερή τους δύναμη με το ΕΚΠ των αριθμητικών παραγόντων είναι το ΕΚΠ των πολυωνύμων.	Για παράδειγμα, αν $P=6x^2-24$ και $Q=4x^2+16x+16$, τότε: **1.** $P=6(x-2)(x+2)$ και $Q=4(x+2)^2$ **2.** $ΕΚΠ(6,4)=12$ **3.** $ΕΚΠ(P,Q)=12(x-2)(x+2)^2$

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. Να βρείτε το ΕΚΠ των αλγεβρικών παραστάσεων στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $12x^3y$ **και** $30xy^3$ **β)** $P=9(x-2)(2x+3)$ **και** $Q=3(2x-4)^2(x+1)$

ΕΚΠ μονωνύμων Ι

Απάντηση

α) Αναλύουμε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τους συντελεστές των μονωνύμων και βρίσκουμε το ΕΚΠ:

$$12=2^2 3 \text{ και } 30=2\cdot 3\cdot 5, \text{ οπότε } ΕΚΠ(12,30)=2^2 3\cdot 5=60.$$

Στη συνέχεια βρίσκουμε το γινόμενο του ΕΚΠ των αριθμητικών παραγόντων με τις δυνάμεις όλων των μεταβλητών υψωμένες στον μεγαλύτερο εκθέτη που συναντάμε:

$$ΕΚΠ\left(12x^3y, 30xy^3\right)=60x^3y^3$$

β) 1ο βήμα

Παρατηρούμε ότι ο παράγοντας $(2x-4)$ του πολυωνύμου Q παραγοντοποιείται περαιτέρω και γίνεται $(2x-4)=2(x-2)$. Οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} Q&=3(2x-4)^2(x+1)=6\left[2(x-2)\right]^2(x+1)\\ &=3\cdot 2^2(x-2)^2(x+1)\end{aligned}$$

2ο βήμα

Το ΕΚΠ των αριθμητικών παραγόντων $9=3^2$ και $3\cdot 2^2$ είναι το $3^2\cdot 2^2=36$.

3ο βήμα

Επιλέγουμε τις δυνάμεις με τον μεγαλύτερο εκθέτη όλων των παραγόντων που περιέχουν μεταβλητές και βρίσκουμε το ΕΚΠ:

$$ΕΚΠ\,(P,Q)=36(x-2)^2(x+1)(2x+3)$$

---

2. Να βρείτε το ΕΚΠ των πολυωνύμων $2x^2-8x+8$ **και** $5x^2-20$.

ΕΚΠ πολυωνύμων Ι

Απάντηση

Έχουμε ότι $2x^2-8x+8=2\left(x^2-4x+4\right)=2(x-2)^2$ και $5x^2-20=5\left(x^2-4\right)=5(x-2)(x+2)$.
Επίσης, $ΕΚΠ(2,5)=10$. Οπότε, $ΕΚΠ\left(2x^2-8x+8, 5x^2-20\right)=10(x-2)^2(x+2)$.

3. **Ποια από τα παρακάτω πολυώνυμα είναι κοινά πολλαπλάσια των $P = x^3 - x$ και $Q = x^3 + 2x^2 + x$; Είναι κάποιο από αυτά το ΕΚΠ(P,Q);**

$R_1 = x^2(x-1)(x+1)^2$ $\quad$ $R_2 = x^2(x+1)^2$ $\quad$ $R_3 = x(x-1)(x+1)^2$

$R_4 = 10x(x-1)(x+1)^2$ $\quad$ $R_5 = x(x-1)^2(x+1)$

Απάντηση

Ένας τρόπος για να ελέγξουμε αν ένα πολυώνυμο R είναι κοινό πολλαπλάσιο των πολυωνύμων P και Q, είναι ο ακόλουθος:

- Παραγοντοποιούμε τα P και Q:

$$P = x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1)$$

και

$$Q = x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x + 1) = x(x+1)^2.$$

- Ελέγχουμε αν όλοι οι παράγοντες των P και Q είναι και παράγοντες του R.

Παρατηρούμε ότι το πολυώνυμο R_2 δεν είναι πολλαπλάσιο του P, καθώς δεν έχει ως παράγοντα το $(x-1)$, και το πολυώνυμο R_5 δεν είναι πολλαπλάσιο του Q, καθώς δεν έχει παράγοντα το $(x+1)^2$.

Τα πολυώνυμα R_1, R_3 και R_4 είναι κοινά πολλαπλάσια των P και Q, καθώς έχουν ως παράγοντες τους παράγοντες και των δύο πολυωνύμων.

Από αυτά το R_3 είναι το ΕΚΠ(P,Q), καθώς έχει όλους τους απαραίτητους παράγοντες ώστε να είναι πολλαπλάσιο των P και Q και κανέναν άλλο παράγοντα.

Χωρίς κάποιον από αυτούς δε θα ήταν κοινό πολλαπλάσιο των δύο πολυωνύμων.

Πώς σχετίζονται τα R_1 και R_4 με το R_3, που είναι το ΕΚΠ (P,Q); Γενικότερα ποια σχέση έχουν τα κοινά πολλαπλάσια δύο πολυωνύμων με το Ελάχιστο Κοινό πολλαπλάσιο;

ΕΚΠ πολυωνύμων III

ΕΚΠ πολυωνύμων IV

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Σε κάθε ζεύγος παραστάσεων της στήλης Α να αντιστοιχίσετε το ΕΚΠ τους από τη στήλη Β.

Α	Β
1. x^4y^2, x^3y^4	**α.** x^3y^2
2. xy^2, x^3	**β.** x^2y^4
3. x^2y^4, x^2y^3	**γ.** x^4y^4
	δ. x^4y^2
	ε. x^4y^7

2. Να βρείτε το ΕΚΠ των μονωνύμων στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $16x^2$ και $20x^4$

β) x^2y και xy^3

γ) $16x^2y$ και $20xy^3$

ΕΚΠ μονωνύμων ΙΙ

3. Σε κάθε ζεύγος παραστάσεων της στήλης Α να αντιστοιχίσετε το ΕΚΠ τους από τη στήλη Β.

Α	Β
1. $(x-1)^2(x+2),\ (x-1)(x+2)^2$	**α.** $(x-1)^4(x+2)^3$
2. $(x-1)(x+2)^2,\ (x-1)^3(x+2)$	**β.** $(x-1)^2(x+2)^2$
3. $(x-1)^3(x+2)^2,\ (x-1)^4(x+2)^3$	**γ.** $(x-1)^4(x+2)^4$
	δ. $(x-1)^3(x+2)^2$

4. Να βρείτε το ΕΚΠ των πολυωνύμων στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $(2x-1)^2(x+2),\ (2x-1)(x+2)^3$

β) $(x+3)(3x-2)^4,\ (x+3)^2(3x-2)^3$

γ) $15(2x-3)^2(x+7)^2,\ 25(2x-3)(x+7)^4$

δ) $21(x+4)^4(3x+2)^3,\ 14(x+4)^2(3x+2)^4$

ΕΚΠ πολυωνύμων ΙΙ

5. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα γράφοντας το ΕΚΠ των παραστάσεων Α και Β.

Β \ Α	$\mathbf{4x^2}$	$\mathbf{9(x+2)^2}$	$\mathbf{12x(x+2)^2}$
$\mathbf{6x(x+2)}$			
$\mathbf{x(x+2)}$			
$\mathbf{18x^3(x+2)}$			

Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

6. Να βρείτε το ΕΚΠ των πολυωνύμων P και Q στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $P=2(x^2+x)^2(x+2),\ Q=3(x^2+2x)(x+1)$

β) $P=(6x+18)(x+1)^3,\ Q=(x+3)^2(2x+2)^2$

γ) $P=x^2(x-1)^2,\ Q=(x^2+x)^3$

7. Να βρείτε το ΕΚΠ των πολυωνύμων Ρκαι Q στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $P=2(x+1)+x(x+1)$, $Q=3(x+2)+x(x+2)$

β) $P=x(7x+3)+(7x+3)^2$, $Q=x(2x+1)+3(2x+1)^2$

γ) $P=x(4x+2)+4(2x+1)^2$, $Q=(5x+2)^2-(5x+2)$

8. Να βρείτε το ΕΚΠ των μονωνύμων στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $6x^2y$, $9xy^2$, $4x^3y$

β) $5x^2yz$, $10x^2y^3z$, $2xy^2z^3$

9. Να βρείτε το ΕΚΠ των πολυωνύμων στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) x^4-1, x^2-2x+1

β) x^3+3x^2-x-3, x^3+2x^2+x

γ) $2x^2-4x$, $3x^4-12x^2$

10. Να βρείτε το ΕΚΠ των πολυωνύμων $2x^2-4x$, $3x^4-12x^2$ και $2x^5-8x^4+8x^3$.

11. Αν $ΕΚΠ(P,Q)=Q$, τι σχέση έχουν οι παραστάσεις P και Q;

12. Αν το ΕΚΠ δύο πολυωνύμων είναι το γινόμενό τους, τι συμπεραίνετε για τα πολυώνυμα αυτά;

13. Βρείτε δύο πολυώνυμα P και Q τέτοια ώστε $ΕΚΠ(P,Q)=6(x-1)^3(x+2)^2$.

2.6 Ρητές παραστάσεις

Δ1. Πολυώνυμα στον παρονομαστή

Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων, σε όποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις είναι εφικτό:

α) $\dfrac{1}{x-1}$, για $x=-1$ **β)** $\dfrac{1}{x^2-1}$, για $x=2$ και $x=-1$

γ) $\dfrac{y}{2y^2-4y}$, για $y=0$ και $y=1$ **δ)** $\dfrac{3x-1}{x^2+x+1}$, για $x=0$ και $x=1$

ε) $\dfrac{\alpha-\frac{1}{2}}{\alpha+\frac{1}{2}}$, για $\alpha=0$, $\alpha=\dfrac{1}{2}$ και $\alpha=-\dfrac{1}{2}$

Συζητήστε στις ομάδες και μετά στην τάξη για να διατυπώσετε τον λόγο που σε κάποιες περιπτώσεις δεν είναι εφικτό να βρείτε την τιμή της παράστασης.

Συζητάμε

...για παραστάσεις με παρονομαστή πολυώνυμο

Οι παρακάτω παραστάσεις έχουν ένα κοινό χαρακτηριστικό: Οι παρονομαστές τους είναι πολυώνυμα, ενώ σε κάποια από αυτά είναι πολυώνυμα και οι αριθμητές τους.

$$\frac{1}{x^2-4},\ \frac{3\alpha-1}{\alpha^2+1},\ \frac{2y-1}{y^2+y+2},\ \frac{2}{\omega+\frac{3}{2}},\ \frac{1}{x}$$

Για να υπολογίσουμε την τιμή μιας παράστασης για συγκεκριμένη τιμή της μεταβλητής της, θέτουμε στη θέση της μεταβλητής την τιμή αυτή. Για παράδειγμα, για $x=1$ η τιμή της παράστασης $\dfrac{1}{x^2-4}$ είναι $\dfrac{1}{1^2-4}=\dfrac{1}{-3}=-\dfrac{1}{3}$. Ωστόσο αυτό δεν μπορεί να γίνει για οποιαδήποτε τιμή της μεταβλητής.

Για $x=2$, η τιμή του παρονομαστή x^2-4 είναι 0. Άρα λέμε ότι για $x=2$ η παράσταση **δεν ορίζεται.** Το ίδιο συμβαίνει και για $x=-2$, γιατί $(-2)^2-4=4-4=0$.

Θυμόμαστε ότι:
Ένα κλάσμα δεν μπορεί να έχει παρονομαστή το 0. Άρα η παράσταση $\dfrac{A}{B}$ ορίζεται μόνο για $B\neq 0$.

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Αν ο παρονομαστής μιας παράστασης είναι πολυώνυμο, την ονομάζουμε ρητή. Μια ρητή παράσταση ορίζεται για τους πραγματικούς αριθμούς που η τιμή του παρονομαστή της δεν είναι μηδέν.	Η παράσταση $\dfrac{1}{x}$ είναι ρητή με μονώνυμο ως παρονομαστή και ορίζεται για κάθε πραγματικό αριθμό εκτός από το 0. Η $\dfrac{1}{x^2-4}$ ορίζεται για κάθε πραγματικό αριθμό εκτός από 2 και -2. Η $\dfrac{3\alpha-1}{\alpha^2+1}$ ορίζεται για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό, καθώς ο παρονομαστής της δε μηδενίζεται για κάποια τιμή του α.

Δ2. Απλοποιώ ρητές παραστάσεις

$$\frac{A\cdot B\cdot \cancel{\Gamma}}{\cancel{\Gamma}\cdot \Delta\cdot E}$$

α) Να απλοποιήσετε την παράσταση αφού παραγοντοποιήσετε τον παρονομαστή της $\dfrac{2\cdot 17}{17^2-3\cdot 17}$.

β) Δίνονται οι ρητές παραστάσεις:

$$\frac{2x}{x^2-3x},\ \frac{2x-2}{x^2-1} \text{ και } \frac{4x^2+8x}{4x}$$

i) Να παραγοντοποιήσετε τους αριθμητές και τους παρονομαστές των παραπάνω παραστάσεων.

ii) Μπορείτε να απλοποιήσετε τις ρητές παραστάσεις;

γ) Παρακάτω φαίνεται η απλοποίηση της ρητής παράστασης $\dfrac{x^2-x}{x}$.

$$\frac{x^2-x}{x}=\frac{x(x-1)}{x}=\frac{x}{x}\cdot\frac{(x-1)}{1}=1\cdot(x-1)=x-1$$

Ορίζεται η παραπάνω ρητή παράσταση για $x=0$;

Συζητάμε

...για την απλοποίηση ρητών παραστάσεων

Με τη βοήθεια της παραγοντοποίησης μπορούμε να απλοποιήσουμε ρητές παραστάσεις.

Για παράδειγμα η ρητή παράσταση $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-x}$ γράφεται ως:

$$\frac{(x-1)^2}{x(x-1)}=\frac{1}{x}\cdot\frac{(x-1)^2}{(x-1)}=\frac{1}{x}\cdot(x-1)=\frac{x-1}{x} \quad \text{ή αλλιώς:}$$

$$\frac{(x-1)\cancel{(x-1)}}{x\cancel{(x-1)}}=\frac{x-1}{x}$$

Θυμόμαστε ότι:

$$\frac{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma}{\beta\cdot\gamma\cdot\delta}=\frac{\beta\cdot\gamma}{\beta\cdot\gamma}\cdot\frac{\alpha}{\delta}=1\cdot\frac{\alpha}{\delta}=\frac{\alpha}{\delta} \text{ ή αλλιώς}$$

$$\frac{\alpha\cdot\cancel{\beta\cdot\gamma}}{\cancel{\beta\cdot\gamma}\cdot\delta}=\frac{\alpha}{\delta}$$

Παρατηρούμε ότι η $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-x}$ ορίζεται για κάθε πραγματικό αριθμό εκτός από $x=1$ και $x=0$, γιατί μηδενίζεται ο παρονομαστής της. Δηλαδή πρέπει να είναι $x\neq 1$ και $x\neq 0$. Όμως η παράσταση $\dfrac{x-1}{x}$ που προκύπτει μετά την απλοποίηση ορίζεται για $x=1$. Ωστόσο, εφόσον η $\dfrac{x-1}{x}$ «προέρχεται» από την απλοποίηση της $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-x}$, πρέπει να κρατήσουμε το $x\neq 1$ και δεν μπορούμε να αντικαταστήσουμε $x=1$ σε αυτή.

Όταν κάνουμε απλοποιήσεις ή και πράξεις σε μια ρητή παράσταση, αυτές οι διαδικασίες ισχύουν για τις τιμές των μεταβλητών για τις οποίες ορίζεται η αρχική ρητή παράσταση. Από εδώ και στο εξής αυτό θα το έχουμε υπόψη μας, χωρίς να βρίσκουμε πότε ορίζεται η παράσταση (εκτός αν ζητείται).

Δ3. Πολλαπλασιάζω και διαιρώ ρητές παραστάσεις

α) Να κάνετε τους πολλαπλασιασμούς $\frac{3x^2}{2y}\cdot\frac{4y^3}{x}$, $\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2-1}{x+1}$ και $\frac{x^2-2x}{x^2-1}\cdot\frac{x-1}{x^2-4}$.

β) Να κάνετε τις διαιρέσεις $\frac{1}{x}:\frac{x+1}{x^2-1}$ και $\frac{x^2-2x}{x^2-1}:\frac{x^2-4}{x-1}$.

γ) Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις που βρήκατε στα α) και β).

Συζητήστε στην τάξη τον τρόπο που εργαστήκατε. Υπάρχουν διαφορετικοί τρόποι;

Θυμόμαστε ότι:

$\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$

$\frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\delta}{\gamma}=\frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$

Συζητάμε

...για πολλαπλασιασμό και διαίρεση ρητών παραστάσεων

Πολλαπλασιάσουμε και διαιρούμε ρητές παραστάσεις, όπως πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε κλάσματα. Συχνά μας βολεύει ο αριθμητής και ο παρονομαστής των ρητών παραστάσεων να είναι παραγοντοποιημένοι, καθώς ενδέχεται να γίνονται απλοποιήσεις. Για παράδειγμα:

$$\frac{x-1}{x^2-9}\cdot\frac{x^2-3x}{x^2-1}=\frac{x-1}{(x-3)(x+3)}\cdot\frac{x(x-3)}{(x-1)(x+1)}=\frac{(x-1)\cdot x\cdot(x-3)}{(x-3)(x+3)(x-1)(x+1)}=$$

$$=\frac{\cancel{(x-1)}\cdot x\cdot\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}(x+3)\cancel{(x-1)}(x+1)}=\frac{x}{(x+3)(x+1)}$$

Δ4. Υπολογίζω αθροίσματα ρητών παραστάσεων

α) Να βρείτε το ΕΚΠ$(12x^2, 6x^3)$.

β) Να κάνετε ομώνυμα τα κλάσματα $\frac{1}{12x^2}$ και $\frac{1}{6x^3}$.

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\frac{1}{12x^2}+\frac{1}{6x^3}$.

δ) Να υπολογίσετε τη διαφορά $\frac{5}{12x^2}-\frac{7}{6x^3}$.

Συζητήστε στην τάξη τον τρόπο που εργαστήκατε και διαμορφώστε κανόνες για την πρόσθεση και την αφαίρεση ρητών παραστάσεων.

Θυμόμαστε ότι:

Για να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε κλάσματα, πρέπει να είναι ομώνυμα:

- $\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\alpha+\beta}{\gamma}$
- Για να υπολογίσουμε το άθροισμα $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}$, πρέπει να κάνουμε τα κλάσματα ομώνυμα. Για τον σκοπό αυτό πρέπει να βρούμε το ΕΚΠ των β και δ.

Συζητάμε

...για το άθροισμα ρητών παραστάσεων

Για να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε ρητές παραστάσεις, πρέπει να είναι ομώνυμες.

Αν δεν είναι ομώνυμες, προσπαθούμε να τις κάνουμε, είτε με απλοποιήσεις είτε χρησιμοποιώντας το ΕΚΠ των παρονομαστών τους είτε συνδυάζοντας τους δύο τρόπους.

Για παράδειγμα, αν θέλουμε να υπολογίσουμε το άθροισμα:

$$\frac{x-1}{x}+\frac{3}{x^2-2x}-\frac{2x^2+4x}{x^2-4}$$

αρχικά παραγοντοποιούμε αριθμητές και παρονομαστές, εφόσον παραγοντοποιούνται. Έτσι το άθροισμα γράφεται:

$$\frac{x-1}{x}+\frac{3}{x(x-2)}-\frac{2x(x+2)}{(x-2)(x+2)}$$

Στη συνέχεια κάνουμε απλοποιήσεις, εφόσον υπάρχουν:

$$\frac{x-1}{x}+\frac{3}{x(x-2)}-\frac{2x\cancel{(x+2)}}{(x-2)\cancel{(x+2)}}=\frac{x-1}{x}+\frac{3}{x(x-2)}-\frac{2x}{x-2}$$

Το ΕΚΠ των παρονομαστών $x,\ x(x-2)$ και $x-2$ είναι $x(x-2)$.

Κάνουμε ομώνυμα τα κλάσματα πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή κάθε κλάσματος με τον παράγοντα που «λείπει» από τον παρονομαστή για να γίνει ίσος με το ΕΚΠ.

Έτσι, στον παρονομαστή του $\frac{x-1}{x}$ λείπει το $(x-2)$, στον παρονομαστή του $\frac{3}{x(x-2)}$ δε λείπει κάτι, ενώ στον παρονομαστή του $\frac{2x}{x-2}$ λείπει το x.

Άρα:

$$\frac{(x-2)(x-1)}{x(x-2)}+\frac{3}{x(x-2)}-\frac{2x\cdot x}{x(x-2)}=\frac{(x-2)(x-1)}{x(x-2)}+\frac{3}{x(x-2)}-\frac{2x^2}{x(x-2)}=\frac{(x-2)(x-1)+3-2x^2}{x(x-2)}=$$

$$=\frac{x^2-x-2x+2+3-2x^2}{x(x-2)}=\frac{-x^2-3x+5}{x(x-2)}$$

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Για να απλοποιήσουμε ρητές παραστάσεις: • Γράφουμε ως γινόμενα με τη βοήθεια παραγοντοποίησης αριθμητές και παρονομαστές, αν γίνεται. • Απλοποιούμε τους παράγοντες που είναι κοινοί σε αριθμητή και παρονομαστή.	$\frac{x}{x^2-3x}=\frac{x}{x(x-3)}=$ $=\frac{x}{x}\cdot\frac{1}{x-3}=1\cdot\frac{1}{x-3}=\frac{1}{x-3}.$

Για να πολλαπλασιάσουμε ρητές παραστάσεις: • Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή με αριθμητή και παρονομαστή με παρονομαστή, όπως στα κλάσματα. • Συχνά είναι χρήσιμο να έχουμε προηγουμένως παραγοντοποιήσει αριθμητές και παρονομαστές, ώστε να κάνουμε απλοποιήσεις όπου προκύπτουν. Για να διαιρέσουμε ρητές παραστάσεις, πολλαπλασιάζουμε με τον αντίστροφο του διαιρέτη, όπως στα κλάσματα.	$\frac{x}{x^2-1}\cdot\frac{x-1}{x^2}=\frac{x}{(x-1)(x+1)}\cdot\frac{x-1}{x^2}=$ $\frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)x^2}=\frac{\cancel{x}\,\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}\,(x+1)x^{\cancel{2}}}=$ $=\frac{1}{(x+1)x}$
Για να βρούμε το άθροισμα (ή τη διαφορά) ρητών παραστάσεων: • Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές τους. • Βρίσκουμε το ΕΚΠ των παρονομαστών. • Κάνουμε ομώνυμες τις παραστάσεις πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή κάθε κλάσματος με τους κατάλληλους παράγοντες του ΕΚΠ. • Προσθέτουμε ή αφαιρούμε τις ομώνυμες ρητές παραστάσεις, όπως τα κλάσματα.	$\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2-2x}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x(x-2)}$ ΕΚΠ$\big(x,\ x(x-2)\big)$ το $x(x-2)$. Άρα: $\frac{1\cdot(x-2)}{x(x-2)}+\frac{1}{x(x-2)}=\frac{x-2+1}{x(x-2)}=\frac{x-1}{x(x-2)}$

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων, εφόσον ορίζονται:

α) $\frac{1}{x(x-1)}$, **για** $x=0$, $x=1$ **και** $x=2$

β) $\frac{x-1}{2x(y+3)}$, **για** $x=-1$ **και** $y=3$,

γ) $\frac{\omega-\frac{3}{4}}{\omega+\frac{3}{4}}$, **για** $\omega=\frac{1}{2}$

δ) $\frac{1}{x+1}+\frac{x}{x+2}\cdot\frac{x-1}{x+3}$, **για** $x=-1$ **και** $x=0$.

Γινόμενο πολυωνύμων διάφορο του μηδενός

Πότε ορίζεται;

Απάντηση

α) Για $x=0$ ο παρονομαστής μηδενίζεται: $0(0-1)=0$. Ομοίως για $x=1$, καθώς $1(1-1)=0$.
Άρα η παράσταση δεν ορίζεται για $x=0$ και $x=1$.

Για $x=2$ η τιμή της παράστασης είναι $\frac{1}{2(2-1)}=\frac{1}{2\cdot 1}=\frac{1}{2}$.

β) Αντικαθιστώντας στην παράσταση, έχουμε $\frac{-1-1}{2(-1)(3+3)}=\frac{-2}{-2\cdot 6}=\frac{1}{6}$.

γ) Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$\frac{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}=\frac{\frac{2}{4}-\frac{3}{4}}{\frac{2}{4}+\frac{3}{4}}=\frac{-\frac{1}{4}}{\frac{5}{4}}=-\frac{1\cdot 4}{4\cdot 5}=-\frac{1\cdot \cancel{4}}{\cancel{4}\cdot 5}=-\frac{1}{5}$$

δ) Για $x=-1$ δεν ορίζεται η ρητή παράσταση $\frac{1}{x+1}$, γιατί μηδενίζεται ο παρονομαστής της.

Για $x=0$ έχουμε $\frac{1}{0+1}+\frac{0}{0+2}\cdot\frac{0-1}{0+3}=\frac{1}{1}+0\cdot\frac{-1}{3}=1.$

Θυμίζουμε ότι κάνουμε ένα σύνθετο κλάσμα απλό ως εξής:

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}}=\frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\delta}{\gamma}=\frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$$ ή κατευθείαν

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}}=\frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$$

---

2. **Να παραγοντοποιήσετε τους αριθμητές και τους παρονομαστές των ρητών παραστάσεων, όπου γίνεται, και στη συνέχεια να τις απλοποιήσετε:**

α) $\frac{xy^2}{x^2y}$ **β)** $\frac{x^2-12x+36}{x^2-36}$ **γ)** $\frac{x^2+x}{x^2-1}$ **δ)** $\frac{x^3-2x^2}{2x-x^2}$

Απάντηση

α) 1ος τρόπος: $\frac{xy^2}{x^2y}=\frac{x\cdot y\cdot y}{x\cdot x\cdot y}=\frac{x}{x}\cdot\frac{y}{x}\cdot\frac{y}{y}=1\cdot\frac{y}{x}\cdot 1=\frac{y}{x}.$

2ος τρόπος: $\frac{xy^2}{x^2y}=\frac{\cancel{x}\cdot y\cdot \cancel{y}}{\cancel{x}\cdot x\cdot \cancel{y}}=\frac{y}{x}.$

Συχνά γράφουμε: $\frac{xy^2}{x^2y}=\frac{\cancel{x}y^{\cancel{2}}}{x^{\cancel{2}}\cancel{y}}=\frac{y}{x}$

β) Ο αριθμητής γίνεται: $x^2-12x+36=(x-6)^2.$

Ο παρονομαστής γίνεται: $x^2-36=x^2-6^2=(x-6)(x+6).$

Άρα η παράσταση γίνεται:

$$\frac{x^2-12x+36}{x^2-36}=\frac{(x-6)^2}{(x-6)(x+6)}=\frac{\cancel{(x-6)}(x-6)}{\cancel{(x-6)}(x+6)}=\frac{x-6}{x+6}$$

γ) Ο αριθμητής και ο παρονομαστής γίνονται αντίστοιχα: $x^2+x=x(x+1)$ και $x^2-1=(x-1)(x+1)$.

Επομένως, η παράσταση γίνεται:

$$\frac{x^2+x}{x^2-1}=\frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{x\cancel{(x+1)}}{(x-1)\cancel{(x+1)}}=\frac{x}{x-1}$$

.

δ) Ο αριθμητής και ο παρονομαστής γίνονται αντίστοιχα: $x^3-2x^2=x^2(x-2)$ και $2x-x^2=x(2-x)$.

Γράφουμε την παράσταση:

$$\frac{x^3-2x^2}{2x-x^2}=\frac{x^2(x-2)}{x(2-x)}.$$

Για να την απλοποιήσουμε όσο το δυνατόν περισσότερο, μετασχηματίζουμε τον παρονομαστή:

$$\frac{x^2(x-2)}{x(2-x)}=\frac{x^2(x-2)}{-x(x-2)}=\frac{x^{\cancel{2}}\cancel{(x-2)}}{-\cancel{x}\cancel{(x-2)}}=\frac{x}{-1}=-x$$

Οι παραστάσεις $x-2$ και $2-x$ είναι αντίθετες.
Άρα μπορούμε να γράψουμε $2-x=-(x-2)$.
Έτσι, για τον παρονομαστή ισχύει:
$x(2-x)=x[-(x-2)]=-x(x-2)$

Απλοποιώ ρητές παραστάσεις

Για να απλοποιήσουμε ρητές παραστάσεις, χρειάζεται ο αριθμητής και ο παρονομαστής τους να είναι γινόμενα, δηλαδή παραγοντοποιημένοι.

Για παράδειγμα, το παρακάτω είναι λάθος, γιατί στον αριθμητή έχουμε άθροισμα και όχι γινόμενο:

$$\frac{\cancel{x}+(x-1)}{\cancel{x}(x+1)}=\frac{x-1}{x+1}$$

Συχνά λάθη σε ρητές παραστάσεις

3. α) **Να αποδείξετε ότι η $\frac{\mathbf{x^2-1}}{\mathbf{x^2-x}}$ γράφεται ως $\frac{\mathbf{x+1}}{\mathbf{x}}$.**

β) Συμφωνείτε με την παρακάτω πρόταση;

«Μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή της παράστασης $\frac{\mathbf{x^2-1}}{\mathbf{x^2-x}}$, για $\mathbf{x = 1}$ χρησιμοποιώντας την απλοποιημένη της μορφή $\frac{\mathbf{x+1}}{\mathbf{x}}$».

Απάντηση

α) Παραγοντοποιώντας αριθμητή και παρονομαστή, έχουμε:

$$\frac{x^2+1}{x^2-x}=\frac{x^2-1^2}{x(x-1)}=\frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)}=\frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)}$$

Για να ορίζεται η παράσταση, πρέπει ο παρονομαστής $x(x-1)$ να μην είναι 0. Για να ισχύει αυτό, πρέπει $x \neq 0$ και $x \neq 1$. Τότε:

$$\frac{x^2+1}{x^2-x}=\frac{x^2-1^2}{x(x-1)}=\frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)}=\frac{(\cancel{x-1})(x+1)}{x(\cancel{x-1})}=\frac{x+1}{x}$$

β) Η ρητή παράσταση $\frac{x^2-1}{x^2-x}$ δεν ορίζεται για $x=1$, γιατί $1^2-1=0$, δηλαδή μηδενίζεται ο παρονομαστής της. Επομένως στην απολοποιημένη μορφή της $\frac{x+1}{x}$ δεν μπορούμε να αντικαταστήσουμε $x=1$. Άρα η πρόταση δεν είναι σωστή.

4. **α) Είναι σωστές οι παρακάτω ισότητες;**

$$\mathbf{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2\cdot 3}} \quad \textbf{και} \quad \mathbf{\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{1}{5\cdot 6}}$$

β) Να γενικεύσετε τα συμπεράσματά σας από το α).

Απάντηση

α) Οι ισότητες είναι σωστές: $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3}{2\cdot 3}-\frac{2}{2\cdot 3}=\frac{3-2}{6}=\frac{1}{6}=\frac{1}{2\cdot 3}$ και $\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{6}{5\cdot 6}-\frac{5}{5\cdot 6}=\frac{6-5}{30}=\frac{1}{30}=\frac{1}{5\cdot 6}$.

β) Αν x είναι τυχαίος θετικός ακέραιος και $x+1$ ο επόμενός τους, τότε θα υπολογίσουμε την παράσταση:

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$$

Το ΕΚΠ των παρονομαστών είναι $x(x+1)$, άρα $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{x+1}{x(x+1)}-\frac{x}{x(x+1)}=\frac{x+1-x}{x(x+1)}=\frac{1}{x(x+1)}$.

Επομένως $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x(x+1)}$.

Αντικαθιστώντας $x=2$ και $x=5$, προκύπτουν οι ισότητες του α). Ωστόσο μπορούμε να αντικαταστήσουμε οποιονδήποτε θετικό ακέραιο θέλουμε και να προκύψουν αντίστοιχες ισότητες. Π.χ. για $x=10$:

$$\frac{1}{10}-\frac{1}{10+1}=\frac{1}{10\cdot(10+1)} \text{ ή αλλιώς } \frac{1}{10}-\frac{1}{11}=\frac{1}{10\cdot 11}$$

Πράξεις ρητών παραστάσεων

Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε

Να κατασκευάσετε έναν πίνακα έννοιας για τις ρητές παραστάσεις.

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Ποιες από τις παρακάτω παραστάσεις είναι ρητές παραστάσεις;

α) $\frac{2}{x}$ **β)** $\frac{\sqrt{x}-1}{4}$ **γ)** $\frac{\alpha}{\beta}$ **δ)** $\frac{xy+x^2}{2xy}$ **ε)** $\frac{3x^4-5x+2}{6-\sqrt{x}}$ **στ)** $\frac{2x}{3x}$

2. Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων για όποιες τιμές του x είναι εφικτό:

α) $\frac{1}{x-4}$, για $x=1$ και $x=4$ **β)** $\frac{1}{x^2+1}$, για $x=0$ και $x=-1$ **γ)** $\frac{x+1}{x^2-1}$, για $x=0$ και $x=1$

3. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η κάθε ρητή παράσταση:

α) $\frac{1}{x}$ **β)** $\frac{x-1}{x-1}$ **γ)** $\frac{x+3}{x-2}$ **δ)** $\frac{2x}{2x+3}$ **ε)** $-\frac{3x^2+2}{4x-1}$ **στ)** $\frac{2x^3(x-1)}{x^2+3}$

4. Στις παρακάτω ρητές παραστάσεις έγινε απλοποίηση. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις ως σωστές ή λανθασμένες.

	Σ	Λ
α) $\frac{x^3}{x}=\frac{x^{\cancel{3}}}{\cancel{x}}=x^2$	☐	☐
β) $\frac{x^2+1}{x}=\frac{x^{\cancel{2}}+1}{\cancel{x}}=x+1$	☐	☐
γ) $\frac{x-2}{4x(x-2)}=\frac{\cancel{x-2}}{4x\cancel{(x-2)}}=\frac{1}{4x}$	☐	☐
δ) $\frac{(x+3)(x-4)^3}{(x-4)^4}=\frac{(x+3)\cancel{(x-4)^3}}{(x-4)^{\cancel{4}}}=\frac{x+3}{x-4}$	☐	☐
ε) $\frac{x^3+(x-1)^2}{(x-1)^2}=\frac{x^3+\cancel{(x-1)^2}}{\cancel{(x-1)^2}}=x^3+1$	☐	☐
στ) $\frac{(2x-3)(3x+1)^3}{(3x+1)^2(2x-3)^2}=\frac{\cancel{(2x-3)}(3x+1)^{\cancel{3}}}{\cancel{(3x+1)^2}(2x-3)^{\cancel{2}}}=\frac{3x+1}{2x-3}$	☐	☐

Αιτιολογήστε τις επιλογές σας για όσες προτάσεις επιλέξατε ως λανθασμένες.

5. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω πράξεις ως σωστές ή λανθασμένες.

		Σ	Λ
α)	$x\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2}=\frac{1}{x}$	☐	☐
β)	$\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$	☐	☐
γ)	$\frac{x-2}{15x^2}\cdot\frac{5x}{x-2}=\frac{1}{3x}$	☐	☐
δ)	$\frac{3-x}{6x}\cdot\frac{2x}{x-3}=\frac{1}{3}$	☐	☐
ε)	$\frac{3}{x}:\frac{3}{x}=\frac{9}{x^2}$	☐	☐
στ)	$\frac{y}{x}:\frac{y}{x}=1$	☐	☐

Αιτιολογήστε τις επιλογές σας για όσες προτάσεις επιλέξατε ως λανθασμένες.

6. Ο Αναστάσης έλυσε δύο ασκήσεις στο τετράδιό του. Αναγνωρίζετε κάποιο λάθος; Αν ναι, διορθώστε το.

1. $\frac{3}{4x}+\frac{4}{3x}=\frac{3+4}{4x+3x}=\frac{7}{7x}=\frac{1}{x}$

2. $\frac{x}{x+1}-\frac{1}{x-1}=\frac{x-1}{(x+1)(x-1)}=\frac{1}{x+1}$

7. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\frac{1}{x}+\frac{2}{x}$ **β)** $\frac{x+1}{x}-\frac{1}{x}$ **γ)** $\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}$ **δ)** $\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x}$

Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

8. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων, εφόσον ορίζονται:

α) $\frac{\alpha-2}{(\alpha-2)(\beta+1)}$, για $\alpha=0$ και $\beta=-1$ **β)** $\frac{2x+3}{-x+\frac{1}{2}}$, για $x=\frac{1}{3}$ **γ)** $\frac{\beta-1}{2\beta+3}\cdot\frac{\beta+4}{\beta+1}-\frac{\beta}{\beta-2}$, για $\beta=-\frac{3}{2}$ και $\beta=0$

9. Ο Αχσάν συμμετέχει σε έναν αγώνα τριάθλου που περιλαμβάνει κολύμβηση, ποδηλασία και τρέξιμο. Ο πίνακας δείχνει την απόσταση που διανύουν σε κάθε άθλημα και τον μέσο όρο των ταχυτήτων των αθλητών αυτής της ηλικίας στην ποδηλασία και το τρέξιμο, ως προς την ταχύτητα v που έχουν στην κολύμβηση.

	Απόσταση (σε Km)	Μέση ταχύτητα (σε Km/h)
Κολύμβηση	1	v
Ποδηλασία	20	15v
Τρέξιμο	5	v + 5

α) Να γράψετε μία αλγεβρική παράσταση για τον συνολικό χρόνο που αναμένεται να ολοκληρώσει το τρίαθλο ένας αθλητής.

β) Αν ο Αχσάν έχει μέση ταχύτητα κολύμβησης 2 Km/h, να υπολογίσετε τον συνολικό χρόνο που θα ολοκληρώσει το τρίαθλο.

10. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η καθεμία από τις παρακάτω ρητές παραστάσεις:

α) $\dfrac{3}{x^2+1}$ **β)** $\dfrac{x-1}{x-1}$ **γ)** $\dfrac{x+3}{x-2}$ **δ)** $-\dfrac{3x^2+2}{4x-1}$

11. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\dfrac{3x^2}{x^5}$ **β)** $\dfrac{2(\alpha-1)}{\alpha(\alpha-1)}$ **γ)** $\dfrac{5\alpha^3\beta^4}{15\alpha^7\beta^2}$ **δ)** $\dfrac{2\beta(\beta+2)(\beta-1)}{8\beta(\beta-1)(2\beta-3)}$

12. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\dfrac{x-2}{2-x}$ **β)** $\dfrac{y}{y^2-y}$ **γ)** $\dfrac{5\beta+5}{10\beta^2+10\beta}$ **δ)** $\dfrac{\omega^2-1}{\omega^3-\omega^2}$

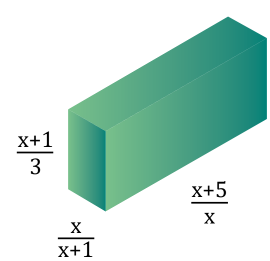
13. Να κάνετε τις πράξεις και να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $14x\cdot\dfrac{3}{2x^4}$ **β)** $\dfrac{y-2}{y}\cdot\dfrac{3y}{y-2}$ **γ)** $\dfrac{\alpha-2}{\alpha^2-3\alpha}\cdot\dfrac{3(\alpha-3)}{\alpha^2-4}$ **δ)** $\dfrac{x+1}{x}:\dfrac{x-1}{x}$ **ε)** $\dfrac{\alpha-1}{2\alpha}:\dfrac{1-\alpha}{3\alpha^3}$

14. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x-1}$ **β)** $\dfrac{5}{\alpha^3}+\dfrac{1}{\alpha^2}$ **γ)** $\dfrac{8}{\omega^2-1}-\dfrac{4}{\omega^2-\omega}$ **δ)** $\dfrac{2}{x}+\dfrac{x+2}{x-1}+\dfrac{2}{x^2-x}$

15. Ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει μήκος $\dfrac{x+5}{x}$, πλάτος $\dfrac{x}{x+1}$ και ύψος $\dfrac{x+1}{3}$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας του παραλληλεπιπέδου.



Κυλιόμενος διάδρομος

Ανακεφαλαίωση

Κανονικότητες και αλγεβρικές παραστάσεις

Ερωτήσεις – ασκήσεις – προβλήματα

1. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις:

α) Το μοτίβο $\frac{1}{4}, 1, \frac{9}{4}, 4, \frac{25}{4}, 9, \ldots$ είναι της μορφής $\alpha \cdot \nu^2$.

β) Το μοτίβο $4, 9, 14, 19, 24, \ldots$ είναι της μορφής $\alpha \cdot \nu^2$.

γ) Τα μονώνυμα $2\alpha^2\beta^3$ και $-2\alpha^3\beta^2$ είναι όμοια.

δ) Το πολυώνυμο που προκύπτει από την παράσταση $x^2 - x(x-1) + 2x$ είναι δευτέρου βαθμού.

ε) Το πολυώνυμο που προκύπτει από το γινόμενο $(2x+3)(x-1)$ είναι πρώτου βαθμού.

στ) $(x+y)^2 = x^2 + y^2$ **ζ)** $(-x+1)(x+1) = x^2 - 1$

ζ) $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta$

η) Το ΕΚΠ των $2x^2y^3$ και $6x^3y^2$ είναι $6x^3y^3$

θ) Το ΕΚΠ των $2(x^2-4)(x+2)$ και $4x(x+2)$ είναι $4x(x-2)(x+2)^2$.

ι) Η παράσταση $\frac{x}{x+1}$ ορίζεται για κάθε τιμή του x εκτός από -1.

ια) Η παράσταση $\frac{x(x+1)}{x}$ ορίζεται για κάθε τιμή του x, γιατί $\frac{\cancel{x}(x+1)}{\cancel{x}} = x+1$.

ιβ) Το άθροισμα των $\frac{1}{x}$ και $\frac{1}{x^2}$ είναι $\frac{2}{x+x^2}$.

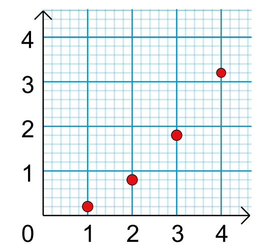
2. Να βρείτε την τιμή του α σε καθένα από τα μοτίβα της μορφής $\alpha \cdot \nu^2$:

α) $\frac{1}{2}, 2, \frac{9}{2}, 8, \frac{25}{2}, \ldots$ **β)** 0,3, 1,2, 2,7, 4,8, ….

Ταξινομούμε μονώνυμα

Ταξινομούμε πολυώνυμα

γ)



3. Σε κάθε ζεύγος μονωνύμων της στήλης Α να αντιστοιχίσετε το ΕΚΠ τους από τη στήλη Β.

Α	Β
1. $x^2y,\ xy^2$	**α.** x^4y^3
2. $4xy^2,\ 10x^3y$	**β.** x^2y^2
3. $x^3y^2,\ x^4y^3$	**γ.** $40x^4y^3$
	δ. $20x^3y^2$

4. Να βρείτε το ΕΚΠ των μονωνύμων και των πολυωνύμων στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $x^2y^3,\ x^4y$ **β)** $18x^2y^3,\ 24x^4y$

γ) $18(2x+1)^2(x+3)^3,\ 24(2x+1)^4(x+3)$

5. Συμπληρώστε τα κενά ώστε το πολυώνυμο $P = \ldots(\ldots\ldots)^5(\ldots\ldots)^3$ να είναι κοινό πολλαπλάσιο των $(x+1)^2(2x-1)^3$ και $3(2x-1)^2(x+1)^4$. Είναι το P το ΕΚΠ των δύο πολυωνύμων;

6. Να βρείτε το ΕΚΠ των πολυωνύμων $2x^3 + 3x^2 - 2x - 3$ και $2x^3 - 4x^2 + 2x$.

7. Να υπολογίσετε το άθροισμα και τη διαφορά των πολυωνύμων P και Q σε κάθε περίπτωση:

α) $P = x^2 + 2$ και $Q = x^3 - x^2 + 1$

β) $P = 2x^4 + x^3 - 2x^2 + 1$ και $Q = x^3 - 2x^4 + 5x + 1$

γ) $P = x^5 + x^3 + 1$ και $Q = -x^5 + x^3 - 1$

δ) $P = 3x^3 - 2x^2 - x - 1$ και $Q = x^3 - x^2 - 2x - 3$

8. Να υπολογίσετε το γινόμενο των πολυωνύμων P και Q σε κάθε περίπτωση:

α) $P=x^2+x+1$ και $Q=x-1$

β) $P=2x+3$ και $Q=x^3-x^2+2x-1$

γ) $P=2-x$ και $Q=x^3-2x+1$

9. Να υπολογίσετε το $P\cdot Q-R$ σε κάθε περίπτωση:

α) $P=x^2+1$, $Q=-x-1$ και $R=x+2$

β) $P=2x-3$, $Q=x^2+2x-1$ και $R=5+2x^3$

γ) $P=1-x$, $Q=x^3-2x^2-x+1$ και $R=-3x^3+x^2+2x-1$

10. Να βρείτε τον βαθμό του πολυωνύμου που προκύπτει από κάθε παράσταση:

α) $2(x^2+1)(x-2)-2x^3$

β) $(x^2-1)(2x^3+1)+2(x^3+1)(2-x^2)$

11. Να αναπτύξετε τις ταυτότητες:

α) $(x-1)^2$ **β)** $(y+1)^2$ **γ)** $(2\omega-3)^2$

δ) $(3\alpha+\sqrt{2})^2$ **ε)** $(x+2y)^2$ **στ)** $(2\alpha-\beta)^2$

ζ) $(x^2+1)^2$ **η)** $\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2$ **θ)** $\left(\dfrac{x}{2}+1\right)^2$

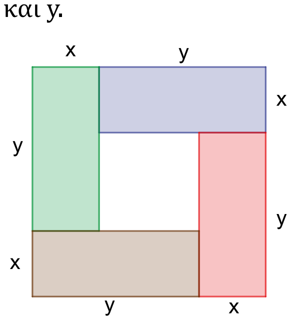
ι) $(x+2)(x-2)$ **ια)** $(y+1)(1-y)$

ιβ) $(\omega+\sqrt{2})(\omega-\sqrt{2})$ **ιγ)** $(2x-1)(2x+1)$

ιδ) $\left(y-\dfrac{1}{3}\right)\left(y+\dfrac{1}{3}\right)$ **ιε)** $(-\alpha-1)^2$

ιστ) $(-x-5)(5-x)$

12. Τα τέσσερα ορθογώνια του σχήματος έχουν διαστάσεις x και y.



α) Να γράψετε ένα μονώνυμο που να αντιστοιχεί στο εμβαδόν του σχήματος (το σχήμα δεν περιλαμβάνει το εσωτερικό λευκό τετράγωνο).

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του σχήματος είναι ίσο με $(x+y)^2-(y-x)^2$.

13. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $6x^3-8x^2$ **β)** $7x^2+14x$ **γ)** $5x^3-10x$

14. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $2\alpha+\alpha\beta-2\beta-\beta^2$ **β)** $2\alpha+2\beta-\alpha^2-\alpha\beta$

γ) $\beta^3+\alpha\beta^2-10\alpha-10\beta$ **δ)** $8x+8y-2x^2-2xy$

15. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $x^2-10x+25$ **β)** $\alpha^2+\alpha+\dfrac{1}{4}$

γ) $2y^2+12y+18$ **δ)** x^2+4-4x

ε) $\dfrac{\omega^2}{2}+\omega+\dfrac{1}{2}$ **στ)** $4\omega^2+4\omega+1$

Ταξινομούμε ταυτότητες

16. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) x^2-9 **β)** $-4+x^2$ **γ)** $27-3y^2$

δ) x^2-5 **ε)** $2\omega^2-8$ **στ)** $75-3y^2$

17. Για ποιες τιμές του x ορίζονται οι παραστάσεις;

α) $-\dfrac{1}{x}$ **β)** $\dfrac{2-x}{x+1}$ **γ)** $\dfrac{5}{4x+8}$ **δ)** $\dfrac{x-1}{x^2+1}$

18. Συμφωνείτε με την παρακάτω πρόταση;

«Η ρητή παράσταση $\dfrac{x^2-x}{x^2-1}$ ορίζεται για $x=1$ γιατί:

$$\frac{x^2-x}{x^2-1}=\frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{x\cancel{(x-1)}}{(x+1)\cancel{(x-1)}}=\frac{x}{x+1}$$

Άρα για να βρούμε την τιμή της παράστασης $\dfrac{x^2-x}{x^2-1}$ για $x=1$ αντικαθιστούμε στην παράσταση $\dfrac{x}{x+1}$, όπου x το 1 και έχουμε $\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$».

19. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\dfrac{\alpha\beta^2\gamma}{\alpha^2\beta\gamma}$ **β)** $\dfrac{16x^2y^3}{24xy^4}$

γ) $\dfrac{x}{x^2-2x}$ **δ)** $\dfrac{y^2-3y}{y^2-9}$

ε) $\dfrac{x^2+2x+1}{2x+2}$ **στ)** $\dfrac{x^2-4x}{x^2-8x+16}$

Παραγοντοποίηση- παραδείγματα και ασκήσεις

20. Να βρείτε τα γινόμενα των ρητών παραστάσεων:

α) $\dfrac{x}{x-1}\cdot\dfrac{x+1}{x}$ **β)** $\dfrac{2x^2}{x+2}\cdot\dfrac{x^2-4}{4x}$

γ) $\dfrac{1-x}{x^2}\cdot\dfrac{x}{x-1}$

Παραγοντοποίηση- προτεινόμενες ασκήσεις

21. Να κάνετε τις διαιρέσεις των ρητών παραστάσεων:

α) $\dfrac{\alpha^2\beta}{\gamma}:\dfrac{\alpha\beta}{\gamma^2}$ **β)** $\dfrac{2x-2}{x}:\dfrac{x-1}{x}$

γ) $\dfrac{x^2-1}{x}:\dfrac{x-1}{x^2}$ **δ)** $\dfrac{x^2-2x+1}{x+1}:\dfrac{x-1}{x^2+2x+1}$

ΕΚΠ ρητών με ΕΚΠ

22. Να βρείτε τα αθροίσματα των ρητών παραστάσεων:

α) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{2x}$ **β)** $\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{1}{x^2-4}-\dfrac{x}{x+2}$

γ) $\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{x}{x-x^2}+\dfrac{1}{x}$ **δ)** $\dfrac{x}{x^2+4x+4}-\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x^2+2x}$

ε) $\dfrac{1}{x-\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+x}-\dfrac{1}{x\sqrt{2}-x^2}$

Τρίλιζα στις αλγεβρικές παραστάσεις

Συνδέσεις και επεκτάσεις

23. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\sqrt{3}x^2-3x$ **β)** $\sqrt{6}y^2-2\sqrt{3}y$

γ) $x^2-2\sqrt{2}x+2$ **δ)** $\sqrt{2}y^2-4y+2\sqrt{2}$

ε) $2x^2-2\sqrt{2}x+1$ **στ)** $\sqrt{2}x^2-9\sqrt{2}$

ζ) $\sqrt{3}x^2-3\sqrt{3}$

24. Να λύσετε την εξίσωση $(x+1)^2=(x-1)^2$ με δύο τρόπους:

α) αναπτύσσοντας τα τετράγωνα και

β) χρησιμοποιώντας τις γνώσεις σας για την ισότητα δύο τετραγώνων.

Καταλήξατε στις ίδιες λύσεις; Ποια προσέγγιση σας φάνηκε πιο εύκολη;

25. α) Χρησιμοποιώντας τις γνωστές σας ταυτότητες, να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$$

β) Δύο αριθμοί x και y έχουν άθροισμα 40 και γινόμενο 391.

i) Να εξηγήσετε γιατί οι αριθμοί είναι ομόσημοι και μάλιστα θετικοί.

ii) Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα που αποδείξατε στο α) να υπολογίσετε τη διαφορά των αριθμών $x-y$.

Ο ελέφαντας και το ποντίκι στην τραμπάλα

Ομαδική εργασία

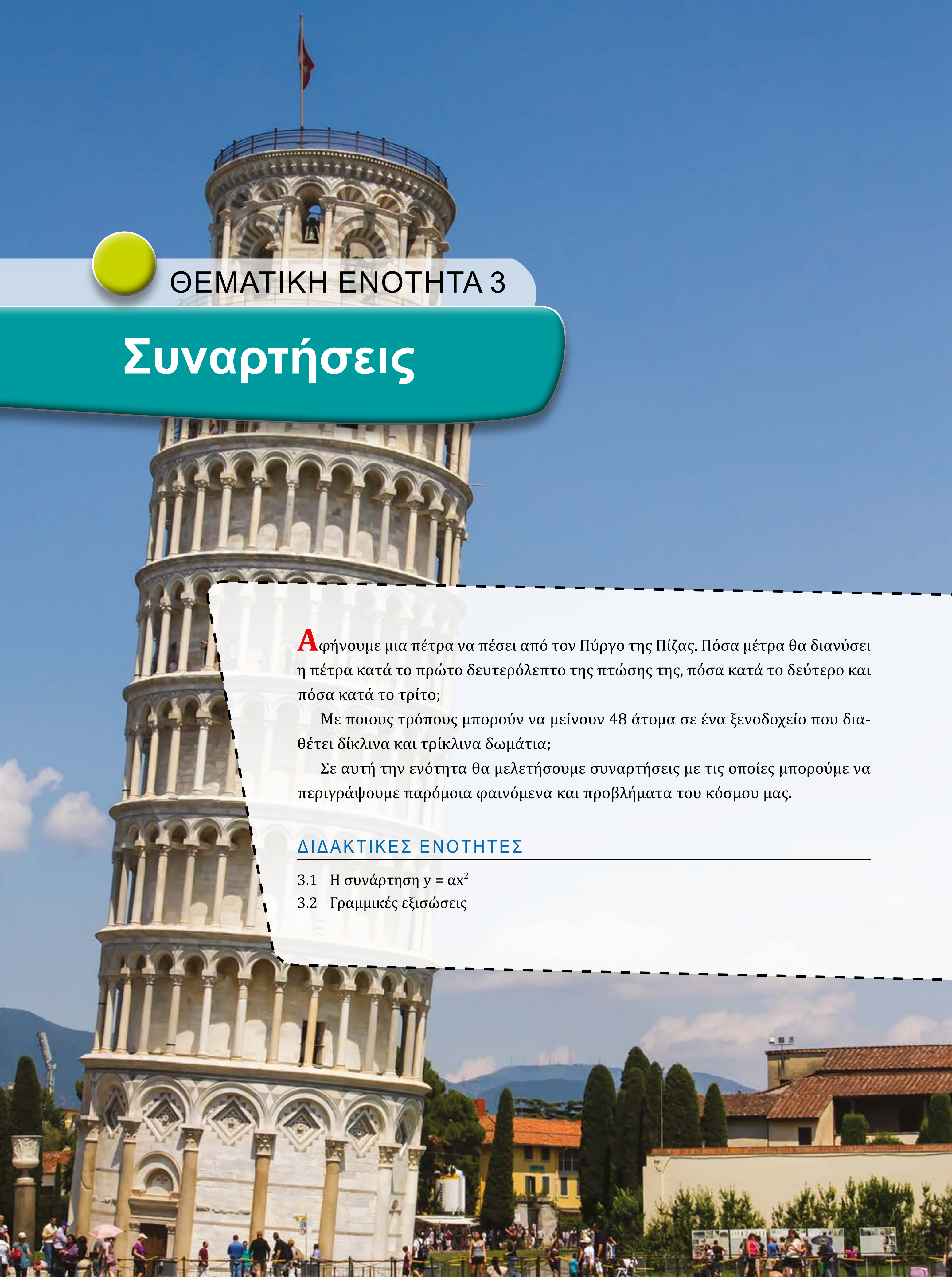
26. α) Να αναπτύξετε το τετράγωνο $(\alpha+\beta+\gamma)^2$ και να σχηματίσετε μία ταυτότητα «τετράγωνο αθροίσματος τριών αριθμών». Έπειτα, χρησιμοποιήστε σχήματα για να δώσετε και τη γεωμετρική ερμηνεία της.

β) Χρησιμοποιώντας την παραπάνω ταυτότητα, να γράψετε τα αναπτύγματα (δηλαδή να συμπληρώσετε τις ισότητες):

i) $(x+y+3)^2$ **ii)** $(2x+3y+1)^2$ **iii)** $(x+2y-1)^2$

27. Να συνεργαστείτε στην ομάδα σας για να γράψετε μια ρητή παράσταση της επιλογής σας που να ορίζεται για όλους τους πραγματικούς αριθμούς εκτός από έναν τον οποίο θα επιλέξετε εσείς.

Στη συνέχεια να δώσετε την παράστασή σας στις άλλες ομάδες της τάξης σας, για να βρουν για ποιον αριθμό δεν ορίζεται η παράσταση που γράψατε.



ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ 3

Συναρτήσεις

Αφήνουμε μια πέτρα να πέσει από τον Πύργο της Πίζας. Πόσα μέτρα θα διανύσει η πέτρα κατά το πρώτο δευτερόλεπτο της πτώσης της, πόσα κατά το δεύτερο και πόσα κατά το τρίτο;

Με ποιους τρόπους μπορούν να μείνουν 48 άτομα σε ένα ξενοδοχείο που διαθέτει δίκλινα και τρίκλινα δωμάτια;

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε συναρτήσεις με τις οποίες μπορούμε να περιγράψουμε παρόμοια φαινόμενα και προβλήματα του κόσμου μας.

ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΕΝΟΤΗΤΕΣ

3.1

Η συνάρτηση $y = αx^2$

Δ1. Συναρτήσεις ... δυναμωμένες

α) Να εκφράσετε με μια αλγεβρική σχέση την πρόταση «ο αριθμός y είναι το μισό του τετραγώνου του αριθμού x» και να συμπληρώσετε τον ακόλουθο πίνακα τιμών:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y									

β) Περιγράψτε τη μεταβολή της τιμής του y κάθε φορά που η τιμή του x αυξάνει κατά 1. Είναι πάντα η ίδια; Αλλάζει; Αν ναι, με ποιον τρόπο;

γ) Σε ένα σύστημα αξόνων σημειώστε τα σημεία (x, y) από τον πίνακα τιμών. Σχεδιάστε την καμπύλη που περνάει από αυτά, αλλά και από τα σημεία που θα είχαμε για όλες τις τιμές που μπορεί να πάρει ο x. Περιγράψτε την καμπύλη που σχεδιάσατε. Συζητήστε στην τάξη για τα χαρακτηριστικά της.

δ) Στο ίδιο σύστημα αξόνων με το παραπάνω να σχεδιάσετε και τις καμπύλες που προκύπτουν από τις σχέσεις $y = x^2$ και $y = -0{,}5x^2$. Περιγράψτε πώς σχετίζονται, σε τι μοιάζουν και σε τι διαφέρουν μεταξύ τους οι τρεις καμπύλες. Συζητήστε στην τάξη για τις ομοιότητες και τις διαφορές.

Συζητάμε

...για τη συνάρτηση $y = αx^2$

Θυμόμαστε ότι συνάρτηση ονομάζουμε μια σχέση από την οποία για κάθε τιμή μιας μεταβλητής x μπορούμε να βρούμε μία ακριβώς τιμή μιας μεταβλητής y.

Στην προηγούμενη τάξη είχαμε μελετήσει συναρτήσεις της μορφής $y = αx$, $y = αx + β$ και $y = \frac{α}{x}$.

Μια κατηγορία συναρτήσεων με τις οποίες θα ασχοληθούμε στο κεφάλαιο αυτό είναι οι συναρτήσεις της μορφής $y = αx^2$ με $α \neq 0$. Τέτοιου είδους συναρτήσεις εμφανίζονται σε πολλές περιπτώσεις. Ένα παράδειγμα από τη γεωμετρία είναι η σχέση $E = πρ^2$ του εμβαδού E του κυκλικού δίσκου με την ακτίνα του ρ. Ένα άλλο παράδειγμα από τη φυσική είναι η σχέση $S = \frac{1}{2}αt^2$ του διαστήματος S, που διανύει ένα κινητό σε χρόνο t, όταν ξεκινάει από στάση και κινείται με σταθερή επιτάχυνση α.

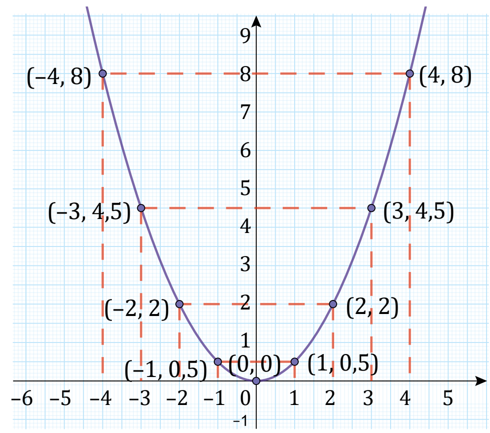
Για να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση μιας τέτοιας συνάρτησης, βρίσκουμε κάποια σημεία της (όσα θεωρούμε ότι είναι αρκετά) και σχεδιάζουμε την υπόλοιπη με βάση τη μορφή που προκύπτει από αυτά. Στη σχεδίαση της καμπύλης μάς διευκολύνει η χρήση λογισμικών (όπως για παράδειγμα του Geogebra).

Για παράδειγμα, για τη συνάρτηση $y = 0{,}5x^2$ συμπληρώνουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8

Συμπληρώνω την καμπύλη

σημειώνουμε τα αντίστοιχα σημεία (x, y) σε ένα σύστημα αξόνων και σχεδιάζουμε μια καμπύλη της μορφής του σχήματος (σαν U) που να διέρχεται από τα σημεία αυτά.



Από τη γραφική παράσταση βλέπουμε ότι $y \geq 0$. Επίσης, για $x \leq 0$, αριστερά δηλαδή του y'y, καθώς οι τιμές του x αυξάνονται, οι τιμές του y μειώνονται μέχρι το 0. Ενώ στη συνέχεια, όταν το x αυξάνεται με θετικές τιμές, οι τιμές του y αυξάνονται. Το σημείο (0, 0) το ονομάζουμε κορυφή της καμπύλης.

Επιπλέον, όσο πιο πολύ απέχει ο αριθμός x από το 0, τόσο πιο «απότομη» είναι μεταβολή του y. Για παράδειγμα, παίρνοντας όλο και μεγαλύτερα θετικά x, για μεταβολή του x κατά 1, η μεταβολή του y διαρκώς μεγαλώνει.

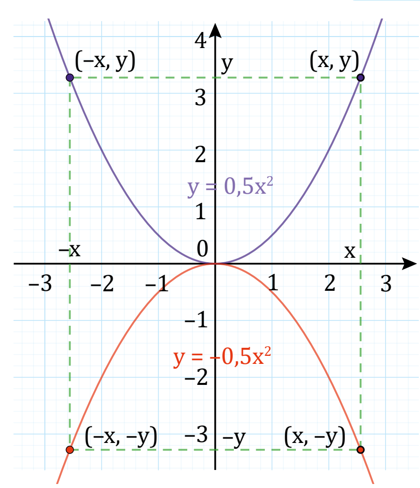
Από την παραπάνω γραφική παράσταση και τον αντίστοιχο πίνακα μπορούμε να βρούμε τις παρακάτω μεταβολές του y για κάθε μονάδα που αυξάνεται η τιμή του x:

Βρίσκω σημεία της καμπύλης

Μεταβολή του x	Από −4 σε −3	Από −3 σε −2	Από −2 σε −1	...	Από 1 σε 2	Από 2 σε 3	Από 3 σε 4
Μεταβολή του y	−3,5	−2,5	−1,5	...	...1,5	2,5	3,5

Υπολογίζω τη μεταβολή

Παρατηρούμε ακόμα ότι τα σημεία (−4, 8) και (4, 8), (−3, 4,5) και (3, 4,5), καθώς και τα υπόλοιπα σημεία της γραφικής παράστασης είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα y'y. Γενικότερα, επειδή για αντίθετες τιμές του x βρίσκουμε την ίδια τιμή του y, η γραφική παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον y'y.

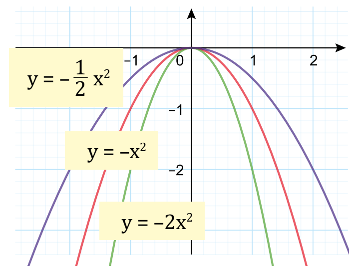


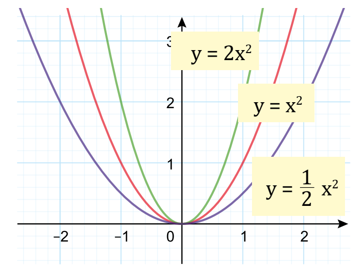
Αν τώρα στο ίδιο σύστημα αξόνων σχεδιάσουμε και τη γραφική παράσταση της $y = -0{,}5x^2$, οι δύο γραφικές παραστάσεις θα είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα x'x, καθώς για ίδιες τιμές της τετμημένης x έχουν αντίθετες τεταγμένες y.

Για τη συνάρτηση $y = -0{,}5x^2$ παρατηρούμε ότι $y \leq 0$ για όλες τις τιμές του x. Για $x \leq 0$, και καθώς αυξάνονται οι τιμές του, αυξάνονται και οι τιμές του y μέχρι το 0. Στη συνέχεια, όταν το x γίνει θετικό και οι τιμές του αυξάνονται, οι αντίστοιχες τιμές του y μειώνονται.

Ο συντελεστής α του x^2 δεν καθορίζει μόνο τη θέση της γραφικής παράστασης ως προς τον άξονα x'x, αλλά και τη μορφή της.

Συγκεκριμένα, όπως φαίνεται και από τα διπλανά σχήματα, όσο μεγαλύτερη είναι η απόλυτη τιμή του α, τόσο πιο «κλειστή» είναι η καμπύλη.





Διερευνώ τη μορφή

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

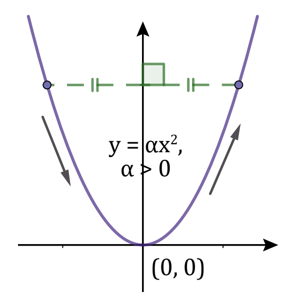
Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης της μορφής $y = αx^2$, με $α \neq 0$, είναι μια καμπύλη η οποία είναι συμμετρική ως προς τον άξονα y'y και

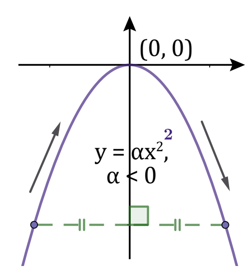
- για $α > 0$
  - Βρίσκεται πάνω από τον άξονα x'x, με εξαίρεση το σημείο (0, 0), καθώς $y \geq 0$.
  - Έχει **ελάχιστη** τιμή $y = 0$ για $x = 0$.
  - Καθώς αυξάνονται οι τιμές του x:
    - o για αρνητικά x οι τιμές του y μειώνονται
    - o για θετικά x οι τιμές του y αυξάνονται.
- για $α < 0$
  - Βρίσκεται κάτω από τον άξονα x'x, με εξαίρεση το σημείο (0, 0), καθώς $y \leq 0$.
  - Έχει **μέγιστη** τιμή $y = 0$ για $x = 0$.
  - Καθώς αυξάνονται οι τιμές του x:
    - o για αρνητικά x οι τιμές του y αυξάνονται,
    - o για θετικά x οι τιμές του y μειώνονται.

Οι γραφικές παραστάσεις των $y = αx^2$ και $y = -αx^2$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα x'x.

Μια καμπύλη αυτής της μορφής την ονομάζουμε **παραβολή.**

Το σημείο (0, 0) το ονομάζουμε **κορυφή** της παραβολής.





Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. **α) Να συμπληρώσετε τον διπλανό πίνακα τιμών της συνάρτησης $y = x^2$ και με βάση τα σημεία (x, y) που προκύπτουν να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.**

x	1	2	3
$y = x^2$			

β) Στο ίδιο σύστημα αξόνων με αυτό του ερωτήματος α), να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $y = -x^2$ χωρίς να κάνετε πίνακα τιμών.

γ) Να λύσετε γραφικά την εξίσωση $x^2 = 9$.

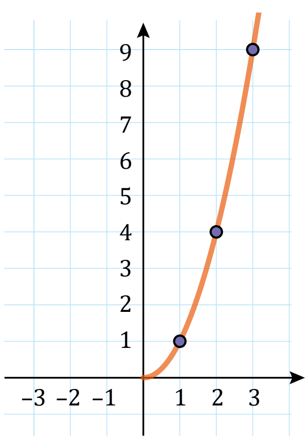
Απάντηση

α) Αντικαθιστώντας την τιμή του x στον τύπο της συνάρτησης έχουμε:

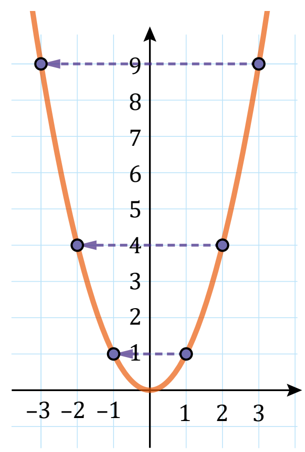
x	1	2	3
$y = x^2$	1	4	9

Εκτός από τα σημεία που προκύπτουν από τον πίνακα τιμών, ένα ακόμα σημείο της γραφικής παράστασης είναι η κορυφή της (0, 0).

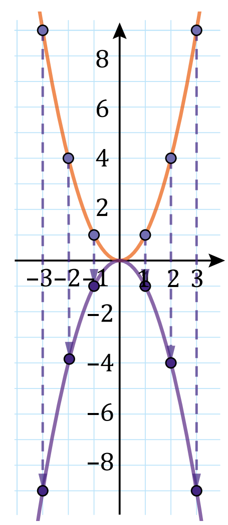
Με βάση τα σημεία αυτά μπορούμε να σχεδιάσουμε το τμήμα της γραφικής παράστασης που βρίσκεται δεξιά του y'y (x > 0), όπως φαίνεται στο σχήμα 1.



σχήμα 1



σχήμα 2



σχήμα 3

Καθώς η γραφική παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον y'y, το τμήμα της καμπύλης αριστερά του άξονα y'y' είναι το συμμετρικό του τμήματος που έχουμε σχεδιάσει.

Για να το σχεδιάσουμε, βρίσκουμε τα συμμετρικά των σημείων που έχουμε και σχεδιάζουμε την καμπύλη ώστε να διέρχεται από αυτά (σχήμα 2).

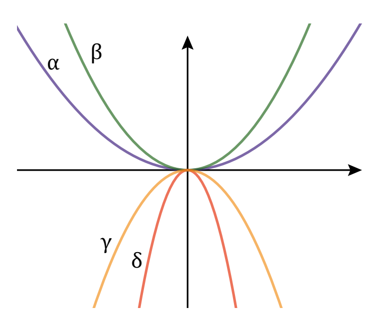
β) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = x^2$ και $y = -x^2$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα x'x. Οπότε, για να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της $y = -x^2$, βρίσκουμε τα συμμετρικά ως προς x'x των σημείων του ερωτήματος α) (σχήμα 3).

γ) Οι λύσεις της εξίσωσης $x^2 = 9$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων της $y = x^2$ και της οριζόντιας ευθείας $y = 9$ (σχήμα 2). Δηλαδή, οι τετμημένες των σημείων (–3, 9) και (3, 9). Άρα λύσεις είναι οι $x = -3$ και $x = 3$.

2. **Να αντιστοιχίσετε τις συναρτήσεις με τις γραφικές παραστάσεις του σχήματος:**

1) $y = 0{,}25x^2$ **2) $y = -0{,}8x^2$**

3) $y = -3x^2$ **4) $y = 0{,}5x^2$**

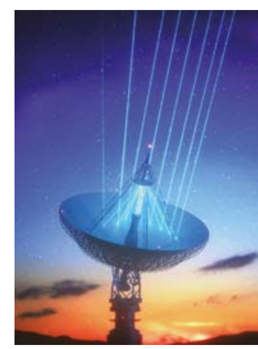


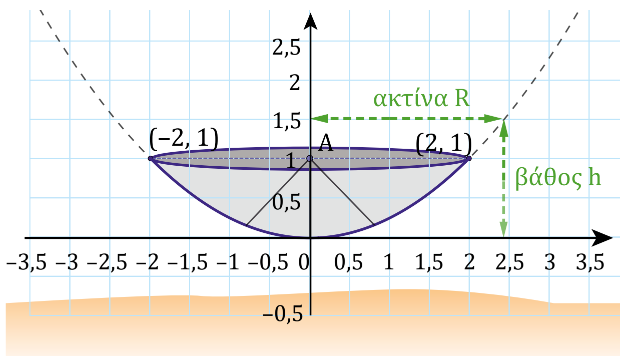
Απάντηση

Οι συναρτήσεις (1) $y = 0{,}25x^2$ και (4) $y = 0{,}5x^2$ έχουν θετικό συντελεστή του x^2, οπότε οι γραφικές τους παραστάσεις βρίσκονται πάνω από τον άξονα x'x. Άρα είναι οι α και β.
Επειδή όσο μεγαλύτερος κατά απόλυτη τιμή είναι ο συντελεστής του x^2 τόσο πιο κλειστή είναι η καμπύλη, συμπεραίνουμε ότι η γραφική παράσταση της (1) είναι η α και της (4) η β.
Αντίστοιχα οι συντελεστές του x^2 στις (2) $y = -0{,}8x^2$ και (3) $y = -3x^2$ είναι αρνητικοί, οπότε οι γραφικές τους παραστάσεις είναι οι γ και δ.
Επειδή ο -3 είναι κατά απόλυτη τιμή μεγαλύτερος από τον $-0{,}8$ (απέχει περισσότερο από το 0), η καμπύλη της (3) $y = -3x^2$ είναι πιο κλειστή από αυτήν της (2) $y = -0{,}8x^2$. Άρα η γραφική παράσταση της (2) είναι η γ και της (3) η δ.
Τελικά έχουμε: 1 α, 2 γ, 3 δ, 4 β.

---

3. Για να συγκεντρώνει όλες τις ακτίνες στον δέκτη Α, το «πιάτο» μιας δορυφορικής κεραίας πρέπει να είναι μέρος της παραβολής, όπως αυτή που φαίνεται στην παρακάτω εικόνα.





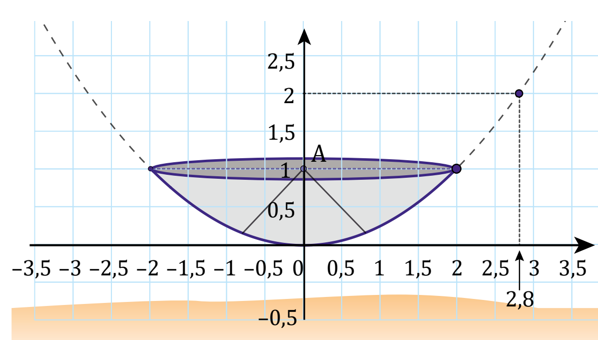
α) Να εκφράσετε το βάθος h που μπορεί να έχει ένα δορυφορικό πιάτο ως συνάρτηση της ακτίνας του R.

β) Αν το βάθος ενός δορυφορικού πιάτου είναι 2 m, να εκτιμήσετε την ακτίνα του με βάση το σχήμα.

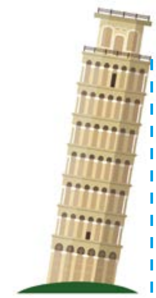
Απάντηση

α) Επειδή η καμπύλη του σχήματος είναι παραβολή, η σχέση που συνδέει το ύψος h με την ακτίνα R είναι της μορφής $h = αR^2$. Από την εικόνα βλέπουμε ότι για $R = 2$ είναι $h = 1$. Οπότε αντικαθιστώντας έχουμε $1 = α \cdot 2^2$, από όπου βρίσκουμε $α = \frac{1}{4}$. Άρα $h = \frac{1}{4}R^2$.

β) Για να υπολογίσουμε την ακτίνα του δορυφορικού πιάτου με βάθος 2, πρέπει να βρούμε την τετμημένη του σημείου της καμπύλης που αντιστοιχεί στο βάθος αυτό. Από το σχήμα βλέπουμε ότι η ακτίνα R είναι περίπου 2,8 m.



4. **Η απόσταση S σε m που διανύει ένα σώμα σε χρόνο t σε sec από τη στιγμή που αφήνεται να πέσει δίνεται από τη σχέση $S=\frac{1}{2}gt^2$ m, όπου $g \simeq 10\ \frac{m}{sec^2}$ είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας.**



α) Να σχεδιάσετε την καμπύλη χρόνου – διαστήματος για το πρώτα 3 δευτερόλεπτα.

β) i. Μια πέτρα χρειάζεται 3,34 sec για να φτάσει στο έδαφος αν την αφήσουμε από την κορυφή του Πύργου της Πίζας. Ποιο είναι το ύψος του;

ii. Πόσα μέτρα θα διανύσει η πέτρα κατά το πρώτο δευτερόλεπτο της πτώσης της, πόσα κατά το δεύτερο και πόσα κατά το τρίτο;

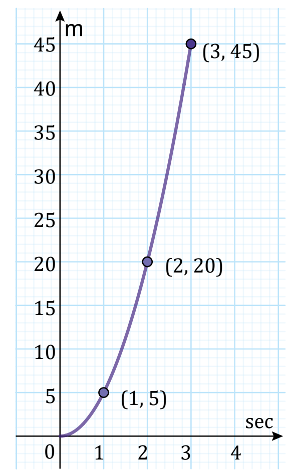
Απάντηση

α) Για $g=10\ \frac{m}{sec^2}$ το διάστημα S δίνεται από τη σχέση $S=\frac{1}{2}10\cdot t^2=5t^2$ m.

Η καμπύλη διαστήματος – χρόνου είναι παραβολή με κορυφή το (0, 0). $t\geq 0$ είναι το τμήμα της παραβολής που βρίσκεται δεξιά του y'y. Για να τη σχεδιάσουμε από τον πίνακα τιμών

t	1	2	3
S	5	20	45

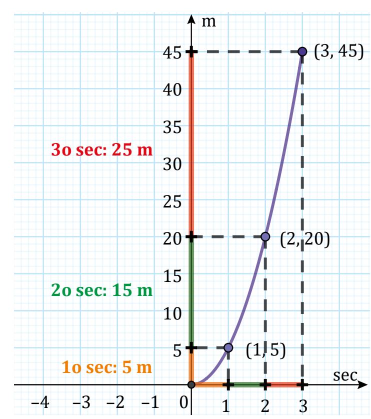
βρίσκουμε τρία ακόμα σημεία της (εκτός από το (0, 0)): τα (1, 5), (2, 20) και (3, 45).



β) i. Σε 3,34 sec η πέτρα θα διανύσει απόσταση $S=5\cdot 3{,}4^2=55{,}778\simeq 55{,}8$ m.
Άρα το ύψος του πύργου είναι περίπου 55,8 m.

ii. Από τη γραφική παράσταση αλλά και από τον πίνακα τιμών που κατασκευάσαμε στο α), βρίσκουμε ότι:
το 1ο δευτερόλεπτο θα διανύσει 5 m,
το 2ο δευτερόλεπτο 20 – 5 = 15 m και
το 3ο $45-20=25$ m.
Παρατηρούμε ότι, καθώς αυξάνεται ο χρόνος από τη στιγμή που ξεκίνησε η πέτρα, αυξάνεται και το διάστημα που διανύει κάθε δευτερόλεπτο.

Εκτόξευση πυραύλου

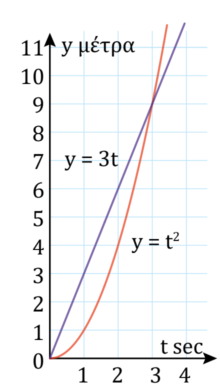


5. **Στο διπλανό σχήμα φαίνονται τα διαγράμματα θέσης – χρόνου δύο κινητών που ξεκίνησαν ταυτόχρονα από το 0: ενός μπλε που κινείται με σταθερή ταχύτητα $3\ \frac{m}{sec}$ και η θέση του δίνεται από τη σχέση y = 3t, και ενός κόκκινου που κάνει επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση $2\ \frac{m}{sec^2}$ και η θέση του δίνεται από τη σχέση $y = t^2$.**

α) Ποιο κινητό προηγήθηκε το πρώτο δευτερόλεπτο και για πόσο;

β) Κατά τη διάρκεια ποιου δευτερολέπτου το κόκκινο κινητό πλησίασε το μπλε; Τι θα γίνει στη συνέχεια;

Η μεταβολή της τεταγμένης



Απάντηση

α) Κατά το πρώτο δευτερόλεπτο το μπλε κινητό προχώρησε 3 m, ενώ το κόκκινο προχώρησε 1 m. Άρα το μπλε προηγήθηκε κατά 2 m.

β) Για να πλησιάσει το κόκκινο κινητό, θα πρέπει κατά τη διάρκεια του δευτερολέπτου να διανύσει μεγαλύτερη απόσταση από το μπλε. Η θέση του μπλε δίνεται από τη σχέση $y = 3t$, που αντιστοιχεί σε ευθεία και για κάθε 1 sec που αυξάνεται ο χρόνος t, το διάστημα y αυξάνεται σταθερά κατά 3 m.

Από το σχήμα βλέπουμε ότι το κόκκινο κινητό:

Κατά το 1ο sec (0 έως 1) διένυσε 1 m, άρα λιγότερο από του μπλε.

Κατά το 2ο sec (1 έως 2) διένυσε 3 m όσο και το μπλε, οπότε η απόστασή τους τελικά ήταν η ίδια.

Κατά το 3ο sec (2 έως 3) διένυσε 5 m, που είναι περισσότερα από τα 3 m που διένυσε το μπλε, οπότε και το πλησίασε.

Στη συνέχεια, καθώς η απόσταση που θα διανύει κάθε sec το κόκκινο θα είναι όλο και μεγαλύτερη, θα απομακρύνεται από το μπλε με αυξανόμενο ρυθμό.

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Ποια από τα παρακάτω σημεία ανήκουν στη γραφική παράσταση της $y = x^2$;

α) (1, 2) **β)** (–1, 1) **γ)** (–2, 4) **δ)** (3, 9) **ε)** (–5, –25)

2. Από τις παρακάτω συναρτήσεις ποιες έχουν μέγιστη και ποιες ελάχιστη τιμή; Ποια είναι αυτή;

α) $y = 3x^2$ **β)** $y = -\frac{1}{8}x^2$ **γ)** $y = -7x^2$ **δ)** $y = \frac{1}{5}x^2$

3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ):

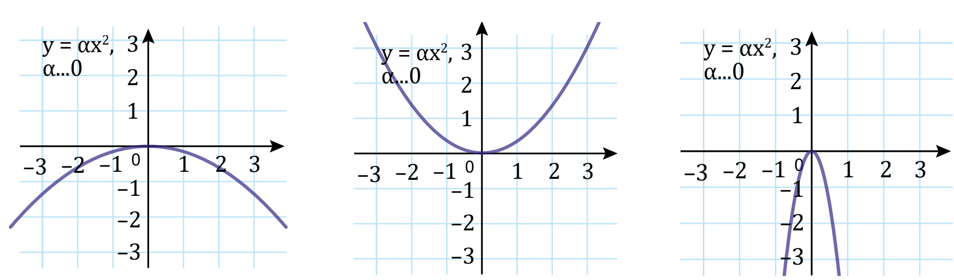
α) Αν η παραβολή $y = αx^2$ παίρνει μέγιστη τιμή, τότε $α > 0$.

β) Κορυφή μιας παραβολής $y = αx^2$ λέμε το σημείο το οποίο αντιστοιχεί στη μέγιστη ή στην ελάχιστη τιμή της.

γ) Οι παραβολές $y = 3x^2$ και $y = -3x^2$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα x'x.

δ) Αν το (–2, 4) είναι σημείο της γραφικής παράστασης της $y = αx^2$, τότε είναι σημείο της και το (–2, –4).

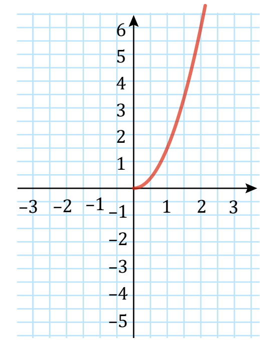
4. Να βρείτε το πρόσημο του συντελεστή α της συνάρτησης $y = αx^2$ στις παρακάτω περιπτώσεις:



5. Στο διπλανό σχήμα δίνεται το τμήμα της γραφικής παράστασης της $y = \frac{3}{2}x^2$ για $x \geq 0$.

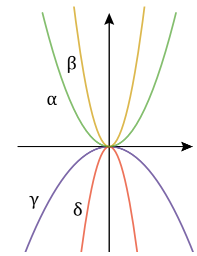
i. Να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση για $x \leq 0$.

ii. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $y = -\frac{3}{2}x^2$.



6. Να αντιστοιχίσετε σε καθεμία από τις συναρτήσεις του πίνακα τη γραφική της παράσταση.

$y = -\frac{1}{3}x^2$	
$y = 2{,}5x^2$	
$y = -3x^2$	
$y = \frac{2}{3}x^2$	



7. Πόσα κοινά σημεία έχουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = 2x^2$ και $y = 4x^2$; Ποιο ή ποια είναι αυτά;

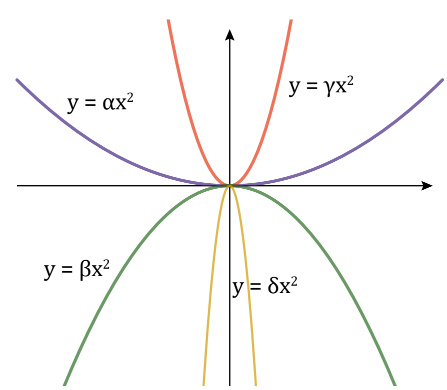
Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

8. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = αx^2$ διέρχεται από το σημείο $(2, -3)$, η συνάρτηση έχει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή;

9. Αν $α \geq 0$, ποια από τα παρακάτω σημεία μπορεί να ανήκουν στη γραφική παράσταση της $y = αx^2$;

α) $(-1, 2)$ **β)** $(2, -3)$ **γ)** $(50, 32)$ **δ)** $\left(-20, -\frac{35}{3}\right)$

10. Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους συντελεστές α, β, γ και δ του x^2 των συναρτήσεων στο σχήμα.



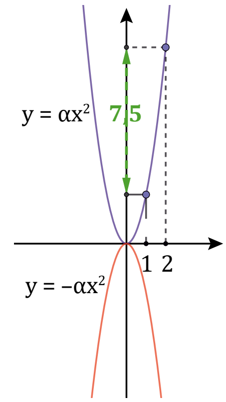
11. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων:
α) $y = 0{,}4x^2$ **β)** $y = -0{,}4x^2$ **γ)** $y = -2x^2$ **δ)** $y = 2x^2$

12. Πόσα κοινά σημεία έχουν δύο συναρτήσεις της μορφής $y = αx^2$; Ποιο ή ποια είναι αυτά;

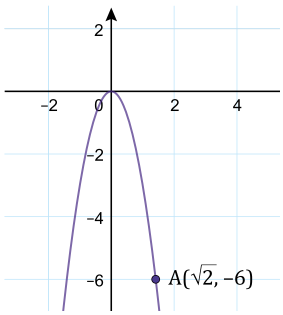
13. Για τη συνάρτηση $y = \alpha x^2$, όταν η τιμή της μεταβλητής x αυξάνεται από το 1 στο 2, η τιμή της μεταβλητής y αυξάνεται κατά 7,5.

α) Πώς και κατά πόσο μεταβάλλεται η τιμή της y όταν η x αυξάνεται από το –2 στο –1,

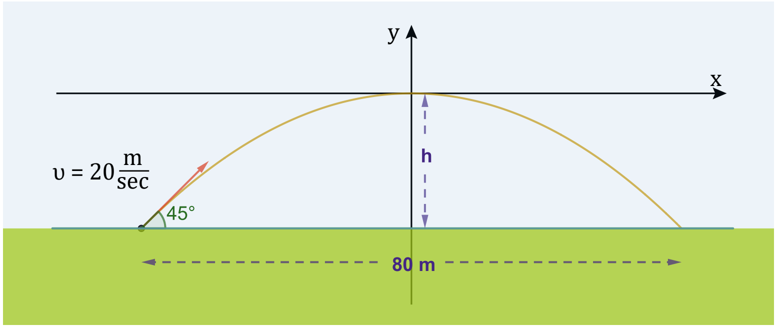
β) Πώς και κατά πόσο μεταβάλλεται στις ίδιες περιπτώσεις η τιμή της y της συνάρτησης $y = -\alpha x^2$;



14. Η γραφική παράσταση του διπλανού σχήματος είναι παραβολή. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης.



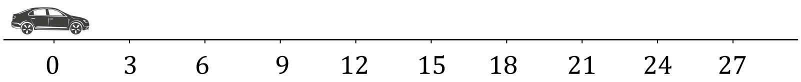
15. Η τροχιά που ακολουθεί το ακόντιο ενός ακοντιστή είναι παραβολή και εξαρτάται από τη γωνία και από την αρχική ταχύτητα με τις οποίες θα το πετάξει. Η τροχιά του ακοντίου με βάση το σύστημα συντεταγμένων της παρακάτω εικόνας περιγράφεται από τη σχέση $y = -0{,}0125x^2$. Αν η επίδοση του αθλητή ήταν 80 m, ποιο ήταν το μεγαλύτερο ύψος h που έφτασε το ακόντιο από το έδαφος;



16. Η απόσταση x σε m από τη θέση εκκίνησης ενός αυτοκινήτου που επιταχύνει σταθερά με επιτάχυνση $6\,\dfrac{m}{sec^2}$ δίνεται από τη σχέση $x = 3t^2$, όπου t ο χρόνος σε sec από τη στιγμή της εκκίνησης.

α) Στο παρακάτω σχήμα σημειώστε τις θέσεις που θα φτάσει το αυτοκίνητο μετά από 1, 2 και 3 sec.

β) Πόσα μέτρα διένυσε το αυτοκίνητο κατά τη διάρκεια του 1ου, πόσα κατά τη διάρκεια του 2ου και πόσα κατά τη διάρκεια του 3ου δευτερολέπτου;



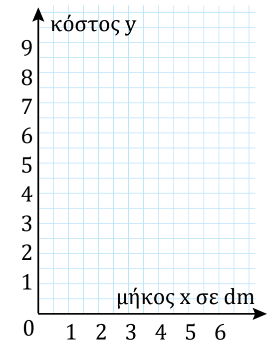
17. Μια εταιρεία κατασκευάζει τετράγωνα πλακάκια σε διάφορα μεγέθη. Το κόστος επικάλυψής τους ανά dm^2 επιφάνειας με μπλε χρώμα είναι 0,5 €.

α) Αν y είναι το κόστος βαφής σε € ενός πλακιδίου και x το μήκος της πλευράς του σε dm, να βρείτε μια σχέση που να συνδέει το y με το x.

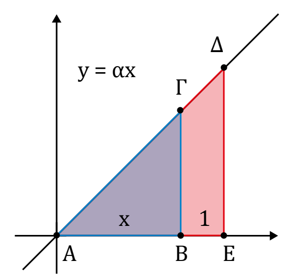
β) Στο διπλανό σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε την καμπύλη «μήκους x– κόστους y» για όλες (και τις μη ακέραιες) τις τιμές του μήκους από 0,5 έως και 4 dm.

γ) Με βάση την καμπύλη που σχεδιάσατε πόση περίπου είναι η πλευρά ενός πλακιδίου, αν η επικάλυψή του κοστίζει 3 €;

Το πρόβλημα του κηπουρού



18. Στο διπλανό σχήμα η ευθεία ΑΓ είναι η γραφική παράσταση της y = αx.



α) Να γράψετε μια σχέση που να εκφράζει το εμβαδόν του ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ ως συνάρτηση του μήκους x της πλευράς ΑΒ.

β) Σε ένα χιλιοστομετρικό χαρτί να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τη γραφική παράσταση της y = αx και της συνάρτησης του εμβαδού του ΑΒΓ για:

i. $\alpha = 1$ **ii.** $\alpha = \frac{1}{2}$

Για ποιες τιμές του x η τιμή του εμβαδού του ΑΒΓ είναι μικρότερη από την τιμή του μήκους της ΒΓ και για ποιες μεγαλύτερη;

γ) Σε τι αντιστοιχεί στο σχήμα η μεταβολή του εμβαδού του ΑΒΓ κάθε φορά που το μήκος της ΑΒ αυξάνεται κατά 1, δηλαδή από x σε x + 1; Πόση είναι η μεταβολή αυτή;

3.2 Γραμμικές εξισώσεις

Δ1. Παλέτα χρωμάτων

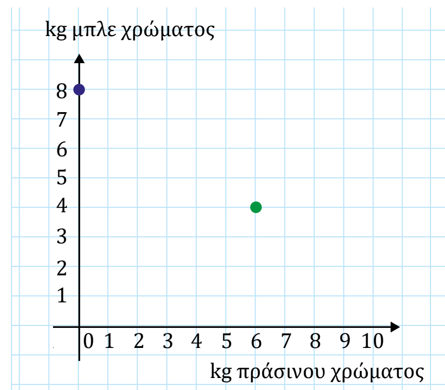
Μια εταιρεία χρωμάτων ανέθεσε σε έναν τεχνικό της να φτιάξει χρώματα αναμειγνύοντας μπλε και πράσινο χρώμα. Το κόστος κάθε συσκευασίας πρέπει να είναι 24 €. Το πράσινο χρώμα κοστίζει 2 € το kg και το μπλε 3 € το kg. Συζητήστε στις ομάδες σας και μετά στην τάξη για να απαντήσετε τα επόμενα ερωτήματα.

α) Αν η συσκευασία περιέχει x kg πράσινου και y kg μπλε χρώματος, να γράψετε μια σχέση ανάμεσα στα x και y ώστε η τιμή της συσκευασίας να είναι 24 ευρώ.

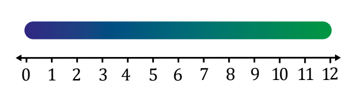
β) Ο τεχνικός μετά από κάποιες δοκιμές έφτιαξε τον παρακάτω πίνακα χρωμάτων. Να συμπληρώσετε τις τιμές που λείπουν με βάση την τιμή της συσκευασίας:

Ποσότητα x πράσινου χρώματος		3 kg	6 kg	9 kg	
Ποσότητα y μπλε χρώματος	8 kg				0 kg
Χρώμα που προκύπτει	●	●	●	●	●

γ) Για να διευκολύνει κάποιον να βρει άμεσα πόσο μπλε και πόσο πράσινο χρώμα χρειάζεται για κάθε απόχρωση, τοποθέτησε τα σημεία με το αντίστοιχο χρώμα σε ένα καρτεσιανό επίπεδο. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται δύο από αυτά. Σε ποιες θέσεις πρέπει να τοποθετηθούν τα υπόλοιπα;



δ) Θέλοντας να δώσει μια πιο πλήρη λίστα με τα χρώματα που προκύπτουν για διάφορους συνδυασμούς πράσινου και μπλε, έφτιαξε το διπλανό σχήμα. Για κάθε απόχρωση του σχήματος αντιστοιχεί ένας συνδυασμός χρωμάτων και, άρα, ένα σημείο στο καρτεσιανό επίπεδο. Τι είδους γραμμή θα προκύψει αν τοποθετήσει όλα αυτά τα σημεία στο προηγούμενο σχήμα;



Συζητάμε

...για γραμμικές εξισώσεις

Σε πολλές περιπτώσεις, μπορούμε να εκφράσουμε μία κατάσταση της καθημερινής μας ζωής με μαθηματικό τρόπο, χρησιμοποιώντας μια εξίσωση με δύο αγνώστους. Για να απαντήσουμε σε μια σχετική ερώτηση, πρέπει να λύσουμε την εξίσωση αυτή.

Για παράδειγμα, αν έχουμε στην τσέπη μας 10 ευρώ για να ψωνίσουμε στον μανάβη και αγοράσουμε x κιλά πορτοκάλια με 1 ευρώ το κιλό και y κιλά μήλα με 2 ευρώ το κιλό, τότε η εξίσωση που δείχνει τις πιθανές αγορές μας είναι η $x + 2y = 10$. Παρατηρούμε ότι για $x = 2$ και $y = 4$ η εξίσωση επαληθεύεται, καθώς

$2+2\cdot 4=10$. Στην περίπτωση αυτή το ζεύγος (2, 4) το λέμε λύση της εξίσωσης. Η λύση αυτή δείχνει ότι με 10 ευρώ μπορούμε να αγοράσουμε 2 κιλά πορτοκάλια και 4 κιλά μήλα.

Εκτός από το (2, 4), μπορούμε να βρούμε κι άλλα ζεύγη τιμών, για παράδειγμα το (4,3) και το (-2,6). Το τελευταίο όμως, αν και επαληθεύει την εξίσωση, δεν μπορούμε να το δεχτούμε ως λύση του προβλήματος, αφού δεν μπορεί τα x, y να είναι αρνητικοί αριθμοί.

Αν σκεφτούμε την εξίσωση $x + 2y = 10$ χωρίς τους περιορισμούς των θετικών τιμών για τα x, y, μπορούμε να βρούμε άπειρα ζεύγη τιμών (x, y) που να επαληθεύουν την εξίσωση, καθώς για κάθε τιμή του x μπορούμε να βρούμε και μια τιμή του y.

Για παράδειγμα:

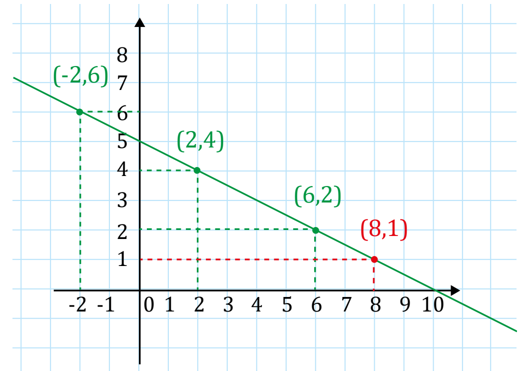
για $x = -2$ έχουμε $-2+2y=10$, οπότε $y = 6$,

για $x = 6$ έχουμε $6+2y=10$, οπότε $y = 2$.

Άρα και τα ζεύγη (−2, 6) και (6, 2) είναι λύσεις.

x	y
−2	6
6	2

Αν τοποθετήσουμε τα σημεία με τις αντίστοιχες συντεταγμένες στο καρτεσιανό επίπεδο, παρατηρούμε ότι βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία γραμμή.



Αλλά και αντίστροφα οι συντεταγμένες οποιουδήποτε σημείου της ευθείας αυτής, όπως για παράδειγμα το (8, 1), επαληθεύουν την εξίσωση $x+2y=10$.

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι συντεταγμένες των σημείων μιας ευθείας γραμμής.

Εξισώσεις της μορφής $\alpha x+\beta y=\gamma$ που οι συντελεστές α και β δεν είναι και οι δύο μηδέν τις ονομάζουμε γραμμικές.

Σχεδιάζω τις λύσεις

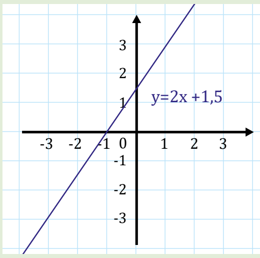
Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Γραμμική εξίσωση με αγνώστους x και y ονομάζουμε κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x+\beta y=\gamma$ με $\alpha\neq 0$ ή $\beta\neq 0$.
Ένα ζεύγος αριθμών (x, y) που την επαληθεύουν το ονομάζουμε **λύση** της εξίσωσης.

Μια γραμμική εξίσωση έχει άπειρες λύσεις.

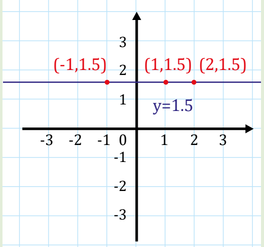
Τα σημεία του επιπέδου που οι συντεταγμένες τους είναι λύσεις μιας γραμμικής εξίσωσης είναι τα σημεία μιας **ευθείας**.

Για παράδειγμα, από την εξίσωση $-4x+2y=3$ βρίσκουμε ότι $y=2x+1{,}5$. Οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι συντεταγμένες των σημείων της ευθείας του σχήματος.

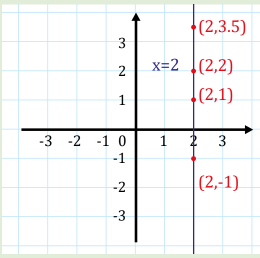


Ειδικές περιπτώσεις είναι:

- Αν α = 0, όπως στην $0x+2y=3$, οπότε $y=1{,}5$, η εξίσωση επαληθεύεται από όλα τη σημεία του επιπέδου με τεταγμένη 1,5, όπως τα (–1, 1,5), (1, 1,5), (2, 1,5) κ.λπ. Τα σημεία αυτά είναι τα σημεία της ευθείας που είναι κάθετη στον y'y στο σημείο του (0, 1,5).



- Αν β = 0, όπως στην $2x+0y=4$, οπότε x = 2, η εξίσωση επαληθεύεται από τις συντεταγμένες όλων των σημείων με τετμημένη 2, όπως π.χ. τα (2, –1), (2, 1), (2, 2), (2, 3,5) κ.λπ. Τα σημεία αυτά είναι τα σημεία της ευθείας που είναι κάθετη στον x'x στο σημείο του (2, 0).

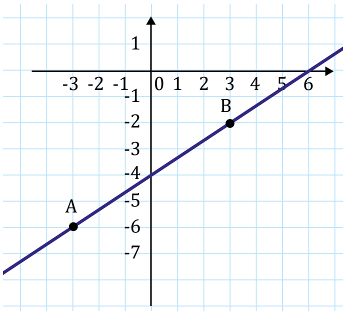


Φτιάξτε κι άλλες εξισώσεις της μορφής $αx+βy=γ$ που ο ένας από τους δύο συντελεστές να είναι 0. Τι σχέση έχουν μεταξύ τους οι ευθείες των λύσεών τους; Τι θα συμβεί αν γ = 0;
Αν α = β = 0, η εξίσωση γράφεται $0x+0y=γ$. Ποιες λύσεις μπορεί να έχει αν είναι και γ = 0, και ποιες αν $γ \neq 0$;

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. α) Να συμπληρώσετε τα ζεύγη τιμών (3, ...) και (..., –6), ώστε να είναι λύσεις της εξίσωσης $2x-3y=12$.

β) Σε ένα σύστημα αξόνων να προσδιορίσετε τα σημεία που οι συντεταγμένες τους είναι λύσεις της εξίσωσης.



Απάντηση

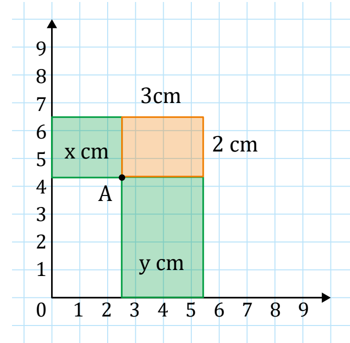
α) Για x = 3 έχουμε ότι $2\cdot 3-3y=12$, από όπου βρίσκουμε y = –2.
Για y = –6 έχουμε $2x-3(-6)=12$, από όπου βρίσκουμε x = –3.

β) Τα ζητούμενα σημεία είναι τα σημεία της ευθείας που περνάει από τα σημεία $A(-3,-6)$ και $B(3,-2)$ που αντιστοιχούν στις λύσεις του ερωτήματος α).

2. **Στο διπλανό σχήμα το καφέ ορθογώνιο έχει πλάτος 3 cm και ύψος 2 cm. Η συνολική επιφάνεια των δύο πράσινων ορθογωνίων είναι 18 cm².**

α) Να γράψετε μια σχέση που να συνδέει τις τιμές των x και y.

β) Να βρείτε και να σχεδιάσετε όλες τις θέσεις στις οποίες μπορεί να βρίσκεται το σημείο Α.



Απάντηση

α) Το πάνω αριστερά ορθογώνιο έχει επιφάνεια 2x cm² και το κάτω δεξιά 3y cm². Αφού η συνολική του επιφάνεια είναι 18 cm², ισχύει $2x+3y=18$.

β) Οι συντεταγμένες (x, y) του σημείου Α είναι λύσεις της εξίσωσης $2x+3y=18$. Άρα οι θέσεις στις οποίες μπορεί να βρεθεί το Α είναι τα σημεία μιας ευθείας. Επίσης, επειδή τα x και y είναι μήκη, θα πρέπει $x \geq 0$ και $y \geq 0$. Άρα οι θέσεις του Α είναι τα σημεία της ευθείας που βρίσκονται στο 1ο τεταρτημόριο.

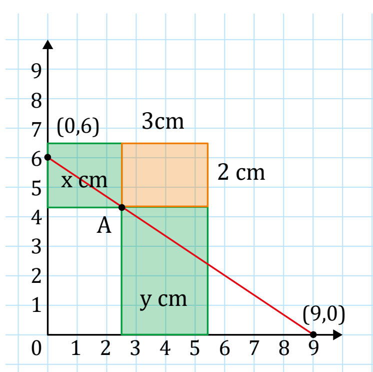
Για να την σχεδιάσουμε, αρκεί να βρούμε δύο σημεία της.

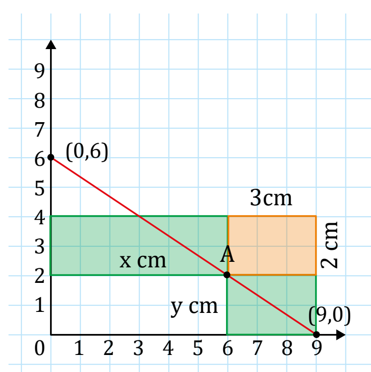
Για x = 0 έχουμε ότι $2\cdot 0+3y=18$, οπότε y = 6. Άρα μια λύση είναι η (0, 6).

Για y = 0 έχουμε ότι $2x+3\cdot 0=18$, οπότε x = 9. Άρα μια δεύτερη λύση είναι η (9, 0).

Στα παρακάτω σχήματα φαίνεται η ευθεία και δύο πιθανές θέσεις του Α.

Εδώ για x = 0 βρήκαμε το σημείο τομής της ευθείας με τον άξονα y'y και για y = 0 βρήκαμε το σημείο τομής με τον x'x. Μπορούμε να βρούμε οποιαδήποτε άλλα σημεία της ευθείας θέλουμε θέτοντας διαφορετικές τιμές στο x ή στο y.





3. **Ένα τουριστικό γραφείο θέλει να κλείσει δίκλινα και τρίκλινα δωμάτια για μια εκδρομή στην οποία συμμετέχουν 48 άτομα. Ο αρχηγός της εκδρομής έδωσε δύο επιλογές. Η πρώτη ήταν να κλείσουν 12 δίκλινα και 8 τρίκλινα και η δεύτερη 14 δίκλινα και 6 τρίκλινα δωμάτια.**

α) Είναι σωστές και οι δύο προτάσεις του αρχηγού της εκδρομής;

β) Βοηθήστε τον αρχηγό βρίσκοντας δύο ακόμα συνδυασμούς δίκλινων και τρίκλινων δωματίων.

Απάντηση

α) Για να είναι σωστές οι προτάσεις του αρχηγού, πρέπει στα δωμάτια να χωράνε συνολικά 48 άτομα.
Στην πρώτη περίπτωση η χωρητικότητα των δωματίων είναι $2 \cdot 12 + 3 \cdot 8 = 24 + 24 = 48$ άτομα. Άρα η πρόταση είναι σωστή.
Στη δεύτερη περίπτωση είναι $2 \cdot 14 + 3 \cdot 6 = 28 + 18 = 46$ άτομα. Άρα η πρόταση είναι λάθος.

β) Αν x ο αριθμός των δίκλινων και y ο αριθμός των τρίκλινων δωματίων, θα πρέπει $2x + 3y = 48$.
Μπορούμε να προτείνουμε συνδυασμούς επιλέγοντας τιμές για το x και βρίσκοντας την αντίστοιχη τιμή του y. Για παράδειγμα:
Αν $x = 6$, τότε $2 \cdot 6 + 3y = 48$, από όπου βρίσκουμε y = 12.
Αν x = 18, τότε $2 \cdot 18 + 3y = 48$, από όπου βρίσκουμε y = 14.

Ο αριθμός των δωματίων, δίκλινων ή τρίκλινων, είναι φυσικός αριθμός. Άρα δεκτές είναι οι λύσεις που και ο x και ο y είναι φυσικοί αριθμοί. Λύνοντας την εξίσωση ως προς y βρίσκουμε: $y = -\frac{2}{3}x + 48$. Από τη σχέση αυτή συμπεραίνουμε ότι ο x πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του 3.
Επίσης, είναι $x \geq 0$ και $y \geq 0$. Καθώς η αντίστοιχη ευθεία τέμνει τους άξονες στα (0, 16) και (24, 0), διαπιστώνουμε ότι $0 \leq x \leq 24$ και $0 \leq y \leq 16$.

Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε

Να κατασκευάσετε έναν πίνακα έννοιας για τη γραμμική εξίσωση.

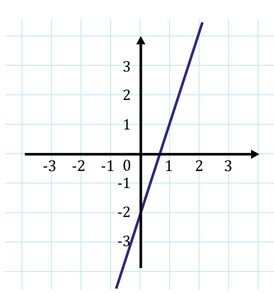
Βρίσκω γρήγορα λύσεις

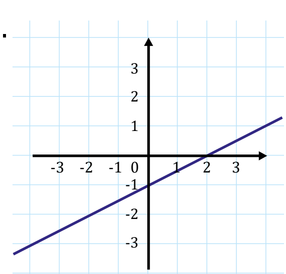
Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

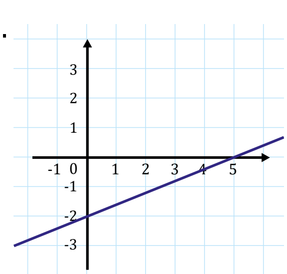
1. Ποια από τα ζεύγη (2, 1), (–1, 2), (1, 2), (6, –1), (4, 0) και (2, –3), είναι λύσεις της εξίσωσης $x + 2y = 4$;

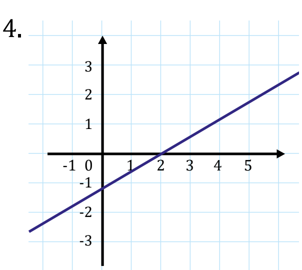
2. Να αντιστοιχίσετε τις εξισώσεις της πρώτης γραμμής με τις ευθείες της δεύτερης.

α) $2x - 4y = 4$ **β)** $3x - 5y = 6$ **γ)** $3x - y = 2$ **δ)** $2x - 5y = 10$

1.


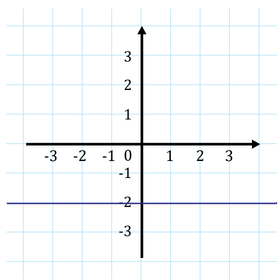
2.


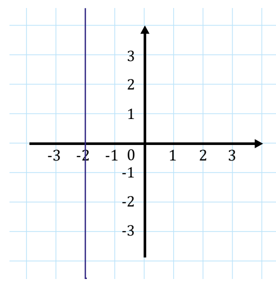
3.


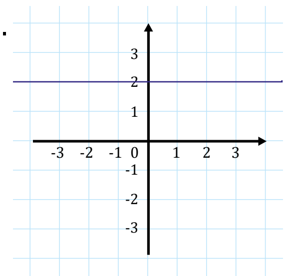
4.


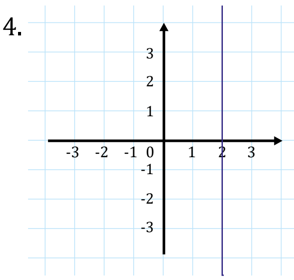
3. Να αντιστοιχίσετε τις εξισώσεις της πρώτης γραμμής με τις ευθείες της δεύτερης.

α) $2x = 4$ **β)** $y = 2$ **γ)** $-3y = 6$ **δ)** $x = -2$

1.


2.


3.


4.


4. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω ζεύγη τιμών ώστε να είναι λύσεις της εξίσωσης $-2x + y = 2$.

α) $(-1, ...)$ **β)** $(..., 0)$ **γ)** $(..., 2)$ **δ)** $(2, ...)$ **ε)** $(0, ...)$

5. Σε ένα καρτεσιανό επίπεδο, να σχεδιάσετε τις ευθείες που αντιστοιχούν στις παρακάτω εξισώσεις:

α) $-2x+7y=14$ **β)** $2x+0y=6$ **γ)** $x+y=2$ **δ)** $0x-y=-3$

6. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

i. Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $(-1, 2)$ και είναι παράλληλη στον y’y αντιστοιχεί στις λύσεις της εξίσωσης:

α) $y = 2$ **β)** $x = -1$ **γ)** $-x + 2y = 1$ **δ)** $x = 2y$

ii. Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $(3, -2)$ και είναι παράλληλη στον x’x αντιστοιχεί στις λύσεις της:

α) $y = -2$ **β)** $x = 3$ **γ)** $3x - 2y = 1$ **δ)** $3x = 2y$

7. Ποιες από τις παρακάτω εξισώσεις είναι γραμμικές;

α) $2x-3=3y+1$ **β)** $3(x-2)+6=2(y+3)$ **γ)** $\dfrac{2x-3}{y+4}=-2$ **δ)** $-x+\dfrac{4}{y}-3=2$

Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

8. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις περιγράφουν γραμμικές εξισώσεις:

α) Η τιμή του x είναι κατά 2 μονάδες μικρότερη από το διπλάσιο της τιμής του y.

β) Το γινόμενο της τιμής του x με το διπλάσιο της τιμής του y είναι ίσο με -3.

γ) Το άθροισμα του διπλάσιου της τιμής του y με το τριπλάσιο της τιμής του x είναι ίσο με 7.

δ) Η διαφορά της τιμής του x από το διπλάσιο του αντιστρόφου του y είναι ίση 2.

9. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις ευθείες που αντιστοιχούν στις λύσεις των παρακάτω εξισώσεων:

α) $x+5y=-2$ **β)** $x-y=4$ **γ)** $x = 3$

Τι παρατηρείτε;

10. Να βρείτε την τιμή του α ώστε το ζεύγος (2, –1) να είναι λύση της εξίσωσης $\alpha x - 2y = 8$.

11. Η ζάχαρη κοστίζει 1 € το kg και το αλεύρι 2 € το kg. Ένας πελάτης αγόρασε x kg ζάχαρη και y kg αλεύρι και πλήρωσε 10 €.

α) Να γράψετε μια σχέση που να συνδέει το x με το y.

β) Να βρείτε τρεις διαφορετικές περιπτώσεις για την ποσότητα της ζάχαρης και την ποσότητα από αλεύρι που μπορεί να αγόρασε.

12. Μοιράσαμε 48 κουτιά αναψυκτικού σε x συσκευασίες των 4 κουτιών και y συσκευασίες των 6 κουτιών.

α) Να γράψετε μια σχέση που να συνδέει το x και το y.

β) Να σχεδιάσετε σε ένα χιλιοστομετρικό χαρτί την ευθεία που αντιστοιχεί στις λύσεις της παραπάνω εξίσωσης.

γ) Να βρείτε όλες τις δυνατές περιπτώσεις για τον αριθμό των συσκευασιών με 4 και με 6 κουτιά που μπορεί να χρησιμοποιήθηκαν.

13. Ένας ποδηλάτης διένυσε x km σε ανηφόρα με ταχύτητα $15\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ και y km σε κατηφόρα με ταχύτητα $30\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Αν κινήθηκε συνολικά για μία ώρα τότε:

α) Να γράψετε μια σχέση που να συνδέει τις αποστάσεις x και y.

β) Αν κινήθηκε για 10 km σε ανηφόρα, για πόσα km κινήθηκε σε κατηφόρα;

14. Ο Φοίβος έχει 50 € σε κέρματα των 2 € και χαρτονομίσματα των 5 €.

α) Αν x ο αριθμός των κερμάτων και y ο αριθμός των χαρτονομισμάτων, γράψτε μια εξίσωση που να συνδέει το x με το y.

β) Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων σχεδιάστε μια γραμμή που να αντιστοιχεί στις λύσεις της εξίσωσης που φτιάξατε.

γ) Πόσα κέρματα και πόσα χαρτονομίσματα μπορεί να έχει ο Φοίβος; Βρείτε όλες τις πιθανές περιπτώσεις.

Ανακεφαλαίωση

Συναρτήσεις

Ερωτήσεις – ασκήσεις – προβλήματα

1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ):

α) Γραμμική λέμε μια εξίσωση όταν είναι της μορφής $\alpha x + \beta y = \gamma$ με $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$.

β) Το ζεύγος τιμών $(x,y) = (2,3)$ είναι λύση της $2x + 3y = 1$.

γ) Τα σημεία του επιπέδου που οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν μια γραμμική εξίσωση είναι τα σημεία μιας ευθείας.

δ) Σε κάθε γραμμική εξίσωση, για οποιαδήποτε τιμή του x μπορούμε να βρούμε μια τιμή του y ώστε το (x, y) να είναι λύση της.

ε) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \alpha x^2$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα x'x, γιατί $x^2 \geq 0$.

στ) Αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = \alpha x^2$ και $y = \beta x^2$ είναι συμμετρικές ως προς τον x'x, τότε $\alpha = -\beta$.

ζ) Για τη συνάρτηση $y = \alpha x^2$ οι τιμές του y αυξάνονται συνεχώς καθώς αυξάνονται οι τιμές του x.

2. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = \frac{1}{4}x^2$ και $y = -\frac{1}{4}x^2$.

3. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -2x^2$. Αν $-2 \leq x \leq 2$, ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει η μεταβλητή y; Για ποιες τιμές της μεταβλητής x συμβαίνει αυτό;

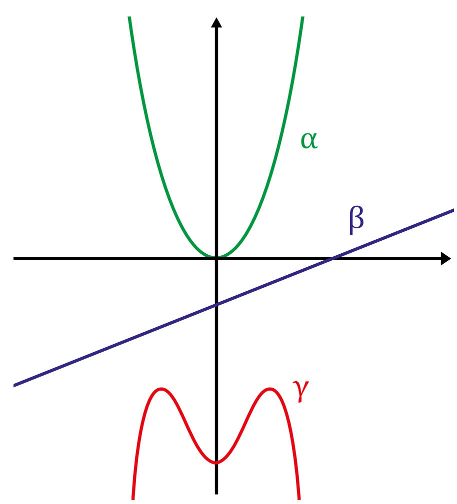
4. Ποιο είναι το πρόσημο του α της συνάρτησης $y = \alpha x^2$, αν η τιμή του y μειώνεται καθώς το x αυξάνει από το 2 στο 3;

5. Ποια από τα παρακάτω ζεύγη τιμών (x, y) είναι λύσεις της εξίσωσης $-2x + 3y = 1$;

α) $(-4,3)$ **β)** $(3,1)$

γ) $(-2,-1)$ **δ)** $\left(\frac{5}{2},2\right)$

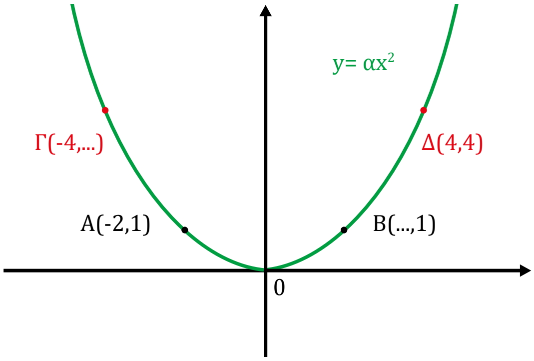
6. Να εντοπίσετε τη γραμμή του παρακάτω σχήματος που οι συντεταγμένες των σημείων της μπορεί να είναι λύσεις της εξίσωσης $2x - 4y = 5$.



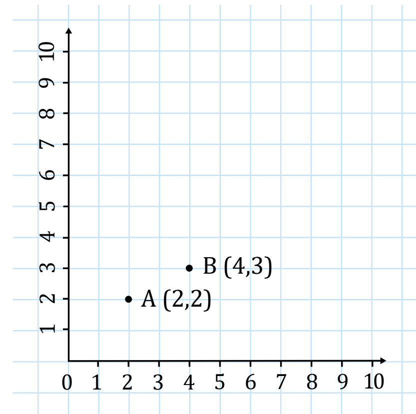
7. **α)** Αν τα ζεύγη (1, 2) και (3, 2) είναι λύσεις της εξίσωσης $\alpha x + \beta y = \gamma$, τι συμπεραίνετε για την τιμή του α;

β) Αν τα ζεύγη $(3,-1)$ και $(3,4)$ είναι λύσεις της εξίσωσης $\alpha x + \beta y = \gamma$, τι συμπεραίνετε για την τιμή του β;

8. Στο παρακάτω σχήμα να συμπληρώσετε τα κενά στις συντεταγμένες των σημείων.



9. Οι συντεταγμένες των σημείων του διπλανού σχήματος είναι λύσεις μιας εξίσωσης της μορφής $\alpha x + \beta y = \gamma$. Να περιγράψετε έναν τρόπο για να βρείτε κι άλλες λύσεις της εξίσωσης χωρίς να χρειαστεί να κάνετε πράξεις.

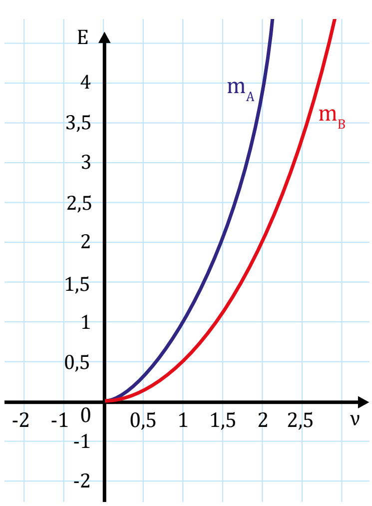


Συνδέσεις και επεκτάσεις

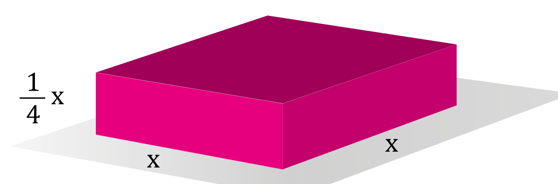
10. Η κινητική ενέργεια Ε ενός σώματος μάζας m που κινείται με ταχύτητα ν δίνεται από τη σχέση $E = \frac{1}{2}mv^2$. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται τα διαγράμματα ταχύτητας – ενέργειας δύο σωμάτων Α και Β με μάζες m_A και m_B αντίστοιχα.

α) Ποιο σώμα έχει μεγαλύτερη μάζα;

β) Πόσο μεταβάλλεται η κινητική ενέργεια κάθε σώματος όταν η ταχύτητά του αυξάνεται από $0\,\frac{m}{sec}$ σε $1\,\frac{m}{sec}$ και από $1\,\frac{m}{sec}$ σε $2\,\frac{m}{sec}$;



11. Η βάση ενός ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου είναι τετράγωνο πλευράς x cm και οι πλευρικές επιφάνειες ορθογώνια παραλληλόγραμμα διαστάσεων x cm και $\frac{1}{4}$x cm.



α) Αν Ε το συνολικό εμβαδόν της επιφάνειας του παραλληλεπιπέδου, να εκφράσετε το Ε ως συνάρτηση του x.

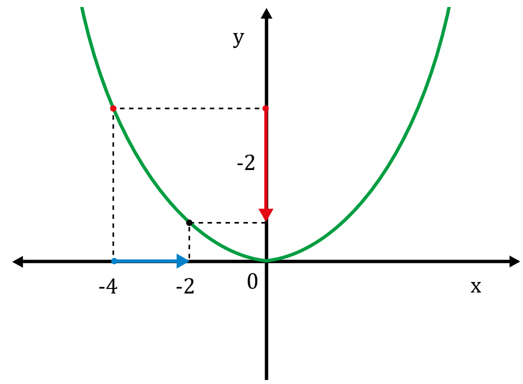
β) Σε ένα σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση του Ε ως συνάρτηση του x για $0 < x \le 2$.

γ) Με βάση τη γραφική παράσταση, να εκτιμήσετε για ποια τιμή του x η επιφάνεια Ε είναι 7 cm^2.

12. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \alpha x^2$. Η τιμή του y μειώνεται κατά 2 όταν η τιμή του x αυξάνει από το –4 στο –2. Κατά πόσο μεταβάλλεται η τιμή του y όταν το x αυξάνει από το 2 στο 4; Εξηγήστε τον τρόπο που σκεφτήκατε.

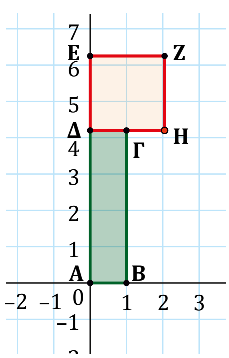
Ταξινομούμε συναρτήσεις

Τρίλιζα στις συναρτήσεις



Ομαδική εργασία

13. Στο παρακάτω σχήμα το πράσινο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχει βάση ΑΒ = 1 και ύψος ΑΔ = y, ενώ το ΕΖΗΔ είναι τετράγωνο με πλευρά x.



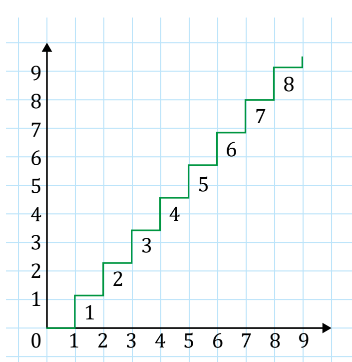
α) Να βρείτε και να σχεδιάσετε τις θέσεις που θα πρέπει να βρεθεί το σημείο $H(x,y)$ ώστε το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΔ να είναι ίσο με το εμβαδόν του ΑΒΓΔ καθώς μεταβάλλεται το ύψος ΑΔ.

β) Να εκτιμήσετε το μήκος x της πλευράς του τετραγώνου αν ΑΔ = 3.

γ) οι μεταβλητές x και y συνδέονται με έναν συγκεκριμένο τρόπο (με μία συγκεκριμένη συνάρτηση). Κατασκευάστε ένα παρόμοιο πρόβλημα στο οποίο να υπάρχουν δύο μεταβλητές οι οποίες να συνδέονται με τον ίδιο τρόπο.

14. Να περιγράψετε και να συγκρίνετε τον τρόπο που μεταβάλλεται η περίμετρος και το εμβαδόν ενός τετραγώνου κάθε φορά που η πλευρά του αυξάνεται κατά 1 cm. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε έναν πίνακα τιμών για να διερευνήσετε πώς μεταβάλλονται τα μεγέθη.

15. α) Στην παρακάτω εικόνα φαίνεται ένα σχέδιο σε σχήμα σκάλας που όλα τα σκαλοπάτια της έχουν το ίδιο ύψος α και πλάτος 1. Να βρείτε μια συνάρτηση που η γραφική της παράσταση να περνάει από το σημείο (0,0) και τις κορυφές των σκαλοπατιών.



β) Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα σχέδιο σε σχήμα σκάλας που τα σκαλοπάτια της δεν έχουν το ίδιο ύψος, αλλά το πρώτο σκαλοπάτι έχει ύψος α (όσο και της σκάλας του προηγούμενου ερωτήματος), και κάθε νέο σκαλοπάτι είναι κατά 2α ψηλότερο από το προηγούμενο.

Συμπληρώστε στον παρακάτω πίνακα τον αριθμό του σκαλοπατιού, το ύψος του και τη συνολική απόστασή του από τον οριζόντιο άξονα.

Αριθμός σκαλοπατιού	1	2	3	4	5	6		
Ύψος σκαλοπατιού	α	3α						
Συνολική απόσταση από τον οριζόντιο άξονα	α	α + 3α = 4α						

Στη συνέχεια σχεδιάστε τη σκάλα για μια τιμή του α που θα επιλέξετε.

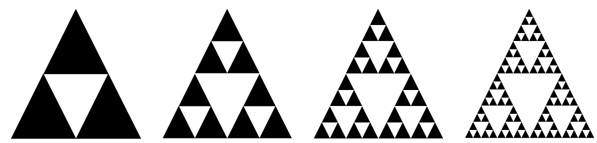
γ) Με βάση το σχέδιο της σκάλας αλλά και τον πίνακα τιμών, βρείτε μια συνάρτηση που η γραφική της παράσταση να περνάει από το (0,0) και τις κορυφές των σκαλοπατιών.

δ) Συζητήστε αν ισχύει το αντίστροφο. Δηλαδή, αν το ύψος των σκαλοπατιών μιας σκάλας που οι κορυφές τους είναι σημεία της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης, όπως αυτή του ερωτήματος γ) και έχουν πλάτος 1, αυξάνει κάθε φορά κατά έναν σταθερό αριθμό.

16. Τα φράκταλ (fractal, στα ελληνικά μορφοκλασματική καμπύλη) είναι σχήματα που εμφανίζουν αυτοομοιότητα υπό κλίμακα. Δηλαδή, αν κοιτάξουμε ένα μικρό τμήμα ενός φράκταλ θα δούμε πως είναι όμοιο με ένα μεγαλύτερο τμήμα. Αν μεγεθύνουμε το μικρό, θα δούμε πως αυτό περιέχει και πάλι όμοια μέρη κ.ο.κ. Τα φράκταλ είναι δημιουργήματα της φύσης (όπως στο μπρόκολο ρομανέσκο) και του ανθρώπου (έργα τέχνης και σχήματα κατασκευασμένα σε υπολογιστή). Αναζητήστε πληροφορίες για τα φράκταλ. Γράψτε μια μικρή εργασία σχετικά με τα παρακάτω ερωτήματα.

α) Πώς και πού εμφανίζονται τα φράκταλ στη φύση; Βρείτε σχετικές φωτογραφίες και περιγράψτε τα χαρακτηριστικά που κάνουν τα αντικείμενα να μοιάζουν με φράκταλ.

β) Ένα από τα φράκταλ είναι γνωστό ως τρίγωνο του Sierpinski και κατασκευάζεται ως εξής: Από ένα ισόπλευρο τρίγωνο αποκόπτουμε το τρίγωνο που σχηματίζεται από τα μέσα των πλευρών του. Σε καθένα από τα τρία τρίγωνα που απομένουν, αποκόπτουμε πάλι το τρίγωνο που σχηματίζεται από τα μέσα των πλευρών του. Συνεχίζουμε επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία ξανά και ξανά.



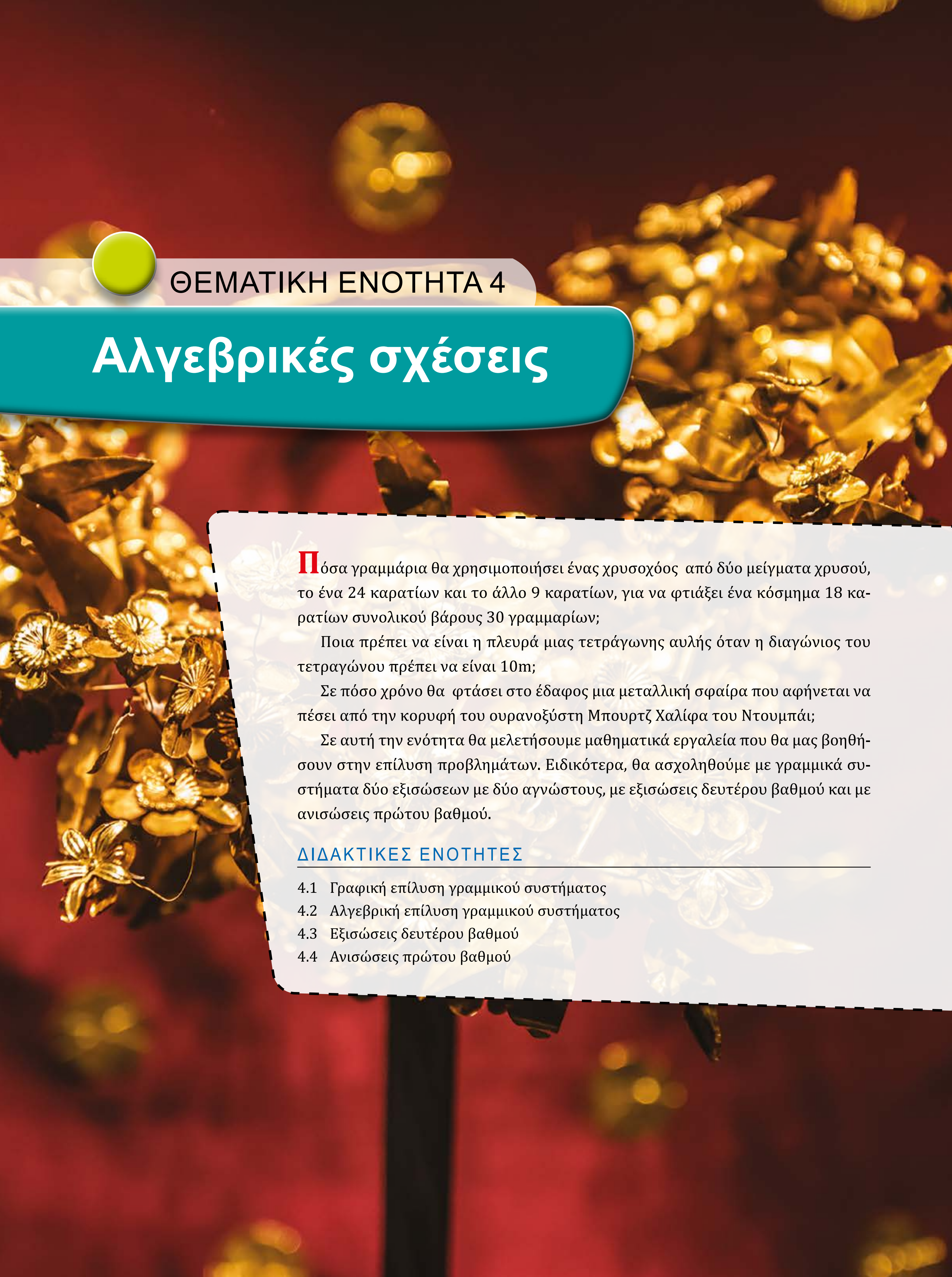
1ο βήμα 2ο βήμα 3ο βήμα 4ο βήμα

Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα:

βήμα (ν)	1	2	3	4	ν
πλήθος μαύρων τριγώνων (π)	3	3^2			
μήκος πλευράς κάθε μαύρου τριγώνου (μ)	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$			
άθροισμα περιμέτρων όλων των μαύρων τριγώνων (Π)	$3\cdot 3\cdot \frac{1}{2}$				

Σχεδιάστε σε ένα σύστημα συντεταγμένων τα σημεία με συντεταγμένες (ν, π), (ν, μ) και (ν, Π). Καθώς το ν αυξάνει απεριόριστα προς ποιον αριθμό πλησιάζει το π; το μ; το Π;

γ) Οι συναρτήσεις που εκφράζουν το π, το μ και το Π είναι του είδους $y = α^x$ και τις λέμε εκθετικές. Συγκρίνετε τους ρυθμούς με τους οποίους αυξάνονται οι συναρτήσεις $y = 2x$, $y = x^2$ και $y = 2^x$. Δηλαδή πόσο αυξάνεται το y για κάθε μοναδιαία αύξηση του x. Για τον σκοπό αυτό μπορείτε να χρησιμοποιήσετε έναν πίνακα τιμών ή ένα υπολογιστικό φύλλο.



ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ 4

Αλγεβρικές σχέσεις

Πόσα γραμμάρια θα χρησιμοποιήσει ένας χρυσοχόος από δύο μείγματα χρυσού, το ένα 24 καρατίων και το άλλο 9 καρατίων, για να φτιάξει ένα κόσμημα 18 καρατίων συνολικού βάρους 30 γραμμαρίων;

Ποια πρέπει να είναι η πλευρά μιας τετράγωνης αυλής όταν η διαγώνιος του τετραγώνου πρέπει να είναι 10m;

Σε πόσο χρόνο θα φτάσει στο έδαφος μια μεταλλική σφαίρα που αφήνεται να πέσει από την κορυφή του ουρανοξύστη Μπουρτζ Χαλίφα του Ντουμπάι;

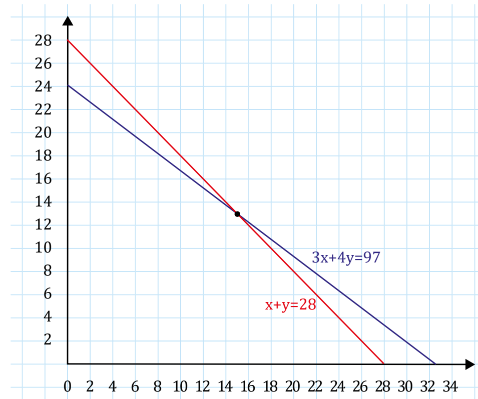
Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε μαθηματικά εργαλεία που θα μας βοηθήσουν στην επίλυση προβλημάτων. Ειδικότερα, θα ασχοληθούμε με γραμμικά συστήματα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, με εξισώσεις δευτέρου βαθμού και με ανισώσεις πρώτου βαθμού.

ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΕΝΟΤΗΤΕΣ

4.1 Γραφική επίλυση γραμμικού συστήματος

Δ1. Τα δωμάτια της εκδρομής

Η Γ΄ τάξη του 2ου Γυμνασίου Πύργου σχεδιάζει μια εκδρομή στην οποία θα συμμετέχουν 97 μαθητές και μαθήτριες. Το πρακτορείο έκλεισε 28 δωμάτια, τρίκλινα και τετράκλινα. Τα παιδιά δε θυμούνται πόσα είναι τα τρίκλινα και πόσα τα τετράκλινα δωμάτια και ζήτησαν τη βοήθεια του καθηγητή τους. Εκείνος σχεδίασε στο Geogebra τις γραφικές παραστάσεις δύο γραμμικών εξισώσεων. Επεξεργαστείτε στις ομάδες σας τα παρακάτω ερωτήματα και συζητήστε τις απαντήσεις σας στην τάξη.



α) Πώς βρήκε αυτές τις εξισώσεις;

β) Παρατηρώντας το γράφημα, βρείτε τον αριθμό των τρίκλινων και των τετράκλινων δωματίων.

γ) Αν έχουμε το γράφημα δύο οποιωνδήποτε γραμμικών εξισώσεων, πόσα κοινά ζευγάρια τιμών των x και y μπορούμε να βρούμε που να τις επαληθεύουν; Αιτιολογήστε τις απόψεις σας.

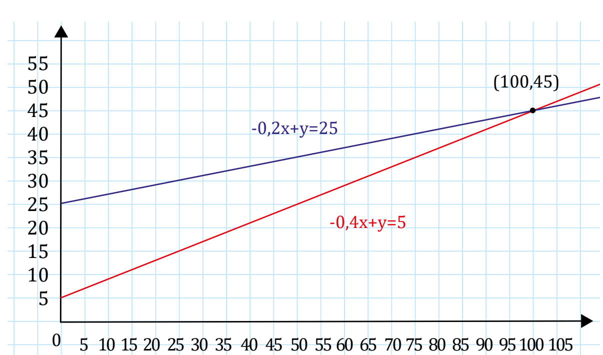
Συζητάμε

...για τα γραμμικά συστήματα

Θέλουμε να νοικιάσουμε ένα αυτοκίνητο για μία ημέρα. Στο πρακτορείο «Δίον» μας χρεώνουν 25 € την ημέρα και 0,2 € επιπλέον για κάθε χιλιόμετρο που θα διανύσουμε. Στο πρακτορείο «Όλυμπος» μας χρεώνουν 5 € την ημέρα και 0,4 € για κάθε χιλιόμετρο. Πόσα χιλιόμετρα πρέπει να κάνουμε για να πληρώσουμε το ίδιο ποσό, όποιο πρακτορείο κι αν επιλέξουμε;

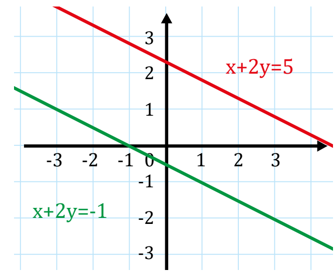
Ας ονομάσουμε x τα χιλιόμετρα που θα διανύσουμε και y τα χρήματα που θα πληρώσουμε. Τότε το κόστος για το πρακτορείο «Δίον» το βρίσκουμε από την εξίσωση $y = 0,2x + 25$ και για το πρακτορείο «Όλυμπος» από την εξίσωση $y = 0,4x + 5$. Ένας τρόπος για να λύσουμε το πρόβλημα είναι να κάνουμε τη γραφική παράσταση των δύο γραμμικών εξισώσεων.

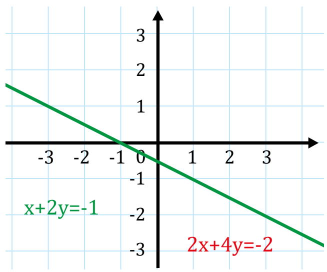
Κάθε σημείο της μπλε γραφικής παράστασης επαληθεύει την εξίσωση $y = 0,2x + 25$ (ή $-0,2x + y = 25$) και όμοια, κάθε σημείο της κόκκινης γραφικής παράστασης επαληθεύει την εξίσωση $y = 0,4x + 5$ (ή $-0,4x + y = 5$).



Το σημείο που τέμνονται $(100,45)$ ανήκει και στις δύο ευθείες και άρα το ζευγάρι των αριθμών 100 (για το x) και 45 (για το y) είναι η λύση του συστήματος. Αν διανύσουμε 100 km, θα πληρώσουμε το ίδιο ποσό και στα δύο πρακτορεία, που είναι 45 €.

Γενικότερα, αν έχουμε δύο γραμμικές εξισώσεις που θέλουμε να επαληθεύονται για τις ίδιες τιμές των μεταβλητών τους, λέμε ότι έχουμε ένα γραμμικό σύστημα. Για να βρούμε τις λύσεις που μπορεί να έχει ένα γραμμικό σύστημα, θα σκεφτούμε τις σχετικές θέσεις που έχουν οι δύο ευθείες. Αν τέμνονται (όπως στο προηγούμενο παράδειγμα), θα έχουμε μία λύση.





Αν είναι παράλληλες, τότε δεν τέμνονται και το σύστημα είναι αδύνατο, δηλαδή δεν έχει λύσεις.

Αν οι δύο ευθείες ταυτίζονται, τότε όλα τα σημεία τους είναι λύσεις του συστήματος και έτσι το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

Γραφική επίλυση γραμμικού συστήματος

Λύνοντας γραμμικά συστήματα με το Geogebra

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Δύο γραμμικές εξισώσεις με δύο (κοινούς) αγνώστους τις ονομάζουμε **γραμμικό σύστημα** δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.	Ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους παριστάνεται από τη γραφική παράσταση των δύο ευθειών των γραμμικών εξισώσεων.
Λύση του γραμμικού συστήματος είναι κάθε ζεύγος των αγνώστων που επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις. Ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους μπορεί να έχει:	Για παράδειγμα, το σύστημα $\begin{cases} 2x-3y=9 \\ -x+4y=-7 \end{cases}$ έχει λύση το ζευγάρι $(3,-1)$ γιατί, αν θέσουμε $x=3$ και $y=-1$, έχουμε: $2\cdot 3-3(-1)=9$ ή $6+3=9$ ή $9=9$, ισότητα που ισχύει, και $-3+4(-1)=-7$ ή $-7=-7$, που επίσης ισχύει.
• μοναδική λύση,	Οι δύο εξισώσεις παριστάνονται από δύο ευθείες που έχουν μοναδικό σημείο τομής, του οποίου οι συντεταγμένες είναι η λύση του συστήματος.
• καμία λύση. Τότε το σύστημα το ονομάζουμε **αδύνατο**.	Οι δύο εξισώσεις παριστάνονται από δύο παράλληλες ευθείες.
• άπειρες λύσεις.	Οι δύο εξισώσεις παριστάνονται από την ίδια ευθεία.

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. **Εξετάστε αν τα παρακάτω συστήματα είναι γραμμικά συστήματα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους. Για τα συστήματα που πιστεύετε ότι είναι γραμμικά συστήματα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, εξετάστε αν το $(2,-3)$ είναι λύση τους.**

α) $\begin{cases} x+2y=-8 \\ z=5 \end{cases}$ β) $\begin{cases} y=-3 \\ -x+y=-5 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ -x+5y-z=1 \\ -2x+4y+z=2 \end{cases}$ δ) $\begin{cases} y=3x-9 \\ x=y-8 \end{cases}$ ε) $\begin{cases} xy=4 \\ x-y=5 \end{cases}$

Απάντηση

Δεν είναι γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους:
το α), γιατί έχει δύο εξισώσεις, αλλά έχει τρεις μεταβλητές,
το γ), γιατί έχει τρεις εξισώσεις και τρεις μεταβλητές και
το ε), γιατί η πρώτη εξίσωση δεν είναι γραμμική (δε γράφεται στη μορφή $αx+βy=γ$).
Το β) είναι γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους και το $(2,-3)$ είναι λύση του, γιατί, αν θέσουμε όπου x το 2 και y το -3, έχουμε ισότητες που ισχύουν.
Και το δ) είναι γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, αλλά το $(2,-3)$ δεν είναι λύση του, γιατί επαληθεύει την πρώτη ισότητα αλλά όχι τη δεύτερη, αφού, αν αντικαταστήσουμε τις δύο τιμές, έχουμε $2=-3-8$ ή $2=-11$, μια ισότητα που δεν ισχύει.

Στη συνέχεια αυτού του βιβλίου, με την έκφραση «γραμμικό σύστημα» θα εννοούμε σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους (μεταβλητές).

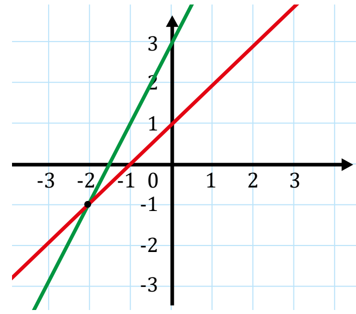
2. **Ένα ταξιδιωτικό γραφείο δίνει τις εξής προσφορές για την εκδρομή μιας οικογένειας. Η πρώτη προσφορά είναι να πληρώσουν 400 € αρχικά και στη συνέχεια να δώσουν 20 € για κάθε διανυκτέρευση. Η δεύτερη είναι να πληρώσουν 70 € για κάθε διανυκτέρευση. Πόσες διανυκτερεύσεις πρέπει να κάνει η οικογένεια για να πληρώσουν το ίδιο και στις δύο προσφορές και ποιο είναι το ποσό που θα πληρώσουν;**

Απάντηση

Ας συμβολίσουμε με x τις διανυκτερεύσεις και y το κόστος (σε εκατοντάδες €). Στην πρώτη προσφορά το κόστος δίνεται από την εξίσωση $y=4+0{,}2x$, ενώ στη δεύτερη από την εξίσωση $y=0{,}7x$. Κάνοντας τη γραφική παράσταση, παρατηρούμε ότι οι δύο εξισώσεις τέμνονται στο σημείο $(8,\ 5{,}6)$. Άρα θα έχουν το ίδιο κόστος στις δύο προσφορές αν κάνουν 8 διανυκτερεύσεις και θα πληρώσουν 560 €.

3. **Δίνεται η γραφική παράσταση ενός γραμμικού συστήματος. Ποιο είναι το σύστημα των εξισώσεων και ποια είναι η λύση του;**

Απάντηση



Γνωρίζουμε ότι οι εξισώσεις των ευθειών έχουν τη μορφή $y=\alpha x+\beta$. Για να βρούμε τις εξισώσεις, αρκεί να βρούμε τα α και β για την καθεμία από αυτές. Ξέρουμε ότι το β είναι η τεταγμένη του σημείου που τέμνει η ευθεία τον άξονα $y'y$, ενώ το α είναι η κλίση της ευθείας και δείχνει το πόσο μεταβάλλεται το y όταν το x αυξάνεται κατά 1.

Για την πράσινη ευθεία παρατηρούμε ότι τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0,3)$. Όταν το x αυξάνεται κατά 1, το y αυξάνεται κατά 2 (π.χ. αν το x από -2 γίνει -1, το y από -1 γίνεται 1). Άρα η εξίσωση είναι η $y=2x+3$.

Η κόκκινη ευθεία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0,1)$ και όταν το x αυξάνεται κατά 1, το y αυξάνεται κατά 1 (αν το x από -2 γίνεται -1, το y από -1 γίνεται 0). Άρα η εξίσωση είναι η $y=x+1$.

Το γραμμικό σύστημα είναι το $\begin{cases} y=2x+3 \\ y=x+1 \end{cases}$ και η λύση του είναι $(x,y)=(-2,-1)$.

Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε

1. Γιατί η λύση ενός γραμμικού συστήματος είναι οι συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο ευθειών;

2. Αν ξέρουμε ότι δύο διαφορετικά ζεύγη (x,y) είναι λύσεις ενός συστήματος, τότε τι συμπέρασμα μπορούμε να βγάλουμε σχετικά με το πλήθος των λύσεών του;

3. Ο Αριστείδης ισχυρίζεται ότι «*ένα σύστημα με άπειρες λύσεις επαληθεύεται από οποιουσδήποτε αριθμούς*». Συμφωνείτε με την άποψη του Αριστείδη; Γιατί ναι ή γιατί όχι;

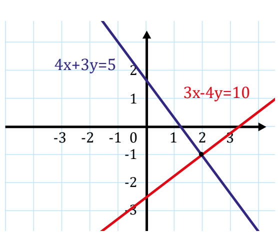
4. Να κατασκευάσετε έναν πίνακα έννοιας για το γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

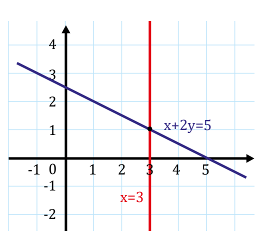
1. Εξετάστε αν το ζεύγος $(x,y)=(-2,0)$ είναι λύση των παρακάτω γραμμικών συστημάτων:

α) $\begin{cases} 4x=5y-8 \\ y=0 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} 2x+10y=-4 \\ 5x+3y=4 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} 2=-x+y \\ 3x=3y-6 \end{cases}$

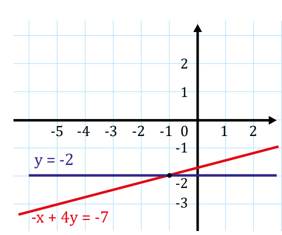
2. Βρείτε τη λύση των παρακάτω γραμμικών συστημάτων από τις γραφικές τους παραστάσεις και επαληθεύστε τις λύσεις αλγεβρικά:



(α)

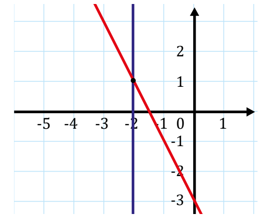


(β)

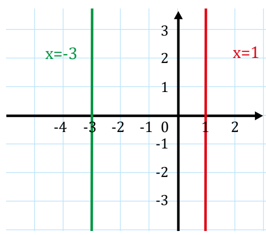


(γ)

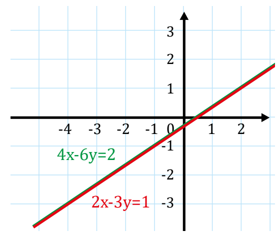
3. Ελέγξτε αν έχει σχεδιαστεί σωστά το γραμμικό σύστημα $\begin{cases} y = -3 - 2x \\ -x = 2 \end{cases}$. Αν ναι, βρείτε τη λύση του και επαληθεύστε την αλγεβρικά.



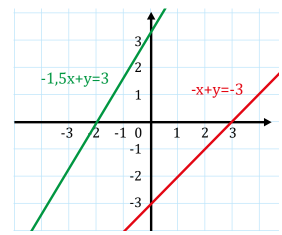
4. Βρείτε το πλήθος των λύσεων του κάθε συστήματος από τη γραφική τους παράσταση.



(α)



(β)



(γ)

5. Ποιο/α από τα παρακάτω συστήματα είναι γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους;

α) $\begin{cases} 3x + 5y = 2 \\ -x + 3 = y \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} x = -2 \\ 3x - 5y = 0 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x - 4y + z = -5 \\ 4x - 5x + z = 4 \end{cases}$ **δ)** $\begin{cases} x - z = 1 \\ y = 5 \end{cases}$

6. Για το γραμμικό σύστημα $\begin{cases} x + 3y = -1 \\ -2x + y = 2 \end{cases}$, ποια από τις παρακάτω ερωτήσεις είναι διαφορετική από τις υπόλοιπες; **α)** Ποια είναι η λύση του συστήματος; **β)** Ποιο είναι το κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων των δύο εξισώσεων; **γ)** Ποια είναι η λύση της καθεμιάς από τις δύο εξισώσεις ξεχωριστά; **δ)** Για ποιο ζεύγος αριθμών ισχύουν και οι δύο εξισώσεις;

Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

7. Σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω γραμμικών συστημάτων και βρείτε τις λύσεις τους:

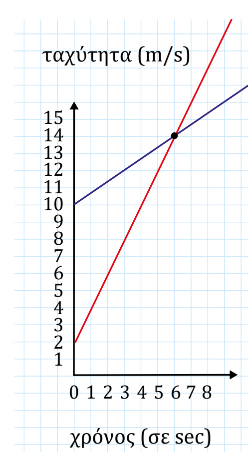
α) $\begin{cases} x - y = 3 \\ -2x + y = -4 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} x = -2 \\ 2x + 1 = y \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} y = -3 \\ x + 2y = -2 \end{cases}$

δ) $\begin{cases} x + 1 = 0 \\ -y + 3 = 0 \end{cases}$ **ε)** $\begin{cases} x + 2y = -2 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$ **στ)** $\begin{cases} x + 3y = 6 \\ -2x - 6y = -12 \end{cases}$

8. Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι γραφικές παραστάσεις χρόνου-ταχύτητας δύο αυτοκινήτων.

α) Ποια είναι η αρχική ταχύτητα (η ταχύτητα κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$) σε m/s του κάθε αυτοκινήτου;

β) Σε πόσο χρόνο (σε sec) από τη στιγμή που ξεκίνησαν θα έχουν την ίδια ταχύτητα και πόση είναι αυτή;



9. Σε ένα ορθογώνιο με περίμετρο 44 m, το μήκος του είναι κατά 2 m μεγαλύτερο από το πλάτος του. Ποιες είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου;

10. Για ένα φεστιβάλ ανακοινώθηκαν δύο συναυλίες. Μετά από x εβδομάδες από την ανακοίνωση, ο αριθμός των εισιτηρίων που πουλήθηκε στην καθεμία από αυτές δίνεται αντίστοιχα από τις εξισώσεις:

$$\begin{cases} A: y = 50 + 30x \\ B: y = 80 + 20x \end{cases}$$

Σε πόσες εβδομάδες θα έχει πουληθεί ο ίδιος αριθμός εισιτηρίων και για τις δύο συναυλίες και πόσα είναι αυτά;

11. Η Σοφία είχε να λύσει 30 ασκήσεις αυτή την εβδομάδα στα Μαθηματικά και στη Φυσική. Οι ασκήσεις στα Μαθηματικά ήταν 4 περισσότερες από τις ασκήσεις της Φυσικής. Πόσες ασκήσεις είχε σε κάθε μάθημα; Λύστε αρχικά το πρόβλημα με απλή αριθμητική και στη συνέχεια λύστε το πρόβλημα γραφικά.

12. Για να μετρήσουμε την καθαρότητα του χρυσού, χρησιμοποιούμε το καράτι, που δείχνει τι μέρος σε εικοστά τέταρτα είναι ο καθαρός χρυσός σε ένα μείγμα που περιέχει χρυσό. Ένα μείγμα 24 καρατίων είναι καθαρός χρυσός. Σε ένα μείγμα 18 καρατίων, τα 18/24 ή αλλιώς το 75% είναι καθαρός χρυσός. Έχουμε δύο μείγματα, το ένα 24 καρατίων και το άλλο 9 καρατίων. Πόσα γραμμάρια θα χρησιμοποιήσουμε από το καθένα, για να φτιάξουμε ένα μείγμα 18 καρατίων συνολικού βάρους 20 γραμμαρίων;

13. Να γράψετε ένα γραμμικό σύστημα που να έχει μοναδική λύση και η μία εξίσωση να είναι η $x + 2y = 5$.

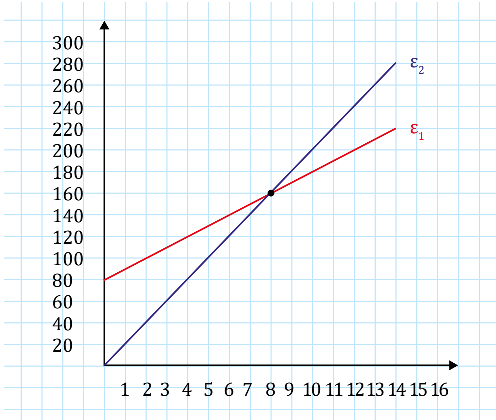
14. Να γράψετε ένα γραμμικό σύστημα που η λύση του να είναι η $(x, y) = (1, -2)$.

15. Ένας φίλαθλος έχει δύο επιλογές για να παρακολουθεί τους αγώνες της ομάδας που υποστηρίζει:

Χωρίς συνδρομή: Να πληρώνει 20 € για κάθε αγώνα που παρακολουθεί.

Με συνδρομή: Να πληρώσει 80 € ως συνδρομή και να πληρώνει επιπλέον 10 € για κάθε αγώνα που παρακολουθεί.

Καθεμία από τις παραπάνω επιλογές περιγράφεται με μια εξίσωση που εκφράζει το συνολικό ποσό που θα έχει πληρώσει ο φίλαθλος για να παρακολουθήσει x αγώνες της ομάδας. Για να βοηθήσει τους φιλάθλους να αποφασίσουν, η ομάδα κατασκεύασε ένα σχήμα με δύο ευθείες που παριστάνουν τις δύο εξισώσεις.



α) Να αντιστοιχίσετε καθεμία από τις επιλογές με τη μία από τις δύο ευθείες. Να εξηγήσετε πώς σκεφτήκατε.

β) Για ποιον αριθμό αγώνων και οι δύο επιλογές κοστίζουν το ίδιο;

γ) Ποια από τις δύο επιλογές συμφέρει αν ο φίλαθλος παρακολουθήσει 7 αγώνες και ποια αν παρακολουθήσει 10 αγώνες;

δ) Για ποιον αριθμό αγώνων συμφέρει η επιλογή με συνδρομή; Να εξηγήσετε πώς σκεφτήκατε.

4.2 Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος

Δ1. Λύνουμε με αντικατάσταση

Οι μαθητές της τάξης θέλουν να κάνουν δώρο ένα μπουκέτο λουλούδια στη Χριστίνα που έχει γενέθλια. Το μπουκέτο που θέλουν να αγοράσουν κοστίζει 32,6 € και έχει 13 κρίνα και τριαντάφυλλα. Το κάθε κρίνο κοστίζει 5,2 € και το κάθε τριαντάφυλλο 1,7 €. Πόσα κρίνα και πόσα τριαντάφυλλα έχει το μπουκέτο;

α) Οι μαθητές έφτιαξαν το σύστημα: $\begin{cases} x+y=13 \\ 5{,}2x+1{,}7y=32{,}6 \end{cases}$

Τι συμβολίζουν οι άγνωστοι x και y; Είναι σωστό το σύστημα;

β) Η Παναγιώτα λέει ότι είναι δύσκολο να λυθεί αυτό το σύστημα γραφικά λόγω των δεκαδικών τιμών. Ο Χρήστος λέει ότι βρήκε έναν τρόπο να το λύσει. Σκέφτηκε ότι στην πρώτη εξίσωση ο άγνωστος είναι το x και την έλυσε σαν να ήταν το y γνωστό. Μετά αυτό που βρήκε για x το αντικατέστησε στη δεύτερη εξίσωση. Τώρα είχε μια εξίσωση με μοναδικό άγνωστο το y.

Συμφωνείτε με την Παναγιώτα; Προσπαθήστε να λύσετε το σύστημα με το μέθοδο του Χρήστου και εξηγήστε πιο αναλυτικά τη στρατηγική αυτή. Αν βρείτε λύση, επαληθεύστε την. Παρουσιάστε και συζητήστε στην τάξη τα ευρήματά σας.

Συζητάμε

...για τη μέθοδο της αντικατάστασης

Σε μια θεατρική παράσταση έχουν κοπεί μια μέρα 293 εισιτήρια, παιδικά και ενηλίκων συνολικής αξίας 1.259,5 €. Αν το παιδικό εισιτήριο κοστίζει 3,5 € και των ενηλίκων 6,5 €, πόσα παιδιά και πόσοι ενήλικες παρακολούθησαν τη θεατρική παράσταση;

Συμβολίζουμε με x το πλήθος των παιδιών και με y το πλήθος των ενηλίκων που παρακολούθησαν την παράσταση.

Το σύστημα είναι: $\begin{cases} x+y=293 \\ 3{,}5x+6{,}5y=1.259{,}5 \end{cases}$

Βήμα 1ο: Λύνουμε την 1η εξίσωση ως προς x, άρα $x=293-y$, και αντικαθιστούμε στη 2η εξίσωση στη θέση του x το $293-y$.

Στη συνέχεια λύνουμε την εξίσωση που περιέχει πλέον μόνο έναν άγνωστο, το y:

$3{,}5x+6{,}5y=1259{,}5$ ή $3{,}5\cdot(293-y)+6{,}5y=1259{,}5$, από την οποία βρίσκουμε $y=78$.

Βήμα 2ο: Αντικαθιστούμε την τιμή του y στη $x=293-y$, για να βρούμε το x,

$x=293-78$ ή $x=215$.

<u>Επαλήθευση</u>: Αν αντικαταστήσουμε αυτές τις τιμές στο αρχικό σύστημα, έχουμε:

$\begin{cases} 215+78=293 \\ 3{,}5\cdot 215+6{,}5\cdot 78=1259{,}5 \end{cases}$ ή $\begin{cases} 293=293 \\ 752{,}5+507=1259{,}5 \end{cases}$ ή $\begin{cases} 293=293 \\ 1259{,}5=1259{,}5 \end{cases}$

ισότητες που ισχύουν.

Άρα κόπηκαν 215 παιδικά εισιτήρια και 78 ενηλίκων.

Όπως και στις εξισώσεις, όταν συνδέουμε με το «ή» δύο συστήματα εννοούμε, ότι αυτά είναι ισοδύναμα.

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Μία μέθοδος επίλυσης γραμμικών συστημάτων είναι η **μέθοδος της αντικατάστασης**:	$\begin{cases} 4x+y=-2 & (1) \\ 3x-4y=-11 & (2) \end{cases}$
Βήμα 1ο: Λύνουμε τη μία εξίσωση ως προς έναν άγνωστο και έχουμε μια σχέση (Σ). Αντικαθιστούμε στην άλλη εξίσωση τον άγνωστο με την παράσταση που βρήκαμε στη (Σ) ότι είναι ίσος. Έτσι, προκύπτει μια εξίσωση με έναν άγνωστο, την οποία λύνουμε.	Από την (1) έχουμε $y=-2-4x$ (Σ). Η (2) γίνεται $3x-4(-2-4x)=-11$ και βρίσκουμε $x=-1$.
Βήμα 2ο: Αντικαθιστούμε στη σχέση (Σ) την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε στο προηγούμενο βήμα. Έτσι, βρίσκουμε και τον άλλο άγνωστο.	Στη (Σ) $y=-2-4x$ θέτουμε $x=-1$ και βρίσκουμε $y=2$.

Για το 1ο βήμα, συνήθως επιλέγουμε την εξίσωση που απαιτεί τις λιγότερες πράξεις. Για παράδειγμα, συχνά είναι βολικό να επιλέγουμε τον άγνωστο με τον μικρότερο συντελεστή.

Δ2. Επίλυση με αντίθετους συντελεστές

Οι μαθητές της Γ΄ τάξης του Γυμνασίου Σουφλίου θέλουν να βάλουν λουλούδια στην τάξη τους. Ο Οτάρ αγόρασε την πρώτη μέρα 3 γαρίφαλα και 4 πανσέδες και πλήρωσε 12,9 €. Η Αθηνά αγόρασε από το ίδιο μαγαζί 5 γαρίφαλα και 3 πανσέδες και πλήρωσε 15,9 €. Προσπαθούν να βρουν πόσο πλήρωσαν για το κάθε είδος.

α) Συμβόλισαν με x την τιμή που έχει το ένα γαρίφαλο και με y την τιμή του ενός πανσέ και έφτιαξαν το σύστημα: $\begin{cases} 3x+4y=12{,}9 \\ 5x+3y=15{,}9 \end{cases}$. Είναι σωστό το σύστημα που έφτιαξαν;

β) Οι μαθητές σκέφτηκαν ότι θα είναι δύσκολο να λύσουν το σύστημα γραφικά λόγω των δεκαδικών τιμών, ενώ με τη μέθοδο της αντικατάστασης θα είχαν πολλές πράξεις με κλάσματα. Σκέφτηκαν κάτι διαφορετικό: Να πολλαπλασιάσουν την πρώτη εξίσωση με 5, τη δεύτερη με –3 και μετά να προσθέσουν τις δύο εξισώσεις.

Εφαρμόστε και εσείς αυτό που σκέφτηκαν τα παιδιά. Ποιον άγνωστο βρήκατε; Γιατί νομίζετε ότι οι μαθητές πολλαπλασίασαν τις εξισώσεις με τους συγκεκριμένους αριθμούς;

γ) Βρείτε και τον άλλο άγνωστο εφαρμόζοντας την ίδια στρατηγική και επαληθεύστε τη λύση που βρήκατε.

Παρουσιάστε και συζητήστε στην τάξη τα ευρήματά σας.

Συζητάμε

...για τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών

Για να παρακολουθήσει μια παρέα μια παράσταση, πλήρωσε 39,6 € για 4 παιδικά εισιτήρια και 3 ενηλίκων. Μια άλλη παρέα πλήρωσε 51,3 € για 5 παιδικά εισιτήρια και 4 ενηλίκων. Πόσο θα πληρώσει μια παρέα που έχει 7 παιδιά και 6 ενήλικες;

Για να βρούμε την τιμή του κάθε εισιτηρίου, θα συμβολίσουμε με x την τιμή του παιδικού εισιτηρίου και με y την τιμή του εισιτηρίου για ενήλικες. Το σύστημα είναι: $\begin{cases} 4x+3y=39,6 \\ 5x+4y=51,3 \end{cases}$

Ένας πιο εύκολος τρόπος από τη γραφική επίλυση ή τη μέθοδο της αντικατάστασης σε αυτή την περίπτωση είναι μια μέθοδος που την ονομάζουμε μέθοδο των αντίθετων συντελεστών. Ξέρουμε ότι ο πολλαπλασιασμός μιας εξίσωσης με τον ίδιο αριθμό δεν αλλάζει την εξίσωση και ότι, αν προσθέσουμε δύο ισότητες κατά μέλη, θα έχουμε πάλι ισότητα. Για να βρούμε τον άγνωστο y, θα τροποποιήσουμε τις δύο εξισώσεις έτσι ώστε, όταν τις προσθέσουμε, να απαλειφθεί ο άγνωστος x (δηλαδή να έχει συντελεστή μηδέν).

Βήμα 1ο: Ο x θα πρέπει να έχει αντίθετους συντελεστές στις δύο εξισώσεις, άρα θα πολλαπλασιάσουμε την πρώτη εξίσωση με το 5 και τη δεύτερη με το –4. Έτσι, θα έχουμε τους συντελεστές 20 και –20 (παρατηρήστε ότι το 20 είναι το ΕΚΠ των 4 και 5). Δηλαδή:

$$\begin{cases} 4x+3y=39,6 \\ 5x+4y=51,3 \end{cases}\left|\begin{array}{l} \cdot 5 \\ \cdot(-4) \end{array}\right. \text{ ή } \begin{cases} 20x+15y=198 \\ -20x-16y=-205,2 \end{cases}$$

Βήμα 2ο: Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις: $0x-y=-7,2$.
Λύνουμε την εξίσωση και βρίσκουμε $y=7,2$.

Βήμα 3ο: Με την ίδια λογική μπορούμε να βρούμε και τον άγνωστο x:

$$\begin{cases} 4x+3y=39,6 \\ 5x+4y=51,3 \end{cases}\left|\begin{array}{l} \cdot 4 \\ \cdot(-3) \end{array}\right. \text{ ή } \begin{cases} 16x+12y=158,4 \\ -15x-12y=-153,9 \end{cases}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις: $x-0y=4,5$ ή $x=4,5$.
Μπορούμε να επαληθεύσουμε τη λύση που βρήκαμε:

$$\begin{cases} 4\cdot 4,5+3\cdot 7,2=39,6 \\ 5\cdot 4,5+4\cdot 7,2=51,3 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 18+21,6=39,6 \\ 22,5+28,8=51,3 \end{cases} \text{ ή}$$

$\begin{cases} 39,6=39,6 \\ 51,3=51,3 \end{cases}$, ισότητες που ισχύουν.

> Για να βρούμε τον άγνωστο x, μπορούμε επίσης να αντικαταστήσουμε την τιμή του y σε μία από τις δύο εξισώσεις.

Το εισιτήριο για τα παιδιά έχει 4,5 € και για τους ενήλικες έχει 7,2 €. Η παρέα με 7 παιδιά και 6 ενήλικες θα πληρώσει $7\cdot 4,5+6\cdot 7,2=31,5+43,2=74,7$ €.

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Μία μέθοδος επίλυσης γραμμικών συστημάτων είναι η **μέθοδος των αντίθετων συντελεστών**:	$\begin{cases} 4x+y=-2 \ \ (1) \\ 3x-4y=-11 \ \ (2) \end{cases}$
Βήμα 1ο: Πολλαπλασιάζουμε τις εξισώσεις με κατάλληλους αριθμούς, ώστε σε έναν άγνωστο να δημιουργήσουμε αντίθετους συντελεστές.	$\begin{cases} 4x+y=-2 \\ 3x-4y=-11 \end{cases} \Big\vert \cdot 4$ ή
Βήμα 2ο: Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις και βρίσκουμε τον άγνωστο που δεν απαλείφεται.	$\begin{cases} 16x+4y=-8 \\ 3x-4y=-11 \end{cases}$ $19x=-19$ ή $x=-1$.
Βήμα 3ο: Βρίσκουμε τον άλλο άγνωστο, είτε επαναλαμβάνοντας τα προηγούμενα βήματα είτε αντικαθιστώντας.	Στην (1) θέτουμε $x=-1$ και έχουμε $4(-1)+y=-2$ $-4+y=-2$ ή $y=2$.

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. **Να λυθεί το σύστημα** $\begin{cases} 3x+5y=-9 \ \ (1) \\ 3x=-6-4y \ \ (2) \end{cases}$.

Απάντηση

Παρατηρούμε ότι και οι δύο εξισώσεις έχουν τον όρο 3x. Έτσι, αντικαθιστούμε στην (1) στη θέση του 3x το $-6-4y$ και έχουμε:
$-6-4y+5y=-9$ ή $-4y+5y=-9+6$ ή $y=-3$.

Η (2) για $y=-3$ γίνεται $3x=-6-4(-3)$ ή $3x=-6+12$ ή $3x=6$ ή $\frac{3x}{3}=\frac{6}{3}$ ή $x=2$.

Η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(x,y)=(2,-3)$.

Πράγματι, αν αντικαταστήσουμε στη θέση του x το 2 και στη θέση του y το –2, έχουμε $\begin{cases} 3\cdot 2+5(-3)=-9 \\ 3\cdot 2=-6-4(-3) \end{cases}$ ή

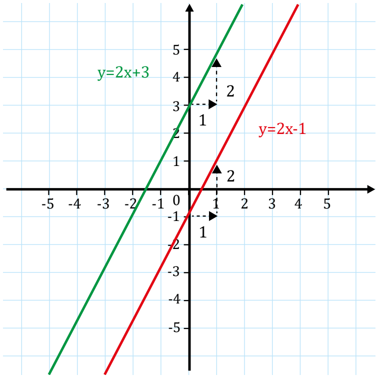
$\begin{cases} 6-15=-9 \\ 6=-6+12 \end{cases}$ ή $\begin{cases} -9=-9 \\ 6=6 \end{cases}$, δύο ισότητες που ισχύουν.

---

2. **Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα γραφικά, με τη μέθοδο της αντικατάστασης και με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών: α)** $\begin{cases} y=2x+3 \ \ (1) \\ y=2x-1 \ \ (2) \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} 3x-y=4 \ \ (1) \\ 6x-2y=8 \ \ (2) \end{cases}$

Απάντηση

α) Γραφικά: Οι ευθείες των δύο εξισώσεων έχουν την ίδια κλίση (ίση με 2), αφού, όταν το x αυξάνεται κατά 1, το y αυξάνεται κατά 2. Η μία ευθεία τέμνει τον y΄y στο σημείο $(0,3)$ και η άλλη ευθεία στο σημείο $(0,-1)$.



Οι δύο ευθείες είναι παράλληλες, δεν έχουν κοινό σημείο, άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

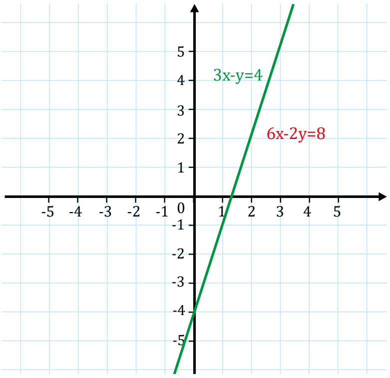
Μέθοδος της αντικατάστασης: Θέτουμε στη (2) στη θέση του y το $2x+3$ από την εξίσωση (1) και έχουμε

$2x+3=2x-1$ ή $2x-2x=-3-1$ ή $0x=-4$, εξίσωση που είναι αδύνατη, άρα και το σύστημα είναι αδύνατο.

Μέθοδος των αντίθετων συντελεστών: $\begin{cases} y=2x+3 \\ y=2x-1 \end{cases} \cdot(-1)$

ή $\begin{cases} y=2x+3 \\ -y=-2x+1 \end{cases}$

$0y=0x+4$ ή $0=4$, ισότητα που δεν ισχύει, άρα το σύστημα είναι αδύνατο.



β) Γραφικά: Οι ευθείες των δύο εξισώσεων έχουν την ίδια κλίση, όταν το x αυξάνεται κατά 1, το y αυξάνεται κατά 3, και τέμνουν στο ίδιο σημείο τον y′y, στο σημείο $(0,-4)$. Οι δύο ευθείες ταυτίζονται και έχουν λύσεις όλα τα σημεία που ανήκουν πάνω στην ευθεία.

Μέθοδος της αντικατάστασης: Η εξίσωση (2) γράφεται:

$2(3x-y)=8$. Όμως από την (1) $3x-y=4$, άρα $2\cdot 4=8$

ή $8=8$, που είναι μία ισότητα που ισχύει, άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

Μέθοδος των αντίθετων συντελεστών: $\begin{cases} 3x-y=4 \\ 6x-2y=8 \end{cases} \cdot(-2)$

ή $\begin{cases} -6x+2y=-8 \\ 6x-2y=8 \end{cases}$

$0x+0y=0$ ή $0=0$, μία ισότητα που ισχύει, άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Οι δύο εξισώσεις είναι ουσιαστικά μία, έτσι οι άπειρες λύσεις ανήκουν στην ευθεία $3x-y=4$.

Μπορείτε να εξηγήσετε γραφικά γιατί η λύση του συστήματος $\begin{cases} 0x+0y=0 \\ 3x-y=4 \end{cases}$ είναι η ευθεία $3x-y=4$;

Σκεφτείτε ποια σημεία του καρτεσιανού συστήματος αξόνων επαληθεύουν την $0x+0y=0$.

3. **Το άθροισμα των ψηφίων ενός διψήφιου αριθμού είναι 11. Αν αντιστρέψουμε τα ψηφία (το ψηφίο των δεκάδων να μπει στις μονάδες και των μονάδων στις δεκάδες), προκύπτει ένας αριθμός κατά 45 μικρότερος. Ποιος είναι ο διψήφιος αριθμός;**

Απάντηση

Αν συμβολίσουμε με x το ψηφίο των μονάδων και με y το ψηφίο των δεκάδων, τότε $x+y=11$.

Ο αρχικός αριθμός είναι ο $10x+y$, ενώ, αν αντιστρέψουμε τα ψηφία, τότε το y δείχνει τις δεκάδες και το x τις μονάδες, άρα ο αριθμός είναι ο $10y+x$.

Άρα $10y + x = 10x + y - 45$ ή $-9x + 9y = -45$.

Θα λύσουμε το σύστημα γνωρίζοντας ότι τα x και y είναι φυσικοί αριθμοί μικρότεροι του 10 και ότι ο x δεν είναι 0 (διαφορετικά ο αριθμός θα ήταν μονοψήφιος): $\begin{cases} x + y = 11 \\ -9x + 9y = -45 \end{cases}$. Διαιρούμε τη δεύτερη εξίσωση με το 9 κι έχουμε το σύστημα $\begin{cases} x + y = 11 & (1) \\ -x + y = -5 & (2) \end{cases}$.

Αν προσθέσουμε κατά μέλη τις (1) και (2), έχουμε την εξίσωση $2y = 6$ ή $y = 3$. Από την (1) βρίσκουμε $x = 8$.
Ο διψήφιος αριθμός είναι ο 83, που πράγματι είναι μεγαλύτερος κατά 45 από τον 38.

Τι συμφέρει;

Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε

1. Ο Αχσάν επέλεξε να λύσει γραφικά το σύστημα $\begin{cases} 7x + 3y = 5 \\ y = x - 1 \end{cases}$. Εσείς θα επιλέγατε τον ίδιο τρόπο; Γιατί ναι ή γιατί όχι;

2. Είναι δυνατόν ένα γραμμικό σύστημα να έχει διαφορετική/ές λύση/εις ή να μην έχει λύση/εις ανάλογα με τον τρόπο που θα το λύσουμε;

3. Για να βρει το y ο Χαράλαμπος στο σύστημα $\begin{cases} 2x + 5y = 19 & (1) \\ 3x - 4y = -6 & (2) \end{cases}$ πολλαπλασίασε την (1) με το 3 και τη (2) με το (-2). Η Σαμιά πολλαπλασίασε την (1) με το 6 και τη (2) με το (-4). Θα βρουν τα ίδια αποτελέσματα; Αν ναι, ποιον τρόπο θα προτιμούσατε και γιατί;

4. Για καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να δώσετε ένα παράδειγμα γραμμικού συστήματος που είναι πιο εύκολο για εσάς να λυθεί: **α)** γραφικά, **β)** με τη μέθοδο της αντικατάστασης, **γ)** με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών.

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Ποιο/α από τα παρακάτω συστήματα θα προτιμούσατε να λύσετε με τη μέθοδο της αντικατάστασης;

α) $\begin{cases} y = x + 2 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} 5\alpha + 3\beta = 7 \\ 3\alpha + 4\beta = -2 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} z = v - 2 \\ 5z + 3v = 4 \end{cases}$

2. Να λύσετε νοερά καθένα από τα συστήματα:

α) $\begin{cases} y = x + 2 \\ x = -2 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} y = 1 \\ x = 3y - 3 \end{cases}$

3. Ποια (ή ποιες) από τις παρακάτω απαντήσεις είναι σωστή (ή σωστές), αν θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση $3x-9y=5$ ως προς x;

α) $x=\dfrac{5+9y}{3}$ **β)** $x=3y+\dfrac{3}{5}$ **γ)** $x=5+9y$ **δ)** $x=3y+\dfrac{5}{3}$

4. Ποιο από τα παρακάτω συστήματα απαιτεί περισσότερες πράξεις για να το λύσουμε με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών; Γιατί;

α) $\begin{cases} 2x+3y=3 \\ -2x+5y=4 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} 5x-4y=2 \\ -x+4y=-1 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} 8x-3y=11 \\ -6x+7y=-2 \end{cases}$ **δ)** $\begin{cases} x+2y=10 \\ -x-5y=-2 \end{cases}$

5. Να λύσετε νοερά καθένα από τα συστήματα:

α) $\begin{cases} 2x-3y=2 \\ -2x+4y=-2 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} 4\alpha-4\beta=12 \\ -3\alpha+4\beta=-12 \end{cases}$

6. Να συμπληρώσετε τα κενά με τους αριθμούς που πρέπει να πολλαπλασιάσουμε την κάθε εξίσωση για να βρούμε με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών τον άγνωστο x:

α) $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ 5x-y=-3 \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot\_\_\_ \\ \cdot\_\_\_ \end{matrix}$ **β)** $\begin{cases} x+y=7 \\ -6x+y=11 \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot\_\_\_ \\ \cdot\_\_\_ \end{matrix}$ **γ)** $\begin{cases} 11x+2y=-3 \\ 3x-5y=0 \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot\_\_\_ \\ \cdot\_\_\_ \end{matrix}$

7. Από ποιο (ή ποια) σύστημα (συστήματα) προκύπτει η εξίσωση $2x=8$ και με ποιον τρόπο;

α) $\begin{cases} -2x+5y=4 \\ 2x-5y=-1 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} 3x+2y=3 \\ -x-2y=5 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} -2x=3y+1 \\ 4x=-3y+7 \end{cases}$

8. Να εξετάσετε νοερά αν το καθένα από τα παρακάτω συστήματα έχει λύση, είναι αδύνατο ή είναι αόριστο:

α) $\begin{cases} -x+2y=3 \\ 5x-2y=-8 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} -2x+3y=-5 \\ 2x-3y=5 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} 7x-2y=1 \\ -7x+2y=2 \end{cases}$

9. Τη μέθοδο της αντικατάστασης ή των αντίθετων συντελεστών θα επιλέγατε για να λύσετε καθένα από τα παρακάτω συστήματα;

α) $\begin{cases} -2x+3y=0 \\ 2x-6y=-5 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} y=2x-3 \\ y=-x+2 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} 4x-7y=1 \\ -x+7y=-4 \end{cases}$

Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

10. Να λύσετε τα συστήματα με τη μέθοδο της αντικατάστασης:

α) $\begin{cases} y=x+3 \\ 2x-y=-5 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} -2x+3y=21 \\ x=3y+15 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} 3x-y=13 \\ -2x-5y=14 \end{cases}$

δ) $\begin{cases} 8x-\dfrac{1}{2}y=3 \\ 4x-6=y \end{cases}$ **ε)** $\begin{cases} 5x=16-3y \\ 2y-5x=19 \end{cases}$ **στ)** $\begin{cases} x+2y=6 \\ 3(x+2y)-y=15 \end{cases}$

11. Ένα ξύλινο βαρέλι που περιέχει 1.000 λίτρα κρασί συσκευάζεται σε 148 ασκούς των 5 και 10 λίτρων. Πόσοι ασκοί χρησιμοποιήθηκαν από κάθε είδος;

12. Ένα αρτοποιείο έχει φτιάξει ένα πακέτο δώρου που το πουλά 27,2 € και περιέχει 13 μικρά βαζάκια σπιτικής μαρμελάδας μαζί με μικρές συσκευασίες από παξιμάδια. Αν το κάθε βαζάκι πουλιέται 4,1 € και η κάθε συσκευασία παξιμαδιών 1,2 €, πόσα βαζάκια και πόσες συσκευασίες παξιμαδιών περιέχει το κάθε πακέτο δώρου;

13. Να λύσετε τα συστήματα με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών:

α) $\begin{cases} x-2y=5 \\ 2x+3y=-4 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} 4x+3y=-9 \\ -2x+5y=-41 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} 4x=3y+22 \\ 3x=4y+20 \end{cases}$

δ) $\begin{cases} 3x+4y=\dfrac{63}{20} \\ -2x+4y=\dfrac{7}{5} \end{cases}$ **ε)** $\begin{cases} 2x=3y+2 \\ 4x=6y+1 \end{cases}$ **στ)** $\begin{cases} 3x-2y=1 \\ -6x+4y=-2 \end{cases}$

14. Πόσα κέρματα των 0,5 € και των 2 € πρέπει να πάρετε για να συμπληρώσετε 39,5 €, όταν γνωρίζετε ότι συνολικά πρέπει να έχετε 37 κέρματα;

15. Να βρείτε την ευθεία της μορφής $\alpha x+\beta y=6$ που διέρχεται από τα σημεία $(-4,-2)$ και $(2,2)$. Η ευθεία αυτή περνά από το σημείο $(5,5)$;

16. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα. Να εξηγήσετε για το καθένα χωριστά γιατί επιλέξατε τη μέθοδο με την οποία το λύσατε.

α) $\begin{cases} 7=-5x \\ 5x-4y=-1 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} y=x+2 \\ 6(x+2)=3y \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} 0{,}3x+2y=7{,}3 \\ -1{,}2x-4y=-29{,}2 \end{cases}$

17. Δύο αδέλφια έχουν διαφορά ηλικίας 6 έτη. Είναι δυνατόν σε 4 χρόνια η ηλικία του ενός να είναι διπλάσια από την ηλικία του άλλου; Μπορεί σε 4 χρόνια η ηλικία του ενός να γίνει τριπλάσια της ηλικίας του άλλου;

18. Ο Θοδωρής έτρεξε δύο φορές γύρω από το τετράγωνο του σπιτιού του και 3 φορές γύρω από το διπλανό πάρκο σε 23 λεπτά. Την επόμενη μέρα, τρέχοντας με τον ίδιο ρυθμό, έκανε 5 γύρους στο τετράγωνό του και 2 γύρους στο πάρκο σε 30 λεπτά. Σε πόσο χρόνο κάνει τον έναν γύρο του τετραγώνου του;

19. Σε ένα ισοσκελές αμβλυγώνιο τρίγωνο η αμβλεία γωνία είναι 2,5 φορές μεγαλύτερη από μία γωνία της βάσης. Πόσες μοίρες είναι οι γωνίες του τριγώνου;

20. Σε ένα τεστ πρέπει να απαντηθούν 25 ερωτήσεις. Για κάθε σωστή απάντηση ο μαθητής παίρνει 4 πόντους και για κάθε λάθος απάντηση αφαιρείται 1 πόντος. Μία μαθήτρια συγκέντρωσε 70 πόντους. Σε πόσες ερωτήσεις απάντησε σωστά και σε πόσες λανθασμένα;

4.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού

Μια εξίσωση στην οποία ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού πρέπει να είναι ίσο με μηδέν, τη λέμε εξίσωση δευτέρου βαθμού. Τέτοιες εξισώσεις είναι οι $x^2-9x+8=0$, $-5x^2+2x=0$, $2x^2+8=0$ κτλ.

Δ1. Πώς μπορεί να βγει μηδέν ένα γινόμενο;

α) Αν $x\cdot y=0$, τι μπορούμε να συμπεράνουμε για τους x και y;

β) Να λύσετε την εξίσωση $x\cdot(4x-8)=0$.

Συζητάμε

...για γινόμενα που είναι ίσα με το μηδέν

Για να λύσουμε την εξίσωση $(x-1)(x+2)=0$, σκεφτόμαστε ως εξής:
Το γινόμενο των παραγόντων x – 1 και x + 2 είναι ίσο με το 0. Άρα τουλάχιστον ένας από τους παράγοντες είναι ίσος με το 0.
Δηλαδή $x-1=0$ ή $x+2=0$. Οι λύσεις είναι x = 1 ή x = –2.
Με αυτόν τον τρόπο λύνουμε εξισώσεις όταν ένα γινόμενο είναι ίσο με το μηδέν.

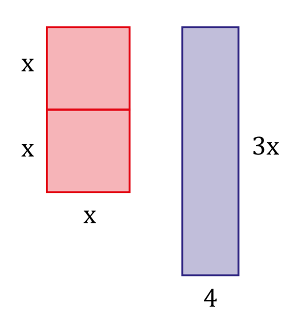
Εδώ χρησιμοποιούμε το «ή» για να δηλώσουμε ότι συμβαίνει το ένα (x + 1 = 0) ή το άλλο (x + 2 = 0).

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

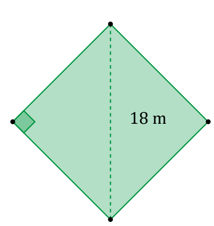
Όταν ένα γινόμενο παραγόντων είναι ίσο με το μηδέν, τότε ένας τουλάχιστον όρος θα είναι μηδέν. Αν $A\cdot B=0$, τότε A = 0 ή B = 0.	Αν $4(x+3)(x-3)(2x+1)=0$, αφού το 4 δεν είναι μηδέν, θα είναι $x+3=0$ ή $x-3=0$ ή $2x+1=0$, άρα $x=-3$ ή $x=3$ ή $x=-\frac{1}{2}$.

Δ2. Προβλήματα για ... λύση

α) Η Βαλμίρα και ο Αριστείδης έχουν κήπους με το ίδιο εμβαδόν. Ο κήπος της Βαλμίρα είναι δύο κομμάτια σε σχήμα τετραγώνου. Ο κήπος του Αριστείδη έχει σχήμα ορθογωνίου με τις διαστάσεις που φαίνονται στο διπλανό σχήμα (σε m). Ποιες είναι οι διαστάσεις των δύο κήπων;



β) Ποιο είναι το μήκος της πλευράς ενός τετραγώνου όταν η διαγώνιός του είναι 18 m;



γ) Το τετράγωνο ενός αριθμού είναι ίσο με το εξαπλάσιό του μειωμένο κατά 9. Ποιος είναι ο αριθμός;

Συζητήστε στην τάξη τα ευρήματά σας.

Συζητάμε

...για επίλυση εξισώσεων με παραγοντοποίηση

Για να λύσουμε μία εξίσωση, προσπαθούμε να παραγοντοποιήσουμε το ένα μέλος όταν το άλλο μέλος είναι 0. Ας δούμε παραδείγματα που μπορεί να γίνει παραγοντοποίηση.

1ο παράδειγμα: Για να λύσουμε την εξίσωση $4x^2 - 7x = 0$, θα βγάλουμε κοινό παράγοντα το x. Έχουμε ισοδύναμα $x(4x-7)=0$, άρα $x = 0$ ή $4x-7=0$. Οι λύσεις είναι $x = 0$ ή $x=\frac{7}{4}$, που επαληθεύουν την αρχική εξίσωση.

Η παραγοντοποίηση δεν είναι πάντα δυνατή ή εύκολη. Για παράδειγμα η παράσταση x^2+4 δεν παραγοντοποιείται. Η εξίσωση $x^2+4=0$ είναι αδύνατη αφού το άθροισμα x^2+4 είναι πάντα ένας αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος του 4 και δεν μπορεί να γίνει 0.

2ο παράδειγμα: Από την κορυφή του ουρανοξύστη Burj Khalifa του Ντουμπάι πέφτει μια μεταλλική σφαίρα. Κάθε χρονική στιγμή t (σε sec), το ύψος της (σε m) από τη βάση του πύργου δίνεται από τον τύπο $845-5t^2$. Σε πόσο χρόνο θα φτάσει στο έδαφος;

Για να λύσουμε το πρόβλημα, θα σκεφτούμε ότι το ύψος της σφαίρας όταν φτάσει στο έδαφος θα είναι 0, άρα θα λύσουμε την εξίσωση $845-5t^2=0$ ή αλλιώς $5t^2-845=0$.

Βγάζουμε κοινό παράγοντα το 5:

$5(t^2-169)=0$ ή $5(t^2-13^2)=0$

$5(t+13)(t-13)=0$ ή $\begin{cases} t+13=0 \\ \text{ή } t-13=0 \end{cases}$

$\begin{cases} t=-13<0, \text{ απορρίπτεται γιατί ο χρόνος δεν μπορεί να είναι αρνητικός αριθμός,} \\ \text{ή } t=13, \text{ που είναι λύση δεκτή.} \end{cases}$

Άρα θα βρίσκεται στη βάση του πύργου σε 13 sec.

Μέχρι τώρα χρησιμοποιούσαμε το «ή» για να δείξουμε ότι δύο εξισώσεις ή δύο συστήματα είναι ισοδύναμα. Σε αυτή την ενότητα χρησιμοποιούμε το «ή» επιπλέον για να δηλώσουμε ότι μπορεί να συμβαίνει κάτι ή κάτι άλλο (π.χ. t = –13 ή t = 13), δηλαδή με τη διαζευκτική του έννοια. Το νόημα της χρήσης του ή θα φαίνεται κάθε φορά από τα συμφραζόμενα.

Λύση εξισώσεων 2ου βαθμού με τετραγωνικές ρίζες

Εναλλακτικά μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση και ως εξής: $5t^2-845=0$ ή $5t^2=845$ ή $t^2=169$, άρα

$\begin{cases} t=\sqrt{169} \text{ ή} \\ t=-\sqrt{169}<0, \end{cases}$ ή $\begin{cases} t=13 \text{ ή} \\ t=-13<0, \text{ που απορρίπτεται.} \end{cases}$

3ο παράδειγμα: Ψάχνουμε έναν αριθμό που το τετράγωνό του να είναι ίσο με το δεκαπλάσιό του μειωμένο κατά 25.

Για να βρούμε τον αριθμό, θα σχηματίσουμε την εξίσωση $x^2=10x-25$ ή $x^2-10x+25=0$.

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση μπορεί να γραφεί $x^2-2\cdot 5x+5^2=0$, είναι δηλαδή ανάπτυγμα τετραγώνου διαφοράς και γράφεται $(x-5)^2=0$ ή $x-5=0$ ή $x = 5$. Άρα ο αριθμός είναι ο 5.

Ο αριθμός 5 λέμε ότι είναι **διπλή ρίζα** γιατί: $(x-5)^2=0$

$(x-5)(x-5)=0$ άρα $\begin{cases} x=5 \text{ ή} \\ x=5 \end{cases}$

Δηλαδή είναι 2 φορές ρίζα της εξίσωσης.

4ο παράδειγμα: Για να λύσουμε την εξίσωση $x^2+6x+5=0$, διασπάμε το 6x σε δύο όρους:

Γράφουμε το 6x ως άθροισμα των x και 5x, ώστε να κάνουμε στη συνέχεια στο πρώτο μέλος παραγοντοποίηση κατά ομάδες. $\quad x^2+x+5x+5=0$

	$x(x+1)+5(x+1)=0$
Κάνουμε παραγοντοποίηση κατά ομάδες.	$(x+1)(x+5)=0$
Τουλάχιστον ένας από τους παράγοντες είναι ίσος με 0.	$x+1=0$ ή $x+5=0$
Λύνουμε τις εξισώσεις.	$x=-1$ ή $x=-5$
Οι λύσεις είναι το -1 και το -5.	

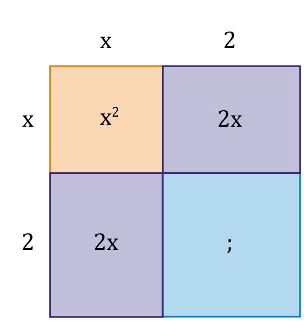
Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Για λύσουμε μια εξίσωση 2ου ή μεγαλύτερου βαθμού, προσπαθούμε να κάνουμε παραγοντοποίηση με διάφορους τρόπους, για παράδειγμα:	
• με κοινό παράγοντα,	$2x^3-6x^2=0$ ή $2x^2(x-3)=0$ $x^2=0$ ή $x-3=0$ $x=0$(διπλή ρίζα) ή $x=3$
• με διαφορά τετραγώνων,	$x^2-9=0$ ή $(x+3)(x-3)=0$ ή $\begin{cases} x=3 \text{ ή} \\ x=-3 \end{cases}$
• ως ανάπτυγμα τετραγώνου αθροίσματος ή διαφοράς,	$4x^2-4x+1=0$ ή $(2x)^2-2\cdot 2x+1^2=0$ ή $(2x-1)^2=0$ ή $2x-1=0$ ή $x=\frac{1}{2}$ (διπλή ρίζα)
• με διάσπαση ενός όρου σε δύο και παραγοντοποίηση κατά ομάδες.	$x^2-2x-3=0$ ή $x^2+x-3x-3=0$ $x(x+1)-3(x+1)=0$ ή $(x+1)(x-3)=0$ $x+1=0$ ή $x-3=0$, άρα $x=-1$ ή $x=3$

Δ3. Δημιουργώντας ένα τετράγωνο

α) Να λύσετε την εξίσωση $(x+3)^2=4$.

β) Η ομάδα του Αναστάση βρήκε τη θετική λύση της εξίσωσης $x^2+4x-5=0$, ως εξής: «Γράψαμε την εξίσωση $x^2+4x=5$ και μετά αναλύσαμε το $4x$ ως $2x+2x$, δηλαδή $x^2+2x+2x=5$. Παρατηρήσαμε ότι στο πρώτο μέλος έχουμε το εμβαδόν ενός τετραγώνου με πλευρά x και δύο ορθογωνίων με πλευρές x και 2....».



Μπορείτε και σεις με τη βοήθεια του σχήματος να υπολογίσετε το x; Σκεφτείτε ποιον αριθμό πρέπει να προσθέσετε ώστε να σχηματίσετε στο 1ο μέλος το εμβαδόν του μεγάλου τετραγώνου.

Συζητήστε τις ιδέες σας με τους συμμαθητές και τις συμμαθήτριές σας.

Συζητάμε

...για τη συμπλήρωση τετραγώνου

- Για να λύσουμε την εξίσωση $(2x-1)^2=16$, τη γράφουμε $(2x-1)^2-4^2=0$ και παραγοντοποιούμε ως διαφορά τετραγώνων: $\left[(2x-1)+4\right]\left[(2x-1)-4\right]=0$.

$$(2x-1+4)(2x-1-4)=0 \;\text{ ή }\; (2x+3)(2x-5)=0 \;\text{ ή }\; \begin{cases} 2x+3=0 \\ \text{ή } 2x-5=0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 2x=-3 \\ \text{ή } 2x=5 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x=-\dfrac{3}{2} \\ \text{ή } x=\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

- Για να λύσουμε την εξίσωση $x^2-6x-16=0$, όπως πριν, θα προσπαθήσουμε να τη φέρουμε στη μορφή της ισότητας δύο τετραγώνων. Τη γράφουμε αρχικά $x^2-6x=16$ ή $x^2-2\cdot 3\,x=16$. Παρατηρούμε ότι, αν προσθέσουμε και στα δύο μέλη το 3^2, θα έχουμε στο 1ο μέλος ένα τετράγωνο διαφοράς. Δηλαδή:

$$x^2-2\cdot 3\,x+3^2=16+3^2 \;\text{ ή }\; (x-3)^2=25$$

$$(x-3)^2=5^2 \;\text{ ή }\; \begin{cases} x-3=5 \\ \text{ή } x-3=-5 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x=8 \\ \text{ή } x=-2 \end{cases}$$

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Ένας τρόπος να λύνουμε εξισώσεις 2ου βαθμού είναι η **μέθοδος συμπλήρωσης τετραγώνου**.	$x^2-4x+3=0$ ή $x^2-4x=-3$ ή $x^2-2\cdot 2\,x=-3$ $x^2-2\cdot 2x+2^2=-3+2^2$ ή $(x-2)^2=1^2$ $\begin{cases} x-2=1 \\ \text{ή } x-2=-1 \end{cases}$ ή $\begin{cases} x=3 \\ \text{ή } x=1 \end{cases}$

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. **Να λύσετε τις εξισώσεις:**

α) $\mathbf{2(x-4)-(3x-1)(x-4)=0}$

β) $\mathbf{y(y-1)-2y+2+(y-4)(y-1)=0}$

Απάντηση

α) Βγάζουμε κοινό παράγοντα το $(x-4)$ και έχουμε: $(x-4)\left[2-(3x-1)\right]=0$ ή $(x-4)(2-3x+1)=0$ ή

$$(x-4)(3-3x)=0, \text{ άρα } \begin{cases} x-4=0 \\ \text{ή } 3-3x=0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x=4 \\ \text{ή } x=1 \end{cases}$$

β) Αν βγάλουμε κοινό παράγοντα στο άθροισμα –2y + 2 το –2, δημιουργούμε τον παράγοντα $(y-1)$ που υπάρχει και στα άλλα δύο γινόμενα. Έτσι: $y(y-1)-2(y-1)+(y-4)(y-1)=0$ ή $(y-1)[y-2+(y-4)]=0$ ή $(y-1)(y-2+y-4)=0$ ή $(y-1)(2y-6)=0$, οπότε:

$\begin{cases} y-1=0 \\ \text{ή } 2y-6=0 \end{cases}$, δηλαδή $\begin{cases} y=1 \\ \text{ή } y=3 \end{cases}$

---

2. Να βρεθούν οι θετικοί αριθμοί που είναι ρίζες της εξίσωσης $(2x-1)(x-3)-x^2(x-3)=-2(x-3)$.

Απάντηση

Η εξίσωση είναι 3ου βαθμού (αν κάνουμε τις πράξεις στον δεύτερο όρο, έχουμε $-x^3$). Λύνουμε την εξίσωση με παραγοντοποίηση:

Φέρνουμε όλους τους όρους στο 1ο μέλος. $(2x-1)(x-3)-x^2(x-3)+2(x-3)=0$

Βγάζουμε κοινό παράγοντα το x – 3. $(x-3)[(2x-1)-x^2+2]=0$

Βγάζουμε την παρένθεση. $(x-3)(2x-1-x^2+2)=0$

Κάνουμε αναγωγή όμοιων όρων. $(x-3)(-x^2+2x+1)=0$

Τουλάχιστον ένας παράγοντας είναι ίσος με το 0. $(x-3)(-x^2+2x+1)=0$ ή $\begin{cases} x-3=0 \text{ ή } x=3 \\ \text{ή } -x^2+2x+1=0 \end{cases}$

Λύνουμε την εξίσωση $-x^2+2x+1=0$ με συμπλήρωση τετραγώνου. Έχουμε: $x^2-2x-1=0$ ή $x^2-2x=1$ ή $x^2-2\cdot1\cdot x=1$ ή $x^2-2\cdot1\cdot x+1^2=1+1^2$ ή $(x-1)^2=2$

ή $\begin{cases} x-1=\sqrt{2} \\ \text{ή } x-1=-\sqrt{2} \end{cases}$ ή $\begin{cases} x=1+\sqrt{2} \\ \text{ή } x=1-\sqrt{2} \end{cases}$

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι 3, $1+\sqrt{2}$, $1-\sqrt{2}$ και αποδεχόμαστε τους θετικούς αριθμούς 3 και $1+\sqrt{2}$.

---

3. Να βρείτε τους ακέραιους αριθμούς που είναι λύσεις της εξίσωσης $x^3+x^2-2x-2=0$.

Απάντηση

Η εξίσωση είναι 3ου βαθμού. Θα κάνουμε παραγοντοποίηση κατά ομάδες:

$x^3+x^2-2x-2=0$ Βγάζουμε κοινό παράγοντα στους δύο πρώτους όρους το x^2 και στους άλλους δύο το –2.

$x^2(x+1)-2(x+1)=0$ Βγάζουμε κοινό παράγοντα το x + 1.

$(x+1)(x^2-2)=0$ Τουλάχιστον ένας παράγοντας είναι ίσος με το 0 και λύνουμε τις εξισώσεις

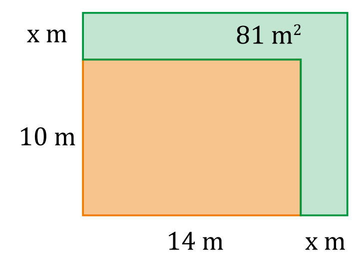
$\begin{cases} x+1=0 \\ \text{ή } x^2-2=0 \end{cases}$ ή $\begin{cases} x=-1 \\ \text{ή } x=\sqrt{2} \\ \text{ή } x=-\sqrt{2} \end{cases}$

Οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί -1, $\sqrt{2}$ και $-\sqrt{2}$, εκ των οποίων ο -1 είναι ακέραιος και είναι ο αριθμός που ψάχναμε.

4. **Ο πατέρας του Ηλία έχει ένα μεζεδοπωλείο που η αυλή του είναι σχήματος ορθογώνιου με πλευρές 14 m και 10 m. Θέλει να μεγαλώσει την αυλή κατά 81 m² αυξάνοντας το μήκος και το πλάτος το ίδιο. Κατά πόσο πρέπει να αυξήσει τις διαστάσεις του και ποιο θα είναι το νέο εμβαδόν της αυλής;**

Απάντηση

Αν αυξήσει κατά x m το μήκος και το πλάτος της αυλής, τότε οι νέες διαστάσεις της αυλής θα είναι x + 14 m και x + 10 m. Το εμβαδόν της αυλής είναι $10 \cdot 14\ m^2 = 140\ m^2$ ενώ το νέο εμβαδόν θα είναι $(x+14)(x+10)\ m^2$. Ξέρουμε ότι η διαφορά των δύο εμβαδών είναι 81 m², άρα θα λύσουμε την εξίσωση $(x+14)(x+10)-140=81$. Έχουμε διαδοχικά:



$x^2+14x+10x+140-140=81$ ή $x^2+24x=81$ ή $x^2+2\cdot 12x=81$

$x^2+2\cdot 12x+12^2=81+12^2$ ή $(x+12)^2=15^2$ ή $\begin{cases} x+12=15 \\ \text{ή } x+12=-15 \end{cases}$ ή

$\begin{cases} x=15-12 \\ \text{ή } x=-15-12 \end{cases}$ ή $\begin{cases} x=3 \\ \text{ή } x=-27 \end{cases}$

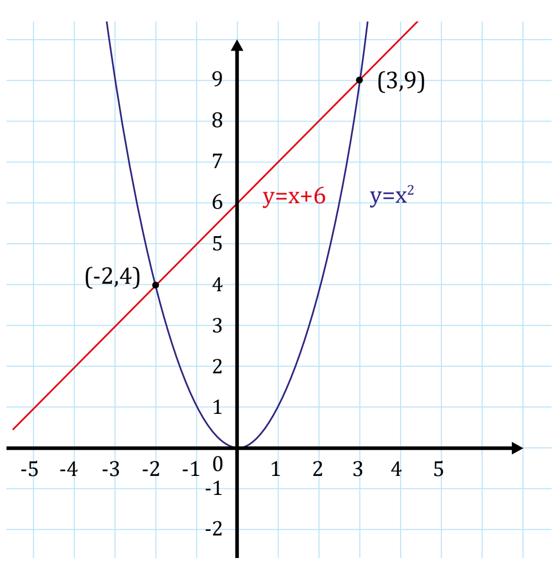
Εφόσον το x εκφράζει το πλάτος της αυλής, δεν μπορεί να είναι αρνητικό. Για αυτό απορρίπτουμε τη λύση -27. Άρα η λύση είναι 3 m. Οι διαστάσεις της νέας αυλής θα είναι 17 m και 13 m. Θα έχει εμβαδόν 221 m², που είναι πράγματι κατά 81 m² μεγαλύτερη από την τωρινή.

5. **Να βρείτε έναν αριθμό που το τετράγωνό του είναι ίσο με τον αριθμό αυξημένο κατά 6.**

Απάντηση

Αν x είναι ο αριθμός, τότε η εξίσωση του προβλήματος είναι η $x^2=x+6$. Για να τη λύσουμε (εκτός από τη συμπλήρωση τετραγώνου), μπορούμε να σκεφτούμε και ως εξής: Το τετράγωνο ενός αριθμού x δίνεται από τη συνάρτηση $y=x^2$, ενώ ο αριθμός x αυξημένος κατά 6 δίνεται από τη συνάρτηση $y=x+6$.

Αν κάνουμε τη γραφική παράσταση των δύο συναρτήσεων, παρατηρούμε ότι τέμνονται στα σημεία $(-2, 4)$ και $(3, 9)$. Δηλαδή, για τον αριθμό -2, το τετράγωνό του (που είναι 4) είναι ίσο με τον αριθμό αυξημένο κατά 6 (που είναι επίσης 4), άρα είναι λύση της εξίσωσης. Όμοια για το 3.



Γενικότερα, για να βρούμε τις τετμημένες των σημείων τομής μιας παραβολής και μιας ευθείας, μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση δευτέρου βαθμού που προκύπτει όταν εξισώσουμε τις δύο συναρτήσεις.

6. Κατασκευάστε μία εξίσωση δευτέρου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς –2 και 1.

Απάντηση

Μια εξίσωση που έχει ρίζες τους αριθμούς –2 και 1 είναι η $(x+2)(x-1)=0$. Αν κάνουμε πράξεις στο 1ο μέλος, έχουμε την εξίσωση 2ου βαθμού: $x^2+2x-x-2=0$ ή $x^2+x-2=0$.

Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε

1. Ο Περικλής αναρωτιέται αν έκανε λάθος στη λύση της εξίσωσης $x^2=4x$. Διαίρεσε με x και βρήκε x = 4. Όταν όμως έλυσε την εξίσωση με παραγοντοποίηση, βρήκε δύο λύσεις: $x^2-4x=0$ ή $x(x-4)=0$ ή $\begin{cases} x=4 \\ \text{ή } x=0 \end{cases}$. Γιατί με τον 1ο τρόπο δε βρήκε ως λύση το 0;

Διαιρώντας με άγνωστο

2. Να κατασκευάσετε έναν πίνακα έννοιας για την εξίσωση δευτέρου βαθμού.

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Ποιες είναι οι λύσεις της εξίσωσης $3x(x-7)=0$;

2. Ποιες είναι οι λύσεις της εξίσωσης $-2\left(x-\frac{2}{3}\right)x(4-x)(3x-4)=0$;

3. Η Σοφία έλυσε την εξίσωση $-3x^2-27=0$ στο τετράδιό της, αλλά έκανε κάποιο λάθος. Εντοπίστε το και διορθώστε το.

$-3(x^2+9)=0$ ή

$-3(x-3)(x+3)=0$ ή

$\begin{cases} x=3 \\ \text{ή } x=-3 \end{cases}$.

4. Βρείτε, αν υπάρχουν, τις λύσεις των εξισώσεων:
α) $x^2-3=0$ **β)** $2x^2+3=0$ **γ)** $7x^2=0$

5. Ο Βασίλης έλυσε μια εξίσωση όπως φαίνεται στο σημειωματάριό του, αλλά έκανε κάποιο λάθος. Εντοπίστε το και διορθώστε το.

$3(x-2)^2-1=2$ ή

$3(x-2)^2=3$ ή $(x-2)^2=1$

$x-2=1$ ή $x=3$.

6. Σε ποιες από τις παρακάτω εξισώσεις το πρώτο μέλος είναι ανάπτυγμα τετραγώνου αθροίσματος ή διαφοράς;
α) $x^2+4x+4=0$ **β)** $\alpha^2+2\alpha+3=0$
γ) $\omega^2-6\omega+9=0$ **δ)** $9t^2+25=0$

7. Επιλέξτε τις εξισώσεις που μπορείτε να λύσετε με παραγοντοποίηση:
α) $3(x+2)=x^2(x+2)-3x(x+2)$
β) $x^3(x-1)-x^2(x-1)-x(1-x)=0$
γ) $(3x-1)-x^2(3x-1)-x(1-2x)=0$

Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

8. Να λύσετε τις εξισώσεις **α)** $x(x-2)=0$ **β)** $0=(2-y)(4y-3)$ **γ)** $z(3z+1)(-2z-3)=0$.

9. Ο Χρήστος ισχυρίζεται ότι οι λύσεις της εξίσωσης $(x-2)(x-10)=1$ είναι το 2 και το 10. Διαφωνεί η Αθηνά, η οποία λέει ότι είναι το 3 και το 11. Γιατί δεν είναι λύσεις όλες οι παραπάνω τιμές; Μπορείτε να εξηγήσετε πώς πιθανόν σκέφτηκε το κάθε παιδί;

10. Να λύσετε τις εξισώσεις **α)** $x^2=-x$ **β)** $2b^2=3b$ **γ)** $3\varphi^3-9\varphi^2=0$.

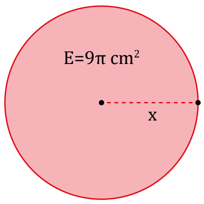
11. Το ένα τρίτο του τετραγώνου ενός αριθμού είναι τετραπλάσιο του αριθμού. Ποιος είναι ο αριθμός;

12. Να λύσετε τις εξισώσεις **α)** $2x^2+5=15$ **β)** $4x^2-7=10$ **γ)** $7x^2+13=7$.

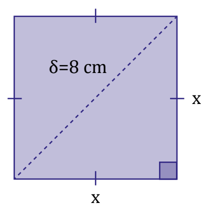
13. Ένα δοχείο λαδιού σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση τετράγωνο, έχει χωρητικότητα 16 lt $(1lt=1dm^3)$ και το ύψος του είναι 2 dm. Πόσο είναι το μήκος της βάσης του;

14. Βρείτε τον άγνωστο αριθμό x που υπάρχει σε κάθε σχήμα.

(α)



(β)



15. Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $(x-2)^2-9=0$ **β)** $y^2-(2y-1)^2=0$ **γ)** $(x-4)^2-(3x-1)^2=0$.

16. Να λύσετε τις εξισώσεις **α)** $x^2-2x+1=0$ **β)** $16\lambda^2-8\lambda+1=0$ **γ)** $64\kappa^2+48\kappa+9=0$.

17. Να λύσετε τις εξισώσεις διασπώντας έναν όρο σε δύο:
α) $x^2+4x+3=0$ **β)** $x^2-6x+5=0$ **γ)** $x^2-4x-5=0$ **δ)** $x^2+x-6=0$ **ε)** $x^2+2x-15=0$

18. Συμπληρώστε τα κενά στις παρακάτω εξισώσεις προσθέτοντας τον ίδιο αριθμό και στα δύο μέλη, έτσι ώστε να σχηματίζεται στο πρώτο μέλος ανάπτυγμα τετραγώνου.
α) $x^2+6x+\_\_\_=5+\_\_\_$
β) $x^2-12x+\_\_\_=-11+\_\_\_$
γ) $9x^2+30x+\_\_\_=-14+\_\_\_$

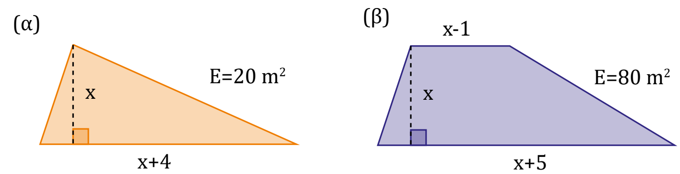
19. Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $(x+2)^2=1$ **β)** $(3x-4)^2=25$ **γ)** $x^2+4x+4=9$ **δ)** $9x^2-6x+1=16$ **ε)** $x^2+22x+121=49$

20. Να λύσετε τις εξισώσεις **α)** $x^2+6x=7$ **β)** $4x^2-12x=16$.

21. Το μήκος ενός ορθογωνίου είναι κατά 4 m μεγαλύτερο από το πλάτος του. Βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου: **α)** όταν έχει εμβαδόν 12 m^2 **β)** όταν η διαγώνιός του είναι $\sqrt{26}$ m.

22. Ένας αμυντικός παίχτης στο βόλεϊ αποκρούει την μπάλα λίγο πριν χτυπήσει στο έδαφος. Αν το ύψος της μπάλας από το έδαφος δίνεται από τον τύπο $-t^2+6t$, όπου t ο χρόνος (σε sec) από τη στιγμή που χτύπησε την μπάλα, σε πόσο χρόνο η μπάλα θα βρίσκεται σε ύψος 8 m;

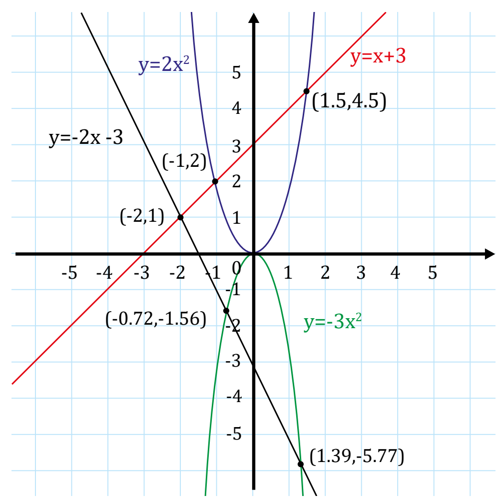
23. Να βρεθεί το ύψος x σε κάθε περίπτωση:



24. Βρείτε με προσέγγιση εκατοστού τις λύσεις των παρακάτω εξισώσεων παρατηρώντας τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y=2x^2$, $y=-3x^2$, $y=-2x-3$, $y=x+3$, που είναι σχεδιασμένες στο καρτεσιανό επίπεδο:

α) $2x^2=x+3$ **β)** $-3x^2+2x+3=0$

γ) $2x^2=-2x-3$ **δ)** $-3x^2-x-3=0$



Γραφική επίλυση εξισώσεων 2ου βαθμού

25. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $-2(x-3)=3x(x-3)-x^2(3-x)$

β) $\alpha^3+3\alpha^2+2\alpha+6=0$

γ) $(4t-7)(2t^3-8t^2-3t+12)=0$

26. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\dfrac{x^2+x}{2}=\dfrac{x+1}{2}+4$ **β)** $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{x-5}{6}$

27. Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού η οποία να έχει λύσεις τους αριθμούς:

α) 3 και 2 **β)** 2 και –5 **γ)** 3 και –3

28. Γράψτε μια εξίσωση 2ου βαθμού που οι ρίζες της να απέχουν απόσταση ίση με 4 μονάδες στην ευθεία των πραγματικών αριθμών.

4.4 Ανισώσεις πρώτου βαθμού

Δ1. Παραμένει ή αλλάζει η φορά της ανισότητας;

Γνωρίζουμε ότι $-12 < -8$. Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις και να παραστήσετε πάνω στην ευθεία των πραγματικών τους αριθμούς -12, -8 και τους νέους αριθμούς που προκύπτουν σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις.

- Αν προσθέσετε και στα δύο μέλη τον ίδιο αριθμό, θα παραμείνει η προηγούμενη ανισότητα;
- Αν αφαιρέσετε τον ίδιο αριθμό;
- Αν πολλαπλασιάσετε με έναν θετικό αριθμό; Αν πολλαπλασιάσετε με έναν αρνητικό αριθμό;
- Αν διαιρέσετε με έναν θετικό αριθμό; Αν διαιρέσετε με έναν αρνητικό αριθμό;

Να επαναλάβετε τα προηγούμενα διαλέγοντας διαφορετικούς αριθμούς και στη συνέχεια να συζητήσετε στην ομάδα σας τις απαντήσεις που δώσατε.

Συζητάμε

...για τις ιδιότητες της διάταξης

Δύο αριθμοί α και β ή θα είναι ίσοι (και γράφουμε $\alpha = \beta$) ή άνισοι (και γράφουμε $\alpha \neq \beta$). Τους άνισους αριθμούς μπορούμε να τους συγκρίνουμε. Για παράδειγμα, λέμε ότι το -3 είναι μικρότερο από το 2 και το γράφουμε με την ανισότητα $-3 < 2$, ή ότι το -1 είναι μεγαλύτερο από το -7 και το γράφουμε $-1 > -7$.

Όπως είχαμε δει σε προηγούμενες τάξεις τις ιδιότητες της ισότητας που μας βοήθησαν να λύνουμε εξισώσεις, έτσι σε αυτήν την ενότητα θα μελετήσουμε τις ιδιότητες της διάταξης, με τη βοήθεια των οποίων θα λύνουμε ανισότητες που περιέχουν άγνωστους αριθμούς.

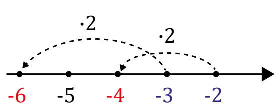
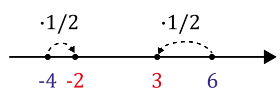
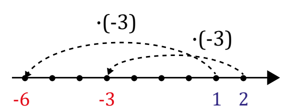
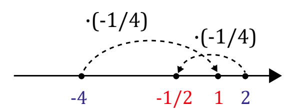
- Ας δούμε παραδείγματα ανισοτήτων που προσθέτουμε ή αφαιρούμε και στα δύο μέλη τον ίδιο αριθμό:

$-14 < -5$	$-4 < 3$	$12 > 7$	$1 > -10$
$\underline{+2} \quad \underline{+2}$	$\underline{+3} \quad \underline{+3}$	$\underline{-10} \quad \underline{-10}$	$\underline{-4} \quad \underline{-4}$
$-14 + 2 < -5 + 2$	$-4 + 3 < 3 + 3$	$12 - 10 > 7 - 10$	$1 - 4 > -10 - 4$
$-12 < -3$	$-1 < +6$	$2 > -3$	$-3 > -14$

Παρατηρούμε ότι οι δύο νέοι αριθμοί που προκύπτουν έχουν την ίδια ανισοτική σχέση με την αρχική. Γενικότερα, αν έχουμε δύο αριθμούς α και β στην ευθεία των πραγματικών και το β βρίσκεται δεξιότερα από το α, τότε $\alpha < \beta$. Αν προσθέσουμε τον ίδιο αριθμό γ και στους δύο αριθμούς, τότε μετακινούνται και οι δύο κατά την ίδια απόσταση, είτε προς τα δεξιά, αν το γ είναι θετικός, είτε προς τα αριστερά, αν είναι αρνητικός, άρα παραμένουν ομοίως άνισοι, δηλαδή $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$.

- Αν αφαιρέσουμε και από τους δύο αριθμούς α και β τον ίδιο αριθμό γ, τότε είναι σαν να προσθέτουμε τον −γ, άρα σύμφωνα με την προηγούμενη ιδιότητα α − γ < β − γ.
- Ας πολλαπλασιάσουμε ανισότητες με τον ίδιο αριθμό κάθε φορά:

Προσθέτοντας τον ίδιο αριθμό σε μία ανισότητα

$-3 < -2$	$-4 < 6$	$1 < 2$	$-4 < 2$
$2\cdot(-3)\ \dots\ 2\cdot(-2)$	$(-4)\cdot\frac{1}{2}\ \dots\ 6\cdot\frac{1}{2}$	$1\cdot(-3)\ \dots\ 2\cdot(-3)$	$\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot(-4)\ \dots\ \left(-\frac{1}{4}\right)\cdot 2$
$-6 < -4$	$-2 < +3$	$-3 > -6$	$1 > -\frac{1}{2}$
			

Παρατηρούμε ότι, όταν πολλαπλασιάζουμε με θετικό αριθμό, η ανισότητα παραμένει η ίδια, ενώ, όταν πολλαπλασιάζουμε με αρνητικό αριθμό, η ανισότητα αλλάζει φορά.

- Αν διαιρέσουμε και τους δύο αριθμούς με τον ίδιο μη μηδενικό αριθμό γ, τότε είναι σαν να πολλαπλασιάζουμε με τον $\frac{1}{γ}$, άρα ακολουθούμε τον προηγούμενο κανόνα.

Πολλαπλασιάζοντας μία ανισότητα με τον ίδιο αριθμό

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Βασικές ιδιότητες της διάταξης Αν προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό στα δύο μέλη μιας ανισότητας, τότε αυτή δεν αλλάζει.	Αν $α < β$, τότε: $α + γ < β + γ$, $α - γ < β - γ$	Αν $x < -1$, τότε: $x + 5 < -1 + 5$, $x + 17 < -1 + 17$, $x - 4 < -1 - 4$, $x - 1 < -1 - 1$
Αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο, μη μηδενικό αριθμό, τότε αυτή:		
• συνεχίζει να ισχύει αν ο αριθμός είναι θετικός,	$αγ < βγ$, αν $γ > 0$, $\frac{α}{γ} < \frac{β}{γ}$, αν $γ > 0$	Αν $x < -1$, τότε: $2x < 2(-1)$, $5x < 5(-1)$, $\frac{x}{3} < \frac{-1}{3}$, $\frac{x}{7} < \frac{-1}{7}$
• αλλάζει φορά αν ο αριθμός είναι αρνητικός.	$αγ > βγ$, αν $γ < 0$, $\frac{α}{γ} > \frac{β}{γ}$, αν $γ < 0$	$-2x > -2(-1)$, $-5x > -5(-1)$, $\frac{x}{-3} > \frac{-1}{-3}$

Δ2. Προβλήματα ... με ανισότητες

Στη διπλανή φωτογραφία η πινακίδα ενημερώνει ότι τα φορτηγά, για να περάσουν από την επόμενη γέφυρα, πρέπει να έχουν ύψος μικρότερο από 4,8 m. Το ύψος ενός φορτηγού είναι 2,3 m. Αν x είναι το επιπλέον ύψος που προσθέτουν τα εμπορεύματα στο φορτηγό, γράψτε μια ανισότητα που να αναπαριστά το πρόβλημα.

Μία τέτοια ανισότητα που περιέχει άγνωστο την ονομάζουμε ανίσωση.

α) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί 1,1, 2,3, 2,5, 3 είναι λύσεις της ανίσωσης.

β) Να λύσετε την ανίσωση χρησιμοποιώντας ιδιότητες της διάταξης και να σημειώσετε τις λύσεις στην ευθεία των πραγματικών.

Να συζητήσετε στην τάξη τις επεξεργασίες σας.

Συζητάμε

...για την έννοια της ανίσωσης και την επίλυσή της

«Να βρείτε τον αριθμό που το τριπλάσιό του μειωμένο κατά 5 είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το πενταπλάσιο του αριθμού αυξημένο κατά 7».

Για να λύσουμε το πρόβλημα, θα ονομάσουμε x τον άγνωστο αριθμό και θα γράψουμε την ανισοτική σχέση $3x-5\geq 5x+7$, που την ονομάζουμε ανίσωση.

Αν αντικαταστήσουμε το x με τον αριθμό 2, παρατηρούμε ότι $3\cdot 2-5\geq 5\cdot 2+7$ ή $6-5\geq 10+7$ ή $1\geq 17$, μια ανισότητα που δεν ισχύει, άρα ο αριθμός 2 δεν είναι λύση της ανίσωσης.

Για να γράψουμε ότι ένας αριθμός α είναι μεγαλύτερος ή ίσος από το 3, γράφουμε $\alpha\geq 3$.
Αν θέλουμε να γράψουμε ότι είναι μικρότερος ή ίσος από το 3, γράφουμε $\alpha\leq 3$.

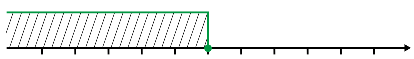
Αν αντικαταστήσουμε το x με τον αριθμό –7, παρατηρούμε ότι $3\cdot(-7)-5\geq 5\cdot(-7)+7$ ή $-21-5\geq -35+7$ ή $-26\geq -28$, μια ανισότητα που ισχύει, άρα ο αριθμός –7 είναι λύση της ανίσωσης.

Για να λύσουμε την ανίσωση, θα χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες της διάταξης:

	$3x-5\geq 5x+7$
αφαιρούμε και στα δύο μέλη το 5x (ή προσθέτουμε το –5x),	$3x-5-5x\geq \cancel{5x}+7-\cancel{5x}$
προσθέτουμε και στα δύο μέλη το 5 και κάνουμε τις πράξεις,	$3x\cancel{-5}-5x\cancel{+5}\geq 7+5$ ή $3x-5x\geq 12$
εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα,	$(3-5)x\geq 12$ ή $-2x\geq 12$
διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου και, επειδή αυτός είναι αρνητικός, αλλάζει φορά η ανισότητα,	$\dfrac{-2x}{-2}\leq\dfrac{12}{-2}$
κάνουμε τις πράξεις.	$x\leq -6$

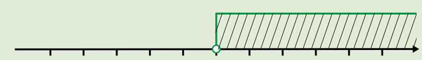
Όλοι οι αριθμοί που είναι μικρότεροι ή ίσοι από το -6 είναι λύσεις της ανίσωσης.

Μπορούμε να παραστήσουμε τις λύσεις πάνω στην ευθεία των πραγματικών με τους αριθμούς της ευθείας που είναι στο γραμμοσκιασμένο χωρίο:



Το -6 συμπεριλαμβάνεται

Οι λύσεις της ανίσωσης $x > -2$ είναι όλοι οι αριθμοί που είναι μεγαλύτεροι από το -2 και τις παριστάνουμε με παρόμοιο τρόπο.

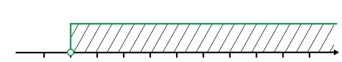


Το -2 δε συμπεριλαμβάνεται και
γι' αυτό το συμβολίζουμε με κυκλάκι

Μία ανίσωση της μορφής $αx + β < γ$ έχει άπειρες λύσεις, εκτός κι αν είναι αδύνατη. Για παράδειγμα η ανίσωση $0x > 4$ ή $0 > 4$ είναι μια ανισότητα που δεν ισχύει, έτσι η ανίσωση είναι αδύνατη. Η ανίσωση $0x \geq -2$ ή $0 \geq -2$ ισχύει πάντα, ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό.

Επίλυση ανίσωσης 1ου βαθμού

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

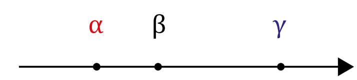
Μία ανισότητα της μορφής $αx + β < γ$ (και όσες μετασχηματίζονται σε αυτή) με **άγνωστο** το x, την τιμή του οποίου θέλουμε να βρούμε, τη λέμε **ανίσωση πρώτου βαθμού**. **Πρώτο μέλος** της ανίσωσης είναι η παράσταση που βρίσκεται στα αριστερά της ανισοτικής σχέσης και **δεύτερο μέλος** αυτή που βρίσκεται στα δεξιά. **Λύση** μιας ανίσωσης είναι όποιος αριθμός την επαληθεύει.	Ανίσωση: $\underbrace{-4x-5}_{\text{Πρώτο μέλος}} < \underbrace{-2x+7}_{\text{Δεύτερο μέλος}}$ Γνωστοί όροι: -5, 7 Άγνωστοι όροι: $-4x$, $-2x$ Το -1 είναι μια λύση της $-4x-5 < -2x+7$, γιατί η ανισότητα $-4(-1)-5 < -(-1)+7$ ή $-1 < 9$ ισχύει.
Για να λύσουμε μια ανίσωση, εφαρμόζουμε τις ιδιότητες της διάταξης και τη μετασχηματίζουμε σε μια άλλη ανίσωση. Ο στόχος αυτών των μετασχηματισμών είναι να καταλήξουμε σε μία σχέση που να δείχνει τις τιμές του αγνώστου που επαληθεύουν την ανίσωση.	$-4x-5 < -2x+7$ $-4x\cancel{-5}+2x\cancel{+5} < \cancel{-2x}+7+\cancel{2x}+5$ $-2x < 12$ (διαιρούμε με $-2 < 0$) $\frac{-2x}{-2} > \frac{12}{-2}$ δηλαδή $x > -6$
Παριστάνουμε τις λύσεις μιας ανίσωσης με ανισότητα ή και γραφικά πάνω στην ευθεία των πραγματικών.	$x > -6$ 
Μία ανίσωση της μορφής $αx + β < γ$ ή θα έχει άπειρο πλήθος λύσεων ή θα είναι αδύνατη.	Ανισώσεις με άπειρες λύσεις: $x < 5$, $3x < 0$, $x < -5\sqrt{2}$, $0x \geq 0$, $0x \leq 0$ (οι δύο τελευταίες ισχύουν για όλους τους πραγματικούς αριθμούς). Αδύνατες ανισώσεις: $0x < -2$, $0x \geq 2$, $0 > 0x$

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. Να εξηγήσετε με τη βοήθεια της ευθείας των πραγματικών ότι, αν α < β και β < γ, τότε α < γ.

Απάντηση

Αν α < β, τότε το β βρίσκεται δεξιότερα του α στην ευθεία των πραγματικών.
Αν β < γ, τότε το γ βρίσκεται δεξιότερα του β στην ευθεία των πραγματικών.
Άρα το γ θα βρίσκεται δεξιότερα και του α, οπότε α < γ.
Αυτή την ιδιότητα της διάταξης την ονομάζουμε μεταβατική.



---

2. Να λύσετε την ανίσωση $-(x-3)+\frac{2x-1}{3}<-\frac{x}{2}+4$.

Απάντηση

$$-(x-3)+\frac{2x-1}{3}<-\frac{x}{2}+4$$

Για να απαλλαγούμε από τα κλάσματα, πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο της ανίσωσης με το ΕΚΠ του 2 και 3, που είναι το 6, και κάνουμε τις απλοποιήσεις.

$$-6(x-3)+6\frac{2x-1}{3}<-6\frac{x}{2}+6\cdot 4$$

$$-6(x-3)+2(2x-1)<-3x+24$$

Εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα.

$$-6x + 18 + 4x - 2 < -3x + 24$$

Προσθέτουμε τους αντίθετους των όρων που θέλουμε να απαλείψουμε σε κάθε μέλος, ώστε να έχουμε στο ένα τους άγνωστους όρους και στο άλλο τους γνωστούς.

$$-6x+18+4x-2-18+2+3x<-3x+24-18+2+3x$$

Διαγράφουμε τους αντίθετους όρους.

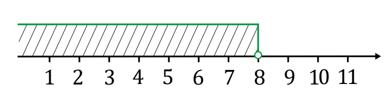
$$-6x + 4x + 3x < 24 - 18 + 2$$

Εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα.

$$(-6 + 4 + 3)x < 8$$

Λύσεις είναι όλοι οι αριθμοί που είναι μικρότεροι του 8.

$$x < 8$$



Παρατηρούμε ότι η ανίσωση $-6x + 18 + 4x - 2 < -3x + 24$ μετά την εφαρμογή των ιδιοτήτων της διάταξης, έγινε:
$-6x + 4x + 3x < 24 - 18 + 2$.
Όπως και στην επίλυση εξίσωσης, οι όροι 18, −2 και −3x, όταν άλλαξαν μέλος, άλλαξαν και πρόσημο.
Και στις ανισώσεις, για λόγους συντομίας, μπορούμε να μεταφέρουμε έναν όρο από το ένα μέλος στο άλλο αλλάζοντας το πρόσημό του. Θα λέμε ότι «**χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους**».

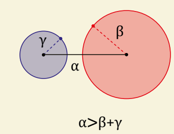
Για τους όρους μιας ανίσωσης ισχύει ο εξής πρακτικός κανόνας:
αλλάζω μέλος – αλλάζω πρόσημο

$$-6x + 5 < 2x - 7$$

$$-6x - 2x < -7 - 5$$

3. **Για να μπορεί να σχηματιστεί ένα τρίγωνο, πρέπει η κάθε πλευρά του να είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων πλευρών. Αν οι δύο πλευρές ξέρουμε ότι έχουν μήκος 4m και 7 m, τι μήκος μπορεί να έχει η τρίτη πλευρά;**

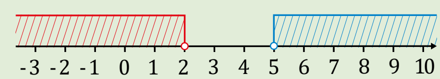
Να εξηγήσετε με ποια προϋπόθεση μπορεί να σχηματιστεί τρίγωνο. Θα σας βοηθήσει πιθανόν το διπλανό σχήμα.

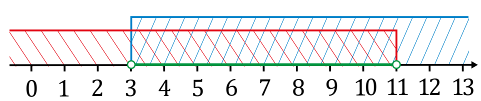


Απάντηση

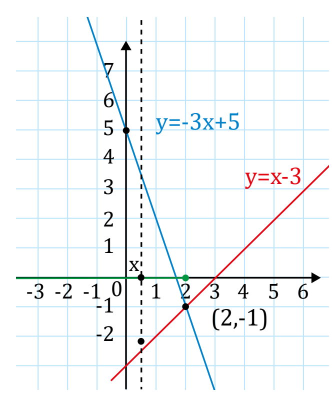
Αν ονομάσουμε x την τρίτη πλευρά, τότε $x < 4 + 7$ και $7 < x + 4$ και $4 < x + 7$. Αν κάνουμε τις πράξεις, έχουμε το σύστημα ανισώσεων $x < 11$ και $x > 3$ και $x > -3$ (η τελευταία ισχύει πάντα, γιατί το x ως μήκος πλευράς είναι θετικός αριθμός).
Μπορούμε να παραστήσουμε τις λύσεις πάνω στην ευθεία των πραγματικών. Πρέπει το x να είναι **ταυτόχρονα** μικρότερος του 11 (τα σημεία της αριθμογραμμής που είναι στην κόκκινη περιοχή) **και** μεγαλύτερος του 3 (μπλε περιοχή), άρα είναι τα κοινά σημεία των δύο περιοχών (πράσινο τμήμα). Μπορούμε να το γράψουμε με μία διπλή ανισότητα $3 < x < 11$.

Στο διπλανό πρόβλημα οι δύο ανισώσεις πρέπει να αληθεύουν ταυτόχρονα. Αν σε κάποιο άλλο πρόβλημα ο x πρέπει να είναι μεγαλύτερος του 5 **ή** μικρότερος του 2, τότε γράφουμε $x > 5$ ή $x < 2$, και δεν μπορούμε να τη γράψουμε με διπλή ανισότητα (γιατί;).
Οι λύσεις είναι και τα δύο μέρη της αριθμογραμμής:





4. **Από τη διπλανή γραφική παράσταση να βρείτε τις λύσεις:**
α) της εξίσωσης $x - 3 = -3x + 5$
β) της ανίσωσης $x - 3 \leq -3x + 5$
γ) της ανίσωσης $x - 3 > -3x + 5$



Απάντηση

α) Οι γραφικές παραστάσεις των ευθειών $y = x - 3$ και $y = -3x + 5$ παρατηρούμε ότι τέμνονται στο σημείο $(2, -1)$. Το 2 δηλαδή είναι λύση της εξίσωσης $x - 3 = -3x + 5$ [και το $(2, -1)$ είναι λύση του γραμμικού συστήματος $y = x - 3$ και $y = -3x + 5$].

β) Για $x < 2$, η γραφική παράσταση της $y = x - 3$ είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της $y = -3x + 5$ (μια βοηθητική κατακόρυφη ευθεία μάς βοηθά να το δούμε). Οπότε, γι' αυτά τα x, η τιμή του $x - 3$ είναι μικρότερη από την τιμή του $-3x + 5$. Άρα η λύση της ανίσωσης $x - 3 \leq -3x + 5$ είναι $x \leq 2$ (η πράσινη ημιευθεία στον άξονα x′x).

γ) Με την ίδια λογική, οι λύσεις της ανίσωσης $x - 3 > -3x + 5$ είναι $x > 2$.

Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε

1. Περιγράψτε τι ομοιότητες και τι διαφορές αναγνωρίζετε ανάμεσα στις διαδικασίες επίλυσης μιας εξίσωσης και μιας ανίσωσης.

2. Να λύσετε την ανίσωση $-2(5+2x) \leq 10-(3x-1)$ και να παραστήσετε τη λύση στην αριθμογραμμή. Κατόπιν, αλλάξτε κάτι και δημιουργήστε ένα λάθος. Ανταλλάξτε τα τετράδιά σας με έναν συμμαθητή σας, για να εντοπίσετε τα λάθη που έγιναν και συζητήστε τα.

3. Συνεργαστείτε σε ομάδες για να κατασκευάσετε τον πίνακα έννοιας μιας ανίσωσης. Στη συνέχεια, συζητήστε τις ιδέες σας στην ολομέλεια της τάξης, κατασκευάστε έναν πίνακα έννοιας που θεωρείτε ως πιο πλήρη και αναρτήστε τον στην τάξη ή στο ιστολόγιο του σχολείου.

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Σε κάθε πρόταση της στήλης Α να γράψετε στη στήλη Β τη σωστή ανισότητα από τις παρακάτω:

i. $\alpha < 3$
ii. $\alpha \leq 3$
iii. $\alpha > 3$
iv. $\alpha \geq 3$

Από τη φυσική γλώσσα στη μαθηματική γλώσσα

Α	Β
1. Ο αριθμός α είναι μεγαλύτερος από το 3.	
2. Ο αριθμός α είναι το λιγότερο 3.	
3. Ο αριθμός α είναι το πολύ 3.	
4. Ο αριθμός α είναι μικρότερος του 3.	
5. Ο αριθμός α είναι μεγαλύτερος ή ίσος με το 3.	
6. Ο αριθμός α είναι τουλάχιστον 3.	
7. Ο αριθμός α είναι μικρότερος ή ίσος με το 3.	
8. Ο αριθμός α δεν ξεπερνά το 3.	
9. Ο αριθμός α δεν είναι λιγότερο από 3.	
10. Ο αριθμός α είναι έως και 3.	

2. Να χρησιμοποιήσετε ιδιότητες της διάταξης ώστε:
α) η ανίσωση $5x + 3 > -2$ να γίνει $5x > -5$
β) η ανίσωση $-7y < -21$ να γίνει $y > 3$

3. Αν $x > 4$, να αιτιολογήσετε με τις ιδιότητες της διάταξης ότι:

α) $x + 3 > 7$ **β)** $x - 5 > -1$ **γ)** $-2x < -8$ **δ)** $5x > 20$ **ε)** $\frac{x}{6} > \frac{2}{3}$ **στ)** $-\frac{x}{2} < -2$

4. Ποιο είναι το πρώτο και το δεύτερο μέλος και ποιοι είναι οι γνωστοί και οι άγνωστοι όροι καθεμιάς από τις παρακάτω ανισώσεις;

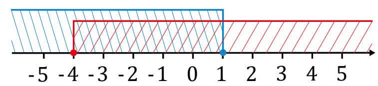
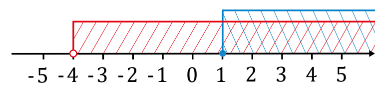
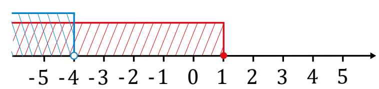
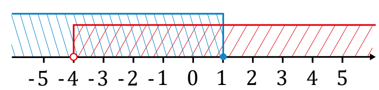
α) $2x-1>0$ **β)** $1+\frac{x}{2}>4-3x$ **γ)** $2x+5 \leq -3x+1$

5. Εξηγήστε με ποιες ιδιότητες της διάταξης η ανίσωση $3-4x \leq 15$ γίνεται $-4x \leq 15-3$, και η ανίσωση $-4x \leq 12$ γίνεται $x \geq -3$.

6. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $0x < -4$ **β)** $0x > 0$ **γ)** $0x \leq 0$ **δ)** $-x \geq 0$ **ε)** $-5x > 10$ **στ)** $0x > -8$

7. Να αντιστοιχίσετε κάθε σύστημα ανισώσεων της στήλης Α στην παράστασή του στην ευθεία των πραγματικών αριθμών στη στήλη Β.

Α	Β
α) $x > -4$ και $x \leq 1$	**1)** 
β) $x \geq -4$ και $x \leq 1$	**2)** 
γ) $x < -4$ και $x \leq 1$	**3)** 
δ) $x > -4$ και $x \geq 1$	**4)** 

8. Να παραστήσετε στην ευθεία των πραγματικών αριθμών τα παρακάτω ζευγάρια ανισώσεων και να βρείτε αν υπάρχουν τις κοινές λύσεις τους:

α) $x > 2$ και $x < 5$ **β)** $x \leq 2$ και $x < 5$

γ) $x > 2$ και $x > 5$ **δ)** $x < 2$ και $x \geq 5$

Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

9. Να εφαρμόσετε ιδιότητες της διάταξης για να μετατρέψετε την $5x - 3 \leq 7x + 5$ στην ανίσωση $-2x \leq 8$ και στη συνέχεια στην ανίσωση $x \geq -4$.

10. Να βρείτε σε ποιες από τις παρακάτω ανισώσεις ο αριθμός 4 είναι λύση:

α) $3x - 1 \geq x + 2$ **β)** $-2x - 7 \leq -2x - 4$ **γ)** $\dfrac{1-x}{3} \geq x + 2$

11. Να λύσετε τις ανισώσεις με τις ιδιότητες της διάταξης:

α) $x - 2 < -3$ **β)** $3 \geq -5x + 13$

γ) $2x + 4 > -3 + 4x$ **δ)** $5x + 2 < -1 + 5x$

12. Η Παναγιώτα έχει 50 € και κάθε βδομάδα αποταμιεύει 8 € επιπλέον. Ο Μαξίμ έχει 13 € και αποταμιεύει κάθε βδομάδα 12 €. Αν ξεκίνησαν μαζί, σε πόσες εβδομάδες ο Μαξίμ θα έχει αποταμιεύσει περισσότερα χρήματα από την Παναγιώτα;

13. Ο τελικός βαθμός των γραπτών εξεταζόμενων μαθημάτων στο γυμνάσιο υπολογίζεται ως μέσος όρος του προφορικού βαθμού των δύο τετραμήνων και του γραπτού βαθμού στις ανακεφαλαιωτικές εξετάσεις. Η Βασιλική είχε στα δύο τετράμηνα στα μαθηματικά 15 και 17. Πόσο πρέπει να γράψει στις εξετάσεις ώστε η τελική της βαθμολογία να είναι από 17 και πάνω;

14. Ο Οτάρ, για να κατεβάζει τραγούδια από το διαδίκτυο, έχει δύο επιλογές. Στην πρώτη επιλογή δίνει μηνιαία συνδρομή 15 € και πληρώνει για κάθε τραγούδι που κατεβάζει 0,3 €. Στη δεύτερη περίπτωση πληρώνει κάθε τραγούδι 0,8 €. Πόσα τραγούδια πρέπει να κατεβάσει τον μήνα ώστε να πληρώνει λιγότερο με την 1η επιλογή;

15. **α)** Να γράψετε σε αλγεβρική μορφή έναν φυσικό αριθμό που, όταν διαιρείται με το 11, δίνει υπόλοιπο υ.
β) Να βρείτε τον μικρότερο τριψήφιο φυσικό αριθμό που, όταν διαιρείται με το 11, δίνει υπόλοιπο 7.

16. Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στην ευθεία των πραγματικών αριθμών:

α) $3x - 5 < 4x + 2$ **β)** $2(3-y) \geq 4-2y$

γ) $0 \geq 5-3(2z-1)+2(3z-4)$ **δ)** $-3(\varphi - 2) + 4 > 2 - (1 - \varphi)$

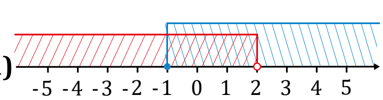
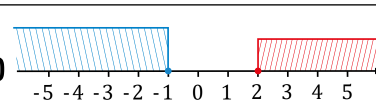
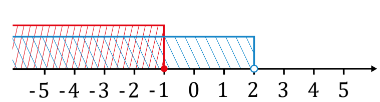
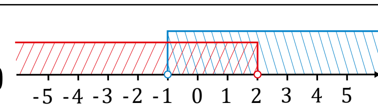
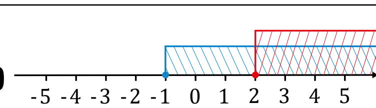
17. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στην αριθμογραμμή:

α) $\dfrac{2x-3}{5} > 1-2x$ **β)** $x - \dfrac{x+6}{3} \geq -5$

γ) $\dfrac{x-2}{2} - \dfrac{x}{4} < 1-x$ **δ)** $3\dfrac{1-2x}{2} - \dfrac{x}{3} < 5\dfrac{x}{6} - 1$

18. Το εφταπλάσιο της παράστασης 3γ – 2 ξεπερνά τουλάχιστον κατά 3 το μισό της παράστασης γ + 5. Ποια είναι η μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει το γ;

19. Να αντιστοιχίσετε κάθε σύστημα ανισώσεων της στήλης Α στην αναπαράστασή του στην ευθεία των πραγματικών στη στήλη Β και στη λύση του (ή αν είναι αδύνατο) στη στήλη Γ.

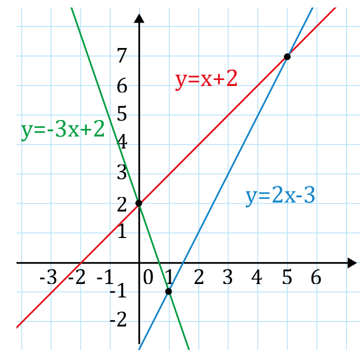
Α	**Β**	**Γ**
α) $x > -1$ και $x < 2$	**1)** 	**i)** $x \geq 2$
β) $x \geq -1$ και $x \geq 2$	**2)** 	**ii)** $x \leq -1$
γ) $x \leq -1$ και $x \geq 2$	**3)** 	**iii)** Αδύνατο
δ) $x \leq -1$ και $x < 2$	**4)** 	**iv)** $-1 < x < 2$
ε) $x \geq -1$ και $x < 2$	**5)** 	**v)** $-1 \leq x < 2$

20. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων και να τις παραστήσετε στην ευθεία των πραγματικών αριθμών:

α) $x > -2$ και $x - 3 < 5$ **β)** $2(x-3)-(3x-2)<0$ και $3x-1\geq 0$

γ) $3x-7\geq 4x-5$ και $2x-1<3+2x$ **δ)** $2x-3\leq x+2<4x-5$

21. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις παρατηρώντας τις γραφικές παραστάσεις των ευθειών $y = 2x - 3$, $y = -3x + 2$ και $y = x + 2$.



α) $2x-3\geq x+2$

β) $-3x + 2 < 2x - 3$

γ) $x+2\geq 2x-3$

Να επαληθεύσετε τις λύσεις που βρήκατε από τις γραφικές παραστάσεις, λύνοντας τις αντίστοιχες ανισώσεις.

22. Διατυπώστε ένα πρόβλημα που να λύνεται με την ανίσωση $15+5x\geq 3+7x$. Στη συνέχεια λύστε την ανίσωση και παραστήστε τις λύσεις στην ευθεία των πραγματικών αριθμών.

23. **α)** Να βρείτε τον φυσικό αριθμό που είναι μεταξύ των αριθμών 158 και 169 και όταν τον διαιρέσουμε με το 13 βρίσκουμε υπόλοιπο 6.

β) Κατασκευάστε ένα πρόβλημα όμοιο με το προηγούμενο, που να έχει λύση τον αριθμό 17.

24. **α)** Να λύσετε την ανίσωση $\frac{x-2}{2}-x>x+2$ και να παραστήσετε τις λύσεις στην ευθεία των πραγματικών αριθμών.

β) Να κατασκευάσετε μια άσκηση όμοια με την προηγούμενη που να έχει ως λύσεις όλους τους πραγματικούς αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι από το 5.

25. **α)** Να βρείτε τον ακέραιο αριθμό για τον οποίο ισχύουν συγχρόνως οι σχέσεις:

$$x-2>1 \text{ και } 2(x+1)+1<x+8$$

β) Να κατασκευάσετε ένα πρόβλημα όμοιο με το προηγούμενο, που να έχει λύση τον αριθμό –3.

Ανακεφαλαίωση

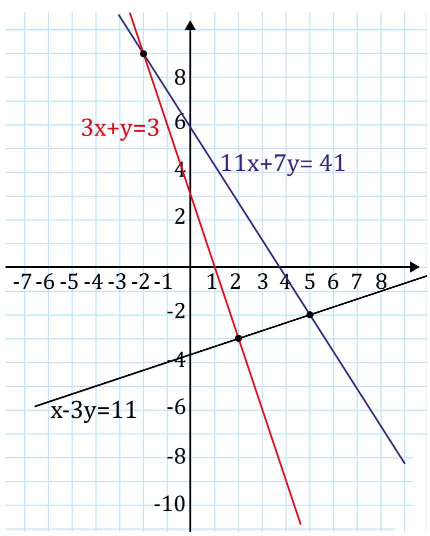
Αλγεβρικές σχέσεις

Ερωτήσεις – ασκήσεις – προβλήματα

1. Εξετάστε αν το ζεύγος $(x,y)=(0,3)$ είναι λύση των παρακάτω γραμμικών συστημάτων:

α) $\begin{cases} y=4x-2 \\ x=0 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} 2x-y=-3 \\ 5x+2y=6 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} 3x+y=3 \\ -4x+2y=1 \end{cases}$

2. Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων βρείτε τις λύσεις των συστημάτων:



α) $\begin{cases} 11x+7y=41 \\ x=5 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} 3x+y=3 \\ y=-6 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} x-3y=11 \\ x=8 \end{cases}$

δ) $\begin{cases} 11x+7y=41 \\ 3x+y=3 \end{cases}$ **ε)** $\begin{cases} 3x+y=3 \\ x-3y=11 \end{cases}$ **στ)** $\begin{cases} x-3y=11 \\ 11x+7y=41 \end{cases}$

3. Χωρίς να λύσετε τα παρακάτω γραμμικά συστήματα, μπορείτε να βρείτε αν έχουν μοναδική λύση, άπειρες λύσεις ή είναι αδύνατα; Περιγράψτε τον τρόπο που σκεφτήκατε.

α) $\begin{cases} y=2x+3 \\ y=-3x-2 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} y=7x+1 \\ 2y=14x+2 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} -x-3y=-2 \\ x+3y=-2 \end{cases}$ **δ)** $\begin{cases} 2x-4y=1 \\ 4x-8y=2 \end{cases}$

4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ):

α) Η εξίσωση $x(x+1)=0$ είναι 2ου βαθμού. Σ Λ

β) Η εξίσωση $3x^2-2=4x+3x^2$ είναι 2ου βαθμού. Σ Λ

γ) Η εξίσωση $x(x-1)(2x+1)=0$ είναι 3ου βαθμού. Σ Λ

δ) Ο αριθμός 1 είναι λύση της εξίσωσης $x^2-2x+2=0$. Σ Λ

5. Σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω γραμμικών συστημάτων και βρείτε τις λύσεις τους (αν υπάρχουν):

α) $\begin{cases} 3x+2y=1 \\ -2x+y=4 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} x-2y=4 \\ 2x-4y=12 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} x-y=4 \\ -2x+2y=-8 \end{cases}$

6. Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} y=x+3 \\ 2x-3y=-8 \end{cases}$, γραφικά, με τη μέθοδο της αντικατάστασης και με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών. Ποιος τρόπος επίλυσης σας φάνηκε πιο εύκολος;

7. Η μία εξίσωση ενός γραμμικού συστήματος είναι η $2x-3y=1$. Γράψτε μία δεύτερη εξίσωση ώστε το σύστημα: να είναι αδύνατο, να έχει άπειρες λύσεις πάνω σε μία ευθεία.

8. Σε ένα γυμνάσιο μαθητές και καθηγητές είναι 185. Αν ο λόγος αριθμός μαθητών/αριθμός καθηγητών είναι 8,25, πόσοι είναι οι καθηγητές και πόσοι οι μαθητές;

9. Το μήκος ενός γηπέδου βόλεϊ είναι διπλάσιο από το πλάτος του και η περίμετρος του γηπέδου είναι 54 m. Ποιες είναι οι διαστάσεις του;

10. Σε έναν κουμπαρά υπάρχουν 125 κέρματα των 10 λεπτών και των 50 λεπτών που η αξία τους συνολικά είναι 45,7 €. Πόσα είναι τα δεκάλεπτα και πόσα τα πενηντάλεπτα;

11. Τέσσερα ίδια πουκάμισα και πέντε ίδια ζευγάρια κάλτσες κοστίζουν σε ένα κατάστημα 83,3 €, ενώ τρία πουκάμισα και δύο ζευγάρια κάλτσες κοστίζουν 54,6 €. Πόσο κοστίζει το κάθε πουκάμισο και το κάθε ζευγάρι κάλτσες;

12. Ένας παραγωγός ανάμειξε το περσινό τσίπουρο περιεκτικότητας 50% σε αλκοόλ (δηλαδή στα 100 λίτρα τα 50 λίτρα είναι αιθυλική αλκοόλη), με το φετινό τσίπουρο περιεκτικότητας 42% και γέμισε ένα βαρέλι 200 λίτρων. Πόσα λίτρα χρησιμοποίησε από την κάθε παραγωγή, αν το νέο μείγμα έχει περιεκτικότητα 44%;

13. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(x+2)(x-3)=0$

β) $\alpha(2-\alpha)(4\alpha-3)=0$

γ) $(\beta+2)(2-3\beta)(-5\beta+2)=0$

14. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2x^2=8$ **β)** $9x^2-5=11$ **γ)** $3x^2+15=12$

15. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(x-1)^2-4=0$ **β)** $(y-5)^2-(3y+2)^2=0$

γ) $4z^2+16z+16=0$ **δ)** $9\alpha^2-6\alpha+1=0$

16. Να συμπληρώσετε τα κενά ώστε να σχηματίσετε στο πρώτο μέλος των παρακάτω εξισώσεων ανάπτυγμα τετραγώνου. Στη συνέχεια να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2+8x+\_\_\_=9+\_\_\_$

β) $x^2-12x+\_\_\_=13+\_\_\_$

γ) $16x^2+24x+\_\_\_=-5+\_\_\_$

17. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2-x-2=0$

β) $x^2+8x+15=0$

γ) $3x^2+7x+2=0$

Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με συμπλήρωση τετραγώνου

18. Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στην ευθεία των πραγματικών αριθμών:

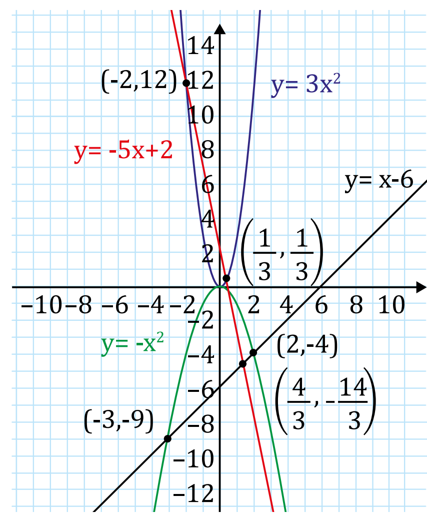
α) $-2x+7<7x-2$

β) $2(4y-1)\geq 1-3y$

γ) $2-4(3z-1)+3(4z-1)\leq 0$

δ) $2\frac{\alpha-2}{3}+\frac{1-\alpha}{6}\leq\alpha$

19. Βρείτε τις λύσεις των παρακάτω εξισώσεων και της ανίσωσης παρατηρώντας τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y=3x^2$, $y=-x^2$, $y=-5x+2$, $y=x-6$, που είναι σχεδιασμένες στο καρτεσιανό επίπεδο:



α) $3x^2=-5x+2$ **β)** $-x^2-x+6=0$

γ) $3x^2-x+6=0$ **δ)** $-5x+2\leq x-6$

Να επαληθεύσετε τις λύσεις που βρήκατε λύνοντας τις αντίστοιχες εξισώσεις και την ανίσωση.

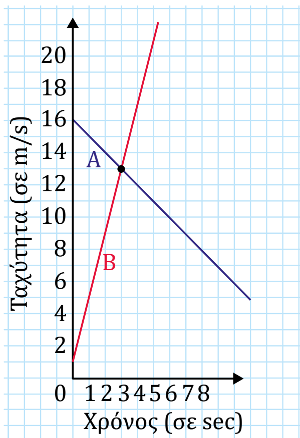
20. Διατυπώστε ένα πρόβλημα που να λύνεται με την ανίσωση $5x+15>7x+5$, με x φυσικό αριθμό. Στη συνέχεια λύστε την ανίσωση και παραστήστε τις λύσεις στην ευθεία των πραγματικών αριθμών.

Ταξινομούμε εξισώσεις I

Ταξινομούμε εξισώσεις II

Συνδέσεις και επεκτάσεις

21. Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι γραφικές παραστάσεις χρόνου (σε sec)-ταχύτητας (σε m/s) των αυτοκινήτων Α και Β.



α) Ποια είναι η αρχική ταχύτητα (η ταχύτητα κατά τη χρονική στιγμή t = 0) σε m/s του κάθε αυτοκινήτου;

β) Πόσο μεταβάλλεται η ταχύτητα του κάθε αυτοκινήτου ανά δευτερόλεπτο;

γ) Ποιες είναι οι εξισώσεις κίνησης των δύο αυτοκινήτων;

δ) Σε πόσο χρόνο (σε sec) από τη στιγμή που ξεκίνησαν θα έχουν την ίδια ταχύτητα και πόση είναι αυτή;

ε) Για ποιες χρονικές στιγμές η ταχύτητα του Β είναι μικρότερη από την ταχύτητα του Α;

22. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η καθεμία από τις παρακάτω ρητές παραστάσεις:

α) $\frac{x-3}{3x(x-3)}$ **β)** $\frac{2x^3}{x(x+2)}$

γ) $\frac{(x+2)(2x+1)}{(2x+1)(x-2)^2}$ **δ)** $\frac{x-1}{x^2-5x}$

ε) $\frac{1}{2x^3-8x}$ **στ)** $-\frac{5x^2+1}{x^2-6x+9}$

ζ) $\frac{(2x+1)(-3x+2)}{x^3+2x^2+2x+4}$

23. Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} \frac{x-2}{3}-\frac{y+2}{2}=1 \\ x+\frac{3y}{4}=-6 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} (3x-2y)(4x-y-3)=0 \\ y=2x+1 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} x^2-y^2=0 \\ x+y=2 \end{cases}$

24. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2+3x+1=0$ **β)** $3x^2-5x+1=0$

Πολλαπλασιάζοντας με 4α

25. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^4-2x^3+x^2-2x=0$

β) $(x-3)(x^2-4)+(5x-1)(x-3)=x-3$

26. Ένα εργοστάσιο κατασκευάζει ψυγεία που τα πουλά 300 € το ένα. Αν κατασκευάζει x ψυγεία τον μήνα (με $26<x<70$) και ξοδεύει για την κατασκευή τους $-x^2+370x-8.775$€, πόσα ψυγεία πρέπει να κατασκευάζει τον μήνα για να έχει κέρδος 10.000 €;

Τρίλιζα στις αλγεβρικές σχέσεις

Ομαδική εργασία

27. Να αναζητήσετε πληροφορίες για τη χρυσή τομή. Ενδεικτικά, μπορείτε να αναζητήσετε τον τρόπο που ορίζεται στα μαθηματικά ο λόγος της χρυσής τομής, πώς έχει χρησιμοποιηθεί από τους αρχαίους Έλληνες και πώς χρησιμοποιείται σήμερα στις τέχνες. Να γράψετε μια εργασία 500 έως 800 λέξεων και να την παρουσιάσετε στην τάξη.

Υπολογίζω τη χρυσή τομή

Οι εξισώσεις του Διόφαντου

Όπως συμβαίνει με πολλούς αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς, δεν γνωρίζουμε πότε ακριβώς έζησε ο Διόφαντος. Από διάφορες μαρτυρίες υποθέτουμε ότι η ζωή και η ακμή του τοποθετείται κάπου ανάμεσα στον 2ο π.Χ. αιώνα και στον 4ο μ.Χ. αιώνα, με πιθανότερο τον 3ο μ.Χ. αιώνα. Το πιο σημαντικό έργο του είναι τα *Αριθμητικά*, αποτελούμενο από 13 βιβλία, εκ των οποίων σώζονται τα 10. 6 από τα σωζόμενα είναι στο πρωτότυπο ελληνικό κείμενο. Τα *Αριθμητικά* επέδρασαν σημαντικά στη γένεση των νέων Μαθηματικών του 17ου αιώνα.

Στην *Εισαγωγή* (που θεωρείται το αρχαιότερο εγχειρίδιο Άλγεβρας), ο Διόφαντος εισάγει ειδική ορολογία και μια σειρά από σύμβολα για να παραστήσει τις διαδοχικές δυνάμεις του αγνώστου. Η μεγάλη καινοτομία του όμως είναι ότι κάνει υπολογισμούς με τον άγνωστο, με τις δύο βασικές ενέργειες: μεταφέρει όρους από το ένα μέλος μιας εξίσωσης στο άλλο και κάνει αναγωγές ομοίων όρων (αργότερα, οι Άραβες ονόμασαν την πρώτη ενέργεια al-jabr, από τη λατινική απόδοση της οποίας προήλθε η λέξη άλγεβρα). Έτσι, μετασχηματίζει τις εξισώσεις σε απλές, της μορφής $ax^m = bx^n$ ή σε μορφή δευτεροβάθμιας εξίσωσης.

Σχεδόν όλα τα προβλήματα του 1ου βιβλίου των *Αριθμητικών* ανάγονται (με τον σύγχρονο συμβολισμό) σε εξισώσεις της μορφής $ax = b$ ή $ax^2 = b$. Στα υπόλοιπα βιβλία των *Αριθμητικών* υπάρχουν διάσπαρτες εξισώσεις της μορφής $ax^2 + bx = c$, $ax^2 + c = bx$, $ax^2 = bx + c$, στις οποίες ο Διόφαντος δίνει θετικές λύσεις, χωρίς να εξηγεί πώς τις βρήκε, διότι μάλλον θεωρείται απλή η εξεύρεσή τους.

Χριστιανίδης, Γ. (2003). *Θέματα από την Ιστορία των Μαθηματικών*,
Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, σελ. 108-110

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ 5

Γεωμετρία του Επιπέδου & Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί

Ποιες πληροφορίες από αυτές που περιέχονται σε έναν χάρτη μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για να υπολογίσουμε πραγματικές αποστάσεις; Πώς θα το κάνουμε αυτό;

Πώς μπορούμε να μεγαλώνουμε και να μικραίνουμε ένα σχήμα δημιουργώντας άλλα σχήματα με την ίδια μορφή;

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε γεωμετρικές έννοιες και διαδικασίες που χρησιμοποιούμε για να κατανοήσουμε τις σχέσεις που μπορεί να έχουν τα γεωμετρικά σχήματα και για να υπολογίσουμε στοιχεία εικόνων, σχημάτων και χαρτών. Τέτοιες έννοιες και σχέσεις είναι η ισότητα τριγώνων, η ομοιοθεσία και η ομοιότητα σχημάτων.

ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΕΝΟΤΗΤΕΣ

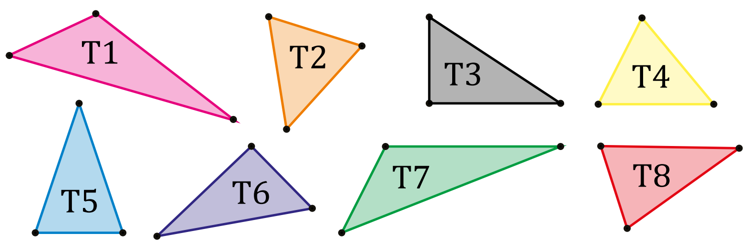
5.1 Ίσα τρίγωνα

Σε προηγούμενες τάξεις μελετήσαμε περιπτώσεις σχημάτων που, όταν τοποθετηθούν το ένα πάνω στο άλλο, ταυτίζονται. Τα σχήματα αυτά λέμε ότι είναι **ίσα**.

Δ1. Βρίσκω τα ίσα τρίγωνα

Στο παρακάτω σχήμα να εντοπίσετε τα τρίγωνα που πιστεύετε ότι είναι ίσα μεταξύ τους. Συζητήστε το σκεπτικό σας.

Μετακινώντας τρίγωνα



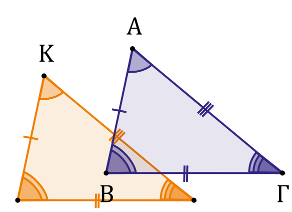
Επιβεβαιώστε τις εικασίες σας αντιγράφοντάς τα σε διαφανές χαρτί και μετακινώντας τα με κατάλληλο τρόπο ώστε να δείτε αν εφαρμόζουν.

Συζητάμε

…για τα στοιχεία των ίσων τριγώνων

Τοποθετώντας δύο ίσα τρίγωνα έτσι ώστε να εφαρμόσουν ακριβώς το ένα πάνω στο άλλο, παρατηρούμε ότι τα κύρια στοιχεία τους συμπίπτουν **ένα προς ένα**, δηλαδή ένα στοιχείο του ενός τριγώνου με ένα στοιχείο του άλλου. Έτσι, τα ίσα τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΜ θα έχουν:

- ίσες πλευρές μία προς μία: $ΑΒ = ΚΛ$, $ΑΓ = ΚΜ$, $ΒΓ = ΛΜ$
- και ίσες γωνίες μία προς μία: $\hat{Α} = \hat{Κ}$, $\hat{Β} = \hat{Λ}$, $\hat{Γ} = \hat{Μ}$



Τα **κύρια** στοιχεία ενός τριγώνου είναι οι πλευρές και οι γωνίες του. **Δευτερεύοντα** στοιχεία είναι οι διάμεσοι, οι διχοτόμοι και τα ύψη του.

Παρατηρούμε ότι σε ίσα τρίγωνα:

- απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται αντίστοιχα ίσες πλευρές και
- απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται αντίστοιχα ίσες γωνίες.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω:

- Αν δύο τρίγωνα είναι ίσα, τότε θα έχουν τα αντίστοιχα κύρια στοιχεία τους ίσα.

Δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου

Επίσης, αν σχεδιάσουμε δύο τρίγωνα που έχουν όλες τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, αλλά και όλες τους τις γωνίες ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα αυτά, αν τοποθετηθούν το ένα πάνω στο άλλο, θα συμπίπτουν, δηλαδή θα είναι ίσα. Άρα:

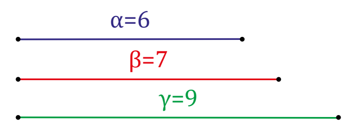
- Αν δύο τρίγωνα έχουν τα κύρια στοιχεία τους ίσα ένα προς ένα, τότε θα είναι ίσα.

Ωστόσο, είναι πάντα εφικτό να μεταφέρουμε δύο τρίγωνα το ένα πάνω στο άλλο για να διαπιστώσουμε αν είναι ίσα; Αν για παράδειγμα μιλάμε για τις τριγωνικές στέγες δύο σπιτιών, πώς θα μπορούσαμε να διαπιστώσουμε αν είναι ίσες; Είναι επίσης εφικτό να έχουμε δεδομένα για όλα τα κύρια στοιχεία δύο τριγώνων;

Δ2. Συγκρίνω τρίγωνα χωρίς να τα μετακινώ!

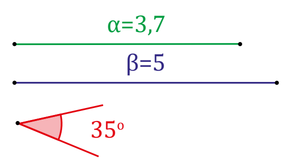
Να κατασκευάσετε σε διαφανές χαρτί ένα τρίγωνο με τα στοιχεία που σας δίνονται σε καθεμία από τις τρεις παρακάτω περιπτώσεις. Κατόπιν, να συγκρίνετε με τον/τη διπλανό/ή σας στο θρανίο τα τρίγωνα που φτιάξατε στο κάθε ερώτημα ξεχωριστά και να διατυπώσετε τα συμπεράσματά σας.

α) Με πλευρές α, β και γ.

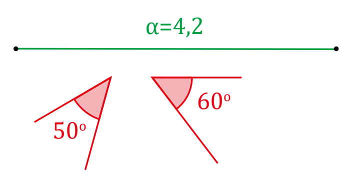


Η εμφάνιση της έννοιας της απόδειξης στα αρχαία ελληνικά μαθηματικά

β) Με πλευρές α, β και τη γωνία των 35° να περιέχεται από τις πλευρές αυτές.



γ) Με μία πλευρά το τμήμα α και τις γωνίες των 50° και των 60° να είναι προσκείμενες σε αυτή την πλευρά.

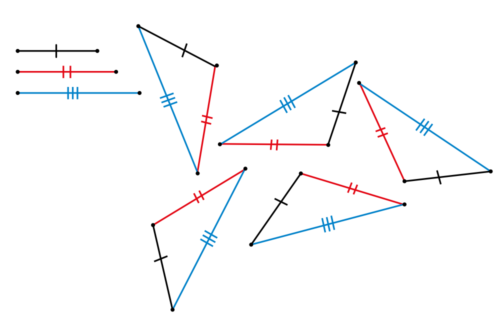


Με βάση τις απαντήσεις σας στα παραπάνω ερωτήματα, να διατυπώσετε προτάσεις με τις οποίες μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι δύο τρίγωνα είναι ίσα.
Συζητήστε τις προτάσεις σας στην τάξη.

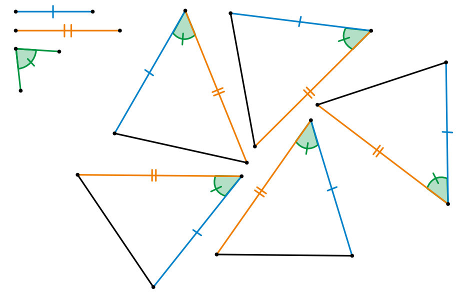
Συζητάμε

…για τρόπους σύγκρισης τριγώνων

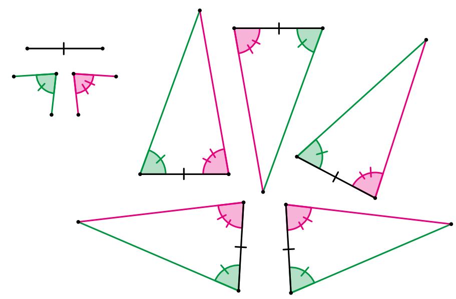
Στη Δ2 σχεδιάσαμε τρίγωνα και είδαμε περιπτώσεις που αυτά είναι ίσα. Από εδώ και πέρα, σε κάθε πρόβλημα που χρειάζεται να αποδείξουμε ότι δύο τρίγωνα είναι ίσα μπορούμε να χρησιμοποιούμε τις εξής διαπιστώσεις:
Όλα τα τρίγωνα που μπορούμε να σχεδιάσουμε με πλευρές τρία δοσμένα ευθύγραμμα τμήματα θα είναι ίσα μεταξύ τους.



Επίσης, όλα τα τρίγωνα που μπορούμε να σχεδιάσουμε με πλευρές δύο δοσμένα τμήματα και την περιεχόμενη από αυτές γωνία ίση με μια δοσμένη γωνία θα είναι ίσα μεταξύ τους.



Τέλος, όλα τα τρίγωνα που μπορούμε να σχεδιάσουμε με πλευρά ένα δοσμένο τμήμα και τις προσκείμενες σε αυτό γωνίες ίσες με δύο δοσμένες γωνίες θα είναι ίσα μεταξύ τους

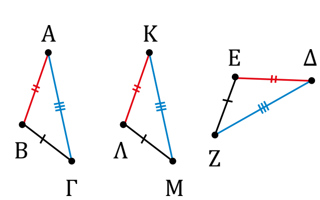


Τις παραπάνω διαπιστώσεις τις ονομάζουμε **κριτήρια ισότητας τριγώνων**.

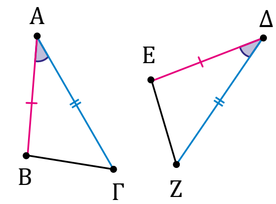
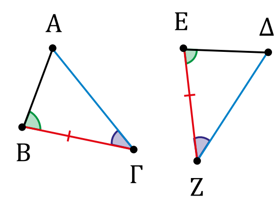
Κατασκευάζουμε ίσα τρίγωνα

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Τα **κριτήρια ισότητας τριγώνων** είναι προτάσεις που μας επιτρέπουν να διαπιστώσουμε ότι δύο τρίγωνα είναι ίσα, χωρίς να τα μετακινήσουμε και χωρίς να χρειάζεται να γνωρίζουμε ότι όλα τα κύρια στοιχεία τους είναι ίσα ένα προς ένα. Μας αρκούν τρία μόνο κύρια στοιχεία, τα παρακάτω:

..... λεκτικά	..... και με σχήματα!
1ο κριτήριο ισότητας τριγώνων Δύο τρίγωνα (ή περισσότερα τρίγωνα) είναι ίσα αν έχουν τις τρεις πλευρές τους ίσες μία προς μία. Το κριτήριο αυτό για συντομία το συμβολίζουμε ως «**Π-Π-Π**».	 ΑΒ = ΚΛ = ΔΕ ΑΓ = ΚΜ = ΔΖ ΒΓ = ΛΜ = ΕΖ

Συνήθως στις ασκήσεις τα τρίγωνα δεν έχουν τον ίδιο προσανατολισμό (όπως τα ΑΒΓ και ΚΛΜ).
Στα σχήματα που ακολουθούν ο προσανατολισμός των τριγώνων θα είναι τυχαίος.

2ο κριτήριο ισότητας τριγώνων Δύο τρίγωνα είναι ίσα αν έχουν δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες. Το κριτήριο αυτό για συντομία το συμβολίζουμε ως «**Π-Γ-Π**».	 $AB = \Delta E$ $\hat{A} = \hat{\Delta}$ $A\Gamma = \Delta Z$
3ο κριτήριο ισότητας τριγώνων Δύο τρίγωνα είναι ίσα αν έχουν μία πλευρά του ενός ίση με μία πλευρά του άλλου, και τις προσκείμενες σε αυτές γωνίες ίσες μία προς μία. Το κριτήριο αυτό για συντομία το συμβολίζουμε ως «**Γ-Π-Γ**».	 $\hat{B} = \hat{E}$ $B\Gamma = EZ$ $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$

Πότε δύο ευθύγραμμα τμήματα είναι ίσα;

Πότε δύο γωνίες είναι ίσες;

Ο Θαλής και το Γ-Π-Γ

Κατασκευάστε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έτσι ώστε:
$AB = \Delta E$, $A\Gamma = \Delta Z$ και $\hat{B} = \hat{E} = 40°$. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι πάντα ίσα;

Κατασκευάστε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ με τρεις γωνίες ίσες μία προς μία.
Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ θα είναι ίσα;

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. Με τη βοήθεια των κριτηρίων να αποδείξετε ότι δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα αν έχουν: α) μία προς μία ίσες δύο πλευρές του ίδιου είδους (δηλαδή κάθετη με κάθετη, υποτείνουσα με υποτείνουσα), β) μία πλευρά του ενός τριγώνου ίση με μία πλευρά του ίδιου είδους του άλλου τριγώνου και μία οξεία γωνία του ενός ίση με μία οξεία γωνία του άλλου.

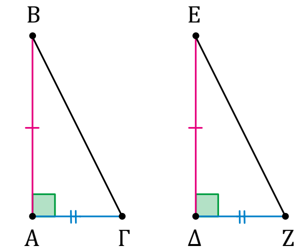
Συγκρίνουμε ορθογώνια τρίγωνα

Απάντηση

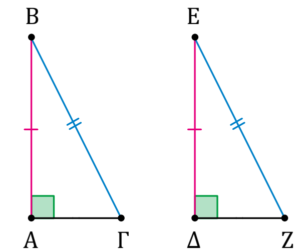
Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ με $\hat{A} = 90°$ και $\hat{\Delta} = 90°$.

α) Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

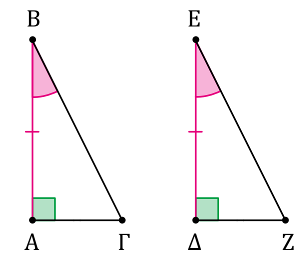
i. ΑΒ = ΔΕ και ΑΓ = ΔΖ
Εδώ τα τρίγωνα είναι ίσα λόγω του κριτηρίου Π-Γ-Π.



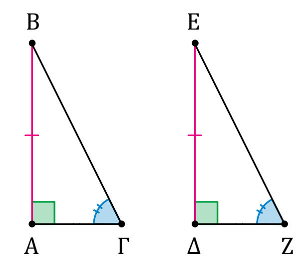
ii. ΑΒ = ΔΕ και ΒΓ = ΕΖ
Σε αυτή την περίπτωση λόγω Πυθαγορείου Θεωρήματος έχουμε:
$ΑΓ^2 = ΒΓ^2 - ΑΒ^2 = ΕΖ^2 - ΕΔ^2 = ΔΖ^2$, δηλαδή $ΑΓ^2 = ΔΖ^2$
Άρα ΑΓ = ΔΖ και έτσι τα τρίγωνα θα είναι ίσα λόγω του κριτηρίου Π-Π-Π.
Με τον ίδιο τρόπο, τα τρίγωνα θα ήταν ίσα αν είχαμε ΑΓ = ΔΖ και ΒΓ = ΕΖ.



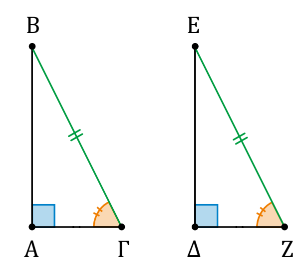
β) Και εδώ διακρίνουμε περιπτώσεις:
i. ΑΒ = ΔΕ και $\hat{Β} = \hat{Ε}$
Εδώ τα τρίγωνα είναι ίσα λόγω του κριτηρίου Γ-Π-Γ



ii. ΑΒ=ΔΕ και $\hat{Γ} = \hat{Ζ}$
$\hat{Β} = \hat{Ε}$ ως συμπληρωματικές των ίσων γωνιών $\hat{Γ}$ και $\hat{Ζ}$.
Άρα τα τρίγωνα θα είναι ίσα λόγω του κριτηρίου Γ-Π-Γ.



iii. ΒΓ = ΕΖ και $\hat{Γ} = \hat{Ζ}$
$\hat{Β} = \hat{Ε}$ ως συμπληρωματικές των ίσων γωνιών $\hat{Γ}$και $\hat{Ζ}$.
Άρα τα τρίγωνα θα είναι ίσα λόγω του κριτηρίου Γ-Π-Γ.



2. **Με τη βοήθεια των κριτηρίων να αποδείξετε τις εξής ιδιότητες του παραλληλογράμμου: α) οι απέναντι πλευρές είναι ίσες β) οι απέναντι γωνίες είναι ίσες γ) οι διαγώνιοι διχοτομούνται.**

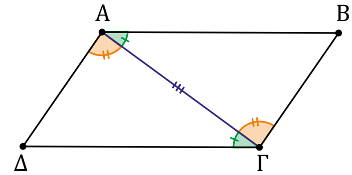
Απάντηση

Δ	ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο (ΑΒ//ΔΓ και ΑΔ//ΒΓ)
Ζ	**α)** ΑΒ = ΓΔ, ΑΔ = ΒΓ **β)** $\hat{Α} = \hat{Γ}$, $\hat{Β} = \hat{Δ}$ **γ)** ΑΓ και ΒΔ διχοτομούνται

Σε κάθε άσκηση Γεωμετρίας είναι καλό να ξεχωρίζουμε τα στοιχεία που μας δίνονται στην εκφώνηση από εκείνα που πρέπει να αποδείξουμε. Αυτό μπορούμε να το κάνουμε με τον πίνακα «**Δεδομένα – Ζητούμενα**».

Για τα ερωτήματα α) και β) συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΓ (σχήμα 1), τα οποία έχουν:

1. $B\hat{A}\Gamma = A\hat{\Gamma}\Delta$, ως εντός εναλλάξ γωνίες των ΑΒ//ΔΓ, που τέμνονται από την ΑΓ
2. ΑΓ κοινή πλευρά
3. $B\hat{\Gamma}A = \Gamma\hat{A}\Delta$, ως εντός εναλλάξ γωνίες των ΒΓ//ΑΔ, που τέμνονται από την ΑΓ.



Σχήμα 1

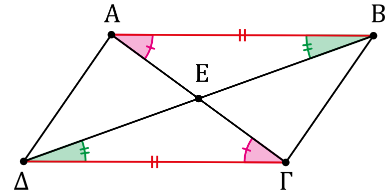
Άρα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΓ είναι ίσα λόγω του κριτηρίου Γ-Π-Γ, οπότε θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα κύρια στοιχεία τους ίσα: ΑΒ = ΔΓ, ΒΓ = ΑΔ και $\hat{B} = \hat{\Delta}$.

Επίσης, από τις παραλληλίες έχουμε:

$\left.\begin{array}{l} B\hat{A}\Gamma = A\hat{\Gamma}\Delta \\ \Gamma\hat{A}\Delta = B\hat{\Gamma}A \end{array}\right\}$ Άρα και τα αθροίσματά τους θα είναι ίσα: $B\hat{A}\Gamma + \Gamma\hat{A}\Delta = A\hat{\Gamma}\Delta + B\hat{\Gamma}A$, δηλαδή $\hat{A} = \hat{\Gamma}$.

Εναλλακτικά, μπορούμε να πούμε ότι $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ ως παραπληρωματικές των $\hat{B} = \hat{\Delta}$ (με τις οποίες είναι αντίστοιχα εντός και επί τα αυτά...).

Για το γ) ερώτημα συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΔΕΓ (σχήμα 2).



Σχήμα 2

Ισχυρισμός	Αιτιολόγηση
$B\hat{A}E = E\hat{\Gamma}\Delta$	ως εντός εναλλάξ των ΑΒ//ΔΓ, που τέμνονται από την ΑΓ
ΑΒ = ΔΓ	από το α) ερώτημα
$A\hat{B}E = E\hat{\Delta}\Gamma$	ως εντός εναλλάξ των ΑΒ//ΔΓ, που τέμνονται από τη ΒΔ
Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΓΕ είναι ίσα	λόγω κριτηρίου Γ-Π-Γ
ΑΕ = ΕΓ και ΒΕ = ΕΔ	αντίστοιχες πλευρές των ίσων τριγώνων

Μια τεχνική για να παρουσιάζουμε με οργανωμένο τρόπο τους συλλογισμούς μας είναι η «**απόδειξη με δύο στήλες**». Στην πρώτη γράφουμε τους ισχυρισμούς μας και στη δεύτερη τις αντίστοιχες αιτιολογήσεις.

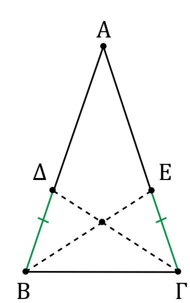
3. **Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) παίρνουμε πάνω στις ΒΑ και ΓΑ αντίστοιχα τα ίσα τμήματα ΒΔ = ΓΕ. Να αποδείξετε ότι ΓΔ = ΒΕ.**

Απάντηση

Δ	ΑΒΓ ισοσκελές (ΑΒ = ΑΓ), ΒΔ = ΓΕ
Ζ	ΓΔ = ΒΕ

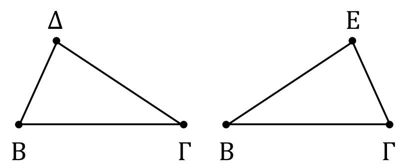
Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΒΕΓ.

Ισχυρισμός	Αιτιολόγηση
ΒΔ = ΓΕ	από τα δεδομένα
$\hat{B} = \hat{\Gamma}$	ως προσκείμενες στη βάση του ισοσκελούς
ΒΓ κοινή πλευρά	
Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΒΕΓ είναι ίσα	λόγω κριτηρίου Γ-Π-Γ
ΓΔ = ΒΕ	ως αντίστοιχες πλευρές ίσων τριγώνων

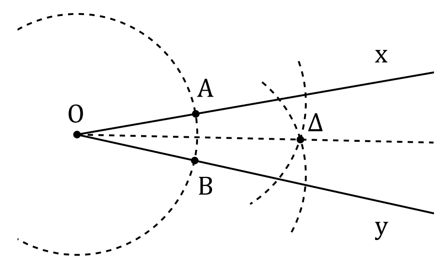


Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΔΓ. Εδώ, στην αιτιολόγηση θα πρέπει να προσέξουμε ότι η γωνία Α είναι κοινή και τα τμήματα ΑΔ = ΑΕ ως διαφορές ίσων τμημάτων (ΑΔ = ΑΒ – ΒΔ και ΑΕ = ΑΓ – ΑΕ).

Και στις δύο περιπτώσεις, τα τρίγωνα που πρέπει να συγκρίνουμε έχουν ένα κοινό μέρος. Στην πρώτη περίπτωση, το κοινό μέρος περιλαμβάνει τη βάση ΒΓ, ενώ στη δεύτερη τη γωνία Α. Βοηθά πολύ να φανταστούμε ξεχωριστά τα δύο τρίγωνα.



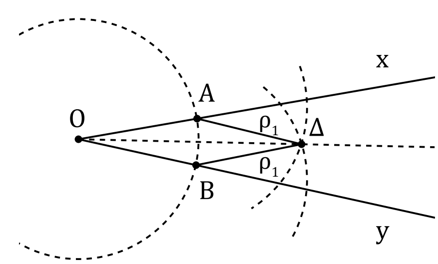
4. **Να κατασκευάσετε γωνία $x\hat{O}y$ και στη συνέχεια έναν κύκλο (Ο, ρ), ο οποίος τέμνει τις πλευρές Οx και Οy της γωνίας στα σημεία Α και Β αντίστοιχα. Με κέντρα τα Α και Β γράφουμε τόξα δύο ίσων κύκλων $(Α,ρ_1)$ και $(Β,ρ_1)$, φροντίζοντας η ακτίνα $ρ_1$ να είναι τόση, ώστε τα τόξα να τέμνονται σε κάποιο σημείο που το ονομάζουμε Δ. Να δείξετε ότι η ΟΔ είναι διχοτόμος της $x\hat{O}y$.**



Απάντηση

Φέρνουμε τα τμήματα ΑΔ, ΒΔ. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΟΔ και ΒΟΔ.

Ισχυρισμός	Αιτιολόγηση
ΟΑ = ΟΒ	ως ακτίνες του ίδιου κύκλου (Ο, ρ)
ΑΔ = ΒΔ	ως ακτίνες $(ρ_1)$ ίσων κύκλων
ΟΔ κοινή πλευρά	
Τα τρίγωνα ΑΟΔ και ΒΟΔ είναι ίσα	κριτήριο Π-Π-Π
$Α\hat{O}Δ = Β\hat{O}Δ$	ως αντίστοιχες γωνίες των ίσων τριγώνων
ΟΔ διχοτόμος $x\hat{O}y$	αφού $Α\hat{O}Δ = Β\hat{O}Δ$



Με τον παραπάνω τρόπο, μπορούμε να κατασκευάσουμε τη **διχοτόμο οποιασδήποτε γωνίας**, χωρίς μοιρογνωμόνιο και χωρίς να γνωρίζουμε το μέτρο της.

5. **Να αποδείξετε ότι: α) κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας. β) Κάθε σημείο που ισαπέχει από τις πλευρές μιας γωνίας θα ανήκει στη διχοτόμο της (αντίστροφη πρόταση της προηγούμενης).**

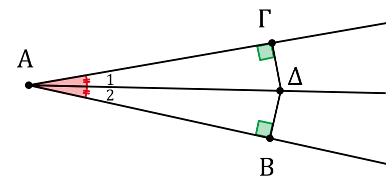
Απάντηση

α) Αρχικά κατασκευάζουμε μια γωνία $\hat{A}$ και τη διχοτόμο της. Πάνω στη διχοτόμο παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο Δ. Από το Δ φέρνουμε τις κάθετες στις πλευρές της γωνίας, $ΔΓ \perp ΑΓ$ και $ΔΒ \perp ΑΒ$. Οπότε έχουμε:

Δ	Δ σημείο της διχοτόμου της $\hat{A}$, $ΔΓ \perp ΑΓ$, $ΔΒ \perp ΑΒ$
Ζ	ΔΒ = ΔΓ

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ.

Ισχυρισμός	Αιτιολόγηση
$\hat{B} = \hat{\Gamma}$	$\hat{B} = 90^o$, $\hat{\Gamma} = 90^o$
$\hat{A}_2 = \hat{A}_1$	λόγω διχοτόμου
ΑΔ κοινή πλευρά	
Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ίσα	κριτήριο Γ-Π-Γ (εφαρμογή 1.β.iii)
ΔΒ = ΔΓ	αντίστοιχες πλευρές ίσων τριγώνων.



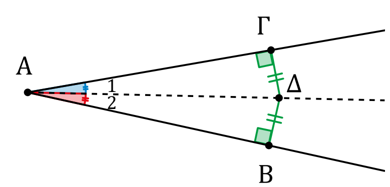
β) Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα σημείο Δ, το οποίο ισαπέχει από τις πλευρές μιας γωνίας $\hat{A}$, δηλαδή ότι οι κάθετες ΔΓ και ΔΒ είναι ίσες. Θα αποδείξουμε ότι $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, οπότε η ΑΔ θα είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$. Έτσι έχουμε:

Δ	$ΔΒ = ΔΓ$, $ΔΓ \perp ΑΓ$, $ΔΒ \perp ΑΒ$
Ζ	Δ σημείο της διχοτόμου

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ.

Ισχυρισμός	Αιτιολόγηση
$\hat{B} = \hat{\Gamma}$	$\hat{B} = 90^o$, $\hat{\Gamma} = 90^o$
ΔΒ = ΔΓ	δεδομένο
ΑΔ κοινή πλευρά	
ΑΒ = ΑΓ	από Πυθαγόρειο Θεώρημα όπως στην εφαρμογή 1αii
Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ίσα	κριτήριο Π-Π-Π
$\hat{A}_2 = \hat{A}_1$	αντίστοιχες γωνίες ίσων τριγώνων

Άρα η ΑΔ είναι διχοτόμος.

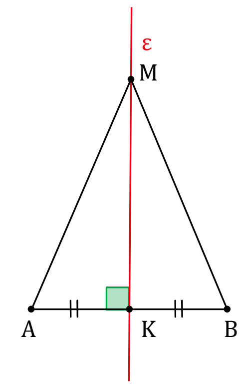


6. **Να αποδείξετε ότι: α) κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του τμήματος. β) Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός τμήματος θα ανήκει στη μεσοκάθετό του (αντίστροφη πρόταση της προηγούμενης).**

Απάντηση

α) Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και τη μεσοκάθετό του ε. Παίρνουμε ένα οποιοδήποτε σημείο Μ της ε. Θα αποδείξουμε ότι ισαπέχει από τα Α και Β, δηλαδή ότι ΜΑ = ΜΒ.

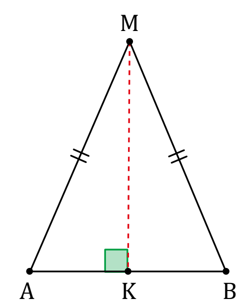
Δ	ε μεσοκάθετος του ΑΒ, Μ σημείο της ε
Ζ	ΜΑ = ΜΒ



Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΜΚΑ και ΜΚΒ.

Ισχυρισμός	**Αιτιολόγηση**
$M\hat{K}A = M\hat{K}B$	$M\hat{K}A = M\hat{K}B = 90^o$ επειδή η ε είναι μεσοκάθετος του ΑΒ.
ΚΑ = ΚΒ	δεδομένο
ΜΚ κοινή πλευρά	
Τα τρίγωνα ΜΚΑ και ΜΚΒ είναι ίσα	κριτήριο Π-Γ-Π
ΜΑ = ΜΒ	αντίστοιχες πλευρές ίσων τριγώνων

β) Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και ένα σημείο Μ που ισαπέχει από τα άκρα του Α και Β. Θα αποδείξουμε ότι το Μ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΒ:



Δ	ΜΑ = ΜΒ
Ζ	Μ σημείο της μεσοκαθέτου του ΑΒ

Φέρνουμε τη ΜΚ κάθετη στο τμήμα ΑΒ. Θα αποδείξουμε ότι ΑΚ = ΚΒ, άρα η ΜΚ θα είναι μεσοκάθετος του ΑΒ.

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στα τρίγωνα ΜΚΑ και ΜΚΒ έχουμε:

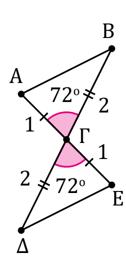
$AK^2 = MA^2 - MK^2 = MB^2 - MK^2 = KB^2$.

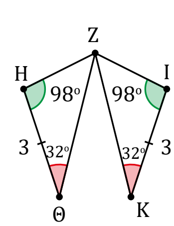
Δηλαδή $AK^2 = KB^2$, άρα $KA = KB$.

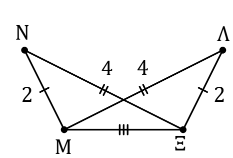
Από μια άλλη οπτική γωνία, μπορούμε να επαναδιατυπώσουμε την πρόταση αυτή ως εξής: Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο, το ύψος από την κορυφή προς τη βάση είναι και διάμεσος και διχοτόμος.

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

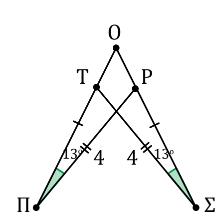
1. Να βρείτε το κριτήριο με το οποίο μπορούμε να βεβαιώσουμε ότι τα ζεύγη τριγώνων στα παρακάτω σχήματα είναι ίσα.





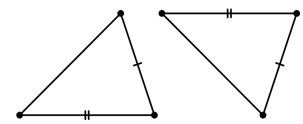


τρίγωνα ΜΝΞ και ΜΛΞ

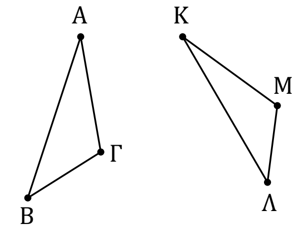


τρίγωνα ΟΠΡ και ΟΣΤ

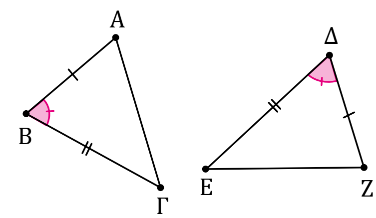
2. Στο διπλανό σχήμα να σημειώσετε ένα ακόμα ζευγάρι ίσων στοιχείων ώστε τα τρίγωνα να είναι ίσα. Με πόσους τρόπους μπορείτε να το κάνετε;



3. Στα διπλανά ίσα τρίγωνα δίνονται: ΑΒ = ΚΛ = 3 cm, $\hat{A} = \hat{K} = 30^\circ$ και $\hat{B} = \hat{\Lambda} = 40^\circ$. Σημειώστε τα δεδομένα στο σχήμα και γράψτε τα υπόλοιπα κύρια στοιχεία των τριγώνων που είναι ίσα μεταξύ τους.

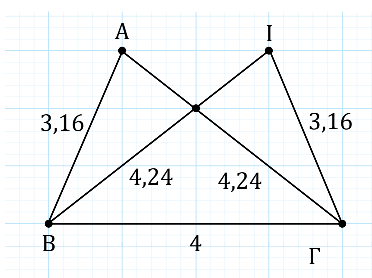


4. Στα διπλανά ίσα τρίγωνα είναι σημειωμένα τα ίσα στοιχεία τους. Να βρείτε και τα υπόλοιπα κύρια στοιχεία που είναι ίσα.



Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

5. Στο διπλανό σχήμα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΙΒΓ είναι ίσα. Να αντιγράψετε το σχήμα σε χαρτί μιλιμετρέ και να σχεδιάσετε και άλλα τρίγωνα ίσα με τα ΑΒΓ και ΙΒΓ, με όποιον τρόπο νομίζετε. Αιτιολογήστε γιατί τα τρίγωνα που σχεδιάσατε είναι ίσα.



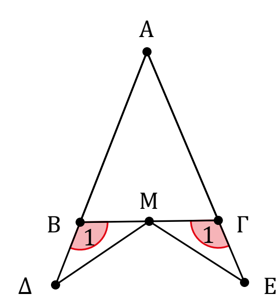
6. Να σχεδιάσετε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Στη συνέχεια να κατασκευάσετε τις διχοτόμους των γωνιών της βάσης, και να τις ονομάσετε ΒΔ και ΓΕ. Να δείξετε ότι οι ΒΔ και ΓΕ είναι ίσες.

7. Το τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ κατά τμήμα ΒΔ και την πλευρά ΑΓ κατά τμήμα ΓΕ = ΒΔ. Αν Μ είναι το μέσο της βάσης ΒΓ, δείξτε ότι:

α) $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$

β) τα τρίγωνα ΒΜΔ και ΓΜΕ είναι ίσα

γ) το τρίγωνο ΔΜΕ είναι ισοσκελές



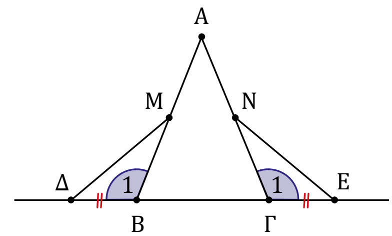
8. Να σχεδιάσετε ένα ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ//ΓΔ, ΑΔ = ΒΓ και $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$. Να ονομάσετε Ν το μέσο της βάσης ΔΓ. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΝΔ και ΒΝΓ.

9. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Προεκτείνουμε τη βάση ΒΓ κατά τμήματα ΒΔ = ΓΕ. Αν Μ, Ν είναι τα μέσα των ίσων πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, δείξτε ότι:

α) $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$

β) τα τρίγωνα ΔΒΜ και ΕΓΝ είναι ίσα

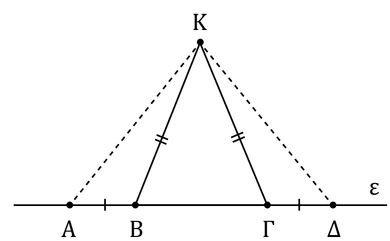
γ) το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές



10. Να σχεδιάσετε δύο ίσα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ. Σχεδιάστε τις διαμέσους που αντιστοιχούν σε δύο ίσες πλευρές τους. Αποδείξτε ότι αυτές οι διάμεσοι είναι ίσες.

11. Σε τρίγωνο ΑΒΓ η ΒΜ είναι διάμεσος. Προεκτείνουμε τη ΒΜ προς το Μ κατά ίσο τμήμα ΜΔ=ΒΜ. Να αποδείξετε ότι ΓΔ=ΑΒ.

12. Τα σημεία Α, Β, Γ και Δ βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία ε και ισχύει ότι ΑΒ = ΓΔ. Ένα σημείο Κ εκτός της ευθείας ε ισαπέχει από τα Β και Γ. Να αποδείξετε ότι το Κ ισαπέχει και από τα σημεία Α και Δ.

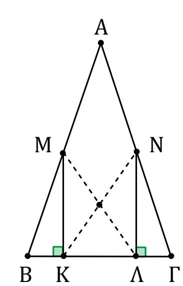


13. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ, φέρνουμε τη διχοτόμο ΑΔ της γωνίας Α και πάνω σε αυτή παίρνουμε τυχαίο σημείο Κ. Να αποδείξετε ότι ΚΒ = ΚΓ.

14. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ τα σημεία Μ και Ν είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Φέρνουμε τα ΜΚ και ΝΛ κάθετα τμήματα στη ΒΓ.

α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΒΜΚ και ΓΝΛ.

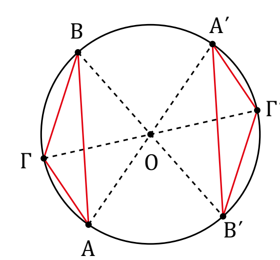
β) Να αποδείξετε ότι ΜΛ = ΝΚ.



15. Σε κύκλο (Ο, ρ) έχουμε φέρει τις διαμέτρους ΑΑ΄, ΒΒ΄ και ΓΓ΄.

α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα.

β) Ο Γιάννης ισχυρίζεται ότι τα δύο τρίγωνα είναι συμμετρικά, άρα ίσα. Συμφωνείτε; Εξηγήστε την άποψή σας.

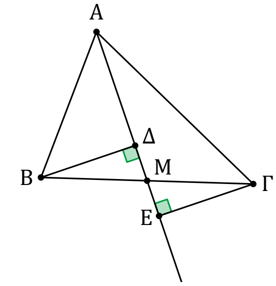


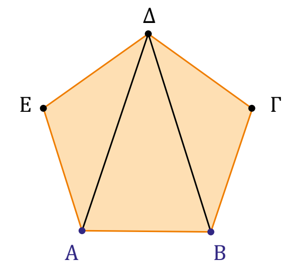
16. Σε ρόμβο ΑΒΓΔ να αποδείξετε ότι οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ: **α)** τέμνονται κάθετα και **β)** διχοτομούν τις γωνίες του.

Τετράπλευρο με κάθετες διαγωνίους

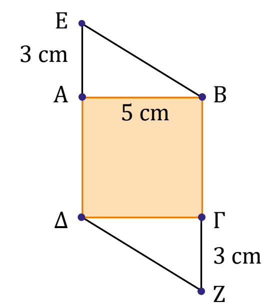
17. Σε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΔΓ, ΑΔ = ΒΓ και $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$), να αποδείξετε ότι οι διαγώνιοι είναι ίσες.

18. Σε τρίγωνο ΑΒΓ, φέρνουμε τη διάμεσο ΑΜ. Φέρνουμε τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ κάθετα στην ευθεία της διαμέσου. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ είναι ίσα.

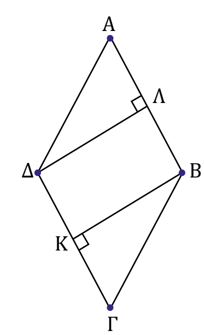




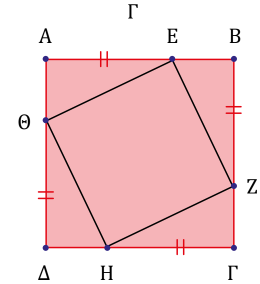
19. Σε κανονικό πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ φέρνουμε τις διαγωνίους ΑΔ και ΒΔ. Να αποδείξετε ότι είναι ίσες.



20. Στο τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 5 cm του διπλανού σχήματος προεκτείνουμε την πλευρά ΔΑ προς το Α κατά τμήμα ΑΕ = 3 cm και τη ΒΓ προς το Γ κατά τμήμα ΓΖ = 3 cm. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΔΓΖ.



21. Στον διπλανό ρόμβο ΑΒΓΔ το τμήμα ΔΛ είναι κάθετο στην πλευρά ΑΒ και το ΒΚ κάθετο στη ΔΓ. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΛΔ και ΒΚΓ.



22. Στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ του τετραγώνου ΑΒΓΔ παίρνουμε αντίστοιχα τα ίσα τμήματα ΑΕ = ΒΖ = ΓΗ = ΔΘ. Να αποδείξετε ότι ΕΖ = ΖΗ = ΗΘ = ΘΕ.

23. Να σχεδιάσετε έναν ρόμβο ΑΒΓΔ. Να προεκτείνετε τη διαγώνιο ΒΔ και πάνω στις προεκτάσεις προς το Δ και προς το Β να πάρετε αντίστοιχα τα ίσα τμήματα ΔΖ = ΒΕ. Αν Ο είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του ρόμβου, τότε να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΟΕ και ΖΟΓ είναι ίσα.

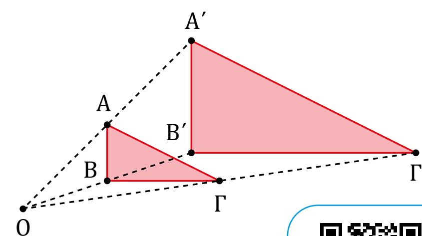
β) Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΖΔΓ είναι ίσα.

Ομοιοθεσία

Δ1. Παρατηρώντας ομοιότητες

Α. Όταν βάζουμε μια εικόνα σε ένα αρχείο κειμένου, μπορούμε να τη μεγαλώσουμε ή να τη μικρύνουμε. Συνήθως αυτό γίνεται «πιάνοντας» και μετακινώντας με το ποντίκι κάποια γωνία της εικόνας. Στη διπλανή εικόνα βλέπουμε δύο φωτογραφίες. Σε τι μοιάζουν και σε τι διαφέρουν;

Β. Η Βασιλική εξηγεί τον τρόπο με τον οποίο μεγάλωσε ένα τρίγωνο: «Ξεκίνησα από το ΑΒΓ και πήρα ένα σημείο Ο, όποιο να 'ναι. Έφερα την ΟΑ και τη διπλασίασα, κι έτσι έφτιαξα την ΟΑ′. Με τον ίδιο τρόπο έφτιαξα την ΟΒ′ διπλάσια της ΟΒ και την ΟΓ′ διπλάσια της ΟΓ». Τι σχέση νομίζετε ότι έχουν τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ που έφτιαξε η Βασιλική; Τι σχέση πιστεύετε ότι έχουν οι αντίστοιχες πλευρές και οι αντίστοιχες γωνίες των δύο τριγώνων;



Συζητήστε στις ομάδες σας και ανταλλάξτε τις ιδέες σας στην τάξη.

Κάτι παράξενα σχήματα

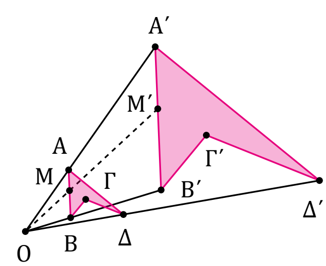
Συζητάμε

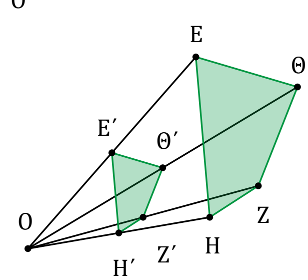
...για ομοιόθετα σχήματα

Συχνά έχουμε σχήματα διαφορετικού μεγέθους αλλά όμοιας μορφής. Τέτοια σχήματα μπορούμε να τα κατασκευάσουμε κάνοντας μεγέθυνση ή σμίκρυνση σε ένα σχήμα. Ένας τρόπος είναι ο εξής: Ξεκινάμε από το αρχικό μας σχήμα, π.χ. το τετράπλευρο ΑΒΓΔ, και παίρνουμε ένα οποιοδήποτε σημείο Ο.

Ενώνουμε το Ο με ένα σημείο Μ του τετράπλευρου. Πάνω στην ημιευθεία ΟΜ παίρνουμε ένα σημείο Μ′, τέτοιο ώστε $ΟΜ' = λ \cdot ΟΜ$, με λ κάποιον σταθερό θετικό αριθμό (στο σχήμα είναι $λ = 3$). Αν φανταστούμε ότι το κάνουμε αυτό για όλα τα σημεία του αρχικού τετράπλευρου ΑΒΓΔ, θα πάρουμε ένα καινούριο τετράπλευρο Α′Β′Γ′Δ′. Αυτό θα μοιάζει με το αρχικό, αλλά θα είναι μεγαλύτερο (στο παράδειγμά μας κάθε πλευρά τριπλασιάστηκε) ή μικρότερο. Για άλλη τιμή του λ, θα πάρουμε άλλο τελικό σχήμα, για παράδειγμα, με $λ = 0{,}5$, το σχήμα ΕΖΗΘ μίκρυνε στο Ε′Ζ′Η′Θ′.

Οι αντίστοιχες γωνίες του αρχικού σχήματος και του ομοιόθετού του είναι ίσες, αφού το ένα είναι μεγέθυνση ή σμίκρυνση του άλλου.





Το ομοιόθετο τμήματος

Στοιχεία της ομοιοθεσίας

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

..... λεκτικά	..... και με σχήματα

..... λεκτικά

Ομοιοθεσία με **κέντρο Ο** και **λόγο λ** λέμε τον γεωμετρικό μετασχηματισμό με τον οποίο μετακινούμε κάθε σημείο Α ενός σχήματος σε ένα σημείο Α′ έτσι ώστε:

- το Α′ να βρίσκεται πάνω στην ημιευθεία ΟΑ,
- το ΟΑ′ να έχει μήκος $ΟΑ' = λ \cdot ΟΑ$

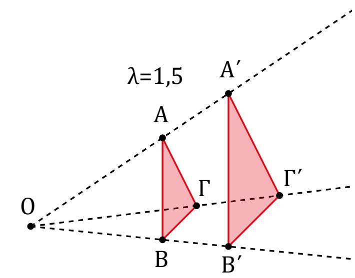
Το νέο σχήμα που δημιουργούμε το λέμε **ομοιόθετο** του αρχικού.

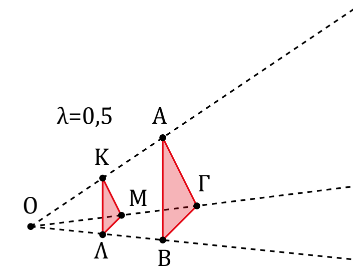
- Αν λ > 1, τότε το ομοιόθετο είναι μεγέθυνση του αρχικού σχήματος, ενώ
- Αν 0 < λ < 1, τότε το ομοιόθετο είναι σμίκρυνση του αρχικού.

Γενικά, κάθε μήκος στο ομοιόθετο είναι λ φορές το αντίστοιχο μήκος του αρχικού σχήματος. Δηλαδή, τα μήκη των πλευρών του σχήματος είναι ανάλογα προς τα μήκη των αντίστοιχων πλευρών του ομοιόθετού του. Το ομοιόθετο ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα παράλληλο προς το αρχικό. Η ομοιόθετη μιας γωνίας είναι ίση με την αρχική.

Λέμε **λόγο** δύο τμημάτων τον λόγο των μηκών τους (μετρημένων στην ίδια μονάδα μέτρησης). Οπότε, δύο ομοιόθετα ευθύγραμμα τμήματα έχουν λόγο τον λόγο ομοιοθεσίας. Επίσης, αν έχουμε δύο ομοιόθετα πολύγωνα, οι πλευρές τους είναι ανάλογες, δηλαδή οι λόγοι τους είναι όλοι μεταξύ τους ίσοι (και ίσοι με τον λόγο ομοιοθεσίας).

..... και με σχήματα





Οι μετασχηματισμοί που έχουμε δει στις προηγούμενες τάξεις (η ανάκλαση, η μεταφορά και η στροφή) ήταν ισομετρίες, δηλαδή τα μήκη των τμημάτων και τα μέτρα των γωνιών παρέμεναν σταθερά στο αρχικό σχήμα και στην εικόνα του. Η ομοιοθεσία **δεν** είναι στην κατηγορία αυτή, δηλαδή **δεν** είναι ισομετρία.

Δ2. Κατασκευάζουμε ομοιόθετα σχήματα

Ομοιοθεσία με γεωμετρικά όργανα

Α. Σχεδιάστε στο τετράδιό σας ένα οποιοδήποτε σχήμα και έξω από αυτό πάρτε ένα σημείο Ο. Βρείτε το ομοιόθετο του σχήματός σας με κέντρο ομοιοθεσίας το Ο και λόγο ομοιοθεσίας

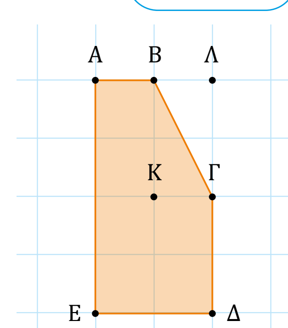
α) κάποιον αριθμό μεγαλύτερο του 1

β) κάποιον θετικό αριθμό μικρότερο του 1

Β. Να αντιγράψετε σε τετραγωνισμένο χαρτί το σχήμα με το πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ και τα σημεία Κ και Λ. Να βρείτε το ομοιόθετο του ΑΒΓΔΕ:

α) με κέντρο ομοιοθεσίας το Κ και λόγο $λ = \frac{1}{2}$

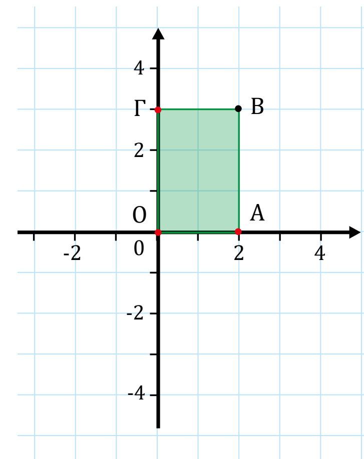
β) με κέντρο ομοιοθεσίας το Λ και λόγο λ = 2



Ομοιοθεσία σε τετραγωνισμένο χαρτί

Γ. Σε σύστημα συντεταγμένων έχουμε το ορθογώνιο ΟΑΒΓ. Οι συντεταγμένες των κορυφών του είναι $O(0,0)$, $A(2,0)$, $B(2,3)$ και $Γ(0,3)$. Να βρείτε το ομοιόθετο του ΟΑΒΓ με κέντρο ομοιοθεσίας την αρχή των αξόνων και λόγο ομοιοθεσίας α) $λ = 3$ β) $λ = 0{,}5$.
Σε καθεμία από τις περιπτώσεις α) και β), να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του ομοιόθετου σχήματος. Βρείτε έναν κανόνα για τις συντεταγμένες του ομοιόθετου οποιουδήποτε σημείου. Συζητήστε με τους συμμαθητές και τις συμμαθήτριές σας για τον κανόνα που βρήκατε.

Ομοιοθεσία και συντεταγμένες



Δ. Χρησιμοποιήστε το Geogebra για να δημιουργήσετε το δικό σας σχήμα και να βρείτε το ομοιόθετό του με κέντρο και λόγο ομοιοθεσίας που εσείς θέλετε. Συγκρίνετε το σχήμα σας με τα σχήματα που έκαναν οι συμμαθητές/τριές σας.

Ομοιοθεσία στο Geogebra

Συζητάμε

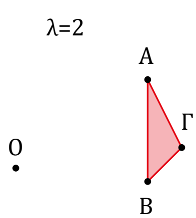
...για την κατασκευή ομοιόθετου σχήματος

Η κατασκευή του ομοιόθετου ενός σχήματος μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους.

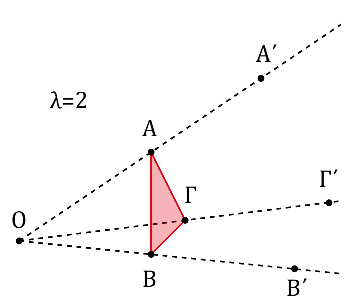
Στο χαρτί, με γεωμετρικά όργανα

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε το τρίγωνο ΑΒΓ και θέλουμε να βρούμε το ομοιόθετό του με κέντρο ομοιοθεσίας το Ο και λόγο ομοιοθεσίας $λ = 2$ (σχήμα 1).

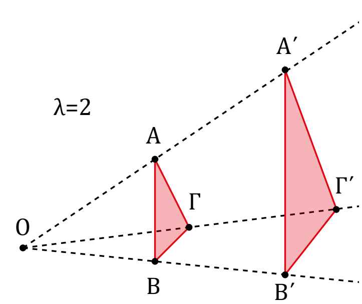
Φτιάχνουμε με τον χάρακα τις ημιευθείες ΟΑ, ΟΒ και ΟΓ και μετράμε τα μήκη ΟΑ, ΟΒ και ΟΓ. Στις ημιευθείες παίρνουμε τα σημεία Α′, Β′ και Γ′, έτσι ώστε $OA' = 2 \cdot OA$, $OB' = 2 \cdot OB$ και $OΓ' = 2 \cdot OΓ$ (σχήμα 2). Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε με τον διαβήτη να βρούμε το Α′ παίρνοντας ΑΑ′ = ΟΑ και ομοίως τα Β′ και Α′.



σχήμα 1



σχήμα 2



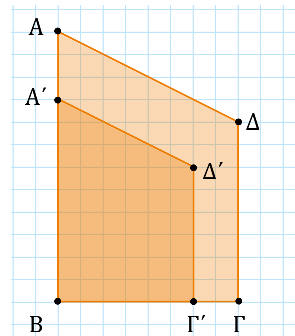
σχήμα 3

Σχηματίζουμε το τρίγωνο που έχει κορυφές τα Α′, Β′ και Γ′. Το Α′Β′Γ′ είναι το ομοιόθετο του ΑΒΓ.
Οι πλευρές του Α′Β′Γ′ είναι διπλάσιες των αντίστοιχων πλευρών του ΑΒΓ. Οι γωνίες του Α′Β′Γ′ είναι ίσες με τις αντίστοιχες γωνίες του ΑΒΓ.

Κατασκευή ομοιόθετου

Σε τετραγωνισμένο χαρτί

Έχουμε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ και θέλουμε να βρούμε το ομοιόθετό του με κέντρο το Β και λόγο ομοιοθεσίας $\lambda = 0{,}75 = \frac{3}{4}$.

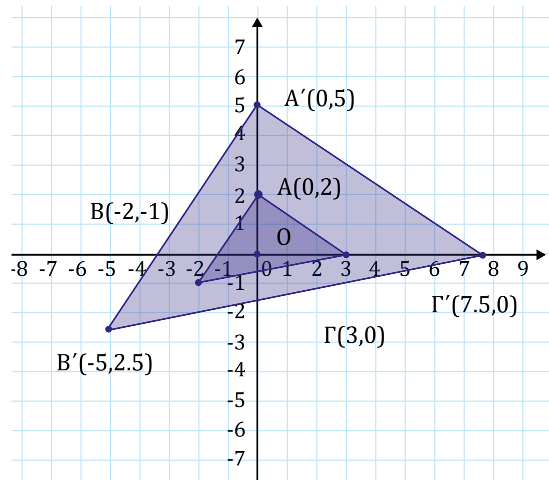


Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα τετραγωνάκια για να μετράμε μήκη και να βρούμε το ομοιόθετο του ΑΒΓΔ χωρίς να χρησιμοποιήσουμε χάρακα. Για παράδειγμα, επειδή το ΒΓ έχει μήκος 8 μονάδες (τετραγωνάκια), το ομοιόθετό του θα είναι $B\Gamma' = \frac{3}{4}B\Gamma = \frac{3}{4}\cdot 8 = 6$ μονάδες.

Επειδή το κέντρο ομοιοθεσίας είναι το σημείο Β, το ομοιόθετό του είναι το ίδιο σημείο.

Σε σύστημα συντεταγμένων

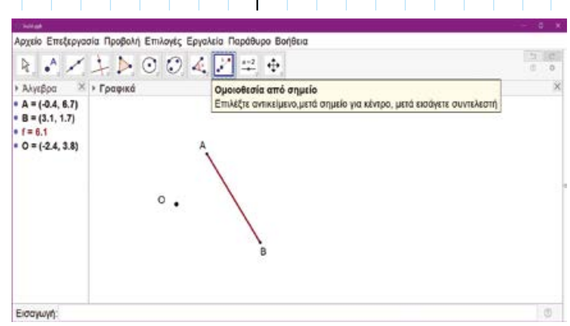
Έχουμε το τρίγωνο ΑΒΓ με $A(0,2)$, $B(-2,-1)$ και $\Gamma(3,0)$ Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να βρούμε το ομοιόθετο του ΑΒΓ με κέντρο την αρχή των αξόνων και λόγο λ = 2,5.



Χρησιμοποιώντας το σύστημα συντεταγμένων, επειδή $OA' = 2{,}5 \cdot OA$, βρίσκουμε ότι το ομοιόθετο του Α θα είναι το $A'(0,5)$. Ομοίως βρίσκουμε $B'(-5, 2{,}5)$ και $\Gamma'(7{,}5\ ,0)$. Δηλαδή, επειδή το κέντρο ομοιοθεσίας είναι η αρχή των αξόνων, για να βρούμε τις συντεταγμένες του ομοιόθετου, πολλαπλασιάζουμε τις συντεταγμένες του αρχικού με τον λόγο ομοιοθεσίας. Αυτό συμβαίνει μόνο όταν το κέντρο ομοιοθεσίας είναι η αρχή των αξόνων.

Με λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας

Στην περίπτωση ενός σχήματος που έχει σχεδιαστεί με λογισμικό γεωμετρίας συνήθως μπορούμε να βρούμε το ομοιόθετό του χρησιμοποιώντας συγκεκριμένα εργαλεία. Για παράδειγμα, στο Geogebra5 η ομοιοθεσία γίνεται με το εργαλείο που φαίνεται στην εικόνα.



Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

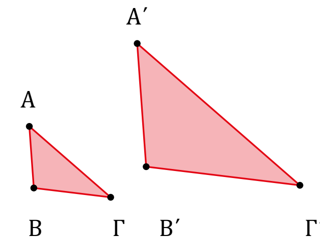
Για να σχεδιάσουμε το ομοιόθετο ενός σχήματος, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε:

- υποδεκάμετρο (ή χάρακα και διαβήτη)
- τετραγωνισμένο χαρτί
- σύστημα συντεταγμένων
- ψηφιακά εργαλεία

Σε κάθε περίπτωση χρειάζεται να γνωρίζουμε το κέντρο ομοιοθεσίας και τον λόγο ομοιοθεσίας.

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

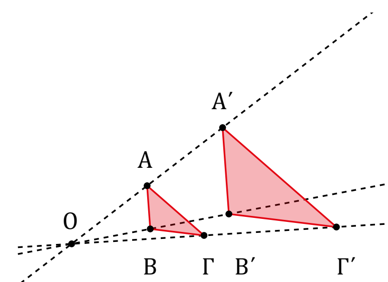
1. **Στο σχήμα έχουμε δύο τρίγωνα, το ΑΒΓ και το Α΄Β΄Γ΄. Είναι το ένα ομοιόθετο του άλλου; Ποιο είναι το κέντρο και ποιος είναι ο λόγος της ομοιοθεσίας;**



Απάντηση

Αν τα δύο τρίγωνα είναι ομοιόθετα, θα πρέπει να υπάρχει ένα σημείο από το οποίο να διέρχονται οι ΑΑ΄, ΒΒ΄ και ΓΓ΄. Σχεδιάζουμε λοιπόν αυτές τις ευθείες και παρατηρούμε αν διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Επειδή οι ΑΑ΄, ΒΒ΄ και ΓΓ΄ βλέπουμε να διέρχονται από το ίδιο σημείο Ο, αν τα δύο τρίγωνα είναι ομοιόθετα, το κέντρο ομοιοθεσίας θα είναι το Ο. Για να δούμε αν πράγματι είναι ομοιόθετα, μένει να εξετάσουμε αν τα τμήματα ΟΑ, ΟΒ και ΟΓ είναι ανάλογα με τα ΟΑ΄, ΟΒ΄ και ΟΓ΄. Δηλαδή θα πρέπει να ελέγξουμε αν ισχύει ότι $\frac{ΟΑ'}{ΟΑ}=\frac{ΟΒ'}{ΟΒ}=\frac{ΟΓ'}{ΟΓ}$.

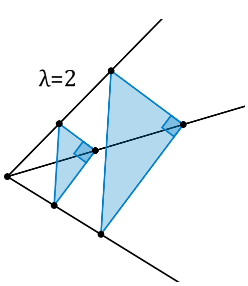


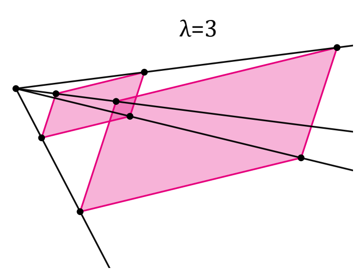
Μετράμε τα μήκη και βρίσκουμε ότι αυτός ο λόγος είναι ίσος με 2. Άρα τα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ομοιόθετα με κέντρο ομοιοθεσίας το Ο και λόγο λ = 2.

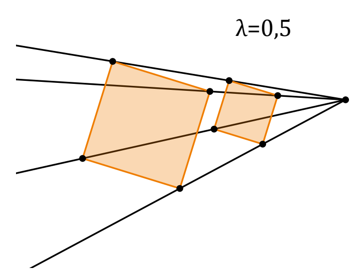
Σχόλιο: Υπολογίζοντας τον λόγο $\frac{ΟΑ'}{ΟΑ}=\frac{ΟΒ'}{ΟΒ}=\frac{ΟΓ'}{ΟΓ}=2$, υποθέσαμε ότι το ΑΒΓ είναι το αρχικό τρίγωνο και το Α΄Β΄Γ΄ είναι το ομοιόθετό του. Σε αυτή την περίπτωση το Α΄Β΄Γ΄ είναι μια μεγέθυνση του ΑΒΓ. Θα μπορούσαμε όμως να υπολογίσουμε τους αντίστροφους λόγους $\frac{ΟΑ}{ΟΑ'}=\frac{ΟΒ}{ΟΒ'}=\frac{ΟΓ}{ΟΓ'}=\frac{1}{2}$ και να σκεφτούμε ότι το Α΄Β΄Γ΄ είναι το αρχικό σχήμα και το ΑΒΓ είναι μια σμίκρυνσή του.

2. **Εξηγήστε τι είδους σχήμα είναι το ομοιόθετο ενός ορθογώνιου τριγώνου. Ενός παραλληλογράμμου; Ενός τετραγώνου; Ενός κύκλου;**

Απάντηση





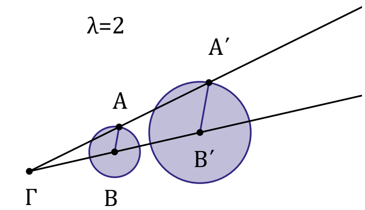


Γνωρίζουμε ότι δύο ομοιόθετα σχήματα έχουν τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες και τις αντίστοιχες πλευρές τους ανάλογες και παράλληλες. Οπότε:

- αν μια γωνία είναι ορθή, τότε και η ομοιόθετή της θα είναι ορθή,
- αν δύο πλευρές είναι ίσες, τότε και οι ομοιόθετές τους θα είναι ίσες
- αν δύο πλευρές είναι παράλληλες, τότε και οι ομοιόθετές τους θα είναι παράλληλες.

Οπότε, το ομοιόθετο ενός ορθογώνιου τριγώνου θα είναι ορθογώνιο τρίγωνο, το ομοιόθετο ενός παραλληλογράμμου θα είναι παραλληλόγραμμο και το ομοιόθετο ενός τετραγώνου θα είναι τετράγωνο.

Τέλος, κάθε ακτίνα του αρχικού κύκλου έχει ένα ομοιόθετο τμήμα. Αφού οι ακτίνες είναι ίσες, τα ομοιόθετα τμήματα είναι κι αυτά όλα ίσα, δηλαδή τα σημεία του ομοιόθετου σχήματος απέχουν εξίσου από ένα συγκεκριμένο σημείο. Οπότε το ομοιόθετο ενός κύκλου θα είναι κι αυτό κύκλος που έχει ακτίνα λ φορές την ακτίνα του αρχικού κύκλου.



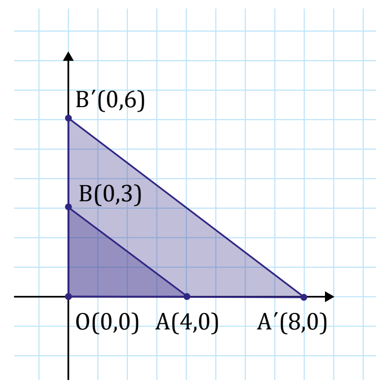
3. Το τρίγωνο ΟΑ′Β′ είναι το ομοιόθετο του ΟΑΒ. Πιο συγκεκριμένα, το Α′ είναι το ομοιόθετο του Α και το Β′ είναι το ομοιόθετο του Β.

α) Ποιο είναι το κέντρο και ποιος είναι ο λόγος ομοιοθεσίας;

β) Να επιβεβαιώσετε ότι οι πλευρές των δύο τριγώνων είναι ανάλογες. Γράψτε τα ζεύγη των ίσων γωνιών.

γ) Ποια σχέση έχουν οι περίμετροι των ΟΑΒ και ΟΑ′Β′; Ποια σχέση έχουν τα εμβαδά τους;

δ) Αν δε γνωρίζαμε τις συντεταγμένες των κορυφών των τριγώνων, ποια πληροφορία θα αρκούσε για να βρούμε τον λόγο ομοιοθεσίας;



Απάντηση

α) Εφόσον γνωρίζουμε ότι το Α′ είναι το ομοιόθετο του Α και το Β′ είναι το ομοιόθετο του Β, το κέντρο της ομοιοθεσίας θα είναι το σημείο τομής των ΑΑ′ και ΒΒ′. Άρα είναι το Ο. Εναλλακτικά, μπορούμε να σκεφτούμε ότι το Ο που δεν αλλάζει κατά την ομοιοθεσία είναι το κέντρο της.

Μπορούμε να βρούμε τον λόγο ομοιοθεσίας βρίσκοντας τον λόγο $\frac{OB'}{OB}$ ή τον $\frac{OA'}{OA}$. Επειδή $OB'=6$ και $OB=3$, συμπεραίνουμε ότι ο λόγος ομοιοθεσίας είναι $\frac{6}{3}=2$.

β) Όπως φαίνεται στο σχήμα, τα μήκη των πλευρών των τριγώνων είναι $OA=4$, $OB=3$, $OA'=8$ και $OB'=6$. Υπολογίζουμε τις υποτείνουσες ΑΒ και Α′Β′ των ορθογώνιων τριγώνων με το Πυθαγόρειο Θεώρημα:

$AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$ και $A'B'=\sqrt{6^2+8^2}=\sqrt{100}=10$

Υπολογίζοντας τους λόγους, επιβεβαιώνουμε την αναλογία των πλευρών, αφού $\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\frac{O\Gamma'}{O\Gamma}=2$.

Οι αντίστοιχες γωνίες των δύο τριγώνων είναι ίσες. Δηλαδή $\hat{O}=90^o$, $\hat{A}=\hat{A}'$ και $\hat{B}=\hat{B}'$.

γ) Η περίμετρος του ΟΑΒ είναι $4+3+5=12$. Η περίμετρος του ΟΑ′Β′ είναι $6+8+10=24$. Παρατηρούμε ότι $24=2\cdot 12$, ή αλλιώς $\frac{\text{περίμετρος του ΟΑ′Β′}}{\text{περίμετρος του ΟΑΒ}}=2$.

Γενικά, ο λόγος των περιμέτρων δύο ομοιόθετων σχημάτων είναι ίσος με τον λόγο ομοιοθεσίας.

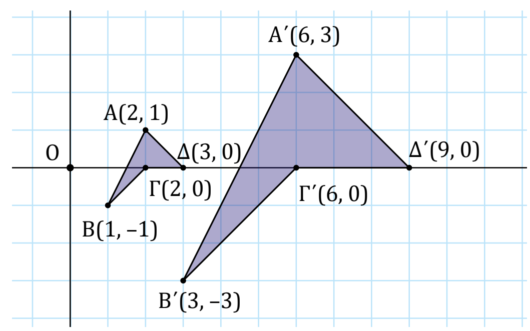
Το εμβαδόν του ΟΑΒ είναι $(OAB)=\dfrac{3\cdot 4}{2}=6$ και του ΟΑ′Β′ είναι $(OA'B')=\dfrac{6\cdot 8}{2}=24$. Παρατηρούμε ότι $24=4\cdot 6$, ή αλλιώς $(OA'B')=4\cdot(OAB)$. Αυτό συμβαίνει επειδή τα μήκη του ΟΑ′Β′ είναι διπλάσια των αντίστοιχων μηκών του ΟΑΒ, και έτσι $(OA'B')=\dfrac{6\cdot 8}{2}=\dfrac{(2\cdot 3)\cdot(2\cdot 4)}{2}=(2\cdot 2)\dfrac{3\cdot 4}{2}=2^2\cdot(OAB)=4\cdot(OAB)$.

Γενικά, ο λόγος των εμβαδών δύο ομοιόθετων σχημάτων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιοθεσίας.

Ομοιόθετα ορθογώνια

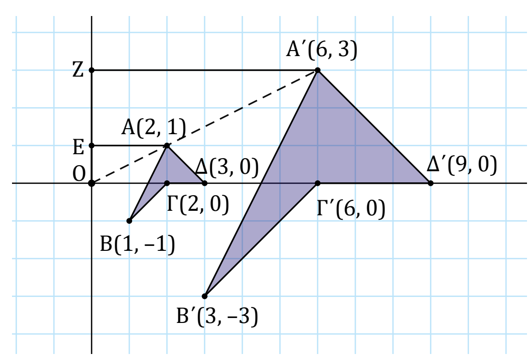
δ) Αν δε γνωρίζαμε τις συντεταγμένες των κορυφών, για να βρούμε τον λόγο ομοιοθεσίας, θα αρκούσε να γνωρίζουμε τα μήκη δύο αντίστοιχων πλευρών, ή πόσες φορές μεγαλύτερη (ή μικρότερη) είναι η μία από την άλλη.

4. **Στην εικόνα φαίνεται ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ και το ομοιόθετό του Α′Β′Γ′Δ′ με κέντρο ομοιοθεσίας την αρχή των αξόνων Ο και λόγο 3.**
Πώς σχετίζονται οι συντεταγμένες των κορυφών του ΑΒΓΔ με τις συντεταγμένες των αντίστοιχων κορυφών του Α′Β′Γ′Δ′; Διατυπώστε έναν κανόνα και εξηγήστε τον.



Απάντηση

Οι συντεταγμένες των κορυφών Α′, Β′, Γ′ και Δ′ είναι τριπλάσιες των συντεταγμένων των κορυφών Α, Β, Γ και Δ αντίστοιχα. Μπορούμε να διατυπώσουμε αυτόν τον κανόνα γράφοντας: $(x,y)\to(3x,3y)$. Με αυτόν τον τρόπο δηλώνουμε ότι ο συγκεκριμένος γεωμετρικός μετασχηματισμός μετακινεί το σημείο με συντεταγμένες (x,y) στο σημείο με συντεταγμένες $(3x,3y)$.



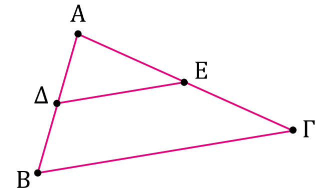
Για να εξηγήσουμε τον κανόνα αυτόν, ας πάρουμε το σημείο Α και το ομοιόθετό του Α′. Θα ισχύει ότι $OA'=3\cdot OA$. Επομένως, το τρίγωνο ΟΕΑ έχει ως ομοιόθετο το ΟΖΑ′. Άρα $OZ=3\cdot OE$, δηλαδή η τεταγμένη του Α′ είναι τριπλάσια της τεταγμένης του Α. Και $ZA'=3\cdot EA$, δηλαδή η τετμημένη του Α′ είναι τριπλάσια της τετμημένης του Α.
Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να εξηγήσουμε τον κανόνα για τη σχέση ανάμεσα στις συντεταγμένες οποιουδήποτε σημείου και του ομοιόθετού του, όταν το κέντρο ομοιοθεσίας είναι η αρχή των αξόνων.

Γενικά, αν έχουμε μια ομοιοθεσία με κέντρο την αρχή των αξόνων και λόγο λ, μπορούμε να βρούμε το ομοιόθετο οποιουδήποτε σημείου $M(x,y)$ χρησιμοποιώντας τον κανόνα $(x,y)\to(\lambda\cdot x,\lambda\cdot y)$.

Πείραμα με είδωλό μας στον καθρέπτη

Ο ξυλουργός και η διαγώνιος κλίμακα

5. **Έχουμε ένα τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ. Βρίσκουμε τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ και τα ονομάζουμε Δ και Ε.**
α) Τι σχέση έχει το τρίγωνο ΑΔΕ με το τρίγωνο ΑΒΓ;
β) Τι σχέση έχει το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ με το ΒΓ;



Απάντηση

α) Επειδή $ΑΔ=\frac{1}{2}ΑΒ$ και $ΑΕ=\frac{1}{2}ΑΓ$, το Δ και το Ε είναι ομοιόθετα των Β και Γ με κέντρο Α και λόγο $\frac{1}{2}$. Οπότε, το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ομοιόθετο του ΑΒΓ με κέντρο Α και λόγο $\frac{1}{2}$.

β) Αφού τα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι ομοιόθετα, με λόγο $\frac{1}{2}$, το ΑΔ θα είναι παράλληλο με το ΒΓ και $ΔΕ=\frac{1}{2}ΒΓ$.

Σε οποιοδήποτε τρίγωνο, το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα δύο πλευρών του είναι παράλληλο στην τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.

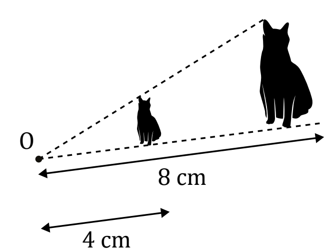
Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε

1. Να κατασκευάσετε έναν πίνακα έννοιας για την ομοιοθεσία.

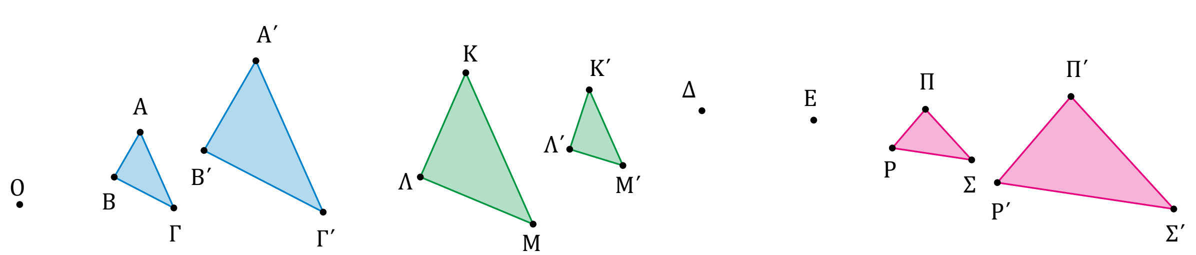
2. Συζητήστε στην ομάδα σας και διατυπώστε τις απόψεις σας στην τάξη σχετικά με τα ερωτήματα: Τι συμβαίνει αν σε μια ομοιοθεσία ο λόγος είναι 1; Πώς θα ορίζατε το ομοιόθετο ενός σχήματος με λόγο ομοιοθεσίας 0; Αν πολλαπλασιάσουμε με αρνητικό αριθμό, π.χ. με –2, τις συντεταγμένες των κορυφών ενός τριγώνου, τι σχήμα θα προκύψει και πώς συνδέεται αυτό με την ομοιοθεσία;

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Γνωρίζουμε ότι στην εικόνα με τις γάτες, η μία έχει προκύψει από την άλλη με ομοιοθεσία με κέντρο το Ο. Να βρείτε τον λόγο ομοιοθεσίας:
α) αν η αρχική γάτα είναι η μικρή
β) αν η αρχική γάτα είναι η μεγάλη



2. Στα παρακάτω σχήματα να βρείτε τον λόγο ομοιοθεσίας με βάση τις πληροφορίες που δίνονται.

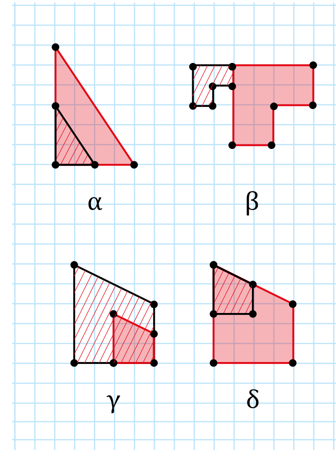


αρχικό σχήμα το ΑΒΓ, κέντρο το Ο και ΟΑ=2,3 cm και ΟΑ′=4,6 cm

αρχικό σχήμα το ΚΛΜ, κέντρο το Δ και ΔΚ=5 cm και ΔΚ′=3 cm

αρχικό σχήμα το ΠΡΣ, κέντρο το Ε και ΠΡ=3 cm και ΠΡ′=7,5 cm

3. Σε καθεμία από τις διπλανές περιπτώσεις το αρχικό σχήμα είναι γραμμοσκιασμένο και το ομοιόθετό του είναι κόκκινο. Να βρείτε το κέντρο και τον λόγο ομοιοθεσίας. Σε ποιες περιπτώσεις έχουμε μεγέθυνση και σε ποιες σμίκρυνση;



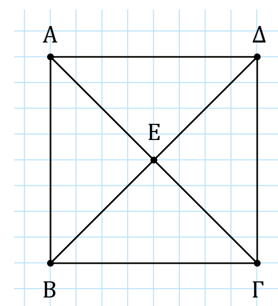
4. Στο σχήμα υπάρχει ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ που η πλευρά του είναι 8 μονάδες και το κέντρο του Ε. Να αντιγράψετε το σχήμα σε τετραγωνισμένο χαρτί και να σχεδιάσετε το ομοιόθετό του στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) με κέντρο Ε και λόγο 0,5

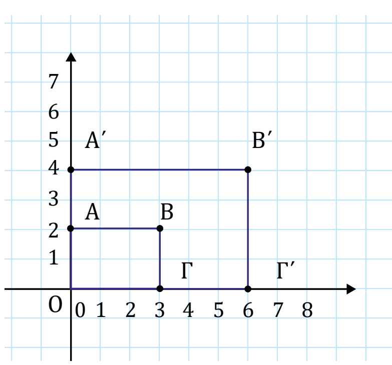
β) με κέντρο Ε και λόγο 2

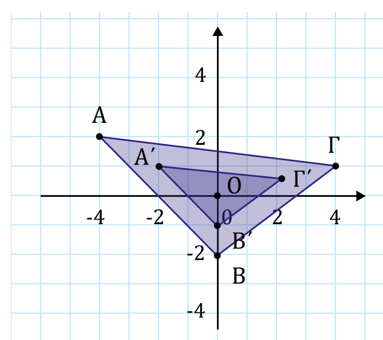
γ) με κέντρο Α και λόγο 0,5

Ομοιόθετο τετραγώνου

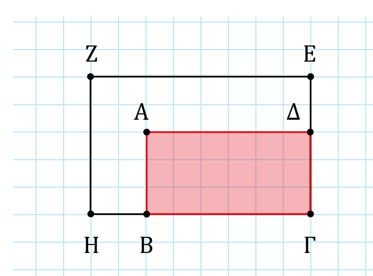


5. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις ομοιοθεσίας, να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών των σχημάτων, το κέντρο και τον λόγο ομοιοθεσίας.

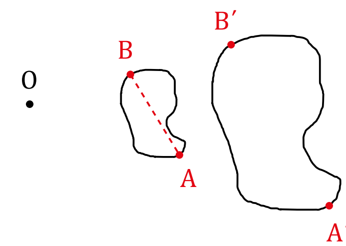




6. Σε μια εργασία, τα παιδιά έπρεπε να σχεδιάσουν το ομοιόθετο του ορθογώνιου ΑΒΓΔ με κέντρο ομοιοθεσίας το Γ και κάποιον λόγο. Ο Θοδωρής σχεδίασε το ΖΗΓΕ, αλλά ο Αχσάν το κοίταξε προσεκτικά και είπε ότι μάλλον κάτι δεν είναι σωστό. Τι νομίζετε εσείς; Εξηγήστε την άποψή σας.

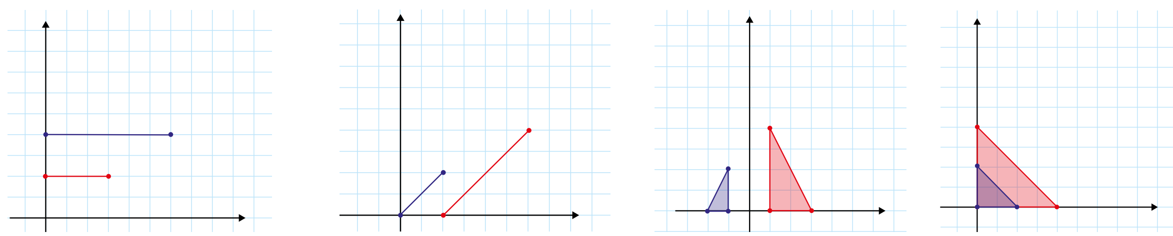


7. Στην εικόνα φαίνονται δύο ακανόνιστα σχήματα. Το μεγαλύτερο από αυτά είναι ομοιόθετο του μικρότερου με κέντρο ομοιοθεσίας το σημείο Ο και λόγο $\lambda = 2$. Η μέγιστη απόσταση που μπορεί να έχουν δύο σημεία του μικρού σχήματος είναι $AB = 2{,}3$ cm. Πόση είναι η μέγιστη απόσταση που μπορούν να έχουν δύο σημεία του μεγαλύτερου σχήματος; Εξηγήστε την απάντησή σας.



Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

8. Μπορεί (σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις) το μπλε σχήμα να είναι το ομοιόθετο του κόκκινου; Αν ναι, με ποιο κέντρο και ποιον λόγο; Αν όχι, γιατί;

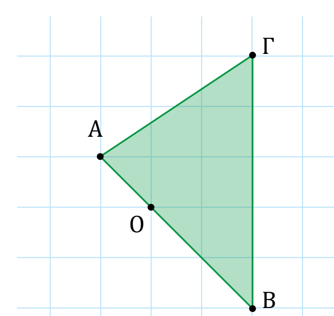


σχήμα 1 **σχήμα 2** **σχήμα 3** **σχήμα 4**

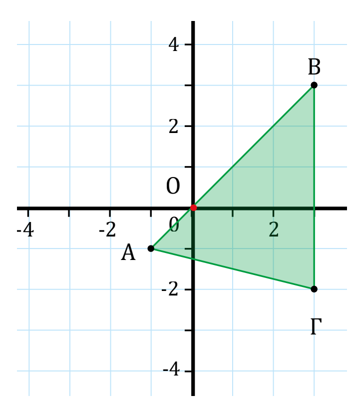
9. Να σχεδιάσετε στο τετράδιό σας ένα τρίγωνο ΑΒΓ και να πάρετε ένα σημείο Ο μέσα στο τρίγωνο κι ένα σημείο Κ έξω από το τρίγωνο. Να σχεδιάσετε το ομοιόθετο του ΑΒΓ:

α) με κέντρο το Ο και λόγο 2 **β)** με κέντρο το Κ και λόγο 1,5 **γ)** με κέντρο το Α και λόγο 0,5

10. Να αντιγράψετε το σχήμα σε τετραγωνισμένο χαρτί και να βρείτε το ομοιόθετο του ΑΒΓ με κέντρο το Ο και λόγο 3. Πόσες μονάδες (με μονάδα την πλευρά των τετραγώνων του χαρτιού) θα είναι το μήκος της ομοιόθετης πλευράς της ΒΓ; Μπορείτε να το εξηγήσετε χωρίς να τη μετρήσετε;



11. Η αρχή των αξόνων Ο είναι σημείο της πλευράς ΑΒ του τριγώνου ΑΒΓ. Να βρείτε το ομοιόθετο του ΑΒΓ με κέντρο το Ο και λόγο 2. Ποιες είναι οι συντεταγμένες των κορυφών του νέου τριγώνου; Ποιο θα είναι το μήκος της ομοιόθετης πλευράς της ΒΓ; Μπορείτε να το εξηγήσετε χωρίς να τη μετρήσετε;



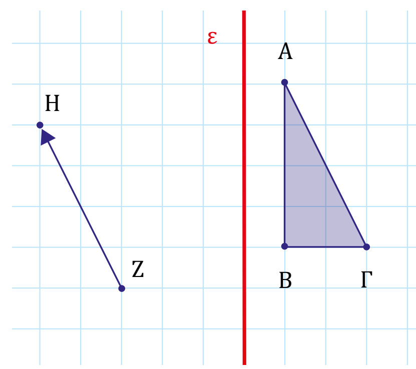
12. Σε ένα σύστημα συντεταγμένων να πάρετε τα σημεία $Α(0,2)$, $Β(-2,0)$ και $Γ(3,-1)$. Να κατασκευάσετε το ομοιόθετο του τριγώνου ΑΒΓ με κέντρο ομοιοθεσίας την αρχή των αξόνων και λόγο ομοιοθεσίας $λ = 3$. Ποιες είναι οι συντεταγμένες των κορυφών του νέου τριγώνου;

Συντεταγμένες ομοιόθετου

13. Να σχεδιάσετε δύο ισόπλευρα τρίγωνα που να μην έχουν ίσες πλευρές, αλλά οι πλευρές του ενός να είναι παράλληλες με τις πλευρές του άλλου. Εξετάστε αν τα τρίγωνα είναι ομοιόθετα ή όχι. Εξηγήστε τις απαντήσεις σας και τον τρόπο που εργαστήκατε.

14. Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο ΚΛΜ. Στη συνέχεια να σχεδιάσετε το ομοιόθετό του με κέντρο ομοιοθεσίας το Κ και λόγο 2, χρησιμοποιώντας μόνο κανόνα* και διαβήτη. Περιγράψτε τον τρόπο που εργαστήκατε. Καταγράψτε τα ζεύγη των ανάλογων πλευρών και τα ζεύγη των ίσων γωνιών.

15. Στο τετραγωνισμένο χαρτί της εικόνας είναι σχεδιασμένα ένα τρίγωνο ΑΒΓ, μια ευθεία ε και ένα διάνυσμα $\overrightarrow{ZH}$. Να αντιγράψετε το σχήμα σε τετραγωνισμένο χαρτί και να βρείτε το σχήμα που θα προκύψει από τους δύο διαδοχικούς γεωμετρικούς μετασχηματισμούς που περιγράφονται σε καθένα από τα παρακάτω ερωτήματα. (Τους λέμε διαδοχικούς γιατί από τον πρώτο μετασχηματισμό του ΑΒΓ παίρνουμε την εικόνα του και, στη συνέχεια, σε αυτή την εικόνα εφαρμόζουμε τον δεύτερο μετασχηματισμό.)



α) Πρώτα μια ομοιοθεσία με κέντρο Β και λόγο 2 και στη συνέχεια μια συμμετρία ως προς την ε.

β) Πρώτα μια ομοιοθεσία με κέντρο Β και λόγο 3 και στη συνέχεια μια μεταφορά κατά το διάνυσμα $\overrightarrow{ZH}$.

γ) Πρώτα μια ομοιοθεσία με κέντρο Β και λόγο 2 και στη συνέχεια μια στροφή 180° γύρω από το Β.

Τι θα άλλαζε στο τελικό αποτέλεσμα κάθε περίπτωσης αν κάναμε τους μετασχηματισμούς με την αντίστροφη σειρά;

16. Μια ομοιοθεσία αντιστοιχίζει το σημείο $Α(1,2)$ στο σημείο $Α'(3,6)$ και το σημείο $Β(1,0)$ στο σημείο $Β'(3,0)$.

α) Να βρείτε το κέντρο και τον λόγο ομοιοθεσίας.

β) Να βρείτε το ομοιόθετο του τριγώνου ΑΒΓ, αν γνωρίζουμε ότι το Γ έχει συντεταγμένες $Γ(2,0)$.

17. Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ και να πάρετε ένα σημείο Κ στο εσωτερικό του και ένα σημείο Λ στο εξωτερικό του. Κατασκευάστε το ομοιόθετο του ΑΒΓ με λόγο 2 και κέντρο της ομοιοθεσίας:

α) το Α **β)** το Κ **γ)** το Λ

Ποια σχέση έχουν τα τρία ομοιόθετα σχήματα; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Ομοιόθετα με ίδιο λόγο

Ομοιόθετα με το ίδιο κέντρο

* Κανόνα λέμε έναν χάρακα που δεν έχει χαραγμένα μήκη. Ως κανόνα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οποιονδήποτε χάρακα για να σχεδιάσουμε ευθείες αλλά όχι για να μετρήσουμε μήκη.

5.3 Όμοια σχήματα

Δ1. Τοποθετώντας τις φωτογραφίες στο άλμπουμ

Η Αργυρώ αποφάσισε να τοποθετήσει σε άλμπουμ τις φωτογραφίες που τράβηξε στην Κατάνια, παίζοντας με τις αποχρώσεις, τις διαστάσεις και τον προσανατολισμό της καθεμίας. Η Αγνή όμως της είπε ότι σε κάποια από αυτές «χάλασε τις αναλογίες»! Αν η αρχική φωτογραφία είναι η πάνω αριστερά:

α) Σε ποια φωτογραφία αναφέρεται η Αγνή;

β) Ανάμεσα στις υπόλοιπες φωτογραφίες υπάρχουν ομοιόθετες. Πώς θα περιγράφατε τη σχέση ανάμεσα στις φωτογραφίες που δεν είναι ομοιόθετες; Συζητήστε στην τάξη τις ιδέες σας.

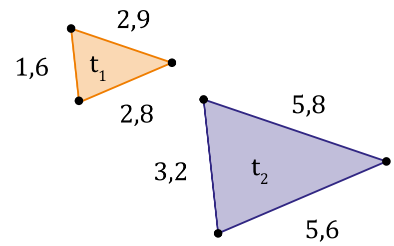
Συζητάμε

...για τρίγωνα ίσα, τρίγωνα ομοιόθετα και κάτι ακόμα

Στην καθημερινή μας ζωή πολύ συχνά συναντάμε σχήματα ίσα ή ομοιόθετα. Στα ίσα σχήματα είδαμε ότι τα κύρια στοιχεία τους είναι ένα προς ένα ίσα. Στα ομοιόθετα ίσες είναι μόνο οι αντίστοιχες γωνίες, ενώ οι πλευρές τους έχουν μια σταθερή αναλογία μεταξύ τους. Επίσης, στα ίσα σχήματα δεν παίζει ρόλο ο προσανατολισμός τους, ο οποίος όμως είναι πολύ σημαντικός όταν μιλάμε για ομοιόθετα σχήματα, καθώς τα αντίστοιχα ευθύγραμμα τμήματα είτε βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία είτε είναι παράλληλα. Τέλος, στα ομοιόθετα σχήματα μπορούμε να λέμε ότι το ένα είναι μεγέθυνση του άλλου.

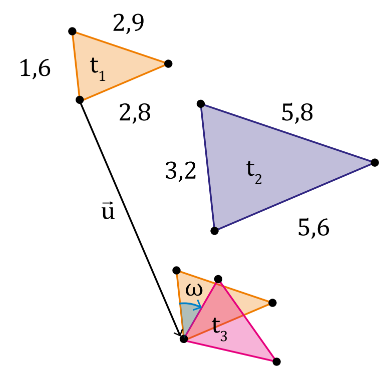
Αν αλλάζαμε τη θέση στο επίπεδο δύο ομοιόθετων τριγώνων, τα σχήματα που θα προέκυπταν τι σχέση θα είχαν;

Για παράδειγμα στο διπλανό σχήμα, αν από τα ομοιόθετα σχήματα t_1 και t_2 μετακινήσουμε το t_1 αλλάζοντάς του θέση και προσανατολισμό, ποια θα ήταν η σχέση του με το t_2;



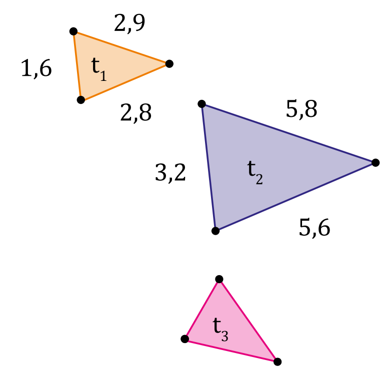
Μετακινώντας λοιπόν το t_1 ώστε να προκύψει το t_3, αλλάζει ο προσανατολισμός του μέσα από δύο διαδοχικούς μετασχηματισμούς:

- πρώτα μεταφορά κατά διάνυσμα $\vec{u}$
- μετά στροφή κατά γωνία ω



Έτσι, ανάμεσα στο t_3 και το t_2:

- παύει να ισχύει η παραλληλία των πλευρών
- αλλά τα σχήματα εξακολουθούν:
  - να έχουν πλευρές ανάλογες
  - να έχουν γωνίες μία προς μία ίσες
  - το ένα να είναι μεγέθυνση του άλλου



Στην περίπτωση αυτή, λέμε ότι τα τρίγωνα t_3 και t_2 είναι **όμοια.**

- Τα ομοιόθετα σχήματα είναι και όμοια.

Συνοψίζοντας λοιπόν τις ιδιότητες των ίσων, ομοιόθετων και όμοιων σχημάτων, έχουμε:

	Αντίστοιχες πλευρές	**Αντίστοιχες γωνίες**	**Προσανατολισμός**
Ίσα τρίγωνα	Ίσες	Ίσες	Τυχαίος
Ομοιόθετα τρίγωνα	Ανάλογες	Ίσες	Συγκεκριμένος
Όμοια τρίγωνα	Ανάλογες	Ίσες	Τυχαίος

Μεγεθύνσεις χωρίς αλλαγή μεγέθους

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

..... λεκτικά	..... και με σχήματα

..... λεκτικά

Δύο σχήματα λέμε ότι είναι **όμοια** όταν το ένα είναι μεγέθυνση του άλλου.

Στα όμοια σχήματα:

- οι αντίστοιχες πλευρές τους έχουν μια σταθερή σχέση αναλογίας μεταξύ τους, που τη λέμε **λόγο ομοιότητας** και
- οι γωνίες τους είναι ίσες μία προς μία.

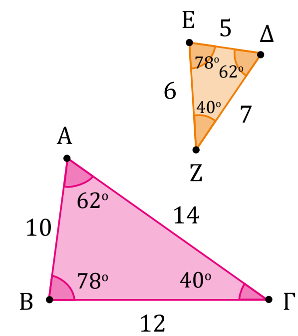
Τις πλευρές που βρίσκονται απέναντι από ίσες γωνίες τις λέμε **ομόλογες** (διότι είναι αυτές που σχηματίζουν τους ίσους λόγους).

Στο διπλανό σχήμα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια. Ισχύει ότι:

$\frac{ΑΒ}{ΕΔ} = \frac{ΑΓ}{ΔΖ} = \frac{ΒΓ}{ΕΖ} = \frac{2}{1} = 2$ (λόγος ομοιότητας)

$\hat{Α} = \hat{Δ} = 62°$, $\hat{Β} = \hat{Ε} = 78°$, $\hat{Γ} = \hat{Ζ} = 40°$

..... και με σχήματα



- Τα ίσα τρίγωνα είναι και όμοια (με λόγο ομοιότητας 1), αλλά τα όμοια τρίγωνα δεν είναι πάντα ίσα.
- Τα ομοιόθετα τρίγωνα είναι όμοια (και ο λόγος ομοιοθεσίας είναι λόγος ομοιότητας).
- Τα όμοια τρίγωνα δεν είναι πάντα ομοιόθετα, αλλά μπορούν να γίνουν με κατάλληλους μετασχηματισμούς.

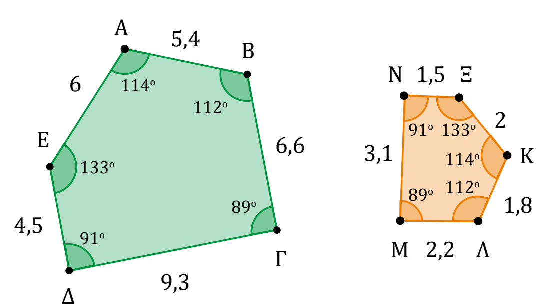
Στα διπλανά πολύγωνα:

$\frac{ΚΛ}{ΑΒ} = \frac{ΛΜ}{ΒΓ} = \frac{ΜΝ}{ΓΔ} = \frac{ΝΞ}{ΔΕ} = \frac{ΞΚ}{ΕΑ} = \frac{1}{3}$

(λόγος ομοιότητας) και

- $\hat{Α} = \hat{Κ} = 114°$, $\hat{Β} = \hat{Λ} = 112°$
  $\hat{Γ} = \hat{Μ} = 89°$, $\hat{Δ} = \hat{Ν} = 91°$
  $\hat{Ε} = \hat{Ξ} = 133°$

Παρατηρούμε ότι τα ζεύγη των ίσων γωνιών περιέχονται από ζεύγη ομόλογων πλευρών.



Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. **Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια. Τα μήκη των πλευρών του ΑΒΓ είναι 4, 9 και 11. Αν το μήκος της μικρότερης πλευράς του ΔΕΖ είναι 12, να βρείτε τα μήκη των άλλων δύο πλευρών του ΔΕΖ.**

Απάντηση

Τα τρίγωνα είναι όμοια, και το ζεύγος των μικρότερων πλευρών είναι το μόνο ζεύγος αντίστοιχων πλευρών που γνωρίζουμε τα μήκη τους. Επομένως, σχηματίζουμε τον λόγο ομοιότητας λ με τη βοήθεια των μικρότερων πλευρών: $λ = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$. Έτσι, αν ονομάσουμε x, y τις άλλες δύο πλευρές του τριγώνου ΔΕΖ, θα έχουμε: $\frac{9}{x} = \frac{11}{y} = \frac{1}{3}$, απ' όπου προκύπτει ότι x = 27 και y = 33.

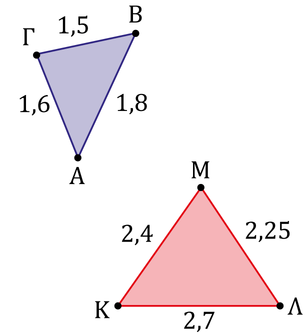
2. **Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΜ είναι όμοια.**

α) Να βρείτε τις ομόλογες πλευρές.

β) Να φτιάξετε τους λόγους των ομόλογων πλευρών και να εξηγήσετε γιατί είναι ίσοι.

γ) Να βρείτε τον λόγο ομοιότητας.

δ) Να βρείτε τα ζεύγη των ίσων γωνιών.



Απάντηση

α) Αφού τα τρίγωνα είναι όμοια, ομόλογες πλευρές θα είναι αυτές που έχουν αντίστοιχα τα μικρότερα, τα ενδιάμεσα και τα μεγαλύτερα μήκη, δηλαδή ΒΓ με ΛΜ, ΑΓ με ΚΜ και ΑΒ με ΚΛ.

β) $\frac{ΒΓ}{ΛΜ}=\frac{1,5}{2,25}=\frac{1,5\cdot 4}{2,25\cdot 4}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$, $\quad \frac{ΑΓ}{ΚΜ}=\frac{1,6}{2,4}=\frac{1,6\cdot 10}{2,4\cdot 10}=\frac{16}{24}=\frac{2}{3}$, $\quad \frac{ΑΒ}{ΚΛ}=\frac{1,8}{2,7}=\frac{1,8\cdot 10}{2,7\cdot 10}=\frac{18}{27}=\frac{2}{3}$.

γ) Από τα παραπάνω προκύπτει ότι ο λόγος ομοιότητας είναι $\frac{2}{3}$.

δ) Οι ίσες γωνίες θα βρίσκονται απέναντι από τις ομόλογες πλευρές: $\hat{Α}=\hat{Κ}$, $\hat{Β}=\hat{Λ}$ και $\hat{Γ}=\hat{Μ}$.

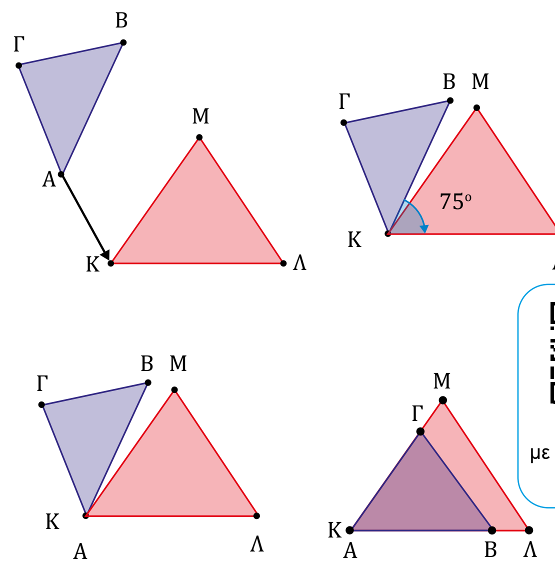
---

3. **Στα τρίγωνα του προηγούμενου παραδείγματος να περιγράψετε μετασχηματισμούς που, αν τους εφαρμόσετε, θα γίνουν ομοιόθετα με κέντρο ομοιοθεσίας το σημείο Κ.**

Απάντηση

Μια σειρά τέτοιων μετασχηματισμών είναι η εξής:

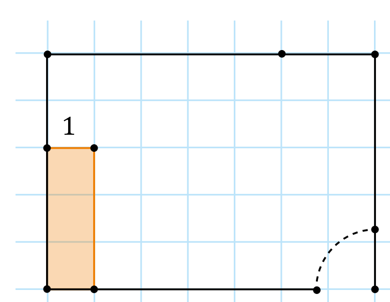
- Αρχικά μεταφέρουμε το τρίγωνο ΑΒΓ κατά διάνυσμα $\overrightarrow{ΑΚ}$ ώστε η κορυφή Α να συμπέσει με την κορυφή Κ.
- Ακολούθως περιστρέφουμε το τρίγωνο ΑΒΓ κατά κατάλληλη γωνία (στο σχήμα μας 75°) μέχρι η ΑΒ να συμπέσει με την ΚΛ.
- Έτσι, το ΑΒΓ έγινε πλέον ΚΒΓ και ομοιόθετο του ΚΛΜ, με κέντρο Κ και λόγο ομοιοθεσίας $\frac{2}{3}$.



Ομοιότητα
με μετασχηματισμούς

---

4. **Η Αθηνά θέλει να στείλει στον μαραγκό μια κάτοψη του δωματίου της για να της κατασκευάσει ένα ντουλάπι. Ο μαραγκός τής είπε να σχεδιάσει την κάτοψη με κλίμακα 1:50. Η Αθηνά ετοίμασε σε τετραγωνισμένο χαρτί (πλευράς 1 cm) το διπλανό σχέδιο. Να βρείτε τις πραγματικές διαστάσεις του ντουλαπιού.**



Απάντηση

Το πραγματικό ντουλάπι θα είναι ένα ορθογώνιο όμοιο με αυτό του σχεδίου, με λόγο ομοιότητας $\frac{1}{50}$. Αν λοιπόν ονομάσουμε τις διαστάσεις του x και y, τότε $\frac{1}{x}=\frac{3}{y}=\frac{1}{50}$, δηλαδή $\frac{1}{x}=\frac{1}{50}$, οπότε x = 50 cm και $\frac{3}{y}=\frac{1}{50}$, οπότε y = 150 cm. Άρα το ντουλάπι θα έχει διαστάσεις 0,5 m και 1,5 m.

Κλίμακα 1:50 σημαίνει ότι κάθε μονάδα μήκους στο σχέδιό μας αντιστοιχεί σε **50** μονάδες στο πραγματικό αντικείμενο, μετρημένες με την ίδια μονάδα μέτρησης. Δηλαδή, 1 cm στο χαρτί αντιστοιχεί σε 50 cm στην πραγματικότητα (= 0,50 m).

5. **Μια πισίνα ολυμπιακών προδιαγραφών έχει διαστάσεις 50 επί 25 μέτρα. Σε ένα προάστιο της Αθήνας, ο δήμος θέλει να κατασκευάσει μια πισίνα όμοια με τις ολυμπιακές, όμως το μήκος της δεν μπορεί να ξεπεράσει τα 40 μέτρα. Να βρείτε τον λόγο των περιμέτρων των δύο πισίνων και τον λόγο των εμβαδών τους. Τι παρατηρείτε;**

Απάντηση

Αφού οι δύο πισίνες θα είναι όμοιες, οι αντίστοιχες διαστάσεις τους θα είναι ανάλογες. Αν συμβολίσουμε με x το πλάτος της μικρότερης, θα έχουμε:

$\frac{50}{40}=\frac{25}{x}$ ή $50\cdot x=40\cdot 25$ ή $x=\frac{40\cdot 25}{50}$, άρα x = 20

[Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να σκεφτούμε ότι, αφού στην πισίνα ολυμπιακών προδιαγραφών οι διαστάσεις έχουν σχέση $\frac{50}{25}=\frac{2}{1}$, την ίδια ακριβώς σχέση θα πρέπει να έχουν οι διαστάσεις της όμοιάς της. Έτσι, αφού η μεγάλη διάσταση είναι 40, η μικρή θα είναι 20.]

Η περίμετρος της μεγάλης θα είναι 150 m, της μικρής 120 m και ο λόγος τους $\frac{150}{120}=\frac{5}{4}$. Παρατηρούμε ότι ο λόγος των περιμέτρων είναι ίσος με τον λόγο ομοιότητας.

Το εμβαδόν της μεγάλης πισίνας θα είναι $50\cdot 25=1250\ m^2$, της μικρής $40\cdot 20=800\ m^2$ και ο λόγος τους είναι $\frac{1250}{800}=\frac{25}{16}=\left(\frac{5}{4}\right)^2$. Παρατηρούμε ότι ο λόγος των εμβαδών είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας.

Όπως είδαμε για τα ομοιόθετα (στην ενότητα 5.2):

- Ο λόγος των περιμέτρων δύο όμοιων σχημάτων είναι ίσος με τον λόγο ομοιότητας.
- Ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων σχημάτων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας.

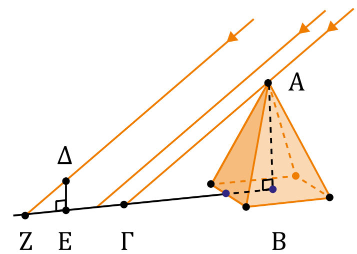
6. **Ο Θαλής ο Μιλήσιος, με τη βοήθεια των όμοιων τριγώνων που σχηματίζονται από τις ακτίνες του ήλιου, υπολόγισε το ύψος μιας πυραμίδας ως εξής: Έστησε κατακόρυφα μια ράβδο ΔΕ της οποίας μέτρησε το μήκος. Μέτρησε επίσης τη σκιά ΖΕ της ράβδου και τη σκιά ΓΒ της πυραμίδας. Με ποιους υπολογισμούς κατόρθωσε να βρει το ύψος ΑΒ της πυραμίδας;**

Απάντηση

Γνωρίζοντας ότι τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΕΖ και ΑΒΓ είναι όμοια (για την ακρίβεια είναι ομοιόθετα), σχημάτισε τους λόγους των αντίστοιχων πλευρών: $\frac{AB}{\Delta E}=\frac{B\Gamma}{EZ}$.

Στη συνέχεια, γνωρίζοντας τα τρία από τα τέσσερα μήκη, υπολόγισε το τέταρτο:

$$AB=\frac{B\Gamma\cdot\Delta E}{EZ}$$



Όταν ο Θαλής έλυσε αυτό το πρόβλημα (γύρω στο 565 π.Χ.) προκάλεσε την έκπληξη του φαραώ Άμασι και των σοφών ιερέων του. Ο παραπάνω υπολογισμός με όμοια τρίγωνα αναφέρεται από μεγάλους ιστορικούς της αρχαιότητας, όπως ο Πλούταρχος και ο Ιερώνυμος. Εικάζεται ότι η μέτρηση έγινε μεσημέρι, ώστε η κορυφή της πυραμίδας να ρίχνει τη σκιά της πάνω στη διεύθυνση βορράς – νότος. Η άποψη αυτή αμφισβητείται από κάποιους ιστορικούς, που ισχυρίζονται ότι η μέτρηση έγινε την ώρα που η σκιά της ράβδου ήταν ίση με το μήκος της.

Ο Θαλής και οι αναλογίες

Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε

Να κατασκευάσετε έναν πίνακα έννοιας για τα όμοια σχήματα.

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Να σημειώσετε x σε όποια κελιά του παρακάτω πίνακα πιστεύετε ότι αντιστοιχούν στις ιδιότητες των σχημάτων α, β και γ.

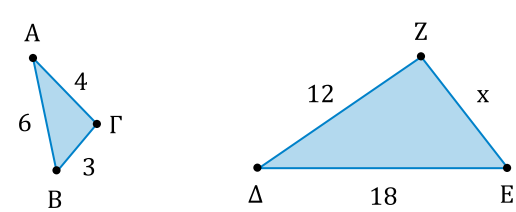
Τρίγωνα/ ιδιότητα	Αντίστοιχες γωνίες ίσες	Αντίστοιχες πλευρές ίσες	Αντίστοιχες πλευρές ανάλογες	Προσανατολισμός τυχαίος	Προσανατολισμός συγκεκριμένος
α) Ίσα					
β) Ομοιόθετα					
γ) Όμοια					

2. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΖΕ είναι όμοια. Να βρείτε:

α) τον λόγο ομοιότητας

β) το μήκος τις πλευράς x

γ) τα ζεύγη των ίσων γωνιών

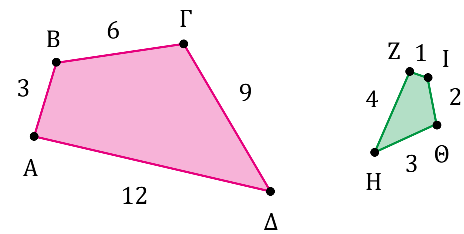


3. Τα διπλανά τετράπλευρα είναι όμοια. Να βρείτε:

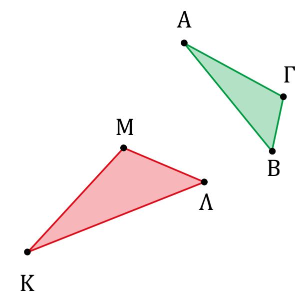
α) τα ζεύγη των ομόλογων πλευρών

β) τον λόγο ομοιότητας

γ) τα ζεύγη των ίσων γωνιών



Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα



4. Τα δύο τρίγωνα είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{ΚΛ}{ΑΒ} = \frac{ΜΛ}{ΒΓ} = 1{,}5$.

α) Ποια είναι τα ζεύγη των ίσων γωνιών των τριγώνων;

β) Αν επιπλέον ξέρουμε ότι ΑΓ = 8 cm, ποιο είναι το μήκος της ΚΜ;

5. Στα τετράπλευρα της άσκησης 3, να περιγράψετε κατάλληλους μετασχηματισμούς ώστε να έχουν μία γωνία κοινή.

6. Δύο τετράπλευρα είναι όμοια. Τα μήκη των πλευρών του πρώτου είναι 12, 18, 20 και 16. Αν το μήκος της μεγαλύτερης πλευράς του άλλου τετραπλεύρου είναι 5, να βρείτε τα μήκη των άλλων τριών πλευρών του.

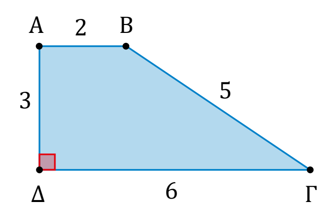
7. Δύο τρίγωνα είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{1}{4}$. Αν συμβολίσουμε με α, β, γ τις πλευρές του ενός τριγώνου, να εκφράσετε με τη βοήθεια των α, β, γ τις πλευρές του άλλου.

8. Δύο τρίγωνα είναι όμοια. Οι πλευρές του μικρότερου τριγώνου έχουν μήκη 4m, 6 m και 8 m. Η περίμετρος του μεγαλύτερου είναι 54 m. Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του μεγαλύτερου.

9. Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο τραπέζιο. Να σχεδιάσετε:

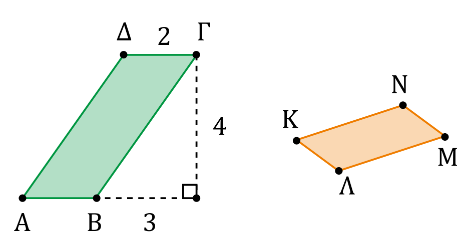
α) ένα τετράπλευρο ΚΛΜΝ όμοιο με το ΑΒΓΔ με λόγο ομοιότητας 2

β) ένα τετράπλευρο ομοιόθετο με το ΑΒΓΔ με κέντρο την κορυφή Γ και λόγο ομοιοθεσίας $\frac{1}{2}$



10. Τα παραλληλόγραμμα του διπλανού σχήματος είναι όμοια με λόγο ομοιότητας 2.

Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του ΚΛΜΝ.



11. Η Ρίσα μέτρησε στον χάρτη την απόσταση Αθήνα-Θεσσαλονίκη σε ευθεία γραμμή και βρήκε ότι είναι 30,5 cm. Η κλίμακα του χάρτη είναι 1:1.000.000. Ποια είναι η πραγματική απόσταση της Αθήνας από τη Θεσσαλονίκη;

12. Η κατακόρυφη απόσταση του βορειότερου από το νοτιότερο άκρο της Ελλάδας είναι περίπου 760 km. Η οριζόντια απόσταση του ανατολικότερου από τη δυτικότερο άκρο είναι περίπου 765 km. Ποια κλίμακα πρέπει να έχει ένας χάρτης της Ελλάδας για να χωρέσει σε ένα χαρτί Α3 (διαστάσεων 29,7 cm × 42 cm); Σκεφτείτε ότι στη διάσταση των 29,7 cm θα πρέπει να χωρέσει η πλευρά του χάρτη που αντιστοιχεί στα 760 km.

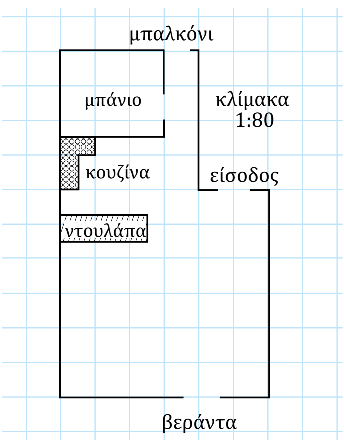
13. Με τα δεδομένα της προηγούμενης άσκησης, εξετάστε αν μπορεί να χωρέσει ένας χάρτης της Ελλάδας με κλίμακα 1:3.000.000 σε ένα χαρτί Α4.

14. Η Βασιλική έχει στα χέρια της το σχέδιο του διαμερίσματος που νοίκιασε η αδελφή της που σπουδάζει στην Πάτρα. Κάθε τετραγωνάκι του πλέγματος είναι 1 cm.

α) Ποια είναι η πραγματική απόσταση από την έξοδο προς το μπαλκόνι μέχρι την έξοδο προς τη βεράντα;

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του διαμερίσματος.

γ) Πρόκειται να τοποθετηθεί ένα διπλό κρεβάτι διαστάσεων 2,00m x 1,20m και δίπλα του ένα γραφείο διαστάσεων 80cm x 120cm. Να εξετάσετε αν υπάρχουν τρόποι να χωρέσουν τα δύο έπιπλα στο σημείο του διαμερίσματος που φαίνεται στην κάτω αριστερή γωνία του σχεδίου.



15. Στην εικόνα φαίνεται το νησί της Ανάφης όπως αποτυπώνεται σε χάρτη του προγράμματος Κοπέρνικος της Ευρωπαϊκής Ένωσης (https://forest-fire.emergency.copernicus.eu). Στο κάτω αριστερά μέρος του χάρτη φαίνεται με έναν παραστατικό τρόπο η κλίμακα: Τα 3 km πραγματικού μήκους αντιστοιχούν σε μήκος του χάρτη ίσο με το μήκος του γκρι ορθογωνίου. Χρησιμοποιώντας τις πληροφορίες που μπορείτε να αντλήσετε από τον χάρτη, να υπολογίσετε την πραγματική απόσταση ανάμεσα:

α) στα δύο πιο απομακρυσμένα άκρα του νησιού

β) στις δύο ακτές του «λαιμού» του ανατολικού ακρωτηρίου του νησιού

γ) στη Χώρα και το βόρειο άκρο του νησιού

Ανακεφαλαίωση

Γεωμετρία του Επιπέδου και Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί

Ερωτήσεις – ασκήσεις – προβλήματα

1. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι Σωστές ή Λανθασμένες.

α) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις τρεις πλευρές τους ίσες, τότε θα είναι ίσα.

β) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες, τότε θα έχουν και τις πλευρές τους ίσες.

γ) Αν δύο τρίγωνα είναι ίσα και το ένα είναι ορθογώνιο, τότε και το άλλο θα είναι ορθογώνιο.

δ) Δύο ισόπλευρα τρίγωνα με μία πλευρά ίση θα είναι ίσα.

ε) Δύο ισοσκελή τρίγωνα με μία πλευρά ίση θα είναι ίσα.

στ) Το ομοιόθετο ενός σχήματος με λόγο ομοιοθεσίας 1 είναι ίσο με το αρχικό.

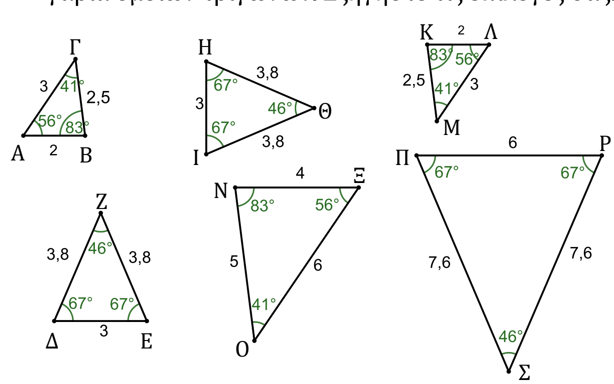
ζ) Στα ομοιόθετα σχήματα ο λόγος ομοιοθεσίας είναι ίσος με τον λόγο δύο αντίστοιχων μηκών.

η) Δύο ισόπλευρα τρίγωνα θα είναι πάντα όμοια.

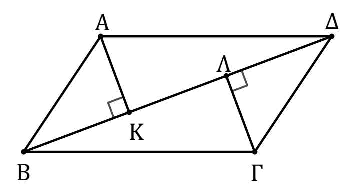
θ) Σε δύο όμοια τρίγωνα με λόγο ομοιότητας 2 αποκλείεται κάποια πλευρά του ενός να είναι ίση με μία πλευρά του άλλου.

ι) Δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα είναι πάντα όμοια.

2. Στο παρακάτω σχήμα να εντοπίσετε και να καταγράψετε όλα τα ζευγάρια ίσων τριγώνων και τα ζευγάρια όμοιων τριγώνων. Εξηγήστε τις επιλογές σας.



3. Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ τα τμήματα ΑΚ και ΓΛ είναι κάθετα στη διαγώνιο ΒΔ.



α) Να εξηγήσετε γιατί οι γωνίες $A\hat{B}K$ και $\Gamma\hat{\Delta}\Lambda$ είναι ίσες.

β) Να εξηγήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΓΔΛ έχουν όλες τις γωνίες τους ίσες.

γ) Να εξηγήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΓΔΛ είναι ίσα.

4. Να σχεδιάσετε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Να ονομάσετε Κ το μέσο της πλευράς ΑΓ και Λ το μέσο της ΑΒ.

α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΛΓ και ΑΚΒ και να δείξετε ότι οι διάμεσοι ΒΚ και ΓΛ είναι ίσες.

β) Με ποια άλλη σύγκριση τριγώνων θα μπορούσαμε να δείξουμε ότι οι δύο διάμεσοι είναι ίσες;

5. Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ και τη διχοτόμο ΑΔ της γωνίας $\hat{A}$. Από το Β φέρνουμε κάθετη στην ΑΔ που τέμνει την ΑΔ στο Κ και την ΑΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι το Κ είναι μέσο του ΒΕ.

6. Από την κορυφή Α ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ, φέρνουμε ευθεία ε παράλληλη με την ΒΓ. Πάνω σε αυτή παίρνουμε δύο ίσα τμήματα ΑΔ = ΑΕ. Να δείξετε ότι ΓΔ = ΒΕ (να διακρίνετε δυο περιπτώσεις σχημάτων).

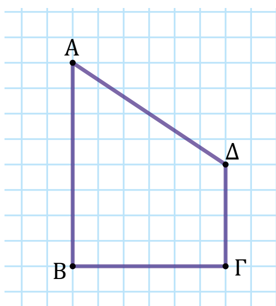
7. Να σχεδιάσετε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και να ονομάσετε Δ το μέσο της ΒΓ. Από το Δ να φέρετε τη ΔΕ κάθετη στην ΑΒ και τη ΔΖ κάθετη στην ΑΓ. Να αποδείξετε ότι ΔΕ = ΔΖ.

8. Να αντιγράψετε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος σε τετραγωνισμένο χαρτί.

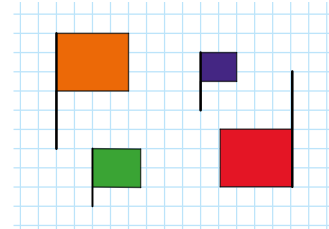
α) Να σχεδιάσετε το ομοιόθετο του ΑΒΓΔ με κέντρο το Β και λόγο ομοιοθεσίας $\lambda = 0{,}5$.

β) Να σχεδιάσετε το ομοιόθετο του ΑΒΓΔ με κέντρο το Α και λόγο $\lambda = 0{,}5$.

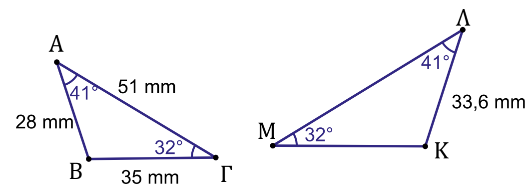
γ) Τι σχέση έχουν τα δύο τετράπλευρα που σχεδιάσατε στα δύο προηγούμενα ερωτήματα;



9. Από τις τρεις σημαίες (μπλε, πράσινη, κόκκινη) μόνο μία είναι ομοιόθετη της πορτοκαλί. Ποια είναι αυτή; Εξηγήστε αναλυτικά την επιλογή σας.



10. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΜ είναι όμοια. Να αξιοποιήσετε τις πληροφορίες που δίνονται στο σχήμα για να απαντήσετε στα επόμενα ερωτήματα.



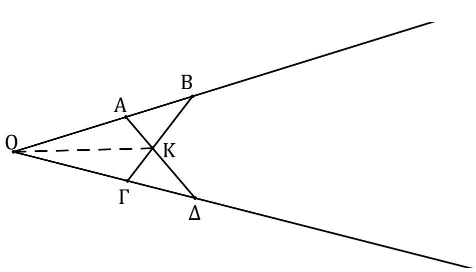
α) Να προσδιορίσετε τις ομόλογες πλευρές και τις αντίστοιχες γωνίες.

β) Να βρείτε τον λόγο ομοιότητας και να υπολογίσετε τις πλευρές του ΚΛΜ που δε δίνονται.

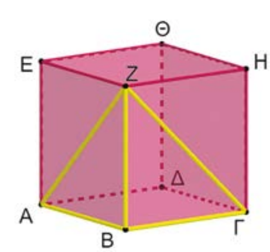
11. Μία κολόνα έχει σκιά 2 m και την ίδια στιγμή δίπλα της στέκεται ένας άνθρωπος με ύψος 1,80 m και σκιά 0,60 m. Να κάνετε ένα γεωμετρικό μοντέλο της κατάστασης (δηλαδή ένα γεωμετρικό σχήμα) και να υπολογίσετε το ύψος της κολόνας.

Συνδέσεις και επεκτάσεις

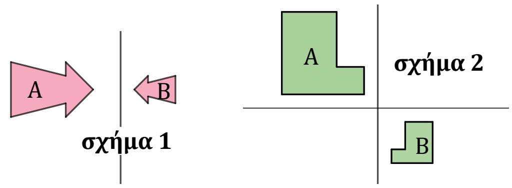
12. Στη μία πλευρά μιας γωνίας με κορυφή Ο παίρνουμε τα σημεία Α και Β. Στη συνέχεια πάνω στην άλλη πλευρά κατασκευάζουμε τα σημεία Γ και Δ έτσι ώστε ΟΓ = ΟΑ και ΟΔ = ΟΒ. Ονομάζουμε Κ το σημείο τομής των ΑΔ και ΒΓ. Να αποδείξετε ότι η ΟΚ είναι διχοτόμος της γωνίας $x\hat{O}y$.



13. Στον παρακάτω κύβο να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΒΖΓ.



14. Στα σχήματα 1 και 2 να εξηγήσετε τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς που πρέπει να γίνουν ώστε από το σχήμα Α να προκύψει το σχήμα Β.



15. Στην εικόνα φαίνεται η Ικαρία, ένα νησί του Αιγαίου Πελάγους (https://forest-fire.emergency.copernicus.eu). Στο κάτω αριστερά μέρος του χάρτη φαίνεται η πληροφορία που μας βοηθά να υπολογίσουμε τα πραγματικά μεγέθη: Τα 5 km πραγματικού μήκους αντιστοιχούν σε μήκος του χάρτη ίσο με το μήκος του γκρι ορθογωνίου (υπάρχει άλλο ένα ορθογώνιο για τα 3 mi, δηλαδή για τα 3 μίλια).

Χρησιμοποιώντας τις πληροφορίες που μπορείτε να αντλήσετε από τον χάρτη, να υπολογίσετε την πραγματική απόσταση ανάμεσα:

α) στα δύο πιο απομακρυσμένα μεταξύ τους άκρα του νησιού

β) στον Αγ. Κήρυκο και τον Αρμενιστή

γ) στον Εύδηλο και το νοτιοδυτικό άκρο του νησιού

Ομοιοθεσία και η συνάρτηση y=αx

Εγγραφή τετραγώνου σε τρίγωνο

Εξαφάνιση τμημάτων!

Τρίλιζα στην ομοιότητα

Ομαδική εργασία

16. Να μετρήσετε το ύψος ενός ψηλού κτιρίου ή δέντρου χρησιμοποιώντας τη σκιά του. Θα χρειαστείτε μετροταινία και μια ηλιόλουστη μέρα. Συμβουλευτείτε την εφαρμογή 6 της ενότητας 5.2.

Όμοια σχήματα

17. Να κατασκευάσετε ένα σχέδιο του σχολείου σας (ή κάποιου ορόφου του) χρησιμοποιώντας κατάλληλη κλίμακα, ώστε να χωρέσει σε ένα χαρτί Α4. Θα χρειαστείτε μετροταινία, αριθμομηχανή, σημειωματάριο και γεωμετρικά όργανα. Αν χρειαστεί να μετρήσετε γωνίες στο κτίριο, επινοήστε έναν τρόπο να το κάνετε χρησιμοποιώντας τα μεγάλα γεωμετρικά όργανα που υπάρχουν στο σχολείο.

Μετρώντας το «απρόσιτο» με το «προσιτό»

Αυτή η πυραμίδα χτίστηκε από τον φαραώ Χέοπα με μοναδικό σκοπό να υποχρεώσει τους θνητούς να κατανοήσουν τη μικρότητά τους. Η κατασκευή έπρεπε να ξεπεράσει όλες τις νόρμες για να μας καταθλίψει: Όσο πιο γιγάντια ήταν αυτή, τόσο μηδαμινοί είμαστε εμείς. (...)

Ο Θαλής είχε ακούσει παρόμοιες υποθέσεις για τα σχέδια του φαραώ Χέοπος, αλλά ποτέ τόσο καθαρά και προκλητικά διατυπωμένες, (....) Αυτό το υπέρμετρο μνημείο τον προκαλούσε. (....) Όποιοι κι αν ήταν οι στόχοι του φαραώ, ένα ήταν προφανές: το ύψος της πυραμίδας ήταν αδύνατον να μετρηθεί!

«Αφού το χέρι μου δεν μπορεί να κάνει τη μέτρηση, η σκέψη μου θα την πραγματοποιήσει» υποσχέθηκε στον εαυτό του. Έπρεπε να βρει έναν σύμμαχο «στα μέτρα» του αντιπάλου του. Αργά, το βλέμμα του περιπλανήθηκε από το σώμα του στη σκιά του, από τη σκιά του στο σώμα του κι ύστερα στην πυραμίδα. Τέλος σήκωσε τα μάτια του. Εκείνη τη στιγμή, ο ήλιος βομβάρδιζε τη γη με τρομακτικές ακτίνες. Είχε βρει τον σύμμαχό του! (...)

Ο Θαλής συνέλαβε λοιπόν την ιδέα: Η σχέση που έχω με τη σκιά μου είναι η ίδια μ’ αυτήν που έχει η πυραμίδα με τη δική της σκιά. Στη συνέχεια συμπέρανε: Τη στιγμή που η σκιά μου θα είναι ίση με το ύψος μου, η σκιά της πυραμίδας θα είναι ίση με το δικό της ύψος! (...)

Την άλλη μέρα, την αυγή, ο φελάχος κατευθύνθηκε στο μνημείο και κάθισε κάτω από την τεράστια σκιά της πυραμίδας,. Ο Θαλής σχεδίασε στην άμμο έναν κύκλο ίσο με το ύψος του, τοποθετήθηκε στο κέντρο και κορδώθηκε ώστε να είναι εντελώς ίσιος. Ύστερα κάρφωσε με το βλέμμα του την άκρη της σκιάς του. Μόλις η σκιά του άγγιξε την περιφέρεια του κύκλου, δηλαδή τη στιγμή ακριβώς που η σκιά του ήταν ίση με το ύψος του, άφησε την προκαθορισμένη φωνή. Ο φελάχος που παραμόνευε, έσπευσε να φυτέψει έναν πάσσαλο στο σημείο που έφτανε η άκρη της σκιάς της πυραμίδας. Ο Θαλής έτρεξε προς τον πάσσαλο. Μαζί, χωρίς να ανταλλάξουν ούτε μια λέξη, χρησιμοποιώντας ένα τεντωμένο σχοινί, μέτρησαν την απόσταση από τη βάση της πυραμίδας μέχρι τον πάσσαλο. Μόλις υπολόγισαν το μήκος της σκιάς, έμαθαν και το ύψος της πυραμίδας. (...)

Ο Θαλής ήταν υπερήφανος. Με τη βοήθεια του φελάχου είχε βρει ένα κόλπο. Η κατακόρυφος μου είναι απρόσιτη; Θα την κατακτήσω μέσω της οριζόντιας. Δεν μπορώ να μετρήσω το ύψος γιατί χάνεται στους ουρανούς; Θα μετρήσω τη σκιά του που είναι πεσμένη στο έδαφος. Με το «μικρό» θα μετρήσω το «μεγάλο». Με το «προσιτό» το «απρόσιτο. Με το «κοντινό» το «μακρινό». (....)

Γκετζ, Ν., (1999). *Το Θεώρημα του παπαγάλου*, Πόλις, σελ. 49-51

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ 6

Τριγωνομετρία

Πώς μπορούμε να υπολογίσουμε το ύψος ενός πολύ ψηλού δέντρου ή κτιρίου;

Πόσο απέχει από εμάς ένα πλοίο που το βλέπουμε απομακρυσμένο στη θάλασσα;

Τι σημαίνει η τριγωνική πινακίδα στον δρόμο, που γράφει 15%;

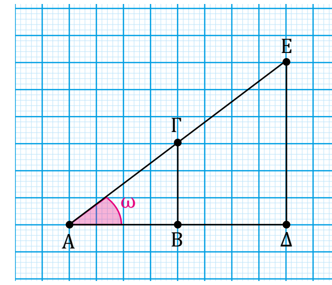
Η Τριγωνομετρία θα μας βοηθήσει να απαντήσουμε σε ερωτήματα όπως τα παραπάνω, με τη βοήθεια σχέσεων που θα ανακαλύψουμε ανάμεσα σε πλευρές και γωνίες ορθογώνιων τριγώνων.

ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΕΝΟΤΗΤΕΣ

6.1 Εφαπτομένη οξείας γωνίας

Δ1. Κάποιοι λόγοι δεν αλλάζουν

α) Για το καθένα από τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ του διπλανού σχήματος να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα (για τον υπολογισμό του λόγου μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ως μονάδα τις πλευρές των μεγάλων τετραγώνων του πλέγματος):



Τρίγωνο	Απέναντι κάθετη πλευρά από τη γωνία $\hat{\omega}$	Προσκείμενη κάθετη πλευρά στη γωνία $\hat{\omega}$	Λόγος της απέναντι κάθετης προς την προσκείμενη κάθετη	Τι μέρος της προσκείμενης πλευράς είναι η κάθετη πλευρά, ως ποσοστό %
ΑΒΓ				
ΑΔΕ				

β) Να πάρετε ένα τυχαίο σημείο Μ στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ και από το Μ να φέρετε κάθετο τμήμα ΜΝ προς το ΑΔ (Ν το σημείο που τέμνει το ΑΔ). Σχηματίστε τον ίδιο λόγο για το τρίγωνο ΑΜΝ. Με βάση τις τιμές των λόγων που βρήκατε, να διατυπώσετε ένα συμπέρασμα.

γ) Χρησιμοποιώντας τις γνώσεις σας για τα όμοια τρίγωνα, εξηγήστε στην τάξη το συμπέρασμα στο οποίο καταλήξατε.

Συζητάμε

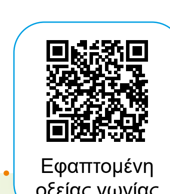
...για κλίσεις σε ράμπες και δρόμους

Η ευαισθητοποίηση της κοινωνίας τα τελευταία χρόνια για τα άτομα με κινητικά προβλήματα οδήγησε στη δημιουργία ειδικών κατασκευών, ώστε να έχουν την ευκαιρία ασφαλούς πρόσβασης σε όλους τους χώρους.

Η Δανάη, βλέποντας τη ράμπα του σχολείου της, άρχισε να παρατηρεί προσεκτικά όλες τις ράμπες που έβλεπε και προσπάθησε να μάθει πότε θεωρούνται ασφαλείς. Στην ιστοσελίδα του υπουργείου διάβασε ότι, για να είναι ασφαλής μια ράμπα, η κλίση της δεν πρέπει να ξεπερνά το 10%.

Φωτογράφισε λοιπόν μια ράμπα του σχολείου της και είχε με τον καθηγητή της (Κ) τον εξής διάλογο:

Δανάη (Δ): *Κύριε, αυτή η ράμπα του σχολείου μας είναι ασφαλής;*



Κ: (ζωγραφίζοντας χρωματιστές γραμμές στη φωτογραφία): Η ροζ γραμμή της ράμπας σχηματίζει με το επίπεδο μια γωνία ω. Στα όμοια ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ, αν μετρήσεις τους λόγους $\frac{ΓΒ}{ΑΒ}$ *και* $\frac{ΕΔ}{ΑΔ}$, *θα βρεις το ίδιο αποτέλεσμα. Αυτό το αποτέλεσμα το λέμε* ***κλίση της ράμπας ως προς το οριζόντιο επίπεδο*** *και μας δείχνει πόσο ανυψώνεται η ράμπα όσο απομακρυνόμαστε από το Α, π.χ. η ανύψωση ΒΓ αντιστοιχεί στην οριζόντια απομάκρυνση ΑΒ.*

Δ: Κύριε, είδα σε μια ανηφόρα μια πινακίδα που έγραφε 17%! Δηλαδή για κάθε 100 μέτρα που απομακρυνόμαστε οριζόντια, ανεβαίνουμε κάθετα 17; Πολύ δεν είναι;

Κ: Και βέβαια! Για αυτό μπαίνουν οι προειδοποιητικές πινακίδες!

Η Δανάη μετρώντας στη ράμπα του σχολείου της βρήκε $\frac{ΓΒ}{ΑΒ}=\frac{ΕΔ}{ΑΔ}=0{,}05=5\%$ (δηλαδή μια ιδανική κλίση) και $\hat{ω}=3°$ και ρώτησε:

Δ: Κύριε, αν αλλάξουμε τη γωνία, ο λόγος θα είναι διαφορετικός;

Κ: Πράγματι, αυτός ο λόγος εξαρτάται από τη γωνία ω, γι' αυτό τον λέμε ***εφαπτομένη της γωνίας ω.*** *Εσύ λοιπόν βρήκες ότι η εφαπτομένη της είναι 0,05. Μπορούσες να βρεις τη γωνία ω χωρίς να χρησιμοποιήσεις μοιρογνωμόνιο, με ειδικούς πίνακες, που τους λέμε τριγωνομετρικούς!*

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

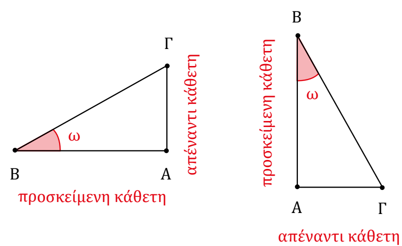
..... λεκτικά

Ονομάζουμε **εφαπτομένη** μιας οξείας γωνίας ω ορθογώνιου τριγώνου (συμβολίζουμε **εφω**) τον λόγο της απέναντι (από την ω) κάθετης πλευράς προς την προσκείμενη (στην ω) κάθετη πλευρά. Δηλαδή:

$$\text{εφω} = \frac{\text{απέναντι από την ω κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη στην ω κάθετη πλευρά}}$$

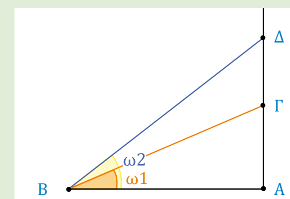
- Ο λόγος αυτός είναι σταθερός (αλλάζει μόνο όταν αλλάξει η γωνία).
- Η εφω μας δείχνει την **κλίση** μιας ευθείας (ή τμήματος) σε σχέση με μια άλλη ευθεία (ή τμήμα).

..... και με σχήματα



Στο σχήμα: $\text{εφω} = \frac{ΑΓ}{ΑΒ}$

Η κλίση δεν ισούται με τη γωνία ω, αλλά εξαρτάται από αυτήν. Αλλάζοντας τη γωνία, αλλάζει και η εφαπτομένη της.



Η εφαπτομένη μιας γωνίας είναι καθαρός αριθμός, δηλαδή δεν έχει μονάδες μέτρησης.

Αν γνωρίζουμε την εφαπτομένη μιας γωνίας, μπορούμε να βρούμε τη γωνία:

- με **τριγωνομετρικούς πίνακες:** Για παράδειγμα, αν εφω = 0,7, τότε η γωνία μας θα είναι περίπου 35°.
- με **επιστημονικό κομπιουτεράκι,** στο οποίο το πλήκτρο της εφαπτομένης συνήθως το βρίσκουμε με την αγγλική ονομασία tan. Πατάμε το αντίστροφο πλήκτρο $\tan^{-1}$, πληκτρολογούμε τον αριθμό 0,7 και δίνει αποτέλεσμα 34,99...

Και αντίστροφα, αν γνωρίζουμε μια γωνία, μπορούμε να βρούμε την εφαπτομένη της.

Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε

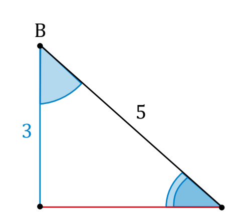
1. Να βρείτε τις κλίσεις που έχουν οι ράμπες του σχολείου σας ή του σπιτιού σας (αν υπάρχουν).
2. Χρησιμοποιώντας τον μεγάλο χάρακα της τάξης σας, να αναπαραστήσετε στο επίπεδο της αίθουσάς σας μια ράμπα με κλίση 7%.

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

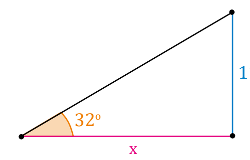
1. **Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο, να βρείτε την εφΒ και την εφΓ. Τι παρατηρείτε;**

Απάντηση

$\text{εφΒ} = \frac{ΑΓ}{ΑΒ} = \frac{4}{3}$ και $\text{εφΓ} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{3}{4}$. Παρατηρούμε ότι είναι αντίστροφοι αριθμοί.



2. **Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο να βρείτε το μήκος της πλευράς x με προσέγγιση δεκάτου.**



Απάντηση

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της εφαπτομένης για τη γωνία των 32°, έχουμε:

$$\text{εφ}32^{\circ} = \frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{προσκείμενη κάθετη}}$$

Από τους τριγωνομετρικούς πίνακες βρίσκουμε ότι $\text{εφ}32^{\circ} \cong 0{,}6249 \cong 0{,}62$ (με προσέγγιση εκατοστού). Αντικαθιστώντας καταλήγουμε στην εξίσωση: $0{,}62 = \frac{11}{x}$ ή $0{,}62 \cdot x = 11$ ή $x = \frac{11}{0{,}62}$ και τελικά $x = 17{,}74$.

---

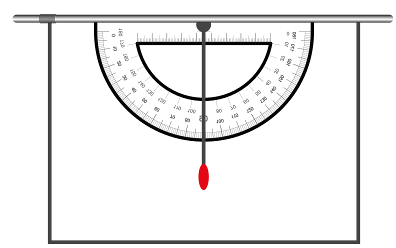
3. **Η Ασπασία προσπαθεί να βρει το ύψος ενός πολύ ψηλού δέντρου. Τι θα της προτείνατε να κάνει;**

Απάντηση

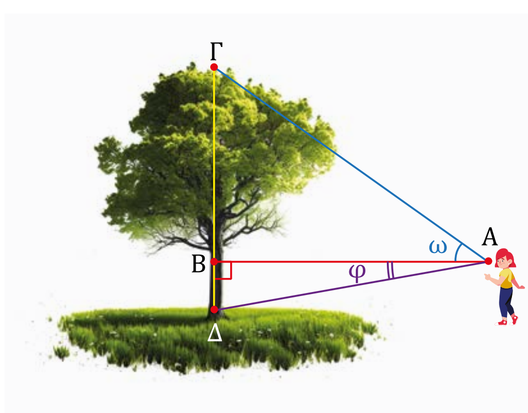
Θα εξηγούσαμε αρχικά στην Ασπασία ότι η γωνία με την οποία «βλέπει» το δέντρο μπορεί να χωριστεί σε δύο επιμέρους γωνίες σε σχέση με την οριζόντια που είναι η ευθεία των ματιών της ΑΒ (στο σχήμα μας είναι οι γωνίες $\hat{\omega}$ και $\hat{\varphi}$).

Τις γωνίες αυτές μπορούμε να τις μετρήσουμε με διάφορους τρόπους και όργανα. Ένα όργανο είναι το γωνιόμετρο, με το οποίο υπολογίζουμε τη γωνία $\hat{\omega}$ (ας υποθέσουμε ότι $\hat{\omega} = 32^{\circ}$).

Στη συνέχεια θα εξηγούσαμε ότι, ενώ δεν είναι εύκολο να μετρήσουμε το ύψος του δέντρου, είναι πολύ απλό με μια μετροταινία να μετρήσουμε την απόσταση της Ασπασίας από αυτό (στο σχήμα μας το μήκος του τμήματος ΑΒ = 15 m).



Αυτοσχέδιο γωνιόμετρο
με καλαμάκι και μοιρογνωμόνιο



Πώς μπορούμε να φτιάξουμε το δικό μας γωνιόμετρο;

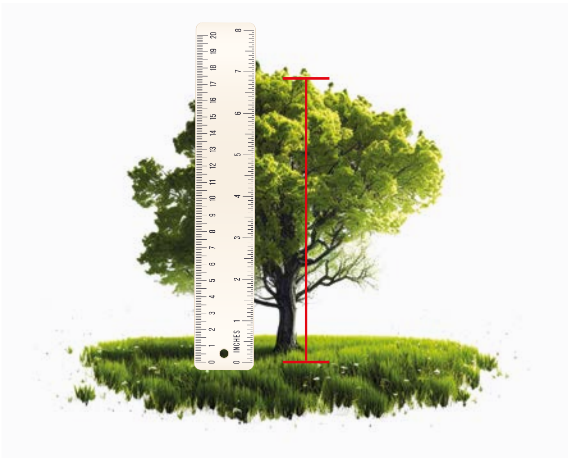
Έτσι, στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε: $\text{εφ}\omega = \frac{ΒΓ}{ΑΒ}$, δηλαδή $\text{εφ}32^{\circ} = \frac{ΒΓ}{15}$, και από τους τριγωνομετρικούς πίνακες: $0{,}62 = \frac{ΒΓ}{15}$ ή $ΒΓ = 0{,}62 \cdot 15 \cong 9{,}3$.

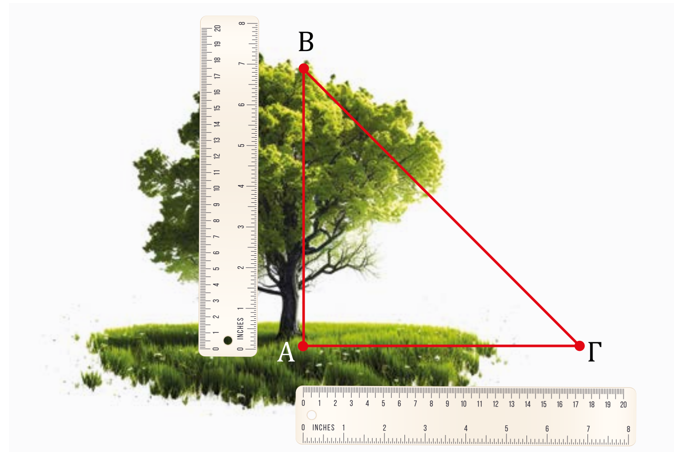
Με αυτόν τον τρόπο, η Ασπασία βρήκε ένα μέρος από το ύψος του δέντρου.

Μπορεί αν θέλει να προσθέσει σε αυτό το ύψος των ματιών της από το έδαφος που είναι όσο το τμήμα ΒΔ και να βρει το συνολικό ύψος ΓΔ του δέντρου.

Επίσης, αν θέλει, μπορεί να εφαρμόσει ακριβώς την ίδια διαδικασία για τη γωνία $\hat{\varphi}$ και να βρει το τμήμα ΒΔ από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ.

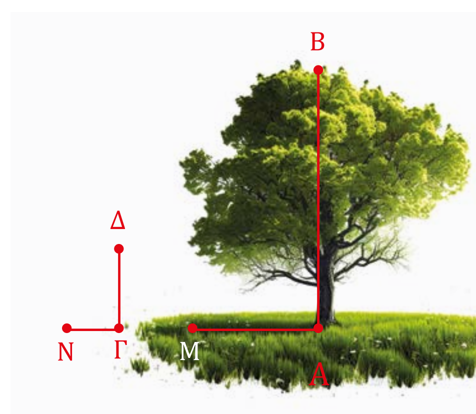
Υπάρχουν όμως και άλλοι τρόποι για να υπολογίσουμε το ύψος ενός πολύ ψηλού αντικειμένου.





- Στεκόμαστε μακριά από το δέντρο και κρατάμε στο χέρι μας έναν χάρακα σε σταθερή απόσταση από τα μάτια μας (π.χ. κρατώντας το χέρι μας τεντωμένο). Τοποθετούμε τον χάρακα κατακόρυφα, ώστε να βλέπουμε τον χάρακα «μπροστά» από το δέντρο, όπως στην πρώτη εικόνα. Μετράμε την απόσταση από το χαμηλότερο σημείο Α του αντικειμένου μέχρι το ψηλότερο σημείο του Β (ας υποθέσουμε ΑΒ = 7 cm). Στη συνέχεια περιστρέφουμε τον χάρακα κατά 90° και στο σημείο Γ του εδάφους που αντιστοιχεί στα 7 cm τοποθετούμε ένα αντικείμενο (ή το σημαδεύουμε νοερά). Μετράμε με μετροταινία το ΑΓ πάνω στο έδαφος και το αποτέλεσμα είναι ίσο με το ΑΒ (το ζητούμενο ύψος).
- Τοποθετούμε σε κάποια απόσταση από το αντικείμενό μας έναν πάσσαλο ΓΔ με γνωστό μήκος. Μετράμε τη σκιά ΑΜ του αντικειμένου και τη σκιά ΓΝ του πασσάλου. Από τα όμοια τρίγωνα ΔΝΓ και ΑΜΒ βρίσκουμε το μήκος του ΑΒ.

Μετρώντας το ύψος του δέντρου

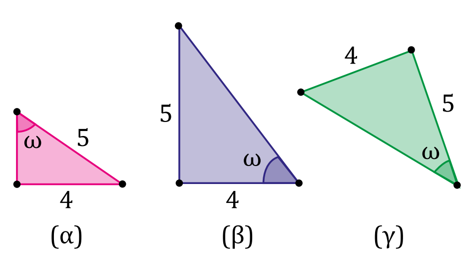


Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

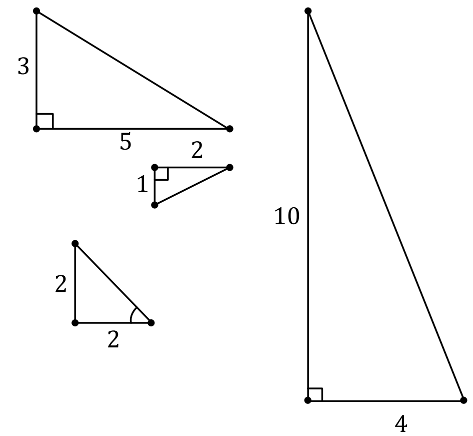
1. Με χρήση των τριγωνομετρικών πινάκων να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α) εφ75° = ………… β) εφ10° = ……… γ) εφ……° = 0,5 δ) εφ……° = 1

2. Σε ποιο από τα διπλανά τρίγωνα ισχύει ότι $εφω = \frac{4}{5}$;



3. Στα διπλανά ορθογώνια τρίγωνα, ονομάστε τις κορυφές και υπολογίστε τις εφαπτόμενες των οξειών γωνιών τους. Γράψτε τις απαντήσεις σας αρχικά με τη μορφή κλασμάτων και στη συνέχεια ως δεκαδικούς με 2 δεκαδικά ψηφία.

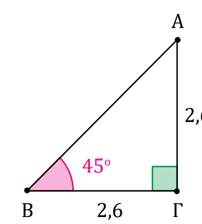


4. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις προτάσεις/σχέσεις, που αναφέρονται στο διπλανό σχήμα:

α) εφΒ = 1

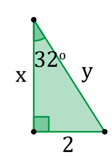
β) Η κλίση της ευθείας ΑΒ (ως προς την ΒΓ) είναι 45°

γ) εφΑ = εφΒ

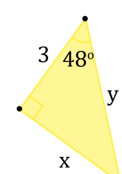


Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

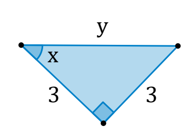
5. Σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα να βρείτε τα x και y (με προσέγγιση εκατοστού). Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τους τριγωνομετρικούς πίνακες, όπου είναι απαραίτητο.



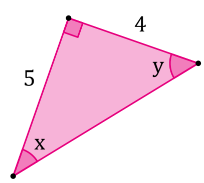
Σχήμα 1



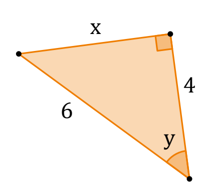
Σχήμα 2



Σχήμα 3

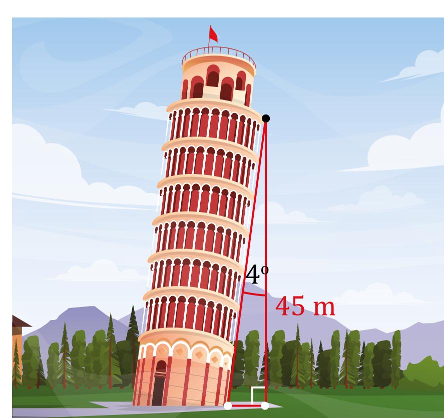


Σχήμα 4

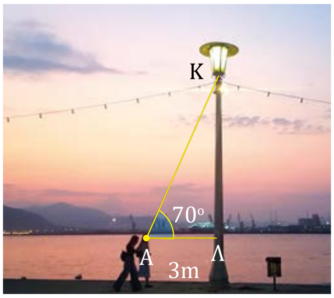


Σχήμα 5

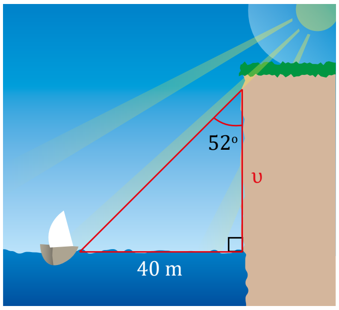
6. Ο Πύργος της Πίζας είναι το καμπαναριό ενός ιστορικού ναού. Η κατασκευή του είχε παρουσιάσει κλίση από την αρχή, λόγω κακής θεμελίωσης πάνω στο πολύ μαλακό έδαφος της περιοχής.
Πριν από μερικές δεκαετίες, η κλίση του ως προς την κατακόρυφη ευθεία διορθώθηκε και σήμερα η γωνία που σχηματίζει με αυτήν είναι περίπου 4°. Αν ρίξουμε από ύψος 45 μέτρων ένα αντικείμενο στο έδαφος, να βρείτε σε πόση απόσταση από τη βάση του Πύργου θα προσγειωθεί.



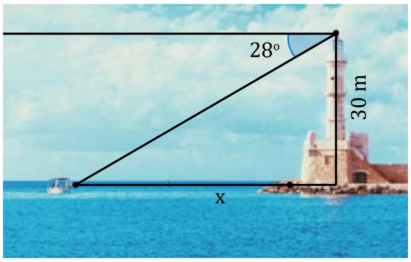
7. Η Αθηνά βρίσκεται σε απόσταση ΑΛ = 3 m και βλέπει το φανάρι της παραλίας με γωνία 70°.
Αν υποθέσουμε ότι τα μάτια της βρίσκονται σε απόσταση 1,70 m από το έδαφος, να βρείτε το ύψος του φαναριού.



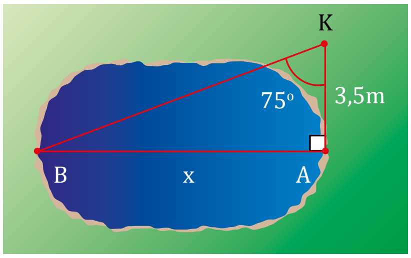
8. Ο καπετάνιος του ιστιοπλοϊκού μέτρησε τη σκιά του βράχου στη θάλασσα και τη βρήκε 40 m. Επίσης, με γωνιόμετρο μέτρησε τη γωνία της ακτίνας του ήλιου που περνά από την άκρη του βράχου και τη βρήκε 52°.
Με ποιον τρόπο μπορεί τώρα να υπολογίσει το ύψος υ του βράχου;



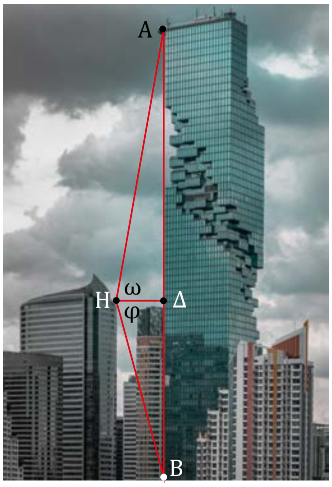
9. Ο φαροφύλακας από ύψος 30 m βλέπει το καΐκι υπό γωνία 28° (σε σχέση με την οριζόντια). Να βρείτε την απόσταση x του καϊκιού από τον φάρο.



10. Για να βρει το μήκος x της πιο μεγάλης διάστασης ΑΒ της λιμνούλας, ο Περικλής απομακρύνθηκε κάθετα προς το ένα άκρο της Α κατά τμήμα ΑΚ = 3,5 cm. Από τη θέση Κ με γωνιόμετρο βρήκε ότι η γωνία με την οποία έβλεπε το τμήμα ΑΒ ήταν 75°. Να βρείτε το x.



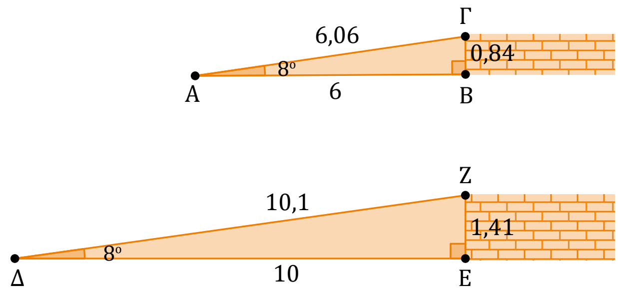
11. Ο Ηλίας βρίσκεται στο σημείο Η του διπλανού σχήματος, δηλαδή στον τελευταίο όροφο ενός ουρανοξύστη, και από αυτή τη θέση προσπαθεί να υπολογίσει το ύψος ΑΒ του πιο ψηλού γειτονικού ουρανοξύστη της περιοχής. Γνωρίζει ότι η απόσταση των δύο κτιρίων είναι ΗΔ = 25 m και με γωνιόμετρο βρίσκει ότι $\hat{\omega} = 80^\circ$ και $\hat{\varphi} = 75^\circ$. Βοηθήστε τον να βρει το ΑΒ.



6.2 Ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας

Δ1. Ράμπες μεγάλες, ράμπες μικρές....

Σε μια ξενοδοχειακή μονάδα υπάρχουν πολλές ράμπες για να διευκολύνουν τη μετακίνηση όλων των ατόμων, ανάμεσα σε επίπεδα που έχουν υψομετρική διαφορά. Οι ράμπες αυτές σχηματίζουν γωνία 8° με το έδαφος, ώστε να είναι ασφαλείς και έχουν διαφορετικά μήκη. Με βάση το σχήμα να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα. Τι παρατηρείτε;

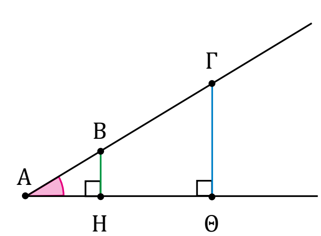


$\frac{ΒΓ}{ΑΓ}$	$\frac{ΖΕ}{ΔΖ}$	$\frac{ΑΒ}{ΑΓ}$	$\frac{ΔΕ}{ΔΖ}$

Συζητάμε

...για σταθερούς λόγους

Η Δανάη συνέχισε τη συζήτηση για τις ράμπες με τον καθηγητή της ρωτώντας τώρα κάτι διαφορετικό:



Δ: Κύριε, αφού ισχύει $\frac{ΒΗ}{ΑΗ}=\frac{ΓΘ}{ΑΘ}$, με τις ιδιότητες των αναλογιών έχουμε $\frac{ΒΗ}{ΓΘ}=\frac{ΑΗ}{ΑΘ}$ και αυτός είναι ο λόγος ομοιότητας των δύο τριγώνων ΑΒΗ και ΑΓΘ. Δεν μπορούμε να πούμε ότι και οι υποτείνουσες θα έχουν τον ίδιο λόγο; Δηλαδή $\frac{ΒΗ}{ΓΘ}=\frac{ΑΗ}{ΑΘ}=\frac{ΑΒ}{ΑΓ}$.

Κ: Φυσικά! Με τις ιδιότητες των αναλογιών θα βρεις πολύ ωραία πράγματα!

Δ: Ωραία, αν $\frac{ΒΗ}{ΓΘ}=\frac{ΑΒ}{ΑΓ}$, τότε $\frac{ΒΗ}{ΑΒ}=\frac{ΓΘ}{ΑΓ}$, δηλαδή στο κάθε τρίγωνο ο λόγος της απέναντι κάθετης προς την υποτείνουσα παραμένει και αυτός σταθερός! Το ίδιο θα ισχύει και για τον λόγο της προσκείμενης κάθετης προς την υποτείνουσα!

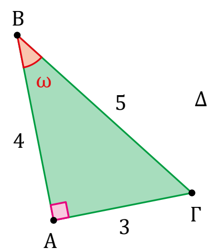
Κ: Σωστά! Γι αυτό δώσαμε και σε αυτούς τους λόγους μια ονομασία: Τον πρώτο τον ονομάσαμε **ημίτονο της γωνίας ω** και τον δεύτερο **συνημίτονο της γωνίας ω.**

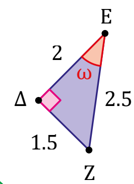
Δ: Οι λόγοι αυτοί εξαρτώνται μόνο από το «άνοιγμα» της οξείας γωνίας, δηλαδή από το μέτρο της;

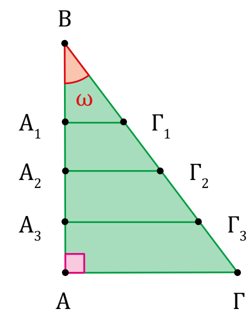
> Μια αναλογία είναι μια ισότητα λόγων $\frac{α}{β}=\frac{γ}{δ}$. Από αυτή την ισότητα έχουμε ότι:
>
> - $α\cdot δ=β\cdot γ$ (τα χιαστί γινόμενα είναι ίσα)
> - $\frac{α}{γ}=\frac{β}{δ}$ και $\frac{δ}{β}=\frac{γ}{α}$

Κ: Αυτό μπορείς να το διαπιστώσεις σχηματίζοντας σε δύο όμοια ορθογώνια τρίγωνα τις αναλογίες των ομόλογων πλευρών.

Στο διπλανό σχήμα για τα όμοια τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουμε:







- $ημω = \dfrac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} = \dfrac{3}{5} = \dfrac{1,5}{2,5}$
- $συνω = \dfrac{\text{προσκείμενη κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} = \dfrac{4}{5} = \dfrac{2}{2,5}$

και όπως έχουμε ήδη μάθει

$$εφω = \frac{\text{απέναντι από την ω κάθετη}}{\text{προσκείμενη στην ω κάθετη}} = \frac{3}{4} = \frac{1,5}{2}$$

Το ίδιο ακριβώς μπορούμε να συμπεράνουμε για τα ομοιόθετα (άρα και όμοια) τρίγωνα ΑΒΓ, $ΒΑ_1Γ_1$....του τρίτου σχήματος, από τα οποία καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι:
Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας οξείας γωνίας ω δε συνδέονται με ένα ορθογώνιο τρίγωνο, αλλά με όλα τα (άπειρα) ορθογώνια τρίγωνα που έχουν μια οξεία γωνία ίση με την ω.

Η ιστορία της Τριγωνομετρίας

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

<table>
<tr><th>...λεκτικά</th><th>...και με σχήμα</th></tr>
<tr><td>

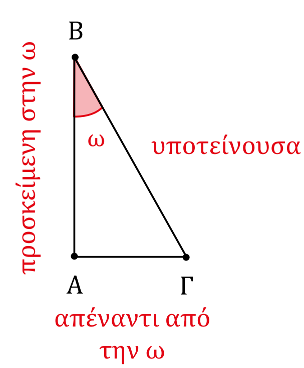
Για κάθε οξεία γωνία ω ορθογώνιου τριγώνου ο λόγος:

- $\dfrac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά (από την ω)}}{\text{υποτείνουσα}}$ είναι σταθερός, τον λέμε **ημίτονο της γωνίας ω** και τον συμβολίζουμε **ημω.**
- $\dfrac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά (στην ω)}}{\text{υποτείνουσα}}$ είναι σταθερός, τον λέμε **συνημίτονο της γωνίας ω** και τον συμβολίζουμε **συνω.**

Την εφαπτομένη, το ημίτονο και το συνημίτονο μιας οξείας γωνίας ορθογώνιου τριγώνου τα ονομάζουμε **τριγωνομετρικούς αριθμούς** της γωνίας αυτής.

- Τους τριγωνομετρικούς αριθμούς κάθε οξείας γωνίας μπορούμε να τους βρούμε από τους **τριγωνομετρικούς πίνακες** ή με **αριθμομηχανή** (sin: ημίτονο, cos: συνημίτονο, tan: εφαπτομένη).
- Επίσης, γνωρίζοντας έναν από τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας οξείας γωνίας, μπορούμε από τους τριγωνομετρικούς πίνακες να βρούμε ποια είναι η γωνία αυτή.

</td><td>



Ημίτονο και συνημίτονο γωνίας

</td></tr>
</table>

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. **Με τη βοήθεια τριγωνομετρικού πίνακα και με χρήση αριθμομηχανής, να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:**
α) ημ36° = …….. (με προσέγγιση εκατοστού) και β) συν …° = 0,99 (ακέραια προσέγγιση της γωνίας)

Απάντηση

α) Από τον πίνακα, βλέπουμε ότι $ημ36^{\circ} = 0{,}5878$ και με προσέγγιση εκατοστού $ημ36^{\circ} = 0{,}59$.
Εναλλακτικά, με χρήση αριθμομηχανής πληκτρολογούμε sin και μετά 36 (ή 36 και μετά sin σε κάποιες άλλες αριθμομηχανές) και μας δίνει αποτέλεσμα 0,5877852523, δηλαδή 0,59 με προσέγγιση εκατοστού.

β) Στον πίνακα βλέπουμε ότι συνημίτονο κοντά στο 0,99 έχουν αρκετές γωνίες. Επιλέγουμε την καλύτερη προσέγγιση, που αντιστοιχεί στη γωνία 8°, άρα συν8° = 0,99.
Με χρήση αριθμομηχανής πληκτρολογούμε $\cos^{-1}$ και μετά 0,99. Το αποτέλεσμα που μας δίνει είναι $8{,}109614456 \simeq 8^{\circ}$.

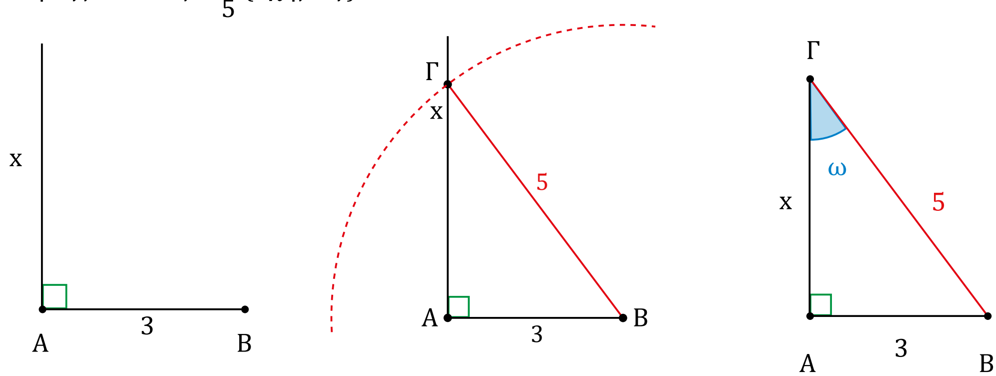
Μέτρο γωνίας	ημίτονο	συνημίτονο	εφαπτομένη
5°	0,0872	0,9962	0,0875
6°	0,1045	0,9945	0,1051
7°	0,1219	0,9925	0,1228
8°	0,1392	0,9903	0,1405
9°	0,1564	0,9877	0,1584

2. **Να κατασκευάσετε μια γωνία ω με ημω = 0,6.**

Απάντηση

Γράφουμε το ημω σε μορφή κλάσματος: $ημω = 0{,}6 = \frac{6}{10}$. Αφού $ημω = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{6}{10}$, αρκεί να κατασκευάσουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο, στο οποίο ο λόγος μιας κάθετης προς την υποτείνουσα να είναι $\frac{6}{10}$ ή ακόμα καλύτερα απλοποιώντας $\frac{3}{5}$. Ακολουθούμε τα εξής στάδια για την κατασκευή μας:

- Αρχικά κατασκευάζουμε τμήμα ΑΒ = 3 (μονάδες μήκους) και στο Α φέρνουμε κάθετη ημιευθεία Αx (σχήμα α).
- Με κέντρο το Β γράφουμε κύκλο (Β, 5), που τέμνει την Αx στο σημείο Γ. Φέρνουμε τη ΒΓ και δημιουργούμε το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (σχήμα β).
- Η γωνία $\hat{Γ} = \hat{ω}$ είναι η ζητούμενη γωνία, διότι βρίσκεται απέναντι από την κάθετη πλευρά ΑΓ και το ημίτονό της είναι πράγματι ίσο με $\frac{3}{5}$ (σχήμα γ).

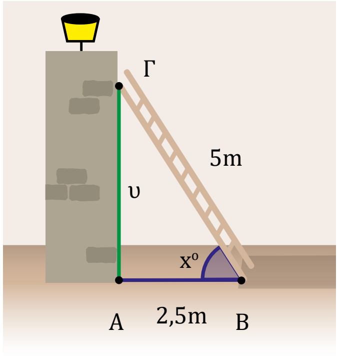


σχήμα α **σχήμα β** **σχήμα γ**

3. Για να αλλάξει τη λάμπα στο φαναράκι, ο Αναστάσης τοποθέτησε μια πτυσσόμενη σκάλα μήκους 5 m. Όμως δεν ήξερε αν η γωνία x της σκάλας με το έδαφος είναι σωστή, καθώς του είχαν πει ότι θα πρέπει να είναι γύρω στις 75°.

α) Αν η απόσταση της βάσης της σκάλας από τον τοίχο είναι 2,5 m, να εξηγήσετε γιατί η γωνία x δεν του επιτρέπει να ανέβει με ασφάλεια τη σκάλα.

β) Βρείτε σε πόση απόσταση από τον τοίχο θα πρέπει να την τοποθετήσει, προσαρμόζοντας ανάλογα το μήκος της (που θα είναι πλέον μικρότερο από 5 m).



Απάντηση

α) Από τα στοιχεία που έχουμε, μπορούμε να βρούμε το $συνx = \dfrac{\text{προσκείμενη κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} = \dfrac{2,5}{5} = \dfrac{1}{2} = 0,5.$

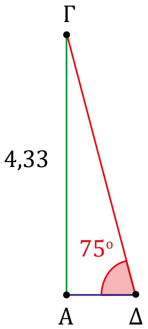
Από τον τριγωνομετρικό πίνακα βρίσκουμε ότι $x = 60°$. Άρα η σκάλα δεν έχει τοποθετηθεί με ασφάλεια.

β) Για να βρούμε τη νέα απόσταση ΑΔ από τον τοίχο, στην οποία θα τοποθετηθεί η σκάλα, πρέπει αρχικά να υπολογίσουμε (προσεγγιστικά) το ύψος υ που είναι τοποθετημένο το φαναράκι εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ: $υ^2 = ΒΓ^2 - ΑΒ^2$, άρα $υ^2 = 5^2 - 2,5^2$ και μετά από πράξεις:

$$υ = \sqrt{18,75} \cong 4,33 \text{ m}.$$

Αν λοιπόν υποθέσουμε ότι μια ασφαλής γωνία είναι οι 75°, στο νέο τρίγωνο ΑΓΔ που σχηματίζει η σκάλα με τον τοίχο και το έδαφος, θα έχουμε $\hat{x} = 75°$, $ΑΓ \cong 4,33$ m και αναζητούμε την απόσταση ΑΔ.

$εφx = \dfrac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{προσκείμενη κάθετη}}$ ή $εφ75° = \dfrac{ΑΓ}{ΑΔ}$ και αντικαθιστώντας την εφ75° με προσέγγιση εκατοστού έχουμε: $3,73 = \dfrac{4,33}{ΑΔ}$ και άρα $ΑΔ \cong 1,16$ m.



Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

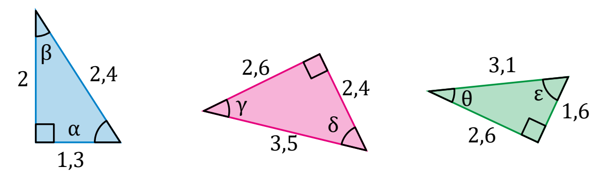
1. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα με τη βοήθεια του τριγωνομετρικού πίνακα χρησιμοποιώντας προσέγγιση εκατοστού:

	65°	27°	81°
ημ			
συν			

2. Να συμπληρώσετε τις γωνίες στις παρακάτω ισότητες:

α) συν.....° = 0,5 **β)** ημ.....° = 0,5 **γ)** συν.....° ≅ 0,8 **δ)** ημ.....° ≅ 0,3

3. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ) με βάση τα διπλανά σχήματα:

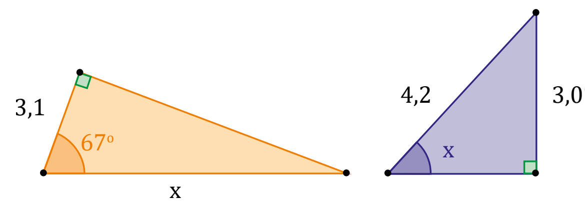


α) ημα $= \dfrac{2}{2,4}$ **β)** ημβ $= \dfrac{1,3}{2}$ **γ)** συνγ $= \dfrac{3,5}{2,6}$

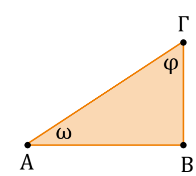
δ) συνδ $= \dfrac{2,4}{3,5}$ **ε)** ημθ $= \dfrac{1,6}{3,1}$ **στ)** συνε $= \dfrac{1,6}{3,1}$

Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

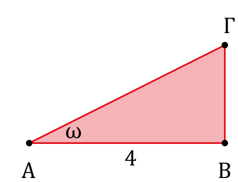
4. Να βρείτε την τιμή του x στα διπλανά τρίγωνα.



5. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών ω και φ, αν γνωρίζουμε ότι $\dfrac{ΒΓ}{ΑΓ} = \dfrac{3}{5}$.



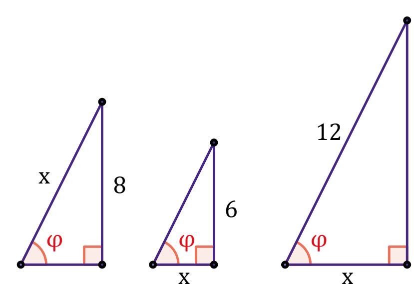
6. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ημω = 0,24 και συνω = 0,97. Να βρείτε το μήκος της ΒΓ.



7. Να κατασκευάσετε γωνία ω, αν γίνεται, ώστε να έχει

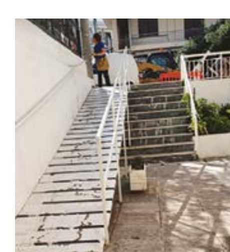
α) ημω $= \dfrac{2}{5}$ **β)** συνω $= \dfrac{2}{5}$ **γ)** ημω $= \dfrac{4}{5}$ **δ)** ημω $= \dfrac{5}{2}$

8. Να υπολογίσετε την πλευρά x σε καθένα από τα διπλανά σχήματα, αν γνωρίζετε ότι ημφ = 0,8.



9. Η ράμπα και η σκάλα της διπλανής εικόνας καλύπτουν μια υψομετρική διαφορά 2,5 m. Η ράμπα έχει μήκος 6 m και η σκάλα έχει μήκος 3 m. Να βρείτε με προσέγγιση δεκάτου τη γωνία που σχηματίζει η καθεμία από αυτές με το έδαφος.

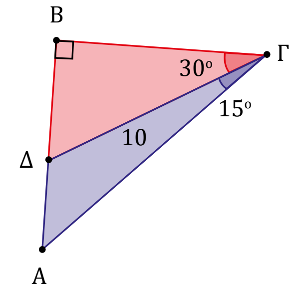
Αν υποθέσουμε ότι μια ασφαλής γωνία σκάλας με το έδαφος είναι από 30° έως 40°, ενώ για τη ράμπα από 10° έως 15°, θεωρείτε ότι οι συγκεκριμένες κατασκευές πληρούν τους κανόνες ασφαλείας;



10. Στο σχήμα είναι $\hat{B} = 90^\circ$. Τα σημεία Α, Β και Δ βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Να υπολογίσετε:

α) το μήκος των πλευρών του τριγώνου ΒΓΔ

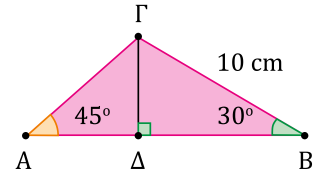
β) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΓ



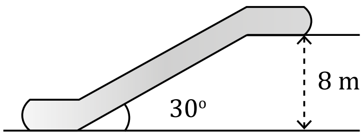
11. Στο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος να βρείτε:

α) το μήκος του ύψους ΓΔ

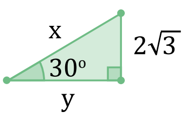
β) τα μήκη των τμημάτων ΑΓ και ΑΔ

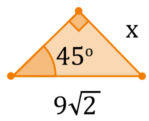


12. Μια κυλιόμενη σκάλα σε ένα πολυκατάστημα μεταφέρει άτομα από το ισόγειο στον πρώτο όροφο, ο οποίος βρίσκεται 8 m ψηλότερα. Αν γνωρίζουμε ότι η γωνία της σκάλας με το οριζόντιο επίπεδο είναι 30°, να βρείτε το μήκος της σκάλας.

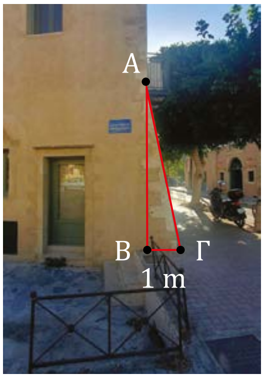


13. Να βρείτε τα x και y στα διπλανά τρίγωνα χωρίς χρήση προσεγγίσεων.





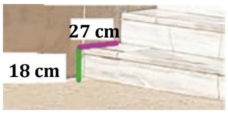
14. Στην παλιά πόλη των Χανίων έχουν χτιστεί υποστηλώματα στο εξωτερικό μέρος πολλών κτιρίων, ώστε να αποφευχθεί τυχόν κατάρρευσή τους και να καταστούν βιώσιμα. Στην εικόνα βλέπουμε την πλαϊνή όψη ενός τέτοιου υποστηλώματος, που είναι το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, στο οποίο $\hat{\Gamma} = 80^\circ$ και ΒΓ = 1 m. Να βρείτε το μήκος της πλευράς ΑΓ.



15. Σε ένα σχολείο της Γλυφάδας μια ράμπα σχηματίζει με το επίπεδο γωνία 8° και το κάθε σκαλοπατάκι της διπλανής σκάλας έχει ύψος 18 cm και πάτημα 27 cm. Να βρείτε:

α) το μήκος x της ράμπας

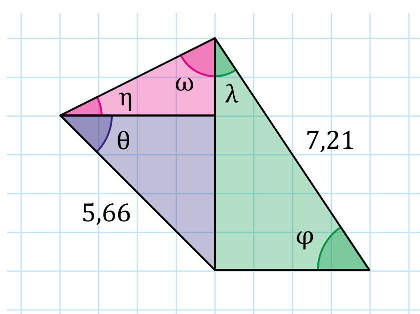
β) τη γωνία που σχηματίζει η σκάλα με το οριζόντιο επίπεδο



Τριγωνομετρία

Ερωτήσεις – ασκήσεις – προβλήματα

1. Στο σχήμα, το τετράγωνο του πλέγματος έχει πλευρά 1 cm. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις (ή ισότητες) είναι Σωστές ή Λανθασμένες.



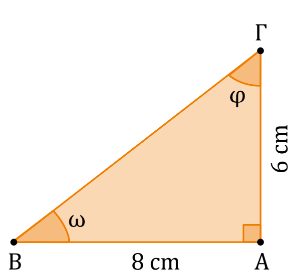
α) Η εφαπτομένη της γωνίας η είναι ένας αριθμός που εξαρτάται από το ορθογώνιο τρίγωνο στο οποίο ανήκει η γωνία.

β) εφω = 2 **γ)** $εφθ = \dfrac{4}{5{,}66}$

δ) $ημλ = \dfrac{6}{7{,}21}$ **ε)** $συνλ = \dfrac{6}{4}$

στ) συνλ = ημφ **ζ)** $συνφ = \dfrac{4}{7{,}21}$

2. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ οι δύο κάθετες πλευρές του έχουν μήκη 6 cm και 8 cm.

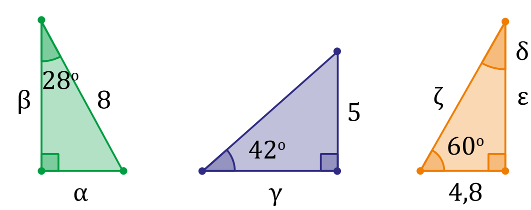


α) Να υπολογίσετε την εφω και από αυτή να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία ω.

β) Χρησιμοποιώντας τη γωνία ω και τη μία από τις κάθετες πλευρές του τριγώνου, να υπολογίσετε την υποτείνουσά του ΒΓ. Με ποιον άλλο τρόπο θα μπορούσατε να υπολογίσετε την υποτείνουσα;

γ) Να υπολογίσετε όσους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών ω και φ δεν έχετε ήδη υπολογίσει.

3. Με βάση τα δεδομένα κάθε σχήματος, να υπολογίσετε τις τιμές των άγνωστων α, β, γ, δ, ε και ζ.



4. Ένας δρόμος σχηματίζει γωνία 15° με το οριζόντιο επίπεδο. Αν ανηφορίσετε σε αυτόν τον δρόμο περπατώντας 200 m, πόσα μέτρα θα έχετε ανέβει σε ύψος; Να κάνετε ένα γεωμετρικό σχήμα για να απαντήσετε.

5. Το μήκος των διαγωνίων ενός ρόμβου είναι 10 cm και 8 cm. Να βρείτε το μέτρο των γωνιών του ρόμβου.

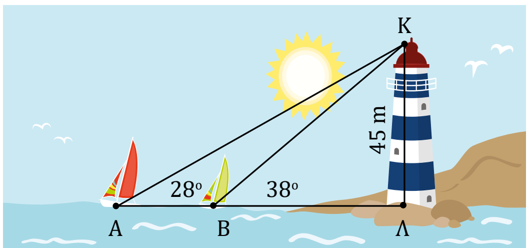
6. Να σχεδιάσετε μία οξεία γωνία ω για καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις ισοτήτων:

α) εφω = 3 **β)** ημω = 0,6 **γ)** συνω = 0,6

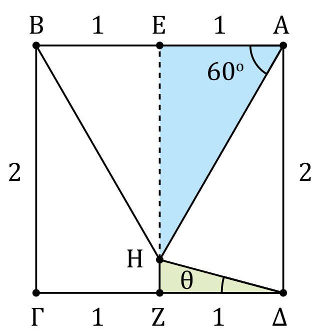
Σχέση τριγωνομετρικών αριθμών συμπληρωματικών γωνιών

Συνδέσεις και επεκτάσεις

7. Τα ιστιοπλοϊκά Α και Β «βλέπουν» έναν φάρο ύψους 45 m με γωνίες 28° και 38° αντίστοιχα. Να βρείτε την απόστασή τους.



8. Στο σχήμα, έχουμε σχεδιάσει το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΗ μέσα στο τετράγωνο ΑΒΓΔ. Η ΕΖ είναι η μεσοκάθετος της κοινής πλευράς ΑΒ (η οποία είναι και μεσοκάθετος της ΔΓ και διέρχεται από το Η).

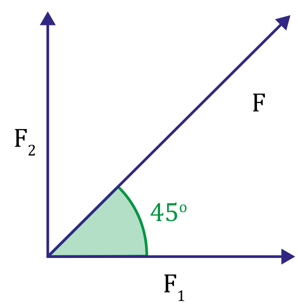


α) Να αποδείξετε ότι το ΑΔΗ είναι ισοσκελές τρίγωνο και να υπολογίσετε τις γωνίες του.

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία θ είναι 15°.

γ) Χρησιμοποιώντας τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΕΗ και ΔΖΗ, να αποδείξετε ότι $εφ15° + εφ60° = 2$ και να επαληθεύσετε τη σχέση αυτή από τους τριγωνομετρικούς πίνακες ή με το κομπιουτεράκι.

9. Οι δυνάμεις F_1 και F_2 έχουν διευθύνσεις κάθετες μεταξύ τους. Η συνισταμένη τους F έχει μέτρο $3\sqrt{2}$ N. Να βρείτε τα μέτρα των F_1 και F_1.



Παράλλαξη αστέρα

Τρίλιζα στους τριγωνομετρικούς αριθμούς

Ηλεκτρική ψαλιδωτή ανυψωτική πλατφόρμα

Πλωτή αποβάθρα

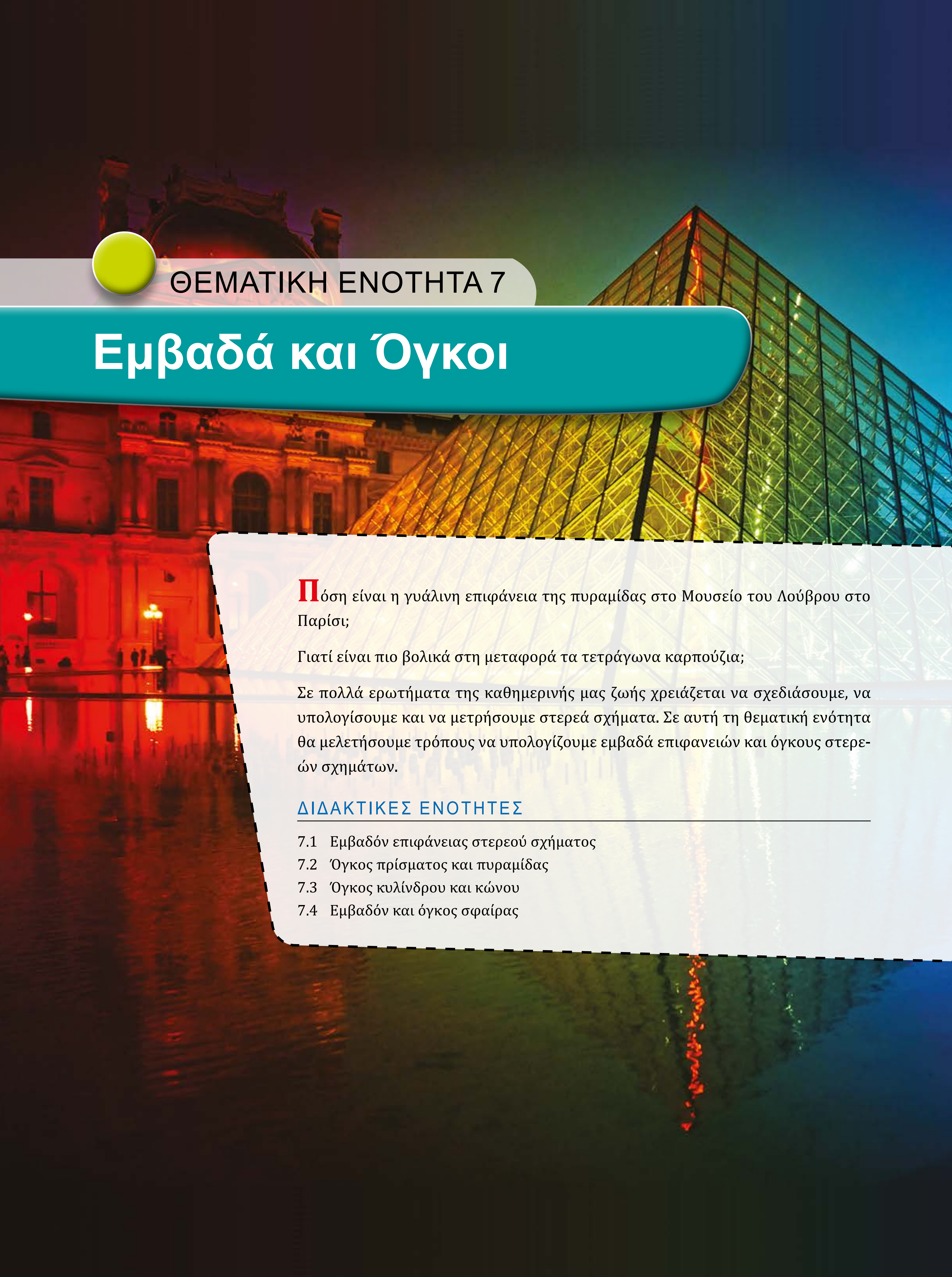
Ομαδική εργασία

10. Χρησιμοποιήστε τη φωτογραφία του παλιού σπιτιού στη Φλωρεντία για να υπολογίσετε (κατά προσέγγιση) την κλίση του δρόμου. Συζητήστε τις στρατηγικές σας στην τάξη.

«Κλείνοντας» τρίγωνα

Η Χελωνόσφαιρα (Γ)

Οδηγός Χελωνόσφαιρας (Γ)



ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ 7

Εμβαδά και Όγκοι

Πόση είναι η γυάλινη επιφάνεια της πυραμίδας στο Μουσείο του Λούβρου στο Παρίσι;

Γιατί είναι πιο βολικά στη μεταφορά τα τετράγωνα καρπούζια;

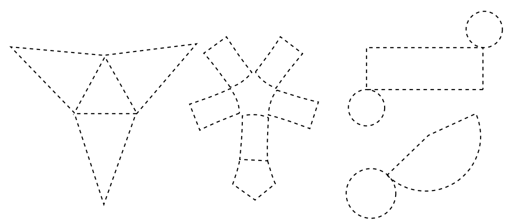
Σε πολλά ερωτήματα της καθημερινής μας ζωής χρειάζεται να σχεδιάσουμε, να υπολογίσουμε και να μετρήσουμε στερεά σχήματα. Σε αυτή τη θεματική ενότητα θα μελετήσουμε τρόπους να υπολογίζουμε εμβαδά επιφανειών και όγκους στερεών σχημάτων.

ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΕΝΟΤΗΤΕΣ

7.1 Εμβαδόν επιφάνειας στερεού σχήματος

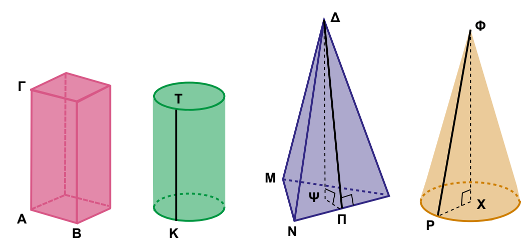
Δ1. Συσκευασίες

α) Η μητέρα του Ηλία εργάζεται στο τμήμα σχεδιασμού μιας βιομηχανίας. Έφερε στον Ηλία μερικά σχεδιαγράμματα, με βάση τα οποία θα μπορούσε να κόψει χαρτόνια και να κατασκευάσει στερεά σχήματα. Τι είδους στερεό σχήμα θα προκύψει από αυτά τα σχεδιαγράμματα; Συζητήστε στην τάξη εξηγώντας τη γνώμη σας.



Θυμόμαστε ότι το επίπεδο σχήμα που δημιουργείται από το «ξεδίπλωμα» ενός στερεού το λέμε ανάπτυγμα. Ένα στερεό μπορεί να έχει περισσότερα από ένα αναπτύγματα, αφού μπορεί να «ξεδιπλωθεί» με διαφορετικούς τρόπους.

β) Η μητέρα του Ηλία είχε σχεδιάσει τέσσερις διαφορετικές συσκευασίες για να διαλέξει ένας πελάτης ο οποίος ενδιαφερόταν να συσκευάσει χυμούς φρούτων. Ήταν ένα τετραγωνικό πρίσμα, ένας κύλινδρος, μία τριγωνική πυραμίδα με βάση ισόπλευρο τρίγωνο και ένας κώνος. Όλα θα κατασκευάζονταν από ένα είδος πλαστικοποιημένου χαρτιού, κατάλληλου για τρόφιμα. Να υπολογίσετε την επιφάνεια του χαρτιού που θα χρειαζόταν κάθε συσκευασία. Μπορείτε να αναλάβετε ανά ομάδα από μία συσκευασία, και μετά να συζητήσετε σε όλη την τάξη τους τρόπους που εργαστήκατε.



Συζητάμε

...για τις επιφάνειες στερεών σχημάτων

Στα στερεά σχήματα συχνά μας ενδιαφέρει να ξέρουμε την επιφάνειά τους. Για παράδειγμα, θέλουμε να γνωρίζουμε την ποσότητα του υφάσματος που χρειάζεται για να κατασκευαστεί μία σκηνή ώστε να μπορούμε να υπολογίσουμε το κόστος της.

Όταν λέμε ότι υπολογίζουμε την «επιφάνεια του στερεού», εννοούμε ότι υπολογίζουμε το εμβαδόν της εξωτερικής επιφάνειας. Μπορεί το στερεό να έχει παράπλευρη επιφάνεια και βάσεις (όπως για παράδειγμα ένας κύλινδρος). Τότε η επιφάνειά του είναι το άθροισμα των εμβαδών της παράπλευρης επιφάνειας και των βάσεων.

Αν ένα στερεό έχει ανάπτυγμα, η επιφάνειά του είναι η επιφάνεια του αναπτύγματός του. Για να υπολογίσουμε την επιφάνεια του στερεού, θα πρέπει να υπολογίσουμε το εμβαδόν των σχημάτων που αποτελούν το ανάπτυγμά του. Έτσι, οι πληροφορίες που χρειάζεται να γνωρίζουμε είναι εκείνες που θα μας επιτρέψουν να χρησιμοποιήσουμε

Από τη Β΄ γυμνασίου θυμόμαστε:
- Εμβαδόν τετραγώνου με πλευρά α: $E = \alpha^2$
- Εμβαδόν παραλληλογράμμου με πλευρά β και αντίστοιχο ύψος υ: $E = \beta \cdot \upsilon$
- Εμβαδόν τριγώνου με πλευρά β και αντίστοιχο ύψος υ: $E = \frac{\beta \cdot \upsilon}{2}$
- Εμβαδόν τραπεζίου με βάσεις Β και β και ύψος υ: $E = \frac{(B+\beta)\cdot \upsilon}{2}$

τους γνωστούς τύπους εμβαδών που μάθαμε στη Β΄ γυμνασίου. Για παράδειγμα, για ένα τρίγωνο θα πρέπει να ξέρουμε μία πλευρά του και το αντίστοιχο ύψος του.

Ας δούμε ένα παράδειγμα για κάθε στερεό.

Για το εμβαδόν της επιφάνειας πρίσματος

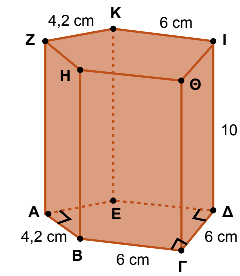
Στο σχήμα 1α φαίνεται ένα ορθό πενταγωνικό πρίσμα και στο σχήμα 1β φαίνεται το ανάπτυγμά του. Γενικά, υπάρχουν και πλάγια πρίσματα, αλλά σε αυτό το βιβλίο θα ασχοληθούμε μόνο με ορθά πρίσματα.

Θα υπολογίσουμε το εμβαδόν της επιφάνειας του πρίσματος με προσέγγιση δεκάτου (δηλαδή ενός δεκαδικού ψηφίου). Για να το κάνουμε αυτό, θα βρούμε το εμβαδόν των δύο βάσεων (που είναι ίσα πολύγωνα) και το εμβαδόν καθεμίας από τις παράπλευρες έδρες του (που είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα).

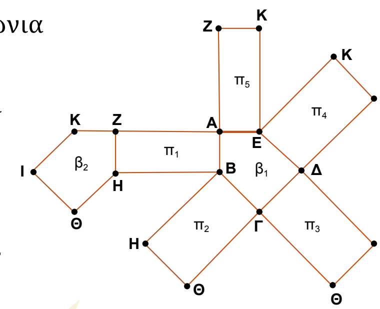
Η βάση αποτελείται από ένα τετράγωνο (το ΒΓΔΕ) με πλευρά 6 cm και ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο (το ΑΒΕ) με κάθετες πλευρές 4,2 cm.

Οπότε $\beta_1 = 6^2 + \dfrac{4{,}2 \cdot 4{,}2}{2} = 36 + 8{,}82 \simeq 44{,}8\ \text{cm}^2$, άρα και $\beta_2 \simeq 44{,}8\ \text{cm}^2$.

Οι παράπλευρες έδρες είναι: $\pi_1 = \text{ΑΒ} \cdot \text{ΑΖ} = 4{,}2 \cdot 10 = 42\ \text{cm}^2$ και ομοίως βρίσκουμε $\pi_5 = 42\ \text{cm}^2$ και $\pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = 6 \cdot 10 = 60\ \text{cm}^2$.



σχήμα 1α



σχήμα 1β

Αν το πεντάγωνο της βάσης δεν ήταν τόσο βολικό, πώς θα υπολογίζαμε το εμβαδόν του; Π.χ., πώς θα το χωρίζαμε σε τρίγωνα;

Οπότε, το συνολικό εμβαδόν της επιφάνειας του πρίσματος είναι $Ε = 2 \cdot 44{,}8 + 2 \cdot 42 + 3 \cdot 60 = 353{,}6\ \text{cm}^2$.

Για το εμβαδόν της επιφάνειας πυραμίδας:

Στα σχήματα 2α και 2β φαίνεται μια τριγωνική πυραμίδα και το ανάπτυγμά της.

Παρατηρούμε ότι οι έδρες της είναι τυχαία τρίγωνα (δηλαδή δεν είναι ορθογώνια ή ισόπλευρα). Οπότε, για να υπολογίσουμε το εμβαδόν τους, χρειαζόμαστε για κάθε τρίγωνο τα μήκη μιας πλευράς και του αντίστοιχου ύψους.

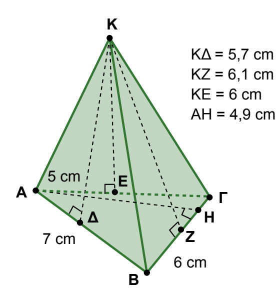
Χρησιμοποιώντας τις πληροφορίες που δίνονται, έχουμε:

$$(\text{ΑΒΓ}) = \frac{\text{ΒΓ} \cdot \text{ΑΗ}}{2} = \frac{6 \cdot 4{,}9}{2} = 14{,}7\ \text{cm}^2 \qquad (\text{ΚΑΒ}) = \frac{\text{ΑΒ} \cdot \text{ΚΔ}}{2} = \frac{7 \cdot 5{,}7}{2} \simeq 20\ \text{cm}^2$$

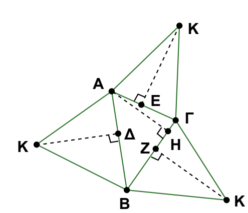
$$(\text{ΚΒΓ}) = \frac{\text{ΒΓ} \cdot \text{ΚΖ}}{2} = \frac{6 \cdot 6{,}1}{2} = 18{,}3\ \text{cm}^2 \qquad (\text{ΚΑΓ}) = \frac{\text{ΑΓ} \cdot \text{ΚΕ}}{2} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15\ \text{cm}^2$$

Οπότε το συνολικό εμβαδόν της επιφάνειας της πυραμίδας είναι:

$$Ε = 14{,}7 + 20 + 18{,}3 + 15 = 68\ \text{cm}^2.$$



σχήμα 2α



σχήμα 2β

Περισσότερο βολικές στους υπολογισμούς των εμβαδών είναι οι πυραμίδες που ονομάζονται κανονικές. Οι κανονικές πυραμίδες έχουν ως βάση ένα κανονικό πολύγωνο (π.χ. ισόπλευρο τρίγωνο, τετράγωνο) και οι παράπλευρες έδρες είναι ισοσκελή τρίγωνα, όλα ίσα μεταξύ τους.

Θυμόμαστε ότι με την παρένθεση συμβολίζουμε το εμβαδόν. Δηλαδή, το (ΑΒΓ) είναι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

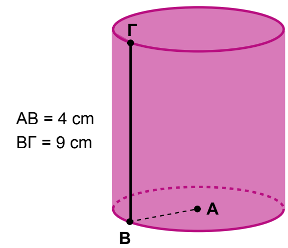
Τι θα μπορούσαμε να κάνουμε αν δεν είχαμε πληροφορίες για τα ύψη, αλλά γνωρίζαμε όλες τις ακμές της πυραμίδας; Π.χ. θα μπορούσαμε να σχεδιάσουμε τα τρίγωνα;

Κανονικές πυραμίδες

Για το εμβαδόν της επιφάνειας κυλίνδρου

Στα σχήματα 3α και 3β βλέπουμε έναν κύλινδρο και το ανάπτυγμά του.

Όταν «ξετυλίξουμε» την παράπλευρη (καμπύλη) επιφάνεια του κυλίνδρου, θα προκύψει ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, που η μία του πλευρά θα είναι το ύψος του κυλίνδρου (η ΒΓ, η οποία λέγεται και γενέτειρα του κυλίνδρου) και η άλλη πλευρά θα είναι η περιφέρεια του κύκλου (η ΒΕ), που «ξετυλίχτηκε» κι αυτή μαζί με την επιφάνεια.



σχήμα 3α

Οπότε θα είναι $ΒΕ = 2 \cdot π \cdot 4 \simeq 25{,}1$ cm.

Έτσι, το εμβαδόν κάθε κυκλικής βάσης θα είναι:

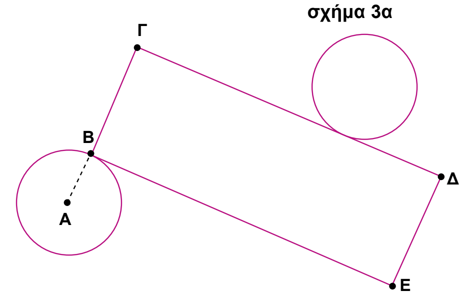
$$Ε_{βάσ} = π \cdot 4^2 \simeq 50{,}2 \text{ cm}^2$$

Και το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας:

$$Ε_{παρ} \simeq 9 \cdot 25{,}1 = 225{,}9 \text{ cm}^2$$

Συνολικά, το εμβαδόν της επιφάνειας του κυλίνδρου είναι:

$$Ε = 2 \cdot 50{,}2 + 225{,}9 = 326{,}3 \text{ cm}^2$$



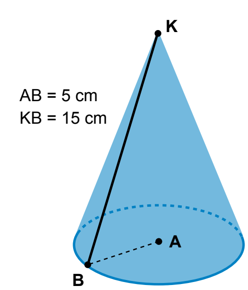
σχήμα 3β

Για το εμβαδόν της επιφάνειας κώνου

Στα σχήματα 4α και 4β φαίνεται ένας κώνος και το ανάπτυγμά του. Η ευθεία που ενώνει την κορυφή Κ και το κέντρο του κύκλου της βάσης είναι κάθετη στο επίπεδο της βάσης. Ένας τέτοιος κώνος λέγεται ορθός κώνος. Στο βιβλίο αυτό οι κώνοι θα είναι ορθοί, εκτός αν αναφέρεται κάτι άλλο.

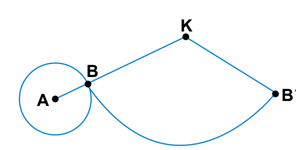
Η επιφάνεια του κώνου αποτελείται από την κυκλική βάση του και την παράπλευρη επιφάνειά του, που είναι καμπύλη.

Αν «ξετυλίξουμε» την παράπλευρη επιφάνεια του κώνου, θα πάρουμε ένα επίπεδο σχήμα, που έχει σύνορα τα ευθύγραμμα τμήματα ΚΒ (που λέγεται γενέτειρα του κυλίνδρου) και ΚΒ′ και την καμπύλη ΒΒ′ (στο σχήμα 4β). Η καμπύλη αυτή αποτελείται από σημεία που απέχουν από το Κ απόσταση 15 cm, άρα είναι τόξο του κύκλου (Κ,15). Οπότε, πρέπει να βρούμε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα ΚΒΒ′.



σχήμα 4α

Για να βρούμε τι μέρος του κυκλικού δίσκου (Κ,15) είναι ο κυκλικός τομέας ΚΒΒ′, θα βρούμε τι μέρος της περιφέρειας του κύκλου (Κ,15) είναι το μήκος του τόξου ΒΒ′. Το τόξο ΒΒ′ έχει μήκος ίσο με την περιφέρεια του κύκλου της βάσης. Άρα $S_{ΒΒ'} = 2 \cdot π \cdot 5$ cm.



σχήμα 4β

Ολόκληρος ο κύκλος (Κ,15) έχει μήκος $L = 2 \cdot π \cdot 15$ cm.

Έτσι, το τόξο ΒΒ′ είναι το $\dfrac{2 \cdot π \cdot 5}{2 \cdot π \cdot 15} = \dfrac{1}{3}$ του μήκους του κύκλου (Κ,15). Οπότε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα ΚΒΒ′ θα είναι το $\dfrac{1}{3}$ του εμβαδού του κύκλου (Κ,15), δηλαδή $Ε_{παρ} = \dfrac{1}{3} \cdot π \cdot 15^2 \simeq 235{,}5 \text{ cm}^2$.

Συνολικά, η επιφάνεια του κώνου έχει εμβαδόν:

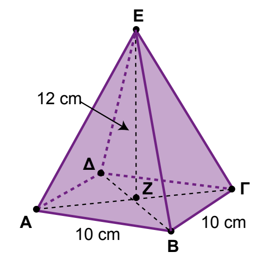
$$Ε = Ε_{βάσ} + Ε_{παρ} \simeq π \cdot 5^2 + 235{,}5 \simeq 78{,}5 + 235{,}5 = 314 \text{ cm}^2$$

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Τα πρίσματα, οι πυραμίδες, οι κύλινδροι και οι κώνοι είναι στερεά σχήματα που έχουν ανάπτυγμα. Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν της επιφάνειας ενός από αυτά τα στερεά σχήματα, χρησιμοποιούμε το ανάπτυγμά του και υπολογίζουμε το εμβαδόν των επίπεδων σχημάτων από τα οποία αποτελείται.

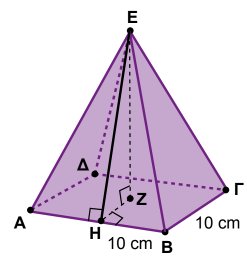
Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

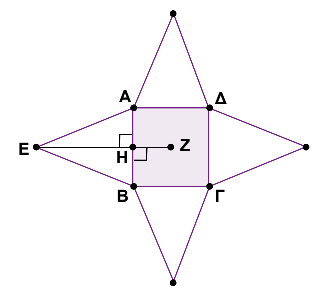
1. **Στο διπλανό σχήμα υπάρχει μια τετραγωνική (κανονική) πυραμίδα. Δηλαδή, η βάση της είναι τετράγωνο και το ύψος της ΕΖ καταλήγει στο κέντρο του τετραγώνου. Με δεδομένο ότι η πλευρά του τετραγώνου είναι 10 cm και το ύψος της πυραμίδας είναι 12 cm, να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας της πυραμίδας.**



Απάντηση

Θα πρέπει να βρούμε τα εμβαδά των ισοσκελών τριγώνων, που είναι οι παράπλευρες έδρες της πυραμίδας. Για τα τρίγωνα αυτά γνωρίζουμε τις βάσεις τους (που είναι οι πλευρές του τετραγώνου ΑΒΓΔ). Θα πρέπει να βρούμε και το ύψος τους, για παράδειγμα το ΕΗ.





Επειδή το Ζ είναι το κέντρο του τετραγώνου, το ΖΗ είναι ίσο με το μισό της πλευράς του τετραγώνου, δηλαδή $ZH = 5$ cm.

Το τρίγωνο ΕΖΗ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την ΕΗ. Επομένως, από το Πυθαγόρειο Θεώρημα θα έχουμε ότι $EH^2 = EZ^2 + ZH^2$, άρα $EH^2 = 12^2 + 5^2 = 169$, οπότε $EH = \sqrt{169} = 13$ cm.

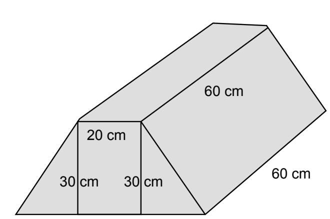
Οπότε το εμβαδόν της επιφάνειας της πυραμίδας είναι:

$$E = (AB\Gamma\Delta) + 4 \cdot (AEB) = 10^2 + 4 \cdot \frac{10 \cdot 13}{2} = 360 \text{ cm}^2$$

2. **Σε ένα γκαράζ υπάρχουν τσιμεντένια μπλοκ, όπως της εικόνας, τα οποία πρέπει να βαφτούν με φωσφορίζοντα χρώματα για να είναι ορατά ακόμα και με χαμηλό φωτισμό.**

α) Να υπολογίσετε σε m^2 το εμβαδόν της επιφάνειας που θα πρέπει να βαφτεί με προσέγγιση δέκατου (ενός δεκαδικού ψηφίου).

β) Αν ένα λίτρο χρώμα καλύπτει επιφάνεια εμβαδού 5 m^2, να υπολογίσετε πόσο χρώμα χρειάζεται για να βαφτούν 10 τέτοια μπλοκ.

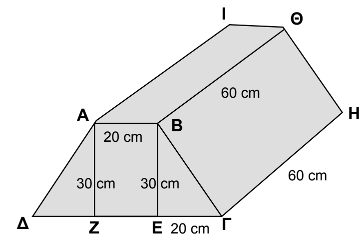


Απάντηση

α) Το μπλοκ είναι ένα πρίσμα με βάση ένα ισοσκελές τραπέζιο. Δε χρειάζεται να βαφτεί η επιφάνεια που «πατάει» το μπλοκ. Άρα θα υπολογίσουμε την επιφάνεια του πρίσματος χωρίς την επιφάνεια της μεγάλης έδρας του.

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΓ έχουμε:

$$B\Gamma^2 = 30^2 + 20^2 = 1.300$$



οπότε $ΒΓ=\sqrt{1.300}\simeq 36{,}1$ cm.

Οπότε $(ΑΒΓΔ)=\dfrac{(ΑΒ+ΓΔ)\cdot ΒΕ}{2}=\dfrac{(20+60)\cdot 30}{2}=1.200\ cm^2$.

$(ΒΓΗΘ)=ΒΓ\cdot ΓΗ\simeq 36{,}1\cdot 60=2.166\ cm^2$ και

$(ΑΒΘΙ)=ΑΒ\cdot ΒΘ=20\cdot 60=1.200\ cm^2$.

Με βάση αυτά, το εμβαδόν που θέλουμε είναι:

$$Ε=2\cdot(ΑΒΓΔ)+2\cdot(ΒΓΗΘ)+(ΑΒΘΙ)=2.400+4.332+1.200=7.932\ cm^2.$$

Επειδή $1\ m^2=10.000\ cm^2$, θα έχουμε $Ε=7.932:10.000=0{,}7932\ m^2$ και με προσέγγιση δέκατου $Ε\simeq 0{,}8\ m^2$.

β) Τα 10 μπλοκ θα έχουν συνολική επιφάνεια για βάψιμο $10\cdot 0{,}8=8\ m^2$. Άρα θα χρειαστούν $8:5=1{,}6$ λίτρα. Επειδή συνήθως το χρώμα πωλείται σε κουτιά του ενός λίτρου, θα χρειαστούμε δύο τέτοια κουτιά.

Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε

1. Έχουμε έναν κύλινδρο με ακτίνα βάσης ρ και ύψος υ. Συζητήστε στην ομάδα σας για να καταλήξετε σε έναν τύπο που θα μας δίνει: **α)** το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του κυλίνδρου, **β)** το εμβαδόν ολόκληρης της επιφάνειας του κυλίνδρου. Συζητήστε στην τάξη τα υπέρ του να θυμάστε και να εφαρμόζετε τον τύπο και τα υπέρ του να μη θυμάστε τον τύπο και να σκέφτεστε το ανάπτυγμα για να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

2. Να καταλήξετε σε έναν τύπο που θα μας δίνει το εμβαδόν ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις α, β και γ. Τι συμβαίνει αν το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει όλες τις ακμές του ίσες;

Εμβαδόν επιφάνειας κώνου

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

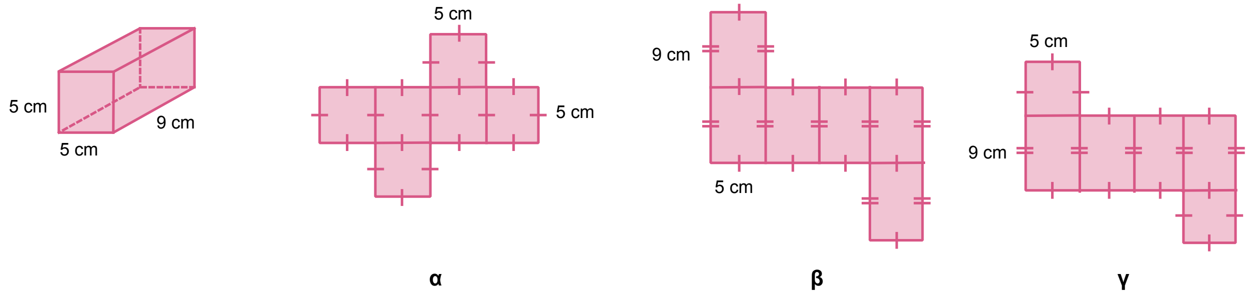
1. Στην εικόνα βλέπουμε μια χάρτινη συσκευασία γάλακτος και τις διαστάσεις της. Να βρείτε:

α) το εμβαδόν της μπροστινής επιφάνειας
β) το εμβαδόν της έδρας στην οποία το κουτί «πατάει»
γ) το εμβαδόν της πλαϊνής επιφάνειας
δ) το εμβαδόν της συνολικής επιφάνειας του κουτιού

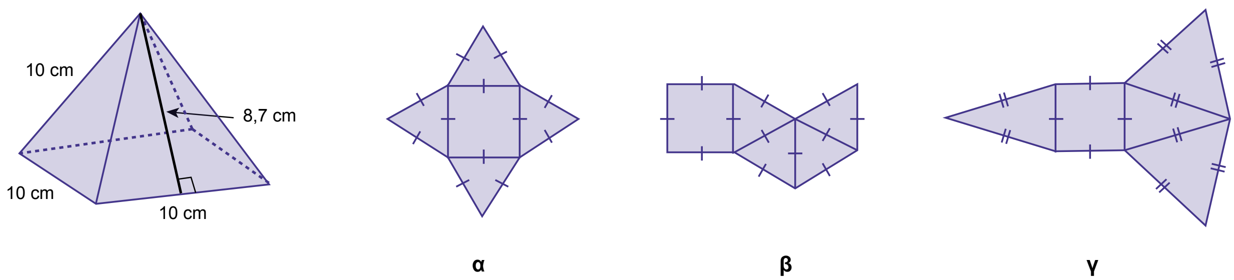
2. Να πάρετε ένα ρολό χαρτί κουζίνας και να υπολογίσετε το εμβαδόν της εξωτερικής καμπύλης επιφάνειάς του. Μπορείτε να ξετυλίξετε ένα μέρος του και να το μετρήσετε. Αλλά πώς θα εξασφαλίσετε ότι αυτό που ξετυλίξατε καλύπτει ακριβώς ένα τύλιγμα;

3. Να πάρετε ένα χάρτινο κουτί σε σχήμα ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου (π.χ. ένα κουτί από δημητριακά). Να το κόψετε σε όσες ακμές του χρειάζεται ώστε να το ξεδιπλώσετε και να δημιουργήσετε το ανάπτυγμά του. Στη συνέχεια, να υπολογίσετε την επιφάνειά του. Θα χρειαστεί να μετρήσετε κάποιες διαστάσεις του με έναν χάρακα.

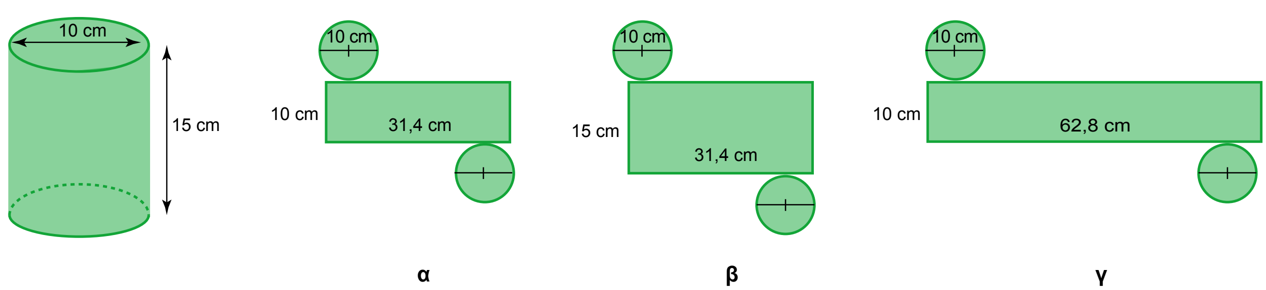
4. Στο σχήμα φαίνεται ένα τετραγωνικό πρίσμα και τρία αναπτύγματα. Να βρείτε ποιο από τα αναπτύγματα αντιστοιχεί στο πρίσμα. Στη συνέχεια, να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας του πρίσματος.



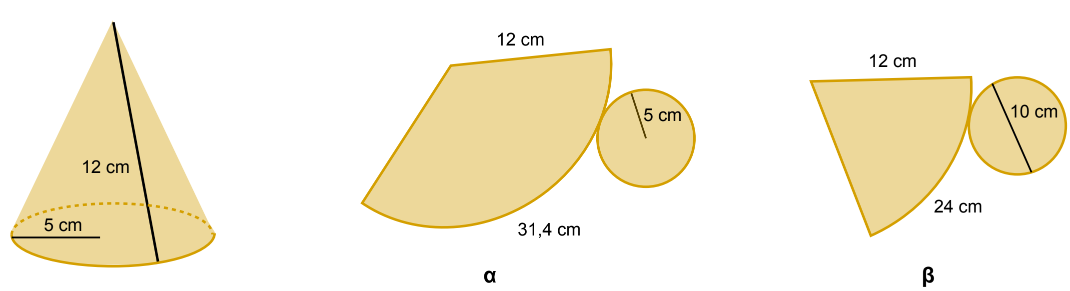
5. Στο σχήμα φαίνεται μια τετραγωνική πυραμίδα που όλες οι ακμές της είναι 10 cm. Επίσης φαίνονται και τρία αναπτύγματα. Να βρείτε ποιο (ή ποια) από τα αναπτύγματα αντιστοιχεί στην πυραμίδα. Στη συνέχεια, να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας της πυραμίδας.



6. Στο σχήμα φαίνεται ένας κύλινδρος και τρία αναπτύγματα. Να βρείτε ποιο (ή ποια) από τα αναπτύγματα αντιστοιχεί στον κύλινδρο. Στη συνέχεια, να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας του κυλίνδρου.

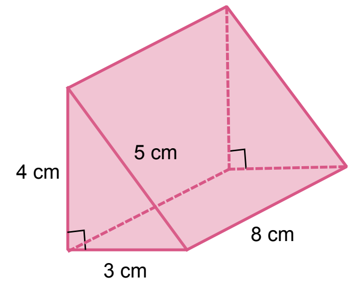


7. Στο σχήμα φαίνεται ένας κώνος και δύο αναπτύγματα. Να βρείτε ποιο από τα αναπτύγματα αντιστοιχεί στον κώνο. Στη συνέχεια, να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας του κώνου.

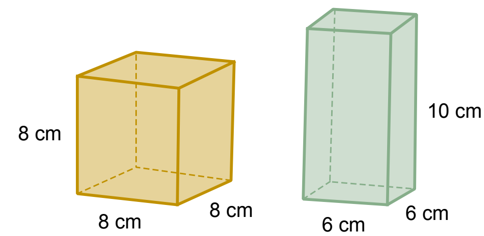


Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

8. Στην εικόνα φαίνεται ένα τριγωνικό πρίσμα.
α) Να κατασκευάσετε ένα ανάπτυγμά του.
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειάς του.



9. Να σχεδιάσετε ένα ανάπτυγμα (το μέγεθός του μπορεί να είναι μικρότερο από το πραγματικό) και να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας καθενός από τα δύο ορθογώνια παραλληλεπίπεδα της εικόνας.



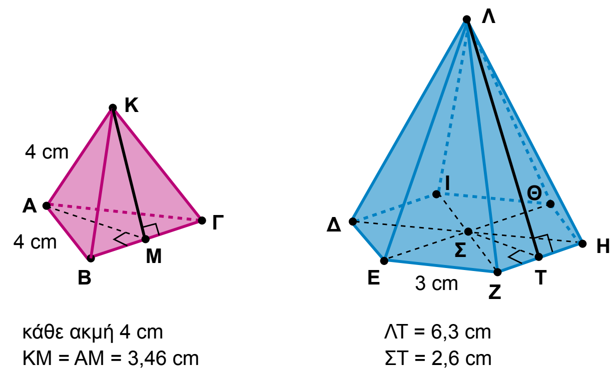
10. (Συνέχεια της άσκησης 3). Σε ένα χάρτινο κουτί συσκευασίας χρησιμοποιείται χαρτόνι επιπλέον του αναπτύγματός του. Αυτό το μέρος καλύπτεται από άλλο χαρτόνι, έτσι ώστε να γίνουν οι κολλήσεις. Μπορείτε να μετρήσετε αυτή την επιπλέον επιφάνεια του «κρυφού» χαρτονιού; Τι ποσοστό του χαρτονιού που χρησιμοποιείται είναι το «κρυφό» χαρτόνι; Μπορείτε να δώσετε ένα παράδειγμα κουτιού που το «κρυφό» χαρτόνι είναι πολύ, δηλαδή είναι μεγάλο ποσοστό του συνολικού;

11. Το εμβαδόν της επιφάνειας ενός κύβου είναι 150 cm^2.
α) Να βρείτε το εμβαδόν μιας από τις έδρες του κύβου.
β) Πόσο είναι το μήκος της ακμής του κύβου;

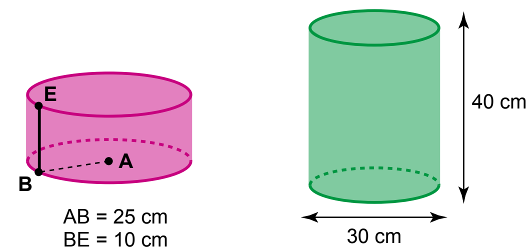
12. Η Παναγιώτα θέλει να βάψει τους τοίχους του δωματίου της. Οι διαστάσεις του δωματίου είναι 4 m, 3 m και 2,8 m (το ύψος). Υπάρχει μία πόρτα που έχει άνοιγμα 80 cm και ύψος 210 cm και ένα παράθυρο διαστάσεων 0,80 × 1,20 m. Θα χρειαστεί να περάσει δύο χέρια χρώμα και το ένα λίτρο χρώμα καλύπτει περίπου 10 m^2. Πόσα λίτρα χρώμα θα χρειαστεί η Παναγιώτα;

13. Η μεταλλική δεξαμενή της φωτογραφίας αποτελείται από έναν κύλινδρο με ακτίνα βάσης 2 m και ύψος 3 m και έναν κώνο με ακτίνα βάσης 2 m και ύψος 1 m. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της εξωτερικής επιφάνειας της δεξαμενής.

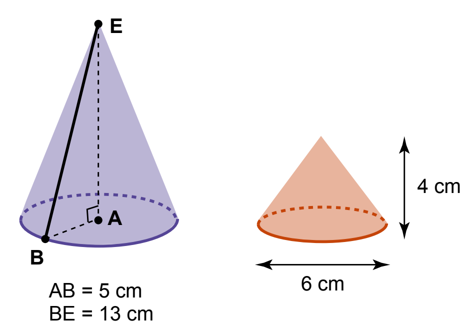
14. Να σχεδιάσετε ένα ανάπτυγμα και να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας καθεμίας από τις δύο κανονικές πυραμίδες της εικόνας (οι βάσεις τους είναι κανονικά πολύγωνα και οι παράπλευρες έδρες τους είναι ίσα ισοσκελή τρίγωνα).



15. Να σχεδιάσετε ένα ανάπτυγμα (το μέγεθός του μπορεί να είναι μικρότερο από το πραγματικό) και να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας καθενός από τους δύο κυλίνδρους της εικόνας.



16. Να σχεδιάσετε ένα ανάπτυγμα (το μέγεθός του μπορεί να είναι μικρότερο από το πραγματικό) και να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας καθενός από τους δύο κώνους της εικόνας.



17. Η Σοφία είπε: Αν θέλεις να διπλασιάσεις την επιφάνεια ενός ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου, δεν έχεις παρά να διπλασιάσεις όλες τις διαστάσεις του. Συμφωνείτε με την άποψη της Σοφίας; Εξηγήστε την άποψή σας.

18. Ένα δώρο βρίσκεται σε ένα κουτί σχήματος ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου και διαστάσεων 20 cm, 25 cm και 15 cm. Πόσο χαρτί περιτυλίγματος (εμβαδόν και διαστάσεις) χρειαζόμαστε για να το τυλίξουμε; Εξηγήστε τις υποθέσεις που κάνατε για να απαντήσετε στην ερώτηση (π.χ. για τις διαστάσεις του χαρτιού σε σύγκριση με του κουτιού).

19. Ένα καυσόξυλο καίγεται πιο γρήγορα όταν είναι κομμένο σε κομμάτια. Αυτό συμβαίνει επειδή σε κομμάτια το ξύλο έχει συνολικά μεγαλύτερη επιφάνεια από όταν είναι ολόκληρο. Ένα ξύλο έχει προσεγγιστικά σχήμα κυλίνδρου με διάμετρο βάσης 40 cm και ύψος 30 cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειάς του όταν είναι ολόκληρο και όταν είναι κομμένο (σκισμένο) σε 4 ίσα κομμάτια, όπως στην εικόνα.

7.2 Όγκος πρίσματος και πυραμίδας

Δ1. Πόσο χώρο πιάνει;

Α. Στην εικόνα βλέπουμε ένα στερεό σχήμα από δύο οπτικές γωνίες (όψεις). Πόσο χώρο καταλαμβάνει αυτό το στερεό;

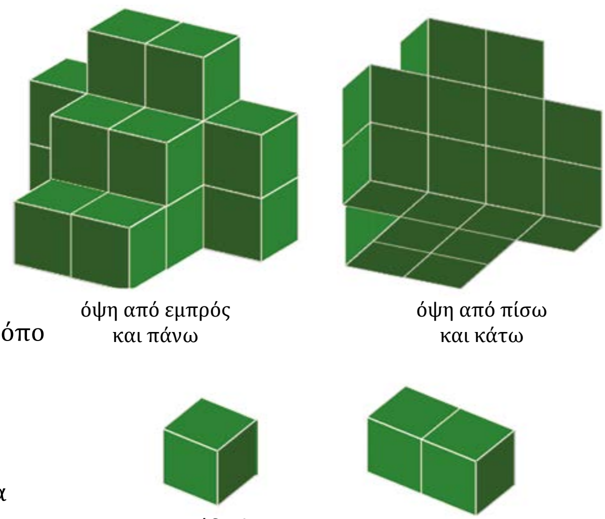
Να χρησιμοποιήσετε ως μονάδα μέτρησης:

α) το Α

β) το Β

γ) μια άλλη μονάδα μέτρησης που επινοήσατε εσείς

Συζητήστε στην τάξη τα αποτελέσματα και τον τρόπο που τα σκεφτήκατε.



όψη από εμπρός και πάνω

όψη από πίσω και κάτω

μονάδα Α

μονάδα Β

Β. Συχνά ακούμε εκφράσεις όπως:

- ένα λίτρο γάλα
- κατά την αιμοδοσία δίνουμε περίπου 450 ml αίμα
- 3 κούπες αλεύρι και μία κούπα ζάχαρη
- 50 κυβικά μέτρα μπετόν

Τι κοινό έχουν όλες αυτές οι εκφράσεις;

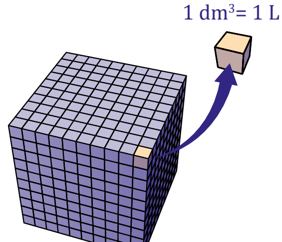
Συζητάμε

...για χωρητικότητες και όγκους

Σε καθημερινές μας εκφράσεις χρησιμοποιούμε τις λέξεις χωρητικότητα (π.χ. μιας δεξαμενής πετρελαίου) και όγκος (π.χ. του αέρα που υπάρχει στην αίθουσα διδασκαλίας). Η μαθηματική έννοια που σχετίζεται με αυτές είναι η έννοια του όγκου.

Όταν μετράμε τον όγκο ενός στερεού σχήματος, αυτό που κάνουμε είναι να τον συγκρίνουμε με ένα άλλο στερεό σχήμα που το χρησιμοποιούμε ως μονάδα μέτρησης. Το πιο βολικό σχήμα για να μετρήσουμε τον όγκο είναι ένας κύβος. Έχει καθιερωθεί λοιπόν να χρησιμοποιούμε ως μονάδα μέτρησης όγκου τον όγκο ενός κύβου με ακμή 1 m. Αυτόν τον όγκο τον ονομάζουμε κυβικό μέτρο και το συμβολίζουμε με $1\ m^3$.

Επειδή πολύ συχνά χρειάζεται να μετρήσουμε όγκους πολύ μικρότερους από $1\ m^3$, χρησιμοποιούμε υποδιαιρέσεις του. Έτσι, έχουμε το $1\ dm^3$ (κύβος με ακμή 1 dm), το $1\ cm^3$ (κύβος με ακμή 1 cm) και το $1\ mm^3$ (κύβος με ακμή 1 mm). Μια βολική μονάδα είναι το 1 λίτρο (1 L) το οποίο είναι $1\ dm^3$.



Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Το αποτέλεσμα της μέτρησης του χώρου που καταλαμβάνει ένα στερεό σχήμα το ονομάζουμε **όγκο.** Ο όγκος είναι ένας θετικός αριθμός που εξαρτάται από τη μονάδα μέτρησης που χρησιμοποιούμε.

Μια μονάδα μέτρησης του όγκου είναι ο όγκος κύβου με ακμή 1 m, τον οποίο ονομάζουμε **κυβικό μέτρο** $\left(1\ \text{m}^3\right)$.

Υποδιαιρέσεις του κυβικού μέτρου

Ένα κυβικό μέτρο το διαιρούμε σε:

- κύβους με ακμή 1 dm, τα οποία ονομάζουμε **κυβικά δέκατα** $\left(1\ \text{dm}^3\right)$,
- κύβους με ακμή 1 cm, τα οποία ονομάζουμε **κυβικά εκατοστά** $\left(1\ \text{cm}^3\right)$,
- κύβους με ακμή 1mm, τα οποία ονομάζουμε **κυβικά χιλιοστά** $\left(1\ \text{mm}^3\right)$.

Ισχύει ότι:

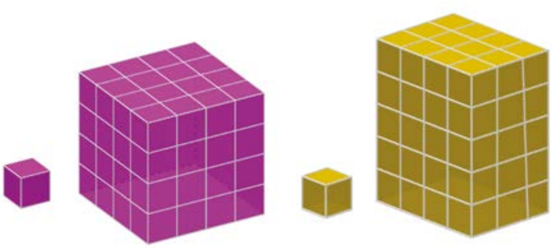
$$1\ \text{m}^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1.000\ \text{dm}^3,\ 1\ \text{dm}^3 = 1.000\ \text{cm}^3,\ 1\ \text{cm}^3 = 1.000\ \text{mm}^3$$

Μια συνηθισμένη μονάδα είναι το λίτρο (L)

Το 1 L είναι ένα κυβικό δεκατόμετρο $\left(1\ \text{dm}^3\right)$. Ισχύει ότι $1\ \text{L} = 1.000\ \text{cm}^3$ και για αυτό το $1\ \text{cm}^3$ λέγεται και χιλιοστόλιτρο (mL). Δηλαδή, $1\ \text{L} = 1.000\ \text{mL}$ και $1\ \text{mL} = 1\ \text{cm}^3$.

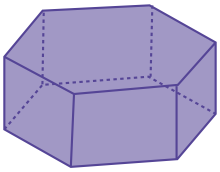
Δ2. Ας μετρήσουμε κυβάκια

Α. Στην εικόνα βλέπουμε έναν κύβο και ένα πρίσμα (που είναι ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο). Καθένας από τους μικρούς κύβους έχει ακμή 1 cm. Ποιος είναι ο όγκος κάθε στερεού με μονάδα μέτρησης τον όγκο του μικρού κύβου;



Συζητήστε στην ομάδα σας και στη συνέχεια παρουσιάστε στην τάξη τον τρόπο που εργαστήκατε.

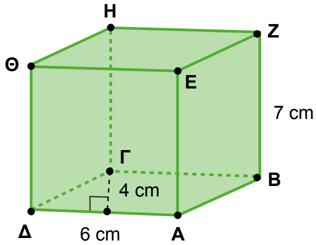
Β. Έχουμε ένα εξαγωνικό πρίσμα με εμβαδόν βάσης $40\ \text{cm}^2$ και ύψος 3 cm. Πώς μπορούμε να αξιοποιήσουμε τον τρόπο με τον οποίο βρήκαμε τον όγκο του κύβου και του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου για να βρούμε και τον όγκο του εξαγωνικού πρίσματος;



Συζητάμε

...για όγκους πρισμάτων

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε τον όγκο ενός πρίσματος, συνήθως χρησιμοποιούμε ως μονάδα μέτρησης τον όγκο ενός κύβου. Έτσι, χρειάζεται να υπολογίσουμε πόσες φορές μεγαλύτερος είναι ο όγκος του πρίσματος από τη μονάδα μέτρησης, ή αλλιώς πόσες φορές χωράει μέσα στο πρίσμα ο κύβος που χρησιμοποιούμε για μονάδα μέτρησης. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα πρίσμα που η βάση του είναι το παραλληλόγραμμο



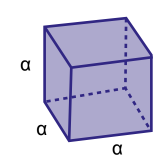
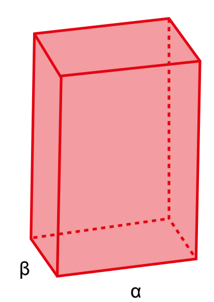
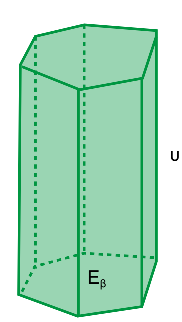
ΑΒΓΔ και το ύψος του είναι 7 cm. Αν υπολογίσουμε το εμβαδόν της βάσης του, θα βρούμε πόσα τετράγωνα πλευράς 1 cm χωράνε στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Έχουμε $(ΑΒΓΔ) = 4 \cdot 6 = 24\ cm^2$, δηλαδή η βάση του πρίσματος καλύπτεται με 24 τετράγωνα πλευράς 1 cm.

Αν λοιπόν στρώναμε μία στρώση κύβους ακμής 1 cm, θα χρειαζόμασταν 24 τέτοιους κύβους για να καλύψουμε τη βάση, ακόμα κι αν δεν ήταν όλοι οι κύβοι ολόκληροι. Επειδή το πρίσμα έχει ύψος 7 cm, θα χρειαστούν 7 στρώσεις για να καλύψουμε όλο το πρίσμα με κύβους ακμής 1 cm. Οπότε ο όγκος του πρίσματος είναι $V = 24 \cdot 7 = 168\ cm^3$ και γενικά $V = (\text{εμβαδόν βάσης}) \cdot (\text{ύψος})$.

Το ίδιο συμβαίνει για οποιοδήποτε πρίσμα, όποια βάση κι αν έχει.

Συχνά συμβολίζουμε τον όγκο με V, που προέρχεται από το αγγλικό volume.

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

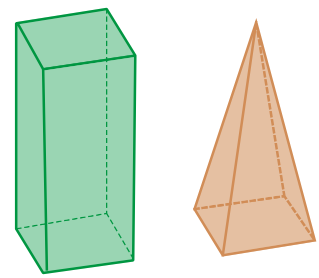
λεκτικά…	**…και με σχήματα**
Για να υπολογίσουμε τον όγκο ενός κύβου ακμής α, πολλαπλασιάζουμε το εμβαδόν της βάσης του (που είναι $α^2$) με το ύψος του (που είναι α). Οπότε ο όγκος κύβου ακμής α είναι $V = α^3$.	 $V = α^3$
Για να υπολογίσουμε τον όγκο ενός ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου με ακμές α, β και γ, πολλαπλασιάζουμε το εμβαδόν της βάσης του (που είναι $α \cdot β$) με το ύψος του (που είναι γ). Οπότε ο όγκος ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου με διαστάσεις α, β και γ είναι $V = α \cdot β \cdot γ$. Αν διπλασιάσουμε τη μία διάσταση του παραλληλεπίπεδου, πώς αλλάζει ο όγκος του; Αν διπλασιάσουμε τις δύο διαστάσεις;	 $V = α \cdot β \cdot γ$
Για να υπολογίσουμε τον όγκο οποιουδήποτε πρίσματος, πολλαπλασιάζουμε το εμβαδόν της βάσης του ($E_β$) με το ύψος του (υ). Οπότε ο όγκος πρίσματος είναι $V = E_β \cdot υ$.	 $V = E_β \cdot υ$

Δ3. Κατασκευές και πειράματα

α) Κατασκευάστε με χαρτόνι ένα πρίσμα και μια πυραμίδα με ίσες βάσεις και το ίδιο ύψος. Ξεκινήστε με ένα ανάπτυγμα για κάθε στερεό. Το πιο βολικό είναι να χρησιμοποιήσετε ως βάση ένα τετράγωνο.

Αφού τα κατασκευάσετε, αφαιρέστε τη μία βάση του πρίσματος και τη βάση της πυραμίδας.

Γεμίστε την πυραμίδα με άμμο (ή με αλεύρι) και αδειάστε τη στο πρίσμα. Πόσες πυραμίδες χρειάζεστε για να γεμίσετε το πρίσμα;

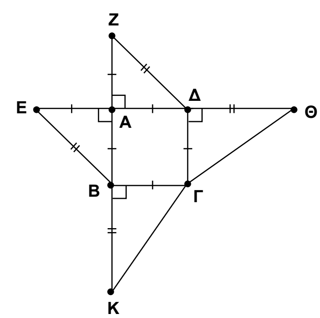


Φτιάχνω ογκομετρικό δοχείο

Εναλλακτικά, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ογκομετρικό δοχείο για να μετρήσετε πόσο νερό χωράει στο πρίσμα και πόσο στην πυραμίδα.

β) Χρησιμοποιήστε το διπλανό ανάπτυγμα για να φτιάξετε τρεις ίδιες πυραμίδες.

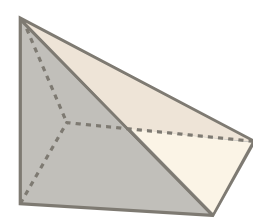
Ξεκινήστε με το τετράγωνο ΑΒΓΔ. Μετά κατασκευάστε τα ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα ΑΔΖ και ΑΒΕ. Στη συνέχεια, κατασκευάστε τα ορθογώνια τρίγωνα ΓΔΘ και ΓΒΚ, έτσι ώστε $ΔΘ = ΒΚ = ΔΖ$.



Τρεις πυραμίδες κάνουν έναν κύβο

Κόψτε το ανάπτυγμα και διπλώστε πάνω στις πλευρές του τετραγώνου (που θα είναι η βάση της πυραμίδας). Το αποτέλεσμα θα είναι μία πυραμίδα σαν της εικόνας.

Κατασκευάστε τρεις ίδιες πυραμίδες. Αυτές τις πυραμίδες προσπαθήστε να τις «συναρμολογήσετε» σε έναν κύβο. Τι σχέση έχει ο όγκος καθεμίας από τις πυραμίδες με τον όγκο του κύβου;



Συζητάμε

...για όγκους πυραμίδων

Έχουμε μία πυραμίδα και ένα πρίσμα με ίδια βάση και ίσα ύψη. Μπορούμε να βρούμε τη σχέση των όγκων του πρίσματος και της πυραμίδας γεμίζοντας με ένα υλικό (π.χ. άμμο) την πυραμίδα και αδειάζοντάς τη στο πρίσμα. Επίσης, μπορούμε να το κάνουμε με ένα ογκομετρικό δοχείο.

Όγκοι πρίσματος και πυραμίδας

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Ο όγκος μιας πυραμίδας είναι ίσος με το ένα τρίτο του όγκου πρίσματος με την ίδια βάση και το ίδιο ύψος με την πυραμίδα. Οπότε ο όγκος πυραμίδας είναι $V = \frac{1}{3} \cdot E_β \cdot υ$, όπου $E_β$ είναι το εμβαδόν της βάσης της πυραμίδας και υ το ύψος της.

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. Μια σχετικά μικρή πισίνα έχει σχήμα ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου με μήκος 10 m, πλάτος 6 m και βάθος 1,8 m. Πόσα κυβικά μέτρα νερό χρειάζονται για να γεμίσει; Να συγκρίνετε την ποσότητα νερού της πισίνας με την ποσότητα νερού που χρησιμοποιεί ένας άνθρωπος την ημέρα (στην Ευρώπη, κάθε ενήλικας χρησιμοποιεί περίπου 180 Lt την ημέρα) και την ελάχιστη ποσότητα νερού που χρειάζεται ο άνθρωπος για να ζήσει (που είναι περίπου 50 L την ημέρα).

Απάντηση

Ο όγκος της πισίνας είναι: $V = 10 \cdot 6 \cdot 1.8 = 108 \text{ m}^3$.

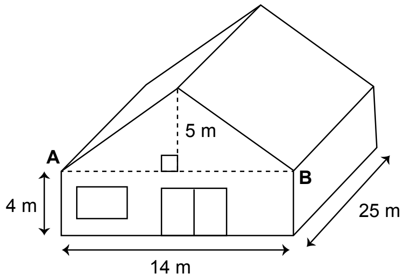
Άρα χρειάζεται 108 κυβικά μέτρα νερό για να γεμίσει.

Εφόσον το 1 m^3 είναι 1.000 L, η πισίνα χρειάζεται 108.000 L νερό.

Συγκρίνοντας με την ελάχιστη απαιτούμενη ποσότητα νερού: $\frac{108.000}{50} = 2.160$. Δηλαδή στην πισίνα αυτή υπάρχει η ελάχιστη απαιτούμενη ποσότητα νερού για έναν άνθρωπο για 2.160 μέρες (περίπου 6 χρόνια).

Συγκρίνοντας με τη μέση κατανάλωση νερού στην Ευρώπη: $\frac{108.000}{180} = 600$. Δηλαδή η ποσότητα νερού στην πισίνα αντιστοιχεί στη μέση κατανάλωση ενός ενήλικα σε 600 μέρες.

2. Στο σχεδιάγραμμα φαίνεται μια αποθήκη με τις διαστάσεις της. Πάνω από την ΑΒ υπάρχει πατάρι που χρησιμοποιείται και αυτό ως αποθηκευτικός χώρος. Να βρείτε τον όγκο του παταριού και τον συνολικό όγκο της αποθήκης. Να λάβετε υπόψη σας ότι οι τοίχοι έχουν πάχος 30 cm. Επίσης, επειδή και η στέγη έχει περίπου το ίδιο πάχος, το πατάρι χάνει περίπου 40 cm ύψος.



Απάντηση

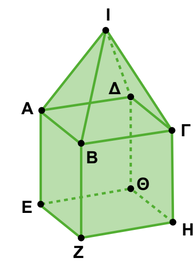
Το πάχος των τοίχων και της στέγης επηρεάζει τις εσωτερικές διαστάσεις της αποθήκης: Το πλάτος είναι 13,4 m (αφαιρέσαμε 0,3 m για κάθε τοίχο), το μήκος είναι 24,4 m. Το ύψος (των 4 m) δεν επηρεάζεται. Επηρεάζεται όμως το ύψος του παταριού, που θα είναι περίπου 4,6 m.

Το πατάρι είναι ένα τριγωνικό πρίσμα με βάση που έχει εμβαδόν $E_\beta = \frac{13,4 \cdot 4,6}{2} = 30,82 \text{ m}^2$ και ύψος το μήκος της αποθήκης, δηλαδή 24,4 m. Οπότε ο όγκος του παταριού είναι: $V_{\pi\alpha\tau} = 30,82 \cdot 24,4 = 752,008 \text{ m}^3$, δηλαδή περίπου 752 m^3.

Για τον συνολικό όγκο της αποθήκης μπορούμε να υπολογίσουμε τον όγκο του ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου (που είναι κάτω από το πατάρι) και να τον προσθέσουμε στον όγκο του παταριού. Ο όγκος του ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου είναι $V_{o\rho\theta} = 13,4 \cdot 24,4 \cdot 4 = 1.307,84 \text{ m}^3$, δηλαδή περίπου 1.308 m^3. Οπότε ο συνολικός όγκος της αποθήκης είναι $V = 752 + 1.308 = 2.060 \text{ m}^3$.

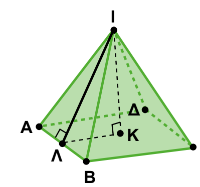
Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τον συνολικό όγκο της αποθήκης θεωρώντας την ως πενταγωνικό πρίσμα.

3. **Ένα σχήμα αποτελείται από ένα κυβικό μέρος ως βάση, πάνω στο οποίο υπάρχει μια πυραμίδα, όπως φαίνεται στην εικόνα. Ο κύβος έχει ακμή 60 cm και η πυραμίδα είναι κανονική και έχει ύψος 60 cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας και τον όγκο του σχήματος.**



Απάντηση

Για το εμβαδόν της επιφάνειας του σχήματος πρέπει να υπολογίσουμε τις παράπλευρες έδρες της πυραμίδας (τα τέσσερα ισοσκελή τρίγωνα) και τις πέντε από τις έξι έδρες του κύβου.



Επειδή η πυραμίδα είναι κανονική, το ύψος της ΙΚ θα «πέφτει» στο κέντρο Κ του τετραγώνου ΑΒΓΔ. Αν ονομάσουμε Λ το μέσο του ΑΒ, τότε το τρίγωνο ΙΚΛ είναι ορθογώνιο και έχει ΙΚ = 60 cm, ΚΛ = 30 cm, οπότε από το Πυθαγόρειο Θεώρημα θα έχουμε:

$$\text{Ι}\Lambda^2 = \text{ΙΚ}^2 + \text{Κ}\Lambda^2 = 60^2 + 30^2 = 4.500$$

άρα $\text{Ι}\Lambda = \sqrt{4.500} \simeq 67$ cm.

Οπότε για το εμβαδόν της επιφάνειας έχουμε:

$$\text{Ε} = 4\cdot(\text{ΙΑΒ}) + 5\cdot(\text{ΑΒΕΖ}) = 4\cdot\frac{60\cdot 67}{2} + 5\cdot 60^2 = 26.040 \text{ m}^2$$

Για τον υπολογισμό του όγκου θα προσθέσουμε τους όγκους του κύβου και της πυραμίδας:

$$V = 60^3 + \frac{1}{3}\cdot 60^2\cdot 60 = 288.000 \text{ cm}^3$$

Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε

1. Έχουμε τέσσερις συσκευασίες με την ίδια χωρητικότητα (τον ίδιο όγκο). Η πρώτη είναι ένας κύβος ακμής 12 cm. Οι άλλες τρεις είναι ορθογώνια παραλληλεπίπεδα με διαστάσεις (σε cm) $8\times 8\times 27$, $8\times 12\times 18$ και $6\times 12\times 24$ αντιστοίχως. Να βρείτε ποια από τις τρεις συσκευασίες χρειάζεται το λιγότερο υλικό για να κατασκευαστεί. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

2. Έχουμε ένα τριγωνικό πρίσμα που η βάση του είναι ένα ορθογώνιο τρίγωνο διαστάσεων 3 cm, 4 cm και 5 cm. Το ύψος του πρίσματος είναι 2 cm. Εξετάστε πώς θα αλλάξει η επιφάνεια και πώς θα αλλάξει ο όγκος του πρίσματος,

α) αν διπλασιάσουμε το ύψος του πρίσματος

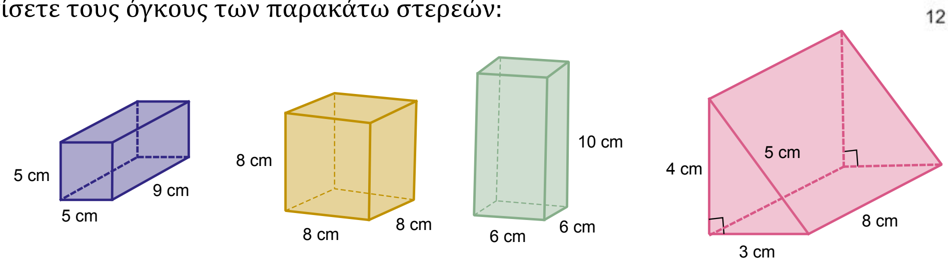
β) αν διπλασιάσουμε τις δύο κάθετες πλευρές της βάσης του πρίσματος

γ) αν διπλασιάσουμε και το ύψος του πρίσματος και τις δύο κάθετες πλευρές της βάσης του

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Στην εικόνα βλέπουμε μια χάρτινη συσκευασία γάλακτος και τις διαστάσεις της. Να βρείτε τον όγκο του γάλακτος που χωράει σε κυβικά εκατοστά $\left(cm^3\right)$ και σε λίτρα (L).

2. Να υπολογίσετε τους όγκους των παρακάτω στερεών:

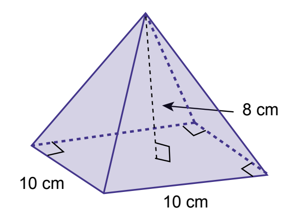


3. Να υπολογίσετε τον όγκο:

α) μιας τριγωνικής πυραμίδας που έχει ύψος 18 cm και βάση με εμβαδόν 32 cm^2

β) μιας τετραγωνικής πυραμίδας με πλευρά βάσης και ύψος 5 cm

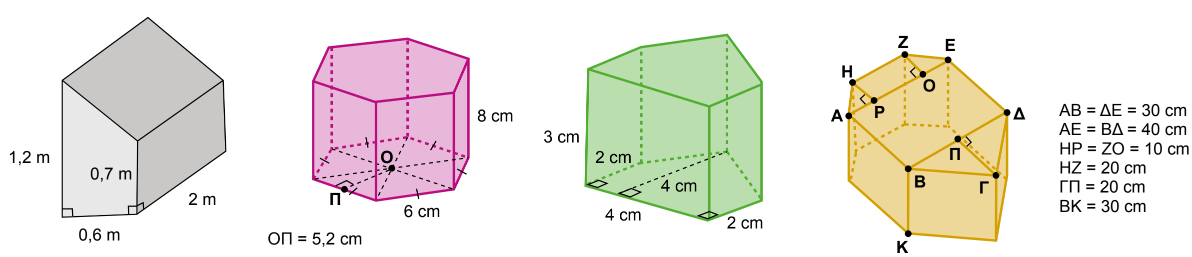
γ) της πυραμίδας του διπλανού σχήματος



4. Να βρείτε δύο αντικείμενα σε σχήμα ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου (π.χ. κουτιά απορρυπαντικών), να μετρήσετε τις διαστάσεις που χρειάζεστε και να βρείτε τους όγκους τους.

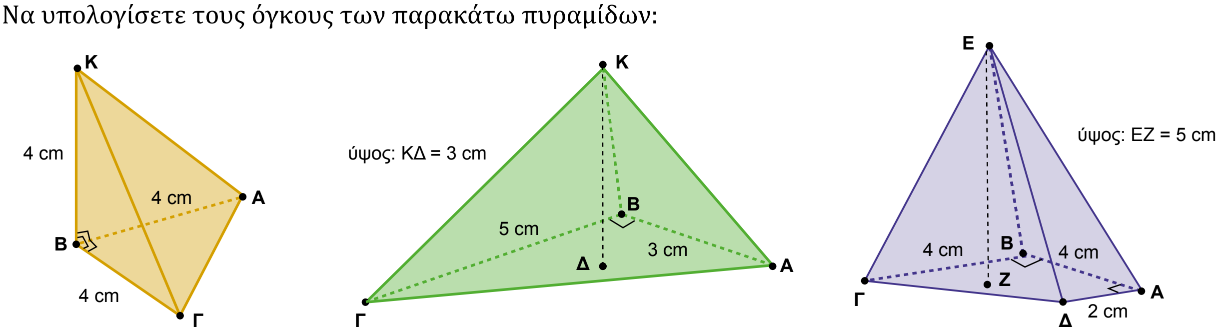
Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

5. Να υπολογίσετε τους όγκους των παρακάτω στερεών:



α β γ δ

6. Να υπολογίσετε τους όγκους των παρακάτω πυραμίδων:



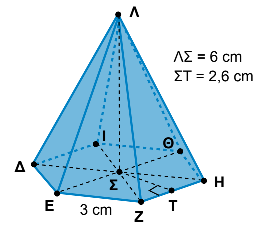
α β γ

7. Το εμβαδόν της επιφάνειας ενός κύβου είναι 294 cm^2. Ποιος είναι ο όγκος του;

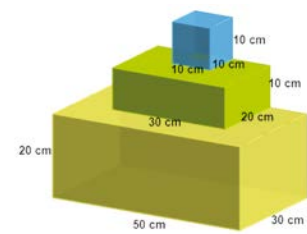
8. Ένα τριγωνικό πρίσμα έχει όγκο 50 cm^3. Η τριγωνική έδρα του έχει εμβαδόν 12,5 cm^2. Ποιο είναι το ύψος του πρίσματος;

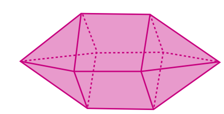
9. Μια τριγωνική πυραμίδα έχει όλες τις ακμές της ίσες με 10 cm και το ύψος της είναι περίπου 8,2 cm. Να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειάς της και τον όγκο της. (Μια τριγωνική πυραμίδα λέγεται και τετράεδρο, αφού έχει τέσσερις έδρες. Το τετράεδρο που έχει όλες τις έδρες του ίσες, όπως σε αυτή την άσκηση, λέγεται κανονικό τετράεδρο.)

10. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας και τον όγκο της κανονικής εξαγωνικής πυραμίδας του σχήματος.



11. Να υπολογίσετε τον όγκο καθενός από τα διπλανά στερεά.





Ένας κύβος ακμής 10 cm και δύο κανονικές πυραμίδες ύψους 10 cm

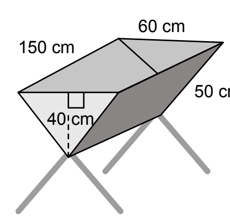
12. Η Παναγιώτα είπε: Αν θέλεις να διπλασιάσεις τον όγκο ενός ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου, δεν έχεις παρά να διπλασιάσεις όλες τις διαστάσεις του. Συμφωνείτε με την άποψη της Παναγιώτας; Εξηγήστε την άποψή σας.

Ο διπλασιασμός του κύβου

13. Στην εικόνα φαίνεται το σχεδιάγραμμα μιας μεταλλικής ποτίστρας για μεγάλα ζώα που θέλει να κατασκευάσει ο ιδιοκτήτης μιας φάρμας.

α) Να υπολογίσετε πόση λαμαρίνα χρειάζεται (εμβαδόν) για να κατασκευαστεί η ποτίστρα.

β) Να υπολογίσετε τον όγκο του νερού που χωράει η ποτίστρα αν είναι εντελώς γεμάτη.



14. Ένα μεγάλο μέρος της διεθνούς μεταφοράς εμπορευμάτων γίνεται με τη χρήση κοντέινερ (εμπορευματοκιβωτίων). Οι πιο συνηθισμένοι τύποι κοντέινερ είναι οι 20 ft και 40 ft*. Στον πίνακα φαίνονται οι εσωτερικές διαστάσεις (σε m) των δύο αυτών τύπων:

Τύπος	Μήκος	Πλάτος	Ύψος
20 ft	5,898	2,352	2,394
40 ft	13,031	2,352	2,394

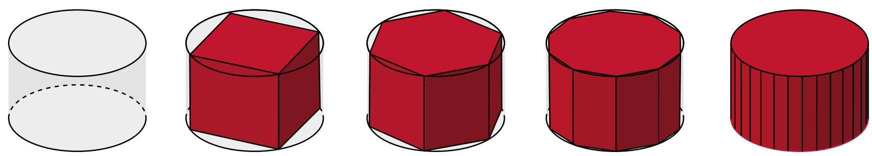
Να υπολογίσετε τη χωρητικότητα κάθε τύπου κοντέινερ. Πόσα από τα μικρότερα κοντέινερ χρειαζόμαστε για να μεταφέρουμε 250 m^3 εμπορευμάτων;

* Το ft είναι συντομογραφία του foot, μιας μονάδας μέτρησης μήκους που χρησιμοποιείται σε κάποιες χώρες, όπως οι ΗΠΑ και η Μ. Βρετανία. 1 ft = 0,3048 m ή 1 m = 3,28 ft.

7.3 Όγκος κυλίνδρου και κώνου

Δ1. Πρισματοκύλινδροι

Έχουμε έναν κύλινδρο (στην πρώτη εικόνα) στον οποίο εφαρμόζουμε εσωτερικά ένα κανονικό πρίσμα (δηλαδή ένα πρίσμα που η βάση του είναι κανονικό πολύγωνο) με όσες πλευρές θέλουμε. Στις διαδοχικές εικόνες φαίνεται ο κύλινδρος με ένα τετραγωνικό, εξαγωνικό, δεκαγωνικό και 30-γωνικό πρίσμα.



α) Τι σχέση έχει ο όγκος του πρίσματος με τον όγκο του κυλίνδρου; Πόσο κοντά στον όγκο του κυλίνδρου μπορούμε να φτάσουμε τον όγκο του πρίσματος αυξάνοντας το πλήθος των πλευρών του;

β) Χρησιμοποιήστε τις γνώσεις σας για τον όγκο του πρίσματος για να καταλήξετε σε έναν τύπο για τον όγκο του κυλίνδρου.

Συζητήστε στην τάξη τις προτάσεις σας.

Από το πρίσμα στον κύλινδρο

Κυλινδρική μολυβοθήκη

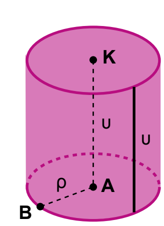
Συζητάμε

...για όγκους σε κυλινδρικά σχήματα

Ας προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε πόσους κύβους ακμής 1 cm χρειαζόμαστε για να γεμίσουμε έναν κύλινδρο με ακτίνα βάσης 5 cm και ύψος 10 cm.

Όπως στα πρίσματα, αν υπολογίσουμε το εμβαδόν της κυκλικής βάσης του κυλίνδρου, θα βρούμε πόσα τετράγωνα πλευράς 1 cm χωράνε σε αυτήν (που πολλά από αυτά δε θα είναι ολόκληρα). Βρίσκουμε λοιπόν ότι $E_{βάσης} = \pi \cdot 5^2 \simeq 78{,}5\ cm^2$, δηλαδή χωράνε 78,5 τετράγωνα πλευράς 1 cm. Οπότε, αν τα 78,5 τετράγωνα τα χρησιμοποιούσαμε ως βάσεις για στερεά σχήματα ύψους 1 cm, θα είχαμε μία στρώση με 78,5 κύβους ακμής 1 cm (που πολλοί από αυτούς δεν είναι ολόκληροι). Επειδή ο κύλινδρος έχει ύψος 10 cm, θα έχουμε 10 τέτοιες στρώσεις. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ο κύλινδρος θα έχει όγκο $V = 78{,}5 \cdot 10 = 785\ cm^3$.

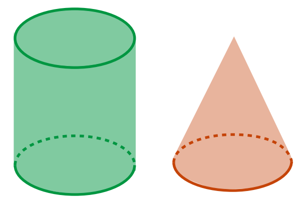
Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

λεκτικά...	...και με σχήματα
Όπως και στα πρίσματα, για να υπολογίσουμε τον όγκο ενός κυλίνδρου, πολλαπλασιάζουμε το εμβαδόν της κυκλικής βάσης του με το ύψος του. Οπότε, αν ο κύλινδρος έχει ακτίνα βάσης ρ και ύψος υ, ο όγκος του θα είναι $V = E_{βάσης} \cdot υ = \pi \cdot ρ^2 \cdot υ$. Αν διπλασιάσουμε την ακτίνα του κυλίνδρου, πώς αλλάζει ο όγκος του; Αν διπλασιάσουμε το ύψος του; Αν τα διπλασιάσουμε και τα δύο;	 $V = \pi \cdot ρ^2 \cdot υ$

Δ2. Κατασκευές και πειράματα, ξανά

Κατασκευάστε με χαρτόνι έναν κύλινδρο και έναν κώνο με ίσες βάσεις και το ίδιο ύψος.

Χρησιμοποιήσετε ογκομετρικό δοχείο για να μετρήσετε πόσο νερό (ή άλλο υλικό, π.χ. άμμο ή αλεύρι) χωράει στον κύλινδρο και πόσο στον κώνο. Τι συμπέρασμα βγάζετε;



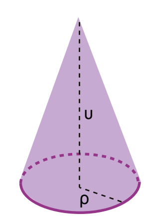
Όγκοι κυλίνδρου και κώνου

Συζητάμε

...για όγκους κώνων

Έχουμε έναν κώνο και έναν κύλινδρο με ίδια βάση και ίσα ύψη. Για να γεμίσουμε με ένα υλικό (π.χ. άμμο) τον κύλινδρο, θα χρειαστεί να γεμίσουμε τρεις φορές τον κώνο και να τον αδειάσουμε στον κύλινδρο. Συμπεραίνουμε από αυτό ότι ο όγκος του κώνου είναι το ένα τρίτο του κυλίνδρου.

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

λεκτικά...	...και με σχήματα
Ο όγκος ενός κώνου είναι ίσος με το ένα τρίτο του όγκου κυλίνδρου με την ίδια βάση και το ίδιο ύψος με τον κώνο. Οπότε ο όγκος κώνου είναι $V = \frac{1}{3}E_\beta \cdot \upsilon = \frac{1}{3} \cdot \pi\rho^2 \cdot \upsilon$, όπου E_β είναι το εμβαδόν της βάσης του κώνου, ρ η ακτίνα του και υ το ύψος του.	 $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \rho^2 \cdot \upsilon$

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. Ένας θερμοσίφωνας έχει εξωτερικές διαστάσεις 1,5 m, ύψος και 0,7 m διάμετρο. Για να καθυστερεί την απώλεια θερμότητας, υπάρχει εσωτερικά μόνωση που μειώνει τις διαστάσεις κατά 5 cm. Να υπολογίσετε:

α) τη χωρητικότητα σε νερό του δοχείου

β) τον όγκο της μόνωσης (μαζί με τα τοιχώματα)

Απάντηση

Οι εσωτερικές διαστάσεις του δοχείου θα είναι:

- ύψος $1{,}5 - 2 \cdot 0{,}05 = 1{,}4$ m (αφαιρέσαμε τα 5 cm τη μόνωσης για την πάνω και την κάτω βάση),
- ακτίνα βάσης $0{,}35 - 0{,}05 = 0{,}3$ m (αφαιρέσαμε τα 5 cm της μόνωσης σε όλη την παράπλευρη επιφάνεια).

α) Η χωρητικότητα του δοχείου θα είναι ο όγκος του κυλίνδρου με τις εσωτερικές διαστάσεις του δοχείου. Οπότε $V_{\varepsilon\sigma} = \pi \cdot 0{,}3^2 \cdot 1{,}4 \simeq 0{,}39564 \ m^3$ ή $V_{\varepsilon\sigma} \simeq 395{,}64$ L.

β) Η μόνωση μαζί με τα τοιχώματα είναι το υλικό που βρίσκεται ανάμεσα στον κύλινδρο με τις εξωτερικές διαστάσεις και στον κύλινδρο με τις εσωτερικές διαστάσεις. Αρκεί λοιπόν να βρούμε τη διαφορά των δύο όγκων.

Ο εξωτερικός όγκος του δοχείου είναι $V_{εξ} = π \cdot 0{,}35^2 \cdot 1{,}5 \simeq 0{,}576975 \text{ m}^3$ ή $V_{εξ} \simeq 576{,}975$ L.

Επομένως, ο όγκος της μόνωσης μαζί με τα τοιχώματα είναι $V_{μον} = 576{,}975 - 395{,}64 = 181{,}335$ L, δηλαδή περίπου 181 λίτρα.

2. Στον ιστότοπο του Εθνικού Αστεροσκοπείου Αθηνών (https://www.meteo.gr) διαβάζουμε ότι κατά τη διάρκεια της κακοκαιρίας Daniel (τον Σεπτέμβριο του 2023) το μεγαλύτερο ημερήσιο ύψος βροχής καταγράφηκε στη Ζαγορά Πηλίου και ήταν ίσο με 754 mm. Τι σημαίνει το 754 mm; Πόσο νερό έπεσε σε ένα τετραγωνικό μέτρο;

Απάντηση

Η μέτρηση της βροχής γίνεται από όργανα που λέγονται βροχόμετρα. Ένα απλό είδος βροχόμετρου μαζεύει το νερό που πέφτει σε μια επιφάνεια περίπου 200 cm². Αν λοιπόν υποθέσουμε ότι σε έναν κύλινδρο με βάση 200 cm² συγκεντρώθηκε νερό ύψους 75,4 cm (που είναι τα 754 mm), αυτό σημαίνει ότι σε επιφάνεια 200 cm² έπεσε νερό όγκου $200 \cdot 75{,}4 \text{ cm}^3$. Άρα σε επιφάνεια 1 cm² έπεσε νερό όγκου $\frac{200 \cdot 75{,}4}{200} = 75{,}4 \text{ cm}^3$. Αφού $1 \text{ m}^2 = 10.000 \text{ cm}^2$, σε ένα τετραγωνικό μέτρο έπεσε νερό όγκου $75{,}4 \cdot 10.000 = 754.000 \text{ cm}^3$. Δηλαδή έπεσαν 754 λίτρα νερό σε κάθε τετραγωνικό μέτρο στη διάρκεια μιας μέρας.

Στην ίδια σελίδα (https://www.meteo.gr/article_view.cfm?entryID=2913) διαβάζουμε επίσης ότι «Για λόγους σύγκρισης, αναφέρεται ότι στην περιοχή της Αθήνας (μετεωρολογικός σταθμός Ελληνικού, ΕΜΥ) σημειώνονται κατά μέσο όρο περίπου 400 mm σε έναν χρόνο!».

Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε

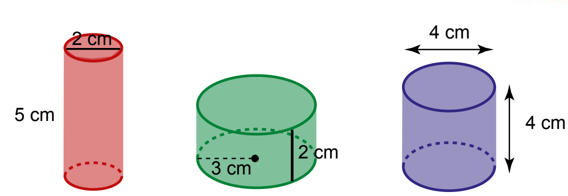
Έχουμε δύο συσκευασίες με την ίδια χωρητικότητα (τον ίδιο όγκο). Η πρώτη είναι ένας κύβος ακμής 12 cm. Η άλλη είναι ένας κύλινδρος με διάμετρο 13 cm και ύψος 13 cm. Να βρείτε ποια συσκευασία είναι περισσότερο οικονομική.

Το οικονομικότερο κουτί

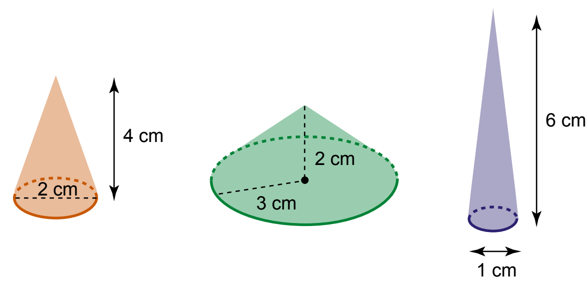
Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Στη διπλανή εικόνα βλέπουμε ένα κυλινδρικό μεταλλικό κουτί αναψυκτικού με διάμετρο βάσης 5,5 cm και ύψος 14,5 cm. Να υπολογίσετε τον όγκο του κουτιού.

2. Να υπολογίσετε τους όγκους των διπλανών κυλίνδρων.



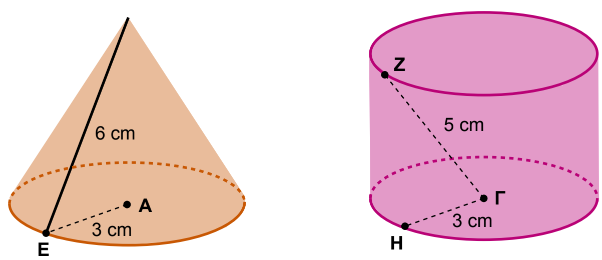
3. Να υπολογίσετε τους όγκους των παρακάτω κώνων:



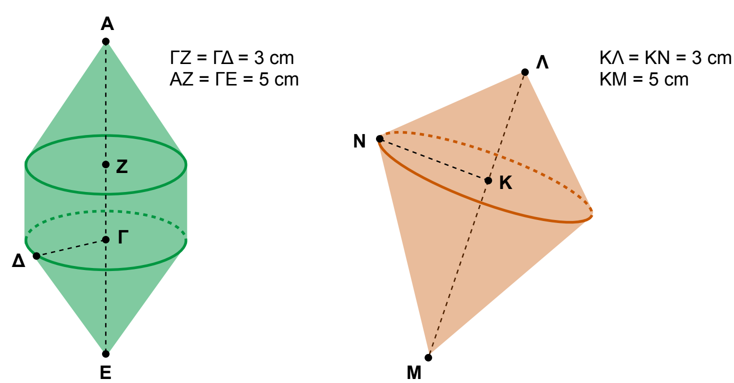
4. Να βρείτε ένα ποτήρι σε κυλινδρικό σχήμα και να υπολογίσετε τον όγκο του, αφού μετρήσετε τις διαστάσεις που χρειάζεστε. Αυτό που βρήκατε είναι η χωρητικότητα του ποτηριού σε νερό;

Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

5. Να υπολογίσετε τους όγκους των παρακάτω στερεών:



6. Να υπολογίσετε τους όγκους των παρακάτω στερεών:



7. Να υπολογίσετε τον όγκο:

α) ενός κυλίνδρου που έχει ακτίνα 20 cm και γενέτειρα 10 cm (γενέτειρα είναι κάθε ευθύγραμμο τμήμα στην καμπύλη επιφάνεια του κυλίνδρου που είναι κάθετο στις βάσεις του).

β) ενός κώνου που έχει ακτίνα 10 cm και γενέτειρα 20 cm (γενέτειρα είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει την κορυφή του κώνου με ένα σημείο της κυκλικής βάσης του).

8. Μια κυλινδρική δεξαμενή νερού έχει εξωτερικά διάμετρο 8,6 m και ύψος 5 m. Τα πλευρικά της τοιχώματα και η βάση της έχουν πάχος 15 cm, ενώ το πάνω μέρος της έχει πάχος 10 cm. Να υπολογίσετε τη χωρητικότητα της δεξαμενής σε νερό.

9. Ένας κύλινδρος έχει παράπλευρη επιφάνεια εμβαδού 1.884 cm^2 και ύψος 30 cm. Να υπολογίσετε:

α) την ακτίνα της βάσης του κυλίνδρου

β) τον όγκο του κυλίνδρου

10. Στο σπίτι του παππού της Αθηνάς, στο χωριό, υπάρχει ένα πηγάδι που φτιάχτηκε πριν από 100 περίπου χρόνια και έχει ακόμα νερό. Η Αθηνά ρώτησε, μέτρησε και βρήκε τα εξής: Η διάμετρος του κυλινδρικού πηγαδιού είναι 1 μέτρο. Είναι χτισμένο με πέτρα γύρω γύρω και το τοίχωμα αυτό έχει πάχος 40 εκατοστά περίπου. Το πηγάδι έχει βάθος 10 μέτρα και το νερό τώρα είναι σε βάθος περίπου 9 μέτρων. Μπορείτε να βρείτε τον όγκο των χωμάτων που έσκαψαν και αφαίρεσαν οι άνθρωποι για να κατασκευάσουν το πηγάδι;

11. Ποιος κύλινδρος έχει μεγαλύτερο όγκο: εκείνος που έχει διάμετρο 2 m και ύψος 1 m ή εκείνος που έχει διάμετρο 1 m και ύψος 2 m; Μπορείτε να το βρείτε χωρίς να κάνετε υπολογισμούς;

12. Ένα κατάστημα πουλάει παγωτό σε τρία διαφορετικά δοχεία από λεπτή γκοφρέτα που τρώγεται. Όλα τα δοχεία τα γεμίζει μέχρι το χείλος και τα πουλάει στην ίδια τιμή. Το ένα δοχείο είναι κυβικό με ακμή 5 cm. Το άλλο είναι κυλινδρικό με ακτίνα 2,5 cm και ύψος 6 cm. Και το τρίτο είναι κωνικό με διάμετρο 8 cm και ύψος 6 cm. Ποιο δοχείο θα διαλέγατε για να έχετε την περισσότερη ποσότητα παγωτού;

13. Ο Μαξίμ βγάζει από το ψυγείο μια συσκευασία με γάλα (τετραγωνικό πρίσμα με διαστάσεις 7 × 7 × 11 cm) και βάζει στο ποτήρι (κύλινδρος με διάμετρο 6 cm και ύψος 12 cm). Το γάλα φτάνει μέχρι τα χείλη του ποτηριού και δε μένει γάλα στο κουτί. Ήταν γεμάτο το κουτί όταν ο Μαξίμ το έβγαλε από το ψυγείο ή όχι;

14. Το μέγιστο ύψος του θερμοκηπίου της φωτογραφίας είναι 4 μέτρα και το μήκος του είναι 20 μέτρα. Να υπολογίσετε με προσέγγιση την επιφάνειά του και τον όγκο του. Εξηγήστε τι υποθέσεις κάνατε για να το υπολογίσετε.

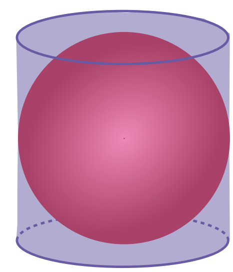
15. Τι θα άλλαζε περισσότερο τον όγκο ενός κώνου: να διπλασιάσουμε την ακτίνα του ή να διπλασιάσουμε το ύψος του; Εξηγήστε τον τρόπο που σκεφτήκατε.

7.4 Εμβαδόν και όγκος σφαίρας

Δ1. Σφαίρες και κύλινδροι

Ο Περικλής διάβαζε: «Ο Αρχιμήδης, που έζησε από το 287 μέχρι το 212 π.Χ., ήταν ο πρώτος που υπολόγισε την επιφάνεια και τον όγκο της σφαίρας. Σήμερα ξέρουμε ότι η επιφάνεια και ο όγκος της σφαίρας είναι τα $\frac{2}{3}$ της επιφάνειας και του όγκου του κυλίνδρου στον οποίο είναι εγγεγραμμένη».

Σταμάτησε το διάβασμα και είπε: «Κι έχει εδώ μια απόδειξη... Καλά, είναι μεγάλη για να τη διαβάσουμε τώρα... αλλά τι σημαίνει "του κυλίνδρου στον οποίο είναι εγγεγραμμένη";».



Η Βαλμίρα τού είπε: «Το έχουμε ξανασυναντήσει αυτό. Ένα πολύγωνο είναι εγγεγραμμένο σε έναν κύκλο όταν οι κορυφές του είναι πάνω στον κύκλο. Ε, και μια σφαίρα θα είναι εγγεγραμμένη σε έναν κύλινδρο αν είναι μέσα σε αυτόν... και... τον ακουμπάει».

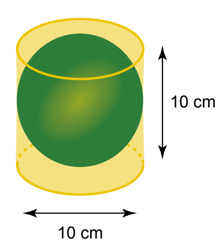
Τα δύο παιδιά πήραν χαρτί και μολύβι, έφτιαχναν σχήματα και δοκίμαζαν αριθμούς για να καταλάβουν αυτά που μόλις διάβασε ο Περικλής.

α) Να υπολογίσετε κι εσείς την επιφάνεια και τον όγκο μιας σφαίρας με ακτίνα 10 cm.

β) Προσπαθήστε να γενικεύσετε: Ποια είναι η επιφάνεια και ποιος είναι ο όγκος σφαίρας με ακτίνα ρ; Συζητήστε στην τάξη.

Συζητάμε

...για σφαίρες και κυλίνδρους



Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια σφαίρα με ακτίνα 5 cm, η οποία είναι μέσα σε έναν κύλινδρο με τρόπο που οι βάσεις και η παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου εφάπτονται στη σφαίρα.

Ο κύλινδρος θα έχει βάση ακτίνας 5 cm και ύψος 10 cm. Οπότε θα έχει επιφάνεια:

$$E_{κυλ} = 2\cdot E_{βασ} + E_{παρ} = 2\cdot π\cdot 5^2 + 2\cdot π\cdot 5\cdot 10 \simeq 471\ cm^2$$

και όγκο:

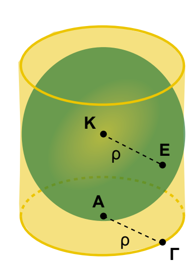
$$V_{κυλ} = π\cdot 5^2\cdot 10 \simeq 785\ cm^3$$

Επομένως, η σφαίρα θα έχει επιφάνεια:

$$E_{σφ} = \frac{2}{3}E_{κυλ} \simeq \frac{2}{3}\cdot 471 = 314\ cm^2$$

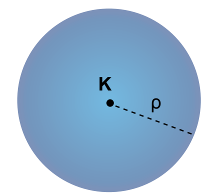
και όγκο:

$$V_{σφ} = \frac{2}{3}\cdot V_{κυλ} \simeq \frac{2}{3}\cdot 785 \simeq 523{,}33\ cm^3$$



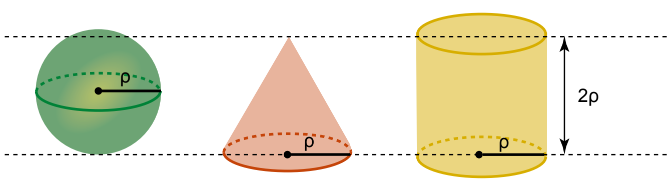
Γενικά, αν η σφαίρα έχει ακτίνα ρ, ο κύλινδρος θα έχει ακτίνα ρ και ύψος 2ρ, οπότε η επιφάνεια του κυλίνδρου θα είναι $E_{κυλ} = 2\cdot E_{βασ} + E_{παρ} = 2\cdot π\cdot ρ^2 + 2\cdot π\cdot ρ\cdot 2ρ = 6πρ^2$ και ο όγκος του $V_{κυλ} = π\cdot ρ^2\cdot 2ρ = 2πρ^3$. Οπότε η επιφάνεια και ο όγκος της σφαίρας θα είναι τα $\frac{2}{3}$ της επιφάνειας και του όγκου του κυλίνδρου.

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

λεκτικά...	...και με σχήματα
Το εμβαδόν της επιφάνειας και ο όγκος μιας σφαίρας που έχει ακτίνα ρ υπολογίζονται από τους τύπους: $E_{σφ} = 4πρ^2 \qquad V_{σφ} = \frac{4}{3}πρ^3$	 Αν $ρ = 5$ cm, $E_{σφ} = 4π \cdot 5^2$ $V_{σφ} = \frac{4}{3}π \cdot 5^3$

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

Να γράψετε από μία ισότητα για κάθε ζευγάρι όγκων από τα τρία σχήματα της εικόνας:



Απάντηση

Η σφαίρα, ο κώνος και ο κύλινδρος έχουν ακτίνα ρ. Ο κώνος και ο κύλινδρος έχουν ύψος 2ρ.

Η σφαίρα εγγράφεται (δηλαδή μπορούμε να τη μετακινήσουμε ώστε να γίνει εγγεγραμμένη) στον κύλινδρο. Άρα $V_{σφ} = \frac{2}{3} \cdot V_{κυλ}$. Ο κώνος και ο κύλινδρος έχουν ίδια ακτίνα και ίδιο ύψος, άρα $V_{κων} = \frac{1}{3} \cdot V_{κυλ}$. Επομένως, η σχέση ανάμεσα στους όγκους σφαίρας και κώνου θα είναι: $V_{σφ} = 2 \cdot V_{κων}$.

Λεκτικά:

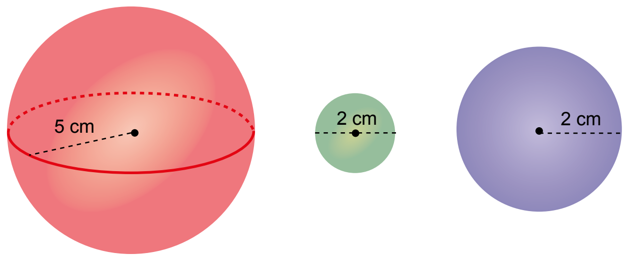
- Ο όγκος της σφαίρας είναι τα $\frac{2}{3}$ του όγκου κυλίνδρου με ακτίνα ίση με της σφαίρας και ύψος όσο η διάμετρος της σφαίρας.
- Ο όγκος του κώνου είναι το $\frac{1}{3}$ του όγκου κυλίνδρου με ίση ακτίνα και ίσο ύψος με του κώνου.
- Ο όγκος της σφαίρας είναι διπλάσιος από τον όγκο του κώνου με διάμετρο και ύψος ίσα με τη διάμετρο της σφαίρας.

Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε

Μια σφαίρα μπορεί να εγγραφεί (να γίνει εγγεγραμμένη) σε έναν κύλινδρο, αλλά και σε έναν κύβο και σε ένα πρίσμα με βάση κανονικό εξάγωνο. Ποιο είναι το μήκος μιας πλευράς της βάσης αυτών των δύο πρισμάτων; Ποιος είναι ο όγκος τους; Πώς σχετίζονται οι όγκοι σφαίρας, κύβου, εξαγωνικού πρίσματος και κυλίνδρου;

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Να υπολογίσετε την επιφάνεια και τον όγκο καθεμίας από τις σφαίρες της εικόνας:



2. Να υπολογίσετε την επιφάνεια και τον όγκο σφαίρας η οποία:

α) έχει ακτίνα 3 cm

β) έχει διάμετρο 1 m

γ) είναι εγγεγραμμένη σε κύλινδρο με ακτίνα βάσης 5 cm

3. Ο Περικλής έχει στο σακίδιό του δύο μπάλες του πόλο (η μπάλα του πόλο έχει ακτίνα 11,1 cm περίπου). Πόσο όγκο πιάνουν οι μπάλες στο σακίδιο;

Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

4. Να βρείτε μία μπάλα του ποδοσφαίρου, να μετρήσετε τις διαστάσεις που χρειάζεστε και να βρείτε την επιφάνεια και τον όγκο της. Ο όγκος που βρήκατε είναι και ο όγκος του αέρα που έχει μέσα;

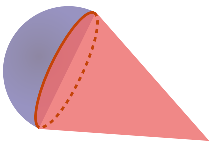
5. Η περίμετρος μιας μπάλας του μπάσκετ είναι περίπου 75 cm. (Με την έκφραση «περίμετρος της μπάλας» εννοούμε την περίμετρο ενός μέγιστου κύκλου της.)

α) Να δείξετε ότι η ακτίνα της μπάλας είναι 11,9 cm.

β) Να υπολογίσετε την επιφάνεια και τον όγκο της μπάλας.

Μπάλες και μπαλάκια

6. Στην εικόνα φαίνεται ένα σχήμα που αποτελείται από ένα ημισφαίριο ακτίνας 5 cm και έναν κώνο με την ίδια ακτίνα και ύψος 7 cm. Να υπολογίσετε την επιφάνεια και τον όγκο του σχήματος.



7. Γνωρίζουμε ότι μια σφαιρική δεξαμενή έχει χωρητικότητα (δηλαδή χωράει) 9,2 m^3 νερού. Η Παναγιώτα υπολόγισε ότι για το βάψιμό της εξωτερικά θα χρειαστούν 2 λίτρα χρώμα. Στο κουτί του χρώματος γράφει ότι κάθε λίτρο χρώματος καλύπτει επιφάνεια 10 m^2. Ο Περικλής ισχυρίζεται ότι δε θα φτάσουν τα 2 λίτρα για να βαφτεί η δεξαμενή. Εσείς τι λέτε;

8. Θέλουμε να κατασκευάσουμε διαφανή κυλινδρικά δοχεία τα οποία να χωρούν ακριβώς τέσσερα μπαλάκια του τένις το ένα πάνω στο άλλο. Τα μπαλάκια έχουν διάμετρο 6,3 εκατοστά. Τι διαστάσεις θα έχουν τα δοχεία εσωτερικά; Πόσος όγκος αέρα θα υπάρχει σε κάθε δοχείο με τέσσερα μπαλάκια (χωρίς τον αέρα που υπάρχει μέσα στα μπαλάκια);

9. Ποιο στερεό έχει μεγαλύτερο όγκο, ένας κύλινδρος με ακτίνα 2 m και ύψος 3 m ή μια σφαίρα με διάμετρο 4 m;

10. Οι Ιάπωνες αγρότες έχουν βρει τρόπο να παράγουν κυβικά καρπούζια. Ο λόγος που ξεκίνησε αυτό είναι η εξοικονόμηση χώρου. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε καρπούζια που έχουν όγκο 8 L το καθένα. Τι διαστάσεις πρέπει να έχει η βάση ενός τετράγωνου κουτιού για να χωρέσει τέσσερα καρπούζια **α)** αν είναι σφαιρικά, και **β)** αν είναι κυβικά.

11. Μια υπερυψωμένη μεταλλική δεξαμενή νερού αποτελείται από έναν κύλινδρο διαμέτρου 2 m και ύψους 3 m με ένα ημισφαίριο κάτω κι έναν κώνο πάνω. Το νερό φτάνει μέχρι το πάνω μέρος του κυλίνδρου. Να υπολογίσετε τον όγκο του νερού που υπάρχει στη δεξαμενή.

12. Πώς θα αλλάξει η επιφάνεια και πώς ο όγκος μιας σφαίρας αν διπλασιάσουμε την ακτίνα της;

13. Ένα κατάστημα πουλάει παγωτό με τιμή 25 ευρώ το κιλό (το 1 κιλό παγωτό είναι περίπου 2 λίτρα). Αλλά πουλάει και σε χωνάκια ή κυπελλάκια με 2 ευρώ την μπάλα. Η μπάλα έχει διάμετρο περίπου 6 cm. Εξετάστε αν είναι λογική η τιμή για την μπάλα παγωτού σε σύγκριση με την τιμή κιλού.

Ανακεφαλαίωση

Εμβαδά και Όγκοι

Ερωτήσεις – ασκήσεις – προβλήματα

1. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστή ή Λανθασμένη.

α) Σε όσα σχήματα έχουν ανάπτυγμα, το εμβαδόν της επιφάνειάς τους είναι το εμβαδόν του αναπτύγματός τους.

β) Ο όγκος ενός κύβου είναι ίσος με το γινόμενο του εμβαδού της βάσης του επί το ύψος.

γ) Ο όγκος κάθε ορθού πρίσματος είναι ίσος με το γινόμενο των ακμών του.

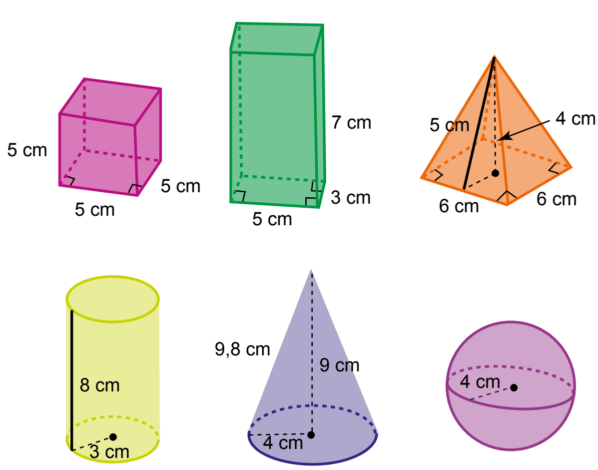
δ) Για να υπολογίσουμε τον όγκο ενός ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ως βάση οποιαδήποτε έδρα του.

ε) Ο όγκος μιας πυραμίδας είναι το μισό του όγκου πρίσματος με την ίδια βάση και το ίδιο ύψος με την πυραμίδα.

στ) Για να υπολογίσουμε τον όγκο ενός κώνου, πολλαπλασιάζουμε το εμβαδόν της βάσης του επί το ύψος του.

ζ) Ο όγκος μιας σφαίρας είναι τα δύο τρίτα του όγκου που έχει ο κύλινδρος στον οποίο η σφαίρα είναι εγγεγραμμένη.

2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας και τον όγκο των παρακάτω στερεών σχημάτων:



3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας και τον όγκο:

α) ενός ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου με διαστάσεις 10 cm, 12 cm και 15 cm

β) ενός πρίσματος με ύψος 10 cm και βάση ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 6 cm και 8 cm

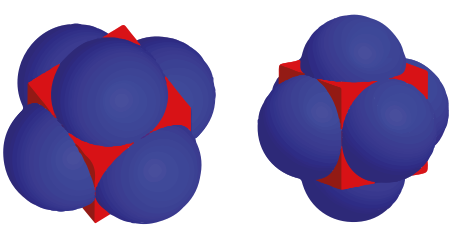
γ) ενός κυλίνδρου με διάμετρο βάσης 12 cm και ύψος 10 cm

δ) ενός κώνου με ακτίνα 8 cm και ύψος 10 cm

ε) μιας σφαίρας που εγγράφεται σε κύβο ακμής 20 cm

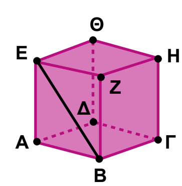
Τρίλιζα στα στερεά

4. Στις παρακάτω εικόνες φαίνεται το ίδιο στερεό από διαφορετικές οπτικές γωνίες. Είναι ένας κόκκινος κύβος με ένα μπλε ημισφαίριο σε κάθε έδρα του. Η ακμή του κύβου είναι 20 cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της εξωτερικής επιφάνειας του στερεού και τον όγκο του.



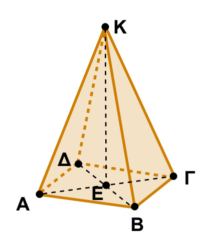
Μετρώντας όγκους μπουκαλιών

5. Να υπολογίσετε την επιφάνεια και τον όγκο των παρακάτω σχημάτων:



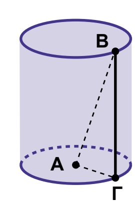
κύβος με
ΒΕ = 10 cm

α



κανονική τετραγωνική
πυραμίδα με
ΚΕ = 10 cm
ΑΒ = 6 cm

β

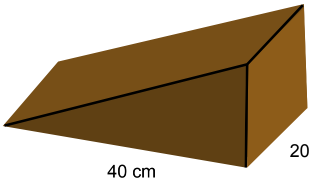


κύλινδρος με
ΑΒ = 13 cm
ΒΓ = 12 cm

γ

6. Ένας κορμός δέντρου είναι κατά προσέγγιση κυλινδρικός με διάμετρο 50 cm και μήκος 210 cm. Επειδή το συγκεκριμένο ξύλο είναι πολύτιμο για την επιπλοποιία, πωλείται από τον ιδιοκτήτη προς 2.000 ευρώ το κυβικό μέτρο. Πόσα χρήματα θα πάρει ο ιδιοκτήτης όταν το πουλήσει;

7. Στην εικόνα φαίνεται μια ξύλινη σφήνα που χρησιμοποιείται για τη σταθεροποίηση αυτοκινήτων. Η μια της πλευρά είναι ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 40 cm και 15 cm. Πόσες τέτοιες σφήνες μπορούν να κατασκευαστούν από ένα κυβικό μέτρο ξυλείας; Πόσο χρώμα χρειάζεται για να βαφτούν οι πλευρές της σφήνας εκτός από τη βάση της, αν 1 L χρώμα καλύπτει 5 m^2 ξύλινης επιφάνειας;



8. Να βρείτε τις διαστάσεις ενός κυλίνδρου που το εμβαδόν των δύο βάσεών του είναι ίσο με το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειάς του.

9. Ένα παραδοσιακό σπίτι σε μια περιοχή της Αιθιοπίας εσωτερικά έχει κυλινδρικό σχήμα με έναν (ενιαίο) μεγάλο κώνο επάνω. Ο κύλινδρος έχει διάμετρο περίπου 8 μέτρα και ύψος 1,5 μέτρο (μετρώντας μέσα στο σπίτι). Ο κώνος ξεκινάει μετά το κυλινδρικό μέρος και έχει ύψος περίπου 3 μέτρα μετρώντας από εκεί που τελειώνει το κυλινδρικό μέρος. Πόσος είναι ο όγκος εσωτερικά του σπιτιού;

10. Πόσο πρέπει να μεγαλώσουμε την ακμή σε έναν κύβο για να διπλασιαστεί η επιφάνειά του;

11. Σε ένα θερινό σινεμά πωλείται ποπκόρν σε δύο συσκευασίες. Η μία έχει σχήμα ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου με διαστάσεις 10 cm, 12 cm, 20 cm και έχει τιμή 1,5 ευρώ. Η άλλη είναι κυλινδρική με ακτίνα 7,5 cm και ύψος 22 cm και έχει τιμή 3 ευρώ. Ποια συσκευασία συμφέρει να αγοράσει κάποιος;

Συνδέσεις και επεκτάσεις

12. **α)** Να αναλύσετε τον φυσικό αριθμό 36 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

β) Να βρείτε όλα τα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα με όγκο 36 cm^3 που όλες οι διαστάσεις τους είναι ακέραιοι αριθμοί μεγαλύτεροι του 1.

γ) Από όλα τα πρίσματα του προηγούμενου ερωτήματος, να βρείτε εκείνο που έχει τη μικρότερη επιφάνεια.

13. Η Γη έχει ακτίνα περίπου 6.370 km. Ο μικρότερος από τους πλανήτες του ηλιακού μας συστήματος, ο Ερμής, έχει ακτίνα περίπου 2.440 km και ο μεγαλύτερος, ο Δίας, έχει ακτίνα περίπου 69.910 km. Ο Gliese 581c είναι ένας εξωπλανήτης, δηλαδή ένας πλανήτης έξω από το ηλιακό μας σύστημα, που βρίσκεται σε απόσταση 20,3 έτη φωτός από τη Γη. Η ακτίνα του Gliese 581c εκτιμάται ότι είναι περίπου 50% μεγαλύτερη από της Γης. Να υπολογίσετε (κατά προσέγγιση) τον όγκο του Ερμή, του Δία και του Gliese 581c με μονάδα μέτρησης τον όγκο της Γης.

Ομαδική εργασία

14. Στην ιστοσελίδα του Μουσείου Βυζαντινού Πολιτισμού της Θεσσαλονίκης διαβάζουμε:

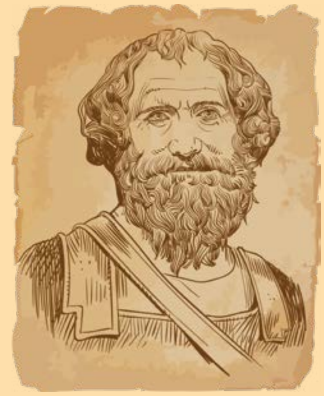
«Ο Λευκός Πύργος είναι κυκλικός, έχει ύψος 33,90 μ. και διάμετρο 21,70 μ. Αποτελείται από ισόγειο και έξι ορόφους. [...]

Από αρχιτεκτονική άποψη η κατασκευή του Πύργου αποτελείται από δύο κυλίνδρους, τον εξωτερικό και τον εσωτερικό. Ο εξωτερικός κύλινδρος υψώνεται μέχρι και τον πέμπτο όροφο, ενώ ο εσωτερικός είναι κατά έναν όροφο ψηλότερος και έτσι εξωτερικά του διαμορφώνεται δώμα, που προσφέρει εξαιρετική θέα...».

Με βάση τις πληροφορίες που μπορείτε να πάρετε από το παραπάνω κείμενο, να υπολογίσετε κατά προσέγγιση τον όγκο του Λευκού Πύργου. Θα χρειαστεί να κάνετε εκτιμήσεις (π.χ. για το ύψος και τη διάμετρο του 6ου ορόφου), τις οποίες θα πρέπει να εξηγήσετε.

15. Οι τύποι του όγκου για το πρίσμα και τον κύλινδρο ισχύουν για ορθό πρίσμα και ορθό κύλινδρο, δηλαδή για στερεά που η παράπλευρη επιφάνειά τους είναι κάθετη στις βάσεις τους. Τι γίνεται όμως αν έχουμε πλάγιο πρίσμα και πλάγιο κύλινδρο; Θυμηθείτε πώς ανασυνθέσαμε την επιφάνεια του παραλληλογράμμου για να δημιουργήσουμε ένα ορθογώνιο. Σκεφτείτε ότι μια στοίβα χαρτιά δε θα αλλάξει όγκο αν της δώσουμε μια κλίση. Με βάση αυτά (και ό,τι άλλο νομίζετε ότι χρειάζεται να αναζητήσετε) επεξεργαστείτε το θέμα του όγκου πλάγιων πρισμάτων, κυλίνδρων, πυραμίδων και κώνων.

Ταξινομούμε στερεά σχήματα



Ο Αρχιμήδης και η μέθοδος της εξάντλησης

Μια από τις πιο σημαντικές του συνεισφορές [του Αρχιμήδη] αφορά τη μέτρηση εμβαδών και την εύρεση όγκων στερεών σχημάτων. ... Στο βιβλίο του ***Περί σφαίρας και κυλίνδρου*** βρίσκει το εμβαδόν της επιφάνειας της σφαίρας, λέγοντας ότι η επιφάνειά της είναι τετραπλάσια από τη επιφάνεια ενός μέγιστου κύκλου της (δηλαδή του κυκλικού δίσκου που η περιστροφή του δημιουργεί τη σφαίρα). Δηλαδή, με σύγχρονη ορολογία $E_{\text{σφαίρας}} = 4\pi\rho^2$. ... Αν φανταστούμε τη σφαίρα εγγεγραμμένη στο εσωτερικό ενός κυλίνδρου, ο Αρχιμήδης απέδειξε ότι ο όγκος της είναι ίσος με τα $\frac{2}{3}$ του όγκου του κυλίνδρου. Με σύγχρονη ορολογία, αν η ακτίνα της σφαίρας είναι ρ, το ύψος της κυλίνδρου θα είναι 2ρ, άρα:

$$V_{\text{σφαίρας}} = \frac{2}{3}V_{\text{κυλίνδρου}} = \frac{2}{3}\cdot\left(\pi\rho^2\right)\cdot\left(2\rho\right) = \frac{4}{3}\pi\rho^3.$$

Boyer, C. – Merzbach. (1997). *Η Ιστορία των Μαθηματικών*, Πνευματικός, σελ. 147-149

Ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί μια μέθοδο τρομακτικά αποτελεσματική, που την ανακάλυψε ο Εύδοξος και που αργότερα θα ονομαστεί μέθοδος της εξάντλησης. Ο όρος εξάντληση αναφέρεται σε νοητική, όχι σε φυσική διαδικασία. Η μέθοδος συνίσταται στο να αποδείξουμε ότι δύο μεγέθη είναι ίσα, αποδεικνύοντας ότι η διαφορά τους είναι μικρότερη από οποιαδήποτε δεδομένη ποσότητα. Το επιτυγχάνουμε όχι με ένα, όχι με δύο, όχι με δέκα βήματα, αλλά με την ενεργοποίηση μιας διαδικασίας χωρίς τέλος, που «εξαντλεί νοητικά» όλα τα διαδοχικά βήματα.

Για παράδειγμα, αν θέλουμε να υπολογίσουμε την επιφάνεια του κύκλου, εγγράφουμε στο εσωτερικό του ένα τετράγωνο, και στη συνέχεια διπλασιάζουμε τις πλευρές του. Η επιφάνεια του πολυγώνου που δημιουργείται σε κάθε καινούριο βήμα, είναι μεγαλύτερη από την προηγούμενη, αλλά πάντοτε μικρότερη από αυτήν του κύκλου. Το ενδιαφέρον αυτής της μεθόδου είναι ότι η διαφορά ανάμεσα στην επιφάνεια του πολυγώνου, που ξέρουμε να την υπολογίσουμε, και αυτήν του κύκλου, που μας είναι άγνωστη, μπορεί να γίνει όσο μικρή θέλουμε, καθώς αυξάνουμε το πλήθος των πλευρών. Μπορούμε λοιπόν να έχουμε όσο καλή προσέγγιση θέλουμε για την επιφάνεια του κύκλου...

Γκετζ, Ν., (1999). *Το Θεώρημα του παπαγάλου*, Πόλις, σελ. 195-196

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ 8

Στατιστική

Για να απαντήσουμε σε ερωτήματα όπως «πόσο έχει μεταβληθεί η κατανάλωση νερού στη χώρα μας;» ή «πόσο χρόνο ξοδεύει ένας κάτοικος της πόλης μας στις μετακινήσεις του καθημερινά;», αρκεί η συλλογή δεδομένων από το κοντινό μας περιβάλλον; Μήπως χρειάζεται να μελετήσουμε ευρύτερο σύνολο ατόμων και περιπτώσεων;

Πολύ συχνά είναι δύσκολο να συλλέξουμε δεδομένα, δηλαδή απαντήσεις από όλα τα άτομα που θα θέλαμε, στο πλαίσιο μιας έρευνας. Πώς μπορούμε να επιλέξουμε κατάλληλο υποσύνολο αυτών των ατόμων, ώστε τα αποτελέσματα της έρευνας να είναι ικανοποιητικά κοντά σε αυτά που θα παίρναμε αν μελετούσαμε όλα τα άτομα;

Στην ενότητα της Στατιστικής θα διερευνήσουμε τη χρήση ενός δείγματος για να απαντήσουμε ερωτήματα σχετικά με έναν πληθυσμό.

ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΕΝΟΤΗΤΕΣ

8.1 Διαχείριση δεδομένων, πληθυσμός και δείγμα.

Δ1. Κατανάλωση καυσίμων

Στα πλαίσια ενός μαθήματος για το περιβάλλον, το τμήμα ενός σχολείου συζήτησε το θέμα της κατανάλωσης καυσίμων κίνησης (πετρέλαιο, βενζίνη ή υγραέριο για αυτοκίνητο ή μοτοσικλέτα) στις σύγχρονες πόλεις. Τα παιδιά χωρίστηκαν σε ομάδες, για να μελετήσουν το θέμα.

Μια ομάδα παιδιών σκέφτηκαν στην αρχή της εβδομάδας να ζητήσουν από όλα τα παιδιά της τάξης να καταγράψουν πόσα λίτρα βενζίνης, πετρελαίου και υγραερίου κίνησης θα καταναλώσουν οι οικογένειές τους, κατά προσέγγιση, και στην αρχή της επόμενης εβδομάδας να συγκεντρώσουν όλα τα στοιχεία, για να μελετήσουν τη μέση κατανάλωση των καυσίμων.

Τότε ο Ηλίας είπε: «Και γιατί να μη ζητήσουμε αυτό να το κάνουν όλα τα παιδιά του σχολείου;».

Η Βασιλική απάντησε: «Γιατί να ενδιαφέρει κάποιον η κατανάλωση καυσίμων μόνο των οικογενειών του σχολείου μας; Να σκεφτούμε πώς θα βρούμε στοιχεία για να υπολογίσουμε τη μέση κατανάλωση καυσίμων όλης της πόλης μας».

α) Να αναφέρετε τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα (αν υπάρχουν) καθεμίας από τις παραπάνω προτάσεις των παιδιών (της ομάδας, του Ηλία και της Βασιλικής).

β) Πώς θα μπορούσατε να συλλέξετε στοιχεία για να κάνετε τη μελέτη που προτείνει η Βασιλική;

γ) Να σκεφτείτε και να παρουσιάσετε στην τάξη σας ένα παράδειγμα ερωτήματος που μπορεί να απαντηθεί με συλλογή δεδομένων από το ευρύτερο περιβάλλον και όχι τον άμεσο περίγυρό σας.

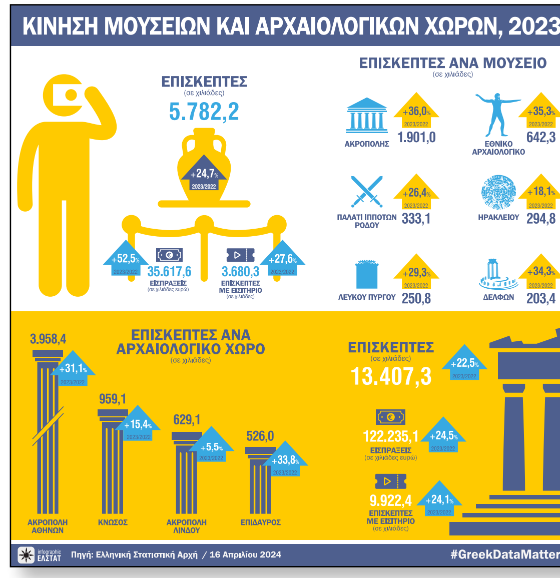
Πώς προτείνετε να γίνει η συλλογή αυτών των δεδομένων;

Συζητάμε

... για στατιστικές έρευνες στο ευρύτερο κοινωνικό περιβάλλον

Συχνά σε ενημερωτικές εκπομπές βλέπουμε δημοσκοπήσεις για την πρόθεση ψήφου των πολιτών, έρευνες σχετικά με την απασχόληση και την ανεργία, με τις τιμές των προϊόντων και το πού βρίσκεται η χώρα μας σε σύγκριση με τον μέσο όρο της Ευρώπης.

Μπορούμε να βρούμε τα αποτελέσματα πολλών τέτοιων ερευνών στην ιστοσελίδα της Ελληνικής Στατιστικής Αρχής, όπως π.χ. για τις επισκέψεις σε μουσεία και αρχαιολογικούς χώρους το 2023. Ένα κοινό τους χαρακτηριστικό είναι ότι αφορούν κάποιο ζήτημα που δεν μπορεί να απαντηθεί ικανοποιητικά με δεδομένα από το άμεσο περιβάλλον μας. Τα ερωτήματα που θέτουν και επιχειρούν να απαντήσουν έχουν ευρύτερο ενδιαφέρον και για να απαντηθούν χρειάζονται δεδομένα από το ευρύτερο κοινωνικό περιβάλλον.



Πηγή: Ελληνική Στατιστική Αρχή

Αν, για παράδειγμα, θέλαμε να υπολογίσουμε τη μέση επίδοση των μαθητών και μαθητριών του γυμνασίου των ελληνικών σχολείων στα Μαθηματικά (και όχι μόνο του σχολείου μας), τότε θα χρειαζόμαστα δεδομένα από το ευρύτερο περιβάλλον.

Ωστόσο υπάρχουν επιπλέον δυσκολίες, όπως για παράδειγμα: Πώς θα συλλέξει κανείς δεδομένα από όλους τους μαθητές και τις μαθήτριες των γυμνασίων της Ελλάδας;

Δ2. Η ιδέα της Βασιλικής

Για να κάνουν την έρευνα για τη μέση κατανάλωση καυσίμων, τα περισσότερα παιδιά του τμήματος συμφώνησαν με την ιδέα της Βασιλικής: να συλλέξουν στοιχεία για την κατανάλωση καυσίμων όλης της πόλης.

Όμως μια ομάδα παιδιών ρώτησε: «Και πώς θα βρούμε στοιχεία για όλα τα οχήματα της πόλης;».

«Μπορούμε να πάρουμε δείγμα» είπε κάποιος.

Ο Ηλίας θυμήθηκε ότι είχε ρωτήσει κάποτε τον παππού του, που είχε αγοράσει ένα καρπούζι: «και πού ξέρεις ότι είναι καλό;» και εκείνος του απάντησε: «ζητάω από τον μανάβη να μου κόψει ένα μικρό κομμάτι, για δείγμα». Ή την αδερφή του, που ήταν διεθνής αθλήτρια στίβου και έδινε δείγμα αίματος για ανάλυση πριν τους αγώνες.

α) Σκέφτεστε άλλες περιπτώσεις που χρησιμοποιούμε τη λέξη «δείγμα»; Να τις συζητήσετε στην τάξη σας.

β) Εσείς πώς ερμηνεύετε το δείγμα στην περίπτωση της έρευνας των παιδιών;

Συζητάμε

… για δείγματα

Στην καθημερινή μας ζωή, ο όρος «δείγμα» εμφανίζεται σε διάφορες περιπτώσεις. Για παράδειγμα, στον έλεγχο καυσίμων, οι ελεγκτές παίρνουν δείγμα για να το αναλύσουν και να βγάλουν συμπεράσματα για όλη την ποσότητα. Κάτι παρόμοιο γίνεται με τον έλεγχο του νερού, ώστε να εξακριβώσουμε για ποιες χρήσεις είναι κατάλληλο.

Επίσης, για τα τεστ που γίνονται ώστε να δούμε αν ένα άτομο έχει προσβληθεί από μια ασθένεια, παίρνουμε δείγμα από την περιοχή του σώματος που εκδηλώνονται τα συμπτώματα.

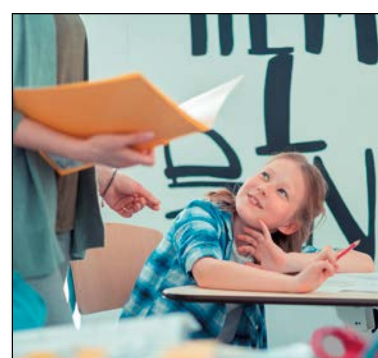
Μπορεί κανείς να σκεφτεί και άλλες περιπτώσεις λήψης δείγματος, όπως σε εξετάσεις αίματος κτλ.

Ακόμα και για να επιλέξουμε το κατάλληλο χρώμα για ένα σπίτι, βάφουμε δοκιμαστικά με ένα μικρό μέρος της μπογιάς ένα μικρό κομμάτι τοίχου, ως δείγμα.

Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις παίρνουμε ως δείγμα ένα μέρος από το όλο.

Αν θέλουμε να απαντήσουμε σε ερωτήματα που αφορούν το ευρύτερο κοινωνικό περιβάλλον, κάνοντας στατιστική έρευνα, συχνά είναι δύσκολο ή αδύνατον να το κάνουμε μελετώντας το όλο.

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να μελετήσουμε τη μέση επίδοση των μαθητών και μαθητριών του γυμνασίου των ελληνικών σχολείων σε ένα συγκεκριμένο τεστ Μαθηματικών.



Ένας τρόπος είναι να το γράψει όλος ο **πληθυσμός** των μαθητών και μαθητριών γυμνασίου της Ελλάδας. Δηλαδή να γράψουν όλοι οι μαθητές και όλες οι μαθήτριες της Ελλάδας το ίδιο τεστ, την ίδια ημέρα. Όμως, πιθανότατα αυτό να είναι δύσκολο, για διάφορους λόγους (δύσκολη οργάνωση, ανάγκη συντονισμού όλων των σχολείων, μεγάλα έξοδα κτλ.).

Ας θυμηθούμε ότι, αν απευθυνόμαστε σε όλο τον πληθυσμό που μας ενδιαφέρει, λέμε ότι κάνουμε απογραφή.

Ωστόσο μπορούμε με κατάλληλες μεθόδους να επιλέξουμε ένα μέρος των παραπάνω παιδιών για να γράψουν αυτό το τεστ και τα αποτελέσματα να είναι «πολύ κοντά» στα αποτελέσματα που θα είχαμε αν το έγραφαν όλα.

Το μέρος αυτό των παιδιών το ονομάζουμε **δείγμα**.

Έτσι, θα βγάλουμε συμπεράσματα για τους μαθητές και τις μαθήτριες γυμνασίου όλων των ελληνικών σχολείων, κάνοντας μια πιο εύκολη, ακόμα και οικονομικά πιο συμφέρουσα διαδικασία.

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Στο πλαίσιο πολλών στατιστικών ερευνών έχουμε ένα σύνολο ατόμων ή στοιχείων και θέλουμε να τα εξετάσουμε ως προς κάποιο ή κάποια χαρακτηριστικά τους. Το σύνολο αυτό το ονομάζουμε **πληθυσμό**. Ωστόσο σε πολλές περιπτώσεις είναι προτιμότερο να μη μελετάμε ολόκληρο τον πληθυσμό (απογραφή), αλλά να αντλούμε δεδομένα και να μελετάμε ένα υποσύνολο του πληθυσμού, που το ονομάζουμε **δείγμα**, βγάζοντας συμπεράσματα για όλο τον πληθυσμό.	Αν θέλουμε να μελετήσουμε ποια μάρκα κινητού τηλεφώνου πωλείται συχνότερα στα καταστήματα της χώρας μας, τότε ένας τρόπος είναι να συλλέξουμε στοιχεία από τα καταστήματα πώλησης κινητών τηλεφώνων της Ελλάδας. Όλα αυτά τα καταστήματα είναι τα στοιχεία (ή άτομα) του πληθυσμού. Τα χαρακτηριστικά που θέλουμε να μελετήσουμε είναι οι πωλήσεις για κάθε μάρκα κινητού τηλεφώνου. Ωστόσο μπορούμε να επιλέξουμε κατάλληλο δείγμα καταστημάτων για να μελετήσουμε τα παραπάνω χαρακτηριστικά.

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. Από τα παρακάτω ερωτήματα, ποια χρειάζονται δεδομένα από το ευρύτερο κοινωνικό μας περιβάλλον για να απαντηθούν;

α) Ποιος είναι ο μέσος όρος του βάρους της σχολικής τσάντας των παιδιών της τάξης μας;

β) Πόσο χρόνο κατά μέσο όρο χρειάζεται για να φτάσει στο σχολείο του ένας μαθητής ή μια μαθήτρια γυμνασίου της περιφέρειας που ανήκει το σχολείο μας;

γ) Πόσα από τα παιδιά του σχολείου μας έχουν στο οικογενειακό τους περιβάλλον κάποιον εργαζόμενο του Εθνικού Συστήματος Υγείας;

δ) Πόσοι νέοι γιατροί ξεκινούν να εργάζονται στο Εθνικό Σύστημα Υγείας της χώρας μας κάθε χρόνο την τελευταία δεκαετία;

Απάντηση

Τα ερωτήματα α) και γ) αφορούν το άμεσο περιβάλλον μας, άρα δε χρειάζονται δεδομένα από το ευρύτερο περιβάλλον. Τα ερωτήματα β) και δ) χρειάζονται δεδομένα από το ευρύτερο κοινωνικό περιβάλλον: το β) από όλη την περιφέρειά μας (π.χ. Αττική, Κρήτη, ανατολική Μακεδονία και Θράκη κτλ.) και το δ) από όλη τη χώρα.

2. Στο διάγραμμα στα αριστερά φαίνεται το ποσοστό των γιατρών το 2022 ανά περιφέρεια, επί του συνόλου των γιατρών της χώρας μας. Το διάγραμμα στα δεξιά δείχνει τα αντίστοιχα ποσοστά για τους αναισθησιολόγους (πηγή: ΕΛΣΤΑΤ). Να διατυπώσετε ένα ερώτημα που μπορεί να απαντηθεί με βάση τα διαγράμματα, τα συμπεράσματα που βγαίνουν και πιθανές αιτίες.

Απάντηση

Ενδεικτικά, ένα ερώτημα που μπορεί να απαντηθεί με βάση τα δεδομένα είναι:
«Σε ποιες περιφέρειες υπάρχει το μεγαλύτερο ποσοστό γιατρών γενικά και αναισθησιολόγων ειδικότερα;».

Όπως βλέπουμε, οι δύο περιοχές με τα μεγαλύτερα ποσοστά γιατρών είναι η Αττική και η κεντρική Μακεδονία, με περίπου 46% και 18%, αντίστοιχα.

Για τους αναισθησιολόγους τα αντίστοιχα ποσοστά είναι 51% και 20%, περίπου.

Άρα βλέπουμε ότι το μεγαλύτερο ποσοστό γιατρών (γενικά) και αναισθησιολόγων υπάρχει στην Αττική. Το δεύτερο μεγαλύτερο είναι στην κεντρική Μακεδονία. Αυτό είναι αναμενόμενο, γιατί πρόκειται για τις περιφέρειες με τον μεγαλύτερο πληθυσμό.

Επίσης η διαφορά του ποσοστού μεταξύ των αναισθησιολόγων και των γιατρών στην Αττική (51% και 46%), αλλά και στην κεντρική Μακεδονία, πιθανώς να οφείλεται στο γεγονός ότι πρόκειται για μια ειδικότητα που δραστηριοποιείται κυρίως σε νοσοκομεία, και στα μεγάλα αστικά κέντρα υπάρχουν τα μεγαλύτερα.

3. Έχουμε τα παρακάτω ερευνητικά ερωτήματα:

α) Μια ομάδα γεωπόνων ερευνά πόσο εξαπλωμένη είναι μια νόσος που πλήττει τα ελαιόδεντρα (ελιές) της Πελοποννήσου.

β) Μια πανεπιστημιακή σχολή μελετά τα ποσοστά των μαθητών και μαθητριών της Γ΄ γυμνασίου της χώρας μας, που σχεδιάζουν να επιλέξουν τον κάθε προσανατολισμό σπουδών στο λύκειο.

γ) Ποιος είναι κατά μέσο όρο ο εβδομαδιαίος χρόνος χρήσης των κοινωνικών δικτύων από τους μαθητές και μαθήτριες όλων των γυμνασίων της Μακεδονίας;

δ) Πού κυμαίνεται η εκπομπή των ρύπων των οχημάτων στην περιφέρεια Αττικής;

Για καθένα από τα παραπάνω ερωτήματα, να απαντήσετε στις ερωτήσεις:

i) Ποιος είναι ο πληθυσμός, ποιο είναι το χαρακτηριστικό που μας ενδιαφέρει και πώς θα περιγράφατε το δείγμα;

ii) Με βάση το ερευνητικό ερώτημα, ποιες ενέργειες είναι λογικό να γίνουν στα δεδομένα που απαρτίζουν το δείγμα;

Απάντηση

α) i) Ο πληθυσμός είναι όλα τα ελαιόδεντρα της Πελοποννήσου και το χαρακτηριστικό που μας ενδιαφέρει είναι αν νοσούν. Το δείγμα είναι ένα μέρος αυτών.

ii) Οι γεωπόνοι θα εξετάσουν αν κάθε δέντρο του δείγματος νοσεί ή όχι από τη συγκεκριμένη νόσο και θα υπολογίσουν το ποσοστό των δέντρων του δείγματος που νοσούν.

β) i) Ο πληθυσμός αποτελείται από όλους τους μαθητές και όλες τις μαθήτριες της Γ΄ γυμνασίου της χώρας μας και το χαρακτηριστικό που μας ενδιαφέρει είναι ο προσανατολισμός που σχεδιάζουν να επιλέξουν. Το δείγμα είναι μέρος αυτών.

ii) Οι ερευνητές θα ρωτήσουν κάθε άτομο του δείγματος ποιον προσανατολισμό σπουδών σχεδιάζει να επιλέξει στο λύκειο, και θα υπολογίσουν τα ποσοστά στο σύνολο του δείγματος, ανά προσανατολισμό.

γ) i) Ο πληθυσμός είναι όλα τα παιδιά των γυμνασίων της Μακεδονίας και το χαρακτηριστικό που μας ενδιαφέρει είναι ο εβδομαδιαίος χρόνος χρήση των κοινωνικών δικτύων. Ως δείγμα παίρνουμε ένα μέρος τους.

ii) Ένας τρόπος είναι να ρωτήσουμε κάθε άτομο του δείγματος να καταγράψει και να μας απαντήσει πόσες ώρες θα χρησιμοποιήσει τα κοινωνικά δίκτυα σε μία εβδομάδα. Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τον μέσο όρο των απαντήσεων των ατόμων του δείγματος.

δ) i) Ο πληθυσμός είναι όλα τα οχήματα που κυκλοφορούν στην περιφέρεια Αττικής και το χαρακτηριστικό που μας ενδιαφέρει είναι οι ρύποι που εκπέμπουν. Το δείγμα αποτελείται από κάποια από αυτά τα οχήματα.

ii) Θα πρέπει να μετρηθούν και να καταγραφούν οι ρύποι κάθε οχήματος του δείγματος. Στη συνέχεια μπορεί να υπολογιστεί το εύρος, το ενδοτεταρτημοριακό εύρος ή ακόμα να γίνει και ένα θηκόγραμμα για τους ρύπους των οχημάτων του δείγματος.

Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε

1. Να σκεφτείτε δύο ερωτήματα που για να απαντηθούν χρειάζεται να συλλεχθούν δεδομένα από το ευρύτερο κοινωνικό περιβάλλον και να γίνει στατιστική έρευνα.
Ποιος είναι ο πληθυσμός και το δείγμα για κάθε ερώτημα; Ποιο είναι το χαρακτηριστικό που μας ενδιαφέρει; Να προτείνετε τρόπους να απαντηθεί το ερώτημα κάνοντας έρευνα στο δείγμα.

2. Να σκεφτείτε ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με βάση τα παρακάτω αποτελέσματα έρευνας ΕΛΣΤΑΤ, με τίτλο «ημερήσιος και περιοδικός Τύπος, 2023» (https://www.statistics.gr/el/infographic-press-2023). Στη συνέχεια να απαντήσετε στα ερωτήματα και να παρουσιάσετε τις απαντήσεις στην τάξη σας.

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Ποια από τα παρακάτω ερωτήματα αναφέρονται στον ευρύτερο κοινωνικό περιβάλλον;

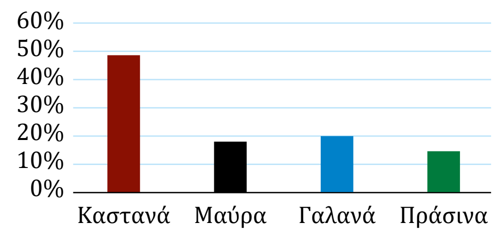
α) Ποιος είναι ο μεγαλύτερος βαθμός στο διαγώνισμα των Μαθηματικών στην τάξη σας;

β) Ποιο είναι το αγαπημένο άθλημα των μαθητών και μαθητριών γυμνασίου της Θεσσαλίας;

γ) Ποιο είναι το αγαπημένο άθλημα των μαθητών και μαθητριών του σχολείου σας;

δ) Πόσο παλιά είναι τα σπίτια στην περιφέρεια που ανήκει το σχολείο σας;

2. Οι μαθητές και οι μαθήτριες ενός γυμνασίου έκαναν μια έρευνα για το χρώμα των ματιών όλων των παιδιών του σχολείου τους, χρησιμοποιώντας ένα δείγμα 50 ατόμων. Τα αποτελέσματα φαίνονται στο ραβδόγραμμα.



α) Από τι αποτελείται το δείγμα αυτό και ποιο είναι το χαρακτηριστικό που μας ενδιαφέρει;

β) Τι ποσοστό των παιδιών του δείγματος έχει γαλανά μάτια;

γ) Με βάση την έρευνα των παιδιών να απαντήσετε (κάνοντας εκτίμηση) στο ερώτημα: «Τι ποσοστό των παιδιών της πόλης που ανήκει το σχολείο έχουν γαλανά μάτια;».

Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

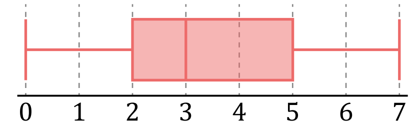
3. Ορισμένα αποτελέσματα της έρευνας της ΕΛΣΤΑΤ με τίτλο «Κίνηση μουσείων και αρχαιολογικών χώρων, 2023» φαίνονται παρακάτω.

α) Ποιες από τις επόμενες ερωτήσεις μπορούν να απαντηθούν με βάση τα αποτελέσματα;

- Ποιο είναι το ποσοστό της αύξησης των επισκεπτών το 2023 σε σύγκριση με το 2022;
- Ποιο μουσείο είχε τις υψηλότερες εισπράξεις από επισκέπτες το 2023;
- Ποιο μουσείο είχε τη μεγαλύτερη ποσοστιαία αύξηση επισκεπτών το 2023 σε σύγκριση με το 2022;
- Πόσο αυξήθηκαν οι εισπράξεις στο Παλάτι των Ιπποτών της Ρόδου το 2023 σε σύγκριση με το 2022;

β) Να απαντήσετε στις ερωτήσεις που μπορούν να απαντηθούν και να διατυπώσετε πιθανές ερμηνείες για τις απαντήσεις σας.

4. Το θηκόγραμμα αφορά μια έρευνα που έγινε σε δείγμα μαθητών και μαθητριών Γ΄ γυμνασίου μιας πόλης με πληθυσμό 70.000 κατοίκους, με ερώτημα «πόσες φορές την εβδομάδα παίζεις κάποιο ομαδικό άθλημα;».



α) Να περιγράψετε τη μεταβλητότητα των απαντήσεων των ατόμων του δείγματος στο ερώτημα.

β) Οι ερευνητές ισχυρίζονται ότι το δείγμα είναι κατάλληλα επιλεγμένο, για να βγουν συμπεράσματα για τον πληθυσμό. Ποιος είναι ο πληθυσμός και τι συμπεράσματα βγαίνουν για αυτόν;

8.2 Δείγμα και δειγματοληψία

Δ1. Έρευνα στο σχολείο: το πιο καλό δείγμα

Η τάξη σας έχει αναλάβει να διεξαγάγει μια έρευνα σχετικά με το πώς περνούν τον ελεύθερο χρόνο τους τα παιδιά του σχολείου.

Το σχολείο έχει 450 παιδιά, αλλά έχετε στη διάθεσή σας μόνο 50 ερωτηματολόγια. Έτσι, θα χρησιμοποιήσετε δείγμα.

α) Ποιος είναι πληθυσμός της έρευνας και ποιο είναι το μέγεθος του δείγματος; Ποιο είναι το χαρακτηριστικό που σας ενδιαφέρει;

β) Συζητήστε στην τάξη ποιο από τα παρακάτω δείγματα θεωρείτε ότι είναι πιο καλό, ώστε να βγάλετε συμπεράσματα για όλο το σχολείο.

- Να μοιράσετε τα ερωτηματολόγια στο τμήμα σας και στο διπλανό τμήμα (κάθε τμήμα έχει 25 παιδιά).
- Να πάρει το κάθε παιδί του τμήματος από 2 ερωτηματολόγια, το ένα να το συμπληρώσει και το άλλο να το δώσει σε φίλο ή φίλη του.
- Να επιλέξετε τυχαία (με κλήρωση) 50 παιδιά του σχολείου που θα συμπληρώσουν τα ερωτηματολόγια.

γ) Προτείνετε κάποιον άλλο τρόπο να επιλεγεί το δείγμα της έρευνας, ώστε να είναι ακόμα πιο αντιπροσωπευτικό;

Συζητάμε

... για εξαγωγή συμπερασμάτων και δειγματοληψία

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να μελετήσουμε τη συχνότητα που οι κάτοικοι της χώρας μας πηγαίνουν στη θάλασσα το καλοκαίρι. Φυσικά δεν μπορούμε να ρωτήσουμε όλους τους κατοίκους της Ελλάδας, δηλαδή να κάνουμε απογραφή. Άρα πρέπει να κάνουμε την έρευνα σε ένα δείγμα του πληθυσμού, π.χ. υποβάλλοντας την ερώτηση «πόσες φορές πήγατε στη θάλασσα την προηγούμενη εβδομάδα;» μια καλοκαιρινή ημέρα.

Μερικές περιπτώσεις όχι τόσο καλών δειγμάτων είναι οι εξής:

Δείγμα 1: Να πάμε σε μια παραλία και να υποβάλουμε την ερώτηση σε όσα άτομα είναι εκεί.

Δείγμα 2: Να ρωτήσουμε τους γείτονές μας.

Δείγμα 3: Να ρωτήσουμε κάνοντας τυχαία τηλέφωνα σε κατοίκους της πόλης μας.

Μερικά από τα προβλήματα που έχει κάθε δείγμα είναι:

Δείγμα 1: Τα άτομα του δείγματος ήδη βρίσκονται στη θάλασσα, άρα είναι «μεροληπτικό», με την έννοια ότι δεν έχουν τη δυνατότητα να απαντήσουν άνθρωποι που δεν πάνε καθόλου στη θάλασσα. Κάτι παρόμοιο ισχύει και για τα επόμενα.

Δείγμα 2: Τα συμπεράσματα της έρευνας αφορούν μόνο τη γειτονιά μας.

Δείγμα 3: Δυνατότητα να απαντήσουν έχουν μόνο όσοι και όσες χρησιμοποιούν σταθερό τηλέφωνο και βρίσκονται στην πόλη μας. Επιπλέον, η ώρα που παίρνουμε τηλέφωνο μπορεί να δημιουργεί μεροληπτικό δείγμα, αφού τις πρωινές ώρες οι εργαζόμενοι απουσιάζουν.

Συνεπώς τα παραπάνω δείγματα δεν είναι **αντιπροσωπευτικά** του πληθυσμού, επομένως από τις απαντήσεις είναι εξαιρετικά δύσκολο να βγάλουμε συμπεράσματα που να ισχύουν με σχετικά ικανοποιητική ακρίβεια για τον πληθυσμό. Ο τρόπος που θα κάνουμε τη **δειγματοληψία**, δηλαδή που θα επιλέξουμε το δείγμα πριν την έρευνα, επηρεάζει την αντιπροσωπευτικότητα του δείγματος.

Αν θέλουμε να κάνουμε μια έρευνα για τις ώρες λειτουργίας όλων των καταστημάτων του κέντρου της πόλης μας χρησιμοποιώντας δείγμα, μπορούμε να ακολουθήσουμε τα εξής βήματα:

- Αποφασίζουμε ποιος είναι ο πληθυσμός (ποια είναι τα καταστήματα που μας ενδιαφέρουν).
- Αποδίδουμε από έναν διαφορετικό φυσικό αριθμό σε κάθε κατάστημα. Αν ο πληθυσμός αποτελείται από 1.000 καταστήματα, αποδίδουμε αριθμούς από 1 έως 1.000.
- Αποφασίζουμε το μέγεθος του δείγματός μας, π.χ. 100 καταστήματα.
- Επιλέγουμε τυχαία, π.χ. με κλήρωση, 100 αριθμούς από 1 έως 1.000.
- Κάνουμε την έρευνά μας στα 100 καταστήματα που αντιστοιχούν στους αριθμούς που επιλέξαμε.

Με αυτόν τον τρόπο, κάθε κατάστημα του πληθυσμού έχει την ίδια πιθανότητα, $\frac{1}{100}$, να επιλεγεί στο δείγμα.

Η δειγματοληψία έχει τις δικές της ιστορίες

Αν επιλέξουμε το δείγμα με αυτόν τον τρόπο, τότε τα συμπεράσματα της έρευνας αναμένουμε να είναι «ικανοποιητικά κοντά» με τα αποτελέσματα που θα είχαμε αν κάναμε απογραφή, δηλαδή την έρευνα σε όλο τον πληθυσμό. Έτσι, μπορούμε από την έρευνα στα 100 καταστήματα να βγάλουμε συμπεράσματα που θα ισχύουν με ικανοποιητική ακρίβεια για τα 1.000 καταστήματα.

Αυτή τη μέθοδο να επιλέξουμε το δείγμα μας την ονομάζουμε **απλή τυχαία δειγματοληψία**.

Δ2. Συνέχεια της έρευνας στο σχολείο

Το τμήμα σας έκανε την έρευνα της Δ1, αφού επέλεξε το δείγμα των 50 παιδιών με κλήρωση από όλο το σχολείο.

Ένα άλλο τμήμα του σχολείου σας έκανε την ίδια έρευνα με 75 ερωτηματολόγια, μοιράζοντάς σε τρία τμήματα της Α΄ γυμνασίου.

Να σχολιάσετε τα υπέρ και τα κατά των δύο δειγμάτων.

Συζητάμε

… για το μέγεθος του δείγματος

Ας επιστρέψουμε στην έρευνα για το ωράριο λειτουργίας των καταστημάτων στο κέντρο της πόλης.

Αντί για τη μέθοδο δειγματοληψίας που περιγράψαμε, κάποιος επέλεξε το εξής για την ίδια έρευνα: Ξεκίνησε στις 5 το απόγευμα από το πιο πολυσύχναστο σημείο της περιοχής και μέχρι τις 9 κατέγραψε το ωράριο λειτουργίας των πρώτων 200 καταστημάτων που συνάντησε και ήταν ανοιχτά.

Με αυτόν τον τρόπο, από τη μία ακολούθησε μια πιο απλή διαδικασία και από την άλλη είχε διπλάσιο δείγμα.

Το μέγεθος του δείγματος συνδέεται με την αντιπροσωπευτικότητά του: Ένα δείγμα 10 καταστημάτων θα ήταν πολύ μικρό. Ωστόσο, η μέθοδος δειγματοληψίας είναι ιδιαίτερα κρίσιμη.

Για παράδειγμα, με τον τρόπο που επιλέχθηκαν τα 200 καταστήματα, δεν είχαν καμία πιθανότητα να βρίσκονται στο δείγμα καταστήματα που λειτουργούν μέχρι τις 5 το απόγευμα ή που είναι μακριά από το πολυσύχναστο σημείο της περιοχής.

Έτσι, ο τρόπος επιλογής των 100 καταστημάτων (απλή τυχαία δειγματοληψία) πληροί περισσότερες προϋποθέσεις αντιπροσωπευτικότητας από τον τρόπο επιλογής των 200.

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Για να είναι αξιόπιστα τα συμπεράσματα μιας έρευνας σε ένα δείγμα, δηλαδή για να ισχύουν με ικανοποιητική ακρίβεια στον πληθυσμό, το δείγμα χρειάζεται να είναι **αντιπροσωπευτικό** του πληθυσμού.	Όλοι οι κάτοικοι της πόλης μας έχουν συναινέσει, ώστε να συμμετέχουν σε μια ιατρική μελέτη. Στο πλαίσιο αυτής θα μελετήσουμε την τιμή της HDL λιποπρωτεΐνης των ανδρών μεταξύ 40 και 49 (πληθυσμός). Αν αυτοί είναι 1.000 (μέγεθος πληθυσμού), τότε μπορούμε να επιλέξουμε π.χ. 100 (μέγεθος δείγματος) με τυχαίο τρόπο.

Η **δειγματοληψία**, δηλαδή η μέθοδος που θα επιλέξουμε το δείγμα, επηρεάζει την αντιπροσωπευτικότητά του.

Μια μέθοδος δειγματοληψίας που μπορεί να μας εξασφαλίσει ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα είναι η **απλή τυχαία δειγματοληψία**, όταν δηλαδή κάθε άτομο ή στοιχείο του πληθυσμού έχει την ίδια πιθανότητα να επιλεγεί στο δείγμα.

Για παράδειγμα μπορούμε να κάνουμε κλήρωση μεταξύ των αριθμών φορολογικού μητρώου τους (απλή τυχαία δειγματοληψία). Στη συνέχεια τα άτομα του δείγματος υποβάλλονται σε αιματολογικές εξετάσεις και επεξεργαζόμαστε τα αποτελέσματα, που αναμένουμε να ισχύουν με ικανοποιητική ακρίβεια για τον πληθυσμό.

Για λόγους συντομίας κάθε δείγμα που έχει προκύψει από απλή τυχαία δειγματοληψία θα το ονομάζουμε **τυχαίο**.

Δ3. Μήκος ποδιού

Σε μια μεγάλη έρευνα συλλέχθηκαν δεδομένα από όλα τα παιδιά των σχολείων της Νέας Ζηλανδίας (https://new.censusatschool.org.nz/). Ένα από τα χαρακτηριστικά για τα οποία υπάρχουν δεδομένα είναι το μήκος του δεξιού τους ποδιού.

Δεν έχουμε πρόσβαση να δούμε όλα τα δεδομένα, αλλά μπορούμε να αντλήσουμε τυχαία δείγματα μεγέθους έως 1.000 άτομα το καθένα, μέσω μιας ειδικής εφαρμογής.

Έτσι, σε ένα δείγμα (Α) που αντλήσαμε μεγέθους 1.000 η μέση τιμή ήταν $\bar{x}=23{,}21$ εκατοστά και η διάμεσος $\delta=23$ εκατοστά.

α) Τι συμπέρασμα βγάζετε για τον πληθυσμό;

β) Στη συνέχεια αντλήσαμε άλλα 4 τυχαία δείγματα 1.000 ατόμων που είχαν τα εξής χαρακτηριστικά:

Β: $\bar{x}=23{,}47$ και $\delta=23{,}6$

Γ: $\bar{x}=23{,}41$ και $\delta=23$

Δ: $\bar{x}=23{,}24$ και $\delta=23$

Ε: $\bar{x}=23{,}37$ και $\delta=23{,}5$

Πώς σχολιάζετε τις διαφορές μεταξύ των δειγμάτων; Συζητήστε τις σκέψεις σας στην τάξη.

Συζητάμε

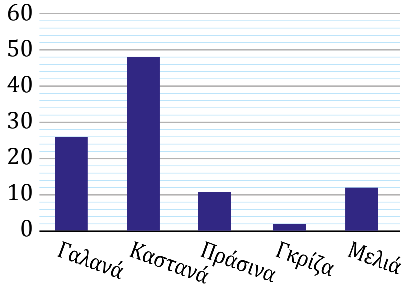
... για τα συμπεράσματα της έρευνας και τη μεταβλητότητα

Το διπλανό διάγραμμα δείχνει τα αποτελέσματα ενός τυχαίου δείγματος 1.000 ατόμων (Α) από την έρευνα της Δ3, σχετικά με το χρώμα ματιών των συμμετεχόντων.

Όπως βλέπουμε, στο δείγμα Α:

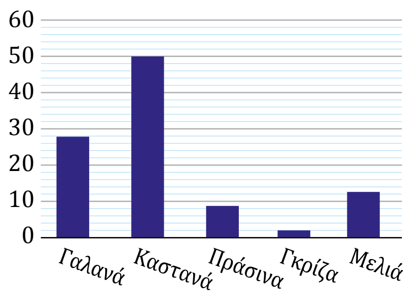
Γύρω στο 26% έχουν γαλανά μάτια, γύρω στο 48% έχουν καστανά, γύρω στο 11% έχουν πράσινα, περίπου 2% έχουν γκρίζα και γύρω στο 12% έχουν μελιά.

Εφόσον έχουμε τυχαίο δείγμα, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα παραπάνω αποτελέσματα ισχύουν με ικανοποιητική ακρίβεια για τον πληθυσμό.

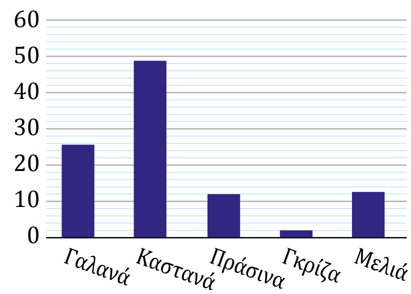


Δείγμα Α

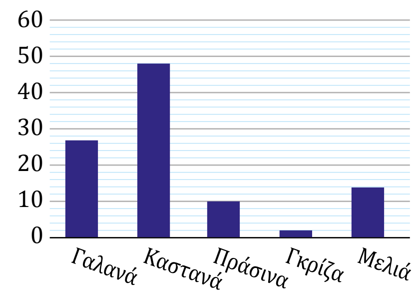
Παίρνοντας άλλα τρία τυχαία δείγματα 1.000 ατόμων (τα Β, Γ και Δ) βλέπουμε ότι τα αποτελέσματα δε διαφέρουν πολύ.



Δείγμα Β



Δείγμα Γ



Δείγμα Δ

Πράγματι, συγκρίνοντας τα αποτελέσματα των τεσσάρων δειγμάτων έχουμε προσεγγιστικά:

Δείγμα	Γαλανά	Καστανά	Πράσινα	Γκρίζα	Μελιά
Α	26%	48%	11%	2%	12%
Β	28%	50%	9%	2%	12%
Γ	25%	48%	12%	(λιγότερο από) 2%	13%
Δ	27%	48%	10%	2%	14%

Παρατηρούμε ότι υπάρχει μεταβλητότητα των ευρημάτων από δείγμα σε δείγμα. Π.χ. το ποσοστό των καστανών ματιών μεταβάλλεται μεταξύ 48% με 50%. Ωστόσο τα ποσοστά για κάθε χρώμα ματιών είναι «κοντά», κάτι που δε θέτει σε αμφισβήτηση τα αρχικά μας συμπεράσματα.

Πληθυσμός και δείγματα

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

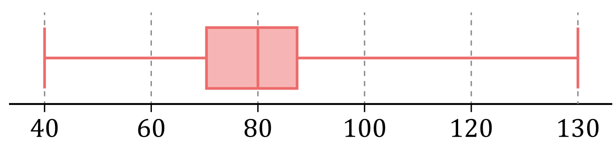
Μεταξύ δειγμάτων του ίδιου πληθυσμού, οι στατιστικοί δείκτες που αφορούν το ίδιο χαρακτηριστικό εμφανίζουν μεταβλητότητα. Αυτό συμβαίνει ακόμα κι αν τα δείγματα είναι αντιπροσωπευτικά και δε μας εμποδίζει να βγάζουμε συμπεράσματα για τον πληθυσμό.	Ο μέσος όρος του ύψους των παιδιών σε μια χώρα (πληθυσμός) είναι 156,8 cm. Χωρίς να το γνωρίζουμε πήραμε 4 τυχαία δείγματα παιδιών, ώστε να είναι αντιπροσωπευτικά. Ο μέσος όρος ύψους σε κάθε δείγμα ήταν: 156,5 cm, 157,5 cm, 156,1 cm και 156,5 cm. Άρα ο μέσος όρος ύψους των δειγμάτων μεταβάλλεται από 156,1 μέχρι 157,5 cm.

- Εδώ ο όρος «μεταβλητότητα» χρησιμοποιείται για να εκφράσει τις διαφορετικές τιμές που μπορεί να παίρνει ο ίδιος στατιστικός δείκτης (π.χ. μέσος όρος) ενός χαρακτηριστικού του ίδιου πληθυσμού (ύψος παιδιών), από δείγμα σε δείγμα.
- Ωστόσο, θυμόμαστε ότι έχουμε χρησιμοποιήσει την έννοια της «μεταβλητότητας ενός χαρακτηριστικού» για να εκφράσουμε πόσο διάσπαρτα είναι τα δεδομένα μιας στατιστικής έρευνας. Σε αυτή την περίπτωση, τα μέτρα μεταβλητότητας που χρησιμοποιούμε είναι το εύρος και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος, που φαίνονται και στο θηκόγραμμα.

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. Σε έρευνα που έγινε σε ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα 1.000 μαθητών και μαθητριών όλων των τάξεων σε μια πολιτεία των ΗΠΑ μετρήθηκε σε mm (χιλιοστά) το μήκος του δείκτη του χεριού που χρησιμοποιούν περισσότερο. Τα αποτελέσματα φαίνονται παρακάτω:

Μέση τιμή $\bar{x} = 79,3$
Πρώτο τεταρτημόριο $Q_1 = 70$
Τρίτο τεταρτημόριο $Q_3 = 88$
Μέγιστη τιμή 130

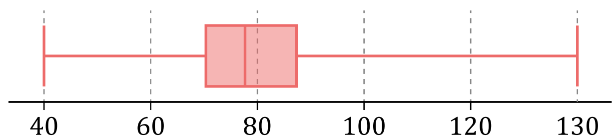


α) Ποιος είναι ο πληθυσμός της έρευνας;

β) Ποια συμπεράσματα μπορείτε να βγάλετε για τον πληθυσμό, σχετικά με τον μέσο όρο, τη διάμεσο και τη μεταβλητότητα του χαρακτηριστικού «μήκος του δείκτη»;

γ) Παρόμοια έρευνα έγινε σε άλλο δείγμα, ίδιου μεγέθους, του ίδιου πληθυσμού. Ποιες διαφορές παρατηρείτε στα αποτελέσματα των δύο δειγμάτων; Πώς τις ερμηνεύετε;

Μέση τιμή $\bar{x} = 79,46$
Πρώτο τεταρτημόριο $Q_1 = 70$
Διάμεσος $\delta = 78$
Τρίτο τεταρτημόριο $Q_3 = 90$
Μέγιστη τιμή 130.



Απάντηση

α) Ο πληθυσμός είναι οι μαθητές και οι μαθήτριες όλων των τάξεων στη συγκεκριμένη πολιτεία των ΗΠΑ.

β) Εφόσον το δείγμα είναι αντιπροσωπευτικό, μπορούμε να ισχυριστούμε τα ακόλουθα σχετικά με το μήκος του δείκτη του χεριού που χρησιμοποιούν οι μαθητές και οι μαθήτριες της πολιτείας των ΗΠΑ στην οποία έγινε η έρευνα:

- Το μέσο μήκος του δείκτη είναι κοντά στα 79,3 mm.
- Η διάμεσος του μήκους είναι γύρω στα 80 mm (γιατί, όπως φαίνεται από το σχήμα, η διάμεσος του δείγματος είναι 80 mm).
- Σχετικά με τη μεταβλητότητα: Το εύρος είναι κοντά στα $130-40=90$ mm και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος είναι κοντά στα $88-70=18$ mm.

γ) Σύμφωνα με τα αποτελέσματα, στο δεύτερο δείγμα έχουμε:

- Το μέσο μήκος του δείκτη είναι 79,46 mm.
- Η διάμεσος του μήκους είναι γύρω στα 78 mm.
- Το εύρος είναι $130-40=90$ mm και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος είναι $90-70=20$ mm.

Παρατηρούμε πολύ μικρή απόκλιση των δύο δειγμάτων όσον αφορά τη μέση τιμή του μήκους του δείκτη.
Στη διάμεσο η απόκλιση είναι επίσης μικρή, 2 mm.
Σχετικά με τη μεταβλητότητα, το εύρος είναι το ίδιο, ίσο με 90 mm. Με βάση το ενδοτεταρτημοριακό εύρος έχουμε μικρή απόκλιση, 18 αντί 20 mm, δηλαδή 2 mm.
Τέτοιου μεγέθους αποκλίσεις είναι αναμενόμενες μεταξύ δειγμάτων του ίδιου πληθυσμού.

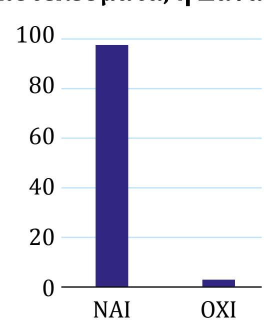
2. **Το περιοδικό αυτοκινήτου «Ασφαλής οδήγηση», που κυκλοφορεί στη βόρεια Ελλάδα, ήθελε να κάνει μια έρευνα ανάμεσα σε άτομα που οδηγούν με το ερώτημα «σας αρέσει να οδηγείτε ή όχι;», ώστε να βγάλει συμπεράσματα για όλους τους οδηγούς της περιοχής που κυκλοφορεί. Στη συνέλευση των συντακτών του περιοδικού ο Χαράλαμπος πρότεινε να χρησιμοποιήσουν ως δείγμα κάποιους τυχαία επιλεγμένους από τους συνδρομητές του περιοδικού. Η Αθηνά είπε ότι θα ήταν καλύτερα να αναθέσουν σε μια εταιρεία ερευνών, ζητώντας το δείγμα να είναι πιο αντιπροσωπευτικό.**

Η Δανάη, η αρχισυντάκτρια, αποφάσισε να κάνουν και τα δύο. Τα αποτελέσματα φαίνονται στα παρακάτω διαγράμματα. Βλέποντας τα αποτελέσματα, η Δανάη είπε:

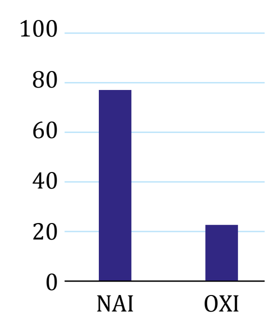
«Φαίνεται ότι υπάρχει μεγάλη απόκλιση ανάμεσα στα δύο δείγματα».

α) Συμφωνείτε με τη Δανάη; Γιατί συμβαίνει αυτό;

β) Με δεδομένο ότι το δείγμα της εταιρείας ήταν αντιπροσωπευτικό του πληθυσμού, τι συμπεράσματα βγαίνουν;



Δείγμα συνδρομητών



Δείγμα εταιρείας ερευνών

Απάντηση

α) Πιθανότατα η Δανάη είδε ότι υπήρχαν αρκετά σημαντικές διαφορές μεταξύ των αποτελεσμάτων των δύο ερευνών: π.χ. το ΝΑΙ στην έρευνα των συνδρομητών είναι κοντά στο 100%, ενώ στην έρευνα της εταιρείας είναι κοντά στο 75%.
Αυτό μπορεί να συμβαίνει γιατί:

- Το δείγμα των συνδρομητών αυτοκινήτου είναι «μεροληπτικό», ακόμα κι αν τα άτομα επιλέγονται τυχαία: Η πιθανότητα να επιλεγεί κάποιος ή κάποια που δεν του αρέσει η οδήγηση σε ένα τέτοιο δείγμα είναι περιορισμένη, σε σύγκριση με την πιθανότητα να επιλεγεί ανάμεσα σε όλο τον πληθυσμό. Δηλαδή το δείγμα είναι αναμενόμενο να μεροληπτεί υπέρ του «ΝΑΙ».
- Ίσως η εταιρεία ερευνών έχει πιο αντιπροσωπευτικό δείγμα, εφόσον αυτό της ζήτησαν, άρα μάλλον τα δικά της συμπεράσματα είναι «κοντά» σε αυτό που ισχύει στον πληθυσμό.

β) Σύμφωνα με την έρευνα της εταιρείας, στο πληθυσμό το ΝΑΙ (μου αρέσει να οδηγώ) είναι κοντά στο 75% και το ΟΧΙ (δε μου αρέσει να οδηγώ) είναι κοντά στο 25%.

μέγεθος δείγματος και αντιπροσωπευτικότητα

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Να περιγράψετε τον πληθυσμό και το χαρακτηριστικό για το οποίο μπορεί να έγινε η έρευνα που περιγράφεται σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) Ένας nistagramer (που έχει λογαριασμό στο Nistagram) ζητάει από τους ακολούθους του να ψηφίσουν αν συμφωνούν ή όχι με μια άποψη για την κλιματική αλλαγή.

β) Ένας οργανισμός ερευνών ρώτησε 10 μαθητές από κάθε γυμνάσιο της πόλης Α πόσες ταινίες βλέπουν στο κινητό τους (ή αλλού) την εβδομάδα.

γ) Μια βιομηχανία ελέγχει την ποιότητα του 5% των προϊόντων της.

2. Θέλετε να δείτε τι γνώμη έχουν για την κλιματική αλλαγή οι μαθητές και οι μαθήτριες του σχολείου σας. Επιλέξτε το καταλληλότερο δείγμα συνδυάζοντας ένα στοιχείο από κάθε ομάδα παρακάτω:
Ομάδα Α. Απευθυνόμαστε σε $α_1$: παιδιά της Β΄ τάξης, $α_2$: παιδιά από κάθε τάξη, $α_3$: παιδιά της Γ΄ τάξης
Ομάδα Β. Επιλέγουμε συνολικά $β_1$: 50 παιδιά, $β_2$: 30 παιδιά, $β_3$: 10 παιδιά
Ομάδα Γ: Επιλέγουμε τα παιδιά $γ_1$: με τις υψηλότερες επιδόσεις, $γ_2$: που είναι πρώτα στον αλφαβητικό κατάλογο, $γ_3$: με κλήρωση.

3. Σε ποιον πληθυσμό, κατά την άποψή σας, χρειάζεται να γίνει έρευνα (σε κατάλληλο δείγμα) για να βγάλετε συμπεράσματα σχετικά με:

α) την άποψή τους για το ύψος των φόρων

β) την άποψή τους για την ποιότητα των δημόσιων νοσοκομείων

γ) τον χρόνο αναμονής σε μια πλατφόρμα διανομής φαγητού, μέχρι να παραδοθεί η παραγγελία

δ) την άποψή τους για τον τρόπο που η κυβέρνηση χειρίστηκε τις απεργίες των εργαζομένων για ένα αίτημα

ε) το πόσο συχνά χάνονται διδακτικές ώρες στα σχολεία

Να συζητήσετε τις απαντήσεις σας στην τάξη.

4. Προσδιορίστε αν θα κάνατε απογραφή ή θα επιλέγατε ένα δείγμα για να ερευνήσετε:

α) την αποτελεσματικότητα ενός νέου φαρμάκου

β) τον αριθμό των παιδιών του σχολείου σας που φορούν σιδεράκια στα δόντια

γ) το πόσο συχνά τα παιδιά ηλικίας 13-15 χρόνων φορούν σιδεράκια στα δόντια

δ) σε πόσα παιδιά του τμήματός σας αρέσει η στατιστική

5. Να εξετάσετε αν το συμπέρασμα είναι λογικό (ή έγκυρο) σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις. Να εξηγήσετε γιατί.

α) Ο Περικλής ρώτησε 20 παιδιά του σχολείου του αν έφαγαν πρωινό. Όλα είπαν ότι έφαγαν. Ο Περικλής έβγαλε το συμπέρασμα ότι όλα τα 250 παιδιά του σχολείου του τρώνε πρωινό καθημερινά.

β) Ένας χημικός πήρε ένα μπουκάλι νερό από τη λίμνη για να ελέγξει τη μόλυνση από κάποιον μικροοργανισμό. Επειδή βρήκε δεκαπλάσιους μικροοργανισμούς από το κανονικό, συμπέρανε ότι η λίμνη έχει μολυνθεί.

γ) Η Αθηνά ρώτησε όλες τις συνομήλικες φίλες της αν τους αρέσει ένα συγκεκριμένο είδος μουσικής. Όλες απάντησαν ότι τους αρέσει. Η Αθηνά συμπέρανε ότι αυτό το είδος μουσικής αρέσει σε όλα τα παιδιά της ηλικίας της.

Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

6. Σε ένα γυμνάσιο με 400 παιδιά, μια ομάδα του Γ2 έκανε έρευνα για να δει πόσα παιδιά πήγαν σε κατασκήνωση το προηγούμενο καλοκαίρι. Επέλεξαν δύο τυχαία δείγματα και βρήκαν ότι:

- στο πρώτο δείγμα 8 στα 24 παιδιά πήγαν κατασκήνωση
- στο δεύτερο δείγμα 7 στα 28 παιδιά πήγαν κατασκήνωση

α) Ποιο ποσοστό των 400 παιδιών του σχολείου εκτιμάτε ότι πήγαν κατασκήνωση

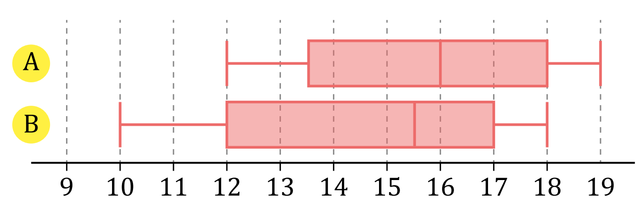
i) με βάση το πρώτο δείγμα

ii) με βάση το δεύτερο δείγμα

β) Ο Περικλής, που ήταν στην ομάδα που έκανε την έρευνα, είπε: «Αφού προσέξαμε να επιλέξουμε τα δείγματα με τυχαίο τρόπο, γιατί μας δίνουν τόσο διαφορετικά αποτελέσματα;». Τι θα απαντούσατε στον Περικλή;

γ) Τι θα μπορούσατε να κάνετε για να βελτιώσετε την εκτίμηση για το ποσοστό των παιδιών του σχολείου που πήγαν κατασκήνωση;

7. Στα θηκογράμματα φαίνονται οι επιδόσεις που είχαν σε ένα διαγώνισμα Μαθηματικών δύο δείγματα παιδιών της Γ΄ γυμνασίου από δύο διαφορετικά σχολεία (το Α και το Β). Τα δείγματα ήταν επιλεγμένα με τυχαίο τρόπο.

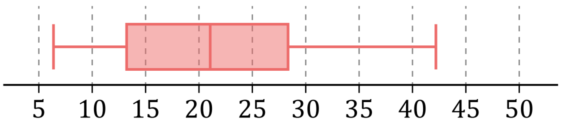


Ποιοι από τους παρακάτω ισχυρισμούς μπορούμε, με βάση το δείγμα, να πούμε ότι ισχύουν σίγουρα, ποιοι μάλλον ισχύουν και ποιοι δεν μπορούμε να γνωρίζουμε αν ισχύουν;

1. Τα παιδιά του δείγματος Α είχαν καλύτερη διάμεση επίδοση από τα παιδιά του δείγματος Β.
2. Τα παιδιά του σχολείου Α είχαν καλύτερη διάμεση επίδοση από τα παιδιά του σχολείου Β.
3. Το παιδί με την καλύτερη επίδοση του σχολείου Α είχε καλύτερη επίδοση από το παιδί με την καλύτερη επίδοση του σχολείου Β.
4. Το εύρος των επιδόσεων στο δείγμα Α είναι μικρότερο από το εύρος στο δείγμα Β.
5. Το εύρος των επιδόσεων στο σχολείο Α είναι μικρότερο από το εύρος στο σχολείο Β.

8. Γράψτε ένα παράδειγμα που το δείγμα είναι αντιπροσωπευτικό του πληθυσμού της έρευνας και ένα παράδειγμα που δεν είναι αντιπροσωπευτικό.

9. Ένας βιβλιοπώλης έχει παρατηρήσει ότι αρκετοί πελάτες μένουν αρκετή ώρα (από 25 λεπτά και πάνω) στο βιβλιοπωλείο αναζητώντας νέα βιβλία και διαβάζοντας κάποιες σελίδες από αυτά. Για να ερευνήσει πόσο συνηθισμένο είναι αυτό, επέλεξε τυχαία ένα δείγμα 50 πελατών σε διάστημα ενός μήνα και κατέγραψε τους χρόνους που έμεναν στο κατάστημα. Το θηκόγραμμα δείχνει το αποτέλεσμα της μελέτης του για αυτό το δείγμα.

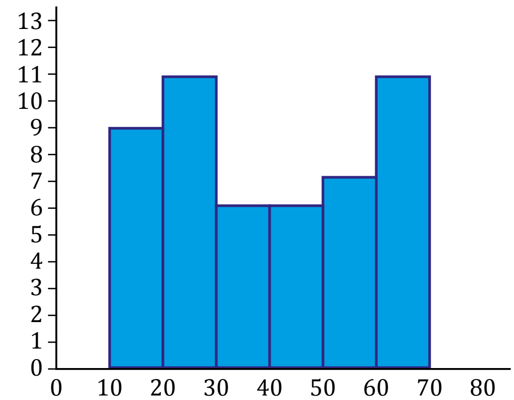


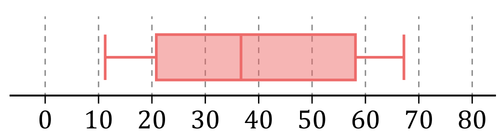
α) Τι ποσοστό των πελατών μένουν στο κατάστημα 20 λεπτά ή λιγότερο;

β) Ο βιβλιοπώλης σκέφτεται να βάλει δύο τραπεζάκια με καρέκλες, ώστε όσοι πελάτες θέλουν να μπορούν να καθίσουν για να διαβάσουν άνετα όσες σελίδες θέλουν. Θεωρείτε ότι το ποσοστό των πελατών που αφορά μια τέτοια δυνατότητα είναι αρκετό ώστε να προτείνετε στον βιβλιοπώλη να το κάνει; Εξηγήστε τη σκέψη σας.

10. Ένα κέντρο υγείας επέλεξε με τυχαίο τρόπο 50 άτομα που προσήλθαν με έναν συγκεκριμένο τύπο ίωσης και κατέγραψε την ηλικία τους. Αυτή φαίνεται στο φυλλόγραμμα και στα δύο διαγράμματα.

1	1 2 2 3 4 4 4 6 9
2	0 0 0 1 1 2 2 3 5 7 8
3	0 2 6 6 7 9
4	1 2 4 5 6 8
5	0 2 7 7 8 9 9
6	0 0 1 1 2 3 4 5 6 6 7





Με βάση το δείγμα αυτό, εκτιμήστε το ποσοστό του πληθυσμού των ασθενών που έχει ηλικία:

α) από 40 έως 50 ετών

β) από 38 ετών και πάνω

γ) κάτω από 10 ετών

δ) από 60 ετών και πάνω

ε) από 10 έως 15 ετών

Ανακεφαλαίωση

Στατιστική

Ερωτήσεις – ασκήσεις – προβλήματα

1. Από τα παρακάτω ερωτήματα, ποια χρειάζονται δεδομένα από το ευρύτερο κοινωνικό μας περιβάλλον για να απαντηθούν;

α) Ποια είναι η εξέλιξη της τιμής της βενζίνης 95 οκτανίων στην Ελλάδα την τελευταία δεκαετία;

β) Πόσα χρήματα ξοδεύει μια τετραμελής οικογένεια για διατροφή κάθε μήνα του τρέχοντος έτους;

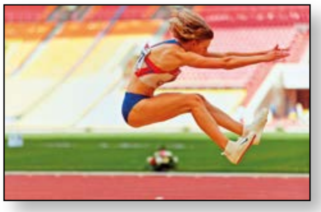
γ) Πόσες είναι οι περισσότερες απουσίες που έκανε παιδί του σχολείου σας το σχολικό έτος που πέρασε;

δ) Ποια ήταν η χαμηλότερη θερμοκρασία στο εσωτερικό του σπιτιού σας τον χρόνο που πέρασε;

ε) Πόσο διάσπαρτες ήταν οι βαθμολογίες των παιδιών της τάξης σας στο τελευταίο διαγώνισμα Μαθηματικών;

στ) Πόσο συχνά ανακυκλώνουν οι κάτοικοι της Ελλάδας;

2. Θέλουμε να εκτιμήσουμε με ικανοποιητική ακρίβεια τον μέσο εβδομαδιαίο χρόνο προπόνησης των αθλητριών του μήκους στην Ελλάδα.
Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις:



α) Ο πληθυσμός της έρευνάς μας είναι όλοι οι αθλητές και οι αθλήτριες μήκους στην Ελλάδα, ανεξαρτήτως φύλου. Σ Λ

β) Ο πληθυσμός της έρευνάς μας είναι όλες οι αθλήτριες μήκους στην Ελλάδα. Σ Λ

γ) Αρκεί να επιλέξουμε μια αθλήτρια μήκους στην Ελλάδα, να υπολογίσουμε τις ώρες προπόνησής της ανά εβδομάδα για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα και τον μέσο όρο για όλες αυτές τις εβδομάδες. Σ Λ

δ) Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ως δείγμα κάποιες αθλήτριες μήκους στην Ελλάδα. Σ Λ

ε) Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ως δείγμα κάποιες εβδομάδες ενός χρόνου για μια συγκεκριμένη αθλήτρια μήκους της Ελλάδας. Σ Λ

3. Θέλουμε να απαντήσουμε, με μια στατιστική έρευνα, στο εξής ερώτημα:
«Πόσες φορές την ημέρα φορτίζουν το κινητό τους οι νέοι και οι νέες από 18 έως 27 ετών που έχουν κινητό στην πόλη σας;».
Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις:

α) Ο πληθυσμός της έρευνας είναι όλοι οι νέοι της πόλης σας. Σ Λ

β) Ο πληθυσμός της έρευνας είναι όλοι οι νέοι της πόλης σας που έχουν κινητό. Σ Λ

γ) Για να απαντήσουμε με ικανοποιητική ακρίβεια, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ως δείγμα μόνο τους νέους και τις νέες 18 ετών. Σ Λ

Τρίλιζα στη Στατιστική

δ) Για να απαντήσουμε με ικανοποιητική ακρίβεια, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ως δείγμα νέους και νέες από 18 έως 27 ετών, αρκεί το δείγμα να είναι αντιπροσωπευτικό του πληθυσμού. Σ Λ

ε) Θα επιλέξουμε αντιπροσωπευτικό δείγμα και μπορούμε να σχεδιάσουμε ένα θηκόγραμμα για το χαρακτηριστικό «πόσες ώρες την ημέρα φορτίζει το κινητό του κάθε άτομο του δείγματος». Σ Λ

4. Θέλουμε να εκτιμήσουμε τον μέσο αριθμό των επιβατών ανά δρομολόγιο του μετρό της Αθήνας, κατά τη διάρκεια μιας μέρας τον Αύγουστο.
Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις:

α) Ο πληθυσμός της έρευνάς μας είναι όλοι οι κάτοικοι της Αθήνας. Σ Λ

β) Το δείγμα της έρευνάς μας είναι ένα μέρος των δρομολογίων του μετρό της Αθήνας τον Αύγουστο. Σ Λ

γ) Χρειάζεται να γνωρίζουμε απαραίτητα το πλήθος των επιβατών κάθε δρομολογίου του μετρό τον Αύγουστο. Σ Λ

δ) Για μια «καλή εκτίμηση», αρκεί να γνωρίζουμε το πλήθος των επιβατών που χρησιμοποιούν το μετρό 8 με 10 το πρωί κάθε ημέρα. Σ Λ

ε) Δεν μπορούμε να κάνουμε αυτή την εκτίμηση, γιατί το πλήθος των επιβατών είναι διαφορετικό σε κάθε δρομολόγιο. Σ Λ

στ) Αρκεί να υπολογίσουμε τον μέσο όρο των επιβατών των τριών δρομολογίων του Αυγούστου, με τον μεγαλύτερο αριθμό επιβατών. Σ Λ

ζ) Δεν πρέπει να λάβουμε υπόψη μας τα βραδινά δρομολόγια, γιατί δεν έχουν πολύ κόσμο. Σ Λ

5. Να περιγράψετε πώς μπορείτε να απαντήσετε σε καθένα από τα ερωτήματα της άσκησης 1.

6. Να περιγράψετε πώς μπορείτε να κάνετε την έρευνα της άσκησης 4.

7. Σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις εφαρμόζουμε τυχαία δειγματοληψία;

α) Θέλουμε να μελετήσουμε την κατανάλωση υδατανθράκων (π.χ. ψωμί, πατάτες, ζυμαρικά κ.ά.) στην Ελλάδα, στις ηλικίες από 9 έως 15 ετών, και επιλέγουμε ως δείγμα τα παιδιά τριών σχολείων της Αθήνας.

β) Για να απαντήσουμε στο ερώτημα «πόσα ήταν τα έσοδα στα βενζινάδικα τη Δευτέρα, στην πόλη σας;», γράψαμε σε έναν κατάλογο όλα τα βενζινάδικα της πόλης από τα ανατολικά προς τα δυτικά και επιλέξαμε τα 10 πρώτα στον κατάλογο.

γ) Για να απαντήσουμε στο ερώτημα «πόσα είναι τα έσοδα των μανάβικων της πόλης σας κάθε Σάββατο;», γράψαμε σε χαρτάκια όλα τα μανάβικα της πόλης, τα τοποθετήσαμε σε ένα κουτί και επιλέξαμε τυχαία 10 χαρτάκια από αυτά.

δ) Για να ερευνήσουμε ποιον προορισμό προτιμούν τα παιδιά του σχολείου μας για την ημερήσια εκδρομή τους, επιλέξαμε με κλήρωση το $\frac{1}{4}$ των παιδιών του σχολείου, για να ρωτήσουμε ποιον προορισμό προτιμούν.

Συνδέσεις και επεκτάσεις

8. Σε μια χώρα του κόσμου, η ομάδα Μπλε Αλεπούδες έχει κερδίσει το πρωτάθλημα ποδοσφαίρου 8 φορές τα τελευταία 10 χρόνια, ενώ η ομάδα Πορτοκαλί Αρκούδες έχει κερδίσει το πρωτάθλημα μπάσκετ και τα 10 τελευταία χρόνια.

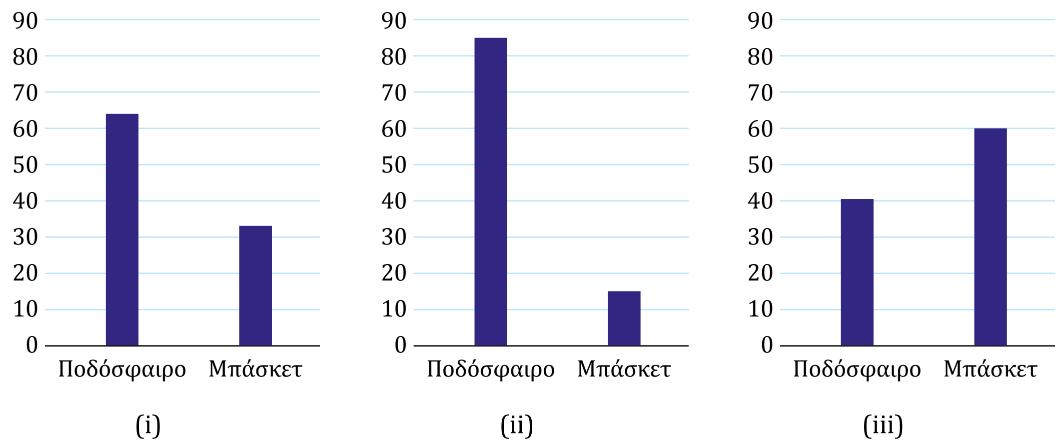
Για να απαντηθεί το ερώτημα «ποιο είναι το αγαπημένο σας άθλημα μεταξύ ποδοσφαίρου και μπάσκετ;» σε αυτή τη χώρα επιλέχθηκαν 3 δείγματα.

Το πρώτο ήταν τυχαίο δείγμα φίλων των Μπλε Αλεπούδων, που είναι κάτοικοι της χώρας.

Το δεύτερο ήταν τυχαίο δείγμα φίλων των Πορτοκαλί Αρκούδων, που είναι κάτοικοι της χώρας.

Το τρίτο ήταν τυχαίο δείγμα κατοίκων της χώρας.

Παρακάτω δίνονται τα αποτελέσματα σε καθένα από τα δείγματα, αλλά όχι με τη σειρά.



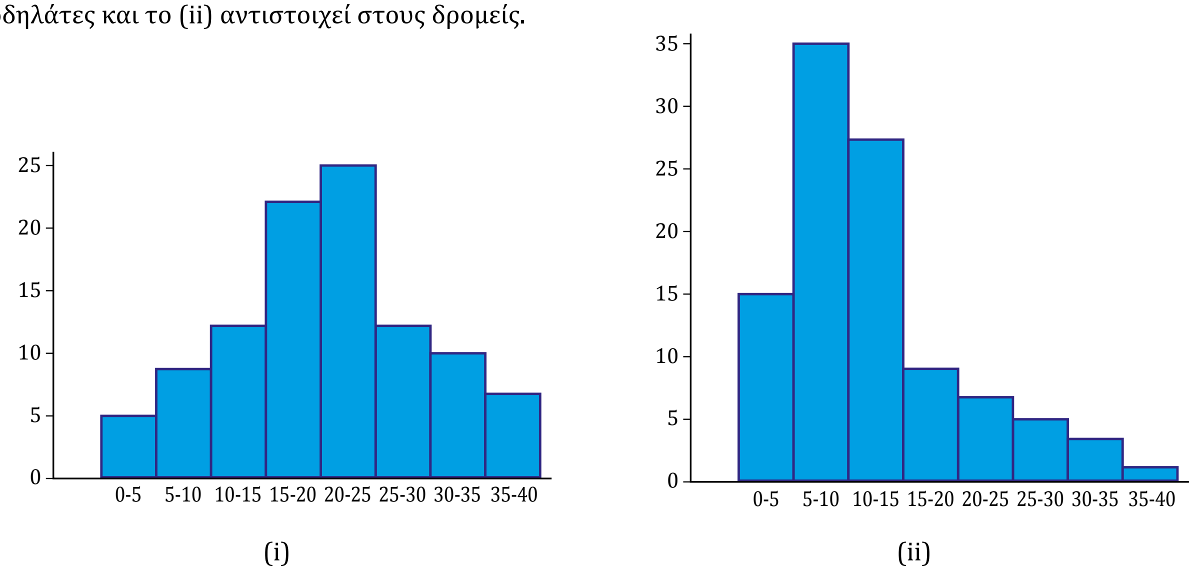
α) Ποιο διάγραμμα θεωρείτε ότι αντιστοιχεί σε κάθε δείγμα;

β) Να εκτιμήσετε ποιο είναι το δημοφιλέστερο άθλημα μεταξύ ποδοσφαίρου και μπάσκετ σε αυτή τη χώρα.

9. Σε τυχαία δείγματα 300 ποδηλατών και 400 δρομέων της Αθήνας ρωτήθηκε το εξής: «Πόση απόσταση σε χιλιόμετρα διανύετε στην προπόνησή σας;».

Οι ποδηλάτες απάντησαν για κάλυψη της απόστασης με ποδήλατο, ενώ οι δρομείς τρέχοντας.

Τα αποτελέσματα φαίνονται στα παρακάτω διαγράμματα σχετικών συχνοτήτων. Το (i) αντιστοιχεί στους ποδηλάτες και το (ii) αντιστοιχεί στους δρομείς.

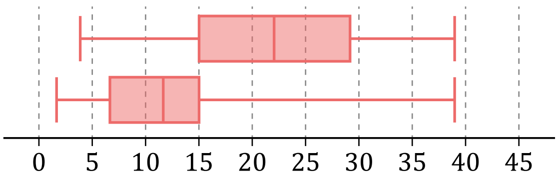


α) Ποια είναι η απόσταση που διένυσαν οι περισσότεροι ποδηλάτες και ποια οι περισσότεροι δρομείς των δειγμάτων;

β) Να εκτιμήσετε τη διάμεσο της απόστασης που διανύουν οι ποδηλάτες και οι δρομείς της Αθήνας.

γ) Ποια εκτιμάτε ότι είναι η μεγαλύτερη απόσταση που διανύουν οι δρομείς της Αθήνας; Ποια είναι η αντίστοιχη απόσταση για τους ποδηλάτες;

δ) Τα παρακάτω θηκογράμματα αναπαριστούν την απόσταση σε χιλιόμετρα σε δύο τυχαία και αντιπροσωπευτικά δείγματα ποδηλατών και δρομέων της Αθήνας».



i) Ποιο από τα δύο ανήκει στους ποδηλάτες και ποιο στους δρομείς;

ii) Να περιγράψετε τη μεταβλητότητα της απόστασης που διανύουν οι δρομείς της Αθήνας, κατά την προπόνησή τους, με βάση αυτό το δείγμα.

iii) Να κάνετε το ίδιο για τους ποδηλάτες.

iv) Ποια είναι η διάμεσος κάθε δείγματος; Να συγκρίνετε τις απαντήσεις σας με τα τυχαία δείγματα των 300 ποδηλατών και 400 δρομέων. Τι παρατηρείτε;

ε) i) Από το δείγμα των 400 δρομέων επιλέγουμε τυχαία έναν δρομέα. Ποια είναι η πιθανότητα η απόσταση που διανύει στην προπόνησή του να είναι το πολύ 5 χιλιόμετρα;

ii) Επιλέγουμε τυχαία έναν δρομέα από όλους τους δρομείς της Αθήνας. Να εκτιμήσετε την πιθανότητα η απόσταση που διανύει στην προπόνησή του να είναι το πολύ 5 χιλιόμετρα.

στ) Να απαντήσετε το ίδιο ερώτημα με το ε), ii), αλλά αυτή τη φορά αν επιλέξουμε τυχαία έναν ποδηλάτη.

Ομαδική εργασία

10. Να επιλέξετε ένα ερώτημα που θέλετε να μελετήσετε για το οποίο θα χρειαστεί να συλλέξετε δεδομένα από το ευρύτερο περιβάλλον σας.

Στη συνέχεια να προτείνετε τρόπους για την επιλογή τυχαίου δείγματος και να κάνετε την έρευνά σας.

Να παρουσιάσετε τα αποτελέσματα στην τάξη σας, αφού προηγουμένως εξηγήσετε τη μέθοδο της δειγματοληψίας που ακολουθήσατε.

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ 9

Πιθανότητες

Πώς συνδέονται τα αποτελέσματα πολλών χιλιάδων στριψιμάτων ενός συνηθισμένου κέρματος με την τιμή της πιθανότητας να έρθει γράμματα;

Χρησιμοποιώντας μια προσομοίωση ενός πειράματος τύχης, τι συμπεράσματα μπορώ να βγάλω για τις πιθανότητες των αποτελεσμάτων του;

Πότε τα αποτελέσματα δύο τυχαίων επιλογών μου εξαρτώνται το ένα από το άλλο;

Σε αυτή την ενότητα θα διερευνήσουμε τη σχέση της πιθανότητας ενός ενδεχομένου με τα αποτελέσματα μεγάλου αριθμού επαναλήψεων του πειράματος. Επίσης θα δούμε πότε δύο ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους και τι σημαίνει αυτό στην πράξη.

ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΕΝΟΤΗΤΕΣ

9.1 Πειράματα τύχης και Πιθανότητες

Δ1. Στρίψιμο κέρματος: αποτελέσματα και πιθανότητες

α) Αν στρίψουμε μία φορά ένα συνηθισμένο κέρμα, ποια είναι η πιθανότητα να έρθει γράμματα (Γ);

β) Να στρίψετε ένα συνηθισμένο κέρμα 20 φορές και να καταγράψετε πόσες φορές ήρθε Γ. Στη συνέχεια να υπολογίσετε το κλάσμα:

$$\frac{\text{πόσες φορές ήρθε γράμματα}}{20}$$

Τι παρατηρείτε σε σύγκριση με την απάντησή σας στο α);

γ) Να επαναλάβετε άλλα 80 στριψίματα και να καταγράψετε πόσες φορές θα έρθει Γ.

Στη συνέχεια, για το σύνολο των 100 στριψιμάτων να υπολογίσετε το κλάσμα:

$$\frac{\text{πόσες φορές ήρθε γράμματα}}{100}$$

Τι παρατηρείτε σε σύγκριση με τις απαντήσεις σας στα α) και β);

Όταν λέμε ότι ένα κέρμα είναι συνηθισμένο, εννοούμε ότι μοιάζει με αυτά που γνωρίζουμε από την καθημερινότητα. Άρα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι, αν το στρίψουμε, και οι δύο του όψεις είναι το ίδιο πιθανόν να έρθουν ως αποτέλεσμα. Δηλαδή το θεωρούμε «τίμιο».

Θυμόμαστε ότι:
Η πιθανότητα $P(A)$ ενός ενδεχομένου Α πειράματος τύχης εκφράζει τον βαθμό βεβαιότητάς μας για την πραγματοποίηση του ενδεχομένου.

Σύμφωνα με τον **κλασικό ορισμό πιθανότητας**, αν το πείραμα τύχης έχει ισοπίθανα δυνατά αποτελέσματα πλήθους δ, και ε από αυτά είναι ευνοϊκά για το Α, τότε:

$$P(A)=\frac{\text{πλήθος ευνοϊκών αποτελεσμάτων}}{\text{πλήθος όλων των αποτελεσμάτων}}=\frac{ε}{δ}$$

δ) Εφόσον οι συμμαθητές και οι συμμαθήτριές σας έχουν στρίψει 100 φορές ο καθένας και η καθεμία το δικό τους κέρμα, να υπολογίσετε το κλάσμα για το σύνολο των αποτελεσμάτων της τάξης σας:

$$\frac{\text{πόσες φορές ήρθε γράμματα}}{\text{πόσα στριψίματα έγιναν συνολικά στην τάξη σας}}$$

(Αν τα συνολικά στριψίματα είναι πολύ λιγότερα από 1.000, να κάνετε κι άλλα μέχρι να φτάσουν τα 1.000, ώστε να έχετε έναν σχετικά μεγάλο αριθμό στριψιμάτων.)

Τι παρατηρείτε σε σύγκριση με τις απαντήσεις σας στα α), β) και γ);

ε) Μπορείτε να δείτε τα αποτελέσματα ακόμα περισσότερων στριψιμάτων εύκολα με τη χρήση ψηφιακής προσομοίωσης.

Με έναν τέτοιον τρόπο έχουν προκύψει τα παρακάτω αποτελέσματα:

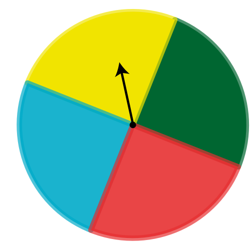
Στριψίματα	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
Γράμματα	475	484	499	500	496	497	519	510	502	505

Στριψίματα	10.000	10.000	10.000	10.000	10.000	10.000	10.000	10.000	10.000	10.000
Γράμματα	5019	4939	4987	4970	5094	5125	4906	4999	5017	4920

Να υπολογίσετε το παραπάνω κλάσμα για κάθε 1.000 και 10.000 στριψίματα, όπως και για το σύνολο των στριψιμάτων κάθε πίνακα. Τι παρατηρείτε; Συζητήστε στην τάξη τις παρατηρήσεις σας.

Συζητάμε

... για πιθανότητες σε μεγάλο αριθμό εκτελέσεων ενός πειράματος τύχης



Ο τροχός της τύχης του σχήματος αποτελείται από 4 ίσα μέρη που διαφέρουν μόνο ως προς το χρώμα: πράσινο, κίτρινο, γαλάζιο και κόκκινο. Πώς δουλεύει;

Στρίβουμε τον τροχό με δύναμη (ώστε το αποτέλεσμα να είναι τυχαίο) και καταγράφουμε το χρώμα που δείχνει το μαύρο βέλος (το οποίο δεν περιστρέφεται).

Θα μελετήσουμε το παραπάνω ως πείραμα τύχης με ισοπίθανα αποτελέσματα, καθώς τα μέρη διαφέρουν μόνο ως προς το χρώμα και για αυτό δεν έχουμε λόγους να θεωρούμε ότι κάποιο αποτέλεσμα έχει μεγαλύτερη πιθανότητα εμφάνισης. Επομένως, σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας, η τιμή της πιθανότητας εμφάνισης κάθε χρώματος είναι $\frac{1}{4} = 0{,}25$.

Χρησιμοποιώντας κατάλληλες ψηφιακές προσομοιώσεις, μπορούμε να δούμε τα αποτελέσματα μεγάλου αριθμού στριψιμάτων του τροχού, χωρίς να «χάσουμε χρόνο» κάνοντας τα στριψίματα ένα ένα.

Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να κάνουμε το εξής:

- Στρίβουμε τον τροχό 100 φορές και καταγράφουμε τα αποτελέσματα.
- Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία 10 φορές (κάνουμε 10 δοκιμές).

Προσομοίωση τροχού της τύχης

Θα εστιάσουμε τη διερεύνησή μας στο ενδεχόμενο «έρχεται πράσινο».
Τα αποτελέσματα, για το πράσινο, φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Πράσινο	24	26	35	22	31	30	30	25	21	18
Στριψίματα	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100

Στη συνέχεια, για κάθε 100 στριψίματα υπολογίζουμε τη **σχετική συχνότητα** του ενδεχομένου «έρχεται πράσινο», δηλαδή την τιμή του κλάσματος $\frac{\text{πόσες φορές ήρθε πράσινο}}{100}$.

Για παράδειγμα η σχετική συχνότητα του ενδεχομένου «έρχεται πράσινο» στα πρώτα εκατό στριψίματα είναι $\frac{24}{100} = 0{,}24$.

Η σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου είναι η σχετική συχνότητα της αντίστοιχης παρατήρησης, όπως την έχουμε συναντήσει στη Στατιστική.

Κάνοντας τους υπολογισμούς για κάθε 100 στριψίματα έχουμε:

Πράσινο	0,24	0,26	0,35	0,22	0,31	0,3	0,3	0,25	0,21	0,18

Όπως βλέπουμε, σε μία μόνο περίπτωση (δοκιμή) η σχετική συχνότητα είναι ίση με 0,25, δηλαδή με την τιμή της πιθανότητας. Όμως στις υπόλοιπες εννιά η σχετική συχνότητα αποκλίνει από το 0,25.

Για να μελετήσουμε αυτή την απόκλιση, υπολογίζουμε τη διαφορά της σχετικής συχνότητας κάθε ενδεχομένου από το 0,25.

Για παράδειγμα, στα πρώτα 100 στριψίματα η διαφορά είναι 0,25 – 0,24 = 0,01.

Υπολογίζουμε τη διαφορά χωρίς το πρόσημό της, καθώς αυτό που μας ενδιαφέρει είναι πόσο «αποκλίνει» από τη θεωρητική τιμή της πιθανότητας και όχι αν είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από αυτή. Έτσι, αφαιρούμε τον μικρότερο από τον μεγαλύτερο.

(Όταν λέμε «θεωρητική τιμή της πιθανότητας», εννοούμε την τιμή που βρίσκουμε με τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας χωρίς να έχουμε εκτελέσει το πείραμα.)

Κάνοντας τους υπολογισμούς για όλες τις περιπτώσεις έχουμε:

Σχετική συχνότητα	0,24	0,26	0,35	0,22	0,31	0,3	0,3	0,25	0,21	0,18
Απόκλιση από το 0,25	0,01	0,01	0,1	0,03	0,06	0,05	0,05	0	0,04	0,07

Παρατηρούμε ότι:

- Η μεγαλύτερη απόκλιση από το 0,25 είναι 0,1.
- Εξαιρώντας τη δοκιμή που η απόκλιση είναι 0, παρατηρούμε ότι η μικρότερη απόκλιση είναι 0,01 και αντιστοιχεί σε σχετική συχνότητα 0,24.

Μπορεί να υπάρχει ακόμα μικρότερη απόκλιση της σχετικής συχνότητας από το 0,25 για 100 στριψίματα;

Τι θα συμβεί αν κάνουμε δοκιμές με 1.000, αντί για 100 στριψίματα;
Με τη βοήθεια της προσομοίωσης μπορούμε να το διερευνήσουμε.

Για λόγους συντομίας παρουσιάζουμε κατευθείαν τον πίνακα των σχετικών συχνοτήτων και αποκλίσεων από το 0,25 για το πράσινο χρώμα και για κάθε νέα δοκιμή 1.000 στριψιμάτων.

Σχετική συχνότητα	0,246	0,242	0,23	0,251	0,254	0,245	0,249	0,241	0,26	0,246
Απόκλιση από το 0,25	0,004	0,008	0,02	0,001	0,004	0,005	0,001	0,009	0,01	0,004

Έτσι, για τα 1.000 στριψίματα παρατηρούμε ότι οι αποκλίσεις της σχετικής συχνότητας από το 0,25 (την τιμή της πιθανότητας) φαίνεται να είναι «γενικά πιο μικρές» σε σύγκριση με τις αντίστοιχες αποκλίσεις στα 100 στριψίματα.

Αυτό σημαίνει ότι η σχετική συχνότητα εμφάνισης του πράσινου χρώματος είναι «γενικά πιο κοντά» στην τιμή 0,25, όταν έχουμε δοκιμές 1.000 στριψιμάτων, αντί για 100.

Αν αυξηθεί ο αριθμός των στριψιμάτων ακόμα περισσότερο, η σχετική συχνότητα θα έρθει «γενικά ακόμα πιο κοντά» στο 0,25;

Ας το διερευνήσουμε:
Κάνουμε 10 δοκιμές από 10.000 στριψίματα αυτή τη φορά και καταγράφουμε τις σχετικές συχνότητες εμφάνισης του πράσινου και την απόκλιση από το 0,25.

Σχετική συχνότητα	0,2516	0,2467	0,2468	0,2459	0,248	0,2575	0,2484	0,2512	0,2507	0,2516
Απόκλιση από το 0,25	0,0016	0,0033	0,0032	0,0041	0,002	0,0075	0,0016	0,0012	0,0007	0,0016

Φαίνεται ότι στα 10.000 στριψίματα η σχετική συχνότητα είναι «γενικά ακόμα πιο κοντά» στο 0,25.

Αν συνεχίσουμε με δοκιμές 100.000 ή και περισσότερων στριψιμάτων, θα δούμε ότι ισχύει το ίδιο συμπέρασμα:

Η σχετική συχνότητα εμφάνισης του πράσινου χρώματος «γενικά πλησιάζει» την τιμή της αντίστοιχης πιθανότητας, δηλαδή το 0,25, καθώς αυξάνεται ο αριθμός των στριψιμάτων.

Ενδεικτικά παρουσιάζουμε τον πίνακα του πράσινου χρώματος για δοκιμές 100.000 στριψιμάτων.

Σχετική συχνότητα	0,25166	0,25127	0,24905	0,25221	0,24929	0,24925	0,24852	0,25194	0,25123	0,24916
Απόκλιση από το 0,25	0,00166	0,00127	0,00095	0,00221	0,00071	0,00075	0,00148	0,00194	0,00123	0,00084

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Εκτελώντας πολύ μεγάλο αριθμό επαναλήψεων ενός πειράματος τύχης, παρατηρούμε ότι η σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου γενικά πλησιάζει τη θεωρητική τιμή της πιθανότητας του ίδιου ενδεχομένου.

Ο νόμος των μεγάλων αριθμών

Ενδεικτικά

Πλήθος στριψιμάτων τροχού τύχης	Σχετική συχνότητα εμφάνισης πράσινου χρώματος	Πιθανότητα
100	0,24	0,25
1.000	0,251	0,25
10.000	0,2507	0,25

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. Μια ψηφιακή εφαρμογή επιστρέφει στον χρήστη τυχαία έναν από τους αριθμούς 1, 2 και 3. Ο χρήστης μπορεί να επιλέξει πόσους τυχαίους αριθμούς θέλει να του επιστρέψει η εφαρμογή, έναν έναν. Δέκα χρήστες ζήτησαν από την εφαρμογή να τους επιστρέψει τυχαίους αριθμούς. Στον πίνακα φαίνεται πόσους αριθμούς ζήτησε ο καθένας και η σχετική συχνότητα των 1, 2 ή 3 που επέστρεψε η εφαρμογή σε κάθε χρήστη.

Χρήστης	Πόσοι αριθμοί	Σχετ. συχνότητα 1	Σχετ. συχνότητα 2	Σχετ. συχνότητα 3
Αναστάσης	100	0,34	0,28	0,38
Βαλμίρα	100	0,34	0,28	0,38
Γιάννης	100	0,35	0,31	0,34
Δανάη	100	0,33	0,3	0,37
Ελένη	100	0,23	0,39	0,38
Ζωή	1.000	0,353	0,317	0,33
Ηλίας	1.000	0,331	0,349	0,32
Θάλεια	1.000	0,342	0,303	0,335
Ισιδώρα	1.000	0,327	0,357	0,316
Κώστας	1.000	0,327	0,332	0,341

α) Ποια είναι η πιθανότητα του πειράματος τύχης «η εφαρμογή επιστρέφει έναν τυχαίο αριθμό»;

β) Να παρουσιάσετε σε ραβδογράμματα τη σχετική συχνότητα εμφάνισης του αριθμού 2.

γ) Να ερμηνεύσετε τη μορφή του ραβδογράμματος.

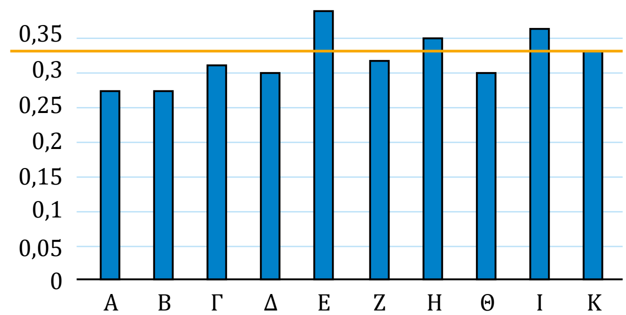
Απάντηση

α) Δεν έχουμε κάποιον λόγο να θεωρούμε ότι ένας από τους αριθμούς 1, 2 ή 3 έχει μεγαλύτερη πιθανότητα εμφάνισης. Άρα σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό πιθανότητας η εμφάνιση κάθε αριθμού έχει πιθανότητα $\frac{1}{3} = 0{,}333...$.

β) Στο ραβδόγραμμα, το ύψος κάθε ράβδου αντιστοιχεί στη σχετική συχνότητα εμφάνισης του αριθμού 2, ανά χρήστη.
Π.χ. το ύψος της πρώτης ράβδου είναι 0,28 και αντιστοιχεί στον Αναστάση.

Η πορτοκαλί οριζόντια γραμμή βρίσκεται σε ύψος 0,333... δηλαδή αντιστοιχεί στη θεωρητική τιμή της πιθανότητας για την εμφάνιση του 2.

Οι μικρότερες αποκλίσεις της σχετικής συχνότητας από τη θεωρητική πιθανότητα φαίνεται να είναι για τη Ζωή, τον Ηλία και τον Κώστα.



Αυτό είναι αναμενόμενο, γιατί η Ζωή, ο Ηλίας και ο Κώστας ήταν ανάμεσα στους χρήστες που είχαν ζητήσει 1.000 αριθμούς, άρα περισσότερες επαναλήψεις του πειράματος τύχης από όσους ζήτησαν 100. Η απόκλιση από το 0,333... περιμένουμε να είναι ακόμα μικρότερη αν κάποιος χρήστης ζητήσει 10.000 αριθμούς.

2. **Σε μια τράπεζα δεδομένων υπάρχουν ανώνυμα δεδομένα για πολλές χιλιάδες μαθητές και μαθήτριες σχολείων της Νέας Ζηλανδίας (https://new.censusatschool.org.nz/random-sampler/). Θέλουμε να μελετήσουμε τα δεδομένα ως προς την πιθανότητα ένα παιδί από αυτά να έχει καστανά μάτια.**
Παίρνοντας 9 δείγματα 100 παιδιών το καθένα, βρίσκουμε ότι τα παιδιά με καστανά μάτια είναι 37, 45, 44, 56, 48, 38, 43, 44, 50 σε κάθε δείγμα, ενώ παίρνοντας 9 δείγματα των 1.000 παιδιών το καθένα βρίσκουμε ότι τα ποσοστά των παιδιών με καστανά μάτια είναι 490, 484, 495, 503, 467, 494, 489, 498, 481. Επιλέγουμε τυχαία ένα παιδί από την τράπεζα δεδομένων.
Να εκτιμήσετε αν η πραγματική πιθανότητα να έχει καστανά μάτια είναι μεγαλύτερη από 0,4.

Απάντηση

Σύμφωνα με τα δεδομένα που έχουμε αντλήσει από τα δείγματα μεγέθους 100, έχουμε:

Σχ. συχνότητα καστανών ματιών	0,37	0,45	0,44	0,56	0,48	0,38	0,43	0,44	0,5

Από τα δείγματα μεγέθους 1.000 έχουμε:

Σχ. συχνότητα καστανών ματιών	0,49	0,484	0,495	0,503	0,467	0,494	0,489	0,498	0,481

Αν βασιστούμε μόνο στα δεδομένα που έχουμε αντλήσει από τα δείγματα, τότε μπορούμε να εκτιμήσουμε ότι η πιθανότητα ένα παιδί τυχαία επιλεγμένο από τη βάση δεδομένων να έχει καστανά μάτια είναι μεγαλύτερη από 0,4. Αυτό γιατί:

- Μόνο σε δύο περιπτώσεις δειγμάτων 100 παιδιών εμφανίζονται σχετικές συχνότητες μικρότερες του 0,4. Αυτές είναι οι 0,37 και 0,38.
- Σε όλες τις περιπτώσεις δειγμάτων 1.000 παιδιών η σχετική συχνότητα είναι αρκετά μεγαλύτερη από 0,40 (οι 8 στις 9 είναι γύρω στο 0,49). Τα δείγματα είναι αρκετά μεγαλύτερα από τα προηγούμενα και αναμένουμε η σχετική συχνότητα εμφάνισης καστανών ματιών να αποκλίνει λιγότερο από την αντίστοιχη πιθανότητα.

Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε

Να χρησιμοποιήσετε μια προσομοίωση τροχού τύχης με 5 διαφορετικά χρώματα, όπως αυτή που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω, και να κάνετε δοκιμές διαφορετικού πλήθους στριψιμάτων.

Στόχος σας είναι παρουσιάζοντας τα αποτελέσματα των δοκιμών σας στην τάξη να «πείσετε» τους συμμαθητές και τις συμμαθήτριές σας ότι η σχετική συχνότητα της εμφάνισης ενός χρώματος γενικά πλησιάζει την αντίστοιχη πιθανότητα, για πολύ μεγάλο αριθμό στριψιμάτων.

Δεδομένα από το στρίψιμο τροχού της τύχης

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Στρίβουμε μία φορά ένα συνηθισμένο κέρμα. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν το στρίψουμε 10.000 φορές αποκλείεται να έρθουν 6.000 Γ. Σ Λ

β) Η σχετική συχνότητα του Γ σε 1.000 στριψίματα θα είναι σίγουρα πιο κοντά στο 0,5 από τη σχετική συχνότητα του Γ σε 100 στριψίματα. Σ Λ

γ) Αν το στρίψουμε 10.000 φορές, αναμένουμε η σχετική συχνότητα του Γ και του Κ να είναι γενικά κοντά στο 50%. Σ Λ

δ) Είναι δυνατόν σε μία δοκιμή των 100 στριψιμάτων η σχετική συχνότητα του Γ να είναι 0,501. Σ Λ

ε) Είναι δυνατόν σε μία δοκιμή των 1.000 στριψιμάτων η σχετική συχνότητα του Γ να είναι 0,501. Σ Λ

Δεδομένα από το στρίψιμο τίμιου κέρματος

2. Να ρίξετε ένα συνηθισμένο ζάρι κάνοντας από μία δοκιμή των 100, 1.000 και 10.000 και να εξετάσετε σε ποια περίπτωση η σχετική συχνότητα του 6 βρίσκεται πιο κοντά στην πιθανότητα εμφάνισης του 6. Να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα και να σχολιάσετε τα αποτελέσματα όλης της τάξης.

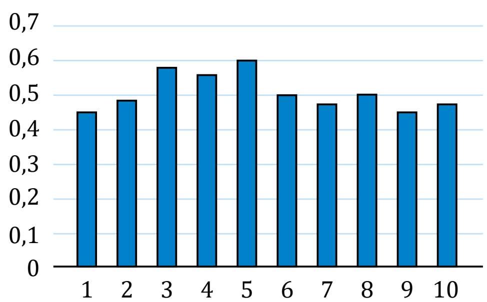
Προσομοιώση ρίψεων τίμιου ζαριού

Δεδομένα από ρίψη τίμιου ζαριού

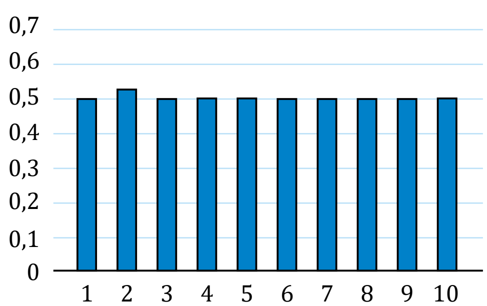
3. Η πιθανότητα ένα τυχαία επιλεγμένο παιδί από την τράπεζα δεδομένων της εφαρμογής 2 να έχει καστανά μάτια είναι 0,485. Να βρείτε το δείγμα της εφαρμογής 2, που η σχετική συχνότητα εμφάνισης καστανών ματιών πλησιάζει περισσότερο την τιμή της αντίστοιχης πιθανότητας.

Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

4. Ο Βασίλης και η Σαμιά δοκίμασαν να στρίψουν ένα συνηθισμένο κέρμα σε προσομοίωση και κατέγραψαν τα αποτελέσματα. Ο Βασίλης έκανε 10 δοκιμές από 100 στριψίματα η καθεμία και η Σαμιά έκανε 10 δοκιμές από 1.000 στριψίματα. Στα ραβδογράμματα παριστάνεται η σχετική συχνότητα εμφάνισης Γ (γράμματα) στις δοκιμές των παιδιών. Ένα διάγραμμα αντιστοιχεί σε κάθε παιδί.



Ραβδόγραμμα (i)



Ραβδόγραμμα (ii)

Προσομοίωση στριψιμάτων 2 τίμιων κερμάτων

Προσομοίωση στριψιμάτων 3 τίμιων κερμάτων

α) Ποια είναι η πιθανότητα σε ένα στρίψιμο του κέρματος να έρθει Γ;

β) Σε ποιο από τα ραβδογράμματα φαίνεται οι σχετικές συχνότητες να πλησιάζουν περισσότερο τη θεωρητική τιμή της πιθανότητας να έρθει Γ;

γ) Ποιο ραβδόγραμμα εκτιμάτε ότι αντιστοιχεί στη Σαμιά και ποιο στον Βασίλη;

5. Με βάση τα δεδομένα της εφαρμογής 1:

α) Για ποιον χρήστη η σχετική συχνότητα εμφάνισης του 1 είναι πιο «κοντά» στη θεωρητική τιμή της πιθανότητας;

β) Να απαντήσετε στο ίδιο ερώτημα για την εμφάνιση του 2 και το 3.

γ) Τι παρατηρείτε σχετικά με το μέγεθος των δειγμάτων στα α) και β);

6. Να απαντήσετε στο ερώτημα δ) της Δ1, επαναλαμβάνοντας το πείραμα:

α) για το στρίψιμο 2 κερμάτων και το ενδεχόμενο ΓΓ

β) για το στρίψιμο 3 κερμάτων και το ενδεχόμενο ΓΓΓ

Χρήση του νόμου μεγάλων αριθμών

Τι κρύβουν τα μπουκάλια;

Τυχαίο δείγμα και πιθανότητες

9.2 Εξαρτημένα και ανεξάρτητα ενδεχόμενα

Δ1. Ανεξάρτητες επιλογές

Σε ένα κουτί έχουμε 5 μπάλες, που διαφέρουν μόνο ως προς το χρώμα: μία είναι μπλε, δύο πράσινες και δύο κόκκινες. Χωρίς να βλέπουμε, βγάζουμε τυχαία δύο μπάλες από το κουτί.
Το κάνουμε με δύο τρόπους (δύο πειράματα τύχης):

Α΄ τρόπος: Πρώτα βγάζουμε τη μία, που την αφήνουμε εκτός κουτιού, και μετά την άλλη και καταγράφουμε το χρώμα τους.

Β΄ τρόπος: Πρώτα βγάζουμε τη μία μπάλα, της οποίας καταγράφουμε το χρώμα και την οποία επανατοποθετούμε στο κουτί. Μετά βγάζουμε τη δεύτερη (που μπορεί να είναι η ίδια με την πρώτη).

Με ποιον από τους δύο τρόπους το αποτέλεσμα της δεύτερης επιλογής είναι ανεξάρτητο από την πρώτη;
Ποια είναι η πιθανότητα η δεύτερη μπάλα να είναι μπλε με τον πρώτο τρόπο και ποια με τον δεύτερο τρόπο;
Συζητήστε τις απόψεις σας στις ομάδες και μετά στην τάξη.

Συζητάμε

… για ανεξάρτητα ενδεχόμενα

Τα παιδιά ενός γυμνασίου εκτός από αγγλικά επιλέγουν ως δεύτερη ξένη γλώσσα γαλλικά ή γερμανικά. Το σχολείο αποφάσισε να δώσει ως «δώρο» σε κάθε παιδί από ένα τετράδιο για τη δεύτερη ξένη γλώσσα. Τα τετράδια έχουν πράσινο, κόκκινο και μπλε χρώμα. Επιλέγουμε τυχαία ένα παιδί και ένα χρώμα τετραδίου, για να του δώσουμε.

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:
$Ξ_1$: «Το παιδί έχει επιλέξει γαλλικά».
$Ξ_2$: «Το παιδί έχει επιλέξει γερμανικά».
Π: «Το παιδί παίρνει πράσινο τετράδιο».
Κ: «Το παιδί παίρνει κόκκινο τετράδιο».
Μ: «Το παιδί παίρνει μπλε τετράδιο».

> Θυμίζουμε ότι το ενδεχόμενο Π πραγματοποιείται αν επιλέξουμε πράσινο τετράδιο. Αντίστοιχα, για να πραγματοποιηθεί το $Ξ_1$ το παιδί πρέπει να έχει επιλέξει γαλλικά. Κάτι παρόμοιο ισχύει για τα υπόλοιπα ενδεχόμενα.

Με την επιλογή ενός παιδιού και ενός χρώματος πραγματοποιείται ένα από τα $Ξ_1$ και $Ξ_2$ και ένα από τα Π, Κ και Μ.

Ωστόσο, είτε πραγματοποιηθεί το $Ξ_1$ είτε το $Ξ_2$, αυτό δεν επηρεάζει το χρώμα του τετραδίου που τυχαία θα επιλέξουμε. Επομένως, δεν επηρεάζεται η πραγματοποίηση ή όχι των Π, Κ και Μ.

Για το επόμενο σχολικό έτος υποθέτουμε ότι 70 παιδιά έχουν επιλέξει γαλλικά και 30 γερμανικά.

Τότε, σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό πιθανότητας, επιλέγοντας ένα παιδί και ένα χρώμα, οι αντίστοιχες πιθανότητες είναι:

- $P(\Xi_1) = \frac{70}{100} = 0{,}7$ και $P(\Xi_2) = \frac{30}{100} = 0{,}3$
- $P(\Pi) = P(K) = P(M) = \frac{1}{3}$

Αν υποθέσουμε ότι το παιδί που επιλέγουμε τυχαία κάνει γαλλικά, τότε πραγματοποιείται το Ξ_1. Στη συνέχεια επιλέγουμε τυχαία χρώμα. Γνωρίζοντας ότι έχει πραγματοποιηθεί το Ξ_1, αυτό επηρεάζει την πιθανότητα να επιλέξουμε πράσινο, κόκκινο ή μπλε;

Καταλαβαίνουμε πως όχι.

Η πιθανότητα για κάθε χρώμα, με δεδομένο ότι έχει πραγματοποιηθεί το Ξ_1, είναι $\frac{1}{3}$.

Το ίδιο συμβαίνει κι αν το παιδί που επιλέγουμε τυχαία κάνει γερμανικά, δηλαδή αν πραγματοποιείται το Ξ_2.

Άρα η πιθανότητα πραγματοποίησης του Κ ή του Μ ή του Π είναι **ανεξάρτητη** από την πραγματοποίηση του Ξ_1 ή του Ξ_2.

Δ2. Ποια ενδεχόμενα συσχετίζονται μεταξύ τους;

Κάναμε μια έρευνα σε τέσσερα νησιά ανάμεσα σε παιδιά γυμνασίου. Το ερώτημα ήταν «Έχετε παίξει χάντμπολ τα τελευταία δύο χρόνια, εκτός του σχολείου;».

Τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Επιλέγουμε τυχαία ένα παιδί από όσα συμμετείχαν στην έρευνα.

α) Πόσο πιθανό είναι το παιδί να έχει παίξει χάντμπολ τα τελευταία δύο χρόνια εκτός σχολείου;

β) Αν γνωρίζετε ότι το παιδί που επιλέξαμε είναι από το νησί των Δωδεκανήσων, πόσο πιθανό είναι να έχει παίξει χάντμπολ τα τελευταία δύο χρόνια;

γ) Να απαντήσετε το β) για καθένα από τα νησιά.

δ) Θεωρείτε ότι η πιθανότητα να έχει παίξει το παιδί χάντμπολ τα τελευταία δύο χρόνια είναι ανεξάρτητη από το νησί που προέρχεται; Συζητήστε τις απόψεις σας στις ομάδες και μετά στην τάξη.

	Χάντμπολ	Όχι Χάντμπολ
Νησί Δωδεκανήσων	12	1.188
Νησί Αργοσαρωνικού	135	765
Νησί Κυκλάδων	8	792
Νησί Ιονίου	9	891

Συζητάμε

... για εξαρτημένα ενδεχόμενα

Για τα τετράδια των παιδιών, στο προηγούμενο παράδειγμα, η καθηγήτρια των Γαλλικών πρότεινε να ακολουθήσουν μια άλλη μέθοδο:

Όσα παιδιά κάνουν Γαλλικά να πάρουν πράσινο ή κόκκινο τετράδιο, τυχαία, ενώ όσα παιδιά κάνουν Γερμανικά να πάρουν μπλε. Σε αυτή την περίπτωση η πιθανότητα το παιδί να πάρει πράσινο, κόκκινο ή μπλε τετράδιο **εξαρτάται** από τη γλώσσα που κάνει. Πράγματι, αν επιλέξουμε τυχαία ένα παιδί, τότε:

- Αν πραγματοποιηθεί το Ξ_1, δηλαδή το παιδί κάνει Γαλλικά, τότε η πιθανότητα να πάρει μπλε τετράδιο είναι 0. Η πιθανότητα να πάρει κόκκινο είναι $\frac{1}{2}$, ενώ η πιθανότητα να πάρει πράσινο είναι επίσης $\frac{1}{2}$.
- Αν πραγματοποιηθεί το Ξ_2 τα πράγματα είναι διαφορετικά: Το παιδί θα πάρει μπλε τετράδιο, άρα η πιθανότητα για μπλε τετράδιο είναι 1, ενώ για κόκκινο και πράσινο είναι 0.

Επομένως, σε αυτή την περίπτωση η πιθανότητα πραγματοποίησης των Π, Κ και Μ **εξαρτάται** από το αν πραγματοποιήθηκε το Ξ_1 ή το Ξ_2.

Σε αυτή την περίπτωση, από την περιγραφή του πειράματος τύχης προκύπτει άμεσα το συμπέρασμα ότι η πιθανότητα του χρώματος τετραδίου εξαρτάται από τη γλώσσα που διδάσκεται το παιδί που επιλέχτηκε τυχαία. Ωστόσο, υπάρχουν εξαρτημένα ενδεχόμενα σε πειράματα τύχης, που η εξάρτησή τους δεν προκύπτει άμεσα από την περιγραφή του πειράματος, αλλά από αριθμητικά δεδομένα και υπολογισμούς. Ένα τέτοιο παράδειγμα περιγράφεται στην εφαρμογή 1.

Περιγράφουμε τις νέες μας γνώσεις

Λέμε ότι δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός πειράματος τύχης είναι **ανεξάρτητα** αν η πραγματοποίηση ή όχι του Α δεν επηρεάζει την πιθανότητα πραγματοποίησης του Β.

Αν όμως η πραγματοποίηση ή όχι του Α επηρεάζει την πιθανότητα πραγματοποίησης του Β, τότε λέμε ότι τα Α και Β είναι **εξαρτημένα** ενδεχόμενα.

Αν το χρώμα του τετραδίου επιλέγεται τυχαία ανάμεσα στα τρία χρώματα, τότε η πιθανότητα πραγματοποίησης των Π, Κ και Μ είναι **ανεξάρτητη** από την πραγματοποίηση των Ξ_1 και Ξ_2.

Αν όμως για τα παιδιά που κάνουν Γαλλικά επιλέγουμε τυχαία πράσινο ή κόκκινο τετράδιο και για αυτά που κάνουν Γερμανικά μπλε, τότε η πιθανότητα πραγματοποίησης των Π, Κ και Μ **εξαρτάται** από την πραγματοποίηση ή όχι των Ξ_1 και Ξ_2.

Πραγματοποίηση ενδεχομένων, μαζί

Ανεξάρτητα ενδεχόμενα και πιθανότητες

Μελετάμε παραδείγματα και εφαρμογές

1. Σε έρευνα που έγινε σε τυχαίο δείγμα 100.000 ατόμων, για τις ασθένειες Α και Β καταγράφηκαν τα εξής αποτελέσματα:

	Νοσεί από την Α	Δε νοσεί από την Α
Νοσεί από τη Β	2.400	12.600
Δε νοσεί από τη Β	13.600	71.400

α) Πόσα άτομα νοσούν από την Α; Πόσα νοσούν από τη Β; Πόσα και από τις δύο ασθένειες;

β) Επιλέγουμε τυχαία ένα άτομο του δείγματος. Ποια είναι η πιθανότητα να νοσεί από την Α; Από τη Β;

γ) Θεωρούμε τα ενδεχόμενα Α: «το άτομο που επιλέξαμε νοσεί από την Α» και Β: «το άτομο που επιλέξαμε νοσεί από τη Β». Είναι το Α εξαρτημένο ή ανεξάρτητο από το Β;

δ) Σε παρόμοια έρευνα που έγινε σε τυχαίο δείγμα 100.000 ατόμων, για τις ασθένειες Α και Γ καταγράφηκαν τα αποτελέσματα του πίνακα:

	Νοσεί από την Α	Δε νοσεί από την Α
Νοσεί από τη Γ	4.800	10.200
Δε νοσεί από τη Γ	11.200	73.800

Η πιθανότητα ένα τυχαίο άτομο του δείγματος να νοσεί από την Α είναι ανεξάρτητη από το ενδεχόμενο να νοσεί από τη Γ;

Απάντηση

α) Από την Α νοσούν $2.400+13.600=16.000$. Από τη Β νοσούν $2.400+12.600=15.000$. Και από τις δύο ασθένειες νοσούν 2.400.

β) Η πιθανότητα το τυχαία επιλεγμένο άτομο να νοσεί από την Α είναι $\dfrac{16.000}{100.000}=0{,}16$, σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό πιθανότητας.

Ομοίως για τη Β, η πιθανότητα είναι $\dfrac{15.000}{100.000}=0{,}15$.

γ) Επιλέγουμε τυχαία ένα άτομο του δείγματος.
Με δεδομένο ότι αυτό νοσεί από τη Β, ποια είναι η πιθανότητα να νοσεί και από την Α;
Τα άτομα του δείγματος που νοσούν από τη Β είναι 15.000 και από αυτά τα 2.400 νοσούν και από την Α, άρα η παραπάνω πιθανότητα είναι $\dfrac{2.400}{15.000}=0{,}16$.

Αν Α και Β είναι δύο ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης, με ισοπίθανα αποτελέσματα, τότε σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό η πιθανότητα «να πραγματοποιείται το ενδεχόμενο Α με δεδομένο ότι πραγματοποιείται το Β» είναι ίση με την τιμή του κλάσματος

$$\frac{\text{πλήθος ευνοϊκών αποτελεσμάτων για την πραγματοποίηση του Α και του Β}}{\text{πλήθος ευνοϊκών αποτελεσμάτων για την πραγματοποίηση του Β}}$$

Πιθανότητα «δεδομένου ότι»

Όπως βλέπουμε, η πιθανότητα το άτομο να νοσεί από την Α δεν επηρεάστηκε από το δεδομένο ότι το άτομο νοσεί από τη Β.

Επομένως, το Α είναι ανεξάρτητο από το Β.

Το Β είναι, επίσης, ανεξάρτητο από το Α;

δ) Επιλέγουμε τυχαία ένα άτομο του δείγματος και κάνουμε παρόμοια διερεύνηση με το γ).

Η πιθανότητα το άτομο να νοσεί από την Α είναι $\frac{16.000}{100.000}=0{,}16$.

Θα υπολογίσουμε την πιθανότητα να νοσεί από την Α, με δεδομένο ότι νοσεί από τη Γ.

Τα άτομα του δείγματος που νοσούν από τη Γ είναι15.000 και από αυτά τα 4.800 νοσούν και από την Α, άρα η παραπάνω πιθανότητα είναι $\frac{4.800}{15.000}=0{,}32$.

Όπως βλέπουμε, η πιθανότητα το άτομο να νοσεί από την Α επηρεάστηκε από το δεδομένο ότι το άτομο νοσεί από τη Γ.

Επομένως το Α είναι εξαρτημένο από το Γ.

Είναι και το Γ εξαρτημένο από το Α;

Συνεργαζόμαστε και παρουσιάζουμε

Να κατασκευάσετε έναν πίνακα έννοιας για τα ανεξάρτητα ενδεχόμενα.

Εφαρμόζουμε τις νέες μας γνώσεις

1. Σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ανεξάρτητα;

α) Έχουμε ένα συρτάρι με κόκκινες και μπλε κάλτσες. Βγάζουμε τυχαία δύο κάλτσες από το συρτάρι.
Α: «Η πρώτη κάλτσα είναι κόκκινη» και
Β: «Η δεύτερη κάλτσα είναι κόκκινη».

β) Έχουμε ένα κίτρινο κι ένα λευκό ψυγείο. Σε κάθε ψυγείο υπάρχουν 30 πορτοκαλάδες και 20 λεμονάδες. Ζητάμε να μας δώσουν ένα τυχαίο αναψυκτικό από τυχαίο ψυγείο.
Α: «Το αναψυκτικό ήταν στο κίτρινο ψυγείο» και
Β: «Μας έδωσαν πορτοκαλάδα».

γ) Από ένα κουτί με κλήρους-αριθμούς από 1 έως 50 βγάζω τυχαία έναν, καταγράφω τον αριθμό και τον ξαναρίχνω στο κουτί. Στη συνέχεια τραβάω πάλι τυχαία κλήρο και καταγράφω τον αριθμό.
Α: «Ο πρώτος αριθμός είναι μικρότερος του 20» και
Β: «Ο δεύτερος αριθμός 20 ή μεγαλύτερος του 20».

2. Σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις τα ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα;

α) $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(B)=\frac{1}{2}$ και η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το Α με δεδομένο ότι πραγματοποιείται το Β είναι $\frac{2}{3}$.

β) $P(A)=0{,}2$, $P(B)=0{,}1$ και η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το Β με δεδομένο ότι πραγματοποιείται το Α είναι 0,1.

Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

3. Σε ένα κουτί έχουμε 2 πράσινες και 3 κόκκινες μπάλες. Επιλέγουμε τυχαία μια μπάλα από το κουτί, καταγράφουμε το χρώμα της και την επανατοποθετούμε στο κουτί. Στη συνέχεια επιλέγουμε πάλι τυχαία μια μπάλα από το κουτί. Τα ενδεχόμενα η πρώτη να είναι πράσινη και η δεύτερη μπάλα να είναι κόκκινη είναι ανεξάρτητα ή εξαρτημένα; Γιατί;

4. Η πιθανότητα του ενδεχομένου Α να είναι ελαττωματική μια μπαταρία είναι 0,001.

Επιλέγουμε τυχαία μια μπαταρία από την αγορά. Η πιθανότητα του ενδεχομένου Β να είναι της εταιρείας ΦΟΡΤΙΣΗ είναι 0,3. Η πιθανότητα του ενδεχομένου η μπαταρία που επιλέξαμε να είναι ελαττωματική, δεδομένου ότι είναι της ΦΟΡΤΙΣΗ, είναι 0,003. Είναι τα Α και Β ανεξάρτητα;

5. Η πιθανότητα ένα τυχαίο παιδί του γειτονικού σας λυκείου να μην παίζει μπάσκετ είναι 0,2. Το 30% των παιδιών φοιτούν στην Α΄ τάξη και το 27% των παιδιών φοιτούν στην Α΄ τάξη και παίζουν μπάσκετ.

Επιλέγουμε τυχαία ένα παιδί από το γειτονικό σας λύκειο. Τα ενδεχόμενα Α: «το παιδί φοιτά στην Α΄ τάξη» και Β: «το παιδί παίζει μπάσκετ» είναι ανεξάρτητα ή εξαρτημένα;

Ασκήσεις στα ανεξάρτητα ενδεχόμενα

6. Να περιγράψετε δύο πειράματα τύχης και σε καθένα από αυτά δύο ενδεχόμενα.

α) Στην πρώτη περίπτωση τα ενδεχόμενα να είναι ανεξάρτητα.

β) Στη δεύτερη τα ενδεχόμενα να είναι εξαρτημένα.

7. Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται τα αποτελέσματα μιας έρευνας σε 10.000 φυτά συγκεκριμένης οικογένειας.

	Ασθένεια Β	Όχι ασθένεια Β
Χαρακτηριστικό Α	410	4.590
Όχι χαρακτηριστικό Α	50	4.950

Η έρευνα εξέταζε αν ένα φυτό είχε το χαρακτηριστικό Α και την ασθένεια Β.

Επιλέγουμε τυχαία ένα φυτό από τα 10.000. Να παρατηρήσετε και να τεκμηριώσετε αν η ύπαρξη του χαρακτηριστικού Α και της ασθένειας Β σε ένα τέτοιο φυτό είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα. Πώς μπορεί να αξιοποιηθεί η παρατήρησή σας στην πράξη;

Ανακεφαλαίωση

Πιθανότητες

Ερωτήσεις – ασκήσεις – προβλήματα

1. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις:

α) Στρίβουμε 200.000 φορές έναν τροχό της τύχης με 4 ίσα μέρη, όπως στο σχήμα. Τότε είμαστε σίγουροι ότι το πράσινο χρώμα θα έρθει 50.000 φορές. Σ Λ

β) Στα 200.000 στριψίματα του τροχού στο α) περιμένουμε η σχετική συχνότητα εμφάνισης κάθε χρώματος να είναι κοντά στο 0,25. Σ Λ

γ) Σε 100.000 στριψίματα τίμιου κέρματος η σχετική συχνότητα του Γ (έρχεται γράμματα) είναι σε κάθε περίπτωση πιο κοντά στο 0,5, από ό,τι σε 10.000 στριψίματα. Σ Λ

δ) Αν κάνουμε δοκιμές από 100.000 στριψίματα και από 10.000 στριψίματα τίμιου κέρματος και υπολογίσουμε τις σχετικές συχνότητες του Γ, αναμένουμε στις δοκιμές των 100.000 οι σχετικές συχνότητες του Γ να είναι γενικά πιο κοντά στο 0,5, από ό,τι στις δοκιμές των 10.000 στριψιμάτων. Σ Λ

ε) Αν κάνουμε 10.000 ρίψεις ενός πραγματικού συνηθισμένου ζαριού και 10.000 ρίψεις ενός συνηθισμένου ζαριού σε προσομοίωση, η σχετική συχνότητα κάθε αποτελέσματος στην περίπτωση της προσομοίωσης θα είναι πιο κοντά στο $\frac{1}{6}$, από ό,τι στο πραγματικό ζάρι. Σ Λ

2. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις:

α) Αν τα ενδεχόμενα Α και Β ενός πειράματος τύχης είναι ανεξάρτητα, τότε, όταν πραγματοποιείται το ένα, δεν πραγματοποιείται το άλλο. Σ Λ

β) Για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός πειράματος τύχης είναι $P(A)=0{,}2$ και $P(B)=0{,}3$. Αν τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ανεξάρτητα, τότε η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το Β, με δεδομένο ότι πραγματοποιείται το Α είναι 0,3. Σ Λ

γ) Για δύο ανεξάρτητα ενδεχόμενα Α και Β ενός πειράματος τύχης είναι $P(A)=\frac{1}{2}$ και $P(B)=\frac{1}{3}$. Με αυτά τα δεδομένα δεν μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα να πραγματοποιείται το Α, δεδομένου ότι πραγματοποιείται το Β. Σ Λ

δ) Για δύο εξαρτημένα ενδεχόμενα Α και Β ενός πειράματος τύχης είναι $P(A)=\frac{1}{2}$ και $P(B)=\frac{1}{4}$. Με αυτά τα δεδομένα δεν μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα να πραγματοποιείται το Α, δεδομένου ότι πραγματοποιείται το Β. Σ Λ

ε) Αν τα Α και Β είναι ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης με $P(A)=0{,}15$, $P(B)=0{,}1$ και η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το Α με δεδομένο ότι πραγματοποιείται το Β είναι 0,1, τότε τα Α και Β είναι εξαρτημένα. Σ Λ

3. Να χαρακτηρίσετε τα ενδεχόμενα Α και Β ως εξαρτημένα ή ανεξάρτητα σε κάθε περίπτωση.

α) Στρίβουμε ένα συνηθισμένο κέρμα και ρίχνουμε ένα συνηθισμένο ζάρι. Καταγράφουμε Γ (γράμματα) ή Κ (κεφαλή), όπως και τον αριθμό του ζαριού. Α: «έρχεται Κ» και Β: «έρχεται 6».

β) Ένα συρτάρι έχει 3 μπλε και 2 κόκκινα στιλό. Παίρνω τυχαία ένα στιλό και χωρίς να το τοποθετήσω πίσω στο συρτάρι παίρνω ένα δεύτερο στιλό. Α: «το πρώτο στιλό είναι κόκκινο» και Β: «το δεύτερο στιλό είναι κόκκινο».

4. Έριξα ένα ζάρι 60.000 φορές και ήρθαν τα εξής αποτελέσματα:

Αποτέλεσμα	1	2	3	4	5	6
Συχνότητα	9.120	9.613	10.502	10.301	10.002	10.462

α) Να υπολογίσετε τις σχετικές συχνότητες των αποτελεσμάτων.

β) Συμφωνείτε με τη φράση «το ζάρι δεν είναι τίμιο, γιατί θα έπρεπε κάποιες σχετικές συχνότητες να είναι πιο κοντά στο $\frac{1}{6}$ »;

5. Τα 120 παιδιά ενός γυμνασίου επιλέγουν ως δεύτερη ξένη γλώσσα Γαλλικά ή Γερμανικά. Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι επιλογές δεύτερης ξένης γλώσσας ανά τάξη.

Τάξη	Α΄	Β΄	Γ΄
Γαλλικά	20	30	30
Γερμανικά	20	10	10

Το ίδιο ισχύει για τα 120 παιδιά του γειτονικού λυκείου. Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι επιλογές τους ανά τάξη.

Τάξη	Α΄	Β΄	Γ΄
Γαλλικά	20	30	25
Γερμανικά	12	18	15

α) Επιλέγουμε τυχαία ένα παιδί από το γυμνάσιο και εξετάζουμε τα εξής ενδεχόμενα:

Α: «Το παιδί πηγαίνει στην Α΄ τάξη». Β: «Το παιδί πηγαίνει στη Β΄τάξη».

Γ: «Το παιδί πηγαίνει στη Γ΄ τάξη».

$Ξ_1$: «Το παιδί έχει επιλέξει Γαλλικά». $Ξ_2$: «Το παιδί έχει επιλέξει Γερμανικά».

Είναι τα Α, Β και Γ ανεξάρτητα ή εξαρτημένα από τα $Ξ_1$ και $Ξ_2$;

β) Να απαντήσετε στο ίδιο ερώτημα, αν επιλέξουμε τυχαία ένα παιδί από το λύκειο.

6. Σε μια κληρωτίδα έχουμε τέσσερις μπάλες με αριθμούς από 1 έως 4. Θέλουμε να επιλέξουμε δύο μπάλες-αριθμούς τυχαία.

Η Δανάη επιλέγει δύο μπάλες τη μια μετά την άλλη.

Η Ρίσα επιλέγει μία μπάλα, την επανατοποθετεί στην κληρωτίδα και επιλέγει πάλι. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

Α: «Η πρώτη μπάλα έχει άρτιο αριθμό».

Β: «Η δεύτερη μπάλα έχει άρτιο αριθμό».

α) Στο πείραμα τύχης της Δανάης ή της Ρίσα τα Α και Β είναι ανεξάρτητα;

β) Ένα από τα δύο κορίτσια βρήκε στο διαδίκτυο έναν προσομοιωτή του τρόπου που επιλέγει μπάλες και εκτέλεσε 100.000 επαναλήψεις. Από τα αποτελέσματα προέκυψε ότι:

Η πρώτη μπάλα έχει άρτιο	Η δεύτερη μπάλα έχει άρτιο	Και οι δύο μπάλες έχουν άρτιο
49.617	49.930	24.873

Η Δανάη ή η Ρίσα εκτιμάτε ότι χρησιμοποίησε τον προσομοιωτή;

Συνδέσεις και επεκτάσεις

7. Κάναμε μια έρευνα για δύο ασθένειες κάκτων: την Ι και την ΙΙ, επιλέγοντας τυχαίο δείγμα της τάξης των 120.000-130.000 κάκτων.

Μελετήσαμε κάκτους με μαλακά αγκάθια και βρήκαμε τι ποσοστό νοσεί από την ασθένεια Ι και τι ποσοστό όχι. Στη συνέχεια κάναμε το ίδιο για κάκτους χωρίς μαλακά αγκάθια.

Μετά κάναμε την ίδια μελέτη για την ασθένεια ΙΙ. Βρήκαμε ότι η πιθανότητα ένας κάκτος να νοσεί από την Ι είναι 1% ή 0,01, ενώ για την ΙΙ είναι 3,4% ή 0,034.

Τα αποτελέσματα φαίνονται στους πίνακες (με προσέγγιση ακέραιας μονάδας).

	Ασθένεια Ι	Όχι ασθένεια Ι
Μαλακά αγκάθια	1%	99%
Όχι μαλακά αγκάθια	1%	99%

	Ασθένεια ΙΙ	Όχι ασθένεια ΙΙ
Μαλακά αγκάθια	10%	90%
Όχι μαλακά αγκάθια	1%	99%

α) Επιλέγουμε τυχαία έναν κάκτο. Ποια είναι η πιθανότητα να νοσεί από την ασθένεια Ι:

i. Αν έχει μαλακά αγκάθια;

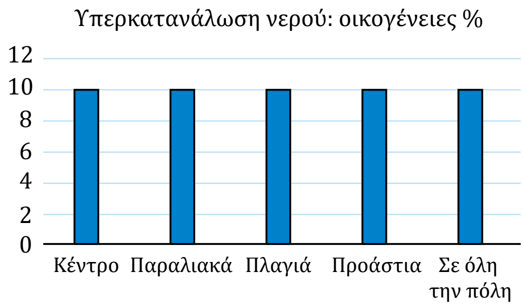
ii. Αν δεν έχει μαλακά αγκάθια;

β) Να απαντήσετε στο ίδιο ερώτημα, αλλά αυτή τη φορά για την ασθένεια ΙΙ.

γ) Ποια ασθένεια φαίνεται να συσχετίζεται με το είδος των αγκαθιών του κάκτου και ποια όχι;

8. Στα παρακάτω διαγράμματα φαίνεται το ποσοστό των οικογενειών μιας πόλης που έκαναν υπερκατανάλωση νερού και υπερκατανάλωση ρεύματος, ανάλογα με την περιοχή που μένουν, αλλά και συνολικά. Η έρευνα αφορά καταναλώσεις του τελευταίου τριμήνου.

Επιλέγουμε τυχαία μια οικογένεια και θεωρούμε τα ενδεχόμενα: Α: «η οικογένεια έκανε υπερκατανάλωση νερού το τελευταίο τρίμηνο» και Β: «η οικογένεια έκανε υπερκατανάλωση ρεύματος το τελευταίο τρίμηνο». Ποιο από τα ενδεχόμενα είναι εξαρτημένο από την περιοχή που μένει η οικογένεια; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. Μπορείτε να δώσετε μια πιθανή ερμηνεία της απάντησής σας;



Ομαδική εργασία

9. Να κάνετε μια έρευνα με δύο ερωτήματα στο σχολείο σας ή και στο οικογενειακό ή φιλικό περιβάλλον σας, ώστε να συλλέξετε όσο περισσότερα δεδομένα μπορείτε και να εκτιμήσετε αν οι απαντήσεις στα ερωτήματα συσχετίζονται ή όχι.

Για παράδειγμα μπορείτε να κάνετε τις εξής ερωτήσεις:

- Ποια είναι η αγαπημένη σας ομάδα;
- Ποιο είναι το αγαπημένο σας άθλημα;

Οι απαντήσεις στις δύο ερωτήσεις συσχετίζονται αν η πιθανότητα να δοθεί μια συγκεκριμένη απάντηση στη μια ερώτηση εξαρτάται από την απάντηση που δόθηκε στην άλλη ερώτηση.

10. Χρησιμοποιώντας προσομοίωση για ένα πείραμα τύχης (στρίψιμο ή στριψίματα κέρματος, στρίψιμο τροχού της τύχης, ρίψη ζαριού ή ζαριών), να το επαναλάβετε 100, 1.000, 10.000 και 100.000 φορές και να βρείτε τη σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου της επιλογής σας. Να συγκρίνετε τις σχετικές συχνότητες, ανά αριθμό επαναλήψεων και να ερμηνεύσετε τις διαφορές.

Για να συλλέξετε αποτελέσματα από μεγάλο αριθμό δοκιμών, μπορείτε να αναθέσετε σε κάθε μέλος της ομάδας την εκτέλεση ενός αριθμού επαναλήψεων και στη συνέχεια να συγκεντρώσετε τα συνολικά αποτελέσματα.

Πολλά δεδομένα από πραγματικούς πληθυσμούς

Τρίλιζα στις πιθανότητες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ – ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

Πραγματικοί Αριθμοί

1.1 Τετραγωνικές ρίζες

1. Οι ιδιότητες αντιστοιχούν (με τη σειρά) στα παραδείγματα 4, 1, 3, 2.

2. **α)** Σ **β)** Λ **γ)** Σ **δ)** Σ **ε)** Λ

3. **α)** $5\sqrt{3}$ **β)** $4\sqrt{5}$ **γ)** $\frac{4}{10}$ **δ)** $\frac{1}{2}$

4. **α)** $9\sqrt{2}$ **β)** $6\sqrt{3}$ **γ)** $\frac{9}{2}+\frac{3}{2}=6$ **δ)** $\frac{5}{3}+\frac{7}{3}-\frac{1}{3}=\frac{11}{3}$

5. Δείτε την αντίστοιχη απόδειξη της $\sqrt{\alpha\cdot\beta}=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$ και χρησιμοποιήστε την ιδιότητα $\left(\frac{x}{y}\right)^{\nu}=\frac{x^{\nu}}{y^{\nu}}$, για $\nu=2$.

6. **α)** 50 **β)** 4.000 **γ)** 0,8 **δ)** 0,12 **ε)** 1,5

7. **α)** $10\sqrt{3}$ **β)** $5\sqrt{5}+7\sqrt{7}$ **γ)** $\frac{3}{2}$

δ) $\frac{11}{5}+\frac{11}{7}=\frac{132}{35}$ **ε)** 0 **στ)** $-6\sqrt{2}$ **ζ)** 32

8. **α)** Η πλευρά του τετραγώνου με εμβαδόν 18 είναι $\sqrt{18}=3\sqrt{2}$. Αντίστοιχα να υπολογίσετε την πλευρά του τετραγώνου με εμβαδόν 50.

β) i. $16\sqrt{2}$ **ii.** 128

9. Να εφαρμόσετε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο που σχηματίζεται με πλευρές το ύψος του ισοπλεύρου, το μισό της βάσης του και την πλευρά του ισοπλεύρου.

10. Υπόδειξη: Ενώ στο 1ο μέλος είναι $\alpha=-4$ και $\beta=-25$, στο 2ο μέλος είναι $\alpha=4$ και $\beta=25$, δηλαδή $\sqrt{-4\cdot(-25)}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{25}$.

1.2 Ρητοί και άρρητοι αριθμοί

1. **α)** 0,13 **β)** 11,3 **γ)** 1,5 **δ)** 0,375 **ε)** –0,25

στ) $0,\overline{3}$ **ζ)** $\frac{115}{100}=\frac{23}{20}$ **η)** $-\frac{35}{100}=-\frac{7}{20}$

2. **α)** ρητός **β)** άρρητος **γ)** ρητός **δ)** ρητός
ε) ρητός **στ)** άρρητος **ζ)** άρρητος

3. **α)** $\sqrt{5}$ **β)** $\frac{10}{\pi}$

4. **α)** ρητός **β)** ρητός **γ)** άρρητος **δ)** ρητός

5. $-\sqrt{8}, -\sqrt{3}, -\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{11}$

6. Το $-\sqrt{3}$ και το $-\sqrt{2}$ είναι τοποθετημένα το ένα στη θέση του άλλου.

Το ίδιο ισχύει και για τα π και $\sqrt{5}$.

7. **α)** άρρητος **β)** ρητός **γ)** ρητός **δ)** ρητός
ε) ρητός **στ)** άρρητος **ζ)** άρρητος
Υπόδειξη: Να κάνετε τις πράξεις σε κάθε περίπτωση.
Για την αιτιολόγηση των αρρήτων χρησιμοποιήστε: «κλάσμα άρρητου», «άπειρα δεκαδικά ψηφία που δεν επαναλαμβάνονται».

8. **α)** 9 **β)** 1,2 **γ)** –1,5 **δ)** $\frac{2}{3}$

9. $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$, $\sqrt{27}=3\sqrt{3}$, $\sqrt{48}=4\sqrt{3}$. Ξεκινήστε τοποθετώντας το $\sqrt{3}$ στην αριθμογραμμή με τη βοήθεια του Πυθαγόρειου Θεωρήματος σε κατάλληλο ορθογώνιο τρίγωνο (προηγουμένως θα χρειαστεί να κάνετε το ίδιο για το $\sqrt{2}$).

10. Ενδεικτικά για το $\sqrt{7}$: Είναι μεταξύ 2 και 3, γιατί $\sqrt{4}=2$, $\sqrt{9}=3$, άρα $\sqrt{4}<\sqrt{7}<\sqrt{9}$.

$3<\sqrt{14}<4$, $4<\sqrt{21}<5$, $5<\sqrt{28}<6$, $-3<-\sqrt{7}<$
<-2, $-5<-\sqrt{21}<-4$, $-8<-\sqrt{63}<-7$

Υπόδειξη: Να γράψετε το $-\frac{14}{\sqrt{7}}$ ως $-2\sqrt{7}$.

11. Με τη βοήθεια του Πυθαγόρειου Θεωρήματος είναι $\alpha\sqrt{5}$.

12. **α)** 3 **β)** Σκεφτείτε ότι $\frac{\Gamma\Delta}{\mathrm{K}\Lambda}=\sqrt{15}$.

γ) Σκεφτείτε ότι $-\sqrt{12}=-2\sqrt{3}$.

δ) Να χρησιμοποιήσετε την ισότητα $-\sqrt{28}=-2\sqrt{7}$.

13. **α)** Με τη βοήθεια του Πυθαγόρειου Θεωρήματος $\sqrt{80}=2\sqrt{20}$.

β) Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα:

$\alpha=\sqrt{\beta^2+\gamma^2}$ και στο i. η υποτείνουσα είναι $\sqrt{(3\beta)^2+(3\gamma)^2}=3\sqrt{\beta^2+\gamma^2}$

Ομοίως στο ii. $\sqrt{3}\alpha$

14. Να χρησιμοποιήσετε τον τύπο $R=\dfrac{L}{2\pi}$ για να βρείτε τα μήκη των ακτινών και να τις αφαιρέσετε.

15. **α)** $S=108\cdot\sqrt{148{,}514851}$ m/sec,
β) Υψώνοντας στο τετράγωνο $T=11.664S^2 m$,
γ) $m=\dfrac{T}{11.664S^2}$ και αντικαθιστώντας
$m=5{,}716\cdot10^{-5}$ γραμμάρια ανά γραμμομόριο.

1.3 Το σύνολο των πραγματικών αριθμών

1. Ρητοί: $\frac{1}{2}, \sqrt{4}, -\sqrt{9}, -2, \frac{3}{3}$
Ακέραιοι: $\sqrt{4}, -\sqrt{9}, -2, \frac{3}{3}$

2. **α)** $2\sqrt{2}+2$ **β)** $1-2\sqrt{2}$ **γ)** $4-\sqrt{2}$ **δ)** 6

3. Φυσικοί: Δ, ακέραιοι: Γ, ρητοί: Β, άρρητοι: Α

4. **α)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ **β)** π^5 **γ)** $\left(\sqrt{3}\right)^5$
δ) $\left(\sqrt{3}\right)^6$ **ε)** $\left(\sqrt{2}\right)^5$

5. **α)** $\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}\right)^5$ **β)** $4^5=1024$

6. Ο $-\sqrt{2}$ είναι άρρητος. Οι $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ και $\sqrt{5}\left(\sqrt{5}-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$ είναι φυσικοί, ακέραιοι και ρητοί. Ο $-\sqrt{4}$ είναι ακέραιος και ρητός. Ο 1,5 είναι ρητός.

7. **α)** 1 **β)** 8 **γ)** $9\sqrt{2}$ **δ)** -20

8. **α)** $\sqrt{5}^6$ **β)** π^5 **γ)** $\frac{2}{9}$
δ) $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)^4=\dfrac{\left(\sqrt{5}\right)^2\left(\sqrt{5}\right)^2}{5^4}=\dfrac{5^2}{5^4}=5^{-2}$
ε) $\frac{3}{5}$ **στ)** $\frac{35}{4}$ **ζ)** 14 **η)** 1

9. **α) i.** Αντικαταστήστε οποιονδήποτε ακέραιο εκτός από 0 στη θέση του x.
ii. Αντικαταστήστε κατάλληλο άρρητο στη θέση του x, π.χ. $\sqrt{3}$ (ποιοι άρρητοι δεν είναι κατάλληλοι;)
iii. Αντικαταστήστε στη θέση του x ακέραιο πολλαπλάσιο του $\sqrt{2}$ (όχι το 0).
β) Χρησιμοποιήστε τις απαντήσεις σας στο α).

Ανακεφαλαίωση

1. **α)** Λ **β)** Σ **γ)** Λ **δ)** Λ **ε)** Σ **στ)** Σ

2. **α)** Λ **β)** Λ **γ)** Λ **δ)** Σ **ε)** Σ **στ)** Λ **ζ)** Λ

3. **α)** $\frac{11}{6}=1{,}83$ **β)** $\frac{3}{8}=0{,}375$ **γ)** $\frac{29}{75}=0{,}386$

4. Οι $\sqrt{8}$, $\sqrt{4+9}$ και π είναι άρρητοι. Οι $\sqrt{4}\cdot\sqrt{9}$ και $\sqrt{4}+\sqrt{9}$ είναι φυσικοί, ακέραιοι και ρητοί. Ο $-\frac{6}{3}$ είναι ακέραιος και ρητός. Οι $0{,}0\bar{2}$, 10,123 και 3,14 είναι ρητοί.

5. **α)** 30 **β)** 11.000 **γ)** 0,05 **δ)** 2,5 **ε)** 1.500

6. **α)** 2^{12} **β)** $(-3)^{17}$ **γ)** 3^{-3} **δ)** 5^8 **ε)** π^5 **στ)** $\left(\sqrt{2}\right)^{10}$

7. Χρησιμοποιήστε τις ισότητες:
$\sqrt{27}=3\sqrt{3}$ $\sqrt{50}=5\sqrt{2}$ $\sqrt{128}=8\sqrt{2}$
$\sqrt{48}=4\sqrt{3}$ $\sqrt{75}=5\sqrt{3}$

8. Τοποθετούνται στα αντίστοιχα σημεία, από αριστερά προς τα δεξιά: $-\pi, -\sqrt{5}, -1, \bar{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$
Το $-\sqrt{3}$ δεν τοποθετείται.

9. **α)** 4 **β)** $9-4\sqrt{3}$ **γ)** 16

10. **α)** 1 **β)** 3^5 **γ)** 5^6 **δ)** 7^{-1} **ε)** 11^{11} **στ)** 2 **ζ)** $\left(\sqrt{3}\right)^{10}$

11. **α)** $7\sqrt{3}$ **β)** $-13\sqrt{2}$ **γ)** $\frac{37}{6}$ **δ)** $\frac{59}{6}$
ε) $2995\sqrt{2}$ **στ)** $\sqrt{11}\left(\dfrac{15}{\sqrt{11}}+\dfrac{25}{\sqrt{11}}-\dfrac{2}{\sqrt{11}}\right)=38$

12. **α)** $5\sqrt{13}+2\sqrt{2}$ **β)** $\frac{19}{60}$

13. Σκεφτείτε ότι $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ $\sqrt{27}=3\sqrt{3}$ και χρησιμοποιήστε την απόσταση του $\sqrt{3}$ από το 0, για να εντοπίσετε τα ζητούμενα σημεία.

14. **α)** $\sqrt{5}$ **β)** $6\sqrt{5}$

15. **α)** $\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, 4\sqrt{3}$ **β) i.** $2\sqrt{3}$ **ii.** $\sqrt{3}$ **iii.** $3\sqrt{3}$

16. $6{,}6^6=\dfrac{0{,}72}{8\pi\cdot D\cdot 1500^2}$ άρα $D=\dfrac{4{,}84}{\pi}\cdot10^{-3}$

17. **α)** $x=\sqrt{2}$ ή $x=-\sqrt{2}$ Με τη βοήθεια του Πυθαγόρειου Θεωρήματος για ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 1 και 1 εντοπίστε το $\sqrt{2}$ στον άξονα.

β) $2,\overline{9}=3$ Άρα $x=\sqrt{3}$ ή $x=-\sqrt{3}$. Με τη βοήθεια του Πυθαγόρειου Θεωρήματος για ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 1 και $\sqrt{2}$ εντοπίστε το $\sqrt{3}$ στον άξονα.

18. $2\sqrt{5}$

Κανονικότητες και Αλγεβρικές Παραστάσεις

2.1 Κανονικότητες

1. **α)** Σ **β)** Σ **γ)** Λ

2. **α)** 5 **β)** $\sqrt{3}$ **γ)** $\frac{1}{4}$

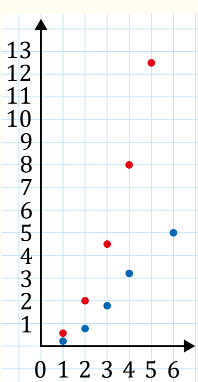
3. 1ο μοτίβο – 4ος γενικός όρος, 2ο – 1ος, 3ο – 2ος, 4ο – 3ος.

4. **α)** Αρκεί το α να είναι θετικός ακέραιος.

β) Αρκεί ο α να είναι θετικός ρητός, όχι ακέραιος, και ο παρονομαστής του να μην είναι το τετράγωνο ενός ακεραίου, π.χ. $\frac{1}{3}$.

γ) Αρκεί το α να είναι άρρητος, π.χ. $\sqrt{2}$.

5. Ενδεικτικά οι απαντήσεις στο α) με κόκκινο και β) με μπλε.



6. **α)** Για το 6 (α), 16, 25 και ν^2

β) 3, 5, 7, 9, ... άρα $3+2(\nu-1)$ ή $2\nu+1$

7. **α)** Υπόδειξη: Για τον πρώτο όρο πολλαπλασιάζουμε το $\frac{1}{5}$ με το 1, για τον δεύτερο το $\frac{1}{5}$ με το άθροισμα του 1 με τον επόμενο περιττό κτλ.

β) $\frac{1}{5}\cdot\nu^2$

8. **α)** $0,9\cdot\nu^2$

β) Εκφράζουν τη διαφορά του αντίστοιχου όρου του μοτίβου και του προηγούμενού του. Ακολουθούν το μοτίβο $0,9\cdot 3$, $0,9\cdot 5$, $0,9\cdot 7$, ...

9. **α)** $\alpha=0,6$ **β)** 9,6 και 15.

2.2 Μονώνυμα – Πολυώνυμα

1. x^3, $3x$, $\frac{2\alpha^2}{3}$, $x\cdot 2y$, 0, 2π

2. $\frac{x^2+y^2}{2}$, $2xy$, $\sqrt{5}x+\sqrt{2}y$, $-8t^3+2t$, $\frac{2^5x}{2^3}$

3. **α)** Λ **β)** Λ **γ)** Σ **δ)** Σ **ε)** Λ

4. $-\frac{5}{4}xy^2$, $\sqrt{3}xy^2$, $-\frac{5}{4}\alpha\beta$, $\sqrt{3}\alpha\beta$, $-\frac{5}{4}t^5$, $\sqrt{3}t^5$

5. 1η ομάδα: $7y$ $\sqrt{5}y$

2η ομάδα: $\frac{1}{2}xy^2$ $-xy^2$

3η ομάδα: $3x^2$ $-\sqrt{3}x^2$

4η ομάδα: $3^2x^2y^2$ $\sqrt{6}x^2y^2$

5η ομάδα: $13x^5$ $-2x^5$

6η ομάδα: $-\frac{8}{5}x^2y$ $12x^2y$

6. **α)** 5ου **β)** 1ου **γ)** 4ου

7. **α)** -4 **β)** 0 **γ)** 0 **δ)** -12

8. $4\pi\rho^2$

9. **α)** $x^4-2x^3-4x^2+3x+5$ 4ου βαθμού

β) $12y^3-12y^3+8y+y-8$ 1ου βαθμού (μετά την αναγωγή όμοιων όρων)

γ) $z^6-z^6+2z^5-2z^5-z^3+11z-3$ 3ου βαθμού (μετά την αναγωγή όμοιων όρων)

10. $2\alpha^2+\beta^2+4\alpha\beta$

11. **α)** $P=6t+5$

β) για $t=\frac{1}{2}$ $P=8$. Το αντίστοιχο σημείο είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ.

12. **α)** για $x=1$ $W=\frac{61}{120}$, ενώ για $x=-1$ $W=-\frac{61}{120}$

β) γενικώς, για $x=-\alpha$, $W=-\frac{2\alpha}{3}+\frac{\alpha^3}{6}-\frac{\alpha^5}{120}$

13. **α)** 2 s **β)** 25 m

γ) Σε αυτή την περίπτωση είναι τα 25 m.

14. **α)** 0, 1, 2, 3, 4

β) $OA=\frac{\theta}{45}$ και $OB=\frac{180-\theta}{45}$ άρα $AB=\frac{180}{45}=4$

2.3 Πράξεις Πολυωνύμων

1. **α)** Σ **β)** Λ **γ)** Λ **δ)** Σ **ε)** Σ **στ)** Λ
ζ) Σ **η)** Σ **θ)** Λ

2. **α)** Το λάθος είναι στο τελευταίο «–» στο πολυώνυμο μετά το πρώτο «=»
β) Το λάθος είναι στο τελευταίο «–» στο πολυώνυμο μετά το πρώτο «=»

3. **α)** x **β)** 3x **γ)** $4x^2$ /–/1 **δ)** –/3

4. **α)** $8x^2-7x+3$ **β)** $-3x^3+x^2-x+3$
γ) 0 **δ)** $2xy^2+2xy+y^2$

5. **α)** $-3x^2+x-4$ **β)** $4x^2+2x$

6. **α)** $8x^3y^3$ **β)** $-10x^4y^6z$
γ) $-\frac{1}{2}x^6y^3$ **δ)** $2x^5y^2$

7. **α)** x^2-x-6 **β)** $x^2+10x+25$
γ) $2x^3+x^2+2x+1$ **δ)** $-5x^3-x^2+15x+3$
ε) $\alpha x^2-\alpha^2xy+xy-\alpha y^2$

8. **α)** $-5x-5$ **β)** $-5x^2-5x+3$
γ) $-6x+7$ **δ)** $4x+2$

9. **α)** $x(3x-4)$ **β)** $10x^2(x^2+2x+2)$
γ) $\alpha x^2(2x^3+3\alpha)$ **δ)** $2xy(y^2+4x^2)$

10. **α)** $(4-x)(x+y)$ **β)** $(\alpha-5)(x-y)$
γ) $(\pi x+1)(x-1)$ **δ)** $(x^2+1)(\sqrt{3}x^2+\sqrt{2})$

11. **α)** $x(15x^2+2)(x+2)$ **β)** $x^2(4x^2+1)(-3x+5)$
γ) $\pi x^2(x-2)(x-3)$ **δ)** $x^3y^2(1-y)(xy^2+3)$

12. **α)** $(x^2+1)(x-3)$ μηδενίζεται για $x=3$.
β) $x^3(2x-1)^2$ μηδενίζεται όταν $x=0$ ή $x=\frac{1}{2}$.

13. **α)** Τα εμβαδά του κόκκινου και μπλε δακτυλίου είναι: $E_1=\pi x^2+2\pi x$ και $E_2=4\pi x+8\pi$.
β) $E_1-E_2=\pi(x-4)(x+2)$
γ) Για $x=4$

14. Το βεληνεκές είναι 1.000 m.

15. $P=(x^2+1)(5-x)$

16. **α)** $(t-10)(30-t)=0$ άρα, $t=10$ ή $t=30$.
β) Κάνουμε τις πράξεις των πολυωνύμων.
γ) Το τετράγωνο που αφαιρούμε μπορεί να γίνει το λιγότερο 0.

2.4 Ταυτότητες

1. 1 – β, 2 – στ, 3 – ζ, 4 – ε, 5 – α

2. **α)** Λ **β)** Σ **γ)** Σ **δ)** Σ

3. **α)** 3 **β)** 2y **γ)** α / 2 **δ)** 10 / 3z /10 / 3z

4. Είναι οι γ), δ), στ).

5. **α)** x^2+2x+1 **β)** $x^2+2xy+y^2$ **γ)** $25+10x+x^2$
δ) $4x^2+4x+1$ **ε)** x^4+4x^2+4 **στ)** $y^2+2+\frac{1}{y^2}$

6. **α)** $(x+1)^2$ **β)** $(x^2+1)^2$ **γ)** $(2y+1)^2$
δ) $(\alpha+3)^2$ **ε)** $\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$ **στ)** $2x(x+5)^2$

7. **α)** 3,63 **β)** $\frac{49}{5}$ **γ)** 9

8. Δεν έχει δίκιο.

9. **α)** x^2-2x+1 **β)** $4x^2-4x+1$
γ) $x^2-8x+16$ **δ)** $4-12x+9x^2$
ε) $x^2-2xy+y^2$ **στ)** $9\alpha^2-6\alpha\beta+\beta^2$

10. **α)** $(y-2)^2$ **β)** $(4-x)^2$ **γ)** $(x-5)^2$
δ) $-(x-6)^2$ **ε)** $\left(\frac{y}{3}-3\right)^2$ **στ)** $3x^2(x-4)^2$

11. **α)** 1 **β)** 1 **γ)** 6

12. **α)** $25y^2-4$ **β)** x^2-2 **γ)** $9x^4-1$

13. **α)** $(x-4)(x+4)$ **β)** $(y-\sqrt{5})(y+\sqrt{5})$
γ) $(z-4)(z+2)$ **δ)** $(11-3x)(11+3x)$
ε) $3(2-5y)(2+5y)$ **στ)** $x(x-2)(x+2)$

14. **α)** 54 **β)** 6 **γ)** –7

15. $\alpha^2-\beta^2$

16. **α)** $(2\alpha+\beta)^2-\beta^2=4\alpha^2+4\alpha\beta$

17. **α)** $E=40$, άρα οι διαστάσεις θα μπορούσαν να είναι 4 και 10.
β) Οι διαστάσεις του ορθογωνίου θα μπορούσαν να είναι $\alpha+\beta$ και $\alpha-\beta$.

18. $x=4\nu$

19. **α)** $-20x$ **β)** $-8x^3+72x$

20. **α)** Ξεκινάμε από το 2ο μέλος τις πράξεις, το οποίο είναι $\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{4}$.
β) Βάσει της σχέσης στο α), η μικρότερη τιμή του τετραγώνου που αφαιρούμε είναι 0, άρα το γινόμενο μπορεί να είναι το πολύ $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$, δηλαδή $12^2=144$.

21. Είναι $l_1 = \pi\beta$, $l_2 = \pi\alpha$ και $d = \alpha - \beta$, τα οποία τα αντικαθιστούμε στον τύπο.

22. **α)** Η ευθεία ΚΛ είναι η μεσοκάθετος της χορδής ΑΒ, γι' αυτό και το Ο ανήκει σε αυτήν (επειδή ισαπέχει από τα άκρα του τμήματος $OA = OB$).
β) $OA = \rho$ και $OM = \rho - 1$.
γ) Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΜ, όπου $AM = 10$.

2.5 ΕΚΠ Πολυωνύμων

1. 1 – γ, 2 – α, 3 – β

2. **α)** $80x^4$ **β)** x^2y^3 **γ)** $80x^2y^3$

3. 1 – β, 2 – δ, 3 – α

4. **α)** $(2x-1)^2(x+2)^3$ **β)** $(x+3)^2(3x-2)^4$
γ) $75(2x-3)^2(x+7)^4$ **δ)** $42(x+4)^4(3x+2)^4$

5.

Β \ Α	$4x^2$	$9(x+2)^2$	$12x(x+2)^2$
$6x(x+2)$	$12x^2(x+2)$	$18x(x+2)^2$	$12x(x+2)^2$
$x(x+2)$	$4x^2(x+2)$	$9x(x+2)^2$	$12x(x+2)^2$
$18x^3(x+2)$	$36x^3(x+2)$	$18x^3(x+2)^2$	$36x^3(x+2)^2$

6. **α)** $6x^2(x+1)^2(x+2)$ **β)** $12(x+1)^2(x+3)^3$
γ) $x^3(x+1)^3(x-1)^2$

7. **α)** $(x+1)(x+2)(x+3)$
β) $(2x+1)(7x+3)(8x+3)$
γ) $2(2x+1)(5x+1)(5x+2)$

8. **α)** $36x^3y^2$ **β)** $10x^2y^3z^3$

9. **α)** $(x-1)^2(x+1)(x^2+1)$ **β)** $x(x+1)^2(x-1)(x+3)$
γ) $6x^2(x-2)(x+2)$

10. $6x^3(x-2)^2(x+2)$

11. Η Q είναι πολλαπλάσιο της P.

12. Δεν έχουν κοινούς παράγοντες.

13. Για παράδειγμα τα $P = 2(x-1)^3(x+2)$ και $Q = 3(x-1)^2(x+2)^2$.

2.6 Ρητές παραστάσεις, πράξεις, απλοποιήσεις

1. Ρητές είναι οι α), γ), δ) και στ).

2. **α)** Για $x = 1$ η τιμή είναι $-\frac{1}{3}$, για 4 δεν ορίζεται.
β) Για $x = 0$ η τιμή είναι 1, για $x = -1$ είναι $\frac{1}{2}$.
γ) Για $x = 0$ η τιμή είναι -1, για 1 δεν ορίζεται.

3. **α)** $x \neq 0$ **β)** $x \neq 1$ **γ)** $x \neq 2$ **δ)** $x \neq -\frac{3}{2}$ **ε)** $x \neq \frac{1}{4}$
στ) Ορίζεται για όλους τους πραγματικούς αριθμούς.

4. **α)** Σ **β)** Λ **γ)** Σ **δ)** Σ **ε)** Λ **στ)** Σ

5. **α)** Λ **β)** Σ **γ)** Σ **δ)** Λ **ε)** Λ **στ)** Σ

6. Οι σωστές πράξεις είναι:
1. $\frac{3}{4x} + \frac{4}{3x} = \frac{9}{12x} + \frac{16}{12x} = \frac{25}{12x}$
2. $\frac{x}{x+1} - \frac{1}{x-1} = \frac{x(x-1)-(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x^2-2x-1}{(x+1)(x-1)}$

7. **α)** $\frac{3}{x}$ **β)** 1 **γ)** $\frac{3}{2x}$ **δ)** $\frac{2x-(x-1)}{x(x-1)} = \frac{x+1}{x(x-1)}$

8. **α)** Δεν ορίζεται η παράσταση για $\beta = -1$.
β) $\frac{2\cdot\frac{1}{3}+3}{-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{11}{3}}{\frac{1}{6}} = \frac{11\cdot 6}{3\cdot 1} = 22$
γ) Δεν ορίζεται η παράσταση για $\beta = -\frac{3}{2}$ για $\beta = 0$ η τιμή είναι $-\frac{4}{3}$.

9. **α)** Ο χρόνος δίνεται από τον τύπο $t = \frac{s}{v}$, άρα ο συνολικός χρόνος δίνεται από τον τύπο $\frac{1}{v} + \frac{20}{15v} + \frac{5}{5+v} = \frac{1}{v} + \frac{4}{3v} + \frac{5}{5+v}$.
β) Για $v = 2$ η τιμή της παράστασης είναι $\frac{79}{42}$ ώρες.

10. **α)** Ορίζεται για όλους τους πραγματικούς αριθμούς.
β) $x \neq 1$ **γ)** $x \neq 2$ **δ)** $x \neq \frac{1}{4}$

11. Μετά τις απλοποιήσεις οι παραστάσεις γίνονται:
α) $\frac{3}{x^3}$ **β)** $\frac{2}{\alpha}$ **γ)** $\frac{\beta^2}{3\alpha^4}$ **δ)** $\frac{\beta+2}{4(2\beta-3)}$

12. Αφού παραγοντοποιήσουμε αριθμητές και παρονομαστές, κάνουμε τις απλοποιήσεις.
α) -1 **β)** $\frac{1}{y-1}$ **γ)** $\frac{5(\beta+1)}{10\beta(\beta+1)} = \frac{1}{2\beta}$ **δ)** $\frac{\omega+1}{\omega^2}$

13. **α)** $\frac{21}{x^3}$ **β)** 3 **γ)** $\frac{3}{\alpha(\alpha+2)}$

δ) $\frac{x+1}{x-1}$ **ε)** $-\frac{3\alpha^2}{2}$

14. **α)** $-\frac{x+1}{x(x-1)}$ **β)** $\frac{5+\alpha}{\alpha^3}$ **γ)** $\frac{4}{\omega(\omega+1)}$

δ) $\frac{x+4}{x-1}$

15. Για την επιφάνεια του παραλληλεπιπέδου πολλαπλασιάζουμε ανά δύο τις διαστάσεις, προσθέτουμε τα γινόμενα και διπλασιάζουμε, δηλαδή: 2(μήκος × πλάτος + μήκος × ύψος + πλάτος × ύψος). Το αποτέλεσμα είναι: $\frac{4x^3+22x^2+52x+10}{3x(x+1)}$.

Ανακεφαλαίωση

1. **α)** Σ **β)** Λ **γ)** Λ **δ)** Λ **ε)** Λ **στ)** Λ **ζ)** Σ **η)** Σ **θ)** Σ **ι)** Σ **ια)** Λ **ιβ)** Λ

2. **α)** $\frac{1}{2}$ **β)** 0,3 **γ)** 0,2

3. 1 – β, 2 – δ, 3 – α

4. **α)** x^4y^3 **β)** $72x^4y^3$ **γ)** $72(2x+1)^4(x+3)^3$

5. $P(x)=3(2x-1)^5(x+1)^4$.
Σκεφτείτε: σε ποια δύναμη πρέπει να υψώνεται το x+1 στο ΕΚΠ;

6. $2x(x-1)^2(x+1)(2x+3)$

7. **α)** άθροισμα: x^3+3, διαφορά: $-x^3+2x^2-1$
β) $2x^3-2x^2+5x+2,\ 4x^4-2x^2-5x$
γ) $2x^3, 2x^5+2$
δ) $4x^3-3x^2-3x-4,\ 2x^3-x^2+x+2$

8. **α)** x^3-1 **β)** $2x^4+x^3+x^2+4x-3$
γ) $-x^4+2x^3+2x^2-5x+2$

9. **α)** $-x^3-x^2-2x-3$ **β)** x^2-8x-2
γ) $-x^4+6x^3-2x^2-4x+2$

10. **α)** 2ου **β)** 3ου

11. **α)** x^2-2x+1 **β)** y^2+2y+1
γ) $4\omega^2-12\omega+9$ **δ)** $9\alpha^2+6\sqrt{2}\cdot\alpha+2$
ε) $x^2+4xy+4y^2$ **στ)** $4\alpha^2-4\alpha\beta+\beta^2$
ζ) x^4+2x^2+1 **η)** $y^2-3y+\frac{9}{4}$
θ) $\frac{x^2}{4}+x+1$ **ι)** x^2-4 **ια)** $1-y^2$
ιβ) ω^2-2 **ιγ)** $4x^2-1$ **ιδ)** $y^2-\frac{1}{9}$
ιε) $\alpha^2+2\alpha+1$ **ιστ)** x^2-25

12. **α)** 4xy
β) Είτε με αντικατάσταση των αναπτυγμάτων των γνωστών ταυτοτήτων στην παράσταση, είτε από το σχήμα χρησιμοποιώντας ένα τετράγωνο με πλευρά $x+y$ και ένα τετράγωνο μέσα σε αυτό με πλευρά $y-x$.

13. **α)** $2x^2(3x-4)$ **β)** $7x(x+2)$
γ) $5x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

14. **α)** $(2+\beta)(\alpha-\beta)$ **β)** $(\alpha+\beta)(2-\alpha)$
γ) $(\alpha+\beta)(\beta-\sqrt{10})(\beta+\sqrt{10})$ **δ)** $2(x+y)(4-x)$

15. **α)** $(x-5)^2$ **β)** $\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)^2$ **γ)** $2(y+3)^2$
δ) $(x-2)^2$ **ε)** $\frac{1}{2}(\omega+1)^2$ **στ)** $(2\omega+1)^2$

16. **α)** $(x-3)(x+3)$ **β)** $(x-2)(x+2)$
γ) $3(3-y)(3+y)$ **δ)** $(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$
ε) $2(\omega+2)(\omega-2)$ **στ)** $3(5-y)(5+y)$

17. **α)** $x\neq 0$ **β)** $x\neq -1$ **γ)** $x\neq -2$
δ) Ορίζεται για κάθε πραγματικό αριθμό.

18. Δείτε το Δ2, της 2.6.

19. **α)** $\frac{\beta}{\alpha}$ **β)** $\frac{2x}{3y}$ **γ)** $\frac{1}{x-2}$ **δ)** $\frac{y}{y+3}$
ε) $\frac{x+1}{2}$ **στ)** $\frac{x}{x-4}$

20. **α)** $\frac{x+1}{x-1}$ **β)** $\frac{x(x-2)}{2}$ **γ)** $-\frac{1}{x}$

21. **α)** αγ **β)** 2 **γ)** $x(x+1)$ **δ)** $(x-1)(x+1)$

22. **α)** $\frac{2-x}{2x^2}$ **β)** $\frac{4x+1}{(x-2)(x+2)}$
γ) $\frac{2x-1}{x(x-1)}$ **δ)** $\frac{2-x}{x(x+2)^2}$
ε) $\frac{2x^2+x+\sqrt{2}}{x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}$

23. **α)** $\sqrt{3}x(x-\sqrt{3})$ **β)** $\sqrt{6}y(y-\sqrt{2})$
γ) $(x-\sqrt{2})^2$ **δ)** $\sqrt{2}(y-\sqrt{2})^2$
ε) $(\sqrt{2}x-1)^2$ **στ)** $\sqrt{2}(x+3)(x-3)$
ζ) $\sqrt{3}(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

24. **α)** Να χρησιμοποιήσετε τις ταυτότητες $(x+1)^2=x^2+2x+1$ και $(x-1)^2=x^2-2x+1$.
β) Θυμίζουμε ότι, αν τα τετράγωνα δύο αριθμών είναι ίσα, τότε οι αριθμοί είναι είτε ίσοι είτε αντίθετοι.

25. **α)** Να χρησιμοποιήσετε τις ταυτότητες
$(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$ και
$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$.
β) i. Σκεφτείτε ότι το γινόμενο δύο αριθμών είναι θετικό, αν οι αριθμοί είναι ομόσημοι, και αρνητικό αν οι αριθμοί είναι ετερόσημοι.
ii. Χρησιμοποιήστε αντί για α και β, τα x και y.

Συναρτήσεις

3.1 Η συνάρτηση $y=\alpha x^2$

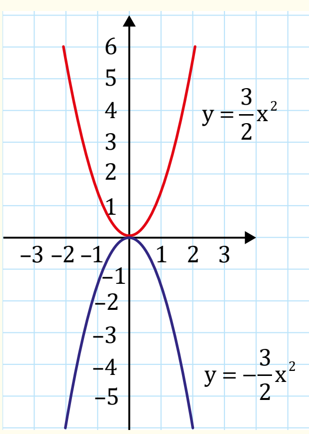
1. β), γ), δ)

2. Μέγιστη έχουν οι β), γ) και ελάχιστη οι α), δ). Και η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή είναι το 0.

3. **α)** Λ **β)** Σ **γ)** Σ **δ)** Λ

4. Από αριστερά προς τα δεξιά είναι $\alpha<0$, $\alpha>0$, $\alpha<0$.

5.



6.

$y=-\frac{1}{3}x^2$	γ
$y=2{,}5x^2$	β
$y=-3x^2$	δ
$y=\frac{2}{3}x^2$	α

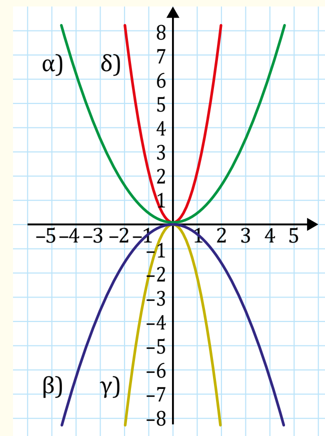
7. Έχουν 1 κοινό σημείο, το $(0,0)$.

8. Η συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή.

9. Τα α) $(-1,2)$ και γ) $(50,32)$

10. $\delta<\beta<\alpha<\gamma$

11.



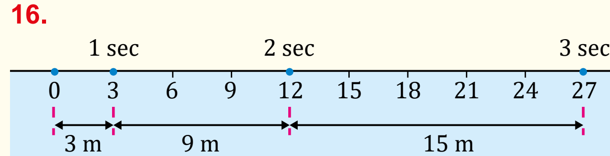
12. Το μόνο κοινό σημείο είναι το $(0,0)$.

13. **α)** Μειώνεται κατά 7,5.
β) Από το 1 στο 2 μειώνεται κατά 7,5 και από το −2 στο −1 αυξάνεται κατά 7,5.

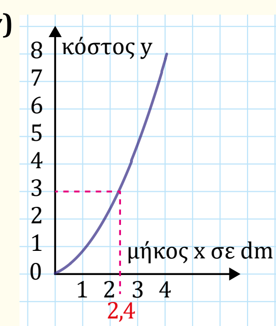
14. Ο τύπος είναι της μορφής $y=\alpha x^2$ και πρέπει $-6=\alpha\left(\sqrt{2}\right)^2$, δηλαδή $-6=\alpha\cdot 2$.
Άρα $\alpha=-3$ και $y=-3x^2$.

15. Λόγω συμμετρίας το σημείο από το οποίο έριξε ο αθλητής έχει τετμημένη −40. Αν y η τεταγμένη του, τότε $h=-y$. Άρα $y=-0{,}0125\cdot 40^2=-20$ και $h=20$ m.

16.



17. **α)** $y=0{,}5x^2$
β) και **γ)**



18. **α)** $(AB\Gamma)=\frac{\alpha}{2}x^2$
β) Η τιμή του εμβαδού είναι μικρότερη για $x<2$ και μεγαλύτερη για $x>2$.
γ) Αντιστοιχεί στο εμβαδόν του τραπεζίου ΓΒΕΔ και είναι ίση με $\alpha x+\frac{\alpha}{2}$.

3.2 Γραμμικές εξισώσεις

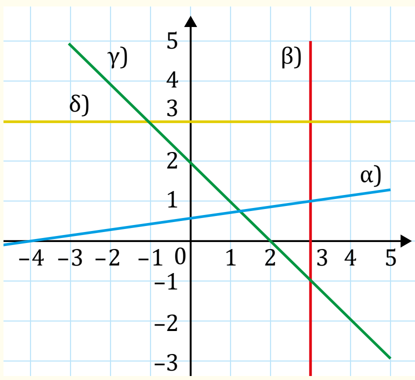
1. $(2,1)$, $(6,-1)$, $(4,0)$

2. α – 2, β – 4, γ – 1, δ – 3

3. α – 4, β – 3, γ – 1, δ – 2

4. **α)** $(-1,0)$ **β)** $(-1,0)$ **γ)** $(0,2)$ **δ)** $(2,6)$ **ε)** $(0,2)$

5.

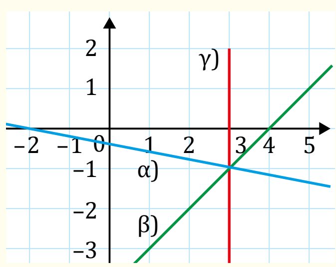


6. i. – **β)**, ii. – **α)**

7. **α)**, **β)**

8. **α)**, **γ)**

9. Παρατηρούμε ότι και οι τρεις ευθείες διέρχονται από το σημείο $(3,-1)$. Άρα το ζεύγος τιμών $(3,-1)$ είναι κοινή λύση και των τριών εξισώσεων.



10. Πρέπει $\alpha\cdot 2-2(-1)=8$, άρα $\alpha=3$.

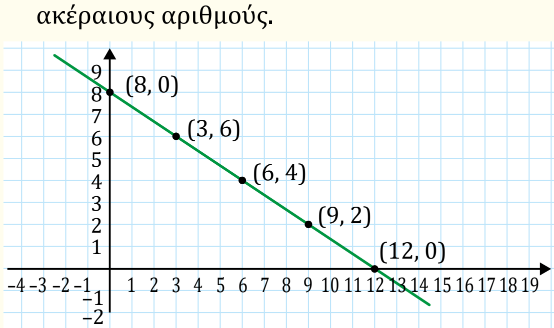
11. **α)** $x+2y=10$

β) Ενδεικτικά: $(2,4)$, $\left(3,\frac{7}{2}\right)$, $(4,3)$

12. **α)** $4x+6y=48$

β) Η ευθεία που αντιστοιχεί στις λύσεις φαίνεται με πράσινο χρώμα στο παρακάτω σχήμα.

γ) Οι λύσεις του προβλήματος είναι τα σημεία της ευθείας με συντεταγμένες μη αρνητικούς ακέραιους αριθμούς.



13. **α)** $\frac{x}{15}+\frac{y}{30}=1$ ή $2x+y=30$

β) $2\cdot 10+y=30$, άρα $y=10$

14. **α)** $2x+5y=50$

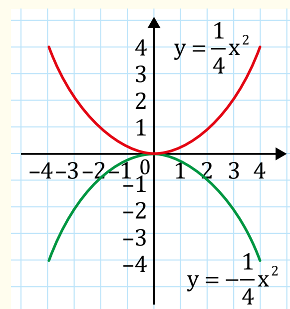
β) Ένα ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία $(0,10)$ και $(25,0)$.

γ) Οι πιθανές περιπτώσεις είναι: 0 κέρματα και 10 χαρτονομίσματα, 5 κέρματα και 8 χαρτονομίσματα κτλ.

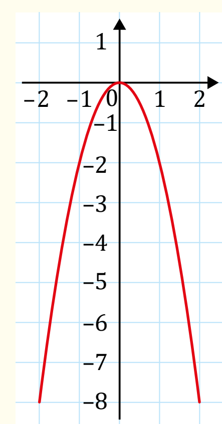
Ανακεφαλαίωση

1. **α)** Σ **β)** Λ **γ)** Σ **δ)** Λ **ε)** Λ **στ)** Σ **ζ)** Λ

2.



3. Η μέγιστη τιμή είναι η $y=0$ για $x=0$ και η ελάχιστη η $y=-8$ για $x=-2$ και $x=2$.



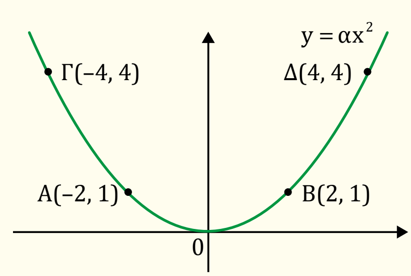
4. $\alpha<0$

5. Τα γ) και δ)

6. Της β

7. **α)** $\alpha=0$ **β)** $\beta=0$

8.



9. Αρκεί να σχεδιάσουμε την ευθεία ΑΒ και να εκτιμήσουμε τις συντεταγμένες κάποιων σημείων της.

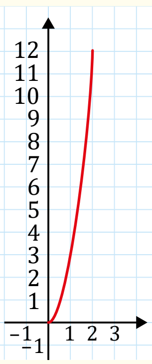
10. **α)** Το σώμα Α

β) Από $0\ \frac{m}{sec}$ σε $1\ \frac{m}{sec}$ η κινητική ενέργεια του Α αυξάνεται κατά 1 και του Β κατά 0,5.

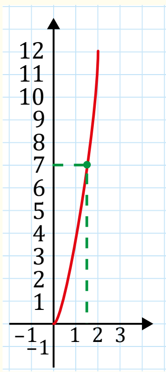
Από $1\ \frac{m}{sec}$ σε $2\ \frac{m}{sec}$ του Α αυξάνεται κατά 3 και του Β κατά 1,5.

11. **α)** $E = 3x^2$

β)



γ) Από τη γραφική παράσταση εκτιμάμε $v \simeq 1{,}5$.



12. Η τιμή του y αυξάνεται κατά 2 και προκύπτει από τη συμμετρία της γραφικής παράστασης ως τον άξονα y'y.

Αλγεβρικές σχέσεις

4.1 Γραφική επίλυση γραμμικού συστήματος

1. Είναι λύση του α) και γ).

2. **α)** $(2,-1)$ **β)** $(3,1)$ **γ)** $(-1,-2)$

3. Έχει σχεδιαστεί σωστά και η λύση του είναι $(-2,1)$.

4. **α)** Δεν έχει λύσεις. **β)** Έχει άπειρες λύσεις. **γ)** Έχει μία λύση.

5. Τα α) και β)

6. Διαφορετική είναι η γ).

7. Οι λύσεις είναι:

α) $(1,-2)$ **β)** $(-2,-3)$ **γ)** $(4,-3)$ **δ)** $(-1,3)$

ε) αδύνατη **στ)** έχει άπειρες λύσεις.

8. **α)** 1ο: 10 m/s, 2ο: 2 m/s

β) Σε 6 sec θα έχουν και τα δύο αυτοκίνητα ταχύτητα 14 m/s.

9. Αν x το μήκος και y το πλάτος, τότε $2x+2y=44$ ή $x+y=22$ και $y=x+2$. Κάνουμε τις γραφικές παραστάσεις και παρατηρούμε το σημείο τομής τους.

10. Οι γραφικές τους παραστάσεις τέμνονται στο σημείο $(3,140)$.

11. Αν x είναι οι ασκήσεις στα Μαθηματικά και y στη Φυσική, τότε $x+y=30$ και $x=y+4$. Οι γραφικές τους παραστάσεις τέμνονται στο σημείο $(17,13)$.

12. Αν x γραμμάρια το 1ο μείγμα και y το 2ο, τότε $x+y=20$. Ο χρυσός στο 1ο είναι x γραμμάρια, στο 2ο είναι $\frac{9}{24}y$ και στο τελικό μείγμα είναι $\frac{18}{24}\cdot 20=15$, άρα $x+\frac{9}{24}y=15$ Οι δύο γραφικές παραστάσεις τέμνονται στο $(12,8)$.

13. Ένα (τυχαίο) σημείο της $x+2y=5$ είναι το $(5,0)$. Μια άλλη ευθεία που περνά από αυτό είναι η $x=5$.

14. Θα βρούμε δύο διαφορετικές ευθείες που περνούν από το $(1,-2)$. Μία εξίσωση είναι η $x+y=-1$ (αφού $x+y=1-2=-1$). Μία άλλη είναι η $2x+y=0$ (αφού $2x+y=2\cdot 1-2=0$).

15. **α)** Με συνδρομή η ε_1 και χωρίς συνδρομή η ε_2.

β) 8.

γ) Για 7 αγώνες συμφέρει χωρίς συνδρομή. Για 10 αγώνες συμφέρει με συνδρομή.

δ) Πάνω από 8.

4.2 Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος

1. Τα α) και γ)

2. **α)** $(x,y)=(-2,0)$ **β)** $(x,y)=(0,1)$

3. Οι α) και δ)

4. Το γ)

5. **α)** $(x,y)=(1,0)$ **β)** $(\alpha,\beta)=(0,-3)$

6. Μία απάντηση για τους αριθμούς που μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε για να δημιουργήσουμε αντίθετους συντελεστές στη μεταβλητή y είναι: (α) 1 και –3, (β) 1 και –1, (γ) 5 και 2.

7. β) και γ)

8. **α)** Έχει λύση. **β)** Αόριστο **γ)** Αδύνατο

9. **α)** Αντίθετων συντελεστών

β) Αντικατάστασης

γ) Αντίθετων συντελεστών

10. **α)** Θέτουμε στη 2η εξίσωση στη θέση του y το $x+3$ και έχουμε $2x-(x+3)=-5$ ή $x=-2$, άρα $y=-2+3$ ή $y=1$.

β) Θέτουμε στην 1η εξίσωση στη θέση του x το $3y+15$ και έχουμε $-2(3y+15)+3y=21$ ή ...

γ) Λύνουμε την 1η εξίσωση ως προς y, $y=3x-13$ και αντικαθιστούμε στη 2η εξίσωση $-2x-5(3x-13)=14$ ή ...

δ) Θέτουμε στην 1η εξίσωση στη θέση του y το $4x-6$ και λύνουμε ως προς x.

ε) Αντικαθιστούμε στη 2η εξίσωση το 5x από την 1η εξίσωση.

στ) Στη 2η εξίσωση θέτουμε στη θέση του $x+2y$ το 6 από την 1η εξίσωση.

11. Λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} x+y=148 \\ 5x+10y=1.000 \end{cases}$

12. Λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} x+y=13 \\ 4{,}1x+1{,}2y=27{,}2 \end{cases}$ ή

$\begin{cases} y=13-x \\ 41x+12y=272 \end{cases}$ ή $\begin{cases} y=13-x \\ 41x+12(13-x)=272 \end{cases}$ ή ...

13. **α)** Για να βρούμε το y, θα πολλαπλασιάσουμε την 1η εξίσωση με το -2.

β) Για να βρούμε το y, θα πολλαπλασιάσουμε τη 2η εξίσωση με το 2.

γ) Για να βρούμε το x, θα πολλαπλασιάσουμε την 1η εξίσωση με το 4 και τη 2η με το -3.

δ) Για να βρούμε το x, θα πολλαπλασιάσουμε τη 2η εξίσωση με το -1.

ε) Για να βρούμε το y, θα πολλαπλασιάσουμε την 1η εξίσωση με το -2.

στ) Για να βρούμε το y, θα πολλαπλασιάσουμε την 1η εξίσωση με το 2.

14. Λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} x+y=37 \\ 0{,}5x+2y=39{,}5 \end{cases}$.

15. Θέτουμε στην $\alpha x+\beta y=6$, $x=-4$ και $y=-2$, στη συνέχεια θέτουμε $x=2$ και $y=2$, και λύνουμε το σύστημα που προκύπτει.

16. Τα α) και β) θα λυθούν με τη μέθοδο της αντικατάστασης και το γ) με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών.

17. Λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} y=x+6 \\ y+4=2(x+4) \end{cases}$.

18. Λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} 2x+3y=23 \\ 5x+2y=30 \end{cases}$.

19. Αν η x η αμβλεία γωνία και y η γωνία της βάσης, τότε έχουμε το σύστημα $\begin{cases} x+2y=180 \\ x=2{,}5y \end{cases}$.

20. Λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} x+y=25 \\ 4x-y=70 \end{cases}$.

4.3 Επίλυση εξισώσεων με παραγοντοποίηση

1. 0 και 7

2. Θέτουμε κάθε όρο που περιέχει άγνωστο ίσο με 0. Άρα $x=\frac{2}{3}$, ...

3. Το x^2+9 είναι διαφορά τετραγώνων; Ή, αν λύσουμε ως προς x^2, έχουμε ότι $x^2=-9$. Μπορεί το x^2 να είναι ίσο με αρνητικό αριθμό;

4. **α)** $x=\sqrt{3}$ ή $x=-\sqrt{3}$ **β)** αδύνατη **γ)** $x=0$

5. Δεν πήρε τη λύση $x-2=-1$.

6. Στην α) και γ)

7. **α)** Μπορούμε να βγάλουμε κοινό παράγοντα το $x+2$.

β) Τον όρο $-x(1-x)$ τον κάνουμε $+x(x-1)$ και μπορεί να παραγοντοποιηθεί.

8. **α)** $x=0$ ή $x=2$ **β)** $y=2$ ή $y=\frac{3}{4}$

γ) $z=0$ ή $z=-\frac{1}{3}$ ή $z=-\frac{3}{2}$

9. Αν αντικαταστήσουμε αυτούς τους αριθμούς, δεν επαληθεύουν την εξίσωση. Ο Χρήστος έθεσε κάθε όρο ίσο με 0, ενώ δεν έχει στο 2ο μέλος το 0. Η Αθηνά εξίσωσε τον κάθε όρο με το 1. Η ιδιότητα όμως ισχύει μόνο για το 0, π.χ. $2\cdot\frac{1}{2}=1$, χωρίς ένας τουλάχιστον από τους δύο να είναι 1.

10. **α)** $x=0$ ή $x=-1$ **β)** $b=0$ ή $b=\frac{3}{2}$

γ) $\varphi=0$ (λύση διπλή) ή $\varphi=3$

11. Θα λύσουμε την εξίσωση $\frac{1}{3}x^2=4x$ ή $x^2=12x$ ή $x^2-12x=0$ ή ...

12. **α)** $x=\sqrt{5}$ ή $x=-\sqrt{5}$

β) $x=\frac{\sqrt{17}}{2}$ ή $x=-\frac{\sqrt{17}}{2}$

γ) Αδύνατη

13. Θα λύσουμε την εξίσωση $2x^2=16$.

14. **α)** Θα λύσουμε την εξίσωση $\pi x^2 = 9\pi$.
β) Θα λύσουμε την εξίσωση $x^2 + x^2 = 8^2$.

15. **α)** $(x-2)^2 - 9 = 0$ ή $(x-2)^2 - 3^2 = 0$ ή $(x-2+3)(x-2-3) = 0$ ή ... Όμοια στη β) και γ).

16. **α)** $(x-1)^2 = 0$ ή ...
β) $(4\lambda)^2 - 2\cdot 1\cdot 4\lambda + 1^2 = 0$ ή ...
γ) $(8\kappa)^2 + 2\cdot 3\cdot 8\kappa + 3^2 = 0$ ή ...

17. Αναλύουμε:
α) το $4x$ σε $x+3x$ **β)** το $-6x$ σε $-x-5x$
γ) το $-4x$ σε $x-5x$ **δ)** το x σε $3x-2x$
ε) το $2x$ σε $-3x+5x$

18. **α)** Το $6x$ αναλύεται $2\cdot 3x$, άρα μας λείπει το 3^2.
β) Το $-12x$ αναλύεται $-2\cdot x\cdot 6$, άρα μας λείπει το 6^2.
γ) Το $30x$ αναλύεται $2\cdot 5\cdot 3x$.

19. Οι α) και β) μπορούν αν λυθούν με διαφορά τετραγώνου. Στις γ), δ) και ε) τα πρώτα μέλη είναι αναπτύγματα τετραγώνου.

20. **α)** $x^2 + 6x + 9 = 7 + 9$ ή $(x+3)^2 = 16$ ή ...
β) $(2x)^2 - 2\cdot 3\cdot 2x + 3^2 = 16 + 3^2$ ή $(2x-3)^2 = 25$ ή ...

21. **α)** Λύνουμε την εξίσωση $x(x+4) = 12$, η ρίζα είναι $x = 2$ m.
β) Λύνουμε την εξίσωση $x^2 + (x+4)^2 = \left(\sqrt{26}\right)^2$, η ρίζα είναι $x = 1$ m.

22. Λύνουμε την εξίσωση $-t^2 + 6t = 8$ ή $t^2 - 2\cdot 3t = -8$, που έχει ρίζες 2 και 4.

23. **α)** Λύνουμε την εξίσωση $\dfrac{x(x+4)}{2} = 20$ ή .... ή $(x+2)^2 = 44$ ή ..., ρίζες $x = -2 + 2\sqrt{11}$ και $x = -2 - 2\sqrt{11} < 0$
β) Λύνουμε την εξίσωση $\dfrac{(x+5)+(x-1)}{2}x = 80$ ή ... ή $x^2 + 2x = 80$ ρίζες 8 και $-10 < 0$.

24. **α)** Έχει λύσεις -1 και 1,5. **β)** $-0{,}72$ και 1,39
γ) Αδύνατη **δ)** Αδύνατη

25. **α)** Φέρνουμε όλους τους όρους στο 1ο μέλος και βγάζουμε κοινό παράγοντα το $x-3$.
β) Κάνουμε ομαδοποίηση: $\alpha^2(\alpha+3) + 2(\alpha+3) = 0$ ή ...
γ) Κάνουμε ομαδοποίηση στον δεύτερο παράγοντα $(4t-7)\left[2t^2(t-4) - 3(t-4)\right] = 0$ ή ...

26. **α)** $x = 3$ και $x = -3$
β) $x = 1$

27. **α)** Σκεφτείτε ότι μια εξίσωση που έχει λύσεις το 3 και το 2 είναι η $(x-3)(x-2) = 0$ (γιατί;)
β) και **γ)** όπως το πρώτο ερώτημα.

28. Δύο αριθμοί που έχουν απόσταση 4 στην αριθμογραμμή είναι το -1 και το 3. Η εξίσωση $(x+1)(x-3) = 0$ ή $x^2 - 2x - 3 = 0$ έχει ρίζες τους αριθμούς αυτούς.

4.4 Επίλυση ανισώσεων πρώτου βαθμού

1. 1 – iii, 2 – iv, 3 – ii, 4 – i, 5 – iv, 6 – iv, 7 – ii, 8 – ii, 9 – iv, 10 – ii

2. **α)** $5x + 3 > -2$ ή $5x + 3 - 3 > -2 - 3$ ή $5x > -5$
β) $-7y < -21$ ή $\dfrac{-7y}{-7} > \dfrac{-21}{-7}$ ή $y > 3$

3. **α)** Προσθέτουμε και στα δύο μέλη το 3.
β) Αφαιρούμε και από τα δύο μέλη το 5.
γ) Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με το -2.
δ) Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με το 5.
ε) Διαιρούμε και τα δύο μέλη με το 6.
στ) Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με το $-\dfrac{1}{2}$ (ή διαιρούμε με το -2).

4. **α)** Πρώτο μέλος το $2x-1$, δεύτερο μέλος το 0, γνωστοί όροι: -1 και 0, άγνωστοι όροι: $2x$, όμοια σκεφτόμαστε και για τα ερωτήματα β) και γ).

5. Αφαιρούμε και στα δύο μέλη το 3 και διαιρούμε με το -4.

6. **α)** Αδύνατη, γιατί δεν ισχύει ότι $0 < -4$.
β) Αδύνατη, γιατί δεν ισχύει ότι $0 > 0$.
γ) Ισχύει για κάθε x.
δ) Ισχύει για κάθε $x \le 0$.
ε) $x < -2$
στ) Ισχύει για κάθε x.

7. α – 4, β – 1, γ – 3, δ – 2

8. Δείτε την εφαρμογή 3.

9. $5x - 3 \le 7x + 5$ ή $5x - 3 - 7x + 3 \le 7x + 5 - 7x + 3$ ή $-2x \le 8$ ή ...

10. Αντικαθιστούμε στη θέση του x το 4 και ελέγχουμε αν ισχύει η κάθε ανισότητα ή όχι.

11. **α)** $x - 2 < -3$ ή $x - 2 + 2 < -3 + 2$ ή $x < -1$
β) $3 \ge -5x + 13$ ή $3 - 13 \ge -5x + 13 - 13$ ή $-10 \ge -5x$ ή $\dfrac{-10}{-5} \le \dfrac{-5x}{-5}$ ή $2 \le x$

γ) $x < \frac{7}{2}$

δ) Αδύνατη

12. Το πρόβλημα μπορεί να εκφραστεί με την ανίσωση $50 + 8x < 13 + 12x$, που έχει λύση $x > 9{,}25$, άρα από τη 10η εβδομάδα θα έχει αποταμιεύσει ο Μαξίμ περισσότερα χρήματα από την Παναγιώτα.

13. Το πρόβλημα μπορεί να εκφραστεί με την ανίσωση $\frac{15+17+x}{3} \geq 17$ και τελικά $x \geq 19$, άρα θα πρέπει να γράψει 19 στις εξετάσεις.

14. Το πρόβλημα μπορεί να εκφραστεί με την ανίσωση $15 + 0{,}3x < 0{,}8x$ και τελικά $x > 30$, άρα πρέπει να κατεβάζει από 31 τραγούδια και πάνω για να τον συμφέρει η 1η επιλογή.

15. **α)** $11\pi + \upsilon$

β) $11\pi + 7 > 100$ ή $\pi > 8{,}\overline{45}$, άρα $\pi = 9$ και ο αριθμός είναι ο 106.

16. Οι λύσεις είναι:

α) $x > -7$ **β)** Ισχύει για κάθε x.

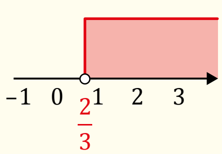
γ) Ισχύει για κάθε x. **δ)** $\varphi < \frac{9}{4}$

17. Δείτε την εφαρμογή (2).

α) $\frac{2x-3}{5} > 1 - 2x$ ή $5 \cdot \frac{2x-3}{5} > 5 \cdot 1 - 5 \cdot 2x$

$2x - 3 > 5 - 10x$ ή $2x + 10x > 5 + 3$ ή $12x > 8$

$\frac{12x}{12} > \frac{8}{12}$ ή $x > \frac{2}{3}$



β) $x - \frac{x+6}{3} \geq -5$ ή $3 \cdot x - 3 \cdot \frac{x+6}{3} \geq -3 \cdot 5$

$3x - (x + 6) \geq -15$ ...

γ) $x < \frac{8}{5}$ **δ)** $x > \frac{3}{5}$

18. $7(3\gamma - 2) \geq \frac{\gamma + 5}{2} + 3$ ή ... ή $\gamma \geq \frac{39}{41}$

19. α – 4 – iv, β – 5 – i, γ – 2 – iii, δ – 3 – ii, ε – 1 – v,

20. Δείτε την εφαρμογή (3).

21. Δείτε την εφαρμογή (4).

22. Ίσως σας βοηθήσουν τα προβλήματα των ασκήσεων 12 και 14.

23. **α)** 12

β) Σκεφτείτε αντίστροφα σε σχέση με το προηγούμενο ερώτημα.

24. **α)** $x < -2$

β) Ξεκινήστε από το $x > 5$ για να φτιάξετε μια ανίσωση που να έχει αυτές τις λύσεις.

25. **α)** $x = 4$

β) Σκεφτείτε αντίστροφα σε σχέση με το προηγούμενο ερώτημα.

Ανακεφαλαίωση

1. Το $(x, y) = (0, 3)$ είναι λύση του β).

2. **α)** $(5, -2)$ **β)** $(3, -6)$ **γ)** $(8, -1)$ **δ)** $(-2, 9)$

ε) $(2, -3)$ **στ)** $(5, -2)$

3. Μοναδική λύση έχει το α), αδύνατο είναι το γ) και έχουν άπειρες λύσεις το β) και δ).

4. **α)** Σ **β)** Λ **γ)** Σ **δ)** Λ

5. **α)** $(-1, 2)$ **β)** αδύνατη **γ)** άπειρες λύσεις

6. Η λύση είναι $(-1, 2)$.

7. **α)** $2x - 3y = 2$ **β)** $4x - 6y = 2$

8. Λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} x + y = 185 \\ x = 8{,}25y \end{cases}$, και η λύση είναι 165 μαθητές και 20 καθηγητές.

9. Λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} y = 2x \\ 2x + 2y = 54 \end{cases}$. Ένα γήπεδο βόλεϊ έχει μήκος 18 m και πλάτος 9 m.

10. Λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} x + y = 125 \\ 0{,}1x + 0{,}5y = 45{,}7 \end{cases}$, και η λύση είναι 42 δεκάλεπτα και 83 πενηντάλεπτα.

11. Λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} 4x + 5y = 83{,}3 \\ 3x + 2y = 54{,}6 \end{cases}$. Τα πουκάμισα κοστίζουν 15,2 € και 4,5 € το ζευγάρι οι κάλτσες.

12. Λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} x + y = 200 \\ 0{,}50x + 0{,}42y = 0{,}44 \cdot 200 \end{cases}$.

13. **α)** $x = -2$ ή $x = 3$

β) $\alpha = 0$ ή $\alpha = 2$ ή $\alpha = \frac{3}{4}$

γ) $\beta = -2$ ή $\beta = \frac{2}{3}$ ή $\beta = \frac{2}{5}$

14. **α)** $x = -2$ ή $x = 2$ **β)** $x = \frac{4}{3}$ ή $x = -\frac{4}{3}$ **γ)** αδύνατη

15. **α)** $x = 3$ ή $x = -1$ **β)** $y = \frac{3}{4}$ ή $y = -\frac{7}{2}$

γ) $z=-2$ ρίζα διπλή **δ)** $\alpha=\frac{1}{3}$ ρίζα διπλή.

16. Προσθέτουμε και στα δύο μέλη τον αριθμό:
α) 16 **β)** 36 **γ)** 9
Η α) γίνεται $(x+4)^2=25$, και οι λύσεις είναι $x=1$ ή $x=-9$.
Η β) γίνεται $(x-6)^2=49$, και οι λύσεις είναι $x=-1$ ή $x=13$.
Η γ) γίνεται $(4x+3)^2=4$, και οι λύσεις είναι $x=-\frac{1}{4}$ ή $x=-\frac{5}{4}$.

17. Ένας τρόπος να λυθούν οι εξισώσεις είναι να διασπάσουμε έναν όρο σε δύο και στη συνέχεια να κάνουμε παραγοντοποίηση κατά ομάδες
α) $x^2-2x+x-2=0$ ή $x(x-2)+(x-2)=0$ ή ...
β) $x^2+3x+5x+15=0$ ή ...
γ) $3x^2+6x+x+2=0$ ή ...

18. **α)** $x>1$ **β)** $y\geq\frac{3}{11}$
γ) $0z\leq-3$, αδύνατη **δ)** $\alpha\geq-\frac{7}{3}$

19. **α)** $x=-2$ ή $x=\frac{1}{3}$ **β)** $x=-3$ ή $x=2$
γ) Αδύνατη **δ)** $x\geq\frac{4}{3}$

20. Ο Δημήτρης έχει 15 ευρώ και αποταμιεύει 5 ευρώ τη μέρα. Η Ελένη έχει 5 ευρώ και αποταμιεύει 7 ευρώ τη μέρα. Αν ξεκίνησαν μαζί την αποταμίευση, ποιες μέρες ο Δημήτρης έχει περισσότερα χρήματα από την Ελένη; Η απάντηση είναι έως και την 4η μέρα.

Συνδέσεις και επεκτάσεις

21. **α)** Η αρχική ταχύτητα του Α είναι 16 m/s και του Β είναι 1 m/s.
β) Από τη γραφική παράσταση παρατηρούμε ότι η κλίση της ευθείας του Α είναι –1 και του Β είναι 4.
γ) Από τα β) και γ) έχουμε Α: $v=-t+16$, Β: $v=4t+1$.
δ) $t=3$
ε) $t<3$

22. Θα πρέπει ο παρονομαστής της κάθε ρητής παράστασης να είναι διάφορος του 0, πριν γίνουν απλοποιήσεις.
α) $x\neq0$ και $x\neq3$ **β)** $x\neq0$ και $x\neq-2$
γ) $x\neq-\frac{1}{2}$ και $x\neq2$ **δ)** $x\neq0$ και $x\neq5$
ε) $x\neq0$ και $x\neq2$ και $x\neq-2$ **στ)** $x\neq3$ **ζ)** $x\neq-2$

23. **α)** Κάνοντας πράξεις προκύπτει το σύστημα
$$\begin{cases}2x-3y=16\\4x+3y=-24\end{cases}.$$
β) $\begin{cases}3x-2y=0 \text{ ή } 4x-y-3=0\\y=2x+1\end{cases}$, το σύστημα χωρίζεται σε δύο γραμμικά συστήματα
$$\begin{cases}3x-2y=0\\y=2x+1\end{cases}, \text{ ή } \begin{cases}4x-y-3=0\\y=2x+1\end{cases}.$$
γ) $\begin{cases}(x+y)(x-y)=0\\x+y=2\end{cases}$ το σύστημα χωρίζεται σε δύο γραμμικά συστήματα $\begin{cases}x+y=0\\x+y=2\end{cases}$ ή
$$\begin{cases}x-y=0\\x+y=2\end{cases}$$

24. **α)** $x^2+2\cdot\frac{3}{2}x=-1$ ή $x^2+2\cdot\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}=-1+\frac{9}{4}$ ή
$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$ ή ... , ρίζες: $x=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ και
$x=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$
β) $x^2-\frac{5}{3}x+\frac{1}{3}=0$ ή $x^2-\frac{5}{3}x=-\frac{1}{3}$ ή
$x^2-2\cdot\frac{5}{6}x+\left(\frac{5}{6}\right)^2=-\frac{1}{3}+\left(\frac{5}{6}\right)^2$ ή
$\left(x-\frac{5}{6}\right)^2=\frac{13}{36}$ ή ... ή ρίζες: $x=\frac{5+\sqrt{13}}{6}$ και
$x=\frac{5-\sqrt{13}}{6}$

25. **α)** $x^4-2x^3+x^2-2x=0$ ή $x(x^3-2x^2+x-2)=0$ ή
$x\left[x^2(x-2)+(x-2)\right]=0$ ή ...
β) $(x-3)(x^2-4)+(5x-1)(x-3)-(x-3)=0$ ή
$(x-3)\left[(x^2-4)+(5x-1)-1\right]=0$ ή ...

26. Λύνουμε την εξίσωση:
$300x-(-x^2+370x-8.775)=10.000$, από την οποία προκύπτει ανάπτυγμα τετραγώνου.

Γεωμετρία του Επιπέδου, Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί

5.1 Ίσα τρίγωνα

1. Από αριστερά προς τα δεξιά: Π-Γ-Π, Γ-Π-Γ, Π-Π-Π, Γ-Π-Γ

2. Ενδεικτικά, η τρίτη πλευρά. Υπάρχουν κι άλλοι τρόποι (ποιοι;).

3. Σκεφτείτε ότι στα ίσα τρίγωνα απέναντι από τις ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές.

4. Σκεφτείτε όπως στην 3.

5. Θα μπορούσατε να χρησιμοποιήσετε τα συμμετρικά ως προς τη ΒΓ ή άλλες ευθείες.

6. Μπορείτε να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ.

7. **α)** Είναι παραπληρωματικές ίσων γωνιών.
β) Κριτήριο Π-Γ-Π
γ) Αξιοποιήστε το ερώτημα β)

8. Χρησιμοποιήστε το κριτήριο Π-Γ-Π και τις ιδιότητες του ισοσκελούς τραπεζίου.

9. **α)** Είναι παραπληρωματικές ίσων γωνιών.
β) Κριτήριο Π-Γ-Π
γ) Μπορείτε να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ για να δείξετε ότι ΑΔ = ΑΕ.

10. Να συγκρίνετε δύο τρίγωνα: το ένα να έχει τη διάμεσο του ΑΒΓ για πλευρά του, και το άλλο να είναι το αντίστοιχο του πρώτου στο ΔΕΖ.

11. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΜΑΒ και ΜΔΓ.

12. Μπορείτε να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΚΒΑ και ΚΓΔ.

13. Μπορείτε να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΑΚΓ.

14. **α)** Χρησιμοποιήστε το κριτήριο Γ-Π-Γ.
β) Μπορείτε να συγκρίνετε τα ΒΜΛ και ΓΝΚ.

15. **α)** Εξηγήστε γιατί έχουν τρεις πλευρές ίσες μία προς μία.
β) Πράγματι είναι συμμετρικά ως προς το κέντρο του κύκλου.

16. Χρησιμοποιήστε το κριτήριο Π-Π-Π για να εξηγήσετε γιατί τα τέσσερα τρίγωνα που σχηματίζονται από τις διαγώνιες του ρόμβου είναι μεταξύ τους ίσα.

17. Μπορείτε να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΒΔΓ.

18. Κριτήριο Γ-Π-Γ (γιατί;)

19. Μπορείτε να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΓΔ.

20. Κριτήριο Π-Γ-Π

21. Ένας τρόπος είναι το κριτήριο Γ-Π-Γ με πλευρά την υποτείνουσα. Αλλά μπορεί να χρησιμοποιηθεί και το Π-Γ-Π (πώς;).

22. Τα τέσσερα τρίγωνα που σχηματίζονται είναι μεταξύ τους ίσα με το κριτήριο Π-Γ-Π.

23. **α)** Κριτήριο Π-Γ-Π **β)** Κριτήριο Π-Π-Π

5.2 Ομοιοθεσία

1. **α)** 2 **β)** $\frac{1}{2}$

2. Στο πρώτο σχήμα $\lambda = 2$, στο δεύτερο $\lambda = \frac{3}{5} = 0{,}6$ και στο τρίτο $\lambda = \frac{7{,}5}{3} = 2{,}5$

3. Για να βρείτε το κέντρο, ακολουθήστε την περιγραφή που υπάρχει στην εφαρμογή 1. Στα σχήματα α, β και δ έχουμε μεγέθυνση και στο γ έχουμε σμίκρυνση. Στα α, β, δ ο λόγος ομοιοθεσίας είναι 2 και στο γ είναι 0,5.

5. Σχήμα 1: Κέντρο ομοιοθεσίας το $O(0{,}0)$ και λόγος 2. $A(0{,}2)$, $A'(0{,}4)$ κτλ.
Σχήμα 2: Κέντρο ομοιοθεσίας το $O(0{,}0)$ και λόγος 0,5. $A(-4{,}2)$, $A'(-2{,}1)$ κτλ.

6. Ο λόγος $\frac{ΓΕ}{ΓΔ}$ είναι $\frac{5}{3}$ και ο λόγος $\frac{ΓΗ}{ΓΒ}$ είναι $\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$, ενώ θα έπρεπε να είναι μεταξύ τους ίσοι.

7. $A'B' = 4{,}6$ cm

8. Μόνο στο σχήμα 3 το μπλε και το κόκκινο δεν είναι ομοιόθετα. Στις άλλες περιπτώσεις είναι. Στα σχήματα 1 και 4 κέντρο είναι η αρχή των αξόνων, ενώ στο σχήμα 2 το κέντρο είναι το σημείο που βρίσκεται δύο θέσεις αριστερά από την αρχή των αξόνων.

12. $A'(0{,}6)$, $B'(-6{,}0)$ και $Γ(9,-3)$

13. Σκεφτείτε ότι κάθε πλευρά του ενός τριγώνου είναι ομοιόθετη με την παράλληλή της του άλλου τριγώνου.

15. Σε όλες τις περιπτώσεις το τελικό σχήμα δεν αλλάζει αν κάνουμε τους μετασχηματισμούς με την αντίστροφη σειρά.

16. **α)** Το κέντρο είναι το $O(0,0)$ και ο λόγος είναι 3 (γιατί;).
β) $Γ'(6,0)$

17. Τα τρία ομοιόθετα του ΑΒΓ θα είναι μεταξύ τους ίσα. Σκεφτείτε το κριτήριο ισότητας τριγώνων Π-Π-Π.

5.3 Όμοια σχήματα

1.

Τρίγωνα\ ιδιότητα	Αντίστοιχες γωνίες ίσες	Αντίστοιχες πλευρές ίσες	Αντίστοιχες πλευρές ανάλογες
1) Ίσα	X	X	X
2) Ομοιόθετα	X		X
3) Όμοια	X		X

Τρίγωνα\ ιδιότητα	Προσανατολισμός τυχαίος	Προσανατολισμός συγκεκριμένος
1) Ίσα	X	
2) Ομοιόθετα		X
3) Όμοια	X	

2. **α)** 3 (αν βάλουμε στον αριθμητή τις πλευρές του τριγώνου ΔΕΖ)
β) $x=9$ **γ)** $\hat{A}=\hat{\Delta}$, $\hat{B}=\hat{E}$ και $\hat{\Gamma}=\hat{Z}$

3. **α)** Ομόλογες είναι οι ΑΒ με τη ΖΙ, η ΒΓ με την ΙΘ κτλ.
β) $\frac{1}{3}$ (ή 3, ανάλογα με το τρίγωνο του οποίου τις πλευρές βάζουμε στον αριθμητή).
γ) Σκεφτείτε ότι είναι ίσες οι γωνίες που βρίσκονται μεταξύ δύο ομόλογων πλευρών.

4. **α)** Σκεφτείτε ότι απέναντι από ομόλογες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες.
β) $K\Lambda=12$

5. Συμβουλευτείτε την εφαρμογή 3.

6. 3, 4 και 4,5

7. Αν α, β, γ είναι οι πλευρές του μικρότερου τριγώνου, τότε οι πλευρές του άλλου είναι 4α, 4β, 4γ. Αν είναι του μεγαλύτερου, τότε ...

8. Υπολογίστε τον λόγο ομοιότητας (που είναι ίσος με τον λόγο των περιμέτρων).

10. Να βρείτε πρώτα την πλευρά ΒΓ με το πυθαγόρειο θεώρημα.

11. Περίπου 305 km

12. Περίπου 1:2.600.000

13. Δεν μπορεί να χωρέσει.

14. **α)** 8 m **β)** 33,28 m^2
γ) Σκεφτείτε διαφορετικούς τρόπους τοποθέτησης των επίπλων ώστε να χωρέσουν χωρίς να κλείνουν την πόρτα μπρος τη βεράντα.

15. **α)** Περίπου 12 km **β)** Περίπου 800 m
γ) Περίπου 6 km

Ανακεφαλαίωση

1. **α)** Σ **β)** Λ **γ)** Σ **δ)** Σ **ε)** Λ **στ)** Σ
ζ) Σ **η)** Σ **θ)** Λ **ι)** Λ

2. Ίσα τρίγωνα είναι: το ΑΒΓ με το ΛΚΜ και το ΔΖΕ με το ΗΘΙ. Ζευγάρια όμοιων:
ΑΒΓ ≈ ΞΝΟ, ΛΚΜ ≈ ΞΝΟ, ΑΒΓ ≈ ΛΚΜ (είναι και ίσα), ΔΖΕ ≈ ΡΣΠ, ΗΘΙ ≈ ΡΣΠ, ΔΖΕ ≈ ΗΘΙ (είναι και ίσα). Εξηγήστε γιατί.

3. **α)** Είναι εντός εναλλάξ.
β) Έχουν δύο γωνίες ίσες.
γ) Κριτήριο Γ-Π-Γ

4. **α)** Κριτήριο Π-Γ-Π
β) Σκεφτείτε άλλα τρίγωνα που έχουν τις ΒΚ και ΓΛ ως πλευρές.

5. Συγκρίνετε τα ΑΒΚ και ΑΕΚ.

6. Να πάρετε δύο περιπτώσεις, ανάλογα με το αν το τρίγωνο ΑΒΔ επικαλύπτεται με το ΑΒΓ ή όχι. Σε κάθε περίπτωση το κριτήριο είναι το Π-Γ-Π.

7. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔΕΒ και ΔΖΓ.

8. **γ)** Θα είναι μεταξύ τους ίσα.

9. Μόνο η μπλε είναι ομοιόθετη της πορτοκαλί. Γιατί δεν είναι οι άλλες;

10. **α)** Ξεκινήστε με τις ίσες γωνίες. Απέναντι από ίσες γωνίες θα βρίσκονται οι ομόλογες πλευρές.
β) Ο λόγος ομοιότητας είναι 1,2.

11. Η κολόνα έχει ύψος 6 m.

12. Μια ενδεικτική πορεία είναι: Να συγκρίνετε τα ΟΑΔ και ΟΓΒ από τα οποία θα πάρετε στοιχεία ώστε να συγκρίνετε τα ΚΓΔ και ΚΑΒ και στη συνέχεια τα ΟΑΚ και ΟΓΚ.

13. Σκεφτείτε τι τρίγωνα είναι και τι σχέση έχουν οι ακμές του κύβου.

14. Ενδεικτικά για το σχήμα 2: ανάκλαση ως προς την κατακόρυφη ευθεία και στη συνέχεια ομοιοθεσία με λόγο μικρότερο του 1 και κέντρο ένα σημείο κάτω από το σχήμα Β.

15. Μετρήστε πόσα εκατοστά είναι το γκρι ορθογώνιο και πόσα εκατοστά είναι καθεμία από τις ζητούμενες αποστάσεις.

Τριγωνομετρία

6.1 Εφαπτομένη οξείας γωνίας

1. **α)** 3,7321 **β)** 0,1763 **γ)** 27° **δ)** 45°

2. Στο γ

3. **α)** $\frac{3}{5}=0{,}6$ και $\frac{5}{3}=1{,}67$ **β)** $\frac{1}{2}=0{,}5$ και $\frac{2}{1}=1$

γ) $\frac{2}{2}=1$ και $\frac{2}{2}=1$ **δ)** $\frac{10}{4}=2{,}5$ και $\frac{4}{10}=0{,}4$

4. **α)** Σ **β)** Λ **γ)** Σ

5. Σχήμα 1: $εφ32°=\frac{2}{x}$ ή $0{,}62=\frac{2}{x}$ ή $x=\frac{2}{0{,}62}\cong 3{,}23$

Με Π.Θ. έχουμε: $y^2=2^2+3{,}23^2$ ή $y\cong 3{,}8$.

Σχήμα 2: $εφ48°=\frac{x}{3}$ ή $1.11=\frac{x}{3}$ ή $x\cong 3{,}33$

$y^2=3^2+3{,}33^2$ ή $y\cong 4{,}48$

Σχήμα 3: $εφx=\frac{3}{3}=1$, $\hat{x}=45°$ και $y^2=3^2+3^2$

$y\cong 4{,}24$

Σχήμα 4: $εφx=\frac{4}{5}$ $\hat{x}\cong 39°$ και $εφy=\frac{5}{4}$, $\hat{y}\cong 51°$

Σχήμα 5: $x^2=6^2-4^2$, $x\cong 4{,}47$ και

$εφy=\frac{x}{4}$, $εφy=\frac{4{,}47}{4}$, $εφy\cong 1{,}12$, $\hat{y}\cong 48°$

6. $εφ4°=\frac{x}{45}$ $x=0{,}07\cdot 45=3{,}15$ m

7. $εφ70°=\frac{x}{3}$, $x=2{,}75\cdot 3=8{,}25$ m, άρα το συνολικό ύψος του φαναριού είναι $8{,}25+1{,}70=9{,}95$ m.

8. $εφ52°=\frac{40}{υ}$, $υ=\frac{40}{1{,}28}=31{,}25$ m

9. $εφ28°=\frac{30}{υ}$, $x=\frac{30}{0{,}53}\cong 56{,}6$ m

10. $εφ75°=\frac{x}{3{,}5}$, $x=3{,}73\cdot 3{,}5=13{,}05$ m

11. $εφ80°=\frac{ΑΔ}{25}$, $ΑΔ=5{,}67\cdot 25=141{,}75$ m,

$εφ75°=\frac{ΔΒ}{25}$, $ΔΒ=3{,}73\cdot 25=93{,}25$ m

Άρα, συνολικό ύψος: $141{,}75+93{,}25=235$ m

6.2 Ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας

1. $ημ65°=0{,}9$, $ημ27°=0{,}45$, $ημ81°=0{,}99$, $συν65°=0{,}42$, $συν27°=0{,}89$, $συν81°=0{,}16$

2. **α)** 60° **β)** 30° **γ)** 37° **δ)** 18°

3. **α)** Σ **β)** Λ **γ)** Λ **δ)** Σ **ε)** Σ **στ)** Σ

4. $συν67°=\frac{3{,}1}{x}$, $x=\frac{3{,}1}{0{,}39}=7{,}95$

$ημx=\frac{3{,}07}{4{,}2}=0{,}73$, $\hat{x}\cong 47°$

5. $ημω=συνφ=\frac{ΒΓ}{ΑΓ}=\frac{3}{5}=0{,}6$ $ΑΓ^2=ΒΓ^2+ΑΒ^2$ ή

$\left(\frac{5ΒΓ}{3}\right)^2=ΒΓ^2+ΑΒ^2$ ή $\frac{25ΒΓ^2}{9}=ΒΓ^2+ΑΒ^2$ και

μετά από πράξεις $\frac{ΑΒ}{ΒΓ}=\frac{4}{3}=εφφ$ $εφω=\frac{ΒΓ}{ΑΒ}=\frac{3}{4}$,

$συνω=ημφ=\frac{ΑΒ}{ΑΓ}=\frac{\frac{4}{3}ΒΓ}{ΑΓ}=\frac{4}{3}ημω=\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{5}=\frac{4}{5}$

6. $συνω=0{,}97=\frac{ΑΒ}{ΑΓ}=\frac{4}{ΑΓ}$ άρα $ΑΓ=\frac{4}{0{,}97}\cong 4{,}12$

$ημω=0{,}24=\frac{ΒΓ}{ΑΓ}=\frac{ΒΓ}{4{,}12}$ άρα

$ΒΓ=0{,}24\cdot 4{,}12=0{,}99$

7. **α)** Κατασκευάζουμε $x\widehat{A}y=90°$. Πάνω στην Αx παίρνουμε τμήμα ΑΒ = 2 και με κέντρο Β γράφουμε κύκλο (Β, 5) που τέμνει την Αy στο Γ. Τότε $\hat{Γ}=\hat{ω}$.

β) Όπως πριν με $\hat{Β}=\hat{ω}$

γ) Όπως στο ερώτημα α), με ΑΒ = 4.

δ) Δε γίνεται, διότι η κάθετη πλευρά θα ήταν μεγαλύτερη από την υποτείνουσα.

8. **α)** $ημφ=\frac{8}{x}$, δηλαδή $0{,}8=\frac{8}{x}$, άρα $x=10$

β) $ημφ=0{,}8=\frac{6}{\text{υποτείνουσα}}$, άρα

υποτείνουσα $=7{,}5$ Έτσι $x^2=7{,}5^2-6^2$ και τελικά $x=4{,}5$

γ) $ημφ=\frac{\text{απέναντι κάθετη}}{12}=0{,}8$, άρα

απέναντι κάθετη $=0{,}8\cdot 12=9{,}6$. Έτσι: $χ^2=12^2-9{,}6^2$ και τελικά $x=7{,}2$.

9. Γωνία ράμπας $\widehat{\omega} \cong 24{,}6°$, διότι $ημω = \frac{2{,}5}{6}$ και γωνία σκάλας $\widehat{\varphi} \cong 56°$, διότι $ημφ = \frac{2{,}5}{3} = 0{,}25$. Άρα δεν είναι ασφαλείς.

10. **α)** $ημ30° = \frac{ΒΔ}{ΓΔ}$, άρα $ΒΔ = 5$ και

$συν30° = \frac{ΒΓ}{ΓΔ}$, άρα $ΒΓ = 10 \cdot 0{,}87 = 8{,}7$

$συν45° = \frac{ΒΓ}{ΑΓ}$, άρα $ΑΓ = \frac{8{,}7}{0{,}71} = 12{,}25$ και

$ημ45° = \frac{ΑΒ}{ΑΓ}$, $ΑΒ = 0{,}71 \cdot 12{,}25 = 8{,}7$

$ΑΔ = ΑΒ - ΔΒ = 8{,}7 - 5 = 2{,}7$

β) $(ΑΔΓ) = \frac{ΑΔ \cdot ΓΒ}{2} = \frac{2{,}7 \cdot 8{,}7}{2} \cong 11{,}75$

11. $ημ30° = \frac{ΓΔ}{ΒΓ}$, άρα $ΓΔ = 0{,}5 \cdot 10 = 5$ cm και

$ημ45° = \frac{ΓΔ}{ΑΓ}$, άρα $ΑΓ = \frac{5}{0{,}71} = 7{,}04$ cm

$ΑΔ = ΓΔ = 5$ cm

12. $ημ30° = \frac{8}{\text{μήκος σκάλας}}$, άρα μήκος σκάλας $= 16$ m

13. **Πρώτο σχήμα:** $ημ30° = \frac{2\sqrt{3}}{x} = \frac{1}{2}$, άρα $x = 4\sqrt{3}$

$y^2 = (4\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{3})^2$, άρα $y = 6$

Δεύτερο σχήμα: $x^2 + x^2 = (9\sqrt{2})^2$, άρα $x = 9$

14. $συν80° = \frac{ΒΓ}{ΑΓ}$, και τελικά $ΑΓ = 5{,}76$ m

15. **α)** $ημ8° = \frac{3 \cdot 18}{x} = \frac{54}{x}$, άρα

$x = \frac{54}{ημ8°} \cong \frac{54}{0{,}1392} \cong 387{,}93$ cm

β) $εφω = \frac{18}{27} \simeq 0{,}67$ και άρα $\widehat{\omega} \simeq 34°$

Ανακεφαλαίωση Τριγωνομετρίας

1. **α)** Λ **β)** Σ **γ)** Λ **δ)** Λ **ε)** Λ **στ)** Σ **ζ)** Σ

2. **α)** $εφω = \frac{6}{8} = 0{,}75$ $ω \simeq 37°$

β) ΒΓ=10 cm

γ) $ημω = 0{,}6$, $συνω = 0{,}8$, $ημφ = 0{,}8$,

$συνφ = 0{,}6$, $εφφ = \frac{8}{6} \simeq 1{,}33$

3. $α \simeq 3{,}7$, $β \simeq 7{,}1$, $γ \simeq 5{,}6$, $δ = 30°$, $ε \simeq 8{,}3$, $ζ = 9{,}6$

4. Περίπου 51,8 m

5. Σκεφτείτε ότι σχηματίζονται ορθογώνια τρίγωνα που έχουν οξείες γωνίες το μισό των γωνιών του ρόμβου. Οι γωνίες είναι περίπου 103° και 77°.

6. Σχεδιάστε κατάλληλα τρίγωνα, παίρνοντας υπόψη σας την εφαρμογή 2 της 6.2.

7. Υπολογίστε το ΑΛ και το ΒΛ και αφαιρέστε τα.

8. **α)** $συν60° = \frac{ΑΕ}{ΑΗ}$, απ' όπου $ΑΗ = 2$. Οι γωνίες του είναι 30°, 75° και 75°.

β) Ποια σχέση έχει με την $Α\widehat{Δ}Η$; **γ)** Χρησιμοποιήστε ότι $ΕΗ + ΗΖ = 2$.

9. Είναι 3 Ν.

Εμβαδά και όγκοι

7.1 Εμβαδόν επιφάνειας στερεού σχήματος

1. **α)** 240 cm^2 **β)** 84 cm^2 **γ)** 140 cm^2 **δ)** 928 cm^2

2. Μπορείτε να σημαδέψετε με ένα στιλό ώστε να μετρήσετε μόνο ένα τύλιγμα.

4. Το ανάπτυγμα που αντιστοιχεί είναι το γ. Εμβαδόν 230 cm^2.

5. Τα αναπτύγματα που αντιστοιχούν είναι τα α και β. Εμβαδόν 274 cm^2.

6. Το ανάπτυγμα που αντιστοιχεί είναι το β. Εμβαδόν 628 cm^2.

7. Το ανάπτυγμα που αντιστοιχεί είναι το α. Εμβαδόν 266,9 cm^2.

8. **β)** 108 cm^2

9. Ο κύβος έχει εμβαδόν 384 cm^2 και το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει 312 cm^2.

10. Ένα παράδειγμα συσκευασίας που χρησιμοποιείται περισσότερο χαρτόνι από το ανάπτυγμά της είναι τα χαρτόκουτα (συνήθως σε μπεζ χρώμα) με τα οποία μεταφέρονται προϊόντα στα καταστήματα.

11. **α)** 25 cm^2 **β)** 5 cm

12. 7,312L

13. Περίπου 64,3 m^2

14. $27{,}68\ cm^2$ (η πυραμίδα με κορυφή το Κ) και $80{,}1\ cm^2$ (η πυραμίδα με κορυφή το Λ)
15. $5.495\ cm^2$ (ο κύλινδρος με ύψος 10 cm) και $5.181\ cm^2$ (ο κύλινδρος με ύψος 40 cm)
16. $282{,}6\ cm^2$ (ο κώνος με ακτίνα βάσης 5 cm) και $75{,}36\ cm^2$ (ο κώνος με ύψος 4 cm)
17. Η Σοφία κάνει λάθος. Μπορείτε να το εξηγήσετε με ένα παράδειγμα.
18. Σκεφτείτε πόσο πρέπει να είναι το μήκος και το πλάτος του χαρτιού ώστε να τυλίγει πλήρως το δώρο. Τι σχήμα είναι λογικό να έχει το χαρτί;
19. $6.280\ cm^2$ ολόκληρο και $11.080\ cm^2$ κομμένο σε 4 κομμάτια

7.2 Όγκος πρίσματος και πυραμίδας

1. $1.680\ cm^3$ ή 1,68 L
2. Από αριστερά προς τα δεξιά: $225\ cm^3, 512\ cm^3, 360\ cm^3, 48\ cm^3$
3. **α)** $192\ cm^3$ **β)** $41{,}67\ cm^3$ **γ)** $266{,}67\ cm^3$.
5. **α)** $1{,}14\ m^3$ **β)** $748{,}8\ cm^3$ **γ)** $36\ cm^3$ **δ)** $57.000\ cm^3$
6. **α)** $10{,}67\ cm^3$ **β)** $7{,}5\ cm^3$ **γ)** $20\ cm^3$
7. $343\ cm^3$
8. 4 cm
9. $173\ cm^2, 118{,}22\ cm^3$
10. $82{,}26\ cm^2, 46{,}8\ cm^3$
11. Από αριστερά προς τα δεξιά: $37.000\ cm^3$ και $1.666{,}67\ cm^3$
12. Η Παναγιώτα δεν έχει δίκιο. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ένα αριθμητικό παράδειγμα.
13. **α)** $17.400\ cm^2$ ή $1{,}74\ m^2$ **β)** $180.000\ cm^3$ ή 180 L ή $0{,}18\ m^3$
14. $33{,}21\ m^3$ το μικρό κοντέινερ και $73{,}37\ m^3$ το μεγάλο. Θα χρειαστούν 8 μικρά κοντέινερ.

7.3 Όγκος κυλίνδρου και κώνου

1. $344{,}3\ cm^3$
2. Από αριστερά προς τα δεξιά: $15{,}7\ cm^3, 56{,}52\ cm^3, 50{,}24\ cm^3$
3. Από αριστερά προς τα δεξιά: $4{,}19\ cm^3, 18{,}84\ cm^3, 1{,}57\ cm^3$
5. Από αριστερά προς τα δεξιά: $48{,}9\ cm^3, 113{,}04\ cm^3$
6. **α)** $178{,}98\ cm^3$ **β)** $75{,}36\ cm^3$
7. **α)** $12.560\ cm^3$ **β)** $1812{,}9\ cm^3$
8. $256{,}874\ m^3$
9. **α)** 10 cm **β)** $9.420\ cm^3$
10. $25{,}434\ m^3$
11. Μεγαλύτερο όγκο έχει ο κύλινδρος με διάμετρο 2 m.
12. Το κυβικό δοχείο έχει περισσότερο παγωτό.
13. Το κουτί δεν ήταν γεμάτο με γάλα.
14. Κάνοντας κάποιες υποθέσεις (ποιες;) βρίσκουμε επιφάνεια $301{,}44\ m^2$ και όγκο $502{,}4\ m^3$.
15. Περισσότερο θα άλλαζε ο όγκος αν διπλασιάζαμε την ακτίνα του.

7.4 Εμβαδόν και όγκος σφαίρας

1. Από αριστερά προς τα δεξιά, επιφάνεια και όγκος: $314\ cm^2$ και $523{,}33\ cm^3$, $12{,}56\ cm^2$ και $4{,}19\ cm^3$, $50{,}24\ cm^2$ και $33{,}49\ cm^3$
2. **α)** $113{,}04\ cm^2$ και $113{,}04\ cm^3$ **β)** $3{,}14\ m^2$ και $0{,}52\ m^3$ **γ)** $314\ cm^2$ και $523{,}3\ cm^3$
3. $11.451{,}6\ cm^3$
5. Επιφάνεια $1.778{,}6\ cm^2$ και όγκος $7.055{,}2\ cm^3$
6. Επιφάνεια $292\ cm^2$ και όγκος $444{,}8\ cm^3$
7. Ο Περικλής έχει δίκιο. Η εσωτερική επιφάνεια είναι πάνω από $20\ m^2$, άρα η εξωτερική θα είναι ακόμα μεγαλύτερη.
8. Ακτίνα 3,15 cm και ύψος 25,2 cm. Όγκος αέρα: $261{,}7\ cm^3$
9. Όγκος κυλίνδρου: $37{,}68\ m^3$, όγκος σφαίρας $33{,}49\ m^3$
10. **α)** Τετράγωνο πλευράς 50 cm **β)** Τετράγωνο πλευράς 40 cm
11. $11{,}5\ m^3$
12. Θα τετραπλασιαστεί η επιφάνειά της και θα οκταπλασιαστεί ο όγκος της.
13. Μία μπάλα είναι περίπου $113\ cm^3$, δηλαδή 0,113 L. Τα 2 L «βγάζουν» 17,7 μπάλες.

Ανακεφαλαίωση

1. **α)** Σ **β)** Σ **γ)** Λ **δ)** Σ **ε)** Λ **στ)** Λ **ζ)** Σ
2. Επιφάνεια και όγκος: του κύβου $150\ cm^2$ και $125\ cm^3$, του ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου $142\ cm^2$ και $105\ cm^3$, της πυραμίδας $96\ cm^2$ και $48\ cm^3$, του κυλίνδρου $207{,}24\ cm^2$ και $226{,}08\ cm^3$, του κώνου $173{,}3\ cm^2$ και $150{,}7\ cm^3$, της σφαίρας $200{,}96\ cm^2$ και $267{,}95\ cm^3$
3. **α)** $900\ cm^2$ και $1800\ cm^3$ **β)** $288\ cm^2$ και $240\ cm^3$

γ) $602{,}88\ cm^2$ και $1130{,}4\ cm^3$
δ) $522{,}5\ cm^2$ και $669{,}87\ cm^3$
ε) $1256\ cm^2$ και $4.186{,}7\ cm^3$

4. Για την εξωτερική επιφάνεια πρέπει να υπολογίσετε έξι ημισφαίρια και έναν κύβο αφαιρώντας από κάθε έδρα του έναν κύκλο. Τελικά, επιφάνεια $4.284\ cm^2$ και $20.560\ cm^3$.

5. **α)** $300\ cm^2$ και $250\sqrt{2} \simeq 353{,}5\ cm^3$
β) $161{,}28\ cm^2$ και $120\ cm^3$
γ) $533{,}8\ cm^2$ και $942\ cm^3$

6. Περίπου 824 ευρώ

7. Από 1 κυβικό μέτρο ξυλείας μπορούν να κατασκευαστούν 166 σφήνες. Η επιφάνεια για βάψιμο είναι $1.754\ cm^2$. Και με 1 L χρώμα βάφουμε $5\ m^2$ ή $50.000\ cm^2$ ...

8. Κάθε κύλινδρος που έχει ύψος όσο είναι η ακτίνα του.

9. $125{,}6\ m^3$

10. Πρέπει να πολλαπλασιαστεί με $\sqrt{2} \simeq 1{,}4$.

11. Συμφέρει το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

12. **β)** Υπάρχουν τρεις τέτοιες περιπτώσεις: 2×2×9, 2×3×6 και 3×3×4
γ) Μικρότερη επιφάνεια έχει το παραλληλεπίπεδο με διαστάσεις 3×3×4.

13. Υπολογίστε τους όγκους των πλανητών και βρείτε τους λόγους των όγκων τους προς τον όγκο της Γης.

Στατιστική

8.1 Διαχείριση δεδομένων, πληθυσμός και δείγμα

1. β) και δ)

2. **α)** Από 50 παιδιά του σχολείου
β) 20% **γ)** Εκτιμούμε ότι είναι 20%.

3. **α)** Σκεφτείτε ότι δε δίνονται δεδομένα εισπράξεων ή αύξησης εισπράξεων ανά μουσείο.
β) Στα αντίστοιχα βέλη φαίνονται τα ποσοστά αύξησης των επισκεπτών από το 2022 στο 2023. Για τις ερμηνείες αναζητήστε, π.χ., ειδικές συνθήκες που ίσχυαν το 2022.

4. **α)** Για τη μεταβλητότητα μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το εύρος και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος.
β) Ο πληθυσμός είναι οι μαθητές και μαθήτριες Γ΄ γυμνασίου της πόλης. Μπορείτε να βγάλετε συμπεράσματα χρησιμοποιώντας τα στοιχεία του θηκογράμματος για το δείγμα (π.χ. διάμεσος 3, ελάχιστη και μέγιστη τιμή, εύρος και ενδοτεταρτημοριακό εύρος, άρα μεταβλητότητα κτλ.).

8.2 Δείγμα και δειγματοληψία

1. **α)** Πληθυσμός: οι ακόλουθοι του nistagramer, χαρακτηριστικό: ναι ή όχι στην άποψη για την κλιματική αλλαγή.
β) Πληθυσμός: οι μαθητές γυμνασίου της πόλης Α, χαρακτηριστικό: πόσες ταινίες βλέπουν την εβδομάδα.
γ) Πληθυσμός: τα προϊόντα της βιομηχανίας, χαρακτηριστικό: η ποιότητα τους.

2. Υπόδειξη: Προσπαθήστε στο δείγμα να εκπροσωπούνται παιδιά από όλες τις τάξεις, να μην είναι πολύ μικρό και όλοι οι μαθητές και οι μαθήτριες του σχολείου να έχουν την ίδια πιθανότητα να επιλεγούν σε αυτό.

3. Υπόδειξη: Η επιλογή του πληθυσμού επηρεάζει τις απαντήσεις που θα πάρετε και άρα τον σκοπό της ερώτησης. Π.χ. στο α) μπορείτε να επιλέξετε όλους τους φορολογούμενους ή τους μισθωτούς ή τους ιδιοκτήτες καταστημάτων ή όλους τους οικονομολόγους ή όλους του υπαλλήλους της εφορίας. Με κάθε επιλογή ερευνάτε διαφορετική πτυχή του ίδιου ερωτήματος.

4. Υπόδειξη: Σκεφτείτε αν σε κάθε περίπτωση είναι εφικτό ή απαραίτητο να γίνει απογραφή. Π.χ. για το γ) μπορείτε να συλλέξετε δεδομένα από όλα τα παιδιά 13-15 που φορούν σιδεράκια; Είναι απαραίτητο να συλλεχθούν δεδομένα από όλα τα παιδιά;

5. Υπόδειξη: Για να είναι λογικό το συμπέρασμα, σε κάθε περίπτωση το δείγμα (20 παιδιά, μπουκάλι νερό, φίλες της Αθηνάς) πρέπει να είναι αντιπροσωπευτικό του πληθυσμού (όλα παιδιά του σχολείου, όλο το νερό της λίμνης, όλα τα παιδιά της ηλικίας της Αθηνάς).

6. **α)** i) 33,33..% ii) 25%
β) Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε τη μεταβλητότητα στατιστικών δεικτών μεταξύ δειγμάτων του ίδιου πληθυσμού,
γ) Υπόδειξη: σκεφτείτε τι θα μπορούσατε να αλλάξετε στον τρόπο της δειγματοληψίας σας.

7. 1. Ισχύει σίγουρα. 2. Μάλλον ισχύει.

3. Δεν μπορούμε να γνωρίζουμε αν ισχύει.
4. Ισχύει σίγουρα. 5. Μάλλον ισχύει.

8. Υπόδειξη: Ένα δείγμα δεν είναι αντιπροσωπευτικό, όταν π.χ. λαμβάνεται με τρόπο που αποκλείει μια ομάδα του πληθυσμού με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά.

9. **α)** Περίπου 50% για το δείγμα και κάνουμε την ίδια εκτίμηση για τον πληθυσμό, που είναι ικανοποιητική αν το δείγμα είναι αντιπροσωπευτικό.
β) Υπόδειξη: Το ποσοστό των πελατών είναι μεταξύ 25% και 50%, όπως φαίνεται στο θηκόγραμμα.

10. Με την προϋπόθεση ότι το δείγμα είναι αντιπροσωπευτικό εκτιμούμε:
α) 12% **β)** 50% **γ)** 0% **δ)** 22% **ε)** 14%

Ανακεφαλαίωση

1. α), β) και στ)

2. **α)** Λ **β)** Σ **γ)** Λ **δ)** Σ **ε)** Λ

3. **α)** Λ **β)** Λ **γ)** Λ **δ)** Σ **ε)** Σ

4. **α)** Λ **β)** Σ **γ)** Λ **δ)** Λ **ε)** Λ **στ)** Λ **ζ)** Λ

5. Υπόδειξη: Να απαντήσετε ποιος είναι ο πληθυσμός, ποιο το δείγμα (αν θα χρησιμοποιήσετε), πώς θα το επιλέξετε, ποιο χαρακτηριστικό ερευνάτε, τι ερωτήματα θα θέσετε, τι δεδομένα θα συλλέξετε, σε κάθε περίπτωση.

6. Υπόδειξη: Να κάνετε παρόμοια περιγραφή με την άσκηση 5.
Ενδεικτικά: Ο πληθυσμός είναι όλα τα δρομολόγια του μετρό της Αθήνας τον Αύγουστο. Το χαρακτηριστικό είναι το πλήθος των επιβατών ανά δρομολόγιο. Θα χρησιμοποιήσουμε ένα μέρος αυτών ως δείγμα. Το δείγμα θα το επιλέξουμε ώστε να είναι αντιπροσωπευτικό, π.χ. επιλέγοντας τυχαία 50 δρομολόγια από όλες τις ημέρες του Αυγούστου και από διαφορετικές ώρες της μέρας.

7. **α)** όχι **β)** όχι **γ)** ναι **δ)** ναι

8. **α)** **i)** δείγμα κατοίκων της χώρας,
ii) δείγμα Μπλε Αλεπούδων,
iii) δείγμα Πορτοκαλί Αρκούδων. Υπόδειξη: Θεωρήσαμε ότι οι φίλοι των Μπλε Αλεπούδων δηλώνουν ως αγαπημένο άθλημα το ποδόσφαιρο σε μεγαλύτερο ποσοστό από τους κατοίκους της χώρας, λόγω των επιτυχιών της ομάδας τους σε αυτό το άθλημα. Αντίστοιχα σκεφτήκαμε και για τις Πορτοκαλί Αρκούδες και το μπάσκετ.
β) Υπόδειξη: Θεωρήστε ότι τα συμπεράσματα από το δείγμα των κατοίκων της χώρας είναι ικανοποιητικά ακριβή και για τον πληθυσμό.

9. **α)** ποδηλάτες 20-25 χιλιόμετρα, δρομείς 5-10 χιλιόμετρα.
β) Για τα δείγματα: Η διάμεσος στους ποδηλάτες ανήκει στην κλάση 20-25, ενώ στους δρομείς η διάμεσος είναι 10. Μπορούμε να κάνουμε την ίδια εκτίμηση και για τον πληθυσμό.
γ) Δρομείς και ποδηλάτες: 35-40 χιλιόμετρα.
δ) **i)** Το επάνω στους ποδηλάτες, το κάτω στους δρομείς. Υπόδειξη: τα συγκρίνουμε με τα αντίστοιχα ιστογράμματα.
ii) Εύρος μεγαλύτερο από 35, περίπου 37. Ενδοτεταρτημοριακό εύρος περίπου 8.
iii) Εύρος περίπου 35, ενδοτεταρτημοριακό εύρος περίπου 13.
iv) Ποδηλάτες περίπου 22, δρομείς περίπου 12. Με σύγκριση με τα αρχικά δείγματα βλέπουμε ότι οι τιμές είναι σχετικά κοντά.
ε) **i)** 0,15
ii) Εφόσον το δείγμα είναι αντιπροσωπευτικό εκτιμούμε την πιθανότητα 0,15.
στ) Εκτιμούμε ότι είναι 0,05.

Πιθανότητες

9.1 Πειράματα τύχης και πιθανότητες

1. **α)** Λ **β)** Λ **γ)** Σ **δ)** Λ **ε)** Σ

2. Υπενθύμιση: Η πιθανότητα εμφάνισης του 6 είναι $\frac{1}{6}$.

3. Το 2ο δείγμα 1.000 ατόμων με σχετική συχνότητα 0,484.

4. **α)** 0,5 **β)** (ii) **γ)** (i) Βασίλης (ii) Σαμιά

5. **α)** Ηλίας
β) Κώστας και Θάλεια, αντίστοιχα
γ) Πρόκειται για δείγματα με πλήθος 1.000.

6. Υπενθύμιση: Οι πιθανότητες των αντίστοιχων ενδεχομένων είναι α) $\frac{1}{4}$ και β) $\frac{1}{8}$.

9.2 Εξαρτημένα και ανεξάρτητα ενδεχόμενα

1. **α)** εξαρτημένα **β)** ανεξάρτητα **γ)** ανεξάρτητα
2. **α)** εξαρτημένα **β)** ανεξάρτητα
3. Ανεξάρτητα. Για την αιτιολόγηση σκεφτείτε αν η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το Β επηρεάζεται ή όχι από τον αριθμό που βγαίνει πρώτος.
4. Είναι εξαρτημένα: Η πιθανότητα του Α είναι 0,001, ενώ η πιθανότητα του Α, δεδομένου ότι πραγματοποιείται το Β, είναι 0,003.
5. P(B)= 0,8
   Υπόδειξη:
   Αν τα παιδιά είναι 100:
   Τα 30 φοιτούν στην Α΄ τάξη και 27 φοιτούν στην Α΄ τάξη και παίζουν μπάσκετ.
   Άρα η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το Β, δεδομένου ότι πραγματοποιείται το Α, είναι $\frac{27}{30}=\frac{9}{10}$ ή 0,9 που δεν είναι ίσο με την πιθανότητα του Β.
6. Σκεφτείτε πειράματα τύχης που η περιγραφή τους να εξασφαλίζει την εξάρτηση ή την ανεξαρτησία των ενδεχομένων.
7. Υπόδειξη: Η πιθανότητα το φυτό:
   - Να έχει την ασθένεια Β είναι $\frac{410+50}{10.000}=0{,}046$.
   - Να έχει την ασθένεια Β με δεδομένο ότι έχει το χαρακτηριστικό Α είναι $\frac{410}{410+4590}=\frac{410}{5.000}=0{,}082$.

Ανακεφαλαίωση

1. **α)** Λ **β)** Σ **γ)** Λ **δ)** Σ **ε)** Λ
2. **α)** Λ **β)** Σ **γ)** Λ **δ)** Σ **ε)** Σ
3. **α)** ανεξάρτητα **β)** εξαρτημένα
4. **α)** προσεγγιστικά:

Αποτέλεσμα	1	2	3	4	5	6
Συχνότητα	0,152	0,1602	0,1750	0,1717	0,1667	0,1744

   β) Όχι, οι σχετικές συχνότητες είναι αρκετά κοντά στο $\frac{1}{6}$. Δεν αναμένουμε να είναι όλες το ίδιο κοντά.

5. **α)** $P(\Xi_1)=\frac{80}{120}=\frac{2}{3}$, ενώ η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το Ξ_1 με δεδομένο ότι πραγματοποιείται το Α είναι $\frac{20}{40}=\frac{1}{2}$. Άρα τα Α και Ξ_1 είναι εξαρτημένα. Με παρόμοιο τρόπο συνεχίζουμε.
   β) $P(\Xi_1)=\frac{75}{120}=\frac{5}{8}$, ενώ η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το Ξ_1 με δεδομένο ότι πραγματοποιείται το Α είναι $\frac{20}{32}=\frac{5}{8}$. Άρα τα Α και Ξ_1 είναι ανεξάρτητα. Με παρόμοιο τρόπο συνεχίζουμε.
6. **α)** Στην περίπτωση της Δανάης είναι εξαρτημένα, ενώ είναι ανεξάρτητα στην περίπτωση της Ρίσα.
   β) Χρησιμοποιήστε τα εξής:
   Η σχετική συχνότητα του ενδεχομένου «η δεύτερη μπάλα έχει άρτιο» είναι
   $\frac{49.930}{100.000}=0{,}4993\cong 0{,}5$.
   Η σχετική συχνότητα του ενδεχομένου «η δεύτερη μπάλα έχει άρτιο», με δεδομένο ότι η πρώτη μπάλα είχε άρτιο, είναι
   $\frac{24.873}{49.617}=0{,}50129996\cong 0{,}5$.
7. **α) i.** 0,01 **ii.** 0,01 **β) i.** 0,1, **ii.** 0,01
   γ) Η ασθένεια ΙΙ
8. Προκειται για το ενδεχόμενο: «η οικογένεια έκανε υπερκατανάλωση ρεύματος το τελευταίο τρίμηνο». Συγκρίνετε τη σχετική συχνότητα υπερκατανάλωσης νερού και ρεύματος στο κέντρο, στις υπόλοιπες περιοχές και σε όλη την πόλη. Ποια περιοχή φαίνεται να έχει μεγαλύτερη πιθανότητα υπερκατανάλωσης; Γιατί;

Αλφαβητικό ευρετήριο όρων

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ 1° - 89°

Γωνία (σε μοίρες)	ημίτονο	Συνημίτονο	εφαπτομένη	Γωνία (σε μοίρες)	ημίτονο	Συνημίτονο	εφαπτομένη
1	0,0175	0,9998	0,0175	46	0,7193	0,6947	1,0355
2	0,0349	0,9994	0,0349	47	0,7314	0,6820	1,0724
3	0,0523	0,9986	0,0524	48	0,7431	0,6691	1,1106
4	0,0698	0,9976	0,0699	49	0,7547	0,6561	1,1504
5	0,0872	0,9962	0,0875	50	0,7660	0,6428	1,1918
6	0,1045	0,9945	0,1051	51	0,7771	0,6293	1,2349
7	0,1219	0,9925	0,1228	52	0,7880	0,6157	1,2799
8	0,1392	0,9903	0,1405	53	0,7986	0,6018	1,3270
9	0,1564	0,9877	0,1584	54	0,8090	0,5878	1,3764
10	0,1736	0,9848	0,1763	55	0,8192	0,5736	1,4281
11	0,1908	0,9816	0,1944	56	0,8290	0,5592	1,4826
12	0,2079	0,9781	0,2126	57	0,8387	0,5446	1,5399
13	0,2250	0,9744	0,2309	58	0,8480	0,5299	1,6003
14	0,2419	0,9703	0,2493	59	0,8572	0,5150	1,6643
15	0,2588	0,9659	0,2679	60	0,8660	0,5000	1,7321
16	0,2756	0,9613	0,2867	61	0,8746	0,4848	1,8040
17	0,2924	0,9563	0,3057	62	0,8829	0,4695	1,8807
18	0,3090	0,9511	0,3249	63	0,8910	0,4540	1,9626
19	0,3256	0,9455	0,3443	64	0,8988	0,4384	2,0503
20	0,3420	0,9397	0,3640	65	0,9063	0,4226	2,1445
21	0,3584	0,9336	0,3839	66	0,9135	0,4067	2,2460
22	0,3746	0,9272	0,4040	67	0,9205	0,3907	2,3559
23	0,3907	0,9205	0,4245	68	0,9272	0,3746	2,4751
24	0,4067	0,9135	0,4452	69	0,9336	0,3584	2,6051
25	0,4226	0,9063	0,4663	70	0,9397	0,3420	2,7475
26	0,4384	0,8988	0,4877	71	0,9455	0,3256	2,9042
27	0,4540	0,8910	0,5095	72	0,9511	0,3090	3,0777
28	0,4695	0,8829	0,5317	73	0,9563	0,2924	3,2709
29	0,4848	0,8746	0,5543	74	0,9613	0,2756	3,4874
30	0,5000	0,8660	0,5774	75	0,9659	0,2588	3,7321
31	0,5150	0,8572	0,6009	76	0,9703	0,2419	4,0108
32	0,5299	0,8480	0,6249	77	0,9744	0,2250	4,3315
33	0,5446	0,8387	0,6494	78	0,9781	0,2079	4,7046
34	0,5592	0,8290	0,6745	79	0,9816	0,1908	5,1446
35	0,5736	0,8192	0,7002	80	0,9848	0,1736	5,6713
36	0,5878	0,8090	0,7265	81	0,9877	0,1564	6,3138
37	0,6018	0,7986	0,7536	82	0,9903	0,1392	7,1154
38	0,6157	0,7880	0,7813	83	0,9925	0,1219	8,1443
39	0,6293	0,7771	0,8098	84	0,9945	0,1045	9,5144
40	0,6428	0,7660	0,8391	85	0,9962	0,0872	11,4301
41	0,6561	0,7547	0,8693	86	0,9976	0,2698	14,3007
42	0,6691	0,7431	0,9004	87	0,9986	0,0523	19,0811
43	0,6820	0,7314	0,9325	88	0,9994	0,0349	28,6363
44	0,6947	0,7193	0,9657	89	0,9998	0,0175	57,2900
45	0,7071	0,7071	1,0000				