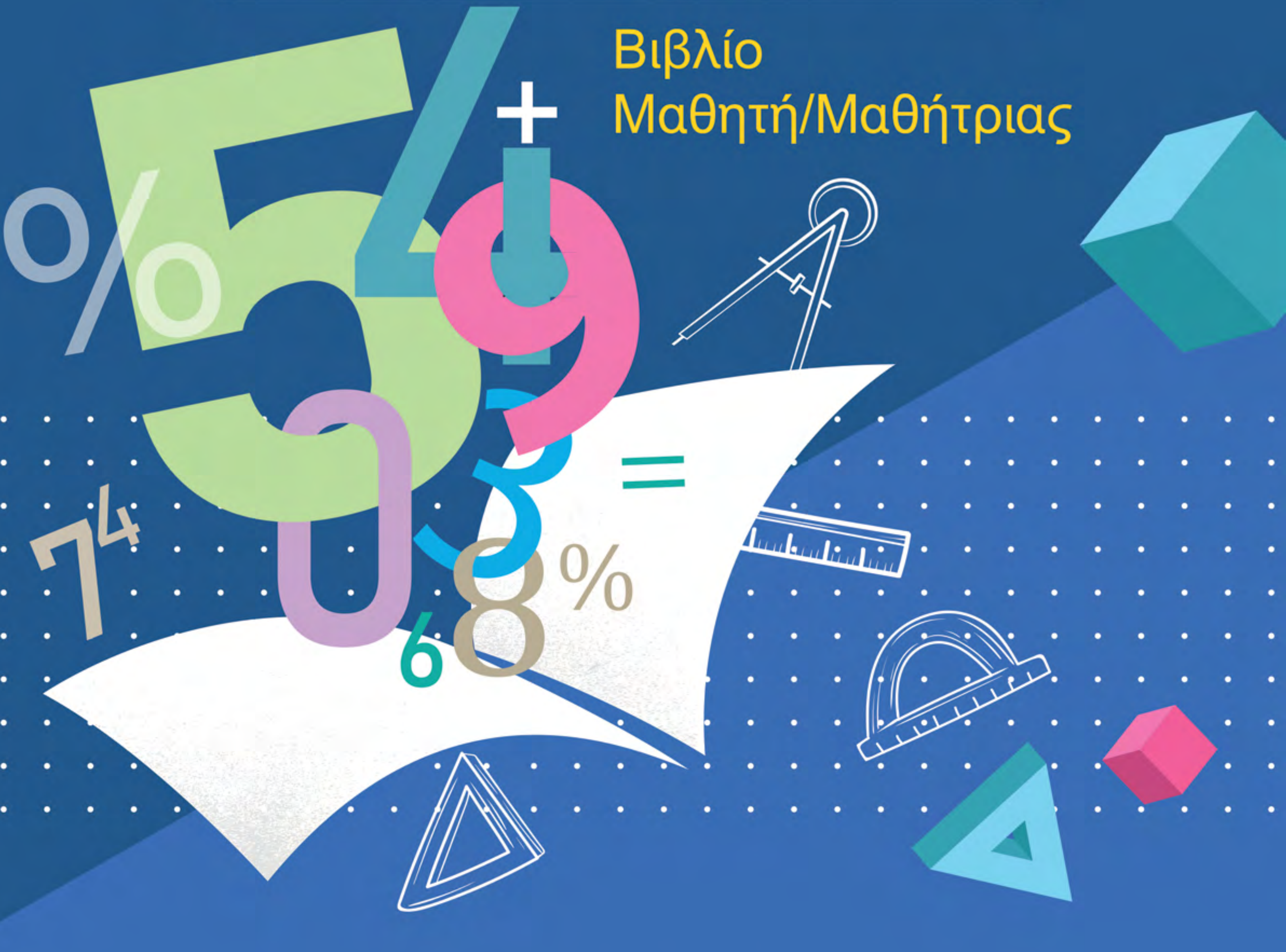
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Αυγερινός Ευγένιος | Ζώρζος Μιχαήλ | Κιουλάφας Εμμανουήλ
Κυλάφης Παναγιώτης | Μπαραλός Γεώργιος | Μπούτσκου Λεμονιά
Παναούρα Αρετή | Τριανταφύλλου Ανδρέας | Χαντόγλου Παναγιώτης

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΤ΄ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Βιβλίο
Μαθητή/Μαθήτριας



ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΤ΄ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Βιβλίο Μαθητή/Μαθήτριας

Επιστημονική Επιτροπή Αξιολόγησης

Συντονίστρια	**Σκουμπουρδή Χρυσάνθη** Εν ενεργεία μέλος Διδακτικού Ερευνητικού Προσωπικού Πανεπιστημίου
Αξιολογήτρια	**Σακελλαροπούλου Ευδοξία** Εν ενεργεία Εκπαιδευτικός
Αξιολογητής	**Δελέγκος Νικόλαος** Εν ενεργεία Εκπαιδευτικός
Τεχνικός Εμπειρογνώμονας	**Δανιηλίδης Κωνσταντίνος** Πτυχιούχος Πληροφορικής
Επικουρικός Εμπειρογνώμονας	**Τσόλκας Ιωάννης** Πτυχιούχος γραφιστικής
Υπεύθυνος του μαθήματος/γνωστικού αντικειμένου στο πλαίσιο της Πράξης	**Δημήτριος Ζυμπίδης, Σύμβουλος Α΄ ΙΕΠ και Μέλος του Δ.Σ. του ΙΕΠ** Μέλος της Επιστημονικής Ομάδας Έργου (ΕΟΕ) της Πράξης

Πράξη με τίτλο: «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ 6010165 στο Πρόγραμμα «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή» 2021-2027

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ
Σπυρίδων Δουκάκης
Πρόεδρος του Δ.Σ. του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Υπεύθυνη Πράξης
Πολυξένη Μπίλλα
Σύμβουλος Α΄ του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής
Προϊσταμένη Τμήματος Β΄ Προγραμμάτων Σπουδών και Εκπαιδευτικού Υλικού

Αναπληρώτρια Υπεύθυνη Πράξης
Άννα-Αικατερίνη Λυκούρη
Σύμβουλος Α΄ του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

«Με τη συγχρηματοδότηση της Ευρωπαϊκής Ένωσης»
και το Πρόγραμμα «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή»

Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας, Θρησκευμάτων και Αθλητισμού
ΙΕΠ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2021-2027
Πρόγραμμα Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Αυγερινός Ευγένιος
Ζώρζος Μιχαήλ
Κιουλάφας Εμμανουήλ
Κυλάφης Παναγιώτης
Μπαραλός Γεώργιος
Μπούτσκου Λεμονιά
Παναούρα Αρετή
Τριανταφύλλου Ανδρέας
Χαντόγλου Παναγιώτης

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΤ΄ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Βιβλίο Μαθητή/Μαθήτριας

εκδόσεις πουκαμισάς

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΥΓΓΡΑΦΗΣ

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ	**Αυγερινός Ευγένιος** *Καθηγητής Μαθηματικών και Διδακτικής Μαθηματικών Πανεπιστημίου Αιγαίου* **Ζώρζος Μιχαήλ** *Εκπαιδευτικός ΠΕ03, MEd, PhD Μαθηματικής Παιδείας* **Κιουλάφας Εμμανουήλ** *Εκπαιδευτικός ΠΕ03, MEd, PhD Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών* **Κυλάφης Παναγιώτης** *Εκπαιδευτικός ΠΕ70, MEd* **Μπαραλός Γεώργιος** *Επ. Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών, MSc, MEd, PhD* **Μπούτσκου Λεμονιά** *Σύμβουλος Εκπαίδευσης ΠΕ03 Μαθηματικών, MSc, MEd, PhD Εκπαίδευση Ενηλίκων* **Παναούρα Αρετή** *Καθηγήτρια Μαθηματικής Παιδείας Πανεπιστημίου Frederick Κύπρου* **Τριανταφύλλου Ανδρέας** *Εκπαιδευτικός ΠΕ03, PhD στην Πληροφορική* **Χαντόγλου Παναγιώτης** *Εκπαιδευτικός ΠΕ03, MEd*
ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ	**Ζώρζος Μιχαήλ**
ΣΕΛΙΔΟΠΟΙΗΣΗ	**Δημιουργικό Τμήμα Εκδόσεων Πουκαμισάς**
ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΕΞΩΦΥΛΛΟΥ	**Δημιουργικό Τμήμα Εκδόσεων Πουκαμισάς**
ΤΥΠΟΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ	**Τμήμα επιμέλειας Εκδόσεων Πουκαμισάς**

Περιεχόμενα

Ταυτότητα βιβλίου

Τα βιβλία μαθηματικών για την έκτη τάξη του δημοτικού σχολείου στοχεύουν στην ενεργοποίηση της επιθυμίας για μάθηση των μαθητών/τριών, προσφέροντάς τους ένα πλούσιο και πολυδιάστατο μαθηματικό περιβάλλον. Η βασική τους φιλοδοξία είναι να ενισχύσουν την κατανόηση των μαθηματικών αρχών και να ετοιμάσουν τους μαθητές/τριες για ανώτερα επίπεδα μαθηματικών προκλήσεων. Η παιδαγωγική φιλοσοφία που διέπει τα βιβλία επιδιώκει να καταστήσει τα μαθηματικά μια συναρπαστική και προσιτή εμπειρία, μετατρέποντας το κάθε μάθημα σε ένα ταξίδι ανακάλυψης. Η ανακαλυπτική μάθηση, ως θεμέλιο της διδασκαλίας, καλλιεργεί μια κουλτούρα ερωτήσεων και αναζήτησης, ώστε οι μαθητές/τριες να μην περιορίζονται στην απομνημόνευση, αλλά να αναπτύξουν την ικανότητα να σκέφτονται κριτικά, να εξερευνούν διεξοδικά, να εφαρμόζουν τις γνώσεις τους σε πραγματικά και υποθετικά προβλήματα και να αναγνωρίζουν τη σημασία των μαθηματικών στον κόσμο γύρω τους. Όλα αυτά σε μια γλώσσα κατανοητή και προσιτή στους μαθητές.

Ενθαρρύνουν τη συνεργασία και την αλληλεπίδραση μεταξύ των μαθητών/τριών, δημιουργώντας ένα περιβάλλον, όπου μπορούν να μοιράζονται ιδέες, να ερευνούν στρατηγικές λύσεων και να καταλήγουν σε συλλογικά συμπεράσματα, αναπτύσσοντας σημαντικές κοινωνικές δεξιότητες. Η ανταλλαγή απόψεων και η συζήτηση ενισχύουν την ικανότητα ανάλυσης και κριτικής σκέψης, σημαντικές δεξιότητες που είναι απαραίτητες στον σύγχρονο κόσμο.

Η ύλη παρουσιάζεται με εποπτικό υλικό, χειραπτικά εργαλεία, διαγράμματα, εικόνες και πίνακες, προσφέροντας οπτικά βοηθήματα που ενισχύουν την κατανόηση των μαθητών. Η συνδυασμένη χρήση κειμένου και εικόνων συντελεί στην ολοκληρωμένη παρουσίαση των μαθηματικών εννοιών. Η ενσωμάτωση της τεχνολογίας, όπως οι εκπαιδευτικές εφαρμογές και τα διαδραστικά παιχνίδια, προσφέρει στους μαθητές/τριες μια διασκεδαστική και παράλληλα εκπαιδευτική προσέγγιση στα μαθηματικά. Επιτρέπει την προσαρμογή του μαθήματος στις ατομικές ανάγκες και τα ενδιαφέροντα των μαθητών/τριών, καθιστώντας την παροχή προσωποποιημένης εκπαίδευσης εφικτή. Τα προγράμματα και τα λογισμικά που χρησιμοποιούνται είναι σχεδιασμένα να παρέχουν συνεχή ανατροφοδότηση και να ενθαρρύνουν την αυτο-αξιολόγηση, βοηθώντας τους μαθητές να αναγνωρίζουν την πρόοδό τους και να εντοπίζουν τομείς για βελτίωση.

Η δομή των βιβλίων μαθηματικών είναι προσεκτικά σχεδιασμένη με στόχο την ολοκληρωμένη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών. Το βιβλίο είναι χωρισμένο σε επτά θεματικές ενότητες και κάθε ενότητα χωρίζεται σε κεφάλαια. Κάθε κεφάλαιο ανοίγει με μια εισαγωγική δραστηριότητα που επιδιώκει να κάνει τις έννοιες προσιτές, συνδέοντάς τες με την καθημερινότητα των μαθητών/τριών και να προκαλεί το ενδιαφέρον τους. Οι εισαγωγικές δραστηριότητες σχεδιάστηκαν ώστε να τους εμπλέκουν στη διερεύνηση της υπό εξέταση έννοιας και να αποκομίζουν μια θετική πρώτη εμπειρία, πριν εμπλακούν βαθύτερα στη μαθησιακή διαδικασία. Ακολουθούν δραστηριότητες και ασκήσεις που σταδιακά γίνονται πιο σύνθετες και πολυεπίπεδες απαιτώντας από τους μαθητές/τριες να ενσωματώσουν διαφορετικές δεξιότητες και να εξελίξουν την ικανότητά τους να συνδυάζουν μαθηματικές έννοιες με άλλα ακαδημαϊκά αντικείμενα και τον πραγματικό κόσμο. Αυτό θα τους βοηθήσει να αξιοποιούν τα μαθηματικά ως ένα ισχυρό εργαλείο για την ερμηνεία του κόσμου γύρω τους και τη λήψη ενημερωμένων αποφάσεων. Η διαβαθμισμένη δυσκολία αυτών των ασκήσεων και δραστηριοτήτων συμβάλλει στην αποτελεσματική κατανόηση και εφαρμογή των μαθηματικών από όλους τους μαθητές. Οι οπτικές απεικονίσεις και οι γραφικές παρουσιάσεις βοηθούν στη δημιουργία ενός περιβάλλοντος, όπου οι μαθηματικές έννοιες γίνονται πιο συγκεκριμένες και κατανοητές, αφήνοντας ταυτόχρονα χώρο για τη φαντασία και τη δημιουργική σκέψη. Στο τέλος κάθε κεφαλαίου υπάρχουν ερωτήσεις σωστού – λάθους που ωθούν τους μαθητές/τριες να αναστοχαστούν και να εμβαθύνουν στις νέες έννοιες του κεφαλαίου.

Τα επαναληπτικά κεφάλαια σε κάθε ενότητα αποτελούν έναν ουσιαστικό πυλώνα στη διαδικασία μάθησης, καθώς παρέχουν στους μαθητές τον χώρο και τα εργαλεία για να αναλογιστούν και να εμβαθύνουν στην κατανόηση των μαθηματικών θεμάτων. Δεν υποστηρίζουν μόνο την επανάληψη και την ενίσχυση της γνώσης, αλλά επιτρέπουν και την αξιολόγηση της προσωπικής προόδου, βοηθώντας τους να αναγνωρίσουν τα δυνατά και τα αδύνατα σημεία τους και να καταστρώσουν στρατηγικές βελτίωσης.

Σε έναν κόσμο που διαρκώς μεταβάλλεται, τα εκπαιδευτικά προγράμματα, και ιδιαίτερα τα μαθηματικά βιβλία της έκτης δημοτικού, είναι ευέλικτα και ενσωματώνουν τις τελευταίες παιδαγωγικές και τεχνολογικές καινοτομίες. Αυτό συμβάλλει στη δημιουργία ενός διαδραστικού μαθήματος, που προκαλεί τους μαθητές/τριες να συνδέσουν τα μαθηματικά με την πραγματική ζωή και να αναπτύξουν τις δεξιότητες ανάλυσης και λογικής σκέψης που απαιτούνται για την επιτυχία στη σύγχρονη κοινωνία.

Οδηγίες για τον/την εκπαιδευτικό

Ψηφιακά αντικείμενα

Περιεχόμενα

Τι θα βρείτε σε κάθε κεφάλαιο

Αύξων αριθμός κεφαλαίου

Πρώτη εισαγωγική δραστηριότητα που αποσκοπεί στην εισαγωγή της καινούργιας έννοιας.

Το εικονίδιο δηλώνει την ενεργή συμμετοχή όλων των μαθητών σε συζήτηση στην τάξη.

Οι κεντρικοί ήρωες υπάρχουν για να δηλώσουν ή να επισημάνουν στοιχεία της δραστηριότητας στα οποία οι μαθητές μπορούν να στηριχτούν.

Στα σημεία όπου υπάρχουν γραμμές απαιτείται η ενεργή συμμετοχή του μαθητή για την ολοκλήρωση μιας σκέψης ή την απάντηση σε μια ερώτηση.

Τα σχήματα αποτελούν αναπαραστάσεις και υποδείξεις στρατηγικών για την κατανόηση της έννοιας που διαπραγματευόμαστε.

Επιπλέον εισαγωγικές δραστηριότητες βοηθούν στην κάλυψη των επιδιωκόμενων μαθησιακών στόχων με διαφορετική κάθε φορά προσέγγιση.

Οι τίτλοι που υπάρχουν κάποιες φορές κάτω από τις δραστηριότητες δηλώνουν τον επιδιωκόμενο στόχο της δραστηριότητας.

Μέσα στα πλαίσια ορίζουμε τις σημαντικές έννοιες και τους όρους του κεφαλαίου που έχουν να κάνουν με τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα.

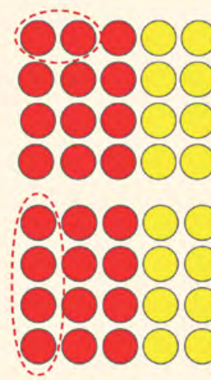
3. Ισοδύναμα κλάσματα

Δραστηριότητες

1 **Ο Νεκτάριος έχει στη συλλογή του 20 μαγνητικούς βόλους. Από αυτούς οι 12 έχουν κόκκινο χρώμα και οι 8 κίτρινο χρώμα.**

Οι κόκκινοι βόλοι είναι τα $\frac{3}{5}$ της συλλογής σου.

Οι κόκκινοι βόλοι είναι τα $\frac{12}{20}$ της συλλογής μου.



Μπορεί να έχουν και τα δύο παιδιά δίκιο;

- Τι μέρος της συλλογής του Νεκτάριου είναι οι κόκκινοι βόλοι; ____________
- Αν χωρίσουμε τους βόλους σε δυάδες βόλων, πόσες ομάδες θα φτιάξουμε; ____________
- Τι μέρος της συλλογής είναι τώρα οι κόκκινοι βόλοι; ____________
- Αν χωρίσουμε τους βόλους σε ομάδες των 4 βόλων, πόσες ομάδες μπορούμε να φτιάξουμε; ____________
- Τι μέρος της συλλογής είναι οι κόκκινοι βόλοι; ____________
- Με πόσους τρόπους μπορούμε να εκφράσουμε τους κόκκινους βόλους ως μέρος της συλλογής;
- Συμπληρώνω: $\frac{...}{...} = \frac{...}{...} = \frac{...}{...}$

✓ Δύο κλάσματα λέγονται ισοδύναμα ή ίσα όταν εκφράζουν το ίδιο μέρος του όλου.

2 **Πώς δημιουργούμε ισοδύναμα κλάσματα;**

Οι κίτρινοι σελιδοδείκτες είναι τα $\frac{2}{8}$ των σελιδοδεικτών της Κικής.

$\frac{2 \times 2}{8 \times 2} = \frac{4}{16}$

✓ Αν πολλαπλασιάσουμε τους όρους ενός κλάσματος με τον ίδιο φυσικό αριθμό, παίρνουμε κλάσμα ισοδύναμο με το αρχικό κλάσμα.

$\frac{2:2}{8:2} = \frac{1}{4}$

✓ Αν διαιρέσουμε τους όρους ενός κλάσματος με έναν κοινό διαιρέτη τους, προκύπτει ισοδύναμο κλάσμα. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι κάνουμε **απλοποίηση** του κλάσματος.

✓ Η διαίρεση των όρων ενός κλάσματος με το Μ.Κ.Δ. των όρων του δίνει ένα κλάσμα που δεν απλοποιείται περαιτέρω και λέγεται **ανάγωγο**. Στο ανάγωγο κλάσμα ο Μ.Κ.Δ. των όρων του είναι η μονάδα (το 1).

Το κλάσμα $\frac{5}{6}$ είναι ανάγωγο. Είναι Μ.Κ.Δ. (5 , 6) = 1

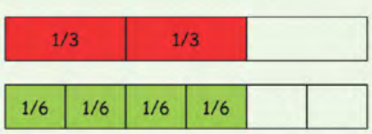
3 **Πώς ελέγχουμε αν δύο κλάσματα είναι ισοδύναμα;**

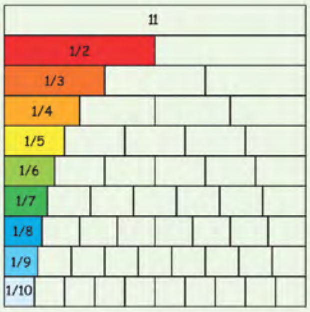
Αν πολλαπλασιάσουμε «χιαστί» τους όρους δύο ισοδύναμων κλασμάτων, τα γινόμενα που προκύπτουν είναι ίσα μεταξύ τους. Για παράδειγμα, $\frac{2}{3}=\frac{6}{9}$, γιατί $2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$.

Ισοδύναμα κλάσματα

Εφαρμογές

1 **Παρατηρώντας προσεκτικά το σχήμα και χρησιμοποιώντας, αν θέλω, τον χάρακά μου βρίσκω ισοδύναμα κλάσματα. Για παράδειγμα,** $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$





____

2 **Τα παιδιά πήραν ως δώρο από τον παππού τους το ίδιο χρηματικό ποσό. Στον πίνακα φαίνεται τι μέρος των χρημάτων τους ξόδεψε ο καθένας. Δύο από αυτούς ξόδεψαν το ίδιο ποσό.**

Νίκος	Μαρία	Ελευθερία	Γιώργος
$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{10}$

Το εικονίδιο προτρέπει τους μαθητές να συνεργαστούν με τον/τη διπλανό/ή τους ή να συμμετάσχουν σε ομάδα περισσοτέρων μαθητών στην οποία ανήκουν.

Ποιοι είναι;
Εξηγώ: ______________________________________

Ερωτήσεις Σ - Λ		
Ένα κλάσμα με όρους 5 και 7 δεν είναι ανάγωγο.	Σ	Λ
Τα ισοδύναμα κλάσματα αντιστοιχούν στο ίδιο σημείο της αριθμογραμμής.	Σ	Λ

Στην αρχή κάθε ενότητας επισυνάπτεται μια σελίδα με τα περιεχόμενα κεφάλαια στην ενότητα.

Ενότητα 1

ΑΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ

1. **Αριθμοί μεγαλύτεροι από το 1.000.000 (Αρ.Φ.6.1, Αρ.Φ.6.2, Αρ.Φ.6.3, Αρ.Φ.6.4)**
2. **Σύγκριση, διάταξη και στρογγυλοποίηση αριθμών (Αρ.Φ.6.5, Αρ.Φ.6.9)**
3. **Οι πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης (Αρ.Φ.6.6)**
4. **Πολλαπλασιασμός φυσικών αριθμών - Δυνάμεις (Αρ.Φ.6.7 α, Αρ.Φ.6.7 β)**
5. **Η πράξη της διαίρεσης (Αρ.Φ.6.7 γ)**
6. **Προτεραιότητα των πράξεων - Αριθμητικές παραστάσεις (Αλ.Π.6.4, Αλ.Π.6.3, Αλ.Π.6.5)**
7. **Διατυπώνω και Επιλύω Προβλήματα (Αρ.Φ.6.8)**
8. **Διαιρέτες φυσικού αριθμού Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης αριθμών (Αρ.Φ.6.10α)**
9. **Πολλαπλάσια φυσικού αριθμού Ε. Κ.Π. φυσικών αριθμών (Αρ.Φ.6.10β)**
10. **Πρώτοι και σύνθετοι αριθμοί (Αρ.Φ.6.11)**
11. **Ανάλυση φυσικού αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων (Αρ.Φ.6.12)**

Αριθμοί/Φυσικοί αριθμοί και πράξεις

Θα μάθω να:

- Απαγγέλω, διαβάζω, γράφω, αναγνωρίζω και συγκρίνω αριθμούς μεγαλύτερους από το 1.000.000 και τους τοποθετώ στην αριθμογραμμή.
- Διερευνώ τις ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού.
- Γράφω, διαβάζω και υπολογίζω δυνάμεις.
- Κατανοώ την ισότητα της ευκλείδειας διαίρεσης.
- Υπολογίζω την τιμή μιας αριθμητικής παράστασης ακολουθώντας την προτεραιότητα των πράξεων.
- Εφαρμόζω στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων.
- Βρίσκω τον Μέγιστο Κοινό Διαιρέτη και το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών.
- Ελέγχω αν ένας αριθμός είναι πρώτος ή σύνθετος.
- Αναλύω και εκφράζω έναν αριθμό ως γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Με μορφή λίστας αναγράφονται τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα (ΠΜΑ) κάθε κεφαλαίου της ενότητας.

Λέξεις κλειδιά

Αριθμοί πάνω από 1.000.000	Ιδιότητες πράξεων
Προτεραιότητα πράξεων	Ευκλείδεια διαίρεση
Μ.Κ.Δ	Πρώτοι αριθμοί
Ε.Κ.Π.	Ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων
Δυνάμεις	Λύνω προβλήματα χρησιμοποιώντας στρατηγικές

15

Οι λέξεις κλειδιά παραπέμπουν σε έννοιες που θα γνωρίσουν οι μαθητές στην ενότητα.

Στο τέλος κάθε ενότητας υπάρχει ένα σύντομο επαναληπτικό κριτήριο που ελέγχει την πρόσκτηση γνώσεων και δεξιοτήτων που διδάχτηκαν στην ενότητα.

Ενότητα 1 **Επαναληπτικό**

1 **Ποιος είναι ο αριθμός που θα προκύψει, αν προσθέσουμε τον μικρότερο και τον μεγαλύτερο περιττό πενταψήφιο αριθμό;**

____

____

Είναι άρτιος ή περιττός; ____________________________

Από πόσα ψηφία αποτελείται; ____________________________

2 **Αναλύω τους παρακάτω αριθμούς σε γινόμενο πρώτων παραγόντων με δενδρόγραμμα.**

36 54 150

3 **Γράφω τα γινόμενα ως δυνάμεις:**

α. 7•7•7•7=________ **β.** 100•100•100= _______ **γ.** 2•2•2•2•2•2•2•2= ________

4 **Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς δεν μπορεί να είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός άγνωστου ακέραιου αριθμού με τον αριθμό 18;**

α. 17 **β.** 6 **γ.** 19 **δ.** 0

Δικαιολογώ την απάντησή μου:

____

____

- Συμπλήρωσε τον πίνακα αυτοαξιολόγησης, με οριζόντια σειρά, στα κεφάλαια που αναφέρονται στο επαναληπτικό της ενότητας.
- Μετά τη συμπλήρωση κράτησε σημειώσεις για να συζητήσεις για «όσα έμαθες» και για «αυτά που θα ήθελες να μάθεις περισσότερο».

Πίνακας Αυτοαξιολόγησης

1. Υπενθύμιση εννοιών της αριθμητικής

1 **Βρίσκω την αξία του αριθμού με διαφορετικούς τρόπους:**

ΧΙΛΙΑΔΕΣ			ΜΟΝΑΔΕΣ		
ΕΧ	ΔΧ	ΜΧ	Ε	Δ	Μ
8	3	2	0	6	3

Με λέξεις: ______________________

Με ψηφία: ______________________

Με αναπτυγμένη μορφή: ______________________

2 **Βρίσκω τα ψηφία που λείπουν στις παρακάτω πράξεις.**

```
  5□4.658
+   42.□4□
----------
 □5□.9□1
```

```
  41□.□17
–  25.8□2
----------
 □84.71□
```

```
     5□3
  x   32
--------
    1□86
+ 1629
--------
   1□276
```

```
9.678□ | 
–5     | 1.9□5
 46
–4□
  1□
 –15
   28
  –□5
   03
```

Αριθμοί και Πράξεις

3 **Στον αριθμό 326,451 αναγνωρίζω την αξία κάθε ψηφίου.**

Μονάδες _______ Δέκατα _______ Δεκάδες _______

Εκατοστά _______ Χιλιοστά _______ Εκατοντάδες _______

4 **Αν ένας αριθμός διαιρείται με το 10, με ποιους άλλους μονοψήφιους αριθμούς μπορούμε να πούμε ότι σίγουρα διαιρείται;**

____

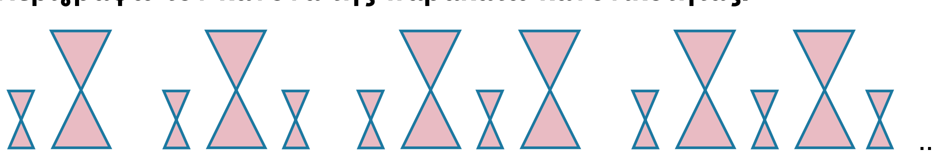
5 **Βάζω στη σειρά τα κλάσματα $\frac{3}{5}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{3}$, από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο.**

____

6 **Στον πίνακα φαίνονται οι ταχύτητες εκτύπωσης τριών διαφορετικών μοντέλων εκτυπωτών. Ποιος από τους τρεις είναι ο πιο γρήγορος;**

Εκτυπωτές	Αριθμός σελίδων	Χρόνος σε λεπτά
Α	120	3
Β	120	4
Γ	180	4

7 **Περιγράφω τον κανόνα της παρακάτω κανονικότητας.**

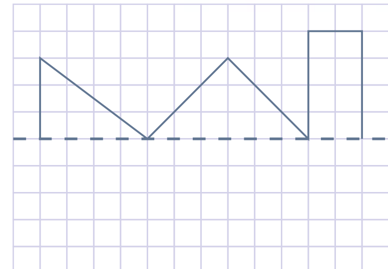


1ος όρος 2ος όρος 3ος όρος 4ος όρος ...

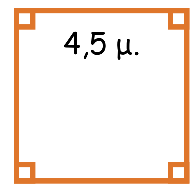
Αν επεκτείνω την κανονικότητα: Πόσες κλεψύδρες θα έχει ο 10ος όρος; ______________

2. Υπενθύμιση εννοιών της γεωμετρίας

1 **Σχεδιάζω το συμμετρικό του σχήματος ως προς τη διακεκομμένη γραμμή.**

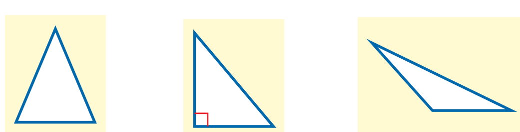


2 **Βρίσκω την περίμετρο του τετράγωνου που έχει πλευρά διπλάσια από την πλευρά του διπλανού τετράγωνου.**



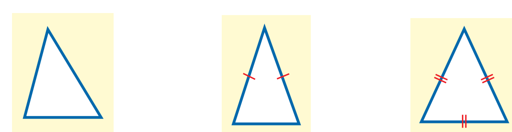
3 **Ονομάζω τα τρίγωνα με κριτήριο:**

α. το είδος των γωνιών



______ ______ ______

β. το είδος των πλευρών



______ ______ ______

4 **Συμπληρώνω τα κενά:**

α. 3 τ.μ. = ______ τ.εκ. **β.** 5 τ.εκ. = ______ τ.χιλ. **γ.** 9.000 τ.δεκ. = ______ τ.μ.

δ. 7 κ.μ. = ______ κ.εκ. **ε.** 10.000 κ. δεκ. = ______ κ.μ. **στ.** 1 λίτρο = ______ κ.δεκ.

5 **Σύμφωνα με το εικονόγραμμα πόσα αυτοκίνητα πούλησε η αντιπροσωπεία:**

α. τον μήνα:

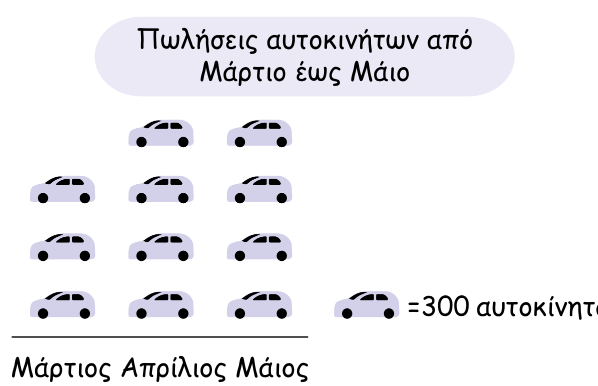
Μάρτιο; ______

Απρίλιο; ______

Μάιο; ______

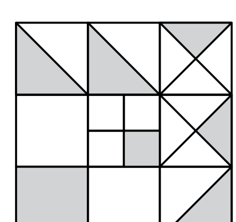
β. συνολικά το τρίμηνο Μαρτίου - Μαΐου;

______



6 **Αν το μεγάλο τετράγωνο έχει μήκος πλευράς 3 εκ. και αποτελείται από ίσα τετράγωνα, πόσο είναι το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων περιοχών;**

______



Ενότητα 1

ΑΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ

1. **Αριθμοί μεγαλύτεροι από το 1.000.000 (Αρ.Φ.6.1, Αρ.Φ.6.2, Αρ.Φ.6.3, Αρ.Φ.6.4)**
2. **Σύγκριση, διάταξη και στρογγυλοποίηση αριθμών (Αρ.Φ.6.5, Αρ.Φ.6.9)**
3. **Οι πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης (Αρ.Φ.6.6)**
4. **Πολλαπλασιασμός φυσικών αριθμών - Δυνάμεις (Αρ.Φ.6.7 α, Αρ.Φ.6.7 β)**
5. **Η πράξη της διαίρεσης (Αρ.Φ.6.7 γ)**
6. **Προτεραιότητα των πράξεων - Αριθμητικές παραστάσεις (Αλ.Π.6.4, Αλ.Π.6.3, Αλ.Π.6.5)**
7. **Διατυπώνω και Επιλύω Προβλήματα (Αρ.Φ.6.8)**
8. **Διαιρέτες φυσικού αριθμού Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης αριθμών (Αρ.Φ.6.10α)**
9. **Πολλαπλάσια φυσικού αριθμού Ε. Κ.Π. φυσικών αριθμών (Αρ.Φ.6.10β)**
10. **Πρώτοι και σύνθετοι αριθμοί (Αρ.Φ.6.11)**
11. **Ανάλυση φυσικού αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων (Αρ.Φ.6.12)**

Αριθμοί/Φυσικοί αριθμοί και πράξεις

Θα μάθω να:

- ► Απαγγέλω, διαβάζω, γράφω, αναγνωρίζω και συγκρίνω αριθμούς μεγαλύτερους από το 1.000.000 και τους τοποθετώ στην αριθμογραμμή.
- ► Διερευνώ τις ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού.
- ► Γράφω, διαβάζω και υπολογίζω δυνάμεις.
- ► Κατανοώ την ισότητα της ευκλείδειας διαίρεσης.
- ► Υπολογίζω την τιμή μιας αριθμητικής παράστασης ακολουθώντας την προτεραιότητα των πράξεων.
- ► Εφαρμόζω στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων.
- ► Βρίσκω τον Μέγιστο Κοινό Διαιρέτη και το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών.
- ► Ελέγχω αν ένας αριθμός είναι πρώτος ή σύνθετος.
- ► Αναλύω και εκφράζω έναν αριθμό ως γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Λέξεις κλειδιά

Αριθμοί πάνω από 1.000.000	Ιδιότητες πράξεων
Προτεραιότητα πράξεων	Ευκλείδεια διαίρεση
Μ.Κ.Δ	Πρώτοι αριθμοί
Ε.Κ.Π.	Ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων
Δυνάμεις	Λύνω προβλήματα χρησιμοποιώντας στρατηγικές

1. Αριθμοί μεγαλύτεροι από το 1.000.000

Δραστηριότητα

Α. Παρατηρώ την κανονικότητα 1, 10, 100, 1.000, 10.000, 100.000, ... και συμπληρώνω.

1
↓ · 10
10
↓ · 10
100
↓ · 10
1.000
↓ · 10
10.000
↓ · 10
______
↓ · ___
______
↓ · ___
______
↓ · ___
______
↓ · ___
______

Πόσο μεγαλύτερος είναι κάθε όρος της κανονικότητας από τον προηγούμενό του;

____

Ποια είναι κάθε φορά η αξία του ψηφίου 1 στους όρους της κανονικότητας;

____

Αν συνεχίσουμε την κανονικότητα, ποιοι θα είναι οι επόμενοι τέσσερις αριθμοί;

____________________, ____________________,

____________________, ____________________,

Β. Βάζω διαδοχικά τους παραπάνω αριθμούς που συμπλήρωσα στον γνωστό πίνακα θέσης, ξεκινώντας από το τελευταίο τους ψηφίο και τους διαβάζω.

ΔΙΣΕΚΑΤΟΜΜΥΡΙΑ			ΕΚΑΤΟΜΜΥΡΙΑ			ΧΙΛΙΑΔΕΣ			ΜΟΝΑΔΕΣ		
ΕΔ	ΔΔ	ΜΔ	ΕΕ	ΔΕ	ΜΕ	ΕΧ	ΔΧ	ΜΧ	Ε	Δ	Μ

Γράφω τους αριθμούς με λέξεις.

- ____
- ____
- ____
- ____

✓ Για να διαβάσουμε έναν πολυψήφιο αριθμό, τον χωρίζουμε από το τέλος προς την αρχή στα τριψήφια τμήματα των μονάδων, των χιλιάδων, των εκατομμυρίων, των δισεκατομμυρίων κτλ. Το πρώτο από αριστερά τμήμα του αριθμού μπορεί να έχει ένα ή δύο ή τρία ψηφία. Π.χ. ο 141260000 γράφεται 1.412.600.000.

✓ Το τριψήφιο τμήμα που όλα τα ψηφία του είναι μηδενικά, το παραλείπουμε στην απαγγελία του αριθμού. Π.χ. 1.412.600.000 ένα δισεκατομμύριο τετρακόσια δώδεκα εκατομμύρια εξακόσιες χιλιάδες.

✓ Η αξία κάθε ψηφίου εξαρτάται από τη θέση του στον αριθμό.

Αριθμοί μεγαλύτεροι
από το 1.000.000

Εφαρμογή

1

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται ο πληθυσμός κάποιων χωρών.

Χώρα	πληθυσμός	**Χώρα**	πληθυσμός
Κίνα	1412600000	**Γαλλία**	65684000
Ινδία	1372989959	**Γερμανία**	83695430
Πακιστάν	229489000	**Ρωσία**	145557500
Βραζιλία	213317639	**Ιταλία**	58906742

- **Υπογραμμίζω** τις χώρες που έχουν πληθυσμό πάνω από ένα δισεκατομμύριο.
- **Κυκλώνω** τις χώρες που έχουν πληθυσμό κάτω από 100.000.000.
- **Γράφω** με λέξεις τον πληθυσμό της Γαλλίας:

____

____

____

____

Ο Κώστας ανέλυσε τον πληθυσμό της Ινδίας ως εξής:
1 ΜΔ + 3 ΕΕ + 7ΔΕ + 2 ΜΕ + 9ΕΧ + 8ΔΧ + 9ΜΧ + 9Ε + 5Δ + 9Μ

- Αναλύω κι εγώ τους πληθυσμούς της Κίνας και της Ρωσίας με τον ίδιο τρόπο.

Κίνα: ____

Ρωσία: ____

- Γράφω το όνομα της χώρας με πληθυσμό:

2ΕΕ + 2ΔΕ + 9ΜΕ + 4ΕΧ + 8ΔΧ + 9ΜΧ ______________________________

2

Βρίσκω τον προηγούμενο και τον επόμενο των παρακάτω αριθμών.

	9.516.000	
	13.516.752	
	11.516.999	

	2.999.999	
	2.001.101	

Ερωτήσεις Σ - Λ

Στον αριθμό 2.345.987 το ψηφίο 2 εκφράζει δισεκατομμύρια.	Σ	Λ
Στον αριθμό 3.534.098 το ψηφίο των εκατομμυρίων έχει 100 φορές μεγαλύτερη αξία από το ψηφίο των δεκάδων χιλιάδων.	Σ	Λ

2. Σύγκριση, διάταξη και στρογγυλοποίηση φυσικών αριθμών

Δραστηριότητες

1 **Γράφω τους πλανήτες του ηλιακού μας συστήματος στη σειρά, σύμφωνα με την απόστασή τους από τον ήλιο. Ξεκινώ από τον πλησιέστερο στον ήλιο πλανήτη.**

Ουράνιο σώμα	Διάμετρος (σε χμ.)	Απόσταση από τον ήλιο (σε χμ.)
Αφροδίτη	12.100	107.500.000
Ουρανός	51.024	2.870.000.000
Γη	12.756	149.600.000
Ερμής	4.878	58.000.000
Άρης	6.380	227.800.000
Δίας	142.800	777.900.000
Κρόνος	120.660	1.472.000.000
Ποσειδώνας	50.950	4.486.000.000

Ερμής, ____________________________________

____

____

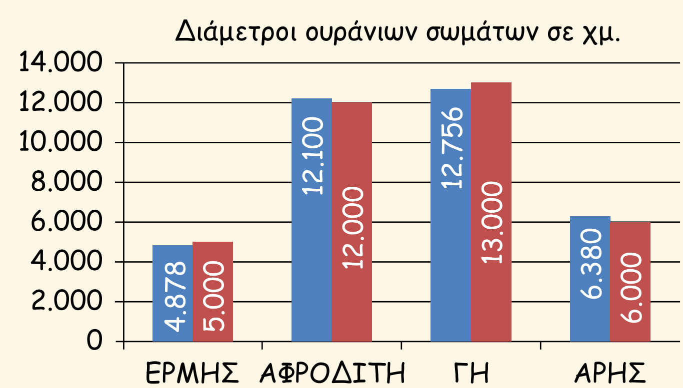
____

Διατάσσω τους αριθμούς που εκφράζουν τις αποστάσεις των πλανητών από τον ήλιο σε φθίνουσα σειρά:

____

- ✓ Από δύο φυσικούς αριθμούς μεγαλύτερος είναι εκείνος που έχει περισσότερα ψηφία.
- ✓ Αν δύο φυσικοί αριθμοί έχουν το ίδιο πλήθος ψηφίων, συγκρίνω τα ψηφία τους ένα προς ένα ξεκινώντας από το μεγαλύτερης αξίας θέσης ψηφίο. Αν τα ψηφία είναι ίσα, συγκρίνω τα ψηφία με την αμέσως μικρότερη αξία θέσης κ.ο.κ., μέχρι κάποιο από τα ψηφία να είναι μεγαλύτερο στον έναν αριθμό από τον άλλο. Μεγαλύτερος είναι ο αριθμός με το μεγαλύτερο ψηφίο.

2 **Το διπλανό διάγραμμα απεικονίζει τις διαμέτρους κάποιων από τους πλανήτες του παραπάνω πίνακα (μπλε στήλες) και τις διαμέτρους των ίδιων πλανητών στρογγυλοποιημένες (κόκκινες στήλες).**



Σε ποιο ψηφίο έχει γίνει η στρογγυλοποίηση των διαμέτρων των ουράνιων σωμάτων; Εξηγώ:

____

Η στρογγυλοποίηση ενός αριθμού σε ένα ψηφίο του κάποιες φορές δίνει μεγαλύτερο αριθμό και κάποιες φορές μικρότερο.

Συμφωνώ με τη διαπίστωση της μαθήτριας; ____________________________________

Πότε η στρογγυλοποίηση ενός αριθμού δίνει μικρότερο αριθμό και πότε μεγαλύτερο; Συζητάμε.

- ✓ Αν υπάρχει **0**, **1**, **2**, **3** ή **4** στα δεξιά του ψηφίου στρογγυλοποίησης, τότε το ψηφίο που γίνεται η στρογγυλοποίηση παραμένει το ίδιο και όλα τα ψηφία που είναι δεξιά του τα αντικαθιστούμε με μηδενικά· τα προηγούμενα ψηφία παραμένουν τα ίδια.
- ✓ Αν υπάρχει **5**, **6**, **7**, **8**, **9** στα δεξιά του ψηφίου στρογγυλοποίησης, τότε όλα τα ψηφία δεξιά του ψηφίου στρογγυλοποίησης τα αντικαθιστούμε με μηδενικά και αυξάνουμε κατά μία μονάδα το ψηφίο στρογγυλοποίησης, δηλαδή αυξάνουμε κατά μία μονάδα τον αριθμό, που σχηματίζουν όλα μαζί τα προηγούμενα ψηφία.

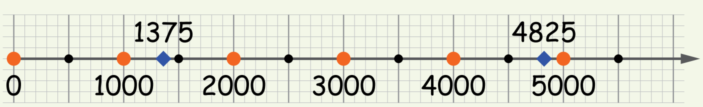
Στρογγυλοποίηση

Στρογγυλοποίηση Αριθμών II

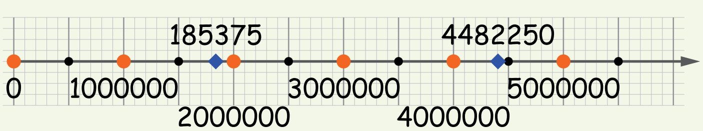
Εφαρμογές

1

Με τη βοήθεια της αριθμογραμμής:



- στρογγυλοποιώ τον αριθμό 1.375 στις μονάδες **χιλιάδες**. ______________
- στρογγυλοποιώ τον αριθμό 4.825 στις μονάδες **χιλιάδες**. ______________



- στρογγυλοποιώ τον αριθμό 1.850.375 στις μονάδες **εκατομμυρίων**. ______________
- στρογγυλοποιώ τον αριθμό 4.482.250 στις μονάδες **εκατομμυρίων**. ______________

2

Στρογγυλοποιώ τους αριθμούς.

Αριθμός	στη δεκάδα	στην εκατοντάδα	στη χιλιάδα
12.293.786			
10.355.324			
18.879.018			

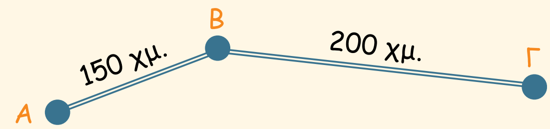
Ερωτήσεις Σ - Λ

Η στρογγυλοποίηση του αριθμού 1.999.999 στις δεκάδες δίνει μεγαλύτερο αριθμό από τον επόμενό του.	Σ	Λ
Η στρογγυλοποίηση ενός αριθμού δίνει πάντα μεγαλύτερο αριθμό.	Σ	Λ

3. Οι πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης

Δραστηριότητα

Α. Ένας υπάλληλος μιας βιοτεχνίας σχολικών ειδών που βρίσκεται στην πόλη Α επισκέφθηκε τον μήνα Αύγουστο διαδοχικά τις πόλεις Β και Γ, για να προωθήσει μια σειρά σχολικών ειδών με φιγούρες δεινοσαύρων.



Δείχνω με ένα άθροισμα την απόσταση που διάνυσε:

α. όταν πήγαινε: ______________

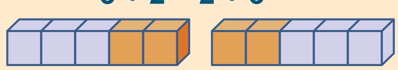
β. όταν επέστρεφε από την πόλη **Γ** στην πόλη **Α**: _______________

Συγκρίνω τα δύο αθροίσματα βάζοντας ανάμεσά τους το κατάλληλο σύμβολο (<, >, =):

__ + __ $\square$ __ + __

Το άθροισμα δύο προσθετέων δεν αλλάζει, αν αλλάξουμε τη σειρά τους.

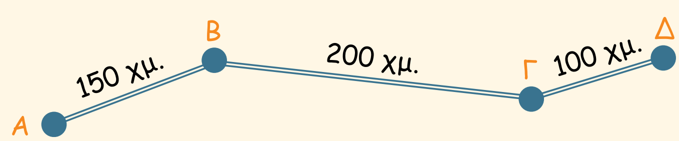
3 + 2 = 2 + 3



αντιμεταθετική ιδιότητα

Γενικά α + β = β + α

Β. Τους επόμενους μήνες, επισκέφθηκε ξανά δύο φορές τις πόλεις Β, Γ για να ελέγξει την πρόοδο των πωλήσεων, καθώς και την πόλη Δ, για να επεκτείνει τις πωλήσεις των προϊόντων της βιοτεχνίας.



Αντιστοιχίζω, αυτό που ταιριάζει καλύτερα, για να εκφράσω την απόσταση:

- που διάνυσε ταξιδεύοντας από την πόλη **Α** στην πόλη **Δ**, την πρώτη φορά, κάνοντας μια διανυκτέρευση στην πόλη **Β**.
- που διάνυσε ταξιδεύοντας από την πόλη **Α** στην πόλη **Δ**, τη δεύτερη φορά, κάνοντας μια διανυκτέρευση στην πόλη **Γ**.

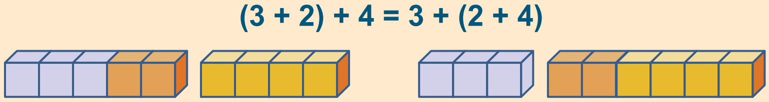
- **(150 + 200) + 100**
- **150 + (200 + 100)**

Συγκρίνω τα δύο αθροίσματα βάζοντας ανάμεσά τους το κατάλληλο σύμβολο (<, >, =):

(150 + 200) + 100 $\square$ 150 + (200 + 100)

Σε ένα άθροισμα τριών προσθετέων το αποτέλεσμα δεν αλλάζει, αν στο άθροισμα των δύο πρώτων προσθέσουμε τον τρίτο ή αν στον πρώτο προσθέσουμε το άθροισμα των δύο άλλων.

(3 + 2) + 4 = 3 + (2 + 4)



προσεταιριστική ιδιότητα

Γενικά (α + β) + γ = α + (β + γ)

Υπολογίζω το άθροισμα: 2.100 + 180 + 900 + 20 =

2.100 + 900 + 180 + 20 = __ + __ = __

Οι ιδιότητες της πρόσθεσης μας βοηθούν να υπολογίζουμε πιο γρήγορα αθροίσματα με πολλούς αριθμούς (προσθετέους).

Οι πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης

Εφαρμογές

1 **Τον περασμένο χρόνο η βιοτεχνία πούλησε 118.450 συσκευασίες που αποτελούνταν από ένα μολύβι, μια γόμα και μια ξύστρα. Πόσο πρέπει να αυξήσει τις πωλήσεις της, για να πετύχει τον φετινό της στόχο που είναι 150.000 ίδιες συσκευασίες;**

		Υπολογίζω	Επαληθεύω	Επαληθεύω
		150.000 (**Μ**)	150.000 (__)	118.450 (__)
118.450	;	– 118.450 (**Α**)	– ______(__)	+ ______(__)
150.000		______ (**Δ**)	118.450 (__)	150.000 (__)

Απαντώ: ______________________________

✓ Αν προσθέσουμε στον Αφαιρετέο τη **Δ**ιαφορά, βρίσκουμε τον **Μ**ειωτέο.

Α + Δ = Μ

✓ Αν από τον **Μ**ειωτέο αφαιρέσουμε τη Διαφορά, βρίσκουμε τον **Α**φαιρετέο.

Μ – Δ = Α

✓ Οι πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης είναι πράξεις αντίστροφες.

$3 \xrightarrow{+2} 5$, $5 \xrightarrow{-2} 3$

Συχνά οι πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης ονομάζονται αντίθετες πράξεις.

2 **Συμπληρώνω τους πίνακες με τους κατάλληλους αριθμούς αφου κάνω πρώτα τις αντίστοιχες πράξεις στο τετράδιό μου.**

1ος προσθετέος	32.976.276	16.253.703
2ος προσθετέος	8.912.345	
Άθροισμα		23.971.340

Μειωτέος	32.976.276	56.253.703	
Αφαιρετέος	8.912.345		12.678.243
Διαφορά		23.971.340	7.000.176

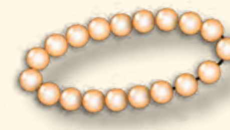
Ερωτήσεις Σ - Λ

Το άθροισμα τριών προσθετέων δεν αλλάζει, όταν αλλάξουμε τη σειρά των προσθετέων.	Σ	Λ
Η αντιμεταθετική ιδιότητα ισχύει στην αφαίρεση.	Σ	Λ

4. Πολλαπλασιασμός φυσικών αριθμών - Δυνάμεις

Δραστηριότητες

1 **Η Ελένη θέλει να φτιάξει 3 βραχιόλια, για να τα χαρίσει στις φίλες της. Κάθε βραχιόλι θα έχει 30 χάντρες. Πόσες χάντρες θα χρειαστεί συνολικά;**



• Υπολογίζω νοερά: ________ Ποια πράξη έκανες για να λύσεις το πρόβλημα; ____________________

• Πώς λέγονται οι αριθμοί που πολλαπλασίασες; ____

• Πώς λέγεται το αποτέλεσμα της πράξης; ____

Σε κάθε πολλαπλασιασμό, οι αριθμοί που πολλαπλασιάζουμε λέγονται **παράγοντες** και το αποτέλεσμα της πράξης **γινόμενο.**

2 **Συμπληρώνω τον Πυθαγόρειο Πίνακα με τα γινόμενα που λείπουν.**

•	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2			4	6	8	10	12	14	16	18	20
3				9	12	15	18	21	24	27	30
4					16	20	24	28	32	36	40
5						25	30	35	40	45	50
6							36	42	48	54	60
7								49	56	63	70
8									64	72	80
9										81	90
10											100

• Συμπληρώνω τα κενά:

α. 0 • 2 = ____, 0 • 3 = ____, 2 • 0 = ____, 3 • 0 = ___

β. 1 • 8 = ____, 8 • 1 = ____, 1 • 9 = ____, 9 • 1 = ___

Πολλαπλασιασμός φυσικών αριθμών - Δυνάμεις

Αντιστοιχίζω:

Το γινόμενο ενός αριθμού με το 1 είναι ο ίδιος • • μηδέν

Το γινόμενο ενός αριθμού με το 0 είναι το • • αριθμός

• Με τη βοήθεια και του πίνακα βάζω ανάμεσα στα γινόμενα το κατάλληλο σύμβολο (< , > , =):

7 • 8 ____ 8 • 7   5 • 9 ____ 9 • 5   6 • 4 ____ 4 • 6

Αν αλλάξουμε τη σειρά των παραγόντων ενός γινομένου, το γινόμενο δεν αλλάζει.

αντιμεταθετική ιδιότητα

Γενικά α • β = β • α

• Συμπληρώνω τα γινόμενα με τη βοήθεια του πίνακα: (3 • 2) • 5 = _____   3 • (2 • 5) = _____

Τι παρατηρώ; ________________________________

Για να πολλαπλασιάσουμε τρεις αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε πρώτα τους δύο από αυτούς μεταξύ τους και μετά το γινόμενό τους με τον τρίτο.

προσεταιριστική ιδιότητα

Γενικά α • (β • γ) = (α • β) • γ

Γινόμενα ίσων παραγόντων - Δυνάμεις

Μια πολυκατοικία έχει 5 ορόφους. Κάθε όροφος έχει 5 διαμερίσματα και κάθε διαμέρισμα 5 δωμάτια. Πόσα δωμάτια έχει συνολικά η πολυκατοικία;

Κάθε όροφος έχει **5 • 5** δωμάτια. Επομένως η πολυκατοικία έχει **5 • 5 • 5** δωμάτια.

Στο γινόμενο **5 • 5 • 5** όλοι οι παράγοντες είναι ίσοι. Γράφουμε σύντομα **5 • 5 • 5** = **5^3**.

Λέμε ότι γράψαμε το γινόμενο των ίσων παραγόντων **ως δύναμη.**

- ✓ Ένα γινόμενο ίσων παραγόντων μπορεί να γραφεί ως **δύναμη.**
- ✓ Η δύναμη αποτελείται από δύο αριθμούς: τη **βάση** που είναι ο παράγοντας που επαναλαμβάνεται και τον **εκθέτη** που δείχνει πόσες φορές επαναλαμβάνεται ο παράγοντας. Για παράδειγμα:

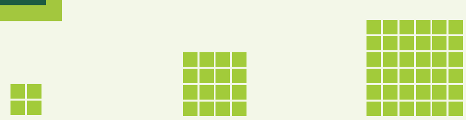
$$5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^{3} \quad 3 \rightarrow \text{εκθέτης}, \quad 5 \rightarrow \text{βάση}$$

Διαβάζουμε **«πέντε στην τρίτη».**

Εφαρμογές

1

Γράφω το εμβαδόν των τετραγώνων ως γινόμενο και ως δύναμη.



2 • 2 = ___ ___ • ___ = ___ ___ • ___ = ___

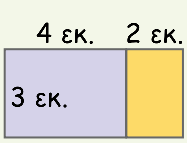
Η δύναμη με εκθέτη το 2 διαβάζεται **στη δεύτερη** ή **στο τετράγωνο** (π.χ. 4^2 διαβάζεται 4 στη δεύτερη ή 4 στο τετράγωνο), γιατί εκφράζει το εμβαδόν τετράγωνου με πλευρά 4.

Η δύναμη με εκθέτη το 3 διαβάζεται **στην τρίτη ή στον κύβο** (π.χ. 4^3 διαβάζεται 4 στην τρίτη ή 4 στον κύβο, γιατί εκφράζει τον όγκο ενός κύβου με ακμή 4).

2

Βρίσκω το εμβαδόν του παρακάτω σχήματος με δύο τρόπους.

Πώς; Περιγράφω: ______________________________



α΄ τρόπος : 3 • (4 + 2) = ____

β΄ τρόπος : 3 • 4 + 3 • 2 = ____

Βάζω ανάμεσα στις παραστάσεις το κατάλληλο σύμβολο (<, >, =).

3 • (4 + 2) ___ 3 • 4 + 3 • 2

Γενικά ισχύει **η επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση ή την αφαίρεση**

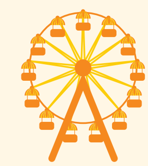
$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma \qquad \alpha \cdot (\beta - \gamma) = \alpha \cdot \beta - \alpha \cdot \gamma$$

Ερωτήσεις Σ - Λ		
Το γινόμενο **10•10•10•10** γράφεται σύντομα 10^4.	Σ	Λ
Η δύναμη 3^3 ισούται με 9.	Σ	Λ

5. Η πράξη της διαίρεσης

Δραστηριότητες

1 **Ο τροχός ενός λούνα παρκ χρειάζεται 4 λεπτά της ώρας, για να κάνει μία περιστροφή.**

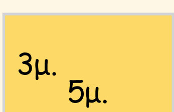


- Η Ελένη με τη Μαίρη έκαναν 3 περιστροφές. Πόσα λεπτά της ώρας διάρκησε η βόλτα τους; Υπολογίζω νοερά: _____ Γράφω την πράξη που έκανα, για να λύσω το πρόβλημα: _______
- Ο Γιώργος και ο Νίκος ανέβηκαν στον τροχό για 12 λεπτά. Πόσες περιστροφές έκαναν; Υπολογίζω νοερά: _______ . Γράφω την πράξη που έκανα, για να λύσω το πρόβλημα: _________
- Ποια σχέση υπάρχει ανάμεσα στις δύο πράξεις, στον πολλαπλασιασμό και την τέλεια διαίρεση; Εξηγώ:

____

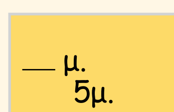
____

2 **Υπολογίζω κάθε φορά το άγνωστο στοιχείο και γράφω κάτω από κάθε ορθογώνιο την πράξη που έκανα:**



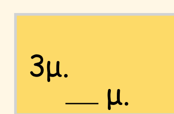
Μήκος = 5 μ.
Πλάτος = 3 μ.
Εμβαδόν = ___ τ.μ.

____



Μήκος = 5 μ.
Πλάτος = ___ μ.
Εμβαδόν =15 τ.μ.

____



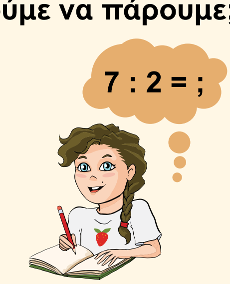
Μήκος = ___ μ.
Πλάτος = 3 μ.
Εμβαδόν =15 τ.μ.

____

Οι πράξεις του πολλαπλασιασμού και της τέλειας διαίρεσης είναι αντίστροφες.

$$3 \underset{:\,2}{\overset{\cdot 2}{\rightleftarrows}} 6$$

3 **Από έναν μεταλλικό δοκό μήκους 7μ., πόσους δοκούς μήκους 2μ. μπορούμε να πάρουμε; Πόσο είναι το μήκος του τμήματος που περισσεύει;**



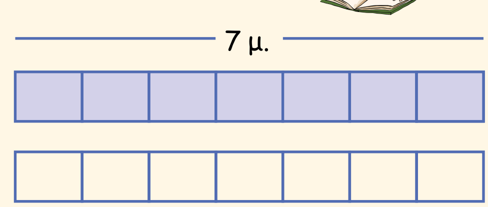
7 | 2

- Συμφωνώ με τη σκέψη της φίλης μας; Αν ναι, κάνω κάθετα την πράξη.
- Συμπληρώνω τους όρους της διαίρεσης:

Διαιρετέος: ____ **δ**ιαιρέτης: ____ **π**ηλίκο: ____ **υ**πόλοιπο: ____

Αν το διπλανό σχήμα παριστάνει την πράξη της διαίρεσης, τότε ζωγραφίζω:

- με πράσινο χρώμα τον διαιρέτη
- με κόκκινο χρώμα το υπόλοιπο



Μπορεί το υπόλοιπο σε μια διαίρεση να είναι μεγαλύτερο, ίσο ή μικρότερο, από τον διαιρέτη; Εξηγώ: ____________________

- ✓ Στη διαίρεση δίνονται 2 αριθμοί, **Δ**ιαιρετέος και **δ**ιαιρέτης και υπολογίζονται άλλοι 2 αριθμοί, **π**ηλίκο και **υ**πόλοιπο τέτοιοι ώστε: **Δ = δ • π + υ (Ευκλείδεια Διαίρεση).**
- ✓ Το υπόλοιπο είναι πάντα αριθμός μικρότερος από τον διαιρέτη και μεγαλύτερος ή ίσος από το μηδέν.
- ✓ Αν το υπόλοιπο υ είναι ίσο με το 0 (**Δ = δ • π**), τότε η διαίρεση λέγεται **διαίρεση με μηδενικό υπόλοιπο.**

Η πράξη της Διαίρεσης

Εφαρμογές

Σε μια διαίρεση με μη μηδενικό υπόλοιπο ο διαιρέτης είναι 5.
Ποιοι αριθμοί μπορεί να είναι το υπόλοιπο;
Εξηγώ: ____________________
____

1 **Συμπληρώνω τον πίνακα με τους κατάλληλους αριθμούς, αφού κάνω πρώτα τις αντίστοιχες πράξεις στο τετράδιό μου.**

Διαιρετέος (Δ)	Διαιρέτης (δ)	Πηλίκο (π)	Υπόλοιπο (υ)
1.501	50		
	100	5	50
2.570.541		2.570	541
105		15	

2 **Ποια ημέρα έχει γενέθλια η φίλη μας και η αδελφή της;**

Σήμερα, ημέρα Πέμπτη, έχω τα γενέθλιά μου!

Εγώ έχω γενέθλια μετά από 50 ημέρες και η αδελφή μου μετά από 115 ημέρες.

Φεβρουάριος

Δε	Τρ	Τε	Πε	Πα	Σα	Κυ
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28					

Μάρτιος

Δε	Τρ	Τε	Πε	Πα	Σα	Κυ
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

____
____

Ερωτήσεις Σ - Λ

Αν σε μια διαίρεση ο Διαιρετέος είναι ίσος με τον διαιρέτη, το πηλίκο είναι 1.	Σ	Λ
Αν σε μια διαίρεση ο διαιρέτης είναι 1, τότε το πηλίκο ισούται με τον Διαιρετέο.	Σ	Λ

6. Προτεραιότητα των πράξεων - Αριθμητικές παραστάσεις

Δραστηριότητες

1 **Σε ένα σχολείο, την ημέρα αθλητισμού, κάποια από τα παιδιά των τάξεων Ε΄ και Στ΄ οργανώθηκαν σε ομάδες των 5 ατόμων για να κάνουν ένα μικρό πρωτάθλημα μπάσκετ. Αρχικά δημιουργήθηκαν 7 διαφορετικές ομάδες.**

• Πόσα παιδιά αποτελούσαν αυτές τις ομάδες; ______________________

Στη συνέχεια προστέθηκαν άλλες 5 ομάδες.

• Πόσα παιδιά αποτελούσαν αυτές τις νέες ομάδες; ______________________

• Πόσα παιδιά τελικά πήραν μέρος στο ενδοσχολικό πρωτάθλημα; Υπολογίζω:

____

____

• Με τη βοήθεια του δασκάλου ή της δασκάλας μου σχηματίζω μια **αριθμητική παράσταση** με τη σειρά των πράξεων που έκανα για να λύσω το παραπάνω πρόβλημα.

____

✓ Μια σειρά αριθμών που συνδέονται μεταξύ τους με τα σύμβολα των αριθμητικών πράξεων λέγεται αριθμητική παράσταση. Για παράδειγμα, 3 • 9 + 40 : 5

✓ Ο τρόπος λύσης πολλών προβλημάτων μπορεί να εκφραστεί με μια αριθμητική παράσταση.

2 **Σε ένα τμήμα της Στ΄ τάξης του 13ου Δημοτικού Σχολείου Κορυδαλλού ο δάσκαλος έδωσε στους μαθητές να υπολογίσουν την παρακάτω αριθμητική παράσταση:**

4 + 2 • 3 =

Στη συνέχεια ταξινόμησε τις απαντήσεις των μαθητών σε δύο κατηγορίες:

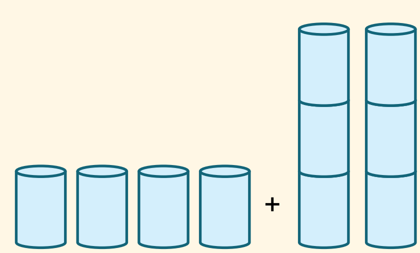
1ηκατηγορία: 4 + 2 • 3 = 6 • 3 = 18 2ηκατηγορία: 4 + 2 • 3 = 4 + 6 = 10

• Συζητάμε γιατί οι μαθητές βρήκαν διαφορετικά αποτελέσματα.

• Με τη βοήθεια του διπλανού μοντέλου υπολογίζω κι εγώ την παραπάνω αριθμητική παράσταση:

____

• Οι μαθητές ποιας κατηγορίας υπολόγισαν σωστά την τιμή της αριθμητικής παράστασης; ______________________



4 + 2 · 3

✓ Για να υπολογίσω την τιμή μιας αριθμητικής παράστασης κάνω τις πράξεις από αριστερά προς τα δεξιά με την ακόλουθη σειρά:

α. πρώτα τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις

β. μετά τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις

✓ Οι συνεχόμενες πράξεις ίδιας προτεραιότητας, γίνονται από αριστερά προς τα δεξιά.

π.χ. 5 – 3 + 8 – 4 = 2 + 8 – 4 = 10 – 4 = 6

✓ Αν σε μια αριθμητική παράσταση υπάρχουν παρενθέσεις κάνουμε πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις ακολουθώντας την παραπάνω σειρά.

Παράδειγμα

1. Πράξεις μέσα στις παρενθέσεις

2. Πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις

3. Προσθέσεις και αφαιρέσεις

20 – 2 • (3 + 5) =
20 – 2 • 8 =
20 – 16 =
4

Να υπολογιστεί η τιμή της αριθμητικής παράστασης

Εφαρμογές

1 **Βρίσκω την τιμή της παρακάτω αριθμητικής παράστασης, ακολουθώντας τα βήματα της προτεραιότητας των πράξεων.**

Βήματα διαδικασίας	**3 • (5 + 4) – 12 + (24 – 19) =**
1. Κάνουμε τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις (αν υπάρχουν)	
2. Κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις (αν υπάρχουν)	
3. Κάνουμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις	
4. Η τελική τιμή της παράστασης είναι:	

2 **Σχηματίζω μια αριθμητική παράσταση που να εκφράζει τον τρόπο λύσης του παρακάτω προβλήματος και στη συνέχεια την υπολογίζω.**

Οι μαθητές ενός τμήματος της Ε΄ τάξης, είναι τόσοι που αν σχηματίσουν τέσσερις πεντάδες περισσεύουν δύο μαθητές. Πόσοι είναι οι μαθητές του τμήματος;

____

Ερωτήσεις Σ - Λ		
Η πρόσθεση προηγείται της αφαίρεσης στην αριθμητική παράσταση 8 – 3 + 5.	Σ	Λ
Η πρόσθεση του 7, στον υπολογισμό της παράστασης (2 + 3) • 5 + 7 , θα γίνει τελευταία.	Σ	Λ

7. Διατυπώνω και Επιλύω Προβλήματα

Δραστηριότητα

Αντίστροφη πορεία (ο μίτος της Αριάδνης)

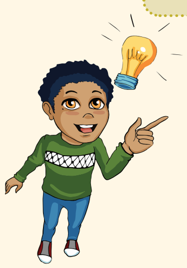
Ο Νίκος κάνει ένα μαγικό κόλπο με αριθμούς στη Μαρία.

- Νίκος: Σκέψου έναν αριθμό, πολλαπλασίασέ τον με το 3, στο γινόμενο πρόσθεσε 16 και το άθροισμα διαίρεσέ το με το 2. Πόσο βρήκες;
- Μαρία: Δεκαεφτά.
- Νίκος: Να σου πω ποιον αριθμό σκέφτηκες;
- Μαρία: Ναι...
- Νίκος: Το έξι.

Με ένα σχήμα δείχνουμε τις μεταβολές του άγνωστου αρχικού αριθμού που σκέφτηκε η Μαρία.

Ακολουθώντας πορεία από το τέλος προς την αρχή και αντίθετες / αντίστροφες πράξεις αναιρούμε μία μία τις μεταβολές του αρχικού αριθμού.

Οι πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης είναι αντίθετες· του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης, είναι αντίστροφες.



Ο αριθμός που σκέφτηκε η Μαρία.

Ο αριθμός που βρήκε η Μαρία στο τέλος

$$\boxed{;} \xrightarrow{\cdot 3} \boxed{;} \xrightarrow{+16} \boxed{;} \xrightarrow{:2} \boxed{17}$$

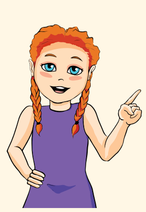
• Ξεκινώντας από το τέλος εφαρμόζω την αντίθετη ή την αντίστροφη πράξη:

$$\boxed{\_\_\_} \xleftarrow{:3} \boxed{\_\_\_} \xleftarrow{-16} \boxed{\_\_\_} \xleftarrow{\cdot 2} \boxed{17}$$

• Η Μαρία σκέφτηκε τον αριθμό _______ .

Κάνω ένα σχήμα

Δύο εταιρείες η «Νίκη» και η «Τηλεφωνία» έχουν μαζί 1.291.293€ κεφάλαιο. Η Τηλεφωνία έχει διπλάσια χρήματα από τη Νίκη. Πόσα χρήματα έχει η κάθε εταιρεία;



Με ένα σχήμα αναπαριστούμε την κατάσταση του προβλήματος.

Τα χρήματα της «Νίκης»	Τα χρήματα της «Τηλεφωνίας»

Το συνολικό ποσό: 1.291.293€

Από το σχήμα καταλαβαίνουμε ότι τα 2 από τα 3 ίσα μέρη του κεφαλαίου είναι τα χρήματα της εταιρείας «Τηλεφωνία» και το 1 μέρος είναι τα χρήματα της εταιρείας «Νίκη».

• Υπολογίζω στο τετράδιό μου και συμπληρώνω: 1.291.293 : 3 ____________________

• Η εταιρεία «Νίκη» έχει ___________________ € και η εταιρεία «Τηλεφωνία» έχει ______________ €.

Εξαντλώ όλες τις περιπτώσεις

Ποιος είμαι;

Είμαι ένας αριθμός ανάμεσα στο 4.000.000 και 5.000.000.

▶ Όλα τα ψηφία μου είναι άρτιοι.

▶ Όλα τα ψηφία των χιλιάδων είναι ίδια.

▶ Όλα τα ψηφία των μονάδων είναι ίδια.

▶ Το άθροισμα των ψηφίων μου είναι 22.

- Γράφω την απάντησή μου και την κοινοποιώ στους συμμαθητές μου: ____________________
- Υπάρχουν διαφορετικές απόψεις; Τις καταγράφω: ____________________
- Τελικά πόσοι αριθμοί ικανοποιούν τα παραπάνω κριτήρια; ____________________
- Συζητώ με τους συμμαθητές μου και περιγράφουμε μια στρατηγική, για να βεβαιωθούμε ότι βρήκαμε όλους τους αριθμούς;

Περιγράφω: ____

____

Είναι σημαντικό να παρατηρώ προσεκτικά!

Έχω έναν φυσικό αριθμό στον νου μου. Ο διπλάσιός του είναι ένας από τους παρακάτω αριθμούς. Ποιον αριθμό έχω στον νου μου;

Τον μισό οποιουδήποτε από τους παρακάτω αριθμούς.

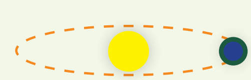
α. 2.560.305 **β.** 23.789.981 **γ.** 3.444.873 **δ.** 2.300.006

- **Έχει δίκιο η μαθήτρια; Εξηγώ:** ____________________
- **Ποιον αριθμό έχει στον νου του ο μαθητής;** ____________________

Επίλυση προβλήματος με μυρμήγκι

Προβλήματα ζητούν λύση

Εφαρμογή



Γνωρίζοντας ότι **«η γη περιφερόμενη γύρω από τον Ήλιο καλύπτει σε 10 ώρες απόσταση 1.078.260 χιλιομέτρων»**, διατυπώνω ένα πρόβλημα και το λύνω.

____

____

____

Ερωτήσεις Σ - Λ		
Η Στρατηγική της αντίστροφης πορείας βασίζεται στις αντίστροφες ή στις αντίθετες πράξεις.	Σ	Λ
Κάθε πρόβλημα έχει μοναδική λύση.	Σ	Λ

8. Διαιρέτες φυσικού αριθμού - Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης αριθμών

Δραστηριότητες

1 **Στην τάξη της Ευαγγελίας φοιτούν 24 μαθητές. Η δασκάλα των Εικαστικών θέλει να τους χωρίσει σε ομάδες. Πόσες ομάδες μπορεί να κάνει και πόσους μαθητές θα έχει η κάθε ομάδα;**

• Συμπληρώνω τον πίνακα.

Αριθμός ομάδων	**2**	**3**				
Αριθμός μαθητών	12					

• Συμπληρώνω:

24 : 2 = ____ 24 : 3 = ____ 24 : 4 = ____ 24 : 6 = ____ 24 : 8 = ____ 24 : 12 = ____

Οι αριθμοί **2, 3, 4, 6, 8, 12** λέγονται **διαιρέτες του 24.**

• Ποιους άλλους διαιρέτες έχει ο αριθμός 24; ______________________________

Διαιρέτες ενός αριθμού, λέγονται οι αριθμοί που τον διαιρούν.
(Έχουμε **τέλεια διαίρεση**)

2 **Η Βαρβάρα έχει 48 ροζ και 42 κίτρινες τουλίπες και θέλει να φτιάξει όσο το δυνατόν περισσότερες όμοιες ανθοδέσμες, δηλαδή, κάθε ανθοδέσμη να έχει τον ίδιο αριθμό λουλουδιών από κάθε χρώμα.**

• Αν είχε να χωρίσει μόνο τις 48 ροζ τουλίπες, σε πόσες ίδιες ανθοδέσμες θα μπορούσε να τις μοιράσει και πόσες τουλίπες θα είχε κάθε ανθοδέσμη; Συμπληρώνω τον πίνακα:

Αριθμός ανθοδεσμών	1	2	3	4	6	8	12	16	24	48
Αριθμός ροζ τουλίπων	48	24	16							

• Κάνω το ίδιο και για τις 42 κίτρινες τουλίπες:

Αριθμός ανθοδεσμών	1	2	3	6	7	14	21	42
Αριθμός κίτρινων τουλίπων	42	21						

• Κυκλώνω τους αριθμούς των ανθοδεσμών που είναι κοινοί και στα 2 χρώματα.

• Ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός από ανθοδέσμες που μπορεί να φτιάξει με τουλίπες από κάθε χρώμα; ________ . Πώς χαρακτηρίζεται αυτός ο αριθμός για το 42 και το 48; ________ .

• Πόσες είναι οι ροζ και κίτρινες τουλίπες σε καθεμία από αυτές τις ανθοδέσμες;

_________ ροζ _________ κίτρινες.

- ✓ **Κοινοί διαιρέτες** δύο ή περισσοτέρων φυσικών αριθμών λέγονται οι φυσικοί αριθμοί που τους διαιρούν όλους ακριβώς.
- ✓ **Μέγιστος κοινός διαιρέτης (ΜΚΔ)** δύο ή περισσοτέρων φυσικών αριθμών λέγεται ο μεγαλύτερος από τους κοινούς τους διαιρέτες.

Κριτήρια Διαιρετότητας

Οπτικοποιημένη εύρεση ΜΚΔ

Εφαρμογές

1 Πώς βρίσκουμε τον Μ.Κ.Δ. δύο ή περισσότερων αριθμών;

α΄ τρόπος

Βρίσκουμε τους διαιρέτες των αριθμών	Μ.Κ.Δ. (6, 8, 12) =; • Διαιρέτες του 6: ____________ • Διαιρέτες του 8: ____________ • Διαιρέτες του 12: ___________
Επιλέγουμε τους κοινούς τους διαιρέτες	Κοινοί διαιρέτες ____________
Ο μεγαλύτερος από τους κοινούς διαιρέτες είναι ο Μ.Κ.Δ.	Μ.Κ.Δ. (6, 8, 12) =___________

β΄ τρόπος

Η εύρεση του ΜΚΔ δύο αριθμών με τη λίστα διαιρετών μπορεί να είναι χρονοβόρα. Ένας συντομότερος τρόπος περιγράφεται παρακάτω:

<table>
<tr><th colspan="3">Μ.Κ.Δ. (10, 18) = ;</th></tr>
<tr><td>• Διαιρώ τον μεγαλύτερο αριθμό με τον μικρότερο (σε κάθε γραμμή).</td><td>18 : 10 δίνει πηλίκο 1 και υπόλοιπο 8</td><td rowspan="4">18 10
8 10
8 2
0 2</td></tr>
<tr><td>• Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι 0, ΜΚΔ είναι ο μικρότερος αριθμός, εάν όχι διαιρώ τον διαιρέτη με το υπόλοιπο.</td><td>10 : 8 δίνει πηλίκο 1 και υπόλοιπο 2</td></tr>
<tr><td>• Συνεχίζω με αυτό τον τρόπο μέχρι το υπόλοιπο να είναι 0.</td><td>8 : 2 δίνει πηλίκο 4 και υπόλοιπο 0</td></tr>
<tr><td>• ΜΚΔ είναι ο τελευταίος διαιρέτης.</td><td>Οπότε Μ.Κ.Δ. (10, 18) = 2</td></tr>
</table>

2

Βρίσκω τον ΜΚΔ (24, 32) και με τους δύο τρόπους.

______________________________ ______________________________

______________________________ ______________________________

(οι δύο τρόποι επιβεβαιώνουν την αλήθεια τους, εφόσον καταλήγουν στο ίδιο αποτέλεσμα)

Ερωτήσεις Σ - Λ		
Ο Μ.Κ.Δ. δύο αριθμών είναι πάντοτε μικρότερος από τους αριθμούς.	Σ	Λ
Ο Μ.Κ.Δ. του 4 και του 8 είναι ο μεγαλύτερος από τους δύο αριθμούς.	Σ	Λ

9. Πολλαπλάσια φυσικού αριθμού - Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο φυσικών αριθμών

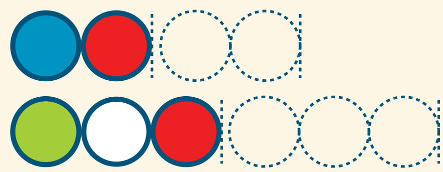
Δραστηριότητα

1

Η Μαρία και η Ελευθερία φτιάχνουν κολιέ με χάντρες ίδιου μεγέθους, αλλά με διαφορετικό χρωματικό κανόνα. Η Ελευθερία χρησιμοποιεί χάντρες 2 χρωμάτων και η Μαρία χάντρες 3 χρωμάτων.

Ελευθερία

Μαρία



Επεκτείνω τις κανονικότητες και απαντώ:

- Πόσες χάντρες θα έχει χρησιμοποιήσει καθένα από τα κορίτσια, όταν τα κολιέ τους θα έχουν το ίδιο μήκος για πρώτη φορά, για δεύτερη φορά κ.ο.κ.; ______________________
- Πόσες κόκκινες χάντρες θα έχουν χρησιμοποιήσει και τα 2 κορίτσια μαζί; ______________

Μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα και με πολλαπλασιασμό:

Τα γινόμενα $1 \cdot 2 = \mathbf{2}$ $2 \cdot 2 = \mathbf{4}$ $3 \cdot 2 = \mathbf{6}$ $5 \cdot 2 = \mathbf{10}$ $6 \cdot 2 = \mathbf{12}$,...

είναι πολλαπλάσια του 2.

Τα γινόμενα $1 \cdot 3 = \mathbf{3}$ $2 \cdot 3 = \mathbf{6}$ $3 \cdot 3 = \mathbf{9}$ $4 \cdot 3 = \mathbf{12}$...... **είναι πολλαπλάσια του 3.**

Οι αριθμοί **6** και **12** είναι **κοινά πολλαπλάσια** του 2 και του 3.

Επομένως, όταν τα κολιέ των κοριτσιών θα έχουν το ίδιο μήκος, το καθένα θα έχει χρησιμοποιήσει 6 χάντρες, 12 χάντρες κ.ο.κ.

Το μικρότερο από τα κοινά πολλαπλάσια, το **6**, λέγεται **Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.)** των αριθμών 2 και 3. Γράφουμε Ε.Κ.Π. (2 , 3) = 6.

✓ **Πολλαπλάσια** ενός φυσικού αριθμού ονομάζονται οι αριθμοί που προκύπτουν όταν τον πολλαπλασιάσουμε με άλλους φυσικούς αριθμούς.
Για παράδειγμα, τα πολλαπλάσια του 3 είναι: $\mathbf{\Pi_3}$: 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, ...

✓ Το **μικρότερο από τα κοινά** πολλαπλάσια δύο ή περισσότερων αριθμών, εκτός από το 0, λέγεται **Ε**λάχιστο **Κ**οινό **Π**ολλαπλάσιο των αριθμών και το γράφουμε σύντομα **Ε.Κ.Π.**

Πώς βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. δύο ή περισσότερων αριθμών;

Για να βρούμε γρήγορα το Ε.Κ.Π. δύο ή περισσότερων αριθμών, μπορούμε να εργαστούμε όπως παρακάτω:

Διαδικασία	**Παράδειγμα: Ε.Κ.Π. (3, 4, 6) =;**
Επιλέγουμε τον μεγαλύτερο από τους αριθμούς και εξετάζουμε αν διαιρείται από όλους τους άλλους. Αν διαιρείται με όλους, τότε αυτός είναι το Ε.Κ.Π.	**Μεγαλύτερος είναι ο αριθμός 6, αλλά δεν διαιρείται με το 4.**
Αν δε διαιρείται, τότε τον διπλασιάζουμε, τριπλασιάζουμε, τετραπλασιάζουμε κτλ., μέχρι να βρούμε τον αριθμό που διαιρείται από όλους τους άλλους. Αυτός ο αριθμός θα είναι το Ε.Κ.Π. τους.	Ο διπλάσιός του, ο αριθμός 12, διαιρείται και με το 3 και με το 4. **Άρα Ε.Κ.Π. (3, 4, 6) = 12.**

Εφαρμογές

1

Χωριζόμαστε σε 3 ομάδες. Ο δάσκαλός μας εκφωνεί διαδοχικά τους φυσικούς αριθμούς 1, 2, 3, 4, ...
Οι μαθητές της 1ης ομάδας, χτυπούν με τα χέρια τους το στήθος τους, όταν ακούγεται αριθμός πολλαπλάσιο του 2.
Οι μαθητές της 2ης ομάδας, χτυπούν τα πόδια τους, όταν ακούγεται αριθμός πολλαπλάσιο του 3.
Οι μαθητές της 3ης ομάδας χτυπούν τα χέρια τους, όταν ακούγεται αριθμός πολλαπλάσιο του 5.

Σε ποιον αριθμό χτυπούν οι μαθητές συγχρόνως, το στήθος, τα πόδια και τα χέρια τους, για πρώτη φορά; _______ Ο αριθμός αυτός είναι __________ των 2, 3 και 5.

2

Οι ομάδες ποδοσφαίρου, βόλεϊ και μπάσκετ του σχολείου που φοιτά ο Γιάννης προπονούνται διαφορετικές μέρες. Η ομάδα ποδοσφαίρου έχει προπόνηση κάθε 2 ημέρες, η ομάδα βόλεϊ κάθε 3 ημέρες και η ομάδα μπάσκετ κάθε 4 μέρες.

- Αν σήμερα προπονήθηκαν και οι τρεις ομάδες μαζί, σε πόσες μέρες θα έχουν πάλι προπόνηση την ίδια μέρα; Συμπληρώνω τον πίνακα και απαντώ: ____________________
- Πόσες φορές θα έχει προπονηθεί η κάθε ομάδα μέχρι την επόμενη κοινή προπόνησή τους;

	2					
	3					
	4					

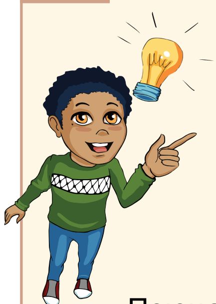
_________________, _________________, _________________,

Ερωτήσεις Σ - Λ		
Το ΕΚΠ δύο αριθμών **δεν** μπορεί να είναι αριθμός μικρότερός τους.	Σ	Λ
Τα κοινά πολλαπλάσια δύο ή περισσότερων αριθμών είναι πολλαπλάσια του Ε.Κ.Π. τους.	Σ	Λ

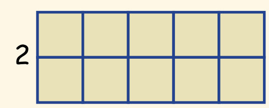
10. Πρώτοι και σύνθετοι αριθμοί

Δραστηριότητες

1 Παράγοντες ενός αριθμού



Αριθμοί που πολλαπλασιαζόμενοι μεταξύ τους παράγουν (δίνουν) ένα γινόμενο, λέγονται παράγοντες του γινομένου.



$2 \cdot 5 = 10$

Το 2 και το 5 είναι παράγοντες του 10

Είναι και **διαιρέτες** του 10.

• Ποιους άλλους παράγοντες έχει το 10; Πώς το γνωρίζω; Εξηγώ:

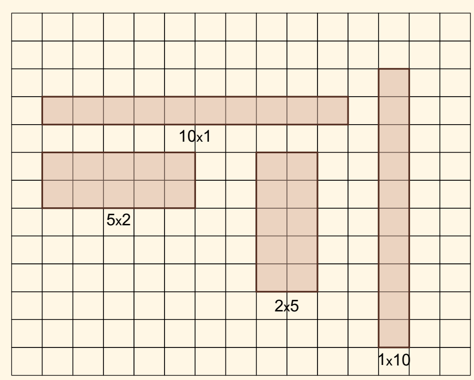
____

2 Πρώτοι και σύνθετοι αριθμοί

Καλύπτοντας 10 τετραγωνικές μονάδες μπορούμε να σχεδιάσουμε 4 διαφορετικά ορθογώνια.

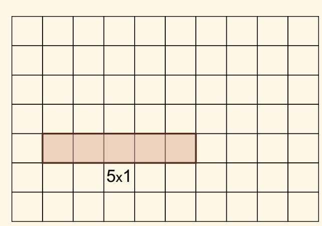
- Ποια ορθογώνια έχουν μήκος ή πλάτος τους ίδιους παράγοντες; Τα αντιστοιχίζω.
- Γράφω τους παράγοντες ή διαιρέτες του 10:

____



Σχεδιάζω όσα περισσότερα ορθογώνια μπορώ που να καλύπτουν 5 τετραγωνικές μονάδες.

- Πόσα σχεδίασα; _________
- Γράφω τους παράγοντες ή διαιρέτες του 5: ______



✓ Ένας αριθμός μεγαλύτερος από το 1 που έχει μόνο δύο διαιρέτες, τον εαυτό του και τη μονάδα, λέγεται **πρώτος αριθμός.**

✓ Ένας αριθμός, που εκτός από τη μονάδα και τον εαυτό του, έχει τουλάχιστον έναν ακόμη διαιρέτη, λέγεται **σύνθετος αριθμός.**

Δηλαδή, ο αριθμός 1 δεν είναι ούτε πρώτος ούτε σύνθετος.

Πού βασίζει τη σκέψη της η φίλη μας; Συζητάμε.

Το κόσκινο του Ερατοσθένη

Ένας απλός τρόπος για την **εύρεση πρώτων αριθμών** είναι η διαδικασία που επινόησε ο αρχαίος Έλληνας μαθηματικός Ερατοσθένης. Για να βρούμε, για παράδειγμα όλους τους πρώτους αριθμούς που είναι μικρότεροι ή ίσοι από το 100 δημιουργούμε έναν πίνακα με όλους τους φυσικούς αριθμούς από το 2 έως το 100. Στη συνέχεια:

Διαγράφουμε τα πολλαπλάσια του 2, εκτός από το 2.
Διαγράφουμε τα πολλαπλάσια του 3, εκτός από το 3.
Διαγράφουμε τα πολλαπλάσια του 5, εκτός από το 5.
Διαγράφουμε τα πολλαπλάσια του 7, εκτός από το 7.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Οι αριθμοί που απέμειναν είναι πρώτοι.

- Τους γράφω: ______________________________

____

- Από τους πρώτους αριθμούς που βρήκα, γράφω όσους είναι άρτιοι: ______________________

Το 2 είναι ο μοναδικός πρώτος αριθμός που είναι άρτιος.

Πρώτοι και Σύνθετοι αριθμοί

Εφαρμογή

1 **Συμπληρώνω τον πίνακα όπως το παράδειγμα**

Αριθμός	Διαιρείται με το					
	2	3	5	7	11	
49	x	x	x	✓	x	Σύνθετος
85						
154						
275						
315						
714						
911						
913						
1.022						

*Για τους μεγάλους αριθμούς μπορώ να κάνω τον έλεγχο χρησιμοποιώντας αριθμομηχανή.

Ερωτήσεις Σ - Λ		
Ο αριθμός 1 είναι πρώτος αριθμός.	Σ	Λ
Ο αριθμός 2 είναι ο μοναδικός πρώτος αριθμός που είναι άρτιος.	Σ	Λ

11. Ανάλυση φυσικού αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

Δραστηριότητα

1 **Υπολογίζω τα γινόμενα: 2 · 9 = _____ 3 · 6 = _____ 1 · 18 = _____ 2 · 3 · 3 = _____**

Σε ποιο από τα παραπάνω γινόμενα όλοι οι παράγοντες είναι πρώτοι αριθμοί; Το κυκλώνω.

Ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων είναι ένας τρόπος παρουσίασης ενός σύνθετου αριθμού ως γινόμενο πρώτων αριθμών. π.χ. 18 = 2 • 3 • 3

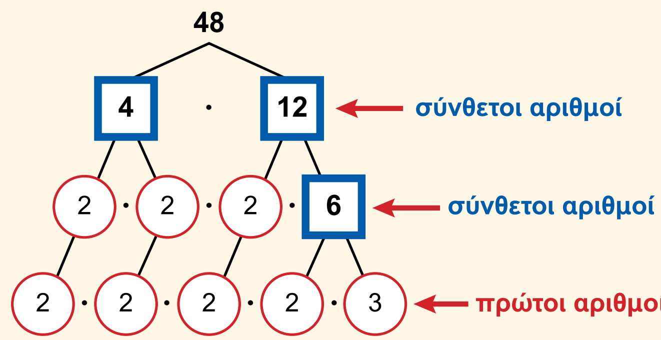
Η ανάλυση ενός σύνθετου αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων μπορεί να γίνει με δύο τρόπους:

Α. Με δεντροδιάγραμμα

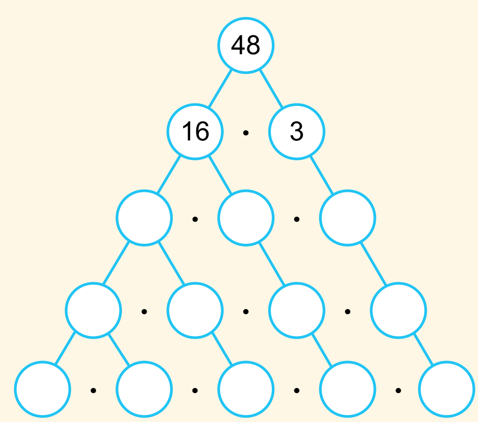
Για παράδειγμα, ας πάρουμε τον σύνθετο αριθμό 48.

- Γράφω το 48 στην κορυφή του δέντρου.
- Γράφω το 48 ως γινόμενο δύο παραγόντων του.
- Συνεχίζω αναλύοντας, κάθε σύνθετο παράγοντα του γινομένου, σε γινόμενο πρώτων αριθμών.
- Η ανάλυση τελειώνει, όταν όλοι οι παράγοντες είναι πρώτοι αριθμοί.

Έτσι $48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3^1$



Αν γράφαμε το 48 ως γινόμενο του 3 με το 16, ποια θα ήταν η ανάλυσή του σε γινόμενο πρώτων παραγόντων;



Συμπληρώνω το δεντροδιάγραμμα, για να λύσω την απορία της φίλης μας.

- Πώς αναλύεται τώρα το 48 ως γινόμενο πρώτων παραγόντων; Συμπληρώνω: 48 = ______________
- Τι παρατηρώ; ______________________________

Κάθε **σύνθετος αριθμός** έχει μια **μοναδική ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.**

Σε ένα γινόμενο η σειρά των παραγόντων δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα.

Β. Με διαδοχικές διαιρέσεις

Διαιρώ τον αριθμό διαδοχικά με πρώτους αριθμούς και γράφω κάτω από αυτόν τα πηλίκα. Η διαδικασία τελειώνει όταν βρω πηλίκο 1.

495	5
99	3
33	3
11	11
1	

Το 495 διαιρείται με το 5, αφού το τελευταίο του ψηφίο είναι 5.

9 + 9 = 18, επομένως το 99 διαιρείται με το 3.

3 + 3 = 6, επομένως το 33 διαιρείται με το 3.

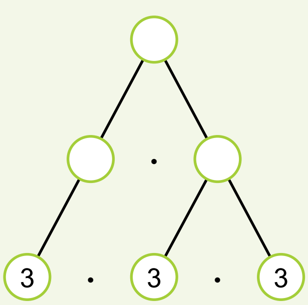
το 11 διαιρείται με το 11.

Επομένως: 495 = 3 · 3 · 5 · 11

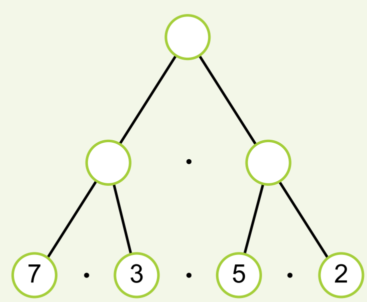
Ανάλυση σύνθετου φυσικού αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

Εφαρμογές

1 **Βρίσκω τους σύνθετους αριθμούς των οποίων η ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων φαίνεται στα δεντροδιαγράμματα:**



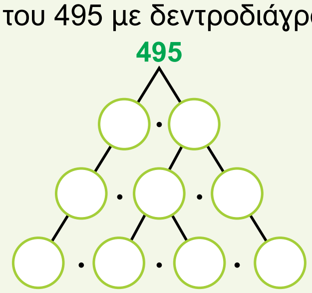
3 · 3 · 3 = ________



7 · 3 · 5 · 2 = ________

2 **Βρίσκω την ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων:**

α. του 495 με δεντροδιάγραμμα



β. του 84 με διαδοχικές διαιρέσεις

84

Ανάλυση Αριθμού σε Γινόμενο Πρώτων Παραγόντων

Ερωτήσεις Σ - Λ		
Κάθε φυσικός αριθμός μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.	Σ	Λ
Η ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ενός αριθμού, μπορεί να γίνει με μοναδικό τρόπο.	Σ	Λ

Ενότητα 1 **Επαναληπτικό**

1 **Ποιος είναι ο αριθμός που θα προκύψει, αν προσθέσουμε τον μικρότερο και τον μεγαλύτερο περιττό πενταψήφιο αριθμό;**

____

____

Είναι άρτιος ή περιττός; ______________________________

Από πόσα ψηφία αποτελείται; ___________________________

2 **Αναλύω τους παρακάτω αριθμούς σε γινόμενο πρώτων παραγόντων με δενδρόγραμμα.**

36 54 150

3 **Γράφω τα γινόμενα ως δυνάμεις:**

α. 7•7•7•7=________ **β.** 100•100•100= _______ **γ.** 2•2•2•2•2•2•2•2= ________

4 **Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς δεν μπορεί να είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός άγνωστου ακέραιου αριθμού με τον αριθμό 18;**

α. 17 **β.** 6 **γ.** 19 **δ.** 0

Δικαιολογώ την απάντησή μου:

____

____

- Συμπλήρωσε τον πίνακα αυτοαξιολόγησης, με οριζόντια σειρά, στα κεφάλαια που αναφέρονται στο επαναληπτικό της ενότητας.
- Μετά τη συμπλήρωση κράτησε σημειώσεις για να συζητήσεις για «όσα έμαθες» και για «αυτά που θα ήθελες να μάθεις περισσότερο».

Πίνακας Αυτοαξιολόγησης

Ενότητα 2

ΘΕΤΙΚΟΙ ΡΗΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ

1. **Το κλάσμα ως μέρος του όλου (Αρ.Ρ.6.1)**
2. **Το κλάσμα ως πηλίκο διαίρεσης (Αρ.Ρ.6.1)**
3. **Ισοδύναμα κλάσματα (Αρ.Ρ.6.3)**
4. **Σύγκριση και διάταξη κλασμάτων (Αρ.Ρ.6.10)**
5. **Πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων (Αρ.Ρ.6.10)**
6. **Πολλαπλασιασμός και διαίρεση κλασμάτων (Αρ.Ρ.6.10)**
7. **Εκτίμηση και υπολογισμός αριθμητικών παραστάσεων (Αρ.Ρ.6.6, Αρ.Ρ.6.11)**
8. **Επίλυση προβλημάτων (Αρ.Ρ.6.7)**
9. **Χρήση αριθμομηχανής (Αρ.Ρ.6.7)**

Αριθμοί/Θετικοί ρητοί αριθμοί και πράξεις

Θα μάθω να:

- Διακρίνω τις σημασίες του κλάσματος.
- Διακρίνω το κλάσμα ως μέρος του όλου.
- Διακρίνω το κλάσμα ως πηλίκο διαίρεσης.
- Ελέγχω την ισοδυναμία κλασμάτων.
- Κάνω πράξεις με κλάσματα.
- Κάνω πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων.
- Κάνω πολλαπλασιασμό και διαίρεση κλασμάτων.
- Εκτιμώ και να υπολογίζω αριθμητικές παραστάσεις.
- Επιλύω προβλήματα.
- Χρησιμοποιώ αριθμομηχανή στον υπολογισμό πράξεων και αριθμητικών παραστάσεων.

Λέξεις κλειδιά

Το κλάσμα ως μέρος του όλου	Πολλαπλασιασμός κλασμάτων
Το κλάσμα ως πηλίκο διαίρεσης	Διαίρεση κλασμάτων
Πράξεις με κλάσματα	Σύγκριση κλασμάτων
Πρόσθεση κλασμάτων	Διάταξη κλασμάτων
Αφαίρεση κλασμάτων	Ισοδύναμα κλάσματα

1. Το κλάσμα ως μέρος του όλου

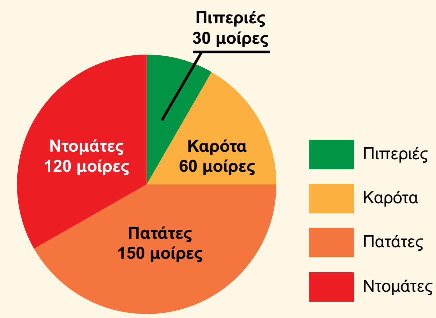
Δραστηριότητες

1 **Στο διπλανό διάγραμμα φαίνονται τα λαχανικά που φύτεψε ο κ. Νίκος στον κήπο του.**

α. Τι μέρος της επιφάνειας του κήπου φύτεψε:

▶ Με πατάτες; ______________ ▶ Με ντομάτες; ______________

▶ Με καρότα; ______________ ▶ Με πιπεριές; ______________



β. Τι μέρος της επιφάνειας του κήπου φύτεψε:

▶ Με πιπεριές και πατάτες μαζί; ______________

Είναι σωστό να πούμε ότι φύτεψε τον μισό κήπο με πιπεριές και πατάτες μαζί; ______________

Πόσα «δωδέκατα» είναι όλος ο κήπος; ______________

γ. Ποια λαχανικά μαζί καταλαμβάνουν:

▶ Το $\frac{1}{4}$ της επιφάνειας του κήπου; ______________ Εξηγώ: ______________

▶ Τα $\frac{3}{4}$ της επιφάνειας του κήπου; ______________ Εξηγώ: ______________

✓ Ο αριθμός που δηλώνει το μέρος ενός «όλου» ονομάζεται **κλάσμα.**

✓ Το κλάσμα σχηματίζεται από δύο φυσικούς αριθμούς, τον αριθμητή και τον παρονομαστή που χωρίζονται μεταξύ τους από την κλασματική γραμμή με τη μορφή: $\frac{\text{αριθμητής}}{\text{παρονομαστής}}$

✓ Το κλάσμα με αριθμητή το 1 λέγεται **κλασματική μονάδα.** π.χ. $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{7}$, ...

✓ Όταν ο αριθμητής ενός κλάσματος είναι μικρότερος από τον παρονομαστή, το κλάσμα είναι μικρότερο από το 1 και ονομάζεται **γνήσιο κλάσμα**. π.χ. $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, ...

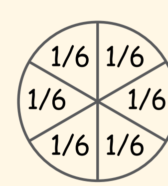
✓ Όταν ο αριθμητής είναι ίσος με τον παρονομαστή, το κλάσμα είναι ίσο με τη μονάδα. π.χ. $\frac{3}{3}$, $\frac{71}{71}$, ...

2 **Δύο φίλοι παράγγειλαν δύο πίτσες.**

▶ Τι μέρος της πίτσας περίσσεψε; ______________

Περίσσεψε λιγότερο ή περισσότερο από μία ολόκληρη πίτσα; ______________

Πώς λέγεται το κλάσμα που έγραψες; ______________



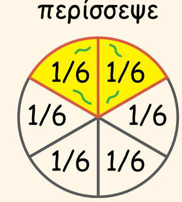
▶ Έφαγαν περισσότερο ή λιγότερο από μία ολόκληρη πίτσα; ______________

περίσσεψε

▶ Εκφράζω την ποσότητα της πίτσας που έφαγαν με δύο τρόπους:

α. Με κλάσμα ______________ Πώς λέγεται το κλάσμα που έγραψες; ______________

β. Με μεικτό αριθμό ______________



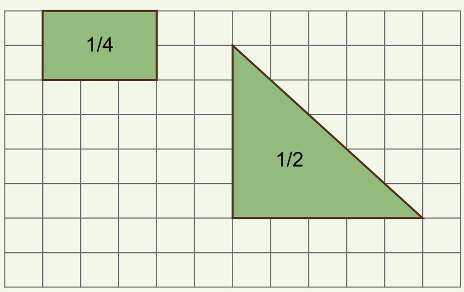
Συμπληρώνω την ισότητα: $\frac{10}{6} = ... + \frac{2}{3}$

✓ Όταν ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή το κλάσμα είναι μεγαλύτερο από τη μονάδα και λέγεται **καταχρηστικό κλάσμα.** Το καταχρηστικό κλάσμα μπορούμε να το μετατρέψουμε σε μεικτό αριθμό, δηλαδή ως άθροισμα ακέραιου αριθμού και κλάσματος.

Το κλάσμα ως μέρος του όλου

Εφαρμογές

1 **Τα παρακάτω σχήματα αποτελούν κλασματικά μέρη ενός όλου. Σχηματίζω το όλο.**



3/4

2 **α. Στον χώρο στάθμευσης ενός σούπερ μάρκετ κάποια στιγμή ήταν σταθμευμένα 45 αυτοκίνητα. Από αυτά τα 9 ήταν λευκού χρώματος.**

► Τι μέρος των αυτοκινήτων ήταν τα αυτοκίνητα λευκού χρώματος; ______________________

► Τι μέρος των αυτοκινήτων δεν ήταν λευκά; ______________________

β. Λίγο αργότερα αποχώρησαν 5 αυτοκίνητα από τα οποία κανένα δεν ήταν λευκού χρώματος και ήρθαν 14 αυτοκίνητα από τα οποία τα 9 ήταν λευκού χρώματος.

► Τι μέρος των αυτοκινήτων στον χώρο στάθμευσης τώρα είναι λευκού χρώματος; Εξηγώ:

____

► Ποια κλασματική μονάδα εκφράζει τον αριθμό των αυτοκινήτων λευκού χρώματος; Εξηγώ:

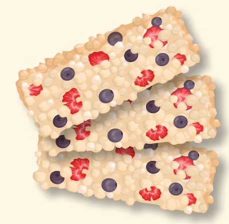
____

Ερωτήσεις Σ - Λ		
Τα καταχρηστικά κλάσματα μπορούν να γραφτούν ως μεικτοί αριθμοί.	Σ	Λ
Το κλάσμα 12/12 είναι ίσο με τη μονάδα.	Σ	Λ

2. Το κλάσμα ως πηλίκο διαίρεσης

Δραστηριότητες

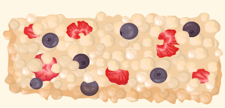
1 **Η γιαγιά αγόρασε 3 μπάρες ενέργειας για τα 4 εγγόνια της. Μπορώ να τη βοηθήσω να τις μοιράσει δίκαια;**

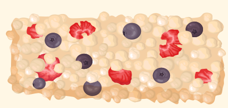


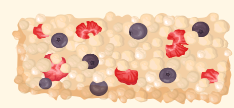
- Είναι αρκετές οι μπάρες για να πάρει το κάθε παιδί τον ίδιο αριθμό από ολόκληρες μπάρες; ______________________________
- Πόσες θα έπρεπε να είναι οι μπάρες, ώστε να πάρει το κάθε παιδί ακέραιο αριθμό από αυτές; ______________________________

Ένας συμμαθητής προτείνει να μοιράσουν χωριστά καθεμία από τις 3 μπάρες, στα 4 παιδιά. Συμφωνώ με τη σκέψη του; ______________________________

Δείχνω με κατακόρυφες γραμμές σε κάθε μπάρα, τα κομμάτια που πρέπει να χωριστεί και γράφω από κάτω τι μέρος της αντιστοιχεί σε κάθε παιδί.

 $\frac{...}{...}$

 $\frac{...}{...}$

 $\frac{...}{...}$

Τι μέρος της μπάρας συνολικά θα πάρει το κάθε παιδί; Συμπληρώνω: $\frac{...}{...} + \frac{...}{...} + \frac{...}{...} = \frac{...}{...}$

Συμπληρώνω το πηλίκο της διαίρεσης: **3 : 4** =

2 **Ο Μιχάλης και τα αδέλφια του, ο Νίκος και η Μαρία, ετοιμάζονται να φύγουν για το σχολείο τους. Η μητέρα τους έχει μοιράσει 1 λίτρο γάλα σε 3 ποτήρια ίσης χωρητικότητας.**

- Τι μέρος του λίτρου αντιστοιχεί στο κάθε παιδί; ____________

Συμπληρώνω το πηλίκο της διαίρεσης: 1 : 3 = $\frac{....}{....}$ λίτρα.

Γνωρίζω ότι το 1 λίτρο (L) είναι 1.000 χιλιοστόλιτρα (ml).

- Κάνω τη διαίρεση στο διπλανό πλαίσιο και υπολογίζω πόσα χιλιοστόλιτρα γάλα αντιστοιχούν σε κάθε παιδί.

1.000	3

- Είναι: 1.000 : 3 = ____________________ ml

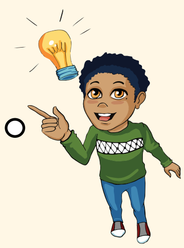
Επομένως 1 : 3 = 0,333 λίτρα (περίπου). **Οπότε** $\frac{1}{3}$ = 0,333

✓ Το κλάσμα εκφράζει το πηλίκο μιας διαίρεσης· της διαίρεσης του αριθμητή του (**Διαιρετέος**) με τον παρονομαστή του (**διαιρέτης**). π.χ. 3 : 5 = $\frac{3}{5}$

✓ Αν κάνουμε τη διαίρεση αυτή, μπορούμε να μετατρέψουμε το κλάσμα σε δεκαδικό αριθμό (ή σε φυσικό, αν η διαίρεση είναι τέλεια).

- ✓ Αν η διαίρεση δεν μας δίνει ακριβές πηλίκο, επιλέγουμε αν θέλουμε προσέγγιση στα δέκατα, εκατοστά, χιλιοστά και σταματάμε ανάλογα.
- ✓ Οι δεκαδικοί αριθμοί γράφονται και ως κλάσματα.

3 Πώς μετατρέπουμε καταχρηστικό κλάσμα σε μεικτό αριθμό;



- **Για να μετατρέψουμε ένα καταχρηστικό κλάσμα σε μεικτό αριθμό, διαιρούμε τον αριθμητή του κλάσματος με τον παρονομαστή.**
- **Το πηλίκο της διαίρεσης είναι ο ακέραιος του μεικτού αριθμού.**
- **Το κλάσμα του μεικτού αριθμού έχει αριθμητή το υπόλοιπο της διαίρεσης και παρονομαστή τον διαιρέτη.**

Έτσι $\frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}$, αφού $\frac{21}{4} = \frac{4}{4} + \frac{4}{4} + \frac{4}{4} + \frac{4}{4} + \frac{4}{4} + \frac{1}{4} = 5 + \frac{1}{4}$,

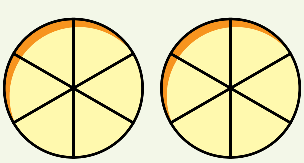
Μπορώ να το υπολογίσω και με διαίρεση.

✓ Κάθε κλάσμα μπορεί να μετατραπεί σε δεκαδικό, αν διαιρέσω τον αριθμητή με τον παρονομαστή.

Εφαρμογές

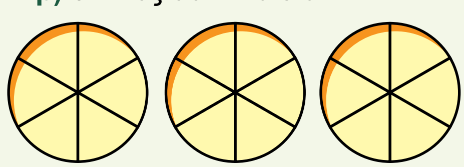
1 Χρωματίζω το μέρος της πίτας που θα πάρει το ένα παιδί αν μοιράσουμε:

α) 2 πίτες σε 3 παιδιά



2 : 3 = —

β) 3 πίτες σε 2 παιδιά



3 : 2 = —

2 Γράφω ως διαιρέσεις τα κλάσματα: $\frac{2}{3}$ = ______ , $\frac{5}{10}$ = ______ , $\frac{9}{18}$ = ______

Ερωτήσεις Σ - Λ		
Το κλάσμα εκφράζει το πηλίκο της διαίρεσης του αριθμητή του με τον παρονομαστή του.	Σ	Λ
Όλα τα καταχρηστικά κλάσματα μπορούν να γραφτούν ως μεικτοί αριθμοί.	Σ	Λ

3. Ισοδύναμα κλάσματα

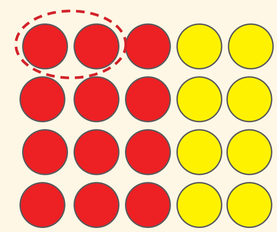
Δραστηριότητες

1 **Ο Νεκτάριος έχει στη συλλογή του 20 μαγνητικούς βόλους. Από αυτούς οι 12 έχουν κόκκινο χρώμα και οι 8 κίτρινο χρώμα.**

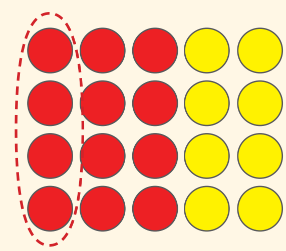
Οι κόκκινοι βόλοι είναι τα $\frac{3}{5}$ της συλλογής σου.

Οι κόκκινοι βόλοι είναι τα $\frac{12}{20}$ της συλλογής μου.

Μπορεί να έχουν και τα δύο παιδιά δίκιο;



- Τι μέρος της συλλογής του Νεκτάριου είναι οι κόκκινοι βόλοι; ______________
- Αν χωρίσουμε τους βόλους σε δυάδες βόλων, πόσες ομάδες θα φτιάξουμε;
 ____
- Τι μέρος της συλλογής είναι τώρα οι κόκκινοι βόλοι; ____________________

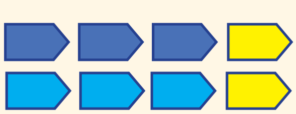


- Αν χωρίσουμε τους βόλους σε ομάδες των 4 βόλων, πόσες ομάδες μπορούμε να φτιάξουμε; ______________
- Τι μέρος της συλλογής είναι οι κόκκινοι βόλοι; ______________
- Με πόσους τρόπους μπορούμε να εκφράσουμε τους κόκκινους βόλους ως μέρος της συλλογής;
- Συμπληρώνω: $\frac{...}{...} = \frac{...}{...} = \frac{...}{...}$

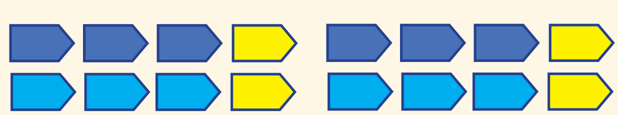
✓ Δύο κλάσματα λέγονται ισοδύναμα ή ίσα όταν εκφράζουν το ίδιο μέρος του όλου.

2 **Πώς δημιουργούμε ισοδύναμα κλάσματα;**

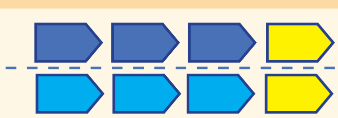
Οι κίτρινοι σελιδοδείκτες είναι τα $\frac{2}{8}$ των σελιδοδεικτών της Κικής.



$$\frac{2 \times 2}{8 \times 2} = \frac{4}{16}$$



✓ Αν πολλαπλασιάσουμε τους όρους ενός κλάσματος με τον ίδιο φυσικό αριθμό, παίρνουμε κλάσμα ισοδύναμο με το αρχικό κλάσμα.



$$\frac{2 : 2}{8 : 2} = \frac{1}{4}$$

✓ Αν διαιρέσουμε τους όρους ενός κλάσματος με έναν κοινό διαιρέτη τους, προκύπτει ισοδύναμο κλάσμα. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι κάνουμε **απλοποίηση** του κλάσματος.

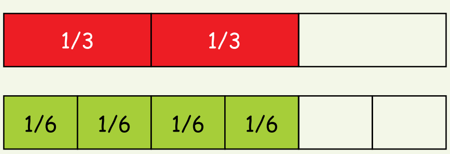
✓ Η διαίρεση των όρων ενός κλάσματος με το Μ.Κ.Δ. των όρων του δίνει ένα κλάσμα που δεν απλοποιείται περαιτέρω και λέγεται **ανάγωγο**. Στο ανάγωγο κλάσμα ο Μ.Κ.Δ. των όρων του είναι η μονάδα (το 1).

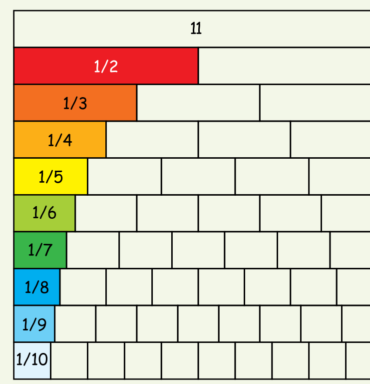
Το κλάσμα $\frac{5}{6}$ είναι ανάγωγο. Είναι Μ.Κ.Δ. (5 , 6) = 1

Ισοδύναμα κλάσματα

Εφαρμογές

1 **Παρατηρώντας προσεκτικά το σχήμα και χρησιμοποιώντας, αν θέλω, τον χάρακά μου βρίσκω ισοδύναμα κλάσματα. Για παράδειγμα,** $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$





____

2 **Τα παιδιά πήραν ως δώρο από τον παππού τους το ίδιο χρηματικό ποσό. Στον πίνακα φαίνεται τι μέρος των χρημάτων τους ξόδεψε ο καθένας. Δύο από αυτούς ξόδεψαν το ίδιο ποσό.**

Νίκος	Μαρία	Ελευθερία	Γιώργος
$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{10}$

Ποιοι είναι;

Εξηγώ: ____

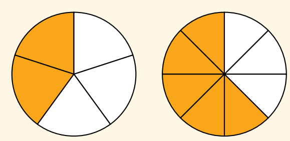
____

Ερωτήσεις Σ - Λ		
Ένα κλάσμα με όρους 5 και 7 δεν είναι ανάγωγο.	Σ	Λ
Τα ισοδύναμα κλάσματα αντιστοιχούν στο ίδιο σημείο της αριθμογραμμής.	Σ	Λ

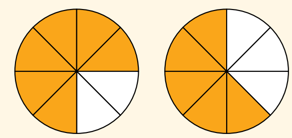
4. Σύγκριση και διάταξη κλασμάτων

Δραστηριότητες

1 **Συμπληρώνω τις ποσότητες της τυρόπιτας που έφαγε κάθε παιδί βάζοντας ανάμεσά τους το κατάλληλο σύμβολο (<, >).**



$\frac{\dots}{\dots}$ ☐ $\frac{\dots}{\dots}$



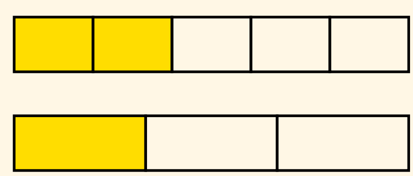
$\frac{\dots}{\dots}$ ☐ $\frac{\dots}{\dots}$

► Συμπληρώνω τα κενά με τις λέξεις **μικρότερο, μεγαλύτερο** έτσι, ώστε να προκύψουν σωστές προτάσεις.

✓ Από δύο ομώνυμα κλάσματα ________ είναι εκείνο που έχει τον μεγαλύτερο αριθμητή.

✓ Από δύο ετερώνυμα κλάσματα με ίσους αριθμητές ______________ είναι εκείνο που έχει τον μικρότερο παρονομαστή.

2 **Ο Κώστας έφαγε τα $\frac{2}{5}$ μιας σοκολάτας και ο Νίκος το $\frac{1}{3}$ μιας ίδιας σοκολάτας. Ποιος από τους δύο έφαγε περισσότερη σοκολάτα;**

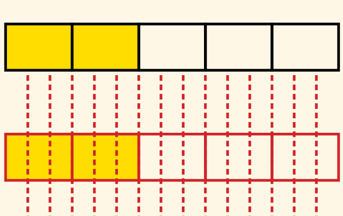


Τα κομμάτια της κάθε σοκολάτας είναι άνισα, δηλαδή οι κλασματικές μονάδες, ένα πέμπτο και ένα τρίτο, είναι διαφορετικές.

Για να πούμε ποιος έφαγε περισσότερη σοκολάτα, πρέπει να εκφράσουμε την ποσότητα σοκολάτας που έφαγε το κάθε παιδί με την ίδια κλασματική μονάδα.

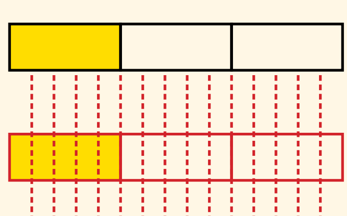
► Για να εκφράσουμε την ποσότητα της σοκολάτας που έφαγε το κάθε παιδί με την ίδια κλασματική μονάδα, μετατρέπουμε τα κλάσματα σε ισοδύναμα με τον ίδιο παρονομαστή.

$\frac{2}{5}$



$\frac{6}{15}$

$\frac{1}{3}$



$\frac{5}{15}$

Επειδή $\frac{6}{15} > \frac{5}{15}$ είναι $\frac{2}{5} > \frac{1}{3}$.

Τώρα τα κομμάτια κάθε σοκολάτας είναι ίσα. Η **κοινή μονάδα** είναι το $\frac{1}{15}$. Οι ποσότητες της σοκολάτας που έφαγε κάθε παιδί εκφράζονται τώρα με ομώνυμα κλάσματα.

✓ Η προηγούμενη διαδικασία, δηλαδή η μετατροπή ετερώνυμων κλασμάτων σε ομώνυμα, γίνεται πιο γρήγορα ως εξής:

▶ Βρίσκουμε ένα κοινό πολλαπλάσιο των παρονομαστών 5 και 3, για ευκολία το Ε.Κ.Π., που είναι το 15.

5 : 0, 5, 10, **15**, 20,… 3: 0, 3, 6, 9, 12, **15**, 18,…

▶ *Βρίσκουμε το πηλίκο της διαίρεσης του Ε.Κ.Π. με κάθε παρονομαστή.*

15 : 5 = 3 και **15** : 3 = 5

▶ *Πολλαπλασιάζουμε τους όρους κάθε κλάσματος με το αντίστοιχο πηλίκο.*

$$\frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{6}{15} \quad \text{και} \quad \frac{1 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{5}{15}$$

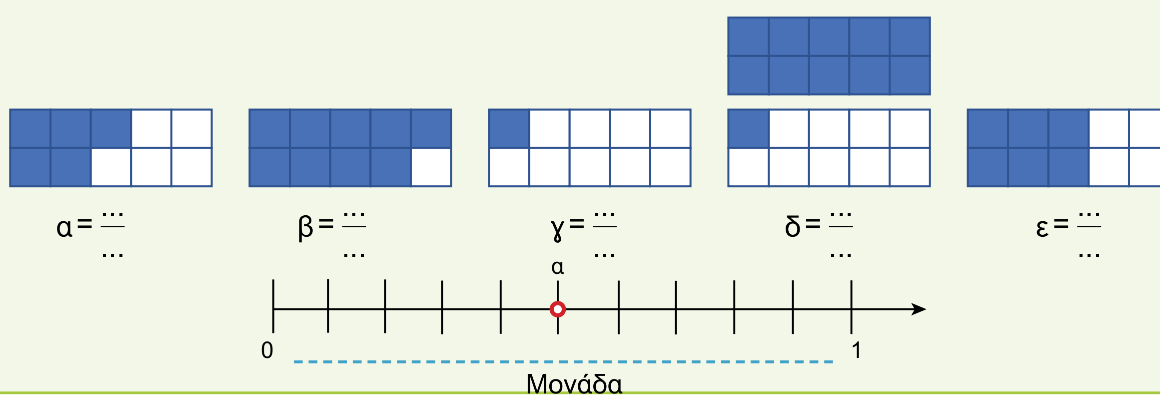
✓ Από δύο ομώνυμα κλάσματα μεγαλύτερο είναι εκείνο που έχει τον μεγαλύτερο αριθμητή.
✓ Από δύο ετερώνυμα κλάσματα με ίσους αριθμητές μεγαλύτερο είναι εκείνο που έχει τον μικρότερο παρονομαστή.
✓ Για να συγκρίνουμε ετερώνυμα κλάσματα τα μετατρέπουμε σε ομώνυμα.

Σύγκριση κλασμάτων

Σύγκριση και διάταξη κλασμάτων

Εφαρμογές

1 **Ποια από τα κλάσματα που εκφράζουν τα χρωματισμένα μέρη των σχημάτων είναι:**
1. Κοντά στο 0 : ____________ **2. Κοντά στο ½:** ____________ **3. Κοντά στο 1:** ____________



2 **Περιγράφω τη σχέση που έχουν οι όροι των κλασμάτων που είναι:**

α) Κοντά στο 0 : ***Ο παρονομαστής είναι πολύ μεγαλύτερος από τον αριθμητή.***

β) Κοντά στο $\frac{1}{2}$: ____

γ) Κοντά στο 1 : ____

Ερωτήσεις Σ - Λ		
Όταν σε ένα κλάσμα ο αριθμητής είναι πολύ μικρότερος από τον παρονομαστή, το κλάσμα είναι κοντά στο μηδέν.	**Σ**	**Λ**
Το κλάσμα 29/30 είναι πιο κοντά στο 1 από το κλάσμα 14/15.	**Σ**	**Λ**

5. Πρόσθεση και Αφαίρεση κλασμάτων

Δραστηριότητες

1 Ο Νίκος και ο Κώστας παρήγγειλαν από μία πίτσα ο καθένας

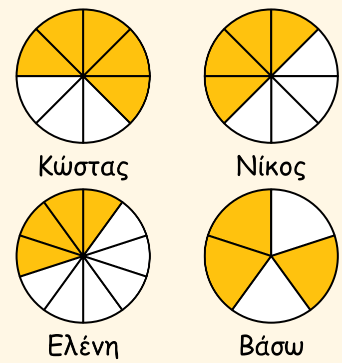
Τι μέρος της πίτσας έφαγε ο Κώστας; ________ Τι μέρος της πίτσας έφαγε ο Νίκος; ____________

Θα μπορούσαν να είχαν παραγγείλει μία μόνο πίτσα;

Εκτιμώ: ______________ Υπολογίζω: ________________

Τι μέρος της πίτσας παραπάνω, έφαγε το ένα παιδί;

Εκτιμώ: ______________ Υπολογίζω: ________________



Την ίδια παραγγελία έκαναν και η Ελένη με τη Βάσω.

Τι μέρος της πίτσας έφαγε η Ελένη; ________________________

Τι μέρος της πίτσας έφαγε η Βάσω; ________________________

Θα μπορούσαν να είχαν παραγγείλει μία μόνο πίτσα;

Εκτιμώ: ____

Εκφράζω με ισοδύναμα κλάσματα την ποσότητα της πίτσας που έφαγε:

α) η Ελένη: _________ **β)** η Βάσω: _________

Εκφράζω με μια αριθμητική παράσταση την ποσότητα της πίτσας που έφαγαν συνολικά τα δύο κορίτσια:

___________________________________ Την υπολογίζω με δύο τρόπους:

α΄ τρόπος: $\frac{6}{10} + \frac{2}{5} =$ ____________________ **β΄ τρόπος:** $\frac{6}{10} + \frac{2}{5} =$ ____________________

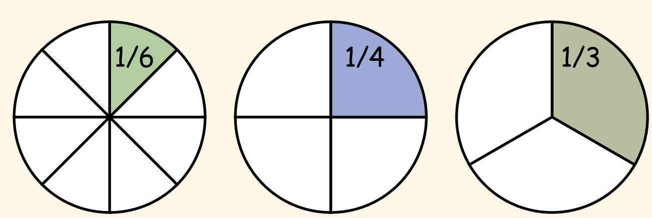
Τι έκανα κάθε φορά για να υπολογίσω την ποσότητα της πίτσας που έφαγαν συνολικά τα δύο κορίτσια;

____

- ✓ Για να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε ομώνυμα κλάσματα, προσθέτουμε ή αφαιρούμε αντίστοιχα τους αριθμητές τους και αφήνουμε τον ίδιο παρονομαστή.
- ✓ Για να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε ετερώνυμα κλάσματα, τα μετατρέπουμε πρώτα σε ομώνυμα.

2 Οι μαθητές της Στ΄ τάξης ανέλαβαν να κάνουν μια εργασία για το σχολείο τους.

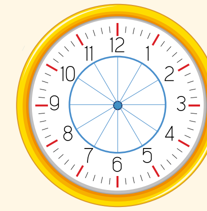
	Σάββατο	Κυριακή	Σύνολο ωρών
Ειρήνη Ραφαέλα	$2\frac{1}{3}$ ώρες	$1\frac{3}{4}$ ώρες	
Νεκτάριος Παύλος		$1\frac{5}{6}$ ώρες	$4\frac{5}{6}$ ώρες



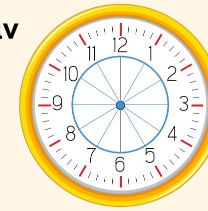
► Πόσες ώρες εργάστηκαν συνολικά το Σαββατοκύριακο η Ειρήνη και η Ραφαέλα;

Εκτιμώ με τη βοήθεια του ρολογιού: ________________________

Υπολογίζω: $2\frac{1}{3} + 1\frac{3}{4} = \frac{7}{3} + \frac{7}{4} =$ ________________________



Για την ίδια εργασία δύο συμμαθητές τους, ο Νεκτάριος και ο Παύλος, εργάστηκαν το Σαββατοκύριακο συνολικά $4\frac{5}{6}$ ώρες.



Ποια ομάδα μαθητών εργάστηκε περισσότερες ώρες και πόσες;

Εκτιμώ με τη βοήθεια του ρολογιού: ____________________________________

Υπολογίζω: ____

Πόσες ώρες εργάστηκαν το Σάββατο ο Νεκτάριος με τον Παύλο; Υπολογίζω με τον νου: ____________

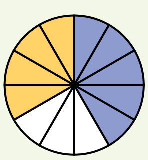
✓ Για να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε μεικτούς αριθμούς, μετατρέπουμε πρώτα τους μεικτούς σε καταχρηστικά κλάσματα.

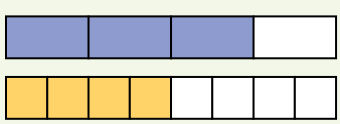
Πρόσθεση κλασμάτων

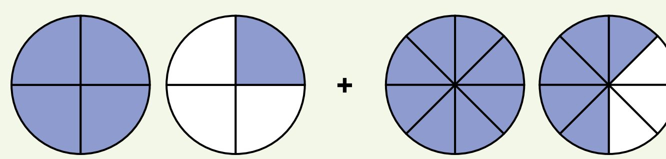
Αφαίρεση Κλασμάτων

Εφαρμογές

1 **Συμπληρώνω τα κλάσματα ή τους μεικτούς αριθμούς που δείχνουν τα χρωματισμένα μέρη των σχημάτων και βρίσκω νοερά το άθροισμά τους.**

α. 

β. 

γ. 

$\frac{...}{...} + \frac{...}{...} = \frac{...}{...}$ $\qquad$ $\frac{...}{...} + \frac{...}{...} = \frac{...}{...}$ $\qquad$ $...\frac{...}{...} + \frac{...}{...} = \frac{...}{...}$

2 Ο πατέρας του Παναγιώτη κάθε μέρα για να πάει στη δουλειά του διανύει $5\frac{1}{3}$ χιλιόμετρα.

Αρχικά περπατάει $\frac{1}{4}$ χιλιόμετρα μέχρι τη στάση του λεωφορείου, στη συνέχεια επιβιβάζεται στο λεωφορείο και όταν αποβιβάζεται περπατάει ακόμα 0,4 χιλιόμετρα μέχρι να φτάσει στη δουλειά του. Πόσα χιλιόμετρα διανύει με το λεωφορείο;

____

____

Ερωτήσεις Σ - Λ

Η ισότητα $\frac{2}{3} + \frac{5}{7} = \frac{7}{6}$ είναι σωστή;	Σ	Λ
Για να λύσω ένα πρόβλημα που οι αριθμοί του είναι δεκαδικοί, κλάσματα και μεικτοί, πρέπει πρώτα να τους μετατρέψω όλους στην ίδια μορφή.	Σ	Λ

6. Πολλαπλασιασμός και διαίρεση κλασμάτων

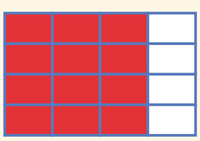
Δραστηριότητες

1 **Στην οικογένεια της Μαρίας είχαν μείνει τα $\frac{3}{4}$ ενός κέικ. Σήμερα έφαγαν το $\frac{1}{2}$ από το κέικ που είχε περισσέψει. Τι μέρος ολόκληρου του κέικ έφαγαν σήμερα;**

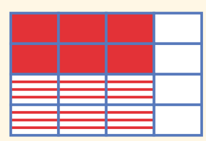
Πρέπει να βρούμε το $\frac{1}{2}$ των $\frac{3}{4}$ του κέικ.

Γνωρίζουμε ότι, για να βρούμε ένα μέρος μιας ποσότητας, πολλαπλασιάζουμε το μέρος με την ποσότητα, δηλαδή πρέπει να βρούμε το $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$.

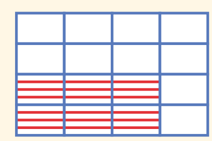
Μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας ένα μοντέλο. Το ορθογώνιο αναπαριστά το ορθογώνιο ταψί με το κέικ.



Το κέικ που είχε περισσέψει.



Τα ριγωτά μέρη είναι το κέικ που έφαγαν σήμερα, δηλαδή το $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$.



Τα ριγωτά μέρη είναι τα $\frac{3}{8}$ ολόκληρου του κέικ.

Επομένως είναι: το $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$, δηλαδή σήμερα έφαγαν τα $\frac{3}{8}$ ολόκληρου του κέικ.

Παρατηρώντας το μοντέλο γράφω τι μέρος του κέικ περίσσεψε για τις επόμενες μέρες: ______________

✓ Το γινόμενο δύο κλασμάτων είναι ένα κλάσμα που έχει αριθμητή το γινόμενο των αριθμητών και παρονομαστή το γινόμενο των παρονομαστών.

2 **Στα γενέθλιά του ο Γιώργος κέρασε αναψυκτικό όλους τους φίλους του από μια φιάλη χωρητικότητας $\frac{3}{2}$ λίτρα. Αν στον καθένα έβαλε $\frac{1}{6}$ του λίτρου και η φιάλη άδειασε, πόσοι ήταν οι καλεσμένοι του;**

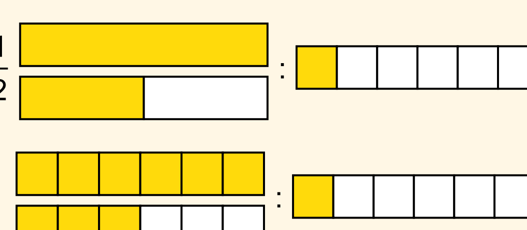
Για να απαντήσουμε στο πρόβλημα πρέπει να βρούμε το πηλίκο της διαίρεσης $\frac{3}{2} : \frac{1}{6}$

Περιγράφουμε την κατάσταση του προβλήματος με τις ράβδους των κλασμάτων.

Μετατρέποντας τα κλάσματα σε ομώνυμα η διαίρεση γίνεται: $\frac{9}{6} : \frac{1}{6}$ Είναι φανερό ότι $\frac{9}{6} : \frac{1}{6} = 9$. Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε διαιρώντας τους αριθμητές των ομώνυμων κλασμάτων, αφού 9 : 1 = 9.

$\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$: $\frac{1}{6}$

Είναι $\frac{9}{6}$: $\frac{1}{6}$



✓ Για να διαιρέσουμε δύο ομώνυμα κλάσματα διαιρούμε τους αριθμητές τους. π.χ. $\frac{6}{7} : \frac{5}{7} = 6 : 5 = \frac{6}{5}$

✓ Για να διαιρέσουμε δύο ετερώνυμα κλάσματα τα μετατρέπουμε σε ομώνυμα.

3 Η διαίρεση κλασμάτων διαφορετικά

Συγκρίνω τα αποτελέσματα των πράξεων και βάζω ανάμεσά τους το κατάλληλο σύμβολο (< , > , =).

$\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{8}{12} : \frac{9}{12} = 8:9 = \frac{8}{9}$ και $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{9}$ Δηλαδή: $\frac{2}{3} : \frac{4}{3}$ ... $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3}$

✓ Για να διαιρέσουμε δύο κλάσματα πολλαπλασιάζουμε τον διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.

Αντίστροφοι αριθμοί

Υπολογίζω τα γινόμενα:

$\frac{2}{4} \cdot \frac{4}{2} = ...$ $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3} = ...$ $2 \cdot \frac{1}{2} = ...$ Τι παρατηρώ; ______________________________

✓ Αντίστροφοι λέγονται δύο αριθμοί που το γινόμενό τους είναι 1.

Διαίρεση κλασμάτων ΙΙ

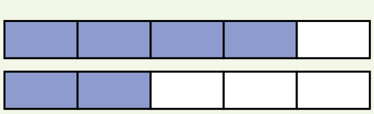
Πολλαπλασιασμός κλασμάτων

Εφαρμογές

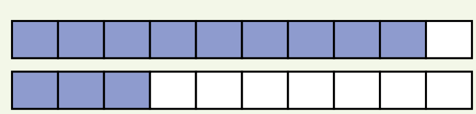
1 Κάνω τις πράξεις:

α) $\frac{6}{8} \cdot \frac{2}{3} = ...$ β) $\frac{3}{9} \cdot \frac{3}{3} = ...$ γ) $\frac{12}{15} : 2 = ...$ δ) $2 : \frac{1}{2} = ...$ στ) $\frac{6}{9} \cdot \frac{9}{6} = ...$

2 Συμπληρώνω τα πηλίκα της διαίρεσης:



$\frac{4}{5} : \frac{2}{5} = ...$



$\frac{9}{10} : \frac{3}{10} = ...$

Ερωτήσεις Σ - Λ		
Για να διαιρέσουμε ομώνυμα κλάσματα διαιρούμε τους αριθμητές τους	Σ	Λ
Τα $\frac{2}{3}$ μιας ποσότητας είναι μεγαλύτερο από την ποσότητα.	Σ	Λ

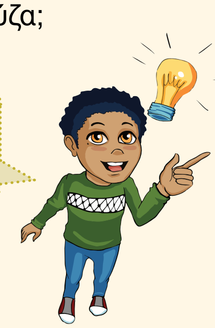
Δραστηριότητες

1 **Ο Νίκος και ο Γιώργος συγκέντρωσαν από 120 ευρώ ο καθένας στα γενέθλιά τους. Ο Νίκος ξόδεψε το $\frac{1}{4}$ των χρημάτων του για να αγοράσει ένα μπουφάν και το $\frac{1}{5}$ των υπολοίπων για μια μπλούζα. Ο Γιώργος ξόδεψε το $\frac{1}{5}$ των χρημάτων του για ένα παντελόνι και το $\frac{1}{4}$ των υπολοίπων για μια μπλούζα.**

▶ Ποια αριθμητική παράσταση εκφράζει τα χρήματα που ξόδεψε ο Νίκος για την μπλούζα;

Η παράσταση που εκφράζει τα χρήματα που ξόδεψε ο Νίκος για την μπλούζα είναι: $\left(\frac{1}{4} \cdot 120\right) \cdot \frac{1}{5}$

Διαφωνώ, η παράσταση είναι: $\left(\frac{3}{4} \cdot 120\right) \cdot \frac{1}{5}$



▶ Ποιο από τα δύο παιδιά έχει δίκιο; Συζητάμε.

▶ Γράφω με τη βοήθεια του δασκάλου μου/δασκάλας μου την αριθμητική παράσταση που εκφράζει τα χρήματα που ξόδεψε ο Γιώργος για τη δική του μπλούζα: ______________________

▶ Ποιο από τα δύο παιδιά αγόρασε την πιο ακριβή μπλούζα:

Εκτιμώ: ______________________

Υπολογίζω τις τιμές των δύο παραστάσεων και απαντώ:

______________________ ______________________

______________________ ______________________

______________________ ______________________

2 **Ποια από τις παρακάτω παραστάσεις έχει τη μικρότερη τιμή;**

Α. $1+\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{5}\right)$ **Β.** $1+\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)$ **Γ.** $1+\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{8}\right)$

Όσο μεγαλύτερος είναι ο αφαιρετέος, τόσο μικρότερη είναι η διαφορά!

Εκτιμώ: ______________________

Συζητάμε στην τάξη!

Υπολογίζω: ______________________

____

- ✓ Στις αριθμητικές παραστάσεις με κλασματικούς αριθμούς ακολουθούμε την προτεραιότητα των πράξεων όπως τη γνωρίζουμε από την ενασχόλησή μας με τους φυσικούς αριθμούς.
- ✓ Στους υπολογισμούς με κλασματικούς αριθμούς ισχύουν οι ιδιότητες των πράξεων όπως τις γνωρίζουμε από τους φυσικούς αριθμούς (αντιμεταθετική ιδιότητα, προσεταιριστική ιδιότητα, επιμεριστική ιδιότητα).

Εφαρμογές

1

Υπολογίζω νοερά και κυκλώνω την τιμή της παράστασης $\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{4}+\frac{6}{7}\cdot\frac{7}{6}$:

Α. 1 **Β.** 4 **Γ.** 2 **Δ.** 10

Εξηγώ τον τρόπο που σκέφτηκα: ____

____

____

2

Υπολογίζω την τιμή της παράστασης $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)$ με δύο τρόπους:

α΄ τρόπος	β΄ τρόπος
Εφαρμόζω την προτεραιότητα των πράξεων	**Εφαρμόζω την επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση**
______________________________	______________________________
______________________________	______________________________
______________________________	______________________________

Ερωτήσεις Σ - Λ

Ισχύει ότι: $\frac{6}{7}+\frac{3}{8}=\frac{3}{8}+\frac{6}{7}$	Σ	Λ
Η τιμή της παράστασης $100-\left(\frac{8}{9}-\frac{8}{9}\right)$ είναι ίση με 99.	Σ	Λ

8. Επίλυση Προβλημάτων

Δραστηριότητες

1 **Η κορδέλα που χρησιμοποιεί η Μαρία στο άθλημα της ρυθμικής γυμναστικής έχει χρώμα κόκκινο και γαλάζιο. Το κόκκινο τμήμα της είναι τα $\frac{3}{5}$ του μήκους της κορδέλας και είναι 180 εκ. μεγαλύτερο από το γαλάζιο τμήμα της. Πόσα εκατοστά είναι κάθε τμήμα της; Πόσο είναι το μήκος της κορδέλας της;**

▶ Χρωματίζω κατάλληλα τα τμήματα της κορδέλας

Τι μέρος της κορδέλας έχει:
α. κόκκινο χρώμα; ______________________
β. γαλάζιο χρώμα; ______________________

▶ Ποιο χρώμα καλύπτει το μεγαλύτερο τμήμα της κορδέλας; ____________________

Πόσα εκατοστά είναι μεγαλύτερο; ____________

Τι μέρος της κορδέλας είναι το τμήμα αυτό; ______

▶ Συμπληρώνω: Το $\frac{1}{5}$ της κορδέλας είναι _____ εκ.

Βρίσκω τώρα το μήκος κάθε τμήματος της κορδέλας.

α. Τα $\frac{...}{5}$ της κορδέλας (κόκκινο τμήμα) είναι ____ εκ.

β. Τα $\frac{...}{5}$ της κορδέλας (γαλάζιο τμήμα) είναι ____ εκ.

Υπάρχουν προβλήματα που μπορούμε να τα λύσουμε κάνοντας **αναγωγή στην κλασματική μονάδα.**

Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της αναγωγής στην κλασματική μονάδα, όταν:
- ✓ Γνωρίζουμε το όλο και θέλουμε να βρούμε ένα κλασματικό του μέρος.
- ✓ Γνωρίζουμε ένα κλασματικό μέρος του όλου και θέλουμε να βρούμε: α) τα όλο β) ένα άλλο κλασματικό μέρος του όλου.

2 **Ένας κτηνίατρος συνέστησε στη Φανή να βάλει τη γάτα της σε δίαιτα. Την πρώτη εβδομάδα η γάτα έχασε $\frac{3}{4}$ του κιλού. Τη δεύτερη εβδομάδα πήρε $1\frac{1}{5}$ του κιλού. Την τρίτη εβδομάδα έχασε $1\frac{3}{4}$ του κιλού. Εάν το βάρος της γάτας μετά από τρεις εβδομάδες είναι 6 κιλά, πόσο ζύγιζε η γάτα πριν αρχίσει τη δίαιτα;**

Με ένα σχήμα περιγράφω την κατάσταση του προβλήματος.

Σε άλλα προβλήματα δουλεύουμε ξεκινώντας από το τέλος προς την αρχή.

Το βάρος της γάτας πριν αρχίσει τη δίαιτα.		Το βάρος της μετά την 1η εβδομάδα.		Το βάρος της μετά τη 2η εβδομάδα.		Το βάρος μετά την 3η εβδομάδα
;	$-\frac{3}{4}$ κ.	;	$+1\frac{1}{5}$ κ.	;	$-1\frac{3}{4}$ κ.	6 κ.

Ξεκινώντας από το τέλος και κάνοντας την αντίστροφη πράξη κάθε φορά βρίσκουμε διαδοχικά το βάρος της γάτας πριν την 3η εβδομάδα, πριν τη 2η εβδομάδα, και τέλος, πόσο βάρος είχε η γάτα στην αρχή πριν αρχίσει τη δίαιτα.

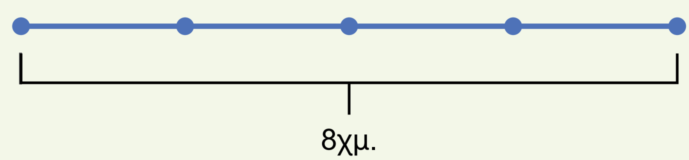
Το βάρος της γάτας πριν αρχίσει η δίαιτα.		Το βάρος της πριν τη 2η εβδομάδα.		Το βάρος της πριν την 3η εβδομάδα.		
$\boxed{}$	$+\frac{3}{4}$ κ.	$6\frac{11}{20}$ κ.	$-1\frac{1}{5}$ κ.	$7\frac{3}{4}$ κ.	$+1\frac{3}{4}$ κ.	6 κ.

✓ Μπορώ να λύσω κάποια προβλήματα ακολουθώντας αντίστροφη πορεία, δηλαδή ξεκινώντας από το τέλος και αναιρώντας μία μία τις πράξεις εφαρμόζοντας τις αντίστροφές τους.

Εφαρμογές

1 Ο πατέρας του Βασίλη για να πάει στη δουλειά του διανύει καθημερινά 8 χιλιόμετρα. Καλύπτει το $\frac{1}{4}$ της απόστασης περπατώντας. Πόσα χιλιόμετρα διανύει με τα πόδια πηγαινοερχόμενος καθημερινά στη δουλειά του;

Πολλές φορές κάνω ένα σχήμα, ενώ άλλες φορές υπολογίζω νοερά.



2 **Η Αμαλία έχει κάποια τροφή σε κονσέρβες για σκύλους. Ταΐζει τον σκύλο της $1\frac{1}{4}$ της κονσέρβας κάθε μέρα. Αν έχει αποθηκευμένες $8\frac{3}{4}$ της κονσέρβας τροφές, για πόσες ημέρες θα διαρκέσει το φαγητό;**

Υπολογίζω νοερά: ______________________________

Υπολογίζω με ακρίβεια επιλύοντας το πρόβλημα.

Ερωτήσεις Σ - Λ

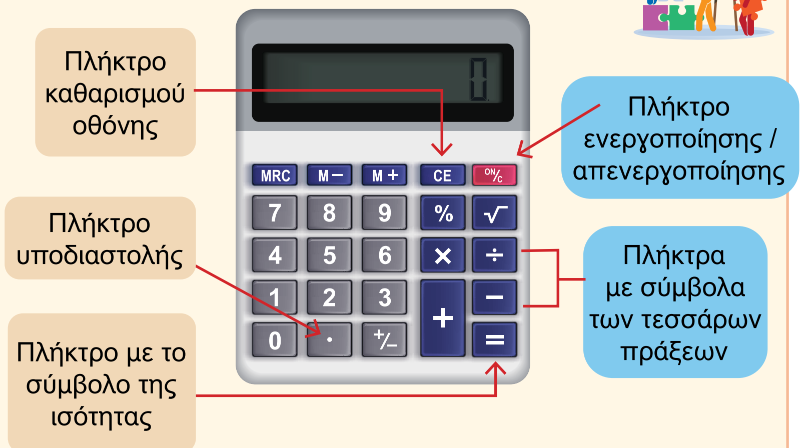
Η μέθοδος της αντίστροφης πορείας βασίζεται στο ότι οι πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, αλλά και του πολλαπλασιασμού και της τέλειας διαίρεσης είναι αντίστροφες.	Σ	Λ
Αν γνωρίζω το 15% μιας ποσότητας με αναγωγή στην κλασματική μονάδα μπορώ να βρω το 100% της ποσότητας.	Σ	Λ

9. Χρήση αριθμομηχανής

Δραστηριότητες

1 Μαθαίνω να χρησιμοποιώ την αριθμομηχανή

Ο υπολογιστής τσέπης - αριθμομηχανή - είναι ένα εργαλείο το οποίο έχει σχεδιαστεί ώστε να διευκολύνει την ανάγκη για γρήγορες αριθμητικές πράξεις, αλλά και για επαλήθευση των αποτελεσμάτων μας.



Οι επιστημονικές αριθμομηχανές έχουν περισσότερα πλήκτρα για την εκτέλεση πιο πολύπλοκων λειτουργιών. Παράδειγμα αποτελεί η επιστημονική αριθμομηχανή που φαίνεται στη διπλανή εικόνα.

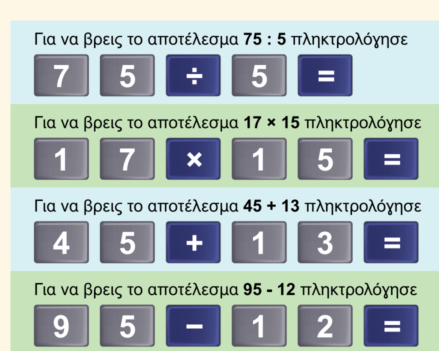
Τα πλήκτρα της μνήμης	
Το πλήκτρο **M+** προσθέτει διαδοχικά μέσα στη μνήμη τους αριθμούς που βάζουμε.	Το πλήκτρο **M-** αφαιρεί διαδοχικά μέσα στη μνήμη τους αριθμούς που βάζουμε.
Το πλήκτρο **MR** εμφανίζει τον αριθμό που υπάρχει αυτή τη στιγμή στη μνήμη.	Το πλήκτρο **MC** «αδειάζει» τη μνήμη.

✓ Το πλήκτρο **x^2** υπολογίζει τη δεύτερη δύναμη ενός αριθμού. Για παράδειγμα, για να υπολογίσω τη δύναμη 5^2 πιέζω με τη σειρά τα πλήκτρα 5 και x^2.

2

Πιέζω με τη σειρά τα πλήκτρα που φαίνονται στη διπλανή εικόνα και συμπληρώνω το αποτέλεσμα κάθε πράξης.

α. 75 : 5 = __________
β. 17 × 15 = __________
γ. 45 + 13 = __________
δ. 95 – 12 = __________



Εφαρμογές

Αξιοποιώντας τα πλήκτρα Μ+ και Μ- στον υπολογισμό αριθμητικών παραστάσεων με παρενθέσεις

1 Βρίσκω την τιμή της αριθμητικής παράστασης (12 + 69) + 25 : 5

Με χαρτί και μολύβι		**Με χρήση αριθμομηχανής**	
(12 + 69) + 25 : 5 =	Προηγείται η παρένθεση	Πληκτρολογώ **12 + 69 = M+**	Το άθροισμα (81) αποθηκεύτηκε στη μνήμη.
81 + 25 : 5 =	Προηγείται η διαίρεση	Πληκτρολογώ **25 : 5 = M+**	Το πηλίκο (5) αποθηκεύτηκε στη μνήμη και προστέθηκε στο 81.
81 + 5 = 86	Κάνω την πρόσθεση	Πληκτρολογώ **MR**	Η τιμή της παράστασης (86) ανακαλείται από τη μνήμη.

Για τον υπολογισμό της παράστασης πληκτρολογήσαμε διαδοχικά:

12 + 69 = M + 25 : 5 = M + MR

2 Βρίσκω την τιμή της παράστασης $2^2 + 3^2 + 4^2$

Με χαρτί και μολύβι		**Με χρήση αριθμομηχανής**	
$2^2 + 3^2 + 4^2 =$	Προηγούνται οι δυνάμεις	Πληκτρολογώ **$2x^2$ M+**	Η τιμή της δύναμης 2^2 (4) αποθηκεύτηκε στη μνήμη.
4 + 9 + 16 =	Κάνω την πρόσθεση	Πληκτρολογώ **$3x^2$ M+**	Η τιμή της δύναμης 3^2 (9) αποθηκεύτηκε στη μνήμη και προστέθηκε στο 4.
		Πληκτρολογώ **$4x^2$ M+**	Η τιμή της παράστασης 4^2 (16) αποθηκεύτηκε στη μνήμη και προστέθηκε στο 13 (4 + 9).
		Πληκτρολογώ **MR**	Η τιμή της παράστασης ανακαλείται από τη μνήμη.

Για τον υπολογισμό της παράστασης πληκτρολογήσαμε διαδοχικά:

12 + 69 = M + 25 : 5 = M + MR

3 Υπολογίζω την τιμή της παράστασης $6^2 + (8 - 2) - 2$ και στη συνέχεια με την αριθμομηχανή ελέγχω το αποτέλεσμα.

Ερωτήσεις Σ - Λ		
Το πλήκτρο Μ+ προσθέτει τους αριθμούς που βρίσκονται στη μνήμη.	Σ	Λ
Χρησιμοποιούμε το πλήκτρο με την τελεία, για να διαχωρίσουμε το ακέραιο από το δεκαδικό μέρος ενός δεκαδικού αριθμού.	Σ	Λ

Ενότητα 2 **Επαναληπτικό**

1

Συμπληρώνω τα κενά:

α. $\frac{2}{3} + 0 =$ ________ **β.** $\frac{5}{6} \cdot 1 =$ ________ **γ.** $\frac{4}{4} : \frac{4}{3} =$ ________ **δ.** $\frac{10}{15} : \frac{15}{10} =$ ________

2

Κυκλώνω την τιμή της αριθμητικής παράστασης: $\left(\frac{6}{3} + 3\right) - \left(1 + \frac{5}{6} + \frac{2}{12}\right)$

α. 2 **β.** 4 **γ.** 5 **δ.** 3

3

Υπογραμμίζω την αριθμητική παράσταση που έχει τη μεγαλύτερη τιμή χωρίς να κάνω πράξεις.

α. $\left(10 + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{6}$ **β.** $\left(10 + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2}$ **γ.** $\left(10 + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{5}$

Εξηγώ:

____

____

____

4

Η απόσταση Λάρισα – Βόλος είναι 60χμ. Το α΄ αυτοκίνητο έχει διανύσει τα $\frac{7}{12}$ της απόστασης και το β΄ αυτοκίνητο έχει διανύσει τα $\frac{8}{15}$ της απόστασης. Ποιο αυτοκίνητο έχει διανύσει μεγαλύτερη απόσταση;

- Συμπλήρωσε τον πίνακα αυτοαξιολόγησης, με οριζόντια σειρά, στα κεφάλαια που αναφέρονται στο επαναληπτικό της ενότητας.
- Μετά τη συμπλήρωση κράτησε σημειώσεις για να συζητήσεις για «όσα έμαθες» και για «αυτά που θα ήθελες να μάθεις περισσότερο».

Πίνακας Αυτοαξιολόγησης

Ενότητα 3

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΛΟΓΟΙ – ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ

1. **Άγνωστοι και μεταβλητές (Αλ.Π.6.2.)**
2. **Επίλυση Εξισώσεων – Πρόσθεση και Αφαίρεση (Αλ.Σχ.6.1.)**
3. **Επίλυση Εξισώσεων – Πολλαπλασιασμός και Διαίρεση (Αλ.Σχ.6.1.)**
4. **Το κλάσμα ως λόγος (Αρ.Ρ.6.1.)**
5. **Αναλογίες (Αρ.Ρ.6.4.)**
6. **Ανάλογα ποσά (Αρ.Ρ.6.4.)**
7. **Αντιστρόφως ανάλογα ποσά (Αρ.Ρ.6.4.)**
8. **Λύνω προβλήματα με ανάλογα και αντιστρόφως ανάλογα ποσά (Αρ.Ρ.6.4.)**
9. **Η έννοια του ποσοστού (Αρ.Ρ.6.2)**
10. **Η εύρεση της τελικής και της αρχικής τιμής (Αρ.Ρ.6.7.)**
11. **Βρίσκω το ποσοστό στα εκατό (%) (Αρ.Ρ.6.2)**

Άλγεβρα/Συναρτήσεις - Αλγεβρικές παραστάσεις - Αλγεβρικές σχέσεις

Θα μάθω να:

- Διερευνώ την έννοια του αγνώστου και της μεταβλητής.
- Χρησιμοποιώ γράμματα ως αγνώστους σε απλές εξισώσεις πρόσθεσης και αφαίρεσης και τις επιλύω μέσω αντιστρόφων πράξεων.
- Χρησιμοποιώ γράμματα ως αγνώστους σε απλές εξισώσεις πολλαπλασιασμού και διαίρεσης και τις επιλύω μέσω αντίστροφων πράξεων.
- Χρησιμοποιώ γράμματα ως αγνώστους και μεταβλητές για να συμβολίσω άγνωστα μεγέθη σε προβλήματα, σχηματίζω εξισώσεις και τις λύνω.
- Ερμηνεύω το κλάσμα ως λόγο.
- Συγκρίνω μεγέθη και εκφράζω τη σχέση τους με λόγο.
- Κατανοώ την έννοια της αναλογίας.
- Βρίσκω τον άγνωστο όρο μιας αναλογίας.
- Επιλύω προβλήματα σχηματίζοντας αναλογίες.
- Διερευνώ την έννοια των ανάλογων ποσών – Λύνω προβλήματα με ανάλογα ποσά. Διερευνώ την έννοια των αντιστρόφως ανάλογων ποσών – Λύνω προβλήματα με αντιστρόφως ανάλογα ποσά.
- Κατανοώ το ποσοστό ενός ποσού ως μέρος του ποσού.
- Κατανοώ τη σχέση μεταξύ κλάσματος, ποσοστού και δεκαδικού αριθμού.
- Εκφράζω ποσοστά στα 100(%) με κλάσμα και δεκαδικό αριθμό.
- Κατανοώ τη σχέση μεταξύ αρχικής τιμής, ποσοστού και τελικής τιμής ενός ποσού.
- Βρίσκω το ποσοστό στα εκατό (%) σε προβλήματα ποσοστών.

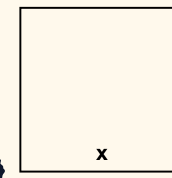
Λέξεις κλειδιά

άγνωστος	μεταβλητή	εξίσωση	αντίστροφες πράξεις	ανάλογα ποσά
αναλογία	αντιστρόφως ανάλογα ποσά	ποσοστά στα (%)	αρχική τιμή	τελική τιμή

1. Άγνωστοι και μεταβλητές

Δραστηριότητες

1 **Το τετράγωνο του διπλανού σχήματος έχει άγνωστη πλευρά και περίμετρο 16 εκ.**

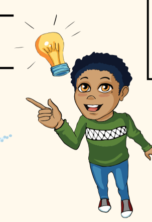


- Συμβολίζω την άγνωστη πλευρά με το γράμμα x και γράφω την εξίσωση που εκφράζει την περίμετρο του τετράγωνου: ______________________________

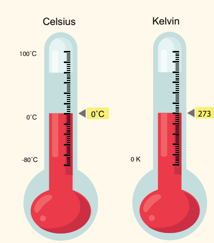
- Λύνω την εξίσωση και υπολογίζω την πλευρά του τετράγωνου: ____________

____

Η τιμή του x είναι συγκεκριμένη.



2 **Τη θερμοκρασία στη χώρα μας, τη μετράμε σε βαθμούς Κελσίου. Ωστόσο, σε άλλες χώρες η μονάδα μέτρησης της θερμοκρασίας είναι οι βαθμοί Κέλβιν. Η σχέση των δύο μονάδων μέτρησης είναι:**



Βαθμοί Κέλβιν = Βαθμοί Κελσίου + 273

Συμπληρώνω τον πίνακα:

Βαθμοί Κελσίου	Βαθμοί Κέλβιν
10°	10 + 273 = 283
20°	... + 273 = ...
30°	... + 273 = ...
40°	... + 273 = ...

Αν συμβολίσω με το γράμμα x τους βαθμούς Κελσίου, ποια μορφή παίρνει η παραπάνω σχέση; Συμπληρώνω:

Βαθμοί Κέλβιν = ... + 273

Δίνω δύο διαφορετικές τιμές στο x και βρίσκω κάθε φορά τη θερμοκρασία σε βαθμούς Κέλβιν:

α. Για x = ... είναι Βαθμοί Κέλβιν = ...

β. Για x = ... είναι Βαθμοί Κέλβιν = ...

Στη σχέση αυτή κάθε φορά η τιμή του x μεταβάλλεται.

Το γράμμα που χρησιμοποιείται σε μια παράσταση στη θέση μιας τιμής άγνωστης ή μεταβαλλόμενης λέγεται **μεταβλητή** και η παράσταση λέγεται αλγεβρική.

Άγνωστοι και μεταβλητές

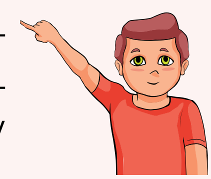
Εφαρμογή

1 **Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται η διάρκεια μιας ημέρας σε κάποιους πλανήτες του ηλιακού μας συστήματος σε ώρες.**

Πλανήτης	Γη	Άρης	Δίας	Κρόνος	Ουρανός	Ποσειδώνας
Διάρκεια 1 ημέρας σε ώρες	**24**	**25**	**10**	**11**	**17**	**16**

(πηγή: Αμερικανική Διαστημική Εταιρεία NASA)

- Πόσες ημέρες αντιστοιχούν σε 120 ώρες στη Γη; ______________________________
- Πόσες ημέρες αντιστοιχούν σε 96 ώρες στον Ποσειδώνα; ________________________
- Ένας μαθητής πρότεινε να φτιάξει έναν πίνακα, για να απαντήσει στην ερώτηση. Τον βοηθώ να τον συμπληρώσει:



Αριθμός ημερών	**Αριθμός ωρών στη Γη**	**Αριθμός ωρών στον Ποσειδώνα**
1	$1 \cdot 24 = \ldots$	$1 \cdot 16 = 16$
2	$2 \cdot 24 = \ldots$	$2 \cdot 16 = \ldots$
3	$3 \cdot 24 = \ldots$	
4		
5		
6		

- Αν συμβολίσουμε με x τον αριθμό των ημερών, ποια σχέση υπάρχει ανάμεσα στον αριθμό των ημερών και τις ώρες:

α. στη Γη; **β.** στον Ποσειδώνα;

Αριθμός ωρών στη Γη = _____________	Αριθμός ωρών στον Ποσειδώνα =___________

- Αξιοποιώ τις παραπάνω σχέσεις και βρίσκω τον αριθμό των ωρών στη Γη και τον Ποσειδώνα αντίστοιχα για μια οποιαδήποτε τιμή του x.

Για x = _____________

Αριθμός ωρών στη Γη = _____________	Αριθμός ωρών στον Ποσειδώνα =___________

Ερωτήσεις Σ - Λ		
Η μεταβλητή ορίζει πάντα ένα συγκεκριμένο μέγεθος στο πρόβλημα που χρησιμοποιείται.	Σ	Λ
Η χρήση των μεταβλητών επεκτείνεται και σε άλλες επιστήμες, όπως στη Γεωμετρία και τη Φυσικη.	Σ	Λ

2. Επίλυση Εξισώσεων - Πρόσθεση και Αφαίρεση

Δραστηριότητες

1 **Ο Θανάσης έχει τρία κοντομάνικα και πέντε μακρυμάνικα πουκάμισα. Ο Κώστας έχει τον ίδιο αριθμό από πουκάμισα, αλλά έχει τέσσερα κοντομάνικα. Πόσα μακρυμάνικα πουκάμισα έχει ο Κώστας;**

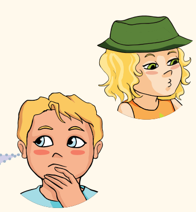
- ► Ποια παράσταση εκφράζει τον αριθμό των πουκαμίσων που έχει ο Θανάσης; Συμπληρώνω: … + …
- ► Αν συμβολίσουμε με ένα γράμμα, έστω x, τον άγνωστο αριθμό από μακρυμάνικα πουκάμισα που έχει ο Κώστας, ποια παράσταση εκφράζει τον αριθμό των πουκάμισων του; Συμπληρώνω: … + …
- ► Αφού τα παιδιά έχουν τον ίδιο αριθμό από πουκάμισα, οι δύο παραστάσεις έχουν την ίδια τιμή. Επομένως: $x + 4 = 3 + 5$ ή $x + 4 = 8$.

✓ Μια ισότητα, όπως η $x + 4 = 3 + 5$, που περιέχει έναν άγνωστο αριθμό x, ονομάζεται **εξίσωση**.
✓ Η παράσταση στα αριστερά $x + 4$ λέγεται πρώτο μέλος της εξίσωσης, ενώ η παράσταση στα δεξιά, $3 + 5$ λέγεται δεύτερο μέλος της εξίσωσης.

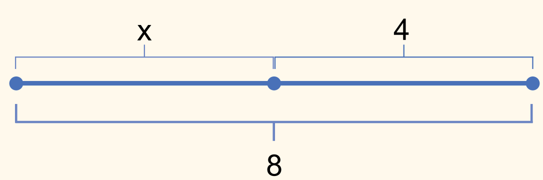
Βρίσκουμε τον άγνωστο αριθμό x

Η σκέψη του Νίκου

Γνωρίζουμε ότι οι πράξεις της πρόσθεσης και αφαίρεσης είναι αντίστροφες. Επομένως: $x = 8 - 4$ ή $x = 4$.



Η σκέψη της Μαρίας



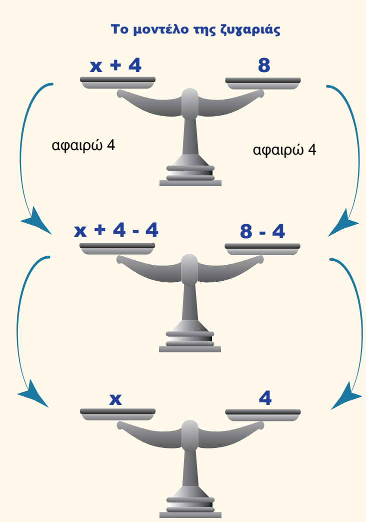
Η τιμή του $x = 8 - 4 = 4$

Άρα ο Κώστας έχει 4 μακρυμάνικα πουκάμισα.

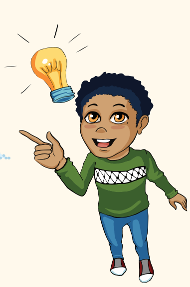
✓ Λύνω μια εξίσωση σημαίνει να βρω την τιμή του άγνωστου αριθμού x.

Συζητάμε άλλους τρόπους για την εύρεση του άγνωστου αριθμού x.

Με τη βοήθεια του δασκάλου μου ή της δασκάλας μου συζητάμε το διπλανό σχήμα που δείχνει έναν διαφορετικό τρόπο να βρούμε τον άγνωστο αριθμό x σε μια εξίσωση περνώντας από διαδοχικές καταστάσεις ισορροπίας της ζυγαριάς. **Στόχος μας είναι να απομονώσουμε το x.**



Μια ζυγαριά σε ισορροπία εξακολουθεί να ισορροπεί αν προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε και από τους δύο ζυγούς τις ίδιες ποσότητες.



2 **Από μια καρτέλα με αυτοκόλλητα η Ισμήνη χρησιμοποίησε τα 14 και της έμειναν 15. Πόσα αυτοκόλλητα είχε αρχικά η καρτέλα;**

Αν συμβολίσουμε με x τον άγνωστο αριθμό αυτοκόλλητων, ποια παράσταση εκφράζει τον αριθμό των αυτοκόλλητων που απέμειναν; ______________________________

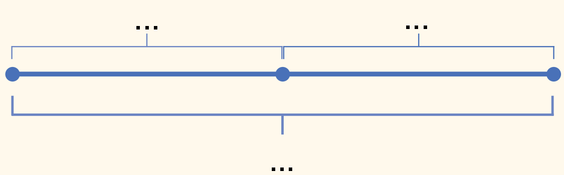
Πόσα αυτοκόλλητα απέμειναν; ______________________________

Σχηματίζω την εξίσωση που περιγράφει την κατάσταση του προβλήματος ... = ... – ...

συμπληρώνοντας τα δύο μέλη της:

Λύνω την εξίσωση

Εργάζομαι όπως η Μαρία

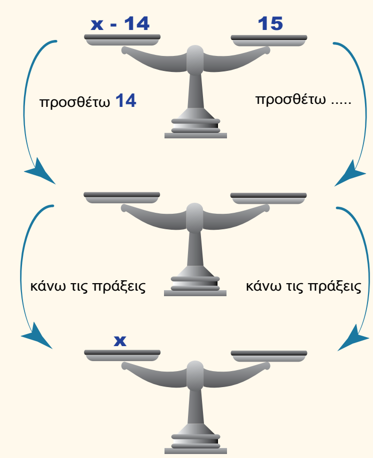


Η τιμή του x = ... – ... = ...

Αρχικά η καρτέλα είχε ______ αυτοκόλλητα.

Συμπληρώνω τη ζυγαριά

Το μοντέλο της ζυγαριάς



Πώς μπορούμε να ελέγξουμε αν η τιμή του x που βρήκαμε είναι σωστή; Συζητάμε.

- ✓ Όταν σε μια εξίσωση ο άγνωστος έχει τη θέση προσθετέου, για να τη λύσω αφαιρώ από το άθροισμα τον γνωστό προσθετέο.
- ✓ Όταν ο άγνωστος είναι ο μειωτέος, για να λύσω την εξίσωση προσθέτω στη διαφορά τον αφαιρετέο.
- ✓ Όταν ο άγνωστος είναι ο αφαιρετέος, για να λύσω την εξίσωση αφαιρώ από τον μειωτέο τη διαφορά.

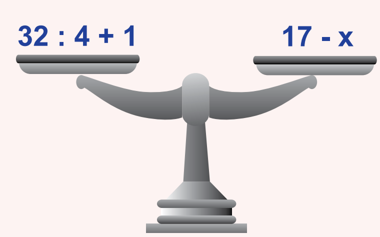
Εφαρμογή

1 **Σχηματίζω την εξίσωση που αναπαριστά η ζυγαριά και κατόπιν τη λύνω.**

____

____

____



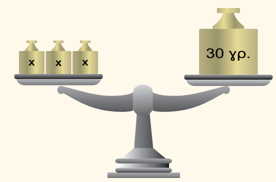
Ερωτήσεις Σ - Λ		
Η λύση της εξίσωσης x – 10 = 21 είναι x = 11.	Σ	Λ
Η λύση της εξίσωσης x + 10 = 10 είναι το 0.	Σ	Λ

3. Επίλυση Εξισώσεων – Πολλαπλασιασμός και Διαίρεση

Δραστηριότητες

1

Σε ένα τμήμα της Στ΄ τάξης ενός δημοτικού σχολείου η δασκάλα πρόβαλε στον πίνακα τη διπλανή ζυγαριά που ισορροπεί και ζήτησε από τους μαθητές να γράψουν στο τετράδιό τους την εξίσωση που εκφράζει. Στη συνέχεια ομαδοποίησε τις απαντήσεις των μαθητών σε δύο κατηγορίες.



1η κατηγορία: $x + x + x = 30$

2η κατηγορία: $3 \cdot x = 30$

Είναι σωστές οι απαντήσεις που έδωσαν οι μαθητές; Συζητάμε.

Βρίσκουμε τον άγνωστο αριθμό x

Η δασκάλα κατόπιν, ζήτησε από τους μαθητές να βρουν πόσα γραμμάρια είναι η μάζα κάθε κυλίνδρου και να δικαιολογήσουν την απάντησή τους. Παρακάτω φαίνεται ο τρόπος που εργάστηκαν δυο μαθητές.

Ο τρόπος του Μάριου

$x + x + x = 10 + 10 + 10$

Επομένως $x = 10$

Ο τρόπος της Μυρσίνης

$\overbrace{\boxed{x}\boxed{x}\boxed{x}}^{30}$

Αφού $3 \cdot x = 30$ είναι $\frac{1}{3} \cdot 3\ x = \frac{1}{3} \cdot 30$, $x = \frac{30}{3}$, $x = 10$.

Άρα η μάζα κάθε κυλίνδρου είναι 10 γραμμάρια.

Συζητάμε διαφορετικούς τρόπους που μπορούμε να εργαστούμε.

Όταν σε μια εξίσωση ο άγνωστος είναι παράγοντας γινομένου, για να τη λύσουμε διαιρούμε και τα 2 μέλη της με τον γνωστό παράγοντα και στη συνέχεια εκτελούμε τις πράξεις.

Για παράδειγμα: $5 \cdot x = 30$, $\frac{5 \cdot x}{5} = \frac{30}{5}$, $x = \frac{30}{5}$, $x = 6$

2

Ένας ξυλουργός για τις ανάγκες μιας κατασκευής έκοψε έναν κορμό σε 9 ίσα κομμάτια μήκους 30εκ. το καθένα. Αν συμβολίσουμε με x το μήκος του κορμού, ποια εξίσωση αναπαριστά την εργασία του;

Παρακάτω φαίνονται οι απαντήσεις δύο παιδιών:

Ελπινίκη	Τάσος
$\frac{x}{9} = 30$	$x = 9 \cdot 30$

Πώς μπορώ να δικαιολογήσω τη διαπίστωση του φίλου μας;

Εξηγώ: ______________________

____

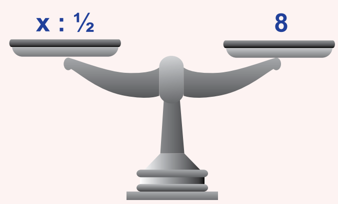
____

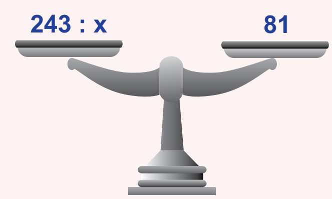
✓ Όταν σε μια εξίσωση ο άγνωστος είναι ο διαιρετέος, για να τη λύσουμε πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της με τον διαιρέτη και στη συνέχεια εκτελούμε τις πράξεις. Για παράδειγμα:
$\frac{x}{5} = 8$, $5 \cdot \frac{x}{5} = 5 \cdot 8$, $x = 5 \cdot 8$, $x = 40$

Επίλυση εξισώσεων II

Εφαρμογές

1 **Λύνω τις εξισώσεις:**





2 **Το εισιτήριο των ενηλίκων για μια θεατρική παράσταση έχει τριπλάσια τιμή από την τιμή του εισιτηρίου για παιδιά. Το εισιτήριο των ενηλίκων κοστίζει 21 €. Η εξίσωση $3 \cdot x = 21$ αναπαριστά το πρόβλημα.**

α. Τι εκφράζει ο άγνωστος αριθμός x; ____________________

β. Τι εκφράζει το γινόμενο $3 \cdot x$; ____________________

γ. Πόσο κοστίζει το εισιτήριο για παιδιά; ____________________

3 **Γράφω μια εξίσωση χρησιμοποιώντας το γράμμα x για να περιγράψω το πρόβλημα σε καθεμιά από τις παρακάτω καταστάσεις:**

α. Μια γιαγιά μοίρασε δίκαια στα εγγόνια της 72€. Αν κάθε παιδί πήρε 18€, πόσα εγγόνια έχει η γιαγιά;

____

β. Για την αγορά ενός αυτοκινήτου ο κος Κώστας έδωσε 5.000€ προκαταβολή και τα υπόλοιπα συμφώνησε να τα εξοφλήσει σε άτοκες μηνιαίες δόσεις δίνοντας κάθε μήνα 200€. Αν η τιμή του αυτοκινήτου είναι 15.000€, σε πόσους μήνες θα εξοφλήσει το αυτοκίνητο;

____

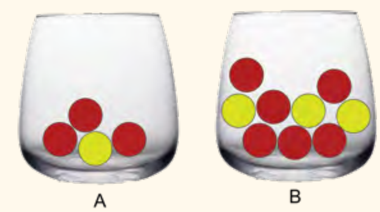
Ερωτήσεις Σ - Λ		
Η εξίσωση $x : 10 = 1$ έχει λύση τον αριθμό 10.	Σ	Λ
Οι εξισώσεις $3 \cdot x = 81$ και $x : 3 = 9$ έχουν την ίδια λύση.	Σ	Λ

4. Το κλάσμα ως λόγος

Δραστηριότητες

1

Τα βάζα της διπλανής εικόνας περιέχουν χάντρες κόκκινες και κίτρινες. Αν κάποιος τραβήξει μια κόκκινη χάντρα χωρίς να βλέπει, κερδίζει έναν πόντο. Αυτός που παίζει πρέπει να επιλέξει από ποιο βάζο θα τραβήξει.



► Ποιο βάζο έχει τις περισσότερες κόκκινες χάντρες;

Για να συγκρίνουμε τον αριθμό των κόκκινων και κίτρινων χαντρών σε κάθε βάζο, μπορούμε να αφαιρέσουμε:

Βάζο Α: 3 – 1 = 2
Υπάρχουν 2 περισσότερες κόκκινες από κίτρινες χάντρες.

Βάζο Β: 6 – 3 = 3
Υπάρχουν 3 περισσότερες κόκκινες από κίτρινες χάντρες.

► Αν ήταν η σειρά σου να παίξεις και αποφάσιζες να τραβήξεις μια χάντρα από το βάζο με την μεγαλύτερη διαφορά ανάμεσα στις κόκκινες και κίτρινες χάντρες, ποιο βάζο θα διάλεγες;

Ένας άλλος τρόπος για να συγκρίνουμε τις κόκκινες και κίτρινες χάντρες είναι ο **λόγος.**

Ο λόγος μας βοηθά να συγκρίνουμε δύο ποσότητες.

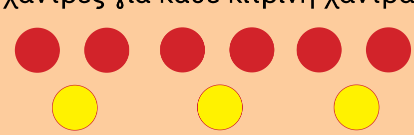
Στο βάζο Α ο λόγος των κόκκινων προς τις κίτρινες χάντρες είναι 3 προς 1.

Στο βάζο Β ο λόγος των κόκκινων προς τις κίτρινες χάντρες είναι 6 προς 3.

Μπορούμε να περιγράψουμε τους λόγους και με διαφορετικό τρόπο:

Στο βάζο Α υπάρχουν 3 κόκκινες χάντρες για κάθε κίτρινη χάντρα.

Στο βάζο Β υπάρχουν 2 κόκκινες χάντρες για κάθε κίτρινη χάντρα.

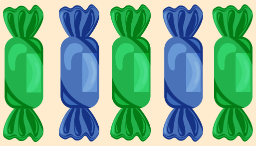


► Αν ήταν να διαλέξεις με βάση τους λόγους, ποιο βάζο θα διάλεγες;

► Η σύγκριση με αφαίρεση ή με λόγους σας δίνει τις πληροφορίες που χρειάζεστε για να επιλέξετε βάζο;

✓ Ο λόγος εκφράζει τη σχέση δύο μεγεθών.
Υπάρχουν τρεις τρόποι να γράψουμε έναν λόγο, για παράδειγμα, ο λόγος των μπλε προς τις πράσινες καραμέλες είναι:

α) 2 προς 3 **β)** 2 : 3 **γ)** $\frac{2}{3}$



Όπως φαίνεται στον τρίτο τρόπο μπορούμε να γράψουμε έναν λόγο με τη μορφή κλάσματος.

$$\frac{\text{μπλε}}{\text{πράσινες}} = \frac{2}{3}$$

Συμπληρώνω τον λόγο των πράσινων προς τις μπλε καραμέλες: $\frac{\text{πράσινες}}{\text{μπλε}} = \frac{\dots}{\dots}$

Το κλάσμα ως λόγος

Εφαρμογές

1 **Σε ένα τμήμα μιας Στ΄ τάξης ενός Δημοτικού Σχολείου υπάρχουν 10 κορίτσια και 9 αγόρια. Συμπληρώνω τους λόγους:**

$\frac{\text{αγόρια}}{\text{κορίτσια}} = \frac{\dots}{\dots}$ $\frac{\text{αγόρια}}{\text{αγόρια + κορίτσια}} = \frac{\dots}{\dots}$ $\frac{\text{κορίτσια}}{\text{αγόρια}} = \frac{\dots}{\dots}$ $\frac{\text{κορίτσια}}{\text{αγόρια + κορίτσια}} = \frac{\dots}{\dots}$

2 **Κυκλώνω εκείνο το βάζο από κάθε ζεύγος βάζων παρακάτω που έχω την καλύτερη ευκαιρία να τραβήξω μια κόκκινη χάντρα χωρίς να βλέπω. Χρησιμοποιώ λόγους για να εξηγήσω την επιλογή μου.**

Ερωτήσεις Σ - Λ		
Οι λόγοι $\frac{2}{3}$ και $\frac{3}{2}$ είναι διαφορετικοί.	Σ	Λ
Ο λόγος 2 : 3 διαβάζεται τρία προς δύο.	Σ	Λ

5. Λόγοι - Αναλογίες

Δραστηριότητες

1

Α. Η Βέρα και ο Πάνος φτιάχνουν σπιτική λεμονάδα.

Σπιτική λεμονάδα
- 2 λεμόνια
- 3 κουταλιές ζάχαρη
- 1 τέταρτο του λίτρου νερό.

▶ Ποιος είναι ο λόγος των λεμονιών προς τις κουταλιές ζάχαρης για κάθε τέταρτο του λίτρου νερό σύμφωνα με τη συνταγή; ______

▶ Τα δύο παιδιά χρησιμοποίησαν μισό λίτρο νερού, δηλαδή διπλάσια ποσότητα νερού.

α) Πόσα λεμόνια θα χρησιμοποιήσουν; ______

β) Πόσες κουταλιές ζάχαρης θα χρησιμοποιήσουν; ______

γ) Ποιος είναι ο λόγος των λεμονιών προς τις κουταλιές ζάχαρης που χρησιμοποίησαν; ______

▶ Έχει ο χυμός που έφτιαξαν την ίδια γεύση με το χυμό της συνταγής; Εξηγώ: ______

Τα παιδιά χρησιμοποιούν τη συνταγή για διαφορετική ποσότητα λεμονάδας. Για να μείνει σταθερή η γεύση της λεμονάδας, ο λόγος λεμονιών προς κουταλιές ζάχαρη πρέπει να παραμείνει ο ίδιος με τον αντίστοιχο λόγο της συνταγής.

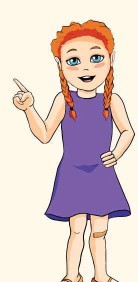
Έτσι οι λόγοι $\frac{2}{3}$ και $\frac{4}{6}$ είναι ίσοι, δηλαδή $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$.

✓ Δύο λόγοι ίσοι μεταξύ τους λέμε ότι αποτελούν μια **αναλογία**.

Β. Αφού δοκίμασαν τον πρώτο χυμό που έφτιαξαν, τα δύο παιδιά αποφάσισαν πως χρειάζονται περισσότερο χυμό.

▶ Συμπληρώνω τον πίνακα για να τα βοηθήσω να παρασκευάσουν περισσότερη ποσότητα με την ίδια γεύση πάντα.

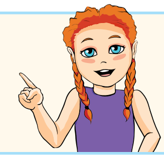
Τέταρτα του λίτρου νερό	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Λεμόνια	2	4				
Κουταλιές ζάχαρη	3	6				



✓ Γνωρίζουμε ότι για να δημιουργήσουμε ισοδύναμα κλάσματα πολλαπλασιάζουμε ή διαιρούμε τους όρους του κλάσματος με τον ίδιο αριθμό. Με βοηθάει αυτό να βρω ίσους λόγους με τον λόγο $\frac{2}{3}$;

▶ Παρατηρούμε ότι στην αναλογία $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ τα γινόμενα $2 \cdot 6$ και $3 \cdot 4$ είναι ίσα. Επιλέγω δύο διαφορετικούς λόγους από τον πίνακα και υπολογίζω τα ίδια γινόμενα. Είναι ίσα; ______

Τα γινόμενα που προκύπτουν αν πολλαπλασιάσουμε τους όρους μιας αναλογίας «χιαστί» είναι ίσα. Τα γινόμενα αυτά λέγονται **σταυρωτά.**



2 Βρίσκουμε τον άγνωστο όρο μιας αναλογίας

Η κα Αναστασία παρασκευάζει ένα δείγμα χρώματος. Ανακατεύει 12 σταγόνες μπλε χρώμα μαζί με 8 σταγόνες λευκό για να πάρει ακριβώς τη σωστή απόχρωση του γαλάζιου. Θέλει να φτιάξει έναν κουβά ίδιου χρώματος. Αν χρησιμοποιήσει 6 βάζα μπλε χρώματος, πόσα βάζα λευκού χρώματος πρέπει να χρησιμοποιήσει;

► Για να φτιάξει ίδιο χρώμα χρησιμοποιώντας 6 βάζα μπλε χρώματος πρέπει:

$$\frac{\text{σταγόνες μπλε χρώματος}}{\text{σταγόνες λευκού χρώματος}} = \frac{\text{βάζα μπλε χρώματος}}{\text{βάζα λευκού χρώματος}} \quad \text{ή} \quad \frac{12}{8} = \frac{6}{\text{βάζα λευκού χρώματος}}$$

Συμβολίζοντας με Χ τον αριθμό των βάζων λευκού χρώματος η αναλογία γίνεται: $\frac{12}{8} = \frac{6}{X}$

Αφού τα σταυρωτά γινόμενα είναι ίσα έχουμε διαδοχικά: $12 \cdot X = 8 \cdot 6$, $12 \cdot X = 48$, άρα το $X = ...$

Επομένως πρέπει να χρησιμοποιήσει .... βάζα λευκού χρώματος.

Αναλογίες

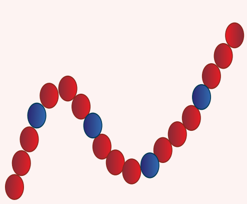
Εφαρμογές

1 Βρίσκω τον άγνωστο όρο □, κάθε αναλογίας:

α. $\frac{9}{12} = \frac{\square}{36}$

β. $\frac{\square}{5} = \frac{36}{45}$

2 Η Δήμητρα και η Κική έφτιαξαν το βραχιόλι του διπλανού σχήματος. Θέλουν να φτιάξουν και ένα περιδέραιο με 100 χάντρες συνολικά με την ίδια αναλογία μπλε και κόκκινων χαντρών. Πόσες κόκκινες χάντρες πρέπει να χρησιμοποιήσουν;



____

____

Ερωτήσεις Σ - Λ		
Οι λόγοι 3 : 2 και 18 : 10 είναι ίσοι.	Σ	Λ
Σε μια αναλογία τα σταυρωτά γινόμενα είναι ίσα.	Σ	Λ

6. Ανάλογα Ποσά

Δραστηριότητες

1

Παρατηρώ προσεκτικά τον πίνακα όπου φαίνονται οι τιμές που παίρνουν δύο ποσά.

Ποσά	Τιμές						
Λίτρα ελαιόλαδου	1	2	3	4	5	6	7
Αξία σε €	7	14	21	28	35	42	49

Καθετί που μπορεί να αυξηθεί ή να ελαττωθεί και επομένως μπορεί να μετρηθεί λέγεται ποσό.

Ποια είναι τα ποσά; ______________________________

Συμπληρώνω τις τιμές που παίρνουν τα ποσά:

«Λίτρα ελαιόλαδου»: ____________________ «Αξία σε €»: ____________________

Καθώς αυξάνεται η ποσότητα του λαδιού πώς μεταβάλλεται η τιμή του; Αυξάνεται ή μειώνεται;

____

Όταν διπλασιάζεται η ποσότητα του ελαιόλαδου, πόσο αυξάνεται η αξία σε €; ____________________

Ανάλογα λέγονται δύο ποσά που όταν η τιμή του ενός ποσού πολλαπλασιάζεται (ή διαιρείται) με έναν αριθμό, τότε και η αντίστοιχη τιμή του άλλου ποσού πολλαπλασιάζεται (ή διαιρείται) με τον ίδιο αριθμό.

Σχηματίζω τους λόγους των αντίστοιχων τιμών $\frac{\text{Αξία σε ευρώ}}{\text{Λίτρα ελαιολάδου}}$: $\frac{...}{...}$, $\frac{...}{...}$, $\frac{...}{...}$, $\frac{...}{...}$, $\frac{...}{...}$, $\frac{...}{...}$, $\frac{...}{...}$

Είναι ίσοι μεταξύ τους; ____________________ Εξηγώ: ____________________

____

Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι: **«Καθένας από τους ίσους λόγους ισούται με 7 και εκφράζει την τιμή του ενός λίτρου ελαιόλαδου».** Συμφωνώ ή διαφωνώ και γιατί;

____

✓ Στα ανάλογα ποσά οι λόγοι των αντίστοιχων τιμών τους είναι ίσοι.

2

Οι παιδίατροι χρησιμοποιούν πίνακες για να παρακολουθούν την ανάπτυξη των παιδιών. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει το μέσο ύψος των αγοριών στο πρώτο έτος της ζωής τους.

Ποια ποσά φαίνονται στον πίνακα;

____

____

____

Ποσά	Τιμές					
Ηλικία σε μήνες	2	4	6	8	10	12
Ύψος σε εκ.	55	60	65	70	75	80

Καθώς αυξάνεται η ηλικία αυξάνεται το ύψος; ______________________________

Είναι τα ποσά **«Ηλικία σε μήνες»** και **«Ύψος σε εκ.»** ανάλογα; Εκτιμώ: ______________

Δικαιολογώ την εκτίμησή μου χρησιμοποιώντας λόγους. ______________________

____

✓ Δύο ποσά που αυξάνονται ή ελαττώνονται ταυτόχρονα δεν είναι πάντα ανάλογα.

Ανάλογα ποσά

Ανάλογα ποσά III

Ανάλογα ποσά IV

Εφαρμογές

1 **Συμπληρώνω τον πίνακα και εξετάζω αν τα ποσά πλευρά ισόπλευρου τρίγωνου και περίμετρος είναι ανάλογα.**

____

____

____

____

Ποσά	Τιμές				
Πλευρά ισόπλευρου τρίγωνου σε εκ.	2	4	6	9	10
Περίμετρος σε εκ.					

2 **Στην πρόταση «Από 6 κιλά ελιές παράγεται 1 κιλό λάδι», κυκλώνω τα ποσά που αναφέρονται.**

Είναι τα ποσά ανάλογα; Εξηγώ:

____

____

____

Ποσά	Τιμές							
Λάδι σε κιλά	1	2	3	4	5	6	7	8
Ελιές σε κιλά	6							

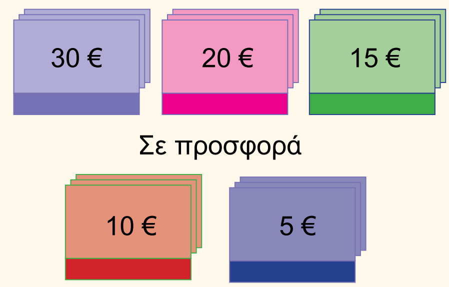
Συμπληρώνω τον πίνακα και βρίσκω από πόσα κιλά ελιές παράγονται 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 κιλά λάδι.

Ερωτήσεις Σ - Λ		
Δύο ποσά που αυξάνονται ταυτόχρονα είναι ανάλογα.	Σ	Λ
Αν σε δύο ανάλογα ποσά ο λόγος δύο αντίστοιχων τιμών ισούται με 2, τότε όλοι οι λόγοι των αντίστοιχων τιμών είναι ίσοι με 2.	Σ	Λ

7. Αντιστρόφως ανάλογα ποσά

Δραστηριότητες

1 **Ο παππούς και η γιαγιά της Ροζαλίας της έδωσαν για τη γιορτή της 60 €. Λατρεύει τη μουσική και σκέφτεται να διαθέσει όλο το ποσό για να αγοράσει CD. Στις προθήκες του μουσικού καταστήματος της γειτονιάς της υπάρχουν CD σε διάφορες τιμές.**



Αν διαθέσει όλο το ποσό για την αγορά CD της ίδιας τιμής, πόσα CD από κάθε είδος θα αγοράσει; Συμπληρώνω την αντίστοιχη γραμμή του πίνακα.

Αν επιλέξει CD αξίας 5 €, πόσα θα αγοράσει; ___________

Αν επιλέξει CD διπλάσιας αξίας, δηλαδή αξίας 10 €, πόσα θα αγοράσει; ______________________________

Αν επιλέξει CD τριπλάσιας αξίας, δηλαδή 15 €, πόσα CD θα αγοράσει; ______________________________

Ποσά	**Τιμές**				
Αξία ενός CD	5	10	15	20	30
Αριθμός CD					
Συνολική αξία					

Ένας μαθητής παρατηρεί ότι: **«Όταν η αξία του CD πολλαπλασιάζεται με έναν αριθμό, τότε ο αριθμός των CD που μπορεί να αγοράσει η Ροζαλία διαιρείται με τον ίδιο αριθμό».**

Παρατηρώ προσεκτικά τις αντίστοιχες τιμές των ποσών στον πίνακα και γράφω αν συμφωνώ ή διαφωνώ.

____

✓ **Αντιστρόφως ανάλογα** λέγονται δύο ποσά στα οποία, όταν η τιμή του ενός ποσού πολλαπλασιάζεται με έναν αριθμό, η αντίστοιχη τιμή του άλλου διαιρείται με τον ίδιο αριθμό.

Συμπληρώνω στον παραπάνω πίνακα τη συνολική αξία των CD. Τι παρατηρώ;

____

Επομένως: **5 · 12 = 60, 10 · 6 = 60, 15 · 4 =** _____**, 20 · 3 =** _____**, 30 · 2 =** _____

✓ Στα αντιστρόφως ανάλογα ποσά τα γινόμενα των αντίστοιχων τιμών τους είναι ίσα με έναν σταθερό αριθμό.

Εφαρμογές

Αντιστρόφως ανάλογα Ποσά

Αντιστρόφως ανάλογα ποσά ΙΙ

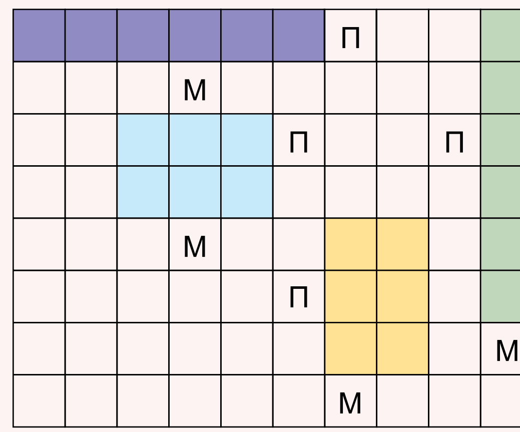
1 **α. Βρίσκω τα εμβαδά των παρακάτω ορθογώνιων:**

$E_{\text{μοβ ορθογώνιου}} = \ldots \cdot \ldots$ $\quad E_{\text{κίτρινου ορθογώνιου}} = \ldots \cdot \ldots$

$E_{\text{μπλε ορθογώνιου}} = \ldots \cdot \ldots$ $\quad E_{\text{πράσινου ορθογώνιου}} = \ldots \cdot \ldots$

β. **Συμπληρώνω στον πίνακα τις διαστάσεις των ορθογωνίων:**

Ποσά	**Τιμές**			
Πλάτος (Π)	1	...	3	...
Μήκος (Μ)	...	3	...	1



γ. **Όταν το εμβαδόν του ορθογώνιου είναι σταθερό τα ποσά μήκος και πλάτος είναι αντιστρόφως ανάλογα;**

Εξηγώ: ______________________________________

____

____

2 **Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στη χωρητικότητα σε λίτρα διαφόρων δοχείων και τον αριθμό δοχείων που χρειάζονται για τη συσκευασία μιας ορισμένης ποσότητας ελαιόλαδου.**

Ποσά	**Τιμές**			
Χωρητικότητα δοχείου σε λίτρα	...	4	5	...
Αριθμός δοχείων	50	25	...	1

α. Πόση είναι η ποσότητα του ελαιόλαδου προς συσκευασία; ______________________

β. Είναι τα ποσά αντιστρόφως ανάλογα; Εξηγώ: ______________________

γ. Αν επιλέξω δοχεία χωρητικότητας 10 λίτρων το καθένα, πόσα δοχεία θα χρειαστώ; __________

δ. Αν χρησιμοποιήσω 10 δοχεία για τη συσκευασία του ελαιόλαδου, πόση θα είναι η χωρητικότητα του κάθε δοχείου; ______________________

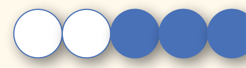
Ερωτήσεις Σ - Λ		
Αν δύο ποσά δεν είναι αντιστρόφως ανάλογα, τότε είναι ανάλογα.	Σ	Λ
Αν το γινόμενο των αντίστοιχων τιμών δύο αντιστρόφως ανάλογων ποσών είναι 100, τότε μπορεί η τιμή του ενός από αυτά να είναι 200.	Σ	Λ

8. Λύνω προβλήματα με ανάλογα και αντιστρόφως ανάλογα ποσά

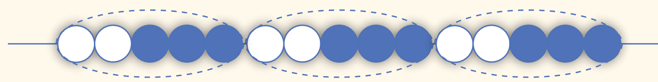
Δραστηριότητες

Λύνω προβλήματα με ανάλογα ποσά και αντιστρόφως ανάλογα ποσά

1 **Μια βιοτεχνία γυναικείων κοσμημάτων σχεδιάζει να βγάλει στην αγορά ένα γυναικείο κολιέ με βάση την παρακάτω κανονικότητα.**



Ποιος είναι ο λόγος $\frac{\text{άσπρες χάντρες}}{\text{μπλε χάντρες}} = \frac{...}{...}$



Ένα μέρος του κολιέ φαίνεται στην διπλανή εικόνα.

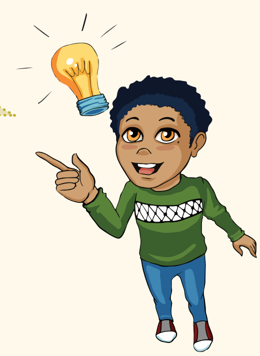
α. Είναι τα ποσά αριθμός άσπρων χαντρών και αριθμός μπλε χαντρών ανάλογα σε κάθε επανάληψη του κανόνα της κανονικότητας; Εξηγώ: ______________________________

____

β. Αν το κολιέ ολοκληρωμένο θα έχει 72 μπλε χάντρες, πόσες θα είναι οι άσπρες χάντρες;

Μπορούμε να συμπληρώσουμε τον πίνακα με τις αντίστοιχες τιμές των ποσών του κανόνα της κανονικότητας.

Συμβολίζουμε με το γράμμα x τον άγνωστο αριθμό των άσπρων χαντρών.



Ποσά	**Τιμές**	
Αριθμός άσπρων χαντρών	2	x
Αριθμός μπλε χαντρών	3	72

Αφού τα ποσά είναι ανάλογα, οι λόγοι των αντίστοιχων τιμών τους είναι ίσοι. Συμπληρώνω την αναλογία και υπολογίζω τον άγνωστο αριθμό x.

$\frac{2}{3} = \frac{x}{72}$, $3 \cdot x = 2 \cdot 72$, $3 \cdot x = 144$, $x = 144 : 3$, $x = 48$. Οι άσπρες χάντρες θα είναι 48.

γ. Πόσες μπλε χάντρες θα έχει το κολιέ; ______________________________

δ. Ο βιοτέχνης σκέφτεται αρχικά να κατασκευάσει 500 τέτοια κολιέ. Πόσες χάντρες από κάθε χρώμα θα πρέπει να παραγγείλει; ______________________________

- ✓ Για να βρούμε την άγνωστη τιμή ενός ποσού σε ένα πρόβλημα ανάλογων ποσών φτιάχνουμε πίνακα τιμών.
- ✓ Χρησιμοποιούμε μεταβλητή για την άγνωστη τιμή του ποσού.
- ✓ Σχηματίζουμε αναλογία και λύνουμε την εξίσωση, για να βρούμε τον άγνωστο όρο της αναλογίας.

2 **Αναγωγή στη μονάδα ή αναλογία;**
Τρεις πίτσες γίγας κοστίζουν 36€. Πόσο κοστίζουν οι 12 πίτσες γίγας;

Λύνω προβλήματα με ανάλογα ποσά και αντιστρόφως ανάλογα ποσά ΙΙ

Με αναγωγή στη μονάδα

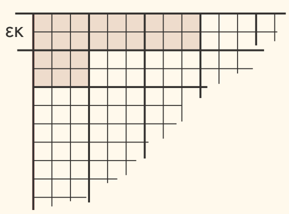
Οι 3 πίτσες κοστίζουν 36 €.
Η 1 πίτσα κοστίζει ____________________ €.
Οι 12 πίτσες κοστίζουν ________________ €.

Αναγωγή στη μονάδα λέγεται η μέθοδος κατά την οποία βρίσκουμε πρώτα την τιμή της μιας μονάδας και κατόπιν την άγνωστη τιμή.

3 **Οι γονείς του Φάνη ανακαινίζουν το δωμάτιό του που έχει σχήμα ορθογώνιο. Αν για την κάλυψη του πατώματος επιλέξουν πλακίδια πλάτους 30 εκ., θα χρειαστούν 100 ολόκληρα πλακίδια. Αν επιλέξουν πλακίδια πλάτους 15 εκ. και ίδιου μήκους, πόσα πλακίδια θα χρειαστούν για την κάλυψή του;**

► Θα χρειαστούν περισσότερα ή λιγότερα πλακίδια;

Εκτιμώ ____



Σχήμα 1

► Διαπιστώνω με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος, φέρνοντας κατάλληλες ευθείες, γιατί όταν μειώνεται το πλάτος των πλακιδίων αυξάνεται ο αριθμός τους.

► Τα ποσά πλάτος πλακιδίων και αριθμός πλακιδίων είναι αντιστρόφως ανάλογα;
Δικαιολογώ: ____

► Συμπληρώνω τον πίνακα ποσών – τιμών συμβολίζοντας με x την άγνωστη τιμή.

Ποσά	Τιμές	
Πλάτος πλακιδίων σε εκ		
Αριθμός πλακιδίων	100	x

Αφού τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα, οι αντίστοιχες τιμές τους σχηματίζουν ίσα ______________________________

Σχηματίζουμε την εξίσωση και υπολογίζουμε την άγνωστη τιμή:

$15 \cdot x = 30 \cdot 100$ $\qquad$ $15 \cdot x =$ _____ $\qquad$ $x =$ _____

► Αν το μήκος των πλακιδίων είναι 40 εκ. υπολογίζω το εμβαδόν της επιφάνειας του δωματίου.

____

Για να βρούμε την άγνωστη τιμή ενός ποσού σε ένα πρόβλημα με αντιστρόφως ανάλογα ποσά:
✓ Φτιάχνουμε πίνακα τιμών.
✓ Χρησιμοποιούμε μεταβλητή για την άγνωστη τιμή του ποσού.
✓ Σχηματίζουμε την εξίσωση με τα ίσα γινόμενα και τη λύνουμε, για να βρούμε την άγνωστη τιμή του ποσού.

Ερωτήσεις Σ - Λ		
Αν ένας εργάτης εκτελεί ένα έργο σε 2 ημέρες, οι 2 εργάτες εκτελούν το ίδιο έργο σε 4 ημέρες.	Σ	Λ
Για να βρούμε την τιμή της μονάδας σε προβλήματα με αντιστρόφως ανάλογα ποσά κάνουμε πολλαπλασιασμό.	Σ	Λ

9. Η έννοια του ποσοστού

Δραστηριότητες

1 **Ο διπλανός πίνακας δείχνει τους μαθητές των δύο τμημάτων της Στ΄ τάξης που αρίστευσαν σε έναν μαθηματικό διαγωνισμό.**

	Τμήμα Στ1	Τμήμα Στ2
Μαθητές που αρίστευσαν	8	8
Σύνολο μαθητών τμήματος	25	20

► Ένας συμμαθητής σου ισχυρίζεται ότι: **«Αφού αρίστευσε ο ίδιος αριθμός μαθητών από κάθε τμήμα, τα δύο τμήματα είχαν το ίδιο ποσοστό επιτυχίας».**

► Συμφωνώ με τον ισχυρισμό του συμμαθητή μου; Αν όχι, γιατί; Εξηγώ: ____________________

____

Σχηματίζω τον λόγο $\frac{\text{αριστεύσαντες}}{\text{σύνολο μαθητών}}$ για κάθε τμήμα: Στ1: $\frac{...}{...}$, Στ2: $\frac{...}{...}$

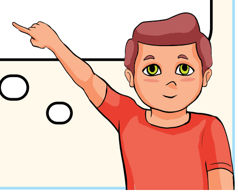
Μπορώ να συγκρίνω τους παραπάνω λόγους; __________ Γιατί; ____________________

► Για να συγκρίνω τους δύο λόγους τους μετατρέπω σε ισοδύναμους με παρονομαστή το 100.

Στ1: $\frac{...}{...} = \frac{...}{...}$, Στ2: $\frac{...}{...} = \frac{...}{...}$

► Τελικά ποιο από τα δύο τμήματα είχε μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας; ____________________

Οι λόγοι που έχουν παρονομαστή το 100 γράφονται και με το σύμβολο % που διαβάζεται «στα εκατό» και λέγονται ποσοστά στα εκατό. Για παράδειγμα, 30/100 = 30%συνταγής.



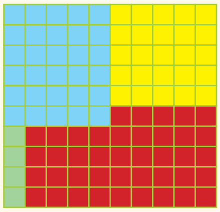
2 **Α. Γράφω με διαφορετικούς τρόπους τον αριθμό των κίτρινων τετράγωνων:**

► 25 από τα 100 τετράγωνα είναι κίτρινα.

► Τα κίτρινα είναι τα $\frac{25}{100}$ των τετράγωνων.

► Τα κίτρινα είναι το 0,25 της ακέραιης μονάδας.

► Το 25% των τετράγωνων είναι κίτρινα.



Β. Γράφω ως κλάσμα και ως ποσοστό τον αριθμό των τετράγωνων που είναι:

Μπλε ______________ Πράσινα ______________ Κόκκινα ______________

✓ **Ποσοστό** ενός ποσού είναι ένα μέρος του ποσού αυτού (ο λόγος του μέρους προς όλο το ποσό)

✓ Το **ποσοστό στα εκατό** μπορεί να εκφραστεί με τη χρήση του συμβόλου % δίπλα στον αριθμό, μπορεί να εκφραστεί με δεκαδικό κλάσμα με παρονομαστή το 100, αλλά και με δεκαδικό αριθμό.

Πώς μετατρέπουμε κλάσματα σε ποσοστά (%)

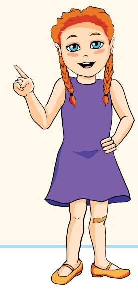
α. Όταν ο παρονομαστής του κλάσματος είναι διαιρέτης ή πολλαπλάσιο του 100, τότε μετατρέπουμε το κλάσμα σε ισοδύναμο με παρονομαστή το 100.

$\frac{7}{10} = \frac{7 \times 10}{10 \times 10} = \frac{70}{100} = 70\%$ $\quad \frac{90}{500} = \frac{90 : 5}{500 : 5} = \frac{18}{100} = 18\%$

β. Αν ο παρονομαστής του κλάσματος δεν είναι διαιρέτης ή πολλαπλάσιο του 100, τότε κάνουμε τη διαίρεση του αριθμητή με τον παρονομαστή.

$\frac{2}{8} = 0{,}25 = \frac{25}{100} = 25\%$, διότι

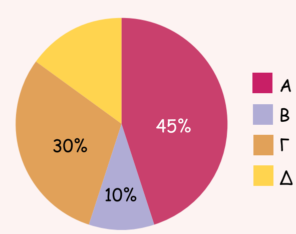
$$\begin{array}{r|l} 20 & 8 \\ \hline -16 & 0{,}25 \\ \hline 40 & \\ -40 & \\ \hline 0 & \end{array}$$



Η έννοια του ποσοστού

Εφαρμογές

1 **Ρωτήθηκαν 100 άνθρωποι σχετικά με το δίκτυο κινητής τηλεφωνίας που χρησιμοποιούν. Οι απαντήσεις τους φαίνονται στο διάγραμμα. Τι ποσοστό στα εκατό των ερωτηθέντων χρησιμοποιούν την εταιρεία Δ;**



2 **Γράφω τι σημαίνει:**

Προβιβάστηκε το 100% των παιδιών. ______________________________

Πέρασαν την τάξη όλοι οι μαθητές ______________________________

Ο μισθός του αυξήθηκε κατά 5%. ______________________________

____

Το 70% των κατοίκων κάνουν ανακύκλωση. ______________________________

____

Ερωτήσεις Σ - Λ		
Ο δεκαδικός 0,34 γράφεται ως ποσοστό στα εκατό ως 34%.	Σ	Λ
Αν σε έναν διαγωνισμό πέτυχε το 80% των συμμετεχόντων, απορρίφθηκε το 20%.	Σ	Λ

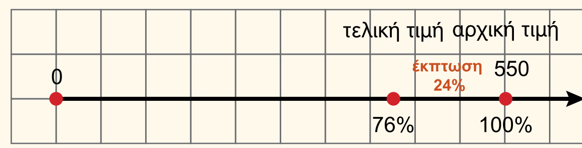
10. Η εύρεση της τελικής και της αρχικής τιμής

Δραστηριότητες

1 **Η κα Αγγελική θέλει να αγοράσει μια «έξυπνη» τηλεόραση. Στο διαφημιστικό φυλλάδιο ενός καταστήματος βρήκε μια με τιμή 550€. Το φυλλάδιο έγραφε πως οι τιμές των προϊόντων έχουν έκπτωση τον ΦΠΑ, 24%. Βρίσκω πόσο κοστίζει, τελικά η τηλεόραση μετά από την έκπτωση.**

▶ Αναλύω το ποσοστό 24%: Για κάθε ______ € στην Αρχική Τιμή της τηλεόρασης ______ € το κατάστημα κάνει έκπτωση _______ €, δηλαδή η Τιμή Πώλησης της τηλεόρασης είναι _______ €.

▶ Τι ποσοστό της αρχικής τιμής θα πληρώσει η κα Αγγελική, αν αγοράσει την τηλεόραση; Εξηγώ με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος:



____

▶ Για αυτή την τηλεόραση γνωρίζω την ________________ τιμή και ψάχνω την ________________ τιμή.

▶ Συμβολίζω με x την άγνωστη τελική τιμή της τηλεόρασης μετά την έκπτωση, συμπληρώνω τον πίνακα ποσών και τιμών και την υπολογίζω.

____

____

____

Ποσά	Τιμές	
Αρχική τιμή		
Τελική τιμή		

Οπότε η τελική τιμή της τηλεόρασης είναι ______________ ευρώ.

▶ Ένας μαθητής σκέφτηκε ότι: **«Μπορούμε να υπολογίσουμε πρώτα την έκπτωση της τηλεόρασης και μετά την τελική της τιμή».**

Συμπληρώνω τον πίνακα ποσών και τιμών και ολοκληρώνω τη σκέψη του.

____

____

____

____

Ποσά	Τιμές	
Αρχική τιμή		
Έκπτωση		

Συμπληρώνω και βρίσκω την τελική τιμή πώλησης της τηλεόρασης.

Τιμή πώλησης = ____________ – ____________ = ____________ €

Για να υπολογίσουμε την τελική τιμή ενός ποσού αφαιρούμε από την αρχική του τιμή τη μείωση (έκπτωση). Βρίσκουμε τη μείωση του ποσού από το ποσοστό μείωσης (έκπτωσης).

Τελική τιμή =
Αρχική τιμή - Μείωση

Εύρεση αρχικής τιμής

Εύρεση τελικής τιμής

2 **Οι γονείς της Ελένης θέλουν να της αγοράσουν έναν καινούργιο φορητό υπολογιστή. Στο διαφημιστικό φυλλάδιο ενός καταστήματος βρήκαν έναν με τιμή 418€. Η Ελένη πρόσεξε ότι στο φυλλάδιο έγραφε πως στις τιμές των προϊόντων έχει γίνει έκπτωση 24%. Μπορείς να βρεις πόσο κόστιζε αρχικά ο υπολογιστής;**

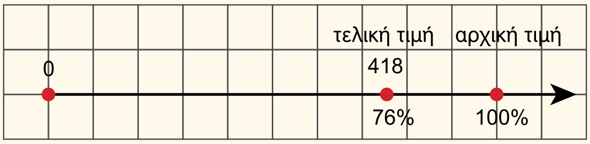
Όταν οι έμποροι πωλούν τα εμπορεύματά τους σε τιμή μικρότερη (τελική τιμή) από αυτή που αναγράφεται στο εμπόρευμα (αρχική τιμή), λέμε ότι πωλούν με έκπτωση;

► Αναλύω το ποσοστό 24% (= $\frac{24}{100}$) και συμπληρώνω: Αρχική τιμή 100 – Έκπτωση 24 = Τελική τιμή ...

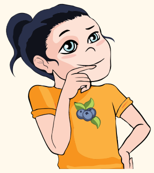
Δηλαδή, αν η αρχική τιμή ήταν 100€, μετά την έκπτωση θα πλήρωνε ______________________________ €.

► Για αυτόν τον υπολογιστή γνωρίζω την _____ τιμή και ψάχνω την ______________________________ τιμή.

► Συμβολίζουμε με x την άγνωστη αρχική τιμή του υπολογιστή. ______________________________



Ποσά	**Τιμές**	
Τιμή πριν την έκπτωση (αρχική τιμή)	100	x
Τιμή μετά την έκπτωση (τελική τιμή)	76	418



Τα ποσά είναι ανάλογα.

Έχουμε: $\frac{100}{76} = \frac{x}{418}$ και σύμφωνα με τα χιαστί γινόμενα $76 \cdot x = 100 \cdot 418$, $76 \cdot x = 41.800$,

$x = 41.800 : 76$, $x =$ ____________

Οπότε η αρχική τιμή του υπολογιστή είναι ____________ €.

Μπορώ να βρω την αρχική τιμή ενός ποσού αν γνωρίζω το ποσοστό % της μεταβολής (π.χ. ποσοστό έκπτωσης, ποσοστό κέρδους, ποσοστό αύξησης, ποσοστό μείωσης, κ.λπ.) και την τελική τιμή.

Ερωτήσεις Σ - Λ		
Αν το 130% ενός αριθμού είναι 26, ο αριθμός είναι μικρότερος από το 26;	Σ	Λ
Αν το 60% ενός αριθμού είναι 26, ο αριθμός είναι μεγαλύτερος από το 26;	Σ	Λ

11. Βρίσκω το ποσοστό στα εκατό (%)

Δραστηριότητες

1

Ένα εμπορικό κατάστημα την περίοδο των εκπτώσεων πουλάει αθλητικά παπούτσια αξίας 72 € προς 54 €. Πόσο στα εκατό (%) είναι η έκπτωση που κάνει;

► Ποια από τις παρακάτω σχέσεις περιγράφει τη μεταβολή της τιμής των παπουτσιών την περίοδο των εκπτώσεων; Υπογραμμίζω.

Αρχική τιμή – Τελική τιμή = Έκπτωση

Τελική τιμή – Αρχική τιμή = Έκπτωση

Αρχική τιμή + Έκπτωση = Τελική τιμή

Το ποσοστό μεταβολής, π.χ. το ποσοστό έκπτωσης, υπολογίζεται στην αρχική τιμή.

► Από τη σχέση που υπογράμμισα υπολογίζω την έκπτωση των παπουτσιών: ____________________

____

► Συμβολίζω με x την έκπτωση σε αρχική τιμή 100, συμπληρώνω τον πίνακα και την υπολογίζω:

____

Το ποσοστό στα εκατό (%) της έκπτωσης είναι:

____

Ποσά	Τιμές	
Αρχική τιμή	.....	100
Έκπτωση	.....	x

Διαφορετικά... Σχηματίζουμε τον λόγο: $\frac{\text{έκπτωση}}{\text{αρχική τιμή}} = \frac{18}{72} = 0{,}25 = 25\%$

2

Ένας έμπορος αγοράζει τα πουλόβερ 44€ και τα πουλάει 66€. Πόσο στα 100 (%) της τιμής αγοράς είναι το κέρδος του;

► Ποια από τις παρακάτω σχέσεις περιγράφει τη μεταβολή της τιμής των πουλόβερ; Υπογραμμίζω.

Τιμή Αγοράς – Τιμή Πώλησης = Κέρδος
Τιμή Αγοράς + Κέρδος = Τιμή Πώλησης
Κέρδος = Τιμή Αγοράς – Τιμή Πώλησης

► Από τη σχέση που υπογράμμισα υπολογίζω το κέρδος: ______________________________

____

▶ Συμβολίζω με x το κέρδος σε αρχική τιμή 100, συμπληρώνω τον πίνακα και την υπολογίζω:

Ποσά	Τιμές	
Τιμή αγοράς	.....	100
Κέρδος	.....	x

____

____

Το ποσοστό στα εκατό (%) του κέρδους είναι ________________________________

Διαφορετικά... Σχηματίζουμε τον λόγο: $\frac{\text{κέρδος}}{\text{αρχική τιμή}} = \frac{22}{44} = 0{,}50 = 50\%$

✓ Όταν το ζητούμενο σε ένα πρόβλημα είναι το ποσοστό στα εκατό (%), δηλαδή το ποσοστό σε αρχική τιμή 100, για να το βρούμε πρέπει να γνωρίζουμε την αρχική τιμή και την αύξηση ή τη μείωση στην αρχική τιμή.

✓ Στα προβλήματα ποσοστών αρχική τιμή είναι η τιμή του ποσού πάνω στην οποία υπολογίζεται το ποσοστό.

✓ Το ποσοστό μεταβολής στα εκατό (%) είναι ο λόγος $\frac{\text{μεταβολή}}{\text{αρχική τιμή}}$.

Βρίσκω το ποσοστό στα εκατό

Εφαρμογή

1 **Ένας ερευνητής έστειλε ηλεκτρονικά 500 ερωτηματολόγια, για να δει πόσες ώρες την εβδομάδα περνούν οι έφηβοι παίζοντας ηλεκτρονικά παιχνίδια. Από αυτά απαντήθηκαν τα 375.**

Πόσο στα εκατό (%) των ερωτηματολογίων που στάλθηκαν δεν απαντήθηκαν;

▶ Πόσα ερωτηματολόγια:

α. Στάλθηκαν: __________ β. Απαντήθηκαν: __________ γ. Δεν απαντήθηκαν: __________

α΄ τρόπος

Συμπληρώνω τον πίνακα τιμών και ποσών και υπολογίζω.

Ποσά	Τιμές	
	.....	100
	.....	x

____

____

β΄ τρόπος: Υπολογίζω τον λόγο $\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ = ...

Ερωτήσεις Σ - Λ		
Ένας έμπορος αγοράζει ένα προϊόν 100€ και το πουλάει 120€. Το ποσοστό κέρδους στα εκατό είναι 20%.	Σ	Λ
Ένα προϊόν αξίας 100€ στις εκπτώσεις πωλείται 80€. Το ποσοστό έκπτωσης στα εκατό είναι 20%.	Σ	Λ

Ενότητα 3 **Επαναληπτικό**

1 **Γράφω το καθένα από τα παρακάτω ως αλγεβρική έκφραση. Χρησιμοποιώ το x ως μεταβλητή**

α. ένας αριθμός μειωμένος κατά 3,5 ______________________________

β. το 10 διαιρούμενο με το διπλάσιο ενός αριθμού ______________________________

γ. 7 μειωμένο κατά το μισό ενός αριθμού ______________________________

δ. η ηλικία ενός που είναι κατά δύο χρόνια νεότερος από τον Βασίλη ______________

ε. το ένα τρίτο των μαθητών αυξημένο κατά 3 ______________________________

2 **Λύνω τις εξισώσεις:**

α. $x + 19 = 37$ **β.** $x - 32 = 54$ **γ.** $4 \cdot x = 104$ **δ.** $x : 12 = 3$

3 **Οι 90 μαθητές μιας κατασκήνωσης χωρίστηκαν σε 3 ομάδες. Η πρώτη ομάδα είχε 35 μαθητές και η δεύτερη είχε 15 μαθητές περισσότερους από την τρίτη ομάδα. Αν x είναι οι μαθητές της τρίτης ομάδας, σχηματίζω μια εξίσωση και βρίσκω τον αριθμό των μαθητών της δεύτερης και τρίτης ομάδας.**

4 **Ένας φούρναρης για την παραγωγή ψωμιού, εκτός των άλλων υλικών, χρησιμοποιεί αλεύρι από σίκαλη και στάρι σε αναλογία 1 προς 3. Στο μείγμα μιας «παρασκευής» χρησιμοποίησε 90 κιλά αλεύρι από σίκαλη και 6 σακιά αλεύρι από στάρι που το καθένα περιείχε 45 κιλά. Θα γίνει το μείγμα στη σωστή αναλογία;**

- Συμπλήρωσε τον πίνακα αυτοαξιολόγησης, με οριζόντια σειρά, στα κεφάλαια που αναφέρονται στο επαναληπτικό της ενότητας.
- Μετά τη συμπλήρωση κράτησε σημειώσεις για να συζητήσεις για «όσα έμαθες» και για «αυτά που θα ήθελες να μάθεις περισσότερο».

Πίνακας Αυτοαξιολόγησης

Ενότητα 4
Στατιστική - Πιθανότητες

1. **Συλλέγω, αναλύω και οργανώνω δεδομένα σε πίνακες (Σ.Δ.6.1, Σ.Δ.6.2)**
2. **Απεικονίζω δεδομένα με ραβδόγραμμα ή κυκλικό διάγραμμα (Σ.Δ.6.3)**
3. **Εξάγω πληροφορίες από κυκλικό διάγραμμα (Σ.Δ.6.4)**
4. **Μέσος όρος, επικρατούσα τιμή, διάμεσος και εύρος δεδομένων (Σ.Μ.6.1)**
5. **Πείραμα τύχης - Δειγματικός χώρος (Π.Π.6.1)**
6. **Πιθανότητα και σχετική συχνότητα (Π.Π.6.2)**

Στατιστική/Διαχείριση δεδομένων - Μέτρα θέσης και μεταβλητότητας

Πιθανότητες/Πειράματα τύχης και πιθανότητες

Θα μάθω να:

- Συλλέγω δεδομένα μέσω ερευνών και πειραμάτων και τα ομαδοποιώ σε πίνακες συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.
- Κατασκευάζω και εξάγω πληροφορίες από ραβδογράμματα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.
- Κατασκευάζω και εξάγω πληροφορίες από κυκλικό διάγραμμα.
- Προσδιορίζω τον μέσο όρο, την επικρατούσα τιμή και τη διάμεσο από την παρατήρηση δεδομένων.
- Κατανοώ την έννοια του πειράματος τύχης και του δειγματικού χώρου.
- Υπολογίζω την πιθανότητα ενός ενδεχομένου ως κλάσμα και τη συγκρίνω με τη σχετική συχνότητα των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από ένα πείραμα τύχης.

Λέξεις κλειδιά

μέσος όρος	διάμεσος	εύρος	επικρατούσα τιμή	πείραμα τύχης
ενδεχόμενο	πιθανότητα ενδεχομένου	συχνότητα	αδύνατο ενδεχόμενο	βέβαιο ενδεχόμενο

1. Συλλέγω, αναλύω και οργανώνω δεδομένα σε πίνακες

Δραστηριότητα

1

Οι 20 μαθητές της Στ΄ τάξης ενός δημοτικού σχολείου με τη βοήθεια του δασκάλου τους ξεκίνησαν μια μικρή έρευνα για το κατοικίδιο ζώο που προτιμά ο καθένας. Έγραψαν στον πίνακα τα ονόματα των 5 γνωστότερων κατοικίδιων: «σκύλος», «γάτα», «παπαγαλάκια», «καναρίνι», «ψαράκια», και ο δάσκαλός τους συμπλήρωσε άλλες δύο κατηγορίες: «άλλο» και «κανένα». Οι μαθητές έγραψαν την προτίμησή τους σε ένα χαρτάκι και στη συνέχεια την κατέγραψαν στον παρακάτω πίνακα (πίνακας 1).

γάτα	γάτα	σκύλος	σκύλος	ψαράκια
καναρίνι	άλλο	ψαράκια	κανένα	σκύλος
ψαράκια	γάτα	άλλο	γάτα	χάμστερ
άλλο	σκύλος	καναρίνι	καναρίνι	γάτα

Πίνακας 1: τα δεδομένα από την τάξη

► Στη συνέχεια ταξινόμησαν τα δεδομένα κατά αλφαβητική σειρά σε κατηγορίες στον Πίνακα 2.

άλλο	άλλο	άλλο	γάτα	γάτα
γάτα	γάτα	γάτα	καναρίνι	καναρίνι
καναρίνι	κανένα	σκύλος	σκύλος	σκύλος
σκύλος	χάμστερ	ψαράκια	ψαράκια	ψαράκια

Πίνακας 2: τα δεδομένα σε κατηγορίες

► Τέλος δημιούργησαν τον **πίνακα κατανομής συχνοτήτων.**

Κατοικίδιο ζώο	Σύμβολα καταμέτρησης	Συχνότητα (εμφάνισης)
γάτα	~~I I I I~~	5
καναρίνι	I I I	3
σκύλος	I I I I	4
χάμστερ	I	1
ψαράκια	I I I	3
άλλο	I I I	3
κανένα	I	1

Συχνότητα δεδομένου = Πόσες φορές εμφανίζεται το δεδομένο

Για να βγάλω συμπεράσματα από μεγάλο πλήθος αριθμητικών δεδομένων, εργάζομαι ως εξής:

► Συλλέγω τα δεδομένα.

► Τακτοποιώ τα δεδομένα κατά αύξουσα ή φθίνουσα σειρά.

► Καταμετρώ τη συχνότητα εμφάνισης κάθε δεδομένου και την παρουσιάζω σε πίνακα.

Στον παραπάνω πίνακα βλέπουμε ότι το ζώο «γάτα» **εμφανίζεται 5 φορές**, δηλαδή **έχει συχνότητα 5**. Η συχνότητα όμως αυτή, δηλαδή ο αριθμός 5, δεν έχει καμία αξία από μόνη της, εάν δεν αναφέρουμε το συνολικό πλήθος των δεδομένων που πήραμε. Για παράδειγμα, άλλη αξία έχει η συχνότητα 5 στα 20 ζώα και άλλη έχει η συχνότητα 5 στα 50 ή 100 ζώα.

Ο λόγος της εμφάνισης μιας κατηγορίας δεδομένων προς το σύνολο των δεδομένων, λέγεται **σχετική συχνότητα** της κατηγορίας. Έτσι η σχετική συχνότητα του ζώου «γάτα» στο σύνολο των δεδομένων είναι $\frac{5}{20}$ και μετά την απλοποίηση $\frac{1}{4}$ ή 0,25.

Σχετική Συχνότητα *δεδομένου* = $\dfrac{\textbf{Συχνότητα}\ \textit{δεδομένου}}{\textit{πλήθος όλων των δεδομένων}}$

Συνήθως τη σχετική συχνότητα τη μετατρέπουμε σε ποσοστό επί τοις εκατό %. Έτσι έχουμε $\frac{1}{4}$ = 0,25 , δηλαδή ____________________ %.

Τη συχνότητα τη συμβολίζουμε με το γράμμα **ν** και τη σχετική συχνότητα με το γράμμα **f.**

Κατανομή συχνοτήτων

▶ Ομαδοποιώντας κάποια δεδομένα χρησιμοποιώντας διαφορετικό κριτήριο μπορούμε να φτιάξουμε νέους πίνακες συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων, όπως έκανε η Βασιλική που ομαδοποίησε τις προτιμήσεις των μαθητών με κριτήριο τον αριθμό των ποδιών των ζώων.

▶ Βοηθώ τη Βασιλική να συμπληρώσει τον πίνακά της, αν στην κατηγορία άλλο υπάρχει ένα δίποδο, ένα τετράποδο και ένα ζώο δίχως πόδια.

Ζώα	καταμέτρηση	συχνότητα (ν)	σχετική συχνότητα (f)
τετράποδα	5 + 4 + 1 + …		
δίποδα	3 + …		
δίχως πόδια	3 + …		
κανένα	…		
Σύνολο	20		

Έρευνα για το Διαδίκτυο

Εφαρμογή

1

Οι μαθητές δύο τμημάτων της Στ΄ τάξης ρώτησαν τους γονείς τους ποιο μέσο χρησιμοποιούν συνήθως για να πάνε στη δουλειά τους και κατέγραψαν τις απαντήσεις στον διπλανό πίνακα.

Μέσο μεταφοράς	καταμέτρηση	(ν)	(f)
Αυτοκίνητο	~~IIII~~ IIII		
Λεωφορείο	~~IIII~~		
Μετρό	~~IIII~~ III		
Μηχανή	~~IIII~~		
Ποδήλατο	III		
Πεζός	~~IIII~~ IIII		
Άλλο			
Σύνολο			

▶ Συμπληρώνω τον πίνακα.

▶ Ποια είναι η συχνότητα χρησιμοποίησης Δημόσιων μέσων μεταφοράς; ________________

Ερωτήσεις Σ - Λ		
Ο πίνακας κατανομής συχνοτήτων πρέπει να περιλαμβάνει όλα τα δεδομένα.	Σ	Λ
Η σχετική συχνότητα είναι ανεξάρτητη της συχνότητας.	Σ	Λ

Δραστηριότητα

1

Είκοσι μαθητές που συμμετείχαν στην προηγούμενη έρευνα συμμετείχαν και σε μια νέα έρευνα για τον αριθμό των λογοτεχνικών βιβλίων που δανείστηκαν από τη σχολική βιβλιοθήκη την περσινή χρονιά. Οι απαντήσεις φαίνονται στον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων.

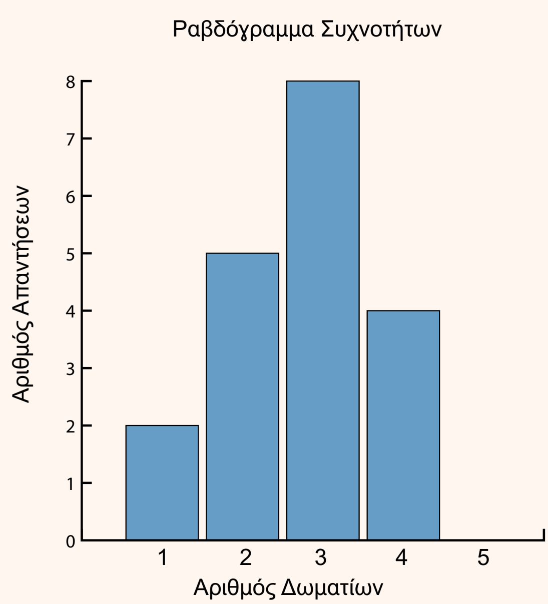
► Συμπληρώνω τον πίνακα.

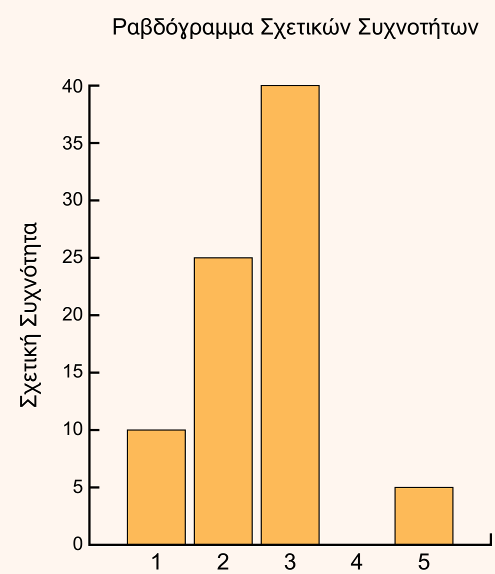
Αριθμός βιβλίων	Συχνότητα (v)	Σχετική Συχνότητα (f)
1	2	
2	5	
3	8	0,4
4	4	
5	1	0,05
Σύνολο	**20**	**1**

Πίνακας 1

► Τα παιδιά αξιοποιώντας τα στοιχεία του πίνακα 1 παρουσίασαν τα δεδομένα με τη μορφή ραβδογραμμάτων και κυκλικών διαγραμμάτων.

α. Ολοκληρώνω τα διαγράμματα.

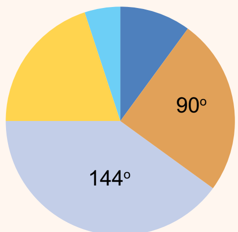




Με τη βοήθεια του ραβδογράμματος μπορούμε να συγκρίνουμε τα δεδομένα παρατηρώντας τα ύψη ή τα μήκη των ράβδων.

β. Μεταφέρω τα μέτρα των γωνιών στις κατάλληλες θέσεις στο κυκλικό διάγραμμα.

Αριθμός βιβλίων



Αριθμός βιβλίων	Σχετική Συχνότητα	Υπολογισμός γωνιών κυκλικού διαγράμματος
1	0,1	$0{,}1 \cdot 360° = 36°$
2	0,25	$0{,}25 \cdot 360° = 90°$
3	0,4	$0{,}4 \cdot 360° = 144°$
4	0,2	$0{,}2 \cdot 360° = 72°$
5	0,05	$0{,}05 \cdot 360° = 18°$

Για να υπολογίσουμε τις γωνίες του κυκλικού διαγράμματος πολλαπλασιάζουμε τη σχετική συχνότητα μιας κατηγορίας δεδομένων με το 360°.

Η δουλειά του πατέρα

Εφαρμογές

1 **Ο διπλανός πίνακας δείχνει τα βιβλία που έχει μια σχολική βιβλιοθήκη.**

α) Συμπληρώνω στον πίνακα την στήλη της Σχετικής Συχνότητας

β) Σχεδιάζω στο τετράδιο μου το ραβδόγραμμα συχνοτήτων, και το κυκλικό διάγραμμα

Βιβλία	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
Λογοτεχνικά	300	
Ιστορικά	150	
Επιστημονικά	90	
Εγκυκλοπαιδικά	180	
Σύνολο		

2 **Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τους/τις μαθητές/τριες που πήραν 10 στα μαθήματα Μαθηματικά, Γλώσσα, Ιστορία και Φυσική. α. Βρίσκω πόσοι είναι συνολικά οι μαθητές που πήραν 10.**

β. Πόσοι πήραν 10 στη Φυσική.

____

γ. Σχεδιάζω στο τετράδιό μου το κυκλικό διάγραμμα.

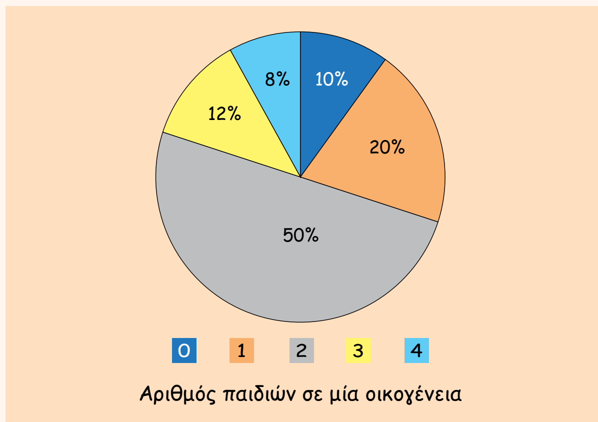
Μαθήματα	Συχνότητα (ν)	Σχετική Συχνότητα (f)
Μαθηματικά	8	
Γλώσσα	5	0,2
Ιστορία	10	
Φυσική		
Σύνολο		

Ερωτήσεις Σ - Λ		
Η κατασκευή οποιουδήποτε διαγράμματος γίνεται με βάση τον πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.	Σ	Λ
Η επιλογή του διαγράμματος γίνεται με βάση την καταλληλότητά του για την έρευνα που διεξάγουμε.	Σ	Λ

3. Εξάγω πληροφορίες από κυκλικό διάγραμμα

Δραστηριότητες

1 **Εξετάσαμε 500 οικογένειες ως προς τον αριθμό των παιδιών (0, 1, 2, 3, 4) που έχουν και κατασκευάσαμε το παρακάτω κυκλικό διάγραμμα.**



► Τι πληροφορίες μας δίνει αυτό το κυκλικό διάγραμμα;

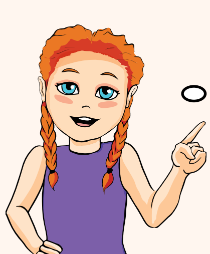
Οι μισές οικογένειες από τις 500 έχουν δύο παιδιά.

Τέσσερα παιδιά έχουν οι λιγότερες οικογένειες.

► Πόσες οικογένειες έχουν 1 παιδί;

Ένα παιδί έχουν το .... % του 500. Δηλαδή το $\frac{1}{5}$ του 500. Άρα ..... οικογένειες.

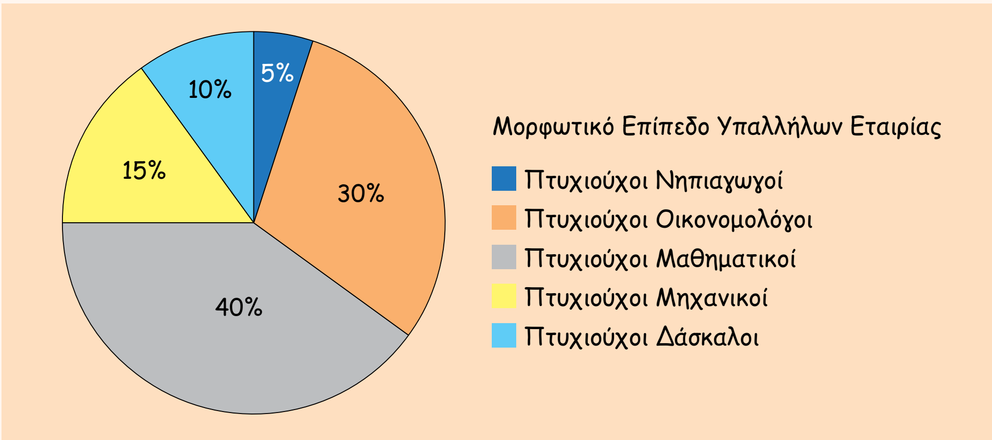
► Και κανένα παιδί;



Το ....% των 500 οικογενειών δεν έχουν κανένα παιδί. Άρα ..... οικογένειες.

2

Σε μια πολυεθνική εταιρεία το είδος των πτυχίων των υπαλλήλων της περιγράφεται από το παρακάτω κυκλικό διάγραμμα. Εάν οι υπάλληλοι που είναι πτυχιούχοι δάσκαλοι είναι 100:



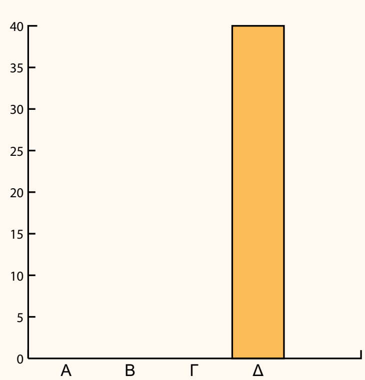
- ► Πόσους υπαλλήλους έχει η πολυεθνική εταιρεία; ______________________
- ► Πόσοι υπάλληλοι είναι πτυχιούχοι μαθηματικοί; ______________________
- ► Πόσοι υπάλληλοι δεν είναι πτυχιούχοι δάσκαλοι ή μαθηματικοί; ______________________

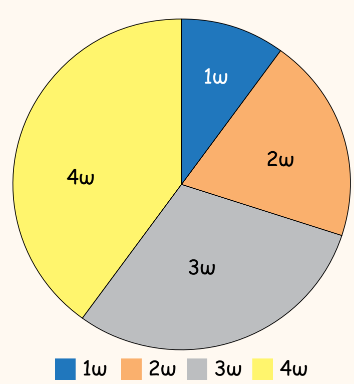
Μέσα μεταφοράς για το σχολείο

Εφαρμογή

1

Με τη βοήθεια του κυκλικού διαγράμματος συμπληρώνω το ραβδόγραμμα, όπου Α = 1ω, Β = 2ω, Γ = 3ω, Δ = 4ω.





Ερωτήσεις Σ - Λ		
Στο κυκλικό διάγραμμα κάθε χρώμα αντιστοιχεί σε κάποια παρατήρηση.	Σ	Λ
Το κυκλικό διάγραμμα βοηθάει να παρατηρήσουμε τι μέρος του όλου αποτελεί μια κατηγορία δεδομένων της έρευνας.	Σ	Λ

4. Μέσος όρος, επικρατούσα τιμή, διάμεσος και εύρος δεδομένων

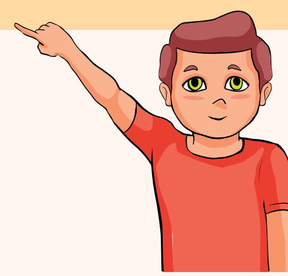
Δραστηριότητες

1 **Ένας μαθητής σε διάστημα δύο εβδομάδων ξόδεψε στο κυλικείο του σχολείου του τα παρακάτω ποσά: 5, 3, 2, 6, 7, 2, 3, 9, 3 και 4 ευρώ.**

Α. Βρίσκω πόσα χρήματα ξόδεψε κατά μέσο όρο την ημέρα.

Για να περιγράψουμε ένα πλήθος δεδομένων με μια μόνο τιμή χρησιμοποιούμε τον **μέσο όρο (Μ.Ο.),** που υπολογίζεται όπως παρακάτω:

$$\text{Μέσος όρος (Μ.Ο.)} = \frac{\textit{άθροισμα δεδομένων}}{\textit{πλήθος δεδομένων}}$$



Υπολογίζω: Μέσος Όρος (Μ.Ο.) = ―――――――――― = ―― =

Είναι ο μέσος όρος που βρήκες κάποια από τις τιμές των δεδομένων;

____

β. Τοποθετώ σε αύξουσα σειρά τα δεδομένα: 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 6, 7, 9

Διαγράφω δεδομένα ένα από δεξιά και ένα από αριστερά κάθε φορά, μέχρι να καταλήξω στο μεσαίο ή σε δύο μεσαία δεδομένα ~~2~~, ~~2~~, ~~3~~, ~~3~~, 3, 4, ~~5~~, ~~6~~, ~~7~~, ~~9~~

Έμειναν δύο τιμές στη μέση. Το ημιάθροισμά τους λέγεται **διάμεσος** των δεδομένων. Επομένως:

$$\text{Διάμεσος} = \frac{3 + 4}{2} = \ldots$$

Διάμεσος (δ) δεδομένων τα οποία έχουν τοποθετηθεί σε αύξουσα σειρά, ονομάζουμε το μεσαίο δεδομένο όταν το πλήθος τους είναι περιττός αριθμός ή το ημιάθροισμα των δυο μεσαίων δεδομένων όταν το πλήθος τους είναι άρτιος αριθμός.

- Είναι η διάμεσος που βρήκες κάποια από τις τιμές των δεδομένων; ______________
- Τι ποσό ξόδεψε τις περισσότερες ημέρες; ______________
- Επειδή ο αριθμός ________ έχει τη **μεγαλύτερη συχνότητα εμφάνισης**, λέγεται **επικρατούσα τιμή.**

Επικρατούσα τιμή ονομάζουμε το δεδομένο με τη μεγαλύτερη συχνότητα. Η επικρατούσα τιμή μπορεί να μην είναι μοναδική.

Ποια είναι η διαφορά μεταξύ του μεγαλύτερου και του μικρότερου ποσού που ξόδεψε ο μαθητής; ____________________ Ο αριθμός αυτός λέγεται **εύρος** των δεδομένων.

Εύρος δεδομένων ονομάζουμε τη διαφορά της μικρότερης από τη μεγαλύτερη τιμή δεδομένων.

Πόσα παιδιά πήγαν κινηματογράφο

Εφαρμογές

1

Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τα αποτελέσματα ενός τεστ στα Μαθηματικά των μαθητών της Στ΄ τάξης ενός Δημοτικού σχολείου. Να βρεθούν:
α. Ο μέσος όρος β. Η διάμεσος γ. Η επικρατούσα τιμή δ. Το εύρος

Μέσος όρος: ____________________

Διάμεσος: ____________________

Επικρατούσα τιμή: ____________________

Εύρος: ____________________

6	6	7	7
7	7	7	7
8	8	8	8
8	9	9	9
9	10	10	10

2

Παρακάτω φαίνεται η βαθμολογία που πήραν 10 μαθητές της Στ΄ τάξης σε ένα τεστ των Μαθηματικών. Όμως σβήστηκαν οι βαθμοί δύο μαθητών.

2, 2, 4, 5, 5, ..., ..., 6, 7, 8,

Βρίσκω τη βαθμολογία των δύο μαθητών, αν γνωρίζω ότι η διάμεσος είναι ο αριθμός 5 και ο μέσος όρος ο αριθμός 5.

Βρίσκω τη λύση με δοκιμές

____

____

____

____

____

____

____

Ερωτήσεις Σ - Λ		
Ο μέσος όρος της βαθμολογίας μου είναι το άθροισμα όλων των βαθμών μου, δια το πλήθος των μαθημάτων.	Σ	Λ
Η διάμεσος δεν μπορεί να είναι δεκαδικός αριθμός.	Σ	Λ

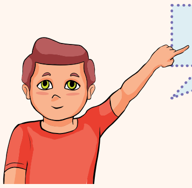
5. Πείραμα τύχης - Δειγματικός χώρος

Δραστηριότητες

1

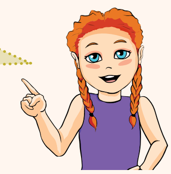
Έχουμε δύο νομίσματα, ένα του ενός ευρώ και ένα των δύο ευρώ. Ρίχνουμε ψηλά το νόμισμα των 2 ευρώ και όταν πέσει στο έδαφος παρατηρούμε την πάνω όψη του.

► Καταγράφω τα δυνατά αποτελέσματα: { _________ , _________ }



Κάναμε ένα **πείραμα τύχης.**

Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης λέγεται **δειγματικός χώρος** του πειράματος.



► Αν επαναλάβουμε το πείραμα, αλλά αυτή τη φορά ρίξουμε ταυτόχρονα και τα δύο νομίσματα, ποιος θα είναι ο δειγματικός χώρος του νέου πειράματος; Τον συμπληρώνω καταγράφοντας τους συνδυασμούς των όψεων των δύο νομισμάτων:

{(κορώνα, κορώνα), (________ , ________), (________ , ________), (________ , ________)}.

Όταν ένα πείραμα μπορεί να χωριστεί σε δύο επιμέρους πειράματα, για παράδειγμα ρίψη του νομίσματος του 1 ευρώ και ρίψη του νομίσματος των 2 ευρώ, ονομάζεται **πείραμα δύο σταδίων**. Ο δειγματικός χώρος του πειράματος αυτού είναι ο συνδυασμός των δειγματικών χώρων των επιμέρους πειραμάτων.

2

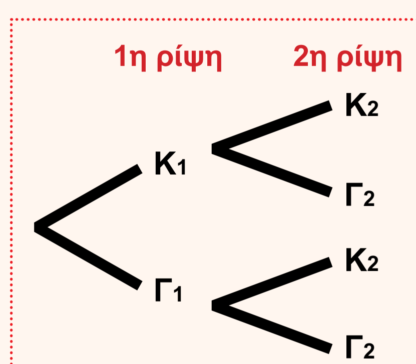
Ρίχνουμε διαδοχικά τα δύο νομίσματα της πρώτης δραστηριότητας. Πρώτα το νόμισμα του 1 ευρώ (1η ρίψη) και ακολούθως το νόμισμα των 2 ευρώ (2η ρίψη). Παρατηρώ το δενδροδιάγραμμα και συμπληρώνω τον δειγματικό χώρο του πειράματος.

K_1: Να φέρει Κορώνα το νόμισμα του ενός ευρώ

$Γ_1$: Να φέρει γράμματα το νόμισμα του ενός ευρώ

Αντίστοιχα K_2, $Γ_2$ για το νόμισμα των 2 ευρώ:

{(K_1, K_2), (... , ...), (... , ...), (... , ...)}



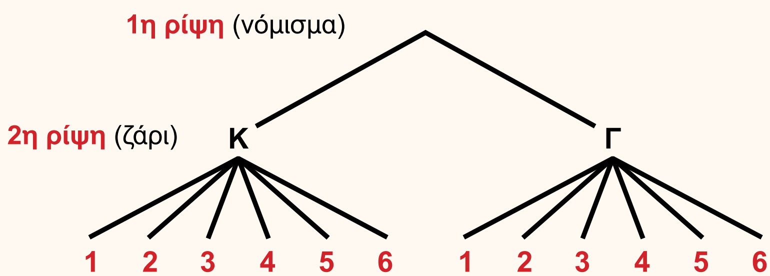
Για την εύρεση του δειγματικού χώρου ενός πειράματος 2 σταδίων χρησιμοποιούμε ένα **δενδροδιάγραμμα.**

Δειγματικός χώρος

Εφαρμογές

1 **Ρίχνουμε πρώτα ένα νόμισμα και μετά ένα ζάρι. Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος του πειράματος;**

Συμπληρώνω με τη βοήθεια του δενδροδιαγράμματος.



{(Κ, 1), (Κ, 2), ____ }

2 **Ρίχνουμε ταυτόχρονα ένα μπλε και ένα κόκκινο ζάρι.**

Συνδυάζω κάθε δυνατό αποτέλεσμα του μπλε ζαριού με κάθε δυνατό αποτέλεσμα του κόκκινου ζαριού. Συμπληρώνω πρώτα τον πίνακα όπου φαίνονται τα δυνατά αποτελέσματα στη ρίψη κάθε ζαριού και στη συνέχεια τον δειγματικό χώρο του πειράματος.

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2						
3						
4						
5						
6						

{(1,1) , (1,2) , ____ }

Αν τα ζάρια ήταν ίδιου χρώματος, θα άλλαζε ο δειγματικός χώρος του πειράματος; Εξηγώ: ____________

____

Ερωτήσεις Σ - Λ		
Το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων σε ένα πείραμα δύο σταδίων, προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε τα δυνατά αποτελέσματα των επιμέρους πειραμάτων.	Σ	Λ
Ο δειγματικός χώρος σε ένα πείραμα, περιλαμβάνει όλα τα αποτελέσματα που θα μπορούσαν να προκύψουν από το πείραμα.	Σ	Λ

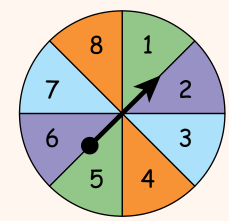
6. Πιθανότητα και σχετική συχνότητα

Δραστηριότητες

1 **Ο Κώστας περιστρέφει τον δείκτη του διπλανού χρωματιστού δίσκου.**

► Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος του πειράματος ως προς τους αριθμούς των χρωματιστών μερών του δίσκου; Συμπληρώνω:

{1, 2, ____________________ }



► Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος ως προς τα χρωματιστά μέρη του δίσκου;

Συμπληρώνω: {μπλε, μπλε, πράσινο, __________________________________ }

Κάθε αριθμός ή χρώμα που σταματά το βέλος σε μια περιστροφή του είναι ένα ενδεχόμενο του πειράματος.
Το σύνολο των δυνατών ενδεχόμενων – αποτελεσμάτων αποτελεί τον δειγματικό χώρο του πειράματος.

► Ο Κώστας περίστρεψε τον δίσκο μια φορά και το βέλος σταμάτησε στον αριθμό 5, που είναι ο ένας από τους 8 αριθμούς του δίσκου.

Ο λόγος $\frac{1}{8}$ ονομάζεται πιθανότητα του ενδεχομένου «να σταματήσει το βέλος στον αριθμό 5».
Ο Κώστας περίστρεψε για δεύτερη φορά το δίσκο προσδοκώντας το βέλος να σταματήσει σε άρτιο αριθμό.

► Ποιο είναι το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων για αυτό; Συμπληρώνω: {2, __________________ }

Οι **ευνοϊκές περιπτώσεις** να σταματήσει σε άρτιο αριθμό είναι: ______________________________

► Ποιο είναι το πλήθος των **δυνατών περιπτώσεων** μετά την περιστροφή του δίσκου; Συμπληρώνω:
{1, 2, 3, 4, ____ }.

Το πλήθος των δυνατών περιπτώσεων είναι: _____________

Συμπληρώνω τον λόγο $\frac{\textit{πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\textit{πλήθος δυνατών περιπτώσεων}} = \frac{...}{...}$

Η **πιθανότητα** ενός ενδεχομένου είναι ένας αριθμός από 0 έως 1 που εκφράζει το πόσο πιθανό είναι να έρθει ένα συγκεκριμένο αποτέλεσμα και είναι ο λόγος:

$$\frac{\textit{πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\textit{πλήθος δυνατών περιπτώσεων}}$$

Ποια είναι η πιθανότητα το βέλος να σταματήσει στον αριθμό 9; Συμπληρώνω:____________________

Ποια είναι η πιθανότητα το βέλος να σταματήσει σε έναν από τους αριθμούς από το 1 μέχρι το 8;

Συμπληρώνω: ____

Αν η πιθανότητα ενός ενδεχομένου είναι 0 τότε λέμε ότι το ενδεχόμενο αυτό είναι **αδύνατο**.
Αν η πιθανότητα ενός ενδεχομένου είναι 1, τότε το ενδεχόμενο λέγεται **βέβαιο**.

2 **Σε μια τάξη της Στ΄ Δημοτικού έγινε μια έρευνα σχετικά με το αγαπημένο άθλημα των παιδιών και πήραμε τον διπλανό πίνακα συχνοτήτων.**

Άθλημα	**Συχνότητα (ν)**
Ποδόσφαιρο	9
Μπάσκετ	6
Βόλεϊ	5
Σύνολο	

► Αν επιλέξουμε έναν μαθητή:

α. η πιθανότητα αυτός να αγαπά το ποδόσφαιρο είναι: $\frac{\textit{πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\textit{πλήθος δυνατών περιπτώσεων}} = \frac{...}{20}$

β. η πιθανότητα αυτός να αγαπά το μπάσκετ είναι: $\frac{\textit{πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\textit{πλήθος δυνατών περιπτώσεων}} = \frac{...}{20}$

► Συμπληρώνω τον πίνακα.

Άθλημα	**Συχνότητα (ν)**	**Σχετική συχνότητα (f)**
Ποδόσφαιρο	9	
Μπάσκετ	6	
Βόλεϊ	5	
Σύνολο	**20**	

Τι παρατηρείτε για τις πιθανότητες και τις αντίστοιχες σχετικές συχνότητες;

____

____

____

Ο δειγματικός χώρος ενός ζαριού

Επαναληπτικοί τροχοί - δειγματικός χώρος

Εφαρμογή

1 **Αντλώντας πληροφορίες από τη Δραστηριότητα 1 υπολογίζω τις πιθανότητες το βέλος να σταματήσει σε χρώμα:**

α. γαλάζιο: _____ **β.** πορτοκαλί: _____ **γ.** πράσινο: _____ **δ.** σε πρώτο αριθμό χρώματος μοβ: _____

Ερωτήσεις Σ - Λ		
Αν η πιθανότητα ενός ενδεχομένου είναι μηδέν τότε και η συχνότητά του είναι 0.	**Σ**	**Λ**
Το βέβαιο ενδεχόμενο έχει πιθανότητα 0.	**Σ**	**Λ**

Ενότητα 4 **Επαναληπτικό**

1 **Οι εισπράξεις ανά εβδομάδα μιας εταιρείας σε χιλιάδες € δίνονται από το παρακάτω γράφημα.**

α. Συμπληρώνω τον πίνακα εσόδων.

Ημέρες	**Έσοδα**
Δευτέρα	
Τρίτη	
Τετάρτη	
Πέμπτη	
Παρασκευή	
Σύνολο	

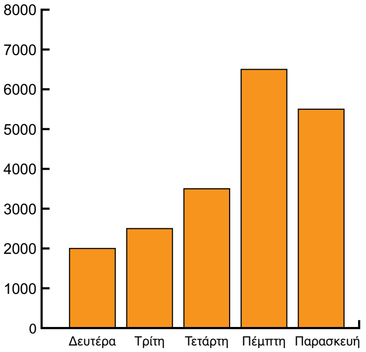
β. Βρίσκω τον μέσο όρο των εβδομαδιαίων εσόδων.

____

____

____

____



γ. Πόσο πρέπει να αυξηθούν τα έσοδα της Δευτέρας για να γίνει το μέσο εβδομαδιαίο έσοδο 4.100€;

____

____

____

2 **Ρίχνουμε ένα ζάρι. Ποια είναι η πιθανότητα να φέρουμε άρτιο αριθμό;**

____

3 **Έχουμε τους αριθμούς 0, 2, 3. Πόσους τριψήφιους αριθμούς μπορώ να σχηματίσω με αυτά τα ψηφία;** ____________________

Αν επιλέξω έναν από αυτούς, ποια είναι η πιθανότητα να έχει όλα του τα ψηφία διαφορετικά;

____

4 **Ο Γιάννης για να πάρει έπαινο στα Μαθηματικά πρέπει να έχει στα διαγωνίσματά του μέσο όρο πάνω από 9 με άριστα το 10. Στα τέσσερα διαγωνίσματα έγραψε 9.6, 9.4, 8.7, 8.9. Τι βαθμό τουλάχιστον πρέπει να γράψει στο 5ο διαγώνισμα;**

____

- Συμπλήρωσε τον πίνακα αυτοαξιολόγησης, με οριζόντια σειρά, στα κεφάλαια που αναφέρονται στο επαναληπτικό της ενότητας.
- Μετά τη συμπλήρωση κράτησε σημειώσεις για να συζητήσεις για «όσα έμαθες» και για «αυτά που θα ήθελες να μάθεις περισσότερο».

Πίνακας Αυτοαξιολόγησης

Ενότητα 5

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΚΑΙ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ
ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

1. **Κύρια στοιχεία επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων (Γ.Ε.6.1.)**
2. **Ταξινόμηση τετράπλευρων (Γ.Ε.6.2α)**
3. **Κυρτά και μη κυρτά πολύγωνα – Κανονικά πολύγωνα (Γ.Ε.6.2β)**
4. **Άθροισμα γωνιών τετράπλευρου (Γ.Ε.6.3.)**
5. **Κατασκευές βασικών τετράπλευρων (Γ.Ε.6.4.)**
6. **Σύνθεση και ανάλυση επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων (Γ.Ε.6.5.)**
7. **Σχέση ακτίνας και διαμέτρου ενός κύκλου (Γ.Ε.6.6., Γ.Ε.6.7.)**
8. **Κατασκευές στερεών (Γ.Χ.6.1)**
9. **Σχεδίαση στερεών σε ισομετρικό καμβά (Γ.Χ.6.2.)**
10. **Ταξινόμηση πρισμάτων και πυραμίδων (Γ.Χ.6.3.)**
11. **Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (ΑΓ.Θ.6.1α)**
12. **Γεωγραφικές συντεταγμένες (ΑΓ.Θ.6.1β)**

Γεωμετρία/Γεωμετρία του επίπεδου - Γεωμετρία του χώρου - Αναλυτική Γεωμετρία

Θα μάθω να:

- ▶ Διακρίνω τα κύρια στοιχεία επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων.
- ▶ Ονομάζω πολύγωνα με βάση το πλήθος των γωνιών τους.
- ▶ Ταξινομώ τετράπλευρα με βάση την ισότητα και την παραλληλία των πλευρών τους.
- ▶ Διακρίνω τα κυρτά, τα μη κυρτά πολύγωνα και τα κανονικά πολύγωνα.
- ▶ Διερευνώ το άθροισμα των γωνιών πολύγωνων.
- ▶ Κατασκευάζω και σχεδιάζω τετράπλευρα με φυσικά υλικά και σε ψηφιακό περιβάλλον.
- ▶ Αξιοποιώ τους γνώμονες για την κατασκευή παραλληλόγραμμων.
- ▶ Συνθέτω και αναλύω επίπεδα γεωμετρικά σχήματα σε δύο ή περισσότερα μέρη σε φυσικό ή ψηφιακό περιβάλλον.
- ▶ Κατανοώ την έννοια του κύκλου, του κέντρου, και της ακτίνας του.
- ▶ Διερευνώ τη σχέση διαμέτρου και ακτίνας.
- ▶ Αναγνωρίζω όψεις κτηρίων.
- ▶ Κατασκευάζω και σχεδιάζω σε ισομετρικό καμβά στερεά.
- ▶ Ταξινομώ πρίσματα και πυραμίδες και τα αντιστοιχίζω με τα αναπτύγματά τους.
- ▶ Διερευνώ το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.
- ▶ Αναγνωρίζω, τοποθετώ και ονομάζω σημεία στο καρτεσιανό σύστημα.
- ▶ Κατανοώ τις έννοιες γεωγραφικό μήκος και γεωγραφικό πλάτος.
- ▶ Αναγνωρίζω, τοποθετώ και ονομάζω σημεία σε γεωγραφικούς χάρτες με χρήση σύνθετων σημείων του ορίζοντα (π.χ. ΒΔ, ΝΑ).

Λέξεις κλειδιά

παραλληλόγραμμα	ταξινομώ πολύγωνα	ακτίνα	διάμετρος	άθροισμα γωνιών πολυγώνων
κανονικά πολύγωνα	πρίσματα	πυραμίδες	καρτεσιανό σύστημα	συντεταγμένες

1. Κύρια στοιχεία επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων

Δραστηριότητες

1

Επιλέγω ένα από τα σήματα του Κώδικα Οδικής Κυκλοφορίας του διπλανού σχήματος και προσπαθώ να το περιγράψω στον διπλανό μου. Αφού μαντέψει την επιλογή μου, αλλάζουμε ρόλους.

Ποια από τα παρακάτω χαρακτηριστικά γνωρίσματα των πινακίδων χρησιμοποίησα στην περιγραφή μου; Βάζω ένα Χ στο αντίστοιχο κουτάκι:

Αριθμός πλευρών	Αριθμός γωνιών	Αριθμός κορυφών	Χρώμα πινακίδας	Ίσες πλευρές	Παράλληλες πλευρές	Άλλο
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

2

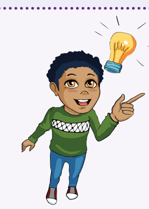
Κύρια στοιχεία πολυγώνων

• Το πλήθος των γωνιών ή πλευρών

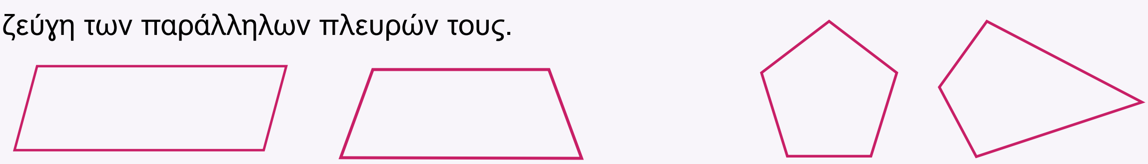
Έχει 3 πλευρές και 3 γωνίες.

Έχει 5 πλευρές και 5 γωνίες.

Μπορούμε να περιγράψουμε ένα πολύγωνο από τα **κύρια στοιχεία** του, τις **πλευρές** του και τις **γωνίες** του.



• Τα ζεύγη των παράλληλων πλευρών τους.



Έχουν τουλάχιστον ένα ζεύγος παράλληλων πλευρών.

Δεν έχουν παράλληλες πλευρές.

• Τα μήκη των πλευρών τους

Έχουν τουλάχιστον ένα ζεύγος ίσων πλευρών.

Έχουν όλες τις πλευρές τους ίσες.

Πώς ονομάζουμε τα πολύγωνα;

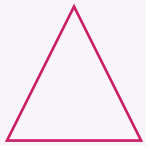
Τα πολύγωνα παίρνουν το όνομά τους από το **πλήθος των γωνιών τους.**

Κάποιες φορές και από το πλήθος των πλευρών τους.

• Ονομάζω καθένα από τα παρακάτω πολύγωνα με βάση τον αριθμό:

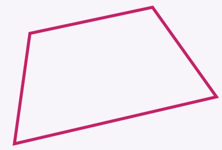
α. των γωνιών του

____

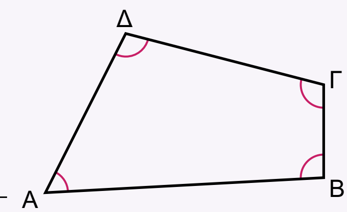


β. των πλευρών του

____



Το σημείο που τέμνονται δύο διαδοχικές πλευρές ενός πολυγώνου ονομάζεται **κορυφή** του πολυγώνου.



• Συμπληρώνω τις κορυφές του διπλανού τετράπλευρου: ______________

Μπορούμε να ονομάσουμε ένα πολύγωνο από τα γράμματα των κορυφών του. Έτσι μπορούμε να το διακρίνουμε από ένα πολύγωνο με τον ίδιο αριθμό πλευρών, αλλά συγχρόνως να ονομάσουμε τις πλευρές του και τις γωνίες του.

Συμπληρώνω:

α. το όνομα του παραπάνω τετράπλευρου: ______________

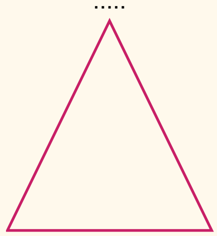
β. τις πλευρές του: ΑΒ, _____ **γ.** τις γωνίες του: ΔÂΒ ή Â, _____

Τα γράμματα στις κορυφές ενός πολυγώνου είναι διαδοχικά κεφαλαία γράμματα του αλφαβήτου, τοποθετημένα κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού ή αντίθετα.

Ονομασία Πολυγώνου

Εφαρμογές

1 **Γράφω τα ονόματα των παρακάτω πολυγώνων, τις πλευρές τους και τις γωνίες τους, αφού πρώτα ονομάσω τις κορυφές τους:**



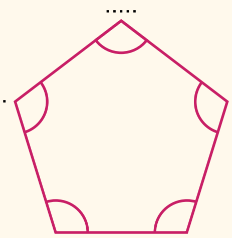
.....

.....　　.....

____

πλευρές: ______________

γωνίες: ______________



.....

.....　　.....

.....　　.....

____

πλευρές: ______________

γωνίες: ______________

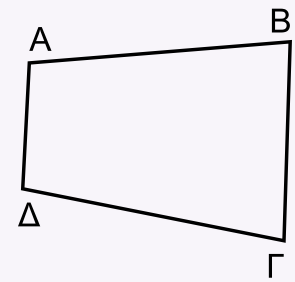
2 **Ένας συμμαθητής σου ισχυρίζεται πως: «Όσες είναι οι γωνίες ενός πολυγώνου τόσες είναι και οι πλευρές του και οι κορυφές του».**

Συμφωνώ ή διαφωνώ; ______________________________

Ερωτήσεις Σ - Λ		
Ένα πολύγωνο που έχει 16 γωνίες ονομάζεται δεκαεξάγωνο.	Σ	Λ
Δύο διαδοχικές πλευρές ενός πολυγώνου τέμνονται σε μια κορυφή του.	Σ	Λ

Δραστηριότητες

1 **Στο διπλανό τετράπλευρο ενώνω δύο κορυφές που δεν είναι διαδοχικές με ένα ευθύγραμμο τμήμα.**



Πόσα τέτοια ευθύγραμμα τμήματα μπορώ να φέρω; __________

____

Τα ονομάζω: ________________________________

Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο μη διαδοχικές κορυφές ενός τετράπλευρου λέγεται **διαγώνιος**. Κάθε τετράπλευρο έχει δύο διαγωνίους.

2 **Ομοιότητες και διαφορές τετράπλευρων**

• Γράφω το όνομα του σχήματος που αναγνωρίζω.

_______________ _______________ _______________ _______________

• Μετρώ με τον χάρακά μου τα μήκη των πλευρών των παραπάνω τετράπλευρων. Πώς θα τα ταξινομούσα;

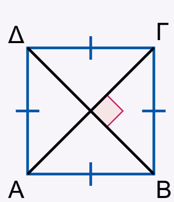
____

• Σχεδιάζω τις διαγωνίους των τετράπλευρων. Ποιων τετράπλευρων οι διαγώνιοι είναι ίσες; __________

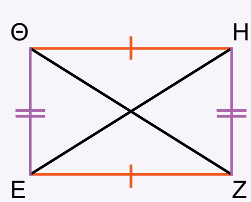
____

• Ελέγχω με τον γνώμονα σε ποια τετράπλευρα οι διαγώνιοι τέμνονται κάθετα. __________________

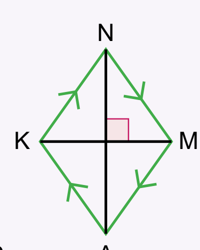
Τετράπλευρα με τις απέναντι πλευρές ίσες (Παρατηρώ τα σχήματα, χρησιμοποιώ τον χάρακα, το μοιρογνωμόνιο και τον γνώμονά μου και συμπληρώνω)



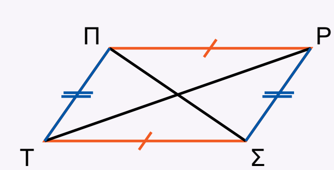
Τετράγωνο



Ορθογώνιο



Ρόμβος



Παραλληλόγραμμο

Έχει 4 πλευρές _______ και 4 γωνίες ορθές. Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και τέμνονται ______________

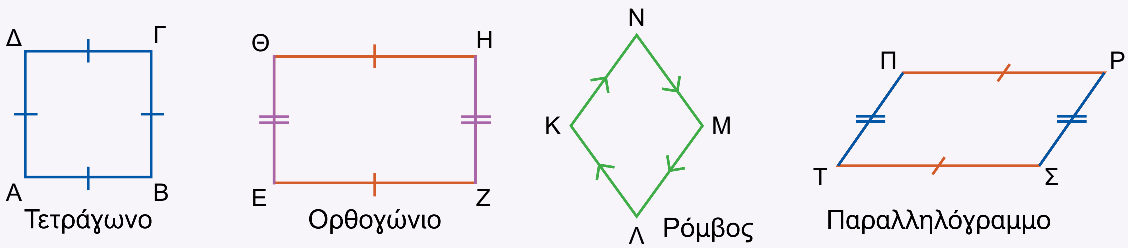
Έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες και 4 γωνίες ___________ Οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

Έχει 4 πλευρές ίσες και τις απέναντι γωνίες _________ Οι διαγώνιοί του τέμνονται ______________

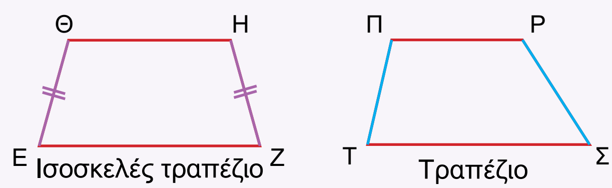
Έχει τις απέναντι πλευρές του ___________ και τις απέναντι γωνίες του ______________

Τετράπλευρα με παράλληλες πλευρές

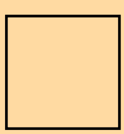
- Τα τετράγωνα, τα ορθογώνια, τα παραλληλόγραμμα και οι ρόμβοι έχουν τις απέναντι πλευρές τους παράλληλες. **Γι’ αυτό όλα τα ονομάζουμε παραλληλόγραμμα.**



- Το **τραπέζιο** έχει μόνο ένα ζεύγος παράλληλων πλευρών.



Τετράπλευρα με ορθές γωνίες

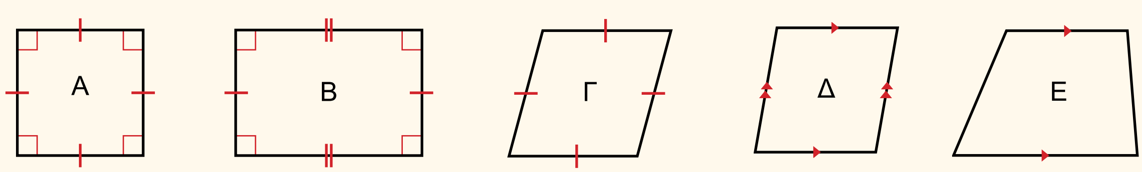


Το τετράγωνο και το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχουν 4 ορθές γωνίες.

Ταξινόμηση τετράπλευρων

Εφαρμογή

1 **Στα παρακάτω σχήματα βάζω γράμματα του αλφάβητου για να τα ονομάσω. Στη συνέχεια ένα ένα σχήμα το ονομάζω με κριτήρια που αφορούν τις πλευρές ή τις γωνίες του.**



Α. ______________________________

Β. ______________________________

Γ. ______________________________

Δ. ______________________________

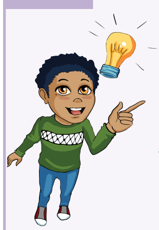
Ε. ______________________________

Ερωτήσεις Σ - Λ		
Οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται κάθετα.	Σ	Λ
Το τετράγωνο, ο ρόμβος και το ορθογώνιο είναι παραλληλόγραμμα.	Σ	Λ

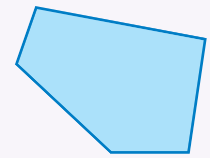
3. Κυρτά και μη κυρτά πολύγωνα - Κανονικά πολύγωνα

Δραστηριότητες

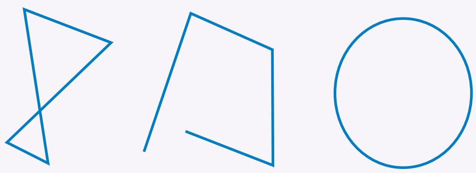
1 Τι είναι ένα πολύγωνο;



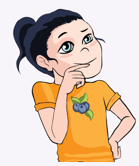
Ένα πολύγωνο είναι ένα **κλειστό** σχήμα **που οι πλευρές του είναι ευθύγραμμα τμήματα**, τα οποία **τέμνονται μόνο στις κορυφές του.** Σε κάθε κορυφή του συναντώνται ακριβώς δύο πλευρές του.



πολύγωνο



1 2 3



Τότε, κανένα από τα διπλανά σχήματα δεν είναι πολύγωνο.

- Μελετώ τον ορισμό του μαθητή και δικαιολογώ γιατί κανένα από τα παραπάνω σχήματα δεν είναι πολύγωνο.

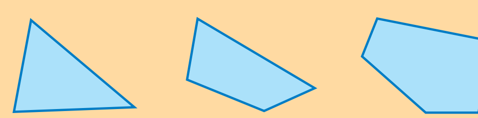
Το σχήμα 1 δεν είναι πολύγωνο γιατί: ______________________________

Το σχήμα 2 δεν είναι πολύγωνο γιατί: ______________________________

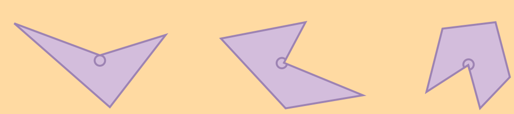
Το σχήμα 3 δεν είναι πολύγωνο γιατί: ______________________________

Κυρτά και μη κυρτά πολύγωνα

Τα πολύγωνα που έχουν όλες τους τις γωνίες μικρότερες από 180° ονομάζονται **κυρτά πολύγωνα.**



Τα πολύγωνα που έχουν τουλάχιστον μία γωνία μεγαλύτερη από 180° ονομάζονται **μη κυρτά πολύγωνα.**

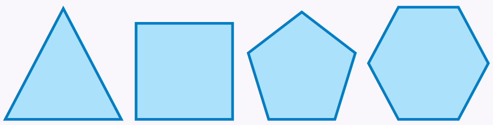


2 Με τον χάρακά μου, στο τετράδιό μου, προεκτείνω μία μία τις πλευρές των παραπάνω: α. κυρτών πολυγώνων, β. μη κυρτών πολυγώνων

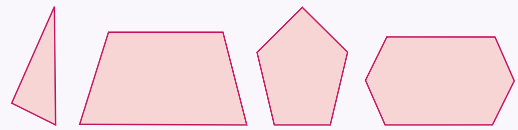
Τι παρατηρώ; ______________________________

3 Κανονικά πολύγωνα

Τι κοινό έχουν τα πολύγωνα της ομάδας Α που δεν το έχουν τα πολύγωνα της ομάδας Β;



Ομάδα Α

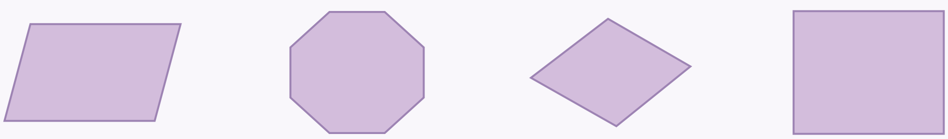


Ομάδα Β

- Εκτιμώ: ____

- Χρησιμοποιώ τον χάρακά μου και το μοιρογνωμόνιό μου και ελέγχω την εκτίμησή μου.

Τοποθετώ καθένα από τα παρακάτω πολύγωνα σε μία από τις παραπάνω ομάδες Α και Β.



Ομάδα ... Ομάδα ... Ομάδα ... Ομάδα ...

- Εκτιμώ: ____
- Ελέγχω με τον χάρακά μου και το μοιρογνωμόνιό μου.

Τα πολύγωνα που έχουν όλες τις πλευρές τους και όλες τις γωνίες τους ίσες ονομάζονται **κανονικά.**

Είναι κανονικό πολύγωνο το τετράγωνο, το ισόπλευρο και το ισοσκελές τρίγωνο;

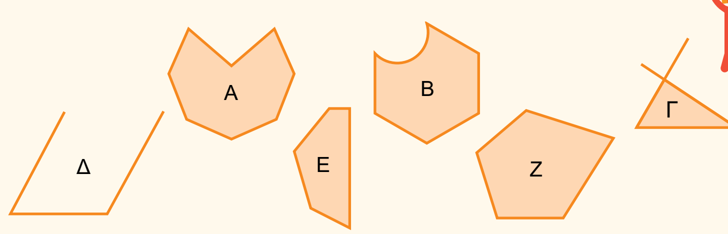
Κανονικά Πολύγωνα

Εφαρμογές

1 Ποια από τα διπλανά σχήματα είναι πολύγωνα και ποια όχι;

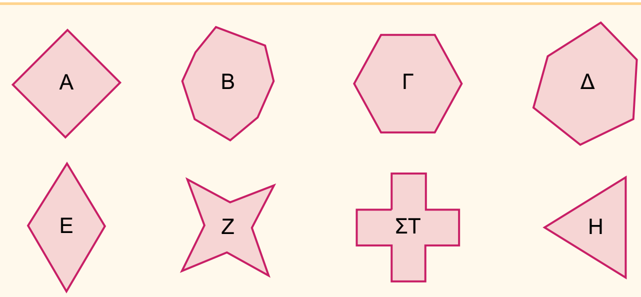
- Πολύγωνα είναι: ____________________
- Με ποιο κριτήριο αποφάσισα;

  Εξηγώ: ____________________________



2 Ταξινομώ τα διπλανά πολύγωνα:

- Κυρτά: ____________________________
- Μη κυρτά: __________________________
- Κανονικά: __________________________
- Μη κανονικά: _______________________



Ερωτήσεις Σ - Λ		
Το κανονικό πολύγωνο με τον μικρότερο αριθμό πλευρών είναι το ισόπλευρο τρίγωνο.	Σ	Λ
Το τρίγωνο, το τετράγωνο και ο ρόμβος είναι κυρτά πολύγωνα.	Σ	Λ

4. Άθροισμα γωνιών τετράπλευρου

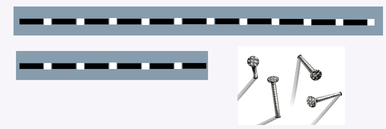
Δραστηριότητες

1

Υλικά

Τέσσερις ίσες λωρίδες, από το υλικό πολυλωρίδες.

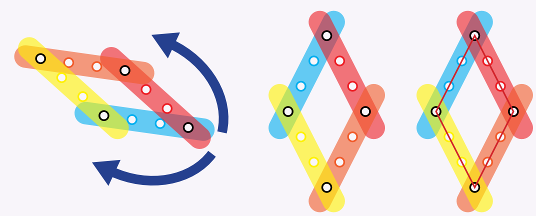
Διπλόκαρφα (καρφιά του Καραγκιόζη).



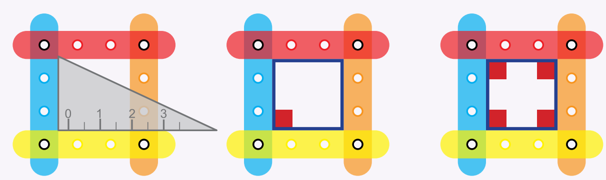
Οδηγίες

▶ Ενώνω με διπλόκαρφα τα άκρα και των 4 λωρίδων, ώστε να σχηματιστεί ένα τετράπλευρο.

▶ Μετακινώ μια κορυφή (σύνδεση) και παρατηρώ τι σχήμα δημιουργούν εσωτερικά οι λωρίδες των πλευρών του ή οι κορυφές του.



▶ Μετατρέπω το σχήμα, ώστε μία γωνία του να γίνει ορθή. Παρατηρώ ότι όλες οι γωνίες του είναι ορθές.



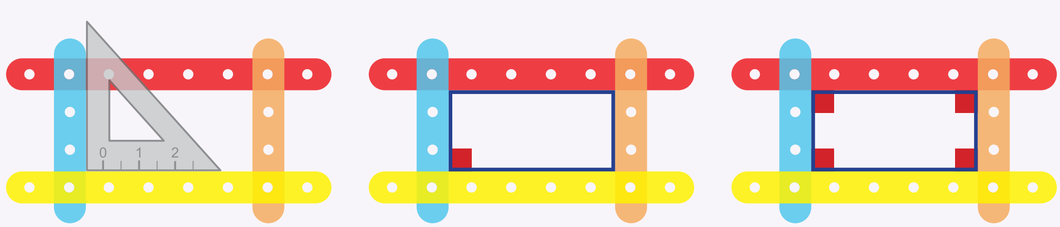
• Τι σχήμα δημιουργήθηκε; ______________________

• Πόσες ορθές γωνίες είναι το άθροισμα των γωνιών του;

____

2

Επαναλαμβάνω από την αρχή την κατασκευή μεταβάλλοντας το μέγεθος δύο απέναντι πλευρών. Μετατρέπω το σχήμα, ώστε μία γωνία του να γίνει ορθή. Παρατηρώ ότι όλες οι γωνίες του είναι ορθές.



• Τι σχήμα δημιουργήθηκε; ______________________________

• Πόσες ορθές γωνίες είναι το άθροισμα των γωνιών του; ______________________

Συμπληρώνω το συμπέρασμα:

Το άθροισμα των γωνιών του τετράγωνου και του ορθογώνιου παραλληλόγραμμου είναι __________ ορθές ή ___________ μοίρες.

Άθροισμα γωνιών τετράπλευρου

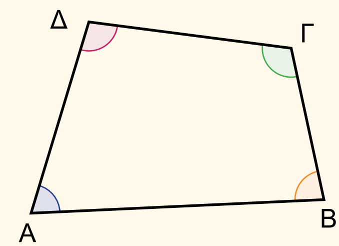
Εφαρμογή

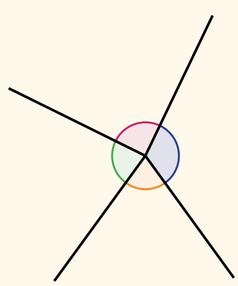
1

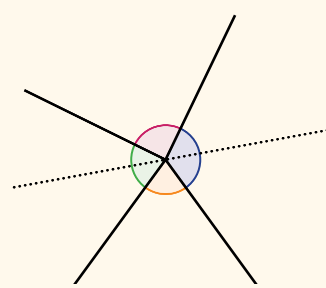
Άθροισμα γωνιών οποιουδήποτε τετράπλευρου

Χρησιμοποιώ τέσσερις λωρίδες από το υλικό πολυλωρίδες, που τα μήκη τους να είναι τέτοια ώστε ενωμένες να σχηματίζουν ένα τετράπλευρο.

- Αποτυπώνω τις γωνίες ενός τετράπλευρου σε διαφανές χαρτί, αφού πρώτα τις χρωματίσω με διαφορετικά χρώματα την καθεμία.
- Κόβω από το διαφανές χαρτί τις τέσσερις γωνίες και τις τοποθετώ έτσι, ώστε να είναι διαδοχικές και να έχουν κοινή κορυφή.



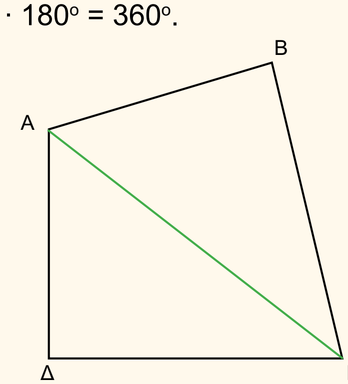


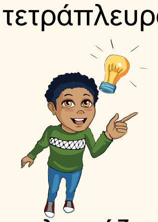


Παρατηρώ ότι το άθροισμά τους είναι 2 ευθείες γωνίες ή 4 ορθές γωνίες ή $2 \cdot 180^o = 360^o$.

κι αλλιώς...

- Φέρνουμε μία διαγώνιο, για παράδειγμα την ΑΓ. Οπότε το τετράπλευρο χωρίζεται σε δύο τρίγωνα.





Παρατηρώ ότι οι γωνίες των τρίγωνων είναι και γωνίες ή μέρος των γωνιών του τετράπλευρου.

Πολλαπλασιάζοντας τον αριθμό των τρίγωνων επί 180^o έχουμε ότι:

$2 \cdot 180^o = 360^o$ ή 4 ορθές γωνίες.

Το άθροισμα των γωνιών του τετράπλευρου είναι 4 ορθές γωνίες ή 360^o.

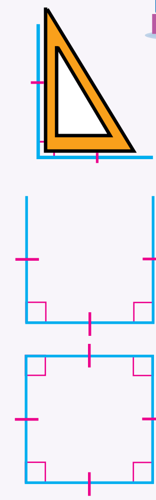
Ερωτήσεις Σ - Λ		
Το άθροισμα των γωνιών ενός τετράπλευρου είναι 4 ορθές γωνίες.	Σ	Λ
Αν ένα παραλληλόγραμμο έχει μια γωνία ορθή, είναι ορθογώνιο.	Σ	Λ

5. Κατασκευές βασικών τετράπλευρων

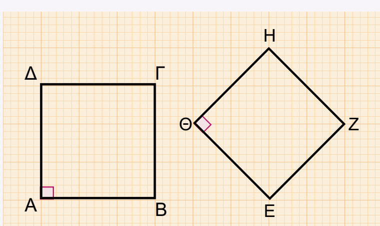
Δραστηριότητες

1 Κατασκευή τετράγωνου

Για να κατασκευάσω ένα τετράγωνο με τη βοήθεια του γνώμονα ακολουθώ τα παρακάτω βήματα.



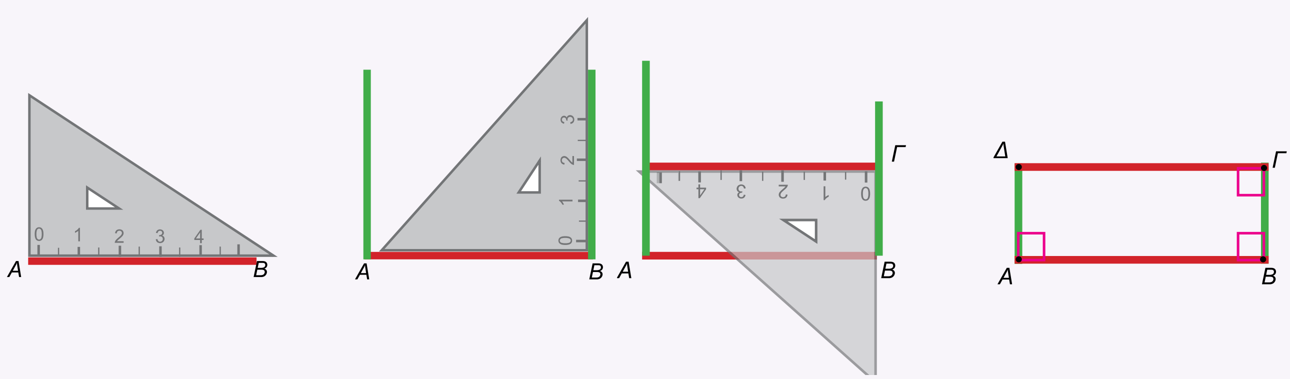
- Σχεδιάζω με τον γνώμονα μια ορθή γωνία με τις πλευρές της να είναι ίσα ευθύγραμμα τμήματα.
- Σχεδιάζω μια δεύτερη ορθή γωνία η οποία έχει μια πλευρά κοινή με την πρώτη, ενώ η άλλη πλευρά της είναι ευθύγραμμο τμήμα ίσο με τα προηγούμενα.
- Ενώνω τα άκρα των μη κοινών πλευρών των δύο ορθών γωνιών.



Όλες οι γωνίες του τετράπλευρου είναι ορθές και όλες του οι πλευρές ίσες. Κατασκευάσαμε ένα τετράγωνο.

2 Κατασκευή ορθογώνιου

Σχεδιασμός ορθογώνιου παραλληλόγραμμου, χρησιμοποιώντας τον γνώμονα.



Χαράζω ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.	Με τον γνώμονα φέρνω κάθετες σε αυτό στα άκρα του Α και Β.	Σημειώνω ένα σημείο Γ σε μια από αυτές και φέρνω κάθετη σε αυτή στο σημείο Γ.	Ονομάζω Δ το σημείο που τέμνει την άλλη κάθετη.

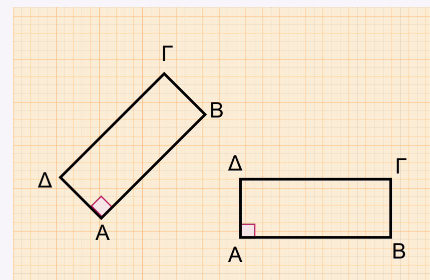
Μελετώντας τα βήματα κατασκευής εξηγούμε γιατί το παραπάνω τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.

____

____

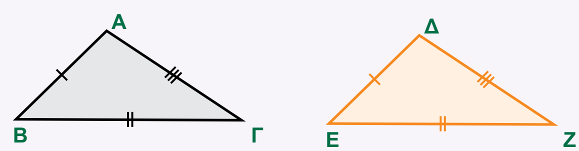
____

____

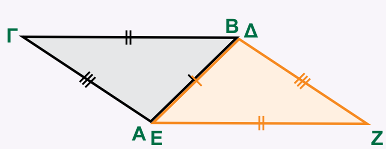


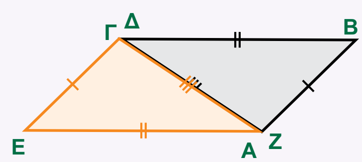
3 Κατασκευή παραλληλόγραμμου

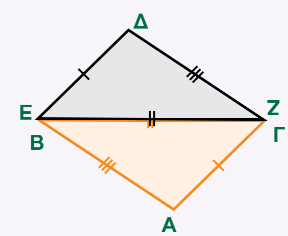
Χρησιμοποιώντας 2 ίσα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ και τοποθετώντας τα έτσι, ώστε οι ίσες πλευρές τους κάθε φορά να συμπίπτουν κατασκευάζω:



ένα: ____________________ ένα: ____________________ ένα: ____________________







Σύνθεση σχημάτων I

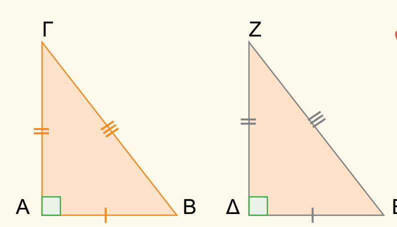
Σύνθεση σχημάτων II

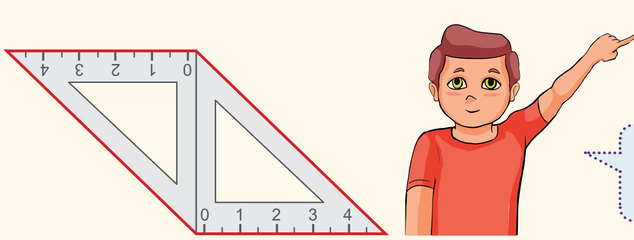
Σύνθεση σχημάτων III

Εφαρμογή

1

Αποτυπώνω σε διαφανές χαρτί τα διπλανά δύο ίσα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ, στη συνέχεια κόβω το περίγραμμά τους και τα τοποθετώ κατάλληλα σχηματίζοντας όσα περισσότερα πολύγωνα μπορώ.





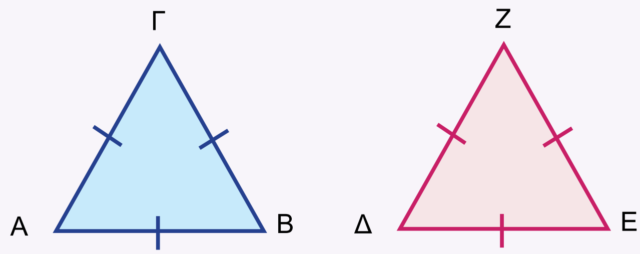
Εναλλακτικά, αν θέλεις, μπορείς να πειραματιστείς με δύο ίδιους γνώμονες. Κοίτα!

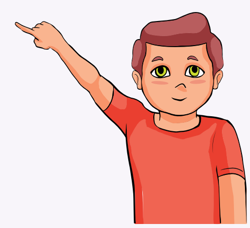
Ερωτήσεις Σ - Λ		
Ταιριάζοντας κατάλληλα δύο ίσα τρίγωνα μπορώ να κατασκευάσω ένα παραλληλόγραμμο.	Σ	Λ
Η διαγώνιος χωρίζει το παραλληλόγραμμο σε 2 ίσα τρίγωνα.	Σ	Λ

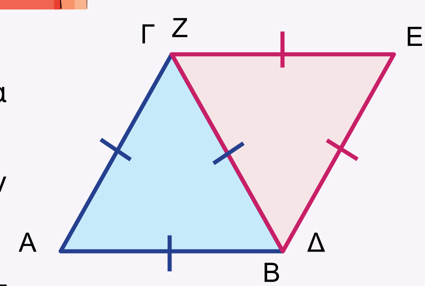
Δραστηριότητες

1 **Συνθέτω σχήματα με τη βοήθεια του ισόπλευρου τρίγωνου.**

α. Χρησιμοποιώντας 2 ίσα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ, ποια πολύγωνα μπορώ να κατασκευάσω;



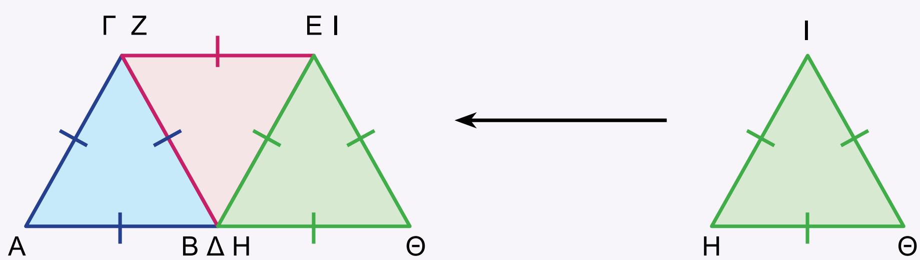




- Τοποθετώντας τα κατάλληλα ώστε οι ίσες τους πλευρές ΒΓ, ΔΖ να συμπίπτουν παίρνουμε το διπλανό σχήμα, που είναι ένας ρόμβος.
- Αν τα τοποθετήσω κατά διαφορετικό τρόπο, ώστε άλλο ζευγάρι ίσων πλευρών να συμπίπτουν τι σχήμα θα δημιουργηθεί;

  Εξηγώ: ____

β. Αν στον ρόμβο που κατασκεύασα παραπάνω τοποθετήσω κατάλληλα ένα τρίτο ισόπλευρο τρίγωνο ίσο με τα άλλα, θα πάρω το παρακάτω σχήμα:



Το σχήμα που παίρνουμε είναι ισοσκελές τραπέζιο.

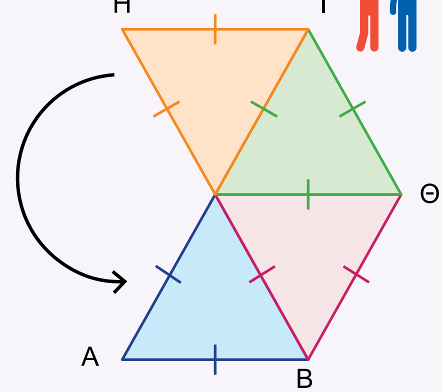
γ. Χρησιμοποιώντας περισσότερα ίσα ισόπλευρα τρίγωνα και τοποθετώντας τα όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, ποιο πολύγωνο μπορώ να κατασκευάσω;

____

- Είναι το πολύγωνο που τελικά θα σχηματίσω κανονικό;__________

  Εξηγώ:____

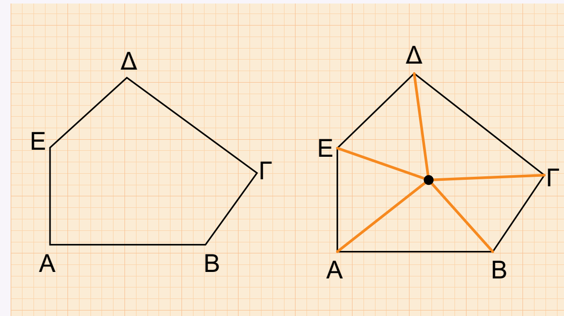
- Από πόσα ισόπλευρα τρίγωνα αποτελείται;________________



2 Χωρίζω ένα πολύγωνο σε τρίγωνα.

Στο διπλανό σχήμα έχουμε χωρίσει ένα πεντάγωνο σε τρίγωνα παίρνοντας ένα σημείο στο εσωτερικό του.

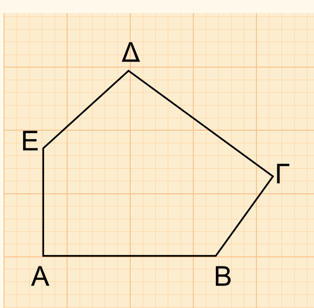
Για να χωρίσουμε ένα πολύγωνο σε τρίγωνα, ο πιο εύκολος τρόπος είναι να συνδέσουμε μια κορυφή του με όλες τις υπόλοιπες κορυφές, φέρνοντας τις διαγωνίους του.



Ανάλυση Σχημάτων

Εφαρμογές

1 Χωρίζω το πεντάγωνο σε τρίγωνα φέρνοντας τις διαγωνίους του από μια κορυφή. Στη συνέχεια σχεδιάζω, στο διπλανό πλαίσιο, ένα πολύγωνο και το χωρίζω σε τρίγωνα με όποιον τρόπο θέλω.

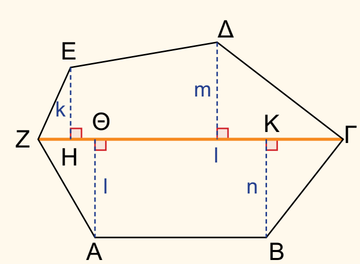


Βρίσκω το άθροισμα των γωνιών κάθε πολυγώνου:

____

2 Χωρίζω ένα πολύγωνο σε γνωστά σχήματα (τρίγωνα, παραλληλόγραμμα, τραπέζια, κ.λπ.)

Για να χωρίσουμε ένα πολύγωνο σε γνωστά σχήματα, ένας άλλος τρόπος είναι να σχεδιάσω μια __________ και μετά να φέρω κάθετες, από τις άλλες __________ του πολυγώνου προς αυτή.



Ονομάζω τα σχήματα που δημιουργήθηκαν: ______________________________

Ερωτήσεις Σ - Λ		
Ένα εξάγωνο μπορεί να αναλυθεί μόνο σε τρίγωνα.	Σ	Λ
Ένα τραπέζιο μπορεί να αναλυθεί σε 2 τρίγωνα και 1 ορθογώνιο.	Σ	Λ

7. Σχέση ακτίνας και διαμέτρου ενός κύκλου

Δραστηριότητες

1

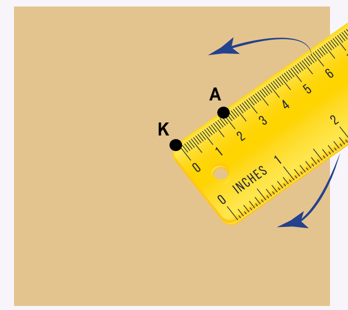
Ακολουθώ τις οδηγίες και μαντεύω το σχήμα.

▶ Σχεδιάζω ένα σημείο Κ.

▶ Χρησιμοποιώντας τον χάρακά μου μετρώ 2 εκ. από το σημείο Κ και σημειώνω ένα σημείο Α, όπως φαίνεται στο σχήμα.

▶ Αλλάζοντας προσανατολισμό στον χάρακά μου μετρώ ξανά 2 εκ. από το σημείο Κ και σημειώνω ένα σημείο Β.

▶ Συνεχίζω την ίδια διαδικασία σημειώνοντας σημεία Γ, Δ, __________ μέχρι να αρχίσει να εμφανίζεται ένα γνωστό σχήμα.



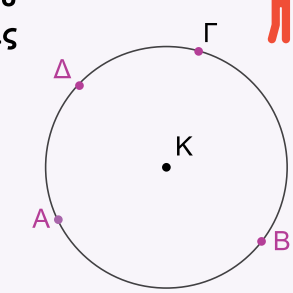
- Ποιο σχήμα κάνει την εμφάνισή του; ________________________________
- Πόσο απέχουν τα σημεία που σημείωσες από το σημείο Κ; ____________________

✓ **Κύκλος** είναι μια κλειστή καμπύλη γραμμή, που όλα τα σημεία της απέχουν ίση απόσταση από ένα σημείο (Κ) στο εσωτερικό του, που ονομάζεται **κέντρο του κύκλου.**

✓ Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το κέντρο του κύκλου με ένα σημείο του λέγεται **(α)κτίνα** του κύκλου.

2

Στο διπλανό σχήμα ενώνω τα σημεία του κύκλου με διάφορους τρόπους σχηματίζοντας ευθύγραμμα τμήματα. Με τον χάρακά μου μετρώ το μήκος τους και συμπληρώνω τον πίνακα. Συγκρίνω τις μετρήσεις μου με τις μετρήσεις των συμμαθητών μου.



Ευθύγραμμο τμήμα	ΑΔ	ΑΒ	ΑΓ	ΒΓ	ΒΔ	ΚΓ
Μήκος τμήματος	...					

- Ποιο ευθύγραμμο τμήμα έχει το μεγαλύτερο μήκος; ____________________
- Τι διαφορά έχει από τα άλλα τμήματα; Εξηγώ: ____________________

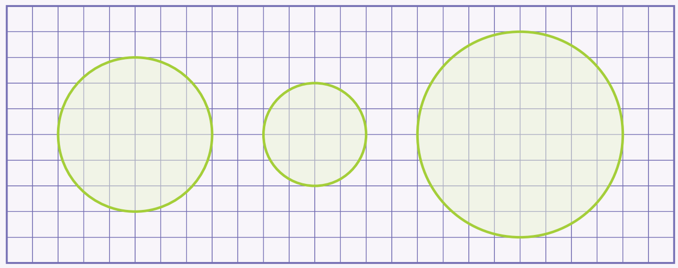
✓ Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο σημεία του κύκλου και διέρχεται από το κέντρο του λέγεται **διάμετρος (δ)** του κύκλου.

✓ Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο σημεία του κύκλου λέγεται **χορδή** του κύκλου.

✓ Η διάμετρος χωρίζει τον κύκλο σε δύο ίσα μέρη καθένα από τα οποία λέγεται **ημικύκλιο**.

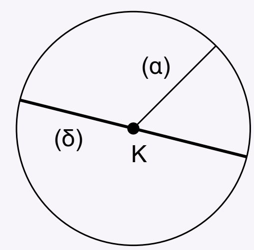
Σχέση ακτίνας και διαμέτρου

Στους κύκλους του παρακάτω σχήματος σημειώνω τα κέντρα τους και τα ονομάζω. Στη συνέχεια μετρώ τις ακτίνες τους και τις διαμέτρους τους και συμπληρώνω τον πίνακα:



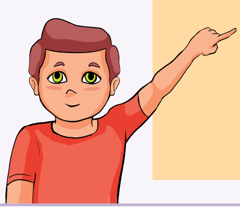
Κύκλος Α — Κύκλος Β — Κύκλος Γ

	Κύκλος Α	**Κύκλος Β**	**Κύκλος Γ**
Ακτίνα (α)			
Διάμετρος (δ)			



Παρατηρώ προσεκτικά τις στήλες του πίνακα και βρίσκω τη σχέση ακτίνας και διαμέτρου. Συμπληρώνω:

- Σε κάθε κύκλο η διάμετρος είναι ______________________________ σε μήκος από την ακτίνα.
- Το μήκος της ακτίνας είναι το ______________________________ του μήκους της διαμέτρου.



Η διάμετρος του κύκλου έχει διπλάσιο μήκος από την ακτίνα του.

δ = 2 x α ή α = δ : 2

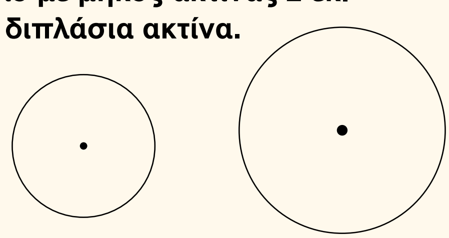
Σχέση ακτίνας και διαμέτρου ενός κύκλου

Εφαρμογή

1 **Κατασκευάζω στο τετράδιό μου, έναν κύκλο με μήκος ακτίνας 2 εκ. Στη συνέχεια κατασκευάζω άλλον έναν με διπλάσια ακτίνα.**

Υπολογίζω τις διαμέτρους τους.

Ποιος είναι ο λόγος των δύο διαμέτρων;



Ερωτήσεις Σ - Λ		
Μια διάμετρος χωρίζει τον κύκλο σε δύο ημικύκλια.	Σ	Λ
Κάθε κύκλος έχει μόνο μία διάμετρο.	Σ	Λ

8. Κατασκευές στερεών

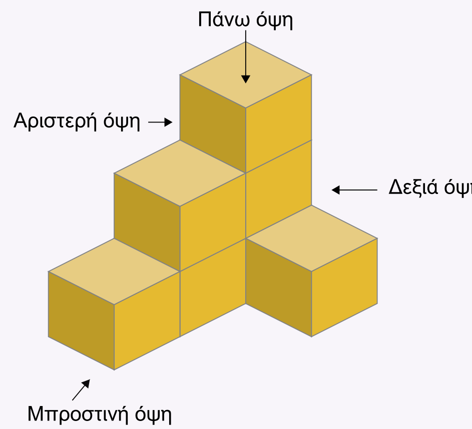
Δραστηριότητες

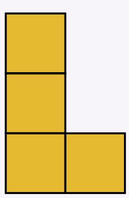
1

Κατασκευάζουμε στερεά χρησιμοποιώντας συνδεόμενους κύβους
Εργαζόμαστε σε ομάδες των τεσσάρων ατόμων.

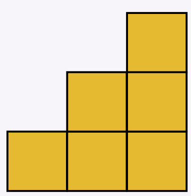
► Χρησιμοποιούμε συνδεόμενους κύβους και κατασκευάζουμε το στερεό της διπλανής εικόνας.

► Στη συνέχεια περιστρέφουμε το στερεό και αφού το παρατηρήσουμε καλά, αντιστοιχίζουμε τις όψεις του με τις εικόνες.

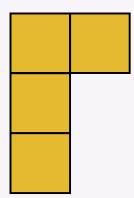




________ όψη



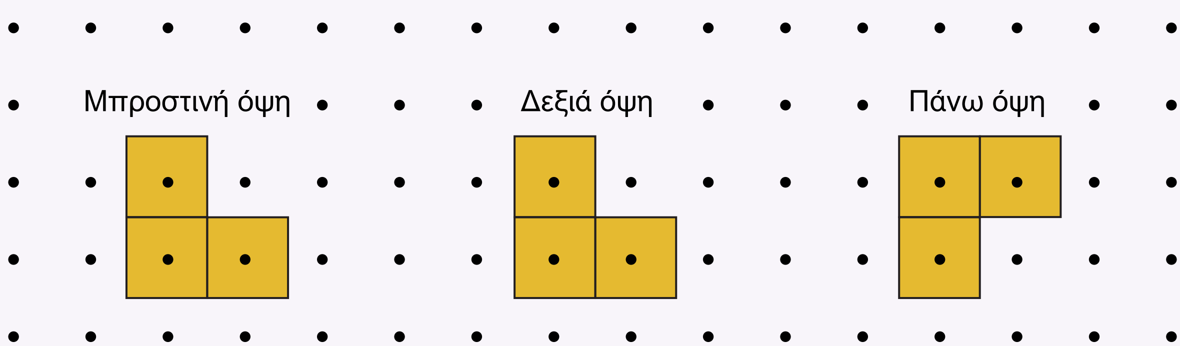
________ όψη



________ όψη

2

Στις παρακάτω εικόνες παρουσιάζονται όψεις ενός στερεού που αποτελείται από 4 αλληλοσυνδεόμενους κύβους.



Για να το κατασκευάσουμε μελετάμε τις όψεις του.

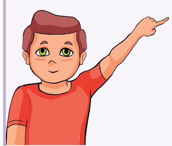
Ποια ή ποιες όψεις μας δίνουν πληροφορίες: **α)** για το μήκος του στερεού; ______________________

β) για το ύψος του; ______________________ **γ)** για το πλάτος του; ______________________

Ποια ή ποιες όψεις του στερεού μας δείχνουν τον αριθμό των στρώσεων που το αποτελούν; __________

Ποια όψη του στερεού μας δείχνει τον αριθμό των στηλών που το αποτελούν;

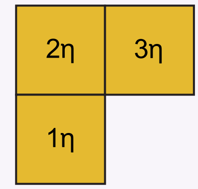
____



Παρατηρώντας την πάνω όψη του στερεού καταλαβαίνουμε ότι αποτελείται από 3 στήλες.

Τοποθετούμε 3 κύβους σύμφωνα με την πάνω όψη.

Πάνω όψη

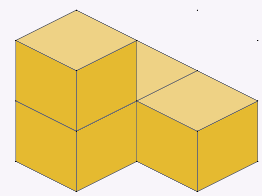


Αφού οι κύβοι είναι 4 συνολικά, μία από τις τρεις στήλες αποτελείται από δύο κύβους. Ποια όψη του στερεού μας βοηθάει να βρούμε τη στήλη που βρίσκεται ο τέταρτος κύβος;

____

Τελικά σε ποια στήλη βρίσκεται ο τέταρτος κύβος; ______________________

Περιστρέψτε το στερεό που κατασκευάσατε και ελέγξτε αν οι όψεις του είναι ίδιες με αυτές που σας δόθηκαν. Μοιάζει με το διπλανό στερεό; ______________________



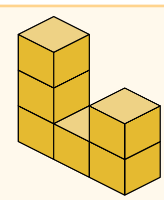
Διερεύνηση

Ένας συμμαθητής σας ισχυρίζεται ότι: «Η μία από τις τρεις όψεις που μας δόθηκαν αρχικά είναι περιττή.» Συμφωνώ;

Εξηγώ: ____

Εφαρμογή

1 **Χρησιμοποιούμε συνδεόμενους κύβους και κατασκευάζουμε το διπλανό στερεό. Κατόπιν σχεδιάζουμε την μπροστινή του όψη, την πάνω όψη του και τη δεξιά όψη του.**

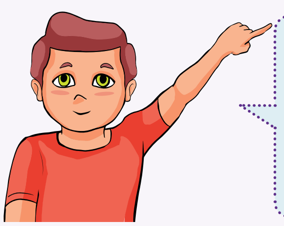


Ερωτήσεις Σ - Λ		
Οι όψεις ενός στερεού μας δίνουν πληροφορίες για τις διαστάσεις του.	Σ	Λ
Ο αριθμός των στρώσεων που αποτελούν ένα στερεό είναι ίσος με το ύψος του.	Σ	Λ

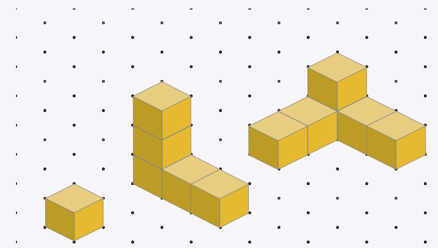
Δραστηριότητες

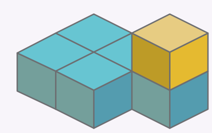
1 Σχεδιάζω σε ισομετρικό καμβά κτήρια από αλληλοσυνδεόμενους κύβους

Στη διπλανή εικόνα βλέπω τα σχέδια στερεών από συνδεόμενους κύβους, κατασκευασμένων σε ισομετρικό καμβά.

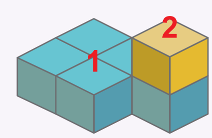


Στον ισομετρικό καμβά τα ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν δύο οποιεσδήποτε γειτονικές τελείες είναι ίσα. Οι έδρες των στερεών που είναι χρωματισμένες με διαφορετικά χρώματα ή διαφορετικές αποχρώσεις δείχνουν την τρισδιάστατη όψη των στερεών.





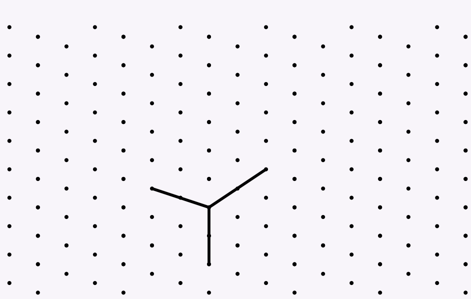
Θέλω να σχεδιάσω σε ισομετρικό καμβά το διπλανό γεωμετρικό στερεό. Για να ξεκινήσω τη σχεδίαση του στερεού σχεδιάζω μια κορυφή ενός κύβου και τις τρεις ακμές του.



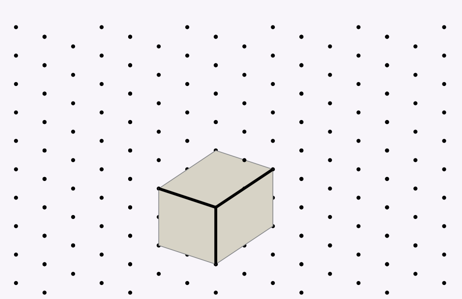
Πιθανές κορυφές οι **1** και **2**

Ξεκινώ τη σχεδίαση αποτυπώνοντας μια κορυφή που βρίσκεται στην μπροστινή όψη του στερεού και φαίνονται οι τρεις έδρες της.

Ας ξεκινήσω αποτυπώνοντας την κορυφή **1** σε ισομετρικό καμβά με τελείες. (ισομετρικό καμβά με τελείες ή γραμμές θα βρεις στο Τ.Ε. τεύχος Α σελ. 78 και τεύχος Β σελ. 86)

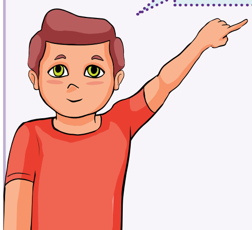


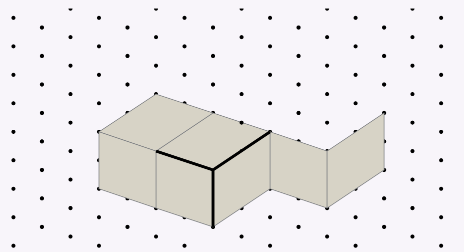
1



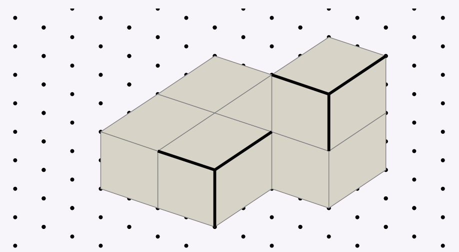
2

Συνεχίζω συμπληρώνοντας τις υπόλοιπες ακμές του κύβου, καθώς και των γειτονικών του.





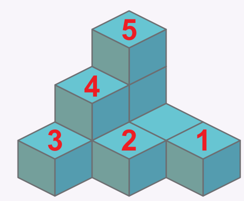
3

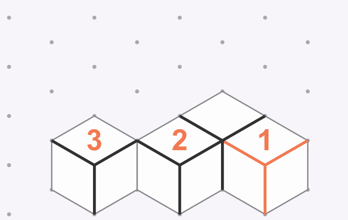


4

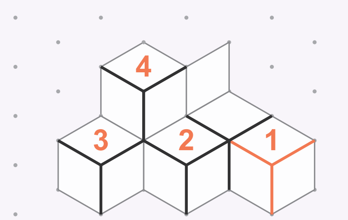
Για απλούστερες κατασκευές γεωμετρικών στερεών μπορώ να χρησιμοποιήσω και ισομετρικό γεωπίνακα.

2 **Σχεδιάζω σε ισομετρικό καμβά το διπλανό γεωμετρικό στερεό. Επιλέγω να ξεκινήσω από μια κορυφή ενός κύβου που βρίσκεται στη βάση του και στην μπροστινή του όψη και φαίνονται οι τρεις έδρες της. Πιθανές κορυφές είναι οι 1, 2, 3.**

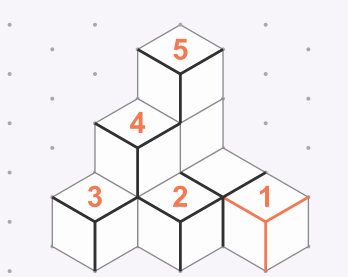




Ξεκινώ από την κορυφή 1 και σχεδιάζουμε τους κύβους της 1ης στρώσης

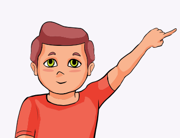


Συνεχίζω με τους κύβους της 2ης στρώσης.



Ολοκληρώνω με τους κύβους της 3ης στρώσης.

Ισομετρικοί και τετραγωνικοί καμβάδες υπάρχουν στα παραρτήματα των Τετραδίων Εργασιών.



Ερωτήσεις Σ - Λ		
Ο ισομετρικός καμβάς βοηθάει στον σχεδιασμό στερεών.	Σ	Λ
Ο διαφορετικός χρωματισμός των εδρών του στερεού το κάνουν πιο παραστατικό.	Σ	Λ

10. Ταξινόμηση πρισμάτων και πυραμίδων

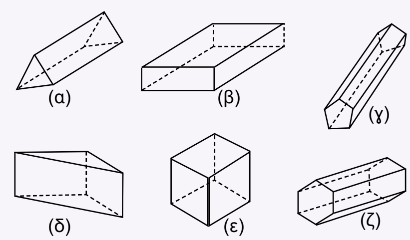
Δραστηριότητες

1

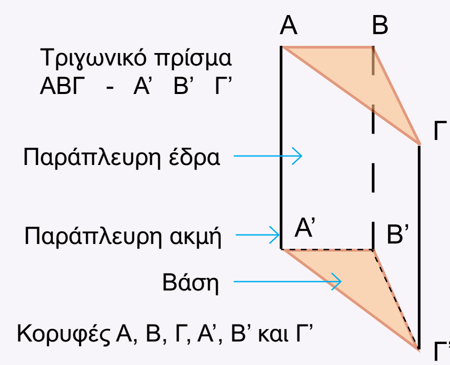
Πρίσματα

Τα διπλανά στερεά σώματα ονομάζονται ορθά πρίσματα ή απλά πρίσματα.
Όλα τα πρίσματα:

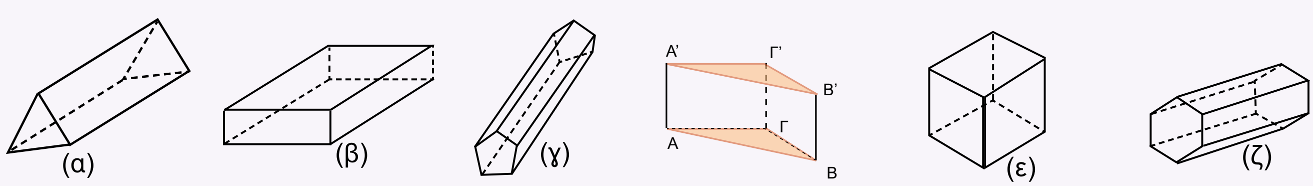
- αποτελούνται από δύο ίσα και παράλληλα πολύγωνα τα οποία ονομάζονται βάσεις του πρίσματος.
- ονομάζονται από το σχήμα των βάσεών τους.
- οι υπόλοιπες έδρες τους ονομάζονται παράπλευρες έδρες, είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα και αποτελούν την παράπλευρη επιφάνειά τους.
- μπορούν να τοποθετούνται το ένα πάνω στο άλλο.



Ονομάζουμε ένα πρίσμα γράφοντας τις κορυφές του πολυγώνου της μίας βάσης, το ενωτικό « - », και στη συνέχεια, τις κορυφές της άλλης βάσης, με την ίδια φορά.



Χρωματίζω τις βάσεις των πρισμάτων και τα ονομάζω (κάποια έχουν και δεύτερο όνομα).

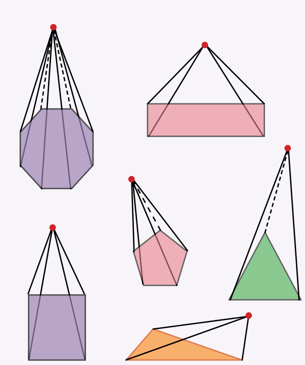


(α)	(β)	(γ)		(ε)	(ζ)
______	______	______	Τριγωνικό	______	______
______	______	______	πρίσμα	______	______

2

Πυραμίδες

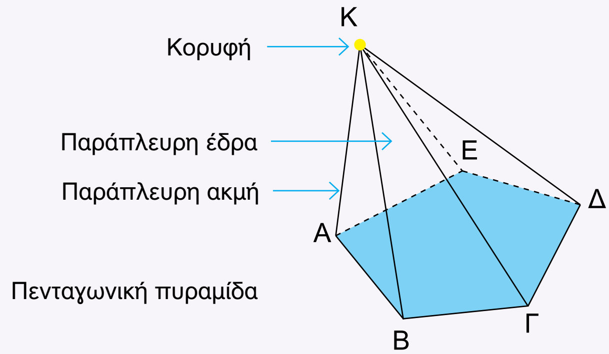
Τα διπλανά στερεά γεωμετρικά σχήματα ονομάζονται πυραμίδες.



Όλες οι πυραμίδες:

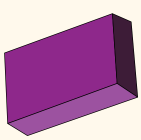
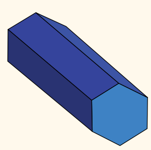
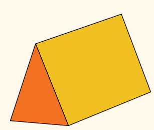
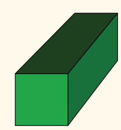
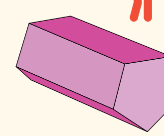
- Έχουν μία μόνο **βάση** που μπορεί να είναι τρίγωνο, τετράγωνο, πεντάγωνο,...
- Ονομάζονται από το σχήμα της βάσης τους.
- Οι παράπλευρες έδρες τους είναι **τρίγωνα**.
- Η κοινή κορυφή των τρίγωνων λέγεται **κορυφή της πυραμίδας**.

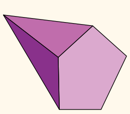
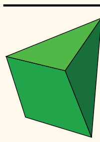
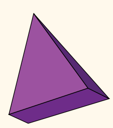
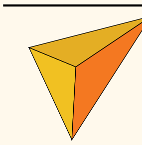
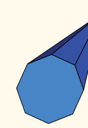
Πυραμίδα είναι ένα στερεό, που μία έδρα του είναι ένα πολύγωνο και όλες οι άλλες έδρες του είναι τρίγωνα με κοινή κορυφή.



Εφαρμογές

1 Ονομάζω τα παρακάτω πρίσματα και πυραμίδες.

2 Συμπληρώνω τον πίνακα.

Στερεά γεωμετρικά σχήματα	Τριγωνική πυραμίδα	Πενταγωνική πυραμίδα	Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο	Τριγωνικό πρίσμα	Κύβος
Περισσότερες από 8 ακμές					
6 ή περισσότερες έδρες					
4, 5 ή 6 κορυφές					

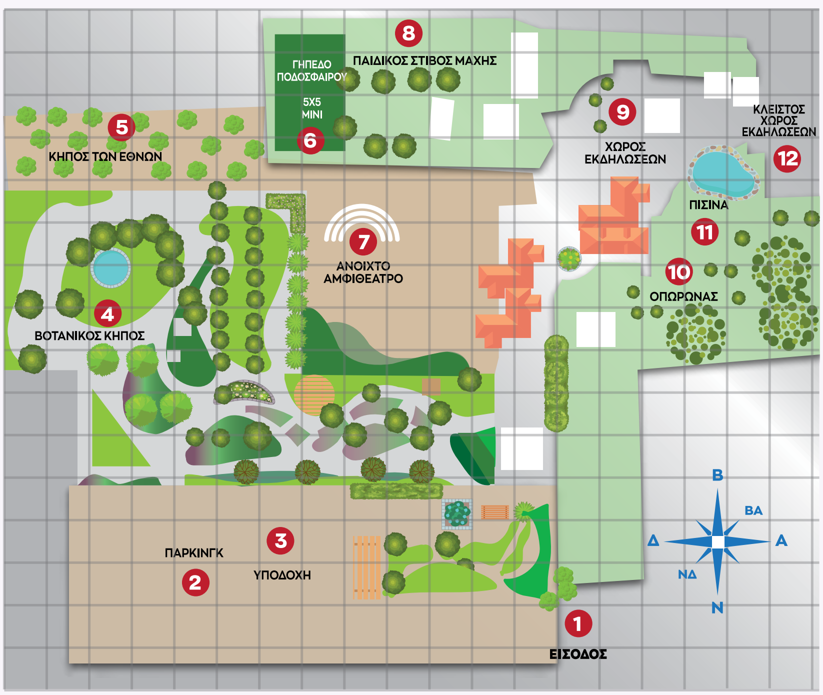
Ερωτήσεις Σ - Λ		
Η τριγωνική πυραμίδα έχει παράπλευρες έδρες τρίγωνα.	Σ	Λ
Το εξαγωνικό πρίσμα έχει συνολικά 6 έδρες.	Σ	Λ

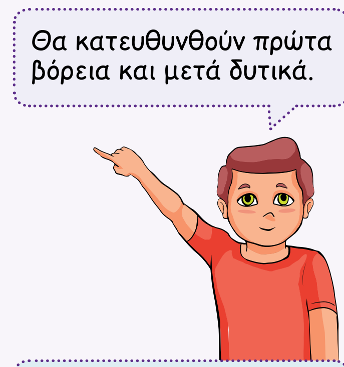
11. Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων

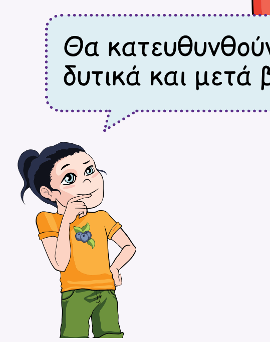
Δραστηριότητες

1

Οι μαθητές της Στ΄ Τάξης του 13ου Δημοτικού Σχολείου Κορυδαλλού επισκέφτηκαν τον Κήπο του Διομήδη. Στην είσοδο του κήπου, όπου βρίσκονται τώρα οι μαθητές, υπάρχει το παρακάτω θεματικό σχεδιάγραμμα. Πριν την ξενάγησή τους οι μαθητές και οι μαθήτριες θα συγκεντρωθούν στο ανοικτό αμφιθέατρο. Πώς θα φτάσουν εκεί;







▶ Ταιριάζουν οι περιγραφές των παιδιών; ______________________________

▶ Είναι ακριβείς οι περιγραφές τους; ______________________________

▶ Προς ποια κατεύθυνση βρίσκεται το αμφιθέατρο σε σχέση με την είσοδο; ______________

2

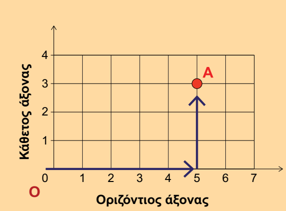
Σύστημα συντεταγμένων … για περισσότερη ακρίβεια

▶ Για να περιγράψουμε με ακρίβεια μια τοποθεσία ή τη θέση ενός αντικειμένου χρησιμοποιούμε συντεταγμένες.

Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων

Για να προσδιορίσουμε τη θέση ενός σημείου στο επίπεδο χρησιμοποιούμε το **καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων**. Αποτελείται από δύο κάθετες, προσανατολισμένες ευθείες – άξονες.

Το σημείο Ο που τέμνονται ονομάζεται αρχή του συστήματος συντεταγμένων.



Πώς περιγράφουμε τη θέση ενός σημείου στο καρτεσιανό σύστημα;

Για να περιγράψουμε τη θέση ενός σημείου στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων χρησιμοποιούμε δύο αριθμούς. Οι αριθμοί δείχνουν τη θέση του σημείου σε σχέση με την αρχή Ο.

Από το Ο, για να πάμε στο σημείο Α, κινούμαστε 5 μονάδες δεξιά και 3 μονάδες πάνω.

Γράφουμε αυτούς τους αριθμούς σε παρενθέσεις: (5,3). Αυτοί οι αριθμοί λέγονται συντεταγμένες του σημείου Α.

Λέμε: το σημείο Α έχει συντεταγμένες (5,3) και γράφουμε: Α(5,3)

Το σημείο Ο έχει συντεταγμένες (0,0), καθώς βρίσκεται στην αρχή των αξόνων και δεν έχει πραγματοποιηθεί καμία μετακίνηση.

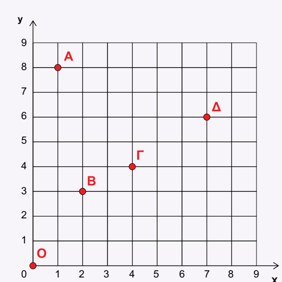
Ο πρώτος αριθμός μας λέει πόσες μονάδες μετακινηθήκαμε προς τα δεξιά.

Ο δεύτερος αριθμός μας λέει πόσες μονάδες μετακινηθήκαμε προς τα πάνω.

3 **Όταν επέστρεψαν στην τάξη ο δάσκαλος των παιδιών τοποθέτησε σε ένα καρτεσιανό σύστημα αξόνων κάποιες από τις τοποθεσίες του κήπου. Συμπληρώνω τον πίνακα.**

Σημεία	Ο	Α	Β	Γ	Δ
Συντεταγμένες	(,)				

Ο: Είσοδος
Α: Χώρος εκδηλώσεων
Β: Οπωρώνας
Γ: Πισίνα
Δ: Κλειστός χώρος εκδηλώσεων



Καρτεσιανές Συντεταγμένες

Καρτεσιανές Συντεταγμένες 1

Καρτεσιανές Συντεταγμένες 2

Εφαρμογή

1 **Α. Ξεκινώντας από το σημείο Ο σε ποιο σημείο θα φθάσουμε αν κινηθούμε:**

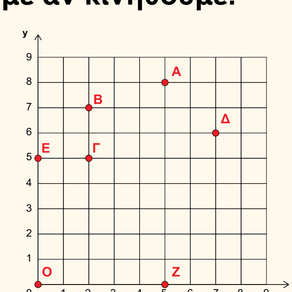
• Δύο μονάδες δεξιά και 5 μονάδες πάνω; ____________________

• Δύο μονάδες δεξιά και 7 μονάδες πάνω; ____________________

• Έξι μονάδες δεξιά και 6 μονάδες πάνω; ____________________

Β. Ποιες είναι οι συντεταγμένες των σημείων Ε και Ζ;

Συμπληρώνω: Ε (..., ...) , Συμπληρώνω: Ζ (..., ...)



Ερωτήσεις Σ - Λ		
Η αρχή των αξόνων δεν έχει συντεταγμένες.	Σ	Λ
Δεν υπάρχουν διαφορετικά σημεία του επιπέδου με τις ίδιες συντεταγμένες.	Σ	Λ

12. Γεωγραφικές Συντεταγμένες

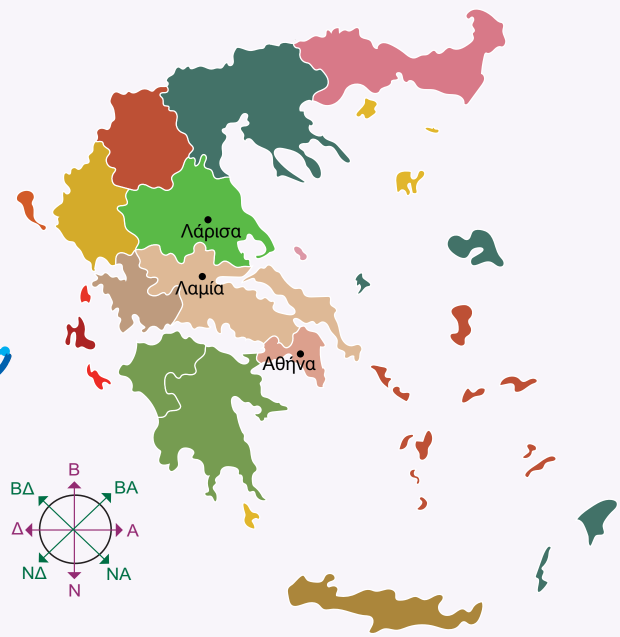
Δραστηριότητες

1 **Ο κ. Νίκος είναι οδηγός σε μεταφορική εταιρεία. Στο τελευταίο του ταξίδι έκανε τη διαδρομή: Αθήνα → Λαμία → Λάρισα**

Με τη βοήθεια των σημείων του ορίζοντα περιγράφω την κατεύθυνση που κινήθηκε πηγαίνοντας από πόλη σε πόλη.

Αθήνα - Λαμία ______________________________

Λαμία - Λάρισα ______________________________



Κατά την επιστροφή του ακολούθησε την αντίστροφη διαδρομή. Περιγράφω την κατεύθυνση που κινήθηκε από πόλη σε πόλη.

Λάρισα → Λαμία ______________________________

Λαμία → Αθήνα ______________________________

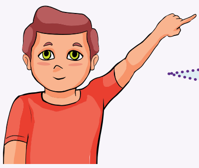
2 **Παρατηρώντας την υδρόγειο σφαίρα βλέπουμε ότι στην επιφάνεια της γης υπάρχει επινοημένο και σχεδιασμένο ένα δίκτυο κυκλικών γραμμών, που δεν είναι πραγματικές.**

Οι γραμμές που συνδέουν τους δύο πόλους της Γης ονομάζονται **μεσημβρινοί.** Ο μεσημβρινός που περνά από το αστεροσκοπείο του Γκρίνουιτς του Λονδίνου ορίστηκε ως ο Πρώτος Μεσημβρινός· χωρίζει τη Γη σε **ανατολικό** και **δυτικό ημισφαίριο.**

Οι οριζόντιες κυκλικές γραμμές ονομάζονται, **παράλληλοι κύκλοι.**

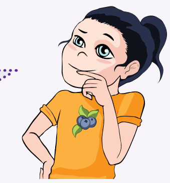
Ο μεγαλύτερος παράλληλος κύκλος είναι ο **Ισημερινός**· χωρίζει τη Γη σε δύο ίσα μέρη, στο **βόρειο** και το **νότιο ημισφαίριο.**

Στον παγκόσμιο χάρτη της αίθουσάς μας εντοπίζουμε τον ισημερινό και τον πρώτο μεσημβρινό.



Οι παράλληλοι μας δείχνουν την απόσταση ενός τόπου Βόρεια ή Νότια από τον Ισημερινό. Η απόσταση αυτή λέγεται **γεωγραφικό πλάτος του** τόπου και μετρίεται σε μοίρες από 0° έως 90° Βόρεια και από 0° έως 90° Νότια.

Οι μεσημβρινοί δείχνουν την απόσταση ενός τόπου δυτικά ή ανατολικά από τον Πρώτο Μεσημβρινό. Η απόσταση αυτή λέγεται **γεωγραφικό μήκος** και μετρίεται σε μοίρες από 0° έως 180° Δυτικά και από 0° έως 180° Ανατολικά.



Το γεωγραφικό πλάτος και το γεωγραφικό μήκος ενός τόπου **ονομάζονται γεωγραφικές συντεταγμένες** του τόπου. Με τη βοήθειά τους προσδιορίζουμε τη θέση ενός σημείου στην επιφάνεια της γης.

Βρείτε τις γεωγραφικές συντεταγμένες της πρωτεύουσας του νομού που κατοικείτε.

Εφαρμογές

1

Βρίσκω τις γεωγραφικές συντεταγμένες των σημείων.

	Α	Β	Γ	Δ	Ε
Γεωγραφικό πλάτος	60° Β				
Γεωγραφικό μήκος	120° Δ				

2

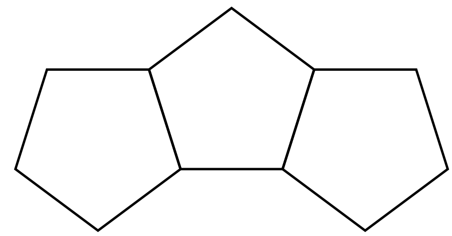
Πού χρησιμεύουν οι γεωγραφικές συντεταγμένες; Σε ποια επαγγέλματα είναι χρήσιμες και απαραίτητες;

Επαγγέλματα: *εργολάβος οικοδομών, μεταφορέας, οικονομολόγος, πολεοδόμος, πλοίαρχος, γεωπόνος, γεωργός, τουριστικός πράκτορας, πιλότος, ξεναγός, ξενοδοχοϋπάλληλος, έμπορος, μετεωρολόγος κ.ά.*

Ερωτήσεις Σ - Λ		
Οι τόποι που απέχουν ίση απόσταση από τον Ισημερινό έχουν το ίδιο γεωγραφικό πλάτος.	Σ	Λ
Η Ασία βρίσκεται Βορειοανατολικά της Αφρικής.	Σ	Λ

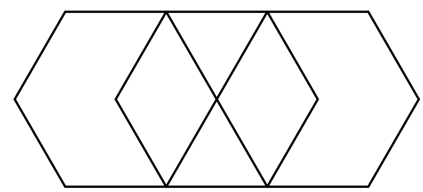
Ενότητα 5 **Επαναληπτικό**

1 **Τα διπλανά κανονικά πεντάγωνα έχουν πλευρά 5εκ. Να υπολογίσεις την περίμετρο του σχήματος.**



2 **Πόσα κανονικά εξάγωνα υπάρχουν στο σχήμα;**

____



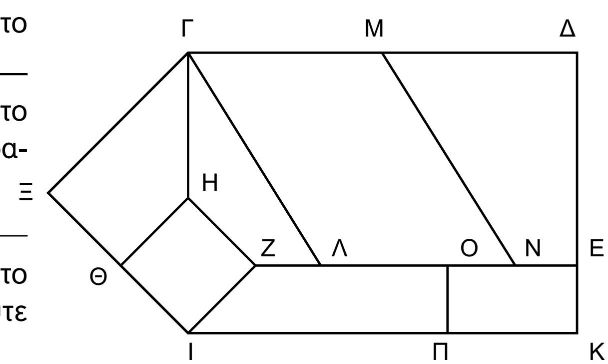
3 **Δύο συμμαθητές παίζουν το παιχνίδι «αναζήτησε το σχήμα» και δημιούργησαν το σχέδιο στα δεξιά.**

- ▶ Τι είδη είναι τα τετράπλευρα που φαίνονται στο σχήμα; ________________________
- ▶ Ποια από τα τετράπλευρα που φαίνονται στο σχήμα είναι παραλληλόγραμμα και ποια τραπέζια;

____

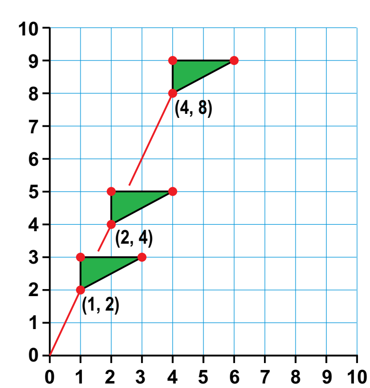
- ▶ Ποιο από τα τετράπλευρα που φαίνονται στο σχήμα δεν είναι ούτε παραλληλόγραμμο ούτε τραπέζιο;

____



4 **Στο διπλανό καρτεσιανό επίπεδο ένας μαθητής μετακίνησε την εικόνα ενός τρίγωνου ώστε μια κορυφή του να είναι σε σημείο που έχει διπλάσιες συντεταγμένες από το προηγούμενό του.**

- ▶ Βρες τις συντεταγμένες των άλλων κορυφών του τρίγωνου.



- Συμπλήρωσε τον πίνακα αυτοαξιολόγησης, με οριζόντια σειρά, στα κεφάλαια που αναφέρονται στο επαναληπτικό της ενότητας.
- Μετά τη συμπλήρωση κράτησε σημειώσεις για να συζητήσεις για «όσα έμαθες» και για «αυτά που θα ήθελες να μάθεις περισσότερο».

Πίνακας Αυτοαξιολόγησης

Ενότητα 6

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

1. **Αξονική Συμμετρία (Γ.Μ.6.2, Γ.Μ.6.3.)**
2. **Μεταφορές – Στροφές (Γ.Μ.6.1, Γ.Μ.6.4, Γ.Μ.6.5.)**
3. **Στροφές 180° – Σχήματα με κέντρο συμμετρίας (Γ.Μ.6.6.)**
4. **Ψηφιδωτά (Γ.Μ.6.7.)**

Γεωμετρία/ Μετασχηματισμοί

Θα μάθω να:

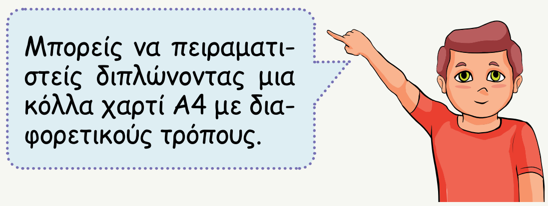
- ► Περιγράφω μετασχηματισμούς ανάκλασης, μεταφοράς και στροφής.
- ► Εντοπίζω όλους τους άξονες συμμετρίας ενός σχήματος.
- ► Περιστρέφω σχήματα κατά γωνία 90° ή 180° ως προς σημείο.
- ► Περιγράφω μετασχηματισμούς μεταφοράς και στροφής που οδηγούν στην κατασκευή ίσων σχημάτων.
- ► Σχηματίζω ψηφιδωτά χρησιμοποιώντας κανονικά πολύγωνα ή κατασκευασμένες από εμένα ψηφίδες.

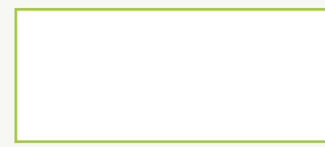
Λέξεις κλειδιά

μεταφορά	στροφή	ανάκλαση
άξονας συμμετρίας	ψηφιδωτά	κέντρο συμμετρίας

Δραστηριότητες

1 **Το παρακάτω ορθογώνιο αναπαριστά ένα οικόπεδο που έχει στην κατοχή του ο κος Ορέστης. Θέλει να το χωρίσει σε δύο ίσα μέρη για να τα δώσει στα δύο παιδιά του. Βρίσκω διαφορετικούς τρόπους που μπορεί να μοιράσει ο κος Ορέστης το οικόπεδο, ώστε τα παιδιά να πάρουν από ένα ολόιδιο κομμάτι.**



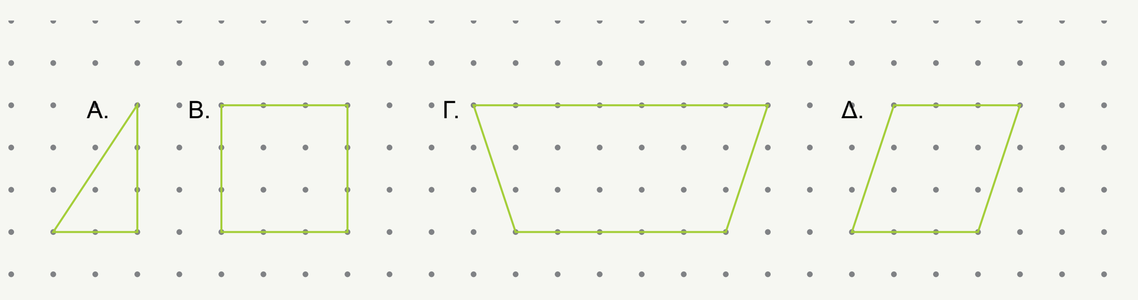


► Στη λευκή κόλλα δείχνω τους τρόπους χωρισμού που βρήκα φέρνοντας με τον χάρακά μου διακεκομμένες ευθείες γραμμές. Πόσοι τρόποι υπάρχουν; ______________________

► Πώς λέγεται καθεμιά από τις ευθείες που χάραξες; ______________________

✓ Η ευθεία που χωρίζει το σχήμα σε δύο μέρη, τα οποία συμπίπτουν όταν διπλωθεί το σχήμα κατά μήκος της ευθείας, ονομάζεται **άξονας συμμετρίας του σχήματος.** Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το σχήμα έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία αυτή.

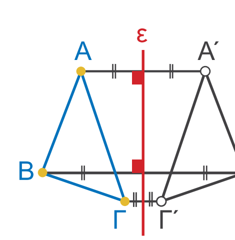
2 **Σχεδιάζω με κόκκινο χρώμα όλους τους άξονες συμμετρίας στα παρακάτω σχήματα.**



► Έχουν όλα τα σχήματα έναν τουλάχιστο άξονα συμμετρίας; ______________________

✓ Ένα σχήμα μπορεί να περιέχει περισσότερους από έναν άξονες συμμετρίας ή κανένα.

3 **Αν διπλώσουμε το διπλανό σχήμα κατά μήκος της ευθείας ε, με ποιο σημείο θα συμπέσει καθένα από τα παρακάτω σημεία:**



α. το σημείο Α; ________ **β.** το σημείο Β; ________ **γ.** το σημείο Γ; ________

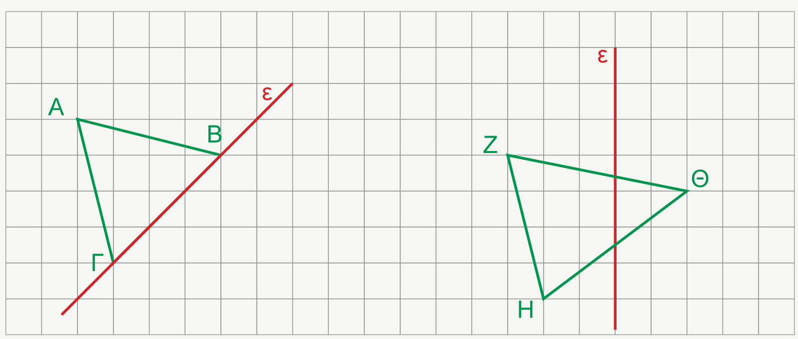
► Μετά τη δίπλωση κατά μήκος της ευθείας ε, ποια θα είναι η θέση των δύο τρίγωνων; ______________
Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι: «Τα δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα». Δικαιολογώ τον ισχυρισμό του μαθητή με βάση τα παραπάνω: ____

- ✓ **Δύο σημεία** ονομάζονται **συμμετρικά** ως προς μια ευθεία (ε), αν με δίπλωση κατά μήκος της ευθείας ε συμπίπτει το ένα με το άλλο.
- ✓ **Δύο σχήματα** λέγονται **συμμετρικά** ως προς μία ευθεία ε, όταν καθένα αποτελείται από τα συμμετρικά σημεία του άλλου ως προς την ευθεία ε. Επειδή με δίπλωση κατά μήκος της ευθείας ε συμπίπτει το ένα σχήμα με το άλλο, διαπιστώνουμε ότι αυτά είναι ίσα.

Ανάκλαση τετράπλευρου

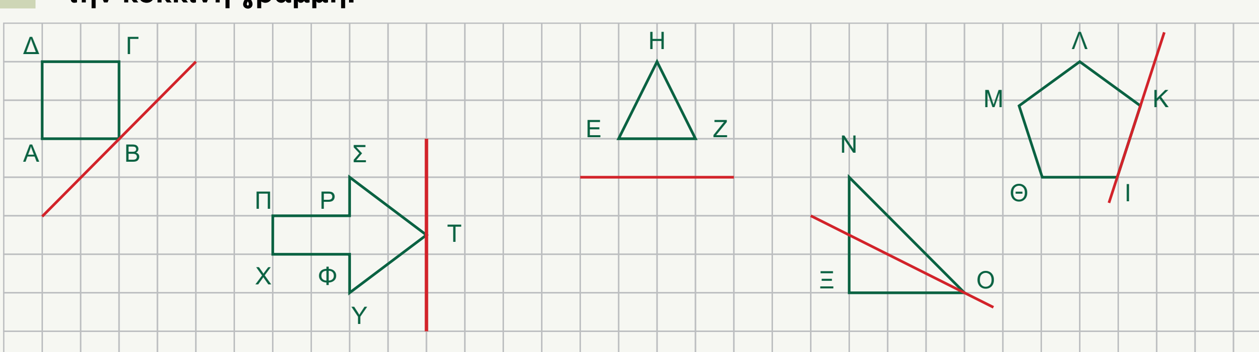
Εφαρμογές

1 **Βρίσκω κάθε φορά το συμμετρικό του τρίγωνου ΑΒΓ ως προς άξονα συμμετρίας την ευθεία ε.**



Για να σχεδιάσουμε το συμμετρικό ενός σχήματος ως προς μια ευθεία ε, βρίσκουμε με τον γνώμονα τα συμμετρικά σημεία των κορυφών του σχήματος ως προς την ευθεία και τα ενώνουμε.

2 **Να βρεθούν τα συμμετρικά σχήματα των παρακάτω σχημάτων ως προς άξονα συμμετρίας την κόκκινη γραμμή.**



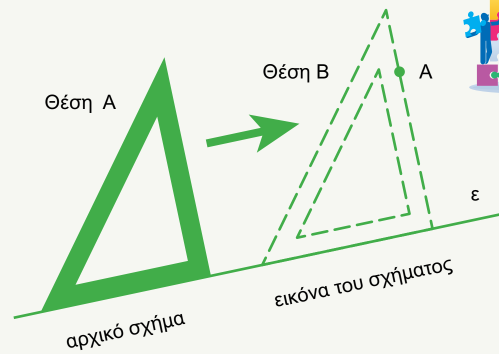
Ερωτήσεις Σ - Λ		
Κάθε επίπεδο σχήμα έχει άξονα συμμετρίας.	**Σ**	**Λ**
Τα σημεία του σχήματος που βρίσκονται πάνω στον άξονα, ταυτίζονται με τα συμμετρικά τους.	**Σ**	**Λ**

2. Μεταφορές, στροφές

Δραστηριότητες

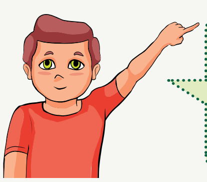
1

Ένας μαθητής προκειμένου να φέρει ευθεία κάθετη από το σημείο Α προς την ευθεία ε εφαρμόζει τη μια κάθετη πλευρά του γνώμονα στην ευθεία ε και τον μεταφέρει κατά μήκος της ευθείας έως ότου η άλλη κάθετη πλευρά του ακουμπήσει το σημείο Α.



► Άλλαξε ο προσανατολισμός του γνώμονα; ______________________________

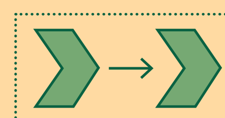
► Άλλαξαν οι διαστάσεις και η μορφή του γνώμονα; ______________________________



Όταν ένα σχήμα κινείται κατά μήκος μιας ευθείας γραμμής, χωρίς να στρέφεται, **μεταφέρεται** από μια θέση σε μια άλλη.

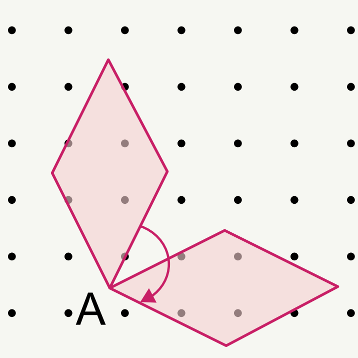
Το σχήμα στη νέα του θέση αποτελεί μια ακριβή εικόνα του αρχικού.

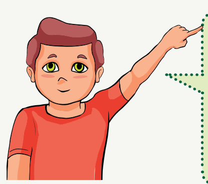
✓ Η **μεταφορά** είναι ένας μετασχηματισμός που μεταφέρει το σχήμα σε άλλη θέση, χωρίς να επηρεάζει τις διαστάσεις, τον προσανατολισμό και τη μορφή του. Το βέλος δείχνει την κατεύθυνση στην οποία γίνεται η μεταφορά.



2

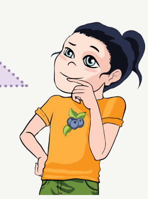
Σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα ο ρόμβος έχει περιστραφεί γύρω από το σημείο Α.

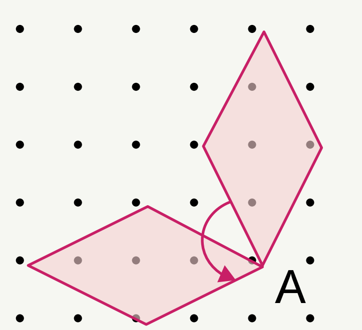




Όταν ένα σχήμα περιστρέφεται γύρω από ένα σημείο, μετακινείται από μια θέση σε μια άλλη.

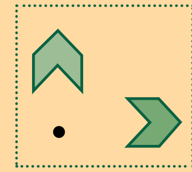
Μπορεί να περιστρέφεται κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού ή αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού.





► Πόσες μοίρες είναι η γωνία στροφής του ρόμβου σε κάθε περίπτωση; Πώς μπορούμε να το διαπιστώσουμε; Συζητάμε.

✓ Η **στροφή** είναι ένας μετασχηματισμός που πραγματοποιείται **ως προς ένα σημείο**, δεξιόστροφα είτε αριστερόστροφα, κατά μια γωνία φ που την ονομάζουμε **γωνία στροφής**. Το σχήμα μετά την περιστροφή του είναι μια εικόνα του αρχικού. Οι διαστάσεις του σχήματος διατηρούνται, όμως ο προσανατολισμός δεν διατηρείται πάντα.



Κατασκευή στροφής

Μεταφορά τετράπλευρου

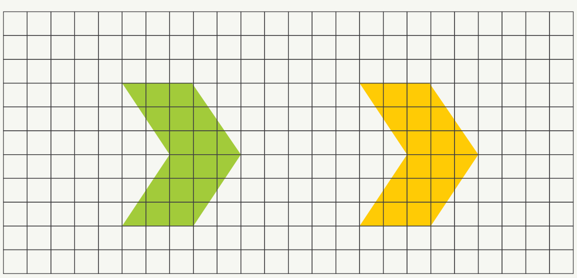
Περιστροφή ορθογώνιου ως προς σημείο

Εφαρμογές

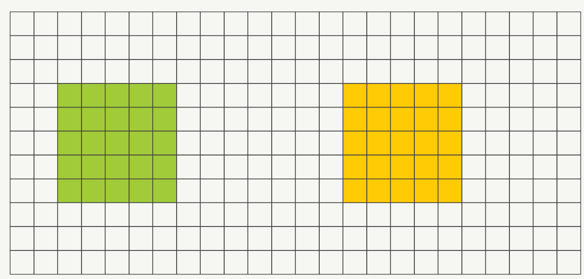
1

Να εξηγήσετε τι μεταφορά κάνει κάθε φορά το πράσινο σχήμα για να βρεθεί στην θέση του κίτρινου.

Μεταφορά οριζόντια κατά _______ τετράγωνα



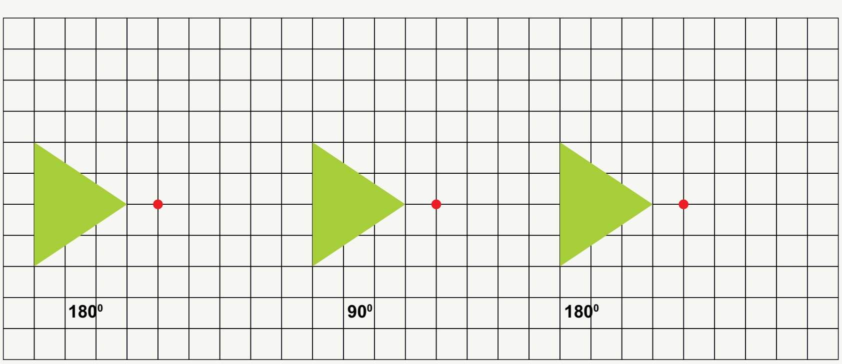
Μεταφορά οριζόντια κατά _______ τετράγωνα



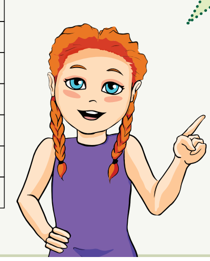
Περιστροφή σχήματος από σημείο

2

Να κάνετε τους παρακάτω μετασχηματισμούς στροφής προς τη φορά των δεικτών του ρολογιού γύρω από την κόκκινη κουκκίδα και να περιγράψετε τη διαδικασία.



Οι στροφές 180° έχουν ιδιαίτερη σημασία. Θα τις ξαναδούμε στο επόμενο κεφάλαιο.



Στροφή

Περιστροφή τρίγωνων

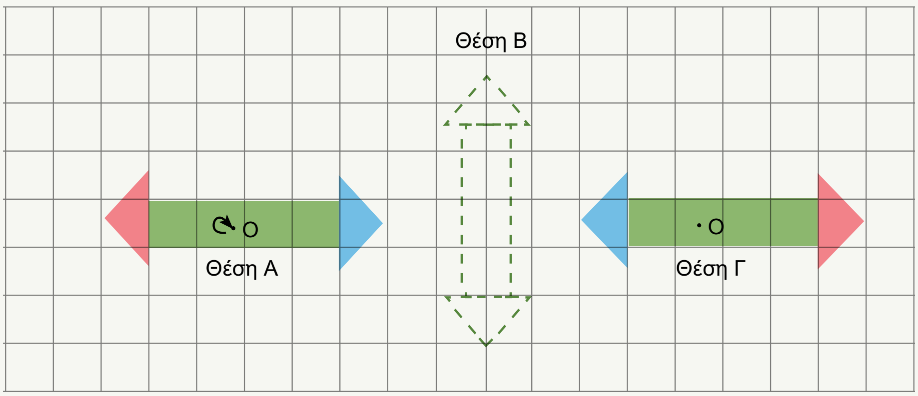
Ερωτήσεις Σ - Λ		
Ένα σχήμα που μεταφέρεται αλλάζει προσανατολισμό.	Σ	Λ
Η περιστροφή ενός σχήματος γύρω από ένα σημείο μπορεί να γίνει ακόμα και όταν το σημείο αυτό ανήκει στο ίδιο το σχήμα.	Σ	Λ

3. Στροφές 180° - Σχήματα με κέντρο συμμετρίας

Δραστηριότητες

1 Στροφές 180° - Περιστρέφομαι... αλλά μένω ίδιος

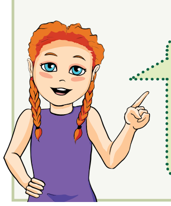
Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται δύο διαδοχικές στροφές ενός σχήματος κατά την ίδια φορά γύρω από το σημείο του Ο και οι θέσεις του σχήματος μετά από κάθε στροφή.



- Πόσες μοίρες ήταν η πρώτη στροφή του σχήματος; ______________________________

  Πόσες μοίρες ήταν η δεύτερη στροφή; ______________________________
- Πόσες μοίρες ήταν η συνολική στροφή του σχήματος; ______________________________

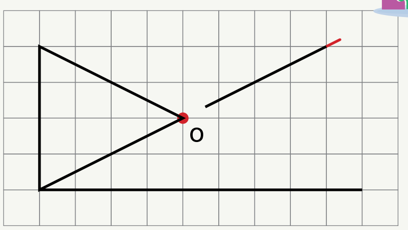
  Σε ποια θέση το σχήμα συμπίπτει με την αρχική του μορφή; ______________________________



Κέντρο συμμετρίας σχήματος ονομάζεται ένα σημείο του Ο γύρω από το οποίο αν περιστραφεί το σχήμα κατά 180° συμπίπτει με το αρχικό. Στην περίπτωση που υπάρχει τέτοιο σημείο, λέμε ότι το σχήμα έχει **κέντρο συμμετρίας το σημείο Ο**.

2 Σχηματίζω σχήματα με κέντρο συμμετρίας

- Τοποθετώ πάνω στο διπλανό σχήμα διαφανές χαρτί και το αποτυπώνω. Δίχως να μετακινήσω το διαφανές χαρτί στηρίζω τη μύτη του μολυβιού μου στο σημείο Ο και περιστρέφω το διαφανές χαρτί κατά 180°.
- Σχεδιάζω το άλλο μισό του σχήματος.



Τι σχήμα προέκυψε; ______________________________

Τι είναι το σημείο Ο του σχήματος; ______________________________

Κεντρική συμμετρία

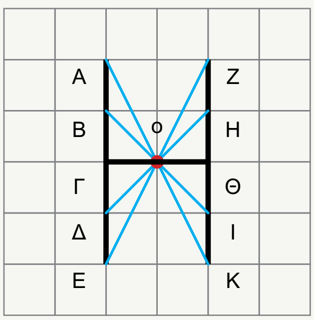
✓ Η στροφή κατά 180° στο επίπεδο ονομάζεται **κεντρική συμμετρία**.

3 Συμμετρικά σημεία ως προς κέντρο συμμετρίας

Τα γράμματα Η και Θ έχουν το καθένα τους κέντρο συμμετρίας το σημείο Ο. Αν περιστραφούν κατά 180° το καθένα γύρω από το σημείο Ο, τη θέση ποιών σημείων θα πάρουν:

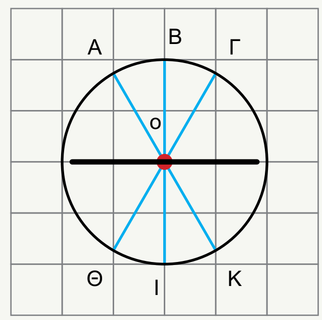
α. Τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε

Α	Β	Γ	Δ	Ε



β. Τα σημεία Α, Β, Γ

Α	Β	Γ



Ένας μαθητής αναφερόμενος στο γράμμα Η ισχυρίζεται ότι: **«ΟΑ = ΟΚ, ΟΒ = ΟΙ, ΟΓ = ΟΘ, ΟΔ = ΟΗ, ΟΕ = ΟΖ»**.

Συμφωνώ; ____________________ Εξηγώ: ____

Όταν ένα σχήμα έχει κ**έντρο συμμετρίας**, το συμμετρικό του ως προς το κέντρο αυτό είναι το ίδιο το σχήμα.

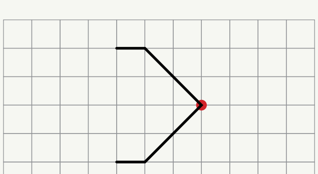
Περιστροφή τετράγωνου κατά 45 μοίρες

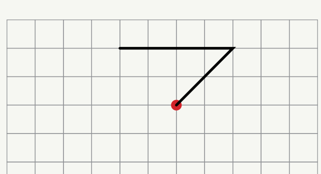
Παιχνίδι

Ερευνητική Δραστηριότητα (Στροφή τετράγωνου γύρω από σημείο)

Εφαρμογή

1 **Συμπλήρωσε τα παρακάτω σχήματα ώστε τα σχήματα που θα προκύψουν να έχουν κέντρο συμμετρίας το κόκκινο σημείο.**





Ερωτήσεις Σ - Λ		
Το σημείο τομής των διαγωνίων του ορθογώνιου είναι κέντρο συμμετρίας του.	Σ	Λ
Αν Α και Β είναι δύο σημεία συμμετρικά ενός σχήματος με κέντρο συμμετρίας το σημείο Ο, τότε ΟΑ = ΟΒ.	Σ	Λ

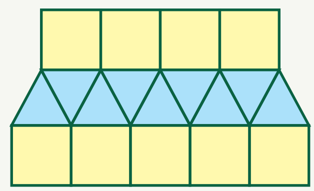
4. Ψηφιδωτά

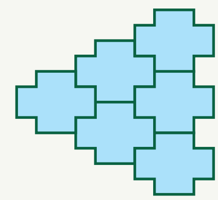
Δραστηριότητες

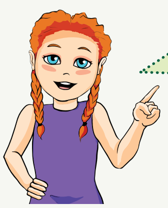
1 Επαναλαμβάνομαι και καλύπτω επιφάνειες

Παρατηρήστε τα διπλανά ψηφιδωτά και συζητήστε.

- Με ποιο τρόπο δημιουργούνται;
- Ποιο είναι το σχήμα που επαναλαμβάνεται κάθε φορά και παράγει το ψηφιδωτό;
- Υπάρχουν κενά ανάμεσα στις ψηφίδες;



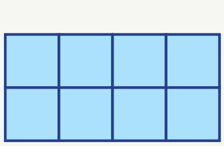


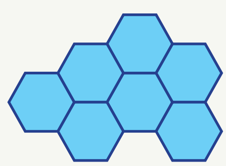


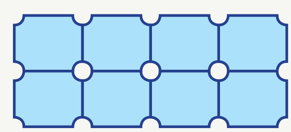
Ψηφιδωτό είναι ένα σχέδιο από σχήματα που ταιριάζουν τέλεια μεταξύ τους, δηλαδή καλύπτουν πλήρως το επίπεδο χωρίς επικαλύψεις ή κενά.

Το σχήμα που επαναλαμβάνεται και ταιριάζει τέλεια με τα αντίγραφά του ονομάζεται **ψηφίδα**.

Ποια από τα παρακάτω σχέδια είναι ψηφιδωτά; Βάζω ✓ στο αντίστοιχο κουτάκι.

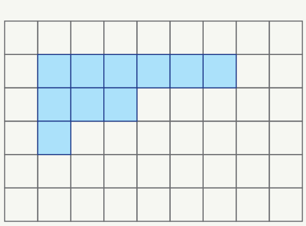


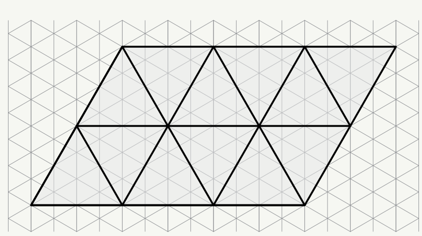


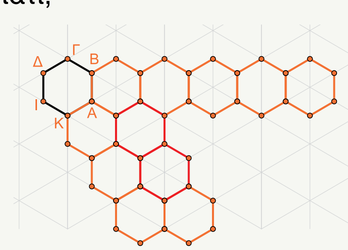


2 Δημιουργώ ψηφιδωτά με κανονικά πολύγωνα

Υπάρχουν τρία κανονικά πολύγωνα με τα οποία μπορεί να καλυφθεί το επίπεδο: το ισόπλευρο τρίγωνο, το τετράγωνο και το κανονικό εξάγωνο. Γιατί;







Σε τετραγωνισμένο χαρτί μετατοπίζουμε το αρχικό τετράγωνο κατάλληλα, π.χ. πρώτα οριζόντια, δεξιά - αριστερά και μετά κατακόρυφα προς τα κάτω ή πάνω, μέχρις ότου καλύψουμε τον χώρο σχεδιασμού.

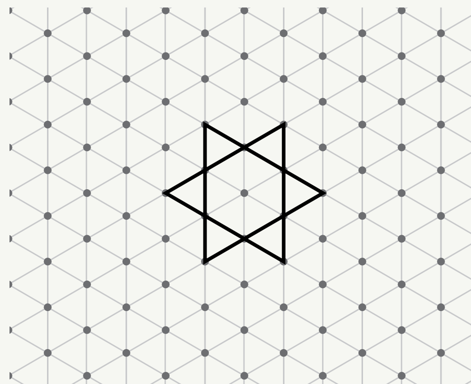
Σε ισομετρικό καμβά, μετατοπίζουμε τα αρχικά κανονικά πολύγωνα κατάλληλα, π.χ. πρώτα οριζόντια, δεξιά - αριστερά και μετά διαγώνια προς τα κάτω ή πάνω και δεξιά, μέχρις ότου καλύψουμε τον χώρο σχεδιασμού.

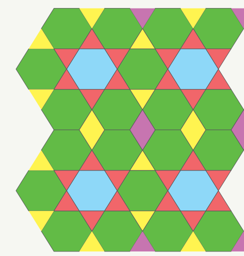
Συνεχίζω τα παραπάνω ψηφιδωτά.

3 Σχεδιάζω ψηφιδωτά χρησιμοποιώντας περισσότερα από ένα κανονικά πολύγωνα

- Σχεδιάζουμε σε ισομετρικό χαρτί ένα κανονικό εξάγωνο και κατασκευάσουμε ισόπλευρα τρίγωνα σε κάθε πλευρά του κανονικού εξάγωνου.

- Χρησιμοποιώ το αρχικό εξάγωνο και το ένα από τα ισόπλευρα τρίγωνα ως πρότυπα και σχεδιάζω πολλά εξάγωνα και τρίγωνα σε χρωματιστά χαρτιά, τα οποία και κόβω. Τοποθετώντας τα «κατάλληλα», σχηματίζω τμήμα του διπλανού ψηφιδωτού.



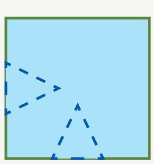


Κατασκευάζω με στροφές και μετατοπίσεις

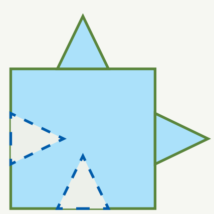
Φτιάξτε το παζλ

Εφαρμογή

1 Κατασκευάζω τη δική μου ψηφίδα και σχεδιάζω το δικό μου ψηφιδωτό.

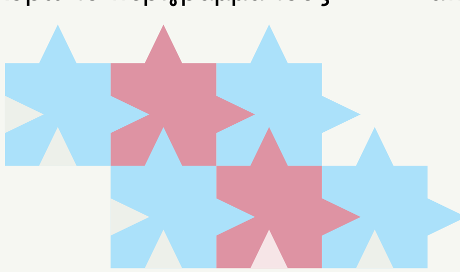


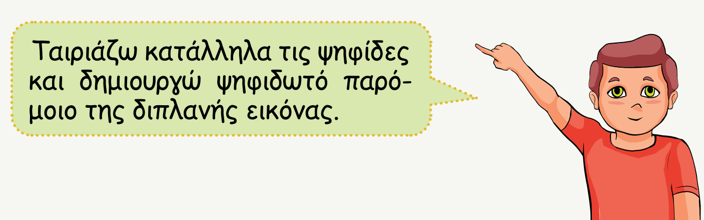
Σε ένα τετράγωνο φύλλο χαρτί σχεδιάζω δύο ίσα τρίγωνα και με το ψαλιδάκι μου κόβω το περίγραμμά τους.



Με σελοτέιπ κολλώ τα τρίγωνα στις απέναντι πλευρές του τετράγωνου από αυτές που αποκόπηκαν.

Σε χρωματιστά χαρτόνια σχεδιάζω το περίγραμμα της ψηφίδας και δημιουργώ χρωματιστά αντίγραφά της.

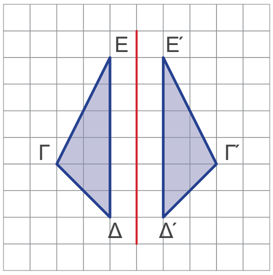




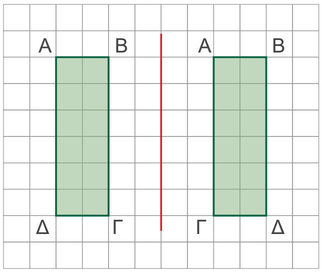
Ερωτήσεις Σ - Λ		
Στα ψηφιδωτά δεν υπάρχουν κενά ή επικαλύψεις μεταξύ των ψηφίδων.	Σ	Λ
Με κανονικά πεντάγωνα μόνο δεν μπορώ να δημιουργήσω ψηφιδωτά.	Σ	Λ

Ενότητα 6 **Επαναληπτικό**

1 **Παρατηρώ προσεκτικά τα σχήματα και υπογραμμίζω τον μετασχηματισμό που χρησιμοποιήθηκε σε κάθε περίπτωση:**

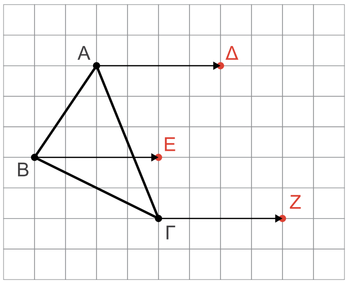


αξονική συμμετρία, μεταφορά κατά διεύθυνση και φορά, στροφή κατά γωνία

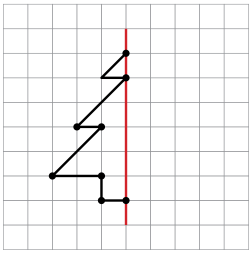


αξονική συμμετρία, μεταφορά κατά διεύθυνση και φορά, στροφή κατά γωνία

2 **Μεταφέρω το τρίγωνο ΑΒΓ όπως δείχνουν τα βελάκια και εξηγώ τι μετασχηματισμός έγινε.**



3 **Σχεδιάζω το συμμετρικό του σχήματος ως προς άξονα συμμετρίας την κόκκινη γραμμή (ανάκλαση).**



- Συμπλήρωσε τον πίνακα αυτοαξιολόγησης, με οριζόντια σειρά, στα κεφάλαια που αναφέρονται στο επαναληπτικό της ενότητας.
- Μετά τη συμπλήρωση κράτησε σημειώσεις για να συζητήσεις για «όσα έμαθες» και για «αυτά που θα ήθελες να μάθεις περισσότερο».

Πίνακας Αυτοαξιολόγησης

Ενότητα 7

ΑΛΓΕΒΡΑ

1. **Βρίσκω τον κανόνα (Αλ.Κ.6.1.)**
2. **Η έννοια της συνάρτησης (Αλ.Σρ.6.1, Αλ.Σρ.6.2)**
3. **Διερεύνηση της σχέσης μεταξύ ανάλογων ποσών (Αλ.Σρ.6.1)**
4. **Διερεύνηση της σχέσης μεταξύ αντιστρόφως ανάλογων ποσών (Αλ.Σρ.6.2)**

Άλγεβρα/Κανονικότητες - Συναρτήσεις

Θα μάθω να:

- Αναζητώ κανονικότητες
- Γενικεύω κανόνες με χρήση μεταβλητών
- Διερευνώ την έννοια της συνάρτησης μέσω διαφορετικών αναπαραστάσεων μονοσήμαντων αντιστοιχιών
- Διερευνώ τη σχέση μεταξύ ανάλογων ποσών
- Διερευνώ τη σχέση μεταξύ αντιστρόφως ανάλογων ποσών σε διαφορετικά πλαίσια

Λέξεις κλειδιά

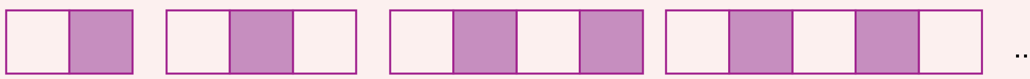
κανονικότητες	γενικεύω	κανόνας
συναρτήσεις	σχέση μεταξύ ανάλογων ποσών	σχέση μεταξύ αντιστρόφως ανάλογων ποσών

Δραστηριότητες

1

Αναζητώντας τον κανόνα!

Συνεχίζω την παρακάτω κανονικότητα χρησιμοποιώντας δύο κάρτες, μια άσπρη και μια μοβ, συμπληρώνοντας τα δύο επόμενα σχήματα:



1ο 2ο 3ο 4ο

α. Πόσες κάρτες θα έχει το 5ο σχήμα και πόσες το 6ο σχήμα;

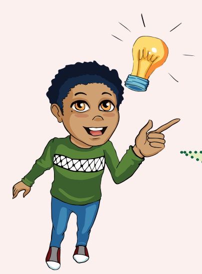
Το 5ο σχήμα θα έχει ... κάρτες. Το 6ο σχήμα θα έχει ... κάρτες.

Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι η κανονικότητα αναπτύσσεται με βάση τον κανόνα: «Κάθε σχήμα προκύπτει από το προηγούμενο με πρόσθεση κάθε φορά μιας κάρτας εναλλάξ διαφορετικού χρώματος».

Συμφωνώ; ______________________________

β. Πόσες κάρτες θα έχει το 101ο σχήμα;

Ο προηγούμενος κανόνας δεν είναι αρκετός για να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό!



Παρατηρώ ότι το 1ο σχήμα αποτελείται από 2 κάρτες, το 2ο από 3 κάρτες, το 3ο σχήμα από 4 κάρτες, το 4ο σχήμα από 5 κάρτες, κ.ο.κ.

Συμπληρώνω τον πίνακα και αναζητώ πώς μεταβάλλεται ο αριθμός των καρτών σε σχέση με τον αριθμό θέσης του σχήματος.

Αριθμός θέσης σχήματος	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**...**	**ν**
Αριθμός καρτών	2	3						

Διατυπώνω τον κανόνα με λόγια: ______________________________

____

Το σχήμα που βρίσκεται στη θέση ν από πόσες κάρτες θα αποτελείται; ______________

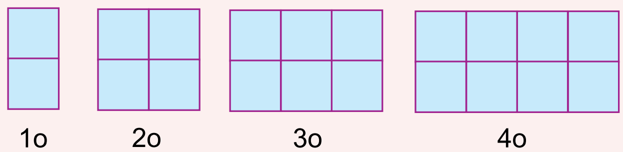
γ. Το σχήμα που έχει 200 κάρτες σε ποια θέση της ακολουθίας σχημάτων βρίσκεται; ______________

Από τις διακόσιες κάρτες του σχήματος πόσες είναι άσπρες και πόσες μοβ;

Εξηγώ: ______________________________

✓ Υπάρχουν σχέδια που ακολουθούν τόσο γεωμετρική όσο και αλγεβρική κανονικότητα. Στην εργασία μας με τέτοιες κανονικότητες χρειάζεται να καταγράψουμε τα δεδομένα σε πίνακα. Εξετάζουμε την αλλαγή, καθώς αυξάνεται το μέγεθος του σχεδίου, και προσπαθούμε να ανακαλύψουμε έναν **κανόνα** για την αλλαγή αυτή.

2 Παρατηρώ προσεκτικά την παρακάτω κανονικότητα σχημάτων.



α. Πόσα παραπάνω τετράγωνα έχει κάθε όρος (σχήμα) της κανονικότητας από τον προηγούμενό του;

____

Συμπληρώνω τον κανόνα με τον οποίο αναπτύσσεται η κανονικότητα των σχημάτων:

Κάθε όρος της κανονικότητας ____________________________________

β. Με βάση τον προηγούμενο κανόνα μπορώ να απαντήσω σε ερωτήματα όπως: «Από πόσα τετράγωνα σχηματίζεται ο 20ός όρος της κανονικότητας;»

Εξηγώ: ____

Συμπληρώνω τον πίνακα και προσπαθώ να βρω τη σχέση ανάμεσα στον αριθμό που δείχνει τη θέση του σχήματος στην κανονικότητα των σχημάτων και τον αριθμό των τετράγωνων.

Αριθμός θέσης σχήματος	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**...**	**ν**
Αριθμός τετράγωνων								

Διατυπώνω τον κανόνα: ____

Το σχήμα στη θέση ν της κανονικότητας θα έχει ____________________ τετράγωνα.

Βρίσκω τον Κανόνα

Βρίσκω τον Κανόνα ΙΙ

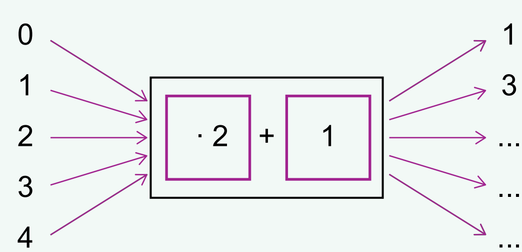
Εφαρμογή

1 Φτιάχνουμε τη δική μας κανονικότητα αριθμών!

Μελετώ το παράδειγμα και συμπληρώνω τα κενά.

Στο παράδειγμά μας, η κανονικότητα των αριθμών στα αριστερά είναι: 1, …., …., …., …., ….,

Δημιουργήσαμε την κανονικότητα των ______________ αριθμών!



- Σχεδιάζω στο τετράδιο ένα διάγραμμα σαν το παραπάνω, όπου στα δύο τετράγωνα σημειώνω τις πράξεις.

Ερωτήσεις Σ - Λ		
Στην κανονικότητα 2, 5, 8, 11, ... ο κανόνας είναι «προσθέτω 3».	**Σ**	**Λ**
Στην κανονικότητα 1, 7, 13, 19, 25 ,... ο επόμενος όρος είναι ο αριθμός 30.	**Σ**	**Λ**

2. Η έννοια της συνάρτησης

Δραστηριότητες

1 **Ένας εκτυπωτής τυπώνει 20 σελίδες το λεπτό. Πόσες σελίδες μπορεί να τυπώσει σε 2 λεπτά, σε 3 λεπτά, ...**

Συζητάμε:
Από τι εξαρτάται ο αριθμός των σελίδων που μπορεί να τυπώσει;
Πώς μεταβάλλεται ο αριθμός των σελίδων που μπορεί να τυπώσει σε σχέση με τον χρόνο;

▶ Επειδή ο **αριθμός των σελίδων** που εκτυπώνονται εξαρτάται από τον **χρόνο εκτύπωσης,** ο αριθμός των σελίδων ονομάζεται **εξαρτημένη μεταβλητή,** ενώ ο **χρόνος** εκτύπωσης ονομάζεται **ανεξάρτητη μεταβλητή.**

▶ Συμπληρώνω τον πίνακα και βρίσκω τον κανόνα που δείχνει την εξάρτηση της μιας ποσότητας από την άλλη.

Χρόνος σε λεπτά (x)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**...**
Αριθμός σελίδων (y)						

Συμπληρώνω: ... = 20 · ...

✓ **Συνάρτηση** ονομάζεται ένας κανόνας με τον οποίο κάθε τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής αντιστοιχίζεται σε μία ακριβώς τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής.

2

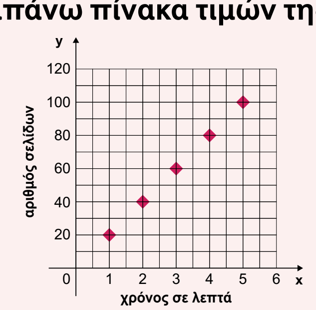
Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα γράφημα για να παρουσιάσουμε τη σχέση μεταξύ των δύο ποσοτήτων.

Συμπληρώνω τα ζεύγη από τον παραπάνω πίνακα τιμών της συνάρτησης:

(1,20), (2,...), (3, ...), (4, ...), (5, ...)

Αντιστοιχίζω τα παραπάνω ζεύγη σε σημεία στο γράφημα. Ποια χαρακτηριστική ιδιότητα έχουν τα σημεία αυτά; Εξηγώ: ______________________

____

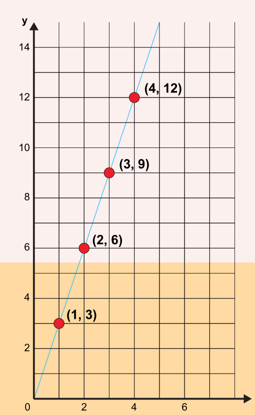


Μια συνάρτηση μπορεί να εκφραστεί με διαφορετικούς τρόπους:

Με έναν κανόνα $y = 3 \cdot x$ **Με πίνακα τιμών**

x	1	2	3	4
y	3	6	9	12

Με γράφημα



3 **Ο γονείς του Αντρέα σχεδιάζουν να γιορτάσουν τα γενέθλιά του σε έναν παιδότοπο. Το κόστος της ενοικίασης του χώρου είναι 50 €. Το κόστος του φαγητού είναι 10 € ανά άτομο. Πόσο θα κοστίσει η γιορτή των γενεθλίων του Αντρέα για 10 άτομα;**

▶ Πόσο είναι το κόστος ενοικίασης του παιδότοπου; ______________________

▶ Εξαρτάται από τον αριθμό των ατόμων που θα προσκληθούν στη γιορτή; ____________

▶ Το κόστος του φαγητού εξαρτάται μόνο από τον αριθμό των ατόμων; ______________

▶ Βρίσκω το συνολικό κόστος για:

1 άτομο: **1** · 10 + 50 = 10 + 50 = 60 €

2 άτομα: **2** · 10 + 50 = 20 + 50 = 70 €

5 άτομα: **5** · 10 + 50 = 50 + 50 = 100 €

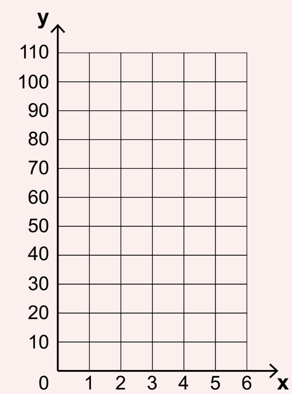
Υπολογίζω με χρήση του κανόνα το κόστος της γιορτής για 10 άτομα: y =10 · ... + ... = ...

Συμπληρώνω τον πίνακα τιμών της συνάρτησης:

Αριθμός ατόμων (x)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Κόστος σε € (y)	60	70			

▶ Γράφω τα ζεύγη των αντίστοιχων τιμών (ανεξάρτητη μεταβλητή, εξαρτημένη μεταβλητή) από τον πίνακα: (1, 60), (..., ...), (..., ...), (... , ...), (... , ...).

Γράφω τον κανόνα για το συνολικό κόστος της γιορτής σε € για x άτομα.
y = 10 · ...+ ...



▶ Σημειώνω τα ζεύγη στο διπλανό ορθογώνιο σύστημα αξόνων και με τον χάρακά μου ελέγχω τη διάταξη των σημείων. Τι παρατηρώ; ______________________

Η έννοια της συνάρτησης

Η έννοια της συνάρτησης II

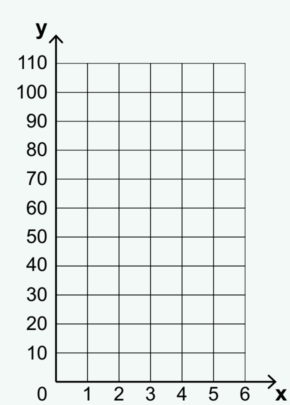
Εφαρμογή

1 **Συμπληρώνω τον πίνακα τιμών για την κάθε συνάρτηση: α) y1 = 10 · x. β) y2 = 10 · x + 10.**

x	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
y1					

x	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
y2					

Σημειώνω τα ζεύγη των αντίστοιχων τιμών από τον κάθε πίνακα στο διπλανό ορθογώνιο σύστημα αξόνων και με τον χάρακά μου ελέγχω τη διάταξη των σημείων κάθε συνάρτησης.



Συνάρτηση y1, με μπλε κουκκίδες

Συνάρτηση y2, με πράσινες κουκκίδες

Ερωτήσεις Σ - Λ		
Μπορώ να αναπαραστήσω τη σχέση δύο μεγεθών με ένα γράφημα.	Σ	Λ
Από το γράφημα μιας συνάρτησης μπορώ να βρω την αντίστοιχη τιμή του y για κάθε μια τιμή του x.	Σ	Λ

Δραστηριότητες

1

Ένας εστιάτορας αγοράζει φρούτα και λαχανικά για την κουζίνα του καταστήματός του από ένα γειτονικό μανάβικο. Αν το κόστος της αγοράς 2 κιλών αχλαδιών είναι 4€, πόσα χρήματα θα πληρώσει για την αγορά 5 κιλών αχλαδιών; Για την αγορά 8 κιλών αχλαδιών;

▶ Όταν μεταβάλλεται η ποσότητα των αχλαδιών, πώς μεταβάλλεται το κόστος αγοράς;

____

▶ Τι είδους ποσά είναι τα «αχλάδια σε κιλά» και το «κόστος αγοράς»;

____

▶ Από τι εξαρτάται το κόστος αγοράς των αχλαδιών;

____

Επομένως:

Ανεξάρτητη μεταβλητή (x): __________ **Εξαρτημένη μεταβλητή (y):** __________

▶ Συμπληρώνω τον πίνακα.

Ποσά	Τιμές					
x (αχλάδια σε κιλά)	1	2	3	4	5	8
y (κόστος αγοράς σε €)		4				

▶ Συμπληρώνω τους λόγους των αντίστοιχων τιμών $\frac{y}{x}$:

$$\frac{y}{x} = \frac{\dots}{1} = \frac{\dots}{2} = \frac{\dots}{3} = \frac{\dots}{4} = \frac{\dots}{5} = \frac{\dots}{8}$$

Όταν δύο ποσά είναι ανάλογα, οι λόγοι των αντίστοιχων τιμών τους είναι ίσοι.

Συμπληρώνω τον κανόνα (συνάρτηση) που συνδέει τις δύο μεταβλητές x και y.

Είναι: $\frac{y}{x} =$ ______ ή $y =$ ______ $\cdot x$

Από τον πίνακα τιμών στο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων

▶ Με τη βοήθεια του παραπάνω πίνακα συμπληρώνω τα ζεύγη (x, y) των αντίστοιχων τιμών των δύο ποσών:

(1, 2), (___, ___), (___, ___), (___, ___), (___, ___), (___, ___)

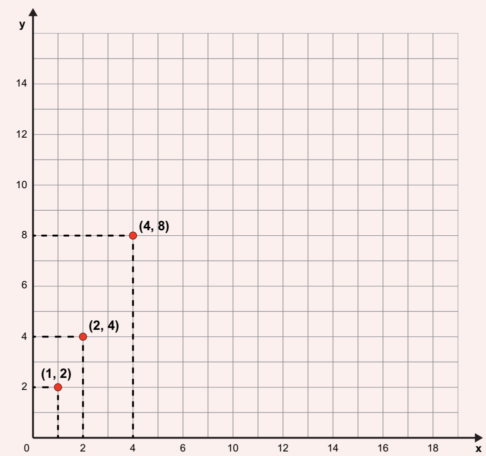
▶ Στο παρακάτω ορθογώνιο σύστημα αξόνων αντιστοιχίζω και τα υπόλοιπα ζεύγη σε σημεία του επιπέδου.

▶ Με τον χάρακά μου ελέγχω τη θέση των σημείων στο επίπεδο. Τι παρατηρώ;

____

▶ Ποια η θέση του σημείου με συντεταγμένες (0,0) σε σχέση με τα παραπάνω σημεία;

____



Λέμε ότι δύο μεγέθη (ποσά) **μεταβάλλονται ανάλογα**, όταν οι λόγοι των αντίστοιχων τιμών τους είναι ίσοι ή διαφορετικά όταν ο λόγος των αντίστοιχων τιμών τους παραμένει σταθερός.

Εφαρμογές

1 **Στο παραπάνω ορθογώνιο σύστημα αξόνων, πόσο απέχει το σημείο που αντιστοιχεί το ζεύγος (1, 2):**

α. από τον κατακόρυφο άξονα; ______________

β. από τον οριζόντιο άξονα; ______________

2 **Σε ποιον από τους παρακάτω πίνακες τα μεγέθη (ποσά) x και y μεταβάλλονται ανάλογα;**

Ποσά	Τιμές			
x	20	40	60	80
y	60	120	180	220

Ποσά	Τιμές			
x	10	20	30	50
y	30	60	90	150

Για τον πίνακα του οποίου τα ποσά μεταβάλλονται ανάλογα γράφω τον κανόνα (συνάρτηση) που συνδέει τις δύο μεταβλητές. _______________________

Ερωτήσεις Σ - Λ		
Αν δύο ποσά μεταβάλλονται ανάλογα, ο λόγος των αντίστοιχων τιμών τους παραμένει σταθερός.	Σ	Λ
Η ευθεία που ορίζουν τα ζεύγη τιμών δύο ανάλογων ποσών στο ορθογώνιο σύστημα αξόνων δε διέρχεται από το σημείο (0, 0).	Σ	Λ

4. Διερεύνηση της σχέσης μεταξύ αντιστρόφως ανάλογων ποσών

Δραστηριότητες

1 **Ένας κάστορας για να κατασκευάσει ένα φράγμα με κορμούς δέντρων χρειάζεται 72 ημέρες. Σε πόσες ημέρες κατασκευάζουν το φράγμα 2 κάστορες της ίδιας απόδοσης; Τρεις κάστορες της ίδιας απόδοσης;**

► Όταν μεταβάλλεται ο αριθμός των καστόρων, πώς μεταβάλλεται ο αριθμός των ημερών; ___________

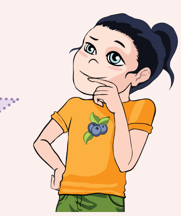
____

► Τι είδους ποσά είναι ο «αριθμός καστόρων» και «οι ημέρες»; ______________________________

Συμπληρώνω τον πίνακα:

Αριθμός καστόρων	**1**	**2**	**3**	**4**	**6**
Ημέρες	72				

Όταν δύο ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα, τα γινόμενα των αντίστοιχων τιμών τους είναι ίσα.



Οι 2 κάστορες χρειάζονται ____________ ημέρες. Οι 3 κάστορες χρειάζονται ______________ ημέρες.

► Από τι εξαρτάται ο χρόνος ολοκλήρωσης του φράγματος; ___________________________________

Συμπληρώνω: _________________________________ Επομένως:

Ανεξάρτητη μεταβλητή (x): _________ **Εξαρτημένη μεταβλητή (y):** _________

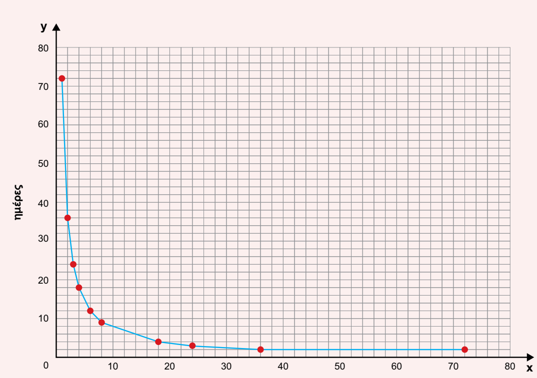
► Συμπληρώνω τον κανόνα (συνάρτηση) που συνδέει τις δύο μεταβλητές: **x · y =** ...

Με βάση τον κανόνα υπολογίζω:

α. πόσες ημέρες θα χρειαστούν για να ολοκληρώσουν το φράγμα οι 9 κάστορες. ______________________________

β. με βάση το γράφημα, σε πόσες ημέρες θα ολοκληρώσουν το έργο οι 36 κάστορες; ______________________________

γ. πόσοι κάστορες χρειάζονται για να ολοκληρώσουν το έργο σε 4 ημέρες. ______________________________



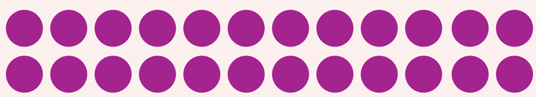
Δύο μεγέθη x και y λέμε ότι μεταβάλλονται **αντιστρόφως ανάλογα**, αν το γινόμενό τους, καθώς το ένα αυξάνεται και το άλλο ελαττώνεται, παραμένει σταθερό.

Λέμε ότι το x μεταβάλλεται αντίστροφα με το y και το y μεταβάλλεται αντίστροφα με το x.

2 **Δύο φίλοι, ο Αντρέας και ο Πάνος, παίζουν με τους βόλους τους. Έχουν συνολικά 24 βόλους. Τους τοποθετούν σε σειρές ίδιου μεγέθους και στήλες ίδιου μεγέθους. Δύο τοποθετήσεις φαίνονται παρακάτω. Σε τετραγωνισμένο χαρτί στο τετράδιό μου σχηματίζω κι εγώ μία διαφορετική διευθέτηση.**

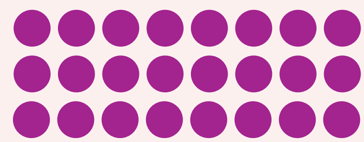
12 στήλες

2 σειρές



8 στήλες

3 σειρές



Συμβολίζουμε με x τις σειρές και με y τις στήλες και συμπληρώνουμε τον πίνακα.

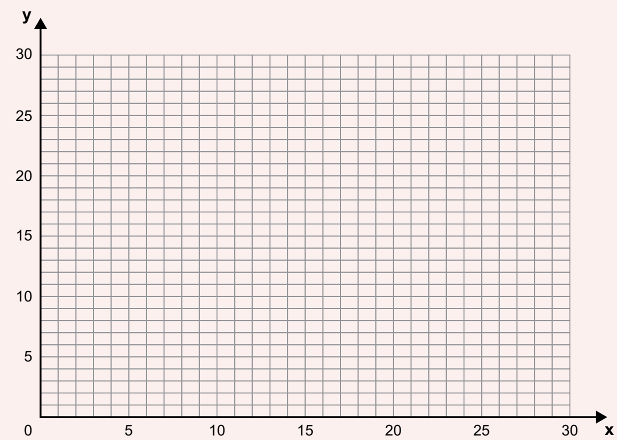
Σειρές (x)	**1**	**2**	**3**	**4**	**6**	**8**	**12**
Στήλες (y)		12					

▶ Μεταβάλλονται οι μεταβλητές x και y αντίστροφα;

Εξηγώ: ____________________________________

▶ Γράφω τον κανόνα (συνάρτηση) που συνδέει τις δύο μεταβλητές: $\mathbf{x \cdot y =}$ ...

▶ Τοποθετώ τα ζεύγη (x, y) στο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων.



Εφαρμογή

1 **Σε ποιον από τους παρακάτω πίνακες τα μεγέθη x και y μεταβάλλονται αντίστροφα;**

____

x	**50**	**40**	**30**	**20**
y	5	6	7	8

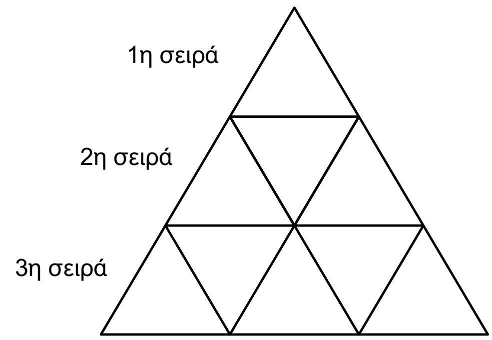
x	**100**	**200**	**300**	**400**
y	60	30	20	15

Για τον πίνακα αυτόν γράφω τον κανόνα (συνάρτηση) που συνδέει τις δύο μεταβλητές. ________________

Ερωτήσεις Σ - Λ		
Το γινόμενο δύο μεταβλητών που είναι αντιστρόφως ανάλογες είναι σταθερό.	**Σ**	**Λ**
Σ’ ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων, τα σημεία που αντιστοιχούν σε ζεύγη αντίστοιχων τιμών δύο μεγεθών που είναι αντιστρόφως ανάλογα βρίσκονται σε μια ευθεία γραμμή.	**Σ**	**Λ**

Ενότητα 7 **Επαναληπτικό**

1 **Βρίσκω πόσα τρίγωνα έχει κάθε σειρά και στη συνέχεια υπολογίζω πόσα τρίγωνα θα έχει η 6η σειρά.**

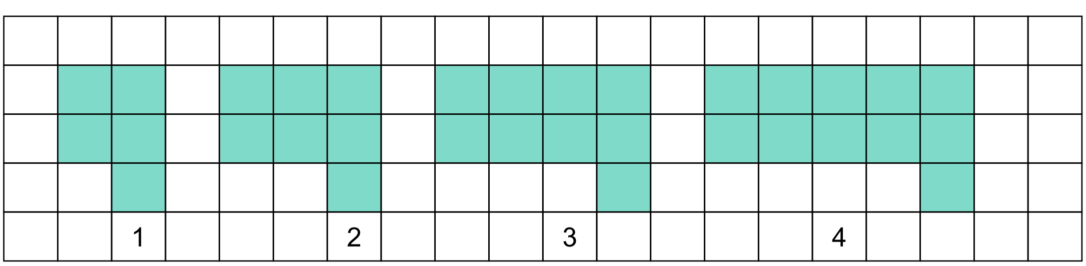


2 **Κυκλώνω τη μαθηματική έκφραση που αναπαριστά το παρακάτω τμήμα αριθμητικής κανονικότητας:**

32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, . . .

Α. 31 + x **Β.** 32 + x **Γ.** 34 – x

3 **Γράφω τον κανόνα για την παρακάτω γεωμετρική κανονικότητα ο οποίος να συνδέει τη θέση του σχήματος με τον αριθμό τετράγωνων που το αποτελούν.**



α) Γράφω μια αλγεβρική έκφραση για να αναπαραστήσω την κανονικότητα.

β) Βρίσκω τον αριθμό των τετράγωνων που περιέχονται στο 7ο σχήμα.

Ποια στρατηγική χρησιμοποίησα; Εξηγώ:

____

____

____

- Συμπλήρωσε τον πίνακα αυτοαξιολόγησης, με οριζόντια σειρά, στα κεφάλαια που αναφέρονται στο επαναληπτικό της ενότητας.
- Μετά τη συμπλήρωση κράτησε σημειώσεις για να συζητήσεις για «όσα έμαθες» και για «αυτά που θα ήθελες να μάθεις περισσότερο».

Πίνακας Αυτοαξιολόγησης

Ενότητα 8

ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ

1. **Μήκος κύκλου (Μ.Μ.6.1, Μ.Μ.6.2)**
2. **Πρόσθεση και αφαίρεση γωνιών (Μ.Γ.6.1)**
3. **Πλευρές, περίμετρος και εμβαδόν γεωμετρικών σχημάτων (Μ.Ε.6.1)**
4. **Μονάδες μέτρησης επιφάνειας (Μ.Ε.6.2)**
5. **Εμβαδόν παραλληλόγραμμου - Εμβαδόν τρίγωνου (Μ.Ε.6.5)**
6. **Εμβαδόν τραπέζιου (Μ.Ε.6.5)**
7. **Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας πυραμίδων (Μ.Ε.6.6)**
8. **Εμβαδόν ακανόνιστων επιφανειών (Μ.Ε.6.3)**
9. **Εμβαδόν καμπυλόγραμμων επιφανειών (Μ.Ε.6.4)**
10. **Πλευρές, εμβαδόν και όγκος γεωμετρικού σχήματος (Μ.Ο.6.1, Μ.Ο.6.2)**
11. **Όγκος ορθογώνιων παραλληλεπίπεδων (Μ.Ο.6.3)**

Μετρήσεις/ Μήκος - Μέτρο Γωνιών - Εμβαδόν - Όγκος

Θα μάθω να:

- ► Υπολογίζω, εκτιμώ και συγκρίνω μήκη κύκλων.
- ► Προσθέτω και αφαιρώ γωνίες.
- ► Διερευνώ τη σχέση μεταξύ πλευρών, περιμέτρου και εμβαδού επίπεδων σχημάτων.
- ► Εκτελώ μετατροπές μεταξύ των μονάδων μέτρησης επιφάνειας.
- ► Υπολογίζω το εμβαδόν παραλληλόγραμμων, τρίγωνων και τραπέζιων.
- ► Υπολογίζω το εμβαδόν της παράπλευρης και ολικής επιφάνειας πυραμίδων.
- ► Υπολογίζω το εμβαδόν ακανόνιστων επιφανειών αναλύοντάς τες σε γνωστά σχήματα.
- ► Υπολογίζω το εμβαδόν κυκλικού δίσκου και εκτιμώ το εμβαδόν καμπυλόγραμμων επιφανειών.
- ► Διερευνώ τη σχέση μεταξύ πλευρών, εμβαδού και όγκου γεωμετρικών σχημάτων.
- ► Υπολογίζω τον όγκο ορθογώνιων παραλληλεπίπεδων και επιλύω προβλήματα.

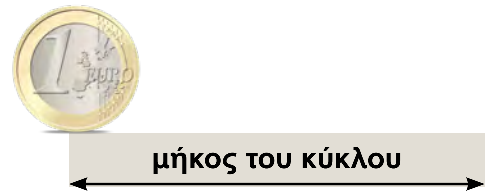
Λέξεις κλειδιά

κύκλος	διάμετρος	ακτίνα	περίμετρος
γωνία	μονάδες μέτρησης επιφάνειας	εμβαδόν	τραπέζιο
επιφάνεια	πυραμίδα	όγκος	παραλληλεπίπεδο

1. Μήκος κύκλου

Μέτρηση μήκους κύκλου

Παίρνω ένα νόμισμα του 1 € κι αφού επιλέξω ένα σημείο στην περιφέρειά του, βάζω μελάνι με έναν μαρκαδόρο γύρω γύρω και το κυλώ κάθετα πάνω σε ένα χαρτί, έτσι ώστε να κάνει μια πλήρη περιστροφή. Το μήκος του αποτυπώματος που αφήνει το νόμισμα στο χαρτί είναι το **μήκος του κύκλου** που ορίζεται από το νόμισμα.



Δραστηριότητες

1 Σχέση διαμέτρου (δ) και μήκους (Μ) του κύκλου

Χωριζόμαστε σε ομάδες. Υλικά κάθε ομάδας: μια μεζούρα, σπάγγος, τρία κυκλικά αντικείμενα διαφορετικού μεγέθους, π.χ. ένα βραχιόλι, ένα κυκλικό στεφάνι ρυθμικής γυμναστικής και ένα δαχτυλίδι.

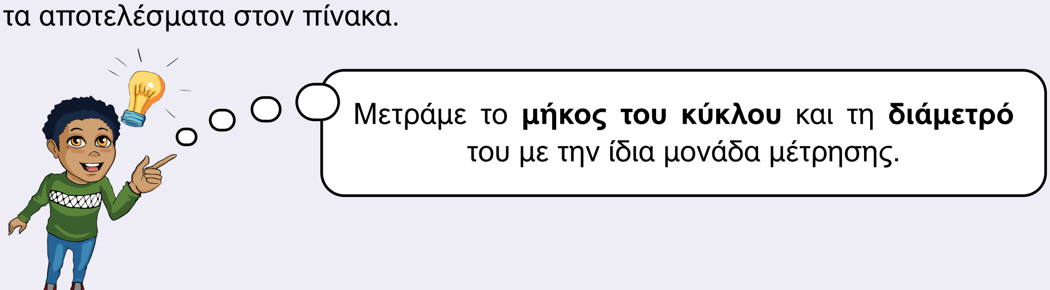
- Επιλέγουμε ένα από τα τρία αντικείμενα, π.χ. το δαχτυλίδι και το περιβάλλουμε με τον σπάγγο.
- Κόβουμε τον σπάγγο και με τη μεζούρα μετράμε το μήκος του, δηλαδή το μήκος του κύκλου.
- Κατόπιν μετράμε τη διάμετρο του δαχτυλιδιού.
- Συγκρίνουμε τα δύο σχοινιά βάζοντάς τα δίπλα δίπλα, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Παρατηρούμε, ότι το μήκος του κύκλου είναι περίπου ___________ φορές μεγαλύτερο από τη διάμετρό του.

2 Εκτιμούμε τη σχέση διαμέτρου (δ) και μήκους (Μ) του κύκλου.

Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για τα άλλα δύο αντικείμενα και συμπληρώνουμε τον πίνακα.

Αντικείμενο	Διάμετρος (δ)	Μήκος κύκλου (Μ)	Μήκος κύκλου / διάμετρος (Μ:δ)
Στεφάνι Ρυθμικής			
Βραχιόλι			

- Ελέγχουμε ξανά την εκτίμησή μας και για τα τρία αντικείμενα.
- Για κάθε αντικείμενο μετράμε και υπολογίζουμε τον λόγο: **Μήκος κύκλου : διάμετρος** και μεταφέρουμε τα αποτελέσματα στον πίνακα.



Τι παρατηρούμε; ______________________________

Πόσο κοντά στην εκτίμησή μας είμαστε; ______________________________

Επηρεάζει το μέγεθος του κύκλου τον λόγο αυτόν; ______________________________

- ✓ Ο λόγος **Μ : δ** σε οποιοδήποτε κύκλο, είναι περίπου ο αριθμός **3,14.**
- ✓ **Ο αριθμός 3,14 συμβολίζεται με το γράμμα π, δηλαδή π = 3,14.**
- ✓ Ισχύουν οι σχέσεις: **Μ : δ = π** **Μ = π · δ** **δ = Μ : π**
- ✓ Το μήκος της διαμέτρου ενός κύκλου είναι περίπου το 1/3 του μήκους του κύκλου.

Μήκος κύκλου I

Μήκος Κύκλου II

Εφαρμογές

1 **Συμπληρώνω τον πίνακα.**

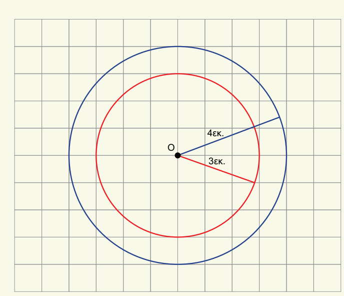
Ακτίνα (α)	Διάμετρος (δ)	Μήκος κύκλου
		6,28 μ.
2 μ.		
	6 μ.	
		25,12 μ.

Έμαθα ότι: «Το μήκος του κύκλου είναι περίπου τριπλάσιο από το μήκος της διαμέτρου». Ελέγχω για να δω αν τα αποτελέσματα είναι σωστά.

2 **Υπολογίζω τα μήκη των κύκλων του διπλανού σχήματος.**

____

____



Οι κύκλοι του σχήματος έχουν το ίδιο κέντρο. Είναι δύο ομόκεντροι κύκλοι.

Ερωτήσεις Σ - Λ		
Το μήκος του κύκλου είναι Μ = 2 · α · π, όπου α η ακτίνα του.	Σ	Λ
Το μήκος κύκλου με διάμετρο 1 μονάδα είναι 3,14 μονάδες.	Σ	Λ

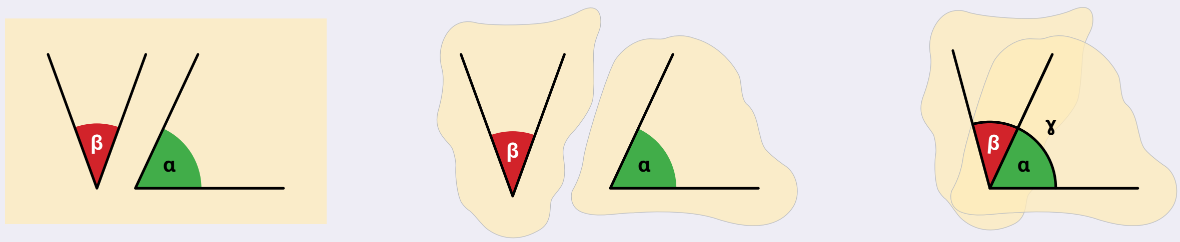
2. Πρόσθεση και αφαίρεση γωνιών

Δραστηριότητες

1

Πώς προσθέτουμε γωνίες;

Για να προσθέσουμε δύο γωνίες ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

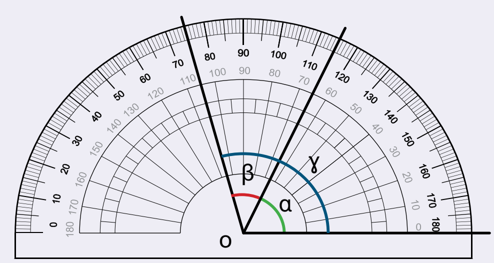


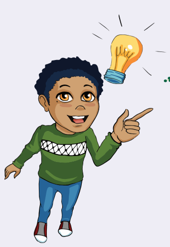
Αντιγράφω τις γωνίες σε διαφανές χαρτί.

Κόβω το διαφανές χαρτί περιμετρικά των γωνιών.

Τοποθετώ τις γωνίες πλευρά με πλευρά έτσι, ώστε οι κορυφές τους να ταυτιστούν όπως στην εικόνα.

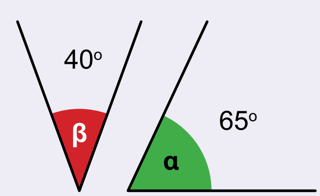
Η νέα γωνία γ που σχηματίζεται ονομάζεται **άθροισμα των γωνιών α και β.** Συμβολικά γράφουμε **γ = α + β.** Μετρώντας με το μοιρογνωμόνιο βρίσκουμε το μέτρο της γωνίας. Είναι γ = 105^{o}. Μπορούμε γρήγορα να βρούμε το μέτρο της γωνίας γ προσθέτοντας τα μέτρα των γωνιών α και β. Είναι α = 65^{o} και β = 40^{o}. Οπότε **γ = α + β = 65^{o} + 40^{o} = 105^{o}**





Με κορυφή το σημείο Ο έχουμε σχεδιάσει τρεις γωνίες: την α, τη β και τη γ.

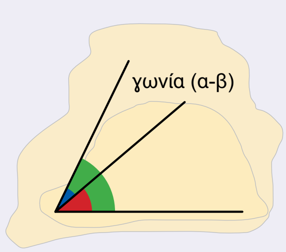
Στο τετράδιο μου των μαθηματικών, σχεδιάζω δύο γωνίες α = 35^{o}, β = 55^{o} και στη συνέχεια υπολογίζω το μέτρο της γωνίας α + β.



2

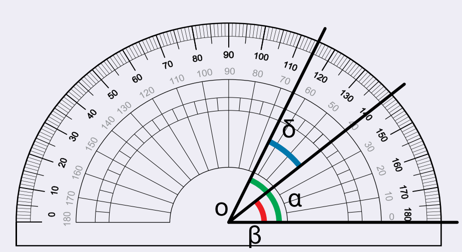
Αφαίρεση γωνιών

Για να αφαιρέσουμε δύο γωνίες τοποθετούμε τη μικρότερη γωνία πάνω στη μεγαλύτερη, ενώνοντας τις κορυφές τους και τη μία τους πλευρά, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Η νέα γωνία δ που σχηματίζεται λέγεται διαφορά των γωνιών α και β.



Με το μοιρογνωμόνιο μετράμε τη γωνία δ. Είναι δ = 25^{o}.

Μπορούμε γρήγορα να βρούμε το μέτρο της γωνίας δ αφαιρώντας τα μέτρα των γωνιών α και β. Οπότε **δ = α – β = 65^{o} – 40^{o} = 25^{o}**. Ονομάζω τις γωνίες α, β και δ στην αριστερή αναπαράσταση.



Σχεδιάζω δύο γωνίες σε ένα φύλλο χαρτί Α4 και ακολουθώντας την παραπάνω διαδικασία βρίσκω τη διαφορά τους.

Αφαίρεση γωνιών

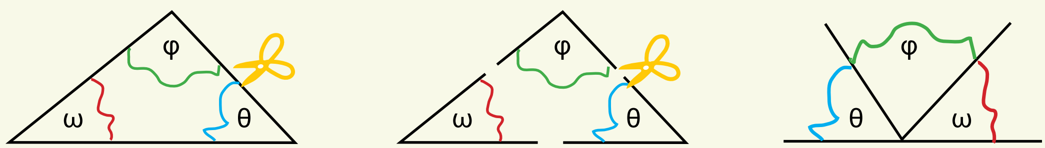
Πρόσθεση γωνιών

Εφαρμογές

1

Βρίσκουμε το άθροισμα των γωνιών τρίγωνου.

Σε ένα χαρτόνι σχεδιάζουμε ένα τρίγωνο και ονομάζουμε τις γωνίες του. Στη συνέχεια τις κόβουμε και τις τοποθετούμε πλευρά με πλευρά έτσι ώστε οι κορυφές τους να ταυτιστούν.

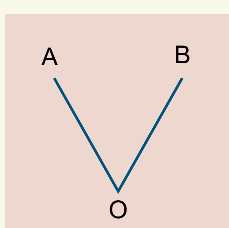


Όπως φαίνεται στο σχήμα σχηματίζεται μία ευθεία γωνία, άρα το άθροισμα των γωνιών είναι 180°.
Δηλαδή θ + φ + ω = 180°.

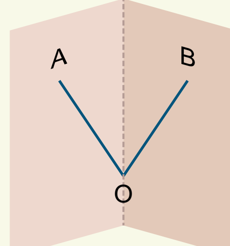
2

Χωρίζουμε μια γωνία σε δύο ίσες γωνίες.

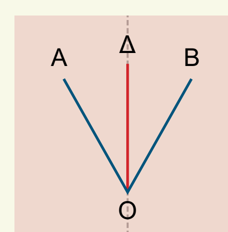
Σε ένα κομμάτι χαρτόνι σχεδιάζω μια γωνία.



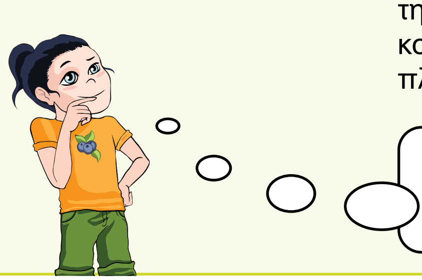
Σχεδιάζω μια γωνία.



Διπλώνω το χαρτόνι κατά μήκος της ευθείας που διέρχεται από την κορυφή της γωνίας έτσι, ώστε οι πλευρές της να συμπέσουν.



Ξεδιπλώνω το χαρτί και σχεδιάζω με τον χάρακά μου και το μολύβι μου την ευθεία πάνω στη δίπλωση του χαρτιού.

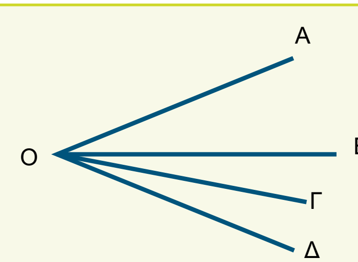


Έχεις σχεδιάσει τη **διχοτόμο ΟΔ** της γωνίας. Οι δύο γωνίες που σχηματίστηκαν είναι ίσες και η κάθε μία είναι το μισό της αρχικής.

3

Συμπληρώνω τον πίνακα.

ΑΟΒ + ΒΟΓ = ΑΟΓ	ΑΟΓ + ΓΟΔ = ...
ΑΟΓ – ΑΟΒ =....	ΑΟΔ – ΑΟΓ =....



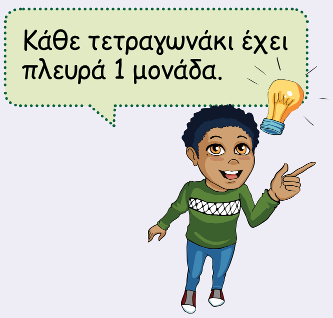
Ερωτήσεις Σ - Λ

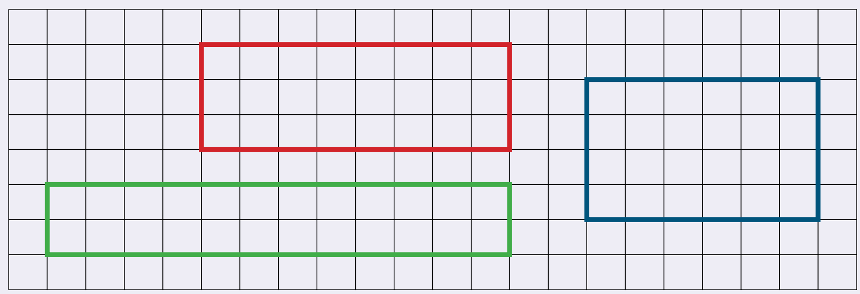
Σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα των γωνιών του είναι 180°.	Σ	Λ
Αν α=40° και β=50°, τότε η γωνία α+β είναι ορθή.	Σ	Λ

3. Πλευρές, περίμετρος και εμβαδόν γεωμετρικών σχημάτων

Δραστηριότητα

1 **Ο κος Μιχάλης έχει τρία διαφορετικά αγροτεμάχια, τα οποία φαίνονται παρακάτω.**





α. Συμπληρώνω τον παρακάτω πίνακα και συγκρίνω τα αγροτεμάχια ως προς την περίμετρο και το εμβαδόν τους στο τετραγωνισμένο χαρτί.

	Κόκκινο	**Μπλε**	**Πράσινο**
Μήκος			
Πλάτος			
Περίμετρος			
Εμβαδόν			

Τι παρατηρώ; ____

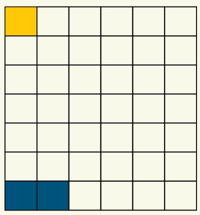
β. Αν κάθε μονάδα μήκους στο τετραγωνισμένο χαρτί αντιστοιχεί σε 10 μ. στην πραγματικότητα, πόσα μέτρα είναι η περίμετρος κάθε αγροτεμαχίου και πόσα τ.μ. είναι η έκταση που καταλαμβάνουν στην πραγματικότητα; Συμπληρώνω τον πίνακα:

	Κόκκινο	**Μπλε**	**Πράσινο**
Μήκος			
Πλάτος			
Περίμετρος			
Εμβαδόν			

Το **εμβαδόν** μιας επίπεδης επιφάνειας είναι ένας αριθμός που εκφράζει την έκταση που καταλαμβάνει η επιφάνεια αυτή και εξαρτάται από τη μονάδα μέτρησης των επιφανειών που χρησιμοποιούμε.

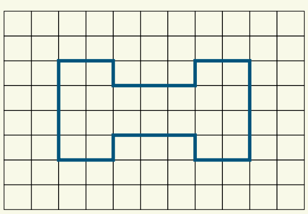
Εφαρμογές

1 **Βρίσκω το εμβαδόν του σχήματος ανάλογα με τη μονάδα μέτρησης.**

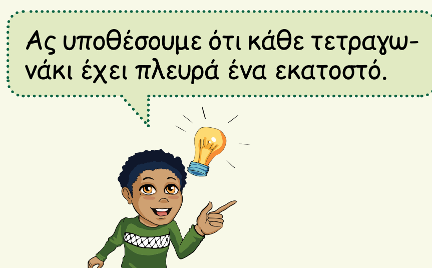


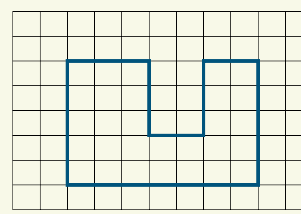
Μονάδα μέτρησης	Εμβαδόν

2 **Βρίσκω το μήκος των πλευρών, την περίμετρο και το εμβαδόν των παρακάτω σχημάτων.**



Σχήμα 1

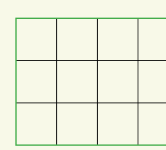




Σχήμα 2

	Σχήμα 1	**Σχήμα 2**
Μήκος		
Πλάτος		
Περίμετρος		
Εμβαδόν		

3 **Στο διπλανό σχήμα ας υποθέσουμε ότι κάθε τετραγωνάκι έχει πλευρά 1εκ.**



α. Βρίσκω την περίμετρο και το εμβαδόν του σχήματος. ______________________________

____

β. Εάν διπλασιάσουμε το μήκος των πλευρών του ορθογώνιου, πόσο θα είναι τώρα το πλάτος και πόσο το μήκος του νέου σχήματος; ____

γ. Βρίσκω την περίμετρο και το εμβαδόν του νέου σχήματος.

____

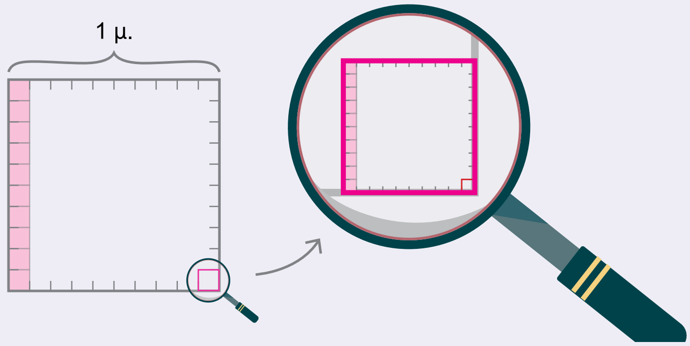
Ερωτήσεις Σ - Λ

Αν τριπλασιάσω το μήκος των πλευρών ενός σχήματος τότε τριπλασιάζεται η περίμετρός του.	Σ	Λ
Αν διπλασιάσω το μήκος των πλευρών ενός ορθογώνιου, τότε τριπλασιάζεται το εμβαδόν του.	Σ	Λ

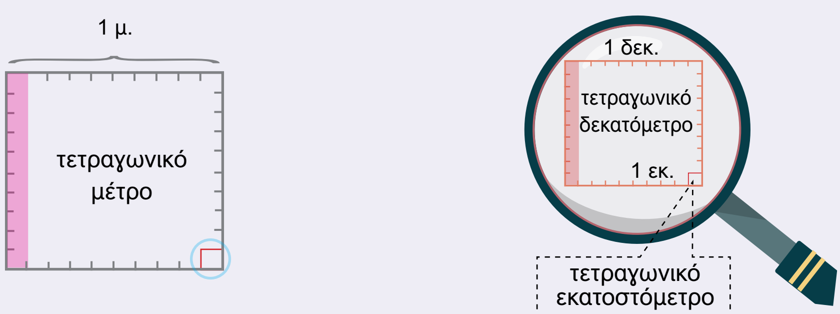
4. Μονάδες μέτρησης επιφάνειας

Δραστηριότητες

1 **Η πλευρά του παρακάτω τετράγωνου έχει μήκος 1 μ. Στην πλευρά του χωράνε 10 μικρότερα ροζ τετράγωνα. Πόσα ροζ τετράγωνα υπάρχουν μέσα στο μεγάλο τετράγωνο; __________**



Στο ροζ τετράγωνο που φαίνεται μέσα στον μεγεθυντικό φακό:
- ▶ Πόσα μικρότερα τετράγωνα υπάρχουν; ________
- ▶ Καθένα από αυτά είναι το _______ του ροζ τετράγωνου.
- ▶ Καθένα από αυτά είναι το _______ του αρχικού τετράγωνου.
- ▶ Αν χωρίζαμε με τον ίδιο τρόπο το τετραγωνικό εκατοστόμετρο πόσα μικρότερα τετράγωνα θα κάλυπταν την επιφάνειά του; ______________
- ▶ Πώς ονομάζεται καθένα από αυτά; ______________________________



Συμπληρώνω:

Το 1 τετραγωνικό μέτρο (τ.μ) έχει ... τετραγωνικά δέκατα (τ.δεκ.)
Το 1 τετραγωνικό δέκατο (τ.δεκ.) έχει ... τετραγωνικά εκατοστά (τ.εκ.)
Το 1 τετραγωνικό εκατοστό (τ.εκ.) έχει ... τετραγωνικά χιλιοστά (τ.χιλ.)

✓ Μονάδα μέτρησης των επιφανειών είναι το τετραγωνικό μέτρο (τ.μ.) που είναι η επιφάνεια ενός τετράγωνου με πλευρά 1μ.

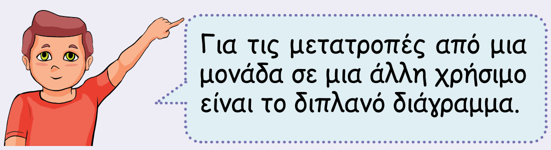
✓ Επιφάνειες που είναι μικρότερες από το 1 τ.μ. τις μετράμε με τις υποδιαιρέσεις του τ.μ. που είναι: α. **το τετραγωνικό δεκατόμετρο (τ.δεκ.)** β. **το τετραγωνικό εκατοστόμετρο (τ.εκ.)** γ. **το τετραγωνικό χιλιοστόμετρο (τ. χιλ.)**

2 Πολλαπλάσια του τετραγωνικού μέτρου.

Τις μεγάλες επιφάνειες, για παράδειγμα την έκταση μιας χώρας, τις μετράμε με:

α. το στρέμμα = 1.000 τ.μ.

β. το τετραγωνικό χιλιόμετρο (τ. χμ.) = 1.000.000 τ.μ.



1 τ.μ. = 100 τ.δεκ. = 10.000 τ.εκ. = 1.000.000 τ.χιλ.

1 τ.δεκ. = 100 τ.εκ. = 10.000τ.χιλ.

1 τ.εκ. = 100 τ. χιλ.

Εφαρμογές

1 Συμπληρώνω τα κενά.

τ.μ.	τ.δεκ.	τ.εκ.	τ.χιλ.
0,0007			
	290,47		
		18,4857	
			8.530.000

2 Ένας συμμαθητής σου ισχυρίζεται ότι: 12,3456 τ.μ. = 12 τ.μ. 34 τ.δεκ. 56 τ.εκ. Είναι σωστός ή λανθασμένος ο ισχυρισμός του; Συζητάμε στην τάξη.

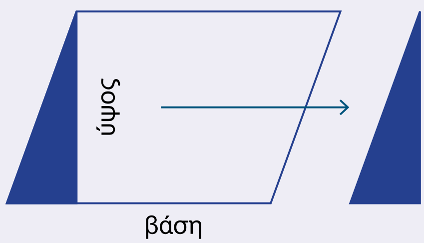
Ερωτήσεις Σ - Λ		
Όταν υπολογίζω το εμβαδόν ενός ορθογώνιου, οι διαστάσεις του πρέπει να εκφράζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης.	Σ	Λ
1 τ.μ. = 100 τ.δεκ.	Σ	Λ

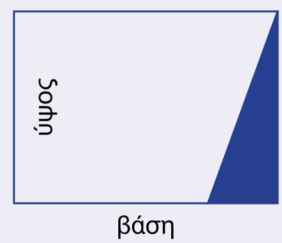
5. Εμβαδόν παραλληλόγραμμου - τρίγωνου

Δραστηριότητες

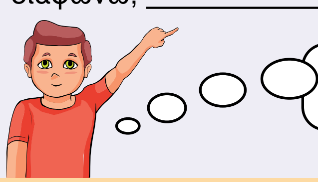
1 Εμβαδόν παραλληλόγραμμου

Αν από το παρακάτω παραλληλόγραμμο κόψουμε την τριγωνική μπλε επιφάνεια και μεταφέροντάς τη την εφαρμόσουμε στην απέναντι πλευρά, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, τι σχήμα προκύπτει;





- Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι: **«Το αρχικό παραλληλόγραμμο και το ορθογώνιο που προέκυψε έχουν το ίδιο εμβαδόν».** Συμφωνώ ή διαφωνώ; ____________________
  Εξηγώ: ____________________
  ____
- Ένας άλλος μαθητής παρατηρεί ότι: «Τα δύο σχήματα έχουν ίσες βάσεις και ίσα ύψη». Συμφωνώ ή διαφωνώ; ____________________

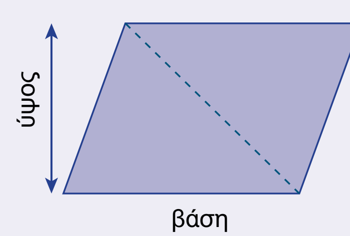


Επομένως: Ε παραλληλόγραμμου = (Ε ορθογώνιου) = βάση · ύψος

Το εμβαδόν του παραλληλόγραμμου ισούται με το γινόμενο της βάσης του επί το ύψος του.

2 Εμβαδόν τρίγωνου

Κόβουμε με το ψαλίδι μας ένα χαρτί σχήματος παραλληλόγραμμου κατά μήκος της διαγωνίου του σε δύο τρίγωνα.



Αν φέρουμε το ένα τρίγωνο πάνω από το άλλο και το περιστρέψουμε κατάλληλα, βλέπουμε ότι τα δύο σχήματα ταυτίζονται.

Αφού το ύψος καθώς και η βάση του παραλληλόγραμμου είναι ίδια με το ύψος και τη βάση του τρίγωνου μπορούμε να πούμε ότι το εμβαδόν του τρίγωνου είναι το μισό του εμβαδού του παραλληλόγραμμου.

Επομένως για το εμβαδόν του τρίγωνου ισχύει: $Ε = \dfrac{β \cdot υ}{2}$

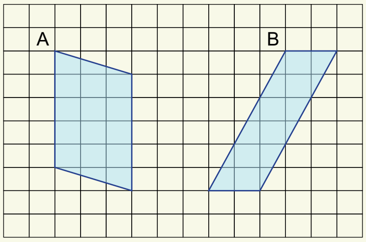
Το εμβαδόν του τρίγωνου ισούται με το ημιγινόμενο της βάσης του επί το ύψους του.

$$Ε = \frac{β \cdot υ}{2}$$

Εμβαδόν Τρίγωνου

Εφαρμογές

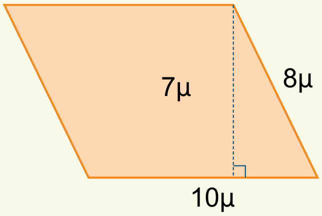
1 **Βρίσκω το εμβαδόν των παραλληλόγραμμων, του διπλανού σχήματος, θεωρώντας ότι κάθε τετραγωνάκι έχει πλευρά μήκους 1 εκ.**



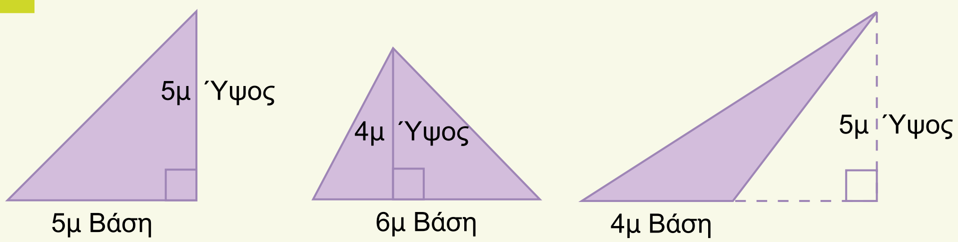
E_A = ____________________

E_B = ____________________

2 **Να βρεθεί το εμβαδόν του παραλληλόγραμμου.**

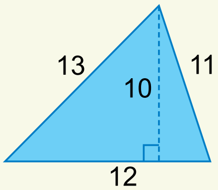


3 **Να βρεθεί το εμβαδόν των παρακάτω τρίγωνων.**



____________ ____________ ____________

4 **Βρίσκω το εμβαδόν του διπλανού τρίγωνου, χρησιμοποιώντας μόνο όποια πληροφορία χρειάζομαι (τα μήκη των πλευρών και του ύψους είναι μετρημένα με την ίδια μονάδα μέτρησης).**
Ετριγ = ____________________



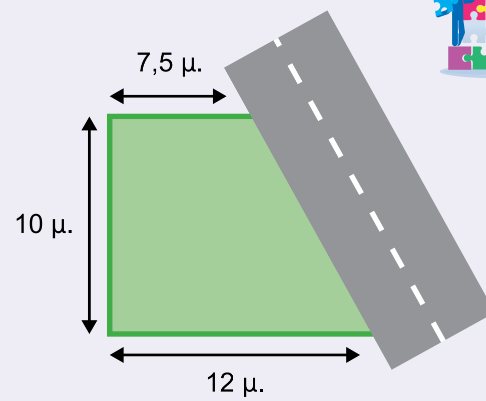
Ερωτήσεις Σ - Λ		
Δύο παραλληλόγραμμα που έχουν το ίδιο εμβαδόν έχουν πάντα ίσες πλευρές.	Σ	Λ
Δύο τρίγωνα που έχουν το ίδιο εμβαδόν έχουν ίσες πλευρές.	Σ	Λ

6. Εμβαδόν τραπέζιου

Δραστηριότητες

1

Ο κύριος Γιώργος είχε ένα χωράφι σχήματος ορθογώνιου. Ένας νέος αυτοκινητόδρομος που φτιάχτηκε στην περιοχή πέρασε μέσα από το χωράφι του.



α. Τι σχήμα έχει τώρα το χωράφι του;

____

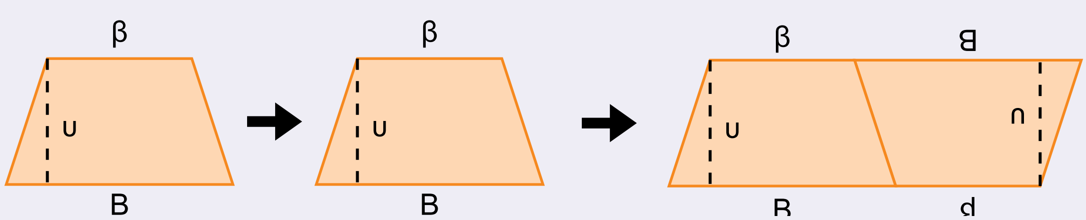
β. Πώς μπορεί ο κύριος Γιώργος να υπολογίσει το εμβαδόν της επιφάνειας του χωραφιού που του απέμεινε;

____

2

Υπολογίζουμε το εμβαδόν τραπέζιου

Παίρνουμε δύο ίδια τραπέζια με βάση β και ύψος υ το καθένα και τα τοποθετούμε όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Τότε προκύπτει ένα παραλληλόγραμμο.



► Τι σχέση έχει το ύψος του παραλληλόγραμμου με το ύψος καθενός από τα δύο ίδια τραπέζια;

____

► Ποια είναι η βάση του παραλληλόγραμμου; ____

► Γράφω το εμβαδόν του παραλληλόγραμμου: Επαρ. = ____

► Ποια είναι η σχέση ανάμεσα στο εμβαδόν του τραπέζιου και το εμβαδόν του παραλληλόγραμμου;

____

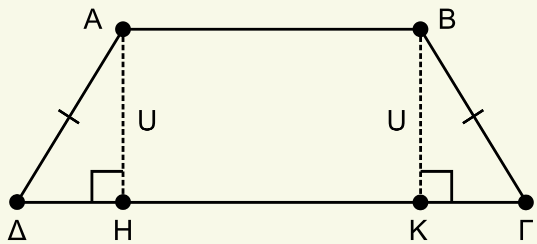
$$\text{Επομένως: Ετραπ.} = \frac{\text{Επαραλληλόγραμμου}}{2} = \ldots$$

Το εμβαδόν τραπέζιου δίνεται από τον τύπο: $Ε = \dfrac{(Β + β) \cdot υ}{2}$

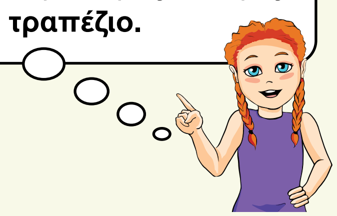
Με Β συμβολίζουμε το μήκος της μεγάλης βάσης, με β το μήκος της μικρής βάσης και με υ το ύψος του τραπέζιου.

Εφαρμογές

1 **Στο παρακάτω τραπέζιο ΑΒΓΔ οι μη παράλληλες πλευρές του ΑΔ και ΒΓ είναι ίσες, η μικρή βάση είναι 6 μ., η μεγάλη βάση 12 μ. και το ύψος του είναι 4 μ.**



Το τραπέζιο που έχει τις μη παράλληλες πλευρές του ίσες λέγεται **ισοσκελές τραπέζιο.**



α. Βρίσκω το εμβαδόν του τραπέζιου. ______________________________

____

____

β. Βρίσκω το εμβαδόν του τραπέζιου με τη βοήθεια των εμβαδών των επιμέρους σχημάτων που τα ύψη του χωρίζουν την επιφάνειά του. ______________________________

____

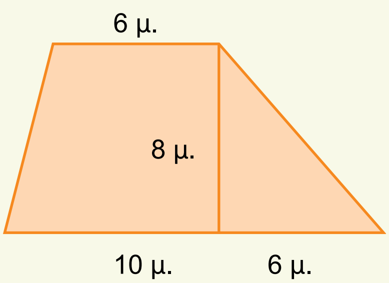
2 **Υπολογίζω το εμβαδόν του τραπέζιου.**

____

____

____

____



Ερωτήσεις Σ - Λ		
Το εμβαδόν ενός τραπέζιου επηρεάζεται από τις μη παράλληλες πλευρές του.	Σ	Λ
Το ύψος του τραπέζιου μπορεί να είναι μεγαλύτερο από τη μικρότερη από τις μη παράλληλες πλευρές του.	Σ	Λ

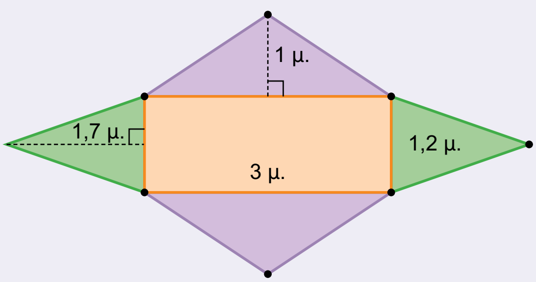
7. Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας πυραμίδων

Δραστηριότητες

1

Τρεις φίλοι θέλουν να φτιάξουν μια σκηνή για να κατασκηνώσουν στο βουνό. Έκαναν αναζήτηση στο διαδίκτυο και βρήκαν μια που η βάση της είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Για να βρουν πόσο ύφασμα χρειάζονται για την κατασκευή της, πρέπει να υπολογίσουν τη γύρω γύρω επιφάνεια της σκηνής και την επιφάνεια της βάσης της.

► Το σχήμα και οι διαστάσεις της σκηνής φαίνονται στο παρακάτω επίπεδο ανάπτυγμα της σκηνής.



Θυμάμαι!

Πυραμίδα λέγεται ένα στερεό, που μία έδρα του είναι ένα πολύγωνο και όλες οι άλλες έδρες του είναι τρίγωνα με **κοινή κορυφή**.

α. Από πόσες έδρες αποτελείται η επιφάνεια της σκηνής και τι γεωμετρικά σχήματα έχουν;

____

β. Υπολογίζω το εμβαδόν κάθε έδρας και στη συνέχεια βρίσκω το συνολικό εμβαδό της σκηνής μαζί με το πάτωμά της. ____

____

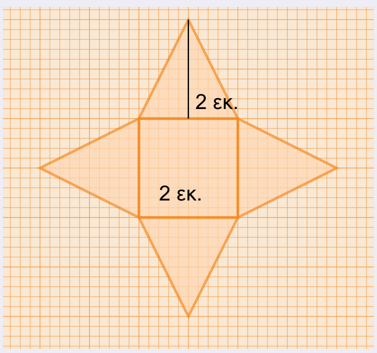
____

$$E_{\text{Πυραμίδας}} = E_{\text{Βάσης}} + E_{\text{Παράπλευρης Επιφάνειας}}$$

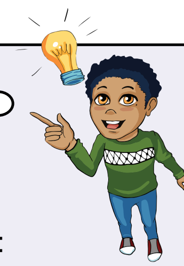
Το ύψος καθεμιάς από τις τριγωνικές πλευρές της πυραμίδας ονομάζεται **παράπλευρο ύψος.**

- ✓ Η ολική επιφάνεια της πυραμίδας αποτελείται από δύο μέρη: την επιφάνεια των παράπλευρων εδρών της, που ονομάζεται **παράπλευρη** επιφάνεια και την επιφάνεια της **βάσης** της.
- ✓ Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας μιας πυραμίδας, υπολογίζουμε το εμβαδόν κάθε παράπλευρης έδρας (τρίγωνο) και προσθέτουμε τα εμβαδά αυτά.
- ✓ Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας προσθέτουμε στο εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας το εμβαδόν της βάσης της.

2 **Σε μία σχολική γιορτή η δασκάλα ετοίμασε δώρα για τους μαθητές της και τα έβαλε σε όμοια κουτιά σχήματος τετραγωνικής πυραμίδας. Για να της φτάσει το χαρτί περιτυλίγματος, τύλιξε τα κουτιά αυτά με πολύχρωμο χαρτί εκτός από τις βάσεις τους. Αν η τάξη είχε 28 μαθητές, πόσα τετραγωνικά μέτρα χαρτί περιτυλίγματος χρησιμοποίησε;**



Κανονική πυραμίδα ονομάζεται το γεωμετρικό στερεό που έχει ως βάση ένα κανονικό πολύγωνο και οι παράπλευρες έδρες της είναι ίσα ισοσκελή τρίγωνα.



Τα τρίγωνα που αποτελούν την παράπλευρη επιφάνεια της παραπάνω πυραμίδας είναι:

____

Επόμένως $\mathbf{E}_{\text{Παράπλευρης Επιφάνειας Πυραμίδας}}$ = _________ · $\mathbf{E}_{\text{τρίγωνου}}$ = _________

Οπότε το εμβαδόν των παράπλευρων επιφανειών των 28 δώρων είναι: _______________

Άρα θα χρησιμοποιήσει _________ τ.μ. χαρτί περιτυλίγματος κατ΄ελάχιστο.

Εμβαδόν Παράπλευρης Επιφάνειας Πυραμίδας

Εφαρμογή

1 **Μια κανονική εξαγωνική πυραμίδα έχει βάση με πλευρά 9 εκ. και το ύψος των τρίγωνων της παράπλευρης επιφάνειας είναι 12 εκ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειάς της.**

____

____

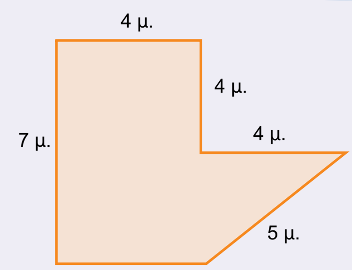
____

Ερωτήσεις Σ - Λ		
Δυο πυραμίδες που έχουν ίδιο ύψος παράπλευρων εδρών έχουν την ίδια παράπλευρη επιφάνεια.	Σ	Λ
Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας μιας πυραμίδας εξαρτάται από την περίμετρο της βάσης της.	Σ	Λ

8. Εμβαδόν ακανόνιστων σχημάτων

Δραστηριότητες

1 **Στην εικόνα φαίνεται η κάτοψη μιας αποθήκης στην αυλή του σπιτιού του Γιάννη. Ο πατέρας του θέλει να καλύψει την ταράτσα με μονωτικό υλικό.**



▶ Τι πρέπει να γνωρίζει για να εκτιμήσει το κόστος της δαπάνης;

____

▶ Είναι η κάτοψη κάποιο γνωστό γεωμετρικό σχήμα; ____________

▶ Ο πατέρας του Γιάννη για να μετρήσει την επιφάνεια της ταράτσας τη χώρισε όπως φαίνεται στο σχήμα 1.

Σε ποια γνωστά σχήματα χωρίστηκε η επιφάνεια της ταράτσας;

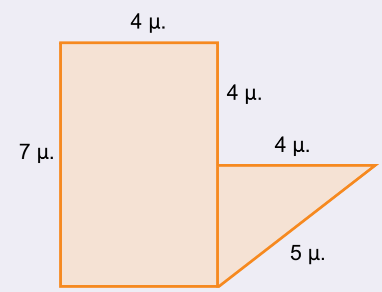
α. ____________________ **β.** ____________________

Υπολογίζω το εμβαδόν του κάθε σχήματος και στη συνέχεια τα προσθέτω.

____

____

____



σχ. 1

▶ Ο Γιάννης λέει ότι υπάρχει κι άλλος τρόπος να χωριστεί η επιφάνεια σε γνωστά γεωμετρικά σχήματα. Δείχνω ποια μπορεί να είναι η σκέψη του Γιάννη στο σχήμα 2.

Γράφω σε ποια γνωστά σχήματα χώρισα την επιφάνεια της ταράτσας:

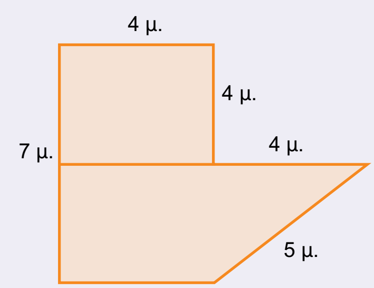
α. ____________________ **β.** ____________________

Υπολογίζω το εμβαδόν του κάθε σχήματος και στη συνέχεια τα προσθέτω.

____

____

____



σχ. 2

Μπορούμε να βρούμε το εμβαδόν ενός ακανόνιστου σχήματος χωρίζοντάς το σε γνωστά γεωμετρικά σχήματα. Το εμβαδόν της συνολικής επιφάνειας του σχήματος αυτού, θα είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των επιμέρους επιφανειών.

2 **Παρατηρώ προσεκτικά το παρακάτω σχήμα και απαντώ στις ερωτήσεις.**

α. Τι σχήμα είναι ολόκληρη η εξωτερική επιφάνεια; ____________________

Υπολογίζω το εμβαδόν της: ______________________________

β. Τι σχήμα είναι η γκρι επιφάνεια; ______________________

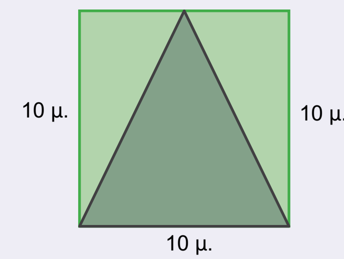
Υπολογίζω το εμβαδόν της: ______________________

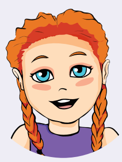
γ. Βρίκω τώρα το εμβαδόν της πράσινης επιφάνειας:

____

____

____





Για να βρεις το Εμβαδόν αυτό, μπορείς να κάνεις
$\mathbf{E = E_{\text{ολικής εξωτερικής επιφάνειας}} - E_{\text{εσωτερικής γκρι επιφάνειας}}}$

Κάποιες φορές μπορούμε να βρούμε το εμβαδόν ενός ακανόνιστου σχήματος αφαιρώντας τα εμβαδά γνωστών σχημάτων.

Εμβαδόν Ακανόνιστης Επιφάνειας Ι

Εμβαδόν Ακανόνιστης Επιφάνειας ΙΙ

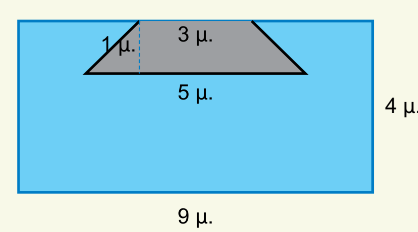
Εφαρμογές

1 **Βρίσκω το εμβαδόν της γκρι και της μπλε επιφάνειας.**

____

____

____

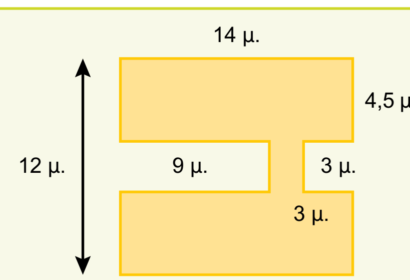


2 **Βρίσκω με δύο διαφορετικούς τρόπους το εμβαδόν της κίτρινης επιφάνειας.**

____

____

____

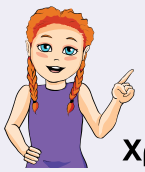


Ερωτήσεις Σ - Λ		
Χωρίζοντας μια ακανόνιστη επιφάνεια σε γνωστά γεωμετρικά σχήματα μπορώ να υπολογίσω το εμβαδόν της.	Σ	Λ
Πολλές φορές το εμβαδόν μιας ακανόνιστης επιφάνειας, μπορεί να υπολογιστεί ως διαφορά εμβαδών γνωστών σχημάτων.	Σ	Λ

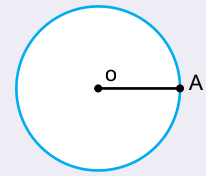
9. Εμβαδόν καμπυλόγραμμων επιφανειών

Δραστηριότητες

1 **Σχεδιάσαμε έναν κύκλο με κέντρο το σημείο Ο και ακτίνα ΟΑ.**

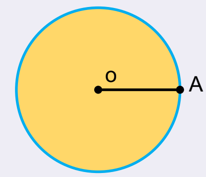


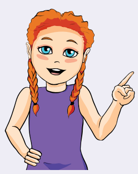
Κύκλος είναι μια κλειστή καμπύλη γραμμή που όλα τα σημεία της απέχουν εξίσου από το κέντρο του.



Χρωματίσαμε το εσωτερικό του κύκλου με κίτρινο χρώμα.

Κυκλικός δίσκος είναι η επίπεδη επιφάνεια που περικλείεται από τον κύκλο μαζί με τη γραμμή του κύκλου.





Στο τετράδιό σου των μαθηματικών σχεδίασε 2 κύκλους με κοινό κέντρο και ακτίνες 2εκ. και 5εκ. αντίστοιχα. Χρωμάτισε το σχήμα (δακτύλιος) που απομένει, αν αφαιρέσεις τον μικρό κυκλικό δίσκο από τον μεγάλο κυκλικό δίσκο.

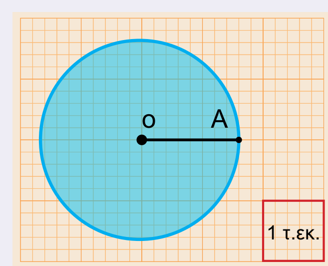
2 **Αναζητώντας το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου**

α. Πόσα τετραγωνικά εκατοστά είναι το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου του διπλανού σχήματος;

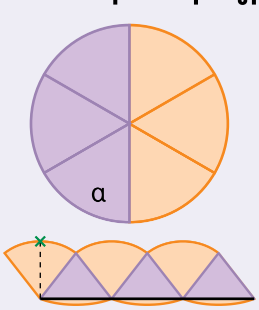
Εκτιμώ: ______________________________

Μπορώ να απαντήσω με ακρίβεια; Εξηγώ: ______________

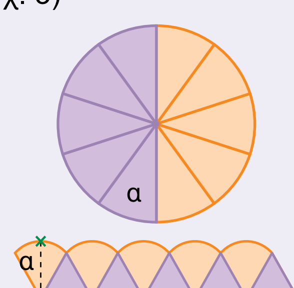
____



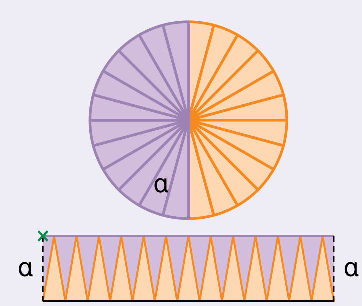
β. Χωρίσαμε τον κυκλικό δίσκο σε 6 τμήματα, τα κόψαμε, και τα τακτοποιήσαμε κατάλληλα παίρνοντας ένα σχήμα που μοιάζει με **παραλληλόγραμμο** (σχ. 1). Επαναλάβαμε τη διαδικασία χωρίζοντας τον κυκλικό δίσκο σε 10 τμήματα (σχ. 2). Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία χωρισμού του κυκλικού δίσκου σε όλο και περισσότερα τμήματα κάθε φορά και τακτοποιώντας τα κατάλληλα, το σχήμα τείνει να γίνει **ορθογώνιο παραλληλόγραμμο** (σχ. 3)



Μισό μήκος κύκλου



Μισό μήκος κύκλου



Μήκος μισού κύκλου = 3,14 · α

Μπορούμε να πούμε τότε ότι: **το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου είναι ίσο με το εμβαδόν του ορθογώνιου.**

Πόσο είναι το μήκος του ορθογώνιου; ______________________________

Πόσο είναι το πλάτος του; ______________________________

Το εμβαδόν ενός ορθογώνιου είναι = μήκος · πλάτος = ________ · ________

Επομένως και το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου είναι:

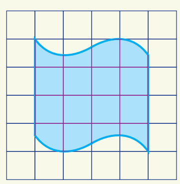
Εμβαδόν κυκλικού δίσκου = Εμβαδόν σχηματιζόμενου ορθογώνιου = (3,14 · α) · α

Εμβαδόν κυκλικού δίσκου = 3,14 · (ακτίνα του κύκλου στο τετράγωνο) = 3,14 · $α^2$

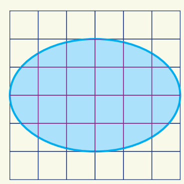
Εφαρμογές

1

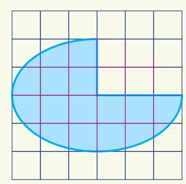
Εκτιμώ το εμβαδόν κάθε επιφάνειας:



α. ....



β. ....



γ. ....

2

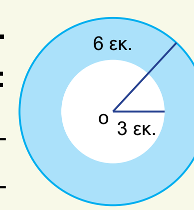
Έχω έναν κύκλο διαμέτρου 5 εκατοστών. Πόση είναι η ακτίνα του, πόσο είναι το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου;

____

____

3

Δίνονται 2 ομόκεντροι κυκλικοί δίσκοι με κέντρο Ο και ακτίνες 3 εκ και 6 εκ. αντίστοιχα. Να βρείτε το εμβαδόν του γαλάζιου δακτύλιου που σχηματίζεται:



____

____

Ερωτήσεις Σ - Λ		
Το εμβαδόν ενός ημικυκλίου με ακτίνα α είναι $E = \frac{3,14 \cdot α^2}{2}$	Σ	Λ
Αν διπλασιάσω την ακτίνα του κυκλικού δίσκου, το εμβαδόν του διπλασιάζεται.	Σ	Λ

10. Πλευρές, εμβαδόν και όγκος γεωμετρικού σχήματος

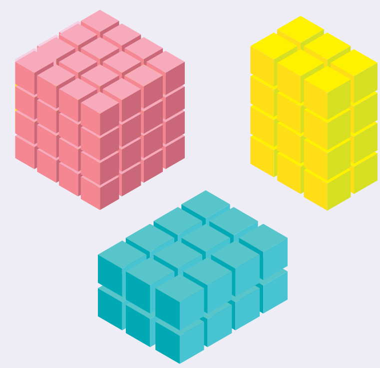
Δραστηριότητες

1

Ένα φορτηγό ξεφόρτωσε τρία κιβώτια σε ένα κατάστημα με παιχνίδια. Ένα ροζ, ένα μπλε και ένα πράσινο. Τα παρακάτω στερεά αντιπροσωπεύουν αυτά τα κιβώτια. Κάθε κυβάκι έχει πλευρά 1 εκ.

► Συμπληρώνω τον πίνακα.

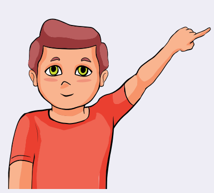
Κιβώτιο	**Ροζ**	**Κίτρινο**	**Μπλέ**
Μήκος			
Πλάτος			
Περίμετρος βάσης			
Ύψος			
Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας			



► Πώς προκύπτει το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας από την περίμετρο της βάσης;

____

► Συμπληρώνω τον πίνακα.



Κιβώτιο	**Ροζ**	**Κίτρινο**	**Μπλέ**
Εμβαδόν βάσης			
Ύψος			
Όγκος			

► Πώς προκύπτει ο όγκος των παραπάνω στερεών από το εμβαδόν της βάσης τους;

____

✓ Μπορούμε να βρούμε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου πολλαπλασιάζοντας την περίμετρο της βάσης του με το ύψος του.
✓ Μπορούμε να βρούμε τον όγκο του ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου πολλαπλασιάζοντας το εμβαδόν της βάσης του με το ύψος του.

2

Επινοούμε στρατηγικές

Έχουμε στη διάθεσή μας ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και κάνουμε μια διαγώνια τομή κατά μήκος δύο απέναντι ακμών, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α. Ονομάζω τα στερεά που προκύπτουν. ____________________

β. Βρίσκω τη σχέση που έχει ο όγκος κάθε στερεού που προκύπτει, από τον χωρισμό του παραλληλεπίπεδου με τον όγκο του παραλληλεπίπεδου.

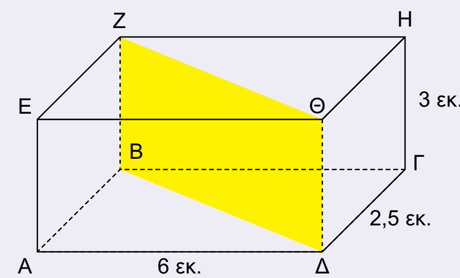
____

γ. Υπολογίζω τον όγκο καθενός από τα στερεά που προκύπτουν.

____

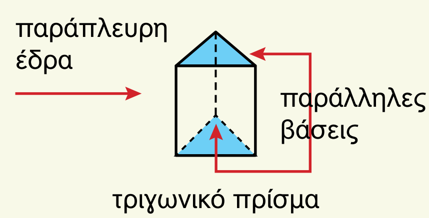
____

____



Εφαρμογές

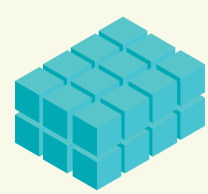
1 **Το τριγωνικό πρίσμα του διπλανού σχήματος έχει όγκο 48 κ.εκ. Αν το ύψος του είναι 6 εκ. βρίσκω το εμβαδόν της βάσης του.**



2 **Στο παρακάτω ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο κάθε κυβάκι έχει ακμή ένα εκατοστό.**

α. Συμπληρώνω τον πίνακα.

Μήκος: ______________ **Πλάτος:** ______________ **Ύψος:** ______________	**Ε**$_{βάσης:}$ ______________ **Όγκος:** ______________



β. Διπλασιάζω το μήκος κάθε ακμής του ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου, και εκτιμώ το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του νέου ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου. ______________

____

Βρίσκω:

▶ τις νέες διαστάσεις του ______________________________

▶ τον καινούριο όγκο του ______________________________

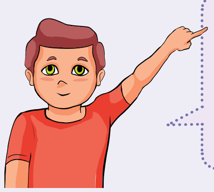
Ερωτήσεις Σ - Λ		
Αν διαιρέσουμε τον όγκο ενός ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου με το εμβαδόν της βάσης του, θα βρούμε το ύψος του.	**Σ**	**Λ**
Αν διπλασιάσουμε τις διαστάσεις ενός ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου, διπλασιάζεται και ο όγκος του.	**Σ**	**Λ**

11. Όγκος ορθογώνιων παραλληλεπίπεδων

Δραστηριότητες

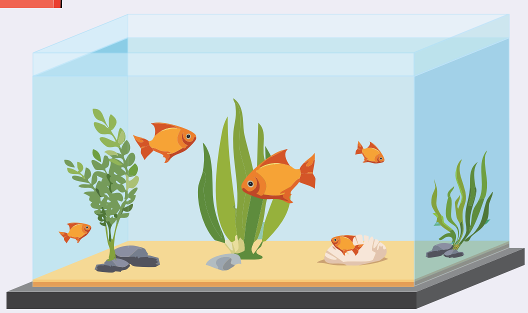
1 **Ένα ενυδρείο για ψάρια έχει σχήμα ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου. Οι διαστάσεις του από το μέσα μέρος των τοιχωμάτων του είναι: μήκος 30 εκ., πλάτος 15 εκ. και ύψος 50 εκ. Πόσα λίτρα νερό χρειάζεται για να γεμίσει πλήρως το ενυδρείο;**

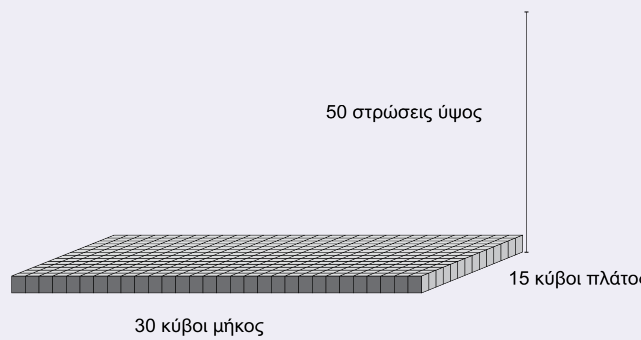
► Για να βρούμε πόσο νερό χρειάζεται για να γεμίσει το ενυδρείο, αρκεί να βρούμε τον όγκο του νερού που περιέχει το ενυδρείο.



Αρκεί να μετρήσουμε τον αριθμό των μοναδιαίων κύβων που χωράνε στο ενυδρείο. Φανταστείτε ότι κάνουμε μια στρώση από κύβους ακμής 1 εκ. στο κάτω μέρος του ενυδρείου.

Μοναδιαίος κύβος πλευράς 1εκ.
είναι ο κύβος με ακμή 1εκ.
Έτσι, ο όγκος του είναι: 1 κ.εκ.
1 λίτρο = 1.000 κ.εκ.





► Η κάθε στρώση θα έχει κατά μήκος ________ κύβους και κατά πλάτος ________ κύβους.

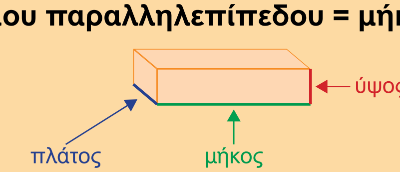
► Συνολικά η κάθε στρώση θα αποτελείται από ________ · ________ = ________ κύβους.

► Το ύψος του ενυδρείου είναι 50 εκ., έτσι αποτελείται από ________ στρώσεις.

► Για να γεμίσει απαιτούνται συνολικά 50 · ________ = ________ κύβοι.

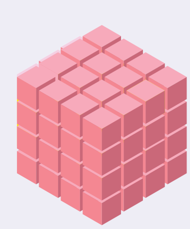
Ο όγκος του ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου ισούται με το γινόμενο των διαστάσεών του μετρημένες με την ίδια μονάδα μέτρησης.

Όγκος ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου = μήκος · πλάτος · ύψος



Όγκος ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου = $E_{βάσης}$ · ύψος

2 **Το διπλανό στερεό αποτελείται από μοναδιαίους κύβους.**



► Γράφω το όνομα του στερεού

____

► Γράφω τις διαστάσεις του:

Μήκος = ______ μονάδες Πλάτος = ______ μονάδες Ύψος = ______ μονάδες

Τι παρατηρώ; ____

► Από πόσους μοναδιαίους κύβους αποτελείται κάθε στρώση; ______________________

► Από πόσες στρώσεις μοναδιαίων κύβων αποτελείται το στερεό; ______________________

► Από πόσους μοναδιαίους κύβους αποτελείται συνολικά το στερεό; ______________________

Ο όγκος του κύβου δίνεται από τον τύπο Όγκος = α · α · α = $α^3$, όπου α η ακμή του.

Όγκος ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου

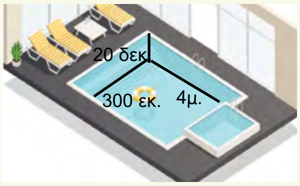
Εφαρμογές

1 **Ο Γιώργος με την παρέα του επισκέφθηκαν μια πισίνα για να κάνουν μπάνιο. Η πισίνα είχε σχήμα ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου. Υπολογίζω τη χωρητικότητα της πισίνας σε λίτρα.**

____

____

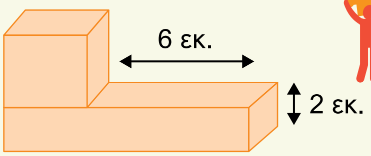
____



2 **Υπολογίζω τον όγκο του διπλανού στερεού, αν ο όγκος του κύβου είναι 64 κ.εκ.**

____

____



Ερωτήσεις Σ - Λ		
Εάν δυο ορθογώνια παραλληλεπίπεδα έχουν τον ίδιο όγκο, τότε οι διαστάσεις τους είναι ίσες.	Σ	Λ
Ο όγκος ενός ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου ισούται με το εμβαδόν της βάσης επί το ύψος του.	Σ	Λ

Ενότητα 8 **Επαναληπτικό**

1

Σχεδιάζω έναν κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας 2 εκατοστών.

Στη συνέχεια:

α. Σχεδιάζω μια διάμετρό του ΑΒ.

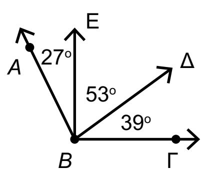
β. Υπολογίζω το μήκος του κύκλου.

γ. Βρίσκω το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου με κέντρο το σημείο Ο και ακτίνα 2 εκ.

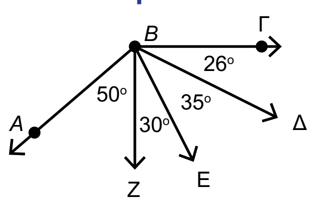
2

Υπολογίζω τις παρακάτω γωνίες.

α.



β.

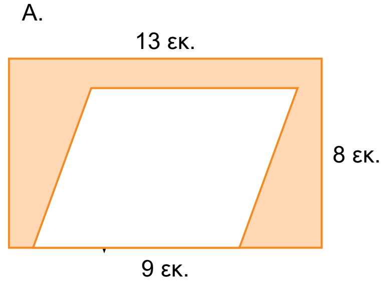


Α.	**Β.**
$A\hat{B}E =$	$A\hat{B}E =$
$A\hat{B}\Delta =$	$A\hat{B}Z =$
$\Gamma\hat{B}\Delta =$	$A\hat{B}\Delta =$

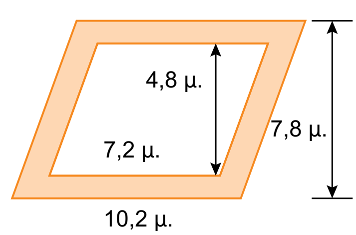
3

Βρίσκω τα εμβαδά των χρωματισμένων περιοχών.

Α.



Β.



4

Ο όγκος ενός κύβου είναι 125 κ.μ. Πόσα μέτρα είναι η ακμή του και πόσο το εμβαδόν όλης της επιφάνειάς του;

- Συμπλήρωσε τον πίνακα αυτοαξιολόγησης, με οριζόντια σειρά, στα κεφάλαια που αναφέρονται στο επαναληπτικό της ενότητας.
- Μετά τη συμπλήρωση κράτησε σημειώσεις για να συζητήσεις για «όσα έμαθες» και για «αυτά που θα ήθελες να μάθεις περισσότερο».

Πίνακας Αυτοαξιολόγησης

Ευρετήριο Όρων