

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ ΑΔΑΜΙΔΗΣ

ΑΛΕΞΙΑ ΚΑΡΑΝΤΑΝΑ

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$



# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

|   |  |
|---|--|
| Επιστημονική Επιτροπή Αξιολόγησης                                       |  |
| Συντονιστής/τρια / Αξιολογητής/τρια                                     | <b>Κρέστου Αθηνά</b><br>Εν ενεργεία μέλος Διδακτικού Ερευνητικού Προσωπικού Πανεπιστημίου        |
| Αξιολογητής/τρια  | <b>Γιαννακόπουλος Νικόλαος</b><br>Εν ενεργεία Εκπαιδευτικός                                      |
| Αξιολογητής/τρια  | <b>Γιαννακούρας Ιωάννης</b><br>Εν ενεργεία Εκπαιδευτικός   |
| Τεχνικός Εμπειρογνώμονας  | <b>Λάλας Χρήστος</b><br>Πτυχιούχος Πληροφορικής  |
| Επικουρικός Εμπειρογνώμονας   | <b>Βαποράκη Άννα Στεφανία</b><br>Πτυχιούχος τεχνολογίας γραφικών τεχνών                          |
| Υπεύθυνος/η του μαθήματος/γνωστικού αντικειμένου στο πλαίσιο της Πράξης | <b>Ειρήνη Γεωργάκη</b> , Σύμβουλος Α΄ ΙΕΠ, μέλος της Επιστημονικής Ομάδας Έργου (ΕΟΕ) της Πράξης |

Πράξη με τίτλο: «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ 6010165 στο Πρόγραμμα «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή» 2021-2027

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Σπυρίδων Δουκάκης

Πρόεδρος του Δ.Σ. του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Υπεύθυνη Πράξης

Πολυξένη Μπίλλα

**Σύμβουλος Α΄ του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής**

**Προϊσταμένη Τμήματος Β΄ Προγραμμάτων Σπουδών και Εκπαιδευτικού Υλικού**

Αναπληρώτρια Υπεύθυνη Πράξης

Άννα-Αικατερίνη Λυκούρη

**Σύμβουλος Α΄ του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής**

«Με τη συγχρηματοδότηση της Ευρωπαϊκής Ένωσης»

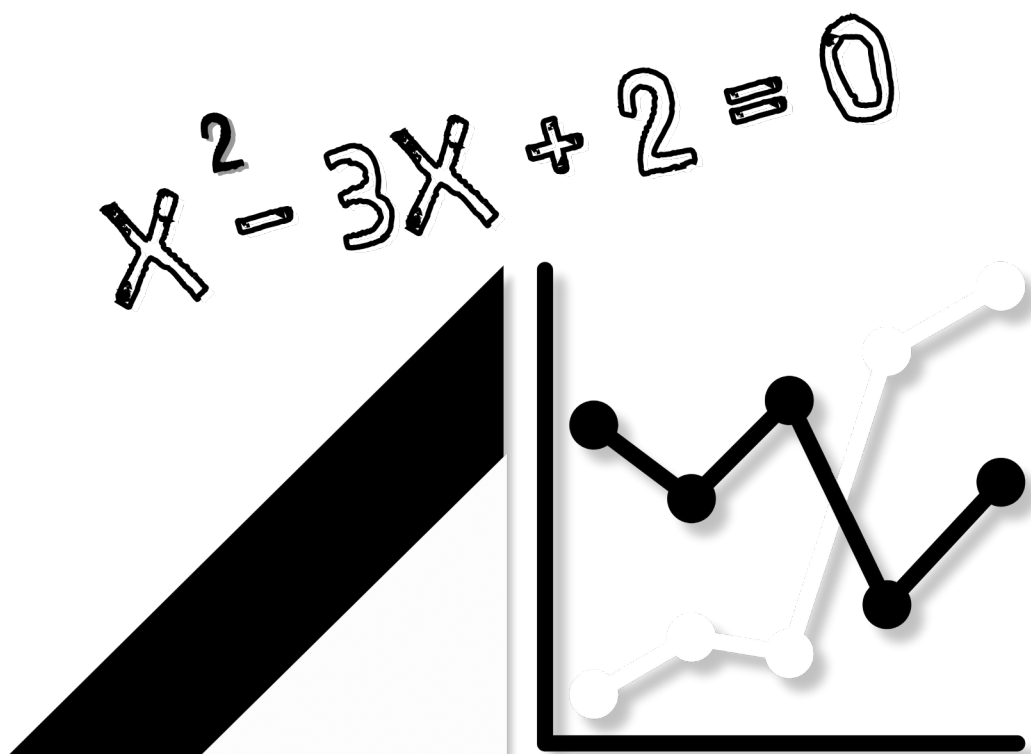
και το Πρόγραμμα «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή»

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ ΑΔΑΜΙΔΗΣ

ΑΛΕΞΙΑ ΚΑΡΑΝΤΑΝΑ

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ



Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ



**Εκδόσεις Λυσάρι**

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ

**Δημήτριος Αδαμίδης**

*Μαθηματικός, Εκπαιδευτικός Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης*

**Αλεξία Καραντάνα**

*Μαθηματικός, Εκπαιδευτικός Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης*

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

**Πρόδρομος Μιχαλάκης**

ΔΙΟΡΘΩΣΗ

**Εκπαιδευτικός οργανισμός ΑΚΑΔΗΜΙΑ** (*e-akadimia.gr*)

ΣΕΛΙΔΟΠΟΙΗΣΗ

**Ασπασία Κυριάκου**

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΒΙΒΛΙΟΥ

**Εκδόσεις Λυσάρι** (*lisari.gr*)

ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΨΜΑ

**Πρόδρομος Μιχαλάκης,**

**Εκδόσεις Λυσάρι** (*lisari.gr*)

# ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Τα μαθηματικά της Γ' Γυμνασίου ολοκληρώνουν την εισαγωγή στις βασικές μαθηματικές έννοιες και λειτουργούν ως γέφυρα προς πιο σύνθετες ιδέες, που συναντώνται στο Λύκειο. Το βιβλίο επικεντρώνεται στην κατανόηση των αριθμών, των αλγεβρικών παραστάσεων, των γεωμετρικών σχέσεων και των στοχαστικών μαθηματικών. Η δομή του βασίζεται σε συνδυασμό θεωρίας και πρακτικών εφαρμογών, βοηθώντας την αντίληψη της σύνδεσης των μαθηματικών με την πραγματική ζωή και τις άλλες επιστήμες.

Το βιβλίο αυτό έχει σχεδιαστεί για να σε βοηθήσει να εμβαθύνεις στις βασικές έννοιες μέσα από τρία Θεματικά Πεδία: της Άλγεβρας, της Γεωμετρίας και των Στοχαστικών Μαθηματικών.

## Θεματικά Πεδία

### Αριθμός και Άλγεβρα

- Πραγματικοί Αριθμοί, διερεύνηση των Άρρητων Αριθμών και της δομής του συνόλου των Πραγματικών Αριθμών.
- Άλγεβρικές Παραστάσεις και Ταυτότητες, εισαγωγή σε πολυώνυμα, μονώνυμα και χρήση ταυτοτήτων για παραγοντοποίηση και απλοποίηση.
- Συναρτήσεις και Γραφικές Αναπαραστάσεις, μελέτη συναρτήσεων, γραφικών παραστάσεων και εφαρμογές σε προβλήματα καθημερινής ζωής.
- Συστήματα Εξισώσεων, ανάλυση και επίλυση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων τόσο αλγεβρικά όσο και γραφικά.

### Γεωμετρία και Μέτρηση

- Κριτήρια Ισότητας και Ομοιότητα Σχημάτων, διερεύνηση ισότητας τριγώνων και γεωμετρικών μετασχηματισμών όπως η Ομοιοθεσία.
- Τριγωνομετρία, εισαγωγή στους Τριγωνομετρικούς Αριθμούς.

### Στοχαστικά Μαθηματικά

- Στατιστική και Πιθανότητες, κατανόηση της Δειγματοληψίας, της Μεταβλητότητας και εφαρμογές του Νόμου των Μεγάλων Αριθμών.

Κατά τη συγγραφή του βιβλίου ακολουθήθηκαν οι οδηγίες και οι προδιαγραφές των νέων προγραμμάτων σπουδών, όπως αυτές τέθηκαν από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής. Το βιβλίο αυτό είναι οργανωμένο γύρω από κεντρικές ιδέες, τις λεγόμενες «Μεγάλες Ιδέες» των Μαθηματικών, οι οποίες συνδέουν διαφορετικές μαθηματικές έννοιες σε ένα ενιαίο σύνολο. Αυτές οι ιδέες σε βοηθούν να κατανοήσεις βαθύτερα τη σημασία και τη χρήση των μαθηματικών στη ζωή και στην καθημερινότητά σου.

Για παράδειγμα η σταδιακή μετάβαση από τους φυσικούς και τους ρητούς στους άρρητους και, τελικά, τους πραγματικούς αριθμούς προσφέρει μια διευρυμένη οπτική για τη **δομή** του αριθμητικού συστήματος. Μέσα από τις αλγεβρικές παραστάσεις, τις εξισώσεις και τις συναρτήσεις, η άλγεβρα αναδεικνύεται ως το μέσο για τη **μοντελοποίηση** και την επίλυση πραγματικών προβλημάτων. Στη γεωμετρία, οι **αποδείξεις** και οι μετασχηματισμοί ενισχύουν τη μαθηματική σκέψη. Η ομοιοθεσία και η ομοιότητα συνδέουν σχήματα διαφορετικών διαστάσεων, ενώ η τριγωνομετρία μελετά τις σχέσεις μεταξύ των πλευρών και των γωνιών ενός ορθογώνιου τριγώνου. Στα στοχαστικά μαθηματικά, μαθαίνουμε να ερμηνεύουμε και να προβλέπουμε την εξέλιξη ενός φαινομένου. Οι έννοιες της πιθανότητας και της στατιστικής ανοίγουν τον δρόμο για την κατανόηση **σύνθετων φαινομένων** στον πραγματικό κόσμο.

Κάθε Θεματική Ενότητα αποτελείται από **Διδακτικές Ενότητες** με την ακόλουθη δομή:

**Στόχοι Ενότητας:** τα κύρια Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα παρουσιάζονται στην αρχή κάθε ενότητας, δίνοντας μια σαφή εικόνα για τις διδακτικές στοχεύσεις της ενότητας.

**Έργα Εξερεύνησης:** μικρές δραστηριότητες που υποστηρίζουν την ενεργή εμπλοκή των μαθητών και

μαθητριών και στοχεύουν στην ανάδειξη των στοιχείων των ΠΜΑ που βρίσκονται υπό επεξεργασία.

**Θεωρία:** επεξήγηση των μαθηματικών εννοιών που συνδέονται με τα έργα εξερεύνησης της ενότητας.

**Εφαρμογές:** δραστηριότητες που βοηθούν στην αξιοποίηση της γνώσης σε διαφορετικά περιβάλλοντα, στη σύνδεση των Μαθηματικών με άλλες επιστήμες και στην έκφραση εννοιών μέσα από ποικίλα συστήματα αναπαράστασης.

**Διαδραστικό Υλικό:** πρόσβαση σε Ψηφιακά Μαθησιακά Αντικείμενα μέσω QR codes, με πρόσθετο υλικό, όπως ενδεικτικές λύσεις των έργων εξερεύνησης, διαδραστικές ασκήσεις και προσομοιώσεις.

**Ασκήσεις και προβλήματα:** ποικιλία έργων διαβαμισμένης δυσκολίας, που οικοδομούν προοδευτικά τη μαθηματική γνώση και αξιοποιούνται για την αξιολόγηση του βαθμού επίτευξης των ΠΜΑ και τον ανταποδοτικό των μαθητών/-τριών.

Στο τέλος κάθε Θεματικής Ενότητας, θα βρεις:

**Ανακεφαλαίωση και Αυτοαξιολόγηση:** ενότητες που βοηθούν στην αποτίμηση της προόδου και τον εντοπισμό ασυνεχειών στην κατάκτηση των στοιχείων του ΠΜΑ.

**Θέματα από την Ιστορία των Μαθηματικών:** ιστορικές αναφορές, που έχουν ως στόχο να προκαλέσουν το ενδιαφέρον των μαθητών/-τριών για τα Μαθηματικά και να τα αναδείξουν ως πανανθρώπινη δραστηριότητα.

Με το βιβλίο αυτό, θα έχεις την ευκαιρία να **εμβαθύνεις** στις μαθηματικές έννοιες, να **αναπτύξεις** την κριτική σου σκέψη και να δεις τα μαθηματικά όχι μόνο ως ένα σύνολο αριθμών και τύπων, αλλά ως ένα μέσο κατανόησης και επίλυσης προβλημάτων. Παράλληλα, με τη διαθεματική προσέγγιση, θα **ανακαλύψεις** πώς τα μαθηματικά συνδέονται με άλλα πεδία γνώσης, όπως η φυσική, η τεχνολογία, η οικονομία, οι κοινωνικές επιστήμες ακόμα και οι τέχνες! Έτσι, θα **κατανοήσεις** βαθύτερα τη σχέση τους με τον πραγματικό κόσμο και θα **αποκτήσεις** εργαλεία που θα αξιοποιήσεις σε ποικίλες προκλήσεις και καθημερινές καταστάσεις.

### Επεξήγηση εικονιδίων



Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα.



Έργα αφόρμησης για ομαδική συζήτηση στην τάξη.



Υπενθύμιση προϋπάρχουσας γνώσης.



Δυνατότητα αξιοποίησης χειραπτικών υλικών.



Δυνατότητα αξιοποίησης υπολογιστή τσέπης.

### Πρόταση διδακτικής διαχείρισης Θεματικών Πεδίων/Ενοτήτων και Διδακτικών Ενοτήτων.

Η σειρά διδασκαλίας των διδακτικών εννοιών, προτείνεται να είναι αυτή με την οποία παρουσιάζονται. Την ίδια στιγμή, προτείνεται η παράλληλη διδασκαλία των Θεματικών Πεδίων της Άλγεβρας και της Γεωμετρίας, με ισόποση κατανομή χρόνου. Με τον τρόπο αυτόν διασφαλίζεται η οριζόντια διασύνδεση των εννοιών των πρώτων δύο Πεδίων του βιβλίου.

Η διδασκαλία του Γ' Θεματικού Πεδίου (Στοχαστικά Μαθηματικά) μπορεί να πραγματοποιηθεί ενιαία και ανεξάρτητα, μετά την ολοκλήρωση της διδασκαλίας του Α' και Β' Θεματικού Πεδίου (Άλγεβρα και Γεωμετρία).

Η συγγραφική ομάδα

# Περιεχόμενα

## ΑΛΓΕΒΡΑ

### A.1 Πραγματικοί Αριθμοί

|  |           |
|--|-----------|
| 1.1 Κλασματική και δεκαδική αναπαράσταση ρητών .....                               | 12        |
| 1.2 Άρρητοι αριθμοί – Πραγματικοί αριθμοί – Σύγκριση και διάταξη πραγματικών ..... | 17        |
| 1.3 Πράξεις πραγματικών και ιδιότητες – Ιδιότητες δυνάμεων .....                   | 23        |
| 1.4.Ιδιότητες τετραγωνικών ριζών (ρίζα γινομένου και πηλίκου) .....                | 29        |
| <b>Ανακεφαλαίωση / Αυτοαξιολόγηση .....</b>  | <b>34</b> |

### A.2 Κανονικότητες

|  |           |
|--|-----------|
| 2.1 Κανονικότητες της μορφής $a \cdot v^2$ ..... | 40        |
| <b>Ανακεφαλαίωση / Αυτοαξιολόγηση .....</b>      | <b>44</b> |

### A.3 Αλγεβρικές παραστάσεις

|   |           |
|---|-----------|
| 3.1 Μονώνυμα .....  | 46        |
| 3.2 Πράξεις με μονώνυμα .....   | 51        |
| 3.3 Πολυώνυμα, βαθμός πολυωνύμου, αριθμητική τιμή πολυωνύμου .....                    | 56        |
| 3.4 Άθροισμα, διαφορά και γινόμενο πολυωνύμων μιας μεταβλητής .....                   | 61        |
| 3.5 Ταυτότητες $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ , $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ ..... | 65        |
| 3.6 Παραγοντοποίηση πολυωνύμων με κοινό παράγοντα, ομαδοποίηση και ταυτότητες .....   | 71        |
| 3.7 ΕΚΠ πολυωνύμων .....  | 78        |
| 3.8 Ρητές παραστάσεις, απλοποίηση .....   | 82        |
| 3.9 Πολλαπλασιασμός και διαίρεση ρητών παραστάσεων .....                              | 86        |
| 3.10 Πρόσθεση και αφαίρεση ρητών παραστάσεων .....                                    | 89        |
| <b>Ανακεφαλαίωση / Αυτοαξιολόγηση .....</b>   | <b>92</b> |

### A.4 Συναρτήσεις

|   |            |
|---|------------|
| 4.1 Η συνάρτηση $y = ax^2$ .....            | 96         |
| <b>Ανακεφαλαίωση / Αυτοαξιολόγηση .....</b> | <b>102</b> |

### A.5 Αλγεβρικές Σχέσεις

|   |            |
|---|------------|
| 5.1 Γραμμική εξίσωση $ax + by = \gamma$ .....                                     | 104        |
| 5.2 Γραμμικά συστήματα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, γραφική επίλυση .....      | 110        |
| 5.3 Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος .....                                  | 115        |
| 5.4 Εξισώσεις δευτέρου ή και μεγαλύτερου βαθμού, επίλυση με παραγοντοποίηση ..... | 121        |
| 5.5 Ανισώσεις της μορφής $ax + b < \gamma$ .....                                  | 131        |
| <b>Ανακεφαλαίωση / Αυτοαξιολόγηση .....</b>                                       | <b>137</b> |

## ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

### B.1 Γεωμετρία του Επιπέδου

|   |            |
|---|------------|
| 1.1 Ισότητα τριγώνων και κριτήρια .....     | 144        |
| 1.2 Ισότητα ορθογωνίων τριγώνων .....       | 155        |
| <b>Ανακεφαλαίωση / Αυτοαξιολόγηση .....</b> | <b>162</b> |

## **B.2 Τριγωνομετρία**

|   |     |
|---|-----|
| 2.1 Ημίτονο, συνημίτονο και εφαπτομένη οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου..... | 166 |
| <b>Ανακεφαλαίωση / Αυτοαξιολόγηση</b> .....                                   | 175 |

## **B.3 Μήκος**

|  |     |
|--|-----|
| 3.1 Λόγος ευθυγράμμων τμημάτων και λόγος μηκών ..... | 178 |
| <b>Ανακεφαλαίωση / Αυτοαξιολόγηση</b> .....          | 187 |

## **B.4 Μετασχηματισμοί**

|   |     |
|---|-----|
| 4.1 Ομοιοθεσία .....                        | 190 |
| 4.2 Ομοιότητα, όμοια σχήματα.....           | 198 |
| 4.3 Όμοια τρίγωνα .....                     | 205 |
| <b>Ανακεφαλαίωση / Αυτοαξιολόγηση</b> ..... | 210 |

## **B.5 Εμβαδόν**

|   |     |
|---|-----|
| 5.1 Εμβαδά επιφάνειας στερεών (ορθών πρισμάτων, πυραμίδας). ..... | 214 |
| 5.2 Εμβαδά επιφάνειας στερεών (κυλίνδρου, κώνου, σφαίρας). .....  | 222 |
| <b>Ανακεφαλαίωση / Αυτοαξιολόγηση</b> .....                       | 231 |

## **B.6 Όγκος**

|  |     |
|--|-----|
| 6.1 Όγκος στερεών (ορθών πρισμάτων, πυραμίδας) ..... | 234 |
| 6.2 Όγκος στερεών (κυλίνδρου, κώνου, σφαίρας) .....  | 243 |
| <b>Ανακεφαλαίωση / Αυτοαξιολόγηση</b> .....          | 248 |

# **ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

## **Γ.1 Διαχείριση Δεδομένων**

|   |     |
|---|-----|
| 1.1 Δείγμα και πληθυσμός, δειγματοληψία (απλή τυχαία).....                              | 254 |
| 1.2 Αντιπροσωπευτικότητα και εξαγωγή συμπερασμάτων/ Μεταβλητότητα μεταξύ δειγμάτων .... | 261 |
| <b>Ανακεφαλαίωση / Αυτοαξιολόγηση</b> .....   | 266 |

## **Γ.2 Πειράματα Τύχης και Πιθανότητες**

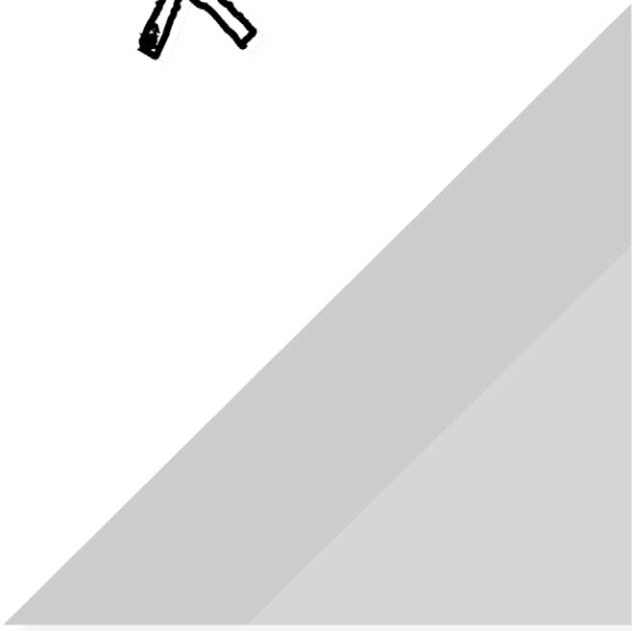
|   |     |
|---|-----|
| 2.1 Νόμος των μεγάλων αριθμών .....         | 268 |
| 2.2 Ανεξαρτησία ενδεχομένων .....           | 273 |
| <b>Ανακεφαλαίωση / Αυτοαξιολόγηση</b> ..... | 277 |

# АМТБЕРРА

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$



$$x^2 - 3x + 2 = 0$$



# ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

## A.1

Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε τους πραγματικούς αριθμούς, αναγνωρίζοντας τους ρητούς και άρρητους αριθμούς και πώς αυτοί συνδέονται με την καθημερινή ζωή. Θα μάθουμε να εκτελούμε πράξεις με πραγματικούς αριθμούς και να αξιοποιούμε τις ιδιότητές τους, για την επίλυση προβλημάτων.

Πώς οι άρρητοι αριθμοί, όπως η  $\sqrt{2}$  ή το  $\pi$ , εμφανίζονται στη φύση και την τεχνολογία;

Είσαι έτοιμος/η να διερευνήσεις το σύνολο των πραγματικών αριθμών και να δεις πώς οι πραγματικοί αριθμοί διευρύνουν τα μαθηματικά εργαλεία;



- Διερευνώ και διακρίνω τις μορφές των κλασματικών και δεκαδικών αναπαραστάσεων των ρητών αριθμών και κάνω μετατροπές από τη μία μορφή στην άλλη.
- Αναγνωρίζω την ανάγκη εισαγωγής των άρρητων αριθμών.
- Ορίζω τους άρρητους αριθμούς.
- Αναγνωρίζω τους άρρητους ως αριθμούς οι οποίοι έχουν άπειρο πλήθος δεκαδικών ψηφίων μη περιοδικών.
- Αναγνωρίζω το σύνολο των πραγματικών αριθμών.
- Διερευνώ τις σχέσεις των συνόλων των φυσικών, των ακεραίων, των ρητών, των άρρητων και των πραγματικών.
- Επεκτείνω τις πράξεις και τις δυνάμεις των ρητών και τις ιδιότητές τους στους πραγματικούς.
- Διερευνώ και αποδεικνύω τις ιδιότητες του γινομένου και του πηλίκου τετραγωνικών ριζών.
- Χρησιμοποιώ τις τετραγωνικές ρίζες και τις ιδιότητές τους στην απλοποίηση παραστάσεων και την επίλυση προβλημάτων.
- Συγκρίνω και διατάσσω πραγματικούς αριθμούς χρησιμοποιώντας την ευθεία των πραγματικών αριθμών.
- Χρησιμοποιώ τους πραγματικούς αριθμούς στην επίλυση προβλημάτων.



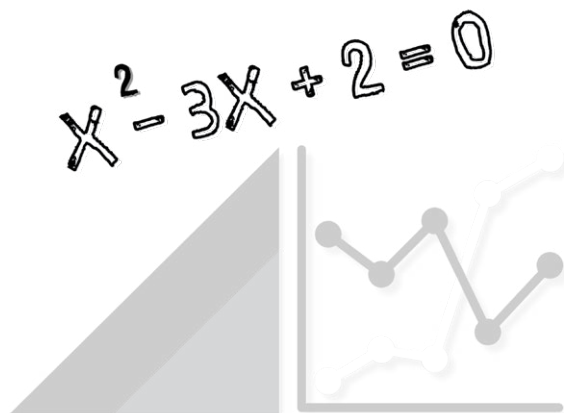
**1.1: Κλασματική και δεκαδική αναπαράσταση ρητών**

**1.2: Άρρητοι αριθμοί – Πραγματικοί αριθμοί – Σύγκριση και διάταξη πραγματικών**

**1.3: Πράξεις πραγματικών και ιδιότητες – Ιδιότητες δυνάμεων**

**1.4: Ιδιότητες τετραγωνικών ριζών (ρίζα γινομένου και πηλίκου)**

**+ Ανακεφαλαίωση / Αυτοαξιολόγηση**



# 1.1 | Κλασματική και δεκαδική αναπαράσταση ρητών



Οι αρχαίοι Αιγύπτιοι χρησιμοποιούσαν τα κλάσματα με αριθμητή μονάδα, γράφοντας τους αριθμούς ως άθροισμα τέτοιων κλασμάτων. Έτσι, για παράδειγμα, αντί για  $\frac{7}{12}$  έγραφαν το άθροισμα:  $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ .

Αξιοποιώντας την παραπάνω πληροφορία, ή οποιονδήποτε άλλο τρόπο, διερεύνησε αν μπορούν τρεις φυσικοί αριθμοί  $x, y, z$  με  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$  να ξεπερνούν το 3.

Βρες πληροφορίες σχετικά με τη χρήση των αιγυπτιακών κλασμάτων. Γιατί οι Αιγύπτιοι τα χρησιμοποιούσαν; Ποια ήταν η θέση των Μαθηματικών στην καθημερινή ζωή τους; Ποια η σύνδεση των Μαθηματικών με πρακτικά προβλήματα;



## Ρητοί αριθμοί

Θυμόμαστε – Μαθαίνουμε:

**Ρητοί** λέγονται οι αριθμοί που έχουν, ή μπορούν να πάρουν, τη μορφή ενός κλάσματος  $\frac{\mu}{\nu}$ , όπου  $\mu, \nu$  ακέραιοι αριθμοί με  $\nu \neq 0$ .



**Παράδειγμα:**

Οι αριθμοί:  $-\frac{2}{5}, 0,001, 35$  είναι ρητοί αριθμοί.

**Πράγματι:**

- Ο αριθμός  $-\frac{2}{5}$  έχει ήδη τη μορφή κλάσματος με ακέραιους όρους, άρα είναι ρητός.
- Ο αριθμός 0,001 γράφεται  $\frac{1}{1.000}$ , οπότε είναι ρητός.
- Ο αριθμός 35 μπορεί να πάρει τη μορφή κλάσματος με παρονομαστή το 1, δηλαδή  $35 = \frac{35}{1}$ , οπότε είναι ρητός.

**Γενικά:**

Όλοι οι ακέραιοι αριθμοί (... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...) μπορούν να πάρουν τη μορφή κλάσματος με παρονομαστή το 1, επομένως όλοι οι ακέραιοι αριθμοί είναι ρητοί αριθμοί.

## Περιοδικοί δεκαδικοί αριθμοί

**Δραστηριότητα:** Να γράψετε το κλάσμα  $\frac{8}{33}$  ως δεκαδικό αριθμό, αφού πρώτα εκτελέσετε την αντίστοιχη διαίρεση.

**Λύση:**

Κάθε κλάσμα παριστάνει και το πηλίκο της διαίρεσης του αριθμητή διά του παρονομαστή. Άρα:

$$\frac{8}{33} = 8:33 = 0,242424 \dots$$

$$\begin{array}{r} 80 \\ 140 \\ 80 \\ 140 \\ 8 \\ \dots \end{array} \Bigg| \begin{array}{r} 33 \\ 0,2424\dots \end{array}$$

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός  $0,242424\dots$  έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία, με ένα τμήμα επαναλαμβανόμενων δεκαδικών ψηφίων (το 24).

Οι δεκαδικοί αριθμοί που έχουν άπειρα δεκαδικά ψηφία, με ένα τμήμα επαναλαμβανόμενων δεκαδικών ψηφίων ονομάζονται **περιοδικικοί δεκαδικοί αριθμοί**. Το τμήμα των δεκαδικών ψηφίων που επαναλαμβάνεται ονομάζεται **περίοδος**.

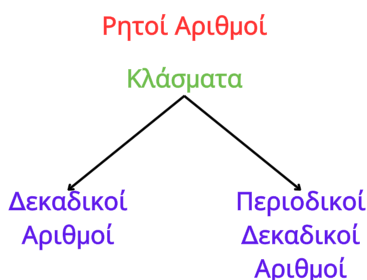
**Παράδειγμα:**

Ο αριθμός  $0,242424\dots$  είναι περιοδικός δεκαδικός αριθμός με περίοδο 24. Συμβολικά γράφουμε  $0,242424\dots = 0,\overline{24}$ .

Κάνοντας τη διαίρεση  $8:33$  γράψαμε το  $\frac{8}{33}$  στη μορφή περιοδικού δεκαδικού αριθμού:  $\frac{8}{33} = 0,\overline{24}$ .

**Γενικά:**

Κάθε ρητός αριθμός μπορεί να γραφεί ως δεκαδικός ή περιοδικός δεκαδικός αριθμός.



## Κλασματική μορφή περιοδικού δεκαδικού αριθμού

**Παράδειγμα:**

Να γράψετε με κλασματική μορφή τον περιοδικό δεκαδικό αριθμό  $0,\overline{5}$ .

**Λύση:**

Ονομάζουμε  $x$  τον αριθμό  $0,555\dots$  και έχουμε:

$$x = 0,555\dots$$

$$10x = 5,55\dots$$

$$10x = 5 + 0,55\dots$$

$$10x = 5 + x$$

$$10x - x = 5$$

$$9x = 5$$

$$x = \frac{5}{9}$$

Άρα  $0,\overline{5} = \frac{5}{9}$ .

← Πολλαπλασιάζουμε με 10.

← Χωρίζουμε τον αριθμό ώστε να εμφανιστεί ο  $x$ .

← Λύνουμε την εξίσωση.



1. Να γράψετε τους παρακάτω ρητούς αριθμούς με κλασματική μορφή

-1,2,                      0,004,                      3,48,                      24.

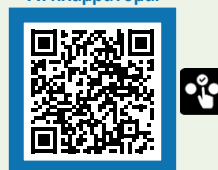
**Λύση:**

Θυμόμαστε ότι κατά τη διαίρεση ενός αριθμού με 10, 100, 1.000 ... κλπ, μεταφέρουμε την υποδιαστολή του αριθμού προς τα αριστερά μία, δύο, τρεις, ... κλπ, θέσεις αντίστοιχα.

Έχουμε:

- $-1,2 = \frac{-12}{10}$
- $0,004 = \frac{4}{1.000}$
- $3,48 = \frac{348}{100}$
- $24 = \frac{24}{1}$ .

Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση

2. Να γράψετε τα παρακάτω κλάσματα ως δεκαδικούς αριθμούς εκτελώντας τις αντίστοιχες διαιρέσεις.

$\frac{90}{8}$ ,                       $\frac{68}{1.000}$ ,                       $\frac{19}{15}$ .

**Λύση:**

•  $\frac{90}{8} = 90:8 = 11,25$

$$\begin{array}{r} 90 \\ 10 \phantom{0} \\ 20 \phantom{00} \\ 40 \phantom{000} \\ 0 \end{array} \bigg| \begin{array}{r} 8 \\ \hline 11,25 \end{array}$$

•  $\frac{68}{1.000} = 0,068$ . ← Μετακινούμε την υποδιαστολή τρεις θέσεις αριστερά.

•  $\frac{19}{15} = 19:15 = 1,2666... \text{ ή } 1,2\bar{6}$ .

$$\begin{array}{r} 19 \\ 40 \phantom{00} \\ 100 \phantom{000} \\ 100 \phantom{0000} \\ 100 \phantom{00000} \\ \dots \end{array} \bigg| \begin{array}{r} 15 \\ \hline 1,2666... \end{array}$$

Ο αριθμός 1,2666... είναι περιοδικός με περίοδο 6.

Εξασκούμε



σε όσα έμαθα

3. Να γράψετε με κλασματική μορφή τον περιοδικό δεκαδικό αριθμό  $1,\overline{20}$ .

**Λύση:**

Ονομάζουμε  $x$  τον αριθμό  $1,2020\dots$  και έχουμε:

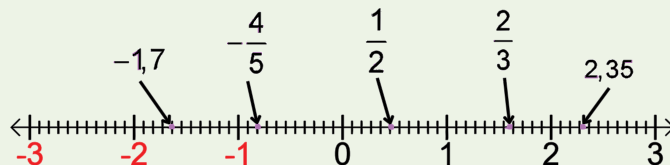
|  |   |
|--|---|
| $x = 1,2020\dots$                        | ← Πολλαπλασιάζουμε με 100.                        |
| $100x = 120,2020\dots$                   | ← Χωρίζουμε τον αριθμό ώστε να εμφανιστεί ο $x$ . |
| $100x = 119 + 1,2020\dots$               | ← Λύνουμε την εξίσωση.                            |
| $100x = 119 + x$                         |   |
| $100x - x = 119$                         |   |
| $99x = 119$                              |   |
| $x = \frac{119}{99}$                     |   |
| Άρα $1,\overline{20} = \frac{119}{99}$ . |   |

4. Να τοποθετήσετε τους παρακάτω αριθμούς στην αριθμογραμμή:

$$\frac{1}{2}, \quad -\frac{4}{5}, \quad \frac{2}{3}, \quad -1,7, \quad 2,35.$$

**Λύση:**

Κάνοντας πράξεις βρίσκουμε ότι  $\frac{1}{2} = 0,5$ ,  $-\frac{4}{5} = -0,8$ ,  $\frac{2}{3} = 0,\overline{6}$ , οπότε οι αριθμοί στην αριθμογραμμή είναι :



1. Χαρακτήρισε ως Σωστές ή Λάθος τις προτάσεις που ακολουθούν βάζοντας ένα  $x$  στην κατάλληλη θέση.

- α) Κάθε ακέραιος αριθμός μπορεί να γραφεί ως κλάσμα με παρονομαστή το 1.
- β) Οι αριθμοί που έχουν άπειρα δεκαδικά ψηφία είναι περιοδικοί δεκαδικοί αριθμοί.
- γ) Ο αριθμός  $0,555\dots$  μπορεί να γραφεί ως κλάσμα  $\frac{5}{9}$ .
- δ) Ο αριθμός  $\frac{3}{8}$  είναι περιοδικός δεκαδικός αριθμός.
- ε) Είναι  $0,\overline{9} = 1$

**Σωστό      Λάθος**

|  |  |
|--|--|
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

2

Αντιστοίχισε κάθε αριθμό από την αριστερή στήλη με τη σωστή κλασματική ή δεκαδική μορφή του από τη δεξιά στήλη:

| Κλασματική μορφή  | Δεκαδική μορφή    |
|-------------------|-------------------|
| α) $\frac{2}{3}$  | i. 0,333...       |
| β) $\frac{7}{10}$ | ii. 0,7           |
| γ) $\frac{1}{3}$  | iii. $0,8\bar{3}$ |
| δ) $\frac{5}{6}$  | iv. $0,\bar{6}$   |
| ε) $\frac{3}{4}$  | v. 0,75           |
| στ) $\frac{1}{2}$ | vi. 0,5           |

3

Μετάτρεψε σε δεκαδική μορφή τα παρακάτω κλάσματα:

α)  $\frac{4}{10}$       β)  $\frac{15}{100}$       γ)  $\frac{610}{1.000}$       δ)  $\frac{908}{100}$       ε)  $\frac{1}{10.000}$

4

Μετάτρεψε σε δεκαδική μορφή τα παρακάτω κλάσματα:

α)  $\frac{4}{5}$       β)  $\frac{9}{8}$       γ)  $\frac{1}{25}$       δ)  $\frac{13}{20}$       ε)  $\frac{35}{8}$

5

Μετάτρεψε σε δεκαδική μορφή τα παρακάτω κλάσματα:

α)  $\frac{8}{3}$       β)  $\frac{4}{15}$       γ)  $\frac{8}{9}$       δ)  $\frac{7}{22}$       ε)  $\frac{1}{11}$

6

Μετάτρεψε σε κλάσματα τους παρακάτω δεκαδικούς αριθμούς:

α)  $2,\bar{7}$       β)  $0,7\bar{2}$       γ)  $1,3\bar{5}$       δ)  $2,\bar{81}$       ε)  $0,2\bar{23}$

7

Τοποθέτησε τους αριθμούς  $\frac{1}{4}$ ,  $-\frac{3}{2}$ , 0,5 και  $-\frac{20}{3}$  στην αριθμογραμμή των πραγματικών αριθμών.

8

Σύγκρινε τους παρακάτω αριθμούς και βάλτε το κατάλληλο σύμβολο (>, <, =) μεταξύ τους:

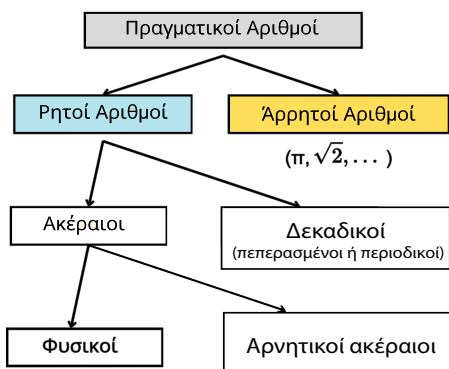
α)  $\frac{3}{4} \dots 0,75$       β)  $-\frac{4}{8} \dots -0,5$       γ)  $-\frac{2}{3} \dots -0,67$       δ)  $\frac{5}{6} \dots 0,83$   
 ε)  $\frac{5}{4} \dots 1,2\bar{5}$       στ)  $0,3 \dots \frac{1}{3}$       ζ)  $\frac{7}{10} \dots 0,7$       η)  $-0,75 \dots -\frac{35}{50}$

Εξασκούμε



σε όσα έμαθα

# 1.2 | Άρρητοι αριθμοί – Πραγματικοί αριθμοί – Σύγκριση και διάταξη πραγματικών

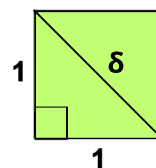


Παρατήρησε το διπλανό διάγραμμα και κατάταξε τους παρακάτω αριθμούς σε κατηγορίες:

$$\sqrt{3}, \frac{1}{2}, -1, 0, 4, 8, \frac{96}{2}$$

Ένας αριθμός μπορεί να ανήκει σε παραπάνω από μία κατηγορία;

Υπολογίστε το μήκος της διαγωνίου  $\delta$  ενός τετραγώνου πλευράς 1cm.

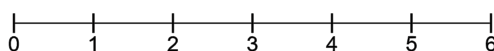


Ο αριθμός που προκύπτει είναι δεκαδικός; Αν ναι, πόσα δεκαδικά ψηφία έχει; Είναι περιοδικός δεκαδικός αριθμός;

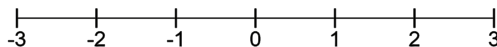
Θυμόμαστε – Μαθαίνουμε:

## Σύνολα αριθμών

- **Φυσικοί αριθμοί (N):** 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ...

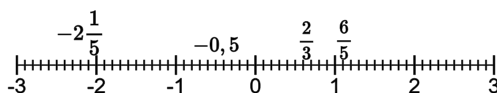


- **Ακέραιοι αριθμοί (Z):** Είναι οι φυσικοί αριθμοί μαζί με τους αντίστοιχους αρνητικούς τους:  
... -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...



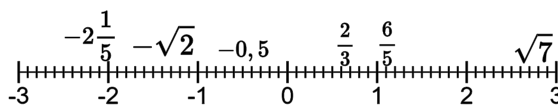
- **Ρητοί αριθμοί (Q):** Είναι οι αριθμοί που έχουν ή μπορούν να πάρουν τη μορφή ενός κλάσματος  $\frac{\mu}{\nu}$ , όπου  $\mu, \nu$  ακέραιοι αριθμοί με  $\nu \neq 0$ .

Π.χ.  $5 = \frac{5}{1}, \quad -0,01 = -\frac{1}{100}, \quad 0,333... = \frac{1}{3}$



- Άρρητοι λέγονται οι αριθμοί που δεν είναι ρητοί, δηλαδή οι άρρητοι αριθμοί δεν μπορούν να πάρουν τη μορφή  $\frac{\mu}{\nu}$ , όπου  $\mu, \nu$  ακέραιοι και  $\nu \neq 0$ .

Π.χ. Άρρητοι είναι οι αριθμοί  $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \dots$ , ο αριθμός  $\pi = 3,14\dots$ , όπως και ο αριθμός  $0,10100100010000\dots$



Θυμόμαστε ότι **τετραγωνική ρίζα** ενός θετικού αριθμού  $a$ , λέγεται ο θετικός αριθμός, ο οποίος, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον αριθμό  $a$  και συμβολίζεται με  $\sqrt{a}$ .



### Ρητή προσέγγιση του άρρητου αριθμού $\sqrt{5}$

Ο αριθμός  $\sqrt{5}$  είναι ο αριθμός ο οποίος όταν υψωθεί στο τετράγωνο ισούται με 5. Προφανώς ο αριθμός  $\sqrt{5}$  δεν είναι ακέραιος αριθμός. Ας προσπαθήσουμε να τον προσεγγίσουμε:

|                 |                          |
|-----------------|--------------------------|
| Είναι $2^2 = 4$ | Άρα $2 < \sqrt{5} < 3$ . |
| και $3^2 = 9$ . |                          |

- **Ρητή προσέγγιση δέκατου:**

|                      |                              |
|----------------------|------------------------------|
| Είναι $2,2^2 = 4,84$ | Άρα $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$ . |
| και $2,3^2 = 5,29$ . |                              |

- **Ρητή προσέγγιση εκατοστού:**

|                         |                                |
|-------------------------|--------------------------------|
| Είναι $2,23^2 = 4,9729$ | Άρα $2,23 < \sqrt{5} < 2,24$ . |
| και $2,24^2 = 5,0176$ . |                                |

κ.ο.κ.



Αποδεικνύεται ότι ο αριθμός  $\sqrt{5}$  έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία χωρίς κάποιο τμήμα επαναλαμβανομένων δεκαδικών ψηφίων.

$$\sqrt{5} = 2,23606797749\dots$$

**Γενικά:** Οι άρρητοι αριθμοί έχουν άπειρο πλήθος δεκαδικών ψηφίων μη περιοδικών.

- **Πραγματικοί αριθμοί (R):** Αποτελούνται από τους ρητούς και από τους άρρητους αριθμούς. Οι πραγματικοί αριθμοί αποτελούν το σύνολο όλων των αριθμών που έχουμε μελετήσει έως τώρα.

Οι πραγματικοί αριθμοί καλύπτουν πλήρως την ευθεία των αριθμών.

Δηλαδή κάθε σημείο της ευθείας αντιστοιχεί σε έναν ακριβώς πραγματικό αριθμό και κάθε πραγματικός αριθμός παριστάνεται με ακριβώς ένα σημείο πάνω στην ευθεία. Για το λόγο αυτόν, η ευθεία ονομάζεται ευθεία (ή άξονας) των πραγματικών αριθμών.

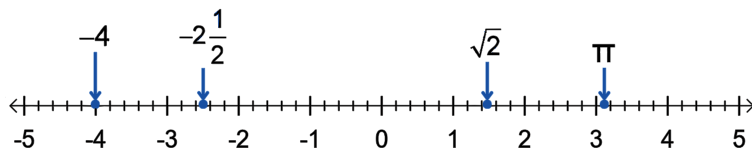
### ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

|          |                 |               |            |
|----------|-----------------|---------------|------------|
| Ρητοί    | $-\frac{10}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | Άρρητοι    |
| Ακέραιοι | $-4$            | $-1$          | $\sqrt{7}$ |
| Φυσικοί  | $0$             | $1$           | $\sqrt{3}$ |
|          |                 |               | $\pi$      |

## Σύγκριση και διάταξη πραγματικών αριθμών

Μεγαλύτερος από δύο πραγματικούς αριθμούς είναι εκείνος που βρίσκεται δεξιότερα από τον άλλο πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

### Παράδειγμα:



Επομένως:  $-4 < -2\frac{1}{2} < \sqrt{2} < \pi$ .

### Ειδικότερα:

- Μεγαλύτερος από δύο θετικούς ρητούς είναι εκείνος που έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.  
Π.χ.  $+2 < +3$ .
- Μεγαλύτερος από δύο αρνητικούς ρητούς είναι εκείνος που έχει τη μικρότερη απόλυτη τιμή.  
Π.χ.  $-2 > -3$ .



1. Να βρείτε τις ρητές προσεγγίσεις του αριθμού  $\sqrt{3}$  έως και τρία δεκαδικά ψηφία.

### Λύση:

Ο αριθμός  $\sqrt{3}$  είναι ο αριθμός ο οποίος όταν υψωθεί στο τετράγωνο ισούται με 3. Προφανώς ο αριθμός  $\sqrt{3}$  δεν είναι ακέραιος αριθμός. Ας προσπαθήσουμε να τον προσεγγίσουμε:

|                 |                          |
|-----------------|--------------------------|
| Είναι $1^2 = 1$ | Άρα $1 < \sqrt{3} < 2$ . |
| και $2^2 = 4$ . |                          |

• **Ρητή προσέγγιση δέκατου:**

|                      |                              |
|----------------------|------------------------------|
| Είναι $1,7^2 = 2,89$ | Άρα $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$ . |
| και $1,8^2 = 3,24$ . |                              |

• **Ρητή προσέγγιση εκατοστού:**

|                         |                                |
|-------------------------|--------------------------------|
| Είναι $1,73^2 = 2,9929$ | Άρα $1,73 < \sqrt{3} < 1,74$ . |
| και $1,74^2 = 3,0276$ . |                                |

• **Ρητή προσέγγιση χιλιοστού:**

|                            |                                  |
|----------------------------|----------------------------------|
| Είναι $1,732^2 = 2,999824$ | Άρα $1,732 < \sqrt{3} < 1,733$ . |
| και $1,733^2 = 3,003289$ . |                                  |

Άρα, με προσέγγιση τριών δεκαδικών ψηφίων, ισχύει ότι ο αριθμός  $\sqrt{3}$  είναι περίπου ίσος με 1,732. Συμβολικά γράφουμε:  $\sqrt{3} \approx 1,732$ .

Ειδικότερα λέμε ότι  $\sqrt{3} \approx 1,732$  με **έλλειψη** και  $\sqrt{3} \approx 1,733$  με **υπερβολή**.

2. Να χρησιμοποιήσετε την αριθμομηχανή για να βρείτε τη ρητή προσέγγιση των τετραγωνικών ριζών  $\sqrt{11}$  και  $\sqrt{13}$ .

**Λύση:**

Ανοίγουμε την αριθμομηχανή και χρησιμοποιούμε το σύμβολο  $\sqrt{\quad}$  για να υπολογίσουμε τους αριθμούς:

- $\sqrt{11} = 3,3166247904$ .
- $\sqrt{13} = 3,6055512755$ .

**Σημείωση:** Οι αριθμοί αυτοί έχουν άπειρα δεκαδικά ψηφία, η αριθμομηχανή δίνει μόνο μερικά από αυτά τα ψηφία.



3. Να κατασκευάσετε γεωμετρικά τους άρρητους αριθμούς  $\sqrt{2}$  και  $-\sqrt{2}$ .

**Λύση:**

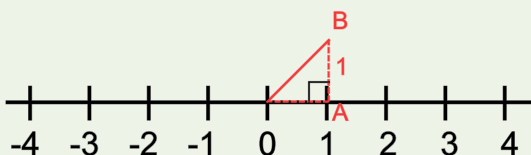
Θεωρούμε τον άξονα των πραγματικών αριθμών με αρχή το  $O$  και μονάδα  $OA = 1$ . Στο σημείο  $A$  φέρνουμε κάθετο ευθύγραμμο τμήμα  $AB = 1$ . Το τρίγωνο  $OAB$  είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα  $OB$ , την οποία υπολογίζουμε από το Πυθαγόρειο Θεώρημα:

$$OB^2 = OA^2 + AB^2$$

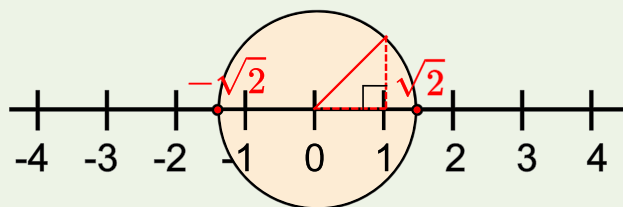
$$\text{ή } OB^2 = 1^2 + 1^2$$

$$\text{ή } OB^2 = 2$$

$$\text{ή } OB = \sqrt{2}.$$



Με κέντρο το  $O$  και ακτίνα  $OB$  κατασκευάζουμε κύκλο ο οποίος τέμνει τον άξονα των πραγματικών αριθμών στα σημεία με τετμημένες  $-\sqrt{2}$  και  $\sqrt{2}$ .



4. Να μετατρέψετε το κλάσμα  $\frac{3}{\sqrt{2}}$  που έχει άρρητο παρονομαστή, σε ισοδύναμο κλάσμα με ρητό παρονομαστή.

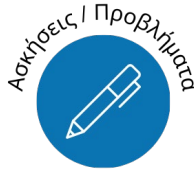
**Λύση:** Πολλαπλασιάζουμε τους όρους του κλάσματος με τη ρίζα που βρίσκεται στον παρονομαστή:

$$\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Εξασκούμε



σε όσα έμαθα



1

Χαρακτήρισε ως Σωστές ή Λάθος τις προτάσεις που ακολουθούν βάζοντας ένα x στην κατάλληλη θέση.

- α) Ο αριθμός  $\sqrt{2}$  είναι ρητός αριθμός.
- β) Όλοι οι φυσικοί αριθμοί είναι ακέραιοι αριθμοί.
- γ) Οι άρρητοι αριθμοί έχουν άπειρα δεκαδικά ψηφία μη περιοδικά.
- δ) Ο αριθμός  $\sqrt{9}$  είναι άρρητος αριθμός.
- ε) Οι πραγματικοί αριθμοί περιλαμβάνουν τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς.
- στ) Ο αριθμός  $-5$  ανήκει στους φυσικούς αριθμούς.
- ζ) Το τετράγωνο ενός άρρητου αριθμού είναι πάντοτε άρρητος αριθμός.

Σωστό      Λάθος

|  |  |
|--|--|
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

2

Συμπλήρωσε τον πίνακα με x, ανάλογα με την κατηγορία στην οποία ανήκει κάθε αριθμός.

| Αριθμός                | Φυσικός Αριθμός | Ακέραιος Αριθμός | Ρητός Αριθμός | Άρρητος Αριθμός | Πραγματικός Αριθμός |
|------------------------|-----------------|------------------|---------------|-----------------|---------------------|
| -3                     |                 |                  |               |                 |                     |
| 2                      |                 |                  |               |                 |                     |
| $\sqrt{11}$            |                 |                  |               |                 |                     |
| $\frac{4}{7}$          |                 |                  |               |                 |                     |
| 0                      |                 |                  |               |                 |                     |
| $\pi$                  |                 |                  |               |                 |                     |
| $-\sqrt{3}$            |                 |                  |               |                 |                     |
| 7,2                    |                 |                  |               |                 |                     |
| $\frac{\sqrt{100}}{2}$ |                 |                  |               |                 |                     |

3

Ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι ρητοί και ποιοι είναι άρρητοι;

- α)  $\sqrt{9}$ ,  $\sqrt{90}$ ,  $\sqrt{900}$ ,  $\sqrt{0,9}$ ,  $\sqrt{0,09}$ .
- β)  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{2 \cdot 2}$ ,  $\sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2}$ ,  $\sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}$ .
- γ)  $\sqrt{\frac{9}{4}}$ ,  $\frac{\sqrt{16}}{3}$ ,  $\frac{\sqrt{52}}{\sqrt{13}}$ ,  $\sqrt{\frac{52}{13}}$ .

4

Γράψε μεταξύ ποιών διαδοχικών φυσικών αριθμών βρίσκονται οι παρακάτω άρρητοι αριθμοί.

- α)  $\dots < \sqrt{6} < \dots$                       β)  $\dots < \sqrt{15} < \dots$                       γ)  $\dots < -\sqrt{21} < \dots$
- δ)  $\dots < \sqrt{80} < \dots$                       ε)  $\dots < \sqrt{398} < \dots$

**5** Βρες τη ρητή προσέγγιση του αριθμού  $\sqrt{11}$  και  $\sqrt{13}$ , μέχρι το δεύτερο δεκαδικό ψηφίο.

**6** Μετάτρεψε τα κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή:  
 α)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$       β)  $\frac{6}{\sqrt{3}}$       γ)  $\frac{5}{\sqrt{5}}$       δ)  $\frac{1}{2\sqrt{7}}$       ε)  $\frac{-2}{5\sqrt{10}}$

Εξασκούμαι



σε όσα έμαθα

**7** Υπολόγισε το μήκος της διαγωνίου  $\delta$  ενός τετραγώνου πλευράς 3 cm. Τι είδους αριθμός είναι ο αριθμός που προκύπτει; Ποια είναι τα 2 πρώτα δεκαδικά του ψηφία;

**8** Τοποθέτησε τους αριθμούς  $-2$ ,  $0$ ,  $-\frac{1}{2}$ ,  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{6}$ ,  $-\frac{5}{4}$  στην ευθεία των πραγματικών αριθμών και ταξινόμησέ τους από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο.



ΜΕΛΕΤΩ



το συγκεκριμένο θέμα

## Οι Πραγματικοί αριθμοί

Οι πραγματικοί αριθμοί έχουν μια ενδιαφέρουσα ιστορία, που αρχίζει από την αρχαιότητα και εντοπίζεται σε διάφορους πολιτισμούς.

**Αρχαίοι Αιγύπτιοι (περ. 1000 π.Χ.):** Οι Αιγύπτιοι χρησιμοποιούσαν κλάσματα στους υπολογισμούς τους, αλλά είχαν μόνο θετικούς αριθμούς και δεν αναγνώριζαν τους αρνητικούς ή τους άρρητους αριθμούς.

**Ινδοί Μαθηματικοί (περ. 600 π.Χ.):** Στα «Shulba Sutras» περιλαμβάνεται ίσως η πρώτη χρήση άρρητων αριθμών. Οι Ινδοί μαθηματικοί, όπως ο Μάναβα, συνειδητοποίησαν ότι η τετραγωνική ρίζα ορισμένων αριθμών, όπως το 2, δεν μπορούσε να βρεθεί με ακρίβεια.

**Αρχαίοι Έλληνες (περ. 500 π.Χ.):** Οι Πυθαγόρειοι ήταν από τους πρώτους που συνειδητοποίησαν την ύπαρξη άρρητων αριθμών όταν ανακάλυψαν ότι η τετραγωνική ρίζα του 2 δεν είναι ρητός αριθμός, όπως είχαν αποδείξει και οι Ινδοί μαθηματικοί.

**Άραβες Μαθηματικοί (7ος-9ος αιώνας):** Οι Άραβες μαθηματικοί έκαναν σημαντικά βήματα για την κατανόηση των άρρητων αριθμών, καθώς τους χρησιμοποιούσαν στην επίλυση εξισώσεων. Ο Abū Kāmil ήταν ο πρώτος που αποδέχτηκε τους άρρητους ως λύσεις σε τετραγωνικές εξισώσεις.

**Μεσαίωνας και Αναγέννηση:** Κατά τη διάρκεια του Μεσαίωνα, οι μαθηματικοί στην Ευρώπη συνέχισαν να επεξεργάζονται την έννοια των άρρητων αριθμών, γεγονός που συνέβαλλε στην ανάπτυξη της Άλγεβρας.

**René Descartes (17ος αιώνας):** Ο Καρτέσιος ήταν ο πρώτος εισήγαγε τον όρο «πραγματικοί αριθμοί» για να ξεχωρίσει τις ρίζες πολυωνυμικών εξισώσεων από τους «φανταστικούς» αριθμούς.

**18ος - 19ος αιώνας:** Τον 18ο και 19ο αιώνα έγινε σημαντική πρόοδος στη θεωρία των άρρητων και υπερβατικών αριθμών. Ο Lambert απέδειξε ότι το  $\pi$  δεν είναι ρητός αριθμός, ενώ ο Hermite και ο Lindemann απέδειξαν ότι οι αριθμοί  $e$  και  $\pi$  είναι υπερβατικοί, δηλαδή δεν είναι ρίζες καμίας πολυωνυμικής εξίσωσης με ακέραιους συντελεστές. Με αυτές τις εξελίξεις καθιερώθηκε και η έννοια των πραγματικών αριθμών.

## 1.3 | Πράξεις πραγματικών και ιδιότητες – Ιδιότητες δυνάμεων

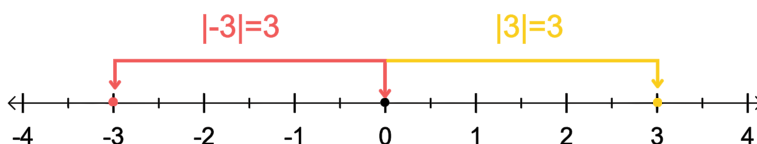


Στο παρακάτω τετράγωνο, διπλασιάζουμε τη πλευρά του. Πώς θα επιδράσει αυτή η αλλαγή στο εμβαδόν του;



### Απόλυτη τιμή

Η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού  $a$  συμβολίζεται με  $|a|$  και είναι ίση με την απόσταση του σημείου, που παριστάνει τον αριθμό  $a$ , από την αρχή  $O$  του άξονα.



#### Παραδείγματα:

Από τον ορισμό της απόλυτης τιμής βρίσκουμε:

- $|+3| = 3$ . ← Η απόλυτη τιμή ενός θετικού αριθμού είναι ο ίδιος αριθμός.
- $|-5| = 5$ . ← Η απόλυτη τιμή ενός αρνητικού αριθμού είναι ο αντίθετός του.
- $|0| = 0$ . ← Η απόλυτη τιμή του μηδέν είναι το μηδέν.

### Οι πράξεις στους πραγματικούς αριθμούς

#### Πρόσθεση

Για να προσθέσουμε δύο ομόσημους αριθμούς, προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο άθροισμα βάζουμε το πρόσημό τους.

#### Παραδείγματα:

$$+5 + 8 = +13.$$

$$-2,1 - 5,7 = -7,8.$$

Για να προσθέσουμε δύο ετερόσημους αριθμούς, αφαιρούμε την μικρότερη απόλυτη τιμή από τη μεγαλύτερη και στη διαφορά βάζουμε το πρόσημο του αριθμού που έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

#### Παραδείγματα:

$$+9 - 5 = +4.$$

$$-7 + 1,5 = -5,5.$$

### Πολλαπλασιασμός

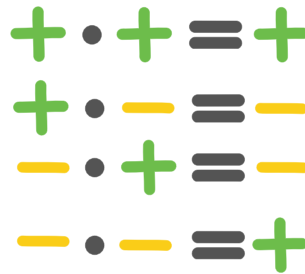
Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ομόσημους αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο αυτό βάζουμε πρόσημο +.

**Παραδείγματα:**  $(+5) \cdot (+6) = +30.$   
 $(-4) \cdot (-1) = +4.$

Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ετερόσημους αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο αυτό βάζουμε πρόσημο -.

**Παραδείγματα:**  $(+5) \cdot (-6) = -30.$   
 $(-4) \cdot (+1) = -4.$

Γενικά:



### Οι ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού

| Ιδιότητα                | Πρόσθεση   | Πολλαπλασιασμός   |
|-------------------------|--|---|
| Αντιμεταθετική          | $\alpha + \beta = \beta + \alpha$  | $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$                               |
| Προσεταιριστική         | $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$                        | $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$ |
| Ουδέτερο στοιχείο       | $\alpha + 0 = \alpha$  | $\alpha \cdot 1 = \alpha$   |
| Αντίθετος / Αντίστροφος | $\alpha + (-\alpha) = 0$   | $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1, \alpha \neq 0$                      |
| Επιμεριστική            | $\alpha \cdot (\beta \pm \gamma) = \alpha \cdot \beta \pm \alpha \cdot \gamma$ |   |

Επίσης ισχύουν:

- $\alpha \cdot 0 = 0.$
- Αν  $\alpha \cdot \beta = 0$ , τότε  $\alpha = 0$  ή  $\beta = 0.$
- Αν  $\alpha + \beta = 0$  τότε οι αριθμοί  $\alpha$  και  $\beta$  λέγονται **αντίθετοι**.  
 π.χ: Είναι  $(+5) + (-5) = 0$ , άρα οι αριθμοί  $+5$  και  $-5$  είναι αντίθετοι.
- Αν  $\alpha \cdot \beta = 1$  τότε οι αριθμοί  $\alpha$  και  $\beta$  λέγονται **αντίστροφοι**.

π.χ: Είναι  $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{6}{6} = 1$ , άρα οι αριθμοί  $\frac{2}{3}$  και  $\frac{3}{2}$  είναι αντίστροφοι.

## Αφαίρεση – Διαίρεση

Οι πράξεις της αφαίρεσης και της διαίρεσης γίνονται με τη βοήθεια της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού αντιστοίχως.

Για να βρούμε τη διαφορά δύο αριθμών, προσθέτουμε στο μειωτέο τον αντίθετο του αφαιρετέου.

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$$

**Παράδειγμα:**  $15 - (-6) = 15 + (+6) = 21$ .

Για να βρούμε το πηλίκο δύο αριθμών ( $\alpha : \beta$ , με  $\beta \neq 0$ ), πολλαπλασιάζουμε το διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.

$$\alpha : \beta = \frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$$

**Παράδειγμα:**  $6 : 8 = 6 \cdot \frac{1}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ .

## Δυνάμεις

Η δύναμη με βάση έναν πραγματικό αριθμό  $a$  και εκθέτη ένα φυσικό αριθμό  $n > 1$  συμβολίζεται με  $a^n$  και είναι το γινόμενο  $n$  παραγόντων ίσων με τον αριθμό  $a$ .

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ παράγοντες}}$$

**Παραδείγματα:**  $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ .

$$(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$$

Ορίζουμε επίσης:

- $a^1 = a$ .
- $a^0 = 1$ , με  $a \neq 0$ .
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ , με  $a \neq 0$ .

π.χ.  $5^1 = 5$ .

π.χ.  $8^0 = 1$ .

π.χ.  $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$ .

## Ιδιότητες δυνάμεων

Για τις δυνάμεις πραγματικών αριθμών με ακέραιους εκθέτες και εφόσον αυτές ορίζονται, ισχύουν οι ιδιότητες:

| Ιδιότητες   | Παράδειγματα   |
|---|--|
| 1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$  | $2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5$                              |
| 2. $a^m : a^n = a^{m-n}$  | $3^5 : 3^3 = 3^{5-3} = 3^2$                                  |
| 3. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$  | $(9 \cdot 8)^2 = 9^2 \cdot 8^2$                              |
| 4. $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n = \frac{\alpha^n}{\beta^n}$               | $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4}$               |
| 5. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$  | $(7^2)^3 = 7^{2 \cdot 3} = 7^6$                              |
| 6. $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-n} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n$ | $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{2}\right)^4$ |



1. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$(12 - 3 \cdot 5)^2 + 2 \cdot (6^2 - 7 \cdot 8) - \left(\frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{6}{5}\right).$$

**Λύση:**

$$\begin{aligned} (12 - 3 \cdot 5)^2 + 2 \cdot (6^2 - 7 \cdot 8) - \left(\frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{6}{5}\right) &= \\ = (12 - 15)^2 + 2 \cdot (36 - 56) - \left(\frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{5}{6}\right) &= \\ = (-3)^2 + 2 \cdot (-20) - \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\right) &= \\ = 9 - 40 - \frac{6}{2} &= \\ = 9 - 40 - 3 &= \\ = -34. & \end{aligned}$$

Προτεραιότητα των πράξεων:

1. Υπολογίζουμε τις δυνάμεις.
2. Εκτελούμε τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις με τη σειρά που εμφανίζονται στην παράσταση.
3. Εκτελούμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις με τη σειρά που εμφανίζονται στην παράσταση.

Αν υπάρχουν παρενθέσεις, εκτελούμε πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις με την παραπάνω σειρά.

2. Να απλοποιήσετε την παράσταση:  $A = \frac{(x \cdot y^{-2})^3 \cdot x}{x^2 \cdot y^{-4}}$ .

Στη συνέχεια να βρείτε την τιμή της παράστασης A για  $x = 6$  και  $y = -3$ .

**Λύση:**

Απλοποιούμε την παράσταση σύμφωνα με τις ιδιότητες των δυνάμεων:

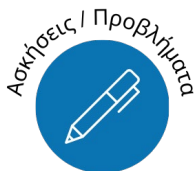
$$A = \frac{(x \cdot y^{-2})^3 \cdot x}{x^2 \cdot y^{-4}} = \frac{x^3 \cdot (y^{-2})^3 \cdot x}{x^2 \cdot y^{-4}} = \frac{x^4 \cdot y^{-6}}{x^2 \cdot y^{-4}} = x^{4-2} \cdot y^{-6-(-4)} = x^2 \cdot y^{-2} = \frac{x^2}{y^2} = \left(\frac{x}{y}\right)^2.$$

Για  $x = 6$  και  $y = -3$ , έχουμε:  $A = \left(\frac{6}{-3}\right)^2 = (-2)^2 = 4.$

Εξασκούμε



σε όσα έμαθα



**1** Χαρακτήρισε ως Σωστές ή Λάθος τις προτάσεις που ακολουθούν βάζοντας ένα **x** στην κατάλληλη θέση.

- α) Η απόλυτη τιμή ενός αρνητικού αριθμού είναι αρνητικός αριθμός.
- β) Για να προσθέσουμε δύο ετερόσημους αριθμούς, προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο άθροισμα βάζουμε το πρόσημο του αριθμού που έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.
- γ) Αν το άθροισμα δύο αριθμών είναι αρνητικό τότε οι αριθμοί είναι αρνητικοί.
- δ) Το γινόμενο δύο αρνητικών αριθμών είναι πάντα θετικός αριθμός.
- ε) Για να βρούμε το πηλίκο δύο αριθμών, πολλαπλασιάζουμε τον διαιρέτο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.
- στ) Δύο αντίθετοι αριθμοί έχουν ίσες απόλυτες τιμές.

**Σωστό      Λάθος**

| Σωστό | Λάθος |
|-------|-------|
|       |       |
|       |       |
|       |       |
|       |       |
|       |       |
|       |       |
|       |       |

**2** Ποια είναι η τιμή των παρακάτω παραστάσεων; Επίλεξε τη σωστή απάντηση:

|                                | <b>A</b>      | <b>B</b>       | <b>Γ</b>        |
|--------------------------------|---------------|----------------|-----------------|
| α) $(-2)^3$                    | -6            | -8             | +8              |
| β) $(5^2)^0$                   | 1             | 5              | 25              |
| γ) $(\frac{1}{2})^{-1}$        | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 2               |
| δ) $(-3)^{-3}$                 | 9             | 27             | $-\frac{1}{27}$ |
| ε) $(2^4 \cdot 2^6) \cdot 2^3$ | 2             | 4              | 16              |
| στ) $(2^{-3})^2 \cdot 2^5$     | 0,5           | 2              | 32              |

**3** Υπολόγισε τις τιμές των παραστάσεων.

- α)  $-5 + 2 - 8 + 6 - 7$       β)  $-2(3 - 4 \cdot 2) - (16 + 2)$       γ)  $(-8):(-2) + (-5) \cdot 3 + 17$
- δ)  $1 - 4 \cdot [5 \cdot (+6 - 13) + 19]$       ε)  $35 : (-5) + 2(-1)^4 - 2 \cdot 3^2$       στ)  $(14 - 3 \cdot 12):(28 - 15 \cdot 2)$

**4** Υπολόγισε τις τιμές των παραστάσεων.

- α)  $\frac{1}{4} - (6 \cdot \frac{1}{3} - 4 \cdot \frac{1}{5})$       β)  $8 : \frac{4}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{15}{2}$       γ)  $\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{5}{4} \cdot \frac{2}{3} - 1}$       δ)  $(3 - \frac{1}{2}) + (\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{5} - \frac{2}{5}) : \frac{1}{4}$

**5**

Απλοποιήσε τις παραστάσεις,

α)  $8x + 3 - 5x + 4 - x$

β)  $2(4x - 1) - 3(2x + 4)$

γ)  $5(x - 3y) - 4(x - y + 3) - x + 12$

**6**

Γράψε τις παρακάτω παραστάσεις με τη μορφή μίας δύναμης:

α)  $3^2 \cdot 3^3 \cdot 3$

β)  $(-5)^8 \cdot (-5)^{-3} \cdot (-5) \cdot (-5)^{-1}$

γ)  $\frac{(-2)^6(-2)^5}{(-2)^3}$

δ)  $7^8 \cdot \frac{7 \cdot 7^2}{(7 \cdot 7^4)^2}$

ε)  $(6^{-1})^{-2} \cdot 6^0 \cdot (6^{-4})^2$

στ)  $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-5} \cdot 4^{-3} \cdot 8$

**7**

Απλοποιήσε τις παραστάσεις:

α)  $2x^3 \cdot 5x^2$

β)  $(x^2)^{-3} \cdot (x^2)^2 \cdot x$

γ)  $\left(\frac{1}{3}xy^3\right)^{-1} \cdot (3x^2y)^3$

δ)  $\left(-\frac{1}{5}a\beta^3\gamma^3\right) : \left(-\frac{1}{10}a\gamma^4\right)$

ε)  $(xy)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}xy^3\right)^{-1} \cdot \left(-\frac{1}{4}x^{-4}\right)$

**8**

Υπολόγισε τις τιμές των παραστάσεων:

α)  $(-1)^5 - (-1)^3 - (-1)^0 - (-1)^2 - (-1)^4$

β)  $(-2^3)^2 \cdot 2^{-3} \cdot 2$

γ)  $2^4 \cdot 5^4 + 0,4^6 \cdot 5^6$

δ)  $\frac{15^3}{5^3} + \frac{16^4}{8^4} - \frac{35^2}{7^2}$

ε)  $\frac{(-12)^{-3}}{(-6)^{-3}} + \frac{(-4)^5}{4^5} - \frac{(-24)^2}{8^2}$

**9**

Υπολόγισε την τιμή των παρακάτω παραστάσεων:

α)  $|5 - 8| + |-3 + 7| - |4 - 9|$

β)  $|5 - 12|^2 + \left(\frac{|-4 + 2|}{2}\right)^2 - |3^2 + 7|$

γ)  $|6 - 9|^3 + \left(\frac{|-6 + 4|}{4}\right)^{-2} - |3^2|^2$

**10**

Απλοποιήσε την παράσταση:

$$A = \frac{(\alpha^2 \cdot \beta^{-1})^3 \cdot \beta^4}{\alpha \cdot \beta^{-5} \cdot \beta}$$

 Στη συνέχεια, βρες την τιμή της παράστασης A για  $\alpha = 2,5$  και  $\beta = 0,8$ .

Εξασκούμε



σε όσα έμαθα

# 1.4 | Ιδιότητες τετραγωνικών ριζών (ρίζα γινομένου και πηλίκου)



Αξιοποιώντας την αριθμομηχανή υπολόγισε τους παρακάτω αριθμούς:

|                 |                                |                                  |
|-----------------|--------------------------------|----------------------------------|
| • $\sqrt{5} =$  | • $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20} =$ | • $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} =$ |
| • $\sqrt{20} =$ | • $\sqrt{5 \cdot 20} =$        | • $\sqrt{\frac{20}{5}} =$        |

Τι παρατηρείς;

## Τετραγωνική ρίζα

### Θυμόμαστε – Μαθαίνουμε:

Τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού  $a$ , λέγεται ο θετικός αριθμός, ο οποίος, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον αριθμό  $a$ .



- Η τετραγωνική ρίζα του  $a$  συμβολίζεται με  $\sqrt{a}$ .  $\sqrt{a}$  ✓ τετραγωνική ρίζα  
↘ υπόριζη ποσότητα
- Ορίζουμε επίσης:  $\sqrt{0} = 0$ .

Από τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας προκύπτουν τα εξής:

- Δεν ορίζεται ρίζα αρνητικού αριθμού γιατί δεν υπάρχει αριθμός που το τετράγωνό του να είναι αρνητικός αριθμός. Για παράδειγμα δεν ορίζεται η  $\sqrt{-1}$ .
- Είναι λάθος να γράψουμε  $\sqrt{25} = -5$  παρόλο που  $(-5)^2 = 25$ .
- Επίσης:

Αν  $a \geq 0$ , με  $\sqrt{a} = x$  τότε  $x^2 = a$ , όπου  $x \geq 0$ .

Αν  $a \geq 0$ , τότε  $(\sqrt{a})^2 = a$ .

Γενικά ισχύει ότι:

$\sqrt{x^2} = |x|$

Π.χ.  $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$ .

## Ιδιότητες των ριζών

Παρατηρούμε ότι:

•  $\sqrt{100 \cdot 4} = \sqrt{400} = 20$

• και  $\sqrt{100} \cdot \sqrt{4} = 10 \cdot 2 = 20$ .

Άρα:  $\sqrt{4 \cdot 100} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{100}$ .

Επίσης

•  $\sqrt{\frac{100}{4}} = \sqrt{25} = 5$  και

•  $\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{4}} = \frac{10}{2} = 5$ .

Άρα:  $\sqrt{\frac{100}{4}} = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{4}}$ .

**Γενικά:**

Αν  $\alpha, \beta$  δύο μη αρνητικοί αριθμοί, τότε:

Το **γινόμενο** των τετραγωνικών ριζών τους ισούται με την τετραγωνική ρίζα του γινομένου τους.

$$\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha \cdot \beta}.$$

**Παράδειγμα:**  $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{3 \cdot 12} = \sqrt{36} = 6.$

*Σχόλιο:* Παρατηρούμε ότι το γινόμενο των άρρητων αριθμών  $\sqrt{3}$  και  $\sqrt{12}$  είναι ρητός αριθμός.

Το **πηλίκο** των τετραγωνικών ριζών τους ισούται με την τετραγωνική ρίζα του πηλίκου τους.

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}, \quad \beta > 0.$$

**Παράδειγμα:**  $\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{28}{7}} = \sqrt{4} = 2.$

*Σχόλιο:* Παρατηρούμε ότι το πηλίκο των άρρητων αριθμών  $\sqrt{28}$  και  $\sqrt{7}$  είναι ρητός αριθμός.

**Αποδείξεις:**

α)  $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha \cdot \beta}$

Υψώνουμε το 1<sup>ο</sup> μέλος της εξίσωσης στο τετράγωνο:

$$(\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta})^2 = (\sqrt{\alpha})^2 \cdot (\sqrt{\beta})^2 = \alpha \cdot \beta$$

Υψώνουμε το 2<sup>ο</sup> μέλος της εξίσωσης στο τετράγωνο:

$$(\sqrt{\alpha \cdot \beta})^2 = \alpha \cdot \beta$$

Παρατηρούμε ότι τα δύο μέλη της εξίσωσης είναι μη αρνητικά και έχουν το ίδιο τετράγωνο  $\alpha \cdot \beta$ , άρα είναι ίσα, δηλαδή:

$$\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha \cdot \beta}.$$

β) Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει:  $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}, \quad \beta > 0.$

Παρατηρούμε:

$$\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

$$\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7.$$

Άρα:  $\sqrt{16+9} \neq \sqrt{16} + \sqrt{9}$

Γενικά, αν  $\alpha, \beta$  είναι θετικοί αριθμοί, τότε  $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \neq \sqrt{\alpha + \beta}.$

Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση



1. Να αποδείξετε ότι:  $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ .

**Λύση:**

Είναι  $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ .

Παρατήρηση: Ο αριθμός 12 μπορεί να αναλυθεί και με άλλον τρόπο σε γινόμενο παραγόντων π.χ.  $12 = 2 \cdot 6$ , αλλά οι αριθμοί 2 και 6 δεν είναι τέλεια τετράγωνα (δηλαδή τετράγωνα φυσικών αριθμών).

Γενικά ισχύει:  $\sqrt{a^2 \cdot \beta} = a \cdot \sqrt{\beta}$ , για τους μη αρνητικούς αριθμούς  $a$  και  $\beta$ .

2. Να αποδείξετε ότι:  $\sqrt{8} + \sqrt{50} - \sqrt{32} = 3\sqrt{2}$ .

**Λύση:**

$$\begin{aligned} \sqrt{8} + \sqrt{50} - \sqrt{32} &= \sqrt{4 \cdot 2} + \sqrt{25 \cdot 2} - \sqrt{16 \cdot 2} \\ &= \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} && \leftarrow \text{Είναι } \sqrt{a} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{a \cdot \beta}. \\ &= 2\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 4\sqrt{2} \\ &= (2 + 5 - 4) \cdot \sqrt{2} && \leftarrow \text{Προκύπτει από την εφαρμογή της επιμεριστικής} \\ &= 3\sqrt{2}. && \text{ιδιότητας.} \end{aligned}$$

3. Να αποδείξετε ότι η πλευρά  $a$  ενός τετραγώνου με εμβαδόν  $20\text{m}^2$  είναι  $a = 2\sqrt{5}$  m.

**Λύση:**

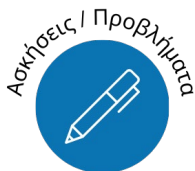
Το εμβαδόν του τετραγώνου είναι:  $a^2 = 20 \text{ m}^2$ ,

άρα η πλευρά του τετραγώνου είναι:  $a = \sqrt{20} \text{ m} = \sqrt{4 \cdot 5} \text{ m} = (\sqrt{4} \cdot \sqrt{5})\text{m} = 2\sqrt{5} \text{ m}$ .

Εξασκούμε



σε όσα έμαθα



1

Χαρακτήρισε ως Σωστές ή Λάθος τις προτάσεις που ακολουθούν βάζοντας ένα x στην κατάλληλη θέση.

- α) Η τετραγωνική ρίζα αρνητικού αριθμού δεν ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς.
- β) Το γινόμενο των τετραγωνικών ριζών δύο θετικών αριθμών είναι ίσο με την τετραγωνική ρίζα του γινομένου τους.
- γ) Η τετραγωνική ρίζα του 25 δίνει αποτέλεσμα τους αριθμούς -5 και 5.
- δ) Το πηλίκο των τετραγωνικών ριζών δύο μη αρνητικών αριθμών είναι ίσο με την τετραγωνική ρίζα του πηλίκου τους.
- ε) Το γινόμενο των άρρητων αριθμών  $\sqrt{2}$  και  $\sqrt{8}$  είναι ρητός αριθμός.

Σωστό      Λάθος

|  |  |
|--|--|
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

2

Επίλεξε τη σωστή απάντηση:

α) Ο αριθμός  $\sqrt{80}$  είναι ίσος με:

- i.  $4\sqrt{10}$       ii.  $8\sqrt{10}$       iii.  $4\sqrt{5}$       iv. 40

β) Το μισό του αριθμού  $\sqrt{8}$  είναι:

- i.  $\sqrt{4}$       ii.  $\sqrt{2}$       iii. 4      iv.  $\sqrt{16}$

γ) Ένα τετράγωνο έχει εμβαδόν  $50\text{cm}^2$ . Το μήκος της πλευράς του είναι:

- i. 5      ii. 25      iii.  $2\sqrt{5}$       iv.  $5\sqrt{2}$

δ) Το κλάσμα  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  έχει άρρητο παρονομαστή. Ένα ισοδύναμό του με ρητό παρονομαστή είναι:

- i.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       ii.  $\frac{1}{2}$       iii.  $\frac{\sqrt{2}}{1}$       iv.  $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

3

Υπολόγισε την τιμή των παραστάσεων:

α)  $\sqrt{16 \cdot 25}$       β)  $\sqrt{\frac{81}{9}}$       γ)  $\sqrt{144 \cdot 9}$       δ)  $\sqrt{\frac{225}{16}}$

ε)  $\frac{\sqrt{200}}{\sqrt{8}}$       στ)  $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{12}}$       ζ)  $\frac{\sqrt{128}}{\sqrt{2}}$

4

Υπολόγισε την τιμή των παραστάσεων:

α)  $\sqrt{50} \cdot \sqrt{18}$       β)  $\sqrt{27 \cdot 3} \cdot \sqrt{4}$       γ)  $\sqrt{32 \cdot 4} \cdot \sqrt{8}$       δ)  $\sqrt{45 \cdot 5} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{3 \cdot 2}$

5

Γράψε τις ρίζες σε απλούστερη μορφή, όπως το παράδειγμα:  $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

α)  $\sqrt{20} = \dots\dots$       β)  $\sqrt{32} = \dots\dots$       γ)  $\sqrt{75} = \dots\dots$       δ)  $\sqrt{72} = \dots\dots$       ε)  $\sqrt{1800} = \dots\dots$

6

Απόδειξε τις ισότητες:

α)  $\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{72} = 2\sqrt{2}$

β)  $\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{75} = 0$

γ)  $\sqrt{45} - \sqrt{5} - \sqrt{80} = -2\sqrt{5}$

δ)  $\sqrt{32} + \sqrt{18} + \sqrt{8} + \sqrt{2} = 10\sqrt{2}$

ε)  $\sqrt{27} - \sqrt{12} = \sqrt{3}$

στ)  $3\sqrt{20} - \sqrt{45} - 4\sqrt{5} = -\sqrt{5}$

7

Υπολόγισε τις παραστάσεις:

α)  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{12} + \sqrt{\sqrt{81}}$

β)  $(\sqrt{7} + \sqrt{5})(\sqrt{7} - \sqrt{5})$

γ)  $(4\sqrt{12} - \sqrt{3}) \cdot \sqrt{3} - (5\sqrt{50}) \cdot \sqrt{2}$

8

Υπολόγισε τις παραστάσεις:

α)  $\sqrt{5 + \sqrt{14 + \sqrt{2 + \sqrt{4}}}}$

β)  $\sqrt{3 + \sqrt{9\sqrt{2}\sqrt{64}}}$

γ)  $\frac{2\sqrt{72} + 4\sqrt{18}}{2\sqrt{8}}$

Εξασκούμε



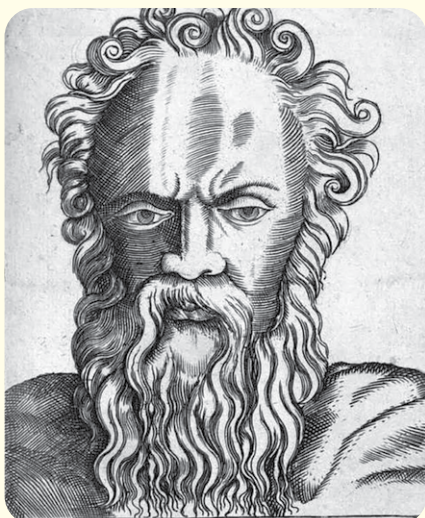
σε όσα έμαθα



Μελετώ



το συγκεκριμένο θέμα



Φανταστική γκραβούρα του φιλοσόφου Ιππάσου του Μεταπόντου. Από το βιβλίο του 1580 "Illustrium philosophorum et sapientum effigies ab eorum numistatibus extractae, του Girolamo Olgiati".

## Η Τετραγωνική Ρίζα

Η τετραγωνική ρίζα του 2 ήταν ο πρώτος αριθμός που ανακαλύφθηκε ως άρρητος, πιθανότατα από τον Ίππασο, έναν Πυθαγόρειο μαθηματικό στην Αρχαία Ελλάδα. Η ανακάλυψη αυτή αμφισβήτησε την πεποίθηση που υπήρχε μέχρι τότε, ότι όλοι οι αριθμοί μπορούν να εκφραστούν ως κλάσματα.

Γενικά, οι Πυθαγόρειοι ανέπτυξαν μεθόδους για την προσέγγιση άρρητων αριθμών με κλασματική αναδρομή. Η σύγχρονη χρήση του συμβόλου της ρίζας καθιερώθηκε το 1525 από τον Christoff Rudolf. Η μελέτη της τετραγωνικής ρίζας οδήγησε επίσης στην ανάπτυξη των μιγαδικών αριθμών.

# Ανακεφαλαίωση (Πραγματικοί αριθμοί)

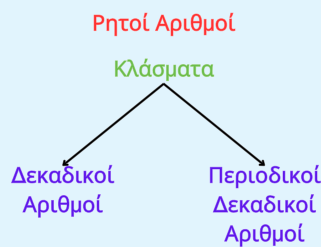
## Σύνολα αριθμών

- **Φυσικοί αριθμοί (N):** 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ...
- **Ακέραιοι αριθμοί (Z):** Είναι οι φυσικοί αριθμοί μαζί με τους αντίστοιχους αρνητικούς τους:  
... -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...
- **Ρητοί αριθμοί (Q):** Είναι οι αριθμοί που έχουν ή μπορούν να πάρουν τη μορφή ενός κλάσματος  $\frac{\mu}{\nu}$ , όπου  $\mu, \nu$  ακέραιοι αριθμοί με  $\nu \neq 0$ .  
Π.χ.  $5 = \frac{5}{1}, -0,01 = -\frac{1}{100}, 0,333... = \frac{1}{3}$ .
- **Άρρητοι** λέγονται οι αριθμοί που δεν είναι ρητοί, δηλαδή οι άρρητοι αριθμοί δεν μπορούν να πάρουν τη μορφή  $\frac{\mu}{\nu}$ , όπου  $\mu, \nu$  ακέραιοι και  $\nu \neq 0$ .  
Π.χ.  $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \dots$  ο αριθμός  $\pi = 3,14... ,$  ο αριθμός  $0,10100100010000\dots$
- **Πραγματικοί αριθμοί (R):** Αποτελούνται από τους ρητούς και από τους άρρητους αριθμούς. Οι πραγματικοί αριθμοί αποτελούν το σύνολο όλων των αριθμών που έχουμε μελετήσει έως τώρα.

Οι πραγματικοί αριθμοί καλύπτουν πλήρως την ευθεία των αριθμών.

Οι δεκαδικοί αριθμοί που έχουν άπειρα δεκαδικά ψηφία, με ένα τμήμα επαναλαμβανόμενων δεκαδικών ψηφίων ονομάζονται **περιοδικοί δεκαδικοί αριθμοί** και το τμήμα των δεκαδικών ψηφίων που επαναλαμβάνεται ονομάζεται **περίοδος**.

Κάθε ρητός αριθμός μπορεί να γραφεί ως **δεκαδικός** ή **περιοδικός δεκαδικός** αριθμός.



Οι **άρρητοι** αριθμοί έχουν άπειρο πλήθος δεκαδικών ψηφίων μη περιοδικών.

## Σύγκριση:

- Μεγαλύτερος από δύο θετικούς ρητούς είναι εκείνος που έχει την μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.  
Π.χ.  $+2 < +3$ .
- Μεγαλύτερος από δύο αρνητικούς ρητούς είναι εκείνος που έχει την μικρότερη απόλυτη τιμή.  
Π.χ.  $-2 > -3$ .

Η **απόλυτη τιμή** ενός πραγματικού αριθμού  $a$  συμβολίζεται με  $|a|$  και είναι ίση με την απόσταση του σημείου, που παριστάνει τον αριθμό  $a$ , από την αρχή  $O$  του άξονα.

## Οι πράξεις στους πραγματικούς αριθμούς

### Πρόσθεση

- Για να προσθέσουμε δύο ομόσημους αριθμούς, προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο άθροισμά βάζουμε το πρόσημό τους.
- Για να προσθέσουμε δύο ετερόσημους αριθμούς, αφαιρούμε την μικρότερη απόλυτη τιμή από τη μεγαλύτερη και στη διαφορά βάζουμε το πρόσημο του αριθμού που έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

### Πολλαπλασιασμός

- Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ομόσημους αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους, και στο γινόμενο αυτό βάζουμε πρόσημο + .
- Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ετερόσημους αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους, και στο γινόμενο αυτό βάζουμε πρόσημο - .

$$\begin{array}{l}
 + \cdot + = + \\
 + \cdot - = - \\
 - \cdot + = - \\
 - \cdot - = +
 \end{array}$$

### Οι ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού

| Ιδιότητα                | Πρόσθεση   | Πολλαπλασιασμός   |
|-------------------------|--|---|
| Αντιμεταθετική          | $\alpha + \beta = \beta + \alpha$  | $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$                               |
| Προσεταιριστική         | $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$                        | $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$ |
| Ουδέτερο στοιχείο       | $\alpha + 0 = \alpha$  | $\alpha \cdot 1 = \alpha$   |
| Αντίθετος / Αντίστροφος | $\alpha + (-\alpha) = 0$   | $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1, \alpha \neq 0$                      |
| Επιμεριστική            | $\alpha \cdot (\beta \pm \gamma) = \alpha \cdot \beta \pm \alpha \cdot \gamma$ |   |

### Επίσης ισχύουν:

- $\alpha \cdot 0 = 0$ .
- Αν  $\alpha \cdot \beta = 0$ , τότε  $\alpha = 0$  ή  $\beta = 0$ .
- Αν  $\alpha + \beta = 0$  τότε οι αριθμοί  $\alpha$  και  $\beta$  λέγονται **αντίθετοι**.  
 Αν  $\alpha \cdot \beta = 1$  τότε οι αριθμοί  $\alpha$  και  $\beta$  λέγονται **αντίστροφοι**.

## Αφαίρεση – Διαίρεση

- Για να βρούμε τη διαφορά δύο αριθμών, προσθέτουμε στο μειωτέο τον αντίθετο του αφαιρετέου.

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$$

- Για να βρούμε το πηλίκο δύο αριθμών ( $\alpha : \beta$ , με  $\beta \neq 0$ ), πολλαπλασιάζουμε το διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.

$$\alpha : \beta = \alpha \cdot \frac{1}{\beta} \quad \text{ή} \quad \frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$$

## Δυνάμεις

Η **δύναμη** με βάση έναν πραγματικό αριθμό  $\alpha$  και εκθέτη ένα φυσικό αριθμό  $n > 1$  συμβολίζεται με  $\alpha^n$  και είναι το γινόμενο  $n$  παραγόντων ίσων με τον αριθμό  $\alpha$ .

$$\alpha^n = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha}_n \text{ παράγοντες}$$

| Ιδιότητες   | Παραδείγματα   |
|---|--|
| 1. $\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$                                   | $2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5$                              |
| 2. $\alpha^\mu : \alpha^\nu = \alpha^{\mu-\nu}$                                       | $3^5 : 3^3 = 3^{5-3} = 3^2$                                  |
| 3. $(\alpha \cdot \beta)^\nu = \alpha^\nu \cdot \beta^\nu$                            | $(9 \cdot 8)^2 = 9^2 \cdot 8^2$                              |
| 4. $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu = \frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu}$             | $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4}$               |
| 5. $(\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu\nu}$   | $(7^2)^3 = 7^{2 \cdot 3} = 7^6$                              |
| 6. $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\nu$ | $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{2}\right)^4$ |

## Τετραγωνική ρίζα

**Τετραγωνική ρίζα** ενός θετικού αριθμού  $\alpha$ , λέγεται ο θετικός αριθμός, ο οποίος, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον αριθμό  $\alpha$ .

- Η τετραγωνική ρίζα του  $\alpha$  συμβολίζεται με  $\sqrt{\alpha}$ .
- Ορίζουμε επίσης:  $\sqrt{0} = 0$ .
- Επίσης:

$$\text{Αν } \alpha \geq 0, \text{ με } \sqrt{\alpha} = x \text{ τότε } x^2 = \alpha, \text{ όπου } x \geq 0.$$

$$\text{Αν } \alpha \geq 0, \text{ τότε } (\sqrt{\alpha})^2 = \alpha.$$

### Γενικά:

Αν  $\alpha, \beta$  δύο μη αρνητικοί αριθμοί, τότε:

- Το γινόμενο των τετραγωνικών ριζών τους ισούται με την τετραγωνική ρίζα του γινομένου τους.

$$\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha \cdot \beta}.$$

- Το πηλίκο των τετραγωνικών ριζών τους ισούται με την τετραγωνική ρίζα του πηλίκου τους.

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}, \quad \beta > 0.$$

**Γενικά**, αν  $\alpha, \beta$  είναι θετικοί αριθμοί, τότε  $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \neq \sqrt{\alpha + \beta}$ .

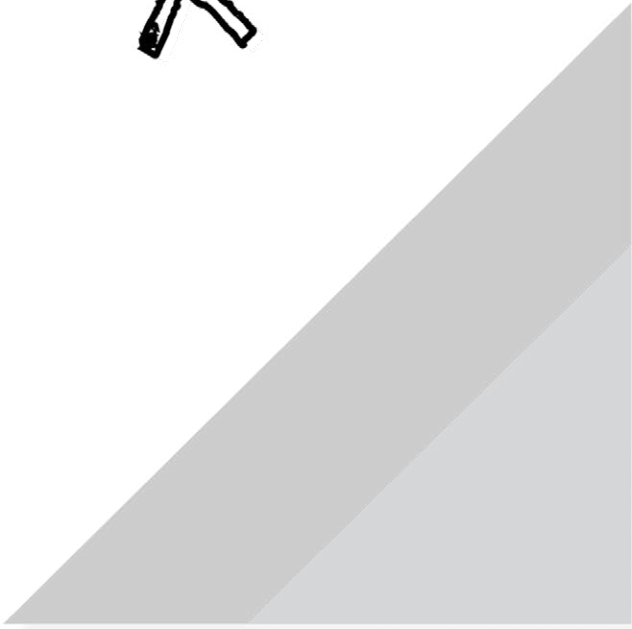
## Αυτοαξιολόγηση (Πραγματικοί αριθμοί)

Χαρακτήρισε ως Σωστές ή Λάθος τις προτάσεις, βάζοντας ένα **x** στην κατάλληλη θέση.

|   | Σωστό | Λάθος |
|---|-------|-------|
| 1. Ο αριθμός $-\frac{6}{3}$ είναι ρητός και ακέραιος αριθμός.   |       |       |
| 2. Ο αριθμός $\sqrt{64}$ είναι ρητός, ακέραιος και φυσικός αριθμός.                                       |       |       |
| 3. Αν ένας αριθμός έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία τότε είναι άρρητος αριθμός.                                 |       |       |
| 4. Είναι $ 5 - 2  = 5 + 2$ .  |       |       |
| 5. Ισχύει ότι $0,\bar{3} > 0,3$ .   |       |       |
| 6. Ο αριθμός $\frac{5}{11}$ βρίσκεται δεξιότερα στην αριθμογραμμή από τον αριθμό $\frac{1}{2}$ .          |       |       |
| 7. Κάθε ρητός αριθμός έχει ή μπορεί να πάρει τη μορφή κλάσματος με ακέραιους όρους.                       |       |       |
| 8. Κάθε ακέραιος αριθμός είναι ρητός αριθμός.   |       |       |
| 9. Ο αριθμός $\sqrt{5}$ έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία χωρίς κάποιο τμήμα επαναλαμβανόμενων δεκαδικών ψηφίων. |       |       |
| 10. Μεγαλύτερος από δύο αρνητικούς ρητούς είναι εκείνος που έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.              |       |       |
| 11. Η απόλυτη τιμή ενός αρνητικού αριθμού είναι ο αντίθετός του.  |       |       |
| 12. Το γινόμενο δύο ετερόσημων αριθμών είναι αρνητικό.  |       |       |
| 13. Αν $\alpha - \beta = 0$ τότε οι αριθμοί $\alpha$ και $\beta$ λέγονται αντίθετοι.                      |       |       |
| 14. Αν $\alpha \cdot \beta = 1$ τότε οι αριθμοί $\alpha$ και $\beta$ λέγονται αντίστροφοι.                |       |       |
| 15. Ισχύει $\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu \cdot \nu}$ .                                   |       |       |
| 16. Ο αριθμός $2^{-5}$ είναι αρνητικός αριθμός.   |       |       |
| 17. Ο αριθμός $-2^{-2}$ είναι αρνητικός αριθμός.  |       |       |
| 18. Είναι $\sqrt{\alpha \cdot \beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$ .                                |       |       |
| 19. Είναι $\sqrt{\alpha + \beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ .  |       |       |
| 20. Το διπλάσιο του αριθμού $\sqrt{10}$ είναι ο αριθμός $\sqrt{40}$ .                                     |       |       |

Σε αυτό το σημείο, θα πρέπει να είσαι σε θέση να ικανοποιείς όλους τους προσδοκώμενους μαθησιακούς στόχους. Γύρνα στην αρχή της θεματικής ενότητας και σημείωσε ✓ στα αντίστοιχα σημεία. Υπάρχουν στόχοι που αισθάνεσαι ότι δεν έχεις ικανοποιήσει πλήρως;

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$



# ΚΑΝΟΝΙΚΟΤΗΤΕΣ

## A.2

Στην ενότητα αυτή θα διερευνήσουμε μαθηματικές κανονικότητες της μορφής  $y=ax^2$ . Θα ανακαλύψουμε πώς αυτές οι κανονικότητες μπορούν να περιγράψουν φαινόμενα της φύσης και της καθημερινότητας.

Είσαι έτοιμος/η να δεις πώς τα μαθηματικά μοτίβα σε βοηθούν να προβλέπεις και να εξηγείς τον κόσμο γύρω σου;



- Διερευνώ μαθηματικές κανονικότητες και τις εκφράζω με αλγεβρικές παραστάσεις της μορφής  $y = ax^2$ ,  $a > 0$

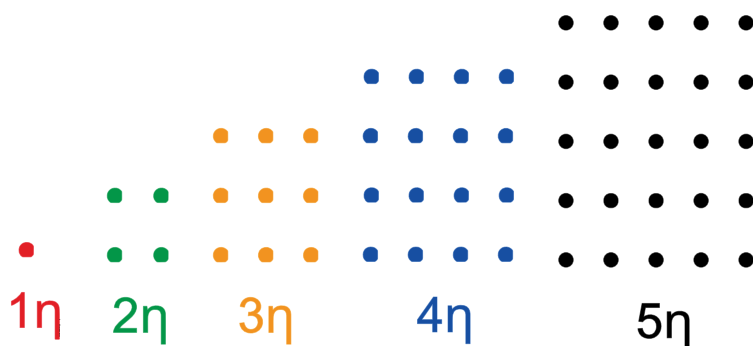


- 2.1: Κανονικότητες της μορφής  $a \cdot v^2$   
+ Ανακεφαλαίωση / Αυτοαξιολόγηση

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$



## 2.1 | Κανονικότητες της μορφής $a \cdot v^2$



Σφαιρίδια: ....

α) Σημείωσε κάτω από κάθε σχήμα τον αριθμό των σφαιριδίων από τα οποία αποτελείται.

β) Σχεδίασε τα δύο επόμενα σχήματα.

γ) Πόσα σφαιρίδια έχει το 6ο σχήμα και πόσα το 20ο ;

δ) Βρες τον κανόνα με τον οποίο προκύπτει κάθε επόμενο σχήμα.

ε) Βρες έναν κανόνα με τον οποίο μπορούμε να βρούμε τα σφαιρίδια από τα οποία αποτελείται το  $v$ -οστό σχήμα.

### Τέλεια τετράγωνα

Οι αριθμοί: 1, 4, 9, 16, 25, 36, ... είναι τα τετράγωνα των φυσικών αριθμών ( $\neq 0$ ) και ονομάζονται **τέλεια τετράγωνα**.

Τα τέλεια τετράγωνα αποτελούν μία κανονικότητα, καθώς εμφανίζονται σύμφωνα με τον κανόνα  $v^2$ , όπου  $v$  η σειρά κάθε αριθμού.

- Για  $v = 1$  έχουμε:  $1^2 = 1$
- Για  $v = 2$  έχουμε:  $2^2 = 4$
- Για  $v = 3$  έχουμε:  $3^2 = 9$
- Για  $v = 4$  έχουμε:  $4^2 = 16$
- Για  $v = 5$  έχουμε:  $5^2 = 25$

κ.ο.κ.

Ο γενικός όρος της κανονικότητας είναι:  $a_v = v^2$ .

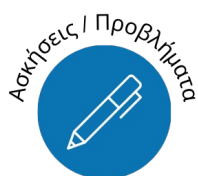
**Γενικά:**

Η κανονικότητα:  $1\alpha, 4\alpha, 9\alpha, 16\alpha, 25\alpha, 36\alpha, \dots$   
 προκύπτει από το γινόμενο των τέλειων τετραγώνων με έναν αριθμό  $\alpha$ .

Ο γενικός όρος της κανονικότητας είναι:  $\alpha \cdot v^2$ .

**Παράδειγμα:**

Η κανονικότητα  $2, 8, 18, 32, 50, \dots$  προκύπτει αν διπλασιάσουμε τα τέλεια τετράγωνα.  
 Οι αριθμοί αυτοί έχουν γενικό όρο:  $2 \cdot v^2$ .



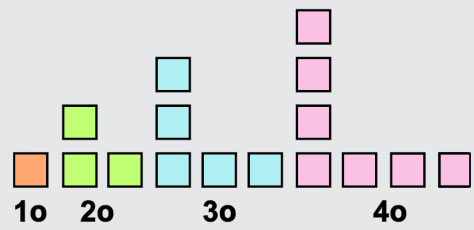
1

Τοποθετούμε τετράγωνα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, ώστε το σχήμα που θα σχηματιστεί να είναι επίσης τετράγωνο.

| Σειρά σχήματος ( $v$ ) | Σχήματα | Τετραγωνάκια ( $x$ ) |
|------------------------|---------|----------------------|
| $v = 1$                |         | 1                    |
| $v = 2$                |         | 4                    |
| $v = 3$                |         |                      |
| $v = 4$                |         |                      |
| $v = 5$                |         |                      |

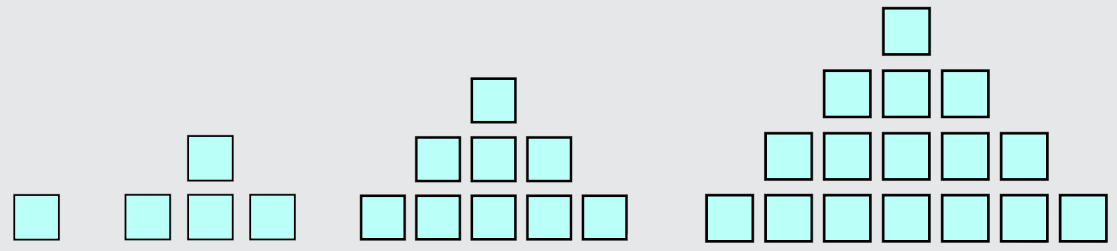
- α) Συμπλήρωσε τον παραπάνω πίνακα.
- β) Βρες τον κανόνα που δίνει το πλήθος των μικρών τετραγώνων  $x$  από τα οποία αποτελείται ένα μεγάλο τετράγωνο πλευράς  $v$ .
- γ) Από πόσα τετραγωνάκια αποτελείται το σχήμα στην 100η σειρά;
- δ) Σε ποια σειρά βρίσκεται το τετράγωνο το οποίο αποτελείται από 169 μικρά τετράγωνα;

**2** Οι Γνώμονες του Πυθαγόρα:

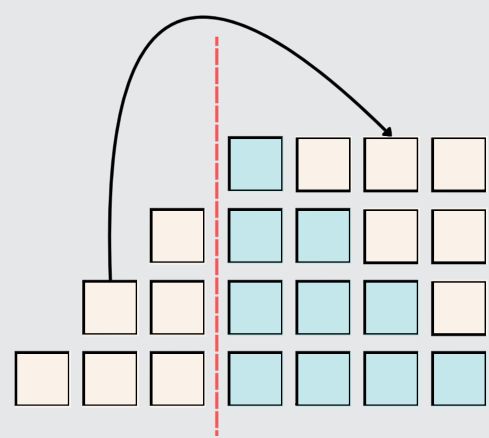


- α) Από πόσα τετραγωνάκια αποτελείται κάθε σχήμα;
- β) Σχεδίασε τα δύο επόμενα σχήματα.
- γ) Πόσα τετραγωνάκια έχει το 10ο σχήμα;
- δ) Πόσους τύπους που περιγράφουν το πλήθος των τετραγώνων μπορείς να βρεις;
- ε) Υπολόγισε το άθροισμα των τετραγώνων των δύο, τριών και τεσσάρων πρώτων σχημάτων.
- στ) Με ποιον τρόπο θα υπολόγιζες το άθροισμα των τετραγώνων των 50 πρώτων σχημάτων;

**3** Παρατήρησε το παρακάτω σχήμα και προσπάθησε να απαντήσεις στις ερωτήσεις:



- α) Πόσα τετράγωνα θα έχει το επόμενο σχήμα;
- β) Πόσα τετράγωνα θα έχει το εικοστό σχήμα;
- γ) Ποιος είναι ο τύπος που περιγράφει το πλήθος των τετραγώνων γενικά;
- δ) Προσπάθησε να «κόψεις» κατάλληλα καθένα από τα παραπάνω σχήματα ώστε να δημιουργήσεις τετράγωνα, όπως φαίνεται στην εικόνα:



Σχημάτισε με τον τρόπο αυτόν το επόμενο σχήμα.

Εξασκούμαι

σε όσα έμαθα

4

Συμπλήρωσε τους παρακάτω πίνακες με τα αντίστοιχα γινόμενα γραμμών – στηλών, όπως φαίνεται στο παράδειγμα:

| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  |
|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  |
| 2 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 3 |   |   |   |   |    |    |    |    |    |
| 4 |   |   |   |   |    |    |    |    |    |
| 5 |   |   |   |   |    |    |    |    |    |
| 6 |   |   |   |   |    |    |    |    |    |
| 7 |   |   |   |   |    |    |    |    |    |
| 8 |   |   |   |   |    |    |    |    |    |
| 9 |   |   |   |   |    |    |    |    |    |

Οι αριθμοί στη διαγώνιο αποτελούν μία κανονικότητα με γενικό όρο: \_\_\_\_\_

5

Γράψε τα 20 πρώτα τέλεια τετράγωνα.

6

Γράψε τους πέντε πρώτους όρους από τις κανονικότητες με γενικό όρο:

- α)  $v^2$                       β)  $2 \cdot v^2$                       γ)  $3 \cdot v^2$                       δ)  $10 \cdot v^2$



Μελετώ



το συγκεκριμένο θέμα

## Οι Τετραγωνικοί αριθμοί

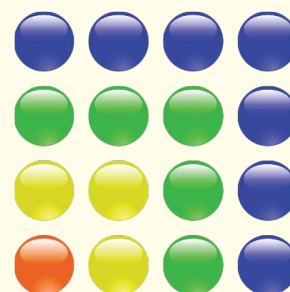
Τετραγωνικός αριθμός ή τέλειο τετράγωνο είναι ένας φυσικός αριθμός που είναι το τετράγωνο ενός άλλου ακέραιου αριθμού. Είναι δηλαδή το γινόμενο κάποιου ακέραιου με τον εαυτό του.

### Ιστορική αναδρομή

Οι τετραγωνικοί αριθμοί αποτελούν μέρος της μελέτης των μαθηματικών από την αρχαιότητα. Στην αρχαία Ελλάδα, οι Πυθαγόρειοι ασχολήθηκαν με την τετραγωνική ρίζα, ειδικά μετά την ανακάλυψη ότι η τετραγωνική ρίζα του 2 είναι άρρητος αριθμός. Ο 18ος αιώνας έφερε το θεώρημα των τεσσάρων τετραγώνων του Λαγκράνζ, το οποίο έδειξε ότι κάθε θετικός ακέραιος μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα τεσσάρων τετραγωνικών αριθμών. Σήμερα, οι τετραγωνικοί αριθμοί χρησιμοποιούνται στην επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων και στη θεωρία αριθμών.

### Υπολογισμός τετραγωνικών αριθμών

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι υπολογισμού τετραγωνικών αριθμών. Ένας από αυτούς είναι ότι ο n-οστός τετραγωνικός αριθμός μπορεί να υπολογιστεί από τον προηγούμενο με τον τύπο  $n^2 = (n-1)^2 + (2n-1)$ .



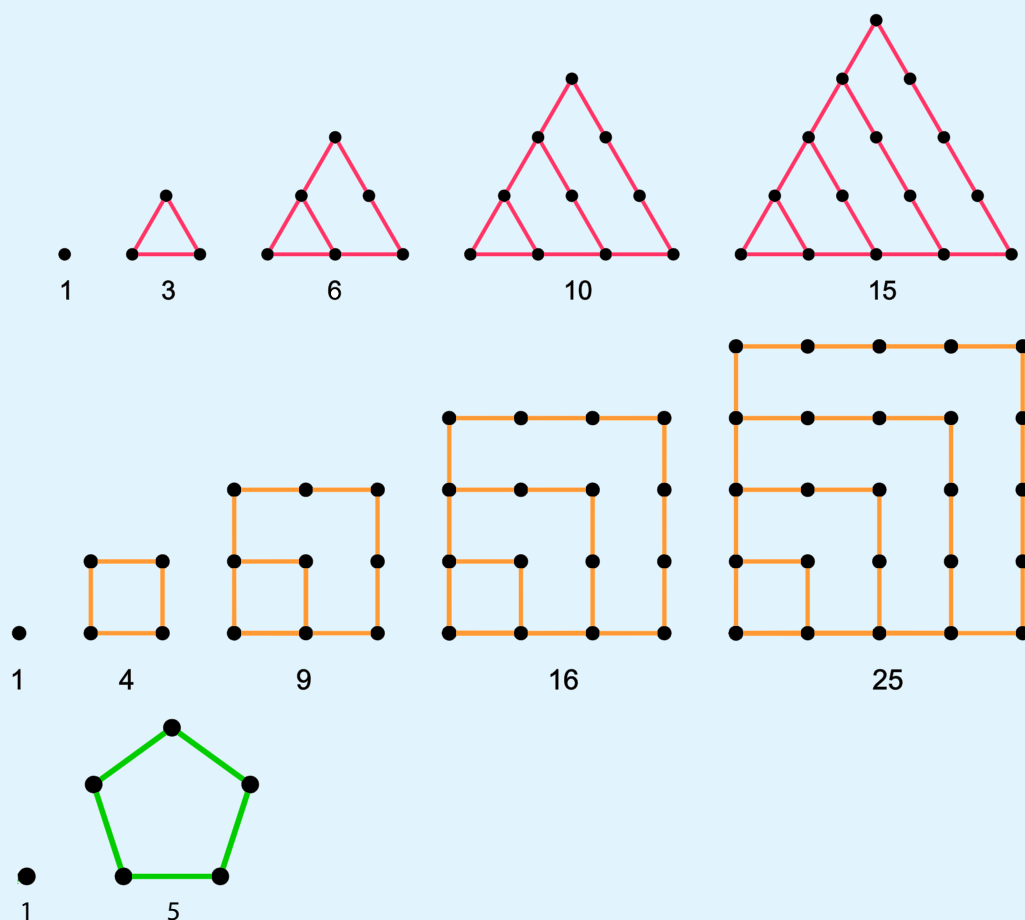
Ο τετραγωνικός αριθμός 16, εκφρασμένος ως το άθροισμα γινωμόνων.

## Ανακεφαλαίωση (Κανονικότητες της μορφής $an^2$ )

Οι Πυθαγόρειοι φιλόσοφοι αποτέλεσαν μια φιλοσοφική σχολή, η οποία ιδρύθηκε τον 6ο αιώνα π.Χ. από τον Πυθαγόρα τον Σάμιο στον Κρότωνα της Κάτω Ιταλίας. Οι γνώσεις μας για τους Πυθαγόρειους, όπως και για τον ίδιο τον Πυθαγόρα, προέρχονται αποκλειστικά από έργα μεταγενέστερων συγγραφέων. Οι Πυθαγόρειοι έβλεπαν τους αριθμούς ως πλήθος αντικειμένων, ανακαλύπτοντας τις «πυθαγόρειες τριάδες» και την έννοια της ασυμμετρίας, που αποτέλεσε σημαντικό επίτευγμα της σχολής τους. Επίσης, συνέδεσαν τους αριθμούς με την γεωμετρία. Εισηγάγαν την ιδέα των «πολυγωνικών αριθμών»: τριγωνικοί αριθμοί, τετραγωνικοί αριθμοί, πενταγωνικοί αριθμοί κ.λπ. Η «γεωμετρική ονοματολογία» γίνεται κατανοητή όταν οι αριθμοί απεικονίζονται με κουκκίδες διατεταγμένες σε σχήματα όπως τρίγωνα, τετράγωνα και πεντάγωνα.

### Ομαδική δραστηριότητα

Παρατηρήστε τα παρακάτω σχήματα και προσπαθήστε να συμπληρώσετε τα σχήματα που λείπουν:



Μπορείτε να εντοπίσετε κάποιο μοτίβο στην ακολουθία των αριθμών που προκύπτει;

Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση



Σε αυτό το σημείο, θα πρέπει να είσαι σε θέση να ικανοποιείς όλους τους προσδοκώμενους μαθησιακούς στόχους. Γύρνα στην αρχή της θεματικής ενότητας και σημείωσε ✓ στα αντίστοιχα σημεία. Υπάρχουν στόχοι που αισθάνεσαι ότι δεν έχεις ικανοποιήσει πλήρως;

# ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

A.3

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε αλγεβρικές παραστάσεις, από τα μονώνυμα και τα πολυώνυμα μέχρι και την εφαρμογή ταυτοτήτων. Θα μάθουμε επίσης να περιγράψουμε καταστάσεις της καθημερινής ζωής μέσω αλγεβρικών παραστάσεων.

Πώς μπορείς να χρησιμοποιήσεις τις ιδιότητες των πολυωνύμων στη μοντελοποίηση προβλημάτων;

Είσαι έτοιμος/η να αξιοποιήσεις τις αλγεβρικές σου γνώσεις για την επίλυση σύνθετων εφαρμογών;



- Εκφράζω ρεαλιστικές καταστάσεις με απλές αλγεβρικές παραστάσεις
- Αναγνωρίζω τα μονώνυμα και τα πολυώνυμα, τον βαθμό τους και υπολογίζω την αριθμητική τιμή ενός πολυωνύμου.
- Υπολογίζω το άθροισμα, τη διαφορά και το γινόμενο μονωνύμων και απλών πολυωνύμων κυρίως μιας μεταβλητής.
- Διερευνώ και αποδεικνύω αλγεβρικά και ερμηνεύω (όπου είναι δυνατόν) γεωμετρικά τις ταυτότητες:  $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ ,  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ .
- Χρησιμοποιώ τις ταυτότητες για να μετατρέπω αλγεβρικές παραστάσεις σε άλλη μορφή.
- Αναγνωρίζω την επιμεριστική ιδιότητα ως το βασικό κοινό στοιχείο των πράξεων πολυωνύμων, των ταυτοτήτων και της παραγοντοποίησης.
- Παραγοντοποιώ απλά πολυώνυμα (κυρίως μιας μεταβλητής) με κοινό παράγοντα, ομαδοποίηση και χρήση ταυτοτήτων.
- Προσδιορίζω το ΕΚΠ μονωνύμων και απλών πολυωνύμων μιας μεταβλητής.
- Υπολογίζω το αποτέλεσμα των πράξεων με απλές ρητές παραστάσεις (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση).
- Απλοποιώ ρητές παραστάσεις.



## 3.1: Μονώνυμα

## 3.2: Πράξεις με μονώνυμα

## 3.3: Πολυώνυμα, βαθμός πολυωνύμου, αριθμητική τιμή πολυωνύμου

## 3.4: Άθροισμα, διαφορά και γινόμενο πολυωνύμων μιας μεταβλητής

## 3.5: Ταυτότητες: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ , $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ .

## 3.6: Παραγοντοποίηση πολυωνύμων με κοινό παράγοντα, ομαδοποίηση και ταυτότητες

## 3.7: ΕΚΠ πολυωνύμων

## 3.8: Ρητές παραστάσεις, απλοποίηση

## 3.9: Πολλαπλασιασμός και διαίρεση ρητών παραστάσεων

## 3.10: Πρόσθεση και αφαίρεση ρητών παραστάσεων

## + Ανακεφαλαίωση / Αυτοαξιολόγηση

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$



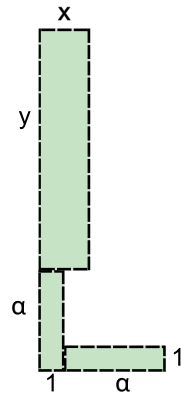
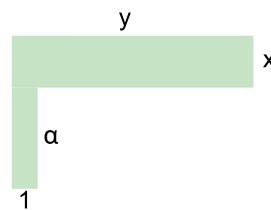
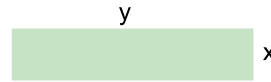
# 3.1 | Μονώνυμα



Βρες την περίμετρο και το εμβαδόν των παρακάτω σχημάτων.

Ποια είναι η αριθμητική τους τιμή αν γνωρίζεις ότι

$$x = 2, y = 4 \text{ και } \alpha = 3;$$



## Θυμόμαστε – Μαθαίνουμε:

**Αριθμητικές παραστάσεις** ονομάζονται οι παραστάσεις που περιέχουν πράξεις μόνο με αριθμούς.



**Παραδείγματα:**

$$1 + 2 \cdot 3, \quad 5 \cdot 8 - \frac{1}{2}, \quad 2 \cdot (-3)^2 + 4 : \frac{1}{3}.$$

**Αλγεβρικές παραστάσεις** ονομάζονται οι παραστάσεις που περιέχουν πράξεις με αριθμούς και μεταβλητές (ή πράξεις μόνο με μεταβλητές).

**Παραδείγματα:**

$$5x - \frac{2}{3}xy, \quad \frac{\alpha}{2\alpha^2 - 3\beta}, \quad x + x + x.$$

Αν σε μια αλγεβρική παράσταση αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές με αριθμούς και κάνουμε τις πράξεις, θα προκύψει ένας αριθμός που λέγεται **αριθμητική τιμή** ή απλά **τιμή** της αλγεβρικής παράστασης.

**Παράδειγμα:**

Η τιμή της αλγεβρικής παράστασης  $2x^2 + xy$  για  $x = 3$  και  $y = -1$ , είναι:  
 $2 \cdot 3^2 + 3 \cdot (-1) = 2 \cdot 9 - 3 = 18 - 3 = 15.$

## Μονώνυμα

**Μονώνυμα** λέγονται οι αλγεβρικές παραστάσεις οι οποίες αποτελούνται από τα παρακάτω:

- έναν αριθμητικό παράγοντα
- μεταβλητές με εκθέτες φυσικούς αριθμούς,

μεταξύ των οποίων σημειώνεται **μόνο** η πράξη του πολλαπλασιασμού.

Μονώνυμο:

$$5x^2y$$

**Παραδείγματα μονωνύμων:**  $5x$ ,  $x^3$ ,  $2x^3y^2$ ,  $-\frac{1}{5}a^4b$ ,  $(2 - \sqrt{3})xy^3z$ . Ακόμη, το  $\frac{x}{2}$  είναι μονώνυμο καθώς εκφράζει το γινόμενο  $\frac{1}{2} \cdot x$ .

- **Προσοχή**, οι επόμενες παραστάσεις δεν είναι μονώνυμα:  $\frac{2}{a-3}$ ,  $2\sqrt{x}$ ,  $1 + 3x^2$ ,  $5y^{-2}$ . Επίσης το  $\frac{5}{x}$  **δεν** είναι μονώνυμο καθώς ο διαιρέτης είναι μεταβλητή.

Συμφωνούμε ακόμη να θεωρούνται και οι αριθμοί ως μονώνυμα και τα ονομάζουμε **σταθερά μονώνυμα**.

**Παραδείγματα:** Οι αριθμοί  $5$ ,  $-1$ ,  $\frac{1}{2}$  είναι μονώνυμα.

**Σε ένα μονώνυμο:**

- Ο αριθμητικός παράγοντας ονομάζεται συντελεστής του μονωνύμου.
- Το γινόμενο όλων των μεταβλητών του με τους αντίστοιχους εκθέτες τους, λέγεται κύριο μέρος του μονωνύμου.

$$\underbrace{5}_{\text{Συντελεστής}} \cdot \underbrace{x^2y}_{\text{Κύριο μέρος}}$$

## Βαθμός μονωνύμου

**Βαθμός** του μονωνύμου ως προς όλες τις μεταβλητές του λέγεται το άθροισμα των εκθετών των μεταβλητών του.



- Ο εκθέτης μιας μεταβλητής λέγεται βαθμός του μονωνύμου ως προς τη μεταβλητή αυτή.

**Παράδειγμα:** Το μονώνυμο  $5x^2y$  είναι:

- 2<sup>ου</sup> βαθμού ως προς  $x$ .
- 1<sup>ου</sup> βαθμού ως προς  $y$ .
- 3<sup>ου</sup> βαθμού ως προς  $x$  και  $y$ .

2<sup>ου</sup> βαθμού ως προς  $x$       1<sup>ου</sup> βαθμού ως προς  $y$

$$5x^2y^1$$

Τα **σταθερά** μονώνυμα, (δηλαδή οι αριθμοί) είναι **μηδενικού βαθμού**. Ειδικότερα, ο αριθμός 0 λέγεται **μηδενικό μονώνυμο** και **δεν έχει βαθμό**.

Όμοια λέγονται τα μονώνυμα που έχουν το ίδιο κύριο μέρος.

**Παράδειγμα:** Τα μονώνυμα:  $2x^2y$ ,  $-5x^2y$ ,  $yx^2$  είναι όμοια γιατί έχουν όλα το ίδιο κύριο μέρος (το  $x^2y$ ).

## Ειδικότερα

- Τα όμοια μονώνυμα που έχουν τον ίδιο συντελεστή, λέγονται **ίσα**. π.χ.  $5x^2y$  και  $5yx^2$ .
- Τα όμοια μονώνυμα που έχουν αντίθετους συντελεστές, λέγονται **αντίθετα**. π.χ.  $2a\beta^3$  και  $-2a\beta^3$ .



1. Να βρείτε τον συντελεστή, το κύριο μέρος και τον βαθμό ως προς όλες τις μεταβλητές των μονωνύμων:

$$2x^3y^2, \quad -\frac{1}{5}a^2b, \quad \sqrt{2}a\beta^3\gamma, \quad xy.$$

Λύση:

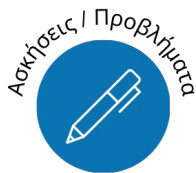
| Μονώνυμο                 | Συντελεστής    | Κύριο μέρος      | Βαθμός |
|--------------------------|----------------|------------------|--------|
| $2x^3y^2$                | 2              | $x^3y^2$         | 5      |
| $-\frac{1}{5}a^2b$       | $-\frac{1}{5}$ | $a^2b$           | 3      |
| $\sqrt{2}a\beta^3\gamma$ | $\sqrt{2}$     | $a\beta^3\gamma$ | 5      |
| $xy$                     | 1              | $xy$             | 2      |

2. Να βρείτε την αριθμητική τιμή του μονωνύμου  $-\frac{3}{2}x^3y^2$ , αν  $x = \frac{1}{2}$  και  $y = -3$ .

Λύση:

Αντικαθιστούμε τις τιμές  $x = \frac{1}{2}$  και  $y = -3$  στο μονώνυμο  $-\frac{2}{3}x^3y^2$  και βρίσκουμε:

$$-\frac{2}{3}x^3y^2 = -\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot (-3)^2 = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} \cdot 9 = -\frac{18}{24} = -\frac{3}{4}.$$



Εξασκούμε



σε όσα έμαθα

1. Χαρακτήρισε ως Σωστές ή Λάθος τις προτάσεις που ακολουθούν βάζοντας ένα x στην κατάλληλη θέση.

- α) Η παράσταση  $\frac{1}{2}x^2y^3z$  είναι μονώνυμο.
- β) Η παράσταση  $-5x^{-2}y^3$  είναι μονώνυμο.
- γ) Το μονώνυμο  $x^5y$  είναι 5ου βαθμού ως προς x και y.
- δ) Τα μονώνυμα  $2x^2y$  και  $2xy^2$  είναι ίσα.
- ε) Το 0 ονομάζεται μηδενικό μονώνυμο και δεν έχει βαθμό.

Σωστό      Λάθος

|  |  |
|--|--|
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

**2** Ποιες από τις παρακάτω παραστάσεις είναι μονώνυμα και ποια όχι; Αιτιολόγησε την απάντησή σου.

- α)  $4x^3$       β)  $3x + 2y$       γ)  $-7 + 11x$       δ)  $\frac{1}{2}z$       ε)  $\frac{1}{x^2}$       στ)  $8\alpha^2\beta^{-1}$

**3** Ποια από τα μονώνυμα

$$2x^2y, -2y^2x, 2xy^2, 2x^2y^2, -2xy, 2yx^2,$$

- α) είναι όμοια;  
β) είναι ίσα;  
γ) είναι αντίθετα;

**4** Δίνεται το μονώνυμο  $-5x^2y^3z$ . Συμπλήρωσε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

- Το μονώνυμο έχει συντελεστή ..... και κύριο μέρος .....
- Είναι ..... βαθμού ως προς  $x$ , είναι ..... βαθμού ως προς  $y$  και είναι ..... βαθμού ως προς  $z$ .
- Είναι ..... βαθμού ως προς  $x, y$  και  $z$ .
- Το αντίθετό του είναι το μονώνυμο ..... και το όμοιό του που έχει συντελεστή το 3 είναι το μονώνυμο .....

**5** Βρες τον συντελεστή, το κύριο μέρος και τον βαθμό των μονωνύμων:

| Μονώνυμα                               | Συντελεστής | Κύριο μέρος | Βαθμός ως προς όλες τις μεταβλητές |
|--|-------------|-------------|------------------------------------|
| $-xy^7$                                |             |             |                                    |
| $\frac{1}{10} \cdot \kappa^3\lambda^2$ |             |             |                                    |
| $4\sqrt{2} \cdot \alpha\beta$          |             |             |                                    |
| $5x$                                   |             |             |                                    |
| $5$                                    |             |             |                                    |

**6** Βρες την αριθμητική τιμή του μονωνύμου:

- α)  $3x^2y$ , για  $x = 2$  και  $y = 5$ .  
β)  $\frac{1}{2}x^3y$ , για  $x = -1$  και  $y = 0,1$ .  
γ)  $-4\kappa^2\lambda^2$ , για  $\kappa = -0,25$  και  $\lambda = 4$ .

7

Κατασκεύασε ένα μονώνυμο με μεταβλητές  $x$  και  $y$ , το οποίο:

- α) είναι 3ου βαθμού ως προς  $x$  και 2ου βαθμού ως προς  $y$ .
- β) είναι 3ου βαθμού ως προς  $x$  και  $y$ .
- γ) είναι όμοιο με το μονώνυμο  $-3xy^5$ .
- δ) είναι ίσο με το μονώνυμο  $2^2xy^3$ .
- ε) είναι αντίθετο του  $\frac{1}{10}x^5y$ .

8

Βρες τις τιμές των αριθμών  $\mu$  και  $\nu$ , αν γνωρίζεις ότι το μονώνυμο  $-2x^\mu y^\nu z^4$ , είναι μηδενικού βαθμού ως προς  $y$  και 9ου βαθμού ως προς  $x$ ,  $y$  και  $z$ .

Στη συνέχεια βρες την τιμή του μονωνύμου για  $x = -1$ ,  $y = 6$  και  $z = -2$ .

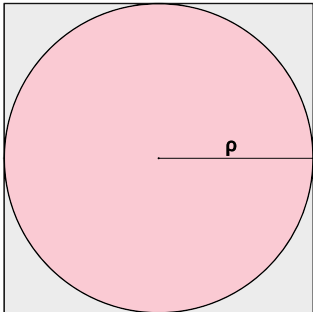
Εξασκούμαι



σε όσα έμαθα

## 3.2 | Πράξεις με μονώνυμα





Ποιο μονώνυμο εκφράζει το εμβαδόν του χρωματισμένου γκρι μέρους στο διπλανό σχήμα;

### Πρόσθεση – Αφαίρεση μονωνύμων

**Προσθέτουμε** (ή **αφαιρούμε**) όμοια μονώνυμα σύμφωνα με την επιμεριστική ιδιότητα, όπως φαίνεται παρακάτω:

**Παραδείγματα:**

$$2x^2 + 5x^2 = (2 + 5) \cdot x^2 = 7x^2.$$

$$x^3y - 4x^3y = (1 - 4) \cdot x^3y = -3x^3y.$$

**Γενικά:**

Το **άθροισμα** όμοιων μονωνύμων είναι μονώνυμο όμοιο με αυτά και έχει συντελεστή το άθροισμα των συντελεστών τους.

**Σχόλιο:** Αν τα μονώνυμα δεν είναι όμοια τότε το άθροισμά τους δεν είναι μονώνυμο. **Π.χ.**  $2x + x^2$ .

### Πολλαπλασιασμός μονωνύμων

**Παράδειγμα:**

$$(2x^2) \cdot (5x^4) = (2 \cdot 5) \cdot (x^2 \cdot x^4) = 10x^{2+4} = 10x^6.$$

|                             |                                       |
|-----------------------------|---------------------------------------|
| ↑                           | ↑                                     |
| Προσεταιριστική<br>ιδιότητα | Ιδιότητα<br>$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ |

**Γενικά:**

Το **γινόμενο** μονωνύμων είναι μονώνυμο με:

- συντελεστή το γινόμενο των συντελεστών τους και
- κύριο μέρος το γινόμενο όλων των μεταβλητών τους με εκθέτη κάθε μεταβλητής το άθροισμα των εκθετών της.



2. Να βρείτε τα μονώνυμα που εκφράζουν:

α) την περίμετρο και

β) το εμβαδόν του σχήματος.

**Λύση:**

α) Παρατηρούμε ότι:

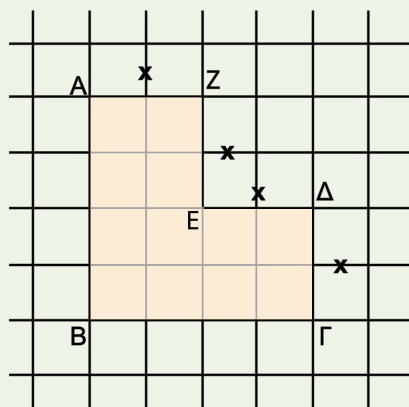
$$AB = ZE + \Delta\Gamma = x + x = 2x \text{ και}$$

$$B\Gamma = AZ + E\Delta = x + x = 2x.$$

Επομένως η περίμετρος του σχήματος είναι:

$$\begin{aligned} \Pi &= AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta E + EZ + ZA = \\ &= 2x + 2x + x + x + x + x = \\ &= 8x. \end{aligned}$$

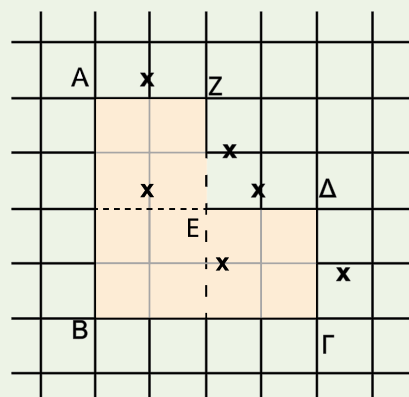
Άρα:  $\Pi = 8x$ .



β) 1<sup>ος</sup> τρόπος:

Χωρίζουμε το σχήμα σε τρία τετράγωνα πλευράς  $x$ , επομένως το εμβαδόν του σχήματος είναι:

$$E = x^2 + x^2 + x^2 = 3x^2.$$



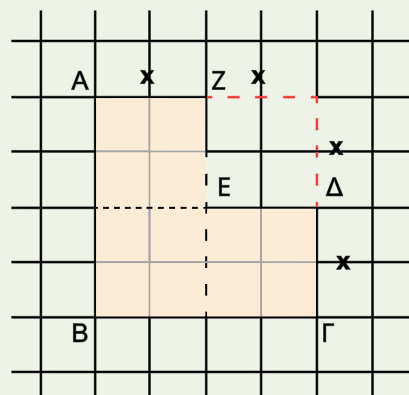
2<sup>ος</sup> τρόπος:

Συμπληρώνουμε το μεγάλο τετράγωνο, το οποίο έχει πλευρά  $2x$ . Το εμβαδόν του σχήματος είναι:

$$E = (2x)^2 - x^2 = 4x^2 - x^2 = 3x^2.$$

Σε κάθε περίπτωση το εμβαδόν του σχήματος εκφράζεται από τη σχέση:

$$E = 3x^2.$$





**1** Χαρακτήρισε ως Σωστές ή Λάθος τις προτάσεις που ακολουθούν βάζοντας ένα **x** στην κατάλληλη θέση.

- α) Το άθροισμα δύο μονωνύμων είναι μονώνυμο.
- β) Το άθροισμα δύο όμοιων μονωνύμων είναι μονώνυμο όμοιο με αυτά.
- γ) Ο συντελεστής του γινομένου δύο μονωνύμων είναι το γινόμενο των συντελεστών τους.
- δ) Η διαίρεση δύο μονωνύμων είναι πάντοτε μονώνυμο.
- ε) Πολλαπλασιάζουμε μονώνυμα μόνο αν αυτά είναι όμοια.

Σωστό      Λάθος

| Σωστό | Λάθος |
|-------|-------|
|       |       |
|       |       |
|       |       |
|       |       |
|       |       |

**2** Αντιστοίχισε τις πράξεις με το σωστό αποτέλεσμα:

|                     |             |
|---------------------|-------------|
| α) $3x^3 \cdot 2x$  | i. $6x^3$   |
| β) $12x^4 : (2x)^2$ | ii. $6x^4$  |
| γ) $3x^2 + 2x^2$    | iii. $6x^2$ |
| δ) $2x \cdot 3x^2$  | iv. $4x^2$  |
| ε) $5x^2 - 1x^2$    | v. $5x^2$   |

**3** Κάνε τις παρακάτω προσθέσεις και αφαιρέσεις.

- α)  $4x^2 + 5x^2$       β)  $9x^3 - 4x^3$       γ)  $12a^4 - 15a^4 + a^4$       δ)  $2y^3 + (-2y^3)$   
 ε)  $6y^4 + 3y^4 - y^4$       στ)  $\frac{1}{4}a^3 + 0,5a^3 - a^3$       ζ)  $4\sqrt{2}x^3 - \sqrt{2}x^3 + 2\sqrt{2}x^3$

**4** Βρες τα γινόμενα:

- α)  $3x \cdot 7x^3$       β)  $4x \cdot (-6x)$       γ)  $\frac{5}{2}k^2 \cdot 4k$       δ)  $-a^2 \cdot (-2a^3)$   
 ε)  $4y^4 \cdot (-0,2y)$       στ)  $(2x)^2 \cdot (x^2)^3$       ζ)  $-3a^5 \cdot \left(-\frac{2}{3}a\right) \cdot \left(\frac{5}{2}a^3\right)$

5

Βρες τα πηλίκα:

α)  $10y^4 : 2y^3$

β)  $12x : (-16x)$

γ)  $-6x^2 : (-4x^3)$

δ)  $\frac{8}{3} a^2 : (4a^4)$

ε)  $6y^3 : (-0, 1y)$

στ)  $\left(\frac{1}{5}x^8\right) : \left(\frac{3}{10}x^2\right)$

ζ)  $(-4a)^2 : (2a^3)^2$

6

Κάνε τις πράξεις:

α)  $(4x^3 - 2x^3) \cdot (5x^2 - x^2)$

β)  $(-5x^4 - x^4) : (6x + x - 4x)$

γ)  $\frac{x^2 \cdot x + 5x^3}{3x^3 - x^3}$

δ)  $(x^2)^4 : \left(-\frac{3}{4}x\right)^2$

ε)  $\frac{(x^2)^2 \cdot (-x)^3 \cdot 2x}{x^3 + 3x^3}$

στ)  $-\frac{1}{3}a^3 \cdot (-3a)^2 + \frac{(-2a^2)^3}{2a}$

7

Για ένα ορθογώνιο γνωρίζουμε ότι έχει μήκος α και πλάτος β. Βρες την αλγεβρική παράσταση που εκφράζει:

α) την περίμετρο και

β) το εμβαδόν του ορθογωνίου.

Ποια από τις αλγεβρικές παραστάσεις που προέκυψαν είναι μονώνυμο;

8

Δίνεται τετράγωνο πλευράς x. Βρες το μονώνυμο που περιγράφει:

α) την περίμετρο του τετραγώνου.

β) το εμβαδόν του τετραγώνου.

γ) τη διαγώνιο του τετραγώνου.

9

Στο τετράγωνο πλευράς x της άσκησης 8, διπλασιάζουμε την πλευρά του. Εξέτασε πώς μεταβάλλονται:

α) η περίμετρος, β) το εμβαδόν γ) η διαγώνιος του τετράγωνου.

Εξασκούμαι



σε όσα έμαθα

## 3.3 | Πολυώνυμα. Βαθμός πολυωνύμου, αριθμητική τιμή πολυωνύμου.



Κάνε τις πράξεις στα παρακάτω μονώνυμα:

- $x^2 + 2x^2 = \dots\dots\dots$
- $a^5 - 2a^5 = \dots\dots\dots$

Οι παραστάσεις που προκύπτουν είναι μονώνυμα; Ποιος είναι ο βαθμός τους; Προσπάθησε να κάνεις τις πράξεις και στην παράσταση  $x^3 + 2x^2 - x$ . Τι παρατηρείς;

### Πολυώνυμα

Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε, ότι το άθροισμα όμοιων μονωνύμων είναι μονώνυμο όμοιο με αυτά.

**Παράδειγμα:**  $4x^2 + 2x^2 = 6x^2$ .

Αν όμως τα μονώνυμα δεν είναι όμοια, τότε το άθροισμά τους δεν είναι μονώνυμο. **π.χ.**  $2x^3 + 5x^2 + 1$ .

Η παράσταση αυτή ονομάζεται **πολυώνυμο**.

**Γενικά:**

Αν δύο τουλάχιστον μονώνυμα δεν είναι όμοια, τότε το άθροισμά τους δεν είναι μονώνυμο αλλά μια αλγεβρική παράσταση, που λέγεται **πολυώνυμο**.

**Πολυώνυμο**  
 $4x^2 + 3x - 1$

Ένα πολυώνυμο μπορεί να περιέχει περισσότερες από μία μεταβλητές. **π.χ.**  $2x^2y + 3xy^3 + xy$ .

Κάθε μονώνυμο που περιέχεται σε ένα πολυώνυμο λέγεται όρος του πολυωνύμου.

**Παράδειγμα:** Το πολυώνυμο  $\underline{4x^2} + \underline{3x} - \underline{1}$ , έχει τρεις όρους.  
όςρος όρος όρος

- Αν το πολυώνυμο έχει δύο όρους λέγεται διώνυμο. **π.χ.**  $2x^2 - 6x$ .
- Αν το πολυώνυμο έχει τρεις όρους λέγεται τριώνυμο. **π.χ.**  $x^2 + 2x + 3$ .

Δεχόμαστε ότι κάθε μονώνυμο είναι και πολυώνυμο. Συμφωνούμε ακόμη να θεωρούνται και οι αριθμοί ως πολυώνυμα και τα ονομάζουμε **σταθερά πολυώνυμα**.

### Βαθμός πολυωνύμου

Αν το πολυώνυμο έχει μία μεταβλητή, για παράδειγμα το  $x$ , τότε ο μεγαλύτερος εκθέτης του  $x$  λέγεται **βαθμός** του πολυωνύμου.

**Παράδειγμα:**

**Βαθμός** Ο βαθμός του πολυωνύμου  $4x^2 + 3x - 1$  είναι ο μεγαλύτερος εκθέτης του  $x$ , δηλαδή το 2.  
 $4x^2 + 3x - 1$  Λέμε ότι το πολυώνυμο είναι  $2^{\text{ου}}$  βαθμού.

**Γενικά:**

**Βαθμός** ενός πολυωνύμου ως προς μία ή περισσότερες μεταβλητές του, είναι ο μεγαλύτερος από τους βαθμούς των όρων του.

**Παράδειγμα:**

Το πολυώνυμο  $2x^2y + 3xy^3 - xy$ , είναι:

- 2ου βαθμού ως προς  $x$ . (Ο μεγαλύτερος εκθέτης του  $x$  είναι 2).
- 3ου βαθμού ως προς  $y$ . (Ο μεγαλύτερος εκθέτης του  $y$  είναι 3).
- 4ου βαθμού ως προς  $x$  και  $y$ . (Ο μεγαλύτερος από τους βαθμούς των όρων του είναι το 4,

$$\begin{array}{ccc} \underline{2x^2y} & + & \underline{3xy^3} & - & \underline{xy} \\ \text{3ου} & & \text{4ου} & & \text{2ου} \\ & & \text{βαθμού} & & \text{βαθμού} \end{array}$$

Τα σταθερά πολυώνυμα (δηλαδή οι αριθμοί) είναι **μηδενικού βαθμού**. Ειδικότερα ο αριθμός 0 λέγεται **μηδενικό πολυώνυμο** και **δεν έχει βαθμό**.

## Αριθμητική τιμή πολυωνύμου

Αν ένα πολυώνυμο έχει μία μεταβλητή, για παράδειγμα το  $x$ , μπορούμε να το συμβολίσουμε ως  $A(x)$ , (ή  $B(x)$  ή  $P(x)$  κ.α.). Για ευκολία συνήθως γράφουμε ένα πολυώνυμο **κατά τις φθίνουσες δυνάμεις** του  $x$ :

$$P(x) = 5x^2 + 2 + 3x^4 - x \quad \xrightarrow{\text{Κατά τις φθίνουσες δυνάμεις}} \quad P(x) = 3x^4 + 5x^2 - x + 2.$$

Αν σε ένα πολυώνυμο αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές με αριθμούς και κάνουμε τις πράξεις, θα προκύψει ένας αριθμός που λέγεται **αριθμητική τιμή** ή απλά **τιμή** του πολυωνύμου.

**Παράδειγμα:**

Βρείτε την τιμή του πολυωνύμου  $P(x) = 2x^3 - x + 1$ , για  $x = -2$ .

**Λύση:** Αντικαθιστούμε το  $x$  με το  $-2$  και κάνουμε τις πράξεις:

$$P(-2) = 2 \cdot (-2)^3 - (-2) + 1 = 2 \cdot (-8) + 2 + 1 = -16 + 3 = -13.$$

## Ίσα πολυώνυμα

Δύο πολυώνυμα είναι **ίσα**, όταν έχουν όρους ίσα μονώνυμα.

**Παράδειγμα:**

Για ποιες τιμές των  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$  τα πολυώνυμα  $x^2 + 2x - 5$  και  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$  είναι ίσα;

**Λύση:**

$$1x^2 + 2x - 5$$

Τα πολυώνυμα είναι ίσα αν:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

$\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$  και  $\gamma = -5$ .



1. Δίνεται το πολυώνυμο  $2x^4y + 3xy^5 - x^2y^2$ .

α) Να βρείτε τον βαθμό του πολυωνύμου:

- ως προς  $x$
- ως προς  $y$
- ως προς  $x$  και  $y$ .

β) Να βρείτε την τιμή του πολυωνύμου για  $x = \frac{1}{2}$  και  $y = -1$ .

**Λύση:**

α) Ο βαθμός του πολυωνύμου  $2x^4y + 3xy^5 - x^2y^2$ ,

- ως προς  $x$ , είναι: 4,
- ως προς  $y$ , είναι: 5,
- ως προς  $x$  και  $y$ , είναι: 6.

β) Η τιμή του πολυωνύμου  $2x^4y + 3xy^5 - x^2y^2$ , για  $x = \frac{1}{2}$  και  $y = -1$  είναι:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot (-1) + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-1)^5 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (-1)^2 &= -2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \\ &= -\frac{1}{8} - \frac{3}{2} - \frac{1}{4} = \\ &= -\frac{1}{8} - \frac{12}{8} - \frac{2}{8} = -\frac{15}{8}. \end{aligned}$$

2. Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 - 2x + 4$ . Να βρείτε τα πολυώνυμα:  $P(-3x)$  και  $P(x^2)$ .

**Λύση:**

**Σχόλιο:** Σε ένα πολυώνυμο, όπως το  $P(x) = x^3 - 2x + 4$ , θεωρούμε ότι το  $x$  εκφράζει μια «άδεια θέση» στην οποία μπορούμε να τοποθετήσουμε αριθμούς, κλάσματα, μεταβλητές, ακόμη και παραστάσεις.

- Αν στο  $P(x) = x^3 - 2x + 4$ , θέσουμε όπου  $x$  την παράσταση  $-3x$ , έχουμε:

$$P(-3x) = (-3x)^3 - 2(-3x) + 4 = -27x^3 + 6x + 4.$$

- Αν στο  $P(x) = x^3 - 2x + 4$ , θέσουμε όπου  $x$  το  $x^2$ , έχουμε:

$$P(x^2) = (x^2)^3 - 2(x^2) + 4 = x^6 - 2x^2 + 4.$$

Εξασκούμε



σε όσα έμαθα



1

Συμπλήρωσε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

- α) Βαθμός ενός πολυωνύμου ως προς μία ή περισσότερες μεταβλητές του, είναι ο ..... από τους βαθμούς των όρων του.
- β) Κάθε αριθμός μπορεί να θεωρηθεί και ως πολυώνυμο, οπότε λέγεται ..... πολυώνυμο. Ειδικότερα, ο αριθμός μηδέν λέγεται μηδενικό πολυώνυμο και δεν έχει ..... ενώ κάθε άλλο σταθερό πολυώνυμο είναι ..... βαθμού.

2

Δίνεται το πολυώνυμο  $-3x^2y + 6x^3 - 8xy^4$ . Συμπλήρωσε τα κενά:

- α) Το πολυώνυμο αποτελείται από ..... όρους.
- β) Ο βαθμός του πολυωνύμου ως προς  $x$  είναι ....., ως προς  $y$  είναι ..... και ως προς  $x$  και  $y$  είναι .....

3

Υπολόγισε την αριθμητική τιμή του πολυωνύμου  $P(x) = 3x^2 - 5x + 2$  για:

- α)  $x = 5$       β)  $x = -1$       γ)  $x = -\frac{1}{2}$

4

Υπολόγισε την αριθμητική τιμή του πολυωνύμου  $-2x^4y + x^2y^3 + 3xy^5$  για  $x = -1$  και  $y = 2$ .

5

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = 5x^3 + 8 - 4x - 2x^4$ .

- α) Γράψε το πολυώνυμο κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του  $x$  και βρες τον βαθμό του.
- β) Απόδειξε ότι  $P(-1) = P(1) - 2$ .

6

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ . Βρες τις τιμές των  $a$ ,  $b$ ,  $c$  και  $d$ , ώστε το πολυώνυμο  $P(x)$  να είναι ίσο με το  $Q(x) = 4x^3 - 2x + 5$ .

7

Δίνονται τα πολυώνυμα  $A(x) = x^3 + 4x^2 - x + 2$  και  $B(x) = (a + 1)x^3 + (b - 2)x^2 + cx + \sqrt{d}$ . Βρες τις τιμές των  $a$ ,  $b$ ,  $c$  και  $d$ , ώστε  $A(x) = B(x)$ .

**8** Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = 3x^3 - 4x^2 - x$ . Βρες τα πολυώνυμα:  
 α)  $P(2x)$       β)  $P(-x)$       γ)  $P(x^2)$

**9** Για ένα ορθογώνιο γνωρίζουμε ότι έχει μήκος  $2x + 3$  και πλάτος  $x - 1$ .  
 α) Βρες το πολυώνυμο που περιγράφει την περίμετρο του ορθογωνίου.  
 β) Υπολόγισε την περίμετρο του ορθογωνίου αν  $x = \frac{1}{2}$ .

**10** Προσδιόρισε το πολυώνυμο που εκφράζει το μήκος και το εμβαδόν κύκλου διαμέτρου  $10x$ .


Εξασκούμαι




σε όσα έμαθα

**ΕΠΕΚΤΕΙΝΩ**  
 ΤΙΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΜΟΥ

Μελετώ



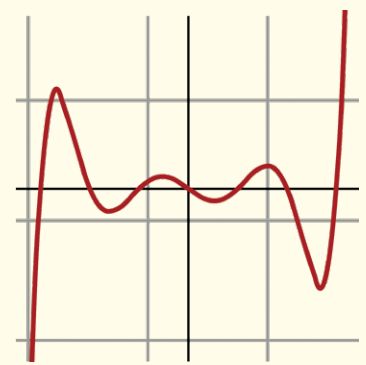
το συγκεκριμένο θέμα

## Τα πολυώνυμα

### Ιστορική αναδρομή

Η ιστορία των πολυωνύμων ξεκινά από την αρχαιότητα, αλλά η πλήρης ανάπτυξή τους ήρθε κατά την Αναγέννηση με την επίλυση των πολυωνυμικών εξισώσεων.

Η εύρεση των ριζών των πολυωνύμων είναι ένα από τα παλαιότερα μαθηματικά προβλήματα. Πριν τον 15ο αιώνα, οι αλγεβρικές εξισώσεις εκφράζονταν με λέξεις. Οι Κινέζοι το 200 π.Χ. στο βιβλίο «Αριθμητική σε εννιά στάδια», περιγράφουν σε ένα πρόβλημα: *τρία μέρη μιας καλής σοδειάς, δύο μέρη μιας μέτριας σοδειάς, και ένα μέρος μιας κακής σοδειάς πωλούνται για 29 δου*, το οποίο θα μπορούσε να γραφτεί σήμερα ως  $3x + 2y + z = 29$ , δηλαδή να έχει τη μορφή πολυωνυμικής εξίσωσης.

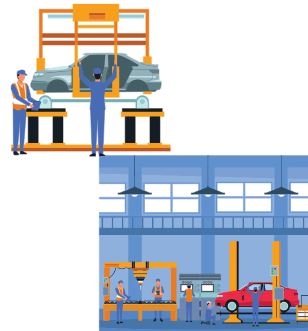


Το γράφημα ενός πολυωνύμου, βαθμού 6.

## 3.4 | Άθροισμα, διαφορά και γινόμενο πολυωνύμων μιας μεταβλητής



Ένα εργοστάσιο αυτοκινήτων για να κατασκευάσει  $x$  αυτοκίνητα ξοδεύει καθημερινά 1.500€ σε υλικά για κάθε αυτοκίνητο, 8.000€ σε μισθούς και  $\frac{2}{3}x^2$  για τα έξοδα συντήρησης του εργοστασίου και την μεταφορά.



- Πόσα χρήματα απαιτούνται καθημερινά για την κατασκευή  $x$  αυτοκινήτων;
- Πόσα χρήματα απαιτούνται για την κατασκευή 4 αυτοκινήτων;

### Πρόσθεση – Αφαίρεση πολυωνύμων

Οι μεταβλητές ενός πολυωνύμου εκφράζουν αριθμούς και γι' αυτό στις πράξεις μεταξύ πολυωνύμων ισχύουν οι ιδιότητες των πράξεων των πραγματικών αριθμών.

**Παράδειγμα:** Έστω τα πολυώνυμα  $A(x) = 2x^3 + 3x^2 + 5$  και  $B(x) = x^3 + 3x^2 - x + 3$ .

#### • Πρόσθεση:

$$\begin{aligned} A(x) + B(x) &= (2x^3 + 3x^2 + 5) + (x^3 + 3x^2 - x + 3) = \\ &= \underline{2x^3} + \underline{3x^2} + \underline{5} + \underline{x^3} + \underline{3x^2} - x + \underline{3} = \\ &= (2 + 1)x^3 + (3 + 3)x^2 - x + (5 + 3) = \\ &= 3x^3 + 6x^2 - x + 8. \end{aligned}$$

← Απαλείφουμε τις παρενθέσεις.

← Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.

← Εκτελούμε τις πράξεις.

#### • Αφαίρεση:

$$\begin{aligned} A(x) - B(x) &= (2x^3 + 3x^2 + 5) - (x^3 + 3x^2 - x + 3) = \\ &= \underline{2x^3} + \underline{3x^2} + \underline{5} - \underline{x^3} - \underline{3x^2} + x - \underline{3} = \\ &= (2 - 1)x^3 + (3 - 3)x^2 + x + (5 - 3) = \\ &= x^3 + x + 2. \end{aligned}$$

← Απαλείφουμε τις παρενθέσεις.

← Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.

← Εκτελούμε τις πράξεις.

### Πολλαπλασιασμός μονωνύμου με πολυώνυμο

**Παράδειγμα:** Έστω το μονώνυμο  $A(x) = 5x^3$  και το πολυώνυμο  $B(x) = 4x^2 + x$ .

#### • Πολλαπλασιασμός:

$$\begin{aligned} A(x) \cdot B(x) &= 5x^3 \cdot (4x^2 + x) = \\ &= \underline{5x^3 \cdot 4x^2} + \underline{5x^3 \cdot x} = \\ &= 20x^5 + 5x^4. \end{aligned}$$

← Εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα.

← Είναι  $\alpha^m \cdot \alpha^n = \alpha^{m+n}$ .

Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση

**Γενικά:**

Για να **πολλαπλασιάσουμε** μονώνυμο με πολυώνυμο, πολλαπλασιάζουμε το μονώνυμο με κάθε όρο του πολυωνύμου και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν.

## Πολλαπλασιασμός πολυωνύμου με πολυώνυμο

**Παράδειγμα:** Έστω τα πολυώνυμα  $A(x) = 2x^2 - x$  και  $B(x) = 4x^3 - x^2$ .

• **Πολλαπλασιασμός:**

$$\begin{aligned}
 A(x) \cdot B(x) &= (2x^2 + x) \cdot (4x^3 + x^2) = \\
 &= \underbrace{2x^2 \cdot 4x^3} + \underbrace{2x^2 \cdot x^2} + \underbrace{x \cdot 4x^3} + \underbrace{x \cdot x^2} = \\
 &= 8x^5 + 2x^4 + 4x^4 + x^3 = \\
 &= 8x^5 + 6x^4 + x^3.
 \end{aligned}$$

← Εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα.

← Είναι  $a^u \cdot a^v = a^{u+v}$ .

Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση



**Γενικά:**

Για να **πολλαπλασιάσουμε** πολυώνυμο με πολυώνυμο, πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο του ενός πολυωνύμου με κάθε όρο του άλλου πολυωνύμου και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν.



1. Δίνονται τα πολυώνυμα

$$A(x) = x^2 - x \text{ και } B(x) = x^2 + 2x - 1.$$

Να κάνετε τις πράξεις: α)  $A(x) + B(x)$       β)  $A(x) - B(x)$       γ)  $A(x) \cdot B(x)$

**Λύση:**

α)

$$\begin{aligned}
 A(x) + B(x) &= (x^2 - x) + (x^2 + 2x - 1) = \\
 &= \underline{x^2} - \underline{x} + \underline{x^2} + \underline{2x} - 1 = \\
 &= 2x^2 + x - 1.
 \end{aligned}$$

**2ος τρόπος:** Η πρόσθεση μπορεί να εκτελεστεί και κάθετα:

$$\begin{array}{r}
 x^2 - x \\
 + x^2 + 2x - 1 \\
 \hline
 2x^2 + x - 1
 \end{array}$$

β)

$$\begin{aligned}
 A(x) - B(x) &= (x^2 - x) - (x^2 + 2x - 1) = \\
 &= x^2 - x - x^2 - 2x + 1 = \\
 &= -3x + 1.
 \end{aligned}$$

**2ος τρόπος:** Μπορούμε να προσθέσουμε κάθετα στο  $A(x)$  το  $-B(x)$ :

$$\begin{array}{r}
 x^2 - x \\
 + -x^2 - 2x + 1 \\
 \hline
 0x^2 - 3x + 1
 \end{array}$$

γ)

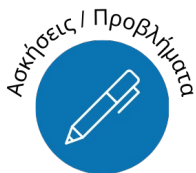
$$\begin{aligned}
 A(x) \cdot B(x) &= (x^2 - x) \cdot (x^2 + 2x - 1) = \\
 &= x^4 + 2x^3 - x^2 - x^3 - 2x^2 + x = \\
 &= x^4 + x^3 - 3x^2 + x.
 \end{aligned}$$

Εξασκούμε



σε όσα έμαθα





**1**

Συμπλήρωσε τα κενά:

α)  $(x^3 + 2x + 1) + (x^3 + x - 2) = \dots x^3 + \dots x - \dots$     β)  $(x^2 + 2x) + (\dots) = 2x^2 + 4x$   
 γ)  $(4x^2 + 2x + 1) - (\dots) = 3x^2 - x + 2$     δ)  $4x^2 \cdot (5x^2 + x) = 20x^{\dots} + 4x^{\dots}$

**2**

Κάνε τις πράξεις:

α)  $(2x^2 + 3x) + (5x^2 - 6x + 1)$     β)  $(-x^3 + 4x^2 - 2) + (x^3 - 4x^2 + x + 3)$   
 γ)  $(x^5 - 3x^3) - (4x^5 - 2x^3 + x + 3)$     δ)  $(x^2 + x + 2) - (x^2 + 2x + 2)$   
 ε)  $(0,5x^3 - x^2 - 0,3) - (0,1x^2 - 2) + (x^3 - x + 1,1x^2)$

**3**

Υπολόγισε τα γινόμενα:

α)  $x^3 \cdot (x^2 - 4x)$     β)  $-\frac{1}{2}x^3 \cdot (4x^3 - 2x^2 + 8)$     γ)  $(2x^2 - 3) \cdot (4x^3 - 5x + 2)$   
 δ)  $(-x^2 + 2x + 1) \cdot (x^3 + 7x - 4)$     ε)  $(x - 2) \cdot (2x + 4) \cdot (x - 1)$     στ)  $(-2x + 3)^2$

**4**

Έστω δύο πολυώνυμα  $A(x)$  και  $B(x)$  καθένα από τα οποία έχει βαθμό 3. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;

|                                     | <b>A</b> | <b>B</b> | <b>Γ</b> | <b>Δ</b>  |
|-------------------------------------|----------|----------|----------|-----------|
| α) Το $A(x) + B(x)$ έχει βαθμό:     | 3        | 6        | 9        | Το πολύ 3 |
| β) Το $A(x) - B(x)$ έχει βαθμό:     | 3        | 6        | 9        | Το πολύ 3 |
| γ) Το $A(x) \cdot B(x)$ έχει βαθμό: | 3        | 6        | 9        | Το πολύ 3 |
| δ) Το $[A(x)]^2$ έχει βαθμό:        | 3        | 6        | 9        | Το πολύ 3 |

**5**

Δίνονται τα πολυώνυμα  $P(x) = x^3 - 2x + 5$  και  $Q(x) = 3x^3 - x$ . Βρες τα πολυώνυμα:

α)  $3 \cdot P(x) + Q(x)$     β)  $Q(x) - [P(x) - x]$     γ)  $P(-x) + Q(2x)$

**6**

Έστω  $P(x) = (x^3 - 5x^2 + 12x) - (4x^3 - 8x^2 + 12x) + (-7x^2 + 15)$  και  $Q(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ , Βρες τις τιμές των  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  και  $\delta$ , ώστε τα πολυώνυμα  $P(x)$  και  $Q(x)$  να είναι ίσα.

7

Κάνε τις πράξεις:

α)  $(xy - 4y)(2xy - x^2) - x^2y(x - y)$

β)  $\alpha\beta(\alpha^2 - 4\alpha + 6\alpha\beta^4) - \alpha^2\beta(1 + 3\beta^3)$

γ)  $(5x^3 - 8x + 3)(x - 2) - (x - 1)(x - 2)(5x^2 + 5x - 3)$

8

Δίνονται τα πολυώνυμα  $A(x) = -x^2 + 5x - 2$  και  $B(x) = 6x - 3$ .

α) Βρες τα πολυώνυμα:

i.  $2A(x) \cdot \frac{1}{3}B(x)$

ii.  $B(x) \cdot [A(x) - B(x)]$

β) Βρες την τιμή των παραστάσεων:

i.  $A(0) \cdot B(0)$

ii.  $A(-1) \cdot B(1)$

iii.  $A(\sqrt{2}) + B(\sqrt{2})$

γ) Προσδιόρισε το πολυώνυμο  $\Gamma(x) = A(x^3) - B(-x)$  και βρες τον βαθμό του.

Εξασκούμε



σε όσα έμαθα

## 3.5 | Ταυτότητες



Για να υπολογίσουμε τον αριθμό  $199^2$ , ακολουθούμε δύο διαφορετικές μεθόδους που φαίνονται παρακάτω:

$$\begin{array}{r} 199 \\ \times 199 \\ \hline 1791 \\ 1791 \\ + 199 \\ \hline 39.601 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 199 \cdot 199 \\ (200-1) \cdot (200-1) \\ 200 \cdot 200 - 200 - 200 + 1 \\ 40.000 - 400 + 1 \\ \hline 39.601 \end{array}$$

Ποια μέθοδος φαίνεται συντομότερη; Τι πλεονεκτήματα εντοπίζεις στη δεύτερη μέθοδο σε σχέση με την πρώτη;

### Ταυτότητες

Υπάρχουν ισότητες που αληθεύουν για ορισμένες τιμές των μεταβλητών τους.

#### Παραδείγματα:

- Η ισότητα  $x - 3 = 5$ , αληθεύει μόνο για  $x = 8$ .
- Η ισότητα  $x^2 = 4$ , αληθεύει μόνο για  $x = 2$  και  $x = -2$ .
- Η ισότητα  $x + y = 2$  αληθεύει για  $x = 1$  και  $y = 1$ , όπως επίσης και για  $x = 0,5$  και  $y = 1,5$ . Αληθεύει και για άλλες τιμές των  $x$  και  $y$ , αλλά δεν αληθεύει για παράδειγμα αν  $x = 3$  και  $y = 1$ .

Υπάρχουν όμως και ισότητες, που αληθεύουν για **όλες** τις τιμές των μεταβλητών τους.

#### Παραδείγματα:

- Η ισότητα  $0x = 0$  αληθεύει για όλες τις τιμές της μεταβλητής  $x$ .
- Η ισότητα  $\alpha + \beta = \beta + \alpha$  αληθεύει για οποιαδήποτε τιμή των  $\alpha$  και  $\beta$ .

Οι ισότητες αυτές ονομάζονται **ταυτότητες**.

#### Γενικά:

**Ταυτότητα** λέγεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών της.

## Αξιοσημείωτες ταυτότητες

Στην παράγραφο αυτήν θα ασχοληθούμε με ταυτότητες της μορφής:

- $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ ,
- $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$  και
- $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$ ,

τις οποίες χαρακτηρίζουμε ως **αξιοσημείωτες** καθώς είναι αρκετά χρήσιμες στους υπολογισμούς και στην απλοποίηση παραστάσεων.

### Τετράγωνο αθροίσματος $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

Η παράσταση  $(\alpha + \beta)^2$  είναι το γινόμενο  $(\alpha + \beta) \cdot (\alpha + \beta)$ , στο οποίο αν εφαρμόσουμε την επιμεριστική ιδιότητα, έχουμε:

$$(\alpha + \beta)^2 = (\alpha + \beta) \cdot (\alpha + \beta) = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta\alpha + \beta^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2.$$

Άρα:  $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

#### Γεωμετρική ερμηνεία:

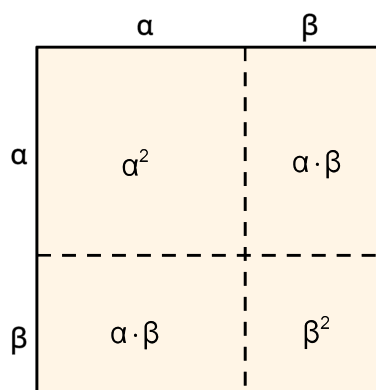
Γεωμετρικά μπορούμε να σχηματίζουμε ένα τετράγωνο πλευράς  $\alpha + \beta$  το οποίο έχει εμβαδόν  $(\alpha + \beta)^2$ .

Το τετράγωνο πλευράς  $\alpha + \beta$  χωρίζεται σε 4 επιφάνειες με εμβαδά  $\alpha^2$ ,  $\alpha\beta$ ,  $\alpha\beta$  και  $\beta^2$ , όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Το εμβαδόν του μεγάλου τετραγώνου ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των τεσσάρων μικρότερων επιφανειών, άρα:

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \alpha\beta + \alpha\beta + \beta^2 \quad \text{ή}$$

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2.$$



Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση



### Τετράγωνο διαφοράς $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

Η παράσταση  $(\alpha - \beta)^2$  είναι το γινόμενο  $(\alpha - \beta) \cdot (\alpha - \beta)$ , στο οποίο αν εφαρμόσουμε την επιμεριστική ιδιότητα, έχουμε:

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha - \beta) \cdot (\alpha - \beta) = \alpha^2 - \alpha\beta - \beta\alpha + \beta^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2.$$

Άρα:  $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$ .

#### Γεωμετρική ερμηνεία:

Γεωμετρικά μπορούμε να σχηματίζουμε πάλι ένα τετράγωνο πλευράς  $\alpha - \beta$  το οποίο έχει εμβαδόν  $(\alpha - \beta)^2$ .

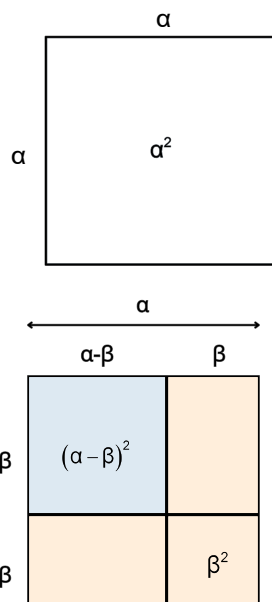
Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση



Αρχικά σχηματίζουμε τετράγωνο πλευράς  $\alpha$  με εμβαδόν  $\alpha^2$ .



- Μειώνουμε το μήκος  $\alpha$  κατά  $\beta$  και σχηματίζουμε το μπλε τετράγωνο πλευράς  $\alpha - \beta$  με εμβαδόν  $(\alpha - \beta)^2$ .
- Το εμβαδόν του μπλε τετραγώνου ισούται με το εμβαδόν του μεγάλου τετραγώνου εκτός του οριζώντιου και του κατακόρυφου ορθογωνίου τα οποία έχουν εμβαδά  $\alpha\beta$ .
- Ωστόσο, η αφαίρεση του  $\alpha\beta$  δύο φορές από το μεγάλο τετράγωνο θα αφαιρέσει το τετράγωνο με εμβαδόν  $\beta^2$  δύο φορές. Για τον λόγο αυτόν, προσθέτουμε το  $\beta^2$  και έχουμε:

$$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - \alpha\beta - \alpha\beta + \beta^2 \quad \text{ή}$$

$$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2.$$

### Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά $(\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$

Στην παράσταση  $(\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta)$ , εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα:

$$(\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta) = \alpha^2 - \alpha\beta + \beta\alpha - \beta^2 = \alpha^2 - \beta^2.$$

Άρα:

$$(\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$$

#### Γεωμετρική ερμηνεία:

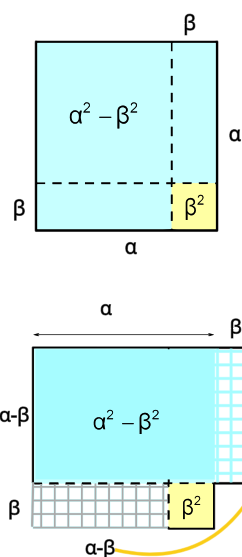
Σχηματίζουμε ένα τετράγωνο πλευράς  $\alpha$  με εμβαδόν  $\alpha^2$  και μέσα σε αυτό σχηματίζουμε τετράγωνο πλευράς  $\beta$  με εμβαδόν  $\beta^2$ , όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Το εμβαδόν της γαλάζιας επιφάνειας ισούται με τη διαφορά των εμβαδών των δύο τετραγώνων:  $\alpha^2 - \beta^2$ .

Μεταφέρουμε το ορθογώνιο με διαστάσεις  $(\alpha - \beta) \times \beta$  και σχηματίζουμε ένα νέο ορθογώνιο με διαστάσεις  $(\alpha + \beta) \times (\alpha - \beta)$ , όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Στο νέο ορθογώνιο, η γαλάζια επιφάνεια με διαστάσεις  $(\alpha + \beta) \times (\alpha - \beta)$  έχει το ίδιο εμβαδόν με την αντίστοιχη επιφάνεια του αρχικού, δηλαδή:

$$(\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2.$$



#### Συνοπτικά:

|    | Ταυτότητα   | Απόδειξη  |
|----|---|---|
| 1. | Τετράγωνο αθροίσματος:<br>$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$                  | $(\alpha + \beta)^2 = (\alpha + \beta) \cdot (\alpha + \beta) = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta\alpha + \beta^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ |
| 2. | Τετράγωνο διαφοράς:<br>$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$                     | $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha - \beta) \cdot (\alpha - \beta) = \alpha^2 - \alpha\beta - \beta\alpha + \beta^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$ |
| 3. | Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά:<br>$(\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$ | $(\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta) = \alpha^2 - \alpha\beta + \beta\alpha - \beta^2 = \alpha^2 - \beta^2$                                     |



Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση

**1. (Τετράγωνο αθροίσματος)** Να υπολογίσετε το ανάπτυγμα των ταυτοτήτων:

$$\alpha) (x + 3)^2, \quad \beta) (2x + 1)^2, \quad \gamma) \left(\frac{1}{2} + y\right)^2.$$

**Λύση:**

$$\alpha) (x + 3)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9.$$

$$\beta) (2x + 1)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1^2 = 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\gamma) \left(\frac{1}{2} + y\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot y + y^2 = \frac{1}{4} + y + y^2.$$

**2. (Τετράγωνο διαφοράς)** Να υπολογίσετε το ανάπτυγμα των ταυτοτήτων:

$$\alpha) (x - 3)^2, \quad \beta) (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2, \quad \gamma) (2x - 3y)^2.$$

**Λύση:**

$$\alpha) (x - 3)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9.$$

$$\beta) (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 3 - 2\sqrt{6} + 2 = 5 - 2\sqrt{6}.$$

$$\gamma) (2x - 3y)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2.$$

**3. (Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά)** Να υπολογίσετε το ανάπτυγμα των ταυτοτήτων:

$$\alpha) (x + 2)(x - 2), \quad \beta) (2x - 3y)(2x + 3y), \quad \gamma) (x + 5)(5 - x).$$

**Λύση:**

$$\alpha) (x + 2)(x - 2) = x^2 - 2^2 = x^2 - 4.$$

$$\beta) (2x - 3y)(2x + 3y) = (2x)^2 - (3y)^2 = 4x^2 - 9y^2.$$

$$\gamma) (x + 5)(5 - x) = 5^2 - x^2 = 25 - x^2.$$

← Στην ταυτότητα  $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$ , θεωρήσαμε  $\alpha = 5$  και  $\beta = x$ .

**4.** Με τη βοήθεια της ταυτότητας  $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$ , να υπολογίσετε το γινόμενο:

$$102 \cdot 98$$

**Λύση:**

$$102 \cdot 98 = (100 + 2) \cdot (100 - 2) = 100^2 - 2^2 = 10.000 - 4 = 9.996.$$

5. Να μετατρέψετε το κλάσμα  $\frac{1}{\sqrt{2}-3}$  που έχει άρρητο παρονομαστή σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή.

**Λύση:**

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα  $(\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$ , ώστε να υψώσουμε τη ρίζα στο τετράγωνο. Για τον λόγο αυτόν πολλαπλασιάζουμε τους όρους του κλάσματος  $\frac{1}{\sqrt{2}-3}$  με  $\sqrt{2} + 3$  και έχουμε:

$$\frac{1}{\sqrt{2}-3} = \frac{\sqrt{2}+3}{(\sqrt{2}-3)(\sqrt{2}+3)} = \frac{\sqrt{2}+3}{(\sqrt{2})^2-3^2} = \frac{\sqrt{2}+3}{2^2-9} = \frac{\sqrt{2}+3}{5}$$



**1** Κάνε την αντιστοίχιση:

|                                  |                                    |                                     |
|----------------------------------|------------------------------------|-------------------------------------|
| Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά | $(\alpha + \beta)^2$               | $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$ |
| Τετράγωνο αθροίσματος            | $(\alpha - \beta)^2$               | $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ |
| Τετράγωνο διαφοράς               | $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$ | $\alpha^2 - \beta^2$                |

**2** Υπολόγισε τα αναπτύγματα:

α)  $(x + 5)^2$       β)  $(2 + 3x)^2$       γ)  $(5x + 2y)^2$       δ)  $(x + \frac{1}{2})^2$   
 ε)  $(x^2 + 1)^2$       στ)  $(x + \frac{1}{x})^2$       ζ)  $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$       η)  $(\alpha\beta + 1)^2$

**3** Υπολόγισε τα αναπτύγματα:

α)  $(x - 1)^2$       β)  $(4x - 2)^2$       γ)  $(2x^2 - 3x)^2$       δ)  $(x - \frac{1}{3})^2$   
 ε)  $(\alpha^3 - 4\alpha)^2$       στ)  $(\frac{\alpha}{9} - \frac{3}{\alpha})^2$       ζ)  $(2xy - 5)^2$       η)  $(-x - y)^2$

**4** Υπολόγισε τα αναπτύγματα:

α)  $(x + 2)(x - 2)$       β)  $(2x - 1)(2x + 1)$       γ)  $(3\alpha + 10\beta)(3\alpha - 10\beta)$       δ)  $(x^2 - 3)(x^2 + 3)$   
 ε)  $(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3})$       στ)  $(5x - \frac{1}{2})(5x + \frac{1}{2})$       ζ)  $(x - 8)(8 + x)$       η)  $(1 + 2\sqrt{x})(1 - 2\sqrt{x})$

5

Συμπλήρωσε τα κενά παρακάτω:

α)  $(x + \dots)^2 = \dots + \dots + 4$

β)  $(\dots - 5)^2 = 4\alpha^2 - \dots + \dots$

γ)  $(\dots - 3)^2 = \dots - 6x + \dots$

δ)  $(2 - \dots)^2 = \dots - 20\alpha + \dots$

ε)  $(\dots + \dots)^2 = 16x^2 + 16xy + \dots$

στ)  $(\dots - 5y)(\dots + 5y) = 9x^2 - \dots$

6

Εκτέλεσε τις παρακάτω πράξεις:

α)  $(x - 2y)^2 + (x + 2y)^2$

β)  $(x + 5)(x - 5) - (5 - x)^2 - 5x$

γ)  $2(4x - 3)^2 + 4x(2x - 3)(2x + 3)$

δ)  $(x - 3y)^2 + (3x + 2y)(3x - 2y) - (3x - y)^2$

7

Απόδειξε τις παρακάτω ισότητες:

α)  $(5x - 3)^2 - (5x + 3)(5x - 3) + 30x = 18$

β)  $\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 - \left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)^2 = 4$

γ)  $(\alpha^2 + 2\beta^2)^2 - (2\alpha\beta)^2 = \alpha^4 + 4\beta^4$

δ)  $(2x)^2 + (x^2 - 1)^2 = (x^2 + 1)^2$

8

Απόδειξε ότι το  $P(x) = (x + 2)^2 + (2x - 1)^2 - 5(x - 1)(x + 1)$  είναι ένα σταθερό πολυώνυμο.

9

Βρες το ανάπτυγμα της ταυτότητας:  $(\alpha + \beta + \gamma)^2$ .

10

Μετάρψε τα κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή:

α)  $\frac{1}{2 + \sqrt{2}}$

β)  $\frac{1}{\sqrt{7} - 3}$

γ)  $\frac{4}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$

δ)  $\frac{6}{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}$

11

Εξέτασε αν το τρίγωνο με πλευρές  $\alpha = x^2 + y^2$ ,  $\beta = 2xy$  και  $\gamma = x^2 - y^2$  είναι ορθογώνιο.

12

Υπολόγισε με τη βοήθεια της ταυτότητας «γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά» τα γινόμενα:

α)  $1.002 \cdot 998$

β)  $105 \cdot 995$

γ)  $2,02 \cdot 1,98$

δ)  $2.003 \cdot 1.997$

Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση

Εξασκούμε

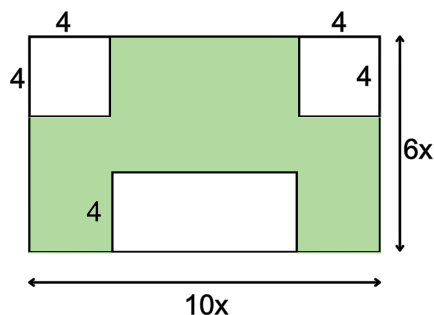


σε όσα έμαθα

## 3.6 | Παραγοντοποίηση πολυωνύμων με κοινό παράγοντα, ομαδοποίηση και ταυτότητες.



Παρακάτω φαίνεται ο κήπος ενός σπιτιού, τον οποίον πρέπει να καλύψουμε με γρασίδι, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Εκφράζουν το ίδιο τμήμα οι εκφράσεις  $60x^2 - 40x$  και  $20x \cdot (3x - 2)$ ;

### Παράγοντες

Σε ένα γινόμενο, π.χ.  $3 \cdot 5 = 15$  οι αριθμοί 3 και 5 που πολλαπλασιάζονται ονομάζονται **παράγοντες**.

$$\begin{array}{c} \nearrow \quad \searrow \\ \text{παράγοντας} \quad \text{παράγοντας} \\ 3 \cdot 5 = 15 \end{array}$$

Ομοίως, στο γινόμενο:  $(x - 1) \cdot (x + 1) = x^2 - 1$ , οι αλγεβρικές παραστάσεις  $(x - 1)$  και  $(x + 1)$

$$\begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \\ \text{παράγοντας} \quad \text{παράγοντας} \\ (x - 1) \cdot (x + 1) = x^2 - 1 \end{array}$$

ονομάζονται **παράγοντες**.

### Παραγοντοποίηση

Θα μελετήσουμε τη διαδικασία με την οποία μπορούμε να βρούμε τους παράγοντες ενός πολυωνύμου, δηλαδή τις αλγεβρικές παραστάσεις οι οποίες έχουν γινόμενο το πολυώνυμο αυτό. Η διαδικασία αυτή λέγεται **παραγοντοποίηση**.

**Γενικά:**

**Παραγοντοποίηση** ενός πολυωνύμου λέγεται η διαδικασία κατά την οποία ένα πολυώνυμο, που είναι άθροισμα, μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων.

**Παράδειγμα:**

Το πολυώνυμο:

$$2\alpha^2 - 2\beta^2$$

έχει δύο όρους που έχουν κοινό παράγοντα το 2, οπότε με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας γράφεται:

$$2\alpha^2 - 2\beta^2 = 2(\alpha^2 - \beta^2).$$

Έχουμε μετατρέψει την παράσταση σε γινόμενο παραγόντων, ωστόσο αν εφαρμόσουμε την ταυτότητα  $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$ , η παράσταση γράφεται:

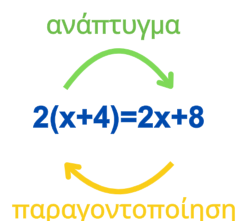
$$2(\alpha + \beta)(\alpha - \beta).$$

Οι παράγοντες  $2$ ,  $\alpha + \beta$  και  $\alpha - \beta$ , δεν μπορούν να μετατραπούν σε γινόμενο **απλούστερων παραγόντων**, δηλαδή σε γινόμενο παραγόντων που έχουν μικρότερο βαθμό από αυτούς. Επίσης δεν έχουν κοινό παράγοντα κάποιον αριθμό (εκτός του 1).

Στο εξής, όταν λέμε ότι παραγοντοποιούμε μία παράσταση, θα εννοούμε ότι δεν μπορεί να μετατραπεί σε γινόμενο απλούστερων παραγόντων.

## Κοινός παράγοντας

Όταν όλοι οι όροι μιας παράστασης έχουν κοινό παράγοντα, τότε η παράσταση μπορεί να παραγοντοποιηθεί με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας:  $a\beta + a\gamma = a(\beta + \gamma)$ .



**Παράδειγμα:** Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση:  $5x + 10$ .

**Λύση:**

Παρατηρούμε ότι οι όροι της παράστασης έχουν κοινό παράγοντα το 5, (το 10 γράφεται  $2 \cdot 5$ ), άρα:

$$5x + 10 = 5(x + 2).$$

↑ Λέμε ότι βγάζουμε κοινό παράγοντα το 5.

## Κοινός παράγοντας κατά ομάδες (Ομαδοποίηση)

Όταν σε ένα πολυώνυμο δεν υπάρχει κοινός παράγοντας σε όλους τους όρους του, χωρίζουμε τους όρους σε κατάλληλες ομάδες και παραγοντοποιούμε (αν είναι δυνατό) κάθε ομάδα. Στη συνέχεια, αν υπάρχει κοινός παράγοντας μεταξύ των ομάδων, βγάζουμε κοινό παράγοντα.

**Παράδειγμα:** Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση:

$$x^3 + 2x^2 + 3x + 6.$$

**Λύση:** Παρατηρούμε ότι δεν έχουν όλοι οι όροι της παράστασης κοινό παράγοντα.

$$\begin{aligned} x^3 + 2x^2 + 3x + 6 &= \\ &= x^2(x + 2) + 3(x + 2) = \\ &= (x + 2)(x^2 + 3). \end{aligned}$$

← Χωρίζουμε την παράσταση σε δύο ομάδες.  
← Βγάζουμε κοινό παράγοντα από κάθε ομάδα.  
← Βγάζουμε κοινό παράγοντα το  $(x + 2)$ .

**Παρατήρηση:** Μπορούμε να χωρίσουμε την παράσταση σε διαφορετικές ομάδες, με το αποτέλεσμα να είναι το ίδιο:

$$\begin{aligned} x^3 + 2x^2 + 3x + 6 &= \underline{x^3 + 3x} + \underline{2x^2 + 6} = \\ &= x(x^2 + 3) + 2(x^2 + 3) = \\ &= (x^2 + 3)(x + 2). \end{aligned}$$

## Διαφορά τετραγώνων

Μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε μια διαφορά τετραγώνων:  $\alpha^2 - \beta^2$ , σύμφωνα με την ταυτότητα  $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$ , δηλαδή:

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta).$$

**Παράδειγμα:** Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση:  $4x^2 - 9$ .

**Λύση:** Παρατηρούμε ότι οι όροι δεν έχουν κοινό παράγοντα.

Η παράσταση όμως γράφεται ως διαφορά δύο τετραγώνων:

$$4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2 = (2x + 3)(2x - 3).$$

↑

Στη διαφορά τετραγώνων  $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$ , θεωρούμε  $\alpha = 2x$  και  $\beta = 3$ .

## Ανάπτυγμα τετραγώνου

Μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε ένα πολυώνυμο που είναι ανάπτυγμα τετραγώνου, σύμφωνα με τις ταυτότητες:

$$\begin{aligned} \bullet \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 \\ \bullet \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 &= (\alpha - \beta)^2 \end{aligned}$$

**Παράδειγμα:** Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α)  $x^2 + 2x + 1$

β)  $y^2 - 6y + 9$ .

**Λύση:**

α)  $x^2 + 2x + 1 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 = (x + 1)^2$ .

↑

Στο ανάπτυγμα  $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2$ ,

θεωρούμε  $\alpha = x$  και  $\beta = 1$ .

β)  $y^2 - 6y + 9 = y^2 - 2 \cdot y \cdot 3 + 3^2 = (y - 3)^2$ .

↑

Στο ανάπτυγμα  $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2$ ,

θεωρούμε  $\alpha = y$  και  $\beta = 3$ .

## Παραγοντοποίηση τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ , με διάσπαση όρου.

Μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε ορισμένες εξισώσεις της μορφής  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ , με  $\alpha \neq 0$ , μετά από κατάλληλη διάσπαση του μεσαίου όρου  $\beta x$ .

**Παράδειγμα:**

Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο:

$$x^2 + 4x + 3.$$

**Λύση:**

$$\begin{aligned} & x^2 + 4x + 3 = \\ & = \underbrace{x^2 + x}_{\alpha} + \underbrace{3x + 3}_{\beta\gamma} = \\ & = x(x + 1) + 3(x + 1) = \\ & = (x + 1)(x + 3). \end{aligned}$$

← Διασπάμε το 4x σε x + 3x.

← Παραγοντοποιούμε με ομαδοποίηση.

**Σχόλιο:** Αν διασπάσουμε το 4x σε διαφορετικά μονώνυμα, π.χ. 2x + 2x, τότε η ομαδοποίηση δεν είναι εφικτή.

Με ποιον τρόπο όμως μπορούμε να βρούμε κατάλληλα μονώνυμα ώστε αν γράψουμε τον μεσαίο όρο βx ως άθροισμα αυτών των μονωνύμων να είναι εφικτή η ομαδοποίηση;

**Μεθοδολογία:**

Ένας τρόπος που μας επιτρέπει να παραγοντοποιήσουμε ορισμένα τριώνυμα της μορφής  $ax^2 + bx + \gamma$ , είναι ο ακόλουθος:

- βρίσκουμε δύο αριθμούς, οι οποίοι έχουν γινόμενο ίσο με  $\alpha \cdot \gamma$ .
- γράφουμε τον μεσαίο όρο βx ως άθροισμα των δύο αυτών αριθμών.

Στη συνέχεια παραγοντοποιούμε το τριώνυμο  $ax^2 + bx + \gamma$  με τη βοήθεια της ομαδοποίησης.

**Παράδειγμα:**

Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο:

$$2x^2 + 7x + 6.$$

**Λύση:**

Είναι  $\underline{2}x^2 + \underline{7}x + \underline{6}$ , με  $\alpha \cdot \gamma = 2 \cdot 6 = 12$ .

$\alpha \quad \beta \quad \gamma$

Αναζητούμε δύο αριθμούς με γινόμενο 12 ( $\alpha \cdot \gamma$ ) και άθροισμα 7 ( $\beta$ ).

Υπάρχουν πολλά ζευγάρια αριθμών που έχουν γινόμενο 12 (π.χ. 1·12, 2·6, 3·4 κ.τ.λ.).

Όμως, μόνο το ζευγάρι 3 και 4 έχει άθροισμα 7. Άρα έχουμε:

$$\begin{aligned} & 2x^2 + 7x + 6 = \\ & = \underbrace{2x^2 + 4x}_{\alpha} + \underbrace{3x + 6}_{\beta\gamma} = \\ & = 2x(x + 2) + 3(x + 2) = \\ & = (x + 2) \cdot (2x + 3). \end{aligned}$$

← Διασπάμε το 7x σε 4x + 3x.

← Παραγοντοποιούμε με ομαδοποίηση.

Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση



4. Να υπολογίσετε την παράσταση με τη βοήθεια της διαφοράς τετραγώνων:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

$$550^2 - 450^2.$$

**Λύση:**

Από τη διαφορά τετραγώνων  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ , έχουμε:

$$\begin{aligned} 550^2 - 450^2 &= (550 + 450)(550 - 450) = \\ &= 1.000 \cdot 100 = \\ &= 100.000 \end{aligned}$$

Με τον τρόπο αυτόν, υπολογίσαμε με ευκολία την παράσταση, χωρίς δύσκολες πράξεις ή υπολογιστή τσέπης.



**1** Συμπλήρωσε τα κενά στις παρακάτω ισότητες:

α)  $2x + 4 = 2(\dots + \dots)$

β)  $9x - 12 = 3(\dots - \dots)$

γ)  $x^3 + x^2 = x^2(\dots + \dots)$

δ)  $5x^4 - 10x^2 + 15x = 5x(\dots - \dots + \dots)$

ε)  $6(x - 1) + x(x - 1) = (x - 1)(\dots + \dots)$

στ)  $-3x - 15x^2 + 9x^3 = -3x(\dots + \dots - \dots)$

**2** Συμπλήρωσε τα κενά στις παρακάτω ισότητες:

α)  $x^2 - 4 = (\dots + \dots)(\dots - \dots)$

β)  $9x^2 - 4 = (\dots + \dots)(\dots - \dots)$

γ)  $x^2 + 4x + 4 = (\dots + \dots)^2$

δ)  $4x^2 - 12x + 9 = (\dots - \dots)^2$

**3** Παραγοντοποίησε τις παραστάσεις:

(Κοινός παράγοντας)

α)  $5x - 10$

β)  $3x^2 - 6x$

γ)  $3x^2 - 3x + 3$

δ)  $8x^2 - 20x$

ε)  $x^5 - x^3 + x^2$

στ)  $x^3y^5 + x^5y^3$

ζ)  $4a\beta^2 - 2a^3\beta^2 - 6a^2\beta^3\gamma$

η)  $12x^4 + 6x^3$

θ)  $-18x^5 - 9x^4 - 3x^2$

**4** Παραγοντοποίησε τις παραστάσεις:

(Κοινός παράγοντας)

α)  $x(5x + 3) - 2(5x + 3)$

β)  $2x^2(1 - 4x) + 6x(4x - 1)$

γ)  $(5x - 4)(2x + 1) + (4 - 5x)(x + 3)$

δ)  $(3x - 2)(x - 1) + 2(x - 1)$

ε)  $(2x - 1)^2 - 3(2x - 1)$

στ)  $x(3x - 1) - 2(3x - 1)^2$

5

Παραγοντοποίησε τις παραστάσεις:

(Ομαδοποίηση)

α)  $\alpha\beta - 2\alpha + 2\beta - 4$

β)  $xy - 5x - 5y + 25$

γ)  $x^3 + 3x^2 + 2x + 6$

δ)  $4x^3 - 6x^2 + 6x - 9$

ε)  $\alpha\beta - \alpha - \beta + 1$

στ)  $2x - 2 + \beta x - \beta + x^2 - x$

6

Παραγοντοποίησε τις παραστάσεις:

(Διαφορά τετραγώνων)

α)  $x^2 - 100$

β)  $49x^2 - 16$

γ)  $25x^2 - 9y^2$

δ)  $36x^2 - \frac{1}{4}$

ε)  $-y^2$

στ)  $x^4 - y^4$

ζ)  $(2x - 1)^2 - 81$

η)  $(x - 3)^2 - (2x + 1)^2$

θ)  $9x^2 - 4(x - 2)^2$

7

Παραγοντοποίησε τις παραστάσεις:

(Ανάπτυγμα τετραγώνου)

α)  $x^2 + 6x + 9$

β)  $25 - 10x + x^2$

γ)  $x^2 + 1 + 2x$

δ)  $4x^2 + 12x + 9$

ε)  $x^2 - x + \frac{1}{4}$

στ)  $9x^2 + 12xy + 4y^2$

8

Παραγοντοποίησε τις παραστάσεις:

(Διάσπαση όρου)

α)  $5x^2 + 7xy + 2y^2$

β)  $2x^2 - 3xy + y^2$

γ)  $x^2 - 3x + 2$

δ)  $6a^2 + 11a + 3$

ε)  $2y^2 + 5y + 2$

στ)  $3x^2 + 4x - 4$

9

Παραγοντοποίησε τις παραστάσεις:

(Συνδυασμοί)

α)  $\alpha^2 - \beta^2 + \alpha - \beta$

β)  $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - \gamma^2$

γ)  $25x^2 - y^2 - 5x + y$

δ)  $(x - 1)(x - 2) + x^2 - 4$

ε)  $x^2 - y^2 + 10x + 25$

στ)  $(x + y)^2 - (2x - 3y)^2$

ζ)  $(x + 3)(5x - 5) - x + 1$

η)  $\beta^2 - \alpha^2 + 2\alpha - 1$

θ)  $4x^2 - 9x + 5$

ι)  $x^2 - 6x + 9 + (x - 3)(2x - 1)$

ια)  $\alpha^3 - \alpha + \alpha^4 - 1$

ιβ)  $2x^2 - 4x + 2$

ιγ)  $(x^2 + 4)^2 - 4x^2$

ιδ)  $36x^2 - (x^2 + 9)^2$

ιε)  $-2\alpha^3 + 8\alpha^2 - 8\alpha$

10

Δίνονται τα πολυώνυμα:

$P(x) = 2x(3x - 1) - (x - 1)(x + 1) - 3x^2 - 1$  και  $Q(x) = (3x - 2)^2 - (2x - 1)(4x - 3)$ .

α) Κάνε τις πράξεις και δείξε ότι  $P(x) = 2x^2 - 2x$  και  $Q(x) = x^2 - 2x + 1$ .

β) Παραγοντοποίησε τα πολυώνυμα  $P(x)$  και  $Q(x)$  του ερωτήματος (α).

Εξασκούμε



σε όσα έμαθα

## 3.7 | ΕΚΠ πολυωνύμων

### Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο

**Θυμόμαστε – Μαθαίνουμε:**

**Δραστηριότητα:** Να αναλύσετε τους αριθμούς 12, 18 και 30 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Στη συνέχεια με τη βοήθεια αυτής της ανάλυσης να βρείτε το ΕΚΠ των αριθμών αυτών.



**Λύση:**

Ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων:

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$12 = 2^2 \cdot 3$$

$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$18 = 2 \cdot 3^2$$

$$\begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

Το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών είναι το γινόμενο όλων των παραγόντων τους με εκθέτη καθένας τον **μεγαλύτερο** από τους εκθέτες του.

$$\text{ΕΚΠ}(12, 18, 30) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 4 \cdot 9 \cdot 5 = 180.$$

Με ανάλογο τρόπο, μπορούμε να ορίσουμε το ΕΚΠ μονωνύμων και πολυωνύμων.

### ΕΚΠ Μονωνύμων

**Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ)** δύο ή περισσότερων μονωνύμων ονομάζεται το μονώνυμο που έχει:

- Συντελεστή το ΕΚΠ των συντελεστών των μονωνύμων.
- Κύριο μέρος το γινόμενο των κοινών και μη κοινών μεταβλητών τους με εκθέτη καθένας τον μεγαλύτερο από τους εκθέτες του.

**Παράδειγμα:**

Να βρείτε το ΕΚΠ των μονωνύμων:

$$12x^2y, \quad 18xy^3 \quad \text{και} \quad 30xy.$$

**Λύση:** Το ΕΚΠ των μονωνύμων είναι:  $\text{ΕΚΠ} = 180x^2y^3$ .

$$\text{ΕΚΠ}(12, 18, 30) = 180.$$

Γινόμενο όλων των μεταβλητών με τον μεγαλύτερο εκθέτη.

## ΕΚΠ Πολυωνύμων

**Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ)** δύο ή περισσότερων πολυωνύμων που έχουν παραγοντοποιηθεί, ονομάζεται το γινόμενο των κοινών και μη κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός τον μεγαλύτερο από τους εκθέτες του.

**Παράδειγμα:** Να βρείτε το ΕΚΠ των πολυωνύμων:

- $A(x) = 5x^2 - 45$
- $B(x) = 2x^2 - 6x$
- $\Gamma(x) = x^2 - 6x + 9$

**Λύση:**

**Βήμα 1ο:** Παραγοντοποιούμε τα πολώνυμα:

- $A(x) = 5x^2 - 45 = 5(x^2 - 9) = 5(x + 3)(x - 3)$ .
- $B(x) = 2x^2 - 6x = 2x(x - 3)$ .
- $\Gamma(x) = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$ .

**Βήμα 2ο:** Βρίσκουμε το ΕΚΠ των αριθμητικών παραγόντων:  $\text{ΕΚΠ}(2, 5) = 10$ .

**Βήμα 3ο:** Βρίσκουμε το ΕΚΠ των πολυωνύμων  $A(x)$ ,  $B(x)$  και  $\Gamma(x)$  που είναι το γινόμενο των κοινών και μη κοινών παραγόντων με τον μεγαλύτερο εκθέτη:

$$\text{ΕΚΠ} = 10 \cdot x(x - 3)^2(x + 3).$$

$\nearrow$   
 $\text{ΕΚΠ}(2, 5) = 10.$

$\nwarrow$   
 Γινόμενο όλων των παραγόντων  
με τον μεγαλύτερο εκθέτη.



**1.** Να βρείτε το ΕΚΠ των μονωνύμων:

- α) 3,  $x$  και  $2x^2$
- β)  $6x^4y$ ,  $x^2y^2$  και  $8x^5y^3z$

**Λύση:**

- α) 3,  $x$  και  $2x^2$ . Το ΕΚΠ των συντελεστών 2 και 3 είναι 6.  
Το ΕΚΠ των μονωνύμων είναι:  $\text{ΕΚΠ} = 6x^2$ .

- β)  $6x^5$ ,  $x^2y^2$  και  $8x^4y^3z$ . Το ΕΚΠ των συντελεστών 6 και 8 είναι 24.  
Το ΕΚΠ των μονωνύμων είναι:  $\text{ΕΚΠ} = 24x^5y^3z$ .

2. Να βρείτε το ΕΚΠ των πολυωνύμων:

α)  $2x$ ,  $x + 5$  και  $2x + 5$ .

β)  $x^2 - 1$  και  $2x^2 - 4x + 2$ .

**Λύση:**

α)  $2x$ ,  $x + 5$  και  $2x + 5$ .

Τα πολυώνυμα δεν παραγοντοποιούνται και δεν έχουν κανένα κοινό παράγοντα.

Το ΕΚΠ των πολυωνύμων είναι το γινόμενό τους:  $\text{ΕΚΠ} = 2x \cdot (x + 5) \cdot (2x + 5)$ .

β)  $x^2 - 1$  και  $2x^2 - 4x + 2$ .

Παραγοντοποιούμε τα πολυώνυμα:

- $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$ .

- $2x^2 - 4x + 2 = 2 \cdot (x^2 - 2x + 1) = 2 \cdot (x - 1)^2$ .

Το ΕΚΠ των πολυωνύμων είναι:

$$\text{ΕΚΠ} = 2 \cdot (x + 1)(x - 1)^2.$$



1

Ποιο από τα Α, Β, Γ είναι το ΕΚΠ των μονωνύμων που δίνεται σε κάθε περίπτωση;

| Μονώνυμα               | ΕΚΠ     |            |         |
|------------------------|---------|------------|---------|
|                        | Α.      | Β.         | Γ.      |
| i. $x, x^2, x^5$       | $x$     | $x^5$      | $x^8$   |
| ii. $5x, 10x, x$       | $5x$    | $10x$      | $10x^3$ |
| iii. $x^3, 7x^4, 4x^4$ | $11x^4$ | $28x^{11}$ | $28x^4$ |

2

Ποιο από τα Α, Β, Γ είναι το ΕΚΠ των μονωνύμων που δίνεται σε κάθε περίπτωση;

| Μονώνυμα                | ΕΚΠ      |               |          |
|-------------------------|----------|---------------|----------|
|                         | Α.       | Β.            | Γ.       |
| i. $xy, x^2y, x^3$      | $x^2y$   | $x^2y^2$      | $x^3y$   |
| ii. $2xy, 4xz, 6yz$     | $12xyz$  | $12x^2y^2z^2$ | $24xyz$  |
| iii. $x^3y^6, x^4, y^4$ | $x^3y^6$ | $x^4y^4$      | $x^4y^6$ |

3

Ποιο από τα Α, Β, Γ είναι το ΕΚΠ των πολυωνύμων που δίνεται σε κάθε περίπτωση;

| Πολυώνυμο                       | ΕΚΠ         |                    |                    |
|---------------------------------|-------------|--------------------|--------------------|
|                                 | Α.          | Β.                 | Γ.                 |
| i. $x, x + 1, x - 1$            | $x + 1$     | $(x + 1)(x - 1)$   | $x(x + 1)(x - 1)$  |
| ii. $x^2 - 1, x - 1, (x - 1)^2$ | $(x - 1)^2$ | $(x^2 - 1)(x + 1)$ | $(x - 1)^2(x + 1)$ |
| iii. $2x + 3, 2x, 4x + 6$       | $4x + 6$    | $4x^2 + 6$         | $4x^2 + 6x$        |

4

Υπολόγισε το ΕΚΠ των μονωνύμων.

- α)  $4xy, 16x^3y, 8xy^2$ .  
 β)  $12\alpha^3\beta^2\gamma, 9\alpha\beta^3\gamma^2, 3\alpha^3\beta^3$ .  
 γ)  $15x^3y^5z^4, 12x^3y^2z^3, x^5y^4$

5

Υπολόγισε το ΕΚΠ των πολυωνύμων.

- α)  $x + 1, x - 1, x$ .  
 β)  $x + 3, x(x + 3), x^2$ .  
 γ)  $4x, 6x^3, 2x - 3$ .

6

Υπολόγισε το ΕΚΠ των πολυωνύμων.

- α)  $A = 6x + 6, B = 10x^2 + 20x + 10, \Gamma = 2x^2 + 2x$ .  
 β)  $A = x^2 - 9, B = 2x^3 - 18x, \Gamma = x^2 - 6x + 9$ .  
 γ)  $A = x^3 - 4x^2 + 4x, B = (x^2 - 2x)(x - 2), \Gamma = x^2 - 4$ .

7

Υπολόγισε το ΕΚΠ των πολυωνύμων.

- α)  $A = x^2(x^3 - x), B = x^3 - 2x^2 + x, \Gamma = x(x - 1)^3$ .  
 β)  $A = x^2 + 3x + 2, B = x^4 - 16, \Gamma = (x - 2)^2$ .

Εξασκούμαι



σε όσα έμαθα

## 3.8 | Ρητές παραστάσεις, απλοποίηση



Η πιο αναλυτική μορφή των πολυωνύμων  $16x^2y^3$  και  $6x^3y^2z$  είναι τα ισοδύναμα πολυώνυμα της μορφής:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y \quad \text{και} \quad 2 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot z$$

Έχουν κοινούς παράγοντες οι παραπάνω εκφράσεις; Μπορείς να βρεις τον Κοινό Παράγοντα των παραπάνω πολυωνύμων;

### Ρητές παραστάσεις

Μια αλγεβρική παράσταση που είναι κλάσμα και οι όροι του είναι πολυώνυμα, λέγεται **ρητή** αλγεβρική παράσταση ή απλώς ρητή παράσταση.

**Παραδείγματα:** Οι παραστάσεις:  $\frac{x+1}{3x+2}$ ,  $\frac{5x}{y^3-9}$  είναι ρητές.

### Πότε ορίζεται μια ρητή παράσταση;

Γνωρίζουμε ότι ο παρονομαστής σε ένα κλάσμα **δεν μπορεί να είναι μηδέν**. Για τον λόγο αυτόν, οι μεταβλητές μιας ρητής παράστασης δεν μπορούν να πάρουν τιμές που μηδενίζουν τον παρονομαστή της.



**Παραδείγματα:**

- Η παράσταση  $\frac{5}{x}$ , ορίζεται αν  $x \neq 0$ .
- Η παράσταση  $\frac{3}{x-1}$ , ορίζεται αν  $x-1 \neq 0$ , δηλαδή αν  $x \neq 1$ .

$$\frac{\alpha}{\beta} \leftarrow \beta \neq 0$$

Στη συνέχεια, όταν γράφουμε μια ρητή παράσταση, θα εννοείται ότι οι μεταβλητές της δεν παίρνουν τιμές που μηδενίζουν τον παρονομαστή.

### Απλοποίηση ρητής παράστασης

Αν σε μία ρητή παράσταση ο αριθμητής και ο παρονομαστής είναι γινόμενα και έχουν κοινό παράγοντα, τότε ο παράγοντας αυτός μπορεί να **απλοποιηθεί**.

**Παραδείγματα:**

- $\frac{2x}{3x} = \frac{2x \cdot \cancel{x}}{3x \cdot \cancel{x}} = \frac{2}{3}$ . ← Για ευκολία γράφουμε:  $\frac{2\cancel{x}}{3\cancel{x}} = \frac{2}{3}$
- $\frac{8x^2}{6x} = \frac{4x}{3}$ . ← Για τους συντελεστές ισχύει:  $\frac{8}{6} = \frac{8:2}{6:2} = \frac{4}{3}$ .  
Για ευκολία γράφουμε:  $\frac{8x^{\cancel{2}}}{6\cancel{x}} = \frac{4x}{3}$

**Προσοχή**, παραστάσεις όπως  $\frac{x+1}{x+2}$  και  $\frac{3a-1}{a}$ , **δεν** απλοποιούνται γιατί οι όροι τους δεν είναι γινόμενα.

Αν σε μια ρητή παράσταση ο αριθμητής ή ο παρονομαστής δεν είναι γινόμενο, τότε για να την απλοποιήσουμε **παραγοντοποιούμε** και τους δύο όρους της και **διαγράφουμε** τους κοινούς παράγοντες των όρων της.

**Παράδειγμα:**

$$\frac{2x+10}{x^2+5x} = \frac{2(x+5)}{x(x+5)} = \frac{\cancel{2}x+10}{x^2+5x} = \frac{2(x+5)}{x(x+5)} = \frac{2}{x}$$



1. Να βρείτε για ποιες τιμές του  $x$  ορίζονται οι παραστάσεις:

α)  $\frac{2x}{5}$       β)  $\frac{1}{4x+3}$       γ)  $\frac{3}{x \cdot (x-2)}$

**Λύση:**

α) Η παράσταση  $\frac{2x}{5}$  ορίζεται για κάθε τιμή της μεταβλητής  $x$ . (Ο παρονομαστής είναι  $5 \neq 0$ )

β) Η παράσταση  $\frac{1}{4x+3}$  ορίζεται αν

$$4x+3 \neq 0$$

$$\text{ή } x \neq -\frac{3}{4}$$

γ) Η παράσταση  $\frac{3}{x \cdot (x-2)}$ ,

ορίζεται αν  $x \cdot (x-2) \neq 0$

δηλαδή αν  $x \neq 0$  και  $x \neq 2$ .

← Αν  $\alpha \cdot \beta \neq 0$ ,  
τότε:  $\alpha \neq 0$  και  $\beta \neq 0$ .

2. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α)  $\frac{6x^5y}{3xy^2}$       β)  $\frac{8\alpha^3\beta^2}{12\alpha\beta^2}$       γ)  $\frac{(x+1)^2}{x(x+1)}$

**Λύση:**

Οι παραστάσεις έχουν όρους γινόμενα οπότε απλοποιούμε τους κοινούς παράγοντες.

α)  $\frac{6x^5y}{3xy^2} = \frac{2x^4}{y}$

β)  $\frac{8\alpha^3\beta^2}{12\alpha\beta^2} = \frac{2\alpha^2}{3}$

γ)  $\frac{(x+1)^2}{x(x+1)} = \frac{x+1}{x}$

3. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α)  $\frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x}$       β)  $\frac{x + 1}{x^2 + 2x + 1}$       γ)  $\frac{5x^2 - x^3}{5x^2 - 25x}$

**Λύση:**

Οι όροι των παραστάσεων δεν είναι γινόμενα. Παραγοντοποιούμε (αν αυτό είναι δυνατό) αριθμητή και παρονομαστή και διαγράφουμε τους κοινούς παράγοντες των όρων.

α)  $\frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x} = \frac{(x-2)(x+2)}{x(x+2)} = \frac{x-2}{x}$ .

β)  $\frac{x + 1}{x^2 + 2x + 1} = \frac{x+1}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1}$ .

γ)  $\frac{5x^2 - x^3}{5x^2 - 25x} = \frac{x^2(5-x)}{5x(x-5)} = \frac{-x(x-5)}{5(x-5)} = -\frac{x}{5}$ .

↑ Για να δημιουργήσουμε κοινό παράγοντα, γράψαμε το  $(5-x)$  ως  $-(x-5)$ .



Εξασκούμε



σε όσα έμαθα

**1** Χαρακτήρισε ως Σωστές ή Λάθος τις προτάσεις που ακολουθούν βάζοντας ένα x στην κατάλληλη θέση.

α)  $\frac{x \cdot y + 1}{x} = y + 1$ .

β)  $\frac{x^2 - y^2}{x + y} = x - y$ .

γ) Η παράσταση  $\frac{x^2}{x(x-1)}$  γράφεται  $\frac{x}{x-1}$  και ορίζεται όταν  $x \neq 1$ .

δ) Η παράσταση  $\frac{x^2}{x(x-1)}$  γράφεται  $\frac{x}{x-1}$  και ορίζεται όταν  $x \neq 0$  και  $x \neq 1$

Σωστό      Λάθος

|  |  |
|--|--|
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

**2** Για ποιες τιμές των μεταβλητών τους ορίζονται οι παρακάτω ρητές παραστάσεις;

α)  $\frac{3}{x-5}$

β)  $\frac{2x-1}{2x+1}$

γ)  $\frac{6x}{x^2+1}$

δ)  $\frac{8x-7}{(3x-1)(x+1)}$

ε)  $\frac{1}{x^2-4x+4}$

στ)  $\frac{1-5x}{x^2-25}$

3

Απλοποίησε τις παραστάσεις:

α)  $\frac{4x}{2x}$

β)  $\frac{3x^2}{9x}$

γ)  $\frac{\alpha^2\beta}{\alpha\beta^2}$

δ)  $\frac{12x^5y^4z}{4xy^4z^2}$

ε)  $\frac{5\alpha\beta^4}{25\alpha^2\beta}$

4

Απλοποίησε τις παραστάσεις:

α)  $\frac{(x+3)^2(x-2)}{(x+3)(x-2)^3}$

β)  $\frac{(x-2)(2x+1)}{(2-x)(1+2x)}$

γ)  $\frac{-x-5}{x+5}$

δ)  $\frac{x^2y(x-1)^2}{xy(x^2-1)}$

5

Απλοποίησε τις παραστάσεις:

α)  $\frac{4x-8}{3x^2-6x}$

β)  $\frac{x^3-x}{x-x^2}$

γ)  $\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$

δ)  $\frac{x^4-1}{x^2-1}$

6

Απλοποίησε τις παραστάσεις:

α)  $\frac{xy-x-y+1}{xy-x}$

β)  $\frac{x^2-6x+9}{x^2-9}$

γ)  $\frac{x^4-16}{x^3+4x^2+4x}$

δ)  $\frac{x^2+2x+1-y^2}{y-x-1}$

ε)  $\frac{4(x-2)^2-x+2}{x^2-4x+4}$

στ)  $\frac{\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2-\alpha-\beta}{\alpha^2+5\alpha\beta+4\beta^2}$

Εξασκούμε



σε όσα έμαθα

## 3.9 | Πολλαπλασιασμός και διαίρεση ρητών παραστάσεων



Αξιοποιώντας τις γνώσεις σου από τις προηγούμενες τάξεις κάνε τις πράξεις στην παρακάτω αριθμητική παράσταση:

$$5 \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} + \frac{2}{\frac{3}{5}}$$

Με αντίστοιχο τρόπο, προσπάθησε να υπολογίσεις την απλουστευμένη μορφή της αλγεβρικής παράστασης:

$$x \cdot \frac{x}{3} - \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{2x} + \frac{\frac{x}{3}}{\frac{x \cdot y}{y}}$$

### Πολλαπλασιασμός ρητών παραστάσεων

Οι κανόνες του πολλαπλασιασμού κλασμάτων στους ρητούς αριθμούς ισχύουν και για τις ρητές παραστάσεις.

$$a \cdot \frac{\beta}{\gamma} = \frac{a \cdot \beta}{\gamma} \quad \text{και} \quad \frac{a}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{a \cdot \gamma}{\beta \cdot \delta}$$

#### Παραδείγματα:

- $\frac{x^2}{4} \cdot \frac{x^3}{5} = \frac{x^2 \cdot x^3}{4 \cdot 5} = \frac{x^5}{20}$  ← Είναι  $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$ .
- $\frac{2x^2}{y} \cdot \frac{y^2}{4x^3} = \frac{2x^2 \cdot y^2}{y \cdot 4x^3} = \frac{y}{2x}$  ← Μετά τις πράξεις, εκτελούμε όλες τις δυνατές απλοποιήσεις.

### Διαίρεση ρητών παραστάσεων

Οι κανόνες της διαίρεσης κλασμάτων στους ρητούς αριθμούς ισχύουν και για τις ρητές παραστάσεις.

$$\frac{a}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{a}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} = \frac{a \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma} \quad \text{και} \quad \frac{\frac{a}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{a \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma} \quad (\text{σύνθετο κλάσμα}).$$

#### Παραδείγματα:

- $\frac{x}{2} \cdot \frac{x^3}{4} = \frac{x}{2} \cdot \frac{4}{x^3} = \frac{x \cdot 4}{2 \cdot x^3} = \frac{2}{x^2}$
- $\frac{\frac{x}{6y}}{\frac{x}{2y}} = \frac{x \cdot 2y}{6y \cdot x} = \frac{1}{3}$



1. Να κάνετε τις πράξεις:

α)  $2x \cdot \frac{3x}{5}$ ,

β)  $\frac{x^2-1}{x^2} \cdot \frac{x^3}{x^2-2x+1}$ .

**Λύση:**

α)  $2x \cdot \frac{3x}{5} = \frac{2x \cdot 3x}{5} = \frac{6x^2}{5}$

β)  $\frac{x^2-1}{x^2} \cdot \frac{x^3}{x^2-2x+1} = \frac{(x^2-1) \cdot x^3}{x^2 \cdot (x^2-2x+1)} = \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)x^{\cancel{3}}}{x^{\cancel{2}}(x-1)^{\cancel{2}}} = \frac{(x+1)x}{x-1}$

2. Να κάνετε τις πράξεις :

α)  $\frac{6x^2}{x+1} \cdot \frac{3x^2}{x^2-1}$ ,

β)  $\frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x}{4x^2-1}}$ .

**Λύση:**

α)  $\frac{6x^2}{x+1} \cdot \frac{3x^2}{x^2-1} = \frac{6x^2}{x+1} \cdot \frac{x^2-1}{3x} = \frac{6x^2 \cdot (x^2-1)}{(x+1) \cdot 3x} = \frac{6x^2(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}3x^{\cancel{2}}} = 2(x-1)$ .

β)  $\frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x}{4x^2-1}} = \frac{x \cdot (4x^2-1)}{(2x+1) \cdot x} = \frac{\cancel{x}(2x+1)(2x-1)}{(2x+1)\cancel{x}} = 2x-1$ .



**1** Υπολόγισε τα γινόμενα.

α)  $x^2 \cdot \frac{5x}{3}$

β)  $\frac{1}{x^3} \cdot (-4x^2)$

γ)  $\frac{25x}{3} \cdot \frac{6}{x^2}$

δ)  $\frac{5x^2}{3y} \cdot \frac{9y^3}{25x}$

ε)  $-12x^5y \cdot \frac{-4x}{3y^3}$

στ)  $-\frac{1}{3x} \cdot \frac{3}{5x^2} \cdot (-6x)$

**2** Υπολόγισε τα γινόμενα.

α)  $\frac{x+5}{12} \cdot \frac{6}{x+5}$

β)  $(2x+6) \cdot \frac{-8}{x+3}$

γ)  $\frac{x^2-1}{x} \cdot \frac{2x^2-2x}{2x-2}$

δ)  $\frac{x^3-6x^2+9x}{x^2-2x} \cdot \frac{4-x^2}{x^2-9}$

ε)  $\frac{2x^2}{2x^2-x} \cdot (4x^2-1)$

στ)  $\frac{\alpha-\beta}{\alpha^2+\alpha\beta} \cdot \frac{\alpha^3\beta-\alpha^2\beta}{\beta-\alpha}$

3

Κάνε τις διαιρέσεις.

α)  $\frac{5x^3}{y^2} : (-5x^6y)$

β)  $\left(-\frac{12a^3}{5\beta^2}\right) : \left(-\frac{6a^3}{10\beta}\right)$

γ)  $\frac{15\alpha - 4\beta}{\alpha + 2\beta} : \frac{4\beta - 15\alpha}{2\beta + \alpha}$

δ)  $\frac{8x^2 + 8x + 2}{x^2 - 1} : \frac{4x^3 + 2x^2}{1 - x}$

ε)  $\frac{(3x)^2}{2x + 1} : \left(\frac{2x}{2x + 1}\right)^2$

στ)  $(4x^3 - 64x) : \frac{(4 - x)^2}{2}$

4

Κάνε τις πράξεις.

α)  $\frac{\frac{6x^4}{y}}{\frac{2x^5}{3y}}$

β)  $\frac{x^2 - 1}{\frac{2x}{2x + 2}}$

γ)  $\frac{x^2 - 9}{\frac{2x - 6}{3}}$

5

Υπολόγισε τις παραστάσεις.

α)  $\left(\frac{x^3y}{x-y} \cdot \frac{x^2 - y^2}{6x^2}\right) : \frac{x^2 + 2xy + y^2}{2xy}$

β)  $\left(\frac{2x + y}{x - y} : \frac{4x^2 + 4xy + y^2}{4x^2 - 4y^2}\right) \cdot (4x^2 - y^2)$

γ)  $\frac{x^2 - 4 + x(x - 2)}{2x^2 - 8x + 8} \cdot \frac{x^2 - 4}{x} : (x + 1)$

δ)  $\frac{x^2 + 6x + 5}{(x + 1)^2} \cdot \frac{x + 1}{x^2 - 25} \cdot (-5x)^2$

Εξασκούμαι



σε όσα έμαθα

Εξασκούμαι



σε όσα έμαθα

# 3.10 | Πρόσθεση και Αφαίρεση ρητών παραστάσεων



Θυμόμαστε ότι για να κάνουμε πρόσθεση και αφαίρεση ανάμεσα σε κλάσματα, τα κλάσματα πρέπει να είναι ομώνυμα. Για παράδειγμα έχουμε:  $\frac{2}{7} + \frac{1}{5} = \frac{2 \cdot 5}{7 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 7}{7 \cdot 5} = \frac{10}{35} + \frac{7}{35} = \frac{17}{35}$ .

Πώς θα εκτελούσες αντίστοιχα την πράξη:  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ ;

## Πρόσθεση και αφαίρεση ρητών παραστάσεων

Οι κανόνες της πρόσθεσης και της αφαίρεσης ομώνυμων κλασμάτων στους ρητούς αριθμούς ισχύουν και για τις ρητές παραστάσεις.

Ισχύει:

$$\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha + \beta}{\gamma} \quad \text{και} \quad \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha - \beta}{\gamma}$$

### Παράδειγμα:

- $\frac{4}{x} + \frac{2}{x} = \frac{4+2}{x} = \frac{6}{x}$ .
- $\frac{3x}{x+1} - \frac{x}{x+1} = \frac{3x-x}{x+1} = \frac{2x}{x+1}$ .

Αν τα κλάσματα δεν έχουν τους τους ίδιους παρονομαστές, τότε για την πρόσθεση ή την αφαίρεσή τους τα μετατρέπουμε σε **ομώνυμα**.

### Παράδειγμα:

$$\frac{1}{3x} + \frac{2}{x} = \frac{1}{3x} + \frac{6}{3x} = \frac{1+6}{3x} = \frac{7}{3x}$$

Το ΕΚΠ των παρονομαστών  
3x και x, είναι 3x.

$$\frac{1}{2x} - \frac{x+1}{x^2} = \frac{x}{2x^2} - \frac{2x+2}{2x^2} = \frac{x - (2x+2)}{2x^2} = \frac{x-2x-2}{2x^2} = \frac{-x-2}{2x^2}$$

Το ΕΚΠ των παρονομαστών  
2x και x<sup>2</sup>, είναι 2x<sup>2</sup>.



1. Να υπολογίσετε το άθροισμα:  $\frac{3x-1}{x+1} + \frac{3-x}{x+1}$ .

**Λύση:** Τα κλάσματα είναι ομώνυμα, οπότε προσθέτουμε τους αριθμητές και αφήνουμε τον ίδιο παρονομαστή.

$$\frac{3x-1}{x+1} + \frac{3-x}{x+1} = \frac{3x-1+3-x}{x+1} = \frac{2x+2}{x+1} = \frac{2(x+1)}{x+1} = 2.$$

2. Να υπολογίσετε το άθροισμα:  $\frac{1}{3x+9} + \frac{1}{x^2+3x}$ .

**Λύση:** Τα κλάσματα δεν είναι ομώνυμα.

$$\begin{aligned} \frac{1}{3x+9} + \frac{1}{x^2+3x} &= \frac{1}{3(x+3)} + \frac{1}{x(x+3)} = \\ &= \frac{1}{3(x+3)} + \frac{1}{x(x+3)} = \\ &= \frac{x}{3x(x+3)} + \frac{3}{3x(x+3)} = \\ &= \frac{x+3}{3x(x+3)} = \frac{1}{3x}. \end{aligned}$$

← Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές.

ΕΚΠ παρονομαστών:  $3x(x+3)$ .

← Μετατρέπουμε τα κλάσματα σε ομώνυμα.

← Είναι  $\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha+\beta}{\gamma}$ .

← Απλοποιούμε.

3. Να υπολογίσετε τη διαφορά:  $\frac{x}{x^2-1} - \frac{x}{x^2+x}$ .

**Λύση:** Τα κλάσματα δεν είναι ομώνυμα.

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^2-1} - \frac{x}{x^2+x} &= \frac{x}{(x+1)(x-1)} - \frac{x}{x(x+1)} = \\ &= \frac{x}{(x+1)(x-1)} - \frac{1}{x+1} = \\ &= \frac{x}{(x+1)(x-1)} - \frac{x-1}{(x+1)(x-1)} = \\ &= \frac{x-(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \\ &= \frac{x-x+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{(x+1)(x-1)}. \end{aligned}$$

← Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές και παρατηρούμε ότι το  $x$  απλοποιείται στο δεύτερο κλάσμα.

ΕΚΠ παρονομαστών:  $(x+1)(x-1)$ .

← Μετατρέπουμε τα κλάσματα σε ομώνυμα.

← Εκτελούμε τις πράξεις στον αριθμητή.



1

Υπολόγισε τις παραστάσεις:

α)  $\frac{5}{x} + \frac{6}{x} - \frac{12}{x}$

β)  $\frac{x}{2x-3} + \frac{x-3}{2x-3}$

γ)  $\frac{2x-1}{x+1} - \frac{x-2}{x+1}$

δ)  $\frac{2x+5}{x-3} + \frac{x-14}{x-3}$

2

Υπολόγισε τις παραστάσεις:

α)  $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}$

β)  $\frac{4}{2x} - \frac{3}{4x} + 1$

γ)  $\frac{3}{\alpha^2\beta} - \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$

δ)  $\frac{8x-7}{x-1} + \frac{x}{1-x}$

ε)  $\frac{6}{x+1} - \frac{x}{(x+1)^2}$

3

Υπολόγισε τις παραστάσεις:

α)  $\frac{x}{3x-9} - \frac{3}{x^2-3x}$

β)  $\frac{1}{x^2-4} + \frac{1}{2x-x^2}$

γ)  $\frac{5}{x^2-2x+1} + \frac{2}{x^2-1}$

δ)  $\frac{x}{xy-x^2} - \frac{1}{x^2-y^2}$

ε)  $\frac{4}{8x^2-8x+2} + \frac{1}{4x^2-1}$

στ)  $\frac{2x}{x^2-1} - \frac{2x+1}{x^2+x}$

4

Υπολόγισε τις παραστάσεις:

α)  $\left(4 + \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2x+1}\right)$

β)  $\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2\right) : \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right)$

γ)  $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) \cdot \frac{x^2-y^2}{xy}$

δ)  $\frac{x + \frac{1}{x} - 2}{1 - \frac{1}{x}}$

ε)  $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) \cdot \left(\frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}\right)$

στ)  $\left(\frac{x^2-4}{x^2+3x+2} + 1\right) \cdot \left(x - \frac{1}{x}\right)$

Εξασκούμε



σε όσα έμαθα

## Ανακεφαλαίωση (Αλγεβρικές Παραστάσεις)

**Αλγεβρικές παραστάσεις** ονομάζονται οι παραστάσεις που περιέχουν πράξεις με αριθμούς και μεταβλητές (ή πράξεις μόνο με μεταβλητές).

**Μονώνυμα** λέγονται οι αλγεβρικές παραστάσεις οι οποίες αποτελούνται από:

- έναν αριθμητικό παράγοντα
- μεταβλητές με εκθέτες φυσικούς αριθμούς,

μεταξύ των οποίων σημειώνεται **μόνο** η πράξη του πολλαπλασιασμού.

Ο αριθμητικός παράγοντας ονομάζεται **συντελεστής** του μονωνύμου.

Το γινόμενο όλων των μεταβλητών του με τους αντίστοιχους εκθέτες τους, λέγεται **κύριο μέρος** του μονωνύμου

Όμοια λέγονται τα μονώνυμα που έχουν το ίδιο κύριο μέρος.

Αν δύο τουλάχιστον μονώνυμα δεν είναι όμοια, τότε το άθροισμά τους είναι μια αλγεβρική παράσταση, που λέγεται **πολυώνυμο**.

### Αξιοσημείωτες Ταυτότητες:

| Ταυτότητες  | Αποδείξεις  |
|---|---|
| <b>Τετράγωνο αθροίσματος:</b><br>$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$                   | $(\alpha + \beta)^2 = (\alpha + \beta) \cdot (\alpha + \beta) = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta\alpha + \beta^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ |
| <b>Τετράγωνο διαφοράς:</b><br>$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$                      | $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha - \beta) \cdot (\alpha - \beta) = \alpha^2 - \alpha\beta - \beta\alpha + \beta^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$ |
| <b>Γινόμενο αθροίσματος επί διαφοράς:</b><br>$(\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$ | $(\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta) = \alpha^2 - \alpha\beta + \beta\alpha - \beta^2 = \alpha^2 - \beta^2$                                     |

**Παραγοντοποίηση** ενός πολυωνύμου λέγεται η διαδικασία κατά την οποία ένα πολυώνυμο, που είναι άθροισμα, μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων.

#### Μέθοδοι Παραγοντοποίησης:

**α.** Κοινός παράγοντας:

$$5x + 10 = 5(x + 2)$$

**β.** Κοινός παράγοντας κατά ομάδες – Ομαδοποίηση:

$$\begin{aligned} x^3 + 2x^2 + 3x + 6 &= \underline{x^3 + 3x} + \underline{2x^2 + 6} = \\ &= x(x^2 + 3) + 2(x^2 + 3) = \\ &= (x^2 + 3)(x + 2). \end{aligned}$$

γ. Διαφορά Τετραγώνων:

$$4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2 = (2x + 3)(2x - 3)$$

δ. Ανάπτυγμα Τετραγώνου:

$$x^2 + 2x + 1 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 = (x + 1)^2$$

ε. Παραγοντοποίηση τριωνύμου με διάσπαση όρου

$$\begin{aligned} & x^2 + 4x + 3 = \\ & \quad \swarrow \quad \searrow \\ & = \underline{x^2 + x} + \underline{3x + 3} = \\ & = x(x + 1) + 3(x + 1) = \\ & = (x + 1)(x + 3). \end{aligned}$$

**Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ)** δύο ή περισσότερων μονωνύμων ονομάζεται το μονώνυμο που έχει:

- Συντελεστή το ΕΚΠ των συντελεστών των μονωνύμων
- Κύριο μέρος το γινόμενο των κοινών και μη κοινών μεταβλητών τους με εκθέτη καθενός το μεγαλύτερο από τους εκθέτες του.

**Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ)** δύο ή περισσότερων πολυωνύμων που έχουν παραγοντοποιηθεί, ονομάζεται το γινόμενο των κοινών και μη κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός τον μεγαλύτερο από τους εκθέτες του.

## Αυτοαξιολόγηση (Αλγεβρικές Παραστάσεις)

A. Χαρακτήρισε ως Σωστές ή Λάθος τις προτάσεις, βάζοντας ένα **x** στην κατάλληλη θέση.

|  | Σωστό | Λάθος |
|--|-------|-------|
| 1. Το 0 ονομάζεται μηδενικό μονώνυμο και δεν έχει βαθμό.   |       |       |
| 2. Η παράσταση $-5 + y^3$ είναι μονώνυμο.  |       |       |
| 3. Το άθροισμα δύο μονωνύμων είναι πάντα μονώνυμο.   |       |       |
| 4. Κάθε σταθερό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού.  |       |       |
| 5. Το πολυώνυμο $x^2 + 6z - 8y^4$ αποτελείται από 3 όρους.   |       |       |
| 6. Ισχύει ότι $3^2 - 4a^2 = (3 - 4a)(3 + 4a)$  |       |       |
| 7. Ισχύει ότι $(2 - \beta)^2 = 4 - 4\beta + \beta^2$   |       |       |
| 8. Ισχύει ότι $(-a - \beta)^2 = a^2 + 2a\beta + \beta^2$   |       |       |
| 9. Η παράσταση $3(2a + 8)$ είναι πλήρως παραγοντοποιημένη.   |       |       |
| 10. Το ΕΚΠ των μονωνύμων $2x^2$ , $x$ είναι το μονώνυμο $x^2$ .  |       |       |
| 11. Ισχύει ότι $\frac{x \cdot y + 1}{x} = y + 1$ .   |       |       |
| 12. Η ρητή παράσταση $\frac{3}{a^2 + 2}$ ορίζεται για κάθε τιμή της μεταβλητής $a$ .   |       |       |
| 13. Η ρητή παράσταση $\frac{\beta - 1}{\beta^2 - 1}$ ορίζεται για κάθε τιμή της μεταβλητής $\beta$ .                           |       |       |
| 14. Οι κανόνες του πολλαπλασιασμού κλασμάτων στους αριθμούς ισχύουν και στις ρητές παραστάσεις.                                |       |       |
| 15. Για να προσθέσουμε δύο ρητές παραστάσεις αρκεί να προσθέσουμε τους αριθμητές μεταξύ τους και αντίστοιχα τους παρονομαστές. |       |       |

**Β.** Δίνονται τα πολυώνυμα:

- $A(x) = x(2x - 1)^2 + (1 - 2x)^3 + 6x - 3$
- $B(x) = 4(x^2 - 2x)$

i. Απόδειξε ότι  $A(x) = (1 - 2x)(x - 2)(2x + 1)$ .

ii. Βρες το ΕΚΠ των  $A(x)$  και  $B(x)$ .

**Γ.** Απλοποίησε τη ρητή παράσταση:

$$\frac{x^2 + 6x + 5}{(x + 1)^2} \cdot \frac{x + 1}{x^2 - 25} \cdot (-5x)^2$$

Σε αυτό το σημείο, θα πρέπει να είσαι σε θέση να ικανοποιείς όλους τους προσδοκώμενους μαθησιακούς στόχους. Γύρνα στην αρχή της θεματικής ενότητας και σημείωσε  στα αντίστοιχα σημεία. Υπάρχουν στόχοι που αισθάνεσαι ότι δεν έχεις ικανοποιήσει πλήρως;

# ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

## A.4

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε τη συνάρτηση της μορφής  $y=ax^2$ , εξετάζοντας τις γραφικές της παραστάσεις και τις ιδιότητές της. Θα διερευνήσουμε πώς μεταβάλλεται το  $y$  καθώς αλλάζει το  $x$  και θα εστιάσουμε στον ρόλο της παραμέτρου  $a$ .

Πώς μπορείς να χρησιμοποιήσεις αυτή τη συνάρτηση για την επίλυση γραφικών προβλημάτων ή για να αναπαραστήσεις φυσικά φαινόμενα, όπως την κίνηση αντικειμένων;

Είσαι έτοιμος/η να ανακαλύψεις τη δύναμη των συναρτήσεων στη μοντελοποίηση προβλημάτων;

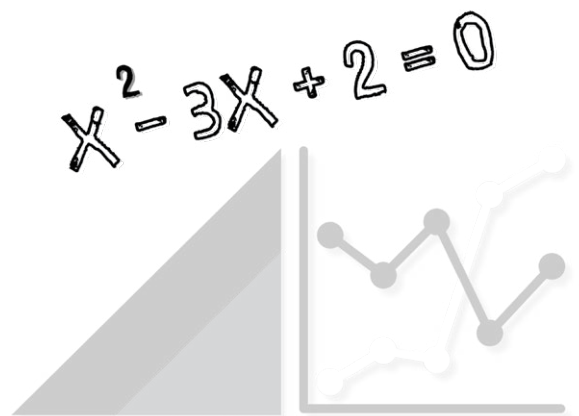


- Διερευνώ, μέσω της γραφικής της παράστασης, τις ιδιότητες της  $y = ax^2$ ,  $a \neq 0$  και τον ρόλο της παραμέτρου  $a$ .
- Διερευνώ τη μεταβολή του  $y$  για οποιαδήποτε μοναδιαία αύξηση του  $x$  σε συναρτήσεις της μορφής  $y = ax^2$ .
- Ερμηνεύω και επιλύω γραφικά την εξίσωση  $ax^2 = \beta$ .
- Επιλύω προβλήματα χρησιμοποιώντας τις αναπαραστάσεις της συνάρτησης  $y=ax^2$ ,  $a \neq 0$ .
- Αναγνωρίζω γραμμικές εξισώσεις της μορφής  $ax+by = \gamma$  και τις ερμηνεύω γραφικά.
- Επιλύω γραφικά προβλήματα με γραμμικά συστήματα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους.
- Διερευνώ και ερμηνεύω γραφικά ένα γραμμικό σύστημα και το πλήθος των λύσεών του.



### 4.1: Η συνάρτηση $y = ax^2$ .

+ Ανακεφαλαίωση / Αυτοαξιολόγηση



## 4.1 | Η συνάρτηση $y = ax^2$ .



Στο μάθημα της Φυσικής μαθαίνουμε ότι ένα σώμα που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, έχει μετατόπιση που δίνεται από τον τύπο  $x = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$ , όπου  $x$  είναι η μετατόπιση,  $a$  είναι η σταθερή επιτάχυνση και  $t$  είναι ο χρόνος.

Για ένα σώμα που κινείται με σταθερή επιτάχυνση  $a = 2 \frac{m}{s^2}$ , η εξίσωση της μετατόπισης παίρνει τη μορφή  $x = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot t^2$  ή  $x = t^2$ . Πόσα μέτρα έχει διανύσει το σώμα σε 1s και πόσα σε 2s;

### Η συνάρτηση $y = x^2$ .

Για να σχεδιάσουμε τη γραφική της παράσταση της συνάρτησης  $y = x^2$ , ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

- Κατασκευάζουμε έναν **πίνακα τιμών** για διάφορες τιμές του  $x$ .

|          |    |    |    |   |   |   |   |
|----------|----|----|----|---|---|---|---|
| <b>x</b> | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| <b>y</b> | 9  | 4  | 1  | 0 | 1 | 4 | 9 |

- Υπολογίζουμε τις τιμές του  $y$  που είναι οι αντίστοιχες τιμές της  $y = x^2$  για τις διάφορες τιμές του  $x$ .
- Τοποθετούμε τα σημεία  $(x, y)$  σε ένα σύστημα αξόνων.

Το σύνολο όλων των σημείων  $(x, y)$  αποτελούν τη **γραφική παράστασή** της συνάρτησης  $y = x^2$ , η οποία είναι μία καμπύλη που λέγεται **παραβολή**.

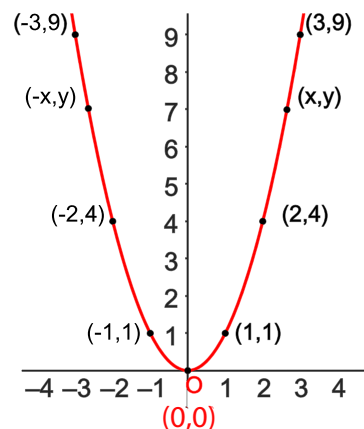
#### Παρατηρήσεις:

1. Η παραβολή  $y = x^2$ :

- Έχει **κορυφή** την αρχή των αξόνων  $O(0, 0)$ .
- Βρίσκεται από τον άξονα  $x$ ' $x$  και **πάνω**.
- Έχει **άξονα συμμετρίας** τον άξονα  $y$ ' $y$ .
- Παίρνει **ελάχιστη** τιμή  $y = 0$ , όταν  $x = 0$ .

2. Καθώς το  $x$  αυξάνεται κατά ένα, το  $y$ :

- μειώνεται αν  $x \leq 0$  και
- αυξάνεται αν  $x \geq 0$  (όχι απαραίτητα κατά 1).



## Η συνάρτηση $y = -x^2$ .

Με τον ίδιο τρόπο σχεδιάζουμε και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $y = -x^2$ .

|   |    |    |    |   |    |    |    |
|---|----|----|----|---|----|----|----|
| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 1  | 2  | 3  |
| y | -9 | -4 | -1 | 0 | -1 | -4 | -9 |

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $y = -x^2$  είναι επίσης **παραβολή**.

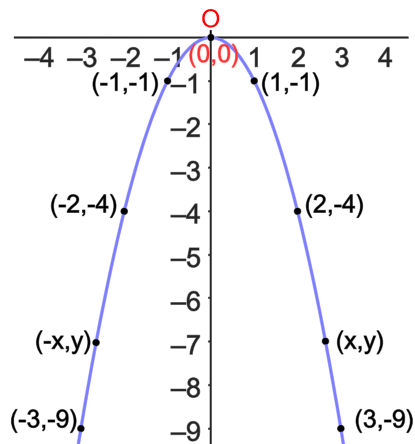
### Παρατηρήσεις:

1. Η παραβολή  $y = -x^2$ :

- Έχει **κορυφή** την αρχή των αξόνων  $O(0, 0)$ .
- Βρίσκεται από τον άξονα  $x$ ' $x$  και **κάτω**.
- Έχει **άξονα συμμετρίας** τον άξονα  $y$ ' $y$ .
- Παίρνει **μέγιστη** τιμή  $y = 0$ , όταν  $x = 0$ .

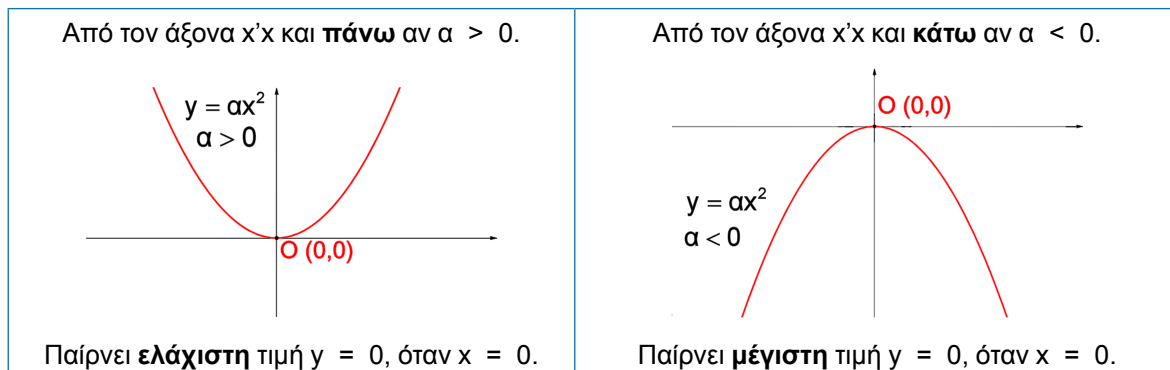
2. Καθώς το  $x$  αυξάνεται κατά ένα, το  $y$  :

- αυξάνεται αν  $x \leq 0$  και
- μειώνεται αν  $x \geq 0$  (όχι απαραίτητα κατά 1).



### Γενικά:

Η γραφική της παράσταση της συνάρτησης  $y = ax^2$ , όπου  $a \neq 0$ , λέγεται **παραβολή** που βρίσκεται:



Και στις δύο περιπτώσεις η γραφική παράσταση μιας παραβολής έχει **κορυφή** την αρχή των αξόνων  $O(0, 0)$  και **άξονα συμμετρίας** τον  $y$ ' $y$ .





1. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

α)  $y = x^2$ ,  $y = 2x^2$  και  $y = 0,5x^2$ .

β)  $y = -x^2$ ,  $y = -2x^2$  και  $y = -0,5x^2$ .

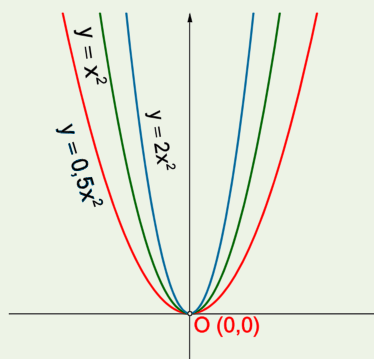
Τι παρατηρείτε;

**Λύση:**

Κατασκευάζουμε για κάθε συνάρτηση έναν πίνακα τιμών και τοποθετούμε τα σημεία σε κοινό σύστημα αξόνων.

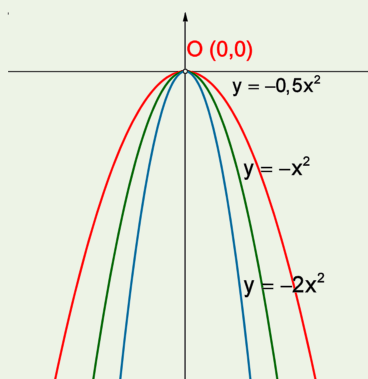
α)

| x            | -4 | -2 | -1  | 0 | 1   | 2 | 4  |
|--------------|----|----|-----|---|-----|---|----|
| $y = x^2$    | 16 | 4  | 1   | 0 | 1   | 4 | 16 |
| $y = 2x^2$   | 32 | 8  | 2   | 0 | 2   | 8 | 32 |
| $y = 0,5x^2$ | 8  | 2  | 0,5 | 0 | 0,5 | 2 | 8  |



β) Όμοια:

| x             | -4  | -2 | -1   | 0 | 1    | 2  | 4   |
|---------------|-----|----|------|---|------|----|-----|
| $y = -x^2$    | -16 | -4 | -1   | 0 | -1   | -4 | -16 |
| $y = -2x^2$   | -32 | -8 | -2   | 0 | -2   | -8 | -32 |
| $y = -0,5x^2$ | -8  | -2 | -0,5 | 0 | -0,5 | -2 | -8  |



Παρατηρούμε ότι οι παραβολές  $y = 2x^2$  και  $y = -2x^2$  είναι πιο «κλειστές», δηλαδή είναι πιο «κοιντά» στον άξονα  $y'y$ , ενώ οι  $y = 0,5x^2$  και  $y = -0,5x^2$  είναι πιο «ανοικτές», δηλαδή πιο «απομακρυσμένες» από τον  $y'y$ .

**Γενικά:** Καθώς η  $a$  μεγαλώνει, η παραβολή  $y = ax^2$  γίνεται όλο και πιο «κλειστή», δηλαδή «πλησιάζει» τον άξονα  $y'y$ .

2. Να κατασκευάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

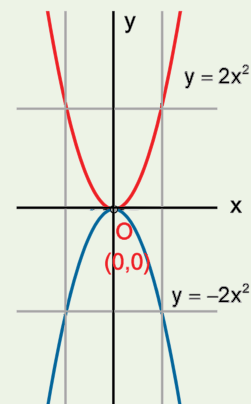
$$y = 2x^2 \text{ και } y = -2x^2.$$

Τι παρατηρείτε;

**Λύση:**

Κατασκευάζουμε για κάθε συνάρτηση έναν πίνακα τιμών και τοποθετούμε τα σημεία σε κοινό σύστημα αξόνων.

| x           | -3  | -2 | -1 | 0 | 1  | 2  | 3   |
|-------------|-----|----|----|---|----|----|-----|
| $y = 2x^2$  | 18  | 8  | 2  | 0 | 2  | 8  | 18  |
| $y = -2x^2$ | -18 | -8 | -2 | 0 | -2 | -8 | -18 |



Παρατηρούμε ότι οι παραβολές  $y = 2x^2$  και  $y = -2x^2$  είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα  $x'x$ .

**Γενικά:**

Οι παραβολές  $y = ax^2$  και  $y = -ax^2$  είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα  $x'x$ .



Εξασκούμαι



σε όσα έμαθα

**1**

Ποια από τα παρακάτω σημεία ανήκουν στην παραβολή  $y = 2x^2$ ;

$O(0,0)$ ,

$A(1,2)$ ,

$B(2,4)$ ,

$\Gamma(3,18)$ ,

$\Delta(-1, -2)$ .

**2**

Χαρακτήρισε ως Σωστές ή Λάθος τις προτάσεις που ακολουθούν βάζοντας ένα  $x$  στην κατάλληλη θέση.

α) Η παραβολή  $y = -5x^2$  παίρνει μέγιστη τιμή την  $y = 0$ .

β) Η παραβολή  $y = 5x^2$  παίρνει ελάχιστη τιμή  $y = 0$ .

γ) Οι παραβολές  $y = x^2$  και  $y = -x^2$  είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα  $x'x$ .

δ) Η παραβολή  $y = -2x^2$  έχει άξονα συμμετρίας τον  $y'y$ .

ε) Η παραβολή  $y = -x^2$ , διέρχεται από το σημείο  $(-1, 1)$ .

Σωστό      Λάθος

|  |  |
|--|--|
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

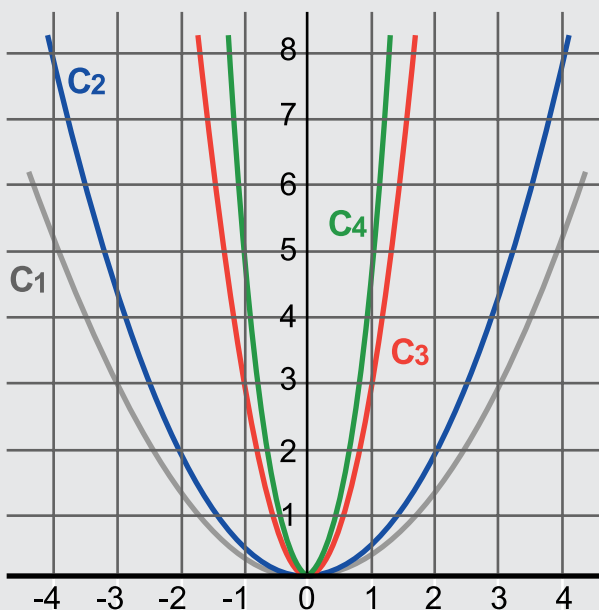
**3** Αν η παραβολή  $y = ax^2$  διέρχεται από το σημείο  $A(-2, -12)$ , τότε:

$$\alpha = 1, \quad \alpha = -2, \quad \alpha = \frac{1}{3}, \quad \alpha = -3, \quad \alpha = \frac{1}{2}.$$

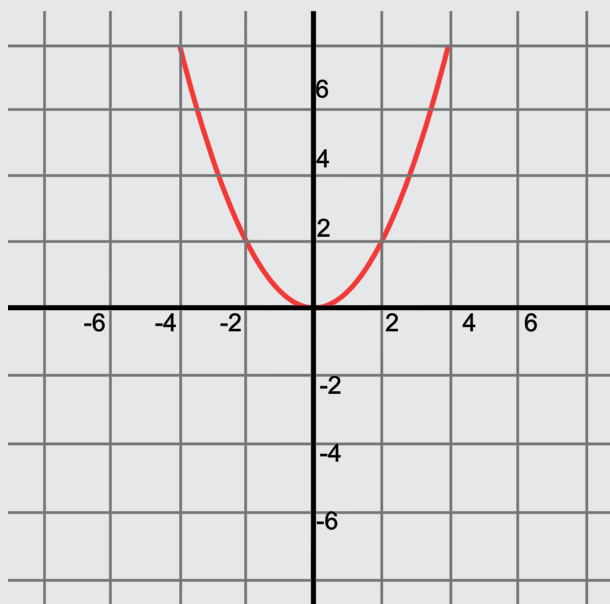
Επίλεξε τη σωστή απάντηση.

**4** Αντιστοίχισε κάθε παραβολή με την εξίσωσή της.

|                      |       |
|----------------------|-------|
| $y = 3x^2$           | $C_1$ |
| $y = 5x^2$           | $C_2$ |
| $y = \frac{1}{2}x^2$ | $C_3$ |
| $y = \frac{1}{3}x^2$ | $C_4$ |



**5** Δίνεται η παραβολή  $y = \frac{1}{2}x^2$ . Στο ίδιο σύστημα αξόνων σχεδίασε τη συνάρτηση  $y = -\frac{1}{2}x^2$ .



6

Σχεδιάσε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις παραβολές:

α)  $y = x^2$

β)  $y = 5x^2$

γ)  $y = \frac{1}{5}x^2$

7

Σχεδιάσε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις παραβολές:

α)  $y = 3x^2$

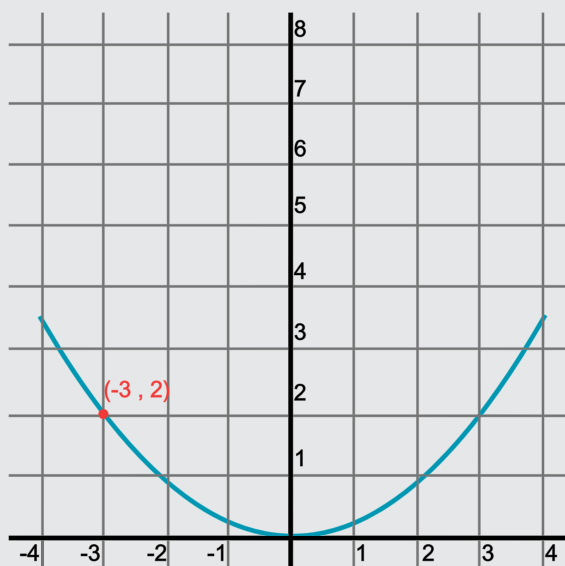
β)  $y = -3x^2$

8

Βρες την τιμή του αριθμού  $a$  αν η παραβολή  $y = ax^2$  διέρχεται από το σημείο  $A(5, 5)$ .

9

Βρες την εξίσωση της παραβολής του παρακάτω σχήματος.



Εξασκούμαι

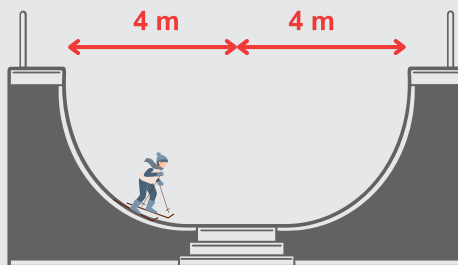


σε όσα έμαθα

10

Δίνεται η παραβολή  $y = 6x^2$ .α) Ένα σημείο  $A$  ανήκει στην παραβολή και έχει τετμημένη 5. Βρες την τεταγμένη του.β) Ένα σημείο  $B$  ανήκει στην παραβολή και έχει τεταγμένη  $\frac{1}{2}$ . Βρες την τετμημένη του.

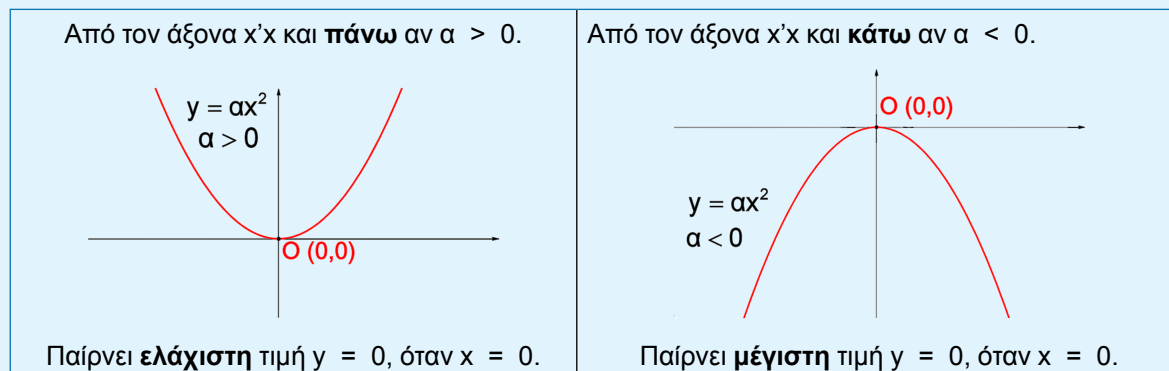
11

Μία ράμπα χιονοδρομίας (σκι) έχει παραβολικό σχήμα και το ύψος της  $y$  εκφράζεται ως συνάρτηση της οριζόντιας απόστασης  $x$  από το κέντρο της ράμπας, σύμφωνα με τη σχέση  $y = ax^2$ .α) Βρες το  $a$ , αν γνωρίζεις ότι ο σκιέρ βρίσκεται σε ύψος 2m, όταν απέχει από το κέντρο της ράμπας οριζόντια απόσταση 2m.

β) Βρες το μέγιστο ύψος της ράμπας.

## Ανακεφαλαίωση (Συναρτήσεις)

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $y = ax^2$ , όπου  $a \neq 0$ , λέγεται **παραβολή** που βρίσκεται:



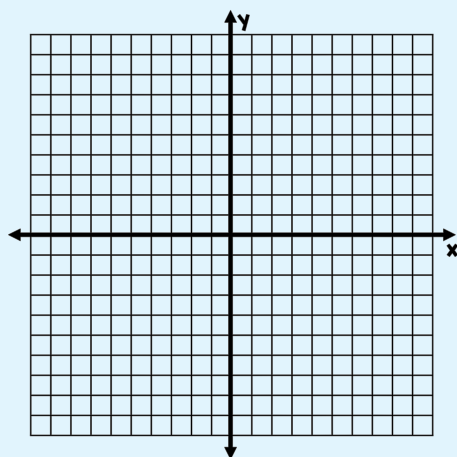
Η γραφική παράσταση μιας παραβολής έχει **κορυφή** την αρχή των αξόνων  $O(0,0)$  και **άξονα συμμετρίας** τον  $y'y$ .

## Αυτοαξιολόγηση (Συναρτήσεις)

Συμπλήρωσε τους πίνακες και σχεδίασε τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις παρακάτω:

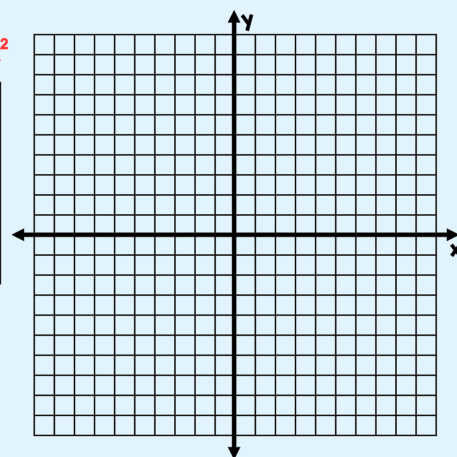
$$y=2x^2$$

| x  | y |
|----|---|
| 0  |   |
| 1  |   |
| -1 |   |
| 2  |   |



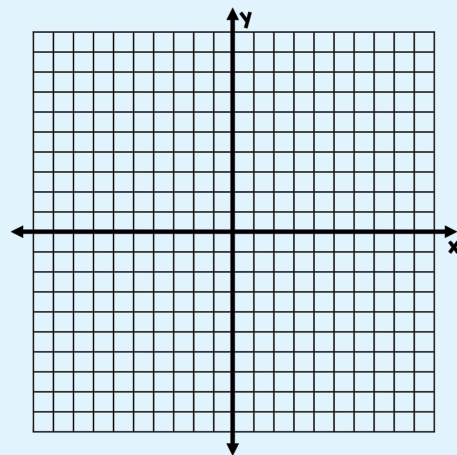
$$y=0,5x^2$$

| x  | y |
|----|---|
|    | 1 |
|    | 1 |
| 1  |   |
| -1 |   |



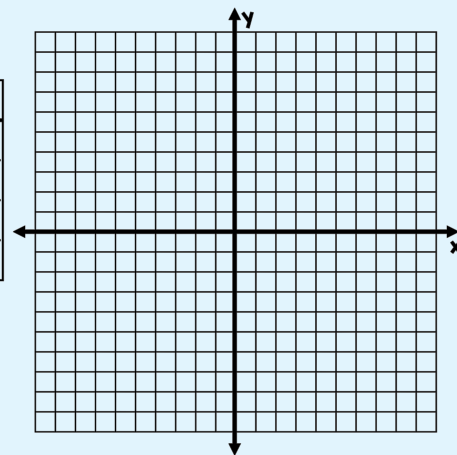
$$y=ax^2$$

| x  | y  |
|----|----|
| 0  |    |
| 1  | -1 |
| -1 |    |
| -2 |    |



$$y=ax^2$$

| x | y |
|---|---|
|   | 0 |
| 1 |   |
| 3 | 1 |
| 6 |   |



Σε αυτό το σημείο, θα πρέπει να είσαι σε θέση να ικανοποιείς όλους τους προσδοκώμενους μαθησιακούς στόχους. Γύρνα στην αρχή της θεματικής ενότητας και σημείωσε  στα αντίστοιχα σημεία. Υπάρχουν στόχοι που αισθάνεσαι ότι δεν έχεις ικανοποιήσει πλήρως;

# ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

A.5

Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε γραμμικές εξισώσεις και συστήματα εξισώσεων δύο αγνώστων, μαθαίνοντας πώς να τις επιλύουμε αλγεβρικά και γραφικά. Θα επεκταθούμε στην επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού και ανισώσεων.

Πώς μπορείς να χρησιμοποιήσεις συστήματα εξισώσεων για την επίλυση καθημερινών προβλημάτων, όπως ο σχεδιασμός ενός οικονομικού σχεδίου;

Είσαι έτοιμος/η να κατανοήσεις πώς αυτές οι μαθηματικές σχέσεις συνδέονται με την πραγματική ζωή;



- Αναγνωρίζω ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους και εξετάζω αν ένα ζεύγος αριθμών είναι λύση του.
- Επιλύω το σύστημα αλγεβρικά με τις μεθόδους των αντίθετων συντελεστών και της αντικατάστασης και επαληθεύω τη λύση με βάση το πλαίσιο του προβλήματος.
- Επιλύω απλές πολυωνυμικές εξισώσεις δευτέρου βαθμού ελλιπούς ή και πλήρους μορφής, αλλά και μεγαλύτερου βαθμού με παραγοντοποίηση.
- Επιλύω προβλήματα εξισώσεων 1ου και 2ου βαθμού (με παραγοντοποίηση) και ερμηνεύω τις λύσεις τους στο πλαίσιο του προβλήματος.
- Διερευνώ (με μοντέλα – μεταφορές) και διατυπώνω τις βασικές ιδιότητες της διάταξης.
- Διακρίνω τις διαφορές μεταξύ εξίσωσης και ανίσωσης.
- Μετατρέπω πραγματικά προβλήματα σε ανισώσεις μορφής  $ax+by < c$ , τις επιλύω και παριστάνω τις λύσεις γραφικά και εξετάζω αν ένας αριθμός είναι λύση μιας ανίσωσης ή του προβλήματος.
- Βρίσκω τις κοινές λύσεις δύο ανισώσεων χρησιμοποιώντας τον άξονα των πραγματικών αριθμών.



5.1: Γραμμική εξίσωση  $ax + by = \gamma$ .

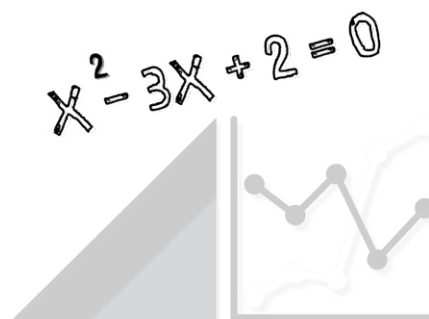
5.2: Γραμμικά συστήματα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, γραφική επίλυση

5.3: Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος

5.4: Εξισώσεις δευτέρου ή και μεγαλύτερου βαθμού, επίλυση με παραγοντοποίηση

5.5: Ανισώσεις της μορφής  $ax + b < c$  και επίλυση.

+ Ανακεφαλαίωση / Αυτοαξιολόγηση



## 5.1 | Γραμμική εξίσωση $ax + by = \gamma$ .



Ο Μάριος έχει 50€ και σκοπεύει να τα αξιοποιήσει για αγοράσει κάποια ζευγάρια κάλτσες, που κοστίζουν 7,5€ το καθένα και κάποια ζευγάρια κορδόνια, που κοστίζουν 5€ το καθένα. Αν θεωρήσουμε  $x$  τα ζευγάρια κάλτσες και  $y$  τα ζευγάρια κορδόνια, τότε η εξίσωση που περιγράφει την αγορά του Μάριου είναι:

$$\alpha) x - 50 = y \quad \beta) 7,5x + 5y = 50 \quad \gamma) x + y = 50$$

### Η εξίσωση $ax + by = \gamma$ .

Θα μελετήσουμε εξισώσεις της μορφής  $ax + by = \gamma$ , για δεδομένους αριθμούς  $a$ ,  $b$  και  $\gamma$ .

Για παράδειγμα η εξίσωση  $2x + y = 4$ , έχει δύο αγνώστους ( $x$  και  $y$ ) και είναι της μορφής  $ax + by = \gamma$  με  $a = 2$ ,  $b = 1$  και  $\gamma = 4$ .

#### Λύση της εξίσωσης

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση  $2x + y = 4$ :

- Επαληθεύεται για  $x = 1$  και  $y = 2$ , αφού:  $2 \cdot 1 + 2 = 4$ .  
Λέμε ότι το ζεύγος των αριθμών  $(x, y) = (1, 2)$  είναι μία **λύση** της εξίσωσης.
- Επαληθεύεται για  $x = 2$  και  $y = 0$ , αφού:  $2 \cdot 2 + 0 = 4$ .  
Το ζεύγος των αριθμών  $(x, y) = (2, 0)$  είναι επίσης μία λύση της εξίσωσης.
- Όμως για  $x = 2$  και  $y = 2$ , η εξίσωση **δεν** επαληθεύεται, αφού  $2 \cdot 2 + 2 = 6 \neq 4$ .

#### Γενικά

Λύση μιας εξίσωσης  $ax + by = \gamma$  ονομάζεται κάθε ζεύγος αριθμών  $(x, y)$  που την επαληθεύει.

### Γραφική παράσταση

Όπως είδαμε η εξίσωση  $2x + y = 4$  έχει λύσεις τα ζεύγη των αριθμών  $(1, 2)$  και  $(2, 0)$ . Μπορούμε να βρούμε και άλλα ζεύγη αριθμών που επαληθεύουν την παραπάνω εξίσωση.

Για κάθε τιμή του  $x$ , μπορούμε να βρούμε την αντίστοιχη τιμή του  $y$  που επαληθεύει την εξίσωση  $2x + y = 4$ :

- Για  $x = -1$  είναι:  $2(-1) + y = 4$  ή  $y = 6$ .
- Για  $x = 0$  είναι:  $2 \cdot 0 + y = 4$  ή  $y = 4$ .
- Για  $x = 1$  είναι:  $2 \cdot 1 + y = 4$  ή  $y = 2$ .
- Για  $x = 2$  είναι:  $2 \cdot 2 + y = 4$  ή  $y = 0$ .
- Για  $x = 3$  είναι:  $2 \cdot 3 + y = 4$  ή  $y = -2$ .

κ.ο.κ.

| Λύσεις             |
|--------------------|
| $(x, y) = (-1, 6)$ |
| $(x, y) = (0, 4)$  |
| $(x, y) = (1, 2)$  |
| $(x, y) = (2, 0)$  |
| $(x, y) = (3, -2)$ |

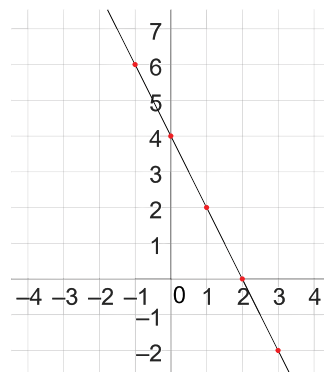
Γενικότερα η εξίσωση έχει **άπειρες λύσεις**.

Τοποθετούμε κάποια από τα ζεύγη των λύσεων σε **έναν πίνακα τιμών**.

|          |    |   |   |   |    |
|----------|----|---|---|---|----|
| <b>x</b> | -1 | 0 | 1 | 2 | 3  |
| <b>y</b> | 6  | 4 | 2 | 0 | -2 |

Παρατηρούμε ότι όταν το  $x$  αυξάνεται κατά 1 το  $y$  μειώνεται κατά 2.

Σε ένα σύστημα αξόνων τοποθετούμε τα σημεία  $(x, y)$  του παραπάνω πίνακα και παρατηρούμε ότι αυτά βρίσκονται πάνω σε μία **ευθεία**.



### Γενικά:

Η εξίσωση  $ax + by = \gamma$  ονομάζεται γραμμική εξίσωση και παριστάνει ευθεία όταν  $a \neq 0$  ή  $b \neq 0$ .

### Παρατηρήσεις:

- Αν οι συντεταγμένες ενός σημείου επαληθεύουν την εξίσωση μιας ευθείας, τότε το σημείο ανήκει στην ευθεία αυτή.
- Αν ένα σημείο ανήκει σε μια ευθεία, τότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας.

### Η εξίσωση $ax + by = \gamma$ με $a = b = 0$ .

Αν στην εξίσωση  $ax + by = \gamma$  είναι  $a = b = 0$ , τότε δεν παριστάνει ευθεία, αλλά:

- Αν  $\gamma \neq 0$ , τότε η εξίσωση  $0x + 0y = \gamma$ , δεν επαληθεύεται για κανένα ζεύγος αριθμών  $(x, y)$  και λέγεται αδύνατη.

**Παράδειγμα:** Η εξίσωση  $0x + 0y = 5$  είναι αδύνατη.

- Αν  $\gamma = 0$ , τότε η εξίσωση  $0x + 0y = 0$ , επαληθεύεται για κάθε ζεύγος αριθμών  $(x, y)$  και λέγεται αόριστη.

**Παράδειγμα:** Τα σημεία  $(1, 2)$ ,  $(6, -5)$ ,  $(0, 7)$  κ.α. είναι λύσεις της εξίσωσης  $0x + 0y = 0$ , όπως και κάθε σημείο του επιπέδου και δεν βρίσκονται πάνω σε μία συγκεκριμένη ευθεία.

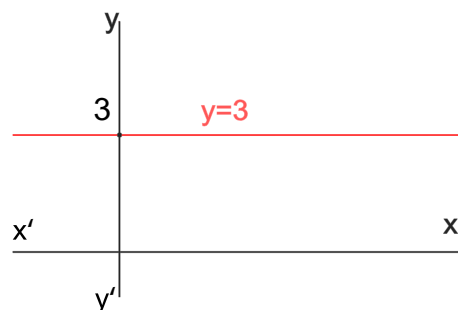
## Ειδικές περιπτώσεις

- Η εξίσωση  $y = k$  με  $k \neq 0$  παριστάνει μια ευθεία που είναι **παράλληλη στον άξονα  $x'$**  και τέμνει τον άξονα  $y'y$  στο σημείο  $(0, k)$ .

### Ειδικότερα:

Η εξίσωση  $y = 0$  παριστάνει τον άξονα  $x'$ .

**Παράδειγμα:** Η ευθεία  $y = 3$ .

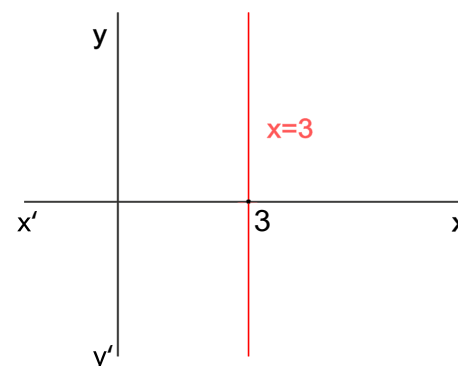


- Η εξίσωση  $x = k$  με  $k \neq 0$  παριστάνει μια ευθεία που είναι **παράλληλη στον άξονα  $y'y$**  και τέμνει τον άξονα  $x'x$  στο σημείο  $(k, 0)$ .

### Ειδικότερα:

Η εξίσωση  $x = 0$  παριστάνει τον άξονα  $y'y$ .

**Παράδειγμα:** Η ευθεία  $x = 3$ .



1. α) Να σχεδιάσετε την ευθεία  $\epsilon: x - 2y = -3$ .

β) Να εξετάσετε αν τα παρακάτω ζεύγη είναι λύσεις της εξίσωσης  $x - 2y = -3$ .

$(-1, 1)$ ,  $(3, 3)$ ,  $(5, 4)$ ,  $(4, 2)$ .

### Λύση:

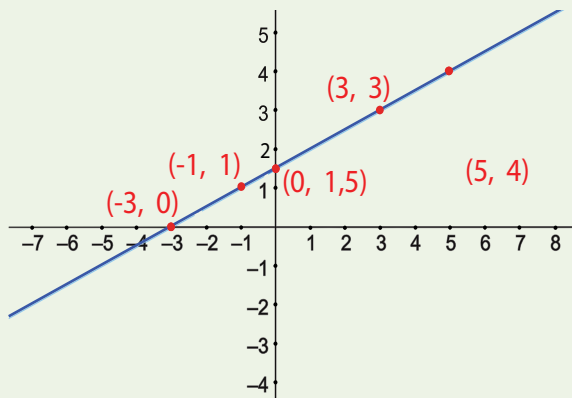
α) Η εξίσωση  $x - 2y = -3$  είναι γραμμική και γνωρίζουμε ότι παριστάνει ευθεία. Για να τη σχεδιάσουμε αρκεί να βρούμε δυο σημεία της:

- Π.χ. για  $x = 0$  είναι  $0 - 2y = -3$  ή  $y = \frac{3}{2} = 1,5$ .
- Π.χ. για  $y = 0$  είναι  $x - 2 \cdot 0 = -3$  ή  $x = -3$ .

|          |     |    |
|----------|-----|----|
| <b>x</b> | 0   | -3 |
| <b>y</b> | 1,5 | 0  |

**Σχόλιο:** Επιλέξαμε τις τιμές  $x = 0$  και  $y = 0$  για ευκολία στις πράξεις.

Σημειώνουμε τα σημεία  $(0, 1, 5)$  και  $(-3, 0)$  σε ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων και σχεδιάζουμε την ευθεία που διέρχεται από αυτά.



β) Από τη γραφική παράσταση παρατηρούμε ότι τα σημεία  $(-1, 1)$ ,  $(3, 3)$  και  $(5, 4)$  ανήκουν στην ευθεία με εξίσωση  $x - 2y = -3$ , επομένως αποτελούν λύσεις της ενώ το σημείο  $(4, 2)$  δεν αποτελεί λύση της εξίσωσης.

**β' τρόπος:**

- Το ζεύγος  $(-1, 1)$  επαληθεύει την εξίσωση  $x - 2y = -3$ , καθώς αν  $x = -1$  και  $y = 1$ , τότε:

$$-1 - 2 \cdot 1 = -3$$

$$\text{ή } -3 = -3 \text{ που ισχύει.}$$

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι τα  $(3, 3)$  και  $(5, 4)$  επαληθεύουν την εξίσωση  $x - 2y = -3$ , ενώ το  $(4, 2)$  όχι.

**2.** Δίνεται η ευθεία  $\varepsilon: ax - y = 1$  η οποία διέρχεται από το σημείο  $M(2, 3)$ .

α) Να προσδιορίσετε την τιμή του  $a$ .

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας  $\varepsilon$  με τους άξονες  $x'$  και  $y'$ .

γ) Να σχεδιάσετε την ευθεία  $\varepsilon$ .

**Λύση:**

α) Η ευθεία  $\varepsilon: ax - y = 1$  διέρχεται από το σημείο  $M(2, 3)$ , οπότε οι συντεταγμένες του σημείου  $M$  επαληθεύουν την εξίσωση  $ax - y = 1$ . Άρα έχουμε:

$$a \cdot 2 - 3 = 1$$

$$\text{ή } 2a = 4$$

$$\text{ή } a = 2.$$

Επομένως η ευθεία  $\varepsilon$  έχει εξίσωση  $2x - y = 1$ .

β)

- Για να βρούμε το σημείο τομής της ευθείας  $\varepsilon$  με τον άξονα  $y'y$ , θέτουμε  $x = 0$  και έχουμε:

$$2 \cdot 0 - y = 1$$

$$\text{ή } y = -1.$$

Άρα, η ευθεία  $\varepsilon$  τέμνει τον άξονα  $y'y$  στο σημείο  $(0, -1)$ .

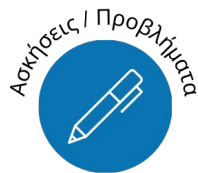
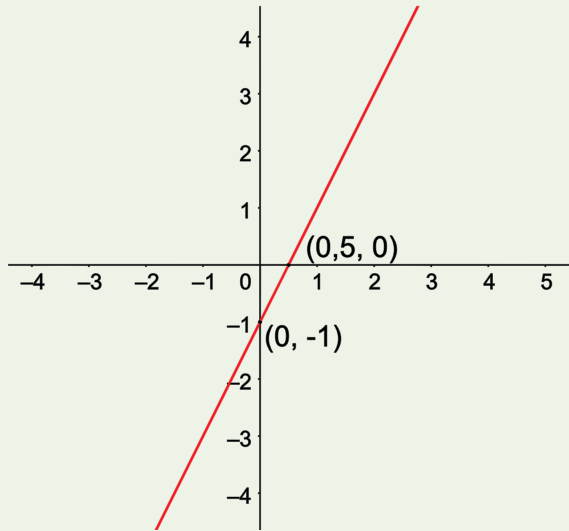
- Για να βρούμε το σημείο τομής της ευθείας  $\varepsilon$  με τον άξονα  $x'x$ , θέτουμε  $y = 0$  και έχουμε:

$$2 \cdot x - 0 = 1$$

$$\text{ή } x = \frac{1}{2}.$$

Άρα, η ευθεία  $\varepsilon$  τέμνει τον άξονα  $x'x$  στο σημείο  $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ .

γ) Τοποθετούμε τα σημεία  $(0, -1)$  και  $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$  τα οποία έχουμε βρει στο β. ερώτημα και σχεδιάζουμε την ευθεία  $\varepsilon$ :



Εξασκούμαι



σε όσα έμαθα

**1**

Ποια από τα παρακάτω ζεύγη αριθμών αποτελούν λύσεις της γραμμικής εξίσωσης  $x + 3y = 6$ ;

$(-3, 3)$ ,  $(0, 2)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(4, -1)$ ,  $(6, 1)$ ,  $(8, 2)$ .

**2**

Συμπλήρωσε τα κενά με κατάλληλους αριθμούς ώστε τα ζεύγη που θα προκύψουν να είναι λύσεις της γραμμικής εξίσωσης  $2x - y = 4$ .

$A(0, \dots)$ ,  $B(1, \dots)$ ,  $\Gamma(2, \dots)$ ,  $\Delta(3, \dots)$ ,  $E(\dots, 4)$ ,  $Z(\dots, 6)$ .

Παρατηρούμε ότι καθώς το  $x$  αυξάνεται κατά 1, το  $y$  ..... κατά .....

3

α) Ποιες από τις παρακάτω ευθείες είναι παράλληλες στον άξονα  $x'$ ;

Α.  $y = x$

Β.  $2y = 6$

Γ.  $y = -2$

Δ.  $x = 1$

β) Ποιες από τις παρακάτω ευθείες είναι παράλληλες στον άξονα  $y'y$ ;

Α.  $5x = 10$

Β.  $2x + 3y = 0$

Γ.  $x = -2$

Δ.  $y = 1$

γ) Ποιες από τις παρακάτω ευθείες διέρχονται από την αρχή των αξόνων;

Α.  $y = x$

Β.  $2x = 6$

Γ.  $x + y = 1$

Δ.  $6x + 5y = 0$

4

Δίνονται οι ευθείες:

$\varepsilon_1 : x - y = 9, \quad \varepsilon_2 : x + 4y = -3, \quad \varepsilon_3 : 2y = 3 \quad \text{και} \quad \varepsilon_4 : 2x + y = 0.$

Συμπλήρωσε τα κενά:

α) Η ευθεία ..... διέρχεται από το σημείο  $A(5, -2)$ .

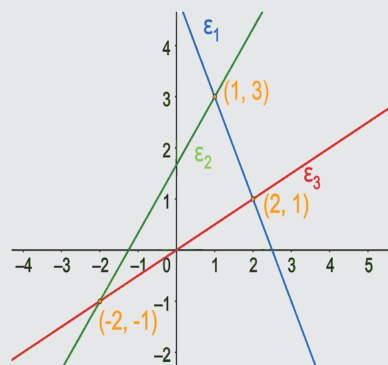
β) Η ευθεία ..... διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

γ) Η ευθεία ..... δεν τέμνει τον άξονα  $x'$ .δ) Οι ευθείες ..... και ..... διέρχονται από το σημείο  $B(3, -6)$ .

5

Αντιστοίχισε καθεμιά από τις ευθείες  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  με την εξίσωσή της.

|                 |                                  |
|-----------------|----------------------------------|
| $\varepsilon_1$ | $y = \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$ |
| $\varepsilon_2$ | $y = -2x + 5$                    |
| $\varepsilon_3$ | $y = \frac{1}{2}x$               |



6

Δίνεται η ευθεία  $\varepsilon : 2x + 3y = 6$ .α) Βρες τα σημεία τομής Α, Β της ευθείας  $\varepsilon$  με τους άξονες  $x'$  και  $y'y$  αντίστοιχα.β) Σχεδίασε την ευθεία  $\varepsilon$ .γ) Υπολόγισε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ, όπου Α, Β τα σημεία τομής της ευθείας  $\varepsilon$  με τους άξονες  $x'$ ,  $y'y$  αντίστοιχα και Ο η αρχή των αξόνων.

7

Δίνονται οι ευθείες:  $y = 1, 3x = 9$  και  $y = x$ .

α) Σχεδίασε τις παραπάνω ευθείες.

β) Βρες το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τις τρεις ευθείες.

8

Δίνεται η εξίσωση  $\lambda x + (\lambda - 1)y = \lambda + 2$ , όπου  $\lambda$  πραγματικός αριθμός.α) Βρες την τιμή του αριθμού  $\lambda$ , ώστε η εξίσωση να παριστάνει ευθεία η οποία:

i. να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ii. να διέρχεται από το σημείο  $A(-1, 4)$ .iii. να είναι παράλληλη στον άξονα  $x'$ .iv. να είναι παράλληλη στον άξονα  $y'y$ .β) Υπάρχει τιμή του  $\lambda$  ώστε η ευθεία να διέρχεται από το σημείο  $M(-2, 3)$ ;

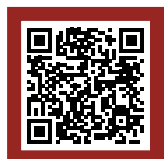
Εξασκούμαι



σε όσα έμαθα



## 5.2 | Γραμμικά συστήματα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, γραφική επίλυση



Δίνονται οι γραμμικές εξισώσεις:  $x + 2y = 4$  και  $x - y = 1$ .

- Γράψτε τρία ζεύγη αριθμών που είναι λύσεις της εξίσωσης  $x + 2y = 4$ .

**Απάντηση:**  $(\dots, \dots)$ ,  $(\dots, \dots)$  και  $(\dots, \dots)$

- Γράψτε τρία ζεύγη αριθμών που είναι λύσεις της εξίσωσης  $x - y = 1$ .

**Απάντηση:**  $(\dots, \dots)$ ,  $(\dots, \dots)$  και  $(\dots, \dots)$ .

- Βρείτε ένα ζεύγος αριθμών που είναι λύση και των δύο εξισώσεων.

**Απάντηση:**  $(\dots, \dots)$ .

### Γραμμικό σύστημα

Όταν έχουμε δύο γραμμικές εξισώσεις με δύο αγνώστους και αναζητούμε τις κοινές τους λύσεις, τότε λέμε ότι έχουμε να λύσουμε ένα **γραμμικό σύστημα** δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.

#### Παράδειγμα:

Γραμμικό σύστημα με δύο αγνώστους  $x$  και  $y$ : 
$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση

**Λύση** γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους  $x$  και  $y$  ονομάζεται κάθε ζεύγος  $(x, y)$  που επαληθεύει τις εξισώσεις του.

#### Παράδειγμα:

Να δείξετε ότι το ζεύγος  $(x, y) = (2, 1)$  είναι λύση του γραμμικού συστήματος: 
$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

**Λύση:** Αν στην πρώτη εξίσωση  $x + 2y = 4$ , θέσουμε  $x = 2$  και  $y = 1$ , προκύπτει:

$$2 + 2 \cdot 1 = 4, \text{ που ισχύει.}$$

Επίσης, αν στη δεύτερη εξίσωση  $x - y = 1$ , θέσουμε  $x = 2$  και  $y = 1$ , προκύπτει:

$$2 - 1 = 1, \text{ που ισχύει.}$$

Άρα πράγματι, το ζεύγος  $(x, y) = (2, 1)$  είναι λύση του γραμμικού συστήματος.

Παρακάτω θα μελετήσουμε τους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να βρούμε τη λύση ενός γραμμικού συστήματος.

### Γραφική επίλυση γραμμικού συστήματος

Για να βρούμε τη λύση ενός γραμμικού συστήματος γραφικά, σχεδιάζουμε τις δύο ευθείες στο ίδιο σύστημα αξόνων και προσδιορίζουμε τις συντεταγμένες του **κοινού τους σημείου**.

Το σημείο αυτό ανήκει και στις δύο ευθείες, οπότε επαληθεύει τις εξισώσεις τους, άρα είναι η λύση του γραμμικού συστήματος.

**Παράδειγμα:**

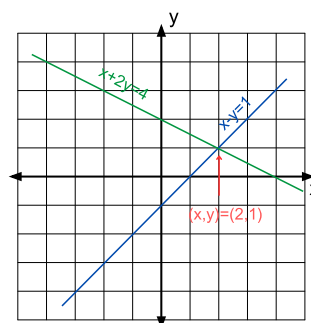
Να λυθεί γραφικά το σύστημα:  $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x - y = 1 \end{cases}$

**Λύση:**

- Σχεδιάζουμε τις ευθείες με εξισώσεις  $x + 2y = 4$  και  $x - y = 1$ , στο ίδιο σύστημα αξόνων.

|   |   |   |
|---|---|---|
| x | 0 | 4 |
| y | 2 | 0 |

|   |    |   |
|---|----|---|
| x | 0  | 1 |
| y | -1 | 0 |



- Προσδιορίζουμε τις συντεταγμένες του κοινού σημείου των δύο ευθειών. Το σημείο  $(x, y) = (2, 1)$  είναι η μοναδική λύση του συστήματος.

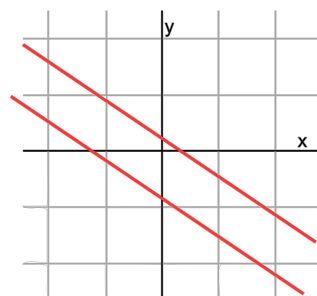
## Αδύνατο σύστημα

**Παράδειγμα:**

Οι εξισώσεις του συστήματος  $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x + 6y = -3 \end{cases}$ ,

παριστάνουν δύο **παράλληλες** ευθείες, οπότε δεν έχουν **κανένα κοινό σημείο**.

**Το σύστημα αυτό δεν έχει καμία λύση και λέγεται αδύνατο.**



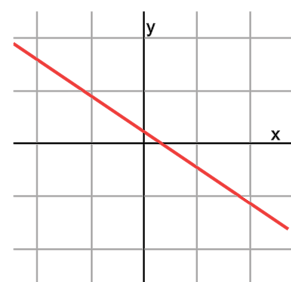
## Αόριστο σύστημα

**Παράδειγμα:**

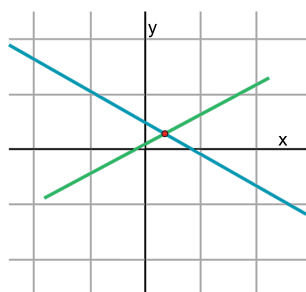
Οι εξισώσεις του συστήματος  $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x + 6y = 2 \end{cases}$ ,

παριστάνουν ευθείες οι οποίες **συμπίπτουν (ταυτίζονται)**, οπότε έχουν **άπειρα κοινά σημεία**.

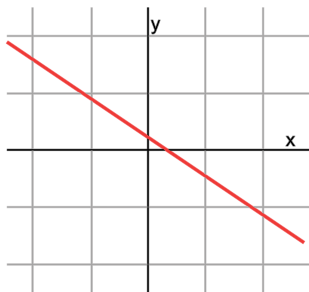
**Το σύστημα αυτό έχει άπειρες λύσεις και λέγεται αόριστο.**



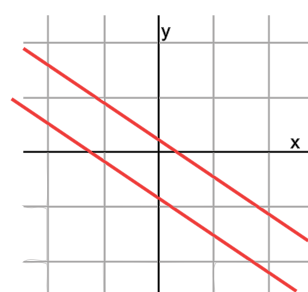
**Γενικά:**



ευθείες που τέμνονται  
⇕  
μοναδική λύση



ευθείες που ταυτίζονται  
⇕  
άπειρες λύσεις



παράλληλες ευθείες  
⇕  
καμία λύση



1. Να λύσετε γραφικά τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} x + y = -2 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ 6x + 4y = 12 \end{cases}$$

**Λύση:**

α) Σχεδιάζουμε τις ευθείες στο ίδιο σύστημα αξόνων.

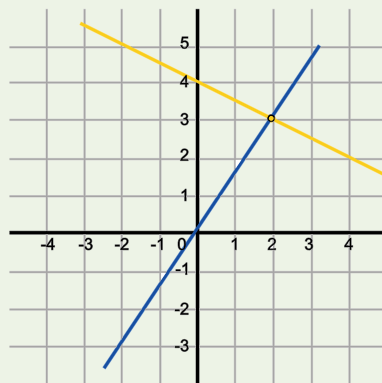
$$3x - 2y = 0$$

$$x + 2y = 8$$

|          |   |   |
|----------|---|---|
| <b>x</b> | 0 | 2 |
| <b>y</b> | 0 | 3 |

|          |   |   |
|----------|---|---|
| <b>x</b> | 0 | 2 |
| <b>y</b> | 4 | 3 |

Το σημείο  $(x, y) = (2, 3)$  είναι η μοναδική λύση του συστήματος.



β) Σχεδιάζουμε τις ευθείες στο ίδιο σύστημα αξόνων.

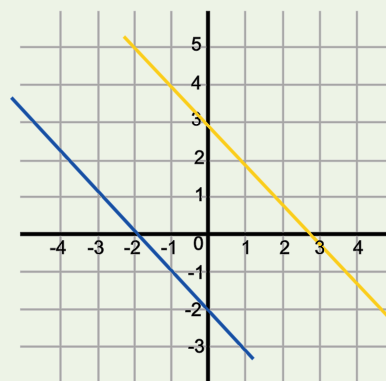
$$x + y = -2$$

$$x + y = 3$$

|          |    |    |
|----------|----|----|
| <b>x</b> | 0  | -2 |
| <b>y</b> | -2 | 0  |

|          |   |   |
|----------|---|---|
| <b>x</b> | 0 | 3 |
| <b>y</b> | 3 | 0 |

Οι ευθείες είναι παράλληλες, επομένως το σύστημα δεν έχει καμία λύση και είναι **αδύνατο**.



**Παρατήρηση:** Οι εξισώσεις του συστήματος  $\begin{cases} x + y = -2 \\ x + y = 3 \end{cases}$  έχουν τα πρώτα μέλη ίδια ενώ τα δεύτερα όχι.

γ) Σχεδιάζουμε τις ευθείες στο ίδιο σύστημα αξόνων.

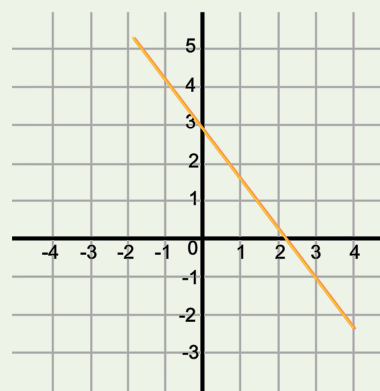
$$3x + 2y = 6$$

$$6x + 4y = 12$$

|          |   |   |
|----------|---|---|
| <b>x</b> | 0 | 2 |
| <b>y</b> | 3 | 0 |

|          |   |   |
|----------|---|---|
| <b>x</b> | 0 | 2 |
| <b>y</b> | 3 | 0 |

Οι ευθείες ταυτίζονται, επομένως το σύστημα έχει άπειρες λύσεις και είναι αόριστο.



**Παρατήρηση:** Οι εξισώσεις του συστήματος  $\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ 6x + 4y = 12 \end{cases}$  είναι ισοδύναμες αφού η δεύτερη προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της πρώτης εξίσωσης με το 2.



1

Χαρακτήρισε ως Σωστές ή Λάθος τις προτάσεις που ακολουθούν βάζοντας ένα **x** στην κατάλληλη θέση.

α) Η λύση του συστήματος  $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$  είναι το ζεύγος  $(x, y) = (1, 1)$ .

β) Η λύση του συστήματος  $\begin{cases} y = x \\ x + y = 3 \end{cases}$  είναι το ζεύγος  $(x, y) = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ .

γ) Αν οι ευθείες ενός γραμμικού συστήματος είναι παράλληλες τότε το σύστημα δεν έχει καμία λύση.

δ) Αν ένα γραμμικό σύστημα έχει μία μοναδική λύση τότε οι ευθείες του συστήματος ταυτίζονται.

ε) Αν ένα γραμμικό σύστημα έχει δύο λύσεις, τότε αναγκαστικά θα έχει άπειρες λύσεις,

Σωστό      Λάθος

| Σωστό | Λάθος |
|-------|-------|
|       |       |
|       |       |
|       |       |
|       |       |
|       |       |

2

Εξέτασε ποιο από τα παρακάτω ζεύγη αριθμών είναι η λύση του συστήματος:  $\begin{cases} 3x + y = 0 \\ x - 2y = -7 \end{cases}$

$(1, -3)$ ,       $(-3, 2)$ ,       $(-1, 3)$ ,       $(2, -9)$ .

3

Αντιστοίχισε κάθε σύστημα της στήλης Α με μία επιλογή από τη στήλη Β.

| Στήλη Α   | Στήλη Β                      |
|---|------------------------------|
| $(\Sigma_1): \begin{cases} x - 2y = 1 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$  | i. Σύστημα με μοναδική λύση. |
| $(\Sigma_2): \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$  | ii. Αδύνατο σύστημα.         |
| $(\Sigma_3): \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x - 4y = 2 \end{cases}$ | iii. Αόριστο σύστημα.        |

Εξασκούμαι



σε όσα έμαθα

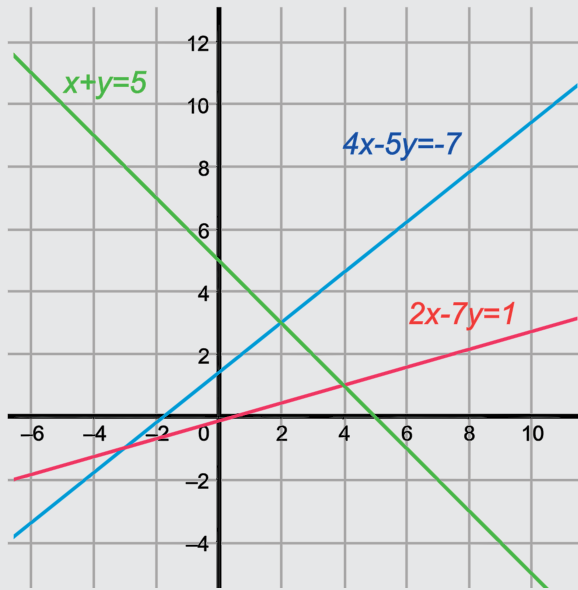
Εξασκούμαι



σε όσα έμαθα

4

Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζονται γραφικά οι ευθείες με εξισώσεις  $4x - 5y = -7$ ,  $2x - 7y = 1$  και  $x + y = 5$ .



Βρες γραφικά τη λύση των παρακάτω συστημάτων:

| Σύστημα   | Λύση             |
|---|------------------|
| $(\Sigma_1): \begin{cases} 4x - 5y = -7 \\ 2x - 7y = 1 \end{cases}$ | $(\dots, \dots)$ |
| $(\Sigma_2): \begin{cases} 4x - 5y = -7 \\ x + y = 5 \end{cases}$   | $(\dots, \dots)$ |
| $(\Sigma_3): \begin{cases} 2x - 7y = 1 \\ x + y = 5 \end{cases}$    | $(\dots, \dots)$ |

5

Λύσε γραφικά τα συστήματα:

α)  $\begin{cases} x - 2y = -10 \\ 6x + y = -8 \end{cases}$

β)  $\begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ x + y = 3 \end{cases}$

γ)  $\begin{cases} -x - 5y = 0 \\ 4x + 2y = 0 \end{cases}$

δ)  $\begin{cases} x - 3y = -9 \\ 6x + y = 3 \end{cases}$

6

Προσδιόρισε το πλήθος των λύσεων στα παρακάτω συστήματα:

α)  $\begin{cases} x = 2 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$

β)  $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$

γ)  $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 8x - 4y = 2 \end{cases}$

δ)  $\begin{cases} 3x + 6y = 3 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$

## 5.3 | Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος



Σε έναν ποδοσφαιρικό αγώνα το παιδικό εισιτήριο κοστίζει 10 € και το εισιτήριο ενός ενήλικα 20€. Τον αγώνα παρακολούθησαν 500 άτομα και συνολικά τα εισιτήρια κόστισαν 7.000€. Βρες πόσα ήταν τα παιδιά και πόσοι οι ενήλικες που παρακολούθησαν τον αγώνα.



Στην προηγούμενη παράγραφο, είδαμε τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να προσδιορίσουμε γραφικά τη λύση ενός γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους. Πολλές φορές όμως, δεν είναι εύκολος ο γραφικός προσδιορισμός του σημείου αυτού ή δεν είναι ακριβής.

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε την αλγεβρική επίλυση ενός γραμμικού συστήματος, χωρίς τη βοήθεια της γραφικής παράστασης. Θα μελετήσουμε δύο μεθόδους, τη μέθοδο της **αντικατάστασης** και τη μέθοδο των **αντίθετων συντελεστών**.

### Μέθοδος αντικατάστασης

#### Παράδειγμα:

Να λυθεί το σύστημα  $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$ , με τη μέθοδο της αντικατάστασης.

#### Λύση:

- Βήμα 1ο:** **Λύνουμε τη μία εξίσωση του συστήματος ως προς έναν άγνωστο.**  
 Αν λύσουμε την πρώτη εξίσωση  $x + 2y = 4$ , ως προς  $x$ , έχουμε:
 
$$x = 4 - 2y.$$
- Βήμα 2ο:** **Αντικαθιστούμε τον άγνωστο στην άλλη εξίσωση με την παράσταση που είναι ίσος και προκύπτει μία εξίσωση με έναν άγνωστο την οποία λύνουμε.**  
 Στη δεύτερη εξίσωση  $4x - 3y = 5$ , αντικαθιστούμε το  $x$  με  $4 - 2y$  και έχουμε:
 
$$\begin{aligned} 4(4 - 2y) - 3y &= 5 \\ 16 - 8y - 3y &= 5 \\ -8y - 3y &= 5 - 16 \\ -11y &= -11 \\ y &= 1. \end{aligned}$$
- Βήμα 3ο:** **Αντικαθιστούμε την τιμή του αγνώστου στην ισότητα που προέκυψε στο 1ο βήμα και βρίσκουμε τον άλλον άγνωστο.**  
 Για  $y = 1$ , από την εξίσωση  $x = 4 - 2y$  του 1ου βήματος, έχουμε:
 
$$\begin{aligned} x &= 4 - 2 \cdot 1 \\ x &= 2. \end{aligned}$$
 Άρα η μοναδική λύση του συστήματος είναι  $x = 2$  και  $y = 1$ , δηλαδή το ζεύγος:
 
$$(x, y) = (2, 1).$$

**Επαλήθευση:** Με αντικατάσταση μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι οι τιμές  $x = 2$  και  $y = 1$  επαληθεύουν και τις δύο εξισώσεις του συστήματος  $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$ , άρα πράγματι η λύση είναι σωστή.

## Μέθοδος αντίθετων συντελεστών

### Παράδειγμα:

Να λυθεί το σύστημα  $\begin{cases} 3x + 5y = 9 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$ , με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών.

### Λύση:

- **Βήμα 1ο:** Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη κάθε εξίσωσης με κατάλληλους αριθμούς, ώστε να εμφανιστούν αντίθετοι συντελεστές σ' έναν από τους δύο αγνώστους.

Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της πρώτης εξίσωσης με το 2 και της δεύτερης με το  $-3$  για να δημιουργήσουμε αντίθετους συντελεστές στον  $x$ :

$$\begin{cases} 3x + 5y = 9 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases} \begin{matrix} \cdot 2 \\ \cdot (-3) \end{matrix} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} 6x + 10y = 18 \\ -6x - 9y = -15 \end{cases}$$

- **Βήμα 2ο:** Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις προκειμένου να απαλείψουμε τον έναν άγνωστο, οπότε προκύπτει μία εξίσωση με έναν άγνωστο την οποία λύνουμε.

Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις:

$$\begin{array}{r} 6x + 10y = 18 \\ + \quad -6x - 9y = -15 \\ \hline 0x + y = 3 \\ y = 3. \end{array}$$

- **Βήμα 3ο:** Αντικαθιστούμε την τιμή του αγνώστου σε μία από τις εξισώσεις του συστήματος και βρίσκουμε τον άλλον άγνωστο.

Για  $y = 3$ , από την εξίσωση  $2x + 3y = 5$ , έχουμε:

$$\begin{aligned} 2x + 3 \cdot 3 &= 5 \\ 2x + 9 &= 5 \\ 2x &= 5 - 9 \\ 2x &= -4 \\ x &= -2. \end{aligned}$$

Άρα η μοναδική λύση του συστήματος είναι  $x = -2$  και  $y = 3$ , δηλαδή το ζεύγος:

$$(x, y) = (-2, 3).$$

**Επαλήθευση:** Με αντικατάσταση μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι οι τιμές  $x = -2$  και  $y = 3$  επαληθεύουν και τις δύο εξισώσεις του συστήματος  $\begin{cases} 3x + 5y = 9 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$ , άρα πράγματι η λύση είναι σωστή.



1. Να λυθεί το σύστημα 
$$\begin{cases} x - y = -3 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$$

α) Με τη μέθοδο της αντικατάστασης.

β) Με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών.

**Λύση:**

**α) Μέθοδος αντικατάστασης:**

Αν λύσουμε την πρώτη εξίσωση  $x - y = -3$ , ως προς  $x$ , έχουμε:  $x = y - 3$ .

Στη δεύτερη εξίσωση  $2x + 3y = 4$ , αντικαθιστούμε το  $x$  με  $y - 3$  και έχουμε:

$$2(y - 3) + 3y = 4$$

$$2y - 6 + 3y = 4$$

$$2y + 3y = 6 + 4$$

$$5y = 10$$

$$y = 2.$$

Για  $y = 2$ , από την εξίσωση  $x = y - 3$  του 1ου βήματος, έχουμε:

$$x = 2 - 3$$

$$x = -1.$$

Άρα η μοναδική λύση του συστήματος είναι  $x = -1$  και  $y = 2$ , δηλαδή το ζεύγος:  $(x, y) = (-1, 2)$ .

**β) Μέθοδος αντίθετων συντελεστών:**

Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της πρώτης εξίσωσης με το 3 για να δημιουργήσουμε αντίθετους συντελεστές στον  $y$ :

$$\begin{cases} x - y = -3 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases} \cdot 3 \quad \text{ή} \quad \begin{cases} 3x - 3y = -9 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις:

$$3x - 3y = -9$$

$$+ \quad 2x + 3y = 4$$

$$5x + 0y = -5$$

$$x = -1.$$

Για  $x = -1$ , από την εξίσωση  $x - y = -3$ , έχουμε:

$$-1 - y = -3$$

$$y = -1 + 3$$

$$y = 2.$$

Άρα η μοναδική λύση του συστήματος είναι  $x = -1$  και  $y = 2$ , δηλαδή το ζεύγος:  $(x, y) = (-1, 2)$ .

2. Να λυθεί το σύστημα: 
$$\begin{cases} \frac{x+1}{2} + \frac{y}{3} = 1 \\ 4x - 2(x+y) = x + 17 \end{cases}$$

**Λύση:**

Αρχικά απλοποιούμε τις εξισώσεις του συστήματος. Στην πρώτη εξίσωση απαλείφουμε τους παρονομαστές και στη δεύτερη εκτελούμε όλες τις δυνατές πράξεις.

$$\begin{cases} \frac{x+1}{2} + \frac{y}{3} = 1 \\ 4x - 2(x+y) = x + 17 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} 6 \cdot \frac{x+1}{2} + 6 \cdot \frac{y}{3} = 6 \cdot 1 \\ 4x - 2x - 2y = x + 17 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} 3(x+1) + 2y = 6 \\ 4x - 2x - x - 2y = 17 \end{cases}$$

$$\text{ή} \quad \begin{cases} 3x + 3 + 2y = 6 \\ x - 2y = 17 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} 3x + 2y = 3 \\ x - 2y = 17 \end{cases}$$

Οι συντελεστές του  $y$  είναι αντίθετοι, οπότε προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$$4x = 20 \quad \text{ή} \quad x = 5.$$

Αντικαθιστούμε την τιμή  $x = 5$  στη δεύτερη εξίσωση και έχουμε:

$$5 - 2y = 17$$

$$-2y = 17 - 5$$

$$-2y = 12$$

$$y = -6.$$

Αρα η λύση του συστήματος είναι  $x = 5$  και  $y = -6$ , δηλαδή το ζεύγος:  $(x, y) = (5, -6)$ .

3. Ο Αλέξανδρος αποταμιεύει σε έναν κουμπάρα κέρματα των 0,5€ και των 2€. Έχει συγκεντρώσει 30 κέρματα συνολικής αξίας 36€. Πόσα κέρματα από κάθε είδος περιέχει ο κουμπάρας;

**Λύση:**

Συμβολίζουμε:

- $x$  τα κέρματα των 0,5€
- $y$  τα κέρματα των 2€.

Το πλήθος των κερμάτων είναι 30, οπότε:

$$x + y = 30.$$

Η αξία των κερμάτων είναι 36€, άρα προκύπτει ότι:

$$0,5x + 2y = 36.$$

Για να βρούμε τις τιμές των  $x$  και  $y$ , λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ 0,5x + 2y = 36 \end{cases} \cdot (-2) \quad \text{ή} \quad \begin{cases} x + y = 30 \\ -x - 4y = -72 \end{cases}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις και προκύπτει:

$$-3y = -42 \quad \text{ή} \quad y = 14.$$

Για  $y = 14$ , από την εξίσωση  $x + y = 30$ , έχουμε:  $x = 16$ .

Αρα στον κουμπάρα υπάρχουν 16 κέρματα των 0,5€ και 14 κέρματα των 2€.

Εξασκούμε



σε όσα έμαθα



**1** Στα παρακάτω συστήματα αν εφαρμόσουμε τη μέθοδο των αντιθέτων συντελεστών απαλείφονται και οι δύο άγνωστοι.

$$(\Sigma_1): \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -4x + 6y = -2 \end{cases}, \quad (\Sigma_2): \begin{cases} x - y = 2 \\ -x + y = 2 \end{cases}$$

Τα συμπεράσματα που προκύπτουν είναι:

Το σύστημα  $\Sigma_1$  είναι .....

Το σύστημα  $\Sigma_2$  είναι .....

**2** Έστω το σύστημα:  $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ -x + 4y = 5 \end{cases}$

Ποιο από τα παρακάτω ζεύγη αποτελεί λύση του συστήματος;

(1, -2), (-4, 1), (-1, 1), (3, 2).

**3** Λύσε τα παρακάτω συστήματα με τη μέθοδο της αντικατάστασης.

$$\alpha) \begin{cases} y = -2 \\ 4x - 3y = 14 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} x + 3y = -1 \\ 5x - y = -5 \end{cases} \quad \gamma) \begin{cases} 15x + 8y = 3 \\ 4x + y = 1 \end{cases} \quad \delta) \begin{cases} 8x - 2y = -11 \\ x = 3y \end{cases}$$

**4** Λύσε τα συστήματα με τη μέθοδο των αντιθέτων συντελεστών.

$$\alpha) \begin{cases} 4x - 5y = 7 \\ 2x + 5y = 11 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} 10x + 2y = 8 \\ 5x - 3y = 9 \end{cases} \quad \gamma) \begin{cases} 15x + 6y = 18 \\ 4x - 2y = 3 \end{cases} \quad \delta) \begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 3x - 4y = -11 \end{cases}$$

**5** Λύσε τα παρακάτω συστήματα.

$$\alpha) \begin{cases} 2(x - 3) + 5(4 - y) = 5 - (2x + 6y) \\ 2(x - 5) - 3(y + 1) = 0 \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} \frac{4x}{5} - \frac{y}{2} - \frac{x+1}{10} = y \\ \frac{x}{4} = \frac{y}{2} \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} \frac{x-3}{2} + \frac{x+4y}{3} = -2 \\ \frac{x}{2} + \frac{5-y}{4} = 2 - \frac{x+y}{8} \end{cases}$$

$$\delta) \begin{cases} \frac{x+y}{6} - \frac{9}{2} = 1 - \frac{x-y}{8} \\ -2(2x+y) - 8 = 3 - (4x-9y) \end{cases}$$

6

Αγοράσαμε από βιβλιοπωλείο 4 τετράδια και 6 στυλό και πληρώσαμε 13€. Αν το ένα τετράδιο κοστίζει 2€ περισσότερο από το στυλό, βρες πόσο κοστίζει το ένα τετράδιο και πόσο το ένα στυλό.

7

Ένα φορτηγό μεταφέρει 15 παραγγελίες με γραφεία και καρέκλες γραφείου. Κάθε γραφείο ζυγίζει 35kg και κάθε καρέκλα ζυγίζει 25 kg λιγότερο. Αν το συνολικό βάρος των εμπορευμάτων είναι 300kg, υπολόγισε πόσα γραφεία και πόσες καρέκλες μεταφέρει το φορτηγό.

8

Δίνεται η ευθεία  $\varepsilon: ax + by = -10$ , η οποία διέρχεται από τα σημεία  $A(-10, 2)$  και  $B(5, -4)$ . Βρες τους αριθμούς  $a$  και  $b$ .

9

Το τμήμα Γ1, αν είχε 12 μαθητές περισσότερους θα είχε τους διπλάσιους μαθητές από το τμήμα Γ2, ενώ αν το τμήμα Γ2 είχε 6 μαθητές περισσότερους, θα είχε τους ίδιους μαθητές με το τμήμα Γ1. Πόσους μαθητές έχει κάθε τμήμα;

10

Ένας κουμπάρας περιέχει 40 κέρματα των 0,50€ και 2€ που κοστίζουν συνολικά 38€. Πόσα κέρματα από κάθε είδος περιέχει;

11

α) Δίνεται το σύστημα:  $(\Sigma_1): \begin{cases} 2x - 4y = -8 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases}$

Βρες τη λύση του συστήματος  $(\Sigma_1)$ .

β) Δίνεται επιπλέον το σύστημα  $(\Sigma_2): \begin{cases} ax + by = 4 \\ ay - bx = -7 \end{cases}$

Βρες τις τιμές των  $a$  και  $b$ , αν γνωρίζεις ότι τα συστήματα  $(\Sigma_1)$  και  $(\Sigma_2)$  έχουν την ίδια λύση.

Εξασκούμε



σε όσα έμαθα

## 5.4 | Εξισώσεις δευτέρου ή και μεγαλύτερου βαθμού, επίλυση με παραγοντοποίηση

### A. Εξισώσεις πρώτου βαθμού



Σε ένα λούνα-παρκ, ο «μάγος» κάνει το παρακάτω παιχνίδι και πάντα βρίσκει το σωστό!

- Σκέψου έναν αριθμό από το 1 έως το 100.
- Πολλαπλασιάσε τον με 2.
- Πρόσθεσε τον αριθμό 40.
- Διάφρασε το άθροισμα με 2.
- Αφαίρεσε τον αριθμό που είχες σκεφτεί αρχικά.

Βρήκες αποτέλεσμα 20!

Πώς μπορείς να ερμηνεύσεις την «επιτυχία» του «μάγου» αξιοποιώντας τις γνώσεις σου πάνω στις ισότητες και τις εξισώσεις;



### Εξισώσεις 1ου βαθμού

Έχουμε μάθει στην προηγούμενη τάξη τον τρόπο με τον οποίο λύνουμε εξισώσεις, όπως:

$$3x - 17 = 1 - 6x.$$

Η εξίσωση αυτή περιέχει έναν άγνωστο (το  $x$ ) και ο μεγαλύτερος εκθέτης του αγνώστου είναι αριθμός 1. Για τον λόγο αυτόν η εξίσωση αυτή λέγεται εξίσωση **1ου βαθμού** (ή πρωτοβάθμια).



### Επίλυση εξίσωσης 1ου βαθμού

**Παράδειγμα:**

Να λυθεί η εξίσωση:

$$3x - 17 = 1 - 6x.$$

**Λύση:**

$$3x - 17 = 1 - 6x$$

$$3x + 6x = 1 + 17$$

$$9x = 18$$

$$\frac{9x}{9} = \frac{18}{9}$$

$$x = 2$$

← Χωρίζουμε τους γνωστούς από τους αγνώστους.

← Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.

← Διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου.

Ο αριθμός 2 είναι η μοναδική λύση (ή ρίζα) της εξίσωσης, δηλαδή αν το  $x$  αντικατασταθεί με το 2 επαληθεύει την αρχική εξίσωση:

$$3 \cdot 2 - 17 = 1 - 6 \cdot 2$$

$$6 - 17 = 1 - 12$$

$$-11 = -11$$

που ισχύει.

## Επίλυση κλασματικής εξίσωσης 1ου βαθμού

**Παράδειγμα:**

Να λυθεί η εξίσωση:

$$x - \frac{x-1}{2} = \frac{x-3}{3} + 1.$$

**Λύση:**

Αν η εξίσωση περιέχει κλάσματα πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της με το ΕΚΠ των παρονομαστών και απαλείφουμε τους παρονομαστές.

$$\begin{aligned} x - \frac{x-1}{2} &= \frac{x-3}{3} + 1 \\ 6 \cdot x - 6 \cdot \frac{x-1}{2} &= 6 \cdot \frac{x-3}{3} + 6 \cdot 1 \\ 6x - 3(x-1) &= 2(x-3) + 6 \\ 6x - 3x + 3 &= 2x - 6 + 6 \\ 6x - 3x - 2x &= -3 - 6 + 6 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

← Πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους με το ΕΚΠ(2, 3) = 6.

← Απαλείφουμε τους παρονομαστές.

← Εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα.

Ο αριθμός  $-3$  είναι η μοναδική λύση (ή ρίζα) της εξίσωσης.

Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση

## Αδύνατη εξίσωση – Ταυτότητα

Η εξίσωση που δεν έχει καμία λύση, δηλαδή δεν επαληθεύεται για καμία τιμή του αγνώστου, λέγεται **αδύνατη**.

**Παράδειγμα:**

Η εξίσωση  $0 \cdot x = 1$  δεν επαληθεύεται για καμία τιμή του  $x$ , επομένως δεν έχει καμία λύση άρα είναι **αδύνατη**.

**Γενικά:**

Κάθε εξίσωση της μορφής  $0 \cdot x = \beta$  με  $\beta \neq 0$ , είναι **αδύνατη**.

Η εξίσωση που έχει λύσεις όλους τους αριθμούς, δηλαδή επαληθεύεται για οποιαδήποτε τιμή του αγνώστου, λέγεται **ταυτότητα** ή **αόριστη**.

**Παράδειγμα:**

Η εξίσωση  $0 \cdot x = 0$  επαληθεύεται για οποιαδήποτε τιμή του  $x$ , επομένως έχει λύσεις όλους τους αριθμούς, άρα είναι **ταυτότητα**.

**Γενικά:**

Κάθε εξίσωση της μορφής  $0 \cdot x = 0$ , είναι **ταυτότητα** ή **αόριστη**.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι:

Μία εξίσωση 1ου βαθμού με άγνωστο τον  $x$ , είναι της μορφής:

$$ax + \beta = 0 \quad \text{ή} \quad ax = -\beta.$$

- Αν  $a \neq 0$ , τότε η εξίσωση έχει **μοναδική λύση** την  $x = -\frac{\beta}{a}$ .
- Αν  $a = 0$ , τότε η εξίσωση γράφεται  $0x = -\beta$  και
  - αν  $\beta \neq 0$  είναι **αδύνατη**.
  - αν  $\beta = 0$  είναι **ταυτότητα** (ή **αόριστη**).



1

Λύσε τις εξισώσεις:

$$\alpha) 3x - 4 = -2x + 11 \quad \beta) 5(2x - 4) - 3(x + 1) = 2 - (4x + 3) \quad \gamma) -3(x + 1) + 9x - 6(x - 5) = 0$$

2

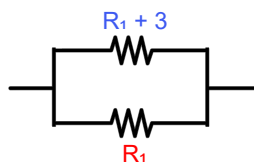
Λύσε τις εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{x}{4} + 6 = \frac{x}{2} - x \quad \beta) \frac{2x + 1}{6} + 2x = \frac{1 - 3x}{8} - 1 \quad \gamma) \frac{5(2x - 1)}{6} + \frac{x}{3} = \frac{12x - 5}{6}$$

## B. Εξισώσεις δευτέρου ή και μεγαλύτερου βαθμού, επίλυση με παραγοντοποίηση



Για την εγκατάσταση ενός ηλεκτρικού κυκλώματος θέλουμε να διαχειριστούμε το παρακάτω πρόβλημα:



Δυο αντιστάτες έχουν συνδεθεί παράλληλα με αντιστάσεις  $R_1$  και  $R_1 + 3$ . Η συνολική αντίσταση θέλουμε να είναι  $2\Omega$ . Ποια πρέπει να είναι η αντίσταση σε κάθε αντιστάτη;

Γνωρίζουμε από τη Φυσική ότι η συνολική αντίσταση  $R_{ολ}$  σε παράλληλη σύνδεση προκύπτει από τον τύπο  $R_{ολ} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$ , οπότε κάνοντας πράξεις και αντικατάσταση βρίσκουμε  $R_1^2 - R_1 - 6 = 0$ . Ποιες είναι όμως οι λύσεις της εξίσωσης που προέκυψε;

## Εξισώσεις 2ου βαθμού

Μια εξίσωση με έναν άγνωστο στην οποία ο μεγαλύτερος εκθέτης του αγνώστου είναι ο αριθμός 2, ονομάζεται εξίσωση **2ου βαθμού**.

**Παράδειγμα:**

Η εξίσωση  $x^2 - 3x + 2 = 0$ , είναι μία εξίσωση 2ου βαθμού (ή δευτεροβάθμια).

Η γενική μορφή μίας εξίσωσης 2ου βαθμού είναι:  $ax^2 + bx + \gamma = 0$ , με  $a \neq 0$ .

Οι αριθμοί  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$  λέγονται **συντελεστές** της εξίσωσης (ο  $\gamma$  λέγεται και σταθερός όρος).

**Παράδειγμα:** Στη εξίσωση  $x^2 - 3x + 2 = 0$ , οι συντελεστές είναι:  $\alpha = 1$ ,  $\beta = -3$  και  $\gamma = 2$ .

## Επίλυση εξίσωσης $x^2 = \alpha$

Η εξίσωση  $x^2 = \alpha$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{Έχει δύο λύσεις αν } \alpha > 0, \text{ τις } x = \sqrt{\alpha} \text{ και } x = -\sqrt{\alpha}. \\ \text{Είναι αδύνατη αν } \alpha < 0. \end{array} \right.$

**Παράδειγμα:** Να λύσετε τις εξισώσεις:

α)  $x^2 = 4$  και β)  $x^2 + 1 = 0$ .

**Λύση:**

α)

$$\begin{array}{l} x^2 = 4 \\ x = \sqrt{4} \text{ ή } x = -\sqrt{4} \\ x = 2 \text{ ή } x = -2. \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \leftarrow \text{Αν } x^2 = \alpha, (\alpha > 0) \text{ τότε } x = \sqrt{\alpha} \text{ ή } x = -\sqrt{\alpha}. \end{array} \right.$$

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις  $x = 2$  και  $x = -2$ .

β)

$$\begin{array}{l} x^2 + 1 = 0 \\ x^2 = -1. \\ \text{Αδύνατη εξίσωση.} \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \leftarrow \text{Μεταφέρουμε τον αριθμό στο 2ο μέλος.} \\ \leftarrow \text{Η εξίσωση } x^2 = \alpha \text{ είναι αδύνατη αν } \alpha < 0. \end{array} \right.$$

Η εξίσωση είναι **αδύνατη** καθώς δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός ο οποίος όταν υψωθεί στο τετράγωνο να δίνει αρνητικό αποτέλεσμα.

**Ειδικότερα:**

Η εξίσωση  $x^2 = 0$  έχει λύση την  $x = 0$ .

Η λύση αυτή λέγεται **διπλή**, γιατί κατά την επίλυση εμφανίζεται δύο φορές η ίδια λύση  $x = 0$ .

$$\begin{array}{l} x^2 = 0 \\ x \cdot x = 0 \\ x = 0 \text{ ή } x = 0. \end{array}$$

## Επίλυση εξισώσεων 2ου ή και μεγαλύτερου βαθμού με παραγοντοποίηση

Γνωρίζουμε ότι:

$$\text{Αν } \alpha \cdot \beta = 0, \text{ τότε } \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0.$$

## Επίλυση με κοινό παράγοντα

Για να λύσουμε εξισώσεις της μορφής  $ax^2 + bx = 0$ , παραγοντοποιούμε το πολυώνυμο στο 1ο μέλος και γράφουμε κάθε παράγοντα που προκύπτει, ίσο με μηδέν.

**Παράδειγμα:** Να λύσετε την εξίσωση:  $2x^2 + 4x = 0$ .

**Λύση:**

$$\begin{array}{l}
 2x^2 + 4x = 0 \\
 2x \cdot (x + 2) = 0 \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 2x = 0 \quad \text{ή} \quad x + 2 = 0 \\
 x = 0 \quad \text{ή} \quad x = -2.
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{l}
 \leftarrow \text{Παραγοντοποιούμε το πολυώνυμο στο 1}^\circ \text{ μέλος.} \\
 \leftarrow \text{Γράφουμε κάθε παράγοντα ίσο με μηδέν.} \\
 \leftarrow \text{Λύνουμε τις πρωτοβάθμιες εξισώσεις.}
 \end{array}
 \right.$$

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις  $x = 0$  και  $x = -2$ .

Με τη βοήθεια της παραγοντοποίησης μπορούμε να λύσουμε και εξισώσεις βαθμού μεγαλύτερου από 2.

**Παράδειγμα:** Να λύσετε την εξίσωση:  $x^3 - x = 0$ .

**Λύση:**

$$\begin{array}{l}
 x^3 - x = 0 \\
 x \cdot (x^2 - 1) = 0 \\
 x \cdot (x - 1) \cdot (x + 1) = 0 \\
 \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\
 x = 0 \quad \text{ή} \quad x - 1 = 0 \quad \text{ή} \quad x + 1 = 0 \\
 x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 1 \quad \text{ή} \quad x = -1.
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{l}
 \leftarrow \text{Παραγοντοποιούμε το πολυώνυμο στο 1}^\circ \text{ μέλος.} \\
 \leftarrow \text{Γράφουμε κάθε παράγοντα ίσο με μηδέν.} \\
 \leftarrow \text{Λύνουμε τις πρωτοβάθμιες εξισώσεις.}
 \end{array}
 \right.$$

Άρα η εξίσωση έχει τρεις λύσεις, τις  $x = 0$ ,  $x = 1$  και  $x = -1$ .

## Ανάπτυγμα τετραγώνου

Μπορούμε να λύσουμε εξισώσεις της μορφής  $ax^2 + bx + \gamma = 0$ , με  $a \neq 0$ , αν το πολυώνυμο στο πρώτο μέλος είναι ανάπτυγμα τετραγώνου:  $a^2 \pm 2a\beta + \beta^2 = (a \pm \beta)^2$ .

**Παράδειγμα:** Να λύσετε την εξίσωση:  $x^2 - 4x + 4 = 0$ .

**Λύση:**

$$\begin{array}{l}
 x^2 - 4x + 4 = 0 \\
 (x - 2)^2 = 0 \\
 x - 2 = 0 \\
 x = 2.
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{l}
 \leftarrow \text{Παρατηρούμε ότι το 1}^\circ \text{ μέλος είναι ανάπτυγμα τετραγώνου.} \\
 \leftarrow \text{Είναι } (x - 2)^2 = 0 \text{ μόνο όταν } x - 2 = 0.
 \end{array}
 \right.$$

Άρα η εξίσωση έχει **διπλή λύση** την  $x = 2$ .

## Λύση εξίσωσης 2ου βαθμού με τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνου:

Για να λύσουμε μία εξίσωση της μορφής  $ax^2 + bx + \gamma = 0$  με  $a \neq 0$ , μπορούμε να ακολουθήσουμε την παρακάτω διαδικασία:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + \gamma &= 0 \\ 4a^2x^2 + 4abx + 4a\gamma &= 0 \\ (2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot \beta &= -4a\gamma \\ (2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot \beta + \beta^2 &= -4a\gamma + \beta^2 \\ (2ax + \beta)^2 &= \underbrace{\beta^2 - 4a\gamma} \\ (2ax + \beta)^2 &= \Delta, \quad (1). \end{aligned}$$

← Πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους με  $4a$ .

← Μεταφέρουμε τον σταθερό όρο  $4a\gamma$  στο δεξιό μέλος.

← Στο αριστερό μέλος έχουμε δύο όρους του αναπτύγματος  $(2ax + \beta)^2$ . Για να συμπληρώσουμε το ανάπτυγμα τετραγώνου, προσθέτουμε και στα δύο μέλη το  $\beta^2$ .

← Συμβολίζουμε την παράσταση  $\beta^2 - 4a\gamma$  με  $\Delta$ .

- Αν  $\Delta > 0$ , τότε από την εξίσωση (1) έχουμε:

$$\begin{aligned} (2ax + \beta)^2 &= \Delta \\ 2ax + \beta &= \sqrt{\Delta} \quad \text{ή} \quad 2ax + \beta = -\sqrt{\Delta} \\ 2ax &= -\beta + \sqrt{\Delta} \quad \text{ή} \quad 2ax = -\beta - \sqrt{\Delta} \\ x &= \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ή} \quad x = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2a}. \end{aligned}$$

Άρα αν  $\Delta > 0$ , η εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις τις οποίες για συντομία γράφουμε:  $x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ .

- Αν  $\Delta = 0$ , τότε από την εξίσωση (1) έχουμε:

$$\begin{aligned} (2ax + \beta)^2 &= 0 \\ 2ax + \beta &= 0 \\ 2ax &= -\beta \\ x &= \frac{-\beta}{2a}. \end{aligned}$$

Άρα αν  $\Delta = 0$ , η εξίσωση έχει μία διπλή λύση, την:  $x = \frac{-\beta}{2a}$ .

- Αν  $\Delta < 0$ , τότε η εξίσωση (1) δεν έχει καμία πραγματική λύση (αδύνατη εξίσωση).

Την παράσταση  $\Delta = \beta^2 - 4a\gamma$  την ονομάζουμε **Διακρίνουσα** της εξίσωσης γιατί από το πρόσημό της διακρίνουμε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης.

**Σχόλιο:** Ο παραπάνω τρόπος αποτελεί τη βασική μέθοδο για την επίλυση εξισώσεων 2ου βαθμού.

**Παράδειγμα:** Να λυθεί η εξίσωση:  $2x^2 + 3x - 2 = 0$ .

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3x - 2 &= 0 \\ 16x^2 + 8 \cdot 3x - 16 &= 0 \\ (4x)^2 + 2 \cdot (4x) \cdot 3 &= 16 \\ (4x)^2 + 2 \cdot (4x) \cdot 3 + 3^2 &= 16 + 3^2 \\ (4x + 3)^2 &= 25 \\ 4x + 3 &= \sqrt{25} \quad \text{ή} \quad 4x + 3 = -\sqrt{25} \\ 4x &= 5 - 3 \quad \text{ή} \quad 4x = -5 - 3 \\ 4x &= 2 \quad \text{ή} \quad 4x = -8 \\ x &= \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad x = -2. \end{aligned}$$

← Πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους με  $4a = 4 \cdot 2 = 8$

← Μεταφέρουμε το 16 στο δεξιό μέλος.

← Προσθέτουμε στα δύο μέλη το  $3^2$ .

← Γράφουμε το ανάπτυγμα τετραγώνου.

← Αν  $x^2 = a$ , ( $a > 0$ ) τότε  $x = \sqrt{a}$  ή  $x = -\sqrt{a}$ .

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις τις  $x = \frac{1}{2}$  και  $x = -2$ .



1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) x^2 - 9 = 0$$

$$\beta) 3x^2 = 15$$

$$\gamma) 3x^2 = 5x$$

**Λύση:**

**α) 1ος τρόπος:**

$$\begin{array}{l} x^2 - 9 = 0 \\ x^2 = 9 \\ x = \sqrt{9} \text{ ή } x = -\sqrt{9} \\ x = 3 \text{ ή } x = -3. \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \leftarrow \text{Μεταφέρουμε τον αριθμό στο 2ο μέλος.} \\ \leftarrow \text{Αν } x^2 = \alpha, (\alpha > 0) \text{ τότε } x = \sqrt{\alpha} \text{ ή } x = -\sqrt{\alpha}. \end{array} \right.$$

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις  $x = 3$  και  $x = -3$ .

**2ος τρόπος:**

$$\begin{array}{l} x^2 - 9 = 0 \\ (x - 3) \cdot (x + 3) = 0 \\ \swarrow \quad \searrow \\ x - 3 = 0 \text{ ή } x + 3 = 0 \\ x = 3 \text{ ή } x = -3. \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \leftarrow \text{Είναι } \alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta). \\ \leftarrow \text{Αν } \alpha \cdot \beta = 0 \text{ τότε } \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0. \end{array} \right.$$

Άρα βρίσκουμε πάλι τις λύσεις  $x = 3$  και  $x = -3$ .

**β)**

$$\begin{array}{l} 3x^2 = 15 \\ x^2 = 5 \\ x = \sqrt{5} \text{ ή } x = -\sqrt{5}. \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \leftarrow \text{Διαιρούμε τα δύο μέλη της εξίσωσης με 3.} \\ \leftarrow \text{Αν } x^2 = \alpha, (\alpha > 0) \text{ τότε } x = \sqrt{\alpha} \text{ ή } x = -\sqrt{\alpha}. \end{array} \right.$$

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις  $x = \sqrt{5}$  και  $x = -\sqrt{5}$ .

**γ)**

$$\begin{array}{l} 3x^2 = 5x \\ 3x^2 - 5x = 0 \\ x \cdot (3x - 5) = 0 \\ \swarrow \quad \searrow \\ x = 0 \text{ ή } 3x - 5 = 0 \\ x = 0 \text{ ή } x = \frac{5}{3}. \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \leftarrow \text{Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο 1ο μέλος} \\ \leftarrow \text{Παραγοντοποιούμε το πρώτο μέλος.} \\ \leftarrow \text{Λύνουμε την εξίσωση.} \end{array} \right.$$

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις  $x = 0$  και  $x = \frac{5}{3}$ .

Εξασκούμε



σε όλα έμαθα

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) -x^2 + 6x - 9 = 0$$

$$\beta) 2x^2 + 50 = -20x$$

**Λύση:**

**α)**

$$-x^2 + 6x - 9 = 0$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$(x - 3)^2 = 0$$

$$x - 3 = 0$$

$$x = 3.$$

← Πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους με  $-1$  και στο  $1^\circ$  μέλος εμφανίζεται ανάπτυγμα τετραγώνου.

← Είναι  $(x - 3)^2 = 0$  μόνο όταν  $x - 3 = 0$ .

Άρα η εξίσωση έχει διπλή λύση την  $x = 3$ .

**β)**

$$2x^2 + 50 = -20x$$

$$2x^2 + 20x + 50 = 0$$

$$2(x^2 + 10x + 25) = 0$$

$$2 \cdot (x + 5)^2 = 0$$

$$x + 5 = 0$$

$$x = -5.$$

← Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο  $1^\circ$  μέλος.

← Βγάζουμε κοινό παράγοντα το 2 και στην παρένθεση εμφανίζεται ανάπτυγμα τετραγώνου.

← Είναι  $2 \cdot (x + 5)^2 = 0$  μόνο όταν  $x + 5 = 0$ .

Άρα η εξίσωση έχει διπλή λύση την  $x = -5$ .

3. Να λύσετε την εξίσωση:  $x^2 - 3x + 2 = 0$ .

**Λύση:**

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x^2 - x - 2x + 2 = 0$$

$$x(x - 1) - 2(x - 1) = 0$$

$$(x - 1) \cdot (x - 2) = 0$$

$$x - 1 = 0 \quad \text{ή} \quad x - 2 = 0$$

$$x = 1 \quad \text{ή} \quad x = 2.$$

← Διασπάμε το  $-3x$  σε  $-x - 2x$ .

← Παραγοντοποιούμε με ομαδοποίηση.

← Λύνουμε την εξίσωση.

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις  $x = 1$  και  $x = 2$ .

4. Να λύσετε την εξίσωση:  $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$ .

**Λύση:**

Παραγοντοποιούμε με ομαδοποίηση και λύνουμε την εξίσωση:

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$$

$$x^2(x - 3) - (x - 3) = 0$$

$$(x - 3)(x^2 - 1) = 0$$

$$(x - 3)(x - 1)(x + 1) = 0$$

$$x - 3 = 0 \quad \text{ή} \quad x - 1 = 0 \quad \text{ή} \quad x + 1 = 0$$

$$x = 3 \quad \text{ή} \quad x = 1 \quad \text{ή} \quad x = -1.$$

← Αν  $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma$  τότε  $\alpha = 0$  ή  $\beta = 0$  ή  $\gamma = 0$ .

Άρα η εξίσωση έχει τρεις λύσεις, τις  $x = 3$ ,  $x = 1$  και  $x = -1$ .



**1** Χαρακτήρισε ως Σωστές ή Λάθος τις προτάσεις που ακολουθούν βάζοντας ένα **x** στην κατάλληλη θέση.

α) Η εξίσωση  $(x - 1)(x + 2) = 0$  έχει λύσεις τους αριθμούς 1 και  $-2$ .

β) Η εξίσωση  $x(x - 5) = 0$  έχει λύση μόνο τον αριθμό 5.

γ) Η εξίσωση  $x^2 = 9$  έχει μοναδική λύση την  $x = 3$ .

δ) Η εξίσωση  $x^2 = 0$  έχει μία διπλή λύση.

ε) Η εξίσωση  $x^2 + 1 = 0$  είναι αδύνατη.

Σωστό      Λάθος

|  |  |
|--|--|
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

**2** Λύσε τις εξισώσεις:

α)  $(x - 1)(x + 2) = 0$

β)  $(3y + 2)(2y - 6) = 0$

γ)  $9\left(t - \frac{1}{4}\right)\left(3t - \frac{1}{2}\right) = 0$

δ)  $\omega(1 - 3\omega) = 0$

ε)  $z^2(1 - z^2) = 0$

στ)  $-2k(k - 4)(2 - k) = 0$

**3** Λύσε τις εξισώσεις:

α)  $x^2 - x = 0$

β)  $8x - 4x^2 = 0$

γ)  $x^2 - \frac{3}{2}x = 0$

δ)  $15x^2 = 3x$

ε)  $-20x = x^2$

στ)  $\frac{x^2}{2} = 3x$

ζ)  $x^3 - 4x^2 = 0$

η)  $\sqrt{2}x^2 = \sqrt{8}x$

**4** Λύσε τις εξισώσεις:

α)  $x^2 - 4 = 0$

β)  $x^2 + 16 = 0$

γ)  $x^2 - 3 = 0$

δ)  $9x^2 - 4 = 0$

ε)  $5x^2 = 45$

στ)  $x^2 + 1 = 0$

ζ)  $3x^2 - 16 = 0$

η)  $-\frac{1}{3}x^2 = -9$

**5** Λύσε τις εξισώσεις:

α)  $x^2 + 4x + 4 = 0$

β)  $x^2 + 9 = 6x$

γ)  $-4x^2 + 4x - 1 = 0$

δ)  $x^2 = 2x - 1$

**6** Λύσε τις εξισώσεις:

α)  $2x^2 + 5x + 3 = 0$

β)  $x^2 - 3x + 2 = 0$

γ)  $2x^2 + 7x + 6 = 0$

δ)  $x^2 + 4x + 3 = 0$

7

Λύσε τις εξισώσεις:

α)  $(x^2 - 2x)(x^2 - 9) = 0$

β)  $8x^3 - 4x^2 - 6x + 3 = 0$

γ)  $2(5x - 1)^2 - 8 = 0$

δ)  $(x - 6)^2 - 4x^2 = 0$

ε)  $x^2(x + 1) - 2x(x + 1) + x + 1 = 0$

8

Δίνεται η παράσταση  $A = \frac{2x^3 - 12x^2 + 18x}{x^2 - 9}$ .α) Βρες τις τιμές του  $x$  για τις οποίες ορίζεται η παράσταση  $A$ .β) Απλοποίησε την παράσταση  $A$ .γ) Λύσε την εξίσωση  $A = 0$ .

Εξασκούμε



σε όσα έμαθα

# 5.5 | Ανισώσεις της μορφής $ax + \beta < \gamma$



Έστω  $x \leq y \leq z$ , ώστε:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$$

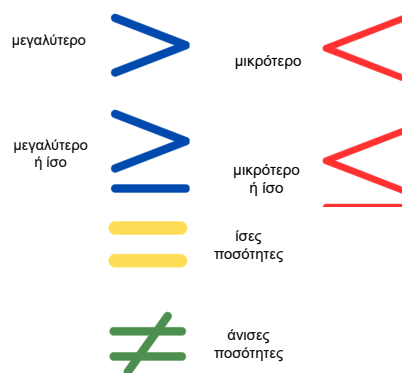
Εξήγησε με όποιον τρόπο μπορείς γιατί  $x > 1$  και  $x \leq 3$ .



## Σύγκριση πραγματικών αριθμών

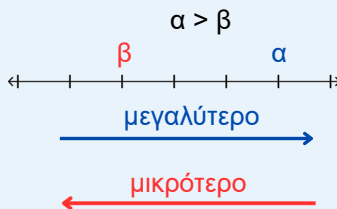
Μια ανισότητα συγκρίνει δύο τιμές, δείχνοντας αν η μία είναι μικρότερη, μεγαλύτερη ή απλά δεν ίση με μια άλλη τιμή.

- Το  $a \neq b$  σημαίνει ότι το  $a$  **δεν είναι ίσο** με το  $b$ .
- Το  $a < b$  δείχνει ότι το  $a$  είναι **μικρότερο** από το  $b$ , ενώ το  $a > b$  δείχνει ότι το  $a$  είναι **μεγαλύτερο** από το  $b$ .  
(Οι ανισότητες αυτές είναι γνωστές ως αυστηρές ανισότητες).
- $a \leq b$  σημαίνει ότι το  $a$  είναι **μικρότερο ή ίσο** του  $b$ , ενώ  $a \geq b$  σημαίνει ότι το  $a$  είναι **μεγαλύτερο ή ίσο** του  $b$ .



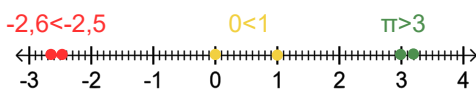
Αν δύο ή περισσότεροι πραγματικοί αριθμοί έχουν παρασταθεί με σημεία στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τότε είναι διατεταγμένοι και μπορούμε να τους συγκρίνουμε.

Ο αριθμός που βρίσκεται **δεξιότερα** στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι ο **μεγαλύτερος**.



### Παραδείγματα:

$$0 < 1, -2,6 < -2,5 \text{ και } \pi > 3.$$



Μεγαλύτερος Αριθμός  $>$  Μικρότερος Αριθμός

Το σύμβολο «δείχνει» τη μικρότερη τιμή.

**Γενικά:**

Κάθε θετικός αριθμός είναι **μεγαλύτερος** από το μηδέν.

Π.χ.  $+2 > 0$ .

- Κάθε αρνητικός αριθμός είναι **μικρότερος** από το μηδέν.

Π.χ.  $-3 < 0$ .

- Κάθε θετικός αριθμός είναι **μεγαλύτερος** από κάθε αρνητικό αριθμό.

Π.χ.  $+2 > -3$ .

Για να συγκρίνουμε δύο πραγματικούς αριθμούς που δεν έχουν παρασταθεί με σημεία στον άξονα των πραγματικών αριθμών, εξετάζουμε αν η **διαφορά** τους είναι θετική, μηδέν ή αρνητική.

- Αν  $\alpha - \beta > 0$ , τότε  $\alpha > \beta$ .

Π.χ. Είναι  $\pi - 3 > 0$ , άρα  $\pi > 3$ .

- Αν  $\alpha - \beta = 0$ , τότε  $\alpha = \beta$ .

- Αν  $\alpha - \beta < 0$ , τότε  $\alpha < \beta$ .

Π.χ. Είναι  $(-2) - (-1) = -1 < 0$  άρα  $-2 < -1$ .

## Νόμος της τριχοτομίας

Για δύο πραγματικούς αριθμούς  $\alpha, \beta$  ισχύει ακριβώς ένα από τα παρακάτω:

$$\alpha < \beta \text{ ή } \alpha = \beta \text{ ή } \alpha > \beta.$$

Δηλαδή, αν ένας αριθμός είναι μικρότερος από έναν άλλο αριθμό, τότε δεν μπορεί να είναι ίσος ή μεγαλύτερος από αυτόν.

## Ιδιότητες της διάταξης

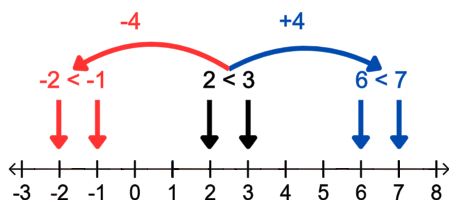
### Πρόσθεση – αφαίρεση αριθμού σε ανισότητα

Ας πάρουμε την ανίσωση  $2 < 3$ .

Παρατηρούμε ότι, αν στα δύο μέλη της ανισότητας:

- προσθέσουμε 4 προκύπτει:  $2 + 4 < 3 + 4$  ή  $6 < 7$ .
- αφαιρέσουμε 4 προκύπτει:  $2 - 4 < 3 - 4$  ή  $-2 < -1$ .

Σε κάθε περίπτωση, προκύπτει ανισότητα **με την ίδια φορά**.



Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση

**Γενικά:**

Αν και στα δύο μέλη μιας ανισότητας **προσθέσουμε** ή **αφαιρέσουμε** τον ίδιο αριθμό τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.

$$\text{Αν } \alpha < \beta \text{ τότε } \alpha + \gamma < \beta + \gamma \text{ και } \alpha - \gamma < \beta - \gamma.$$

**Παράδειγμα:** Αν  $\alpha < \beta$ , τότε:

- αν και στα δύο μέλη προσθέσουμε π.χ. το 5 προκύπτει:  $\alpha + 5 < \beta + 5$ .
- αν και από τα δύο μέλη αφαιρέσουμε π.χ. το 3 προκύπτει:  $\alpha - 3 < \beta - 3$ .

Σε κάθε περίπτωση, προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.

### Πολλαπλασιασμός – Διαίρεση με αριθμό σε ανισότητα

Ας πάρουμε την ανίσωση  $2 < 3$ .

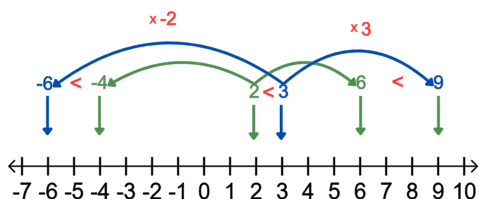
Παρατηρούμε ότι,

- αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της ανισότητας με το 3 (θετικός) προκύπτει ανισότητα με την **ίδια φορά**:

$$3 \cdot 2 < 3 \cdot 3 \text{ ή } 6 < 9.$$

- αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της ανισότητας με το -2 (αρνητικός) προκύπτει ανισότητα με την **αντίθετη φορά**:

$$-2 \cdot 2 > -2 \cdot 3 \text{ ή } -4 > -6.$$



Παρόμοια συμπεράσματα προκύπτουν και αν διαιρέσουμε τα δύο μέλη με τον ίδιο αριθμό.

#### Γενικά:

Αν **πολλαπλασιάσουμε** ή **διαιρέσουμε** και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα η οποία έχει:

- την ίδια φορά, αν ο αριθμός είναι **θετικός**, δηλαδή:

$$\text{Αν } \alpha < \beta \text{ και } \gamma > 0 \text{ τότε } \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma \text{ και } \frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}.$$

- την αντίθετη φορά, αν ο αριθμός είναι **αρνητικός**, δηλαδή:

$$\text{Αν } \alpha < \beta \text{ και } \gamma < 0 \text{ τότε } \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma \text{ και } \frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}.$$

**Παράδειγμα:** Αν  $\alpha < \beta$ , τότε:

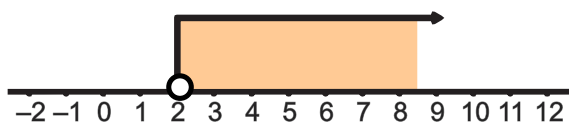
- αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη π.χ. με το 5 προκύπτει:  $5\alpha < 5\beta$  (ίδια φορά)
- αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη π.χ. με το -3 προκύπτει:  $-3\alpha > -3\beta$  (αντίθετη φορά)

**Γενικά:** Όταν πολλαπλασιάζουμε ή διαιρούμε τα δύο μέλη της ανισότητας με αρνητικό αριθμό, αλλάζουμε τη φορά.

#### Υπενθύμιση:

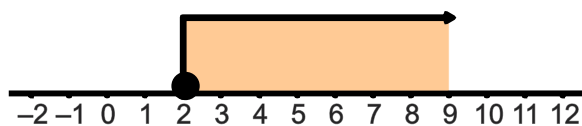
- Η ανίσωση  $x > 2$  εκφράζει όλους τους αριθμούς  $x$  οι οποίοι είναι μεγαλύτεροι του 2 (στην περίπτωση αυτή το  $x$  δεν είναι ίσο με 2).

Παριστάνουμε τους αριθμούς αυτούς στον άξονα των πραγματικών αριθμών με ένα βέλος, όπως φαίνεται παρακάτω:



↑ Ο κύκλος δείχνει ότι το 2 δεν περιέχεται στις λύσεις της ανίσωσης  $x > 2$ .

- Η ανίσωση  $x \geq 2$  εκφράζει όλους τους αριθμούς  $x$  οι οποίοι είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του 2.



↑ Η τελεία δείχνει ότι το 2 περιέχεται στις λύσεις της ανίσωσης  $x \geq 2$ .

## Επίλυση ανίσωσης $ax + \beta < \gamma$ .

Οι ιδιότητες της διάταξης χρησιμοποιούνται και για την επίλυση ανισώσεων:

### Παράδειγμα:

Να λύσετε την ανίσωση:  $3x + 5 > 17$ .

Λύση:

$$3x + 5 > 17$$

$$3x > 17 - 5$$

$$3x > 12$$

$$\frac{3x}{3} > \frac{12}{3}$$

$$x > 4.$$

← Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους,

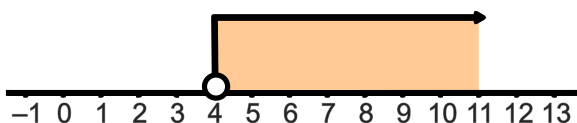
(δηλαδή αφαιρούμε 5 και από τα δύο μέλη).

← Διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου,

(η φορά της ανίσωσης δεν αλλάζει γιατί είναι το 3 είναι θετικός αριθμός).

Άρα οι λύσεις της ανίσωσης είναι  $x > 4$ , δηλαδή όλοι οι αριθμοί που είναι μεγαλύτεροι του 4.

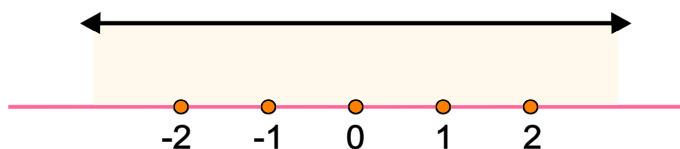
Μπορούμε να παραστήσουμε τις λύσεις αυτές γραφικά, στον άξονα των πραγματικών αριθμών:



### Ειδικές περιπτώσεις

- Η ανίσωση π.χ.  $0x < 2$  αληθεύει για κάθε τιμή της μεταβλητής  $x$ .

Η παράσταση των λύσεων αυτών στην ευθεία των αριθμών είναι όλη η ευθεία:



- Η ανίσωση π.χ.  $0x > 2$  δεν αληθεύει για καμία τιμή της μεταβλητής  $x$ .

Η ανίσωση αυτή είναι **αδύνατη** και δεν παριστάνουμε λύσεις στην ευθεία των αριθμών.

Εξασκούμε



σε όσα έμαθα



1. Αν  $\alpha < \beta$  να συμπληρώσετε τα κενά με ένα από τα σύμβολα «<», «>» ή «=» .

i.  $\alpha + 3 \dots \beta + 3$ .

ii.  $\alpha - 1 \dots \beta - 1$ .

iii.  $3 \cdot \alpha \dots 3 \cdot \beta$ .

iv.  $-\alpha \dots -\beta$ .

**Λύση:**

i.  $\alpha + 3 < \beta + 3$ .

← Στα δύο μέλη της ανισότητας  $\alpha < \beta$  προσθέσαμε 3, άρα προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.

ii.  $\alpha - 1 < \beta - 1$ .

← Αφαιρούμε 1 από τα δύο μέλη της ανισότητας  $\alpha < \beta$ , άρα προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.

iii.  $3 \cdot \alpha < 3 \cdot \beta$ .

← Πολλαπλασιάζουμε τα δύο μέλη της ανισότητας με το 3 (θετικός), άρα προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.

iv.  $-\alpha > -\beta$ .

← Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της ανισότητας με το -1 (αρνητικός), άρα προκύπτει ανισότητα με αντίθετη φορά.

2. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$$2(x - 7) > 1 + 6(2x - 3) \quad \text{και} \quad \frac{2x}{9} + x > \frac{x - 2}{3} - 2.$$

**Λύση:**

Λύνουμε χωριστά τις δύο ανισώσεις:

$$2(x - 7) > 1 + 6(2x - 3)$$

$$2x - 14 > 1 + 12x - 18$$

$$2x - 12x > 1 + 14 - 18$$

$$-10x > -3$$

$$x < \frac{-3}{-10}$$

$$x < 0,3$$

← Διαιρούμε με -10 και αλλάζουμε τη φορά της ανίσωσης.

$$\frac{2x}{9} + x > \frac{x - 2}{3} - 2$$

← Απαλείφουμε τους παρονομαστές.

$$9 \cdot \frac{2x}{9} + 9x > 9 \cdot \frac{x - 2}{3} - 9 \cdot 2$$

$$2x + 9x > 3(x - 2) - 18$$

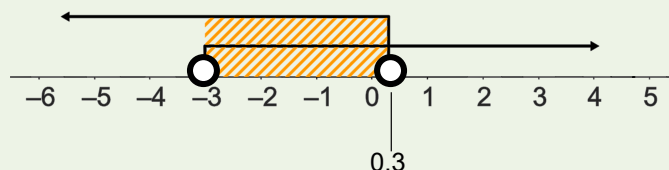
$$11x > 3x - 6 - 18$$

$$8x > -24$$

$$x > -3.$$

← Διαιρούμε με το 8.

Παριστάνουμε τις λύσεις των δύο ανισώσεων στην ίδια ευθεία πραγματικών αριθμών:



Οι κοινές λύσεις των ανισώσεων είναι οι αριθμοί που βρίσκονται μεταξύ των -3 και 0,3. Τις λύσεις αυτές μπορούμε να τις εκφράσουμε με τη σχέση:

$$-3 < x < 0,3.$$



1

Συμπλήρωσε τα κενά με τα σύμβολα  $<$ ,  $>$  ή  $=$ . Αν  $\alpha < \beta$  τότε:

- i.  $\alpha + 3 \dots \beta + 3$ .    ii.  $\alpha - 5 \dots \beta - 5$ .    iii.  $3\alpha \dots 3\beta$ .    iv.  $-5\alpha \dots -5\beta$ .

2

Χαρακτήρισε ως Σωστές ή Λάθος τις προτάσεις που ακολουθούν βάζοντας ένα  $x$  στην κατάλληλη θέση.

- α) Αν  $\alpha < 3$  τότε  $2\alpha < 6$ .  
 β) Αν  $\alpha < -5$  τότε  $\frac{\alpha}{5} < -1$ .  
 γ) Αν  $\alpha < 1$  τότε  $-\alpha < -1$ .  
 δ) Αν  $\alpha > \beta$  τότε  $\alpha - \beta > 0$ .  
 ε) Αν  $\alpha > \beta$  τότε  $\beta < \alpha$ .  
 στ) Αν  $\frac{\alpha}{3} < \frac{\beta}{2}$  τότε  $3\beta < 2\alpha$ .

Σωστό    Λάθος

| Σωστό | Λάθος |
|-------|-------|
|       |       |
|       |       |
|       |       |
|       |       |
|       |       |
|       |       |

3

Επίλεξε τη σωστή απάντηση:

A. Οι κοινές λύσεις των ανισώσεων  $x > -1$  και  $x < 3$  είναι:

- i.  $x < -1$  ή  $x > 3$     ii.  $x > -1$     iii.  $-1 < x < 3$     iv.  $x > 3$ .

B. Οι κοινές λύσεις των ανισώσεων  $x > 0$  και  $x > 5$  είναι:

- i.  $x > 0$     ii.  $x > 5$     iii.  $0 < x < 5$     iv. Δεν έχουν κοινές λύσεις.

Γ. Οι κοινές λύσεις των ανισώσεων  $x < -2$  και  $x < -3$  είναι:

- i.  $x < -2$     ii.  $x < -3$     iii.  $-3 < x < -2$     iv.  $x < -3$  ή  $x > -2$ .

Δ. Οι κοινές λύσεις των ανισώσεων  $x < -4$  και  $x > 0$  είναι:

- i.  $x > 0$     ii.  $x < -4$     iii.  $-4 < x < 0$     iv. Δεν έχουν κοινές λύσεις.

4

Ποιες ιδιότητες διάταξης πρέπει να εφαρμόσεις στην ανισότητα  $x < 2$  για να αποδείξεις τις παρακάτω ανισότητες;

- α)  $5x < 10$     β)  $3x + 6 > 12$     γ)  $\frac{2x-9}{5} < -1$     δ)  $\frac{x}{2} - 1 < 0$

5

Λύσε τις ανισώσεις:

- α)  $2x + \frac{x}{3} > 5 - \frac{x}{6}$     β)  $\frac{1}{3} - \frac{x+1}{5} \leq x + \frac{1}{3}$     γ)  $\frac{x-2}{2} - \frac{2x}{5} < \frac{x}{10} - \frac{1}{5}$

6

Βρες, αν υπάρχουν, τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

- α)  $2x - 3(x - 12) > -3 - 2(5 - 3x)$     και     $\frac{8x-5}{4} \geq \frac{2x+1}{2}$ .  
 β)  $2(x+6) - 3(2x-1) < 15 - x$     και     $x - \frac{x}{9} - \frac{4}{3} \geq 2(x+1)$ .

Εξασκούμαι



σε όσα έμαθα

## Ανακεφαλαίωση (Αλγεβρικές Σχέσεις)

### Η εξίσωση $ax + by = \gamma$ :

Λύση μιας εξίσωσης  $ax + by = \gamma$  ονομάζεται κάθε ζεύγος αριθμών  $(x, y)$  που την επαληθεύει.

Η εξίσωση  $ax + by = \gamma$  ονομάζεται γραμμική εξίσωση και παριστάνει ευθεία όταν  $a \neq 0$  ή  $b \neq 0$  και έχει άπειρες λύσεις.

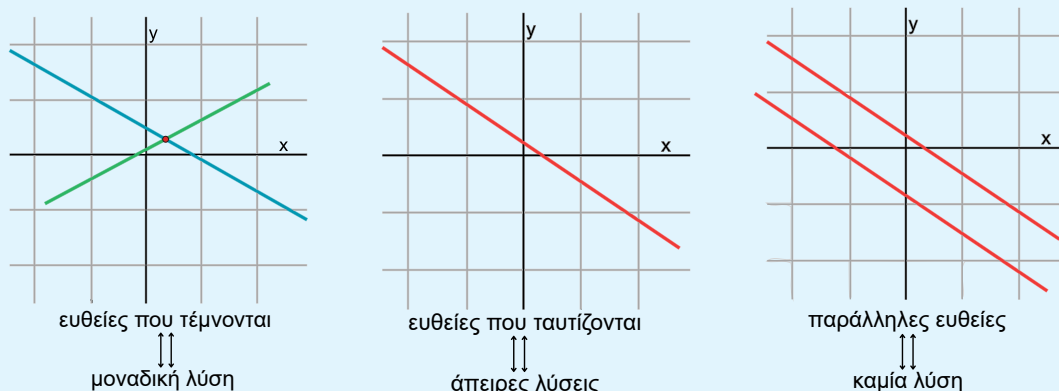
### Γραμμικό σύστημα:

Όταν έχουμε δύο γραμμικές εξισώσεις με δύο αγνώστους και αναζητούμε τις κοινές τους λύσεις, τότε λέμε ότι έχουμε να λύσουμε ένα **γραμμικό σύστημα** δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.

**Λύση γραμμικού συστήματος** δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους  $x$  και  $y$  ονομάζεται κάθε ζεύγος που επαληθεύει τις εξισώσεις του.

Για να βρούμε τη λύση ενός γραμμικού συστήματος γραφικά, σχεδιάζουμε τις δύο ευθείες στο ίδιο σύστημα αξόνων και προσδιορίζουμε τις συντεταγμένες του **κοινού τους σημείου**.

Για την γραφική επίλυση ενός συστήματος ισχύει:



Για την αλγεβρική επίλυση ενός συστήματος αξιοποιούμε:

- τη μέθοδο αντικατάστασης
- τη μέθοδο αντίθετων συντελεστών

### Εξισώσεις:

Η εξίσωση που περιέχει έναν άγνωστο και ο μεγαλύτερος εκθέτης του αγνώστου είναι ο αριθμός 1 λέγεται εξίσωση **1<sup>ου</sup> βαθμού** (ή πρωτοβάθμια).

Μία εξίσωση 1ου βαθμού με άγνωστο τον  $x$ , είναι της μορφής:

$$ax + \beta = 0 \quad \text{ή} \quad ax = -\beta$$

- Αν  $a \neq 0$ , τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την  $x = -\frac{\beta}{a}$ .
- Αν  $a = 0$ , τότε η εξίσωση γράφεται  $0x = -\beta$  και
  - αν  $\beta \neq 0$  είναι αδύνατη.
  - αν  $\beta = 0$  είναι ταυτότητα (ή αόριστη).

Μια εξίσωση με έναν άγνωστο στην οποία ο μεγαλύτερος εκθέτης του αγνώστου είναι ο αριθμός 2, ονομάζεται εξίσωση **2<sup>ου</sup> βαθμού** (ή δευτεροβάθμια).

Η γενική μορφή μίας εξίσωσης 2ου βαθμού είναι:  $ax^2 + bx + \gamma = 0$ , με  $a \neq 0$ .

Για την επίλυση μιας εξίσωσης δευτέρου ή και μεγαλύτερου βαθμού αξιοποιούμε:

α. Την παραγοντοποίηση:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 4x &= 0 \\ 2x \cdot (x + 2) &= 0 \\ 2x &= 0 \quad \text{ή} \quad x + 2 = 0 \\ x &= 0 \quad \text{ή} \quad x = -2. \end{aligned}$$

β. Το ανάπτυγμα τετραγώνου:

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 4 &= 0 \\ (x - 2)^2 &= 0 \\ x - 2 &= 0 \\ x &= 2. \end{aligned}$$

γ. Τη συμπλήρωση τετραγώνου και την Διακρίνουσα  $\Delta$ :

- Για κάθε εξίσωση της μορφής  $ax^2 + bx + \gamma = 0$ , με  $a \neq 0$  παίρνουμε  $\Delta = b^2 - 4a\gamma$ .

$$\text{Αν } \Delta > 0, \text{ η εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις } x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

$$\text{Αν } \Delta = 0, \text{ η εξίσωση έχει μία διπλή λύση } x = \frac{-b}{2a}.$$

Αν  $\Delta < 0$ , η εξίσωση δεν έχει καμία πραγματική λύση (αδύνατη εξίσωση).

Μια **ανισότητα** συγκρίνει δύο τιμές, δείχνοντας αν η μία είναι μικρότερη, μεγαλύτερη ή απλά δεν ίση με μια άλλη τιμή.

Ιδιότητες της διάταξης:

- Αν  $a < b$  τότε  $a + \gamma < b + \gamma$  και  $a - \gamma < b - \gamma$ .
- Αν  $a < b$  και  $\gamma > 0$  τότε  $a \cdot \gamma < b \cdot \gamma$  και  $\frac{a}{\gamma} < \frac{b}{\gamma}$ .
- Αν  $a < b$  και  $\gamma < 0$  τότε  $a \cdot \gamma > b \cdot \gamma$  και  $\frac{a}{\gamma} > \frac{b}{\gamma}$ .

Για να επιλύσουμε μια **ανίσωση** της μορφής  $ax + b < \gamma$ , αξιοποιούμε τις ιδιότητες της διάταξης:

$$\begin{aligned} 3x + 5 &> 17 \\ 3x &> 17 - 5 \\ 3x &> 12 \\ \frac{3x}{3} &> \frac{12}{3} \\ x &> 4. \end{aligned}$$

Για τις λύσεις μιας ανίσωσης της μορφής  $ax + b < \gamma$  φτιάχνουμε τη παράσταση των λύσεων της στην ευθεία των αριθμών.

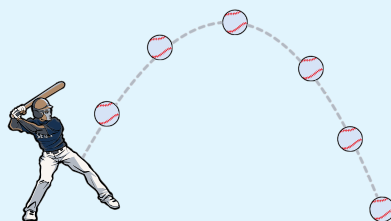
- Αν μια ανίσωση  $ax + b < \gamma$  αληθεύει για κάθε τιμή της μεταβλητής  $x$  τότε η παράσταση των λύσεων της είναι όλη η ευθεία των αριθμών.
- Αν μια ανίσωση  $ax + b < \gamma$  δεν αληθεύει για καμία τιμή της μεταβλητής  $x$  τότε η ανίσωση είναι αδύνατη και δεν παριστάνουμε λύσεις στην ευθεία των αριθμών.

## Αυτοαξιολόγηση (Αλγεβρικές Σχέσεις)

**A.** Χαρακτήρισε ως Σωστές ή Λάθος τις προτάσεις, βάζοντας ένα **x** στην κατάλληλη θέση.

|  | Σωστό | Λάθος |
|--|-------|-------|
| 1. Η εξίσωση $-2x = 0$ είναι αδύνατη.  |       |       |
| 2. Η εξίσωση $0x = 0$ έχει λύση οποιονδήποτε αριθμό.   |       |       |
| 3. Η εξίσωση $a^2 = 1$ έχει μοναδική λύση $a=1$ .  |       |       |
| 4. Αν μια δευτεροβάθμια εξίσωση έχει $\Delta > 0$ , τότε θα έχει μία τουλάχιστον λύση.   |       |       |
| 5. Μια δευτεροβάθμια εξίσωση με $\Delta = 0$ έχει δύο άνισες λύσεις.   |       |       |
| 6. Η εξίσωση $1 - 2x + x^2 = 0$ έχει μοναδική λύση την $x=1$ .   |       |       |
| 7. Αν $a > 3$ τότε $a-3 > 0$ .   |       |       |
| 8. Αν $a < \beta$ τότε $2a < 2\beta$ .   |       |       |
| 9. Αφού $2 < 3$ τότε $2a < 3a$ , για κάθε αριθμό $a$ .   |       |       |
| 10. Το σημείο $(2, -1)$ ανήκει στην ευθεία $2x + y = 0$  |       |       |
| 11. Η ευθεία $-x + 2y = 4$ διέρχεται από το σημείο $(0, 2)$  |       |       |
| 12. Σε ένα γραμμικό σύστημα, αν οι ευθείες τέμνονται τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση.   |       |       |
| 13. Οι παράλληλες ευθείες σε ένα γραμμικό σύστημα δείχνουν ότι το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.                                       |       |       |
| 14. Αν ένα γραμμικό σύστημα έχει δύο λύσεις, τότε έχει άπειρες λύσεις.   |       |       |
| 15. Αν ένα σύστημα μπορεί να λυθεί με τη μέθοδο της αντικατάστασης, τότε μπορεί να λυθεί και με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών. |       |       |

**B.** Η μπάλα φτάνει στο μέγιστο ύψος και πέφτει στο έδαφος. Για κάθε χρονική στιγμή  $t$ , το ύψος  $h$  από το έδαφος δίνεται από την σχέση  $h = -2t^2 + 8t + 10$ . Υπολόγισε τον χρόνο που χρειάζεται η μπάλα για να φτάσει στο έδαφος.



**Γ.** Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο γνωρίζουμε ότι οι πλευρές έχουν μήκος  $a$ ,  $a+1$  και  $5$ . Βρες τις πλευρές του τριγώνου και το εμβαδόν του, αν γνωρίζεις ότι η μεγάλη πλευρά είναι αυτή με μήκος  $5$ .

**Δ.** Μια εταιρεία αυτοκινήτων ξόδεψε  $20.000.000\text{€}$  για να αναπτύξει, να διαφημίσει και να κατασκευάσει ένα νέο μοντέλο. Κάθε αυτοκίνητο του νέου μοντέλου πωλείται προς  $25.000\text{€}$  και έχει κόστος παραγωγής  $5.000\text{€}$ . Πόσα αυτοκίνητα θα πρέπει να πουλήσει η εταιρεία ώστε να έχει κέρδος τουλάχιστον  $50.000.000\text{€}$ ;

**Ε.** Ένας χημικός θέλει να φτιάξει 2 λίτρα διάλυμα νιτρικού οξέος περιεκτικότητας 15% v/v, αξιοποιώντας ένα διάλυμα περιεκτικότητας 10% v/v και ένα διάλυμα 35% v/v. Πόσα λίτρα από καθένα από τα δύο διαθέσιμα διαλύματα θα χρειαστεί να αξιοποιήσει;



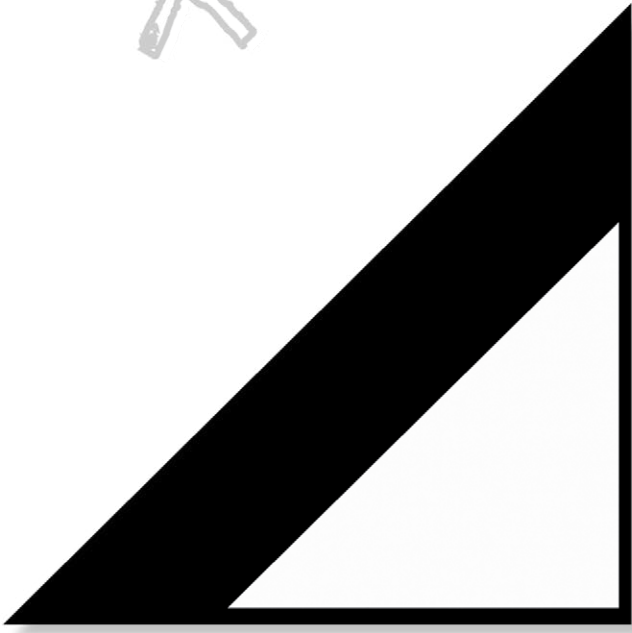
**ΣΤ.** Το κόστος παραγωγής  $x$  αντικείμενων σε μια εταιρεία δίνεται από τη σχέση  $C(x)=0,85x+35.000$  και τα έσοδα περιγράφονται από την σχέση  $R(x)=1,55x$ . Βρες για ποια ποσότητα  $x$  το κόστος παραγωγής είναι όσο τα έσοδα, δηλαδή ποιο είναι το σημείο στο οποίο η εταιρεία αρχίζει να έχει κέρδος.

Σε αυτό το σημείο, θα πρέπει να είσαι σε θέση να ικανοποιείς όλους τους προσδοκώμενους μαθησιακούς στόχους. Γύρνα στην αρχή της θεματικής ενότητας και σημείωσε  στα αντίστοιχα σημεία. Υπάρχουν στόχοι που αισθάνεσαι ότι δεν έχεις ικανοποιήσει πλήρως;

# ГЕОМЕТРИЯ



$$x^2 - 3x + 2 = 0$$



# ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

B.1

Στην ενότητα αυτή θα διερευνήσουμε τα κριτήρια ισότητας τριγώνων και τη σημασία τους στη σύγκριση τριγώνων. Θα αξιοποιήσουμε αυτά τα κριτήρια για την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων και θα εξετάσουμε τη σχέση μεταξύ περιμέτρων και εμβαδών όμοιων σχημάτων.

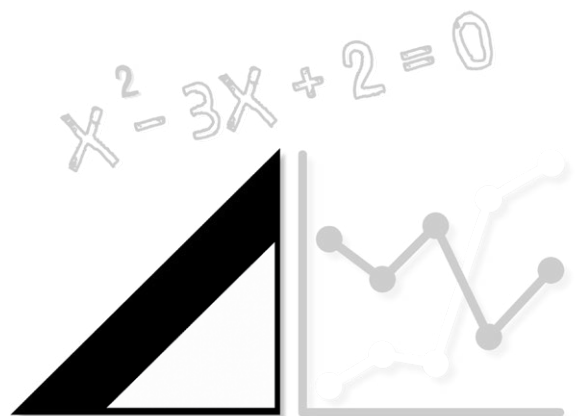
Είσαι έτοιμος/η να κατανοήσεις πώς οι ιδιότητες των τριγώνων βοηθούν στον σχεδιασμό και τη μοντελοποίηση γεωμετρικών προβλημάτων;



- Διερευνώ τον ρόλο των κριτηρίων ισότητας τριγώνων στη σύγκριση τριγώνων και τα συσχετίζω με τον ορισμό της ισότητας των τριγώνων.
- Αξιοποιώ τα κριτήρια ισότητας τριγώνων για την αιτιολόγηση ιδιοτήτων γραμμών (μεσοκαθέτου ευθύγραμμου τμήματος, διχοτόμου γωνίας) και σχημάτων (για παράδειγμα παραλληλογράμμων).
- Διερευνώ τη σχέση των περιμέτρων και των εμβαδών όμοιων σχημάτων.



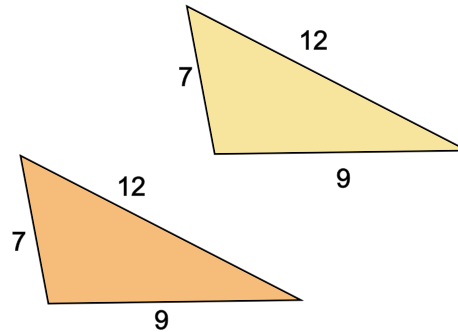
- 1.1: Ισότητα τριγώνων και κριτήρια
- 1.2: Ισότητα ορθογώνιων τριγώνων
- + Ανακεφαλαίωση / Αυτοαξιολόγηση



# 1.1 | Ισότητα τριγώνων και κριτήρια



Τα τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία. Είναι ίσα;



- Ένας μαθητής σκέφτεται να εξετάσει αν οι γωνίες των δύο τριγώνων είναι επίσης ίσες μία προς μία.
- Μία άλλη μαθήτρια ισχυρίζεται ότι η ισότητα των πλευρών είναι αρκετή στο να οδηγηθούμε στο συμπέρασμα ότι τα δύο τρίγωνα είναι ίσα.

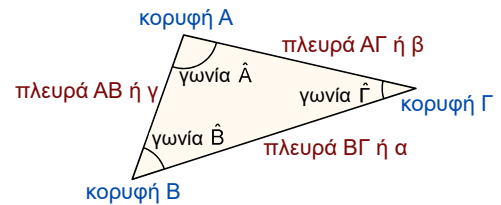
Διατύπωσε την άποψή σου για τους παραπάνω ισχυρισμούς.

## Κύρια στοιχεία τριγώνου

Οι τρεις πλευρές και οι τρεις γωνίες ενός τριγώνου λέγονται κύρια στοιχεία του τριγώνου.

Το τρίγωνο ΑΒΓ έχει:

- 3 κορυφές: Α, Β, Γ.
- 3 πλευρές: ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ  
(οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις γωνίες  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{\Gamma}$  συμβολίζονται  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ).
- 3 γωνίες:  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{\Gamma}$ .



Η γωνία του τριγώνου που περιέχεται μεταξύ δύο πλευρών λέγεται **περιεχόμενη** γωνία των πλευρών αυτών.

**Παράδειγμα:** Στο παραπάνω τρίγωνο ΑΒΓ, η περιεχόμενη γωνία των πλευρών ΑΒ, ΑΓ είναι η  $\hat{A}$ .

Οι γωνίες του τριγώνου που έχουν κορυφές τα άκρα μιας πλευράς λέγονται **προσκειμένες** γωνίες της πλευράς αυτής.

**Παράδειγμα:** Στο παραπάνω τρίγωνο ΑΒΓ, οι προσκειμένες γωνίες της πλευράς ΒΓ είναι οι  $\hat{B}$  και  $\hat{\Gamma}$ .

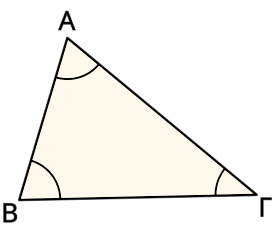
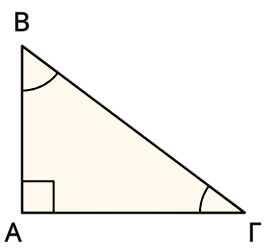
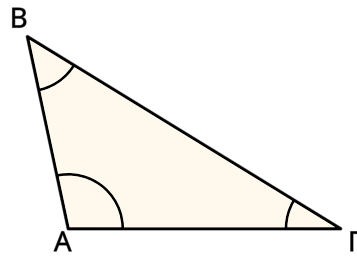
Για τις γωνίες ενός τριγώνου γνωρίζουμε ότι:

Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι  $180^\circ$ :

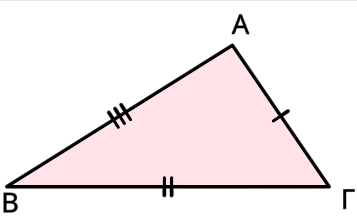
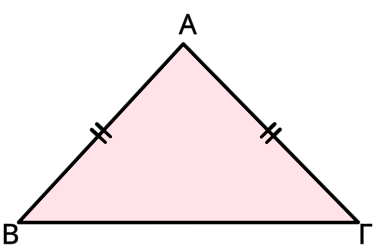
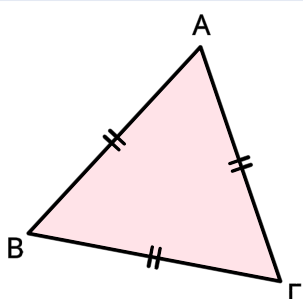
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ.$$

## Είδη τριγώνων

A. Ένα τρίγωνο, ανάλογα με το είδος των γωνιών του, λέγεται:

| Οξυγώνιο  | Ορθογώνιο  | Αμβλυγώνιο   |
|---|--|--|
|  <p>όταν έχει όλες τις γωνίες του <b>οξείες</b>.<br/>(<math>\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma} &lt; 90^\circ</math>)</p> |  <p>όταν έχει μία γωνία <b>ορθή</b>.<br/>(<math>\hat{A} = 90^\circ</math>)</p> <p>Η πλευρά ΒΓ που βρίσκεται απέναντι από την ορθή γωνία λέγεται <b>υποτείνουσα</b> και οι ΑΒ, ΑΓ λέγονται <b>κάθετες πλευρές</b> του τριγώνου</p> |  <p>όταν έχει μία γωνία <b>αμβλεία</b>.<br/>(<math>\hat{A} &gt; 90^\circ</math>)</p> |

B. Ένα τρίγωνο, με βάση τη σύγκριση των πλευρών του, λέγεται:

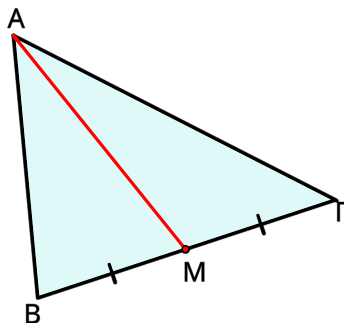
| Σκαληνό   | Ισοσκελές  | Ισόπλευρο   |
|---|--|---|
|  <p>όταν έχει όλες τις πλευρές του <b>άνισες</b>.</p> |  <p>όταν έχει <b>δύο</b> πλευρές του <b>ίσες</b>.<br/>(<math>AB = AC</math>)</p> <p>Η πλευρά ΒΓ λέγεται <b>βάση</b> και το Α <b>κορυφή</b> του τριγώνου.</p> |  <p>όταν έχει <b>όλες</b> τις πλευρές του <b>ίσες</b>.<br/>(<math>AB = AC = BC</math>)</p> |

## Δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου

Οι διάμεσοι, οι διχοτόμοι και τα ύψη ενός τριγώνου ονομάζονται **δευτερεύοντα στοιχεία** του τριγώνου.

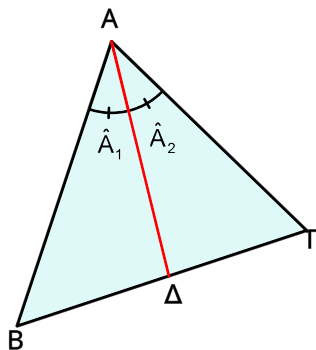


- **Διάμεσος** ενός τριγώνου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή με το μέσο της απέναντι πλευράς.



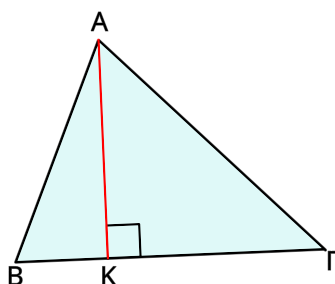
ΑΜ διάμεσος.  
( $BM = MC$ ).

- **Διχοτόμος** ενός τριγώνου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα της διχοτόμου μιας γωνίας, από την κορυφή της μέχρι την απέναντι πλευρά.



ΑΔ διχοτόμος.  
( $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ )

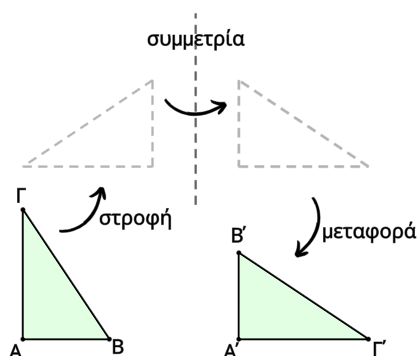
- **Ύψος** ενός τριγώνου λέγεται το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα, που φέρουμε από μια κορυφή προς την ευθεία της απέναντι πλευράς.



ΑΚ ύψος.  
( $\hat{K} = 90^\circ$ )

## Ισότητα τριγώνων

Δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν το ένα μπορεί να **μετατοπιστεί** από την αρχική του θέση μέσω μετασχηματισμών μεταφοράς, στροφής ή/και συμμετρίας ως προς άξονα, και να ταυτιστεί με το άλλο.



Τα τρίγωνα ABΓ και A'B'Γ' είναι ίσα, άρα οι αντίστοιχες πλευρές και γωνίες τους θα είναι ίσες, αφού και αυτές ταυτίζονται.

- Ίσες αντίστοιχες πλευρές:  $AB = A'B'$ ,  $A\Gamma = A'\Gamma'$  και  $B\Gamma = B'\Gamma'$ .
- Ίσες αντίστοιχες γωνίες:  $\hat{A} = \hat{A}'$ ,  $\hat{B} = \hat{B}'$  και  $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$ .

### Ισχύει ότι:

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, τότε είναι ίσα.

### Και αντίστροφα:

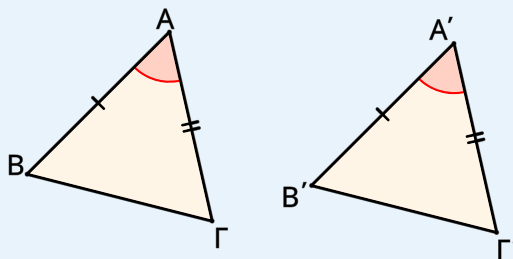
Αν δύο τρίγωνα είναι ίσα, τότε θα έχουν τις πλευρές τους και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες μία προς μία.

## Κριτήρια ισότητας τριγώνων

Για να αποδείξουμε ότι δύο τρίγωνα είναι ίσα, δεν χρειάζεται να αποδείξουμε ότι έχουν όλα τα κύρια στοιχεία τους ίσα, αλλά μπορούμε να αποδείξουμε ότι έχουν μόνο τρία **κατάλληλα** στοιχεία τους ίσα, χρησιμοποιώντας τα παρακάτω κριτήρια:

**1ο κριτήριο ισότητας τριγώνων: Πλευρά – Γωνία – Πλευρά: (Π–Γ–Π)**

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις **περιεχόμενες** σε αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα.



**Πράγματι**, σχεδιάζουμε δύο τρίγωνα ABΓ και A'B'Γ' με:

- $AB = A'B'$ ,
- $AΓ = A'Γ'$  και
- τις περιεχόμενες γωνίες τους  $\hat{A} = \hat{A}'$ .

Αντιλαμβάνομαι



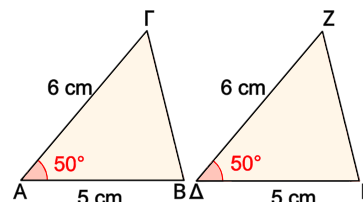
με προσομοίωση

Αν μετατοπίσουμε το τρίγωνο ABΓ ώστε η γωνία  $\hat{A}$  να συμπέσει με την  $\hat{A}'$  και η πλευρά AB να συμπέσει με την ίση της πλευρά A'B', τότε η πλευρά AΓ θα συμπέσει με την ίση της πλευρά A'Γ'. Έτσι οι κορυφές B, Γ θα συμπέσουν με τις κορυφές B' και Γ', συνεπώς τα τρίγωνα αυτά ταυτίζονται, άρα είναι ίσα.

**Παράδειγμα:** Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABΓ και ΔEZ είναι ίσα.

**Λύση:** Τα τρίγωνα ABΓ και ΔEZ έχουν:

- $AB = ΔE = 5\text{cm}$ ,
- $AΓ = ΔZ = 6\text{cm}$
- και τις περιεχόμενες γωνίες τους:  $\hat{A} = \hat{\Delta} = 50^\circ$ .



Επομένως από το 1ο κριτήριο (Π–Γ–Π) τα τρίγωνα ABΓ και ΔEZ είναι ίσα.

**Σημείωση:** Επειδή τα τρίγωνα ABΓ και ΔEZ είναι ίσα, θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, δηλαδή:

- $BΓ = EZ$ ,
- $\hat{B} = \hat{E}$  (απέναντι από τις ίσες πλευρές AΓ, ΔZ) και
- $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$  (απέναντι από τις ίσες πλευρές AB, ΔE).

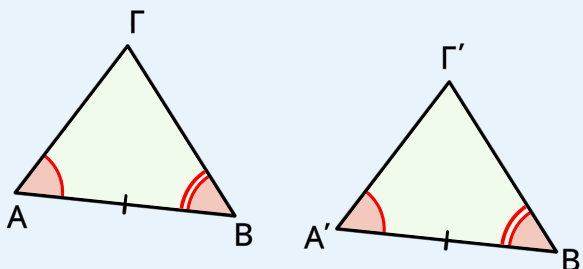
Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση

## 2ο κριτήριο ισότητας τριγώνων: Γωνία – Πλευρά – Γωνία: (Γ–Π–Γ)

Αν δύο τρίγωνα έχουν μια πλευρά ίση και τις **προσκειμένες** στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.



**Πράγματι**, σχεδιάζουμε δύο τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  με:

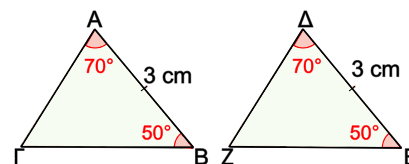
- $AB = A'B'$ ,  
και τις προσκειμένες γωνίες τους
- $\hat{A} = \hat{A}'$  και
- $\hat{B} = \hat{B}'$ .

Αν μετατοπίσουμε το τρίγωνο  $AB\Gamma$  ώστε η πλευρά  $AB$  να συμπέσει με την ίση πλευρά της  $A'B'$  και η γωνία  $\hat{A}$  να συμπέσει με την ίση γωνία της  $\hat{A}'$  τότε και η γωνία  $\hat{B}$  θα συμπέσει με την ίση της γωνία  $\hat{B}'$ . Έτσι η κορυφή  $\Gamma$  θα συμπέσει με την κορυφή  $\Gamma'$ , συνεπώς τα τρίγωνα αυτά ταυτίζονται, άρα είναι ίσα.

**Παράδειγμα:** Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  είναι ίσα

**Λύση:** Τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  έχουν:

- $AB = \Delta E = 3\text{cm}$ ,  
και τις προσκειμένες γωνίες:
- $\hat{B} = \hat{E} = 50^\circ$  και
- $\hat{A} = \hat{\Delta} = 70^\circ$ .



Επομένως από το 2<sup>ο</sup> κριτήριο (Γ-Π-Γ) τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  είναι ίσα.

**Σημείωση:** Επειδή τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  είναι ίσα, θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, δηλαδή:

- $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$ ,
- $A\Gamma = \Delta Z$  (απέναντι από τις ίσες γωνίες  $\hat{B}$ ,  $\hat{E}$ )
- $B\Gamma = ZE$  (απέναντι από τις ίσες γωνίες  $\hat{A}$ ,  $\hat{\Delta}$ )

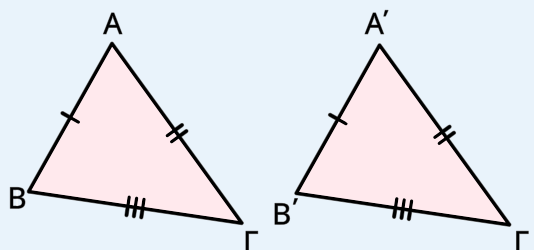
Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση

## 3ο κριτήριο ισότητας τριγώνων: Πλευρά – Πλευρά – Πλευρά: (Π-Π-Π)

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.



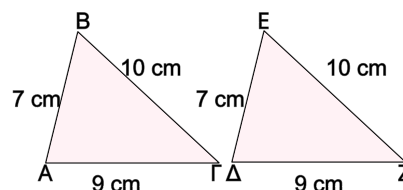
**Πράγματι**, σχεδιάζουμε δύο τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  με τις πλευρές τους ίσες μία προς μία.

Αν μετατοπίσουμε κατάλληλα το τρίγωνο  $AB\Gamma$  αυτό συμπίπτει με το τρίγωνο  $\Delta EZ$ . Συνεπώς, τα τρίγωνα ταυτίζονται άρα είναι ίσα.

**Παράδειγμα:** Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  είναι ίσα.

**Λύση:** Τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  έχουν:

- $AB = \Delta E = 7\text{cm}$ ,
- $A\Gamma = \Delta Z = 9\text{cm}$ ,
- $B\Gamma = EZ = 10\text{cm}$ .



Επομένως από το 3<sup>ο</sup> κριτήριο (Π-Π-Π) τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  είναι ίσα.

**Σημείωση:** Επειδή τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  είναι ίσα, θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, δηλαδή:

- $\hat{A} = \hat{\Delta}$  (απέναντι από τις ίσες πλευρές  $B\Gamma$ ,  $EZ$ ),
- $\hat{B} = \hat{E}$  (απέναντι από τις ίσες πλευρές  $A\Gamma$ ,  $\Delta Z$ )
- $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$  (απέναντι από τις ίσες πλευρές  $AB$ ,  $\Delta E$ ).

**Σχόλιο:** Η ισότητα τριγώνων είναι η βασική μέθοδος που χρησιμοποιούμε για να αποδείξουμε την ισότητα πλευρών ή γωνιών.

Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση

### Συνοπτικά:

**Δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν:**

- δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (Κριτήριο Π-Γ-Π),
- μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία (Κριτήριο Γ-Π-Γ),
- και τις τρεις πλευρές ίσες μία προς μία (Κριτήριο Π-Π-Π).



1. Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  προεκτείνουμε τις πλευρές  $BA$  και  $GA$  προς το μέρος του  $A$  και παίρνουμε τμήματα  $AD = AB$  και  $AE = AG$ . Να αποδείξετε ότι  $B\Gamma = DE$ .

**Λύση:**

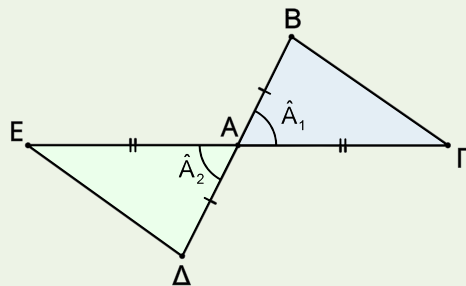
Η ισότητα των τμημάτων  $B\Gamma$  και  $ED$  θα προκύψει από την ισότητα των τριγώνων  $AB\Gamma$  και  $ADE$ .

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $ADE$  και παρατηρούμε ότι έχουν:

- $AB = AD$ , από υπόθεση.
- $AE = AG$ , από υπόθεση.
- $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ , γιατί είναι κατακορυφήν γωνίες.

Άρα τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $ADE$  είναι ίσα, γιατί έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση (κριτήριο Π-Γ-Π).

Αφού τα τρίγωνα είναι ίσα, θα έχουν και όλα τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε  $B\Gamma = ED$ .



**Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα κριτήρια ισότητας τριγώνων για να αιτιολογήσουμε την παρακάτω πρόταση από την Γεωμετρία:**

2. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$ , με  $AB = AG$ , οι προσκείμενες στη βάση γωνίες  $\hat{B}$  και  $\hat{\Gamma}$  είναι ίσες.

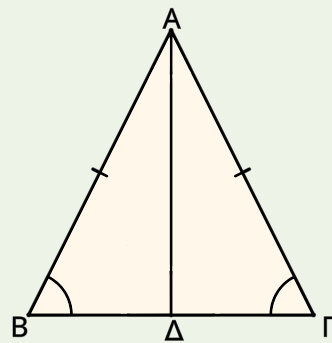
**Απόδειξη:**

Φέρνουμε τη διάμεσο  $AD$ , συγκρίνουμε τα τρίγωνα  $AB\Delta$ ,  $A\Delta\Gamma$  και παρατηρούμε ότι έχουν:

- $AD = AD$ , κοινή πλευρά.
- $AB = AG$ , από την υπόθεση.
- $B\Delta = \Delta\Gamma$  αφού  $AD$  διάμεσος τότε το  $\Delta$  είναι μέσο της  $B\Gamma$ .

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, οπότε θα έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, συνεπώς:  $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ , δηλαδή αποδείξαμε ότι:

Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.



Εξασκούμε



σε όσα έμαθα



1

Χαρακτήρισε ως Σωστές ή Λάθος τις προτάσεις που ακολουθούν βάζοντας ένα **x** στην κατάλληλη θέση.

- α) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.
- β) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία τότε είναι ίσα.
- γ) Σε δύο τρίγωνα, απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες.
- δ) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε θα έχουν και την τρίτη γωνία του ίση.
- ε) Δύο τρίγωνα με δύο πλευρές και μια γωνία ίση, είναι ίσα.
- στ) Δύο τρίγωνα με δύο γωνίες και μία πλευρά ίση, είναι ίσα.

Σωστό      Λάθος

| Σωστό | Λάθος |
|-------|-------|
|       |       |
|       |       |
|       |       |
|       |       |
|       |       |
|       |       |

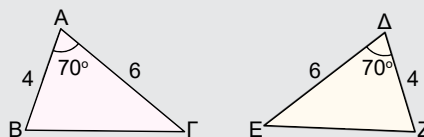
2

Συμπλήρωσε τα κενά:

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ είναι ίσα από το κριτήριο .....

Επομένως:

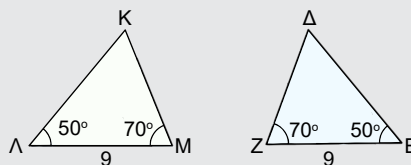
$B\Gamma = \dots, \hat{B} = \dots$  και  $\hat{\Gamma} = \dots$



β) Τα τρίγωνα ΚΛΜ, ΔΕΖ είναι ίσα από το κριτήριο .....

Επομένως:

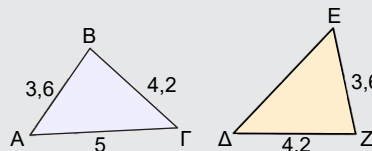
$KM = \dots, \angle K = \dots$  και  $\hat{K} = \dots$



γ) Τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ είναι ίσα από το κριτήριο .....

Επομένως:

$\hat{A} = \dots, \hat{B} = \dots$  και  $\hat{\Gamma} = \dots$



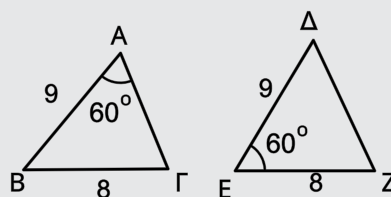
Εξασκούμε



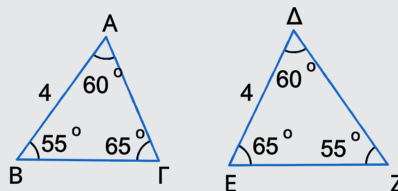
σε όσα έμαθα

3

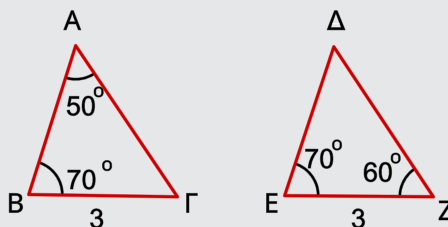
α) Εξήγησε γιατί δεν είναι ίσα τα τρίγωνα του διπλανού σχήματος, αν και έχουν δύο πλευρές ίσες και μια γωνία ίση.



β) Εξήγησε γιατί δεν είναι ίσα τα τρίγωνα του διπλανού σχήματος, αν και έχουν μία πλευρά ίση και δύο γωνίες ίσες.



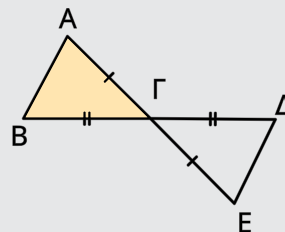
γ) Εξήγησε γιατί είναι ίσα τα τρίγωνα του διπλανού σχήματος.



4

Στο τρίγωνο ABΓ προεκτείνουμε την πλευρά BΓ κατά ίσο τμήμα ΓΔ και την πλευρά ΑΓ κατά ίσο τμήμα ΓΕ.

Απόδειξε ότι  $AB = ΔΕ$ .

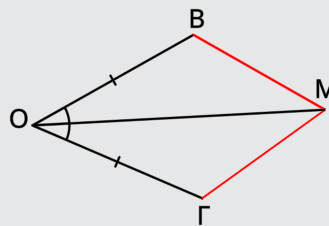


5

Δίνεται η γωνία BÔΓ και η διχοτόμος της OM. Αν  $OB = OG$ , απόδειξε ότι:

α)  $MB = MG$ .

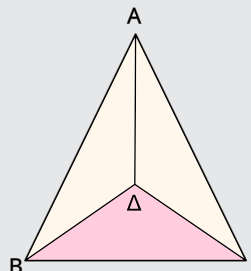
β) Η MO είναι διχοτόμος της BÔΓ.



6

Τα τρίγωνα BAΓ και BΔΓ είναι ισοσκελή με βάση τη BΓ.

Απόδειξε ότι  $A\hat{Δ}B = A\hat{Δ}Γ$ .

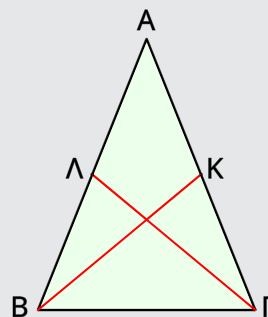


7

Σε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) φέρουμε τις διαμέσους  $BK$  και  $\Gamma\Lambda$ .

Απόδειξε ότι  $BK = \Gamma\Lambda$  με τους παρακάτω τρόπους:

- α) σύγκρινε τα τρίγωνα  $B\Gamma\Lambda$  και  $B\Gamma K$ .
- β) σύγκρινε τα τρίγωνα  $ABK$  και  $A\Gamma\Lambda$ .



8

Σε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) φέρουμε τις διχοτόμους  $B\Delta$  και  $\Gamma E$ .

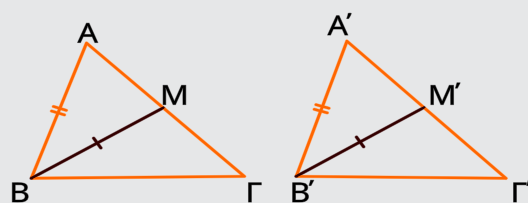
Απόδειξε ότι  $B\Delta = \Gamma E$ .



9

Δίνονται τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  και οι διάμεσοι  $BM$  και  $B'M'$  αντίστοιχα. Αν  $AB = A'B'$ ,  $A\Gamma = A'\Gamma'$  και  $BM = B'M'$ , απόδειξε ότι:

- α)  $\hat{A} = \hat{A}'$ .
- β) Τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  είναι ίσα.

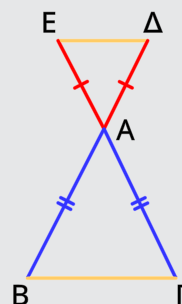


10

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$ . Προεκτείνουμε τις πλευρές  $BA$  και  $\Gamma A$  κατά τμήματα  $A\Delta$  και  $A E$  ώστε  $A\Delta = A E$ .

Απόδειξε ότι:

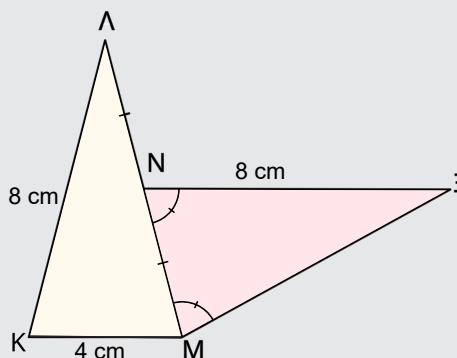
- α)  $BE = \Gamma\Delta$ .
- β)  $B\Delta = \Gamma E$ .
- γ) Τα τρίγωνα  $EB\Gamma$  και  $\Delta\Gamma B$  είναι ίσα.



11

Για τα ισοσκελή τρίγωνα  $K\Lambda M$  και  $MN\Xi$  με βάσεις  $KM$  και  $MN$  γνωρίζουμε ότι:  $K\Lambda = 8\text{cm}$ ,  $KM = 4\text{cm}$  και  $N\Xi = 8\text{cm}$ .

Απόδειξε ότι  $\hat{\Lambda} = \hat{\Xi}$ .

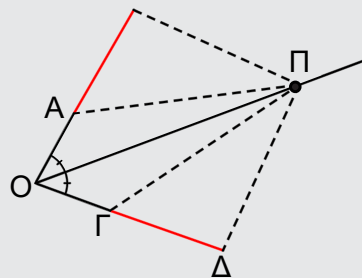


12

Στη γωνία  $\hat{O}$  του διπλανού σχήματος, παίρνουμε στη μία πλευρά τα τυχαία σημεία  $A, B$  και στην άλλη πλευρά τα σημεία  $\Gamma$  και  $\Delta$ , ώστε  $OA = O\Gamma$  και  $OB = O\Delta$ .

Σχεδιάζουμε, επίσης, τη διχοτόμο της γωνίας και παίρνουμε τυχαίο σημείο  $\Pi$  πάνω σε αυτή.

Εξέτασε αν τα τρίγωνα  $AB\Pi$  και  $\Gamma\Delta\Pi$  είναι μεταξύ τους ίσα.



13

Στην προέκταση της βάσης  $B\Gamma$ , ισοσκελούς τριγώνου  $\triangle AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) παίρνουμε σημείο  $\Delta$  (προς το  $B$ ) και σημείο  $E$  (προς το  $\Gamma$ ), τέτοια ώστε  $\Delta B = \Gamma E$ .

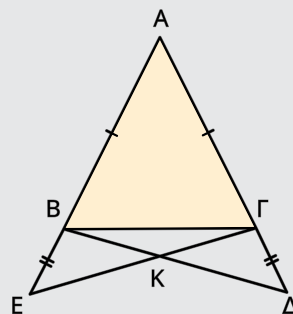
Απόδειξε ότι το τρίγωνο  $A\Delta E$  είναι ισοσκελές.



14

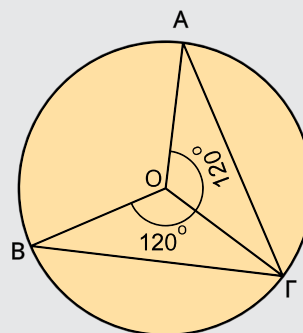
Σε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  προεκτείνουμε τις ίσες πλευρές  $AB$  και  $A\Gamma$  κατά ίσα τμήματα  $BE$  και  $\Gamma\Delta$  αντίστοιχα. Απόδειξε ότι:

- α) Τα τρίγωνα  $AB\Delta, A\Gamma E$  είναι ίσα.
- β) Τα τρίγωνα  $B\Gamma\Delta, B\Gamma E$  είναι ίσα.
- γ) Τα τρίγωνα  $BEK, \Gamma\Delta K$  είναι ίσα.

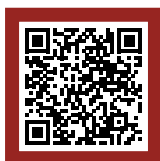


15

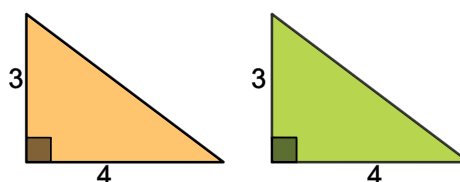
Δίνεται ο κύκλος κέντρου  $O$  και  $A, B, \Gamma$  σημεία του κύκλου με  $\widehat{A\hat{O}\Gamma} = \widehat{B\hat{O}\Gamma} = 120^\circ$ . Απόδειξε ότι  $A\Gamma = B\Gamma$ .



## 1.2 | Ισότητα ορθογωνίων τριγώνων



Σε μια δοκιμασία Μαθηματικών της Γ' Γυμνασίου ζητήθηκε από τους/τις μαθητές/-τριες να εξετάσουν αν τα τρίγωνα της εικόνας είναι ίσα και να αιτιολογήσουν την απάντησή τους.



Ένας μαθητής διατύπωσε το εξής επιχειρήμα: «Αφού τα τρίγωνα έχουν τις δύο κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία τότε θα έχουν και την υποτείνουσα ίση, επομένως τα τρίγωνα είναι ίσα».

Συμφωνείς με την άποψη αυτή; Αιτιολόγησε την απάντησή σου.

### Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

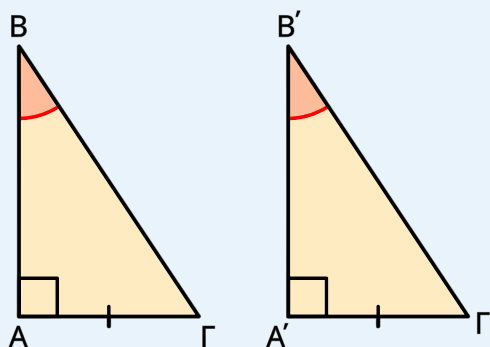
Στην προηγούμενη παράγραφο μελετήσαμε τα κριτήρια ισότητας τριγώνων τα οποία εφαρμόζονται και στα ορθογώνια τρίγωνα.

Γνωρίζουμε, από το κριτήριο Γ-Π-Γ, ότι δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία.

Επειδή δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την ορθή τους γωνία ίση, αν έχουν και μία οξεία γωνία ίση τότε θα έχουν και την άλλη οξεία γωνία τους ίση, αφού το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι  $180^\circ$ . Προκύπτει λοιπόν, ότι:



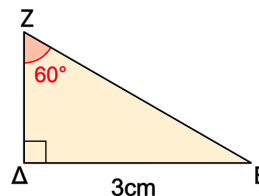
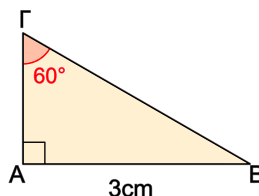
Αν δύο **ορθογώνια** τρίγωνα έχουν μία αντίστοιχη πλευρά ίση και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίση τότε είναι ίσα.



**Παράδειγμα:** Να αποδείξετε ότι τα ορθογώνια τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  είναι ίσα.

**Λύση:** Τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  είναι ορθογώνια ( $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ ) και έχουν:

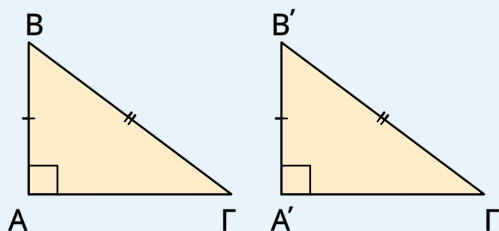
- $AB = \Delta E = 3\text{cm}$  και
- $\hat{\Gamma} = \hat{Z} = 60^\circ$ , άρα είναι ίσα.



Επίσης, αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες, τότε από το κριτήριο (Π-Γ-Π) θα είναι ίσα, ενώ αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μία κάθετη πλευρά ίση τότε από το Πυθαγόρειο Θεώρημα προκύπτει ότι θα έχουν και την άλλη κάθετη πλευρά τους ίση, οπότε από το κριτήριο (Π-Π-Π) θα είναι ίσα.

**Επομένως:**

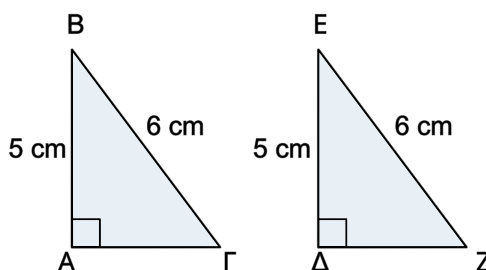
Αν δύο **ορθογώνια** τρίγωνα έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.



**Παράδειγμα:** Να αποδείξετε ότι τα ορθογώνια τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  είναι ίσα.

**Λύση:** Τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  είναι ορθογώνια ( $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ ) και έχουν:

- $AB = \Delta E = 5\text{cm}$
- $B\Gamma = EZ = 6\text{cm}$ , άρα είναι ίσα.



**Συνοπτικά:**

**Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν:**

- δύο ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία.
- μία πλευρά και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία.



Αντιλαμβάνομαι



με προσομίωση

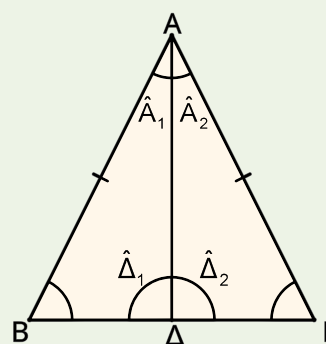
Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα κριτήρια ισότητας τριγώνων για να αιτιολογήσουμε τις παρακάτω προτάσεις από τη Γεωμετρία:

1. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$ , με  $AB = A\Gamma$ , η διάμεσος  $A\Delta$  προς τη βάση  $B\Gamma$  είναι διχοτόμος και ύψος.

**Απόδειξη:**

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα  $AB\Delta$ ,  $A\Delta\Gamma$  και παρατηρούμε ότι έχουν:

- $A\Delta = A\Delta$ , κοινή πλευρά.
- $AB = A\Gamma$ , από την υπόθεση.
- $B\Delta = \Delta\Gamma$  αφού  $A\Delta$  διάμεσος τότε το  $\Delta$  είναι μέσο της  $B\Gamma$ .



Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, οπότε θα έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, συνεπώς:

- $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ , άρα η  $A\Delta$  είναι διχοτόμος.
- $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$  και  $\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = 180^\circ$ , άρα  $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = 90^\circ$ , δηλαδή η  $A\Delta$  είναι και ύψος.

2. Να αποδείξετε ότι κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.

**Απόδειξη:**

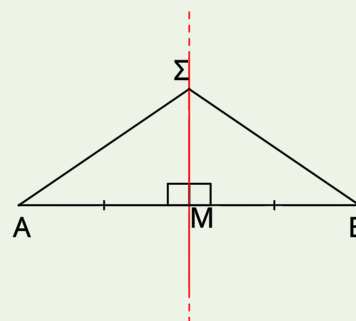
Αν  $\Sigma$  είναι ένα τυχαίο σημείο της μεσοκαθέτου, θα αποδείξουμε ότι  $\Sigma A = \Sigma B$ .

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα  $\Sigma AM$  και  $\Sigma BM$  και παρατηρούμε ότι έχουν:

- $\hat{M}_1 = \hat{M}_2 = 90^\circ$  αφού  $\Sigma M$  μεσοκάθετος, συνεπώς τα τρίγωνα είναι ορθογώνια.
- $\Sigma M = \Sigma M$ , κοινή πλευρά και
- $AM = BM$ , αφού  $M$  μέσο του  $AB$ .

Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα  $\Sigma AM$  και  $\Sigma BM$  είναι ίσα, γιατί έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές τους ίσες μία προς μία.

Αφού τα τρίγωνα είναι ίσα, θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε  $\Sigma A = \Sigma B$ .



3. Να αποδείξετε ότι κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της.

**Απόδειξη:**

**Υπενθύμιση:** Η απόσταση ενός σημείου από μία ευθεία είναι το μήκος του κάθετου ευθύγραμμου τμήματος από το σημείο προς την ευθεία.

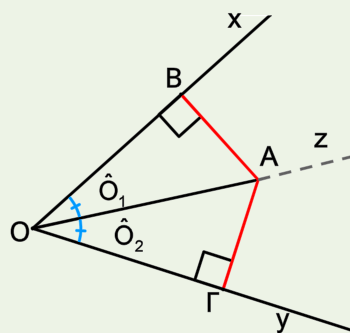
Στη διχοτόμο Oz της γωνίας xOy παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο A και φέρνουμε τις αποστάσεις AB και ΑΓ του σημείου A από τις πλευρές Ox και Oy της γωνίας. Θα αποδείξουμε ότι  $AB = ΑΓ$ .

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ABO και ΑΓO και παρατηρούμε ότι έχουν:

- $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 90^\circ$ , αφού τα AB και ΑΓ είναι αποστάσεις
- $OA = OA$ , κοινή πλευρά και
- $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ , αφού η Oz είναι διχοτόμος της γωνίας xOy.

Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα ABO και ΑΓO είναι ίσα, γιατί έχουν μία αντίστοιχη πλευρά ίση και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίση.

Αφού τα τρίγωνα είναι ίσα, θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε  $AB = ΑΓ$ .



**1** Χαρακτήρισε ως Σωστές ή Λάθος τις προτάσεις που ακολουθούν βάζοντας ένα x στην κατάλληλη θέση.

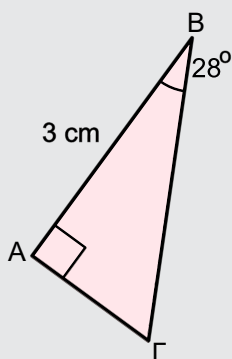
- α) Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία οξεία γωνία ίση τότε θα έχουν και την άλλη οξεία γωνία τους ίση.
- β) Δύο ορθογώνια τρίγωνα με δύο πλευρές ίσες μία προς μία είναι ίσα.
- γ) Δύο ορθογώνια τρίγωνα με δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία είναι ίσα.
- δ) Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές τους ίσες μία προς μία τότε θα έχουν και την τρίτη πλευρά τους ίση.
- ε) Δύο ορθογώνια τρίγωνα με μία πλευρά και μια γωνία ίση, είναι ίσα.
- στ) Σε δύο ίσα ορθογώνια τρίγωνα, απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες.
- ζ) Δύο ορθογώνια τρίγωνα με δύο αντίστοιχες γωνίες ίσες είναι ίσα.

|     | Σωστό | Λάθος |
|-----|-------|-------|
| α)  |       |       |
| β)  |       |       |
| γ)  |       |       |
| δ)  |       |       |
| ε)  |       |       |
| στ) |       |       |
| ζ)  |       |       |

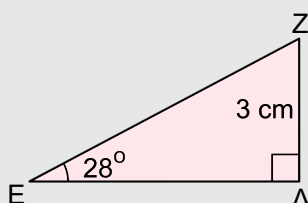
2

Βρες το ζεύγος των ίσων τριγώνων παρακάτω:

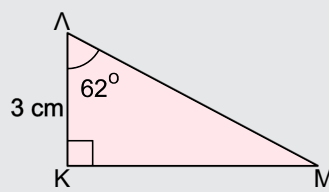
1ο σχήμα:



2ο σχήμα:

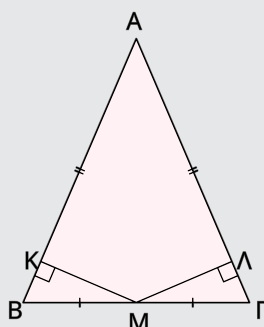


3ο σχήμα:



3

Απόδειξε ότι το μέσο M της βάσης ισοσκελούς τριγώνου ισαπέχει από τις ίσες πλευρές του ( $MK = ML$ ).



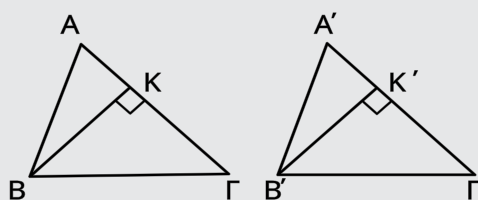
4

Δίνονται τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  και τα ύψη τους BK και  $B'K'$  αντίστοιχα. Αν  $\hat{A} = \hat{A}'$ ,  $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$  και  $BK = B'K'$ , απόδειξε ότι:

α)  $AK = A'K'$ .

β)  $K\Gamma = K'\Gamma'$

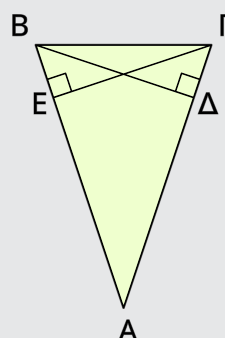
γ) Τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  είναι ίσα.



5

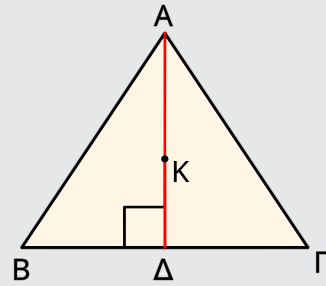
Σε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) παίρνουμε τα ύψη  $B\Delta$  και  $\Gamma E$ .

Απόδειξε ότι  $AE = A\Delta$  και  $B\Delta = \Gamma E$ .



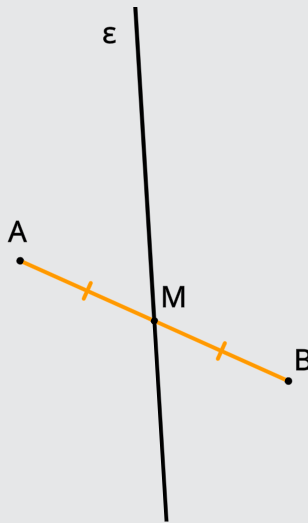
6

Σε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$ , φέρουμε ύψος  $A\Delta$  και παίρνουμε πάνω στην  $A\Delta$  τυχαίο σημείο  $K$ . Απόδειξε ότι  $\widehat{A\hat{B}K} = \widehat{A\hat{\Gamma}K}$ .



7

Μια ευθεία ( $\epsilon$ ) διέρχεται από το μέσον  $M$  ενός τμήματος  $AB$ . Απόδειξε ότι τα σημεία  $A, B$  ισαπέχουν από την ευθεία ( $\epsilon$ ).



8

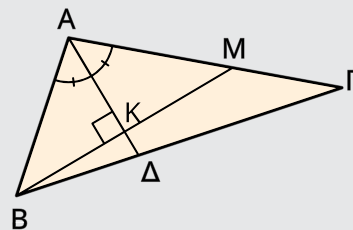
Σε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $\widehat{A} = 90^\circ$ ,  $AB = 3\text{cm}$  και  $A\Gamma = 4\text{cm}$ .

Προεκτείνουμε την πλευρά  $A\Gamma$  προς το  $A$  κατά τμήμα  $A\Delta = 3\text{cm}$  και την πλευρά  $AB$  προς το  $B$  κατά τμήμα  $BE = 1\text{cm}$ . Σύγκρινε τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A\Delta E$ .



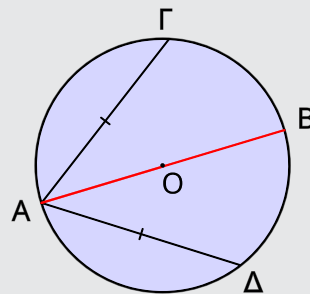
9

Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  φέρουμε τη διχοτόμο  $A\Delta$ . Από το  $B$  φέρουμε κάθετη ευθεία στην  $A\Delta$ , που την τέμνει στο σημείο  $K$  και αντίστοιχα τέμνει την  $A\Gamma$  στο  $M$ . Απόδειξε ότι το  $K$  είναι το μέσο της  $BM$ .



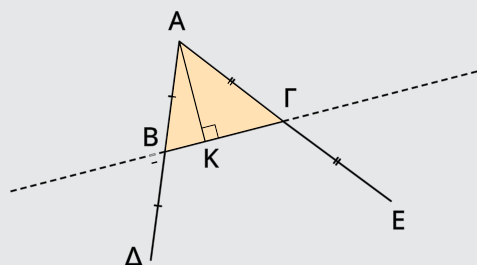
10

Στο διπλανό σχήμα η  $AB$  είναι διάμετρος του κύκλου. Αν οι χορδές  $AG$  και  $AD$  είναι ίσες, απόδειξε ότι και οι χορδές  $BG$  και  $BD$  είναι ίσες.



11

Δίνεται τρίγωνο  $ABG$  και το ύψος του  $AK$ . Προεκτείνουμε την  $AB$  κατά ίσο τμήμα  $BD$  και την  $AG$  κατά ίσο τμήμα  $GE$ . Απόδειξε ότι τα σημεία  $D$  και  $E$  ισαπέχουν από την ευθεία  $BG$ .



12

Σχεδίασε ισοσκελές  $ABG$  ( $AB=AG$ ) και τις μεσοκάθετους των ίσων πλευρών του, οι οποίες τέμνονται στο  $M$ . Απόδειξε ότι τα τρίγωνα  $AMB$  και  $AMG$  είναι ίσα.



Εξασκούμε



σε όσα έμαθα

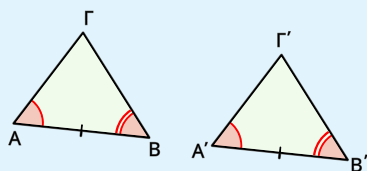
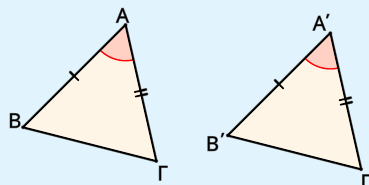
## Ανακεφαλαίωση (Γεωμετρία του Επιπέδου)

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, τότε είναι ίσα.

Αν δύο τρίγωνα είναι ίσα, τότε θα έχουν τις πλευρές τους και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες μία προς μία.

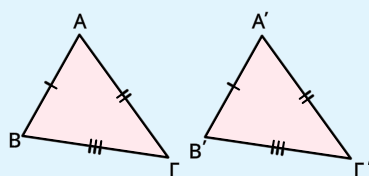
### Κριτήρια ισότητας τριγώνων

1. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα. **(Π-Γ-Π)**



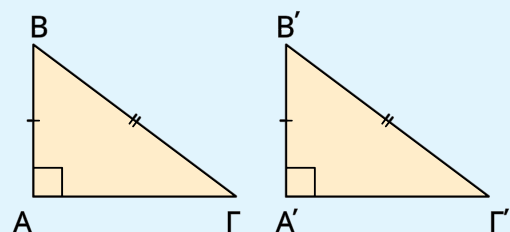
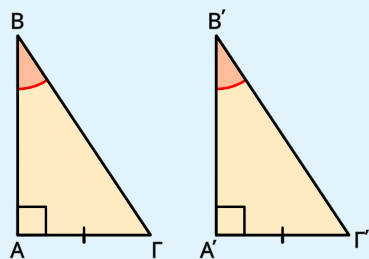
2. Αν δύο τρίγωνα έχουν μια πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα. **(Γ-Π-Γ)**

3. Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα. **(Π-Π-Π)**



### Κριτήρια ισότητας ορθογώνιων τριγώνων

1. Αν δύο **ορθογώνια** τρίγωνα έχουν μία αντίστοιχη πλευρά ίση και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίση τότε είναι ίσα.

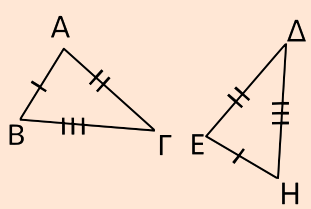


2. Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

## Αυτοαξιολόγηση (Γεωμετρία του Επιπέδου)

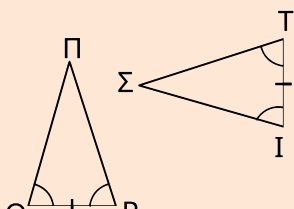
**A.** Εξήγησε γιατί τα παρακάτω ζευγάρια τριγώνων είναι ίσα:

**Κριτήριο:**



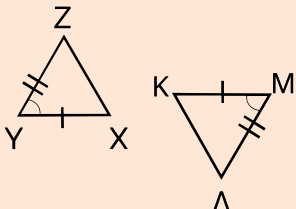
Αιτιολόγηση:

**Κριτήριο:**



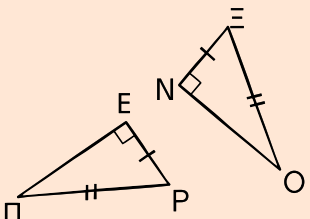
Αιτιολόγηση:

**Κριτήριο:**



Αιτιολόγηση:

**Κριτήριο:**



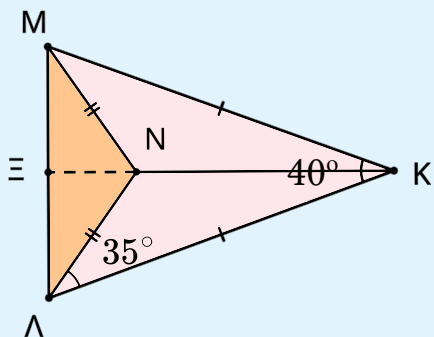
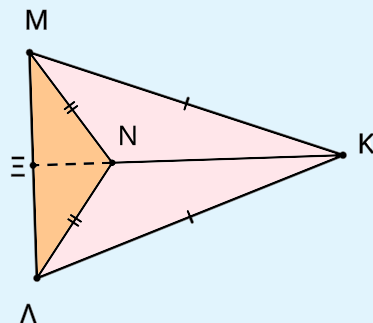
Αιτιολόγηση:

### B. Ασκήσεις

1. Στο διπλανό σχήμα, τα τρίγωνα ΚΜΛ και ΝΜΛ είναι ισοσκελή, και το ευθύγραμμο τμήμα ΝΞ είναι η προέκταση του ΚΝ στην ΜΛ.

α. Εξήγησε γιατί η ευθεία του ΚΝ είναι μεσοκάθετος ευθεία του ευθύγραμμου τμήματος ΜΛ.

β. Απέδειξε ότι ΚΞ είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{N}$  του τριγώνου ΜΝΛ.



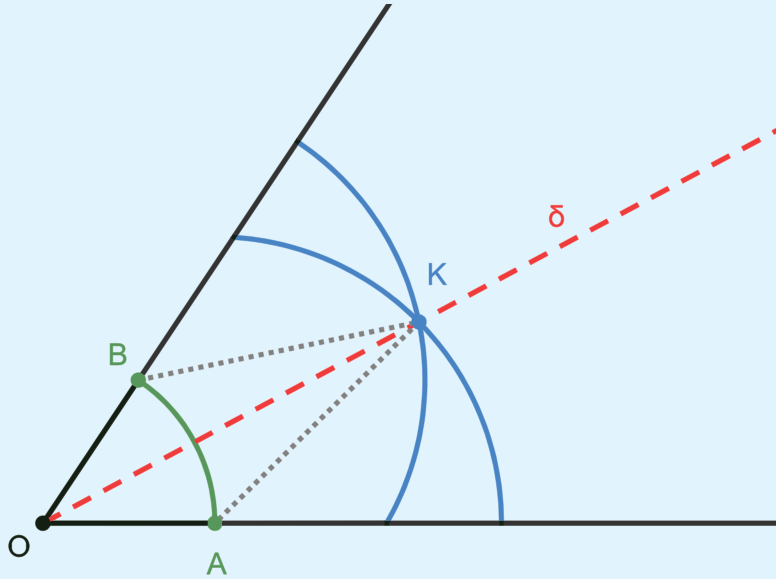
γ. Αν επιπλέον έχεις τις πληροφορίες που φαίνονται για τις γωνίες των τριγώνων, τι είναι το ευθύγραμμο τμήμα ΝΛ για το τρίγωνο ΚΞΛ;

## Ομαδική δραστηριότητα

Για να σχεδιάσουμε τη διχοτόμο μίας γωνίας  $\hat{O}$  με κανόνα και διαβήτη, ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

- Σχεδιάζουμε κύκλο  $(O, R)$ , που τέμνει τις πλευρές της γωνίας  $\hat{O}$  στα σημεία  $A$  και  $B$ .
- Σχεδιάζουμε τους κύκλους  $(A, \rho)$  και  $(B, \rho)$ , οι οποίοι τέμνονται στο  $K$ .

Η ημιευθεία  $OK$  είναι διχοτόμος της γωνίας.



Μπορείτε να αποδείξετε τον παραπάνω ισχυρισμό;

Σε αυτό το σημείο, θα πρέπει να είσαι σε θέση να ικανοποιείς όλους τους προσδοκώμενους μαθησιακούς στόχους. Γύρνα στην αρχή της θεματικής ενότητας και σημείωσε  στα αντίστοιχα σημεία. Υπάρχουν στόχοι που αισθάνεσαι ότι δεν έχεις ικανοποιήσει πλήρως;

# ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

## B.2

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς, όπως το ημίτονο, το συνημίτονο και την εφαπτομένη, ως σταθερούς λόγους πλευρών ορθογωνίου τριγώνου. Θα μάθουμε να τους χρησιμοποιούμε για να βρούμε πλευρές ορθογωνίων τριγώνων. Πώς σχετίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί με εφαρμογές στην αρχιτεκτονική, τη μηχανική ή τη γεωγραφία;

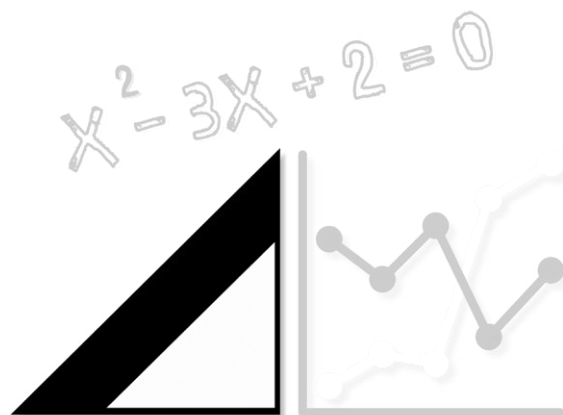
Είσαι έτοιμος/η να εξερευνήσεις τον κόσμο της τριγωνομετρίας και τις πρακτικές της εφαρμογές;



- Αναγνωρίζω τους τριγωνομετρικούς αριθμούς οξείας γωνίας ως τον σταθερό λόγο ζεύγους πλευρών ορθογώνιου τριγώνου.
- Χρησιμοποιώ τους τριγωνομετρικούς αριθμούς για την εύρεση του μέτρου γωνίας αξιοποιώντας τους τριγωνομετρικούς πίνακες.



**2.1: Ημίτονο, συνημίτονο και εφαπτομένη οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου**  
+ Ανακεφαλαίωση / Αυτοαξιολόγηση



## 2.1 | Ημίτονο, συνημίτονο και εφαπτομένη οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου



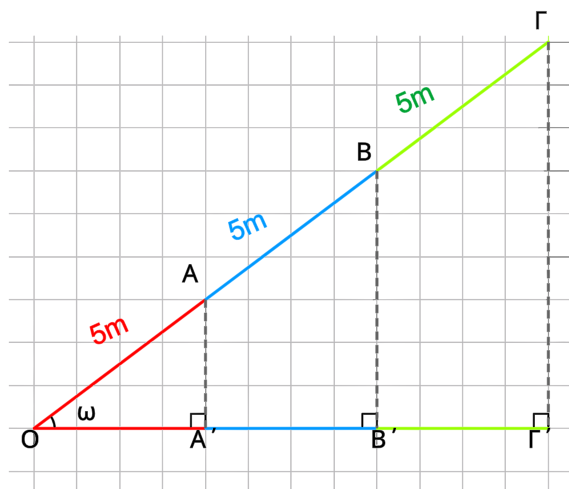
Ο Ερατοσθένης, αρχαίος επιστήμονας, έδωσε από τους πρώτους την απόδειξη ότι η επιφάνεια της Γης δεν είναι επίπεδη αλλά σφαιρική. Αυτό το συμπέρασμα ήταν θεμελιώδους σημασίας!

Επιπλέον όμως, κατάφερε να προσδιορίσει την ακτίνα και τη περιφέρεια της Γης, με πολύ μεγάλη ακρίβεια! Με ποια μέσα όμως μπόρεσε ένας Μαθηματικός τον 3ο αιώνα π.Χ. να κάνει τόσο καλούς υπολογισμούς;



### Δραστηριότητα:

Το τρενάκι ενός πάρκου ανεβαίνει την ανηφόρα που σχηματίζει γωνία  $\omega$  με το οριζόντιο επίπεδο.



Να συμπληρώσετε τους λόγους στον παρακάτω πίνακα:

| Ύψος      | Οριζόντια απόσταση | Μήκος διαδρομής |                          |                          |                           |
|-----------|--------------------|-----------------|--------------------------|--------------------------|---------------------------|
| $AA' = 3$ | $OA' = 4$          | $OA = 5$        | $\frac{AA'}{OA} = \dots$ | $\frac{OA'}{OA} = \dots$ | $\frac{AA'}{OA'} = \dots$ |
| $BB' = 6$ | $OB' = 8$          | $OB = 10$       | $\frac{BB'}{OB} = \dots$ | $\frac{OB'}{OB} = \dots$ | $\frac{BB'}{OB'} = \dots$ |
| $GG' = 9$ | $OG' = 12$         | $OG = 15$       | $\frac{GG'}{OG} = \dots$ | $\frac{OG'}{OG} = \dots$ | $\frac{GG'}{OG'} = \dots$ |

Τι παρατηρείτε;

Λύση:

| 3 <sup>η</sup> στήλη                          | 4 <sup>η</sup> στήλη                           | 5 <sup>η</sup> στήλη                           |
|---|--|--|
| $\frac{AA'}{OA} = \frac{3}{5}$                | $\frac{OA'}{OA} = \frac{4}{5}$                 | $\frac{AA'}{OA'} = \frac{3}{4}$                |
| $\frac{BB'}{OB} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ | $\frac{OB'}{OB} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$  | $\frac{BB'}{OB'} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$  |
| $\frac{ΓΓ'}{OΓ} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ | $\frac{OΓ'}{OΓ} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$ | $\frac{ΓΓ'}{OΓ'} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ |

Παρατηρούμε ότι οι λόγοι κάθε στήλης παραμένουν **σταθεροί**.

Οι σταθεροί αυτοί λόγοι ονομάζονται αντίστοιχα **ημίτονο**, **συνημίτονο** και **εφαπτομένη** της γωνίας  $\omega$  ή αλλιώς **τριγωνομετρικοί αριθμοί** της γωνίας  $\omega$ .

**Επομένως:**

Ο λόγος που σχηματίζεται, αν διαιρέσουμε την απέναντι κάθετη πλευρά μίας οξείας γωνίας  $\omega$  ενός ορθογωνίου τριγώνου με την υποτείνουσα, είναι πάντοτε σταθερός και λέγεται **ημίτονο** της γωνίας  $\omega$ .

$$\eta\mu\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$$

Ο λόγος που σχηματίζεται, αν διαιρέσουμε την προσκείμενη κάθετη πλευρά μίας οξείας γωνίας  $\omega$  ενός ορθογωνίου τριγώνου με την υποτείνουσα, είναι πάντοτε σταθερός και λέγεται **συνημίτονο** της γωνίας  $\omega$ .

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$$

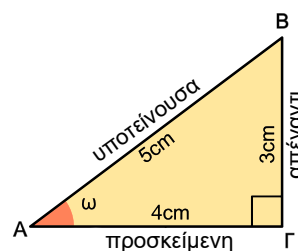
**Παράδειγμα:**

Στο τρίγωνο ABΓ, είναι:

$$\bullet \eta\mu\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{BΓ}{AB} = \frac{3}{5}$$

και

$$\bullet \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{AΓ}{AB} = \frac{4}{5}$$



**Παρατήρηση:**

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο η υποτείνουσα είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου, άρα οι λόγοι που εκφράζονται από το  $\eta\mu\omega$  και  $\sigma\upsilon\nu\omega$  είναι μικρότεροι της μονάδας.

$$\frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} < 1 \quad \text{και} \quad \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} < 1,$$

άρα για κάθε οξεία γωνία  $\omega$ , ισχύει:

$$0 < \eta\mu\omega < 1 \quad \text{και} \quad 0 < \sigma\upsilon\nu\omega < 1.$$

**Επίσης:**

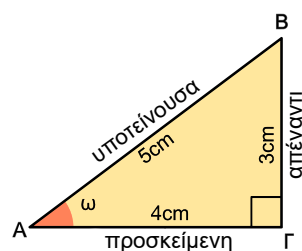
Ο λόγος που σχηματίζεται, αν διαιρέσουμε την απέναντι κάθετη πλευρά με την προσκείμενη κάθετη πλευρά μιας οξείας γωνίας  $\omega$  ενός ορθογωνίου τριγώνου, είναι πάντοτε σταθερός και λέγεται **εφαπτομένη** της γωνίας  $\omega$ .

$$\epsilon\phi\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκειμένη κάθετη πλευρά}}$$

**Παράδειγμα:**

Στο τρίγωνο ABΓ, είναι:

$$\epsilon\phi\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{προσκειμένη κάθετη}} = \frac{B\Gamma}{A\Gamma} = \frac{3}{4}$$

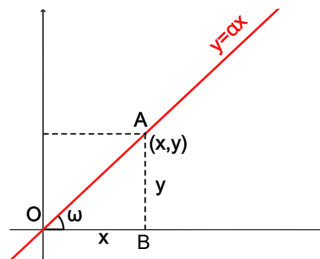


**Παρατήρηση:**

Όπως έχουμε δει στην προηγούμενη τάξη, η ευθεία με εξίσωση  $y = ax$  διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Ο λόγος  $\frac{y}{x}$  με  $x \neq 0$  ονομάζεται κλίση της ευθείας και είναι πάντοτε σταθερός και ίσος με  $\alpha$ .

$$\alpha = \frac{y}{x}, x \neq 0.$$



Αν  $\omega$  είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα  $x'x$  τότε από το ορθογώνιο τρίγωνο OAB βρίσκουμε ότι η εφαπτομένη της γωνίας  $\omega$  είναι:

$$\epsilon\phi\omega = \frac{AB}{OB} = \frac{y}{x}$$

Συνεπώς:  $\epsilon\phi\omega = \frac{y}{x} = \alpha$ , δηλαδή:

Η **κλίση**  $\alpha$  της ευθείας με εξίσωση  $y = ax$  είναι ίση με την **εφαπτομένη** της γωνίας  $\omega$ , που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα  $x'x$ .

$$\epsilon\phi\omega = \frac{y}{x} = \alpha$$

**Σχόλιο:**

Για να υπολογίσουμε το ημίτονο, το συνημίτονο και την εφαπτομένη μιας οξείας γωνίας, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον πίνακα τριγωνομετρικών αριθμών, που βρίσκεται στις τελευταίες σελίδες του βιβλίου.

Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση

Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση



**1** Ποιες από τις παρακάτω ισότητες είναι σωστές;

α)  $\epsilon\phi\hat{\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$     β)  $\eta\mu B = \frac{A\Gamma}{B\Gamma}$     γ)  $\eta\mu\hat{\Gamma} = \frac{A\Gamma}{AB}$     δ)  $\epsilon\phi\hat{B} = \frac{AB}{A\Gamma}$

**2** Υπολόγισε το ημίτονο, το συνημίτονο και την εφαπτομένη των οξείων γωνιών του τριγώνου.

•  $\eta\mu\hat{B} = \dots\dots$ ,     $\sigma\upsilon\nu\hat{B} = \dots\dots$ ,     $\epsilon\phi\hat{B} = \dots\dots$   
 •  $\eta\mu\hat{\Gamma} = \dots\dots$ ,     $\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} = \dots\dots$ ,     $\epsilon\phi\hat{\Gamma} = \dots\dots$

**3** Ποιες από τις παρακάτω ισότητες είναι σωστές;

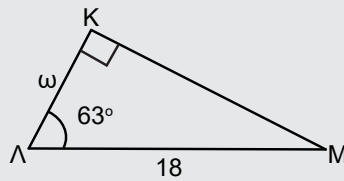
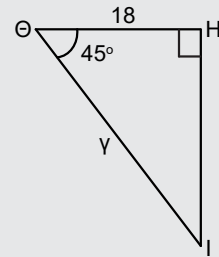
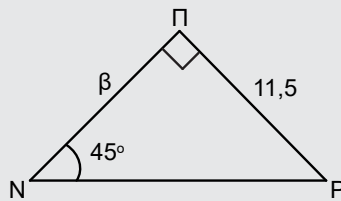
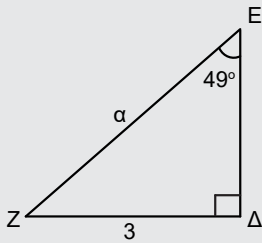
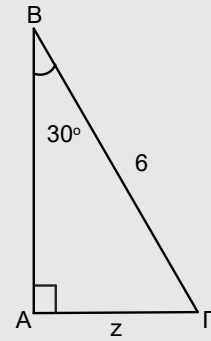
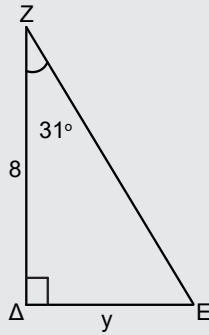
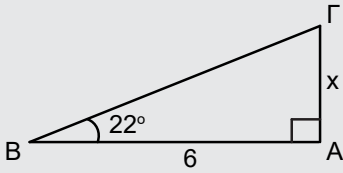
α)  $\eta\mu\phi = \frac{B\Gamma}{AB}$     β)  $\eta\mu\phi = \frac{K\Gamma}{A\Gamma}$     γ)  $\sigma\upsilon\nu\phi = \frac{B\Gamma}{A\Gamma}$   
 γ)  $\sigma\upsilon\nu\phi = \frac{AB}{A\Gamma}$     ε)  $\epsilon\phi\phi = \frac{K\Lambda}{A\Lambda}$     στ)  $\epsilon\phi\phi = \frac{K\Gamma}{A\Gamma}$

**4** Δίνεται το παρακάτω ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ, με  $B\Gamma = 39\text{cm}$  και  $\eta\mu\hat{B} = \frac{12}{13}$ . Υπολόγισε το μήκος των κάθετων πλευρών AB και AΓ του τριγώνου.

**5** Σε ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ είναι  $\hat{A} = 90^\circ$ ,  $B\Gamma = 10\text{cm}$  και  $\sigma\upsilon\nu\hat{B} = 0,8$ . Υπολόγισε το μήκος των κάθετων πλευρών AB και AΓ του τριγώνου.

6

Στα παρακάτω ορθογώνια τρίγωνα, βρες τη πλευρά που είναι σημειωμένη αξιοποιώντας τον πίνακα των τριγωνομετρικών αριθμών (στρογγυλοποίησε τους αριθμούς στο εκατοστό).

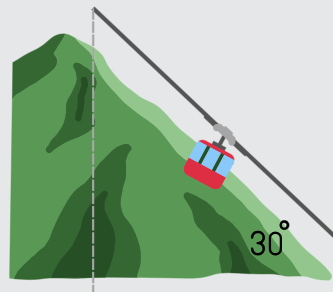


7

Σε έναν ανηφορικό δρόμο ανεβαίνουμε 15 μέτρα κάθε 300 μέτρα οριζόντιας απόστασης. Ποια είναι η κλίση του δρόμου;

8

Ένα τελεφερίκ ανεβαίνει σε λόφο σχηματίζοντας γωνία  $30^\circ$  και κατευθύνεται σε μία στάση που βρίσκεται σε υψομετρική διαφορά 500m από την βάση του. Ποιο είναι το συνολικό μήκος της διαδρομής που θα διανύσει το τελεφερίκ;



**9** Ποιες από τις παρακάτω δεν μπορεί να είναι τιμές για το ημίτονο και το συνημίτονο μιας οξείας γωνίας;

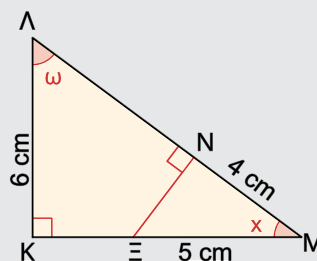
- α)  $\frac{1}{2}$ , β)  $\sqrt{5}$ , γ)  $-0,3$ , δ)  $0,75$ , ε)  $1$ , στ)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**10** Σχεδιάσε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με  $\epsilon\phi\hat{\Gamma} = 1$ . Τι συμπέρασμα μπορείς να βγάλεις για το είδος του τριγώνου ως προς τις πλευρές του;

**11** Το συνημίτονο μιας οξείας γωνίας  $\omega$  είναι  $\text{c}\omega\text{v}\omega = \frac{5}{13}$ . Υπολόγισε το  $\eta\mu\omega$  και την  $\epsilon\phi\omega$ .

**12** Στο διπλανό σχήμα γνωρίζουμε ότι  $\Lambda\text{K} = 6\text{cm}$ ,  $\text{M}\Xi = 5\text{cm}$  και  $\text{M}\text{N} = 4\text{cm}$ .

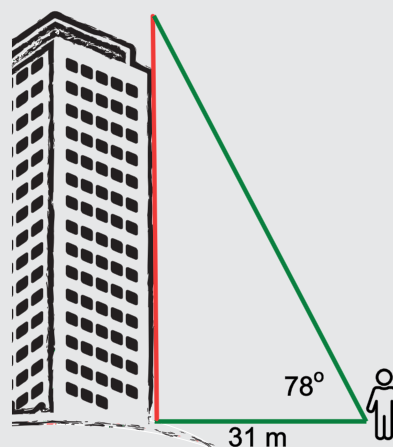
- α) Υπολόγισε το μήκος της πλευράς ΝΞ.  
 β) Υπολόγισε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας  $x$ .  
 γ) Αξιοποιώντας τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας  $x$ , βρες το μήκος των πλευρών ΜΛ και ΚΜ του ορθογώνιου τριγώνου ΚΛΜ.



**13** Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ, όπου η ΑΔ είναι κάθετη στις βάσεις ΑΒ και ΓΔ, με  $\text{A}\Delta = 6\text{ cm}$ ,  $\text{A}\text{B} = 10\text{ cm}$  και  $\text{G}\Delta = 18\text{ cm}$ . Σχεδιάσε το τραπέζιο, και φέρε το ύψος ΒΕ. Στη συνέχεια, υπολόγισε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας  $\hat{\Gamma}$ .



**14** Ο Γιάννης στέκεται 31 μέτρα μακριά από τον Πύργο στη Νέα Υόρκη. Βλέπει το κτίριο από γωνία 78 μοιρών. Τι ύψος έχει ο Πύργος;



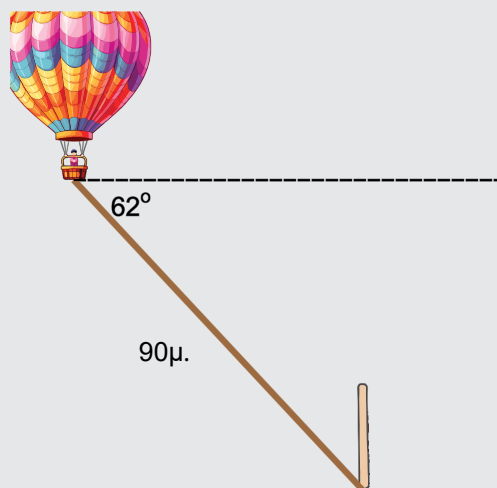
Εξασκούμε



σε όσα έμαθα

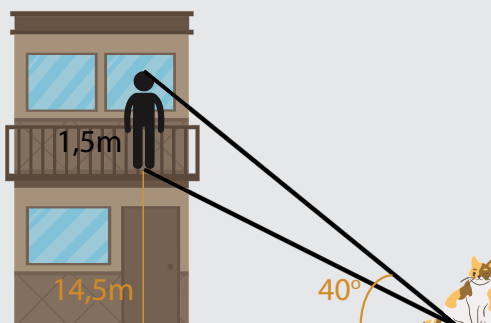
15

Ένα σχοινί 90 μέτρων κρατάει ένα αερόστατο όπως φαίνεται στο σχήμα. Ποια είναι η ελάχιστη απόσταση που έχει το αερόστατο από το έδαφος;



16

Από το μπαλκόνι του, ο Κώστας βλέπει την γάτα στο δρόμο, με γωνία 40 μοιρών. Το ύψος του μπαλκονιού είναι 14,5 m και το ύψος του Κώστα είναι 1,5 m. Τι απόσταση έχει η γάτα από την είσοδο του σπιτιού;



Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση



Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση





## Η Τριγωνομετρία

Η τριγωνομετρία έχει μακρά ιστορία που ξεκινά από την αρχαιότητα και φτάνει μέχρι τις μέρες μας.

### Αρχαία Ελλάδα

Ο Αρίσταρχος χρησιμοποίησε ορθογώνια τρίγωνα για να υπολογίσει τις αποστάσεις μεταξύ της Γης, του Ήλιου και της Σελήνης. Ο Ίππαρχος, γνωστός ως ο «πατέρας της τριγωνομετρίας», ήταν ο πρώτος που ανέπτυξε πίνακες χορδών, οι οποίοι αντιστοιχούσαν γωνίες κύκλου σε μήκη χορδών. Ο Πτολεμαίος, στο έργο του Αλμαγέστη, διεύρυνε τις ιδέες του Ίππαρχου και συνέταξε πίνακες χορδών για αστρονομικές χρήσεις.

### Μεσαίωνας

Η τριγωνομετρία αναπτύχθηκε περαιτέρω κατά τον Μεσαίωνα από Ινδούς και Άραβες μαθηματικούς. Στην Ινδία, ορίστηκε για πρώτη φορά η συνάρτηση του ημίτονου. Ο Ινδός μαθηματικός Αριαμπάτα, τον 5ο αιώνα, επέκτεινε τη μελέτη των τριγωνομετρικών συναρτήσεων και τη χρήση τους σε αστρονομικούς υπολογισμούς.

Στον ισλαμικό κόσμο, μαθηματικοί όπως ο Αλ-Μπατάνι και ο Αλ-Τουσί μετέφρασαν και επεξέτειναν τις ελληνικές και ινδικές μελέτες. Τον 10ο αιώνα, οι Άραβες μαθηματικοί καθιέρωσαν τους έξι τριγωνομετρικούς αριθμούς και τους χρησιμοποίησαν σε εφαρμογές της αστρονομίας και της ναυσιπλοΐας.

### Αναγέννηση

Στην Ευρώπη, η τριγωνομετρία διαδόθηκε κατά την Αναγέννηση μέσω λατινικών μεταφράσεων των ισλαμικών έργων. Ο Γερμανός μαθηματικός Ρεγιμοντάνος (Johannes Müller) έγραψε το De Triangulis τον 15ο αιώνα, ένα από τα πρώτα έργα που ασχολήθηκαν με την τριγωνομετρία στην Ευρώπη.

Το 1595, ο Bartholomäus Pitiscus καθιέρωσε τον όρο «τριγωνομετρία» με το έργο του Trigonometria. Κατά τον 16ο και 17ο αιώνα, η τριγωνομετρία έγινε ουσιαστικό εργαλείο για τη ναυσιπλοΐα και τη χαρτογράφηση.

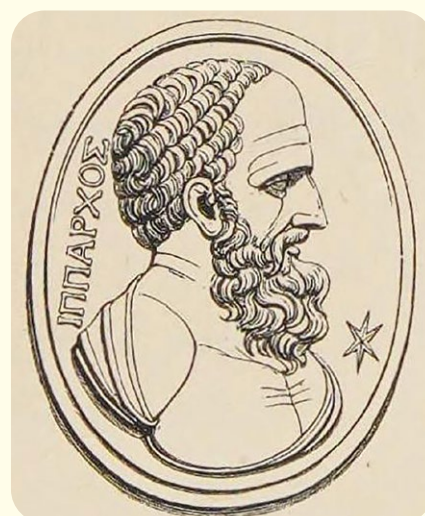
### Νεότερα χρονιά

Τον 18ο αιώνα, μαθηματικοί όπως ο Leonhard Euler ενσωμάτωσαν τους μιγαδικούς αριθμούς στην τριγωνομετρία, γεγονός που άνοιξε νέους ορίζοντες στην αξιοποίησή της.

ΜΕΛΕΤΩ



το συγκεκριμένο θέμα



*Ο Ίππαρχος, στον οποίο πιστώνεται η σύνταξη του πρώτου τριγωνομετρικού πίνακα, έχει περιγραφεί ως «ο πατέρας της τριγωνομετρίας».*

## Τριγωνομετρία και καθημερινή ζωή

Μπορεί η τριγωνομετρία να χρησιμοποιηθεί στην καθημερινή ζωή; Η τριγωνομετρία έχει εφαρμογές στην επίλυση πρακτικών προβλημάτων ενώ αξιοποιείται σε διάφορες επιστήμες:

- Η τριγωνομετρία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να **μετρήσει το ύψος** ενός κτιρίου ή βουνών: Αν γνωρίζετε την απόσταση από την οποία παρατηρείτε το κτίριο και τη γωνία ανύψωσης, μπορείτε εύκολα να βρείτε το ύψος του κτιρίου.
- Τριγωνομετρία στις **κατασκευές**: Οι **αρχιτέκτονες** χρησιμοποιούν την τριγωνομετρία για να υπολογίσουν το δομικό φορτίο, τις κλίσεις της οροφής, τις επιφάνειες του εδάφους και πολλές άλλες πτυχές, συμπεριλαμβανομένης της σκίασης από τον ήλιο και των γωνιών φωτός.
- Τριγωνομετρία στην **αεροναυπηγική**: Οι αεροναυπηγοί πρέπει να λαμβάνουν υπόψη την ταχύτητα, την απόσταση και την κατεύθυνση του αεροπλάνου μαζί με την ταχύτητα και την κατεύθυνση του ανέμου. Ο άνεμος παίζει σημαντικό ρόλο στο πώς και πότε ένα αεροπλάνο θα φτάσει στον προορισμό του. Αυτό λύνεται χρησιμοποιώντας διανύσματα και τριγωνομετρία.
- Τριγωνομετρία στην **αρχαιολογία**: Η τριγωνομετρία χρησιμοποιείται για να διαιρέσουν οι αρχαιολόγοι τους χώρους ανασκαφής σε ίσες περιοχές εργασίας. Μπορούν, επίσης, να τη χρησιμοποιήσουν για να μετρήσουν την απόσταση σε υπόγεια συστήματα νερού.
- Τριγωνομετρία στην **εγκληματολογία**: Στην εγκληματολογία, η τριγωνομετρία μπορεί να βοηθήσει στον υπολογισμό της τροχιάς ενός βλήματος, στην εκτίμηση του τι μπορεί να προκάλεσε μια σύγκρουση σε ένα αυτοκινητιστικό ατύχημα ή πώς έπεσε ένα αντικείμενο από κάμπο.
- Τριγωνομετρία στη **θαλάσσια βιολογία**: Οι θαλάσσιοι βιολόγοι συχνά χρησιμοποιούν την τριγωνομετρία για μετρήσεις. Για παράδειγμα, για να διαπιστώσουν πώς τα επίπεδα φωτός σε διάφορα βάθη επηρεάζουν την ικανότητα των φυκιών να φωτοσυνθέτουν.
- Τριγωνομετρία στην **πλοήγηση**: Η τριγωνομετρία χρησιμοποιείται για να καθοριστούν κατευθύνσεις όπως βορράς, νότος, ανατολή, δύση.

Δες τα προβλήματα της καθημερινής ζωής που ακολουθούν στην αυτοαξιολόγηση!

## Ανακεφαλαίωση (Τριγωνομετρία)

Ο λόγος που σχηματίζεται, αν διαιρέσουμε την απέναντι κάθετη πλευρά μίας οξείας γωνίας  $\omega$  ενός ορθογωνίου τριγώνου με την υποτείνουσα, είναι πάντοτε σταθερός και λέγεται ημίτονο της γωνίας  $\omega$ .

$$\eta\mu\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$$

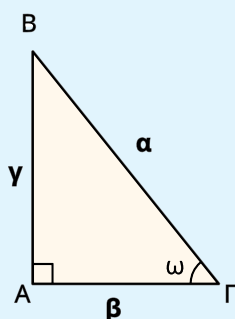
Ο λόγος που σχηματίζεται, αν διαιρέσουμε την προσκείμενη κάθετη πλευρά μίας οξείας γωνίας  $\omega$  ενός ορθογωνίου τριγώνου με την υποτείνουσα, είναι πάντοτε σταθερός και λέγεται συνημίτονο της γωνίας  $\omega$ .

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$$

Για κάθε οξεία γωνία  $\omega$ , ισχύει:  $0 < \eta\mu\omega < 1$  και  $0 < \sigma\upsilon\nu\omega < 1$ .

Ο λόγος που σχηματίζεται, αν διαιρέσουμε την απέναντι κάθετη πλευρά με την προσκείμενη κάθετη πλευρά μιας οξείας γωνίας  $\omega$  ενός ορθογωνίου τριγώνου, είναι πάντοτε σταθερός και λέγεται εφαπτομένη της γωνίας  $\omega$ .

$$\epsilon\varphi\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}$$



$$\eta\mu\omega = \frac{\gamma}{\alpha}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\epsilon\varphi\omega = \frac{\gamma}{\beta}$$

Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση

## Αυτοαξιολόγηση (Τριγωνομετρία)

### 1. Πρόβλημα υπολογισμού απόστασης:

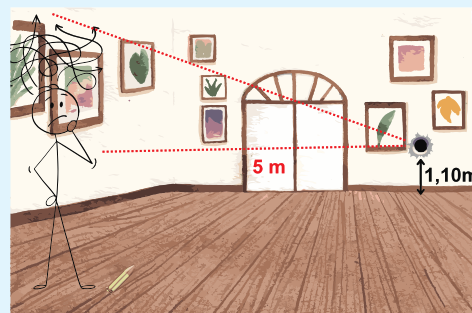
Ένας τοπογράφος στέκεται σε απόσταση 50 μέτρων από ένα κτίριο. Χρησιμοποιεί ένα όργανο και μετρά τη γωνία ανύψωσης στην κορυφή του κτιρίου ως  $30^\circ$ . Βρες το ύψος του κτιρίου.

### 2. Πρόβλημα πλοήγησης:

Ένα πλοίο πρέπει να φτάσει σε ένα σημείο B που βρίσκεται 100 χιλιόμετρα βόρεια και 50 χιλιόμετρα ανατολικά από τη θέση A. Βρες την κατεύθυνση που πρέπει να ακολουθήσει το πλοίο και την απόσταση που πρέπει να διανύσει.

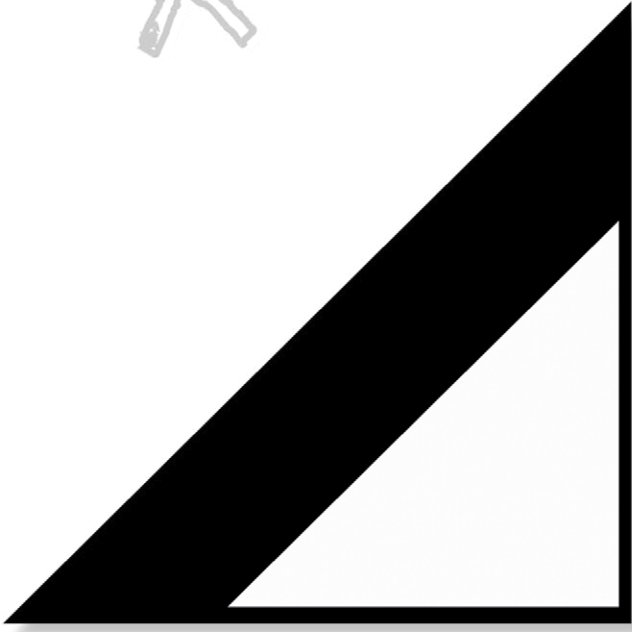
### Ομαδική δραστηριότητα

Σε μια σκηνή εγκλήματος, οι ερευνητές εντοπίζουν ότι μια σφαίρα προσέκρουσε στον τοίχο ενός δωματίου σε ύψος 1,1 μέτρου από το έδαφος και βρήκε το έδαφος στο σημείο που στεκόταν ο δράστης, σε απόσταση 5 μέτρων από τον τοίχο. Εάν η γωνία πρόσκρουσης της σφαίρας με τον τοίχο ήταν  $10^\circ$ , βρες το ύψος του δράστη που πυροβόλησε τη σφαίρα.



☑ Σε αυτό το σημείο, θα πρέπει να είσαι σε θέση να ικανοποιείς όλους τους προσδοκώμενους μαθησιακούς στόχους. Γύρνα στην αρχή της θεματικής ενότητας και σημείωσε ✓ στα αντίστοιχα σημεία. Υπάρχουν στόχοι που αισθάνεσαι ότι δεν έχεις ικανοποιήσει πλήρως;

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$



Στην ενότητα αυτή θα αναγνωρίσουμε και θα υπολογίσουμε τον λόγο ευθύγραμμων τμημάτων.

Πώς μπορείς να εφαρμόσεις αυτή τη γνώση στην καθημερινότητά όπως για τη σχεδίαση χαρτών;

Είσαι έτοιμος/η να κατανοήσεις τη σημασία της αναλογίας στα μήκη και να εντοπίσεις τη χρησιμότητά της;

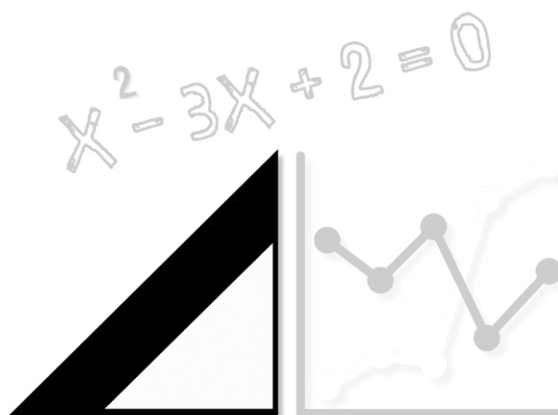


- Αναγνωρίζω και υπολογίζω τον λόγο των ευθύγραμμων τμημάτων ως λόγο των μηκών τους στην ίδια μονάδα μέτρησης.



## 3.1: Λόγος ευθυγράμμων τμημάτων και λόγος μηκών

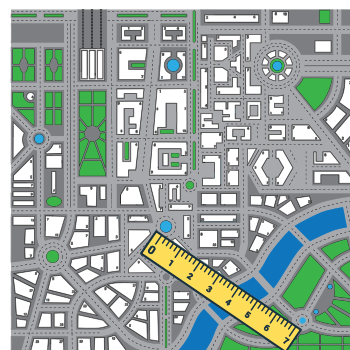
+ Ανακεφαλαίωση / Αυτοαξιολόγηση



## 3.1 | Λόγος ευθυγράμμων τμημάτων και λόγος μηκών

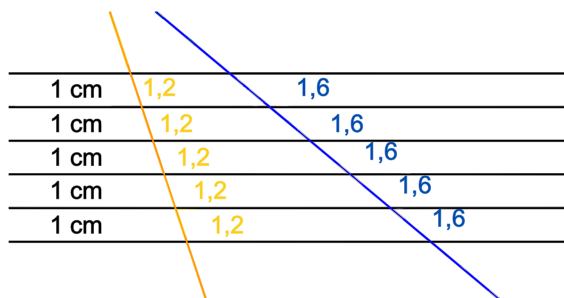


Βλέπουμε έναν χάρτη μιας πόλης που έχει σχεδιαστεί με κλίμακα 1:20.000. Δηλαδή, 1cm στον χάρτη αντιστοιχεί με 20.000cm σε πραγματική διάσταση. Πόσα μέτρα απέχουν τα δύο σιντριβάνια μεταξύ τους;



### Ίσα τμήματα μεταξύ παραλλήλων ευθειών

Σχεδιάζουμε παράλληλες ευθείες σε ίσες αποστάσεις μεταξύ τους (1cm). Παρατηρούμε ότι αυτές ορίζουν ίσα τμήματα σε οποιαδήποτε άλλη ευθεία τις τέμνει:

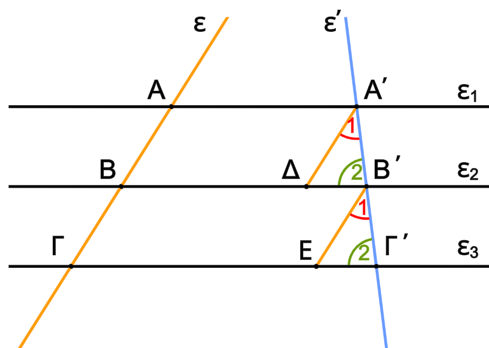


Γενικά

Αν παράλληλες ευθείες ορίζουν ίσα τμήματα σε μια ευθεία, τότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε οποιαδήποτε άλλη ευθεία που τις τέμνει.

**Απόδειξη:**

Παίρνουμε 3 παράλληλες ευθείες  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  που τέμνουν μία ευθεία  $\epsilon$  στα σημεία A, B, Γ αντίστοιχα με  $AB = B\Gamma$ .



Αν μία άλλη ευθεία  $\epsilon'$  τέμνει τις παράλληλες  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  στα A', B', Γ' αντίστοιχα, τότε θα αποδείξουμε ότι  $A'B' = B'\Gamma'$ .

Φέρνουμε  $A'D // \epsilon$  και  $B'E // \epsilon$ . Τα τετράπλευρα  $AA'DB$  και  $BB'E\Gamma$  είναι παραλληλόγραμμα οπότε θα έχουν τις απέναντι πλευρές τους ίσες:  $AB = A'D$  και  $B\Gamma = B'E$ , όμως  $AB = B\Gamma$ , οπότε  $A'D = B'E$ .

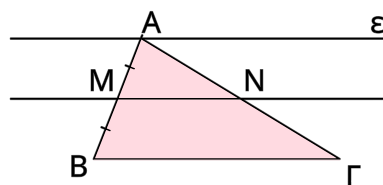
Συγκρίνουμε τα τρίγωνα  $A'DB'$ ,  $B'E\Gamma'$  και παρατηρούμε ότι έχουν:

- $A'D = B'E$ .
- $\hat{A}'_1 = \hat{B}'_1$  ως εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες των παραλλήλων  $A'D$  και  $B'E$  που τέμνονται από την  $\epsilon'$ .
- $\hat{B}'_2 = \hat{\Gamma}'_2$  ως εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες των παραλλήλων  $\epsilon_2$  και  $\epsilon_3$  που τέμνονται από την  $\epsilon'$ .

Τα τρίγωνα  $A'DB'$  και  $B'E\Gamma'$  έχουν τις δύο γωνίες τους ίσες επομένως θα έχουν και την τρίτη τους γωνία ίση ( $\hat{A} = \hat{E}$ ), άρα είναι ίσα γιατί έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία (κριτήριο Γ-Π-Γ), επομένως  $A'B' = B'\Gamma'$ .

**Παράδειγμα:** Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$ , από το μέσο  $M$  της πλευράς  $AB$ , φέρνουμε ευθεία  $MN$  παράλληλη προς την  $B\Gamma$  και από την κορυφή  $A$ , φέρνουμε ευθεία  $\epsilon$  παράλληλη στις  $MN$  και  $B\Gamma$ .

Οι παράλληλες  $\epsilon$ ,  $MN$  και  $B\Gamma$  ορίζουν ίσα τμήματα στην  $AB$ , άρα θα ορίζουν ίσα τμήματα και στην  $A\Gamma$ , οπότε το  $N$  είναι μέσο της  $A\Gamma$ .



Άρα, αποδείξαμε ότι:

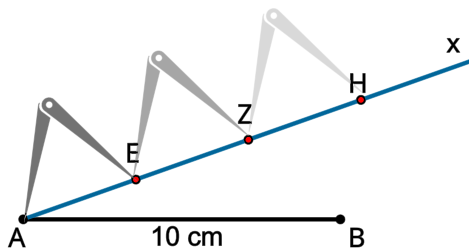
Αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μία άλλη πλευρά του τότε αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του.

## Διαίρεση ευθυγράμμου τμήματος σε $n$ ίσα μέρη.

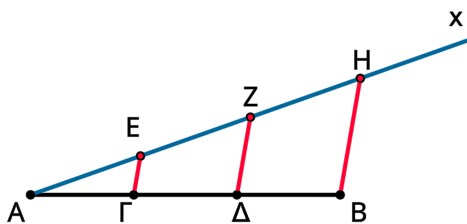
Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα  $AB = 10\text{cm}$  και θέλουμε να το χωρίσουμε σε 3 ίσα μέρη. Η διαίρεση  $10:3$  δίνει αποτέλεσμα  $3,33\dots$  συνεπώς το μήκος κάθε τμήματος δεν μπορεί να μετρηθεί ακριβώς με το υποδεκάμετρο.

Μπορούμε να διαιρέσουμε το τμήμα  $AB$  σε 3 ίσα μέρη, με τη βοήθεια του κανόνα και του διαβήτη ως εξής:

- Από το ένα άκρο του, για παράδειγμα το  $A$ , φέρνουμε τυχαία ημιευθεία  $Ax$  που δεν βρίσκεται στην ευθεία που ορίζουν τα  $A$ ,  $B$ .
- Με τον διαβήτη, παίρνουμε διαδοχικά τα σημεία  $E$ ,  $Z$  και  $H$  ώστε  $AE = EZ = ZH$ .



- Ενώνουμε τα σημεία  $B$  και  $H$  και από τα σημεία  $E$  και  $Z$  φέρνουμε παράλληλες προς την  $BH$  που τέμνουν την  $AB$  στα  $\Gamma$  και  $\Delta$  αντίστοιχα.



- Οι παράλληλες αυτές ορίζουν ίσα τμήματα στην Ax, άρα θα ορίζουν ίσα τμήματα και στην AB, δηλαδή:

$$ΑΓ = ΓΔ = ΔΒ.$$

Χωρίσαμε λοιπόν το τμήμα  $AB = 10\text{cm}$  σε 3 ίσα τμήματα καθένα από τα οποία έχει μήκος  $\frac{10}{3}\text{cm}$ .

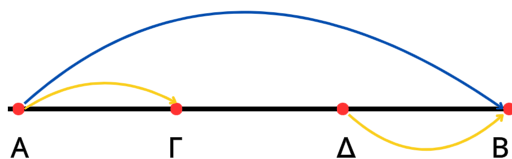
Με τον τρόπο αυτόν, μπορούμε να διαιρέσουμε οποιοδήποτε ευθύγραμμο τμήμα, σε  $n$  ίσα τμήματα.

## Η έννοια του λόγου δύο ευθυγράμμων τμημάτων.

Όπως είδαμε προηγουμένως, μπορούμε να διαιρέσουμε ένα ευθύγραμμο  $AB$  τμήμα σε 3 ίσα μέρη  $ΑΓ = ΓΔ = ΔΒ$ , καθένα από τα οποία έχει μήκος το  $\frac{1}{3}$  του μήκους του  $AB$ .

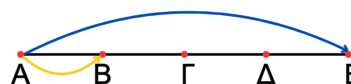
Λέμε ότι:  $ΑΓ = \frac{1}{3}AB$  ή  $\frac{ΑΓ}{AB} = \frac{1}{3}$ .

Ομοίως  $\frac{ΓΔ}{AB} = \frac{1}{3}$  και  $\frac{ΔΒ}{AB} = \frac{1}{3}$ .



Αν έχουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα  $AB = \alpha$  και πάρουμε στην ημιευθεία  $AB$ , ίσα διαδοχικά ευθύγραμμο τμήματα  $ΒΓ = ΓΔ = ΔΕ = \alpha$ , τότε το τμήμα  $ΑΕ$  είναι  $ΑΕ = 4\alpha$ , δηλαδή:

$$ΑΕ = 4 \cdot AB \quad \text{ή} \quad \frac{ΑΕ}{AB} = 4.$$



### Επομένως:

Ο λόγος ενός ευθύγραμμου τμήματος  $AB$  προς το ευθύγραμμο τμήμα  $ΓΔ$  συμβολίζεται  $\frac{AB}{ΓΔ}$  και είναι ο αριθμός  $\lambda$ , για τον οποίο ισχύει  $AB = \lambda \cdot ΓΔ$ . Άρα,

$$\text{Αν } AB = \lambda \cdot ΓΔ \text{ τότε } \frac{AB}{ΓΔ} = \lambda.$$

**Παράδειγμα:** Αν  $M$  μέσο του τμήματος  $AB$ , να βρείτε το λόγο  $\frac{AM}{AB}$ .

**Λύση:** Το  $M$  είναι μέσο του τμήματος  $AB$ , άρα  $AM = \frac{1}{2}AB$ , οπότε:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{1}{2}.$$



**Γενικά:**

Ο λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων είναι ίσος με το λόγο των μηκών τους, εφόσον έχουν μετρηθεί με την ίδια μονάδα μέτρησης.

**Παράδειγμα:**

Αν είναι  $AB = 15\text{cm}$  και  $\Gamma\Delta = 3\text{cm}$ , τότε:

$$\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{15\text{cm}}{3\text{cm}} = 5 \quad \text{και} \quad \frac{\Gamma\Delta}{AB} = \frac{3\text{cm}}{15\text{cm}} = \frac{1}{5}$$

**Ανάλογα ευθύγραμμα τμήματα**

Αν πάρουμε τα ευθύγραμμα τμήματα  $AB = 2\text{cm}$ ,  $\Gamma\Delta = 3\text{cm}$  και τα ευθύγραμμα τμήματα  $A'B' = 4\text{cm}$ ,  $\Gamma'\Delta' = 6\text{cm}$ , τότε παρατηρούμε ότι:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{4\text{cm}}{2\text{cm}} = 2 \quad \text{και} \quad \frac{\Gamma'\Delta'}{\Gamma\Delta} = \frac{6\text{cm}}{3\text{cm}} = 2,$$

δηλαδή τα  $A'B'$ ,  $\Gamma'\Delta'$  είναι διπλάσια των τμημάτων  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  αντίστοιχα. Τα τμήματα  $A'B'$ ,  $\Gamma'\Delta'$  λέγονται ανάλογα προς τα τμήματα  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$ .

**Γενικά:**

Τα ευθύγραμμα τμήματα  $\alpha$ ,  $\gamma$  είναι ανάλογα προς τα ευθύγραμμα τμήματα  $\beta$ ,  $\delta$  αν ισχύει:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$$

Η ισότητα  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$  ονομάζεται **αναλογία** με όρους τα ευθύγραμμα τμήματα  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  και  $\delta$ .

Τα  $\alpha$ ,  $\delta$  λέγονται **άκροι όροι** ενώ τα  $\beta$ ,  $\gamma$  **μέσοι όροι**.

**Ιδιότητες αναλογιών**

$$\text{Αν } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \text{ τότε } \alpha\delta = \beta\gamma.$$

$$\text{Αν } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \text{ τότε } \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$$

και

$$\text{Αν } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \text{ τότε } \frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

$$\text{Αν } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \text{ τότε } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$$

← Σε κάθε αναλογία τα «**χιαστί γινόμενα**» είναι ίσα, δηλαδή, το γινόμενο των άκρων όρων είναι ίσο με το γινόμενο των μέσων όρων.

← Αν εναλλάξουμε τους μέσους ή τους άκρους όρους, προκύπτει πάλι αναλογία.

← Αν δύο λόγοι είναι ίσοι τότε είναι ίσοι και με τον λόγο που έχει αριθμητή το άθροισμα των αριθμητών και παρονομαστή το άθροισμα των παρονομαστών.



1. Να βρείτε τον λόγο της πλευράς ενός τετραγώνου προς τη διαγώνιά του. A

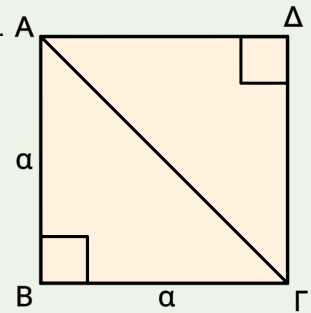
**Λύση:**

Έστω τετράγωνο ΑΒΓΔ με πλευρά ΑΒ = α.

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, είναι:

$$ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2 \text{ ή } \delta^2 = \alpha^2 + \alpha^2 \text{ ή } \delta^2 = 2\alpha^2 \text{ ή } \delta = \sqrt{2}\alpha.$$

$$\text{Άρα: } \frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{\alpha}{\delta} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ή } \frac{\alpha}{\delta} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



2. Σε τρίγωνο ΑΒΓ, από το μέσο Δ της πλευράς ΑΒ φέρνουμε ΔΕ//ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο Ε και από το Ε φέρνουμε ΕΖ//ΑΒ που τέμνει την ΒΓ στο Ζ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το Ε είναι το μέσο της πλευράς ΑΓ και το Ζ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ.

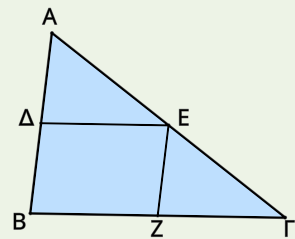
β)  $ΔΕ = \frac{1}{2} \cdot ΒΓ.$

**Λύση:**

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ το Δ είναι μέσο της πλευράς ΑΒ και η ΔΕ είναι παράλληλη στην ΒΓ, άρα το Ε είναι το μέσο της πλευράς ΑΓ.

Ομοίως το Ε είναι μέσο της πλευράς ΑΓ και ΕΖ//ΑΒ, άρα το Ζ είναι μέσο της ΒΓ.

β) Είναι ΔΕ//ΒΖ και ΔΒ//ΕΖ, άρα το τετράπλευρο ΔΕΖΒ είναι παραλληλόγραμμο, συνεπώς  $ΔΕ = ΒΖ = \frac{1}{2} \cdot ΒΓ.$



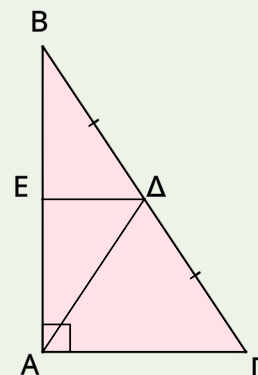
**Δείξαμε λοιπόν, ότι:**

Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών ενός τριγώνου, είναι:

- παράλληλο προς την τρίτη πλευρά του.
- ίσο με το μισό της τρίτης πλευράς του.

3. Σε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) φέρνουμε τη διάμεσο  $AD$ . Από το σημείο  $\Delta$  φέρνουμε  $DE \parallel A\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:

- α) Το  $E$  είναι το μέσο της πλευράς  $AB$ .
- β)  $AD = \frac{1}{2} \cdot B\Gamma$ .



**Λύση:**

- α) Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  το  $\Delta$  είναι μέσο της  $B\Gamma$  και  $DE \parallel A\Gamma$ , άρα το  $E$  είναι το μέσο της πλευράς  $AB$ .
- β) Γενικά ισχύει ότι οι παράλληλες ευθείες είναι κάθετες στην ίδια ευθεία. Στο σχήμα είναι  $DE \parallel A\Gamma$  και  $A\Gamma \perp AB$ , άρα θα είναι  $DE \perp AB$ .  
 Η  $ED$  είναι μεσοκάθετος του τμήματος  $AB$ , άρα σύμφωνα με την ιδιότητα της μεσοκαθέτου, κάθε σημείο της ισαπέχει από τα άκρα του τμήματος, οπότε:  $AD = DB = \frac{1}{2} \cdot B\Gamma$ .

**Δείξαμε, λοιπόν, ότι:**

Η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου, είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.



**1**

Χαρακτήρισε ως Σωστές ή Λάθος τις προτάσεις που ακολουθούν βάζοντας ένα  $x$  στην κατάλληλη θέση.

α) Αν  $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = 2$  τότε το  $\Gamma\Delta$  έχει διπλάσιο μήκος από το  $AB$ .

β) Αν  $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = 2$  τότε το  $AB$  έχει διπλάσιο μήκος από το  $\Gamma\Delta$ .

γ) Αν  $\frac{K\Lambda}{Z\Nu} = \frac{3}{2}$  τότε  $K\Lambda = 3$  και  $Z\Nu = 2$ .

δ) Αν  $M$  μέσο του  $AB$  τότε  $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{2}$ .

ε) Ο λόγος των πλευρών ενός ρόμβου είναι 1.

στ) Ο λόγος των πλευρών ενός παραλληλογράμμου είναι 1.

**Σωστό      Λάθος**

|  |  |
|--|--|
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

2

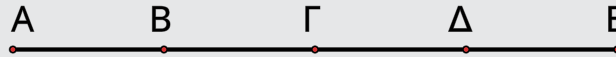
Παρατήρησε το παρακάτω σχήμα και βρες τους λόγους των ευθύγραμμων τμημάτων:



α)  $\frac{AB}{B\Gamma} = \dots$ , β)  $\frac{AB}{A\Gamma} = \dots$ , γ)  $\frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta} = \dots$ , δ)  $\frac{B\Gamma}{B\Delta} = \dots$ , ε)  $\frac{AB}{A\Delta} = \dots$ .

3

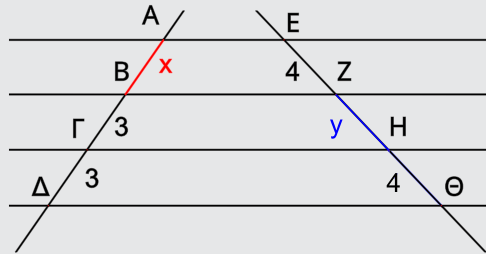
Παρατήρησε το παρακάτω σχήμα και συμπλήρωσε τα κενά, αν γνωρίζεις ότι  $AB=B\Gamma=\Gamma\Delta=\Delta E$ :



α)  $A\Gamma = \dots AB$  άρα  $\frac{A\Gamma}{AB} = \dots$  και  $\frac{AB}{A\Gamma} = \dots$ .  
 β)  $AE = \dots B\Gamma$  άρα  $\frac{AE}{B\Gamma} = \dots$  και  $\frac{B\Gamma}{AE} = \dots$ .  
 γ)  $\frac{B\Delta}{BE} = \dots$  δ)  $\frac{A\Delta}{BE} = \dots$ .

4

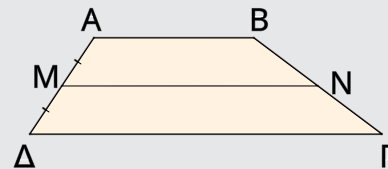
Βρες τους αριθμούς x και y του παρακάτω σχήματος αν γνωρίζεις ότι  $AE \parallel BZ \parallel \Gamma H \parallel \Delta\Theta$ .



5

Σε τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ) παίρνουμε το μέσο M της πλευράς  $A\Delta$  και φέρνουμε ευθεία  $MN$  παράλληλη προς τις βάσεις του.

Δείξε ότι το N είναι μέσο της  $B\Gamma$ .



6

Δύο ευθύγραμμα τμήματα έχουν λόγο  $\lambda = \frac{1}{3}$ . Διάλεξε τα ζευγάρια των αριθμών που μπορούν να αντιπροσωπεύουν τα μήκη των τμημάτων αυτών:

- α) 1 και 3      β) 3 και 6      γ) 1,5 και 4,5      δ) 9 και 3      ε) 3 και 10

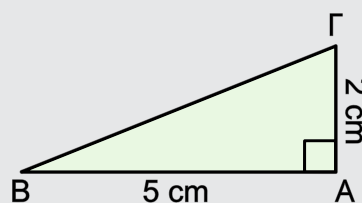
7

- α) Υπολόγισε τον λόγο της ακτίνας ενός κύκλου,  
 i. προς την διάμετρο του και ii. προς το μήκος του.  
 β) Υπολόγισε τον λόγο της πλευράς ενός τετραγώνου:  
 i. προς την περίμετρό του και ii. προς τη διάμετρό του.  
 γ) Υπολόγισε τον λόγο της πλευράς ενός ισόπλευρου τριγώνου:  
 i. προς την περίμετρό του και ii. προς το ύψος του.

8

Βρες τους λόγους των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ:

- α)  $\frac{AB}{AG}$ , β)  $\frac{AB}{BG}$ , γ)  $\frac{BG}{AG}$ .



9

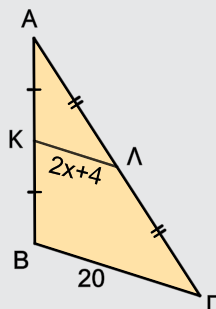
Διάρρσε το μήκος  $AB = 7\text{ cm}$  σε 3 ίσα μέρη με τη βοήθεια του κανόνα και του διαβήτη.



10

Αν γνωρίζεις ότι τα Κ και Λ είναι μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου, υπολόγισε το x.

(Υπόδειξη: Δες το 2ο λυμένο παράδειγμα)



Εξασκούμαι

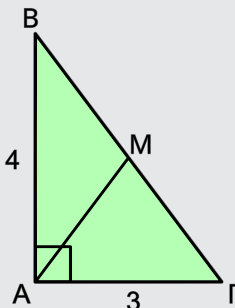


σε όσα έμαθα

11

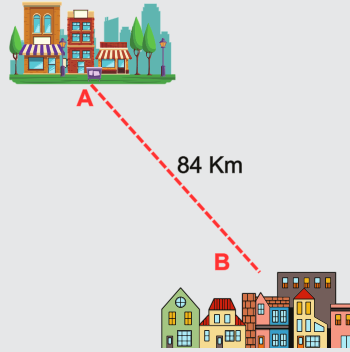
Στο παρακάτω σχήμα, υπολόγισε την υποτεινουσα ΒΓ και στη συνέχεια βρες το μήκος της διαμέσου ΑΜ.

(Υπόδειξη: Δες το 3ο λυμένο παράδειγμα)



**12** Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  τα  $K, \Lambda, M$  είναι τα μέσα των πλευρών του  $AB, B\Gamma$  και  $A\Gamma$ . Υπολόγισε τον λόγο της περιμέτρου του τριγώνου  $K\Lambda M$  προς τη περίμετρο του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

**13** Για δύο πόλεις  $A$  και  $B$  γνωρίζουμε ότι έχουν πληθυσμό 3.000 και 12.000 κατοίκους αντίστοιχα και πως η μεταξύ τους απόσταση είναι 84 Km. Σε ποιο σημείο πρέπει να κατασκευαστεί ένα εργοστάσιο ώστε να απέχει από κάθε πόλη απόσταση ανάλογη του πληθυσμού της;



Μελετώ



το συγκεκριμένο θέμα

## Η χρυσή τομή

### Ιστορική αναδρομή

Η Χρυσή Τομή, γνωστή και ως «φ» ή 1,618, είναι ένας μαθηματικός λόγος που έχει εντοπιστεί στην τέχνη, την αρχιτεκτονική και τη φύση από την αρχαιότητα. Οι αρχαίοι Έλληνες, όπως ο Πυθαγόρας και ο Ευκλείδης, μελέτησαν τη Χρυσή τομή για τις αρμονικές της ιδιότητες, ιδιαίτερα στα γεωμετρικά σχήματα. Το σχήμα που προκύπτει όταν ένα ευθύγραμμο τμήμα χωρίζεται σε δύο μέρη, έτσι ώστε το λόγο του συνόλου προς το μεγαλύτερο να είναι ίσος με το λόγο του μεγαλύτερου προς το μικρότερο, είναι η βασική ιδέα της Χρυσής τομής.

Στην Αναγέννηση, η Χρυσή τομή αναζωπυρώθηκε από καλλιτέχνες και επιστήμονες όπως ο Leonardo da Vinci, ο οποίος την ονόμασε «θεία αναλογία» και την ενσωμάτωσε σε έργα του όπως ο Άνθρωπος του Βιτρούβιου.

Στα μαθηματικά, η Χρυσή τομή εμφανίζεται και στη σειρά Fibonacci, καθώς ο λόγος διαδοχικών όρων της σειράς πλησιάζει τον αριθμό φ. Σήμερα, η Χρυσή τομή συνεχίζει να γοητεύει μαθηματικούς, καλλιτέχνες και αρχιτέκτονες για τη συμμετρία και την αισθητική της ομορφιά.



*Εξαιρετικά παραδείγματα ακολουθίας Fibonacci στην Αρχιτεκτονική. Πάνω: Ταζ Μαχάλ (Ινδία) - Κάτω: Παρθενώνας (Ελλάδα)*

## Ανακεφαλαίωση (Μήκος)

Αν παράλληλες ευθείες ορίζουν ίσα τμήματα σε μια ευθεία, τότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε οποιαδήποτε άλλη ευθεία που τις τέμνει.

Αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μία άλλη πλευρά του τότε αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του.

Ο λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων είναι ίσος με το λόγο των μηκών τους, εφόσον έχουν μετρηθεί με την ίδια μονάδα μέτρησης

Τα ευθύγραμμα τμήματα  $\alpha$ ,  $\gamma$  είναι ανάλογα προς τα ευθύγραμμα τμήματα  $\beta$ ,  $\delta$  αν ισχύει:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}.$$

### Ιδιότητες αναλογιών

- Αν  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$  τότε  $\alpha\delta = \beta\gamma$ .
- Αν  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$  τότε  $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$   
και
- Αν  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$  τότε  $\frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha}$ .
- Αν  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$  τότε  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$ .

← Σε κάθε αναλογία τα «**χιαστί**» **γινόμενα** είναι ίσα, δηλαδή, το γινόμενο των άκρων όρων είναι ίσο με το γινόμενο των μέσων όρων.

← Αν εναλλάξουμε τους μέσους ή τους άκρους όρους, προκύπτει πάλι αναλογία.

← Αν δύο λόγοι είναι ίσοι τότε είναι ίσοι και με τον λόγο που έχει αριθμητή το άθροισμα των αριθμητών και παρονομαστή το άθροισμα των παρονομαστών.

### Χρήσιμα Συμπεράσματα:

Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών ενός τριγώνου, είναι:

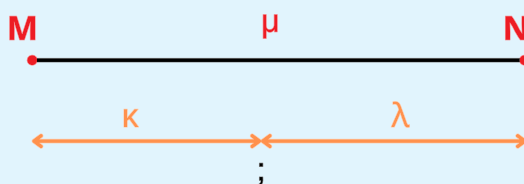
- παράλληλο προς την τρίτη πλευρά του και
- ίσο με το μισό της τρίτης πλευράς του.

Η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου, είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

## Αυτοαξιολόγηση (Μήκος)

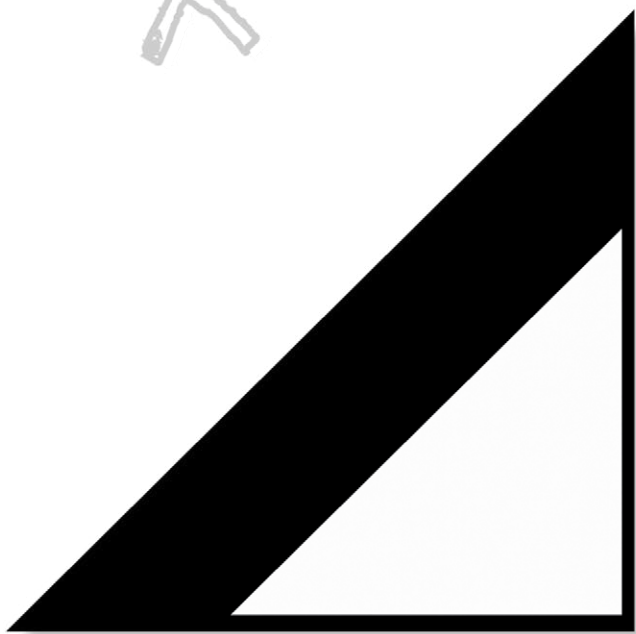
1. Για τις τρεις πλευρές  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  ενός τριγώνου γνωρίζουμε ότι ισχύει η αναλογία  $\frac{\alpha}{4} = \frac{\beta}{2} = \frac{\gamma}{3}$ . Επιπλέον γνωρίζουμε ότι η περίμετρος του τριγώνου είναι 30cm. Βρες τις πλευρές του τριγώνου.

2. Αξιοποιώντας τις ιδιότητες των αναλογιών διάρασε ένα ευθύγραμμο τμήμα με μήκος  $\mu$  σε δύο τμήματα  $\kappa$ ,  $\lambda$  που έχουν λόγο  $\frac{1}{4}$ .



Σε αυτό το σημείο, θα πρέπει να είσαι σε θέση να ικανοποιείς όλους τους προσδοκώμενους μαθησιακούς στόχους. Γύρνα στην αρχή της θεματικής ενότητας και σημείωσε  στα αντίστοιχα σημεία. Υπάρχουν στόχοι που αισθάνεσαι ότι δεν έχεις ικανοποιήσει πλήρως;

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$



# ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

## B.4

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε τους μετασχηματισμούς, όπως η ομοιότητα, η ομοιοθεσία και οι ιδιότητες ομοίων σχημάτων. Θα μάθουμε να αναγνωρίζουμε τη σχέση μεταξύ σχημάτων με ίδια μορφή αλλά διαφορετικό μέγεθος, να εφαρμόζουμε τις ιδιότητες ομοιότητας σε πραγματικά προβλήματα και να αξιοποιούμε ψηφιακά εργαλεία για τον σχεδιασμό γεωμετρικών σχημάτων.

Πώς σχετίζονται οι μετασχηματισμοί με την αρχιτεκτονική, τον σχεδιασμό αντικειμένων ή τη χαρτογραφία;

Είσαι έτοιμος/η να εξερευνήσεις τον κόσμο των γεωμετρικών μετασχηματισμών;



- Καθορίζω τα χαρακτηριστικά στοιχεία του μετασχηματισμού της μονοθεσίας.
- Αναγνωρίζω τη σχέση περιμέτρου και εμβαδού δύο ομοιόθετων σχημάτων αξιοποιώντας ψηφιακά εργαλεία ή τετραγωνισμένο χαρτί.
- Διαπιστώνω και περιγράφω μεγεθύνσεις και σμικρύνσεις μέσω της ομοιοθεσίας χρησιμοποιώντας μια ποικιλία εργαλείων.
- Αξιοποιώ την ομοιότητα τριγώνων στη μοντελοποίηση πραγματικών καταστάσεων.
- Διερευνώ και εντοπίζω τις ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά των ομοιόθετων σχημάτων.
- Αξιοποιώ τις ιδιότητες της ομοιοθεσίας ως προς κέντρο και λόγο ομοιοθεσίας στον σχεδιασμό σχημάτων και στην αιτιολόγηση των ιδιοτήτων τους.
- Σχεδιάζω ομοιόθετα και όμοια σχήματα χρησιμοποιώντας μια ποικιλία υλικών, εργαλείων και στρατηγικών.

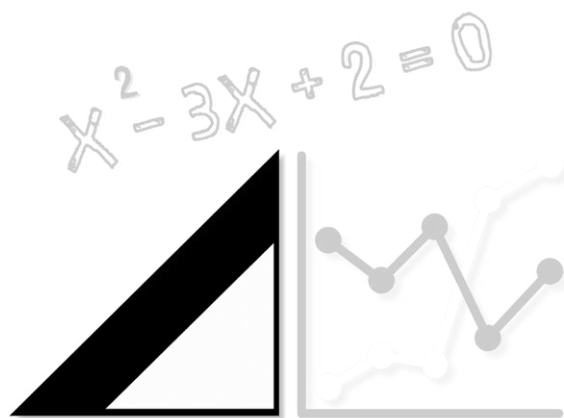


### 4.1: Ομοιοθεσία

### 4.2: Ομοιότητα, όμοια σχήματα

### 4.3: Όμοια τρίγωνα

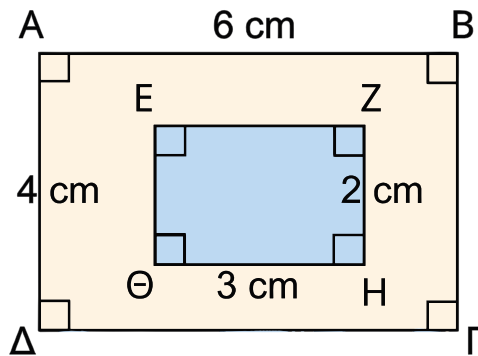
### + Ανακεφαλαίωση / Αυτοαξιολόγηση



# 4.1 | Ομοιοθεσία



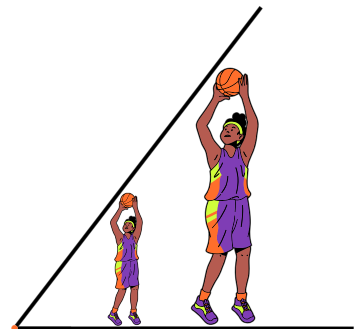
Παρατήρησε τα παρακάτω σχήματα. Τι παρατηρείς για τις πλευρές και τις γωνίες τους; Πώς θα περιέγραφες το σχήμα ΑΒΓΔ σε σχέση με το ΕΖΗΘ;



Έχουμε μελετήσει τους μετασχηματισμούς μεταφοράς, στροφής καθώς και τη συμμετρία των γεωμετρικών σχημάτων.

Οι μετασχηματισμοί αυτοί λέγονται **ισομετρίες** καθώς δεν αλλοιώνουν τις διαστάσεις και τα χαρακτηριστικά των σχημάτων στα οποία εφαρμόζονται, με το τελικό σχήμα να παραμένει ίσο με το αρχικό.

Υπάρχουν όμως και μετασχηματισμοί οι οποίοι αλλάζουν τις διαστάσεις των σχημάτων στα οποία εφαρμόζονται και προκαλούν μεγέθυνση ή σμίκρυνση σε αυτά. Ένας τέτοιος μετασχηματισμός είναι η **ομοιοθεσία**.

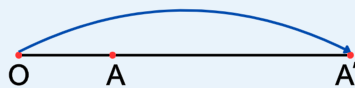


## Το ομοιόθετο σημείου

Αν έχουμε δύο σημεία Α και Ο, τότε το ομοιόθετο του σημείου Α ως προς κέντρο Ο και λόγο λ είναι ένα σημείο Α' στην ημιευθεία ΟΑ τέτοιο ώστε:

$$OA' = \lambda \cdot OA$$

$$OA' = \lambda OA$$



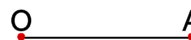
Η διαδικασία με την οποία βρίσκουμε το ομοιόθετο ενός σημείου με κέντρο  $O$  και λόγο  $\lambda$  ονομάζεται **ομοιοθεσία**.

- Το  $O$  λέγεται **κέντρο ομοιοθεσίας**.
- Ο αριθμός  $\lambda$  λέγεται **λόγος ομοιοθεσίας**.

**Παρατήρηση:** Το κέντρο ομοιοθεσίας  $O$  έχει ομοιόθετο τον εαυτό του.

**Παράδειγμα:**

Να βρεθεί το ομοιόθετο του σημείου  $A$ , ως προς το σημείο  $O$ ,



με λόγο ομοιοθεσίας:

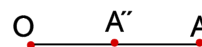
α)  $\lambda = 2$  και β)  $\lambda = \frac{1}{2}$ .

**Λύση:**

α) Το ομοιόθετο του σημείου  $A$  με κέντρο  $O$  και λόγο  $\lambda = 2$ , είναι το σημείο  $A'$  της ημιευθείας  $OA$ , για το οποίο ισχύει:  $OA' = 2 \cdot OA$ .



β) Το ομοιόθετο του σημείου  $A$  με κέντρο  $O$  και λόγο  $\lambda = \frac{1}{2}$ , είναι το σημείο  $A''$  της ημιευθείας  $OA$ , για το οποίο ισχύει:  $OA'' = \frac{1}{2} \cdot OA$ .



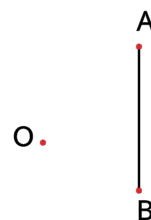
## Το ομοιόθετο ευθυγράμμου τμήματος

Το ομοιόθετο ενός ευθυγράμμου τμήματος  $AB$  ως προς ένα κέντρο  $O$  και λόγο  $\lambda$  είναι το ευθύγραμμο τμήμα  $A'B'$  με άκρα τα ομοιόθετα  $A'$  και  $B'$  των σημείων  $A$  και  $B$  ως προς το κέντρο  $O$ .

**Παράδειγμα:**

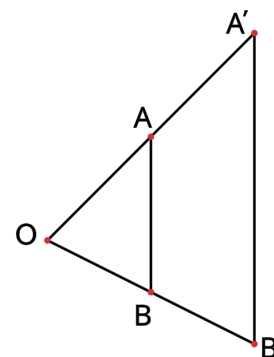
Να βρεθεί το ομοιόθετο του ευθύγραμμου τμήματος  $AB$ , ως προς το σημείο  $O$ , με λόγο ομοιοθεσίας:

α)  $\lambda = 2$  και β)  $\lambda = \frac{1}{2}$ .



**Λύση:**

α) Παίρνουμε  $OA' = 2 \cdot OA$  και  $OB' = 2 \cdot OB$  στις ημιευθείες  $OA$  και  $OB$  αντίστοιχα.



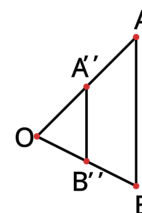
**Παρατήρηση:**

Αν συγκρίνουμε τα ομοιόθετα τμήματα  $A'B'$  και  $AB$ , διαπιστώνουμε ότι:

$$A'B' = 2 \cdot AB \text{ ή } \frac{A'B'}{AB} = 2.$$

Δηλαδή το  $A'B'$  έχει διπλάσιο μήκος από το  $AB$ .

β) Παίρνουμε  $OA'' = \frac{1}{2} \cdot OA$  και  $OB'' = \frac{1}{2} \cdot OB$  στις ημιευθείες  $OA$  και  $OB$  αντίστοιχα.



**Παρατήρηση:**

Αν συγκρίνουμε τα ομοιόθετα τμήματα  $A''B''$  και  $AB$ , διαπιστώνουμε ότι:

$$A''B'' = \frac{1}{2} \cdot AB \text{ ή } \frac{A''B''}{AB} = \frac{1}{2}.$$

Δηλαδή το  $A''B''$  έχει το μισό μήκος από το  $AB$ .

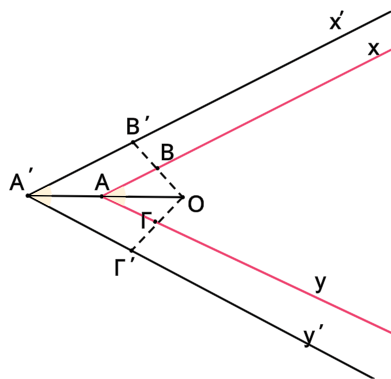
Ισχύει ότι:

Τα ομοιόθετα ευθύγραμμα τμήματα, που δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία, είναι **παράλληλα**.

## Το ομοιόθετο γωνίας

Το ομοιόθετο μιας γωνίας  $\hat{x}\hat{y}$ , με κέντρο  $O$  και λόγο έναν θετικό αριθμό  $\lambda$ , είναι η γωνία  $x'\hat{A}'y'$  που έχει:

- **Κορυφή** το ομοιόθετο  $A'$  του σημείου  $A$ , ως προς κέντρο  $O$  και λόγο  $\lambda$ .
- **Πλευρές** τις ημιευθείες  $A'x'$  και  $A'y'$ , για να προσδιορίσουμε τις οποίες επιλέγουμε δύο σημεία  $B$  και  $\Gamma$  στις πλευρές  $Ax$  και  $Ay$  αντίστοιχα και παίρνουμε τα ομοιόθετα  $B'$  και  $\Gamma'$  αυτών των σημείων, ως προς κέντρο  $O$  και λόγο  $\lambda$ . Τότε:
  - η πλευρά  $A'x'$  διέρχεται από το ομοιόθετο  $B'$
  - η πλευρά  $A'y'$  διέρχεται από το  $\Gamma'$ .



Ισχύει ότι:

Οι ομοιόθετες γωνίες είναι **ίσες**.

## Το ομοιόθετο πολυγώνου

Το ομοιόθετο ενός πολυγώνου  $\Pi$ , ως προς κέντρο  $O$  και λόγο έναν θετικό αριθμό  $\lambda$ , είναι το πολύγωνο  $\Pi'$  με κορυφές τα ομοιόθετα των κορυφών του  $\Pi$ , ως προς κέντρο  $O$  και λόγο  $\lambda$ .

**Παράδειγμα:** Να βρεθεί το ομοιόθετο του τετραπλεύρου  $AB\Gamma\Delta$ , ως προς το σημείο  $O$ , με λόγο ομοιοθεσίας:

α)  $\lambda = 2$  και β)  $\lambda = \frac{1}{2}$ .

**Λύση:**

α) Τα ομοιόθετα των κορυφών του πολυγώνου  $AB\Gamma\Delta$  με κέντρο  $O$  και λόγο  $\lambda = 2$ , σχηματίζουν το τετράπλευρο  $A'B'\Gamma'\Delta'$  που είναι το ομοιόθετο του  $AB\Gamma\Delta$  με λόγο  $\lambda = 2$ .

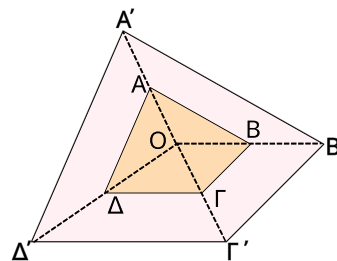
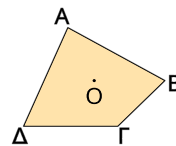
**Παρατήρηση:**

Είναι:

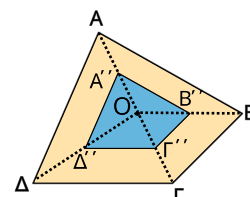
$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'\Gamma'}{B\Gamma} = \frac{\Gamma'\Delta'}{\Gamma\Delta} = \frac{\Delta'A'}{\Delta A} = 2 \text{ και}$$

$$\hat{A}' = \hat{A}, \hat{B}' = \hat{B}, \hat{\Gamma}' = \hat{\Gamma} \text{ και } \hat{\Delta}' = \hat{\Delta}.$$

Προκύπτει ότι το τετράπλευρο  $A'B'\Gamma'\Delta'$ , που είναι ομοιόθετο του  $AB\Gamma\Delta$  με λόγο  $\lambda = 2$ , είναι **μεγέθυνση** του  $AB\Gamma\Delta$ .



β) Τα ομοιόθετα των κορυφών του πολυγώνου ΑΒΓΔ με κέντρο Ο και λόγο  $\lambda = \frac{1}{2}$ , σχηματίζουν το τετράπλευρο Α''Β''Γ''Δ'' που είναι το ομοιόθετο του ΑΒΓΔ με λόγο  $\lambda = \frac{1}{2}$ .



**Παρατήρηση:**

$$\frac{A''B''}{AB} = \frac{B''C''}{BC} = \frac{C''D''}{CD} = \frac{D''A''}{DA} = \frac{1}{2} \text{ και}$$

$$\hat{A}'' = \hat{A}, \hat{B}'' = \hat{B}, \hat{C}'' = \hat{C} \text{ και } \hat{D}'' = \hat{D}.$$

Προκύπτει ότι το τετράπλευρο Α''Β''Γ''Δ'', που είναι ομοιόθετο του ΑΒΓΔ με λόγο  $\lambda = \frac{1}{2}$ , είναι **σμίκρυνση** του ΑΒΓΔ.

**Γενικά:**

Για δύο ομοιόθετα πολύγωνα Π και Π' με λόγο ομοιοθεσίας λ, ισχύουν τα εξής:

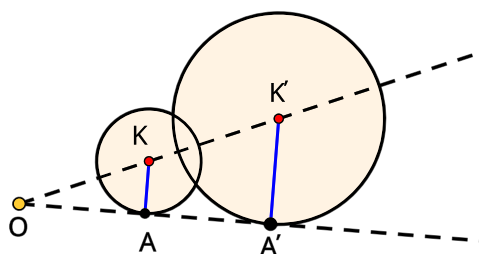
- Έχουν τις πλευρές τους ανάλογες.
- Έχουν τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.
- Οι αντίστοιχες πλευρές τους που δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία είναι παράλληλες.

**Επίσης,**

- Αν  $\lambda > 1$ , τότε το Π' είναι μεγέθυνση του Π.
- Αν  $0 < \lambda < 1$ , τότε το Π' είναι σμίκρυνση του Π.
- Αν  $\lambda = 1$ , τότε το Π' είναι ίσο με το Π.

## Το ομοιόθετο κύκλου

Το ομοιόθετο ενός κύκλου (Κ, ρ), ως προς κέντρο ομοιοθεσίας Ο με λόγο λ, είναι ένας κύκλος που έχει:



- **Κέντρο** το ομοιόθετο Κ' του σημείου Κ, ως προς κέντρο ομοιοθεσίας Ο και λόγο λ.
- **Ακτίνα** ρ' η οποία προσδιορίζεται ως εξής:  
Επιλέγουμε ένα σημείο Α του κύκλου (Κ, ρ) και παίρνουμε το ομοιόθετό του Α', ως προς κέντρο Ο με λόγο λ.  
Τότε  $\rho' = K'A'$ .

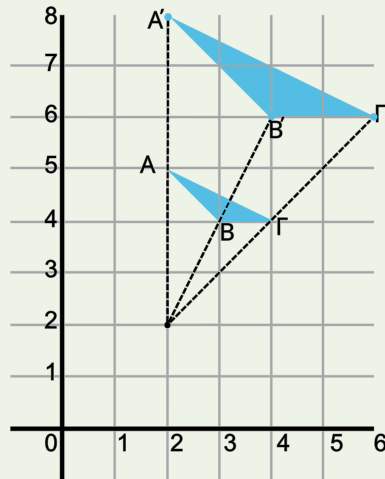
**Παρατήρηση:**

Αν ο κύκλος (Κ', ρ') είναι ομοιόθετος του κύκλου (Κ, ρ), με κέντρο ομοιοθεσίας Ο και λόγο λ, τότε για τις ακτίνες ισχύει ότι:

$$\rho' = \lambda \cdot \rho$$



1. Να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του κέντρου ομοιοθεσίας και τον λόγο λ.



**Λύση:**

- Το κέντρο ομοιοθεσίας O είναι το σημείο τομής των ευθειών AA', BB' και ΓΓ', δηλαδή το σημείο O(2, 2).
- Ο λόγος ομοιοθεσίας είναι:  $\lambda = \frac{OA'}{OA} = \frac{6}{3} = 2$ .

2. Να σχεδιάσετε το ομοίθετο τετραγώνου ABΓΔ πλευράς 2cm, με κέντρο ένα εσωτερικό του σημείο O του τετραγώνου και λόγο λ = 3. Τι σχήμα είναι το A'B'Γ'Δ';

**Λύση:**

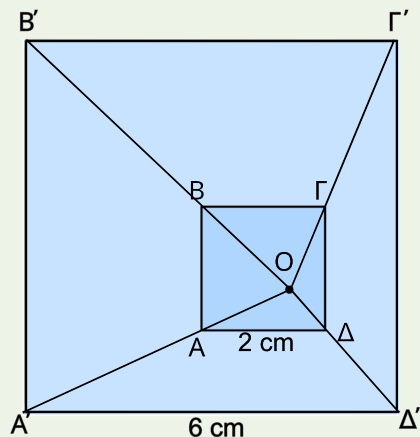
Στις ημιευθείες OA, OB, OG και OD παίρνουμε αντίστοιχα τα τμήματα:  $OA' = 3 \cdot OA$ ,  $OB' = 3 \cdot OB$ ,  $OG' = 3 \cdot OG$  και  $OD' = 3 \cdot OD$ .

Το τετράπλευρο A'B'Γ'Δ' είναι ομοίθετο του ABΓΔ με κέντρο O και λόγο λ = 3, οπότε:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'Γ'}{BΓ} = \frac{Γ'D'}{ΓΔ} = \frac{Δ'A'}{ΔA} = 3$$

Άρα  $A'B' = 3 \cdot AB = 3 \cdot 2 = 6\text{cm}$ . Ομοίως βρίσκουμε:

$$B'Γ' = Γ'D' = Δ'A' = 6\text{cm}$$



Άρα το τετράπλευρο A'B'Γ'Δ' έχει όλες τις πλευρές του ίσες και επειδή τα ομοίθετα σχήματα έχουν τις αντίστοιχες γωνίες του ίσες, θα έχει όλες τις γωνίες του ορθές.

Επομένως το τετράπλευρο A'B'Γ'Δ' είναι **τετράγωνο**.

**Γενικά:**

Το ομοίθετο ενός τετραγώνου είναι τετράγωνο.



**1** Χωρίζουμε το ευθύγραμμο τμήμα KZ σε 6 ίσα τμήματα. Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά.  
Στην ομοιοθεσία με κέντρο το σημείο K και λόγο:

α)  $\lambda = 2$ , το ομοιόθετο του A είναι το .....

β)  $\lambda = 2$ , το ομοιόθετο του B είναι το .....

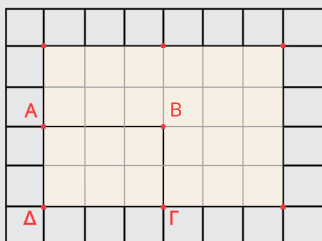
γ)  $\lambda = \frac{1}{2}$ , το ομοιόθετο του Z είναι το .....

δ)  $\lambda = \frac{4}{5}$ , το ομοιόθετο του E είναι το .....

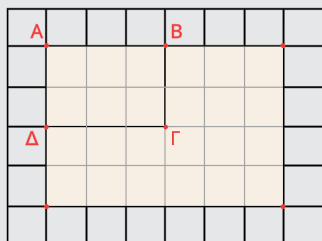


**2** Σε ποια από τις παρακάτω περιπτώσεις έχει σχεδιαστεί το ομοιόθετο του ABΓΔ με λόγο  $\lambda = 2$  και κέντρο ομοιοθεσίας το σημείο A;

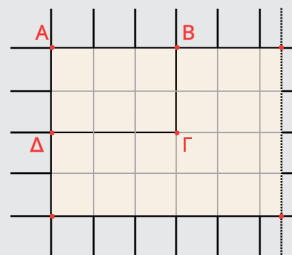
α)



β)



γ)



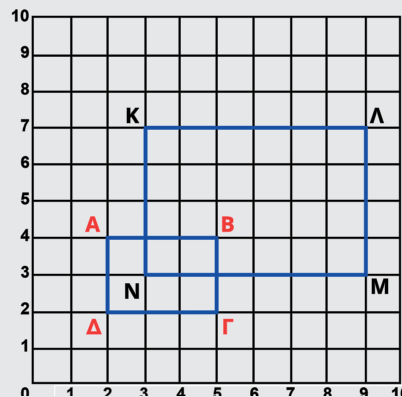
**3** Επίλεξε τη σωστή απάντηση.

Το ορθογώνιο KLMN είναι ομοιόθετο του ABΓΔ:

α) με κέντρο ομοιοθεσίας την αρχή των αξόνων και λόγο  $\lambda = 2$ .

β) με κέντρο ομοιοθεσίας το σημείο (1, 1) και λόγο  $\lambda = 2$ .

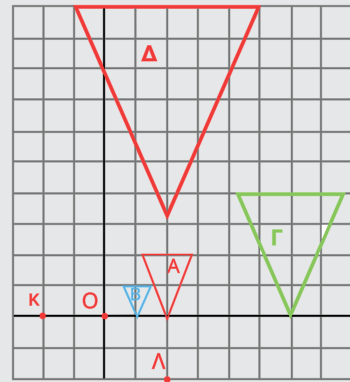
γ) με κέντρο ομοιοθεσίας το σημείο (1, 1) και λόγο  $\lambda = \frac{1}{2}$ .



4

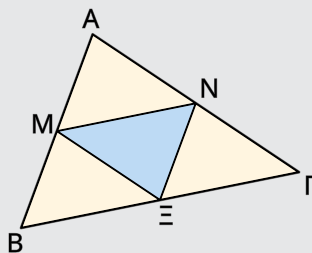
Στο παρακάτω σχήμα έχουμε σχεδιάσει τα ομοιόθετα τρίγωνα Β, Γ και Δ του τριγώνου Α. Συμπλήρωσε τον πίνακα:

| Αρχικό τρίγωνο | Τελικό τρίγωνο | Κέντρο ομοιοθεσίας | Λόγος ομοιοθεσίας |
|----------------|----------------|--------------------|-------------------|
| Α              | Β              | Ο                  |                   |
| Α              | Γ              | Κ                  |                   |
| Α              | Δ              | Λ                  |                   |



5

Στο τρίγωνο ΑΒΓ, τα Μ, Ν, Ξ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Συμπλήρωσε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

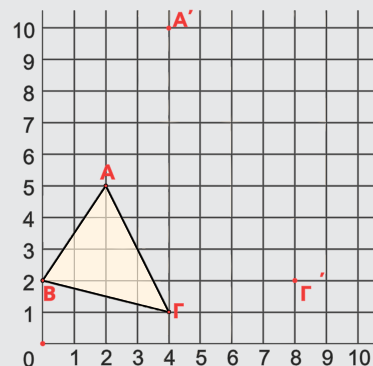


- α) Το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ είναι το ομοιόθετο του ΜΝ με κέντρο ομοιοθεσίας Α και λόγο  $\lambda = \dots\dots$
- β) Το ευθύγραμμο τμήμα ΝΞ είναι το ομοιόθετο του ΑΒ με κέντρο ομοιοθεσίας Γ και λόγο  $\lambda = \dots\dots$
- γ) Το ευθύγραμμο τμήμα  $\dots\dots$  είναι το ομοιόθετο του ΜΞ με κέντρο ομοιοθεσίας  $\dots$  και λόγο  $\lambda = 2$ .

6

Στο παρακάτω σχήμα τα σημεία Α' και Γ' είναι ομοιόθετα των κορυφών Α και Γ αντίστοιχα, ως προς κέντρο Κ με λόγο ομοιοθεσίας λ.

- α) Βρες το κέντρο Κ της ομοιοθεσίας.
- β) Βρες τον λόγο λ της ομοιοθεσίας.
- γ) Κατασκεύασε το ομοιόθετο Α'Β'Γ' του τριγώνου ΑΒΓ, ως προς κέντρο Κ με λόγο λ.





**7** Βρες το ομοίθετο ενός ορθογωνίου τριγώνου  $ΑΒΓ$ , ( $\hat{A} = 90^\circ$ ), με κέντρο ομοιοθεσίας την κορυφή  $A$  και λόγο  $\lambda = 3$ .

**8** Βρες το ομοίθετο ενός κύκλου  $(O, \rho)$  με κέντρο ομοιοθεσίας το κέντρο του κύκλου  $O$  και λόγο  $\lambda = \frac{1}{2}$ . Σύγκρινε το μήκος του κύκλου  $(O, \rho)$  με το μήκος του ομοίθετου κύκλου  $(O, \rho')$ .

**9** Σε τρίγωνο  $ΑΒΓ$  παίρνουμε σημεία  $\Delta$  και  $E$ , τέτοια ώστε  $ΑΔ = \frac{1}{3}ΑΒ$  και  $ΑΕ = \frac{1}{3}ΑΓ$ .  
 α) Είναι το τρίγωνο  $ΑΔΕ$  ομοίθετο του  $ΑΒΓ$ ; Αν ναι προσδιόρισε το κέντρο καθώς και τον λόγο ομοιοθεσίας.  
 β) Βρες τη σχέση ανάμεσα στα  $\Delta E$  και  $B\Gamma$ .

**10** Κατασκεύασε γωνία  $\chi\hat{A}\gamma = 75^\circ$ . Πάρε ένα σημείο  $O$  στο εσωτερικό της γωνίας και βρες την ομοίθετη  $\chi'\hat{A}'\gamma'$  της γωνίας  $\chi\hat{A}\gamma$  με κέντρο  $O$  και λόγο  $\lambda = 3$ . Επαλήθευσε με το μοιρογνωμόνιο την ισότητα των γωνιών.

Εξασκούμε

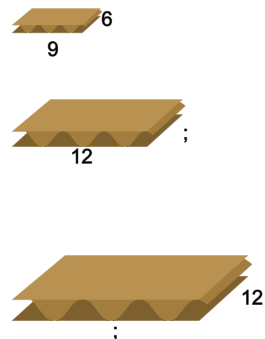


σε όσα έμαθα

## 4.2 | Ομοιότητα, όμοια σχήματα



Είναι η μέρα μετακόμισης! Στο χαρτοπωλείο πουλάνε κουτιά συσκευασίας σε διάφορα μεγέθη. Το μικρό κουτί έχει τα μεγέθη σημειωμένα, αλλά στα μεσαία και στα μεγάλα κουτιά λείπει μια διάσταση. Όλα τα κουτιά έχουν ανάλογες διαστάσεις. Μπορείς να προσδιορίσεις τα μεγέθη που λείπουν;

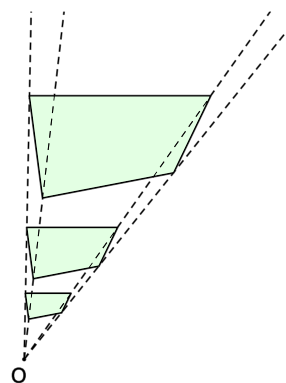


### Όμοια σχήματα

Αν έχουμε δύο πολύγωνα  $\Pi$  και  $\Pi'$  ώστε το ένα να είναι μεγέθυνση ή σμίκρυνση του άλλου ή είναι ίσα, τότε λέμε ότι είναι όμοια και συμβολίζουμε  $\Pi' \approx \Pi$ .

Γνωρίζουμε ότι αν έχουμε δύο ομοιόθετα πολύγωνα, τότε το ένα είναι μεγέθυνση ή σμίκρυνση του άλλου ή είναι ίσα. Συνεπώς:

Τα ομοιόθετα πολύγωνα είναι όμοια.



Αν όμως ένα πολύγωνο  $\Pi'$  δεν είναι ομοιόθετο ενός άλλου πολυγώνου  $\Pi$ , τότε για να διαπιστώσουμε αν είναι ομοίο του, αρκεί να δείξουμε ότι είναι ίσο με ένα ομοιόθετό  $\Pi''$  του  $\Pi$ . Τότε το  $\Pi'$  θα αποτελεί μεγέθυνση ή σμίκρυνση του  $\Pi$ , επομένως θα είναι όμοιο του.

#### Παράδειγμα:

Έστω ένα πολύγωνο  $\Pi'$  με μήκη πλευρών διπλάσια των πλευρών ενός άλλου πολυγώνου  $\Pi$ , τα οποία έχουν ίσες τις αντίστοιχες γωνίες τους.

Το ομοιόθετο  $\Pi''$  του  $\Pi$  με λόγο  $\lambda = 2$ , είναι ένα πολύγωνο ίσο με το  $\Pi'$ , αφού τα  $\Pi''$  και  $\Pi'$  έχουν τις αντίστοιχες πλευρές και γωνίες τους ίσες.

Τα ομοιόθετα πολύγωνα  $\Pi$  και  $\Pi''$  είναι όμοια, επομένως τα πολύγωνα  $\Pi$  και  $\Pi'$  είναι όμοια.

Αν έχουμε δύο όμοια πολύγωνα, τότε το ένα καθίσταται ομοιόθετο του άλλου ή μπορεί το ένα να είναι ίσο με ένα ομοιόθετο του άλλου.

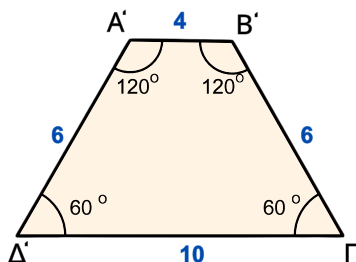
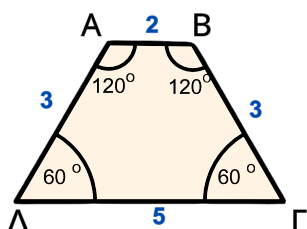
**Προκύπτει ότι:**

Αν δύο πολύγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, τότε είναι **όμοια**.

- Δύο οποιεσδήποτε αντίστοιχες πλευρές ομοίων πολυγώνων έχουν τον ίδιο λόγο, γι' αυτό ονομάζονται ομόλογες.
- Ο λόγος δύο αντίστοιχων πλευρών δύο ομοίων πολυγώνων λέγεται λόγος ομοιότητας.

**Παράδειγμα:**

Να δείξετε ότι τα πολύγωνα ABΓΔ και Α'Β'Γ'Δ' είναι όμοια.



**Λύση:** Τα πολύγωνα ABΓΔ και Α'Β'Γ'Δ', έχουν:

- **Πλευρές ανάλογες:**  $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'\Gamma'}{B\Gamma} = \frac{\Gamma'\Delta'}{\Gamma\Delta} = \frac{A'\Delta'}{A\Delta} = 2.$

Ο λόγος ομοιότητας του Α'Β'Γ'Δ' προς το ABΓΔ είναι  $\lambda = 2$ , που φανερώνει ότι οι πλευρές του Α'Β'Γ'Δ' έχουν διπλάσιο μήκος από αυτές του ABΓΔ.

- **Ίσες αντίστοιχες γωνίες:**  $\hat{A}' = \hat{A} = 120^\circ, \hat{B}' = \hat{B} = 120^\circ, \hat{\Gamma}' = \hat{\Gamma} = 60^\circ$  και  $\hat{\Delta}' = \hat{\Delta} = 60^\circ.$

Άρα είναι όμοια. Συμβολικά γράφουμε:  $AB\Gamma\Delta \approx A'B'\Gamma'\Delta'.$

**Αντίστροφα:**

Αν δύο πολύγωνα είναι όμοια, τότε έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.

**Λόγος περιμέτρων**

Αν έχουμε δύο όμοια πολύγωνα ABΓΔ και Α'Β'Γ'Δ' με λόγο ομοιότητας  $\lambda$ , τότε για τις πλευρές τους ισχύει:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'\Gamma'}{B\Gamma} = \frac{\Gamma'\Delta'}{\Gamma\Delta} = \frac{\Delta'A'}{\Delta A} = \lambda.$$

Από τις ιδιότητες αναλογιών έχουμε:

$$\frac{A'B' + B'\Gamma' + \Gamma'\Delta' + \Delta'A'}{AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A} = \lambda, \quad \text{δηλαδή: } \frac{(\text{περίμετρος του } A'B'\Gamma'\Delta')}{(\text{περίμετρος του } AB\Gamma\Delta)} = \lambda.$$

**Άρα:**

Ο λόγος των περιμέτρων δύο όμοιων πολυγώνων είναι ίσος με το λόγο ομοιότητάς τους.

Αν Π και Π' όμοια με λόγο ομοιότητας  $\lambda$ , τότε:  $\frac{(\text{περίμετρος του } \Pi')}{(\text{περίμετρος του } \Pi)} = \lambda.$

## Λόγος εμβαδών

Ας πάρουμε δύο όμοια ορθογώνια παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και Α'Β'Γ'Δ' με λόγο ομοιότητας λ. Για τα εμβαδά των δύο ορθογωνίων ισχύει:

- $(ΑΒΓΔ) = ΑΒ \cdot ΒΓ$  και
- $(Α'Β'Γ'Δ') = Α'Β' \cdot Β'Γ' = (λ \cdot ΑΒ) \cdot (λ \cdot ΒΓ) = λ^2 \cdot ΑΒ \cdot ΒΓ = λ^2 \cdot (ΑΒΓΔ)$ .

Άρα: 
$$\frac{(Α'Β'Γ'Δ')}{(ΑΒΓΔ)} = \frac{λ^2 \cdot (ΑΒΓΔ)}{(ΑΒΓΔ)} = λ^2.$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι, ο λόγος των εμβαδών των ομοίων αυτών ορθογωνίων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.

### Γενικά:

Ο **λόγος των εμβαδών** δύο ομοίων σχημάτων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.

Αν Π και Π' όμοια με λόγο ομοιότητας λ, τότε: 
$$\frac{(\text{εμβαδόν του } \Pi')}{(\text{εμβαδόν του } \Pi)} = λ^2.$$

## Κλίμακα

Μια μακέτα, ένα αρχιτεκτονικό σχέδιο ή ένας χάρτης παρουσιάζονται συνήθως σε σμίκρυνση ώστε να είναι εφικτή η αποτύπωση του αντικειμένου στο χαρτί, στο χώρο ή στην οθόνη ενός κινητού.

**Κλίμακα** είναι ο λόγος της απόστασης ενός συστήματος αναπαράστασης προς την αντίστοιχη πραγματική απόσταση.

Για παράδειγμα, κλίμακα 1:100 σημαίνει ότι ένα εκατοστό στο σχέδιο αντιστοιχεί σε 100cm στην πραγματικότητα.



Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση

1. Να αποδείξετε ότι όλα τα τετράγωνα είναι όμοια.

### Λύση:

α) Έστω τα τετράγωνα ΑΒΓΔ με πλευρά α και Α'Β'Γ'Δ' με πλευρά α'.

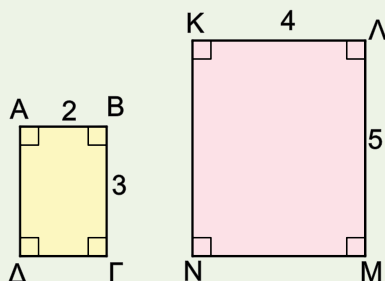
Τα τετράγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες και τις πλευρές τους ανάλογες:  $\frac{Α'Β'}{ΑΒ} = \frac{Β'Γ'}{ΒΓ} = \frac{Γ'Δ'}{ΓΔ} = \frac{Δ'Α'}{ΔΑ} = \frac{α'}{α}$   
Άρα είναι όμοια.

### Γενικά:

**Δυο κανονικά πολύγωνα που έχουν το ίδιο πλήθος πλευρών είναι όμοια.**

Δηλαδή όλα τα κανονικά 5-γωνα είναι όμοια όπως επίσης και όλα τα κανονικά 6-γωνα είναι όμοια κτλ.

2. Να εξετάσετε αν τα παρακάτω ορθογώνια είναι όμοια:

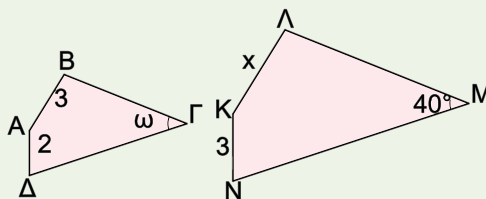


**Λύση:**

Είναι  $\frac{AB}{K\Lambda} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$  και  $\frac{B\Gamma}{\Lambda M} = \frac{3}{5} \neq \frac{1}{2}$ .

Άρα τα ορθογώνια ABΓΔ και KΛΜΝ δεν είναι όμοια διότι δεν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες.

3. Να βρείτε τους αριθμούς x (σε cm) και ω (σε μοίρες), αν τα παρακάτω τετράπλευρα ABΓΔ και KΛΜΝ είναι όμοια.



**Λύση:**

Τα τετράπλευρα είναι όμοια άρα έχουν:

- Ίσες γωνίες. Επομένως  $\omega = 40^\circ$ .
- Ανάλογες πλευρές. Άρα είναι  $\frac{A\Delta}{K\Lambda} = \frac{AB}{K\Lambda}$  ή  $\frac{2}{3} = \frac{3}{x}$  από την σχέση αυτή, με χιαστί, προκύπτει ότι:  

$$2 \cdot x = 3 \cdot 3$$

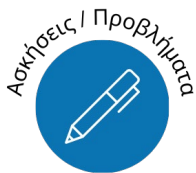
$$2x = 9$$

$$x = 4,5\text{cm}$$

Εξασκούμε



σε όσα έμαθα



1

Χαρακτήρισε ως Σωστές ή Λάθος τις προτάσεις που ακολουθούν βάζοντας ένα x στην κατάλληλη θέση.

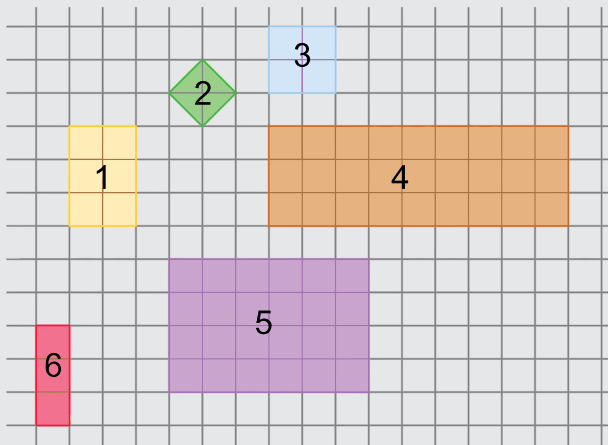
- α) Τα κανονικά πολύγωνα με ίδιο πλήθος πλευρών είναι όμοια.
- β) Δύο τετράγωνα είναι όμοια.
- γ) Δύο ρόμβοι είναι σχήματα όμοια.
- δ) Αν δύο πολύγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες, τότε είναι όμοια.
- ε) Ο λόγος των περιμέτρων δύο όμοιων πολυγώνων είναι ίσος με το λόγο ομοιότητας τους.
- στ) Ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων πολυγώνων είναι ίσος με το λόγο ομοιότητας τους.

Σωστό      Λάθος

|  |  |
|--|--|
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

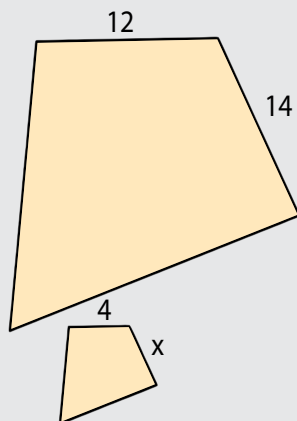
2

Ποια από τα παρακάτω πολύγωνα είναι όμοια;



3

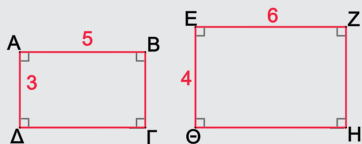
Βρες τον αριθμό x αν γνωρίζεις ότι τα παρακάτω τετράπλευρα είναι όμοια.



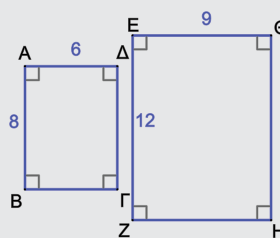
4

Εξέτασε αν τα παραλληλόγραμμα που δίνονται παρακάτω είναι όμοια.

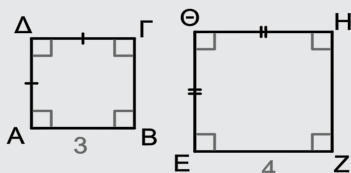
α)



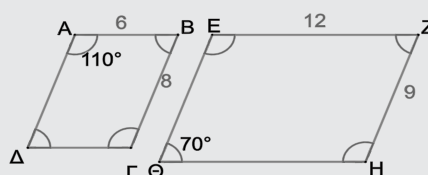
β)



γ)

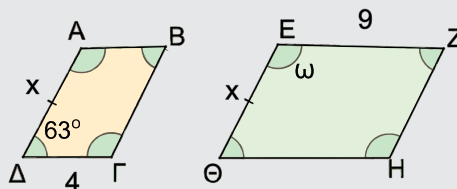


δ)



5

Υπολόγισε τη γωνία  $\omega$  και την πλευρά  $x$  αν γνωρίζεις ότι τα παραλληλόγραμμα  $ΑΒΓΔ$  και  $ΕΖΗΘ$  είναι όμοια.



6

Έστω δύο τετράγωνα  $ΑΒΓΔ$  και  $Α'Β'Γ'Δ'$  με πλευρές  $a$  και  $a'$  αντίστοιχα. Ο λόγος ομοιότητας του  $Α'Β'Γ'Δ'$  προς το  $ΑΒΓΔ$  είναι  $\lambda$ . Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα:

| Πλευρά $a$ | Πλευρά $a'$ | Λόγος ομοιότητας $\lambda$ | Λόγος περιμέτρων | Λόγος εμβαδών  |
|------------|-------------|----------------------------|------------------|----------------|
| 1          | 3           |                            |                  |                |
|            | 6           | $\frac{2}{3}$              |                  |                |
| 10         |             |                            | $\frac{1}{2}$    |                |
|            | 20          |                            |                  | $\frac{4}{25}$ |

7

Έστω δύο όμοια πολύγωνα  $\Pi$  και  $\Pi'$ .

α) Υποθέτουμε ότι το  $\Pi$  έχει πλευρά 4 cm και περίμετρο 16cm ενώ το  $\Pi'$  έχει πλευρά 6 cm. Υπολόγισε την περίμετρο του  $\Pi'$ .

β) Υποθέτουμε ότι το  $\Pi$  έχει περίμετρο 15 cm και εμβαδό 10 cm<sup>2</sup> ενώ το  $\Pi'$  έχει περίμετρο 21 cm. Υπολόγισε το εμβαδό του  $\Pi'$ .

γ) Υποθέτουμε ότι το  $\Pi$  έχει εμβαδό 25 cm<sup>2</sup> και περίμετρο 20 cm ενώ το  $\Pi'$  έχει εμβαδό 36 cm<sup>2</sup>. Υπολόγισε την περίμετρο του  $\Pi'$ .

8

Ένας ουρανοξύστης έχει ύψος 300m. Ένα όμοιο μοντέλο του ουρανοξύστη, σε μικρότερη κλίμακα, έχει ύψος 15cm.



α) Πόσο είναι το μήκος της πραγματικής βάσης του ουρανοξύστη, αν η βάση του μοντέλου έχει μήκος 3cm;

β) Αν υπάρχει ένα δέντρο στην περιοχή κοντά στον ουρανοξύστη με ύψος 12m, πόσο θα έπρεπε να είναι το ύψος του μικρότερου μοντέλου του δέντρου;

γ) Ένα τρένο έχει μήκος 2 cm και είναι μοντέλο ενός πραγματικού τρένου. Πόσο είναι το πραγματικό μήκος του τρένου;

9

Έστω παραλληλόγραμμο  $ΑΒΓΔ$  με κέντρο  $Ο$ . Στις προεκτάσεις των  $ΟΑ$ ,  $ΟΒ$ ,  $ΟΓ$  και  $ΟΔ$  παίρνουμε σημεία  $Α'$ ,  $Β'$ ,  $Γ'$  και  $Δ'$  έτσι ώστε  $ΑΑ' = ΟΑ$ ,  $ΒΒ' = ΟΒ$ ,  $ΓΓ' = ΟΓ$  και  $ΔΔ' = ΟΔ$ . Δείξε ότι τα παραλληλόγραμμο  $ΑΒΓΔ$  και  $Α'Β'Γ'Δ'$  είναι όμοια και βρες τον λόγο ομοιότητάς τους.



10

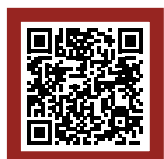
Ένα κατάστημα προσφέρει μία διακοσμητική μακέτα του Παρθενώνα μήκους 5cm και πλάτους 11,3cm. Αν το μήκος του Παρθενώνα είναι 30,8 m τότε πόσο είναι το πλάτος του;

Εξασκούμε

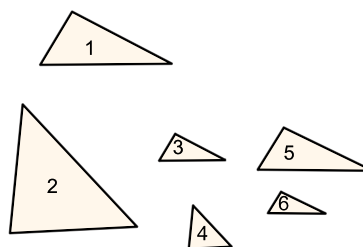


σε όσα έμαθα

## 4.3 | Όμοια τρίγωνα.

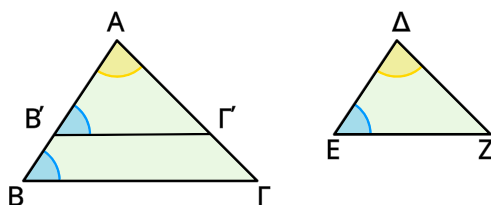


Προσπάθησε να βρες στο διπλανό σχήμα τα ζευγάρια των όμοιων τριγώνων. Ποια στρατηγική θα ακολουθήσεις;



### Όμοια τρίγωνα

Έστω δύο τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  τα οποία έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία.



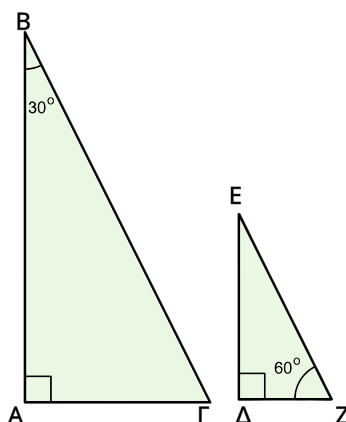
Αν τοποθετήσουμε το τρίγωνο  $\Delta EZ$  πάνω στο  $AB\Gamma$ , ώστε η γωνία  $\hat{\Delta}$  να συμπίσει με την ίση της γωνία  $\hat{A}$ , τότε η πλευρά  $EZ$  θα συμπίσει με τη  $B'\Gamma'$ . Αποδεικνύεται ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ομοιόθετο του  $AB'\Gamma'$  με κέντρο ομοιοθεσίας το  $A$ , άρα είναι όμοια επομένως και τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  είναι όμοια.

Επίσης, αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε θα έχουν και την τρίτη γωνία τους ίση (προκύπτει από το άθροισμα γωνιών τριγώνου). Άρα:

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι **όμοια**.

#### Παράδειγμα:

Να δείξετε ότι τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  είναι όμοια.



Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση

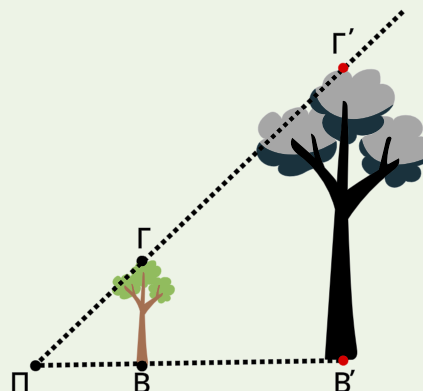
**Λύση:** Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου  $\Delta EZ$ , προκύπτει ότι:  $\hat{E} = 180^\circ - (90^\circ + 60^\circ) = 30^\circ$ .

Τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία ( $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$  και  $\hat{B} = \hat{E} = 30^\circ$ ). Άρα είναι όμοια:  $AB\Gamma \approx \Delta EZ$ .

Χρησιμοποιώντας όμοια τρίγωνα μπορούμε να υπολογίσουμε τις διαστάσεις ενός σχήματος μετρώντας τις διαστάσεις ενός μικρότερου που είναι όμοιο με αυτό. Το μικρότερο αυτό σχήμα θα έχει τις ίδιες γωνίες με το αρχικό, επομένως οι διαστάσεις του αρχικού προκύπτουν αν πολλαπλασιάσουμε τις αντίστοιχες διαστάσεις του μικρότερου με το λόγο ομοιότητας των δύο σχημάτων.



1. Στο παρακάτω σχήμα, η απόσταση του Π (παρατηρητή) από το Β (βάση του δέντρου) είναι  $PB = 4m$  και το ύψος του μικρού δέντρου είναι  $BΓ = 5m$ . Να βρείτε το ύψος  $B'Γ'$  του μεγάλου δέντρου, αν γνωρίζετε ότι η σκιά του είναι  $PB' = 15m$  (υποθέτουμε ότι το δέντρο και η σκιά του σχηματίζουν ορθή γωνία με το έδαφος).



**Λύση:**

Τα τρίγωνα  $PBΓ$  και  $PB'Γ'$  είναι όμοια γιατί έχουν δύο γωνίες ίσες ( $\hat{P}$  κοινή και  $\hat{B} = \hat{B}' = 90^\circ$ ), άρα θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες, δηλαδή:

$$\frac{B'Γ'}{PB'} = \frac{BΓ}{PB}$$

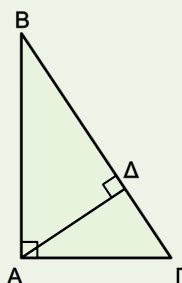
$$\text{ή } \frac{B'Γ'}{15} = \frac{5}{4}$$

$$\text{ή } 4 \cdot B'Γ' = 75$$

$$\text{ή } B'Γ' = 18,75.$$

Επομένως το ύψος του δέντρου είναι 18,75m.

2. Να αποδείξετε ότι όλα τα τρίγωνα που σχηματίζονται στο παρακάτω σχήμα είναι όμοια.



**Λύση:**

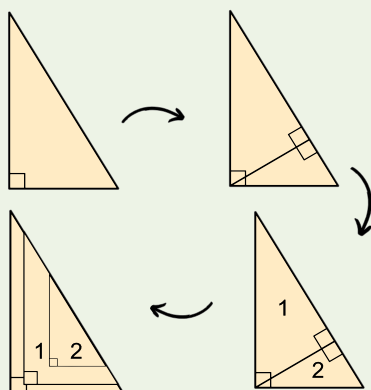
- Τα τρίγωνα  $ABΔ$  και  $ABΓ$  έχουν  $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$  και η  $\hat{B}$  είναι κοινή γωνία. Άρα είναι όμοια:  
 $AB\hat{\Delta} \approx AB\hat{\Gamma}$ .
- Τα τρίγωνα  $AΓΔ$  και  $ABΓ$  έχουν  $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$  και η  $\hat{\Gamma}$  είναι κοινή γωνία. Άρα είναι όμοια:  
 $A\hat{\Gamma}\hat{\Delta} \approx AB\hat{\Gamma}$ .
- Τα τρίγωνα  $ABΔ$  και  $AΓΔ$  έχουν  $\hat{\Delta} = 90^\circ$  και  $\hat{\Gamma} = B\hat{\Delta} (= 90^\circ - \hat{B}$ , που προκύπτει από το άθροισμα γωνιών των τριγώνων  $ABΓ$  και  $ABΔ$ ). Άρα είναι όμοια:  
 $A\hat{\Gamma}\hat{\Delta} \approx AB\hat{\Delta}$ .

β' τρόπος: Είναι  $\hat{A}\hat{B}\hat{\Delta} \approx \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$  και  $\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{\Delta} \approx \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ , άρα  $\hat{A}\hat{B}\hat{\Delta} \approx \hat{A}\hat{\Gamma}\hat{\Delta}$ .

Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση



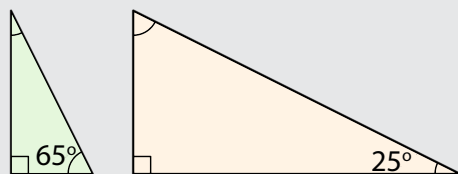
Εξασκούμε



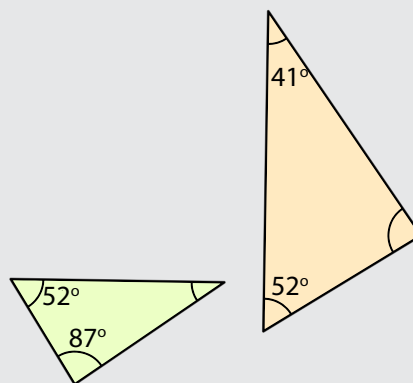
σε όσα έμαθα

**1** Εξέτασε αν είναι όμοια τα παρακάτω τρίγωνα:

α)

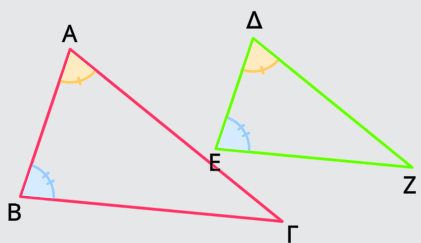


β)

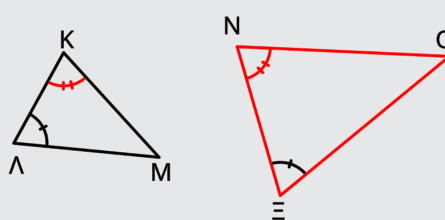


**2** Εξέτασε αν τα παρακάτω τρίγωνα είναι όμοια και γράψε τους ίσους λόγους που προκύπτουν για τις πλευρές τους.

α)

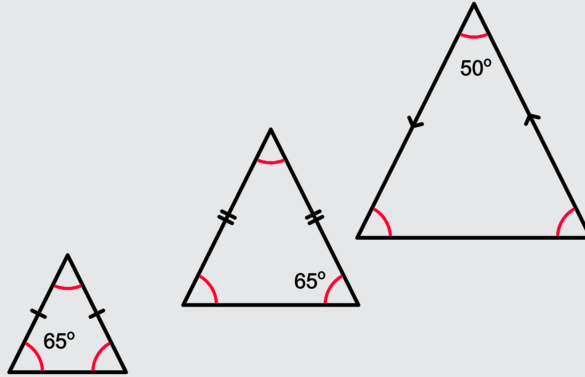


β)



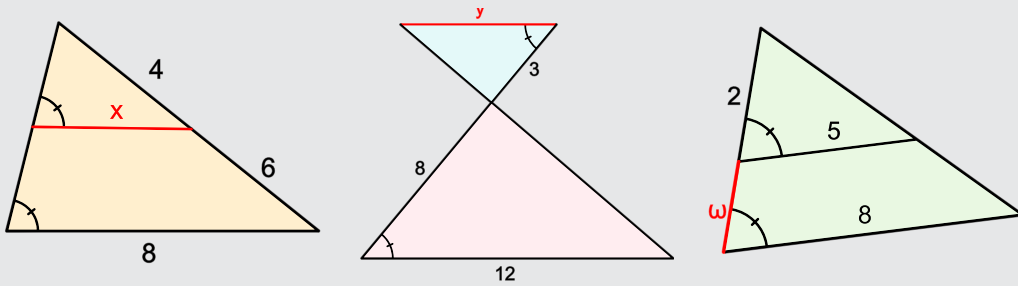
3

Εξήγησε γιατί τα παρακάτω ισοσκελή τρίγωνα είναι όμοια.



4

Υπολόγισε την σημειωμένη πλευρά στα παρακάτω σχήματα:



5

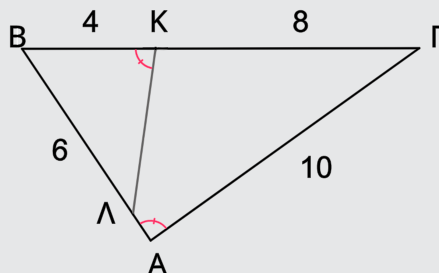
Η σκιά ενός μπουκαλιού στο έδαφος είναι 1,5m. Ταυτόχρονα, η σκιά ενός κτιρίου ύψους 20m που βρίσκεται κοντά στο μπουκάλι είναι 100m.

α) Πόσο είναι το ύψος του μπουκαλιού;

β) Αν ένα δέντρο που βρίσκεται δίπλα στο κτίριο δημιουργεί σκιά 20 μέτρων, ποιο είναι το πραγματικό του ύψος;

6

Βρες το μήκος των τμημάτων ΚΛ και ΑΛ στο παρακάτω σχήμα.



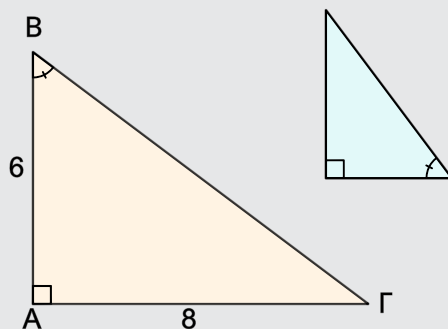
Εξασκούμε



σε όσα έμαθα

7

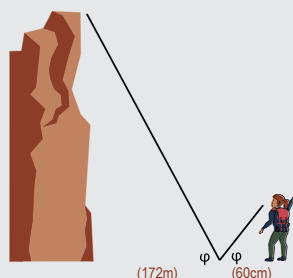
Βρες τις πλευρές στο παρακάτω τρίγωνο, αν γνωρίζεις ότι έχει περίμετρο 12cm και είναι όμοιο του ABΓ.



8

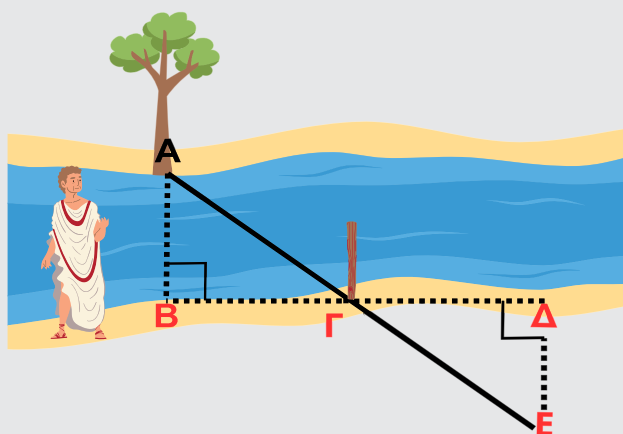
Η ορειβάτης υπολογίζει το ύψος ενός γκρεμού που σκοπεύει να ανέβει ως εξής:

Τοποθετεί έναν καθρέφτη στο έδαφος για να μπορεί να δει την κορυφή του γκρεμού στον καθρέφτη ενώ στέκεται ίσια. Οι γωνίες που σχηματίζονται από τις φωτεινές ακτίνες είναι ίσες, όπως φαίνεται στο σχήμα. Στη συνέχεια μετρά την απόστασή του από τον καθρέφτη (60cm) και την απόσταση του καθρέφτη από τη βάση του γκρεμού (172m). Αν η ορειβάτης έχει ύψος 1,80m, πόσο ψηλός είναι ο γκρεμός;



9

Ο Θαλής, ένας αξιολάβαστος μαθηματικός, συναντάει ένα ορμητικό ποτάμι ενώ ταξιδεύει στη ζούγκλα. Για να καταλάβει πώς να περάσει το ποτάμι θέλει να μάθει το πλάτος του. Ο Θαλής εντοπίζει ένα δέντρο στο σημείο A ακριβώς απέναντι από το ποτάμι. Σημειώνει το σημείο και μετά περπατά 28 βήματα προς το σημείο Γ όπου καρφώνει έναν πάσσαλο. Στη συνέχεια περπατά επιπλέον 10 βήματα πριν στρίψει κάθετα στο ποτάμι και περπατήσει μέχρι να δει τον πάσσαλο να ευθυγραμμίζεται με το σημείο A. Αυτή η απόσταση είναι 14 βήματα. Πόσα βήματα είναι το πλάτος του ποταμού;

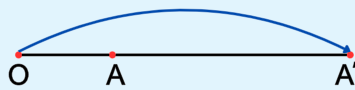


## Ανακεφαλαίωση (Μετασχηματισμοί)

Αν έχουμε δύο σημεία  $A$  και  $O$ , τότε το ομοιόθετο του σημείου  $A$  ως προς κέντρο  $O$  και λόγο  $\lambda$  είναι ένα σημείο  $A'$  στην ημιευθεία  $OA$  τέτοιο ώστε:

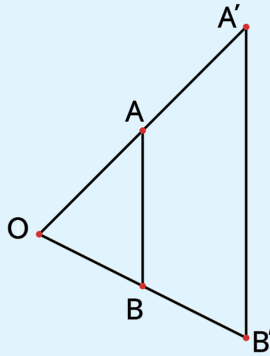
$$OA' = \lambda \cdot OA$$

$$OA' = \lambda OA$$

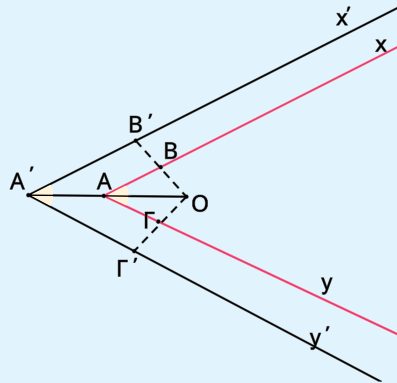


Το ομοιόθετο ενός ευθυγράμμου τμήματος  $AB$  ως προς ένα κέντρο  $O$  και λόγο  $\lambda$  είναι το ευθύγραμμο τμήμα  $A'B'$  με άκρα τα ομοιόθετα  $A'$  και  $B'$  των σημείων  $A$  και  $B$  ως προς το κέντρο  $O$ .

Τα ομοιόθετα ευθύγραμμο τμήματα, που δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία, είναι **παράλληλα**.



Οι ομοιόθετες γωνίες είναι ίσες.



Για δύο ομοιόθετα πολύγωνα  $\Pi$  και  $\Pi'$  με λόγο ομοιοθεσίας  $\lambda$ , ισχύουν τα εξής:

- έχουν τις πλευρές τους ανάλογες.
- έχουν τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.
- οι αντίστοιχες πλευρές τους που δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία είναι παράλληλες.

**Τα ομοιόθετα πολύγωνα είναι όμοια.**

### Γενικά ισχύει:

Αν δύο πολύγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, τότε είναι **όμοια**.

Αν δύο πολύγωνα είναι όμοια, τότε έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.

Ο **λόγος των περιμέτρων** δύο όμοιων πολυγώνων είναι ίσος με το λόγο ομοιότητάς τους.

$$\text{Αν } \Pi \text{ και } \Pi' \text{ } \acute{\omicron}\mu\omicron\iota\alpha \text{ με } \acute{\omicron}\mu\omicron\iota\omicron\tau\eta\tau\alpha\varsigma \lambda, \text{ } \acute{\omicron}\tau\omicron\tau\epsilon: \frac{(\text{π\epsilon\rho\iota\mu\epsilon\rho\rho\varsigma \tau\omicron\upsilon} \Pi')}{(\text{π\epsilon\rho\iota\mu\epsilon\rho\rho\varsigma \tau\omicron\upsilon} \Pi)} = \lambda$$

Ο **λόγος των εμβαδών** δύο όμοιων σχημάτων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.

$$\text{Αν } \Pi \text{ και } \Pi' \text{ } \acute{\omicron}\mu\omicron\iota\alpha \text{ με } \acute{\omicron}\mu\omicron\iota\omicron\tau\eta\tau\alpha\varsigma \lambda, \text{ } \acute{\omicron}\tau\omicron\tau\epsilon: \frac{(\text{\epsilon\mu\beta\alpha\delta\omicron\nu \tau\omicron\upsilon} \Pi')}{(\text{\epsilon\mu\beta\alpha\delta\omicron\nu \tau\omicron\upsilon} \Pi)} = \lambda^2$$

### Ειδικά:

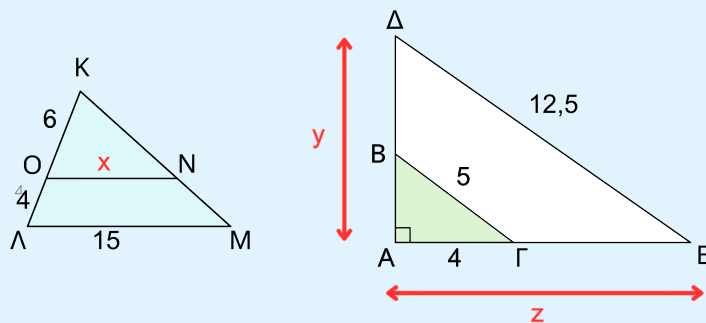
Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια.

## Αυτοαξιολόγηση (Μετασχηματισμοί)

**A.** Βρες την απόσταση ανάμεσα στο Πετροχώρι και το Ασημοχώρι αν στον χάρτη έχουν απόσταση 12cm και ο χάρτης έχει σχεδιαστεί με κλίμακα 4cm:21km.

**B.** Ο Χρήστος θα χρειαστεί να σμικρύνει ένα τριγωνικό σχέδιο διαστάσεων 16, 16 και 20dm. Αν η μεγαλύτερη πλευρά πρέπει να είναι 15cm, τι μήκος θα έχουν οι άλλες δύο;

**Γ.** Βρες την άγνωστη ποσότητα στα παρακάτω σχήματα. Γνωρίζουμε ότι τα τρίγωνα ΚΛΜ και ΚΟΝ είναι όμοια, όπως αντίστοιχα και τα ΑΔΕ και ΑΒΓ.

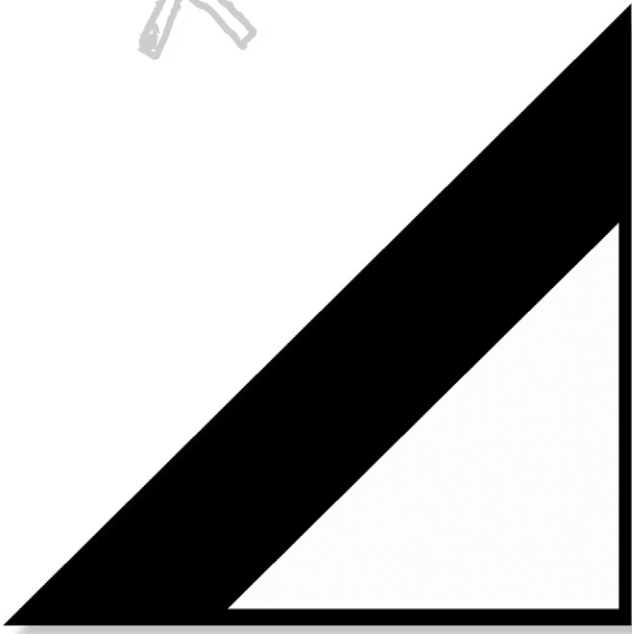


### Ομαδική δραστηριότητα

Ο μύθος λέει ότι ο Ναπολέων, κατά τη διάρκεια μιας εκστρατείας, χρειάστηκε να προσδιορίσει το πλάτος ενός ποταμιού. Ένας νεαρός στρατιώτης, για να λύσει το πρόβλημα, στάθηκε απευθείας απέναντι από το ρεύμα και ρύθμισε το γείσο του καπέλου του μέχρι η άκρη του γείσου να ευθυγραμμιστεί με το μάτι του και την απέναντι όχθη. Στη συνέχεια έκανε αναστροφή και σημείωσε το σημείο στο έδαφος που τώρα βρισκόταν στην ίδια ευθεία με το μάτι του και την άκρη του γείσου. Μέτρησε την απόσταση μέχρι αυτό το σημείο, έκανε την αναφορά του και κέρδισε μια προαγωγή. Σχεδίασε ένα διάγραμμα για να εξηγήσεις την μέθοδο του στρατιώτη.

Σε αυτό το σημείο, θα πρέπει να είσαι σε θέση να ικανοποιείς όλους τους προσδοκώμενους μαθησιακούς στόχους. Γύρνα στην αρχή της θεματικής ενότητας και σημείωσε ✓ στα αντίστοιχα σημεία. Υπάρχουν στόχοι που αισθάνεσαι ότι δεν έχεις ικανοποιήσει πλήρως;

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$



# ΕΜΒΑΔΟΝ

B.5

Αυτή η ενότητα σχετίζεται με τον υπολογισμό των εμβαδών στερεών, όπως ορθών πρισμάτων, πυραμίδων, κυλίνδρων, κώνων και σφαιρών. Θα μάθουμε να χρησιμοποιούμε τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των σχημάτων αυτών για την κατανόηση και την επίλυση προβλημάτων πραγματικής ζωής.

Πώς μπορείς να υπολογίσεις το εμβαδόν ενός κτιρίου, μιας δεξαμενής ή μιας οροφής;

Είσαι έτοιμος/η να ανακαλύψεις τη χρησιμότητα της γεωμετρίας και να επιλύσεις πρακτικά προβλήματα με ακρίβεια και δημιουργικότητα;



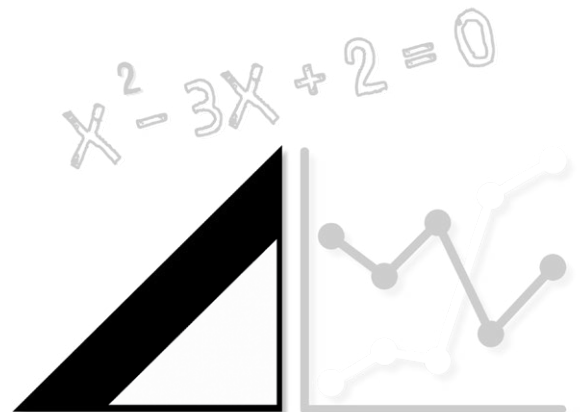
- Αξιοποιώ τα αναπτύγματα ορθών πρισμάτων, πυραμίδων, κυλίνδρων και κώνων για να προσδιορίσω το εμβαδόν της επιφάνειάς τους.
- Επιλύω προβλήματα υπολογισμού του εμβαδού της επιφάνειας ορθού πρίσματος, πυραμίδας, κυλίνδρου, κώνου και σφαίρας.



**5.1: Εμβαδά επιφάνειας στερεών (ορθών πρισμάτων, πυραμίδας).**

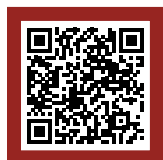
**5.2: Εμβαδά επιφάνειας στερεών (κυλίνδρου, κώνου, σφαίρας).**

+ Ανακεφαλαίωση / Αυτοαξιολόγηση

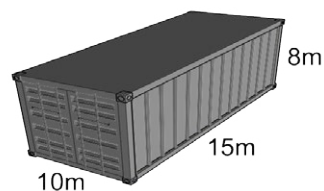


## 5.1 | Εμβαδά επιφάνειας στερεών (ορθών πρισμάτων, πυραμίδας).

Εξερευνώ



Πώς θα υπολόγιζες το κόστος κατασκευής της διπλανής δεξαμενής, αν γνωρίζεις ότι ένα τετραγωνικό μέτρο από έλασμα χάλυβα κοστίζει 9,80€;

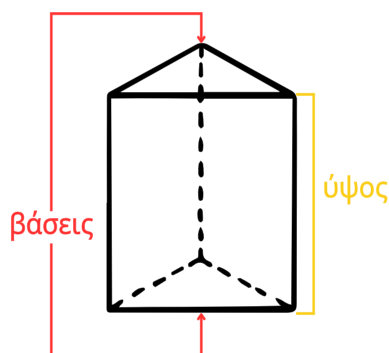


### Ορθό πρίσμα



**Ορθό πρίσμα** ή απλά **πρίσμα** είναι ένα στερεό σώμα που έχει:

- δύο παράλληλες έδρες που είναι ίσα πολύγωνα και λέγονται βάσεις του πρίσματος και
- τις άλλες έδρες του που είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα και λέγονται παράπλευρες έδρες.



Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση

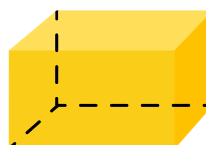
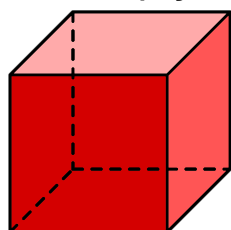
Η απόσταση των δύο βάσεων, που είναι ίση με το ύψος μιας παράπλευρης έδρας, λέγεται **ύψος** του πρίσματος.

Δύο από τα βασικότερα ορθά πρίσματα είναι:

ο κύβος

και

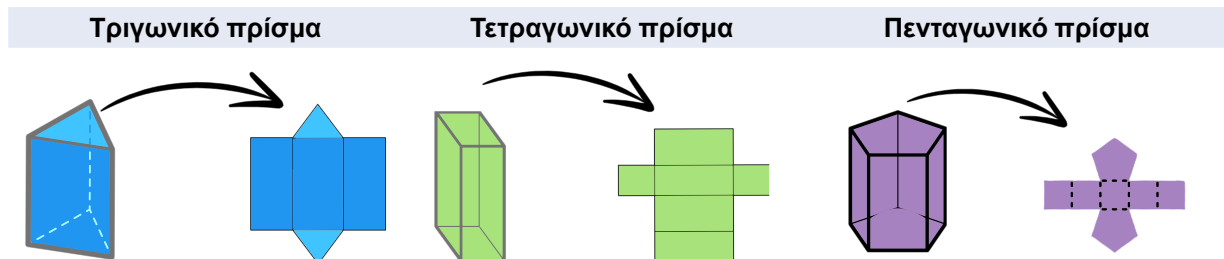
το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.



## Εμβαδόν επιφάνειας πρίσματος

Το **ανάπτυγμα** ενός πρίσματος, δηλαδή η επιφάνεια που προκύπτει αν «ξεδιπλώσουμε» το πρίσμα, αποτελείται:

- από την **παράπλευρη επιφάνεια**, που είναι ορθογώνιο του οποίου η μία διάσταση είναι η περίμετρος της βάσης του πρίσματος και η άλλη το ύψος του πρίσματος και
- από τις επιφάνειες των δύο **βάσεων** του.



Επομένως:

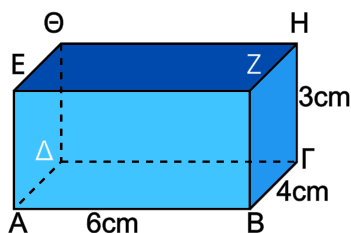
Το **εμβαδόν της παράπλευρης** επιφάνειας ενός πρίσματος ( $E_{\pi}$ ) ισούται με το γινόμενο της περιμέτρου της βάσης επί το ύψος του πρίσματος. Δηλαδή:

$$E_{\pi} = (\text{περίμετρος βάσης}) \cdot (\text{ύψος})$$

Το **ολικό εμβαδόν** ενός πρίσματος ( $E_{ολ}$ ) ισούται με το άθροισμα του εμβαδού της παράπλευρης επιφάνειας και του εμβαδού των δύο βάσεων. Δηλαδή:

$$E_{ολ} = E_{\pi} + 2 \cdot E_{\beta}$$

**Παράδειγμα:** Δίνεται το παρακάτω ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με  $AB = 6\text{cm}$ ,  $B\Gamma = 4\text{cm}$  και  $\Gamma\text{H} = 3\text{cm}$ . Να υπολογίσετε το εμβαδόν του.



**Λύση:**

Θεωρούμε ως βάσεις τα ορθογώνια  $AB\Gamma\Delta$  και  $EZH\Theta$ . Το ύψος του πρίσματος είναι ίσο με  $3\text{cm}$ .

- Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειάς του είναι:

$$\begin{aligned} E_{\pi} &= (\text{περίμετρος βάσης}) \cdot (\text{ύψος}) = \\ &= (6 + 4 + 6 + 4) \cdot 3 = \\ &= 20 \cdot 3 = 60\text{cm}^2. \end{aligned}$$

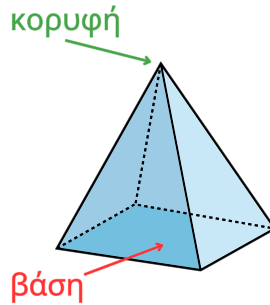
- Το ολικό εμβαδόν του παραλληλεπιπέδου είναι:

$$\begin{aligned} E_{ολ} &= E_{\pi} + 2 \cdot E_{\beta} = \\ &= 60 + 2 \cdot (6 \cdot 4) = \\ &= 60 + 48 = 108\text{cm}^2. \end{aligned}$$

**Σχόλιο:** Θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ως βάσεις τα ορθογώνια  $AE\Theta\Delta$  και  $BZH\Gamma$  και το αποτέλεσμα θα ήταν το ίδιο.

## Πυραμίδα

**Πυραμίδα** λέγεται ένα στερεό, που μία έδρα του είναι ένα πολύγωνο και λέγεται βάση της πυραμίδας και όλες οι άλλες έδρες του είναι τρίγωνα με κοινή κορυφή που αποτελούν τις παράπλευρες έδρες της πυραμίδας.



Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση

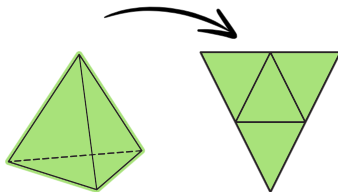
Το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα από την κορυφή προς την βάση της πυραμίδας λέγεται ύψος της πυραμίδας.

## Εμβαδόν πυραμίδας

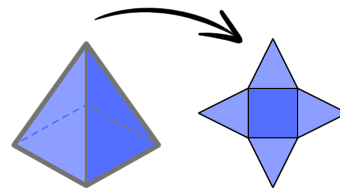
Η επιφάνεια της πυραμίδας αποτελείται:

- από την επιφάνεια των τριγώνων της που είναι οι παράπλευρες έδρες της και
- από την επιφάνεια της βάσης της.

**Τριγωνική πυραμίδα (τετράεδρο)**



**Τετραγωνική πυραμίδα**



Επομένως:

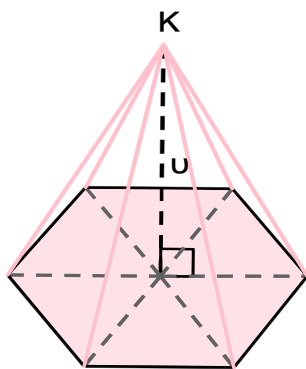
Το **ολικό εμβαδόν** μιας πυραμίδας ( $E_{ολ}$ ) ισούται με το άθροισμα του εμβαδού της παράπλευρης επιφάνειας και του εμβαδού της βάσης της πυραμίδας. Δηλαδή:

$$E_{ολ} = E_{\pi} + E_{\beta}$$

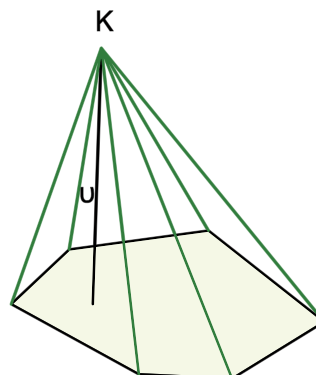
## Κανονική πυραμίδα

Μια πυραμίδα λέγεται **κανονική**, αν η βάση της είναι κανονικό πολύγωνο και η προβολή της κορυφής της στη βάση είναι το κέντρο του κανονικού πολυγώνου.





Κανονική πυραμίδα

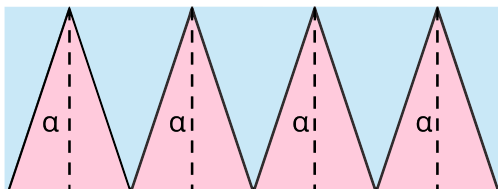


Μη κανονική πυραμίδα

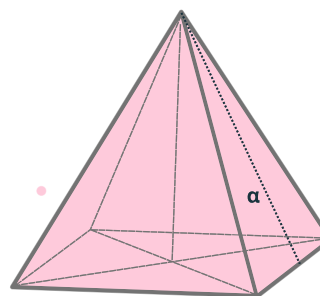
Σε οποιαδήποτε κανονική πυραμίδα οι παράπλευρες έδρες της είναι **ίσα** μεταξύ τους **ισοσκελή τρίγωνα** και το ύψος αυτών των τριγώνων ονομάζεται **απόστημα**.

## Εμβαδόν κανονικής πυραμίδας

Ανάπτυγμα παράπλευρης επιφάνειας κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας:



περίμετρος βάσης



α: απόστημα

Από το ανάπτυγμα της παράπλευρης επιφάνειας μιας τετραγωνικής πυραμίδας, παρατηρούμε ότι το εμβαδόν της ισούται με το μισό του εμβαδού του ορθογωνίου που έχει μήκος την περίμετρο της βάσης της κανονικής πυραμίδας και ύψος το απόστημα α, άρα:

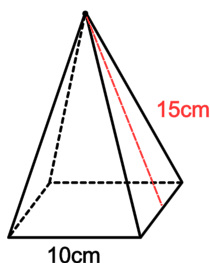
Σε μία κανονική πυραμίδα το **εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειάς** της είναι:

$$E_{\pi} = \frac{1}{2} \cdot (\text{περίμετρος βάσης}) \cdot (\text{απόστημα})$$

Το **ολικό εμβαδόν** της κανονικής πυραμίδας είναι:

$$E_{\text{ολ}} = E_{\pi} + E_{\beta}$$

**Παράδειγμα:** Να υπολογιστεί το εμβαδόν της παρακάτω κανονικής πυραμίδας η οποία έχει βάση τετράγωνο πλευράς 10cm και το ύψος μιας παράπλευρης έδρας της είναι 15cm.



**Λύση:**

Η πυραμίδα είναι κανονική με απόστημα ίσο με 15cm.

- Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειάς της είναι:

$$E_{\pi} = \frac{1}{2} \cdot (\text{περίμετρος βάσης}) \cdot (\text{απόστημα}) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (10 + 10 + 10 + 10) \cdot 15 = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 15 = 300\text{cm}^2.$$

- Το ολικό εμβαδόν της πυραμίδας είναι:

$$E_{\text{ολ}} = E_{\pi} + E_{\beta} = 300 + 10^2 = 300 + 100 = 400\text{cm}^2.$$

**Συνοπτικά:**

| Στερεό            | Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας  | Ολικό εμβαδόν                                 |
|-------------------|---|---|
| (Ορθό) Πρίσμα     | $E_{\pi} = (\text{περίμετρος βάσης}) \cdot (\text{ύψος})$                       | $E_{\text{ολ}} = E_{\pi} + 2 \cdot E_{\beta}$ |
| Πυραμίδα          | $E_{\pi} = E_{\text{τριγώνων}}$   | $E_{\text{ολ}} = E_{\pi} + E_{\beta}$         |
| Κανονική πυραμίδα | $E_{\pi} = \frac{1}{2} \cdot (\text{περίμετρος βάσης}) \cdot (\text{απόστημα})$ | $E_{\text{ολ}} = E_{\pi} + E_{\beta}$         |



Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση



1. Να βρείτε το ολικό εμβαδόν τετραγωνικής κανονικής πυραμίδας με βάση τετράγωνο πλευράς 6cm και ύψος 4cm.

**Λύση:**

Η πλευρά του τετραγώνου της βάσης είναι 6cm και η πυραμίδα είναι κανονική, άρα  $AG = 3\text{cm}$ .

Υπολογίζουμε το απόστημα  $\alpha$ , εφαρμόζοντας το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ABΓ:

$$\alpha^2 = AB^2 + AG^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25, \text{ άρα:}$$

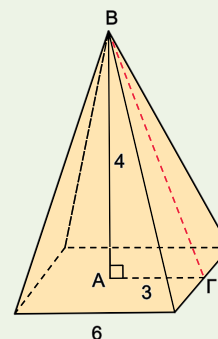
$$\alpha = \sqrt{25} = 5\text{cm}.$$

- Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας της πυραμίδας είναι:

$$E_{\pi} = \frac{1}{2} \cdot (\text{περίμετρος βάσης}) \cdot (\text{απόστημα}) = \frac{1}{2} \cdot (6 + 6 + 6 + 6) \cdot 5 = 60\text{cm}^2$$

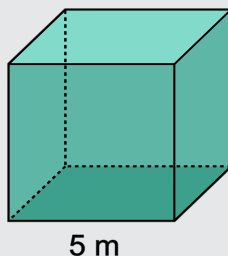
- Το ολικό εμβαδόν της πυραμίδας είναι:

$$E_{\text{ολ}} = E_{\pi} + E_{\beta} = 60 + 6^2 = 96\text{cm}^2.$$

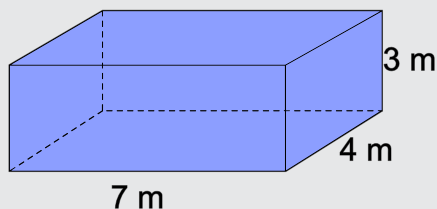




- 1** Υπολόγισε το εμβαδόν της επιφάνειας του παρακάτω κύβου.



- 2** Υπολόγισε το εμβαδόν της επιφάνειας του παρακάτω ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου.



- 3** Βρες την πλευρά κύβου που έχει συνολικό εμβαδόν  $54 \text{ m}^2$ .

- 4** Υπολόγισε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας πρίσματος με ύψος  $6 \text{ cm}$  και βάση ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς  $10 \text{ cm}$ .

- 5** Ένα πρίσμα έχει βάση ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με κάθετες πλευρές  $AB = 6 \text{ cm}$  και  $A\Gamma = 8 \text{ cm}$ . Το ύψος του πρίσματος είναι  $u = 20 \text{ cm}$ .

- α) Υπολόγισε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειάς του.  
β) Υπολόγισε το ολικό εμβαδόν του.

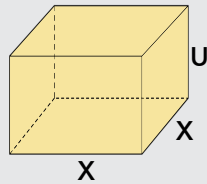
Εξασκούμε



σε όσα έμαθα

6

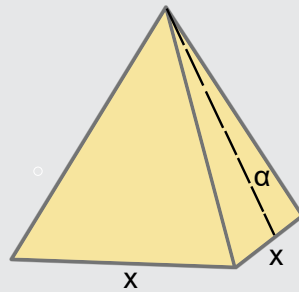
Έστω τετραγωνικό πρίσμα (ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο) με βάση τετράγωνο πλευράς  $x$ . Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα:



| Πλευρά τετραγώνου ( $x$ ) | Ύψος πρίσματος ( $u$ ) | Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας ( $E_{\pi}$ ) | Ολικό εμβαδόν πρίσματος ( $E_{ολ}$ ) |
|---------------------------|------------------------|--|--------------------------------------|
| 4cm                       | 5cm                    |  |                                      |
| 5cm                       |                        | 180cm <sup>2</sup>                           |                                      |
|                           | 6cm                    | 24cm <sup>2</sup>                            |                                      |
| 2cm                       |                        |  | 88cm <sup>2</sup>                    |

7

Έστω κανονική τετραγωνική πυραμίδα με βάση τετράγωνο πλευράς  $x$ . Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα:



| Πλευρά τετραγώνου ( $x$ ) | Απόστημα ( $\alpha$ ) | Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας ( $E_{\pi}$ ) | Ολικό εμβαδόν πυραμίδας ( $E_{ολ}$ ) |
|---------------------------|-----------------------|--|--------------------------------------|
| 2cm                       | 6cm                   |  |                                      |
| 4cm                       |                       | 8cm <sup>2</sup>                             |                                      |
|                           | 50cm                  | 1.000cm <sup>2</sup>                         |                                      |
| 9cm                       |                       |  | 135cm <sup>2</sup>                   |

8

Ένα πρίσμα με βάση τετράγωνο, έχει ύψος 8cm και το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειάς του είναι 96cm<sup>2</sup>. Να βρεθεί το ολικό εμβαδόν του.

**9** Υπολόγισε το εμβαδόν κανονικής πυραμίδας η οποία έχει βάση τετράγωνο πλευράς 20cm και το ύψος μιας παράπλευρης έδρας της είναι 30cm.

**10** Ένα τετράεδρο αποτελείται από 4 ισόπλευρα τρίγωνα πλευράς 2cm. Υπολόγισε το εμβαδόν του.

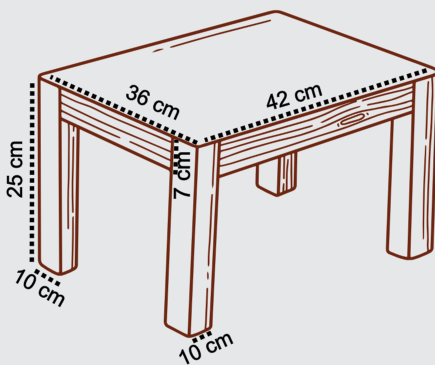
**11** Ένας κατασκευαστής θέλει να κατασκευάσει έναν κύβο ως διακοσμητικό στοιχείο σε έναν πάρκο. Η ακμή του κύβου πρέπει να είναι 2 μέτρα. Ο κατασκευαστής χρεώνει 50€ κάθε  $m^2$  για την κατασκευή του κύβου. Υπολόγισε:

- α) το συνολικό εμβαδόν της επιφάνειας του κύβου.
- β) το κόστος για την κατασκευή του κύβου.

**12** Ένα πρίσμα έχει βάση κανονικό εξάγωνο με πλευρά  $a = 2cm$ . Το ύψος του πρίσματος είναι  $u=4cm$ .

- α) Υπολόγισε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειάς του.
- β) Υπολόγισε το ολικό εμβαδόν του.

**13** Πόση είναι η επιφάνεια του ξύλου του παρακάτω τραπεζιού;



Εξασκούμαι



σε όσα έμαθα

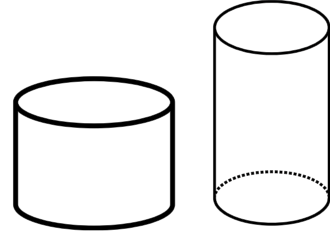
## 5.2 | Εμβαδά επιφάνειας στερεών (κυλίνδρου, κώνου, σφαίρας)



Έχεις στη διάθεσή σου δυο φύλλα χαρτί A4.

Χρησιμοποίησε τα δυο φύλλα για να δημιουργήσεις δυο κυλίνδρους με διαφορετικές σε μέγεθος νοητές βάσεις.

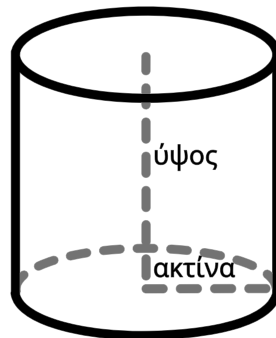
Σύγκρινε τα εμβαδά των παράπλευρων επιφανειών των δυο κυλίνδρων. Τι παρατηρείς;



### Κύλινδρος

Ο κύλινδρος αποτελείται:

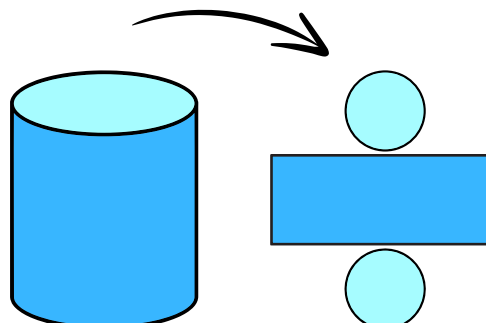
- από δύο ίσους και παράλληλους κυκλικούς δίσκους που λέγονται **βάσεις** του κυλίνδρου και
- από την **παράπλευρη** ή κυρτή επιφάνεια του κυλίνδρου.



Η απόσταση των δύο βάσεων λέγεται **ύψος** του κυλίνδρου.

### Εμβαδόν κυλίνδρου

Αν «ξετυλίξουμε» την παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου θα παρατηρήσουμε ότι έχει σχήμα ορθογωνίου που η μία διάστασή του είναι η περίμετρος του κύκλου της βάσης και άλλη το ύψος του κυλίνδρου.



**Επομένως:**

Το εμβαδόν της **παράπλευρης επιφάνειας** του κυλίνδρου ( $E_{\pi}$ ) είναι το γινόμενο του μήκους του κύκλου της βάσης επί το ύψος του κυλίνδρου. Δηλαδή:

$$E_{\pi} = (\text{περίμετρος βάσης}) \cdot (\text{ύψος})$$

Η περίμετρος ενός κύκλου είναι  $L = 2\pi r$ , άρα η σχέση γράφεται:

$$E_{\pi} = 2\pi r \cdot u$$

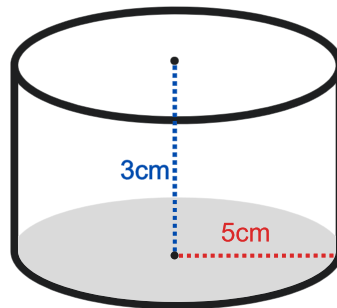
Το **ολικό εμβαδόν** ενός κυλίνδρου ( $E_{ολ}$ ) ισούται με το άθροισμα του εμβαδού της παράπλευρης επιφάνειάς του και του εμβαδού των δύο βάσεων. Δηλαδή:

$$E_{ολ} = E_{\pi} + 2 \cdot E_{\beta}$$

Το εμβαδόν ενός κύκλου είναι  $E = \pi r^2$ , άρα η σχέση γράφεται:

$$E_{ολ} = 2\pi r \cdot u + 2 \cdot \pi r^2$$

**Παράδειγμα:** Να υπολογιστεί το εμβαδόν κυλίνδρου με ακτίνα βάσης 5cm και ύψος 3cm.

**Λύση:**

- Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του κυλίνδρου είναι:

$$\begin{aligned} E_{\pi} &= (\text{περίμετρος βάσης}) \cdot (\text{ύψος}) = \\ &= 2\pi r \cdot u = 2\pi \cdot 5 \cdot 3 = 30\pi \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

- Το ολικό εμβαδόν του κυλίνδρου είναι:

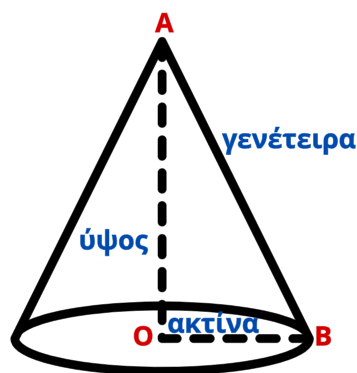
$$\begin{aligned} E_{ολ} &= E_{\pi} + 2 \cdot E_{\beta} = \\ &= 30\pi + 2 \cdot (\pi \cdot 5^2) = \\ &= 30\pi + 50\pi = 80\pi \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Αν πάρουμε το  $\pi = 3,14$ , τότε:  $E_{ολ} = 80 \cdot 3,14 = 251,2 \text{ cm}^2$ .

## Κώνος

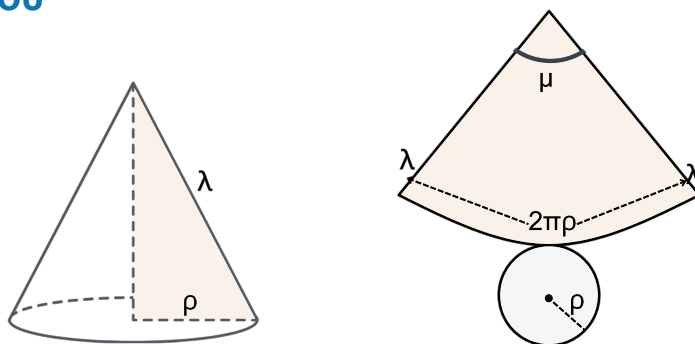


**Κώνος** λέγεται το στερεό σχήμα που παράγεται από την περιστροφή ενός ορθογωνίου τριγώνου  $OAB$  γύρω από μία κάθετη πλευρά του  $AO$ .



- **Ύψος** του κώνου λέγεται η κάθετη πλευρά  $AO$ , που παραμένει σταθερή κατά την περιστροφή.
- Η **βάση** του κώνου είναι ένας κυκλικός δίσκος με κέντρο  $O$  και με ακτίνα  $\rho$  την άλλη κάθετη πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου,  $OB$ . Η ακτίνα της βάσης  $\rho$  λέγεται ακτίνα του κώνου.
- Η πλευρά  $AB = \lambda$  ονομάζεται **γενέτειρα** του κώνου και η επιφάνεια που παράγεται από την περιστροφή αυτής, λέγεται παράπλευρη επιφάνεια του κώνου.

## Εμβαδόν κώνου



Από το ανάπτυγμα της επιφάνειας του κώνου, παρατηρούμε ότι:

- Η παράπλευρη επιφάνεια του κώνου είναι ένας κυκλικός τομέας που έχει ακτίνα τη γενέτειρα  $\lambda$  του κώνου και το μήκος του τόξου του είναι ίσο με το μήκος του κύκλου της βάσης του κώνου, άρα είναι ίσο με  $2\pi\rho$ .
- Θυμόμαστε ότι το μήκος ενός τόξου  $\mu$  μοιρών και ακτίνας  $\lambda$ , είναι:  $\ell = 2\pi\lambda \cdot \frac{\mu}{360}$ .  
Εδώ το μήκος του τόξου είναι  $\ell = 2\pi\rho$ , άρα:

$$2\pi\rho = 2\pi\lambda \cdot \frac{\mu}{360} \quad \text{ή}$$

$$\mu = \frac{\rho \cdot 360}{\lambda}$$

- Θυμόμαστε ότι το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα  $\mu$  μοιρών και ακτίνας  $\lambda$ , είναι:  $E = \pi\lambda^2 \cdot \frac{\mu}{360}$ .

$$\text{Άρα έχουμε: } E = \pi\lambda^2 \cdot \frac{\mu}{360} = \pi\lambda^2 \cdot \frac{\rho \cdot 360}{360 \cdot \lambda} = \pi\rho\lambda.$$

Δείξαμε λοιπόν ότι:

Το εμβαδόν της **παράπλευρης επιφάνειας** ενός κώνου είναι:

$$E_{\pi} = \pi r \lambda$$

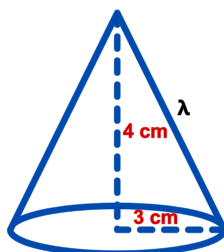
Για να βρούμε το **ολικό εμβαδόν** ενός κώνου αρκεί να προσθέσουμε στο εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειάς του το εμβαδόν της βάσης του.

$$E_{\text{ολ}} = E_{\pi} + E_{\beta} \quad \text{ή}$$

$$E_{\text{ολ}} = \pi r \lambda + \pi r^2$$

**Παράδειγμα:**

Βρείτε το εμβαδό του κώνου με ακτίνα βάσης  $\rho = 3\text{cm}$  και ύψος  $u = 4\text{cm}$ .



**Λύση:**

Για να υπολογίσουμε την γενέτειρα  $AB = \lambda$ , εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο  $OAB$ :

$$\lambda^2 = \rho^2 + u^2$$

$$\lambda^2 = 3^2 + 4^2$$

$$\lambda^2 = 25$$

$$\lambda = 5\text{cm}.$$

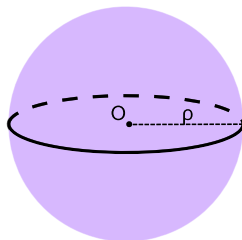
Άρα

$$\begin{aligned} E_{\text{ολ}} &= E_{\pi} + E_{\beta} = \pi r \lambda + \pi r^2 = \\ &= \pi \cdot 3 \cdot 5 + \pi \cdot 3^2 = 15\pi + 9\pi = 24\pi \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Αν πάρουμε το  $\pi = 3,14$ , τότε:  $E_{\text{ολ}} = 24 \cdot 3,14 = 75,36\text{cm}^2$ .

## Σφαίρα

**Σφαίρα** είναι το στερεό σχήμα που παράγεται από την περιστροφή ενός κύκλου  $(O, \rho)$  γύρω από μία διάμετρό του.

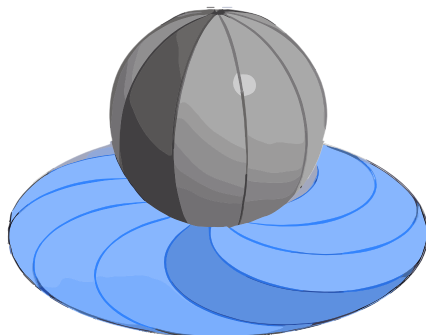


Το σημείο  $O$  λέγεται **κέντρο** και το  $\rho$  λέγεται **ακτίνα** της σφαίρας.

## Εμβαδόν σφαίρας

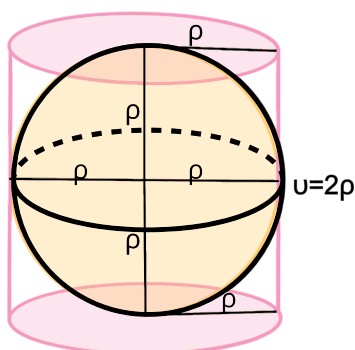
Το εμβαδόν της επιφάνειας σφαίρας ακτίνας  $\rho$  είναι:

$$E_{\sigma\phi} = 4\pi\rho^2$$



### Παρατηρήσεις:

- Το εμβαδόν της επιφάνειας της σφαίρας ισούται με το εμβαδόν τεσσάρων μεγίστων κύκλων της, ή με το εμβαδόν κύκλου διπλάσιας ακτίνας της σφαίρας.



- Το εμβαδόν της επιφάνειας της σφαίρας ισούται με το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του κυλίνδρου στον οποίο είναι εγγεγραμμένη η σφαίρα.

Η σφαίρα είναι εγγεγραμμένη σε κύλινδρο αν εφάπτεται στις βάσεις του αλλά και κατά μήκος της παράπλευρης επιφάνειάς του.

### Παράδειγμα:

Μία μπάλα μπάσκετ έχει ακτίνα 12cm. Να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειάς της.

### Λύση:

$$E_{\sigma\phi} = 4\pi\rho^2 = 4\pi \cdot 12^2 = 576\pi \text{ cm}^2 \quad \text{ή} \quad 1.808,64 \text{ cm}^2.$$



### Συνοπτικά:

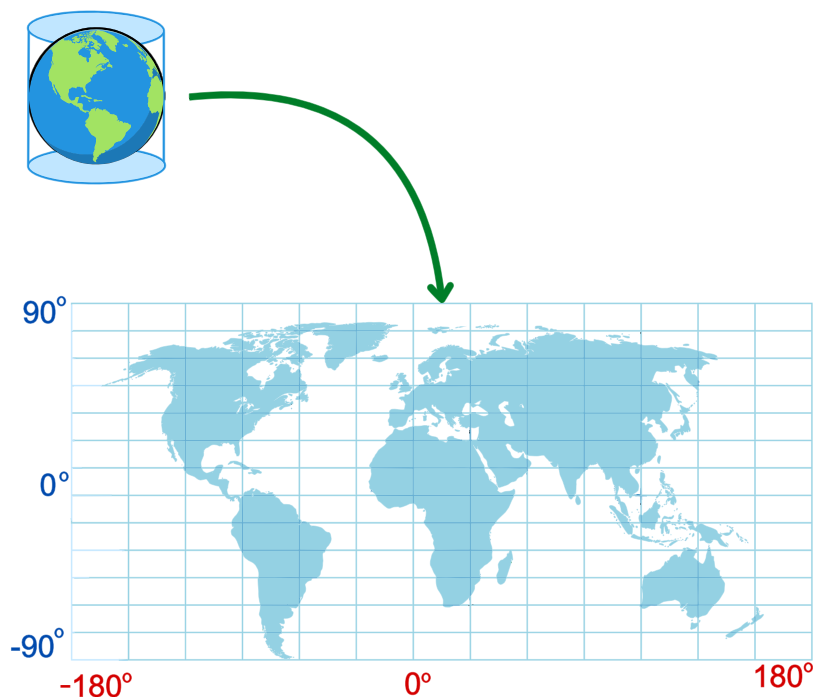
| Στερεό    | Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας | Ολικό εμβαδόν  |
|-----------|--------------------------------|--|
| Κύλινδρος | $E_{\pi} = 2\pi\rho \cdot u$   | $E_{\sigma\lambda} = 2\pi\rho \cdot u + 2 \cdot \pi\rho^2$ |
| Κώνος     | $E_{\pi} = \pi\rho l$          | $E_{\sigma\lambda} = \pi\rho l + \pi\rho^2$                |
| Σφαίρα    | –                              | $E_{\sigma\phi} = 4\pi\rho^2$                              |

## Ο χάρτης της Γης!

Γνωρίζουμε ότι το σχήμα της Γης είναι παρόμοιο με μια σφαίρα, αλλά οι χάρτες που μελετάμε είναι επίπεδοι! Δεν είναι πολύ εύκολο να μεταφέρουμε ένα καμπυλόγραμμο σχήμα σε επίπεδο. Σκέψου πόσο δύσκολο είναι να τυλίξεις τέλεια ένα φύλλο χαρτί γύρω από μια μπάλα...



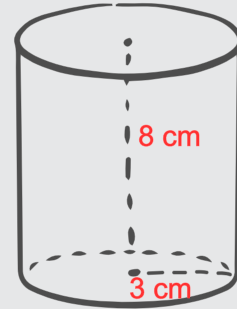
Συνεπώς, για να σχεδιάσουμε έναν χάρτη, χρησιμοποιούμε μια πολύ διαδεδομένη μέθοδο στα Μαθηματικά, τη μέθοδο της προβολής. Για να εφαρμόσουμε τη μέθοδο της προβολής, και συγκεκριμένα την Plate Carree μέθοδο, χρησιμοποιούμε την παραπάνω ιδιότητα της σφαίρας.



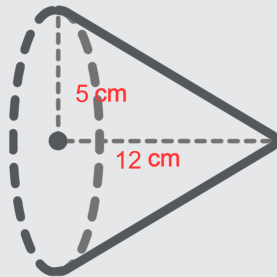
Αυτή η μέθοδος βέβαια κάνει τις περιοχές κοντά στους πόλους να φαίνονται πιο «τεντωμένες» και τις χώρες κοντά στον ισημερινό πιο μικρές. Ποιες άλλες αναπαραστάσεις θα μπορούμε να αξιοποιήσουμε για την μελέτη της επιφάνειας της Γης;



- 1** Ένας κύλινδρος έχει ύψος 8 cm και ακτίνα βάσης 3 cm. Βρες:
- το εμβαδόν της παράπλευρης του επιφάνειας.
  - το ολικό εμβαδόν του.



- 2** Ένας κώνος έχει ύψος 12 cm και ακτίνα βάσης 5 cm. Βρες:
- το εμβαδόν της παράπλευρης του επιφάνειας.
  - το ολικό εμβαδόν του.

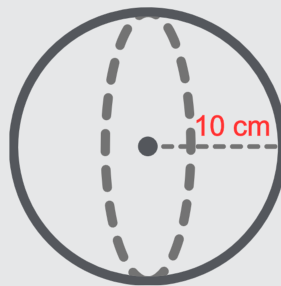


Εξασκούμαι



σε όσα έμαθα

- 3** Μια σφαίρα έχει ακτίνα 10 cm. Υπολόγισε το εμβαδόν της επιφάνειάς της.



- 4** Υπολόγισε το ολικό εμβαδόν ενός κυλίνδρου όταν:
- έχει ακτίνα βάσης  $\rho = 5\text{cm}$  και ύψος  $u = 10\text{cm}$ .
  - έχει διάμετρο βάσης  $\delta = 8\text{cm}$  και ύψος  $u = 6\text{cm}$ .
  - έχει μήκος βάσης  $L = 12,56\text{cm}$  και ύψος  $u = 4\text{cm}$ .



**5** Ένας κύλινδρος έχει ύψος 15cm και το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειάς του είναι 753,6cm<sup>2</sup>. Να βρεθεί το ολικό εμβαδόν του.

**6** Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα που αναφέρεται σε κύλινδρο:

|                               |     |                      |                      |
|-------------------------------|-----|----------------------|----------------------|
| Ακτίνα βάσης $\rho$           | 1cm | 3cm                  |                      |
| Ύψος κυλίνδρου $u$            | 5cm |                      | 2cm                  |
| Εμβαδόν παράπλευρης $E_{\pi}$ |     | 75,36cm <sup>2</sup> | 50,24cm <sup>2</sup> |
| Ολικό εμβαδόν $E_{ολ}$        |     |                      |                      |

**7** Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα:

|                                       |   |   |           |     |       |
|---------------------------------------|---|---|-----------|-----|-------|
| Ακτίνα Σφαίρας (cm)                   | 1 |   |           |     | $\pi$ |
| Διάμετρος Σφαίρας (cm)                |   | 4 |           |     |       |
| Εμβαδόν Επιφάνειας (cm <sup>2</sup> ) |   |   | 400 $\pi$ | 314 |       |

**8** Δύο σφαίρες έχουν ακτίνες 6cm και 8cm αντίστοιχα. Υπολόγισε:

α) το εμβαδόν της επιφάνειας κάθε σφαίρας.

β) την ακτίνα μιας τρίτης σφαίρας που έχει το ίδιο εμβαδόν με το άθροισμα των εμβαδών των δύο σφαιρών.

**9** Ένας κώνος και μια σφαίρα έχουν ίδια ακτίνα  $a$ , και ο κώνος έχει γενέτειρα  $\lambda = a$ . Ποιοι είναι οι τύποι που περιγράφουν το ολικό εμβαδό κάθε στερεού;

Αν διπλασιάσουμε την τιμή του  $a$ , πως μεταβάλλονται οι τύποι των εμβαδών των σχημάτων;

**10** Μια σφαιρική μπάλα παγωτό με ακτίνα 3 cm στηρίζεται από έναν κώνο με ύψος 10 cm και ακτίνα βάσης 3 cm. Υπολόγισε το συνολικό εμβαδόν της επιφάνειας του παγωτού. (Υποθέτουμε ότι πάνω στο χωνάκι στέκεται μισή μπάλα παγωτό).



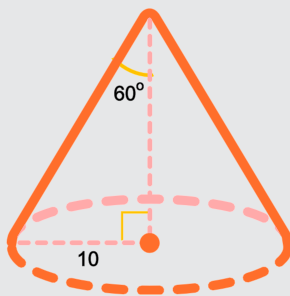
**11** Ένα εργοστάσιο παράγει κυλινδρικά δοχεία για φαγητό, με ακτίνα βάσης 5 cm και ύψος 12 cm. Τα δοχεία καλύπτονται με μια λεπτή πλαστική επικάλυψη. Το κόστος της πλαστικής επικάλυψης είναι 0,02€ ανά τετραγωνικό εκατοστό. Υπολόγισε:

α) το συνολικό εμβαδόν της επιφάνειας ενός δοχείου.

β) το κόστος για την πλαστική επικάλυψη ενός δοχείου.

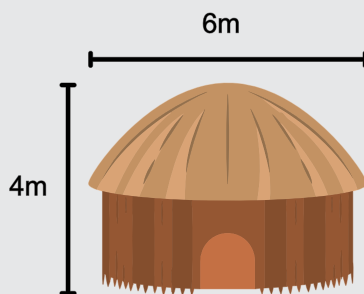
12

Βρες το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κώνου.



13

Η καλύβα αποτελείται από ένα κυλινδρικό και ένα κωνικό μέρος. Έχει διάμετρο 6m, συνολικό ύψος 4m και το ύψος της στέγης είναι 1m. Πόσα τετραγωνικά μέτρα συμπιεσμένο ξύλο θα χρειαστούμε για να την χτίσουμε;



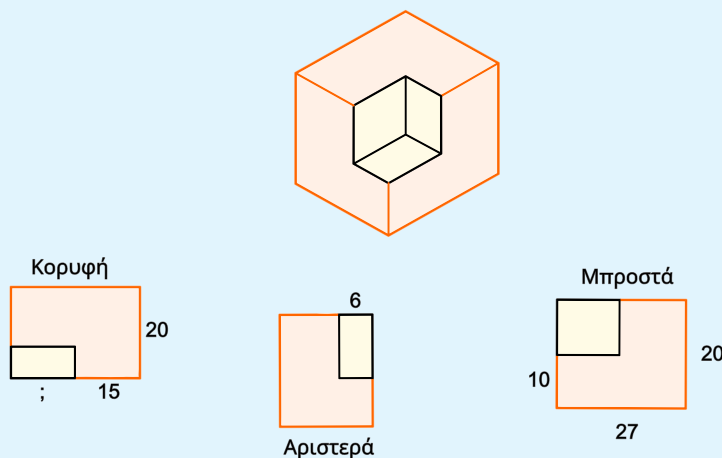
## Ανακεφαλαίωση (Εμβαδόν)

| Στερεό            | Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας  | Ολικό εμβαδόν                                 |
|-------------------|---|---|
| (Ορθό) Πρίσμα     | $E_{\pi} = (\text{περίμετρος βάσης}) \cdot (\text{ύψος})$                       | $E_{\text{ολ}} = E_{\pi} + 2 \cdot E_{\beta}$ |
| Πυραμίδα          | $E_{\pi} = E_{\text{τριγώνων}}$   | $E_{\text{ολ}} = E_{\pi} + E_{\beta}$         |
| Κανονική πυραμίδα | $E_{\pi} = \frac{1}{2} \cdot (\text{περίμετρος βάσης}) \cdot (\text{απόστημα})$ | $E_{\text{ολ}} = E_{\pi} + E_{\beta}$         |

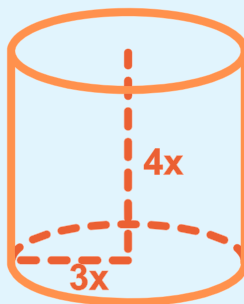
| Στερεό    | Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας | Ολικό εμβαδόν                                      |
|-----------|--------------------------------|--|
| Κύλινδρος | $E_{\pi} = 2\pi r \cdot u$     | $E_{\text{ολ}} = 2\pi r \cdot u + 2 \cdot \pi r^2$ |
| Κώνος     | $E_{\pi} = \pi r l$            | $E_{\text{ολ}} = \pi r l + \pi r^2$                |
| Σφαίρα    | –                              | $E_{\text{σφ}} = 4\pi r^2$                         |

## Αυτοαξιολόγηση (Εμβαδόν)

**A.** Ποιες είναι οι διαστάσεις του «κομμένου» κομματιού; Πώς αλλάζει η επιφάνεια του αρχικού σχήματος αφού κόψουμε το κομμάτι;

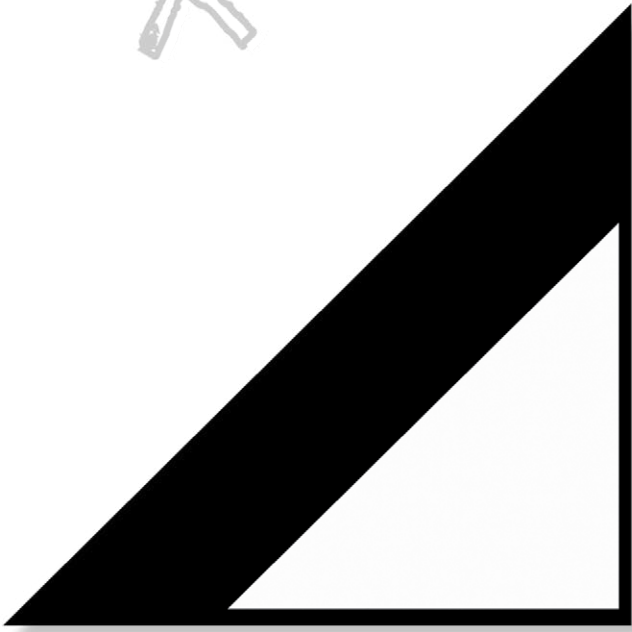


**B.** Στο σχήμα φαίνεται ένα μεταλλικό κυλινδρικό δοχείο. Με την ίδια ποσότητα μετάλλου φτιάχνουμε μια σφαίρα ακτίνας  $\rho$ , ώστε η σφαίρα και ο κύλινδρος να έχουν την ίδια επιφάνεια. Βρες την ακτίνα της σφαίρας  $\rho$  συναρτήσει του  $x$ .



Σε αυτό το σημείο, θα πρέπει να είσαι σε θέση να ικανοποιείς όλους τους προσδοκώμενους μαθησιακούς στόχους. Γύρνα στην αρχή της θεματικής ενότητας και σημείωσε ✓ στα αντίστοιχα σημεία. Υπάρχουν στόχοι που αισθάνεσαι ότι δεν έχεις ικανοποιήσει πλήρως;

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$



# ΟΓΚΟΣ

B.6

Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε τον υπολογισμό του όγκου γεωμετρικών στερεών όπως κύβοι, παραλληλεπίπεδα, πυραμίδες, κύλινδροι, κώνοι και σφαίρες. Θα ανακαλύψουμε πώς ο όγκος συνδέεται με τις διαστάσεις και τις ιδιότητες κάθε στερεού και πώς μπορούμε να επιλύουμε προβλήματα που σχετίζονται με πραγματικές καταστάσεις.

Είσαι έτοιμος/η να κατανοήσεις πώς οι έννοιες του όγκου εφαρμόζονται στην καθημερινή ζωή, από τον σχεδιασμό μέχρι και την κατασκευή αντικειμένων;



- Υπολογίζω τον όγκο του κύβου και του ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου επιλέγοντας την κατάλληλη μονάδα μέτρησης.
- Συσχετίζω τον όγκο ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου και κυλίνδρου, καθώς και πρίσματος και πυραμίδας, με την ίδια βάση και το ίδιο ύψος με εμπειρικούς τρόπους.
- Συσχετίζω τον όγκο κυλίνδρου και κώνου με την ίδια βάση και το ίδιο ύψος με εμπειρικούς τρόπους.
- Επιλύω προβλήματα υπολογισμού του όγκου σύνθετων στερεών σχημάτων αναπτύσσοντας ποικιλία μεθόδων και στρατηγικών.



**6.1:** Όγκος στερεών (ορθών πρισμάτων, πυραμίδας).

**6.2:** Όγκος στερεών (κυλίνδρου, κώνου, σφαίρας).

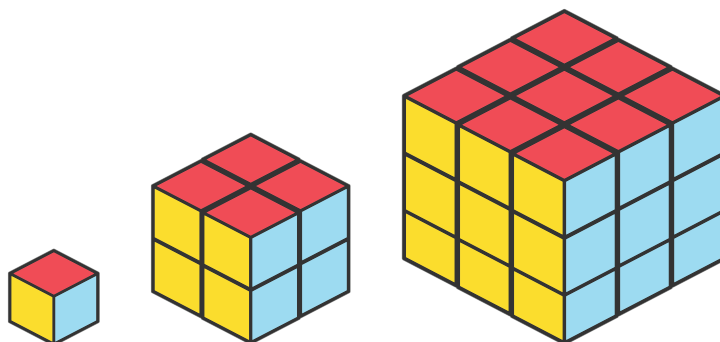
+ Ανακεφαλαίωση / Αυτοαξιολόγηση



# 6.1 | Όγκος στερεών (ορθών πρισμάτων, πυραμίδας).



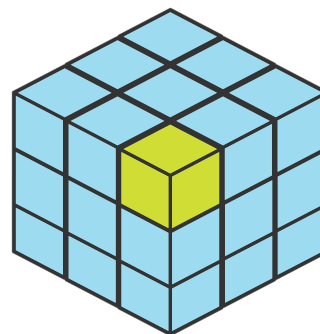
Παρατήρησε τα παρακάτω σχήματα και υπολόγισε πόσα μικρά κυβάκια περιλαμβάνονται σε κάθε μεγάλο κύβο.



## Η έννοια του όγκου

Θεωρούμε έναν κύβο με ακμή μήκους μίας μονάδας. Όγκος ενός στερεού με μονάδα μέτρησης τον κύβο, λέγεται ο θετικός αριθμός που δηλώνει με πόσες επαναλήψεις του κύβου ή μέρος αυτού σχηματίζεται το στερεό.

Ο όγκος ενός στερεού σώματος εκφράζει τον **χώρο** που αυτό καταλαμβάνει.



## Μονάδες μέτρησης όγκου

|   |                   |                       |
|---|-------------------|-----------------------|
| 1 κυβικό μέτρο                              | 1 m <sup>3</sup>  | όγκος κύβου ακμής 1m  |
| 1 κυβικό δεκατόμετρο ή λίτρο (L)            | 1 dm <sup>3</sup> | όγκος κύβου ακμής 1dm |
| 1 κυβικό εκατοστόμετρο ή χιλιοστόλιτρο (ml) | 1 cm <sup>3</sup> | όγκος κύβου ακμής 1cm |
| 1 κυβικό χιλιοστόμετρο                      | 1 mm <sup>3</sup> | όγκος κύβου ακμής 1mm |

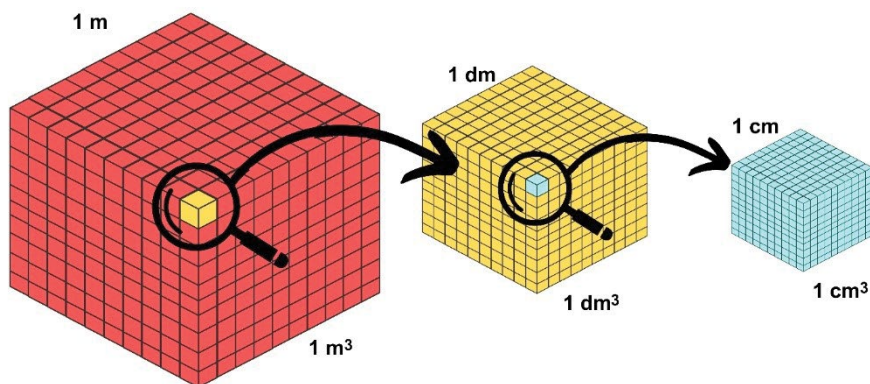
Για τη μέτρηση όγκου των υγρών χρησιμοποιούμε συνήθως το λίτρο (1 L = 1 dm<sup>3</sup>) ή το χιλιοστόλιτρο (1 ml = 1 cm<sup>3</sup>). Ένα λίτρο (1 L) νερό έχει μάζα περίπου ένα κιλό (1 kg).

Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση

## Μετατροπές



- Ένα κυβικό μέτρο χωρίζεται σε 1.000 τετράγωνα πλευράς 1dm. Άρα  $1 \text{ m}^3 = 1.000 \text{ dm}^3$
- Ένα κυβικό δεκατόμετρο χωρίζεται σε 1.000 τετράγωνα πλευράς 1cm. Άρα  $1 \text{ dm}^3 = 1.000 \text{ cm}^3$ .
- Ένα κυβικό εκατοστόμετρο χωρίζεται σε 1.000 τετράγωνα πλευράς 1mm. Άρα  $1 \text{ cm}^3 = 1.000 \text{ mm}^3$ .

### Συνεπώς ισχύει ότι:

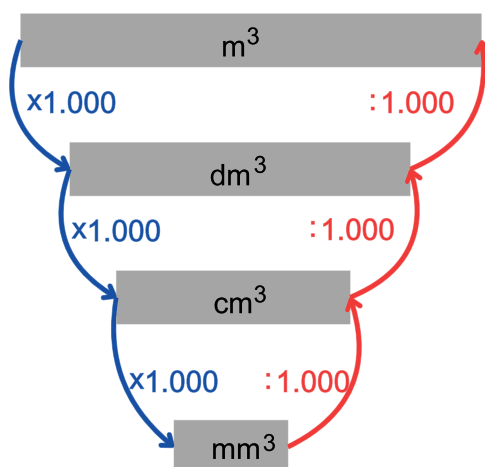
|                 |                        |                            |                                |
|-----------------|------------------------|----------------------------|--------------------------------|
| $1 \text{ m}^3$ | $= 1.000 \text{ dm}^3$ | $= 1.000.000 \text{ cm}^3$ | $= 1.000.000.000 \text{ mm}^3$ |
|                 | $1 \text{ dm}^3$       | $= 1.000 \text{ cm}^3$     | $= 1.000.000 \text{ mm}^3$     |
|                 |                        | $1 \text{ cm}^3$           | $= 1.000 \text{ mm}^3$         |

- $1 \text{ L} = 1.000 \text{ ml}$ .

### Και αντίστροφα:

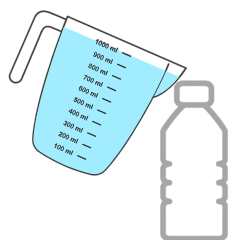
|                  |                        |                            |                               |
|------------------|------------------------|----------------------------|-------------------------------|
| $1 \text{ mm}^3$ | $= 0,001 \text{ cm}^3$ | $= 0,000 001 \text{ dm}^3$ | $= 0,000 000 001 \text{ m}^3$ |
|                  | $1 \text{ cm}^3$       | $= 0,001 \text{ dm}^3$     | $= 0,000 001 \text{ m}^3$     |
|                  |                        | $1 \text{ dm}^3$           | $= 0,001 \text{ m}^3$         |

- $1 \text{ ml} = 0,001 \text{ L}$ .





$1 \text{ m}^3$   
1 κυβικό μέτρο.



$1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$   
1 κυβικό δεκατόμετρο  
ή λίτρο.



$1 \text{ cm}^3$   
1 κυβικό εκα-  
τοστόμετρο.



$1 \text{ mm}^3$   
1 κόκκος ζάχαρης εί-  
ναι περίπου 1 κυβικό  
χιλιοστόμετρο.

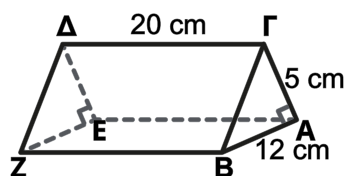
## Όγκος πρίσματος

Ο όγκος ενός πρίσματος ισούται με το γινόμενο του εμβαδού της βάσης του επί το ύψος, δηλαδή:

$$V = (\text{Εμβαδόν βάσης}) \cdot (\text{ύψος})$$

### Παράδειγμα:

Να υπολογίσετε τον όγκο του πρίσματος:



### Λύση:

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι βάση του πρίσματος και έχει εμβαδόν:

$$(ΑΒΓ) = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30 \text{ cm}^2.$$

Άρα ο όγκος του πρίσματος είναι:

$$V = (\text{Εμβαδόν βάσης}) \cdot (\text{ύψος}) = \\ = 30 \cdot 20 = 600 \text{ cm}^3.$$

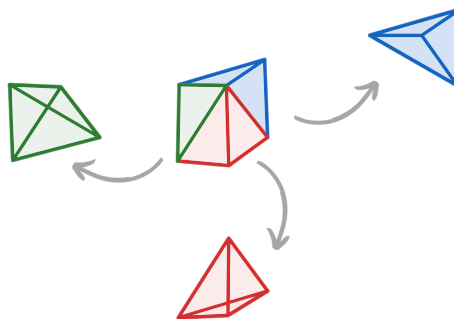
Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση

## Όγκος πυραμίδας

Παίρνουμε ένα τριγωνικό πρίσμα και το διαιρούμε σε τρεις πυραμίδες με τέτοιο τρόπο, ώστε δύο από αυτές να έχουν ως βάσεις τις βάσεις του πρίσματος και ύψος το ύψος του πρίσματος. Αποδεικνύεται ότι οι τρεις πυραμίδες έχουν τον ίδιο όγκο.



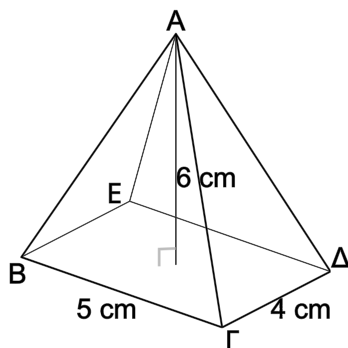
Με τον τρόπο αυτόν καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι:

Ο **όγκος πυραμίδας** ισούται με το ένα τρίτο του όγκου πρίσματος που έχει την ίδια βάση και το ίδιο ύψος.

$$V = \frac{1}{3} \cdot (\text{Εμβαδόν βάσης}) \cdot (\text{ύψος})$$

### Παράδειγμα:

Να υπολογίσετε τον όγκο της παρακάτω πυραμίδας η βάση της οποίας είναι ορθογώνιο:



**Λύση:** Η βάση της πυραμίδας είναι το ορθογώνιο ΒΓΔΕ που έχει εμβαδόν:

$$(BΓΔE) = 4 \cdot 5 = 20\text{cm}^2.$$

Άρα ο όγκος της πυραμίδας είναι:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot (\text{Εμβαδόν βάσης}) \cdot (\text{ύψος}) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot 20 \cdot 6 = 40\text{cm}^3. \end{aligned}$$

### Συνοπτικά:

| Στερεό   | Όγκος  |
|----------|--|
| Πρίσμα   | $V = (\text{Εμβαδόν βάσης}) \cdot (\text{ύψος})$                   |
| Πυραμίδα | $V = \frac{1}{3} \cdot (\text{Εμβαδόν βάσης}) \cdot (\text{ύψος})$ |

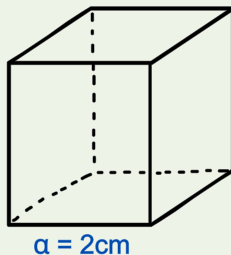
Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση



1. Να βρείτε τον όγκο κύβου πλευράς  $\alpha = 2\text{cm}$ .

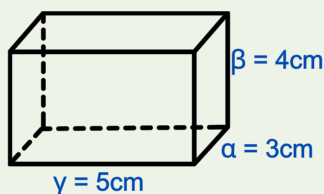


**Λύση:**

Ο όγκος κύβου πλευράς  $\alpha$  δίνεται από τον τύπο:  $V = \alpha^3$ .

Άρα ο όγκος κύβου πλευράς  $\alpha = 2\text{cm}$  είναι  $V = 2^3 = 8\text{cm}^3$

2. Να βρείτε τον όγκο ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις  $\alpha = 3\text{cm}$ ,  $\beta = 4\text{cm}$  και  $\gamma = 5\text{cm}$ .



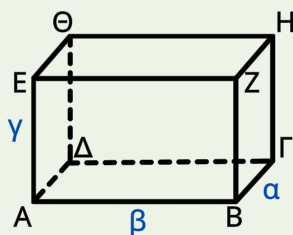
**Λύση:**

Ο όγκος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με μήκος  $\alpha$ , πλάτος  $\beta$  και ύψος  $\gamma$  δίνεται από τον τύπο:

Όγκος = (μήκος) · (πλάτος) · (ύψος) ή  $V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$ .

Άρα ο όγκος του στερεού είναι:  $V = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60\text{cm}^3$ .

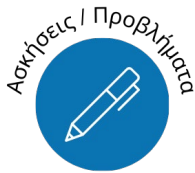
3. Δίνεται το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο του διπλανού σχήματος. Να εξετάσετε αν οι πυραμίδες ΑΒΓΔΕ και ΑΕΘΔΗ έχουν τον ίδιο όγκο.



**Λύση:**

Γνωρίζουμε ότι ο όγκος πυραμίδας ισούται με το ένα τρίτο του όγκου πρίσματος που έχει την ίδια βάση και το ίδιο ύψος, άρα οι πυραμίδες ΑΒΓΔΕ και ΑΕΘΔΗ έχουν τον ίδιο όγκο που είναι ίσος με το  $\frac{1}{3}$  του όγκου του παραλληλεπιπέδου:

$$V = \frac{1}{3} \cdot (\text{Εμβαδόν βάσης}) \cdot (\text{ύψος}) = \frac{1}{3} \cdot \alpha\beta\gamma.$$



**1** Μετάτρεψε τα παρακάτω μεγέθη στη μονάδα που δίνεται:

α)  $213 \text{ m}^3 = \dots\dots\dots \text{dm}^3$       β)  $7.569.000 \text{ mm}^3 = \dots\dots\dots \text{m}^3$   
 γ)  $12,7 \text{ dm}^3 = \dots\dots\dots \text{cm}^3$       δ)  $15 \text{ Lt} = \dots\dots\dots \text{ml}$   
 ε)  $3.896.700 \text{ ml} = \dots\dots\dots \text{m}^3$       στ)  $0,15 \text{ m}^3 = \dots\dots\dots \text{mm}^3$

Εξασκούμαι

σε όσα έμαθα

**2** α) Ένα δοχείο έχει όγκο 2,5 κυβικά μέτρα. Να εκφράσεις τον όγκο σε κυβικά εκατοστά και σε λίτρα.  
 β) Ένα ενυδρείο έχει όγκο 800 λίτρα. Να εκφράσεις τον όγκο σε κυβικά μέτρα και σε κυβικά χιλιοστά.

**3** Υπολόγισε τον όγκο στα παρακάτω στερεά αν κάθε μικρός κύβος είναι  $1 \text{ cm}^3$ .

α)      β)

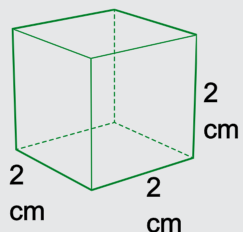
γ)      δ)

ε)      στ)

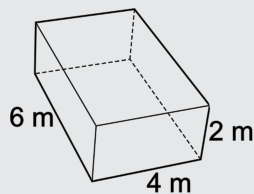
4

Υπολόγισε τον όγκο στα παρακάτω ορθά πρίσματα:

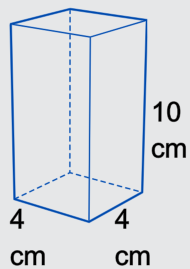
α)



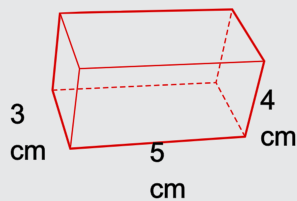
β)



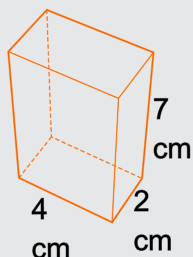
γ)



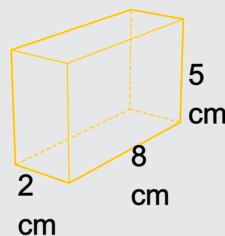
δ)



ε)



στ)

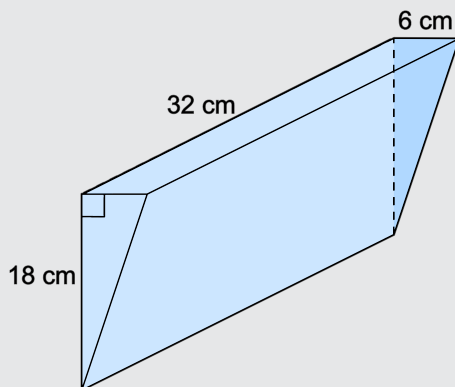


5

Ένας κύβος έχει όγκο  $27 \text{ m}^3$ . Βρες το μήκος της ακμής του κύβου.

6

Βρες την ακμή ενός κύβου που έχει όγκο ίσο με τον όγκο του παρακάτω σχήματος:



7

Μια κανονική πυραμίδα έχει βάση τετράγωνο πλευράς 6cm και ύψος 4cm. Βρες την ολική επιφάνεια και τον όγκο της πυραμίδας.

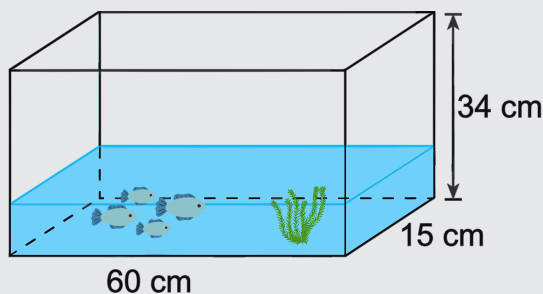
8

Η μεγαλύτερη και πιο διάσημη πυραμίδα στον κόσμο είναι η πυραμίδα του Χέοπα (ή Χούφου). Είναι το παλαιότερο από τα επτά θαύματα του αρχαίου κόσμου. Έχει ύψος 146,60 m και τέλεια τετράγωνη βάση με πλευρά 230,35 m, προκαλεί δε εντύπωση στους σύγχρονους ερευνητές για τα δεδομένα της εποχής της κατασκευής της. Για την αποπεράτωση της χρειάστηκαν 30 χρόνια δουλειάς από 100.000 εργάτες-δούλους, πολλοί από τους οποίους πέθαναν κατά τη διάρκεια κατασκευής της.

Μπορείς να βρεις τον όγκο που καταλαμβάνει η πυραμίδα του Χέοπα;

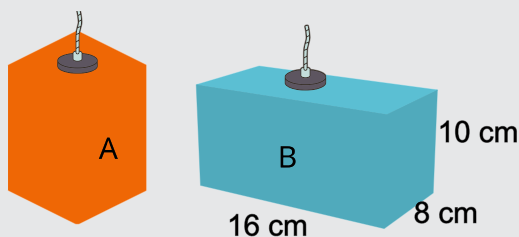
9

Ένα ενυδρείο είναι γεμάτο κατά το ένα τρίτο, όπως φαίνεται και την εικόνα. Βρες πόσα λίτρα νερό απαιτούνται για να γεμίσουμε όλο το ενυδρείο.



10

Ο όγκος του κεριού A ισούται με τα  $\frac{2}{5}$  του όγκου του κεριού B. Ποιο είναι το ύψος του κεριού A, αν η επιφάνεια της βάσης του είναι  $32 \text{ cm}^2$

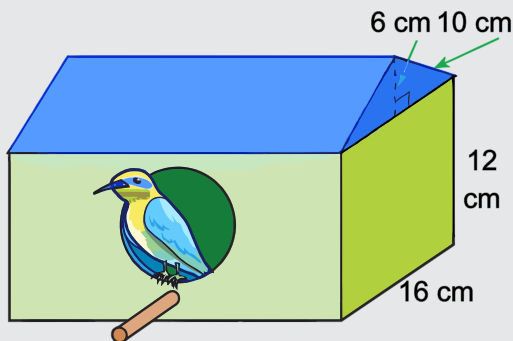


11

Θέλουμε να χτίσουμε το παρακάτω ξύλινο σπιτάκι για πουλιά. Ο συνολικός όγκος του είναι  $7200 \text{ cm}^3$ .

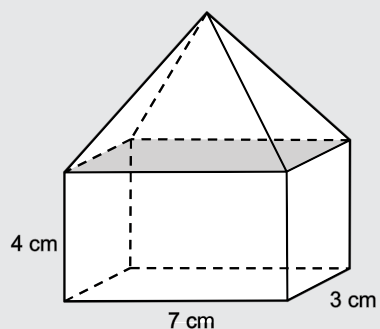
α) Ποιο είναι το μήκος του;

β) Πόση είναι η συνολική του επιφάνεια (δεν λαμβάνουμε υπόψιν την κυκλική είσοδο του πτηνού);



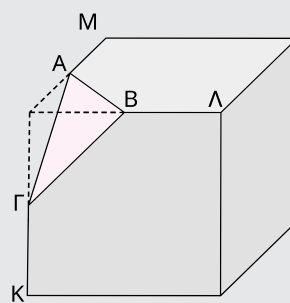
12

Πάνω σε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο τοποθετούμε πυραμίδα ύψους 5cm, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Υπολόγισε τον συνολικό όγκο του στερεού.



13

Σε ένα κύβο ακμής 6cm αποκόπτουμε μία γωνία του, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν  $AM = BL = \Gamma K = 3\text{cm}$ . Βρες τον όγκο του στερεού που απομένει.



Εξασκούμαι



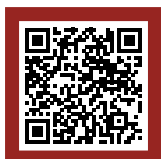
σε όλα έμαθα

Αντιλαμβάνομαι



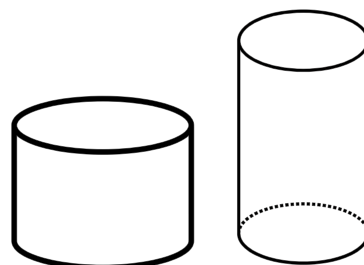
με προσομοίωση

## 6.2 | Όγκος στερεών (κυλίνδρου, κώνου, σφαίρας).



Έχεις στη διάθεσή σου δυο φύλλα χαρτί A4. Χρησιμοποίησε τα δυο φύλλα για να δημιουργήσεις δυο κυλίνδρους με διαφορετικές σε μέγεθος νοητές βάσεις.

Ποιος από τους δυο κυλίνδρους έχει το μεγαλύτερο όγκο;



### Όγκος κυλίνδρου

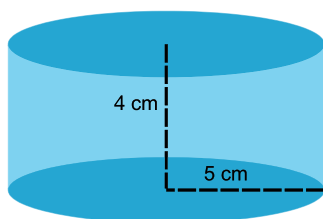
Ο **όγκος ενός κυλίνδρου** ακτίνας  $\rho$  ισούται με το γινόμενο του εμβαδού της βάσης του επί το ύψος, δηλαδή

$$V = (\text{Εμβαδόν βάσης}) \cdot (\text{ύψος}) \quad \text{ή}$$

$$V = \pi \rho^2 \cdot u$$

#### Παράδειγμα:

Να υπολογιστεί ο όγκος κυλίνδρου με ακτίνα βάσης 5m και ύψος 4m.



Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση

#### Λύση:

- Το εμβαδόν της βάσης του κυλίνδρου είναι:

$$E_{\beta} = \pi \rho^2 = \pi \cdot 5^2 = 25\pi \text{ cm}^2.$$

- Ο όγκος του κυλίνδρου είναι:

$$V = E_{\beta} \cdot u = 25\pi \cdot 4 = 100\pi \text{ cm}^3.$$

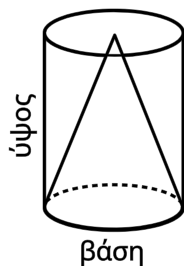
$$\text{Αν πάρουμε το } \pi = 3,14, \text{ τότε: } V = 100 \cdot 3,14 = 314 \text{ cm}^3.$$

## Όγκος κώνου

Ο όγκος ενός κώνου ισούται με το ένα τρίτο του όγκου κυλίνδρου που έχει την ίδια βάση και το ίδιο ύψος.

$$V = \frac{1}{3} \cdot (\text{Εμβαδόν βάσης}) \cdot (\text{ύψος}) \quad \text{ή}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \rho^2 \cdot u$$



Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση

**Παράδειγμα:**

Βρείτε τον όγκο του κώνου με ακτίνα βάσης  $\rho = 3\text{cm}$  και ύψος  $u = 4\text{cm}$ .

**Λύση:**

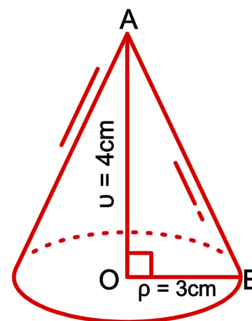
- Το εμβαδόν της βάσης του κώνου είναι:

$$E_{\beta} = \pi \rho^2 = \pi \cdot 3^2 = 9\pi \text{ cm}^2.$$

- Ο όγκος του κώνου είναι:

$$V = \frac{1}{3} E_{\beta} \cdot u = \frac{1}{3} \cdot 9\pi \cdot 4 = 12\pi \text{ cm}^3.$$

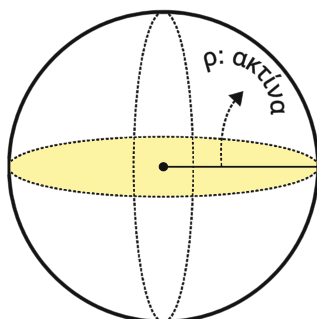
Αν πάρουμε το  $\pi = 3,14$ , τότε:  $V = 12 \cdot 3,14 = 37,68 \text{ cm}^3$ .



## Όγκος σφαίρας

Ο όγκος σφαίρας ακτίνας  $\rho$  δίνεται από τον τύπο:

$$V = \frac{4}{3} \pi \rho^3$$



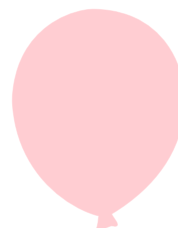
Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση

**Ήξερες ότι:**

Από όλα τα σχήματα, η σφαίρα έχει τη μικρότερη επιφάνεια για συγκεκριμένο όγκο. Αν παρατηρήσουμε ένα μπαλόνι, θα διαπιστώσουμε ότι αυτό θα προσπαθήσει να πάρει τη μορφή μίας σφαίρας, για να συγκρατήσει τον μέγιστο όγκο αέρα στη μικρότερη δυνατή επιφάνεια.



Το σχήμα της σφαίρας είναι πολύ συνηθισμένο στην φύση, χάρη στην ικανότητα που συζητήσαμε προηγουμένως. Κάποια παραδείγματα που συναντάμε είναι οι φούσκες και οι σταγόνες νερού. Πού αλλού συναντάμε αντίστοιχα σχήματα;



**Συνοπτικά:**

| Στερεό    | Όγκος  |
|-----------|--|
| Κύλινδρος | $V = (\text{Εμβαδόν βάσης}) \cdot (\text{ύψος})$ ή $V = \pi r^2 \cdot u$                                     |
| Κώνος     | $V = \frac{1}{3} \cdot (\text{Εμβαδόν βάσης}) \cdot (\text{ύψος})$ ή $V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot u$ |
| Σφαίρα    | $V = \frac{4}{3} \pi r^3$  |

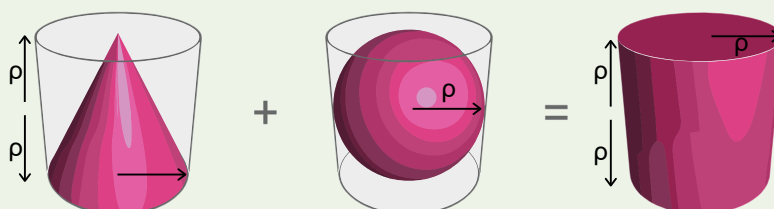


Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση

1. Να αποδείξετε ότι ο όγκος ενός κυλίνδρου ισούται με τον όγκο ενός κώνου και μίας σφαίρας, αν υποθέσουμε ότι ο κώνος και η σφαίρα εγγράφονται ακριβώς μέσα στον κύλινδρο.



**Λύση:**

Ο κύλινδρος έχει ακτίνα βάσης  $r$  και ύψος  $2r$  (γιατί εγγράφεται σε αυτόν η σφαίρα). Ο όγκος του κυλίνδρου είναι:

$$V_{\text{κυλίνδρου}} = \pi r^2 \cdot u = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3$$

Ο κώνος έχει ακτίνα βάσης  $r$  και ύψος  $2r$  (γιατί εγγράφεται στον κύλινδρο). Ο όγκος του κώνου είναι:

$$V_{\text{κώνου}} = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot u = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot 2r = \frac{2}{3} \cdot \pi r^3$$

Η σφαίρα έχει ακτίνα  $r$  και όγκο:  $V_{\text{σφαίρας}} = \frac{4}{3} \pi r^3$

Άρα:

$$V_{\text{κώνου}} + V_{\text{σφαίρας}} = \frac{2}{3} \cdot \pi r^3 + \frac{4}{3} \pi r^3 = 2\pi r^3 = V_{\text{κυλίνδρου}}$$



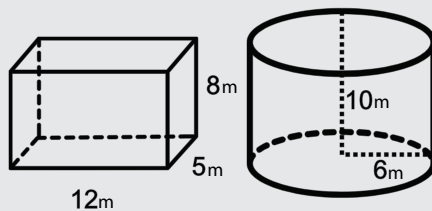
**1** Υπολόγισε τον όγκο κυλίνδρου με ακτίνα βάσης  $\rho = 5\text{cm}$  και ύψος  $u = 8\text{cm}$ .

**2** Υπολόγισε τον όγκο κώνου με ακτίνα βάσης  $\rho = 10\text{cm}$  και ύψος  $u = 2\text{cm}$ .

**3** Υπολόγισε τον όγκο σφαίρας διαμέτρου  $\delta = 16\text{cm}$ .

**4** Ένα κυλινδρικό ενυδρείο έχει ύψος  $60\text{cm}$  και διάμετρο  $40\text{cm}$ . Η εταιρεία που προμηθεύει τα υλικά χρεώνει  $0,05\text{€}$  ανά τετραγωνικό εκατοστό για το γυαλί του κυλίνδρου και  $1\text{€}$  ανά λίτρο νερού που θα τοποθετηθεί στο ενυδρείο. Υπολόγισε το συνολικό κόστος του ενυδρείου.

**5** Υπολόγισε τους όγκους στα παρακάτω σχήματα:



Εξασκούμε



σε όσα έμαθα

**6** Το ύψος ενός κυλίνδρου είναι όσο το μήκος της βάσης του. Το ύψος του είναι  $50,24\text{cm}$ . Υπολόγισε την επιφάνεια του κυλίνδρου και τον όγκο του.

**7** Η τεχνητή λίμνη στον κήπο ενός ξενοδοχείου έχει ημισφαιρικό σχήμα και ακτίνα  $50\text{m}$ . Πόσα λίτρα νερό θα χρειαστούμε για να την γεμίσουμε;

**8** Γεμίζουμε έναν κύβο ακμής 20cm με νερό. Η ποσότητα αυτή του νερού μπορεί να χωρέσει σε ημισφαιρικό δοχείο ακτίνας 20cm;

**9** Ένα κατάστημα με σοκολατάκια πουλάει τα είδη του σε 3 μορφές: κυλινδρικά, σφαιρικά και κωνικά. Αν κάθε σχήμα έχει ακριβώς την ίδια ακτίνα και ύψος ίσο με την ακτίνα σε ποια περίπτωση θα κατανάλωνες περισσότερη σοκολάτα;



**10** Λιώνουμε τρεις μεταλλικές σφαίρες με ακτίνες 3, 4 και 5 μέτρα, ώστε να φτιάξουμε μια καινούργια σφαίρα. Ποιο είναι το μήκος της ακτίνας της νέας σφαίρας που προκύπτει;



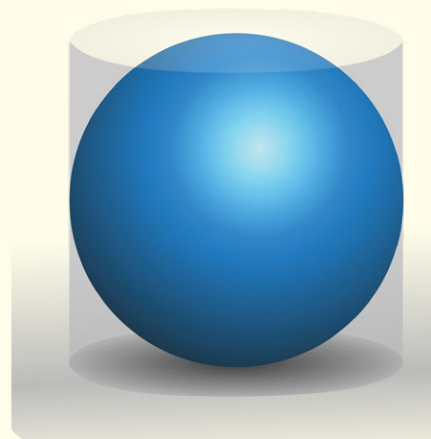
το συγκεκριμένο θέμα

## Ο ...τάφος του Αρχιμήδη

Ο τάφος του Αρχιμήδη λέγεται ότι περιείχε ένα γλυπτό που αναπαριστούσε την αγαπημένη μαθηματική απόδειξη του.

Ο Αρχιμήδης είχε αποδείξει ότι το εμβαδόν και ο όγκος μιας σφαίρας είναι τα  $\frac{2}{3}$  του κλειστού κυλίνδρου που την περιβάλλει συμπεριλαμβανομένων και των βάσεων του κυλίνδρου (βλέπε λυμένο παράδειγμα-σελ.145).

137 χρόνια μετά τον θάνατό του (75 π.Χ.), ο Ρωμαίος ρήτορας Κικέρων, έχοντας ακούσει ιστορίες για τον τάφο του Αρχιμήδη, προσπάθησε να τον εντοπίσει αλλά κανένας από τους ντόπιους δεν ήταν σε θέση να προσδιορίσει τη θέση του. Τελικά, μάλλον, βρήκε τον τάφο κοντά στην Ακραγαντινή πύλη των Συρακουσών, σε παραμελημένη κατάσταση και κατάρυτο από θάμνους. Ο Κικέρων διέταξε να καθαρίσουν τον τάφο, είδε το σκάλισμα και κατόρθωσε να διαβάσει μερικά από τα εδάφια, που είχαν προστεθεί ως επιγραφή.



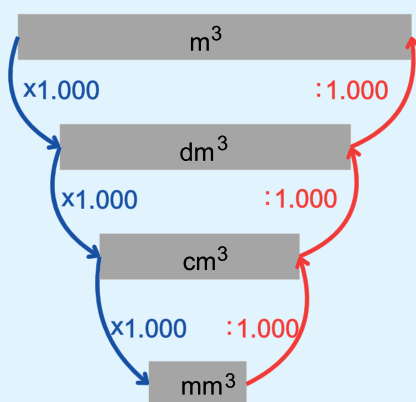
*Το εμβαδόν και όγκος μιας σφαίρας είναι τα  $\frac{2}{3}$  του αντίστοιχου κλειστού κυλίνδρου που την περιβάλλει. Μια σφαίρα και ένας κύλινδρος είχαν τοποθετηθεί στον τάφο του Αρχιμήδη, σύμφωνα με την επιθυμία του*

# Ανακεφαλαίωση (Όγκος)

Θυμόμαστε ότι:

Μονάδες μέτρησης όγκου:

|   |                   |                       |
|---|-------------------|-----------------------|
| 1 κυβικό μέτρο                              | 1 m <sup>3</sup>  | όγκος κύβου ακμής 1m  |
| 1 κυβικό δεκατόμετρο ή λίτρο (L)            | 1 dm <sup>3</sup> | όγκος κύβου ακμής 1dm |
| 1 κυβικό εκατοστόμετρο ή χιλιοστόλιτρο (ml) | 1 cm <sup>3</sup> | όγκος κύβου ακμής 1cm |
| 1 κυβικό χιλιοστόμετρο                      | 1 mm <sup>3</sup> | όγκος κύβου ακμής 1mm |



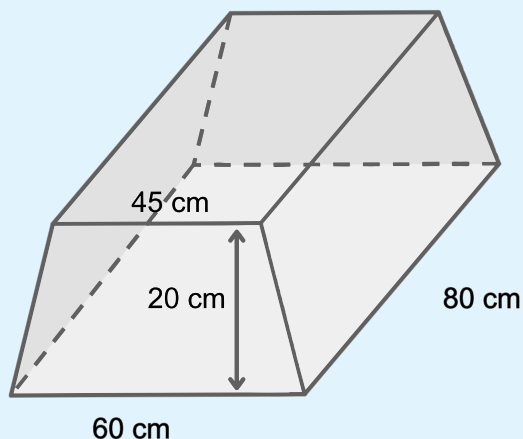
Οι τύποι για τους υπολογισμούς του όγκου βασικών στερεών σχημάτων φαίνονται παρακάτω:

| Στερεό   | Όγκος  |
|----------|--|
| Πρίσμα   | $V = (\text{Εμβαδόν βάσης}) \cdot (\text{ύψος})$                   |
| Πυραμίδα | $V = \frac{1}{3} \cdot (\text{Εμβαδόν βάσης}) \cdot (\text{ύψος})$ |

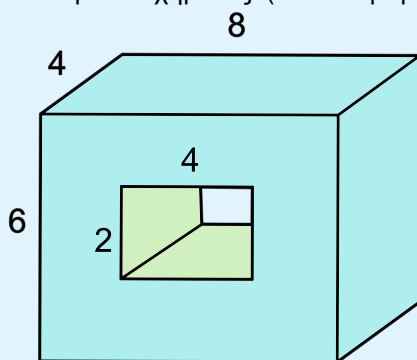
| Στερεό    | Όγκος   |
|-----------|---|
| Κύλινδρος | $V = (\text{Εμβαδόν βάσης}) \cdot (\text{ύψος})$ ή $V = \pi \rho^2 \cdot u$                                     |
| Κώνος     | $V = \frac{1}{3} \cdot (\text{Εμβαδόν βάσης}) \cdot (\text{ύψος})$ ή $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \rho^2 \cdot u$ |
| Σφαίρα    | $V = \frac{4}{3} \pi \rho^3$  |

## Αυτοαξιολόγηση (Όγκος)

1. Βρες τον όγκο στο παρακάτω πρίσμα.



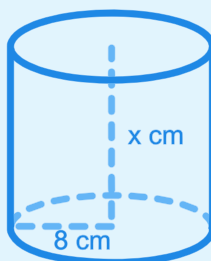
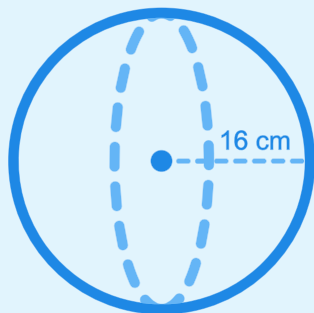
2. Υπολόγισε τον όγκο του παρακάτω στερεού σχήματος. (Όλα τα μεγέθη είναι μετρημένα σε cm.)



3. Μια σφαίρα έχει ακτίνα 16cm. Ένας κύλινδρος έχει ακτίνα 8cm και ύψος  $x$  cm. Γνωρίζουμε ότι η συνολική επιφάνεια του κυλίνδρου είναι η μισή της επιφάνειας της σφαίρας.

α) Βρες το  $x$ .

β) Βρες τον λόγο του όγκου της σφαίρας προς τον όγκο του κυλίνδρου.



Αντιλαμβάνομαι

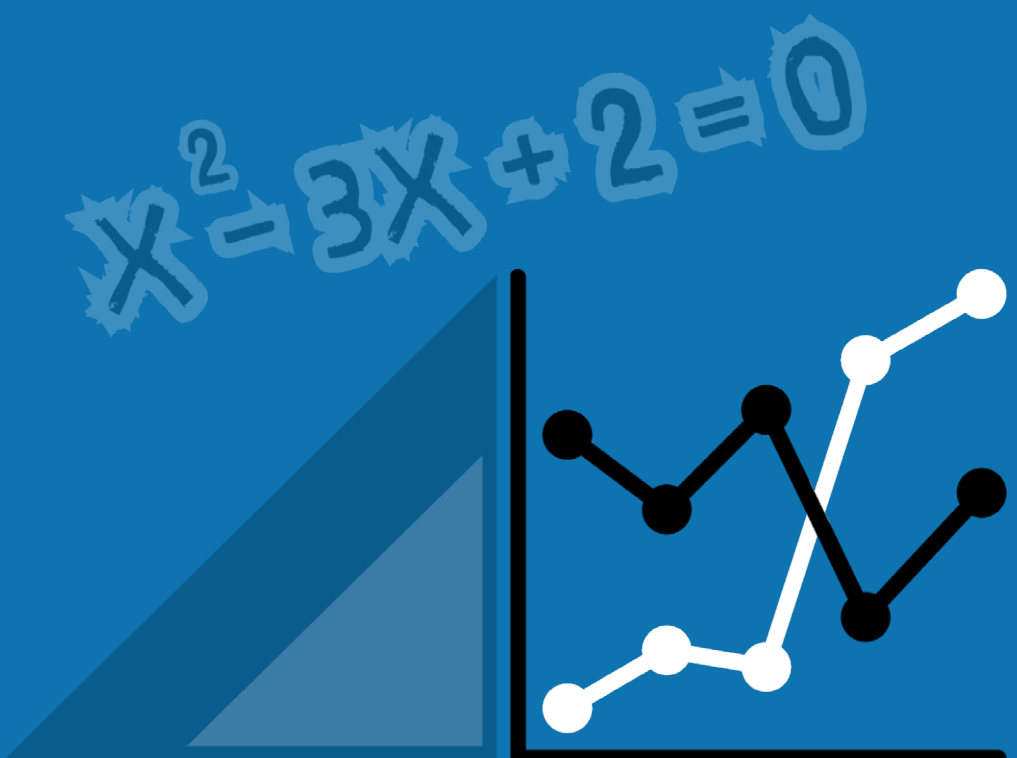


με προσομοίωση

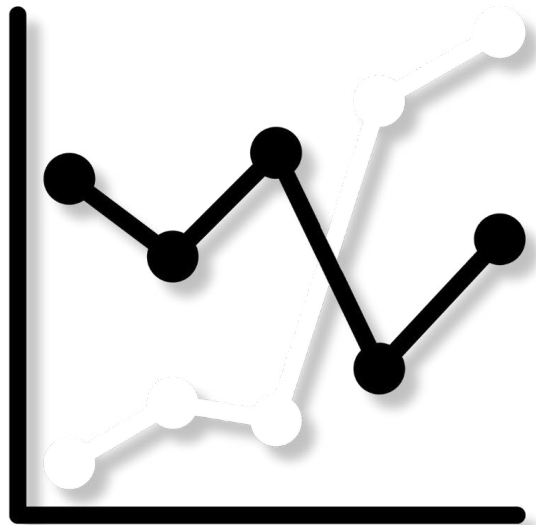
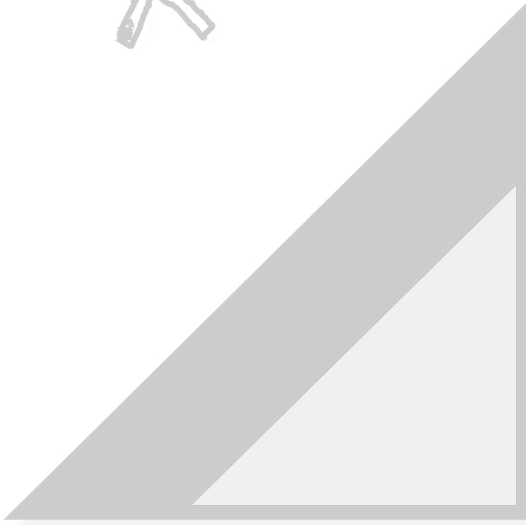
Σε αυτό το σημείο, θα πρέπει να είσαι σε θέση να ικανοποιείς όλους τους προσδοκώμενους μαθησιακούς στόχους. Γύρνα στην αρχή της θεματικής ενότητας και σημείωσε ✓ στα αντίστοιχα σημεία. Υπάρχουν στόχοι που αισθάνεσαι ότι δεν έχεις ικανοποιήσει πλήρως;



# ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ



$$x^2 - 3x + 2 = 0$$



# ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Γ.1

Στην ενότητα αυτή θα αναλύσουμε πώς μπορούμε να συλλέγουμε και να διαχειριζόμαστε δεδομένα από τον πραγματικό κόσμο. Θα εξετάσουμε τη διαφορά μεταξύ δείγματος και πληθυσμού, τη σημασία της αντιπροσωπευτικότητας, καθώς και πώς να αναγνωρίζουμε τη μεταβλητότητα των αποτελεσμάτων μεταξύ δειγμάτων. Μέσα από παραδείγματα, θα κατανοήσουμε πώς η στατιστική χρησιμοποιείται για τη λήψη αποφάσεων σε διάφορους τομείς της καθημερινότητας.

Είσαι έτοιμος/η να εξερευνήσεις τις μεθόδους με τις οποίες μετατρέπουμε δεδομένα σε χρήσιμα συμπεράσματα;



- Διατυπώνω ερωτήματα που αφορούν το ευρύτερο κοινωνικό περιβάλλον και απαντώνται με δεδομένα εκτός του οικείου περιβάλλοντός τους.
- Αναγνωρίζω την αναγκαιότητα της χρήσης δείγματος και τη διαφορά του από τον πληθυσμό.
- Χρησιμοποιώ απλή τυχαία δειγματοληψία για την επιλογή ενός αντιπροσωπευτικού δείγματος.
- Αναγνωρίζω τη δυνατότητα επαγωγικής εξαγωγής συμπερασμάτων για έναν πληθυσμό από ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα.
- Αναγνωρίζω τη μεταβλητότητα στατιστικών δεικτών μεταξύ δειγμάτων.



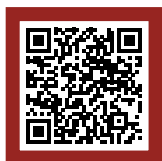
**1.1: Δείγμα και πληθυσμός, δειγματοληψία (απλή τυχαία)**

**1.2: Αντιπροσωπευτικότητα και εξαγωγή συμπερασμάτων/ Μεταβλητότητα μεταξύ δειγμάτων**

+ Ανακεφαλαίωση / Αυτοαξιολόγηση



# 1.1 | Δείγμα και πληθυσμός, δειγματοληψία (απλή τυχαία)



Τα παρακάτω ερωτήματα είναι ερωτήματα που έχουν προκύψει για διάφορες έρευνες που θα γίνουν **παγκοσμίως**. Σχολίασε τη μέθοδο που προτείνουμε για κάθε έρευνα.

1. Πώς επηρεάζει το εκπαιδευτικό σύστημα παγκοσμίως την απόδοση των μαθητών/μαθητριών στα μαθηματικά;  
Προτείνουμε να μελετήσουμε τις επιδόσεις των μαθητών/μαθητριών στις γραπτές εξετάσεις S.A.T. στις ΗΠΑ.
2. Πώς επηρεάζει η κλιματική αλλαγή την αγροτική παραγωγή;  
Προτείνουμε να μελετήσουμε τα παγκόσμια στοιχεία παραγωγής αγροτικών προϊόντων σε βάθος δεκαετίας.
3. Πώς επηρεάζει το δημόσιο σύστημα υγείας την μετάδοση επιδημικών ασθενειών στην Ευρώπη;  
Προτείνουμε να μελετήσουμε τις εισαγωγές ασθενών με επιδημική ασθένεια στα νοσοκομεία της Ελλάδας και της Πορτογαλίας.

## Δείγμα και πληθυσμός

Γνωρίζουμε ότι η Στατιστική είναι η επιστήμη που ασχολείται με τη συλλογή, την επεξεργασία και την παρουσίαση στατιστικών δεδομένων, με σκοπό την εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων για ένα σύνολο.

Το σύνολο των στοιχείων τα οποία μελετάμε ως προς κάποιο χαρακτηριστικό τους, λέγεται **πληθυσμός**.

### Παράδειγμα:

Εξετάζουμε τους μαθητές ενός Γυμνασίου σχετικά το άθλημα που προτιμούν.

Ο πληθυσμός της έρευνας είναι όλοι οι μαθητές/τριες του γυμνασίου και το χαρακτηριστικό είναι το άθλημα το οποίο προτιμούν.

Η εξέταση κάθε ατόμου ή στοιχείου ενός πληθυσμού λέγεται **απογραφή**. Επειδή η απογραφή ενός πληθυσμού απαιτεί πολύ χρόνο και είναι μία δαπανηρή διαδικασία, συνήθως επιλέγουμε να εξετάσουμε ένα μέρος του πληθυσμού το οποίο λέγεται **δείγμα**.

Το μέρος του πληθυσμού το οποίο επιλέγουμε να εξετάσουμε ως προς κάποιο χαρακτηριστικό του, ονομάζεται **δείγμα**. Το πλήθος των στοιχείων του δείγματος ονομάζεται **μέγεθος του δείγματος**.

| Πληθυσμός  | Δείγμα   |
|--|--|
| Όλη η ομάδα που μελετάνε οι ερευνητές.                         | Είναι υποσύνολο του πληθυσμού.                                 |
| Συνήθως είναι πολύ μεγάλος ο όγκος των δεδομένων.              | Είναι αρκετά μικρότερο από τον πληθυσμό.                       |
| Δεν είναι πρακτικό να συλλέξεις δεδομένα από όλο τον πληθυσμό. | Είναι πιο πρακτικό να συλλέξεις και να επεξεργαστείς δεδομένα. |
| Είναι οικονομικά ασύμφορο.                                     | Συμφέρει οικονομικά.   |

## Δειγματοληψία

Η διαδικασία με την οποία επιλέγεται ένα δείγμα από έναν πληθυσμό ονομάζεται **Δειγματοληψία**.

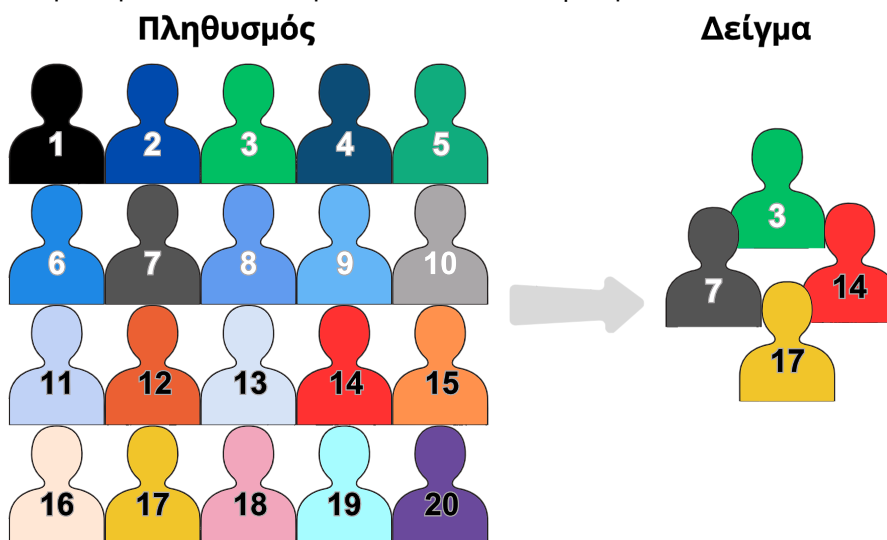
Η επιλογή των στοιχείων του δείγματος μέσα από τον πληθυσμό, γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε το δείγμα να είναι **αντιπροσωπευτικό** του πληθυσμού, δηλαδή τα συμπεράσματα που θα προκύψουν για το δείγμα να είναι αξιόπιστα ώστε να μπορούν να γενικευτούν σε ολόκληρο τον πληθυσμό.

**Παράδειγμα:** Για να εξετάσουμε πιο άθλημα προτιμούν οι μαθητές/τριες ενός Γυμνασίου ρωτήσαμε 6 συμμαθήτριες ενός τμήματος.

Με την επιλογή αυτή, το συμπέρασμα που θα προκύψει **δεν** θα είναι αντιπροσωπευτικό του πληθυσμού καθώς το μέγεθος του δείγματος είναι πολύ μικρό και τα άτομα είναι φίλες του ίδιου τμήματος, άρα πιθανώς να έχουν και την ίδια προτίμηση αθλήματος.

## Απλή Τυχαία Δειγματοληψία (ΑΤΔ)

Ένας δίκαιος τρόπος επιλογής ενός δείγματος είναι να επιλεγούν τυχαία τα στοιχεία που το αποτελούν, ώστε το δείγμα που θα προκύψει να είναι αντιπροσωπευτικό του πληθυσμού.



Όταν κάθε στοιχείο ενός πληθυσμού έχει την ίδια πιθανότητα να επιλεγεί στο δείγμα, τότε το δείγμα αυτό ονομάζεται τυχαίο δείγμα και η δειγματοληψία ονομάζεται **απλή τυχαία δειγματοληψία (ΑΤΔ)**.

**Παράδειγμα:** Για να εξετάσουμε ποιο άθλημα προτιμούν οι μαθητές/τριες ενός γυμνασίου επιλέγουμε τυχαία 20 από τους 160 συνολικά μαθητές του σχολείου, με την εξής μέθοδο:

- Αντιστοιχίζουμε σε κάθε μαθητή/τρια έναν αριθμό από το 1 μέχρι το 160.
- Επιλέγουμε τυχαία 20 αριθμούς από τους 160. Αυτό μπορεί να συμβεί με κλήρωση μέσα από μία κάλπη στην οποία έχουμε βάλει χαρτάκια με αριθμούς από το 1 έως 160 ή με έναν πίνακα τυχαίων αριθμών ή με μία «Γεννήτρια Τυχαίων Αριθμών» η οποία είναι μία ηλεκτρονική εφαρμογή που επιλέγει τυχαίους αριθμούς.

Με τον τρόπο αυτό όλοι οι μαθητές του σχολείου έχουν την ίδια πιθανότητα επιλογής, επομένως η δειγματοληψία είναι απλή και τυχαία.

Η Απλή Τυχαία Δειγματοληψία αποτελεί τη συνηθέστερη μέθοδο δειγματοληψίας και μπορεί να χαρακτηριστεί ως **δίκαιη** και **αντικειμενική** καθώς όλα τα άτομα ενός πληθυσμού έχουν ίσες πιθανότητες να επιλεγούν, χωρίς κάποια παρέμβαση από την πλευρά του ερευνητή. Αυτό σημαίνει πως ο ερευνητής δε χρησιμοποιεί προσωπικά ή υποκειμενικά κριτήρια για την επιλογή του δείγματος.

**Σχόλιο:**

Η μέθοδος απλής τυχαίας δειγματοληψίας είναι πολύ αποδοτική:

- Σε «ομογενή» πληθυσμό.
- Σε μικρούς σχετικά πληθυσμούς.
- Για την αρχική φάση μιας μελέτης.
- Για να αποκτήσουμε πληροφορίες που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε σαν δείκτη σε επόμενες μελέτες.
- Για να διεξάγουμε μελέτες όταν υπάρχει περιορισμένη χρηματοδότηση, χρόνος κ.λπ.

**Πίνακας Τυχαίων Αριθμών που αξιοποιείται στην Απλή Τυχαία Δειγματοληψία:**

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 6 | 1 | 5 | 0 | 7 | 9 | 9 | 9 | 1 |
| 6 | 4 | 3 | 9 | 8 | 9 | 1 | 2 | 7 | 3 |
| 9 | 4 | 8 | 2 | 7 | 2 | 4 | 2 | 1 | 9 |
| 4 | 1 | 0 | 9 | 0 | 0 | 8 | 5 | 3 | 1 |
| 0 | 8 | 2 | 3 | 6 | 4 | 1 | 1 | 4 | 0 |
| 7 | 6 | 3 | 3 | 5 | 9 | 1 | 1 | 8 | 9 |
| 4 | 4 | 0 | 1 | 7 | 3 | 1 | 3 | 0 | 9 |
| 4 | 9 | 3 | 8 | 1 | 0 | 2 | 3 | 3 | 0 |
| 3 | 1 | 2 | 0 | 6 | 5 | 5 | 2 | 9 | 3 |
| 2 | 4 | 2 | 4 | 9 | 0 | 2 | 2 | 6 | 6 |



1. Ρωτήσαμε τους μαθητές ενός σχολείου, πόσες φορές χρησιμοποίησαν τα μέσα μαζικής μεταφοράς την προηγούμενη εβδομάδα. Οι απαντήσεις τους παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα:

|    | 1  | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  | 7  | 8 | 9 | 10 |
|----|----|---|---|----|----|----|----|---|---|----|
| 1  | 5  | 6 | 2 | 10 | 14 | 4  | 5  | 1 | 6 | 0  |
| 2  | 7  | 5 | 0 | 4  | 4  | 4  | 6  | 1 | 0 | 0  |
| 3  | 2  | 0 | 5 | 20 | 0  | 0  | 1  | 0 | 2 | 6  |
| 4  | 10 | 6 | 4 | 4  | 8  | 11 | 12 | 0 | 4 | 8  |
| 5  | 14 | 4 | 2 | 15 | 5  | 1  | 0  | 4 | 0 | 8  |
| 6  | 8  | 2 | 8 | 6  | 9  | 6  | 4  | 1 | 0 | 0  |
| 7  | 13 | 9 | 8 | 0  | 5  | 8  | 4  | 1 | 0 | 4  |
| 8  | 4  | 2 | 1 | 2  | 3  | 1  | 8  | 7 | 9 | 4  |
| 9  | 0  | 2 | 9 | 2  | 8  | 2  | 4  | 8 | 2 | 6  |
| 10 | 8  | 2 | 1 | 4  | 3  | 6  | 6  | 1 | 0 | 2  |

α) Ποιος είναι ο πληθυσμός της έρευνας και ποιο το χαρακτηριστικό το οποίο μελετάμε;

β) Να επιλέξετε ένα δείγμα 20 δεδομένων με Απλή Τυχαία Δειγματοληψία.

**Λύση:**

α) Ο πληθυσμός της έρευνας είναι οι μαθητές του σχολείου και το χαρακτηριστικό ως προς το οποίο μελετάμε τον πληθυσμό είναι πόσες φορές χρησιμοποίησαν τα μέσα μαζικής μεταφοράς την προηγούμενη εβδομάδα.

β) Αντιστοιχίζουμε κάθε απάντηση με έναν αριθμό. Σε αυτό θα μας βοηθήσει η αρίθμηση των γραμμών και στηλών του πίνακα. Για παράδειγμα:

- Αντιστοιχούμε την απάντηση «5» που βρίσκεται στην πρώτη γραμμή και πρώτη στήλη, με τον αριθμό 1.
- Ο αριθμός 6 που βρίσκεται στην πρώτη γραμμή και στη δεύτερη στήλη, αντιστοιχεί στον αριθμό 2, κ.ο.κ.
- Ο τελευταίος αριθμός του πίνακα, δηλαδή το «2» αντιστοιχεί στον αριθμό 100.

**1ος τρόπος:**

Με τη βοήθεια μίας «Γεννήτριας Τυχαίων Αριθμών» παίρνουμε 20 τυχαίους αριθμούς:

67, 89, 26, 46, 92, 34, 10, 20, 37, 77, 76, 70, 98, 96, 40, 41, 79, 94, 99, 2

οι οποίοι αντιστοιχούν στους χρόνους:

4, 9, 4, 11, 2, 20, 0, 0, 1, 4, 8, 4, 8, 2, 8, 10, 0, 2, 0, 6.

**2ος τρόπος:**

Διαλέγουμε 20 τυχαίους διψήφιους αριθμούς από τον **Πίνακα Τυχαίων Αριθμών** που δίνεται στην προηγούμενη σελίδα, με τον εξής τρόπο:

- Επιλέγουμε αυθαίρετα έναν αριθμό, π.χ. το 2 που βρίσκεται στην 3<sup>η</sup> γραμμή και στην 4<sup>η</sup> στήλη.
- Με αρχή το 2, διαλέγουμε 20 διψήφιους αριθμούς με τη σειρά που εμφανίζονται στον πίνακα:

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 6 | 1 | 5 | 0 | 7 | 9 | 9 | 9 | 1 |
| 6 | 4 | 3 | 9 | 8 | 9 | 1 | 2 | 7 | 3 |
| 9 | 4 | 8 | 2 | 7 | 2 | 4 | 2 | 1 | 9 |
| 4 | 1 | 0 | 9 | 0 | 0 | 8 | 5 | 3 | 1 |
| 0 | 8 | 2 | 3 | 6 | 4 | 1 | 1 | 4 | 0 |
| 7 | 6 | 3 | 3 | 5 | 9 | 1 | 1 | 8 | 9 |
| 4 | 4 | 0 | 1 | 7 | 3 | 1 | 3 | 0 | 9 |
| 4 | 9 | 3 | 8 | 1 | 0 | 2 | 3 | 3 | 0 |
| 3 | 1 | 2 | 0 | 6 | 5 | 5 | 2 | 9 | 3 |
| 2 | 4 | 2 | 4 | 9 | 0 | 2 | 2 | 6 | 6 |

δηλαδή τους αριθμούς:

27, 24, 21, 94, 10, 90, 08, 53, 10, 82, 36, 41, 14, 07, 63, 35, 91, 18, 94, 40.

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός 10 εμφανίζεται δύο φορές, επομένως τον διαγράφουμε και επιλέγουμε τον επόμενο αριθμό που εμφανίζεται, που είναι το 17:

27, 24, 21, 94, 10, 90, 08, 53, ~~10~~, 82, 36, 41, 14, 07, 63, 35, 91, 18, 94, 40, 17.

οι οποίοι αντιστοιχούν στους χρόνους:

6, 4, 7, 2, 0, 6, 1, 2, 2, 0, 10, 10, 5, 8, 0, 0, 1, 2, 8, 5.

**Παρατηρήσεις:**

1. Η επιλογή των διψήφιων αριθμών από τον πίνακα τυχαίων αριθμών θα μπορούσε να γίνει και κατά στήλη ή ακόμη και διαγώνια αλλά και με άλλους τρόπους.
2. Επειδή ο αριθμός 100 είναι τριψήφιος δεν θα μπορούσε να εμφανιστεί με αυτόν τον τρόπο καθώς επιλέγουμε μόνο διψήφιους αριθμούς, ωστόσο το πρόβλημα λύνεται αν υποθέσουμε ότι το 00 αντιστοιχεί στο 100. Έτσι όλοι οι αριθμοί έχουν την ίδια πιθανότητα επιλογής.



- 1** Παρακάτω δίνονται οι πληθυσμοί που είναι προς μελέτη. Προσπάθησε να προτείνεις ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα σε κάθε περίπτωση:

| Πληθυσμός                                 | Δείγμα |
|---|--------|
| Τραγουδία που συμμετείχαν στην Eurovision |        |
| Έλληνες ποδοσφαιριστές εν ενεργεία        |        |
| Ροκ συγκροτήματα                          |        |
| Μάρκες αυτοκινήτων                        |        |

- 2** Μια έρευνα αγοράς εξετάζει 85 άτομα μιας περιοχής για την κατανάλωση καφέ. Θέλουμε να μάθουμε αν οι καταναλωτές είναι διατεθειμένοι να αλλάξουν τον καφέ που πίνουν συνήθως και να προτιμήσουν την χωρίς καφεΐνη εκδοχή.

α. Το δείγμα είναι:

- i) Οι κάτοικοι της περιοχής της έρευνας
- ii) Τα 85 άτομα
- iii) Οι καταναλωτές καφέ της περιοχής
- iv) Οι καταναλωτές καφέ παγκοσμίως

β. Επαναλαμβάνουμε την έρευνα αλλά αυτή τη φορά επιλέγουμε 85 γυναίκες, ηλικίας 18-25 ετών. Κάναμε τυχαία δειγματοληψία;

- i) Ναι, γιατί επιλέξαμε τυχαία τις γυναίκες ανάμεσα στις γυναίκες που υπάρχουν σε όλη την περιοχή.
- ii) Όχι, γιατί εξαρχής αποκλείσαμε όλους τους άντρες και τις γυναίκες 25 και άνω από την έρευνα.

- 3** Διάλεξε ποιες από τις παρακάτω μεθόδους μπορούν να αξιοποιηθούν για μελέτη του πληθυσμού, ενός δείγματος του πληθυσμού ή και των δύο:

- α. Απογραφή πληθυσμού.
- β. Αρχεία του κράτους.
- γ. Ερωτηματολόγιο.
- δ. Άμεση παρατήρηση.
- ε. Χρήση απομακρυσμένων μέσων (όπως δορυφόροι).
- στ. Μέσα Κοινωνικής Δικτύωσης.

Εξασκούμε



σε όσα έμαθα

4

Γενικά, είναι δύσκολο να ισχυριστούμε ότι όταν επιλέγουμε ένα δείγμα τυχαία από έναν πληθυσμό είναι πάντα αντικειμενική η επιλογή μας. Για παράδειγμα, ένας στατιστικολόγος που έχει γενέθλια στις 27 του μήνα, μπορεί να επιλέγει συνειδητά (ή ασυνείδητα) τον αριθμό 27. Για αυτό μπορούμε να αξιοποιήσουμε τις παρακάτω μεθόδους:

**«Τυχαία Λοταρία»:** Γράφουμε τους αριθμούς σε χαρτάκια ή μπαλάκια, τα τοποθετούμε σε μια κληρωτίδα και επιλέγουμε τυχαία το δείγμα.

**Πίνακας τυχαίων αριθμών:** Κάποιοι στατιστικολόγοι έχουν βιβλία με πίνακες που έχουν τυχαίους αριθμούς για να εξάγουν το δείγμα τους, όπως είδαμε και παραπάνω.

**Online γενέτειρα τυχαίων αριθμών:** Υπάρχουν πολλές εφαρμογές που διαλέγουν τυχαία αριθμούς, όπως η <https://www.calculatorsoup.com/calculators/statistics/random-number-generator.php> και πολλές άλλες.

**Αξιοποίηση της εντολής του Excel:** Μέσω του Excel μπορούμε να επιλέξουμε αριθμούς τυχαία χρησιμοποιώντας τον τύπο =RANDBETWEEN. Για παράδειγμα, ένα κελί με την εντολή =RANDBETWEEN(2,20) θα επιλέξει έναν αριθμό τυχαία ανάμεσα στο 2 και το 20.

Από τις παρακάτω 100 παρατηρήσεις για τη βαθμολογία των φοιτητών σε μια εξέταση διάλεξε τυχαία 10, αξιοποιώντας κάποια από τις παραπάνω μεθόδους.

2, 1, 8, 3, 2, 1, 5, 6, 4, 8, 4, 3, 6, 8, 8, 9, 4, 2, 10, 10,  
6, 5, 8, 10, 5, 9, 1, 8, 4, 8, 7, 8, 6, 8, 8, 8, 2, 6, 8, 3,  
8, 4, 6, 3, 3, 9, 9, 7, 8, 3, 2, 3, 5, 4, 4, 4, 6, 9, 8, 8,  
2, 8, 5, 7, 6, 10, 4, 1, 10, 8, 6, 9, 6, 9, 7, 2, 10, 2, 9, 8,  
7, 6, 8, 4, 8, 7, 4, 9, 8, 9, 5, 1, 4, 4, 9, 9, 5, 9, 5, 6.

5

Παρακάτω φαίνονται οι βαθμολογίες στις εξετάσεις στο μάθημα της Ιστορίας 500 μαθητών/τριών Γ' Λυκείου. Επίλεξε ένα τυχαίο δείγμα 20 μαθητών/τριών και βρες το εύρος και τη μέση τιμή της απόδοσης τους.

9, 6, 9, 7, 14, 20, 17, 4, 6, 8, 6, 3, 18, 12, 7, 19, 1, 11, 10, 11, 8, 9, 20, 5, 17, 3, 12, 4, 17, 1, 7, 3, 15, 17, 11, 6, 9, 18, 6, 16, 1, 8, 1, 15, 4, 3, 10, 2, 6, 4, 9, 15, 9, 16, 18, 7, 2, 6, 3, 9, 1, 1, 9, 7, 9, 16, 6, 18, 15, 7, 6, 7, 18, 2, 13, 19, 18, 17, 3, 13, 10, 10, 18, 7, 6, 2, 3, 5, 4, 17, 2, 20, 15, 14, 8, 11, 5, 4, 14, 11, 8, 6, 16, 14, 17, 13, 19, 9, 2, 11, 2, 16, 17, 8, 3, 13, 3, 13, 5, 9, 7, 5, 11, 13, 20, 6, 14, 18, 5, 3, 1, 14, 12, 16, 5, 5, 20, 4, 17, 6, 19, 20, 4, 8, 9, 20, 18, 6, 5, 14, 7, 8, 5, 8, 7, 3, 10, 17, 20, 14, 16, 13, 18, 6, 4, 11, 9, 15, 16, 4, 14, 3, 9, 8, 13, 20, 5, 1, 13, 5, 6, 8, 9, 8, 20, 16, 10, 9, 15, 11, 8, 8, 3, 11, 10, 18, 6, 19, 19, 2, 2, 6, 2, 15, 19, 19, 20, 18, 20, 12, 3, 2, 2, 5, 7, 6, 13, 17, 8, 1, 10, 19, 13, 5, 7, 18, 14, 11, 11, 5, 14, 16, 16, 7, 18, 5, 4, 1, 18, 1, 14, 15, 10, 19, 8, 3, 13, 3, 8, 7, 17, 12, 4, 4, 9, 19, 20, 12, 12, 13, 4, 10, 15, 20, 5, 20, 17, 2, 6, 4, 20, 4, 4, 2, 20, 1, 13, 3, 5, 2, 20, 5, 5, 14, 19, 8, 9, 1, 4, 19, 6, 2, 8, 6, 3, 14, 19, 10, 18, 15, 1, 13, 15, 20, 16, 7, 2, 2, 7, 19, 5, 8, 17, 16, 6, 5, 13, 6, 19, 6, 17, 9, 5, 13, 18, 1, 19, 11, 17, 9, 5, 12, 20, 4, 1, 1, 19, 16, 11, 6, 15, 16, 5, 13, 10, 14, 9, 3, 8, 6, 13, 6, 1, 5, 4, 4, 4, 1, 12, 19, 12, 5, 3, 15, 5, 3, 4, 7, 15, 5, 13, 12, 15, 9, 11, 10, 14, 5, 16, 19, 17, 8, 5, 20, 15, 8, 8, 16, 12, 15, 2, 20, 14, 9, 3, 14, 15, 6, 2, 4, 12, 7, 8, 17, 11, 18, 2, 6, 17, 18, 15, 9, 17, 5, 20, 19, 14, 14, 8, 14, 15, 16, 6, 15, 6, 19, 8, 17, 8, 17, 5, 20, 3, 8, 4, 10, 1, 14, 13, 6, 17, 11, 7, 15, 17, 17, 4, 7, 17, 13, 9, 18, 9, 8, 2, 17, 18, 3, 8, 4, 1, 14, 5, 6, 20, 16, 15, 19, 12, 11, 2, 12, 19, 17, 15, 7, 17, 20, 15, 13, 8, 14, 6, 3, 18, 10, 3, 12, 1, 17, 4, 4, 2, 10, 6, 18, 19, 10, 17, 7

Σύγκρινε τα αποτελέσματά σου με αυτά των υπόλοιπων παιδιών της τάξης σου.  
Τι παρατηρείς;

6

Ρωτήσαμε τυχαία 100 άτομα ποια μέρα του χρόνου έχουν γενέθλια. Αντιστοιχίσαμε κάθε μέρα ενός έτους με έναν αριθμό: 1 Ιανουαρίου-1, 2 Ιανουαρίου-2, 3 Ιανουαρίου-3, κ.λ.π. Διάλεξε 20 ημερομηνίες στην τύχη και εξέτασε αν υπάρχουν άτομα που έχουν γεννηθεί την ίδια μέρα. Τι περιμένεις να βρεις σαν αποτέλεσμα;

204, 19, 90, 6, 119, 5, 56, 85, 265, 250, 47, 145, 156, 318, 197, 30, 27, 86, 241, 188, 36, 49, 244, 91, 300, 269, 225, 272, 270, 56, 230, 60, 339, 33, 62, 101, 286, 320, 153, 320, 62, 134, 37, 356, 68, 132, 106, 13, 103, 251, 166, 43, 137, 93, 177, 32, 124, 276, 352, 7, 169, 197, 229, 168, 10, 198, 89, 169, 96, 288, 193, 284, 193, 50, 213, 156, 11, 147, 91, 191, 121, 151, 21, 6, 93, 267, 362, 287, 280, 30, 81, 55, 275, 10, 71, 107, 272, 265, 245, 116



Μελετώ



το συγκεκριμένο θέμα

## Είδη δειγματοληψίας

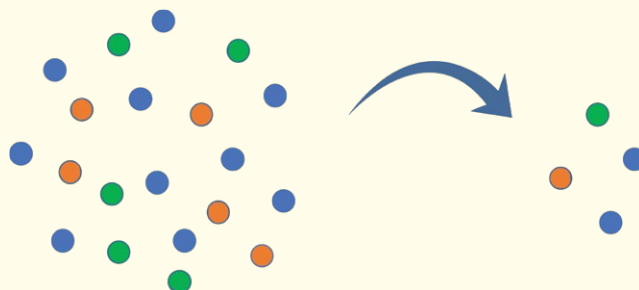
Η δειγματοληψία είναι μια διαδικασία επιλογής στοιχείων από έναν πληθυσμό για τη συλλογή δεδομένων. Υπάρχουν διάφορες μέθοδοι, όπως:

**Απλή τυχαία δειγματοληψία:** Όλα τα στοιχεία έχουν ίση πιθανότητα επιλογής.

**Στρωματοποιημένη δειγματοληψία:** Ο πληθυσμός διαιρείται σε στρώματα και επιλέγονται δείγματα από κάθε στρώμα.

**Κατά συστάδες δειγματοληψία:** Ο πληθυσμός διαιρείται σε ομάδες και επιλέγονται τυχαίες ομάδες για μελέτη.

Αυτές οι μέθοδοι χρησιμοποιούνται ανάλογα με τον πληθυσμό και τον στόχο της έρευνας.



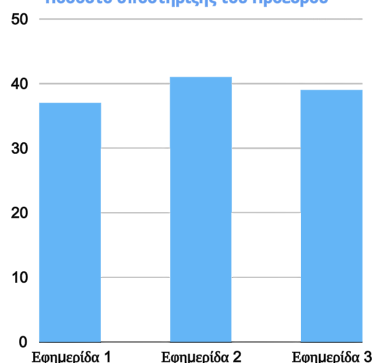
## 1.2 | Αντιπροσωπευτικότητα και εξαγωγή συμπερασμάτων / Μεταβλητότητα μεταξύ δειγμάτων



Σε μια φανταστική χώρα έγινε μια δημοσκόπηση, για να εκτιμηθεί το ποσοστό υποστήριξης του Προέδρου στις επόμενες εκλογές. Τρεις εκδότες εφημερίδων έκαναν ξεχωριστές εθνικές δημοσκοπήσεις. Τα αποτελέσματα για τις τρεις δημοσκοπήσεις των εφημερίδων είναι τα εξής:

- **Εφημερίδα 1:** 37% (η δημοσκόπηση έγινε στις **06 Ιανουάριου**, σε ένα τυχαίο δείγμα **2000 αναγνωστών** της εφημερίδας)
- **Εφημερίδα 2:** 41% (η δημοσκόπηση έγινε στις **20 Ιανουάριου**, σε ένα τυχαίο δείγμα **1000 πολιτών** με δικαίωμα ψήφου)
- **Εφημερίδα 3:** 39% (η δημοσκόπηση έγινε στις **06 Ιανουάριου**, σε ένα τυχαίο δείγμα **1000 πολιτών** με δικαίωμα ψήφου)

Ποσοστό υποστήριξης του Προέδρου



Ποιας εφημερίδας τα αποτελέσματα θεωρείτε πιο έγκυρη εκτίμηση για το ποσοστό υποστήριξης του Προέδρου, εάν οι εκλογές γίνουν στις 25 Ιανουάριου; ( PISA, 2012 )

### Μέτρα θέσης

Στις προηγούμενες τάξεις μελετήσαμε τα κυριότερα μέτρα θέσης που είναι η μέση τιμή και η διάμεσος, μέσω των οποίων εξάγουμε χρήσιμα συμπεράσματα.

Για να υπολογίσουμε τη **μέση τιμή** ή τον **μέσο όρο** ενός συνόλου δεδομένων, προσθέτουμε τις τιμές όλων των δεδομένων και διαιρούμε το άθροισμά τους με το πλήθος των δεδομένων.

$$\text{Μέση τιμή} = \frac{\text{άθροισμα των δεδομένων}}{\text{πλήθος των δεδομένων}}$$

Θυμόμαστε



Για να βρούμε τη **διάμεσο**, αρχικά βάζουμε τα δεδομένα σε **αύξουσα σειρά**.

- Αν το πλήθος των δεδομένων είναι **περιττό**, τότε η διάμεσος είναι η **μεσαία τιμή**.
- Αν το πλήθος των δεδομένων είναι **άρτιο**, παίρνουμε ως διάμεσο το **μέσο όρο** των δύο μεσαίων τιμών.

## Μέτρα μεταβλητότητας

Στις προηγούμενες τάξεις μελετήσαμε επίσης τα κυριότερα μέτρα μεταβλητότητας που είναι το **εύρος** και το **ενδοτεταρτημοριακό εύρος**.



$$\text{Εύρος } R = (\text{Μεγαλύτερο δεδομένο}) - (\text{Μικρότερο δεδομένο})$$

Για να υπολογίσουμε τα τεταρτημόρια αρχικά τοποθετούμε τα δεδομένα σε **αύξουσα σειρά**.

- Το πρώτο τεταρτημόριο ( $Q_1$ ) υπολογίζεται ως διάμεσος του πρώτου μισού του συνόλου των δεδομένων.
- Το δεύτερο τεταρτημόριο ( $Q_2$ ) αντιστοιχεί στη διάμεσο του δείγματος.  $Q_2 = \delta$ .
- Το τρίτο τεταρτημόριο ( $Q_3$ ) υπολογίζεται ως διάμεσος του δεύτερου μισού του συνόλου των δεδομένων.

**Παρατήρηση:** Όταν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι **περιττός αριθμός**, για τον ευκολότερο υπολογισμό των  $Q_1$  και  $Q_3$  **εξαιρούμε** από το δείγμα τη διάμεσο και εκτελούμε την παραπάνω διαδικασία.

Το **Ενδοτεταρτημοριακό Εύρος (Q)** είναι η διαφορά του πρώτου τεταρτημορίου  $Q_1$  από το τρίτο τεταρτημόριο  $Q_3$ , δηλαδή:

$$Q = Q_3 - Q_1$$

## Περίληψη των πέντε αριθμών

Η περίληψη των πέντε αριθμών αποτελείται από το μικρότερο δεδομένο ( $\min$ ), το πρώτο τεταρτημόριο ( $Q_1$ ), τη διάμεσο ( $\delta$ ), το τρίτο τεταρτημόριο ( $Q_3$ ) και το μεγαλύτερο δεδομένο ( $\max$ ).

$$(\min, Q_1, \delta, Q_3, \max)$$

## Μεταβλητότητα μεταξύ δειγμάτων

Τα συμπεράσματα που προκύπτουν μέσω της Απλής Τυχαίας Δειγματοληψίας είναι συνήθως αξιόπιστα και μπορούν να γενικευτούν σε ολόκληρο τον πληθυσμό. Λέμε ότι το δείγμα που προκύπτει μέσω της Απλής Τυχαίας Δειγματοληψίας είναι αντιπροσωπευτικό του πληθυσμού.

### Παράδειγμα:

Στο λυμένο παράδειγμα της προηγούμενης παραγράφου (1.1) μελετήσαμε 100 μαθητές σχετικά με το πόσες φορές χρησιμοποίησαν τα μέσα μαζικής μεταφοράς την προηγούμενη εβδομάδα.

Παρακάτω φαίνονται τα δύο τυχαία δείγματα 20 δεδομένων, που επιλέχθηκαν από πληθυσμό 100 δεδομένων, με Απλή Τυχαία Δειγματοληψία:

**1ο δείγμα:** 4, 9, 4, 11, 2, 20, 0, 0, 1, 4, 8, 4, 8, 2, 8, 10, 0, 2, 0, 6.

**2ο δείγμα:** 6, 4, 7, 2, 0, 6, 1, 2, 2, 0, 10, 10, 5, 8, 0, 0, 1, 2, 8, 5.

Υπολόγισε την περίληψη των πέντε αριθμών των δεδομένων των δύο δειγμάτων.

**Λύση:**

Εκτελώντας τις πράξεις βρίσκουμε:

|  |  |
|--|--|
| <p><b>1ο Δείγμα:</b><br/>           0,0,0,0,1,2,2,2,4,4,4,4,6,8,8,8,9,10,11,20<br/>           και <math>\delta = \frac{4+4}{2} = 4</math><br/>           Για το <math>Q_1</math>: 0,0,0,0,1,2,2,2,4,4<br/>           και <math>Q_1 = \frac{1+2}{2} = 1,5</math><br/>           Για το <math>Q_3</math>: 4,4,6,8,8,8,9,10,11,20<br/>           και <math>Q_3 = \frac{8+8}{2} = 8</math></p> | <p><b>2ο Δείγμα:</b><br/>           0,0,0,0,1,1,2,2,2,2,4,5,5,6,6,7,8,8,10,10<br/>           και <math>\delta = \frac{2+4}{2} = 3</math><br/>           Για το <math>Q_1</math>: 0,0,0,0,1,1,2,2,2,2<br/>           και <math>Q_1 = \frac{1+1}{2} = 1</math><br/>           Για το <math>Q_3</math>: 4,5,5,6,6,7,8,8,10,10<br/>           και <math>Q_3 = \frac{6+7}{2} = 6,5</math></p> |
|--|--|

**Συνοπτικά:**

|   |   |
|---|---|
| <p><b>1ο δείγμα:</b><br/>           Min = 0<br/> <math>Q_1 = 1,5</math><br/>           Διάμεσος = 4<br/> <math>Q_3 = 8</math><br/>           Max = 20</p> | <p><b>2ο δείγμα:</b><br/>           Min = 0<br/> <math>Q_1 = 1</math><br/>           Διάμεσος = 3<br/> <math>Q_3 = 6,5</math><br/>           Max = 10</p> |
|---|---|

Παρατηρούμε ότι **τα δύο δείγματα δείχνουν διαφορετικά χαρακτηριστικά** παρόλο που προέρχονται από τον ίδιο πληθυσμό. Τα αποτελέσματα αναδεικνύουν τη σημασία της επιλογής δείγματος και πώς διαφορετικά δείγματα μπορούν να δώσουν διαφορετικές πληροφορίες για τον πληθυσμό. Όταν παίρνουμε δείγματα από έναν πληθυσμό, κάθε δείγμα αποτελεί ένα κομμάτι του πληθυσμού και μπορεί να περιέχει διαφορετικά στοιχεία. Η τυχαία επιλογή μπορεί να οδηγήσει σε διαφορετική μέση τιμή, διάμεσο κ.λπ.

**Γενικά:**

Τα διαφορετικά αποτελέσματα είναι αναμενόμενα λόγω της τυχαιότητας που υπάρχει κατά τη δειγματοληψία. Αυτές οι διαφορές τονίζουν τη σημασία της δειγματοληψίας και της στατιστικής ανάλυσης, καθώς και το γεγονός ότι ένα μόνο δείγμα μπορεί να μην είναι πλήρως αντιπροσωπευτικό του συνολικού πληθυσμού. Για να μειωθούν αυτές οι διαφορές θα μάθουμε (σε ανώτερο ακαδημαϊκό επίπεδο) διάφορες τεχνικές που αξιοποιούνται από τους ερευνητές.

**Σχόλιο:** Στις επόμενες ασκήσεις, στους πίνακες παρουσιάζονται και οι σχετικές συχνότητες. Υπενθυμίζουμε ότι για τον υπολογισμό της σχετικής συχνότητας μιας τιμής, διαιρούμε τη συχνότητά της με το συνολικό πλήθος των παρατηρήσεων. Έπειτα, εκφράζουμε τον αριθμό αυτόν ως ποσοστό (%).



1

Συχνά, γίνονται μελέτες από φαρμακευτικές εταιρείες για να προσδιορίσουν την αποτελεσματικότητα ενός προγράμματος θεραπείας. Ένα νέο φάρμακο για την κυστική ίνωση είναι υπό μελέτη. Το φάρμακο χορηγείται στους ασθενείς μόλις εμφανιστούν τα πρώτα συμπτώματα. Αυτό που καταγράφεται είναι ο μέσος όρος του χρόνου ζωής (σε μήνες) των ασθενών αφού ξεκινήσουν τη θεραπεία. Δύο ερευνητές παρακολουθούν κάθε ένας διαφορετικό σύνολο 40 ασθενών με κυστική ίνωση από την αρχή της θεραπείας μέχρι τον θάνατό τους. Παρακάτω φαίνονται τα δεδομένα που έχουν συλλεχθεί.

**Ερευνητής Α:**

3, 4, 11, 15, 16, 17, 22, 44, 37, 16, 14, 24, 25, 15, 26, 27, 33, 29, 35, 44, 13, 21, 22, 10, 12, 8, 40, 32, 26, 27, 31, 34, 29, 17, 8, 24, 18, 47, 33, 34

**Ερευνητής Β:**

3, 14, 11, 5, 16, 17, 28, 41, 31, 18, 14, 14, 26, 25, 21, 22, 31, 2, 35, 44, 23, 21, 21, 16, 12, 18, 41, 22, 16, 25, 33, 34, 29, 13, 18, 24, 23, 42, 33, 29

α. Συμπλήρωσε τους πίνακες.

**Ερευνητής Α**

| Διάρκεια Ζωής (σε μήνες) | Συχνότητα | Σχετική Συχνότητα % |
|--------------------------|-----------|---------------------|
| 0-6                      |           |                     |
| 6-12                     |           |                     |
| 12-18                    |           |                     |
| 18-24                    |           |                     |
| 24-30                    |           |                     |
| 30-36                    |           |                     |
| 36-42                    |           |                     |
| 42-48                    |           |                     |

**Ερευνητής Β**

| Διάρκεια Ζωής (σε μήνες) | Συχνότητα | Σχετική Συχνότητα % |
|--------------------------|-----------|---------------------|
| 0-6                      |           |                     |
| 6-12                     |           |                     |
| 12-18                    |           |                     |
| 18-24                    |           |                     |
| 24-30                    |           |                     |
| 30-36                    |           |                     |
| 36-42                    |           |                     |
| 42-48                    |           |                     |

β. Τι ποσοστό των συμμετεχόντων έχουν διάρκεια ζωής πάνω από 24 μήνες σε κάθε μελέτη;

γ. Βρες την περίληψη 5 αριθμών για τα δεδομένα που αντιστοιχούν σε κάθε ερευνητή.

δ. Για ποιο λόγο κρίνεις ότι διαφέρουν τα αποτελέσματα των δύο ερευνητών; Περίμενες τα αποτελέσματα των ερευνητών να ταυτίζονται;

2

Δύο καθηγητές ενός σχολείου κατέγραψαν πόσες ώρες αφιερώνουν στο διάβασμα οι μαθητές στο σχολείο τους. Ο καθένας εξέτασε ένα δείγμα 50 μαθητών/τριών.

### Καθηγητής Α

| Ώρες μελέτης ανά εβδομάδα | Συχνότητα | Σχετική Συχνότητα |
|---------------------------|-----------|-------------------|
| 0-2                       | 7         |                   |
| 2-4                       |           | 22%               |
| 4-6                       | 7         |                   |
| 6-8                       | 9         |                   |
| 8-10                      |           | 10%               |
| 10-12                     |           |                   |

### Καθηγητής Β

| Ώρες μελέτης ανά εβδομάδα | Συχνότητα | Σχετική Συχνότητα |
|---------------------------|-----------|-------------------|
| 0-2                       | 5         |                   |
| 2-4                       | 6         |                   |
| 4-6                       |           |                   |
| 6-8                       |           | 14%               |
| 8-10                      |           | 16%               |
| 10-12                     | 9         |                   |

- Πόσοι μαθητές/τριες διαβάζουν λιγότερο από 4 ώρες και πόσοι περισσότερο από 8 ώρες σε κάθε περίπτωση;
- Μπορείς να κρίνεις αν οι καθηγητές εξέτασαν ίδια ή διαφορετικά δείγματα;
- Αρκούν οι πληροφορίες για να βγάλεις συμπέρασμα για την επικρατούσα διάρκεια μελέτης των μαθητών/τριών όλης της χώρας;

3

Πριν από τις προεδρικές εκλογές του 1936, ένα περιοδικό με τίτλο *Literary Digest* δημοσίευσε τα αποτελέσματα μιας δημοσκόπησης που προέβλεπε ότι ο υποψήφιος των Ρεπουμπλικάνων, Άλφ Λάντον, θα κέρδιζε με μεγάλη διαφορά. Το περιοδικό έστειλε ερωτηματολόγια σε περίπου 10.000.000 ψηφοφόρους. Οι ψηφοφόροι επιλέχθηκαν από τη λίστα συνδρομητών του περιοδικού, από καταλόγους αυτοκινήτων και από τηλεφωνικούς καταλόγους. Περίπου **2.300.000** άνθρωποι επέστρεψαν τα ερωτηματολόγια συμπληρωμένα.

Κατά την ίδια χρονιά, ο Τζορτζ Γκάλοπ πραγματοποίησε τη δική του δημοσκόπηση με **30.000** ψηφοφόρους. Οι ερευνητές του χρησιμοποίησαν μια μέθοδο που ονόμαζαν «δειγματοληψία με ποσοστά» για να συγκεντρώσουν απαντήσεις από διάφορα υποσύνολα του πληθυσμού. Η έρευνα του Γκάλοπ προέβλεψε για νικητή τον υποψήφιο των Δημοκρατικών Φράνκλιν Ρούζβελτ.

**Σκέψου την κατάσταση στις Ηνωμένες Πολιτείες το 1936. Ποια μέθοδος αξιοποίησε πιο «ποιοτικό» δείγμα του πληθυσμού; Ποια δημοσκόπηση θεωρείς ότι προέβλεψε σωστά τον νικητή των εκλογών;**

# Ανακεφαλαίωση (Διαχείριση Δεδομένων)

## A. Θεωρία

Όλα τα στοιχεία τα οποία μελετάμε ως προς κάποιο χαρακτηριστικό τους, λέγεται **πληθυσμός**.

Το μέρος του πληθυσμού το οποίο επιλέγουμε να εξετάσουμε ως προς κάποιο χαρακτηριστικό του, ονομάζεται δείγμα. Το πλήθος των στοιχείων του δείγματος ονομάζεται **μέγεθος του δείγματος**.

Η διαδικασία με την οποία επιλέγεται ένα δείγμα από έναν πληθυσμό ονομάζεται **δειγματοληψία**.

Η επιλογή των στοιχείων του δείγματος μέσα από τον πληθυσμό, γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε το δείγμα να είναι **αντιπροσωπευτικό** του πληθυσμού, δηλαδή τα συμπεράσματα που θα προκύψουν για το δείγμα να είναι αξιόπιστα ώστε να μπορούν να γενικευτούν σε ολόκληρο τον πληθυσμό.

Όταν κάθε στοιχείο ενός πληθυσμού έχει την ίδια πιθανότητα να επιλεγεί στο δείγμα, τότε το δείγμα αυτό ονομάζεται τυχαίο δείγμα και η δειγματοληψία ονομάζεται **απλή τυχαία δειγματοληψία (ΑΤΔ)**.

Τα κυριότερα μέτρα θέσης είναι η **μέση τιμή** και η **διάμεσος**.

Τα κυριότερα μέτρα μεταβλητότητας είναι το **εύρος** και το **ενδοτεταρτημοριακό εύρος**.

## Ομαδική δραστηριότητα

Στο Παγκόσμιο Πρωτάθλημα Στίβου το 2003 στο Παρίσι, ο δρομέας Τζ. Ντούμοντ αποκλείστηκε μετά από λανθασμένη εκκίνηση στα 100 μέτρα. Ο λόγος αποκλεισμού ήταν ότι ο χρόνος αντίδρασής του στο έναυσμα του κριτή ήταν πάρα πολύ γρήγορο. Για την ακρίβεια το όριο ήταν 0,1 δευτερόλεπτο κι αυτός «αντέδρασε» στα 0,053 δευτερόλεπτα. Μετά τον αγώνα πολλοί δρομείς διαμαρτυρήθηκαν για τα όρια στον χρόνο αντίδρασης και διεκδίκησαν να αφαιρεθεί εντελώς αυτός ο κανονισμός.



Αξιοποιήστε την εφαρμογή στην ιστοσελίδα <https://www.arealme.com/reaction-test/en/> για να μετρήσετε τον δικό σας χρόνο αντίδρασης. Ο στόχος είναι να βρεθεί ο μαθητής/τρια με τον μικρότερο χρόνο αντίδρασης.

- Αρκούν 10 δοκιμές ανά μαθητή/τρια για να έχουμε μια καλή εκτίμηση για τον χρόνο αντίδρασης; Στις πόσες δοκιμές περίπου μπορούμε να σταματήσουμε;
- Υπάρχουν τιμές που θα πρέπει να εξαιρέσουμε όταν μελετάμε τα αποτελέσματα κάθε συμμαθητή/τριας μας; Ίσως θα χρειαστεί να εξαιρέσουμε όλες τις τιμές πάνω από 1 sec αλλά μπορούμε να κάνουμε το ίδιο και για τους πολύ «μικρούς» χρόνους;

Ποιες «υπό-συγκρίσεις» θα είχε ενδιαφέρον να κάνουμε με τα διαθέσιμα δεδομένα;

Σε αυτό το σημείο, θα πρέπει να είσαι σε θέση να ικανοποιείς όλους τους προσδοκώμενους μαθησιακούς στόχους. Γύρνα στην αρχή της θεματικής ενότητας και σημείωσε ✓ στα αντίστοιχα σημεία. Υπάρχουν στόχοι που αισθάνεσαι ότι δεν έχεις ικανοποιήσει πλήρως;

# ΠΕΙΡΑΜΑΤΑ ΤΥΧΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Γ.2

Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε τα πειράματα τύχης και τις πιθανότητες που τα συνοδεύουν, αξιοποιώντας τον Νόμο των Μεγάλων Αριθμών και την έννοια της ανεξαρτησίας των ενδεχομένων. Μέσα από προσομοιώσεις και πειράματα τύχης, θα ανακαλύψουμε πώς η σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου πλησιάζει την πιθανότητά του καθώς αυξάνεται ο αριθμός των επαναλήψεων. Παράλληλα, θα διερευνήσουμε πώς η ανεξαρτησία επηρεάζει τα αποτελέσματα ενός πειράματος.

Είσαι έτοιμος/η να πειραματιστείς με την τύχη;



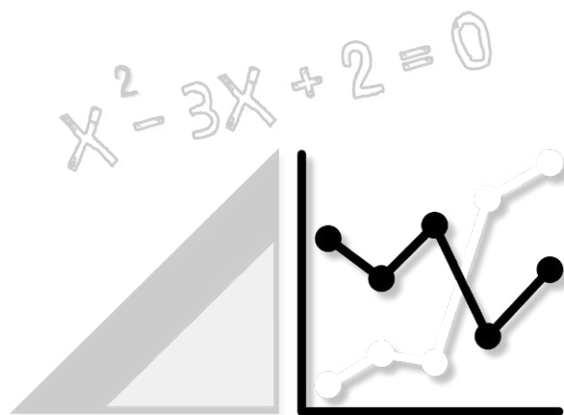
- Αναγνωρίζω μέσα από προσομοιώσεις με χρήση λογισμικού και εκτελώντας πειράματα τύχης, ότι η σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου πλησιάζει την τιμή της πιθανότητας, όταν έχουμε μεγάλο αριθμό εκτελέσεων του ίδιου πειράματος (Νόμος των Μεγάλων Αριθμών)
- Διερευνώ την ανεξαρτησία ενδεχομένων μέσα από την εκτέλεση πειραμάτων τύχης και προσομοιώσεων.



1.1: Νόμος των μεγάλων αριθμών

1.2: Ανεξαρτησία ενδεχομένων

+ Ανακεφαλαίωση / Αυτοαξιολόγηση



## 2.1 | Νόμος των μεγάλων αριθμών

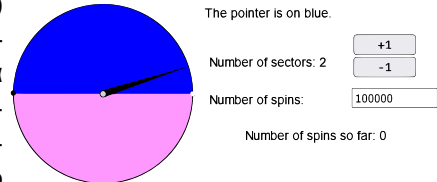


Σε ένα τροχό τύχης (π.χ. [www.shodor.org/interactivate/activities/AdjustableSpinner](http://www.shodor.org/interactivate/activities/AdjustableSpinner)) που είναι χωρισμένος σε 2 (ή περισσότερους κυκλικούς τομείς) με διαφορετικά χρώματα θέλουμε να εκτιμήσουμε την πιθανότητα, όταν γυρίσουμε το δείκτη, να πετύχουμε κάποιο συγκεκριμένο χρώμα, π.χ. το μπλε. Αρχικά θεωρούμε 2 ίσους κυκλικούς τομείς, διαφορετικών χρωμάτων (το ένα είναι μπλε).

Σημειώστε σε ένα φύλλο εργασίας τις τιμές της σχετικής συχνότητας για το μπλε χρώμα μετά από 5, 10, 50, 100, 500, 1000, 2000, 5000 κ.λπ. δοκιμές. Είναι φυσιολογικό που η σχετική συχνότητα του μπλε χρώματος δεν είναι ακριβώς 50% (ή 0,5); Τι παρατηρείτε, καθώς το πλήθος των δοκιμών μεγαλώνει;

Στη συνέχεια χωρίζουμε τον δίσκο σε  $N=6$  ίσους κυκλικούς τομείς, τους οποίους βάφουμε με  $n=3$  χρώματα ώστε η πιθανότητα εμφάνισης κάθε χρώματος να είναι διαφορετική. Ποια πιστεύετε ότι είναι η πιθανότητα να πετύχουμε το κάθε χρώμα;

Με ποιον τρόπο θα μπορούσατε να εκτιμήσετε αυτή την πιθανότητα;



| Probability |       |              |             |
|-------------|-------|--------------|-------------|
|             | Count | Experimental | Theoretical |
| Blue        | 0     | 0%           | 50.00%      |
| Pink        | 0     | 0%           | 50.00%      |

Για  $N=10$  δοκιμές:

| Probability |       |              |             |
|-------------|-------|--------------|-------------|
|             | Count | Experimental | Theoretical |
| Blue        | 4     | 40.00%       | 50.00%      |
| Pink        | 6     | 60.00%       | 50.00%      |

Για  $N=500$  δοκιμές:

| Probability |       |              |             |
|-------------|-------|--------------|-------------|
|             | Count | Experimental | Theoretical |
| Blue        | 251   | 50.2%        | 50.00%      |
| Pink        | 249   | 49.8%        | 50.00%      |

Για  $N=100.000$  δοκιμές:

| Probability |       |              |             |
|-------------|-------|--------------|-------------|
|             | Count | Experimental | Theoretical |
| Blue        | 49876 | 49.88%       | 50.00%      |
| Pink        | 50124 | 50.12%       | 50.00%      |



**Πείραμα τύχης** ονομάζεται ένα πείραμα στο οποίο δεν μπορούμε να προβλέψουμε με βεβαιότητα το αποτέλεσμα του, όσες φορές και αν το επαναλάβουμε. Π.χ. Ρίψη ζαριού, στρίψιμο νομίσματος κ.α.

Όλα τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης αποτελούν τον **δειγματικό χώρο** του πειράματος. Π.χ. Ο δειγματικός χώρος της ρίψης ενός ζαριού είναι 1,2,3,4,5, 6. Ο δειγματικός χώρος του στρίψιματος ενός νομίσματος είναι Κ, Γ.

**Ενδεχόμενο** ενός πειράματος τύχης ονομάζεται ένα σύνολο το οποίο περιέχει ένα ή περισσότερα στοιχεία ενός δειγματικού χώρου.

Αντιλαμβάνομαι



με προσομοίωση

## Κλασικός ορισμός της πιθανότητας

Σε ένα πείραμα τύχης με ισοπίθανα αποτελέσματα, πιθανότητα ενός ενδεχομένου ονομάζεται το πηλίκο του πλήθους των επιθυμητών (ευνοϊκών) αποτελεσμάτων προς το πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων.

$$\text{πιθανότητα} = \frac{\text{πλήθος επιθυμητών αποτελεσμάτων}}{\text{πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων}}$$

Για παράδειγμα η πιθανότητα να φέρουμε «κορώνα» στο στρίψιμο ενός νομίσματος είναι  $\frac{1}{2} = 0,5$  ή 50%, ενώ η πιθανότητα να φέρουμε 4 στη ρίψη ενός ζαριού είναι  $\frac{1}{6} = 0,1\bar{6}$  ή περίπου 16,6%.

## Νόμος των μεγάλων αριθμών

Όπως είδαμε, η πιθανότητα να φέρουμε «κορώνα» στο στρίψιμο ενός νομίσματος είναι  $\frac{1}{2} = 0,5$  ή 50%, δηλαδή η αναμενόμενη εμφάνιση «κορώνας» είναι μία στις δύο ρίψεις. Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι αν στην πρώτη ρίψη έχουμε φέρει «κορώνα» τότε στην επόμενη ρίψη θα φέρουμε απαραίτητα «γράμματα». Ακόμη και αν έχουμε φέρει πολλές συνεχόμενες φορές «κορώνα» τότε και πάλι αυτό δεν σημαίνει ότι στην επόμενη ρίψη θα φέρουμε «γράμματα» καθώς κάθε ρίψη είναι ένα τυχαίο ανεξάρτητο πείραμα τύχης. Αν όμως εκτελέσουμε έναν **μεγάλο αριθμό** ρίψεων του νομίσματος, θα διαπιστώσουμε ότι η σχετική συχνότητα εμφάνισης «κορώνας» πλησιάζει το 50%, όσο δηλαδή και η πιθανότητα του ενδεχομένου «κορώνα».

### Νόμος των μεγάλων αριθμών:

Εάν επαναλάβουμε πολλές φορές το ίδιο πείραμα τύχης, η σχετική συχνότητα εμφάνισης ενός αποτελέσματος τείνει να είναι σταθερή και ίση με την πιθανότητά του.

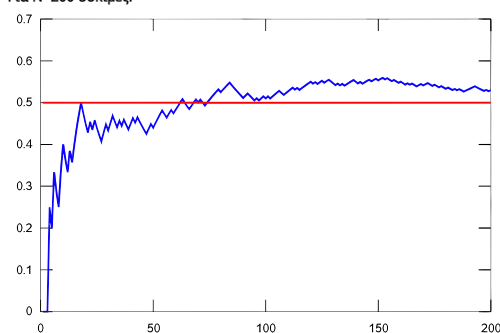
**Παράδειγμα:** Ρίχνουμε ένα νόμισμα και καταγράφουμε τα αποτελέσματα στον παρακάτω πίνακα:

| Ρίψεις | Συχνότητα εμφάνισης «Κ» | Συχνότητα εμφάνισης «Γ» | Σχετική συχνότητα εμφάνισης «Κ» | Σχετική συχνότητα εμφάνισης «Γ» |
|--------|-------------------------|-------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| 10     | 6                       | 4                       | 60%                             | 40%                             |
| 20     | 11                      | 9                       | 55%                             | 45%                             |
| 30     | 14                      | 16                      | 47%                             | 53%                             |
| 40     | 18                      | 22                      | 45%                             | 55%                             |
| ...    | ...                     | ...                     | ...                             | ...                             |
| 500    | 254                     | 246                     | 50,8%                           | 49,2%                           |

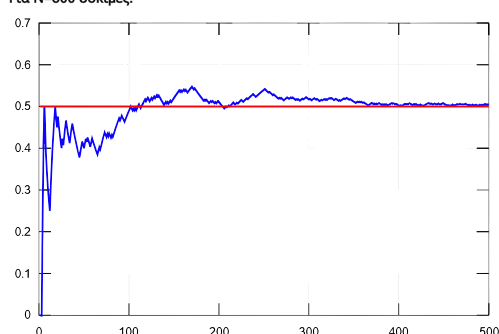
Παρατηρούμε ότι στις 10 πρώτες ρίψεις «γράμματα» εμφανίζεται με σχετική συχνότητα 40% ενώ στις 500 ρίψεις, που είναι ένας μεγάλος αριθμός ρίψεων, παρατηρούμε ότι το ποσοστό είναι 49,2%, δηλαδή πλησιάζει (τείνει) το ποσοστό 50% που είναι η πιθανότητα εμφάνισης «γράμματα».

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε μέσω της γραφικής απεικόνισης των δεδομένων αυτών:

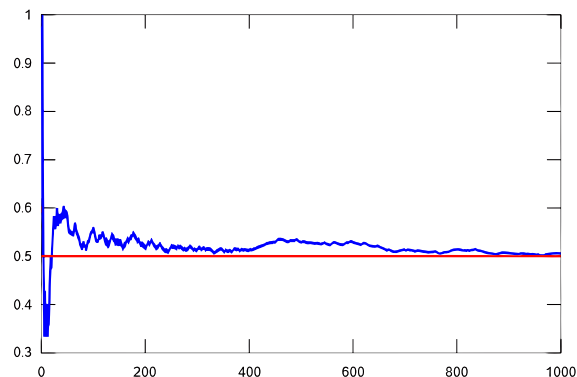
Για N=200 δοκιμές:



Για N=500 δοκιμές:



Για  $N=1.000$  δοκιμές:



Στον οριζόντιο άξονα παριστάνεται το πλήθος των ρίψεων ( $\nu$ ) και στον κατακόρυφο άξονα η σχετική συχνότητα εμφάνισης «γράμματα».



με προσομοίωση



με προσομοίωση



1

Ρίχνεις ένα αμερόληπτο νόμισμα 100 φορές και φέρνει κορώνα κάθε φορά. Ποια είναι η πιθανότητα να φέρεις γράμματα την 101η φορά;

2

Σε ένα χωριό, τον προηγούμενο χρόνο, από τα 50 παιδιά που γεννήθηκαν τα 10 ήταν αγόρια και τα 40 ήταν κορίτσια.

α) Ποιο είναι το ποσοστό γεννήσεων αγοριών;

β) Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι σε αυτό το χωριό, αν ένα ζευγάρι περιμένει παιδί, τότε είναι πιθανότερο να είναι κορίτσι;

3

α) Στην περίπτωση που δεν γνωρίζουμε πριν τη γέννηση κάποιο στοιχείο για το φύλο του παιδιού που πρόκειται να γεννηθεί, ποια είναι η πιθανότητα το νεογέννητο παιδί να είναι αγόρι ή κορίτσι;

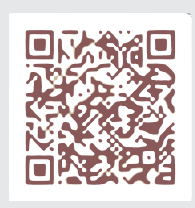
β) Χρησιμοποιώντας προσομοίωση γεννήσεων, με τη βοήθεια κάποιας ψηφιακής εφαρμογής, κατέγραψε τον αριθμό των αγοριών σε 20 σε διαφορετικά σύνολα (δείγματα) των 100 γεννήσεων το καθένα. Τι παρατηρείς;

\*Μπορείς να αξιοποιήσεις την εφαρμογή [www.shodor.org/interactivate/activities/AdjustableSpinner](http://www.shodor.org/interactivate/activities/AdjustableSpinner) ή το CODAP.

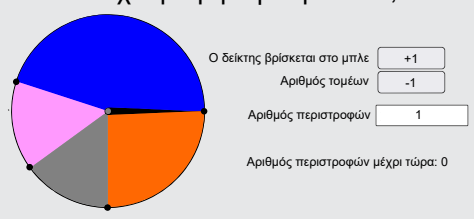
γ) Με την ίδια προσομοίωση γεννήσεων, κατέγραψε τη συχνότητα γεννήσεων κοριτσιών σε 10, 50, 100, 200, ..., κτλ., γεννήσεις. Τι παρατηρείς σχετικά με την απάντηση στο πρώτο ερώτημα;

**4** Ο Νίκος έριξε ένα ζάρι 10 φορές και δεν έφερε καμία φορά 6. Έτσι, συμπέρανε ότι η πιθανότητα να έρθει 6 είναι μηδενική. Δοκίμασε να ρίξεις κι εσύ το ζάρι 10, 100 και 1.000 φορές αξιοποιώντας την εφαρμογή <https://rolladie.net> ώστε να διερευνήσεις το συμπέρασμα του Νίκου.

**5** Γύρνα τον παρακάτω τροχό (αξιοποιώντας το QR code) 20 φορές και κατέγραψε πόσες φορές πέτυχες άρτιο αριθμό. Μπορείς να γενικεύσεις το συμπέρασμα για πολύ μεγάλο αριθμό επαναλήψεων;



**6** Ο τροχός γυρίζει σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα.  
 Ποια είναι η πιθανότητα να πετύχουμε μπλε;  
 Ποια είναι η πιθανότητα να πετύχουμε γκρι ή πορτοκαλί;



| Περιστροφή | Νέο πείραμα              | Εμφάνιση πλαισίου αποτελεσμάτων | Ενημέρωση                |
|------------|--------------------------|---------------------------------|--------------------------|
| Μπλε       | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>        | <input type="checkbox"/> |
| Ροζ        | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>        | <input type="checkbox"/> |
| Γκρι       | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>        | <input type="checkbox"/> |
| Πορτοκαλί  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>        | <input type="checkbox"/> |

Μετά από 50 δοκιμές πήραμε τα παρακάτω αποτελέσματα:

|           | Πλήθος | Πειραματικό ποσοστό |
|-----------|--------|---------------------|
| Μπλε      | 25     | 50.00%              |
| Ροζ       | 8      | 16.00%              |
| Γκρι      | 8      | 16.00%              |
| Πορτοκαλί | 9      | 18.00%              |

Είναι «πειραγμένος» ο τροχός;

Μετά από 10.000 δοκιμές πήραμε τα παρακάτω αποτελέσματα:

|           | Πλήθος | Πειραματικό ποσοστό |
|-----------|--------|---------------------|
| Μπλε      | 5470   | 54.7%               |
| Ροζ       | 1515   | 15.15%              |
| Γκρι      | 1545   | 15.45%              |
| Πορτοκαλί | 1470   | 14.7%               |

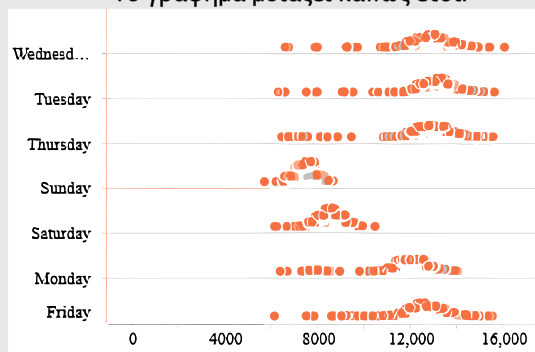
Εξασκούμαι

σε όσα έμαθα

Τι συμπέρασμα μπορούμε να βγάλουμε τώρα με ασφάλεια για τον τροχό;

7

Άνοιξε τα δεδομένα στην εφαρμογή <https://codap.concord.org/releases/latest/static/dg/en/cert/index.html?url=https://concord-consortium.github.io/codap-data/SampleDocs/Mathematics/Probability/Birthdays/Birthdays.codap#> και αφού φτιάξεις το γράφημα που δείχνει τις γεννήσεις σε σχέση με τις μέρες, προσπάθησε να εξηγήσεις αν είναι ισοπίθανες οι μέρες γέννησης. Αν όχι, πώς εξηγείς το φαινόμενο; \* Το γράφημα μοιάζει κάπως έτσι:



το συγκεκριμένο θέμα

## Η Ιστορία των Πιθανοτήτων

Η ιστορία της στατιστικής και της θεωρίας πιθανοτήτων έχει τις ρίζες της στην αρχαιότητα, αλλά η συστηματική μαθηματική μελέτη τους ξεκίνησε τον 16ο αιώνα με τον Τζιρόλαμο Καρντάνο.

### 16ος-17ος αιώνας:

Ο Τζιρόλαμο Καρντάνο ήταν από τους πρώτους που ασχολήθηκαν με την πιθανότητα, καθορίζοντας τις βασικές αρχές. Οι Πιερ ντε Φερμά και Μπλεζ Πασκάλ έθεσαν τα θεμέλια της θεωρίας πιθανοτήτων το 1654. Ο Κρίστιαν Χούχενς παρουσίασε την πρώτη επιστημονική ανάλυση το 1657.

### 18ος αιώνας:

Ο Γιακόμπ Μπερνούλι ανέπτυξε τη θεωρία των μεγάλων αριθμών και ο Αβραάμ ντε Μουάβρ την κανονική κατανομή το 1718. Ο Ντάνιελ Μπερνούλι εισήγαγε τη θεωρία των σφαλμάτων στην στατιστική ανάλυση.

### 19ος αιώνας:

Ο Πιερ Σιμόν Λαπλάς και ο Καρλ Φρίντριχ Γκάους ανέπτυξαν περαιτέρω τη θεωρία πιθανοτήτων με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Ο Άντριε Μάρκοβ εισήγαγε τις μαρκοβιανές αλυσίδες, προσφέροντας πολύτιμες γνώσεις στον κλάδο των πιθανοτήτων.

### 20ος αιώνας:

Ο Αντρέι Κολμογκόροφ ανέπτυξε τη μοντέρνα θεωρία πιθανοτήτων, δημιουργώντας το θεμέλιο για τη σύγχρονη στατιστική.

## 2.2 | Ανεξαρτησία ενδεχομένων



Γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα να κερδίσουμε το μεγαλύτερο έπαθλο στην λοταρία, δηλαδή να πετύχουμε και τα 6 νούμερα από τα 49 διαθέσιμα είναι  $\frac{1}{13.983.816} = 0,000000715\dots$

Κάποιος ισχυρίζεται όμως ότι αν παίζουμε για 50 χρόνια συνεχόμενα, δηλαδή για 2.600 εβδομάδες τότε η πιθανότητα να κερδίσουμε είναι πολύ μεγαλύτερη. Δυστυχώς όμως η πιθανότητα παραμένει αρκετά μικρή, περίπου 0,02%. (Επίσης έχουμε ξοδέψει αρκετά χρήματα για να παίζουμε κάθε εβδομάδα!)

Η πιθανότητα παραμένει πολύ μικρή γιατί το αποτέλεσμα της Λοταρίας κάθε εβδομάδα δεν εξαρτάται από το αποτέλεσμα της προηγούμενης. Για αυτό άλλωστε δεν υπάρχουν «τυχεροί» αριθμοί ή αριθμοί που κληρώνονται πιο συχνά.



Όταν κατά την εκτέλεση ενός πειράματος τύχης εμφανίζεται αποτέλεσμα που περιέχεται σε ένα ενδεχόμενο τότε λέμε ότι το ενδεχόμενο αυτό **πραγματοποιείται**.

**Παράδειγμα:** Ρίχνουμε ένα ζάρι και φέρνουμε 6.

Το ενδεχόμενο A: «Φέρνουμε άρτιο αριθμό» πραγματοποιείται ενώ το ενδεχόμενο B: «Φέρνουμε αριθμό μικρότερο του 3» δεν πραγματοποιείται.

Κατά την εκτέλεση ενός πειράματος τύχης, η πραγματοποίηση ενός ενδεχομένου A μπορεί να επηρεάσει την πιθανότητα πραγματοποίησης ενός ενδεχομένου B. Στην περίπτωση αυτή τα δύο ενδεχόμενα λέγονται **εξαρτημένα** ενώ αν η πραγματοποίηση του A δεν επηρεάζει την πιθανότητα πραγματοποίησης του B τα ενδεχόμενα λέγονται **ανεξάρτητα**.

Δύο ενδεχόμενα A και B λέγονται **ανεξάρτητα** όταν η πραγματοποίηση του A δεν επηρεάζει την πιθανότητα πραγματοποίησης του B.

**Παράδειγμα:** Ρίχνουμε με τη σειρά δύο ζάρια και εξετάζουμε τα ενδεχόμενα:

A: «Το πρώτο ζάρι φέρνει 1»

B: «Το δεύτερο ζάρι φέρνει 6»

Προφανώς τα δύο ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, δηλαδή αν το πρώτο ζάρι φέρει 1 τότε αυτό δεν θα επηρεάσει το αποτέλεσμα της ρίψης του δεύτερου ζαριού.

Αν όμως εξετάζουμε τα ενδεχόμενα:

Γ: «Το πρώτο ζάρι φέρνει 6»

Δ: «Το άθροισμα των δύο ζαριών είναι 4»

θα διαπιστώσουμε ότι αυτά δεν είναι ανεξάρτητα καθώς αν πραγματοποιείται το ένα ενδεχόμενο τότε αυτό επηρεάζει την πιθανότητα πραγματοποίησης του άλλου.

**Σχόλιο:** Δεν πρέπει να μπερδεύουμε τα ανεξάρτητα με τα ασυμβίβαστα ενδεχόμενα. Η διαφορά μεταξύ τους είναι πως τα ασυμβίβαστα είναι αυτά που δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα ενώ στα ανεξάρτητα η πιθανότητα εμφάνισης του ενός δεν επηρεάζεται από την εμφάνιση του άλλου.

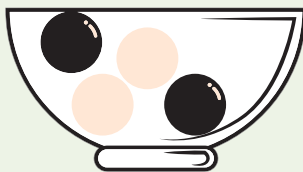


1. Σε μία κάλπη υπάρχουν 2 μαύρες και 2 λευκές μπίλιες. Επιλέγουμε τυχαία δύο μπάλες τη μία μετά την άλλη και καταγράφουμε το χρώμα τους. Να εξετάσετε την ανεξαρτησία των ενδεχομένων:

A: «Η πρώτη μπάλα είναι μαύρη» και B: «Η δεύτερη μπάλα είναι λευκή»

στις παρακάτω περιπτώσεις:

- α) Όταν επανατοποθετούμε την πρώτη μπάλα πίσω στο κουτί.
- β) Όταν δεν επανατοποθετούμε την πρώτη μπάλα στο κουτί.



### Λύση:

α) Η πιθανότητα του ενδεχομένου B: «Η δεύτερη μπάλα είναι λευκή», είναι:

$$P(B) = \frac{2}{2+2} = \frac{2}{4} = 0,5,$$

ανεξαρτήτως εάν η πρώτη μπάλα είναι μαύρη ή λευκή διότι αυτή επανατοποθετείται πίσω στο κουτί.

Επομένως τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα, καθώς η πραγματοποίηση του A δεν επηρεάζει την πιθανότητα πραγματοποίησης του B.

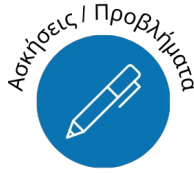
β) Αν η πρώτη μπάλα είναι μαύρη και δεν επανατοποθετείται πίσω στο κουτί, τότε η πιθανότητα του ενδεχομένου B: «Η δεύτερη μπάλα είναι λευκή», είναι:

$$P(B) = \frac{2}{1+2} = \frac{2}{3} = 0,66,$$

ενώ αν η πρώτη μπάλα είναι λευκή, τότε:

$$P(B) = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3} = 0,33.$$

Επομένως τα ενδεχόμενα A και B δεν είναι ανεξάρτητα καθώς η πραγματοποίηση του A επηρεάζει την πιθανότητα πραγματοποίησης του B.



**1** Ρίχνουμε ένα κέρμα δύο φορές. Ποιο ζευγάρι από τα παρακάτω ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα;

A: Η πρώτη ρίψη είναι κορώνα.

B: Τουλάχιστον μια από τις ρίψεις είναι γράμματα

Γ: Η δεύτερη ρίψη είναι γράμματα

Δ. Τουλάχιστον μία από τις ρίψεις είναι κορώνα

Επίλεξε τη σωστή απάντηση:

α. B και Γ

β. Γ και Δ

γ. A και Γ

δ. A και B

**2** Αν τα A και B είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα, τότε η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το A και το B είναι:

α.  $P(A)+P(B)$

β.  $P(A)$ , αν  $P(A)>P(B)$

γ.  $P(B)$ , αν  $P(A)<P(B)$

δ.  $P(A) \cdot P(B)$

**3** Ρίχνουμε ένα ζάρι 2 φορές.

α. Η πιθανότητα να φέρουμε 6 στη πρώτη ρίψη είναι .....

β. Η πιθανότητα να φέρουμε δύο φορές 5 είναι .....

γ. Η πιθανότητα να φέρουμε 6 στη δεύτερη ρίψη είναι .....

Εξασκούμαι



σε όσα έμαθα

**4** Ρίχνουμε ένα κέρμα 4 φορές.

α) Ποια είναι η πιθανότητα να φέρουμε 4 συνεχόμενες φορές κορώνα;

β) Αν έχουμε φέρει ήδη 3 συνεχόμενες φορές κορώνα, ποια είναι η πιθανότητα να φέρουμε και στην 4η ρίψη κορώνα;

**5** Ρίχνουμε ένα κέρμα 3 φορές.

α) Ποια είναι η πιθανότητα να φέρουμε 2 φορές κορώνα και μία φορά γράμματα;

β) Ποια είναι η πιθανότητα να φέρουμε με τη σειρά Κορώνα-Κορώνα-Γράμματα;

6

Μια κάλπη περιέχει 5 κόκκινα μπαλάκια, 4 πράσινα μπαλάκια και 1 μπλε μπαλάκι. Τραβάμε ένα μπαλάκι χωρίς να το επιστρέψουμε στην κάλπη και έπειτα τραβάμε ένα ακόμη. Είναι ανεξάρτητα τα αποτελέσματα των δύο κληρώσεων;

7

Ρίχνουμε μαζί δύο ζάρια 108 φορές και σημειώνουμε το άθροισμά τους (Μπορείς να αξιοποιήσεις την εφαρμογή: <https://rolladie.net>)

α. Ποιο είναι το λιγότερο πιθανό άθροισμα;

β. Ποια είναι το περισσότερο πιθανό άθροισμα;

Μπορείς να χρησιμοποιήσεις τα αποτελέσματα σου για να εξηγήσεις γιατί το 7 θεωρείται «τυχερός» αριθμός;

8

Εκτελούμε το παρακάτω πείραμα:

**1η φάση:**

Διαλέγουμε τυχαία ένα από τα γράμματα:

δ, κ, μ, π

**2η φάση:**

Διαλέγουμε τυχαία ένα από τα γράμματα:

ε, η, ω

Ποια είναι η πιθανότητα να προκύψει δισύλλαβη λέξη της Ελληνικής Γλώσσας;



το συγκεκριμένο θέμα

## Το παράδοξο των γενεθλίων

Το παράδοξο των γενεθλίων είναι ένα κλασικό πρόβλημα πιθανοτήτων που δείχνει ότι αυτό που αναμένουμε ως «λογικό» αποτέλεσμα δεν είναι πάντα αυτό που προκύπτει από τα μαθηματικά. Σύμφωνα με το παράδοξο, σε μια ομάδα 23 ατόμων υπάρχει σχεδόν 50% πιθανότητα τουλάχιστον δύο από αυτά να έχουν την ίδια ημερομηνία γέννησης.

Αν και φαίνεται περίεργο, η εξήγηση είναι απλή: αντί να συγκρίνουμε κάθε άτομο με όλες τις πιθανές ημερομηνίες γενεθλίων, συγκρίνουμε κάθε νέο άτομο με όλους τους υπόλοιπους της ομάδας. Οι πιθανοί συνδυασμοί αυξάνονται εκθετικά με κάθε νέο άτομο, οδηγώντας στο περίεργο αυτό αποτέλεσμα. Το παράδοξο χρησιμοποιείται συχνά στα μαθηματικά για να αναδείξει τη διαφορά ανάμεσα στην αντίληψή μας και στην πραγματική στατιστική ανάλυση.



**Μήπως επιβεβαιώνεται το παράδοξο και στη δική σου τάξη; Διερεύνησέ το !**

# Ανακεφαλαίωση (Πειράματα Τύχης και Πιθανότητες)

## Θυμόμαστε:

**Πείραμα τύχης** ονομάζεται ένα πείραμα στο οποίο δεν μπορούμε να προβλέψουμε με βεβαιότητα το αποτέλεσμα του, όσες φορές και αν το επαναλάβουμε. π.χ. ρίψη ζαριού, στρίψιμο νομίσματος κ.α.

Όλα τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης αποτελούν τον **δειγματικό χώρο** του πειράματος.

**Ενδεχόμενο** ενός πειράματος τύχης ονομάζεται ένα σύνολο το οποίο περιέχει ένα ή περισσότερα στοιχεία ενός δειγματικού χώρου.

$$\text{πιθανότητα} = \frac{\text{πλήθος επιθυμητών αποτελεσμάτων}}{\text{πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων}}$$

## Νόμος των μεγάλων αριθμών:

Εάν επαναλάβουμε πολλές φορές το ίδιο πείραμα τύχης, η σχετική συχνότητα εμφάνισης ενός αποτελέσματος τείνει να είναι σταθερή και ίση με την πιθανότητά του.

### Νόμος των μεγάλων αριθμών:

Εάν επαναλάβουμε πολλές φορές το ίδιο πείραμα τύχης, η συχνότητα εμφάνισης ενός αποτελέσματος τείνει να είναι σταθερή και ίση με την πιθανότητά του.

Δύο ενδεχόμενα A και B λέγονται **ανεξάρτητα** όταν η πραγματοποίηση του A δεν επηρεάζει την πιθανότητα πραγματοποίησης του B.

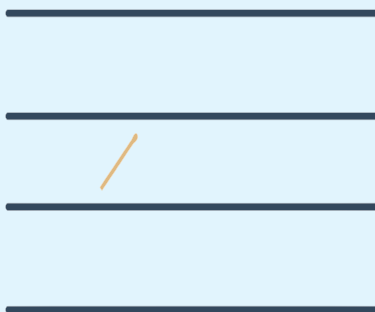
## A. Η Βελόνα του Μπουφόν ή πώς να εκτιμήσουμε το π ρίχνοντας ένα σπίρτο

Από τα αρχαία χρόνια οι άνθρωποι απολάμβαναν να παίζουν με ρίψη νομισμάτων και να ποντάρουν στο αν το νόμισμα θα περάσει ή όχι μια γραμμή. Ο Georges-Louis Leclerc, γνωστός ως Λόρδος του Μπουφόν, ασχολήθηκε με αυτό το πείραμα τύχης και μάλιστα «έστησε» ένα δικό το πείραμα, που ονομάστηκε βελόνα του Μπουφόν προς τιμή του.

Για να εκτελέσουμε το πείραμα θα χρειαστούμε:

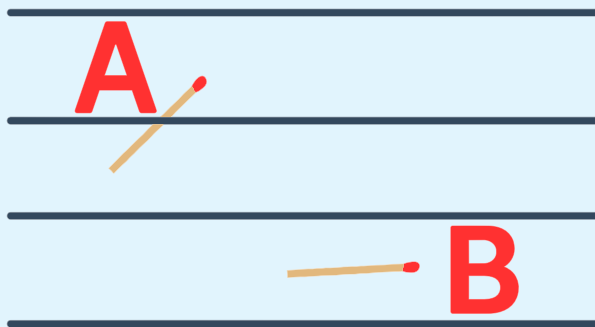
Ένα μικρό ξυλαράκι ή ένα σπίρτο (χωρίς το κεφάλι), με μήκος μικρότερο από 5 cm.

Ένα φύλλο χαρτί με παράλληλες γραμμές απόστασης 5 cm.



## Βήματα:

- Μέτρησε ακριβώς την απόσταση των παράλληλων ευθειών.
- Μέτρησε ακριβώς το μήκος του σπίρτου.
- Βεβαιώσου ότι το χαρτί είναι σε επίπεδη επιφάνεια, χωρίς κλίση.
- Ρίξε το σπίρτο πάνω στο χαρτί και σημείωσε τα ενδεχόμενα:
  - A: δεν ακούμπησε γραμμή
  - B: ακούμπησε γραμμή
- Επανέλαβε τη ρίψη 100 φορές.



Συμπλήρωσε τον πίνακα:

| Ενδεχόμενο | Ποσοστό εμφάνισης |
|------------|-------------------|
| A          |                   |
| B          |                   |

Πώς σχολιάζεις τα αποτελέσματα; Είναι αυτό που περίμενες;

Πώς υπολογίζουμε όμως το  $\pi$ ;

Ο Μπουφόν χρησιμοποίησε τα αποτελέσματα του παραπάνω πειράματος για να προσεγγίσει την αξία του  $\pi$ . Κατέληξε στον παρακάτω τύπο:

$$\pi = \frac{2\lambda}{x\rho}$$

Όπου  $\lambda$  είναι το μήκος της βελόνας (ή του σπύριου),  $x$  είναι η απόσταση ανάμεσα στις ευθείες και  $\rho$  είναι η πιθανότητα η βελόνα να ακουμπήσει μια γραμμή (το ενδεχόμενο B).

Αυτός ο τύπος «λειουργεί» και με τα δικά σου δεδομένα. Αν, για παράδειγμα, έχουμε  $\lambda=30$ ,  $x=40$  και  $\rho=0,48$  τότε για το  $\pi$  παίρνουμε  $\pi=3,125$ . Όσες περισσότερες φορές επαναλάβουμε το πείραμα και κάνουμε ακριβείς μετρήσεις θα παρατηρήσουμε ότι προσεγγίζουμε με μεγαλύτερη ακρίβεια τον αριθμό  $\pi$ .

Σε αυτό το σημείο, θα πρέπει να είσαι σε θέση να ικανοποιείς όλους τους προσδοκώμενους μαθησιακούς στόχους. Γύρνα στην αρχή της θεματικής ενότητας και σημείωσε  στα αντίστοιχα σημεία. Υπάρχουν στόχοι που αισθάνεσαι ότι δεν έχεις ικανοποιήσει πλήρως;

# ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

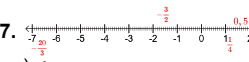
- Απαντήσεις ασκήσεων / δραστηριοτήτων
- Ευρετήριο όρων
- Βιβλιογραφία

# Απαντήσεις ασκήσεων / δραστηριοτήτων

## Α' ΘΕΜΑΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ – ΑΛΓΕΒΡΑ

### Θεματική Ενότητα 1 – Φυσικοί αριθμοί

#### 1.1 Κλασματική και δεκαδική αναπαράσταση ρητών

1. α) Σ, β) Λ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Σ. 2. α)-iv., β)-ii., γ)-i., δ)-iii., ε)-v., στ)-vi.  
 3. α) 0,4, β) 0,15, γ) 0,61, δ) 9,08, ε) 0,0001 4. α) 0,8, β) 1,125, γ) 0,04, δ) 0,65, ε) 4,375. 5. α) 2,6, β) 0,26, γ) 0,8, δ) 0,378, ε) 0,09.  
 6. α)  $\frac{25}{9}$ , β)  $\frac{8}{11}$ , γ)  $\frac{134}{99}$ , δ)  $\frac{31}{11}$ , ε)  $\frac{221}{990}$ . 7.  8. α) =, β) =, γ) >, δ) >, ε) <, στ) =, ζ) =, η) <.

#### 1.2 Άρρητοι αριθμοί – Πραγματικοί αριθμοί – Σύγκριση και διάταξη πραγματικών

1. α) Λ, β) Σ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Σ, στ) Λ, ζ) Λ. 2.

| Αριθμός                | Φυσικός Αριθμός | Ακέραιος Αριθμός | Ρητός Αριθμός | Άρρητος Αριθμός | Πραγματικός Αριθμός |
|------------------------|-----------------|------------------|---------------|-----------------|---------------------|
| -3                     |                 | x                | x             |                 | x                   |
| 2                      | x               | x                | x             |                 | x                   |
| $\sqrt{11}$            |                 |                  |               | x               | x                   |
| $\frac{4}{7}$          |                 |                  | x             |                 | x                   |
| 0                      | x               | x                | x             |                 | x                   |
| π                      |                 |                  |               | x               | x                   |
| $-\sqrt{3}$            |                 |                  |               | x               | x                   |
| 7,2                    |                 |                  | x             |                 | x                   |
| $\frac{\sqrt{100}}{2}$ | x               | x                | x             |                 | x                   |

3. Άρρητοι: α)  $\sqrt{90}$ ,  $\sqrt{0,9}$ , β)  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2}$ , γ)  $\frac{\sqrt{52}}{\sqrt{13}}$ . Οι υπόλοιποι αριθμοί είναι ρητοί. 4. α)  $2 < \sqrt{6} < 3$ , β)  $3 < \sqrt{15} < 4$ , γ)  $4 < \sqrt{21} < 5$ , δ)  $8 < \sqrt{80} < 9$ , ε)  $19 < \sqrt{398} < 20$ .

5.  $\sqrt{11} \approx 3,31$ ,  $\sqrt{13} \approx 3,60$ . 6. α)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , β)  $2\sqrt{3}$ , γ)  $\sqrt{5}$ , δ)  $\frac{\sqrt{7}}{14}$ , ε)  $-\frac{\sqrt{10}}{25}$ . 7.  $\delta = \sqrt{18} \text{ cm} \approx 4,24 \text{ cm}$ . 8.  $-2 < -\frac{5}{4} < -\frac{1}{2} < 0 < \sqrt{2} < \sqrt{6}$ .

#### 1.3 Πράξεις πραγματικών και ιδιότητες – Ιδιότητες δυνάμεων

1. α) Λ, β) Λ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Σ, στ) Σ. 2. α)-B, β)-A, γ)-Γ, δ)-Γ, ε)-A, στ)-A. 3. α) -12, β) -8, γ) 6, δ) 65, ε) -23, στ) 11.  
 4. α)  $-\frac{19}{20}$ , β)  $\frac{15}{2}$ , γ) -5, δ)  $\frac{21}{10}$ . 5. α)  $2x+7$ , β)  $2x-14$ , γ) -11y.  
 6. α)  $3^6$ , β)  $(-5)^5$ , γ)  $2^8$ , δ) 7, ε)  $6^{-6}$ , στ)  $-2^2$ . 7. α)  $10x^5$ , β)  $\frac{1}{x}$ , γ)  $81x^5$ , δ)  $\frac{2\beta^3}{\gamma}$ , ε)  $-\frac{1}{2x^3y}$ . 8. α) -3, β) 16, γ) 10.064, δ) 18, ε)  $-\frac{79}{8}$ . 9. α) 2, β) 34, γ) -50. 10. A =  $(\alpha\beta)^5$ . Η τιμή της παράστασης είναι: A = 32.

#### 1.4 Ιδιότητες τετραγωνικών ριζών (ρίζα γινομένου και πηλίκου)

1. α) Σ, β) Σ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Σ. 2. α)-iii., β)-ii., γ)-iv., δ)-iii.  
 3. α) 20, β) 3, γ) 36, δ)  $\frac{15}{4}$ , ε) 5, στ) 2, ζ) 8. 4. α) 30, β) 18, γ) 32, δ) 90. 5. α)  $2\sqrt{5}$ , β)  $4\sqrt{2}$ , γ)  $5\sqrt{3}$ , δ)  $6\sqrt{2}$ , ε)  $30\sqrt{2}$ .  
 7. α) 13, β) 2, γ) -29. 8. α) 3, β) 3, γ) 6.

### Θεματική Ενότητα 2 – Κανονικότητες

#### 2.1 Κανονικότητες της μορφής $a \cdot v^2$

1. β)  $x = v^2$ , γ) 10.000, δ) 13η σειρά. 2. α) 1, 3, 5 και 7, γ) 19, δ) Ένας τύπος είναι:  $2v-1$ . ε) 4, 9 και 16. στ) Παρατηρούμε ότι το άθροισμα των n πρώτων σχημάτων αποτελείται από  $v^2$  τετράγωνα. Επομένως  $50^2 = 2.500$  τετράγωνα. 3. α) 25, β) 400, γ) Το

σχήμα στη σειρά n αποτελείται από  $v^2$  τετράγωνα. 4.  $v^2$ . 5. 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400. 6. α) 1, 4, 9, 16, 25, β) 2, 8, 18, 32, 50, γ) 3, 12, 27, 48, 75, δ) 10, 40, 90, 160, 250.

### Θεματική Ενότητα 3 – Αλγεβρικές παραστάσεις

#### 3.1 Μονώνυμα

1. α) Σ, β) Λ, γ) Λ, δ) Λ, ε) Σ. 2. Μονώνυμα είναι τα α) και δ).  
 3. α) Όμοια είναι τα  $2x^2y$ ,  $2yx^2$  και τα  $-2y^2x$ ,  $2xy^2$ , β) Ίσα είναι τα  $x^2y$ ,  $2yx^2$ , γ) Αντίθετα είναι τα  $-2y^2x$ ,  $2xy^2$ . 4. α) -5,  $x^2y^3z$ , β) 20y, 3ου, 1ου, γ) 6ου, δ)  $5x^2y^3z$ ,  $3x^2y^3z$ . 5.

| Μονώνυμα                                | Συντελεστής    | Κύριο μέρος          | Βαθμός |
|---|----------------|----------------------|--------|
| $-xy^7$                                 | -1             | $xy^7$               | 8      |
| $\frac{1}{10} \cdot \kappa^3 \lambda^2$ | $\frac{1}{10}$ | $\kappa^3 \lambda^2$ | 5      |
| $4\sqrt{2} \cdot \alpha\beta$           | $4\sqrt{2}$    | $\alpha\beta$        | 2      |
| 5x                                      | 5              | x                    | 1      |
| 5                                       | 5              | -                    | 0      |

6. α) 60, β) -0.05, γ) -4. 7. α) Π.χ.  $4x^3y^2$ , β) Π.χ.  $-6x^2y$ , γ) Π.χ.  $2x^3y^5$ , δ)  $4xy^3$ , ε)  $-\frac{1}{10}x^5y$ . 8.  $\mu=5$ ,  $\nu=0$ . Η τιμή του μονωνύμου είναι 32.

#### 3.2 Πράξεις με μονώνυμα

1. α) Λ, β) Σ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Λ. 2. α)-ii., β)-iii., γ)-v., δ)-i., ε)-iv.  
 3. α)  $9x^2$ , β)  $5x^3$ , γ)  $-2a^4$ , δ) 0, ε)  $8y^4$ , στ)  $-0,3a^3$ , ζ)  $5\sqrt{2}x^3$ .  
 4. α)  $21x^4$ , β)  $-24x^2$ , γ)  $10\kappa^3$ , δ)  $2\alpha^5$ , ε)  $-0,8y^5$ , στ)  $4x^8$ , ζ)  $5a^9$ . 5. α) 5y, β)  $-\frac{3}{4}$ , γ)  $\frac{3}{2x}$ , δ)  $\frac{2}{3a^2}$ , ε)  $-60y^2$ , στ)  $\frac{2}{3}x^6$ , ζ)  $\frac{4}{\tau^2}$ .  
 6. α)  $8x^5$ , β)  $-2x^3$ , γ) 3, δ)  $\frac{16x^6}{9}$ , ε)  $-\frac{x^5}{2}$ , στ)  $-7a^5$ . 7. α)  $2a + 2\beta$ , β) α · β. Μονώνυμο είναι το α · β. 8. α) 4x, β)  $x^2$ , γ)  $\sqrt{2}x$ . 9. α) 8x. Η περίμετρος διπλασιάζεται, β)  $4x^2$ . Το εμβαδόν τετραπλασιάζεται, γ)  $2\sqrt{2}x$ . Η διαγώνιος διπλασιάζεται.

#### 3.3 Πολυώνυμα. Βαθμός πολυωνύμου, αριθμητική τιμή πολυωνύμου.

1. α) μεγαλύτερος, β) σταθερό, βαθμό, μηδενικού. 2. α) τρεις, β) 3, 4, 5. 3. α) 52, β) 10, γ)  $\frac{21}{4}$ . 4. -92, 5. α)  $P(x) = -2x^4 + 5x^3 - 4x + 8$ , β) Είναι  $P(-1) = 5$  και  $P(1) - 2 = 5$ . 6.  $\alpha=4$ ,  $\beta=0$ ,  $\gamma=-2$ ,  $\delta=5$ . 7.  $\alpha=0$ ,  $\beta=6$ ,  $\gamma=-1$  και  $\delta=4$ . 8. α)  $24x^3 - 16x^2 - 2x$ , β)  $-3x^3 - 4x^2 + x$ , γ)  $3x^6 - 4x^4 - x^2$ . 9. α)  $6x+4$ , β) 7. 10. Μήκος: L = 10πx, εμβαδόν: E = 25πx<sup>2</sup>.

#### 3.4 Άθροισμα, διαφορά και γινόμενο πολυωνύμων μιας μεταβλητής

1. α) α)  $(x^3 + 2x + 1) + (x^3 + x - 2) = 2x^3 + 3x - 1$ , β)  $(x^2 + 2x) + (x^2 + 2x) = 2x^2 + 4x$ , γ)  $(4x^2 + 2x + 1) - (x^2 + 3x - 1) = 3x^2 - x + 2$ , δ)  $4x^2 \cdot (5x^2 + x) = 20x^4 + 4x^3$ .  
 2. α)  $7x^2 - 3x + 1$ , β)  $x+1$ , γ)  $-3x^5 - x^3 - x - 3$ , δ) -x, ε) 1, 5  $x^3 + 1$ , 7 - x. 3. α)  $x^5 - 4x^4$ , β)  $-2x^6 + x^5 - 4x^3$ , γ)  $8x^5 - 22x^3 + 4x^2 + 15x - 6$ , δ)  $-x^5 + 2x^4 - 6x^3 + 18x^2 - x - 4$ , ε)  $2x^3 - 2x^2 - 8x + 8$ , στ)  $4x^2 - 12x + 9$ . 4. α)-Δ, β)-Δ, γ)-B, δ)-B. 5. α)  $6x^3 - 7x + 15$ , β)  $2x^3 + 2x - 5$ , γ)  $23x^3 + 5$ . 6.  $\alpha=-3$ ,  $\beta=-4$ ,  $\gamma=0$ ,  $\delta=15$ . 7. α)  $3x^2y^2 - 2x^3y - 8xy^2 + 4x^2y$ , β)  $\alpha^3\beta - 5\alpha^2\beta + 6\alpha^2\beta^5 - 3\alpha^2\beta^4$ , γ) 0. 8. α) i.  $-4x^3 + 22x^2 - 18x + 4$ , ii.  $-6x^3 - 3x^2 + 9x - 3$ , β) i. 6, ii. -24, iii.  $11\sqrt{2} - 7$ , γ)  $\Gamma(x) = -x^6 + 5x^3 + 6x + 1$ . Είναι 6ου βαθμού.

#### 3.5 Ταυτότητες: $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ , $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$ , $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$ .

1. Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά  $\rightarrow (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) \rightarrow \alpha^2 - \beta^2$ , Τετράγωνο αθροίσματος  $\rightarrow (\alpha + \beta)^2 \rightarrow \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ , Τετράγωνο διαφοράς  $\rightarrow (\alpha - \beta)^2 \rightarrow \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$ . 2. α)  $x^2 + 10x + 25$ , β)  $4 + 12x + 9x^2$ , γ)  $25x^2 + 20xy + 4y^2$ , δ)  $x^2 + x + \frac{1}{4}$ .

ε)  $x^4 + 2x^2 + 1$ , στ)  $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$ , ζ)  $5 + 2\sqrt{6}$ , η)  $\alpha^2\beta^2 + 2\alpha\beta + 1$ .

3. α)  $x^2 - 2x + 1$ , β)  $16x^2 - 16x + 4$ , γ)  $4x^4 - 12x^3 + 9x^2$ ,

δ)  $x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$ , ε)  $\alpha^6 - 8\alpha^4 + 16\alpha^2$ , στ)  $\frac{\alpha^2}{81} - \frac{2}{3} + \frac{9}{\alpha^2}$ ,

ζ)  $4x^2y^2 - 20xy + 25$ , η)  $x^2 + 2xy + y^2$ . 4. α)  $x^2 - 4$ ,

β)  $4x^2 - 1$ , γ)  $9\alpha^2 - 100\beta^2$ , δ)  $x^2 - 4$ , ε)  $-1$ , στ)  $25x^2 - \frac{1}{4}$ ,

ζ)  $x^2 - 64$ , η)  $1 - 4x$ . 5. α)  $(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$ , β)  $(2\alpha - 5)^2 = 4\alpha^2 - 20\alpha + 25$ , γ)  $(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$ ,

δ)  $(2-5\alpha)^2 = 4 - 20\alpha + 25\alpha^2$ , ε)  $(4x+2y)^2 = 16x^2 + 16xy + 4y^2$ , στ)  $(3x-5y)(3x+5y) = 9x^2 - 25y^2$ . 6. α)  $2x^2 + 8y^2$ , β)

$-50 + 5x$ , γ)  $16x^3 + 32x^2 - 84x + 18$ , δ)  $x^2 + 4y^2$ .

8.  $P(x)=0$ , σταθερό πολυώνυμο. 9.  $(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 +$

$\gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma$ . 10. α)  $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ , β)  $\frac{-\sqrt{7}-3}{2}$ , γ)  $2\sqrt{5} - 2\sqrt{3}$ ,

δ)  $\frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$ . 11. Ισχύει ότι  $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ , επομένως το τρίγωνο είναι ορθογώνιο. 12. α) 999.996, β) 104.475, γ) 3,9996, δ) 3.999.991.

**3.6 Παραγοντοποίηση πολυωνύμων με κοινό παράγοντα, ομαδοποίηση και ταυτότητες**

1. α)  $2x + 4 = 2(x+2)$ , β)  $9x - 12 = 3(3x - 4)$ , γ)  $x^3 + x^2 = x^2(x+1)$ , δ)  $5x^4 - 10x^2 + 15x = 5x(x^3 - 2x + 3)$ , ε)  $6(x-1) + x(x-1) = (x-1)(6+x)$ , στ)  $-3x - 15x^2 + 9x^3 = -3x(1 + 5x - 3x^2)$ . 2. α)  $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$ ,

β)  $9x^2 - 4 = (3x+2)(3x-2)$ , γ)  $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$ ,

δ)  $4x^2 - 12x + 9 = (2x-3)^2$ . 3. α)  $5(x-2)$ , β)  $3x(x-2)$ ,

γ)  $3(x^2 - x + 1)$ , δ)  $4x(2x-5)$ , ε)  $x^2(x^3 - x + 1)$ , στ)  $x^3y^3(y^2 + x^2)$ ,

ζ)  $2\alpha\beta^2(2 - \alpha^2 - 3\alpha\beta\gamma)$ , η)  $6x^2(2x + 1)$ , θ)  $-3x^2(6x^3 + 3x^2 + 1)$ .

4. α)  $(5x+3)(x-2)$ , β)  $(1-4x)(2x^2-6x)$ , γ)  $(5x-4)(x-2)$ , δ)  $(x-1) \cdot 3x$ , ε)  $2(2x-1)(x-2)$ , στ)  $(3x-1)(-5x+2)$ . 5.

α)  $(\beta-2)(\alpha+2)$ , β)  $(\gamma-5)(x-5)$ , γ)  $(x+3)(x^2+2)$ , δ)  $(2x-3)(2x^2+3)$ , ε)  $(\beta-1)(\alpha-1)$ , στ)  $(x-1)(2+\beta+x)$ . 6. α)  $(x+10)(x-10)$ , β)  $(7x+4)(7x-4)$ ,

γ)  $(5x+3y)(5x-3y)$ , δ)  $(6x + \frac{1}{2})(6x - \frac{1}{2})$ , ε)  $(\sqrt{3}-y)(\sqrt{3}+y)$ ,

στ)  $(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$ , ζ)  $4(x+4)(x-5)$ , η)  $-(3x-2)(x+4)$ , θ)  $(5x-4)(x+4)$ . 7. α)  $(x+3)^2$ , β)  $(5-x)^2$ , γ)  $(x+1)^2$ ,

δ)  $(2x+3)^2$ , ε)  $(x - \frac{1}{2})^2$ , στ)  $(3x+2y)^2$ . 8. α)  $(x+y)(5x+2y)$ ,

β)  $(2x-y)(x-y)$ , γ)  $(x-1)(x-2)$ , δ)  $(2\alpha+3)(3\alpha+1)$ , ε)

$(y+2)(2y+1)$ , στ)  $(x+2)(3x-2)$ . 9. α)  $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta+1)$ , β)

$(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)$ , γ)  $(5x-y)(5x+y-1)$ , δ)  $(x-2)(2x+1)$ , ε)

$(x+5-y)(x+5+y)$ , στ)  $(-x+4y)(3x-2y)$ , ζ)  $(x-1)(5x+14)$ ,

η)  $(\beta-\alpha+1)(\beta+\alpha-1)$ , θ)  $(x-1)(4x-5)$ , ι)  $(x-3)(3x-4)$ ,

ια)  $(\alpha-1)(\alpha+1)(\alpha^2+\alpha+1)$ , ιβ)  $2(x-1)^2$ , ιγ)  $(x^2+4-2x)(x^2+4+2x)$ , ιδ)  $-(x-3)^2(x+3)^2$ , ιε)  $-2\alpha(\alpha-2)^2$ .

10. β)  $P(x) = 2x(x-1)$  και  $Q(x) = (x-1)^2$ .

**3.7 ΕΚΠ πολυωνύμων**

1. i.-B, ii.-B, iii.-Γ. 2. i.-Γ, ii.-A, iii.-Γ. 3. i.-Γ, ii.-B, iii.-Γ. 4. α)  $16x^3y^2$ , β)  $36\alpha^3\beta^3\gamma^2$ , γ)  $60x^5y^5z^4$ , 5. α)  $x(x+1)(x-1)$ , β)  $x^2(x+3)$ , γ)  $12x^3(2x-3)$ . 6. α)  $60x(x+1)^2$ , β)  $2x(x+3)(x-3)^2$ , γ)  $x(x+2)^2(x-2)^2$ . 7. α)  $x^3(x+1)(x-1)^3$ , β)  $(x+1)(x+2)(x-2)^2(x^2+4)$ .

3.8 Ρητές παραστάσεις, απλοποίηση

1. α) Λ, β) Σ, γ) Λ, δ) Σ. 2. α)  $x \neq 5$ , β)  $x \neq -\frac{1}{2}$ ,

γ) Ορίζεται για οποιαδήποτε του x, δ)  $x \neq \frac{1}{3}$  και  $x \neq -1$ ,

ε)  $x \neq 2$ , στ)  $x \neq 5$  και  $x \neq -5$ . 3. α) 2, β)  $\frac{x}{3}$ , γ)  $\frac{\alpha}{\beta}$ , δ)  $\frac{3x^2}{z}$ ,

ε)  $\frac{\beta^3}{5\alpha^6}$ . 4. α)  $\frac{x+3}{(x-2)^2}$ , β)  $-1$ , γ)  $-1$ , δ)  $\frac{x^2-x}{x+1}$ . 5. α)  $\frac{4}{3x}$ , β)  $-x-1$ ,

γ)  $\frac{x-1}{x+1}$ , δ)  $x^2+1$ . 6. α)  $\frac{x-1}{x}$ , β)  $\frac{x-3}{x+3}$ , γ)  $\frac{(x-2)(x^2+4)}{x(x+2)}$ ,

δ)  $-x-1$ , ε)  $\frac{4x-9}{x-2}$ , στ)  $\frac{\alpha^2\beta-1}{\alpha+4\beta}$ .

**3.9 Πολλαπλασιασμός και διαίρεση ρητών παραστάσεων**

1. α)  $\frac{5x^3}{3}$ , β)  $-\frac{4}{x}$ , γ)  $\frac{50}{x}$ , δ)  $\frac{3xy^2}{5}$ , ε)  $\frac{16x^6}{y^2}$ , στ)  $\frac{6}{5x^2}$ . 2. α)  $\frac{1}{2}$ , β)  $-16$ ,

γ)  $x^2 - 1$ , δ)  $-\frac{x^2-x-6}{x+3}$ , ε)  $4x^2 + 2x$ , στ)  $\frac{\alpha\beta - \alpha^2\beta}{\alpha + \beta}$ . 3. α)  $-\frac{1}{x^3y^3}$ ,

β)  $\frac{4}{\beta}$ , γ)  $-1$ , δ)  $-\frac{2x+1}{x^3+y^2}$ , ε)  $\frac{18x+9}{4}$ , στ)  $\frac{8x^2+32x}{x-4}$ . 4. α)  $-\frac{9}{x}$ , β)  $\frac{x-1}{4x}$ ,

γ)  $\frac{25x^2}{x-5}$ . 5. α)  $\frac{3x+3y}{3x+3y}$ , β)  $8x^2 + 4xy - 4y^2$ , γ)  $\frac{x+2}{x}$ , δ)  $\frac{25x^2}{x-5}$ .

**3.10 Πρόσθεση και αφαίρεση ρητών παραστάσεων**

1. α)  $-\frac{1}{x}$ , β) 1, γ) 1, δ) 3. 2. α)  $-\frac{1}{x^2-x}$ , β)  $\frac{5+4x}{4x}$ , γ)  $\frac{3-\alpha^3+\alpha\beta^2}{\alpha^2\beta}$ ,

δ) 7, ε)  $\frac{5x+6}{(x+1)^2}$ . 3. α)  $\frac{x+3}{3x}$ , β)  $-\frac{2}{x^3-4x}$ , γ)  $\frac{7x+3}{(x-1)^2(x+1)}$ , δ)

$\frac{x+y+1}{x^2-y^2}$ , ε)  $\frac{6x+1}{(2x-1)^2(2x+1)}$ , στ)  $\frac{1}{x^2-x}$ .

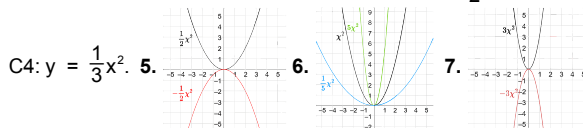
4. α)  $\frac{4x+2}{x}$ , β)  $x+y$ , γ)  $-\frac{1}{x+y}$ , δ)  $x-1$ , ε)  $-\frac{1}{xy}$ , στ)  $\frac{(2x-1)(x-1)}{x}$ .

**Θεματική Ενότητα 4 – Συναρτήσεις**

**4.1 Η συνάρτηση  $y = ax^2$ .**

1. Ο(0,0), Α(1,2) και Γ(3,18). 2. α) Σ, β) Σ, γ) Σ, δ) Σ, ε) Λ.

3. α = -3. 4. C1:  $y = 5x^2$ , C2:  $y = 3x^2$ , C3:  $y = \frac{1}{2}x^2$ ,



C4:  $y = \frac{1}{3}x^2$ . 5.

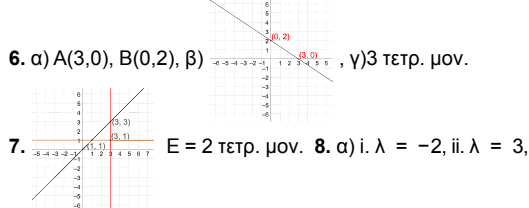
8.  $\alpha = \frac{1}{5}$ . 9.  $\alpha = \frac{2}{9}$ . 10. α) 100, β)  $x = -\frac{1}{6}$  ή  $x = \frac{1}{6}$ . 11. α)  $\frac{1}{2}$ , β) 8m

**Θεματική Ενότητα 5 – Αλγεβρικές σχέσεις**

**5.1 Γραμμική εξίσωση  $ax + by = \gamma$ .**

1. (-3,3) και (0,2). 2. Α(0, -4), Β(1, -2), Γ(2,0), Δ(3,2), Ε(4,4), Ζ(5,6). 3. α) ii., iii., β) i., iii, γ) i., iv. 4. α) ε2, β) ε4, γ) ε3, δ) ε1 και ε4. 5. ε1:  $y = \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$ , ε2:  $y = -2x + 5$ , ε3:  $y = \frac{1}{2}x$ .

6. α) Α(3,0), Β(0,2), β)  $(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ , γ) 3 τετρ. μον.



7. Ε = 2 τετρ. μον. 8. α) i.  $\lambda = -2$ , ii.  $\lambda = 3$ ,

iii.  $\lambda = 0$ , iv.  $\lambda = 1$ , β) Δεν υπάρχει τιμή του λ.

**5.2 Γραμμικά συστήματα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, γραφική επίλυση**

1. α) Λ, β) Σ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Σ. 2. (-1,3). 3. Σ1: (-3, -1), Σ2: (2,3), Σ3: (4,1). 4. Σ1→ii., Σ2→i., Σ3→iii. 5. α) (-2,4), β) (1,2), γ) (0,0), δ) (0,3). 6. α) Μοναδική λύση, β) Μοναδική λύση, γ) Καμία λύση, δ) Άπειρες λύσεις.

5.3 Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος

1. α) Αόριστο, β) Αδύνατο. 2. (3,2). 3. α) (2,-2), β) (-1,0), γ)  $(\frac{5}{17}, -\frac{3}{17})$ , δ)  $(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ . 4. α) (3,1), β)  $(\frac{21}{20}, -\frac{5}{4})$ ,

γ)  $(1, \frac{1}{2})$ , δ) (-33, -22). 5. α) (-1, -5), β) (-2, -1), γ) (1, -1), δ) (19, -1). 6. Τετράδιο: 2,5€, στυλό 0,5€. 7. 6 γραφεία και 9 καρέκλες. 8. α=2, β=5. 9. Γ1: 24 μαθητές, Γ2: 18 μαθητές. 10. 28 κέρματα των 0,50€ και 12 κέρματα των 2€. 11. α) (2,3), β) α=-1, β=2.

**5.4 Εξισώσεις δευτέρου ή και μεγαλύτερου βαθμού, επίλυση με παραγοντοποίηση**

Α. 1. α)  $x=3$ , β)  $x=2$ , γ) Αδύνατη, 2. α)  $x=-8$ , β)  $x = -\frac{5}{13}$ , γ) Ταυτότητα.

Β. 1. α) Σ, β) Λ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Σ. 2. α)  $x = -2$ ,  $x = 1$ , β)  $y = -\frac{2}{3}$ ,  $y = 3$ , γ)  $t = \frac{1}{6}$ ,  $t = \frac{1}{4}$ , δ)  $\omega = 0$ ,  $\omega = \frac{1}{3}$ , ε)  $z = -1$ ,  $z = 0$ ,  $z = 1$ , στ)  $k = 0$ ,  $k = 2$ ,  $k = 4$ . 3. α)  $x = 0$ ,  $x = 1$ , β)  $x = 0$ ,  $x = 2$ , γ)  $x = 0$ ,  $x = \frac{3}{2}$ , δ)  $x = 0$ ,  $x = \frac{1}{5}$ , ε)  $x = -20$ ,  $x = 0$ , στ)  $x = 0$ ,  $x = 6$ , ζ)  $x = 0$ ,  $x = 4$ , η)  $x = 0$ ,



4≈Σχ. 6. 3.  $x=3,5$ . 4. α) Δεν είναι όμοια, β) Είναι όμοια, γ) Είναι όμοια, δ) Είναι όμοια. 5.  $\omega=1170$ ,  $\chi=6$ .

| Πλευρά α | Πλευρά α' | Λόγος ομοιότητας λ | Λόγος περιμέτρων | Λόγος εμβαδόν  |
|----------|-----------|--------------------|------------------|----------------|
| 1        | 3         | 3                  | 3                | 9              |
| 9        | 6         | $\frac{2}{3}$      | $\frac{2}{3}$    | $\frac{4}{9}$  |
| 10       | 5         | $\frac{1}{2}$      | $\frac{1}{2}$    | $\frac{1}{4}$  |
| 50       | 20        | $\frac{2}{5}$      | $\frac{2}{5}$    | $\frac{4}{25}$ |

7. α) 24cm, β) 19,6cm<sup>2</sup>, γ) 24cm. 8. α) 60m, β) 0,6cm, γ) 40m. 9. Τα παραλληλόγραμμα είναι ομοιόθετα με κέντρο Ο και λόγο λ=2, άρα είναι όμοια με λόγο ομοιότητας λ=2. 10. 69,6m.

#### 4.3 Όμοια τρίγωνα

1. α) Είναι όμοια, β) Είναι όμοια, γ) Είναι όμοια. 2. α) Είναι όμοια με  $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{AG}{\Delta Z} = \frac{BG}{\Delta \Xi}$ , β) Είναι όμοια με  $\frac{KL}{\Delta \Xi} = \frac{KM}{\Delta \Omega} = \frac{LM}{\Delta \Theta}$ . 3. Βρίσκουμε ότι τα τρίγωνα έχουν ίσες γωνίες μεταξύ τους. 4.  $x=3,2$ ,  $y=4,5$ ,  $\omega=1,2$ . 5. α) 0,3m, β) 4m. 6.  $KL=5$ ,  $AL=2$ . 7. 3,4,5. 8. 516m. 9. 39,2m.

#### Θεματική Ενότητα 5 – Εμβαδόν

5.1 Εμβαδά επιφάνειας στερεών (ορθών πρισμάτων, πυραμίδας)

1. 150m<sup>2</sup>. 2. 122m<sup>2</sup>. 3. 3m. 4. 180cm<sup>2</sup>. 5.

| Πλευρά τετραγώνου (x) | Ύψος πρίσματος (u) | Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας (Eπ) | Ολικό εμβαδόν πρίσματος (Eολ) |
|-----------------------|--------------------|-------------------------------------|-------------------------------|
| 4cm                   | 5cm                | 80cm <sup>2</sup>                   | 112cm <sup>2</sup>            |
| 5cm                   | 9cm                | 180cm <sup>2</sup>                  | 230cm <sup>2</sup>            |
| 1cm                   | 6cm                | 24cm <sup>2</sup>                   | 25cm <sup>2</sup>             |
| 2cm                   | 10cm               | 80cm <sup>2</sup>                   | 88cm <sup>2</sup>             |

6. α) 480cm<sup>2</sup>, β) 576cm<sup>2</sup>. 7. 144cm<sup>2</sup>. 8. 114cm<sup>2</sup>. 9. 1600cm<sup>2</sup>. 10.

| Πλευρά τετραγώνου (x) | Απόσταση (α) | Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας (Eπ) | Ολικό εμβαδόν πυραμίδας (Eολ) |
|-----------------------|--------------|-------------------------------------|-------------------------------|
| 2cm                   | 6cm          | 24cm <sup>2</sup>                   | 28cm <sup>2</sup>             |
| 4cm                   | 1cm          | 8cm <sup>2</sup>                    | 24cm <sup>2</sup>             |
| 10cm                  | 50cm         | 1.000cm <sup>2</sup>                | 1.100cm <sup>2</sup>          |
| 9cm                   | 3cm          | 54cm <sup>2</sup>                   | 135cm <sup>2</sup>            |

11.  $4\sqrt{3}$ cm<sup>2</sup>. 12. α) 24cm<sup>2</sup>, β) 1.200€. 13. α) 48cm<sup>2</sup>, β)  $(48 + 12\sqrt{3})$ cm<sup>2</sup>. 14. 6.996cm<sup>2</sup>.

5.2 Εμβαδά επιφάνειας στερεών (κυλίνδρου, κώνου, σφαίρας)

1. α) 150,72cm<sup>2</sup>, β) 207,24cm<sup>2</sup>. 2. α) 489,84cm<sup>2</sup>, β) 942cm<sup>2</sup>. 3. 1.256cm<sup>2</sup>. 4. α) 471cm<sup>2</sup>, β) 351,68cm<sup>2</sup>, γ) 150,72cm<sup>2</sup>. 5. 1.155,52cm<sup>2</sup>. 6.

| Ακτίνα βάσης ρ                     | 1cm                  | 3cm                   | 4cm                   |
|------------------------------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|
| Ύψος κυλίνδρου u                   | 5cm                  | 4cm                   | 2cm                   |
| Εμβαδόν παράπλευρης E <sub>π</sub> | 31,4cm <sup>2</sup>  | 75,36cm <sup>2</sup>  | 50,24cm <sup>2</sup>  |
| Ολικό εμβαδόν E <sub>ολ</sub>      | 37,68cm <sup>2</sup> | 131,88cm <sup>2</sup> | 150,72cm <sup>2</sup> |

7.  $E_{\text{κωνου}} = 2\pi a^2$ ,  $E_{\text{σφαίρας}} = 4\pi a^2$ . Αν διπλασιάσουμε την ακτίνα α, τα εμβαδά τετραπλασιάζονται. 8. 154,86cm<sup>2</sup>. 9. α) 533,8cm<sup>2</sup>,

β) 10,676€. 10. 674,79cm<sup>2</sup>. 11. 86,3m<sup>2</sup>. 12.

| Ακτίνα Σφαίρας (cm)                   | 1     | 2     | 10   | 5   | π               |
|---------------------------------------|-------|-------|------|-----|-----------------|
| Διάμετρος Σφαίρας (cm)                | 1     | 4     | 20   | 10  | 2π              |
| Εμβαδόν Επιφάνειας (cm <sup>2</sup> ) | 12,56 | 50,24 | 400π | 314 | 4π <sup>3</sup> |

13. α) 452,16cm<sup>2</sup> και 803,84cm<sup>2</sup>, β) 10cm.

#### Θεματική Ενότητα 6 – Όγκος

6.1 Όγκος στερεών (ορθών πρισμάτων, πυραμίδας)

1. α) 213.000dm<sup>3</sup>, β) 0,007569m<sup>3</sup>, γ) 12700cm<sup>3</sup>, δ) 15.000ml, ε) 3,896.700m<sup>3</sup>, στ) 150.000.000mm<sup>3</sup>. 2. α) 2.500.000cm<sup>3</sup>, 2.500Lt, β) 0,8Lt, 800.000.000mm<sup>3</sup>. 3. α) 42cm<sup>3</sup>, β) 8cm<sup>3</sup>, γ) 24cm<sup>3</sup>, δ) 12cm<sup>3</sup>, ε) 18cm<sup>3</sup>, στ) 27cm<sup>3</sup>. 4. α) 8cm<sup>3</sup>, β) 48cm<sup>3</sup>, γ) 160cm<sup>3</sup>, δ) 60cm<sup>3</sup>, ε) 56cm<sup>3</sup>, στ) 80cm<sup>3</sup>. 5. 3m. 6. 12cm. 7. E=60cm<sup>2</sup>, V=48cm<sup>3</sup>. 8. 2.592.920m<sup>3</sup>. 9. 30.600cm<sup>3</sup>. 10. 16cm. 11. α) 30cm, β) 2.280cm<sup>2</sup>. 12. 119cm<sup>3</sup>. 13. 211,5cm<sup>3</sup>.

6.2 Όγκος στερεών (κυλίνδρου, κώνου, σφαίρας).

1. 628cm<sup>3</sup>. 2. 209,3cm<sup>3</sup>. 3. 2.143,57cm<sup>3</sup>. 4. 577,76€. 5. Παραλληλεπίπεδο: 480m<sup>3</sup>, κύλινδρος: 1.130,4m<sup>3</sup>. 6. E=2.926cm<sup>2</sup>, V=10.096cm<sup>3</sup>. 7. 5.451.400 Lt. 8. Μπορεί να χωρέσει. 9. Η σφαίρα περιέχει τον μεγαλύτερο όγκο. 10. 6cm. 11. α) 113.040cm<sup>3</sup>, β) 102.960cm<sup>3</sup>.

## Γ' ΘΕΜΑΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ – ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

#### Θεματική Ενότητα 1 – Στατιστική

1.2 Αντιπροσωπευτικότητα και εξαγωγή συμπερασμάτων/ Μεταβλητότητα μεταξύ δειγμάτων

1. α)

| Διάρκεια Ζωής (σε μήνες) | Ερευνητής Α |                   | Ερευνητής Β |                   |
|--------------------------|-------------|-------------------|-------------|-------------------|
|                          | Συχνότητα   | Σχετική Συχνότητα | Συχνότητα   | Σχετική Συχνότητα |
| 0 – 6                    | 2           | 5%                | 3           | 7,5%              |
| 6 – 12                   | 4           | 10%               | 1           | 2,5%              |
| 12 – 18                  | 9           | 22,5%             | 9           | 22,5%             |
| 18 – 24                  | 4           | 10%               | 10          | 25%               |
| 24 – 30                  | 9           | 22,5%             | 7           | 17,5%             |
| 30 – 36                  | 7           | 17,5%             | 6           | 15%               |
| 36 – 42                  | 2           | 5%                | 2           | 5%                |
| 42 – 48                  | 3           | 7,5%              | 2           | 5%                |
| Σύνολο                   | 40          | 100%              | 40          | 100%              |

β) A: 52,5%, B: 42,5%, γ) A: (3, 15, 24, 32,5, 47), B: (2, 16, 22, 30, 44). 2. α) Λιγότερο από 4 ώρες: A:18, B: 11. Περισσότερο από 8 ώρες: A: 16, B: 17, β) Εξέτασαν διαφορετικά δείγματα, γ) Δεν αρκούν.

#### Θεματική Ενότητα 2 – Πιθανότητες

2.1 Νόμος των μεγάλων αριθμών

1. 50%. 2. α) 20%, β) Όχι. 3. α) 50%. 6. Μπλε: 45%, ροζ: 15%, γκρι: 15%, πορτοκαλί: 25%. Ο τροχός δεν εμφανίζει τα αναμενόμενα αποτελέσματα, άρα δεν εμφανίζει «δικαία» κάθε χρώμα.

2.2 Ανεξαρτησία ενδεχομένων

1. γ. 2. α. 3. α)  $\frac{1}{6}$ , β)  $\frac{1}{36}$ , γ)  $\frac{1}{6}$ . 4. α)  $\frac{1}{8}$ , β)  $\frac{1}{2}$ . 5. α)  $\frac{3}{8}$ , β)  $\frac{1}{8}$ .

6. Όχι. Το αποτέλεσμα της πρώτης επιλογής επηρεάζει τις πιθανότητες των αποτελεσμάτων της δεύτερης επιλογής.

7. α) 2, β) 7. 8.  $\frac{5}{12}$ .

## Πίνακας τριγωνομετρικών αριθμών οξείας γωνίας

| Γωνία<br>(σε °) | Ημίτονο | Συνημίτονο | Εφαπτομένη | Γωνία<br>(σε °) | Ημίτονο | Συνημίτονο | Εφαπτομένη |
|-----------------|---------|------------|------------|-----------------|---------|------------|------------|
| 1               | 0,0175  | 0,9998     | 0,0175     | 46              | 0,7193  | 0,6947     | 1,0355     |
| 2               | 0,0349  | 0,9994     | 0,0349     | 47              | 0,7314  | 0,6820     | 1,0724     |
| 3               | 0,0523  | 0,9986     | 0,0524     | 48              | 0,7431  | 0,6691     | 1,1106     |
| 4               | 0,0698  | 0,9976     | 0,0699     | 49              | 0,7547  | 0,6561     | 1,1504     |
| 5               | 0,0872  | 0,9962     | 0,0875     | 50              | 0,7660  | 0,6428     | 1,1918     |
| 6               | 0,1045  | 0,9945     | 0,1051     | 51              | 0,7771  | 0,6293     | 1,2349     |
| 7               | 0,1219  | 0,9925     | 0,1228     | 52              | 0,7880  | 0,6157     | 1,2799     |
| 8               | 0,1392  | 0,9903     | 0,1405     | 53              | 0,7986  | 0,6018     | 1,3270     |
| 9               | 0,1564  | 0,9877     | 0,1584     | 54              | 0,8090  | 0,5878     | 1,3764     |
| 10              | 0,1736  | 0,9848     | 0,1763     | 55              | 0,8192  | 0,5736     | 1,4281     |
| 11              | 0,1908  | 0,9816     | 0,1944     | 56              | 0,8290  | 0,5592     | 1,4826     |
| 12              | 0,2079  | 0,9781     | 0,2126     | 57              | 0,8387  | 0,5446     | 1,5399     |
| 13              | 0,2250  | 0,9744     | 0,2309     | 58              | 0,8480  | 0,5299     | 1,6003     |
| 14              | 0,2419  | 0,9703     | 0,2493     | 59              | 0,8572  | 0,5150     | 1,6643     |
| 15              | 0,2588  | 0,9659     | 0,2679     | 60              | 0,8660  | 0,5000     | 1,7321     |
| 16              | 0,2756  | 0,9613     | 0,2867     | 61              | 0,8746  | 0,4848     | 1,8040     |
| 17              | 0,2924  | 0,9563     | 0,3057     | 62              | 0,8829  | 0,4695     | 1,8807     |
| 18              | 0,3090  | 0,9511     | 0,3249     | 63              | 0,8910  | 0,4540     | 1,9626     |
| 19              | 0,3256  | 0,9455     | 0,3443     | 64              | 0,8988  | 0,4384     | 2,0503     |
| 20              | 0,3420  | 0,9397     | 0,3640     | 65              | 0,9063  | 0,4226     | 2,1445     |
| 21              | 0,3584  | 0,9336     | 0,3839     | 66              | 0,9135  | 0,4067     | 2,2460     |
| 22              | 0,3746  | 0,9272     | 0,4040     | 67              | 0,9205  | 0,3907     | 2,3559     |
| 23              | 0,3907  | 0,9205     | 0,4245     | 68              | 0,9272  | 0,3746     | 2,4751     |
| 24              | 0,4067  | 0,9135     | 0,4452     | 69              | 0,9336  | 0,3584     | 2,6051     |
| 25              | 0,4226  | 0,9063     | 0,4663     | 70              | 0,9397  | 0,3420     | 2,7475     |
| 26              | 0,4384  | 0,8988     | 0,4877     | 71              | 0,9455  | 0,3256     | 2,9042     |
| 27              | 0,4540  | 0,8910     | 0,5095     | 72              | 0,9511  | 0,3090     | 3,0777     |
| 28              | 0,4695  | 0,8829     | 0,5317     | 73              | 0,9563  | 0,2924     | 3,2709     |
| 29              | 0,4848  | 0,8746     | 0,5543     | 74              | 0,9613  | 0,2756     | 3,4874     |
| 30              | 0,5000  | 0,8660     | 0,5774     | 75              | 0,9659  | 0,2588     | 3,7321     |
| 31              | 0,5150  | 0,8572     | 0,6009     | 76              | 0,9703  | 0,2419     | 4,0108     |
| 32              | 0,5299  | 0,8480     | 0,6249     | 77              | 0,9744  | 0,2250     | 4,3315     |
| 33              | 0,5446  | 0,8387     | 0,6494     | 78              | 0,9781  | 0,2079     | 4,7046     |
| 34              | 0,5592  | 0,8290     | 0,6745     | 79              | 0,9816  | 0,1908     | 5,1446     |
| 35              | 0,5736  | 0,8192     | 0,7002     | 80              | 0,9848  | 0,1736     | 5,6713     |
| 36              | 0,5878  | 0,8090     | 0,7265     | 81              | 0,9877  | 0,1564     | 6,3138     |
| 37              | 0,6018  | 0,7986     | 0,7536     | 82              | 0,9903  | 0,1392     | 7,1154     |
| 38              | 0,6157  | 0,7880     | 0,7813     | 83              | 0,9925  | 0,1219     | 8,1443     |
| 39              | 0,6293  | 0,7771     | 0,8098     | 84              | 0,9945  | 0,1045     | 9,5144     |
| 40              | 0,6428  | 0,7660     | 0,8391     | 85              | 0,9962  | 0,0872     | 11,4301    |
| 41              | 0,6561  | 0,7547     | 0,8693     | 86              | 0,9976  | 0,0698     | 14,3007    |
| 42              | 0,6691  | 0,7431     | 0,9004     | 87              | 0,9986  | 0,0523     | 19,0811    |
| 43              | 0,6820  | 0,7314     | 0,9325     | 88              | 0,9994  | 0,0349     | 28,6363    |
| 44              | 0,6947  | 0,7193     | 0,9657     | 89              | 0,9998  | 0,0175     | 57,2900    |
| 45              | 0,7071  | 0,7071     | 1,0000     |                 |         |            |            |

## Ευρετήριο όρων και ονομάτων

|  |                                   |                                    |
|--|-----------------------------------|------------------------------------|
| <b>A</b>                                     | <b>Z</b>                          | Όγκος πυραμίδας 237                |
| Αδύνατη εξίσωση 122                          | -                                 | Όγκος σφαίρας 244                  |
| Αδύνατο σύστημα 111                          |                                   | Ολικό εμβαδόν κυλίνδρου 223        |
| Αλγεβρική Παράσταση 46                       | <b>H</b>                          | Ολικό εμβαδόν κώνου 225            |
| Ανεξάρτητα ενδεχόμενα 273                    | Ημίτονο 167                       | Ολικό εμβαδόν πρίσματος 215        |
| Ανίσωση 132                                  |                                   | Ολικό εμβαδόν πυραμίδας 216        |
| Άξονας συμμετρίας 96                         | <b>I</b>                          | Ομαδοποίηση 72                     |
| Αόριστη εξίσωση 122                          | Ίσα πολυώνυμα 57                  | Όμοια μονώνυμα 47                  |
| Αόριστο σύστημα 111                          | Ισότητα τριγώνων 146              | Όμοια σχήματα 198                  |
| Απλή τυχαία δειγματοληψία 255                |                                   | Όμοια τρίγωνα 205                  |
| Απόλυτη τιμή 23                              | <b>K</b>                          | Ομοιόθετο γωνίας 192               |
| Αριθμητική Παράσταση 46                      | Κανονική πυραμίδα 216             | Ομοιόθετο ευθύγραμμου τμήματος 191 |
| Άρρητοι αριθμοί 18                           | Κανονικότητα 40                   | Ομοιόθετο κύκλου 193               |
|  | Κριτήριο Γ-Π-Γ 148                | Ομοιόθετο πολυγώνου 192            |
| <b>B</b>                                     | Κριτήριο Π-Γ-Π 147                | Ομοιόθετο σημείου 190              |
| Βαθμός μονωνύμου 47                          | Κριτήριο Π-Π-Π 149                |                                    |
| Βαθμός πολυωνύμου 57                         | Κλίση ευθείας 168                 | <b>Π</b>                           |
|  | Κοινός παράγοντας 72              | Παραβολή 96                        |
| <b>Γ</b>                                     | Κύλινδρος 222                     | Παραγοντοποίηση 71                 |
| Γραμμική εξίσωση 105                         | Κύρια στοιχεία τριγώνου 144       | Πείραμα τύχης 268                  |
| Γραμμικό σύστημα 110                         | Κύριο μέρος μονωνύμου 47          | Περίληψη πέντε αριθμών 262         |
| Γραφική παράσταση 96                         | Κώνος 224                         | Περιοδικοί Δεκαδικοί αριθμοί 13    |
|  |                                   | Πιθανότητα 269                     |
| <b>Δ</b>                                     | <b>Λ</b>                          | Πληθυσμός 254                      |
| Δείγμα 254                                   | Λόγος εμβαδών όμοιων σχημάτων 200 | Πολυώνυμο 56                       |
| Δειγματοληψία 255                            |                                   | Πραγματικοί αριθμοί 18             |
| Δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου 145           | Λόγος ευθύγραμμων τμημάτων 180    | Πρίσμα 214                         |
| Διακρίνουσα 126                              | Λύση γραμμικού συστήματος 110     | Πυραμίδα 216                       |
| Διάμεσος 145                                 |                                   | <b>P</b>                           |
| Διάταξη 17                                   | <b>M</b>                          | Ρητή παράσταση 82                  |
|  | Μέθοδος αντίθετων συντελεστών 116 | Ρητοί αριθμοί 12                   |
| <b>E</b>                                     | Μέθοδος αντικατάστασης 115        |                                    |
| ΕΚΠ πολυωνύμων 78                            | Μέση τιμή 261                     | <b>Σ</b>                           |
| Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας κυλίνδρου 223 | Μέτρα θέσης 261                   | Σταθερό πολυώνυμο 56               |
| Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας πρίσματος 216 | Μέτρα μεταβλητότητας 262          | Συμπλήρωση τετραγώνου 126          |
| Εμβαδόν σφαίρας 226                          | Μονάδες μέτρησης όγκου 234        | Συνάρτηση 96                       |
| Ενδεχόμενο 268                               | Μονώνυμο 46                       | Συνημίτονο 167                     |
| Εξίσωση δευτέρου βαθμού 123                  | <b>N</b>                          | Συντελεστής μονωνύμου 47           |
| Εξίσωση πρώτου βαθμού 122                    | Νόμος μεγάλων αριθμών 269         | Σφαίρα 225                         |
| Ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$ 106        | Νόμος τριχοτομίας 132             |                                    |
| Ευθεία παράλληλη στον άξονα $y'y$ 106        | <b>O</b>                          | <b>T</b>                           |
| Εύρος 262                                    | Όγκος 234                         | Ταυτότητα 65                       |
| Εφαπτομένη 168                               | Όγκος κυλίνδρου 243               | Τετραγωνική ρίζα 18                |
|  | Όγκος κώνου 244                   | Τιμή πολυωνύμου 57                 |
|  | Όγκος πρίσματος 236               | Τριγωνομετρικοί Αριθμοί γωνίας 167 |

*\*Η αρίθμηση δίπλα από τους όρους σχετίζεται με τη σελίδα στην οποία αναφέρεται για πρώτη φορά ο όρος.*

## Βιβλιογραφία

- Bargagliotti, A., Franklin, C., Arnold, P., Gould, R., Johnson, S., Perez, L., and D.Spangler. 2020. *Pre-K–12 Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education II* (GAISE II). American Statistical Association and National Council of Teachers of Mathematics. Bartel Leendert van der Waerden,
- Battista, M. T. (2007). *The Development of Geometric and Spatial Thinking*. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843-908). Charlotte, NC: Information Age.
- Behrends, E. (2017). *Μαθηματικά πεντάλεπτα: 100 μικρές ιστορίες από τον κόσμο των μαθηματικών*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
- Bragg, P., & Outhred, L. (2004). *A Measure of Rulers - The Importance of Units in a Measure*. In M. J. Hoines, & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 159-166). Bergen University College.
- Clements, Douglas & Swaminathan, Sudha & Hannibal, M.A.Z. & Sarama, Julie. (1999). *Young children's concepts of shape*. *Journal for Research in Mathematics Education*. 30. 192-212.
- Drijvers, P. H. M. (2010). *Secondary algebra education. Revisiting topics and themes and exploring the unknown*. Sense Publishers.
- Duval, Raymond. (2013). *Commentary: Linking epistemology and semio-cognitive modeling in visualization*. *ZDM*. 46. 10.1007/s11858-013-0565-8.
- Fischbein, E. (1993). *The Theory of Figural Concepts*. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 139-162. <http://dx.doi.org/10.1007/BF01273689>
- Fujita, T.. (2012). *Learners' level of understanding of the inclusion relations of quadrilaterals and prototype phenomenon*. *The Journal of Mathematical Behavior*. 31. 10.1016/j.jmathb.2011.08.003.
- Garfield, J. (2002). *The Challenge of Developing Statistical Reasoning*. *Journal of Statistics Education*, 10(3). <https://doi.org/10.1080/10691898.2002.11910676>
- Glaserfeld E. von (1990) *Environment and communication*. In: Steffe L. P. & Wood T.(eds.) *Transforming children's mathematics education*. Erlbaum, Hillsdale NJ: 30–38.
- Harford, T. (2023). *Τι κρύβουν οι αριθμοί*. Κλειδάριθμος.
- Huntley, Mary Ann & Marcus, Robin & Kahan, Jeremy & Miller, Jane. (2007). *Investigating high-school students' reasoning strategies when they solve linear equations*. *The Journal of Mathematical Behavior*. 26. 115-139. 10.1016/j.jmathb.2007.05.005.
- Jones, Keith & Tzekaki, Marianna. (2016). *Research on the teaching and learning of geometry*. 10.1007/978-94-6300-561-6\_4.
- Kinsey, L. C., Moore, E. T., & Prassidis, E. (2018). *Γεωμετρία και Συμμετρία*. Εκδόσεις Κλειδάριθμος
- Konold, C., Madden, S., Pollatsek, A., Pfannkuch, M., Wild, C., Ziedins, I., Finzer, W., Horton, N. J., & Kazak, S. (2011). *Conceptual challenges in coordinating theoretical and data-centered estimates of probability*. *Mathematical Thinking and Learning*, 13(1-2), 68–86. <https://doi.org/10.1080/10986065.2011.538299>
- Liljedahl, P. (2020). *Building thinking classrooms in mathematics, grades K-12: 14 teaching practices for enhancing learning*. Corwin Mathematics Series
- Lowrie, T., Logan, T., & Hegarty, M. (2019). *The influence of spatial visualization training on students' spatial reasoning and mathematics performance*. *Journal of Cognition and Development*, 20(5), 729–751. <https://doi.org/10.1080/15248372.2019.1653298>
- Margolinas, C. (2003). *Η σημασία του σωστού και του λάθους στην τάξη των Μαθηματικών*. Σαββάλας.
- Markopoulos, C., & Potari, D. (1999). *Forming relationships in three dimensional geometry through dynamic environments*. *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 273–280. <https://researchportal.scu.edu.au/esploro/outputs/conferenceProceeding/Forming-relationships-in-three-dimensional-geometry/991012821662002368#file-0>
- Marsden, J. (2020). *Διανυσματικός λογισμός*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
- National Research Council. 2001. *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington, DC: The National Academies Press. <https://doi.org/10.17226/9822>.
- New Zealand Ministry of Education. (2007). *The New Zealand curriculum*. Learning Media Limited.
- Papadam, M., & Agaliotis, I. (2021). *An investigation of geometric knowledge in pupils with mild educational needs*. *Psychology: The Journal of the Hellenic Psychological Society*, 26(1), 135–151. [https://doi.org/10.12681/psy\\_hps.26234](https://doi.org/10.12681/psy_hps.26234)

- Pfannkuch, M. (2005). *Thinking tools and variation*. *Statistics Education Research Journal*, 4, 83-91.
- Piaget, Jean & Inhelder, Barbel (1971). *Mental Imagery in the Child: A Study of the Development of Imaginal Representation*. *British Journal of Educational Studies* 19 (3):343-344.
- Pratt, Dave. (2005). *How do Teachers Foster Students' Understanding of Probability?*. 10.1007/0-387-24530-8\_8.
- Sarama, Julie & Clements, Douglas. (2009). *Early Childhood Mathematics Education Research: Learning Trajectories for Young Children*. 10.4324/9780203883785.
- Serow, P., (2008). *Investigating a phase approach to using technology as a teaching tool*, Navigating currents and charting directions
- Sfard, Anna. (2008). *Thinking as Communicating: Human Development, the Growth of Discourses, and Mathematizing*. 1-326. 10.1017/CBO9780511499944.
- Sinclair, Nathalie & Pimm, David & Higginson, William. (2007). *Mathematics and the Aesthetic: New Approaches to an Ancient Affinity*. 10.1007/978-0-387-38145-9. Huff Darrel: How to lie with statistics, Penguin (1991)
- Sirotic, Natasa & Zazkis, Rina. (2007). *Irrational Numbers: The Gap between Formal and Intuitive Knowledge*. *Educational Studies in Mathematics*. 65. 49-76. 10.1007/s10649-006-9041-5.
- Tversky, A., & Kahneman, D. (1974). *Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases*. *Science* (New York, N.Y.), 185(4157), 1124–1131. <https://doi.org/10.1126/science.185.4157.1124>
- Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. Academic Press.
- Waerden, B. L. v. d., & Χριστιαννίδης, Γ. (2007). *Η αφύπνιση της επιστήμης: Αιγυπτιακά, Βαβυλωνιακά και Ελληνικά μαθηματικά* (3η έκδ.). Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.
- Walle, John & Karp, Karen & Bay-Williams, Jennifer. (2009). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally*.
- Watson, Anne & Jones, Keith & Pratt, Dave. (2013). *Key ideas in teaching mathematics: Research-based guidance for ages 9-19*.
- Watson, Jane. (2013). *Statistical Literacy at School: Growth and Goals*. 1-306. 10.4324/9780203053898.
- Δημητριάδου, Κ. (2016). *Προσαρμογή της διδασκαλίας στις εκπαιδευτικές προκλήσεις του 21ου αιώνα*. GUTENBERG.
- Ερμηνευτικές προσεγγίσεις στη διδακτική της Γεωμετρίας – Πρακτικά 4ου Πανελληνίου Συνεδρίου Γεωμετρίας* (2001), ΠΑΤΑΚΗ
- Καρέκος, Ι. Σ., Μπαλτάς, Χ. Α., & Καρέκου, Σ. Α. (2024). *Τα μαθηματικά πέραν των μαθηματικών*. 24 Γράμματα.
- Μάμωνα-Downs, Γ., & Παπαδόπουλος, Ι. (2019). *Επίλυση προβλήματος στα μαθηματικά*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
- Μαυρικάκη, Ε. Θ., Κρόκου, Ζ., Δουκάκης, Σ., Πήλιουρας, Π., Κουλουμπαρίτση, Α. Χ., Μουταβέλης, Α., Βάλλας, Γ., & Ζυμπίδης, Δ. (2018). *Αξιολογώ και Μαθαίνω*. Εκδόσεις Γρογόρη.
- Πόταρη, Δ., Ζωιτσάκος, Σ., Καμπούκος, Κ., Κόσυβας, Γ., Λουλάκης, Μ., Μεταξάς, Ν., & Τριανταφύλλου, Χ. (2022). *Οδηγός εκπαιδευτικού Μαθηματικών Γυμνασίου* (2η Έκδοση). Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής.
- Σάλτας, Β. (2008). *Σύγχρονη διδασκαλία των μαθηματικών*. Επίκεντρο.
- Σπανδάγος, Ε. Κ. (2010). *Τα μαθηματικά των αρχαίων Ελλήνων*. Αίθρα.
- Τζεκάκη, Μ., Σταγιόπουλος, Π., & Μπαλαρός, Γ. (2011). *Προσαρμογές αναλυτικών προγραμμάτων για τα μαθηματικά στο Γυμνάσιο: Σχέδια διδασκαλίας για μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες*.
- Τριανταφυλλίδης, Α. Τ., & Σδρόλιας, Α. Κ. (2007). *Βασικές μαθηματικές έννοιες για τον εκπαιδευτικό της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης*. Τυπωθήτω / Δαρδανός.
- Χαλκός Ε. Γ. (2020), *Στατιστική, Θεωρία και Πράξη*, Δίσιγμα.
- Χριστιαννίδης, Γ. (2003). *Θέματα από την ιστορία των μαθηματικών*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.



$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

