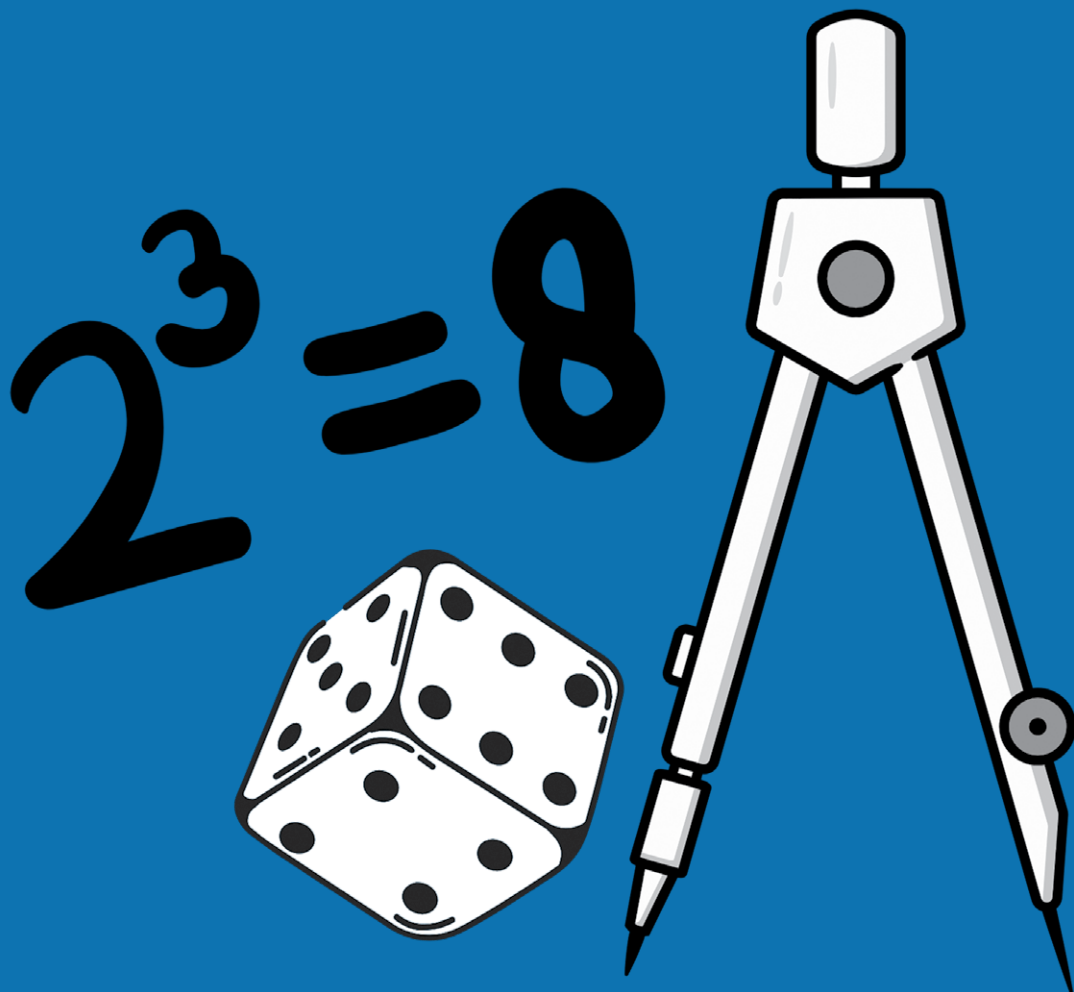


ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ ΑΔΑΜΙΔΗΣ

ΑΛΕΞΙΑ ΚΑΡΑΝΤΑΝΑ



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Α' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Α' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Επιστημονική Επιτροπή Αξιολόγησης Συντονιστής/τρια / Αξιολογητής/τρια	Κρέστου Αθηνά Εν ενεργεία μέλος Διδακτικού Ερευνητικού Προσωπικού Πανεπιστημίου
Αξιολογητής/τρια	Σταθοπούλου Ιωάννα Εν ενεργεία Εκπαιδευτικός
Αξιολογητής/τρια	Κορρές Κωνσταντίνος Εν ενεργεία Εκπαιδευτικός
Τεχνικός Εμπειρογνώμονας	Συναχείρης Χρήστος Πτυχιούχος Πληροφορικής
Επικουρικός Εμπειρογνώμονας	Καλογεροπούλου Παρασκευή Πτυχιούχος γραφιστικής
Υπεύθυνος/η του μαθήματος/γνωστικού αντικειμένου στο πλαίσιο της Πράξης	Ειρήνη Γεωργάκη , Σύμβουλος Α΄ ΙΕΠ, μέλος της Επιστημονικής Ομάδας Έργου (ΕΟΕ) της Πράξης

Πράξη με τίτλο: «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ 6010165 στο Πρόγραμμα «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή» 2021-2027

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Σπυρίδων Δουκάκης

Πρόεδρος του Δ.Σ. του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Υπεύθυνη Πράξης

Πολυξένη Μπίλλα

Σύμβουλος Α΄ του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Προϊσταμένη Τμήματος Β΄ Προγραμμάτων Σπουδών και Εκπαιδευτικού Υλικού

Αναπληρώτρια Υπεύθυνη Πράξης

Άννα-Αικατερίνη Λυκούρη

Σύμβουλος Α΄ του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

«Με τη συγχρηματοδότηση της Ευρωπαϊκής Ένωσης»

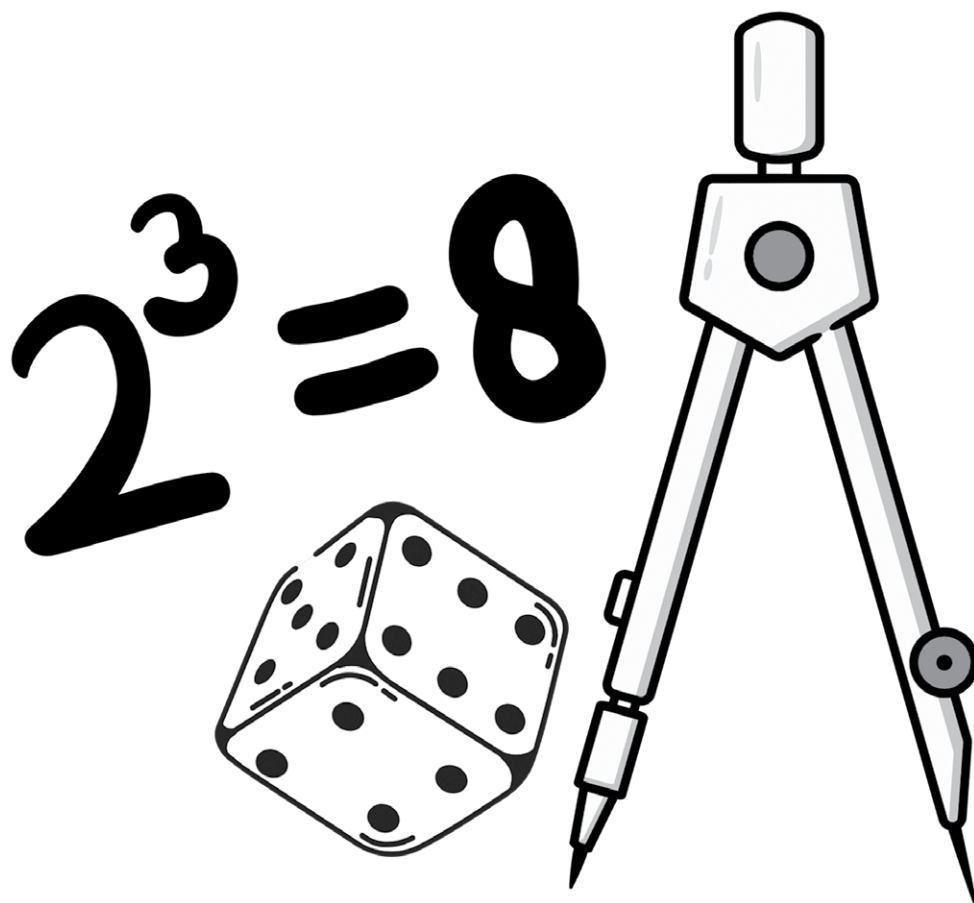
και το Πρόγραμμα «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή»

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

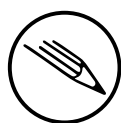
ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ ΑΔΑΜΙΔΗΣ

ΑΛΕΞΙΑ ΚΑΡΑΝΤΑΝΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ



Α' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ



Εκδόσεις Λυσάρι

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ

Δημήτριος Αδαμίδης

Μαθηματικός, Εκπαιδευτικός Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης

Αλεξία Καραντάνα

Μαθηματικός, Εκπαιδευτικός Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

Πρόδρομος Μιχαλάκης

ΔΙΟΡΘΩΣΗ

Εκπαιδευτικός οργανισμός ΑΚΑΔΗΜΙΑ (*e-akadimia.gr*)

ΣΕΛΙΔΟΠΟΙΗΣΗ

Ασπασία Κυριάκου

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΒΙΒΛΙΟΥ

Εκδόσεις Λυσάρι (*lisari.gr*)

ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΨΜΑ

Πρόδρομος Μιχαλάκης,

Εκδόσεις Λυσάρι (*lisari.gr*)

ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Τα Μαθηματικά είναι μία από τις επιστήμες που μας επιτρέπει να περιγράψουμε, να κατανοήσουμε και να επηρεάσουμε τον κόσμο γύρω μας. Στην Α' Γυμνασίου, το ταξίδι μας ξεκινά με τα θεμέλια των αριθμών, της άλγεβρας και της γεωμετρίας, ανακαλύπτοντας τις βασικές δεξιότητες για την επίλυση προβλημάτων και την κατανόηση σύνθετων εννοιών. Με το βιβλίο αυτό θα γνωρίσεις τη δύναμη των μαθηματικών, όχι μόνο ως μέσο υπολογισμού, αλλά και ως εργαλείο σκέψης και δημιουργικότητας.

Το βιβλίο αυτό έχει σχεδιαστεί για να σε βοηθήσει να εμβαθύνεις στις βασικές έννοιες μέσα από τρία Θεματικά Πεδία: της Άλγεβρας, της Γεωμετρίας και των Στοχαστικών Μαθηματικών.

Θεματικά Πεδία

Αριθμός και Άλγεβρα

- Φυσικοί, Ακέραιοι και Ρητοί Αριθμοί, κατανόηση της δομής των αριθμών, των πράξεών τους.
- Δυνάμεις και Απόλυτη Τιμή, εισαγωγή στις Δυνάμεις και τη χρήση τους σε υπολογισμούς.
- Κανονικότητες και Άλγεβρικές Παραστάσεις, ανάλυση Αριθμητικών Κανονικοτήτων και χρήση της άλγεβρας για τη Μοντελοποίηση Προβλημάτων.
- Λύση Εξισώσεων, κατανόηση πραγματικών και μαθηματικών προβλημάτων, αξιοποίηση Άλγεβρικών Σχέσεων.

Γεωμετρία και Μέτρηση

- Βασικές Έννοιες και Σχέσεις, εξοικείωση με τις Γωνίες, τα Τρίγωνα, τα Τετράπλευρα και τις σχέσεις τους.
- Μετασχηματισμοί και Συμμετρία, διερεύνηση Αξόνων Συμμετρίας και των χαρακτηριστικών τους.
- Γεωμετρία του Χώρου, εισαγωγή στα Γεωμετρικά Στερεά, στις όψεις και στα αναπτύγματά τους.

Στοχαστικά Μαθηματικά

- Διαχείριση Δεδομένων, κατανόηση κατηγοριών Δεδομένων και αναπαράστασή τους με Γραφήματα.
- Πιθανότητες, μελέτη Πειραμάτων Τύχης, Δειγματικών Χώρων και υπολογισμού πιθανοτήτων, με στόχο την κατανόηση των Ενδεχομένων.

Κατά τη συγγραφή του βιβλίου ακολουθήθηκαν οι οδηγίες και οι προδιαγραφές των νέων προγραμμάτων σπουδών, όπως αυτές τέθηκαν από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής. Το βιβλίο αυτό είναι οργανωμένο γύρω από κεντρικές ιδέες, τις λεγόμενες «Μεγάλες Ιδέες» των Μαθηματικών, οι οποίες συνδέουν διαφορετικές μαθηματικές έννοιες σε ένα ενιαίο σύνολο. Αυτές οι ιδέες σε βοηθούν να κατανοήσεις βαθύτερα τη σημασία και τη χρήση των μαθηματικών στη ζωή και στην καθημερινότητά σου.

Για παράδειγμα, στους Αριθμούς, δίνεται έμφαση στη δομή και τις σχέσεις μεταξύ φυσικών, ακέραιων και ρητών αριθμών, επιτρέποντας την κατανόηση της συνέχειας και της αλληλεξάρτησής τους. Στην Άλγεβρα, η ιδέα της μοντελοποίησης και της γενίκευσης ενισχύει την ικανότητα περιγραφής επαναλαμβανόμενων μοτίβων και σχέσεων. Στη Γεωμετρία, εξοικειωνόμαστε με την αποδεικτική σκέψη, χρησιμοποιώντας λογικά επιχειρήματα για να θεμελιώσουμε τις ιδιότητες των σχημάτων και των στερεών. Τέλος, στα Στοχαστικά Μαθηματικά, η έννοια της μεταβλητότητας καθοδηγεί τη σκέψη μας στην κατανόηση και ανάλυση δεδομένων, ενισχύοντας την ικανότητα λήψης αποφάσεων. Μέσα από αυτές τις μεγάλες ιδέες, μαθαίνουμε όχι μόνο να λύνουμε προβλήματα, αλλά και να κατανοούμε βαθύτερα τη δομή του μαθηματικού κόσμου.

Κάθε Θεματική Ενότητα αποτελείται από **Διδακτικές Ενότητες** με την ακόλουθη δομή:

Στόχοι Ενότητας: τα κύρια Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα παρουσιάζονται στην αρχή κάθε ενότητας, δίνοντάς μια σαφή εικόνα για τις διδακτικές στοχεύσεις της ενότητας.

Έργα Εξερεύνησης: μικρές δραστηριότητες που υποστηρίζουν την ενεργή εμπλοκή των μαθητών και

μαθητριών και στοχεύουν στην ανάδειξη των στοιχείων των ΠΜΑ που βρίσκονται υπό επεξεργασία.

Θεωρία: επεξήγηση των μαθηματικών εννοιών που συνδέονται με τα έργα εξερεύνησης της ενότητας.

Εφαρμογές: δραστηριότητες που βοηθούν στην αξιοποίηση της γνώσης σε διαφορετικά περιβάλλοντα, στη σύνδεση των Μαθηματικών με άλλες επιστήμες και στην έκφραση εννοιών μέσα από ποικίλα συστήματα αναπαράστασης.

Διαδραστικό Υλικό: πρόσβαση σε Ψηφιακά Μαθησιακά Αντικείμενα μέσω QR codes, με πρόσθετο υλικό, όπως ενδεικτικές λύσεις των έργων εξερεύνησης, διαδραστικές ασκήσεις και προσομοιώσεις.

Ασκήσεις και προβλήματα: ποικιλία έργων διαβαθμισμένης δυσκολίας, που οικοδομούν προοδευτικά τη μαθηματική γνώση και αξιοποιούνται για την αξιολόγηση του βαθμού επίτευξης των ΠΜΑ και τον αναστοχασμό των μαθητών/-τριών.

Στο τέλος κάθε Θεματικής Ενότητας, θα βρεις:

Ανακεφαλαίωση και Αυτοαξιολόγηση: ενότητες που βοηθούν στην αποτίμηση της προόδου και τον εντοπισμό ασυνεχειών στην κατάκτηση των στοιχείων του ΠΜΑ.

Θέματα από την Ιστορία των Μαθηματικών: ιστορικές αναφορές, που έχουν ως στόχο να προκαλέσουν το ενδιαφέρον των μαθητών/-τριών για τα Μαθηματικά και να τα αναδείξουν ως πανανθρώπινη δραστηριότητα.

Με το βιβλίο αυτό, θα έχεις την ευκαιρία να **εμβαθύνεις** στις μαθηματικές έννοιες, να **αναπτύξεις** την κριτική σου σκέψη και να δεις τα μαθηματικά όχι μόνο ως ένα σύνολο αριθμών και τύπων, αλλά ως ένα μέσο κατανόησης και επίλυσης προβλημάτων. Παράλληλα, με τη διαθεματική προσέγγιση, θα **ανακαλύψεις** πώς τα μαθηματικά συνδέονται με άλλα πεδία γνώσης, όπως η φυσική, η τεχνολογία, η οικονομία, οι κοινωνικές επιστήμες ακόμα και οι τέχνες! Έτσι, θα **κατανοήσεις** βαθύτερα τη σχέση τους με τον πραγματικό κόσμο και θα **αποκτήσεις** εργαλεία που θα αξιοποιήσεις σε ποικίλες προκλήσεις και καθημερινές καταστάσεις.

Επεξήγηση εικονιδίων



Προσδοκώμενα
Μαθησιακά
Αποτελέσματα.



Έργα αφόρμησης
για ομαδική συζήτηση
στην τάξη.



Υπενθύμηση προϋ-
πάρχουσας γνώσης.



Δυνατότητα αξιοποί-
ησης χειραπτικών
υλικών.



Δυνατότητα αξιοποί-
ησης υπολογιστή
τσέπης.

Πρόταση διδακτικής διαχείρισης Θεματικών Πεδίων/Ενοτήτων και Διδακτικών Ενοτήτων.

Η σειρά διδασκαλίας των διδακτικών ενοτήτων, προτείνεται να είναι αυτή με την οποία παρουσιάζονται. Την ίδια στιγμή, προτείνεται η παράλληλη διδασκαλία των Θεματικών Πεδίων της Άλγεβρας και της Γεωμετρίας, με ισόποση κατανομή χρόνου. Με τον τρόπο αυτόν διασφαλίζεται η οριζόντια διασύνδεση των εννοιών των πρώτων δύο Πεδίων του βιβλίου.

Η διδασκαλία του Γ' Θεματικού Πεδίου (Στοχαστικά Μαθηματικά) μπορεί να πραγματοποιηθεί ενιαία και ανεξάρτητα, μετά την ολοκλήρωση της διδασκαλίας του Α' και Β' Θεματικού Πεδίου (Άλγεβρα και Γεωμετρία).

Η συγγραφική ομάδα

Περιεχόμενα

ΑΛΓΕΒΡΑ

A.1 Φυσικοί Αριθμοί

1.0 Εισαγωγή.....	12
1.1 Δυνάμεις φυσικών με εκθέτη μη μηδενικό φυσικό.....	15
1.2 Ταυτότητα Ευκλείδειας Διαίρεσης.....	19
1.3 Πρώτοι και σύνθετοι αριθμοί.....	23
1.4 ΕΚΠ και ΜΚΔ φυσικών αριθμών.....	28
1.5 Δυαδικό Σύστημα Αρίθμησης.....	34
Ανακεφαλαίωση / Αυτοαξιολόγηση	39

A.2 Ακέραιοι Αριθμοί

2.1 Θετικοί, αρνητικοί, ομόσημοι, ετερόσημοι ακέραιοι.....	42
2.2 Απόλυτη τιμή ακεραίου.....	47
2.3 Πρόσθεση και αφαίρεση ακεραίων.....	52
2.4 Πολλαπλασιασμός ακεραίων.....	57
2.5 Δυνάμεις ακεραίων με εκθέτη μη μηδενικό φυσικό.....	62
Ανακεφαλαίωση / Αυτοαξιολόγηση	65

A.3 Ρητοί Αριθμοί

3.1 Η έννοια του ρητού.....	68
3.2 Απόλυτη τιμή ρητού - Σύγκριση και διάταξη ρητών – Αντίθετοι ρητοί.....	75
3.3 Πρόσθεση και αφαίρεση ρητών.....	80
3.4 Πολλαπλασιασμός ρητών – Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού – Αντίστροφοι ρητοί.....	84
3.5 Διαίρεση ρητών.....	89
3.6 Δυνάμεις ρητών με εκθέτη μη μηδενικό φυσικό.....	93
3.7 Τυποποιημένη μορφή μεγάλων αριθμών.....	96
Ανακεφαλαίωση / Αυτοαξιολόγηση	98

A.4 Κανονικότητες

4.1 Κανονικότητα, έννοια και αναπαραστάσεις.....	102
4.2 Κανονικότητες της μορφής $a \cdot n$ με a ρητό.....	106
Ανακεφαλαίωση / Αυτοαξιολόγηση	110

A.5 Αλγεβρικές Παραστάσεις

5.1 Αλγεβρική παράσταση – Αριθμητική τιμή αλγεβρικής παράστασης – Επιμεριστική ιδιότητα.....	
$a \cdot (\beta \pm \gamma) = a \cdot \beta \pm a \cdot \gamma$	112
Ανακεφαλαίωση / Αυτοαξιολόγηση	116

A.6 Αλγεβρικές Σχέσεις

6.1 Ιδιότητες της ισότητας (ισότητα και πράξεις) και η έννοια της εξίσωσης.....	118
6.2 Επίλυση εξίσωσης της μορφής $ax + b = \gamma$	123
Ανακεφαλαίωση / Αυτοαξιολόγηση	126

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

B.1 Μέτρηση

1.1 Βασικές έννοιες: σημείο, ευθεία, ημιευθεία, ευθύγραμμο τμήμα, γωνία, κύκλος	132
1.2 Μήκος ευθύγραμμου τμήματος	137
1.3 Μέτρο γωνίας	143
Ανακεφαλαίωση / Αυτοαξιολόγηση	147

B.2 Μετασχηματισμοί

2.1 Συμμετρία ως προς τον άξονα και στοιχεία της	150
Ανακεφαλαίωση / Αυτοαξιολόγηση	157

B.3 Γεωμετρία του Επιπέδου

3.1 Είδη γωνιών	160
3.2 Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος.	164
3.3 Διχοτόμος γωνίας	167
3.4 Είδη τριγώνων και στοιχεία τους	170
3.5 Ιδιότητες ισοσκελούς και ισοπλεύρου τριγώνου.	174
3.6 Κατακορυφήν, συμπληρωματικές και παραπληρωματικές γωνίες	178
3.7 Σχετικές θέσεις ευθειών στο επίπεδο.	183
3.8 Γωνίες σε παράλληλες ευθείες με τέμνουσα	186
3.9 Άθροισμα γωνιών τριγώνου	192
3.10 Τετράπλευρα, παραλληλόγραμμα, τραπέζια	197
3.11 Είδη παραλληλογράμμων και ιδιότητες: ορθογώνια, ρόμβοι, τετράγωνα	201
3.12 Κύκλος και στοιχεία του	207
3.13 Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου	216
Ανακεφαλαίωση / Αυτοαξιολόγηση	221

B.4 Γεωμετρία του Χώρου

4.1 Βασικά στερεά: ορθό πρίσμα, παραλληλεπίπεδο, κύβος, πυραμίδα, κύλινδρος, κώνος, σφαίρα	228
Ανακεφαλαίωση / Αυτοαξιολόγηση	235

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ.1 Διαχείριση Δεδομένων

1.1 Απογραφή - Πληθυσμός - Κατηγορικά δεδομένα - Ποσοτικά δεδομένα	240
1.2 Συλλογή συνεχών ποσοτικών δεδομένων	246
1.3 Κυκλικά διαγράμματα - Ιστογράμματα συχνοτήτων κλάσεων ίσου πλάτους με δεδομένο το πλήθος των κλάσεων	252
Ανακεφαλαίωση / Αυτοαξιολόγηση	258

Γ.2 Μέτρα Θέσης - Μεταβλητότητα

2.1 Μέση τιμή, διάμεσος	262
2.2 Εύρος, κορυφές, πολλαπλές κορυφές, απόμακρες τιμές / Μεταβλητότητα δεδομένων	267
Ανακεφαλαίωση / Αυτοαξιολόγηση	272

Γ.3 Πειράματα τύχης και πιθανότητες

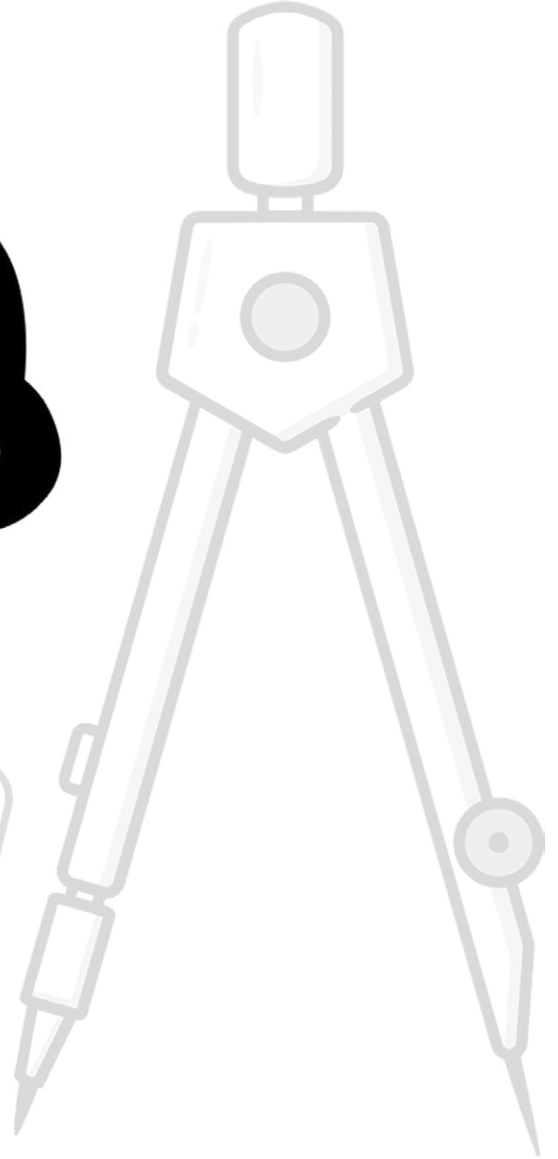
3.1 Πειράματα τύχης, δειγματικός χώρος	276
3.2 Δενδροδιάγραμμα	279
3.3 Κλασικός ορισμός πιθανότητας	283
Ανακεφαλαίωση / Αυτοαξιολόγηση	289

АВТТЕБРА

$$2^3 = 8$$



$$2^3 = 8$$



ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

A.1

Στην ενότητα αυτή θα εξερευνήσουμε το σύνολο των φυσικών αριθμών, τους άρτιους και περιττούς αριθμούς. Θα μάθουμε πώς να αναγνωρίζουμε σύνθετους αριθμούς, να βρίσκουμε το ΕΚΠ και το ΜΚΔ με ανάλυση σε γινόμενα πρώτων παραγόντων και να εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο του Ευκλείδη.

Πώς μπορείς να εκφράσεις την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης και να τη χρησιμοποιήσεις για την επίλυση προβλημάτων;

Είσαι έτοιμος/η να δεις πώς λειτουργεί το δυαδικό σύστημα αρίθμησης και πώς οι δυνάμεις των αριθμών μας βοηθούν να κάνουμε μεγάλους υπολογισμούς;



- Προσδιορίζω το σύνολο των φυσικών αριθμών $0, 1, 2, 3, \dots$ καθώς και τους άρτιους και περιττούς φυσικούς αριθμούς.
- Αναγνωρίζω και εκφράζω συμβολικά την ταυτότητα της Ευκλείδειας Διαίρεσης και τη χρησιμοποιώ στην επίλυση προβλημάτων.
- Εφαρμόζω την έννοια της διαιρετότητας για να λύνω προβλήματα.
- Αναγνωρίζω τον τρόπο λειτουργίας του αλγορίθμου του Ευκλείδη για την εύρεση του ΜΚΔ των φυσικών αριθμών.
- Υπολογίζω το ΕΚΠ και το ΜΚΔ με ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.
- Διερευνώ το δυαδικό σύστημα αρίθμησης φυσικών αριθμών και το συγκρίνω με το δεκαδικό κάνοντας μετατροπές μεταξύ τους.
- Διατυπώνω και χρησιμοποιώ τον ορισμό των δυνάμεων με βάση φυσικό και εκθέτη φυσικό $n > 0$ σε υπολογισμούς.



1.0: Εισαγωγή

1.1: Δυνάμεις φυσικών με εκθέτη μη μηδενικό φυσικό

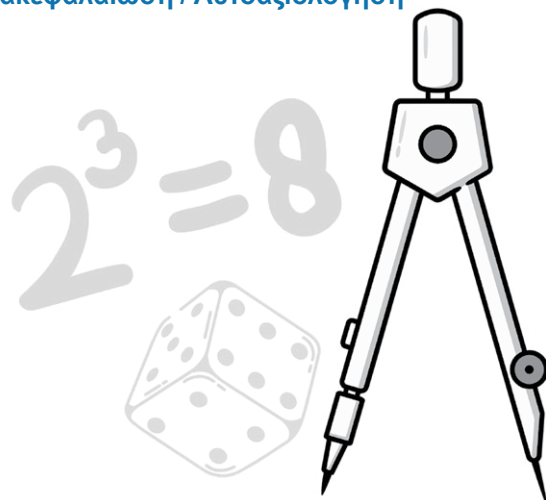
1.2: Ταυτότητα Ευκλείδειας Διαίρεσης

1.3: Πρώτοι και σύνθετοι αριθμοί

1.4: ΕΚΠ και ΜΚΔ φυσικών αριθμών

1.5: Δυαδικό Σύστημα Αρίθμησης

+ Ανακεφαλαίωση / Αυτοαξιολόγηση



1.0 | Εισαγωγή

Φυσικοί αριθμοί

Οι αριθμοί: **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ...** ονομάζονται **φυσικοί αριθμοί**.

Κάθε φυσικός αριθμός έχει έναν προηγούμενο και έναν επόμενο εκτός από το μηδέν (0) που έχει μόνο επόμενο.

Οι φυσικοί αριθμοί χωρίζονται σε άρτιους και περιττούς αριθμούς:

Άρτιοι (ή ζυγοί) λέγονται οι φυσικοί αριθμοί που διαιρούνται με το 2, δηλαδή είναι οι αριθμοί:

0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ...

Περιττοί (ή μονοί) λέγονται οι αριθμοί που δεν διαιρούνται με το 2, δηλαδή είναι οι αριθμοί:

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...

Για να σχηματίσουμε το άπειρο πλήθος των φυσικών αριθμών χρησιμοποιούμε τα δέκα ψηφία 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 και 9 σύμφωνα με το **δεκαδικό σύστημα αρίθμησης**.

Λέμε ότι το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης έχει βάση το δέκα (10) γιατί χρησιμοποιεί δέκα ψηφία.

Υπάρχουν και άλλα συστήματα αρίθμησης, όπως είναι το δυαδικό που θα μελετήσουμε αργότερα, το οποίο έχει ως βάση τον αριθμό δύο (2).

Αξία ψηφίων

Η αξία κάθε ψηφίου ενός αριθμού καθορίζεται από τη θέση που κατέχει, δηλαδή τη δεκαδική τάξη στην οποία βρίσκεται.

Για παράδειγμα η **αξία των ψηφίων του αριθμού 1.253.408 είναι:**

1 μονάδες εκατομμυρίων

2 εκατοντάδες χιλιάδων

5 δεκάδες χιλιάδων

3 μονάδες χιλιάδων

4 εκατοντάδες

0 δεκάδες

8 μονάδες

Διάταξη και σύγκριση φυσικών αριθμών (=, <, >)

Μπορούμε να συγκρίνουμε και να διατάσσουμε τους φυσικούς αριθμούς από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο.

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9 < 10 < 11 < 12 < \dots$$

Οι φυσικοί αριθμοί μπορούν να τοποθετηθούν πάνω σε μία ευθεία, ώστε από τα αριστερά προς τα δεξιά η τιμή των αριθμών να αυξάνεται με τον εξής τρόπο:

- Επιλέγουμε ένα σημείο της ευθείας και τοποθετούμε το 0 (αρχή).
- Δεξιά από το 0 παίρνουμε ένα δεύτερο σημείο και τοποθετούμε το 1.
- Με μονάδα μέτρησης την απόσταση των σημείων που παριστάνουν τους αριθμούς 0 και 1, βρίσκουμε όλα τα υπόλοιπα σημεία που παριστάνουν τους αριθμούς 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, κλπ.



Πρόσθεση

Έστω α , β και γ φυσικοί αριθμοί με $\alpha + \beta = \gamma$.

Οι αριθμοί α και β λέγονται **προσθετέοι**, ενώ ο αριθμός γ είναι το **άθροισμά** τους.

$$\begin{array}{c} \alpha + \beta = \gamma \\ \swarrow \quad \searrow \quad \downarrow \\ \text{Προσθετέοι} \quad \text{Άθροισμα} \end{array}$$

Ιδιότητες της πρόσθεσης:

$\alpha + \beta = \beta + \alpha$	Αντιμεταθετική ιδιότητα
$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$	Προσεταιριστική ιδιότητα
$\alpha + 0 = \alpha$	Το 0 λέγεται ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης .

Αφαίρεση

Έστω M , A και Δ φυσικοί αριθμοί με $M - A = \Delta$.

Ο αριθμός M λέγεται **μειωτέος**, ο αριθμός A λέγεται **αφαιρετέος** και ο Δ λέγεται **διαφορά** των δύο αριθμών.

Στους φυσικούς αριθμούς ο αφαιρετέος A πρέπει να είναι μικρότερος ή ίσος του μειωτέου M , διαφορετικά η πράξη δεν είναι δυνατό να εκτελεστεί.

Πολλαπλασιασμός

Έστω α , β και γ φυσικοί αριθμοί με $\alpha \cdot \beta = \gamma$.

Οι αριθμοί α και β ονομάζονται **παράγοντες** και ο αριθμός γ **γινόμενο**.

$$\begin{array}{c} \alpha \cdot \beta = \gamma \\ \swarrow \quad \searrow \quad \downarrow \\ \text{Παράγοντες} \quad \text{Γινόμενο} \end{array}$$

Πολλές φορές το σύμβολο του πολλαπλασιασμού (\cdot) **παραλείπεται**. Γράφουμε δηλαδή, 2α αντί $2 \cdot \alpha$ ή γράφουμε $3(1 + 4)$ αντί $3 \cdot (1 + 4)$.

Ιδιότητες πολλαπλασιασμού

$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$	Αντιμεταθετική ιδιότητα
$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$	Προσεταιριστική ιδιότητα
$\alpha \cdot 1 = \alpha$	Το 1 λέγεται ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού .
$\alpha \cdot 0 = 0$	Το 0 λέγεται απορροφητικό ή μηδενικό στοιχείο του πολλαπλασιασμού.
$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$ $\alpha \cdot (\beta - \gamma) = \alpha \cdot \beta - \alpha \cdot \gamma$	Επιμεριστική ιδιότητα

Αριθμητικές παραστάσεις

Μια παράσταση που περιέχει πράξεις με αριθμούς ονομάζεται **αριθμητική παράσταση**.

π.χ: $2 \cdot 3 + 7 - 1$, $5^2 \cdot 3 - 21 : (8 - 1)$, $(15 - 6) \cdot (2^3 - 9 \cdot 0)$.

Το τελικό αποτέλεσμα που προκύπτει από την εκτέλεση των πράξεων σε μία αριθμητική παράσταση ονομάζεται **τιμή της παράστασης**.

Προτεραιότητα Πράξεων

Με ποια σειρά όμως κάνουμε τις πράξεις σε μία παράσταση;

Σε μία αριθμητική παράσταση εκτελούμε τις πράξεις σύμφωνα με την **προτεραιότητα των πράξεων** που είναι η εξής:

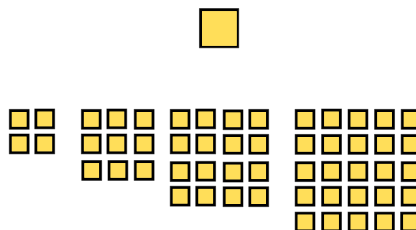
1. Υπολογίζουμε τις **δυνάμεις**.
2. Εκτελούμε τους **πολλαπλασιασμούς** και τις **διαιρέσεις** με τη σειρά που εμφανίζονται στην παράσταση (από αριστερά προς τα δεξιά).
3. Εκτελούμε τις **προσθέσεις** και τις **αφαιρέσεις** με τη σειρά που εμφανίζονται στην παράσταση (από αριστερά προς τα δεξιά).

Αν υπάρχουν παρενθέσεις, εκτελούμε πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις με την παραπάνω σειρά.

1.1 | Δυνάμεις φυσικών με εκθέτη μη μηδενικό φυσικό



Από πόσα τετράγωνα αποτελούνται τα τέσσερα πρώτα σχήματα; Τι παρατηρείς;



Εφαρμογή: Ένα κτήριο έχει 2 ορόφους και σε κάθε όροφο υπάρχουν 2 διαμερίσματα καθένα από τα οποία έχει 2 δωμάτια. Αν σε κάθε δωμάτιο υπάρχουν 2 παράθυρα, τότε πόσα παράθυρα έχει το κτήριο;

Απάντηση:

Το κτήριο έχει: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ παράθυρα.

Το γινόμενο $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ γράφεται 2^4 και λέγεται τέταρτη δύναμη του 2.

Γενικά:

Το γινόμενο $\alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha$ που έχει n παράγοντες ίσους με α , λέγεται δύναμη του α στη n ή νιοστή δύναμη του α και συμβολίζεται με α^n .

$$\alpha^n = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha}_n$$

Ο φυσικός αριθμός α λέγεται **βάση** της δύναμης και ο φυσικός αριθμός n ($n \neq 0$) λέγεται **εκθέτης**.

- Είναι $\alpha^1 = \alpha$.

Το α^2 διαβάζεται και α στο τετράγωνο, γιατί δίνει το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς α . Επίσης το α^3 διαβάζεται και α στον κύβο, γιατί δίνει τον όγκο ενός κύβου πλευράς α .

Παρατήρηση:

Οι δυνάμεις του 1 είναι όλες ίσες με 1, δηλαδή $1^n = 1$.

Οι δυνάμεις του 0 είναι όλες ίσες με 0, δηλαδή $0^n = 0$ (με $n \neq 0$).

Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση





1. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις:

α) 5^3 , β) 3^4 , γ) 2^{10} , δ) 10^8 .

Λύση:

$$\alpha) 5^3 = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5}_{3 \text{ παράγοντες}} = 125$$

$$\beta) 3^4 = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{4 \text{ παράγοντες}} = \underbrace{3 \cdot 3}_{9} \cdot \underbrace{3 \cdot 3}_{9} = 81$$

$$\gamma) 2^{10} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{10 \text{ παράγοντες}} = 1.024$$

$$\delta) 10^8 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = \\ = \underbrace{100.000.000}_{8 \text{ μηδενικά}}$$

← Για να υπολογίσουμε μια δύναμη του 10, γράφουμε το 1 και δεξιά βάζουμε τόσα μηδενικά όσα και ο εκθέτης του 10.

2. Να γράψετε με τη μορφή δυνάμεων τις παρακάτω μαθηματικές εκφράσεις:

α) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ β) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ γ) $x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$

Λύση: Σύμφωνα με τον ορισμό της δύναμης έχουμε ότι:

$$\alpha) 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4$$

$$\beta) 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2$$

$$\gamma) x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = x^5$$

3. Να υπολογίσετε την τιμή των παρακάτω αριθμητικών παραστάσεων:

α) $2^3 + 5 \cdot (9 - 7)^2$, β) $3^2 - 2^3 : (5 - 3^1)$.

Λύση: Σύμφωνα με την προτεραιότητα των πράξεων έχουμε:

$$\alpha) 2^3 + 5 \cdot (9 - 7)^2 = 2^3 + 5 \cdot 2^2 = 8 + 5 \cdot 4 = 8 + 20 = 28.$$

$$\beta) 3^2 - 2^3 : (5 - 3^1) = 3^2 - 2^3 : (5 - 3) = 3^2 - 2^3 : 2 = 9 - 8 : 2 = 9 - 4 = 5.$$

Εξασκούμε



σε όσα έμαθα



1

Συμπλήρωσε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις.

α) Στη δύναμη 8^4 ο αριθμός 8 ονομάζεται και ο αριθμός 4 ονομάζεται

β) Ισχύει $a^1 =$ και $1^v =$

γ) Ο αριθμός 10^{12} έχει μηδενικά.

2

Χαρακτήρισε ως Σωστές ή Λάθος τις προτάσεις που ακολουθούν βάζοντας ένα x στην κατάλληλη θέση.

α) $2 + 2 + 2 + 2 = 2^4$.

β) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$.

γ) $2^4 = 4^2$.

δ) $2^3 = 3^2$.

ε) $1^{20} = 20$.

Σωστό Λάθος

3

Γράψε με μορφή δυνάμεων τα γινόμενα:

α) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

β) $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$

γ) $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$

δ) $x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y$

ε) $a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot \gamma \cdot \gamma$

4

Αντιστοίχισε τους αριθμούς με τα τετράγωνά τους:

a	a^2
8	225
4	16
15	169
12	64
13	144

5

Υπολόγισε τις δυνάμεις:

α) 20^2

β) 30^3

γ) 200^2

δ) $4 \cdot 000^2$

6

Σύγκρινε τους παρακάτω αριθμούς χρησιμοποιώντας το κατάλληλο σύμβολο ($<$, $>$ ή $=$).

α) $2^3 \dots\dots 4^1$

β) $3^3 \dots\dots 9^2$

γ) $10^2 \dots\dots 2^{10}$

δ) $1^4 \dots\dots 1^2$

7

Συμπλήρωσε τον πίνακα:

α	β	$\alpha^2 + \beta^2$	$(\alpha + \beta)^2$
1	2		
4	3		
5	5		

Τι παρατηρείς;

8

Υπολόγισε την τιμή των παραστάσεων σύμφωνα με την προτεραιότητα των πράξεων:

α) $3 + (2 + 3) - (7 - 5)^3 + (3 - 2) \cdot 2^1$

β) $5^2 - 1^3 + 2^2$

γ) $(4 - 1)^2 + 2^1 \cdot 2$

δ) $3 \cdot (4^3 - 3) + 3^2$

ε) $3^2 + 2 \cdot 3^2 - 5 \cdot (3^2 - 2^3)$

στ) $2^5 - [3^3 - 2 \cdot (11 + 2^1)]^{100}$

9

Τοποθέτησε παρενθέσεις όπου χρειάζονται, ώστε να ισχύουν οι ισότητες.

α) $3 \cdot 4 + 3^2 = 39$

β) $5^2 \cdot 5 + 20 \cdot 2^3 = 8$

γ) $11 - 4 - 2^2 \cdot 5 = 11$

10

Για την αποκατάσταση του δάσους δεχθήκαμε μια προσφορά, με βάση την οποία σε κάθε ένα από τα 8 χωράφια, θα σκαφτούν 8 παρτέρια και κάθε παρτέρι θα τοποθετηθούν από 8 δενδρύλλια. Πόσα δενδρύλλια θα φυτευτούν συνολικά;



11

Υπολόγισε την τιμή των παραστάσεων:

$$\alpha = 2^3 - (3^2 - 7^1) \quad \text{και} \quad \beta = 4 \cdot (3^2 - 2^3) + (2^2 - 4)^3.$$

Στη συνέχεια, για τις τιμές αυτές των α και β , υπολόγισε την τιμή της παράστασης:

$$A = (\alpha + \beta)^2 - 2 \cdot \alpha \cdot \beta$$

1.2 | Ταυτότητα Ευκλείδειας Διαίρεσης

ΕΞΕΡΧΕΝΩ



Ο φούρνος μιας γειτονιάς παράγει κάθε μέρα 120 παστάκια σοκολάτας. Ο φούρναρης θέλει να τοποθετήσει τα παστάκια σε συσκευασίες, ώστε να μην περισσεύει κανένα.

Μπορεί να χρησιμοποιήσει κουτιά χωρητικότητας 10, 15 ή 16;

Πόσα κουτιά θα χρησιμοποιήσει σε κάθε περίπτωση;



Ευκλείδεια διαίρεση:

Αν Δ και δ δύο φυσικοί αριθμοί, τότε υπάρχουν δύο άλλοι φυσικοί αριθμοί π και u , έτσι ώστε να ισχύει:

$$\Delta = \delta \cdot \pi + u, \text{ με } u < \delta.$$

Ο αριθμός Δ λέγεται **διαιρετέος**, ο δ λέγεται **διαιρέτης**, το π λέγεται **πηλίκο** και το u λέγεται **υπόλοιπο**.

Αν η διαίρεση έχει υπόλοιπο 0, τότε ονομάζεται **τέλεια** διαίρεση και η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$\Delta = \delta \cdot \pi, \text{ με } u = 0.$$

Στην τέλεια διαίρεση ισχύει επιπλέον $\Delta : \delta = \pi$ και $\Delta : \pi = \delta$.

Η τέλεια διαίρεση στους φυσικούς αριθμούς είναι πράξη αντίστροφη του πολλαπλασιασμού.

Από τα προηγούμενα προκύπτουν τα εξής:

- Ο διαιρέτης δ μιας διαίρεσης δεν μπορεί να είναι 0, $\delta \neq 0$.
- Όταν $\Delta = \delta$, τότε το πηλίκο $\pi = 1$, $\alpha : \alpha = 1$.
- Όταν $\delta = 1$, τότε το πηλίκο $\pi = \Delta$, $\alpha : 1 = \alpha$.
- Όταν $\Delta = 0$, τότε το πηλίκο $\pi = 0$, $0 : \alpha = 0$.



1. Ποιες από τις παρακάτω ισότητες εκφράζουν **Ευκλείδεια διαίρεση**; Σε αυτές να βρείτε τον διαιρετέο, τον διαιρέτη, το πηλίκο και το υπόλοιπο.

$$\alpha) 54 = 25 \cdot 3 + 9$$

$$\beta) 370 = 46 \cdot 8 + 2$$

$$\gamma) 680 = 51 \cdot 12 + 68$$

Λύση:

$$\alpha) 54 = 25 \cdot 3 + 9.$$

Είναι $u = 9$, με $9 < 25$. Άρα είναι Ευκλείδεια διαίρεση με:

$$\Delta = 54, \delta = 25, \pi = 3 \text{ και } u = 9.$$

$$\beta) 370 = 46 \cdot 8 + 2.$$

Είναι $u = 2$, με $2 < 46$ και $2 < 8$. Άρα είναι Ευκλείδεια διαίρεση με:

$$\Delta = 370, \delta = 46, \pi = 8 \text{ και } u = 9$$

ή

$$\Delta = 370, \delta = 8, \pi = 46 \text{ και } u = 9.$$

$$\gamma) 680 = 51 \cdot 12 + 68$$

Το **68** είναι μεγαλύτερο από το 51 και από το 12, άρα δεν μπορεί να αποτελεί υπόλοιπο διαίρεσης, συνεπώς η ισότητα **δεν** είναι Ευκλείδεια διαίρεση.

2. Κάθε αίθουσα ενός σχολείου πρέπει να περιέχει 12 θρανία. Σήμερα ήρθαν 3 φορητά που το καθένα μετέφερε 35 θρανία.

α) Πόσες σχολικές αίθουσες μπορούμε να συμπληρώσουμε με θρανία;

β) Πόσα θρανία ακόμη χρειάζονται για να συμπληρωθεί άλλη μία αίθουσα;



Απάντηση:

α) Τα 3 φορητά μεταφέρουν συνολικά:

$$3 \cdot 35 = 105 \text{ θρανία.}$$

Κάθε αίθουσα πρέπει να περιέχει 12 θρανία. Από τη διαίρεση του 105 με το 12 βρίσκουμε πηλίκο 8 και υπόλοιπο 9, άρα:

$$105 = 12 \cdot 8 + 9,$$

δηλαδή θα συμπληρώσουμε 8 αίθουσες και θα περισσέψουν 9 θρανία.

β) Χρειάζονται ακόμη $12 - 9 = 3$ θρανία.

Εξασκούμε



σε όσα έμαθα



1

Συμπλήρωσε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

- α) Ο διαιρέτης δ μιας διαίρεσης δεν μπορεί να είναι
- β) Όταν ο διαιρετέος ισούται με τον διαιρέτη, τότε το πηλίκο είναι ίσο με
- γ) Όταν ο διαιρετέος ισούται με 0, τότε το πηλίκο είναι ίσο με
- δ) λέγεται η διαίρεση που έχει υπόλοιπο 0.
- ε) Ισχύει $a : a = \dots$, $a : 1 = \dots$ και $0 : a = \dots$

2

Χαρακτήρισε ως Σωστές ή Λάθος τις προτάσεις που ακολουθούν βάζοντας ένα **x** στην κατάλληλη θέση.

- α) Η διαίρεση $452:2$ είναι τέλεια.
- β) Ο διαιρέτης μιας διαίρεσης μπορεί να είναι οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός.
- γ) Αν ο διαιρέτης είναι 1, τότε ο διαιρετέος ισούται με το πηλίκο.
- δ) Το υπόλοιπο μιας διαίρεσης είναι πάντοτε μικρότερο του διαιρέτη.
- ε) Οι 300 μαθητές/τριες ενός σχολείου μπορούν να παραταχθούν σε τετράδες χωρίς να περισσεύει κανείς/καμία.

Σωστό Λάθος

Σωστό	Λάθος

3

Εξέτασε αν οι παρακάτω διαιρέσεις εκφράζουν Ευκλείδεια διαίρεση:

- α) $24 = 5 \cdot 4 + 4$ β) $22 = 3 \cdot 5 + 7$ γ) $32 = 6 \cdot 5 + 2$ δ) $55 = 8 \cdot 6 + 7$

4

Κάνε τις παρακάτω διαιρέσεις και τις δοκιμές τους:

- α) $135 : 5$ β) $95 : 4$ γ) $276 : 12$ δ) $650.832 : 312$

Ποιες από τις παραπάνω διαιρέσεις είναι τέλειες;

5

Ποιο μπορεί να είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός φυσικού αριθμού με το 4;

6

Ένας αριθμός διαιρείται με το 7, δίνει πηλίκο 12 και υπόλοιπο 6. Ποιος είναι ο αριθμός;

7

Ένας αριθμός διαιρείται τέλεια με το 14 και δίνει πηλίκο 201. Ποιος είναι ο αριθμός;

8

Αν σήμερα είναι Τετάρτη, τι μέρα θα είναι μετά από:

- α) 21 ημέρες; β) 137 ημέρες;

9

Γράφουμε τη λέξη ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, όπως φαίνεται παρακάτω:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ...

Ποιο γράμμα βρίσκεται στην 125η θέση;

10

Ο κύριος Γιάννης είναι οινοποιός και έχει παραγάγει 350 λίτρα κρασί. Θέλει να το βάλει σε βαρέλια, κάθε ένα από τα οποία χωράει 12 λίτρα. Πόσα βαρέλια θα γεμίσει και πόσα λίτρα κρασί θα περισσέψουν;

11

Υπολόγισε τις τιμές των παρακάτω αριθμητικών παραστάσεων:

α) $35 - 12:3 + 3 \cdot 3$

β) $63:9 + 63:7 - 12:2$

γ) $(5 + 12:3):3 - 24:(2 \cdot 2 + 16:4)$

δ) $[189:(2 \cdot 4 + 1)]:[(11 + 1):4]$

12

Στο καταφύγιο ζώων υπάρχει κανονισμός να υπάρχει ένας κτηνίατρος και δύο φροντιστές για το πολύ 15 σκυλάκια. Αν στο καταφύγιο υπάρχουν αυτή τη στιγμή 162 σκυλάκια, ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός κτηνιάτρων και φροντιστών που απαιτείται;



ΕΠΕΚΤΕΙΝΩ
ΤΙΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΜΟΥ

Μελετώ



το συγκεκριμένο θέμα

Ο Ευκλείδης και η Διάρεσή του.

Ο Ευκλείδης, γνωστός και ως ο «Πατέρας της Γεωμετρίας» ήταν ένας από τους πιο σημαντικούς μαθηματικούς της αρχαιότητας. Έζησε στην Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου κατά τον 3ο αιώνα π.Χ. και εργάστηκε στη Μεγάλη Βιβλιοθήκη της.

Αν και το όνομα του Ευκλείδη είναι συνδεδεμένο με τη Γεωμετρία, συνδέεται επίσης και με την διαίρεση φυσικών αριθμών. Η Ευκλείδεια Διάρεση και οι ιδιότητες της έχουν αξιοποιηθεί στον κλάδο της Θεωρίας Αριθμών και έχουν τεράστια εφαρμογή στον τομέα της Κρυπτογραφίας.

Η κρυπτογραφία (cryptography) είναι η μελέτη τεχνικών που βασίζονται σε δυσεπίλυτα μαθηματικά προβλήματα, με σκοπό την εξασφάλιση της ασφάλειας (εμπιστευτικότητα, ακεραιότητα, αυθεντικότητα) των δεδομένων. Η κρυπτογραφία παρέχει μηχανισμούς για διαδικασίες ασφαλείας, όπως η ψηφιακή υπογραφή, η οποία συνδέει ένα έγγραφο με τον κάτοχο ενός κλειδιού, ώστε όλοι όσοι το διαβάσουν, να είναι σίγουροι για το ποιος το έχει γράψει. Επίσης, η ψηφιακή χρονοσφραγίδα (digital timestamp) συνδέει ένα έγγραφο με την ώρα δημιουργίας του. Τέτοιοι μηχανισμοί μπορούν να χρησιμοποιηθούν για έλεγχο πρόσβασης σε ένα σκληρό δίσκο, για ασφαλείς συναλλαγές μέσω του Διαδικτύου ή ακόμα και για σύνδεση με καλωδιακή τηλεόραση.



Λεπτομέρεια από τον διάσημο πίνακα του Ραφαήλ, «Σχολή των Αθηνών» (1509-1511), στην οποία απεικονίζεται ο Ευκλείδης να διδάσκει μαθητές του.

1.3 | Πρώτοι και σύνθετοι αριθμοί



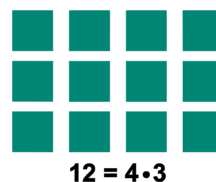
Ο Ευκλείδης έχει 12 κύβους και θέλει να τους τοποθετήσει σε στήλες, με τέτοιο τρόπο, ώστε κάθε στήλη να περιέχει τον ίδιο αριθμό κύβων.

Παρατηρεί ότι μπορεί να το πετύχει αυτό με διάφορους τρόπους.

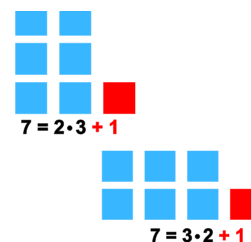
Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;

Τελικά ο Ευκλείδης τοποθετεί τους κύβους σε 4 ισομεγέθεις στήλες.

Πόσους κύβους περιέχει κάθε στήλη;



Αν ο Ευκλείδης είχε 7 κύβους πως θα μπορούσε να τους χωρίσει σε ισομεγέθεις στήλες;



Διαιρέτες

12 μικροί κύβοι μπορούν να τοποθετηθούν σε στήλες ώστε η καθεμία να περιέχει τον ίδιο αριθμό κύβων. Παρατηρούμε ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε:

<p>1 στήλη με 12 κύβους</p> <p>$12 = 1 \cdot 12$</p>	<p>2 στήλες με 6 κύβους</p> <p>$12 = 2 \cdot 6$</p>	<p>3 στήλες με 4 κύβους</p> <p>$12 = 3 \cdot 4$</p>
<p>4 στήλες με 3 κύβους</p> <p>$12 = 4 \cdot 3$</p>	<p>6 στήλες με 2 κύβους</p> <p>$12 = 6 \cdot 2$</p>	<p>12 στήλες με 1 κύβο</p> <p>$12 = 12 \cdot 1$</p>

Λέμε ότι ο αριθμός 12 **διαιρείται** με τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 6 και 12 αφού κατά την εκτέλεση της διαίρεσης το υπόλοιπο ισούται με μηδέν (τέλεια διαίρεση) ή αλλιώς οι αριθμοί 1, 2, 3, 4, 6 και 12 **διαιρούν** το 12.

Διαιρέτες ενός φυσικού αριθμού a λέγονται όλοι οι αριθμοί που τον διαιρούν τέλεια.

Παράδειγμα: Οι διαιρέτες του 18 είναι οι αριθμοί: 1, 2, 3, 6, 9 και 18.

Πρώτοι αριθμοί

Ένας φυσικός αριθμός, εκτός από το 1, που έχει διαιρέτες μόνο τον εαυτό του και το 1 λέγεται **πρώτος αριθμός**. Διαφορετικά λέγεται **σύνθετος**.

- Το 0 και το 1 δεν θεωρούνται ούτε πρώτοι ούτε σύνθετοι αριθμοί.

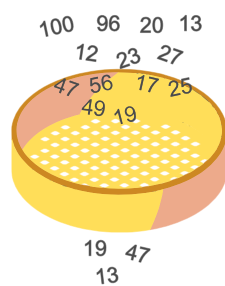
Παραδείγματα:

- Ο αριθμός 5 είναι πρώτος αριθμός γιατί διαιρείται μόνο με το 1 και τον εαυτό του.
- Ο αριθμός 6 είναι σύνθετος αριθμός επειδή, εκτός από το 1 και τον εαυτό του, διαιρείται με το 2 και το 3.

Μπορούμε να βρούμε τους πρώτους αριθμούς με την απλή μέθοδο του Ερατοσθένη, γνωστή και ως «**Κόσκινο του Ερατοσθένη**», ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:

- Γράφουμε όλους τους αριθμούς από το 1 έως και το 100.
- Διαγράφουμε το 1 που δεν θεωρείται πρώτος αριθμός.
- Επιλέγουμε το **2** που είναι πρώτος και διαγράφουμε όλα τα πολλαπλάσιά του.
- Επιλέγουμε το **3** που είναι πρώτος και διαγράφουμε όλα τα πολλαπλάσιά του. κ.ο.κ.

Με τον τρόπο αυτόν διαγράφονται όλοι οι σύνθετοι αριθμοί και παραμένουν οι πρώτοι από το 1 έως και το 100.



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
24	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
54	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
84	82	83	84	85	86	87	88	89	90
94	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση

Οι πρώτοι αριθμοί έως το 100 είναι οι παρακάτω:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 και 97.

Κριτήρια Διαιρετότητας

Ένας εύκολος τρόπος για να διαπιστώσουμε αν ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με ορισμένους αριθμούς, εκτός από την εκτέλεση της αντίστοιχης διαίρεσης, είναι να χρησιμοποιήσουμε τα γνωστά μας **Κριτήρια Διαιρετότητας**:

Ένας αριθμός διαιρείται:

- **με το 2**, αν τελειώνει σε 0, 2, 4, 6, 8 (δηλαδή αν είναι άρτιος).
- **με το 3**, αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 3.
- **με το 4**, αν το τελευταίο διψήφιο τμήμα του διαιρείται με το 4 ή είναι 00.
- **με το 5**, αν τελειώνει σε 0 ή σε 5.
- **με το 9**, αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 9.
- **με το 10**, αν τελειώνει σε 0.



Παράδειγμα:

Να βρείτε με ποιους από τους αριθμούς που δίνονται διαιρούνται οι αριθμοί της πρώτης στήλης:

	2	3	4	5	9	10
435						
6.020						
10.188						

Λύση: Συμπληρώνουμε τον πίνακα σύμφωνα με τα κριτήρια διαιρετότητας.

	2	3	4	5	9	10
435	-	✓	-	✓	-	-
6.020	✓	-	✓	✓	-	✓
10.188	✓	✓	✓	-	✓	-

Ανάλυση αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

Κάθε σύνθετος αριθμός μπορεί να γραφεί ως ένα γινόμενο πρώτων αριθμών.

Παραδείγματα:

$$6 = 2 \cdot 3$$

$$8 = 2^3$$

$$12 = 2^2 \cdot 3$$

Η διαδικασία με την οποία ένας αριθμός γράφεται (με μοναδικό τρόπο) ως ένα γινόμενο πρώτων αριθμών, ονομάζεται **ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων**.

Για να αναλύσουμε έναν (σύνθετο) αριθμό σε γινόμενο πρώτων αριθμών, μπορούμε να ακολουθήσουμε την παρακάτω διαδικασία:

Θέλουμε να αναλύσουμε το 300 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Σκεφτόμαστε:

300	2	← Διαιρούμε το 300 με έναν πρώτο αριθμό τον οποίο γράφουμε δεξιά της κάθετης γραμμής.
150	2	← Γράφουμε κάτω από το 300 το πηλίκο και το διαιρούμε πάλι με έναν πρώτο αριθμό.
75	3	Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο.
25	5	...
5	5	
1		← Η διαδικασία τελειώνει όταν εμφανιστεί ως πηλίκο το 1.

$$300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$$

Ο αρχικός αριθμός ισούται με το γινόμενο των πρώτων αριθμών δεξιά της κάθετης γραμμής.



1. Να εξετάσετε αν ο αριθμός 17 είναι διαιρέτης του αριθμού 306.

Λύση:

Εκτελούμε τη διαίρεση $306 : 17$ που δίνει πηλίκο 18 και υπόλοιπο 0.

Η διαίρεση είναι τέλεια, άρα ο αριθμός 17 είναι διαιρέτης του 306.

2. Ένας αριθμός αναλύεται σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ως $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Να εξηγήσετε γιατί ο αριθμός διαιρείται με το 6 και με το 35.

Λύση:

Από την ανάλυση του αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων έχουμε:

$$2 \cdot \underline{2} \cdot \underline{3} \cdot 5 \cdot 7 = 2 \cdot \underline{6} \cdot 5 \cdot 7$$

Παρατηρούμε ότι το 6 είναι παράγοντας του αριθμού, άρα τον διαιρεί.

Επίσης $2^2 \cdot 3 \cdot \underline{5} \cdot \underline{7} = 2^2 \cdot 3 \cdot \underline{35}$ οπότε το 35 είναι παράγοντας του αριθμού, άρα τον διαιρεί.

3. Ποιοι από τους αριθμούς 17, 42 και 89 είναι πρώτοι αριθμοί;

Λύση:

- Ο αριθμός 17 έχει διαιρέτες μόνο το 1 και το 17 (τον εαυτό του), άρα είναι πρώτος αριθμός.
- Ο αριθμός 42 έχει διαιρέτες τους αριθμούς 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42, επομένως δεν είναι πρώτος αλλά σύνθετος αριθμός.

$$\begin{array}{r}
 1, 2, 3, \underline{6}, \underline{7}, 14, 21, 42 \\
 \hline
 \quad \quad \quad \underline{42} \\
 \hline
 \quad \quad \quad \underline{42} \\
 \hline
 \quad \quad \quad \underline{42} \\
 \hline
 \quad \quad \quad \underline{42}
 \end{array}$$

- Ο αριθμός 89 έχει διαιρέτες μόνο τους αριθμούς 1 και 89, δηλαδή είναι πρώτος αριθμός.



1

Χαρακτήρισε ως Σωστές ή Λάθος τις προτάσεις που ακολουθούν βάζοντας ένα x στην κατάλληλη θέση.

- α) Ο αριθμός 8 είναι διαιρέτης του αριθμού 24.
 β) Ο αριθμός 12 είναι διαιρέτης του αριθμού 6.
 γ) Ο μοναδικός άρτιος πρώτος αριθμός είναι το 2.
 δ) Όλοι οι άρτιοι αριθμοί είναι σύνθετοι γιατί διαιρούνται με το 2.
 ε) Ο αριθμός 121 είναι σύνθετος αριθμός.

Σωστό Λάθος

2

Συμπλήρωσε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

- α) Αν ο αριθμός α είναι διαιρέτης του αριθμού β τότε ο αριθμός διαιρεί τον αριθμό και ο αριθμός διαιρείται από τον αριθμό
- β) Κάθε φυσικός αριθμός έχει δύο τουλάχιστον διαιρέτες: τη και τον του.
- γ) Ο αριθμός 11 διαιρείται μόνο με το 1 και το 11, επομένως είναι αριθμός.
- δ) Ο αριθμός 15 διαιρείται με τους αριθμούς 1, 3, 5 και 15, επομένως είναι αριθμός.

3

Γράψε όλους τους πρώτους αριθμούς που συναντάμε από το 1 έως το 20.

4

Βρες τους διαιρέτες των αριθμών 36, 50 και 83.

5

Σε ποια από τις παρακάτω περιπτώσεις έχει γίνει ανάλυση του αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων;

α) $27 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3$

β) $200 = 4 \cdot 25 = 2^2 \cdot 25$

γ) $6.000 = 6 \cdot 1.000 = 6 \cdot 2 \cdot 500$

δ) $45 = 5 \cdot 9 = 5 \cdot 3^2$

6

Σημείωσε **x** στην αντίστοιχη θέση κάτω από τους αριθμούς με τους οποίους διαιρούνται οι αριθμοί της πρώτης στήλης:

	2	3	4	5	9	10
121						
348						
1.300						
18.432						

7

Συμπλήρωσε το ψηφίο που λείπει με έναν αριθμό, ώστε:

α) ο αριθμός 64_ να διαιρείται με το 2 και με το 5.

β) ο αριθμός 5.3_8 να διαιρείται με το 3 αλλά όχι με το 9.

γ) ο αριθμός 10.34_ να διαιρείται με το 2 και με το 3.

δ) ο αριθμός 9.70_ να διαιρείται με το 4 και με το 10.

Εξασκούμε



σε όσα έμαθα

8

Ανάλυσε τους παρακάτω αριθμούς σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

α) 420

β) 792

γ) 3.250

δ) 2.415

ε) 1.455

9

Η ανάλυση ενός αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων είναι $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$.

Εξήγησε γιατί ο αριθμός διαιρείται με το 15 και με το 60.

1.4 | ΕΚΠ και ΜΚΔ φυσικών αριθμών



Δύο πλοία επισκέπτονται ένα μικρό νησί. Το πρώτο πλοίο επισκέπτεται το νησί κάθε 3 ημέρες, ενώ το δεύτερο κάθε 4 ημέρες. Σήμερα έφτασαν μαζί στο λιμάνι του νησιού και τα δυο πλοία. Μετά από πόσες ημέρες θα ξαναβρεθούν μαζί στο λιμάνι του νησιού τα δύο πλοία;



Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο

Σε ένα παιχνίδι ερωτήσεων, ένας παίκτης κερδίζει 5 πόντους για κάθε σωστή απάντηση. Ποιο είναι το σύνολο πόντων που μπορεί να συγκεντρώσει ένας παίκτης σε αυτό το παιχνίδι;

Λύση

Οι πόντοι ενός παίκτη μπορεί να είναι:

0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, ...

Οι αριθμοί αυτοί αποτελούν τα **πολλαπλάσια** του αριθμού 5.

Γενικά:

Πολλαπλάσια ενός φυσικού αριθμού a είναι οι αριθμοί που προκύπτουν όταν αυτός πολλαπλασιαστεί με όλους τους φυσικούς αριθμούς.

Τα πολλαπλάσια του αριθμού a είναι οι αριθμοί: $0, a, 2a, 3a, 4a, \dots$

Παράδειγμα:

Τα πολλαπλάσια του 9 είναι: $0, 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99, 108, \dots$

Το **ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο (ΕΚΠ)**, δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών που δεν είναι μηδέν, είναι το μικρότερο ($\neq 0$) από τα κοινά πολλαπλάσια των αριθμών αυτών.

Παράδειγμα:

Θα βρούμε το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 4 και 6.

- Τα πολλαπλάσια του 4 είναι: $0, 4, 8, \mathbf{12}, 16, 20, \mathbf{24}, 28, 32, \mathbf{36}, \dots$
- Τα πολλαπλάσια του 6 είναι: $0, 6, \mathbf{12}, 18, \mathbf{24}, 30, \mathbf{36}, 42, \dots$

Οι αριθμοί 4 και 6 έχουν άπειρα κοινά πολλαπλάσια.

Το ελάχιστο κοινό τους πολλαπλάσιο ($\neq 0$) είναι το 12.

$$\text{ΕΚΠ}(4,6) = 12.$$

Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση

Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης

Γνωρίζουμε ότι **διαιρέτες** ενός φυσικού αριθμού, λέγονται όλοι οι αριθμοί που τον διαιρούν.

Παράδειγμα:

Οι διαιρέτες του 6 είναι οι αριθμοί 1, 2, 3 και 6.

Ισχύουν τα εξής:

- Κάθε φυσικός αριθμός (εκτός από το μηδέν) διαιρεί τα πολλαπλάσιά του.
- Κάθε φυσικός αριθμός που διαιρείται από έναν άλλον είναι πολλαπλάσιο αυτού του αριθμού.
- Αν ένας φυσικός αριθμός διαιρεί έναν άλλον θα διαιρεί και τα πολλαπλάσια του άλλου αριθμού.

Ο **μέγιστος κοινός διαιρέτης (ΜΚΔ)**, δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών είναι ο μεγαλύτερος από τους κοινούς διαιρέτες τους.

Παράδειγμα:

Θα βρούμε τον μέγιστο κοινό διαιρέτη των αριθμών 12 και 18.

- Οι διαιρέτες του 12 είναι οι **1, 2, 3, 4, 6** και 12.
- Οι διαιρέτες του 18 είναι οι **1, 2, 3, 6, 9** και 18.

Οι αριθμοί 12 και 18 έχουν κοινούς διαιρέτες τους αριθμούς 1, 2, 3 και 6.

Ο μέγιστος κοινός τους διαιρέτης είναι το 6. **ΜΚΔ(12, 18) = 6**

Σημείωση: Αν **ΜΚΔ(α, β) = 1** τότε οι αριθμοί α και β λέγονται **πρώτοι μεταξύ τους**.

Παράδειγμα:

- Οι διαιρέτες του 6 είναι οι αριθμοί: **1, 2, 3** και 6.
- Οι διαιρέτες του 7 είναι οι αριθμοί: **1** και 7.

Ο μέγιστος κοινός τους διαιρέτης είναι το 1. **ΜΚΔ(6, 7) = 1**

Άρα οι αριθμοί 6 και 7 είναι **πρώτοι μεταξύ τους**.

Μπορούμε να βρούμε το ΕΚΠ και τον ΜΚΔ δύο ή περισσότερων αριθμών με τη βοήθεια της **ανάλυσής τους σε γινόμενο πρώτων παραγόντων**.

Αρχικά αναλύουμε όλους τους αριθμούς σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

- Το **ΕΚΠ** των αριθμών είναι το γινόμενο των **κοινών και μη κοινών** παραγόντων με τον **μεγαλύτερο** εκθέτη.
- Ο **ΜΚΔ** των αριθμών είναι το γινόμενο μόνο των **κοινών** παραγόντων με τον **μικρότερο** εκθέτη.

Παράδειγμα:

Να βρεθεί το ΕΚΠ και ο ΜΚΔ των αριθμών 120, 150 και 400 αφού πρώτα αναλυθούν σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση

Λύση:

Αναλύουμε τους αριθμούς 120, 150 και 400 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων:

120	2	150	2	400	2
60	2	75	3	200	2
30	2	25	5	100	2
15	3	5	5	50	2
5	5	1		25	5
1				5	5
				1	
$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$		$150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$		$400 = 2^4 \cdot 5^2$	

Για να βρούμε το **ΕΚΠ** των αριθμών υπολογίζουμε το γινόμενο των κοινών και μη κοινών παραγόντων με τον μεγαλύτερο εκθέτη.

Όλοι οι παράγοντες είναι το 2, το 3 και το 5.

Οι μεγαλύτεροι εκθέτες τους είναι 2^4 , 3^1 και 5^2 .

Άρα:

$$\text{ΕΚΠ}(120, 150, 400) = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 = 16 \cdot 3 \cdot 25 = 1.200$$

Για να βρούμε τον **ΜΚΔ** υπολογίζουμε το γινόμενο μόνο των κοινών παραγόντων με τον μικρότερο εκθέτη.

Οι κοινοί παράγοντες είναι μόνο το 2 και το 5.

Οι μικρότεροι εκθέτες τους είναι 2^1 και 5^1 .

$$\text{Άρα: ΜΚΔ}(120, 150, 400) = 2 \cdot 5 = 10$$

Αλγόριθμος του Ευκλείδη για την εύρεση του ΜΚΔ.

Ο Αλγόριθμος του Ευκλείδη υπολογίζει τον μέγιστο κοινό διαιρέτη (ΜΚΔ) δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών ($\neq 0$). Τα βήματα που ακολουθεί ο αλγόριθμος του Ευκλείδη θα περιγράψουμε στο παρακάτω παράδειγμα:

Για να βρούμε τον μέγιστο κοινό διαιρέτη των αριθμών 125, 170 και 280 με τον αλγόριθμο του Ευκλείδη, ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

125	170	280	← Γράφουμε τους αριθμούς και βρίσκουμε τον μικρότερο από αυτούς.
125	45	30	← Γράφουμε κάτω από τον μικρότερο αριθμό τον εαυτό του και κάτω από τους άλλους το υπόλοιπο της διαίρεσής τους με αυτόν.
5	15	30	Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο.
5	0	0	← Όταν βρούμε στις άλλες θέσεις μηδενικά ο αλγόριθμος τερματίζει.

Ο μέγιστος κοινός διαιρέτης είναι ο αριθμός της τελευταίας γραμμής που είναι διαφορετικός από το 0, δηλαδή το 5. Άρα:

$$\text{ΜΚΔ}(125, 170, 280) = 5.$$

1. Ο Αντρέας παίζει μπάσκετ στο γήπεδο της γειτονιάς του κάθε 4 ημέρες, ο Βασίλης κάθε 6 ημέρες και η Κατερίνα κάθε 8 ημέρες. Αν σήμερα έπαιξαν μπάσκετ και οι τρεις μαζί, μετά από πόσες ημέρες θα ξαναπαιξουν πάλι όλοι μαζί;

Λύση:



Θα υπολογίσουμε το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 4, 6 και 8.

	Πολλαπλάσια
4	0, 4, 8, 12, 16, 20, 24 , ...
6	0, 6, 12, 18, 24 , ...
8	0, 8, 16, 24 , ...

Το ελάχιστο κοινό τους πολλαπλάσιο είναι το 24.

$$\text{ΕΚΠ}(4, 6, 8) = 24.$$

Άρα θα ξαναπαιξουν και οι τρεις μαζί μετά από 24 ημέρες.

2. Σε μία εκδρομή συμμετέχουν 18 μαθητές/τριες της Α' Γυμνασίου, 24 μαθητές/τριες της Β' Γυμνασίου και 42 μαθητές/τριες της Γ' Γυμνασίου.



α) Σε πόσες το πολύ όμοιες ομάδες μπορούμε να χωρίσουμε όλους/όλες τους/τις μαθητές/τριες, ώστε κάθε ομάδα να περιέχει τον ίδιο αριθμό μαθητών/τριών από κάθε τάξη;

β) Πόσους/πόσες μαθητές/τριες από κάθε τάξη θα περιέχει κάθε ομάδα;

Λύση:

α) Θα υπολογίσουμε τον μέγιστο κοινό διαιρέτη των αριθμών 18, 24 και 42.

	Διαιρέτες
18	1, 2, 3, 6 , 9, 18.
24	1, 2, 3, 4, 6 , 8, 12, 24.
42	1, 2, 3, 6 , 7, 14, 21, 42.

Ο μέγιστος κοινός τους διαιρέτης είναι το 6.

$$\text{ΜΚΔ}(18, 24, 42) = 6.$$

Άρα μπορούν να χωριστούν το πολύ σε 6 ομάδες.

β) Οι 6 αυτές ομάδες θα περιέχουν:

$$18:6 = 3 \text{ μαθητές/τριες της Α' Γυμνασίου,}$$

$$24:6 = 4 \text{ μαθητές/τριες της Β' Γυμνασίου και}$$

$$42:6 = 7 \text{ μαθητές/τριες της Γ' Γυμνασίου.}$$

Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση



1

Συμπλήρωσε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

- α) Αν $\text{ΜΚΔ}(\alpha, \beta) = 1$, τότε οι αριθμοί α και β είναι μεταξύ τους.
 β) Κάθε φυσικός αριθμός τα πολλαπλάσιά του.
 γ) Κάθε φυσικός αριθμός που διαιρείται από έναν άλλο είναι αυτού του αριθμού.
 δ) Ο μέγιστος κοινός διαιρέτης δύο αριθμών είναι ο από τους κοινούς διαιρέτες τους.

2

Αντιστοίχισε τους αριθμούς της δεύτερης στήλης με τον μέγιστο κοινό τους διαιρέτη (πρώτη στήλη) και με το ελάχιστο κοινό τους πολλαπλάσιο (τρίτη στήλη).

ΜΚΔ		ΕΚΠ
1 •	2 και 3	• 6
2 •	10 και 15	• 12
3 •	3, 6 και 12	• 30
4 •	8, 12 και 16	• 48
5 •	4, 8 και 18	• 72

3

Γράψε τα 10 πρώτα πολλαπλάσια των αριθμών 4 και 6. Στη συνέχεια βρες όλα τα κοινά τους πολλαπλάσια, καθώς και το ΕΚΠ (4,6).

4

Γράψε όλους τους διαιρέτες των αριθμών 18, 30 και 36. Στη συνέχεια βρες όλους τους κοινούς τους διαιρέτες, καθώς και τον ΜΚΔ(18,30,36).

5

Εξέτασε αν οι αριθμοί 22 και 45 είναι πρώτοι μεταξύ τους.

6

Ανάλυσε τους αριθμούς 325 και 338 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Με τη βοήθεια αυτής της ανάλυσης βρες το ΕΚΠ και τον ΜΚΔ των αριθμών.

7

Βρες το ΕΚΠ και το ΜΚΔ των αριθμών 24, 42, 54.

8

Μία βιβλιοπώλης έχει 24 κόκκινα, 36 μαύρα και 48 μπλε στιλό. Σε πόσα το πολύ όμοια κουτιά μπορεί να τα μοιράσει, ώστε το κάθε κουτί να περιέχει τον ίδιο αριθμό από στιλό κάθε χρώματος; Πόσα στιλό από κάθε χρώμα θα έχει κάθε κουτί;

9

Ένας κηπουρός γνωρίζει ότι το καλοκαίρι, τα είδη φυτών έχουν διαφορετικές ανάγκες σε πότισμα. Το είδος Α χρειάζεται πότισμα κάθε 6 ώρες, το είδος Β κάθε 9 ώρες και το είδος Γ κάθε 15 ώρες. Αυτή τη στιγμή ο κηπουρός, ποτίζει και τα τρία είδη. Μετά από πόσες ώρες θα ποτίσει και πάλι μαζί τα τρία αυτά είδη;



10

Ο γυμναστής ενός σχολείου παρατήρησε ότι όταν χωρίζει τους/τις μαθητές/τριες ενός σχολείου σε 5άδες ή 9άδες δεν περισσεύει κανένας/καμία. Αν γνωρίζεις ότι το σχολείο έχει περισσότερους /ες από 150 μαθητές/τριες και λιγότερους/ες από 200, μπορείς να βρεις πόσοι/ες είναι όλοι/ες οι μαθητές/τριες του σχολείου;

11

Βρες τον ΜΚΔ των αριθμών 18, 60 και 153 αξιοποιώντας τον αλγόριθμο του Ευκλείδη.

12

Σε έναν φούρνο ετοιμάζουν πακέτα με διάφορα πιτάκια. Μια μέρα έχουν 90 τυροπιτάκια, 120 λουκανικοπιτάκια, 135 σπανακοπιτάκια και 105 ζαμπονοτυροπιτάκια. Μοιράζουν τα πιτάκια χωρίς να περισσεύει κανένα με τέτοιο τρόπο, ώστε τα κουτιά να είναι ίδια μεταξύ τους και όσο το δυνατόν περισσότερα. Πόσα κουτιά γέμισαν σήμερα και πόσα πιτάκια από το κάθε είδος έβαλαν στο καθένα;



13

Εξέτασε με τη χρήση του αλγορίθμου του Ευκλείδη αν οι αριθμοί 1.000 και 1.303 είναι μεταξύ τους πρώτοι.

Εξασκούμε



σε όσα έμαθα

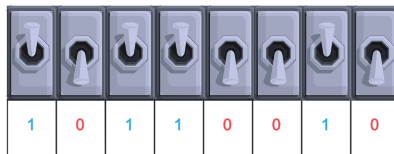
1.5 | Δυαδικό σύστημα αρίθμησης



Τα μαθηματικά των υπολογιστών!

Κάθε σύστημα αρίθμησης έχει τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματά του. Το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης είναι αυτό που έχουμε συνηθίσει. Δεν μπορεί όμως να χρησιμοποιηθεί εύκολα από τα ψηφιακά μέσα!

Για να γίνει η αναπαράσταση των 10 ψηφίων θα χρειαζόμασταν δέκα διαφορετικά «συστατικά». Όμως έτσι θα φτιάχναμε ένα πολύπλοκο και δύσκολο ψηφιακό σύστημα. Για αυτό το λόγο υιοθετήσαμε το δυαδικό σύστημα αρίθμησης. Το δυαδικό σύστημα αρίθμησης έχει βάση το 2 και διαθέτει 2 ψηφία, το 0 και το 1.



Κάθε 0 ή 1 αποτελεί το bit. Ένα bit είναι η ελάχιστη μονάδα μέτρησης των υπολογιστών. Ένα σύνολο από 8 bits ονομάζεται ένα byte.

Μπορείς να φανταστείς πώς γράφεται ο αριθμός 10 και ο αριθμός 1024 στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης;

Δεκαδικό σύστημα

Το σύστημα αρίθμησης που χρησιμοποιούμε για να περιγράψουμε ποσότητες ή πλήθος αντικειμένων ονομάζεται **δεκαδικό** γιατί χρησιμοποιούνται τα δέκα ψηφία:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 και 9.

Λέμε ότι είναι ένα σύστημα αρίθμησης με **βάση το δέκα (10)**.

Γνωρίζουμε ότι κάθε ψηφίο ενός δεκαδικού αριθμού από δεξιά προς τα αριστερά δηλώνει **μονάδα, δεκάδα, εκατοντάδα, χιλιάδα, κ.ο.κ.**



Παράδειγμα:

για τον αριθμό 1.025 έχουμε:

$$\begin{aligned}
 1.025 &= 1 \text{ χιλιάδα} + 0 \text{ εκατοντάδες} + 2 \text{ δεκάδες} + 5 \text{ μονάδες} \\
 &= 1 \cdot 1000 + 0 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 5 \cdot 1 \\
 &= 1 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 1.
 \end{aligned}$$

Η μορφή $1 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 1$, λέγεται **ανάπτυγμα του αριθμού 1.025 σε δυνάμεις του 10**.

Δυαδικό σύστημα

Το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης είναι αυτό που χρησιμοποιεί περισσότερο ο άνθρωπος για να περιγράψει ποσότητες ή πλήθος αντικειμένων. Δεν είναι όμως το μοναδικό. Υπάρχουν και άλλα συστήματα αρίθμησης όπως το δυαδικό σύστημα που χρησιμοποιείται στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές.

Το **δυναδικό σύστημα** αναπαριστά αριθμούς χρησιμοποιώντας μόνο δύο ψηφία: το **0** και το **1**.
Λέμε ότι είναι ένα σύστημα αρίθμησης με **βάση το δύο (2)**.

Ένας αριθμός **α** στο δυναδικό σύστημα αρίθμησης γράφεται και ως **$(\alpha)_2$** . Το 2 δηλώνει την βάση του συστήματος αρίθμησης.

Ένας αριθμός **β** στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης γράφεται και ως **$(\beta)_{10}$** .

Κάθε ψηφίο ενός δυναδικού αριθμού από δεξιά προς τα αριστερά δηλώνει **μονάδα, δυάδα, τετράδα, οκτάδα, δεκαεξάδα** κ.ο.κ.

Παράδειγμα:

ο αριθμός $(1101)_2$ που είναι στο δυναδικό σύστημα αρίθμησης γράφεται:

$$\begin{aligned}(1101)_2 &= 1 \text{ οκτάδα} + 1 \text{ τετράδα} + 0 \text{ δυάδες} + 1 \text{ μονάδα} \\ &= 1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ &= 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 1.\end{aligned}$$

Αν τώρα πάρουμε το ανάπτυγμα του αριθμού με βάση το 2 και κάνουμε τις πράξεις, βρίσκουμε:

$$(1101)_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 1 = 8 + 4 + 0 + 1 = 13.$$

Δηλαδή ο αριθμός 1101 στο δυναδικό σύστημα αρίθμησης ισούται με τον αριθμό 13 στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης. Συμβολικά γράφουμε:

$$(1101)_2 = (13)_{10}$$

Με τον τρόπο αυτόν γίνεται η **μετατροπή αριθμών από το δυναδικό στο δεκαδικό σύστημα**.

Μετατροπή αριθμών από το δεκαδικό στο δυναδικό σύστημα:

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να μετατρέψουμε τον αριθμό 26 από το δεκαδικό στο δυναδικό σύστημα.

Διαιρούμε τον αριθμό 26 με το 2.	$26 : 2 = 13$	και υπόλοιπο 0
Διαιρούμε το πηλίκο 13 με το 2.	$13 : 2 = 6$	και υπόλοιπο 1
Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο.	$6 : 2 = 3$	και υπόλοιπο 0
	$3 : 2 = 1$	και υπόλοιπο 1
	$1 : 2 = 0$	και υπόλοιπο 1

Η διαδικασία τελειώνει όταν στο πηλίκο έχουμε 0.

Στη συνέχεια γράφουμε τα **υπόλοιπα** των διαιρέσεων **από το τέλος προς την αρχή** (από κάτω προς τα πάνω) και έχουμε τον αριθμό στο δυναδικό σύστημα αρίθμησης.

$$(26)_{10} = (11010)_2$$

Δηλαδή ο αριθμός 26 στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης ισούται με τον αριθμό 11010 στο δυναδικό σύστημα αρίθμησης.

Επαλήθευση: Πράγματι, αν εκτελέσουμε τις πράξεις στο ανάπτυγμα του δυναδικού αριθμού 11010, βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}(11010)_2 &= 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 1 = \\ &= 16 + 8 + 0 + 2 + 0 = \\ &= 26.\end{aligned}$$



1. Να βρείτε τις πρώτες δέκα δυνάμεις του 2.

Λύση:

Οι πρώτες δέκα δυνάμεις του 2:

$$2^1 = 2, \quad 2^2 = 4, \quad 2^3 = 8, \quad 2^4 = 16, \quad 2^5 = 32$$

$$2^6 = 64, \quad 2^7 = 128, \quad 2^8 = 256, \quad 2^9 = 512, \quad 2^{10} = 1.024$$

(Οι δυνάμεις του 2 διαδραματίζουν κεντρικό ρόλο στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης).

2. Δυαδικό → Δεκαδικό

Να μετατρέψετε τον αριθμό $(10101)_2$ από το δυαδικό στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης.

Λύση:

Γράφουμε το ανάπτυγμα του αριθμού στο δυαδικό σύστημα και εκτελούμε τις πράξεις:

$$\begin{aligned} (10101)_2 &= 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 1 = \\ &= 16 + 0 + 4 + 0 + 1 = \\ &= 21. \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } (10101)_2 = (21)_{10}.$$

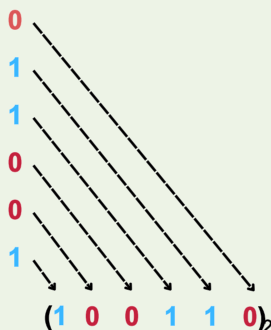
3. Δεκαδικό → Δυαδικό

Να μετατρέψετε τον αριθμό 38 από το δυαδικό στο δεκαδικό σύστημα.

Λύση:

Εκτελούμε διαδοχικές διαιρέσεις με το 2:

- $38 : 2 = 19$ και υπόλοιπο
- $19 : 2 = 9$ και υπόλοιπο
- $9 : 2 = 4$ και υπόλοιπο
- $4 : 2 = 2$ και υπόλοιπο
- $2 : 2 = 1$ και υπόλοιπο
- $1 : 2 = 0$ και υπόλοιπο



Γράφουμε τα **υπόλοιπα** των διαιρέσεων από το τέλος προς την αρχή και έχουμε τον αριθμό στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης.

$$\text{Άρα: } (38)_{10} = (100110)_2$$

Εξασκούμαι



σε όσα έμαθα

4. Να γράψετε τους 15 πρώτους αριθμούς στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης.

Λύση:

Οι πρώτοι 15 αριθμοί στο δεκαδικό και στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης είναι:

Δεκαδικό σύστημα	Δυαδικό σύστημα	Δεκαδικό σύστημα	Δυαδικό σύστημα
0	0	9	1001
1	1	10	1010
2	10	11	1011
3	11	12	1100
4	100	13	1101
5	101	14	1110
6	110	15	1111
7	111		
8	1000		

Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση



1

Μετάτρεψε τους παρακάτω αριθμούς από το δυαδικό στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης.

α) $(1001)_2$ β) $(10011)_2$ γ) $(111)_2$ δ) $(110101)_2$

2

Μετάτρεψε τους αριθμούς από το δεκαδικό στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης.

α) 256 β) 47 γ) 31 δ) 59

3

α) Βρες την αξία θέσης του ψηφίου 0 στον αριθμό $(1011)_2$ του δυαδικού συστήματος αρίθμησης.

β) Μετάτρεψε τον αριθμό $(1011)_2$ στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης.

4

α) Βρες τον μεγαλύτερο και τον μικρότερο τετραψήφιο αριθμό στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης. Στη συνέχεια να τους μετατρέψεις στο δυαδικό σύστημα.

β) Βρες τον μεγαλύτερο και τον μικρότερο τετραψήφιο αριθμό στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης. Στη συνέχεια να τους μετατρέψεις στο δεκαδικό σύστημα.

5

Στον Β' Π.Π. άνθισε η επιστήμη της κρυπτογραφίας. Κάθε χώρα έπρεπε να μπορεί να στέλνει μηνύματα κρυφά. Ένας τρόπος κρυπτογράφησης ήταν η μετατροπή των αριθμών δυαδικού συστήματος σε αριθμό δεκαδικού συστήματος και η αντιστοίχισή του με τα γράμματα του αλφάβητου. Προσπάθησε να σπάσεις τον παρακάτω κώδικα:

A ₁	B ₂	Γ ₃	Δ ₄
E ₅	Z ₆	H ₇	Θ ₈
I ₉	K ₁₀	Λ ₁₁	M ₁₂
N ₁₃	Ξ ₁₄	O ₁₅	Π ₁₆
P ₁₇	Σ ₁₈	Τ ₁₉	Υ ₂₀
Φ ₂₁	Χ ₂₂	Ψ ₂₃	Ω ₂₄

1 - 1001 - 1101 - 1001 - 11 - 1100 - 1

Γράψε ένα δικό σου μήνυμα, χρησιμοποιώντας τον παραπάνω πίνακα.



ΕΠΕΚΤΕΙΝΩ
ΤΙΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΜΟΥ

Μελετώ



το συγκεκριμένο θέμα

Μαθηματικά και Σύμβολα: Από την Κρυπτογραφία στην τεχνητή νοημοσύνη

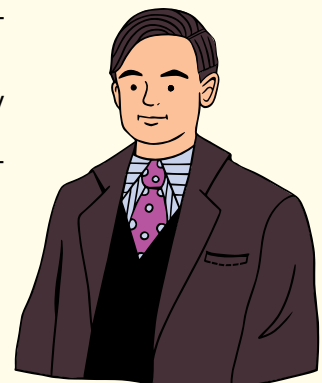
Ο Άλαν Τιούρινγκ (1912-1954) ήταν ένας από τους πρώτους επιστήμονες στον τομέα της επιστήμης των υπολογιστών και των μαθηματικών. Κατά τη διάρκεια του Β' Παγκοσμίου Πολέμου, διαδραμάτισε καθοριστικό ρόλο στη διάσπαση του γερμανικού κρυπτογραφικού κώδικα Enigma. Ανέπτυξε την περίφημη μηχανή «Bombe» που επιτάχυνε σημαντικά τη διαδικασία αποκρυπτογράφησης των γερμανικών μηνυμάτων.

Η κρυπτογραφία έχει μακρά ιστορία που ξεκινά από την αρχαιότητα.

- **Αρχαία Ελλάδα:** Η σκυτάλη των Σπαρτιατών - ένας από τους πρώτους μηχανισμούς κρυπτογράφησης.
- **Ρωμαϊκή Αυτοκρατορία:** Ο κώδικας του Καίσαρα με την απλή αντικατάσταση γραμμάτων με άλλα γράμματα.
- **Αραβικός κόσμος:** Ανάπτυξη της κρυπτανάλυσης και στατιστικών μεθόδων

Σήμερα, η κρυπτογραφία είναι μέσα στην καθημερινή μας ζωή και αξιοποιείται για:

- Ασφαλείς διαδικτυακές συναλλαγές (e-banking).
- Προστασία προσωπικών δεδομένων.
- Ασφαλή επικοινωνία (messaging apps).
- Ψηφιακά νομίσματα.



Ανακεφαλαίωση (Φυσικοί αριθμοί)

Το γινόμενο $\alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha$ που έχει n παράγοντες ίσους με α , λέγεται **δύναμη** του α στη n ή νιοστή δύναμη του α και συμβολίζεται με α^n .

$$\alpha^n = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha}_{n \text{ παράγοντες}}$$

- Ο αριθμός α λέγεται **βάση** της δύναμης και ο αριθμός n λέγεται **εκθέτης**.

Ευκλείδεια διαίρεση:

Αν Δ και δ δύο φυσικοί αριθμοί, τότε υπάρχουν δύο άλλοι φυσικοί αριθμοί π και u , έτσι ώστε να ισχύει:

$$\Delta = \delta \cdot \pi + u, \text{ με } u < \delta.$$

- Ο αριθμός Δ λέγεται **διαιρετέος**, ο δ λέγεται **διαιρέτης**, το π λέγεται **πηλίκιο** και το u λέγεται **υπόλοιπο**.

Ένας φυσικός αριθμός, που έχει διαιρέτες μόνο τον εαυτό του και το 1 λέγεται **πρώτος αριθμός**, διαφορετικά λέγεται **σύνθετος**.

- Το 0 και το 1 δεν θεωρούνται ούτε πρώτοι ούτε σύνθετοι αριθμοί.

Το **ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο (ΕΚΠ)**, δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών που δεν είναι μηδέν, είναι το μικρότερο ($\neq 0$) από τα κοινά πολλαπλάσια των αριθμών αυτών.

Ο **μέγιστος κοινός διαιρέτης (ΜΚΔ)**, δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών είναι ο μεγαλύτερος από τους κοινούς διαιρέτες τους.

- Αν **ΜΚΔ(α , β) = 1** τότε οι αριθμοί α και β λέγονται **πρώτοι μεταξύ τους**.

Το **δυναδικό σύστημα** αναπαριστά αριθμούς χρησιμοποιώντας μόνο δύο ψηφία: το **0** και το **1**. Λέμε ότι είναι ένα σύστημα αρίθμησης με **βάση το δύο (2)**.

Αυτοαξιολόγηση (Φυσικοί αριθμοί)

Χαρακτήρισε ως Σωστές ή Λάθος τις προτάσεις, βάζοντας ένα **x** στην κατάλληλη θέση.

	Σωστό	Λάθος
1. Ισχύει ότι $3 + 3 = 2 \cdot 3$.		
2. Ισχύει $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$.		
3. Για οποιοσδήποτε φυσικούς αριθμούς a και b ισχύει ότι $a^b = b^a$.		
4. Παίρνουμε ότι $2^2 = 2 \cdot 2 = 4$.		
5. Ισχύει ότι $1^{100} = 100^1$.		
6. Η διαίρεση $264 : 12$ είναι μία τέλεια διαίρεση.		
7. Ο διαιρέτης μιας διαίρεσης μπορεί να είναι κάθε φυσικός αριθμός.		
8. Για κάθε φυσικό αριθμό a παίρνουμε ότι $a : 1 = a$.		
9. Ο αριθμός 696 διαιρείται με το 2, το 3 και το 9.		
10. 60 μαύροι και 45 μπλε μαρκαδόροι μπορούν να χωριστούν σε σετ των 5, 6 και 15.		
11. Οι 150 μαθητές ενός σχολείου μπορούν να παραταχθούν σε τετράδες χωρίς να περισσεύει κανείς.		
12. Ο αριθμός 15 είναι διαιρέτης του αριθμού 300.		
13. Ο αριθμός 60 είναι διαιρέτης του αριθμού 12.		
14. Ο αριθμός 2 είναι ο μοναδικός άρτιος πρώτος αριθμός.		
15. Κάθε άρτιος αριθμός μεγαλύτερος από το 2 είναι σύνθετος.		
16. Ο αριθμός 1001 είναι πρώτος αριθμός.		
17. Το ΕΚΠ των αριθμών 3 και 21 είναι ο αριθμός 63.		
18. Οι αριθμοί 15 και 300 έχουν ΜΚΔ τον αριθμό 5.		
19. Οι αριθμοί 69 και 169 είναι μεταξύ τους πρώτοι.		
20. Δύο άρτιοι αριθμοί δεν είναι ποτέ μεταξύ τους πρώτοι.		
21. Ο αριθμός 1000 στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης, είναι επίσης 1000 στο δεκαδικό σύστημα.		
22. Ο αριθμός 2 γράφεται στο δυαδικό σύστημα ως 10.		
23. Στην παράσταση $2 \cdot 4^2 - 3 \cdot (10 - 3)$ η ύπαρξη των παρενθέσεων είναι περιττή.		
24. Η παράσταση $732 = 17 \cdot 43 + 1$ εκφράζει ευκλείδεια διαίρεση με διαιρέτο τόσο το 17 όσο και το 43.		
25. Η παράσταση $977 = 83 \cdot 11 + 64$ δεν μπορεί να εκφράζει ευκλείδεια διαίρεση.		

Σε αυτό το σημείο, θα πρέπει να είσαι σε θέση να έχεις επιτύχει όλα τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα. Γύρνα στην αρχή της θεματικής ενότητας και σημείωσε στα αντίστοιχα κουτάκια. Υπάρχουν στόχοι που αισθάνεσαι ότι δεν έχεις κατακτήσει πλήρως;

ΑΚΕΡΑΙΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

A.2



- Αναγνωρίζω την ανάγκη εισαγωγής των ακεραίων αριθμών στην επίλυση προβλημάτων που $\delta\epsilon$ λύνονται στο πλαίσιο των φυσικών αριθμών.
- Διακρίνω θετικούς και αρνητικούς ακεραίους, καθώς και ομόσημους και ετερόσημους.
- Διερευνώ τη σχέση των ακεραίων με τους φυσικούς αριθμούς.
- Αναγνωρίζω την απόλυτη τιμή ακεραίων αριθμών ως την απόστασή τους από το μηδέν (0) στην αριθμογραμμή.
- Περιγράφω τα χαρακτηριστικά δύο αντίθετων αριθμών.
- Προσθέτω και αφαιρώ ακεραίους αριθμούς, χρησιμοποιώντας στην αρχή εποπτικά μοντέλα και ύστερα μαθηματικές ιδότητες για να περιγράψω προσθέσεις και αφαιρέσεις.
- Πολλαπλασιάζω ακεραίους αριθμούς χρησιμοποιώντας εποπτικά μοντέλα και να καταλήγω στον ορισμό του πολλαπλασιασμού ακεραίων.
- Διατυπώνω και χρησιμοποιώ τον ορισμό των δυνάμεων με βάση ακεραίο και εκθέτη φυσικό $n > 0$ σε υπολογισμούς.
- Ερμηνεύω τις πολλαπλές σημασίες των συμβόλων «+» και «-».
- Συγκρίνω το νόημα της πρόσθεσης ως αύξησης και της αφαίρεσης ως ελάττωσης στους φυσικούς με το νόημα των αντίστοιχων πράξεων στους ακεραίους.
- Μοντελοποιώ και λύνω προβλήματα με ακεραίους σε πραγματικά και μαθηματικά πλαίσια.

Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε τους ακεραίους αριθμούς και τη σχέση τους με τους φυσικούς. Θα μάθουμε να αναγνωρίζουμε τη σημασία της απόλυτης τιμής και να περιγράφουμε τα χαρακτηριστικά των αντίθετων αριθμών. Επίσης, θα δούμε πώς πραγματοποιείται η πρόσθεση, η αφαίρεση και ο πολλαπλασιασμός ακεραίων, καθώς και πώς χρησιμοποιούνται δυνάμεις με εκθέτη μη μηδενικό φυσικό. Θα ερμηνεύσουμε τη σημασία των συμβόλων «+» και «-» και θα συνδέσουμε τις πράξεις αυτές με πραγματικά προβλήματα.

Πώς μπορείς να περιγράψεις με μαθηματικούς όρους τις αλλαγές σε ποσότητες στη φύση και την καθημερινή ζωή;

Είσαι έτοιμος/η να κατακτήσεις τις βασικές πράξεις των ακεραίων;



2.1: Θετικοί, αρνητικοί, ομόσημοι, ετερόσημοι ακεραίοι

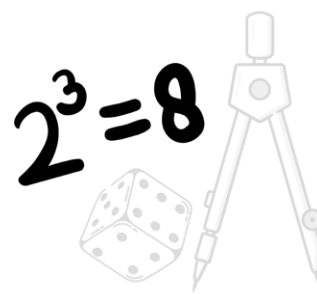
2.2: Απόλυτη τιμή ακεραίου

2.3: Πρόσθεση και αφαίρεση ακεραίων

2.4: Πολλαπλασιασμός ακεραίων

2.5: Δυνάμεις ακεραίων με εκθέτη μη μηδενικό φυσικό

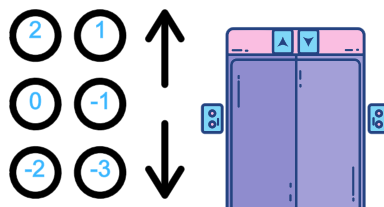
+ Ανακεφαλαίωση / Αυτοαξιολόγηση



2.1 | Θετικοί, αρνητικοί, ομόσημοι, ετερόσημοι ακέραιοι.



Στον ανελκυστήρα υπάρχουν τα κουμπιά που βλέπεις δίπλα.
Τι εκφράζουν οι αριθμοί που είναι γραμμένοι στα κουμπιά;



Θετικοί και αρνητικοί αριθμοί

Ένας έμπορος σημειώνει τα έσοδα και τα έξοδα της επιχείρησής του, γράφοντας σε μία λίστα τους αριθμούς: 20, -80, -50, -40, 15, +120 και -10.

Ποια από τα παραπάνω ποσά θεωρείς ότι είναι έσοδα και ποια έξοδα της επιχείρησης;

Πολλές φορές χρησιμοποιούμε αρνητικούς αριθμούς για να εκφράσουμε το μέγεθος μίας απώλειας ή χρέους.
Κέρδος/έσοδο (θετικό ποσό) και χρέος/έξοδο (αρνητικό ποσό).

Οι αρνητικοί αριθμοί χρησιμοποιούνται επίσης για να εκφράσουν μία διαφορετική κατεύθυνση.

- Δεξιά (θετική κατεύθυνση) και αριστερά (αρνητική κατεύθυνση).
- Πάνω (θετική κατεύθυνση) και κάτω (αρνητική κατεύθυνση).
- Κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού (αρνητική στροφή) και αντίθετη φορά (θετική στροφή).

Η ένδειξη -2 στο θερμόμετρο διαβάζεται και εκφράζεται πολλές φορές ως «πλην 2» ή ως «2 υπό του μηδενός».

Γενικά:

Τα σύμβολα **+** και **-** τα οποία γράφονται πριν από τους αριθμούς λέγονται **πρόσημα**.

- Οι αριθμοί που έχουν πρόσημο **+** ή δεν έχουν πρόσημο λέγονται **θετικοί**. π.χ. +5, +2, 7, κ.α.
- Οι αριθμοί που έχουν πρόσημο **-** λέγονται **αρνητικοί**. π.χ. -1, -2, -6, κ.α.

Παρατήρηση: Το **+** μπροστά από τους θετικούς αριθμούς πολλές φορές παραλείπεται (π.χ. γράφουμε 2 αντί για +2) ενώ το **-** μπροστά από τους αρνητικούς αριθμούς αναγράφεται υποχρεωτικά.

- Το μηδέν (0) δεν είναι ούτε θετικός ούτε αρνητικός αριθμός.

Ομόσημοι λέγονται οι αριθμοί που έχουν το ίδιο πρόσημο.

Παράδειγμα: Οι αριθμοί $+2$, $+5$ είναι ομόσημοι.
Οι αριθμοί -1 , -3 είναι ομόσημοι.

Ετερόσημοι λέγονται οι αριθμοί που έχουν διαφορετικό πρόσημο.

Παράδειγμα: Οι αριθμοί $+2$, -5 είναι ετερόσημοι.

Ακέραιοι αριθμοί

Γνωρίζουμε ότι φυσικοί είναι οι αριθμοί $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \dots$

Αν στους φυσικούς αριθμούς προσθέσουμε το σύνολο των αντίστοιχων αρνητικών αριθμών τότε προκύπτει το σύνολο των ακέραιων αριθμών.

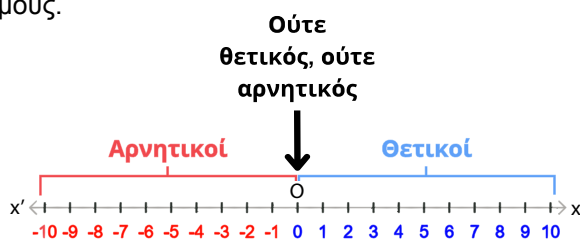


Γενικά:

Ακέραιοι αριθμοί είναι οι φυσικοί αριθμοί μαζί με τους αντίστοιχους αρνητικούς αριθμούς.
 $\dots, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, +6, +7, +8, \dots$

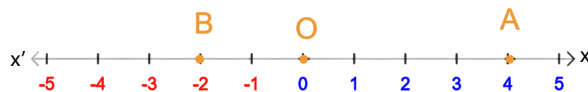
Παράσταση ακεραίων στην αριθμογραμμή:

Αν επεκτείνουμε τον ημιάξονα Ox των φυσικών αριθμών προς τα αριστερά του O , μπορούμε να παραστήσουμε τους αρνητικούς αριθμούς σε συμμετρικά σημεία, ως προς O , των αντιστοίχων σημείων που παριστάνουν τους θετικούς αριθμούς.



Η θέση ενός σημείου πάνω στην ευθεία x' ορίζεται με έναν αριθμό που ονομάζεται **τετμημένη** του σημείου.

Παράδειγμα:



- Το σημείο A έχει τετμημένη 4.
- Το σημείο B έχει τετμημένη -2 .
- Το σημείο O έχει τετμημένη 0.

Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση





1. Να εκφράσετε με τη βοήθεια των θετικών και αρνητικών αριθμών, τους αριθμούς που περιγράφονται παρακάτω:

α) 200€ αύξηση

β) 50€ ζημιά

γ) 5°C πάνω από το 0

δ) 20m κάτω από τη θάλασσα

ε) Έκπτωση 50%

στ) Πετάμε σε ύψος 36.000 πόδια

Λύση:

α) +200€

β) -50€

γ) +5°C

δ) -20m

ε) -50%

στ) +36.000

2. Δίνονται οι αριθμοί +2, -6 και -3 .

Ποιοι από τους παραπάνω αριθμούς είναι θετικοί και ποιοι αρνητικοί;

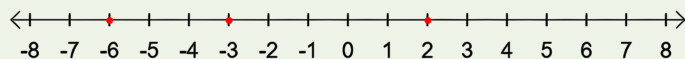
Ποιοι αριθμοί είναι ομόσημοι και ποιοι ετερόσημοι;

Να τοποθετήσετε τους αριθμούς στον άξονα και να βρείτε πόσες μονάδες απέχει ο αριθμός -3 από τον +2.

Λύση:

Ο αριθμός +2 είναι θετικός, ενώ οι αριθμοί -6 και -3 είναι αρνητικοί.

Ομόσημοι είναι οι αριθμοί -6 και -3 ενώ ετερόσημοι είναι οι αριθμοί -6 και +2 όπως και οι -3 και +2 .



Ο αριθμός -3 απέχει 5 μονάδες από τον αριθμό +2

Εξασκούμε



σε όσα έμαθα

1

Χαρακτήρισε ως Σωστές ή Λάθος τις προτάσεις που ακολουθούν βάζοντας ένα x στην κατάλληλη θέση.

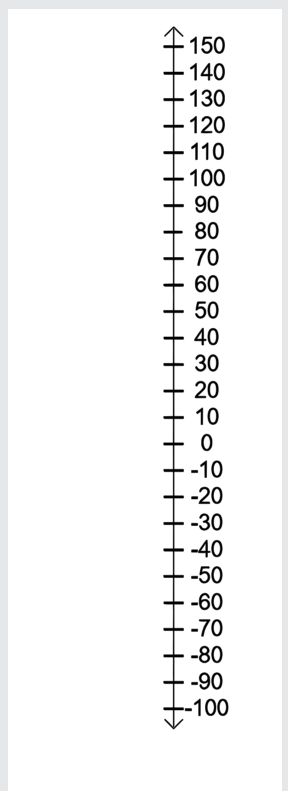
- α) Όλοι οι ακέραιοι αριθμοί είναι και φυσικοί αριθμοί.
- β) Όλοι οι φυσικοί αριθμοί είναι και ακέραιοι αριθμοί.
- γ) Το μηδέν είναι θετικός αριθμός.
- δ) Το 1 είναι θετικός ακέραιος αριθμός.
- ε) Το -2 είναι φυσικός αριθμός.

Σωστό	Λάθος

2

Σημείωσε στον άξονα του σχήματος τη θέση των αντικειμένων.

- α) Ο δύτες (Δ) είναι 100 μέτρα κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας.
- β) Ο γλάρος (Γ) είναι 70 μέτρα πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας.
- γ) Η κορυφή του Πύργου Πειραιά (Π) είναι 80 μέτρα πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας.
- δ) Το βάθος της λίμνης Τριχωνίδας (Τ) είναι 60 μέτρα κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας.



3

Δίνονται οι αριθμοί: 2, +1, -3, -8, +4, -61, 41, -628, -513, +61, 6

- α) Θετικοί είναι οι αριθμοί:
- β) Αρνητικοί είναι οι αριθμοί:
- γ) Επίλεξε δύο ομόσημους αριθμούς και δύο ετερόσημους αριθμούς:

4

Ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι ομόσημοι και ποιοι ετερόσημοι;

- α) +5, +9 β) 3, -7 γ) -4, -1 δ) -8, +1 ε) 2, 14 στ) 15, -23

5

Παράστησε πάνω σε μία ευθεία χ'χ τα σημεία με τετμημένες:

-2, -7, 5, -3, 0, 2 και 6.

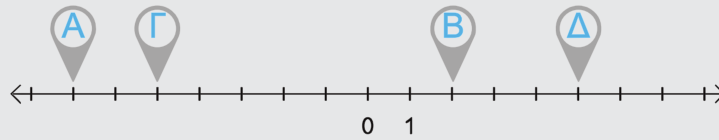
Ποια από τα παραπάνω σημεία έχουν την ίδια απόσταση από το μηδέν;

Ποιο σημείο απέχει τη μεγαλύτερη απόσταση από το μηδέν;



6

Βρες ποιος ακέραιος αριθμός αντιστοιχεί στα σημειωμένα σημεία της αριθμογραμμής.



7

Γράψε με τη βοήθεια των θετικών και αρνητικών αριθμών, τους αριθμούς που περιγράφονται παρακάτω:

- α) Κατάθεση 15.000 € β) Έκπτωση 10 € γ) 5 m δεξιά της εκκίνησης
 δ) 3 m πάνω από την επιφάνεια της Γης ε) Ανάλυση 1.800 €

8

Δύο ρομπότ ξεκινούν από την αρχή 0 του άξονα και κινούνται όπως περιγράφεται παρακάτω. Θεωρούμε ως μονάδα την απόσταση του σημείου με τετμημένη 1 από το 0.

Ρομπότ Α: 2 μονάδες δεξιά → 6 μονάδες αριστερά → 3 μονάδες δεξιά.

Ρομπότ Β: 5 μονάδες αριστερά → 6 μονάδες δεξιά → 2 μονάδες αριστερά.

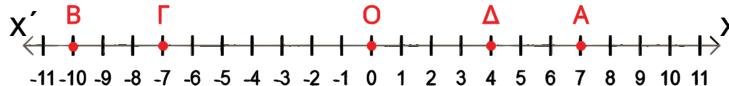


Σημείωσε πάνω σε μία αριθμογραμμή τη διαδρομή που ακολουθεί κάθε ρομπότ και βρες τις τελικές τους θέσεις.

2.2 | Απόλυτη τιμή ακεραίου



Βρες πόσες μονάδες απέχουν από την αρχή O του άξονα τα σημεία A, B, Γ και Δ.



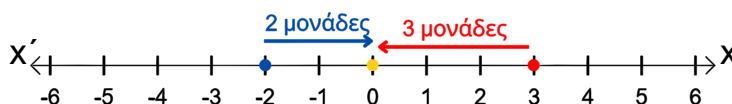
Απόλυτη τιμή

Στο παραπάνω σχήμα παρατηρούμε ότι τα σημεία A και Γ έχουν την ίδια απόσταση από την αρχή O του άξονα. Οι τετμημένες των σημείων A και Γ λέμε ότι έχουν την ίδια **απόλυτη τιμή**.

Γενικά:

Απόλυτη τιμή του αριθμού a ονομάζουμε την **απόσταση** του σημείου με τετμημένη a από την αρχή O του άξονα και τη συμβολίζουμε με $|a|$.

Παραδείγματα:

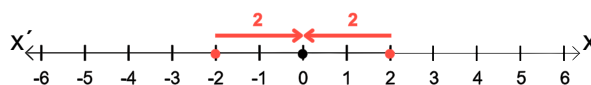


- Είναι $|+3| = 3$ διότι το σημείο με τετμημένη $+3$ απέχει 3 μονάδες από το O.
- Είναι $|-2| = 2$ διότι το σημείο με τετμημένη -2 απέχει 2 μονάδες από το O.

Αντίθετοι ονομάζονται δύο αριθμοί που είναι ετερόσημοι και έχουν την ίδια απόλυτη τιμή.

Παράδειγμα:

οι αριθμοί $+2, -2$ είναι αντίθετοι.



Ισχύει ότι:

- Η απόλυτη τιμή ενός θετικού αριθμού είναι ο ίδιος αριθμός. $|+5| = +5$
- Η απόλυτη τιμή ενός αρνητικού αριθμού είναι ο αντίθετός του. $|-4| = +4$
- Η απόλυτη τιμή του 0 είναι το 0. $|0| = 0$

Γενικά:

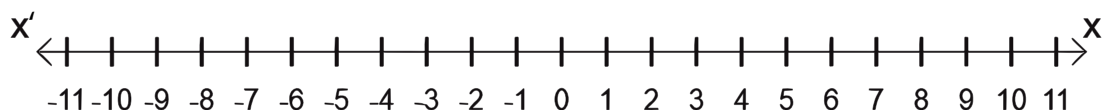
Ο αντίθετος του x είναι ο $-x$.

Δύο σημεία που παριστάνουν δύο αντίθετους αριθμούς, είναι σημεία **συμμετρικά** ως προς την αρχή 0 του άξονα.

Διάταξη ακεραίων:

Είδαμε προηγουμένως τον τρόπο με τον οποίο παριστάνουμε τους ακέραιους αριθμούς με σημεία πάνω σε έναν άξονα x' .

Ο **μεγαλύτερος** από δύο ακέραιους αριθμούς είναι εκείνος που βρίσκεται **δεξιότερα** από τον άλλον πάνω στον άξονα.



Παραδείγματα: $+5 > +2$, $4 > 0$, $-1 > -4$, $0 > -2$.

Γενικά:

Ο **μεγαλύτερος** από δύο **θετικούς** ακέραιους είναι εκείνος που έχει την **μεγαλύτερη** απόλυτη τιμή.

Παραδείγματα: $50 > 19$, $+31 > +26$.

Ο **μεγαλύτερος** από δύο **αρνητικούς** ακέραιους είναι εκείνος που έχει την **μικρότερη** απόλυτη τιμή.

Παραδείγματα: $-2 > -14$, $-9 > -10$.

Παρατηρήσεις:

- Κάθε θετικός ακέραιος είναι μεγαλύτερος από το μηδέν (0).
- Κάθε αρνητικός ακέραιος είναι μικρότερος από το μηδέν (0).
- Κάθε θετικός ακέραιος είναι μεγαλύτερος από κάθε αρνητικό ακέραιο.

Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση



1. Παρακάτω φαίνονται οι ελάχιστες θερμοκρασίες μιας πόλης, σε βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$), μια εβδομάδα του χειμώνα.

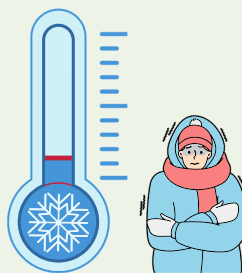
Δευτέρα	Τρίτη	Τετάρτη	Πέμπτη	Παρασκευή	Σάββατο	Κυριακή
-2	0	+3	-5	-4	+1	+4

- α) Ποια ήταν η πιο κρύα ημέρα της εβδομάδας;
β) Ποια ήταν η πιο ζεστή ημέρα της εβδομάδας;
γ) Να τοποθετήσετε σε αύξουσα σειρά τις θερμοκρασίες του πίνακα.

Λύση:

- α) Η πιο κρύα ημέρα ήταν η Πέμπτη (-5°C).
β) Η πιο ζεστή ημέρα ήταν η Κυριακή ($+4^{\circ}\text{C}$).
γ) Οι θερμοκρασίες σε αύξουσα σειρά φαίνονται παρακάτω.

$$-5 < -4 < -2 < 0 < +1 < +3 < +4$$



2. Να βρεθούν όλοι οι ακέραιοι που παριστάνει ο αριθμός x , στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $0 < x < 4$

β) $-6 < x < -1$

γ) $-2 \leq x \leq 2$

δ) $-1 \leq x < 5$

Λύση:

- α) Οι ακέραιοι αριθμοί που είναι μεγαλύτεροι του 0 και μικρότεροι του 4 είναι οι: **1, 2 και 3**.
β) Οι ακέραιοι αριθμοί που είναι μεγαλύτεροι του -6 και μικρότεροι του -1 είναι οι: **-5, -4, -3 και -2**.
γ) Οι ακέραιοι αριθμοί που είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του -2 και μικρότεροι ή ίσοι του 2, είναι οι: **-2, -1, 0, 1 και 2**.
δ) Οι ακέραιοι αριθμοί που είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του -1 και μικρότεροι του 5, είναι οι: **-1, 0, 1, 2, 3 και 4**.

Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση

Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση



1

Συμπλήρωσε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

- α) Απόλυτη τιμή του αριθμού a ονομάζουμε την του σημείου με τετμημένη a από την αρχή του άξονα.
- β) Ο μεγαλύτερος από δύο θετικούς ρητούς αριθμούς είναι εκείνος που έχει την απόλυτη τιμή.
- γ) Ο μεγαλύτερος από δύο αρνητικούς ρητούς αριθμούς είναι εκείνος που έχει την απόλυτη τιμή.
- δ) Αν $|a| = 5$ τότε $a = \dots\dots\dots$ ή $a = \dots\dots\dots$

2

Χαρακτήρισε ως Σωστές ή Λάθος τις προτάσεις που ακολουθούν βάζοντας ένα x στην κατάλληλη θέση.

	Σωστό	Λάθος
α) $-8 > 5$		
β) $ -6 = 6$		
γ) $3 > -4 $		
δ) $0 > -2$		
ε) $16 < -20 $		

3

Σύγκρινε τους παρακάτω ακέραιους αριθμούς τοποθετώντας στο κενό το κατάλληλο σύμβολο ($<$, $>$ ή $=$).

- α) $+2 \dots\dots -9$ β) $+5 \dots\dots +6$ γ) $-2 \dots\dots -1$ δ) $0 \dots\dots -6$
- ε) $-12 \dots\dots -20$ στ) $+11 \dots\dots 0$ ζ) $|+2| \dots\dots |-2|$ η) $|-4| \dots\dots |-7|$

4

Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα:

Αριθμός	Αντίθετος	Απόλυτη τιμή
+2		
-5		
	-14	
	9	
		3

5

Συμπλήρωσε με τους αριθμούς που λείπουν ώστε να ισχύουν οι ισότητες.

α) $|+2| = \dots$

β) $|-3| = \dots$

γ) $|\dots| = 0$

δ) Αν $|x| = 4$, τότε $x = \dots$ ή \dots

ε) $-|-7| = \dots$

6

Υπολόγισε την τιμή των παραστάσεων:

α) $|-11| + |+11|$

β) $|-11| - |+11|$

γ) $|-1| + |7| - |-8|$

δ) $|-3| + |2| - 5$

ε) $2 \cdot |-7| - 2 \cdot |+5|$

στ) $|10 - |-4||$

7

Γράψε σε αύξουσα σειρά τους παρακάτω ακέραιους:

$$8, -4, +2, -14, 0, -84, -38, +56, -72, 4, -61$$

8

Τοποθέτησε στον άξονα των αριθμών τα σημεία με τετμημένες:

$$2, +5, -7, -8, 1$$

Στη συνέχεια τοποθέτησε στον ίδιο άξονα τα σημεία με τετμημένες τους αντίθετους των παραπάνω αριθμών.

9

Βρες όλους τους ακέραιους αριθμούς κ για τους οποίους ισχύει:

α) $-2 < \kappa < 5$

β) $-4 \leq \kappa \leq 3$

γ) $-1 \leq \kappa < 0$

δ) $-7 < \kappa \leq -4$

2.3 | Πρόσθεση και αφαίρεση ακεραίων

ΕΞΕΡΧΕΝΩ



Το παρακάτω παιχνίδι περιλαμβάνει ένα ρομπότ που μπορεί να κινηθεί μόνο σε μια ευθεία, ανάλογα με την εντολή που θα του δώσουμε. Σε ποια θέση θα φτάσει αν ενεργοποιήσουμε τις εντολές Β, Γ, Α;

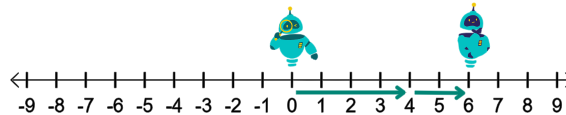


A	-2
B	0
Γ	+4
Δ	+2
E	-1

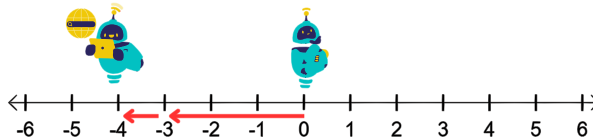
Πρόσθεση

Στο προηγούμενο παράδειγμα, θεωρούμε ότι το ρομπότ ξεκινά από την αρχή 0 του άξονα.

Αν το ρομπότ κινηθεί 4 μονάδες δεξιά (+4) και στη συνέχεια ακόμη 2 μονάδες δεξιά (+2), τότε αυτό θα φτάσει στο σημείο με τετμημένη +6, δηλαδή $(+4) + (+2) = +6$.



Αν το ρομπότ κινηθεί 3 μονάδες αριστερά (-3) και στη συνέχεια ακόμη 1 μονάδα αριστερά (-1), τότε αυτό θα φτάσει στο σημείο με τετμημένη -4, δηλαδή $(-3) + (-1) = -4$.



Γενικά:

Για να προσθέσουμε δύο **ομόσημους** ακεραίους αριθμούς, **προσθέτουμε** τις απόλυτες τιμές τους και στο άθροισμα βάζουμε **το πρόσημό τους**.

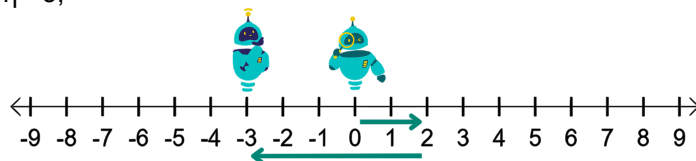
Παραδείγματα:

$$(+2) + (+3) = +5$$

$$(-2) + (-3) = -5$$

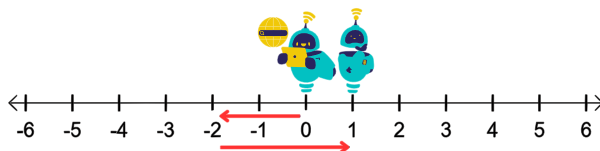
Θεωρούμε εκ νέου, ότι το ρομπότ ξεκινά από την αρχή 0 του άξονα.

Αν το ρομπότ κινηθεί 2 μονάδες δεξιά (+2) και στη συνέχεια 5 μονάδες αριστερά (-5), τότε αυτό θα φτάσει στο σημείο με τετμημένη -3,



δηλαδή $(+2) + (-5) = -3$.

Αν το ρομπότ κινηθεί 2 μονάδες αριστερά (-2) και στη συνέχεια 3 μονάδες δεξιά (+3), τότε αυτό θα φτάσει στο σημείο με τετμημένη +1,



δηλαδή $(-2) + (+3) = +1$.

Γενικά:

Για να προσθέσουμε δύο **ετερόσημους** ακέραιους αριθμούς, **αφαιρούμε** από τη μεγαλύτερη τη μικρότερη απόλυτη τιμή και στη διαφορά βάζουμε το πρόσημο του ακεραίου με τη **μεγαλύτερη απόλυτη τιμή**.

Παραδείγματα: $(+10) + (-2) = +8$ και $(-10) + (+2) = -8$

Αφαίρεση:

Για να **αφαιρέσουμε** από τον αριθμό α τον αριθμό β, προσθέτουμε στον α τον αντίθετο του β.

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$$

Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση

Παραδείγματα: $(+2) - (+3) = (+2) + (-3) = -1$ και $(+4) - (-1) = (+4) + (+1) = +5$

Στους ακέραιους αριθμούς η αφαίρεση είναι πάντα δυνατή, δηλαδή δεν απαιτείται να είναι ο μειωτέος πάντα μεγαλύτερος από τον αφαιρετέο.

Απαλοιφή παρενθέσεων:

Αν οι αριθμητικές παραστάσεις περιέχουν αθροίσματα ή διαφορές αριθμών, και υπάρχουν παρενθέσεις, τότε μπορούμε να απαλείψουμε τις παρενθέσεις σύμφωνα με τους παρακάτω κανόνες:

- Όταν μια παρένθεση έχει μπροστά της το + (ή δεν έχει πρόσημο), μπορούμε να την απαλείψουμε μαζί με το + και να γράψουμε τους όρους που περιέχει **με τα πρόσημά τους**.

Παράδειγμα: $(+5) + (-4) + (-2 + 6) = 5 - 4 - 2 + 6$

- Όταν μια παρένθεση έχει μπροστά της το -, μπορούμε να την απαλείψουμε μαζί με το - και να γράψουμε τους όρους που περιέχει **με αντίθετα πρόσημα**.

Παράδειγμα: $- (+3) - (-4) - (-2 + 5) = -3 + 4 + 2 - 5$



1. Να γίνουν οι πράξεις: $(+9) + (-8) + (-5) + (+6) + (-7) + (+1)$.

Λύση:

Μπορούμε να εκτελέσουμε τις πράξεις με τη σειρά που εμφανίζονται στο άθροισμα. Ωστόσο, όταν έχουμε πολλούς προσθετέους, οι πράξεις μπορούν να γίνουν ως εξής:

$$(+9) + (-8) + (-5) + (+6) + (-7) + (+1) = \leftarrow \text{Χωρίζουμε τους θετικούς από τους αρνητικούς αριθμούς.}$$

$$= \underbrace{(+9) + (+6) + (+1)} + \underbrace{(-8) + (-5) + (-7)} = \leftarrow \text{Προσθέτουμε χωριστά τους θετικούς και τους αρνητικούς.}$$

$$= (+16) + (-20) = -4 \leftarrow \text{Προσθέτουμε τους ετερόσημους αριθμούς που προκύπτουν.}$$

2. Να γίνουν οι πράξεις: $(+6) + (-8) - (-5) - (+1) + (-2)$

Λύση:

$$(+6) + (-8) - (-5) - (+1) + (-2) = \leftarrow \text{Είναι } \alpha - \beta = \alpha + (-\beta).$$

$$= (+6) + (-8) + (+5) + (-1) + (-2) =$$

$$= \underbrace{(+6) + (+5)} + \underbrace{(-8) + (-1) + (-2)} =$$

$$= (+11) + (-11) = 0$$

Εξασκούμε



σε όσα έμαθα

3. Να γίνουν οι πράξεις: $-(5 - 7 + 12) + (-8 + 4) - (+3 - 7 - 8)$.

Λύση:

• **1ος τρόπος:**

$$-(5 - 7 + 12) + (-8 + 4) - (+3 - 7 - 8) = \leftarrow \text{Κάνουμε τις πράξεις στις παρενθέσεις.}$$

$$= -(+10) + (-4) - (-12) = \leftarrow \text{Απαλείφουμε τις παρενθέσεις.}$$

$$= -10 - 4 + 12 = \leftarrow \text{Κάνουμε τις πράξεις.}$$

$$= -2$$

• **2ος τρόπος:**

$$-(5 - 7 + 12) + (-8 + 4) - (+3 - 7 - 8) = \leftarrow \text{Απαλείφουμε τις παρενθέσεις.}$$

$$= -5 + 7 - 12 - 8 + 4 - 3 + 7 + 8 = \leftarrow \text{Χωρίζουμε θετικούς από αρνητικούς και διαγράφουμε τους αντίθετους.}$$

$$= +7 + 4 + 7 - 8 - 5 - 12 - 8 - 3 = \leftarrow \text{Προσθέτουμε χωριστά τους θετικούς και τους αρνητικούς.}$$

$$= +18 - 20 = \leftarrow \text{Προσθέτουμε τους ετερόσημους αριθμούς που προκύπτουν.}$$

$$= -2$$

1 Χαρακτήρισε ως Σωστές ή Λάθος τις προτάσεις που ακολουθούν βάζοντας ένα **x** στην κατάλληλη θέση

- α) Αν το άθροισμα δύο ακέραιων αριθμών είναι θετικός αριθμός, τότε και οι δύο αριθμοί είναι θετικοί.
 β) Αν το άθροισμα δύο ακέραιων αριθμών είναι αρνητικός αριθμός, τότε και οι δύο αριθμοί είναι αρνητικοί.
 γ) Η πρόσθεση στους ακέραιους αριθμούς σημαίνει πάντοτε αύξηση.
 δ) Η διαφορά στους ακέραιους αριθμούς σημαίνει πάντοτε μείωση.
 ε) Αν η διαφορά δύο μη μηδενικών αριθμών είναι μηδέν τότε οι αριθμοί είναι αντίθετοι.
 στ) Είναι $-(-1) = 1$.

Σωστό Λάθος

Σωστό	Λάθος

2 Υπολόγισε τα αθροίσματα:

- α) $(+5) + (+6) = \dots\dots\dots$ β) $(+7) + (+12) = \dots\dots\dots$ γ) $(+24) + (+7) = \dots\dots\dots$
 δ) $(-15) + (-5) = \dots\dots\dots$ ε) $(-9) + (-2) = \dots\dots\dots$ στ) $(-8) + (-11) = \dots\dots\dots$
 ζ) $(-6) + (+5) = \dots\dots\dots$ η) $(+20) + (-18) = \dots\dots\dots$ θ) $(-13) + (+13) = \dots\dots\dots$

3 Υπολόγισε τις διαφορές:

- α) $(+3) - (+1) = \dots\dots\dots$ β) $(+10) - (+20) = \dots\dots\dots$ γ) $(+15) - (+1) = \dots\dots\dots$
 δ) $(+20) - (-5) = \dots\dots\dots$ ε) $(+11) - (-6) = \dots\dots\dots$ στ) $(+8) - (-8) = \dots\dots\dots$
 ζ) $(-14) - (-14) = \dots\dots\dots$ η) $(-25) - (+8) = \dots\dots\dots$ θ) $(-9) - (-17) = \dots\dots\dots$

4 Συμπλήρωσε τον πίνακα με τα αντίστοιχα αθροίσματα:

+	+2	7	-5	-1
+1				
-6				
-3				
4				

5 Τοποθέτησε στα κενά κατάλληλα πρόσημα, ώστε οι ισότητες να είναι αληθείς.

- α) $(...5) + (...9) = +4$ β) $(...3) + (...15) = -18$ γ) $(...16) + (...7) = -9$
 δ) $(...7) + (...8) = 15$ ε) $(...2) - (...8) = +10$ στ) $(...16) - (...12) = -4$

6

Κάνε τις πράξεις:

α) $-(-1) - (+7) + (-8)$

β) $-(-9) + (+12) + (-5) - (-8)$

γ) $(-4) + (+2) + (+8) + (-5) + (+9)$

δ) $(-6) + (+1) + (+8) + (-4) + (+6) + (-7)$

ε) $(+16) + (-12) - (-9) - (+11) + (+6) - (+8)$

7

Υπολόγισε την τιμή των παραστάσεων:

α) $(14 - 9 + 1) - (13 - 9) + 3$

β) $-(1 - 3 + 7) + (-15 + 9)$

γ) $(-25 - 7 + 2) - (-12 - 4) + (-3 + 25)$

Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση

8

Συμπλήρωσε τον πίνακα:

α	β	α + β	α - β	β - α
+5	+1			
-15	-5			
+8	-11			
-1	3			

Τι παρατηρείς για τους αριθμούς των δύο τελευταίων στηλών;

9

Αντιστοίχισε κάθε αριθμητική παράσταση της 1ης στήλης με την τιμή της στην 2η στήλη.

α. $-(-3) - 3$

β. $-(-12 + 11)$

γ. $-|-5| + |-8 + 1| - |+6|$

δ. $-[-(-1)]$

ε. $-15 + 27 - 18$

i. +1

ii. 0

iii. -6

iv. -1

v. -4

10

Γράψε μία αριθμητική παράσταση που εκφράζει καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις. Στη συνέχεια υπολόγισε την τιμή των παραστάσεων που προκύπτουν.

α) Ένα κινητό σημείο βρίσκεται στον άξονα των αριθμών. Ξεκινά από το -3 και κινείται 5 μονάδες δεξιά. Στη συνέχεια κινείται 2 μονάδες αριστερά.

β) Από υψόμετρο 10 μέτρων, κατεβαίνω 21 μέτρα και στη συνέχεια ανεβαίνω 9 μέτρα.

γ) Σε έναν τραπεζικό λογαριασμό υπάρχουν 100€. Πραγματοποιείται μία κατάθεση 50€ και αργότερα μια ανάληψη 75€.

2.4 | Πολλαπλασιασμός ακεραίων

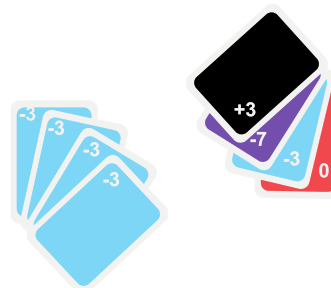


Σε ένα παιχνίδι με κάρτες οι μαθητές χωρίζονται σε δύο ομάδες.

Η μια ομάδα έχει κάρτες +3, -7, -2, 0.

Η άλλη ομάδα έχει κάρτες -3, -3, -3, -3.

Ποια ομάδα έχει περισσότερους πόντους;



Πολλαπλασιασμός ακεραίων

Σε ένα παιχνίδι γνώσεων, αν ο παίκτης βρει τη σωστή απάντηση κερδίζει 5 πόντους (+5), αν όχι χάνει 2 πόντους (-2). Η βαθμολογία ενός παίκτη μπορεί να είναι και αρνητική.

- Πόσους πόντους θα έχει ένας παίκτης αν απαντήσει σωστά στις 3 πρώτες ερωτήσεις;

Απάντηση:

Ο παίκτης θα έχει: $(+3) \cdot (+5) = (+5) + (+5) + (+5) = +15$ πόντους.

- Πόσους πόντους θα έχει ένας παίκτης αν απαντήσει λανθασμένα στις 3 πρώτες ερωτήσεις;

Απάντηση:

Ο παίκτης θα έχει: $(+3) \cdot (-2) = (-2) + (-2) + (-2) = -6$ πόντους.

Παρατηρούμε ότι:

Το γινόμενο δύο **θετικών** αριθμών είναι **θετικός** αριθμός.

$$+ \cdot + = +$$

Το γινόμενο ενός **θετικού** και ενός **αρνητικού** αριθμού είναι **αρνητικός** αριθμός.

$$+ \cdot - = - \quad \text{και} \quad - \cdot + = -$$

Παραδείγματα:

$$(+2) \cdot (+3) = +6$$

$$(+4) \cdot (-5) = -20$$

$$(-3) \cdot (+3) = -9$$

Ας δούμε τις παρακάτω πράξεις:

$$\begin{aligned} (-5) \cdot (+4) &= -20 \\ (-5) \cdot (+3) &= -15 \\ (-5) \cdot (+2) &= -10 \\ (-5) \cdot (+1) &= -5 \\ (-5) \cdot 0 &= 0 \\ (-5) \cdot (-1) &= \dots \\ (-5) \cdot (-2) &= \dots \end{aligned}$$



Οι αριθμοί αυξάνονται κατά 5.

Αν συνεχίσουμε με τον ίδιο τρόπο θα πρέπει να είναι:

$$(-5) \cdot (-1) = +5$$

$$(-5) \cdot (-2) = +10$$

κλπ.

Διαπιστώνουμε ότι:

Το γινόμενο δύο **αρνητικών** αριθμών είναι **θετικός** αριθμός.



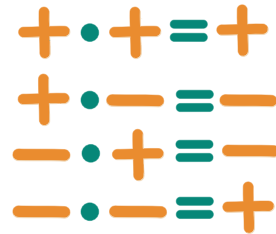
Παραδείγματα:

$$(-2) \cdot (-3) = +6 \quad \text{και} \quad (-1) \cdot (-1) = +1$$

Γενικά:

Για να **πολλαπλασιάσουμε** δύο ακέραιους αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο βάζουμε:

- το πρόσημο « + », αν είναι **ομόσημοι**.
- το πρόσημο « - », αν είναι **ετερόσημοι**.



Γινόμενο πολλών παραγόντων

Για να υπολογίσουμε ένα γινόμενο πολλών παραγόντων, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο βάζουμε:

- το πρόσημο « + », αν το πλήθος των **αρνητικών** παραγόντων είναι **άρτιο** (ζυγό).
- το πρόσημο « - », αν το πλήθος των **αρνητικών** παραγόντων είναι **περιττό** (μονό).

Γενικά το πρόσημο ενός γινομένου καθορίζεται από το πλήθος των αρνητικών παραγόντων.

Αν τουλάχιστον ένας παράγοντας είναι **μηδέν**, τότε και το γινόμενο είναι ίσο με **μηδέν**.

Παραδείγματα:

$$\bullet \quad \underline{(-1)} \underline{(+3)} \underline{(-1)} \underline{(-4)} \underline{(-2)} = +(1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 2) = +24 \quad \leftarrow \text{Θετικός}$$

αρνητικοί παράγοντες 4 (άρτιος)

$$\bullet \quad \underline{(-2)} \underline{(+3)} \underline{(-1)} \underline{(-2)} \underline{(+3)} = -(2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3) = -36 \quad \leftarrow \text{Αρνητικός}$$

αρνητικοί παράγοντες 3 (περιττός)

Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση



1. Αν $\alpha = -1$, $\beta = +3$ και $\gamma = -5$, να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

- i. $\alpha + \beta + \gamma$ ii. $\beta - \alpha - 3\gamma$ iii. $\alpha\gamma - \alpha\beta$

Λύση:

i. $\alpha + \beta + \gamma = (-1) + (+3) + (-5) = +3 - 6 = -3$

ii. $\beta - \alpha - 3\gamma = (+3) - (-1) - 3(-5) = +3 + 1 + 15 = +19$

iii. $\alpha\gamma - \alpha\beta = (-1)(-5) - (-1)(+3) = (+5) - (-3) = +5 + 3 = +8$

Σκεφτόμαστε:



Δύο ομάδες ανταγωνίζονται στην διελκυστίνδα.

Ο συμπαίκτης του συμπαίκτη μου είναι συμπαίκτης μου. →

$$+ \cdot + = +$$

Ο συμπαίκτης του αντιπάλου μου είναι αντίπαλός μου. →

$$+ \cdot - = -$$

Ο αντίπαλος του συμπαίκτη μου είναι αντίπαλός μου. →

$$- \cdot + = -$$

Ο αντίπαλος του αντιπάλου μου είναι συμπαίκτης μου. →

$$- \cdot - = +$$

Εξασκούμε



σε όσα έμαθα



1

Συμπλήρωσε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

- α) Το γινόμενο δύο ομόσημων ακεραίων είναι πάντα αριθμός.
- β) Το γινόμενο δύο ετερόσημων ακεραίων είναι πάντα αριθμός.
- γ) Το πρόσημο ενός γινομένου καθορίζεται από το πλήθος των παραγόντων.
- δ) Αν το γινόμενο δύο ακεραίων είναι αρνητικό τότε οι αριθμοί είναι

2

Υπολόγισε τα γινόμενα:

- α) $(+2) \cdot (+3) = \dots\dots\dots$ β) $(-4) \cdot (+6) = \dots\dots\dots$ γ) $(-6) \cdot (-7) = \dots\dots\dots$
- δ) $(+5) \cdot (-5) = \dots\dots\dots$ ε) $(-15) \cdot 0 = \dots\dots\dots$ στ) $-1 \cdot (+207) = \dots\dots\dots$

3

Υπολόγισε την τιμή των παραστάσεων:

- α) $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$ β) $(-1) \cdot (-2) \cdot (+3) \cdot (-4) \cdot (-5)$
- γ) $(+5) \cdot (-10) \cdot (+5) \cdot (-10) \cdot (-2)$

4

Συμπλήρωσε τον πίνακα:

•	+2	-3	-5	0
-6				
-1				
+3				
4				

5

Υπολόγισε την τιμή των παραστάσεων:

- α) $3 \cdot (-4 + 1) - 2 \cdot (-4 + 5 - 3)$ β) $(-7 + 11 - 13) \cdot (-5 + 4)$
- γ) $(+6) \cdot (-3) + (-1) \cdot (+4) - 2 \cdot (-5) \cdot (-4)$ δ) $2 \cdot (-1 - 2 \cdot 2) - 3 \cdot [6 \cdot (-2) - 1 \cdot (-8)]$

6

Δίνονται οι αριθμοί:

$$\alpha = 5 - (-3) + 2 \cdot [13 + (-11)] \quad \text{και} \quad \beta = 4 \cdot (4 - 6) + 2 \cdot [4 - (+2)].$$

α) Υπολόγισε τις τιμές των αριθμών α και β .

β) Αν είναι $\alpha = 12$ και $\beta = -4$, υπολόγισε τις τιμές των παραστάσεων:

- i. 3β ii. $5\alpha - \beta$ iii. $\beta - 2\alpha$ iv. $\alpha - \alpha\beta$

7

Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα, αν γνωρίζεις ότι οι αριθμοί α και β είναι ακέραιοι.

$\alpha \cdot \beta$	$\alpha + \beta$	Αριθμοί α και β
+6	-5	$\alpha = -3$ και $\beta = -2$
+8	+9	$\alpha = \dots$ και $\beta = \dots$
+30	-11	$\alpha = \dots$ και $\beta = \dots$
-12	-4	$\alpha = \dots$ και $\beta = \dots$
-1	$\alpha = \dots$ και $\beta = \dots$

8

Συμπλήρωσε τον αριθμό που λείπει ώστε να αληθεύουν οι παρακάτω ισότητες:

α) $(+2) \cdot (-3) = (-1) \cdot (\dots)$ β) $-4 \cdot (-6) = (+2) \cdot (\dots)$

γ) $(+8) \cdot (+10) = (-5) \cdot (\dots)$ δ) $-4 \cdot 5 = 10 \cdot (\dots)$

9

Σε ένα παιχνίδι με κάρτες γνωρίζουμε ότι κάθε πράσινη κάρτα μετράει για +3 πόντους και κάθε μαύρη για -2. Παρακάτω φαίνεται το «χέρι» της Μαρίας και του Φώτη. Ποιος έχει τους περισσότερους πόντους;



2.5 | Δυνάμεις ακεραίων με εκθέτη μη μηδενικό φυσικό

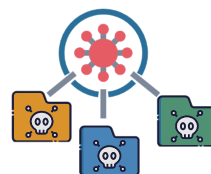
ΕΡΕΥΝΩ



Ένας υπολογιστής μολύνθηκε από έναν ιό, ο οποίος έχει την ιδιότητα να καταστρέφει τα ηλεκτρονικά αρχεία με τον εξής τρόπο:

Κάθε μολυσμένο αρχείο μολύνει, με τη σειρά του, τρία άλλα αρχεία μέσα σε μία ώρα λειτουργίας του υπολογιστή.

Πόσα αρχεία θα έχουν μολυνθεί σε πέντε ώρες;



Δυνάμεις ακεραίων

Έχουμε μελετήσει τις δυνάμεις των φυσικών αριθμών με εκθέτη μη μηδενικό φυσικό. Γνωρίζουμε ότι η **δύναμη** του a στην n είναι:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n \text{ παράγοντες}$$

Ο αριθμός a λέγεται **βάση** της δύναμης και ο αριθμός n λέγεται **εκθέτης**.

Επίσης ισχύει ότι: $a^1 = a$.

Ο παραπάνω ορισμός ισχύει και στην περίπτωση που ο αριθμός a είναι ένας **ακέραιος** αριθμός.

Παραδείγματα:

$$(+3)^2 = (+3) \cdot (+3) = +9$$

$$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$$

$$(-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = +25$$

Πρόσημο δύναμης

Γνωρίζουμε ότι το πρόσημο γινομένου καθορίζεται από το πλήθος των αρνητικών παραγόντων. Διαπιστώνουμε ότι:

Δύναμη με βάση **θετικό** αριθμό είναι **θετικός** αριθμός.

Θυμόμαστε



$$\text{Αν } a > 0, \text{ τότε } a^n > 0.$$

Παράδειγμα:

$$\underset{\uparrow}{(+2)}^3 = (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) = \underset{\uparrow}{+}8$$

θετικός

θετικός

Δύναμη με βάση **αρνητικό** αριθμό και εκθέτη **άρτιο** είναι **θετικός** αριθμός.

Αν $a < 0$ και n **άρτιος**, τότε $a^n > 0$.

Παράδειγμα:

$$\underset{\uparrow}{(-2)}^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = \underset{\uparrow}{+}16$$

αρνητικός

θετικός

Δύναμη με βάση **αρνητικό** αριθμό και εκθέτη **περιττό** είναι **αρνητικός** αριθμός.

Αν $a < 0$ και n **περιττός**, τότε $a^n < 0$.

Παράδειγμα:

$$\begin{array}{c} \text{περιττός} \\ (-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8 \\ \text{αρνητικός} \qquad \qquad \qquad \text{αρνητικός} \end{array}$$



1. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις:

α) $(-2)^2$, $(-2)^3$, $(-2)^4$, $(-2)^5$.

β) -2^2 , -2^3 , -2^4 , -2^5 .

Λύση:

α) Η βάση -2 είναι αρνητικός αριθμός. Όταν ο εκθέτης είναι άρτιος το αποτέλεσμα της δύναμης είναι θετικό και όταν ο εκθέτης είναι περιττός το αποτέλεσμα της δύναμης είναι αρνητικό.

$$(-2)^2 = +4, (-2)^3 = -8, (-2)^4 = +16, (-2)^5 = -32.$$

β) Εδώ η βάση είναι ο αριθμός 2. Το « $-$ » είναι το πρόσημο της δύναμης.

$$-2^2 = -4, -2^3 = -8, -2^4 = -16, -2^5 = -32.$$

2. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $3 \cdot (-2)^2 + (2 - 5)^3$.

Λύση:

$$3 \cdot (-2)^2 + (2 - 5)^3 = 3 \cdot (-2)^2 + (-3)^3 = 3 \cdot (+4) + (-27) = +12 - 27 = -15$$



Εξασκούμαι



σε όσα έμαθα

1

Χαρακτήρισε ως Σωστές ή Λάθος τις προτάσεις που ακολουθούν βάζοντας ένα x στην κατάλληλη θέση.

α) Ισχύει ότι $(-2)^2 = 2^2$.

β) Ισχύει ότι $(-2)^3 = 2^3$.

γ) Ο αριθμός $(-12)^{12}$ είναι θετικός αριθμός.

δ) Ο αριθμός $(-13)^{21}$ είναι θετικός αριθμός.

ε) Για κάθε αρνητικό αριθμό a ισχύει ότι $a^2 > a^3$.

Σωστό **Λάθος**

2

Υπολόγισε τις δυνάμεις:

α) $(+2)^2 = \dots\dots\dots$

β) $(+2)^3 = \dots\dots\dots$

γ) $(-3)^2 = \dots\dots\dots$

δ) $(-3)^3 = \dots\dots\dots$

ε) $(-7)^2 = \dots\dots\dots$

στ) $(-4)^3 = \dots\dots\dots$

ζ) $(-1)^{25} = \dots\dots\dots$

η) $(-1)^{100} = \dots\dots\dots$

θ) $-5^2 = \dots\dots\dots$

ι) $-1^4 = \dots\dots\dots$

ια) $-3^1 = \dots\dots\dots$

3

Συμπλήρωσε τον πίνακα.

Δύναμη	Βάση	Εκθέτης	Πρόσημο Γινομένου
$(-10)^{10}$	-10	10	+
$(+4)^{19}$			
	-3	27	
	-2	12	
12^{35}			
$(-1)^{101}$			

4

Σύγκρινε τους αριθμούς, χρησιμοποιώντας τα σύμβολα $<$, $>$ ή $=$.

α) $(-2)^3 \dots\dots\dots 8$

β) $-2^2 \dots\dots\dots 2^2$

γ) $-1^7 \dots\dots\dots (-1)^7$

δ) $1^{100} \dots\dots\dots 100^1$

ε) $-(-3)^3 \dots\dots\dots 27$

5

Βάλε τις δυνάμεις σε αύξουσα σειρά: $(-10)^4$, 5^1 , $(-7)^3$ και 1^{25} .

6

Υπολόγισε τις τιμές των παραστάσεων:

• $A = (-2)^5 - 4^2 + 1^8 - (-5)^1$

• $B = (-1)^5 + (-1)^6 + (-1)^7 + (-1)^8$

• $\Gamma = (2^3 - 3^2)^2 - (4 - 6)^3$

• $\Delta = (2 \cdot 5 - 2 \cdot 2^3)^2 + (-3)^3$

7

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = [(-3)^2 - 2^3] \cdot (1^5 + 3^2)$ και $\beta = (-3)^3 + (-3)^2 + (-3)^1 + 1^3$.

i. Υπολόγισε τις τιμές των α και β .

ii. Στην συνέχεια βρες την τιμή της παράστασης: $\Pi = (\alpha + \beta)^2$

Ανακεφαλαίωση (Ακέραιοι αριθμοί)

Ακέραιοι αριθμοί είναι οι φυσικοί αριθμοί μαζί με τους αντίστοιχους αρνητικούς αριθμούς.

- Οι αριθμοί που έχουν πρόσημο + ή δεν έχουν πρόσημο λέγονται **θετικοί**.
 - Οι αριθμοί που έχουν πρόσημο – λέγονται **αρνητικοί**.
- π.χ. Οι αριθμοί 2, +3, +14 είναι θετικοί αριθμοί ενώ οι αριθμοί -1, -20, -98 είναι αρνητικοί.

Ομόσημοι λέγονται οι αριθμοί που έχουν το ίδιο πρόσημο.

Ετερόσημοι λέγονται οι αριθμοί που έχουν διαφορετικό πρόσημο.

π.χ. οι αριθμοί +3 και 7 είναι ομόσημοι ενώ οι αριθμοί +4, -6 είναι ετερόσημοι.

Απόλυτη τιμή ενός αριθμού α ονομάζουμε την **απόσταση** του σημείου με τετμημένη α από την αρχή 0 του άξονα και τη συμβολίζουμε με $|a|$.

Αντίθετοι ονομάζονται δύο αριθμοί που είναι ετερόσημοι και έχουν την ίδια απόλυτη τιμή.

π.χ. Οι αριθμοί 5 και -5 είναι αντίθετοι.

Πώς συγκρίνουμε ακέραιους αριθμούς:

Ένας θετικός ακέραιος είναι πάντα μεγαλύτερος από έναν αρνητικό ακέραιο αριθμό.

π.χ. $50 > -19$, $1 > -100$

Ανάμεσα σε δύο θετικούς ακεραίους **μεγαλύτερος** είναι εκείνος που έχει την **μεγαλύτερη** απόλυτη τιμή.

π.χ. $+31 > +26$

Ανάμεσα σε δύο αρνητικούς ακεραίους **μεγαλύτερος** είναι εκείνος που έχει την **μικρότερη** απόλυτη τιμή.

π.χ. $-5 > -9$, $-3 > -24$

Πρόσθεση ακεραίων:

Για να προσθέσουμε δύο ομόσημους ακέραιους αριθμούς, προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο άθροισμα βάζουμε το πρόσημό τους.

π.χ. $(+3) + (+4) = +7$, $(-3) + (-2) = -5$

Για να προσθέσουμε δύο ετερόσημους ακέραιους αριθμούς, αφαιρούμε από τη μεγαλύτερη τη μικρότερη απόλυτη τιμή και στη διαφορά βάζουμε το πρόσημο του ακεραίου με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

π.χ. $(+6) + (-4) = +2$, $(-8) + (+4) = -4$

Αφαίρεση ακεραίων:

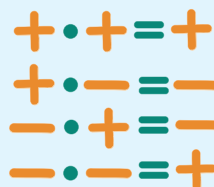
Για να αφαιρέσουμε από έναν αριθμό α τον αριθμό β, προσθέτουμε στον α τον αντίθετο του β.

π.χ. $(+7) - (+3) = (+7) + (-3) = +4$, $(-3) - (+5) = (-3) + (-5) = -8$

Πολλαπλασιασμός ακεραίων:

Για να **πολλαπλασιάσουμε** δύο ακέραιους αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο βάζουμε:

το πρόσημο « + », αν είναι **ομόσημοι** και
το πρόσημο « - », αν είναι **ετερόσημοι**.



Δυνάμεις ακεραίων:

Δύναμη με βάση θετικό αριθμό είναι πάντα θετικός αριθμός.

Δύναμη με βάση αρνητικό αριθμό και εκθέτη άρτιο είναι θετικός αριθμός.

Δύναμη με βάση αρνητικό αριθμό και εκθέτη περιττό είναι αρνητικός αριθμός

Αυτοαξιολόγηση (Ακέραιοι αριθμοί)

Χαρακτήρισε ως Σωστές ή Λάθος τις προτάσεις, βάζοντας ένα **x** στην κατάλληλη θέση:

	Σωστό	Λάθος
1. Ο αριθμός 7 είναι φυσικός και ακέραιος αριθμός.		
2. Ο αριθμός -3 είναι φυσικός και ακέραιος αριθμός.		
3. Ο αριθμός 0 δεν είναι ούτε θετικός ούτε αρνητικός.		
4. Οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί και το 0 αποτελούν τους φυσικούς αριθμούς.		
5. Οι αρνητικοί αριθμοί αναπαρίστανται συνήθως ως οι αριθμοί αριστερά του μηδέν.		
6. Ισχύει ότι $-2 > 1$.		
7. Για κάθε ακέραιο αριθμό a ισχύει ότι $ a > 0$.		
8. Ισχύει ότι $ -4 = 4$.		
9. Ισχύει ότι $ +5 = -5$.		
10. Ισχύει ότι $ -10 > 8$.		
11. Αν $a + b$ θετικός αριθμός τότε a και b θετικοί αριθμοί.		
12. Το άθροισμα ενός θετικού και ενός αρνητικού αριθμού είναι πάντα αρνητικός αριθμός.		
13. Η αφαίρεση δύο ακεραίων αριθμών εκφράζει πάντα μείωση.		
14. Οι αντίθετοι αριθμοί έχουν άθροισμα ίσο με το μηδέν.		
15. Ισχύει ότι $-(-7) = +7$.		
16. Το γινόμενο $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot \dots \cdot (-1)$ (100 φορές) είναι αρνητικός αριθμός.		
17. Ισχύει ότι $3 \cdot (-2) = -2 \cdot 3$.		
18. Το γινόμενο αρνητικών αριθμών είναι πάντα αρνητικός αριθμός.		
19. Ισχύει ότι $(-2)^4 = 2^4 = 16$.		
20. Ισχύει ότι $(-3)^3 = 3^3 = 27$.		
21. Δύναμη με άρτιο εκθέτη είναι πάντα θετικός αριθμός.		
22. Δύναμη με αρνητική βάση είναι πάντα αρνητικός αριθμός.		
23. Ισχύει ότι $(-1)^{21} > (-1)^4$.		
24. Στην παράσταση $-1^2 + 2^2 - 3$ μετά την εκτέλεση των πράξεων παίρνουμε αποτέλεσμα 2.		
25. Η χρήση των παρενθέσεων στην παράσταση $(+2)^3 - 2 \cdot 4 + 7^3$ είναι περιττή.		

Σε αυτό το σημείο, θα πρέπει να είσαι σε θέση να έχεις επιτύχει όλα τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα. Γύρνα στην αρχή της θεματικής ενότητας και σημείωσε ✓ στα αντίστοιχα κουτάκια. Υπάρχουν στόχοι που αισθάνεσαι ότι δεν έχεις κατακτήσει πλήρως;



- Αναγνωρίζω την ανάγκη εισαγωγής των ρητών αριθμών για την επίλυση προβλημάτων που δε λύνονται στο πλαίσιο των ακεραίων.
- Διερευνώ διαφορετικές αναπαραστάσεις ρητών αριθμών (δεκαδική, κλασματική) και κάνω μετατροπές από τη μία μορφή στην άλλη.
- Συγκρίνω και διατάσσω ρητούς, τους αναπαριστώ στην αριθμογραμμή και αναγνωρίζω ότι ένας ρητός δεν έχει επόμενο.
- Αναγνωρίζω την απόλυτη τιμή ρητών αριθμών ως την απόστασή τους από το μηδέν (0) στην αριθμογραμμή.
- Επεκτείνω στους ρητούς την πρόσθεση, την αφαίρεση και τον πολλαπλασιασμό των ακεραίων.
- Διαιρώ ρητούς μέσω του πολλαπλασιασμού του ενός με τον αντίστροφο του άλλου.
- Κάνω πράξεις μεταξύ ρητών αριθμών, σε κλασματική ή δεκαδική μορφή.
- Επεκτείνω τις ιδιότητες των πράξεων των ακεραίων στους ρητούς.
- Διατυπώνω και χρησιμοποιώ τον ορισμό των δυνάμεων με βάση ρητό και εκθέτη φυσικό $v > 0$.
- Προσδιορίζω το πρόσημο της δύναμης ρητού αριθμού με βάση τον ορισμό.
- Υπολογίζω την τιμή μιας αριθμητικής παράστασης με ρητούς κάνοντας χρήση της προτεραιότητας των πράξεων.
- Αξιοποιώ την τυποποιημένη μορφή των ρητών αριθμών για την αναπαράσταση φυσικών μεγεθών μεγάλου μεγέθους.
- Χρησιμοποιώ τους ρητούς στην επίλυση προβλημάτων σε μαθηματικό και ρεαλιστικό πλαίσιο.



3.1: Η έννοια του ρητού

3.2: Απόλυτη τιμή ρητού - Σύγκριση και διάταξη ρητών – Αντίθετοι ρητοί

3.3: Πρόσθεση και αφαίρεση ρητών

3.4: Πολλαπλασιασμός ρητών – Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού – Αντίστροφοι ρητοί.

3.5: Διαίρεση ρητών

3.6: Δυνάμεις ρητών με εκθέτη μη μηδενικό φυσικό

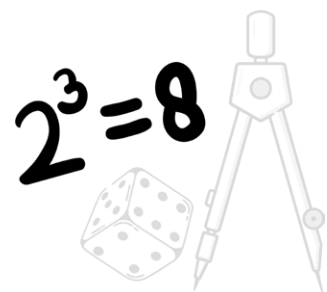
3.7: Τυποποιημένη μορφή μεγάλων αριθμών + Ανακεφαλαίωση / Αυτοαξιολόγηση

Στην ενότητα αυτή θα γνωρίσουμε τους ρητούς αριθμούς, τη μορφή τους και πώς συνδέονται με τους ακέрайους. Θα δούμε επίσης δυνάμεις ρητών αριθμών και την εφαρμογή τους στη μοντελοποίηση μεγάλων μεγεθών, όπως οι αποστάσεις στο διάστημα ή τα χρηματικά ποσά.

Πώς μπορείς να υπολογίσεις εκπτώσεις ή αναλογίες στην καθημερινότητα;

Μπορείς να σκεφτείς παραδείγματα όπου χρησιμοποιείς ρητούς αριθμούς στην καθημερινότητά;

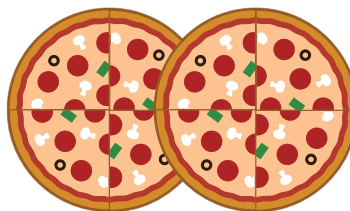
Είσαι έτοιμος/η να γνωρίσεις τους ρητούς αριθμούς και τις πράξεις τους;



3.1 | Η έννοια του ρητού



Προσπάθησε να μοιράσεις 2 ίδιες πίτσες σε 4 άτομα. Τι μέρος της πίτσας αντιστοιχεί στο κάθε άτομο;



Κλάσματα

Σε αρκετές περιπτώσεις η ανάγκη να μετρηθούν μεγέθη μικρότερα μιας μονάδας μέτρησης επιβάλλει την εισαγωγή των κλασμάτων.

Κλάσμα ή **κλασματικός αριθμός** ονομάζεται κάθε αριθμός $\frac{a}{b}$, όπου a, b φυσικοί αριθμοί με $b \neq 0$.

Με τη βοήθεια ενός κλάσματος μπορούμε να εκφράσουμε **ένα μέρος του όλου**, δηλαδή ένα κομμάτι μίας ολόκληρης ποσότητας που έχει χωριστεί σε ίσα τμήματα (κομμάτια).

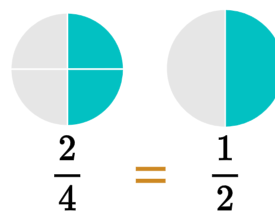
αριθμητής	← πόσα μέρη πήραμε
παρονομαστής	← γραμμή κλάσματος
	← σε πόσα ίσα μέρη χωρίσαμε



Ο αριθμητής και ο παρονομαστής ονομάζονται **όροι** του κλάσματος.

Αν τώρα παρατηρήσουμε τα κλάσματα $\frac{1}{2}$ και $\frac{2}{4}$ θα δούμε ότι εκφράζουν το ίδιο τμήμα του όλου.

Και στις δύο περιπτώσεις έχουμε το μισό της συνολικής ποσότητας, δηλαδή το 0,5.



Δύο κλάσματα μπορούν να εκφράζουν την ίδια αριθμητική ποσότητα. Τα κλάσματα αυτά λέγονται **ισοδύναμα** ή **ίσα**.

Όταν δύο κλάσματα είναι **ισοδύναμα** ή **ίσα** τότε τα «χιαστί» γινόμενα είναι ίσα και, αντίστροφα, αν τα «χιαστί» γινόμενα είναι ίσα τότε και τα δύο κλάσματα είναι ισοδύναμα ή ίσα.

Αν $\frac{a}{b} = \frac{\gamma}{\delta}$ τότε $a \cdot \delta = b \cdot \gamma$ και αντιστρόφως.

Παράδειγμα:

Τα χιαστί γινόμενα των $\frac{1}{5}$ και $\frac{2}{10}$ είναι:

- $1 \cdot 10 = 10$ και
- $2 \cdot 5 = 10$.

Τα χιαστί γινόμενα είναι ίσα, άρα τα κλάσματα είναι ισοδύναμα, δηλαδή: $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$.

Κατασκευή Ισοδύναμων κλασμάτων:

Αν **πολλαπλασιάσουμε** τους όρους ενός κλάσματος με τον ίδιο μη μηδενικό φυσικό αριθμό, τότε προκύπτει κλάσμα ισοδύναμο.

Παράδειγμα: $\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{2}{4} = \frac{2 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{10}{20} = \dots$

Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να κατασκευάσουμε απεριόριστο πλήθος ισοδύναμων κλασμάτων.

Αν **διαιρέσουμε** τους όρους ενός κλάσματος με τον ίδιο μη μηδενικό φυσικό αριθμό, τότε προκύπτει κλάσμα ισοδύναμο.

Παράδειγμα: $\frac{12}{18} = \frac{12:2}{18:2} = \frac{6}{9} = \frac{6:3}{9:3} = \frac{2}{3}$

Η μέθοδος αυτή ονομάζεται **απλοποίηση** καθώς το τελικό κλάσμα έχει μικρότερους όρους από το αρχικό.

Το κλάσμα εκείνο που δεν μπορεί να απλοποιηθεί άλλο ονομάζεται **ανάγωγο**.

Παράδειγμα: Το κλάσμα $\frac{2}{3}$ είναι ανάγωγο.

Σε ένα ανάγωγο κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$, δεν υπάρχουν άλλοι κοινοί διαιρέτες αριθμητή και παρονομαστή εκτός από την μονάδα, δηλαδή ο αριθμητής και ο παρονομαστής είναι πρώτοι μεταξύ τους: $\text{ΜΚΔ}(\alpha, \beta) = 1$.

Όταν δύο ή περισσότερα κλάσματα έχουν τον ίδιο παρονομαστή λέγονται **ομώνυμα** ενώ όταν έχουν διαφορετικό παρονομαστή λέγονται **ετερώνυμα**.

Παράδειγμα: τα κλάσματα $\frac{3}{5}$ και $\frac{4}{5}$ είναι ομώνυμα ενώ τα κλάσματα $\frac{3}{7}$ και $\frac{2}{3}$ είναι ετερώνυμα.

Δεκαδικοί αριθμοί

Το κλάσμα επίσης, εκφράζει το **πηλίκο** της διαίρεσης του αριθμητή με τον παρονομαστή.

$$\frac{\alpha}{\beta} = \alpha : \beta, \text{ με } \beta \neq 0.$$

Παραδείγματα: $\frac{1}{2} = 1 : 2 = 0,5$

$$\frac{5}{4} = 5 : 4 = 1,25$$

- Κάθε ακέραιος αριθμός α μπορεί να πάρει τη μορφή κλάσματος με παρονομαστή το 1, γιατί $\alpha = \alpha : 1 = \frac{\alpha}{1}$.

Δεκαδικό κλάσμα λέγεται το κλάσμα που έχει παρονομαστή 10, 100, 1.000, ...

Κάθε δεκαδικό κλάσμα γράφεται ως δεκαδικός αριθμός με τόσα δεκαδικά ψηφία όσα μηδενικά έχει ο παρονομαστής του.

Παραδείγματα:

- $\frac{15}{10} = 1,5$
- $\frac{35}{100} = 0,35$ (Ο αριθμός $\frac{35}{100}$ γράφεται και ως 35% αν εκφράζει ποσοστό)
- $\frac{50.780}{1.000} = 50,780$ (ή 50,78)

Οι δεκαδικοί αριθμοί και τα δεκαδικά κλάσματα είναι διαφορετικές αναπαραστάσεις των ίδιων αριθμών.

Σε κάθε δεκαδικό αριθμό διακρίνουμε το **ακέραιο μέρος** και το **δεκαδικό μέρος** του. Αυτά διαχωρίζονται από την **υποδιαστολή**.

Ακέραιο	Δεκαδικό
Μέρος	Μέρος
$1.754,2396$	

Αξία θέσης ψηφίων

Στον αριθμό 1.754,2396 το ψηφίο 2 αντιστοιχεί στα **δέκατα**, το ψηφίο 3 αντιστοιχεί στα **εκατοστά**, το ψηφίο 9 αντιστοιχεί στα **χιλιοστά** κ.ο.κ.

Ρητοί αριθμοί

Αν θεωρήσουμε ότι οι όροι ενός κλάσματος μπορούν να είναι ακέραιοι αριθμοί, τότε οι κλασματικοί αυτοί αριθμοί δημιουργούν ένα σύνολο αριθμών που ονομάζονται **ρητοί** αριθμοί.

Όλοι οι αριθμοί που γνωρίζουμε έως τώρα μπορούν να πάρουν την μορφή κλάσματος με ακέραιους όρους.

Γενικά:

Ρητοί ονομάζονται οι αριθμοί που μπορούν να γραφούν σε μορφή κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου οι αριθμοί α και β είναι ακέραιοι με $\beta \neq 0$.

Έχουμε μελετήσει τους θετικούς και τους αρνητικούς ακέραιους αριθμούς. Έχουμε δει τις έννοιες των ομόσημων και ετερόσημων ακεραίων. Οι έννοιες αυτές μπορούν να επεκταθούν και στους ρητούς αριθμούς.

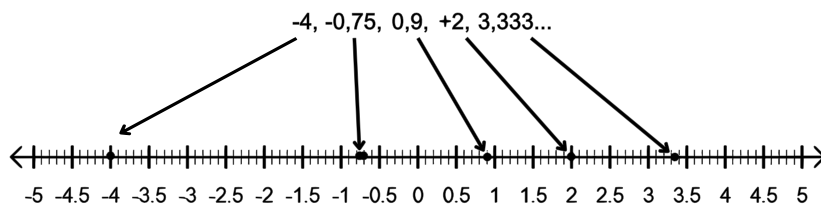
Θυμόμαστε – μαθαίνουμε ότι:

- **Θετικοί** λέγονται οι ρητοί που έχουν πρόσημο + ή δεν έχουν πρόσημο (π.χ. +2, + $\frac{1}{2}$, 0,35) ενώ **αρνητικοί** λέγονται οι ρητοί έχουν το πρόσημο - (π.χ. -5, -0,3, - $\frac{3}{4}$).
- **Ομόσημοι** λέγονται οι ρητοί που έχουν το ίδιο πρόσημο. (π.χ. +6, + $\frac{1}{4}$)
- **Ετερόσημοι** λέγονται οι αριθμοί που έχουν διαφορετικό πρόσημο. (π.χ. +0,15, -5)

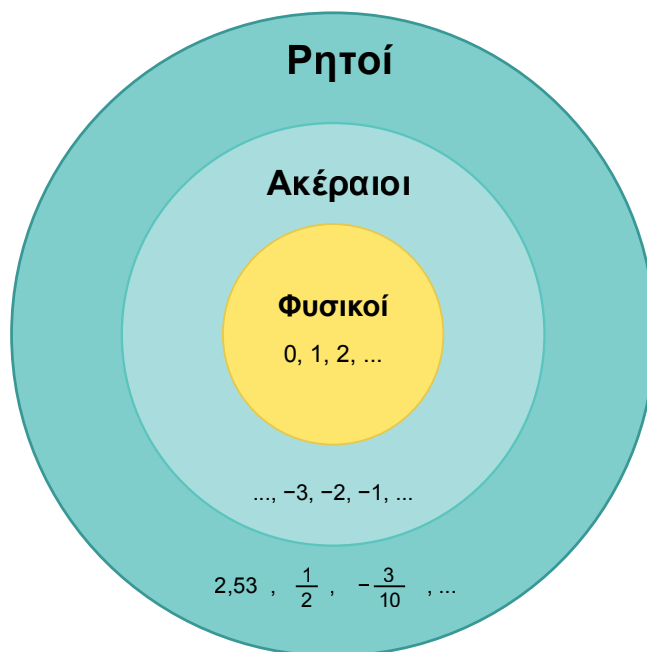
Παράσταση ρητών στην αριθμογραμμή:

Κάθε ρητός αριθμός παριστάνεται με ένα σημείο πάνω στην ευθεία των αριθμών.

Παραδείγματα: $-4 = -\frac{4}{1}$, $-0,75 = -\frac{3}{4}$, $0,9 = \frac{9}{10}$, $+2 = +\frac{2}{1}$, $3,333\dots = \frac{10}{3}$, κλπ.

**Συνοπτικά:**

- **Φυσικοί αριθμοί:** $0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$
- **Ακέραιοι αριθμοί:** $\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$
- **Οι ρητοί αριθμοί** είναι όλοι οι γνωστοί μας έως τώρα αριθμοί: φυσικοί, ακέραιοι, κλάσματα και οι αντίστοιχοι δεκαδικοί (θετικοί ή αρνητικοί) αριθμοί.





1. Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε δεκαδικούς αριθμούς.

α) $\frac{3}{4}$ β) $\frac{5}{3}$ γ) $\frac{45}{100}$

Λύση: Από την εκτέλεση των αντίστοιχων διαιρέσεων, έχουμε:

α) $\frac{3}{4} = 3:4 = 0,75$

β) $\frac{5}{3} = 5:3 = 1,666\dots$

γ) $\frac{45}{100} = 0,45$

2. Να μετατρέψετε τους δεκαδικούς αριθμούς σε ανάγωγα κλάσματα.

α) 0,4 β) 12,35

Λύση:

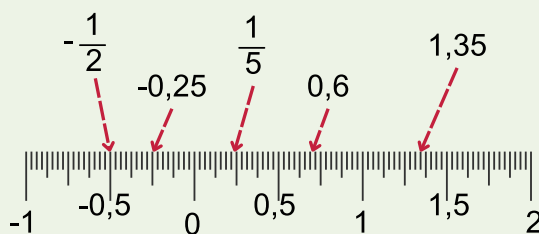
α) $0,4 = \frac{4}{10} = \frac{4:2}{10:2} = \frac{2}{5}$

β) $12,35 = \frac{1.235}{100} = \frac{1.235:5}{100:5} = \frac{247}{20}$

3. Να τοποθετήσετε στην ευθεία των ρητών τους αριθμούς:

$0,6$, $\frac{1}{5}$, $-\frac{1}{2}$, $-0,25$, $1,35$

Λύση:



Εξασκούμε



σε όσα έμαθα



1

Τοποθέτησε ένα x στα κατάλληλα τετραγωνάκια του πίνακα.

Αριθμός	Φυσικός	Ακέραιος	Ρητός
5			
-1,7			
$\frac{2}{3}$			
-10			
0			

2

Χαρακτήρισε ως Σωστές ή Λάθος τις προτάσεις που ακολουθούν βάζοντας ένα x στην κατάλληλη θέση.

- α) Ο αριθμός $-\frac{6}{2}$ είναι ακέραιος.
 β) Κάθε ακέραιος αριθμός είναι και ρητός.
 γ) Κάθε ακέραιος αριθμός είναι και φυσικός.
 δ) Ομώνυμα κλάσματα είναι τα κλάσματα με ίδιο παρονομαστή.
 ε) Το κλάσμα $\frac{15}{7}$ εκφράζει το πηλίκο της διαίρεσης 7:15.

Σωστό Λάθος

3

Ποια από τα παρακάτω κλάσματα είναι ανάγωγα; Μετάτρεψε τα κλάσματα που δεν είναι ανάγωγα σε ανάγωγα κλάσματα.

- α) $\frac{60}{15}$ β) $\frac{24}{35}$ γ) $\frac{12}{15}$ δ) $\frac{19}{6}$ ε) $\frac{3}{18}$

4

Γράψε τα παρακάτω κλάσματα ως δεκαδικούς αριθμούς:

- α) $\frac{48}{10}$ β) $\frac{208}{100}$ γ) $\frac{530}{1.000}$ δ) $-\frac{10}{100}$ ε) $\frac{10.760}{10.000}$

5

Εξέτασε αν τα παρακάτω κλάσματα είναι ισοδύναμα.

- α) $\frac{5}{3}, \frac{15}{9}$ β) $\frac{4}{6}, \frac{6}{9}$ γ) $\frac{16}{7}, \frac{80}{35}$ δ) $\frac{21}{13}, \frac{19}{11}$ ε) $\frac{14}{15}, \frac{24}{25}$

6

Γράψε τα κλάσματα που ακολουθούν, ως δεκαδικούς αριθμούς εκτελώντας τις αντίστοιχες διαιρέσεις:

α) $\frac{45}{15}$

β) $\frac{1}{8}$

γ) $\frac{124}{3}$

δ) $-\frac{22}{7}$

ε) $-\frac{1}{20}$

7

Γράψε ως ανάγωγα κλάσματα τους δεκαδικούς αριθμούς:

α) 4,5

β) 0,31

γ) 44,1

δ) -2,5

ε) 0,02

8

Γράψε τους παρακάτω αριθμούς ως δεκαδικά κλάσματα και ως δεκαδικούς αριθμούς.

α) $-\frac{3}{2}$

β) $\frac{5}{4}$

γ) $\frac{63}{8}$

δ) $-\frac{7}{5}$

9

Αντιστοίχισε κάθε κλάσμα με τον ισοδύναμό του ακέραιο αριθμό.

$+\frac{25}{5}$	• 0
$-\frac{36}{12}$	• -1
$\frac{0}{8}$	• -3
$\frac{99}{99}$	• 1
$-\frac{100}{100}$	• 5

10

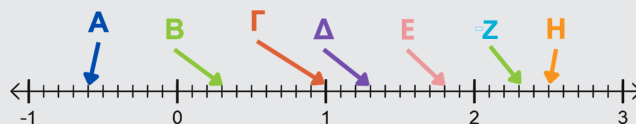
Τοποθέτησε στην ευθεία των ρητών αριθμών τους παρακάτω αριθμούς:

+4, -5, 0,6, -1,5, $\frac{1}{2}$, $\frac{6}{5}$, $-\frac{4}{5}$



11

Βρες τους αριθμούς που παριστάνονται με τα σημειωμένα γράμματα στον άξονα.



3.2 | Απόλυτη τιμή ρητού - Σύγκριση και διάταξη ρητών – Αντίθετοι ρητοί

ΕΞΕΡΧΕΝΩ

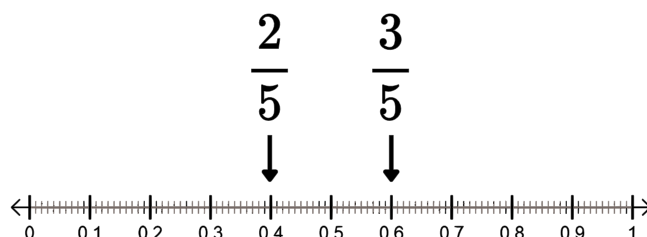


A. Ο Ανδρέας ισχυρίζεται ότι ο επόμενος ρητός αριθμός του $\frac{2}{5}$ είναι ο αριθμός $\frac{3}{5}$.

Συμφωνείτε με την άποψη αυτή;

B. Ο Βασίλης ισχυρίζεται ότι δεν μπορούμε να βρούμε τον πλησιέστερο αριθμό στο $\frac{1}{2}$.

Συμφωνείτε με την άποψη αυτή;



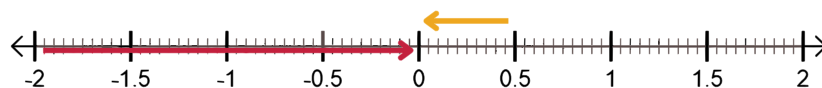
Απόλυτη τιμή ρητού

Ο ορισμός της απόλυτης τιμής που είδαμε στους ακέραιους αριθμούς επεκτείνεται και στους ρητούς αριθμούς.

Η **απόλυτη τιμή** ενός ρητού αριθμού a εκφράζει την **απόσταση** του σημείου με τετμημένη a από την αρχή O του άξονα.



π.χ. $|-2| = 2$, $|\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$



Αντίθετοι ονομάζονται δύο αριθμοί που είναι ετερόσημοι και έχουν την ίδια απόλυτη τιμή.

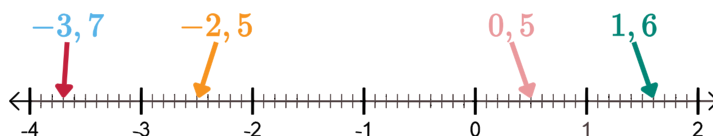
Ο **αντίθετος** του αριθμού a είναι ο αριθμός $-a$.

Παραδείγματα:

- Οι αριθμοί $+2,8$ και $-2,8$ είναι αντίθετοι.
- Οι αριθμοί $-\frac{1}{7}$ και $+\frac{1}{7}$ είναι αντίθετοι.

Σύγκριση και διάταξη ρητών

Ο **μεγαλύτερος** από δύο ρητούς αριθμούς είναι εκείνος που βρίσκεται **δεξιότερα** από τον άλλον πάνω στον άξονα των ρητών αριθμών.



Παραδείγματα:

$1,6 > 0,5$ και $-2,5 > -3,7$.

Γενικά:

Ο **μεγαλύτερος** από δύο **θετικούς** ρητούς είναι εκείνος που έχει την **μεγαλύτερη** απόλυτη τιμή.

Παράδειγμα: $+4,3 > +4,2$ γιατί $\frac{|+4,3|}{4,3} > \frac{|+4,2|}{4,2}$

Ο **μεγαλύτερος** από δύο **αρνητικούς** ρητούς είναι εκείνος που έχει την **μικρότερη** απόλυτη τιμή.

Παράδειγμα: $-0,1 > -0,2$ γιατί $\frac{|-0,1|}{0,1} < \frac{|-0,2|}{0,2}$

Σύγκριση κλασμάτων



Στο κυκλικό διάγραμμα φαίνεται πώς κατανέμονται οι ώρες ενός 24ώρου ενός μαθητή.

Τι μέρος του 24ώρου είναι κάθε δραστηριότητα;

Πόσο χρόνο διαρκεί κάθε δραστηριότητα;

Σε ποια δραστηριότητα δαπανά τον περισσότερο χρόνο;

Γράψε σε μια σειρά τους χρόνους που αντιστοιχούν σε κάθε μία από τις δραστηριότητες, ξεκινώντας από τον περισσότερο και καταλήγοντας στο λιγότερο χρόνο.

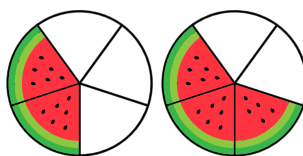


Για **θετικά** κλάσματα με **θετικούς** όρους ισχύουν τα εξής:

Ανάμεσα σε δύο **ομώνυμα** κλάσματα, μεγαλύτερο είναι εκείνο που έχει τον **μεγαλύτερο** αριθμητή.

Παράδειγμα:

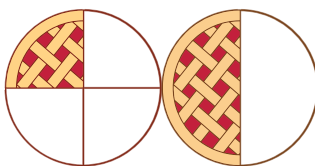
$\frac{2}{5} < \frac{3}{5}$



Από δύο κλάσματα με τον ίδιο αριθμητή **μεγαλύτερο** είναι εκείνο με τον **μικρότερο** παρονομαστή.

Παράδειγμα:

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$$



Για να συγκρίνουμε **ετερώνυμα** κλάσματα μπορούμε να τα μετατρέψουμε σε **ομώνυμα** και να συγκρίνουμε τους αριθμητές τους. Διαφορετικά, εκτελούμε τις διαιρέσεις και συγκρίνουμε τους αντίστοιχους δεκαδικούς αριθμούς.

Σύγκριση δεκαδικών αριθμών.

Αν δύο δεκαδικοί αριθμοί έχουν διαφορετικό ακέραιο μέρος, μεγαλύτερος είναι εκείνος που έχει το μεγαλύτερο ακέραιο μέρος.

Παράδειγμα:

$$8,43 > 5,96$$

Αν δύο δεκαδικοί αριθμοί έχουν το ίδιο ακέραιο μέρος, συγκρίνουμε τα δεκαδικά τους μέρη, ένα προς ένα από αριστερά προς τα δεξιά και βρίσκουμε το πρώτο ψηφίο στο οποίο διαφέρουν. Τότε ο αριθμός με το μεγαλύτερο ψηφίο είναι ο μεγαλύτερος.

Παράδειγμα:

$$3,132 > 3,1294$$



Εξασκούμε



σε όσα έμαθα

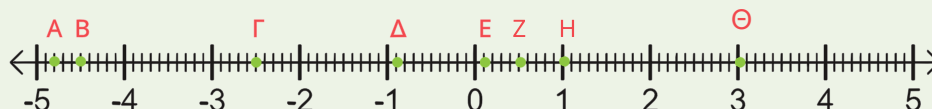
1. Να παραστήσετε πάνω σε μία αριθμογραμμή τα σημεία με τετμημένες:

1 , $+3$, $-4,5$, $-4,8$, $\frac{1}{2}$, $-\frac{5}{2}$, $0,1$ και $-0,9$.

Στη συνέχεια να συγκρίνετε τους παραπάνω αριθμούς.

Λύση:

Οι αριθμοί παριστάνονται στην αριθμογραμμή από τα σημεία $A=-4,8$, $B=-4,5$, $\Gamma=-\frac{5}{2}$, $\Delta=-0,9$, $E=0,1$, $Z=\frac{1}{2}$, $H=1$ και $\Theta=3$, που φαίνονται παρακάτω:



Έχουμε: $-4,8 < -4,5 < -\frac{5}{2} < -0,9 < 0,1 < \frac{1}{2} < 1 < 3$

2. Να βρείτε έναν ρητό αριθμό μεταξύ των $\frac{1}{3}$ και $\frac{1}{2}$.

Λύση:

Μετατρέπουμε τα κλάσματα $\frac{1}{3}$ και $\frac{1}{2}$ σε ομώνυμα: $\frac{2}{3} = \frac{2}{6}$ και $\frac{3}{2} = \frac{3}{6}$.

Επειδή δεν υπάρχει κάποιος ακέραιος μεταξύ των 2 και 3, πολλαπλασιάζουμε τους όρους των κλασμάτων με έναν ακέραιο, για παράδειγμα με το 10:

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{2 \cdot 10}{6 \cdot 10} = \frac{20}{60} \quad \text{και} \quad \frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{3 \cdot 10}{6 \cdot 10} = \frac{30}{60}.$$

Ο αριθμός $\frac{25}{30}$ είναι ένας από τους ρητούς αριθμούς που βρίσκονται μεταξύ των $\frac{1}{3}$ και $\frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{3} < \frac{25}{30} < \frac{1}{2}$$

β' τρόπος:

Εκτελούμε τις διαιρέσεις: $\frac{1}{3} = 1:3 = 0,333\dots$ και $\frac{1}{2} = 1:2 = 0,5$.

Ο αριθμός 0,4 είναι ένας από τους ρητούς αριθμούς που βρίσκονται μεταξύ των $\frac{1}{3}$ και $\frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{3} < 0,4 < \frac{1}{2}$$

Παρατήρηση: Υπάρχουν άπειροι ρητοί αριθμοί μεταξύ των $\frac{1}{3}$ και $\frac{1}{2}$. Ιδιαίτερα ο αριθμός $\frac{25}{30}$ είναι στο μέσο της απόστασης των δύο αριθμών, ενώ ο αριθμός 0,4 είναι πλησιέστερος στο $\frac{1}{3}$.

Σχόλιο: Μεταξύ δυο οποιονδήποτε ρητών αριθμών υπάρχει ένα άπειρο πλήθος ρητών αριθμών. Λέμε ότι το σύνολο των ρητών αριθμών είναι «πυκνό», δηλαδή δεν υπάρχει επόμενος ενός ρητού αριθμού, σε αντίθεση με τους ακέραιους, όπου ο κάθε ακέραιος έχει επόμενο.



1

Συμπλήρωσε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

- Ο αντίθετος του αριθμού a είναι ο αριθμός
- Ο μεγαλύτερος από δύο θετικούς ρητούς είναι εκείνος που έχει την απόλυτη τιμή.
- Ο μεγαλύτερος από δύο αρνητικούς ρητούς είναι εκείνος που έχει την απόλυτη τιμή.
- Το μεγαλύτερο από δύο ομώνυμα κλάσματα, είναι εκείνο που έχει τον μεγαλύτερο
- Το μεγαλύτερο από δύο κλάσματα που έχουν ίδιους αριθμητές, είναι εκείνο που έχει τον παρονομαστή.

2

Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα.

Αριθμός	-3	0,35	$\frac{1}{9}$		
Αντίθετος				-0,1	
Απόλυτη τιμή					$\frac{2}{5}$

3

Σύγκρινε τους παρακάτω αριθμούς χρησιμοποιώντας ένα από τα σύμβολα $<$, $>$ ή $=$.

α) $\frac{21}{6} \dots \frac{12}{6}$

β) $\frac{4}{9} \dots \frac{4}{6}$

γ) $\frac{2}{3} \dots \frac{7}{8}$

δ) $\frac{1}{100} \dots -\frac{2}{5}$

ε) $-\frac{8}{10} \dots -1$

στ) $-\frac{8}{3} \dots -3$

ζ) $\frac{9}{8} \dots 1,2$

4

Σύγκρινε τους παρακάτω αριθμούς χρησιμοποιώντας ένα από τα σύμβολα $<$, $>$ ή $=$.

α) $3,16 \dots 3,2$

β) $0,092 \dots 0,087$

γ) $-1,36 \dots -0,01$

δ) $-2,69 \dots 1,4$

ε) $-1,3 \dots -1,33$

στ) $-1,10 \dots -1,1$

5

Βάλε τους παρακάτω δεκαδικούς αριθμούς σε αύξουσα σειρά.

$1, -3, 0,2, 1,37, -0,03, 0.$

6

Βάλε τα παρακάτω κλάσματα σε αύξουσα σειρά:

α) $\frac{5}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{5}{4}$

β) $\frac{5}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{5}{2}, \frac{5}{8}, -\frac{5}{7}, -\frac{5}{3}$

7

Δίνονται τα κλάσματα: $\frac{15}{32}, \frac{10}{8}, \frac{10}{9}, \frac{9}{32}, \frac{27}{32}, \frac{10}{4}$.

α) Βρες ποια από τα παραπάνω κλάσματα είναι μικρότερα του 1 και γράψε τα κλάσματα αυτά, σε αύξουσα σειρά.

β) Βρες ποια από τα παραπάνω κλάσματα είναι μεγαλύτερα του 1 και γράψε τα κλάσματα αυτά, σε αύξουσα σειρά.

γ) Τοποθέτησε όλα κλάσματα που δίνονται, σε αύξουσα σειρά.

8

Βρες τους διαδοχικούς ακέραιους αριθμούς, μεταξύ των οποίων βρίσκονται οι παρακάτω ρητοί αριθμοί:

α) $0,3$,

β) $-1,25$,

γ) $\frac{7}{2}$,

δ) $-\frac{11}{3}$,

ε) $\frac{2024}{2025}$.

9

Βρες δύο ρητούς αριθμούς μεταξύ των αριθμών:

α) $-0,7$ και $-0,8$.

β) $\frac{3}{10}$ και $\frac{2}{5}$.

γ) $\frac{7}{9}$ και $\frac{5}{6}$.

Εξασκούμαι

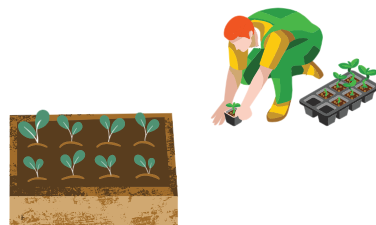


σε όσα έμαθα

3.3 | Πρόσθεση και αφαίρεση ρητών.



Το συνεργείο του Δήμου φύτεψε σε μια μέρα τα $\frac{2}{5}$ μιας πλατείας με λουλούδια. Την επόμενη ημέρα, που ο καιρός δεν ήταν καλός, φύτεψε μόνο το $\frac{1}{7}$ της πλατείας. Ποιο τμήμα της πλατείας είχε φυτέψει συνολικά, στο τέλος της δεύτερης ημέρας;



Ιδιότητες της πρόσθεσης στους ρητούς αριθμούς:

• $\alpha + \beta = \beta + \alpha$	Αντιμεταθετική ιδιότητα
• $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$	Προσεταιριστική ιδιότητα
• $\alpha + 0 = \alpha$	Το 0 λέγεται ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης.



Πρόσθεση κλασμάτων

Προσθέτουμε δύο ή περισσότερα **ομώνυμα** κλάσματα προσθέτοντας τους αριθμητές τους, αφήνοντας τον ίδιο παρονομαστή.

- Με τον ίδιο τρόπο γίνεται και η **αφαίρεση ομώνυμων** κλασμάτων.

$$\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha + \beta}{\gamma} \quad \text{και} \quad \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha - \beta}{\gamma}$$

Παραδείγματα:

$$\frac{4}{3} + \frac{1}{3} = \frac{4+1}{3} = \frac{5}{3} \quad \text{και} \quad \frac{5}{7} - \frac{2}{7} = \frac{5-2}{7} = \frac{3}{7}$$

Προσθέτουμε (ή αφαιρούμε) **ετερώνυμα** κλάσματα αφού πρώτα τα μετατρέψουμε σε ομώνυμα.

Παραδείγματα:

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{2} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} + \frac{5 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{4}{6} + \frac{15}{6} = \frac{19}{6} \quad \text{και} \quad \frac{5}{2} - \frac{9}{4} = \frac{5 \cdot 2}{2 \cdot 2} - \frac{9}{4} = \frac{10}{4} - \frac{9}{4} = \frac{1}{4}$$

Το άθροισμα ενός φυσικού με ένα κλάσμα μικρότερο της μονάδας ονομάζεται **μεικτός αριθμός**.

Παράδειγμα:

$$2 + \frac{1}{3} = 2\frac{1}{3}$$

Πρόσθεση ρητών

Προσθέτουμε ομόσημους και ετερόσημους ρητούς με το ίδιο τρόπο που προσθέτουμε ομόσημους και ετερόσημους ακέραιους αριθμούς.

Για να προσθέσουμε δύο **ομόσημους** ρητούς αριθμούς, **προσθέτουμε** τις απόλυτες τιμές τους και στο άθροισμα βάζουμε **το πρόσημό τους**.

Παραδείγματα:

$$-\frac{4}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{5}{3}$$

$$+\frac{1}{6} + \frac{5}{4} = +\frac{1 \cdot 2}{6 \cdot 2} + \frac{5 \cdot 3}{4 \cdot 3} = +\frac{2}{12} + \frac{15}{12} = +\frac{17}{12}$$

Για να προσθέσουμε δύο **ετερόσημους** ρητούς αριθμούς, **αφαιρούμε** από τη μεγαλύτερη τη μικρότερη απόλυτη τιμή και στη διαφορά βάζουμε το πρόσημο του ρητού με τη **μεγαλύτερη απόλυτη τιμή**.

Παραδείγματα:

$$-\frac{5}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{4}{2} = -2$$

$$\frac{1}{3} - \frac{3}{2} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{2}{6} - \frac{3}{6} = -\frac{1}{6}$$

Η πρόσθεση και η αφαίρεση δεκαδικών αριθμών γίνεται, όπως και στους φυσικούς αριθμούς.

Προσθέτουμε ή αφαιρούμε τα ψηφία της ίδιας τάξης, τοποθετώντας τους αριθμούς τον ένα κάτω από τον άλλο έτσι, ώστε οι υποδιαστολές να γράφονται στην ίδια στήλη.

Παραδείγματα:

$$\begin{array}{r} \bullet \quad 10,2 + 4,53 = 14,73. \\ 10,20 \\ + 4,53 \\ \hline 14,73 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \bullet \quad 12,55 - 2,05 = 10,5. \\ 12,55 \\ - 2,05 \\ \hline 10,50 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \bullet \quad 4,3 - 15,2 = -10,9. \\ 15,2 \\ - 4,3 \\ \hline 10,9 \end{array}$$

Αφαιρούμε από το 15,2 το 4,3 και στη διαφορά βάζουμε το πρόσημο του ρητού με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή, δηλαδή το $-$.



1. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$-\frac{5}{6} + \frac{2}{4} + \frac{1}{6} - \frac{2}{3} + \frac{1}{3}$$

Λύση:

$$-\frac{5}{6} + \frac{2}{4} + \frac{1}{6} - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} =$$

← Χωρίζουμε τους θετικούς από τους αρνητικούς ρητούς:

$$= +\frac{2}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{5}{6} - \frac{2}{3} =$$

← Μετατρέπουμε όλα τα κλάσματα σε ομώνυμα.
ΕΚΠ(3,4,6)=12.

$$= +\frac{6}{12} + \frac{2}{12} + \frac{4}{12} - \frac{10}{12} - \frac{8}{12} =$$

← Προσθέτουμε τους ομόσημους ρητούς.

$$= +\frac{12}{12} - \frac{18}{12} =$$

← Προσθέτουμε τους ετερόσημους ρητούς.

$$= -\frac{6}{12} = -\frac{6:6}{12:6} = -\frac{1}{2}$$

← Απλοποιούμε το κλάσμα.

2. Αν τα $\frac{2}{3}$ του κιλού κεράσια κοστίζουν 4€, να υπολογίσετε:

α) Πόσο κοστίζει το ένα κιλό κεράσια.

β) Πόσο κοστίζουν τα $\frac{3}{5}$ του κιλού κεράσια.



Λύση:

α) Θα υπολογίσουμε πρώτα πόσο κοστίζει το $\frac{1}{3}$ του κιλού (κλασματική μονάδα) και στη συνέχεια το ένα κιλό κεράσια, δηλαδή τα $\frac{3}{3}$ του κιλού.

Η μέθοδος αυτή είναι γνωστή ως **αναγωγή στη κλασματική μονάδα**:

- Τα $\frac{2}{3}$ του κιλού κοστίζουν 4€,
- το $\frac{1}{3}$ του κιλού κοστίζει $4:2 = 2$ €,
- τα $\frac{3}{3}$ του κιλού κοστίζουν $2 \cdot 3 = 6$ €.

Άρα το ένα κιλό κεράσια κοστίζει 6€.

β) Το ένα κιλό αντιστοιχεί στα $\frac{5}{5}$ του κιλού, άρα:

- Τα $\frac{5}{5}$ του κιλού κοστίζουν 6€,
- Το $\frac{1}{5}$ του κιλού κοστίζει $6:5 = 1,2$ €,
- Τα $\frac{3}{5}$ του κιλού κοστίζουν $3 \cdot 1,2 = 3,6$ €.

Εξασκούμαι



σε όλα έμαθα



1

Χαρακτήρισε ως Σωστές ή Λάθος τις προτάσεις, βάζοντας ένα x στην κατάλληλη θέση.

- α) Προσθέτουμε ομώνυμα κλάσματα προσθέτοντας τους αριθμητές τους.
- β) Προσθέτουμε ετερόνυμα κλάσματα προσθέτοντας τους αριθμητές τους.
- γ) Ισχύει $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} = 1$.
- δ) Η πρόσθεση ρητών αριθμών οδηγεί πάντα σε αύξηση.
- ε) Ισχύει $0,5 - 1 = 0,5$.

Σωστό Λάθος

Σωστό	Λάθος

2

Κάνε τις πράξεις:

α) $\frac{11}{16} - \frac{9}{16}$ β) $\frac{2}{5} + (-\frac{1}{3})$ γ) $\frac{1}{10} + \frac{9}{10}$ δ) $-\frac{2}{7} - \frac{3}{7}$ ε) $\frac{2}{8} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2}$

3

Κάνε τις πράξεις:

α) $\frac{4}{7} + (-\frac{2}{3} + \frac{1}{6})$ β) $-\frac{1}{6} - (\frac{2}{3} + \frac{3}{2})$ γ) $\frac{1}{11} + \frac{1}{22} - \frac{2}{33}$ δ) $2\frac{1}{3} - \frac{4}{5} + 1\frac{2}{10}$ ε) $-\frac{3}{5} + 2 - 4\frac{1}{2}$

4

Κάνε τις πράξεις:

α) $\frac{31}{10} - 0,15 + (-0,3)$ β) $\frac{2}{5} + \frac{3}{10} - 1,25$ γ) $2,14 - \frac{3}{4} + 0,3$

5

Για την παραγωγή τοματοπολτού γνωρίζουμε ότι από 1 κιλό τομάτες παράγονται $\frac{3}{4}$ του κιλού πολτός.

- α) Πόσα κιλά πολτού θα φτιάξουμε αν αγοράσουμε 1.250 κιλά τομάτας;
- β) Πόσα χρήματα θα κερδίσουμε, αν κάθε κιλό τομάτας το αγοράσαμε προς 0,35€ και κάθε κιλό πολτού πωλείται προς 1,36€;



6

Μία βιβλιοθήκη έχει 60 βιβλία. Τα $\frac{3}{10}$ των βιβλίων είναι επιστημονικής φαντασίας, τα $\frac{5}{12}$ των βιβλίων είναι μυθιστορήματα και τα υπόλοιπα επιστημονικά. Πόσα βιβλία από κάθε κατηγορία υπάρχουν στη βιβλιοθήκη.

7

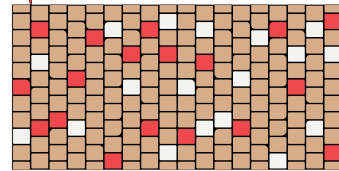
Τα $\frac{3}{5}$ των μαθητών ενός σχολείου παίζουν ποδόσφαιρο.

- α) Αν γνωρίζεις ότι 225 μαθητές παίζουν ποδόσφαιρο, πόσοι είναι συνολικά οι μαθητές του σχολείου;
- β) Αν το $\frac{1}{3}$ των υπόλοιπων μαθητών παίζει βόλεϊ, πόσοι είναι οι μαθητές που παίζουν βόλεϊ;

3.4 | Πολλαπλασιασμός ρητών – Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού – Αντίστροφοι ρητοί.



Ένας πεζόδρομος στρώθηκε με πλάκες. Το $\frac{1}{2}$ από τις πλάκες είναι χρωματιστές. Τα $\frac{3}{5}$ από τις χρωματιστές πλάκες είναι κόκκινες. Ποιο μέρος του πεζόδρομου καταλαμβάνουν οι κόκκινες πλάκες;

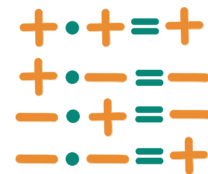


Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού στους ρητούς αριθμούς:

$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$	Αντιμεταθετική ιδιότητα
$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$	Προσεταιριστική ιδιότητα
$\alpha \cdot 1 = \alpha$	Το 1 λέγεται ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού .
$\alpha \cdot 0 = 0$	Το 0 λέγεται απορροφητικό ή μηδενικό στοιχείο του πολλαπλασιασμού.
$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$ $\alpha \cdot (\beta - \gamma) = \alpha \cdot \beta - \alpha \cdot \gamma$	Επιμεριστική ιδιότητα

Για να **πολλαπλασιάσουμε** δύο ρητούς αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο βάζουμε:

- το πρόσημο « + », αν είναι **ομόσημοι**.
- το πρόσημο « - », αν είναι **ετερόσημοι**.



Παραδείγματα:

$$(-5) \cdot (-0,1) = +0,5.$$

$$(+4) \cdot (-0,5) = -2.$$

Το **γινόμενο** δύο κλασμάτων είναι το κλάσμα που έχει αριθμητή το γινόμενο των αριθμητών και παρονομαστή το γινόμενο των παρονομαστών.

$$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta \cdot \delta}$$

Παραδείγματα:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{11}{4} = \frac{2 \cdot 11}{3 \cdot 4} = \frac{22}{12} = \frac{22:2}{12:2} = \frac{11}{6}$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) = +\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}\right) = +\left(\frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5}\right) = +\frac{2}{15}$$

$$5 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -\left(\frac{5 \cdot 3}{1 \cdot 2}\right) = -\frac{5 \cdot 3}{1 \cdot 2} = -\frac{15}{2}$$

Πολλαπλασιασμός δεκαδικών αριθμών.

Ο πολλαπλασιασμός δεκαδικών αριθμών γίνεται, όπως και των φυσικών αριθμών.

Όταν πολλαπλασιάζουμε δεκαδικούς αριθμούς, τοποθετούμε στο αποτέλεσμα της πράξης την υποδιαστολή τόσες θέσεις από τα δεξιά προς τα αριστερά, όσα είναι συνολικά τα ψηφία στα δεκαδικά μέρη και των δύο παραγόντων.

Παράδειγμα:

$$1,25 \cdot 3,5 = 4,375.$$

1,25	← 2 δεκαδικά ψηφία
x 3,5	← 1 δεκαδικό ψηφίο
625	
+ 375	
4,375	← 2 + 1 = 3 δεκαδικά ψηφία

Πολλαπλασιασμός με 10, 100, 1.000, ...

Όταν πολλαπλασιάζουμε ένα δεκαδικό αριθμό με 10, 100, 1.000 κ.ο.κ. μεταφέρουμε την υποδιαστολή του αριθμού προς τα δεξιά μία, δύο, τρεις, κ.ο.κ. θέσεις αντίστοιχα.

Παραδείγματα:

α) $23,51 \cdot 10 = 235,1$
 β) $23,51 \cdot 100 = 2.351$
 γ) $23,51 \cdot 1.000 = 23.510$

Πολλαπλασιασμός με 0,1, 0,01, 0,001, ...

Όταν πολλαπλασιάζουμε ένα δεκαδικό αριθμό με 0,1, 0,01, 0,001, ... μεταφέρουμε την υποδιαστολή του αριθμού προς τα αριστερά μία, δύο, τρεις, ... θέσεις αντίστοιχα.

Παραδείγματα:

α) $23,51 \cdot 0,1 = 2,351$
 β) $23,51 \cdot 0,01 = 0,2351$
 γ) $23,51 \cdot 0,001 = 0,02351$

Δύο αριθμοί λέγονται **αντίστροφοι** όταν έχουν γινόμενο το 1.

Ο αντίστροφος του $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι ο $\frac{\beta}{\alpha}$ επειδή $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = 1$.

Παραδείγματα:

- Ο αντίστροφος του $\frac{2}{3}$ είναι το $\frac{3}{2}$. Είμαι $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 2} = \frac{6}{6} = 1$.
- Ο αντίστροφος του $\frac{1}{5}$ είναι το 5. Είμαι $\frac{1}{5} \cdot 5 = \frac{1 \cdot 5}{5} = \frac{5}{5} = 1$.
- Ο αντίστροφος του 1 είναι προφανώς το 1.
- Το μηδέν (0) δεν έχει αντίστροφο.

Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση



1. Να βρείτε το γινόμενο: $\frac{3}{7} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{5}{2}$.

Λύση:

$$\frac{3}{7} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{5}{2} = \frac{3 \cdot 7 \cdot 5}{7 \cdot 6 \cdot 2} = \frac{105}{84} = \frac{105:21}{84:21} = \frac{5}{4}$$

β' τρόπος: $\frac{3}{7} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{5}{2} = \frac{3 \cdot 7 \cdot 5}{7 \cdot 6 \cdot 2} = \frac{7 \cdot 3 \cdot 5}{7 \cdot 6 \cdot 2} = \frac{7}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{5}{2} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{4}$.

2. Να υπολογίσετε:

α) Τα $\frac{2}{5}$ του κιλού.

β) Το $\frac{1}{3}$ της μίας ώρας

γ) Τα $\frac{3}{8}$ του λίτρου.

Λύση:

Για να υπολογίσουμε το κλασματικό μέρος μιας ποσότητας, εκτός από την αναγωγή στη μονάδα που έχουμε ήδη μελετήσει, μπορούμε πιο απλά να πολλαπλασιάσουμε το κλάσμα με την ποσότητα.

α) Το 1 κιλό είναι ίσο με 1.000 γραμμάρια. Τα $\frac{2}{5}$ του κιλού είναι:

$$\frac{2}{5} \cdot 1.000 = \frac{2 \cdot 1.000}{5} = \frac{2.000}{5} = 400 \text{ γραμμάρια.}$$

β) Η 1 ώρα ισούται με 60 λεπτά. Το $\frac{1}{3}$ της μίας ώρας είναι:

$$\frac{1}{3} \cdot 60 = \frac{1 \cdot 60}{3} = \frac{60}{3} = 20 \text{ λεπτά.}$$

γ) Το 1 λίτρο είναι ίσο με 1.000 ml. Τα $\frac{3}{8}$ του λίτρου είναι:

$$\frac{3}{8} \cdot 1.000 = \frac{3 \cdot 1.000}{8} = \frac{3.000}{8} = 375 \text{ ml.}$$

Εξασκούμε



σε όσα έμαθα



1

Συμπλήρωσε τον πίνακα:

Αριθμός	Αντίστροφος
α) $\frac{3}{5}$
β) $\frac{\alpha}{\beta}$ ($\alpha, \beta \neq 0$)
γ) 5
δ) 1
ε) $-\frac{1}{3}$

2

Υπολόγισε:

α) Τα $\frac{3}{4}$ του κιλούβ) Τα $\frac{3}{5}$ της ώραςγ) Το $\frac{1}{8}$ του λίτρουδ) Τα $\frac{5}{12}$ του λεπτού

3

Αντιστοίχισε τις πράξεις με το αποτέλεσμα:

α. $2 \cdot 5 + 1 \cdot 8$

i. 15

β. $2 + 5 + 1 + 8$

ii. 16

γ. $2 \cdot 1 + 5 + 8$

iii. 18

δ. $1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8$

iv. 39

ε. $(1 + 2) \cdot (5 + 8)$

v. 63

στ. $(1 + 8) \cdot (5 + 2)$

vi. 80

4

Ένωσε με μία γραμμή τις πράξεις που έχουν το ίδιο αριθμητικό αποτέλεσμα.

α. $1,6 + 2$

i. $\frac{40}{10} + \frac{30}{100}$

β. $0,1 + 0,01$

ii. $1 - \frac{89}{100}$

γ. $3 \cdot 0,1 + 4$

iii. $4 - \frac{6}{2}$

δ. $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}$

iv. $\frac{33}{10} + 0,3$

ε. $5 \cdot \frac{1}{2} - 0,5$

v. $(-1) \cdot (-2)$

5

Υπολόγισε τα γινόμενα αξιοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα, όπως φαίνεται στο παράδειγμα:

α) $15 \cdot 99 = 15 \cdot (100 - 1) = 15 \cdot 100 - 15 \cdot 1 = 1.500 - 15 = 1.485$

β) $21 \cdot 11 = 21 \cdot (\dots + \dots) = \dots + \dots = \dots + \dots = \dots$

γ) $25 \cdot 0,99 = \dots$

δ) $70 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{7}\right) = \dots$

6

Υπολόγισε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \cdot 3 - \frac{2}{7}$

β) $\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) \cdot 3 - \frac{2}{7}$

γ) $\frac{5}{2} \cdot \frac{5}{3} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{4}\right)$

7

Στις εξετάσεις του Ιουνίου τα $\frac{5}{8}$ των μαθητών/τριών εξετάστηκαν στο μάθημα των Γαλλικών ενώ οι υπόλοιποι/ες στο μάθημα των Γερμανικών. Το $\frac{1}{5}$ των μαθητών/τριών που εξετάστηκε στα Γαλλικά έμεινε για επανεξέταση ενώ οι υπόλοιποι/ες προβιβάστηκαν. Αν η τάξη είχε 40 μαθητές/τριες, βρες πόσοι/ες μαθητές/τριες εξετάστηκαν στο μάθημα των Γερμανικών και πόσοι/ες έμειναν για επανεξέταση στο μάθημα των Γαλλικών.


8

Η Χριστίνα αγόρασε αθλητικά παπούτσια που άξιζαν 120€ από ένα κατάστημα που είχε εκπτώσεις σε όλα τα είδη ίση με το $\frac{1}{3}$ της αξίας τους.

α. Σε πόσα χρήματα αντιστοιχεί η έκπτωση;

β. Πόσα χρήματα διέθεσε τελικά για την αγορά των αθλητικών παπουτσιών;



3.5 | Διαίρεση ρητών

ΕΞΕΡΧΕΝΩ



Ο συνεταιρισμός οиноπαραγωγών του Τυρνάβου, παρήγαγε 3.000.000 λίτρα κρασιού, τα οποία συσκεύασε σε φιάλες των $1\frac{1}{2}$ λίτρων.

Πόσες φιάλες χρησιμοποίησε ο συνεταιρισμός;



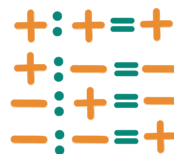
Διαίρεση ρητών

Το πηλίκο της διαίρεσης $\alpha : \beta$ ή $\frac{\alpha}{\beta}$ λέγεται **λόγος** του α προς το β .

Αν $\alpha : \beta = \gamma$ τότε ο γ είναι ο μοναδικός αριθμός για τον οποίο ισχύει: $\gamma \cdot \beta = \alpha$.

Για να **διαιρέσουμε** δύο ρητούς αριθμούς, διαιρούμε τις απόλυτες τιμές τους και στο πηλίκο βάζουμε:

- το πρόσημο « + », αν είναι **ομόσημοι**.
- το πρόσημο « - », αν είναι **ετερόσημοι**.



Παραδείγματα:

$$\begin{aligned} \alpha. (+6) : (+2) &= \frac{+6}{+2} = +3 && [\text{διότι } (+3) \cdot (+2) = +6] \\ \beta. (-8) : (+4) &= \frac{-8}{+4} = -2 && [\text{διότι } (-2) \cdot (+4) = -8] \\ \gamma. (-12) : (-3) &= \frac{-12}{-3} = +4 && [\text{διότι } (+4) \cdot (-3) = -12] \end{aligned}$$

Για να **διαιρέσουμε** δύο ρητούς αριθμούς αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τον διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.

$$\alpha : \beta = \alpha \cdot \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{και} \quad \frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma}$$

Παραδείγματα:

$$\begin{aligned} \alpha) \frac{2}{3} : \frac{5}{4} &= \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15} \\ \beta) \left(+\frac{2}{5}\right) : \left(-\frac{1}{2}\right) &= -\left(\frac{2}{5} : \frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{1}\right) = -\frac{4}{5} \end{aligned}$$

Ένα κλάσμα, του οποίου ένας τουλάχιστον όρος του είναι κλάσμα, ονομάζεται **σύνθετο** κλάσμα.

Παραδείγματα:

$$\frac{1}{\frac{2}{3}}, \quad \frac{3}{\frac{1}{2}}, \quad \frac{5}{\frac{4}{2}}$$

Μετατροπή σύνθετου κλάσματος σε απλό:

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\alpha \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma}$$

Παραδείγματα:

$$\left. \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{3}} \right] = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 5} = \frac{3}{10}$$

$$\left. \frac{\frac{5}{4}}{\frac{2}{1}} \right] = \frac{5 \cdot 1}{4 \cdot 2} = \frac{5}{8}$$

$$\left. \frac{\frac{3}{1}}{\frac{1}{2}} \right] = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 1} = \frac{6}{1} = 6$$

Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση

Διαίρεση δεκαδικού αριθμού με δεκαδικό αριθμό.

Παραδείγματα:

Να γίνει η διαίρεση $4,2 : 1,75$

Έχουμε:

Η διαίρεση $4,2 : 1,75$
γίνεται: $\overset{\times 100}{4,2} : \overset{\times 100}{1,75} = 420 : 175$

← Πολλαπλασιάζουμε τον διαιρέτη και τον διαιρετέο με κατάλληλη δύναμη του 10, ώστε ο διαιρέτης να γίνει φυσικός αριθμός.

$$\begin{array}{r} 420 \overline{) 175} \\ -350 \\ \hline 70 \end{array}$$

← Κάνουμε τη διαίρεση.

$$\begin{array}{r} 420,0 \overline{) 175} \\ -350 \\ \hline 700 \\ -700 \\ \hline 0 \end{array}$$

← Όταν εξαντληθεί το ακέραιο μέρος του διαιρετέου, «κατεβάζουμε» το μηδέν, ως πρώτο δεκαδικό ψηφίο από τον διαιρετέο και τοποθετούμε στο πηλίκο υποδιαστολή.

Άρα $4,2 : 1,75 = 2,4$

Διαίρεση με 10, 100, 1.000, ...

Όταν διαιρούμε ένα δεκαδικό αριθμό με 10, 100, 1.000... μεταφέρουμε την υποδιαστολή του αριθμού προς τα αριστερά μία, δύο, τρεις, ... θέσεις αντίστοιχα.

Παραδείγματα:

$$12,68:10 = 1,268$$

$$12,68:100 = 0,1268$$

$$12,68:1.000 = 0,01268$$

Διαίρεση με 0,1, 0,01, 0,001, ...

Όταν διαιρούμε ένα δεκαδικό αριθμό με 0,1, 0,01, 0,001, ... μεταφέρουμε την υποδιαστολή του αριθμού προς τα δεξιά μία, δύο, τρεις, ... θέσεις αντίστοιχα.

Παραδείγματα:

$$12,68:0,1 = 126,8$$

$$12,68:0,01 = 1.268$$

$$12,68:0,001 = 12.680$$



1. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\frac{\frac{2}{5} + \frac{1}{2}}{\frac{5}{3} - \frac{8}{6}}$$

Λύση:

Εκτελούμε τις πράξεις στους
όρους του κλάσματος:

Μετατρέπουμε το σύνθετο
κλάσμα σε απλό.

$$\frac{\frac{2}{5} + \frac{1}{2}}{\frac{5}{3} - \frac{8}{6}} = \frac{\frac{2}{5} + \frac{1}{2}}{\frac{5}{3} - \frac{8:2}{6:2}} = \frac{\frac{4}{10} + \frac{5}{10}}{\frac{5}{3} - \frac{4}{3}} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{1}{3}} = \frac{9 \cdot 3}{10 \cdot 1} = \frac{27}{10}$$

2. Να υπολογίσετε η τιμή της παράστασης:

$$\frac{-1}{2} - \frac{3}{-4} - \frac{-15}{-8}$$

Λύση:

Γράφουμε το πρόσημο των πηλίκων
έξω από τα κλάσματα.

Κάνουμε τα κλάσματα ομώνυμα
και εκτελούμε τις πράξεις.

$$\frac{-1}{2} - \frac{3}{-4} - \frac{-15}{-8} = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{3}{4}\right) - \left(+\frac{15}{8}\right) = -\frac{4}{2} + \frac{3}{4} - \frac{15}{8} = -\frac{4}{8} + \frac{6}{8} - \frac{15}{8} = -\frac{13}{8}$$



1

Κάνε τις διαιρέσεις:

α) $15 : (-5)$

β) $(-60) : (+15)$

γ) $(+81) : (-9)$

δ) $(-490) : (-7)$

2

Βρες τα πηλίκα:

α) $\frac{2}{5} : \frac{4}{15}$

β) $(+\frac{1}{2}) : (-\frac{1}{3})$

γ) $4 : \frac{1}{2}$

δ) $(-\frac{4}{3}) : (-8)$

ε) $\frac{18}{5} : \frac{6}{5}$

στ) $\frac{12}{21} : \frac{7}{4}$

3

Μετάτρεψε τα σύνθετα κλάσματα σε απλά:

α) $\frac{\frac{7}{11}}{\frac{3}{22}}$

β) $\frac{\frac{27}{49}}{\frac{9}{14}}$

γ) $\frac{4}{\frac{56}{9}}$

δ) $\frac{11}{\frac{2}{121}}$

ε) $\frac{\frac{3}{4}}{2\frac{1}{8}}$

4

Υπολόγισε τα πηλίκα:

α) $4,7124 : 0,63$

β) $28,42 : 49$

γ) $35,76 : 1,5$

δ) $292,62 : 29,262$

5

Υπολόγισε την τιμή των παραστάσεων:

α) $0,1 \cdot (\frac{2}{10} - \frac{3}{5}) + \frac{1}{2}$

β) $0,3 \cdot 0,4 - 3,6 : 1,2$

γ) $(\frac{7}{2} - 2\frac{1}{4}) \cdot 1,5 - \frac{7}{5} - 2$

6

Υπολόγισε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$[2 \cdot (-9) - 3 \cdot 3 + 81 : (-9)] : (2^3 - 4)$$

7

Υπολόγισε την τιμή των παραστάσεων:

α) $\frac{-1}{5} + (-\frac{2}{3}) - (-\frac{1}{6})$

β) $1 + \frac{5}{-4} - \frac{1}{-8} - \frac{-7}{-2}$

8

Κάνε όλες τις δυνατές πράξεις και απλοποιήσεις:

α) $\frac{1}{2} : (\frac{1}{3} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2})$

β) $\frac{2 - \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{8}} \cdot \frac{2 : \frac{2}{5}}{\frac{7}{10}}$

γ) $(\frac{1}{2} : 3 - \frac{2}{5}) \cdot (1 - \frac{4}{7} : 2)$

Εξασκούμαι



σε όσα έμαθα

3.6 | Δυνάμεις ρητών με εκθέτη μη μηδενικό φυσικό

Εξερευνώ



Μια πετρελαιοκηλίδα έχει την ιδιότητα να μολύνει το νερό με τον εξής τρόπο: κάθε μέρα μολύνει το $\frac{1}{2}$ του νερού της προηγούμενης. Τι μέρος του νερού θα έχει μολύνει σε 3 μέρες;



Δυνάμεις ρητών με εκθέτη μη μηδενικό φυσικό

Ο ορισμός των δυνάμεων επεκτείνεται και στην περίπτωση που η βάση είναι ρητός αριθμός. Γνωρίζουμε ότι η **δύναμη** του a στην n είναι: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$, όπου η βάση a είναι ρητός και ο εκθέτης n είναι θετικός φυσικός αριθμός.

Επίσης ισχύει ότι: $a^1 = a$.



Για το **πρόσημο** μιας δύναμης θυμόμαστε ότι:

- Δύναμη με βάση **θετικό** αριθμό είναι **θετικός** αριθμός.
Αν $a > 0$, τότε $a^n > 0$.
- Δύναμη με βάση **αρνητικό** αριθμό και εκθέτη **άρτιο** είναι **θετικός** αριθμός.
Αν $a < 0$ και n **άρτιος**, τότε $a^n > 0$.
- Δύναμη με βάση **αρνητικό** αριθμό και εκθέτη **περιττό** είναι **αρνητικός** αριθμός.
Αν $a < 0$ και n **περιττός**, τότε $a^n < 0$.

Παραδείγματα:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$$

άρτιος

$$(-1,5)^2 = (-1,5) \cdot (-1,5) = +2,25$$

Το αποτέλεσμα είναι θετικός γιατί ο εκθέτης είναι άρτιος.

περιττός

$$(-0,1)^3 = (-0,1) \cdot (-0,1) \cdot (-0,1) = -0,001$$

Το αποτέλεσμα είναι αρνητικός γιατί ο εκθέτης είναι περιττός.

Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση





1. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $4 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - 1\right)^2$

Λύση: Σύμφωνα με την προτεραιότητα των πράξεων, έχουμε:

$$\begin{aligned} 4 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - 1\right)^2 &= 4 \cdot \left(\frac{3}{6} - \frac{4}{6}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{3}\right)^2 = \\ &= 4 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \\ &= -\frac{4}{6} + \frac{4}{9} = \\ &= -\frac{2}{3} + \frac{4}{9} = \\ &= -\frac{6}{9} + \frac{4}{9} = -\frac{2}{9} \end{aligned}$$

Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση



1

Χαρακτήρισε ως Σωστές ή Λάθος τις προτάσεις που ακολουθούν βάζοντας ένα x στην κατάλληλη θέση.

α) Ισχύει ότι $\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5^2}{2}$.

β) Ισχύει ότι $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2}$.

γ) Μπορούμε να γράψουμε $0,2^4 = 4 \cdot 0,2$.

δ) $\left(-\frac{3}{10}\right)^2 = 0,3^2$

ε) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\left(\frac{1}{3}\right)^3$

Σωστό Λάθος

2

Κάνε τις πράξεις:

α) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{4^2}$

β) $0,1^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^2 - 0,2^2$

γ) $-1^{10} + 1^{100} + (-1)^2 + (-1)^3$

δ) $2^2 + 1,5^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2$

ε) $3^3 + 0,5^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2$

στ) $(2^2 + 3^2) \cdot \left(\frac{4}{5} + 0,5^2\right)$

3

Υπολόγισε τη τιμή της παράστασης: $6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} + 0,4\right)^2$.

4

Υπολόγισε τη τιμή της παράστασης: $\frac{20}{5} + 0,3^2 - 3 \cdot 4 + 9:3^2$

5

Δίνονται: $A = \frac{-2^3 + 4^1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3} \cdot \frac{2^3}{3^1}$ και $B = \frac{(1-2)^{11} + (-2:2)^3}{1^{100} + 5^1}$.

α) Υπολόγισε τις τιμές των A και B.

β) Στη συνέχεια υπολόγισε τις τιμές των παραστάσεων:

$$A \cdot B, \frac{A}{B} \text{ και } A + B.$$

Εξασκούμαι

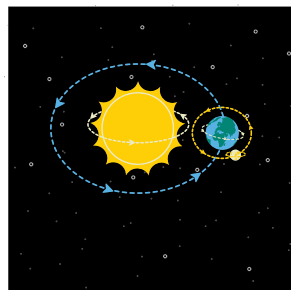


σε όσα έμαθα

3.7 | Τυποποιημένη μορφή μεγάλων αριθμών



Η απόσταση της Γης από τον Ήλιο είναι σχεδόν 149.600.000.000 μέτρα. Μπορείς να θυμηθείς εύκολα αυτόν τον αριθμό; Προσπάθησε να γράψεις με απλούστερο τρόπο τον παραπάνω αριθμό.



Τυποποιημένη μορφή μεγάλων αριθμών

Ένας «μεγάλος» αριθμός μπορεί να γραφεί στη μορφή: $a \cdot 10^n$, δηλαδή ως γινόμενο ενός αριθμού a , επί μια δύναμη του 10, όπου το n είναι ένας μη μηδενικός φυσικός αριθμός.

Τη μορφή αυτή την ονομάζουμε **τυποποιημένη**.

- Ο αριθμός a είναι ένας δεκαδικός αριθμός με ακέραιο ψηφίο μεγαλύτερο του 0 και μικρότερο του 10.

Η τυποποιημένη μορφή ενός αριθμού μας δίνει τη δυνατότητα να γράψουμε έναν «μεγάλο» αριθμό με απλούστερο τρόπο.



Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση

1. Να γράψετε τους αριθμούς σε τυποποιημένη μορφή:

α. 30.000.000 β. 815.000.000.000

Λύση:

$$\alpha. 30.000.000 = 3 \cdot \frac{10.000.000}{7 \text{ μηδενικά}} = 3 \cdot 10^7$$

$$\beta. 815.000.000.000 = 8,15 \cdot \frac{100.000.000.000}{11 \text{ μηδενικά}} = 8,15 \cdot 10^{11}$$

2. Να βρείτε τον αριθμό που έχει τυποποιημένη μορφή $3,42 \cdot 10^9$

Λύση:

- Ο αριθμός $3,42 \cdot 10^9$ είναι η τυποποιημένη μορφή του αριθμού:

3.420.000.000

← Μεταφέρουμε την υποδιαστολή 9 θέσεις προς τα δεξιά και όπου χρειάζεται συμπληρώνουμε με μηδενικά.



Εξασκούμε



σε όσα έμαθα

1

Γράψε τους αριθμούς σε τυποποιημένη μορφή:

α) 150.000

β) 21.000

γ) 1.300.000

δ) 2.030.000

2

Γράψε τους αριθμούς σε πλήρη μορφή:

α) $2,31 \cdot 10^4$

β) $1,36 \cdot 10^9$

γ) $1,37 \cdot 10^2$

δ) 10^8

3

Σύγκρινε τους αριθμούς:

α) $2 \cdot 10^3$ $3 \cdot 10^2$ β) $0,1 \cdot 10^2$ 10 γ) $1,7 \cdot 10^4$ $3 \cdot 10^3$ δ) $5 \cdot 10^7$ $\frac{1}{2} \cdot 10^8$

4

Γράψε τα παρακάτω αστρονομικά μεγέθη σε τυποποιημένη μορφή:

α) Απόσταση Γη – Σελήνης: 384.400.000 μέτρα.

β) Απόσταση Γη – Ήλιος: 149.600.000.000 μέτρα.

γ) Ηλικία Γης: 4.500.000.000 έτη.

δ) Ηλικία Γαλαξία: 13.600.000.000 έτη.

ε) Απόσταση Πλούτωνας – Ήλιος: 5.900.000.000 μέτρα.



5

Οι καρχαρίες Γροιλανδίας ζουν περίπου 400 χρόνια. Σε πόσα λεπτά αντιστοιχούν τα 400 χρόνια ζωής τους; Γράψε την απάντηση σε τυποποιημένη μορφή.

Ανακεφαλαίωση (Οι Ρητοί αριθμοί)

- **Οι ρητοί αριθμοί** είναι όλοι οι γνωστοί μας έως τώρα αριθμοί: φυσικοί, ακέραιοι, κλάσματα και οι αντίστοιχοι δεκαδικοί (θετικοί ή αρνητικοί) αριθμοί.
- **Κλάσμα** ή **κλασματικός αριθμός** ονομάζεται κάθε αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου α, β ακέραιοι αριθμοί με $\beta \neq 0$.

Σε κάθε κλάσμα έχουμε:

αριθμητής	← πόσα μέρη πήραμε
παρονομαστής	← γραμμή κλάσματος
	← σε πόσα ίσα μέρη χωρίσαμε

Δύο κλάσματα που εκφράζουν την ίδια αριθμητική ποσότητα λέγονται **ισοδύναμα** ή **ίσα**. Όταν δύο κλάσματα είναι **ισοδύναμα** ή **ίσα** τότε τα "χιαστί" γινόμενα είναι ίσα, δηλαδή:

$$\text{Αν } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \text{ τότε } \alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma \text{ και αντιστρόφως.}$$

- Όταν δύο ή περισσότερα κλάσματα έχουν τον ίδιο παρονομαστή λέγονται **ομώνυμα** ενώ όταν έχουν διαφορετικό παρονομαστή λέγονται **ετερώνυμα**.

π.χ. τα κλάσματα $\frac{3}{5}$ και $\frac{4}{5}$ είναι ομώνυμα ενώ τα κλάσματα $\frac{3}{7}$ και $\frac{2}{3}$ είναι ετερώνυμα.

- **Δεκαδικό κλάσμα** λέγεται το κλάσμα που έχει παρονομαστή 10, 100, 1.000,Κάθε δεκαδικό κλάσμα γράφεται ως δεκαδικός αριθμός με τόσα δεκαδικά ψηφία όσα μηδενικά έχει ο παρονομαστής του.

π.χ. Το κλάσμα $\frac{13}{100}$ είναι ισοδύναμο του αριθμού 0,13.

Πώς συγκρίνουμε ρητούς αριθμούς σε μορφή κλάσματος;

- Από δύο **ομώνυμα** κλάσματα, εκείνο που έχει τον **μεγαλύτερο** αριθμητή είναι μεγαλύτερο.

Παράδειγμα: $\frac{2}{5} < \frac{3}{5}$

- Από δύο κλάσματα με τον ίδιο αριθμητή **μεγαλύτερο** είναι εκείνο με τον **μικρότερο** παρονομαστή.

Παράδειγμα: $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$

Για να συγκρίνουμε **ετερώνυμα** κλάσματα μπορούμε να τα μετατρέψουμε σε **ομώνυμα** και να συγκρίνουμε τους αριθμητές τους. Διαφορετικά, εκτελούμε τις διαιρέσεις και συγκρίνουμε τους αντίστοιχους δεκαδικούς αριθμούς.

Ιδιότητες της **πρόσθεσης** στους ρητούς αριθμούς:

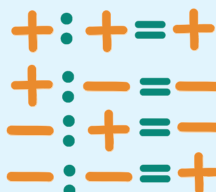
• $\alpha + \beta = \beta + \alpha$	Αντιμεταθετική ιδιότητα
• $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$	Προσεταιριστική ιδιότητα
• $\alpha + 0 = \alpha$	Το 0 λέγεται ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης.

Ιδιότητες του **πολλαπλασιασμού** στους ρητούς αριθμούς:

$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$	Αντιμεταθετική ιδιότητα
$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$	Προσεταιριστική ιδιότητα
$\alpha \cdot 1 = \alpha$	Το 1 λέγεται ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού .
$\alpha \cdot 0 = 0$	Το 0 λέγεται απορροφητικό ή μηδενικό στοιχείο του πολλαπλασιασμού.
$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$ $\alpha \cdot (\beta - \gamma) = \alpha \cdot \beta - \alpha \cdot \gamma$	Επιμεριστική ιδιότητα

Για να διαιρέσουμε δύο ρητούς αριθμούς, διαιρούμε τις απόλυτες τιμές τους και στο πηλίκο βάζουμε:

- το πρόσημο « + », αν είναι ομόσημοι.
- το πρόσημο « - », αν είναι ετερόσημοι.



Για να διαιρέσουμε δύο ακέραιους αριθμούς αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τον διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη. Για να διαιρέσουμε δύο κλάσματα αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τον διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.

Δυνάμεις ρητών αριθμών:

Γνωρίζουμε ότι η **δύναμη** του a στην n είναι: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$, όπου η βάση a είναι ρητός και ο εκθέτης n είναι θετικός φυσικός αριθμός.

Επίσης ισχύει: $a^1 = a$

Τυποποιημένη μορφή ρητών αριθμών

Ένας “**μεγάλος**” αριθμός μπορεί να γραφεί στη μορφή: $a \cdot 10^n$

δηλαδή ως γινόμενο ενός αριθμού a επί μια δύναμη του 10. Ο αριθμός a είναι ένας δεκαδικός αριθμός με ακέραιο ψηφίο μεγαλύτερο του 0 και μικρότερο του 10. Η τυποποιημένη μορφή ενός αριθμού μας δίνει τη δυνατότητα να γράψουμε έναν “μεγάλο” αριθμό με απλούστερο τρόπο.

Αυτοαξιολόγηση (Οι Ρητοί αριθμοί)

Χαρακτήρισε ως **Σωστές** ή **Λάθος** τις προτάσεις, βάζοντας ένα x στην κατάλληλη θέση.

	Σωστό	Λάθος
1. Ο αριθμός $-(-\frac{4}{2})$ είναι θετικός ακέραιος.		
2. Ο αριθμός 91 είναι φυσικός, ακέραιος και ρητός.		
3. Ο αριθμός -4 είναι φυσικός, ακέραιος και ρητός.		
4. Τα κλάσματα $\frac{8}{3}, \frac{8}{5}$ είναι ομώνυμα.		
5. Το κλάσμα $\frac{36}{7}$ είναι ισοδύναμο με το πηλίκο της διαίρεσης 36:7.		

6.	Τα κλάσματα $\frac{8}{60}$ και $\frac{6}{45}$ είναι ισοδύναμα.		
7.	Ισχύει ότι $\frac{10}{7} > \frac{10}{6}$.		
8.	Ισχύει ότι $\frac{4}{9} < \frac{7}{12}$.		
9.	Ισχύει ότι $\left -\frac{7}{2} \right > 3,54$.		
10.	Ισχύει ότι $\frac{2}{7} + \frac{4}{7} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$.		
11.	Ισχύει ότι $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{10}{15} + \frac{12}{15} = \frac{22}{15}$.		
12.	Ισχύει ότι $-\frac{8}{12} - \frac{3}{12} = -\frac{11}{12}$.		
13.	Ο αντίστροφος του αριθμού $-\frac{7}{11}$ είναι ο αριθμός $\frac{11}{7}$.		
14.	Οι αριθμοί 9 και $\frac{2}{18}$ είναι αντίστροφοι.		
15.	Ισχύει ότι $0,32 \cdot (-100) = -32$.		
16.	Ισχύει ότι $-7.564 \cdot (0,001) = -75,64$.		
17.	Ισχύει ότι $\frac{7}{5} \cdot 10 = 14$.		
18.	Ισχύει ότι $\frac{+\frac{2}{3}}{-\frac{5}{8}} = -\frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 8} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$.		
19.	Ισχύει ότι $2,5 \cdot 100 = 2,5:0,01 = 250$.		
20.	$\frac{-3 \cdot \left(2^2 - \frac{1}{2}\right)}{(-3)^2} = \frac{-3 \cdot \left(4 - \frac{1}{2}\right)}{9} = \frac{-3 \cdot \frac{7}{2}}{9} = \frac{-21}{18} = -\frac{7}{6}$.		
21.	Ισχύει ότι $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.		
22.	Ισχύει ότι $\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$.		
23.	Αφού $-3 < 1$ τότε $-\frac{1}{3} > 1$.		
24.	Έχουμε ότι $81.000 = 8,1 \cdot 10^4$.		
25.	Ισχύει ότι $-7 \cdot 10^4 > 1 \cdot 10^2$.		

Σε αυτό το σημείο, θα πρέπει να είσαι σε θέση να έχεις επιτύχει όλα τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα. Γύρνα στην αρχή της θεματικής ενότητας και σημείωσε ✓ στα αντίστοιχα κουτάκια. Υπάρχουν στόχοι που αισθάνεσαι ότι δεν έχεις κατακτήσει πλήρως;

Στην ενότητα αυτή θα ανακαλύψουμε τι είναι οι κανονικότητες, πώς μπορούν να εκφραστούν με αριθμητικές σχέσεις και πώς επεκτείνονται σε διαφορετικές αναπαραστάσεις, όπως γεωμετρικά σχήματα και διαγράμματα. Θα μάθουμε να αναγνωρίζουμε και να επεξεργαζόμαστε κανονικότητες, αλλά και να λύνουμε καθημερινά προβλήματα που βασίζονται σε αυτές.

Είσαι έτοιμος/η να βρεις μοτίβα γύρω σου και να τα περιγράψεις με μαθηματική ακρίβεια;



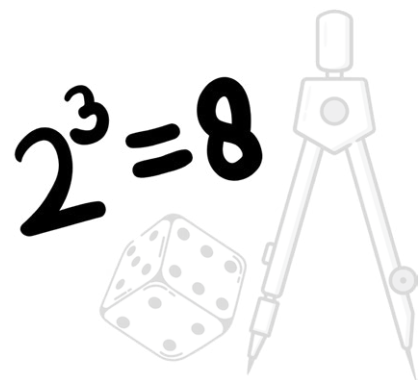
- Αναγνωρίζω, συγκρίνω, περιγράφω κανονικότητες και τις εκφράζω ως αριθμητικές κανονικότητες με φυσικούς αριθμούς.
- Συμπληρώνω, επεκτείνω και δημιουργώ αριθμητικές κανονικότητες με φυσικούς αριθμούς.
- Αναπαριστώ κανονικότητες με διάφορους τρόπους, όπως εικόνες ή γεωμετρικά σχήματα, πίνακες τιμών και σημεία σε σύστημα αξόνων, και μεταβαίνω από τη μία αναπαράσταση στην άλλη.
- Διερευνώ κανονικότητες που μπορούν να εκφραστούν στη μορφή an (με a ρητό και n τη σειρά του όρου) και διατυπώνω τον γενικό τους όρο λεκτικά και συμβολικά.
- Λύνω προβλήματα που συναντώ στα Μαθηματικά και την καθημερινή ζωή με κανονικότητες.



4.1: Κανονικότητα, έννοια και αναπαραστάσεις

4.2: Κανονικότητες της μορφής an με a ρητό

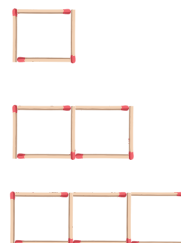
+ Ανακεφαλαίωση / Αυτοαξιολόγηση



4.1 | Κανονικότητα, έννοια και αναπαράστασεις



Μπορείς να σχεδιάσεις το επόμενο σχήμα από σπέρτα; Πόσα σπέρτα θα χρειαστείς;



Κανονικότητες

Αν γνωρίζεις ότι κάθε τετράγωνο έχει πλευρά 1cm, να συμπληρώσεις τον παρακάτω πίνακα:

Σειρά	Σχήμα	Τετράγωνα	Περίμετρος
1ο (v=1)		1	4
2ο (v=2)		5	12
3ο (v=3)	
4ο (v=4)
		Κανόνας:	Κανόνας:

Στην καθημερινότητα μας συναντάμε στοιχεία που επαναλαμβάνονται (αριθμούς, σχήματα, λέξεις, εικόνες, κινήσεις) και αποτελούν **μοτίβα** ή γενικά **κανονικότητες**. Όπως για παράδειγμα:

- Μέρα – Νύχτα.
- Εποχές του χρόνου.
- Τρία γεύματα την ημέρα.
- Δρομολόγιο λεωφορείου.

Κανονικότητα είναι μία οργάνωση στοιχείων (αριθμοί, σχήματα, ήχοι, σύμβολα, ...) με βάση συγκεκριμένους **κανόνες**.

Αν γνωρίζουμε αυτόν τον κανόνα μπορούμε να προβλέψουμε τους επόμενους όρους μιας κανονικότητας.

Μορφές κανονικοτήτων – αναπαραστάσεις:

Υπάρχουν διάφορες μορφές κανονικοτήτων ανάλογα με τον τρόπο με τον οποίο αναπτύσσονται και εκφράζονται οι κανονικότητες, όπως:

A) Τα **επαναλαμβανόμενα μοτίβα** στα οποία υπάρχει ένα στοιχείο που επαναλαμβάνεται, το οποίο ονομάζεται **μονάδα επανάληψης**.

Παραδείγματα:

ΑΒΑΒΑΒ...

← Μονάδα επανάληψης: **ΑΒ**

ΑΒΑΑΒΑΑΒΑ...

← Μονάδα επανάληψης: **ΑΒΑ**

B) Τα **αναπτυσσόμενα μοτίβα** στα οποία υπάρχει ένας κανόνας με τον οποίο εμφανίζεται κάθε επόμενος όρος.

Παραδείγματα:

2, 6, 10, 14, 18, ... Προσθετικό μοτίβο (+4)

3, 6, 12, 24, 48, ... Πολλαπλασιαστικό μοτίβο. (x2)

1, 2, 4, 7, 11, 16, ... Αυξανόμενη σχέση. **(Η διαφορά μεγαλώνει κατά 1)**

Γ) Τα **γεωμετρικά μοτίβα** στα οποία αυτό που επαναλαμβάνεται είναι ένα γεωμετρικό σχήμα.

Παράδειγμα:



Μονάδα επανάληψης:



1

Συμπλήρωσε τις παρακάτω κανονικότητες και βρες τη μονάδα επανάληψης.

α) Β, Γ, Δ, Β, Γ, Δ, Β, ____, ____, Μονάδα επανάληψης: ____

β) 2, 3, 3, 2, 3, 3, 2, 3, ____, ____, Μονάδα επανάληψης: ____

2

Συμπλήρωσε τις παρακάτω κανονικότητες και περίγραψε τον κανόνα με τον οποίο εμφανίζεται κάθε επόμενος όρος:

α) 1, 5, 9, 13, 17, ____, ____, Κανόνας: ____

β) 40, 31, 22, 13, ____, ____, Κανόνας: ____

γ) -1, 10, 21, 32, 43, ____, ____, Κανόνας: ____

3

Συμπλήρωσε τις παρακάτω κανονικότητες.

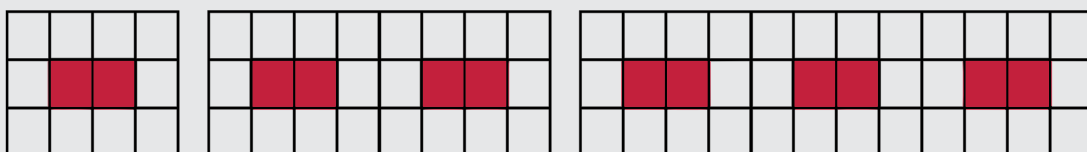
α) 1, 3, 5, ____, 9, ____.

β) 120, ____, 30, 15, ____.

γ) 0, +1, -2, ____, -4, +5, ____, ____.

4

Σχεδιάσε το σχήμα που ακολουθεί ή λείπει από τα παρακάτω γεωμετρικά μοτίβα:



5

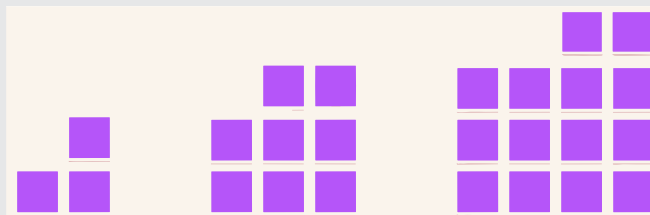
Βρες το λάθος στις παρακάτω κανονικότητες:

α) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$.

β) -3, -1, 0, +3, +5.

γ) 2, -4, 8, -16, -32, -64.

δ)



6

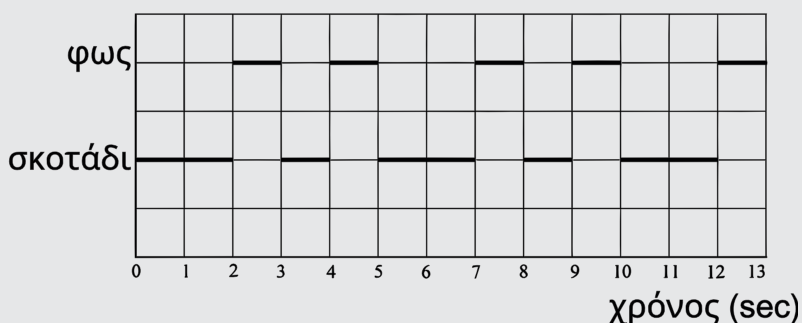
Ανεβαίνοντας τον λόφο, περνάω από 10 κυπαρίσσια. Μέχρι το πρώτο κυπαρίσσι περπατάω 8 δευτερόλεπτα, από το πρώτο στο δεύτερο περπατάω 9 δευτερόλεπτα, από το δεύτερο στο τρίτο 10 δευτερόλεπτα, κ.ο.κ.

Πόσο χρόνο κάνω για να φτάσω στην κορυφή του λόφου που βρίσκεται το δέκατο κυπαρίσσι;

Από διεθνές πρόγραμμα για την αξιολόγηση των μαθητών – PISA, από Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας, 2007, Αθήνα: Επτάλοφος Α.Β.Ε.Ε.

7

Οι φάροι είναι πύργοι με φωτεινό σηματοδότη στην κορυφή. Βοηθούν τα πλοία να βρουν το δρόμο τους μέσα στη νύχτα. Κάθε φάρος έχει το δικό του ρυθμό που αναβοσβήνει. Παρακάτω βλέπουμε τον ρυθμό με τον οποίο αναβοσβήνει ένας συγκεκριμένος φάρος.



Παρατηρούμε ότι ο φωτισμός επαναλαμβάνεται.

- Ποιος είναι ο κανόνας με τον οποίο επαναλαμβάνεται ο φωτισμός;
- Κάθε πόσα δευτερόλεπτα επαναλαμβάνεται το μοτίβο φωτισμού του φάρου;
- Μπορείς να επεκτείνεις το διάγραμμα του φωτισμού ώστε να έχουμε πληροφορία μέχρι και το 20ο δευτερόλεπτο του φωτισμού;

8

Δίνονται οι παρακάτω κανονικότητες αριθμών:

1, 3, 5, 7, 9, ...

3, 6, 9, 12, 15, ...

-5, -10, -15, -20, -25, ...

- Με ποιόν τρόπο μπορούμε να βρούμε τον επόμενο όρο σε κάθε κανονικότητα;
- Είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε τον 99ο όρο για να βρούμε τον 100ο όρο; Αν όχι, βρες έναν γενικό τύπο με τον οποίο μπορούμε να υπολογίσουμε τον n -οστό όρο κάθε κανονικότητας. Στη συνέχεια να υπολογίσεις τον 100ο όρο κάθε κανονικότητας.

Εξασκούμε



σε όσα έμαθα

4.2 | Κανονικότητες της μορφής $a \cdot n$ με a ρητό



Στην ακολουθία των αριθμών: 2, 4, 6, 8, ... ποιος είναι ο επόμενος αριθμός;

Μπορούμε να βρούμε τον 100ο αριθμό, χωρίς να γνωρίζουμε τον 99ο αριθμό;



Κανονικότητες

Οι αριθμοί 5, 10, 15, 20, 25, ... λέμε ότι αποτελούν μία ακολουθία. Ακολουθία είναι μία διαδοχή στοιχείων που ονομάζονται όροι, οι οποίοι έχουν μία ορισμένη σειρά (1ος όρος, 2ος όρος, 3ος όρος, κλπ).

5,	10,	15,	20,	25,	...
↑	↑	↑	↑		
1ος όρος	2ος όρος	3ος όρος	4ος όρος	κλπ.	

Αν κάθε όρος μίας ακολουθίας προκύπτει σύμφωνα με έναν συγκεκριμένο κανόνα, τότε λέμε πως οι όροι της ακολουθίας αποτελούν μία κανονικότητα.

Γενικά:

Ο αριθμός που βρίσκεται στη θέση n , λέγεται **n -οστός όρος** ή **γενικός όρος**.

Παρατηρούμε ότι οι αριθμοί 5, 10, 15, 20, 25, ...

αυξάνονται κάθε φορά κατά 5. (**Κανόνας: +5**)

- 1ος όρος ($n = 1$): $5 = 5 \cdot 1$
- 2ος όρος ($n = 2$): $10 = 5 \cdot 2$
- 3ος όρος ($n = 3$): $15 = 5 \cdot 3$
- 4ος όρος ($n = 4$): $20 = 5 \cdot 4$
- ...
- n -οστός όρος: $5 \cdot n$

Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση

Γενικός όρος (n -οστός)

Αν έχουμε τον γενικό όρο μπορούμε να βρούμε οποιονδήποτε όρο της κανονικότητας.

Παράδειγμα:

Είδαμε ότι ο γενικός όρος (n – οστός όρος) της παραπάνω κανονικότητας είναι:

$5 \cdot n$

- Ο 10ος όρος της ακολουθίας αυτής θα είναι: $5 \cdot 10 = 50$
- Ο 23ος όρος θα είναι: $5 \cdot 23 = 115$
- Για να βρούμε ποιος όρος της κανονικότητας ισούται με 225, γράφουμε: $5 \cdot n = 225$, άρα $n = 225 : 5 = 45$.

Άρα ο 45ος όρος ισούται με 225.

1

Παρατήρησε τον κανόνα και συμπλήρωσε τους όρους που λείπουν:

Σειρά (v) :	1	2	3	4	5	6
Όροι :	7	14	21	28

Ποιος από τους παρακάτω είναι ο γενικός όρος της κανονικότητας;

- α) $7v$ β) $7 + 2v$ γ) $7 + v$ δ) $7 + 7v$

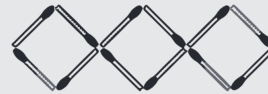
2

Βρες τους 5 πρώτους όρους της κανονικότητας η οποία έχει γενικό όρο $6 \cdot v$.

3

Χρησιμοποιώντας μικρά σπέρτα σχηματίζουμε τα παρακάτω γεωμετρικά μοτίβα. Συμπλήρωσε τους πίνακες και βρες τον κανόνα που προκύπτει.

α)



Σειρά σχήματος :	1	2	3	4	...	20
Αριθμός σπέρτων:
Κανόνας:	(Αριθμός σπέρτων) = (Αριθμός σχήματος) x (...)					

β)



Σειρά σχήματος :	1	2	3	4	...	20
Αριθμός σπέρτων:
Κανόνας:	(Αριθμός σπέρτων) = (Αριθμός σχήματος) x (...)					

γ)



Σειρά σχήματος :	1	2	3	4	...	20
Αριθμός σπέρτων:
Κανόνας:	(Αριθμός σπέρτων) = (Αριθμός σχήματος) x (...)					

4

Συμπλήρωσε τον επόμενο όρο και να βρεις τον γενικό όρο στις παρακάτω κανονικότητες:

α)

Σειρά (v) :	1	2	3	4	5	6
Όροι :	3	6	9	12

Γενικός όρος: _____

β)

Σειρά (ν) :	1	2	3	4	5	6
Όροι :	-5	-10	-15	-20

Γενικός όρος: _____

γ)

Σειρά (ν) :	1	2	3	4	5	6
Όροι :	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1

Γενικός όρος: _____

5

Δίνεται η κανονικότητα: $\frac{5}{2}, 5, \frac{15}{2}, 10, \frac{25}{2}, 15, \dots$

- α) Ποιος είναι ο γενικός όρος της κανονικότητας;
- β) Βρες τον 12ο και τον 20ο όρο.
- γ) Ποιος όρος της κανονικότητας ισούται με 115;
- δ) Υπάρχει ο όρος αυτής της κανονικότητας ο οποίος είναι ίσος με 75,5 ;

6

-1,5, -3, α, β, -7,5, -9

Η παραπάνω ακολουθία αποτελεί μία κανονικότητα. Βρες:

- α) Τους αριθμούς α και β.
- β) Τον γενικό όρο της κανονικότητας.
- γ) Τον 100ο όρο.

7

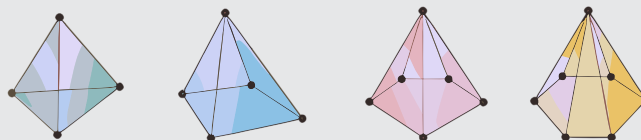
Τα παρακάτω σχήματα αποτελούνται από τετράγωνα πλευράς 1cm.



- α) Υπολόγισε την περίμετρο των 4 πρώτων σχημάτων.
- β) Γράψε έναν τύπο με τον οποίο μπορούμε να υπολογίσουμε την περίμετρο κάθε σχήματος.
- γ) Ποια είναι η περίμετρος του 10ου σχήματος;
- δ) Ποιος είναι ο αριθμός της σειράς που βρίσκεται το σχήμα με περίμετρο 196cm;

8

Οι παρακάτω πυραμίδες έχουν βάσεις τρίγωνο, τετράγωνο, πεντάγωνο και εξαγώνο.



α) Συμπλήρωσε τον πίνακα:

Πλευρές πολυγώνου βάσης (ν).	3	4	5	6
Αριθμός ακμών (α).				

β) Βρες τον αριθμό των ακμών μιας πυραμίδας που έχει βάση ένα 8- γωνο, ένα 9- γωνο και ένα 20- γωνο. Τι παρατηρείς;

γ) Σχεδίασε σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων τα αντίστοιχα σημεία που παριστάνουν οι τιμές του πίνακα.

9

Το παρακάτω γεωμετρικό μοτίβο αποτελείται από οδοντογλυφίδες. Προσπάθησε να κατασκευάσεις το 4ο σχήμα.



- α) Πόσες οδοντογλυφίδες θα χρειαστούμε για να φτιάξουμε ένα τρίγωνο με πλευρά 7 οδοντογλυφίδες;
 β) Υπάρχει στο μοτίβο κάποιο τρίγωνο το οποίο αποτελείται από 225 οδοντογλυφίδες;
 γ) Ποιος είναι ο γενικός κανόνας που μας δείχνει τον αριθμό των οδοντογλυφίδων σε σχέση με τον αριθμό των οδοντογλυφίδων της βάσης του τριγώνου;

Εξασκούμαι



σε όσα έμαθα

10

Πόσα μοτίβα διακρίνεις στο παρακάτω σχήμα;



- α) Στο σχήμα 99, πόσες κόκκινες τελείες θα υπάρχουν;
 β) Πόσες μαύρες τελείες θα υπάρχουν στο σχήμα 62;
 γ) Ποιος είναι γενικός κανόνας που φανερώνει τον αριθμό των μαύρων τελειών σε κάθε σχήμα;



ΕΠΕΚΤΕΙΝΩ
ΤΙΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΜΟΥ

Μελετώ



το συγκεκριμένο θέμα

Κανονικότητες και μοτίβα

Τα μοτίβα είναι κανονικότητες που εμφανίζονται σε διάφορους τομείς, από τη φύση μέχρι το σχέδιο και τις αφηρημένες ιδέες. Χαρακτηριστικό γνώρισμα των μοτίβων είναι η επανάληψη των στοιχείων τους με προβλέψιμο τρόπο. Ένα γεωμετρικό μοτίβο αποτελείται από σχήματα που επαναλαμβάνονται.

Τα απλά μοτίβα μπορούν να παρατηρηθούν μέσω των αισθήσεων, ενώ τα αφηρημένα μοτίβα στις επιστήμες, όπως στα Μαθηματικά ή στη Γλώσσα, απαιτούν ανάλυση για να αναγνωριστούν. Η οπτική παρατήρηση είναι η πιο συχνή μέθοδος για την αναγνώριση μοτίβων, τα οποία υπάρχουν στη φύση και στην τέχνη. Στη φύση, τα οπτικά μοτίβα είναι συχνά πολύπλοκα και χαοτικά, σπάνια επαναλαμβανόμενα με ακρίβεια και πολλές φορές περιλαμβάνουν «φράκταλ» (καταμήσεις). Τέτοια μοτίβα εντοπίζουμε σε σπείρες, κύματα, αφρούς, ρωγμές κ.α.

Για σχεδόν κάθε μοτίβο μπορούμε να προσδιορίσουμε έναν κρυμμένο μαθηματικό κανόνα. Κάθε μαθηματική συνάρτηση παράγει ένα μαθηματικό μοτίβο. Πολλοί επιστημονικοί κλάδοι, αξιοποιώντας τα μαθηματικά, προσπαθούν να προβλέψουν και να εξηγήσουν επαναλαμβανόμενα μοτίβα που εντοπίζουν στην επιστήμη τους.



Σπείρες Αλόης: Η εικόνα δείχνει ένα φυτό αλόης με σπειροειδές μοτίβο. Η φύση δημιουργεί συχνά σπείρες που ακολουθούν τον χρυσό κανόνα, έναν μαθηματικό λόγο που παρατηρείται σε πολλά φυσικά μοτίβα.

Ανακεφαλαίωση (Κανονικότητες)

Κανονικότητα είναι μία οργάνωση στοιχείων (αριθμοί, σχήματα, ήχοι, σύμβολα, ...) με βάση συγκεκριμένους **κανόνες**.

Μορφές κανονικοτήτων:

- τα επαναλαμβανόμενα μοτίβα στα οποία υπάρχει ένα στοιχείο που επαναλαμβάνεται, το οποίο ονομάζεται μονάδα επανάληψης. π.χ. AAB-AAB-AAB-AAB-...
- τα αναπτυσσόμενα μοτίβα στα οποία υπάρχει ένας κανόνας με τον οποίο εμφανίζεται κάθε επόμενος όρος. π.χ. 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, ... ($3 \cdot n$, όπου n φυσικός αριθμός)
- τα γεωμετρικά μοτίβα στα οποία αυτό που επαναλαμβάνεται είναι ένα γεωμετρικό σχήμα. π.χ.



Ειδικά στα αναπτυσσόμενα μοτίβα, αν έχουμε τον γενικό όρο μπορούμε να βρούμε οποιονδήποτε όρο της κανονικότητας. π.χ. Στην κανονικότητα $3 \cdot n$, έχουμε:

$$3 \cdot 1 = 3 \text{ (1ος όρος)}$$

$$3 \cdot 2 = 6 \text{ (2ος όρος)}$$

$$3 \cdot 100 = 300 \text{ (100ος όρος)}$$

Αυτοαξιολόγηση (Κανονικότητες)

A. Χαρακτήρισε ως Σωστές ή Λάθος τις προτάσεις, βάζοντας ένα **x** στην κατάλληλη θέση.

	Σωστό	Λάθος
1. Στα μοτίβα δεν υπάρχει κανόνας για την εμφάνιση των στοιχείων.		
2. Το μοτίβο ABΓABΓABΓ είναι ένα επαναλαμβανόμενο μοτίβο.		
3. Στο επαναλαμβανόμενο μοτίβο A1BAA1BAA1BAA1BA η μονάδα επανάληψης είναι A1B.		
4. Το μοτίβο 1, 3, 5, 7, ... είναι ένα προσθετικό μοτίβο.		
5. Τα πολλαπλάσια κάθε αριθμού μπορούν να περιγραφούν από ένα πολλαπλασιαστικό μοτίβο.		
6. Μπορούμε να εντοπίσουμε στη φύση γεωμετρικά μοτίβα.		
7. Αν έχουμε τον γενικό όρο μιας κανονικότητας, μπορούμε να βρούμε οποιονδήποτε όρο της ακολουθίας.		
8. Ο 3ος όρος της κανονικότητας $7 \cdot n - 2$ είναι ο αριθμός 12.		
9. Οι όροι μιας κανονικότητας είναι πάντα φυσικοί αριθμοί.		

B. Συμπλήρωσε τις παρακάτω κανονικότητες και βρες την μονάδα επανάληψης ή τον κανόνα της ακολουθίας σε κάθε περίπτωση.

α. 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, ..., ..., ..., ...

β. 1.000, 500, 250, ..., ..., ..., ...

γ. 0, -4, -8, -12, -16, ..., ..., ..., ...

Γ. Συμπλήρωσε τα παρακάτω γεωμετρικά μοτίβα:



Σε αυτό το σημείο, θα πρέπει να είσαι σε θέση να έχεις επιτύχει όλα τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα. Γύρνα στην αρχή της θεματικής ενότητας και σημείωσε στα αντίστοιχα κουτάκια. Υπάρχουν στόχοι που αισθάνεσαι ότι δεν έχεις κατακτήσει πλήρως;

ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

A.5

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε να μεταφράζουμε λεκτικές εκφράσεις σε αλγεβρικές παραστάσεις και το αντίστροφο. Θα εξετάσουμε πώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια αλγεβρική παράσταση για την επίλυση προβλημάτων.

Πώς συνδέονται οι αριθμητικές τιμές και οι γεωμετρικές αναπαραστάσεις με τις αλγεβρικές εκφράσεις;

Είσαι έτοιμος/η να ανακαλύψεις πώς οι αλγεβρικές παραστάσεις μπορούν να κάνουν τη ζωή σου πιο εύκολη, από την κατασκευή πινάκων μέχρι την κατανόηση της επιμεριστικής ιδιότητας;



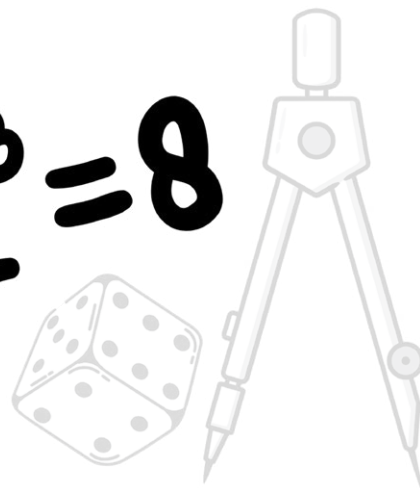
- Μεταφράζω από λεκτικές εκφράσεις σε απλές αλγεβρικές παραστάσεις και αντίστροφα.
- Διακρίνω τα στοιχεία μιας αλγεβρικής παράστασης.
- Λύνω πραγματικά και μαθηματικά προβλήματα χρησιμοποιώντας αριθμητικές και αλγεβρικές παραστάσεις.
- Συνθέτω προβλήματα τα οποία λύνονται με χρήση αριθμητικών και αλγεβρικών παραστάσεων.
- Υπολογίζω την αριθμητική τιμή μιας αλγεβρικής παράστασης για συγκεκριμένες τιμές των μεταβλητών και κατασκευάζω πίνακες τιμών.
- Χρησιμοποιώ την επιμεριστική ιδιότητα $a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$ για να μετατρέπω αλγεβρικές παραστάσεις σε απλούστερη μορφή.
- Ερμηνεύω γεωμετρικά την επιμεριστική ιδιότητα: $a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$ με a, b και c θετικούς.



5.1: Αλγεβρική παράσταση – Αριθμητική τιμή αλγεβρικής παράστασης – Επιμεριστική ιδιότητα $a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$

+ Ανακεφαλαίωση / Αυτοαξιολόγηση

$$2^3 = 8$$



5.1 | Αλγεβρική παράσταση – Αριθμητική τιμή αλγεβρικής παράστασης – Επιμεριστική ιδιότητα

$$α \cdot (\beta \pm \gamma) = α \cdot \beta \pm α \cdot \gamma.$$


Σε ένα πρωτάθλημα ποδοσφαίρου, κάθε ομάδα παίζει με όλες τις υπόλοιπες δύο αγώνες, έναν εντός και έναν εκτός έδρας.

Πόσους αγώνες θα παίξει μια ποδοσφαιρική ομάδα που συμμετέχει σε ένα πρωτάθλημα με 5 συνολικά ομάδες; Με 10 ομάδες;

Αν οι ομάδες είναι συνολικά x , πόσους αγώνες θα παίξει κάθε ομάδα;



Αλγεβρική παράσταση

Σκέψου έναν αριθμό και εκτέλεσε τις παρακάτω πράξεις:

- Διπλασίασε τον αριθμό.
- Πρόσθεσε 6.
- Διαίρεσε το αποτέλεσμα με το 2.
- Αφαίρεσε τον αριθμό που σκέφτηκες στην αρχή.

Βρήκες σίγουρα τον αριθμό 3!

Το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι ανεξάρτητο από τον αριθμό που σκέφτηκες αρχικά! Ονόμασε x τον αρχικό αριθμό και προσπάθησε να εξηγήσεις γιατί το αποτέλεσμα των πράξεων είναι πάντοτε το ίδιο.

Το γράμμα x , που στην προκειμένη περίπτωση παριστάνει έναν οποιοδήποτε αριθμό, λέγεται **μεταβλητή**.

Μια παράσταση που περιέχει πράξεις με αριθμούς, λέγεται, **αριθμητική παράσταση**.

Παραδείγματα αριθμητικών παραστάσεων:

$$2 \cdot 3 + 5 \cdot (-1), \quad \frac{5^2 - 8}{2^3}$$

Μια παράσταση που περιέχει πράξεις με αριθμούς και μεταβλητές ονομάζεται **αλγεβρική παράσταση**.

Παραδείγματα αλγεβρικών παραστάσεων:

$$2 \cdot x^2 - x + 8, \quad \frac{x^2 - 3x}{2}$$

Οι προσθετέοι στην αλγεβρική παράσταση $2 \cdot x^2 - x + 8$ ονομάζονται όροι της παράστασης.

Παρατήρηση: Πολλές φορές το σύμβολο του πολλαπλασιασμού $[\cdot]$ παραλείπεται σε μια αλγεβρική παράσταση. Συνήθως γράφουμε $2x$ αντί $2 \cdot x$ και $\alpha(2 + 3\beta)$ αντί $\alpha \cdot (2 + 3 \cdot \beta)$.

Αριθμητική τιμή αλγεβρικής παράστασης

Αν σε μια αλγεβρική παράσταση αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές με αριθμούς και κάνουμε τις πράξεις, θα προκύψει ένας αριθμός που λέγεται αριθμητική τιμή ή απλά τιμή της αλγεβρικής παράστασης.

Παράδειγμα:

Η τιμή της αλγεβρικής παράστασης: $2x + 6$, για $x = 5$ είναι:

$$2 \cdot 5 + 6 = 10 + 6 = 16.$$

Επιμεριστική ιδιότητα

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$$

$$\alpha \cdot (\beta - \gamma) = \alpha \cdot \beta - \alpha \cdot \gamma$$

Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση

Παραδείγματα:

$$3 \cdot (x + 2) = 3 \cdot x + 3 \cdot 2 = 3x + 6$$

$$5 \cdot (1 - x) = 5 \cdot 1 - 5 \cdot x = 5 - 5x$$

Γεωμετρική ερμηνεία της επιμεριστικής ιδιότητας $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.

Κατασκευάζουμε ορθογώνιο με διαστάσεις α και $(\beta + \gamma)$.



- Το μεγάλο ορθογώνιο έχει βάση $\beta + \gamma$ και ύψος α , άρα το εμβαδόν του είναι: $E = \alpha(\beta + \gamma)$.
- Τα μικρότερα ορθογώνια έχουν εμβαδά $E_1 = \alpha\beta$ και $E_2 = \alpha\gamma$.

Το εμβαδόν του μεγάλου ορθογωνίου ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των μικρότερων ορθογωνίων, δηλαδή:

$$E = E_1 + E_2 \quad \text{ή} \quad \alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

Πράξεις σε αλγεβρική παράσταση:

Η επιμεριστική ιδιότητα γράφεται και ως: $\alpha\beta + \alpha\gamma = (\beta + \gamma)\alpha$

με τη βοήθεια της οποίας μπορούμε να κάνουμε τις πράξεις σε μία αλγεβρική παράσταση.

Παραδείγματα:

- $5x + 3x = (5 + 3)x = 8x$
- $2\alpha - 3\alpha = (2 - 3)\alpha = -1\alpha = -\alpha$
- $y + 4y - 8y = (1 + 4 - 8)y = -3y$

Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση

Η διαδικασία αυτή με την οποία γράψαμε σε απλούστερη μορφή τις παραπάνω αλγεβρικές παραστάσεις, ονομάζεται **αναγωγή ομοίων όρων**.

1. Δίνεται η παράσταση: $A = 2x + 7 + 3 \cdot (5x - 4) - (5x - 1)$.

α) Να κάνετε όλες τις δυνατές πράξεις και απλοποιήσεις στην παράσταση A.

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης A, για $x = -5$.



Λύση:

α)

$$A = 2x + 7 + 3 \cdot (5x - 4) - (5x - 1) = \leftarrow \text{Χρησιμοποιούμε την επιμεριστική ιδιότητα.}$$

$$= 2x + 7 + 15x - 12 - 5x + 1 =$$

$$= (2 + 15 - 5)x + (7 - 12 + 1) = \leftarrow \text{Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.}$$

$$= 12x - 4.$$

β) Στην παράσταση $A = 12x + 4$, αντικαθιστούμε το x με το -5 και έχουμε:

$$A = 12 \cdot (-5) - 4 = -60 - 4 = -64$$



Εξασκούμαι



σε όσα έμαθα

1

Συμπλήρωσε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

α) Μια παράσταση που περιέχει πράξεις μόνο με αριθμούς λέγεται παράσταση.

β) Μια παράσταση που περιέχει πράξεις ανάμεσα σε αριθμούς και μεταβλητές λέγεται παράσταση.

γ) Η παράσταση $2 \cdot x + 6 \cdot a - 2$ αποτελείται από όρους.

δ) Η τιμή της παράστασης $x - 3^2$ για $x = 2$ είναι

2

Να εκφράσεις τις παρακάτω προτάσεις με μία αλγεβρική παράσταση:

Προτάσεις	Αλγεβρική παράσταση
α) Το διπλάσιο ενός αριθμού.	
β) Το τριπλάσιο ενός αριθμού μειωμένο κατά δύο.	
γ) Ένας άρτιος αριθμός.	
δ) Ένας περιττός αριθμός.	
ε) Το μισό ενός αριθμού αυξημένο κατά τρία.	
στ) Το γινόμενο δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών.	
ζ) Το άθροισμα των τετραγώνων δύο αριθμών.	
η) Το τετράγωνο του αθροίσματος δύο αριθμών.	

Στη συνέχεια, φτιάξε προβλήματα από την καθημερινή ζωή που λύνονται με τις αλγεβρικές παραστάσεις που έγραψες.

3

Γράψε προτάσεις οι οποίες να εκφράζονται με καθεμιά από τις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις:

α) $3x$

β) $x - 2$

γ) $\frac{x}{2} + 6$

δ) xy

4

Κάνε τις πράξεις ώστε να απλοποιηθούν οι παρακάτω παραστάσεις:

α) $3x + 5x - 6x$

β) $2a - 3a + 5a$

γ) $7\omega + 4\omega - 2\omega$

δ) $y + 2y + 3y - 6y$

ε) $-x - 4x - x$

στ) $-5a + a + 4a$

5

Κάνε τις πράξεις ώστε να απλοποιηθούν οι παρακάτω παραστάσεις:

α) $2a + 3\beta + 6a - 7\beta$

β) $x + 2y - 9x + y$

γ) $x - 6y + 7 - 5x + 2y - 11$

δ) $3a - \beta + 4a - 8 - 4\beta + 3 + a$

ε) $a + 5\beta - \gamma - 2\beta - a + \gamma - 3\beta$

6

Απλοποίησε τις παραστάσεις αξιοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα:

α) $2(x + 3) + 8(x - 2)$

β) $2(3 + x) - 4(1 - x)$

γ) $3(a + 2\beta) - 2(3a - 2\beta)$

δ) $2x - 2(x - 2) + (x - 9)$

ε) $-5(x - 3) - (4x - 11)$

στ) $4x + (x + 2) \cdot 3$

7

Δίνεται η παράσταση: $A = 5x + 2(8x - 6) - (19x - 11)$

α) Απλοποίησε την παράσταση A.

β) Βρες την τιμή της παράστασης A για $x = 7$.

8

Υπολόγισε την τιμή της παράστασης:

$$A = 6(\alpha + 4\beta) - 2\alpha + 5 - 4(\alpha - 6\beta) \text{ για } \alpha = 1,5 \text{ και } \beta = 0,1.$$

9

Υπολόγισε την τιμή της παράστασης, αν γνωρίζεις ότι οι αριθμοί x και y είναι αντίθετοι.

$$P = 3(x - 2) - 3(y - 2) - 2[2 - 3(y + 2)]$$

10

Υπολόγισε την τιμή των παραστάσεων, αν γνωρίζεις ότι $x + y = 5$.

A = $5x - 2y - (4x - 3y)$

B = $2(x + 2y) - 3(3y + x) + 4y$

Γ = $2 \cdot (5x + 3 - x) - (15 - 8y)$

ΕΠΕΚΤΕΙΝΩ
ΤΙΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΜΟΥ

Μελετώ



το συγκεκριμένο θέμα



Η Άλγεβρα

Η μελέτη της Άλγεβρας ως ξεχωριστή επιστήμη ξεκίνησε στην αρχαία Μεσοποταμία και Αίγυπτο γύρω στο 2.000 π.Χ., με την κατασκευή των πρώτων μεθόδων επίλυσης εξισώσεων. Στην αρχαία Ελλάδα, ο Διόφαντος θεωρείται ο «Πατέρας της Άλγεβρας» για το έργο του «Αριθμητικά». Κατά τον 9ο αιώνα, ο Πέρσης μαθηματικός Αλ-Χουαρίζμι έγραψε το βιβλίο «Al-Kitab al-Mukhtasar fi Hisab al-Jabr wal-Muqabala» από το οποίο προήλθε η λέξη «άλγεβρα».

Στην Αναγέννηση, Ιταλοί μαθηματικοί όπως ο Cardano και ο Bombelli έλυσαν κυβικές και τεταρτοβάθμιες εξισώσεις. Στον 17ο αιώνα, ο Descartes ανέπτυξε την αναλυτική γεωμετρία. Τον 19ο αιώνα η Άλγεβρα έγινε πιο αφηρημένη ενώ τον 20ό αιώνα επεκτάθηκε περαιτέρω, σε πεδία όπως η αλγεβρική Γεωμετρία και η ομοιοκική Άλγεβρα.

«Al-Jabr», επίσης γνωστό ως «The Compendious Book on Calculation by Completion and Balancing», είναι μια αραβική μαθηματική πραγματεία για την άλγεβρα που γράφτηκε στη Βαγδάτη γύρω στο 820 από τον Πέρση πολύμαθο Al-Khwarizmi. Ήταν ένα έργο ορόσημο στην ιστορία των μαθηματικών, με τον τίτλο του να είναι η απόλυτη ετυμολογία της ίδιας της λέξης «άλγεβρα», που αργότερα υιοθετήθηκε από τα μεσαιωνικά λατινικά ως *algebraica*.

Ανακεφαλαίωση (Αλγεβρικές Παραστάσεις)

Θυμόμαστε ότι:

Μια παράσταση που περιέχει πράξεις με αριθμούς λέγεται **αριθμητική παράσταση**.

Μια παράσταση που περιέχει πράξεις με αριθμούς και μεταβλητές ονομάζεται **αλγεβρική παράσταση**.

Αν σε μια αλγεβρική παράσταση αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές με αριθμούς και κάνουμε τις πράξεις, θα προκύψει η **αριθμητική τιμή** της αλγεβρικής παράστασης.

π.χ. Στην αλγεβρική παράσταση $2x + 5x - 7$, για $x=2$ παίρνουμε $2 \cdot 2 + 5 \cdot 2 - 7 = 4 + 10 - 7 = 7$, δηλαδή η τιμή της παράστασης είναι 7.

Στις αλγεβρικές παραστάσεις, όταν κάνουμε πράξεις αξιοποιούμε την επιμεριστική ιδιότητα και την αναγωγή ομοίων όρων. Για την επιμεριστική ιδιότητα έχουμε:

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$$

$$\alpha \cdot (\beta - \gamma) = \alpha \cdot \beta - \alpha \cdot \gamma$$

Στην αλγεβρική παράσταση $A = 2(x + 3) - 2(x + 1) - 4$ παίρνουμε:

$$A = 2x + 2 \cdot 3 - 2x - 2 \cdot 1 - 4$$

$$A = 2x - 2x + 6 - 2 - 4$$

$$A = 0$$

Αυταξιολόγηση (Αλγεβρικές Παραστάσεις)

A. Χαρακτήρισε ως Σωστές ή Λάθος τις προτάσεις, βάζοντας ένα **x** στην κατάλληλη θέση.

	Σωστό	Λάθος
1. Η παράσταση $3 + 2^4 - (-7) + \frac{21}{5}$ είναι μια αριθμητική παράσταση.		
2. Η παράσταση $2 \cdot x - 6 + \frac{y}{2}$ είναι μια αλγεβρική παράσταση.		
3. Η αριθμητική τιμή της παράστασης $2 \cdot x - 6$ για $x=2$ είναι -8 .		
4. Η αριθμητική τιμή της παράστασης $2 \cdot x + x^2$ για $x=-2$ είναι 0.		
5. Ισχύει $x + x + x + x = 4x$.		
6. Ισχύει $2x + x + 2x = 3x$.		
7. Η έκφραση το άθροισμα των τετραγώνων δύο αριθμών ισοδυναμεί με την αλγεβρική παράσταση $(x + y)^2$.		
8. Η αλγεβρική παράσταση $2x$ περιγράφει όλους τους περιττούς αριθμούς.		
9. Το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς a περιγράφεται από την σχέση $2a$		

B. Διατύπωσε σε μορφή αλγεβρικής παράστασης την παρακάτω έκφραση:

«Μια εταιρεία έχει ανοικιάσει έναν χώρο για να αποθηκεύει τα προϊόντα που παράγει. Γνωρίζουμε ότι ο χώρος κοστίζει 700€ και πως για κάθε προϊόν που αποθηκεύεται αυξάνεται το κόστος αποθήκευσης κατά 1,5€» Στη συνέχεια βρες το κόστος αποθήκευσης 100, 200 και 1.000 προϊόντων.

Σε αυτό το σημείο, θα πρέπει να είσαι σε θέση να έχεις επιτύχει όλα τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα. Γύρνα στην αρχή της θεματικής ενότητας και σημείωσε στα αντίστοιχα κουτάκια. Υπάρχουν στόχοι που αισθάνεσαι ότι δεν έχεις κατακτήσει πλήρως;

ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

A.6

Στην ενότητα αυτή θα εξερευνήσουμε τις ιδιότητες της ισότητας και θα μάθουμε πώς να λύνουμε εξισώσεις με έναν άγνωστο αριθμό.

Πώς μπορείς να επιλύεις προβλήματα καθημερινής ζωής με εξισώσεις;

Είσαι έτοιμος/η να ανακαλύψεις πώς οι εξισώσεις σε βοηθούν να εξηγήσεις προβλήματα και να λύσεις γρίφους;



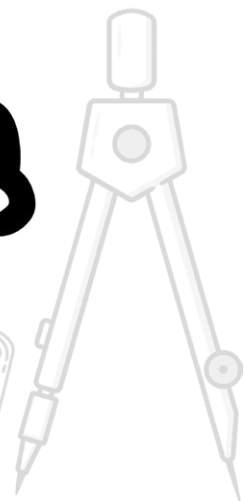
- Διερευνώ και διατυπώνω τις ιδιότητες της ισότητας με βάση μοντέλα – μεταφορές.
- Αναγνωρίζω την εξίσωση με έναν άγνωστο αριθμό x ως μια μαθηματική ισότητα η οποία ισχύει για συγκεκριμένες τιμές του x , καθώς και τους όρους της.
- Αναγνωρίζω ότι μια εξίσωση είναι ισοδύναμη με μια άλλη όταν έχω τις ίδιες λύσεις.
- Εφαρμόζω ιδιότητες διατήρησης της ισότητας για να μετασχηματίσω εξισώσεις της μορφής $ax + b = c$ με ρητούς συντελεστές σε ισοδύναμες μορφές.
- Επιλύω εξισώσεις της μορφής $ax + b = c$ με εφαρμογή των ιδιοτήτων της διατήρησης της ισότητας και των πράξεων.
- Επιλύω προβλήματα της καθημερινής ζωής με εξισώσεις της μορφής $ax + b = c$ αριθμητικά, μέσω κατάλληλων μοντέλων και αλγεβρικά με τις ιδιότητες της ισότητας.
- Συνθέτω προβλήματα που επιλύονται με εξισώσεις της μορφής $ax + b = c$.



6.1: Ιδιότητες της ισότητας (ισότητα και πράξεις) και η έννοια της εξίσωσης

6.2: Επίλυση εξίσωσης της μορφής $ax + b = c$ + Ανακεφαλαίωση / Αυτοαξιολόγηση

$$2^3 = 8$$

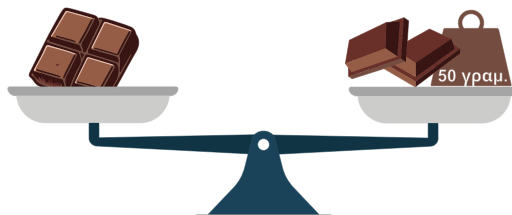


6.1 | Ιδιότητες της ισότητας (ισότητα και πράξεις) και η έννοια της εξίσωσης



Μια ζυγαριά ισορροπεί όταν βάλουμε από το ένα μέρος μια σοκολάτα, της οποίας δεν γνωρίζουμε τη μάζα, και στο άλλο μέρος 50 g και μισή σοκολάτα.

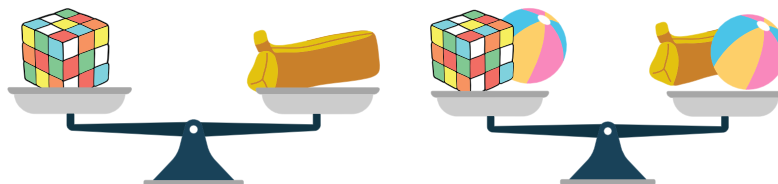
Μπορείς να βρεις μια ισότητα που να περιγράφει αυτή την ισορροπία; Ποια είναι η μάζα της σοκολάτας;



Ιδιότητες της ισότητας

Ο ζυγός ισορροπίας μας δίνει την έννοια της ισότητας. Όταν τα δύο μέρη ισορροπούν οι δύο ποσότητες είναι ίσες ενώ, αν η ζυγαριά γέρνει από μία πλευρά της τότε μας δίνει την έννοια της ανισότητας.

- Αν σε μία ζυγαριά που ισορροπεί προσθέσουμε την ίδια ποσότητα στους δύο δίσκους, τότε η ζυγαριά πάλι ισορροπεί.

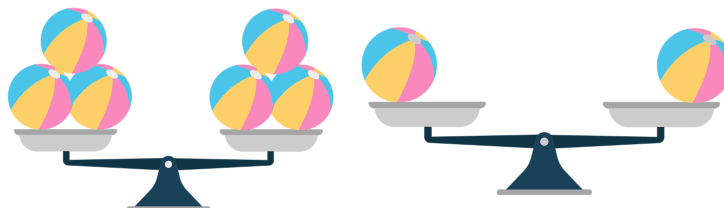


Γενικά:

Αν και στα δύο μέλη μιας ισότητας προσθέσουμε τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ισότητα.

$$\text{Αν } \alpha = \beta \text{ τότε } \alpha + \gamma = \beta + \gamma$$

- Αν σε μία ζυγαριά που ισορροπεί αφαιρέσουμε την ίδια ποσότητα στους δύο δίσκους, τότε η ζυγαριά πάλι ισορροπεί.

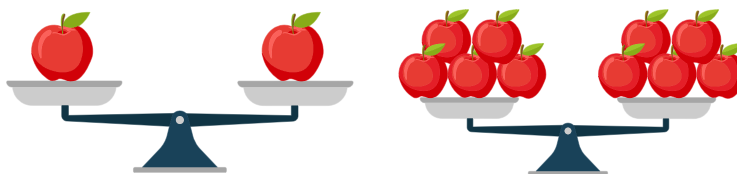


Γενικά:

Αν και από τα δύο μέλη μιας ισότητας αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ισότητα.

$$\text{Αν } \alpha = \beta \text{ τότε } \alpha - \gamma = \beta - \gamma$$

- Αν σε μία ζυγαριά που ισορροπεί πολλαπλασιάσουμε αναλόγως τις ποσότητες στους δύο δίσκους, τότε η ζυγαριά πάλι ισορροπεί.

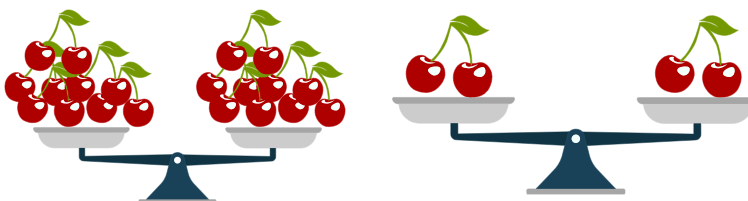


Γενικά:

Αν και τα δύο μέλη μιας ισότητας πολλαπλασιαστούν με τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ισότητα.

$$\text{Αν } \alpha = \beta \text{ τότε } \alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$$

- Αν σε μία ζυγαριά που ισορροπεί διαιρέσουμε αναλόγως τις ποσότητες στους δύο δίσκους, τότε η ζυγαριά πάλι ισορροπεί.



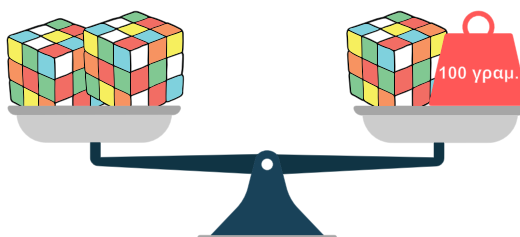
Γενικά:

Αν και τα δύο μέλη μιας ισότητας διαιρεθούν με τον ίδιο μη μηδενικό αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ισότητα.

$$\text{Αν } \alpha = \beta \text{ τότε } \alpha : \gamma = \beta : \gamma \text{ με } \gamma \neq 0$$

Εξίσωση

Πόσο ζυγίζει ο κύβος στο παρακάτω σχήμα;



Εξίσωση με έναν άγνωστο είναι μία ισότητα, που περιέχει αριθμούς και ένα γράμμα (μεταβλητή), την άγνωστη ποσότητα.

Παραδείγματα: $x + 5 = 15$, $2 \cdot y = 16$

Λύση ή **ρίζα** της εξίσωσης είναι ο αριθμός που, όταν αντικαταστήσει τον άγνωστο, επαληθεύει την ισότητα.

Παραδείγματα:

Ο αριθμός 10 είναι λύση της εξίσωσης: $x + 5 = 15$, γιατί όταν αντικαταστήσει τον άγνωστο επαληθεύει την εξίσωση: $10 + 5 = 15$ ή $15 = 15$, που ισχύει.

Ειδικές περιπτώσεις:

Υπάρχουν εξισώσεις που δεν τις επαληθεύει κανένας αριθμός, όπως για παράδειγμα η εξίσωση $0 \cdot x = 2$.

Η εξίσωση αυτή που δεν έχει καμία λύση, ονομάζεται **αδύνατη**.

Υπάρχουν εξισώσεις που όλοι οι αριθμοί τις επαληθεύουν, όπως για παράδειγμα η εξίσωση $0 \cdot x = 0$.

Η εξίσωση αυτή που έχει λύσεις όλους τους αριθμούς, ονομάζεται **ταυτότητα** ή **αόριστη**.

Η διαδικασία, μέσω της οποίας, βρίσκουμε τη λύση της εξίσωσης, λέγεται **επίλυση** της εξίσωσης.

Ισοδύναμες εξισώσεις της μορφής $\alpha \cdot x + \beta = \gamma$

Από τον ορισμό των πράξεων προκύπτουν οι **λύσεις** των παρακάτω εξισώσεων, με άγνωστο τον x :

Εξίσωση	Λύση	Παραδείγματα
$x + \alpha = \beta$	$x = \beta - \alpha$	$x + 2 = 5$ ή $x = 5 - 2$ ή $x = 3$.
$x - \alpha = \beta$	$x = \beta + \alpha$	$x - 6 = 2$ ή $x = 2 + 6$ ή $x = 8$.
$\alpha - x = \beta$	$x = \alpha - \beta$	$10 - x = 3$ ή $x = 10 - 3$ ή $x = 7$.
$\alpha \cdot x = \beta$	$x = \beta : \alpha$	$2 \cdot x = 40$ ή $x = 40 : 2$ ή $x = 20$.
$x : \alpha = \beta$	$x = \beta \cdot \alpha$	$x : 5 = 6$ ή $x = 6 \cdot 5$ ή $x = 30$.
$\alpha : x = \beta$	$x = \alpha : \beta$	$20 : x = 5$ ή $x = 20 : 5$ ή $x = 4$.

Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση



1 Χαρακτήρισε ως Σωστές ή Λάθος τις προτάσεις που ακολουθούν βάζοντας ένα **x** στην κατάλληλη θέση.

- α) Αν $\alpha:3 = \beta:3$, τότε $\alpha = \beta$.
- β) Αν $12 + \alpha = 13 + \beta$, τότε $\alpha = \beta - 1$.
- γ) Η εξίσωση $0 \cdot x = 3$ είναι αδύνατη.
- δ) Αν $3\alpha = 0$, τότε ισχύει $\alpha = 0$.
- ε) Αν $\frac{2}{\gamma} = \frac{2}{\beta}$, τότε $\beta = \gamma$ με $\beta, \gamma \neq 0$.
- στ) Η εξίσωση $2 \cdot x = 6$ έχει λύση τον αριθμό 6.

Σωστό Λάθος

2 Αξιοποίησε τις ιδιότητες των ισοτήτων και συμπλήρωσε τα κενά.

- α) Αν $\alpha + 2 = 7$, τότε $\alpha = \dots\dots\dots$
- β) Αν $\kappa - 3 = 10$, τότε $\kappa = \dots\dots\dots$
- γ) Αν $3 = \lambda$, τότε $\dots\dots\dots = 2\lambda$.
- δ) Αν $9 \cdot \rho = 30$, τότε $\dots\dots\dots = 10$.

3 Εξέτασε αν οι παρακάτω αριθμοί αποτελούν λύση των εξισώσεων:

- α) $x + 3 = 9$, $x = 6$
- β) $x - 2 = 7$, $x = 9$.
- γ) $x \cdot 2 = 10$, $x = 20$.
- δ) $12 - x = 10$, $x = 22$.
- ε) $2 \cdot x + 2 = 10$, $x = 4$.

Εξασκούμαι



σε όσα έμαθα

4 Λύσε τις εξισώσεις:

- α) $\alpha + 12 = 45$ β) $9 + \beta = 17$ γ) $x - 48 = 5$ δ) $65 - x = 17$
- ε) $y \cdot 15 = 45$ στ) $35 \cdot y = 420$ ζ) $\omega:5 = 40$ η) $26:x = 3$

5 Λύσε τις εξισώσεις:

- α) $-5 \cdot x = +25$ β) $x - (+8) = -12$ γ) $x \cdot (-6) = -20$ δ) $-8 - x = +11$

Στη συνέχεια κάνε την επαλήθευση για να ελέγξεις την ορθότητα των λύσεων.

6 Λύσε τις εξισώσεις:

- α) $\frac{1}{2} \cdot x = 2\frac{1}{4}$ β) $x + \frac{6}{10} = 0,1$ γ) $x - \frac{8}{3} = \frac{5}{12}$ δ) $x:\frac{8}{3} = 1 - \frac{1}{3}$

7

Να εκφράσεις τις παρακάτω προτάσεις με μαθηματικές εξισώσεις και να βρεις τη λύση τους.

- α) Το διπλάσιο ενός αριθμού μειωμένο κατά τρία ισούται με έντεκα.
- β) Το άθροισμα δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών ισούται με είκοσι ένα.
- γ) Το μισό ενός αριθμού ελαττωμένο κατά επτά ισούται με ένα.
- δ) Το άθροισμα ενός αριθμού με το τριπλάσιό του ισούται με εβδομήντα δύο.

Στη συνέχεια, φτιάξε προβλήματα από την καθημερινή ζωή που λύνονται με τις μαθηματικές εξισώσεις που έγραψες.

8

Γράψε και λύσε την εξίσωση που περιγράφεται στο παρακάτω πρόβλημα.

Ο κύριος Αποστόλης έχει κάποια χρήματα, με τα οποία αγόρασε μία μπλούζα αξίας 23€ και ένα παντελόνι αξίας 37€. Αν του περίσσεψαν 12€, πόσα χρήματα είχε αρχικά;

9

α) Γράψε έναν τύπο που εκφράζει την περίμετρο ενός τετραγώνου και την περίμετρο ενός ισόπλευρου τριγώνου.



β) Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα:

Πλευρά	1 cm	5cm	8cm	10cm
Περίμετρος τετραγώνου				
Περίμετρος ισόπλευρου τριγώνου				

γ) Αν γνωρίζεις ότι το τετράγωνο έχει περίμετρο 28 εκατοστά και το τρίγωνο 171 εκατοστά, υπολόγισε την πλευρά κάθε σχήματος.



ΕΠΕΚΤΕΙΝΩ
ΤΙΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΜΟΥ

Μελέτώ



το συγκεκριμένο θέμα

Η Εξίσωση

Οι πρώτες εξισώσεις εμφανίστηκαν στη Μεσοποταμία και την Αίγυπτο γύρω στο 2000 π.Χ. Στην αρχαία Ελλάδα, ο Διόφαντος της Αλεξάνδρειας ανέπτυξε μεθόδους για την επίλυση αλγεβρικών εξισώσεων. Τον 9ο αιώνα, ο Αλ-Χουαρίζμι συστηματοποίησε την επίλυση εξισώσεων. Κατά την Αναγέννηση, Ιταλοί μαθηματικοί έλυσαν εξισώσεις με αγνώστους υψωμένους στη δύναμη του 3 και του 4.

Σήμερα, οι εξισώσεις παίζουν σημαντικό ρόλο στη μαθηματική σκέψη και έχουν ευρύ φάσμα εφαρμογών στις επιστήμες και την τεχνολογία. Η μελέτη γύρω από την επίλυση εξισώσεων εξελίσσονται συνεχώς, με νέες μεθόδους και τεχνικές που αξιοποιούνται στην επίλυση πιο σύνθετων προβλημάτων.

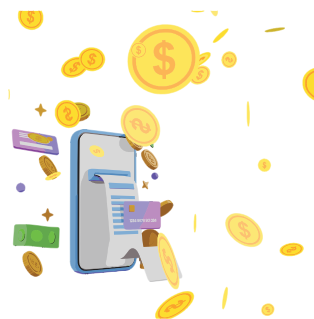
Η πρώτη χρήση ενός συμβόλου x «ίσον», που ισοδυναμεί με $14x + 15 = 71$ στη σύγχρονη σημειογραφία. Από το «The Whetstone of Witte» του Robert Recorde από την Ουαλία (1557).

6.2 | Επίλυση εξίσωσης της μορφής $ax + b = \gamma$

Εξερευνώ



Στον τελευταίο λογαριασμό του συμβολαίου του κινητού πληρώσαμε 45€. Αν γνωρίζουμε ότι κάθε λογαριασμός έχει πάγιο 17€ και κάθε λεπτό ομιλίας χρεώνεται 0,02€, να βρεις πόσα λεπτά ομιλίας πραγματοποιήσαμε.



Επίλυση εξίσωσης της μορφής $ax + b = \gamma$.

Σύμφωνα με τις ιδιότητες της ισότητας, έχουμε:

$$\begin{aligned} & \alpha \cdot x + \beta = \gamma \\ \text{ή } & \alpha \cdot x + \beta - \beta = \gamma - \beta && \leftarrow \text{Αφαιρούμε και από τα δύο μέλη το } \beta. \\ \text{ή } & \alpha \cdot x = \gamma - \beta && \leftarrow \text{Κάνουμε τις πράξεις} \\ \text{ή } & \frac{\alpha \cdot x}{\alpha} = \frac{\gamma - \beta}{\alpha} && \leftarrow \text{Διαιρούμε και τα δύο μέλη με το } \alpha. \text{ (Η διαίρεση γίνεται μόνο αν } \alpha \neq 0) \\ \text{ή } & x = \frac{\gamma - \beta}{\alpha}. && \leftarrow \text{Ο αριθμός } x = \frac{\gamma - \beta}{\alpha} \text{ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης.} \end{aligned}$$

Όλες οι παραπάνω εξισώσεις που προκύπτουν κατά την επίλυση της εξίσωσης είναι **ισοδύναμες**, έχουν δηλαδή την **ίδια λύση**.

Παράδειγμα:

Να λύσετε την εξίσωση: $2 \cdot x + 6 = 14$.

Έχουμε:

$$\begin{aligned} & 2 \cdot x + 6 = 14 \\ \text{ή } & 2 \cdot x + \beta - \beta = 14 - 6 && \leftarrow \text{αφαιρούμε από τα δύο μέλη το } 6 \\ \text{ή } & 2 \cdot x = 8 && \leftarrow \text{κάνουμε τις πράξεις} \\ \text{ή } & \frac{2 \cdot x}{2} = \frac{8}{2} && \leftarrow \text{διαιρούμε και τα δύο μέλη με το } 2 \\ \text{ή } & x = 4. && \leftarrow \text{απλοποιούμε τα κλάσματα} \end{aligned}$$

Άρα η λύση της εξίσωσης είναι ο αριθμός 4.

Για να επιβεβαιώσουμε ότι η λύση που βρήκαμε είναι η σωστή, εκτελούμε την **επαλήθευση**. Στην εξίσωση $2 \cdot x + 6 = 14$ αντικαθιστούμε το x με 4 και έχουμε:

$$\begin{aligned} & 2 \cdot 4 + 6 = 14 \\ \text{ή } & 8 + 6 = 14 \\ \text{ή } & 14 = 14 \text{ που ισχύει.} \end{aligned}$$

Πράγματι, ο αριθμός $x = 4$ είναι η λύση της εξίσωσης.



1. Να βρείτε τη λύση της εξίσωσης: $15x - 18 = 2$

Λύση: Έχουμε

$$15x - 18 = 2$$

$$\text{ή } 15x - \cancel{18} + \cancel{18} = 2 + 18$$

$$\text{ή } 15x = 20$$

$$\text{ή } \frac{15x}{15} = \frac{20}{15}$$

$$\text{ή } x = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$$

Άρα η λύση της εξίσωσης είναι ο αριθμός $\frac{4}{3}$.

2. Η Χαρά και ο Φίλιππος μεταφέρουν μολύβια για να μοιράσουν στους συμμαθητές τους. Η Χαρά λέει στον Φίλιππο: Αν είχα τα διπλάσια μολύβια από αυτά που έχω τώρα και 3 ακόμη, θα είχαμε τον ίδιο αριθμό μολυβιών. Αν ο Φίλιππος μεταφέρει 15 μολύβια, να βρεις πόσα μολύβια μεταφέρει η Χαρά.

Λύση:

Έστω x ο αριθμός των μολυβιών που μεταφέρει η Χαρά.

Από τα δεδομένα του προβλήματος προκύπτει ότι:

$$2x + 3 = 15$$

$$\text{ή } 2x = 15 - 3$$

$$\text{ή } 2x = 12$$

$$\text{ή } x = 12 : 2$$

$$\text{ή } x = 6.$$

Άρα η Χαρά μεταφέρει 6 μολύβια.

Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση



Εξασκούμε



σε όσα έμαθα





1

Λύσε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $3x + 4 = 16$

β) $5x + 8 = 53$

γ) $3 + 12\alpha = 75$

δ) $9\alpha - 15 = 120$

2

Λύσε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $-4x - 18 = 17 - 3$

β) $1 - 3x = -5$

γ) $16x + 83 = 19$

δ) $6 + 6x - 1 = 7 - 18$

3

Αξιοποίησε την επιμεριστική ιδιότητα για να λύσεις τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $2(x - 1) = 3 + 45$

β) $3 - (x - 2) = 7$

γ) $3(x - 2) + 2(x + 1) = 6$

δ) $x - 2(x - 4) = 10$

4

Βρες τη λύση των παρακάτω εξισώσεων:

α) $\frac{1}{2} \cdot \alpha = 8$

β) $\frac{\beta}{2} = \frac{12}{24}$

γ) $\frac{2}{3} \cdot \gamma = \frac{8}{12}$

δ) $3\delta = \frac{3}{4}$

ε) $\frac{\epsilon}{8} - 1 = 0$

5

Βρες τον αριθμό για τον οποίο γνωρίζουμε ότι το εξαπλάσιό του μειωμένο κατά 10, ισούται με τον αριθμό αυξημένο κατά ογδόντα.

6

Ο Μάριος έβαλε στον κουμπαρά του την τελευταία εβδομάδα τα εξής ποσά: 10€, 13,50€, 8,40€ και 11,20€. Στο τέλος της εβδομάδας μέτρησε όλα τα χρήματα στον κουμπαρά του και βρήκε 57,10€. Πόσα χρήματα περιείχε ο κουμπαράς του στην αρχή της εβδομάδας, πριν αρχίσει να αποταμιεύει;

7

Γνωρίζουμε ότι το $\frac{1}{2}$ ενός αριθμού, όταν προστεθεί με τα $\frac{3}{4}$ του ίδιου αριθμού, δίνουν άθροισμα 20. Ποιος είναι ο αριθμός;

8

Γράψε ένα πρόβλημα που επιλύεται με εξίσωση της μορφής $2x + 4 = 20$.

9

Λύσε την εξίσωση: $0,2x - 4\left(0,1x + \frac{1}{2}\right) - x = 0$

10

Λύσε την εξίσωση: $2x - 3 \cdot 10^2 - x + 3x = 4[2(4 \cdot 2 - 3^2) + 20]$

Ανακεφαλαίωση (Αλγεβρικές Σχέσεις)

Θυμόμαστε ότι:

Για κάθε **ισότητα** ισχύει ότι:

- Αν $\alpha = \beta$ τότε $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$
- Αν $\alpha = \beta$ τότε $\alpha - \gamma = \beta - \gamma$
- Αν $\alpha = \beta$ τότε $\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$
- Αν $\alpha = \beta$ τότε $\alpha : \gamma = \beta : \gamma$ με $\gamma \neq 0$

Εξίσωση με έναν άγνωστο είναι μία ισότητα, που περιέχει αριθμούς και ένα γράμμα (μεταβλητή), την άγνωστη ποσότητα.

$$\text{π.χ. } 3 + x = 13$$

Λύση ή ρίζα της εξίσωσης είναι ο αριθμός που, όταν αντικαταστήσει τον άγνωστο, επαληθεύει την ισότητα.

π.χ. Στην εξίσωση $3 + x = 13$, η λύση είναι ο αριθμός 10 γιατί $3 + 10 = 13$.

Ειδικές περιπτώσεις εξισώσεων:

- Η εξίσωση που δεν έχει καμία λύση ονομάζεται **αδύνατη** (π.χ. $0x = 2$).
- Η εξίσωση που έχει λύσεις όλους τους αριθμούς ονομάζεται **ταυτότητα** ή **αόριστη** ($0x = 0$).

Η διαδικασία, μέσω της οποίας, βρίσκουμε τη λύση της εξίσωσης, λέγεται **επίλυση** της εξίσωσης. Για να επιβεβαιώσουμε ότι η λύση που βρήκαμε είναι η σωστή κάνουμε **επαλήθευση**.

Για παράδειγμα, στην εξίσωση $-2 + 2x = 12$ έχουμε:

$$\begin{aligned} -2 + 2x &= 12 \\ \text{ή } 2x &= 12 + 2 \\ \text{ή } 2x &= 14 \\ \text{ή } x &= \frac{14}{2} \\ \text{ή } x &= 7 \end{aligned}$$

Για επαλήθευση παίρνουμε: $-2 + 2 \cdot 7 = 12$ δηλαδή $12 = 12$.

Αυτοαξιολόγηση (Αλγεβρικές Σχέσεις)

A. Χαρακτήρισε ως Σωστές ή Λάθος τις προτάσεις, βάζοντας ένα **x** στην κατάλληλη θέση.

	Σωστό	Λάθος
1. Αν $2\alpha = 2\beta$, τότε $\alpha = \beta$.		
2. Αν $\alpha = \beta + 4$, τότε $\alpha + \beta = 4$.		
3. Η εξίσωση $0 \cdot x = 0$ είναι αδύνατη.		
4. Αν $3\alpha + 3 = 0$, τότε ισχύει $\alpha = 0$.		
5. Αν $\frac{\gamma}{4} = \frac{\beta}{2}$, τότε $\beta = 2\gamma$.		
6. Η εξίσωση $2 \cdot x = 2$ είναι αόριστη.		
7. Η εξίσωση $2 \cdot x = 0$ έχει λύση το $x = -2$.		
8. Μπορούμε να βρούμε πάντα μία λύση για κάθε εξίσωση.		
9. Η εξίσωση $\frac{\alpha}{4} + \frac{1}{2} = 1$ έχει λύση τον αριθμό $\alpha = 2$.		
10. Η εξίσωση $y - y = 0$ είναι αόριστη.		

B. Αξιοποίησε την έννοια της εξίσωσης και τις ιδιότητες της ισότητας για να περιγράψεις αλγεβρικά και να λύσεις τα παρακάτω προβλήματα:

- Η ηλικία της μητέρας της Μαρίας είναι 54 έτη. Αν η ηλικία της μητέρας είναι εξαπλάσια της ηλικίας της Μαρίας, βρες την ηλικία της Μαρίας.
- Ένας οινοπαραγωγός έχει φτιάξει 1.400 λίτρα λευκό κρασί και θέλει να τα συσκευάσει σε βαρελάκια των 6 λίτρων. Πόσα βαρελάκια θα χρησιμοποιήσει; Πόσα λίτρα κρασί θα περισσέψουν;
- Σε ένα κατάστημα με εκπτώσεις, γνωρίζουμε ότι κάθε ηλεκτρονικό προϊόν πωλείται με έκπτωση 30%. Αν αγοράσαμε ένα κινητό αρχικής τιμής 270€, πόσα χρήματα πληρώσαμε τελικά; Αν αγοράσαμε ένα προϊόν με τελική τιμή 525€, ποια ήταν η αρχική του τιμή;

Ομαδική δραστηριότητα

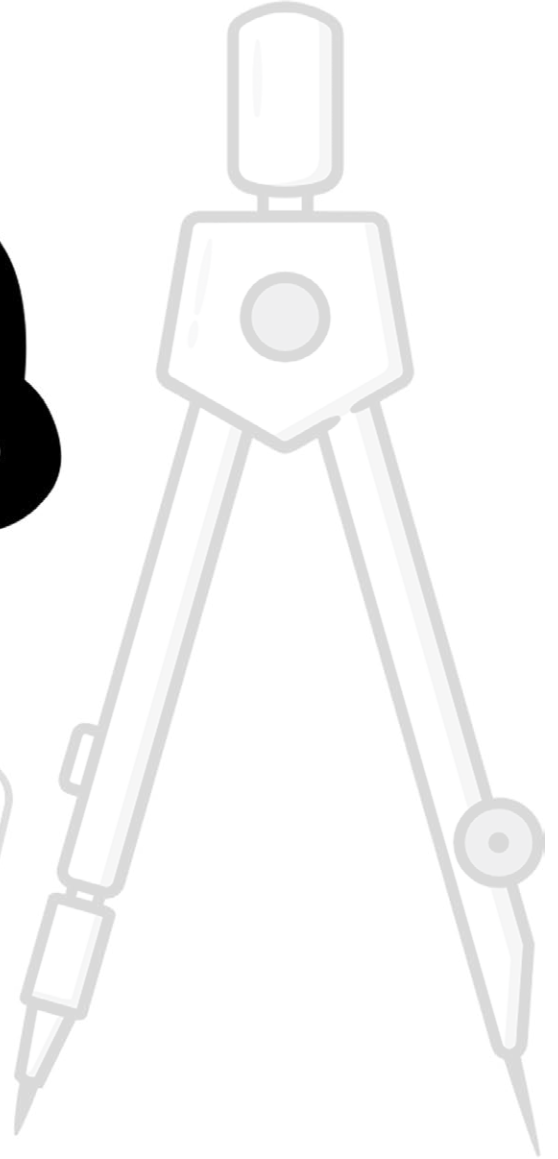
Χωριστείτε σε ομάδες και προσπαθήστε να βρείτε τη «μυστική συνταγή της γιαγιάς».

Η γιαγιά ετοιμάζει μυστικά μπισκότα και χρησιμοποιεί αλεύρι, ζάχαρη και σοκολάτα. Μας λέει ότι το αλεύρι που χρησιμοποίησε είναι 3 φορές περισσότερο από τη ζάχαρη και ότι η σοκολάτα είναι 5 γραμμάρια λιγότερη από τη ζάχαρη. Συνολικά, τα υλικά ζυγίζουν 220 γραμμάρια.

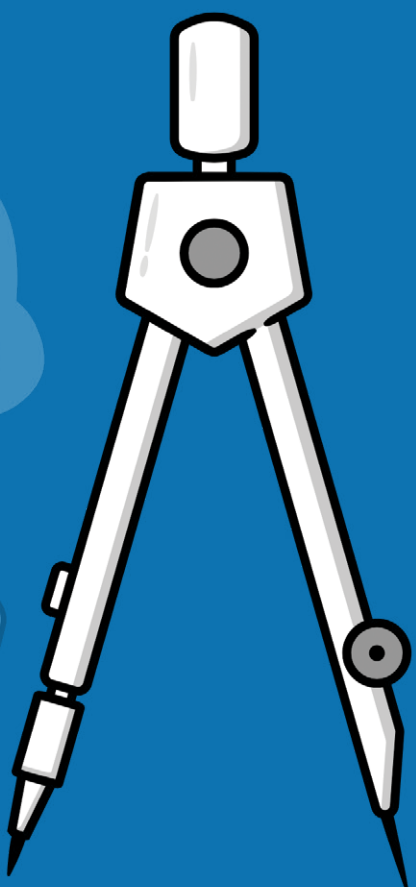
Πόσα γραμμάρια από κάθε υλικό χρησιμοποίησε η γιαγιά;

Σε αυτό το σημείο, θα πρέπει να είσαι σε θέση να έχεις επιτύχει όλα τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα. Γύρνα στην αρχή της θεματικής ενότητας και σημείωσε ✓ στα αντίστοιχα κουτάκια. Υπάρχουν στόχοι που αισθάνεσαι ότι δεν έχεις κατακτήσει πλήρως;

$$2^3 = 8$$



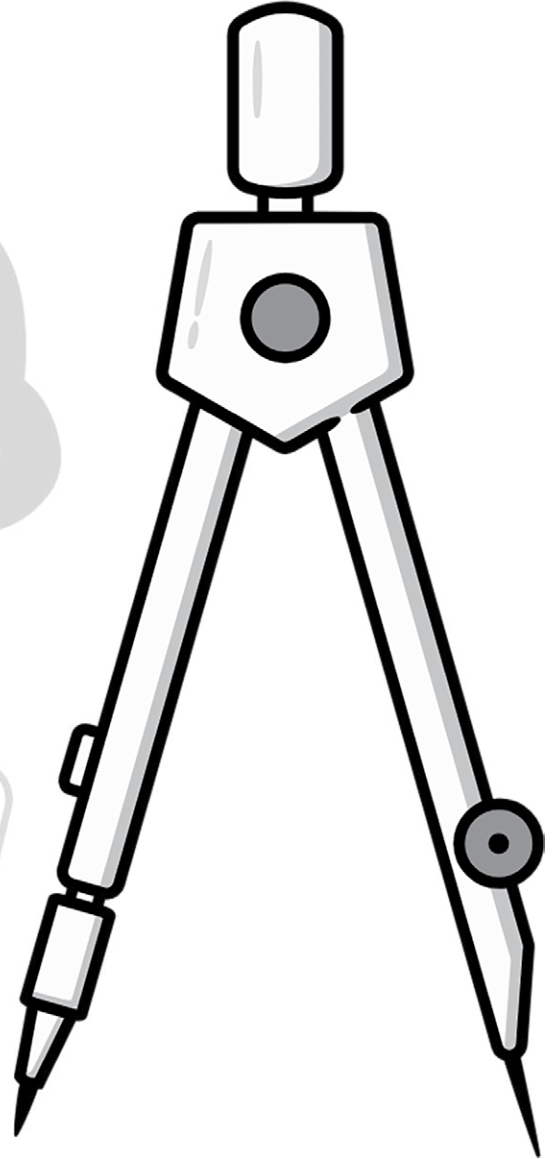
ГЕОМЕТРИЯ



$$2^3 = 8$$



$$2^3 = 8$$



ΜΕΤΡΗΣΗ

B.1

Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε βασικές γεωμετρικές έννοιες, όπως το σημείο, η ευθεία και οι γωνίες, και θα μάθουμε πώς να σχεδιάζουμε απλά και σύνθετα γεωμετρικά σχήματα. Θα εξοικειωθούμε με τις μονάδες μέτρησης μήκους και γωνιών, καθώς και με τις μετατροπές τους.

Πώς υπολογίζεις το μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος ή το μέτρο μιας γωνίας;

Είσαι έτοιμος/η να ανακαλύψεις πώς αυτές οι έννοιες συνδέονται με την καθημερινότητα, όπως στη μέτρηση αποστάσεων ή στη σχεδίαση αντικειμένων;



- Αναγνωρίζω και περιγράφω βασικές γεωμετρικές έννοιες (σημείο, ευθεία, ημιευθεία, ευθύγραμμο τμήμα, γωνία) σε απλά και σύνθετα γεωμετρικά σχήματα
- Επιλέγω τις κατάλληλες μονάδες μέτρησης μήκους και κάνω μετατροπές από τη μια μονάδα στην άλλη.
- Προσθέτω και αφαιρώ ευθύγραμμο τμήματα χρησιμοποιώντας γεωμετρικά όργανα.
- Προσδιορίζω τη σχέση του μέτρου του αθροίσματος, της διαφοράς με τα μέτρα των σχετιζόμενων τμημάτων.
- Υπολογίζω μήκη πλευρών και περιμέτρους πολυγώνων χρησιμοποιώντας ιδιότητες ή σχέσεις.
- Επιλύω προβλήματα που αφορούν τη σύγκριση τμημάτων μέσω του μήκους τους χρησιμοποιώντας κατάλληλες μονάδες μέτρησης.
- Επιλύω προβλήματα που αφορούν μήκη τμημάτων και περιμέτρους ευθύγραμμων σχημάτων με τη χρήση κατάλληλων μονάδων μέτρησης.
- Προσθέτω και αφαιρώ γωνίες με επίθεση.
- Υπολογίζω γωνίες χρησιμοποιώντας ιδιότητες ή σχέσεις.

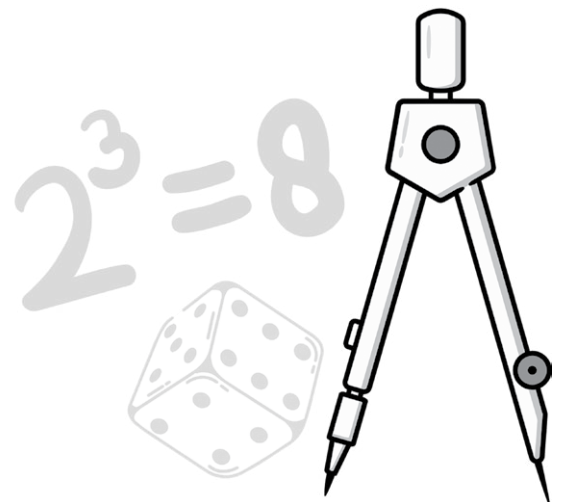


1.1: Βασικές έννοιες: σημείο, ευθεία, ημιευθεία, ευθύγραμμο τμήμα, γωνία, κύκλος

1.2: Μήκος ευθύγραμμου τμήματος

1.3: Μέτρο γωνίας

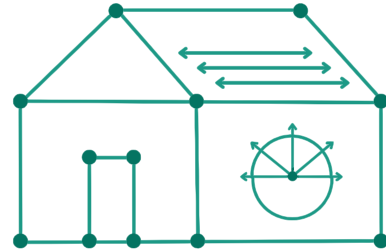
+ Ανακεφαλαίωση / Αυτοαξιολόγηση



1.1 | Βασικές έννοιες: σημείο, ευθεία, ημιευθεία, ευθύγραμμο τμήμα, γωνία, κύκλος.



Πόσες ευθείες και ευθύγραμμα τμήματα μπορείς να εντοπίσεις στο παρακάτω σχήμα;



Βασικές έννοιες

Ένα **σημείο** παριστάνεται με μία τελεία και δεν έχει διαστάσεις (μήκος ή πλάτος).

Για παράδειγμα το ίχνος της μύτης του μολυβιού μας δίνει την έννοια του σημείου.

Συμβολίζουμε το σημείο με ένα κεφαλαίο γράμμα. Π.χ. A .

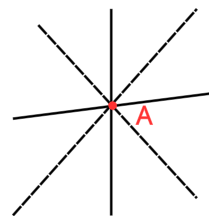
Ευθεία είναι η γραμμή που εκτείνεται απεριόριστα χωρίς αρχή και τέλος και απολύτως ίσια.

Συμβολίζουμε την ευθεία με ένα μικρό γράμμα, όπως για παράδειγμα το ε

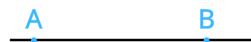
ή με δύο γράμματα, για παράδειγμα $x'x$.

Προκύπτει ότι:

- Από ένα σημείο διέρχονται άπειρες ευθείες.



- Από δύο σημεία διέρχεται μία μοναδική ευθεία.



Αν σε μία ευθεία πάρουμε δύο σημεία A και B τότε το σχήμα που αποτελείται από τα σημεία A, B και τα μεταξύ τους σημεία λέγεται **ευθύγραμμο τμήμα** AB (ή BA).



- Τα σημεία A και B λέγονται **άκρα** του ευθύγραμμου τμήματος.
- Το ευθύγραμμο τμήμα έχει αρχή και τέλος ενώ η ευθεία όχι.

Αν προεκτείνουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα AB και προς τα δύο του άκρα τότε σχηματίζεται μία ευθεία.

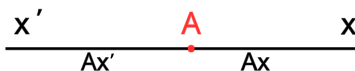


Αν προεκτείνουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα AB μόνο προς το ένα του άκρο τότε το σχήμα που προκύπτει έχει αρχή και δεν έχει τέλος και ονομάζεται **ημιευθεία**.

Συμβολίζουμε την ημιευθεία Ax.

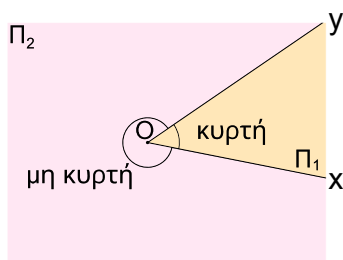


Αν σε μία ευθεία $x'x$ πάρουμε ένα σημείο A τότε το σημείο χωρίζει την ευθεία σε δύο ημιευθείες Ax και Ax', οι οποίες έχουν κοινή αρχή το σημείο A.



- Οι ημιευθείες Ax και Ax' που έχουν κοινή αρχή και σχηματίζουν την ευθεία $x'x$ λέγονται **αντικείμενες ημιευθείες**.

Σχεδιάζουμε δύο ημιευθείες Ox και Oy, με κοινή αρχή το σημείο O. Οι ημιευθείες χωρίζουν το επίπεδο σε δύο περιοχές Π_1 και Π_2 . Καθεμία από αυτές τις περιοχές μαζί με τις ημιευθείες Ox και Oy ονομάζεται **γωνία**.

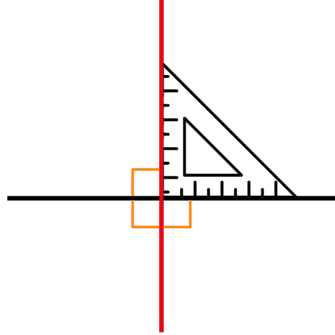


- Η μικρότερη Π_1 λέγεται **κυρτή** γωνία.
- Η μεγαλύτερη Π_2 λέγεται **μη κυρτή** γωνία.

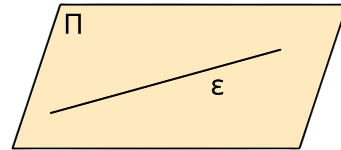
Τις γωνίες τις συμβολίζουμε με τρία γράμματα: $x\hat{O}y$ ή $y\hat{O}x$ γράφοντας στη μέση την κορυφή της γωνίας.

Διαφορετικά μπορούμε να συμβολίσουμε \hat{A} μία γωνία, όπου A το γράμμα της κορυφής της ή με ένα μικρό γράμμα (π.χ. ω)

Σημείωση: Με τον κανόνα κατασκευάζουμε ευθείες που ονομάζονται **κάθετες**, ενώ η γωνία που σχηματίζουν λέγεται **ορθή**.

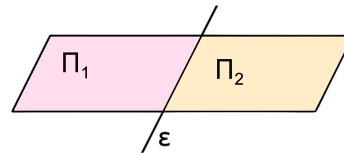


Επίπεδο είναι η επιφάνεια πάνω στην οποία εφαρμόζει παντού η ευθεία γραμμή.

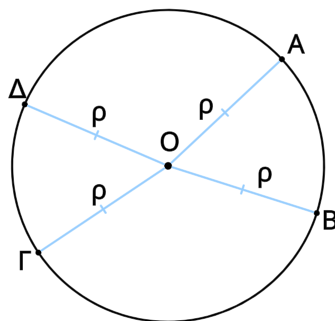


Προκύπτει ότι:

- Το επίπεδο επεκτείνεται απεριόριστα.
- Κάθε ευθεία ενός επιπέδου το χωρίζει σε δύο **ημιεπίπεδα**.



Κύκλος λέγεται το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου που απέχουν την ίδια απόσταση από ένα σταθερό σημείο O .

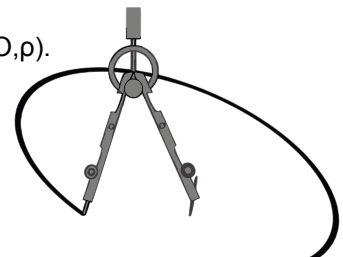


- Το σημείο O λέγεται **κέντρο** του κύκλου.
- Η σταθερή αυτή απόσταση λέγεται **ακτίνα** του κύκλου και συμβολίζεται με ρ .

Συμβολίζουμε έναν κύκλο με κέντρο το σημείο O και ακτίνα το μήκος ρ , ως (O, ρ) .

Σχεδιάζουμε κύκλο με τον **διαβήτη**.

Οι κύκλοι που έχουν το ίδιο κέντρο λέγονται **ομόκεντροι**.





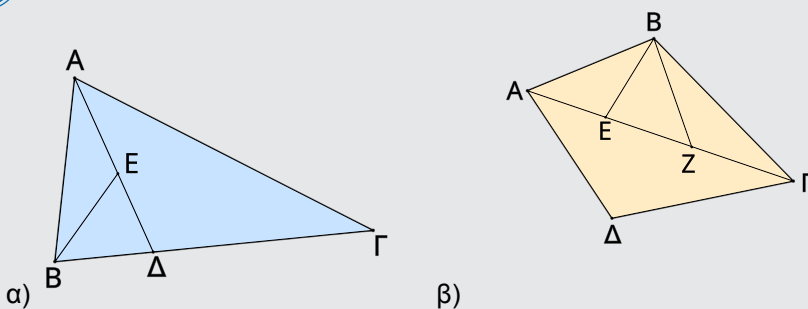
1

Συμπλήρωσε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

- α) Το ίχνος της μύτης του μολυβιού, δίνει την έννοια του
- β) Εάν προεκτείνουμε απεριόριστα ένα ευθύγραμμο τμήμα και από τα δύο του άκρα, τότε το νέο σχήμα που προκύπτει λέγεται
- γ) Από ένα σημείο διέρχονται ευθείες ενώ από δύο σημεία διέρχεται ευθεία.
- δ) Εάν προεκτείνουμε απεριόριστα ένα ευθύγραμμο τμήμα πέρα από το ένα μόνο άκρο του, τότε το σχήμα που προκύπτει λέγεται
- ε) Οι ημιευθείες που έχουν κοινή αρχή και σχηματίζουν μια ευθεία λέγονται ημιευθείες.

2

Γράψε όσα ευθύγραμμα τμήματα βλέπεις στα παρακάτω σχήματα:



3

Σχεδιάσε 3 σημεία A, B, Γ. Στη συνέχεια σχεδιάσε και ονόμασε τις ευθείες που αυτά ορίζουν.



4

Σχεδιάσε ένα σημείο O και δύο διαφορετικές ευθείες που να διέρχονται από αυτό.

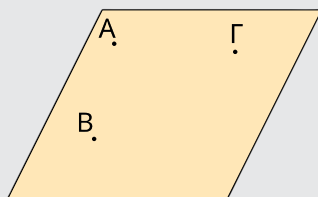
Ονόμασε όλες τις αντικείμενες ημιευθείες με αρχή το O.

Σε κάθε ημιευθεία πάρε από ένα σημείο, διαφορετικό από το O, και σχεδιάσε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα που αυτά ορίζουν.

5

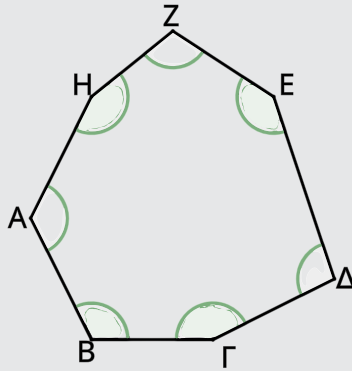
Προσπάθησε να φέρεις στο παρακάτω επίπεδο κατάλληλες ευθείες, ώστε να μείνουν στο ίδιο ημιεπίπεδο τα σημεία:

- α) A και B
- β) A και Γ
- γ) B και Γ
- δ) A, B και Γ



6

Στο παρακάτω σχήμα ονόμασε όλες τις πλευρές και τις γωνίες.



Εξασκούμαι



σε όσα έμαθα

7

Προεκτείνουμε απεριόριστα ένα ευθύγραμμο τμήμα AB προς τα δύο άκρα του. Ονόμασε όλες τις αντικείμενες ημιευθείες του διπλανού σχήματος.



8

Σχεδιάσε τρία σημεία A, B, Γ ώστε να μην ανήκουν στην ίδια ευθεία. Στη συνέχεια, φέρε:

- α) Το ευθύγραμμο τμήμα AB.
- β) Την ευθεία ΑΓ.
- γ) Την ημιευθεία ΓΒ.

9

Σχεδιάσε τρεις ομόκεντρους κύκλους με ακτίνες: 3cm, 3,5cm και 5cm.

10

Πάρε ένα ευθύγραμμο τμήμα AB. Σχεδιάσε τον κύκλο με κέντρο το σημείο A και ακτίνα το μήκος του τμήματος AB και τον κύκλο με κέντρο το σημείο B και ακτίνα το AB.

ΕΠΕΚΤΕΙΝΩ
ΤΙΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΜΟΥ

Μελετώ



το συγκεκριμένο θέμα



Σελίδα τίτλου της πρώτης αγγλικής έκδοσης του Sir Henry Billingsley των *Euclid's Elements*, 1570.

Τα Στοιχεία του Ευκλείδη

Τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη, γραμμένα τον 3ο αιώνα π.Χ. στην Αλεξάνδρεια, είναι ένα από τα σημαντικότερα έργα στην ιστορία των μαθηματικών. Αποτελούνται από 13 βιβλία που περιέχουν κανόνες, αποδείξεις και θεωρήματα για τη Γεωμετρία και τη Θεωρία των Αριθμών. Το έργο ξεκινά με βασικές έννοιες και αξιώματα και προχωρά σε πιο σύνθετα θεωρήματα και αποδείξεις. Στα Στοιχεία περιγράφονται έννοιες όπως τα σημεία, οι ευθείες, οι γωνίες, τα τρίγωνα, οι κύκλοι και οι ιδιότητες των αριθμών. Τα «Στοιχεία» αποτελούν τη βάση για τη διδασκαλία της γεωμετρίας για πάνω από δύο χιλιετίες, μέχρι και σήμερα.

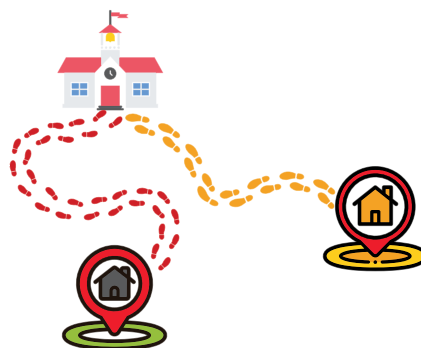
1.2 | Μήκος ευθύγραμμου τμήματος

Εξερευνώ



Οι δύο φίλοι μετράνε τα βήματα που απαιτούνται για να διανύσουν την απόσταση από το σπίτι τους ως το σχολείο. Ο Γιάννης χρειάζεται 350 βήματα και ο Κώστας 340.

- Μπορούμε να εκτιμήσουμε ποιο παιδί μένει πιο κοντά στο σχολείο;
- Ποια πληροφορία θα ήταν αρκετή για να ξέρουμε με βεβαιότητα την απόσταση σχολείο-σπίτι;



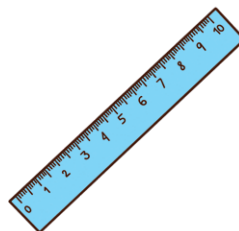
Μήκος ευθύγραμμου τμήματος

Για να συγκρίνουμε δύο μεγέθη, δηλαδή για να καθορίσουμε αν το ένα είναι μεγαλύτερο, μικρότερο ή ίσο σε σχέση με το άλλο, μπορούμε να συγκρίνουμε τα μεγέθη αυτά με ένα άλλο σταθερό μέγεθος, που ονομάζεται **μονάδα μέτρησης**.

Γενικά:

Βρίσκουμε το **μήκος** ενός ευθύγραμμου τμήματος συγκρίνοντάς το με ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα που λέγεται μονάδα μήκους. Η βασική μονάδα μήκους που χρησιμοποιούμε είναι το **μέτρο (m)**.

Για να μετρήσουμε σχετικά μικρά μήκη χρησιμοποιούμε, συνήθως, το **υποδεκάμετρο**, που είναι το ένα δέκατο του μέτρου.



Μονάδες μέτρησης μήκους

Αν το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος είναι πολύ μεγαλύτερο ή πολύ μικρότερο από το μήκος του μέτρου, επιλέγουμε, για τη μέτρηση ένα πολλαπλάσιο ή μια υποδιαίρεση του μέτρου.

	Ονομασία	Σύμβολο
Πολλαπλάσια του μέτρου	Χιλιόμετρο	Km
	Μέτρο	m
Υποδιαίρεσεις του μέτρου	Δεκατόμετρο	dm
	Εκατοστόμετρο	cm
	Χιλιοστόμετρο	mm



Από μεγαλύτερη σε μικρότερη μονάδα μέτρησης:

1 m	= 10 dm	= 100 cm	= 1.000 mm
	1 dm	= 10 cm	= 100 mm
		1 cm	= 10 mm

Επίσης: $1 \text{ km} = 1.000 \text{ m}$.

Από μικρότερη σε μεγαλύτερη μονάδα μέτρησης:

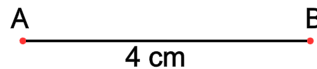
1 mm	= 0,1 cm	= 0,01 dm	= 0,001 m
	1 cm	= 0,1 dm	= 0,01 m
		1 dm	= 0,1 m

Επίσης: $1 \text{ m} = 0,001 \text{ km}$.

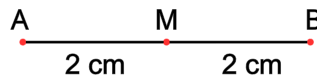
Στην Αγγλία, την Αμερική και σε μερικές ακόμη χώρες, η βασική μονάδα μήκους είναι η γιάρδα ή γιάρδα (yd).

- Η 1 γιάρδα (yd) διαιρείται σε 3 πόδια (ft) και ισούται περίπου με 0,9144 m.
- το 1 πόδι (ft) σε 12 ίντσες (in) και ισούται περίπου με 0,3048 m.

Απόσταση δύο σημείων A και B λέγεται το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB, που τα ενώνει.



Μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος AB ονομάζουμε το σημείο M του τμήματος, που απέχει εξίσου από τα άκρα του.



Αν πάρουμε σε μία ευθεία με τη σειρά τα σημεία A, B και Γ τότε:

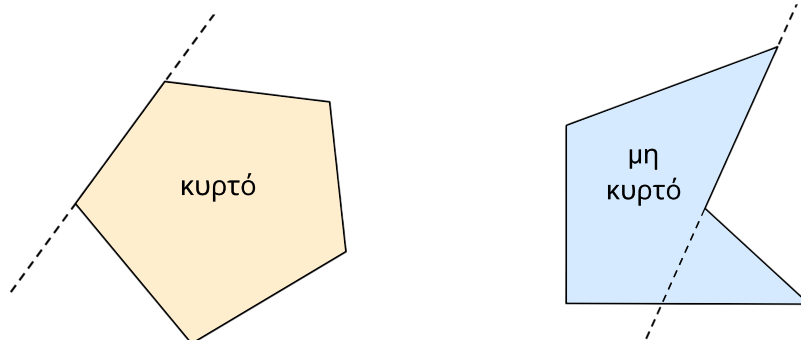


- το τμήμα AΓ είναι το άθροισμα των AB και BΓ: $A\Gamma = AB + B\Gamma$

- το τμήμα AB είναι η διαφορά των AΓ και BΓ: $AB = A\Gamma - B\Gamma$

Περίμετρος ευθύγραμμου σχήματος

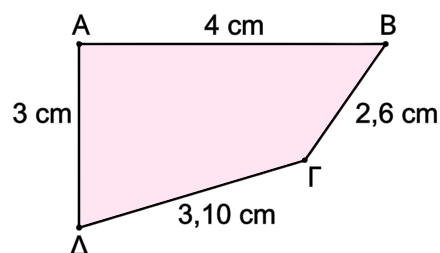
Κυρτό ονομάζεται ένα ευθύγραμμο σχήμα όταν η προέκταση κάθε πλευράς του αφήνει το σχήμα στο ίδιο ημιεπίπεδο. Διαφορετικά ονομάζεται **μη κυρτό**.



Το άθροισμα των πλευρών ενός ευθύγραμμου σχήματος, θα το λέμε **περίμετρο** του σχήματος.

Για παράδειγμα η περίμετρος του ΑΒΓΔ είναι:

$$AB + ΒΓ + ΓΔ + ΑΔ = 4\text{cm} + 2,6\text{cm} + 3,10\text{cm} + 3\text{cm} = 12,70 \text{ cm.}$$



1

Ποια από τις μονάδες μέτρησης μήκους είναι προτιμότερη για τις παρακάτω μετρήσεις;

- α. Απόσταση πόλεων
- β. Μήκος κρεβατιού
- γ. Πλάτος παραθύρου
- δ. Ύψος χάρακα
- ε. Πάχος τετραδίου

2

Μετάρηψε σε m τα παρακάτω μεγέθη.

- α) 1,78 km =
- β) 0,12dm =
- γ) 21,3 cm =
- δ) 0,03 km =
- ε) 2dm =
- στ) 10 mm =

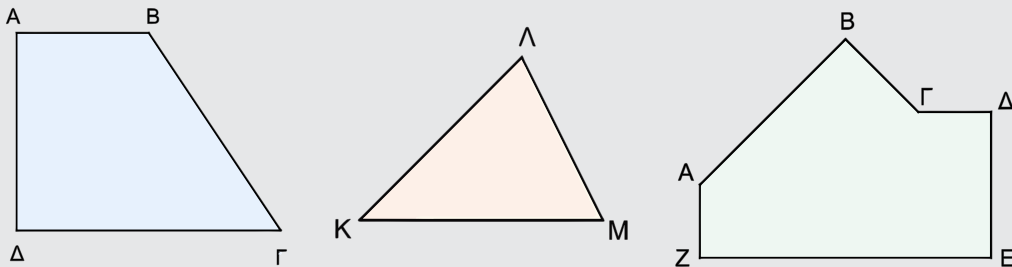
3

Σύγκρινε τα παρακάτω μεγέθη και τοποθέτησέ τα από το μικρότερο στο μεγαλύτερο:

0,12 km, 22dm, 307cm, 11.789 mm, 21 m.

4

Στα παρακάτω σχήματα υπολόγησε την απόσταση των σημείων σε εκατοστά και χιλιοστά.



5

Σχεδιάσε ευθύγραμμα τμήματα $AB = 5\text{cm}$ και $BΓ = 7\text{cm}$ με τέτοιον τρόπο, ώστε:

- α) τα Α και Γ να έχουν μέγιστη απόσταση. Ποια είναι, στην περίπτωση αυτή, η απόστασή τους;
- β) τα Α και Γ να έχουν ελάχιστη απόσταση. Ποια είναι, στην περίπτωση αυτή, η απόστασή τους;



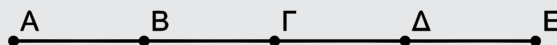
6

Αφού υπολογίσεις το μήκος των παρακάτω ευθύγραμμων τμημάτων, προσδιόρισε το μέσο τους.



7

Στο παρακάτω σχήμα το Γ είναι το μέσο του ΑΕ και το Β είναι το μέσο του ΑΓ.



- α) Αν $AB = 3\text{cm}$, πόσο είναι το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΕ;
 β) Τι συμπέρασμα βγάζεις για το σημείο Δ, αν γνωρίζεις ότι $\Delta E = 3\text{cm}$;

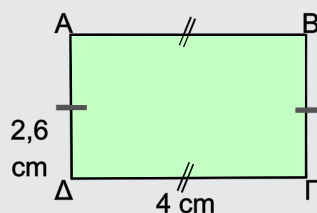
8

Ένα κατάστημα με οικοδομικά είδη πουλάει λινάτσα με το μέτρο. Κάθε μέτρο κοστίζει 2,70€. Το ρολό έχει συνολικά 25 μέτρα λινάτσας. Μέσα στην εβδομάδα πουλήθηκαν 35 δέκατα, 520 εκατοστά και 12,3 μέτρα λινάτσας.

- α) Πόσα χρήματα εισέπραξε το κατάστημα;
 β) Πόσα μέτρα λινάτσας περίσσεψαν;

9

Βρες τη περίμετρο του παρακάτω σχήματος.



Αν διπλασιάσουμε κάθε πλευρά του, τότε πόση θα γίνει η περίμετρος του;

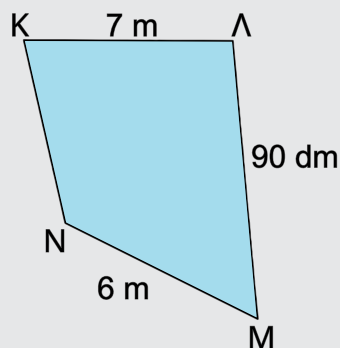
10

Ένα τετράπλευρο ΚΛΜΝ έχει περίμετρο 290dm.

Η πλευρά ΚΛ είναι 7 m, η ΛΜ είναι 90 dm και η ΜΝ είναι 6m.

- α) Πόσο είναι το μήκος της πλευράς ΝΚ;
 β) Ποια από τις παρακάτω διαδρομές είναι συντομότερη, αν χρειαστεί να μετακινηθούμε από το σημείο Μ στο σημείο Κ;
- Η διαδρομή Μ-Λ-Κ.
 - Η διαδρομή Μ-Ν-Κ.

Επίλεξε τη σωστή απάντηση.



Εξασκούμαι



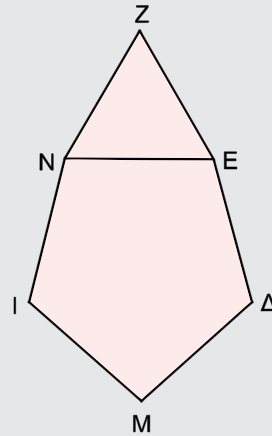
σε όσα έμαθα

11

Το παρακάτω σχήμα αποτελείται από ένα πεντάγωνο που έχει όλες τις πλευρές του ίσες και από ένα ισόπλευρο τρίγωνο.

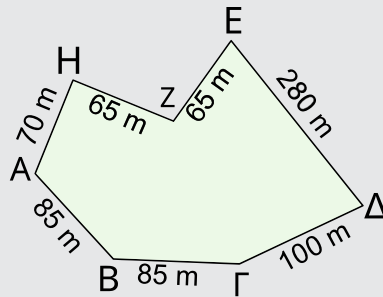
Αν η περίμετρος του πενταγώνου είναι 60 εκατοστά:

- α) Πόση είναι η περίμετρος του τριγώνου;
- β) Πόση είναι συνολικά η περίμετρος του σχήματος ΔΕΖΝΙΜ;



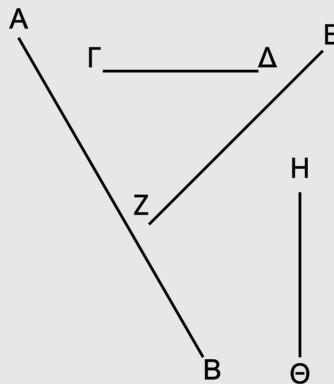
12

Παρακάτω φαίνεται η διαδρομή που περπατάει καθημερινά ο κύριος Παναγιώτης όταν βγάζει βόλτα τον σκύλο του. Ξεκινάει από το σημείο Α και καταλήγει ξανά σε αυτό ακολουθώντας τη διαδρομή ΑΒΓΔΕΖΗΑ. Βρες πόσα βήματα κάνει συνολικά σε κάθε βόλτα, αν κάθε διασκελισμός του είναι 75 εκατοστά.



13

Δίνονται τα παρακάτω ευθύγραμμο τμήματα:



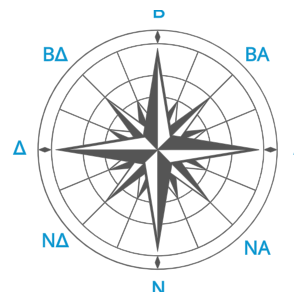
Κατασκεύασε ευθύγραμμο τμήμα με μήκος ίσο με:

- α) $AB + \Gamma\Delta$
- β) $AB - EZ$
- γ) $\Gamma\Delta + EZ - Η\Theta$
- δ) $AB - \Gamma\Delta + Η\Theta$

1.3 | Μέτρο γωνίας



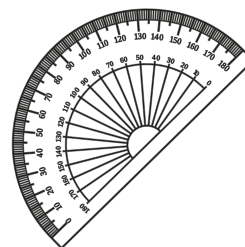
Οι ναυτικοί χρησιμοποιούν την πυξίδα για να ορίσουν την πορεία τους στη θάλασσα. Επίσης οι ναυτικοί βρίσκουν την κατεύθυνση του ανέμου που επικρατεί αξιοποιώντας την πυξίδα. Δίπλα φαίνεται μια πυξίδα ενός πλοίου που κατευθύνεται βόρεια. Σε ποια περίπτωση θα κάνει μεγαλύτερη στροφή το πλοίο, όταν κινηθεί ΒΑ ή όταν κινηθεί ΒΔ;



Μονάδα μέτρησης των γωνιών είναι η **μοίρα**, που γράφεται 1° .

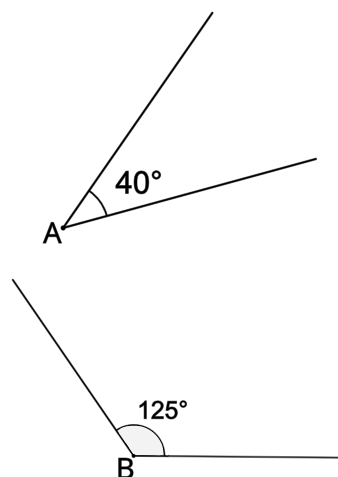
Η μέτρηση των γωνιών γίνεται με το **μοιρογνωμόνιο**.

Ο αριθμός που προκύπτει από τη μέτρηση ονομάζεται **μέτρο** της γωνίας.



Αν τοποθετήσουμε κατάλληλα το μοιρογνωμόνιο και μετρήσουμε το μέτρο θα βρούμε ότι:

- Το μέτρο της γωνίας \hat{A} είναι ίσο με 40° .
- Το μέτρο της γωνίας \hat{B} είναι ίσο με 125°



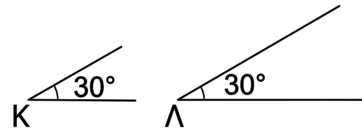
Η μοίρα έχει υποδιαίρεση, το λεπτό:

Είναι: $1^\circ = 60'$ (πρώτα λεπτά) και $1' = 60''$ (δεύτερα λεπτά).

Γενικά:

Το μέτρο μιας γωνίας είναι μοναδικό και εξαρτάται μόνο από το «άνοιγμα» των πλευρών της.

Δύο γωνίες είναι ίσες αν έχουν το ίδιο μέτρο.

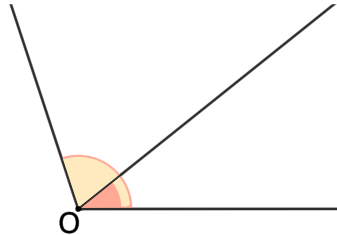


Σύγκριση γωνιών:

Μπορούμε να συγκρίνουμε δύο γωνίες με διαφανές χαρτί ως εξής:

- Αντιγράφουμε μία από τις δύο γωνίες σε διαφανές χαρτί.
- Τοποθετούμε το διαφανές χαρτί πάνω στην άλλη γωνία ώστε οι γωνίες να έχουν κοινή κορυφή και μία κοινή πλευρά.

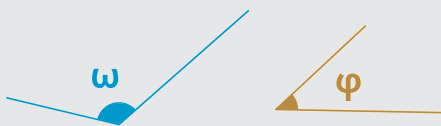
Στο διπλανό σχήμα παρατηρούμε ότι η ροζ γωνία είναι μικρότερη της κίτρινης γωνίας.



1

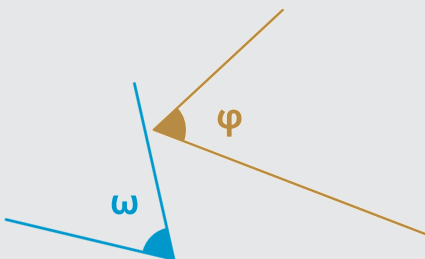
Σύγκρινε τις παρακάτω γωνίες και επίλεξε τη σωστή απάντηση:

A.



- i. Η γωνία ω είναι μεγαλύτερη
- ii. Η γωνία φ είναι μεγαλύτερη
- iii. Οι γωνίες είναι ίσες.

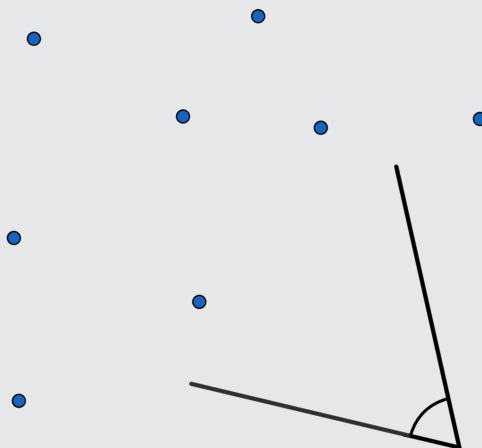
B.



- i. Η γωνία ω είναι μεγαλύτερη
- ii. Η γωνία φ είναι μεγαλύτερη
- iii. Οι γωνίες είναι ίσες.

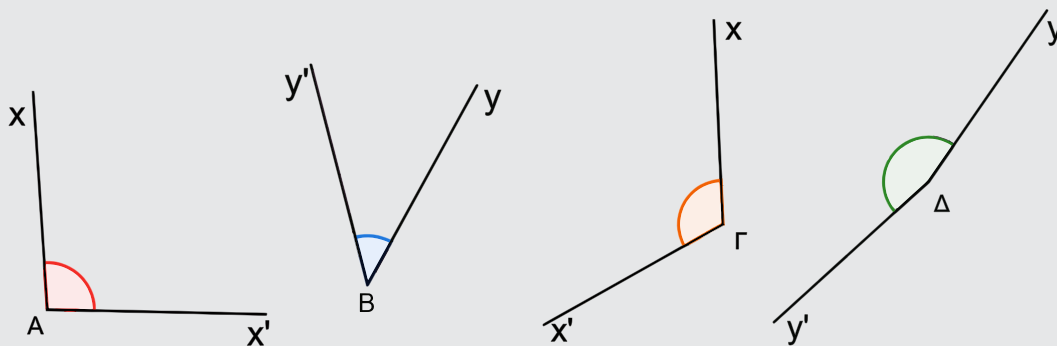
2

Κύκλωσε τα σημεία που ανήκουν στην γωνία ω :



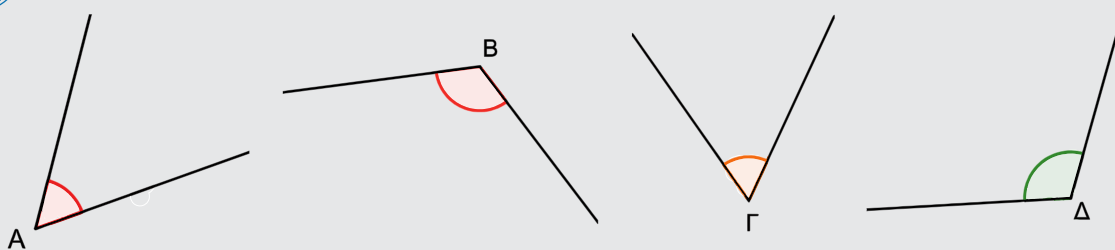
3

Χρησιμοποίησε το μοιρογνωμόνιο για να βρεις τα μέτρα των παρακάτω γωνιών.



4

Σύγκρινε τις παρακάτω γωνίες και τοποθέτησέ τις σε αύξουσα σειρά.



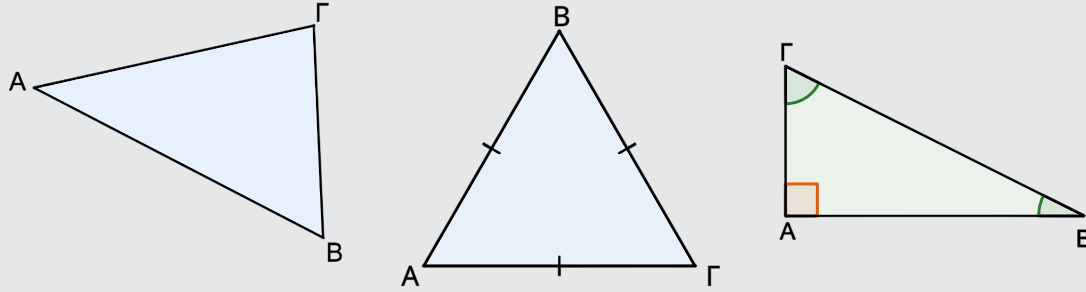
5

Σχεδίασε τις γωνίες:

$\hat{\alpha} = 30^\circ$, $\hat{\beta} = 58^\circ$, $\hat{\gamma} = 90^\circ$, $\hat{\delta} = 135^\circ$, $\hat{\epsilon} = 180^\circ$, $\hat{\zeta} = 210^\circ$.

6

Υπολόγισε το μέτρο των γωνιών στα παρακάτω σχήματα. Τι παρατηρείς για το άθροισμα γωνιών κάθε τριγώνου;

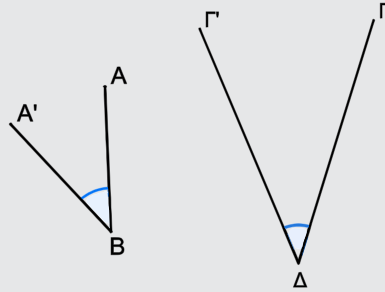


7

Σχεδιάσε μία γωνία \widehat{xOy} 30 μοιρών. Με κοινή κορυφή και με μία κοινή πλευρά σχεδιάσε γωνία:
 α) \widehat{xOz} διπλάσιου μέτρου. β) \widehat{xOt} μισού μέτρου.

8

Πώς μπορείς να συγκρίνεις τις παρακάτω γωνίες; Μπορείς να χρησιμοποιήσεις περισσότερους από έναν τρόπους;



Εξασκούμαι



σε όσα έμαθα

Ανακεφαλαίωση (Μέτρηση)

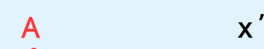
Ευθεία είναι η γραμμή που εκτείνεται απεριόριστα χωρίς αρχή και τέλος.



Αν σε μία ευθεία πάρουμε δύο σημεία Α και Β τότε το σχήμα που αποτελείται από τα σημεία Α, Β και τα μεταξύ τους σημεία λέγεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.



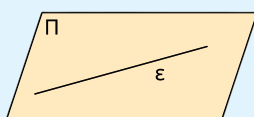
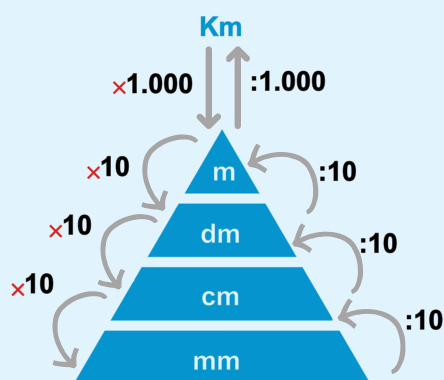
Αν προεκτείνουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ μόνο προς το ένα του άκρο τότε το σχήμα που προκύπτει έχει αρχή και δεν έχει τέλος και ονομάζεται ημιευθεία.



Απόσταση δύο σημείων Α και Β λέγεται το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, που τα ενώνει. Η βασική μονάδα μήκους που χρησιμοποιούμε είναι το μέτρο (m) .

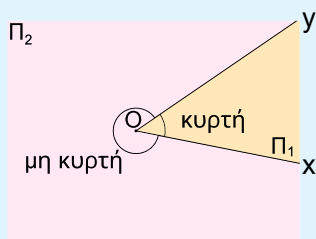
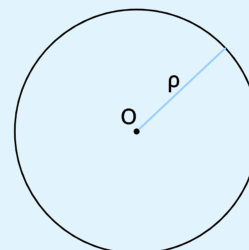


Για τα πολλαπλάσια και τις υποδιαιρέσεις του μέτρου έχουμε:



Επίπεδο είναι η επιφάνεια πάνω στην οποία εφαρμόζει παντού η ευθεία γραμμή.

Κύκλος λέγεται το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου που απέχουν την ίδια απόσταση από ένα σταθερό σημείο Ο.



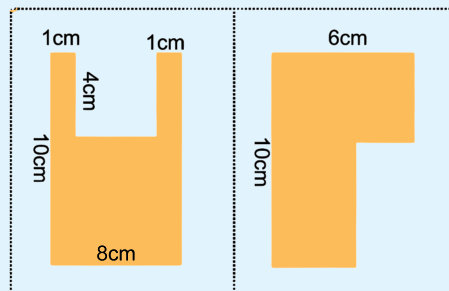
Οι περιοχές που ορίζονται από 2 ημιευθείες με κοινή αρχή Ο είναι δύο γωνίες. Μονάδα μέτρησης των γωνιών είναι η μοίρα, που γράφεται 1° .

Αυτοαξιολόγηση (Μέτρηση)

A. Χαρακτήρισε ως Σωστές ή Λάθος τις προτάσεις, βάζοντας ένα **x** στην κατάλληλη θέση.

	Σωστό	Λάθος
1. Η ευθεία είναι ένα σχήμα που δεν έχει ούτε αρχή ούτε τέλος		
2. Η ημιευθεία επεκτείνεται απεριόριστα προς 2 κατευθύνσεις.		
3. Αντικείμενες ημιευθείες είναι δύο ημιευθείες με κοινή αρχή.		
4. Μπορούμε να υπολογίσουμε το μήκος μιας ευθείας.		
5. Ισχύει ότι 1 μέτρο = 100 δεκατόμετρα.		
6. Για το μέσο M ενός ευθύγραμμου τμήματος AB ισχύει πάντα ότι AM=MB.		
7. Δύο κάθετες ευθείες σχηματίζουν μεταξύ τους ορθή γωνία.		
8. Η ακτίνα ενός κύκλου διαφέρει, ανάλογα με το σημείο του κύκλου που συνδέεται με το κέντρο.		
9. Κατάλληλη μονάδα μέτρησης μήκους μεγάλων αποστάσεων είναι τα χιλιοστά.		
10. Οι πινακίδες των μεγάλων εθνικών δρόμων έχουν συνήθως τις αποστάσεις σημειωμένες σε μέτρα.		
11. Για να υπολογίσουμε την περίμετρο ενός ευθύγραμμου σχήματος, αρκεί να προσθέσουμε τα μήκη των πλευρών του.		
12. Μετράμε τις γωνίες σε μοίρες.		
13. Όσο μεγαλύτερο μήκος έχουν οι πλευρές μιας γωνίας τόσο πιο μεγάλη είναι μια γωνία.		
14. Ένα επίπεδο επεκτείνεται απεριόριστα.		
15. Μία ευθεία χωρίζει ένα επίπεδο σε άπειρα ημιεπίπεδα.		
16. Στο σημείο τομής 2 κάθετων ευθειών σχηματίζονται 4 ορθές γωνίες.		
17. Υπάρχουν κυρτά και μη κυρτά σχήματα.		
18. Ομόκεντροι ονομάζονται οι κύκλοι που έχουν ίδια ακτίνα.		
19. Δύο κύκλοι με ακτίνες $\rho=10\text{cm}$ και $P=0,1\text{m}$ είναι ίσοι.		
20. Από ένα σημείο περνάει μόνο μια ευθεία.		

B. Βρες την περίμετρο στα παρακάτω κομμάτια μιας ξύλινης κατασκευής :



Στη συνέχεια γράψε τα μήκη σε δέκατα και σε χιλιοστά.

Σε αυτό το σημείο, θα πρέπει να είσαι σε θέση να έχεις επιτύχει όλα τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα. Γύρνα στην αρχή της θεματικής ενότητας και σημείωσε στα αντίστοιχα κουτάκια. Υπάρχουν στόχοι που αισθάνεσαι ότι δεν έχεις κατακτήσει πλήρως;

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

B.2

Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε τους μετασχηματισμούς και συγκεκριμένα θα μελετήσουμε την έννοια της συμμετρίας ως προς άξονα. Θα αναγνωρίσουμε σχήματα που έχουν άξονα συμμετρίας και θα διερευνήσουμε τις ιδιότητές τους.

Πώς χρησιμοποιείς τη συμμετρία στον σχεδιασμό αντικειμένων ή ακόμα και στη φύση;

Είσαι έτοιμος/η να ανακαλύψεις πώς τα γεωμετρικά σχήματα που διατηρούν την αρμονία τους μέσα από τη συμμετρία και να εντοπίσεις τη συμμετρία στη φύση;

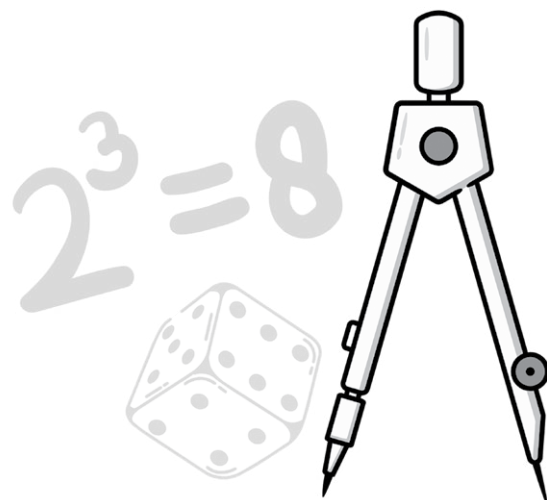


- Αναγνωρίζω μετασχηματισμούς συμμετρίας ως προς άξονα και καθορίζω τα στοιχεία και τα χαρακτηριστικά τους.
- Αναγνωρίζω σχήματα με άξονα συμμετρίας και σχεδιάζω τους άξονες συμμετρίας σε αυτά.
- Διερευνώ και εντοπίζω τις ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά των σχημάτων που παραμένουν αναλλοίωτα από έναν μετασχηματισμό συμμετρίας ως προς άξονα.
- Αξιοποιώ τις ιδιότητες της αξονικής συμμετρίας στον σχεδιασμό σχημάτων και στην αιτιολόγηση ιδιοτήτων τους.
- Σχεδιάζω τα συμμετρικά γεωμετρικών σχημάτων ως προς διάφορους άξονες χρησιμοποιώντας μια ποικιλία εργαλείων και στρατηγικών.



2.1: Συμμετρία ως προς άξονα και στοιχεία της

+ Ανακεφαλαίωση / Αυτοαξιολόγηση



2.1 | Συμμετρία ως προς άξονα και στοιχεία της



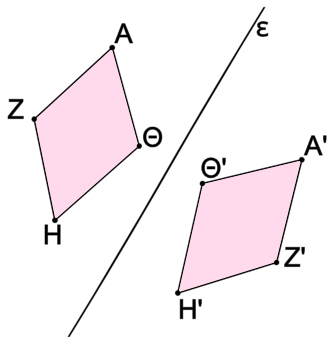
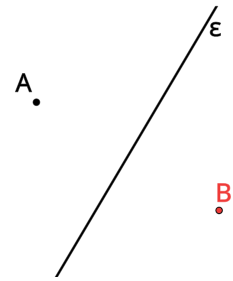
Σχεδιάσε μια ευθεία που να χωρίζει καθένα από τα παρακάτω σχήματα σε δύο μέρη, ώστε αν διπλώσεις το χαρτί κατά μήκος της ευθείας, τα δύο μέρη του σχήματος να συμπίπτουν.

Πόσες τέτοιες ευθείες υπάρχουν σε κάθε σχήμα;



Συμμετρικό σημείου A ως προς ευθεία ε, είναι το σημείο B με το οποίο συμπίπτει το A, αν διπλώσουμε το φύλλο σχεδίασης κατά μήκος της ευθείας ε.

Κάθε σημείο μιας ευθείας ε είναι συμμετρικό του εαυτού του ως προς την ε.

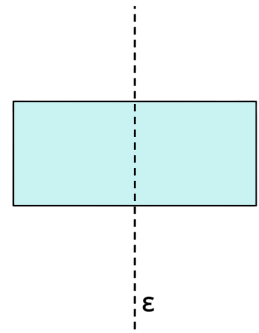


Δύο σχήματα (Σ_1) και (Σ_2) λέγονται **συμμετρικά** ως προς μία ευθεία ε, όταν καθένα αποτελείται από τα συμμετρικά σημεία του άλλου ως προς την ε.

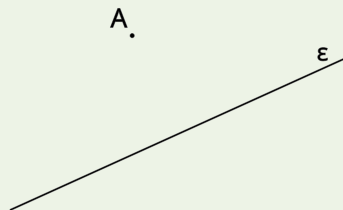
Τα συμμετρικά ως προς ευθεία σχήματα είναι **ίσα** αφού κατά την δίπλωση το ένα συμπίπτει με το άλλο

Άξονας συμμετρίας σχήματος ονομάζεται η ευθεία που χωρίζει το σχήμα σε δύο μέρη με τέτοιο τρόπο, ώστε αν διπλώσουμε το φύλλο σχεδίασης κατά μήκος της ε, τα μέρη αυτά θα ταυτιστούν.

Όταν ένα σχήμα έχει άξονα συμμετρίας, το συμμετρικό του ως προς τον άξονα αυτόν είναι το ίδιο το σχήμα.

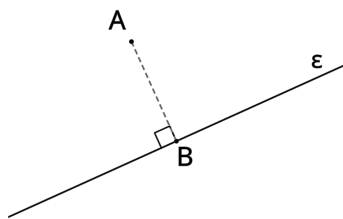


1. Να κατασκευάσετε το συμμετρικό A' σημείου A ως προς μια ευθεία ϵ .

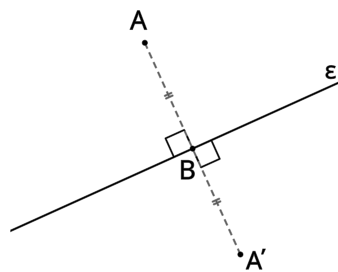


Λύση:

Φέρνουμε με τον κανόνα το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα AB από το σημείο A προς την ευθεία ϵ .



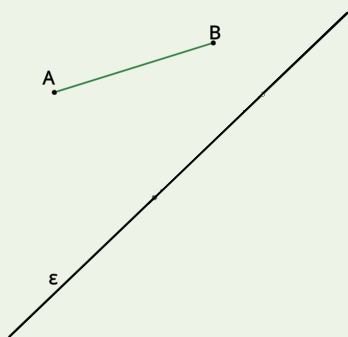
Προεκτείνουμε το AB κατά ίσο τμήμα BA' .



Το A' είναι το συμμετρικό του σημείου A ως προς την ευθεία ϵ .

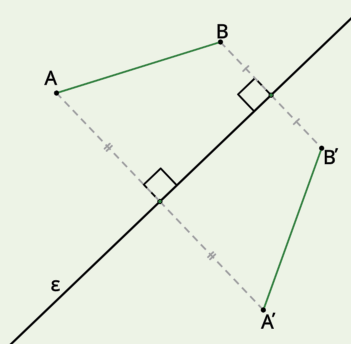
Σημείωση: Αν το σημείο A ανήκει στην ευθεία ϵ τότε το συμμετρικό A' του σημείου A είναι το ίδιο το σημείο A .

2. Να κατασκευάσετε το συμμετρικό $A'B'$ ενός ευθυγράμμου τμήματος AB , ως προς μια ευθεία ϵ .

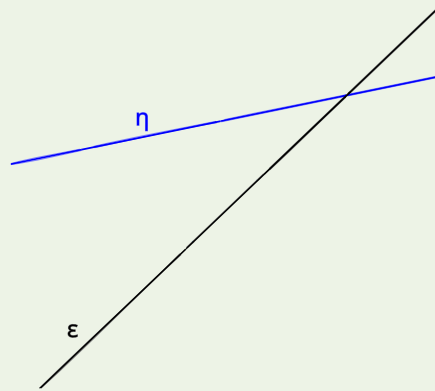


Κατασκευάζουμε τα συμμετρικά A' και B' των σημείων A και B , ως προς την ευθεία ϵ . Το τμήμα $A'B'$ είναι το συμμετρικό του τμήματος AB ως προς την ευθεία ϵ .

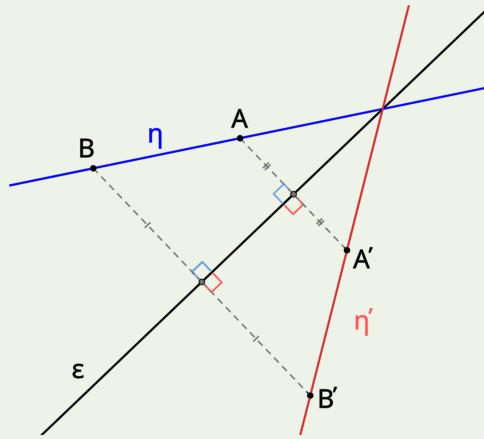
Σημείωση: Τα τμήματα AB και $A'B'$ είναι ίσα.



3. Να κατασκευάσετε τη συμμετρική ευθεία η' μίας ευθείας η , ως προς μία ευθεία ϵ .



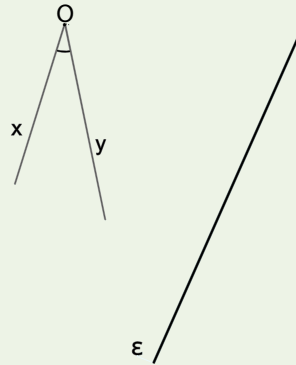
Λύση:



- Παίρνουμε δύο σημεία A και B πάνω στην ευθεία η .
- Κατασκευάζουμε τα συμμετρικά A' και B' των σημείων A και B, ως προς την ευθεία ϵ .

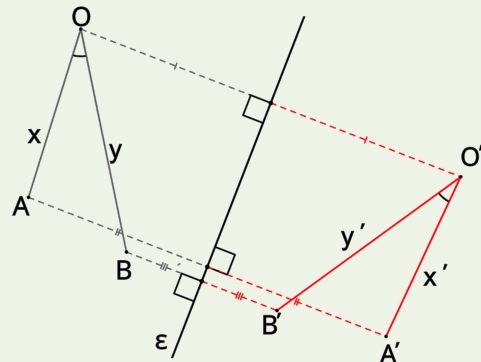
Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A' και B' είναι η συμμετρική η' της ευθείας η , ως προς την ϵ .

4. Να κατασκευάσετε τη συμμετρική γωνία $\hat{x}'\hat{O}'y'$ μίας γωνίας $\hat{x}\hat{O}y$ ως προς μία δοσμένη ευθεία ϵ .



Λύση:

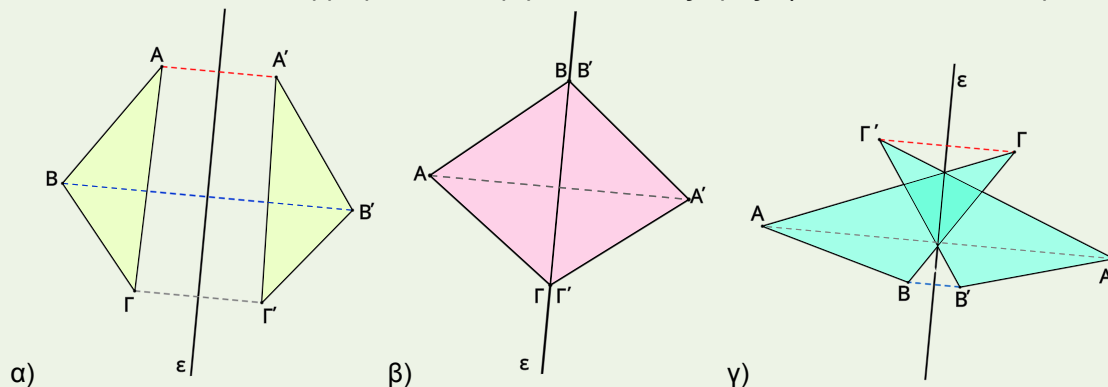
- Κατασκευάζουμε το συμμετρικό O' της κορυφής O.
- Παίρνουμε τα σημεία A, B πάνω στις ημιευθείες Ox , Oy αντίστοιχα και κατασκευάζουμε τα συμμετρικά A' , B' των A, B ως προς την ϵ .



Η γωνία με κορυφή \hat{O}' και πλευρές τις ημιευθείες που διέρχονται από τα A' και B' είναι η συμμετρική γωνία $\hat{x}'\hat{O}'y'$ της γωνίας $\hat{x}\hat{O}y$ ως προς την ευθεία ϵ .

Σημείωση: Οι γωνίες $\hat{x}'\hat{O}'y'$ και $\hat{x}\hat{O}y$ είναι ίσες.

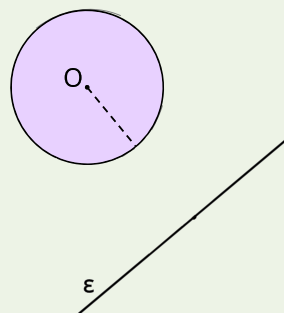
5. Να κατασκευάσετε το συμμετρικό $A'B'Γ'$ τριγώνου $ABΓ$ ως προς την ευθεία ϵ σε κάθε περίπτωση.



Κατασκευάζουμε τα συμμετρικά A' , B' και $Γ'$ των σημείων A , B και $Γ$. Σε κάθε περίπτωση το $A'B'Γ'$ είναι το συμμετρικό του τριγώνου $ABΓ$ ως προς την ευθεία ϵ .

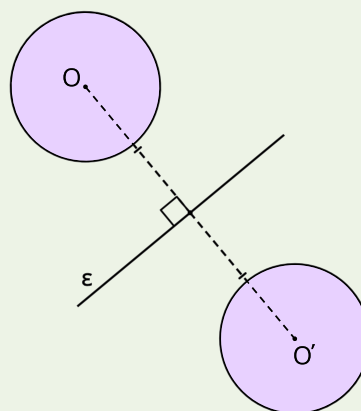
Σημείωση: Τα τρίγωνα $ABΓ$ και $A'B'Γ'$ είναι ίσα.

6. Να κατασκευάσετε το συμμετρικό κύκλου (O, ρ) ως προς μία ευθεία ϵ .



Λύση:

Κατασκευάζουμε το συμμετρικό O' του κέντρου O . Με κέντρο το O' και ακτίνα ρ κατασκευάζουμε κύκλο (O', ρ) . Ο κύκλος (O', ρ) είναι ο συμμετρικός του κύκλου (O, ρ) ως προς την ευθεία ϵ .



Εξασκούμαι



σε όσα έμαθα

1 Ποιο είναι το συμμετρικό του μπλε τριγώνου στο διπλανό σχήμα;

2 Βρες τα συμμετρικά σημεία των A, B και Γ ως προς την ευθεία ε.

Χρησιμοποιώ

3 Κατασκεύασε το συμμετρικό του ευθύγραμμου τμήματος AB ως προς την ευθεία ε. Μέτρησε τα μήκη των δύο τμημάτων. Τι παρατηρείς;

Χρησιμοποιώ

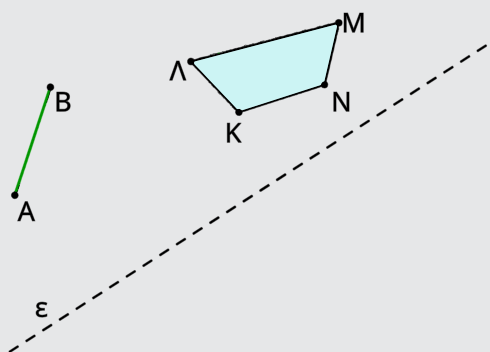
4 Κατασκεύασε το συμμετρικό των τετράπλευρων ως προς την ευθεία ε.

A)

B)

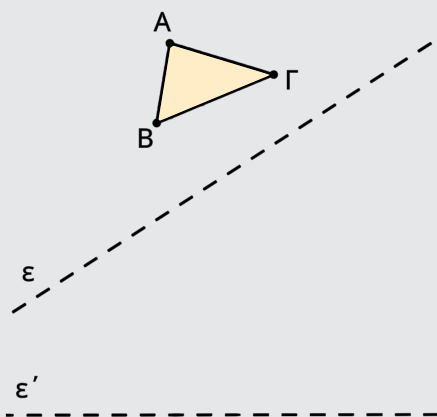
5

Κατασκεύασε το συμμετρικό των σχημάτων ως προς την ευθεία ϵ :



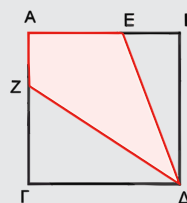
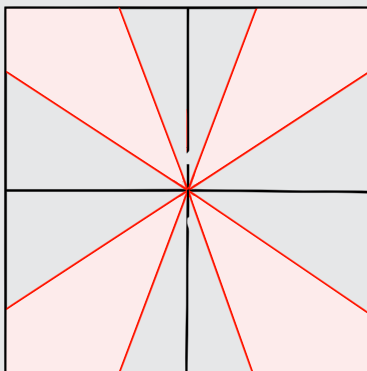
6

Κατασκεύασε το συμμετρικό $A'B'\Gamma'$ του τριγώνου $AB\Gamma$ ως προς την ευθεία ϵ . Στη συνέχεια κατασκεύασε το συμμετρικό $A''B''\Gamma''$ του τριγώνου $A'B'\Gamma'$ ως προς την ευθεία ϵ' . Τι παρατηρείς ως προς τα χαρακτηριστικά τους;



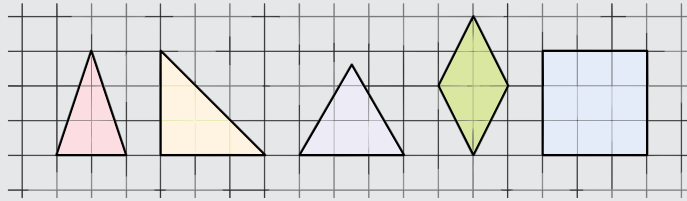
7

Με τι συμμετρίες προέκυψε το τελικό σχήμα αξιοποιώντας το αρχικό σχήμα που φαίνεται στη διπλανή εικόνα;



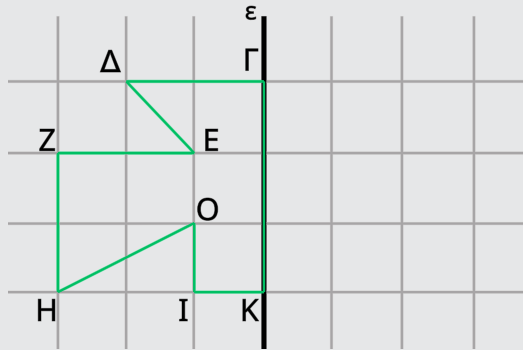
8

Βρες, αν υπάρχουν, τους άξονες συμμετρίας των σχημάτων:



9

Συμπλήρωσε το σχήμα ώστε η ευθεία ε να είναι άξονας συμμετρίας του σχήματος.



10

Βρες ποια από τα γράμματα της αλφάβητου παρακάτω έχουν άξονα συμμετρίας.

Α Β Γ Δ Ε Ζ Η Θ Ι Κ Λ Μ
Ν Ξ Ο Π Ρ Σ Τ Υ Φ Χ Ψ Ω

11

Παρακάτω φαίνονται σημαίες από διάφορες χώρες. Σχεδίασε τους άξονες συμμετρίας σε όσες σημαίες υπάρχουν.

1.



2.



3.



4.



5.

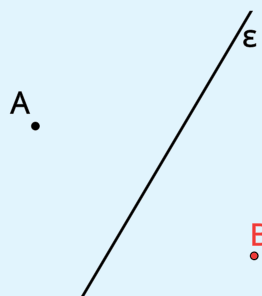


6.



Ανακεφαλαίωση (Μετασχηματισμοί)

Συμμετρικό σημείου A ως προς ευθεία ϵ , είναι το σημείο B , με το οποίο συμπίπτει το A , αν διπλώσουμε το φύλλο σχεδίασης κατά μήκος της ευθείας ϵ .

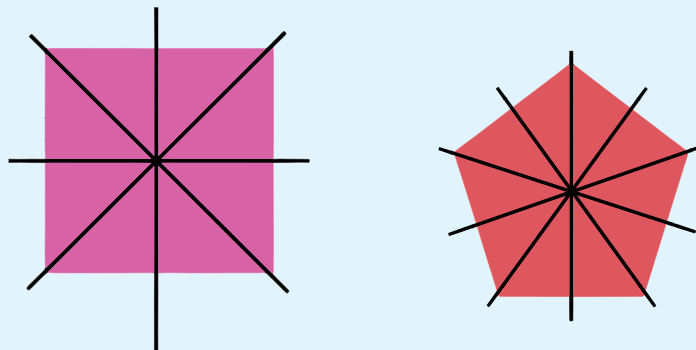


Άξονας συμμετρίας σχήματος ονομάζεται η ευθεία που χωρίζει το σχήμα σε δύο μέρη με τέτοιο τρόπο, ώστε αν διπλώσουμε το φύλλο σχεδίασης κατά μήκος της ϵ , τα μέρη αυτά θα ταυτιστούν.

Όταν ένα σχήμα έχει άξονα συμμετρίας, το συμμετρικό του ως προς τον άξονα αυτόν είναι το ίδιο το σχήμα.

Υπάρχουν σχήματα με κανέναν, έναν ή και παραπάνω άξονες συμμετρίας.

Π.χ.:



Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση

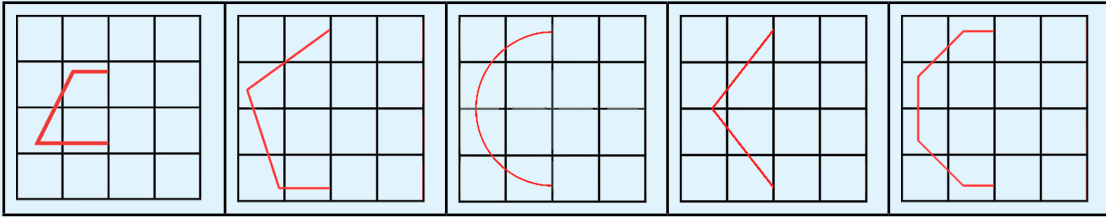
Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση

Αυτοαξιολόγηση (Μετασχηματισμοί)

A. Σχεδιάσε το συμμετρικό κάθε σχήματος:



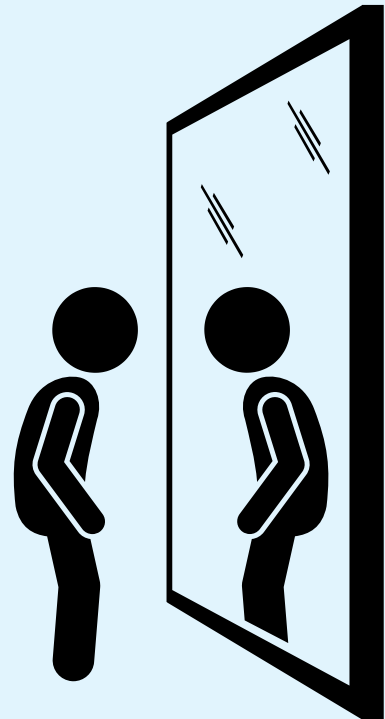
Ομαδική δραστηριότητα

«Καθρέφτης Συμμετρίας»

Η συμμετρία είναι παντού γύρω μας! Από τη φύση και την αρχιτεκτονική μέχρι το ανθρώπινο σώμα και την τέχνη. Σε αυτή τη δραστηριότητα, συνεργαστείτε για να κατανοήσετε τη συμμετρία μέσα από την κίνηση και την παρατήρηση.

Κανόνες παιχνιδιού:

- Χωριστείτε σε ζευγάρια ή μικρές ομάδες.
- Ένα άτομο εκτελεί μια τυχαία κίνηση (π.χ. σηκώνει το ένα χέρι, κάνει ένα μικρό άλμα, στρίβει το κεφάλι).
- Οι υπόλοιποι πρέπει να αντικατοπτρίσουν την κίνηση, σαν να είστε η συμμετρική εικόνα του αρχικού ατόμου.
- Οι ρόλοι εναλλάσσονται κάθε τρεις κινήσεις.



Ήταν εύκολο να βρείτε τη συμμετρική κίνηση;

Πού αλλού βλέπουμε συμμετρία στην καθημερινότητά μας;

Σε αυτό το σημείο, θα πρέπει να είσαι σε θέση να έχεις επιτύχει όλα τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα. Γύρνα στην αρχή της θεματικής ενότητας και σημείωσε ✓ στα αντίστοιχα κουτάκια. Υπάρχουν στόχοι που αισθάνεσαι ότι δεν έχεις κατακτήσει πλήρως;

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

B.3



Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε τη γεωμετρία του επιπέδου, εξετάζοντας είδη γωνιών, τρίγωνα και τετράπλευρα, καθώς και τις σχέσεις τους. Θα μάθουμε να αναγνωρίζουμε γεωμετρικά σχήματα, αλλά και να περιγράψουμε σχετικές θέσεις ευθειών και σχημάτων στο επίπεδο.

Πώς οι γωνίες και τα σχήματα συνδέονται με τη σχεδίαση κτιρίων ή αντικειμένων γύρω μας;

Είσαι έτοιμος/η να εφαρμόσεις τις γνώσεις σου για να λύσεις πρακτικά προβλήματα από την αρχιτεκτονική και τη φυσική;



- Προσδιορίζω είδη γωνιών διατυπώνοντας σχετικούς ορισμούς.
- Αναγνωρίζω και περιγράφω τη χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων της μεσοκαθέτου ευθύγραμμου τμήματος και την ιδιότητα των σημείων της διχοτόμου γωνίας.
- Εφαρμόζω τη χαρακτηριστική ιδιότητα της μεσοκαθέτου ευθύγραμμου τμήματος για να αναγνωρίζω ιδιότητες του ισοσκελούς και του ισόπλευρου τριγώνου.
- Σχεδιάζω με γεωμετρικά όργανα τη διχοτόμο γωνίας, τη μεσοκάθετο ευθύγραμμου τμήματος και περιγράφω τη διαδικασία.
- Διερευνώ και προσδιορίζω σχέσεις μεταξύ γωνιών (κατακορυφήν, συμπληρωματικές και παραπληρωματικές) και τις σχετικές θέσεις ευθειών στο επίπεδο.
- Προσδιορίζω σχέσεις γωνιών που σχηματίζονται από παράλληλες ευθείες και μια τέμνουσά τους και τις εφαρμόζω σε απλά προβλήματα.
- Αναγνωρίζω είδη τριγώνων και τα ταξινομώ με βάση σχέσεις των πλευρών και το είδος των γωνιών του.
- Χρησιμοποιώ γεωμετρικά όργανα και ψηφιακά μέσα για να διατυπώνω και να ελέγχω εικασίες σχετικά με ιδιότητες που αφορούν τα κύρια και τα δευτερεύοντα στοιχεία του τριγώνου.
- Αναπτύσσω λογικούς συλλογισμούς για να τεκμηριώσω ότι το άθροισμα γωνιών τριγώνου είναι 180 μοίρες.
- Διερευνώ είδη τετράπλευρων (παραλληλόγραμμα, τραπέζια) και διατυπώνω σχετικούς ορισμούς.
- Ταξινομώ τα είδη των τετραπλεύρων με βάση τις ιδιότητές τους.
- Σχεδιάζω με γεωμετρικά όργανα τρίγωνα και παραλληλόγραμμα με δεδομένα χαρακτηριστικά και περιγράφω τα βήματα της σχεδίασης.
- Αξιοποιώ τις ιδιότητες της μεσοκαθέτου, της παραλληλίας και της καθετότητας ευθειών και των παραλληλογράμμων στην επίλυση απλών προβλημάτων.
- Προσδιορίζω τη χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων του κύκλου και περιγράφω τα στοιχεία του κύκλου.
- Σχεδιάζω με τη χρήση του γνώμονα την εφαπτομένη κύκλου σε σημείο του.
- Διερευνώ και προσδιορίζω τις σχετικές θέσεις ευθείας/κύκλου.
- Συνδέω το μέτρο της επίκεντρης γωνίας και του αντίστοιχου τόξου του ίδιου κύκλου ή ίσων κύκλων.
- Χρησιμοποιώ γεωμετρικά όργανα και ψηφιακά εργαλεία για να διατυπώσω/ελέγξω εικασίες σχετικά με τις ιδιότητες παραλληλογράμμου, ορθογωνίου, ρόμβου και τετραγώνου τις οποίες τεκμηριώνω αναπτύσσοντας λογικούς συλλογισμούς.



3.1: Είδη γωνιών

3.2: Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος.

3.3: Διχοτόμος γωνίας

3.4: Είδη τριγώνων και στοιχεία τους

3.5: Ιδιότητες ισοσκελούς και ισόπλευρου τριγώνου

3.6: Κατακορυφήν, συμπληρωματικές και παραπληρωματικές γωνίες.

3.7: Σχετικές θέσεις ευθειών στο επίπεδο.

3.8: Γωνίες σε παράλληλες ευθείες με τέμνουσα

3.9: Άθροισμα γωνιών τριγώνου

3.10: Τετράπλευρα, παραλληλόγραμμα, τραπέζια

3.11: Είδη παραλληλογράμμων και ιδιότητες: ορθογώνια, ρόμβοι, τετράγωνα

3.12: Κύκλος και στοιχεία του

3.13: Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου

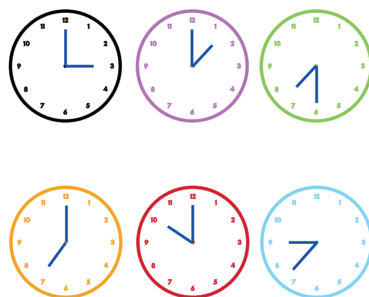
+ Ανακεφαλαίωση / Αυτοαξιολόγηση



3.1 | Είδη γωνιών



Παρατήρησε τις διπλανές εικόνες και προσπάθησε να κατατάξεις τις γωνίες που παρατηρείς σε κατηγορίες. Τι γωνίες σχηματίζουν οι δείκτες του ρολογιού σε κάθε περίπτωση;

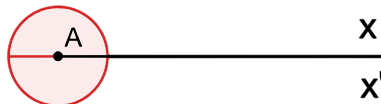


Μία πλήρης γωνία είναι η γωνία στην οποία η ημιευθεία της τελικής πλευράς ταυτίζεται με αυτή της αρχικής πλευράς, αφού διαγράψει μια πλήρη περιστροφή.

- Παρατηρήστε ότι το σημείο A διαγράφει έναν ολόκληρο κύκλο.

Θεωρούμε ότι:

Η **πλήρης γωνία** έχει μέτρο 360°



Η ευθεία γωνία σχηματίζεται από δύο αντικείμενες ημιευθείες.

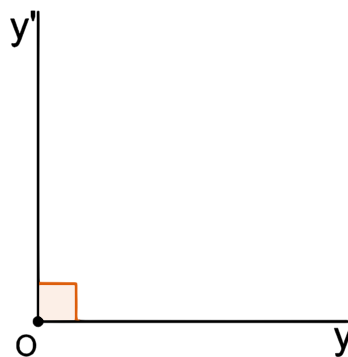
Η ευθεία γωνία έχει μέτρο το μισό του μέτρου πλήρους γωνίας, δηλαδή:

Η **ευθεία γωνία** έχει μέτρο 180°

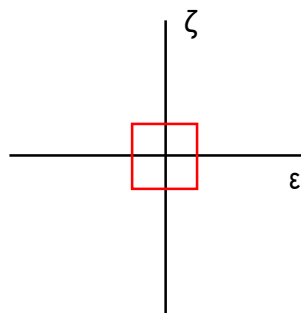


Η ορθή γωνία έχει μέτρο το μισό του μέτρου ευθείας γωνίας, δηλαδή:

Η **ορθή γωνία** έχει μέτρο 90°

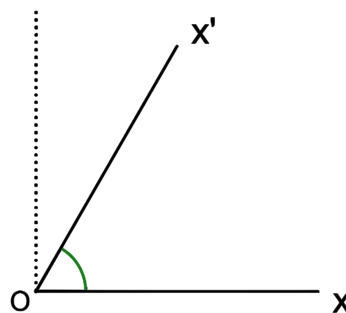


- Οι πλευρές της ορθής γωνίας λέγονται **κάθετες** ημιευθείες.
- Δύο ευθείες λέγονται **κάθετες** όταν τέμνονται και οι γωνίες που σχηματίζουν είναι ορθές.



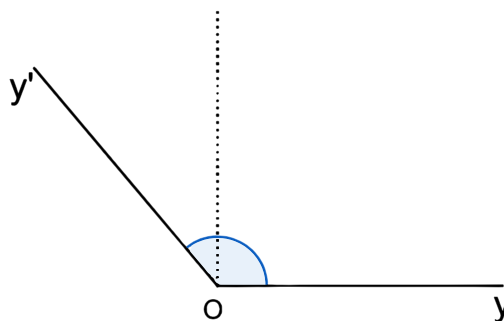
Η οξεία γωνία είναι μικρότερη από την ορθή γωνία δηλαδή:

Η **οξεία γωνία** έχει μέτρο μικρότερο των 90° .

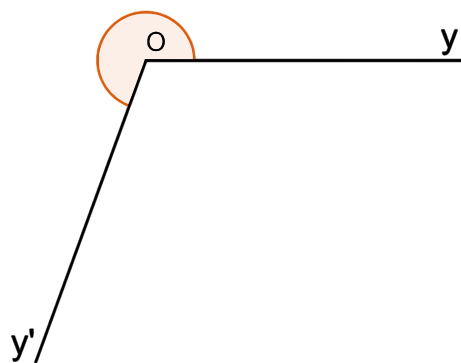


Ενώ η αμβλεία γωνία είναι μεγαλύτερη από την ορθή γωνία και μικρότερη από την ευθεία γωνία δηλαδή:

Η **αμβλεία γωνία** έχει μέτρο μεγαλύτερο των 90° και μικρότερο των 180° .



Μη κυρτή γωνία λέγεται κάθε γωνία με μέτρο μεγαλύτερο των 180° και μικρότερο των 360° .










Μηδενική γωνία λέγεται η γωνία της οποίας το μέτρο είναι ίσο με 0° .



Η ημιευθεία της τελικής πλευράς μιας μηδενικής γωνίας ταυτίζεται με αυτή της αρχικής πλευράς.

Συνοπτικά:

						
Μηδενική γωνία	Οξεία γωνία	Ορθή γωνία	Αμβλεία γωνία	Ευθεία γωνία	Μη κυρτή γωνία	Πλήρης γωνία
0°	Μεγαλύτερη από 0° και μικρότερη από 90° .	90°	Μεγαλύτερη από 90° και μικρότερη από 180° .	180°	Μεγαλύτερη από 180° και μικρότερη από 360°	360°
$\omega = 0^\circ$	$0^\circ < \omega < 90^\circ$	$\omega = 90^\circ$	$90^\circ < \omega < 180^\circ$	$\omega = 180^\circ$	$180^\circ < \omega < 360^\circ$	$\omega = 360^\circ$



1

Χαρακτήρισε ως Σωστές ή Λάθος τις προτάσεις που ακολουθούν βάζοντας ένα x στην κατάλληλη θέση.

- α) Μια γωνία με μέτρο μικρότερο από 180° είναι οξεία.
- β) Μια πλήρης γωνία είναι μεγαλύτερη από μια ευθεία γωνία.
- γ) Αν η ημιευθεία της τελικής πλευράς μιας γωνίας ταυτίζεται με αυτή της αρχικής πλευράς τότε η γωνία είναι πλήρης γωνία.
- δ) Δυο ευθείες είναι κάθετες όταν σχηματίζουν γωνία 90° .
- ε) Γωνία με μετρό όσο το μισό της ορθής είναι οξεία γωνία.

Σωστό Λάθος

2

Αντιστοίχισε το μέτρο κάθε γωνίας της 1ης στήλης με το είδος της στη 2η στήλη.

270°
180°
120°
360°
63°
0°
97°
90°
310°
15°
135°

Μηδενική
Οξεία
Ορθή
Αμβλεία
Ευθεία
Μη κυρτή
Πλήρης

Αντιλαμβάνομαι

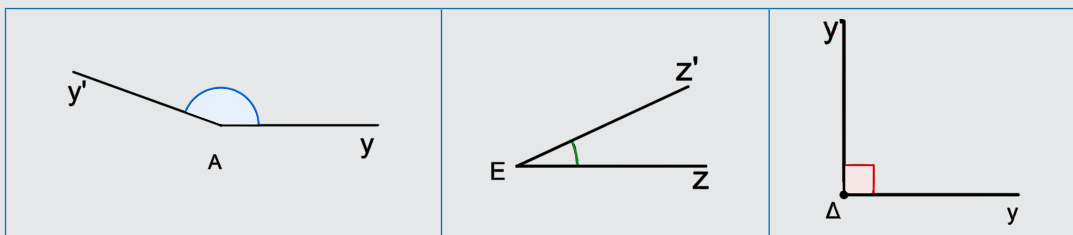


με προσομοίωση



3

Μέτρησε τις παρακάτω γωνίες και προσδιόρισε το είδος τους:



4

Σχεδιάσε ένα τρίγωνο και φέρε από κάθε κορυφή του ευθεία κάθετη προς την ευθεία της απέναντι πλευράς.

5

Σχεδιάσε μία κυρτή γωνία 35° και την μη κυρτή μέτρου 325° .

6

Εξέτασε αν είναι δυνατό να κατασκευαστούν τα παρακάτω σχήματα:

- ένα τρίγωνο με 3 οξείες γωνίες
- ένα τρίγωνο με 2 αμβλείες γωνίες
- ένα τετράπλευρο με δύο αμβλείες γωνίες
- ένα τετράπλευρο με 4 αμβλείες γωνίες.

Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση

7

Σχεδιάσε μία γωνία $\widehat{xOy} = 60^\circ$. Πάρε ένα σημείο A πάνω στην Ox και ένα σημείο B πάνω στην Oy. Να σχεδιάσεις το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα από το A προς την Oy και το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα από το B προς την Ox.

8

Σχεδιάσε μία γωνία $\widehat{xOy} = 45^\circ$. Από την κορυφή O να φέρεις κάθετες ευθείες ε_1 και ε_2 προς τις Ox και Oy αντίστοιχα. Στη συνέχεια μέτρησε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_2 . Τι παρατηρείς;

Εξασκούμε



σε όσα έμαθα

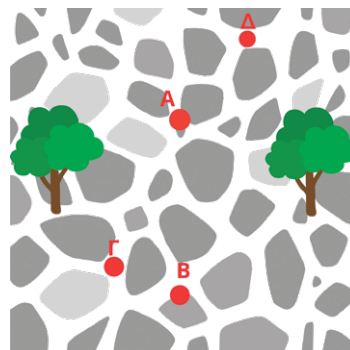
3.2 | Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος.



Ο αρχιτέκτονας έχει αναλάβει την ανάπλαση μιας πλατείας και θα χρειαστεί να χτίσει μια νέα βρύση πάνω σε αυτήν.

Σε ποιο σημείο της πλατείας θα πρέπει να τοποθετηθεί η βρύση ώστε να έχει την ίδια απόσταση από τα δύο αιωνόβια πλατάνια;

Ποια από τις θέσεις Α, Β, Γ και Δ που προτείνονται είναι καλύτερη;



Μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος λέγεται η ευθεία που είναι κάθετη προς αυτό και διέρχεται από το μέσον του.

Χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων της μεσοκαθέτου:

Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος ισαπέχει (δηλαδή έχει ίσες αποστάσεις) από τα άκρα του.

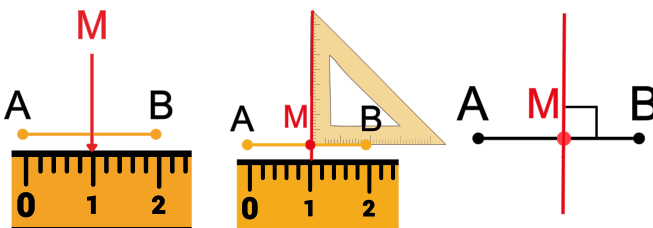
Γενικά:

Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθυγράμμου τμήματος βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετό του.

Κατασκευή μεσοκαθέτου ευθυγράμμου τμήματος:

1ος τρόπος: Με υποδεκάμετρο και γνώμονα.

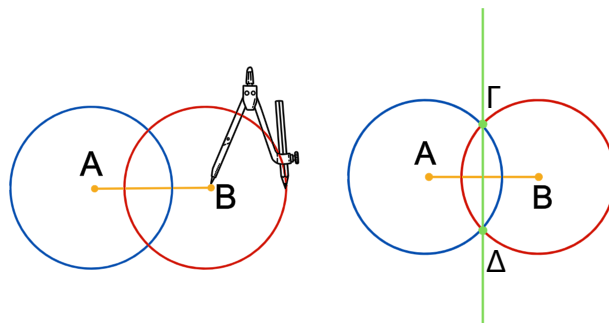
- Προσδιορίζουμε με το υποδεκάμετρο, το μέσο Μ του τμήματος ΑΒ.
- Φέρνουμε με τον κανόνα ευθεία που διέρχεται από το Μ και είναι κάθετη προς το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.



Η ευθεία που χαράσσουμε είναι η μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

2ος τρόπος: Με κανόνα και διαβήτη.

- Με κέντρα τα σημεία A και B, σχεδιάζουμε κύκλους που έχουν την ίδια ακτίνα r και τέμνονται σε δύο σημεία.
- Σημειώνουμε τα σημεία στα οποία τέμνονται οι κύκλοι, έστω Γ και Δ .
- Η ευθεία ϵ που διέρχεται από τα σημεία Γ και Δ είναι η μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος AB.



Σχόλιο: Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να βρούμε το μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος μόνο με κανόνα και διαβήτη.



Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση

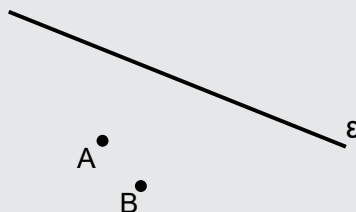
1

Σχεδιάσε ένα ευθύγραμμο τμήμα $AB = 6\text{cm}$. Στη συνέχεια σχεδιάσε τη μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος AB με δύο τρόπους:

- Με υποδεκάμετρο και γνώμονα
- Με κανόνα και διαβήτη

2

Βρες το σημείο της ευθείας ϵ το οποίο ισαπέχει από τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος AB.



3

Σχεδιάσε ένα ευθύγραμμο τμήμα AB και βρες το μέσο του M. Σχεδιάσε τις μεσοκαθέτους των ευθύγραμμων τμημάτων AB, AM και BM.



4

Σχεδίασε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG=10\text{cm}$. Φέρε από την κορυφή A ευθεία κάθετη στη πλευρά $B\Gamma$ και ονόμασε M το σημείο τομής της ευθείας με την πλευρά $B\Gamma$. Σύγκρινε τα μήκη BM και $M\Gamma$. Τι παρατηρείς;

5

Σχεδίασε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG=8\text{cm}$. Προσδιόρισε το μέσο M της πλευράς $B\Gamma$ και στη συνέχεια σχεδίασε το ευθύγραμμο τμήμα AM . Μέτρησε την γωνία $AM\Gamma$. Τι παρατηρείς;

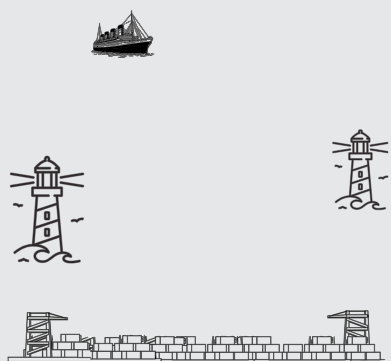
6

Δύο χωριά A και B βρίσκονται κοντά σε έναν ποταμό, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Στον ποταμό θα πρέπει να κατασκευαστεί μία γέφυρα η οποία να ισαπέχει από τα δύο χωριά. Βρες το σημείο που πρέπει να κατασκευαστεί η γέφυρα.



7

Ένα πλοίο εισέρχεται σε ένα λιμάνι και ακολουθεί πορεία τέτοια ώστε να ισαπέχει από τους δύο φάρους που είναι τοποθετημένοι στα άκρα του λιμανιού. Σχεδίασε την πορεία του πλοίου και αιτιολόγησε την απάντησή σου.



8

Σχεδίασε ένα τυχαίο τρίγωνο $AB\Gamma$ και βρες ένα σημείο το οποίο ισαπέχει από τις 3 κορυφές του τριγώνου.

Εξασκούμε

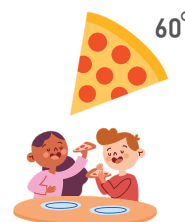


σε όσα έμαθα

3.3 | Διχοτόμος γωνίας

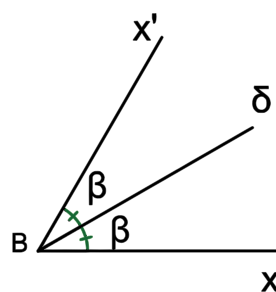


Ο Νίκος χρειάζεται να χωρίσει το παρακάτω κομμάτι πίτσας σε δύο ίσα μέρη για να τη μοιραστεί με τον αδερφό του. Ποιος είναι ο καλύτερος τρόπος να την κόψει;



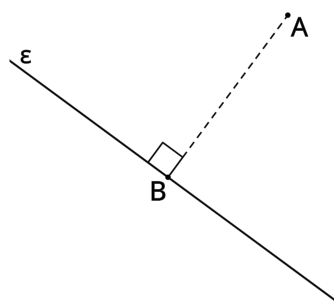
Διχοτόμος γωνίας ονομάζεται η ημιευθεία που έχει αρχή την κορυφή της γωνίας και τη χωρίζει σε δύο ίσες γωνίες.

οξεία



Θυμόμαστε ότι:

Το μήκος του κάθετου ευθυγράμμου τμήματος AB που φέρουμε από ένα σημείο A προς μία ευθεία ε, ονομάζεται **απόσταση** του σημείου A από την ευθεία ε.



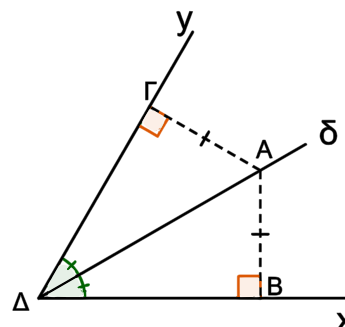
Ιδιότητα των σημείων της διχοτόμου.

Παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο A πάνω στην διχοτόμο και σχεδιάζουμε τις αποστάσεις AB και ΑΓ του σημείου A, από τις πλευρές Ax και Ay αντίστοιχα. Αν συγκρίνουμε τα τμήματα AB και ΑΓ θα διαπιστώσουμε ότι είναι **ίσα**.

Ισχύει ότι:

Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας **ισαπέχει** (δηλαδή έχει ίση απόσταση) από τις πλευρές της γωνίας.

Γενικά, κάθε σημείο της γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές της, ανήκει στη διχοτόμο της.



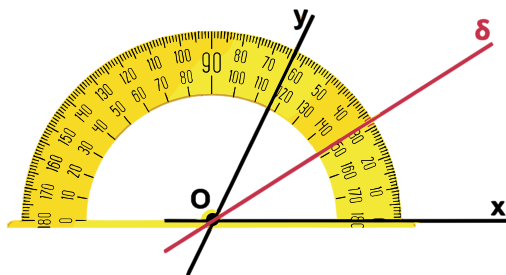
Παράδειγμα:

Να κατασκευάσετε μία γωνία $\hat{xOy} = 64^\circ$ και στη συνέχεια να φέρετε τη διχοτόμο $O\delta$ της γωνίας, με τους παρακάτω τρόπους:

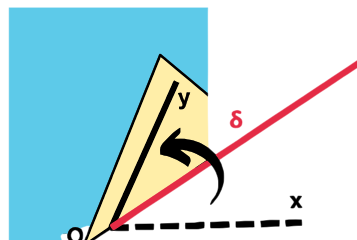
- α) με μοιρογνωμόνιο και γνώμονα
- β) με αναδίπλωση χαρτιού

Λύση:

α) Σχεδιάζουμε γωνία $\hat{xOy} = 64^\circ$ και φέρνουμε ημιευθεία $O\delta$ ώστε $\hat{xO\delta} = \hat{\delta Oy} = 64^\circ : 2 = 32^\circ$. Η $O\delta$ είναι η διχοτόμος της γωνίας \hat{xOy} .

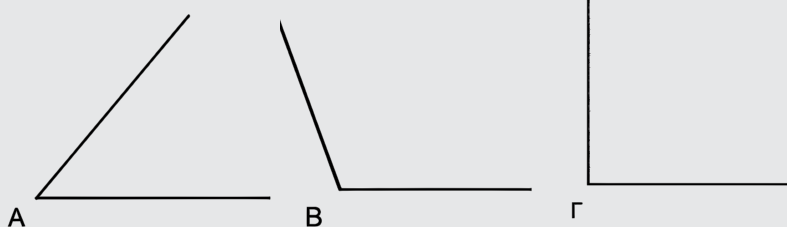


β) Διπλώνουμε κατάλληλα το χαρτί ώστε η ημιευθεία Ox να συμπίπτει με την ημιευθεία Oy . Η ευθεία τσάκισης σχηματίζει με τις πλευρές της γωνίας δύο ίσες γωνίες, αφού αυτές συμπίπτουν κατά την δίπλωση του χαρτιού. Συνεπώς η ευθεία τσάκισης είναι η διχοτόμος της γωνίας \hat{xOy} .



1

Βρες το μέτρο των παρακάτω κυρτών γωνιών και σχεδίασε τη διχοτόμο τους.



Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση



2

Σχεδίασε μία γωνία $\hat{xO\omega} = 160^\circ$ και τη διχοτόμο της $O\kappa$. Στη συνέχεια σχεδίασε τη διχοτόμο $O\lambda$ της γωνίας $\hat{\kappa O\omega}$. Υπολόγισε το μέτρο της γωνίας $\hat{\lambda O\omega}$.

3

Σχεδίασε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ και φέρε τις διχοτόμους των γωνιών του. Τι παρατηρείς;

4

Σχεδίασε μία γωνία $\hat{xOy} = 76^\circ$. Βρες ένα σημείο A , στο εσωτερικό της γωνίας, το οποίο απέχει 4cm από την κορυφή O της γωνίας και ισαπέχει από τις πλευρές Ox και Oy της γωνίας.

Εξασκούμε

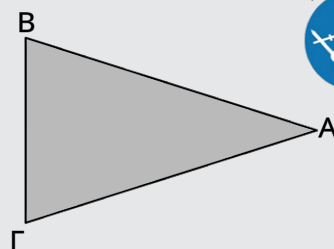


σε όσα έμαθα



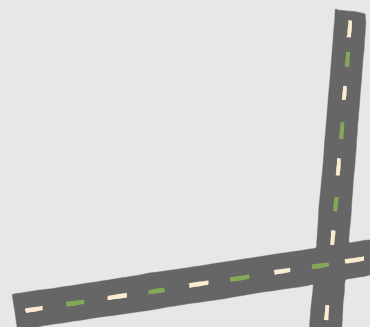
5

Στο διπλανό τρίγωνο σχεδίασε την ευθεία που ενώνει την κορυφή Α με το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ. Μέτρα τις γωνίες Β \hat{A} Μ και Μ \hat{A} Γ που σχηματίζονται. Τι παρατηρείς;



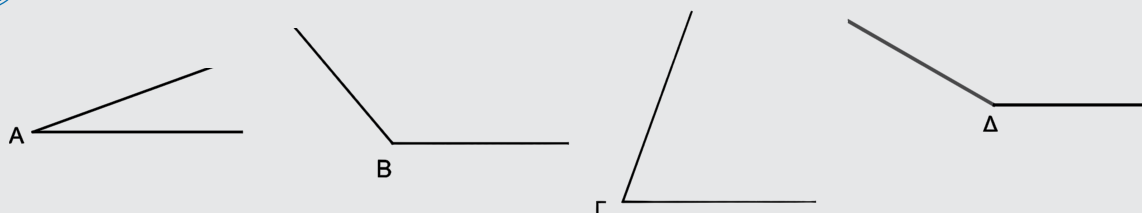
6

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η τομή δύο δρόμων μεταξύ των οποίων θέλουμε να κατασκευάσουμε έναν σταθμό ανεφοδιασμού ηλεκτρικών οχημάτων. Προσδιόρισε τις δυνατές θέσεις του σταθμού αν γνωρίζετε ότι ο σταθμός πρέπει να ισαπέχει από τους δύο δρόμους.



7

Σχεδίασε τη διχοτόμο των παρακάτω γωνιών χωρίς τη χρήση μοιρογνωμονίου.



ΜΕΛΕΤΩ



το συγκεκριμένο θέμα

Ιππίας ο Ηλείος



Σωκράτης και Ιππίας ο Ηλείος (5ος αιώνας π.Χ.). Λεπτομέρεια από τον πίνακα «Ο θάνατος του Σωκράτη» (1787), του Ζακ-Λουί Νταβίντ.

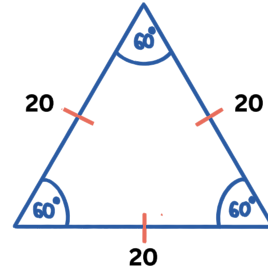
Ο Ιππίας ο Ηλείος (5ος αιώνας π.Χ.) ήταν φιλόσοφος, ρήτορας και μαθηματικός από την αρχαία Ηλεία. Είχε ασχοληθεί με διάφορους τομείς, ενώ από τη μαθηματική μελέτη του ξεχωρίζει η ανακάλυψη της «τετραγωνίζουσας καμπύλης» (καμπύλη Ιππίας). Η καμπύλη αυτή προσεγγίζει την τριχοτόμηση της γωνίας και τον τετραγωνισμό του κύκλου, δύο κλασικά προβλήματα της αρχαίας ελληνικής γεωμετρίας.

Ο Ιππίας ήταν γνωστός για την πολυμαθειά του και την ικανότητά του να συνδυάζει γνώσεις από διάφορες επιστήμες και τέχνες. Η πρωτοπόρα σκέψη του τον καθιέρωσε ως μια από τις σημαντικές προσωπικότητες της Αρχαίας Ελλάδας και της αρχαίας ελληνικής διανόησης.

3.4 | Είδη τριγώνων και στοιχεία τους.



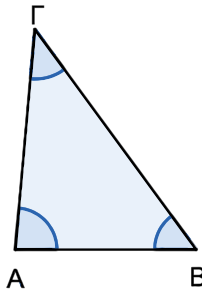
Πώς θα ονόμαζες το παρακάτω τρίγωνο; Ποιες είναι οι πλευρές και ποιες οι γωνίες του; Τι παρατηρείς για τα μέτρα των γωνιών και των πλευρών του;



Κύρια στοιχεία τριγώνου.

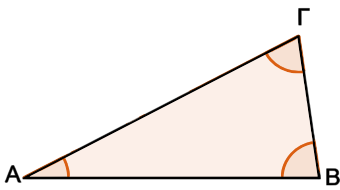
Κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει:

- τρεις κορυφές A, B, Γ
- τρεις πλευρές $AB, A\Gamma, B\Gamma$
- τρεις γωνίες $\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma}$.



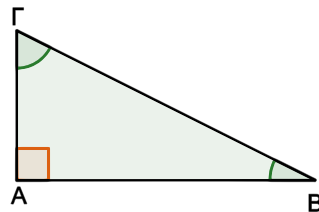
Είδη τριγώνων ως προς τις γωνίες τους.

Οξυγώνιο



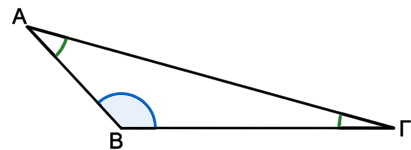
Όλες οι γωνίες του είναι οξείες.

Ορθογώνιο



Έχει μία ορθή γωνία και δύο οξείες.

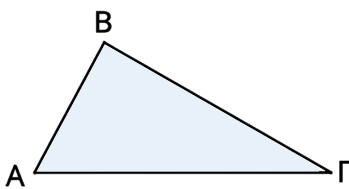
Αμβλυγώνιο



Έχει μία αμβλεία γωνία και δύο οξείες.

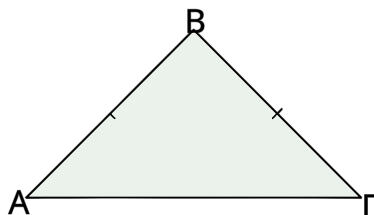
Είδη τριγώνων ως προς τις πλευρές τους.

Σκαληνό



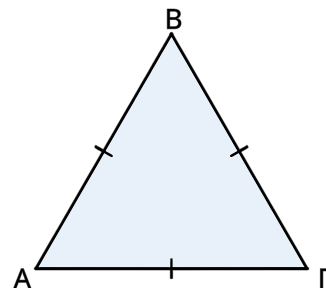
Όλες οι πλευρές του είναι άνισες.

Ισοσκελές



Έχει δύο πλευρές ίσες ενώ η τρίτη λέγεται βάση του τριγώνου.

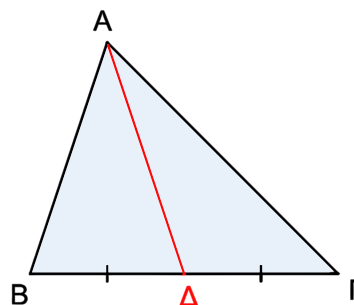
Ισόπλευρο



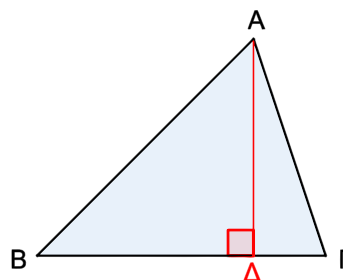
Έχει όλες τις πλευρές του ίσες

Δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου:

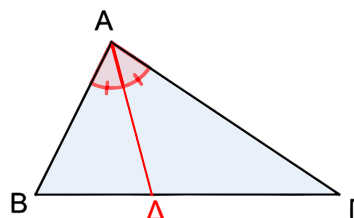
Διάμεσος ενός τριγώνου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή με το μέσο της απέναντι πλευράς.



Ύψος τριγώνου λέγεται το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα που φέρνουμε από μία κορυφή προς την ευθεία της απέναντι πλευράς.



Διχοτόμος μιας γωνίας ενός τριγώνου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα της διχοτόμου της γωνίας από την κορυφή της μέχρι την απέναντι πλευρά.



Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση



Αντιλαμβάνομαι

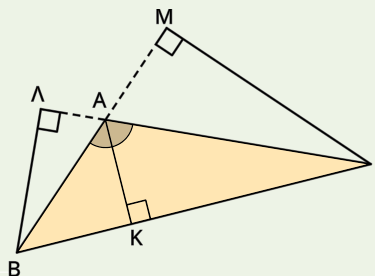


με προσομοίωση

1. Να σχεδιάσετε ένα αμβλυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και να φέρετε τα 3 ύψη του.

Λύση:

Από κάθε κορυφή, φέρνουμε το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα προς την ευθεία της απέναντι πλευράς.



Παρατηρούμε ότι τα 2 ύψη βρίσκονται εκτός του τριγώνου.



1

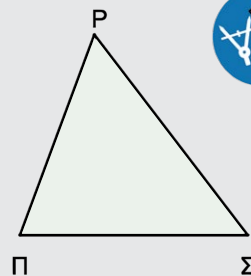
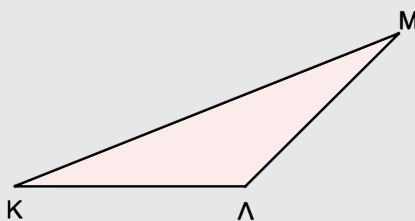
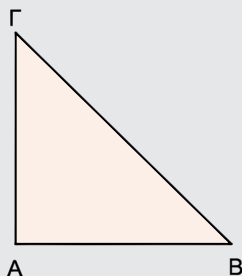
Χαρακτήρισε ως Σωστές ή Λάθος τις προτάσεις που ακολουθούν βάζοντας ένα **x** στην κατάλληλη θέση.

- α) Κάθε ορθογώνιο τρίγωνο έχει μία ορθή γωνία.
- β) Τρίγωνο με μια οξεία γωνία είναι οξυγώνιο.
- γ) Το ισοσκελές τρίγωνο έχει όλες τις πλευρές του ίσες.
- δ) Στο ισόπλευρο τρίγωνο κάθε πλευρά είναι και βάση του.
- ε) Μπορούμε να σχεδιάσουμε αμβλυγώνιο τρίγωνο με δύο αμβλείες γωνίες.

Σωστό Λάθος

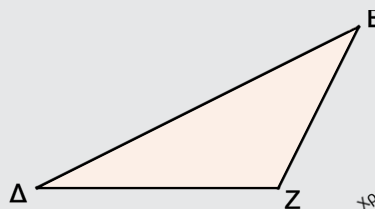
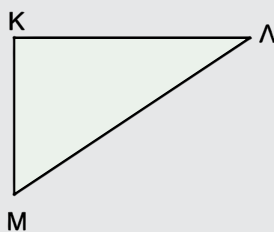
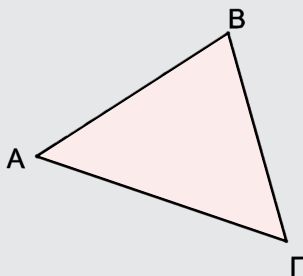
2

Σχεδιάσε τις διαμέσους στα παρακάτω τρίγωνα.



3

Σχεδιάσε τις διχοτόμους στα παρακάτω τρίγωνα.



Εξασκούμε



σε όσα έμαθα

Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση

4 Σχεδιάσε τα ύψη στα παρακάτω τρίγωνα.

5 Κατέταξε τα παρακάτω τρίγωνα με βάση τις πλευρές και τις γωνίες τους.

6 Σχεδιάσε ένα τρίγωνο ABΓ με $AB = AG = 10\text{cm}$ με γωνία $A = 140^\circ$. Σχεδιάσε τα ύψη ΒΔ και ΓΕ και σύγκρινέ τα.

7 Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα με τα σχήματα των τριγώνων που αντιστοιχούν σε κάθε κελί, όπου αυτά υπάρχουν.

	ΟΞΥΓΩΝΙΟ	ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ	ΑΜΒΛΥΓΩΝΙΟ
ΣΚΑΛΗΝΟ			
ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ			
ΙΣΟΠΛΕΥΡΟ			

3.5 | Ιδιότητες ισοσκελούς και ισοπλεύρου τριγώνου

Εξερευνώ



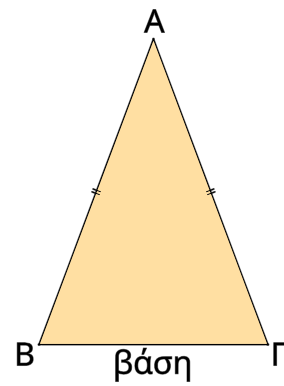
Κατασκεύασε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=A\Gamma=5\text{cm}$. Στη συνέχεια βρες το μέσο M της πλευράς $B\Gamma$ και σχεδίασε το ευθύγραμμο τμήμα AM . Δίπλωσε το χαρτί ακριβώς πάνω στην ευθεία του AM . Τι παρατηρείς;



Θυμόμαστε



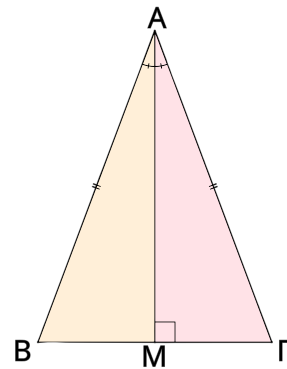
Γνωρίζουμε ότι το ισοσκελές τρίγωνο έχει 2 ίσες πλευρές ($AB=A\Gamma$). Η τρίτη πλευρά ($B\Gamma$) λέγεται **βάση** του ισοσκελούς τριγώνου.



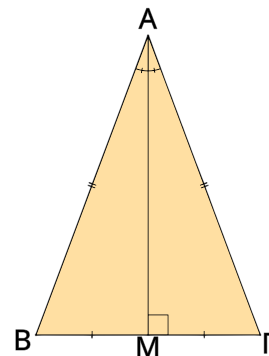
Ιδιότητες ισοσκελούς τριγώνου:

- Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η ευθεία της διαμέσου (AM) που αντιστοιχεί στη βάση του είναι **άξονας συμμετρίας** του τριγώνου.
- Οι προσκείμενες γωνίες στη βάση του είναι **ίσες**.

$$\hat{B} = \hat{\Gamma}$$

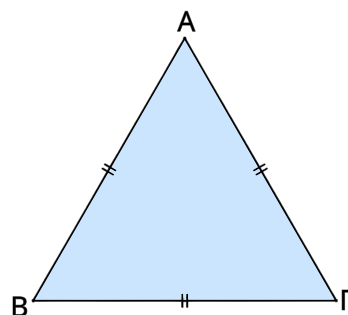


- Η διάμεσος, το ύψος και η διχοτόμος που αντιστοιχούν στη βάση του **ταυτίζονται**, δηλαδή είναι το ίδιο ευθύγραμμο τμήμα (AM).

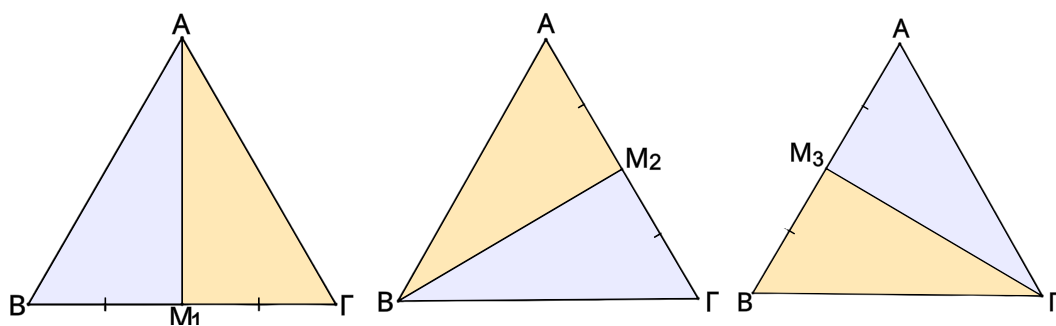


Ιδιότητες ισόπλευρου τριγώνου:

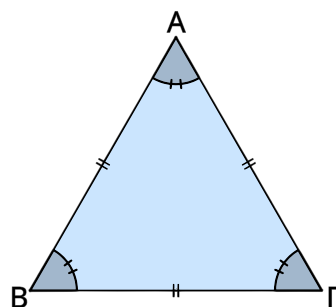
Γνωρίζουμε ότι το ισόπλευρο τρίγωνο έχει όλες τις πλευρές του ίσες ($AB = BG = AΓ$).



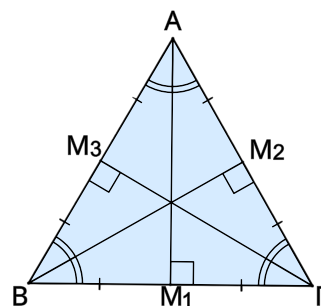
- Σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο οι ευθείες **όλων των διαμέσων** είναι **άξονες συμμετρίας** του τριγώνου



- Όλες οι γωνίες του ισόπλευρου τριγώνου είναι **ίσες**.



- Η διάμεσος, το ύψος και η διχοτόμος προς οποιαδήποτε πλευρά του ισόπλευρου τριγώνου **ταυτίζονται**, δηλαδή είναι το ίδιο ευθύγραμμο τμήμα.





1

Χαρακτήρισε ως Σωστές ή Λάθος τις προτάσεις που ακολουθούν βάζοντας ένα **x** στην κατάλληλη θέση.

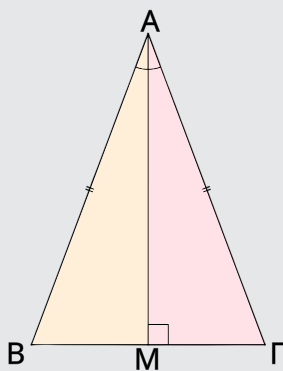
- α) Οι προσκείμενες γωνίες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.
- β) Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η διάμεσος, που αντιστοιχεί στη βάση, είναι και διχοτόμος.
- γ) Σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο οι ευθείες των υψών είναι και μεσοκάθετοι των πλευρών του τριγώνου.
- δ) Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο, αν μία γωνία είναι 30° , τότε θα υπάρχει αναγκαστικά κι άλλη γωνία 30° .
- ε) Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η ευθεία της διαμέσου που αντιστοιχεί στη βάση του είναι άξονας συμμετρίας του τριγώνου.
- στ) Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο κάθε διάμεσος είναι ύψος και διχοτόμος.

Σωστό Λάθος

Σωστό	Λάθος

2

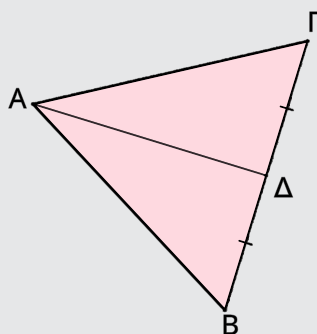
Το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές με $AB = AG$ και το AM είναι ύψος του τριγώνου. Να συμπληρώσετε τα κενά:



- α) Η βάση του τριγώνου ABΓ είναι η οπότε $\hat{B} = \dots$
- β) Το ύψος AM είναι και και άξονας του ισοσκελούς τριγώνου ABΓ. Συνεπώς:
 - i. $BM = \dots$
 - ii. $M\hat{A}B = \dots$

3

Το τρίγωνο ABΓ είναι ισόπλευρο και η AΔ είναι διάμεσος του τριγώνου.



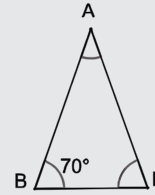
- Να συμπληρώσετε τα κενά:
- α) $AB = \dots = \dots$
 - β) $\hat{A} = \dots = \dots$
 - γ) Η διάμεσος AΔ είναι και και άξονας του ισοπλεύρου τριγώνου ABΓ. Συνεπώς:
 - i. $A\hat{\Delta}B = \dots$ καθενιά από τις οποίες ισούται με μοίρες.
 - ii. $B\hat{A}\Delta = \dots$

4

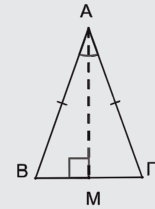
Συμπλήρωσε τα κενά:

α. Αν γνωρίζουμε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές τότε

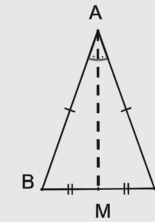
$\hat{\Gamma} = \dots\dots\dots$ διότι $\dots\dots\dots$



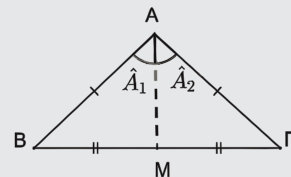
β. $BM = \dots\dots\dots$ διότι $\dots\dots\dots$



γ. $\hat{A}MB = \dots\dots\dots$ διότι $\dots\dots\dots$



δ. $\hat{A}_1 = \dots\dots\dots$ διότι $\dots\dots\dots$



Εξασκούμε



σε όλα έμαθα

3.6 | Κατακορυφήν, συμπληρωματικές και παραπληρωματικές γωνίες.



Μπορείς να βρεις το άθροισμα των μέτρων των παρακάτω γωνιών $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$;



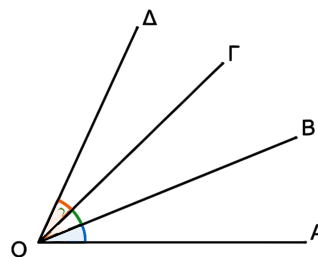
Θα άλλαζε το άθροισμα αν μετακινούσαμε την ενδιάμεση πλευρά;

Δύο γωνίες λέγονται **εφεξής**, αν έχουν:

- κοινή κορυφή,
- μία πλευρά κοινή
- κανένα άλλο κοινό σημείο.

Παράδειγμα:

Η γωνία $\hat{A}\hat{O}\hat{B}$ είναι εφεξής με τη $\hat{B}\hat{O}\hat{\Gamma}$, και η $\hat{B}\hat{O}\hat{\Gamma}$ είναι εφεξής με τη $\hat{\Gamma}\hat{O}\hat{\Delta}$.



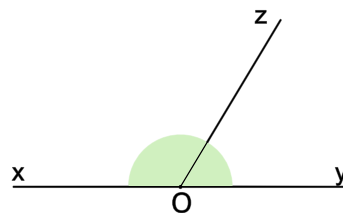
Οι γωνίες $\hat{A}\hat{O}\hat{B}$, $\hat{B}\hat{O}\hat{\Gamma}$, $\hat{\Gamma}\hat{O}\hat{\Delta}$ λέγονται **διαδοχικές**.

Παραπληρωματικές γωνίες ονομάζονται δύο γωνίες που έχουν άθροισμα 180° .

Παράδειγμα:

Στο διπλανό σχήμα είναι $\hat{x}\hat{O}\hat{z} + \hat{z}\hat{O}\hat{y} = 180^\circ$.

Η κάθε μία από αυτές λέγεται παραπληρωματική της άλλης.

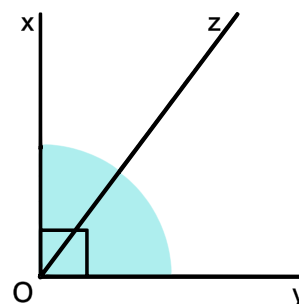


Συμπληρωματικές γωνίες ονομάζονται δύο γωνίες που έχουν άθροισμα 90° .

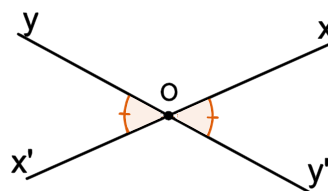
Παράδειγμα:

Στο διπλανό σχήμα είναι $\hat{x}\hat{O}\hat{z} + \hat{z}\hat{O}\hat{y} = 90^\circ$

Η κάθε μία από αυτές λέγεται συμπληρωματική της άλλης.



Κατακορυφήν γωνίες ονομάζονται δύο γωνίες που έχουν την κορυφή τους κοινή και τις πλευρές τους αντικείμενες ημιευθείες.



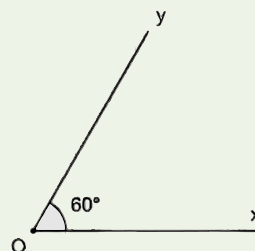
Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες.



1. Να σχεδιάσετε μία γωνία 60° . Στη συνέχεια να σχεδιάσετε την συμπληρωματική της γωνία και την παραπληρωματική της γωνία. Ποιο είναι το μέτρο αυτών των γωνιών;

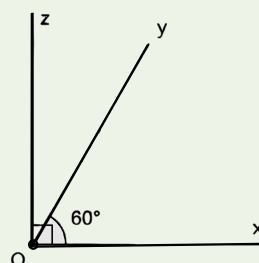
Λύση:

Σχεδιάζουμε γωνία $\hat{xOy} = 60^\circ$.



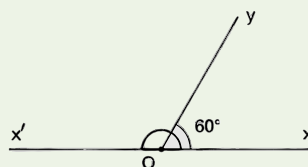
Φέρνουμε ημιευθεία Oz κάθετη στην Ox στο O.
 Η γωνία \hat{yOz} είναι η συμπληρωματική γωνία της \hat{xOy} .
 Το μέτρο της γωνίας \hat{yOz} είναι:

$$90^\circ - 60^\circ = 30^\circ.$$



Φέρνουμε την αντικείμενη ημιευθεία Ox' της Ox.
 Η γωνία $\hat{yOx'}$ είναι η παραπληρωματική γωνία της \hat{xOy} .
 Το μέτρο της γωνίας $\hat{yOx'}$ είναι:

$$180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$



2. Στο παρακάτω σχήμα να βρεις και να ονομάσεις όλες τις κατακορυφήν γωνίες (σημείωση: Τα AD και BΓ και BE είναι ευθύγραμμα τμήματα).

Λύση:

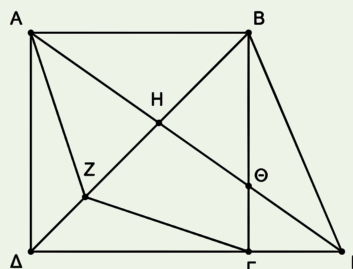
Κατακορυφήν είναι τα παρακάτω ζεύγη γωνιών:

$\hat{A}H\hat{B}$ και $\hat{Z}H\hat{\Theta}$,

$\hat{A}H\hat{Z}$ και $\hat{B}H\hat{\Theta}$,

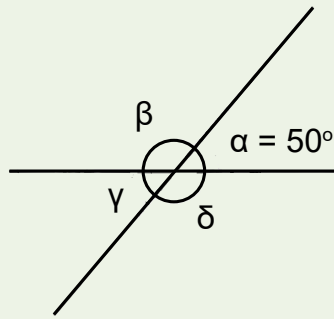
$\hat{H}\hat{\Theta}\hat{B}$ και $\hat{E}\hat{\Theta}\hat{\Gamma}$,

$\hat{B}\hat{\Theta}\hat{E}$ και $\hat{H}\hat{\Theta}\hat{\Gamma}$



3. Να σχεδιάσεις δύο τεμνόμενες ευθείες ώστε να σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία 50° . Να υπολογίσεις όλες τις γωνίες που σχηματίζονται.

Λύση



Έχουμε:

- Οι γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\gamma}$ είναι ίσες ως κατακορυφήν γωνίες, άρα:

$$\hat{\gamma} = \hat{\alpha} = 50^\circ$$

- Οι γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ είναι παραπληρωματικές γωνίες, άρα:

$$\hat{\beta} = 180^\circ - \hat{\alpha} = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$$

- Οι γωνίες $\hat{\beta}$ και $\hat{\delta}$ είναι ίσες ως κατακορυφήν γωνίες, άρα:

$$\hat{\delta} = \hat{\beta} = 130^\circ$$

Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση



Εξασκούμε



σε όσα έμαθα



1

Χαρακτήρισε ως Σωστός ή Λάθος τις προτάσεις που ακολουθούν βάζοντας ένα x στην κατάλληλη θέση.

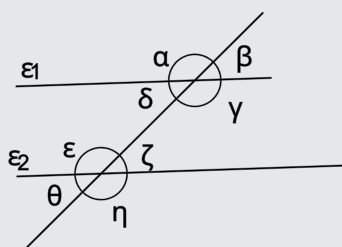
- α) Δυο γωνίες με άθροισμα μία ορθή ονομάζονται παραπληρωματικές.
- β) Δυο γωνίες με κοινή κορυφή ονομάζονται κατακορυφήν και είναι πάντα ίσες.
- γ) Η συμπληρωματική της μηδενικής γωνίας είναι η ορθή.
- δ) Η παραπληρωματική μιας αμβλείας είναι πάντα οξεία.
- ε) Δύο παραπληρωματικές γωνίες έχουν άθροισμα 180° .
- στ) Δυο κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες.

Σωστό Λάθος

Σωστό	Λάθος

2

Βρες όλα τα ζεύγη κατακορυφών γωνιών στο παρακάτω σχήμα:



3

Σχεδιάσε μια γωνία 40° . Στη συνέχεια, να σχεδιάσεις:

- α) την παραπληρωματική της.
- β) τη συμπληρωματική της.



4

Βρες τι είδους γωνία είναι η παραπληρωματικής μιας

- α) οξείας γωνίας.
- β) ορθής γωνίας.
- γ) αμβλείας γωνίας.

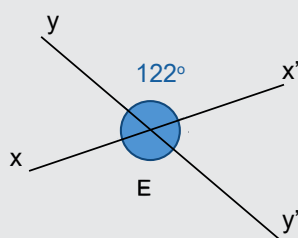
Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση

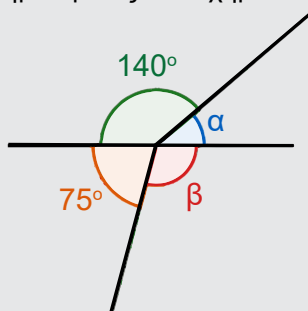
5

Υπολόγισε τις γωνίες που φαίνονται στο σχήμα.



6

Υπολόγισε τις γωνίες που είναι σημειωμένες στο σχήμα.

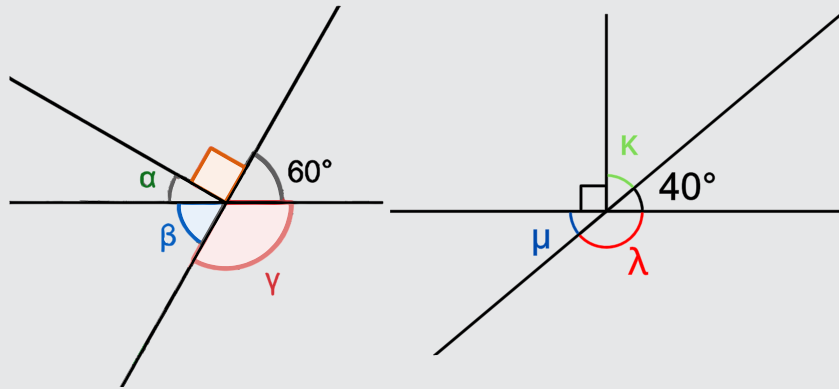


7

Μια γωνία είναι ίση με τα $\frac{2}{5}$ της ορθής. Υπολόγισε τη συμπληρωματική και την παραπληρωματική της γωνία.

8

Υπολόγισε τις σημειωμένες γωνίες στα παρακάτω σχήματα.



9

Βρες το μέτρο της γωνίας για την οποία γνωρίζεις ότι:

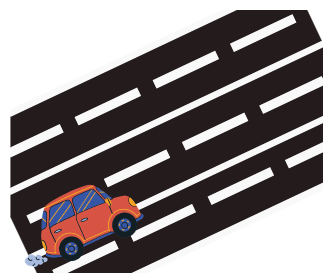
- α) η συμπληρωματική της γωνία έχει μέτρο 20° μεγαλύτερο από αυτή.
- β) η παραπληρωματική της γωνία έχει μέτρο 40° μικρότερο από αυτή.
- γ) η συμπληρωματική της γωνία είναι διπλάσια από αυτή.
- δ) η παραπληρωματική της γωνία έχει μέτρο τριπλάσιο από αυτή.

3.7 | ΣΧΗΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΩΝ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ.

ΕΞΕΡΧΕΝΩ



Τι παρατηρείς για τη διαγράμμιση του δρόμου στην εθνική οδό; Θα συναντηθούν οι γραμμές σε κάποιο σημείο;



ΣΧΗΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΩΝ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Δύο ευθείες του επιπέδου ονομάζονται **παράλληλες** αν δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, όσο και αν προεκταθούν.

Οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι παράλληλες.

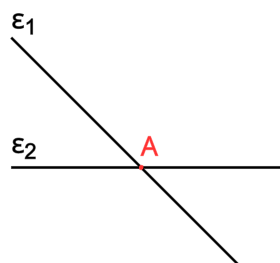
 ϵ_1 _____

Συμβολικά γράφουμε $\epsilon_1 // \epsilon_2$.

 ϵ_2 _____

Δύο ευθείες του επιπέδου ονομάζονται **τεμνόμενες** αν έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

Το κοινό τους σημείο A λέγεται **σημείο τομής** των ευθειών.

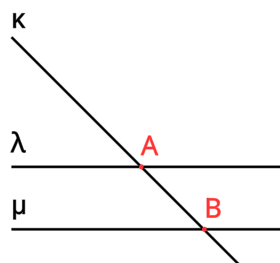


ΣΧΗΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΩΝ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ:

Δύο διαφορετικές ευθείες που ανήκουν στο ίδιο επίπεδο μπορεί:

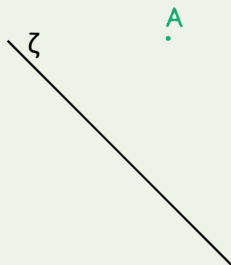
- να τέμνονται ή
- να είναι παράλληλες.

Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες λ και μ είναι παράλληλες ενώ οι ευθείες κ , λ και κ , μ είναι τεμνόμενες.



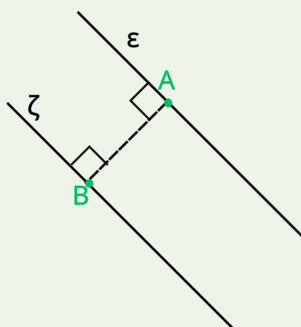


Να σχεδιάσετε ευθεία (ϵ) που διέρχεται από το σημείο A και είναι παράλληλη στην ευθεία (ζ).



Λύση:

- Από το σημείο A φέρνουμε το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα AB προς την ευθεία (ζ).
- Στο σημείο A σχεδιάζουμε ευθεία (ϵ) που είναι κάθετη στο AB .
- Η ευθεία (ϵ) είναι η ζητούμενη ευθεία.



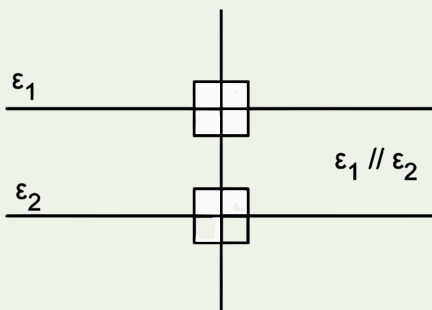
Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση

Άρα:

Δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία είναι μεταξύ τους **παράλληλες**.



Δεχόμαστε ότι:

Από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται **μία μόνο** ευθεία παράλληλη προς αυτήν.
Η παραπάνω πρόταση είναι γνωστή ως «Ευκλείδειο Αίτημα» .



1

Χαρακτήρισε ως Σωστές ή Λάθος τις προτάσεις που ακολουθούν βάζοντας ένα **x** στην κατάλληλη θέση.

- α) Δύο ευθείες του επιπέδου που δεν έχουν κανένα κοινό σημείο είναι παράλληλες.
- β) Ευθύγραμμα τμήματα που δεν έχουν κανένα κοινό σημείο είναι απαραίτητα κάθετα.
- γ) Αν δύο ευθείες είναι κάθετες μεταξύ τους τότε είναι τεμνόμενες.
- δ) Από ένα σημείο έξω από την ευθεία μπορώ να φέρω μόνο μια παράλληλη ευθεία προς αυτή.
- ε) Δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία είναι παράλληλες μεταξύ τους.

Σωστό Λάθος

Σωστό	Λάθος



2

Σχεδίασε μία ευθεία ϵ και πάρε δύο σημεία A, B έξω από αυτή. Από τα A, B σχεδίασε παράλληλες ευθείες προς την ϵ . Τι παρατηρείς γι' αυτές τις ευθείες; Σε ποια περίπτωση αυτές οι ευθείες ταυτίζονται;

3

Σχεδίασε ευθεία ϵ και πάρε δύο σημεία A, B έξω από αυτή. Από τα A και B σχεδίασε ευθείες κάθετες προς την ϵ . Τι παρατηρείς γι' αυτές τις ευθείες;

4

Σχεδίασε μια γωνία $\chi\hat{O}\omega = 60^\circ$. Από ένα σημείο A της $O\chi$ να φέρεις παράλληλη ευθεία ϵ_1 προς την $O\omega$ και από ένα σημείο B της $O\omega$ να φέρεις παράλληλη ευθεία ϵ_2 προς την $O\chi$. Αν K είναι το σημείο τομής των ευθειών ϵ_1 και ϵ_2 , να υπολογίσεις το μέτρο της γωνίας $A\hat{K}B$.

5

Σχεδίασε μια ευθεία ϵ και μία παράλληλη προς αυτή τέτοια ώστε να έχει απόσταση 5 cm από την ϵ . Πόσες τέτοιες ευθείες μπορείς να σχεδιάσεις;

Εξασκούμε



σε όσα έμαθα

3.8 | Γωνίες σε παράλληλες ευθείες με τέμνουσα



Στις 21 Απριλίου 2088 θα σημειωθεί ολική έκλειψη ηλίου, η οποία θα γίνει ορατή από τις περιοχές της Ελλάδος που φαίνονται στον χάρτη.

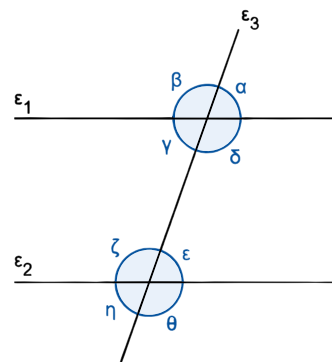


- Ποιες πόλεις είναι εντός της περιοχής ολικής έκλειψης και ποιες πόλεις είναι εκτός;

Δύο ομάδες θα μελετήσουν το φαινόμενο, η μία ανατολικά και η άλλη δυτικά της μπλε γραμμής στον χάρτη.

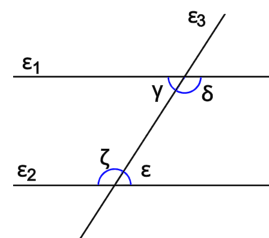
- Ποιες πόλεις είναι εντός της περιοχής ολικής έκλειψης και ανατολικά;
- Ποιες πόλεις είναι εκτός της περιοχής ολικής έκλειψης και δυτικά;

Έστω δύο παράλληλες ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 οι οποίες τέμνονται από μία τρίτη ευθεία ϵ_3 . Η ευθεία ϵ_3 λέγεται τέμνουσα των ϵ_1 και ϵ_2 .

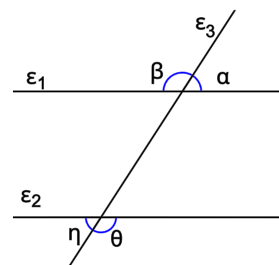


A. Χαρακτηρισμός γωνιών ως προς τις παράλληλες ευθείες ϵ_1 και ϵ_2

- Οι γωνίες γ , δ , ϵ , ζ που βρίσκονται ανάμεσα στις παράλληλες ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 ονομάζονται «**εντός**».



- Οι γωνίες α , β , η , θ οι οποίες δεν βρίσκονται ανάμεσα στις παράλληλες ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 ονομάζονται «**εκτός**».



B. Χαρακτηρισμός γωνιών ως προς την τέμνουσα ϵ_3

- Δύο γωνίες που βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της τέμνουσας ϵ_3 λέγονται «**επί τα αυτά** (μέρη της ευθείας)».

Παραδείγματα:

<ul style="list-style-type: none"> • Οι γωνίες α, ϵ είναι επί τα αυτά μέρη. • Οι γωνίες γ, ζ είναι επί τα αυτά μέρη. 	
---	--

- Δύο γωνίες που βρίσκονται σε διαφορετικά μέρη της τέμνουσας ϵ_3 λέγονται «**εναλλάξ**».

Παραδείγματα:

<ul style="list-style-type: none"> • Οι γωνίες γ, ϵ είναι εναλλάξ. • Οι γωνίες α, η είναι εναλλάξ. 	
--	--

Από τα προηγούμενα προκύπτουν οι παρακάτω συνδυασμοί:

<p>γ, ϵ : εντός εναλλάξ.</p>	<p>β, θ : εκτός εναλλάξ.</p>	<p>δ, ϵ : εντός και επί τα αυτά.</p>
<p>α, θ : εκτός και επί τα αυτά.</p>	<p>β, ϵ : εντός – εκτός εναλλάξ.</p>	<p>α, ϵ : εντός – εκτός και επί τα αυτά.</p>

Στο παραπάνω σχήμα μπορούμε να διαπιστώσουμε (μετρώντας με το μοιρογνωμόνιο) ότι:

<p>Όλες οι οξείες γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους.</p>	<p>Όλες οι αμβλείες γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους.</p>

Επίσης παρατηρούμε ότι μία οξεία γωνία και μία αμβλεία γωνία είναι παραπληρωματικές, δηλαδή έχουν άθροισμα 180° .



Άρα:

Οξείες	
$\hat{\gamma} = \hat{\epsilon}$	εντός εναλλάξ
$\hat{\alpha} = \hat{\eta}$	εκτός εναλλάξ
$\hat{\alpha} = \hat{\epsilon}$ και $\hat{\gamma} = \hat{\eta}$	εντός – εκτός και επί τα αυτά

Αμβλείες	
$\hat{\zeta} = \hat{\delta}$	εντός εναλλάξ
$\hat{\beta} = \hat{\theta}$	εκτός εναλλάξ
$\hat{\zeta} = \hat{\beta}$ και $\hat{\delta} = \hat{\theta}$	εντός – εκτός και επί τα αυτά

Αντιλαμβάνομαι

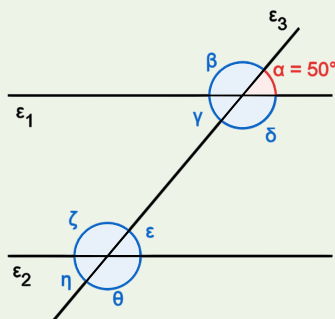


με προσομοίωση

Οξεία και αμβλεία		
$\hat{\delta} + \hat{\epsilon} = 180^\circ$	και $\hat{\gamma} + \hat{\zeta} = 180^\circ$	εντός και επί τα αυτά
$\hat{\alpha} + \hat{\theta} = 180^\circ$	και $\hat{\beta} + \hat{\eta} = 180^\circ$	εκτός και επί τα αυτά
$\hat{\beta} + \hat{\epsilon} = 180^\circ$ και $\hat{\gamma} + \hat{\theta} = 180^\circ$	και $\hat{\zeta} + \hat{\alpha} = 180^\circ$ και $\hat{\delta} + \hat{\eta} = 180^\circ$	εντός – εκτός εναλλάξ



1. Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι παράλληλες. Να υπολογίσετε τις σημειωμένες γωνίες αν $\hat{\alpha} = 50^\circ$.



Λύση:

- Οι γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\gamma}$ είναι κατακορυφήν, άρα: $\hat{\gamma} = \hat{\alpha} = 50^\circ$.
- Οι γωνίες $\hat{\beta}$ και $\hat{\alpha}$ είναι παραπληρωματικές, άρα: $\hat{\beta} = 180^\circ - \hat{\alpha} = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$.
- Οι γωνίες $\hat{\delta}$ και $\hat{\beta}$ είναι κατακορυφήν, άρα: $\hat{\delta} = \hat{\beta} = 130^\circ$.
- Οι γωνίες $\hat{\epsilon}$ και $\hat{\alpha}$ είναι εντός εκτός και επί τα αυτά, άρα: $\hat{\epsilon} = \hat{\alpha} = 50^\circ$.
- Οι γωνίες $\hat{\eta}$ και $\hat{\epsilon}$ είναι κατακορυφήν, άρα: $\hat{\eta} = \hat{\epsilon} = 50^\circ$.
- Οι γωνίες $\hat{\zeta}$ και $\hat{\epsilon}$ είναι παραπληρωματικές, άρα: $\hat{\zeta} = 180^\circ - \hat{\epsilon} = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$.
- Οι γωνίες $\hat{\theta}$ και $\hat{\zeta}$ είναι κατακορυφήν, άρα: $\hat{\zeta} = \hat{\theta} = 130^\circ$.



1

Οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι παράλληλες και η τέμνει τις δύο παράλληλες. Βρες τα ζεύγη των εντός εναλλάξ γωνιών και των εντός εκτός και επί τα αυτά

	<p>Εντός εναλλάξ</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	<p>Εντός εκτός και επί τα αυτά</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>
--	--	--

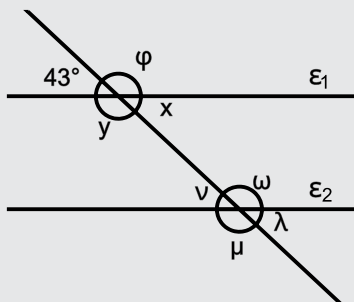
2

Σχεδιάσε δύο παράλληλες ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 οι οποίες να απέχουν 4 cm. Φέρε μία ευθεία που να σχηματίζει με την ϵ_1 γωνία 63° . Υπολόγισε όλες τις γωνίες που σχηματίζονται.



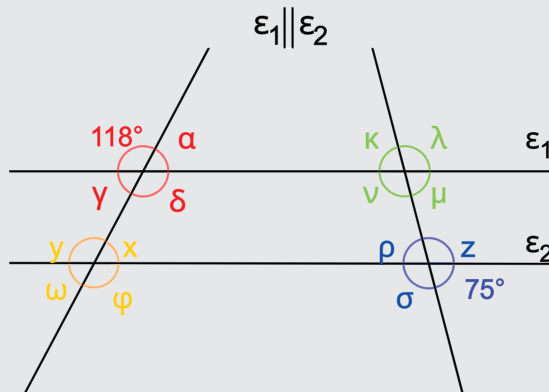
3

Υπολόγισε τις σημειωμένες γωνίες στο σχήμα, αν γνωρίζεις ότι οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι παράλληλες



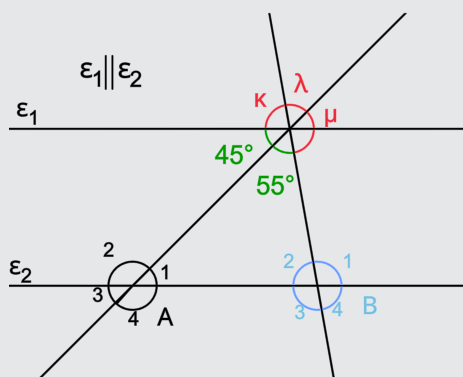
4

Υπολόγισε τις σημειωμένες γωνίες στο σχήμα, αν γνωρίζεις ότι οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι παράλληλες



5

Υπολόγισε τις σημειωμένες γωνίες στο σχήμα:



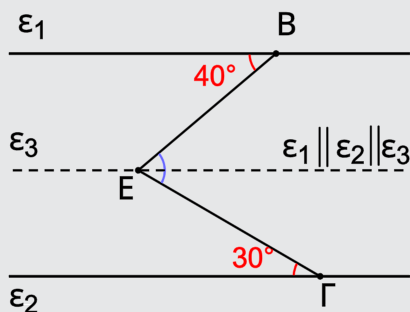
Εξασκούμε



σε όσα έμαθα

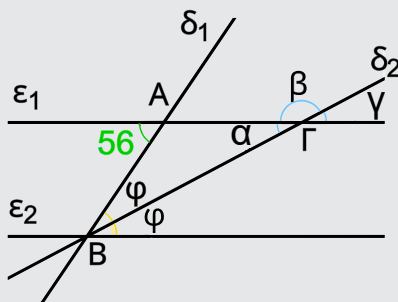
6

Υπολόγισε το μέτρο της γωνίας ΒΕΓ στο παρακάτω σχήμα αν γνωρίζεις ότι οι ϵ_1 και ϵ_2 είναι παράλληλες.



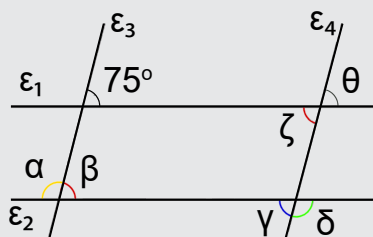
7

Υπολόγισε τις γωνίες φ , α , β και γ , αν γνωρίζεις ότι η ϵ_1 είναι παράλληλη στην ϵ_2 και η δ_2 είναι διχοτόμος της γωνίας Β.



8

Στο παρακάτω σχήμα είναι $\epsilon_1 // \epsilon_2$ και $\epsilon_3 // \epsilon_4$. Υπολόγισε όλες τις σημειωμένες γωνίες.

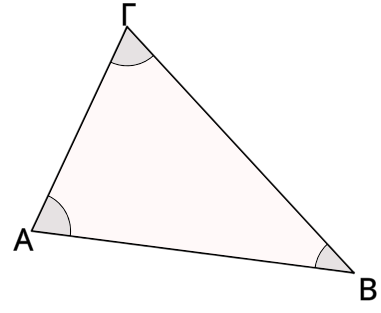


3.9 | Άθροισμα γωνιών τριγώνου



Μέτρησε με το μοιρογνωμόνιο τις γωνίες των παρακάτω τριγώνων και υπολόγισε το άθροισμα των μέτρων τους. Τι παρατηρείς;

Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 180° .



$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$$

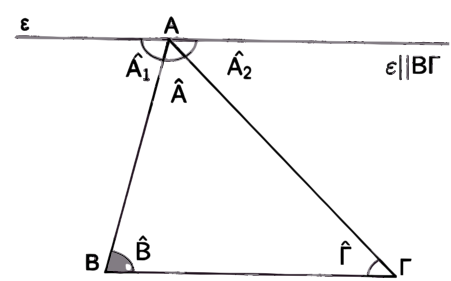
Αντιλαμβάνομαι

με προσομοίωση

Τεκμηρίωση με λογικούς συλλογισμούς:

Έστω ένα τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ. Από την κορυφή Α φέρνουμε μία παράλληλη ευθεία προς την ευθεία ΒΓ, τότε:

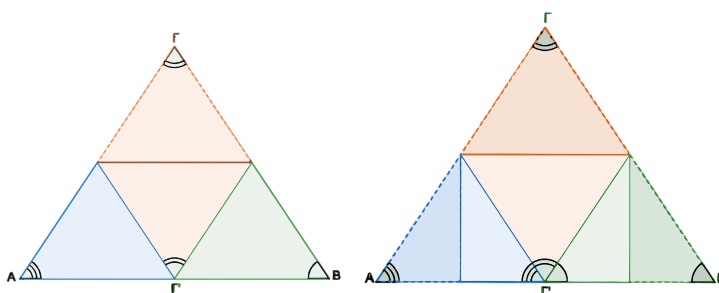
- $\hat{A}_1 = \hat{B}$ ως εντός εναλλάξ γωνίες στις παράλληλες, με τέμνουσα την ΑΒ.
- $\hat{A}_2 = \hat{\Gamma}$ ως εντός εναλλάξ γωνίες στις παράλληλες, με τέμνουσα την ΑΓ.



Όμως είναι: $\hat{A}_1 + \hat{A} + \hat{A}_2 = 180^\circ$, γιατί σχηματίζουν ευθεία,
 $\downarrow \qquad \downarrow$
 άρα θα είναι: $\hat{B} + \hat{A} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$

Μία γεωμετρική προσέγγιση της απόδειξης

Σχεδιάσε ένα τρίγωνο και δίπλωσε το χαρτί σχεδίασης όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, ώστε και οι τρεις γωνίες του τριγώνου να έχουν κοινή κορυφή.



Παρατήρησε ότι οι τρεις γωνίες σχηματίζουν μία ευθεία, άρα $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$.



1. Να αποδείξετε ότι κάθε γωνία ενός ισόπλευρου τριγώνου ισούται με 60° .

Λύση:

Έστω ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$.

Το ισόπλευρο τρίγωνο έχει όλες του τις γωνίες ίσες:

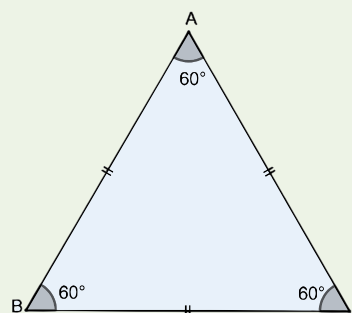
$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma}.$$

Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου έχουμε ότι:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ.$$

Άρα κάθε γωνία του ισόπλευρου τριγώνου ισούται με $180^\circ : 3 = 60^\circ$, δηλαδή:

$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = 60^\circ.$$



2. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, οι οξείες γωνίες είναι συμπληρωματικές.

Λύση:

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$.

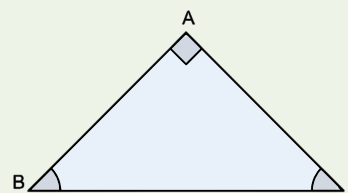
Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου έχουμε ότι:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$$

$$\text{ή } 90^\circ + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$$

$$\text{ή } \hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ.$$

Οι οξείες γωνίες \hat{B} και $\hat{\Gamma}$ έχουν άθροισμα 90° άρα είναι συμπληρωματικές.



3. Να υπολογίσετε τις οξείες γωνίες ενός ορθογώνιου και ισοσκελούς τριγώνου.

Λύση:

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$.

Αν $\hat{A} = 90^\circ$, τότε όπως είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, είναι $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ$.

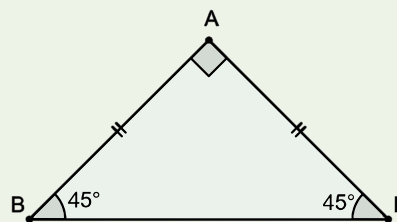
Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$, άρα οι προσκείμενες στη βάση γωνίες \hat{B} και $\hat{\Gamma}$ είναι ίσες.

Θέτουμε $\hat{B} = \hat{\Gamma} = x$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \hat{B} + \hat{\Gamma} &= 90^\circ \\ \text{ή } x + x &= 90^\circ \\ \text{ή } 2 \cdot x &= 90^\circ \\ \text{ή } x &= 90^\circ : 2 \\ \text{ή } x &= 45^\circ. \end{aligned}$$

Άρα $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 45^\circ$.



4. Να υπολογίσετε τα μέτρα των γωνιών ισοσκελούς τριγώνου, αν είναι γνωστό ότι μία γωνία του ισούται με 40°

Λύση:

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Θα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

1η περίπτωση: $\hat{A} = 40^\circ$.

Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες \hat{B} και $\hat{\Gamma}$ είναι ίσες.

Θέτουμε $\hat{B} = \hat{\Gamma} = x$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου έχουμε:

$$\begin{aligned} \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} &= 180^\circ \\ \text{ή } 40^\circ + x + x &= 180^\circ \\ \text{ή } x + x &= 180^\circ - 40^\circ \\ \text{ή } 2 \cdot x &= 140^\circ \\ \text{ή } x &= 70^\circ. \end{aligned}$$

Άρα $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 70^\circ$.

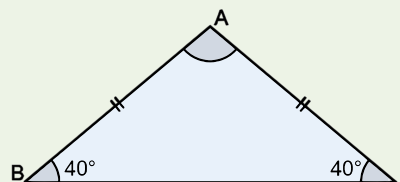
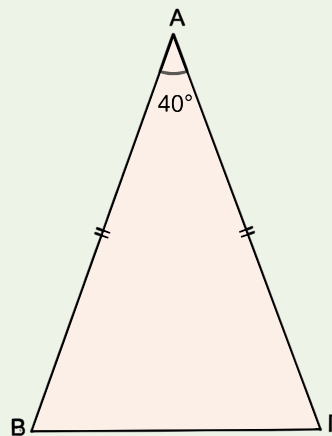
2η περίπτωση: $\hat{B} = 40^\circ$.

Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες \hat{B} και $\hat{\Gamma}$ είναι ίσες,

άρα $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 40^\circ$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου έχουμε:

$$\begin{aligned} \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} &= 180^\circ \\ \text{ή } \hat{A} + 40^\circ + 40^\circ &= 180^\circ \\ \text{ή } \hat{A} + 80^\circ &= 180^\circ \\ \text{ή } \hat{A} &= 180^\circ - 80^\circ \\ \text{ή } \hat{A} &= 100^\circ. \end{aligned}$$



1

Χαρακτήρισε ως Σωστές ή Λάθος τις προτάσεις, βάζοντας ένα **x** στην κατάλληλη θέση.

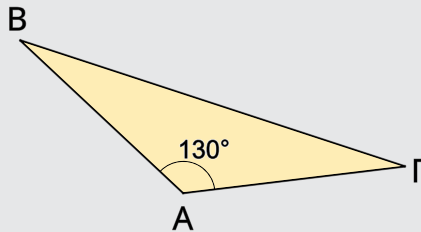
- α) Υπάρχει τρίγωνο με δύο ορθές γωνίες.
- β) Αν η γωνία της κορυφής ισοσκελούς τριγώνου είναι 30° τότε η γωνία της βάσης είναι 75° .
- γ) Οι οξείες γωνίες ορθογωνίου τριγώνου είναι παραπληρωματικές.
- δ) Υπάρχει αμβλυγώνιο και ισοσκελές τρίγωνο.
- ε) Υπάρχει ορθογώνιο και ισόπλευρο τρίγωνο.
- στ) Σε κάθε ισοσκελές και ορθογώνιο τρίγωνο, μπορούμε πάντα να βρούμε τα μέτρα των γωνιών του.

Σωστό Λάθος

Σωστό	Λάθος

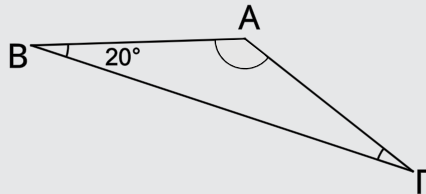
2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} = 130^\circ$. Υπολόγισε το μέτρο των γωνιών \hat{B} και $\hat{\Gamma}$.



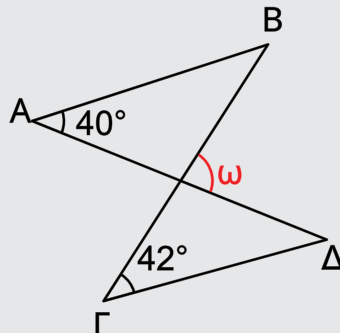
3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $\hat{B} = 20^\circ$. Υπολόγισε το μέτρο των γωνιών \hat{A} και $\hat{\Gamma}$.



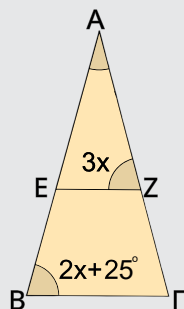
4

Βρες το μέτρο της γωνίας ω , αν γνωρίζεις ότι τα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$ είναι παράλληλα.



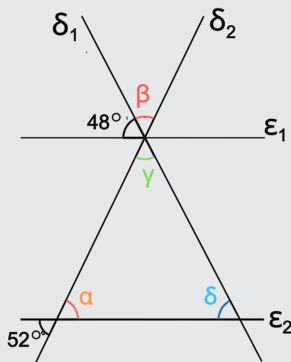
5

Υπολόγισε το x και τις γωνίες στο παρακάτω σχήμα, αν γνωρίζεις ότι τα τμήματα $B\Gamma$ και EZ είναι παράλληλα και το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές ($AB = A\Gamma$)



6

Βρες το μέτρο των γωνιών που είναι σημειωμένες στο σχήμα.

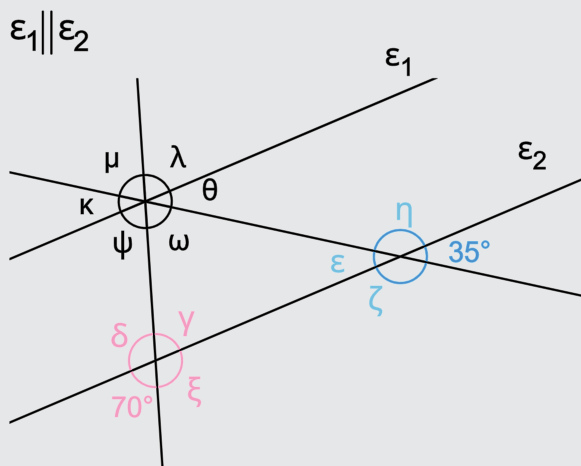


7

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ γνωρίζουμε ότι $\hat{B} = 30^\circ$ και η γωνία \hat{A} είναι τετραπλάσια της γωνίας $\hat{\Gamma}$. Βρες τις γωνίες του τριγώνου και προσδιόρισε το είδος του ως προς τις γωνίες του και ως προς τις πλευρές του.

8

Υπολόγισε το μέτρο των γωνιών που είναι σημειωμένες στο παρακάτω σχήμα, αν $\epsilon_1 // \epsilon_2$.



9

Εξήγησε γιατί αν ένα ισοσκελές τρίγωνο έχει μια γωνία 60° τότε αυτό θα έχει όλες του τις γωνίες 60° .

10

Εξέτασε αν ισχύει η παρακάτω πρόταση:
«Οι διχοτόμοι δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών είναι μεταξύ τους κάθετες».

Εξασκούμεθα

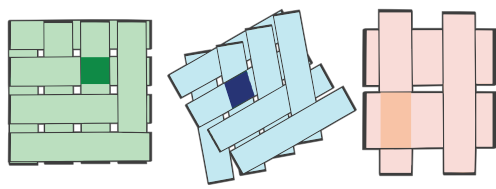


σε όσα έμαθα

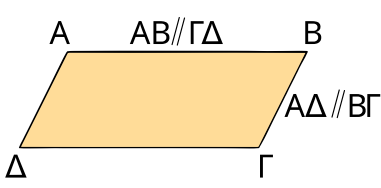
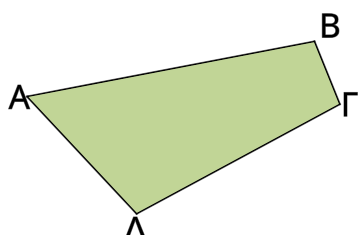
3.10 | Τετράπλευρα, παραλληλόγραμμο, τραπέζια.



Η μοδίστρα έχει υπολειπόμενες τις παρακάτω λωρίδες υφάσματος και θέλει να τις συνδυάσει με διάφορους τρόπους. Τι σχήματα θα εμφανιστούν σε μια φούστα αν συνδυάσει κάθετα δύο ισοπλατείς λωρίδες;
 Αν οι λωρίδες δεν έχουν ίσο πλάτος αλλά είναι κάθετες;
 Αν είναι ισοπλατείς αλλά όχι κάθετες;
 Αν δεν είναι ούτε κάθετες, ούτε ισοπλατείς;

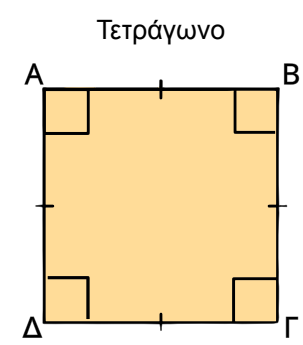
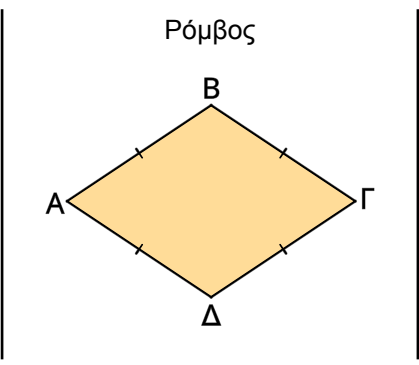
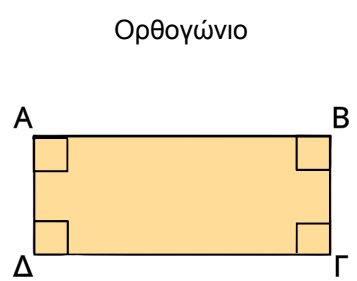


Το ευθύγραμμο σχήμα που έχει τέσσερις πλευρές λέγεται **τετράπλευρο**.



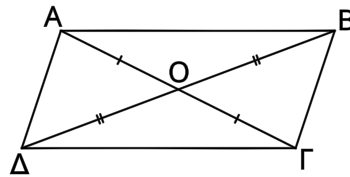
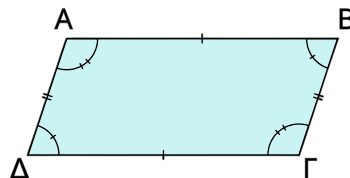
Παραλληλόγραμμο λέγεται το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.

Ειδικές περιπτώσεις παραλληλογράμμου είναι το **ορθογώνιο**, ο **ρόμβος** και το **τετράγωνο**.

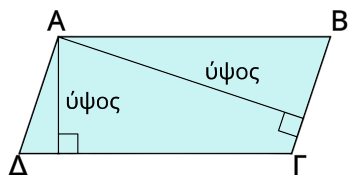


Ιδιότητες παραλληλογράμμου:

- Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες:
 $AB=ΓΔ$ και $ΑΔ=ΒΓ$.
- Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες:
 $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{B} = \hat{\Delta}$.
- Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται (τέμνονται στο μέσο τους):
 $AO=OΓ$ και $ΔO=OB$.

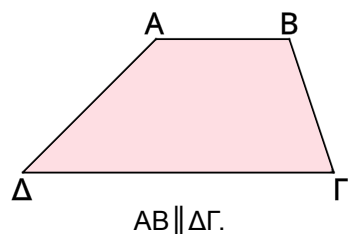


Το σημείο τομής των διαγώνιων ενός παραλληλογράμμου ονομάζεται **κέντρο** του παραλληλογράμμου.

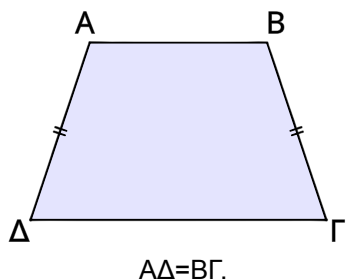
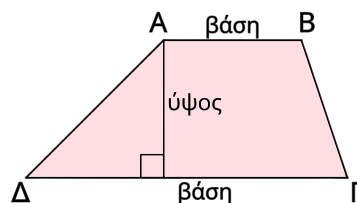


- Κάθε πλευρά ενός παραλληλογράμμου μπορεί να ονομαστεί **βάση** του.
- Η απόσταση δύο παράλληλων πλευρών του παραλληλογράμμου ονομάζεται **ύψος**

Τραπεζίο λέγεται το τετράπλευρο που έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες



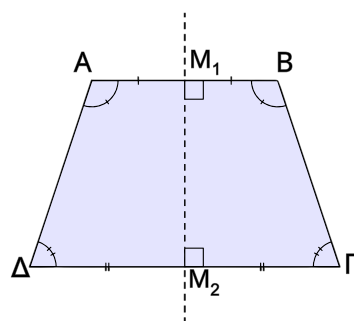
Οι παράλληλες πλευρές ενός τραπεζίου λέγονται **βάσεις** του. Επειδή οι βάσεις ενός τραπεζίου έχουν διαφορετικό μήκος, συνήθως τις ονομάζουμε «μικρή» και «μεγάλη» βάση. Η απόσταση των δύο βάσεων ονομάζεται **ύψος** του τραπεζίου.



Αν ένα τραπεζίο έχει τις μη παράλληλες πλευρές του ίσες τότε λέγεται **ισοσκελές τραπεζίο**

Ιδιότητες του ισοσκελούς τραπεζίου:

- Η ευθεία που διέρχεται από τα μέσα των βάσεων είναι άξονας συμμετρίας και μεσοκάθετος στις βάσεις του.
- Οι προσκείμενες σε κάθε βάση γωνίες του είναι ίσες:
 $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$ και $\hat{A} = \hat{B}$.





1 Χαρακτήρισε ως Σωστές ή Λάθος τις προτάσεις που ακολουθούν βάζοντας ένα **x** στην κατάλληλη θέση.

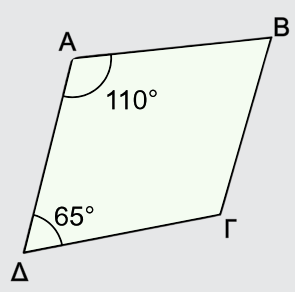
- α) Ένα τετράπλευρο είναι είτε παραλληλόγραμμο είτε τραπέζιο.
- β) Το κέντρο ενός παραλληλογράμμου είναι το μέσο των διαγωνίων του.
- γ) Ένα τετράπλευρο με δύο πλευρές παράλληλες είναι παραλληλόγραμμο.
- δ) Ένα ισοσκελές τραπέζιο έχει τις προσκείμενες στις βάσεις γωνίες του ίσες.
- ε) Κάθε διαγώνιος ισοσκελούς τραπέζιου το χωρίζει σε δύο ισοσκελή τρίγωνα.

Σωστό	Λάθος

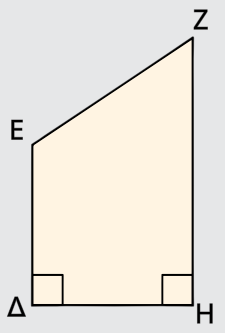
2 Σχεδίασε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και στη συνέχεια σχεδίασε τα ύψη και τις διαγωνίους του.



3 Το παρακάτω τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο; Αιτιολόγησε την απάντησή σου.

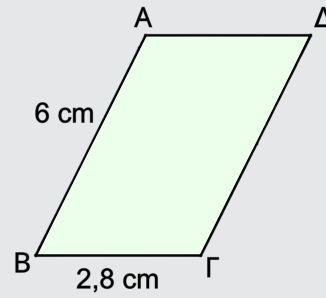


4 Το παρακάτω τετράπλευρο είναι τραπέζιο; Αιτιολόγησε την απάντησή σου.



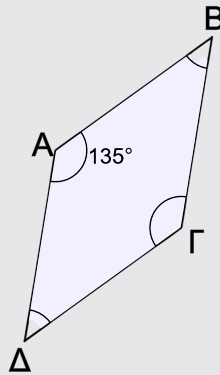
5

Στο διπλανό σχήμα το $ΑΒΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο με $ΑΒ = 6\text{cm}$ και $ΒΓ = 2,8\text{cm}$. Βρες:
 α) το μήκος των πλευρών του.
 β) την περίμετρό του.



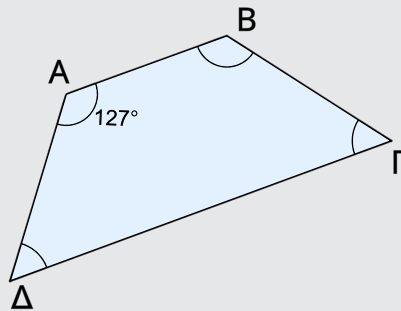
6

Στο διπλανό σχήμα το $ΑΒΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο με $\hat{A} = 135^\circ$. Υπολόγισε το μέτρο των γωνιών του.



7

Υπολόγισε τις γωνίες του ισοσκελούς τραπέζιου $ΑΒΓΔ$.

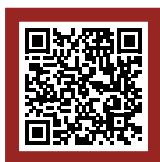


Εξασκούμε



σε όσα έμαθα

3.11 | Είδη παραλληλογράμμων και ιδιότητες: ορθογώνια, ρόμβοι, τετράγωνα

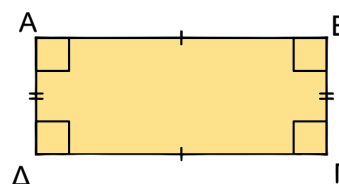


Πόσους άξονες συμμετρίας έχουν τα παρακάτω τετράπλευρα;



Μερικά βασικά είδη παραλληλογράμμων είναι: τα **ορθογώνια**, οι **ρόμβοι** και τα **τετράγωνα**.

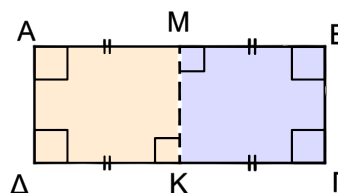
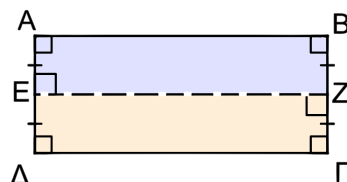
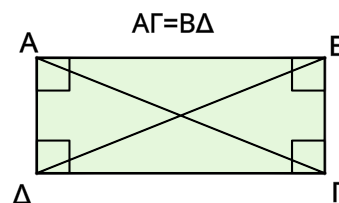
Ορθογώνιο (ή ορθογώνιο παραλληλόγραμμο) λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις γωνίες του ορθές.



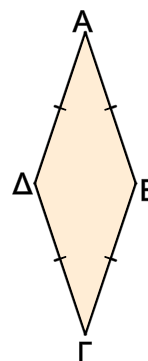
Ιδιότητες ορθογωνίου:

Εκτός των ιδιοτήτων του παραλληλογράμμου έχει ακόμα και τις εξής:

- Οι διαγώνιοί του είναι ίσες. $ΑΓ = ΒΔ$
- Οι μεσοκάθετοι των πλευρών του είναι άξονες συμμετρίας.



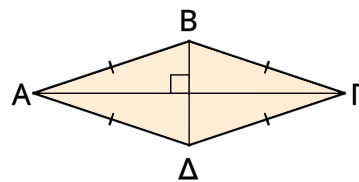
Ρόμβος λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις πλευρές του ίσες.



Ιδιότητες ρόμβου:

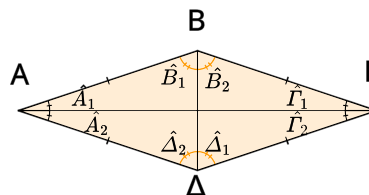
Εκτός των ιδιοτήτων του παραλληλογράμμου έχει ακόμα και τις εξής:

- Οι διαγώνιοι του τέμνονται κάθετα.

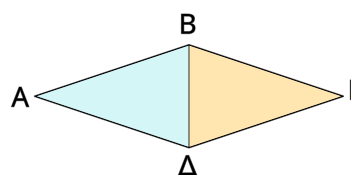
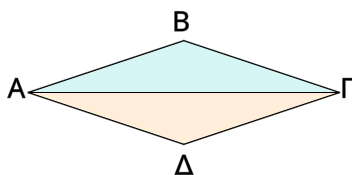


$ΑΓ \perp ΒΔ$

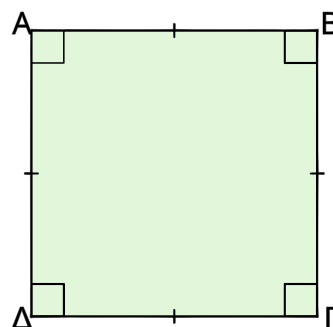
- Οι διαγώνιοί του είναι και διχοτόμοι των γωνιών του. $\hat{A}_1 = \hat{A}_2, \hat{B}_1 = \hat{B}_2, \hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2, \hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$



- Οι ευθείες των διαγωνίων του είναι άξονες συμμετρίας.



Τετράγωνο λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις γωνίες του ορθές και όλες τις πλευρές του ίσες.



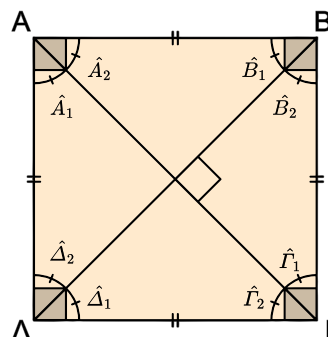
Ιδιότητες τετραγώνου:

Εκτός των ιδιοτήτων του παραλληλογράμμου έχει ακόμα και τις παρακάτω.

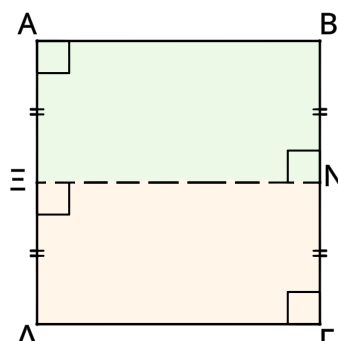
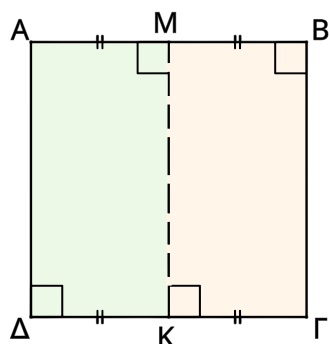
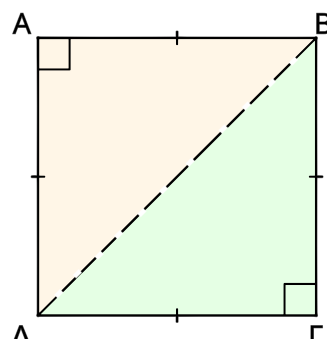
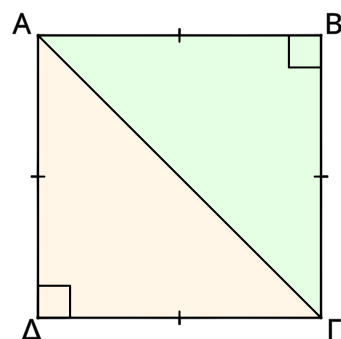
Οι διαγώνιοί του:

- είναι ίσες: $ΑΓ = ΒΔ$
- τέμνονται κάθετα: $ΑΓ \perp ΒΔ$
- διχοτομούν τις γωνίες του:

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2, \hat{B}_1 = \hat{B}_2, \hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2, \hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2.$$



Οι ευθείες των διαγωνίων του και οι μεσοκάθετοι των πλευρών του είναι άξονες συμμετρίας.



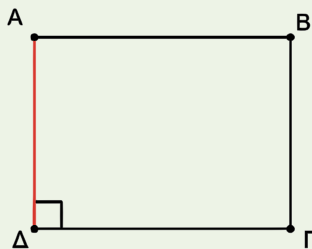
Ισχύει ότι: Ένα τετράγωνο είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και ρόμβος.



1. Να εξηγήσετε γιατί οι πλευρές του ορθογωνίου και του τετραγώνου αποτελούν και ύψη των σχημάτων.

Λύση:

Όλες οι γωνίες του ορθογωνίου είναι ορθές, συνεπώς το ύψος από κάθε κορυφή του ορθογωνίου προς την απέναντι πλευρά ταυτίζεται με μία πλευρά του ορθογωνίου.

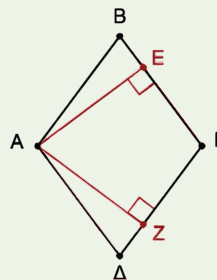


Ομοίως για το τετράγωνο.

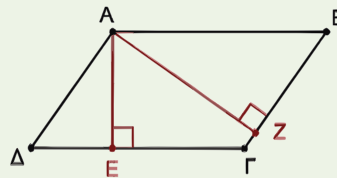
2. Να φέρετε και να συγκρίνετε τα ύψη του ρόμβου που άγονται από μία κορυφή του. Να κάνετε την ίδια σύγκριση και με ένα τυχαίο παραλληλόγραμμο.

Λύση:

Σχεδιάζουμε τα ύψη του ρόμβου από την κορυφή A. Με τον διαβήτη ή με το υποδεκάμετρο συγκρίνουμε τα ύψη AE και AZ και παρατηρούμε ότι είναι ίσα.



Σχεδιάζουμε τα ύψη του παραλληλογράμμου από την κορυφή A. Με τον διαβήτη ή με το υποδεκάμετρο συγκρίνουμε τα ύψη AE και AZ και παρατηρούμε ότι δεν είναι (απαραίτητα) ίσα.



1

Χαρακτήρισε ως Σωστές ή Λάθος τις προτάσεις που ακολουθούν βάζοντας ένα x στην κατάλληλη θέση.

- α) Κάθε τετράγωνο είναι και ρόμβος.
- β) Κάθε ορθογώνιο είναι και τετράγωνο.
- γ) Οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του.
- δ) Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου διχοτομούν τις γωνίες του.
- ε) Οι μεσοκάθετοι των πλευρών ενός ορθογωνίου είναι άξονες συμμετρίας του.

Σωστό Λάθος

2

Σχεδίασε:

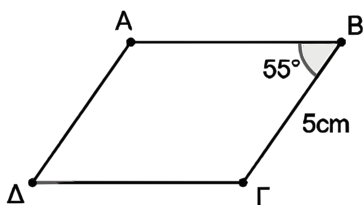
- α) ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκος 5cm και πλάτος 3cm
- β) έναν ρόμβο πλευράς 3cm με μία γωνία 60°
- γ) ένα τετράγωνο πλευράς 4cm

Στη συνέχεια βρες σε τι είδους τρίγωνα χωρίζονται τα σχήματα από τις διαγωνίους τους.

3

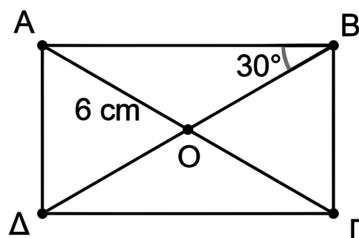
Συμπλήρωσε τα κενά:

α) ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο.



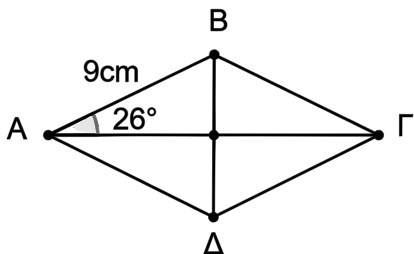
ΑΔ= ... \hat{A} =... \hat{A} =... ΟΔΓ=... ΑΟΒ=... ΒΔ= ...

β) ΑΒΓΔ ορθογώνιο.



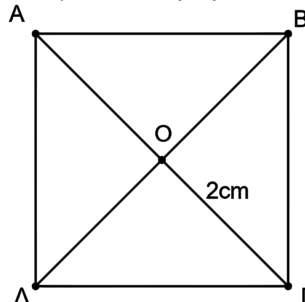
ΟΔΓ=... ΑΟΒ=... ΒΔ= ...

γ) ΑΒΓΔ ρόμβος.



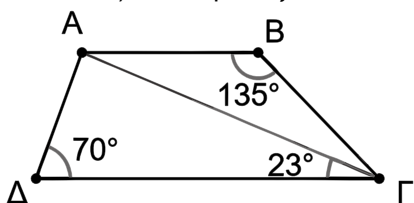
ΒΓ= ... ΑΒΔ=... ΑΓΔ=... ΒΔ= ... ΑΔΟ=... ΑΟΔ=...

δ) ΑΒΓΔ τετράγωνο.



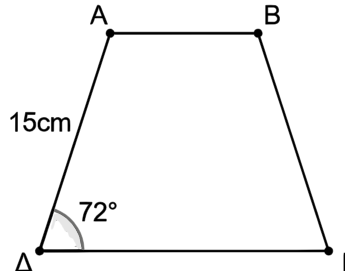
ΒΔ= ... ΑΔΟ=... ΑΟΔ=...

ε) ΑΒΓΔ τραπέζιο.



ΔΑΓ=... ΔΑΒ=... ΑΓΒ=... ΒΓ= ... ΒΓΔ=... ΑΒΓ=...

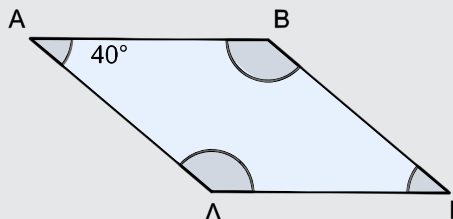
στ) ΑΒΓΔ ισοσκελές τραπέζιο.



ΒΓ= ... ΒΓΔ=... ΑΒΓ=...

4

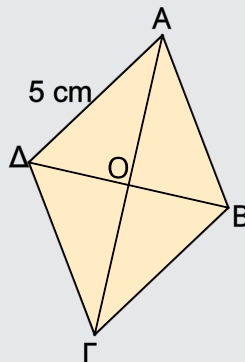
Δίνεται ένας ρόμβος ΑΒΓΔ με γωνία $\hat{A} = 40^\circ$. Υπολόγισε τις υπόλοιπες γωνίες του.



5

Δίνεται ο ρόμβος ΑΒΓΔ με κέντρο Ο (κέντρο λέγεται το σημείο τομής των διαγωνίων του). Αν η πλευρά του ρόμβου είναι 5cm και τα μήκη των διαγωνίων του είναι $ΑΓ = 8\text{cm}$ και $ΒΔ = 6\text{cm}$. Υπολόγισε:

- α) την περίμετρό του ρόμβου.
- β) την περίμετρο του τριγώνου ΑΟΔ.

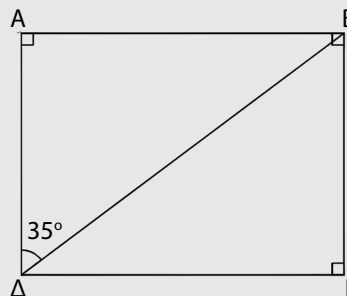


6

Σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ δίνονται: $ΑΒ = 4\text{cm}$, $ΒΓ = 3\text{cm}$ και $\hat{ΑΔΒ} = 35^\circ$.

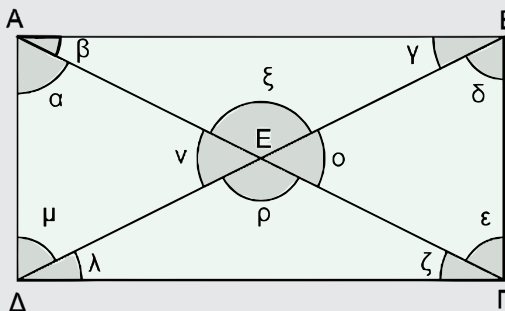
Υπολόγισε:

- α) την περίμετρο του ορθογωνίου ΑΒΓΔ.
- β) τις γωνίες $\hat{ΔΒΓ}$ και $\hat{ΑΟΒ}$, όπου Ο το κέντρο του ορθογωνίου.



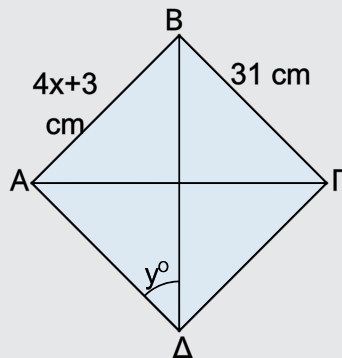
7

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ. Αν $\hat{\beta} = 30^\circ$, υπολόγισε τις σημειωμένες γωνίες.



8

Αν ΑΒΓΔ τετράγωνο, υπολόγισε τις τιμές των x και y.



Εξασκούμαι

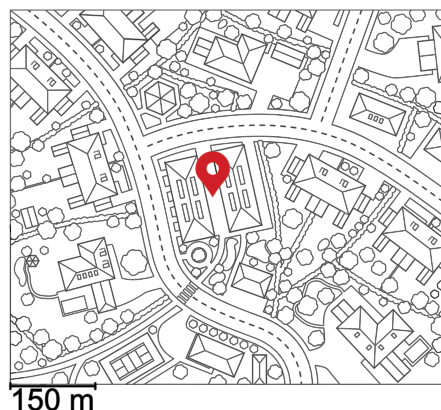


σε όσα έμαθα

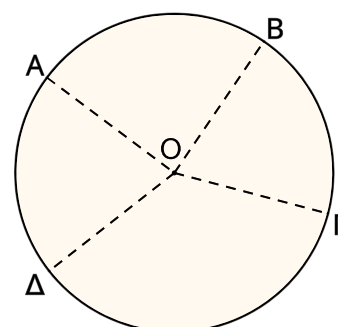
3.12 | Κύκλος και στοιχεία του



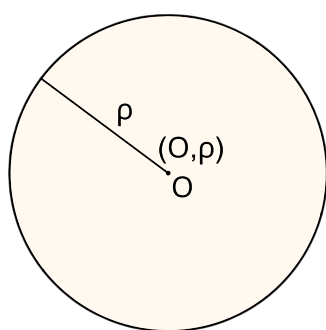
Ο Γιώργος ξεκίνησε από το σημείο που φαίνεται στον χάρτη και απομακρύνθηκε 150 μέτρα. Σε ποιο σημείο του χάρτη μπορεί να βρίσκεται ο Γιώργος;



Κύκλος λέγεται το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου που απέχουν την ίδια απόσταση από ένα σταθερό σημείο O .



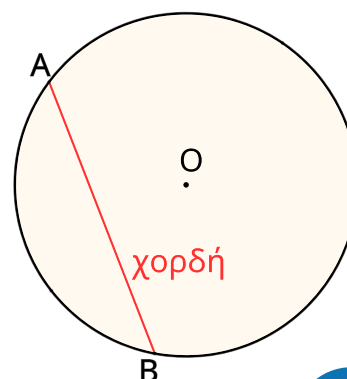
- Η απόσταση αυτή λέγεται **ακτίνα** του κύκλου και συμβολίζεται με ρ .
- Το σημείο O λέγεται **κέντρο** του κύκλου.



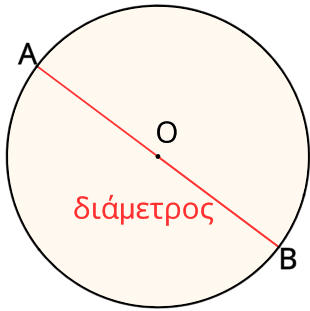
Τον κύκλο με κέντρο O και ακτίνα ρ τον συμβολίζουμε (O, ρ) και τον σχεδιάζουμε με τον διαβήτη.



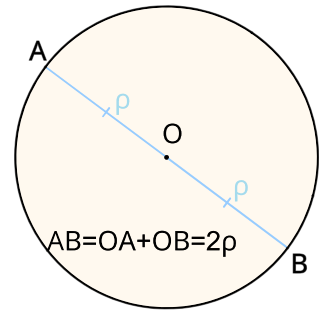
Χορδή του κύκλου ονομάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα AB , όπου τα A και B είναι δύο σημεία του κύκλου.



Μια χορδή που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου λέγεται **διάμετρος** του κύκλου.

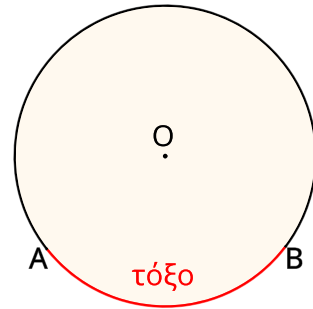


- Η διάμετρος είναι η μεγαλύτερη χορδή του κύκλου.
- Η διάμετρος είναι διπλάσια της ακτίνας.
- Το κέντρο του κύκλου είναι το μέσο της διαμέτρου.



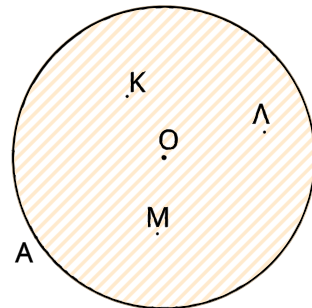
Δύο σημεία A και B του κύκλου τον χωρίζουν σε δύο μέρη που το καθένα λέγεται **τόξο** του κύκλου με άκρα τα A και B.

Το τόξο με άκρα τα A και B συμβολίζεται \widehat{AB} .



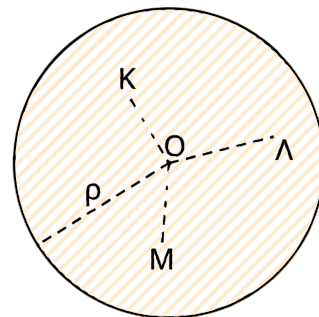
Δύο κύκλοι είναι **ίσοι** όταν έχουν ίσες ακτίνες.

Κυκλικός δίσκος είναι ο κύκλος μαζί με το μέρος του επιπέδου που περικλείει.



Όλα τα σημεία του κυκλικού δίσκου απέχουν από το κέντρο O απόσταση **μικρότερη ή ίση** με την ακτίνα ρ.

- $OK \leq \rho$
- $OL \leq \rho$
- $OM \leq \rho$

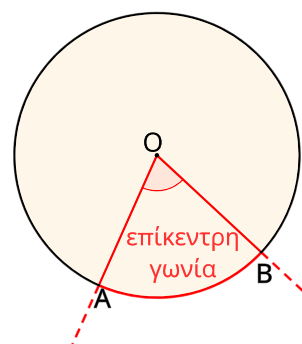


Μία γωνία λέγεται **επίκεντρη** όταν η κορυφή της είναι το κέντρο ενός κύκλου.

Παράδειγμα:

Η γωνία \widehat{AOB} είναι επίκεντρη γωνία.

- Οι πλευρές της γωνίας τέμνουν τον κύκλο στα σημεία A και B.
- Το τόξο \widehat{AB} που περιέχεται στο εσωτερικό της γωνίας και έχει άκρα τα A, B λέγεται αντίστοιχο τόξο της επίκεντρης γωνίας.



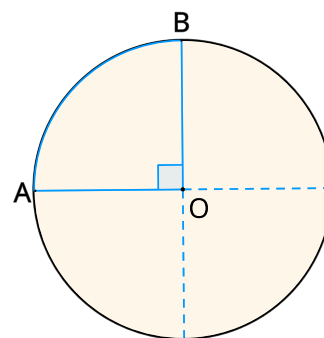
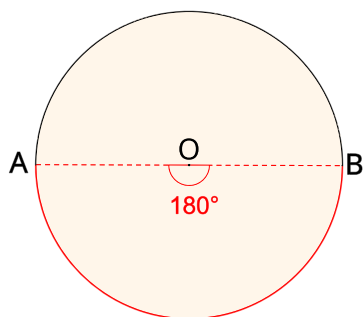
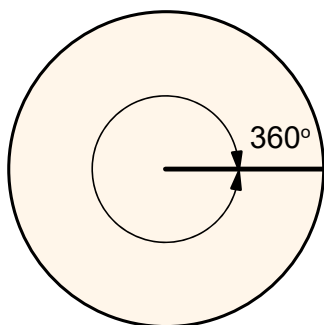
Το μέτρο ενός τόξου το μετράμε σε μοίρες και ισούται με το μέτρο της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι:

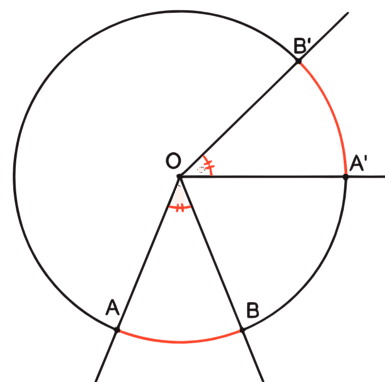
Ο κύκλος είναι ένα τόξο 360° .

Το ημικύκλιο είναι ένα τόξο 180°

Δύο κάθετες διάμετροι χωρίζουν κύκλο σε 4 ίσα τόξα καθένα από τα οποία έχει μέτρο 90° .



Σε έναν κύκλο ή σε ίσους κύκλους, δυο ίσες επίκεντρες γωνίες έχουν ίσα αντίστοιχα τόξα και αντίστροφα δυο ίσα τόξα έχουν ίσες τις επίκεντρες γωνίες.



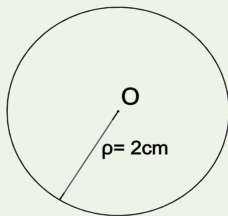
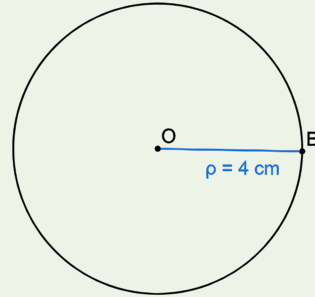


1. α) Να σχεδιάσετε κύκλο με ακτίνα $\rho = 4\text{cm}$.

β) Να σχεδιάσετε κύκλο με διάμετρο $\delta = 4\text{cm}$.

Λύση:

α) Με τη βοήθεια ενός διαβήτη που έχει "άνοιγμα" 4cm κατασκευάζουμε τον διπλανό κύκλο.



β) Αν η διάμετρος του κύκλου είναι 4cm τότε η ακτίνα του θα είναι $\rho = \frac{\delta}{2} = 2\text{cm}$. Με τη βοήθεια ενός διαβήτη που έχει "άνοιγμα" 2cm κατασκευάζουμε τον διπλανό κύκλο.

2. α) Να κατασκευάσετε τρίγωνο $AB\Gamma$ με μήκη πλευρών $AB = 6\text{cm}$, $A\Gamma = 5\text{cm}$ και $B\Gamma = 3\text{cm}$.

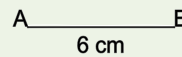
β) Υπάρχει τρίγωνο με μήκη πλευρών 6cm , 2cm και 3cm ;

Λύση:

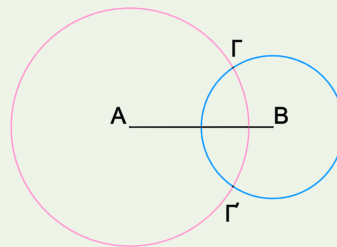
α)

Σχεδιάζουμε μία από τις πλευρές τυχαία.

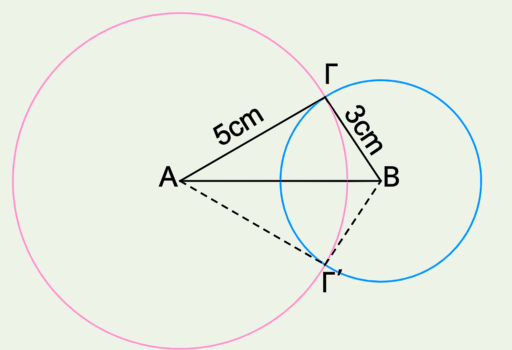
Για παράδειγμα, την $AB = 6\text{cm}$



Είναι $A\Gamma = 5\text{cm}$ και $B\Gamma = 3\text{cm}$. Επομένως, γράφουμε τους κύκλους (A, 5cm) και (B, 3cm).

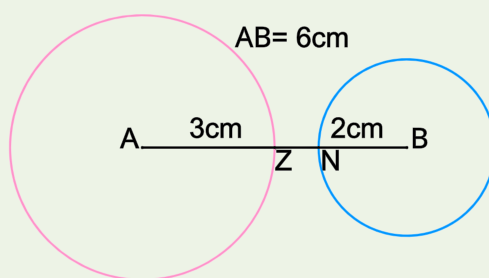


Ονομάζουμε Γ ένα από τα σημεία στα οποία τέμνονται οι δύο κύκλοι
(παρατηρούμε ότι υπάρχουν 2 τέτοια σημεία).



Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι το ζητούμενο.

β) Αν ακολουθήσουμε την παραπάνω διαδικασία θα παρατηρήσουμε ότι οι δύο κύκλοι δεν τέμνονται. Άρα δεν υπάρχει τρίγωνο με μήκη πλευρών 6cm , 2cm και 3cm .



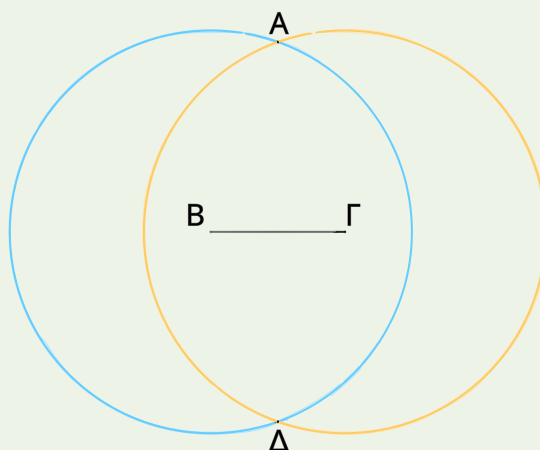
3. α) Να κατασκευάσετε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma = 6\text{cm}$ και βάση $B\Gamma = 4\text{cm}$.

β) Να κατασκευάσετε ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς $a = 6\text{cm}$.

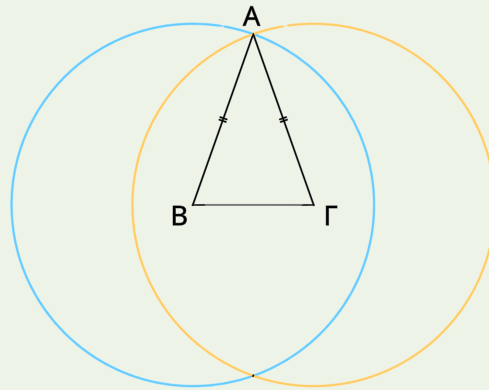
Λύση:

α)

- Σχεδιάζουμε τη βάση $B\Gamma = 4\text{cm}$. $B \text{ --- } \Gamma$
- Γράφουμε τους κύκλους ($\Gamma, 6\text{cm}$) και ($B, 6\text{cm}$).



- Ονομάζουμε A ένα από τα σημεία στα οποία τέμνονται οι δύο κύκλοι (παρατηρούμε ότι υπάρχουν 2 τέτοια σημεία) και ενώνουμε τα άκρα B και Γ με το A.

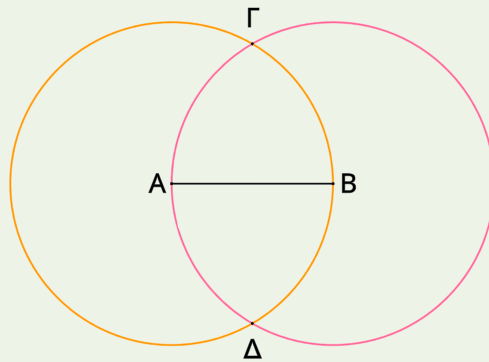


Το τρίγωνο ABΓ είναι το ζητούμενο.

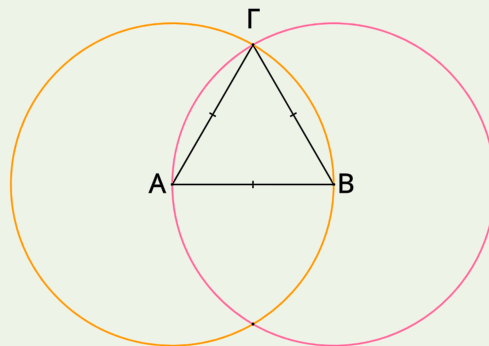
β)

- Σχεδιάζουμε ευθύγραμμο τμήμα $a = 6\text{cm}$. A ————— B

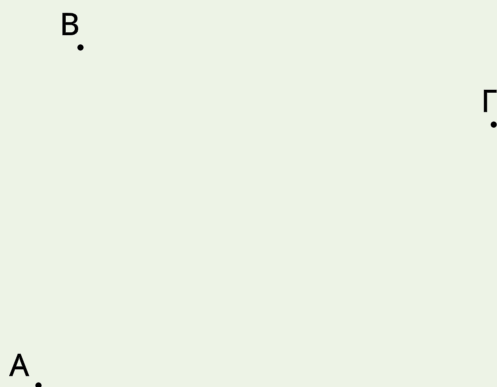
Με κέντρα τα άκρα του τμήματος γράφουμε δύο κύκλους με ακτίνα 6cm.



- Ενώνουμε ένα από τα σημεία τομής των κύκλων με τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος και προκύπτει το ζητούμενο τρίγωνο.



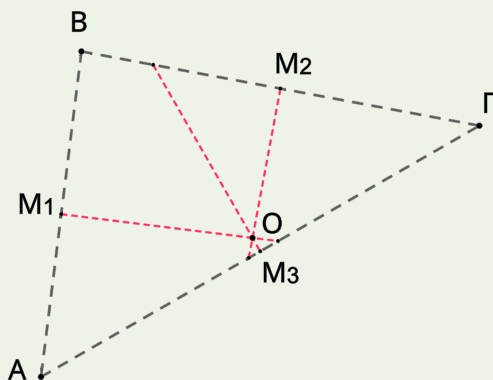
4. Να σχεδιάσετε κύκλο ο οποίος διέρχεται από 3 σημεία A, B και Γ τα οποία δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία.



Λύση:

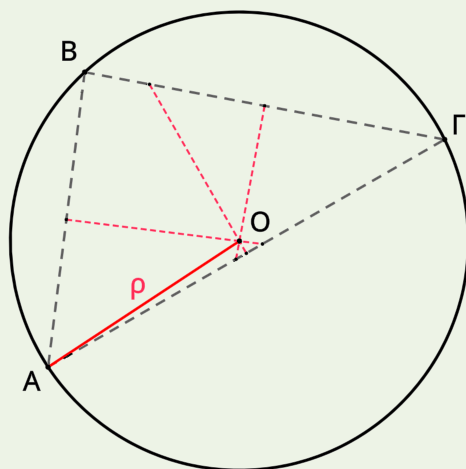
Γνωρίζουμε ότι το κέντρο ενός κύκλου ισαπέχει από όλα τα σημεία του κύκλου.

- Το κέντρο O ισαπέχει από τα A και B, άρα το O ανήκει στη μεσοκάθετο της χορδής AB (χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος).
- Ομοίως, το κέντρο O ανήκει στη μεσοκάθετο της χορδής BΓ και στη μεσοκάθετο της χορδής AΓ.



Συνεπώς, το κέντρο O είναι το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των χορδών AB, BΓ και AΓ.

Με κέντρο το O και ακτίνα OA σχεδιάζουμε τον ζητούμενο κύκλο.





1

Συμπλήρωσε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

- α) Ο κύκλος είναι ένα τόξο μοιρών.
- β) Το ημικύκλιο είναι ένα τόξο μοιρών.
- γ) Δύο κάθετες διάμετροι χωρίζουν τον κύκλο σε 4 ίσα τόξα καθένα από τα οποία έχει μέτρο
- δ) Αν δύο σημεία Α και Β χωρίζουν έναν κύκλο σε δύο μέρη ώστε το ένα τόξο \widehat{AB} να ισούται με 140° , τότε το άλλο τόξο \widehat{AB} ισούται με μοίρες.

2

Χαρακτήρισε ως Σωστές ή Λάθος τις προτάσεις που ακολουθούν βάζοντας ένα x στην κατάλληλη θέση.

- α) Δύο κύκλοι είναι ίσοι όταν έχουν ίσες ακτίνες.
- β) Η ακτίνα είναι διπλάσια από τη διάμετρο του κύκλου.
- γ) Όλα τα σημεία του κυκλικού δίσκου απέχουν από το κέντρο Ο απόσταση μικρότερη ή ίση με την ακτίνα ρ.
- δ) Ημικύκλιο λέγεται ένα από τα δύο τόξα, στα οποία διαιρείται ένας κύκλος από μια διάμετρό του.
- ε) Δυο ίσες επίκεντρες γωνίες ενός κύκλου έχουν ίσα αντίστοιχα τόξα.
- στ) Μία επίκεντρη γωνία έχει μέτρο ίσο με το μισό του τόξου στο οποίο αντιστοιχεί.

Σωστό Λάθος

Σωστό	Λάθος

3

Σχεδιάσε ένα σημείο Ο και χρωμάτισε όλα τα σημεία του επιπέδου που απέχουν:

- α) πάνω από 2cm από το Ο.
- β) ακριβώς 2cm από το Ο.
- γ) λιγότερο από 2cm από το Ο.

4

Σχεδιάσε δύο ομόκεντρους κύκλους ώστε ο ένας να έχει ακτίνα 5cm και ο άλλος να έχει διάμετρο 7cm.

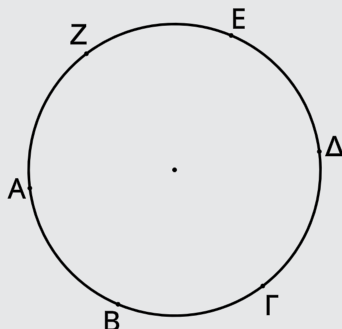
5

Σχεδιάσε κύκλο (Ο, 5cm) και πάρε στον κύκλο τρία τυχαία σημεία Α, Β και Γ. Κατασκεύασε:

- α) τη διάμετρο ΑΑ'.
- β) την επίκεντρη γωνία ΑΟΒ.
- γ) την ακτίνα ΟΓ.
- δ) τη χορδή ΒΓ και να βρεις το τόξο $\widehat{B\Gamma}$.

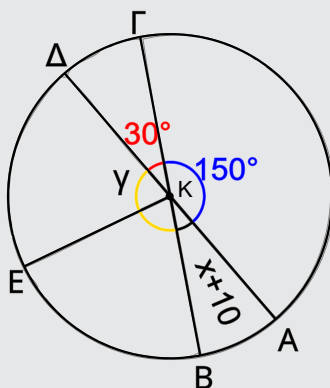
6

Υπολόγισε το μέτρο των τόξων $\widehat{\Delta\text{E}\text{A}}$ και $\widehat{\Delta\text{A}\text{E}}$, αν γνωρίζεις ότι $\widehat{\text{A}\text{B}} = \widehat{\text{B}\text{Γ}} = \widehat{\text{Γ}\text{Δ}} = \widehat{\Delta\text{E}} = \widehat{\text{E}\text{Z}} = \widehat{\text{Z}\text{A}}$. Στη συνέχεια, βρες το μέτρο των κυρτών γωνιών $\text{A}\hat{\text{O}}\text{B}$ και $\text{Δ}\hat{\text{O}}\text{Z}$, όπου O το κέντρο του κύκλου.



7

Βρες το μέτρο των γωνιών που είναι σημειωμένες στο σχήμα, αν γνωρίζεις ότι η EK είναι διχοτόμος της γωνίας $\text{B}\hat{\text{K}}\text{Δ}$ και $\text{A}\text{Δ}$, $\text{B}\text{Γ}$ διάμετροι του κύκλου. Έπειτα, βρες το μέτρο των τόξων $\widehat{\text{A}\text{B}\text{E}}$ και $\widehat{\Delta\text{Γ}\text{A}}$.



8

Σχεδίασε ένα ευθύγραμμο τμήμα $\text{AB} = 5\text{cm}$ και βρες τα σημεία του επιπέδου που απέχουν 6cm από το A και 7cm από το B .

Υπάρχουν σημεία που απέχουν συγχρόνως 6cm από το A και 7cm από το B ;

9

α) Κατασκεύασε τρίγωνο με μήκη πλευρών $\text{AB} = 6\text{cm}$, $\text{A}\text{Γ} = 5\text{cm}$ και $\text{B}\text{Γ} = 4\text{cm}$.

β) Υπάρχει τρίγωνο με μήκη πλευρών 5cm , 2cm και 3cm ;

10

Βρες το κέντρο της στρογγυλής πίτσας αξιοποιώντας τις ιδιότητες της μεσοκαθέτου.



Εξασκούμε



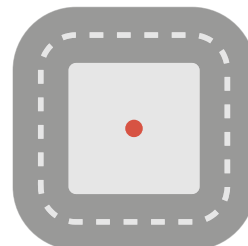
σε όσα έμαθα

3.13 | Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου



Ένα κυκλικό σιντριβάνι θα τοποθετηθεί έτσι ώστε το κέντρο του να βρίσκεται στο κέντρο της πλατείας. Τι ακτίνα πρέπει να έχει το σιντριβάνι ώστε να μην «βγει» πάνω στο δρόμο; Σε ποια περίπτωση το σιντριβάνι θα «έπεφτε» ακριβώς πάνω στον δρόμο;

πλευρά οικοδομικού τετραγώνου: 100μ.



●: κέντρο πλατείας

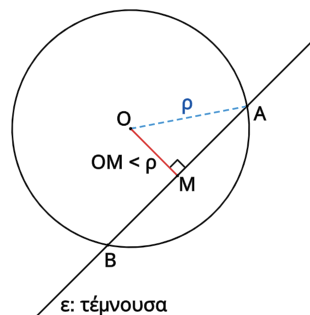
Ένας κύκλος και μία ευθεία μπορεί να έχουν:

- 2 κοινά σημεία
- 1 μόνο κοινό σημείο
- κανένα κοινό σημείο

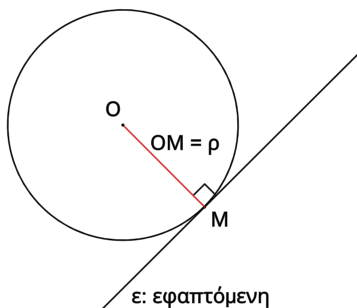
Αν ένας κύκλος και μία ευθεία έχουν δύο κοινά σημεία τότε η ευθεία λέγεται **τέμνουσα** του κύκλου.

Στην περίπτωση αυτή η απόσταση OM του κέντρου του κύκλου από την ευθεία είναι μικρότερη της ακτίνας ρ .

$$OM < \rho$$



ε: τέμνουσα



ε: εφαπτόμενη

Αν ένας κύκλος και μία ευθεία έχουν ένα μόνο κοινό σημείο τότε η ευθεία λέγεται **εφαπτομένη** του κύκλου.

Στην περίπτωση αυτή η απόσταση OM του κέντρου του κύκλου από την ευθεία είναι ίση με την ακτίνα ρ .

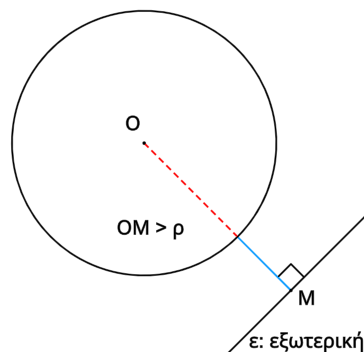
$$OM = \rho$$

- Είναι φανερό ότι η εφαπτομένη του κύκλου είναι **κάθετη** στην ακτίνα στο σημείο επαφής.

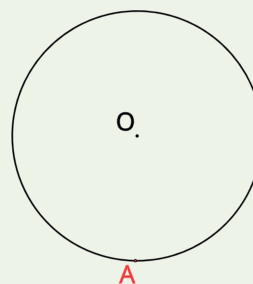
Αν ένας κύκλος και μία ευθεία δεν έχουν κοινό σημείο τότε η ευθεία λέγεται **εξωτερική** του κύκλου.

Στην περίπτωση αυτή η απόσταση OM του κέντρου του κύκλου από την ευθεία είναι μεγαλύτερη της ακτίνας ρ .

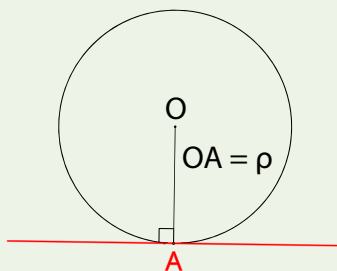
$$OM > \rho$$



1. Να σχεδιάσετε ευθεία που να εφάπτεται στο σημείο A του κύκλου (O, ρ) .



Λύση:



Σχεδιάζουμε την ευθεία ϵ , που είναι κάθετη στην ακτίνα OA στο σημείο A .

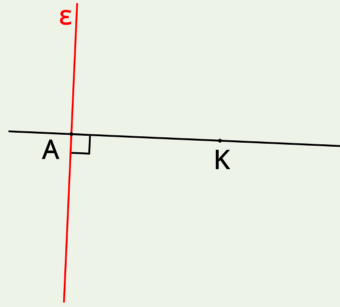
Η ευθεία ϵ εφάπτεται στον κύκλο στο σημείο A , διότι $OA = \rho$.

2. Να σχεδιάσετε κύκλο που να εφάπτεται στο σημείο A της ευθείας ϵ .

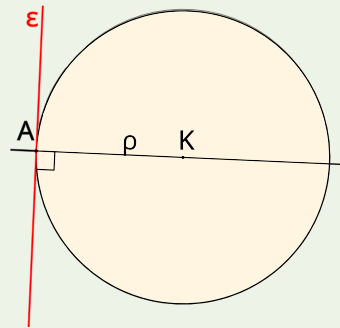


Λύση:

Σχεδιάζουμε την ευθεία που είναι κάθετη στην ε στο σημείο A.

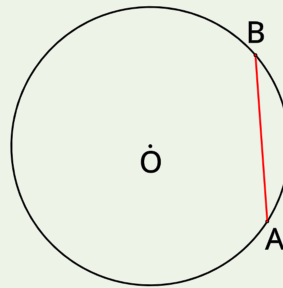


Με κέντρο ένα οποιοδήποτε σημείο K της κάθετης αυτής και ακτίνα το τμήμα KA γράφουμε κύκλο.

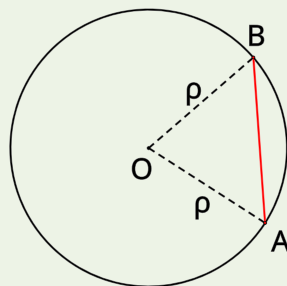


Ο κύκλος εφάπτεται στην ευθεία ε , διότι $KA = \rho$.

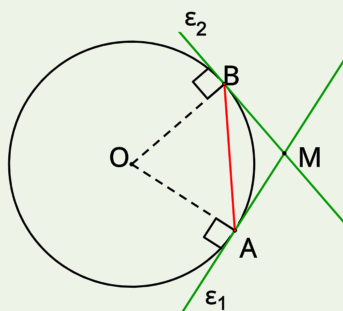
3. Να σχεδιάσετε εφαπτόμενες του κύκλου (O, ρ) στα άκρα A και B μιας χορδής του AB.

**Λύση:**

Σχεδιάζουμε τις ακτίνες OA και OB.



Στο σημείο A φέρνουμε ευθεία ε_1 κάθετη στην ακτίνα OA. Η ευθεία ε_1 είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο A.



Στο σημείο B φέρνουμε ευθεία ε_2 κάθετη στην ακτίνα OB . Η ευθεία ε_2 είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο B.

Αν M είναι το σημείο τομής των εφαπτομένων, τα ευθύγραμμα τμήματα AM και BM λέγονται **εφαπτόμενα τμήματα** του κύκλου.

Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση



1

Έστω ένας κύκλος (O, ρ) και μία ευθεία ε . Ονομάζουμε OM την απόσταση του κέντρου O του κύκλου από την ευθεία ε . Κάνε την αντιστοίχιση:

$OM < \rho$	Η ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου (O, ρ) .	Η ευθεία και ο κύκλος δεν έχουν κοινά σημεία.
$OM = \rho$	Η ευθεία ε είναι τέμνουσα του κύκλου (O, ρ) .	Η ευθεία και ο κύκλος έχουν 1 κοινό σημείο.
$OM > \rho$	Η ευθεία ε είναι εξωτερική του κύκλου (O, ρ) .	Η ευθεία και ο κύκλος έχουν 2 κοινά σημεία.

2

Σχεδίασε κύκλο $(O, 4\text{cm})$ και 3 ευθείες που έχουν απόσταση 3cm, 4cm και 5cm αντίστοιχα από το κέντρο O του κύκλου. Προσδιόρισε τις σχετικές θέσεις των ευθειών με τον κύκλο.



3

Σε κύκλο (O, ρ) φέρε δύο κάθετες διαμέτρους AB και $\Gamma\Delta$. Στη συνέχεια σχεδίασε τις εφαπτόμενες στα σημεία A και Γ . Τι παρατηρείς;

4

Έστω ένας κύκλος (O, ρ) και μία ευθεία ϵ . Ονομάζουμε δ την απόσταση του κέντρου O από την ευθεία ϵ . Βρες τον αριθμό των κοινών σημείων του κύκλου (O, ρ) και της ευθείας ϵ , στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) Αν $\rho = 7\text{cm}$ και $\delta = 5\text{cm}$.

β) Αν $\rho = 5\text{cm}$ και $\delta = 5\text{cm}$.

γ) Αν $\rho = 2\text{cm}$ και $\delta = 5\text{cm}$.

5

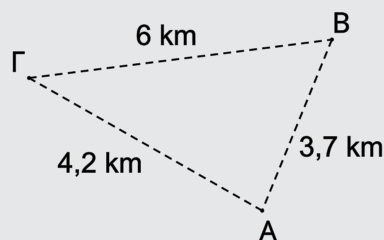
Η συμφωνία ανάμεσα στα χωριά A , B και Γ είναι το εργοστάσιο M να κατασκευαστεί με τέτοιο τρόπο ώστε:

α. $AM > 2\text{km}$

β. $BM = 3\text{km}$

γ. $GM = 4\text{km}$

Ποια είναι η θέση του εργοστασίου M ;



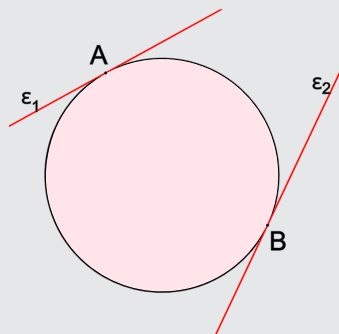
6

Σχεδιάσε έναν κύκλο $(O, 4,5\text{cm})$ μία τυχαία διάμετρο AB . Σχεδιάσε τις εφαπτόμενες του κύκλου που είναι παράλληλες προς στην AB .



7

Αν οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι εφαπτόμενες του διπλανού κύκλου, περιγράψε τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να βρούμε το κέντρο του κύκλου.







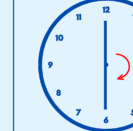
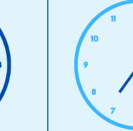
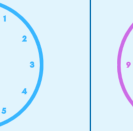
Εξασκούμε

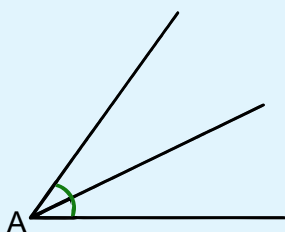


σε όσα έμαθα

Ανακεφαλαίωση (Γεωμετρία του Επιπέδου)

1. Γωνίες

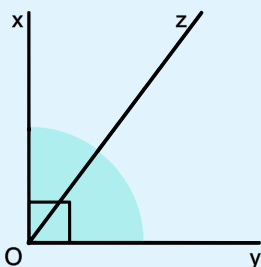
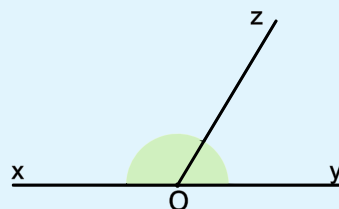
						
Μηδενική γωνία	Οξεία γωνία	Ορθή γωνία	Αμβλεία γωνία	Ευθεία γωνία	Μη κυρτή γωνία	Πλήρης γωνία
0°	Μεγαλύτερη από 0° και μικρότερη από 90°	90°	Μεγαλύτερη από 90° και μικρότερη από 180° .	180°	Μεγαλύτερη από 180° και μικρότερη από 360°	360°
$\omega = 0^\circ$	$0^\circ < \omega < 90^\circ$	$\omega = 90^\circ$	$90^\circ < \omega < 180^\circ$	$\omega = 180^\circ$	$180^\circ < \omega < 360^\circ$	$\omega = 360^\circ$



Δύο γωνίες λέγονται εφεξής, αν έχουν:

- κοινή κορυφή,
- μία πλευρά κοινή
- και δεν έχουν κανένα άλλο κοινό σημείο.

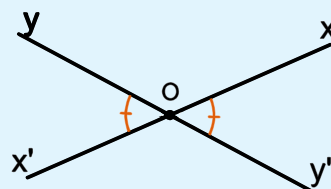
Παραπληρωματικές γωνίες ονομάζονται δύο γωνίες που έχουν άθροισμα 180° .



Συμπληρωματικές γωνίες ονομάζονται δύο γωνίες που έχουν άθροισμα 90° .

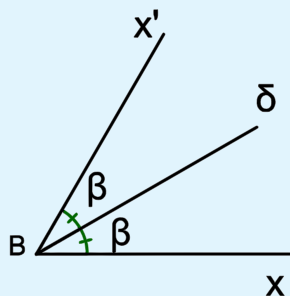
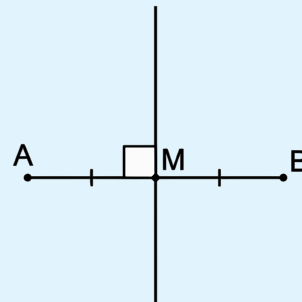
Κατακορυφήν γωνίες ονομάζονται δύο γωνίες που έχουν την κορυφή τους κοινή και τις πλευρές τους αντικείμενες ημιευθείες.

Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες.



2. Άξονες συμμετρίας:

Μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος λέγεται η ευθεία που είναι κάθετη προς αυτό και διέρχεται από το μέσον του.



Διχοτόμος γωνίας ονομάζεται η ημιευθεία που έχει αρχή την κορυφή της γωνίας και τη χωρίζει σε δύο ίσες γωνίες.

3. Τρίγωνα:

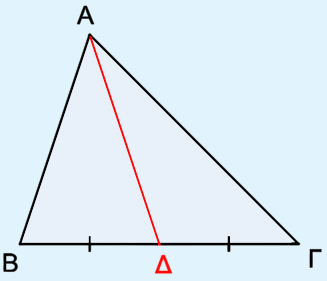
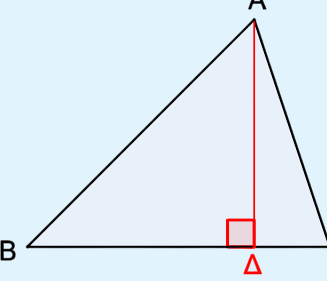
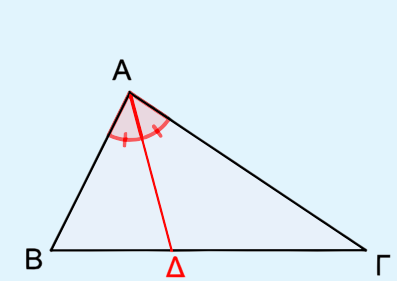
- Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 180° .
- Κύρια στοιχεία τριγώνου: τρεις κορυφές, τρεις πλευρές, τρεις γωνίες.
- Είδη τριγώνων ως προς τις **γωνίες** τους:

Οξυγώνιο: Όλες οι γωνίες του είναι οξείες	Ορθογώνιο: Έχει μία ορθή γωνία	Αμβλυγώνιο: Έχει μία αμβλεία γωνία

- Είδη τριγώνων ως προς τις **πλευρές** τους:

Σκαληνό: Όλες οι πλευρές του είναι άνισες	Ισοσκελές: Έχει δύο ίσες πλευρές	Ισοπλευρο: Έχει όλες τις πλευρές του ίσες

Δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου:

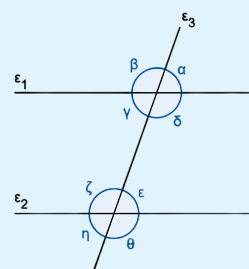
<p>Διάμεσος ενός τριγώνου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή με το μέσο της απέναντι πλευράς.</p>	<p>Ύψος τριγώνου λέγεται το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα που φέρνουμε από μία κορυφή προς την ευθεία της απέναντι πλευράς.</p>	<p>Διχοτόμος μιας γωνίας ενός τριγώνου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα της διχοτόμου της γωνίας από την κορυφή της μέχρι την απέναντι πλευρά.</p>
		

4. Ευθείες:

α. Δύο ευθείες του επιπέδου ονομάζονται παράλληλες αν δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, όσο και αν προεκταθούν.

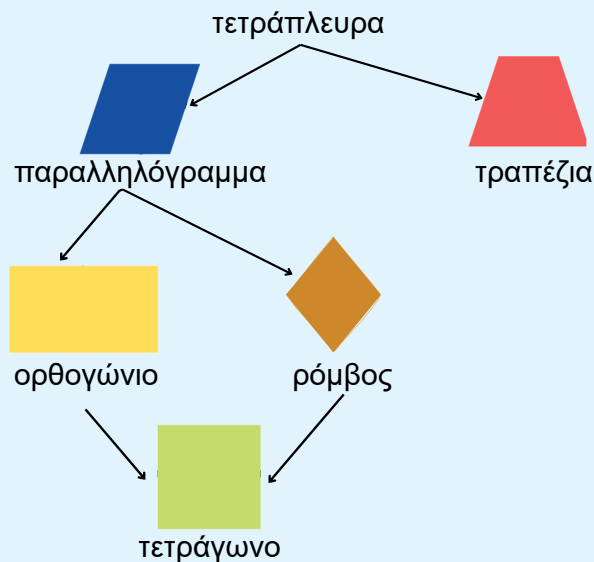
β. Δύο ευθείες του επιπέδου ονομάζονται τεμνόμενες αν έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

γ. Γωνίες σε παράλληλες ευθείες με τέμνουσα:



Οι οξείες γωνίες που σχηματίζονται και αντίστοιχα οι αμβλείες γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους.

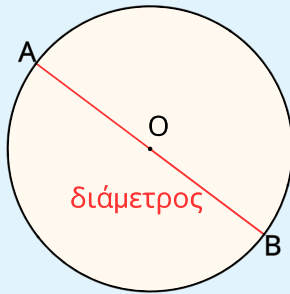
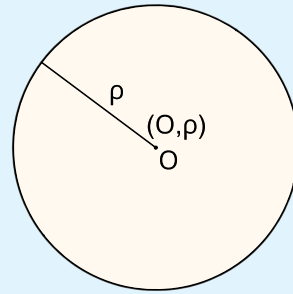
5. Τετράπλευρα:



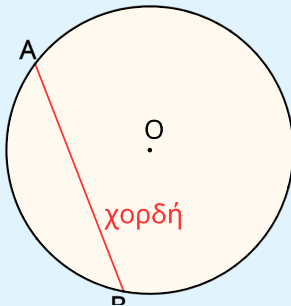
6. Κύκλος:

Σε κάθε κύκλο έχουμε:

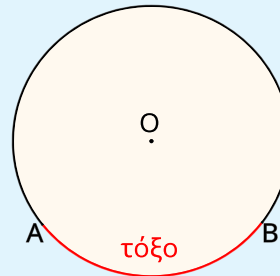
την ακτίνα, δηλαδή την απόσταση κάθε σημείου του από το κέντρο του,



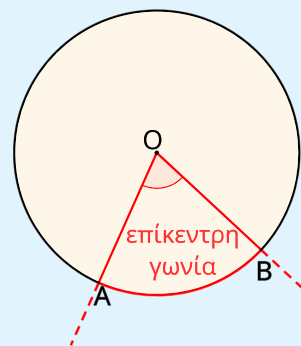
τη διάμετρο, που ισούται με το διπλάσιο της ακτίνας,



χορδές και τόξα.



Μία γωνία λέγεται **επίκεντρη** όταν η κορυφή της είναι το κέντρο ενός κύκλου.



Ένας κύκλος και μία ευθεία μπορεί να έχουν:

- 2 κοινά σημεία
- 1 μόνο κοινό σημείο
- κανένα κοινό σημείο

Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση

Αυτοαξιολόγηση (Γεωμετρία του Επιπέδου)

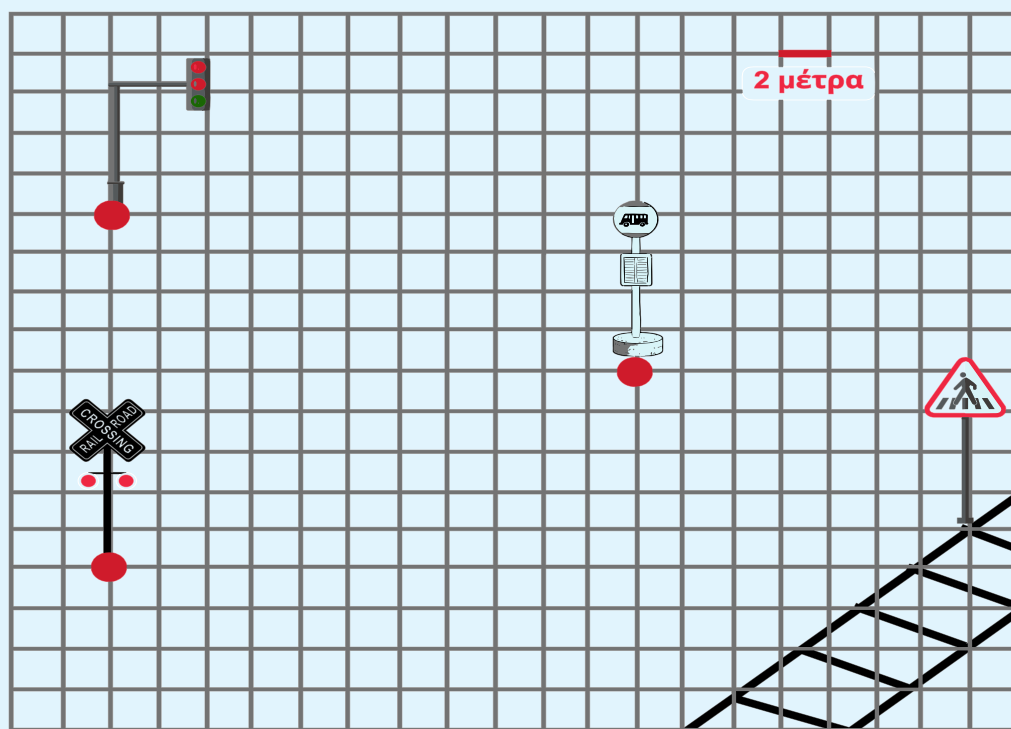
A. Χαρακτήρισε ως Σωστές ή Λάθος τις προτάσεις, βάζοντας ένα x στην κατάλληλη θέση:

	Σωστό	Λάθος
1. Δύο παράλληλες ευθείες έχουν σταθερή απόσταση.		
2. Η διάμετρος ενός κύκλου είναι ένα τόξο που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου.		
3. Παραπληρωματικές είναι δύο γωνίες που έχουν άθροισμα 180° .		
4. Συμπληρωματικές είναι δύο γωνίες με άθροισμα 360° .		
5. Δύο γωνίες με κοινή κορυφή ονομάζονται κατακορυφήν.		
6. Δύο ίσες γωνίες είναι πάντα κατακορυφήν.		
7. Μια κυρτή γωνία είναι πάντα μικρότερη ή ίση από 90° .		
8. Οι γωνίες ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι μεταξύ τους ίσες.		
9. Μια γωνία ίση με τη συμπληρωματική της είναι 45° .		
10. Μια γωνία διπλάσια της παραπληρωματικής της είναι 70° .		
11. Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180° .		
12. Το άθροισμα των γωνιών ενός τετραγώνου είναι 270° .		
13. Σε ένα ισόπλευρο τρίγωνο, όλες οι πλευρές και όλες οι γωνίες είναι μεταξύ τους ίσες.		
14. Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο, κάθε διάμεσος είναι και ύψος του τριγώνου.		
15. Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο, η διχοτόμος της κορυφής είναι και διάμεσος της βάσης.		
16. Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει ακριβώς 2 άξονες συμμετρίας.		
17. Σε έναν ρόμβο, οι διαγώνιοι είναι και άξονες συμμετρίας.		
18. Κάθε χορδή ενός κύκλου είναι πάντα μικρότερη της ακτίνας.		
19. Το ημικύκλιο είναι ένα τόξο 180° .		
20. Τα τόξα που προκύπτουν από δύο κάθετες διαμέτρους ενός κύκλου είναι 45° .		
21. Μια ευθεία μπορεί έχει 3 κοινά σημεία με έναν κύκλο.		
22. Αν σε κύκλο (O, 5εκ.), για ένα σημείο A ισχύει $OA=2εκ.$, τότε το σημείο A ανήκει στον κυκλικό δίσκο (O, 5εκ.).		
23. Το τραπέζιο είναι ένα τετράπλευρο με 2 μόνο πλευρές παράλληλες.		
24. Το ισοσκελές τραπέζιο έχει τις παράλληλες πλευρές του ίσες.		
25. Κάθε παραλληλόγραμμο είναι και τετράπλευρο, αλλά κάθε τετράπλευρο δεν είναι παραλληλόγραμμο.		

Ομαδική δραστηριότητα

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται τα όρια για το παρκάρισμα σε αστικές περιοχές. Καταλαβαίνουμε ότι δεν μπορούμε να παρκάρουμε 20 μέτρα ή λιγότερο μακριά από έναν φωτεινό σηματοδότη, 15 μέτρα ή λιγότερο μακριά από μια σιδηροδρομική διάβαση κ.ο.κ. Αξιοποιώντας τις πληροφορίες του πίνακα, βρείτε σε ποιες θέσεις επιτρέπεται το παρκάρισμα.

Φωτεινός Σηματοδότης	> 20 m.
Σιδηροδρομική διάβαση	> 15 m.
Στάση λεωφορείου	> 12 m.
Διασταύρωση	> 10 m.
Διάβαση πεζών	> 5 m.
Πεζός, ποδηλάτης	πλευρική απόσταση > 1 m.



- Σε αυτό το σημείο, θα πρέπει να είσαι σε θέση να έχεις επιτύχει όλα τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα. Γύρνα στην αρχή της θεματικής ενότητας και σημείωσε στα αντίστοιχα κουτάκια. Υπάρχουν στόχοι που αισθάνεσαι ότι δεν έχεις κατακτήσει πλήρως;

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ

B.4

Στην ενότητα αυτή θα γνωρίσουμε τη γεωμετρία του χώρου, μελετώντας βασικά στερεά όπως το πρίσμα, το παραλληλεπίπεδο, τον κύβο και την πυραμίδα. Θα ανακαλύψουμε τα χαρακτηριστικά τους και πώς σχεδιάζονται οι όψεις και τα αναπτύγματά τους.

Πώς συνδέονται τα στερεά με την κατασκευή κτιρίων ή τη συσκευασία προϊόντων;

Είσαι έτοιμος/η να εξερευνήσεις τη σχέση μεταξύ γεωμετρίας και πρακτικής εφαρμογής στην καθημερινότητά;

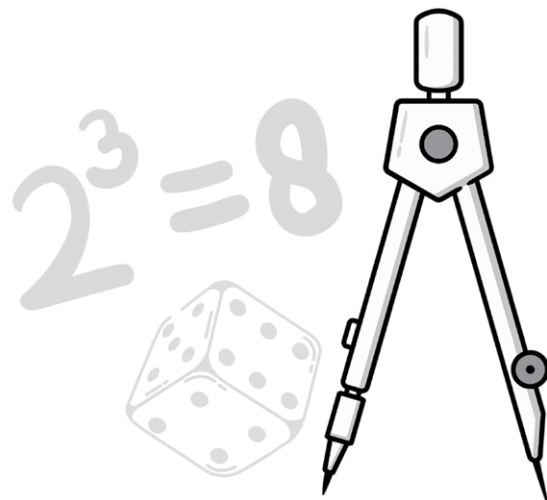


- Αναγνωρίζω τα βασικά γεωμετρικά στερεά (ορθό πρίσμα, παραλληλεπίπεδο, κύβος, πυραμίδα) και προσδιορίζω τα στοιχεία τους.
- Σχεδιάζω τις όψεις και τα αναπτύγματα ορθών πρισμάτων και πυραμίδων με ψηφιακά εργαλεία, ισομετρικό χαρτί, γεωπίνακα ή με ελεύθερη σχεδίαση.
- Αναγνωρίζω τα στερεά (κύλινδρο, κώνο και σφαίρα) και προσδιορίζω τα στοιχεία τους.
- Διερευνώ και αναγνωρίζω τον κύλινδρο, τον κώνο και τη σφαίρα ως στερεά που παράγονται από τη στροφή βασικών γεωμετρικών σχημάτων.
- Σχεδιάζω τις όψεις και τα αναπτύγματα κυλίνδρων και κώνων με ψηφιακά εργαλεία ή με ελεύθερη σχεδίαση.



4.1: Βασικά στερεά: ορθό πρίσμα, παραλληλεπίπεδο, κύβος, πυραμίδα, κύλινδρος, κώνος, σφαίρα.

+ Ανακεφαλαίωση / Αυτοαξιολόγηση



4.1 | Βασικά στερεά

A. Ορθό πρίσμα, παραλληλεπίπεδο, κύβος, πυραμίδα



Ο φυσικός κόσμος στον οποίο ζούμε και όλα τα άψυχα αντικείμενα, καθώς και τα έμψυχα όντα που μας περιβάλλουν, αποτελούν τον «χώρο». Ο χώρος έχει τρεις διαφορετικές διαστάσεις: το μήκος, το πλάτος και το ύψος και εκτείνεται απεριόριστα.

Προσπάθησε να ενώσεις κατάλληλα 6 ορθογώνια παραλληλόγραμμα για να φτιάξεις το σχήμα που έχει ένα κουτί παπούτσια. Τι σχήμα προέκυψε;



Ορθό πρίσμα

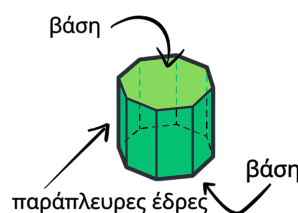
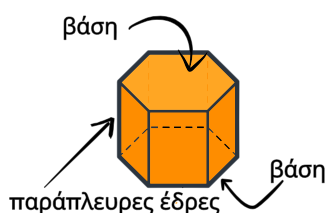
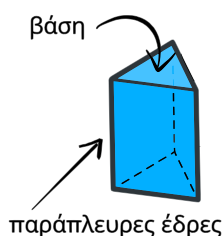
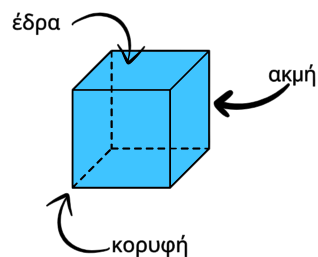


Το διπλανό ζάρι είναι ένα στερεό (πολύεδρο) και έχει

- 6 έδρες
- 12 ακμές
- 8 κορυφές

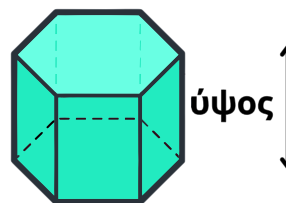
Το **ορθό πρίσμα** είναι ένα στερεό σώμα που έχει:

- δύο παράλληλες έδρες που είναι ίσα πολύγωνα και λέγονται βάσεις του πρίσματος και
- τις άλλες έδρες του που είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα και λέγονται παράπλευρες έδρες.

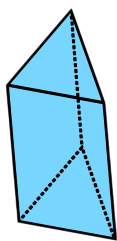
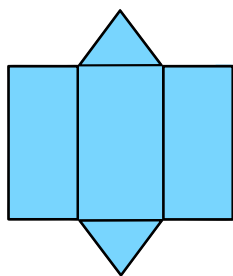


Στη συνέχεια τα ορθά πρίσματα θα τα λέμε απλώς πρίσματα.

Η απόσταση των δύο βάσεων, που είναι ίση με το ύψος μιας παράπλευρης έδρας, λέγεται **ύψος** του πρίσματος.



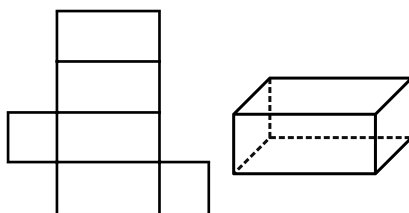
Αν οι βάσεις του πρίσματος είναι τρίγωνο, τετράπλευρο, πεντάγωνο κ.ο.κ, τότε αντίστοιχα το πρίσμα λέγεται τριγωνικό, τετραπλευρικό, πενταγωνικό κ.ο.κ



Η επιφάνεια που προκύπτει αν «ξεδιπλώσουμε» το πρίσμα ονομάζεται **ανάπτυγμα** του πρίσματος και αποτελείται από:

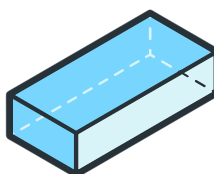
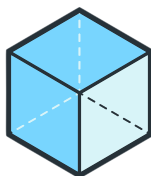
- την παράπλευρη επιφάνεια, που είναι ορθογώνιο με μήκος την περίμετρο της βάσης του πρίσματος και πλάτος το ύψος του πρίσματος
- και από τις επιφάνειες των δύο βάσεων του.

Παραλληλεπίπεδο είναι το πρίσμα που έχει βάσεις παραλληλόγραμμα.



Δύο από τα βασικότερα ορθά πρίσματα είναι:

ο **κύβος** και το **ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο**.



Αντιλαμβάνομαι



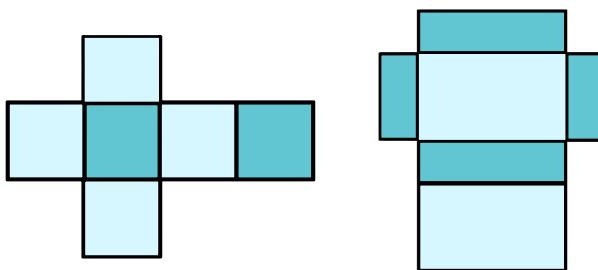
με προσομοίωση



Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση



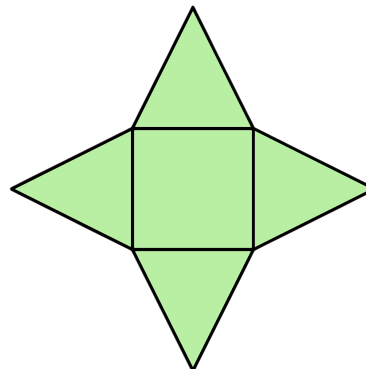
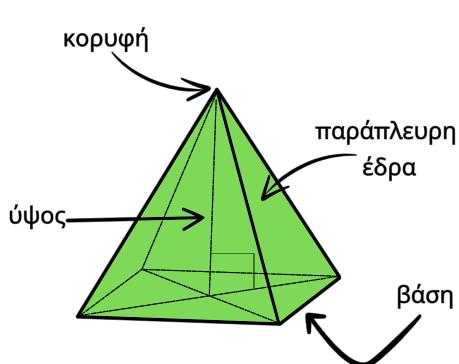
Πυραμίδα

Πυραμίδα λέγεται ένα στερεό, που μία έδρα του είναι ένα πολύγωνο και όλες οι άλλες έδρες του είναι τρίγωνα με κοινή κορυφή.

Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση



- Το πολύγωνο λέγεται **βάση** της πυραμίδας
- Τα τρίγωνα με κοινή κορυφή λέγονται **παράπλευρες έδρες** της πυραμίδας.
- Η κοινή κορυφή των τριγώνων λέγεται **κορυφή** της πυραμίδας.
- Το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα από την κορυφή προς την βάση της πυραμίδας λέγεται **ύψος** της πυραμίδας.

Σημείωση: Μία ευθεία είναι κάθετη σε ένα επίπεδο όταν είναι κάθετη σε δύο ευθείες του επιπέδου.

Τετράεδρο (ή τριγωνική πυραμίδα)	Τετραπλευρική πυραμίδα	Πενταγωνική πυραμίδα

Β. Κύλινδρος, κώνος, σφαίρα



Πού έχουμε συναντήσει στην καθημερινή μας ζωή τις έννοιες κύλινδρος, κώνος, σφαίρα; Έχουν ομοιότητες αυτά τα σχήματα;

Κύλινδρος

Κύλινδρος λέγεται το σχήμα που παράγεται από την περιστροφή ενός ορθογωνίου γύρω από μία πλευρά του.

Η πλευρά AB (Σχήμα) λέγεται **γενέτειρα** του κυλίνδρου.

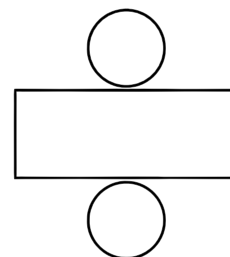
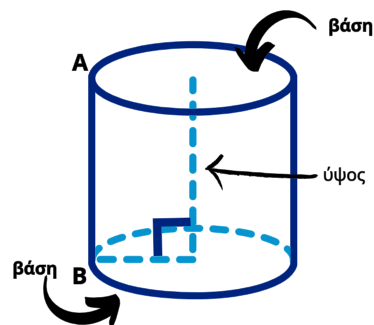
Ο κύλινδρος αποτελείται:

- από δύο ίσους και παράλληλους κυκλικούς δίσκους που λέγονται **βάσεις** του κυλίνδρου και
- από την **παράπλευρη** (ή κυρτή) επιφάνεια του κυλίνδρου που δημιουργείται από την κίνηση της πλευράς AB.

Ανάπτυγμα κυλίνδρου:

Αν ξετυλίξουμε την παράπλευρη επιφάνεια θα παρατηρήσουμε ότι έχει σχήμα ορθογωνίου.

- Η απόσταση των δύο βάσεων λέγεται **ύψος** του κυλίνδρου.



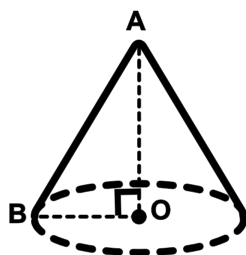
Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση

Κώνος

Κώνος λέγεται το στερεό σχήμα που παράγεται από την περιστροφή ενός ορθογωνίου τριγώνου OAB γύρω από μία κάθετη πλευρά του AO.



Η πλευρά AB λέγεται **γενέτειρα** του κώνου.

- **Ύψος** του κώνου λέγεται η κάθετη πλευρά AO, που παραμένει σταθερή κατά την περιστροφή.
- Η **βάση** του κώνου είναι ένας κυκλικός δίσκος με κέντρο O και ακτίνα OB, την άλλη κάθετη πλευρά του ορθογωνίου.
- Η ακτίνα της βάσης λέγεται **ακτίνα** του κώνου.

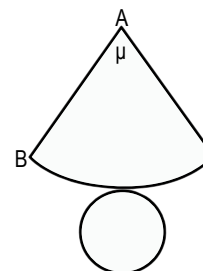
Η επιφάνεια που παράγεται από την περιστροφή της πλευράς AB λέγεται **παράπλευρη επιφάνεια** του κώνου και είναι το μέρος ενός κυκλικού δίσκου ακτίνας AB που περιέχεται μέσα στη γωνία μ .

Σχόλιο: Το μέρος του κυκλικού δίσκου που περιέχεται μέσα σε μία γωνία μ λέγεται **κυκλικός τομέας** γωνίας μ° του κυκλικού δίσκου.

Αντιλαμβάνομαι



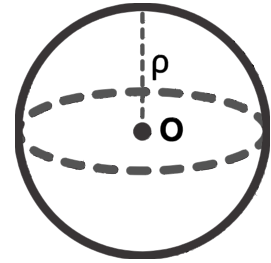
με προσομοίωση



Ανάπτυγμα κώνου

Σφαίρα

Σφαίρα είναι το στερεό σχήμα που παράγεται από την περιστροφή ενός κύκλου (O, ρ) γύρω από μία διάμετρό του.



Το σημείο O λέγεται **κέντρο** και το ρ λέγεται **ακτίνα** της σφαίρας.



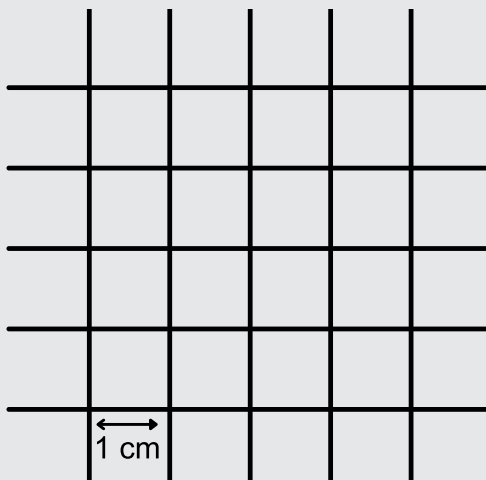
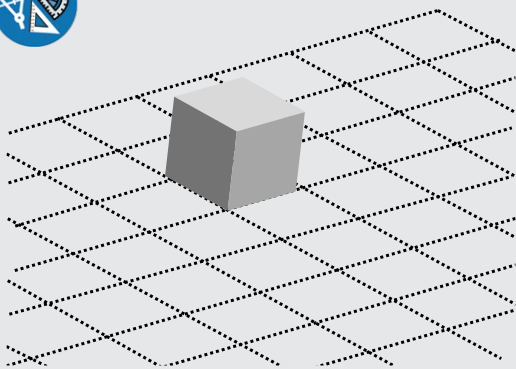
1 Συμπλήρωσε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

- α) Οι βάσεις ενός πρίσματος είναι δύο πολύγωνα
- β) Η απόσταση των δύο βάσεων ενός πρίσματος ονομάζεται του πρίσματος.
- γ) Η κοινή κορυφή των τριγώνων σε μια πυραμίδα ονομάζεται της πυραμίδας.
- δ) Το ευθύγραμμο τμήμα από την κορυφή προς την βάση της πυραμίδας λέγεται ύψος της πυραμίδας.
- ε) Ο κύλινδρος έχει ως βάσεις δύο ίσους
- στ) Ο κώνος έχει μόνο μία η οποία είναι ένας
- ζ) Κατά την περιστροφή ενός κύκλου γύρω από τη διάμετρό του παράγεται ένα στερεό που ονομάζεται

2 Ποιες από τις παρακάτω επιφάνειες αποτελούν αναπτύγματα κύβου;

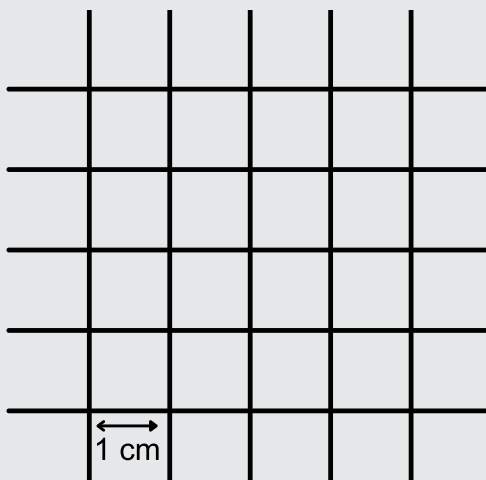
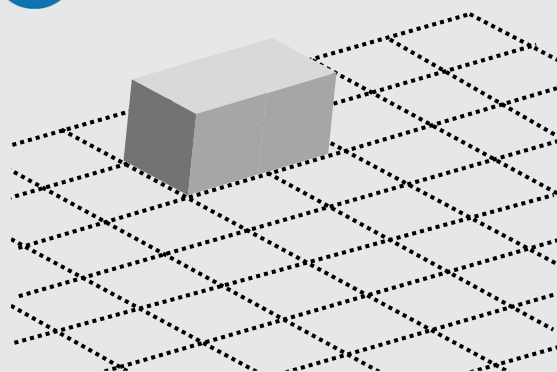
3

Στο παρακάτω σχήμα παριστάνεται ένας κύβος ακμής 1cm. Σχεδιάσε τις όψεις και το ανάπτυσμά του.



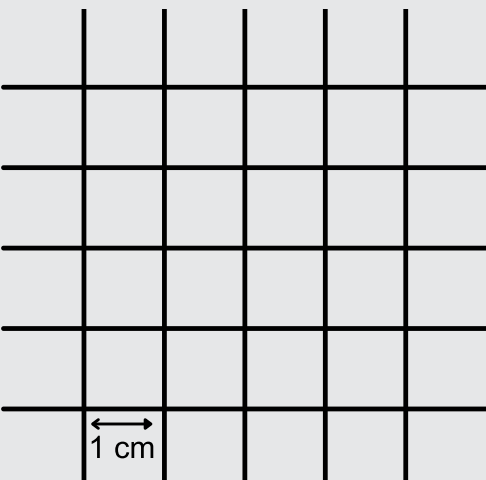
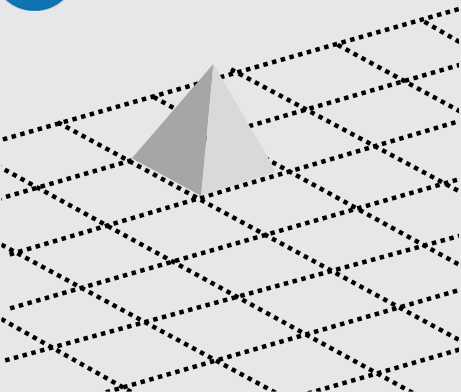
4

Στο παρακάτω σχήμα παριστάνεται ένα πρίσμα με βάση ορθογώνιο παραλληλόγραμμο διαστάσεων 2cm και 1cm ενώ το ύψος του πρίσματος είναι 3cm. Σχεδιάσε τις όψεις και το ανάπτυσμά του.



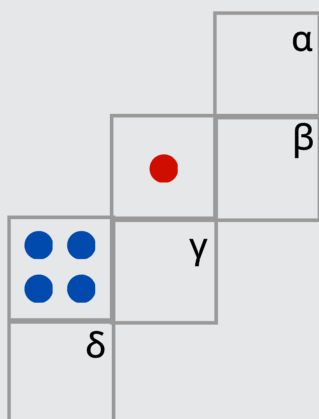
5

Στο παρακάτω σχήμα παριστάνεται πυραμίδα με βάση τετράγωνο πλευράς 1cm και η παράπλευρη επιφάνειά του αποτελείται από ίσα ισοσκελή τρίγωνα ύψους 2cm. Σχεδιάσε τις όψεις και το ανάπτυσμά του.



6

Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε το ανάπτυγμα της επιφάνειας ενός ζαριού. Συμπλήρωσε τους αριθμούς που λείπουν, αν γνωρίζεις ότι το άθροισμα των αριθμών που βρίσκονται στις απέναντι έδρες του ζαριού έχουν άθροισμα 7.



$$\alpha = \dots\dots\dots$$

$$\beta = \dots\dots\dots$$

$$\gamma = \dots\dots\dots$$

$$\delta = \dots\dots\dots$$

7

Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα:

Στερεό	Κορυφές βάσης	Έδρες (E)	Κορυφές (Κ)	Ακμές (Α)
Τριγωνική πυραμίδα (τετράεδρο)	3	4	4	6
Τετραγωνική πυραμίδα				
Πενταγωνική πυραμίδα				
Εξαγωνική Πυραμίδα				
Πυραμίδα με βάση 10-γωνο				

Τι παρατηρείς;

8

Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα:

Στερεό	Κορυφές βάσης	Έδρες (E)	Κορυφές (Κ)	Ακμές (Α)
Κύβος				
Πενταγωνικό πρίσμα				
Εξαγωνικό πρίσμα				
Πρίσμα με βάση 10-γωνο				

Τι παρατηρείς;

9

α) Κατασκεύασε τις όψεις και το ανάπτυγμα κυλίνδρου με ακτίνα βάσης $\rho = 2,5 \text{ cm}$, ύψος $u = 4 \text{ cm}$ και περίμετρο βάσης $15,7 \text{ cm}$.

β) Κατασκεύασε τις όψεις και το ανάπτυγμα κώνου με:

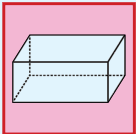
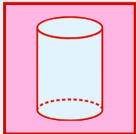
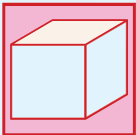
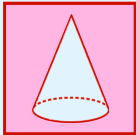
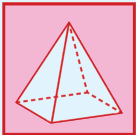

- ακτίνα βάσης $\rho = 2,5 \text{ cm}$
- παράπλευρη επιφάνεια με ακτίνα κυκλικού τομέα $AB = 6 \text{ cm}$ και γωνία $\mu = 150^\circ$.

Εξασκούμαι

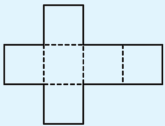
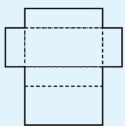
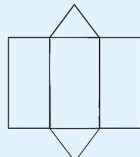
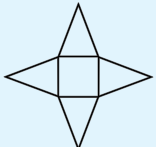

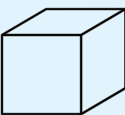
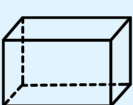
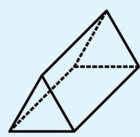
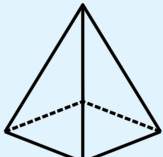
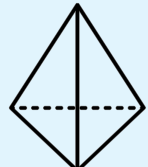


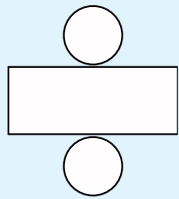
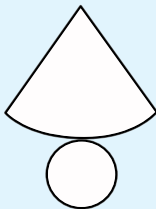
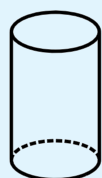
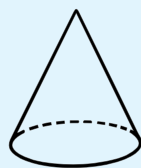
σε όσα έμαθα

Ανακεφαλαίωση (Γεωμετρία του χώρου)

	ορθογώνιο παραλλη- λεπίπεδο		κύλινδρος
	κύβος		κώνος
	πυραμίδα		σφαίρα

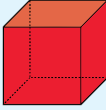
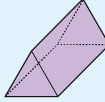
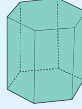
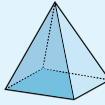



ΣΤΕΡΕΑ ΚΑΙ ΑΝΑΠΤΥΓΜΑΤΑ

ΚΥΒΟΣ	ΟΡΘΟ ΠΡΙΣΜΑ	ΤΡΙΓΩΝΙΚΟ ΠΡΙΣΜΑ	ΠΥΡΑΜΙΔΑ	ΠΥΡΑΜΙΔΑ
				
				

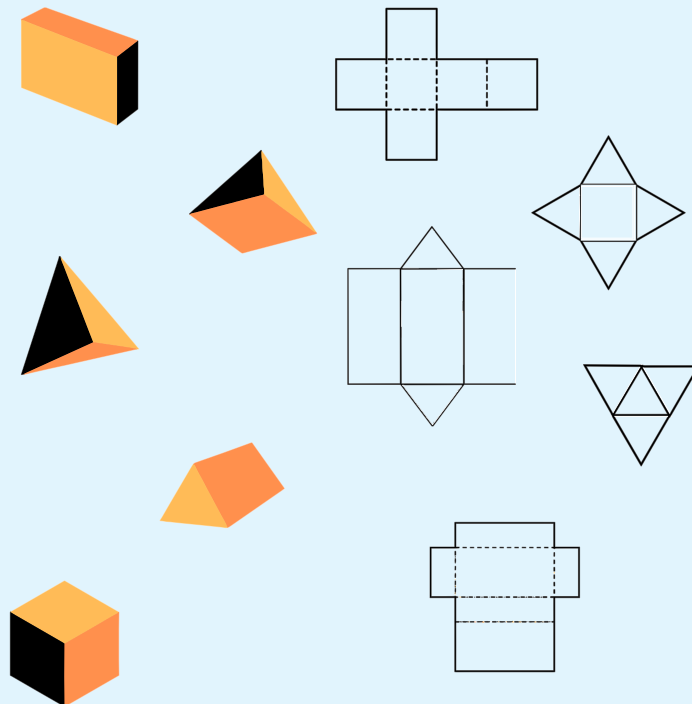
ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ	ΚΩΝΟΣ
	
	

Αυτοαξιολόγηση (Γεωμετρία του χώρου)

A. Αντιστοίχισε κάθε στερεό με την κατάλληλη ονομασία του.

κύλινδρος		
σφαίρα		
πυραμίδα		
τριγωνικό πρίσμα		
εξαγωνικό πρίσμα		
κώνος		
κύβος		

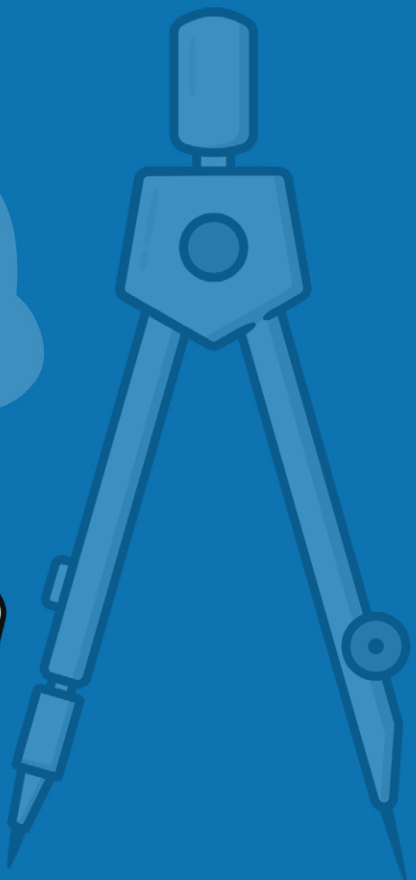
B. Αντιστοίχισε κάθε στερεό με το ανάπτυσμά του.



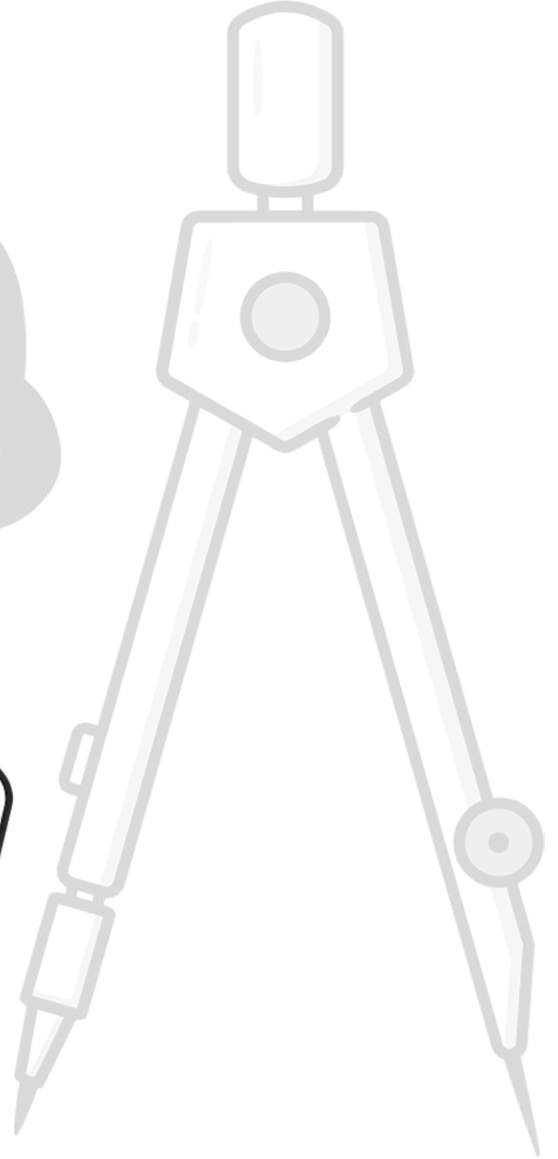
Σε αυτό το σημείο, θα πρέπει να είσαι σε θέση να έχεις επιτύχει όλα τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα. Γύρνα στην αρχή της θεματικής ενότητας και σημείωσε ✓ στα αντίστοιχα κουτάκια. Υπάρχουν στόχοι που αισθάνεσαι ότι δεν έχεις κατακτήσει πλήρως;

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ

$$2^3 = 8$$



$$2^3 = 8$$



ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Γ.1

Στην ενότητα αυτή θα εξερευνήσουμε πώς να συλλέγουμε, να οργανώνουμε και να παρουσιάζουμε δεδομένα. Θα μάθουμε να ξεχωρίζουμε κατηγορικά και ποσοτικά δεδομένα, να κατασκευάζουμε κυκλικά διαγράμματα και ιστογράμματα, καθώς και να αντλούμε χρήσιμα συμπεράσματα από αυτά.

Πώς μπορείς να αναλύεις δεδομένα για τη λήψη αποφάσεων;

Είσαι έτοιμος/η να ανακαλύψεις τη δύναμη της στατιστικής στην καθημερινή ζωή;



- Διατυπώνω ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με συνεχή ποσοτικά δεδομένα από το οικείο περιβάλλον.
- Χαρακτηρίζω δεδομένα που έχουν προκύψει από απογραφή σε έναν πληθυσμό ως κατηγορικά, διακριτά ή συνεχή ποσοτικά.
- Κατασκευάζω κυκλικά διαγράμματα για κατηγορικά δεδομένα.
- Κατασκευάζω ιστογράμματα συχνοτήτων ίσου πλάτους, με δεδομένο πλήθος κλάσεων για συνεχή ποσοτικά δεδομένα.
- Επιλέγω πληροφορίες από διαφορετικές αναπαραστάσεις ποσοτικών δεδομένων και καταλήγω σε συμπεράσματα.
- Επιλέγω κατάλληλες μορφές αναπαράστασης και επιχειρηματολογώ για την επιλογή μου.

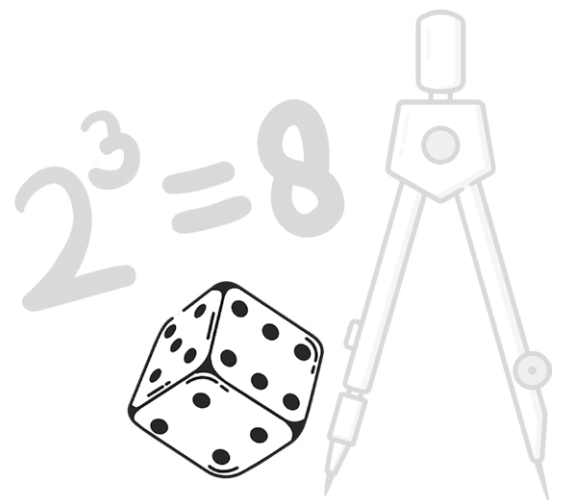


1.1: Απογραφή - Πληθυσμός - Κατηγορικά δεδομένα - Ποσοτικά δεδομένα

1.2: Συλλογή συνεχών ποσοτικών δεδομένων

1.3: Κυκλικά διαγράμματα - Ιστογράμματα συχνοτήτων κλάσεων ίσου πλάτους με δεδομένο το πλήθος των κλάσεων

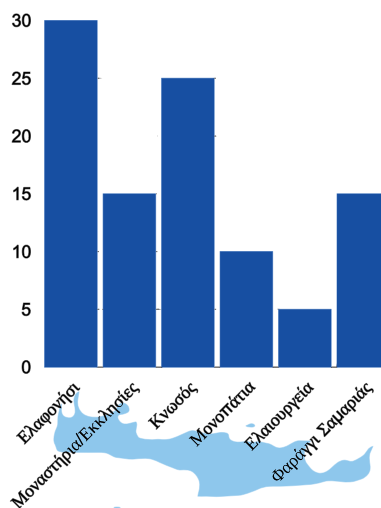
+ Ανακεφαλαίωση / Αυτοαξιολόγηση



1.1 | Απογραφή - Πληθυσμός - Κατηγορικά δεδομένα - Ποσοτικά δεδομένα



Στο παρακάτω ραβδόγραμμα παρουσιάζονται οι τοποθεσίες που επισκέφτηκαν 100 ξένοι επισκέπτες, κατά τη διάρκεια των διακοπών τους στην Κρήτη.



Ποια περιοχή είχε τους περισσότερους και ποια τους λιγότερους επισκέπτες; Πώς το βρήκες;

Τα δεδομένα μπορούμε να τα συγκεντρώσουμε στον παρακάτω πίνακα που ονομάζεται **πίνακας συχνότητας**.

Τοποθεσίες	Τουρίστες
Ελαφονήσι	30
Μοναστήρια/Εκκλησίες	15
Κνωσός	25
Μονοπάτια πεζοπορίας	10
Ελαιουργεία	5
Φαράγγι Σαμαριάς	15
Σύνολο	100

Οι τιμές της 2ης στήλης που αναφέρονται στο πλήθος των τουριστών ονομάζονται **συχνότητες**.

- Ποιος πιστεύεις ότι είναι ο σκοπός της παραπάνω έρευνας;
- Πόσα είναι τα άτομα που αποτελούν το στατιστικό δείγμα της έρευνας;
- Ποια είναι τα συμπεράσματα που προκύπτουν από την έρευνα αυτή;

Βασικές έννοιες

Η γυμνάστρια ενός σχολείου θέλει να μάθει ποιο είναι το δημοφιλέστερο άθλημα μεταξύ των μαθητών/τριών αυτού του σχολείου. Οι μαθητές/τριες του σχολείου που αφορά η έρευνα, αποτελούν τον **πληθυσμό** της έρευνας και το άθλημα που προτιμούν οι μαθητές/τριες ονομάζεται **μεταβλητή** της έρευνας. Για τον λόγο αυτόν ρώτησε τους/τις 25 μαθητές/τριες μίας τάξης της Α' γυμνασίου. Οι 25 μαθητές/τριες αποτελούν το **δείγμα** της έρευνας.

Γενικά:

Πληθυσμός είναι μία ομάδα ατόμων ή ένα σύνολο αντικειμένων του οποίου τα στοιχεία μελετάμε ως προς κάποιο χαρακτηριστικό τους.

Παραδείγματα πληθυσμών:

- Οι μαθητές/τριες που φοιτούν στα γυμνάσια της χώρας.
- Τα αυτοκίνητα που κινούνται σε μία εθνική οδό.

Μεταβλητή λέγεται το χαρακτηριστικό ως προς το οποίο εξετάζεται ένας πληθυσμός.

Παραδείγματα μεταβλητών:

- Ύψος μαθητών/τριών γυμνασίου.
- Χρώμα αυτοκινήτου.

Η διαδικασία με την οποία εξετάζεται και καταγράφεται κάθε άτομο/στοιχείο του πληθυσμού ονομάζεται **απογραφή**.

Επειδή όμως η εξέταση κάθε ατόμου/στοιχείου χωριστά απαιτεί πολύ χρόνο και είναι οικονομικά ασύμφορη, επιλέγουμε ένα μόνο μέρος του πληθυσμού το οποίο ονομάζεται **δείγμα**.

Παράδειγμα: Για να μελετήσουμε τον τρόπο μετακίνησης των μαθητών/τριών γυμνασίων προς το σχολείο τους, πήραμε ένα δείγμα 500 μαθητών/τριών από διάφορα γυμνάσια όλης της χώρας.

Η διαδικασία επιλογής του δείγματος λέγεται **δειγματοληψία** και πρέπει να γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε τα συμπεράσματα που θα προκύψουν να είναι **αξιόπιστα**. Τότε λέμε ότι το δείγμα είναι **αντιπροσωπευτικό** του πληθυσμού.

Από την εξέταση των ατόμων του πληθυσμού ως προς ένα χαρακτηριστικό τους, προκύπτει μια σειρά από δεδομένα που λέγονται **στατιστικά δεδομένα** ή **παρατηρήσεις**.

Παράδειγμα: Αν εξετάσουμε τον τρόπο μετακίνησης των μαθητών/τριών γυμνασίων προς το σχολείο τους, τα στατιστικά δεδομένα που θα προκύψουν είναι:

- Με τα πόδια
- Με το λεωφορείο
- Με το αυτοκίνητο
- κ.α.

Τα στατιστικά δεδομένα τα **διακρίνουμε**:

1. Σε κατηγορικά δεδομένα των οποίων οι τιμές τους δεν είναι αριθμοί.

Παραδείγματα: Οι τιμές των μεταβλητών: χρώμα ματιών, άθλημα, κατοικίδιο κ.α. δεν είναι αριθμοί συνεπώς, τα δεδομένα που θα προκύψουν είναι κατηγορικά.

2. Σε ποσοτικά δεδομένα των οποίων οι τιμές τους είναι αριθμοί.

Παραδείγματα: Οι τιμές των μεταβλητών: ύψος, ηλικία, αριθμός μαθητών/τριών σχολείου κ.α. είναι αριθμοί συνεπώς, τα δεδομένα που θα προκύψουν είναι ποσοτικά.

Τα **ποσοτικά** δεδομένα, των οποίων οι τιμές είναι αριθμοί, **διακρίνονται**:

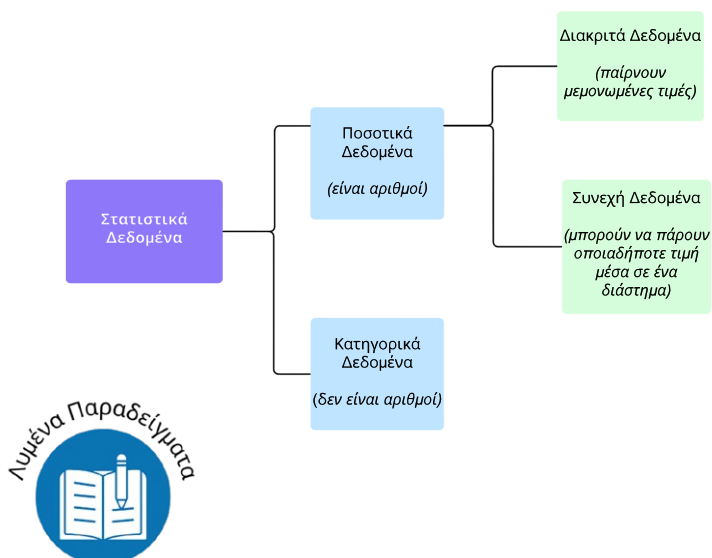
A. Σε **διακριτά** δεδομένα, τα οποία παίρνουν μεμονωμένες τιμές.

Παράδειγμα: Οικογένεια με:

- 1 παιδί,
- 2 παιδιά,
- 3 παιδιά κ.λπ.

B. Σε **συνεχή** δεδομένα, που μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή μέσα σε ένα διάστημα.

Παραδείγματα: Ο χρόνος σε λεπτά που απαιτείται για να ολοκληρώσουν οι μαθητές μία εξέταση, μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή σε ένα διάστημα από 0 έως 120 λεπτά.



1. Μια ομάδα παιδιών θέλει να κάνει μία έρευνα σχετικά με το ύψος των μαθητών/τριών ενός γυμνασίου. Για τον λόγο αυτό τα μέλη της ομάδας κατέγραψαν το ύψος των 22 μαθητών/τριών ενός τμήματος της Γ' γυμνασίου.
 - α) Ποιος είναι ο πληθυσμός της έρευνας;
 - β) Ποιο είναι το δείγμα;
 - γ) Ποια είναι η μεταβλητή της έρευνας;
 - δ) Τα δεδομένα που θα προκύψουν είναι κατηγορικά ή ποσοτικά; Αν είναι ποσοτικά είναι διακριτά ή συνεχή;
 - ε) Από την έρευνα αυτή θα προκύψουν αξιόπιστα συμπεράσματα; Δηλαδή το δείγμα είναι αντιπροσωπευτικό του πληθυσμού;

Λύση:

- α) Ο πληθυσμός της έρευνας είναι όλοι/όλες οι μαθητές/τριες του γυμνασίου.
- β) Το δείγμα αποτελείται από τους/τις 22 μαθητές/τριες του τμήματος της Γ' γυμνασίου.
- γ) Η μεταβλητή της έρευνας είναι το ύψος των μαθητών/τριών του γυμνασίου.
- δ) Τα δεδομένα που θα προκύψουν είναι αριθμοί άρα είναι ποσοτικά και είναι συνεχή γιατί μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή μέσα σε ένα διάστημα.
- ε) Το δείγμα δεν είναι αντιπροσωπευτικό του πληθυσμού, αφού αποτελείται από μαθητές/τριες της Γ' γυμνασίου. Έτσι τα αποτελέσματα της έρευνας δε θα είναι αξιόπιστα, διότι οι μαθητές/τριες της Γ' γυμνασίου έχουν σχετικά μεγαλύτερο ύψος από τους/τις μαθητές/τριες των Α' και Β' τάξεων.



1

Τα δεδομένα που θα προκύψουν στις παρακάτω περιπτώσεις είναι κατηγορικά ή ποσοτικά; Από τα ποσοτικά δεδομένα ποια είναι διακριτά και ποια συνεχή;

- α) Το χρώμα ματιών των παιδιών που γεννήθηκαν το προηγούμενο έτος.
- β) Το πλήθος των μαθητών ανά τμήμα.
- γ) Ύψος μαθητών Γυμνασίου.
- δ) Βάρος μαθητριών Γυμνασίου.
- ε) Προτιμώμενο είδος αθλητισμού νέων ηλικίας 10 – 30 ετών.
- στ) Αγαπημένο κατοικίδιο ζώο.
- ζ) Ομάδα αίματος.
- η) Πλήθος βιβλίων στη σχολική τσάντα.

2

Ο διευθυντής του 2ου Γυμνασίου Καλαμάτας έκανε μια έρευνα επιλέγοντας τυχαία 100 μαθητές/τριες του σχολείου, και τους/τις ρώτησε σχετικά με την προτίμησή τους μεταξύ γενικού λυκείου (ΓΕΛ) και επαγγελματικού λυκείου (ΕΠΑ.Λ.).

A. Ο πληθυσμός της έρευνας είναι:

- α) όλοι/όλες οι μαθητές/τριες γυμνασίων.
- β) οι μαθητές/τριες του 2ου Γυμνασίου Καλαμάτας.
- γ) οι 100 μαθητές/τριες του 2ου Γυμνασίου Καλαμάτας.

B. Το δείγμα της έρευνας είναι:

- α) όλοι/όλες οι μαθητές/τριες γυμνασίων.
- β) οι μαθητές/τριες του 2ου Γυμνασίου Καλαμάτας.
- γ) οι 100 μαθητές/τριες του 2ου Γυμνασίου Καλαμάτας.

Γ. Η μεταβλητή της έρευνας είναι:

- α) οι μαθητές/τριες του 2ου Γυμνασίου Καλαμάτας.
- β) η προτίμηση των μαθητών/τριών μεταξύ γενικού λυκείου και ΕΠΑ.Λ.
- γ) οι μαθητές/τριες των γενικών λυκείων και των ΕΠΑ.Λ.

3

Εξετάζουμε μία έρευνα σχετικά με το αποτέλεσμα των μαθητικών εκλογών, για το 15-μελές του σχολείου, στην οποία ρωτήθηκαν 24 μαθητές/τριες ενός τμήματος.

- α) Ποιος είναι ο πληθυσμός της έρευνας;
- β) Ποιο είναι το δείγμα;
- γ) Ποια είναι η μεταβλητή της έρευνας;
- δ) Τα δεδομένα που θα προκύψουν είναι κατηγορικά ή ποσοτικά;
- ε) Από την έρευνα αυτή θα προκύψουν αξιόπιστα συμπεράσματα; Δηλαδή το δείγμα είναι αντιπροσωπευτικό του πληθυσμού;

4

Η καθηγήτρια θα συναντήσει τους γονείς όλων των μαθητών/τριών που έχουν πάνω από 3 απουσίες.

Μαθητής/τρια	Γονέας	Απουσίες
Αφροδίτη	Γιώργος	5
Άρης	Χρήστος	4
Αθηνά	Μαρία	4
Ερμής	Χριστίνα	6
Ήρα	Κωνσταντίνος	5
Άρτεμις	Γρηγόρης	5

- α) Τι είδους είναι τα δεδομένα των δύο πρώτων στηλών του πίνακα;
 β) Τι είδους δεδομένα είναι τα δεδομένα της τελευταίας στήλης; Αν είναι ποσοτικά, ανήκουν στα συνεχή ή στα διακριτά ποσοτικά δεδομένα;

5

Μια πλατφόρμα συνδρομητικής τηλεόρασης θέλει να μάθει τι είδους προγράμματα επιλέγουν να παρακολουθήσουν οι συνδρομητές/τριες για αυτόν τον λόγο εξετάζει τυχαία τις επιλογές 150 λογαριασμών.

Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι η σωστή;

- α) Ο πληθυσμός της έρευνας είναι όλοι/όλες οι κάτοχοι τηλεόρασης και το δείγμα είναι οι συνδρομητές/τριες της πλατφόρμας.
 β) Ο πληθυσμός της έρευνας είναι οι συνδρομητές/τριες της πλατφόρμας και το δείγμα είναι οι 150 τυχαίοι λογαριασμοί.
 γ) Ο πληθυσμός της έρευνας είναι οι 150 λογαριασμοί και το δείγμα είναι οι συνδρομητές/τριες της πλατφόρμας.

6

Ο καφές είναι ένα πολύ διαδεδομένο αφέψημα στην Ελλάδα. Παρακάτω βλέπουμε τη διατροφική αξία διάφορων τύπων καφέ, όπως παρασκευάζονται από την αλυσίδα καφέ «Ωραίος κόκκος».

Αφέψημα	Είδος	Θερμίδες	Ζάχαρη (g)	Καφεΐνη (mg)
Espresso	Ζεστός	3	0	300
Latte	Ζεστός	65	3	200
Καπουτσίνο	Ζεστός	120	8	250
Freddo Espresso	Κρύος	6	1	350
Decaf	Ζεστός	2	0	0
Φίλτρου	Ζεστός	250	12	65

A. Το αντικείμενο που παρουσιάζεται στον πίνακα, για το οποίο έχουμε συλλέξει πληροφορίες, είναι:

- α) Οι πελάτες της αλυσίδας καφέ
 β) Τα είδη καφέ που πωλούνται στην Ελλάδα
 γ) Η διατροφική αξία των ειδών καφέ που παρασκευάζονται στην αλυσίδα καφέ «Ωραίος κόκκος».
 δ) Η δημοφιλία κάθε είδους καφέ

B. Ο πίνακας περιέχει:

- α) 4 είδη δεδομένων, 2 κατηγορικά και 2 ποσοτικά.
 β) 4 είδη δεδομένων, 1 κατηγορικό και 3 ποσοτικά.
 γ) 5 είδη δεδομένων, 2 κατηγορικά και 3 ποσοτικά.
 δ) 6 είδη δεδομένων, 1 κατηγορικό και 5 ποσοτικά.

7

Από μία έρευνα αγοράς για ξενοδοχεία συλλέξαμε τα παρακάτω δεδομένα:

Ξενοδοχείο	Κρεβάτια	Μπάνια	Ενοίκιο/βράδυ	Κλιματισμός	Παροχές
Καλή Ζωή	3	1	130€	ναι	πισίνα, μπαρ
Άνεση	2	1	90€	ναι	πισίνα
Φιλοξενία	4	1	100€	όχι	μπαρ
Ουτοπία	3	1	95€	ναι	-

A. Ο πίνακας αναφέρεται:

- στα χαρακτηριστικά 4 ξενοδοχείων.
- στα ξενοδοχεία της Ελλάδας.
- στο κόστος των διακοπών.
- στη διαθεσιμότητα δωματίων.

B. Ο πίνακας περιέχει:

- 5 κατηγορίες δεδομένων, 2 ποσοτικές και 3 κατηγορικές.
- 6 κατηγορίες δεδομένων, 3 ποσοτικές και 3 κατηγορικές.
- 5 κατηγορίες δεδομένων, 3 ποσοτικές και 2 κατηγορικές.
- όλα τα δεδομένα είναι κατηγορικά.

8

Για να μελετήσουμε ποιο άθλημα είναι πιο δημοφιλές ανάμεσα στους εφήβους, εξετάζουμε τους μαθητές του γυμνασίου της Τήλου. Είναι το δείγμα που επιλέξαμε αντιπροσωπευτικό του πληθυσμού; Ποια θα ήταν η δική σου επιλογή για το δείγμα;

9

Μια ομάδα θέλει να κάνει πρόβλεψη για το ποιος/ποια θα είναι ο/η νέος/α πρόεδρος του 15μελους συμβουλίου του σχολείου. Για τον λόγο αυτό κατέγραψαν την πρόθεση ψήφου των μαθητών/τριών ενός συγκεκριμένου τμήματος του σχολείου.

- Ποιους/ποιες αφορά η εκλογή του προέδρου;
- Ποιοι/ποιες απάντησαν στην έρευνα;
- Ποια ήταν η ερώτηση της έρευνας;

Να συζητήσετε πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα της μεθόδου που επιλέχθηκε, για να συγκεντρωθούν οι πληροφορίες και να γίνει η πρόβλεψή τους.



10

Φέτος, στην Α' Γυμνασίου, βλέπεις πολλά καινούργια πρόσωπα. Διατύπωσε τρεις ερωτήσεις που θα σε ενδιέφερε να μάθεις για κάθε παιδί, οι οποίες θα απαντηθούν με:

- κατηγορικά δεδομένα.
- διακριτά ποσοτικά δεδομένα.
- συνεχή ποσοτικά δεδομένα.

Εξασκούμαι



σε όσα έμαθα

1.2 | Συλλογή συνεχών ποσοτικών δεδομένων



Παρακάτω έχουμε καταγράψει, κατά προσέγγιση, το ύψος (σε εκατοστά) 20 μαθητών ενός τμήματος της Α' Γυμνασίου.

158	150	154	159	157
161	160	161	162	157
166	156	164	153	165
167	164	155	160	169

Προσπάθησε να κατασκευάσεις έναν πίνακα συχνοτήτων με τα παραπάνω δεδομένα. Ποιες δυσκολίες διακρίνεις; Μπορείς να βρεις έναν πιο σύντομο τρόπο συλλογής των δεδομένων;

Ομαδοποίηση παρατηρήσεων

Παρατηρούμε ότι τα δεδομένα που δίνονται στην παραπάνω έρευνα είναι ποσοτικά συνεχή και ότι έχουμε πολλές διαφορετικές παρατηρήσεις (από 150 έως 169 εκατοστά).

Στην περίπτωση αυτή είναι προτιμότερο να χωρίσουμε τα παραπάνω δεδομένα σε ομάδες που ονομάζονται **κλάσεις**.

- Στην 1η κλάση τοποθετούμε τα ύψη: από 150 έως 154 εκατοστά.
- Στην 2η κλάση: από 154 έως 158 εκατοστά.
- Στην 3η κλάση: από 158 έως 162 εκατοστά.
- Στην 4η κλάση: από 162 έως 166 εκατοστά.
- Στην 5η κλάση: από 166 έως 170 εκατοστά.

Η διαδικασία αυτή ονομάζεται **ομαδοποίηση παρατηρήσεων**.

Σημείωση:

Οι παρατηρήσεις «154 εκατοστά» τοποθετούνται στη 2η κλάση «154 – 158» και όχι στην 1η κλάση «150 – 154» .

Ομοίως οι παρατηρήσεις «158 εκατοστά» τοποθετούνται στην 3η κλάση «158 – 162» και όχι στη 2η «154 – 158» .

Γενικά, αν κάποια παρατήρηση συμπίπτει με το δεξιό άκρο μιας κλάσης, την τοποθετούμε στην αμέσως επόμενη κλάση.

Με τον τρόπο αυτόν κατασκευάζουμε τον **πίνακα κατανομής συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων**.

Κλάσεις	Συχνότητες	Σχετικές συχνότητες
150 – 154	2	10%
154 – 158	5	25%
158 – 162	6	30%
162 – 166	4	20%
166 – 170	3	15%
Σύνολο	20	100%

Οι **σχετικές συχνότητες** προκύπτουν από τη διαίρεση των αντίστοιχων συχνοτήτων με το σύνολο του δείγματος.

- $\frac{2}{20} = 0,1$ ή 10%.
 - $\frac{5}{20} = 0,25$ ή 25%
 - $\frac{6}{20} = 0,3$ ή 30%
- κ.ο.κ.

Συνήθως, τις σχετικές συχνότητες τις μετατρέπουμε σε ποσοστό επί τοις εκατό %.

Παρατηρήσεις:

1. Οι σχετικές συχνότητες όπως και οι συχνότητες ενός πίνακα που περιέχει ομαδοποιημένα δεδομένα, αναφέρονται στις κλάσεις και όχι σε συγκεκριμένους αριθμούς.

Για παράδειγμα,

η κλάση 166 – 170 έχει συχνότητα 3 και σχετική συχνότητα 15%. Οι τιμές αυτές αναφέρονται στην κλάση και όχι στις τιμές 166, 167, 169 που ανήκουν στην κλάση αυτή.

2. Θεωρούμε ότι οι τιμές κάθε κλάσης αντιπροσωπεύονται από το **κέντρο** της κλάσης, δηλαδή τον αριθμό που βρίσκεται στο μέσο μίας κλάσης.

Για παράδειγμα,

οι τιμές της κλάσης 150 – 154 αντιπροσωπεύονται από την τιμή 152, οι τιμές της κλάσης 154 – 158 αντιπροσωπεύονται από την τιμή 156, κ.ο.κ.

Κέντρα κλάσεων:

Κλάσεις	Κέντρο
150 – 154	152
154 – 158	156
158 – 162	160
162 – 166	164
166 – 170	168

Η διαφορά του μικρότερου από το μεγαλύτερο άκρο μιας κλάσης λέγεται **πλάτος** της κλάσης. Στο προηγούμενο παράδειγμα το πλάτος κάθε κλάσης είναι 4 εκατοστά.



1. Εξετάσαμε 20 μαθητές ενός Γυμνασίου ως προς τον χρόνο που χρειάζονται το πρώι, για να φτάσουν από το σπίτι τους στο σχολείο. Οι απαντήσεις των μαθητών σε λεπτά (κατά προσέγγιση), φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

7	23	25	12	6
15	10	5	14	9
8	8	29	18	11
16	24	20	16	12

Να ομαδοποιήσετε τα παρακάτω δεδομένα σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους και να κατασκευάσετε τον πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων (%).

Λύση:

Τα δεδομένα είναι από 5 έως 29 λεπτά. Ομαδοποιούμε τα δεδομένα σε 5 κλάσεις πλάτους 5 λεπτών.

- Στην πρώτη κλάση 5 – 10 παρατηρούμε ότι περιέχονται 6 αριθμοί, (οι 7, 6, 5, 9, 8 και 8).
- Στη δεύτερη κλάση 10 – 15 παρατηρούμε ότι περιέχονται 5 αριθμοί, (οι 12, 10, 14, 11 και 12). κ.ο.κ.

Κατασκευάζουμε τον πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων (%):

Κλάσεις	Συχνότητες	Σχετικές συχνότητες
5 – 10	6	30%
10 – 15	5	25%
15 – 20	4	20%
20 – 25	3	15%
25 – 30	2	10%
Σύνολο	20	100%

Για να υπολογίσουμε τις σχετικές συχνότητες, διαιρούμε τις αντίστοιχες συχνότητες με το σύνολο του δείγματος.

- $\frac{6}{20} = 0,3$ ή 30%.
- $\frac{5}{20} = 0,25$ ή 25%.
- $\frac{4}{20} = 0,2$ ή 20%.
- $\frac{3}{20} = 0,15$ ή 15%.
- $\frac{2}{20} = 0,1$ ή 10%.

1

Δίνονται τα ομαδοποιημένα δεδομένα του πίνακα:

Κλάσεις	Συχνότητες
0 – 5	1
5 – 10	8
10 – 15	7
15 – 20	3
20 – 25	1

Επίλεξε τη σωστή απάντηση:

		A	B	Γ	Δ
α)	Το σύνολο του δείγματος είναι:	5	13	20	25
β)	Το πλάτος κάθε κλάσης είναι:	0	5	10	1
γ)	Το κέντρο της κλάσης 0 – 5 είναι:	0	2,5	10	12,5
δ)	Το κέντρο της κλάσης 5 – 10 είναι:	5	2,5	7,5	10
ε)	Η συχνότητα της κλάσης 10 – 15 είναι:	1	8	7	3
στ)	Η σχετική συχνότητα της κλάσης 0 – 5 είναι:	5%	10%	15%	50%

2

Δίνεται το πλήθος των πόντων που πέτυχε ένας καλαθοσφαιριστής σε 20 συνεχόμενους αγώνες:

10, 17, 3, 15, 0, 4, 1, 17, 19, 11, 5, 6, 15, 18, 14, 6, 11, 15, 10, 15.

Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα:

Κλάσεις	Συχνότητες	Σχετικές συχνότητες
0 – 5		
5 – 10		
10 – 15		
15 – 20		
Σύνολο		

3

Εξετάσαμε 25 μαθητές/τριες ενός γυμνασίου ως προς το βάρος τους. Τα αποτελέσματα κατά προσέγγιση, σε κιλά, είναι:

40	50	42	56	61
52	49	60	46	63
60	65	46	57	47
54	55	58	52	51
72	55	53	79	50

Ομαδοποίησε τα παραπάνω δεδομένα σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους και συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα.

Κλάσεις	Κέντρο	Συχνότητες	Σχετικές συχνότητες
40 - 48			
... - ...			
... - ...			
... - ...			
... - ...			
	Σύνολο		

4

Οι μέγιστες θερμοκρασίες μιας πόλης για 20 συνεχόμενες ημέρες, ήταν:

14, 13, 10, 17, 16, 14, 12, 15, 19, 20, 17, 23, 24, 27, 28, 29, 25, 26, 25, 25.

- α) Ποια ήταν η μέγιστη θερμοκρασία της πόλης και ποια η ελάχιστη;
 β) Ομαδοποίησε τα δεδομένα σε 4 κλάσεις ίσου πλάτους.

5

Ο παρακάτω πίνακας συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων περιέχει δεδομένα σχετικά με την ηλικία όσων επισκέφτηκαν ένα μουσείο τον προηγούμενο μήνα. Συμπλήρωσε τα δεδομένα που λείπουν:

Κλάσεις	Κέντρο	Συχνότητες	Σχετικές συχνότητες
0 - 20		20	
20 - ...		14	
... - ...		9	
... - ...	70		10%
... - ...			
	Σύνολο	50	100%

6

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται τα ποσά (σε €) που ξόδεψαν 50 μαθητές/τριες στο κυλικείο του σχολείου τους, στη διάρκεια μιας ημέρας.

Κλάσεις	Συχνότητες
0 – 2	15
2 – 4	25
4 – 6	7
6 – 8	2
8 – 10	1
Σύνολο	50

- Πόσοι/ες μαθητές/τριες ξόδεψαν λιγότερα από 2€ στο κυλικείο;
- Ποιο είναι το ποσοστό των μαθητών/τριών που ξόδεψε λιγότερα από 4 €;
- Πόσοι/ες μαθητές/τριες ξόδεψαν τουλάχιστον 2€ στο κυλικείο;
- Ποιο είναι το ποσοστό των μαθητών/τριών που ξόδεψε τουλάχιστον 6€;

7

Παρακάτω φαίνονται οι βαθμολογίες 50 μαθητών/τριών στις τελικές εξετάσεις στα Μαθηματικά.

**15, 12, 14, 10, 9, 4, 16, 18, 17, 19, 20, 20, 16, 14, 17, 13, 15, 17, 18, 17, 14, 15, 13, 12, 11,
6, 9, 14, 18, 19, 20, 17, 13, 12, 15, 14, 16, 7, 19, 10, 2, 12, 7, 15, 16, 14, 12, 13, 18, 19.**

Ομαδοποίησε τα δεδομένα σε 4 κλάσεις με ίσο πλάτος 5 βαθμών.

- Πόσα γραπτά βαθμολογήθηκαν κάτω από τη βάση (10) ;
- Τι ποσοστό των μαθητών/τριών βαθμολογήθηκαν με τουλάχιστον 15;

Εξασκούμε



σε όσα έμαθα

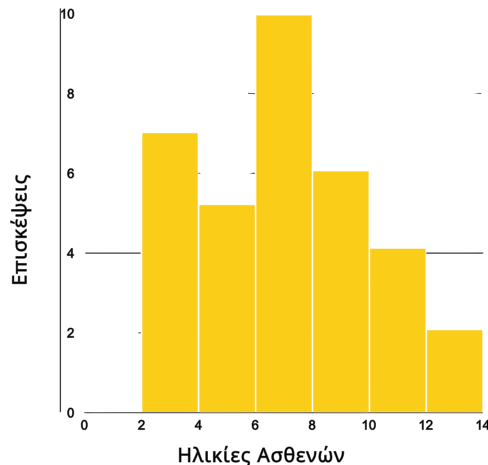
1.3 | Κυκλικά διαγράμματα - Ιστογράμματα συχνοτήτων κλάσεων ίσου πλάτους με δεδομένο το πλήθος των κλάσεων



Παρακάτω βλέπουμε ένα διάγραμμα που περιγράφει τις ηλικίες των ασθενών που επισκέφτηκαν έναν παιδίατρο τον τελευταίο μήνα. Το διάγραμμα προέκυψε από τα δεδομένα που είχε σημειωμένα ο γιατρός:

2 4 2 4 3 3 3 3 3 7 7 7 7 7
7 7 7 7 8 8 9 9 9 10 10
13 13 4 4 4 7 8 8 9 9 9 10
10 10 11 10 10 10 11 10 11

Θα μπορούσαμε να επιλέξουμε άλλη μορφή αναπαράστασης των δεδομένων; Ποια είναι τα πλεονεκτήματα και ποια τα μειονεκτήματα της παρακάτω αναπαράστασης;



Τα στατιστικά δεδομένα παρουσιάζονται συνήθως με γραφικές παραστάσεις.

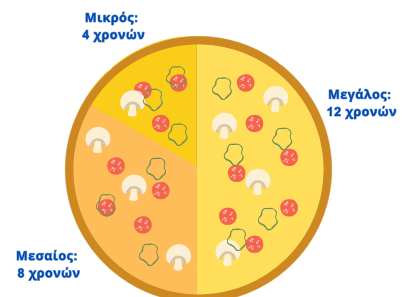
Οι γραφικές παραστάσεις προκαλούν την προσοχή και το ενδιαφέρον, γίνονται εύκολα αντιληπτές και επιτρέπουν την εύκολη σύγκριση μεταξύ των στοιχείων που παρουσιάζονται σε μία έρευνα.

Οι πιο γνωστές αναπαραστάσεις είναι το ραβδόγραμμα, το εικονόγραμμα, το κυκλικό διάγραμμα, το χρονόγραμμα, το ιστόγραμμα κ.α.

Κυκλικό διάγραμμα

Τρία αδέρφια με ηλικίες 4, 8 και 12 ετών, θέλουν να μοιραστούν μία πίτσα ανάλογα με τις ηλικίες τους. Ποιο μέρος της πίτσας αντιστοιχεί στον καθένα;

Όταν οι τιμές που παίρνουν τα δεδομένα είναι σχετικά λίγες, τότε μπορούμε να παρουσιάσουμε τα δεδομένα με το κυκλικό διάγραμμα.



Το **κυκλικό διάγραμμα** είναι ένας κυκλικός δίσκος χωρισμένος σε κυκλικούς τομείς που παριστάνουν τις διαφορετικές τιμές μίας μεταβλητής.

Οι επίκεντρες γωνίες είναι ανάλογες προς τις αντίστοιχες συχνότητες των τιμών της μεταβλητής.

Βρίσκουμε την αντίστοιχη **επίκεντρη γωνία** από την αναλογία:

$$\frac{\text{Συχνότητα τιμής}}{\text{Σύνολο}} = \frac{\hat{\omega}}{360^\circ}$$

Σχόλιο: Το κυκλικό διάγραμμα είναι χρήσιμο στην απεικόνιση ποσοστιαίων δεδομένων, έχει, όμως, αρκετά μειονεκτήματα, όπως η δυσκολία στη σύγκριση μεταξύ τμημάτων που παρουσιάζουν μικρή διαφορά αλλά και το ότι τα πολύ μικρά τμήματα είναι δύσκολο να απεικονιστούν ή να διακριθούν.

Παράδειγμα:

Ρωτήσαμε 20 μαθητές/τριες σχετικά με το αγαπημένο τους κατοικίδιο και οι απαντήσεις φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

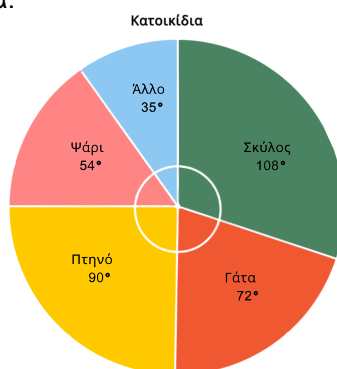
Κατοικίδιο	Συχνότητες
Σκύλος	6
Γάτα	4
Πτηνό	5
Ψάρι	3
Άλλο	2
Σύνολο	20

Για να κατασκευάσουμε το κυκλικό διάγραμμα, υπολογίζουμε τις αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες: $\frac{\text{συχνότητα τιμής}}{\text{σύνολο}} = \frac{\hat{\omega}}{360^\circ}$.

Έχουμε:

- Σκύλος: $\frac{6}{20} = \frac{\hat{\omega}_1}{360^\circ}$ ή $\hat{\omega}_1 = \frac{6}{20} \cdot 360^\circ = 108^\circ$.
- Γάτα: $\frac{4}{20} = \frac{\hat{\omega}_2}{360^\circ}$ ή $\hat{\omega}_2 = \frac{4}{20} \cdot 360^\circ = 72^\circ$.
- Πτηνό: $\frac{5}{20} = \frac{\hat{\omega}_3}{360^\circ}$ ή $\hat{\omega}_3 = \frac{5}{20} \cdot 360^\circ = 90^\circ$.
- Ψάρι: $\frac{3}{20} = \frac{\hat{\omega}_4}{360^\circ}$ ή $\hat{\omega}_4 = \frac{3}{20} \cdot 360^\circ = 54^\circ$.
- Άλλο: $\frac{2}{20} = \frac{\hat{\omega}_5}{360^\circ}$ ή $\hat{\omega}_5 = \frac{2}{20} \cdot 360^\circ = 36^\circ$.

Κατασκευάζουμε το κυκλικό διάγραμμα:



Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση



Ιστογράμματα συχνοτήτων κλάσεων

Όταν τα δεδομένα έχουν ομαδοποιηθεί σε κλάσεις, τότε συνήθως παριστάνουμε τα δεδομένα αυτά με το **ιστόγραμμα**.

Το ιστόγραμμα αποτελείται από συνεχόμενα ορθογώνια που έχουν:

- **βάση** ίση με πλάτος κάθε κλάσης και
- **ύψος** ίσο με τη συχνότητα της αντίστοιχης κλάσης.

Με αντίστοιχο τρόπο κατασκευάζεται και το ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων.

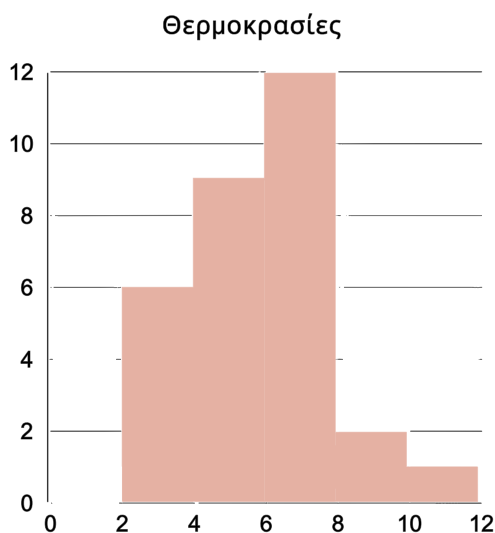
Σχόλιο: Το ιστόγραμμα είναι κατάλληλο, όταν έχουμε έναν μεγάλο αριθμό δεδομένων τα οποία μπορούν να παρασταθούν συνοπτικά, ενώ μέσω αυτού, οι ακραίες τιμές γίνονται άμεσα αντιληπτές. Το ιστόγραμμα δεν είναι κατάλληλο για κατηγορικά δεδομένα και, επίσης, μπορεί να διαφέρει, ανάλογα με τον αριθμό των κλάσεων που θα επιλέξουμε, με αποτέλεσμα να προκαλέσει σύγχυση.

Παράδειγμα:

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται η μέγιστη θερμοκρασία (σε °C), ανά ημέρα, μιας ορεινής περιοχής τον Νοέμβριο:

Θερμοκρασία (σε °C)	Ημέρες
2 – 4	6
4 – 6	9
6 – 8	12
8 – 10	2
10 – 12	1
Σύνολο	30

Τοποθετούμε στον οριζόντιο άξονα τα άκρα των κλάσεων. Κάθε ορθογώνιο έχει ύψος ίσο με τη συχνότητα της αντίστοιχης κλάσης.



Αντιλαμβάνομαι

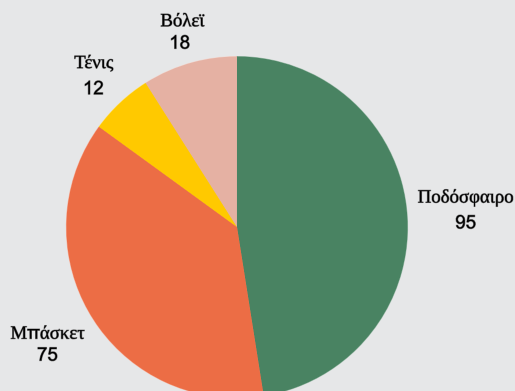


με προσομοίωση



1

Ρωτήσαμε μερικούς/ές μαθητές/τριες ποιο άθλημα είναι το αγαπημένο τους και οι απαντήσεις τους φαίνονται στο παρακάτω κυκλικό διάγραμμα.



- Πόσοι/ες είναι όλοι/ες οι μαθητές/τριες που ρωτήθηκαν;
- Ποιο είναι το ποσοστό των μαθητών/τριών που προτιμάει το μπάσκετ;
- Ποιο είναι το ποσοστό των μαθητών/τριών που προτιμάει το βόλεϊ;
- Ποια είναι η επίκεντρη γωνία που αντιστοιχεί στο μπάσκετ;
- Ποια είναι η επίκεντρη γωνία που αντιστοιχεί στο ποδόσφαιρο;

2

Σε μια έρευνα ρωτήθηκαν 200 μαθητές/τριες σχετικά με το αγαπημένο είδος ταινιών και προέκυψαν τα παρακάτω αποτελέσματα. Κατασκεύασε το αντίστοιχο κυκλικό διάγραμμα.

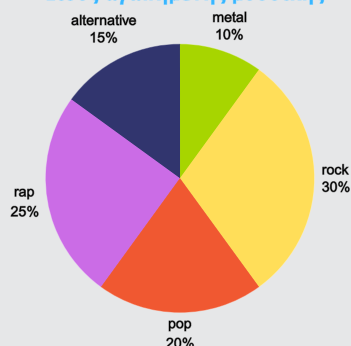
Είδος	Μαθητές/τριες
Δράσης	80
Κινουμένων σχεδίων	40
Κωμωδία	30
Κοινωνική	50

3

Σε μία έρευνα ρωτήθηκαν 200 άτομα σχετικά με το είδος μουσικής που προτιμούν. Τα αποτελέσματα φαίνονται στο παρακάτω κυκλικό διάγραμμα.

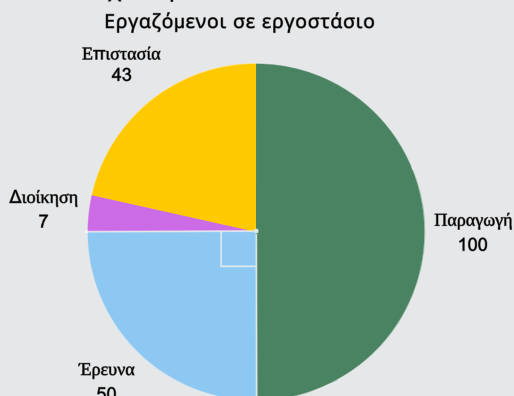
- Πόσα άτομα προτιμούν κάθε είδος μουσικής;
- Ποια είναι η αντίστοιχη γωνία που αντιστοιχεί σε κάθε είδος;
- Για ποιον λόγο κρίνεις ότι επιλέχθηκε το κυκλικό διάγραμμα για την αναπαράσταση των δεδομένων; Θα μπορούσε να αξιοποιηθεί άλλη μορφή αναπαράστασης;

Είδος αγαπημένης μουσικής



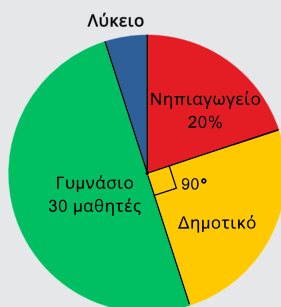
4

Στο παρακάτω κυκλικό διάγραμμα βρες τις επίκεντρες γωνίες και στη συνέχεια κατασκεύασε τον πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.



5

Σε μία έρευνα ρωτήθηκαν 60 οικογένειες της πόλης για τη βαθμίδα φοίτησης των παιδιών τους. Παρακάτω φαίνονται τα αποτελέσματα στο κυκλικό διάγραμμα. Επίλεξε τις σωστές απαντήσεις μελετώντας το διάγραμμα:



	A	B	Γ
α. Πόσα παιδιά είναι στο Δημοτικό;	20	15	6
β. Τι ποσοστό των παιδιών είναι στο Λύκειο;	5%	10%	2%
γ. Τι ποσοστό των παιδιών είναι στο Γυμνάσιο;	30%	40%	50%
δ. Η επίκεντρη γωνία που αντιστοιχεί στα παιδιά του Γυμνασίου είναι:	180°	90°	270°
ε. Η επίκεντρη γωνία που αντιστοιχεί στα παιδιά του Λυκείου είναι:	10°	18°	5°

6

Σε ένα αεροδρόμιο γίνεται έλεγχος της μάζας των αποσκευών. Μερικά αποτελέσματα έχουν καταγραφεί στον παρακάτω πίνακα:

Μάζα σε κιλά	Αποσκευές
1 – 3	10
3 – 5	7
5 – 7	13
7 – 9	6
9 – 11	14
Σύνολο	

- Βρες τις σχετικές συχνότητες και στη συνέχεια κατασκεύασε το ιστόγραμμα συχνοτήτων.
- Αν κάθε αποσκευή από 7 κιλά και πάνω θεωρείται υπέρβαρη, βρες το ποσοστό των αποσκευών που είναι εντός του επιτρεπόμενου ορίου.

7

Στο παρακάτω ιστόγραμμα φαίνονται οι ηλικίες 60 εργαζομένων σε μια εταιρεία. Έχουμε ομαδοποιήσει τα δεδομένα σε κλάσεις ίσου πλάτους.



α. Μελέτησε το παραπάνω ιστόγραμμα και κατασκεύασε τον πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.

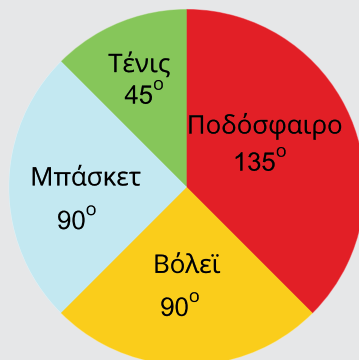
β. Κατασκεύασε το ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων.

8

Στο παρακάτω κυκλικό διάγραμμα φαίνονται σε μοίρες τα μέτρα των γωνιών τα οποία αντιστοιχούν στους τέσσερις κυκλικούς τομείς, σχετικά με το αγαπημένο άθλημα 120 μαθητών/τριών.

α) Υπολόγισε το πλήθος των μαθητών/τριών που προτιμούν κάθε άθλημα.

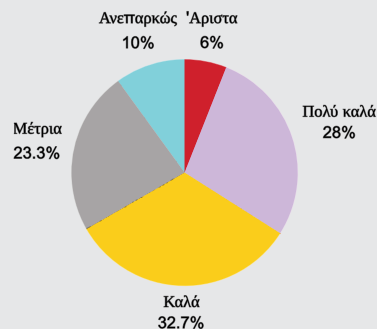
β) Βρες τις σχετικές συχνοτήτες που αντιστοιχούν σε κάθε άθλημα.



9

Το παρακάτω κυκλικό διάγραμμα παρουσιάζει τη βαθμολογική απόδοση των μαθητών/τριών ενός Γυμνασίου. Να μετατρέψεις το παρακάτω κυκλικό διάγραμμα σε ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων. Ποια είναι τα πλεονεκτήματα και ποια τα μειονεκτήματα κάθε αναπαράστασης;

Βαθμός	Χαρακτηρισμός
18,5 - 20	Άριστα
15,5 - 18,5	Πολύ καλά
12,5 - 15,5	Καλά
10 - 12,5	Μέτρια
1 - 10	Ανεπαρκώς



Ανακεφαλαίωση (Διαχείριση δεδομένων)

Πληθυσμός είναι μία ομάδα ατόμων ή ένα σύνολο αντικειμένων του οποίου τα στοιχεία μελετάμε ως προς κάποιο χαρακτηριστικό τους.

Η διαδικασία με την οποία εξετάζεται και καταγράφεται κάθε άτομο/στοιχείο του πληθυσμού ονομάζεται **απογραφή**.

Επειδή η απογραφή απαιτεί πολύ χρόνο και είναι οικονομικά ασύμφορη, επιλέγουμε ένα μόνο μέρος του πληθυσμού το οποίο ονομάζεται **δείγμα**.

Το δείγμα επιλέγεται με τέτοιο τρόπο ώστε τα συμπεράσματα που θα προκύψουν να είναι **αξιόπιστα**. Τότε λέμε ότι το δείγμα είναι **αντιπροσωπευτικό** του πληθυσμού.

Μεταβλητή λέγεται το χαρακτηριστικό ως προς το οποίο εξετάζεται ένας πληθυσμός.

Τα στατιστικά δεδομένα που προκύπτουν από την εξέταση των ατόμων του πληθυσμού τα **διακρίνουμε**:

1. Σε **κατηγορικά** δεδομένα των οποίων οι τιμές τους δεν είναι αριθμοί.
2. Σε **ποσοτικά** δεδομένα των οποίων οι τιμές τους είναι αριθμοί τα οποία διακρίνονται:
 - A. Σε **διακριτά** δεδομένα, τα οποία παίρνουν μεμονωμένες τιμές.
 - B. Σε **συνεχή** δεδομένα, που μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή μέσα σε ένα διάστημα.

Όταν τα δεδομένα που προκύπτουν παίρνουν πολλές διαφορετικές τιμές είναι προτιμότερο να κάνουμε **ομαδοποίηση**, χωρίζουμε δηλαδή τα δεδομένα σε **ομάδες** που λέγονται **κλάσεις**.

Παρουσιάζουμε τα ομαδοποιημένα δεδομένα με **ιστόγραμμα** συχνοτήτων ή σχετικών συχνοτήτων. Το ιστόγραμμα αποτελείται από συνεχόμενα ορθογώνια που έχουν:

- **βάση** ίση με πλάτος κάθε κλάσης και
- **ύψος** ίσο με τη συχνότητα της αντίστοιχης κλάσης.

Το **κυκλικό διάγραμμα** είναι ένας κυκλικός δίσκος χωρισμένος σε κυκλικούς τομείς που παριστάνουν τα διαφορετικά δεδομένα. Οι αντίστοιχες **κεντρικές γωνίες** υπολογίζονται από την αναλογία:

$$\frac{\text{Συχνότητα τιμής}}{\text{Σύνολο}} = \frac{\omega}{360^\circ}$$

Αυτοαξιολόγηση (Διαχείριση δεδομένων)

A. Χαρακτήρισε ως Σωστές ή Λάθος τις προτάσεις, βάζοντας ένα x στην κατάλληλη θέση:

	Σωστό	Λάθος
1. Τα ποσοτικά δεδομένα διακρίνονται σε διακριτά και συνεχή δεδομένα.		
2. Τα συνεχή δεδομένα παίρνουν μεμονωμένες τιμές.		
3. Τα συνεχή δεδομένα δεν είναι αριθμοί.		
4. Τα κατηγορικά δεδομένα δεν είναι αριθμοί.		
5. Σε μια έρευνα για νέους έως 30 ετών, εξετάσαμε 100 άτομα τα οποία αποτελούν τον πληθυσμό της έρευνας.		
6. Όταν εξετάζουμε τον αριθμό των αδελφών των μαθητών/τριών είναι προτιμότερο να ομαδοποιήσουμε τα δεδομένα.		
7. Ένα δεδομένο με σχετική συχνότητα 50% αντιστοιχεί σε μισό κυκλικό δίσκο στο κυκλικό διάγραμμα.		
8. Ένα δεδομένο με σχετική συχνότητα 25% αντιστοιχεί σε τομέα με επίκεντρο γωνία 90° στο κυκλικό διάγραμμα.		
9. Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται όταν οι τιμές που παίρνουν τα δεδομένα είναι πολλές.		
10. Το κέντρο της κλάσης 1 – 8 είναι το 4.		
11. Σε ομαδοποιημένα δεδομένα τα κέντρα των κλάσεων διαφέρουν μεταξύ τους όσο και το πλάτος των κλάσεων.		
12. Αν σε μία έρευνα για την αγαπημένη ομάδα των φιλάθλων ρωτήσουμε 200 άτομα στον Πειραιά το δείγμα θα είναι αξιόπιστο.		
13. Η μεταβλητή «βάρος μαθητών» είναι ποσοτική και συνεχή.		
14. Κατά την απογραφή εξετάζονται όλα τα άτομα ενός πληθυσμού.		
15. Το 35% των 400 ατόμων ενός δείγματος είναι 140 άτομα.		
16. Τα 25 άτομα σε ένα δείγμα 400 ατόμων αποτελούν το 62,5% του δείγματος.		

B. Αναζητήστε σε έντυπα (βιβλία, εφημερίδες, περιοδικά) και στο διαδίκτυο (άρθρα, έρευνες, κ.α.) παραδείγματα από την καθημερινή ζωή στην οποία αξιοποιούνται αναπαραστάσεις (κυκλικό διάγραμμα, ραβδόγραμμα, κ.α.) και συζητήστε στην τάξη τους λόγους για τους οποίους επιλέχθηκε κάθε φορά το συγκεκριμένο είδος αναπαράστασης.

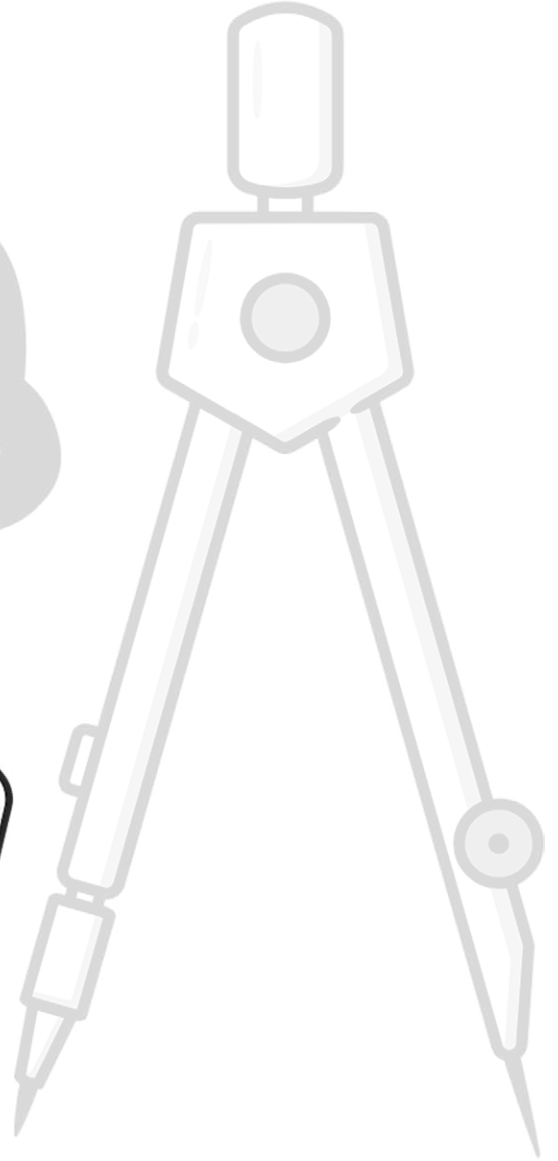
Εξασκούμε



σε όσα έμαθα

☑ Σε αυτό το σημείο, θα πρέπει να είσαι σε θέση να έχεις επιτύχει όλα τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα. Γύρνα στην αρχή της θεματικής ενότητας και σημείωσε ✓ στα αντίστοιχα κουτάκια. Υπάρχουν στόχοι που αισθάνεσαι ότι δεν έχεις κατακτήσει πλήρως;

$$2^3 = 8$$



ΜΕΤΡΑ ΘΕΣΗΣ - ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑ

Γ.2

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε να χρησιμοποιούμε τα μέτρα θέσης, όπως η μέση τιμή και η διάμεσος, για να περιγράψουμε και να συγκρίνουμε δεδομένα. Θα αναλύσουμε χαρακτηριστικά ενός συνόλου δεδομένων, όπως το εύρος, τις κορυφές και τις ακραίες τιμές, διερευνώντας τη μεταβλητότητά τους.

Πώς μπορείς να εξηγήσεις τη διακύμανση σε αποτελέσματα εξετάσεων;

Είσαι έτοιμος/η να αποκωδικοποιήσεις την πληροφορία που κρύβεται πίσω από τους αριθμούς;



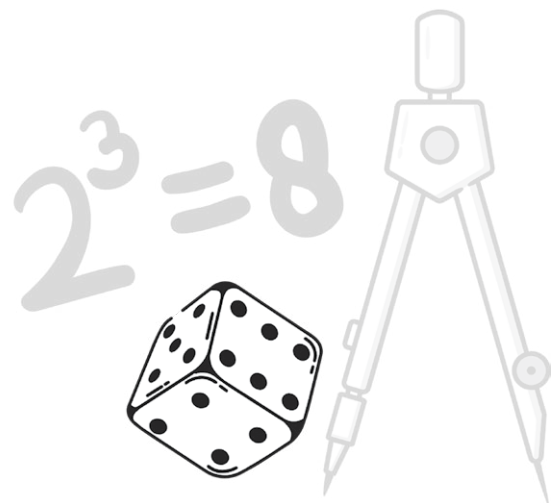
- Χρησιμοποιώ τα μέτρα θέσης για να περιγράψω δεδομένα, να κάνω συγκρίσεις και να εξαγάγω συμπεράσματα.
- Περιγράφω χαρακτηριστικά των δεδομένων όπως το εύρος, η ύπαρξη πολλαπλών κορυφών και οι απόμακρες τιμές από ένα ιστόγραμμα συχνότητων.
- Διερευνώ πιθανές ερμηνείες για χαρακτηριστικά των δεδομένων, όπως λόγοι ύπαρξης απόμακρων τιμών ή πιθανούς λόγους για τη μεταβλητότητα των δεδομένων.



2.1: Μέση τιμή, διάμεσος

2.2: Εύρος, κορυφές, πολλαπλές κορυφές, απόμακρες τιμές / Μεταβλητότητα δεδομένων

+ Ανακεφαλαίωση / Αυτοαξιολόγηση



2.1 | Μέση τιμή, διάμεσος

Εξερευνώ



Παρακάτω φαίνονται οι επιδόσεις 3 μαθητών στο πρώτο τετράμηνο.

Μπορείς να συγκρίνεις τις βαθμολογίες των μαθητών;

Ποιος μαθητής είχε την καλύτερη και ποιος την χειρότερη επίδοση;

17	17	16
16	15	17
9	10	11
19	17	16
17	11	15
11	16	14
17	12	16
12	17	13
19	18	18

Μέτρα θέσης - Μέση τιμή

Ένα από τα σημαντικότερα μέτρα θέσης της Στατιστικής είναι η **μέση τιμή**, από την οποία προκύπτουν χρήσιμα συμπεράσματα για το δείγμα.

Για να υπολογίσουμε τη **μέση τιμή** ή τον **μέσο όρο** ενός συνόλου δεδομένων, προσθέτουμε τις τιμές όλων των δεδομένων και διαιρούμε το άθροισμά τους με το πλήθος των δεδομένων.

$$\text{Μέση τιμή} = \frac{\text{άθροισμα των δεδομένων}}{\text{πλήθος των δεδομένων}}$$

Παράδειγμα: Οι βαθμολογίες μίας μαθήτριας σε 5 μαθήματα είναι 12, 14, 17, 19 και 20.

Η μέση τιμή των βαθμών είναι:

$$\frac{12 + 14 + 17 + 19 + 20}{5} = \frac{82}{5} = 16,4.$$

Μέτρα θέσης - Διάμεσος

Παρακάτω φαίνεται ο αριθμός των ατόμων που επιβιβάστηκαν σε ένα τρένο, στις πρώτες 10 στάσεις:

5, 0, 1, 3, 2, 4, 0, 1, 61, 3

Αν υπολογίσουμε τη μέση τιμή των επιβατών βρίσκουμε:

$$\frac{5 + 0 + 1 + 3 + 2 + 4 + 0 + 1 + 61 + 3}{10} = \frac{80}{10} = 8.$$

Παρατηρούμε όμως ότι σε 9 από τις 10 στάσεις, ο αριθμός των επιβατών ήταν μικρότερος του 8. Αυτό συμβαίνει γιατί το δείγμα περιέχει μία ακραία τιμή (το 61) που είναι πολύ μεγαλύτερη από τις υπόλοιπες τιμές.

Ένα άλλο μέτρο, που δεν επηρεάζεται από ακραίες ή απόμακρες τιμές, είναι η διάμεσος.

Για να βρούμε τη **διάμεσο**, αρχικά βάζουμε τα δεδομένα σε **αύξουσα σειρά**.
Αν το πλήθος των δεδομένων είναι **περιττό**, τότε η διάμεσος είναι η **μεσαία τιμή**.

Παράδειγμα: Για να βρούμε τη διάμεσο των δεδομένων: 9, 7, 20, 2, 4,
αρχικά τοποθετούμε τους 5 αριθμούς σε αύξουσα σειρά: 2, 4, 7, 9, 20

Στη συνέχεια διαγράφουμε το 1ο με το τελευταίο δεδομένο, το 2ο με το προτελευταίο δεδομένο κ.ο.κ.

Τελικά απομένει ένα μόνο δεδομένο που είναι η διάμεσος: 2, 4, 7, 9, 20

Οι αριθμοί έχουν διάμεσο: $\delta = 7$.

Αν το πλήθος των δεδομένων είναι **άρτιο**, παίρνουμε ως διάμεσο τον **μέσο όρο** των δύο μεσαίων τιμών.

Παράδειγμα: Για να βρούμε τη διάμεσο των δεδομένων: 9, 7, 20, 23, 4, 2,
αρχικά τοποθετούμε τους 6 αριθμούς σε αύξουσα σειρά: 2, 4, 7, 9, 20, 23.

Στη συνέχεια διαγράφουμε το 1ο με το τελευταίο δεδομένο, το 2ο με το προτελευταίο δεδομένο κ.ο.κ.

Τελικά απομένουν δύο δεδομένα.

Η διάμεσος είναι ο μέσος όρος των δύο μεσαίων δεδομένων. 2, 4, 7, 9, 20, 23.

Οι αριθμοί έχουν διάμεσο: $\delta = \frac{7+9}{2} = \frac{16}{2} = 8$.



1. 50 μαθητές/τριες έλαβαν μέρος σε μία γραπτή δοκιμασία με 5 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής, όπου κάθε σωστή απάντηση ισοδυναμεί με 1 βαθμό.

Βαθμολογία	Μαθητές/τριες
0	3
1	5
2	7
3	10
4	9
5	16
Σύνολο	50

Ποια είναι η μέση βαθμολογία που συγκέντρωσαν οι 50 μαθητές/τριες;

Λύση:

Για να βρούμε τη μέση τιμή στον παραπάνω πίνακα συχνοτήτων:

- Πολλαπλασιάζουμε κάθε βαθμολογία με την αντίστοιχη συχνότητά της.
- Προσθέτουμε όλα τα γινόμενα.
- Διαιρούμε το άθροισμα αυτό με το σύνολο των μαθητών/τριών.

$$\text{Μέση τιμή: } \frac{0 \cdot 3 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 9 + 5 \cdot 16}{50} = 3,3.$$

Άρα, η μέση βαθμολογία των μαθητών/τριών είναι 3,3.

2. Μια εταιρεία τεχνητής νοημοσύνης έχει εκπαιδεύσει κάποιους αλγόριθμους για να λύνουν γεωμετρικά προβλήματα. Στον πίνακα φαίνεται ο χρόνος σε λεπτά στον οποίο ολοκλήρωσαν μια δοκιμασία 50 αλγόριθμοι.

Χρόνος (σε λεπτά)	Αλγόριθμοι
0 – 10	0
10 – 20	3
20 – 30	2
30 – 40	9
40 – 50	20
50 – 60	16
Σύνολο	50

Ποιος είναι ο μέσος χρόνος που χρειάστηκαν οι 50 αλγόριθμοι για να ολοκληρώσουν την δοκιμασία;

Λύση:

Τα δεδομένα είναι ομαδοποιημένα, συνεπώς δεν γνωρίζουμε τον ακριβή χρόνο που χρειάστηκε κάθε αλγόριθμος για να ολοκληρώσει τη δοκιμασία. Θεωρούμε ότι όλοι οι χρόνοι μιας κλάσης αντιπροσωπεύονται από το κέντρο της κλάσης.

Χρόνος (σε λεπτά)	Κέντρο κλάσης	Αλγόριθμοι
0 – 10	5	0
10 – 20	15	3
20 – 30	25	2
30 – 40	35	9
40 – 50	45	20
50 – 60	55	16
Σύνολο		50

Για να βρούμε τη μέση τιμή στον παραπάνω πίνακα με που περιέχει ομαδοποιημένα δεδομένα:

- πολλαπλασιάζουμε το κέντρο κάθε κλάσης με την αντίστοιχη συχνότητα της κλάσης αυτής.
- προσθέτουμε όλα τα γινόμενα.
- διαιρούμε το άθροισμα αυτό με το σύνολο των αλγόριθμων.

$$\text{Μέση τιμή: } \frac{5 \cdot 0 + 15 \cdot 3 + 25 \cdot 2 + 35 \cdot 9 + 45 \cdot 20 + 55 \cdot 16}{50} = 43,8.$$

Ο μέσος χρόνος που χρειάστηκαν οι μαθητές ήταν 43,8 λεπτά.

Εξασκούμαι



σε όσα έμαθα

1

Βρες τη μέση τιμή:

α) 100 παρατηρήσεων με άθροισμα 100.

β) 20 παρατηρήσεων με άθροισμα 50.

γ) 50 παρατηρήσεων με άθροισμα 10.

2

Βρες το άθροισμα:

α) 60 παρατηρήσεων με μέση τιμή 2.

β) 5 παρατηρήσεων με μέση τιμή 20.

γ) 10 παρατηρήσεων με μέση τιμή 0,1.

3

Βρες το πλήθος των παρατηρήσεων που έχουν:

α) μέση τιμή 2 και άθροισμα 100.

β) μέση τιμή 5 και άθροισμα 50.

γ) μέση τιμή 0,25 και άθροισμα 200.

4

Τα παρακάτω δεδομένα έχουν τοποθετηθεί σε αύξουσα σειρά.

22, 23, 24, ..., ..., 26, 27, 28

Βρες τους δύο φυσικούς αριθμούς που λείπουν αν γνωρίζεις ότι:

α) η διάμεσος των δεδομένων είναι 24.

β) η διάμεσος των δεδομένων είναι 25 (δύο περιπτώσεις).

γ) η διάμεσος των δεδομένων είναι 26.

5

Υπολόγισε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των παρατηρήσεων:

α) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

β) -1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4

γ) 10, 20, 5, 0, 100

6

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται ο μέσος όρος των βαθμολογιών των μαθητών/τριών δύο τμημάτων (Α και Β) στο μάθημα των Μαθηματικών.

Τμήμα Α	Τμήμα Β
17	18
18	16
15	16
12	11
14	15
13	13

Βρες τη μέση βαθμολογία και τη διάμεση βαθμολογία των δύο τμημάτων.

7

Παρακάτω φαίνονται τα αποτελέσματα στις 4 πρώτες εργασίες μιας φοιτήτριας σε ένα μάθημα. Τι βαθμό πρέπει να πάρει στην τελευταία εργασία για να περάσει το μάθημα με μέσο όρο 6;

Εργασία	1η	2η	3η	4η	5η
Βαθμολογία	4	6	5	7	;

8

Υπολόγισε τη μέση τιμή των δεδομένων των παρακάτω πινάκων:

A.

Τιμές	Συχνότητες
-3	6
-2	5
-1	3
0	20
1	15
2	11
Σύνολο	

B.

Τιμές	Συχνότητες
$\frac{2}{9}$	9
$\frac{1}{3}$	21
$\frac{3}{8}$	16
$\frac{1}{2}$	8
$\frac{4}{5}$	20
Σύνολο	

9

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται το πλήθος των ελαττωματικών προϊόντων, στη γραμμή παραγωγής ενός εργοστασίου.

Κλάσεις	Κέντρο	Συχνότητα
0 - 4		6
4 - 8		12
8 - 12		5
12 - 16		2
	Σύνολο	

Συμπλήρωσε τα κέντρα των κλάσεων και υπολόγισε τη μέση τιμή των δεδομένων του πίνακα.

2.2 | Εύρος, κορυφές, πολλαπλές κορυφές, απόμακρες τιμές / Μεταβλητότητα δεδομένων

ΕΞΕΡΧΕΝΩ



Παρακάτω φαίνονται οι βαθμολογίες 2 φοιτητών:

- Ποια είναι η μέση τιμή των βαθμών τους;
- Έχουν ίδια επίδοση οι φοιτητές;
- Ποιες διαφορές παρατηρείς στις βαθμολογίες τους;



Εύρος

Σε μία γραπτή δοκιμασία στα μαθηματικά, πήραν μέρος 5 μαθητές από δύο τμήματα. Οι βαθμολογίες των μαθητών ήταν:

- Τμήμα Α : 14, 15, 15, 15, 16.

- Τμήμα Β : 10, 11, 15, 19, 20.

Παρατηρούμε ότι οι βαθμολογίες στο τμήμα Α δεν διαφέρουν σημαντικά μεταξύ τους ενώ οι βαθμολογίες στο τμήμα Β διαφέρουν αρκετά μεταξύ τους. Λέμε ότι οι βαθμολογίες στο τμήμα Β έχουν μεγαλύτερη μεταβλητότητα.

Για να μελετήσουμε τη μεταβλητότητα μπορούμε να υπολογίσουμε τη διαφορά της μικρότερης από τη μεγαλύτερη βαθμολογία, βρίσκουμε:

- για το τμήμα Α: $16 - 14 = 2$.
- για το τμήμα Β: $20 - 10 = 10$.

Η διαφορά για το τμήμα Α είναι 2 και για το τμήμα Β είναι 10. Λέμε ότι οι βαθμολογίες στο τμήμα Β έχουν μεγαλύτερο **εύρος**.

Γενικά:

Εύρος R = (Μεγαλύτερο δεδομένο) – (Μικρότερο δεδομένο)

Παράδειγμα: Σε ένα διαγώνισμα μαθηματικών οι βαθμολογίες 7 μαθητών/τριών ήταν:

17, 15, 9, 12, 19, 15, 16

- Η μεγαλύτερη βαθμολογία είναι 19.
- Η μικρότερη βαθμολογία είναι 9.

Εύρος: $R = 19 - 9 = 10$.

Για να βρούμε το εύρος σε **ομαδοποιημένα** δεδομένα, υπολογίζουμε τη διαφορά του μικρότερου άκρου της πρώτης κλάσης από το μεγαλύτερο άκρο της τελευταίας κλάσης.

Κορυφή

Οι βαθμολογίες των μαθητών/τριών ενός τμήματος σε ένα τεστ είναι:

18, 18, 18, 18, 19, 20, 15, 10.

Παρατηρούμε ότι οι περισσότεροι/ες μαθητές/τριες πήραν 18 στο τεστ. Το δεδομένο αυτό ονομάζεται **κορυφή**.

Γενικά:

Το δεδομένο που εμφανίζεται τις περισσότερες φορές ονομάζεται **κορυφή** ή **επικρατούσα τιμή**.

Παραδείγματα:

- Στα δεδομένα 0, 1, 5, 1, 5, 5, 2, 0, 3, ο αριθμός 5 εμφανίζεται τις περισσότερες φορές (3 φορές). Άρα η κορυφή είναι το 5.
- Στα δεδομένα 4, 1, 2, 1, 1, 4, 5, 7, 4 οι αριθμοί 1 και 4 εμφανίζονται τις περισσότερες φορές (από 3 φορές). Άρα οι κορυφές είναι το 1 και το 4.

Γενικά:

Αν υπάρχουν περισσότερες από μία κορυφές, τότε λέμε ότι έχουμε **πολλαπλές κορυφές**.

Απόμακρη τιμή

Παρακάτω φαίνεται το ύψος βροχής, (σε mm) που έπεσαν σε μία περιοχή ανά ώρα:

5, 0, 2, 2, 5, 10, 120, 30, 5, 1, 0.

Παρατηρούμε ότι η τιμή «120» διαφέρει σημαντικά από τις υπόλοιπες μετρήσεις. Το δεδομένο αυτό ονομάζεται **απόμακρη τιμή** του δείγματος.

Γιατί όμως υπάρχουν απόμακρες τιμές;

Στο παραπάνω παράδειγμα το δεδομένο 120 (απόμακρη τιμή) δείχνει την ώρα κατά την οποία η ποσότητα βροχής που έπεσε στην περιοχή ήταν σημαντικά μεγαλύτερη από τις υπόλοιπες ώρες αυτής της ημέρας.

Σχόλιο: Η ύπαρξη απόμακρων τιμών και η μεταβλητότητα των δεδομένων μπορεί να οφείλονται σε διάφορους λόγους. Για παράδειγμα, το ύψος ή το βάρος των ανθρώπων μπορεί να διαφέρει σημαντικά λόγω φυσικής ποικιλότητας. Απόμακρες τιμές θα παρατηρήσουμε κατά την καταγραφή θερμοκρασιών ακραίων καιρικών φαινομένων, λόγω σφαλμάτων κατά την καταγραφή των δεδομένων, κ.α.

Γενικά:

Απόμακρη τιμή ονομάζεται το δεδομένο που διαφέρει σημαντικά από τα υπόλοιπα δεδομένα του δείγματος.

Παράδειγμα:

Στα δεδομένα: 6, 2, 85, 9, 12, 8, ο αριθμός 85 είναι μία απόμακρη τιμή.

Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση

**1**

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται η ηλικία 20 εργαζομένων σε μια επιχείρηση.

19	24	35	27	31	18	22	30	44	19
23	65	48	34	21	27	34	22	19	26

Υπολόγισε το εύρος και την κορυφή των δεδομένων του πίνακα.

2

Υπολόγισε το εύρος και τη μέση τιμή για να εκτιμήσεις τα παρακάτω δεδομένα:

α) 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100

β) 0, 50, 50, 50, 50, 100

γ) 0, 1, 1, 1, 99, 99, 99, 100

Τι παρατηρείς;

3

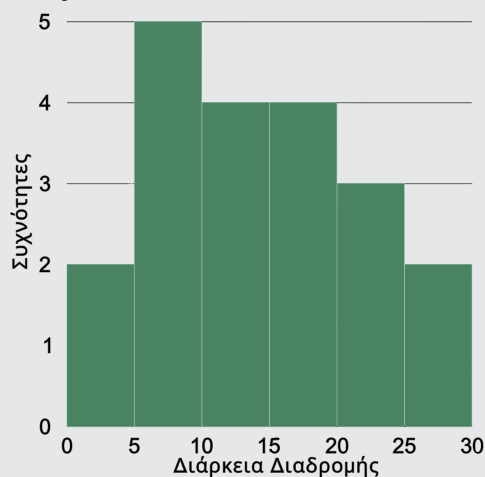
Παρακάτω φαίνονται οι επιδόσεις των μαθητών/τριών σε ένα τεστ μαθηματικών:

12, 14, 15, 13, 9, 17, 12, 16, 13, 11

Υπολόγισε τη μέση τιμή, το εύρος και την κορυφή των δεδομένων.

4

Στο παρακάτω ιστόγραμμα φαίνεται η διάρκεια της μετακίνησης των μαθητών/τριών προς το σχολείο από το σπίτι τους.



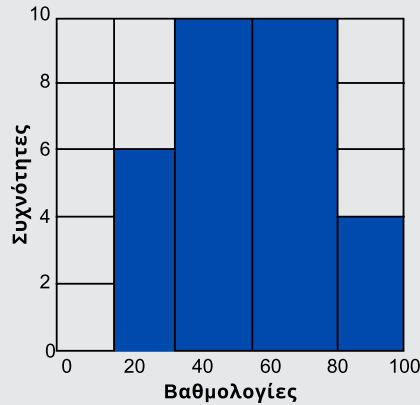
α. Πόσοι είναι όλοι οι μαθητές/τριες που πήραν μέρος στην έρευνα;

β. Ποιο είναι το εύρος της διάρκειας των διαδρομών;

γ. Υπάρχουν πολλαπλές κορυφές στο δείγμα; Υπάρχουν απόμακρες τιμές;

5

Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνονται τα αποτελέσματα σε ένα διαγώνισμα μαθηματικών με άριστα το 100.



- α. Πόσοι μαθητές/τριες εξετάστηκαν στο διαγώνισμα;
- β. Βρες το εύρος των δεδομένων. Υπάρχουν απόμακρες τιμές στο δείγμα;
- γ. Βρες το ποσοστό των μαθητών/τριών που έγραψε τουλάχιστον 60.

6

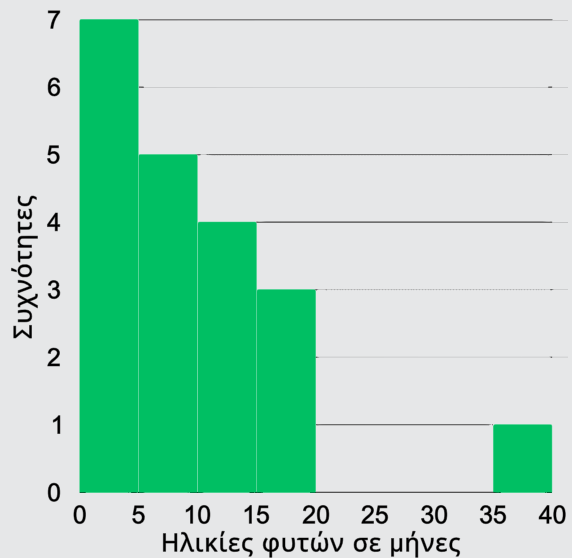
Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι θερμοκρασίες σε μια πόλη για μία εβδομάδα του έτους. Ποιο είναι το εύρος και ποια η μέση τιμή των θερμοκρασιών; Υπάρχουν απόμακρες τιμές στα δεδομένα;

Μέρα	Δευτέρα	Τρίτη	Τετάρτη	Πέμπτη	Παρασκευή	Σάββατο	Κυριακή
Θερμοκρασία (°C)	-4	1	-6	2	2	14	-2

7

Δίνεται το παρακάτω γράφημα που περιγράφει την ηλικία των φυτών στον κήπο μας.

- α. Βρες το εύρος των δεδομένων,
- β. Βρες την μέση τιμή των δεδομένων,
- γ. Υπάρχουν απόμακρες τιμές;



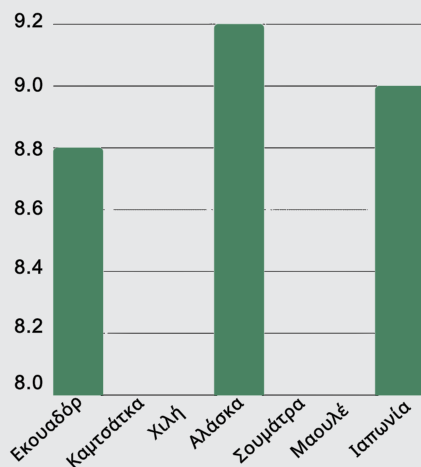
- Πώς αιτιολογείς την ύπαρξη ακραίων παρατηρήσεων;
- Περιμένεις ο κήπος να έχει περισσότερα ηλικιωμένα δέντρα ή νέα φυτά;

8

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας:

Σεισμός	Ρίχτερ	Χρονολογία
Εκουαδór		1906
Καμπσάτκα	9.0	1952
Χιλή	9.5	1960
Αλάσκα		1964
Σουμάτρα	9.1	2004
Χιλή (Μαουλέ)	8.8	2010
Ιαπωνία		2011

- α. Χρησιμοποίησε το παρακάτω γράφημα για να βρεις τα δεδομένα που λείπουν από τον πίνακα.
 β. Πόσο μεγαλύτερος είναι ο μεγαλύτερος από τον μικρότερο σεισμό του πίνακα;
 γ. Κατέταξε τους σεισμούς σε σειρά, από τον μεγαλύτερο στον μικρότερο. Έχει επιστημονικό ενδιαφέρον για τους σεισμολόγους να βρούμε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και την κορυφή των μεγεθών των σεισμών;



Εξασκούμαι



σε όσα έμαθα

Ανακεφαλαίωση (Μέτρα Θέσης - Μεταβλητότητα)

Για να υπολογίσουμε τη **μέση τιμή** ή τον **μέσο όρο** ενός συνόλου δεδομένων, προσθέτουμε τις τιμές όλων των δεδομένων και διαιρούμε το άθροισμά τους με το πλήθος των δεδομένων.

$$\text{Μέση τιμή} = \frac{\text{άθροισμα των δεδομένων}}{\text{πλήθος των δεδομένων}}$$

Για να βρούμε τη **διάμεσο** αρχικά βάζουμε τα δεδομένα σε **αύξουσα σειρά**.

- αν το πλήθος των δεδομένων είναι **περιττό**, τότε η διάμεσος είναι η **μεσαία τιμή**.
- αν το πλήθος των δεδομένων είναι **άρτιο**, παίρνουμε ως διάμεσο το **μέσο όρο** των δύο μεσαίων τιμών.

Το **εύρος** είναι η διαφορά της τιμής του μικρότερου δεδομένου από το μεγαλύτερο δεδομένο.

$$\text{Εύρος } R = (\text{Μεγαλύτερο δεδομένο}) - (\text{Μικρότερο δεδομένο})$$

Για να βρούμε το εύρος σε **ομαδοποιημένα** δεδομένα, υπολογίζουμε τη διαφορά του μικρότερου άκρου της πρώτης κλάσης από το μεγαλύτερο άκρο της τελευταίας κλάσης.

Το δεδομένο που εμφανίζεται τις περισσότερες φορές ονομάζεται **κορυφή** ή **επικρατούσα τιμή**. Αν υπάρχουν περισσότερες από μία κορυφές, τότε λέμε ότι έχουμε **πολλαπλές κορυφές**.

Απόμακρη τιμή ονομάζεται το δεδομένο που διαφέρει σημαντικά από τα υπόλοιπα δεδομένα του δείγματος.

Για να βρούμε τη **μέση τιμή σε πίνακα συχνοτήτων**:

1. Πολλαπλασιάζουμε κάθε δεδομένο με την αντίστοιχη συχνότητά του.
2. Προσθέτουμε όλα τα γινόμενα.
3. Διαιρούμε το άθροισμα αυτό με το σύνολο των δεδομένων.

Για να βρούμε τη **μέση τιμή σε ομαδοποιημένα δεδομένα**:

1. Πολλαπλασιάζουμε το κέντρο κάθε κλάσης με την αντίστοιχη συχνότητα της κλάσης αυτής.
2. Προσθέτουμε όλα τα γινόμενα.
3. Διαιρούμε το άθροισμα αυτό με το σύνολο των δεδομένων.

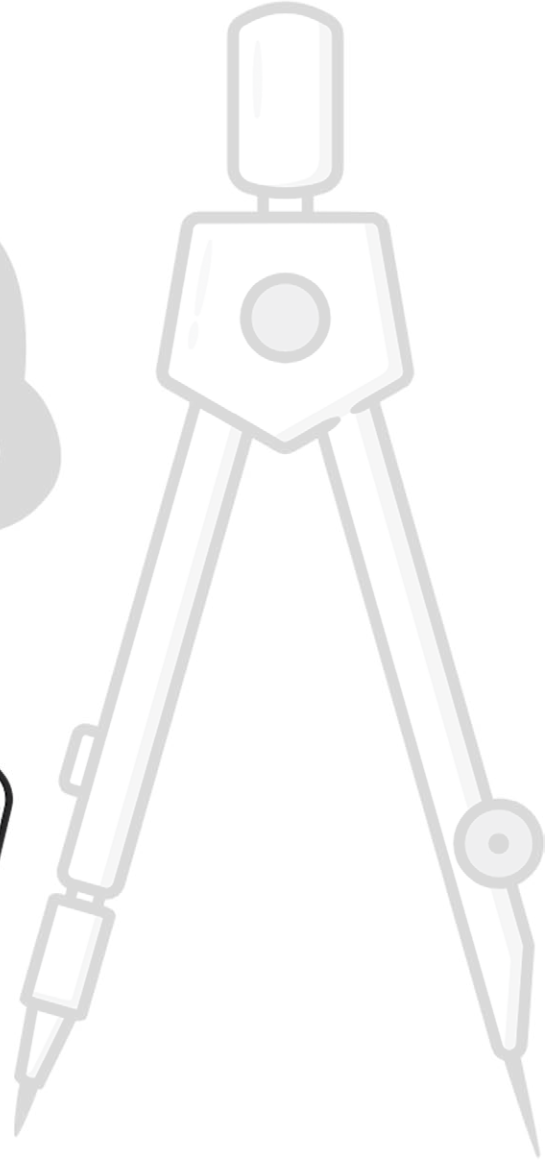
Ανακεφαλαίωση (Μέτρα θέσης - Μεταβλητότητα)

1. Χαρακτήρισε ως Σωστές ή Λάθος τις προτάσεις που ακολουθούν βάζοντας ένα **x** στην κατάλληλη θέση.

	Σωστό	Λάθος
1. Αν το πλήθος των δεδομένων είναι άρτιο, τότε η διάμεσος είναι η μεσαία τιμή.		
2. Τα δεδομένα 1,1,1,2,2,2,3,3,3 έχουν μέση τιμή ίση με τη διάμεσο.		
3. Το άθροισμα 50 αριθμών είναι 450. Η μέση τιμή τους είναι 9.		
4. Η μέση τιμή 30 αριθμών είναι 6. Το άθροισμα των τιμών τους είναι 5.		
5. Η διάμεσος των παρατηρήσεων 4, 5, 2, 1, 3 είναι το 2.		
6. Η διάμεσος ισούται πάντα με τη μέση τιμή.		
7. Το εύρος των δεδομένων -6, -5, +6, -1,+2, -9, +1 είναι 3.		
8. Στα δεδομένα 0,9,5,6,5,0,4,8 υπάρχουν δύο κορυφές.		
9. Στα δεδομένα 99,98,96,100, το 100 είναι μία απόμακρη τιμή.		
10. Δεδομένα έχουν μέση τιμή 40 και άθροισμα 200. Το πλήθος τους είναι 5.		
11. Η διάμεσος δεν επηρεάζεται από απόμακρες τιμές.		
12. Η μέση τιμή δεν επηρεάζεται από απόμακρες τιμές.		
13. Η διάμεσος 100 παρατηρήσεων είναι ο μέσος όρος των δύο μεσαίων παρατηρήσεων.		
14. Τρεις μαθητές έχουν μέσο ύψος 160cm και δύο άλλοι μαθητές έχουν μέσο ύψος 170cm. Οι πέντε μαθητές έχουν μέσο ύψος 165cm.		
15. Είναι δυνατό να υπάρχουν πολλές απόμακρες τιμές.		
16. Η μέση τιμή των δεδομένων 0,1,2,3,40,44 είναι μεγαλύτερη από τη διάμεσό τους.		

Σε αυτό το σημείο, θα πρέπει να είσαι σε θέση να έχεις επιτύχει όλα τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα. Γύρνα στην αρχή της θεματικής ενότητας και σημείωσε ✓ στα αντίστοιχα κουτάκια. Υπάρχουν στόχοι που αισθάνεσαι ότι δεν έχεις κατακτήσει πλήρως;

$$2^3 = 8$$



ΠΕΙΡΑΜΑΤΑ ΤΥΧΗΣ ΚΑΙ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Γ.3

Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε τα πειράματα τύχης και τις πιθανότητες αναπαριστώντας τα ενδεχόμενα με πίνακες ή δένδροδιαγράμματα. Θα μάθουμε να υπολογίζουμε την πιθανότητα ενός ενδεχομένου με τον κλασικό ορισμό και να τη συγκρίνουμε με την συχνότητα που προκύπτει από ένα επαναλαμβανόμενο πείραμα.

Πώς συνδέεται η πιθανότητα με καθημερινές καταστάσεις, όπως οι προβλέψεις για τον καιρό ή οι πιθανότητες να κερδίσεις σε ένα παιχνίδι τύχης;

Είσαι έτοιμος/η να μελετήσεις την έννοια της πιθανότητας και της τυχαιότητας;



- Προσδιορίζω και περιγράφω τον δειγματικό χώρο ενός πειράματος τύχης που πραγματοποιείται σε ένα ή περισσότερα στάδια χρησιμοποιώντας αναπαραστάσεις του δειγματικού χώρου σε πίνακες ή δένδροδιαγράμματα.
- Μεταφράζω τα ενδεχόμενα από τη φυσική γλώσσα σε στοιχεία του δειγματικού χώρου.
- Χρησιμοποιώ τον κλασικό ορισμό των Πιθανοτήτων για να υπολογίσω την πιθανότητα ενός σύνθετου ενδεχομένου.
- Συγκρίνω την πιθανότητα ενδεχομένου με τη σχετική συχνότητα του ενδεχομένου η οποία προκύπτει από αυξανόμενο αριθμό επαναλήψεων του πειράματος ή από προσομίωση.

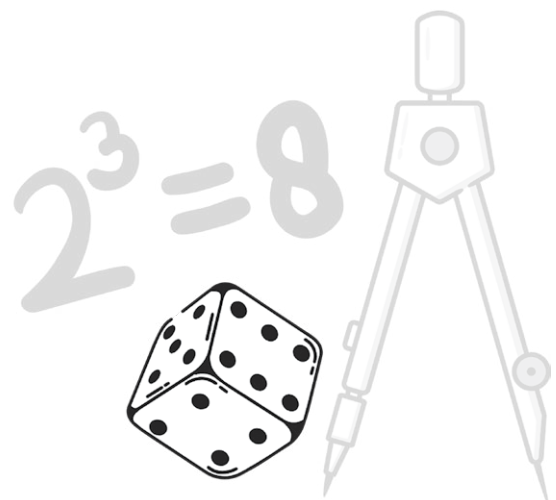


3.1: Πειράματα τύχης, δειγματικός χώρος

3.2: Δένδροδιάγραμμα

3.3: Κλασικός ορισμός της πιθανότητας

+ Ανακεφαλαίωση / Αυτοαξιολόγηση



3.1 | Πειράματα τύχης, δειγματικός χώρος

Εξερευνώ



Η Μυρτώ και ο Γιώργος παίζουν το γνωστό παιχνίδι «πέτρα, ψαλίδι, χαρτί». Ο Γιώργος σκέφτηκε να διαλέγει συνέχεια «πέτρα». Έχει διαλέξει «καλή» στρατηγική;



Πείραμα τύχης

Ο Μάριος ρίχνει ένα νόμισμα και φέρνει δύο φορές “γράμματα”. Ο Μάριος είναι σίγουρος ότι την επόμενη φορά που θα ρίξει το νόμισμα δεν θα φέρει “γράμματα” αλλά “κεφάλι”. Συμφωνείς με την άποψη αυτή; Γιατί νομίζεις ότι ο Μάριος έχει τη γνώμη αυτή;

Πείραμα τύχης ονομάζεται ένα πείραμα στο οποίο δεν μπορούμε να προβλέψουμε με βεβαιότητα το αποτέλεσμα του, όσες φορές και αν το επαναλάβουμε.

Παραδείγματα:

- Η ρίψη ενός ζαριού είναι ένα πείραμα τύχης γιατί όταν ρίχνουμε ένα ζάρι δεν μπορούμε να προβλέψουμε κάθε φορά με βεβαιότητα την ένδειξή του.
- Η ρίψη ενός νομίσματος είναι επίσης ένα πείραμα τύχης.

Δειγματικός χώρος

Επιλέγουμε τυχαία μαθητές και μαθήτριες γυμνασίων και καταγράφουμε την τάξη στην οποία φοιτούν. Τα αποτελέσματα που θα εμφανιστούν είναι Α' τάξη, Β' τάξη και Γ' τάξη που είναι όλα τα **δυνατά αποτελέσματα** και λέμε ότι αποτελούν τον **δειγματικό χώρο** του πειράματος τύχης.

Γενικά:

Όλα τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης αποτελούν τον **δειγματικό χώρο** του πειράματος.

Παραδείγματα:

- Τα δυνατά αποτελέσματα στην ρίψη ενός ζαριού είναι όλοι οι αριθμοί από το 1 έως και το 6. Άρα: Ο **δειγματικός χώρος** του πειράματος είναι: 1, 2, 3, 4, 5, 6.
- Τα δυνατά αποτελέσματα στην ρίψη νομίσματος είναι: Κεφάλι (Κ) και Γράμματα (Γ). Άρα: Ο **δειγματικός χώρος** του πειράματος είναι: Κ, Γ.



1

Ποια από τα παρακάτω είναι πειράματα τύχης;

- α) Ρίχνω ένα ζάρι και καταγράφω την πάνω όψη του.
- β) Μετρώ τη θερμοκρασία βρασμού του νερού.
- γ) Τραβάω ένα φύλλο από μία τράπουλα.
- δ) Προσδιορίζω τη μέρα που είναι 7 μέρες από σήμερα.
- ε) Παρατηρώ τα χρώματα των αυτοκινήτων στο δρόμο.
- στ) Ρίχνω ένα νόμισμα και καταγράφω την πάνω όψη του.

2

Προσδιόρισε τον δειγματικό χώρο στα παρακάτω πειράματα τύχης:

- α) Ρίχνω ένα νόμισμα και καταγράφω την πάνω όψη του.
- β) Ρίχνω ένα νόμισμα δύο φορές και καταγράφω την πάνω όψη του.

3

Προσδιόρισε τον δειγματικό χώρο στα παρακάτω πειράματα τύχης:

- α) Παίρνω μία μπάλα από ένα κουτί με 3 μπάλες διαφορετικού χρώματος (άσπρη, μαύρη, κόκκινη).
- β) Παίρνω με τη σειρά δύο μπάλες από ένα κουτί με 3 μπάλες διαφορετικού χρώματος (άσπρη, μαύρη, κόκκινη).

4

Σε ένα κουτί υπάρχουν δύο μπάλες, μια μαύρη και μια κόκκινη. Προσδιόρισε τον δειγματικό χώρο του πειράματος τύχης, όταν:

- α) επιλέγω δύο φορές μια μπάλα χωρίς να την επιστρέφω στο κουτί και
- β) επιλέγω δύο φορές μια μπάλα επιστρέφοντάς την στο κουτί.

5

Βρες ένα πείραμα τύχης που έχει ως δειγματικό χώρο τα παρακάτω στοιχεία:

- α) 1,2,3,4,5,6
- β) Δε, Τρ, Τε, Πε, Πα, Σα, Κυ
- γ) 0, 1
- δ) Α, Β, Γ

6

Παρακάτω φαίνεται ο τροχός της τύχης σε ένα Λούνα Παρκ.

- α) Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος εάν τον γυρίσουμε μια φορά;
- β) Από όλα τα δυνατά αποτελέσματα, ποια είναι αυτά που μας εξασφαλίζουν κάποιο δώρο;



7

Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος που προκύπτει όταν διαλέγω τυχαία ένα γράμμα της ελληνικής αλφάβητου; Είναι ίδιος με τον δειγματικό χώρο που προκύπτει αν διαλέξω τυχαία ένα γράμμα της αγγλικής αλφάβητου;

Εξασκούμαι



σε όσα έμαθα

3.2 | Δενδροδιάγραμμα

Εξερευνώ



Παρακάτω φαίνεται ο κατάλογος σε ένα ταχυφαγείο. Ποιες είναι όλες οι πιθανές επιλογές για ένα πλήρες γεύμα;

Κυρίως	Συνοδευτικό	Επιδόρπιο

Στα πειράματα τύχης που έχουμε δει έως τώρα προσδιορίσαμε με σχετική ευκολία τον δειγματικό τους χώρο, όπως για παράδειγμα στη ρίψη ζαριού (1,2,3,4,5,6) ή στη ρίψη νομίσματος (Κ,Γ).

Υπάρχουν όμως πειράματα στα οποία για να προσδιορίσουμε τον δειγματικό τους χώρο, είναι προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε ένα δενδροδιάγραμμα με το οποίο βρίσκουμε ευκολότερα τα στοιχεία ενός δειγματικού χώρου.

Η διαδικασία με την οποία κατασκευάζουμε ένα δενδροδιάγραμμα περιγράφεται στο παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα:

Ρίχνουμε τρεις φορές ένα νόμισμα και καταγράφουμε κάθε φορά την πάνω όψη του.

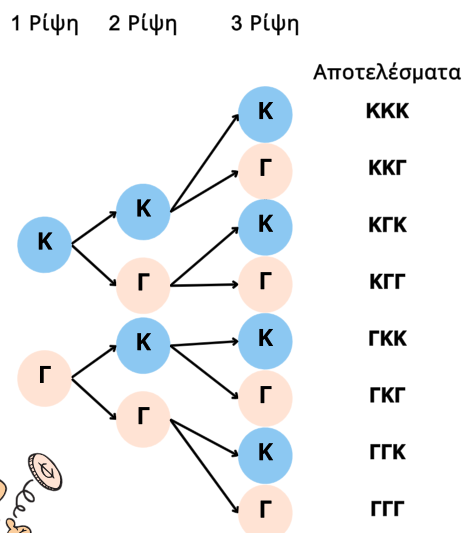
Για να προσδιορίσουμε τον δειγματικό χώρο του πειράματος κατασκευάζουμε ένα διάγραμμα, που περιέχει όλα τα δυνατά αποτελέσματα των τριών ρίψεων του νομίσματος.

Ακολουθώντας τα βέλη, καταγράφουμε στην τελευταία στήλη όλα τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος, τα οποία αποτελούν τον δειγματικό χώρο:

ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ, ΓΚΚ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ.

Το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου είναι 8.

Τα παραπάνω διάγραμμα ονομάζεται **δενδροδιάγραμμα**.



Πίνακας

Ένας άλλος τρόπος για να προσδιορίσουμε τον δειγματικό χώρο ενός πειράματος είναι η κατασκευή ενός πίνακα διπλής εισόδου όπως περιγράφεται στο παρακάτω παράδειγμα:

Παραδείγματα: Ρίχνουμε ένα ζάρι 2 φορές και καταγράφουμε την πάνω όψη του.

Για να προσδιορίσουμε τον δειγματικό χώρο του πειράματος κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα.

1 ρίψη 2 ρίψη	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Ο πίνακας περιέχει όλα τα στοιχεία του δειγματικού χώρου του πειράματος. Το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου είναι 36.



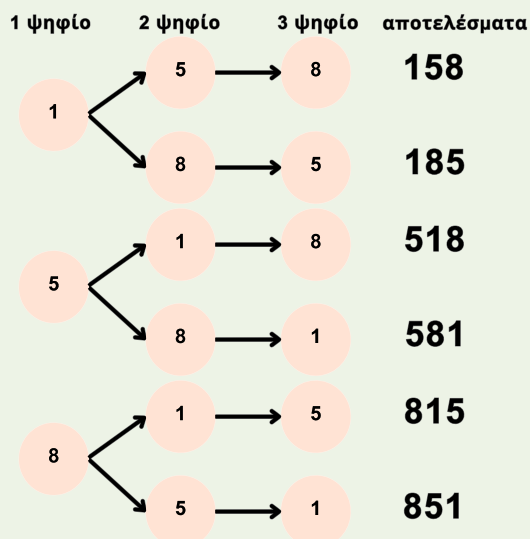
Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση

1. Πόσους τριψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία 1, 5, και 8 ώστε οι αριθμοί να έχουν όλα τους τα ψηφία διαφορετικά;

Λύση:



Ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι οι αριθμοί: 158, 185, 518, 581, 815, 851.



1 Βρες τον δειγματικό χώρο στο πείραμα τύχης που αποτελείται από το άθροισμα 2 ρίψεων ενός ζαριού.

ZAPI 1 ZAPI 2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4			
2						
3						
4						
5						
6						

2 Το χαρτοπωλείο πουλάει 3 είδη γραφικής ύλης: τετράδιο, στυλό και γόμες. Αν ένας πελάτης έχει ψωνίσει 2 τεμάχια οποιοδήποτε είδους, ποιος είναι ο δειγματικός χώρος που περιγράφει τις επιλογές του;

3 Σε έναν αθλητικό διαγωνισμό τα δυνατά αποτελέσματα είναι ήττα, ισοπαλία και νίκη. Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος που προκύπτει από τους αγώνες που θα δώσει μία ομάδα στον διαγωνισμό, αν αυτή αγωνιστεί 2 φορές ;

4 Γνωρίζουμε ότι το τηλέφωνο της Μαρίας είναι 797..12378..
 α. Πόσα στοιχεία περιέχει ο δειγματικός χώρος των πιθανών αριθμών του τηλεφώνου της Μαρίας;
 β. Βρες όλους τους πιθανούς συνδυασμούς από τους αριθμούς που λείπουν, αν γνωρίζεις ότι ο αριθμός του τηλεφώνου της Μαρίας διαιρείται με το 5 και το 9.

5 Ρίχνουμε διαδοχικά ένα νόμισμα και ένα ζάρι. Κατασκεύασε ένα δεντροδιάγραμμα και βρες τον δειγματικό χώρο του πειράματος όταν:
 α) Ρίχνουμε πρώτα το νόμισμα και στη συνέχεια το ζάρι.
 β) Ρίχνουμε πρώτα το ζάρι και στη συνέχεια το νόμισμα.

6

Ο Ευκλείδης διαθέτει 3 ζευγάρια παπούτσια (μαύρα, καφέ και λευκά), 2 παντελόνια (τζιν και φόρμα) και 3 μπλούζες (πράσινη, γκρι και γαλάζια). Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να ντυθεί;

7

Παρακάτω φαίνεται ο δειγματικός χώρος από ένα πείραμα τύχης που προκύπτει από ρίψεις ζαριού.

ZAPI 1 \ ZAPI 2	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

Ο παραπάνω δειγματικός χώρος προκύπτει:

- α. αφαιρώντας το αποτέλεσμα της ρίψης του ΖΑΡΙ 1 από το ΖΑΡΙ 2.
- β. αφαιρώντας το αποτέλεσμα της ρίψης του ΖΑΡΙ 2 από το ΖΑΡΙ 1.
- γ. αφαιρώντας το μικρότερο αποτέλεσμα από το μεγαλύτερο.
- δ. πολλαπλασιάζοντας τα αποτελέσματα των δύο ρίψεων.

Διάλεξε τη σωστή απάντηση και βρες τους δειγματικούς χώρους που προκύπτουν για τις άλλες επιλογές.

8

Μια κλειδαριά ξεκλειδώνει με συνδυασμό τριών αριθμών. Σε κάθε θέση υπάρχουν αριθμοί από το 1 έως και το 5. Βρες όλους τους πιθανούς συνδυασμούς που ξεκλειδώνουν την κλειδαριά, αν γνωρίζεις ότι όλα τα ψηφία πρέπει να είναι διαφορετικά και ότι ο πρώτος αριθμός είναι το 1.

1
---	-----	-----

3.3 | Κλασικός ορισμός της πιθανότητας



Αν ρίξουμε ένα νόμισμα, πόσο πιθανό είναι να φέρουμε «γράμματα»;



Γράφουμε σε χαρτάκια τα ονόματα των 100 μαθητών/τριών ενός σχολείου και τα τοποθετούμε σε μία κάλπη. Πόσο πιθανό είναι να τραβήξουμε το χαρτάκι με το όνομα μας;

Σε μία άσκηση Σωστού-Λάθους με 3 ερωτήσεις, απάντησα τυχαία Σ ή Λ. Πόσο πιθανό είναι να έχω πάρει άριστα;



Ενδεχόμενο

Μια ομάδα μαθητών/τριών παρατηρεί τον Πέτρο που ρίχνει ένα ζάρι. Από τους/τις μαθητές/τριες ακούγονται προβλέψεις για το αποτέλεσμα της ρίψης:

- Μαθήτρια Α: Θα φέρει 6.
- Μαθητής Β: Θα φέρει 1.
- Μαθήτρια Γ: Θα φέρει πάνω από 3.
- Μαθητής Δ: Θα φέρει 1 ή 2.



Τα παραπάνω είναι μερικά από τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος τύχης (ρίψη ζαριού) και ονομάζονται **ενδεχόμενα**.

- Ο Πέτρος ρίχνει το ζάρι και φέρνει 1.
- Κέρδισα, αναφωνεί ο μαθητής Β.
- Και εγώ, λέει ο Δ.

Λέμε ότι τα ενδεχόμενα αυτά **πραγματοποιούνται**, αφού περιέχουν το αποτέλεσμα της ρίψης του ζαριού.

Γενικά:

Ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης ονομάζεται ένα σύνολο που περιέχει ένα ή περισσότερα στοιχεία ενός δειγματικού χώρου.

Παραδείγματα: Ρίχνουμε ένα ζάρι.

Γνωρίζουμε ότι ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Μερικά ενδεχόμενα του πειράματος είναι:

- 6.
- 1 ή 2.
- Το αποτέλεσμα της ρίψης είναι άρτιος αριθμός.
- Το αποτέλεσμα της ρίψης είναι πάνω από 3.



Κλασικός ορισμός της πιθανότητας

Αν ρίξουμε ένα τίμιο (αμερόληπτο) ζάρι τότε κάθε έδρα του έχει την ίδια πιθανότητα να εμφανιστεί. Λέμε ότι όλα τα δυνατά αποτελέσματα είναι **ισοπίθανα**.

Γενικά:

Αν όλα τα δυνατά αποτελέσματα ενός δειγματικού χώρου έχουν την ίδια πιθανότητα να εμφανιστούν, τότε ονομάζονται **ισοπίθανα**.

Πόσο πιθανό είναι, αν ρίξουμε ένα ζάρι, να φέρουμε έναν συγκεκριμένο αριθμό;

Σε ένα πείραμα τύχης με ισοπίθανα αποτελέσματα, **πιθανότητα** ενός ενδεχομένου ονομάζεται το πηλίκο του πλήθους των επιθυμητών (ευνοϊκών) αποτελεσμάτων προς το πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων.

$$\text{πιθανότητα} = \frac{\text{πλήθος επιθυμητών αποτελεσμάτων}}{\text{πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων}}$$

Παραδείγματα:

- Ρίχνουμε ένα νόμισμα. Θα υπολογίσουμε την πιθανότητα να φέρουμε "γράμματα".

Πλήθος επιθυμητών αποτελεσμάτων: 1

Πλήθος δυνατών αποτελεσμάτων: 2

Άρα, η πιθανότητα να φέρουμε γράμματα είναι: $\frac{1}{2} = 0,5$ ή 50%.

- Ρίχνουμε ένα ζάρι. Θα υπολογίσουμε την πιθανότητα να φέρουμε 6.

Πλήθος επιθυμητών αποτελεσμάτων: 1

Πλήθος δυνατών αποτελεσμάτων: 6

Άρα, η πιθανότητα να φέρουμε 6 είναι: $\frac{1}{6} = 0,1\bar{6}$ ή περίπου 16,6%.

Σχόλιο

Επειδή το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων είναι μεγαλύτερο ή ίσο του πλήθους των επιθυμητών αποτελεσμάτων, η πιθανότητα ενός ενδεχομένου είναι ένας αριθμός **μεγαλύτερος ή ίσος από το 0** και **μικρότερος ή ίσος από το 1**. Δηλαδή:

$$0 \leq (\text{πιθανότητα}) \leq 1$$



Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση

1. Σε μία κάλπη τοποθετούμε μικρά χαρτάκια στα οποία έχουμε σημειώσει τους φυσικούς αριθμούς από το 0 έως και το 9. Επιλέγουμε τυχαία ένα χαρτάκι μέσα από την κάλπη. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

- α) ο αριθμός είναι το 0.
- β) ο αριθμός είναι περιττός.
- γ) ο αριθμός είναι μεγαλύτερος από 5.
- δ) ο αριθμός είναι μονοψήφιος.
- ε) ο αριθμός είναι διψήφιος.

Λύση:

Σύμφωνα με τον ορισμό της πιθανότητας, έχουμε:

$$\text{πιθανότητα} = \frac{\text{πλήθος επιθυμητών αποτελεσμάτων}}{\text{πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων}}$$

Τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος είναι οι αριθμοί 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 και 9. Το πλήθος τους είναι 10. Επομένως:

α) Η πιθανότητα να επιλέξουμε το 0 είναι:

$$\frac{1}{10} = 0,1 \text{ ή } 10\%.$$

β) Περιττοί είναι οι αριθμοί: 1, 3, 5, 7 και 9. Το πλήθος τους είναι 5.

Η πιθανότητα να επιλέξουμε περιττό αριθμό είναι:

$$\frac{5}{10} = 0,5 \text{ ή } 50\%.$$

γ) Μεγαλύτεροι του 5 είναι οι αριθμοί: 6, 7, 8 και 9. Το πλήθος τους είναι 4.

Η πιθανότητα να επιλέξουμε αριθμό μεγαλύτερο του 5 είναι:

$$\frac{4}{10} = 0,4 \text{ ή } 40\%.$$

δ) Μονοψήφιοι είναι και οι 10 αριθμοί, συνεπώς η πιθανότητα να επιλέξουμε μονοψήφιο αριθμό είναι:

$$\frac{10}{10} = 1 \text{ ή } 100\%.$$

Παρατηρούμε ότι το ενδεχόμενο αυτό πραγματοποιείται σε οποιαδήποτε εκτέλεση του πειράματος, για τον λόγο αυτόν ονομάζεται **βέβαιο ενδεχόμενο** και έχει **πιθανότητα 1 (ή 100%)**.

ε) Κανένας από τους αριθμούς του πειράματος δεν είναι διψήφιος, συνεπώς η πιθανότητα να επιλέξουμε διψήφιο αριθμό είναι:

$$\frac{0}{10} = 0 \text{ ή } 0\%.$$

Παρατηρούμε ότι το ενδεχόμενο αυτό δεν πραγματοποιείται σε οποιαδήποτε εκτέλεση του πειράματος, για τον λόγο αυτόν ονομάζεται **αδύνατο ενδεχόμενο** και έχει **πιθανότητα 0**.



1 Χαρακτήρισε ως Σωστές ή Λάθος τις προτάσεις που ακολουθούν βάζοντας ένα **x** στην κατάλληλη θέση.

	Σωστό	Λάθος
α) Η πιθανότητα ενός ενδεχομένου δεν μπορεί να πάρει τιμή μεγαλύτερη από 1.		
β) Η πιθανότητα να διαλέξω τυχαία έναν από τους αριθμούς 1 και -1 είναι $-\frac{1}{2}$.		
γ) Η πιθανότητα να διαλέξω τυχαία ένα φωνήεν από την ελληνική αλφάβητο είναι 0,1.		
δ) Αν η πιθανότητα να βρέξει είναι 40% τότε η πιθανότητα να μην βρέξει είναι 60%.		
ε) Το ενδεχόμενο να επιλέξω τυχαία μια ημέρα της εβδομάδας που αρχίζει από φωνήεν είναι βέβαιο.		
στ) Αν από τη λέξη «ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ» επιλέξουμε και σημειώσουμε ένα γράμμα, τότε τα δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα.		

2 Επιλέγουμε στην τύχη μια μέρα της εβδομάδας. Βρες τη πιθανότητα:

α) Η μέρα να είναι δισύλλαβη.
 β) Η μέρα να αρχίζει από Π.

3 Σε ένα κουτί υπάρχουν 8 μπάλες, 4 κόκκινες και 4 μαύρες. Ποια είναι η πιθανότητα να τραβήξω μια μαύρη μπάλα;

4 Στην κλήρωση της λαχειοφόρου υπάρχουν 2.000 λαχνοί από τους οποίους κερδίζουν οι 2. Ποια είναι η πιθανότητα νίκης κάθε λαχνού; Είναι βέβαιο ότι θα κερδίσω αν αγοράσω 1.000 λαχνούς;

5 Ρίχνουμε ένα νόμισμα 3 φορές. Φτιάξε τον δειγματικό χώρο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων και υπολόγισε:

α) τη πιθανότητα να φέρω 3 συνεχόμενες φορές γράμματα.
 β) την πιθανότητα να φέρω τουλάχιστον 2 φορές γράμματα.

Εξασκούμαι

σε όσα έμαθα

6

Σε ένα τμήμα 25 ατόμων, η πιθανότητα ένας/μία μαθητής/τρια να μαθαίνει αγγλικά είναι 80% και οι μαθητές/τριες που μαθαίνουν γαλλικά είναι 10. Πόσοι μαθητές/τριες μαθαίνουν αγγλικά; Υπάρχουν μαθητές/τριες που μαθαίνουν αγγλικά και γαλλικά;

7

Ποιον μονοψήφιο αριθμό πρέπει να συμπληρώσεις στον τροχό, ώστε η πιθανότητα να «πετύχεις» περιττό αριθμό να είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα να πετύχεις πρώτο αριθμό;



8

Η Αλίκη έχει μία τσάντα με 25 μπάλες, κόκκινες και μαύρες. Η πιθανότητα να τραβήξει από μέσα μαύρη μπάλα είναι τετραπλάσια από την πιθανότητα να τραβήξει κόκκινη. Πόσες μαύρες μπάλες έχει η τσάντα;

9

Σε μία εκδρομή συμμετέχουν 8 παιδιά της Α' Γυμνασίου, 16 παιδιά της Β' Γυμνασίου, 22 παιδιά της Γ' Γυμνασίου και 4 καθηγητές/τριες.

α) Κατασκεύασε τον πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.

β) Διαλέγουμε τυχαία ένα άτομο. Υπολόγισε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

A: Να φοιτεί στην Α' Γυμνασίου.

B: Να φοιτεί στη Β' Γυμνασίου.

Γ: Να φοιτεί στη Γ' Γυμνασίου.

Δ: Να είναι καθηγητής/τρια.

Τι παρατηρείς;

10

Ρίχνουμε ένα ζάρι 2 φορές και σημειώνουμε κάθε φορά την ένδειξή του. Βρες τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

- A: Το άθροισμα των δύο ρίψεων είναι ίσο με 7.
- B: Το άθροισμα των δύο ρίψεων είναι ίσο με 6.
- Γ: Το αποτέλεσμα των δύο ρίψεων είναι ο ίδιος αριθμός.
- Δ: Το αποτέλεσμα των ρίψεων είναι εξάρεις (6 και 6).

11

Στο σκάκι κάθε παίκτης έχει από έναν βασιλιά, μία βασίλισσα, δύο πύργους, δύο ίππους, δύο αξιωματικούς και οχτώ στρατιώτες. Ένας παίκτης έχει τα λευκά και ο άλλος τα μαύρα πιόνια. Επιλέγουμε στην τύχη ένα πιόνι, να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων:

- Α: Το πιόνι είναι ίππος.
- Β: Το πιόνι είναι μαύρος πύργος.
- Γ: Το πιόνι είναι στρατιώτης ή βασίλισσα.
- Δ: Το πιόνι δεν είναι λευκός στρατιώτης.

12

Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο ζάρι και καταγράφουμε πόσες φορές εμφανίζεται ο αριθμός 6.

α. Υπολόγισε την πιθανότητα εμφάνισης του αριθμού 6 σε μία ρίψη.

β. Ένας μαθητής ρίχνει το ζάρι 10, 50, 100 και 500 φορές, καταγράφοντας πόσες φορές εμφανίζεται το 6.

Αριθμός ρίψεων	Συχνότητα εμφάνισης του 6	Σχετική συχνότητα (%)
10	2	0,2
50	9	0,18
100	16	0,16
500	85	0,17

Παρατήρησε τις σχετικές συχνότητες καθώς αυξάνεται ο αριθμός των ρίψεων του ζαριού. Ποιον αριθμό προσεγγίζουν οι σχετικές συχνότητες;

Μπορείς να αξιοποιήσεις τον σύνδεσμο <https://rolladie.net/>, ώστε να ελέγξεις το αποτέλεσμα για μεγάλο αριθμό ρίψεων.



Μελετώ



το συγκεκριμένο θέμα

Η Έννοια της Πιθανότητας στα Μαθηματικά

Η έννοια της πιθανότητας στα μαθηματικά έχει τις ρίζες της στην ανάγκη κατανόησης και πρόβλεψης αβέβαιων γεγονότων. Στην αρχαία Ελλάδα, ο Ευκλείδης και άλλοι μαθηματικοί ασχολήθηκαν με προβλήματα πιθανοτήτων. Ωστόσο, η συστηματική μελέτη της πιθανότητας ξεκίνησε τον 16ο και 17ο αιώνα με τους Blaise Pascal και Pierre de Fermat, οι οποίοι ανέπτυξαν τις πρώτες θεωρίες πιθανοτήτων για να καταλάβουν τα τυχερά παιχνίδια.

Στη συνέχεια, τον 18ο αιώνα, ο Thomas Bayes και ο Pierre-Simon Laplace συνέβαλαν σημαντικά στην ανάπτυξη της θεωρίας των πιθανοτήτων. Ο Bayes εισήγαγε τη θεωρία του για την εκτίμηση της πιθανότητας, γνωστή ως θεωρία του Bayes. Ο Laplace ανέπτυξε περαιτέρω τη θεωρία, εφαρμόζοντάς την σε διάφορα επιστημονικά και κοινωνικά πεδία.

Στον 19ο και 20ό αιώνα, οι μαθηματικοί όπως ο Andrey Kolmogorov και ο Émile Borel έθεσαν τα θεμέλια της σύγχρονης θεωρίας πιθανοτήτων, εισάγοντας έννοιες όπως οι τυχαίες μεταβλητές και οι κατανομές πιθανότητας. Σήμερα, η έννοια της πιθανότητας είναι ένα από τα πιο θεμελιώδη εργαλεία στα μαθηματικά, με εφαρμογές σε στατιστική, φυσική, οικονομία και άλλες επιστήμες.

Ανακεφαλαίωση (Πειράματα τύχης και πιθανότητες)

Πείραμα τύχης ονομάζεται ένα πείραμα στο οποίο δεν μπορούμε να προβλέψουμε με βεβαιότητα το αποτέλεσμα του, όσες φορές και αν το επαναλάβουμε.

Όλα τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης αποτελούν τον **δειγματικό χώρο** του πειράματος.

Ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης ονομάζεται ένα σύνολο που περιέχει ένα ή περισσότερα στοιχεία ενός δειγματικού χώρου.

Αν όλα τα δυνατά αποτελέσματα ενός δειγματικού χώρου έχουν την ίδια πιθανότητα να εμφανιστούν, τότε ονομάζονται **ισοπίθανα**.

Πιθανότητα ενός ενδεχομένου ονομάζεται το πηλίκο του πλήθους των επιθυμητών (ευνοϊκών) αποτελεσμάτων προς το πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων.

$$\text{πιθανότητα} = \frac{\text{πλήθος επιθυμητών αποτελεσμάτων}}{\text{πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων}}$$

Η πιθανότητα ενός ενδεχομένου είναι ένας αριθμός **μεγαλύτερος ή ίσος από το 0** και **μικρότερος ή ίσος από το 1**. Δηλαδή:

$$0 \leq (\text{πιθανότητα}) \leq 1$$

Το ενδεχόμενο αυτό που πραγματοποιείται σε οποιαδήποτε εκτέλεση ενός πειράματος ονομάζεται **βέβαιο ενδεχόμενο** και έχει **πιθανότητα 1 (ή 100%)**.

Το ενδεχόμενο αυτό που δεν πραγματοποιείται σε οποιαδήποτε εκτέλεση του πειράματος ονομάζεται **αδύνατο ενδεχόμενο** και έχει **πιθανότητα 0**.

Αυτοαξιολόγηση (Πειράματα τύχης και πιθανότητες)

Χαρακτήρισε ως Σωστές ή Λάθος τις προτάσεις που ακολουθούν βάζοντας ένα **x** στην κατάλληλη θέση.

	Σωστό	Λάθος
1. Η ρίψη ενός ζαριού είναι ένα πείραμα τύχης.		
2. Η καταγραφή της θέσης του ήλιου στον ουρανό κατά τη διάρκεια μίας ημέρας είναι ένα πείραμα τύχης.		
3. Ρίχνουμε ένα νόμισμα 2 φορές. Ο δειγματικός χώρος του πειράματος τύχης είναι ΚΚ, ΚΓ, ΓΓ.		
4. Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές. Ο δειγματικός χώρος του πειράματος τύχης αποτελείται από 6^2 στοιχεία.		
5. Αν διαλέξουμε τυχαία μία ημέρα της εβδομάδας τότε αυτή είναι πιο πιθανό να ξεκινά από Π απ' ό τι να ξεκινά από Σ.		
6. Αν διαλέξουμε τυχαία ένα γράμμα της ελληνικής αλφαβήτου τότε αυτό είναι πιθανότερο να είναι φωνήεν παρά σύμφωνο.		
7. Με τα ψηφία 1,2,3 μπορούμε να σχηματίσουμε 6 διαφορετικούς τριψήφιους αριθμούς.		
8. Με τα ψηφία 1,2,3 μπορούμε να σχηματίσουμε 6 διαφορετικούς τριψήφιους αριθμούς ώστε κάθε ψηφίο να χρησιμοποιείται μόνο μία φορά.		
9. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα ψηφίο από το 0 έως και το 9, τότε η πιθανότητα να επιλέξουμε περιττό αριθμό είναι 50%.		
10. Ένα βέβαιο ενδεχόμενο έχει πιθανότητα 1.		
11. Ένα αδύνατο ενδεχόμενο έχει πιθανότητα -1.		
12. Η πιθανότητα ενός ενδεχομένου μπορεί να είναι 2,5.		
13. Αν ρίξουμε ένα ζάρι δύο φορές, η πιθανότητα να φέρουμε 6-άρες είναι μικρότερη από την πιθανότητα να φέρουμε 5-άρες.		
14. Αν ρίξουμε ένα ζάρι δύο φορές, η πιθανότητα να φέρουμε άθροισμα 13 είναι μηδέν.		
15. Αν ρίξουμε ένα ζάρι δύο φορές, η πιθανότητα να φέρουμε άθροισμα 12 είναι μικρότερη από την πιθανότητα να φέρουμε άθροισμα 11.		
16. Αν από τη λέξη «ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ» επιλέξουμε και σημειώσουμε ένα γράμμα, τότε τα δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα.		
17. Αν ρίξουμε ένα νόμισμα 100 φορές, τότε περίπου στις μισές ρίψεις του, αναμένουμε να φέρουμε "γράμματα".		
18. Κατά την εκτέλεση ενός πειράματος τύχης, πραγματοποιείται πάντοτε το ενδεχόμενο που έχει την μεγαλύτερη πιθανότητα πραγματοποίησης.		

Σε αυτό το σημείο, θα πρέπει να είσαι σε θέση να έχεις επιτύχει όλα τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα. Γύρνα στην αρχή της θεματικής ενότητας και σημείωσε ✓ στα αντίστοιχα κουτάκια. Υπάρχουν στόχοι που αισθάνεσαι ότι δεν έχεις κατακτήσει πλήρως;

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

- Απαντήσεις ασκήσεων / δραστηριοτήτων
- Ευρετήριο όρων
- Βιβλιογραφία

-6	-4	+1	-11	-7
-3	-1	+4	-8	-4
4	+6	+11	-1	+3

5. α) $(-5)+(+9)=+4$, β) $(-3)+(-15)=-18$, γ) $(-16)+(+7)=-9$, δ) $(+7)+(+8)=15$, ε) $(+2)+(-8)=-6$, στ) $(-16)+(+12)=-4$. 6. α) -14, β) 24, γ) 10, δ) -2, ε) 0. 7. α) 5, β) -11, γ) 8. 8.

α	β	α + β	α - β	β - α
+5	+1	+6	+4	-4
-15	-5	-20	-10	+10
+8	-11	-3	19	-19
-1	3	+2	-4	4

Οι αριθμοί των δύο τελευταίων στηλών είναι αντίθετοι. 9. α)→ii., β)→i., γ)→v., δ)→iv., ε)→iii. 10. α) $-3+5-2=0$, β) $10-21+9=-2$, γ) $100+50-75=75$.

2.4 Πολλαπλασιασμός ακεραίων

1. α) θετικός, β) αρνητικός, γ) αρνητικών, δ) ετερόσημοι. 2. α) +6, β) -24, γ) +42, δ) -25, ε) 0, στ) -207. 3. α) -1, β) +120, γ) -5.000. 4.

.	+2	-3	-5	0
-6	-12	+18	+30	0
-1	-2	+3	+5	0
+3	+6	-9	-15	0
4	+8	-12	-20	0

5. α) -5, β) 9, γ) -62, δ) 2. 6. α) $\alpha=12$, $\beta=-4$, β) i. -12, ii. 64, iii. -28, iv. 60. 7.

α · β	α + β	Αριθμοί α και β
+6	-5	$\alpha=-3$ και $\beta=-2$
+8	+9	$\alpha=+1$ και $\beta=+8$
+30	-11	$\alpha=-6$ και $\beta=-5$
-12	-4	$\alpha=-6$ και $\beta=+2$
-1	0	$\alpha=-1$ και $\beta=+1$

8. α) +6, β) +12, γ) -16, δ) -2. 9. Μαρία: +7, Φώτης: +11.

2.5 Δυνάμεις ακεραίων με εκθέτη μη μηδενικό φυσικό

1. α) Σ, β) Λ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Σ. 2. α) +4, β) +8, γ) +9, δ) -27, ε) +49, στ) -64, ζ) -1, η) +1, θ) -25, ι) -1, ια) -3. 3.

Δύναμη	Βάση	Εκθέτης	Πρόσημο Γινομένου
$(-10)^{10}$	-10	10	+
$(+4)^{19}$	+4	19	+
$(-3)^{27}$	-3	27	-
$(-2)^{12}$	-2	12	+
12^{35}	12	35	+
$(-1)^{101}$	-1	101	-

4. α) <, β) <, γ) =, δ) <, ε) =. 5. $(-7)^3 < 1^{25} < 5^1 < (-10)^4$, 6. A=-42, B=0, Γ=9, Δ=9. 7. i. $\alpha=10$, $\beta=-20$, ii. Π=100.

A.3 ΡΗΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

3.1 Η έννοια του ρητού

1.

Αριθμός	Φυσικός	Ακέραιος	Ρητός
5	x	x	x
-1,7			x
2/3			x
-10		x	x
0	x	x	x

2. α) Σ, β) Σ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Λ. 3. Ανάγωγα: $\frac{24}{35}, \frac{19}{6}$. Όχι ανάγωγα: $\frac{60}{15} = 4, \frac{12}{15} = \frac{4}{5}, \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$. 4. α) 4,8, β) 2,08,

γ) 0,53, δ) -0,1, ε) 1,076. 5. Ισοδύναμα είναι τα: α), β), γ). 6. α) 3, β) 0,125, γ) 41,3, δ) -3,142857, ε) -0,05.

7. α) $\frac{9}{2}$, β) $\frac{31}{100}$, γ) $\frac{441}{10}$, δ) $-\frac{5}{2}$, ε) $\frac{1}{50}$. 8. α) $-\frac{15}{10} = -1,5$, β) $\frac{125}{100} = 1,25$, γ) $\frac{7.875}{1.000} = 7,875$, δ) $-\frac{14}{10} = -1,4$.

9. $+\frac{25}{5} \rightarrow 5, -\frac{36}{12} \rightarrow -3, \frac{0}{8} = 0, \frac{99}{99} \rightarrow 1, -\frac{100}{100} \rightarrow -1$.

10. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$. 11. A=-0,6, B=0,3, Γ=1, Δ=1,3, E=1,8, Z=2,3, H=2,5.

3.2 Απόλυτη τιμή ρητού – Σύγκριση και διάταξη ρητών – Αντίθετοι ρητοί

1. α) -α, β) μεγαλύτερη, γ) μικρότερη, δ) αριθμητή, ε) μικρότερο, 2.

Αριθμός	-3	0,35	$\frac{1}{9}$	0,1	$+\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$
Αντίθετος	+3	-0,35	$-\frac{1}{9}$	-0,1	$-\frac{2}{5}$	$+\frac{2}{5}$
Απόλυτη τιμή	3	0,35	$\frac{1}{9}$	0,1	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

3. α) >, β) <, γ) <, δ) >, ε) >, στ) >, ζ) <. 4. α) <, β) >, γ) <, δ)

<, ε) >, στ) =. 5. $-3 < -0,03 < 0 < 0,2 < 1 < 1,37$. 6. α) $-\frac{5}{4} < -\frac{3}{4} < -\frac{1}{4} < \frac{1}{4} < \frac{3}{4} < \frac{5}{4}$, β) $-\frac{5}{3} < -\frac{5}{4} < -\frac{5}{8} < \frac{5}{8} < \frac{5}{4} < \frac{5}{3}$.

7. α) $\frac{9}{32} < \frac{15}{32} < \frac{27}{32}$, β) $\frac{10}{9} < \frac{10}{8} < \frac{10}{4}$, γ) $\frac{9}{32} < \frac{15}{32} < \frac{27}{32} < \frac{10}{9} < \frac{10}{8} < \frac{10}{4}$. 8. α) 0 και 1, β) -2 και -1, γ) 3 και 4, δ) -4

και -3, ε) 0 και 1. 9. Μερικοί αριθμοί είναι: α) -0,71, -0,72, β) 0,31, 0,32, γ) 0,8, 0,81.

3.3 Πρόσθεση και αφαίρεση ρητών.

1. α) Σ, β) Λ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Λ. 2. α) $\frac{1}{8}, \beta) \frac{1}{15}, \gamma) 1, \delta) -\frac{5}{7}, \epsilon) -1$.

3. α) $\frac{1}{14}, \beta) -\frac{7}{3}, \gamma) \frac{5}{66}, \delta) \frac{41}{15}, \epsilon) -\frac{31}{10}$. 4. α) 2,65, β) -0,55,

γ) 1,69. 5. α) 937,5 κιλά, β) 837,50€. 6. 18 επ. φαντασίας, 25 μυθιστορήματα, 17 επιστημονικά. 7. α) 375 μαθητές, β) 50 μαθητές.

3.4 Πολλαπλασιασμός ρητών – Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού – Αντίστροφοι ρητοί.

1. α) $\frac{5}{3}, \beta) \frac{\beta}{\alpha} (\alpha, \beta \neq 0), \gamma) \frac{1}{5}, \delta) 1, \epsilon) -3$. 2. α) 750 γραμμάρια, β) 36 λεπτά, γ) 125 ml, δ) 25 δευτερόλεπτα. 3. α) -iii., β) -ii., γ) -i., δ) -vi., ε) -iv., στ) -v. 4. α) -iv., β) -ii., γ) -i., δ) -iii., ε) -v. 5. β) $21 \cdot 11 = 21 \cdot (10 + 1) = 21 \cdot 10 + 21 \cdot 1 = 210 + 21 = 231$, γ) $25 \cdot 0,99 = 25 \cdot (1 - 0,01)$

$$= 25 \cdot 1 - 25 \cdot 0,01 = 25 - 0,25 = 24,75$$

$$\delta) 70 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{7}\right) = 70 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{7}\right) = 70 \cdot \frac{1}{2} - 70 \cdot \frac{1}{7} = 35 - 10 = 25$$

0 = 25. 6. α) $-\frac{25}{14}$, β) $-\frac{11}{14}$, γ) $\frac{17}{4}$. 7. 15 μαθητές εξετάστηκαν στα Γερμανικά και 5 μαθητές θα επανεξεταστούν στα Γαλλικά. 8. α) 40€, β) 80€.

3.5 Διαίρεση ρητών

1. α) -3, β) -4, γ) -9, δ) 70. 2. α) $\frac{3}{2}$, β) $-\frac{3}{2}$, γ) 8, δ) $\frac{1}{6}$, ε) 3, στ) $\frac{16}{49}$. 3. α) $\frac{14}{3}$, β) $\frac{6}{7}$, γ) $\frac{9}{14}$, δ) $\frac{1}{22}$, ε) $\frac{6}{17}$. 4. α) 7,48, β) 0,58, γ) 23,84, δ) 10. 5. α) $\frac{23}{50}$ ή 0,46, β) -2,88, γ) $-\frac{61}{40}$. 6. -9. 7. α) $-\frac{31}{30}$, β) $-\frac{29}{8}$. 8. α) 2, β) -20, γ) $-\frac{1}{6}$.

3.6 Δυνάμεις ρητών με εκθέτη μη μηδενικό φυσικό

1. α) Λ, β) Σ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Σ. 2. α) $\frac{3}{16}$, β) $-\frac{1}{50}$, γ) 0, δ) 6,8125 ε) 27,89 στ) 13,65

3. 0,69. 4. -6,91. 5. α) A=-12, B= $-\frac{1}{3}$,

$$\beta) A \cdot B = 4, \frac{A}{B} = 36, A+B = -\frac{37}{3}$$

3.7 Τυποποιημένη μορφή μεγάλων αριθμών

1. α) $1,5 \cdot 10^5$, β) $2,1 \cdot 10^4$, γ) $1,3 \cdot 10^6$, δ) $2,03 \cdot 10^6$. 2. α) 23.100, β) 1.360.000.000, γ) 137, δ) 100.000.000. 3. α) >, β) =, γ) >, δ) =. 4. α) $3,844 \cdot 10^8$, β) $1,496 \cdot 10^{11}$, γ) $4,5 \cdot 10^9$, δ) $1,36 \cdot 10^{10}$, ε) $5,9 \cdot 10^9$. 5. 2,1024 · 10⁸.

A.4 ΚΑΝΟΝΙΚΟΤΗΤΕΣ

4.1 Κανονικότητα, έννοια και αναπαράστασεις

1. α) Γ, Δ. Μονάδα επανάληψης: Β,Γ,Δ, β) 3, 2. Μονάδα επανάληψης: 2,3,3. 2. α) 21, 25. κανόνας: +4, β) 4, -5. Κανόνας: -9, γ) 54, 65. Κανόνας: +11. 3. α) 7 και 11, β) 60 και 7,5, γ) +3



και -6,+7. 4. 5. α) Το $\frac{1}{6}$ πρέπει να αφαιρεθεί



από την κανονικότητα, β) Στη θέση του 0 πρέπει να τοποθετηθεί το 1, γ) Στη θέση του -32 πρέπει να τοποθετηθεί το 32,

δ) 6. 2 λεπτά και 5 δευτερόλεπτα. 7. α) Ανά δευτερόλεπτο ο κανόνας είναι: Σ-Σ-Φ-Σ-Φ, όπου Σ: σκοτάδι και Φ: φως, β) Κάθε 5 δευτερόλεπτα. 8. α) 1η ακολουθία: Κανόνας +2, 2η ακολουθία: Κανόνας +3, 3η ακολουθία: Κανόνας -5, β) 1η ακολουθία: Ο γενικός όρος είναι 2v-1 και ο 100ος όρος είναι ο 199. 2η ακολουθία: Ο γενικός όρος είναι 3v και ο 100ος όρος είναι 300. 3η ακολουθία: Ο γενικός όρος είναι -5v και ο 100ος όρος είναι -500.

4.2 Κανονικότητες της μορφής α · v με α ρητό

1. Λείπουν οι όροι 35 και 42. Ο γενικός όρος είναι ο α). 2. 6,12,18,24,30. 3. α) 4,8,12,16 και 80. Κανόνας: (σειρά σχήματος)×4, β) 6,12,18,24 και 120. Κανόνας: (σειρά σχήματος)×6, γ) 7,14,21,28 και 140. Κανόνας: (σειρά σχήματος)×7. 4. α) Λείπουν οι αριθμοί 15 και 18. Ο γενικός όρος είναι 3v, β) Λείπουν οι αριθμοί -25 και -30. Ο γενικός όρος είναι -5v, γ) Λείπουν οι αριθμοί $\frac{5}{4}$ και $\frac{3}{2}$. Ο γενικός όρος είναι $\frac{1}{4} \cdot v$.

5. α) $\frac{5}{2} \cdot v$, β) 12ος όρος: 30. 20ος όρος: 50, γ) Ο 46ος όρος. δ) Δεν υπάρχει. 6. α) α=-4,5, β=-6, β) Γενικός όρος: -1,5v, γ) 100ος όρος:

-150. 7. α) 4cm, 8cm, 12cm και 16cm, β) Περίμετρος = 4v, γ) 40cm, δ) v=49. 8. α)

Πλευρές πολυγώνου βάσης (v).	3	4	5	6
Αριθμός ακμών (α).	6	8	10	12

β) 8-γωνο: 16, 9-γωνο: 18, 20-γωνο: 40. Παρατηρούμε ότι α=2v. 9. α) 21, β) Το 75ο σχήμα, γ) 3v. 10. α) 99, β) 248, γ) 4v.

A.5 ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

5.1 Αλγεβρική παράσταση – Αριθμητική τιμή αλγεβρικής παράστασης – Επιμεριστική ιδιότητα α · (β ± γ) = α · β ± α · γ.

1. α) αριθμητική, β) αλγεβρική, γ) τρεις, δ) -7. 2. α) 2x, β) 3x-2, γ) 2x, δ) 2x+1, ε) $\frac{x}{2} + 3$, στ) $x \cdot (x + 1)$, ζ) $x^2 + y^2$, η) $(x + y)^2$. 3. α) Το τριπλάσιο ενός αριθμού, β) ένας αριθμός ελαττωμένος κατά 2, γ) Το μισό ενός αριθμού αυξημένο κατά 6, δ) το γινόμενο δύο αριθμών. 4. α) 2x, β) 4α, γ) 9ω, δ) 0γ, ε) -6x, στ) 0α. 5. α) 8α-4β, β) -8x+3y, γ) -4x-4y-4, δ) 8α-5β-5. ε) 0. 6. α) 10x-10, β) 6x+2, γ) -3α+10β, δ) x-5, ε) -9x+26, στ) 7x+6. 7. α) A=2x-1, β) A=13. 8. Βρίσκουμε A=48β+5 και με αντικατάσταση A=9,8. 9. Βρίσκουμε B=3x+3y+8 και επειδή x,y αντίθετοι προκύπτει ότι B=8. 10. A=5, B=-5, Γ=31.

A.6 ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

6.1 Ιδιότητες της ισότητας (ισότητα και πράξεις)

1. α) Σ, β) Λ, γ) Σ, δ) Σ, ε) Σ, στ) Λ. 2. α) α=5, β) κ=13, γ) 6=2λ, δ) 3ρ=10. 3. α) Το 6 είναι λύση, β) Το 7 είναι λύση, γ) Το 20 δεν είναι λύση, δ) Το 22 δεν είναι λύση, ε) Το 4 είναι λύση. 4. α) 33, β) 8, γ) 53, δ) 48, ε) 3, στ) 12, ζ) 200, η) $\frac{26}{3}$. 5. α) -5, β) -4, γ) $\frac{10}{3}$, δ) -19. 6. α) 9/2 β) -0,5 γ) 37/12 δ) 16/09 7. α) 2x-3=11 ή x=7, β) x+(x+1)=21 ή x=10, γ) $\frac{x}{2} - 7 = 1$ ή x=16, δ) x+3x=72 ή x=18. 8. x-(23+37)=12 ή x=72€. 9. α) Αν τα σχήματα έχουν πλευρά v, τότε η περίμετρος του ισόπλευρου τριγώνου είναι 3v και η περίμετρος του τετραγώνου είναι 4v, β)

Πλευρά	1cm	5cm	8cm	10cm
Περίμετρος τετραγώνου	4cm	20cm	32cm	40cm
Περίμετρος ισόπλευρου τριγώνου	3cm	15cm	24cm	30cm

γ) Η πλευρά του τετραγώνου είναι 7cm και η πλευρά του τριγώνου είναι 57cm.

6.2 Επίλυση εξίσωσης της μορφής ax + β = γ.

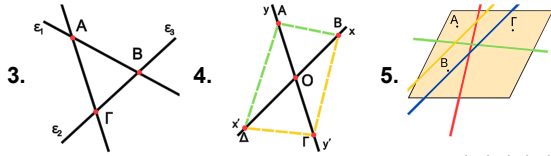
1. α) 4, β) 9, γ) 6, δ) 15. 2. α) -8, β) 2, γ) -4, δ) $-\frac{8}{3}$. 3. α) 25, β) -2, γ) 2, δ) -2. 4. α) 16, β) 1, γ) 1, δ) $\frac{1}{4}$, ε) 8. 5. 18. 6. 14€. 7. 16. 9. $-\frac{5}{3}$. 10. 93.

ΘΕΜΑΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ Β – ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

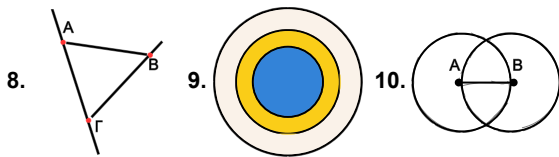
Β.1 ΜΕΤΡΗΣΗ

1.1 Βασικές έννοιες: σημείο, ευθεία, ημιευθεία, ευθύγραμμο τμήμα, γωνία, κύκλος.

1. α) σημείου, β) ευθεία, γ) άπειρες, μοναδική, δ) ημιευθεία, ε) αντικείμενες. 2. α) AB, AG, AD, AE, BE, ED, BG, BA, DG, β) AB, AD, AE, AZ, AG, EZ, EG, ZG, BE, BZ, BG, GD.



6. Πλευρές: AB, BG, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΗ, ΑΗ. Γωνίες: $\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma}, \hat{\Delta}, \hat{E}, \hat{Z}, \hat{H}$
7. Ax, Ax' και Bx, Bx'.



1.2 Μήκος ευθύγραμμου τμήματος

1. Απόσταση πόλεων: Km. Μήκος κρεβατιού: m. Πλάτος παραθύρου: dm. Ύψος χάρακα: cm. Πάχος τετραδίου: mm.
2. α) 1.780m, β) 0,012m, γ) 0,213m, δ) 30m, ε) 0,2m, στ) 0,01m. 3. 22dm < 307cm < 11789mm < 21m < 0,12km. 5. α) 12cm, β) 2cm. 7. α) AE=12cm. 8. α) 56,70€, β) 4m. 9. Π=13,2cm. Αν διπλασιάσουμε κάθε πλευρά του, τότε η περιφέρεια διπλασιάζεται: Π'=26,4cm. 10. α) 70dm, β) Η διδρομή M-N-K. 11. α) 36cm, β) 72cm. 12. 1.000 βήματα.

1.3 Μέτρο γωνίας

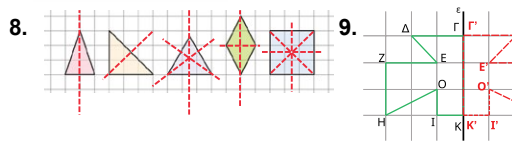
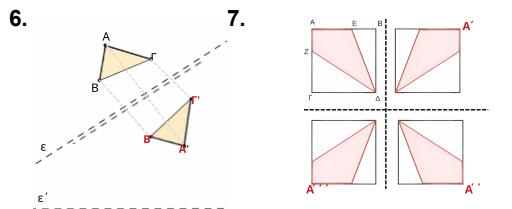
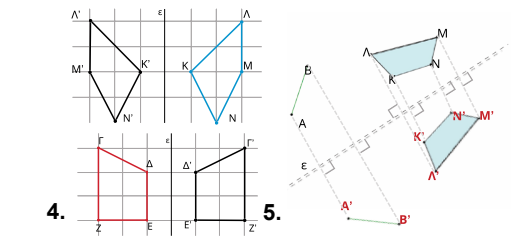
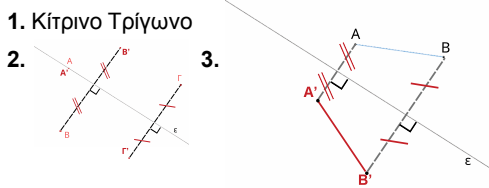
1. A. – i., B. – iii. 2. 3. $\hat{A} = 95^\circ, \hat{B} = 40^\circ,$
 $\hat{\Gamma} = 115^\circ, \hat{\Delta} = 165^\circ.$ 4. $\hat{A} < \hat{\Gamma} < \hat{\Delta} < \hat{B}.$

5. 6. 1ο σχ: $\hat{A}=40^\circ, \hat{B}=60^\circ, \hat{\Gamma}=80^\circ,$ 2ο σχ: $\hat{A}=\hat{B}=\hat{\Gamma}=60^\circ,$ 3ο σχ: $\hat{A}=90^\circ, \hat{B}=27^\circ, \hat{\Gamma}=63^\circ$

7. 8. Οι γωνίες είναι ίσες.

Β.2 ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

2.1 Συμμετρία ως προς τον άξονα και στοιχεία της

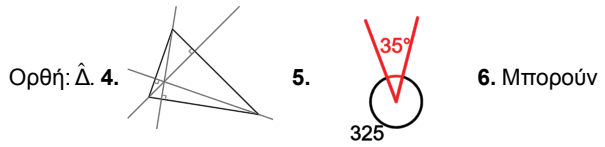


10. Άξονα συμμετρίας έχουν: A, B, Δ, E, Η, Θ, Ι, Κ, Λ, Μ, Ξ, Ο, Π, Σ, Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, Ω. 11. Άξονα συμμετρίας έχουν οι σημαίες της Ιαπωνίας, της Ελβετίας, του Καναδά και της Γαλλίας. Οι σημαίες της Τουρκίας και της Μ. Βρετανίας δεν έχουν (προσοχή στα λευκά στη σημαία της Μ. Βρετανίας !)

Β.3 ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

3.1 Είδη γωνιών

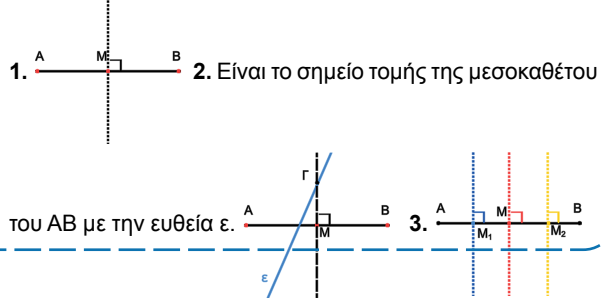
1. α) Λ, β) Σ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Σ. 2. Μηδενική: $0^\circ.$ Οξεία: $63^\circ, 15^\circ.$ Ορθή: $90^\circ.$ Αμβλεία: $120^\circ, 97^\circ, 135^\circ.$ Ευθεία $180^\circ.$ Μη κυρτή: $270^\circ, 310^\circ.$ Πλήρης: $360^\circ.$ 3. Οξείες: $\hat{E}.$ Αμβλείες: $\hat{A},$

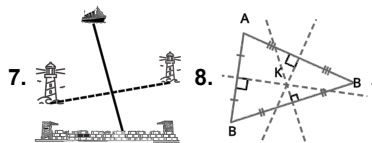
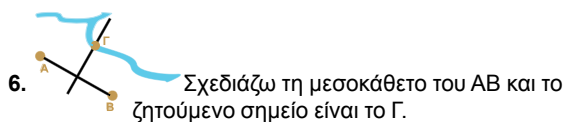
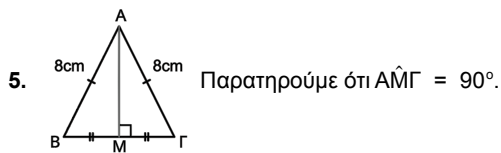
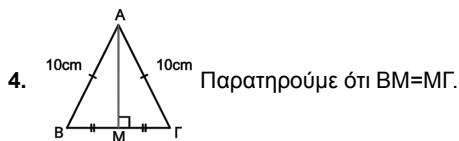


Ορθή: $\hat{\Delta}.$ 4. 5. 6. Μπορούν να κατασκευαστούν τα α) και γ). 7.

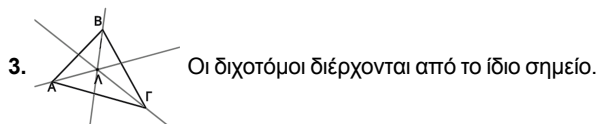
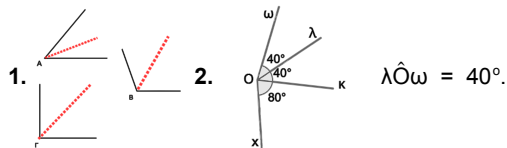
8. Η οξεία γωνία των ϵ_1 και ϵ_2 ισούται επίσης με 45 μοίρες.

3.2 Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος

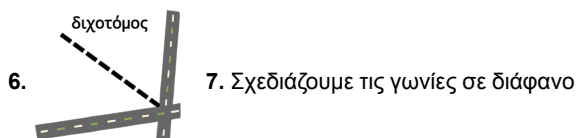
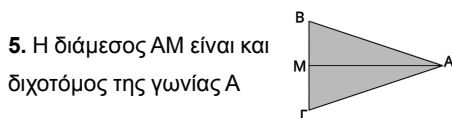




3.3 Διχοτόμος γωνίας



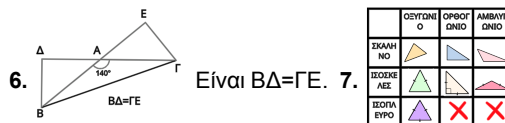
4. Το σημείο Α ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας.



3.4 Είδη τριγώνων και στοιχεία τους

1. α) Σ, β) Λ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Λ. 5. ΚΛΜ: Ισοσκελές - Αμβλυγώνιο, ΒΓΔ: Σκαληνό - Ορθογώνιο, ΜΝΞ: Ισόπλευρο - Οξυγώνιο, ΕΖΗ: Ισοσκελές - Οξυγώνιο, ΟΠΡ: Ισοσκελές - Οξυγώνιο

νιο, ΑΒΓ: Ισοσκελές - Ορθογώνιο.

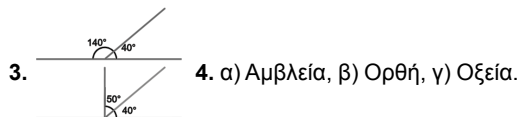


3.5 Ιδιότητες ισοσκελούς και ισοπλεύρου τριγώνου

1. α) Σ, β) Σ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Σ, στ) Λ. 2. α) ΒΓ, Γ', β) διάμεσος, διχοτόμος, συμμετρίας. i. BM=GM, ii. ΜΑΒ = ΜΑΓ. 3. α) ΑΒ=ΑΓ=ΒΓ, β) Α = Β = Γ, γ) ύψος, διχοτόμος, συμμετρίας. i. ΑΔΒ = ΑΔΓ, 90°, ii. ΔΑΓ. 4. α) Γ = 70° διότι Β = Γ. β) ΒΜ=ΜΓ διότι το ύψος προς τη βάση του ισοσκελούς τριγώνου είναι και διάμεσος, γ) Μ = 90° διότι η διάμεσος προς τη βάση του ισοσκελούς τριγώνου είναι και ύψος, δ) Α₁ = Α₂ διότι η διάμεσος προς τη βάση του ισοσκελούς τριγώνου είναι και διχοτόμος της γωνίας της κορυφής.

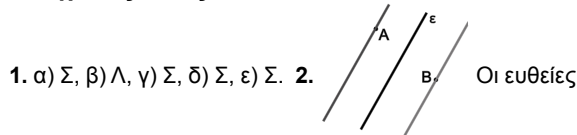
3.6 Κατακορυφήν, συμπληρωματικές και παραπληρωματικές γωνίες.

1. α) Λ, β) Λ, γ) Σ, δ) Σ, ε) Σ, στ) Σ. 2. α-γ, β-δ, ε-η, ζ-θ.

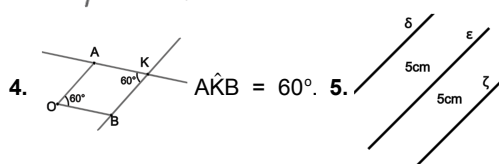
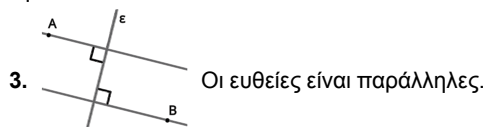


5. xĒy' = 122°, xĒy = 58°, xĒy' = 58°. 6. α = 40°, β = 105°. 7. Η συμπληρωματική της είναι 54° και η παραπληρωματική της 144°. 8. α = 30°, β = 60°, γ = 120°, κ = 50°, μ = 40°, λ = 140°. 9. α) 35°, β) 110°, γ) 30°, δ) 45°.

3.7 Σχετικές θέσεις ευθειών στο επίπεδο



είναι παράλληλες. Οι ευθείες ταυτίζονται αν τα Α, Β είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ε και σε ίση απόσταση από αυτήν.



Υπάρχουν 2 τέτοιες ευθείες.

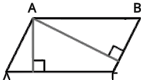
3.8 Γωνίες σε παράλληλες ευθείες με τέμνουσα

1. Εντός εναλλάξ: ζ-δ, ε-γ. Εντός εκτός και επί τα αυτά: ζ-β, γ-η, ε-α, δ-θ. 2. Οξείες: 63°, αμβλείες: 117°. 3. x=n=λ=43°, φ=γ=ω=μ=137°. 4. α=γ=x=ω=62°, β=δ=γ=φ=118°, κ₂=κ₃=λ₂=λ₃=75°, κ₁=κ₄=λ₁=λ₄=105°. 5. μ=λ₃=λ₃=45°, λ₂=λ₄=135°, λ=55°, κ=n=β₁=β₂=80°, β₁=β₃=100°. 6. 70°. 7. φ=α=γ=56°, β₂=124°. 8. β=γ=ζ=θ=75°, α=δ=105°.

3.9 Άθροισμα γωνιών τριγώνου

1. α) Λ, β) Σ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Λ, στ) Σ. 2. $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 25^\circ$. 3. $\hat{B} = 20^\circ, A = 140$. 4. $\omega=82^\circ$. 5. $x=25^\circ$. 6. $\alpha=52^\circ, \delta=48^\circ, \gamma=\beta=80^\circ$. 7. $\hat{A} = 120^\circ, \hat{\Gamma} = 30^\circ$. Το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο και ισοσκελές. 8. $\gamma=\psi=\lambda=70^\circ, \delta=\xi=110^\circ, \kappa=\theta=\epsilon=35^\circ, \eta=\zeta=145^\circ, \omega=\mu=75^\circ$. 9. Προκύπτει από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου. 10. Η πρόταση είναι σωστή.

3.10 Τετράπλευρα, παραλληλόγραμμο, τραπέζια

1. α) Λ, β) Σ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Λ. 2.  3. Δεν είναι

παραλληλόγραμμο γιατί οι εντός επί τα αυτά γωνίες δεν είναι παραπληρωματικές. 4. Είναι τραπέζιο γιατί μόνο $DE \parallel ZH$. 5. α) $AD=2,8\text{cm}, \Gamma D=6\text{cm}$, β) $17,6\text{cm}$. 6. $\hat{B} = \hat{\Delta} = 45^\circ, \hat{\Gamma} = 135^\circ$. 7. $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 53^\circ, \hat{B} = 127^\circ$.

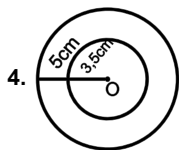
3.11 Είδη παραλληλογράμμων και ιδιότητες: ορθογώνια, ρόμβοι, τετράγωνα

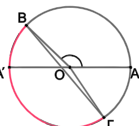
1. α) Σ, β) Λ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Σ. 2. α) 4 ισοσκελή τρίγωνα, β) 4 ορθογώνια τρίγωνα, γ) 4 ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα. 3. α) $AD=5\text{cm}, \hat{\Delta} = 55^\circ, \hat{A} = 125^\circ$, β) $\text{O}\hat{\Delta}\hat{\Gamma} = 30^\circ, \text{A}\hat{\text{O}}\hat{\text{B}} = 120^\circ, \text{B}\hat{\Delta}=12\text{cm}$, γ) $\text{B}\hat{\Gamma}=9\text{cm}, \text{A}\hat{\text{B}}\hat{\Delta} = 64^\circ, \text{A}\hat{\Gamma}\hat{\Delta} = 26^\circ$, δ) $\text{B}\hat{\Delta}=4\text{cm}, \text{A}\hat{\Delta}\text{O} = 45^\circ, \text{A}\hat{\text{O}}\hat{\Delta} = 90^\circ$, ε) $\text{D}\hat{\Lambda}\hat{\Gamma} = 87^\circ, \text{D}\hat{\Lambda}\hat{\text{B}} = 110^\circ, \text{A}\hat{\Gamma}\hat{\text{B}} = 22^\circ$, στ) $\text{B}\hat{\Gamma}=15\text{cm}, \text{B}\hat{\Gamma}\hat{\Delta} = 72^\circ, \text{A}\hat{\text{B}}\hat{\Gamma} = 108^\circ$. 4. $\hat{B} = 140^\circ, \hat{\Gamma} = 40^\circ, \hat{\Delta} = 140^\circ$. 5. α) 20cm , β) 12cm . 6. α) 14cm , β) $\hat{\Delta}\hat{\text{B}}\hat{\Gamma} = 35^\circ, \text{A}\hat{\text{O}}\hat{\text{B}} = 70^\circ$. 7. $\beta=\zeta=\lambda=\gamma=30^\circ, \alpha=\mu=\delta=\epsilon=60^\circ, \nu=\omicron=60^\circ, \xi=\rho=120^\circ$. 8. $x=7, y=45$.

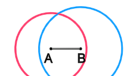
3.12 Κύκλος και στοιχεία του

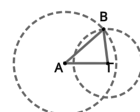
1. α) 360, β) 180, γ) 90, δ) 220°. 2. α) Σ, β) Λ, γ) Σ, δ) Σ,

ε) Σ, στ) Λ. 3.



5.  6. $\widehat{\text{DEA}} = 180^\circ, \widehat{\text{DAE}} = 300^\circ, \text{A}\hat{\text{O}}\hat{\text{B}} = 60^\circ, \widehat{\text{D}\hat{\text{O}}\hat{\text{Z}}} = 120^\circ$ 7. $x=20^\circ, y=75^\circ, \widehat{\text{ABE}} = 105^\circ, \widehat{\text{D}\hat{\Gamma}\hat{\text{A}}} = 180^\circ$

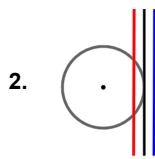
8.  Τα σημεία που απέχουν συγχρόνως 6cm από το A και 7cm από το B είναι τα σημεία τομής των 2 κύκλων.

9. α)  β) Δεν υπάρχει τέτοιο τρίγωνο.

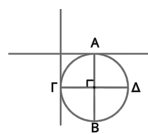
10. Το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο τομής των μεσοκαθέτων δύο χορδών του κύκλου.

3.13 Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου

1. $OM < r \leftrightarrow$ Η ευθεία ϵ είναι τέμνουσα του κύκλου $(O, r) \leftrightarrow$ Η ευθεία και ο κύκλος έχουν 2 κοινά σημεία. / $OM = r \leftrightarrow$ Η ευθεία ϵ εφαπτεται του κύκλου $(O, r) \leftrightarrow$ Η ευθεία και ο κύκλος έχουν 1 κοινό σημείο. / $OM > r \leftrightarrow$ Η ευθεία ϵ είναι εξωτερική του κύκλου $(O, r) \leftrightarrow$ Η ευθεία και ο κύκλος δεν έχουν κοινά σημεία.



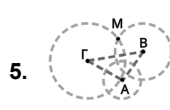
2.



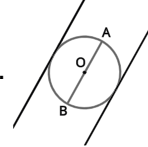
3.

Οι εφαπτομένες είναι

μεταξύ τους κάθετες. 4. α) 2 κοινά σημεία, β) 1 κοινό σημείο, γ) Κανένα κοινό σημείο.



5.



6.

7. Το κέντρο του

κύκλου είναι το σημείο τομής των δύο καθέτων των ευθειών που φέρνουμε από τα σημεία A και B.

Β.4 ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ

4.1 | Βασικά στερεά: ορθό πρίσμα, παραλληλεπίπεδο, κύβος, πυραμίδα.

1. α) ίσα, β) ύψος, γ) κορυφή, δ) κάθετο, ε) κυκλικούς δίσκους, στ) βάση, κυκλικός δίσκος ζ) σφαίρα



2. 6. $\alpha=2$ (ή 5), $\beta=3, \gamma=5$ (ή 2), $\delta=6$.

7.

Στερεό	Κορυφές (Κ)	Έδρες (Ε)	Κορυφές (Κ)	Ακμές (Α)
Τριγωνική πυραμίδα (τετράεδρο)	3	4	4	6
Τετραγωνική πυραμίδα	4	5	5	8
Πενταγωνική πυραμίδα	5	6	6	10
Εξαγωνική Πυραμίδα	6	7	7	12
Πυραμίδα με βάση 10-γωνο	10	11	11	20

8.

Στερεό	Κορυφές (Κ)	Έδρες (Ε)	Κορυφές (Κ)	Ακμές (Α)
Κύβος	4	6	8	12
Πενταγωνικό πρίσμα	5	7	10	15
Εξαγωνικό πρίσμα	6	8	12	18
Πρίσμα με βάση 10-γωνο	10	12	20	30

ΘΕΜΑΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ Γ – ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ

Γ.1 ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

1.1 Απογραφή - Πληθυσμός - Κατηγορικά δεδομένα - Ποσοτικά δεδομένα

1. α) Κατηγορικά, β) Ποσοτικά-διακριτά, γ) Ποσοτικά-συνεχή, δ) Ποσοτικά-συνεχή, ε) Ποιοτικά, στ) Ποιοτικά, ζ) Ποιοτικά, η) Ποσοτικά-διακριτά. 2. Α-α), Β-γ), Γ-β). 3. α) Όλοι οι μαθητές του σχολείου, β) 24 μαθητές, γ) Πρόθεση ψήφου, δ) Κατηγορικά, ε) Το δείγμα δεν είναι αντιπροσωπευτικό του πληθυσμού. 4. α) Κατηγορικά, β) Ποσοτικά-διακριτά. 5. β). 6. Α-γ), Β-γ) 7. Α-α), Β-β). 8. Δεν είναι αντιπροσωπευτικό. 9. α) Όλους τους μαθητές του σχολείου, β) Οι μαθητές ενός τμήματος, γ) Πρόθεση ψήφου. 10. π.χ. α) Όνομα β) Αριθμός αδελφών γ) Ύψος

1.2 Συλλογή συνεχών ποσοτικών δεδομένων

1. α)-Γ, β)-Β, γ)-Β, δ)-Γ, ε)-Γ, στ)-Α. 2.

Κλάσεις	Συχνότητες	Σχετικές συχνότητες
0 – 5	4	20%
5 – 10	3	15%
10 – 15	5	25%
15 – 20	8	40%
Σύνολο	20	100%

3.

Κλάσεις	Κέντρο	Συχνότητες	Σχετικές συχνότητες
40 – 48	44	5	20%
48 – 56	52	10	40%
56 – 64	60	7	28%
64 – 72	68	1	4%
72 – 80	76	2	8%
Σύνολο		25	100%

4. α) Μέγιστη 29 και ελάχιστη 10.

β)

Κλάσεις	Συχνότητες
10 – 15	5
15 – 20	5
20 – 25	3
25 – 30	7
Σύνολο	20

5.

Κλάσεις	Κέντρο	Συχνότητες	Σχετικές συχνότητες
0 – 20	10	20	40%
20 – 40	30	14	28%
40 – 60	50	9	18%
60 – 80	70	5	10%
80 – 100	90	2	4%
Σύνολο		50	100%

6. α) 15 μαθητές, β) 80%, γ) 35 μαθητές, δ) 6%.

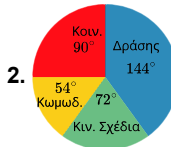
7.

Κλάσεις	Συχνότητες
0 – 5	2
5 – 10	5
10 – 15	18
15 – 20	25
Σύνολο	50

α) 7 μαθητές, β) 50%.

1.3 Κυκλικά διαγράμματα - Ιστογράμματα συχνοτήτων κλάσεων ίσου πλάτους με δεδομένο το πλήθος των κλάσεων

1. α) 200, β) 37,5%, γ) 9%, δ) 135°, ε) 171°.

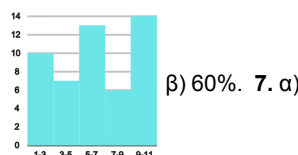


2. 3. α) rock: 60, pop: 40, rap: 50, alternative:

30, metal: 20, β) rock: 108°, pop: 72°, rap: 90°, alternative: 54°, metal: 36°. 4. Παραγωγή: 180°, Έρευνα: 90°, Διοίκηση: 12,6°, Επιστασία: 77,4°.

Εργαζόμενοι	Συχνότητες	Σχετικές συχνότητες
Παραγωγή	100	50%
Έρευνα	50	25%
Διοίκηση	7	3,5%
Επιστασία	43	21,5%
Σύνολο	200	100%

5. α)-Β, β)-Α, γ)-Γ, δ)-Α, ε)-Β. 6. α) Σχετικές συχνότητες: 1-3: 20%, 3-5: 14%, 5-7: 26%, 7-9: 12%, 9-11: 28%.



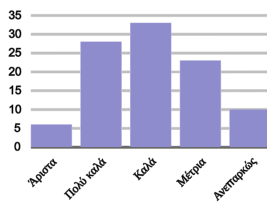
β) 60%. 7. α)

Ηλικίες	Συχνότητες	Σχετικές συχνότητες
20 – 30	5	8,3%
30 – 40	17	28,3%
40 – 50	14	23,3%
50 – 60	14	23,3%
60 – 70	10	16,6%
Σύνολο	60	100%

β) 8. α) Ποδόσφαιρό: 45, Μπάσκετ: 30,

Βόλεϊ: 30, Τένις: 15, β) Ποδόσφαιρό: 37,5%, Μπάσκετ: 25%, Βόλεϊ: 25%, Τένις: 12,5%.

9.



Γ.2 ΜΕΤΡΑ ΘΕΣΗΣ – ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑ

2.1 Μέση τιμή, διάμεσος

1. α) 1, β) 2,5, γ) 0,2. 2. α) 120, β) 100, γ) 1. 3. α) 50, β) 10, γ) 800. 4. α) 24,24, β) 25,25 ή 24,26, γ) 26,26. 5. α) 5,5, β) 0, γ) 27. 6. Τμήμα Α: μέση τιμή 14,83 και διάμεσος 14,5. Τμήμα Β: μέση τιμή 14,83 και διάμεσος 15,5. 7. 8. Α: 0,1. Β: $\frac{35}{74}$. 9. Μέση τιμή: 6,48.

2.2 Εύρος, κορυφές, πολλαπλές κορυφές, απόμακρες τιμές / Μεταβλητότητα δεδομένων

1. Εύρος: 77, κορυφή: 19. 2. α) Εύρος: 100, μέση τιμή: 50, β) Εύρος: 100, μέση τιμή: 50, γ) Εύρος: 100, μέση τιμή: 50. 3. Μέση τιμή: 13,2, εύρος: 8, κορυφές: 12,13. 4. α) 20, β) 30, γ) Δεν υπάρχουν. 5. α) 40, β) 80, όχι γ) 45%. 6. Εύρος: 20, μέση τιμή: 1, απόμακρη τιμή 14. 7. α) 40 μηνών, β) 9,75, γ) Ναι. 8. α) Εκουαδόρ: 8,8, Αλάσκα: 9,2, Ιαπωνία: 9, β) 0,7.

3.1 Πειράματα τύχης, δειγματικός χώρος

1. Πειράματα τύχης είναι τα: α), γ), ε), στ). 2. α) Κ,Γ, β) ΚΚ,Κ-Γ,ΓΚ,ΓΓ. 3. α) α,μ,κ. β) αμ,ακ,μα,μκ,κα,κμ. 4. α) μκ,κμ, β) μμ,μκ,κμ,κκ. 5. α) Ρίψη ζαριού, β) Ημέρα της εβδομάδας, γ) Επιλογή ψηφίου από το δυαδικό σύστημα. δ) Επιλογή τάξης ενός γυμνασίου. 6. α) 50€, Γύρισε ξανά, Δυστυχώς έχασες!, 10€, 30€, 5€, β) 50€,10€,30€,5€. 7. Ο δειγματικός χώρος είναι τα 24 γράμματα της ελληνικής αλφαβήτου και δεν είναι ίδιος με της αγγλικής αλφαβήτου.

3.2 Δενδροδιάγραμμα

1.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

2. ΤΤ, ΣΣ, ΓΓ, ΤΑ, ΤΓ, ΣΓ. 3. ΗΗ, ΗΙ, ΗΝ, ΙΗ, ΙΙ, ΙΝ, ΝΗ, ΝΙ, ΝΝ. 4. α) 100, β) 7975123785 ή 7971123780. 5. α) Κ1,Κ2,Κ3,Κ4,Κ5,Κ6,Γ1,Γ2,Γ3,Γ4,Γ5,Γ6, β) 1Κ,2Κ,3Κ,4Κ,5Κ,6Κ,1Γ,2Γ,3Γ,4Γ,5Γ,6Γ. 6. Μπορεί να ντυθεί με 18 διαφορετικούς τρόπους. 7. Σωστή απάντηση το γ). 8.123,124,125,132,134,135,142,143,145,152,153,154.

3.3 Κλασικός ορισμός της πιθανότητας

1. α) Σ, β) Λ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Λ, στ) Λ. 2. α) $\frac{2}{7}$, β) $\frac{2}{7}$. 3. 0,5. 4. 0,001. Δεν είναι βέβαιο. 5. α) $\frac{1}{8}$, β) 0,5. 6. 20 μαθητές

μαθαίνουν αγγλικά. Υπάρχουν μαθητές που μαθαίνουν αγγλικά και γαλλικά. 7. 1 ή 9. 8. 20. 9. α)

	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα
A	8	16%
B	16	32%
Γ	22	44%
Καθηγητές	4	8%
Σύνολο	50	100%

β) Οι πιθανότητες των ενδεχομένων ταυτίζονται με τη σχετική συχνότητά τους. 10. $P(A)=\frac{1}{6}$, $P(B)=\frac{5}{36}$, $P(\Gamma)=\frac{1}{6}$, $P(\Delta)=\frac{1}{36}$. 11. $P(A)=\frac{1}{8}$, $P(B)=\frac{1}{16}$, $P(\Gamma)=\frac{9}{16}$, $P(\Delta)=\frac{3}{4}$.

12. α. $\frac{1}{6}$ ή 0,667 β. Οι σχετικές συχνότητες προσεγγίζουν την πιθανότητα του ενδεχομένου.

Ευρετήριο όρων και ονομάτων

A

αδύνατη εξίσωση 120
αδύνατο ενδεχόμενο 285
άθροισμα 13
άθροισμα γωνιών τριγώνου 192
ακέραιοι αριθμοί 43
άκρα ευθύγραμμου τμήματος 133
ακτίνα κύκλου 134
ακτίνα κώνου 231
ακτίνα σφαίρας 232
αλγεβρική παράσταση 112
αλγόριθμος του Ευκλείδη 30
αμβλεία γωνία 161
αμβλυγώνιο τρίγωνο 170
ανάγωγο κλάσμα 69
ανάπτυγμα 229
αναπτυσσόμενο μοτίβο 103
αντίθετος αριθμός 47
αντικείμενες ημιευθείες 133
αντιμεταθετική ιδιότητα 13
αντιπροσωπευτικό δείγμα 241
αντίστροφοι αριθμοί 85
αξιόπιστο δείγμα 241
άξονας συμμετρίας 150
αόριστη εξίσωση 120
απαλοιφή παρενθέσεων 53
απογραφή 241
απόλυτη τιμή 47
απόμακρη τιμή 268
απόσταση 138
αριθμητική παράσταση 14
αριθμητική τιμή 112
αρνητικός αριθμός 42
άρτιος αριθμός 12
αφαίρεση 13

B

βάσεις κυλίνδρου 231
βάση 15
βάση ισοσκελούς τριγώνου 170
βάση κώνου 231
βάση παραλληλογράμμου 198
βάση πρίσματος 228
βάση πυραμίδας 230
βέβαιο ενδεχόμενο 285

Γ

γενέτειρα κυλίνδρου 231
γενέτειρα κώνου 231
γενικός όρος κανονικότητας 106
γεωμετρική ερμηνεία επιμεριστικής ιδιότητας 113
γεωμετρικό μοτίβο 103
γινόμενο 13
γωνία 133

Δ

Δείγμα 240
δειγματικός χώρος 276
δειγματοληψία 241
δεκαδικό σύστημα αρίθμησης 12
δεκαδικός αριθμός 69
δενδροδιάγραμμα 279

δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου 171
διαγώνιος 198
διαδοχικές γωνίες 178
διαίρετης 19
διακριτά δεδομένα 242
διάμεσος 263
διάμεσος τριγώνου 171
διάμετρος 208
διάταξη ακεραίων 48
διαφορά 13
διχοτόμος γωνίας 167
διχοτόμος τριγώνου 171
δυσδικό σύστημα αρίθμησης 35
δύναμη 15

E

Εκθέτης 15
Εκτός 187
ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο 29
εναλλάξ 187
ενδεχόμενο 283
εντός 187
εξίσωση 119
εξωτερική ευθεία κύκλου 217
επαλήθευση 123
επαναλαμβανόμενο μοτίβο 103
επί τα αυτά 187
επίκεντρο γωνία 209
επικρατούσα τιμή 268
επιμεριστική ιδιότητα 14
επίπεδο 134
ετερόσημοι αριθμοί 43
ετερόνυμα κλάσματα 69
ευθεία 133
ευθεία γωνία 160
ευθύγραμμο τμήμα 133
ευκλείδεια διαίρεση 19
εύρος 267
εφαπτομένη κύκλου 216
εφεξής γωνίες 178

H

Ημιεπίπεδο 134
Ημιευθεία 133
Ημικύκλιο 209

Θ

θετικός αριθμός 42

I

ιδιότητες ισότητας 118
ιδιότητες ορθογωνίου 201
ιδιότητες ρόμβου 202
ίσες γωνίες 144
ισοδύναμα κλάσματα 68
ισοπίθανα ενδεχόμενα 284
ισόπλευρο τρίγωνο 170
ισοσκελές τρίγωνο 170
ιστόγραμμα 254

K

κάθετες ευθείες 161
κανονικότητα 103
κατακορυφήν γωνίες 179

κατηγορικά δεδομένα 241
 κέντρο κλάσης 247
 κέντρο κύκλου 134
 κέντρο σφαίρας 232
 κλάσεις 246
 κλασικός ορισμός πιθανότητας 284
 κλάσμα 68
 κορυφή πυραμίδας 230
 κόσκινο του Ερατοσθένη 24
 κριτήρια διαιρετότητας 25
 κύβος 229
 κυκλικό διάγραμμα 252
 κυκλικός δίσκος 208
 κύκλος 209
 κύλινδρος 231
 κύρια στοιχεία τριγώνου 170
 κυρτή γωνία 133
 κώνος 231

Λ
 λύση εξίσωσης 119

Μ
 μέγιστος κοινός διαιρέτης 29
 μέση τιμή 262
 μέσο ευθύγραμμου τμήματος 138
 μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος 164
 μεταβλητή 112
 μη κυρτή γωνία 161
 μηδενική γωνία 161
 μήκος 137
 μοίρα 209
 μονάδα επανάληψης 103
 μονάδα μέτρησης 137

Ο
 ομαδοποίηση παρατηρήσεων 246
 ομόκεντροι κύκλοι 134
 ομόσημοι αριθμοί 43
 ομώνυμα κλάσματα 69
 οξεία γωνία 161
 οξυγώνιο τρίγωνο 170
 ορθή γωνία 160
 ορθό πρίσμα 228
 ορθογώνιο 201
 ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο 229
 ορθογώνιο τρίγωνο 170
 ουδέτερο στοιχείο 13

Π
 Παραλληλεπίπεδο 229
 παράλληλες ευθείες 183
 παραλληλόγραμμο 197
 παράπλευρες έδρες πρίσματος 228
 παράπλευρες έδρες πυραμίδας 230
 παράπλευρη επιφάνεια κυλίνδρου 231
 παράπλευρη επιφάνεια κώνου 231
 παραπληρωματικές γωνίες 178
 πείραμα τύχης 276
 πενταγωνική πυραμίδα 230
 περίμετρος σχήματος 139
 περιπτός αριθμός 12
 πηλίκο 19

πλάτος κλάσης 247
 πληθυσμός 240
 πλήρης γωνία 160
 πολλαπλασιασμός 13
 πολλαπλές κορυφές 268
 ποσοτικά δεδομένα 241
 προσεταιριστική ιδιότητα 13
 πρόσημο 42
 πρόσημο δύναμης 62
 πρόσθεση 13
 προσκείμενες γωνίες 174
 προτεραιότητα πράξεων 14
 πρώτοι παράγοντες 25
 πρώτος αριθμός 24
 πυραμίδα 230

Ρ
 ρητοί αριθμοί 71
 ρόμβος 197

Σ
 Σημείο 132
 σκαληνό τρίγωνο 170
 στατιστικά δεδομένα 241
 σύγκριση κλασμάτων 76
 συμμετρικό σημείου 150
 συμπληρωματικές γωνίες 178
 συνεχή δεδομένα 242
 σύνθετο κλάσμα 89
 σύνθετος αριθμός 25
 σφαίρα 232
 σχετική συχνότητα 247

Τ
 Ταυτότητα 120
 τέλεια διαίρεση 19
 τεμνόμενες ευθείες 183
 τέμνουσα κύκλου 216
 τετράγωνο 197
 τετράεδρο 230
 τετραπλευρική πυραμίδα 230
 τετράπλευρο 197
 τόξο κύκλου 208
 τραπέζιο 198
 τυποποιημένη μορφή μεγάλων αριθμών 96

Υ
 Υπόλοιπο 19
 ύψος κυλίνδρου 231
 ύψος κώνου 231
 ύψος παραλληλογράμμου 198
 ύψος πρίσματος 228
 ύψος τριγώνου 171

Φ
 φυσικοί αριθμοί 12

Χ
 χορδή κύκλου 207

Βιβλιογραφία

- Bargagliotti, A., Franklin, C., Arnold, P., Gould, R., Johnson, S., Perez, L., and D.Spangler. 2020. *Pre-K–12 Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education II* (GAISE II). American Statistical Association and National Council of Teachers of Mathematics. Bartel Leendert van der Waerden,
- Battista, M. T. (2007). *The Development of Geometric and Spatial Thinking*. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843-908). Charlotte, NC: Information Age.
- Behrends, E. (2017). *Μαθηματικά πεντάλεπτα: 100 μικρές ιστορίες από τον κόσμο των μαθηματικών*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
- Bragg, P., & Outhred, L. (2004). *A Measure of Rulers - The Importance of Units in a Measure*. In M. J. Hoines, & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 159-166). Bergen University College.
- Clements, Douglas & Swaminathan, Sudha & Hannibal, M.A.Z. & Sarama, Julie. (1999). *Young children's concepts of shape*. *Journal for Research in Mathematics Education*. 30. 192-212.
- Drijvers, P. H. M. (2010). *Secondary algebra education. Revisiting topics and themes and exploring the unknown*. Sense Publishers.
- Duval, Raymond. (2013). *Commentary: Linking epistemology and semio-cognitive modeling in visualization*. *ZDM*. 46. 10.1007/s11858-013-0565-8.
- Fischbein, E. (1993). *The Theory of Figural Concepts*. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 139-162. <http://dx.doi.org/10.1007/BF01273689>
- Fujita, T. (2012). *Learners' level of understanding of the inclusion relations of quadrilaterals and prototype phenomenon*. *The Journal of Mathematical Behavior*. 31. 10.1016/j.jmathb.2011.08.003.
- Garfield, J. (2002). *The Challenge of Developing Statistical Reasoning*. *Journal of Statistics Education*, 10(3). <https://doi.org/10.1080/10691898.2002.11910676>
- Glaserfeld E. von (1990) *Environment and communication*. In: Steffe L. P. & Wood T.(eds.) *Transforming children's mathematics education*. Erlbaum, Hillsdale NJ: 30–38.
- Harford, T. (2023). *Τι κρύβουν οι αριθμοί*. Κλειδάριθμος.
- Huntley, Mary Ann & Marcus, Robin & Kahan, Jeremy & Miller, Jane. (2007). *Investigating high-school students' reasoning strategies when they solve linear equations*. *The Journal of Mathematical Behavior*. 26. 115-139. 10.1016/j.jmathb.2007.05.005.
- Jones, Keith & Tzekaki, Marianna. (2016). *Research on the teaching and learning of geometry*. 10.1007/978-94-6300-561-6_4.
- Kinsey, L. C., Moore, E. T., & Prassidis, E. (2018). *Γεωμετρία και Συμμετρία*. Εκδόσεις Κλειδάριθμος
- Konold, C., Madden, S., Pollatsek, A., Pfannkuch, M., Wild, C., Ziedins, I., Finzer, W., Horton, N. J., & Kazak, S. (2011). *Conceptual challenges in coordinating theoretical and data-centered estimates of probability*. *Mathematical Thinking and Learning*, 13(1-2), 68–86. <https://doi.org/10.1080/10986065.2011.538299>
- Liljedahl, P. (2020). *Building thinking classrooms in mathematics, grades K-12: 14 teaching practices for enhancing learning*. Corwin Mathematics Series
- Lowrie, T., Logan, T., & Hegarty, M. (2019). *The influence of spatial visualization training on students' spatial reasoning and mathematics performance*. *Journal of Cognition and Development*, 20(5), 729–751. <https://doi.org/10.1080/15248372.2019.1653298>
- Margolinas, C. (2003). *Η σημασία του σωστού και του λάθους στην τάξη των Μαθηματικών*. Σαββάλας.
- Markopoulos, C., & Potari, D. (1999). *Forming relationships in three dimensional geometry through dynamic environments*. *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 273–280. <https://researchportal.scu.edu.au/esploro/outputs/conferenceProceeding/Forming-relationships-in-three-dimensional-geometry/991012821662002368#file-0>
- Marsden, J. (2020). *Διανυσματικός λογισμός*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
- National Research Council. 2001. *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington, DC: The National Academies Press. <https://doi.org/10.17226/9822>.
- New Zealand Ministry of Education. (2007). *The New Zealand curriculum*. Learning Media Limited.
- Papadam, M., & Agaliotis, I. (2021). *An investigation of geometric knowledge in pupils with mild educational needs*. *Psychology: The Journal of the Hellenic Psychological Society*, 26(1), 135–151. https://doi.org/10.12681/psy_hps.26234

- Pfannkuch, M. (2005). *Thinking tools and variation*. *Statistics Education Research Journal*, 4, 83-91.
- Piaget, Jean & Inhelder, Barbel (1971). *Mental Imagery in the Child: A Study of the Development of Imaginal Representation*. *British Journal of Educational Studies* 19 (3):343-344.
- Pratt, Dave. (2005). *How do Teachers Foster Students' Understanding of Probability?*. 10.1007/0-387-24530-8_8.
- Sarama, Julie & Clements, Douglas. (2009). *Early Childhood Mathematics Education Research: Learning Trajectories for Young Children*. 10.4324/9780203883785.
- Serow, P., (2008). *Investigating a phase approach to using technology as a teaching tool*, Navigating currents and charting directions
- Sfard, Anna. (2008). *Thinking as Communicating: Human Development, the Growth of Discourses, and Mathematizing*. 1-326. 10.1017/CBO9780511499944.
- Sinclair, Nathalie & Pimm, David & Higginson, William. (2007). *Mathematics and the Aesthetic: New Approaches to an Ancient Affinity*. 10.1007/978-0-387-38145-9. Huff Darrel: How to lie with statistics, Penguin (1991)
- Sirotic, Natasa & Zazkis, Rina. (2007). *Irrational Numbers: The Gap between Formal and Intuitive Knowledge*. *Educational Studies in Mathematics*. 65. 49-76. 10.1007/s10649-006-9041-5.
- Tversky, A., & Kahneman, D. (1974). *Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases*. *Science* (New York, N.Y.), 185(4157), 1124–1131. <https://doi.org/10.1126/science.185.4157.1124>
- Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. Academic Press.
- Waerden, B. L. v. d., & Χριστιαννίδης, Γ. (2007). *Η αφύπνιση της επιστήμης: Αιγυπτιακά, Βαβυλωνιακά και Ελληνικά μαθηματικά* (3η έκδ.). Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.
- Walle, John & Karp, Karen & Bay-Williams, Jennifer. (2009). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally*.
- Watson, Anne & Jones, Keith & Pratt, Dave. (2013). *Key ideas in teaching mathematics: Research-based guidance for ages 9-19*.
- Watson, Jane. (2013). *Statistical Literacy at School: Growth and Goals*. 1-306. 10.4324/9780203053898.
- Δημητριάδου, Κ. (2016). *Προσαρμογή της διδασκαλίας στις εκπαιδευτικές προκλήσεις του 21ου αιώνα*. GUTENBERG.
- Ερμηνευτικές προσεγγίσεις στη διδακτική της Γεωμετρίας – Πρακτικά 4ου Πανελληνίου Συνεδρίου Γεωμετρίας* (2001), ΠΑΤΑΚΗ
- Καρέκος, Ι. Σ., Μπαλτάς, Χ. Α., & Καρέκου, Σ. Α. (2024). *Τα μαθηματικά πέραν των μαθηματικών*. 24 Γράμματα.
- Μάμωνα-Downs, Γ., & Παπαδόπουλος, Ι. (2019). *Επίλυση προβλήματος στα μαθηματικά*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
- Μαυρικάκη, Ε. Θ., Κρόκου, Ζ., Δουκάκης, Σ., Πήλιουρας, Π., Κουλουμπαρίση, Α. Χ., Μουταβέλης, Α., Βάλλας, Γ., & Ζυμπίδης, Δ. (2018). *Αξιολογώ και Μαθαίνω*. Εκδόσεις Γρογόρη.
- Πόταρη, Δ., Ζωιτσάκος, Σ., Καμπούκος, Κ., Κόσυβας, Γ., Λουλάκης, Μ., Μεταξάς, Ν., & Τριανταφύλλου, Χ. (2022). *Οδηγός εκπαιδευτικού Μαθηματικών Γυμνασίου* (2η Έκδοση). Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής.
- Σάλτας, Β. (2008). *Σύγχρονη διδασκαλία των μαθηματικών*. Επίκεντρο.
- Σπανδάγος, Ε. Κ. (2010). *Τα μαθηματικά των αρχαίων Ελλήνων*. Αίθρα.
- Τζεκάκη, Μ., Σταγιόπουλος, Π., & Μπαραλός, Γ. (2011). *Προσαρμογές αναλυτικών προγραμμάτων για τα μαθηματικά στο Γυμνάσιο: Σχέδια διδασκαλίας για μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες*.
- Τριανταφυλλίδης, Α. Τ., & Σδρόλιας, Α. Κ. (2007). *Βασικές μαθηματικές έννοιες για τον εκπαιδευτικό της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης*. Τυπωθήτω / Δαρδανός.
- Χαλκός Ε. Γ. (2020), *Στατιστική, Θεωρία και Πράξη*, Δίσιγμα.
- Χριστιαννίδης, Γ. (2003). *Θέματα από την ιστορία των μαθηματικών*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

$$2^3 = 8$$

