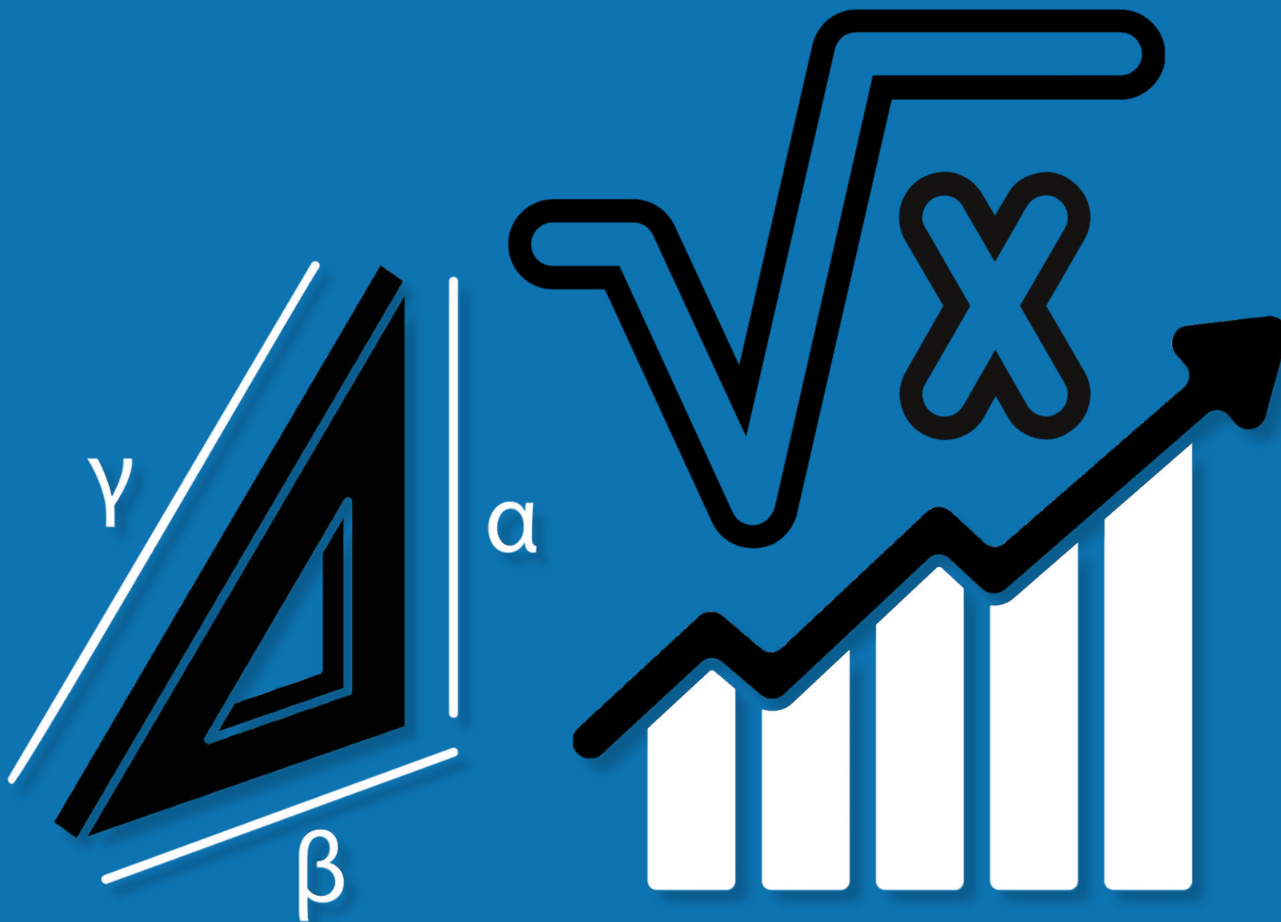
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ ΑΔΑΜΙΔΗΣ ΑΛΕΞΙΑ ΚΑΡΑΝΤΑΝΑ



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Επιστημονική Επιτροπή Αξιολόγησης	
Συντονιστής/τρια / Αξιολογητής/τρια	**Αρβανιτογεώργος Ανδρέας** Εν ενεργεία μέλος Διδακτικού Ερευνητικού Προσωπικού Πανεπιστημίου
Αξιολογητής/τρια	**Ανταμπούφης Νικόλαος** Εν ενεργεία Εκπαιδευτικός
Αξιολογητής/τρια	**Πλάταρος Ιωάννης** Εν ενεργεία Εκπαιδευτικός
Τεχνικός Εμπειρογνώμονας	**Καλλονιάτης Αντώνιος** Πτυχιούχος Πληροφορικής
Επικουρικός Εμπειρογνώμονας	**Θεοδωρίσκου Αλεξία** Πτυχιούχος τεχνολογίας γραφικών τεχνών
Υπεύθυνος/η του μαθήματος/γνωστικού αντικειμένου στο πλαίσιο της Πράξη	**Ειρήνη Γεωργάκη**, Σύμβουλος Α΄ ΙΕΠ, μέλος της Επιστημονικής Ομάδας Έργου (ΕΟΕ) της Πράξης

Πράξη με τίτλο: «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ 6010165 στο Πρόγραμμα «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή» 2021-2027

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Σπυρίδων Δουκάκης

Πρόεδρος του Δ.Σ. του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Υπεύθυνη Πράξης

Πολυξένη Μπίλλα

Σύμβουλος Α΄ του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Προϊσταμένη Τμήματος Β΄ Προγραμμάτων Σπουδών και Εκπαιδευτικού Υλικού

Αναπληρώτρια Υπεύθυνη Πράξης

Άννα-Αικατερίνη Λυκούρη

Σύμβουλος Α΄ του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

«Με τη συγχρηματοδότηση της Ευρωπαϊκής Ένωσης»

και το Πρόγραμμα «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή»

Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας, Θρησκευμάτων και Αθλητισμού

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ευρωπαϊκής Ένωσης

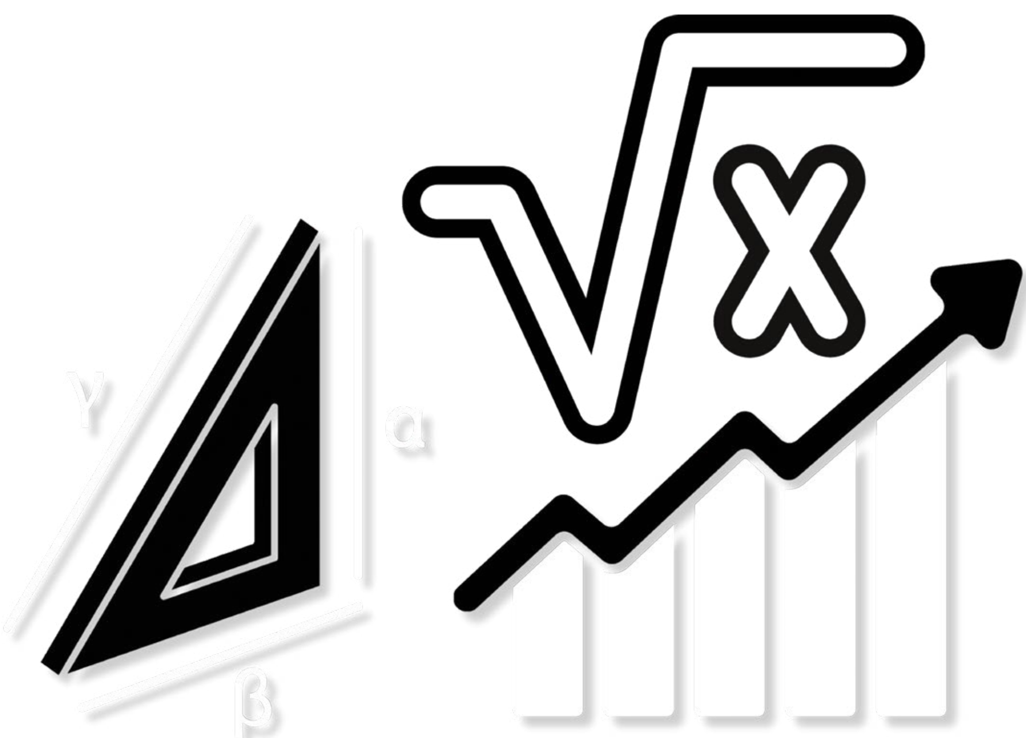
ΕΣΠΑ 2021-2027

Πρόγραμμα Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ ΑΔΑΜΙΔΗΣ ΑΛΕΞΙΑ ΚΑΡΑΝΤΑΝΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ



Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Εκδόσεις Λυσάρι

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ **Δημήτριος Αδαμίδης**
Μαθηματικός, Εκπαιδευτικός Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης
Αλεξία Καραντάνα
Μαθηματικός, Εκπαιδευτικός Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ **Πρόδρομος Μιχαλάκης**

ΔΙΟΡΘΩΣΗ **Εκπαιδευτικός οργανισμός ΑΚΑΔΗΜΙΑ** *(e-akadimia.gr)*

ΣΕΛΙΔΟΠΟΙΗΣΗ **Ασπασία Κυριάκου**

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΒΙΒΛΙΟΥ **Εκδόσεις Λυσάρι** *(lisari.gr)*

ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΨΜΑ **Πρόδρομος Μιχαλάκης,**
Εκδόσεις Λυσάρι *(lisari.gr)*

ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Τα Μαθηματικά είναι ένα πολύτιμο εργαλείο που μας βοηθά να κατανοήσουμε και να ερμηνεύσουμε τον κόσμο γύρω μας. Από τις πιο απλές καθημερινές δραστηριότητες έως τις πιο σύνθετες επιστημονικές και τεχνολογικές εφαρμογές, οι μαθηματικές έννοιες και δεξιότητες είναι παρούσες και απαραίτητες.

Η Άλγεβρα μας διδάσκει πώς να λύνουμε προβλήματα αξιοποιώντας σύμβολα και πράξεις. Η Γεωμετρία μας μαθαίνει να αντιλαμβανόμαστε σχήματα, χώρους και διαστάσεις. Τα Στοχαστικά Μαθηματικά μας επιτρέπουν να κατανοήσουμε τον ρόλο της πιθανότητας και της στατιστικής. Με τα Μαθηματικά, μαθαίνουμε όχι μόνο να υπολογίζουμε, αλλά και να σκεφτόμαστε κριτικά και δημιουργικά!

Το βιβλίο αυτό έχει σχεδιαστεί για να σε βοηθήσει να εμβαθύνεις στις βασικές έννοιες μέσα από τρία Θεματικά Πεδία: της ***Άλγεβρας****, της* ***Γεωμετρίας*** *και των* ***Στοχαστικών Μαθηματικών****.*

Θεματικά Πεδία

Αριθμός και Άλγεβρα

- *Ιδιότητες των Δυνάμεων και Δυνάμεις Ρητών και Πραγματικών Αριθμών.*
- *Πραγματικοί Αριθμοί και Τετραγωνική Ρίζα.*
- *Αλγεβρικές Παραστάσεις και Εξισώσεις Πρώτου Βαθμού.*
- *Συναρτήσεις και Γραφικές Παραστάσεις.*

Γεωμετρία και Μέτρηση

- *Γωνίες και σχέση Επίκεντρης με Εγγεγραμμένη Γωνία.*
- *Κανονικά Πολύγωνα, Πυθαγόρειο Θεώρημα και βασικές γεωμετρικές αποδείξεις.*
- *Μήκος και Εμβαδόν, εφαρμογές σε κύκλους, τρίγωνα, παραλληλόγραμμα και τετράπλευρα.*
- *Μετασχηματισμοί: Μεταφορά, Στροφή και Συμμετρία.*

Στοχαστικά Μαθηματικά

- *Μέτρα Θέσης (Μέση Τιμή, Διάμεσος), Μεταβλητότητα.*
- *Συλλογή, Οργάνωση και Παρουσίαση Δεδομένων μέσα από διαγράμματα.*
- *Πιθανότητες και Πειράματα Τύχης.*

*Κατά τη συγγραφή του βιβλίου ακολουθήθηκαν οι οδηγίες και οι προδιαγραφές των νέων προγραμμάτων σπουδών, όπως αυτές τέθηκαν από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής. Το βιβλίο αυτό είναι οργανωμένο γύρω από κεντρικές ιδέες, τις λεγόμενες «****Μεγάλες Ιδέες****» των Μαθηματικών, οι οποίες συνδέουν διαφορετικές μαθηματικές έννοιες σε ένα ενιαίο σύνολο. Αυτές οι ιδέες σε βοηθούν να κατανοήσεις βαθύτερα τη σημασία και τη χρήση των Μαθηματικών στη ζωή και στην καθημερινότητά σου.*

Για παράδειγμα, στην Άλγεβρα επικεντρωνόμαστε στην ιδέα της αναγνώρισης, συμπλήρωσης, περιγραφής και κατασκευής επαναλαμβανόμενων και μεταβαλλόμενων κανονικοτήτων, αναγνώρισης αντιστοιχιών και συμβολική έκφραση των σχέσεων ανάμεσα σε ποσότητες. Στην Γεωμετρία, με την ιδέα της απόδειξης, δηλαδή τη συλλογιστική διαδικασία η οποία ξεκινά από ένα σύνολο υποθέσεων και μέσα από μια σειρά διαδοχικών επιχειρημάτων/συλλογισμών καταλήγει σε ένα συμπέρασμα, θα αποδείξουμε βασικά γεωμετρικά θεωρήματα. Στα Στοχαστικά Μαθηματικά θα δούμε πως η μεταβολή αποκτά μια πιο γενική μορφή καθώς προσπαθούμε να ερμηνεύσουμε και να προβλέψουμε την αλλαγή ενός φαινομένου.

Κάθε Θεματική Ενότητα αποτελείται από ***Διδακτικές Ενότητες*** *με την ακόλουθη δομή:*

Στόχοι Ενότητας*: τα κύρια Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα παρουσιάζονται στην αρχή κάθε ενότητας, δίνοντας μια σαφή εικόνα για τις διδακτικές στοχεύσεις της ενότητας.*

Έργα Εξερεύνησης*: μικρές δραστηριότητες που υποστηρίζουν την ενεργή εμπλοκή των μαθητών και* *μαθητριών και στοχεύουν στην ανάδειξη των στοιχείων των ΠΜΑ που βρίσκονται υπό επεξεργασία.*

Θεωρία*: επεξήγηση των μαθηματικών εννοιών που συνδέονται με τα έργα εξερεύνησης της ενότητας.*

Εφαρμογές: *δραστηριότητες που βοηθούν στην αξιοποίηση της γνώσης σε διαφορετικά περιβάλλοντα, στη σύνδεση των Μαθηματικών με άλλες επιστήμες και στην έκφραση εννοιών μέσα από ποικίλα συστήματα αναπαράστασης.*

Διαδραστικό Υλικό*: πρόσβαση σε Ψηφιακά Μαθησιακά Αντικείμενα μέσω QR codes, με πρόσθετο υλικό, όπως ενδεικτικές λύσεις των έργων εξερεύνησης, διαδραστικές ασκήσεις και προσομοιώσεις.*

Ασκήσεις και προβλήματα*: ποικιλία έργων διαβαθμισμένης δυσκολίας, που οικοδομούν προοδευτικά τη μαθηματική γνώση και αξιοποιούνται για την αξιολόγηση του βαθμού επίτευξης των ΠΜΑ και τον αναστοχασμό των μαθητών/-τριών.*

Στο τέλος κάθε Θεματικής Ενότητας, θα βρεις:

Ανακεφαλαίωση και Αυτοαξιολόγηση*: ενότητες που βοηθούν στην αποτίμηση της προόδου και τον εντοπισμό ασυνεχειών στην κατάκτηση των στοιχείων του ΠΜΑ.*

Θέματα από την Ιστορία των Μαθηματικών*: ιστορικές αναφορές, που έχουν ως στόχο να προκαλέσουν το ενδιαφέρον των μαθητών/-τριών για τα Μαθηματικά και να τα αναδείξουν ως πανανθρώπινη δραστηριότητα.*

Με το βιβλίο αυτό, θα έχεις την ευκαιρία να ***εμβαθύνεις*** *στις μαθηματικές έννοιες, να* ***αναπτύξεις*** *την κριτική σου σκέψη και να δεις τα μαθηματικά όχι μόνο ως ένα σύνολο αριθμών και τύπων, αλλά ως ένα μέσο κατανόησης και επίλυσης προβλημάτων. Παράλληλα, με τη διαθεματική προσέγγιση, θα* ***ανακαλύψεις*** *πώς τα μαθηματικά συνδέονται με άλλα πεδία γνώσης, όπως η φυσική, η τεχνολογία, η οικονομία, οι κοινωνικές επιστήμες ακόμα και οι τέχνες! Έτσι, θα* ***κατανοήσεις*** *βαθύτερα τη σχέση τους με τον πραγματικό κόσμο και θα* ***αποκτήσεις*** *εργαλεία που θα αξιοποιήσεις σε ποικίλες προκλήσεις και καθημερινές καταστάσεις.*

Επεξήγηση εικονιδίων

Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα.

Έργα αφόρμησης για ομαδική συζήτηση στην τάξη.

Υπενθύμιση προϋπάρχουσας γνώσης.

Δυνατότητα αξιοποίησης χειραπτικών υλικών.

Δυνατότητα αξιοποίησης υπολογιστή τσέπης.

Πρόταση διδακτικής διαχείρισης Θεματικών Πεδίων/Ενοτήτων και Διδακτικών Ενοτήτων.

Η σειρά διδασκαλίας των διδακτικών ενοτήτων, προτείνεται να είναι αυτή με την οποία παρουσιάζονται. Την ίδια στιγμή, προτείνεται η παράλληλη διδασκαλία των Θεματικών Πεδίων της Άλγεβρας και της Γεωμετρίας, με ισόποση κατανομή χρόνου. Με τον τρόπο αυτόν διασφαλίζεται η οριζόντια διασύνδεση των εννοιών των πρώτων δύο Πεδίων του βιβλίου.

Η διδασκαλία του Γ' Θεματικού Πεδίου (Στοχαστικά Μαθηματικά) μπορεί να πραγματοποιηθεί ενιαία και ανεξάρτητα, μετά την ολοκλήρωση της διδασκαλίας του Α' και Β' Θεματικού Πεδίου (Άλγεβρα και Γεωμετρία).

Η συγγραφική ομάδα

Περιεχόμενα

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΡΗΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ Α.1

Στην ενότητα αυτή θα εμβαθύνουμε στις ιδιότητες των δυνάμεων με ρητό και ακέραιο εκθέτη, διερευνώντας την εφαρμογή τους σε μαθηματικά προβλήματα και φυσικά φαινόμενα. Θα επεκτείνουμε την κατανόησή μας για την έννοια της δύναμης και θα μελετήσουμε την τυποποιημένη μορφή των ρητών αριθμών για την αναπαράσταση πολύ μικρών μεγεθών. Μέσα από πρακτικά παραδείγματα και υπολογισμούς, θα κατανοήσουμε τη σημασία της προτεραιότητας στις πράξεις και τη χρήση συμβολισμών.

Είσαι έτοιμος/η να ανακαλύψεις τη δύναμη των μαθηματικών μέσα από τις δυνάμεις;

Στόχοι Ενότητας

- ☐ Διερευνώ τις ιδιότητες των δυνάμεων με βάση ρητό και εκθέτη θετικό ακέραιο, τις διατυπώνω συμβολικά και τις αιτιολογώ χρησιμοποιώντας τον ορισμό της δύναμης.
- ☐ Επεκτείνω τον ορισμό και τις ιδιότητες της δύναμης στην περίπτωση του ακέραιου εκθέτη.
- ☐ Αξιοποιώ την τυποποιημένη μορφή των ρητών αριθμών για την αναπαράσταση φυσικών μεγεθών μικρού μεγέθους και την επίλυση ποικίλων προβλημάτων.
- ☐ Υπολογίζω την τιμή απλών αριθμητικών παραστάσεων με τις τέσσερις πράξεις και δυνάμεις. Εκτελώ τις πράξεις με την απαιτούμενη προτεραιότητα.

Μαθήματα Ενότητας

1.1 Ιδιότητες των δυνάμεων

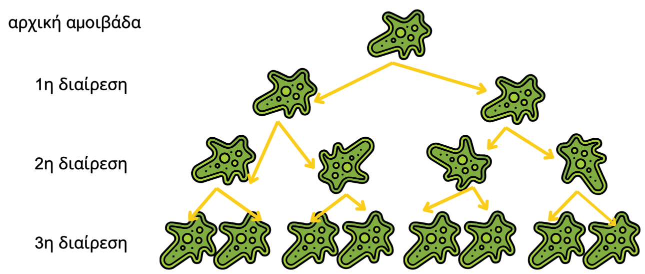
1.2 Δύναμη ρητού με ακέραιο εκθέτη

1.3 Τυποποιημένη μορφή μικρών αριθμών

+ Ανακεφαλαίωση / Αυτοαξιολόγηση

1.1 | Ιδιότητες των δυνάμεων

Οι μονοκύτταροι οργανισμοί, όπως γνωρίζουμε από την Βιολογία, αναπαράγονται συνήθως με μονογονία. Αν παρατηρήσουμε μια αμοιβάδα, θα δούμε ότι οι απόγονοί της δημιουργούνται με απλή διαίρεση (διχοτόμηση). Στην αρχή διπλασιάζεται το γενετικό υλικό της πρώτης αμοιβάδας και στη συνέχεια, με διαίρεση, δημιουργούνται δύο νέες όμοιες αμοιβάδες. Δηλαδή κάθε αμοιβάδα δίνει δύο απογόνους. Πόσες αμοιβάδες θα έχει η γενιά της 5ης διαίρεσης;



Δύναμη

Το γινόμενο $\alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha$, που έχει ν παράγοντες ίσους με έναν ρητό αριθμό α, λέγεται **δύναμη** του α στη ν ή νιοστή δύναμη του α και συμβολίζεται με α^ν.

$$\alpha^\nu = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}}$$

Ο ρητός αριθμός α λέγεται **βάση** της δύναμης και ο φυσικός αριθμός ν ($\nu \neq 0$) λέγεται **εκθέτης**.

Επίσης ορίζουμε: $\alpha^1 = \alpha$.

Παραδείγματα:

$$5^2 = 5 \cdot 5 = 25$$

$$(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = +9$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Θυμόμαστε ότι:

- Οι δυνάμεις του **1** είναι όλες ίσες με 1, δηλαδή $1^\nu = 1$.
- Οι δυνάμεις του **0** είναι όλες ίσες με 0, δηλαδή $0^\nu = 0$ (με $\nu \neq 0$).

Πρόσημο δύναμης

- Δύναμη με βάση **θετικό** αριθμό είναι **θετικός** αριθμός. $(+5)^2 = +25$.
- Δύναμη με βάση **αρνητικό** αριθμό και εκθέτη **άρτιο** είναι **θετικός** αριθμός. $(-2)^2 = +4$.
- Δύναμη με βάση **αρνητικό** αριθμό και εκθέτη **περιττό** είναι **αρνητικός** αριθμός. $(-2)^3 = -8$.

Σημείωση: Είναι $(-2)^2 = (-2)\cdot(-2) = +4$,
ενώ $-2^2 = -(2\cdot 2) = -4$.

Αντιλαμβάνομαι
με προσομοίωση

Ιδιότητες δυνάμεων ρητών με εκθέτη φυσικό

Παρατηρούμε ότι: $2^2\cdot 2^3 = \underbrace{2\cdot 2}_{2^2}\cdot\underbrace{2\cdot 2\cdot 2}_{2^3} = 2^5 = 2^{2+3}$.

Γενικά:

Για να **πολλαπλασιάσουμε** δυνάμεις με την ίδια βάση, αφήνουμε την ίδια βάση και βάζουμε εκθέτη το άθροισμα των εκθετών.

$$\alpha^\mu\cdot\alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$$

Παρατηρούμε ότι: $3^5:3^3 = \frac{3^5}{3^3} = \frac{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3}{3\cdot 3\cdot 3} = 3\cdot 3\cdot\underbrace{\frac{3\cdot 3\cdot 3}{3\cdot 3\cdot 3}}_{=1} = 3\cdot 3 = 3^2 = 3^{5-3}$.

Γενικά:

Για να **διαιρέσουμε** δυνάμεις με την ίδια βάση, αφήνουμε την ίδια βάση και βάζουμε εκθέτη τη διαφορά του εκθέτη του διαιρέτη από τον εκθέτη του διαιρετέου.

$$\alpha^\mu:\alpha^\nu = \alpha^{\mu-\nu}$$

Παρατηρούμε ότι: $(9\cdot 8)^2 = (9\cdot 8)\cdot(9\cdot 8) = (9\cdot 9)\cdot(8\cdot 8) = 9^2\cdot 8^2$.

Γενικά:

Για να **υψώσουμε** ένα **γινόμενο** σε εκθέτη, υψώνουμε κάθε παράγοντα του γινομένου στον εκθέτη αυτό.

$$(\alpha\cdot\beta)^\nu = \alpha^\nu\cdot\beta^\nu$$

Παρατηρούμε ότι: $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3} = \frac{2^4}{3^4}$.

Γενικά:

Για να **υψώσουμε** ένα **πηλίκο** σε έναν εκθέτη, υψώνουμε καθέναν από τους όρους του πηλίκου στον εκθέτη αυτόν.

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu = \frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu}$$

Παρατηρούμε ότι: $(7^2)^3 = 7^2\cdot 7^2\cdot 7^2 = 7^{2+2+2} = 7^{2\cdot 3} = 7^6$.

Γενικά:

Για να **υψώσουμε** μία **δύναμη** σε έναν εκθέτη, υψώνουμε τη βάση της δύναμης στο γινόμενο των εκθετών.

$$(\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu\cdot\nu}$$

Συνοπτικά:

Ιδιότητες	Παραδείγματα
1. $\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}$	$2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5$
2. $\alpha^{\mu} : \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$	$3^5 : 3^3 = 3^{5-3} = 3^2$
3. $(\alpha \cdot \beta)^{\nu} = \alpha^{\nu} \cdot \beta^{\nu}$	$(9 \cdot 8)^2 = 9^2 \cdot 8^2$
4. $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu} = \frac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4}$
5. $(\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu \cdot \nu}$	$(7^2)^3 = 7^{2 \cdot 3} = 7^6$

Λυμένα Παραδείγματα

1. Να γράψετε με τη μορφή μίας δύναμης τις παραστάσεις:

α) $5^6 \cdot 5^3$ β) $2^7 \cdot 2 \cdot 2^3$ γ) $2^9 : (2^2 \cdot 2^3)$ δ) $\frac{15^4}{5^4}$ ε) $2^5 \cdot 3^5 \cdot 4^5$

Λύση:

Σύμφωνα με τις ιδιότητες των δυνάμεων έχουμε:

α) $5^6 \cdot 5^3 = 5^{6+3} = 5^9$. ← **Ιδιότητα $\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}$**

β) $2^7 \cdot 2 \cdot 2^3 = 2^{7+1+3} = 2^{11}$. ← **Ιδιότητα $\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}$**

γ) $2^9 : (2^2 \cdot 2^3) = 2^9 : 2^{2+3} = 2^9 : 2^5 = 2^{9-5} = 2^4$ ← **Ιδιότητες $\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}$ και $\alpha^{\mu} : \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$**

δ) $\frac{15^4}{5^4} = \left(\frac{15}{5}\right)^5 = 3^5$. ← **Ιδιότητα $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu} = \frac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}}$**

ε) $2^5 \cdot 3^5 \cdot 4^5 = (2 \cdot 3 \cdot 4)^5 = 24^5$. ← **Ιδιότητα $(\alpha \cdot \beta)^{\nu} = \alpha^{\nu} \cdot \beta^{\nu}$**

2. Να υπολογίσετε της τιμή της παράστασης: $A = (3^3 - 5^2)^4 + 2 \cdot (4 - 2^3)$

Θυμόμαστε

Προτεραιότητα των πράξεων:

1. **Δυνάμεις.**
2. **Πολλαπλασιασμοί** και **διαιρέσεις** (με τη σειρά που εμφανίζονται στην παράσταση).
3. **Προσθέσεις** και **αφαιρέσεις** (με τη σειρά που εμφανίζονται στην παράσταση).

Αν υπάρχουν **παρενθέσεις**, εκτελούμε πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις με την παραπάνω σειρά.

Λύση:

$A = (3^3 - 5^2)^4 + 2 \cdot (4 - 2^3) =$

$= (27 - 25)^4 + 2 \cdot (4 - 8) =$

$= 2^4 + 2 \cdot (-4) =$

$= 16 - 8 =$

$= 8.$

Ασκήσεις / Προβλήματα

Εξασκούμαι σε όσα έμαθα

1 Χαρακτήρισε σωστές ή λανθασμένες τις προτάσεις που ακολουθούν βάζοντας ένα **x** στην κατάλληλη θέση.

	Σωστό	**Λάθος**
α) Ισχύει ότι $2^3 = 3^2$		
β) Ισχύει ότι $-2^3 = (-2)^3$		
γ) Κάθε δύναμη με εκθέτη άρτιο αριθμό είναι θετικός αριθμός.		
δ) Για κάθε φυσικό θετικό αριθμό ν ισχύει $1^\nu = 1$.		
ε) Το γινόμενο $2^3 \cdot (-2)^3 \cdot 1^3 \cdot (-3)^2$ είναι αρνητικός αριθμός.		
στ) Ισχύει ότι $0^5 = 0$.		

2 Γράψε τις παραστάσεις σε μορφή μίας δύναμης, αν α, β είναι ρητοί αριθμοί και κ, λ φυσικοί αριθμοί ($\neq 0$):

α) $\alpha^\kappa \cdot \alpha^\lambda =$................. β) $\dfrac{\alpha^\kappa}{\alpha^\lambda} =$................. γ) $\alpha^\kappa \cdot \beta^\kappa =$.................

δ) $\dfrac{\alpha^\kappa}{\beta^\kappa} =$................. ε) $(\alpha^\kappa)^\lambda =$.................

3 Γράψε τις παρακάτω παραστάσεις σε μορφή μίας δύναμης:

α) $2^3 \cdot 2^4$ β) $3 \cdot 3^2 \cdot 3^5$ γ) $\dfrac{5^8}{5^2}$ δ) $(6^3)^2$ ε) $2^4 \cdot 5^4$ στ) $\dfrac{6^8}{2^8}$

4 Υπολόγισε τη τιμή των παρακάτω παραστάσεων με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των δυνάμεων:

α) $2^8 : 2^5$ β) $5^4 : 5^2$ γ) $\dfrac{12^2}{6^2}$ δ) $\dfrac{(-20)^3}{(-10)^3}$

ε) $\dfrac{27^2}{(-9)^2}$ στ) $5^5 \cdot 2^5$ ζ) $2{,}5^2 \cdot 4^2$

5 Υπολόγισε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $\dfrac{6^5 \cdot 6^3}{6^7}$ β) $\dfrac{5^7 : 5^6}{5}$ γ) $\dfrac{(3^2)^3 \cdot 3^5}{3^9}$ δ) $\dfrac{(-3)^5 \cdot (-3)^2}{(-3) \cdot (-3)^4}$ ε) $\dfrac{6^4 \cdot 6^3}{3^2 \cdot 3^5}$ στ) $\dfrac{2^7 \cdot 5^7}{10^5}$

6

Υπολόγισε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $2^4 - 2^3 + (-2)^4$

β) $-1^3 - (-1)^3 + 1^2 + (-1)^2$

γ) $5^2 + (-5)^2 + 5 - (-5)^1$

7

Υπολόγισε την τιμή της παράστασης $Α = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$, όταν:

α) $x = 3$ β) $x = -2$

8

Υπολόγισε την τιμή της παράστασης $(-7 + 5)^2 + [1 - (-6 + 2)^2] : (7 - 3 \cdot 2)^6$.

9

Βρες το αποτέλεσμα εκτελώντας τις πράξεις: $Α = -2^3 + (-2)^2 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{(-2)^3}$,

Στη συνέχεια, υπολόγισε την τιμή της παράστασης: $Β = \frac{Α^2 + 2Α}{-Α}$

10

Υπολόγισε την παράσταση: $\frac{(-5)^9 \cdot 2^{10}}{2^9 \cdot 5^7} + 2 \cdot (-5)^2$.

Εξασκούμαι

σε όσα έμαθα

1.2 | Δύναμη ρητού με ακέραιο εκθέτη

Ο Γιώργος γνωρίζει ότι $\frac{2}{2} = 1$ και δοκιμάζοντας παίρνει

$\frac{2^2}{2^2} = \frac{4}{4} = 1$, $\frac{2^3}{2^3} = \frac{8}{8} = 1$, … αλλά ταυτόχρονα γνωρίζει ότι

$\frac{2^2}{2^2} = 2^{2-2} = 2^0$, $\frac{2^3}{2^3} = 2^{3-3} = 2^0$, … συνεπώς συμπεραίνει ότι $2^0 = 1$.

Μπορούμε να γενικεύσουμε το συμπέρασμα του Γιώργου;

Σύμφωνα με τον κανόνα της διαίρεσης των δυνάμεων με την ίδια βάση, είναι: $\alpha^\mu : \alpha^\nu = \alpha^{\mu-\nu}$.

Παρατηρούμε ότι: $\frac{2^3}{2^3} = 2^{3-3} = 2^0$,

όμως είναι: $\frac{2^3}{2^3} = \frac{8}{8} = 1$.

Επομένως $2^0 = 1$.

Γενικά:

Η δύναμη κάθε ρητού αριθμού, διάφορου του μηδενός με εκθέτη το **μηδέν** είναι ίση με μονάδα.

Για $\alpha \neq 0$, ορίζουμε: $\alpha^0 = 1$

Παρατηρούμε ότι: $\frac{2^2}{2^5} = 2^{2-5} = 2^{-3}$,

όμως είναι: $\frac{2^2}{2^5} = \frac{2\cdot 2}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2} = \underbrace{\frac{2\cdot 2}{2\cdot 2}}_{=1}\cdot\frac{1}{2\cdot 2\cdot 2} = \frac{1}{2\cdot 2\cdot 2} = \frac{1}{2^3}$.

Επομένως $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$.

Γενικά:

Η δύναμη κάθε ρητού αριθμού, διάφορου του μηδενός, με εκθέτη **αρνητικό** ακέραιο, είναι ίση με κλάσμα που έχει αριθμητή τη μονάδα και παρονομαστή τη δύναμη του αριθμού αυτού με αντίθετο εκθέτη.

Για $\alpha \neq 0$, ορίζουμε: $\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu}$

Στη σχέση $\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^\nu$, οι αριθμοί α και $\frac{1}{\alpha}$ είναι αντίστροφοι, συνεπώς έχουμε ότι:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\nu$$

Συνοπτικά:

Για $\alpha \neq 0$ **ισχύουν:**	**Παραδείγματα**
$\alpha^0 = 1$	$2^0 = 1$
$\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu}$ και $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\nu$	$2^{-3} = \frac{1}{2^3}$ $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} = \left(\frac{4}{3}\right)^3$

Αντιλαμβάνομαι
με προσομοίωση

Οι ιδιότητες των δυνάμεων με εκθέτη φυσικό ισχύουν και για τις δυνάμεις με εκθέτη ακέραιο.

Λυμένα Παραδείγματα

1. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις:

α) $(-5)^0$ β) 2^{-4} γ) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$ δ) $(-3)^{-2}$ και -3^{-2}

Λύση:

α) $(-5)^0 = 1$, ← **ιδιότητα:** $\alpha^0 = 1$

β) $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$, ← **ιδιότητα:** $\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu}$

γ) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{1} = \frac{3}{2}$, ← **ιδιότητα:** $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu}$

δ) $(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$, ← **ιδιότητα:** $\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu}$

και $-3^{-2} = -\frac{1}{3^2} = -\frac{1}{9}$.

2. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = (-1)^{-2} + (-1)^{-1} + (-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2$$

Λύση:

$$\begin{aligned} A &= (-1)^{-2} + (-1)^{-1} + (-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 = \\ &= \frac{1}{(-1)^2} + \frac{1}{(-1)^1} + 1 + (-1) + (+1) = \\ &= \frac{1}{+1} + \frac{1}{-1} + 1 - 1 + 1 = \\ &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 = \\ &= 1. \end{aligned}$$

3. Να απλοποιήσετε την παράσταση: $A = \frac{(\alpha \cdot \beta)^3 \cdot \beta^{-1}}{(\alpha \cdot \beta^2)^2}$.

Λύση: Από τις ιδιότητες των δυνάμεων προκύπτει ότι:

$$A = \frac{(\alpha \cdot \beta)^3 \cdot \beta^{-1}}{(\alpha \cdot \beta^2)^2} = \frac{\alpha^3 \cdot \beta^3 \cdot \beta^{-1}}{\alpha^2 \cdot \beta^{2 \cdot 2}} = \frac{\alpha^3 \cdot \beta^{3-1}}{\alpha^2 \cdot \beta^4} = \frac{\alpha^3 \cdot \beta^2}{\alpha^2 \cdot \beta^4} = \alpha^{3-2} \cdot \beta^{2-4} = \alpha^1 \cdot \beta^{-2} = \frac{\alpha}{\beta^2}.$$

Εξασκούμαι

σε όσα έμαθα

Εξασκούμαι σε όσα έμαθα

Ασκήσεις / Προβλήματα

1 Χαρακτήρισε σωστές ή λανθασμένες τις προτάσεις που ακολουθούν βάζοντας ένα **x** στην κατάλληλη θέση.

	Σωστό	Λάθος
α) Ισχύει: $(0,1)^{-3} = \frac{1}{0,1^3} = \frac{1}{1000} = 0,001$.		
β) Ισχύει: $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = -\frac{2}{3}$.		
γ) Ισχύει: $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\lambda} = \frac{\alpha^\lambda}{\beta^\lambda}$.		
δ) Αν $\alpha \neq 0$ τότε $\alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha}$.		
ε) Είναι $2^0 = (-2)^0$.		
στ) Ισχύει $(-2)^{-3} = \frac{1}{2^3}$.		

2 Υπολόγισε τις παρακάτω δυνάμεις:

α) 2^{-3} β) 3^{-1} γ) $(-2)^{-4}$ δ) -3^{-3} ε) 13^0
στ) $(-5)^0$ ζ) $-(-12)^0$

3 Υπολόγισε τις παρακάτω δυνάμεις:

α) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$ β) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-2}$ γ) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}$ δ) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-1}$ ε) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$

4 Γράψε με μορφή μίας δύναμης τις παρακάτω παραστάσεις, αξιοποιώντας τις ιδιότητες των δυνάμεων:

α) $3^5 \cdot 2^5$ β) $2^7 \cdot 2^{-5}$ γ) $5^{-7} \cdot 5^{-10}$ δ) $7^{-7} : 7^{-9}$ ε) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^5$
στ) $\frac{16^{-3}}{27^{-4}} \cdot \frac{4^2}{9^2}$ ζ) $(2^{-3})^{-9}$ η) $(2^{-3})^9$ θ) $((-2)^{-3})^{-9}$

5 Υπολόγισε τις παραστάσεις:

$$A = \frac{2^3 \cdot (2^{-2})^2}{2^{-1} \cdot 4^1}$$

$$B = \frac{3^{-2} \cdot 3^{-3}}{\frac{3}{3^2}}$$

$$\Gamma = (7^8 \cdot 7^4) \cdot (7^{-4} \cdot 7^{-2})^2$$

6 Υπολόγισε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $\dfrac{2^{-10} \cdot 3^{-5}}{2^{-12} \cdot 3^{-7}}$ β) $\dfrac{4^{9} \cdot 5^{9}}{2^{10} \cdot 10^{10}}$

7 Βρες την τιμή της παράστασης:

$$\frac{\left(\frac{2^{10}}{2^{7}}\right) : \left(\frac{2}{2^{7}}\right)^{-1}}{(2^4)^{-2} \cdot (2^{-2})^3 \cdot (2^7)^2}$$

8 Απλοποίησε την παράσταση:

$$A = \frac{2x^{-2}y^{-5}}{(x^2y)^3}$$

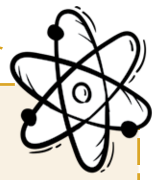
Στη συνέχεια, υπολόγισε την τιμή της για x = 4 και y = 0,25.

9 Απλοποίησε την παράσταση:

$$A = \frac{\alpha^2\beta : \beta^{-2}}{\alpha^3\beta^2}$$

Στη συνέχεια, υπολόγισε την τιμή της για $\alpha = 2^{-5} \cdot 2^4$ και $\beta = \dfrac{3^4}{9^2} \cdot \dfrac{2^{-2}}{4^{-2}}$

Τα Μαθηματικά στις άλλες Επιστήμες



Ξέρουμε ότι η κινητική ενέργεια ενός σώματος δίνεται από την σχέση:

- Κινητική Ενέργεια = $\frac{1}{2}$ · μάζα σώματος· ταχύτητα^2

Η μάζα του σώματος μετριέται σε kg, η ταχύτητα σε m/s και η ενέργεια σε J.

Αξιοποιώντας τις ιδιότητες των δυνάμεων που μάθατε σε αυτό το κεφάλαιο, διερευνήστε τη σχέση ανάμεσα στην κινητική ενέργεια και την ταχύτητα.

Πώς αλλάζει η κινητική ενέργεια όταν η μάζα μένει σταθερή και η ταχύτητα διπλασιάζεται;

α) Διπλασιάζεται β) Τριπλασιάζεται γ) Τετραπλασιάζεται

-Γιατί η ταχύτητα ενός οχήματος παίζει τόσο σημαντικό ρόλο στην πρόκληση ατυχημάτων;

-Τι συμπεράσματα βγάζετε από το βίντεο;

Βρείτε πληροφορίες για τα οδικά ατυχήματα στην Ελλάδα. Τι ποσοστό οφείλεται στην υπερβολική ταχύτητα των οχημάτων;

1.3 | Τυποποιημένη μορφή μικρών αριθμών

Εξερευνώ

Τα φυτικά κύτταρα έχουν μέγεθος από 0,000005m έως 0,00001m.

Παρατηρούμε ότι τα μεγέθη αυτά είναι πολύ μικρά, συνεπώς η διαχείριση και η απομνημόνευσή τους είναι αρκετά δύσκολη.

Για την διευκόλυνση της επιστημονικής κοινότητας, τα μεγέθη αυτά εκφράζονται με διαφορετική μορφή.

Για παράδειγμα παίρνουμε:

$0,00001 = \frac{1}{10.000} = \frac{1}{10^5} = 10^{-5}$.

Η μορφή αυτή ονομάζεται τυποποιημένη μορφή.

Γενικά:

Οι πολύ «μικροί» αριθμοί μπορούν να γραφούν σε **τυποποιημένη μορφή**:

$$\alpha \cdot 10^{-\nu},$$

όπου ο αριθμός α είναι ένας δεκαδικός αριθμός με ακέραιο μέρος μεγαλύτερο ή ίσο του 1 και μικρότερο του 10 ($1 \leq \alpha < 10$) και ο ν είναι ένας φυσικός αριθμός.

Παραδείγματα:

$0,0005 = \frac{5}{10.000} = \frac{5}{10^4} = 5 \cdot 10^{-4}$ Άρα: $0,\underbrace{0005}_{4\ \text{ψηφία}} = 5 \cdot 10^{-4}$

Για να βρούμε τον φυσικό αριθμό ν (ο οποίος με αρνητικό πρόσημο είναι εκθέτης του 10) μετράμε πόσες θέσεις προς τα δεξιά πρέπει να μετακινηθεί η υποδιαστολή ,ώστε να προκύψει ο δεκαδικός αριθμός α που έχει ακέραιο μέρος μεγαλύτερο ή ίσο του 1 και μικρότερο του 10.

Με αυτόν τον τρόπο βρίσκουμε:

$0,\underbrace{0005}_{4\ \text{ψηφία}} = 5 \cdot 10^{-4}$

$0,\underbrace{000003}_{6\ \text{ψηφία}}5 = 3,5 \cdot 10^{-6}$

$0,\underbrace{00001}_{5\ \text{ψηφία}}24 = 1,24 \cdot 10^{-5}$

$0,\underbrace{0000000008}_{10\ \text{ψηφία}}05 = 8,05 \cdot 10^{-10}$

Αντιλαμβάνομαι

με προσομοίωση

Ασκήσεις / Προβλήματα

1 Γράψε σε τυποποιημένη μορφή τους παρακάτω αριθμούς:

α) 0,000001 β) 0,0003 γ) 0,0000045 δ) 0,000104

ε) 0,000000917 στ) 0,00000000009

2 Γράψε τη δεκαδική μορφή των αριθμών:

α) $7,6 \cdot 10^{-4}$ β) $1,25 \cdot 10^{-3}$ γ) $6,78 \cdot 10^{-2}$ δ) $2,5 \cdot 10^{-6}$

3 Ένας βιολόγος μελετάει τα μικρόβια και παρατηρεί μια απόσταση ανάμεσα σε δύο αποικίες ίση με $3,6 \cdot 10^{-5}$ μέτρα.

α) Γράψε τη δεκαδική μορφή της απόστασης σε μέτρα.

β) Γράψε την τυποποιημένη μορφή της απόστασης σε εκατοστά.

4 Σύγκρινε τους αριθμούς:

α) $3 \cdot 10^{-5}$ και $8 \cdot 10^{-5}$ β) $8 \cdot 10^{-11}$ και $5 \cdot 10^{-9}$ γ) 10^{-7} και $5 \cdot 10^{-13}$

5 Κάνε τις πράξεις και γράψε το τελικό αποτέλεσμα σε τυποποιημένη μορφή:

α) $2 \cdot 10^{-5} + 3 \cdot 10^{-5}$ β) $4 \cdot 10^{-6} + 7 \cdot 10^{-6}$

γ) $1,3 \cdot 10^{-8} - 2 \cdot 10^{-8}$ δ) $4 \cdot 10^{-5} + 2 \cdot 10^{-6}$

6 Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = 3,1 \cdot 10^{-9}$ και $\beta = 2 \cdot 10^{-9}$.

Υπολόγισε τις παραστάσεις:

$$\alpha + \beta, \quad \alpha - \beta, \quad \alpha \cdot \beta \quad \text{και} \quad \alpha : \beta.$$

Εξασκούμαι σε όσα έμαθα

Ανακεφαλαίωση (Ρητοί αριθμοί)

Δύναμη

Το γινόμενο $\alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha$, που έχει ν παράγοντες ίσους με έναν ρητό αριθμό α, λέγεται **δύναμη** του α στη ν ή νιοστή δύναμη του α και συμβολίζεται με α^ν.

$$\alpha^\nu = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}}$$

- Επίσης: $\alpha^1 = \alpha$.

Πρόσημο δύναμης

- Δύναμη με βάση **θετικό** αριθμό είναι **θετικός** αριθμός. π.χ. $(+5)^2 = +25$.
- Δύναμη με βάση **αρνητικό** αριθμό και εκθέτη **άρτιο** είναι **θετικός** αριθμός. π.χ. $(-2)^2 = +4$.
- Δύναμη με βάση **αρνητικό** αριθμό και εκθέτη **περιττό** είναι **αρνητικός** αριθμός. π.χ. $(-2)^3 = -8$.

Σημείωση: Είναι $(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = +4$,
ενώ $-2^2 = -(2 \cdot 2) = -4$.

Ιδιότητες των δυνάμεων:

Ιδιότητες	Παραδείγματα
1. $\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$	$2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5$
2. $\alpha^\mu : \alpha^\nu = \alpha^{\mu-\nu}$	$3^5 : 3^3 = 3^{5-3} = 3^2$
3. $(\alpha \cdot \beta)^\nu = \alpha^\nu \cdot \beta^\nu$	$(9 \cdot 8)^2 = 9^2 \cdot 8^2$
4. $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu = \frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4}$
5. $(\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu \cdot \nu}$	$(7^2)^3 = 7^{2 \cdot 3} = 7^6$

Δύναμη ρητού με ακέραιο εκθέτη:

Για $\alpha \neq 0$ **ισχύουν:**	Παραδείγματα
$\alpha^0 = 1$,	$2^0 = 1$
$(\alpha)^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu}$ $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\nu$	$2^{-3} = \frac{1}{2^3}$ $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} = \left(\frac{4}{3}\right)^3$

Τυποποιημένη μορφή μικρών αριθμών

Οι πολύ «μικροί» αριθμοί μπορούν να γραφούν σε **τυποποιημένη μορφή**: $\alpha \cdot 10^{-\nu}$, όπου ο αριθμός α είναι ένας δεκαδικός αριθμός με ακέραιο μέρος μεγαλύτερο ή ίσο του 1 και μικρότερο του 10 $(1 \leq \alpha < 10)$ και ο ν είναι ένας φυσικός αριθμός.

$$\text{π.χ. } 0,\underbrace{0005}_{4 \text{ ψηφία}} = 5 \cdot 10^{-4}$$

Αντιλαμβάνομαι

με προσομοίωση

Αυτοαξιολόγηση (Ρητοί αριθμοί)

Α. Χαρακτήρισε σωστές ή λανθασμένες τις προτάσεις που ακολουθούν βάζοντας ένα x στην κατάλληλη θέση.

		Σωστό	Λάθος
1.	Οι δυνάμεις του 1 είναι όλες ίσες με 1, δηλαδή $1^{\nu} = 1$.		
2.	Δύναμη με βάση θετικό αριθμό και εκθέτη περιττό είναι αρνητικός αριθμός.		
3.	Δύναμη με βάση αρνητικό αριθμό είναι αρνητικός αριθμός.		
4.	Σε μία αριθμητική παράσταση, ο υπολογισμός των δυνάμεων προηγείται των πολλαπλασιασμών.		
5.	Ισχύει $(-2)^2 = -4$		
6.	Ισχύει $(-2)^3 = -8$		
7.	$3^4 \cdot 3^3 = 3^{12}$		
8.	$(4+5)^2 = 4^2 + 5^2$		
9.	$(4^2)^{-2} = 1$		
10.	Ισχύει $\frac{5^3}{5^3} = 5^0 = 1$		
11.	$3^{-3} = -27$		
12.	$2^{-3} = \frac{1}{8}$		
13	Ο αριθμός $(-2)^{-2}$ είναι αρνητικός.		
14.	Είναι $1 + 2 \cdot 3^2 = 19$		
15.	Η τυποποιημένη μορφή του αριθμού 0,00005 είναι ο αριθμός $5 \cdot 10^{-6}$.		
16.	Ο αριθμός $3{,}9 \cdot 10^{-5}$ ισούται με 0,000039.		

Β. Αντιστοίχισε κάθε παράσταση της στήλης Α, με το αποτέλεσμά της από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
i. $(2^2)^{-2}$	α) 1
ii. $2^2 : 2^{-2}$	β) -1
iii. $2^{-4} \cdot (-2)^4$	γ) 2^4
iv. $-2 \cdot 2^{-3}$	δ) 2^{-4}
v. $(2^2)^{-1} \cdot (2^5 : 2^3)$	ε) -2^{-2}

Γ. Υπολόγισε και σύγκρινε τους αριθμούς:

$$A = \left(\frac{-(-5)^2 + (-3)^2}{(-4)^2}\right)^{2023} + \frac{22}{23}, \qquad B = -[(3-7)^2 + (-2)^3 - 9]^2 + \frac{23}{24}.$$

[ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ – ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ «Ο ΘΑΛΗΣ» 2023]

Σε αυτό το σημείο, θα πρέπει να είσαι σε θέση να ικανοποιείς όλους τους προσδοκώμενους μαθησιακούς στόχους. Γύρνα στην αρχή της θεματικής ενότητας και σημείωσε ✓ στα αντίστοιχα σημεία. Υπάρχουν στόχοι που αισθάνεσαι ότι δεν έχεις ικανοποιήσει πλήρως;

ΑΡΡΗΤΟΙ ΚΑΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Α.2

Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε την έννοια των άρρητων και πραγματικών αριθμών, εστιάζοντας στη σημασία της τετραγωνικής ρίζας μη αρνητικών αριθμών και την αναγκαιότητα εισαγωγής της στα Μαθηματικά. Μέσα από παραδείγματα και προβλήματα, θα κατανοήσουμε τη διάκριση μεταξύ ρητών και άρρητων αριθμών και τη θέση τους στην ευθεία των πραγματικών αριθμών.

Είσαι έτοιμος/η να «γεμίσεις» την αριθμογραμμή;

Στόχοι Ενότητας

- ☐ Αναγνωρίζω, μέσα από προβλήματα, την αναγκαιότητα εισαγωγής και χρήσης των τετραγωνικών ριζών θετικών αριθμών. Προσδιορίζω τις τετραγωνικές ρίζες τέλειων τετραγώνων.
- ☐ Διερευνώ την ύπαρξη αριθμών που δεν είναι ρητοί και αναγνωρίζω τους άρρητους.
- ☐ Τοποθετώ άρρητους αριθμούς στην ευθεία των πραγματικών αριθμών.
- ☐ Διερευνώ και διακρίνω τις δεκαδικές αναπαραστάσεις των ρητών και άρρητων αριθμών.
- ☐ Επεκτείνω τον ορισμό της δύναμης με βάση πραγματικό αριθμό και εκθέτη ακέραιο.
- ☐ Λύνω προβλήματα με τη χρήση πραγματικών αριθμών.

Μαθήματα Ενότητας

2.1: Τετραγωνική ρίζα μη αρνητικού αριθμού

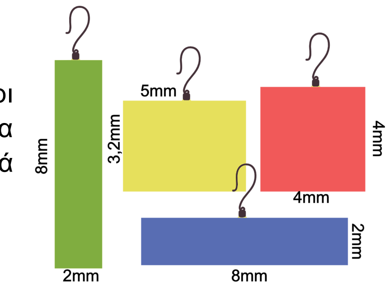
2.2: Άρρητοι αριθμοί, Πραγματικοί αριθμοί - Δύναμη πραγματικού αριθμού με ακέραιο εκθέτη

+ Ανακεφαλαίωση / Αυτοαξιολόγηση

2.1 | Τετραγωνική ρίζα μη αρνητικού αριθμού

Εξερευνώ

Η Δήμητρα χρειάζεται να φτιάξει ένα ζευγάρι **τετράγωνα** σκουλαρίκια. Η συνολική επιφάνεια από κάθε σκουλαρίκι είναι 16 mm^2. Τι πλευρά έχει κάθε σκουλαρίκι;



- Αν πολλαπλασιάσουμε έναν αριθμό επί τον εαυτό του παίρνουμε αποτέλεσμα 25. Ποιος είναι αυτός ο αριθμός;
- Υπάρχει αριθμός, που το τετράγωνό του, δίνει αποτέλεσμα 10;

Η αναζήτηση τέτοιων αριθμών μας οδηγεί στην έννοια της τετραγωνικής ρίζας.

Ορισμός:

Τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού α, λέγεται ο θετικός αριθμός, ο οποίος, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον αριθμό α.

- Η τετραγωνική ρίζα του α συμβολίζεται με $\sqrt{\alpha}$.

  Ορίζουμε επίσης: $\sqrt{0} = 0$, γιατί $0^2 = 0$.

τετραγωνική ρίζα

$\sqrt{\alpha}$

υπόρριζη ποσότητα

Παραδείγματα:

Είναι	$\sqrt{9} = 3$,	γιατί	$3^2 = 9$
Είναι	$\sqrt{25} = 5$,	γιατί	$5^2 = 25$
Είναι	$\sqrt{100} = 10$,	γιατί	$10^2 = 100$.

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτουν τα εξής:

- Αν $\alpha \geq 0$, με $\sqrt{\alpha} = x$ τότε $x^2 = \alpha$, όπου $x \geq 0$.
- Αν $\alpha \geq 0$, τότε $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$.

Αντιλαμβάνομαι
με προσομοίωση

Παρατηρήσεις:

- **Δεν** ορίζουμε ρίζα **αρνητικού** αριθμού.
  Για παράδειγμα, η $\sqrt{-4}$ δεν ορίζεται, γιατί δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός ο οποίος, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει αποτέλεσμα -4.
- Επίσης, σύμφωνα με τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας, είναι **λάθος** να γράψουμε $\sqrt{4} = -2$ παρόλο που $(-2)^2 = 4$, καθώς $-2 < 0$.

1. Να βρείτε τις τετραγωνικές ρίζες:

$\sqrt{1} =$	$\sqrt{4} =$	$\sqrt{25} =$	$\sqrt{16} =$	$\sqrt{64} =$
$\sqrt{36} =$	$\sqrt{121} =$	$\sqrt{100} =$	$\sqrt{81} =$	$\sqrt{144} =$

Λύση:

Ο πίνακας συμπληρωμένος φαίνεται παρακάτω:

$\sqrt{1} = 1$	$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{25} = 5$	$\sqrt{16} = 4$	$\sqrt{64} = 8$
$\sqrt{36} = 6$	$\sqrt{121} = 11$	$\sqrt{100} = 10$	$\sqrt{81} = 9$	$\sqrt{144} = 12$

2. Να υπολογίσετε τις τετραγωνικές ρίζες:

α) $\sqrt{2.500}$, $\sqrt{90.000}$, $\sqrt{1.000.000}$.

β) $\sqrt{0,49}$, $\sqrt{0,0004}$.

Λύση:

α) $\sqrt{2.500} = 50$, γιατί $50^2 = 2.500$.

$\sqrt{90.000} = 300$, γιατί $300^2 = 90.000$.

$\sqrt{1.000.000} = 1.000$, γιατί $1.000^2 = 1.000.000$.

β) $\sqrt{0,49} = 0,7$, γιατί $0,7^2 = 0,49$.

$\sqrt{0,0004} = 0,02$, γιατί $0,02^2 = 0,0004$.

3. Να υπολογίσετε τις τετραγωνικές ρίζες:

α) $\sqrt{\dfrac{25}{144}}$ β) $\sqrt{4 \cdot 9}$ γ) $\sqrt{9+16}$.

Τι παρατηρείτε;

Λύση:

α) $\sqrt{\dfrac{25}{144}} = \dfrac{5}{12}$, γιατί $\left(\dfrac{5}{12}\right)^2 = \dfrac{5}{12} \cdot \dfrac{5}{12} = \dfrac{25}{144}$.

Παρατηρούμε ότι: $\sqrt{\dfrac{25}{144}} = \dfrac{5}{12}$ και $\dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{144}} = \dfrac{5}{12}$, άρα $\sqrt{\dfrac{25}{144}} = \dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{144}}$.

β) $\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6$ γιατί $6^2 = 36$.

Παρατηρούμε ότι: $\sqrt{4 \cdot 9} = 6$ και $\sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6$, άρα $\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9}$.

γ) $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ γιατί $5^2 = 25$.

Παρατηρούμε ότι: $\sqrt{9+16} = 5$ ενώ $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$, άρα $\sqrt{9+16} \neq \sqrt{9} + \sqrt{16}$.

4. Να κάνετε τις πράξεις $(\sqrt{6})^2$ και $\sqrt{(-3)^2}$.

Λύση:

Είναι $(\sqrt{6})^2 = 6$, (προκύπτει από τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας).

και $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$ γιατί $3^2 = 9$.

Ασκήσεις / Προβλήματα

1 Χαρακτήρισε σωστές ή λανθασμένες τις προτάσεις που ακολουθούν βάζοντας ένα **x** στην κατάλληλη θέση.

	Σωστό	**Λάθος**
α) Ισχύει: $\sqrt{0,4} = 0,2$.		
β) Ισχύει: $\sqrt{0,16} = 0,4$.		
γ) Αν $x^2 = 9$ τότε $x = \pm 3$.		
δ) Αν $\sqrt{9} = x$ τότε $x = \pm 3$.		
ε) Η εξίσωση $\sqrt{\alpha} = -2$ είναι αδύνατη.		
στ) Αν $\sqrt{x} = 2$ τότε $x = 4$.		
ζ) Αν $\sqrt{x} = 3$ τότε $x = 6$.		

2 Συμπλήρωσε τα κενά:

α) $\sqrt{16} = \ldots$ β) $\sqrt{100} = \ldots$ γ) $\sqrt{1} = \ldots$ δ) $\sqrt{0} = \ldots$ ε) $\sqrt{400} = \ldots$

στ) $\sqrt{0,09} = \ldots$ ζ) $\sqrt{81} = \ldots$ η) $\sqrt{36} = \ldots$ θ) $\sqrt{0,36} = \ldots$ ι) $\sqrt{\frac{9}{4}} = \ldots$

3 Συμπλήρωσε τα κενά:

$\sqrt{\ldots} = 0$	$\sqrt{\ldots} = 1$	$\sqrt{\ldots} = 2$	$\sqrt{\ldots} = 3$	$\sqrt{\ldots} = 4$	$\sqrt{\ldots} = 5$	$\sqrt{\ldots} = 6$	$\sqrt{\ldots} = 7$
$\sqrt{\ldots} = 8$	$\sqrt{\ldots} = 9$	$\sqrt{\ldots} = 10$	$\sqrt{\ldots} = 11$	$\sqrt{\ldots} = 12$	$\sqrt{\ldots} = 13$	$\sqrt{\ldots} = 14$	$\sqrt{\ldots} = 15$

4 α. Ποιες από τις παρακάτω ρίζες είναι σωστά ορισμένες;

i. $\sqrt{-2}$ **ii.** $-\sqrt{2}$ **iii.** $\sqrt{-2^2}$ **iv.** $\sqrt{(-2)^2}$ **v.** $(\sqrt{-2})^2$

β. Επίλεξε τις σωστές προτάσεις

i. $\sqrt{4 \cdot 9} = 2 \cdot 3$ **ii.** $\sqrt{4+9} = 2+3$ **iii.** $\sqrt{(-15)^2} = -15$

iv. $\sqrt{400} = 200$ **v.** $\sqrt{0,09} = 0,3$

5 Υπολόγισε τη τιμή των παραστάσεων:

Α. $\sqrt{9} + \sqrt{16} + \sqrt{25}$

Β. $\sqrt{4} + \sqrt{16} - \sqrt{64} - 2$

Γ. $\sqrt{121} + \sqrt{144} + \sqrt{196}$

Εξασκούμαι σε όσα έμαθα

6

Υπολόγισε τις τετραγωνικές ρίζες:

α) $\sqrt{36}$, $\sqrt{3.600}$, $\sqrt{0,36}$.

β) $\sqrt{144}$, $\sqrt{1.440.000}$, $\sqrt{0,0144}$.

γ) $\sqrt{9}$, $\sqrt{\frac{1}{9}}$.

7

Υπολόγισε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $\sqrt{3 + \sqrt{6 \cdot \sqrt{4 \cdot \sqrt{81}}}}$

β) $\sqrt{\sqrt{81} + \sqrt{16} + \sqrt{9}}$

γ) $\sqrt{5 + \sqrt{8 + \sqrt{64}}}$

δ) $\sqrt{30 - \sqrt{18 + \sqrt{49}}}$

ε) $\sqrt{10 + \sqrt{31 + \sqrt{17 + \sqrt{64}}}}$

8

Βρες τους αριθμούς α, β, γ, δ :

$\alpha^2 = 9$, $\beta^2 + 4 = 20$, $\gamma^2 = \frac{9}{25}$, $4\delta^2 = 100$

9

Υπολόγισε την τιμή των παραστάσεων:

α) $\sqrt{144} - \sqrt{150 - 29} + \sqrt{199 - 5 \cdot 6} - \sqrt{14^2}$

β) $\sqrt{15 \cdot 7 \cdot 15 \cdot 7} - \sqrt{(-1)^2} + \sqrt{0} - \sqrt{\frac{100}{4}}$

γ) $\dfrac{3 \cdot \sqrt{16} - 5 \cdot \sqrt{25 + 200} - \sqrt{1}}{3 \cdot \sqrt{9} + \sqrt{4 - \sqrt{9}}}$

Εξασκούμαι

σε όσα έμαθα

2.2 | Άρρητοι αριθμοί, Πραγματικοί αριθμοί / Δύναμη πραγματικού αριθμού με ακέραιο εκθέτη

Εξερευνώ

Στο διπλανό σχήμα έχουμε ένα τετράγωνο πλευράς 1cm και θέλουμε να υπολογίσουμε τη διαγώνιο x του τετραγώνου.

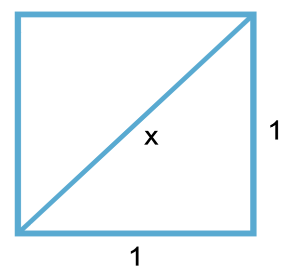
Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$x^2 = 1^2 + 1^2$$

$$x^2 = 1 + 1$$

$$x^2 = 2$$

Όμως ποιος είναι ο αριθμός x;



Ρητοί αριθμοί

Θυμόμαστε ότι:

Κάθε **ρητός** αριθμός έχει (ή μπορεί να πάρει) κλασματική μορφή, δηλαδή τη μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου α, β ακέραιοι, με $\beta \neq 0$.

Θυμόμαστε

Παραδείγματα ρητών αριθμών: $1,7 = \frac{17}{10}$, $-0,333... = -\frac{1}{3}$, $5 = \frac{5}{1}$.

Γενικά κάθε ρητός μπορεί να γραφεί ως δεκαδικός (π.χ. 1,7 , 5,0) ή περιοδικός δεκαδικός αριθμός, δηλαδή αριθμός που έχει ένα τμήμα επαναλαμβανομένων δεκαδικών ψηφίων (π.χ. 0,333...).

Άρρητοι αριθμοί

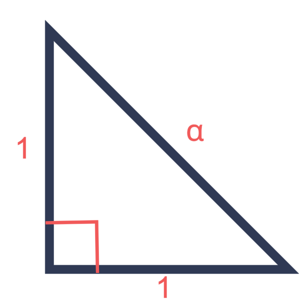
Δραστηριότητα:

Η υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές ίσες με 1 μονάδα, σύμφωνα με το Πυθαγόρειο Θεώρημα, είναι:

$$\alpha^2 = 1^2 + 1^2$$

ή $\alpha^2 = 2$

ή $\alpha = \sqrt{2}$.



Ο α είναι ο αριθμός ο οποίος όταν υψωθεί στο τετράγωνο ισούται με 2, ο οποίος προφανώς δεν είναι φυσικός αριθμός. Ας προσπαθήσουμε να τον προσεγγίσουμε:

Είναι $1^2 = 1$
και $2^2 = 4$.
Άρα $1 < \sqrt{2} < 2$.

- **Ρητή προσέγγιση δέκατου:**

Είναι $1,4^2 = 1,96$
και $1,5^2 = 2,25$.
Άρα $1,4 < \sqrt{2} < 1,4\mathbf{5}$.

Αντιλαμβάνομαι
με προσομοίωση

- **Ρητή προσέγγιση εκατοστού:**

  Είναι $1,41^2 = 1,9881$
  και $1,42^2 = 2,0164$. | Άρα $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$.

Αντιλαμβάνομαι με προσομοίωση

- **Ρητή προσέγγιση χιλιοστού:**

  Είναι $1,414^2 = 1,999396$
  και $1,415^2 = 2,002225$. | Άρα $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$

  κ.ο.κ.

Αποδεικνύεται ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία χωρίς τμήμα επαναλαμβανομένων δεκαδικών ψηφίων, δηλαδή **δεν είναι ρητός** αριθμός. Οι αριθμοί που δεν είναι ρητοί ονομάζονται **άρρητοι**.

Γενικά:

> **Άρρητοι αριθμοί** λέγονται οι αριθμοί που δεν μπορούν να πάρουν τη μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου α, β ακέραιοι, με $\beta \neq 0$.

- Οι άρρητοι αριθμοί έχουν άπειρα δεκαδικά ψηφία, τα οποία δεν επαναλαμβάνονται περιοδικά. Συνεπώς, οι άρρητοι αριθμοί δεν μπορούν να γραφούν ούτε ως δεκαδικοί, ούτε ως περιοδικοί δεκαδικοί αριθμοί.

Παραδείγματα αρρήτων αριθμών: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, … , 1,101001000... όπως και ο αριθμός

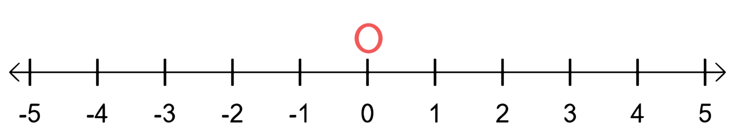
π ($\simeq 3,14$) κ.α.

Σύνολα αριθμών:

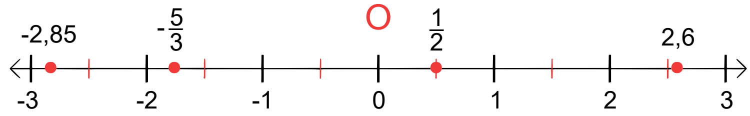
Έχουμε συναντήσει έως τώρα φυσικούς αριθμούς, ακέραιους αριθμούς, ρητούς αλλά και άρρητους αριθμούς. Παρακάτω είναι συγκεντρωμένα τα σύνολα των αριθμών:

- **Οι φυσικοί αριθμοί**: **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...**
  - ► Κάθε αριθμός παριστάνεται με ένα σημείο στην ευθεία:
    Στην αρχή Ο τοποθετούμε το 0 και δεξιά τους αριθμούς 1, 2, 3, …

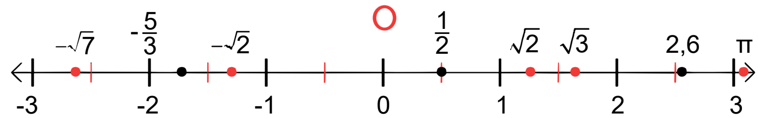
- **Οι ακέραιοι αριθμοί**: **... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 ...**
  - ► Τοποθετούμε στα δεξιά της αρχής Ο τους θετικούς ακέραιους αριθμούς και στα αριστερά τους αρνητικούς.



- **Οι ρητοί αριθμοί** είναι οι αριθμοί που μπορούν να γραφούν στη μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου α, β ακέραιοι, με $\beta \neq 0$.
  - ► Οι ρητοί αριθμοί γεμίζουν την ευθεία, αλλά όχι πλήρως.



- **Οι πραγματικοί αριθμοί** αποτελούνται από τους ρητούς και από τους άρρητους αριθμούς.
  - ► Οι πραγματικοί αριθμοί καλύπτουν πλήρως την ευθεία.



  - ► Κάθε σημείο της ευθείας αντιστοιχεί σε έναν πραγματικό αριθμό και αντίστροφα κάθε πραγματικός αριθμός αντιστοιχεί σε μοναδικό σημείο της ευθείας.
  - ► Για το λόγο αυτό, την ευθεία αυτή την ονομάζουμε ευθεία ή άξονα των πραγματικών αριθμών.

Δύναμη πραγματικού αριθμού με ακέραιο εκθέτη

Είδαμε την έννοια της δύναμης με βάση έναν ρητό αριθμό και εκθέτη ακέραιο.

Επεκτείνουμε τον ορισμό της δύναμης και στην περίπτωση που η βάση είναι ένας πραγματικός αριθμός.

- Αν **α** ένας **πραγματικός** αριθμός και **ν θετικός ακέραιος** αριθμός, τότε:

$$\alpha^{\nu} = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}}, \text{ και } \alpha^{1} = \alpha.$$

Παραδείγματα: $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1^2}{3^2} = \frac{1}{9}$, $(-4)^3 = -64$,

$(\sqrt{5})^2 = 5$, (προκύπτει από τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας).

$(\sqrt{2})^6 = \left[(\sqrt{2})^2\right]^3 = 2^3 = 8$, (χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα $(\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu\cdot\nu}$).

$(\sqrt{5})^3 = (\sqrt{5})^2 \cdot (\sqrt{5})^1 = 5 \cdot \sqrt{5}$, (χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα $(\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu\cdot\nu}$).

Σχόλιο: Η πράξη $5 \cdot \sqrt{5}$ μπορεί να υπολογιστεί κάνοντας ρητή προσέγγιση του αριθμού $\sqrt{5}$, ή με υπολογιστή τσέπης.

- Αν α ένας πραγματικός αριθμός και ν ακέραιος αριθμός (θετικός, αρνητικός ή μηδέν), τότε χρησιμοποιούμε τις ισότητες:

$$\alpha^0 = 1 \text{ και } \alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^{\nu}}, \text{ με } \alpha \neq 0.$$

Παραδείγματα: $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8}$,

$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$,

$(\sqrt{2})^0 = 1$.

$(\sqrt{5})^{-2} = \frac{1}{(\sqrt{5})^2} = \frac{1}{5}$.

Λυμένα Παραδείγματα

1. Να βρείτε τις ρητές προσεγγίσεις του άρρητου αριθμού $\sqrt{5}$ έως και τρία δεκαδικά ψηφία.

Λύση:

Είναι $2^2 = 4$
και $3^2 = 9$. Άρα $2 < \sqrt{5} < 3$.

- **Ρητή προσέγγιση δέκατου:**

Είναι $2,2^2 = 4,84$
και $2,3^2 = 5,29$. Άρα $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$.

- **Ρητή προσέγγιση εκατοστού:**

Είναι $2,23^2 = 4,9729$
και $2,24^2 = 5,0176$. Άρα $2,23 < \sqrt{5} < 2,24$.

- **Ρητή προσέγγιση χιλιοστού:**

Είναι $2,236^2 = 4,999696$
και $2,237^2 = 5,001932$. Άρα $2,236 < \sqrt{5} < 2,237$.

Σχόλιο: Λέμε ότι ο αριθμός $\sqrt{5}$ με προσέγγιση τριών δεκαδικών ψηφίων, είναι ίσος με 2,236 με **έλλειψη** και ίσος με 2,237 με **υπερβολή**.

2. Να κατασκευάσετε γεωμετρικά τους άρρητους αριθμούς $\sqrt{2}$ και $\sqrt{5}$.

Λύση:

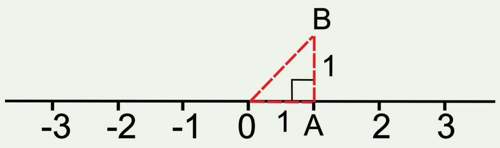
- **Κατασκευή του άρρητου αριθμού $\sqrt{2}$.**

Θεωρούμε τον άξονα των πραγματικών αριθμών με αρχή το Ο και μονάδα $OA = 1$.

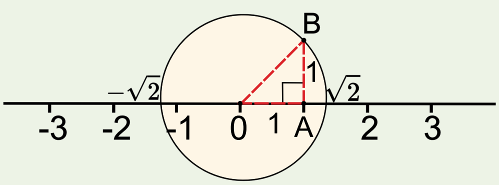
Στο σημείο Α φέρνουμε κάθετο ευθύγραμμο τμήμα $AB = 1$.

Το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα ΟΒ, την οποία υπολογίζουμε από το Πυθαγόρειο Θεώρημα:

$OB^2 = OA^2 + AB^2$
ή $OB^2 = 1^2 + 1^2$
ή $OB^2 = 2$
ή $OB = \sqrt{2}$.



Με κέντρο το Ο και ακτίνα ΟΒ κατασκευάζουμε κύκλο ο οποίος τέμνει τον άξονα των πραγματικών αριθμών στα σημεία με τετμημένες $-\sqrt{2}$ και $\sqrt{2}$.



- **Κατασκευή του άρρητου αριθμού $\sqrt{5}$.**

  Με παρόμοιο τρόπο κατασκευάζουμε ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ με κάθετες πλευρές ΟΑ = 2 και ΑΒ = 1.

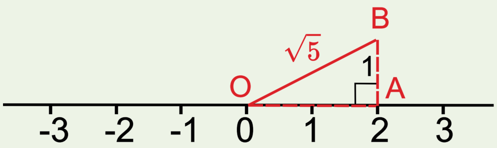
  Για την υποτείνουσα ΟΒ, από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

  $OB^2 = OA^2 + AB^2$

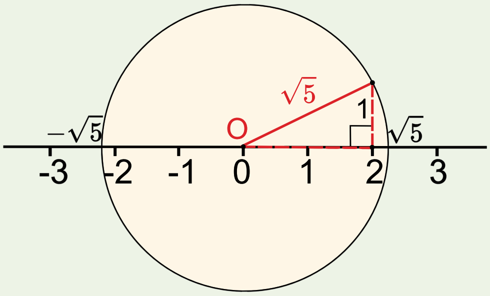
  ή $OB^2 = 2^2 + 1^2$

  ή $OB^2 = 5$

  ή $OB = \sqrt{5}$.



  Με κέντρο το Ο και ακτίνα ΟΒ κατασκευάζουμε κύκλο ο οποίος τέμνει τον άξονα των πραγματικών αριθμών στα σημεία με τετμημένες $-\sqrt{5}$ και $\sqrt{5}$.



1 Χαρακτήρισε σωστές ή λανθασμένες τις προτάσεις που ακολουθούν βάζοντας ένα **x** στην κατάλληλη θέση.

	Σωστό	**Λάθος**
α) Ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.		
β) Ο αριθμός $\frac{\sqrt{36}}{2}$ είναι φυσικός αριθμός.		
γ) Ο αριθμός $\frac{10}{3} = 3,3333...$ είναι άρρητος.		
δ) Κάθε αριθμός με άπειρα δεκαδικά ψηφία είναι άρρητος.		
ε) Δεν μπορούμε να κατασκευάσουμε γεωμετρικά έναν άρρητο αριθμό.		
στ) Το γινόμενο δύο άρρητων αριθμών είναι πάντοτε άρρητος αριθμός.		

2 Στον παρακάτω πίνακα, συμπλήρωσε με ένα **x** εκείνα τα τετραγωνάκια των οποίων ο αντίστοιχος αριθμός ανήκει στο αντίστοιχο σύνολο.

Αριθμός	Φυσικός	Ακέραιος	Ρητός	Άρρητος	Πραγματικός
5					
$0,2$					
$0,\overline{3}$					
$\frac{3}{5}$					
-7					
$\sqrt{1.000}$					
$\sqrt{36}-\sqrt{9}$					

3 Βρες τις ρητές προσεγγίσεις εκατοστού των αριθμών:

α) $\sqrt{13}$

β) $\sqrt{21}$

γ) $\sqrt{200}$

δ) $\sqrt{7}$

4 Σύγκρινε τους παρακάτω αριθμούς χρησιμοποιώντας τα σύμβολα <,> ή =.

Α) $\sqrt{6}\dots 3$ Β) $\sqrt{25}\dots 5$ Γ) $\frac{1}{\sqrt{25}}\dots 2$ Δ) $\sqrt{8}\dots 2$ Ε) $\sqrt{350}\dots 175$

5 Αντιστοίχισε σε κάθε παράσταση της πρώτης στήλης, το αποτέλεσμά της από τη δεύτερη στήλη.

	• 0
$(\sqrt{2})^{-2}$ •	• 1
$(\sqrt{2})^{0}$ •	• 2
$(\sqrt{2})^{2}$ •	• $\sqrt{2}$
$(\sqrt{2})^{3}$ •	• $2\cdot\sqrt{2}$
$(\sqrt{2})^{4}$ •	• $\frac{1}{2}$
$(\sqrt{2})^{5}$ •	• $4\cdot\sqrt{2}$
	• 4

Αξιοποιώ την αριθμομηχανή

6

Βρες ανάμεσα σε ποιους διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς βρίσκονται οι παρακάτω άρρητοι αριθμοί:

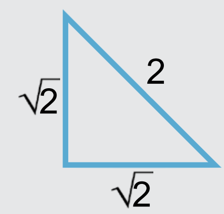
$$\sqrt{2}, \sqrt{10}, \sqrt{15}, \sqrt{200}, \sqrt{1000}$$

7

Υπολόγισε με προσέγγιση εκατοστού την πλευρά τετραγώνου με εμβαδόν $75cm^2$

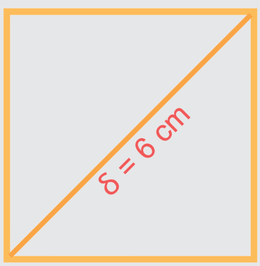
8

Εξέτασε αν τρίγωνο στη διπλανή εικόνα είναι ορθογώνιο. Στη συνέχεια βρες την τιμή της περιμέτρου του με προσέγγιση εκατοστού και την ακριβή τιμή του εμβαδού του.



9

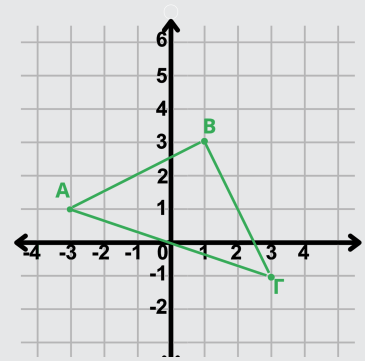
Το διπλανό τετράγωνο έχει διαγώνιο δ = 6cm. Βρες την τιμή της περιμέτρου του με προσέγγιση εκατοστού και την ακριβή τιμή του εμβαδού του.



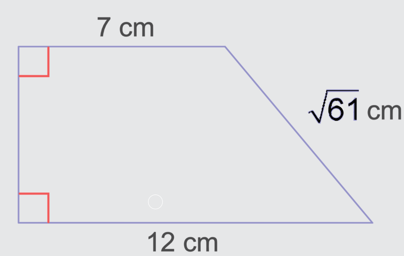
10

Απόδειξε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος είναι ορθογώνιο.

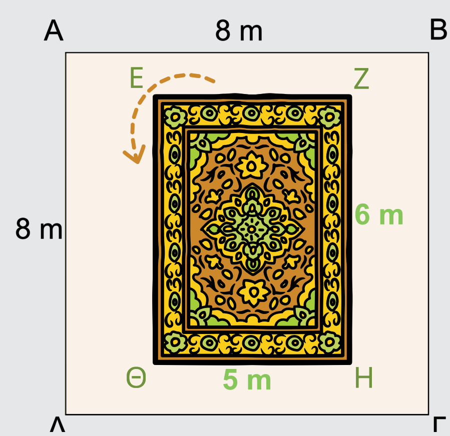
11 Απόδειξε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος είναι ισοσκελές και ορθογώνιο.



12 Υπολόγισε το εμβαδόν του διπλανού τραπεζίου.



13 Ένα ορθογώνιο χαλί ΕΖΗΘ διαστάσεων 5m και 6m είναι συμμετρικά τοποθετημένο στο τετράγωνο δάπεδο ΑΒΓΔ μιας αίθουσας, πλευράς 8m. Εξέτασε αν το ορθογώνιο χαλί μπορεί να περιστραφεί μέσα στο τετράγωνο δάπεδο της αίθουσας χωρίς να «αγγίξει» τις πλευρές της.



14 Τοποθέτησε τους παρακάτω αριθμούς στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

$$4, \quad -2{,}1, \quad \sqrt{5}, \quad -3, \quad \frac{10}{3}, \quad -\sqrt{7}$$

Εξασκούμαι σε όσα έμαθα

Ανακεφαλαίωση – Ακέραιοι αριθμοί

Τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού α, λέγεται ο θετικός αριθμός, ο οποίος, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον αριθμό α.

- Η τετραγωνική ρίζα του α συμβολίζεται με $\sqrt{α}$.
- Ορίζουμε επίσης: $\sqrt{0} = 0$, γιατί $0^2 = 0$.

τετραγωνική ρίζα

$\sqrt{α}$

υπόρριζη ποσότητα

Ρητοί λέγονται οι αριθμοί που έχουν (ή μπορούν να πάρουν) κλασματική μορφή, δηλαδή τη μορφή $\frac{α}{β}$, όπου α, β ακέραιοι, με β ≠ 0.

Π.χ. $1,7 = \frac{17}{10}$, $-0,333\ldots = -\frac{1}{3}$, $5 = \frac{5}{1}$.

- Κάθε ρητός μπορεί να γραφεί ως δεκαδικός (π.χ. 1,7) ή περιοδικός δεκαδικός αριθμός (π.χ 0,333...).

Άρρητοι αριθμοί ονομάζονται οι αριθμοί που δεν είναι ρητοί, δηλαδή οι αριθμοί που δεν μπορούν να πάρουν την κλασματική μορφή $\frac{α}{β}$, όπου α, β ακέραιοι, με β ≠ 0.

Αντιλαμβάνομαι

με προσομοίωση

Π.χ. $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \ldots$, όπως και ο αριθμός $π = 3,14\ldots$ κ.α.

- Οι άρρητοι αριθμοί έχουν άπειρα δεκαδικά ψηφία, τα οποία δεν επαναλαμβάνονται περιοδικά.

Σύνολα αριθμών:

- **Φυσικοί:** **0, 1, 2, 3, 4, ...**
- **Ακέραιοι**: **... -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...**
- **Ρητοί:** Μπορούν να γραφούν στη μορφή $\frac{α}{β}$, όπου α, β ακέραιοι, με $β \neq 0$.
- **Πραγματικοί:** Αποτελούνται από τους ρητούς και από τους άρρητους αριθμούς.

Επαναληπτικές Ερωτήσεις – Ασκήσεις

Α. Χαρακτήρισε σωστές ή λανθασμένες τις προτάσεις που ακολουθούν βάζοντας ένα **x** στην κατάλληλη θέση.

		Σωστό	Λάθος
1.	Η $\sqrt{-4}$ δεν ορίζεται.		
2.	Η $\sqrt{(-1)^2}$ δεν ορίζεται.		
3.	$\sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = \sqrt{36}$		
4.	$\sqrt{4} + \sqrt{9} = \sqrt{13}$		
5.	Ο αριθμός $\sqrt{10}$ είναι άρρητος		
6.	Ο αριθμός $\left(\sqrt{3}\right)^2$ είναι ρητός		
7.	$\sqrt{0,4} = 0,2$		
8.	Αν $\sqrt{\alpha} = 9$ τότε $\alpha = 3$		
9.	$2 < \sqrt{8} < 3$		
10.	$6 < \sqrt{12} < 7$		

Β. Βάλε ένα **x** στο κουτάκι των συνόλων που ανήκει κάθε αριθμός, όπως στο παράδειγμα:

Αριθμός	Φυσικός	Ακέραιος	Ρητός	Άρρητος	Πραγματικός
-1		**x**	**x**	**x**	**x**
$\frac{1}{2}$					
$3,14$					
π					
$-\sqrt{\frac{3}{12}}$					
$\sqrt{8 \cdot 18}$					
$\sqrt{4+9}$					

Γ. Τοποθέτησε σε κάθε τετράγωνο έναν κατάλληλο αριθμό, ώστε να ισχύει η αντίστοιχη ισότητα:

α) $\sqrt{1+....} = 2$, β) $\sqrt{....} + \sqrt{9} = \sqrt{25}$, γ) $\sqrt{\frac{....}{2} + 3} = 5$, δ) $\sqrt{2 + \sqrt{....}} = 2$

Δ. Αν $\alpha = 9$ και $\beta = 16$, υπολόγισε τις παραστάσεις:

α) $\sqrt{\alpha}$ και $\sqrt{\beta}$ β) $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ και $\sqrt{\alpha+\beta}$ γ) $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$ και $\sqrt{\alpha \cdot \beta}$ δ) $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$ και $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$.

☑ Σε αυτό το σημείο, θα πρέπει να είσαι σε θέση να ικανοποιείς όλους τους προσδοκώμενους μαθησιακούς στόχους. Γύρνα στην αρχή της θεματικής ενότητας και σημείωσε ✔ στα αντίστοιχα σημεία. Υπάρχουν στόχοι που αισθάνεσαι ότι δεν έχεις ικανοποιήσει πλήρως;

ΕΠΕΚΤΕΙΝΩ τις γνώσεις μου

Μελετώ

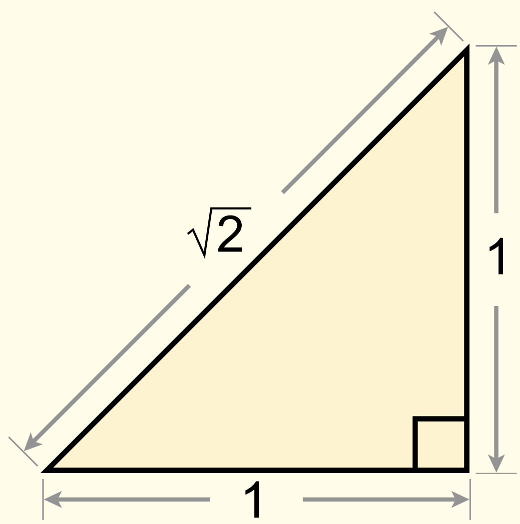
το συγκεκριμένο θέμα

Οι άρρητοι αριθμοί

Άρρητος σημαίνει «αυτός που δεν μπορεί να λεχθεί ή να ειπωθεί, που δεν είναι δυνατόν να τον εκφράσει ή να τον περιγράψει κανείς».

Αρχαία Ελλάδα

Οι άρρητοι αριθμοί ανακαλύφθηκαν από τους Πυθαγορείους τον 5ο αιώνα π.Χ. Η ανακάλυψη ότι η τετραγωνική ρίζα του 2 είναι άρρητος αριθμός οδήγησε σε επανεξέταση της μαθηματικής γνώσης της εποχής.



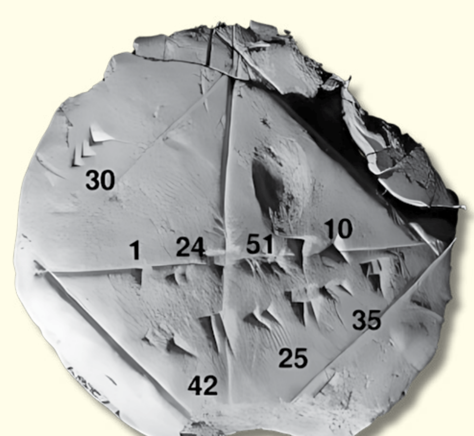
Η τετραγωνική ρίζα του 2 είναι ίση με το μήκος της υποτείνουσας του ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές μήκους 1.

Η τετραγωνική ρίζα του 2 είναι ο θετικός αριθμός που, όταν πολλαπλασιαστεί με τον εαυτό του, δίνει τον αριθμό 2.

Βαβυλώνιοι

Οι Βαβυλώνιοι, ήδη από το 2000 π.Χ., είχαν αναπτύξει μια μορφή υπολογισμού της τετραγωνική ρίζα και, παρόλο που δεν αναγνώριζαν τους άρρητους αριθμούς, ήταν σε θέση να τους προσεγγίσουν.

Βαβυλωνιακή πήλινη πλάκα (περ. 7289 π.Χ.) με σχολιασμούς. Δείχνει την τετραγωνική ρίζα του 2 σε εξηκονταδική μορφή



Μεσαίωνας

Την περίοδο του Μεσαίωνα στην Ευρώπη, Άραβες μαθηματικοί όπως ο Αλ-Χορασμί συνέβαλαν στη μελέτη των άρρητων αριθμών και την αξιοποίησή τους στις μαθηματικές πράξεις. Η μελέτη των Αράβων μεταδώθηκε αργότερα και στην Ευρώπη.

Αναγέννηση

Στην Αναγέννηση, μαθηματικοί όπως ο Ρενέ Ντεκάρτ (Καρτέσιος) συνέβαλαν σημαντικά στη μελέτη των άρρητων αριθμών. Οι ανακαλύψεις τους έθεσαν τα θεμέλια για την ανάπτυξη της Αναλυτικής Γεωμετρίας.

19ος Αιώνας

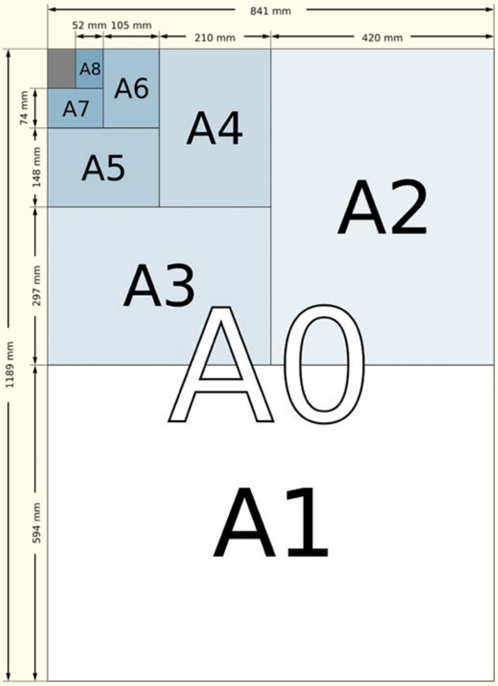
Ο 19ος αιώνας έφερε επανάσταση στην κατανόηση των άρρητων αριθμών. Ο Georg Cantor και ο Richard Dedekind ανέπτυξαν τη θεωρία των πραγματικών αριθμών, ορίζοντας αυστηρά τους άρρητους και ενσωματώνοντάς τους πλήρως στη μαθηματική ανάλυση. Η θεωρία τους βασίστηκε στις απειροσειρές και τις περίφημες «τομές» του Dedekind, που έδωσαν νέα θεμέλια στην ανάλυση των αριθμών.

Σύγχρονη Εποχή

Σήμερα, άρρητοι αριθμοί όπως το π και το e έχουν ευρείες εφαρμογές σε πολλούς επιστημονικούς τομείς, αποδεικνύοντας τη σημασία τους στη σύγχρονη επιστήμη και τεχνολογία.

Η ιστορική μελέτη των άρρητων αριθμών από την αρχαιότητα μέχρι σήμερα δείχνει την εξέλιξη της μαθηματικής σκέψης και την ικανότητά της να λύνει σύνθετα προβλήματα, επεκτείνοντας συνεχώς τις γνώσεις και απαντώντας σε προβλήματα που μέχρι τότε έμοιαζαν άλυτα.

Το 1786, ο Γερμανός φυσικός καθηγητής Georg Christoph Lichtenberg ανακάλυψε ότι οποιοδήποτε φύλλο χαρτιού, του οποίου η μακριά πλευρά είναι $\sqrt{2}$ φορές μεγαλύτερη από τη μικρή, μπορεί να διπλωθεί στη μέση και να διατηρήσει τις ίδιες αναλογίες. Αυτή η αναλογία χρησιμοποιήθηκε όταν η Γερμανία τυποποίησε τα μεγέθη χαρτιού στις αρχές του 20ού αιώνα, δημιουργώντας τη σειρά χαρτιού «Α», γνωστή ως ISO 216 (A4, A0 κ.λπ.).



ΚΑΝΟΝΙΚΟΤΗΤΕΣ Α.3

Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε τις κανονικότητες που εκφράζονται μέσω αλγεβρικών τύπων της μορφής α·ν + β, όπου α και β είναι ρητοί αριθμοί. Θα δούμε πώς οι κανονικότητες αυτές μπορούν να περιγράψουν μοτίβα και να διευκολύνουν την επίλυση προβλημάτων τόσο στη μαθηματική θεωρία όσο και σε πρακτικές εφαρμογές της καθημερινότητας.

Πώς μπορούν να σε βοηθήσουν οι κανονικότητες να εξηγήσεις και να προβλέψεις φαινόμενα;

Είσαι έτοιμος/η να ανακαλύψεις την προβλεψιμότητα που χαρακτηρίζει τις κανονικότητες;

Στόχοι Ενότητας

- Λύνω προβλήματα που συναντώ στα Μαθηματικά και την καθημερινή ζωή με κανονικότητες της μορφής α · ν + β όπου α και β ρητοί αριθμοί.
- Διατυπώνω επιχειρήματα και αιτιολογώ τους συλλογισμούς τους σχετικά με τον προσδιορισμό μιας κανονικότητας.

Μαθήματα Ενότητας

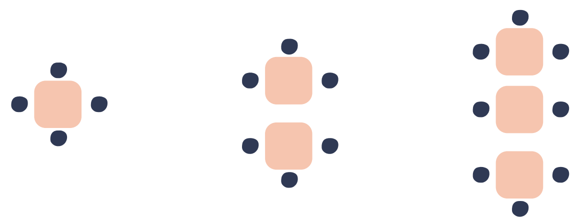
3.1: Κανονικότητες της μορφής α · ν + β με α και β ρητούς αριθμούς

+ Ανακεφαλαίωση / Αυτοαξιολόγηση

3.1 | Κανονικότητες της μορφής $\alpha \cdot \nu + \beta$ με α και β ρητούς αριθμούς

Εξερευνώ

Ένα κατάστημα εστίασης τοποθετεί τους πελάτες στα τραπέζια όπως φαίνεται παρακάτω:



1 2 3

Συμπληρώστε τον πίνακα:

Τραπέζια	1	2	3	4	5
Πελάτες	…	…	…	…	…

α) Εξηγήστε τον τρόπο με τον οποίο αυξάνεται ο αριθμός των πελατών καθώς αυξάνονται τα τραπέζια.

β) Βρείτε τον τρόπο με τον οποίο προκύπτει ο αριθμός των πελατών αν γνωρίζουμε τον αριθμό των τραπεζιών.
Εξηγήστε τον τρόπο που σκεφτήκατε.

γ) Πόσοι πελάτες μπορούν να καθίσουν σε 10 τραπέζια;

Κανονικότητα

Θυμόμαστε

Θυμόμαστε ότι:

Κανονικότητα είναι μία μια οργάνωση στοιχείων (αριθμοί, σχήματα, ήχοι, σύμβολα, …) με βάση συγκεκριμένους **κανόνες**.

Αν γνωρίζουμε αυτόν τον κανόνα μπορούμε πάντα να βρίσκουμε τους επόμενους όρους της κανονικότητας.

Παράδειγμα: Οι αριθμοί: 3 5 7 9 11 αποτελούν μία κανονικότητα.

3	5	7	9	11	
↑	↑	↑	↑	↑	
1ος όρος	2ος όρος	3ος όρος	4ος όρος	5ος όρος	κ.λ.π.

Οι αριθμοί αυτοί ονομάζονται **όροι** της κανονικότητας. Ο αριθμός που βρίσκεται σε μία τυχαία θέση ν, λέγεται **ν-οστός όρος** ή **γενικός όρος** της κανονικότητας.

Κανονικότητες της μορφής: $\alpha \cdot \nu + \beta$

Παρατηρούμε ότι οι αριθμοί 3, 5, 7, 9, 11,… αυξάνονται κάθε φορά κατά 2.

Αν ν είναι η σειρά κάθε αριθμού, τότε:

- 1ος όρος (ν = 1) : 3
- 2ος όρος (ν = 2) : 5 = 3 + 2 , (προσθέτουμε στον πρώτο όρο το 2).
- 3ος όρος (ν = 3) : 7 = 3 + 2 · 2 , (προσθέτουμε στον πρώτο όρο, 2 φορές το 2).
- 4ος όρος (ν = 4) : 9 = 3 + 3 · 2 , (προσθέτουμε στον πρώτο όρο, 3 φορές το 2).
- 5ος όρος (ν = 5) : 11 = 3 + 4 · 2 , (προσθέτουμε στον πρώτο όρο, 4 φορές το 2).

… …

Γενικός όρος (ν – οστός): $\boxed{\underbrace{3}_{1^{\text{ος}}\text{ όρος}} + \underbrace{2}_{\text{αύξηση}}\cdot(\nu - 1)}$ **(προσθέτουμε στον πρώτο όρο, (ν – 1) φορές το 2).**

Αν κάνουμε τις πράξεις στον ν – οστό όρο, βρίσκουμε: 3 + 2 · (ν − 1) = 3 + 2 · ν − 2 = 2 · ν + 1.

Αν έχουμε τον γενικό όρο μπορούμε να βρούμε οποιονδήποτε όρο της κανονικότητας.

Παράδειγμα: Ο 20ος όρος της παραπάνω κανονικότητας είναι 2 · 20 + 1 = 41

Ο 100ος όρος της κανονικότητας είναι: 2 · 100 + 1 = 201.

Ένας απλός τρόπος να βρούμε τον γενικό όρο μιας κανονικότητας της μορφής α · ν + β είναι κάνοντας διαδοχικές υποθέσεις. Για παράδειγμα για να βρούμε τον γενικό όρο της κανονικότητας:

3, 5, 7, 9, 11, …

παρατηρούμε ότι οι αριθμοί αυξάνονται κατά 2. Υποθέτουμε ότι ο γενικός όρος είναι 2ν.

Οι όροι που προκύπτουν από τον τύπο 2ν είναι οι: 2, 4, 6, 8, 10, … οι οποίοι είναι μικρότεροι κατά 1 από τους όρους της αρχικής κανονικότητας. Άρα ο γενικός όρος είναι 2 · ν + 1.

Πράγματι οι όροι που προκύπτουν από τον τύπο 2 · ν + 1 είναι οι: 3, 5, 7, 9, 11, …

Αντιλαμβάνομαι

με προσομοίωση

Λυμένα Παραδείγματα

1. Δίνεται η κανονικότητα:

Σειρά (ν)	ν=1	ν=2	ν=3	ν=4	ν=5	ν=6
Αριθμοί	2	6	10			

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα και εξηγήστε τον τρόπο με τον οποίο αυξάνονται οι αριθμοί.

β) Να βρείτε τον τρόπο με τον οποίο προκύπτει κάθε αριθμός, αν γνωρίζουμε τη σειρά του.

Να εξηγήσετε τον τρόπο που σκεφτήκατε.

Λύση:

α)

Σειρά (ν)	ν=1	ν=2	ν=3	ν=4	ν=5	ν=6
Αριθμοί	2	6	10	14	18	22

Κάθε αριθμός προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του αριθμού 4.

β) Αν ν είναι η σειρά κάθε αριθμού, τότε:

- 1ος όρος ($\nu = 1$) : 2
- 2ος όρος ($\nu = 2$) : $6 = 2 + 4$, (προσθέτουμε στον πρώτο όρο το 4).
- 3ος όρος ($\nu = 3$) : $10 = 2 + 4\cdot 2$, (προσθέτουμε στον πρώτο όρο, 2 φορές το 4).
- 4ος όρος ($\nu = 4$) : $14 = 2 + 4\cdot 3$, (προσθέτουμε στον πρώτο όρο, 3 φορές το 4).
- 5ος όρος ($\nu = 5$) : $18 = 2 + 4\cdot 4$, (προσθέτουμε στον πρώτο όρο, 4 φορές το 4).
- 6ος όρος ($\nu = 6$) : $22 = 2 + 4\cdot 5$, (προσθέτουμε στον πρώτο όρο, 5 φορές το 4).

… …

Γενικός όρος (ν – οστός): $\boxed{\underbrace{2}_{1\text{ος όρος}} + \underbrace{4}_{\text{αύξηση}}\cdot(\nu - 1)}$ **(προσθέτουμε στον πρώτο όρο, (ν – 1) φορές το 4).**

Αν κάνουμε τις πράξεις στον ν – οστό όρο, βρίσκουμε: $2 + 4\cdot(\nu - 1) = 2 + 4\cdot\nu - 4 = 4\cdot\nu - 2$.

β' τρόπος:

Παρατηρούμε ότι οι αριθμοί: 2, 6, 10, 14, 18, 22, … αυξάνονται κατά 4. Υποθέτουμε ότι ο γενικός όρος είναι 4ν.

Οι όροι που προκύπτουν από τον τύπο 4ν είναι οι: 4, 8, 12, 16, 20, 24, … οι οποίοι είναι μικρότεροι κατά 2 από τους όρους της αρχικής κανονικότητας. Άρα ο γενικός όρος είναι 4ν-2

Πράγματι οι όροι που προκύπτουν από τον τύπο 4ν-2 είναι οι: 2, 6, 10, 14, 18, 22, …

2. Έχουμε πρόσβαση σε δύο τραπεζικούς λογαριασμούς. Ο πρώτος λογαριασμός έχει 1.100€ και κάθε μήνα κάνουμε ανάληψη 100€. Ο δεύτερος λογαριασμός δεν έχει καθόλου αποταμιεύσεις αλλά κάθε μήνα κάνουμε κατάθεση 50€.

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα που περιγράφει την «κίνηση» στους δύο τραπεζικούς λογαριασμούς.

β) Να τοποθετήσετε τις τιμές από τους δύο πίνακες ως σημεία σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. Τι παρατηρείτε;

Λύση:

α) Παίρνουμε τους πίνακες:

1ος Λογαριασμός:

Μήνας	1ος	2ος	3ος	4ος	5ος	6ος	7ος	8ος	9ος	10ος	11ος
Ποσό (€)	1.000€	900€	800€	700€	600€	500€	400€	300€	200€	100€	0€

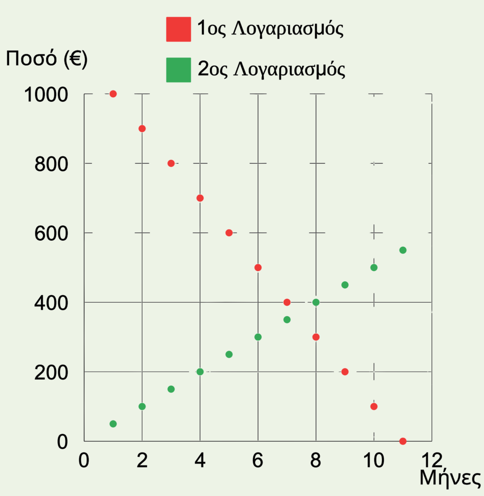
2ος Λογαριασμός:

Μήνας	1ος	2ος	3ος	4ος	5ος	6ος	7ος	8ος	9ος	10ος	11ος
Ποσό (€)	50€	100€	150€	200€	250€	300€	350€	400€	450€	500€	550€

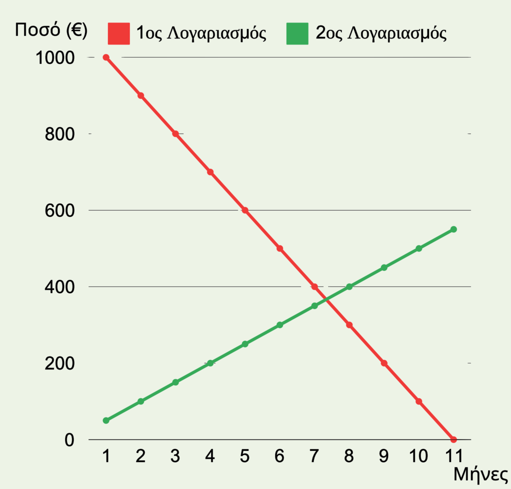
Καταλαβαίνουμε ότι η «κίνηση» και των δύο λογαριασμών χαρακτηρίζεται από κανονικότητες.

Ο 1ος λογαριασμός προκύπτει από την κανονικότητα της μορφής $\mathbf{-100 \cdot v + 1.000}$ και ο 2ος λογαριασμός προκύπτει από την κανονικότητα της μορφής $\mathbf{50 \cdot v}$.

β) Στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων έχουμε:



Μάλιστα, αν ενώσουμε τα σημεία κάθε κανονικότητας παρατηρούμε ότι προκύπτουν δύο ευθείες, μία ευθεία που «κατεβαίνει» και μια ευθεία που «ανεβαίνει».



Ασκήσεις / Προβλήματα

1 Παρατήρησε την κανονικότητα και συμπλήρωσε τους όρους που λείπουν, αν είναι γνωστό ότι ο κανόνας είναι σταθερός:

Σειρά (ν) :	1	2	3	4	5	6
Όροι :	7	9	11	…	…	…

Ποιος από τους παρακάτω είναι ο γενικός όρος της κανονικότητας;

α) $\nu + 7$ β) $2 \cdot \nu + 7$ γ) $7 \cdot \nu + 2$ δ) $2 \cdot \nu + 5$

2 Γράψε τους τέσσερις πρώτους όρους και τον 20ο όρο στις παρακάτω κανονικότητες, με γενικό όρο:

α) $5 \cdot \nu - 3$ β) $\frac{1}{2} \cdot \nu + \frac{1}{2}$ γ) $-3 \cdot \nu + 0,5$

Αντιλαμβάνομαι με προσομοίωση

3 Συμπλήρωσε τους επόμενους όρους και βρες τον γενικό όρο στις παρακάτω κανονικότητες, αν είναι γνωστό ότι ο κανόνας είναι σταθερός:

α)

Σειρά (ν) :	1	2	3	4	5	6
Όροι :	10	15	20			

Γενικός όρος: ______________

β)

Σειρά (ν) :	1	2	3	4	5	6
Όροι :	−5	−9	−13			

Γενικός όρος: ______________

γ)

Σειρά (ν) :	1	2	3	4	5	6
Όροι :	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$			

Γενικός όρος: ______________

4

Δίνεται ο πίνακας:

Σειρά (ν)	ν=1	ν=2	ν=3	ν=4	ν=5	ν=6
Αριθμοί	4	6	8			

α) Συμπλήρωσε τον πίνακα και εξήγησε τον τρόπο με τον οποίο αυξάνονται οι αριθμοί, αν είναι γνωστό ότι ο κανόνας είναι σταθερός.

β) Βρες τον τρόπο με τον οποίο προκύπτει κάθε αριθμός, αν γνωρίζουμε τη σειρά του.

Εξήγησε τον τρόπο που σκέφτηκες.

γ) Ποιος αριθμός είναι στην 9η σειρά και ποιος είναι στην 20η σειρά;

δ) Ποια είναι η σειρά του αριθμού 300;

ε) Μπορεί ο αριθμός 241 να βρίσκεται στην παραπάνω κανονικότητα;

5

Η Μαρία έχει 10€ στον κουμπαρά της και κάθε εβδομάδα αποταμιεύει 4€.

α) Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα:

Αριθμός εβδομάδων	$1^η$	$2^η$	$3^η$	$4^η$	$5^η$
Ποσό στον κουμπαρά	10 €	…	…	…	…

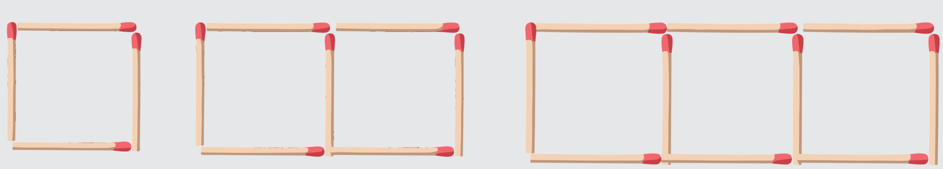
β) Πόσα χρήματα θα έχει στον κουμπαρά της η Μαρία στο τέλος της 10ης εβδομάδας;

γ) Βρες έναν τύπο που δίνει το ποσό στον κουμπαρά της Μαρίας, σε σχέση με τον αριθμό κάθε εβδομάδας.

δ) Στο τέλος ποιας εβδομάδας, θα συγκεντρώσει η Μαρία τα χρήματα που απαιτούνται, για να αγοράσει έναν πίνακα κόστους 90€;

6

Χρησιμοποιώντας σπίρτα κατασκευάζουμε ορθογώνια σχήματα που αποτελούνται από μικρότερα τετράγωνα, όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα:



…

$1^ο$ σχήμα $2^ο$ σχήμα $3^ο$ σχήμα $4^ο$ σχήμα

α) Από πόσα σπίρτα αποτελείται το $4^ο$ σχήμα και από πόσα το $5^ο$ σχήμα;

β) Βρες έναν τύπο που δίνει τον αριθμό των σπίρτων από τα οποία αποτελείται κάθε σχήμα.

γ) Από πόσα σπίρτα αποτελείται το $20^ο$ σχήμα;

δ) Ποιο σχήμα αποτελείται από 100 σπίρτα;

ε) Υπάρχει σχήμα που αποτελείται από 50 σπίρτα;

Εξασκούμαι

σε όσα έμαθα

Ανακεφαλαίωση (Κανονικότητες)

Κανονικότητα είναι μία μια οργάνωση στοιχείων (αριθμοί, σχήματα, ήχοι, σύμβολα, …) με βάση συγκεκριμένους **κανόνες**.

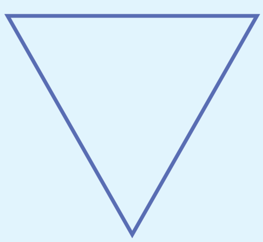
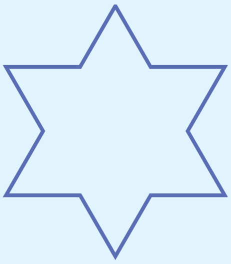
- Αν γνωρίζουμε αυτούς τους κανόνες, μπορούμε πάντα να βρίσκουμε τους επόμενους όρους της κανονικότητας.
- Ο όρος που βρίσκεται σε μία τυχαία θέση ν, λέγεται **ν-οστός όρος** ή **γενικός όρος** της κανονικότητας.

Αυτοαξιολόγηση (Κανονικότητες)

Δραστηριότητα:

Σχήμα 1: Σχεδιάζουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 9 μονάδων σε ισομετρικό χαρτί.

Σχήμα 2: Χωρίζουμε κάθε πλευρά του τριγώνου του προηγούμενου βήματος σε 3 ίσα μέρη και αφαιρούμε το μεσαίο τμήμα το οποίο αντικαθιστούμε με δυο πλευρές ισόπλευρου τριγώνου, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

1.	2.	3.	4.
			

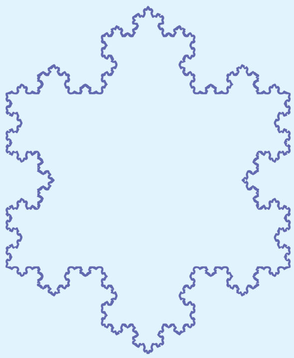
Α) Με ανάλογο τρόπο, σχεδίασε το σχήμα στη θέση 3 και 4.

Β) Συμπλήρωσε τον πίνακα:

Σειρά σχήματος (ν)	1	2	3	4
Πλήθος πλευρών ($Α_ν$)	3	12		
Μήκος κάθε πλευράς ($Μ_ν$)	9	3		
Περίμετρος ($Π_ν$)	27	36		

Γ) Βρες τον τύπο που περιγράφει:

- το πλήθος πλευρών $Α_ν$
- το μήκος κάθε πλευράς $Μ_ν$
- την περίμετρο $Π_ν$ για κάθε σειρά ν του σχήματος.



Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία πολλές φορές παίρνουμε το διπλανό σχήμα. Το σχήμα που προκύπτει ονομάζεται Νιφάδα του Κοχ (Koch snowflake). Το σχήμα αυτό ανήκει σε μία κατηγορία σχημάτων που ονομάζονται μορφοκλάσματα ή διεθνώς φράκταλς (fractals). Το χαρακτηριστικό γνώρισμα των σχημάτων αυτών είναι ότι επαναλαμβάνονται αυτούσια, όσο και αν μεγενθύνουμε το σχήμα τους.

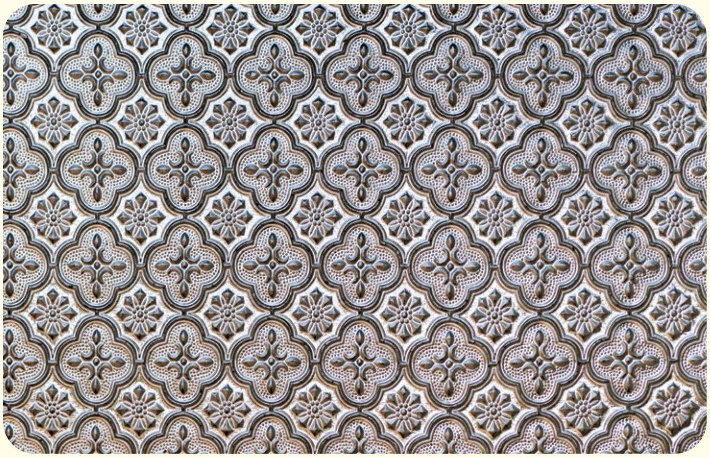
Σε αυτό το σημείο, θα πρέπει να είσαι σε θέση να ικανοποιείς όλους τους προσδοκώμενους μαθησιακούς στόχους. Γύρνα στην αρχή της θεματικής ενότητας και σημείωσε ✔ στα αντίστοιχα σημεία. Υπάρχουν στόχοι που αισθάνεσαι ότι δεν έχεις ικανοποιήσει πλήρως;

ΕΠΕΚΤΕΙΝΩ τις γνώσεις μου

Μελετώ
το συγκεκριμένο θέμα

Κανονικότητες και μοτίβα

Τα μοτίβα είναι κανονικότητες που εμφανίζονται σε διάφορους τομείς, από τη φύση μέχρι τον σχεδιασμό και τις αφηρημένες ιδέες. Χαρακτηριστικό γνώρισμα των μοτίβων είναι η επαναληψιμότητα των στοιχείων τους με προβλέψιμο τρόπο.



Μοτίβο διακοσμητικής ταπετσαρίας.

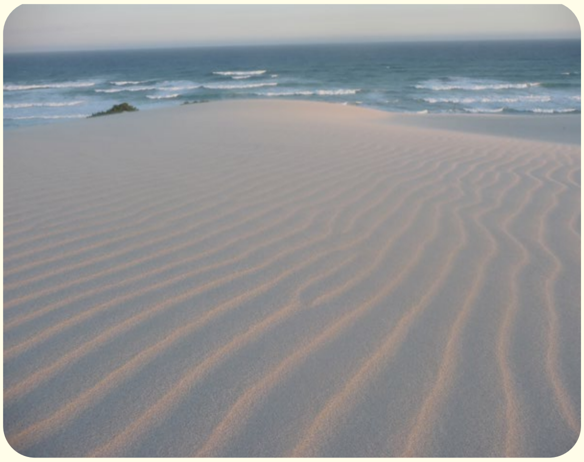
Στις διακοσμητικές τέχνες, όπως στην κεραμική, στα υφάσματα και στις ταπετσαρίες, ο όρος «μοτίβο» αναφέρεται σε διακοσμητικά σχέδια που προσαρμόζονται πάνω σε διάφορα αντικείμενα. Στην τέχνη και την αρχιτεκτονική, τα διακοσμητικά μοτίβα συνδυάζονται για να δημιουργήσουν σχέδια με σκοπό να προκαλέσουν συγκεκριμένες αισθητικές αντιδράσεις.

Ιωνικό ανάγλυφο από τον Παρθενώνα. Τα αρχιτεκτονικά μοτίβα χρησιμοποιούν γεωμετρικά σχήματα σε επανάληψη, για να δημιουργήσουν αισθητικά ενδιαφέρουσες δομές.

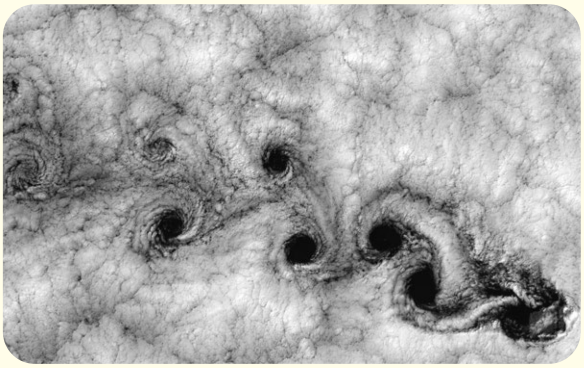
Τα μοτίβα μπορούν να παρατηρηθούν μέσω των αισθήσεων, ενώ τα αφηρημένα μοτίβα στην επιστήμη, τα μαθηματικά ή τη γλώσσα απαιτούν ανάλυση για να αναγνωριστούν. Η οπτική παρατήρηση είναι η πιο συχνή μέθοδος για την αναγνώριση μοτίβων, τα οποία είναι πανταχού παρόντα στη φύση και στην τέχνη. Στη φύση, τα οπτικά μοτίβα είναι συχνά πολύπλοκα και χαοτικά, σπάνια επαναλαμβανόμενα με ακρίβεια και πολλές φορές περιλαμβάνουν φράκταλ. Τέτοια φυσικά μοτίβα εντοπίζουμε στις σπείρες, στα κύματα, στους αφρούς, στις ρωγμές κ.α.

Η εικόνα απεικονίζει ρωγμές σε στεγνή γη. Αυτό το μοτίβο εμφανίζεται συχνά σε περιοχές που έχουν υποστεί ξηρασία, όπου το έδαφος σπάει σε πολλά ακανόνιστα αλλά προβλέψιμα τμήματα

Η εικόνα δείχνει ένα φυτό αλόης με σπειροειδές μοτίβο. Η φύση δημιουργεί συχνά σπείρες που ακολουθούν τον χρυσό κανόνα, έναν μαθηματικό λόγο που παρατηρείται σε πολλά φυσικά μοτίβα.



Η εικόνα δείχνει κυματισμούς σε αμμόλοφους. Οι κυματισμοί δημιουργούνται από τον άνεμο που σαρώνει την άμμο, σχηματίζοντας επαναλαμβανόμενα σχέδια που μπορεί να είναι εντυπωσιακά όμοια μεταξύ τους.



Η εικόνα παρουσιάζει δινοσυστήματα σε νέφη. Αυτά τα μοτίβα δημιουργούνται από τη ροή των αέριων μαζών και συχνά περιλαμβάνουν πολύπλοκες δομές.

ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

Α.4

Στην ενότητα αυτή θα εστιάσουμε στις αλγεβρικές παραστάσεις, εξερευνώντας την έννοια της αριθμητικής τιμής και τη χρήση τους για την αναπαράσταση δεδομένων. Θα μάθουμε να αναγνωρίζουμε και να επιλύουμε προβλήματα χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα και να απλοποιούμε αλγεβρικές εκφράσεις.
Πώς μπορούν αυτές οι γνώσεις να σε βοηθήσουν να επιλύσεις πραγματικά προβλήματα ή να δημιουργήσεις μαθηματικά μοντέλα;

Είσαι έτοιμος/η να εισέλθεις στον κόσμο των αλγεβρικών παραστάσεων;

Στόχοι Ενότητας

- ☐ Υπολογίζω την αριθμητική τιμή μιας αλγεβρικής παράστασης για δεδομένες τιμές των μεταβλητών.
- ☐ Αναγνωρίζω μια αλγεβρική παράσταση ως γινόμενο ή άθροισμα ή άθροισμα γινομένων.
- ☐ Απλοποιώ απλές αλγεβρικές παραστάσεις με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας (απαλοιφή παρένθεσης και αναγωγή όμοιων όρων).
- ☐ Διερευνώ και αποδεικνύω αλγεβρικά και γεωμετρικά την ιδιότητα:
  $(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta$

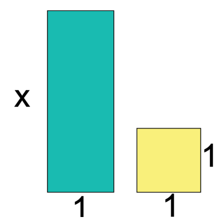
Μαθήματα Ενότητας

4.1: Αλγεβρική παράσταση - Αριθμητική τιμή αλγεβρικής παράστασης - Επιμεριστική ιδιότητα
$(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta$

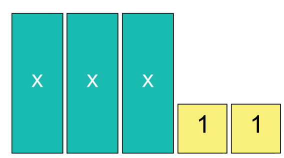
+ Ανακεφαλαίωση / Αυτοαξιολόγηση

4.1 | Αλγεβρική παράσταση - Αριθμητική τιμή αλγεβρικής παράστασης - Επιμεριστική ιδιότητα

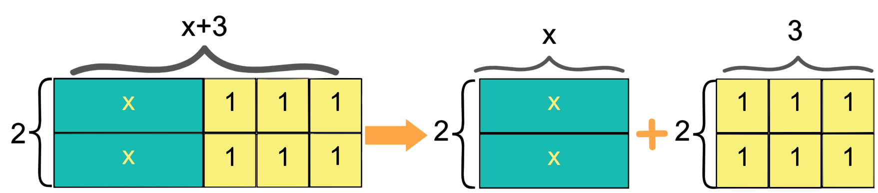
Για να «δούμε» μια αλγεβρική παράσταση (όπως η $3x + 2$), μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ορθογώνια μήκους x και πλάτους 1 για το x και τετράγωνα πλευράς 1 για το 1.



Έτσι, η παράσταση $3x + 2$ μπορεί να απεικονιστεί όπως στο σχήμα παρακάτω:



Χρησιμοποιώντας αυτά τα «πλακάκια», μπορούμε να βρούμε το διπλάσιο της παράστασης $x+3$, όπως φαίνεται στο σχήμα.



$$2(x+3)=2x+2\cdot 3$$
$$=2x+6$$

α) Χρησιμοποιώντας τα πλακάκια γράψε σε απλούστερη μορφή τις παραστάσεις:

$$2x + 3x,\ 5x - 2x,\ 2x + 5x + 2,\ (2x + 3) + (5x + 3)$$

β) Μπορείς να χρησιμοποιήσεις την επιμεριστική ιδιότητα, για να απλοποιήσεις τις ίδιες παραστάσεις;

γ) Κάποιος μαθητής έγραψε: $2x + 5 + 6x = 13x$.

Είναι σωστό ή λάθος; Εξήγησε την απάντησή σου με τους δύο τρόπους που χρησιμοποίησες στα δύο προηγούμενα ερωτήματα

Αλγεβρική παράσταση

Θυμόμαστε

Μια παράσταση που περιέχει πράξεις με αριθμούς, λέγεται, όπως γνωρίζουμε, **αριθμητική παράσταση**, π.χ. $\frac{2}{5} + 3 \cdot 4^3$, ενώ μια παράσταση που περιέχει πράξεις με αριθμούς και μεταβλητές ονομάζεται **αλγεβρική παράσταση**, π.χ. $x^2 + \frac{x}{3} + 6$.

- Η **μεταβλητή** μπορεί να παριστάνει έναν οποιονδήποτε αριθμό ή γενικότερα ένα οποιοδήποτε στοιχείο ενός συνόλου. Για τη μεταβλητή χρησιμοποιούμε συνήθως ένα γράμμα, όπως x, y,ω...
- Οι προσθετέοι στην αλγεβρική παράσταση $x^2 + \frac{x}{3} + 6$ είναι οι x^2, $\frac{x}{3}$ και 6, και ονομάζονται **όροι** της **παράστασης**.

Αναγνώριση στοιχείων της δομής μιας αλγεβρικής παράστασης

Για να κατανοήσουμε καλύτερα την έννοια της αλγεβρικής έκφρασης, είναι σημαντικό να αναγνωρίζουμε τα στοιχεία της δομής των αλγεβρικών παραστάσεων. Μια αλγεβρική παράσταση μπορεί να είναι ένα γινόμενο ή άθροισμα ή άθροισμα γινομένων κ.α.

Παραδείγματα:

- Η αλγεβρική παράσταση $x + 2$ είναι άθροισμα με όρους το x και το 2.
- Η αλγεβρική παράσταση $5 \cdot (3 + x)$ είναι γινόμενο που έχει παράγοντες το 5 και το άθροισμα $3 + x$.
- Η αλγεβρική παράσταση $x + 4 \cdot (x - 1)$ είναι άθροισμα με όρους το x και το γινόμενο $4 \cdot (x - 1)$ που έχει παράγοντες το 4 και το $x - 1$.

Αριθμητική τιμή αλγεβρικής παράστασης

Γνωρίζουμε ότι, αν σε μια αλγεβρική παράσταση αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές με αριθμούς και κάνουμε τις πράξεις, θα προκύψει ένας αριθμός που λέγεται **αριθμητική τιμή** ή απλά **τιμή** της αλγεβρικής παράστασης.

Παράδειγμα: Η τιμή της αλγεβρικής παράστασης $3(2x + 1)$,

για $x = 4$ είναι: $3 \cdot (2 \cdot 4 + 1) = 3 \cdot (8 + 1) = 3 \cdot 9 = 27$

και για $x = -1$ είναι: $3 \cdot [2 \cdot (-1) + 1] = 3 \cdot (-2 + 1) = 3 \cdot (-1) = -3$.

Αντιλαμβάνομαι με προσομοίωση

Επιμεριστική ιδιότητα $(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)=\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta$

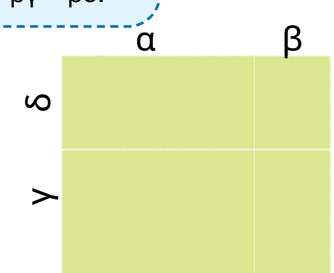
Γνωρίζουμε από την επιμεριστική ιδιότητα ότι: $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$, με τη βοήθεια αυτής της ιδιότητας μπορούμε να υπολογίσουμε το γινόμενο των αθροισμάτων: $(\alpha + \beta) \cdot (\gamma + \delta)$.

Έχουμε: $(\alpha + \beta) \cdot (\gamma + \delta) = (\alpha + \beta) \cdot \gamma + (\alpha + \beta) \cdot \delta = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma + \alpha \cdot \delta + \beta \cdot \delta$.

Αποδείξαμε αλγεβρικά την ιδιότητα: $\boxed{(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta}$.

Γεωμετρική ερμηνεία:

Το ορθογώνιο του διπλανού σχήματος έχει διαστάσεις $\alpha + \beta$ και $\gamma + \delta$.

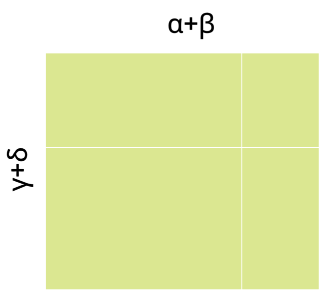


Θα υπολογίσουμε το εμβαδόν του ορθογωνίου με δύο τρόπους:

α' τρόπος:

Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι:

Ε = (μήκος)·(πλάτος) = $(\alpha + \beta) \cdot (\gamma + \delta)$

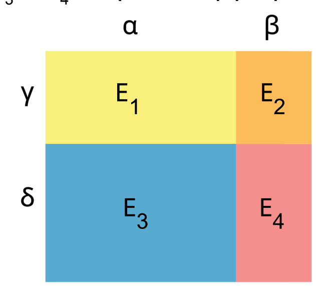


β' τρόπος.

Χωρίζουμε το ορθογώνιο σε τέσσερα μικρότερα ορθογώνια με εμβαδά E_1, E_2, E_3 και E_4.

Το εμβαδόν του μεγάλου ορθογωνίου είναι:

$E = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 = \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta$.



Εμβαδόν = $\alpha \cdot \gamma + \alpha \cdot \delta + \beta \cdot \gamma + \beta \cdot \delta$

Προκύπτει λοιπόν ότι: $(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta$

Χρησιμοποιώ

Προσπάθησε, με τον ίδιο τρόπο να ερμηνεύσεις γεωμετρικά τις σχέσεις:

$(\alpha - \beta)(\gamma + \delta) = \alpha\gamma + \alpha\delta - \beta\gamma - \beta\delta$

$(\alpha + \beta)(\gamma - \delta) = \alpha\gamma - \alpha\delta + \beta\gamma - \beta\delta$

$(\alpha - \beta)(\gamma - \delta) = \alpha\gamma - \alpha\delta - \beta\gamma + \beta\delta$

Λυμένα Παραδείγματα

1. Να γράψετε με απλούστερο τρόπο τις παραστάσεις:

α) $(x + 3) \cdot (x + 6)$ β) $(x - 2) \cdot (x + 1)$ γ) $(x - 5) \cdot (8 - x)$.

Λύση:

α)

$$(x + 3) \cdot (x + 6) = x \cdot x + \underline{6 \cdot x + 3 \cdot x} + 3 \cdot 6 =$$

← **Απαλείφουμε τις παρενθέσεις με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας.**

$$= x^2 + (6 + 3) \cdot x + 18 =$$

$$= x^2 + 9x + 18.$$

← **Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.**

Με τον ίδιο τρόπο, απλοποιούμε τις υπόλοιπες παραστάσεις:

β)

$$(x - 2) \cdot (x + 1) = x \cdot x + \underline{1 \cdot x - 2 \cdot x} - 2 \cdot 1 =$$

$$= x^2 + (1 - 2) \cdot x - 2 =$$

$$= x^2 - x - 2.$$

γ)

$$(x - 5) \cdot (8 - x) = \underline{8 \cdot x} - x \cdot x - 5 \cdot 8 + \underline{5 \cdot x} =$$

$$= -x^2 + (8 + 5)x - 40 =$$

$$= -x^2 + 13x - 40.$$

2. Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $A = x(x-3)+(2-x)(x-1)$ είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x.

Λύση:

$$\begin{aligned} A &= x(x-3)+(2-x)(x-1) = \\ &= x^2-3x+2x-2\cdot 1-x\cdot x+1\cdot x = \\ &= x^2-3x+2x-2-x^2+x = \\ &= -2, \quad \text{που είναι ανεξάρτητη του x.} \end{aligned}$$

3. Να υπολογίσετε την τιμή της παράτασης $A = 2\cdot(5x-3)+(2-x)\cdot(x+3)$ για $x = -2$.

Λύση:

Απλοποιούμε την παράσταση:

$$\begin{aligned} A &= 2\cdot(5x-3)+(2-x)\cdot(x+3) = \\ &= 2\cdot 5x-2\cdot 3+2\cdot x+2\cdot 3-x\cdot x-3\cdot x = \\ &= 10x-6+2x+6-x^2-3x = \\ &= -x^2+(10+2-3)x-6+6 = \\ &= -x^2+9x. \end{aligned}$$

Για $x = -2$, έχουμε:

$A = -(-2)^2+9\cdot(-2) = -4-18 = -22.$

4. Με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας, να κάνετε τις πράξεις:

α) $99\cdot 81$ β) $20,1\cdot 49,9$

Λύση:

α)

$$\begin{aligned} 99\cdot 81 &= (100-1)\cdot(80+1) = \\ &= 100\cdot 80+100\cdot 1-1\cdot 80-1 = \\ &= 8.000+100-80-1 = \\ &= 8.019. \end{aligned}$$

β)

$$\begin{aligned} 20,1\cdot 49,9 &= (20+0,1)\cdot(50-0,1) = \\ &= 20\cdot 50-20\cdot 0,1+0,1\cdot 50-0,1\cdot 0,1 = \\ &= 1.000-2+5-0,01 = \\ &= 1.002,99. \end{aligned}$$

Εξασκούμαι

σε όσα έμαθα

Ασκήσεις / Προβλήματα

1

Χρησιμοποίησε μεταβλητές για να εκφράσεις με μια αλγεβρική παράσταση τις παρακάτω εκφράσεις:

α) Το διπλάσιο ενός αριθμού. ....

β) Το μισό ενός αριθμού. ....

γ) Ένας αριθμός αυξάνεται κατά 8. ....

δ) Το τριπλάσιο ενός αριθμού ελαττωμένο κατά 1. ....

ε) Η διαφορά δύο αριθμών. ....

στ) Ένας άρτιος αριθμός. ....

ζ) Ένας περιττός αριθμός. ....

η) Το άθροισμα δύο διαδοχικών αριθμών. ....

2

Αντιστοίχισε τις αλγεβρικές παραστάσεις με τις αντίστοιχες λεκτικές εκφράσεις.

α) $5 \cdot x$	i) Άθροισμα
β) $y + 3$	ii) Γινόμενο
γ) $6 \cdot \alpha + 3 \cdot \beta$	iii) Άθροισμα γινομένων
δ) $(\alpha + 1) \cdot (\beta + 4)$	iv) Γινόμενο αθροισμάτων

Στη συνέχεια συμπλήρωσε τα κενά:

Η αλγεβρική παράσταση: $x + 6 \cdot (x - 2)$ είναι άθροισμα με όρους το .... και το γινόμενο .... , που έχει παράγοντες το .... και το ....

3

Βρες την τιμή της παράστασης σε κάθε περίπτωση:

α) $2x+3$, όταν $x = 4$.

β) $5y - 2$, όταν $y = 7$.

γ) $3\alpha^2 - 2\alpha + 1$, όταν $\alpha = 2$.

δ) $2\beta + 7$, όταν $\beta = -3$.

4

Απλοποίησε τις παραστάσεις:

α) $3(x + 1) + 4(2x - 2)$ β) $6(1 - x) + (2 - 5x)$ γ) $-2(3x + 3) - (7 - 6x)$

δ) $3(x - y) + 7(2 - y) + 11$ ε) $\frac{1}{2} \cdot (4x + 2) - (x - 3)$

5

Απλοποίησε τις παραστάσεις:

α) $(x + 2)(x + 3)$ β) $(x - 1)(x + 5)$ γ) $(2 - x)(x - 8)$ δ) $(6 - x)\left(x + \frac{1}{2}\right)$

6

Υπολόγισε την τιμή των παραστάσεων:

α) $A = 5(x - 1) - 4(x - 3) + 5$, όταν $x = -0,75$

β) $B = (x - 2)(6 + x) + 2(6 - 2x)$, όταν $x = -\frac{1}{3}$

7

Η Ναζλί ξεκίνησε ένα πρόγραμμα γυμναστικής για να βελτιώσει τη φυσική της κατάσταση. Την πρώτη εβδομάδα εκτέλεσε 10 ασκήσεις γυμναστικής, και κάθε εβδομάδα προσθέτει 5 ακόμη ασκήσεις στο πρόγραμμά της.

α) Αν x είναι ο αριθμός των εβδομάδων, να γράψεις μια αλγεβρική έκφραση που περιγράφει τον αριθμό των ασκήσεων που εκτελεί η Ναζλί μετά από x εβδομάδες.

β) Βρες τον αριθμό των ασκήσεων που εκτελεί η Ναζλί μετά από 8 εβδομάδες.

8

Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος α και πλάτος β (σε cm).

α) Να εκφράσεις με τη βοήθεια αλγεβρικών παραστάσεων, την περίμετρο και το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

β) Αν το μήκος α αυξηθεί κατά 3cm και το πλάτος β μειωθεί κατά 2cm, τότε να εκφράσεις με τη βοήθεια αλγεβρικών παραστάσεων, τη νέα περίμετρο και το νέο εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

γ) Βρες τη νέα περίμετρο και εμβαδόν του παραλληλογράμμου που προκύπτουν από το ερώτημα β, αν είναι α = 2cm και β = 5cm.

9

Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος $2x+3$ και πλάτος $x - 1$.

α) Βρες την αλγεβρική έκφραση που περιγράφει την περίμετρο του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

β) Υπολόγισε την τιμή της περιμέτρου όταν x = 11cm.

γ) Βρες τις τιμές του x για της οποίες η περίμετρος είναι 20cm.

10

Σκέφτεσαι να μοιράσεις τα έξοδα της εκδρομής με τους φίλους σου. Έχεις ένα συνολικό ποσό Π που πρέπει να μοιραστείτε. Θα ταξιδέψετε εσύ, ο Αμπντούλ και η Μαρία.

- Εσύ θα πληρώσεις το 40% του ποσού Π.
- Η Μαρία θα πληρώσει το 30% του ποσού Π.
- Ο Αμπντούλ θα πληρώσει το υπόλοιπο.

Να εκφράσεις με τη βοήθεια αλγεβρικών παραστάσεων τα χρήματα που θα χρειαστεί να πληρώσει ο καθένας.

Ανακεφαλαίωση (Αλγεβρικές Παραστάσεις)

Αριθμητική παράσταση λέγεται μία παράσταση που περιέχει πράξεις με αριθμούς. Π.χ. $\frac{2}{5} + 3 \cdot 4^3$

Αλγεβρική παράσταση λέγεται μία παράσταση που περιέχει πράξεις με αριθμούς και μεταβλητές. Π.χ. $x^2 + \frac{x}{3} + 6$

Αριθμητική τιμή ή απλά **τιμή** μίας αλγεβρικής παράστασης λέγεται ο αριθμός που προκύπτει από τις πράξεις αν αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές με αριθμούς.

Επιμεριστική ιδιότητα: $(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta$**.**

Αυτοαξιολόγηση (Αλγεβρικές Παραστάσεις)

Α. Απόδειξε ότι:

i. $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$.

ii. $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$.

iii. $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$.

Β. Υπολόγισε την τιμή της παράστασης:

$A = (x - 1)(x + 5) - 3(y + 2) - (x + 3)(x - 2)$, αν $x - y = 2$.

Αντιλαμβάνομαι

με προσομοίωση

Σε αυτό το σημείο, θα πρέπει να είσαι σε θέση να ικανοποιείς όλους τους προσδοκώμενους μαθησιακούς στόχους. Γύρνα στην αρχή της θεματικής ενότητας και σημείωσε ✓ στα αντίστοιχα σημεία. Υπάρχουν στόχοι που αισθάνεσαι ότι δεν έχεις ικανοποιήσει πλήρως;

ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

Α.5

Στην ενότητα αυτή θα επικεντρωθούμε στις αλγεβρικές σχέσεις, μελετώντας εξισώσεις πρώτου βαθμού. Θα μάθουμε να αναγνωρίζουμε τα μέλη μιας εξίσωσης, να εφαρμόζουμε ιδιότητες ισότητας και να βρίσκουμε τη λύση μιας εξίσωσης.

Πώς σχετίζονται οι εξισώσεις αυτές με την επίλυση καθημερινών προβλημάτων;

Είσαι έτοιμος/η να ανακαλύψεις τη σημασία των εξισώσεων στην πραγματική ζωή;

Στόχοι Ενότητας

- ☐ Αναγνωρίζω τους όρους: εξίσωση πρώτου βαθμού, πρώτο και δεύτερο μέλος, ισοδύναμες εξισώσεις, άγνωστος, λύση ή ρίζα.
- ☐ Αναγνωρίζω αν ένας αριθμός είναι λύση της εξίσωσης ή/και του αντίστοιχου προβλήματος.
- ☐ Επιλύω εξισώσεις της μορφής $αx + β = γx + δ$ με εφαρμογή των ιδιοτήτων διατήρησης της ισότητας και των πράξεων.
- ☐ Αναγνωρίζω ότι μια εξίσωση μπορεί να έχει άπειρες λύσεις ή καμία λύση.
- ☐ Επιλύω ρεαλιστικά προβλήματα με εξισώσεις της μορφής $αx + β = γx + δ$ με άγνωστο και στα δύο μέλη.
- ☐ Συνθέτω ρεαλιστικά προβλήματα που επιλύονται με εξισώσεις της μορφής $αx + β = γx + δ$ με άγνωστο και στα δύο μέλη.

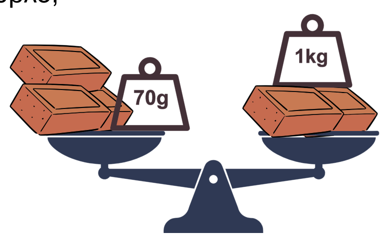
Μαθήματα Ενότητας

5.1 | Εξισώσεις πρώτου βαθμού της μορφής αx + β = γx + δ.

Α. Εξισώσεις πρώτου βαθμού της μορφής αx + β = γx + δ.

Εξερευνώ

Μια ζυγαριά ισορροπεί, όταν βάλουμε από το ένα μέρος δύο τούβλα, των οποίων δεν γνωρίζουμε το βάρος και ένα ζύγι 1kg και στο άλλο μέρος 3 τούβλα και ένα ζύγι των 70g. Ποια ισότητα περιγράφει αυτή την ισορροπία; Μπορούμε να βρούμε πόσο ζυγίζει κάθε τούβλο;



Εξισώσεις

Θυμόμαστε

Εξίσωση με έναν άγνωστο είναι μία ισότητα, που περιέχει αριθμούς και ένα γράμμα (μεταβλητή), την άγνωστη ποσότητα.

- Όταν ο εκθέτης του αγνώστου είναι 1, λέμε ότι η εξίσωση είναι **πρώτου βαθμού**.

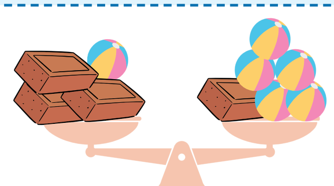
Παραδείγματα: $2x + 3 = 15$, $6x + 3 = 4 - x$.

Όταν ο εκθέτης του αγνώστου είναι 2, λέμε ότι η εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού (π.χ. $x^2 = 9$, $x^2 + 4x - 5 = 0$), όταν ο εκθέτης του αγνώστου είναι 3, λέμε ότι η εξίσωση είναι τρίτου βαθμού (π.χ. $x^3 + 8 = 0$) κ.ο.κ.

Σε μία εξίσωση, η παράσταση που βρίσκεται αριστερά από το «=» λέγεται **πρώτο μέλος** και η παράσταση δεξιά από το «=» λέγεται **δεύτερο μέλος** της εξίσωσης .

Παράδειγμα: Στην εξίσωση $3x + 1 = x + 5$,

- το πρώτο μέλος είναι η παράσταση $3x + 1$ και
- το δεύτερο μέλος είναι η παράσταση $x + 5$.

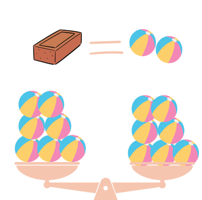


Ο αριθμός που επαληθεύει την εξίσωση λέγεται **λύση** ή **ρίζα** της εξίσωσης.

Παράδειγμα: Ο αριθμός 2 είναι λύση της εξίσωσης: $3x + 1 = x + 5$,
γιατί αν αντικαταστήσουμε το x με 2 επαληθεύει την εξίσωση:

$3 \cdot 2 + 1 = 2 + 5$ ή

$7 = 7$ που ισχύει.



Ειδικές περιπτώσεις εξισώσεων

Μία εξίσωση μπορεί να έχει μόνο μία λύση, μπορεί να έχει περισσότερες από μία λύσεις, μπορεί ακόμη να έχει άπειρες λύσεις. Επίσης υπάρχουν εξισώσεις που δεν έχουν καμία λύση.

Αν προσπαθήσουμε να βρούμε τη λύση της εξίσωσης: $x + 5 = 9$, εύκολα διαπιστώνουμε ότι η **μοναδική** λύση της εξίσωσης είναι ο αριθμός 4.

Αν όμως προσπαθήσουμε να βρούμε λύση στην εξίσωση: $x + 1 = x + 2$, θα παρατηρήσουμε ότι κανένας αριθμός δεν επαληθεύει την εξίσωση αυτή.

Η εξίσωση, που δεν έχει καμία λύση, ονομάζεται **αδύνατη**.

Παράδειγμα: Η εξίσωση: $0 \cdot x = 2$ είναι αδύνατη γιατί δεν υπάρχει αριθμός, ο οποίος όταν πολλαπλασιαστεί με 0 να δίνει αποτέλεσμα 2.

Αντίθετα, αν παρατηρήσουμε την εξίσωση , διαπιστώνουμε ότι έχει άπειρες λύσεις καθώς επαληθεύεται από όλους τους αριθμούς.

Η εξίσωση που επαληθεύεται για κάθε τιμή της μεταβλητής ονομάζεται **ταυτότητα** ή **αόριστη**.

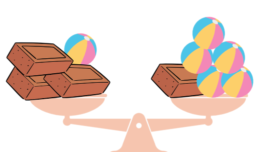
Παράδειγμα: Η εξίσωση: $0 \cdot x = 0$ είναι ταυτότητα γιατί οποιοσδήποτε αριθμός (ακέραιος, φυσικός, ρητός, άρρητος), όταν πολλαπλασιάζεται με 0, δίνει αποτέλεσμα 0.

Εξισώσεις της μορφής $αx + β = γx + δ$.

Για να βρούμε τον άγνωστο αριθμό x σε μία εξίσωση της μορφής $αx + β = γx + δ$, χρησιμοποιούμε ιδιότητες διατήρησης της ισότητας και των πράξεων και επιλύουμε την εξίσωση.

Παράδειγμα:

Για να λύσουμε την εξίσωση $3x + 1 = x + 5$, εργαζόμαστε ως εξής:



$3x + 1 = x + 5$

ή $3x + 1 - 1 = x + 5 - 1$ ← **Αφαιρούμε το 1 και από τα δύο μέλη της εξίσωσης.**

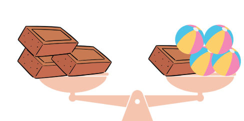
ή $3x = x + 4$ ← **Κάνουμε τις πράξεις.**

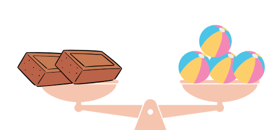
ή $3x - x = x + 4 - x$ ← **Αφαιρούμε το x και από τα δύο μέλη της εξίσωσης.**

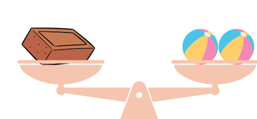
ή $2x = 4$ ← **Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων**

ή $\frac{2x}{2} = \frac{4}{2}$ ← **Διαιρούμε με το 2 και τα δύο μέλη της εξίσωσης.**

ή $x = 2$ ← **Απλοποιούμε τα κλάσματα.**







Με τον τρόπο αυτόν **απομονώνουμε το x** στο ένα μέλος και βρίσκουμε στο άλλο μέλος τον αριθμό που αποτελεί τη λύση της εξίσωσης, που είναι ο αριθμός 2.

Στην παραπάνω διαδικασία επίλυσης της εξίσωσης: $3x + 1 = x + 5$,

αφαιρέσαμε το 1 και το x από τα δύο μέλη, οπότε προέκυψε η εξίσωση: $3x - x = 5 - 1$

Παρατηρούμε ότι:

- το $+1$ «μεταφέρθηκε» από το πρώτο μέλος της αρχικής εξίσωσης στο δεύτερο μέλος και άλλαξε πρόσημο, (έγινε -1) και
- το x «μεταφέρθηκε» από το δεύτερο μέλος στο πρώτο, άλλαξε πρόσημο και έγινε $-x$.

Παρατήρηση:

> Σε μία εξίσωση μπορούμε να «μεταφέρουμε» όρους από το ένα μέλος στο άλλο, αλλάζοντας το πρόσημό τους.

Αντιλαμβάνομαι με προσομοίωση

Με τον τρόπο αυτόν, η παραπάνω εξίσωση, πιο σύντομα λύνεται ως εξής:

$$3x - 1 = x + 5$$

ή $3x - x = 5 + 1$ ← **Χωρίζουμε τους γνωστούς από τους αγνώστους μεταφέροντας όρους από το ένα μέλος στο άλλο, αλλάζοντας το πρόσημό τους.**

ή $2x = 6$ ← **Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.**

ή $\frac{2x}{2} = \frac{6}{2}$ ← **Διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου και απλοποιούμε τα κλάσματα.**

ή $x = 3$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η εξίσωση $αx + β = γx + δ$ μπορεί να λάβει τη μορφή $Αx + Β = 0$.

- Αν $Α \neq 0$ τότε η εξίσωση $Αx + Β = 0$ έχει **μοναδική λύση** την $x = -\frac{Β}{Α}$.

- Αν $Α = 0$ τότε η εξίσωση $Αx + Β = 0$ γράφεται $0x = -Β$ και
  - αν $Β \neq 0$, τότε η εξίσωση είναι **αδύνατη** (δεν έχει λύση), ενώ
  - αν $Β = 0$, τότε η εξίσωση γράφεται $0x = 0$ και είναι **ταυτότητα** ή **αόριστη** (κάθε αριθμός είναι λύση της).

Λυμένα Παραδείγματα

1. Να λύσετε την εξίσωση: $2(x + 1) - 3(x - 4) = 5 - (5x + 1)$.

Λύση:

$2(x + 1) - 3(x - 4) = 5 - (5x + 1)$ ← **Χρησιμοποιούμε την επιμεριστική ιδιότητα.**

ή $2x + 2 - 3x + 12 = 5 - 5x - 1$ ← **Χωρίζουμε τους γνωστούς από τους αγνώστους.**

ή $2x - 3x + 5x = 5 - 1 - 2 - 12$ ← **Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων**

ή $4x = -10$ ← **Διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου**

ή $\frac{4x}{4} = \frac{-10}{4}$ ← **Απλοποιούμε τα κλάσματα.**

ή $x = -\frac{5}{2}$

2. Να λύσετε την κλασματική εξίσωση: $\frac{2x-3}{3} - 1 = \frac{3x-4}{2} + x$.

Λύση:

Όταν η εξίσωση περιέχει κλάσματα, μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε τα δύο μέλη με ένα κοινό πολλαπλάσιο των παρονομαστών (συνήθως το ΕΚΠ), ώστε να προκύψει μία εξίσωση χωρίς παρονομαστές. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται **απαλοιφή παρονομαστών**.

$$\frac{3x-4}{2} + x = \frac{2x-3}{3} - 1$$
← **Πολλαπλασιάζουμε τα δύο μέλη της εξίσωσης με το ΕΚΠ(2,3)=6.**

ή $$6 \cdot \left(\frac{3x-4}{2} + x\right) = 6 \cdot \left(\frac{2x-3}{3} - 1\right)$$
← **Χρησιμοποιούμε την επιμεριστική ιδιότητα.**

ή $$6 \cdot \frac{3x-4}{2} + 6x = 6 \cdot \frac{2x-3}{3} - 6 \cdot 1$$
← **Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών.**

ή $$3(3x-4) + 6x = 2(2x-3) - 6$$
← **Χρησιμοποιούμε την επιμεριστική ιδιότητα.**

ή $$9x - 12 + 6x = 4x - 6 - 6$$
← **Χωρίζουμε τους γνωστούς από τους αγνώστους.**

ή $$9x + 6x - 4x = -6 - 6 + 12$$
← **Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων**

ή $$11x = 0$$
← **Διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου**

ή $$\frac{11x}{11} = \frac{0}{11}$$
← **Απλοποιούμε τα κλάσματα.**

ή $$x = 0$$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{x-2}{5} = \frac{1+2x}{10}$

β) $(5-x) \cdot 4 = 2 \cdot (2x) + 8$

Εξασκούμαι σε όσα έμαθα

Λύση:

α)

$$\frac{x-2}{5} = \frac{1+2x}{10}$$

ή $10 \cdot \frac{x-2}{5} = 10 \cdot \frac{1+2x}{10}$

ή $2 \cdot (x-2) = 1 + 2x$

ή $2x - 4 = 1 + 2x$

ή $2x - 2x = 1 + 4$

ή $0x = 5.$

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση αυτή δεν μπορούμε να διαιρέσουμε με τον συντελεστή του αγνώστου, γιατί δεν ορίζεται διαίρεση με το 0.

Η εξίσωση αυτή είναι αδύνατη (δεν έχει καμία λύση).

β)

$$(2+x) \cdot 4 = 2 \cdot (2x) + 8$$

ή $8 + 4x = 4x + 8$

ή $4x - 4x = 8 - 8$

ή $0x = 0.$

Στην περίπτωση αυτή επίσης, δεν μπορούμε να διαιρέσουμε με το 0.

Η εξίσωση αυτή είναι ταυτότητα (όλοι οι αριθμοί είναι λύσεις της).

Ασκήσεις / Προβλήματα

1 Χαρακτήρισε σωστές ή λανθασμένες τις προτάσεις που ακολουθούν βάζοντας ένα **x** στην κατάλληλη θέση.

	Σωστό	Λάθος
α) Η εξίσωση $4α - 2 = 2 + 5$ έχει ως λύση το $α = 7$.		
β) Η εξίσωση που δεν έχει καμία λύση ονομάζεται αόριστη.		
γ) Η εξίσωση $10x + 5 = 2x + 5$ είναι αδύνατη.		
δ) Η εξίσωση $x = x$ είναι ταυτότητα.		
ε) Η εξίσωση $2x - 2 = 0$ είναι αδύνατη.		
στ) Οι εξισώσεις $2x + 1 = 5$ και $4x + 2 = 10$ έχουν την ίδια λύση.		

2 Επίλεξε τον αριθμό που αποτελεί τη λύση της εξίσωσης, σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

Εξίσωση	Λύση		
α) $3x - 2 = x + 4$	i) $x = 2$	ii) $x = 3$	iii) $x = -1$
β) $4x + 1 = 5x + 3$	i) $x = -2$	ii) $x = 1$	iii) $x = -3$
γ) $-x + 8 = 9x - 2$	i) $x = 6$	ii) $x = -3$	iii) $x = 1$

3 Λύσε τις εξισώσεις:

α) $6x - 8 = 10 - 3x$

β) $5x - 3 + 6x = 4 + x - 1$

γ) $2y - 3y + 5 = 6 - 6y - 1$

δ) $2(y + 2) - 4y = 0$

Εξασκούμαι

σε όσα έμαθα

4 Λύσε τις εξισώσεις:

α) $2(3x - 1) + 4x = 7x - 11$

β) $5x - (x - 6) = 2(4x - 18) + 2$

γ) $2x - 5(3 - 2x) = 12x - 11$

δ) $1 - (6y - 3) = -2(1 + 3y) + 6$

ε) $4(7x - 1) - 3(2x + 5) = 6(9 - 3x) - (8 - x)$

στ) $6 - 4x - (x - 13) = 2 - (3 - x) \cdot (-2)$

5 Λύσε τις εξισώσεις:

α) $\frac{α + 1}{2} = \frac{2α - 5}{3}$

β) $\frac{2β - 4}{2} = \frac{1 - 5β}{4}$

γ) $\frac{x}{2} - \frac{3x}{4} = 3 - \frac{5x}{8}$

δ) $\frac{15x - 4}{2} - \frac{x}{3} = \frac{20 - 3x}{2} - \frac{11 - x}{3}$

ε) $\frac{x - 6}{5} - 2x + 1 = \frac{3 - x}{5} - \frac{5 - 3x}{3}$

στ) $\frac{4 - (2x - 1)}{10} - x = \frac{6x}{5} + \frac{1}{2}$

6 Λύσε τις εξισώσεις:

α) $-x-(3x+7)-2(x-8)+(2x-3)\cdot 3 = 0$

β) $\frac{5-(6x-1)}{4} - x = -\frac{15x}{6} - 3$

γ) $1-\left(\frac{2x}{3}-\frac{5x-1}{6}\right) = x-\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{6}\right)$

δ) $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-1}{2}+\frac{2x}{3}\right) = 1-\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}+\frac{1-3x}{3}\right)$

7 Δίνεται η εξίσωση: $(2\lambda-4)x = 4(\lambda-6)+\lambda-2$.

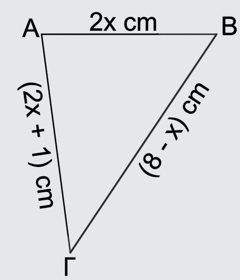
α) Αν $\lambda = 18$ να αποδείξεις ότι η εξίσωση έχει λύση $x = 2$.

β) Αν η εξίσωση έχει λύση $x = 3$, να αποδείξεις ότι $\lambda = -14$.

γ) Εξέτασε αν υπάρχει τιμή του λ για την οποία η εξίσωση είναι:

i) αδύνατη, ii) ταυτότητα.

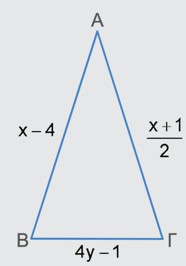
8 Αν το τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος έχει περίμετρο 15cm, υπολόγισε την τιμή του x καθώς και το μήκος κάθε πλευράς του τριγώνου.



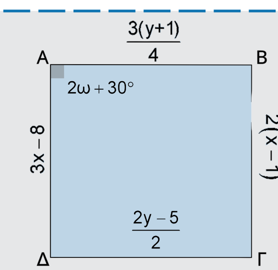
9 Το τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος είναι ισοσκελές με ίσες τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ.

α) Υπολόγισε την τιμή του x (σε cm) καθώς και το μήκος των ίσων πλευρών του τριγώνου.

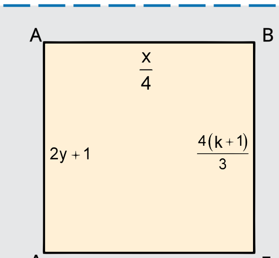
β) Αν η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι 13cm, υπολόγισε την τιμή του y καθώς και το μήκος της βάσης ΒΓ του τριγώνου.



10 Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ.
Υπολόγισε τις τιμές των x, y και ω (το ω παριστάνει μοίρες)



11 Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Υπολόγισε τις τιμές των x, y και k.



Β. Επίλυση προβλημάτων με χρήση εξισώσεων πρώτου βαθμού.

Εξερευνώ

Η «Παλατινή Ανθολογία» είναι μια συλλογή σύντομων ποιημάτων της ύστερης αρχαιότητας πάνω σε πολυποίκιλα θέματα γραμμένα από διάφορους συγγραφείς. Απαρτίζεται από 15 βιβλία και περιλαμβάνει περίπου 3.700 επιγράμματα με περισσότερους από 23.000 στίχους, τα οποία γράφτηκαν από τον 6ο αι. π.Χ. έως το 10ο αι. μ.Χ. Μεταξύ άλλων περιλαμβάνει και κάποια μαθηματικά προβλήματα. Παρακάτω βλέπουμε ένα από τα προβλήματα:

Ο πανίσχυρος Ηρακλής ρώτησε τον Αυγεία, θέλοντας να υπολογίσει τον αριθμό των ζώων του κι εκείνος του απάντησε ό,τι διαβάζεις στο διπλανό εικονίδιο.Μπορείς να βρεις πόσα ζώα είχε ο Αυγείας;

Για να λύσουμε ένα πρόβλημα με τη βοήθεια εξίσωσης πρώτου βαθμού, ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα.

- **Βήμα 1ο:** Χρησιμοποιούμε ένα γράμμα (συνήθως το x) για να εκφράσουμε τον άγνωστο αριθμό που πρέπει να προσδιορίσουμε.
- **Βήμα 2ο:** Εκφράζουμε τα υπόλοιπα άγνωστα μεγέθη (αν υπάρχουν) με τη βοήθεια του x.
- **Βήμα 3ο:** Σχηματίζουμε την εξίσωση που προκύπτει από τα δεδομένα του προβλήματος.
- **Βήμα 4ο:** Λύνουμε την εξίσωση και ελέγχουμε αν το αποτέλεσμα ικανοποιεί τα δεδομένα του προβλήματος.

Λυμένα Παραδείγματα

1. Να βρείτε τον αριθμό που το διπλάσιό του ελαττωμένο κατά πέντε, ισούται με το μισό του αυξημένο κατά 7.

Λύση:

Ονομάζουμε x τον ζητούμενο αριθμό.

Το διπλάσιο του αριθμού ελαττωμένο κατά 5 είναι: $2x - 5$.

Το μισό του αριθμού αυξημένο κατά 7 είναι: $\frac{x}{2} + 7$.

Επομένως, η εξίσωση που προκύπτει είναι:

$$2x - 5 = \frac{x}{2} + 7$$

ή $$2 \cdot 2x - 2 \cdot 5 = 2 \cdot \frac{x}{2} + 2 \cdot 7$$

ή $$4x - 10 = x + 14$$

ή $$4x - x = 14 + 10$$

ή $$3x = 24$$

ή $$\frac{3x}{3} = \frac{24}{3}$$

ή $$x = 8.$$

Άρα ο ζητούμενος αριθμός είναι το 8.

2. Σε μία εκδρομή συμμετέχουν 65 μαθητές/τριες. Από τη Β’ Γυμνασίου συμμετέχουν 5 μαθητές/τριες περισσότεροι από τους μαθητές/τριες της Α’ Γυμνασίου, ενώ οι μαθητές/τριες της Γ’ Γυμνασίου είναι διπλάσιοι από τους μαθητές/τριες της Α’ γυμνασίου. Πόσοι μαθητές/τριες από κάθε τάξη συμμετέχουν στην εκδρομή;

Λύση:

Ονομάζουμε x τους μαθητές/τριες της Α’ Γυμνασίου.

- Οι μαθητές/τριες της Β’ Γυμνασίου είναι: $x + 5$
- Οι μαθητές/τριες της Γ’ Γυμνασίου είναι: $2x$

Επομένως, η εξίσωση που προκύπτει είναι:

$$\begin{aligned} & x + x + 5 + 2x = 65 \\ \text{ή} \quad & x + x + 2x = 65 - 5 \\ \text{ή} \quad & 4x = 60 \\ \text{ή} \quad & \frac{4x}{4} = \frac{60}{4} \\ \text{ή} \quad & x = 15. \end{aligned}$$

Άρα από την Α’ Γυμνασίου συμμετέχουν 15 μαθητές/τριες,

από τη Β’ Γυμνασίου συμμετέχουν: $15 + 5 = 20$ μαθητές/τριες και

από τη Γ' Γυμνασίου συμμετέχουν: $2 \cdot 15 = 30$ μαθητές/τριες.

3. Ένα κατάστημα προσφέρει λάδι σε δύο συσκευασίες. Η μεγάλη συσκευασία περιέχει 4 λίτρα και έχει 60% περισσότερο λάδι από τη μικρή συσκευασία. Ποια είναι η χωρητικότητα, σε λίτρα, της μικρής συσκευασίας;

Λύση:

Ονομάζουμε x τη χωρητικότητα, σε λίτρα, της μικρής συσκευασίας.

- Η μεγάλη συσκευασία περιέχει: $x + 60\%x$ λίτρα λάδι.

Επομένως, η εξίσωση που προκύπτει είναι:

$$\begin{aligned} & x + 60\%x = 4 \\ \text{ή} \quad & x + \frac{6\cancel{0}}{10\cancel{0}}x = 4 \\ \text{ή} \quad & 10x + 10 \cdot \frac{6}{10}x = 10 \cdot 4 \\ \text{ή} \quad & 10x + 6x = 40 \\ \text{ή} \quad & 16x = 40 \\ \text{ή} \quad & \frac{16x}{16} = \frac{40}{16} \\ \text{ή} \quad & x = 2,5. \end{aligned}$$

Άρα η χωρητικότητα του μικρού δοχείου είναι 2,5 λίτρα.

Ασκήσεις / Προβλήματα

1 Βρες έναν αριθμό όπου το διπλάσιό του ελαττωμένο κατά το μισό του, ισούται με τον αριθμό αυξημένο κατά 5.

2 Ένα χρηματικό ποσό μοιράστηκε σε 3 αδέλφια. Ο 1ος πήρε το $\frac{1}{3}$ των χρημάτων και 40€ ακόμη, ο 2ος πήρε το $\frac{1}{4}$ των χρημάτων και 50€ ακόμη ενώ ο 3ος πήρε 110€. Βρες το αρχικό ποσό και το μερίδιο του καθενός.

3 Σε μια σχολική εκδρομή πήραν μέρος 90 μαθητές. Οι μαθητές της Γ' τάξης ήταν διπλάσιοι από τους μαθητές της Α' τάξης και οι μαθητές της Β' τάξης ήταν τα $\frac{3}{4}$ των μαθητών της Α' τάξης. Βρες πόσοι μαθητές από κάθε τάξη συμμετείχαν στην εκδρομή.

4 Ένας πατέρας είναι 43 ετών και η κόρη του είναι 29 χρόνια μικρότερη. Μετά από πόσα χρόνια η ηλικία του πατέρα θα είναι διπλάσια της ηλικίας της κόρης;

5 Ο Γιάννης έχει διπλάσια ηλικία από τον Πέτρο. Πριν από 5 χρόνια ο Γιάννης είχε τριπλάσια ηλικία από τον Πέτρο. Βρες τη σημερινή ηλικία του Γιάννη και του Πέτρου.

6 Μία ανθοδέσμη με 9 λουλούδια περιέχει τριαντάφυλλα και γαρδένιες. Αν κάθε τριαντάφυλλο κοστίζει 2€ και κάθε γαρδένια 2,5€, βρες πόσα λουλούδια από κάθε είδος περιέχει η ανθοδέσμη, αν συνολικά κοστίζει 20€.

7 Ανταλλάξαμε χαρτονόμισμα των 50€ με 19 νομίσματα των 2€ και 5€. Βρες πόσα νομίσματα από κάθε είδος πήραμε.

8 Σε μια φάρμα υπάρχουν κότες και πρόβατα. Τα πόδια τους συνολικά είναι 96 και τα κεφάλια τους 28. Βρες πόσες κότες και πόσα πρόβατα υπάρχουν στη φάρμα.

9 Σε ένα βιβλιοπωλείο τα βιβλία του γυμνασίου κοστίζουν 3,50€ και τα βιβλία του δημοτικού κοστίζουν 2€ λιγότερο. Η Κατερίνα αγόρασε 10 βιβλία και πλήρωσε 23€. Πόσα βιβλία από κάθε τάξη αγόρασε;

10 Ένα κατάστημα προσφέρει όλα του τα είδη με έκπτωση 20%. Αν ένα ζευγάρι παπούτσια κοστίζει 60€ μετά την έκπτωση, βρες πόσο κόστιζε αρχικά.

11 Το άθροισμα δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών ισούται με το τριπλάσιο του μικρότερου αριθμού ελαττωμένο κατά 5. Βρες τους δύο αριθμούς.

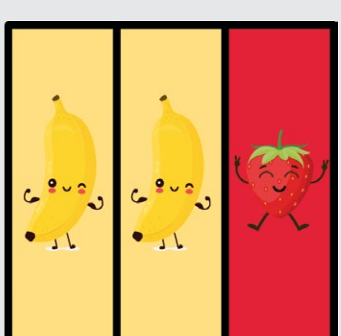
12 Σε ένα παιχνίδι κάθε παίκτης πρέπει να απαντήσει σε 10 ερωτήσεις και για κάθε σωστή απάντηση κερδίζει 5 μονάδες ενώ για κάθε λανθασμένη χάνει 2 μονάδες. Ο Άγγελος στο τέλος του παιχνιδιού συγκέντρωσε 22 μονάδες. Σε πόσες ερωτήσεις απάντησε σωστά;

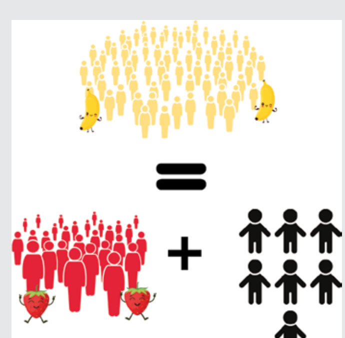
13 Ο Φίλιππος έχει στον κουμπαρά του 10€ και η Άννα 2€. Πήραν από τους γονείς τους το ίδιο χρηματικό ποσό και τώρα ο Φίλιππος έχει διπλάσια χρήματα από την Άννα. Ποιο είναι το χρηματικό ποσό που πήραν από τους γονείς τους;

14 Σύνθεσε ένα πρόβλημα που επιλύεται με την εξίσωση:

α) $2x = 3x - 4$ β) $3x - 6 = x + 2$

15 Αν γνωρίζεις ότι μία τάξη έχει τις παρακάτω προτιμήσεις ανάμεσα στο παγωτό φράουλα και μπανάνα, φτιάξε μια εξίσωση που περιγράφει τα δεδομένα και βρες πόσους μαθητές/μαθήτριες έχει η τάξη.





Ανακεφαλαίωση (Αλγεβρικές Σχέσεις)

Εξίσωση με έναν άγνωστο είναι μία ισότητα, που περιέχει αριθμούς και ένα γράμμα. Π.χ. $2x + 3 = 15$
.

- Η παράσταση που βρίσκεται αριστερά από το ‘’=’’ λέγεται **πρώτο μέλος** και
- η παράσταση δεξιά από το ‘’=’’ λέγεται **δεύτερο μέλος** της εξίσωσης.

Λύση ή **ρίζα** της εξίσωσης λέγεται ο αριθμός που την επαληθεύει.

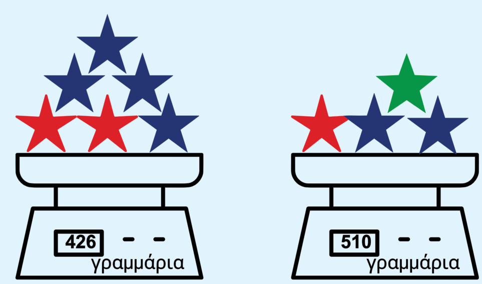
Αδύνατη λέγεται η εξίσωση, που δεν έχει καμία λύση. Π.χ. $0 \cdot x = 2$.

Ταυτότητα ή **αόριστη** λέγεται εξίσωση που έχει ως λύσεις όλους τους αριθμούς. Π.χ. $0 \cdot x = 0$.

Αυτοαξιολόγηση (Αλγεβρικές Σχέσεις)

Α. Στο κάτω μέρος κάθε ζυγαριάς αναγράφεται το συνολικό βάρος των σχημάτων

Πόσο ζυγίζει το πράσινο αστέρι ;



Β. Δίνεται η εξίσωση $\left(\frac{α + 1}{2} - 3\right) \cdot x = \frac{β}{2} - 1,$ όπου α, β πραγματικοί αριθμοί.

α) Να λύσετε την εξίσωση αν $α = 1$ και $β = 1$.

β) Βρες τις τιμές των α και β ώστε η εξίσωση να είναι: i. ταυτότητα. ii. αδύνατη.

Γ. Ένα πρόβλημα από την αρχαιότητα .(πηγή: academia.edu).

Η Αφροδίτη τον συνοφρυωμένο Έρωτα ρώτησε: «Ποιος πόνος άραγε παιδί μου σε χτύπησε;»

Κι αυτός απάντησε: «Οι Μούσες της Πιερίας μου άρπαξαν τα μήλα, η μια μετά την άλλη, αποσπώντας τα από την αγκαλιά μου, ενώ τα έφερνα από τον Ελικώνα.

Η Κλειώ πήρε το ένα πέμπτο από τα μήλα
και το ένα δωδέκατο η Ευτέρπη,
ενώ η θεϊκή Θάλεια το ένα όγδοο.
Η Μελπομένη άρπαξε το ένα εικοστό
και η Τερψιχόρη το ένα τέταρτο,
η Ερατώ το ένα έβδομο.
Η Πολύμνια μου έκλεψε τριάντα μήλα,
ενώ η Ουρανία εκατόν είκοσι
και η Καλλιόπη έφυγε γεμάτη με τριακόσια μήλα.

Αντιλαμβάνομαι

με προσομοίωση

Σε σένα λοιπόν έρχομαι με ελαφρύτερα χέρια, φέρνοντας αυτά τα πενήντα μήλα που μου άφησαν οι θεές.»

Πόσα μήλα είχε ο Έρωτας; [Απάντηση: 3.360 μήλα]

Σε αυτό το σημείο, θα πρέπει να είσαι σε θέση να ικανοποιείς όλους τους προσδοκώμενους μαθησιακούς στόχους. Γύρνα στην αρχή της θεματικής ενότητας και σημείωσε ✓ στα αντίστοιχα σημεία. Υπάρχουν στόχοι που αισθάνεσαι ότι δεν έχεις ικανοποιήσει πλήρως;

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ Α.6

Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε τις συναρτήσεις και τις αναπαραστάσεις τους. Θα ανακαλύψουμε πώς οι συναρτήσεις περιγράφουν σχέσεις μεταξύ μεταβλητών και πώς μπορούμε να τις εκφράσουμε γραφικά, αλγεβρικά ή με πίνακες.

Πώς μπορείς να χρησιμοποιήσεις τις συναρτήσεις για να αναλύσεις δεδομένα, να κάνεις προβλέψεις και να λύσεις προβλήματα στην καθημερινή ζωή;

Είσαι έτοιμος/η να βρεις τη σύνδεση της θεωρίας με την πράξη μέσα από παραδείγματα;

Στόχοι Ενότητας

- ☐ Αναγνωρίζω σε καταστάσεις της καθημερινότητας μεγέθη που συμμεταβάλλονται και διακρίνω ποιο μέγεθος καθορίζει το άλλο.
- ☐ Αναγνωρίζω τις σχέσεις που τα μεγέθη συμμεταβάλλονται ως συναρτήσεις και τις διακρίνω από σχέσεις που δεν είναι συναρτήσεις.
- ☐ Εκφράζω μια κατάσταση με μια συνάρτηση λεκτικά, αριθμητικά (με πίνακα τιμών), γραφικά και συμβολικά (με τύπο).
- ☐ Χρησιμοποιώ τις αναπαραστάσεις των συναρτήσεων (γραφικές παραστάσεις, πίνακες τιμών, τύπους) και μεταβαίνω από τη μία αναπαράσταση στην άλλη (όπου είναι δυνατόν).
- ☐ Εξετάζω αν ένα σημείο (διατεταγμένο ζεύγος) ανήκει στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης.
- ☐ Υπολογίζω αλγεβρικά και εκτιμώ γραφικά τις τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής για δεδομένες τιμές της ανεξάρτητης και αντιστρόφως.
- ☐ Αναγνωρίζω μέσα σε ποικίλα πλαίσια τη σχέση που συνδέει δύο ανάλογα ποσά ως σχέση αναλογίας.
- ☐ Αναπαριστώ τις σχέσεις αναλογίας που εμφανίζονται σε διάφορα πλαίσια ως σχέση της μορφής $y=αx$.
- ☐ Σχεδιάζω τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=αx$ και διαπιστώνω ότι είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- ☐ Σχεδιάζω τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=αx+β$ και εξηγώ τη σημασία των α και β.
- ☐ Επιλέγω (γραφικά και αλγεβρικά) προβλήματα χρησιμοποιώντας τις αναπαραστάσεις της συνάρτησης $y=αx+β$.
- ☐ Επιλύω γραφικά εξισώσεις της μορφής $αx+β=γ$.
- ☐ Διευρύνω μέσα από προβλήματα τη σχέση που συνδέει δύο αντιστρόφως ανάλογα ποσά.
- ☐ Διερευνώ αν στη συνάρτηση $y = \frac{α}{x}$, $α \neq 0$ αυξάνεται ή μειώνεται το y όταν αυξάνεται το x για $α>0$ και $α<0$.
- ☐ Επιλύω προβλήματα αντιστρόφως ανάλογων ποσών με τη συνάρτηση $y = \frac{α}{x}$,.

Μαθήματα Ενότητας

6.1: Συνάρτηση, έννοιες και αναπαραστάσεις

6.2: Γραφική παράσταση συνάρτησης

6.3: Η $y = αx$, ποσά ανάλογα

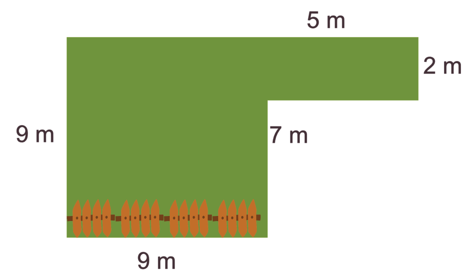
6.4: Η $y = αx + β$

6.5: Η $y = \frac{α}{x}$, ποσά αντιστρόφως ανάλογα

+ Ανακεφαλαίωση / Αυτοαξιολόγηση

6.1 | Συνάρτηση, έννοιες και αναπαραστάσεις

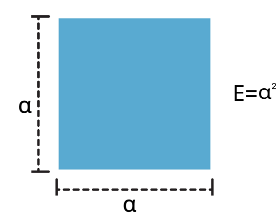
Για να περιφράξουμε τον κήπο μας θα αγοράσουμε φράκτη που κοστίζει 15€/μέτρο. Παρακάτω φαίνεται η κάτοψη του κήπου. Πόσα χρήματα θα χρειαστεί να διαθέσουμε για την περίφραξη; Αν διπλασιάσουμε τα μήκη των πλευρών του κήπου, μπορείς να φανταστείς πώς θα επηρεαστεί η τιμή της περίφραξης;



Συνάρτηση

Πολλές φορές οι τιμές μίας ποσότητας σχετίζονται με τις τιμές μίας άλλης ποσότητας. Πολλά μεγέθη συμμεταβάλλονται και το ένα μέγεθος καθορίζει το άλλο. Η σχέση αυτή μεταξύ ποσοτήτων ή διαφόρων άλλων στοιχείων, μας οδηγεί στην έννοια της συνάρτησης.

- Το εμβαδόν ενός τετραγώνου εξαρτάται από το μήκος της πλευράς του. Το εμβαδόν ενός τετραγώνου (Ε) μπορεί να εκφραστεί ως συνάρτηση της πλευράς του (α) με τη σχέση $E = \alpha^2$.



- Το ποσό που θα πληρώσουμε για την αγορά πορτοκαλιών, καθορίζεται από τα κιλά που θα αγοράσουμε. Έτσι, το κόστος (y) των πορτοκαλιών μπορεί να εκφραστεί ως συνάρτηση του βάρους τους (x) με τη σχέση $y = 0{,}9 \cdot x$.

Γενικά

Συνάρτηση είναι μία σχέση (κανόνας) με την οποία κάθε τιμή μιας μεταβλητής x αντιστοιχίζεται σε μία μόνο τιμή μίας άλλης μεταβλητής y.

- Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η μεταβλητή y εκφράζεται ως συνάρτηση της μεταβλητής x.

Παράδειγμα: Αν ονομάσουμε y την περίμετρο ενός τετραγώνου και x την πλευρά του τετραγώνου, τότε η σχέση:

$$y = 4 \cdot x$$

εκφράζει την περίμετρο y του τετραγώνου ως συνάρτηση της πλευράς του x.

Πίνακας τιμών

Από τη συνάρτηση $y = 4 \cdot x$ βρίσκουμε ότι:

- όταν η πλευρά του τετραγώνου είναι $x = 1$, η περίμετρός του είναι: $y = 4 \cdot 1 = 4$.
- όταν η πλευρά του τετραγώνου είναι $x = 2$, η περίμετρός του είναι: $y = 4 \cdot 2 = 8$.
- όταν η πλευρά του τετραγώνου είναι $x = 3$, η περίμετρός του είναι: $y = 4 \cdot 3 = 12$.

Αυτά τα ζεύγη τιμών συγκεντρώνονται σε έναν πίνακα τιμών:

x (πλευρά τετραγώνου)	1	2	3
y (περίμετρος τετραγώνου)	4	8	12

Με τη βοήθεια του πίνακα τιμών παρατηρούμε την αντιστοιχία μεταξύ των μεταβλητών x και y. Κάθε τιμή της μεταβλητής x αντιστοιχίζεται σε μία τιμή της μεταβλητής y.

Παρατήρηση: Σύμφωνα με τον ορισμό της συνάρτησης, η σχέση $y^2 = x^2$ **δεν** αποτελεί συνάρτηση. Για παράδειγμα αν $x = 2$, τότε προκύπτει ότι $y = -2$ ή $y = 2$, δηλαδή υπάρχει τιμή της μεταβλητής x η οποία **δεν** αντιστοιχεί σε μία μόνο τιμή της μεταβλητής y, αλλά σε περισσότερες.

Αντιλαμβάνομαι με προσομοίωση

Αντιλαμβάνομαι με προσομοίωση

Λυμένα Παραδείγματα

1. Δίνεται η συνάρτηση: $y = 4x + 1$

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης:

x	−1	0	2	…	…
y	…	…	…	17	29

Λύση:

- Για $x = -1$ έχουμε: $y = 4 \cdot (-1) + 1 = -4 + 1 = -3$.
- Για $x = 0$ έχουμε: $y = 4 \cdot 0 + 1 = 0 + 1 = 1$.
- Για $x = 2$ έχουμε: $y = 4 \cdot 2 + 1 = 8 + 1 = 9$.
- Για $y = 17$ έχουμε:

$$17 = 4x + 1$$ ← **Λύνουμε την εξίσωση**

$$17 - 1 = 4x$$

$$16 = 4x$$

$$\frac{16}{4} = \frac{4x}{4}$$

$$x = 4$$

- Για $y = 29$ έχουμε:

$$29 = 4x + 1 \quad \leftarrow \textbf{Λύνουμε την εξίσωση}$$
$$29 - 1 = 4x$$
$$28 = 4x$$
$$\frac{28}{4} = \frac{4x}{4}$$
$$x = 7$$

Ο πίνακας συμπληρωμένος φαίνεται παρακάτω:

x	−1	0	2	4	7
y	−3	1	9	17	29

2. Ένα κατάστημα προσφέρει τα προϊόντα του με έκπτωση 40%.

α) Να γράψετε μία σχέση που εκφράζει την τελική τιμή y (σε ευρώ) των προϊόντων, ως συνάρτηση της αρχικής τους αξίας x (σε ευρώ).

β) i. Ποια είναι η τελική τιμή ενός παντελονιού που κόστιζε αρχικά 40€;
ii. Ποια είναι η αρχική τιμή μιας μπλούζας που τελικά πωλείται 15€;

Λύση:

α) Γνωρίζουμε ότι: (Τελική τιμή) = (Αρχική τιμή) − (Έκπτωση).

Αν y είναι η τελική τιμή και x η αρχική τιμή, τότε:

$$y = x - \frac{40}{100} \cdot x$$
$$y = x - 0{,}4x$$
$$y = 0{,}6x$$

β) i. Αν $x = 40€$, τότε από τη συνάρτηση $y = 0{,}6x$, βρίσκουμε:

$$y = 0{,}6 \cdot 40 = 24€ \text{ τελική τιμή.}$$

ii. Αν $y = 15€$, τότε από τη συνάρτηση $y = 0{,}6x$, βρίσκουμε:

$$15 = 0{,}6 \cdot x$$
$$x = \frac{15}{0{,}6}$$
$$x = 25 \text{ ευρώ αρχική τιμή.}$$

Εξασκούμαι

σε όσα έμαθα

Ασκήσεις / Προβλήματα

1 Επίλεξε σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις τη σωστή απάντηση:

α) Μία εταιρία ποδηλάτων μειώνει τις τιμές όλων των νέων μοντέλων της κατά 50€. Η σχέση που εκφράζει τις νέες τιμές y ως συνάρτηση των παλιών τιμών x είναι:

i. $y = x + 50$ ii. $y = x - 50$ iii. $y = 50 \cdot x$ iv. $y = 1{,}5 \cdot x$

β) Ένα δοχείο όταν είναι άδειο ζυγίζει 1,2 κιλά. Αν x είναι η ποσότητα (σε κιλά) του λαδιού που θα τοποθετηθεί στο δοχείο, τότε η σχέση που εκφράζει το συνολικό βάρος y του δοχείου ως συνάρτηση της ποσότητας x του λαδιού είναι:

i. $y = x + 1{,}2$ ii. $y = x - 1{,}2$ iii. $y = 1{,}2 \cdot x$ iv. $y = 0{,}8 \cdot x$

γ) Ένα ορθογώνιο έχει πλάτος x και μήκος διπλάσιο από το πλάτος του.

1) Η σχέση που εκφράζει το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου ως συνάρτηση του πλάτους του x είναι:

i. $E = 2x$ ii. $E = 2x^2$ iii. $E = 3x$ iv. $E = 4x^2$

2) Η σχέση που εκφράζει την περίμετρο Π του ορθογωνίου ως συνάρτηση του πλάτους του x είναι:

i. $\Pi = x + 2$ ii. $\Pi = 2x + 4$ iii. $\Pi = 3x$ iv. $\Pi = 6x$

2 Συμπλήρωσε τον πίνακα τιμών των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $y = 2x - 3$

x	−1	0	4	7
y				

β) $y = \frac{1}{2}x$

x	−2	0	4	12
y				

γ) $y = x^2 - 3x$

x	−1	0	2	3
y				

3 Συμπλήρωσε τον πίνακα τιμών των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $y = 3x - 1$

x	−2		2		5	
y		−4		8		20

β) $y = \frac{x}{2}$

x	−2		7	
y		1		5

4 Ένα ορθογώνιο έχει μήκος 3cm μεγαλύτερο από το πλάτος του. Αν ονομάσουμε x το πλάτος του ορθογωνίου, να εκφράσεις την περίμετρο Π του ορθογωνίου ως συνάρτηση του πλάτους του x.

5 Τα προϊόντα ενός καταστήματος επιβαρύνονται με φόρο 13%. Να εκφράσεις τις νέες τιμές y με φόρο ως συνάρτηση των τιμών x χωρίς φόρο.

6 Μία εταιρία ηλεκτρισμού χρεώνει κάθε μονάδα ρεύματος 0,08€ και η πάγια μηνιαία χρέωση είναι 7,5€.

α) Να εκφράσεις το μηνιαίο ποσό χρέωσης y, ως συνάρτηση των μονάδων ρεύματος x που καταναλώνονται.

β) Βρες το ποσό που θα πληρώσει μια οικογένεια, αν καταναλώσει σε έναν μήνα 650 μονάδες ρεύματος.

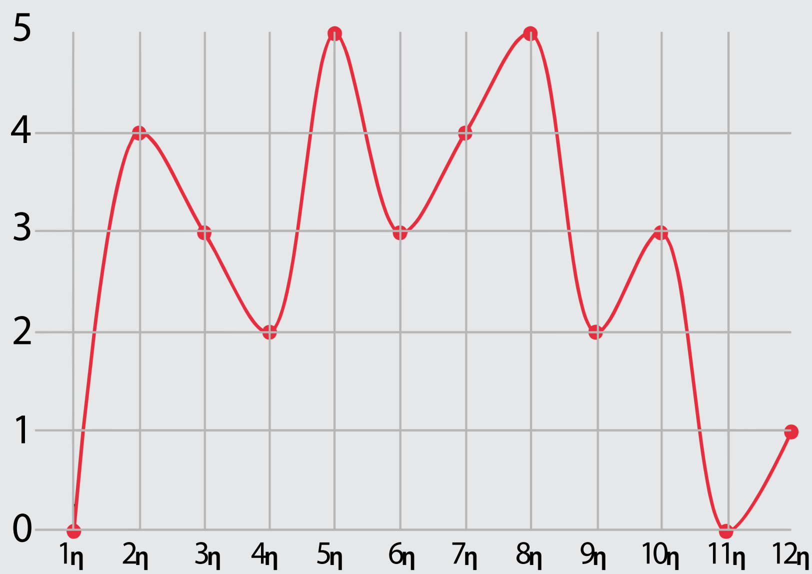
γ) Πόσες μονάδες ρεύματος κατανάλωσε μια οικογένεια, αν τον προηγούμενο μήνα πλήρωσε 72,30€ ;

7 Παρακάτω φαίνεται ο πίνακας τιμών της συνάρτησης $y = 2x + α$.

x	0	2	1	4
y		7		

Βρες την τιμή του αριθμού α και έπειτα συμπλήρωσε τον πίνακα τιμών.

8 Παρακάτω είναι η γραφική παράσταση που περιγράφει τη θερμοκρασία σε μια ορεινή περιοχή της Ελβετίας, σε διάστημα 12 ημερών.



α) Ποια είναι η πιο θερμή μέρα της περιοχής;

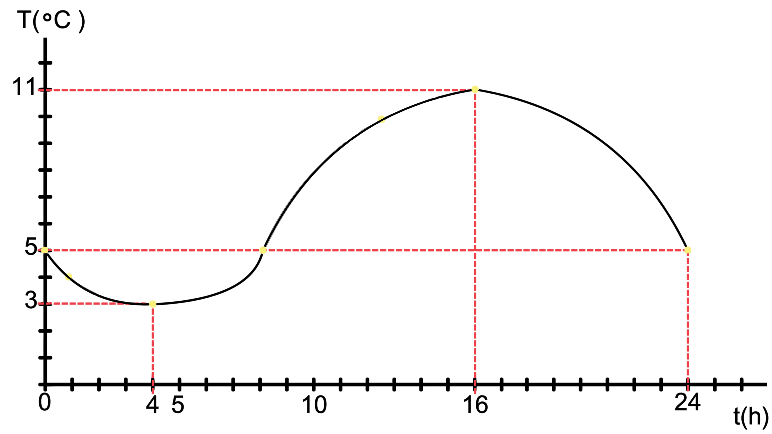
β) Ποια είναι η πιο ψυχρή μέρα;

γ) Ανάμεσα σε ποιες διαδοχικές μέρες παρατηρείς την μεγαλύτερη μεταβολή της θερμοκρασίας;

δ) Η αυτόματη ψύξη ενεργοποιείται στις αποθήκες όταν η θερμοκρασία είναι πάνω από 3°C. Ποιες μέρες ενεργοποιήθηκε η ψύξη;

6.2 | Γραφική παράσταση συνάρτησης

Η παρακάτω γραφική παράσταση δείχνει τη θερμοκρασία Τ (σε βαθμούς Κελσίου) ενός τόπου κατά τη διάρκεια ενός 24ώρου.



α) Ποια είναι η ελάχιστη και ποια η μέγιστη θερμοκρασία; Ποια ώρα του 24ώρου συμβαίνουν;

Ποια σημεία της γραφικής παράστασης δείχνουν την ελάχιστη και τη μέγιστη θερμοκρασία;

β) Ποια είναι η θερμοκρασία στις 2 τη νύχτα, στις 2 το μεσημέρι και στις 11 το βράδυ; Ποια ώρα η θερμοκρασία είναι 6ºC;

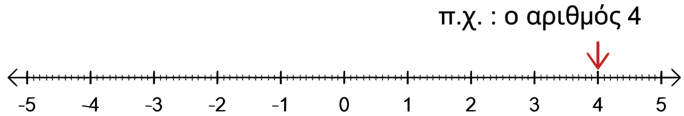
γ) Τι εκφράζει με βάση το πρόβλημα το σημείο (20, 9) της γραφικής παράστασης;

δ) Ποιες άλλες πληροφορίες μπορούμε να αντλήσουμε από αυτή τη γραφική παράσταση;

Σύστημα αξόνων – Συντεταγμένες σημείου

Όπως γνωρίζουμε, μπορούμε να προσδιορίσουμε τη θέση οποιουδήποτε σημείου πάνω σε μία ευθεία με έναν πραγματικό αριθμό.

π.χ. : ο αριθμός 4

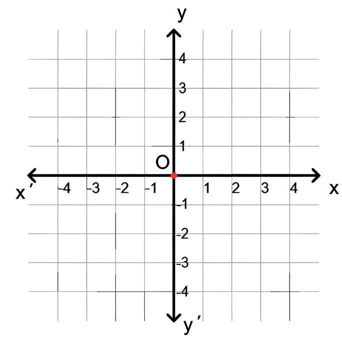


Για να προσδιορίσουμε τη θέση οποιουδήποτε σημείου του επιπέδου, χρειαζόμαστε δύο αριθμούς.

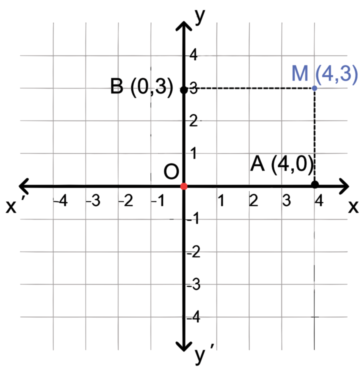
- Σχεδιάζουμε δύο κάθετους άξονες x’x και y’y με κοινή αρχή το σημείο Ο. Οι άξονες αποτελούν ένα **ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων** ή απλώς ένα **σύστημα συντεταγμένων**.

Το σημείο O ονομάζεται **αρχή των αξόνων**.

Αν οι μονάδες μέτρησης των αξόνων έχουν το ίδιο μήκος τότε το σύστημα αξόνων λέγεται **ορθοκανονικό**.



- Αν M είναι ένα σημείο του επιπέδου τότε:



Από το σημείο M φέρνουμε παράλληλη προς τον άξονα y'y η οποία τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο A. Στο σχήμα το σημείο A αντιστοιχεί στον αριθμό 4.

Από το σημείο M φέρνουμε παράλληλη προς τον άξονα x'x που τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο B. Στο σχήμα το σημείο B αντιστοιχεί στον αριθμό 3.

Άρα, στο σχήμα, το σημείο M αντιστοιχεί στο διατεταγμένο ζεύγος αριθμών 4 και 3. Συμβολικά γράφουμε M(4,3).

Με τον τρόπο αυτόν, κάθε σημείο του επιπέδου αντιστοιχεί σε ένα ζεύγος αριθμών (x,y) που ονομάζονται **συντεταγμένες** του σημείου M και αντιστρόφως, κάθε ζεύγος αριθμών αντιστοιχεί σε ένα μόνο σημείο του επιπέδου.

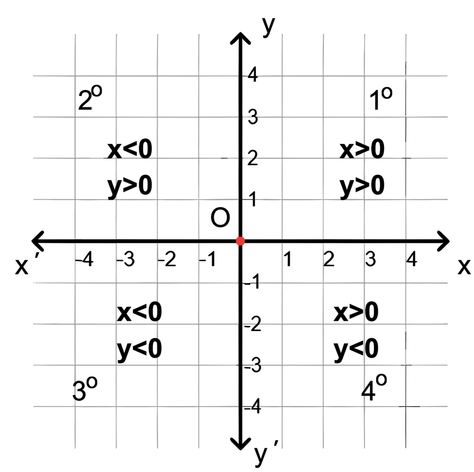
- Ο πρώτος αριθμός x λέγεται **τετμημένη** του σημείου M.
- Ο δεύτερος αριθμός y λέγεται **τεταγμένη** του σημείου M.

Παράδειγμα: Η τετμημένη του σημείου M(4,3) είναι 4 και η τεταγμένη του είναι 3.

Τεταρτημόρια

Ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων χωρίζει το επίπεδο σε 4 μέρη που ονομάζονται τεταρτημόρια.

Στο διπλανό σχήμα σημειώνονται αριθμημένα τα 4 τεταρτημόρια και τα πρόσημα των συντεταγμένων που βρίσκονται σε κάθε τεταρτημόριο.



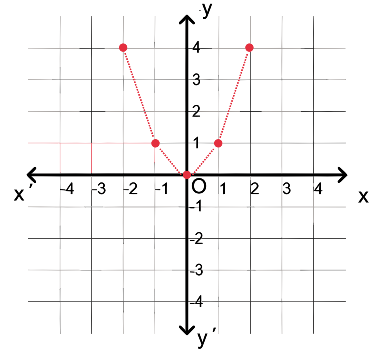
Γραφική παράσταση συνάρτησης

Τα ζεύγη (x,y) των τιμών που προκύπτουν από μία συνάρτηση μπορούν να παρασταθούν σε ένα σύστημα αξόνων. Με τον τρόπο αυτόν προκύπτει η γραφική αναπαράσταση μίας συνάρτησης.

Παράδειγμα: Δίνεται η συνάρτηση $y = x^2$.

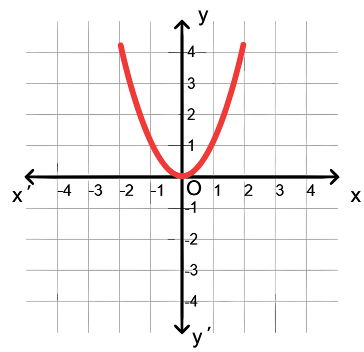
- Κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών:

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4



- Αν τώρα πάρουμε περισσότερες τιμές στον πίνακα, η πολυγωνική γραμμή προσεγγίζει μία καμπύλη, που είναι η γραφική παράσταση της $y = x^2$.

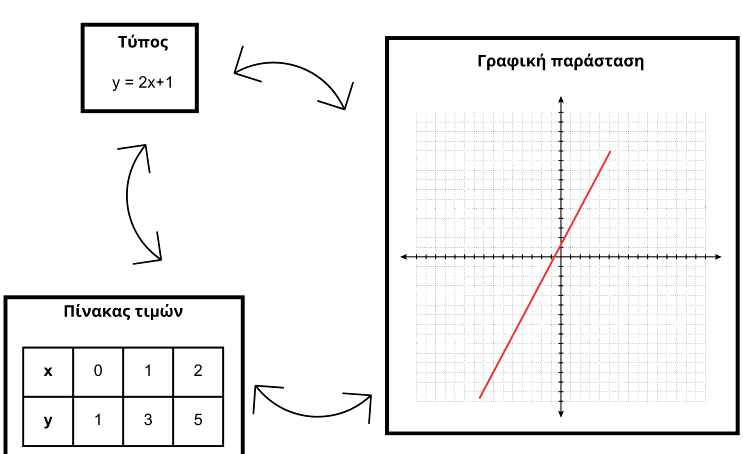
x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25



Γενικά:

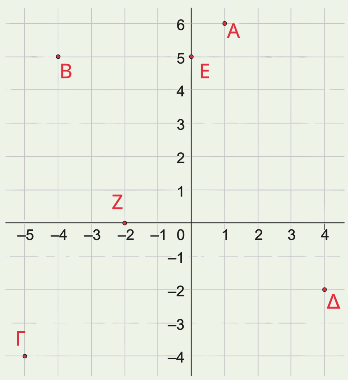
Αν μία μεταβλητή y εκφράζεται ως συνάρτησης μίας μεταβλητής x, τότε ονομάζουμε **γραφική παράσταση** της συνάρτησης, το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου με συντεταγμένες (x, y).

Διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης



Λυμένα Παραδείγματα

1. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ.



Λύση: Α(1,6) , Β(-4,5) , Γ(-5 , -4) , Δ(4,-2) , Ε(0,5) , Ζ(-2,0)

Παρατηρήσεις:

Όλα τα σημεία του άξονα x'x έχουν τεταγμένη 0.

Όλα τα σημεία του άξονα y'y έχουν τετμημένη 0.

2. Δίνεται το σημείο Α(4,3). Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου Α ως προς:

α) τον άξονα x'x.

β) τον άξονα y'y.

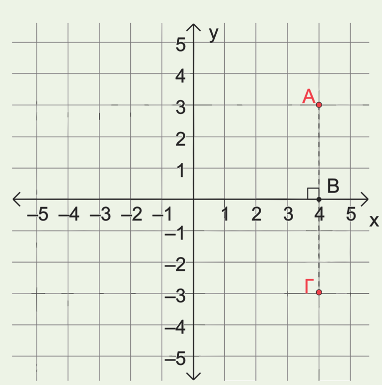
γ) την αρχή των αξόνων.

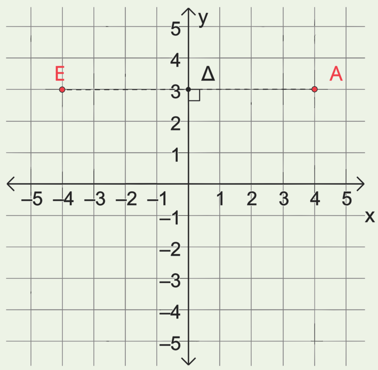
Λύση:

α) Φέρνουμε το κάθετο τμήμα ΑΒ προς τον άξονα x'x.

Προεκτείνουμε το ΑΒ κατά τμήμα ΒΓ=ΑΒ.

Το σημείο Γ είναι το συμμετρικό του Α ως προς τον άξονα x'x και έχει συντεταγμένες (4,-3).





β) Φέρνουμε το κάθετο τμήμα ΑΔ προς τον άξονα y'y.

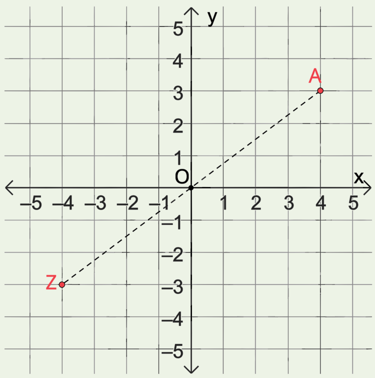
Προεκτείνουμε το ΑΔ κατά τμήμα ΔΕ=ΑΔ.

Το σημείο Ε είναι το συμμετρικό του Α ως προς τον άξονα y'y και έχει συντεταγμένες (-4,3).

γ) Ενώνουμε το Α με την αρχή Ο των αξόνων.

Προεκτείνουμε το ΑΟ κατά τμήμα ΑΟ=ΟΖ.

Το σημείο Ζ είναι το συμμετρικό του Α ως προς την αρχή των αξόνων και έχει συντεταγμένες (-4,-3).

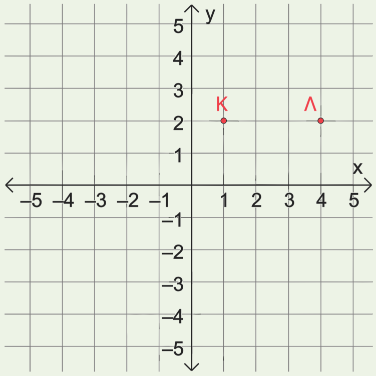


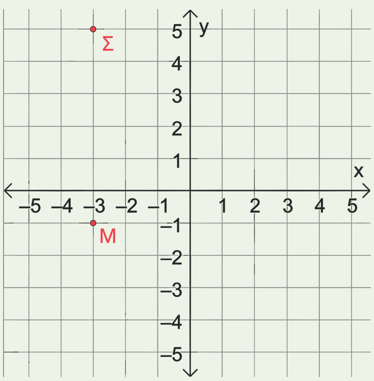
3. Να βρείτε την απόσταση των σημείων:

α) Κ(1,2) και Λ(4,2) β) Μ(-3,-1) και Σ(-3,5) γ) Α(2,1) και Β(6,4)

Λύση:

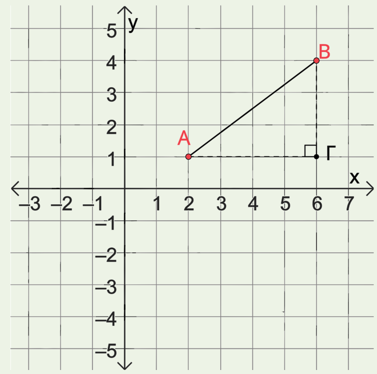
α) Παρατηρούμε ότι τα σημεία Κ(1,2) και Λ(4,2) έχουν την ίδια τεταγμένη 2. Άρα η απόστασή τους ισούται με το μήκος του οριζόντιου τμήματος ΚΛ = 4 − 1 = 3 μονάδες.





β) Παρατηρούμε ότι τα σημεία Μ(-3,-1) και Σ(-3,5) έχουν την ίδια τετμημένη -3. Άρα η απόστασή τους ισούται με το μήκος του κατακόρυφου τμήματος ΜΣ = 5 + 1 = 6 μονάδες.

γ) Για να βρούμε την απόσταση των σημείων Α και Β σχηματίζουμε το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Το σημείο Γ έχει συντεταγμένες (6,1).



Είναι ΑΓ = 6 − 2 = 4 μονάδες

και ΒΓ = 4 − 1 = 3 μονάδες

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα, έχουμε ότι:

$ΑΒ^2 = ΑΓ^2 + ΒΓ^2$

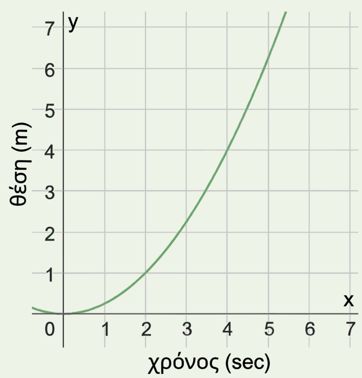
ή $ΑΒ^2 = 4^2 + 3^2$

ή $ΑΒ^2 = 16 + 9$

ή $ΑΒ^2 = 25$

ή $ΑΒ = \sqrt{25} = 5$ μονάδες.

4. Η γραφική παράσταση του διπλανού σχήματος παρουσιάζει τη θέση (σε μέτρα) ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα σε σχέση με το χρόνο (σε δευτερόλεπτα).



α) Με βάση τη γραφική παράσταση να βρείτε:

i. Τη θέση του κινητού τη χρονική στιγμή 2 sec.

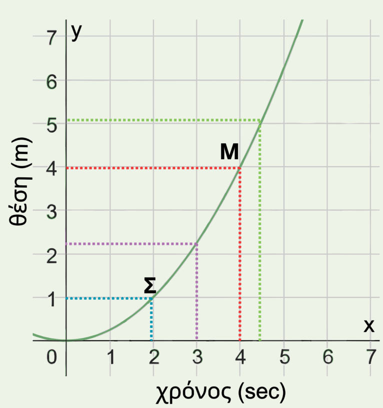
ii. Τη χρονική στιγμή κατά την οποία το κινητό βρίσκεται στη θέση 4 m.

β) Ποια περίπου είναι η θέση του κινητού τη χρονική στιγμή 3 sec ;

γ) Ποια είναι κατά προσέγγιση, η χρονική στιγμή κατά την οποία το κινητό βρίσκεται στη θέση 5 m;

Λύση:

α) i. Από το σημείο με τετμημένη 2 sec φέρνουμε κατακόρυφη ευθεία (παράλληλη στον άξονα Oy) που τέμνει την γραφική παράσταση στο Σ.



Από το σημείο Σ φέρνουμε οριζόντια ευθεία (παράλληλη στον άξονα Οχ) που τέμνει τον άξονα Oy στο σημείο με τεταγμένη 1 m.

Άρα η θέση του κινητού τη χρονική στιγμή 2 sec είναι 1m.

ii. Από το σημείο με τεταγμένη 4 m φέρνουμε οριζόντια ευθεία (παράλληλη στον άξονα Ox) που τέμνει την γραφική παράσταση στο Μ.

Από το σημείο Μ φέρνουμε κατακόρυφη ευθεία (παράλληλη στον άξονα Oy) που τέμνει τον άξονα Ox στο σημείο με τεταγμένη 4 m.

Άρα η χρονική στιγμή κατά την οποία το κινητό βρίσκεται στη θέση 4 m είναι 4 sec.

β) Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι τη χρονική στιγμή 3 sec, η θέση του κινητού είναι περίπου 2,2 m.

γ) Η χρονική στιγμή κατά την οποία το κινητό βρίσκεται στη θέση 5 m είναι περίπου 4,5 sec.

Ασκήσεις / Προβλήματα

1

Χαρακτήρισε σωστές ή λανθασμένες τις προτάσεις που ακολουθούν βάζοντας ένα **x** στην κατάλληλη θέση.

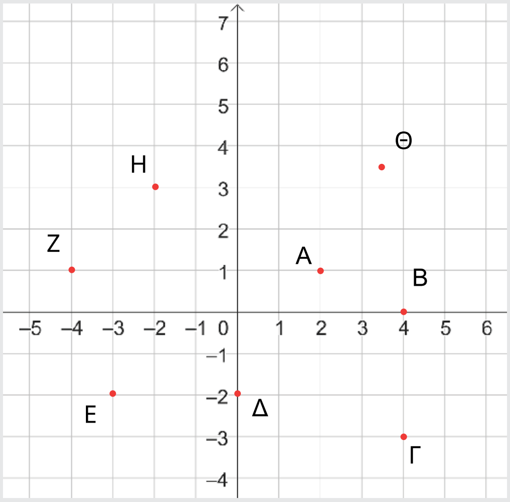
	Σωστό	**Λάθος**
α) Το σημείο Α(0,4) ανήκει στον άξονα x’x.		
β) Το σημείο Β(3,0) ανήκει στον άξονα x’x.		
γ) Το σημείο Γ(2,4) έχει τετμημένη 2.		
δ) Το σημείο Δ(-1,-7) βρίσκεται στο 4ο τεταρτημόριο.		
ε) Το σημείο Ε(3,1) ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης y = 3x.		

2

Σημείωσε τα σημεία Α(1,1), Β(2,-3), Γ(6, -1,5), Δ(-2,5 ,-4), Ε(0,3), Ζ(-2,0), στο ίδιο σύστημα ορθογωνίων αξόνων.

3

Βρες τις συντεταγμένες των σημείων που δίνονται στο παρακάτω σχήμα.



4

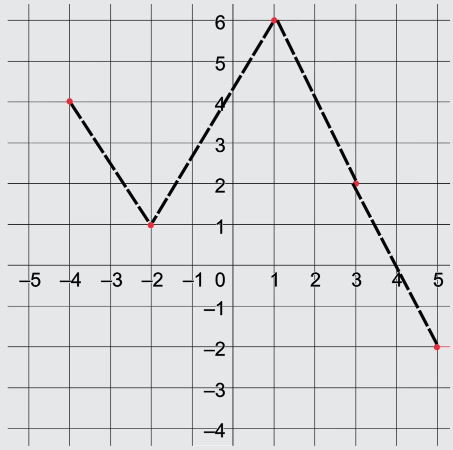
Δίνεται η συνάρτηση y = −2x + 1.

α) Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	−2	−1	0	1	2	3
y						

β) Σημείωσε τα σημεία του πίνακα σε ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων. Ένωσε με ευθύγραμμα τμήματα τα σημεία αυτά. Τι παρατηρείς;

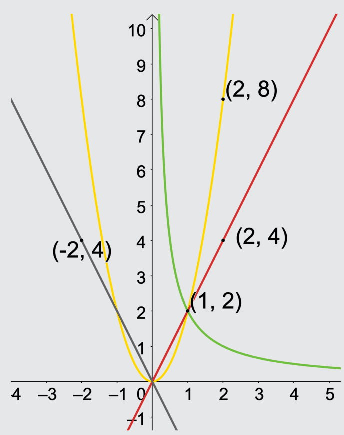
5 Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης. Συμπλήρωσε τον πίνακα:



x	-4	-2	3			
y				-2	0	6

6 Να αντιστοιχίσετε κάθε συνάρτηση με τη γραφική της παράσταση.

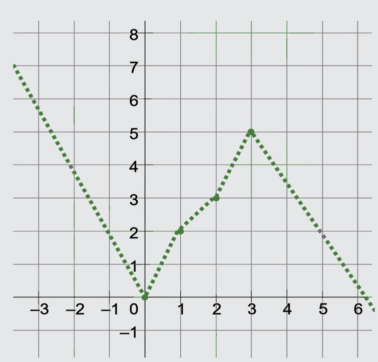
α) $y = 2x^2$ β) $y = 2x$ γ) $y = \frac{2}{x}$ δ) $y = -2x$



7 Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης.

α) Εξέτασε ποια από τα σημεία Α(1,2), Β(5,3), Γ(-2,2), Δ(3,4) ανήκουν στην γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.

β) Βρες τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση τέμνει τους άξονες x'x και y'y.



8

Δίνεται το σημείο Α(3, 2). Βρες τις συντεταγμένες του συμμετρικού του σημείου Α, ως προς:

α) τον άξονα x'x,

β) τον άξονα y'y,

γ) την αρχή Ο των αξόνων.

9

Δίνεται το σημείο Α(−3, 4). Βρες την απόσταση του σημείου Α, από:

α) τον άξονα x'x,

β) τον άξονα y'y,

γ) την αρχή Ο των αξόνων.

10

Βρες την απόσταση των σημείων:

α) Α(1, 2) και Β(1, 6)

β) Α(−5, 3) και Β(2, 3)

γ) Α(1, 2) και Β(9, 8)

δ) Α(−2, 3) και Β(4, 1)

11

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται το ύψος y (σε μέτρα) ενός αερόστατου, ως συνάρτηση του χρόνου x (σε λεπτά).

x (χρόνος σε λεπτά)	0	1	2	3	4
y (ύψος σε μέτρα)	42	36	30	24	18

α) Κατασκεύασε σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.

β) Από τη γραφική παράσταση βρες:

i. Το ύψος του αερόστατου τη χρονική στιγμή 2,5 λεπτά.

ii. Τη χρονική στιγμή κατά την οποία το αερόστατο βρίσκεται σε ύψος 20 μέτρα.

γ) Εκτίμησε τη χρονική στιγμή κατά την οποία το αερόστατο θα φτάσει στο έδαφος.

Εξασκούμαι

σε όσα έμαθα

6.3 | Η συνάρτηση y = αx, ποσά ανάλογα.

Ένα κιλό παγωτού κοστίζει 16€. Βρες τη σχέση που συνδέει το κόστος αγοράς παγωτού, με το αντίστοιχο βάρος του.

Πόσο κοστίζουν τα 2kg παγωτού; Πόσα κιλά παγωτού αντιστοιχούν σε κόστος 8€;

Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα:

Ποσότητα Παγωτού	2kg	1,5kg			100g
Κόστος			8€	4€	

Ανάλογα ποσά

Γνωρίζουμε ότι:

Θυμόμαστε

Δύο ποσά λέγονται **ανάλογα**, όταν πολλαπλασιάζοντας τις τιμές του ενός ποσού με έναν αριθμό, τότε και οι αντίστοιχες τιμές του άλλου πολλαπλασιάζονται με τον ίδιο αριθμό.

Παράδειγμα: Τα παρακάτω ποσά x και y είναι ανάλογα.

x 2, x 3, x 4, x 5

x	2	4	6	8	10
y	8	16	24	32	40

x 2, x 3, x 4, x 5

Αντιλαμβάνομαι με προσομοίωση

Λόγος $\frac{y}{x}$	$\frac{8}{2} = 4$	$\frac{16}{4} = 4$	$\frac{24}{6} = 4$	$\frac{32}{8} = 4$	$\frac{40}{10} = 4$

- Παρατηρούμε ότι ο λόγος $\frac{y}{x}$ είναι πάντοτε σταθερός και ίσος με 4.

  $$\text{Άρα } \frac{y}{x} = 4 \text{ ή } y = 4x.$$

  Η σχέση αυτή εκφράζει το y ως συνάρτηση του x.

Γενικά

Όταν δύο ποσά x και y είναι **ανάλογα**, ο λόγος $\frac{y}{x}$, με $x \neq 0$, είναι πάντοτε **σταθερός**. Τον λόγο αυτόν τον συμβολίζουμε με **α**.

$$\text{Άρα } \frac{y}{x} = α \text{ ή } y = αx.$$

- Η σχέση αυτή εκφράζει το y ως **συνάρτηση** του x.
- Το α λέγεται σταθερά (ή συντελεστής) της αναλογίας.

Σχόλιο: Στις τιμές των μεταβλητών x και y της συνάρτησης $y = αx$, θα χρησιμοποιήσουμε και αρνητικές τιμές.

Γραφική παράσταση της συνάρτησης y = αx.

Δίνεται η συνάρτηση $y = 2x$.

α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών. Τι παρατηρείτε;

x	−2	−1	0	1	2	3
y						

β) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση αυτή. Τι παρατηρείτε;

Λύση:

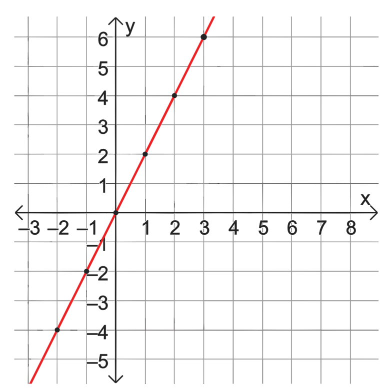
α)

x	−2	−1	0	1	2	3
y	−4	−2	0	2	4	6

Παρατηρούμε ότι ο λόγος $\frac{y}{x}$ $(x \neq 0)$ είναι πάντοτε σταθερός και ίσος με 2.

Αυτό σημαίνει ότι καθώς το x αυξάνεται κατά 1, το y αυξάνεται σταθερά κατά 2.

β) Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 2x$ είναι μία ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων Ο(0,0).



Γενικά:

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = αx$ είναι μία **ευθεία** που διέρχεται από την **αρχή Ο των αξόνων**.

- Στην ευθεία $y = αx$, ο λόγος $\frac{y}{x}$, με $x \neq 0$ είναι πάντοτε **σταθερός** και ίσος με α.

$$α = \frac{y}{x},\ x \neq 0.$$

- Το α ονομάζεται **κλίση** της ευθείας $y = αx$.

Παραδείγματα: Η κλίση της ευθείας $y = -2x$ είναι −2.

Η κλίση της ευθείας $y = x$ είναι 1.

Σχόλιο: Ο άξονας x΄x είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων Ο και έχει εξίσωση $y = 0x$ ή $y = 0$.

Λυμένα Παραδείγματα

1. Αν γνωρίζετε ότι τα ποσά x και y είναι ανάλογα:

α) να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών:

x	1	2	4	6
y	3			

β) να βρείτε την σταθερά α της αναλογίας και εκφράσετε το y ως συνάρτηση του x.

Λύση:

α) Τα ποσά x και y είναι ανάλογα. Συμπληρώνουμε τον πίνακα όπως φαίνεται παρακάτω:

x 6
x 4
x 2

x	1	2	4	6
y	3	6	12	18

x 2
x 4
x 6

Εξασκούμαι
σε όσα έμαθα

β) Η σταθερά αναλογίας είναι ίση με $\alpha = \frac{y}{x} = \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{12}{4} = \frac{18}{6} = 3$.

Είναι $\frac{y}{x} = 3$ ή $y = 3x$. Η σχέση αυτή εκφράζει το y ως συνάρτηση του x.

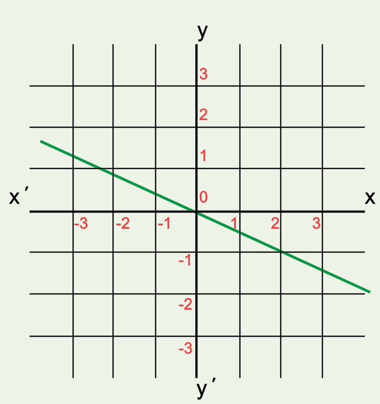
2. Να σχεδιάσετε σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων την ευθεία $y = -\frac{1}{2}x$.

Λύση: Γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -\frac{1}{2}x$ είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων O(0,0). Επομένως, για να σχεδιάσουμε την ευθεία αρκεί να βρούμε ένα ακόμη σημείο της.

Για παράδειγμα, για $x = 2$, έχουμε: $y = -\frac{1}{2} \cdot 2 = -1$.

x	0	2
y	0	−1

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



3. Να παραστήσετε γραφικά, στο ίδιο σύστημα αξόνων, τις συναρτήσεις:

$$y = x \text{ και } y = -x.$$

Λύση:

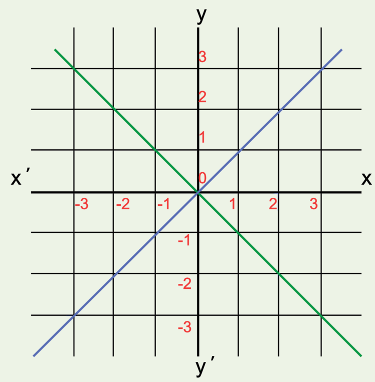
Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = x$ και $y = -x$ είναι ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων O(0,0). Βρίσκουμε ένα δεύτερο σημείο των ευθειών και τις σχεδιάζουμε στο ίδιο σύστημα αξόνων:

- $y = x$
  Αν $x = 1$, τότε: $y = 1$.

x	0	1
y	0	1

- $y = -x$.
  Αν $x = 1$, τότε: $y = -1$.

x	0	1
y	0	−1



Παρατήρηση:

Η ευθεία με εξίσωση $y = x$ είναι **διχοτόμος** της γωνίας $x\hat{O}y$ και η ευθεία με εξίσωση $y = -x$ είναι **διχοτόμος** της γωνίας $x'\hat{O}y$.

4. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και το σημείο $A(-6, 12)$

Λύση:

Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και το σημείο $A(-6, 12)$ είναι της μορφής $y = αx$ με κλίση $α = \frac{y}{x}$.

Το σημείο A έχει συντεταγμένες: $x = -6$ και $y = 12$, άρα η κλίση της ευθείας είναι $α = \frac{y}{x} = \frac{12}{-6} = -2$

Επομένως, η εξίσωση της ευθείας είναι η $y = -2x$.

5. Σε ένα κατάστημα με ηλεκτρονικά είδη γίνονται εκπτώσεις 40% σε όλα τα προϊόντα. Πόση έκπτωση θα γίνει σε ένα κινητό αξίας 250€; Πόσα χρήματα θα πληρώσουμε τελικά;

Λύση:

Έκπτωση 40% σημαίνει ότι σε ένα προϊόν αξίας 100€ θα γίνει έκπτωση 40€.

Άρα η έκπτωση αντιστοιχεί στο $\frac{40}{100}$ της τιμής κάθε προϊόντος.

Δηλαδή, για την έκπτωση y κάθε τιμής x ενός προϊόντος θα έχουμε $y = \frac{40}{100}x$, δηλαδή τα ποσά είναι ανάλογα.

Για το κινητό των 250€ θα έχουμε: $y = \frac{40}{100} \cdot 250 = \frac{10000}{100} = 100$€.

Οπότε θα έχουμε έκπτωση 100€ και θα πληρώσουμε τελικά 250€-100€=150€.

Ασκήσεις / Προβλήματα

1 Αν τα ποσά x και y είναι ανάλογα:

α) συμπλήρωσε τον πίνακα.

x	2	4	6	
y	10			40

β) γράψε τη σχέση που εκφράζει το y ως συνάρτηση του x: ………………………………..

2 Σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις, τα ποσά x και y είναι ανάλογα;

α)

x	1	3	9
y	2	6	18

β)

x	2	3	4
y	1	2	3

γ)

x	5	6	9
y	7,5	9	13,5

3 Βρες την κλίση των παρακάτω ευθειών:

α) $y = -5x$, κλίση: ………

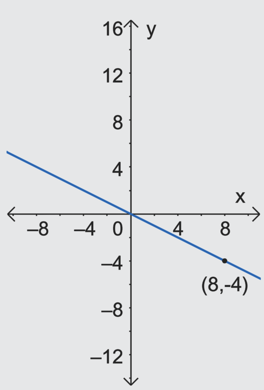
β) $y = \frac{1}{2}x$, κλίση: ………

γ) $y = x$, κλίση: ………

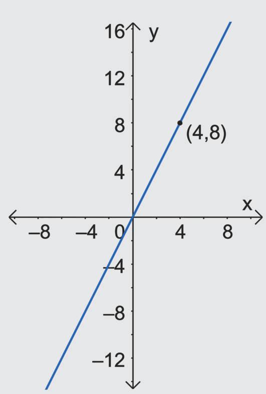
δ) $y = -x$, κλίση: ………

4 Αντιστοίχισε κάθε συνάρτηση με τη γραφική της παράσταση.

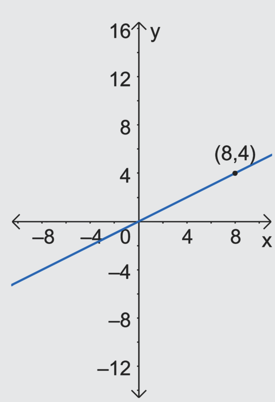
α) $y = 2x$ β) $y = -2x$ γ) $y = \frac{1}{2}x$ δ) $y = -\frac{1}{2}x$



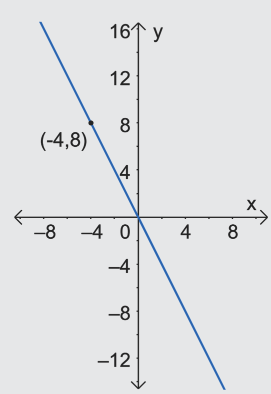
i



ii



iii



iv

5 Σχεδίασε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$y = x\,,\ y = 2x \text{ και } y = 3x.$$

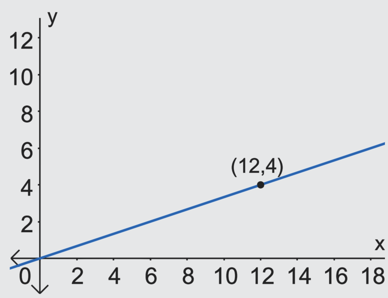
6 Σχεδίασε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$y = 5x \text{ και } y = -5x$$

7 Ποια από τα παρακάτω σημεία ανήκουν στην ευθεία $y = -3x$; Επίλεξε τις σωστές απαντήσεις.

α) Α $(-1, 3)$ β) Β $(1, -3)$ γ) Γ $(2, 6)$ δ) Ο $(0, 0)$

8 Βρες την εξίσωση της ευθείας (ε) του παρακάτω σχήματος.



Εξασκούμαι
σε όσα έμαθα

9 α) Βρες την εξίσωση της ευθείας $ε_1$, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει κλίση 4.

β) Βρες την εξίσωση της ευθείας $ε_2$, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο $Α(4, -6)$.

γ) Βρες την εξίσωση της ευθείας $ε_3$, η οποία διέρχεται από τα σημεία $Ο(0, 0)$ και $Β(-2, -10)$.

10 Υπάρχει ευθεία (ε) η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, και από τα σημεία Α (2,4) και Β (-3,9); Αν όχι, βρες τις εξισώσεις δύο διαφορετικών ευθειών $ε_1$, $ε_2$ που διέρχονται από την αρχή των αξόνων και η μία διέρχεται από το σημείο Α ενώ η άλλη από το σημείο Β.

11 Ένα βιβλιοπωλείο κάνει έκπτωση 40% σε όλα τα βιβλία του.

α) Να εκφράσεις τις νέες τιμές y των βιβλίων ως συνάρτηση της αρχικής τους αξίας x.

β) Να παραστήσεις γραφικά τη συνάρτηση αυτή.

γ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης βρες:
i. την τελική τιμή ενός βιβλίου που κόστιζε αρχικά 12€.
ii. την αρχική αξία ενός βιβλίου που τελικά πωλείται 12€.

Επιβεβαίωσε αλγεβρικά τις απαντήσεις σου στο προηγούμενο ερώτημα κάνοντας τις αντίστοιχες πράξεις στον τύπο της συνάρτησης του α) ερωτήματος.

12 Στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, η ταχύτητα είναι πάντα σταθερή και δίνεται από τον τύπο $u = \frac{x}{t}$ όπου υ η ταχύτητα (σε $\frac{m}{s}$), x η μετατόπιση (σε m) και t ο χρόνος (σε sec).

α) Αν ένα κινητό σε 10 λεπτά διανύει 200 μέτρα, ποια είναι η ταχύτητά του;

β) Σχεδίασε τη γραφική παράσταση μετατόπισης- χρόνου.

γ) Πόσο χρόνο χρειάζεται για να διανύσει 2,7 Km;

δ) Πόσα μέτρα θα έχει διανύσει σε μισή ώρα;

6.4 | Η συνάρτηση $y = αx + β$.

Εξερευνώ

Για τον λογαριασμό στο κινητό τηλέφωνο, πληρώνουμε πάγιο κόστος κάθε μήνα 2,5€ και επιπλέον 1,5€ για κάθε GB δεδομένων. Πώς μπορούμε να υπολογίσουμε το κόστος του λογαριασμού κάθε μήνα σε σχέση με τα GB που καταναλώνουμε;

Όπως είδαμε στη προηγούμενη παράγραφο, η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = αx$ είναι μία ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, δηλαδή από το σημείο Ο(0,0). Στη παράγραφο αυτή, θα μελετήσουμε τη συνάρτηση $y = αx + β$**.**

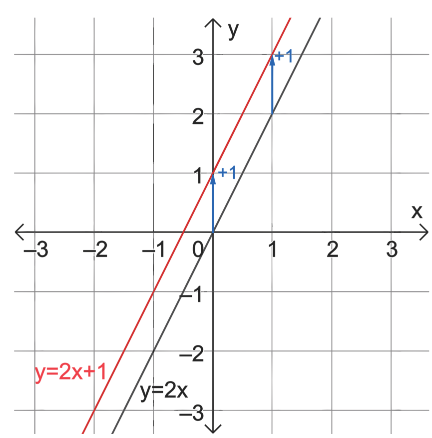
Έστω οι συναρτήσεις $y = 2x$ και $y = 2x + 1$.

Κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών των συναρτήσεων:

x	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2x$	-4	-2	0	2	4	6
$y = 2x + 1$	-3	-1	1	3	5	7

Παρατηρούμε ότι οι τιμές της συνάρτησης $y = 2x + 1$ **είναι μεγαλύτερες κατά 1**, από τις τιμές της συνάρτησης $y = 2x$.

Τοποθετούμε τα σημεία αυτά σε ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων.



Παρατηρούμε ότι:

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 2x + 1$ είναι μία ευθεία παράλληλη της ευθείας $y = 2x$, μετατοπισμένη κατά 1 μονάδα προς τα πάνω.

- Η γραφική παράσταση της ευθείας $\mathbf{y = 2x}$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων $(0, 0)$, ενώ
- η γραφική παράσταση της ευθείας $\mathbf{y = 2x + 1}$ διέρχεται από το σημείο $(0, 1)$ του άξονα y'y

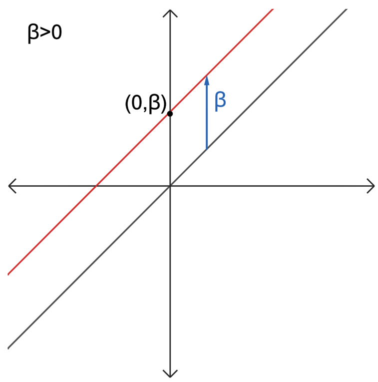
Γενικά

Η γραφική παράσταση της $y = αx + β$, με $β \neq 0$, είναι μια ευθεία **παράλληλη** της ευθείας με εξίσωση $y = αx$, που διέρχεται από το **σημείο** $(0, β)$ του άξονα y'y.

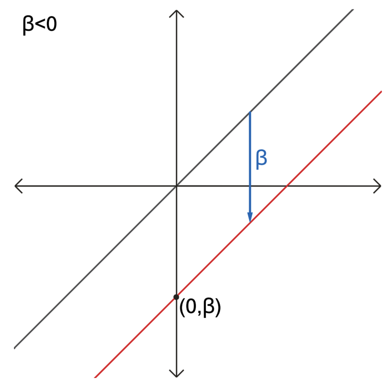
- Το **α,** όπως γνωρίζουμε, λέγεται **κλίση** της ευθείας $y = αx$, επίσης λέγεται κλίση και της ευθείας $y = αx + β$.
- Το **β** είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας $y = αx + β$ με τον **άξονα y'y**, δηλαδή του σημείου $(0, β)$.

Σχόλιο: Η γραφική παράταση της συνάρτησης $y = αx + β$ προκύπτει από μία **κατακόρυφη μετατόπιση** της $y = αx$ κατά **β μονάδες**:

προς τα **πάνω** αν $β > 0$.



προς τα **κάτω** αν $β < 0$.



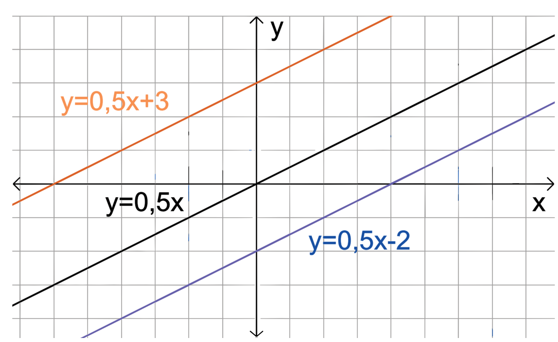
Αντιλαμβάνομαι με προσομοίωση

Παράδειγμα:

Παρακάτω βλέπουμε τρεις παράλληλες ευθείες:

$y = \frac{1}{2}x + 3$ $\qquad$ $y = \frac{1}{2}x$ $\qquad$ $y = \frac{1}{2}x - 2$

Η πορτοκαλί ευθεία είναι μετατοπισμένη κατά 3 μονάδες προς τα πάνω και η μπλε ευθεία είναι μετατοπισμένη κατά 2 μονάδες προς τα κάτω σε σχέση με την ευθεία $y = \frac{1}{2}x$.



Λυμένα Παραδείγματα

1. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -3x + 2$.

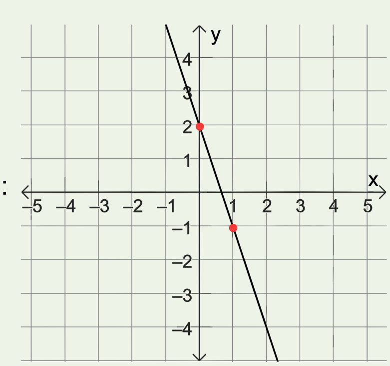
Λύση:

Γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -3x + 2$ είναι ευθεία που διέρχεται από το σημείο $(0, 2)$ του άξονα y'y. Επομένως, για να σχεδιάσουμε την ευθεία αρκεί να βρούμε ένα ακόμη σημείο της.

Για παράδειγμα, για $x = 1$, βρίσκουμε: $y = -3 \cdot 1 + 2 = -1$.

x	0	1
y	2	−1

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης φαίνεται στο διπλανό σχήμα:



2. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 3x + 6$ τέμνει τους άξονες x'x και y'y. Στη συνέχεια να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.

Λύση:

- Γνωρίζουμε ότι η ευθεία $y = 3x + 6$ τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο $(0, 6)$.
- Ο άξονας x'x έχει εξίσωση $y = 0$, επομένως για να βρούμε το σημείο τομής της ευθείας $y = 3x + 6$ με τον άξονα x'x, θέτουμε $y = 0$ και βρίσκουμε:

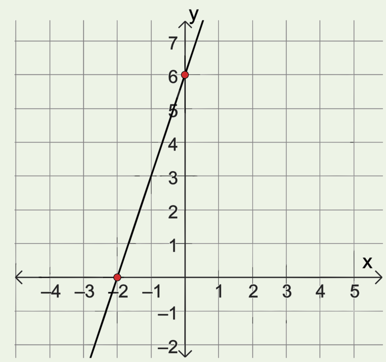
$$0 = 3x + 6$$

$$\text{ή} \quad -3x = 6$$

$$\text{ή} \quad \frac{-3x}{-3} = \frac{6}{-3}$$

$$\text{ή} \quad x = -2.$$

Άρα η ευθεία $y = 3x + 6$ τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο $(-2, 0)$.



3. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία είναι παράλληλη της $y = 6x$ και τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο με τεταγμένη -4.

Λύση:

Η ζητούμενη ευθεία έχει εξίσωση της μορφής $y = αx + β$.

- Είναι παράλληλη της $y = 6x$, άρα έχει κλίση $α = 6$.
- Τέμνει τον y'y στο σημείο με τεταγμένη -4, άρα είναι $β = -4$.

Επομένως η εξίσωση της ευθείας είναι η $y = 6x - 4$.

Εξασκούμαι

σε όσα έμαθα

4. Ένα κινητό εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση με σταθερή ταχύτητα. Η θέση θ (σε m) του κινητού σε συνάρτηση με το χρόνο t (σε sec), φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

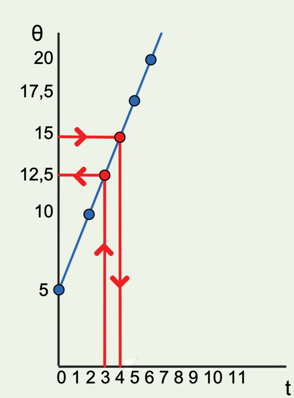
t (sec)	0	2	5	6
θ (m)	5	10	17,5	20

Να κατασκευάσετε στο σύστημα αξόνων τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.

α) Σε ποια θέση βρίσκεται το κινητό τη χρονική στιγμή $t = 3$sec;

β) Ποια χρονική στιγμή το κινητό βρίσκεται στη θέση $θ = 15$m;

Λύση:



Από τη γραφική παράσταση βρίσκουμε:

α) Για $t = 3$sec είναι $θ = 12,5$m.

β) Είναι $θ = 15$m όταν $t = 4$sec.

Ασκήσεις / Προβλήματα

1 Συμπλήρωσε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = αx + β$, με $β \neq 0$, είναι μια …………….. που διέρχεται από το σημείο …………….. του άξονα y'y και είναι ………………… της ευθείας με εξίσωση $y = αx$.

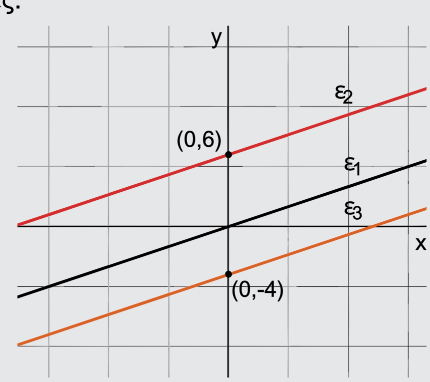
β) Η γραφική παράταση της συνάρτησης $y = αx + β$, με $β \neq 0$, προκύπτει από μία **κατακόρυφη μετατόπιση** της $y = αx$ κατά β μονάδες:

- προς τα ……………… αν $β > 0$.
- προς τα ……………… αν $β < 0$.

2 Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες $ε_1, ε_2$ και $ε_3$ είναι παράλληλες.

Αν η ευθεία $ε_1$ έχει εξίσωση $y = \frac{1}{3}x$ τότε:

- η ευθεία $ε_2$ έχει εξίσωση ……………… και
- η ευθεία $ε_3$ έχει εξίσωση ………………



3 Ποια από τα παρακάτω σημεία ανήκουν στην ευθεία $y = 4x - 3$; Επίλεξε τις σωστές απαντήσεις.

α) $Α(4, -3)$ β) $Β(0, -3)$ γ) $Γ(2, 5)$ δ) $Ο(0, 0)$

4 Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσεις γραφικά τις ευθείες με εξισώσεις:

$$y = -x, \qquad y = -x + 4, \qquad y = -x - 2.$$

Αντιλαμβάνομαι

με προσομοίωση

5 Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσεις γραφικά τις ευθείες με εξισώσεις:

$$y = \frac{1}{2}x \quad \text{και} \quad y = \frac{1}{2}x + 3.$$

6

α) Βρες την εξίσωση της ευθείας $ε_1$ η οποία έχει κλίση 6 και τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο με τεταγμένη -9.

β) Βρες την εξίσωση της ευθείας $ε_2$ η οποία είναι παράλληλη της $y = -2x$ και διέρχεται από το σημείο $(0, 5)$.

7

Βρες τα σημεία τομής των ευθειών $y = -3x + 3$ και $y = 2x + 4$ με τους άξονες x'x και y'y.

Στη συνέχεια να τις σχεδιάσεις στο ίδιο σύστημα αξόνων.

8

Μια πιτσαρία χρεώνει 4€ κάθε απλή πίτσα και 0,80€ για κάθε επιπλέον υλικό που προστίθεται στην πίτσα.

α) Να εκφράσεις το συνολικό κόστος y της πίτσας ως συνάρτηση των επιπλέον υλικών x που θα προστεθούν σε αυτήν.

β) Σχεδίασε σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.

γ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης βρες:

i. Πόσο κοστίζει μία πίτσα με 6 επιπλέον υλικά;

ii. Πόσα επιπλέον υλικά έχει μία πίτσα κόστους 10,4 €;

Επιβεβαίωσε αλγεβρικά τις απαντήσεις σου στο προηγούμενο ερώτημα κάνοντας τις αντίστοιχες πράξεις στον τύπο της συνάρτησης του α) ερωτήματος.

9

Ένα κερί ύψους 60cm καίγεται και το ύψος του μειώνεται κατά 4cm κάθε ώρα.

α) Να εκφράσεις το ύψος y του κεριού σε cm, ως συνάρτηση του χρόνου x σε ώρες.

β) Σχεδίασε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής, σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων.

γ) Ποιο είναι το ύψος του κεριού μετά από 2,5 ώρες;

δ) Βρες:

i. μετά από πόσες ώρες το κερί θα έχει το μισό ύψος από το αρχικό.

ii. μετά από πόσες ώρες θα λιώσει το κερί.

Εξασκούμαι σε όσα έμαθα

Αντιλαμβάνομαι με προσομοίωση

6.5 | Η συνάρτηση $y = \frac{\alpha}{x}$, ποσά αντιστρόφως ανάλογα

Η απόσταση δύο πόλεων είναι 200 χιλιόμετρα. Με t παραστάνουμε το χρόνο (σε ώρες) που χρειάζεται ένα αυτοκίνητο για να διανύσει την απόσταση μεταξύ των δύο πόλεων.

α) Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα.

Χρόνος	1	2	4	5	$\frac{1}{2}$
Απόσταση	200	200	200	200	200
Ταχύτητα					

β) Παρατηρώ ότι όσο αυξάνεται ο χρόνος που χρειάζεται για να καλυφθεί η από-σταση ανάμεσα στις δύο πόλεις, τόσο ………….. η ταχύτητα.

γ) Γράψε την ταχύτητα υ ως συνάρτηση του χρόνου t. Χρησιμοποίησε τις τιμές του πίνακα για να σχεδιάσεις μια «πρόχειρη» γραφική παράσταση της συνάρτησης.

Αντιστρόφως ανάλογα ποσά

Γνωρίζουμε ότι:

Θυμόμαστε

Δύο ποσά λέγονται **αντιστρόφως ανάλογα**, όταν πολλαπλασιάζοντας τις τιμές του ενός ποσού με έναν αριθμό, τότε οι αντίστοιχες τιμές του άλλου διαιρούνται με τον ίδιο αριθμό.

Παράδειγμα: Τα παρακάτω ποσά x και y είναι αντιστρόφως ανάλογα.

×2 ×3 ×4 ×5

x	2	4	6	8	10
y	60	30	20	15	12

:2 :3 :4 :5

Γινόμενο $x \cdot y$	$2 \cdot 60 = 120$	$4 \cdot 30 = 120$	$6 \cdot 20 = 120$	$8 \cdot 15 = 120$	$10 \cdot 12 = 120$

Παρατηρούμε ότι το γινόμενο $x \cdot y$ είναι πάντοτε σταθερό και ίσο με 120.

$$\text{Άρα } x \cdot y = 120 \text{ ή } y = \frac{120}{x}.$$

Η σχέση αυτή εκφράζει το y ως συνάρτηση του x.

Γενικά

Όταν δύο ποσά x και y είναι **αντιστρόφως ανάλογα**, το γινόμενο $x \cdot y$ είναι πάντοτε **σταθερό**. Το γινόμενο αυτό το συμβολίζουμε με **α**.

$$\text{Αν } \alpha \neq 0 \text{ τότε: } x \cdot y = \alpha \text{ ή } y = \frac{\alpha}{x}.$$

- Η σχέση αυτή εκφράζει το y ως **συνάρτηση** του x.

Σχόλιο: Στις τιμές των μεταβλητών x και y της συνάρτησης $y = \frac{\alpha}{x}$, θα χρησιμοποιήσουμε και αρνητικές τιμές.

Γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{\alpha}{x}$.

Δίνεται η συνάρτηση $y = \frac{6}{x}$.

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών:

x	−3	−2	−1	1	2	3
y						

Τι παρατηρείτε;

β) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση αυτή.

Τι παρατηρείτε;

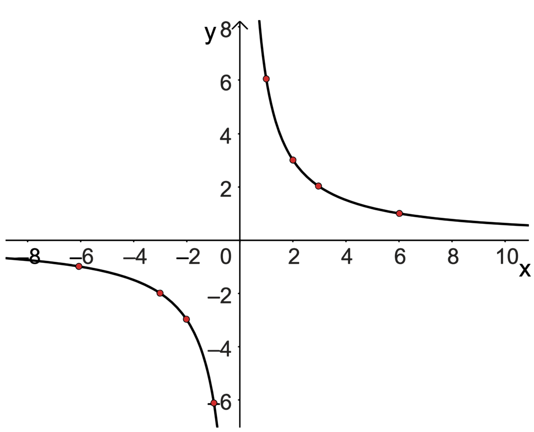
Λύση:

α)

x	−3	−2	−1	1	2	3
y	−2	−3	−6	6	3	2

Παρατηρούμε ότι το γινόμενο $x \cdot y$ είναι πάντοτε σταθερό και ίσο με 6.

β)



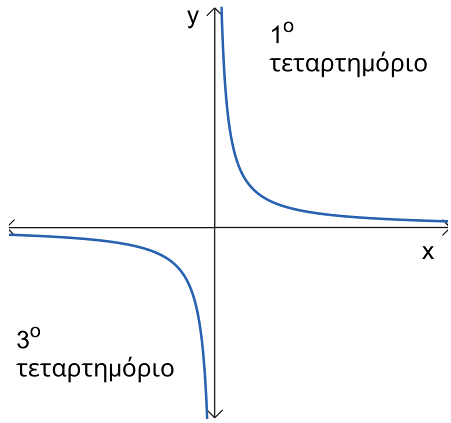
Αντιλαμβάνομαι
με προσομοίωση

Παρατηρούμε ότι τα σημεία αυτά σχηματίζουν δύο καμπύλες γραμμές, μία στο 1ο και μία στο 3ο τεταρτημόριο.

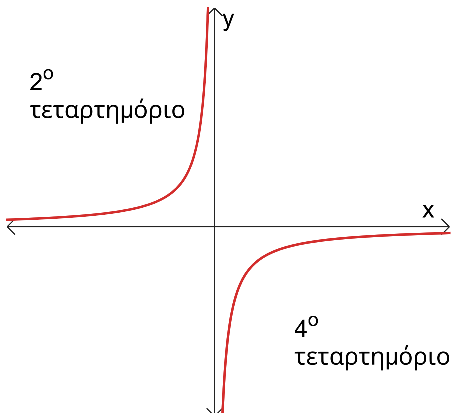
Γενικά:

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{\alpha}{x}$, με $\alpha \neq 0$, λέγεται **υπερβολή** και αποτελείται από δύο κλάδους.

- Αν $\alpha > 0$ τότε οι κλάδοι βρίσκονται στο **1ο** και στο **3ο** τεταρτημόριο.



- Αν $\alpha < 0$ τότε οι κλάδοι βρίσκονται στο **2ο** και στο **4ο** τεταρτημόριο.

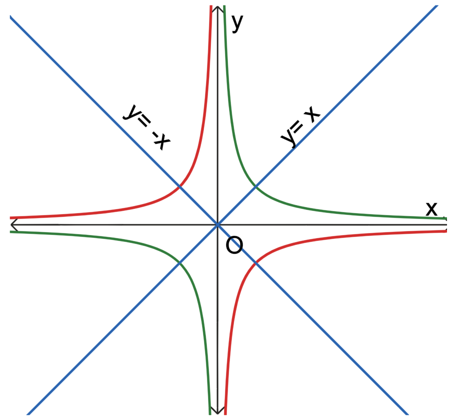


Συμμετρίες:

Η γραφική παράσταση μιας υπερβολής $y = \frac{\alpha}{x}$, με $\alpha \neq 0$, έχει:

- **Κέντρο συμμετρίας** την αρχή Ο των αξόνων.
- **Άξονες συμμετρίας** τις διχοτόμους των γωνιών των αξόνων, δηλαδή τις ευθείες με εξισώσεις:

$$y = x \text{ και } y = -x.$$



Παρατήρηση: Η γραφική παράσταση της $y = \frac{\alpha}{x}$ τείνει να συμπέσει με τους άξονες x'x και y'y χωρίς όμως να τους τέμνει σε κανένα σημείο.

Λυμένα Παραδείγματα

1. Αν γνωρίζετε ότι τα ποσά x και y είναι αντιστρόφως ανάλογα,

α) να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών:

x	1	2	3	4	6	8	12	24
y	24							

β) να εκφράσετε το y ως συνάρτηση του x.

Λύση:

α)

x 2, x 3, x 4, x 6, x 8

x	1	2	3	4	6	8	12	24
y	24	12	8	6	4	3	2	1

: 2, : 3, : 4, : 6, : 8

β) Το γινόμενο x · y είναι πάντοτε σταθερό και ίσο με 24.

Άρα $x \cdot y = 24$ ή $y = \frac{24}{x}$. Η σχέση αυτή εκφράζει το y ως συνάρτηση του x.

2. Να σχεδιάσετε σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων τις υπερβολές: $y = \frac{12}{x}$ και $y = -\frac{12}{x}$

Λύση:

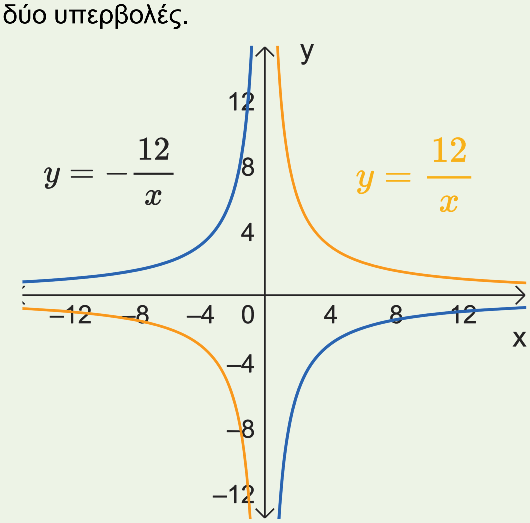
Σχηματίζουμε τους πίνακες τιμών και σχεδιάζουμε τις δύο υπερβολές.

$y = \frac{12}{x}$

x	−6	−4	−3	3	4	6
y	−2	−3	−4	4	3	2

$y = -\frac{12}{x}$

x	−6	−4	−3	3	4	6
y	2	3	4	−4	−3	−2



Παρατήρηση, για x > 0 :

- Στη συνάρτηση $y = \frac{12}{x}$, όταν το x **αυξάνεται**, το y **μειώνεται** γιατί είναι $α = 12 > 0$,
- Στη συνάρτηση $y = -\frac{12}{x}$, όταν το x **αυξάνεται**, το y επίσης **αυξάνεται**, γιατί είναι $α = -12 < 0$

Ασκήσεις / Προβλήματα

1 Χαρακτήρισε σωστές ή λανθασμένες τις προτάσεις που ακολουθούν βάζοντας ένα **x** στην κατάλληλη θέση.

	Σωστό	**Λάθος**
α) Η υπερβολή $y = \frac{2}{x}$ έχει κλάδους στο 1ο και 3ο τεταρτημόριο.		
β) Η υπερβολή $y = \frac{1}{x}$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.		
γ) Όταν δύο ποσά x και y είναι αντιστρόφως ανάλογα, ο λόγος $\frac{y}{x}$, είναι πάντοτε σταθερός.		
δ) Η σχέση $y \cdot x = 2$ περιγράφει αντιστρόφως ανάλογα ποσά.		
ε) Η γραφική παράσταση μιας υπερβολής έχει άξονες συμμετρίας τις ευθείες με εξισώσεις $y = x$ και $y = -x$.		

2 Συμπλήρωσε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{α}{x}$, με $α \neq 0$, λέγεται ………….. και αποτελείται από δύο κλάδους που βρίσκονται:

- Στο ……… και στο ……… τεταρτημόριο, όταν $α > 0$.
- Στο ……… και στο ……… τεταρτημόριο, όταν $α < 0$.

β) Η γραφική παράσταση μιας υπερβολής έχει:

- Κέντρο συμμετρίας το σημείο (… , …)
- Άξονες συμμετρίας τις ευθείες με εξισώσεις y =……… και y =………

3 Αν τα ποσά x και y είναι αντιστρόφως ανάλογα, συμπλήρωσε τους πίνακες και βρες τη σχέση που συνδέει τα ποσά x και y.

α)

x	1	2	3	4	6	12
y		6				

Συνάρτηση: y =…………

β)

x	1	2		5	8	
y		8	4			1

Συνάρτηση: y =…………

4 Σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις, τα ποσά x και y είναι αντιστρόφως ανάλογα;

α)

x	1	2	3
y	3	2	1

β)

x	2	3	3,6
y	18	12	10

γ)

x	2	3	6
y	1,5	1	0,5

5 Σχεδίασε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$y = \frac{1}{x},\ y = \frac{2}{x} \text{ και } y = \frac{3}{x}.$$

Εξασκούμαι

σε όσα έμαθα

6 Σχεδίασε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$y = \frac{6}{x} \text{ και } y = -\frac{6}{x}.$$

7 Θεωρούμε όλα τα ορθογώνια με σταθερό εμβαδόν $12 cm^2$. Ονομάζουμε x και y τις διαστάσεις του ορθογωνίου.

α) Συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	1		3		5		8	
y		6		3		2		1

Τι παρατηρείς για τα ποσά x και y;

β) Να εκφράσεις το y ως συνάρτηση του x.

γ) Σχεδίασε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.

8 Ένα έργο τελειώνει σε 25 ημέρες αν εργαστούν 8 εργάτες.

α) Αν εργαστούν x εργάτες, τελειώνουν το ίδιο έργο σε y ημέρες. Να εκφράσεις το y ως συνάρτηση του x.

β) Πόσοι εργάτες χρειάζονται για να τελειώσει το ίδιο έργο σε 20 ημέρες;

Θεώρησε ότι κάθε εργάτης εργάζεται ανεξάρτητα και με τον ίδιο ρυθμό.

9 Ένα τρένο εκτελεί μία διαδρομή και διανύει απόσταση s = 600 km. Η σταθερή ταχύτητα του τρένου δίνεται από τη σχέση $υ = \frac{s}{t}$, όπου s η απόσταση σε km που διανύει το τρένο και t ο χρόνος σε ώρες (h).

α) Ποια πρέπει να είναι η ταχύτητα του τρένου για να διανύσει την απόσταση αυτή σε 4 ώρες;

β) Σε πόσο χρόνο θα διανύσει την απόσταση αυτή αν κινείται με σταθερή ταχύτητα 120 km/h;

γ) Συμπλήρωσε τον πίνακα:

υ (km/h)		150	200	
t (h)	5			6

Τι παρατηρείς για τα ποσά x και y;

δ) Σχεδίασε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.

Ανακεφαλαίωση (Συναρτήσεις)

Συνάρτηση

Συνάρτηση είναι μία σχέση (κανόνας) με την οποία κάθε τιμή μιας μεταβλητής x αντιστοιχίζεται σε μία μόνο τιμή μίας άλλης μεταβλητής y. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η μεταβλητή y εκφράζεται ως συνάρτηση της μεταβλητής x.

Γραφική παράσταση

Αν μία μεταβλητή y εκφράζεται ως συνάρτησης μίας μεταβλητής x, τότε ονομάζουμε γραφική παράσταση της συνάρτησης, το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου με συντεταγμένες (x, y).

Η συνάρτηση $y = \alpha x$.

- Όταν δύο ποσά x και y είναι **ανάλογα**, ο λόγος $\frac{y}{x}$, με $x \neq 0$, είναι πάντοτε σταθερός και ίσος με **α**. Τότε το y εκφράζεται ως συνάρτηση του x μέσω της ισότητας $y = \alpha x$.
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \alpha x$ είναι μία ευθεία που διέρχεται από την αρχή Ο των αξόνων. Το α ονομάζεται κλίση της ευθείας.

Η συνάρτηση $y = \alpha x + \beta$.

Η γραφική παράσταση της $y = \alpha x + \beta$, με $\beta \neq 0$, είναι μια ευθεία παράλληλη της ευθείας με εξίσωση $y = \alpha x$, που διέρχεται από το σημείο $(0, \beta)$ του άξονα y'y.

Η γραφική παράταση της συνάρτησης $y = \alpha x + \beta$ προκύπτει από μία κατακόρυφη μετατόπιση της $y = \alpha x$ κατά β μονάδες:

- προς τα πάνω αν $\beta > 0$.
- προς τα κάτω αν $\beta < 0$.

Η συνάρτηση $y = \frac{\alpha}{x}$.

Όταν δύο ποσά x και y είναι αντιστρόφως ανάλογα, το γινόμενο $x \cdot y$ είναι πάντοτε σταθερό. Το γινόμενο αυτό το συμβολίζουμε με α. Αν $\alpha \neq 0$ τότε το y εκφράζεται ως συνάρτηση του x μέσω της ισότητας: $x \cdot y = \alpha$ ή $y = \frac{\alpha}{x}$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{\alpha}{x}$, με $\alpha \neq 0$, λέγεται υπερβολή και αποτελείται από δύο κλάδους.

- Αν $\alpha > 0$ τότε οι κλάδοι βρίσκονται στο **1ο** και στο **3ο** τεταρτημόριο.
- Αν $\alpha < 0$ τότε οι κλάδοι βρίσκονται στο **2ο** και στο **4ο** τεταρτημόριο.

Η γραφική παράσταση μιας υπερβολής $y = \frac{\alpha}{x}$, με $\alpha \neq 0$, έχει:

- Κέντρο συμμετρίας την αρχή Ο των αξόνων.
- Άξονες συμμετρίας τις διχοτόμους των γωνιών των αξόνων, δηλαδή τις ευθείες $y = x$ και $y = -x$.

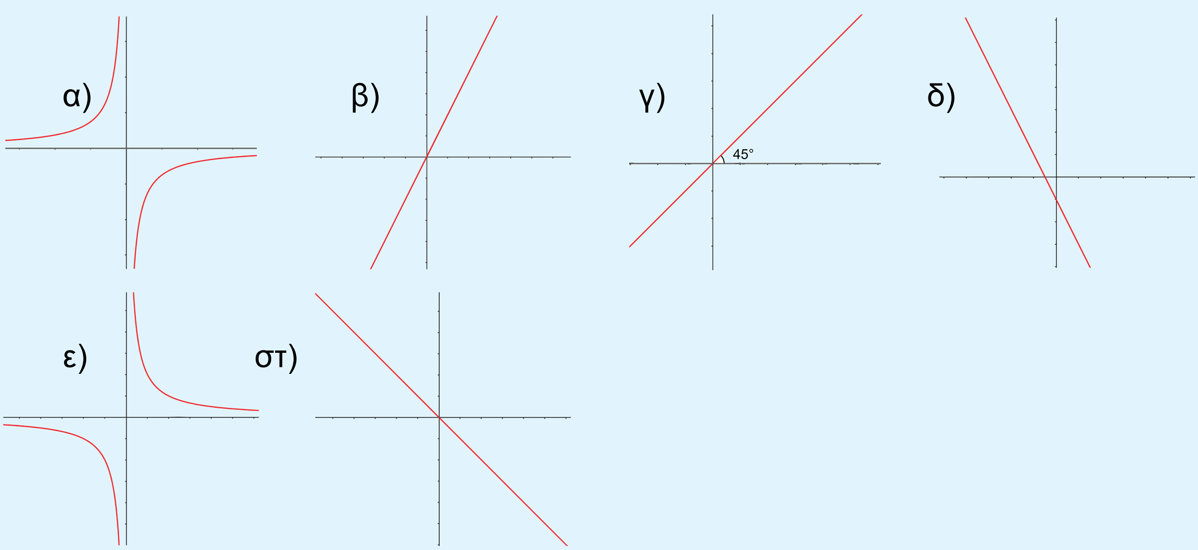
Αυτοαξιολόγηση (Συναρτήσεις)

Α. Χαρακτήρισε σωστές ή λανθασμένες τις προτάσεις που ακολουθούν βάζοντας ένα **x** στην κατάλληλη θέση.

		Σωστό	**Λάθος**
1.	Το σημείο (-1,2) βρίσκεται στο 2ο τεταρτημόριο.		
2.	Κάθε σημείο του άξονα x’x έχει τετμημένη 0.		
3.	Κάθε σημείο του άξονα y’y έχει τετμημένη 0.		
4.	Αν δύο ποσά x, y είναι ανάλογα τότε αυτά συνδέονται με τη σχέση $y = \alpha x$		
5.	Η ευθεία $y = 3x$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.		
6.	Η ευθεία $y = x$ έχει κλίση 1.		
7.	Η ευθεία $y = 2x + 4$ τέμνει τον άξονα y’y στο 2.		
8.	Η ευθεία $y = -2x + 6$ έχει κλίση 6.		
9.	Οι ευθείες $y = -x$ και $y = -x + 1$ είναι μεταξύ τους παράλληλες.		
10.	Οι ευθείες $y = 5x$ και $y = 3x - 4$ τέμνονται.		
11.	Η γραφική παράσταση της υπερβολής $y = \frac{2}{x}$ βρίσκεται στο 2ο και στο 4ο τεταρτημόριο.		

Β. Αντιστοίχισε καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις στα ακόλουθα σχήματα:

1) $y = -x$ 2) $y = \frac{2}{x}$ 3) $y = -2x - 1$ 4) $y = x$ 5) $y = 2x$ 6) $y = -\frac{3}{x}$



Γ. Μία εταιρία κινητής τηλεφωνίας προσφέρει τα παρακάτω προγράμματα:

Α' πρόγραμμα: Κόστος 1€ ανά λεπτό ομιλίας χωρίς πάγια χρέωση.

Β' πρόγραμμα: Κόστος 0,20€ ανά λεπτό ομιλίας με πάγια μηνιαία χρέωση 10€.

Γ' πρόγραμμα: Πάγιο 15€ με απεριόριστα λεπτά ομιλίας.

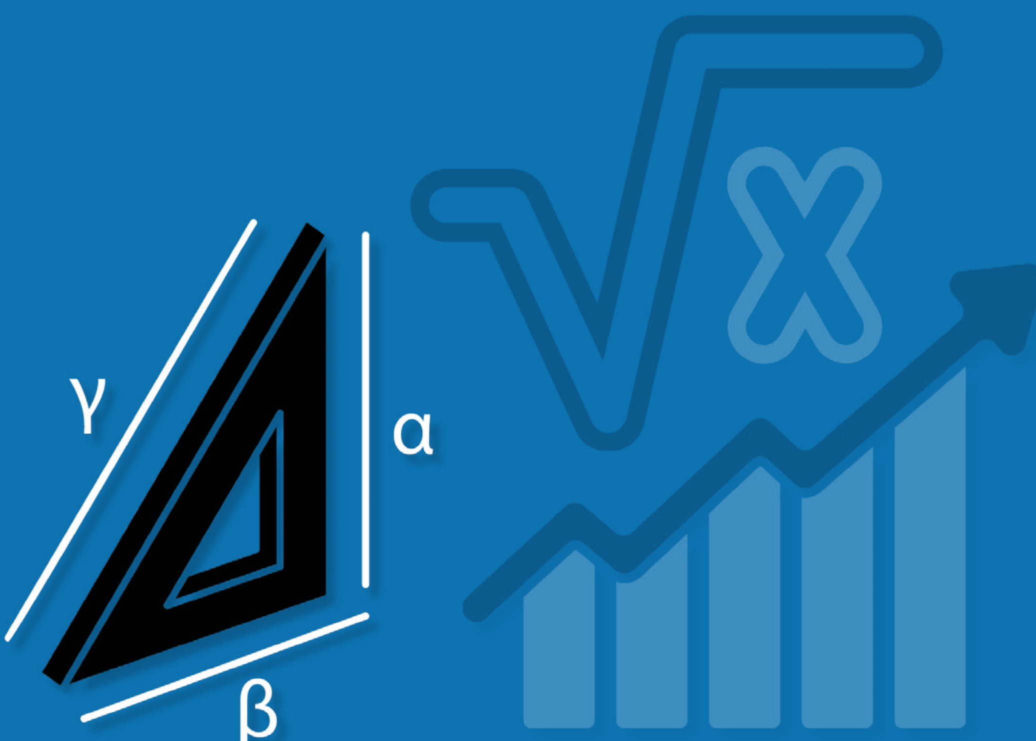
α) Βρες τη συνάρτηση που εκφράζει το συνολικό μηνιαίο ποσό y που πρέπει να πληρώσουμε ως συνάρτηση των λεπτών ομιλίας x, για τα προγράμματα Α και Β.

β) Σχεδίασε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων Α, Β, Γ.

γ) Πότε είναι περισσότερο συμφέρουσα η κάθε προσφορά;

☑ Σε αυτό το σημείο, θα πρέπει να είσαι σε θέση να ικανοποιείς όλους τους προσδοκώμενους μαθησιακούς στόχους. Γύρνα στην αρχή της θεματικής ενότητας και σημείωσε ✔ στα αντίστοιχα σημεία. Υπάρχουν στόχοι που αισθάνεσαι ότι δεν έχεις ικανοποιήσει πλήρως;

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ




γ
α
β

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΜΕΤΡΟ ΓΩΝΙΩΝ

Β.1

Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε τη γεωμετρία του επιπέδου και τον τρόπο μέτρησης των γωνιών. Θα μελετήσουμε τη σχέση της επίκεντρης με την εγγεγραμμένη γωνία σε κύκλο και πώς μπορούμε να υπολογίζουμε γωνίες κανονικών πολυγώνων. Επίσης, θα εμβαθύνουμε στο Πυθαγόρειο θεώρημα και το αντίστροφό του, αξιοποιώντας τα για την επίλυση προβλημάτων.

Πώς σχετίζεται η γεωμετρία με την καθημερινότητά μας, όπως τη σχεδίαση κτιρίων ή την ανάλυση χαρτών;

Είσαι έτοιμος/η να εξερευνήσεις την ακρίβεια και την ομορφιά της γεωμετρίας;

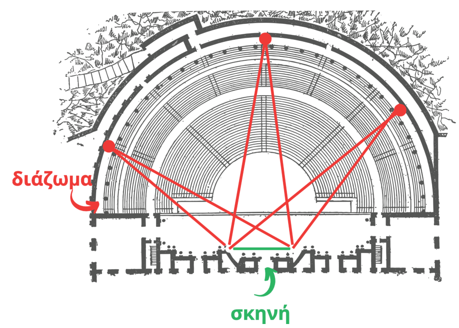
Στόχοι Ενότητας

- ☐ Αναγνωρίζω και διακρίνω ένα κανονικό από ένα μη κανονικό πολύγωνο και διαμορφώνω σχετικούς ορισμούς.
- ☐ Διερευνώ και διατυπώνω το Πυθαγόρειο Θεώρημα και το αντίστροφό του και τα χρησιμοποιώ για τον υπολογισμό μηκών και τον προσδιορισμό ορθής γωνίας τριγώνου, αντίστοιχα.
- ☐ Σχεδιάζω κανονικά πολύγωνα χρησιμοποιώντας γεωμετρικά όργανα ή ψηφιακά εργαλεία.
- ☐ Προσδιορίζω την κεντρική γωνία κανονικών ν-γώνων και τη γωνία κανονικού ν-γώνου (με ν=3, 4, 6).
- ☐ Διερευνώ και αιτιολογώ εμπειρικά τις σχέσεις εγγεγραμμένης και επίκεντρης γωνίας που βαίνουν στον ίδιο τόξο.
- ☐ Αξιοποιώ την έννοια του εμβαδού για την εξήγηση του Πυθαγόρειου Θεωρήματος.

Μαθήματα Ενότητας

1.1 | Σχέση επίκεντρης με εγγεγραμμένη γωνία σε κύκλο

Σε ένα αρχαίο θέατρο σχήματος ημικυκλίου, οι θεατές παρακολουθούν την παράσταση από διάφορες θέσεις, όπως φαίνεται στο σχήμα. Οι αρχιτέκτονες ισχυρίζονται ότι οι θεατές στο ίδιο διάζωμα βλέπουν τη σκηνή υπό την ίδια γωνία. Εσύ τι παρατηρείς;



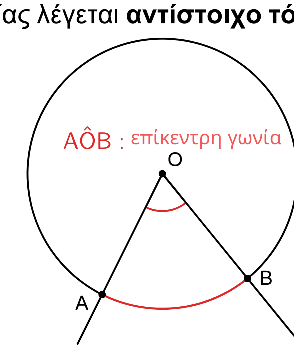
Επίκεντρη γωνία

Γνωρίζουμε ότι:

Θυμόμαστε

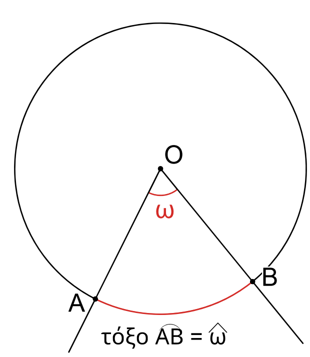
Αν η κορυφή μιας γωνίας είναι το κέντρο ενός κύκλου, τότε η γωνία λέγεται **επίκεντρη**.

- Το τόξο $\overset{\frown}{AB}$ που περιέχεται στο εσωτερικό της γωνίας λέγεται **αντίστοιχο τόξο** της γωνίας.
- Λέμε ότι η γωνία $A\hat{O}B$ **βαίνει** στο τόξο $\overset{\frown}{AB}$.



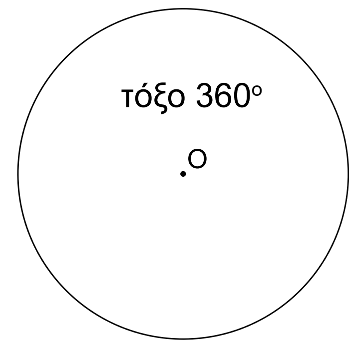
Το μέτρο της επίκεντρης γωνίας ισούται με το μέτρο του αντίστοιχου τόξου της.

- Το μέτρο ενός τόξου το μετράμε σε **μοίρες**.
- Η μέτρηση των γωνιών γίνεται με το μοιρογνωμόνιο

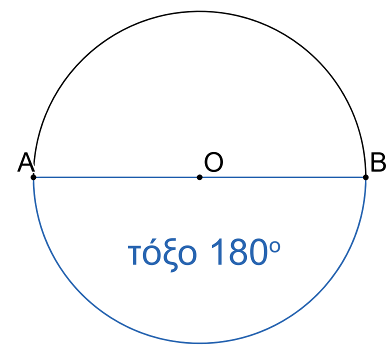


Επομένως:

- Ο **κύκλος** είναι τόξο **360**° γιατί ισούται με το μέτρο μιας πλήρους γωνίας.



- Το **ημικύκλιο** είναι τόξο **180**° γιατί ισούται με το μέτρο μιας ευθείας γωνίας.

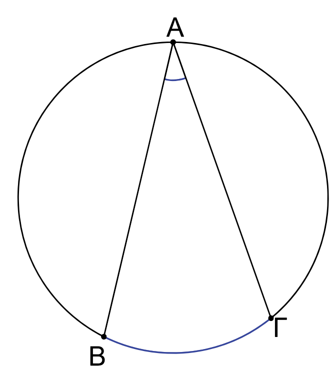


Εγγεγραμμένη γωνία

Αντιλαμβάνομαι

με προσομοίωση

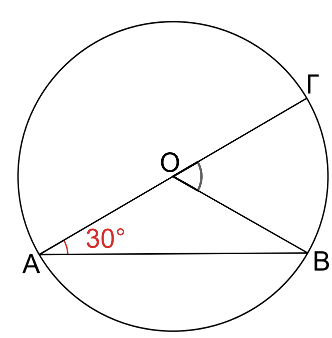
> Αν η κορυφή μιας γωνίας είναι σημείο του κύκλου και οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο, τότε η γωνία λέγεται **εγγεγραμμένη γωνία** στον κύκλο.



- Το **αντίστοιχο τόξο** της γωνίας $\hat{A}$ είναι το $\overset{\frown}{ΒΓ}$.
- Λέμε ότι η γωνία **βαίνει** στο τόξο $\overset{\frown}{ΒΓ}$.

Δραστηριότητα

Δίνεται ο κύκλος του διπλανού σχήματος με κέντρο Ο. Αν $\hat{A} = 30°$, να υπολογίσετε τη γωνία $Β\hat{O}Γ$. Τι παρατηρείτε για τις γωνίες $\hat{A}$ και $Β\hat{O}Γ$;



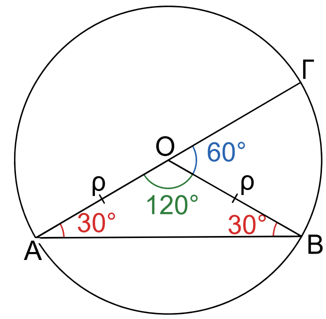
Λύση:

Το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές με ΟΑ=ΟΒ (ακτίνες), άρα $\hat{B} = \hat{A} = 30^o$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΟΒΑ, βρίσκουμε: $A\hat{O}B = 120^o$.

Η γωνία $B\hat{O}\Gamma$ είναι παραπληρωματική της γωνίας $A\hat{O}B$, άρα

$B\hat{O}\Gamma = 180^o - 120^o = 60^o$.

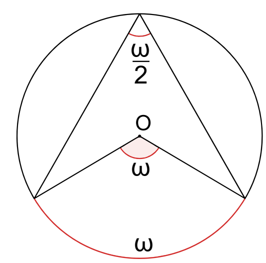


Παρατηρούμε ότι η εγγεγραμμένη γωνία $\hat{A}$ ισούται με το μισό της επίκεντρης γωνίας $B\hat{O}\Gamma$ που έχει ίσο αντίστοιχο τόξο. $\hat{A} = \frac{B\hat{O}\Gamma}{2}$.

Το συμπέρασμα αυτό ισχύει για κάθε εγγεγραμμένη και την επίκεντρη γωνία που έχει ίσο αντίστοιχο τόξο.

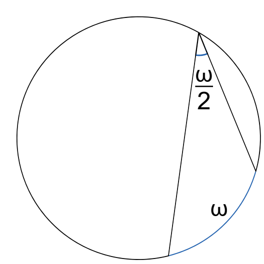
Γενικά:

Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το **μισό** της επίκεντρης που έχει ίσο αντίστοιχο τόξο.

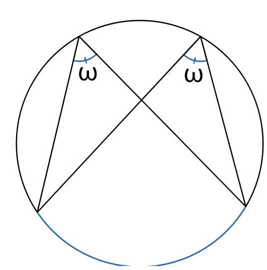


Από τα παραπάνω προκύπτει ότι:

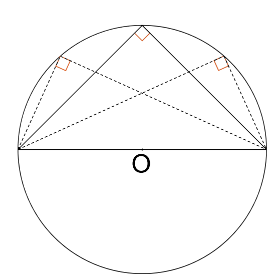
Κάθε εγγεγραμμένη γωνία έχει μέτρο ίσο με το **μισό** του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της.



Οι εγγεγραμμένες γωνίες ενός κύκλου που βαίνουν στο ίδιο τόξο ή σε ίσα τόξα είναι μεταξύ τους **ίσες**.



Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι **ορθή**.



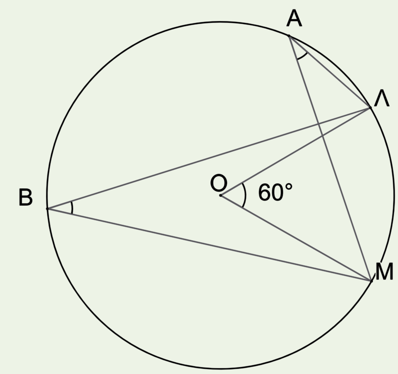
Λυμένα Παραδείγματα

1. Να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{B}$, αν είναι $M\hat{O}Λ = 60°$.

Λύση:

Το τόξο $\overset{\frown}{ΛΜ}$ έχει μέτρο ίσο με αυτό της επίκεντρης γωνίας $M\hat{O}Λ = 60°$.

Άρα $\overset{\frown}{ΛΜ} = 60°$.



Οι γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{B}$ είναι εγγεγραμμένες και έχουν μέτρο ίσο με το **μισό** του μέτρου του αντίστοιχου τόξου τους $\overset{\frown}{ΛΜ}$.

Άρα $\hat{A} = \hat{B} = \frac{60°}{2} = 30°$.

2. Αν $\overset{\frown}{ΑΓ} = 100°$ και $\overset{\frown}{ΒΓ} = 150°$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

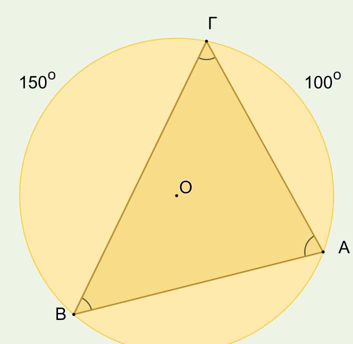
Λύση:

- Η γωνία $\hat{A}$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{ΒΓ} = 150°$.

  Άρα είναι $\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{ΒΓ}}{2} = \frac{150°}{2} = 75°$.
- Η γωνία $\hat{B}$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{ΑΓ} = 100°$.

  Άρα είναι $\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{ΑΓ}}{2} = \frac{100°}{2} = 50°$.
- Επειδή το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180°, βρίσκουμε ότι:

  $\hat{Γ} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 180° - (75° + 50°) = 180° - 125° = 55°$



3. Χωρίζουμε έναν κύκλο σε τρία μέρη ώστε το τόξο $\overset{\frown}{ΒΓ}$ να είναι διπλάσιο από το τόξο $\overset{\frown}{ΑΒ}$ και το τόξο $\overset{\frown}{ΓΑ}$ να είναι τριπλάσιο από το τόξο $\overset{\frown}{ΑΒ}$. Υπολογίστε το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{ΑΒ}$.

Λύση:

Ονομάζουμε x το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{ΑΒ}$: $\overset{\frown}{ΑΒ} = x$.

Το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{ΒΓ}$ είναι διπλάσιο του x, άρα: $\overset{\frown}{ΒΓ} = 2x$.

Το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{ΓΑ}$ είναι τριπλάσιο του x, άρα: $\overset{\frown}{ΓΑ} = 3x$.

Ο κύκλος είναι ένα τόξο 360°, συνεπώς:

$$x + 2x + 3x = 360°$$
$$6x = 360°$$
$$x = \frac{360°}{6}$$
$$x = 60°.$$

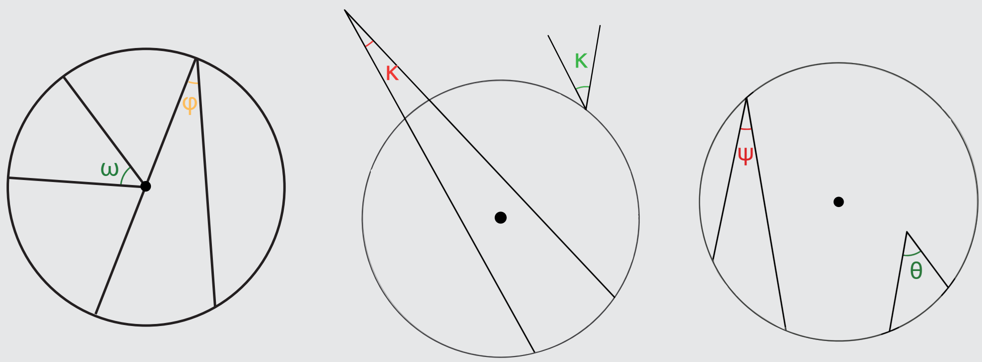
Επομένως το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{ΑΒ}$ είναι 60°.

Ασκήσεις / Προβλήματα

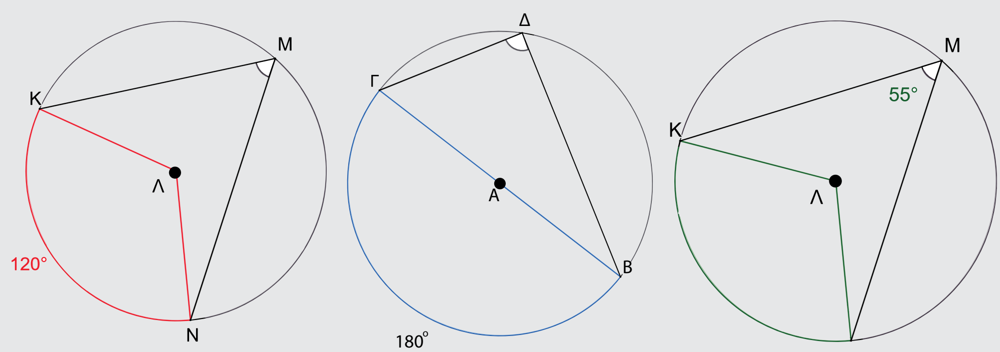
1 Χαρακτήρισε ως Σωστές ή Λάθος τις προτάσεις, βάζοντας ένα **x** στην κατάλληλη θέση.

	Σωστό	**Λάθος**
α) Δύο εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο είναι μεταξύ τους ίσες.		
β) Κάθε επίκεντρη γωνία ισούται με το μισό της εγγεγραμμένης που έχει ίσο αντίστοιχο τόξο.		
γ) Ο κύκλος είναι ένα τόξο 180°.		
δ) Μια επίκεντρη γωνία έχει την κορυφή της στον κύκλο.		

2 Ποιες από τις παρακάτω γωνίες είναι επίκεντρες και ποιες εγγεγραμμένες;

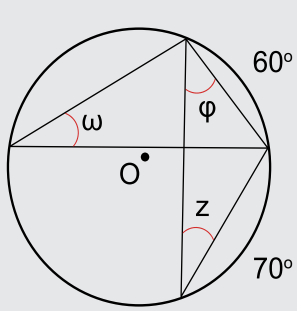


3 Βρες το μέτρο των σημειωμένων γωνιών και των τόξων σε κάθε περίπτωση.

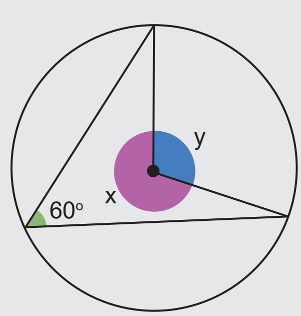


4 Υπολόγισε τις σημειωμένες γωνίες στα παρακάτω σχήματα:

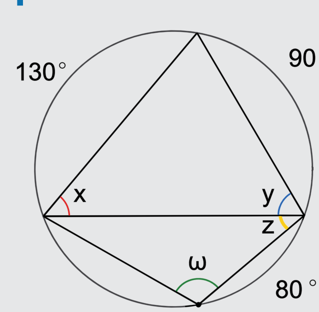
Α



Β

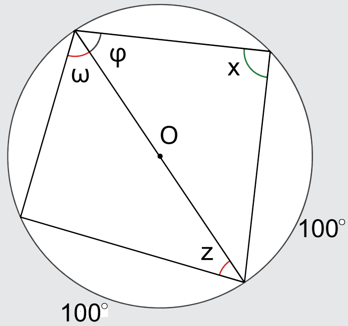


Γ

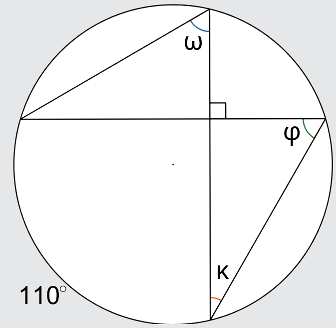


5 Υπολόγισε τις σημειωμένες γωνίες στα παρακάτω σχήματα:

Α.



Β.

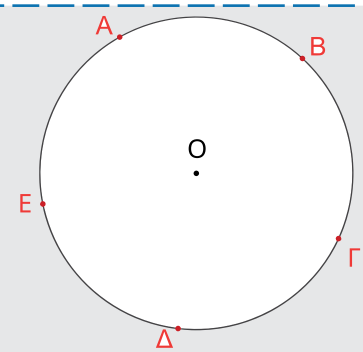


6 Τα τόξα $\overset{\frown}{ΑΒ}$, $\overset{\frown}{ΒΓ}$, $\overset{\frown}{ΓΔ}$, $\overset{\frown}{ΔΕ}$, $\overset{\frown}{ΕΑ}$ του διπλανού σχήματος είναι μεταξύ τους ίσα. Σχημάτισε και υπολόγισε τις γωνίες:

α) ΒÔΓ.

β) ΒÂΓ

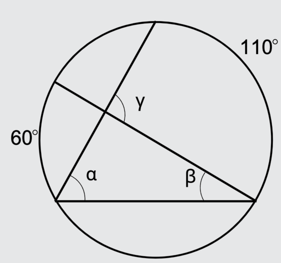
γ) ΕÂΓ.



7 Υπολόγισε τη γωνία φ στο παρακάτω σχήμα:

Εξασκούμαι σε όσα έμαθα

8 Στο παρακάτω σχήμα, υπολόγισε τις γωνίες α, β και γ.



9 Σχεδίασε έναν κύκλο (Ο, 4cm) και τα διαδοχικά τόξα σε αυτόν $\overset{\frown}{ΑΒ} = 100°$, $\overset{\frown}{ΒΓ} = 120°$, $\overset{\frown}{ΓΔ} = 90°$.

Υπολόγισε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

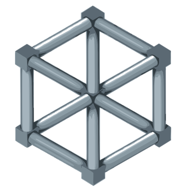
Χρησιμοποιώ

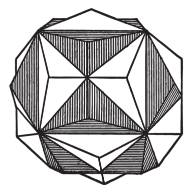
1.2 | Κανονικά πολύγωνα, σχέση γωνίας με κεντρική γωνία κανονικού πολυγώνου

Παρατήρησε τα παρακάτω μοτίβα που συναντάμε στην καθημερινή ζωή.

Από τι σχήματα αποτελούνται; Υπάρχει κάποιο κοινό χαρακτηριστικό στα σχήματα;

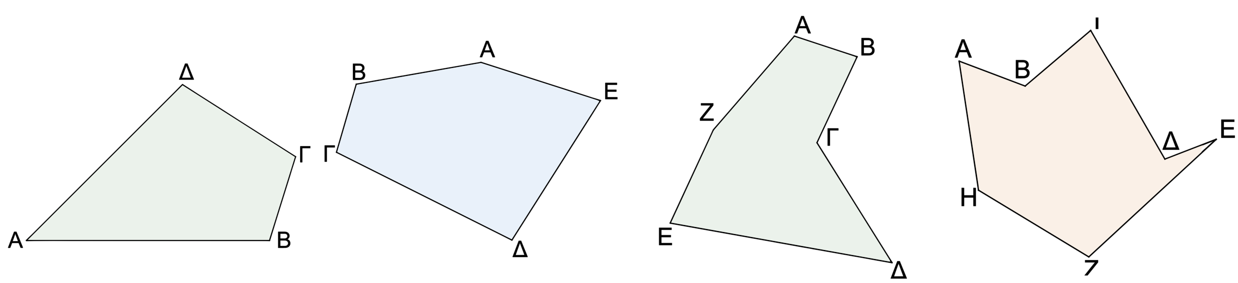

σχήμα κηρήθρας


δημιουργία του Escher


Εικόνα που προκύπτει από κρυσταλλογραφία με ακτίνες Χ

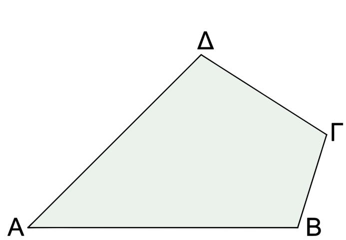
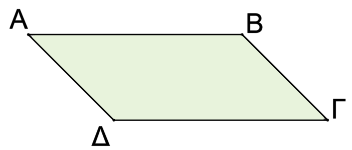
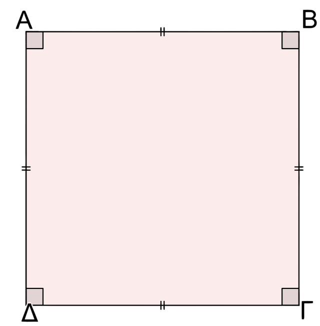
Τετράπλευρα

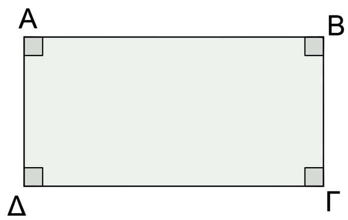
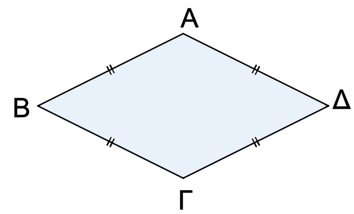
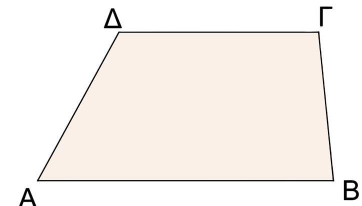
Ένα πολύγωνο με 4 κορυφές ονομάζεται **τετράπλευρο**. Αν το πολύγωνο έχει 5, 6, 7, … κορυφές ονομάζεται αντίστοιχα πεντάγωνο, εξάγωνο, επτάγωνο, … κλπ.



Γενικά ένα πολύγωνο με ν κορυφές θα τα το λέμε ν–γωνο, εκτός από το πολύγωνο με 4 κορυφές, που λέγεται τετράπλευρο. Τα τετράπλευρα διακρίνονται σε τυχαία, παραλληλόγραμμα και τραπέζια.

Παρακάτω παρουσιάζονται τα **είδη των τετράπλευρων**:

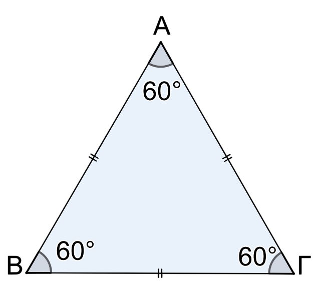
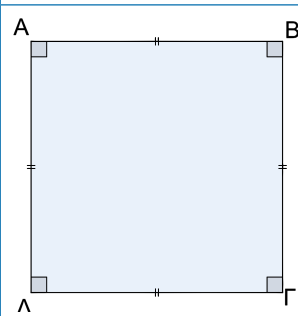
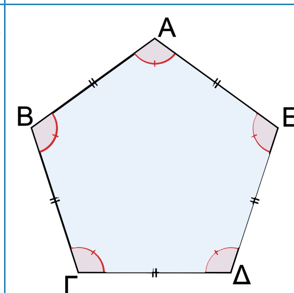
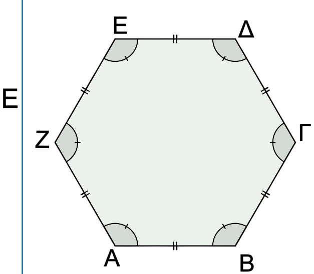
Τυχαίο τετράπλευρο	Τυχαίο παραλληλόγραμμο	Τετράγωνο
		

Ορθογώνιο	Ρόμβος	Τραπέζιο
		 ΑΒ // ΓΔ

Κανονικά πολύγωνα

Ένα πολύγωνο λέγεται **κανονικό**, όταν έχει όλες τις πλευρές του ίσες και όλες τις γωνίες του ίσες.

Παραδείγματα κανονικών πολυγώνων:

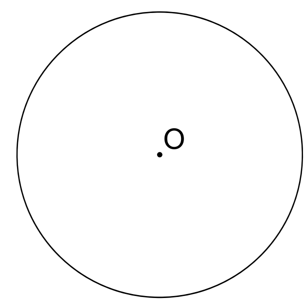
ισόπλευρο τρίγωνο	τετράγωνο	κανονικό πεντάγωνο	κανονικό εξάγωνο
			

Κατασκευή κανονικών πολυγώνων με τη βοήθεια κύκλου

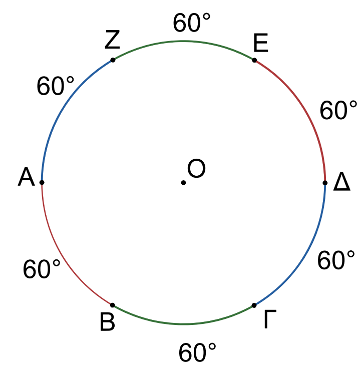
Δραστηριότητα: Να κατασκευάσετε κανονικό 6–γωνο.

- Σχεδιάζουμε έναν κύκλο.

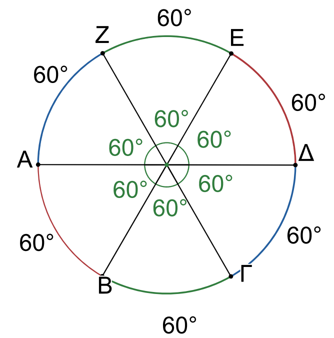
Ο κύκλος είναι τόξο 360°.



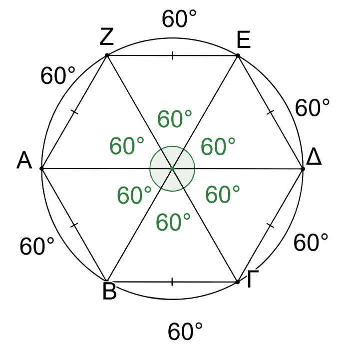
- Χωρίζουμε τον κύκλο σε 6 ίσα τόξα, καθένα από τα οποία έχει μέτρο: $\frac{360°}{6} = 60°$



- Σχηματίζουμε διαδοχικά έξι επίκεντρες γωνίες $\omega = 60^\circ$.



- Ενώνουμε με διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα τα άκρα των τόξων.



Αποδεικνύεται ότι στον ίδιο κύκλο, σε ίσα τόξα αντιστοιχούν ίσες χορδές και αντίστροφα, άρα το 6-γωνο που σχηματίζουν είναι ένα κανονικό 6-γωνο.

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να εγγράψουμε σε ένα κύκλο οποιοδήποτε κανονικό ν-γωνο. Ο κύκλος αυτός λέγεται **περιγεγραμμένος** κύκλος του πολυγώνου και το πολύγωνο λέγεται **εγγεγραμμένο** στον κύκλο.

Γενικά

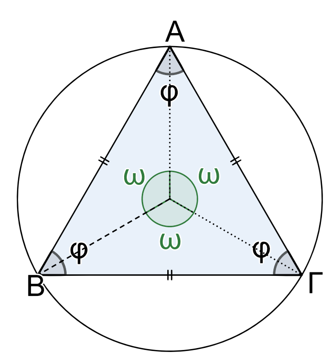
Η **κεντρική** γωνία ενός κανονικού ν – γώνου είναι: $\omega = \frac{360^\circ}{\nu}$.

Υπολογισμός κεντρικής γωνίας και της γωνίας κανονικού ν – γώνου ($\nu = 3, 4, 6$).

Ονομάζουμε φ τη γωνία ενός κανονικού πολυγώνου.

1. Ισόπλευρο τρίγωνο

Το τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος είναι ισόπλευρο και είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο.

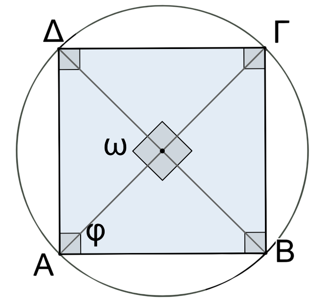


- Η κεντρική του γωνία είναι $\omega = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$.
- Γνωρίζουμε ότι οι γωνίες του ισοπλεύρου τριγώνου είναι όλες ίσες με $\varphi = 60^\circ$.

Παρατηρούμε ότι: $\omega + \varphi = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$.

2. Τετράγωνο

Το τετράγωνο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο.

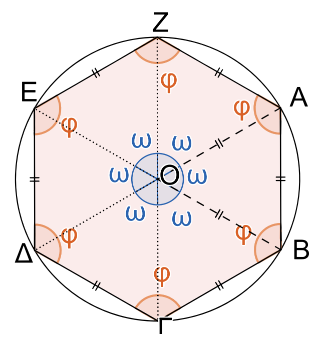


- Η κεντρική του γωνία είναι $\omega = \dfrac{360°}{4} = 90°$.
- Γνωρίζουμε ότι οι γωνίες του τετραγώνου είναι όλες ίσες με $\varphi = 90^o$.

Παρατηρούμε ότι: $\omega + \varphi = 90^o + 90^o = 180^o$.

3. Κανονικό εξάγωνο

Το εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ του διπλανού σχήματος είναι κανονικό και είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο.



- Η κεντρική του γωνία είναι $\omega = \dfrac{360°}{6} = 60°$.
- Το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές με ΟΑ = ΟΒ(ακτίνες) και $A\hat{O}B = 60^o$.
  Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες του ισοσκελούς τριγώνου ΟΑΒ είναι ίσες και από το άθροισμα των γωνιών του προκύπτει ότι $O\hat{A}B = O\hat{B}A = 60^o$.
  Δηλαδή το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισόπλευρο όπως και όλα τα τρίγωνα με κορυφή το Ο.

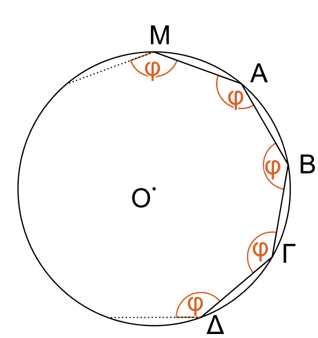
Συνεπώς η γωνία του κανονικού εξαγώνου είναι $\hat{A} = 60^o + 60^o = 120^o$, άρα $\varphi = 120^o$.

Παρατηρούμε ότι: $\omega + \varphi = 60^o + 120^o = 180^o$.

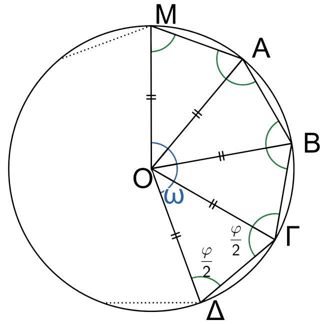
Δηλαδή, σε κάθε περίπτωση, ισχύει ότι η γωνία φ είναι **παραπληρωματική** της γωνίας ω.

Γενικά:

Έστω ένα κανονικό πολύγωνο. Οι γωνίες $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$, … που σχηματίζονται είναι όλες ίσες με φ.



Ενώνουμε το κέντρο με τις κορυφές οπότε σχηματίζονται ισοσκελή τρίγωνα γιατί οι ακτίνες του κύκλου είναι όλες ίσες. Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες στα ισοσκελή αυτά τρίγωνα είναι ίσες με $\frac{\varphi}{2}$.



Επιλέγουμε τυχαία ένα από τα ισοσκελή τρίγωνα, π.χ. το ΟΑΒ. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου έχουμε:

$$\omega + \frac{\varphi}{2} + \frac{\varphi}{2} = 180^\circ$$
$$\text{ή} \quad \omega + \varphi = 180^\circ.$$

Προκύπτει λοιπόν ότι:

Η γωνία φ ενός κανονικού πολυγώνου είναι **παραπληρωματική** της κεντρικής του γωνίας ω.

$$\omega + \varphi = 180^\circ$$

Αντιλαμβάνομαι

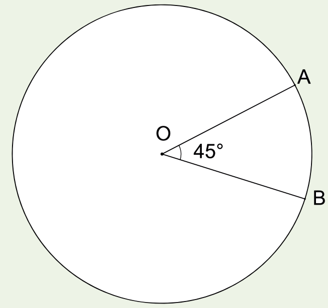
με προσομοίωση

Λυμένα Παραδείγματα

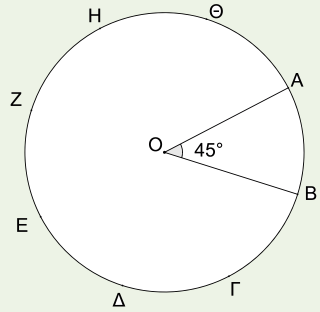
1. Να κατασκευάσετε κανονικό 8-γωνο.

Λύση:

- Σχεδιάζουμε έναν κύκλο.
- Η κεντρική γωνία του κανονικού 8-γώνου είναι: $\omega = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$.

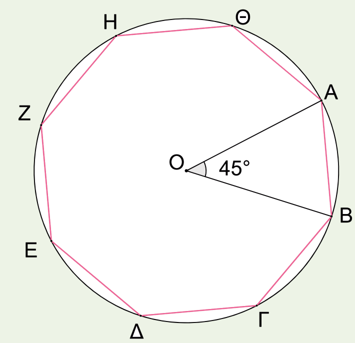


- Κατασκευάζουμε κεντρική γωνία $\omega = 45^\circ$ που αντιστοιχεί σε τόξο $\overset{\frown}{AB}$ και στη συνέχεια χωρίζουμε με τον διαβήτη τον κύκλο σε 8 διαδοχικά τόξα ίσα με $\overset{\frown}{AB}$.



- Ενώνουμε τα άκρα των τόξων.

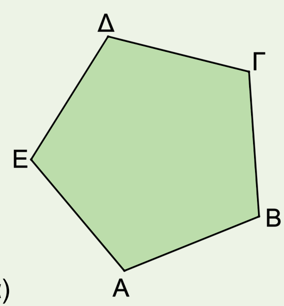
Το 8-γωνο που σχηματίζεται είναι ένα κανονικό 8-γωνο.



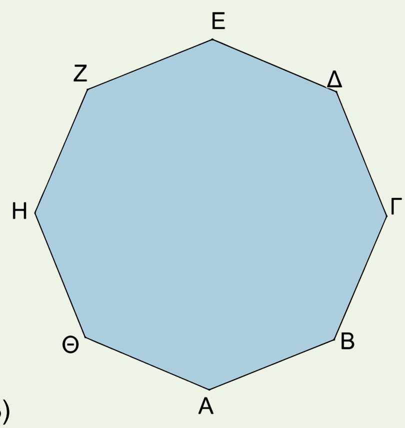
Εναλλακτικός τρόπος κατασκευής κανονικού 8-γώνου:

Κατασκευάζουμε τετράγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο, φέρνουμε τις μεσοκαθέτους των πλευρών του τετραγώνου και βρίσκουμε τα σημεία στα οποία τέμνουν τον κύκλο. Με τον τρόπο αυτόν ο κύκλος χωρίζεται σε οκτώ ίσα διαδοχικά τόξα οι χορδές των οποίων σχηματίζουν ένα κανονικό οκτάγωνο.

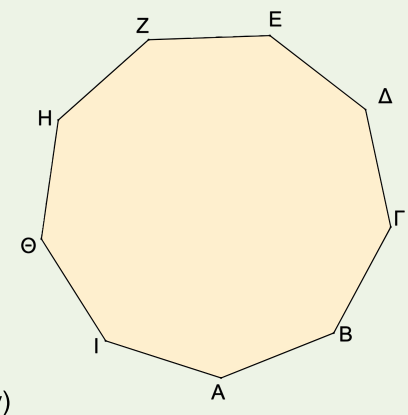
2. Να υπολογίσετε τις γωνίες των παρακάτω κανονικών πολυγώνων:



α)



β)



γ)

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι η γωνία φ ενός κανονικού πολυγώνου είναι παραπληρωματική της κεντρικής του γωνίας ω, δηλαδή $\omega + \varphi = 180^\circ$. Έχουμε:

α) Κανονικό 5-γωνο.

- Κεντρική γωνία: $\omega = \dfrac{360^\circ}{5} = 72^\circ$
- Γωνία κανονικού 5-γώνου: $\varphi = 180^\circ - \omega = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$.

β) Κανονικό 8-γωνο.

- Κεντρική γωνία: $\omega = \dfrac{360^\circ}{8} = 45^\circ$
- Γωνία κανονικού 8-γώνου: $\varphi = 180^\circ - \omega = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

γ) Κανονικό 9-γωνο.

- Κεντρική γωνία: $\omega = \dfrac{360^\circ}{9} = 40^\circ$
- Γωνία κανονικού 9-γώνου: $\varphi = 180^\circ - \omega = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$.

Εξασκούμαι

σε όσα έμαθα

Ασκήσεις / Προβλήματα

1 Χαρακτήρισε σωστές ή λανθασμένες τις προτάσεις που ακολουθούν βάζοντας ένα **x** στην κατάλληλη θέση.

	Σωστό	**Λάθος**
α) Το ισόπλευρο τρίγωνο είναι ένα κανονικό πολύγωνο.		
β) Ένα ορθογώνιο τρίγωνο δεν μπορεί να είναι κανονικό.		
γ) Η γωνία ενός κανονικού πολυγώνου είναι συμπληρωματική της κεντρικής του γωνίας.		
δ) Η κεντρική γωνία ω ενός κανονικού ν-γώνου δίνεται από τη σχέση $ω = \frac{360^\circ}{ν}$.		
ε) Ο ρόμβος είναι ένα κανονικό πολύγωνο.		

2 Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα:

Πλήθος πλευρών κανονικού ν-γώνου	**Κεντρική γωνία ω**	**Γωνία πολυγώνου φ**
3		
4		
5		
8		
10		

3 Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα:

Πλήθος πλευρών κανονικού ν-γώνου	**Κεντρική γωνία ω**	**Γωνία πολυγώνου φ**
	30°	
	24°	
		160°
		162°

4 Κατασκεύασε ένα κανονικό πεντάγωνο.

Χρησιμοποιώ

5 Υπολόγισε:

α) την κεντρική γωνία κανονικού πενταγώνου

β) το πλήθος των πλευρών ενός κανονικού πολυγώνου με κεντρική γωνία 15°.

γ) την γωνία ενός κανονικού 12-γώνου.

δ) το πλήθος των πλευρών ενός κανονικού πολυγώνου με γωνία 170°.

6 Ποιο κανονικό πολύγωνο έχει:

α) γωνία ίση με την κεντρική του γωνία;

β) γωνία διπλάσια από την κεντρική του γωνία;

Αντιλαμβάνομαι

με προσομοίωση

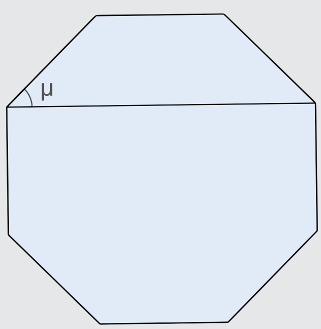
7 Ποιο κανονικό πολύγωνο έχει γωνία ίση με τα $\frac{2}{3}$ της ορθής;

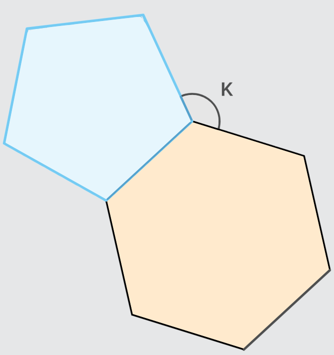
8 Υπάρχει κανονικό πολύγωνο με:

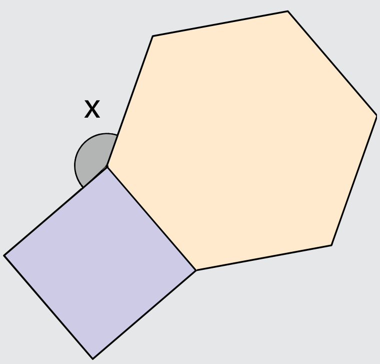
α) κεντρική γωνία ω = 25°;

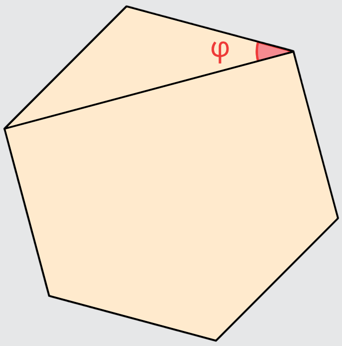
β) γωνία φ = 100°;

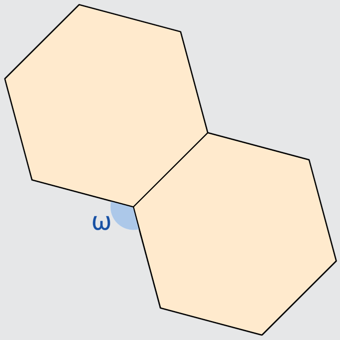
9 Υπολόγισε τις γωνίες που είναι σημειωμένες στα παρακάτω σχήματα, αν γνωρίζεις ότι όλα τα σχήματα είναι κανονικά πολύγωνα.







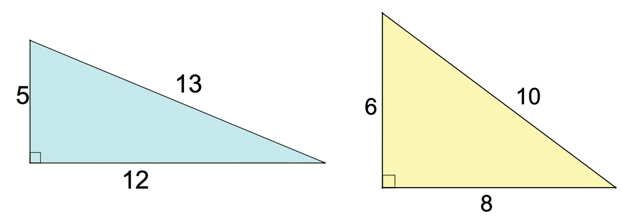




10 Υπολόγισε τη κεντρική γωνία ενός κανονικού 6-γώνου και ενός κανονικού 12-γώνου. Ποιο είναι το συμπέρασμα που προκύπτει για τα κανονικά πολύγωνα με διπλάσιες πλευρές;

1.3 | Πυθαγόρειο θεώρημα και αντίστροφο

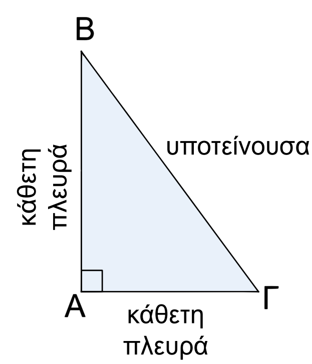
Υπολόγισε τα τετράγωνα των πλευρών στα παρακάτω ορθογώνια τρίγωνα. Ποια σχέση παρατηρείς μεταξύ των τετραγώνων των κάθετων πλευρών με το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς;



Ορθογώνιο τρίγωνο

Γνωρίζουμε ότι ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχει:

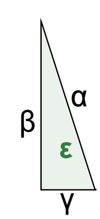
- μία ορθή γωνία ($\hat{A} = 90^\circ$) και δύο οξείες γωνίες ($\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$).
- δύο κάθετες πλευρές (ΑΒ και ΑΓ) και την πλευρά που βρίσκεται απέναντι από την ορθή γωνία που λέγεται **υποτείνουσα** (ΒΓ).



Σημείωση: Η υποτείνουσα είναι η μεγαλύτερη πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου.

Πυθαγόρειο θεώρημα

Έχουμε τέσσερα ίσα ορθογώνια τρίγωνα με κάθετες πλευρές **β**, **γ** και υποτείνουσα **α**, καθένα από τα οποία έχει εμβαδόν **ε** και τετράγωνα με πλευρές α, β και γ που, όπως γνωρίζουμε, έχουν εμβαδά α^2, β^2 και γ^2 αντίστοιχα.

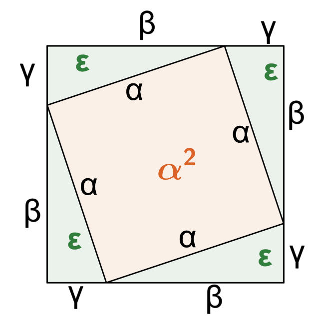


Α) Τοποθετούμε τα τέσσερα ορθογώνια τρίγωνα, ώστε οι κάθετες πλευρές τους να σχηματίζουν ένα μεγάλο τετράγωνο πλευράς $\beta + \gamma$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα:

Το τετράγωνο πλευράς $\beta + \gamma$ αποτελείται από τα 4 ίσα τρίγωνα και από ένα τετράγωνο πλευράς α, συνεπώς:

Το εμβαδόν του τετραγώνου πλευράς $\beta + \gamma$ είναι:

$$\alpha^2 + 4\varepsilon$$

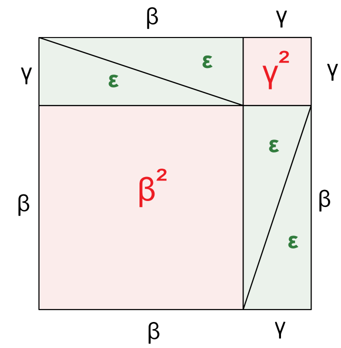


Β) Στη συνέχεια τοποθετούμε με άλλη διάταξη τα τρίγωνα, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα:

Το τετράγωνο πλευράς β + γ αποτελείται από τα 4 ίσα τρίγωνα και από δύο τετράγωνα πλευράς β και γ αντίστοιχα, συνεπώς:

Το εμβαδόν του τετραγώνου πλευράς β + γ είναι:

$$\beta^2 + \gamma^2 + 4\varepsilon$$



Σε κάθε περίπτωση, η επιφάνεια του μεγάλου τετραγώνου πλευράς β + γ παραμένει σταθερή, άρα θα πρέπει να ισχύει:

$$\alpha^2 + 4\varepsilon = \beta^2 + \gamma^2 + 4\varepsilon \quad \text{ή}$$

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

Αντιλαμβάνομαι

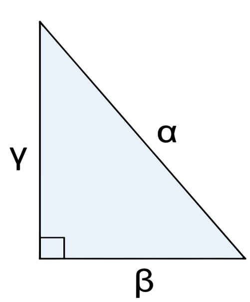
με προσομοίωση

Η σχέση αυτή συνδέει τις κάθετες πλευρές με την υποτείνουσα ενός ορθογωνίου τριγώνου και εκφράζει το **Πυθαγόρειο Θεώρημα**.

Η παραπάνω απόδειξη της σχέσης, με την ανακατανομή των σχημάτων, είναι γνωστή ως πυθαγόρεια απόδειξη καθώς αποδίδεται στον αρχαίο μαθηματικό **Πυθαγόρα** (570 π.Χ. - 495 π.Χ.).

Πυθαγόρειο Θεώρημα:

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας.



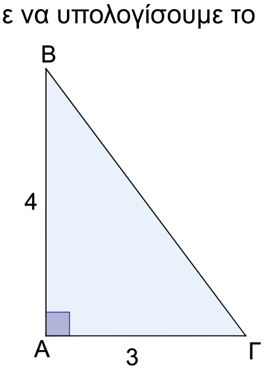
$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

Αντιλαμβάνομαι

με προσομοίωση

Αν εναι γνωστά τα μήκη δύο πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε το μήκος της τρίτης πλευράς, με τη βοήθεια του Πυθαγορείου θεωρήματος.

Παράδειγμα: Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) με κάθετες πλευρές ΑΒ = 4cm και ΑΓ = 3cm.
Να υπολογίσετε το μήκος της υποτείνουσας ΒΓ.



Λύση:

Για να υπολογίσουμε την πλευρά ΒΓ, εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ:

$$Β Γ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25.$$

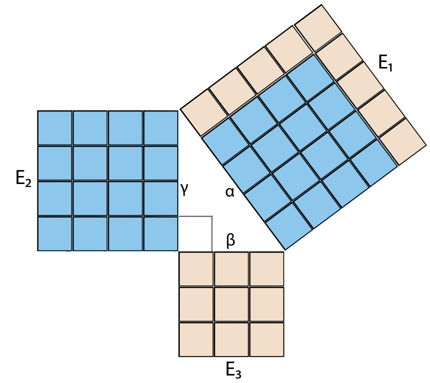
Άρα: $ΒΓ = \sqrt{25} = 5$cm.

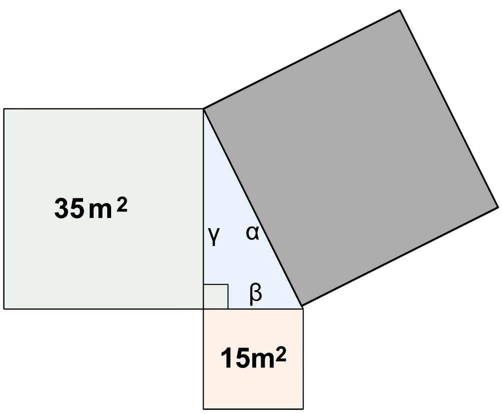
Παρατήρηση:

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο με πλευρές α, β και γ είναι ορθογώνιο.

Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα, το εμβαδόν του τετραγώνου που έχει πλευρά την υποτείνουσα α, είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων με πλευρές β και γ.

$$E_1 = E_2 + E_3 \quad \text{ή} \quad \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2.$$





Παράδειγμα:

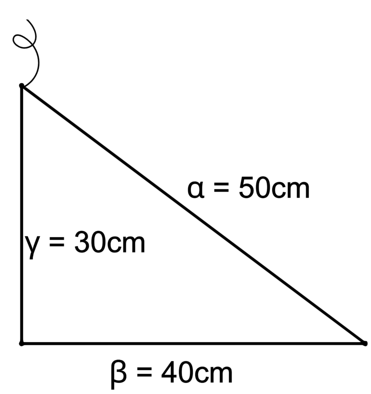
Αν το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά β είναι $E_2 = 15cm^2$ και το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά γ είναι $E_3 = 35cm^2$, να υπολογίσετε το εμβαδόν E_1 του τετραγώνου με πλευρά την υποτείνουσα α.

Λύση:

$$E_1 = E_2 + E_3 = 15cm^2 + 35cm^2 = 50cm^2$$

Αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος

Κόβουμε ένα σύρμα σε ευθύγραμμα τμήματα με μήκη $\alpha = 50cm$, $\beta = 40cm$ και $\gamma = 30cm$ και σχηματίζουμε τρίγωνο. Το τρίγωνο που σχηματίζεται με πλευρές τα α, β και γ είναι ορθογώνιο;



Ένας τρόπος για να εξετάσουμε αν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο είναι να ελέγξουμε αν οι πλευρές του τριγώνου επαληθεύουν το Πυθαγόρειο θεώρημα.

$$\text{Είναι } \alpha^2 = 50^2 = 2.500 \quad \text{και} \quad \beta^2 + \gamma^2 = 40^2 + 30^2 = 1.600 + 900 = 2.500.$$

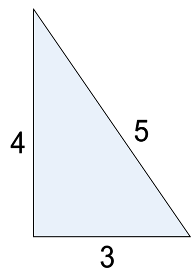
Επομένως ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα αφού $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$. Άρα το τρίγωνο είναι **ορθογώνιο**.

Το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος

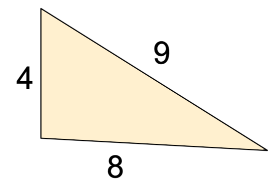
Αν σε ένα τρίγωνο, το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, τότε η γωνία που βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά είναι ορθή.

Παραδείγματα: Είναι ορθογώνια τα παρακάτω τρίγωνα;

α)



β)



Λύση:

α) Είναι $5^2 = 25$
και $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25.$ Επομένως ισχύει $5^2 = 3^2 + 4^2$.

Οπότε από το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος το τρίγωνο είναι **ορθογώνιο** με ορθή τη γωνία που βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά.

β) Είναι $9^2 = 81$
και $4^2 + 8^2 = 16 + 64 = 80.$ Επομένως $9^2 \neq 4^2 + 8^2$.

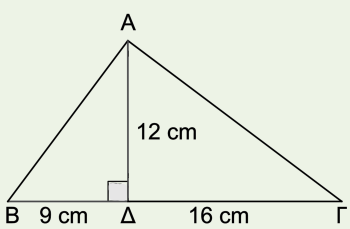
Οπότε από το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος το τρίγωνο **δεν** είναι ορθογώνιο.

Λυμένα Παραδείγματα

1. Στο διπλανό σχήμα το ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΓ. Δίνεται ΑΔ = 12cm, ΒΔ = 9cm και ΔΓ = 16cm.

α) Να υπολογίσετε τις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.



Λύση:

α)

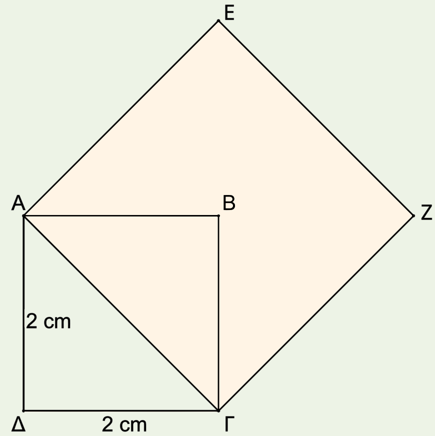
- Από το **Πυθαγόρειο θεώρημα** στο τρίγωνο ΑΒΔ, έχουμε:
  $ΑΒ^2 = ΒΔ^2 + ΑΔ^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225.$
  Άρα: $ΑΒ = \sqrt{225} = 15$cm.
- Από το **Πυθαγόρειο θεώρημα** στο τρίγωνο ΑΓΔ, έχουμε:
  $ΑΓ^2 = ΑΔ^2 + ΓΔ^2 = 12^2 + 16^2 = 144 + 256 = 400.$
  Άρα: $ΑΓ = \sqrt{400} = 20$cm.

β) Η πλευρά ΒΓ ισούται με 9cm + 16cm = 25cm.

Είναι $ΒΓ^2 = 25^2 = 625$
και $ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = 15^2 + 20^2 = 225 + 400 = 625.$ Επομένως ισχύει $ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2$.

Οπότε από το **αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος** το τρίγωνο ΑΒΓ είναι **ορθογώνιο** με ορθή τη γωνία $\hat{Α}$.

2. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 2cm. Με πλευρά τη διαγώνιο ΑΓ σχηματίζουμε τετράγωνο ΑΓΖΕ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ καθώς και το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΓΖΕ. Τι παρατηρείτε;



Λύση:

Το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι:

$$(ΑΒΓΔ) = 2^2 = 4cm^2.$$

Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ:

$$ΑΓ^2 = ΑΔ^2 + ΔΓ^2 = 2^2 + 2^2 = 4 + 4 = 8.$$

Άρα το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΓΖΕ είναι:

$$(ΑΓΖΕ) = ΑΓ^2 = 8cm^2.$$

Παρατηρούμε ότι το τετράγωνο ΑΓΖΕ που σχηματίζεται από τη διαγώνιο ΑΓ έχει **διπλάσιο** εμβαδόν από το ΑΒΓΔ.

Ασκήσεις / Προβλήματα

1

Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:

α) Πυθαγόρειο Θεώρημα:

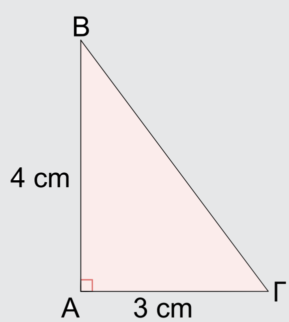
Σε κάθε ……………….. τρίγωνο το ……………….. των τετραγώνων των δύο ……………….. πλευρών είναι ίσο με το ……………….. της υποτείνουσας.

β) Αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος:

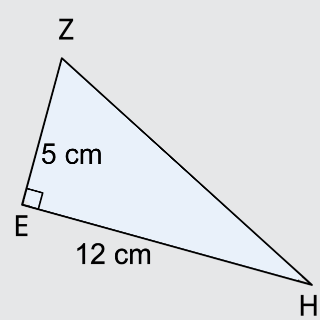
Αν σε ένα τρίγωνο, το τετράγωνο της ……………….. πλευράς είναι ίσο με το ……………….. των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, τότε η γωνία που βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά είναι ………………..

2

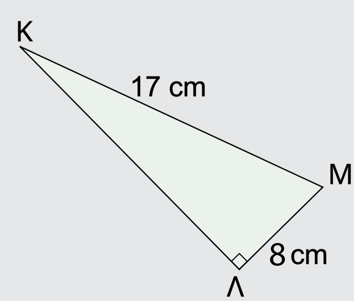
Υπολόγισε την άγνωστη πλευρά στα παρακάτω ορθογώνια τρίγωνα:



α.

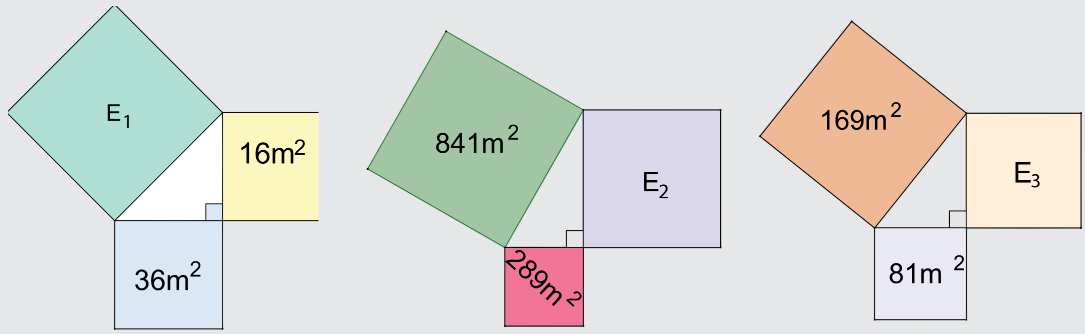


β.

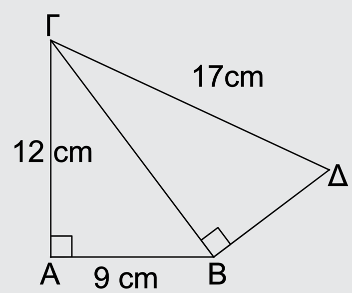


γ.

3 Βρες το εμβαδόν Ε του τετραγώνου στα παρακάτω σχήματα:



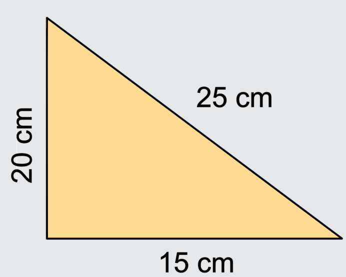
4 Υπολόγισε το μήκος της πλευράς ΒΔ του παρακάτω σχήματος.



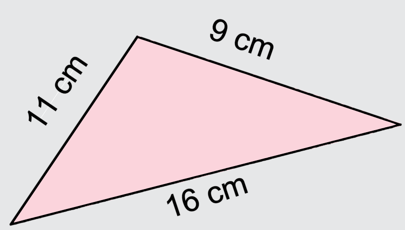
Εξασκούμαι
σε όσα έμαθα

5 Εξέτασε αν τα παρακάτω τρίγωνα είναι ορθογώνια.

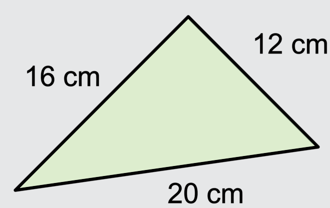
α)



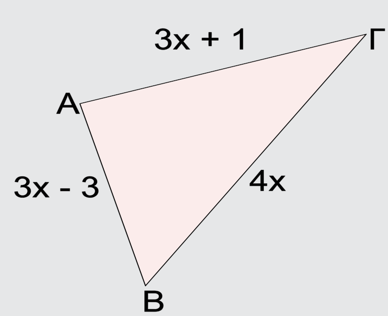
β)



γ)



6 Το παρακάτω τρίγωνο ΑΒΓ έχει περίμετρο 48cm. Υπολόγισε το μήκος κάθε πλευράς του και απόδειξε ότι η γωνία $\hat{A}$ είναι ορθή.

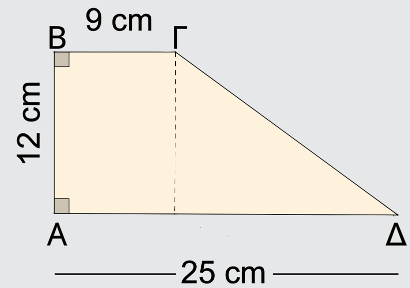


7 Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΔ=25cm και ΒΓ=9cm. Το ύψος του τραπεζίου είναι ΑΒ=12cm.

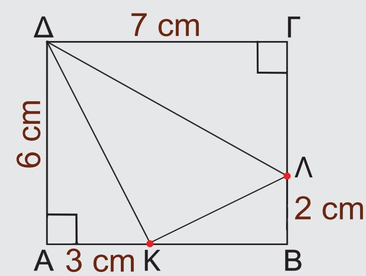
α) Υπολόγισε το μήκος της πλευράς ΓΔ.

β) Σχεδίασε τη διαγώνιο ΑΓ και υπολόγισε το μήκος της.

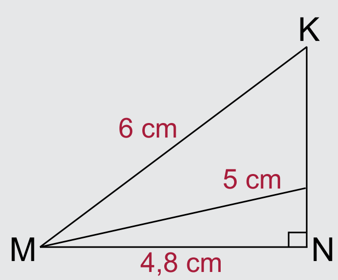
γ) Απόδειξε ότι το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ορθογώνιο.



8 Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος είναι ορθογώνιο με πλευρές 6cm και 7cm. Αν γνωρίζουμε ότι ΑΚ = 3cm και ΒΛ = 2cm, απόδειξε ότι το τρίγωνο ΚΛΔ είναι ορθογώνιο.



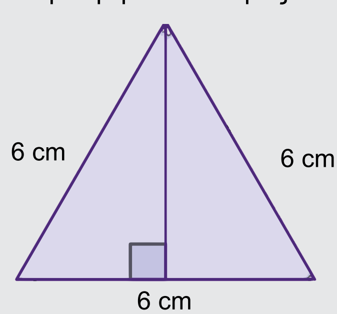
9 Στο παρακάτω σχήμα, υπολόγισε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ.



Εξασκούμαι

σε όσα έμαθα

10 Υπολόγισε το ύψος σε ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 6cm.



11 Σχεδίασε ένα τρίγωνο ΑΒΓ, με πλευρές α = 4,5cm, β = 6cm και γ = 7,5cm. Είναι το τρίγωνο ΑΒΓ ορθογώνιο;

Ανακεφαλαίωση (Γεωμετρία του Επιπέδου - Μέτρο Γωνιών)

1. Επίκεντρη γωνία

Αν η κορυφή μιας γωνίας είναι το κέντρο ενός κύκλου, τότε η γωνία λέγεται επίκεντρη. Το μέτρο της επίκεντρης γωνίας ισούται με το μέτρο του αντίστοιχου τόξου της.

2. Εγγεγραμμένη γωνία

Αν η κορυφή μιας γωνίας είναι σημείο του κύκλου και οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο, τότε η γωνία λέγεται εγγεγραμμένη γωνία στον κύκλο. Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης που έχει ίσο αντίστοιχο τόξο.

- Κάθε εγγεγραμμένη γωνία έχει μέτρο ίσο με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της.
- Οι εγγεγραμμένες γωνίες ενός κύκλου που βαίνουν στο ίδιο τόξο ή σε ίσα τόξα είναι μεταξύ τους ίσες.
- Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.

3. Κανονικά πολύγωνα

Ένα πολύγωνο λέγεται κανονικό, όταν έχει όλες τις πλευρές του ίσες και όλες τις γωνίες του ίσες.

- Κεντρική γωνία κανονικού ν – γώνου: $\omega = \frac{360°}{\nu}$.
- Γωνία φ κανονικού ν – γώνου: $\varphi = 180^{o} - \omega$.

4. Πυθαγόρειο θεώρημα $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$.

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας.

5. Αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος

Αν σε ένα τρίγωνο, το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, τότε η γωνία που βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά είναι ορθή.

Αντιλαμβάνομαι
με προσομοίωση

Αντιλαμβάνομαι
με προσομοίωση

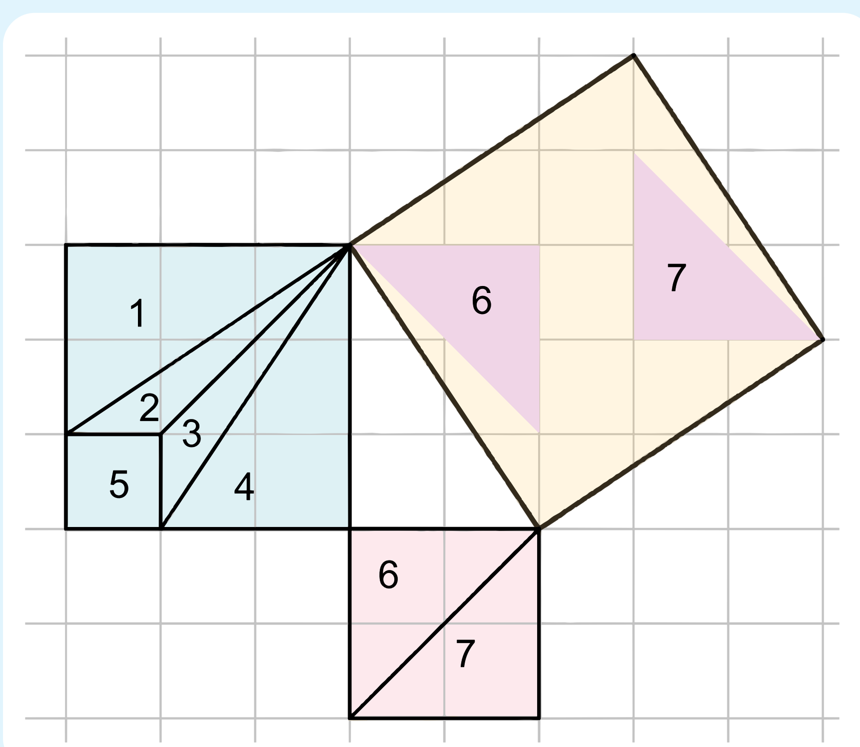
Αυτοαξιολόγηση (Γεωμετρία του Επιπέδου)

Α. Χαρακτήρισε σωστές ή λανθασμένες τις προτάσεις που ακολουθούν βάζοντας ένα **x** στην κατάλληλη θέση.

		Σωστό	Λάθος
1.	Ο κύκλος είναι ένα τόξο 360°.		
2.	Μία εγγεγραμμένη γωνία 50° βαίνει σε τόξο 25°.		
3.	Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο ισούται με 90°.		
4.	Η άκρη του λεπτοδείκτη ενός ρολογιού σε 45 λεπτά διαγράφει γωνία 90°.		
5.	Μία εγγεγραμμένη γωνία έχει την κορυφή της στο κέντρο του κύκλου.		
6.	Η κεντρική γωνία ενός κανονικού 6-γώνου ισούται με 60°.		
7.	Αν η γωνία ενός κανονικού πολυγώνου είναι 72°, τότε η κεντρική του γωνία ισούται με 108°.		
8.	Υπάρχει κανονικό πολύγωνο με κεντρική γωνία 40°.		
9.	Υπάρχει κανονικό πολύγωνο με γωνία 100°.		
10,	Ένα τρίγωνο με μήκη πλευρών 4cm, 5cm, και 6cm είναι ορθογώνιο.		
11.	Η υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές ίσες με 1 μονάδα έχει μήκος $\sqrt{2}$ μονάδες.		

Β. Απόδειξη του Πυθαγορείου θεωρήματος με Ταγκράμ.

Μετακίνησε όλα τα κομμάτια του πράσινου τετραγώνου ώστε μαζί με αυτά του ροζ, να καλύψουν το τετράγωνο της υποτείνουσας.



Σε αυτό το σημείο, θα πρέπει να είσαι σε θέση να ικανοποιείς όλους τους προσδοκώμενους μαθησιακούς στόχους. Γύρνα στην αρχή της θεματικής ενότητας και σημείωσε ✓ στα αντίστοιχα σημεία. Υπάρχουν στόχοι που αισθάνεσαι ότι δεν έχεις ικανοποιήσει πλήρως;

ΕΠΕΚΤΕΙΝΩ τις γνώσεις μου

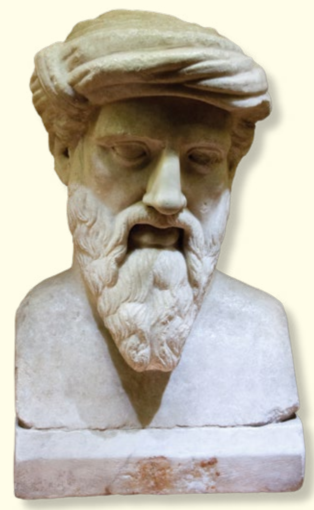
Μελετώ
το συγκεκριμένο θέμα

Ο Πυθαγόρας και το Θεώρημά του

Το Πυθαγόρειο Θεώρημα είναι ένα από τα πιο γνωστά θεωρήματα στα Μαθηματικά. Αποδίδεται στον Πυθαγόρα τον Σάμιο, έναν από τους πιο σημαντικούς αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς και φιλοσόφους, ο οποίος πιθανολογείται ότι έζησε τον 6ο αιώνα π.Χ. Το θεώρημα περιγράφει τη σχέση μεταξύ των πλευρών ενός ορθογώνιου τριγώνου και έχει διαδραματίσει κεντρικό ρόλο στην εξέλιξη των μαθηματικών.

Πυθαγόρας ο Σάμιος

Ο Πυθαγόρας γεννήθηκε στη Σάμο περίπου το 570 π.Χ. και ίδρυσε μια σχολή που συνδύαζε τη διδασκαλία της Φιλοσοφίας με τη Θρησκεία και τα Μαθηματικά. Οι μαθητές του, οι οποίοι ονομάζονταν Πυθαγόρειοι, ανέπτυξαν και κατέγραψαν πολλές σημαντικές μαθηματικές προτάσεις, με το Πυθαγόρειο Θεώρημα να είναι το πιο σπουδαίο επίτευγμα τους.

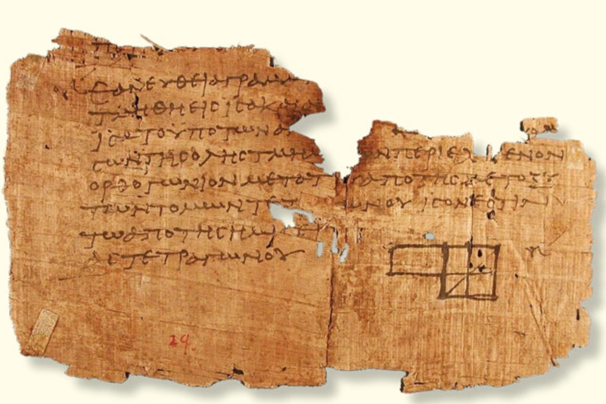


Μαρμάρινη προτομή του Πυθαγόρα του Σάμιου.

Το Πυθαγόρειο Θεώρημα και η ιστορική του εξέλιξη

Με την πάροδο του χρόνου, το θεώρημα αναπτύχθηκε περαιτέρω από άλλους σημαντικούς μαθηματικούς, όπως ο Ευκλείδης, ο οποίος διατύπωσε μια αυστηρή απόδειξη του Πυθαγορείου Θεωρήματος και ο Ινδός Bhaskara II, που έδωσε μια άλλη απόδειξη του Πυθαγορείου θεωρήματος, που βασίζεται στη διαίρεση ενός ορθογωνίου τριγώνου από το ύψος του σε δύο τρίγωνα όμοια με το αρχικό και μεταξύ τους

Το Πυθαγόρειο Θεώρημα παραμένει μέχρι σήμερα ένα από τα πιο γνωστά μαθηματικά θεωρήματα, όχι μόνο λόγω της ευρύτητας των εφαρμογών του, αλλά και λόγω της απλότητας και της ομορφιάς του. Η κληρονομιά του Πυθαγόρα και των Πυθαγορείων συνεχίζει να επηρεάζει την μαθηματική σκέψη και την επιστημονική πρόοδο, αποτελώντας ένα διαχρονικό σύμβολο της ανθρώπινης λογικής και της μαθηματικής ευφυΐας.



Ο Ευκλείδης, ένας από τους σημαντικότερους μαθηματικούς της αρχαιότητας, περιέλαβε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στα «Στοιχεία» του (περίπου 300 π.Χ.), το αρχαιότερο και πιο επιδραστικό βιβλίο γεωμετρίας. Στα «Στοιχεία», ο Ευκλείδης έδωσε μια αυστηρή μαθηματική απόδειξη του θεωρήματος, εδραιώνοντάς το ως θεμελιώδη αρχή της γεωμετρίας (εικόνα: απόσπασμα από τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη).

ΜΗΚΟΣ B.2

Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε το μήκος του κύκλου και των τόξων του, ανακαλύπτοντας πώς να υπολογίζουμε αυτά τα μεγέθη με ακρίβεια. Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο για το μήκος του κύκλου και θα εξερευνήσουμε πώς τα διάφορα μέρη του κύκλου σχετίζονται μεταξύ τους.

Πώς μπορείς να εφαρμόσεις αυτές τις γνώσεις στην καθημερινότητα, όπως στην αρχιτεκτονική;

Είσαι έτοιμος να εξοικειωθείς με τη μελέτη του κύκλου;

Στόχοι Ενότητας

- ☐ Υπολογίζω τα μήκη των τόξων ως μέρη του μήκους του κύκλου τους.
- ☐ Χρησιμοποιώ τον τύπο για το μήκος κύκλου στην επίλυση προβλημάτων.

Μαθήματα Ενότητας

2.1 | Μήκος κύκλου

Σε ένα χαρτί σχεδιάζουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ μήκους 10 εκ. και βρίσκουμε το μέσο του Γ. Με τη βοήθεια ενός χάρακα, κέντρο το Ο και ακτίνα το ΓΑ, σχεδιάζουμε έναν κύκλο. Για να βρούμε το μήκος του κύκλου που σχεδιάσαμε, παίρνουμε ένα κομμάτι νήμα και το κόβουμε έτσι ώστε να περιγράφει περίπου το μήκος όλου του κύκλου. Στη συνέχεια μετράμε το μήκος του νήματος και βρίσκουμε ότι είναι 31,4 εκ.

Παρατηρούμε ότι το πηλίκο $\dfrac{\text{μήκος κύκλου}}{\text{διάμετρος}} \simeq 3,14$.

Σε ένα ψηφιακό περιβάλλον επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία, με μεγαλύτερη ακρίβεια.

Παρατηρούμε ότι κάθε φορά βρίσκουμε

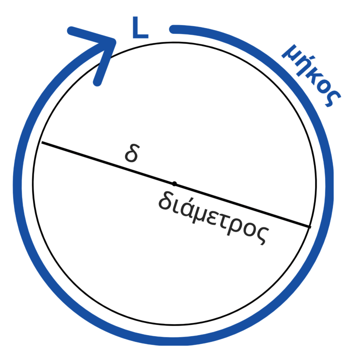
$$\frac{(\text{μήκος κύκλου})_1}{\text{διάμετρος}_1} = \frac{(\text{μήκος κύκλου})_2}{\text{διάμετρος}_2} = \frac{(\text{μήκος κύκλου})_3}{\text{διάμετρος}_3} \simeq 3,14.$$

Δηλαδή ο λόγος του μήκους του κύκλου προς τη διάμετρό του είναι πάντα σταθερός και ισούται κατά προσέγγιση με τον αριθμό 3,14.

Ο αριθμός π

Αποδεικνύεται ότι ο λόγος του μήκους του κύκλου προς τη διάμετρό του είναι πάντα σταθερός $\left(\frac{L}{\delta} \simeq 3,14\right)$ και ανεξάρτητος από το μέγεθος του κύκλου.

Ο αριθμός αυτός συμβολίζεται με **π**, που είναι το αρχικό της λέξης ***π**εριφέρεια,* και είναι ένας άρρητος αριθμός, δηλαδή έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία χωρίς κάποιο τμήμα επαναλαμβανομένων δεκαδικών ψηφίων.



$$\pi = 3,1415926\ldots$$

Προσπάθησε το κι εσύ! Τύλιξε ένα νήμα γύρω από τον παραπάνω κύκλο και μέτρησε το μήκος του. Στη συνέχεια, μέτρησε τη διάμετρο του κύκλου και υπολόγισε τον λόγο του μήκους του νήματος προς τη διάμετρο.

Μήκος κύκλου

Συμβολίζουμε με **ρ** την ακτίνα, **δ** τη διάμετρο και **L** το μήκος ενός κύκλου. Γνωρίζουμε ότι η διάμετρος είναι διπλάσια της ακτίνας ($\delta = 2 \cdot \rho$).

Το **μήκος του κύκλου L** υπολογίζεται από τη σχέση:

$$L = \pi \cdot \delta \qquad \text{ή} \qquad L = 2\pi \cdot \rho$$

- Στις εφαρμογές και ασκήσεις θα χρησιμοποιούμε για τον αριθμό **π** την προσεγγιστική τιμή **3,14**.

Παράδειγμα: Το μήκος του κύκλου με ακτίνα $\rho = 2\text{cm}$ είναι:

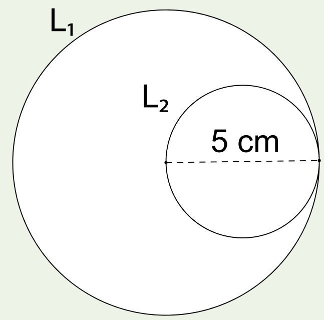
$$L = 2\pi \cdot \rho = 2 \cdot 3,14 \cdot 2 = 12,56\text{cm}.$$

Λυμένα Παραδείγματα

1. Να υπολογίσετε το μήκος του κύκλου που έχει:

α) ακτίνα $\rho = 5cm$.

β) διάμετρο $\delta = 5cm$.



Λύση:

α) $L_1 = 2\pi \cdot \rho = 2 \cdot 3,14 \cdot 5 = 31,4cm$.

β) $L_2 = \pi \cdot \delta = 3,14 \cdot 5 = 15,7cm$.

Παρατήρηση: Είναι $L_1 = 2 \cdot L_2$.

2. Να βρείτε την ακτίνα του κύκλου που έχει μήκος $L = 37,68cm$.

Λύση: Από τον τύπο $L = 2\pi \cdot \rho$, με αντικατάσταση έχουμε:

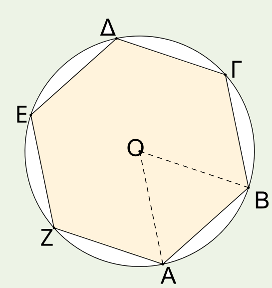
$$37,68 = 2 \cdot 3,14 \cdot \rho$$

$$37,68 = 6,28 \cdot \rho$$

$$\rho = \frac{37,68}{6,28} = 6cm.$$

Αντιλαμβάνομαι με προσομοίωση

3. Στον κύκλο του διπλανού σχήματος έχουμε εγγράψει ένα κανονικό εξάγωνο πλευράς 3cm. Να υπολογίσετε το μήκος του κύκλου και να το συγκρίνετε με την περίμετρο του εξαγώνου.



Λύση:

Η κεντρική γωνία του κανονικού εξαγώνου ισούται με $\omega = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$.

Είναι $OA = OB = \rho$ (ακτίνες), άρα το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές με $A\hat{O}B = 60^\circ$, οπότε από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου προκύπτει ότι $O\hat{A}B = O\hat{B}A = 60^\circ$.

Συνεπώς το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισόπλευρο με $OA = OB = AB = 3cm (= \rho)$.

Το μήκος του κύκλου είναι: $L = 2\pi \cdot \rho = 2 \cdot 3,14 \cdot 3 = 18,84cm$.

Η περίμετρος του εξαγώνου είναι: $6 \cdot 3cm = 18cm$.

4. Αν αυξήσουμε την ακτίνα ρ ενός κύκλου κατά 1cm, πόσο μεγαλύτερο θα γίνει το μήκος του L;

Λύση:

Αν L' είναι το νέο μήκος του κύκλου, τότε:

$$L' = 2\pi \cdot (\rho + 1cm) = 2\pi \cdot \rho + 2\pi \cdot 1cm = L + 2 \cdot 3,14 \cdot 1cm = L + 6,28cm.$$

Άρα $L' = L + 6,28cm$, δηλαδή το μήκος του θα γίνει 6,28cm μεγαλύτερο.

Ασκήσεις / Προβλήματα

1 Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα:

Ακτίνα ρ (cm)	2	4				
Διάμετρος δ (cm)			12	20		
Μήκος κύκλου L (cm)					43,96	94,2

2 Επίλεξε τη σωστή απάντηση:

α) Αν η ακτίνα ενός κύκλου αυξηθεί κατά 1cm, τότε το μήκος του αυξάνεται κατά:

i. 1cm ii. 2cm iii. 3,14cm iv. 6,28cm

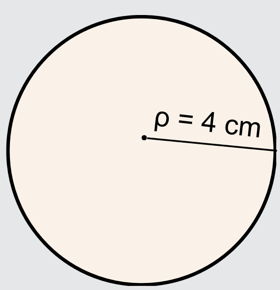
β) Αν η διάμετρος ενός κύκλου αυξηθεί κατά 1cm, τότε το μήκος του αυξάνεται κατά:

i. 1cm ii. 2cm iii. 3,14cm iv. 6,28cm

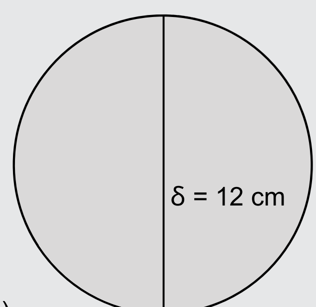
γ) Αν διπλασιάσουμε την ακτίνα ενός κύκλου, τότε το μήκος του:

i. διπλασιάζεται ii. τριπλασιάζεται iii. τετραπλασιάζεται iv. παραμένει σταθερή

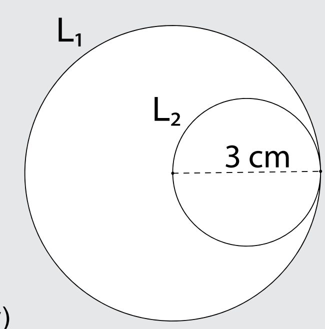
3 Βρες το μήκος των παρακάτω κύκλων:



α)

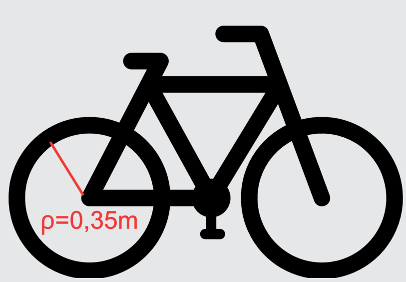


β)



γ)

4 Η ακτίνα των τροχών ενός ποδηλάτου, το οποίο κινείται ευθύγραμμα, είναι 0,35m. Βρες πόσο διάστημα θα έχει διανύσει το ποδήλατο όταν οι τροχοί του ολοκληρώσουν 100 στροφές.



Αντιλαμβάνομαι με προσομοίωση

5 α) Αν οι ακτίνες δύο κύκλων διαφέρουν κατά 5cm, βρες πόσο διαφέρουν τα μήκη τους.

β) Αν τα μήκη δύο κύκλων διαφέρουν κατά 6,28cm, βρες πόσο διαφέρουν οι ακτίνες τους.

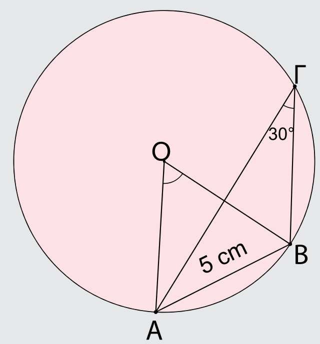
6 Ένας κύκλος έχει μήκος 1cm περισσότερο από έναν άλλο κύκλο. Πόσο μεγαλύτερη είναι η ακτίνα του;

7 Αν ο λόγος των διαμέτρων δύο κύκλων είναι $\frac{1}{2}$, βρες τον λόγο που σχηματίζουν:

α) οι ακτίνες τους.

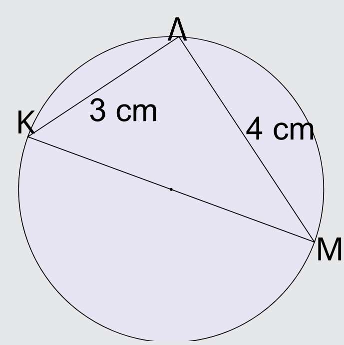
β) τα μήκη τους.

8 Βρες το μήκος του κύκλου του παρακάτω σχήματος.



Εξασκούμαι σε όσα έμαθα

9 Βρες το μήκος του κύκλου του παρακάτω σχήματος, αν γνωρίζεις ότι η ΚΜ είναι διάμετρος.



10 Η διαφορά των περιμέτρων 2 κύκλων είναι 12π. Αν γνωρίζεις ότι η μία ακτίνα είναι 4πλάσια της άλλης, βρες τις ακτίνες των 2 κύκλων και έπειτα σχεδίασέ τους.

Χρησιμοποιώ

11 Βρες ποια είναι η περίμετρος της Γης αν γνωρίζουμε ότι έχει ακτίνα ίση με 6.371 χιλιόμετρα. Πόσο χρόνο χρειάζεται ένα αεροπλάνο να κάνει τον γύρο της Γης, αν κινείται με ταχύτητα 934 $\frac{Km}{h}$;

Αξιοποιώ την αριθμομηχανή

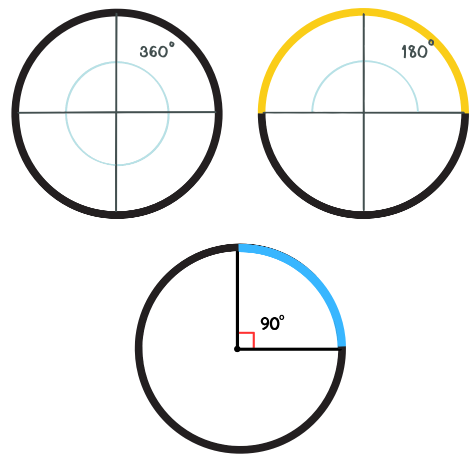
2.2 | Μήκος τόξου

Εξερευνώ

Το μήκος του διπλανού κύκλου είναι 10cm.

- Το μήκος του ημικυκλίου είναι … cm.

- Το μήκος ενός τεταρτοκυκλίου είναι … cm.



Πως θα μπορούσαμε να βρούμε το μήκος ενός τόξου 60°; Ενός τόξου μ° μοιρών;

Μήκος τόξου

Το μήκος του **κύκλου**, που είναι ένα τόξο 360°, είναι $L = 2\pi\rho$, συνεπώς:

- το μήκος ενός **ημικυκλίου** (που είναι τόξο 180°) είναι $\ell = \frac{2\pi\rho}{2}$.
- το μήκος ενός **τεταρτοκυκλίου** (που είναι τόξο 90°) είναι $\ell = \frac{2\pi\rho}{4}$.

Γενικά:

- Ένας κύκλος, δηλαδή ένα τόξο 360°, έχει μήκος $L = 2\pi\rho$.

- Ένα τόξο μ° θα έχει μήκος $\ell = ;$

Τα ποσά είναι **ανάλογα** οπότε με την απλή μέθοδο των τριών έχουμε ότι:

$$\frac{360}{\mu} = \frac{2\pi\rho}{\ell}$$

$$\text{ή} \quad \ell = 2\pi\rho \cdot \frac{\mu}{360}.$$

Αντιλαμβάνομαι

με προσομοίωση

Το **μήκος ενός τόξου** μ μοιρών ισούται με: $\ell = 2\pi\rho \cdot \frac{\mu}{360}$.

Παράδειγμα: Ένας κύκλος έχει ακτίνα $\rho = 5$cm. Να βρείτε το μήκος τόξου 18°.

Λύση: $\ell = 2\pi\rho \cdot \frac{\mu}{360} = 2 \cdot 3,14 \cdot 5 \cdot \frac{18}{360} = 1,57$cm.

Λυμένα Παραδείγματα

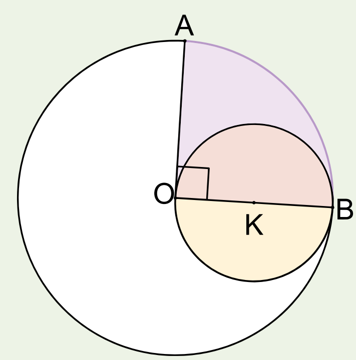
1. Η ακτίνα ενός κύκλου είναι $\rho = 6cm$. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Μέτρο τόξου μ (μοίρες)	360°	180°	90°	60°	30°	10°
Μήκος τόξου ℓ (cm)						

Λύση: Ο πίνακας συμπληρωμένος φαίνεται παρακάτω.

Μέτρο τόξου μ (μοίρες)	360°	180°	90°	60°	30°	12°
Μήκος τόξου ℓ (cm)	37,68 cm	18,84cm	12,56cm	6,28cm	2,512cm	1,256cm
	$2\pi\cdot\rho$ (κύκλος)	$2\pi\rho\cdot\frac{180}{360}=\pi\rho$ (ημικύκλιο)	$2\pi\rho\cdot\frac{90}{360}=\frac{\pi\rho}{2}$ (τεταρτοκύκλιο)	$2\pi\rho\cdot\frac{60}{360}=\frac{\pi\rho}{3}$	$2\pi\rho\cdot\frac{30}{360}=\frac{\pi\rho}{6}$	$2\pi\rho\cdot\frac{12}{360}=\frac{\pi\rho}{15}$

2. Αν $OA = 2cm$. Να υπολογίσετε τα μήκη των τόξων $\overset{\frown}{OB}$ του κύκλου (Κ,ΚΟ) και $\overset{\frown}{AB}$ του κύκλου (Ο,ΟΑ). Τι παρατηρείτε;



Λύση:

Ο κύκλος ($K, KO = 1cm$) έχει μήκος:

$L_2 = 2\pi\cdot\rho = 2\cdot 3,14\cdot 1 = 6,28cm.$

Το μήκος του ημικυκλίου $\overset{\frown}{OB}$ είναι: $\ell_{\overset{\frown}{OB}} = \frac{6,28}{2} = 3,14cm.$

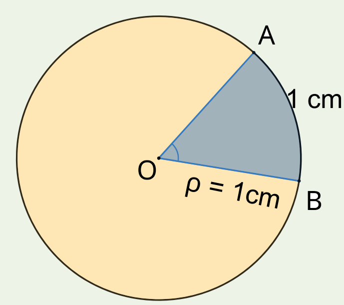
Ο κύκλος ($O, OA = 2cm$) έχει μήκος:

$L_1 = 2\pi\cdot\rho = 2\cdot 3,14\cdot 2 = 12,56cm.$

Το μήκος του τεταρτοκυκλίου $\overset{\frown}{AB}$ είναι: $\ell_{\overset{\frown}{AB}} = \frac{12,56}{4} = 3,14cm$

Παρατηρούμε ότι τα τόξα $\overset{\frown}{OA}$ και $\overset{\frown}{AB}$ έχουν το ίδιο μήκος. Ωστόσο τα τόξα δεν είναι ίσα καθώς αντιστοιχούν σε κύκλους με διαφορετικές ακτίνες.

3. Ένας κύκλος έχει ακτίνα 1cm. Το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{AB}$ είναι ίσο με την ακτίνα ρ. Να βρείτε το μέτρο μ (σε μοίρες) του τόξου $\overset{\frown}{AB}$.



Λύση:

Το μήκος του κύκλου είναι**:** $L = 2\pi\cdot\rho = 2\cdot 3,14\cdot 1 = 6,28cm.$

Το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{AB}$ είναι ίσο με 1cm.

Το μήκος ενός τόξου μ μοιρών ισούται με: $\ell = 2\pi\rho\cdot\frac{\mu}{360}$, άρα:

$$1 = 2\pi\cdot 1\cdot\frac{\mu}{360}$$

$$\text{ή}\quad 1 = \pi\cdot\frac{\mu}{180}$$

$$\text{ή}\quad \mu = \frac{180}{\pi} \simeq 57,3^\circ.$$

Σημείωση: Ένα τόξο $\overset{\frown}{AB}$ που έχει μήκος ίσο με την ακτίνα ρ ενός κύκλου λέγεται τόξο ενός **ακτινίου** ή 1 **rad** και χρησιμοποιείται ως μονάδα μέτρησης τόξων.

Ασκήσεις / Προβλήματα

1 Η ακτίνα ενός κύκλου είναι $\rho = 36cm$. Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα:

Μέτρο τόξου μ (μοίρες)	360^o	180^o	90^o	60^o	30^o	10^o
Μήκος τόξου ℓ (cm)						

2 Ένας κύκλος έχει μήκος $L = 25,12cm$.

Βρες το μήκος ενός τόξου που αντιστοιχεί σε γωνία 30^o.

Αξιοποιώ την αριθμομηχανή

3 Ένα τόξο 60^o ενός κύκλου, έχει μήκος $\ell = 12,56cm$. Βρες την ακτίνα του κύκλου.

4 Η ακτίνα ενός κύκλου είναι $\rho = 10cm$. Βρες την επίκεντρη γωνία στην οποία αντιστοιχεί τόξο μήκους 15,7cm.

5 Βρες το μήκος ημικυκλίου και τεταρτοκυκλίου ακτίνας $\frac{3}{\pi}$.

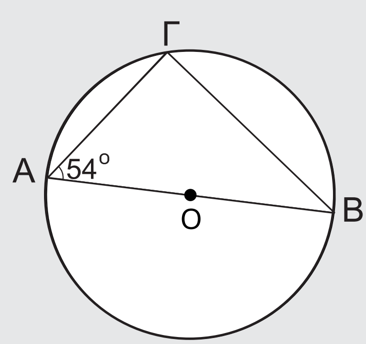
6 Ένας κύκλος έχει περίμετρο 20π.

α) Βρες την ακτίνα του και το μήκος τόξου $30°$ του κύκλου.

β) Βρες τις μοίρες στις οποίες αντιστοιχεί ένα τόξο του κύκλου μήκους 2π.

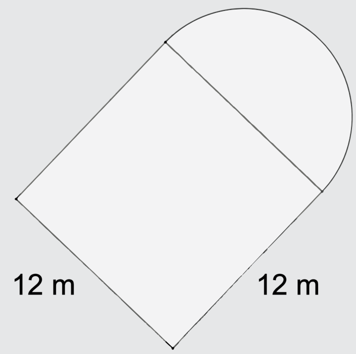
Αξιοποιώ την αριθμομηχανή

7 Ο κύκλος του διπλανού σχήματος έχει διάμετρο $AB = 5cm$. Υπολόγισε τα μήκη των τόξων $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{A\Gamma}$ και $\overset{\frown}{B\Gamma}$.



Αξιοποιώ την αριθμομηχανή

8 Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η κάτοψη μιας πλατείας, που αποτελείται από ένα τετράγωνο πλευράς 12m και από ένα ημικύκλιο την οποία και θέλουμε να περιφράξουμε με έναν ξύλινο φράκτη κόστους 32€ ανά μέτρο. Υπολόγισε το συνολικό κόστος της περίφραξης.



Αξιοποιώ την αριθμομηχανή

9 Σε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ, $\hat{A} = 90^\circ$), είναι ΑΒ = 3cm.

α) Βρες όλες τις πλευρές και τις γωνίες του τριγώνου.

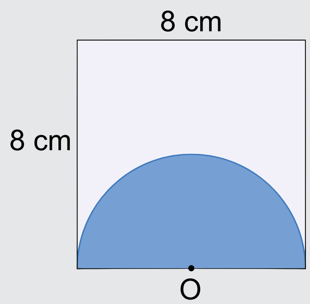
β) Με κέντρο το Β σχεδίασε κύκλο με ακτίνα ΑΒ που τέμνει τη ΒΓ στο Δ.

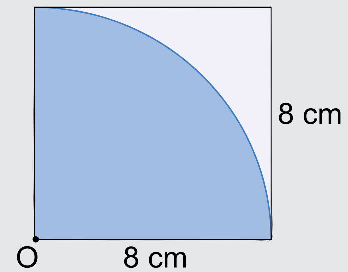
i. Υπολόγισε το μήκος του κύκλου;

ii. Υπολόγισε το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{ΑΔ}$..

Χρησιμοποιώ

10 Βρες το μήκος του τόξου που σχηματίζεται στα παρακάτω τετράγωνα πλευράς α = 8cm.





Εξασκούμαι σε όσα έμαθα

ΕΠΕΚΤΕΙΝΩ τις γνώσεις μου

Μελετώ το συγκεκριμένο θέμα

Ο αριθμός π

Ο αριθμός π είναι μια μαθηματική σταθερά που αντιπροσωπεύει την αναλογία της περιφέρειας ενός κύκλου προς τη διάμετρό του. Ο αριθμός π είναι μια από τις πιο γνωστές σταθερές στα μαθηματικά και έχει μελετηθεί για χιλιάδες χρόνια.

Αρχαία Ιστορία

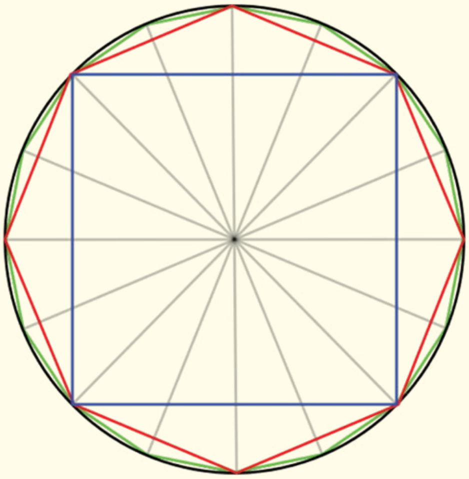
Οι πρώτες καταγραφές του αριθμού π προέρχονται από την αρχαία Βαβυλώνα και την Αίγυπτο, όπου οι μαθηματικοί χρησιμοποιούσαν κατά προσέγγιση τιμές για τους υπολογισμούς τους. Για παράδειγμα, οι Βαβυλώνιοι γύρω στο 1900 π.Χ. χρησιμοποίησαν την προσέγγιση 3,125 για τον αριθμό π, ενώ οι αρχαίοι Αιγύπτιοι, όπως φαίνεται στο Πάπυρο Rhind (1650 π.Χ.), χρησιμοποίησαν την τιμή 3,1605.

Η μεγάλη πυραμίδα στην Γκίζα, κατασκευασμένη το διάστημα 2589–2566 π.Χ., χτίστηκε με περίμετρο περίπου 1,760 πήχεις και ύψος περίπου 280 πήχεις· η αναλογία 1760 / 280 ≈ 6,2857 είναι περίπου ίση με 2π ≈ 6,2832. Με βάση αυτή την αναλογία, κάποιοι Αιγυπτιολόγοι κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι οι οικοδόμοι της πυραμίδας είχαν γνώση του π και σκόπιμα σχεδίασαν την πυραμίδα με ενσωματωμένες τις αναλογίες του κύκλου.

Αρχαία Ελλάδα

Στην αρχαία Ελλάδα, οι μαθηματικοί μελέτησαν τον αριθμό π συστηματικά. Ο Αρχιμήδης (287-212 π.Χ.) ήταν ο πρώτος που απέδειξε ότι ο αριθμός π είναι μεταξύ $3\frac{1}{7}$ (περίπου 3,1429) και $3\frac{10}{71}$ (περίπου 3,1408) χρησιμοποιώντας μια μέθοδο που βασίζεται σε περιγεγραμμένα και εγγεγραμμένα πολύγωνα. Η προσέγγισή του θεωρούνταν ως η ακριβέστερη για πολλούς αιώνες.

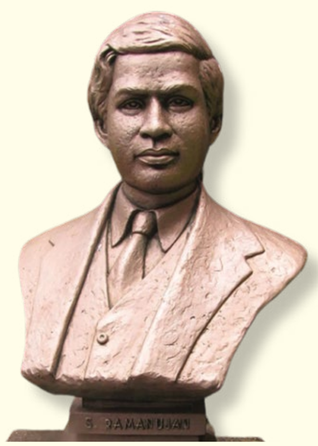
Ο πρώτος καταγεγραμμένος αλγόριθμος για τον αυστηρό υπολογισμό της τιμής του π ήταν μια γεωμετρική προσέγγιση χρησιμοποιώντας πολύγωνα, που αξιοποιήθηκε γύρω στο 250 π.Χ. από τον Έλληνα μαθηματικό Αρχιμήδη. Αυτός ο αλγόριθμος κυριάρχησε για πάνω από 1.000 χρόνια, και ως εκ τούτου το π μερικές φορές αναφέρεται ως «σταθερά του Αρχιμήδη».



Μεσαίωνας

Κατά τον Μεσαίωνα, οι Ινδοί και οι Κινέζοι μαθηματικοί συνέβαλαν σημαντικά στην προσέγγιση του αριθμού π. Ο Κινέζος μαθηματικός Zu Chongzhi (429-501 μ.Χ.) προσδιόρισε την τιμή του π ως 355/113, μια προσέγγιση που παρέμεινε η καλύτερη για περίπου 1.000 χρόνια.

Ο Κινέζος μαθηματικός Zu Chongzhi, γύρω στο 480 μ.Χ., υπολόγισε ότι π ≈ 355/113. Έχοντας βρει σωστά τα πρώτα επτά δεκαδικά ψηφία, αυτή η τιμή του π Με μια σωστή τιμή για τα επτά πρώτα δεκαδικά ψηφία, αυτή η τιμή (3,141592920...) παρέμεινε η πιο ακριβής προσέγγιση του π αριθμού για τα επόμενα 800 χρόνια



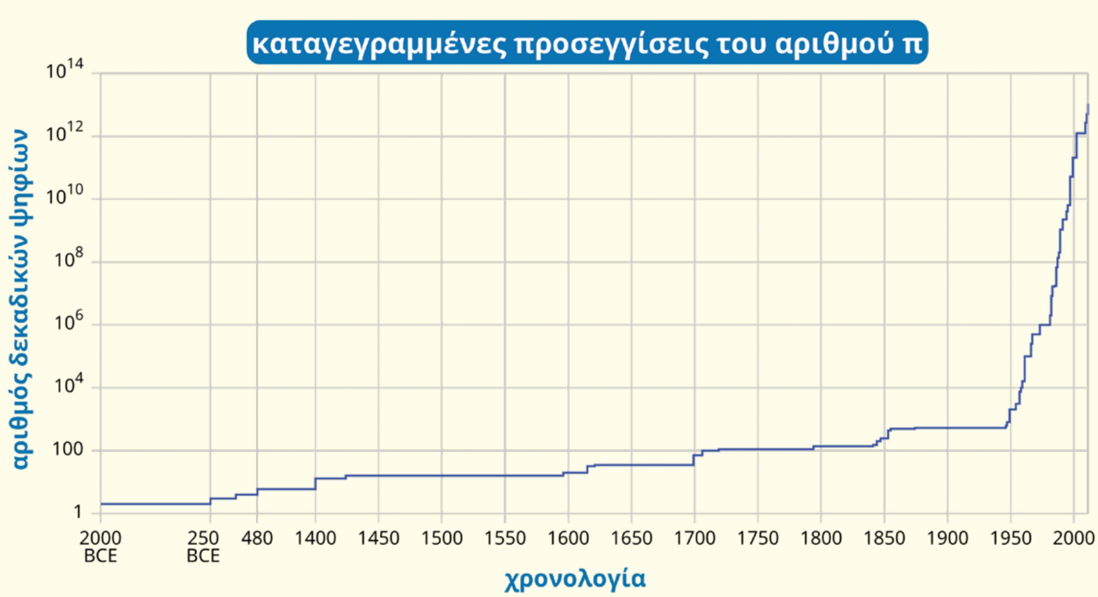
Ο Σρινιβάσα Ραμανούτζαν, εργαζόμενος μόνος του στην Ινδία, παρήγαγε πολλές καινοτόμες σειρές για τον υπολογισμό του π.

Αναγέννηση και Νεότερη Εποχή

Κατά την Αναγέννηση, οι μαθηματικοί στην Ευρώπη επανέφεραν το ενδιαφέρον για τον αριθμό π. Ο Λούντολφ βαν Κόιλερ (Ludolph van Ceulen) αφιέρωσε τη ζωή του στον υπολογισμό του, βρίσκοντας τα 35 πρώτα δεκαδικά του ψηφία. Αυτή η τιμή έχει μείνει γνωστή ως «ο αριθμός του Λούντολφ».

Σύγχρονη Εποχή

Σήμερα, γνωρίζουμε τρισεκατομμύρια δεκαδικά ψηφία του π, χάρη στις προσπάθειες μαθηματικών και προγραμματιστών σε όλο τον κόσμο και την έλευση των ηλεκτρονικών υπολογιστών.



Ανακεφαλαίωση (Μήκος)

Μήκος κύκλου: $L = \pi \cdot \delta$ ή $L = 2\pi \cdot \rho$.

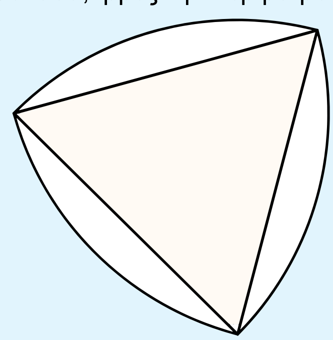
Μήκος τόξου: $\ell = 2\pi\rho \cdot \frac{\mu}{360}$.

- L: Μήκος κύκλου
- ℓ: Μήκος τόξου
- ρ: ακτίνα
- δ: διάμετρος

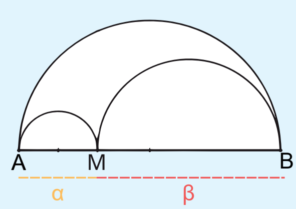
$\pi = 3{,}14...$

Αυτοαξιολόγηση (Μήκος)

Α. Από κάθε κορυφή ενός ισόπλευρου τριγώνου κατασκευάζουμε τόξα μεταξύ των δύο απέναντι κορυφών του. Αν η πλευρά του τριγώνου είναι 1 μονάδα, βρες την περίμετρο του σχήματος.



Β. Επιλέγουμε ένα τυχαίο σημείο Μ ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ και κατασκευάζουμε τα ημικύκλια $\overset{\frown}{AM}$, $\overset{\frown}{MB}$ και $\overset{\frown}{AB}$.



Σύγκρινε τα μήκη των τόξων και επίλεξε τη σωστή απάντηση:

α) $\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{AM} + \overset{\frown}{MB}$

β) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AM} + \overset{\frown}{MB}$

γ) $\overset{\frown}{AB} < \overset{\frown}{AM} + \overset{\frown}{MB}$

Ομαδική δραστηριότητα

Η Γη προσεγγίζεται ως σφαίρα με ακτίνα R = 6.371 km ενώ μια μπάλα μπάσκετ έχει ακτίνα περίπου ρ = 12 cm.

- Αν η ακτίνα της Γης αυξηθεί κατά 1 cm, ποια θα είναι η μεταβολή στην περίμετρό της;
- Υπολογίστε τη μεταβολή της περιμέτρου μιας μπάλας μπάσκετ αν η ακτίνα της αυξηθεί κατά 1 cm.
- Συγκρίνετε τη μεταβολή της περιμέτρου στη Γη με αυτήν στη μπάλα μπάσκετ.

Τι παρατηρείτε;

Σε αυτό το σημείο, θα πρέπει να είσαι σε θέση να ικανοποιείς όλους τους προσδοκώμενους μαθησιακούς στόχους. Γύρνα στην αρχή της θεματικής ενότητας και σημείωσε ✔ στα αντίστοιχα σημεία. Υπάρχουν στόχοι που αισθάνεσαι ότι δεν έχεις ικανοποιήσει πλήρως;

ΕΜΒΑΔΟΝ Β.3

Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε πώς μπορούμε να μετράμε και να υπολογίζουμε τα εμβαδά διαφόρων γεωμετρικών σχημάτων, όπως τετράγωνα, παραλληλόγραμμα, τρίγωνα και κυκλικούς δίσκους. Θα μάθουμε να χρησιμοποιούμε τις κατάλληλες μονάδες μέτρησης και να υπολογίζουμε το εμβαδόν κυκλικών τμημάτων και τομέων.

Πώς οι υπολογισμοί αυτοί βρίσκουν εφαρμογή στην αρχιτεκτονική, τη γεωμετρία του τόπου ή την καθημερινότητά μας;

Είσαι έτοιμος/η να ανακαλύψεις τη σημασία του εμβαδού;

Στόχοι Ενότητας

- ☐ Μετασχηματίζω επιφάνειες σε ισοδύναμες με τη διαδικασία διάσπασης και ανασύνθεσης επιφάνειας.
- ☐ Επιλέγω τις κατάλληλες μονάδες μέτρησης εμβαδού επιφάνειας και κάνω μετατροπές από τη μια μονάδα μέτρησης στην άλλη.
- ☐ Επικυρώνω τους τύπους εμβαδού τετραγώνου και ορθογώνιου παραλληλογράμμου επιλέγοντας κατάλληλη μονάδα μέτρησης.
- ☐ Χρησιμοποιώ τη διάσπαση και ανασύνθεση επιφανειών για τον προσδιορισμό του τύπου του εμβαδού παραλληλογράμμου, τριγώνου και τραπεζίου.
- ☐ Υπολογίζω το εμβαδόν ενός κυκλικού δίσκου όταν γνωρίζω την ακτίνα ή τη διάμετρο του κύκλου.
- ☐ Υπολογίζω τα εμβαδά κυκλικών τομέων ως μέρη του εμβαδού του κυκλικού δίσκου τους.
- ☐ Επιλύω προβλήματα υπολογισμού εμβαδού μεικτόγραμμων σχημάτων αξιοποιώντας ποικιλία μεθόδων και στρατηγικών.

Μαθήματα Ενότητας

3.1: Μονάδες μέτρησης

3.2: Εμβαδόν τετραγώνου, ορθογωνίου και πλάγιου παραλληλογράμμου, τριγώνου, τραπεζίου

3.3: Εμβαδόν κυκλικού δίσκου

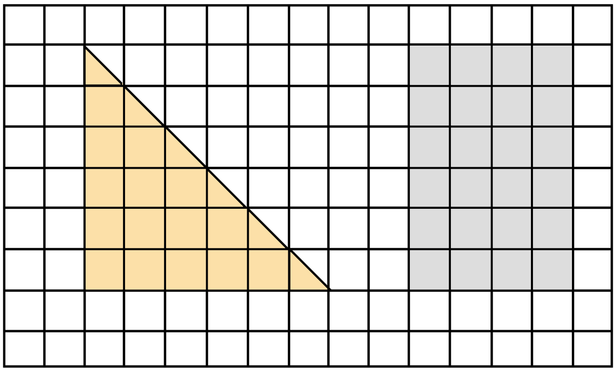
3.4: Εμβαδόν κυκλικού τομέα

+ Επαναληπτικό / Αυτοαξιολόγηση

3.1 | Μονάδες μέτρησης

Εξερευνώ

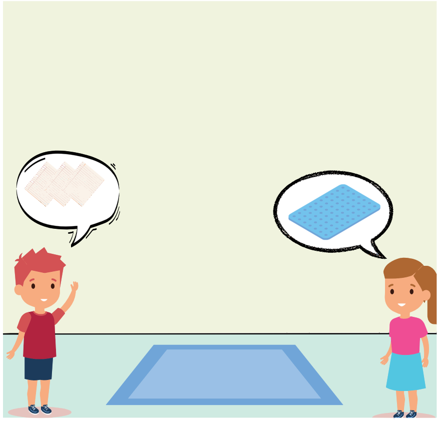
Ποιο από τα παρακάτω σχήματα καταλαμβάνει μεγαλύτερη επιφάνεια;



Με ποιον τρόπο μπορούμε να μετρήσουμε την επιφάνεια που καταλαμβάνει κάθε σχήμα;

Εξερευνώ

Ο Γιάννης και η Αφροδίτη προσπάθησαν να μετρήσουν πόσο χώρο πιάνει το χαλί που έχουν στο δωμάτιο για να παραγγείλουν ένα αντίστοιχου μεγέθους και σχήματος.



Ο Γιάννης βρήκε ότι το χαλί είναι ίσο με 34 κόλλες χαρτί και η Αφροδίτη ότι το χαλί είναι διπλάσιο από το χαλί του μπάνιου. Βοηθάνε αυτές οι πληροφορίες τον τεχνίτη ώστε να κατασκευάσει το κατάλληλο χαλί; Με ποιον τρόπο μετράμε την επιφάνεια στην καθημερινή μας ζωή;

Εμβαδόν

Θυμόμαστε

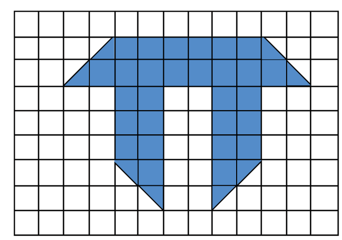
Γνωρίζουμε ότι για να βρούμε το **μήκος** ενός ευθύγραμμου τμήματος, το συγκρίνουμε με ένα άλλο γνωστό ευθύγραμμο τμήμα, που λέγεται μονάδα μέτρησης. Η βασική μονάδα μέτρησης του μήκους είναι το μέτρο (m).

Με τον ίδιο τρόπο, μετράμε την έκταση που καταλαμβάνει μία επιφάνεια στο επίπεδο συγκρίνοντάς την με μία άλλη γνωστή επιφάνεια που επιλέγουμε ως μονάδα μέτρησης.

Από τη σύγκριση αυτήν προκύπτει ένας θετικός αριθμός που ονομάζουμε **εμβαδόν** της επιφάνειας και συνήθως συμβολίζεται με **Ε**.

- Η βασική μονάδα μέτρησης του εμβαδού που χρησιμοποιούμε είναι το **τετραγωνικό μέτρο** (m^2) δηλαδή η επιφάνεια που καταλαμβάνει ένα τετράγωνο πλευράς ενός μέτρου.

Παράδειγμα: Να υπολογίσετε το εμβαδόν του διπλανού σχήματος, αν η μονάδα μέτρησης είναι το 1 τετραγωνάκι □.

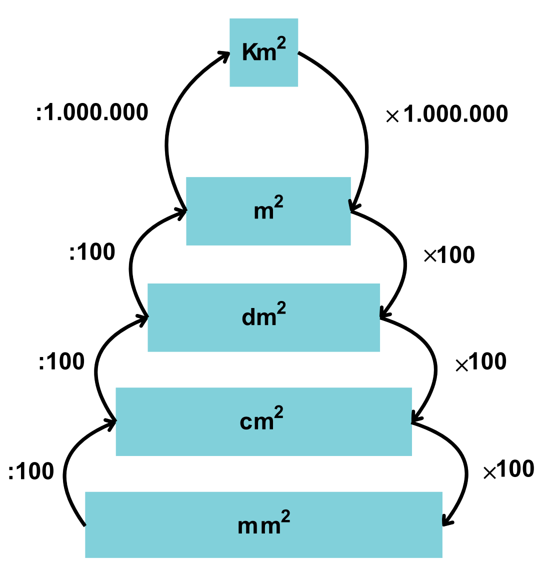


Λύση:

Μετρώντας τα τετραγωνάκια □ του διπλανού σχήματος (κάθε ◣ έχει το μισό εμβαδόν από το □), βρίσκουμε ότι είναι 32.
Άρα Ε = 32 τετραγωνάκια.

Μονάδες μέτρησης επιφανειών

Αν η επιφάνεια που καταλαμβάνει ένα σχήμα είναι πολύ μεγαλύτερη ή πολύ μικρότερη από την επιφάνεια του τετραγωνικού μέτρου, τότε επιλέγουμε για τη μέτρηση ένα πολλαπλάσιο ή μια υποδιαίρεση του τετραγωνικού μέτρου.

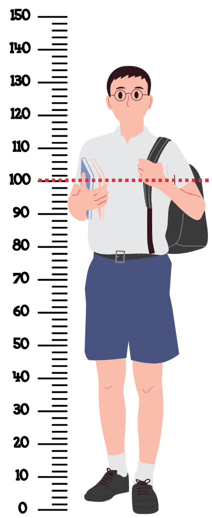


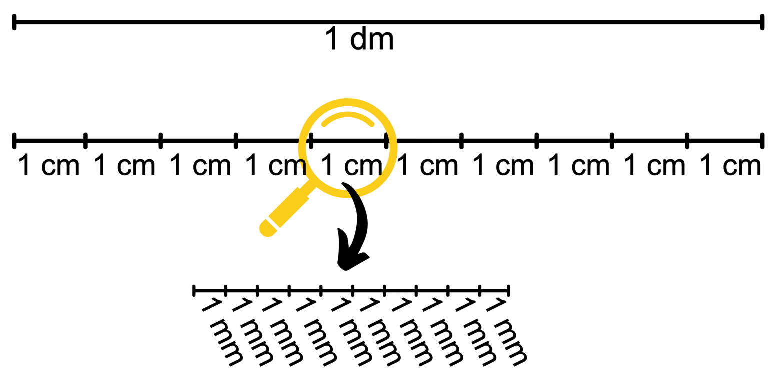
Μελετώ
το συγκεκριμένο θέμα

Αντιλαμβάνομαι
με προσομοίωση

	Ονομασία	Σύμβολο
Πολλαπλάσια του τετραγωνικού μέτρου	Τετραγωνικό χιλιόμετρο	km^2
	Τετραγωνικό μέτρο	m^2
Υποδιαιρέσεις του τετραγωνικού μέτρου	Τετραγωνικό δεκατόμετρο	dm^2
	Τετραγωνικό εκατοστόμετρο	cm^2
	Τετραγωνικό χιλιοστόμετρο	mm^2

- Ένα τετραγωνικό μέτρο χωρίζεται σε 100 τετράγωνα πλευράς 1dm. $1\ m^2 = 100 dm^2$
- Ένα τετραγωνικό δεκατόμετρο χωρίζεται σε 100 τετράγωνα πλευράς 1cm. $1\ dm^2 = 100 cm^2$.
- Ένα τετραγωνικό εκατοστόμετρο χωρίζεται σε 100 τετράγωνα πλευράς 1mm. $1\ cm^2 = 100 mm^2$.
- Ένα τετραγωνικό χιλιόμετρο χωρίζεται σε 1.000.000 τετράγωνα πλευράς 1m. $1\ km^2 = 1.000.000 m^2$.





Συνεπώς ισχύει ότι:

1 m^2	$= 100\ dm^2$	$= 10.000\ cm^2$	$= 1.000.000\ mm^2$
	1 dm^2	$= 100\ cm^2$	$= 10.000\ mm^2$
		1 cm^2	$= 100\ mm^2$

Επίσης: $1\ km^2 = 1.000.000\ m^2$.

Και αντίστροφα:

1 mm^2	$= 0{,}01\ cm^2$	$= 0{,}0001\ dm^2$	$= 0{,}000001\ m^2$
	1 cm^2	$= 0{,}01\ dm^2$	$= 0{,}0001\ m^2$
		1 dm^2	$= 0{,}01\ m^2$

Επίσης: $1\ m^2 = 0{,}000001\ km^2$.

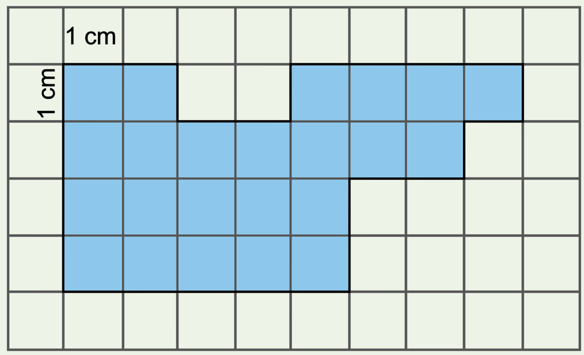
Σημείωση: Το τετραγωνικό χιλιόμετρο (km^2) χρησιμοποιείται για τη μέτρηση πολύ μεγάλων εκτάσεων όπως νομών, νησιών, χωρών κ.α.

Μια άλλη μονάδα μέτρησης επιφανειών που χρησιμοποιείται κυρίως για τη μέτρηση εκτάσεων γης όπως οικόπεδα, κτήματα κ.α. είναι το **στρέμμα**.

1 στρέμμα= $1.000 m^2$

Λυμένα Παραδείγματα

1. Υπολόγισε το εμβαδόν της επιφάνειας του παρακάτω σχήματος:



Λύση: Κάθε τετραγωνάκι έχει εμβαδόν $1cm^2$. Μετρώντας τα τετραγωνάκια □ του σχήματος, βρίσκουμε ότι είναι 23.

Άρα $Ε = 23cm^2$.

2. Να διατάξετε σε αύξουσα σειρά τα παρακάτω εμβαδά:

$$40cm^2,\ 0{,}5m^2,\ 800dm^2,\ 10.000mm^2.$$

Λύση:

Μετατρέπουμε τα εμβαδά στην ίδια μονάδα μέτρησης, π.χ σε cm^2.

- $40cm^2$
- $0{,}5m^2 = 0{,}5 \cdot 10.000cm^2 = 5.000cm^2$.
- $800dm^2 = 800 \cdot 100cm^2 = 80.000cm^2$.
- $10.000mm^2 = 10.000 : 100cm^2 = 100cm^2$.

Οπότε: $40cm^2 < 100cm^2 < 5.000cm^2 < 80.000cm^2$,

άρα: $40cm^2 < 10.000mm^2 < 0{,}5m^2 < 800dm^2$.

Εξασκούμαι
σε όσα έμαθα

Αντιλαμβάνομαι
με προσομοίωση

Ασκήσεις / Προβλήματα

1 Συμπλήρωσε τα κενά:

α) Για να μετατρέψουμε τα m^2 σε dm^2 πολλαπλασιάζουμε με ....

β) Για να μετατρέψουμε τα cm^2 σε m^2, ... με 10.000

γ) Για να μετατρέψουμε τα στρέμματα σε m^2 πολλαπλασιάζουμε με ....

δ) Για να μετατρέψουμε τα dm^2 σε ...., πολλαπλασιάζουμε με 100

ε) Για να μετατρέψουμε τα ...... σε mm^2, πολλαπλασιάζουμε με 1.000.000

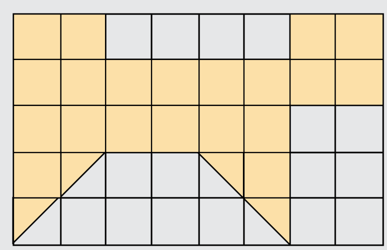
στ) Για να μετατρέψουμε τα km^2 σε m^2 .... με ....

2 Υπολόγισε το εμβαδόν του παρακάτω σχήματος χρησιμοποιώντας ως μονάδα μέτρησης εμβαδού:

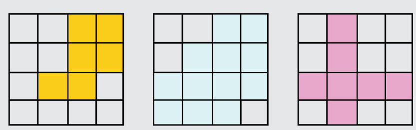
α) το 

β) το 

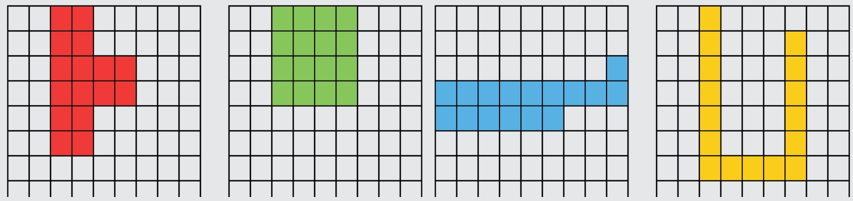
γ) το 



3 Αν θεωρήσουμε ότι κάθε τετραγωνάκι αντιπροσωπεύει $5m^2$, υπολόγισε την επιφάνεια που καταλαμβάνουν τα παρακάτω σχήματα.



4 Στα παρακάτω σχήματα, υπολόγισε την περίμετρο και την επιφάνεια τους. Τι παρατηρείς;



5 Ποια μονάδα μέτρησης της επιφάνειας θα χρησιμοποιούσες για να μετρήσεις το εμβαδόν:

α) ενός χωραφιού;

β) μιας σχολικής αίθουσας;

γ) την επιφάνεια ενός χαλιού;

δ) την επιφάνεια της Ελλάδας;

ε) την επιφάνεια του φύλλου ενός τετραδίου;

στ) την επιφάνεια ενός γραμματόσημου;

6 Κάνε τις μετατροπές στις παρακάτω μονάδες:

α) $21 m^2$ = ...dm^2

β) $3,12 mm^2$ = ...cm^2

γ) $0,47 m^2$ = ...mm^2

δ) $217 cm^2$ = ...dm^2

ε) $0,2 Km^2$ = ...mm^2

στ) $78.000.000 mm^2$ = ...Km^2

7 Τοποθέτησε τα παρακάτω εμβαδά σε αύξουσα σειρά.

$2 m^2$, $0,17 Km^2$, $7.890 dm^2$, $1.650.000 mm^2$, $9.960 cm^2$.

8 Μετάτρεψε σε m^2 τα παρακάτω μεγέθη:

α) $1,32 Km^2$

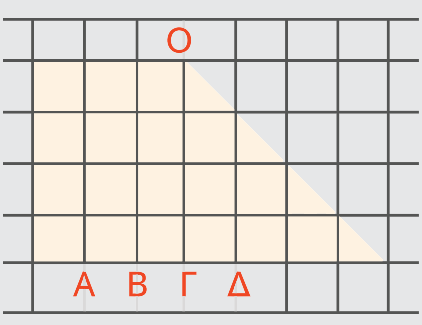
β) $77.214 dm^2$

γ) $21,7 cm^2$

δ) $1.234.745 mm^2$

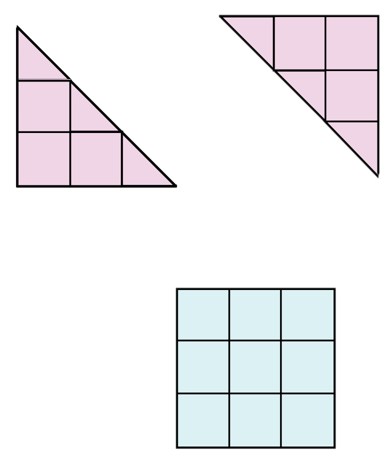
ε) 50 στρέμματα

9 Ένωσε με ένα ευθύγραμμο τμήμα το σημείο Ο με ένα από τα Α, Β, Γ ή Δ, ώστε το παρακάτω σχήμα να χωριστεί σε δύο ισεμβαδικά σχήματα (δηλαδή σε δύο σχήματα που έχουν το ίδιο εμβαδόν).

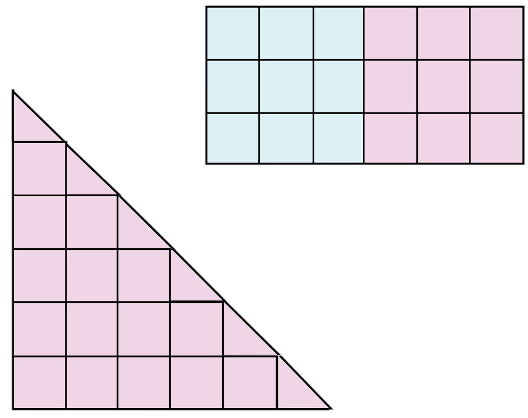


3.2 | Εμβαδόν τετραγώνου, ορθογωνίου και πλάγιου παραλληλογράμμου, τριγώνου, τραπεζίου

Έχουμε δύο ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα και ένα τετράγωνο όπως φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



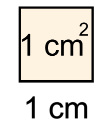
Αξιοποιώντας τα παραπάνω σχήματα, προκύπτουν τα παρακάτω;



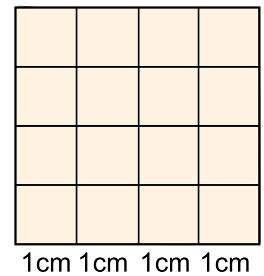
Με ποιον τρόπο;

Εμβαδόν τετραγώνου

Ας θεωρήσουμε ως μονάδα μέτρησης ένα τετράγωνο πλευράς 1cm το οποίο έχει εμβαδόν 1 cm^2.



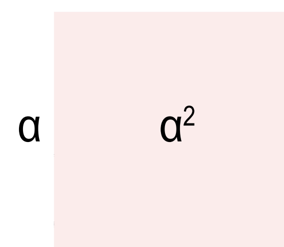
Το διπλανό τετράγωνο έχει πλευρά 4cm και αποτελείται από $4 \cdot 4 = 4^2 = 16$ μικρά τετράγωνα πλευράς 1cm καθένα από τα οποία έχει εμβαδόν 1 cm^2.



Άρα το τετράγωνο έχει εμβαδόν $16cm^2$.

Γενικά:

> Το εμβαδόν ενός **τετραγώνου** πλευράς α ισούται με α^2.
>
> $E = \alpha^2$

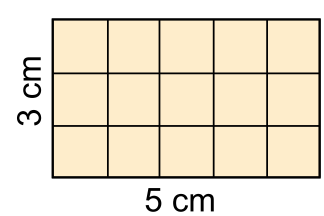


Παρατήρηση: Για να συμβολίσουμε το εμβαδόν ενός επίπεδου σχήματος, το γράφουμε μέσα σε παρένθεση. Για παράδειγμα, το εμβαδόν ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ συμβολίζεται με (ΑΒΓΔ).

Εμβαδόν ορθογωνίου

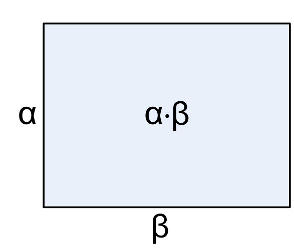
Το διπλανό ορθογώνιο έχει πλευρές 3cm και 5cm. Αποτελείται από $3 \cdot 5 = 15$ μικρά τετράγωνα πλευράς 1cm, και εμβαδόν 1 cm^2.

Άρα το ορθογώνιο έχει εμβαδόν $15cm^2$.



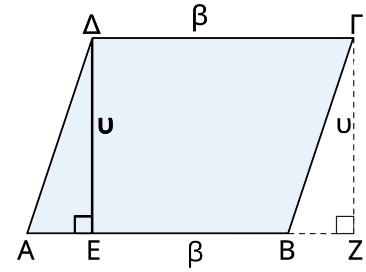
Γενικά

> Το εμβαδόν ενός **ορθογωνίου** με πλευρές α και β ισούται με $\alpha \cdot \beta$, δηλαδή μήκος επί πλάτος.
>
> $E = \alpha \cdot \beta$

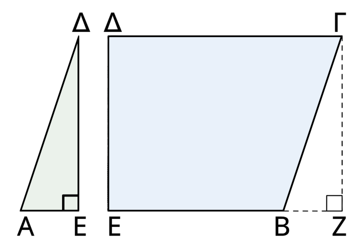


Εμβαδόν παραλληλογράμμου

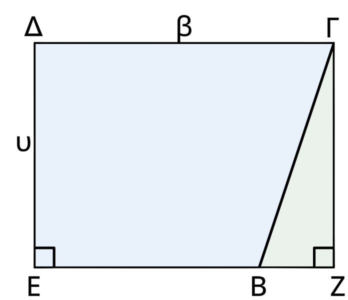
Ας θεωρήσουμε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με βάση β = ΑΒ = ΓΔ και ύψη υ = ΔΕ = ΓΖ.



Μεταφέρουμε το τρίγωνο ΑΔΕ στη θέση του τριγώνου ΒΓΖ (τα τρίγωνα είναι ίσα μεταξύ τους).



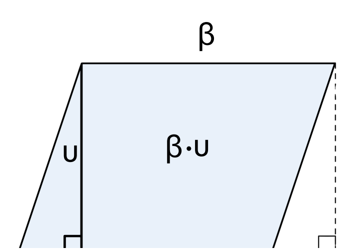
Παρατηρούμε ότι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ ισούται με το εμβαδόν του ορθογωνίου ΕΖΓΔ.



Άρα: (ΑΒΓΔ) = (ΕΖΓΔ) = ΕΖ · ΓΖ = β · υ.

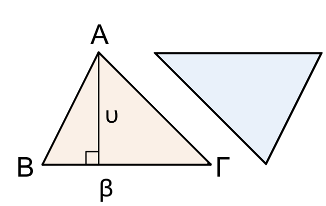
Γενικά

> Το εμβαδόν ενός **παραλληλογράμμου** είναι ίσο με το γινόμενο μίας βάσης του, με το αντίστοιχο ύψος.
>
> Ε = β · υ

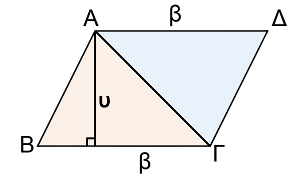


Εμβαδόν τριγώνου

Ας θεωρήσουμε ένα τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ και ας τοποθετήσουμε ένα δεύτερο τρίγωνο, ίδιο με αυτό, δίπλα στο πρώτο.



Έτσι, σχηματίζεται ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, το εμβαδόν του οποίου είναι: (ΑΒΓΔ) = β · υ



Το εμβαδόν του τριγώνου θα είναι ίσο με το μισό εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, οπότε:

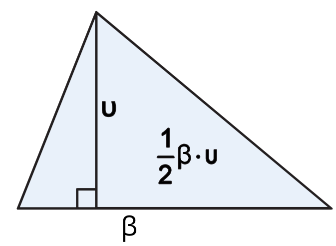
$$(ΑΒΓ) = \frac{1}{2}(ΑΒΓΔ) = \frac{1}{2}β \cdot υ$$

όπου β η βάση του ΑΒΓ και υ το αντίστοιχο ύψος.

Γενικά

Το εμβαδόν ενός **τριγώνου** είναι ίσο με το μισό του γινομένου μιας βάσης του με το αντίστοιχο ύψος.

$$Ε = \frac{1}{2}β \cdot υ$$



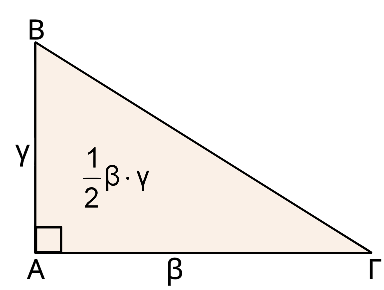
Εμβαδόν ορθογωνίου τριγώνου

Ειδικότερα, όταν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο, η μία κάθετη πλευρά είναι η βάση του και η άλλη κάθετη πλευρά είναι το αντίστοιχο ύψος.

Επομένως:

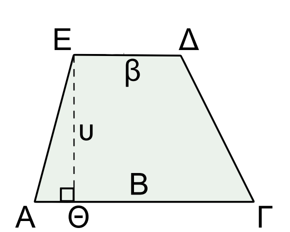
Το εμβαδόν ενός **ορθογωνίου τριγώνου** είναι ίσο με το μισό του γινομένου των δύο κάθετων πλευρών του.

$$Ε = \frac{1}{2}β \cdot γ$$

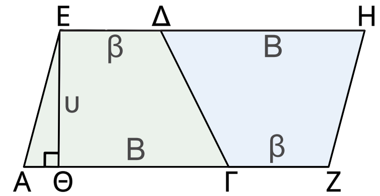


Εμβαδόν τραπεζίου

Ας θεωρήσουμε το τραπέζιο ΑΓΔΕ που έχει μεγάλη βάση ΑΓ = Β, μικρή βάση ΕΔ = β και ύψος ΕΘ = υ.



Αν τοποθετήσουμε ένα δεύτερο τραπέζιο, ίσο με το πρώτο, δίπλα του, όπως φαίνεται στο σχήμα, τότε σχηματίζεται ένα παραλληλόγραμμο ΑΖΗΕ.



Το παραλληλόγραμμο που σχηματίσαμε έχει βάση (Β + β) και ύψος υ, οπότε το εμβαδόν του είναι:

$$(ΑΖΗΕ) = (Β + β) \cdot υ$$

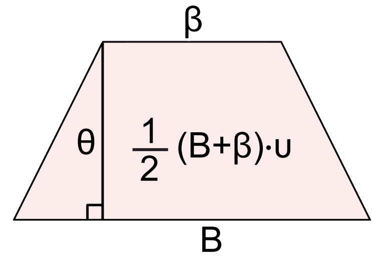
Το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΓΔΕ θα είναι ίσο με το μισό του παραλληλογράμμου ΑΖΗΕ:

$$(ΑΓΔΕ) = \frac{1}{2}(ΑΖΗΕ) = \frac{1}{2}(Β + β) \cdot υ$$

Γενικά:

Το εμβαδόν ενός **τραπεζίου** είναι ίσο με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεών του με το ύψος του.

$$Ε = \frac{1}{2}(Β + β) \cdot υ$$



Αντιλαμβάνομαι

με προσομοίωση

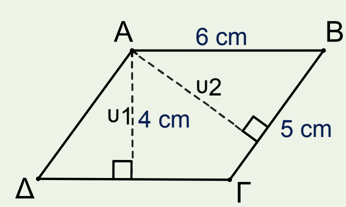
Αντιλαμβάνομαι

με προσομοίωση

Λυμένα Παραδείγματα

1. α) Να υπολογίστε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

β) Να υπολογίστε το ύψος $υ_2$ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.



Λύση:

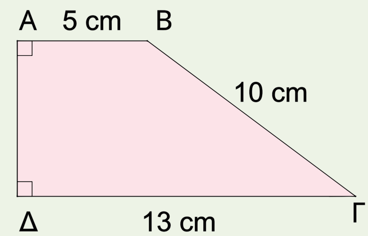
α) $(ΑΒΓΔ) = ΓΔ \cdot υ_1 = 6 \cdot 4 = 24cm^2$

β) Είναι $(ΑΒΓΔ) = 24cm^2$ και $(ΑΒΓΔ) = ΒΓ \cdot υ_2$, επομένως:

$$ΒΓ \cdot υ_2 = 24 \text{ ή}$$

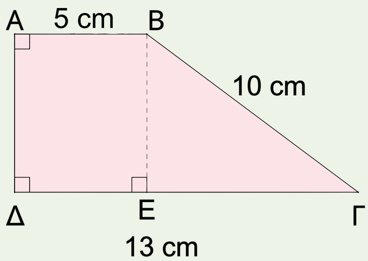
$$υ_2 = \frac{24}{ΒΓ} = \frac{24}{5} = 4,8cm.$$

2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του διπλανού τραπεζίου:



Λύση:

Φέρνουμε το ύψος ΒΕ.



Είναι $ΕΓ = ΔΓ - ΔΕ = ΔΓ - ΑΒ = 13 - 5 = 8cm$.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΓ έχουμε:

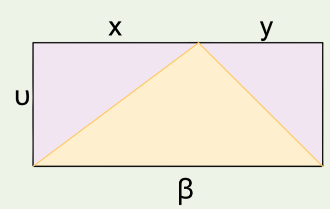
$ΒΕ^2 = ΒΓ^2 - ΕΓ^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36$,

άρα $ΒΕ = \sqrt{36} = 6cm$.

Το εμβαδόν του τραπεζίου είναι:

$$Ε = \frac{(ΓΔ + ΑΒ) \cdot ΒΕ}{2} = \frac{(13 + 5) \cdot 6}{2} = 54cm^2.$$

3. Μέσα σε ορθογώνιο κατασκευάζουμε τρίγωνο που έχει βάση τη μία πλευρά του ορθογωνίου και ύψος ίσο με την άλλη πλευρά του ορθογωνίου. Να συγκρίνετε το εμβαδόν του κίτρινου τριγώνου με το άθροισμα των εμβαδών των δύο μωβ τριγώνων.



Λύση:

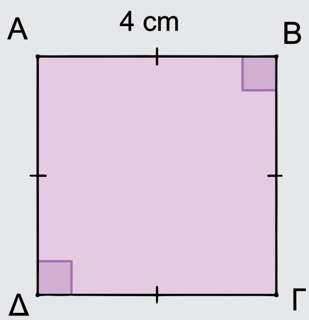
- Το εμβαδόν του κίτρινου τριγώνου είναι:
  $Ε_κ = \frac{β \cdot υ}{2}$.

- Το άθροισμα των εμβαδών των δύο μωβ ορθογωνίων τριγώνων είναι:
  $Ε_Μ = \frac{x \cdot υ}{2} + \frac{y \cdot υ}{2} = \frac{x \cdot υ + y \cdot υ}{2} = \frac{(x + y) \cdot υ}{2} = \frac{β \cdot υ}{2}$.

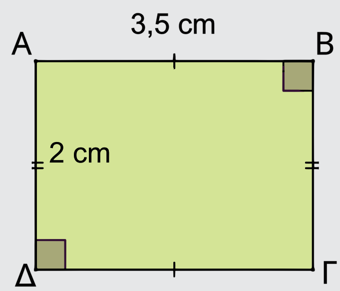
Άρα το εμβαδόν του κίτρινου τριγώνου ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των δύο μωβ τριγώνων.

Ασκήσεις / Προβλήματα

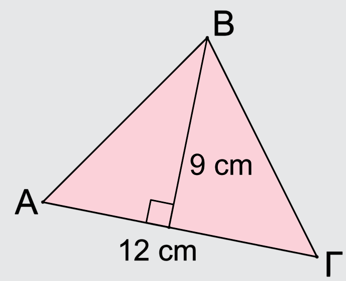
1 Υπολόγισε το εμβαδόν των παρακάτω σχημάτων:



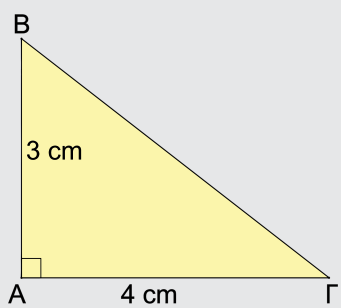
α



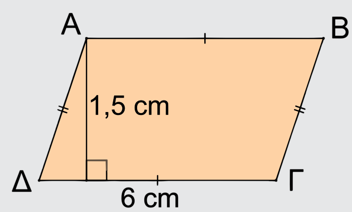
β



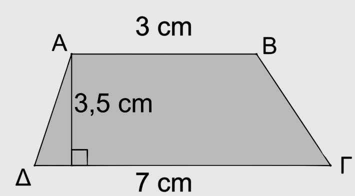
γ



δ



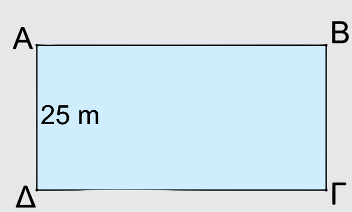
ε



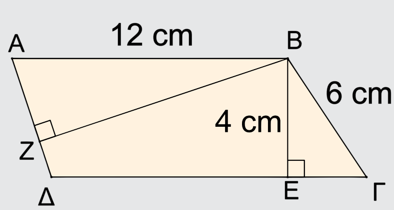
στ

2 Υπολόγισε το εμβαδόν ενός τετραγώνου το οποίο έχει περίμετρο 100m.

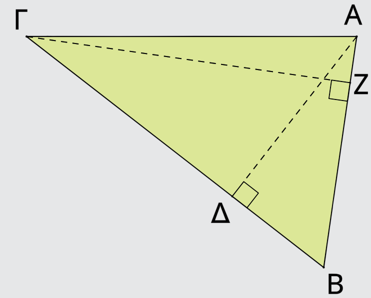
3 Βρες το εμβαδόν ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με περίμετρο 160m και μήκος 25m.



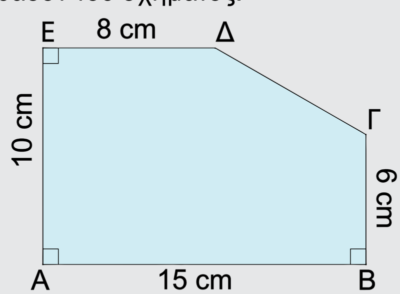
4 Βρες το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Στη συνέχεια υπολόγισε το ύψος ΒΖ που είναι σημειωμένο στο σχήμα.



5 Υπολόγισε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ, αν γνωρίζεις ότι ΑΒ=6cm, ΒΓ=9cm και ΓΖ=7cm. Στη συνέχεια υπολόγισε το ύψος ΑΔ που είναι σημειωμένο στο τρίγωνο.



6 Βρες το εμβαδόν του σχήματος.



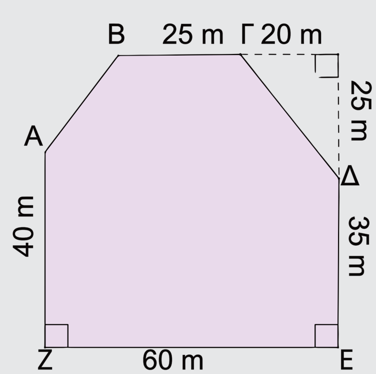
Αντιλαμβάνομαι
με προσομοίωση

7 Μια ορθογώνια αυλή με διαστάσεις 20m και 9m, θα στρωθεί με τετράγωνες πλάκες πλευράς 60cm.

α) Βρες πόσες πλάκες θα χρειαστούν για να στρωθεί η αυλή.

β) Αν κάθε πλάκα κοστίζει 0,5€, βρες το συνολικό ποσό της δαπάνης.

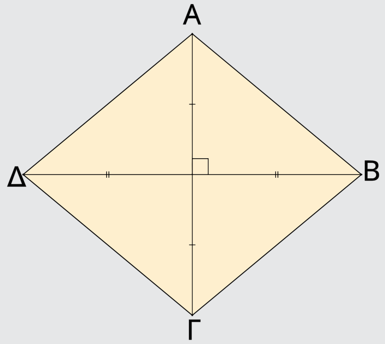
8 Βρες την αξία του κτήματος ΑΒΓΔΕΖ αν γνωρίζεις ότι πωλείται προς 2.000€ το στρέμμα.



Αντιλαμβάνομαι
με προσομοίωση

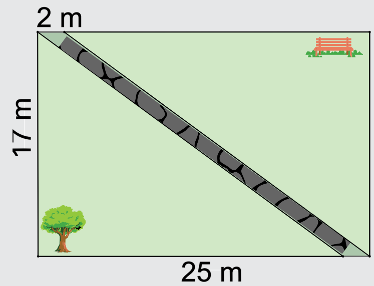
9 Ένα τετράδιο έχει 20 φύλλα και διαστάσεις 15cm και 21cm. Βρες την συνολική επιφάνεια όλων των φύλλων του τετραδίου.

10 Υπολόγισε το εμβαδόν του ρόμβου που φαίνεται στο διπλανό σχήμα, αν γνωρίζεις ότι ΑΓ= 10cm και ΒΔ= 12cm.



Σημείωση: Γνωρίζουμε ότι οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται κάθετα και διχοτομούνται.

11 Σε ορθογώνια πλατεία μήκους 25m και πλάτους 17m θα χαράξουμε δρομάκι στη διαγώνιο με πλάτος 2m. όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Βρες το νέο εμβαδόν της πλατείας.

β) Βρες το εμβαδόν του δρόμου.

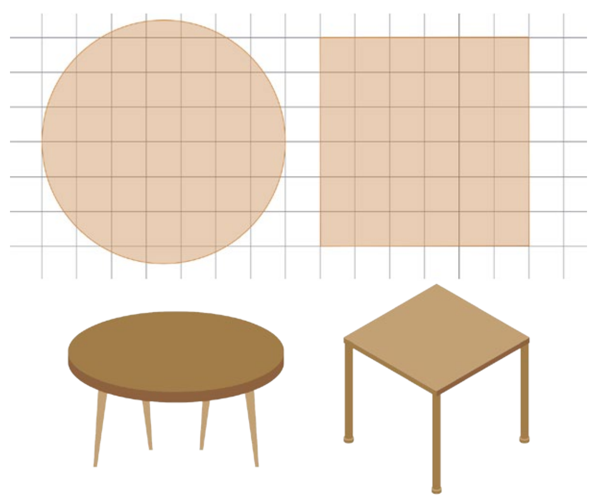
Εξασκούμαι

σε όσα έμαθα

3.3 | Εμβαδόν κυκλικού δίσκου

Εξερευνώ

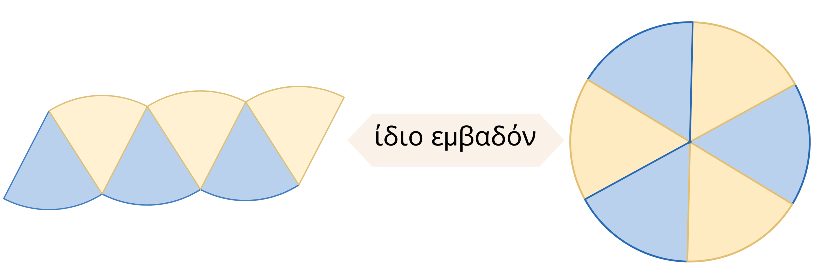
Χρειάζεται να αντικαταστήσουμε το στρογγυλό τραπέζι της βεράντας, ακτίνας 70 εκατοστών. Ο ξυλουργός μας προτείνει να πάρουμε ένα τετράγωνο τραπέζι πλευράς 120 εκατοστών. Παρακάτω φαίνονται τα προσχέδια.



Ποιο από τα δύο τραπέζια έχει μεγαλύτερη επιφάνεια; Πόση επιφάνεια καταλαμβάνει περίπου ο κύκλος;

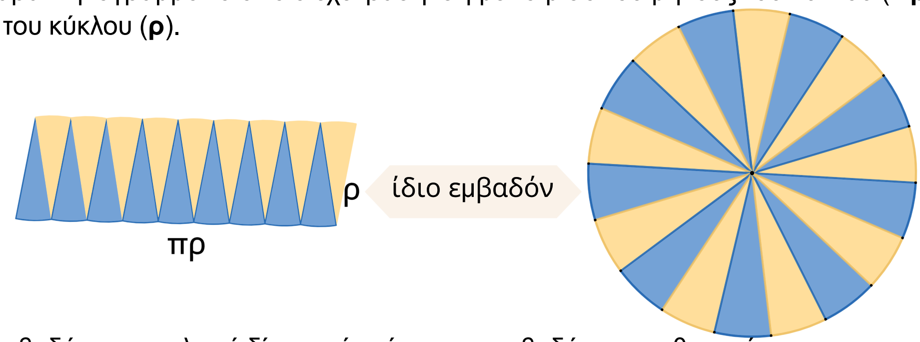
Εμβαδόν κυκλικού δίσκου

Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν ενός κυκλικού δίσκου, χωρίζουμε τον κυκλικό δίσκο σε κομμάτια, τα οποία τοποθετούμε όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Αντιλαμβάνομαι
με προσομοίωση

Αν χωρίσουμε τον κυκλικό δίσκο σε περισσότερα κομμάτια, τότε το σχήμα που προκύπτει προσεγγίζει ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο το οποίο έχει βάση ίση με το μισό του μήκους του κύκλου (**πρ**) και ύψος ίσο με την ακτίνα του κύκλου (**ρ**).



Συνεπώς, το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου είναι ίσο με το εμβαδόν του ορθογωνίου που σχηματίζεται, δηλαδή:

$$E = \pi\rho \cdot \rho = \pi\rho^2.$$

Επομένως:

Το εμβαδόν ενός κυκλικού δίσκου ακτίνας ρ ισούται με:

$$E = \pi\rho^2$$

Αντιλαμβάνομαι

με προσομοίωση

1. Να υπολογίσετε το εμβαδόν ενός κυκλικού δίσκου που έχει:

α) ακτίνα $\rho = 2$cm.

β) διάμετρο $\delta = 10$cm.

Λύση:

α) $E = \pi\rho^2 = 3,14 \cdot 2^2 = 3,14 \cdot 4 = 12,56\,cm^2$.

β) Η ακτίνα του είναι $\rho = \frac{\delta}{2} = \frac{10}{2} = 5$cm, άρα:

$$E = \pi\rho^2 = 3,14 \cdot 25 = 78,5\,cm^2.$$

2. Ένας κυκλικός δίσκος έχει εμβαδόν $E = 153,86\,cm^2$. Να βρείτε την ακτίνα του.

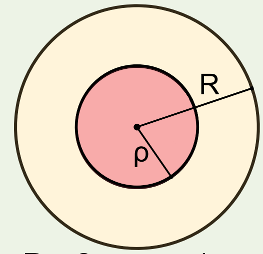
Λύση:

Το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου δίνεται από τον τύπο $E = \pi\rho^2$. Οπότε έχουμε:

$$153,86 = 3,14 \cdot \rho^2$$
$$\rho^2 = \frac{153,86}{3,14}$$
$$\rho^2 = 49$$
$$\rho = \sqrt{49} = 7\text{cm}.$$

3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του διπλανού κυκλικού δακτυλίου.

Σημείωση: Κυκλικός δακτύλιος λέγεται η περιοχή που βρίσκεται μεταξύ των δύο ομόκεντρων κύκλων.



$R = 2cm \quad \rho = 1cm$

Λύση:

Το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου ισούται με τη διαφορά των εμβαδών των δύο κυκλικών δίσκων. Έχουμε

- $E_{\substack{\text{μεγάλου}\\ \text{κύκλου}}} = \pi R^2 = 3,14 \cdot 2^2 = 3,14 \cdot 4 = 12,56 cm^2$.
- $E_{\substack{\text{μικρού}\\ \text{κύκλου}}} = \pi \rho^2 = 3,14 \cdot 1^2 = 3,14 \cdot 1 = 3,14 cm^2$.

Επομένως: $E_{\text{δακτυλίου}} = E_{\substack{\text{μεγάλου}\\ \text{κύκλου}}} - E_{\substack{\text{μικρού}\\ \text{κύκλου}}} = 12,56 - 3,14 = 9,42 cm^2$.

Ασκήσεις / Προβλήματα

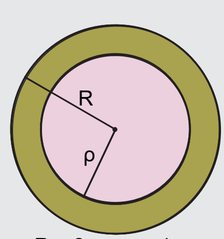
1 Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα:

Ακτίνα ρ (cm)	1	2	5	8	10
Εμβαδόν κυκλικού δίσκου Ε (cm^2)					

2 Επίλεξε τη σωστή απάντηση:

	Α	**Β**	**Γ**
Αν διπλασιάσουμε την ακτίνα ενός κύκλου τότε το εμβαδόν του:	Διπλασιάζεται	Τετραπλασιάζεται	Οκταπλασιάζεται

3 Χαράσσουμε δύο ομόκεντρους κύκλους με ακτίνες 5cm και 7cm. Πόσο είναι το εμβαδόν του δακτυλίου που προκύπτει;



R = 2cm ρ = 1cm

4 Το μήκος ενός κύκλου είναι $L = 18,84 cm$. Υπολόγισε:

α) Την ακτίνα του.

β) Τη διάμετρό του.

γ) Το εμβαδόν του.

Εξασκούμαι σε όσα έμαθα

5 Το εμβαδόν ενός κυκλικού δίσκου είναι $E = 314 cm^2$. Υπολόγισε:

α) Την ακτίνα του.

β) Τη διάμετρό του.

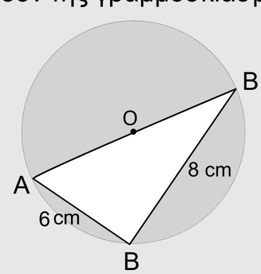
γ) Το μήκος του.

6 Ένας κύκλος (Ο,ρ) έχει ακτίνα $ρ = 1cm$. Σχεδίασε κυκλικό δίσκο που έχει διπλάσιο εμβαδόν από τον κύκλο (Ο,ρ).

Χρησιμοποιώ

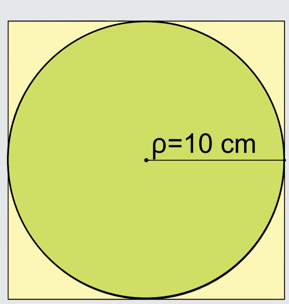
7 Ένας κύκλος (Ο,ρ) έχει ακτίνα $ρ = 2cm$. Βρες κατά προσέγγιση την πλευρά ενός τετραγώνου που έχει το ίδιο εμβαδόν με τον κυκλικό δίσκο.

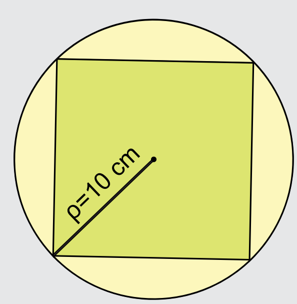
8 Υπολόγισε το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας.



Εξασκούμαι σε όσα έμαθα

9 Υπολόγισε τα γραμμοσκιασμένα κίτρινα χωρία:

α. 

β. 

Αξιοποιώ την αριθμομηχανή

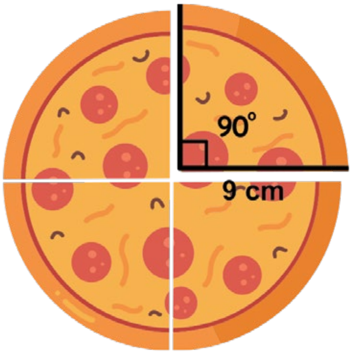
3.4 | Εμβαδόν κυκλικού τομέα

Εξερευνώ

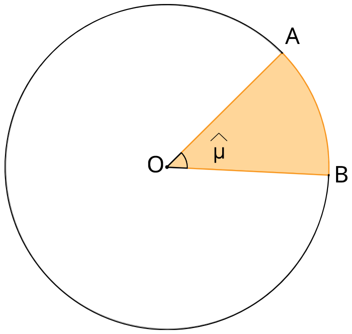
Μια κυκλική πίτσα έχει ακτίνα 9cm.

Κάθε κομμάτι της αντιστοιχεί σε κεντρική γωνία 90°, όπως φαίνεται στην εικόνα.

Ποιο είναι το εμβαδόν της πίτσας που αντιστοιχεί σε ένα τέτοιο κομμάτι;



Κυκλικός Τομέας



Θεωρούμε έναν κύκλο (Ο,ρ) και μία επίκεντρη γωνία $A\hat{O}B = \mu^{o}$.

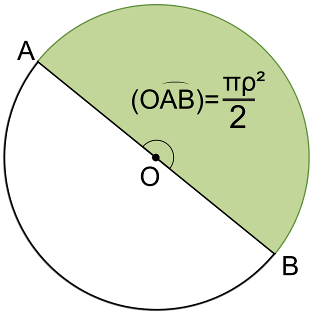
Το μέρος του κυκλικού δίσκου που περιέχεται στην επίκεντρη γωνία $A\hat{O}B$ λέγεται **κυκλικός τομέας** κέντρου Ο και ακτίνας ρ. Ο κυκλικός αυτός τομέας συμβολίζεται $O\widehat{AB}$ και αντιστοιχεί σε γωνία μ μοιρών.

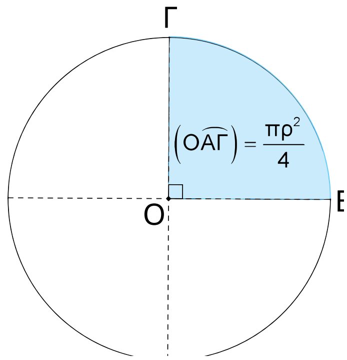
Το εμβαδόν του κυκλικού τομέα ορίζεται ανάλογα με το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου.

Το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου, που είναι κυκλικός τομέας 360°, είναι $E = \pi\rho^2$, συνεπώς:

- Το εμβαδόν ενός **ημικυκλίου** (που είναι ένας τομέας 180°) είναι

$$(O\widehat{AB}) = \frac{\pi\rho^2}{2}.$$





- Το εμβαδόν ενός **τεταρτοκυκλίου** (που είναι ένας τομέας 90°) είναι:

$$(O\overset{\frown}{A\Gamma}) = \frac{\pi\rho^2}{4}.$$

Γενικά:

-Ένας κυκλικός δίσκος, που είναι κυκλικός τομέας 360°, έχει εμβαδόν $E = \pi\rho^2$.

- Ένας κυκλικός τομέας **μ°** έχει εμβαδόν $(O\overset{\frown}{AB}) =;$

Τα ποσά είναι **ανάλογα** οπότε με την απλή μέθοδο των τριών έχουμε ότι:

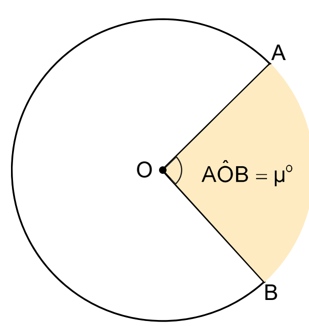
$$\frac{360}{\mu} = \frac{\pi\rho^2}{(O\overset{\frown}{AB})}$$

ή $$(O\overset{\frown}{AB}) = \pi\rho^2 \cdot \frac{\mu}{360}.$$

Επομένως:

Το **εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα** $O\overset{\frown}{AB}$ γωνίας μ μοιρών και ακτίνας ρ ισούται με:

$$(O\overset{\frown}{AB}) = \pi\rho^2 \cdot \frac{\mu}{360}$$



Παράδειγμα: Να υπολογίσετε το εμβαδόν κυκλικού τομέα ακτίνας $\rho = 3m$ και γωνίας 100°.

Λύση: $(O\overset{\frown}{AB}) = \pi\rho^2 \cdot \frac{\mu}{360} = 3,14 \cdot 3^2 \cdot \frac{100}{360} = 7,85\ m^2$.

Αντιλαμβάνομαι

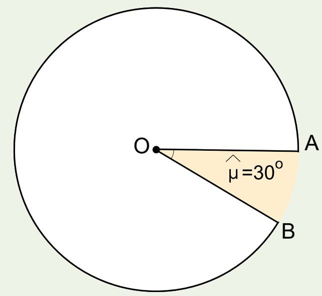
με προσομοίωση

Λυμένα Παραδείγματα

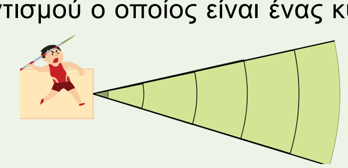
1. Ο κύκλος του διπλανού σχήματος έχει ακτίνα $\rho = 6cm$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $O\widehat{AB}$.

Λύση:

$$(O\widehat{AB}) = \pi\rho^2 \cdot \frac{\mu}{360} = 3,14 \cdot 6^2 \cdot \frac{30}{360} = 9,42cm^2.$$



2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τομέα ρίψης ακοντισμού ο οποίος είναι ένας κυκλικός τομέας γωνίας 29° και ακτίνας 100m.



Λύση:

$$E = \pi\rho^2 \cdot \frac{\mu}{360} = 3,14 \cdot 100^2 \cdot \frac{29}{360} = 2.529,\overline{4}\ m^2.$$

3. Να βρείτε σε πόσες μοίρες αντιστοιχεί ένας κυκλικός τομέας $O\widehat{AB}$ με εμβαδόν $31,4cm^2$ και ακτίνα $\rho = 6cm$.

Λύση:

Από τον τύπο $(O\widehat{AB}) = \pi\rho^2 \cdot \frac{\mu}{360}$, έχουμε:

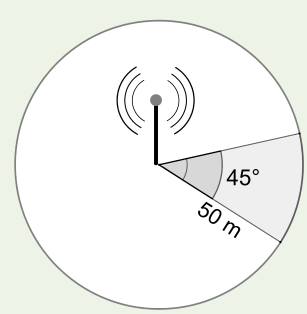
$$31,4 = 3,14 \cdot 6^2 \cdot \frac{\mu}{360}$$

ή $$31,4 = 3,14 \cdot 36 \cdot \frac{\mu}{360}$$

ή $$31,4 = 0,314 \cdot \mu$$

ή $$\mu = \frac{31,4}{0,314} = 100^o.$$

4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν που καλύπτει η κεραία που μεταδίδει σήμα όπως φαίνεται στην εικόνα.



Λύση:

Η κεραία μεταδίδει σήμα σε έναν κυκλικό τομέα μέτρου 45° και ακτίνας 50m, συνεπώς από τον τύπο έχουμε:

$$E_{κεραίας} = \pi \cdot \rho^2 \cdot \frac{\mu}{360} = 3,14 \cdot 50^2 \cdot \frac{45}{360} = \frac{3,14 \cdot 2500 \cdot 45}{360} = 981,85m^2$$

Ασκήσεις / Προβλήματα

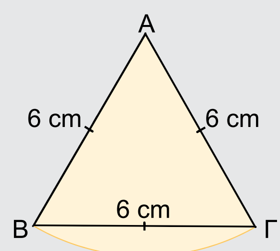
1 Ένας κύκλος έχει ακτίνα ρ = 6cm. Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα:

Τόξο μ (μοίρες)	30°	90°	120°	180°	270°
Εμβαδόν κυκλικού τομέα Ε (cm^2)					

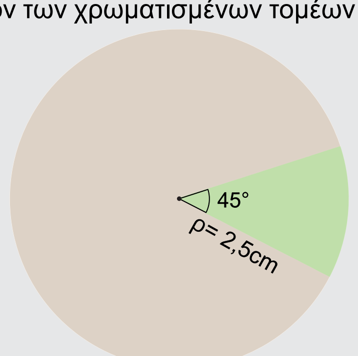
2 Ένας κυκλικός τομέας έχει εμβαδόν $E = 125,6 cm^2$ και αντιστοιχεί σε γωνία 36°. Βρες την ακτίνα του.

3 Ένας κυκλικός τομέας έχει εμβαδόν $E = 62,8\ m^2$ και ακτίνα $ρ = 6$ m. Βρες την γωνία στην οποία αντιστοιχεί.

4 Με κέντρο την κορυφή Α ισόπλευρου τριγώνου και με ακτίνα 6cm κατασκευάζουμε τον κυκλικό τομέα του παρακάτω σχήματος. Υπολόγισε το εμβαδόν του.



5 Βρες το εμβαδόν των χρωματισμένων τομέων του σχήματος.



Αξιοποιώ την αριθμομηχανή

Εξασκούμαι σε όσα έμαθα

6 Βρες το εμβαδόν ημικυκλίου και τεταρτοκυκλίου που ανήκουν σε κύκλο ακτίνας 10cm.

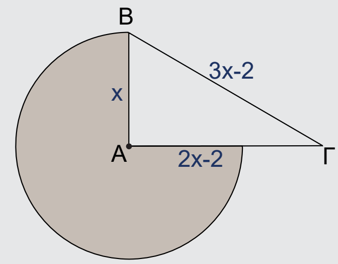
7

Το τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος έχει περίμετρο 30cm.

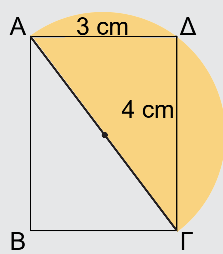
α) Βρες το x και το μήκος των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Απόδειξε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

γ) Με κέντρο το Α και ακτίνα την πλευρά ΑΒ σχεδιάζουμε κυκλικό τομέα, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Βρες το εμβαδόν του σχήματος που περιλαμβάνει τον κυκλικό τομέα και το τρίγωνο.



8

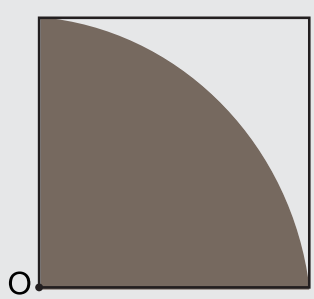


Γνωρίζουμε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο με μήκος 4cm και πλάτος 3cm. Υπολόγισε το ολικό εμβαδόν του σχήματος.

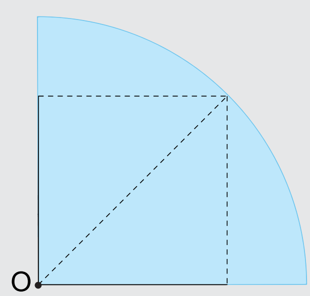
9

Τα παρακάτω τετράγωνα έχουν πλευρά 1cm. Υπολόγισε τα εμβαδά των γραμμοσκιασμένων κυκλικών τομέων.

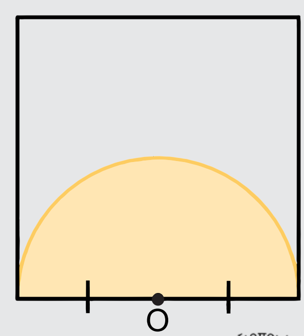
α.



β.



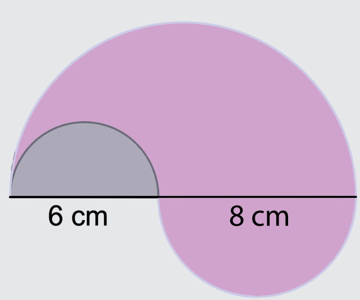
γ.



Αξιοποιώ την αριθμομηχανή

10

Υπολόγισε το εμβαδόν της μωβ γραμμοσκιασμένης καμπυλόγραμμης επιφάνειας:



Ανακεφαλαίωση (Εμβαδόν)

Το **εμβαδόν** μιας επίπεδης επιφάνειας είναι ένας θετικός αριθμός, που εκφράζει την έκταση που καταλαμβάνει η επιφάνεια αυτή στο επίπεδο.

	Ονομασία	Σύμβολο
Πολλαπλάσια του τετραγωνικού μέτρου	Τετραγωνικό χιλιόμετρο	km^2
	Τετραγωνικό μέτρο	m^2
Υποδιαιρέσεις του τετραγωνικού μέτρου	Τετραγωνικό δεκατόμετρο	dm^2
	Τετραγωνικό εκατοστόμετρο	cm^2
	Τετραγωνικό χιλιοστόμετρο	mm^2

Ισχύει ότι:

1 m^2	= 100 dm^2	= 10.000 cm^2	= 1.000.000 mm^2
	1 dm^2	= 100 cm^2	= 10.000 mm^2
		1 cm^2	= 100 mm^2

Επίσης: 1 km^2 = 1.000.000 m^2.

Και αντίστροφα:

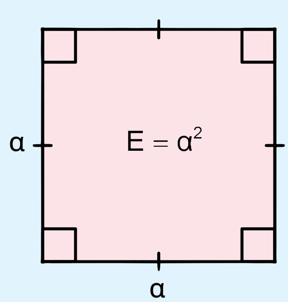
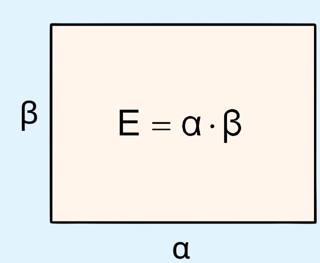
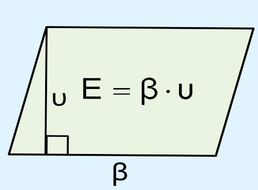
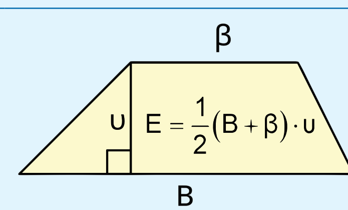
1 mm^2	= 0,01 cm^2	= 0,0001 dm^2	= 0,000001 m^2
	1 cm^2	= 0,01 dm^2	= 0,0001 m^2
		1 dm^2	= 0,01 m^2

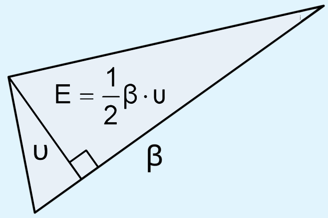
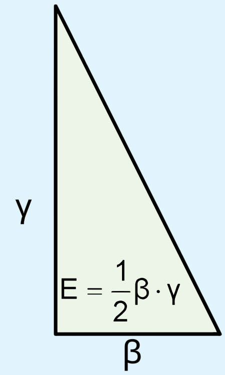
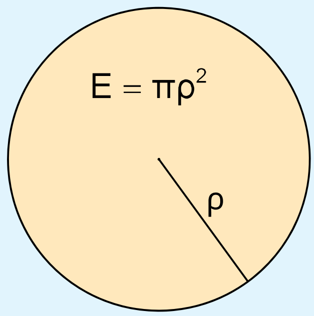
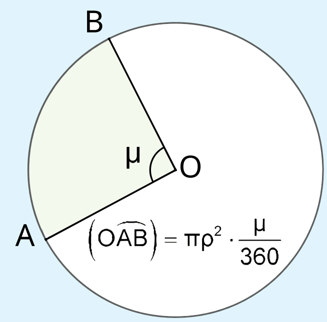
Επίσης: 1 m^2 = 0,000001 km^2.

- Μια άλλη μονάδα μέτρησης επιφανειών που χρησιμοποιείται κυρίως για τη μέτρηση εκτάσεων γης όπως οικόπεδα, κτήματα κ.α. είναι το **στρέμμα**.

1 στρέμμα= 1.000 m^2

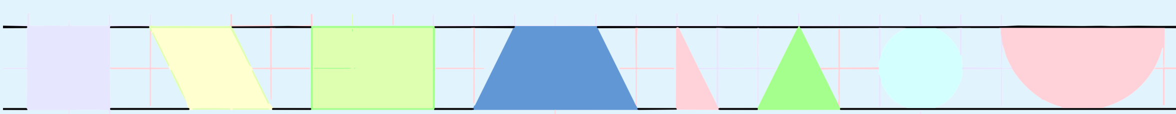
Εμβαδά βασικών επίπεδων σχημάτων:

Τετράγωνο		**Ορθογώνιο**	
Παραλληλόγραμμο		**Τραπέζιο**	

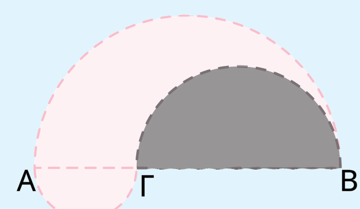
Τρίγωνο		**Ορθογώνιο τρίγωνο**	
Κυκλικός δίσκος		**Κυκλικός τομέας**	

Αυτοαξιολόγηση (Εμβαδόν)

Α. Υπολόγισε το εμβαδόν των παρακάτω σχημάτων, αν κάθε τετραγωνάκι έχει εμβαδόν $1 cm^2$.



Β. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ=6cm και Γ σημείο του ΑΒ τέτοιο ώστε ΑΓ=2cm. Κατασκευάζουμε ημικύκλια με διαμέτρους ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



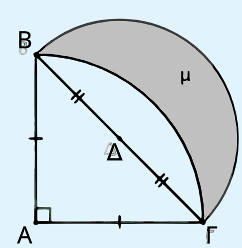
Το εμβαδόν της **ροζ** γραμμοσκιασμένης επιφάνειας είναι:

α) π **β)** 2π **γ)** 3π **δ)** 4π

Επίλεξε τη σωστή απάντηση.

Ομαδική δραστηριότητα

Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ. Με διάμετρο ΒΓ=2cm γράφουμε ημικύκλιο εξωτερικά του τριγώνου και με κέντρο το Α και ακτίνα ΑΒ γράφουμε τον κυκλικό τομέα $A\widehat{B\Gamma}$, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Η γραμμοσκιασμένη επιφάνεια που προκύπτει ονομάζεται μηνίσκος (προέρχεται από τη λέξη μήνη που σημαίνει Σελήνη).

Να συγκρίνετε το εμβαδόν του μηνίσκου μ με το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. Τι συμπέρασμα προκύπτει;

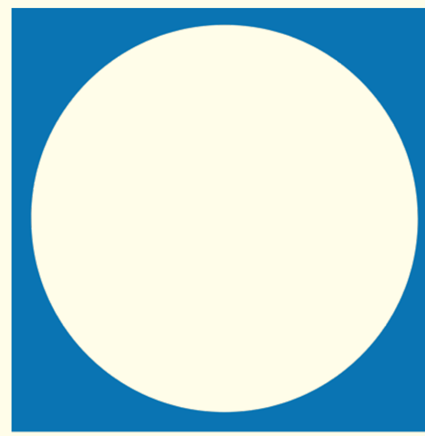
Σε αυτό το σημείο, θα πρέπει να είσαι σε θέση να ικανοποιείς όλους τους προσδοκώμενους μαθησιακούς στόχους. Γύρνα στην αρχή της θεματικής ενότητας και σημείωσε ✓ στα αντίστοιχα σημεία. Υπάρχουν στόχοι που αισθάνεσαι ότι δεν έχεις ικανοποιήσει πλήρως;

ΕΠΕΚΤΕΙΝΩ τις γνώσεις μου

Μελετώ το συγκεκριμένο θέμα

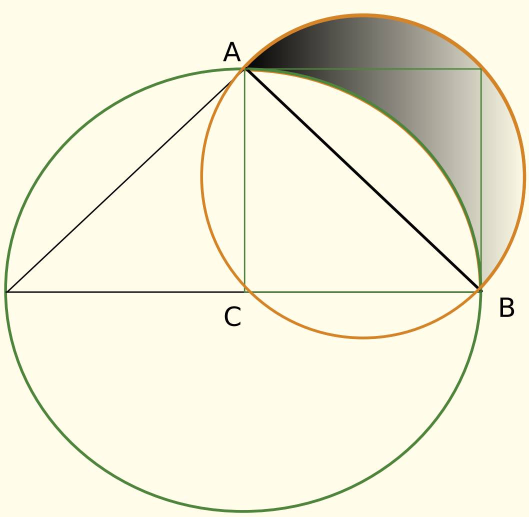
Ο Τετραγωνισμός του Κύκλου

Ο τετραγωνισμός του κύκλου είναι ένα κλασικό πρόβλημα της γεωμετρίας που θέτει το ζήτημα της κατασκευής, με κανόνα και διαβήτη, ενός τετραγώνου που έχει την ίδια επιφάνεια με έναν κύκλο. Το πρόβλημα αυτό απασχόλησε τους μαθηματικούς από την αρχαιότητα.



Αρχαία Ελλάδα

Οι πρώτοι που ασχολήθηκαν με τον τετραγωνισμό του κύκλου ήταν οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί. Ο Αναξαγόρας, ο Ιπποκράτης ο Χίος και άλλοι προσπάθησαν να λύσουν το πρόβλημ, ανακαλύπτοντας ταυτόχρονα άλλα σπουδαία θεωρήματα και ιδιότητες της Γεωμετρίας.



Μερικές επιμέρους λύσεις έδωσαν ψεύτικες ελπίδες για για τη λύση του προβλήματος. Στο διπλανό σχήμα, η σκιασμένη επιφάνεια είναι ο μηνίσκος του Ιπποκράτη. Το εμβαδόν του είναι ίσο με το εμβαδόν του τριγώνου ABC.

Μεσαίωνας και Αναγέννηση

Κατά τη διάρκεια του Μεσαίωνα και της Αναγέννησης, το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου παρέμεινε ένα σημαντικό ζήτημα, που απασχόλησε την μαθηματική κοινότητα αλλά δεν βρήκε απάντηση.

19ος Αιώνας

Το 1882, ο Ferdinand von Lindemann απέδειξε ότι το π είναι άρρητος και υπερβατικός αριθμός. Αυτή η απόδειξη κατέδειξε ότι είναι **αδύνατον να τετραγωνιστεί ο κύκλος με τη χρήση μόνο κανόνα και διαβήτη**.

Σύγχρονη Εποχή

Σήμερα, ο τετραγωνισμός του κύκλου θεωρείται αδύνατο πρόβλημα στην κλασική γεωμετρία. Συνεχίζει, όμως, να εμπνέει μαθηματικούς και καλλιτέχνες, διατηρώντας τη θέση του στην ιστορία των Μαθηματικών.

Στις μέρες μας, η φράση «τετραγωνίζω τον κύκλο» χρησιμοποιείται μεταφορικά για να περιγράψει μια αδύνατη ή εξαιρετικά δύσκολη αποστολή, που απαιτεί ευρηματικότητα και υπερβαίνει τα όρια του εφικτού. Συχνά εμφανίζεται στον δημόσιο λόγο, την πολιτική και την καθημερινή ζωή για να εκφράσει την αναζήτηση λύσεων σε φαινομενικά άλυτα προβλήματα.

Ο τετραγωνισμός του κύκλου στις Τέχνες

Το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου έχει αναφερθεί σε ένα ευρύ φάσμα λογοτεχνικών εποχών, με ποικίλες μεταφορικές έννοιες. Η λογοτεχνική του χρήση χρονολογείται τουλάχιστον από το 414 π.Χ., όταν πρωτοπαρουσιάστηκε το έργο «Όρνιθες» του Αριστοφάνη. Σε αυτό, ο χαρακτήρας Μέτων της Αθήνας αναφέρει τον τετραγωνισμό του κύκλου, πιθανώς για να υποδηλώσει την παράδοξη φύση της ουτοπικής πόλης του.

Για τον Δάντη, ο τετραγωνισμός του κύκλου αντιπροσωπεύει ένα έργο πέρα από την ανθρώπινη κατανόηση, το οποίο συγκρίνει με τη δική του ανικανότητα να κατανοήσει τον Παράδεισο.

Η εικόνα του Δάντη θυμίζει τη μεταγενέστερη εικονογραφία «Βιτρούβιος Άνθρωπος» του Λεονάρντο ντα Βίντσι, ενός ανθρώπου που εγγράφεται ταυτόχρονα σε έναν κύκλο και ένα τετράγωνο.


γ
α
β

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Β.4

Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε τα διανύσματα, τις βασικές έννοιες και τις εφαρμογές τους. Θα ανακαλύψουμε πώς τα διανύσματα μπορούν να αναπαραστήσουν θέσεις, κατευθύνσεις και μετατοπίσεις στο επίπεδο.

Ποιες είναι οι διαφορές ανάμεσα σε ένα ευθύγραμμο τμήμα και ένα διάνυσμα;

Πώς μπορείς να χρησιμοποιήσεις τα διανύσματα για να συνδέσεις φυσικά μεγέθη με την μαθηματική τους έκφραση;

Είσαι έτοιμος/η να γνωρίσεις τα διανύσματα και να κατανοήσεις τη σημασία τους στις φυσικές επιστήμες;

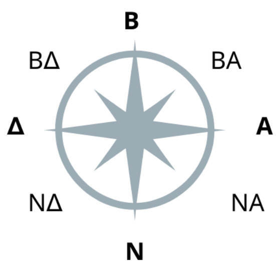
Στόχοι Ενότητας

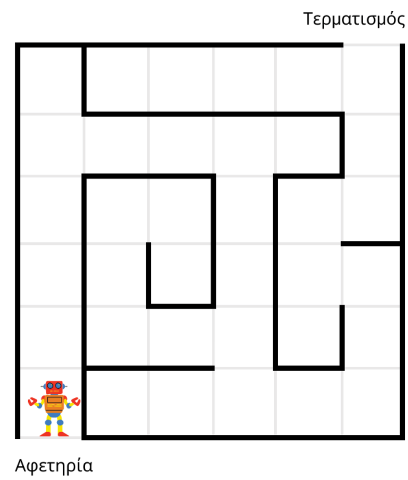
- ☐ Αναπαριστώ θέσεις, διευθύνσεις και διαδρομές με τη βοήθεια διανυσμάτων.
- ☐ Συνδέω τα διανύσματα με φυσικά διανυσματικά μεγέθη και προσδιορίζω τα χαρακτηριστικά του αναγνωρίζοντας τη διαφορά ανάμεσα σε ευθύγραμμο τμήμα και διάνυσμα.

Μαθήματα Ενότητας

4.1 | Η έννοια του Διανύσματος

Δώσε τις κατάλληλες οδηγίες ώστε το ρομπότ που βρίσκεται στην αφετηρία ενός λαβυρίνθου να μετακινηθεί προς τον τερματισμό.





Διανυσματικά μεγέθη

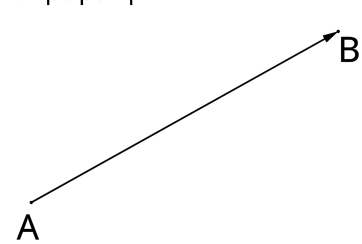
Υπάρχουν μεγέθη, όπως είναι ο χρόνος, η θερμοκρασία, η μάζα, το εμβαδόν κ.α. τα οποία προσδιορίζονται μόνο από το μέτρο τους και από την αντίστοιχη μονάδα μέτρησης. Τα μεγέθη αυτά λέγονται **μονόμετρα** ή **βαθμωτά**.

Υπάρχουν όμως και μεγέθη, όπως είναι η ταχύτητα, η δύναμη, κ.α. που για να τα προσδιορίσουμε, εκτός από το μέτρο τους και τη μονάδα μέτρησης, χρειαζόμαστε τη **κατεύθυνσή** τους.

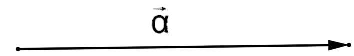
Μεγέθη τα οποία για να προσδιορίσουμε, εκτός από το μέτρο τους και τη μονάδα μέτρησης, χρειαζόμαστε και την κατεύθυνσή τους λέγονται **διανυσματικά** μεγέθη.

Τα διανυσματικά μεγέθη παριστάνονται με διανύσματα που συμβολίζονται με βέλη.

Για παράδειγμα το διάνυσμα του σχήματος έχει αρχή το σημείο Α και πέρας (τέλος) το σημείο Β και συμβολίζεται με $\overrightarrow{AB}$.



- Μπορούμε να συμβολίσουμε ένα διάνυσμα και με ένα μικρό γράμμα, π.χ. $\vec{α}$.

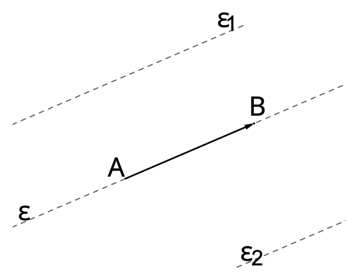


Στοιχεία διανύσματος

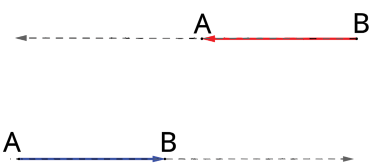
Ένα διάνυσμα είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα στο οποίο προσδίδουμε: **διεύθυνση**, **φορά** και **μέτρο**.

Αναλυτικά:

α) **Διεύθυνση**, ενός διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ ονομάζεται η ευθεία ε που ορίζουν τα άκρα Α, Β ή οποιαδήποτε άλλη ευθεία παράλληλη προς αυτή.

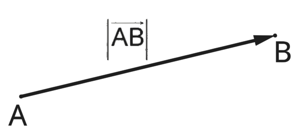


β) **Φορά**, ενός διανύσματος με άκρα τα Α και Β είναι το στοιχείο που καθορίζει αν το διάνυσμα έχει αρχή το Α και πέρας το Β $(\overrightarrow{AB})$ ή αρχή το Β και πέρας το Α $(\overrightarrow{BA})$.



Η διεύθυνση μαζί με τη φορά καθορίζουν την κατεύθυνση ενός διανύσματος.

γ) **Μέτρο**, ενός διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ λέγεται το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, το οποίο συμβολίζουμε με $|\overrightarrow{AB}|$.

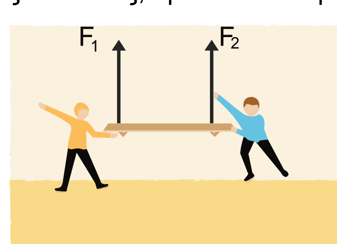


- Το μέτρο ενός διανύσματος είναι πάντοτε ένας μη αρνητικός αριθμός.

1η Δραστηριότητα:

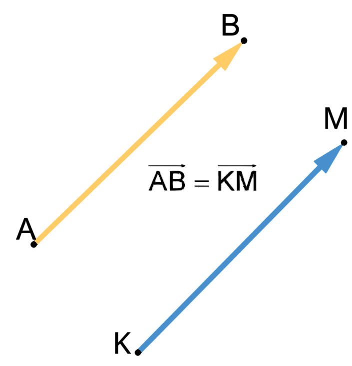
Δύο μαθητές σηκώνουν από το έδαφος ένα ράφι και το τοποθετούν στον τοίχο της τάξης τους παράλληλα με το έδαφος.

Οι δυνάμεις που ασκούν οι δύο μαθητές είναι ίδιες, άρα τα διανύσματα $\vec{F_1}$ και $\vec{F_2}$ θα είναι ίσα.

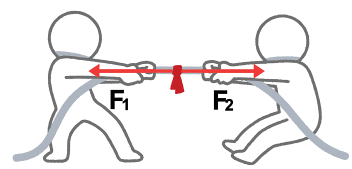


Γενικά:

Δύο διανύσματα λέγονται **ίσα**, όταν έχουν την ίδια διεύθυνση, την ίδια φορά και ίσα μέτρα.



2η Δραστηριότητα:



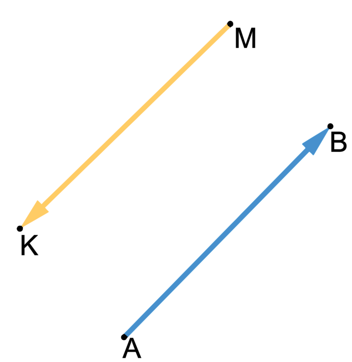
Η διελκυστίνδα είναι ένα άθλημα που παίζεται μεταξύ δύο ομάδων, οι οποίες τραβούν ένα σχοινί προσπαθώντας η μία να τραβήξει την άλλη προς το μέρος της.

Δύο μαθητές/τριεςπαίζοντας αυτό το παιχνίδι τραβούν το σκοινί αλλά αυτό μένει ακίνητο.

Οι δυνάμεις που ασκούν οι δύο μαθητές/τριεςείναι αντίθετες, άρα τα διανύσματα $\overrightarrow{F_1}$ και $\overrightarrow{F_2}$ θα είναι αντίθετα.

Γενικά:

Δύο διανύσματα είναι **αντίθετα**, όταν έχουν την ίδια διεύθυνση, ίσα μέτρα και αντίθετη φορά.



Αντιλαμβάνομαι

με προσομοίωση

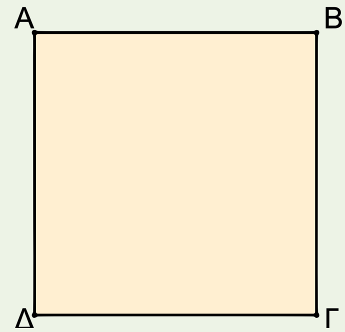
Λυμένα Παραδείγματα

1. Να βρείτε όλα τα διανύσματα που ορίζονται από τις πλευρές του τετραγώνου ΑΒΓΔ. Ποια από αυτά τα διανύσματα:

α) έχουν ίσα μέτρα;

β) είναι ίσα;

γ) είναι αντίθετα;



Λύση:

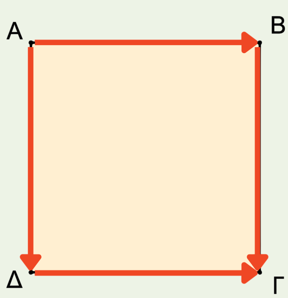
Τα διανύσματα που ορίζονται από τις πλευρές του τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι τα εξής:

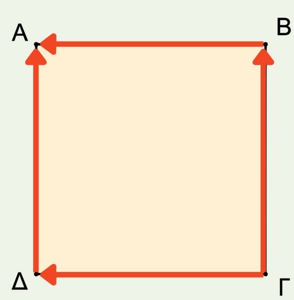
$$\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BA},\quad \overrightarrow{B\Gamma},\ \overrightarrow{\Gamma B},\quad \overrightarrow{\Delta\Gamma},\ \overrightarrow{\Gamma\Delta},\quad \overrightarrow{A\Delta},\ \overrightarrow{\Delta A}.$$

α) Όλα τα διανύσματα έχουν ίσα μέτρα γιατί οι πλευρές του τετραγώνου ΑΒΓΔ έχουν το ίδιο μήκος.

β) Ίσα είναι τα διανύσματα που έχουν ίσα μέτρα, ίδια διεύθυνση και ίδια φορά, άρα:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma},\ \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{\Gamma\Delta},\ \overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{B\Gamma} \text{ και } \overrightarrow{\Delta A} = \overrightarrow{\Gamma B}.$$

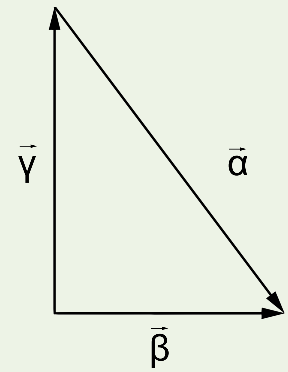




γ) Αντίθετα είναι τα διανύσματα που έχουν ίσα μέτρα, ίδια διεύθυνση και αντίθετη φορά, άρα αντίθετα είναι τα:

- $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$
- $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$
- $\overrightarrow{A\Delta}$, $\overrightarrow{\Gamma B}$
- $\overrightarrow{\Delta A}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$

2. Αν το μέτρο του διανύσματος $\vec{\beta}$ είναι 6 και το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$ είναι 8 και γνωρίζουμε ότι τα διανύσματα είναι μεταξύ τους κάθετα, να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$.



Λύση:

Αφού $\vec{\beta} \perp \vec{\gamma}$, το τρίγωνο που σχηματίζεται από τα μήκη των διανυσμάτων είναι ορθογώνιο.

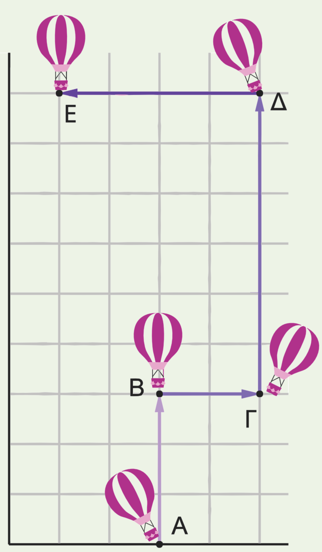
Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$|\vec{\alpha}|^2 = |\vec{\beta}|^2 + |\vec{\gamma}|^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100,$

άρα $|\vec{\alpha}| = \sqrt{100} = 10.$

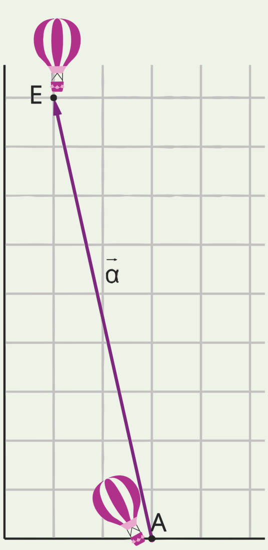
3. Ένα αερόστατο απογειώνεται από το σημείο (30,0) και αρχίζει να ανυψώνεται. Σε ύψος 30 μέτρα συναντάει άνεμο που το στέλνει 20 μέτρα δεξιά. Συνεχίζει να ανυψώνεται 60 μέτρα και συναντάει άνεμο που το στέλνει 40 μέτρα αριστερά. Να σχεδιάσετε τη διαδρομή του αερόστατου σε ένα σύστημα αξόνων και να βρείτε το διάνυσμα που περιγράφει την μετατόπιση του αερόστατου, από την αρχική στην τελική του θέση.

Λύση:



Το αερόστατο ξεκινάει από το σημείο Α (30,0) και ανεβαίνει 30 μέτρα, δηλαδή φτάνει στο σημείο Β (30,30). Στη συνέχεια ο άνεμος το στέλνει 20 μέτρα δεξιά, δηλαδή βρίσκεται στη θέση Γ (50,30) και ανυψώνεται μέχρι τη θέση Δ (50,90). Πλέον έχει ανυψωθεί στα 90 μέτρα και ο άνεμος το στέλνει 40 μέτρα αριστερά, δηλαδή καταλήγει στο σημείο Ε (10,90) όπως φαίνεται στο σχήμα.

Τελικά, η κίνηση του αερόστατου περιγράφεται από το διάνυσμα $\overrightarrow{ΑΕ} = \vec{\alpha}$ που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



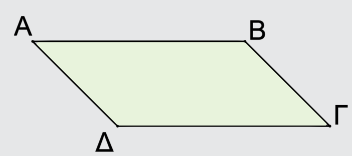
1

Χαρακτήρισε σωστές ή λανθασμένες τις προτάσεις που ακολουθούν βάζοντας ένα **x** στην κατάλληλη θέση.

	Σωστό	**Λάθος**
α) Η ταχύτητα είναι ένα διανυσματικό μέγεθος.		
β) Ο χρόνος είναι μονόμετρο μέγεθος.		
γ) Στο διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$, το Α είναι το πέρας του.		
δ) Δύο ίσα διανύσματα έχουν ίσα μέτρα.		
ε) Δυο διανύσματα με ίσα μέτρα είναι ίσα.		
στ) Δυο διανύσματα είναι αντίθετα όταν έχουν αντίθετη κατεύθυνση.		

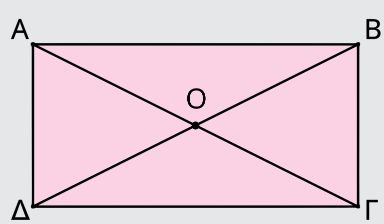
2

Στο παρακάτω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ σημείωσε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$, $\overrightarrow{\Delta A}$. Ποια από τα διανύσματα αυτά είναι ίσα και ποια είναι αντίθετα;



3

Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο. Στα ζεύγη διανυσμάτων που ακολουθούν, βρες ποια διανύσματα είναι ίσα και ποια είναι αντίθετα:



α) $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$

β) $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$

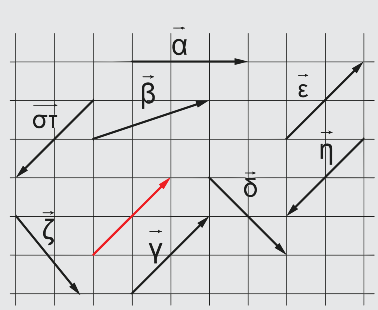
γ) $\overrightarrow{A\Delta}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$

δ) $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{O\Gamma}$

ε) $\overrightarrow{\Delta O}$ και $\overrightarrow{OB}$

4

Ποια διανύσματα είναι ίσα και ποια αντίθετα με το κόκκινο διάνυσμα;

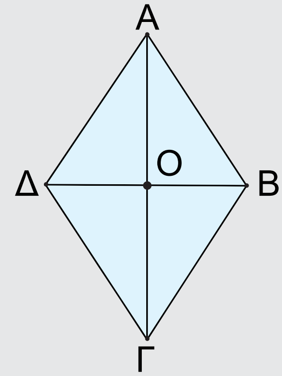


5 Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος. Ποιες από τις παρακάτω ισότητες είναι σωστές;

α) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B\Gamma}$ β) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{B\Gamma}|$

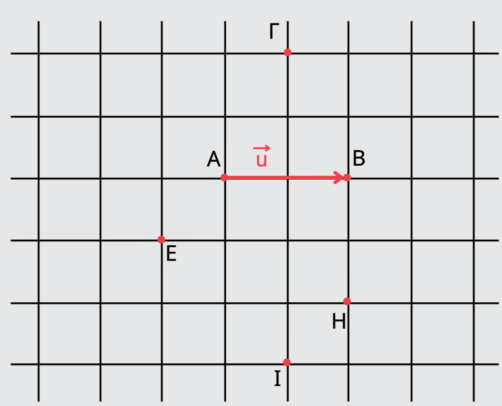
γ) $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{O\Gamma}|$ δ) $\overrightarrow{\Delta O} = \overrightarrow{OB}$

ε) $\overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{B\Gamma}$



6 Δίνεται διάνυσμα $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$. Σχεδίασε τα διανύσματα που αναφέρονται παρακάτω:

- $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ίσο με το $\vec{u}$.
- $\overrightarrow{EZ}$ το οποίο έχει ίδια φορά με το $\vec{u}$ αλλά δεν είναι ίσο με αυτό.
- $\overrightarrow{H\Theta}$ αντίθετο του $\vec{u}$.
- $\overrightarrow{IK}$ το οποίο έχει αντίθετη φορά με το $\vec{u}$ αλλά δεν είναι αντίθετο του $\vec{u}$.



7 Σχεδίασε δύο διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$, τα οποία έχουν ίσα μέτρα 4cm και σχηματίζουν γωνία 60°. Σχεδίασε το διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma A}$ και βρεστο μέτρο του.

Χρησιμοποιώ

Εξασκούμαι σε όσα έμαθα

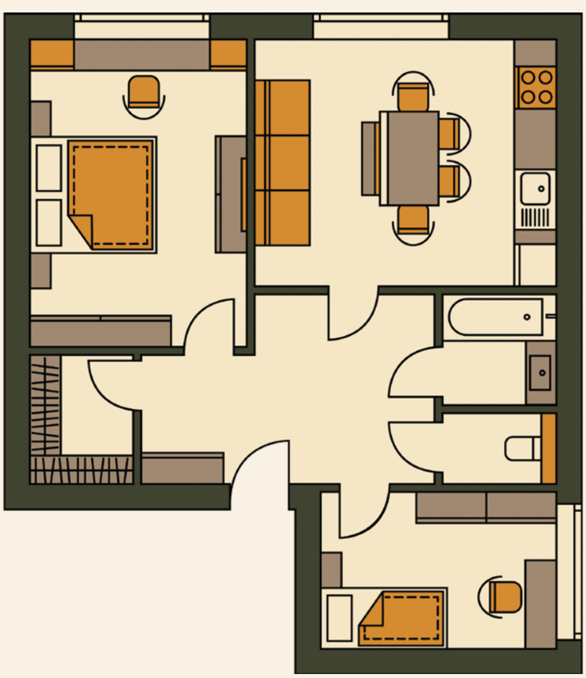
Η ενεργειακή αποδοτικότητα ενός σπιτιού εξαρτάται από διάφορους παράγοντες, όπως:
- Το σχήμα και η δομή του κτιρίου.
- Ο προσανατολισμός του σε σχέση με τον ήλιο.
- Η χρήση υλικών που μειώνουν την απώλεια θερμότητας.

Για να μειωθεί η ενεργειακή κατανάλωση:
- Η έκθεση του κτιρίου στον ήλιο πρέπει να μεγιστοποιείται τον χειμώνα.
- Η σκίαση πρέπει να είναι επαρκής το καλοκαίρι.

Παρακάτω παρουσιάζονται δύο σπίτια με διαφορετικό σχεδιασμό.

	Προσανατολισμός	Παράθυρα	Σκίαση
Σπίτι Α	Ανατολικά-Δυτικά	Μεγάλα παράθυρα στη δυτική πλευρά	Χωρίς σκίαση
Σπίτι Β	Νότια	Μεγάλα παράθυρα στη νότια πλευρά	Σκίαστρα και φυτά

- Ποιο σπίτι νομίζετε ότι είναι πιο ενεργειακά αποδοτικό τον χειμώνα και γιατί;
- Ποιο σπίτι θα είναι πιο δροσερό το καλοκαίρι;



-Βρείτε πληροφορίες για τα κτίρια που χτίζονται στην Σκανδιναβία και τα κτίρια στην Ιαπωνία.
-Τι χαρακτηριστικά έχουν;
-Ποια άλλα στοιχεία πέρα από τον καιρό πρέπει να λάβουμε υπόψιν όταν χτίζουμε ένα κτίριο;

Ανακεφαλαίωση (Διανύσματα)

Διανυσματικά λέγονται τα μεγέθη τα οποία για να τα προσδιορίσουμε, εκτός από το μέτρο τους και τη μονάδα μέτρησης, χρειαζόμαστε και την κατεύθυνσή τους.

Στοιχεία διανύσματος

Διεύθυνση, ενός διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ ονομάζεται η ευθεία ε που ορίζουν τα άκρα Α, Β ή οποιαδήποτε άλλη ευθεία παράλληλη προς αυτή.

Φορά, ενός διανύσματος με άκρα τα Α και Β είναι το στοιχείο που καθορίζει αν το διάνυσμα έχει αρχή το Α και πέρας το Β $(\overrightarrow{AB})$ ή αρχή το Β και πέρας το Α $(\overrightarrow{BA})$.

Η διεύθυνση μαζί με τη φορά καθορίζουν την **κατεύθυνση** ενός διανύσματος.

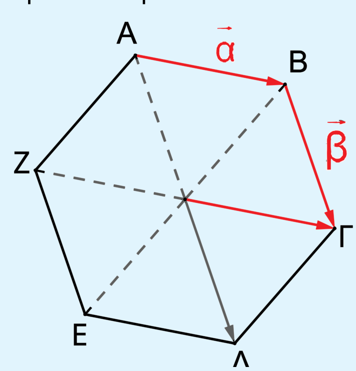
Μέτρο, ενός διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ λέγεται το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, το οποίο συμβολίζουμε με $|\overrightarrow{AB}|$ και είναι πάντοτε ένας μη αρνητικός αριθμός.

Δύο διανύσματα λέγονται **ίσα**, όταν έχουν την ίδια διεύθυνση, την ίδια φορά και ίσα μέτρα.

Αντίθετα λέγονται δύο διανύσματα όταν έχουν την ίδια διεύθυνση, ίσα μέτρα και αντίθετη φορά.

Αυτοαξιολόγηση (Διανύσματα)

Α. Σε κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ ορίζουμε διανύσματα $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{B\Gamma} = \vec{\beta}$.



α) Βρες 3 διανύσματα ίσα με το διάνυσμα $\vec{\alpha}$.

β) Βρες 3 διανύσματα ίσα με το διάνυσμα $\vec{\beta}$.

γ) Βρες 1 διάνυσμα αντίθετο με το διάνυσμα $\vec{\alpha}$.

δ) Βρες 1 διάνυσμα αντίθετο με το διάνυσμα $\vec{\beta}$.

ε) Βρες 1 διάνυσμα με μέτρο διπλάσιο του μέτρου του $\vec{\alpha}$.

Σε αυτό το σημείο, θα πρέπει να είσαι σε θέση να ικανοποιείς όλους τους προσδοκώμενους μαθησιακούς στόχους. Γύρνα στην αρχή της θεματικής ενότητας και σημείωσε ✓ στα αντίστοιχα σημεία. Υπάρχουν στόχοι που αισθάνεσαι ότι δεν έχεις ικανοποιήσει πλήρως;

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ B.5

Στην ενότητα αυτή θα εξερευνήσουμε τις βασικές αρχές των γεωμετρικών μετασχηματισμών, όπως η μεταφορά, η στροφή και η συμμετρία. Θα ανακαλύψουμε πώς αυτές οι διαδικασίες αλλάζουν τη θέση και τον προσανατολισμό των σχημάτων, διατηρώντας ταυτόχρονα βασικές τους ιδιότητες.

Πώς μπορείς να χρησιμοποιήσεις αυτούς τους μετασχηματισμούς για να περιγράψεις κινήσεις στην καθημερινότητά ή να επιλύσεις γεωμετρικά προβλήματα;

Είσαι έτοιμος/η να κατανοήσεις την ομορφιά της γεωμετρίας μέσα από μετασχηματισμούς;

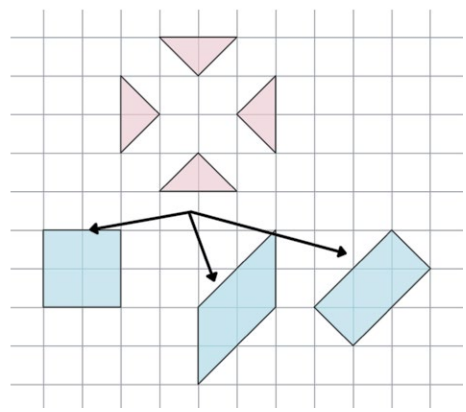
Στόχοι Ενότητας

- ☐ Αναπαριστώ θέσεις, διευθύνσεις και διαδρομές με τη βοήθεια διανυσμάτων.
- ☐ Συνδέω τα διανύσματα με φυσικά διανυσματικά μεγέθη και προσδιορίζω τα χαρακτηριστικά του αναγνωρίζοντας τη διαφορά ανάμεσα σε ευθύγραμμο τμήμα και διάνυσμα.

Μαθήματα Ενότητας

5.1 | Μεταφορά και στοιχεία της

Μετακίνησε τα 4 τρίγωνα, χωρίς να τα περιστρέψεις, και τοποθέτησέ τα με τέτοιον τρόπο ώστε να σχηματίζουν το τετράγωνο, το παραλληλόγραμμο και το ορθογώνιο που φαίνονται στο διπλανό σχήμα.



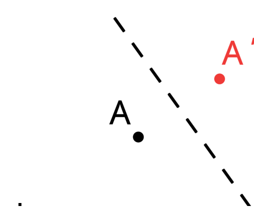
Επίπεδος μετασχηματισμός

Επίπεδος μετασχηματισμός (ή απλά μετασχηματισμός) ονομάζεται κάθε αντιστοιχία στο επίπεδο, όπου κάθε σημείο Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς σημείο Α'.

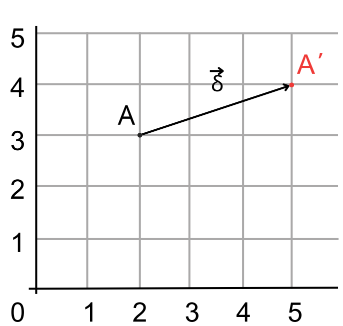
Το σημείο Α το ονομάζουμε **αρχικό** (ή πρότυπο) και το σημείο Α' **τελικό** (ή εικόνα).

Παράδειγμα:

Η συμμετρία ως προς άξονα (ε) είναι ένας επίπεδος μετασχηματισμός που απεικονίζει κάθε σημείο Α του επιπέδου σε ένα σημείο Α' του επιπέδου τέτοιο, ώστε ο άξονας συμμετρίας (ε) να είναι η μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΑΑ'



Παράλληλη μεταφορά



Ας υποθέσουμε ότι ένα αρχικό σημείο Α(2,3) μεταφέρεται κατά ένα διάνυσμα $\vec{\delta}$ και καταλήγει στο τελικό σημείο Α'(5,4).

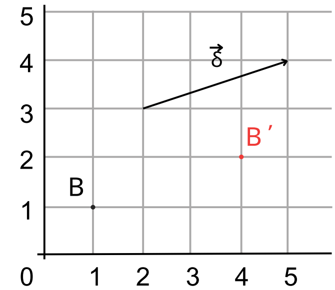
Το σημείο Α μεταφέρθηκε 3 μονάδες προς τα δεξιά και 1 μονάδα προς τα πάνω.

Παρατηρούμε ότι:

- Η τετμημένη x του σημείου Α αυξήθηκε κατά 3.
- Η τεταγμένη y του σημείου Α αυξήθηκε κατά 1.

$$A(2,3) \rightarrow A'(5,4)$$

Αν ένα αρχικό σημείο Β(1,1) μεταφερθεί κατά το ίδιο διάνυσμα $\vec{\delta}$ τότε το τελικό σημείο θα είναι το Β'(4,2).



Αντιλαμβάνομαι
με προσομοίωση

Δραστηριότητα:

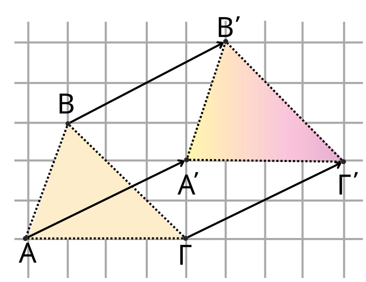
Σύμφωνα με τα παραπάνω, να συμπληρώσετε τον πίνακα που αναφέρεται σε μεταφορά κατά το ίδιο διάνυσμα $\vec{\delta}$.

Αρχικό σημείο	Α(2, 3)	Β(1, 1)	Γ(10, 7)	Δ(0, 6)	Ε(−8, − 6)	Μ(x, y)
Τελικό σημείο	Α'(5, 4)	Β'(4, 2)	Γ' (.... , ...)	Δ' (.... , ...)	Ε' (.... , ...)	Μ' (.... , ...)

Γενικά:

Παράλληλη μεταφορά ονομάζουμε το μετασχηματισμό στον οποίο κάθε σημείο ενός σχήματος μετακινείται προς την ίδια κατεύθυνση και σε ίση απόσταση.

Παράδειγμα: Το τρίγωνο Α'Β'Γ' προκύπτει από μία παράλληλη μεταφορά του τριγώνου ΑΒΓ κατά 4 μονάδες προς τα δεξιά και 2 μονάδες προς τα πάνω.



Παρατηρούμε ότι:

1. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' έχουν τις πλευρές τους ίσες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, άρα είναι $\overset{\triangle}{ΑΒΓ} = \overset{\triangle}{Α'Β'Γ'}$.

2. Οι πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ είναι παράλληλες προς τις πλευρές του Α'Β'Γ'.

Γενικά:

Η μεταφορά δεν αλλοιώνει τις διαστάσεις και τα χαρακτηριστικά των σχημάτων, μεταβάλει απλώς τη θέση τους στο επίπεδο. Προκύπτει ότι:

Στην παράλληλη μεταφορά το αρχικό σχήμα (πρότυπο) και το τελικό σχήμα (εικόνα) είναι **ίσα** μεταξύ τους.

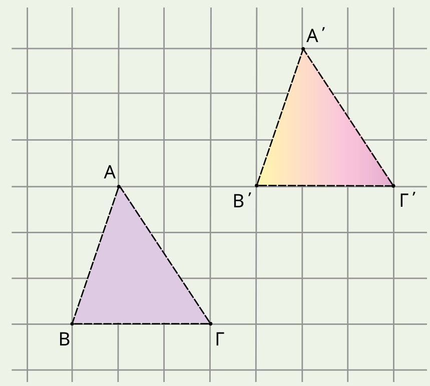
- Κάθε παράλληλη μεταφορά έχει δύο κύρια χαρακτηριστικά:

  α. την **κατεύθυνση** και

  β. την **απόσταση**.

Λυμένα Παραδείγματα

1. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ απεικονίζεται στο τρίγωνο Α'Β'Γ' μέσω ενός μετασχηματισμού.



α) Να περιγράψετε τον μετασχηματισμό.

β) Να βρείτε την απόσταση της μετακίνησης κάθε σημείου του τριγώνου ΑΒΓ.

Λύση:

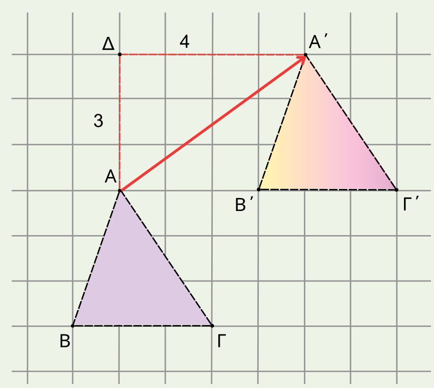
α) Ο μετασχηματισμός είναι μία παράλληλη μεταφορά κατά 4 μονάδες προς τα δεξιά και 3 μονάδες προς τα πάνω.

β) Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΑΔΑ', έχουμε:

$$ΑΑ'^{\,2} = ΑΔ^2 + Α'Δ^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25,$$

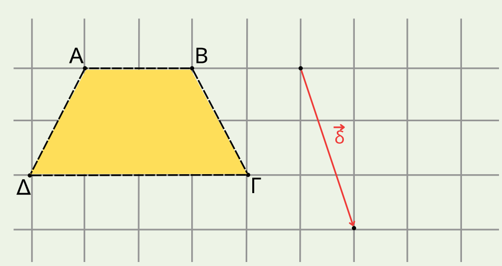
άρα $$ΑΑ' = \sqrt{25} = 5.$$

Επομένως το σημείο Α, όπως και κάθε σημείο του τριγώνου ΑΒΓ, μετακινείται κατά 5 μονάδες.



2. Να σχεδιάσετε το σχήμα που προκύπτει από παράλληλη μεταφορά του ΑΒΓΔ κατά το διάνυσμα $\vec{δ}$.

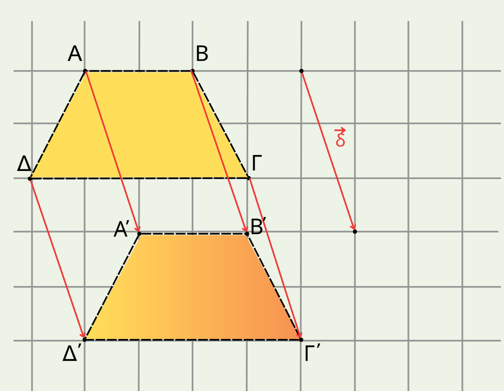
Στη συνέχεια να συγκρίνετε τα δύο σχήματα.



Λύση:

Κάθε σημείο του σχήματος ΑΒΓΔ μεταφέρεται 1 μονάδα δεξιά και 3 μονάδες κάτω.

Τα σχήματα είναι ίσα γιατί το Α'Β'Γ'Δ' προκύπτει από παράλληλη μεταφορά του ΑΒΓΔ.

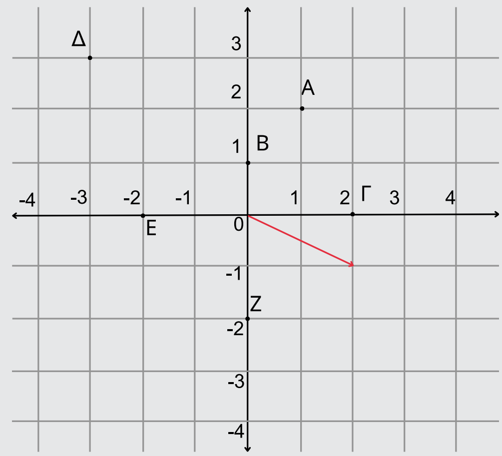


Ασκήσεις / Προβλήματα

1 Τα σημεία που είναι σημειωμένα στο παρακάτω σχήμα μετακινούνται μέσω μίας παράλληλης μεταφοράς κατά διάνυσμα $\vec{\delta}$.

Συμπλήρωσε τον πίνακα και σημείωσε τα τελικά σημεία στο σχήμα.

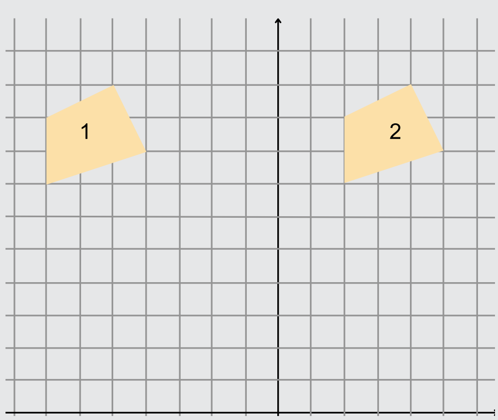
Αρχικό σημείο	Τελικό σημείο
Α(1,2)	Α' (.... , ...)
Β(0,1)	Β' (.... , ...)
Γ(2,0)	Γ' (.... , ...)
Δ(-3,3)	Δ' (.... , ...)
Ε(-2,0)	Ε' (.... , ...)
Ζ(0,-2)	Ζ' (.... , ...)



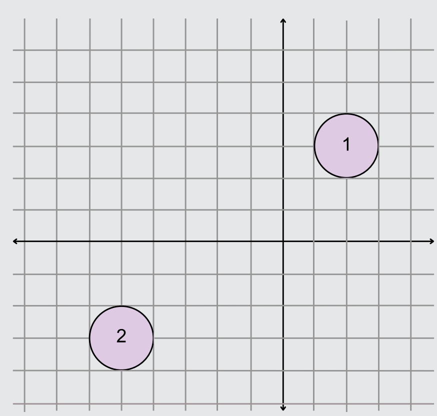
Γενικά αν Μ(x,y) τότε Μ' (.... , ...)

2 Περίγραψε τον μετασχηματισμό που απεικονίζει το σχήμα 1 στο σχήμα 2 σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις.

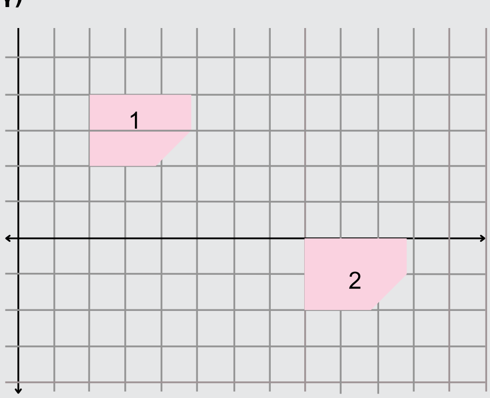
α)



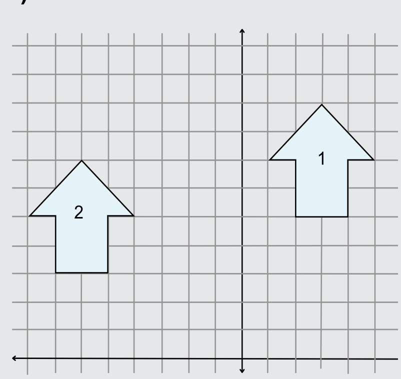
β)



γ)



δ)



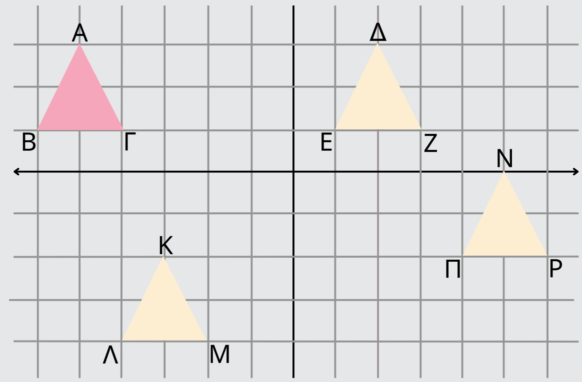
3

Περίγραψε τη μεταφορά που απεικονίζει το τρίγωνο ΑΒΓ στο τρίγωνο:

α) ΔΕΖ

β) ΚΛΜ

γ) ΝΠΡ

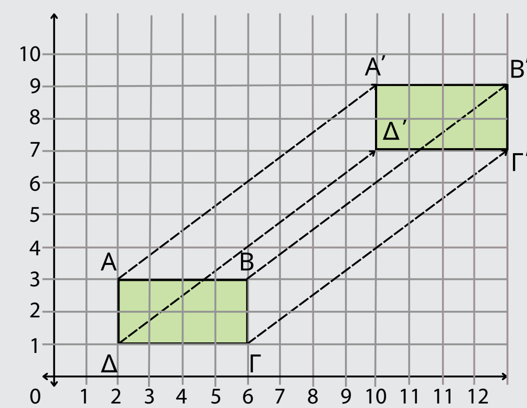


Αντιλαμβάνομαι

με προσομοίωση

4

Στο διπλανό σχήμα το ορθογώνιο ΑΒΓΔ απεικονίζεται στο Α'Β'Γ'Δ', μέσω ενός μετασχηματισμού.



α) Περίγραψε τον μετασχηματισμό.

β) Υπολόγισε την απόσταση που μετακινείται κάθε σημείο του ορθογωνίου ΑΒΓΔ.

γ) Περίγραψε τον μετασχηματισμό που απεικονίζει το ορθογώνιο Α'Β'Γ'Δ' στο ΑΒΓΔ.

5

Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα:

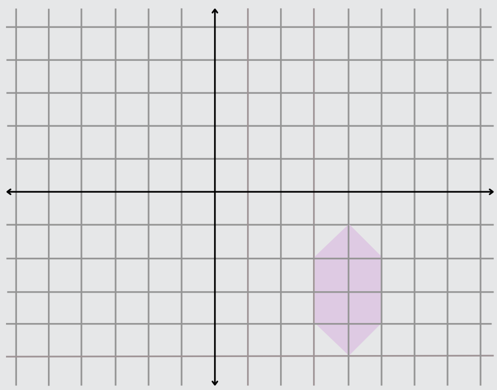
Συντεταγμένες αρχικού σημείου	**Παράλληλη μεταφορά**	**Συντεταγμένες τελικού σημείου**
(3,-2)	1 μονάδα δεξιά	
(2,8)	3 μονάδες κάτω	
	2 μονάδες αριστερά	(-4,-3)
(1,0)		(-1,0)
(2,2)		(3,3)

Εξασκούμαι

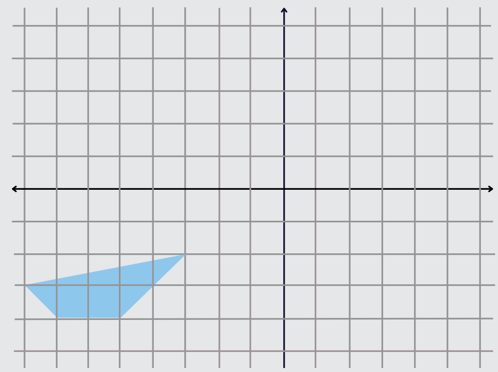
σε όσα έμαθα

6 Σχεδίασε το σχήμα που προκύπτει από την παράλληλη μεταφορά που υποδεικνύεται σε κάθε περίπτωση.

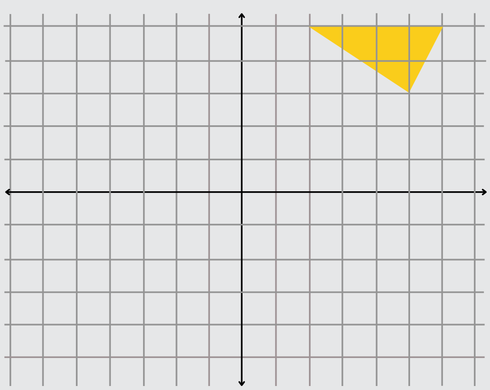
α) 6 μονάδες προς τα πάνω και 2 μονάδες προς τα αριστερά.



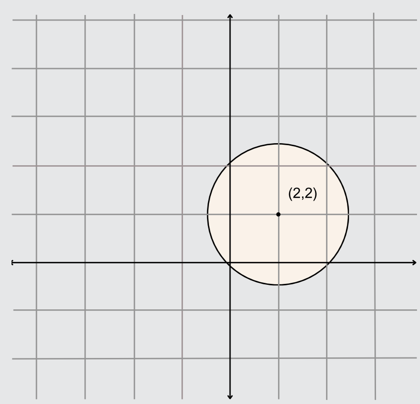
β) 3 μονάδες προς τα δεξιά και 2 μονάδες προς τα πάνω



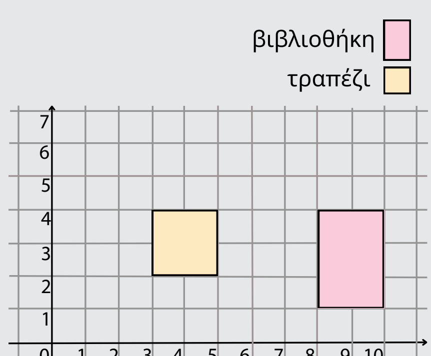
γ) 2 μονάδες προς τα αριστερά και τόσες μονάδες προς τα κάτω ώστε μία πλευρά του τριγώνου να ταυτίζεται με τον άξονα x'x.



δ) 6 μονάδες προς τα αριστερά και 2 μονάδα προς τα κάτω.



7 Ο Ανδρέας έχει ένα δωμάτιο στο σπίτι του, στο οποίο θέλει να αναδιατάξει τα έπιπλα. Στο δωμάτιο υπάρχουν ένα τραπέζι και μια βιβλιοθήκη. Θέλει να μετακινήσει αυτά τα δύο έπιπλα σε νέες θέσεις.



Ο Ανδρέας θέλει να μετακινήσει το τραπέζι 2 μονάδες προς τα αριστερά και 3 μονάδες προς τα πάνω. Επίσης, θέλει να μετακινήσει τη βιβλιοθήκη προς τα δεξιά ώστε να έχει τουλάχιστον απόσταση 2 από το τραπέζι. Βρες μια δεκτή νέα τοποθέτηση των επίπλων.

5.2 | Στροφή και στοιχεία της

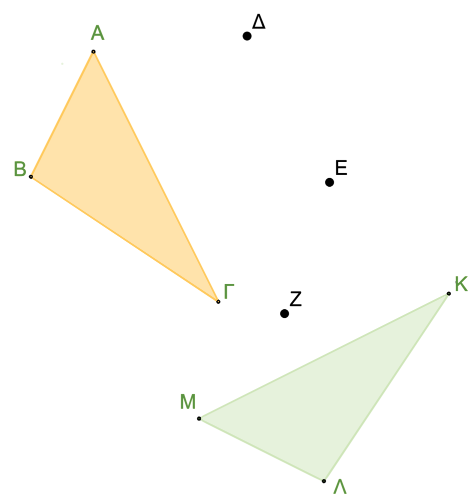
Εξερευνώ

Η εικόνα περιέχει τα σχέδια δύο τριγώνων, των ΑΒΓ και ΚΛΜ καθώς και τρία σημεία Δ, Ε και Ζ. Ξέρεις ότι το τρίγωνο ΚΛΜ είναι η εικόνα του τριγώνου ΑΒΓ πάνω στο οποίο έχει εφαρμοστεί ένας μετασχηματισμός στροφής.

Προσδιόρισε ως προς ποιο από τα σημεία Δ, Ε και Ζ έχει περιστραφεί το τρίγωνο ΑΒΓ ώστε να προκύψει το τρίγωνο ΚΛΜ.

Πρότεινε τρόπους αποκλεισμού κάποιων από τα σημεία ως δυνατά κέντρα περιστροφής.

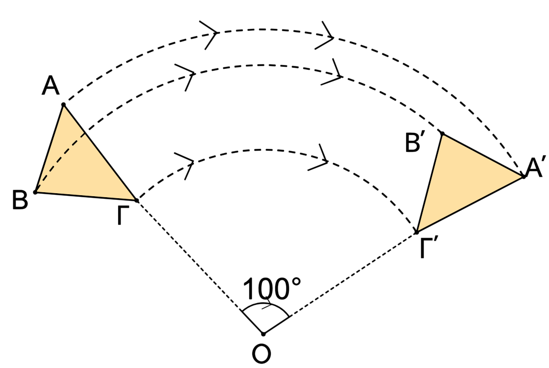
Τεκμηρίωσε με επιχειρήματα την πρόταση σου.



Στροφή με **κέντρο Ο** και **γωνία θ** ονομάζουμε τον μετασχηματισμό με τον οποίο κάθε σημείο Μ του επιπέδου αντιστοιχίζεται σε ένα σημείο Μ', που είναι η τελική θέση του Μ αν αυτό στραφεί γύρω το Ο κατά γωνία θ.

- Το Μ ονομάζεται **αρχικό σημείο** ή **πρότυπο** ενώ το Μ' ονομάζεται **τελικό σημείο** ή **εικόνα**.

Παράδειγμα: Το τρίγωνο Α'Β'Γ' προκύπτει από έναν μετασχηματισμό στροφής του τριγώνου ΑΒΓ με κέντρο Ο και γωνία 100° κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού.



Αν συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΓ (αρχικό) και Α'Β'Γ' (τελικό) θα παρατηρήσουμε ότι αυτά είναι ίσα.

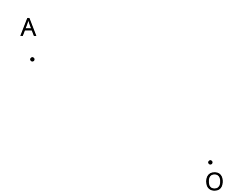
Γενικά:

Ο μετασχηματισμός στροφής δεν αλλοιώνει τις διαστάσεις και τα χαρακτηριστικά των σχημάτων, μεταβάλει απλώς τη θέση τους στο επίπεδο. Προκύπτει ότι:

Κατά τον μετασχηματισμό στροφής το αρχικό σχήμα και το τελικό είναι μεταξύ τους **ίσα**.

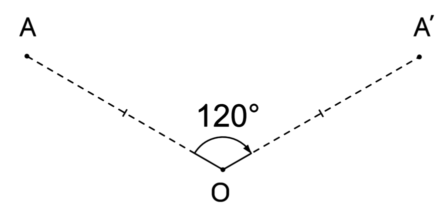
Κατασκευή

Παράδειγμα: Να βρεθεί το σημείο Α' που προκύπτει από έναν μετασχηματισμό στροφής του σημείου Α με κέντρο Ο και γωνία 120°, κατά την φορά των δεικτών του ρολογιού.



Λύση:

- Φέρνουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΟΑ.
- Με κορυφή το Ο και πλευρά την ΟΑ, κατασκευάζουμε γωνία 120° κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού.
- Στην πλευρά που δεν ανήκει το Α παίρνουμε σημείο Α' τέτοιο ώστε ΟΑ' = ΟΑ.



Το Α' είναι το σημείο που αντιστοιχίζεται το Α, μέσω του μετασχηματισμού στροφής.

Σχόλιο:

Η φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού ονομάζεται **αρνητική φορά** ενώ η αντίθετη φορά από αυτήν των δεικτών του ρολογιού ονομάζεται **θετική φορά**.

Αρνητική φορά

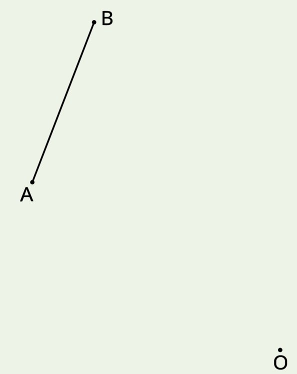
Θετική φορά

Αντιλαμβάνομαι

με προσομοίωση

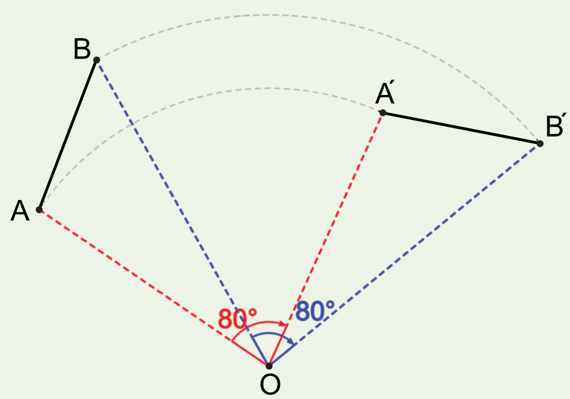
Λυμένα Παραδείγματα

1. Να κατασκευάσετε το ευθύγραμμο τμήμα A'B' που προκύπτει από μετασχηματισμό στροφής του ευθύγραμμου τμήματος AB με κέντρο O και γωνία 80°, κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού.



Λύση:

- Βρίσκουμε τα σημεία A' και B' που προκύπτουν από τον μετασχηματισμό στροφής των σημείων A και B.
- Κατασκευάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα A'B'.

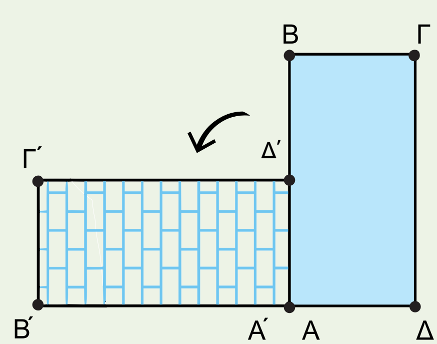


Το A'B' είναι το ευθύγραμμο τμήμα που αντιστοιχίζεται το AB μέσω του μετασχηματισμού στροφής.

Παρατήρηση: Είναι AB=A'B'.

2. Στο διπλανό σχήμα, το ορθογώνιο ΑΒΓΔ απεικονίζεται στο ορθογώνιο Α'Β'Γ'Δ' μέσω ενός μετασχηματισμού στροφής.

Να βρείτε το κέντρο και τη γωνία στροφής του μετασχηματισμού.



Λύση:

Κάθε σημείο του ορθογωνίου ΑΒΓΔ περιστρέφεται γύρω από το σημείο Α (το οποίο ταυτίζεται με το σημείο Α'), κατά γωνία 90°, με φορά αντίθετη από αυτήν των δεικτών του ρολογιού, άρα:

- Το κέντρο του μετασχηματισμού είναι το σημείο Α.
- Η γωνία της στροφής είναι 90°.

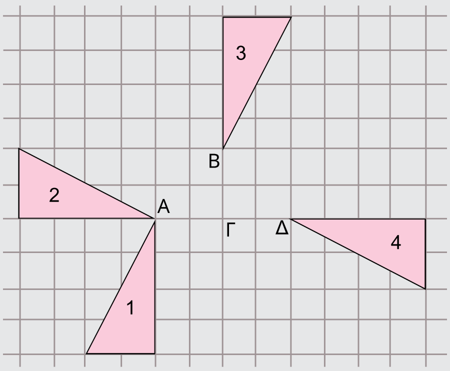
Παρατήρηση: Κατά τον μετασχηματισμό στροφής το κέντρο στροφής συμπίπτει με τον εαυτό του.

Ασκήσεις / Προβλήματα

1

Παρατήρησε το διπλανό σχήμα και συμπλήρωσε τον πίνακα που ακολουθεί:

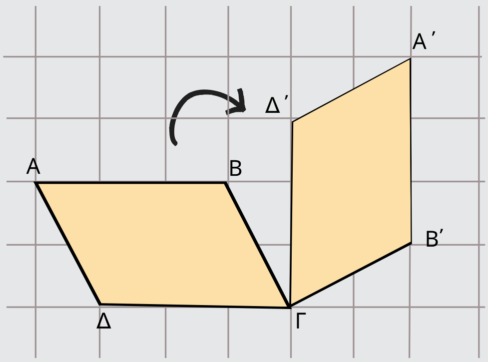
Αρχικό σχήμα	Τελικό σχήμα	Κέντρο στροφής	Γωνία στροφής (κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού)
1	2		
2	3		
2	4		
2	1		
1		**Β**	180°
	4	**Γ**	90°



2

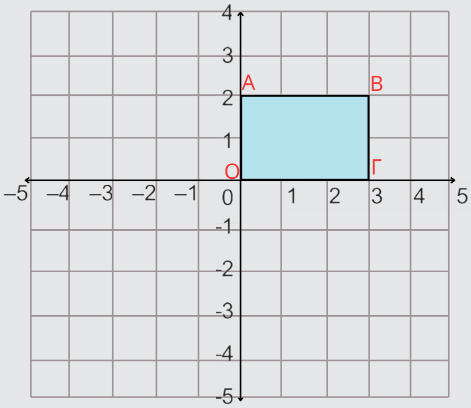
Στο διπλανό σχήμα το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ απεικονίζεται στο Α'Β'ΓΔ' μέσω ενός μετασχηματισμού στροφής.

Βρες το κέντρο και τη γωνία στροφής του μετασχηματισμού.



3

Σχεδίασε το ορθογώνιο Ο'Α'Β'Γ' που προκύπτει από μετασχηματισμό στροφής του ορθογωνίου ΟΑΒΓ με κέντρο το σημείο Ο και γωνία 90°, κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού.



Αντιλαμβάνομαι με προσομοίωση

Εξασκούμαι σε όσα έμαθα

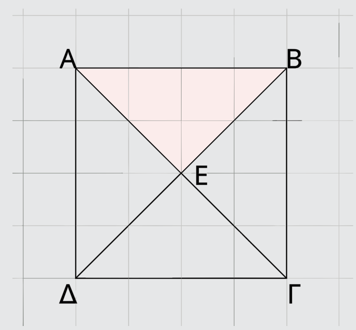
4

Στο διπλανό σχήμα, περίγραψε τον μετασχηματισμό στροφής που απεικονίζει το τρίγωνο ΑΒΕ στο τρίγωνο:

α) ΒΕΓ

β) ΓΕΔ

γ) ΔΕΑ



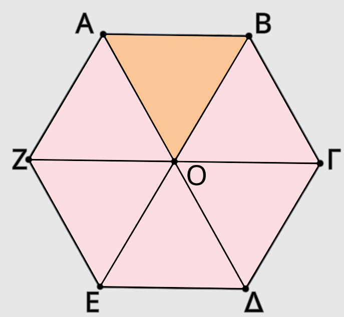
5

Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔΕΖ είναι ένα κανονικό εξάγωνο. Περίγραψε τον μετασχηματισμό στροφής που απεικονίζει το τρίγωνο ΑΒΟ στο τρίγωνο:

α) ΒΟΓ

β) ΔΟΕ

γ) ΑΟΖ



6

Σχεδίασε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 4cm. Στο ίδιο σχήμα, κατασκεύασε το ευθύγραμμο τμήμα που προκύπτει:

i) από στροφή του ΑΒ με κέντρο Α και γωνία 60° κατά τη θετική φορά και

ii) από στροφή του ΑΒ με κέντρο Β και γωνία 60° κατά την αρνητική φορά.

Τι σχήμα προκύπτει;

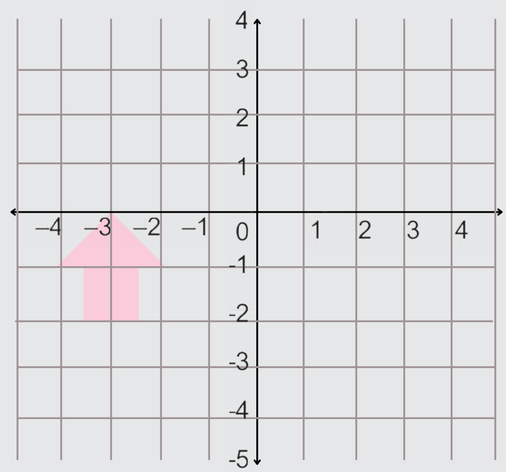
7

Σχεδίασε το σχήμα που προκύπτει από μετασχηματισμό στροφής του βέλους:

α) με κέντρο το σημείο (0,0) και γωνία 90°, κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού.

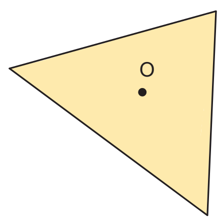
β) με κέντρο το σημείο (0,0) και γωνία 90°, με φορά αντίθετη από αυτή των δεικτών του ρολογιού.

γ) με κέντρο το σημείο (-3,0) και γωνία 180°.

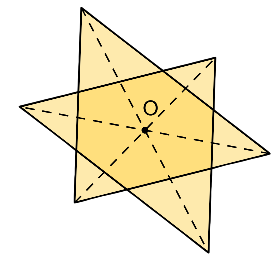


5.3 | Κεντρική συμμετρία, κέντρο συμμετρίας σχήματος

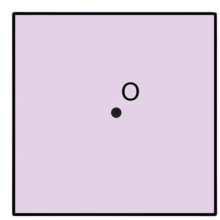
Εξερευνώ



Στρέφουμε το τρίγωνο κατά 180° γύρω από το σημείο Ο και προκύπτει το σχήμα :



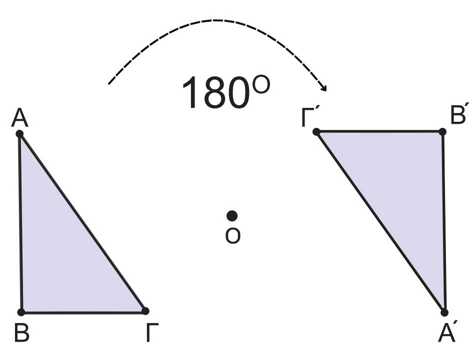
Τι πιστεύεις ότι θα συμβεί αν στρέψουμε το τετράγωνο γύρω από το σημείο Ο κατά 180°;



Κεντρική συμμετρία

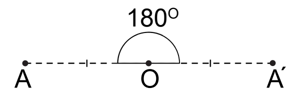
Θυμόμαστε

Γνωρίζουμε ότι σε έναν μετασχηματισμό στροφής, κάθε σημείο ενός σχήματος περιστρέφεται κατά γωνία θ γύρω από ένα σταθερό σημείο Ο. Ειδικότερα, αν η γωνία στροφής είναι 180°, τότε τα σημεία των δύο σχημάτων λέγονται **συμμετρικά** ως προς κέντρο Ο.



Γενικά:

Συμμετρικό ενός σημείου Α ως προς κέντρο Ο, λέγεται το σημείο Α', με το οποίο συμπίπτει το Α, αν αυτό στραφεί γύρω από το Ο κατά γωνία 180°.



Ισχύει ότι δύο σημεία Α και Α' είναι συμμετρικά ως προς σημείο Ο, όταν το Ο είναι **μέσο** του τμήματος ΑΑ'.

Αν κάθε σημείο ενός σχήματος είναι συμμετρικό ενός σημείου άλλου σχήματος, τότε τα δύο σχήματα λέγονται **συμμετρικά ως προς σημείο Ο**.

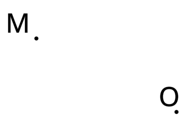
Γνωρίζουμε ότι το σχήμα που προκύπτει από έναν μετασχηματισμό στροφής είναι ίσο με το αρχικό σχήμα. Η κεντρική συμμετρία είναι μία ειδική περίπτωση μετασχηματισμού στροφής κατά 180°, επομένως:

Τα συμμετρικά ως προς σημείο σχήματα είναι **ίσα**.

Κατασκευή

Παράδειγμα:

Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου Μ ως προς κέντρο Ο.

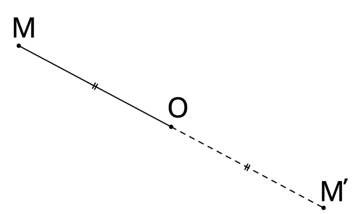


Λύση:

Φέρνουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΟΜ.

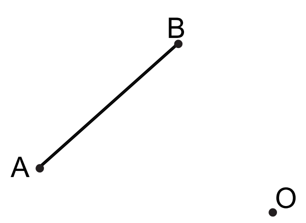
Στην προέκταση του ΟΜ προς το Ο, παίρνουμε τμήμα ΟΜ'=ΟΜ.

Το σημείο Μ' είναι το συμμετρικό του σημείου Μ ως προς κέντρο Ο.



Παράδειγμα:

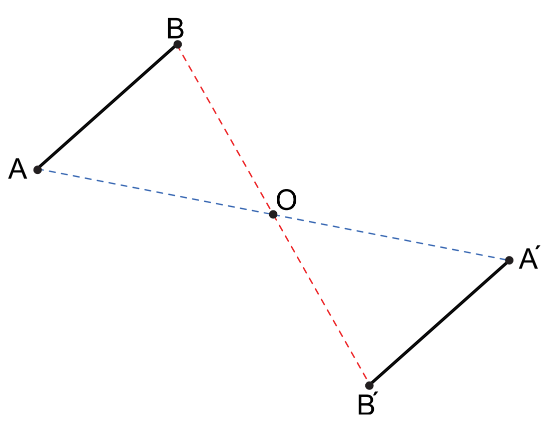
Να βρείτε το συμμετρικό του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ ως προς κέντρο Ο.



Λύση:

Βρίσκουμε τα συμμετρικά Α', Β' των σημείων Α, Β ως προς κέντρο Ο.

Το ευθύγραμμο τμήμα Α'Β' είναι το συμμετρικό του τμήματος ΑΒ ως προς κέντρο Ο.



Κέντρο συμμετρίας σχήματος

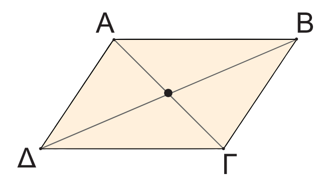
Κέντρο συμμετρίας σχήματος ονομάζεται ένα σημείο Ο, γύρω από το οποίο αν περιστραφεί το σχήμα κατά 180°, συμπίπτει με το αρχικό.

- Στην περίπτωση που υπάρχει τέτοιο σημείο, λέμε ότι το σχήμα έχει **κέντρο συμμετρίας** το σημείο Ο.
- Όταν ένα σχήμα έχει κέντρο συμμετρίας, το συμμετρικό του ως προς το κέντρο αυτό είναι το ίδιο το σχήμα.
- Το κέντρο του κύκλου είναι κέντρο συμμετρίας του καθώς και του αντίστοιχου κυκλικού δίσκου.

Παράδειγμα: Να βρεθεί το κέντρο συμμετρίας ενός παραλληλογράμμου.

Λύση:

Το παραλληλόγραμμο έχει κέντρο συμμετρίας το σημείο τομής Ο των διαγώνιων του. Το συμμετρικό του παραλληλογράμμου ως προς το κέντρο Ο είναι το ίδιο το σχήμα.



Επειδή το συμμετρικό του παραλληλογράμμου ως προς το κέντρο αυτό είναι το ίδιο το σχήμα, προκύπτει ότι:

- Οι απέναντι πλευρές ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες.
- Οι απέναντι γωνίες ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες.

Αντιλαμβάνομαι με προσομοίωση

Λυμένα Παραδείγματα

1. Να κατασκευάσετε το συμμετρικό Α'Β'Γ' ενός τριγώνου ΑΒΓ ως προς σημείο Ο, αν το σημείο:

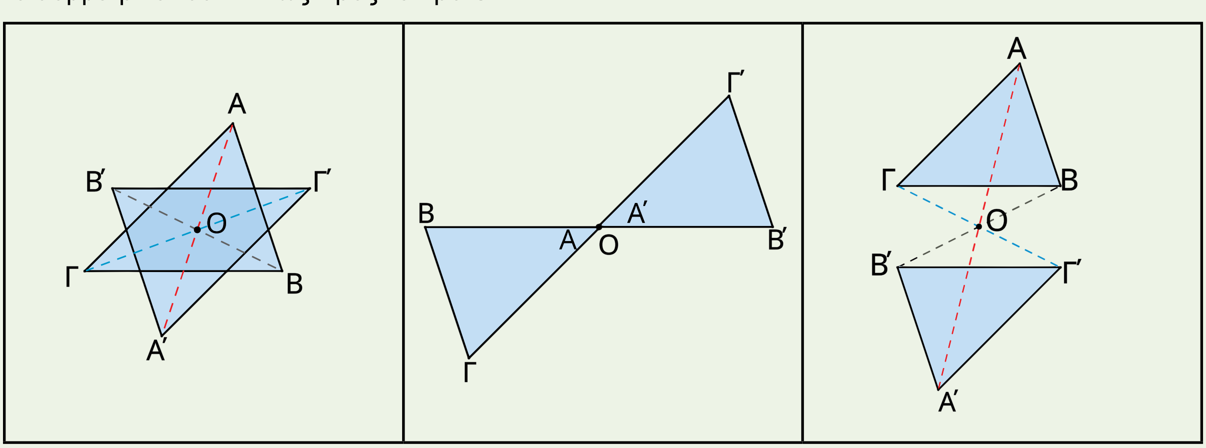
α) είναι εσωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ,

β) είναι μία από τις κορυφές του τριγώνου ΑΒΓ και

γ) είναι εξωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ.

Λύση:

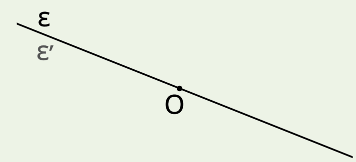
Σε κάθε περίπτωση, βρίσκουμε τα συμμετρικά Α', Β' και Γ' των σημείων Α, Β και Γ. Το τρίγωνο Α'Β'Γ' είναι το συμμετρικό του ΑΒΓ ως προς κέντρο Ο.



2. Να βρείτε το συμμετρικό σχήμα μιας ευθείας ε, ως προς κέντρο Ο. Τι παρατηρείτε;

Λύση:

- Αν το σημείο Ο ανήκει στην ευθεία ε, τότε η συμμετρική ευθεία ε' ως προς σημείο Ο συμπίπτει με την ευθεία ε.

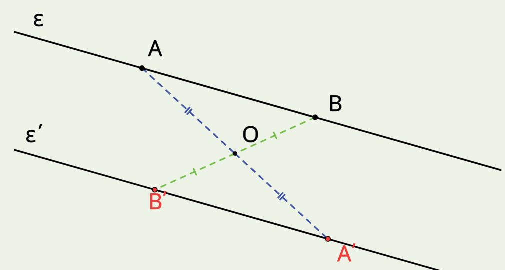


- Αν το σημείο Ο δεν ανήκει στην ευθεία ε, τότε:

  Επιλέγουμε δύο σημεία Α, Β στην ευθεία ε.

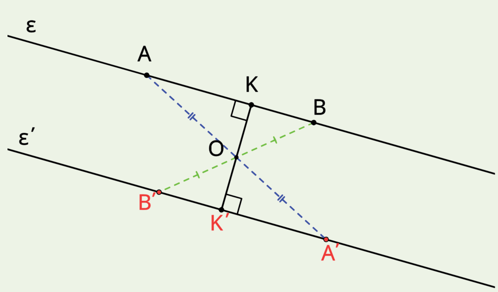
  Βρίσκουμε τα συμμετρικά Α', Β' των σημείων Α και Β.

  Φέρνουμε την ευθεία ε' που διέρχεται από τα Α' και Β'.



Η ευθεία ε' είναι η συμμετρική της ευθείας ε ως προς κέντρο Ο.

Παρατηρούμε ότι οι συμμετρικές ως προς σημείο ευθείες ε και ε' είναι μεταξύ τους **παράλληλες**.



Πράγματι, αν φέρουμε την απόσταση ΟΚ προς την ευθεία ε, τότε το συμμετρικό Κ' του σημείου Κ ανήκει στην ευθεία ε'. Επειδή τα συμμετρικά ως προς σημείο σχήματα είναι ίσα προκύπτει ότι τα τρίγωνα ΑΟΚ και Α'Ο'Κ' είναι ίσα, συνεπώς $A\hat{K}O = A'\hat{K'}O' = 90^o$. Άρα οι ευθείες ε και ε' είναι παράλληλες γιατί είναι κάθετες στην ίδια ευθεία ΚΚ'.

Αντιλαμβάνομαι

με προσομοίωση

Ασκήσεις / Προβλήματα

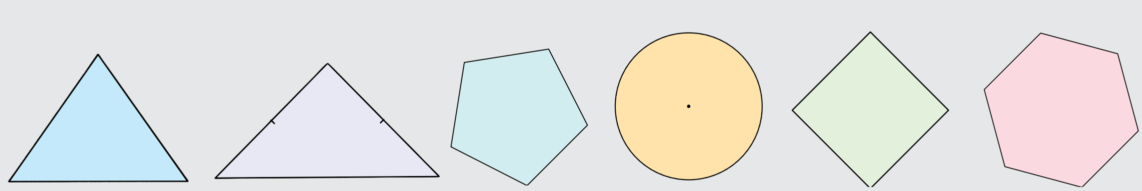
Αντιλαμβάνομαι

με προσομοίωση

1 Εξέτασε ποια από τα παρακάτω γράμματα της αλφαβήτου έχουν κέντρο συμμετρίας.

Α Β Δ Η Θ Ι Λ Μ Ξ Ο

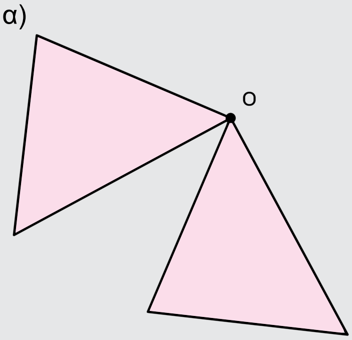
2 Ποια από τα παρακάτω γεωμετρικά σχήματα έχουν κέντρο συμμετρίας;



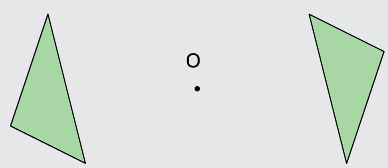
3 Βρες ποια από τα παρακάτω σήματα του Κ.Ο.Κ. έχουν κέντρο συμμετρίας.

4 Σε ποιες από τι παρακάτω περιπτώσεις έχουν σχεδιαστεί σωστά τα συμμετρικά των σχημάτων ως προς κέντρο Ο;

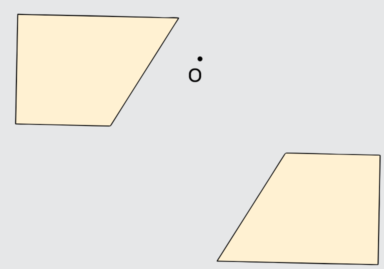
α)



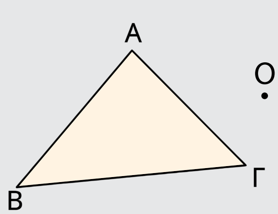
β)



γ)



5 Κατασκεύασε το συμμετρικό του τριγώνου ΑΒΓ ως προς κέντρο Ο.



Εξασκούμαι σε όσα έμαθα

6 Κατασκεύασε το συμμετρικό τριγώνου ΑΒΓ:

α) ως προς κέντρο την κορυφή Α.

β) ως προς κέντρο το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ.

7 Στον άξονα των πραγματικών αριθμών να βρεις δυο αριθμούς:

α) συμμετρικούς ως προς το σημείο με τετμημένη 2,

β) με κέντρο συμμετρίας το 0,

γ) συμμετρικούς ως προς την αρχή του άξονα οι οποίοι έχουν απόσταση ίση με 4.

ΕΠΕΚΤΕΙΝΩ τις γνώσεις μου

Μελετώ το συγκεκριμένο θέμα

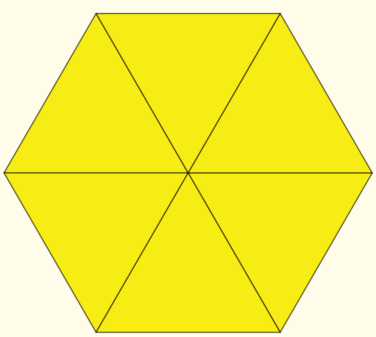
Μετασχηματισμοί σε Πλακόστρωτα

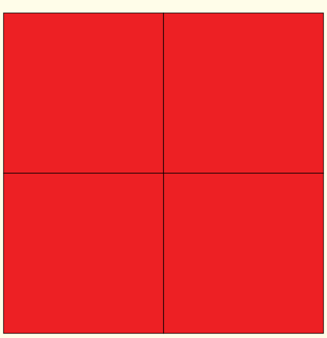
Τα πλακόστρωτα είναι γεωμετρικές κατασκευές που καλύπτουν το επίπεδο χρησιμοποιώντας κανονικά πολύγωνα. Διακρίνονται σε κανονικά και ημιτακτικά.

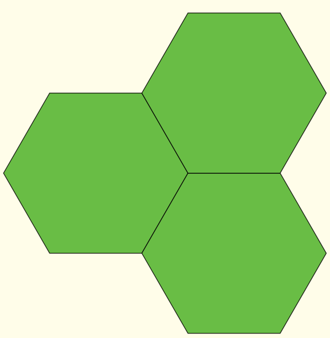
Κανονικά πλακόστρωτα

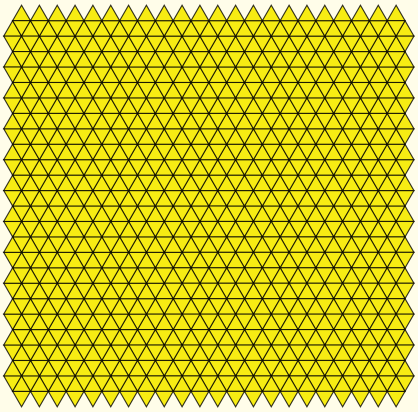
Τα κανονικά πλακόστρωτα περιλαμβάνουν:

- σχήμα με 6 **ισόπλευρα τρίγωνα** που ενώνονται σε μία κορυφή
- σχήμα με 4 **τετράγωνα** που ενώνονται σε μία κορυφή
- σχήμα με 3 **κανονικά εξάγωνα** που ενώνονται σε μία κορυφή

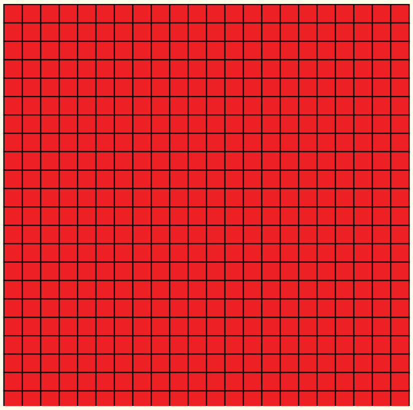




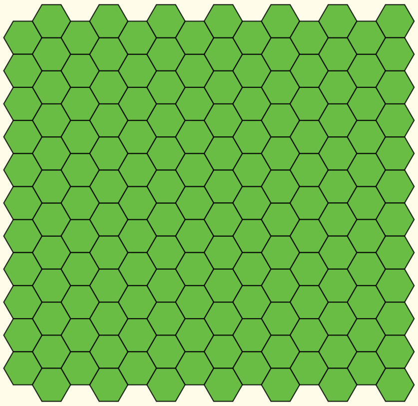




πλακόστρωτο που περιλαμβάνει 6 τρίγωνα ανά κορυφή



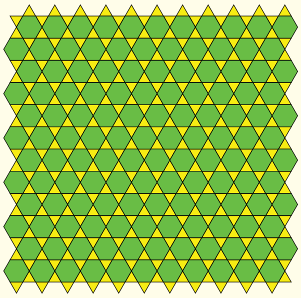
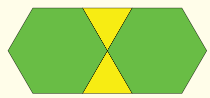
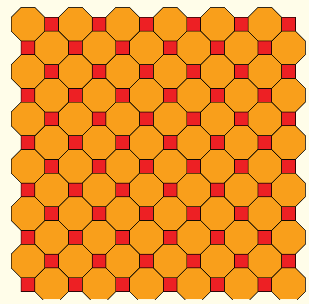
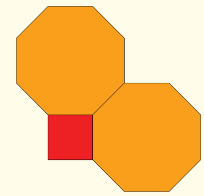
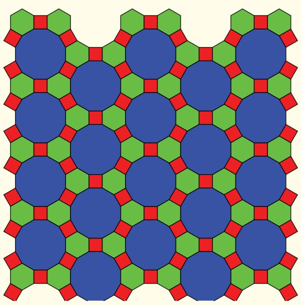
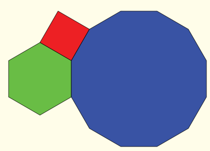
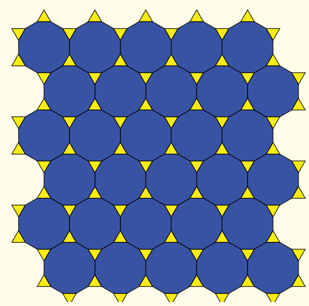
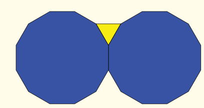
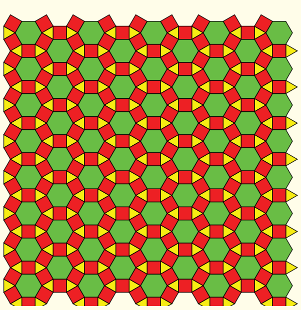
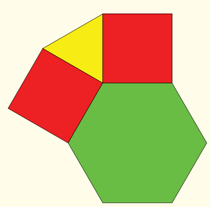
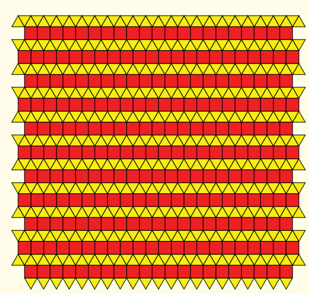
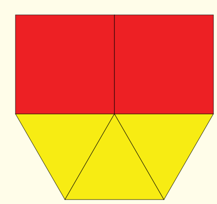
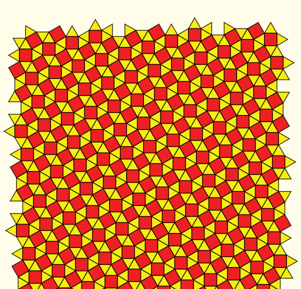
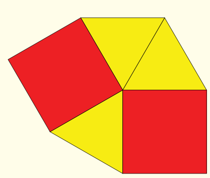
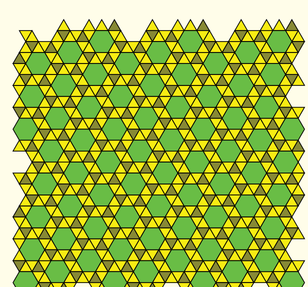
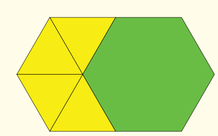
πλακόστρωτο που περιλαμβάνει 4 τετράγωνα ανά κορυφή



πλακόστρωτο που περιλαμβάνει 3 εξάγωνα ανά κορυφή

Ημιτακτικά πλακόστρωτα

Τα ημιτακτικά πλακόστρωτα (ή Αρχιμήδεια) χρησιμοποιούν για κάθε κατασκευή περισσότερα από ένα είδη κανονικών πολυγώνων. Μερικά από αυτά είναι τα παρακάτω:

Εφαρμογές

Τα παραπάνω πλακόστρωτα, που προκύπτουν από μετασχηματισμούς κανονικών πολυγώνων έχουν πολλές εφαρμογές στην καθημερινή ζωή. Τα συναντάμε στην κρυσταλλογραφία, στην Τέχνη, στην Αρχιτεκτονική και στη διδακτική της Γεωμετρίας.

Ανακεφαλαίωση (Μετασχηματισμοί)

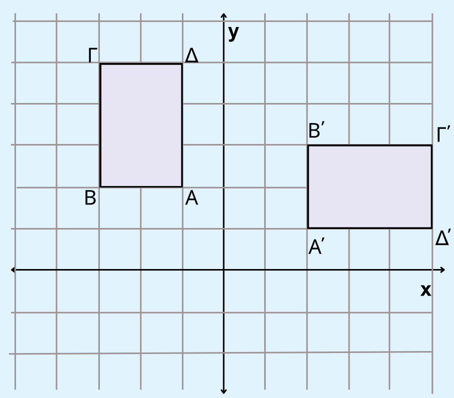
Επίπεδος μετασχηματισμός (ή απλά μετασχηματισμός) ονομάζεται κάθε αντιστοιχία στο επίπεδο, όπου κάθε σημείο Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς σημείο Α'.

- **Παράλληλη μεταφορά** ονομάζουμε το μετασχηματισμό στον οποίο κάθε σημείο ενός σχήματος μετακινείται προς την ίδια κατεύθυνση και σε ίση απόσταση.
- **Στροφή** με **κέντρο Ο** και **γωνία θ** ονομάζουμε τον μετασχηματισμό με τον οποίο κάθε σημείο Μ του επιπέδου αντιστοιχίζεται σε ένα σημείο Μ', που είναι η τελική θέση του Μ αν αυτό στραφεί γύρω το Ο κατά γωνία θ.

Συμμετρικό ενός σημείου Α ως προς κέντρο Ο, λέγεται το σημείο Α', με το οποίο συμπίπτει το Α, αν αυτό στραφεί γύρω από το Ο κατά γωνία 180°.

Αυτοαξιολόγηση (Μετασχηματισμοί)

Α. Να περιγράψεις έναν συνδυασμό μετασχηματισμών στροφής και μεταφοράς ώστε τα ορθογώνια ΑΒΓΔ και Α'Β'Γ'Δ' να συμπέσουν.



Αντιλαμβάνομαι

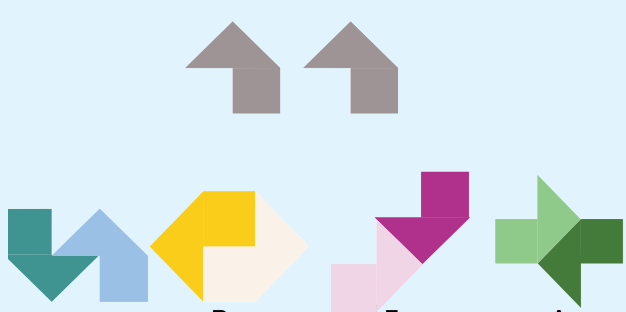
με προσομοίωση

Είναι δυνατό τα δύο ορθογώνια να συμπέσουν μόνο με μετασχηματισμό μεταφοράς; Είναι δυνατό να συμπέσουν μόνο με μετασχηματισμό στροφής; Αιτιολόγησε την απάντησή σου.

Ομαδική δραστηριότητα

Χωριστείτε σε ομάδες στην τάξη και προσπαθήστε να βρείτε ποιο από τα παρακάτω σχήματα δεν μπορεί να κατασκευαστεί από τα δύο μικρότερα σχήματα μόνο με μετασχηματισμούς στροφής και μεταφοράς. Μπορείτε να σχεδιάσετε και να κατασκευάσετε τα σχήματα χρησιμοποιώντας κάποιο υλικό, όπως χαρτόνι.

Χρησιμοποιώ



Α Β Γ Δ

Σε αυτό το σημείο, θα πρέπει να είσαι σε θέση να ικανοποιείς όλους τους προσδοκώμενους μαθησιακούς στόχους. Γύρνα στην αρχή της θεματικής ενότητας και σημείωσε ✓ στα αντίστοιχα σημεία. Υπάρχουν στόχοι που αισθάνεσαι ότι δεν έχεις ικανοποιήσει πλήρως;

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ

ΜΕΤΡΑ ΘΕΣΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑ

Γ.1

Στην ενότητα αυτή θα αναλύσουμε τα μέτρα θέσης και μεταβλητότητας, όπως η μέση τιμή, η διάμεσος, τα τεταρτημόρια και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος. Θα εξερευνήσουμε πώς αυτά τα μέτρα μας βοηθούν να περιγράψουμε και να κατανοήσουμε τη δομή των δεδομένων και πώς επηρεάζονται από μεταβολές στις τιμές.

Πώς συνδέονται τα στατιστικά μέτρα με την καθημερινή ζωή;

Είσαι έτοιμος/η να εμβαθύνεις πάνω στις αρχές της στατιστικής και τη σημασία τους στην ανάλυση δεδομένων;

Στόχοι Ενότητας

- ☐ Περιγράφω και προσδιορίζω τα τεταρτημόρια και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος ενός συνόλου δεδομένων.
- ☐ Διερευνώ ιδιότητες της μέσης τιμής, όπως η μεταβολή της όταν προστίθενται ή πολλαπλασιάζονται όλα τα δεδομένα με τον ίδιο αριθμό.
- ☐ Διερευνώ πώς επηρεάζονται η μέση τιμή και η διάμεσος από την ύπαρξη απόμακρων τιμών.
- ☐ Διερευνώ την έννοια της μεταβλητότητας χρησιμοποιώντας το ενδοτεταρτημοριακό εύρος.
- ☐ Περιγράφω τα δεδομένα με βάση την περίληψη πέντε αριθμών: ελάχιστη τιμή, τεταρτημόρια και μέγιστη τιμή.

Μαθήματα Ενότητας

1.1 | Ιδιότητες της Μέσης Τιμής και της Διαμέσου.

Εξερευνώ

Παρακάτω φαίνονται 2 ομάδες μπάσκετ:

Ποια ομάδα πιστεύεις ότι έχει μεγαλύτερη μέση τιμή ύψους και ποια μεγαλύτερη διάμεσο ύψους;

Στη 2η ομάδα αλλάζω έναν «ακραίο» παίκτη. Πώς θα επηρεαστεί η διάμεσος και η μέση τιμή;

Μέση τιμή

Θυμόμαστε

Για να βρούμε τη **μέση τιμή** (ή μέσο όρο) ενός συνόλου δεδομένων, προσθέτουμε όλα τα δεδομένα και διαιρούμε με το πλήθος των δεδομένων αυτών.

$$\text{Μέση τιμή} = \frac{\text{άθροισμα δεδομένων}}{\text{πλήθος δεδομένων}}$$

Παράδειγμα: Βρείτε τη μέση τιμή των δεδομένων: 6, 4, 9, 7, 14.

Λύση: $\text{Μέση τιμή} = \dfrac{6+4+9+7+14}{5} = \dfrac{40}{5} = 8.$

Αντιλαμβάνομαι με προσομοίωση

Διάμεσος

Θυμόμαστε

Η **διάμεσος** δεδομένων τα οποία έχουν διαταχθεί **σε αύξουσα σειρά** ορίζεται ως:

- Το μεσαίο δεδομένο, όταν το πλήθος των δεδομένων είναι περιττός αριθμός.
- Ο μέσος όρος (ημιάθροισμα) των δύο μεσαίων δεδομένων, όταν το πλήθος των δεδομένων είναι άρτιος αριθμός.

Παράδειγμα: Βρείτε τη διάμεσο των δεδομένων: α) 6, 4, 9, 7, 14 και β) 6, 4, 9, 7, 14, 0.

Λύση:

α) Τοποθετούμε τα δεδομένα σε αύξουσα σειρά. Τα δεδομένα είναι 5 (περιττό πλήθος).

Η διάμεσος είναι το μεσαίο δεδομένο, δηλαδή ο αριθμός 7.

$$\cancel{4},\ \cancel{6},\ 7,\ \cancel{9},\ 14$$
$$\delta = 7.$$

β) Τοποθετούμε τα δεδομένα σε αύξουσα σειρά. Τα δεδομένα είναι 6 (άρτιο πλήθος).

Η διάμεσος είναι ο μέσος όρος των δύο μεσαίων δεδομένων, δηλαδή ο αριθμός 6,5.

$$\cancel{0},\ \cancel{4},\ 6,\ 7,\ \cancel{9},\ 14$$
$$\delta = \frac{6+7}{2} = 6{,}5.$$

Διάμεσος σε ομαδοποιημένα δεδομένα

Γνωρίζουμε ότι η διάμεσος χωρίζει τα δεδομένα σε δύο ίσα μέρη, δηλαδή είναι η τιμή για την οποία το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτήν και το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από αυτήν.

Παράδειγμα: Οι χρόνοι, σε λεπτά, που χρειάστηκαν 60 μαθητές/τριες για να λύσουν μία άσκηση στα Μαθηματικά, έχουν ομαδοποιηθεί σε 5 κλάσεις, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Κλάσεις	*0 – 5*	*5 – 10*	*10 – 15*	*15 – 20*	*20 – 25*
Συχνότητες	*9*	*21*	*24*	*3*	*3*
Σχετικές συχνότητες	*15%*	*35%*	*40%*	*5%*	*5%*

⟵------------ ***50%*** -----------⟶ ⟵---------------------- ***50%*** ----------------------⟶

Για να βρούμε τη διάμεσο των παραπάνω δεδομένων, υπολογίζουμε τις σχετικές συχνότητες (%) και παρατηρούμε ότι:

Το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από την τιμή 10 και το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από αυτήν.

Άρα η διάμεσος είναι: $\delta = 10.$

Εξασκούμαι σε όσα έμαθα

Σημείωση: Οι σχετικές συχνότητες, όπως και οι συχνότητες ενός πίνακα που περιέχει ομαδοποιημένα δεδομένα, αναφέρονται στις κλάσεις και όχι σε συγκεκριμένους αριθμούς. Κατά την ομαδοποίηση, υποθέσαμε ότι τα δεδομένα κάθε κλάσης,είναι ομοιόμορφα κατανεμημένα σε αυτές. Έτσι, η διάμεσος σε ομαδοποιημένα δεδομένα δεν συμπίπτει, απαραίτητα, με κάποιο δεδομένο του δείγματος αλλά παίρνει τιμή, ανάλογα με το ποσοστό της κλάσης στην οποία βρίσκεται.

Μεταβολή δεδομένων

Δραστηριότητα: Οι μισθοί των υπαλλήλων μιας εταιρείας, σε ευρώ, είναι:

900 , 1.100 , 1.100 , 1.300 , 1.500.

α) Να βρείτε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των μισθών των υπαλλήλων.

β) Να βρείτε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των μισθών στις παρακάτω περιπτώσεις:

i. Αν όλοι οι μισθοί αυξηθούν κατά 100€.

ii. Αν η τιμή 1.500 αντικατασταθεί με την τιμή 5.000.

Τι παρατηρείτε σε κάθε περίπτωση;

Λύση:

α)

- Μέση τιμή: $\frac{900 + 1.100 + 1.100 + 1.300 + 1.500}{5} = 1.180.$

  Ο μέσος μισθός των υπαλλήλων είναι: μ = 1.180 €.

- Διάμεσος: ~~900~~, ~~1.100~~, 1.100, ~~1.300~~, ~~1.500~~.

  Η διάμεσος των μισθών είναι: δ = 1.100 €.

β) i. Όλοι οι μισθοί αυξάνονται κατά 100€ , οπότε οι νέοι μισθοί, σε ευρώ, είναι:

1.000 , 1.200 , 1.200 , 1.400 , 1.600.

- Μέση τιμή: $\frac{1.000 + 1.200 + 1.200 + 1.400 + 1.600}{5} = 1.280.$

  Ο νέος μέσος μισθός των υπαλλήλων είναι: μ' = 1.280 €.

  Παρατηρούμε ότι ο μέσος όρος αυξήθηκε επίσης κατά 100€.

  $$\mu' = \mu + 100 .$$

- Διάμεσος: ~~1.000~~, ~~1.200~~, 1.200, ~~1.400~~, ~~1.600~~.

  Η διάμεσος των νέων μισθών είναι: δ' = 1.200 €.

  Παρατηρούμε ότι η διάμεσος αυξήθηκε επίσης κατά 100€.

  $$\delta' = \delta + 100 .$$

Γενικά:

Έστω ένα σύνολο δεδομένων με **μέση τιμή μ** και **διάμεσο δ**.

- Αν **προσθέσουμε** σε όλα τα δεδομένα έναν αριθμό **α**, τότε τα δεδομένα που θα προκύψουν έχουν:

  μέση τιμή: μ + α και διάμεσο: δ + α

- Αν **πολλαπλασιάσουμε** όλα τα δεδομένα με έναν αριθμό **λ**, τότε τα δεδομένα που θα προκύψουν έχουν:

  μέση τιμή: μ · λ και διάμεσο: δ · λ

ii. Αντικαθιστούμε την τιμή 1.500 με την τιμή 5.000, η οποία είναι μία **απόμακρη τιμή** καθώς είναι αρκετά μεγαλύτερη από τις υπόλοιπες τιμές, οπότε τα δεδομένα, πλέον, είναι:

$$900\ ,\ 1.100\ ,\ 1.100\ ,\ 1.300\ ,\ 5.000.$$

- Μέση τιμή: $\dfrac{900 + 1.100 + 1.100 + 1.300 + 5.000}{5} = 1.880.$

  Ο νέος μέσος μισθός των υπαλλήλων είναι: $\mu'' = 1.880$ €.

  Ο αρχικός μέσος μισθός των υπαλλήλων ήταν: $\mu = 1.180$ €.

  Παρατηρούμε ότι η μέση τιμή επηρεάστηκε σημαντικά από την απόμακρη τιμή.

- Διάμεσος: ~~900~~, ~~1.100~~, 1.100, ~~1.300~~, ~~5.000~~

  Η νέα διάμεσος των μισθών είναι: $\delta'' = 1.100$ €.

  Η αρχική διάμεσος των μισθών ήταν: $\delta = 1.100$ €.

  Παρατηρούμε ότι η διάμεσος **δεν** επηρεάστηκε από την απόμακρη τιμή.

Γενικά:

Αν σε ένα σύνολο δεδομένων υπάρχουν **απόμακρες τιμές**, δηλαδή τιμές αρκετά μικρότερες ή μεγαλύτερες από τα υπόλοιπα δεδομένα, τότε:

> Η **μέση τιμή** επηρεάζεται σημαντικά από απόμακρες τιμές σε αντίθεση με τη **διάμεσο** η οποία δεν επηρεάζεται.

Λυμένα Παραδείγματα

1. Παρακάτω καταγράφονται οι τιμές 6 βασικών προϊόντων, σε ευρώ:

$$10,\ 7,\ 14,\ 9,\ 5,\ 3$$

Το επόμενο έτος παρατηρείται μία αύξηση όλων των τιμών κατά 10%. Να βρείτε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των νέων τιμών των προϊόντων.

Λύση:

- Η μέση τιμή των προϊόντων, πριν από την αύξηση, είναι:

$$\frac{10 + 8 + 13 + 10 + 4 + 3}{6} = \frac{48}{6} = 8. \qquad \text{Άρα } \mu = 8€.$$

- Η διάμεσος είναι:

$$3,\ 4,\ 8,\ 10,\ 10,\ 13$$

$$\delta = \frac{8 + 10}{2} = 9. \qquad \text{Άρα } \delta = 9€.$$

Αν κάθε τιμή **τ** αυξηθεί κατά 10%, τότε αυτή γίνεται:

$$\tau' = \tau + \frac{10}{100}\cdot\tau = \tau + 0,1\cdot\tau = 1,1\cdot\tau.$$

Δηλαδή κάθε τιμή πολλαπλασιάζεται επί 1,1, επομένως η μέση τιμή και η διάμεσος πολλαπλασιάζονται επίσης επί 1,1, άρα:

- Νέα μέση τιμή: $\mu' = 1,1\cdot\mu = 1,1\cdot 8 = 8,8$€.
- Διάμεσος νέων τιμών: $\delta' = 1,1\cdot\delta = 1,1\cdot 9 = 9,9$€.

2. Να βρείτε τη διάμεσο των παρακάτω δεδομένων τα οποία έχουν ομαδοποιηθεί σε 5 κλάσεις, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Κλάσεις	*0 – 2*	*2 – 4*	*4 – 6*	*6 – 8*	*8 – 10*
Συχνότητες	*1*	*5*	*8*	*4*	*2*

Λύση:

Το σύνολο των δεδομένων είναι: $1 + 5 + 8 + 4 + 2 = 20$.

Υπολογίζουμε τις σχετικές συχνότητες διαιρώντας την αντίστοιχη συχνότητα με το σύνολο των δεδομένων:

0 – 2: $\frac{1}{20} = 0,05 = 5\%$, 2 – 4: $\frac{5}{20} = 0,25 = 25\%$,

4 – 6: $\frac{8}{20} = 0,40 = 40\%$, 6 – 8: $\frac{4}{20} = 0,20 = 20\%$,

8 – 10: $\frac{2}{20} = 0,10 = 10\%$.

Κατασκευάζουμε τον πίνακα σχετικών συχνοτήτων:

Κλάσεις	*0 – 2*	*2 – 4*	*4 – 6*	*6 – 8*	*8 – 10*
Σχετικές συχνότητες	*5%*	*25%*	*40%*	*20%*	*10%*

←------------------ ***50%*** ----------------→ ←---------------- ***50%*** ----------------→

Η διάμεσος είναι η τιμή που χωρίζει το δείγμα σε δύο ίσα μέρη ώστε το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτήν τιμή και το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από αυτήν.

Παρατηρούμε ότι το δεδομένο που αντιστοιχεί στο 50% βρίσκεται στο μέσο της κλάσης 4 – 6, άρα είναι το 5.

Επομένως η διάμεσος είναι: $\delta = 5$.

Εξασκούμαι σε όσα έμαθα

Ασκήσεις / Προβλήματα

1 Χαρακτήρισε σωστές ή λανθασμένες τις προτάσεις που ακολουθούν βάζοντας ένα **x** στην κατάλληλη θέση.

	Σωστό	**Λάθος**
α) Η μέση τιμή δεν αλλάζει αν προσθέσουμε έναν αριθμό σε όλα τα δεδομένα.		
β) Αν πολλαπλασιάσουμε όλα τα δεδομένα που έχουν διάμεσο δ με έναν αριθμό λ, τότε η νέα διάμεσος θα είναι $\lambda \cdot \delta$.		
γ) Η μέση τιμή επηρεάζεται σημαντικά από τις απόμακρες τιμές σε ένα δείγμα.		
δ) Η διάμεσος επηρεάζεται σημαντικά από τις απόμακρες τιμές σε ένα δείγμα.		
ε) Αν σε ένα σύνολο δεδομένων εισάγουμε επιπλέον δύο δεδομένα με τιμές 5 και -5, τότε η μέση τιμή του δείγματος δεν μεταβάλλεται.		

2

Συμπλήρωσε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

Έστω ένα σύνολο δεδομένων με **μέση τιμή μ** και **διάμεσο δ**.

α) Αν προσθέσουμε σε όλα τα δεδομένα έναν αριθμό **α**, τότε η νέα μέση τιμή είναι …………..

β) Αν πολλαπλασιάσουμε όλα τα δεδομένα με έναν αριθμό **β**, τότε η νέα διάμεσος είναι …………

3

α) Υπολόγισε τη μέση τιμή και τη διάμεσο στα παρακάτω δεδομένα: 10, 20, 40, 20, 50

β) Στη συνέχεια, υπολόγισε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των δεδομένων:

i. 11, 21, 41, 21, 51. ii. 9, 19, 39, 19, 49. iii. 100, 200, 400, 200, 500.

4

Οι καθηγητές ενός σχολείου έχουν τις παρακάτω ηλικίες: 25, 29, 33, 36, 40, 46, 50.

α) Βρες τη μέση τιμή και τη διάμεση ηλικία των καθηγητών του σχολείου.

β) Αν ο καθηγητής που έχει ηλικία 50 αντικατασταθεί με έναν καθηγητή ηλικίας 36, ποια είναι η νέα μέση τιμή και ποια η νέα διάμεση ηλικία των καθηγητών;

5

Παρακάτω καταγράφεται η τιμή μίας ηλεκτρικής συσκευής, όπως προσφέρεται από 5 διαφορετικές εταιρείες: 10€, 15€, 25€, 20€, 30€.

α) Υπολόγισε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των παραπάνω τιμών.

β) Αν όλα τα καταστήματα προσφέρουν το προϊόν με έκπτωση 10%, βρες τη νέα μέση τιμή και διάμεσο των τιμών.

6

Η θερμοκρασία 6 πόλεων (σε ^{o}C) όπως καταγράφηκε συγκεκριμένες ώρες μίας ημέρας, είναι:

$21^\circ, 5^\circ, 22^\circ, 20^\circ, 21^\circ, 25^\circ$

α) Υπάρχουν απόμακρες τιμές στα δεδομένα;

β) Υπολόγισε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των θερμοκρασιών.

γ) Αν η τιμή της θερμοκρασίας 5° αντικατασταθεί με την τιμή 20°, υπολόγισε τη νέα μέση τιμή και τη νέα διάμεσο των θερμοκρασιών.

7

Παρακάτω φαίνονται οι βαθμολογίες 50 γραπτών στις εξετάσεις των Μαθηματικών. Ομαδοποίησε τα δεδομένα στις 4 κλάσεις.

12	20	6	15	15	15	17	18	20	7
11	7	8	12	20	1	18	17	9	14
20	11	16	18	16	18	15	5	11	13
14	14	17	5	16	10	14	16	18	11
9	20	5	19	13	9	14	16	19	20

Κλάσεις	0-5	5-10	10-15	15-20
Συχνότητες				
Σχετικές Συχνότητες				

Βρες το ποσοστό των μαθητών που έχουν βαθμό τουλάχιστον 15. Στη συνέχεια, προσδιόρισε τη διάμεσο από τον πίνακα σχετικών συχνοτήτων.

1.2 | Μεταβλητότητα – Τεταρτημόρια – Ενδοτεταρτημοριακό Εύρος

Στον παρακάτω πίνακα καταγράφονται μετρήσεις της θερμοκρασίας (σε °C) για τρεις περιοχές Α, Β και Γ, το ίδιο εικοσιτετράωρο. Σε κάθε περιοχή έγιναν 17 μετρήσεις της θερμοκρασίας, μια μέτρηση ανά 1,5 ώρα περίπου.

Α	-2	-1	0	0	0	3	7	8	9	10	10	11	12	13	-5	-4	-3
Β	2	2	2	2	2	3	5	6	6	7	7	7	7	13	-5	1	1
Γ	2	2	2	2	2	3	5	6	6	7	7	7	7	8	0	1	1

α) Σε ποια περιοχή καταγράφηκε η υψηλότερη και η χαμηλότερη θερμοκρασία;

β) Μπορείς να απαντήσεις στο ερώτημα: «Ποια περιοχή είναι πιο ζεστή»;

Στον παρακάτω πίνακα 1, δίνονται οι βαθμολογίες 7 μαθητών στα διαγωνίσματα της Ιστορίας και των Μαθηματικών.

Ιστορία	13	14	15	15	15	16	17
Μαθηματικά	9	10	12	15	19	20	20

Πίνακας 1

Αν υπολογίσουμε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των βαθμολογιών, βρίσκουμε:

	Μέση τιμή	**Διάμεσος**
Ιστορία	$\frac{13+14+15+15+15+16+17}{7}=\frac{105}{7}=15$.	$\cancel{13}, \cancel{14}, \cancel{15}, \underset{\downarrow}{15}, \cancel{15}, \cancel{16}, \cancel{17}$ δ = 15.
Μαθηματικά	$\frac{9+10+12+15+19+20+20}{7}=\frac{105}{7}=15$.	$\cancel{9}, \cancel{10}, \cancel{12}, \underset{\downarrow}{15}, \cancel{19}, \cancel{20}, \cancel{20}$ δ = 15.

Διαπιστώνουμε ότι τα δεδομένα έχουν ίδια **μέση τιμή (15)** και ίδια **διάμεσο (15)**· ωστόσο οι τιμές τους διαφέρουν σημαντικά καθώς οι βαθμολογίες της Ιστορίας είναι περισσότερο συγκεντρωμένες γύρω από τη μέση τιμή τους, ενώ οι βαθμολογίες στα Μαθηματικά είναι απομακρυσμένες από αυτή.

Λέμε ότι οι βαθμολογίες στα Μαθηματικά έχουν μεγαλύτερη **μεταβλητότητα**.

Αντιλαμβάνομαι με προσομοίωση

Μέτρα μεταβλητότητας

Για να περιγράψουμε τις αποκλίσεις αυτές των δεδομένων από τη μέση τιμή τους, χρησιμοποιούμε τα **μέτρα μεταβλητότητας** όπως είναι το **εύρος** και το **ενδοτεταρτημοριακό εύρος**.

Εύρος

Θυμόμαστε ότι το εύρος ορίζεται ως:

Θυμόμαστε

Εύρος R = (Μεγαλύτερο δεδομένο) – (Μικρότερο δεδομένο).

Αν υπολογίσουμε το εύρος των βαθμολογιών του πίνακα 1, βρίσκουμε:

α) Ιστορία: Εύρος R = 17 – 13 = 4.

β) Μαθηματικά: Εύρος R = 20 – 9 = 11.

Παρατηρούμε ότι τα μαθηματικά έχουν **μεγαλύτερο εύρος**.

Σχόλιο:

Το εύρος είναι εύκολο στον υπολογισμό όμως βασικό μειονέκτημά του είναι ότι εξαρτάται μόνο από τις τιμές των άκρων του δείγματος και δεν περιγράφει τη μεταβλητότητα των υπόλοιπων δεδομένων.

Το εύρος επηρεάζεται, προφανώς, από πιθανές απόμακρες τιμές του δείγματος.

Τεταρτημόρια

Γνωρίζουμε ότι η διάμεσος είναι ένα μέτρο θέσης το οποίο χωρίζει το δείγμα σε δύο ίσα μέρη καθένα από τα οποία αποτελεί το πολύ 50% των δεδομένων του δείγματος.

Με ανάλογο τρόπο ορίζουμε τα **τεταρτημόρια** ώστε να χωρίζουν το δείγμα σε τέσσερα ίσα μέρη, καθένα από τα οποία αποτελεί το 25% του δείγματος, ως εξής:

Για να υπολογίσουμε τα τεταρτημόρια αρχικά τοποθετούμε τα δεδομένα σε **αύξουσα σειρά.**

- Το πρώτο τεταρτημόριο (Q_1) υπολογίζεται ως διάμεσος του πρώτου μισού του συνόλου των δεδομένων.
- Το δεύτερο τεταρτημόριο (Q_2) αντιστοιχεί στη διάμεσο του δείγματος. $Q_2 = δ$.
- Το τρίτο τεταρτημόριο (Q_3) υπολογίζεται ως διάμεσος του δεύτερου μισού του συνόλου των δεδομένων.

min Q_1 δ Q_3 max

25% 25% 25% 25%

Παρατήρηση: Όταν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι **περιττός αριθμός**, για τον ευκολότερο υπολογισμό των Q_1 και Q_3 **εξαιρούμε** από το δείγμα τη διάμεσο και εκτελούμε την παραπάνω διαδικασία.

Παράδειγμα: Στα δεδομένα του **πίνακα 1**, τα τεταρτημόρια των βαθμολογιών στα μαθήματα της Ιστορίας και των Μαθηματικών είναι:

α) Ιστορία:

$$\underbrace{13,\ 14,\ 15,}_{Q_1\ =\ 14}\ \underset{\downarrow}{15},\ \underbrace{15,\ 16,\ 17}_{Q_3\ =\ 16}$$

$$Q_2 = δ = 15.$$

- Η διάμεσος δ του δείγματος είναι ο αριθμός 15, ο οποίος αντιστοιχεί στο 2ο τεταρτημόριο (Q_2). $\quad Q_2 = δ = 15.$
- Η διάμεσος των δεδομένων που βρίσκονται αριστερά του δ, είναι ο αριθμός 14, ο οποίος αντιστοιχεί στο 1ο τεταρτημόριο (Q_1). $\quad Q_1 = 14.$
- Η διάμεσος των δεδομένων που βρίσκονται δεξιά του δ, είναι ο αριθμός 16, ο οποίος αντιστοιχεί στο 3ο τεταρτημόριο (Q_3). $\quad Q_3 = 16.$

β) Μαθηματικά:

$$\underbrace{9,\ 10,\ 12,}_{Q_1\ =\ 10}\ \underset{\downarrow}{15},\ \underbrace{19,\ 20,\ 20}_{Q_3\ =\ 20}$$

$$Q_2 = δ = 15.$$

Αν εργαστούμε με τον ίδιο τρόπο, βρίσκουμε: $Q_2 = δ = 15$ και $Q_1 = 10$, $Q_3 = 20$.

Ενδοτεταρτημοριακό Εύρος

Το **Ενδοτεταρτημοριακό Εύρος (Q)** είναι η διαφορά του πρώτου τεταρτημορίου Q_1 από το τρίτο τεταρτημόριο Q3, δηλαδή:

$$Q = Q_3 - Q_1$$

Όσο μικρότερο είναι το ενδοτεταρτημοριακό εύρος τόσο μικρότερη είναι η **μεταβλητότητα** των δεδομένων.

Σχόλιο: Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος δεν επηρεάζεται από απόμακρες τιμές που πιθανώς να υπάρχουν στο δείγμα.

Παράδειγμα: Στα δεδομένα του **πίνακα 1** έχουμε:

α) Για τους βαθμούς της Ιστορίας έχουμε βρει: $Q_1 = 14$ και $Q_3 = 16$.

Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος είναι:

$$Q = Q_3 - Q_1 = 16 - 14 = 2.$$

β) Για τους βαθμούς στα Μαθηματικά έχουμε βρει: $Q_1 = 10$ και $Q_3 = 20$.

Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος είναι:

$$Q = Q_3 - Q_1 = 20 - 10 = 10.$$

Οι βαθμολογίες στα Μαθηματικά έχουν μεγαλύτερο ενδοτεταρτημοριακό εύρος από αυτές της Ιστορίας.

Άρα οι βαθμολογίες στο μάθημα των Μαθηματικών έχουν μεγαλύτερη μεταβλητότητα.

Λυμένα Παραδείγματα

1. Να υπολογίσετε τα τεταρτημόρια και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος των δεδομένων:

2, 1, 5, 4, 0, 7, 1, 3

Λύση:

Τοποθετούμε τα δεδομένα σε αύξουσα σειρά. Τα δεδομένα είναι 8 (άρτιο πλήθος).

$$\underbrace{0,\ 1,\ 1,\ 2,}_{Q_1=\frac{1+1}{2}=1}\ \underset{Q_2=\delta=\frac{2+3}{2}=2{,}5}{\downarrow}\ \underbrace{3,\ 4,\ 5,\ 7}_{Q_3=\frac{4+5}{2}=4{,}5}$$

Η διάμεσος δ του δείγματος είναι ο αριθμός 2,5, που αντιστοιχεί στο 2ο τεταρτημόριο. $Q_2 = \delta = 2{,}5$

Η διάμεσος των δεδομένων που βρίσκονται αριστερά του δ, είναι ο αριθμός 1 που αντιστοιχεί στο 1ο τεταρτημόριο. $Q_1 = 1$

Η διάμεσος των δεδομένων που βρίσκονται δεξιά του δ είναι ο αριθμός 4,5, που αντιστοιχεί στο 3ο τεταρτημόριο. $Q_3 = 4{,}5$

Ενδοτεταρτημοριακό εύρος: $Q = Q_3 - Q_1 = 4{,}5 - 1 = 3{,}5$.

Εξασκούμαι σε όσα έμαθα

Ασκήσεις / Προβλήματα

1 Χαρακτήρισε σωστές ή λανθασμένες τις προτάσεις, βάζοντας ένα **x** στην κατάλληλη θέση.

	Σωστό	**Λάθος**
α) Το εύρος είναι μέτρο μεταβλητότητας.		
β) Η διάμεσος είναι μέτρο μεταβλητότητας.		
γ) Το εύρος ενός συνόλου παρατηρήσεων είναι πάντα μη αρνητικός αριθμός.		
δ) Το εύρος είναι πάντοτε ίσο με το ενδοτεταρτημοριακό εύρος των δεδομένων.		
ε) Για να βρούμε το ενδοτεταρτημοριακό εύρος αρκεί να αφαιρέσουμε από το 3ο τεταρτημόριο την τιμή του 1ου.		
στ) Το εύρος δεν εξαρτάται από απόμακρες τιμές του δείγματος.		

2 Τα παρακάτω δεδομένα είναι διατεταγμένα σε αύξουσα σειρά. Συμπλήρωσε τα κενά:

α) $\underbrace{2,\ 5,\ 6}_{},\ \underset{\downarrow}{8},\ \underbrace{10,\ 17,\ 20}_{}$

Q_1 = ... Q_2 = ... Q_3 = ...

Ενδοτεταρτημοριακό εύρος: Q = …………

β) $\underbrace{0,\ 6,\ 8,\ 9}_{},\ \underset{\downarrow}{}\ \underbrace{11,\ 11,\ 12,\ 15}_{}$

Q_1 = ... Q_2 = ... Q_3 = ...

Ενδοτεταρτημοριακό εύρος: Q = …………

Σε ποια από τις παραπάνω περιπτώσεις τα δεδομένα παρουσιάζουν μεγαλύτερη μεταβλητότητα; Αιτιολόγησε την απάντηση σου.

3 Προσδιόρισε το ενδοτεταρτημοριακό εύρος των παρακάτω δεδομένων:

α) 2, 4, 0, 8, 6

β) 13, 8, 12, 15, 17, 9

γ) 1, 8, 2, 7, 1, 5, 3

δ) 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40

4 Προσδιόρισε το ενδοτεταρτημοριακό εύρος των παρακάτω δεδομένων:

α) -14, -37, -25, -30, -32, -19, -41

β) $1, \frac{3}{2}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{5}{2}, 2$

5 Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται τα γκολ που σημείωσε ο Έρλινγκ Μπράουτ Χάλαντ στο πρωτάθλημα του Champions League, στο οποίο αναδείχτηκε πρώτος σκόρερ.

1, 1, 0, 0, 0, 5, 2, 2, 0, 1, 0, 0, 0

Υπολόγισε:

α) Το εύρος R των γκολ του παίκτη.

β) Τα τεταρτημόρια Q_1, Q_2 και Q_3.

γ) Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος Q.

6 Ο Γιάννης αγωνίζεται σε μία ομάδα ποδοσφαίρου. Η ομάδα του έδωσε 20 αγώνες, στους οποίους σε έναν αγώνα πέτυχε 2 τέρματα, σε έναν αγώνα πέτυχε 5 τέρματα και σε 6 αγώνες πέτυχε από 1 τέρμα. Στους υπόλοιπους αγώνες δεν πέτυχε κάποιο τέρμα.

α. Ποιος είναι ο μέσος όρος τερμάτων που πέτυχε ο Γιάννης;

β. Παρακάτω φαίνεται ο πίνακας με τα τέρματα που πέτυχε ο συμπαίκτης του Γιάννη, ο Γιώργος.

Αγώνας	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Γκολ	1	2	3	1	1	0	0	0	0	4	3	0	0	1	0	0	7	0	1	1

Πόσα τέρματα πέτυχε κατά μέσο όρο ο Γιώργος;

γ. Ποιος αθλητής έχει μεγαλύτερη μεταβλητότητα στις επιδόσεις του;

7 Σε μία εξέταση με άριστα το 100, συμμετείχαν 30 μαθητές από κάθε τάξη.

- Βαθμοί Α τάξης: Υψηλότερη βαθμολογία 95 και χαμηλότερη βαθμολογία 60.

  Τεταρτημόρια: $Q_1 = 68$, $Q_3 = 82$.
- Βαθμοί Β τάξης: Υψηλότερη βαθμολογία 92 και χαμηλότερη βαθμολογία 65.

  Τεταρτημόρια: $Q_1 = 70$, $Q_3 = 78$.

Υπολόγισε το εύρος και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος κάθε τάξης. Πώς σχολιάζεις τα αποτελέσματα; Ποια τάξη είχε καλύτερη επίδοση;

8 Μελετήσαμε το σύνολο των απουσιών των μαθητών/τριών ενός τμήματος για μία εβδομάδα και προέκυψαν τα παρακάτω συμπεράσματα:

- η διάμεσος είναι δ = 9
- το πρώτο τεταρτημόριο είναι $Q_1 = 2$,
- το τρίτο τεταρτημόριο είναι $Q_3 = 14$,
- το εύρος είναι R=21
- υπάρχει τουλάχιστον ένας μαθητής/τρια που δεν έλειψε καθόλου.

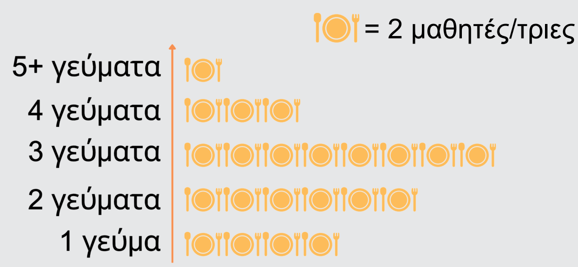
Χαρακτήρισε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις,

α) Δεν υπάρχει μαθητής/τρια που να έχει περισσότερες από 17 απουσίες.

β) Το πολύ το $\frac{1}{4}$ των μαθητών/τριών έχει 2 απουσίες.

γ) Η πλειοψηφία των μαθητών/τριών έλειπε πάνω από 10 φορές.

9 Στο παρακάτω διάγραμμα βλέπουμε τα αποτελέσματα μιας έρευνας που μελετάει πόσα γεύματα καταναλώνει κάθε μαθητής/τρια μέσα σε μια μέρα.



α) Πόσοι μαθητές/τριες συμμετείχαν στην έρευνα;

β) Πόσοι μαθητές/τριες καταναλώνουν τουλάχιστον 4 γεύματα την ημέρα;

γ) Ποια είναι η μέση τιμή των δεδομένων;

δ) Ποια είναι η διάμεσος των δεδομένων;

10 Πραγματοποιήσαμε μια έρευνα σχετικά με το πλήθος των δραστηριοτήτων στις οποίες συμμετέχουν οι μαθητές/τριες κατά τη διάρκεια ενός έτους. Τα αποτελέσματα φαίνονται στο παρακάτω ραβδόγραμμα:

α) Πόσοι μαθητές/τριες συμμετείχαν στην έρευνα;

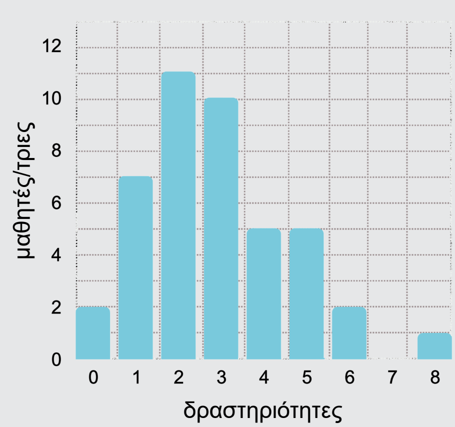
β) Υπολόγισε:

i. το εύρος του δείγματος.

ii. τη μέση τιμή των δεδομένων του δείγματος.

iii. τη διάμεσο του δείγματος.

iv. το ενδοτεταρτημοριακό εύρος Q.



Ανακεφαλαίωση – Μέτρα Θέσης - Μεταβλητότητα

1. Μέση τιμή:

$$\text{Μέση τιμή} = \frac{\text{άθροισμα δεδομένων}}{\text{πλήθος δεδομένων}}$$

2. Διάμεσος

Η **διάμεσος** δεδομένων τα οποία έχουν διαταχθεί **σε αύξουσα σειρά** ορίζεται ως:

- Το μεσαίο δεδομένο, όταν το πλήθος των δεδομένων είναι περιττός αριθμός.
- Ο μέσος όρος (ημιάθροισμα) των δύο μεσαίων δεδομένων, όταν το πλήθος των δεδομένων είναι άρτιος αριθμός.

3. Μεταβολή δεδομένων

Έστω ένα σύνολο δεδομένων με **μέση τιμή μ** και **διάμεσο δ**.

- Αν **προσθέσουμε** σε όλα τα δεδομένα έναν αριθμό **α**, τότε τα δεδομένα που θα προκύψουν έχουν:

  μέση τιμή: $\mu + \alpha$ και διάμεσο: $\delta + \alpha$
- Αν **πολλαπλασιάσουμε** όλα τα δεδομένα με έναν αριθμό **λ**, τότε τα δεδομένα που θα προκύψουν έχουν:

  μέση τιμή: $\mu \cdot \lambda$ και διάμεσο: $\delta \cdot \lambda$

Η **μέση τιμή** επηρεάζεται σημαντικά από απόμακρες τιμές σε αντίθεση με τη **διάμεσο** η οποία δεν επηρεάζεται.

4. Εύρος

Εύρος R = (Μεγαλύτερο δεδομένο) – (Μικρότερο δεδομένο).

5. Τεταρτημόρια

Για να υπολογίσουμε τα τεταρτημόρια αρχικά τοποθετούμε τα δεδομένα σε **αύξουσα σειρά.**

- Το πρώτο τεταρτημόριο (Q_1) υπολογίζεται ως διάμεσος του πρώτου μισού του συνόλου των δεδομένων.
- Το δεύτερο τεταρτημόριο (Q_2) αντιστοιχεί στη διάμεσο του δείγματος. $Q_2 = \delta$.
- Το τρίτο τεταρτημόριο (Q_3) υπολογίζεται ως διάμεσος του δεύτερου μισού του συνόλου των δεδομένων.

6. Ενδοτεταρτημοριακό Εύρος

Το Ενδοτεταρτημοριακό Εύρος (Q) είναι η διαφορά του πρώτου τεταρτημορίου Q_1 από το τρίτο τεταρτημόριο Q_3, δηλαδή: $Q = Q_3 - Q_1$

Όσο μικρότερο είναι το ενδοτεταρτημοριακό εύρος τόσο μικρότερη είναι η **μεταβλητότητα** των δεδομένων.

Επαναληπτικές Ερωτήσεις – Ασκήσεις

Α. Χαρακτήρισε σωστές ή λανθασμένες τις προτάσεις που ακολουθούν βάζοντας ένα **x** στην κατάλληλη θέση.

		Σωστό	**Λάθος**
1.	Η διάμεσος ισούται πάντοτε με τη μέση τιμή.		
2.	Η διάμεσος ταυτίζεται πάντα ένα μία τιμή από τα δεδομένα.		
3.	Η μέση τιμή δεν μπορεί να είναι μικρότερη από το μικρότερο δεδομένο.		
4.	Τα δεδομένα 3,4,5,7,8,9 έχουν μέση τιμή, διάμεσο και εύρος ίσο με 6.		
5.	Αν προσθέσουμε σε όλα τα δεδομένα έναν αριθμό α, τότε η μέση τιμή παραμένει σταθερή.		
6.	Αν προσθέσουμε σε όλα τα δεδομένα έναν αριθμό α, τότε το εύρος των δεδομένων παραμένει σταθερό.		
7.	Η διάμεσος επηρεάζεται από απόμακρες τιμές.		
8.	Το εύρος επηρεάζεται από απόμακρες τιμές.		
9.	Η μέση τιμή μπορεί να είναι αρνητικός αριθμός.		

Β. Αντιστοίχισε κάθε στοιχείο της στήλης Α με ένα στοιχείο της στήλης Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
1. Μέση τιμή	α. Μέτρο θέσης
2. Διάμεσος	
3. Τεταρτημόρια	β. Μέτρο μεταβλητότητας
4. Εύρος	
5. Ενδοτεταρτημοριακό Εύρος	

Γ. Δίνονται τα δεδομένα: 14 , 9 , 12 , 8 , x , y , 6 , με $x < y$.

Βρες τις τιμές των x και y αν γνωρίζεις ότι η διάμεσος και η μέση τιμή των δεδομένων ισούται με 10.

Σε αυτό το σημείο, θα πρέπει να είσαι σε θέση να ικανοποιείς όλους τους προσδοκώμενους μαθησιακούς στόχους. Γύρνα στην αρχή της θεματικής ενότητας και σημείωσε ✓ στα αντίστοιχα σημεία. Υπάρχουν στόχοι που αισθάνεσαι ότι δεν έχεις ικανοποιήσει πλήρως;

ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Γ.2

Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε την ανάλυση και την οπτικοποίηση δεδομένων μέσω διαγραμμάτων, όπως τα θηκογράμματα και τα χρονικά διαγράμματα. Θα μάθουμε πώς να συλλέγουμε και να οργανώνουμε δεδομένα, εστιάζοντας στην περίληψη των βασικών στατιστικών μέτρων, όπως η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή, η διάμεσος και τα τεταρτημόρια. Θα διερευνήσουμε τη σημασία των στατιστικών εργαλείων στην κατανόηση και την εξαγωγή συμπερασμάτων από δεδομένα της καθημερινής ζωής.

Είσαι έτοιμος/η να χρησιμοποιήσεις τη στατιστική για να αποκρυπτογραφήσεις πληροφορίες;

Στόχοι Ενότητας

- ☐ Διατυπώνω ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με απογραφικά χρονικά δεδομένα.
- ☐ Συλλέγω χρονικά δεδομένα που προκύπτουν από επαναλαμβανόμενες μετρήσεις κάποιου χαρακτηριστικού.
- ☐ Κατασκευάζω χρονοδιαγράμματα για χρονικά δεδομένα.
- ☐ Κατασκευάζω απλά θηκογράμματα, χρησιμοποιώντας την «περίληψη πέντε αριθμών» (ελάχιστη τιμή, τεταρτημόρια και μέγιστη τιμή), για συνεχή ποσοτικά δεδομένα.
- ☐ Επιλέγω πληροφορίες από διαφορετικές αναπαραστάσεις συνεχών ποσοτικών και χρονικών δεδομένων και καταλήγω σε συμπεράσματα.
- ☐ Εντοπίζω παραδείγματα χρήσης στατιστικών διαγραμμάτων που μπορούν να οδηγήσουν σε εσφαλμένα συμπεράσματα και να παραπλανήσουν.

Μαθήματα Ενότητας

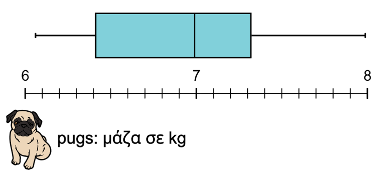
2.1 Απλά θηκογράμματα τα οποία αντιστοιχούν στην περίληψη πέντε αριθμών

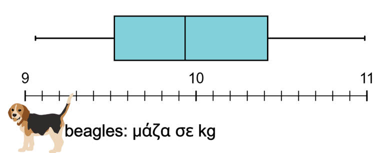
2.2 Απογραφικά χρονικά δεδομένα, χρονογράμματα και άλλα ήδη γνωστά διαγράμματα

+ Ανακεφαλαίωση / Αυτοαξιολόγηση

2.1 | Απλά Θηκογράμματα τα οποία αντιστοιχούν στην «περίληψη πέντε αριθμών»

Εξερευνώ





Στα διπλανά διαγράμματα βλέπουμε πόσο ζυγίζουν δύο διαφορετικές ράτσες σκύλων.

Μπορείς παρατηρώντας τα διαγράμματα να βρεις τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή για κάθε ράτσα;

Τι φαντάζεσαι ότι εκφράζουν οι δύο πλευρές του ορθογωνίου;

Βοηθάνε τα διαγράμματα να καταλάβουμε αν οι μάζες από τις δύο ράτσες παρουσιάζουν «παρόμοια» μεταβλητότητα;

Θηκόγραμμα

Το θηκόγραμμα είναι ένας τρόπος γραφικής απεικόνισης των παρακάτω πέντε αριθμητικών στοιχείων ενός συνόλου δεδομένων:

- του μικρότερου δεδομένου,
- του πρώτου τεταρτημόριου (Q_1),
- της διαμέσου (δ),
- του τρίτου τεταρτημόριου (Q_3) και
- του μεγαλύτερου δεδομένου.

Τα παραπάνω στοιχεία αποτελούν την **«περίληψη των πέντε αριθμών»** για τον λόγο αυτόν, το θηκόγραμμα είναι γνωστό και ως το **διάγραμμα των πέντε αριθμών**.

Κατασκευή

Για τη κατασκευή του **θηκογράμματος** δημιουργείται ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, η μία πλευρά του οποίου αντιστοιχεί στο πρώτο τεταρτημόριο (Q_1) και η απέναντι πλευρά του στο τρίτο τεταρτημόριο (Q_3), όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Ενδιάμεσα τοποθετείται ένα ευθύγραμμο τμήμα που αντιπροσωπεύει τη διάμεσο (δ), δηλαδή το δεύτερο τεταρτημόριο (Q_2).

Από τα μέσα των δύο πλευρών σχεδιάζουμε γραμμές (κεραίες) οι οποίες συνδέουν το ορθογώνιο με τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη τιμή.

Λυμένα Παραδείγματα

1. Να γίνει η περίληψη των πέντε αριθμών και να κατασκευάσετε το θηκόγραμμα στα παρακάτω δεδομένα:

12, 11, 9, 12, 7, 15, 19

Λύση:

Τοποθετούμε τα δεδομένα σε αύξουσα σειρά και υπολογίζουμε τα τεταρτημόρια:

$$\underbrace{7,\ 9,\ 11}_{Q_1=9},\ \underset{\downarrow}{\boxed{12}},\ \underbrace{12,\ 15,\ 19}_{Q_3=15}$$

$$Q_2 = \delta = 12$$

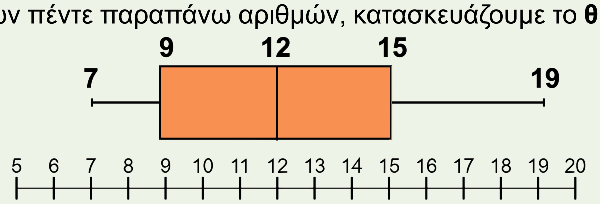
Αντιλαμβάνομαι με προσομοίωση

Περίληψη πέντε αριθμών:

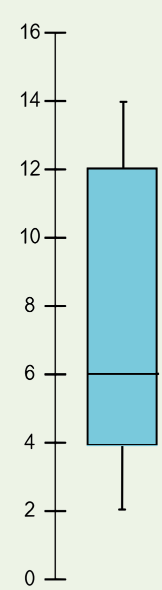
- Ελάχιστη τιμή: 7
- Πρώτο τεταρτημόριο: $Q_1 = 9$
- Διάμεσος: $\delta = 12$
- Τρίτο τεταρτημόριο: $Q_3 = 15$
- Μέγιστη τιμή: 19

Συμβολικά γράφουμε την περίληψη πέντε αριθμών ως εξής: (7, 9, 12, 15, 19).

Με βάση την περίληψη των πέντε παραπάνω αριθμών, κατασκευάζουμε το **θηκόγραμμα**:



2. Οι θερμοκρασίες σε 50 περιοχές τον μήνα Δεκέμβριο παρουσιάζονται στο διπλανό θηκόγραμμα. Προσδιορίστε την περίληψη πέντε αριθμών του δείγματος και βρείτε το εύρος των δεδομένων.



Λύση:

Περίληψη 5 αριθμών:

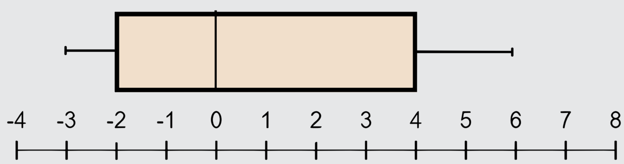
- Ελάχιστη τιμή: 2
- Πρώτο τεταρτημόριο: $Q_1 = 4$
- Διάμεσος: $\delta = 6$
- Τρίτο τεταρτημόριο: $Q_3 = 12$
- Μέγιστη τιμή: 14

Το εύρος προκύπτει από τη διαφορά της μικρότερης από την μεγαλύτερη τιμή των δεδομένων, συνεπώς:

Εύρος $R = 14 - 2 = 12$.

Ασκήσεις / Προβλήματα

1 Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά που αποτελούν την περίληψη πέντε αριθμών των δεδομένων, αξιοποιώντας το παρακάτω θηκόγραμμα :



α) Ελάχιστη τιμή: ....

β) Πρώτο τεταρτημόριο: ....

γ) Διάμεσος: ....

δ) Τρίτο τεταρτημόριο: ....

ε) Μέγιστη τιμή: ....

2 Η περίληψη πέντε αριθμών για τα αποτελέσματα μιας έρευνας για το ύψος των μαθητών ενός τμήματος είναι:

(143, 150, 156, 161, 177)

Αξιοποιώντας τις πληροφορίες που αναγράφονται, βρες το εύρος R και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος Q των δεδομένων.

3 Χρησιμοποίησε την περίληψη πέντε αριθμών ενός συνόλου δεδομένων που δίνονται παρακάτω, για να σχεδιάσεις το κατάλληλο θηκόγραμμα:

- Ελάχιστη τιμή: 2
- Πρώτο τεταρτημόριο: 7
- Διάμεσος: 9
- Τρίτο τεταρτημόριο: 13
- Μέγιστη τιμή: 16

4 Για τα παρακάτω δεδομένα προσδιόρισε την περίληψη των πέντε αριθμών και στη συνέχεια σχεδίασε τα αντίστοιχα θηκογράμματα:

α) 1, 2, 6, 8, 10, 10, 12, 12

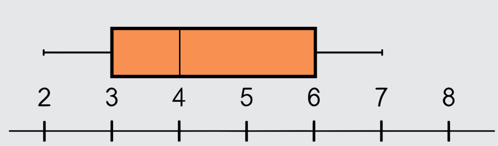
β) 0, 15, 20, 25, 30, 35, 40

γ) 2, 3, 4, 8, 9, 12, 13, 15, 20

δ) -7, -5, -3, 0, 6, 7, 8

ε) $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{10}, -\frac{1}{8}, 0$

5 Μελέτησε το παρακάτω θηκόγραμμα και προσδιόρισε το εύρος και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος των δεδομένων.



6

Είκοσι άτομα συμμετείχαν σε μια έρευνα σχετικά με το πόσες φορές ανοιγοκλείνουν τα μάτια τους κατά τη παρακολούθηση ενός βίντεο διάρκειας 1 λεπτού. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

2	7	9	11	10	3	4	5	6	7	12	6	2	4	9	8	5	3	11	2

α. Βρες την περίληψη πέντε αριθμών των δεδομένων.

β. Σχεδίασε το οριζόντιο θηκόγραμμα.

γ. Τι ποσοστό των δεδομένων αντιπροσωπεύει η αριστερή “κεραία” και τι ποσοστό αντιπροσωπεύει το ορθογώνιο;

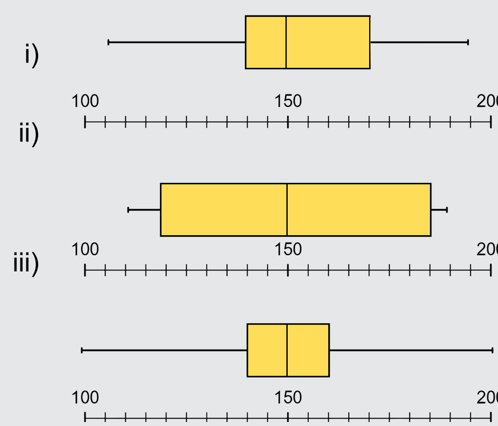
7

Αντιστοίχισε τα θηκογράμματα με τις πληροφορίες που περιγράφουν στην αριστερή στήλη.

α)
Διάμεσος: 150
Εύρος: 100
Ενδοτεταρτημοριακό Εύρος: 20

β)
Διάμεσος: 150
Εύρος: 90
Ενδοτεταρτημοριακό Εύρος: 30

γ)
Διάμεσος: 150
Εύρος: 80
Ενδοτεταρτημοριακό Εύρος: 65

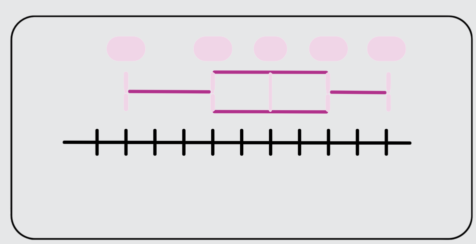


8

Ένα θεματικό πάρκο διεξήγαγε μια έρευνα για να μετρήσει πόσο καλά πέρασαν οι επισκέπτες στο πάρκο. Η βαθμολογία έγινε σε κλίμακα από 0 μέχρι 10. Το 0 εκφράζει ότι δεν πέρασαν καθόλου καλά στο πάρκο και το 10 ότι πέρασαν τέλεια.

Παρακάτω φαίνονται οι βαθμολογίες των επισκεπτών μιας ημέρας: 6,6,7,8,1,4,5,9,8,6,4,4,10,8,4,8 ,3,6,6,3,10,10,8,8,2,6,6,9,10,7.

1. Δώσε στο θηκόγραμμα έναν κατάλληλο τίτλο που περιγράφει την έρευνα.
2. Βάλε στον άξονα τα κατάλληλα νούμερα.
3. Συμπλήρωσε την περίληψη πέντε αριθμών στο θηκόγραμμα.



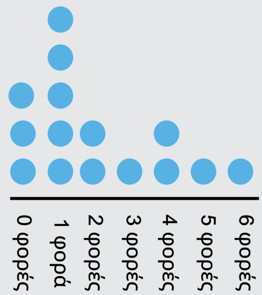
9

Οι βαθμολογίες των μαθητών σε ένα τεστ μαθηματικών φαίνονται παρακάτω:

78, 85, 92, 65 ,89, 75, 80, 95, 88, 72, 78, 85, 92, 65, 89, 75, 80, 95, 88, 72, 77

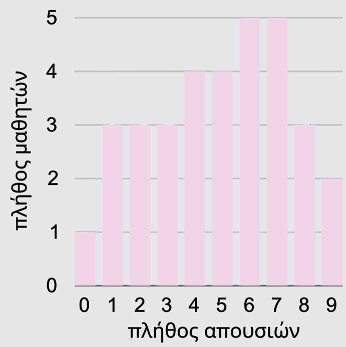
Βρες την περίληψη πέντε αριθμών των δεδομένων. Μπορείς μελετώντας την περίληψη των πέντε αριθμών των παραπάνω δεδομένων να βγάλεις συμπέρασμα για την απόδοση των μαθητών;

10 Στο παρακάτω διάγραμμα βλέπουμε πόσες φορές πήγαν σε μια θεατρική παράσταση οι μαθητές μιας τάξης. Μελετώντας το διάγραμμα βρες την περίληψη πέντε αριθμών των δεδομένων.



11 Το παρακάτω διάγραμμα δείχνει τις απουσίες των μαθητών ενός τμήματος. Σε πόσους μαθητές αναφέρεται η έρευνα; Ποια είναι η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή των δεδομένων;

Αξιοποιώντας το διάγραμμα βρες την περίληψη πέντε αριθμών των παρακάτω δεδομένων.



Εξασκούμαι

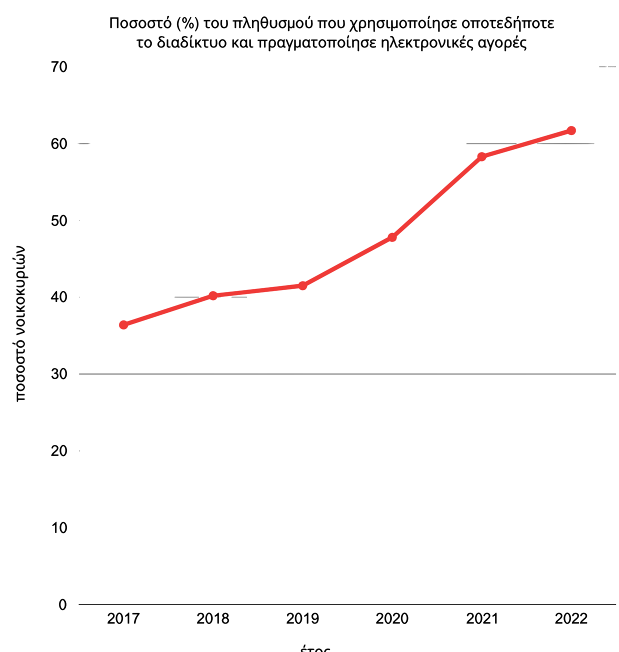
σε όσα έμαθα

2.2 | Απογραφικά χρονικά δεδομένα, χρονογράμματα και άλλα γνωστά διαγράμματα

Παρακάτω αναγράφονται κάποιες μελέτες.

- Είδος μουσικής που ακούν οι μαθητές Γυμνασίου
- Αγαπημένο άθλημα
- Πληθυσμός πόλης από το 2000 μέχρι σήμερα
- Πλήθος φυτών στον κήπο
- Αλλαγή τιμής πώλησης αυτοκινήτου με τα χρόνια

Ποιες έρευνες μελετάνε την αλλαγή μιας μεταβλητής στο χρόνο; Πώς θα σχεδίαζες τα αποτελέσματα αυτής της έρευνας;



Παρατηρήστε το διπλανό διάγραμμα. Τι συμπεράσματα βγάζετε; Μπορείτε να ερμηνεύσετε την μεταβολή στην αξιοποίηση του διαδικτύου για ηλεκτρονικές αγορές;

Πηγή: ΕΛΣΤΑΤ

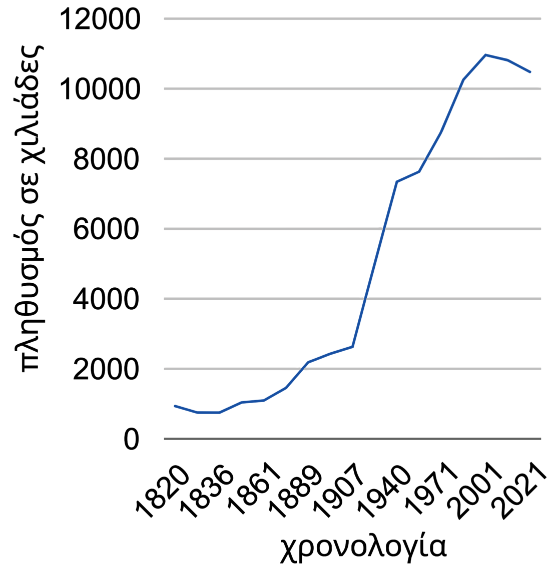
Αντικείμενο της Στατιστικής, εκτός από τη συλλογή δεδομένων, είναι η περιγραφή τους με στατιστικά διαγράμματα, τα οποία παρουσιάζονται με τέτοιον τρόπο ώστε να κινούν το ενδιαφέρον και να βοηθούν στην εξαγωγή εύκολων συμπερασμάτων. Μερικά από τα διαγράμματα αυτά είναι το **θηκόγραμμα**, το **χρονόγραμμα**, το **ραβδόγραμμα** το **εικονόγραμμα** και το **κυκλικό διάγραμμα**.

Χρονόγραμμα

Το **χρονόγραμμα** ή **χρονοδιάγραμμα** είναι ένα στατιστικό διάγραμμα, το οποίο χρησιμοποιούμε για να παραστήσουμε τη διαχρονική εξέλιξη ενός φαινομένου.

Ο οριζόντιος άξονας χρησιμοποιείται συνήθως ως άξονας μέτρησης του χρόνου και ο κάθετος ως άξονας των μετρήσεων των δεδομένων.

Παράδειγμα: Η εξέλιξη του πληθυσμού της Νεότερης Ελλάδας



Χρονολογία	Πληθυσμός
1820	938.000
1828	753.000
1836	751.000
1861	1.096.000
1870	1.457.000
1896	2.433.000
1907	2.631.000
1920	5.016.000
1940	7.344.000
1971	8.768.000
1991	10.259.000
2001	10.964.000
2011	10.816.000
2021	10.482.000

Στο χρονόγραμμα παρατηρούμε την εξέλιξη του πληθυσμού της Ελλάδας, από το 1820 έως το 2021.

Άλλα γνωστά διαγράμματα

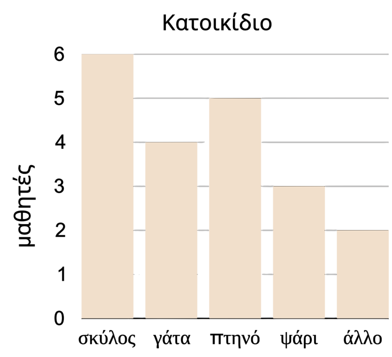
Εφαρμογή: Ρωτήσαμε 20 μαθητές/τριες σχετικά με το αγαπημένο τους κατοικίδιο και οι απαντήσεις φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Θυμόμαστε

Κατοικίδιο	Συχνότητες
Σκύλος	6
Γάτα	4
Πτηνό	5
Ψάρι	3
Άλλο	2
Σύνολο	**20**

Ραβδόγραμμα:

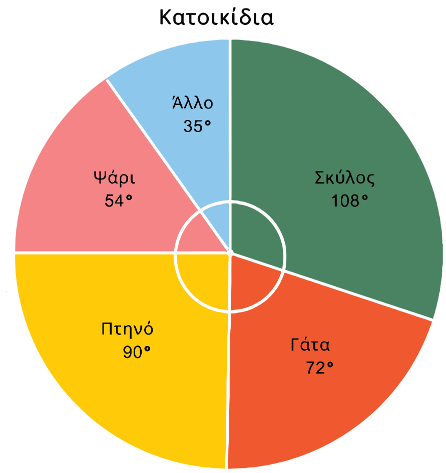
Το ραβδόγραμμα αποτελείται από ορθογώνια, ένα για κάθε τιμή της μεταβλητής, όπου το ύψος κάθε ορθογωνίου ισούται με την αντίστοιχη συχνότητα. Τα ορθογώνια ενός ραβδογράμματος μπορεί να είναι τοποθετημένα κατακόρυφα ή οριζόντια.



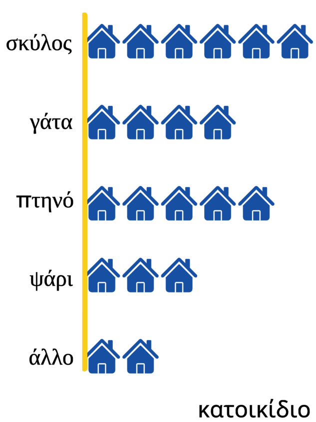
Κυκλικό διάγραμμα:

Για να κατασκευάσουμε το κυκλικό διάγραμμα, υπολογίζουμε τις αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες σύμφωνα με την αναλογία: $\dfrac{\text{συχνότητα τιμής}}{\text{σύνολο}} = \dfrac{\hat{\omega}}{360^\circ}$.

- Σκύλος: $\hat{\omega}_1 = \dfrac{6}{20} \cdot 360^\circ = 108^\circ$.
- Γάτα: $\hat{\omega}_2 = \dfrac{4}{20} \cdot 360^\circ = 72^\circ$.
- Πτηνό: $\hat{\omega}_3 = \dfrac{5}{20} \cdot 360^\circ = 90^\circ$.
- Ψάρι: $\hat{\omega}_4 = \dfrac{3}{20} \cdot 360^\circ = 54^\circ$.
- Άλλο: $\hat{\omega}_5 = \dfrac{2}{20} \cdot 360^\circ = 36^\circ$.



Εικονόγραμμα:

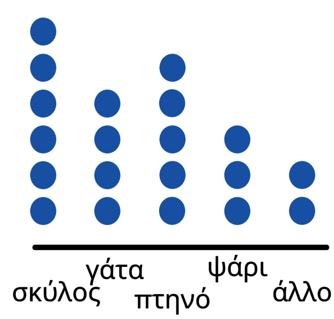


Στο εικονόγραμμα χρησιμοποιούμε μία εικόνα που εκφράζει το πλήθος των δεδομένων που εμφανίζονται σε κάθε τιμή της μεταβλητής.

Στο εικονόγραμμα του σχήματος κάθε εικόνα εκφράζει 1 μαθητή.

Σημειόγραμμα:

Όταν έχουμε λίγα δεδομένα, τότε αυτά μπορούν να παρασταθούν με το σημειόγραμμα στο οποίο τα δεδομένα παριστάνονται ως σημεία πάνω από έναν οριζόντιο άξονα.



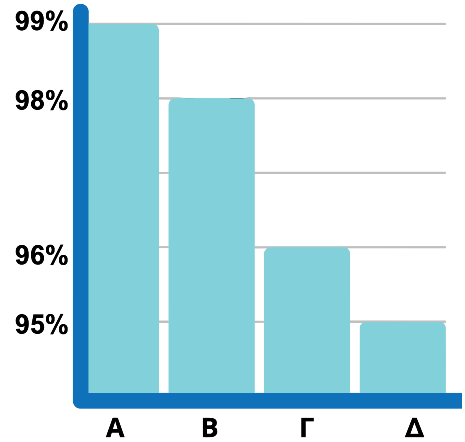
Παραπλανητικά διαγράμματα

Οι γραφικές παραστάσεις μπορούν να μας βοηθούν να οπτικοποιήσουμε μεγάλες ποσότητες δεδομένων, μπορούν όμως και να οδηγήσουν σε εσφαλμένα συμπεράσματα και να παραπλανήσουν, ανάλογα με τον τρόπο που αυτές σχεδιάζονται.

Εφαρμογή: Μια εταιρία ποδηλάτων **Α** δηλώνει μέσω μίας έρευνας ότι κατασκευάζει τα καλύτερα και πιο ανθεκτικά ποδήλατα. Αναφέρει πως το 98% των ποδηλάτων της που πουλήθηκαν τα τελευταία 5 χρόνια είναι ακόμα πλήρως λειτουργικά, κάνοντας μία σύγκριση με τις υπόλοιπες εταιρίες.

Πόσο πιο αξιόπιστα είναι τα ποδήλατα της εταιρίας **Α** από την εταιρία **Γ** σύμφωνα με το παραπάνω γράφημα;

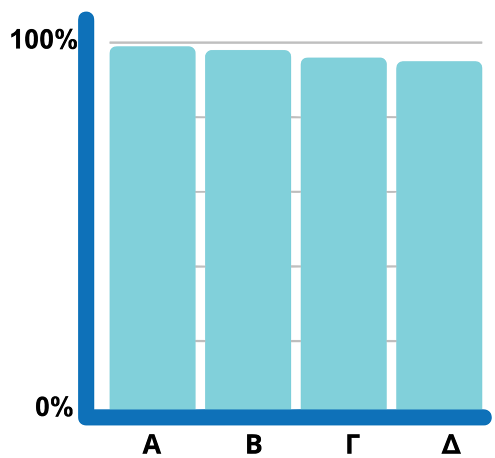
Πιστεύεις ότι το παραπάνω γράφημα είναι παραπλανητικό;



Σκέφτομαι:

Σύμφωνα με το ραβδόγραμμα, τα ποδήλατα της στήλης **Α** μοιάζουν πάνω από δύο φορές πιο αξιόπιστα από αυτά της εταιρίας **Γ**. Αν όμως παρατηρήσουμε τα ποσοστά, θα διαπιστώσουμε ότι το ποσοστό της εταιρίας Γ είναι περίπου 96% ενώ της εταιρίας Α είναι 99%. Επίσης η κλίμακα στο ραβδόγραμμα εκτείνεται μόνο μεταξύ του 94% και του 99%.

Παρακάτω φαίνεται το ίδιο ραβδόγραμμα το οποίο έχει σχεδιαστεί με κλίμακα από 0 έως 100%.



Το γράφημα είναι παραπλανητικό καθώς έχει μεταβάλει την κλίμακα με τέτοιον τρόπο ώστε να μεγαλοποιήσει τις διαφορές μεταξύ των εταιριών, ενώ στην πραγματικότητα οι διαφορές μεταξύ τους είναι ελάχιστες.

Πολλές φορές πράγματι, είναι αναγκαία η μελέτη των δεδομένων σε ένα συγκεκριμένο εύρος τιμών, άλλες φορές όμως οδηγεί σε εσφαλμένα συμπεράσματα.

Ασκήσεις / Προβλήματα

1

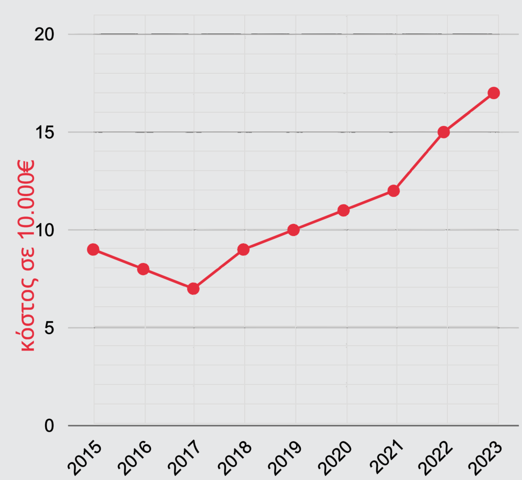
Ένα ζωολογικό πάρκο έχει καταγράψει τους επισκέπτες του, κατά τη διάρκεια των πέντε πρώτων μηνών λειτουργίας του.

1ος μήνας	25 χιλιάδες
2ος μήνας	20 χιλιάδες
3ος μήνας	15 χιλιάδες
4ος μήνας	25 χιλιάδες
5ος μήνας	5 χιλιάδες
6ος μήνας	10 χιλιάδες

Δώσε στο παρακάτω χρονόγραμμα έναν κατάλληλο τίτλο, ονόμασε τους άξονες x’x και y’y και συμπλήρωσε στους άξονες τους κατάλληλους αριθμούς.

2

Παρακάτω φαίνεται το χρονόγραμμα εξέλιξης της τιμής ενός διαμερίσματος την τελευταία δεκαετία. Ποια χρονιά είχε την μικρότερη και ποια τη μεγαλύτερη τιμή πώλησης; Πόσα χρήματα θα κερδίζαμε αν αγοράζαμε το σπίτι το 2016 έναντι του 2021; Παρατηρώντας το διάγραμμα, μπορείς να εκτιμήσεις αν η τιμή του διαμερίσματος θα αυξηθεί ή θα μειωθεί;



3

Μελετώντας τα παρακάτω σημειογράμματα, βρες πόσο χρόνο αφιερώνουν κατά μέσο όρο οι μαθητές κάθε τάξης για διάβασμα στο σπίτι.

Χρόνος μελέτης στο σπίτι

4

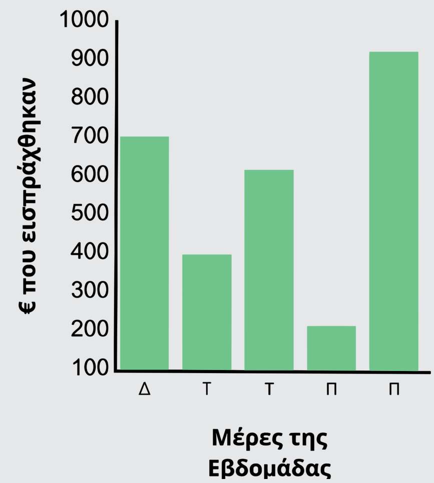
Στο διπλανό ραβδόγραμμα φαίνονται οι εισπράξεις του κυλικείου ενός Γυμνασίου.

α) Ποια μέρα το κυλικείο είχε τις περισσότερες εισπράξεις και ποια τις λιγότερες;

β) Ποιο είναι το ποσοστό των εισπράξεων που αντιστοιχούν στη Δευτέρα;

γ) Βρες τον μέσο όρο εισπράξεων του κυλικείου του σχολείου.

δ) Να μετατρέψεις το διπλανό ραβδόγραμμα σε κυκλικό διάγραμμα.



5

Μελετώντας το παρακάτω διάγραμμα βρες:

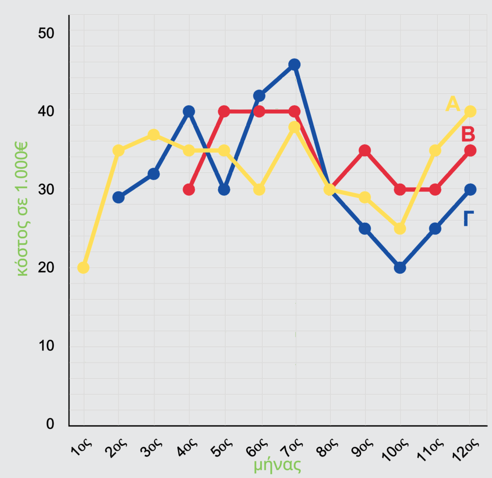
α) τον μήνα που βγήκε προς πώληση κάθε μοντέλο.

β) ποιο μοντέλο είχε τη μεγαλύτερη αυξομείωση στη τιμή του;

γ) ποιον μήνα έχουν όλα τα μοντέλα την ίδια τιμή.

δ) ποιο μοντέλο είναι ακριβότερο τον Μάρτιο.

ε) ποιο μοντέλο είχε τη (σχετικά) πιο σταθερή τιμή.



6

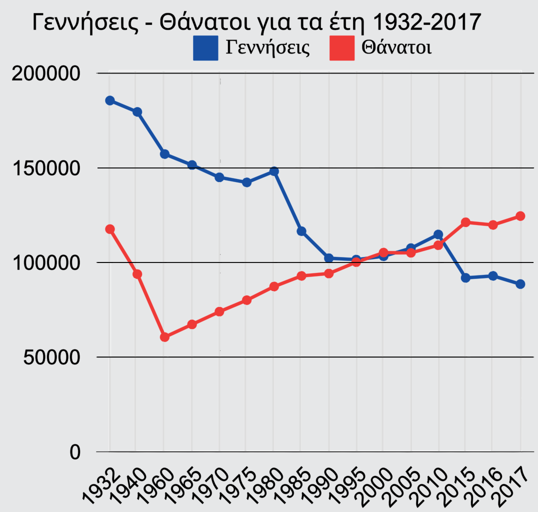
Ο πληθυσμός μιας πόλης φαίνεται στον παρακάτω πίνακα. Σχεδίασε το χρονόγραμμα που περιγράφει την εξέλιξη του πληθυσμού της πόλης.

Χρονιά	Πληθυσμός
2014	12.130
2016	10.007
2018	11.506
2020	12.800
2022	14.200
2024	15.500

Εξασκούμαι σε όσα έμαθα

7 Στο χρονόγραμμα που δίνεται παρακάτω φαίνεται ο αριθμός γεννήσεων και θανάτων στη χώρα μας από το 1932 έως και το 2016 .

(Πηγή: ΕΛ.ΣΤΑΤ: Στατιστικές/Γεννήσεις/2016/Φυσική Κίνηση πληθυσμού 2016).



α) Ποια χρονιά ο αριθμός των θανάτων ξεπερνά για πρώτη φορά τον αριθμό των γεννήσεων στη χώρα μας;

β) Ποια χρονιά είχαμε τη μεγαλύτερη αύξηση του πληθυσμού;

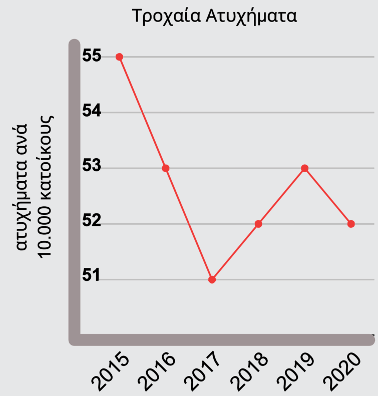
γ) Τι παρατηρείς την περίοδο 2005 – 2010 και τι συμβαίνει μετά το 2010;

δ) Βρες πιθανές αιτίες στις οποίες οφείλονται οι απαντήσεις που έδωσες στα προηγούμενα ερωτήματα

8 Σε μία τοπική εφημερίδα παρουσιάζονται τα τροχαία ατυχήματα στην περιοχή από το 2015 έως το 2020. Το άρθρο καταλήγει στο συμπέρασμα ότι τα τροχαία ατυχήματα έχουν μειωθεί σε έναν μεγάλο βαθμό.

Συμφωνείς με την άποψη αυτή;

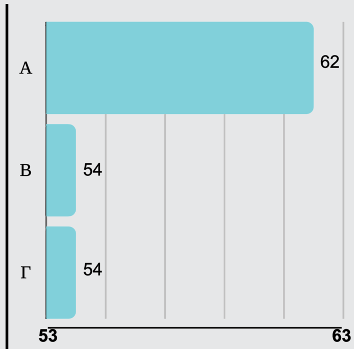
Δικαιολόγησε την απάντησή σου.



9

Σε μία σελίδα δικτύωσης των μαθητών ενός σχολείου παρουσιάστηκε η παρακάτω είδηση:

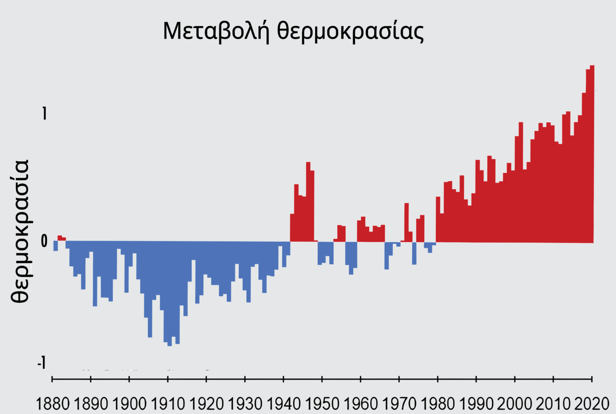
Άνετη επικράτηση του υποψηφίου Α στις προεδρικές εκλογές του 15-μελούς του σχολείου μας όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα.



Γιατί είναι παραπλανητική και λανθασμένη η ερμηνεία του διαγράμματος; Πως θα μπορούσε να διατυπωθεί η είδηση ώστε να είναι αληθής;

10

Παρακάτω παρουσιάζονται δύο χρονογράμματα που δείχνουν την αλλαγή θερμοκρασίας των ωκεανών, από το 1880 έως το 2020.



Εξήγησε τον λόγο για τον οποίον τα γραφήματα αυτά απεικονίζουν διαφορετικά τα ίδια δεδομένα.

Ποιο γράφημα θεωρείς ότι είναι παραπλανητικό;

Σημείωση: Γνωρίζουμε ότι μία αύξηση ακόμα και 0,5 °C μπορεί να προκαλέσει οικολογική αστάθεια.

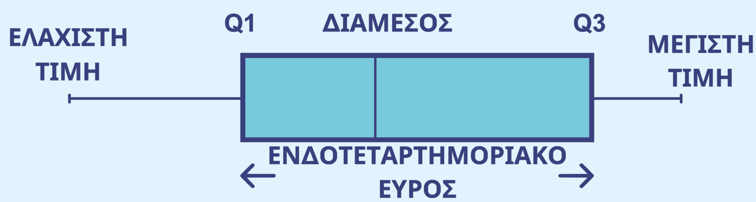
Ανακεφαλαίωση (Διαχείριση Δεδομένων)

1. Περίληψη των πέντε αριθμών:

- Μικρότερο δεδομένο.
- Πρώτο τεταρτημόριο (Q_1).
- Διάμεσος (δ).
- Τρίτο τεταρτημόριο (Q_3).
- Μεγαλύτερο δεδομένο.

2. Θηκόγραμμα

Το θηκόγραμμα είναι η γραφική απεικόνιση της περίληψης των πέντε αριθμών:



3. Χρονόγραμμα

Το χρονόγραμμα ή χρονοδιάγραμμα είναι ένα στατιστικό διάγραμμα, το οποίο χρησιμοποιούμε για να παραστήσουμε τη διαχρονική εξέλιξη ενός φαινομένου.

4. Ραβδόγραμμα

Το ραβδόγραμμα αποτελείται από ορθογώνια, ένα για κάθε τιμή της μεταβλητής, όπου το ύψος κάθε ορθογωνίου ισούται με την αντίστοιχη συχνότητα της μεταβλητής. Τα ορθογώνια ενός ραβδογράμματος μπορεί να είναι τοποθετημένα κατακόρυφα ή οριζόντια.

5. Κυκλικό διάγραμμα:

Το κυκλικό διάγραμμα απεικονίζει τις τιμές των μεταβλητών σε μορφή «πίτας». Για να κατασκευάσουμε το κυκλικό διάγραμμα, υπολογίζουμε τις αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες σύμφωνα με την αναλογία:

$$\frac{\text{συχνότητα τιμής}}{\text{σύνολο}} = \frac{\hat{\omega}}{360^\circ}.$$

6. Εικονόγραμμα

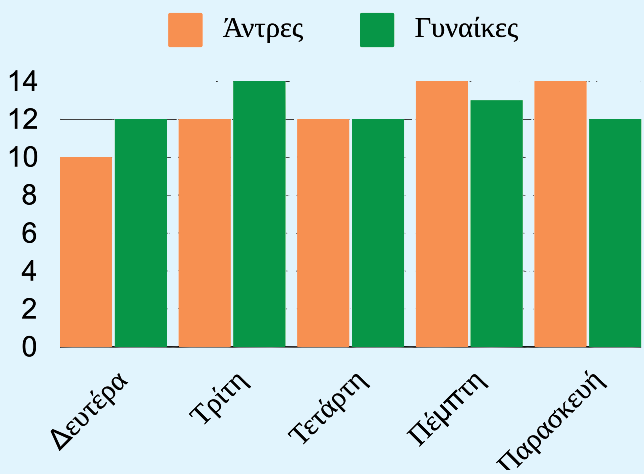
Στο εικονόγραμμα χρησιμοποιούμε μία εικόνα που εκφράζει το πλήθος των δεδομένων που εμφανίζονται σε κάθε τιμή της μεταβλητής.

7. Σημειόγραμμα

Όταν έχουμε λίγα δεδομένα, τότε αυτά μπορούν να παρασταθούν με το σημειόγραμμα στο οποίο τα δεδομένα παριστάνονται ως σημεία πάνω από έναν οριζόντιο άξονα.

Αυτοαξιολόγηση (Διαχείριση Δεδομένων)

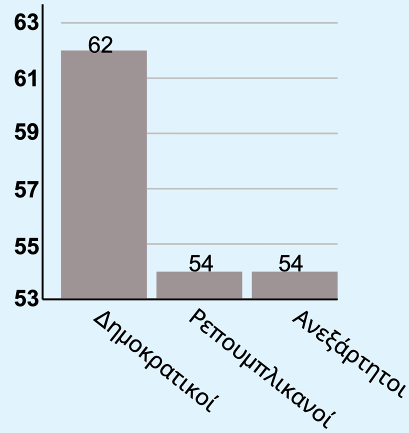
1. Μελέτησε το παρακάτω διάγραμμα που απεικονίζει πόσα βιβλία αγόρασαν κάποιοι άντρες και γυναίκες αγοραστές από ένα κατάστημα.



- Ποια είναι η μέση τιμή των βιβλίων που αγόρασαν οι άντρες;
- Ποια είναι η διάμεσος τιμή των βιβλίων που αγόρασαν οι γυναίκες;
- Οι άντρες ή οι γυναίκες έχουν μεγαλύτερο εύρος στις αγορές των βιβλίων;
- Πόσα βιβλία πωλήθηκαν συνολικά;

Ομαδική δραστηριότητα

Τον Μάρτιο του 2005 στις ΗΠΑ έγινε μια έρευνα από το κανάλι BBC για να μελετήσει αν οι ψηφοφόροι κάθε κόμματος συμφωνούσαν με τον νέο νόμο για την παιδεία. Ο νόμος περιλάμβανε μείωση στον προϋπολογισμό για τα σχολεία. Η έρευνα έγινε σε 900 ενήλικες και τα αποτελέσματα παρουσιάστηκαν με το παρακάτω γράφημα:



Μελετώ
το συγκεκριμένο θέμα

Πώς σχολιάζετε το παραπάνω διάγραμμα;

Οι τηλεθεατές του BBC κατήγγειλαν το παραπάνω διάγραμμα και η εταιρεία επανέκδωσε το γράφημα.

Είχαν δίκαιο οι τηλεθεατές;

Σε αυτό το σημείο, θα πρέπει να είσαι σε θέση να ικανοποιείς όλους τους προσδοκώμενους μαθησιακούς στόχους. Γύρνα στην αρχή της θεματικής ενότητας και σημείωσε ✓ στα αντίστοιχα σημεία. Υπάρχουν στόχοι που αισθάνεσαι ότι δεν έχεις ικανοποιήσει πλήρως;

ΠΕΙΡΑΜΑΤΑ ΤΥΧΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Γ.3

Στην ενότητα αυτή θα εξερευνήσουμε την έννοια των πιθανοτήτων μέσα από πειράματα τύχης. Θα μάθουμε να ελέγχουμε αν δύο ενδεχόμενα είναι ασυμβίβαστα, να απαριθμούμε πιθανά ενδεχόμενα, χρησιμοποιώντας τη Βασική Αρχή της Απαρίθμησης, και να υπολογίζουμε την πιθανότητα σύνθετων ενδεχομένων με τη χρήση του απλού προσθετικού νόμου.

Είσαι έτοιμος/η να κατανοήσεις πώς οι πιθανότητες βρίσκουν εφαρμογή σε πραγματικά προβλήματα και καθημερινές καταστάσεις;

Στόχοι Ενότητας

- ☐ Ελέγχω αν δύο ενδεχόμενα είναι ασυμβίβαστα.
- ☐ Απαριθμώ το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου με χρήση της Βασικής Αρχής Απαρίθμησης (ΒΑΑ) και υπολογίζω την αντίστοιχη πιθανότητα.
- ☐ Χρησιμοποιώ τον απλό προσθετικό νόμο για να υπολογίζω την πιθανότητα σύνθετων ενδεχομένων.

Μαθήματα Ενότητας

3.1 | Βασική Αρχή Απαρίθμησης

Μια έγκυρη ελληνική πινακίδα αυτοκινήτου αποτελείται από 3 γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου, τα οποία πρέπει να υπάρχουν ως σύμβολα και στο αγγλικό αλφάβητο {Α,Β,Ε,Ζ,Η,Ι,Κ,Μ,Ν,Ο,Ρ,Τ,Υ,Χ} , ακολουθούμενα από 4 ψηφιά {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}, όπως φαίνεται και στο ακόλουθο σχήμα.

α) Πόσες διαφορετικές έγκυρες ελληνικές πινακίδες υπάρχουν;

β) Θα μπορούσαν οι έγκυρες πινακίδες στην Κίνα να ακολουθούν ανάλογο κανόνα;

γ) Πόσες διαφορετικές έγκυρες πινακίδες από τις διπλανές υπάρχουν;

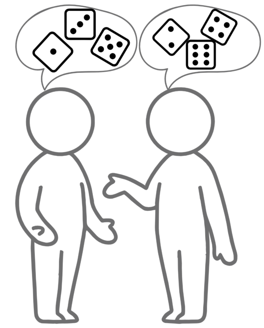
Αναζήτησε πινακίδες στο διαδίκτυο από διάφορες χώρες και ψάξε να βρεις τους κανόνες.

Ασυμβίβαστα ενδεχόμενα

Θυμόμαστε – Μαθαίνουμε:

- **Πείραμα τύχης** ονομάζεται ένα πείραμα στο οποίο δεν μπορούμε να προβλέψουμε με βεβαιότητα το αποτέλεσμά του, όσες φορές και αν το επαναλάβουμε.
- Όλα τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης αποτελούν τον **δειγματικό χώρο** του πειράματος.
- Ένα σύνολο που περιέχει ένα ή περισσότερα στοιχεία ενός δειγματικού χώρου ενός πειράματος τύχης ονομάζεται **ενδεχόμενο**.

Παράδειγμα: Η ρίψη ενός ζαριού είναι ένα πείραμα τύχης με δειγματικό χώρο Ω = {1,2,3,4,5,6}.



Κατά τη ρίψη ενός ζαριού:

- Το ενδεχόμενο να φέρουμε άρτιο αριθμό είναι το Α = {2,4,6}.
- Το ενδεχόμενο να φέρουμε περιττό αριθμό είναι το Β = {1,3,5}.

Αν κατά τη ρίψη του ζαριού φέρουμε 2 ή 4 ή 6, λέμε ότι το ενδεχόμενο Α **πραγματοποιείται**.

Παρατηρούμε ότι τα ενδεχόμενα Α και Β δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν συγχρόνως, αφού δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο.

Στην περίπτωση αυτή τα ενδεχόμενα Α και Β λέγονται **ασυμβίβαστα**.

Γενικά:

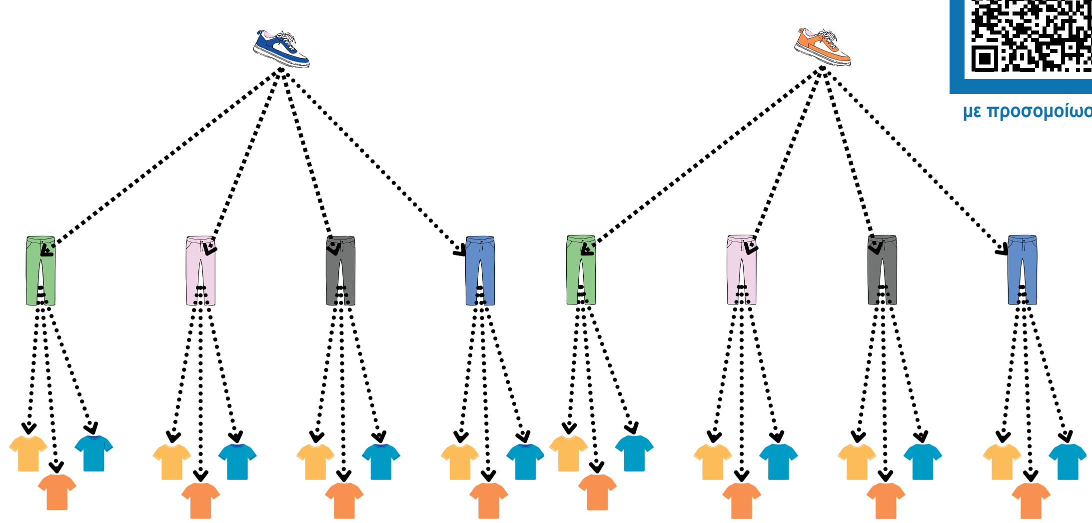
Δύο ενδεχόμενα Α και Β λέγονται **ασυμβίβαστα**, όταν δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν συγχρόνως.

Βασική Αρχή Απαρίθμησης (ΒΑΑ)

Εφαρμογή: Στην ντουλάπα του ο Μάριος έχει 2 ζευγάρια παπούτσια 4 παντελόνια και 3 μπλούζες. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να ντυθεί ο Μάριος;

Αντιλαμβάνομαι με προσομοίωση

Απάντηση:



Ο Μάριος διαθέτει 2 ζευγάρια παπούτσια και για κάθε ένα μπορεί να επιλέξει μεταξύ 4 παντελονιών, δηλαδή $2 \cdot 4 = 8$ συνδυασμοί παπουτσιών – παντελονιών.

Για κάθε τέτοιο συνδυασμό μπορεί να επιλέξει μία από τις 3 μπλούζες, δηλαδή συνολικά $(2 \cdot 4) \cdot 3 = 24$ συνδυασμοί ένδυσης. Άρα ο Μάριος μπορεί να ντυθεί με 24 διαφορετικούς τρόπους.

Ένας τρόπος για να βρούμε τον δειγματικό χώρο ενός πειράματος τύχης είναι η **Βασική Αρχή Απαρίθμησης (ΒΑΑ):**

Αν μια διαδικασία -ένα πείραμα τύχης- μπορεί να χωριστεί σε διαφορετικά μέρη, όπου:

- το πρώτο μέρος μπορεί να πραγματοποιηθεί με **α** τρόπους,
- το δεύτερο μέρος με **β** τρόπους,
- το τρίτο μέρος με **γ** τρόπους,
- … …
- το τελευταίο μέρος με **κ** τρόπους,

τότε, με **πολλαπλασιασμό**, προκύπτει ότι η διαδικασία αυτή μπορεί να εκτελεστεί συνολικά με:

$$\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \ldots \cdot \kappa \text{ τρόπους.}$$

- Οι $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \ldots \cdot \kappa$ τρόποι αποτελούν και το πλήθος του δειγματικού χώρου του πειράματος τύχης.

Σχόλιο: Επειδή η Βασική Αρχή Απαρίθμησης προκύπτει από γινόμενο, ονομάζεται επίσης και Πολλαπλασιαστική Αρχή.

Παράδειγμα: Στην προηγούμενη εφαρμογή είχαμε ότι ο Μάριος διαθέτει τις εξής επιλογές:

- Παπούτσια: 2 επιλογές.
- Παντελόνια: 4 επιλογές.
- Μπλούζες: 3 επιλογές.

Σύμφωνα με την Βασική Αρχή Απαρίθμησης, ο Μάριος μπορεί να ντυθεί με:

$$2 \cdot 4 \cdot 3 = 24 \text{ διαφορετικούς τρόπους.}$$

Λυμένα Παραδείγματα

1. Ρίχνουμε δύο ζάρια και καταγράφουμε τις πάνω όψεις τους. Να εξετάσετε αν τα παρακάτω ενδεχόμενα είναι ασυμβίβαστα:

α) Α: «Το άθροισμα των ενδείξεων είναι 10» και Β: «Ένα τουλάχιστον ζάρι φέρνει 2».

β) Γ: «Το άθροισμα των ενδείξεων είναι 2» και Δ: «Τα δύο ζάρια έχουν την ίδια ένδειξη».

Λύση:

α) Τα ενδεχόμενα Α και Β είναι **ασυμβίβαστα** καθώς δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν συγχρόνως. Αν ένα ζάρι φέρει 2, τότε το άθροισμα των δύο ζαριών δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο από 8.

β) Τα ενδεχόμενα Γ και Δ **δεν είναι ασυμβίβαστα** γιατί έχουν κοινά στοιχεία. Αν το άθροισμα των ζαριών είναι 2 τότε αυτά έχουν ενδείξεις 1 και 1, δηλαδή έχουν την ίδια ένδειξη.

2. α) Πόσοι τριψήφιοι αριθμοί υπάρχουν με ψηφία τους αριθμούς 5, 6 και 8;

β) Πόσοι τριψήφιοι αριθμοί υπάρχουν με ψηφία τους αριθμούς 5, 6 και 8, ώστε κάθε ψηφίο να χρησιμοποιείται μόνο μία φορά;

Λύση:

Η απάντηση μπορεί να βρεθεί σύμφωνα με τη **Βασική Αρχή Απαρίθμησης (ΒΑΑ)**:

α) Για να βρούμε όλους τους τριψήφιους με ψηφία τους αριθμούς 5, 6 και 8, παρατηρούμε ότι οι επιλογές που έχουμε για τα ψηφία είναι:

- ψηφίο εκατοντάδων: 3 επιλογές (5 ή 6 ή 8).
- ψηφίο δεκάδων: 3 επιλογές (5 ή 6 ή 8).
- ψηφίο μονάδων: 3 επιλογές (5 ή 6 ή 8).

Ε	Δ	Μ
↓	↓	↓
3 επιλογές	3 επιλογές	3 επιλογές

Άρα συνολικά έχουμε $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ επιλογές, δηλαδή 27 διαφορετικούς τριψήφιους αριθμούς.

β) Για να βρούμε όλους τους τριψήφιους με ψηφία τους αριθμούς 5, 6 και 8, ώστε κάθε ψηφίο να είναι διαφορετικός αριθμός, παρατηρούμε ότι οι επιλογές που έχουμε για τα ψηφία είναι:

- ψηφίο εκατοντάδων: 3 επιλογές (5 ή 6 ή 8).

Ε	Δ	Μ
↓	↓	↓
3 επιλογές	2 επιλογές	1 επιλογή

- ψηφίο δεκάδων: 2 επιλογές (Π.χ. αν το ψηφίο των εκατοντάδων είναι 5, τότε το ψηφίο των δεκάδων θα είναι 6 ή 8).
- ψηφίο μονάδων: 1 επιλογή (Π.χ. αν το ψηφίο των εκατοντάδων είναι 5, και το ψηφίο των δεκάδων είναι 6, τότε το ψηφίο των μονάδων θα είναι υποχρεωτικά 8).

Άρα συνολικά έχουμε $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ επιλογές, δηλαδή 6 διαφορετικούς τριψήφιους αριθμούς (568, 586, 658, 685, 856, 865).

Εξασκούμαι σε όσα έμαθα

Ασκήσεις / Προβλήματα

1 Από μία κανονική τράπουλα διαλέγουμε φύλλα με τυχαίο τρόπο. Ποια από τα ενδεχόμενα που περιγράφονται είναι ασυμβίβαστα;

i) Α: Το φύλλο είναι αριθμός μικρότερος του 10. και Β: Το φύλλο είναι κόκκινη φιγούρα.

ii) Α: Το φύλλο είναι μαύρο ή κόκκινο. και Β: Το φύλλο είναι φιγούρα.

iii) Α: Το φύλλο είναι περιττός αριθμός. και Β: Το φύλλο είναι αριθμός μικρότερος του 4.

2 Ο Δημήτρης ισχυρίζεται ότι στη ρίψη ενός ζαριού, το ενδεχόμενο: Α: φέρνω άρτιο αριθμό και το ενδεχόμενο Β: φέρνω πρώτο αριθμό, είναι ασυμβίβαστα.

Συμφωνείς με την άποψη αυτή; Αιτιολόγησε την απάντησή σου.

3 Το κυλικείο ενός σχολείου προσφέρει τα παρακάτω προϊόντα:

- Φρούτα: Μήλο, αχλάδι και πορτοκάλι.
- Αρτοσκευάσματα: Τυρόπιτα, πίτσα και σάντουιτς.
- Γλυκά: Σοκολάτα και κρέμα.

Πόσα διαφορετικά γεύματα μπορούν να προκύψουν, αν κάθε γεύμα περιέχει ένα προϊόν από τις παραπάνω κατηγορίες;

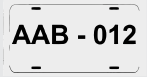
4 Θέλουμε να σχηματίσουμε έναν τετραψήφιο κωδικό με ψηφία από 0 έως και 9.

α) Πόσους διαφορετικούς τετραψήφιους κωδικούς μπορούμε να σχηματίσουμε;

β) Πόσους διαφορετικούς τετραψήφιους κωδικούς μπορούμε να σχηματίσουμε, αν κάθε ψηφίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο μια φορά;

γ) Πόσους διαφορετικούς τετραψήφιους κωδικούς μπορούμε να σχηματίσουμε ώστε ο κωδικός που θα προκύψει να είναι περιττός αριθμός;

5 Οι πινακίδες των μοτοσυκλετών αποτελούνται από 3 γράμματα και 3 αριθμούς. Πόσες διαφορετικές πινακίδες μπορούν να κατασκευαστούν; (Θεωρείστε ότι μπορούν να αξιοποιηθούν όλα τα γράμματα της ελληνικής αλφάβητου και τα ψηφία 0-9).



Αξιοποιώ την αριθμομηχανή

6 Σε μια ληστεία, ο αυτόπτης μάρτυρας δήλωσε ότι θυμάται τα 4 νούμερα της πινακίδας αλλά όχι τα 3 γράμματα. Πόσα αυτοκίνητα θα χρειαστεί να «ελέγξει» η τροχαία; Θα ήταν προτιμότερο να θυμάται τα 4 νούμερα ή τα 3 γράμματα; Υποθέτουμε ότι χρησιμοποιούνται όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί γραμμάτων και αριθμών.

Αξιοποιώ την αριθμομηχανή

7 Για την ανακαίνιση του σπιτιού μπορούμε να επιλέξουμε για καθένα από τα τρία δωμάτια ανάμεσα σε 6 χρώματα. Πόσοι είναι οι συνολικοί τρόποι βαψίματος των δωματίων; Πόσοι θα ήταν οι τρόποι αν δεν μπορούσαμε να επιλέξουμε το ίδιο χρώμα για κάθε δωμάτιο;

8 Ένας κάτοικος της Κρήτης θέλει να ταξιδέψει προς το Βελιγράδι. Από την Κρήτη μπορεί να βρεθεί στην Θεσσαλονίκη με καράβι ή με αεροπλάνο και από τη Θεσσαλονίκη μπορεί να φτάσει στο Βελιγράδι με τρένο, οδικώς ή με αεροπλάνο. Βρες όλους τους δυνατούς τρόπους μετακίνησης.

Πόσοι από αυτούς τους τρόπους περιέχουν τουλάχιστον μία φορά τη χρήση αεροπλάνου;

9 Πέντε άτομα πρέπει να καθίσουν σε πέντε διπλανές καρέκλες. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;

Γενίκευσε το συμπέρασμα στην περίπτωση που το πλήθος των ατόμων είναι ν και πρέπει να καθίσουν σε ν διπλανές καρέκλες.

3.2 | Απλός Προσθετικός Νόμος

Από μια τράπουλα με 52 φύλλα παίρνουμε ένα στην τύχη. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

α) το φύλλο να είναι πέντε

β) το φύλλο να είναι έξι

γ) το φύλλο να είναι 5 ή 6.

Τι παρατηρείτε;

Πιθανότητες

Θυμόμαστε – Μαθαίνουμε:

Αν όλα τα δυνατά αποτελέσματα ενός δειγματικού χώρου έχουν την ίδια πιθανότητα να εμφανιστούν, όπως οι έδρες σε ένα αμερόληπτο ζάρι, τότε ονομάζονται **ισοπίθανα.**

Θυμόμαστε

Κλασικός ορισμός της πιθανότητας:

Σε ένα πείραμα τύχης με ισοπίθανα αποτελέσματα, **πιθανότητα** ενός ενδεχομένου ονομάζεται το πηλίκο του πλήθους των ευνοϊκών αποτελεσμάτων προς το πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων.

$$\text{πιθανότητα} = \frac{\text{πλήθος επιθυμητών αποτελεσμάτων}}{\text{πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσματων}}$$

Για την πιθανότητα P οποιοδήποτε ενδεχομένου, ισχύει: $0 \leq P \leq 1$

Παράδειγμα: Ρίχνουμε ένα ζάρι. Βρείτε την πιθανότητα να φέρουμε περιττό αποτέλεσμα.

Λύση: Τα επιθυμητά αποτελέσματα είναι οι περιττοί αριθμοί 1, 3 και 5. Το πλήθος τους είναι 3.

Όλα τα δυνατά αποτελέσματα είναι οι αριθμοί 1, 2, 3, 4, 5 και 6. Το πλήθος τους είναι 6.

Επομένως, η πιθανότητα είναι: $P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ή 50%.

Το ενδεχόμενο που δεν πραγματοποιείται όσες φορές και αν εκτελέσουμε ένα πείραμα τύχης, ονομάζεται **αδύνατο** ενδεχόμενο.

Από τον ορισμό της πιθανότητας, για ένα αδύνατο ενδεχόμενο Α προκύπτει ότι: P(A) = 0.

Παράδειγμα:

Κατά τη ρίψη ενός ζαριού, το ενδεχόμενο *Α: η ένδειξη είναι πάνω από 6*, είναι **αδύνατο**.

Το ενδεχόμενο που πραγματοποιείται σε κάθε εκτέλεση του πειράματος ονομάζεται **βέβαιο** ενδεχόμενο. Από τον ορισμό της πιθανότητας, για ένα βέβαιο ενδεχόμενο Β προκύπτει ότι: $P(B) = 1$.

Παράδειγμα:

Κατά τη ρίψη ενός ζαριού, το ενδεχόμενο *Β: η ένδειξη είναι κάτω από 6* είναι ένα **βέβαιο** ενδεχόμενο.

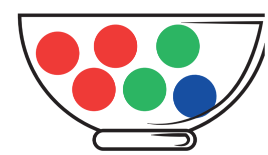
Απλός Προσθετικός Νόμος

Για οποιαδήποτε **ασυμβίβαστα** μεταξύ τους ενδεχόμενα Α και Β, η πιθανότητα να πραγματοποιείται το Α ή να πραγματοποιείται το Β, είναι:

$$P(A) + P(B).$$

Παράδειγμα:

Μία κάλπη περιέχει διάφορες μονόχρωμες μπίλιες. Η πιθανότητα να επιλέξουμε πράσινη μπίλια είναι $\frac{1}{3}$ και η πιθανότητα να επιλέξουμε κόκκινη μπίλια είναι $\frac{1}{2}$. Βρείτε την πιθανότητα αν επιλέξουμε μία μπίλια, αυτή να είναι πράσινη ή κόκκινη.



Λύση:

Τα ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα καθώς δεν πραγματοποιούνται συγχρόνως. Σύμφωνα με τον απλό προσθετικό νόμο η πιθανότητα η μπίλια να είναι πράσινη ή κόκκινη είναι:

$$P = P(\text{πράσινη}) + P(\text{κόκκινη}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}.$$

Λυμένα Παραδείγματα

1. Ρίχνουμε ένα ζάρι και καταγράφουμε την πάνω όψη του. Δίνονται τα ενδεχόμενα:

- Α: «Η ένδειξη είναι άρτιος αριθμός»
- Β: «Το ζάρι φέρνει 1»

Βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιείται:

α) το Α. β) το Β. γ) το Α ή το Β.

Λύση:

α) Οι άρτιοι είναι οι 2,4,6 και το πλήθος τους είναι 3. Οι δυνατές περιπτώσεις είναι 1,2,3,4,5,6 και το πλήθος τους είναι 6. Επομένως:

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

β) Η ευνοϊκή περίπτωση είναι μία, η οποία είναι ο αριθμός 5. Έχουμε:

$$P(B) = \frac{1}{6}.$$

γ) Τα ενδεχόμενα είναι ασυμβίβαστα γιατί δεν περιέχουν κοινά στοιχεία επομένως σύμφωνα με την προσθετική αρχή, η πιθανότητα να πραγματοποιείται το Α ή το Β, είναι:

$$P = P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Διαφορετικά, έχουμε ότι οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι οι 1,2,4,6 και το πλήθος τους είναι 4, άρα:

$$P = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

2. Ανάμεσα στους μαθητές μίας τάξης, η πιθανότητα να ασχολείται κάποιος με το ποδόσφαιρο είναι $\frac{2}{3}$ και η πιθανότητα να ασχολείται με το μπάσκετ είναι $\frac{2}{5}$. Είναι τα ενδεχόμενα αυτά ασυμβίβαστα; Αιτιολόγησε την απάντησή σου.

Λύση:

Παρατηρούμε ότι:

$$P(\text{ποδόσφαιρο}) + P(\text{μπάσκετ}) = \frac{2}{3} + \frac{2}{5} = \frac{10}{15} + \frac{6}{15} = \frac{16}{15} > 1.$$

Για την πιθανότητα γνωρίζουμε ότι: $0 \leq (\text{πιθανότητα}) \leq 1$. Άρα τα ενδεχόμενα **δεν** είναι ασυμβίβαστα. Υπάρχουν δηλαδή μαθητές που ασχολούνται και με τα δύο αθλήματα (ποδόσφαιρο και μπάσκετ).

Εξασκούμαι σε όσα έμαθα

Ασκήσεις / Προβλήματα

1 Για τη ρίψη ενός ζαριού θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

Α: φέρνω άρτιο αριθμό

Β: φέρνω περιττό αριθμό.

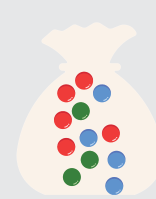
Ποια είναι η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί είτε το ενδεχόμενο Α είτε το ενδεχόμενο Β;

2 Από μια τράπουλα με 52 φύλλα τραβάμε ένα φύλο στη τύχη. Ποια είναι η πιθανότητα να τραβήξουμε:

α) άσσο β) ντάμα γ) άσσο ή ντάμα

3 Σε μια τσάντα είναι τοποθετημένες 5 κόκκινες, 4 μπλε και 3 πράσινες μπάλες.

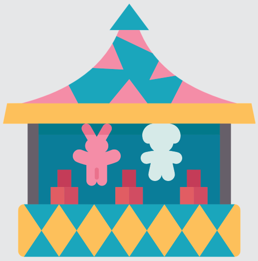
Ποια είναι η πιθανότητα να τραβήξουμε μια μπλε μπάλα, ποια να τραβήξουμε μια κόκκινη και ποια μια πράσινη; Είναι ασυμβίβαστα τα παραπάνω ενδεχόμενα;



4 Στην σχολική εκδρομή οι μαθητές είχαν την δυνατότητα να ασχοληθούν με την ορειβασία και την ιππασία. Η πιθανότητα κάποιος μαθητής να έκανε ορειβασία είναι $\frac{3}{5}$ και η πιθανότητα κάποιος μαθητής να έκανε ιππασία είναι $\frac{1}{2}$. Μπορούμε να διαπιστώσουμε αν υπήρξαν μαθητές που παρακολούθησαν και τις δύο δραστηριότητες; Αιτιολόγησε την απάντησή σου.

5

Συμμετέχεις σε ένα παιχνίδι όπου έχεις την πιθανότητα να κερδίσεις 3 διαφορετικά έπαθλα. Οι πιθανότητες για κάθε βραβείο φαίνονται παρακάτω:



P(A) – πιθανότητα να κερδίσω αρκουδάκι: 0,2

P(B) – πιθανότητα να κερδίσω μπλουζάκι: 0,4

P(Γ) – πιθανότητα να κερδίσω σοκολάτα: 0,3

Ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσεις ένα (οποιοδήποτε δώρο); Μπορείς να συμπεράνεις αν υπάρχει πιθανότητα να παίξεις και να μην κερδίσεις κάτι;

6

Για να βρεις τον κρυμμένο θησαυρό έχεις δύο διαφορετικά μονοπάτια. Το πρώτο είναι ένα μονοπάτι με μια περιπέτεια στην ζούγκλα και το δεύτερο είναι ένα μονοπάτι με μία υπόγεια διαδρομή.

α) Αν γνωρίζουμε ότι μπορούμε να βρούμε τον θησαυρό σίγουρα αν ακολουθήσουμε ένα από τα δύο μονοπάτια και P(ζούγκλας) = 0,4, πόσο είναι η P(υπόγεια);

β) Αν σε ένα άλλο παιχνίδι ισχύουν αντίστοιχα οι πιθανότητες:

P(A) - Πιθανότητα επιτυχίας στο μονοπάτι της ζούγκλας: 30%

P(B) - Πιθανότητα επιτυχίας στην υπόγεια διαδρομή: 50%

Μπορείς να συμπεράνεις αν υπάρχει κι άλλο μονοπάτι που ίσως χρειαστεί να πάρεις για να βρεις τον κρυμμένο θησαυρό;

7

Η διαδρομή του κύριου Γιώργου προς τη δουλειά περιλαμβάνει τις παρακάτω φάσεις:

Από το σπίτι μπορεί να πάρει λεωφορείο ή μετρό μέχρι το Χαλάνδρι και από εκεί προαστιακό ή ταξί.

Αν επιλέξει στην τύχη μία διαδρομή, τότε:

α) Ποια είναι η πιθανότητα ο κύριος Γιώργος να χρησιμοποιήσει ταξί για να πάει στη δουλειά;

β) Ποια είναι η πιθανότητα να χρησιμοποιήσει λεωφορείο και ταξί;

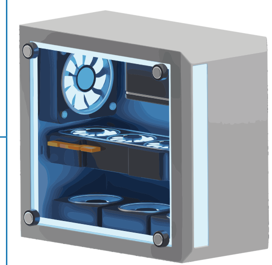
γ) Ποια η πιθανότητα να χρησιμοποιήσει λεωφορείο ή μετρό;

8

Βρες το πλήθος όλων των πιθανών ενδεχομένων που προκύπτουν από την ρίψη ενός ζαριού 2 φορές. Στη συνέχεια υπολόγισε την πιθανότητα να φέρουμε εξάρες σε μία ρίψη.

9

Θέλεις να φτιάξεις έναν καινούριο υπολογιστή σε ένα κατάστημα ηλεκτρονικών. Παρακάτω φαίνονται τα πιθανά χαρακτηριστικά:

Λειτουργικό σύστημα:	Επεξεργαστής:	Μνήμη RAM:	
• Windows • MacOS • Linux	• E_1 • E_2	• 8GB • 16GB • 32GB	
Αποθηκευτικός χώρος:	**Χρώμα:**	**Κάρτα γραφικών:**	
• 256GB SSD • 512GB SSD • 1TB HDD	• Ασημί • Μαύρο • Άσπρο	• $K_α$ • $K_β$	

α) Πόσες είναι οι πιθανές επιλογές για τον νέο υπολογιστή;

β) Αν διαλέξουμε στην τύχη έναν υπολογιστή, ποια είναι η πιθανότητα να έχει ασημί χρώμα και αποθηκευτικό χώρο 1TB;

10

Βρες με πόσους τρόπους μπορούμε να συνδυάσουμε τα 4 πρώτα γράμματα της ελληνικής αλφαβήτου {Α,Β,Γ,Δ} αν γνωρίζεις ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το καθένα μόνο μία φορά. Ποια είναι η πιθανότητα το πρώτο γράμμα να είναι Α;

11

Επιλέγουμε τυχαία έναν πενταψήφιο αριθμό με ψηφία 1, 4,6,7,9, ώστε κάθε ψηφίο να χρησιμοποιείται μία φορά. Βρες την πιθανότητα:

α) Ο αριθμός να είναι ο 16.749.

β) Ο αριθμός να τελειώνει σε 7.

γ) Ο αριθμός να είναι ζυγός.

Αντιλαμβάνομαι

με προσομοίωση

Τα Μαθηματικά στις άλλες Επιστήμες

Από την Γενετική Βιολογία γνωρίζουμε ότι κάποια από τα χαρακτηριστικά μεταδίδονται από τους γονείς στα παιδιά μέσω γονιδίων.

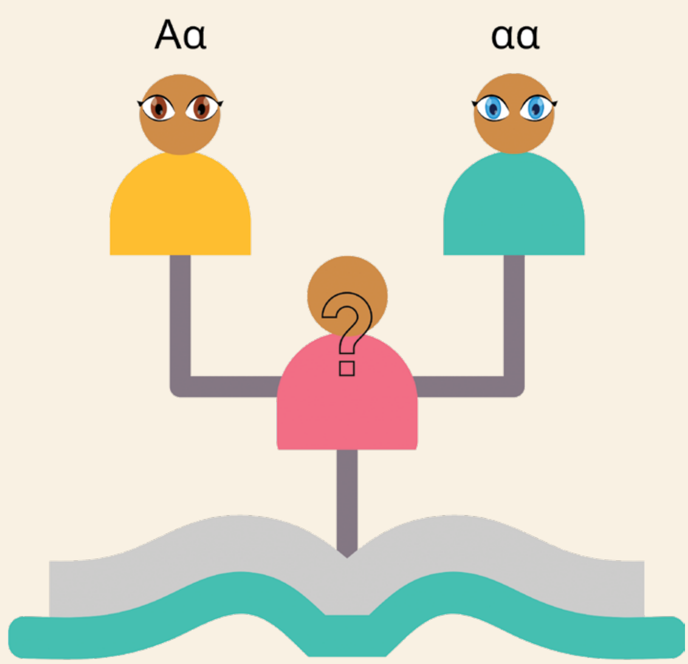
Το γονίδιο ενός χαρακτηριστικού μπορεί να είναι επικρατές (Α) ή υπολειπόμενο (α).

Η πιθανότητα εμφάνισης ενός χαρακτηριστικού εξαρτάται από τους γονότυπους των γονέων. Αν κληροδοτήσουν τα γονίδια:

- ΑΑ: δηλαδή ομόζυγο επικρατές, εκφράζεται το χαρακτηριστικό Α
- Αα: δηλαδή ετερόζυγο, εκφράζεται το χαρακτηριστικό Α
- αα: δηλαδή ομόζυγο υπολειπόμενο, εκφράζεται το χαρακτηριστικό α

Παρατηρήστε το παρακάτω γενεαλογικό δέντρο:

Το γονίδιο αφορά το χρώμα ματιών, όπου: Α: Καφέ (επικρατές) και α: Μπλε (υπολειπόμενο).



Α. Σχηματίστε τον πίνακα για τους πιθανούς συνδυασμούς των γονιδίων.

Β. Υπολογίστε τις πιθανότητες:

- το παιδί να έχει καφέ μάτια.
- το παιδί να έχει μπλε μάτια.

Γιατί είναι σημαντικό να γνωρίζουμε την πιθανότητα εμφάνισης κληρονομικών χαρακτηριστικών; Βρείτε πληροφορίες για την μεσογειακή αναιμία, μια πάθηση που είναι πολύ συχνή στην χώρα μας.

Ανακεφαλαίωση (Πειράματα τύχης - Πιθανότητες)

Γενικά

- **Πείραμα τύχης** ονομάζεται ένα πείραμα στο οποίο δεν μπορούμε να προβλέψουμε με βεβαιότητα το αποτέλεσμά του, όσες φορές και αν το επαναλάβουμε.
- Όλα τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης αποτελούν τον **δειγματικό χώρο** του πειράματος.
- Ένα σύνολο που περιέχει ένα ή περισσότερα στοιχεία ενός δειγματικού χώρου ενός πειράματος τύχης ονομάζεται **ενδεχόμενο**.

Ασυμβίβαστα λέγονται δύο ενδεχόμενα, όταν δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν συγχρόνως.

Βασική Αρχή Απαρίθμησης (ΒΑΑ): Αν μια διαδικασία -ένα πείραμα τύχης- μπορεί να χωριστεί σε διαφορετικά μέρη, όπου:

- το πρώτο μέρος μπορεί να πραγματοποιηθεί με: **α** τρόπους,
- το δεύτερο μέρος με: **β** τρόπους,
- το τρίτο μέρος με: **γ** τρόπους,

  … …
- το τελευταίο μέρος με: **κ** τρόπους,

τότε, με **πολλαπλασιασμό**, προκύπτει ότι η διαδικασία αυτή μπορεί να εκτελεστεί συνολικά με:

$$\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \ldots \cdot \kappa \text{ τρόπους.}$$

Κλασικός ορισμός της πιθανότητας:

$$\text{πιθανότητα} = \frac{\text{πλήθος επιθυμητών αποτελεσμάτων}}{\text{πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσματων}}$$

Για την πιθανότητα P οποιοδήποτε ενδεχομένου, ισχύει: $0 \leq \text{πιθανότητα} \leq 1$.

Απλός Προσθετικός Νόμος

Για οποιαδήποτε **ασυμβίβαστα** μεταξύ τους ενδεχόμενα Α και Β, η πιθανότητα να πραγματοποιείται το Α ή να πραγματοποιείται το Β, είναι: $P(A) + P(B)$.

Αυτοαξιολόγηση (Πειράματα τύχης - Πιθανότητες)

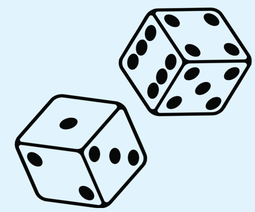
Α. Ένα σχολείο έχει 200 μαθητές/τριες. 35 μαθητές/τριες έχουν σκύλο, 20 μαθητές/τριες έχουν γάτα και 8 μαθητές/τριες έχουν σκύλο και γάτα. Αν επιλέξουμε τυχαία έναν μαθητή, βρες την πιθανότητα:

α) να έχει σκύλο

β) να έχει σκύλο και γάτα

γ) να έχει μόνο γάτα.

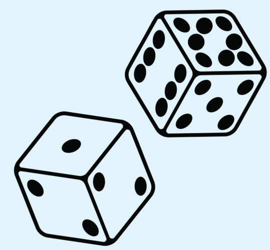
Β. i) Ρίχνουμε δύο συνήθη ζάρια. Βρες τον δειγματικό χώρο του πειράματος και υπολόγισε την πιθανότητα να φέρουν άθροισμα:



α) 2, β) 3, γ) 4, δ) 5, ε) 6, ζ) 7

ii) Τα ζάρια του διπλανού σχήματος είναι ένα ζευγάρι ζάρια 6 όψεων με μη τυπικούς αριθμούς – το ένα έχει πλευρές 1, 2, 2, 3, 3, 4 και το άλλο έχει πλευρές 1, 3, 4, 5, 6, 8.

Βρες τον δειγματικό χώρο του πειράματος και υπολόγισε την πιθανότητα να φέρουν άθροισμα:



(ζάρια Sicherman)

α) 2, β) 3, γ) 4, δ) 5, ε) 6, ζ) 7

Τι παρατηρείς;

Γ. Σε μία τάξη υπάρχουν 10 μαθητές και 11 θρανία. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να διανεμηθούν οι μαθητές στα θρανία αν κάθε μαθητής βρίσκεται μόνος σε κάθε θρανίο;

Σχόλιο: Το γινόμενο όλων των θετικών ακεραίων μικρότερων ή ίσων με ν λέγεται παραγοντικό και συμβολίζεται με ν! π.χ. $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$.

Μελετώ

το συγκεκριμένο θέμα

Σε αυτό το σημείο, θα πρέπει να είσαι σε θέση να ικανοποιείς όλους τους προσδοκώμενους μαθησιακούς στόχους. Γύρνα στην αρχή της θεματικής ενότητας και σημείωσε ✓ στα αντίστοιχα σημεία. Υπάρχουν στόχοι που αισθάνεσαι ότι δεν έχεις ικανοποιήσει πλήρως;

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

- Απαντήσεις ασκήσεων / δραστηριοτήτων
- Ευρετήριο όρων
- Βιβλιογραφία

Απαντήσεις ασκήσεων / δραστηριοτήτων

ΘΕΜΑΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ Α – ΑΛΓΕΒΡΑ

Α.1 ΡΗΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

1.1 Ιδιότητες των δυνάμεων

1. α) Λ, β) Σ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Σ, στ) 0. **2.** α) $\alpha^{\kappa+\lambda}$, β) $\alpha^{\kappa-\lambda}$, γ) $(\alpha \cdot \beta)^{\kappa}$, δ) $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\kappa}$, ε) $\alpha^{\kappa\lambda}$. **3.** α) 2^7, β) 3^8, γ) 5^6, δ) 6^6, ε) 10^4, στ) 3^8. **4.** α) 8, β) 25, γ) 4, δ) 8, ε) 9, στ) 100.000, ζ) 100. **5.** α) 6, β) 1, γ) 9, δ) 9, ε) 128, στ) 100. **6.** α) 24, β) 2, γ) 60. **7.** α) 17, β) -23. **8.** -11. **9.** A=-4, B=2. **10.** 0.

1.2 Δύναμη ρητού με ακέραιο εκθέτη

1. α) $\frac{1}{8}$, β) $\frac{1}{9}$, γ) $\frac{1}{16}$, δ) $-\frac{1}{27}$, ε) 1, στ) 1, ζ) -1. **3.** α) 16, β) $\frac{49}{14}$, γ) 9, δ) 9, ε) $\frac{9}{4}$. **4.** α) 6^5, β) 2^2, γ) 5^{-17}, δ) 7^2, ε) $\left(\frac{3}{2}\right)^9$, στ) $\left(\frac{3}{2}\right)^8$, ζ) 2^{27}, η) 2^{-27}, θ) $(-2)^{27}$. **5.** α) $\frac{1}{4}$, β) $\frac{1}{81}$, γ) 1. **6.** α) 36, β) $\frac{1}{20}$. **7.** $\frac{1}{8}$, **8.** $A = \frac{2}{(xy)^8}$. Η τιμή της παράστασης είναι A=2.
9. $A = \frac{\beta}{\alpha}$, με τιμή $\frac{1}{2}$.

1.3 Τυποποιημένη μορφή μικρών αριθμών

1. α) $1 \cdot 10^{-6}$, β) $3 \cdot 10^{-4}$, γ) $4{,}5 \cdot 10^{-6}$, δ) $1{,}04 \cdot 10^{-4}$, ε) $9{,}17 \cdot 10^{-7}$, στ) $9 \cdot 10^{-11}$. 2. α) 0,00076, β) 0,00125, γ) 0,0678, δ) 0,0000025. 3. α) 0,000036m, β) $3{,}6 \cdot 10^{-3}$cm. 4. α) $3 \cdot 10^{-5} > 8 \cdot 10^{-5}$, β) $8 \cdot 10^{-11} > 5 \cdot 10^{-9}$, γ) $10^{-7} > 5 \cdot 10^{-13}$. 5. α) $5 \cdot 10^{-5}$, β) $11 \cdot 10^{-6}$, γ) $-8 \cdot 10^{-9}$, δ) $4{,}2 \cdot 10^{-5}$. 6. $\alpha+\beta=5{,}1 \cdot 10^{-9}$, $\alpha-\beta=1{,}1 \cdot 10^{-9}$, $\alpha\beta=6{,}2 \cdot 10^{-18}$, $\alpha:\beta=1{,}55$.

Α.2 ΑΡΡΗΤΟΙ – ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

2.1 Τετραγωνική ρίζα μη αρνητικού αριθμού

1. α) Λ, β) Σ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Σ, στ) Σ, ζ) Λ. **2.** α) 4, β) 10, γ) 1, δ) 0, ε) 20, στ) 0,3, ζ) 9, η) 6, θ) 0,6, ι) 1,5. **3.**

$\sqrt{0} = 0$	$\sqrt{1} = 1$	$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{16} = 4$	$\sqrt{25} = 5$	$\sqrt{36} = 6$	$\sqrt{49} = 7$
$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{81} = 9$	$\sqrt{100} = 10$	$\sqrt{121} = 11$	$\sqrt{144} = 12$	$\sqrt{169} = 13$	$\sqrt{196} = 14$	$\sqrt{225} = 15$

4. α) ii., iv., β) i., v. **5.** α) 12, β) -4, γ) 37. **6.** α) $\sqrt{36} = 6$, $\sqrt{3.600} = 60$, $\sqrt{0{,}36} = 0{,}6$, β) $\sqrt{144} = 12$, $\sqrt{1.440.000} = 1.200$, $\sqrt{0{,}0144} = 0{,}12$, γ) $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$. **7.** α) 3, β) 4, γ) 3, δ) 5, ε) 4. **8.** α=±3, β=±4, γ=$\pm\frac{3}{5}$, δ=±5. 9. α) 0, β) 99.

2.2 | Άρρητοι αριθμοί, Πραγματικοί αριθμοί / Δύναμη πραγματικού αριθμού με ακέραιο εκθέτη

1. α) Σ, β) Σ, γ) Λ, δ) Λ, ε) Λ, στ) Λ. **2.**

Αριθμός	Φυσικός	Ακέραιος	Ρητός	Άρρητος	Πραγματικός
5	x	x	x		x
$0{,}2$			x		x
$0{,}\overline{3}$			x		x
$\frac{3}{5}$			x		x
-7		x	x		x
$\sqrt{1.000}$				x	
$\sqrt{36} - \sqrt{9}$	x	x	x		x

3. α) $3{,}60<\sqrt{13}<3{,}61$, β) $4{,}58<\sqrt{21}<4{,}59$, γ)$4{,}58<\sqrt{200}<4{,}59$, δ) $2{,}64<\sqrt{7}<2{,}65$. **4.** α) $\sqrt{6} < 3$, β) $\sqrt{25} = 5$, γ) $\frac{1}{\sqrt{25}} < 2$, δ) $\sqrt{8} > 2$, ε) $\sqrt{350} < 175$. **5.** $(\sqrt{2})^{-2} \leftrightarrow \frac{1}{2}$, $(\sqrt{2})^{0} \leftrightarrow 1$, $(\sqrt{2})^{2} = 2$, $(\sqrt{2})^{3} \leftrightarrow 2\cdot\sqrt{2}$, $(\sqrt{2})^{4} \leftrightarrow 4$, $(\sqrt{2})^{5} \leftrightarrow 4\cdot\sqrt{2}$. **6.** $1 < \sqrt{2} < 2$, $3 < \sqrt{10} < 4$, $3 < \sqrt{15} < 4$, $14 < \sqrt{200} < 15$, $31 < \sqrt{1.000} < 32$. **7.** 8,66cm. **8.** Από το αντίστροφο του Π.Θ. προκύπτει ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο. Περίμετρος=4,82, Εμβαδόν=2τ.μον. **9.** Περίμετρος=6,92cm, Εμβαδόν=3cm^2. **10.** Βρίσκουμε ότι $ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = ΒΓ^2$. Το συμπέρασμα προκύπτει από το αντίστροφο του Π.Θ. **11.** Βρίσκουμε ότι $ΑΒ^2 + ΒΓ^2 = ΑΓ^2$, άρα από το αντίστροφο του Π.Θ. προκύπτει ότι $\hat{B} = 90°$. Επίσης είναι ΑΒ=ΒΓ. **12.** 57cm^2. **13.** Η διαγώνιος του χαλιού είναι $\sqrt{61} < 8$, άρα δεν θα αγγίξει τις πλευρές της.

Α.3 ΚΑΝΟΝΙΚΟΤΗΤΕΣ

3.1 Κανονικότητες της μορφής α · ν + β με α και β ρητούς αριθμούς

1. Οι όροι που λείπουν είναι οι: 13, 15, 17. Ο γενικός όρος είναι ο α). **2.** α) 2,7,12,17, και 97, β) 1, $\frac{3}{2}$, 2, $\frac{5}{2}$ και $\frac{21}{2}$, γ) -2,5, -5,5, -8,5, -11,5 και -59,5. **3.** α) Οι όροι που λείπουν είναι οι: 25,30,35. Γενικός όρος: 5ν+5, β) Οι όροι που λείπουν είναι οι: -17,-21,-25. Γενικός όρος: -4ν-1, γ) Οι όροι που λείπουν είναι οι: $\frac{7}{2},\frac{9}{2},\frac{11}{2}$. Γενικός όρος: $ν - \frac{1}{2}$. **4.** α) Οι όροι που λείπουν είναι οι: 10,12,14. Αυξάνονται κατά 2, β) Γενικός όρος: 2ν + 8, β) 9ος:26, 20ος: 48, γ) 146, δ) Δεν μπορεί. **5.** α) Οι όροι που λείπουν είναι οι: 14€, 18€, 22€, 26€, β) 42€, γ) 4ν+2, δ) Στο τέλος της 22ης εβδομάδας. **6.** α) 4ο:13, 5ο:16, β) 3ν+1, γ) 61, δ) 33, ε) Όχι.

Α.4 ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

4.1 | Αλγεβρική παράσταση / Αριθμητική τιμή αλγεβρικής παράστασης / Επιμεριστική ιδιότητα (α+β)(γ+δ)=αγ+αδ+βγ+βδ

1. α) 2x, β) $\frac{x}{2}$, γ) x+8, δ) 3x-1, ε) x-y, στ) 2x, ζ) 2x+1, η) x+(x+1) ή 2x+1. **2.** α)-ii., β)-i., γ)-iv., δ)-v. Οι λέξεις που λείπουν είναι: Η αλγεβρική παράσταση: x+6·(x-2) είναι άθροισμα με όρους το x και το γινόμενο x+6·(x-2), που έχει παράγοντες το 6 και το x-2. **3.** α) 11, β) 33, γ) 9, δ) 1. **4.** α) 11x-5, β) 8-11x, γ) -13, δ) 3x-10y+25, ε) x+4. **5.** α) $x^2 + 5x + 6$, β) $x^2 + 4x - 5$, γ) $-x^2 + 10x - 16$, δ) $-x^2 + \frac{11}{2}x + 3$. **6.** α) 11,25, β) $\frac{1}{9}$. **7.** α) 5x+5, β) 45. **8.** α) Περίμετρος: Π=2α+2β, Εμβαδόν: Ε=αβ, β) Π'=2α+2β+2, Ε'=αβ-2α+3β-6, γ) Π'=15cm, Ε'=15cm^2. **9.** α) Π=6x+4, β) Π=70cm, γ) x=$\frac{8}{3}$. **10.** Εγω: $\frac{2}{5}\cdot$ Π, Μαρία: $\frac{3}{10}\cdot$ Π, Κώστας: $\frac{3}{10}\cdot$ Π.

Α.5 ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

5.1 Εξισώσεις πρώτου βαθμού της μορφής αx + β = γx + δ.

Α. Εξισώσεις πρώτου βαθμού της μορφής αx + β = γx + δ.

1. α) Λ, β) Λ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Λ, στ) Σ. **2.** α)-ii., β)-i., γ)-iii. **3.** α) x=2, β) x=$\frac{3}{5}$, γ) y=0, δ) y=2. **4.** α) x=-3, β) x=10, γ) Αδύνατη, δ) Ταυτότητα, ε) x=$\frac{5}{3}$, στ) x=$\frac{11}{3}$. **5.** α) α=13, β) β=1, γ) x=8, δ) x=1, ε) x=$\frac{1}{3}$, στ) x=0. **6.** α) Ταυτότητα, β) Αδύνατη, γ) x=$\frac{4}{3}$, δ) x=$-\frac{9}{2}$. **7.** α) Αντικαθιστούμε όπου λ=18 και βρίσκουμε x=2, β) Αντικαθιστούμε όπου x=3 και βρίσκουμε λ=-14, γ) i. λ=2, ii. Δεν υπάρχει τιμή του λ. **8.** x=2, ΑΒ=4cm, ΑΓ=5cm, ΒΓ=6cm. **9.** α) x=9, ΑΒ=ΑΓ=5cm, β) y=1, ΒΓ=3cm. **10.** x=6, y=13, ω=30° . 11. x=12, y=1, k=$\frac{5}{4}$.

Β. Επίλυση προβλημάτων με χρήση εξισώσεων πρώτου βαθμού.

1. 10. **2.** Αρχικό ποσό: 480€. Ο 1ος πήρε 200€ και ο 2ος πήρε 170€. **3.** Α' τάξη: 24 μαθητές, Β' τάξη: 18 μαθητές, Γ' τάξη: 48 μαθητές. **4.** Μετά από 15 χρόνια. **5.** Ο Γιάννης είναι 20 ετών και ο Πέτρος 10 ετών. **6.** 5 τριαντάφυλλα και 4 γαρδένιες. **7.** 15 νομίσματα των 2€ και 4 των 5€. **8.** 8 κότες και 20 πρόβατα. **9.** 4 βιβλία Γυμνασίου και 6 δημοτικού. **10.** 75€. **11.** 6. **12.** Έδωσε 6 σωστές απαντήσεις. **13.** 6€. **15.** Η τάξη έχει 21 μαθητές/μαθήτριες.

Α.6 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

6.1 Συνάρτηση, έννοιες και αναπαραστάσεις

1. α)-ii., β)-i., γ1)-ii., γ2)-iv. **2.** α)

x	−1	0	4	7
y	-5	-3	5	11

β)

x	−2	0	4	12
y	-1	0	2	6

γ)

x	−1	0	2	3
y	4	0	-2	0

3. α)

x	−2	-1	2	3	5	7
y	-7	−4	5	8	14	20

β)

x	−2	2	7	10
y	-1	1	3,5	5

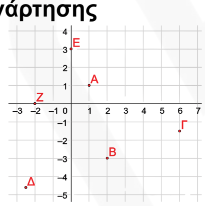
4. Π=4x+6. **5.** y=1,13x. **6.** α) y=0,08x+7,5, β) 59,50€, γ) 810. **7.** α=3.

x	0	2	1	4
y	3	7	5	11

8. α) 5η και 8η, β) 1η και 11η, γ) 1η και 2η, δ) 2η, 5η και 8η.

6.2 Γραφική παράσταση συνάρτησης

1. α) Λ, β) Σ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Λ. **2.**

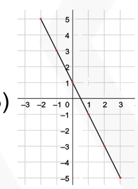


3. Α(2,1), Β(4,0), Γ(4,-3), Δ(0,-2), Ε(-3,-2), Ζ(-4,1), Η(-2,3), Θ(3,5, 3,5).

4. α)

x	−2	−1	0	1	2	3
y	5	3	1	-1	-3	-5

β)

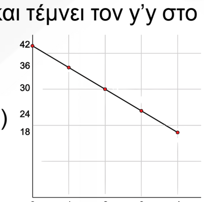


Σχηματίζεται μία ευθεία.

5.

x	-4	-2	3	5	4	1
y	4	1	2	-2	0	6

6. α)-Κίτρινη, β)-Κόκκινη, γ)-Πράσινη, δ)-Μαύρη. **7.** α) Στη γραφική παράσταση ανήκει το σημείο Α(1,2), β) Τέμνει τον άξονα x'x στα σημεία (0,0) και (5,5, 0) και τέμνει τον y'y στο (0,0). **8.** α) (3,-2), β) (-3,2), γ) (-3,-2). **9.** α) 4, β) 3, γ) 5. **10.** α) 4, β) 7, γ) 10, δ) $\sqrt{40} = 2\sqrt{10}$. **11.** α)



β) i. 27m, ii. 3:40, γ) 7 min.

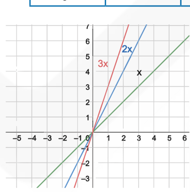
6.3 Η συνάρτηση y = αx, ποσά ανάλογα.

1. α)

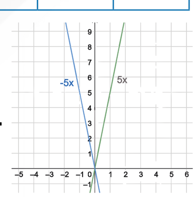
x	2	4	6	8
y	10	20	30	40

β) y=5x. **2.** α) και γ). **3.** α)-5, β) $\frac{1}{2}$, γ) 1, δ) -1. **4.** α)-ii., β)-iv., γ)-iii., δ)-i.

5.

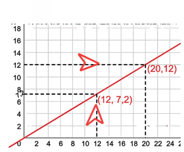


6.

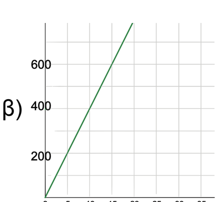


7. α), β) και δ). **8.** $y = \frac{1}{3}x$. **9.** α) ε1: y=4x, β) ε2: $y = -\frac{3}{2}x$, γ) y=5x.

10. ε1: y=2x, ε2: y=-3x. **11.** α) y=0,6x, β)

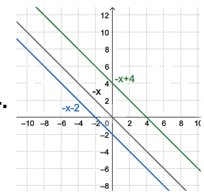


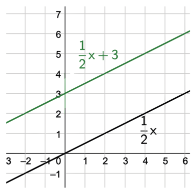
γ) i. 7,20€, ii. 20€. **12.** α) 3m/s, β)

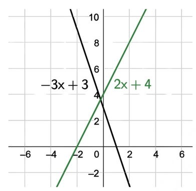


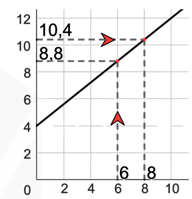
γ) 15 λεπτά, δ) 5,4km.

6.4 Η συνάρτηση y = αx + β .

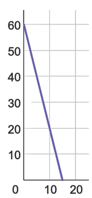
1. α) ευθεία, (0,β), παράλληλη, β) πάνω, κάτω. **2.** ε2: y $= \frac{1}{3}x + 6$, ε3: y $= \frac{1}{3}x - 4$. **3.** β) και γ). **4.** 

5. 

6. α) ε1: y=6x-9, β) ε2: y=-2x+5. **7.** Η y=-3x+3 τέμνει τον x'x στο (1,0) και τον y'y στο (0,3). Η y=2x+4 τέμνει τον x'x στο (-2,0) και τον y'y στο (0,4). 

8. α) y=0,8x+4, β) 

γ) i. 8,8€, ii. 8.

9. α) y=-4x+60, β)  γ) 50cm, δ) i. 7,5 ώρες, ii. 15 ώρες.

6.5 Η συνάρτηση y $= \frac{\alpha}{x}$, ποσά αντιστρόφως ανάλογα

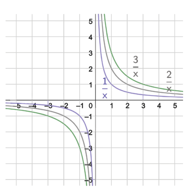
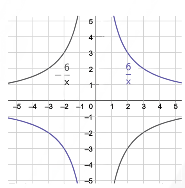
1. α) Σ, β) Λ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Σ. **2.** α) υπερβολή, 1ο και 3ο , 2ο και 4ο , β) (0,0), y=x, y=-x. **3.** α)

x	1	2	3	4	6	12
y	12	6	4	3	2	1

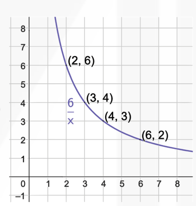
Συνάρτηση: y=12x, β)

x	1	2	4	5	8	16
y	16	8	4	3,2	2	1

Συνάρτηση: y=16x. 4. β) και γ).

5.  **6.**  **7.** α)

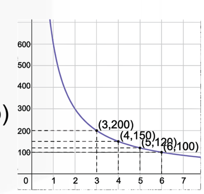
x	1	2	3	4	5	6	8	12
y	12	6	4	3	2,4	2	1,5	1

Τα ποσά x και y είναι αντιστρόφως ανάλογα, β) y $= \frac{12}{x}$, γ) 

8. α) y $= \frac{200}{x}$, β) 10. 9. α)150 km/h, β) 5h,

γ)

u (km/h)	120	150	200	100
t (h)	5	4	3	6

Τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα, δ) 

ΘΕΜΑΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ Β – ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Β.1 Γεωμετρία του Επιπέδου / Μέτρο Γωνιών

1.1 Σχέση επίκεντρης με εγγεγραμμένη γωνία σε κύκλο

1. α) Σ, β) Λ, γ) Λ, δ) Λ. **2.** Επίκεντρη: ω, εγγεγραμμένες: φ,ψ. **3.** $\widehat{ΚΝ} = 110°$, $\hat{Δ} = 90°$, $\hat{Μ} = 60°$, **4.** Α. $ω = 30°$, $φ = 35°$, $z = 30°$. Β. $y = 120°$, $x = 240°$. Γ. $x = 45°$, $y = 65°$, $ω = 110°$, $z = 30°$. **5.** Α. $ω = 50°$, $φ = 50°$, $z = 40°$, $x = 90°$. Β. $ω = 55°$, $φ = 55°$, $κ = 35°$. **6.** α) $Β\hat{Ο}Γ = 72°$, β) $Β\hat{Α}Γ = 36°$, γ) $Ε\hat{Α}Γ = 72°$. **7.** $φ = 30°$, **8.** $α = 55°$, $β = 30°$, $γ = 85°$. **9.** $\hat{Α} = 105°$, $\hat{Β} = 70°$, $\hat{Γ} = 75°$, $\hat{Δ} = 110°$.

1.2 Κανονικά πολύγωνα, σχέση γωνίας με κεντρική γωνία κανονικού πολυγώνου

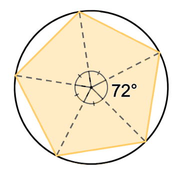
1. α) Σ, β) Σ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Λ. **2.**

ν	ω	φ
3	120°	60°
4	90°	90°
5	72°	108°
8	45°	135°
10	36°	144°

3.

ν	ω	φ
12	30°	150°
15	24°	156°
18	20°	160°
20	18°	162°

4.



5. α) 72°, β) 24, γ) 150°, δ) 36. **6.** α) Τετράγωνο, β) Κανονικό εξάγωνο. **7.** Ισόπλευρο τρίγωνο. **8.** α) Δεν υπάρχει, β) Δεν υπάρχει. **9.** $μ = 45°$, $κ = 132°$, $χ = 150°$, $φ = 30°$, $ω = 120°$. **10.** Κανονικό εξάγωνο: $ω = 60°$, κανονικό 12-γωνο: $ω = 30°$.

1.3 Πυθαγόρειο θεώρημα και αντίστροφο

1. α) ορθογώνιο, άθροισμα, κάθετων, τετράγωνο, β) μεγαλύτερης, άθροισμα, ορθή. **2.** ΒΓ=5cm, ΖΗ=13cm, ΚΛ=15cm, ΦΧ=8cm. **3.** α) Ε1=52m^2, β) Ε2=552m^2, γ) Ε3=88m^2. **4.** ΒΔ=8cm. **5.** Ορθογώνια τρίγωνα είναι τα α) και γ). **7.** ΓΔ=20cm, β) ΑΓ=15cm, γ) Προκύπτει από το αντίστροφο του Π.Θ. στο τρίγωνο ΑΓΔ. **8.** Εφαρμόζουμε το Π.Θ στα τρίγωνα ΑΔΚ, ΔΓΛ και ΚΒΛ και βρίσκουμε $ΔΚ^2+ΚΛ^2=ΔΛ^2$, οπότε από το αντίστροφο του Π.Θ προκύπτει το ζητούμενο. **9.** ΚΛ=2,2cm. **10.** $υ = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$. **11.** Είναι ορθογώνιο.

Β.2 ΜΗΚΟΣ

2.1 Μήκος κύκλου

1.

ρ (cm)	2	4	6	10	7	15
δ (cm)	4	8	12	20	14	30
L (cm)	12,56	25,12	37,68	62,8	43,96	94,2

2. α)-iv., β)-iii., γ)-i. **3.** α) 25,12cm, β) 37,68cm, γ) $L_1 = 18,84$cm, $L_2 = 9,42$cm. **4.** 2.198m. **5.** α) 62,8cm, β) 1cm. **6.** Οι ακτίνες διαφέρουν κατά $\frac{1}{6,28} \simeq 0,16$cm.

7. α) $\frac{1}{2}$, β) $\frac{1}{2}$. **8.** 31,4cm. **9.** 15,7cm. **10.** $ρ_1 = 2$cm, $ρ_2 = 8$cm. **11.** Η περίμετρος της γης είναι περίπου 40.010 km.

Το αεροπλάνο χρειάζεται περίπου 42,8 ώρες.

2.2 Μήκος τόξου

1.

μ (μοίρες)	360°	180°	90°	60°	30°	10°
ℓ (cm)	226,08	113,04	56,52	37,68	18,84	6,28

2. $2,09\overline{3}$cm. **3.** ρ=12cm. **4.** $μ = 90°$.

5. Ημικύκλιο: 3, τεταρτοκύκλιο: 1,5. **6.** α) ρ=10, $ℓ_{30°} = 5,2\overline{3}$cm, β) $μ = 36°$. **7.** $\widehat{ΑΒ}$=7,85cm, $\widehat{ΑΓ}$=3,14cm, $\widehat{ΓΒ}$=4,71cm.

8. 1.754,88€. **9.** α) ΑΒ=ΑΓ=4cm, ΒΓ=$\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$cm, β) L=18,84cm, $\widehat{ΑΔ}$=2,355cm. 8. 1ο: 12,56cm, 2ο: 12,56cm.

Β.3 ΕΜΒΑΔΟΝ

3.1 Μονάδες μέτρησης

1. α) 100, β) διαιρούμε, γ) 1.000, δ) cm^2, ε) m^2, στ) πολλαπλασιάζουμε με 1.000.000. **2.** α) 22, β) 44, γ) 5,5. **3.** 30 m^2, β) 60m^2, γ) 35m^2. **4.** α) Κόκκινο: Περίμετρος=20, Εμβαδόν=16, β) Πράσινο: Περίμετρος=16, Εμβαδόν=16, γ) Μπλε: Περίμετρος=24, Εμβαδόν=16, δ) Κίτρινο: Περίμετρος=34, Εμβαδόν=16. **5.** α) Στρέμματα, β) m^2, γ) m^2 ή dm^2, δ) km^2, ε) cm^2, στ) mm^2. **6.** α) 2.100, β) 0,0312, γ) 4.700, δ) 2,17, ε) 200.000, στ) 0,000078. **7.** $9.960cm^2 < 1.650.000mm^2 < 2m^2 < 7.890dm^2 < 0,17km^2$. **8.** α) $1320000m^2$, β) $772,14m^2$, γ) $0,00217m^2$, δ) $1,234745m^2$, ε) $50.000m^2$. **9.** Με το Β.

3.2 Εμβαδόν τετραγώνου, ορθογωνίου και πλάγιου παραλληλογράμμου, τριγώνου, τραπεζίου

1. α) $16cm^2$, β) $7cm^2$, γ) $54cm^2$, δ) $12cm^2$, ε) $9cm^2$, στ) $17,5cm^2$. **2.** $625m^2$. **3.** $1.375m^2$. **4.** $E=48m^2$, ΒΖ=8cm. **5.** (ΑΒΓ)=$21cm^2$, ΑΔ = $\frac{14}{3}$cm. **6.** $136cm^2$. **7.** α) 500 πλάκες, β) 250€. **8.** 6.400€. **9.** $6.300m^2$. **10.** $60cm^2$. **11.** α) $391cm^2$, β) $34cm^2$.

3.3 Εμβαδόν κυκλικού δίσκου

1.

ρ (cm)	1	2	5	8	10
Ε (cm^2)	3,14	12,56	78,5	200,96	314

2. Β. **3.** $75,36cm^2$. **4.** α) ρ=3cm, β) δ=6cm, γ) $28,26cm^2$. **5.** α) ρ=10cm, β) δ=20cm, γ) 62,8cm. **6.** Ο κύκλος θα έχει ακτίνα ρ'=$\sqrt{2}$cm. **7.** Το τετράγωνο θα έχει πλευρά 3,54cm περίπου. **8.** $54,5cm^2$. **9.** α) $86cm^2$, β) $114cm^2$.

3.4 Εμβαδόν κυκλικού τομέα

1.

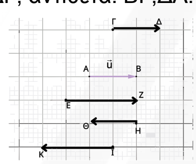
μ (μοίρες)	30°	90°	120°	180°	270°
Ε (cm^2)	9,42	28,26	37,68	56,52	84,78

2. ρ=20cm. **3.** 200°, **4.** $18,84cm^2$. **5.** Πράσινος: $2,45cm^2$, ροζ: $17,17cm^2$. **6.** Ημικύκλιο: $157cm^2$, τεταρτοκύκλιο: $78,5cm^2$. **7.** α) x=5, ΑΒ=5cm, ΑΓ=12cm, ΒΓ=13cm. β) Προκύπτει από το αντίστροφο του Π.Θ. γ) $88,875cm^2$. **8.** $15,8125cm^2$. **9.** α) 0,785 cm^2, β) $1,57cm^2$, γ) $0,3925cm^2$. 10. $87,92cm^2$.

Β.4 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

4.1 Διανύσματα

1. α) Σ, β) Σ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Λ, στ) Λ. **2.** Ίσα: $\overrightarrow{ΑΒ}$,$\overrightarrow{ΔΓ}$, αντίθετα: $\overrightarrow{ΒΓ}$,$\overrightarrow{ΔΑ}$. **3.** Ίσα: β),γ),ε) , αντίθετα: α),δ). **4.** Ίσα: $\vec{γ}$,$\vec{ε}$, αντίθετα: $\vec{στ}$,$\vec{η}$. **5.** Σωστά είναι τα: β),γ),δ),ε). **6.**



7. $|\overrightarrow{ΓΑ}|$ = 4cm.

Β.5 ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

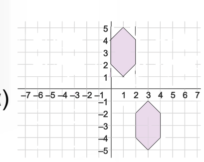
5.1 Μεταφορά και στοιχεία της

1. Α'(3,1), Β'(2,0), Γ'(4,-1), Δ'(-1,2), Ε'(0,-1), Ζ'(2,-3). Μ'(x+2,y-1). **2.** α) Μεταφορά κατά 9 μονάδες προς τα δεξιά, β) Μεταφορά κατά 7 μονάδες προς τα αριστερά και 6 μονάδες προς τα κάτω, γ) Μεταφορά κατά 6 μονάδες προς τα δεξιά και 4 μονάδες προς τα κάτω, δ) Μεταφορά κατά 9 μονάδες προς τα δεξιά και 2 μονάδες προς τα πάνω. **3.** α) Μεταφορά κατά 7 μονάδες προς τα δεξιά, β) Μεταφορά κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά και 5 μονάδες προς τα κάτω, γ) Μεταφορά κατά 10 μονάδες προς τα δεξιά και 3 μονάδες προς τα κάτω. **4.** α) Μεταφορά κατά 8 μονάδες προς τα δεξιά και 6 μονάδες προς τα πάνω, β) 10 μονάδες, γ) Μεταφορά κατά 8 μονάδες προς τα αριστερά και 6 μονάδες προς τα κάτω.

5.

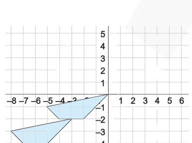
Συντεταγμένες αρχικού σημείου	Παράλληλη μεταφορά	Συντεταγμένες τελικού σημείου
(3,-2)	1 μονάδα δεξιά	(4,-2)
(2,8)	3 μανάδες κάτω	(2,5)
(-2,-3)	2 μονάδες αριστερά	(-4,-3)
(1,0)	2 μονάδες αριστερά	(-1,0)
(2,2)	1 μονάδα δεξιά και 1 μονάδα πάνω	(3,3)

6. α)

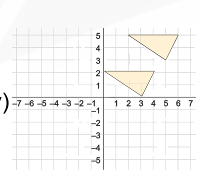


,

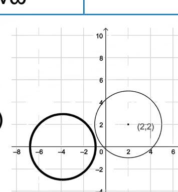
β)



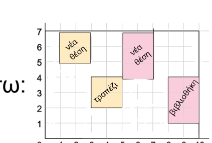
γ)



δ)



7. Μία λύση είναι η παρακάτω:

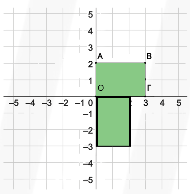
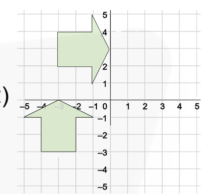


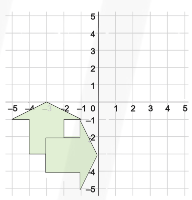
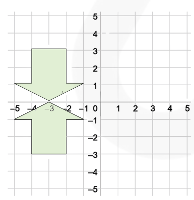
5.2 Στροφή και στοιχεία της

1.

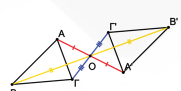
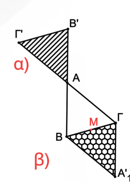
Αρχικό σχήμα	Τελικό σχήμα	Κέντρο στροφής	Γωνία στροφής (κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού)
1	2	Α	90°
2	3	Γ	90°
2	4	Γ	180°
2	1	Α	270°
1	3	Β	180°
3	4	Γ	90°

2. Κέντρο: Γ, γωνία: 90°.

3.  **4.** α) Κέντρο: Ε, γωνία: 90°, β) Κέντρο: Ε, γωνία: 180°, γ) Κέντρο: Ε, γωνία: 270°. **5.** α) Κέντρο: Ο, γωνία: 60°, β) Κέντρο: Ο, γωνία: 180°, γ) Κέντρο: Ο, γωνία: 300°. 6. Ισόπλευρο τρίγωνο. 7. α) 

β)  γ) 

5.3 Κεντρική συμμετρία, κέντρο συμμετρίας σχήματος

1. Κέντρο συμμετρίας έχουν τα: Η,Θ,Ι,Ξ,Ο. 2. Κέντρο συμμετρίας έχει ο κύκλος το τετράγωνο και το εξάγωνο. **3.** Κέντρο συμμετρίας έχουν τα: α),στ). **4.** β). **5.**  **6.**  **7.** α) Π.χ. το 1 και το 3, β) Π.χ. το -1 και το 1, γ) Το -2 και το 2.

ΘΕΜΑΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ Γ – ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ - ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Γ.1 ΜΕΤΡΑ ΘΕΣΗΣ – ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑ

1.1 Ιδιότητες της μέσης τιμής και της διαμέσου.

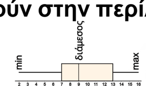
1. α) Λ, β) Σ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Σ. **2.** α) μ+α, β) β·δ. **3.** α) μ=28, β) i. 29, ii. 27, iii. 280. **4.** α) μ=37, δ=36, β) μ=35, δ=36. **5.** α) μ=20, δ=20, β) μ=18, δ=18. **6.** α) Η τιμή 5°C είναι μία ακραία τιμή, β) μ=19, δ=21, γ) μ=21,5, δ=21. **7.** 0-5: 1, 5-10: 10, 10-15: 14, 15-20: 25. Βρίσκουμε δ=15.

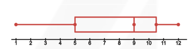
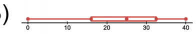
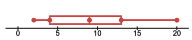
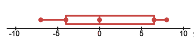
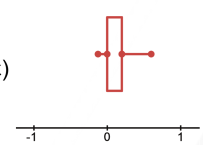
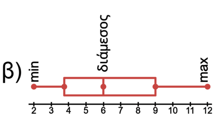
1.2 Μεταβλητότητα – Τεταρτημόρια – Ενδοτεταρτημοριακό Εύρος

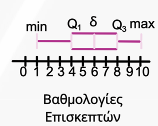
1. α) Σ, β) Λ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Σ, στ) Λ. **2.** α) Q1=5, Q2=8, Q3=17. Q=12. β) Q1=7, Q2=10, Q3=11,5. Q=4,5. Μεγαλύτερη μεταβλητότητα παρουσιάζουν τα δεδομένα στο α) γιατί έχουν μεγαλύτερο ενδοτεταρτημοριακό εύρος. 3. α) 6, β) 6, γ) 6, δ) 20. 4. α) 18, β) $\frac{4}{3}$. 5. α) 5, β) Q1=0, Q2=0, Q3=1,5, γ) Q=1,5. 6. α) 0,65, β) 1,25, γ) Ο Γιώργος. 7. Α' τάξη: R=35, Q=14. Β' τάξη: R=27, Q=8. 8. α) Λ, β) Σ, γ) Λ. 9. α) 44, β) 6, γ) 2,59, δ) 3. 10. α) 43, β) i. 8, ii. 2,88, iii. 3, iv. Q=2.

Γ2. ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

2.1 Απλά Θηκογράμματα τα οποία αντιστοιχούν στην περίληψη πέντε αριθμών

1. α) -3, β) -2, γ) 0, δ) 4, ε) 6. **2.** R=34, Q=11. **3.** 

4. α)  , β)  , γ)  , δ)  , ε)  . **5.** R=5, Q=3. **6.** α) (2, 3,5 , 6 , 9 , 12), β) 

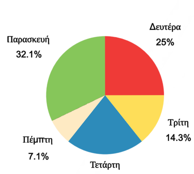
γ) Αριστερή κεραία: 25%. Ορθογώνιο: 50%. **7.** α)-iii., β)-i., γ)-ii. **8.** 

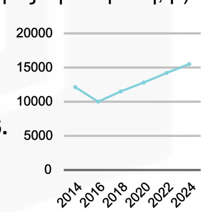
9. (65,75,80,89,95). **10.** (0,1,1,4,6). 11. (0,3,5,7,9).

2.2 Απογραφικά χρονικά δεδομένα, χρονογράμματα και άλλα γνωστά διαγράμματα

1. 

2. Μικρότερη: 2017, μεγαλύτερη: 2023. Η διαφορά τιμής του 2021 από το 2016 είναι 40.000€. **3.** Α': 35 λεπτά, Β': 55,83 λεπτά. **4.** α) Περισσότερες την Παρασκευή και λιγότερες την Πέμπτη, β) 25%, γ) 560€,

δ) 

5. α) Α: 1ος, Β: 3ος, Γ: 1ος, β) Γ, γ) 8ος, δ) Α. **6.** 

7. α) 2.000, β)1.960.

8. Το γράφημα είναι παραπλανητικό καθώς η μείωση είναι αμελητέα σε σχέση με τον αριθμό των κατοίκων. **9.** Η κλίμακα του οριζόντιου άξονα πρέπει να έχει αρχή το 0. **10.** Το πρώτο διάγραμμα είναι παραπλανητικό καθώς μία αύξηση ακόμα και 0,5oC μπορεί να προκαλέσει οικολογική αστάθεια.

Γ.3 ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

3.1 Βασική Αρχή Απαρίθμησης

1. Ασυμβίβαστα είναι τα ενδεχόμενα i. **2.** Τα ενδεχόμενα δεν είναι ασυμβίβαστα καθώς ο αριθμός 2 είναι άρτιος και πρώτος αριθμός. **3.** 18. **4.** α) 10.000, β) 5.040, γ) 5.000. **5.** 13.824.000. **6.** α) 13.842, β)10.000. **7.** α) 216, β) 120. **8.** Υπάρχουν 6 δυνατοί τρόποι και 4 από αυτούς περιλαμβάνουν αεροπλάνο. **9.** 120 διαφορετικοί τρόποι. Αν έχουμε ν άτομα τότε υπάρχουν $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot ν$ διαφορετικοί τρόποι.

3.2 Απλός Προσθετικός Νόμος

1. 100%. **2.** α) $\frac{4}{52}$, β) $\frac{4}{52}$, γ) $\frac{8}{52}$. **3.** α) $P(K) = \frac{5}{12}$, $P(M) = \frac{1}{3}$, $P(Π) = \frac{1}{4}$. Είναι ασυμβίβαστα. **4.** Υπήρξαν μαθητές που παρακολούθησαν και τις δύο δραστηριότητες γιατί $\frac{3}{5} + \frac{1}{2} = \frac{11}{10} > 1$. **5.** 0,9. **6.** α) 0,6, β) Υπάρχει κι άλλο μονοπάτι γιατί $P(A)+P(B)=80\%<100\%$. **7.** α) 50%, β) 25%, γ) 100%. **8.** $\frac{1}{36}$, **9.** α) 324, β) $\frac{1}{162}$. **10.** 24 τρόπους. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{1}{4}$. 11. α) $\frac{1}{120}$, β) $\frac{1}{5}$, γ) $\frac{1}{30}$.

Ευρετήριο όρων και ονομάτων

**Η αρίθμηση δίπλα από τους όρους σχετίζεται με τη σελίδα στην οποία αναφέρεται ο όρος.*

**Η αρίθμηση δίπλα από τους όρους σχετίζεται με τη σελίδα στην οποία αναφέρεται ο όρος.*

Βιβλιογραφία

Bargagliotti, A., Franklin, C., Arnold, P., Gould, R., Johnson, S., Perez, L., and D.Spangler. 2020. *Pre-K–12 Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education II* (GAISE II). American Statistical Association and National Council of Teachers of Mathematics.Bartel Leendert van der Waerden,

Battista, M. T. (2007). *The Development of Geometric and Spatial Thinking*. In F. K. Lester (Ed.), Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 843-908). Charlotte, NC: Information Age.

Behrends, E. (2017). *Μαθηματικά πεντάλεπτα: 100 μικρές ιστορίες από τον κόσμο των μαθηματικών*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Bragg, P., & Outhred, L. (2004). *A Measure of Rulers - The Importance of Units in a Measure*. In M. J. Hoines, & A. B. Fuglestad (Eds.), Proceedings of the 28th Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3, pp. 159-166). Bergen University College.

Clements, Douglas & Swaminathan, Sudha & Hannibal, M.A.Z. & Sarama, Julie. (1999). *Young children's concepts of shape*. Journal for Research in Mathematics Education. 30. 192-212.

Drijvers, P. H. M. (2010). *Secondary algebra education. Revisiting topics and themes and exploring the unknown*. Sense Publishers.

Duval, Raymond. (2013). *Commentary: Linking epistemology and semio-cognitive modeling in visualization*. ZDM. 46. 10.1007/s11858-013-0565-8.

Fischbein, E. (1993). *The Theory of Figural Concepts*. Educational Studies in Mathematics, 24, 139-162. http://dx.doi.org/10.1007/BF01273689

Fujita, T.. (2012). *Learners' level of understanding of the inclusion relations of quadrilaterals and prototype phenomenon*. The Journal of Mathematical Behavior. 31. 10.1016/j.jmathb.2011.08.003.

Garfield, J. (2002). *The Challenge of Developing Statistical Reasoning*. Journal of Statistics Education, 10(3). https://doi.org/10.1080/10691898.2002.11910676

Glasersfeld E. von (1990) *Environment and communication*. In: Steffe L. P. & Wood T.(eds.) Transforming children's mathematics education. Erlbaum, Hillsdale NJ: 30–38.

Harford, T. (2023). *Τι κρύβουν οι αριθμοί*. Κλειδάριθμος.

Huntley, Mary Ann & Marcus, Robin & Kahan, Jeremy & Miller, Jane. (2007). *Investigating high-school students' reasoning strategies when they solve linear equations*. The Journal of Mathematical Behavior. 26. 115-139. 10.1016/j.jmathb.2007.05.005.

Jones, Keith & Tzekaki, Marianna. (2016). *Research on the teaching and learning of geometry*. 10.1007/978-94-6300-561-6_4.

Kinsey, L. C., Moore, E. T., & Prassidis, E. (2018). *Γεωμετρία και Συμμετρία*. Εκδόσεις Κλειδάριθμος

Konold, C., Madden, S., Pollatsek, A., Pfannkuch, M., Wild, C., Ziedins, I., Finzer, W., Horton, N. J., & Kazak, S. (2011). *Conceptual challenges in coordinating theoretical and data-centered estimates of probability.* Mathematical Thinking and Learning, 13(1-2), 68–86. https://doi.org/10.1080/10986065.2011.538299

Liljedahl, P. (2020). *Building thinking classrooms in mathematics, grades K-12: 14 teaching practices for enhancing learning*. Corwin Mathematics Series

Lowrie, T., Logan, T., & Hegarty, M. (2019). *The influence of spatial visualization training on students' spatial reasoning and mathematics performance*. Journal of Cognition and Development, 20(5), 729–751. https://doi.org/10.1080/15248372.2019.1653298

Margolinas, C. (2003). *Η σημασία του σωστού και του λάθους στην τάξη των Μαθηματικών*. Σαββάλας.

Markopoulos, C., & Potari, D. (1999). *Forming relationships in three dimensional geometry through dynamic environments*. Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 3, 273–280. https://researchportal.scu.edu.au/esploro/outputs/conferenceProceeding/Forming-relationships-in-three-dimensional-geometry/991012821662002368#file-0

Marsden, J. (2020). *Διανυσματικός λογισμός*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

National Research Council. 2001. *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington, DC: The National Academies Press. https://doi.org/10.17226/9822.

New Zealand Ministry of Education. (2007). *The New Zealand curriculum*. Learning Media Limited.

Papadam, M., & Agaliotis, I. (2021). *An investigation of geometric knowledge in pupils with mild educational needs*. Psychology: The Journal of the Hellenic Psychological Society, 26(1), 135–151. https://doi.org/10.12681/psy_hps.26234

Pfannkuch, M. (2005). *Thinking tools and variation*. Statistics Education Research Journal, 4, 83-91.

Piaget, Jean & Inhelder, Barbel (1971). *Mental Imagery in the Child: A Study of the Development of Imaginal Representation*. British Journal of Educational Studies 19 (3):343-344.

Pratt, Dave. (2005). *How do Teachers Foster Students' Understanding of Probability?*. 10.1007/0-387-24530-8_8.

Sarama, Julie & Clements, Douglas. (2009). *Early Childhood Mathematics Education Research: Learning Trajectories for Young Children*. 10.4324/9780203883785.

Serow, P., (2008). *Investigating a phase approach to using technology as a teaching tool*, Navigating currents and charting directions

Sfard, Anna. (2008). *Thinking as Communicating: Human Development, the Growth of Discourses, and Mathematizing*. 1-326. 10.1017/CBO9780511499944.

Sinclair, Nathalie & Pimm, David & Higginson, William. (2007). *Mathematics and the Aesthetic: New Approaches to an Ancient Affinity*. 10.1007/978-0-387-38145-9. Huff Darrel: How to lie with statistics, Penguin (1991)

Sirotic, Natasa & Zazkis, Rina. (2007). *Irrational Numbers: The Gap between Formal and Intuitive Knowledge.* Educational Studies in Mathematics. 65. 49-76. 10.1007/s10649-006-9041-5.

Tversky, A., & Kahneman, D. (1974). J*udgment under Uncertainty: Heuristics and Biases.* Science (New York, N.Y.), 185(4157), 1124–1131. https://doi.org/10.1126/science.185.4157.1124

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. Academic Press.

Waerden, B. L. v. d., & Χριασταννίδης, Γ. (2007). *Η αφύπνιση της επιστήμης: Αιγυπτιακά, Βαβυλωνιακά και Ελληνικά μαθηματικά* (3η έκδ.). Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.

Walle, John & Karp, Karen & Bay-Williams, Jennifer. (2009). *Elementary and middle school mathem*atics: Teaching developmentally.

Watson, Anne & Jones, Keith & Pratt, Dave. (2013). *Key ideas in teaching mathematics: Research-based guidance for ages 9-19.*

Watson, Jane. (2013). *Statistical Literacy at School: Growth and Goals.*1-306. 10.4324/9780203053898.

Δημητριάδου, Κ. (2016). *Προσαρμογή της διδασκαλίας στις εκπαιδευτικές προκλήσεις του 21ου αιώνα*. GUTENBERG.

Ερμηνευτικές προσεγγίσεις στη διδακτική της Γεωμετρίας – Πρακτικά 4ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Γεωμετρίας (2001), ΠΑΤΑΚΗ

Καρέκος, Ι. Σ., Μπαλτάς, Χ. Α., & Καρέκου, Σ. Α. (2024). *Τα μαθηματικά πέραν των μαθηματικών*. 24 Γράμματα.

Μάμωνα-Downs, Γ., & Παπαδόπουλος, Ι. (2019). *Επίλυση προβλήματος στα μαθηματικά*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Μαυρικάκη, Ε. Θ., Κρόκου, Ζ., Δουκάκης, Σ., Πήλιουρας, Π., Κουλουμπαρίτση, Α. Χ., Μουταβέλης, Α., Βάλλας, Γ., & Ζυμπίδης, Δ. (2018). *Αξιολογώ και Μαθαίνω*. Εκδόσεις Γρογόρη.

Πόταρη, Δ., Ζωιτσάκος, Σ., Καμπούκος, Κ., Κόσυβας, Γ., Λουλάκης, Μ., Μεταξάς, Ν., & Τριανταφύλλου, Χ. (2022). *Οδηγός εκπαιδευτικού Μαθηματικών Γυμνασίου* (2η Έκδοση). Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής.

Σάλτας, Β. (2008). *Σύγχρονη διδασκαλία των μαθηματικών*. Επίκεντρο.

Σπανδάγος, Ε. Κ. (2010). Τ*α μαθηματικά των αρχαίων Ελλήνων*. Αίθρα.

Τζεκάκη, Μ., Σταγιόπουλος, Π., & Μπαραλός, Γ. (2011). *Προσαρμογές αναλυτικών προγραμμάτων για τα μαθηματικά στο Γυμνάσιο*: Σχέδια διδασκαλίας για μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες.

Τριανταφυλλίδης, Α. Τ., & Σδρόλιας, Α. Κ. (2007). *Βασικές μαθηματικές έννοιες για τον εκπαιδευτικό της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης*. Τυπωθήτω / Δαρδανός.

Χαλκός Ε. Γ. (2020), *Στατιστική, Θεωρία και Πράξη*, Δίσιγμα.

Χριστιανίδης, Γ. (2003). *Θέματα από την ιστορία των μαθηματικών*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

ΙΤΥΕ
ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ
ινστιτούτο τεχνολογίας
υπολογιστών & εκδόσεων