ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Γαβρίλης Κώστας
Μπαραλός Γιώργος
Τζούμας Μιχάλης
Οικονόμου Φώτης
Πούλου Μαρία Ελένη
Φιλιππάκης Μιχάλης

Μαθηματικά

Α' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Επιστημονική Επιτροπή Αξιολόγησης

Συντονιστής / Αξιολογητής	**Μαλλιάκας Κωνσταντίνος** Εν ενεργεία Εκπαιδευτικός
Αξιολογητής	**Μονιούκας Φώτιος** Εν ενεργεία Εκπαιδευτικός
Αξιολογητής	**Κοντογιαννόπουλος Κωνσταντίνος** Εν ενεργεία Εκπαιδευτικός
Τεχνικός Εμπειρογνώμονας	**Γουρνά Σοφία** Πτυχιούχος Πληροφορικής
Επικουρικός Εμπειρογνώμονας	**Γαλάτη Αικατερίνη** Πτυχιούχος Τεχνολογίας Γραφικών Τεχνών
Υπεύθυνη του μαθήματος / γνωστικού αντικειμένου στο πλαίσιο της Πράξης	**Ειρήνη Γεωργάκη, Σύμβουλος Α΄ ΙΕΠ,** μέλος της Επιστημονικής Ομάδας Έργου (ΕΟΕ) της Πράξης

Πράξη με τίτλο: «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ 6010165 στο Πρόγραμμα «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή» 2021-2027

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Σπυρίδων Δουκάκης

Πρόεδρος του Δ.Σ. του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Υπεύθυνη Πράξης

Πολυξένη Μπίλλα

Σύμβουλος Α΄ του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Προϊσταμένη Τμήματος Β΄ Προγραμμάτων Σπουδών και Εκπαιδευτικού Υλικού

Αναπληρώτρια Υπεύθυνη Πράξης

Άννα-Αικατερίνη Λυκούρη

Σύμβουλος Α΄ του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

«Με τη συγχρηματοδότηση της Ευρωπαϊκής Ένωσης»

και το Πρόγραμμα «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή»

Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων | ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ Υπουργείο Παιδείας, Θρησκευμάτων και Αθλητισμού | ΙΕΠ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ | Με τη συγχρηματοδότηση της Ευρωπαϊκής Ένωσης | ΕΣΠΑ 2021-2027 | Πρόγραμμα Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Γαβρίλης Κώστας
Μπαραλός Γιώργος
Τζούμας Μιχάλης
Οικονόμου Φώτης
Πούλου Μαρία Ελένη
Φιλιππάκης Μιχάλης

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

εκδόσεις πουκαμισάς

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΥΓΓΡΑΦΗΣ

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ

Γαβρίλης Κώστας
Επιτ. Σχ. Σύμβουλος Μαθηματικών

Μπαραλός Γιώργος
Επιτ. Σχ. Σύμβουλος Μαθηματικών

Τζούμας Μιχάλης
Επιτ. Σχ. Σύμβουλος Μαθηματικών

Οικονόμου Φώτης
Σύμβουλος Εκπαίδευσης Μαθηματικών

Πούλου Μαρία Ελένη
Επίκουρη Καθηγήτρια Πανεπιστημίου Δυτ. Αττικής

Φιλιππάκης Μιχάλης
Καθηγητής Πανεπιστημίου Πειραιά - ΠΑΠΕΙ

ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ **Μπαραλός Γιώργος**

ΣΕΛΙΔΟΠΟΙΗΣΗ
ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΕΞΩΦΥΛΛΟΥ **Δημιουργικό Τμήμα Εκδόσεων Πουκαμισάς**

ΤΥΠΟΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ **Τμήμα Επιμέλειας Εκδόσεων Πουκαμισάς**

Περιεχόμενα

Ταυτότητα του Βιβλίου

Το βιβλίο αυτό αποτελεί υλοποίηση των νέων Προγραμμάτων Σπουδών (ΠΣ) για τα Μαθηματικά της Α΄ τάξης Γυμνασίου και κατά τη συγγραφή του λάβαμε υπόψη μας όλες τις σχετικές οδηγίες του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (ΙΕΠ).

Στο βιβλίο αναπτύσσονται κυρίως έργα που συναντούν τις εμπειρίες των μαθητών, ώστε να εμπλέκονται δημιουργικά στην αναζήτηση ιδιοτήτων και σχέσεων, στη δημιουργία διασυνδέσεων καθώς και σε δράσεις διερεύνησης, πειραματισμού και αναστοχασμού σε συνδυασμό με το αντίστοιχο θεωρητικό πλαίσιο.

Για τον σκοπό αυτό παραθέτουμε εισαγωγικές διερευνήσεις σε κάθε ενότητα, οι οποίες χρησιμεύουν ως προκαταβολικοί οργανωτές, διευκολύνουν τον διδακτικό μετασχηματισμό και υποβοηθούνται από πολλές ψηφιακές εφαρμογές και ψηφιακά δομήματα.

Καινοτόμα στοιχεία του βιβλίου είναι:

1. Η έμφαση στην ενεργό εμπλοκή των μαθητών μέσα από ένα μεγάλο πλήθος διερευνήσεων οι οποίες συνδέουν τις υπάρχουσες με τις νέες γνώσεις.
2. Οι ψηφιακές δραστηριότητες οι οποίες παρέχουν ευκαιρίες διερεύνησης, αξιολόγησης, εξάσκησης και διεύρυνσης των νέων γνώσεων, κυρίως με τη χρήση του ελεύθερου λογισμικού GeoGebra το οποίο είναι ιδιαίτερα εύχρηστο από διδάσκοντες/διδάσκουσες και μαθητές/τριες.
3. Οι πολλές και στοχευμένες εφαρμογές που παρέχουν παραδείγματα επίλυσης ασκήσεων και προβλημάτων περιγράφοντας αναλυτικά τις σχετικές διαδικασίες για την επιτυχή αντιμετώπιση νέων προβλημάτων.
4. Η ποικιλία των προβλημάτων ρεαλιστικού πλαισίου σε συνδυασμό με την εισαγωγή στον κύκλο της μοντελοποίησης.
5. Η παράθεση έργων αυτοαξιολόγησης, ψηφιακών κουίζ, ιστορικών αναφορών με σχετικές εργασίες επαναληπτικών ασκήσεων καθώς και επιλεγμένων προβλημάτων με προεκτάσεις.

Ειδικότερα, η υλοποίηση των ΠΣ ως προς τους βασικούς άξονες, περιεχόμενο, μάθηση και διδασκαλία, δομή και οργάνωση, συμπληρωματικό υλικό, διαρθρώνεται ως εξής:

Περιεχόμενο

Για την επίτευξη των Προσδοκώμενων Μαθησιακών Αποτελεσμάτων (ΠΜΑ) υιοθετήθηκε η σύγχρονη αντίληψη ότι στην τάξη των Μαθηματικών, η μάθηση και η διδασκαλία εξελίσσονται τόσο σε ατομικό, όσο και σε συλλογικό επίπεδο, μέσα σε διερευνητικά περιβάλλοντα μάθησης τα οποία δίνουν τη δυνατότητα δημιουργίας συνδέσεων της γνώσης και των περιεχομένων των Μαθηματικών με την εφαρμογή των εννοιών και τις διαδικασίες τους.

Τα ΠΜΑ παρατίθενται αναλυτικά σε κάθε διδακτική ενότητα προσδιορίζοντας τους επιμέρους στόχους που πρέπει να επιτευχθούν σε αντιστοίχιση με τα επιμέρους μαθηματικά περιεχόμενα. Για την αξιολόγηση της επίτευξης των ΠΜΑ παραθέτουμε:

Α. Στο τέλος κάθε ενότητας: Ερωτήσεις αυτοαξιολόγησης, Ερωτήσεις κατανόησης, Ασκήσεις και προβλήματα συνδεδεμένα με εμπειρίες των μαθητών/τριών.
Β. Στο τέλος κάθε κεφαλαίου: Ανακεφαλαίωση, Επαναληπτικές ασκήσεις, προβλήματα καθώς και Συνθετικές εργασίες επέκτασης και διεύρυνσης των γνώσεων.
Γ. Στο τέλος του βιβλίου: Απαντήσεις και υποδείξεις των προτεινόμενων ασκήσεων.

Οι διδακτικές ενότητες και η πρότασή μας για τη σειρά διαχείρισής τους αποτυπώνονται στην ενότητα των περιεχομένων.

Μάθηση και Διδασκαλία

Ως βασική διδακτική αρχή υιοθετήθηκε η μάθηση μέσω της καθοδηγούμενης ανακάλυψης, η οποία έχει ως συνέπεια τη δημιουργία και παράθεση έργων εμπλοκής των μαθητών/τριών, τα οποία λαμβάνουν υπόψη τους τη διεύρυνση της γνωστικής τους δυνατότητας με την παροχή βοήθειας (ζώνη επικείμενης ανάπτυξης).

Κατά τη συγγραφή λάβαμε υπόψη μας βασικά συμπεράσματα της διδακτικής των Μαθηματικών καθώς και των Παιδαγωγικών όπως:

- Τη μάθηση μέσα από τη διερεύνηση και ανακάλυψη των νέων ιδεών με την ενεργό συμμετοχή των μαθητών.
- Τη διαπίστωση ότι η μάθηση και η διδασκαλία εξελίσσονται ταυτόχρονα, τόσο σε ατομικό όσο και σε συλλογικό επίπεδο.
- Την ένταξη πλούσιων έργων μάθησης και ρεαλιστικών προβλημάτων που υπηρετούν μεγάλες ιδέες των Μαθηματικών και υποστηρίζουν συνεργατικές-συμμετοχικές διαδικασίες των μαθητών/τριών, αναπτύσσοντας τη μαθηματική σκέψη και τη συγκρότηση των μαθηματικών νοημάτων.

- Την υποστήριξη της γνωστικής-ατομικής και της κοινωνικοπολιτισμικής συμμετοχικής προσέγγισης στη μάθηση των Μαθηματικών, τις οποίες θεωρούμε ως συμπληρωματικές και σε συνεχή αλληλεπίδραση.
- Την υποστήριξη διδακτικών στρατηγικών συμπερίληψης και διαφοροποίησης, παραθέτοντας διαφοροποιημένα έργα με ποικίλα πλαίσια αναφοράς.
- Τον καθοριστικό και καίριας σημασίας ρόλο του/της Εκπαιδευτικού για τον μετασχηματισμό της διδακτέας ύλης σε διδάξιμη, στο εκάστοτε πλαίσιο αναφοράς.

Δομή και Οργάνωση

Η διδακτέα ύλη των ενοτήτων επιμερίζεται σε κεφάλαια και αρθρώνεται σε υποενότητες, καθεμία από τις οποίες μπορεί να διδαχθεί σε 1-2 διδακτικές ώρες.

Κάθε υποενότητα περιέχει:

- Διατύπωση μαθησιακών στόχων (ΠΜΑ)
- Διερευνήσεις με στόχο την ανάκληση πρότερων γνώσεων και την αναγνώριση της ανάγκης διεύρυνσής τους για την επίλυση νέων προβλημάτων.
- Ψηφιακά δομήματα και χειραπτικά μέσα τα οποία ενθαρρύνουν την εμπλοκή των μαθητών/τριών και βοηθούν τη διερεύνηση.
- Ανάλυση του μαθηματικού περιεχομένου.
- Εφαρμογές του μαθηματικού περιεχομένου.
- Ερωτήσεις κατανόησης και αυτοαξιολόγησης.
- Ασκήσεις και προβλήματα για την αξιολόγηση της επίτευξης των μαθησιακών στόχων.

Η ανάπτυξη της ύλης πλαισιώνεται με:

- Συμπληρωματικό υλικό που αναπτύσσεται παράλληλα ως ψηφιακό, με τη μορφή γραμμωτού κώδικα και είναι διαθέσιμο μέσω διαδικτύου.
- Ανακεφαλαίωση - Επανάληψη σε κάθε κεφάλαιο με συνθετικές εργασίες.
- Επαναληπτικές ασκήσεις και προβλήματα.

Συμπληρωματικό υλικό

Το συμπληρωματικό υλικό περιλαμβάνει:

- Ψηφιακά δομήματα τα οποία δίνουν τη δυνατότητα για ποικίλες επιπλέον διερευνήσεις, δημιουργία εικασιών, εξάσκηση και αξιολόγηση επίτευξης γνωστικών στόχων. Αναπτύσσονται παράλληλα με το μαθηματικό περιεχόμενο και μπορούν να χρησιμοποιηθούν επιλεκτικά από τους διδάσκοντες και από τους μαθητές και τις μαθήτριες.
- Ιστορικά σημειώματα τα οποία συνδυάζονται με εργασίες που αποσκοπούν στην ανάδειξη της συνοχής και της διαχρονικής εξέλιξης των μαθηματικών εννοιών.
- Ευκαιρίες ενασχόλησης με χρήσιμα λογισμικά, όπως το Geogebra και το Excel.
- Ασκήσεις αξιολόγησης για περισσότερη άσκηση και εμβάθυνση στις σχετικές έννοιες.

Πιστεύουμε ότι κανένα έργο δεν μπορεί να υλοποιηθεί αποτελεσματικά χωρίς την ανεκτίμητη βοήθεια των Συνάδελφων Εκπαιδευτικών της τάξης, οι οποίοι είμαστε βέβαιοι ότι θα ζωντανέψουν τις ιδέες που εμπεριέχονται στο βιβλίο αυτό.

Προσπαθήσαμε για το καλύτερο αλλά αυτό δεν μας απαλλάσσει από όποια ενδεχόμενη αστοχία, για την οποία αναλαμβάνουμε την αποκλειστική ευθύνη. Ευχαριστούμε εκ των προτέρων όποιον/α επικοινωνήσει μαζί μας με προτάσεις για τη βελτίωση του βιβλίου.

Οι Συγγραφείς

Διδακτική διαχείριση και μαθηματική δραστηριότητα.

Πλοήγηση στο συμπληρωματικό υλικό. Διασύνδεση έργων με ΠΣ.

Φυσικοί Αριθμοί

Κεφάλαιο

1

Εισαγωγή

Όταν οι άνθρωποι άρχισαν να ζουν σε ομάδες προέκυψε η ανάγκη να μπορούν να μετράνε τα μέλη της ομάδας τους, τα υπάρχοντά τους κ.ά. Αρχικά η καταμέτρηση, όπως υποστηρίζεται από ανθρωπολόγους, γινόταν με αντιστοίχιση ένα προς ένα, π.χ. κάθε πρόβατο αντιστοιχούσε σε ένα δάχτυλο ή σε κάποιο βότσαλο κ.λπ. Για την καταγραφή χρησιμοποιήθηκαν διάφοροι τρόποι, όπως χαρακιές σε πέτρα ή ξύλο, κόμποι σε σχοινί και άλλα. Πολύ αργότερα, και όταν πλέον εξελίχθηκε η γραφή, επινοήθηκαν σύμβολα και τρόποι για να εκφραστούν οι αριθμοί. Επειδή οι αριθμοί αυτοί είχαν σχέση με φυσικά αντικείμενα ονομάστηκαν «Φυσικοί αριθμοί».

1.1 ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ – ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ – ΔΥΝΑΜΕΙΣ

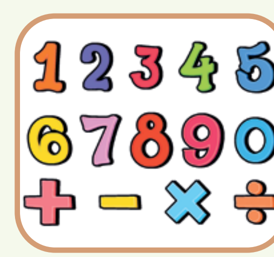
Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

- Να προσδιορίζουν το σύνολο των φυσικών αριθμών 0, 1, 2, 3, ...
- Να προσδιορίζουν τους άρτιους και περιττούς φυσικούς αριθμούς.
- Να διατυπώνουν και να χρησιμοποιούν τον ορισμό των δυνάμεων με βάση φυσικό και εκθέτη φυσικό ($\nu > 0$) σε υπολογισμούς.

Διερεύνηση 1

Με τα ψηφία 0, 3, 5, 8:

1. Να σχηματίσετε όλους τους τριψήφιους φυσικούς αριθμούς που έχουν για μεσαίο ψηφίο το 0 και σε κάθε αριθμό κάθε ψηφίο που επιλέγετε να περιέχεται μόνο μία φορά.
2. Ποιος είναι ο μικρότερος και ποιος ο μεγαλύτερος τριψήφιος φυσικός αριθμός από αυτούς;
3. Πόσους και ποιους τετραψήφιους μπορείτε να γράψετε με τα παραπάνω τέσσερα ψηφία;
4. Ποιος είναι ο μεγαλύτερος ζυγός και ποιος ο μεγαλύτερος μονός αριθμός από αυτούς τους τετραψήφιους;



Φυσικοί αριθμοί είναι οι αριθμοί: 0, 1, 2, 3, 4, ... , 23, ... , 532, **...**

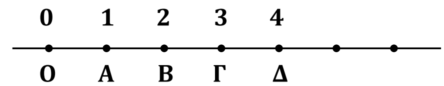
Ο πρώτος φυσικός αριθμός είναι το μηδέν.
Κάθε άλλος φυσικός αριθμός προκύπτει από τον προηγούμενο αν αυτός αυξηθεί κατά μία μονάδα. Ο μοναδικός φυσικός που δεν μπορεί να παραχθεί, με αυτόν τον τρόπο από κάποιον άλλο είναι το **μηδέν**.

Το μηδέν δεν έχει προηγούμενο αλλά μόνο επόμενο, που είναι ο φυσικός αριθμός 1. Έτσι, κάθε φυσικός έχει έναν επόμενο και έναν προηγούμενο, εκτός από το μηδέν που έχει μόνο επόμενο.

Όταν ένας φυσικός αριθμός είναι επόμενος κάποιου άλλου φυσικού λέμε ότι είναι μεγαλύτερος από αυτόν. Για παράδειγμα, ο 15 είναι μεγαλύτερος από τον 9 και συμβολίζουμε με $15 > 9$, αφού ο 15 έπεται του 9. Αντίθετα, όταν ένας αριθμός είναι προηγούμενος κάποιου άλλου, λέμε ότι είναι μικρότερος από αυτόν. Για παράδειγμα, ο 11 είναι μικρότερος από τον 14 και συμβολίζουμε με $11 < 14$, αφού ο 11 είναι προηγούμενος του 14.

Ο μικρότερος φυσικός αριθμός είναι το μηδέν, ενώ μεγαλύτερος δεν υπάρχει, αφού για όποιον φυσικό αριθμό σκεφτούμε, μπορούμε να βρούμε έναν τουλάχιστον επόμενο προσθέτοντας τη μονάδα.
Το σύνολο των φυσικών αριθμών το συμβολίζουμε με **N** (Αρχικό της λέξης Naturals: Φυσικοί).

Οι φυσικοί αριθμοί μπορούν πάντοτε να συγκριθούν και αυτή η δυνατότητα μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον επόμενο εποπτικό τρόπο αναπαράστασης αυτών. Σε μία ευθεία παίρνουμε αυθαίρετα ένα αρχικό σημείο, συνήθως το ονομάζουμε με το γράμμα Ο και σε αυτό αντιστοιχίζουμε το μηδέν.



Έπειτα, δεξιά του Ο, αυθαίρετα επιλέγουμε ένα άλλο σημείο Α και αντιστοιχίζουμε σε αυτό τον αριθμό 1. Στη συνέχεια, δεξιά του Α και με μονάδα μέτρησης το τμήμα ΟΑ τοποθετούμε τα σημεία Β, Γ, Δ κ.λπ., έτσι ώστε ΑΒ = ΟΑ, ΒΓ = ΟΑ, ΓΔ = ΟΑ κ.λπ. Στα σημεία που σημειώσαμε αντιστοιχίζουμε τους φυσικούς 2, 3, 4 κ.λπ. Δημιουργούμε με αυτόν τον τρόπο τη γνωστή μας **αριθμογραμμή ή άξονα των φυσικών αριθμών**.

Πρόσθεση

Οι συνενώσεις ή οι διαφοροποιήσεις των πληθυσμών διαφορετικών ομάδων αντικειμένων (κοπάδια, αγροί κ.λπ.) ή και ανθρώπων δημιούργησαν την ανάγκη της πρόσθεσης ή/και της αφαίρεσης φυσικών αριθμών.

Πρόσθεση ονομάζουμε την πράξη με την οποία, όταν δίνονται δύο φυσικοί αριθμοί **α** και **β** που ονομάζονται **προσθετέοι**, βρίσκουμε έναν τρίτο φυσικό αριθμό **γ** που είναι το **άθροισμά** τους και γράφουμε συμβολικά $α + β = γ$.

Για να διερευνήσετε την πράξη της πρόσθεσης και να εξασκηθείτε με επιπλέον υλικό, ανοίξτε τις ψηφιακές εφαρμογές:

Το άθροισμα του Euler

Το άθροισμα των περιττών φυσικών αριθμών

Το άθροισμα των άρτιων φυσικών αριθμών

Αφαίρεση

Αφαίρεση ονομάζουμε την πράξη με την οποία, όταν δοθούν δύο αριθμοί, **ο μειωτέος** (Μ) και **ο αφαιρετέος** (Α) βρίσκουμε έναν τρίτο, τη **διαφορά** (Δ), έτσι ώστε όταν προσθέσουμε τη διαφορά στον αφαιρετέο βρίσκουμε τον μειωτέο. Συμβολικά γράφουμε:

$$\mathbf{Μ – Α = Δ \text{ ή } Α + Δ = Μ}$$

Από τις ιδιότητες της πρόσθεσης προκύπτει ότι για τους διαφορετικούς φυσικούς αριθμούς, ο μειωτέος είναι πάντοτε μεγαλύτερος ή ίσος από τον αφαιρετέο και από τη διαφορά τους. Συμβολικά γράφουμε:

$$\mathbf{Μ \geq Α} \text{ και } \mathbf{Μ \geq Δ}$$

Η χρήση γραμμάτων αντί για αριθμούς στα Μαθηματικά είναι συχνή. Συνήθως χρησιμοποιούνται για να γενικεύσουμε ένα αποτέλεσμα που ισχύει, για να παραστήσουμε έναν άγνωστο σε μια εξίσωση, ακόμη και μια σταθερά σε έναν νόμο.

Για να διερευνήσετε την πράξη της αφαίρεσης και να εξασκηθείτε με επιπλέον υλικό, ανοίξτε την ψηφιακή εφαρμογή:

Τι θα συμβεί αν...

Πολλαπλασιασμός

Πολλαπλασιασμό δύο φυσικών αριθμών α, β ονομάζουμε το άθροισμα **α** αριθμών που ο καθένας είναι ίσος με **β.** Συμβολίζεται ως α × β, α · β, αβ όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης και διαβάζεται **«α φορές το β»**

$$\underbrace{\beta + \beta + \beta + \cdots + \beta}_{\alpha - \text{φορές}} = \alpha \times \beta \text{ ή } \alpha \cdot \beta \text{ ή } \alpha\beta$$

Ο αριθμός **α** λέγεται **πολλαπλασιαστής** και μας λέει πόσες φορές πρέπει να πολλαπλασιαστεί ο αριθμός **β** που λέγεται **πολλαπλασιαστέος**.

Το αποτέλεσμα της πράξης του πολλαπλασιασμού καλείται **γινόμενο**.
Οι δύο αριθμοί **α** και **β** καλούνται παράγοντες του **γινομένου.**

Όταν ένας αριθμός **γ** μπορεί να γραφεί ως γινόμενο δύο άλλων αριθμών **α** και **β**, δηλαδή, γ = α · β, λέμε ότι ο **γ** είναι πολλαπλάσιο του **α** ή πολλαπλάσιο του **β**.

Για παράδειγμα, επειδή 35 = 5 · 7 λέμε ότι το 35 είναι πολλαπλάσιο του 5 ή το 35 είναι πολλαπλάσιο του 7.

Τα πολλαπλάσια ενός αριθμού τα βρίσκουμε αν τον πολλαπλασιάσουμε με τους φυσικούς. Γενικά τα πολλαπλάσια ενός φυσικού αριθμού **α** είναι οι αριθμοί: **0, α, 2α, 3α, 4α, ..., λα, ...** (λ φυσικός αριθμός).

Παράδειγμα: Τα πολλαπλάσια του 7 είναι οι αριθμοί: 0, 7, 14, 21, 28, 35, ...

Σημείωση (Θυμάμαι):

- Για να πολλαπλασιάσω έναν φυσικό αριθμό με το 10, 100, 1000 κ.λπ. αρκεί να προσθέσω στο τέλος του αριθμού ένα, δύο, τρία κ.λπ. μηδενικά.

Ιδιότητες των πράξεων		
	Αντιμεταθετική	**Προσεταιριστική**
Πρόσθεση:	α + β = β + α	α + (β + γ) = (α + β) + γ
Πολλαπλασιασμός:	α · β = β · α	α · (β · γ) = (α · β) · γ
Επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση: α · (β + γ) = α · β + α · γ		

- Οι φυσικοί αριθμοί χωρίζονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες.
Τους άρτιους ή ζυγούς και τους περιττούς ή μονούς.
Δηλαδή, άρτιοι είναι οι αριθμοί: 0, 2, 4, 6,... και περιττοί οι αριθμοί: 1, 3, 5, 7, 9,...

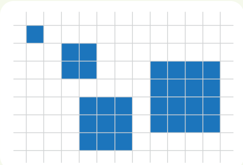
- **Άρτιοι** αριθμοί είναι όσοι φυσικοί είναι πολλαπλάσια του 2 και συμβολίζονται με **2κ**, όπου κ φυσικός αριθμός.
- **Περιττοί** αριθμοί είναι όσοι δεν είναι άρτιοι και συμβολίζονται με 2κ + 1, όπου κ φυσικός αριθμός.

Παρατήρηση:

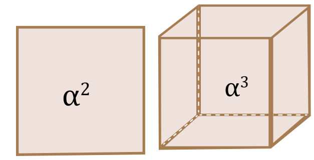
- Για κάθε περιττό, ο επόμενος και ο προηγούμενός του είναι άρτιος.
- Για κάθε άρτιο, ο προηγούμενός του και ο επόμενός του είναι περιττοί, εκτός από το μηδέν που έχει μόνο επόμενο, τον περιττό αριθμό 1.

Διερεύνηση 2

Στη διπλανή εικόνα, μικρά μπλε τετράγωνα τοποθετούνται πλάι-πλάι σχηματίζοντας καινούρια τετράγωνα.
Να βρείτε και να καταγράψετε το μοτίβο που ακολουθούν, δηλαδή να βρείτε τον αριθμό των τετραγώνων που χρησιμοποιούμε κάθε φορά και τη σχέση που έχουν οι αριθμοί που καταγράψατε.



Δύναμη



Το γινόμενο $α \cdot α$ με **$α \neq 0$** το συμβολίζουμε με $α^2$ και το διαβάζουμε «α στη δευτέρα» ή «α στο τετράγωνο» επειδή εκφράζει το εμβαδόν του τετραγώνου πλευράς α.
Το γινόμενο $α \cdot α \cdot α$ με **$α \neq 0$** το συμβολίζουμε με $α^3$ και το διαβάζουμε «α στην τρίτη» ή «α στον κύβο» επειδή εκφράζει τον όγκο του κύβου ακμής α.

Γενικά

Νιοστή δύναμη ενός φυσικού αριθμού α με εκθέτη φυσικό $ν > 1$ ονομάζουμε το γινόμενο **ν** παραγόντων που ο καθένας είναι ίσος με **α**. Συμβολίζεται με **$α^ν$** και διαβάζουμε «**α στη ν**»: $α^ν = \underbrace{α \cdot α \cdot α \cdots}_{ν \text{ φορές}}$.

Ο αριθμός **α** λέγεται **βάση** της δύναμης και ο αριθμός **ν** λέγεται **εκθέτης** της.
Ο εκθέτης μας λέει πόσες φορές πρέπει να πολλαπλασιαστεί η βάση με τον εαυτό της.
Έτσι, για παράδειγμα, το **$5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$** διαβάζεται **«πέντε στην τέταρτη»** ή αλλιώς **«τέταρτη δύναμη του 5»**.

Ειδικά:

- Όταν **ν=1**, τότε $α^1 = α$. Παράδειγμα. $2^1 = 2$, $15^1 = 15$
- Όταν α=0, τότε για κάθε φυσικό αριθμό $ν > 0$, $0^ν = 0$

Δυνάμεις του 10.

$$10^1 = 1\underbrace{0}_{1},\ 10^2 = 10 \cdot 10 = 1\underbrace{00}_{2},\ 10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\underbrace{000}_{3} \ldots\ 10^ν = \underbrace{10 \cdot 10 \cdots 10}_{ν} = 1\underbrace{00\cdots0}_{ν}$$

ΠΡΟΤΕΡΑΙΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ
Δυνάμεις ⟶ Πολλαπλασιασμοί ⟶ Προσθέσεις και αφαιρέσεις.
- Οι πράξεις γίνονται από τα αριστερά προς τα δεξιά με τη σειρά που εμφανίζονται στις παραστάσεις.
- Προηγούνται οι πράξεις μέσα στις παρενθέσεις.

Παραδείγματα:

$$4 \cdot 3^2 - 5 \cdot (3 \cdot 2^3 - 5 \cdot 2^2) = 4 \cdot 3^2 - 5 \cdot (3 \cdot 8 - 5 \cdot 4) = 4 \cdot 3^2 - 5 \cdot (24 - 20) = 4 \cdot 3^2 - 5 \cdot 4 = 4 \cdot 9 - 5 \cdot 4 = 36 - 20 = 16$$

Αυτοαξιολόγηση

Να τοποθετήσετε δίπλα στις στήλες ΣΩΣΤΟ, ΛΑΘΟΣ ένα ✓ ανάλογα με το αν η πρόταση είναι σωστή ή λανθασμένη ή να κάνετε ό,τι λέει η πρόταση.

	Σωστό	**Λάθος**
1. Κάθε άρτιος αριθμός βρίσκεται ανάμεσα σε δύο περιττούς.	☐	☐
2. Κάθε μονός αριθμός βρίσκεται ανάμεσα σε δύο ζυγούς.	☐	☐
3. Η έκφραση «5 στο τετράγωνο» χρησιμοποιείται μόνο για να εκφράσουμε το εμβαδόν του τετραγώνου.	☐	☐
4. Η ισότητα **$α^1 = α$** είναι αληθής.	☐	☐
5. Η σειρά των πράξεων σε μια αριθμητική παράσταση μπορεί να αλλάξει με τη χρήση παρενθέσεων.	☐	☐

6. Να συμπληρώσετε την ισότητα ώστε να είναι αληθής: $\underbrace{α \cdot α \cdots α}_{12} = α^{\square}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να γράψετε με μορφή δύναμης τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

β) $5 \cdot 5 \cdot 5$

γ) $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2}_{11}$

δ) $\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha$

2 Να γράψετε σαν δύναμη με εκθέτη μεγαλύτερο του 1 τους παρακάτω αριθμούς με όσους περισσότερους τρόπους μπορείτε:

α) 16

β) 27

γ) 64

δ) 125

3 Να συμπληρώσετε τα κουτάκια:

α) $2^3 \cdot 2^4 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{\square} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\square} = 2^{\square}$

β) $3^5 \cdot 3^3 = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{\square} \cdot \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3}_{\square} = 3^{\square}$

γ) $5^4 \cdot 5^2 = 5^{\square}$

4 Να κάνετε τις πράξεις:

α) $2 \cdot 3^2 + 1^3 \cdot 2^2 \cdot 3 - 2^3 \cdot 3 + 3$

β) $3 \cdot 5^2 - 3^2 \cdot (2^3 \cdot 3^2 - 8^2) + 3 \cdot 5$

5 Η Μυρτώ έχει σχεδιάσει δύο τετράγωνα με περίμετρο 24 και 16 μέτρα αντίστοιχα. Ισχυρίζεται ότι το άθροισμα των εμβαδών τους θα ήταν το ίδιο με το εμβαδόν ενός τετραγώνου που θα είχε περίμετρο το άθροισμα των περιμέτρων τους. Έχει δίκιο; Γιατί;

6 Να βρείτε έναν φυσικό αριθμό κ για τον οποίο ισχύει $3^\kappa - 2^\kappa = 19$

1.2 ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΔΙΑΙΡΕΣΗ

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

- Να αναγνωρίζουν και να εκφράζουν συμβολικά την ταυτότητα της Ευκλείδειας Διαίρεσης και να τη χρησιμοποιούν στην επίλυση προβλημάτων.
- Να εφαρμόζουν την έννοια της διαιρετότητας για να λύνουν προβλήματα.

Διερεύνηση 1

1. Τι ώρα δείχνει το διπλανό ρολόι;
2. Τι ώρα θα δείχνει μετά από 5 ώρες;
3. Τι ώρα θα δείχνει μετά από 13 ώρες;
4. Τι ώρα θα δείχνει μετά από 27 ώρες;
5. Τι ώρα θα δείχνει μετά από 342 ώρες; Να περιγράψετε αναλυτικά τον τρόπο που εργαστήκατε.

Για να βοηθηθείτε συμπληρώστε τον πίνακα.

Μετά από	1	2	3	...	12	13	...	24	25	...	36	37	
Δείχνει				...			...			...			

Έχουμε δει ότι ένας φυσικός αριθμός **α** λέγεται πολλαπλάσιο ενός άλλου φυσικού αριθμού **β** όταν μπορεί να γραφτεί ως γινόμενο του αριθμού **β** με κάποιον φυσικό αριθμό **κ**, δηλαδή:

$$\boldsymbol{\alpha = \kappa \cdot \beta}$$

Σε αυτή την περίπτωση χρησιμοποιούμε με το ίδιο νόημα τις ακόλουθες εκφράσεις:

- Ο β είναι παράγοντας του α
- Ο β είναι διαιρέτης του α
- Ο β διαιρεί τον α
- Ο α διαιρείται με τον β

Ιδιότητες

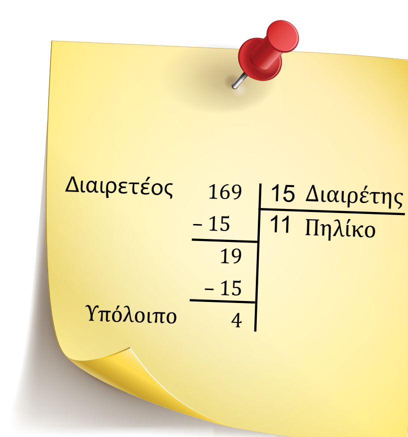
• Από την προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού προκύπτει αμέσως ότι: **Όταν ο δ διαιρεί τον α τότε διαιρεί και τα πολλαπλάσιά του.**	Γιατί: $\alpha = \kappa \cdot \beta$, οπότε για κάθε πολλαπλάσιο του α έχουμε $\lambda \cdot \alpha = \lambda \cdot (\kappa \cdot \delta) = (\lambda \cdot \kappa) \cdot \delta$
• Από την επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση προκύπτει επίσης ότι: **Όταν ο δ διαιρεί τον α και τον β τότε διαιρεί και το άθροισμά τους.**	Γιατί: $\alpha = \kappa \cdot \delta$ και $\beta = \lambda \cdot \delta$, οπότε $\alpha + \beta = \kappa \cdot \delta + \lambda \cdot \delta = (\kappa + \lambda) \cdot \delta$
• Από την επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την αφαίρεση προκύπτει ότι: **Όταν ο δ διαιρεί τον α και τον β (α > β) τότε διαιρεί και τη διαφορά τους.**	Γιατί: $\alpha = \kappa \cdot \delta$ και $\beta = \lambda \cdot \delta$, οπότε $\alpha - \beta = \kappa \cdot \delta - \lambda \cdot \delta = (\kappa - \lambda) \cdot \delta$

Γενικότερα, αν Δ, δ δύο φυσικοί αριθμοί με $\delta \neq 0$, τότε υπάρχουν δύο άλλοι φυσικοί αριθμοί **π** και **υ**, τέτοιοι ώστε:

$$\Delta = \pi \cdot \delta + \upsilon \;\; \text{με } 0 \leq \upsilon < \delta \quad (1)$$

Η ισότητα (1) ονομάζεται **ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης.**

Ο αριθμός **Δ** λέγεται **διαιρετέος,** ο αριθμός **δ** λέγεται **διαιρέτης**, ο αριθμός **π** λέγεται **πηλίκο** και ο αριθμός **υ** λέγεται **υπόλοιπο.**



Όταν το υπόλοιπο είναι μηδέν, τότε η διαίρεση λέγεται **τέλεια.** Όταν το υπόλοιπο είναι διαφορετικό από το μηδέν λέγεται **ατελής.**

Τα υπόλοιπα της διαίρεσης ενός αριθμού α με έναν αριθμό β είναι:
0, 1, 2, 3, ... , (β-1).

Παραδείγματα:

- Η διαίρεση του 24 με το 6 είναι τέλεια, αφού $24 = 6 \cdot 4$ με $\upsilon = 0$, ενώ με το 9 είναι ατελής, αφού $24 = 2 \cdot 9 + 6$.
- Τα δυνατά υπόλοιπα της Ευκλείδειας διαίρεσης ενός αριθμού με το 9 είναι οι φυσικοί αριθμοί που είναι μικρότεροι από το 9, δηλαδή οι αριθμοί 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Σημείωση:

Το γράμμα «π» που χρησιμοποιούμε ως πηλίκο στην ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης δεν πρέπει να συγχέεται με τον άρρητο π≈3,14. Όταν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης μπορεί να συμβολίζεται με ένα άλλο γράμμα.

Για να διερευνήσετε την έννοια των πολλαπλασίων, των διαιρετών και την ταυτότητα της διαίρεσης, εργαστείτε με την εφαρμογή:

Παρέλαση Μαθητών

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να βρείτε σε όποια από τις παρακάτω ισότητες είναι ταυτότητα διαίρεσης, τον Διαιρετέο (Δ), τον διαιρέτη (δ), το πηλίκο (π) και το υπόλοιπο (υ).

α) $18 = 2 \cdot 4 + 10$ **β)** $29 = 6 \cdot 4 + 5$ **γ)** $22 = 4 \cdot 5 + 2$

Απάντηση

α) Δεν είναι ταυτότητα διαίρεσης του 18 με το 2 ούτε του 18 με το 4, αφού $10 > 2$ και $10 > 4$.

β) Είναι ταυτότητα διαίρεσης του $Δ = 29$ με το $δ = 6$ η οποία έχει πηλίκο $π = 4$ και υπόλοιπο $υ = 5 < 6$.
Δεν είναι ταυτότητα διαίρεσης με $Δ = 29$ και $δ = 4$ γιατί $5 > 4$.

γ) Είναι ταυτότητα διαίρεσης με $Δ = 22$, $δ = 4$, $π = 5$ και $υ = 2 < 4$. Επίσης με $Δ = 22$, $δ = 5$, $π = 4$ και $υ = 2 < 5$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Ο αριθμός 7 διαιρεί τους αριθμούς 35 και 49. Να δείξετε ότι ο 7 διαιρεί και το υπόλοιπο της διαίρεσης του 49 με τον 35.

Απάντηση

Είναι $49 = 1 \cdot 35 + 14$ και επειδή $14 = 2 \cdot 7$, ο 7 διαιρεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του 49 με τον 35.

Σημείωση:
Το γεγονός αυτό ισχύει γενικότερα, δηλαδή «Αν ένας αριθμός δ διαιρεί δυο αριθμούς α και β με α >β, τότε διαιρεί και το υπόλοιπο της διαίρεσής τους».

Αυτοαξιολόγηση

Να τοποθετήσετε στις στήλες ΣΩΣΤΟ, ΛΑΘΟΣ ένα ✓ ανάλογα με το αν η πρόταση είναι σωστή ή λανθασμένη.	Σωστό	Λάθος
1. Όταν λέμε ότι ο «α είναι διαιρέτης του β» είναι διαφορετικό από το να λέμε ότι ο «α είναι διαιρέτης στην Ευκλείδεια διαίρεση».	☐	☐
2. Το πηλίκο είναι πάντα μικρότερο από τον διαιρέτη.	☐	☐
3. Το υπόλοιπο είναι πάντα μικρότερο από τον διαιρέτη.	☐	☐
4. Όταν ο δ διαιρεί το α, τότε διαιρεί και τα πολλαπλάσια του α.	☐	☐
5. Όταν ο δ διαιρεί τον α και τον β, τότε διαιρεί και το άθροισμά τους και τη διαφορά τους.	☐	☐
6. Οι φυσικοί αριθμοί χωρίζονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες με βάση το υπόλοιπο που αφήνουν, όταν διαιρεθούν με το 2.	☐	☐
7. Οι αριθμοί που διαιρούνται με το 6 διαιρούνται και με το 2 και με το 3.	☐	☐

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να βρείτε και να αιτιολογήσετε ποιες από τις παρακάτω ισότητες είναι Ευκλείδειες διαιρέσεις.

α) $63 = 5 \cdot 12 + 3$ **ε)** $450 = 27 \cdot 16 + 18$

β) $138 = 15 \cdot 8 + 18$ **στ)** $96 = 8 \cdot 11 + 8$

γ) $197 = 12 \cdot 15 + 17$ **ζ)** $96 = 7 \cdot 12 + 12$

δ) $67 = 5 \cdot 12 + 7$

2 Να αιτιολογήσετε ότι:

α) Το άθροισμα δύο άρτιων αριθμών είναι άρτιος.

β) Το άθροισμα δύο περιττών είναι άρτιος.

γ) Το άθροισμα ενός άρτιου και ενός περιττού είναι περιττός αριθμός.

3 Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο στις παρακάτω Ευκλείδειες διαιρέσεις.

α) 67:15 **β)** 128:8 **γ)** 198:15 **δ)** 237:17 **ε)** 450:25

4 Η Ισμήνη διάβασε ένα βιβλίο 290 σελίδων ως εξής: τις τρεις πρώτες μέρες διάβαζε από 19 σελίδες. Στη συνέχεια διάβαζε για κάποιες μέρες από 24 σελίδες, όμως δεν θυμάται την τελευταία μέρα πόσες σελίδες διάβασε για να τελειώσει το βιβλίο της.

α) Να τη βοηθήσετε να το βρει.

β) Σε πόσες μέρες συνολικά διάβασε το βιβλίο;

5 Να συμπληρώσετε τα ψηφία που λείπουν, ώστε οι διαιρέσεις να είναι σωστές.

```
 4□6 | 3□          □□□ | 27
–37  | 12         –□□  | 21
  86                □□
 –□4               –□□
  1□                  2
```

6 Ο Διαιρετέος (Δ) και ο διαιρέτης (δ) προσδιορίζουν ακριβώς το πηλίκο και το υπόλοιπο στην Ευκλείδεια διαίρεση. Συμβαίνει το ίδιο και με το πηλίκο (π) και το υπόλοιπο (υ), δηλαδή προσδιορίζουν ακριβώς τον Διαιρετέο και τον διαιρέτη; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

7 Να χωρίσετε τους αριθμούς από το 90 μέχρι το 120 σε κατηγορίες με βάση τα υπόλοιπά τους με το 5.

8 Σήμερα είναι 1η Μαρτίου και έχουμε Τετάρτη. Τι μέρα θα έχουμε την 1η Ιουλίου και στις 15 Αυγούστου;

9 Στο λεωφορείο οι δύο θέσεις πίσω από τον οδηγό έχουν τους αριθμούς 1 και 2 και οι δύο θέσεις πίσω από τον συνοδηγό τους αριθμούς 3 και το 4. Οι θέσεις με αριθμούς 23 και 26 πού βρίσκονται, πίσω από τον οδηγό ή πίσω από τον συνοδηγό;

1.3 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΑΣ

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

- Να εφαρμόζουν την έννοια της διαιρετότητας για να λύνουν προβλήματα.
- Να αναγνωρίζουν τον τρόπο λειτουργίας του αλγορίθμου του Ευκλείδη για την εύρεση του ΜΚΔ των φυσικών αριθμών.
- Να υπολογίζουν το ΕΚΠ και τον ΜΚΔ με ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

1.3.1 Κριτήρια διαιρετότητας

Διερεύνηση

Οι Ολυμπιακοί αγώνες διεξάγονταν στην Αρχαία Ολυμπία κάθε τέσσερα χρόνια από το 776 π.Χ., μέχρι το 393 μ.Χ. όταν ο αυτοκράτορας Θεοδόσιος απαγόρευσε τη διεξαγωγή τους. Στη σημερινή εποχή αναβίωσαν το 1896 και διεξάγονται από τότε κάθε 4 χρόνια. Οι πέντε πρώτοι Ολυμπιακοί αγώνες διεξήχθησαν το 1896 στην Αθήνα (Ελλάδα), το 1900 στο Παρίσι (Γαλλία), το 1904 στο Σεντ Λούις (ΗΠΑ), το 1908 στο Λονδίνο (Ηνωμένο Βασίλειο) και το 1912 στη Στοκχόλμη (Σουηδία). Περισσότερες πληροφορίες μπορείτε να βρείτε στην ιστοσελίδα https://el.wikipedia.org/wiki/Ολυμπιακοί_Αγώνες.
Να βρείτε τι κοινό έχουν οι χρονολογίες των πρώτων πέντε Ολυμπιακών αγώνων.
Να εξετάσετε αν τα έτη 2032, 2066, 2093 είναι έτη που θα γίνουν Ολυμπιακοί αγώνες.

Ήδη μάθαμε ότι ένας αριθμός:

- Διαιρεί τα πολλαπλάσιά του.
  Αλλιώς, ένας αριθμός διαιρείται από έναν άλλο όταν το υπόλοιπο της Ευκλείδειας διαίρεσής τους είναι μηδέν.
- Όταν διαιρεί δύο άλλους διαιρεί το άθροισμα και τη διαφορά τους (λόγω της επιμεριστικής ιδιότητας).

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω προτάσεις δημιουργήθηκαν κριτήρια για να βρίσκουμε εύκολα και γρήγορα πότε ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με κάποιον άλλον.

Κριτήρια διαιρετότητας

Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με τον	
2	όταν ο αριθμός είναι ζυγός
3	όταν το άθροισμα των ψηφίων διαιρείται με το 3
4	όταν ο φυσικός που σχηματίζουν τα 2 τελευταία ψηφία διαιρείται με το 4
5	όταν το τελευταίο ψηφίο του είναι 0 ή 5
6	όταν ο αριθμός είναι διαιρετέος κατά 2 και κατά 3
8	όταν ο φυσικός που σχηματίζουν τα 3 τελευταία ψηφία διαιρείται με το 8
9	όταν το άθροισμα των ψηφίων διαιρείται με το 9
10	όταν το ψηφίο των μονάδων είναι 0
25	όταν ο φυσικός που σχηματίζουν τα 2 τελευταία ψηφία διαιρείται με το 25

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Ο παππούς του Γιώργου είναι συνταξιούχος μαθηματικός. Ο μικρός Γιώργος συχνά ρωτά τον παππού του, όταν κάτι τον προβληματίζει. Τελευταία, με αφορμή τα κριτήρια της διαιρετότητας, ρώτησε τον παππού του:

– Παππού, μάθαμε ότι ένας αριθμός διαιρείται με το τέσσερα, όταν ο αριθμός που σχηματίζουν τα δύο τελευταία ψηφία του διαιρείται με το 4.
– Σωστά.
– Όμως μέχρι το 40 ξέρω τα πολλαπλάσια του 4 από την προπαίδεια. Για τους υπόλοιπους αριθμούς τι γίνεται;

Απάντηση

Ένας τρόπος είναι να μάθεις και τα υπόλοιπα πολλαπλάσια του 4 μέχρι το 100. Όμως μπορείς να βρεις κι άλλους, όπως ο ακόλουθος.

Για αριθμούς στους οποίους ο αριθμός που σχηματίζουν τα δύο τελευταία ψηφία τους είναι μεγαλύτερος από το 40, αφαιρούμε από αυτόν το 40 μία ή δύο φορές μέχρι να πάρουμε αριθμό μικρότερο από 40.
Στη συνέχεια εξετάζουμε αν το 4 διαιρεί τον αριθμό που προκύπτει (τη διαφορά). Αν αυτό συμβαίνει, τότε ο 4 διαιρεί τον αριθμό.

Για παράδειγμα, για να δούμε αν ο 4 διαιρεί το 3176 βρίσκουμε τη διαφορά 76 – 40 = 36 και αφού ο 4 διαιρεί το 36 διαιρεί και το 3176 γιατί:
3176 = 3136 + 40, οπότε αφού ο 4 διαιρεί το 40 και τον 3136 (κριτήριο 4), τότε ο 4 θα διαιρεί και το άθροισμά τους, δηλαδή το 3176.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Οι αριθμοί που διαιρούνται με το 9, διαιρούνται και με το 3. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

α) Να δώσετε ένα παράδειγμα.

β) Να βρείτε τον μεγαλύτερο διψήφιο που δεν διαιρείται με το 9, αλλά διαιρείται με το 3.

Απάντηση

α) Οι αριθμοί που διαιρούνται με το 9 είναι πολλαπλάσια του 9. Όμως το $9 = 3 \cdot 3$ είναι πολλαπλάσιο του 3, οπότε οι αριθμοί αυτοί θα είναι και πολλαπλάσια του 3. Για παράδειγμα, $234 = 9 \cdot 26 = 3 \cdot 3 \cdot 26$.
Το αντίστροφο δεν ισχύει. Για παράδειγμα, ο 12 διαιρείται με τον 3 αλλά δεν διαιρείται με τον 9.

β) Ο μεγαλύτερος διψήφιος που το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με τον 3 είναι ο 99.
Όμως αυτός διαιρείται με το 9. Ο αμέσως προηγούμενος διψήφιος που διαιρείται με το 3 είναι ο 96, αφού $9 + 6 = 15$. Αυτός όμως δεν διαιρείται με το 9, οπότε είναι ο μεγαλύτερος διψήφιος που δεν διαιρείται με το 9, αλλά διαιρείται με το 3.

Αυτοαξιολόγηση

Να τοποθετήσετε στις στήλες ΣΩΣΤΟ, ΛΑΘΟΣ ένα ✓ ανάλογα με το αν η πρόταση είναι σωστή ή λανθασμένη.	Σωστό	Λάθος
1. Με τα κριτήρια διαιρετότητας μπορώ να καταλάβω αμέσως αν ένας αριθμός διαιρείται με το 2, 3, 4, 5, 9, 10.	☐	☐
2. Με το 10 διαιρούνται οι αριθμοί που τελειώνουν σε μηδέν.	☐	☐
3. Με το 100 διαιρούνται όλοι οι αριθμοί που τελειώνουν σε μηδέν.	☐	☐
4. Οι άρτιοι διαιρούνται με το 2.	☐	☐
5. Όλοι οι αριθμοί που διαιρούνται με το 10, διαιρούνται και με το 2 και το 5.	☐	☐
6. Με το 3 ή 9 διαιρούνται οι αριθμοί που το άθροισμα των ψηφίων τους διαιρείται με το 3 ή το 9 αντίστοιχα.	☐	☐
7. Όλοι οι αριθμοί που διαιρούνται με το 3 διαιρούνται και με το 9.	☐	☐

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να βρείτε ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς, διαιρούνται με το 2, το 3, το 4, το 5, το 9 και το 10 και να βάλετε ένα τικ (✓) στο αντίστοιχο κουτάκι.

	1430	2928	9405	5720	6188	7980
2	✓					
3						
4						
5	✓					
9						
10	✓					

2 Ο Ηλίας γεννήθηκε τον αιώνα που ζούμε. Το έτος γέννησής του διαιρείται με το 3 αλλά δεν διαιρείται ούτε με το 9 ούτε με το 2. Ποια χρονιά μπορεί να γεννήθηκε;

3 Να συμπληρώσετε τα κενά με τα κατάλληλα ψηφία, ώστε ο αριθμός:
α) 52__ να μη διαιρείται με το 3
β) 61__ να μη διαιρείται με το 5
γ) 7__6 να μη διαιρείται με το 6
δ) 837__ να διαιρείται με το 4 και το 3
ε) 43__7__ να διαιρείται με το 9 και το 25

4 Ο αριθμός 8__7__ έχει το ψηφίο των εκατοντάδων διπλάσιο από το ψηφίο των μονάδων και διαιρείται με το 9. Ποιος αριθμός θα μπορούσε να είναι;

5 Για την παρέλαση της 28ης Οκτωβρίου, ο υπεύθυνος του δήμου είπε ότι ακόμη δεν έχει αποφασιστεί αν θα παρελάσουν σε τετράδες ή πεντάδες. Το σχολείο της Δάφνης έχει 133 μαθητές και μαθήτριες. Ποιος είναι ο μεγαλύτερος και ποιος ο μικρότερος αριθμός παιδιών που θα πρέπει να έχει στη διάθεσή του ο γυμναστής του σχολείου για την παρέλαση, ώστε να μην έχει πρόβλημα όσον αφορά την παράταξή τους;

6 Ο παππούς του Γιώργου του είπε ότι «ένας αριθμός διαιρείται με το 8 όταν τα τρία τελευταία ψηφία του διαιρούνται με αυτό». Επαληθεύστε το με τους αριθμούς: 2536, 3536, 4536, 5536, 6536, 7536. Δικαιολογήστε το κριτήριο διαιρετότητας με το 8.

7 Να δικαιολογήσετε γιατί οι αριθμοί που τα δύο τελευταία ψηφία διαιρούνται με το 25, διαιρούνται με το 25.

8 Να εξηγήσετε γιατί ένας διψήφιος αριθμός που το ψηφίο των μονάδων του είναι διπλάσιο από το ψηφίο των δεκάδων του διαιρείται με τον 3.

9 Να δικαιολογήσετε γιατί ένας τριψήφιος φυσικός με τρία ίδια ψηφία διαιρείται με το 3.

1.3.2 Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ)

Διερεύνηση 1

Ο Τάκης παίζει ποδόσφαιρο κάθε 3 ημέρες, ο Αχμέτ κάθε 4 ημέρες και ο Πάνος κάθε 6 ημέρες. Αν σήμερα παίζουν ποδόσφαιρο και οι τρεις μαζί, πότε ξανά θα παίξουν ποδόσφαιρο μαζί;

Ημέρες		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Τάκης	x			x																		
Αχμέτ	x				x																	
Πάνος	x						x															

α) Τι χαρακτηριστικό έχουν οι ημέρες που παίζει ποδόσφαιρο ο Τάκης;
β) Τι χαρακτηριστικό έχουν οι ημέρες που παίζουν ποδόσφαιρο ο Αχμέτ και ο Πάνος;
γ) Κάθε πότε παίζουν μαζί ποδόσφαιρο;
δ) Τι κοινό έχουν οι αριθμοί που εκφράζουν κάθε πότε παίζουν μαζί ποδόσφαιρο σε σχέση με τους αριθμούς 3, 4 και 6;

Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ) δύο ή περισσότερων αριθμών ονομάζεται το μικρότερο από τα κοινά πολλαπλάσιά τους που είναι διαφορετικό από το μηδέν.

Παρατήρηση
Το **ΕΚΠ** δύο ή περισσότερων αριθμών διαιρείται από αυτούς.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Σε ένα μικρό νησί του Αιγαίου, το καλοκαίρι πιάνουν στο λιμάνι του νησιού δύο πλοία της γραμμής. Το πρώτο της Α εταιρείας κάθε 2 ημέρες και το δεύτερο της εταιρείας Β κάθε 3 ημέρες. Σήμερα 1η του μηνός είναι Κυριακή και στο λιμάνι βρίσκονται και τα δύο πλοία.

1. Πότε το πλοίο της Α εταιρείας θα πιάσει λιμάνι πάλι Κυριακή;
2. Πότε το πλοίο της Β εταιρείας θα πιάσει λιμάνι πάλι Κυριακή;
3. Μετά από πόσες ημέρες για πρώτη φορά θα πιάσουν πάλι λιμάνι και τα δύο πλοία;
4. Ποιες ημέρες του μήνα θα πιάσουν και τα δύο πλοία λιμάνι μαζί;

Απάντηση

1. Το πλοίο Α πιάνει λιμάνι κάθε 2 ημέρες, δηλαδή στα πολλαπλάσια του 2 μετά από σήμερα. Κυριακή έχουμε κάθε 7 ημέρες μετά από σήμερα. Το ΕΚΠ(2,7) = 14, οπότε θα πιάσει πάλι λιμάνι Κυριακή 14 ημέρες μετά από σήμερα, δηλαδή στις 15 του μηνός.
2. Το πλοίο Β πιάνει λιμάνι κάθε 3 ημέρες, δηλαδή στα πολλαπλάσια του 3 μετά από σήμερα. Κυριακή έχουμε κάθε 7 ημέρες μετά από σήμερα. Το ΕΚΠ(3,7) = 21, οπότε θα πιάσει πάλι λιμάνι Κυριακή 21 ημέρες μετά από σήμερα, δηλαδή στις 22 του μηνός.

Πρόβλημα με λάμπες που αναβοσβήνουν

Για να διερευνήσετε την έννοια των κοινών διαιρετών αριθμών, ανοίξτε και εργαστείτε με τις εφαρμογές:

Επισκεπτόμενοι τον θερινό κινηματογράφο

3. Το πλοίο Α πιάνει λιμάνι κάθε 2 ημέρες, δηλαδή στα πολλαπλάσια του 2 μετά από σήμερα. Το πλοίο Β πιάνει λιμάνι κάθε 3 ημέρες, δηλαδή στα πολλαπλάσια του 3 μετά από σήμερα. Το ΕΚΠ(2,3) = 6, οπότε θα πιάσουν πάλι λιμάνι για πρώτη φορά μετά από 6 ημέρες.
4. Θα πιάνουν λιμάνι και τα δύο πλοία μαζί κάθε 6 μέρες από σήμερα, δηλαδή στις 7, 13, 19 και 25 του μήνα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να βρείτε το ΕΚΠ των αριθμών 9 και 15.

2 Να βρείτε το ΕΚΠ των αριθμών 12, 15 και 20.

3 Δύο λεωφορεία ξεκινούν από τον ίδιο σταθμό. Το πρώτο κάνει έναν κύκλο σε 20 λεπτά και το δεύτερο σε 30 λεπτά. Μετά από πόσο χρόνο θα συναντηθούν ξανά στον σταθμό;

4 Η Μάρθα έχει δύο σειρές από λαμπάκια. Η μία σειρά έχει κόκκινα και η άλλη πράσινα λαμπάκια. Τα κόκκινα λαμπάκια αναβοσβήνουν κάθε 15 δευτερόλεπτα. Τα πράσινα λαμπάκια κάθε 17 δευτερόλεπτα. Αν ξεκινήσουν να αναβοσβήνουν ταυτόχρονα, μετά από πόσα δευτερόλεπτα θα αναβοσβήσουν συγχρόνως για πρώτη φορά;

5 Ο Γιώργος κάνει τον γύρο του σταδίου σε 4 λεπτά και η Ειρήνη σε 6. Αν ξεκινήσουν ταυτόχρονα, πόσες φορές ο Γιώργος με την Ειρήνη θα συναντηθούν στην αρχή του στίβου το πρώτο μισάωρο; Πόσους γύρους θα έχει κάνει ο καθένας σε κάθε μία από τις δύο πρώτες συναντήσεις;

6 Στο καρουζέλ ενός Λούνα Παρκ υπάρχουν δύο σειρές από αλογάκια που ξεκινούν ταυτόχρονα. Η εσωτερική σειρά κάνει μια πλήρη περιστροφή σε 48 δευτερόλεπτα, ενώ η εξωτερική σε 72 δευτερόλεπτα. Η Λουίζα και η Βαλέρια κάθονται σε διπλανά αλογάκια.

α) Πότε θα βρεθούν ξανά δίπλα δίπλα, εκεί όπου ξεκίνησαν;

β) Αν η βόλτα με το καρουζέλ διαρκεί 8 λεπτά:

β.1. Πόσες φορές θα βρεθούν δίπλα δίπλα, εκεί όπου ξεκίνησαν;

β.2. Πόσες φορές πέρασε η καθεμία από εκεί που ξεκίνησε;

1.3.3 Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (ΜΚΔ)

Διερεύνηση 1

Να απαντήσετε στα ερωτήματα:

1. Ποιοι είναι οι διαιρέτες των αριθμών 60, 120 και 210;

2. Ποιοι είναι οι κοινοί διαιρέτες αυτών και ποιος είναι ο μεγαλύτερος;

3. Ποια σχέση συνδέει τον μεγαλύτερο από τους κοινούς διαιρέτες με τους άλλους κοινούς διαιρέτες;

Διερεύνηση 2

Διαιρέτες και Πολλαπλάσια

Να ανοίξετε τη διπλανή εφαρμογή και με τη βοήθειά της:

1. Να απαντήσετε στα ερωτήματα της διερεύνησης (1) και να ελέγξετε τις απαντήσεις σας.

2. Να πειραματιστείτε με δυάδες και τριάδες αριθμών δικής σας επιλογής, θέτοντας αντίστοιχα ερωτήματα.

Η εύρεση των κοινών διαιρετών δύο ή περισσότερων αριθμών παίζει μεγάλο ρόλο στη λύση προβλημάτων τόσο των μαθηματικών και των άλλων επιστημών όσο και των προβλημάτων της καθημερινότητάς μας.

Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (ΜΚΔ) δύο ή περισσότερων αριθμών **ονομάζεται** ο μεγαλύτερος από τους κοινούς τους διαιρέτες.

Για τον μέγιστο κοινό διαιρέτη των δύο αριθμών **α** και **β** σημειώνουμε **ΜΚΔ(α, β).** Ανάλογος είναι ο συμβολισμός και για περισσότερους αριθμούς.

Παρατήρηση
Αφού ο ΜΚΔ(α, β) είναι διαιρέτης των αριθμών α και β συμπεραίνουμε ότι οι αριθμοί α και β είναι πολλαπλάσια αυτού.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Στο σχολείο μας συγκεντρώσαμε από μια σχολική γιορτή τα εξής δώρα: 270 τετράδια, 180 μολύβια και 135 σβηστήρες. Θέλουμε να δημιουργήσουμε ομοιόμορφα δέματα, δηλαδή δέματα που να περιέχουν όλα τα είδη και σε κάθε δέμα να υπάρχουν ίσες ποσότητες από κάθε είδος.

α) Ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός ομοιόμορφων δεμάτων που μπορεί να σχηματιστεί;

β) Από πόσα τετράδια, μολύβια και σβηστήρες αποτελούνται τα δέματα;

Απάντηση

α) Αφού το κάθε δέμα θα περιέχει τον ίδιο αριθμό από κάθε είδος, αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός των δεμάτων θα διαιρεί το πλήθος του κάθε είδους. Γι' αυτό καταγράφουμε τους διαιρέτες της κάθε ποσότητας του κάθε είδους.

- **Διαιρέτες του 270:** 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 27, 30, 45, 54, 90, 135, 270
- **Διαιρέτες του 180:** 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 30, 36, 45, 60, 90, 180
- **Διαιρέτες του 135:** 1, 3, 5, 9, 15, 27, 45, 135

Οι κοινοί διαιρέτες των τριών αριθμών είναι: 3, 5, 9, 15, 45

Επομένως μπορούμε να δημιουργήσουμε: 3, 5, 9, 15, 45 ομοιόμορφα δέματα και επειδή ΜΚΔ (135,180,270)=45 ο μεγαλύτερος αριθμός ομοιόμορφων δεμάτων που μπορούμε να δημιουργήσουμε είναι 45.

β) Κάθε δέμα θα περιέχει 135 : 45 = 3 σβηστήρες, 180 : 45 = 4 μολύβια και 270 : 45 = 6 τετράδια.

Σημείωση:
Οι κοινοί διαιρέτες δύο ή περισσότερων αριθμών είναι διαιρέτες του ΜΚΔ αυτών.

Η εύρεση του ΜΚΔ δύο αριθμών με την εύρεση όλων των κοινών διαιρετών είναι επίπονη και χρονοβόρα διαδικασία, ιδιαίτερα όταν οι αριθμοί είναι μεγάλοι. Γι' αυτό τον λόγο αναπτύχθηκαν πιο γρήγορες μέθοδοι, όπως οι παρακάτω αλγόριθμοι που ανέπτυξε ο Ευκλείδης:

Η μέθοδος της διαφοράς (Αλγόριθμος του Ευκλείδη της διαφοράς)

Η μέθοδος αυτή στηρίζεται στην ιδιότητα «όταν δυο αριθμοί διαιρούνται με κάποιον άλλο τότε θα διαιρείται και η διαφορά τους με τον ίδιο αριθμό» (επιμεριστική ιδιότητα).

Αλγόριθμος του Ευκλείδη (της Διαφοράς)

Έτσι, όταν δοθούν δύο αριθμοί, αν ο μικρότερος διαιρεί τον μεγαλύτερο, αυτός είναι ο ΜΚΔ.

Αν ο μικρότερος δεν διαιρεί τον μεγαλύτερο, τότε αφαιρούμε τον μικρότερο από τον μεγαλύτερο και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία μεταξύ της διαφοράς τους και του μικρότερου, μέχρις ότου ο μικρότερος να διαιρεί τον μεγαλύτερο.

Παράδειγμα: Να βρείτε τον ΜΚΔ(180, 450).
Συνήθως χρησιμοποιούμε το παρακάτω σχήμα:

180	450	Το 180 δεν διαιρεί το 450 *Αφαίρεση: 450 – 180 = 270*
180	270	Το 180 δεν διαιρεί το 270 *Αφαίρεση: 270 – 180 = 90*
180	90	Το 90 διαιρεί το 180
Συνεπώς ο ΜΚΔ(180, 450) = 90		

Η παλαιότερη περιγραφή που υπάρχει για τον αλγόριθμο του Ευκλείδη είναι στα *Στοιχεία του Ευκλείδη* (περί το 300 π.Χ.), καθιστώντας τον έναν από τους παλαιότερους αριθμητικούς αλγορίθμους που είναι ακόμη σε χρήση.

Η μέθοδος των υπολοίπων (Αλγόριθμος του Ευκλείδη των υπολοίπων).

Παρόλο που η μέθοδος της διαφοράς, για την εύρεση του ΜΚΔ δύο αριθμών είναι εύκολη, χρειαζόμαστε πολύ χρόνο, ιδιαίτερα όταν η διαφορά των δύο αριθμών είναι μεγάλη. Σε μια τέτοια περίπτωση χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των υπολοίπων.

Η διαδικασία αυτή είναι η ίδια με την προηγούμενη, με τη μόνη αλλαγή ότι η διαφορά των δύο αριθμών αντικαθίσταται από το μη μηδενικό υπόλοιπο της διαίρεσης του μεγαλύτερου με τον μικρότερο.

Ο αλγόριθμος σταματά όταν βρούμε υπόλοιπο μηδέν.
Παράδειγμα: Να βρείτε τον ΜΚΔ(100, 460)

100	460	460 = 4 · 100 + 60 Διαίρεση: *460 : 100*
100	60	100 = 1 · 60 + 40 Διαίρεση: *100 : 60*
40	60	60 = 1 · 40 + 20 Διαίρεση: *60 : 40*
40	20	40 = 2 · 20 + 0 Διαίρεση: *40 : 20*
0	20	Το 20 διαιρεί το 0
Συνεπώς ο ΜΚΔ(100, 460) = 20		

Πρώτοι μεταξύ τους ονομάζονται δύο αριθμοί α, β όταν ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης τους είναι η μονάδα. Δηλαδή όταν **ΜΚΔ(α,β) = 1**.

Παράδειγμα: ΜΚΔ(3,5) = 1, οπότε ΕΚΠ(3,5) = 15

Σημείωση:
- Το ΕΚΠ δύο πρώτων μεταξύ τους αριθμών είναι το γινόμενό τους.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να εξετάσετε σε ποια από τα επόμενα ζευγάρια αριθμών, οι αριθμοί είναι πρώτοι μεταξύ τους.
α) 12 και 8, **β)** 5 και 7, **γ)** 28 και 15

Απάντηση

Εργαζόμαστε με τη μέθοδο των υπολοίπων.

12	8
4	8
4	0

5	7
5	2
1	2
1	0

28	15
13	15
13	2
1	2
1	0

Παρατηρούμε ότι οι αριθμοί 5, 7 και 28, 15 είναι πρώτοι μεταξύ τους, αφού ΜΚΔ(5, 7) = 1 και ΜΚΔ(15, 28) = 1, ενώ οι αριθμοί 12, 8 δεν είναι πρώτοι μεταξύ τους, αφού ΜΚΔ(12, 8) = 4.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Ένα κατάστημα αγοράζει μονάδες USB αποθήκευσης δεδομένων διαφορετικών χρωμάτων χονδρικής. Για τα Χριστούγεννα, έκανε ειδική παραγγελία 96 κόκκινων USB, 192 μπλε και 320 πράσινων. Στην παραγγελία ζήτησαν από τον προμηθευτή να αποσταλούν σε κουτιά με τον ίδιο αριθμό μονάδων, χωρίς ανάμειξη χρωμάτων, και κάθε κουτί να περιέχει τον μεγαλύτερο δυνατό αριθμό μονάδων USB.

Να βρείτε τον αριθμό των κουτιών κάθε χρώματος και τον αριθμό των μονάδων USB που θα περιέχει.

Απάντηση

Αφού κάθε κουτί θα περιέχει τον ίδιο αριθμό μονάδων USB και αυτός θα είναι ο μεγαλύτερος δυνατός, θα πρέπει να διαιρεί τους τρεις αριθμούς και να είναι ο μεγαλύτερος. Επομένως θα είναι ο ΜΚΔ(96, 192, 320).
Εργαζόμαστε με τη μέθοδο των υπολοίπων, όπως φαίνεται στον πίνακα.

96	192	320	$192 = 2 \cdot 96 + 0$ και $320 = 3 \cdot 96 + 32$
96	0	32	$96 = 3 \cdot 32 + 0$
0	0	32	Όλοι διαιρούνται με το 32
ΜΚΔ(96, 192, 320) = 32			

Άρα, τα κουτιά θα περιέχουν 32 USB το καθένα και θα υπάρχουν 96 : 32 = 3 κουτιά με κόκκινο χρώμα, 192 : 32 = 6 κουτιά με μπλε χρώμα και 320 : 32 = 10 κουτιά με πράσινο χρώμα.

Αυτοαξιολόγηση

Να τοποθετήσετε στις στήλες ΣΩΣΤΟ, ΛΑΘΟΣ ένα ✓ ανάλογα με το αν η πρόταση είναι σωστή ή λανθασμένη.	Σωστό	Λάθος
1. Οι αριθμοί α και β είναι πολλαπλάσια του ΜΚΔ(α,β).	☐	☐
2. Το ΕΚΠ δύο πρώτων μεταξύ τους αριθμών βρίσκεται αν διαιρέσουμε τον μεγαλύτερο με τον μικρότερο.	☐	☐
3. Στον αλγόριθμο του Ευκλείδη για την εύρεση του ΜΚΔ δύο αριθμών, ο μεγαλύτερος αντικαθίσταται από το μη μηδενικό υπόλοιπο της διαίρεσης του μεγαλύτερου με τον μικρότερο.	☐	☐

Να συμπληρώσετε τα κενά με τις κατάλληλες λέξεις ή φράσεις.

4. Ο μεγαλύτερος από τους κοινούς διαιρέτες δύο ή περισσότερων αριθμών λέγεται .... και συμβολίζεται ....

5. Πρώτοι μεταξύ τους λέγονται οι αριθμοί, που ....
....

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να βρείτε τον ΜΚΔ των παρακάτω αριθμών και με τους δύο αλγορίθμους (της διαφοράς και των υπολοίπων).

1. ΜΚΔ (240, 220)	2. ΜΚΔ (354, 236)	3. ΜΚΔ (68, 29)	4. ΜΚΔ (28, 14)

2 Να βρείτε δύο διψήφιους φυσικούς αριθμούς που έχουν ΕΚΠ το 60 και ΜΚΔ το 5.

3 Να βρείτε δύο διψήφιους φυσικούς αριθμούς που έχουν ΜΚΔ το 19 και ΕΚΠ το 76.

4 Ένα ανθοπωλείο έχει 126 τουλίπες, 168 γαρίφαλα, 210 τριαντάφυλλα και θέλει να δημιουργήσει ομοιόμορφες ομάδες λουλουδιών.

α) Να βρείτε πόσες ομοιόμορφες ομάδες λουλουδιών μπορεί να δημιουργήσει το ανθοπωλείο.

β) Ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός ομοιόμορφων ομάδων λουλουδιών που μπορεί να σχηματιστεί.

γ) Από πόσες τουλίπες, γαρίφαλα και τριαντάφυλλα θα αποτελούνται οι ομοιόμορφες ομάδες λουλουδιών στο (β) ερώτημα;

5 Μια βιοτεχνία παγωτών παράγει τριών ειδών παγωτά, του ίδιου σχήματος αλλά διαφορετικών γεύσεων. Προκειμένου να στείλει μια αποστολή 3936 της Α γεύσης, 4672 της Β γεύσης και 5920 της Γ γεύσης τα συσκευάζει σε ομοιόμορφα δέματα, αλλά ξεχωριστά το κάθε είδος. Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός κουτιών που θα χρειαστεί για κάθε είδος;

1.3.4 Πρώτοι και σύνθετοι αριθμοί

Διερεύνηση 1

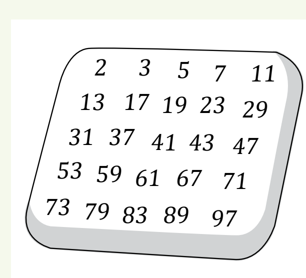
Να βρείτε τους διαιρέτες των αριθμών 7, 12, 13, 18, 24 και 29.
Να τους χωρίσετε σε δύο κατηγορίες έτσι ώστε κάθε κατηγορία να περιέχει αριθμούς με κάποιο κοινό χαρακτηριστικό.

Οι φυσικοί αριθμοί χωρίζονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες.
Αυτούς που έχουν ως διαιρέτες τον εαυτό τους και τη μονάδα και εκείνους που έχουν περισσότερους διαιρέτες.
Για παράδειγμα οι αριθμοί 3, 5, 7, ... , 23, ... , 43 κ.λπ. έχουν ως διαιρέτες τον εαυτό τους και τη μονάδα. Αντίθετα, ο αριθμός 6 έχει ως διαιρέτες, εκτός από τον εαυτό του και τη μονάδα, τους αριθμούς 2, 3.

- **Πρώτοι** ονομάζονται οι αριθμοί που έχουν διαιρέτες μόνο τον εαυτό τους και τη μονάδα.
- **Σύνθετοι** ονομάζονται οι αριθμοί που έχουν και άλλους διαιρέτες εκτός από τον εαυτό τους και τη μονάδα.
- Ο αριθμός 1 δεν είναι ούτε πρώτος ούτε σύνθετος.

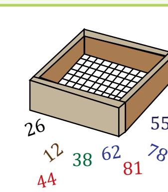
Διερεύνηση 2

Ο Περικλής έδωσε στον Αριστείδη τη διπλανή πλάκα και του είπε:
– Διάλεξε από την πλάκα όποιους αριθμούς θέλεις. Πολλαπλασίασέ τους μεταξύ τους. Μπορείς κάποιους να τους χρησιμοποιήσεις περισσότερες φορές και πες μου το γινόμενο.
Ο Αριστείδης χρησιμοποίησε το «κομπιουτεράκι» του και είπε στον Περικλή:
– Βρήκα το 3828.
Ο Περικλής πήρε το μολύβι του, απομονώθηκε για λίγο και μετά του είπε:
– Οι αριθμοί που πολλαπλασίασες ήταν οι εξής: 2, 2, 3, 11, 29.
Πώς το βρήκε ο Περικλής;



Με τους πρώτους και τους σύνθετους αριθμούς ασχολήθηκαν πάρα πολύ οι Αρχαίοι Έλληνες. Ένας από αυτούς ήταν ο Ερατοσθένης ο Κυρηναίος (276–194 π.Χ.), ο οποίος για τον εντοπισμό των πρώτων δημιούργησε το επονομαζόμενο «κόσκινο του Ερατοσθένη».

Η λογική του ήταν εξαιρετικά απλή. Έγραψε σε έναν πίνακα όλους τους φυσικούς από το 2 μέχρι το 100. Τον αριθμό 1 δεν τον συμπεριέλαβε γιατί δεν είναι πρώτος αριθμός.



Ακολούθως,

- Ξεκίνησε από τον πρώτο αριθμό 2. Τον άφησε και διέγραψε όλα τα πολλαπλάσιά του.
- Στη συνέχεια πήρε τον επόμενο πρώτο αριθμό 3. Τον άφησε και διέγραψε τα πολλαπλάσιά του.
- Στη συνέχεια πήρε τον επόμενο πρώτο αριθμό 5. Τον άφησε και διέγραψε τα πολλαπλάσιά του.
- Μετά τα πολλαπλάσια του 7.

Παρατήρησε ότι ήδη είχε διαγράψει τα πολλαπλάσια του 11, του 13 κ.λπ. που ήταν μικρότερα από το 100. Δηλαδή, είχε διαγράψει όλους τους σύνθετους αριθμούς μέχρι το 100.

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Οι αριθμοί που απέμειναν ήταν όλοι οι πρώτοι μέχρι το 100. Στον παραπάνω πίνακα, πρώτοι είναι όλοι οι αριθμοί που είναι σε πράσινο φόντο και απέμειναν μετά τις διαγραφές.

Περισσότερα για το «κόσκινο του Ερατοσθένη», τον Ερατοσθένη και άλλους πειραματισμούς μπορείς να βρεις στις ψηφιακές εφαρμογές:

Με βάση τους πρώτους αριθμούς μπορούμε να διατυπώσουμε το **Θεμελιώδες Θεώρημα της αριθμητικής**. Η απόδειξή του προέρχεται πάλι από την Αρχαία Ελλάδα και περιέχεται στα στοιχεία του Ευκλείδη.

Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής

Κάθε φυσικός αριθμός μεγαλύτερος από το ένα (1) μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων κατά μοναδικό τρόπο, αν δεν λάβουμε υπόψη μας τη σειρά των παραγόντων στο γινόμενο.

Παράδειγμα: **Είναι:** $3828 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29$

Το θεώρημα μας λέει ότι ο αριθμός 3828 μπορεί να γραφεί κατά μοναδικό τρόπο ως γινόμενο πρώτων αριθμών και αυτό το γινόμενο θα αποτελείται από δύο 2άρια, ένα 3άρι, ένα 11άρι και ένα 29άρι.

Για να αναλύσουμε έναν αριθμό σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, αρχίζουμε να διαιρούμε διαδοχικά τους αριθμούς με τους πρώτους αριθμούς ξεκινώντας από το 2.
Περνάμε στον επόμενο πρώτο αριθμό όταν ο αριθμός δεν διαιρείται άλλο με αυτόν.
Σταματάμε τις διαιρέσεις όταν βρούμε πηλίκο το 1.
Η επόμενη εφαρμογή δείχνει την ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Ο Ευκλείδης διδάσκων

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τους αριθμούς: 36, 426, 261, 61.

Απάντηση

Εργαζόμαστε δοκιμάζοντας διαδοχικά ως διαιρέτες τους πρώτους αριθμούς αρχίζοντας από το 2.
Η διαδικασία περιγράφεται στον παρακάτω πίνακα:

$36:2 = 18$ $18:2 = 9$ $9:3 = 3$ $3:3 = 1$	$\begin{array}{r\|l} 426 & 2 \\ 213 & 3 \\ 71 & 71 \\ 1 & \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 261 & 3 \\ 87 & 3 \\ 29 & 29 \\ 1 & \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 61 & 61 \\ 1 & \end{array}$ Το 61 είναι πρώτος αριθμός, οπότε δεν αναλύεται σε γινόμενο.
$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$	$426 = 2 \cdot 3 \cdot 71$	$261 = 3 \cdot 3 \cdot 29 = 3^2 \cdot 29$	

Από το θεμελιώδες θεώρημα της αριθμητικής, σε συνδυασμό με τις ιδιότητες του πολλαπλασιασμού, προκύπτουν οι παρακάτω προτάσεις:

Πρόταση 1.

Οι διαιρέτες ενός φυσικού αριθμού προκύπτουν όταν πολλαπλασιάσουμε τους πρώτους παράγοντές του με όλους τους δυνατούς τρόπους.

Παράδειγμα: **Ο αριθμός 84 = $2^2 \cdot 3 \cdot 7$ διαιρείται με το 12 και το 21 επειδή:**
$84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = (2 \cdot 2 \cdot 3) \cdot 7 = 12 \cdot 7$ **και** $84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 2 \cdot 2 \cdot (3 \cdot 7) = 4 \cdot 21$

Πρόταση 2.

Το **ΕΚΠ** δύο ή περισσότερων αριθμών βρίσκεται αν πολλαπλασιάσουμε όλους τους κοινούς και μη κοινούς πρώτους παράγοντές τους υψωμένους στον **μεγαλύτερο** εκθέτη.

Πρόταση 3.

Ο **ΜΚΔ** δύο ή περισσότερων αριθμών βρίσκεται αν πολλαπλασιάσουμε τους κοινούς πρώτους παράγοντές τους υψωμένους στον **μικρότερο** εκθέτη.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Να βρείτε το ΕΚΠ(12, 30, 40).

Απάντηση

Γράφουμε τους αριθμούς ως γινόμενα παραγόντων: $12 = 2^2 \cdot 3$, $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, $40 = 2^3 \cdot 5$.
Οι κοινοί και μη κοινοί παράγοντες των αριθμών με τον μεγαλύτερο εκθέτη είναι οι 2^3, 3, 5 .
Επομένως σύμφωνα με την πρόταση (2), έχουμε ΕΚΠ(12, 30, 40) = $2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$.
Έτσι, ΕΚΠ(12, 30, 40) = $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 120$

Σημείωση:
Για διευκόλυνση της διαδικασίας, τις περισσότερες φορές χρησιμοποιούμε το σχήμα που συνοψίζει τα ακόλουθα βήματα:
- Γράφουμε τους αριθμούς τον έναν δίπλα στον άλλο.
- Τραβάμε μια κατακόρυφη γραμμή και δίπλα γράφουμε πρώτα τον μικρότερο πρώτο που διαιρεί τουλάχιστον έναν από αυτούς.
- (εδώ είναι το 2).
- Κάτω από τους αριθμούς γράφουμε τα πηλίκα της διαίρεσης με το 2.
- Κάνουμε την ίδια δουλειά μέχρι να τελειώσουν οι διαιρέσεις με το 2.
- Αν κάποιος δεν διαιρείται με το 2, τον γράφουμε όπως είναι (εδώ το 15 δεν διαιρείται με το 2 και γι' αυτό το αφήνουμε όπως είναι).
- Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο μέχρι να έχουμε παντού το 1.

12	**30**	**40**	**2**
6	**15**	**20**	**2**
3	**15**	**10**	**2**
3	**15**	**5**	**3**
1	**5**	**5**	**5**
1	**1**	**1**	

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Να βρείτε τον ΜΚΔ (24, 36, 60).

Απάντηση

Γράφουμε τους αριθμούς ως γινόμενα παραγόντων:
$24 = 2^3 \cdot 3$ $\quad 36 = 2^2 \cdot 3^2$ $\quad 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$
Οι κοινοί παράγοντες με τον μικρότερο εκθέτη είναι ο 2^2 και ο 3.
Επομένως, σύμφωνα με την πρόταση (3), ΜΚΔ (24, 36, 60) = $2^2 \cdot 3 = 12$.

Σημείωση:

Για διευκόλυνση της διαδικασίας, τις περισσότερες φορές χρησιμοποιούμε το σχήμα που συνοψίζει τα ακόλουθα βήματα:
Όπως παραπάνω, γράφουμε τους αριθμούς τον έναν δίπλα στον άλλον. Τραβάμε μια κατακόρυφη γραμμή και δίπλα γράφουμε πρώτα τον μικρότερο πρώτο που διαιρεί τουλάχιστον έναν από αυτούς (εδώ είναι το 2). Κάτω από τους αριθμούς γράφουμε τα πηλίκα της διαίρεσης με το 2. Κάνουμε την ίδια δουλειά μέχρι να τελειώσουν οι διαιρέσεις με το 2. Αν κάποιος δεν διαιρείται με το 2, τον γράφουμε όπως είναι (εδώ το 9 και το 15 δεν διαιρούνται με το 2 και γι' αυτό τους αφήνουμε όπως είναι). Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο, μέχρι να έχουμε παντού το 1 και επιλέγουμε τους κοινούς παράγοντες.
Έτσι, ΜΚΔ(24, 36, 60) = 2 · 2 · 3 = 12.

24	36	60	2
12	18	30	2
6	9	15	2
3	9	15	3
1	3	5	3
1	1	5	5
1	1	1	

Αυτοαξιολόγηση

Να τοποθετήσετε στις στήλες ΣΩΣΤΟ, ΛΑΘΟΣ ένα ✓ ανάλογα με το αν η πρόταση είναι σωστή ή λανθασμένη.

	Σωστό	Λάθος
1. Ο ΜΚΔ δύο ή περισσότερων αριθμών βρίσκεται αν πολλαπλασιάσουμε τους κοινούς πρώτους παράγοντές τους υψωμένους στον μικρότερο εκθέτη.	☐	☐
2. Το ΕΚΠ δύο ή περισσότερων αριθμών βρίσκεται αν πολλαπλασιάσουμε όλους τους πρώτους παράγοντές τους.	☐	☐
3. Οι διαιρέτες ενός φυσικού αριθμού προκύπτουν όταν πολλαπλασιάσουμε τους πρώτους παράγοντές του με όλους τους δυνατούς τρόπους.	☐	☐

Να συμπληρώσετε τα κενά με τις κατάλληλες λέξεις ή φράσεις.

4. Ένας φυσικός αριθμός λέγεται πρώτος όταν ....

5. Ένας φυσικός αριθμός λέγεται σύνθετος όταν ....

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να εξετάσετε ποιοι από τους αριθμούς στα παρακάτω ζευγάρια αριθμών είναι πρώτοι μεταξύ τους.
α) 12 και 15 **β)** 18 και 35 **γ)** 24 και 35 **δ)** 65 και 84

2 Να αναλύσετε σε γινόμενα πρώτων παραγόντων τους αριθμούς:
α) 36 **β)** 84 **γ)** 275 **δ)** 426
Να βρείτε ποιοι από τους παραπάνω αριθμούς διαιρούνται με το 6, χωρίς να κάνετε τη διαίρεση. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

3 Να δικαιολογήσετε ότι ο αριθμός 360 διαιρείται με το 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12 και το 15.

4 Να βρείτε το ΕΚΠ και τον ΜΚΔ των αριθμών με τη μέθοδο της ανάλυσης σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.
α) 54 και 84 **β)** 18 και 35 **γ)** 48 και 72 **δ)** 65 και 84

5 Όταν δύο αριθμοί είναι πρώτοι μεταξύ τους, το ΕΚΠ αυτών είναι το γινόμενό τους. Να επαληθεύσετε την πρόταση με τα ζεύγη των αριθμών 18 και 35, 100 και 63. Να δικαιολογήσετε την πρόταση.

6 Δύο αριθμοί έχουν ΜΚΔ το 13 και ΕΚΠ το 78. Ποιοι είναι οι αριθμοί;

7 Δύο αριθμοί έχουν ΜΚΔ το 15. Να δικαιολογήσετε γιατί έχουν και άλλους κοινούς διαιρέτες εκτός από τη μονάδα.

8 Μπορεί το άθροισμα δύο πρώτων αριθμών να είναι πρώτος; Αν ναι, σε ποιες περιπτώσεις;

9 Η ανάλυση ενός αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων έχει τη μορφή $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. Να εξηγήσετε γιατί ο αριθμός αυτός διαιρείται με τον:
α) 6 **β)** 12 **γ)** 45 **δ)** 28 **ε)** 30

1.4 ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

Να διερευνούν το δυαδικό σύστημα αρίθμησης φυσικών αριθμών και να το συγκρίνουν με το δεκαδικό κάνοντας μετατροπές μεταξύ τους.

Διερεύνηση 1

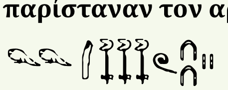
Στον παρακάτω Πίνακα 1 υπάρχει ένας πολύ μεγάλος φυσικός αριθμός. Να καθορίσετε τι εκφράζουν τα ψηφία 2, 4 και 7. Ποιο έχει τη μεγαλύτερη αξία και γιατί;

τρισεκατομμύρια			δισεκατομμύρια			εκατομμύρια			χιλιάδες					
εκατοντάδες	δεκάδες	μονάδες	εκατοντάδες	δεκάδες	μονάδες	εκατοντάδες	δεκάδες	μονάδες	εκατοντάδες	δεκάδες	μονάδες	εκατοντάδες	δεκάδες	μονάδες
10^{14}	10^{13}	10^{12}	10^{11}	10^{10}	10^{9}	10^{8}	10^{7}	10^{6}	10^{5}	10^{4}	10^{3}	10^{2}	10	1
9	3	4	8	6	5	7	6	5	8	0	3	2	8	9

Πίνακας 1

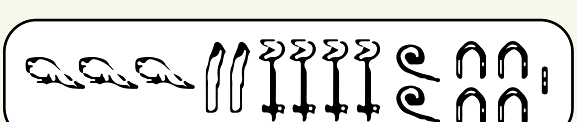
Διερεύνηση 2

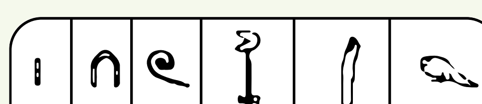
Οι αρχαίοι Αιγύπτιοι παρίσταναν τον αριθμό 213122 ως εξής:



Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται η αντιστοίχιση των μονάδων, δεκάδων, εκατοντάδων, χιλιάδων κ.λπ. της αιγυπτιακής ιερογλυφικής μορφής και της σημερινής γραφής.
Τα σύμβολα εξέφραζαν δυνάμεις του 10, αλλά η αξία τους δεν εξαρτιόνταν από τη θέση που κατείχαν στη γραφή.

Να γράψετε με τη βοήθεια του διπλανού πίνακα τον παρακάτω αριθμό της αιγυπτιακής γραφής, με τον σημερινό τρόπο γραφής:





1	10	100	1000	10000	100000

Στον αιγυπτιακό τρόπο γραφής για τις δεκάδες, τις εκατοντάδες, τις χιλιάδες κ.λπ. έχουμε διαφορετικό σύμβολο και εμφανίζεται πολλές φορές. Αντίθετα, στον σύγχρονο τρόπο γραφής χρησιμοποιούμε τα ίδια ψηφία, όμως η **αξία** τους εξαρτάται από τη **θέση** την οποία κατέχουν και γι' αυτό το σύγχρονο σύστημα αρίθμησης λέγεται **θεσιακό**.

Ειδικότερα, στο σύγχρονο **δεκαδικό σύστημα αρίθμησης** χρησιμοποιούνται οι μονάδες, οι δεκάδες, οι εκατοντάδες (δεκάδες δεκάδων), οι χιλιάδες (δεκάδες εκατοντάδων) κ.λπ. Ουσιαστικά, είναι οι δυνάμεις του 10 και για να τις εκφράσουμε χρησιμοποιούμε τα ψηφία 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, και 9.
Έτσι, ο αριθμός 213122 αναλυτικά γράφεται: $213122 = 2 \cdot 10^5 + 1 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 2 \cdot 1$

και σε μορφή πίνακα:

...	10^5	10^4	10^3	10^2	10	1
	2	1	3	1	2	2

Με την ίδια λογική θα μπορούσαμε να δημιουργήσουμε και άλλα συστήματα αρίθμησης. Για παράδειγμα, σε ένα άλλο σύστημα με βάση το 5 θα χρησιμοποιούσαμε μονάδες, πεντάδες, εικοσιπεντάδες (πεντάδες πεντάδων) εκατονεισιπεντάδες (πεντάδες εικοσιπεντάδων) κ.λπ. Ουσιαστικά, θα χρησιμοποιούσαμε δυνάμεις του 5 και για να τις εκφράσουμε τα ψηφία 0, 1, 2, 3, και 4.

Το δυαδικό σύστημα

Ένα διαφορετικό σύστημα αρίθμησης, που είναι ιδιαίτερα διαδεδομένο και εφαρμόζεται σήμερα στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές, είναι το δυαδικό σύστημα που έχει ως βάση το 2. Εδώ χρησιμοποιούμε μονάδες, δυάδες, τετράδες (δυάδες δυάδων), οχτάδες (δυάδες τετράδων) κ.λπ.
Ουσιαστικά, χρησιμοποιούμε δυνάμεις του 2 και για να τις εκφράσουμε χρησιμοποιούμε μόνο τα ψηφία 0 και 1.
Ο αριθμός 1101 του δυαδικού συστήματος αρίθμησης αναλυτικά γράφεται: $1101_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1$ (=13)

και σε μορφή πίνακα:

...	$2^5 = 32$	$2^4 = 16$	$2^3 = 8$	$2^2 = 4$	2	1
			1	1	0	1

Επειδή τα ψηφία που χρησιμοποιούμε είναι τα ίδια σε όλα τα συστήματα, προκειμένου να ξεχωρίζουμε σε ποιο σύστημα αναφερόμαστε χρησιμοποιούμε έναν μικρό δείκτη κάτω δεξιά του αριθμού.

Όταν δεν υπάρχει τέτοια σήμανση, θεωρούμε ότι ο αριθμός είναι γραμμένος στο δεκαδικό σύστημα. Έτσι ο αριθμός 1101_2 δηλώνει τον αριθμό 13 γραμμένο στο δυαδικό σύστημα, ενώ ο 1101 είναι ο αριθμός χίλια εκατό ένα του δεκαδικού συστήματος.

Παρόμοιο είναι το σύστημα με βάση το οχτώ (χρησιμοποιούμε δυνάμεις του 8 και για να τις εκφράσουμε τα ψηφία 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 και 7).

Ιστορικό σημείωμα

Το 1854, ο Βρετανός μαθηματικός George Boole περιέγραψε λεπτομερώς ένα αλγεβρικό σύστημα λογικής, γνωστό ως άλγεβρα Boole, που στηρίζεται στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης. Το 1937, ο Claude Shannon εφάρμοσε την άλγεβρα Boole και θεμελίωσε την πρακτική σχεδίαση ψηφιακών κυκλωμάτων.
Τα ηλεκτρονικά κυκλώματα μπορούν να βρίσκονται σε δύο καταστάσεις, ενεργή και ανενεργή. Η ενεργή κατάσταση αντιστοιχεί στο ψηφίο 1 και η ανενεργή κατάσταση αντιστοιχεί στο ψηφίο 0. Έτσι το δυαδικό σύστημα, επειδή είναι πολύ απλό και εύκολο να εκτελεστεί από τα ηλεκτρονικά κυκλώματα που αποτελούν τους υπολογιστές, χρησιμοποιείται σε αυτούς.

Για να δείτε πώς μετατρέπουμε έναν αριθμό του δυαδικού συστήματος στο δεκαδικό σύστημα και αντίστροφα, ανοίξτε την εφαρμογή:

Δυαδικό Σύστημα

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να βρείτε τον μικρότερο και τον μεγαλύτερο τριψήφιο στα αριθμητικά συστήματα:

1. δεκαδικό
2. πενταδικό
3. δυαδικό.

Απάντηση

1. Στο δεκαδικό ο μικρότερος τριψήφιος είναι 100_{10} και ο μεγαλύτερος 999_{10}.
2. Στο πενταδικό ο μικρότερος τριψήφιος είναι 100_5 και ο μεγαλύτερος 444_5.
3. Στο δυαδικό ο μικρότερος τριψήφιος είναι 100_2 και ο μεγαλύτερος 111_2.

Παρατηρούμε ότι ο μικρότερος τριψήφιος και στα τρία θεσιακά συστήματα έχει την ίδια γραφή αλλά διαφορετική αξία.

Αυτοαξιολόγηση

Να τοποθετήσετε στις στήλες ΣΩΣΤΟ, ΛΑΘΟΣ ένα ✓ ανάλογα με το αν η πρόταση είναι σωστή ή λανθασμένη.	Σωστό	Λάθος
1. Οι αρχαίοι Αιγύπτιοι χρησιμοποιούσαν το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης.	☐	☐
2. Το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης που χρησιμοποιούμε σήμερα λέγεται θεσιακό σύστημα αρίθμησης.	☐	☐
3. Σε ένα σύστημα αρίθμησης με βάση το δύο, τα μόνα ψηφία που χρησιμοποιούνται είναι το 0 και το 1.	☐	☐
4. Σε ένα σύστημα αρίθμησης με βάση το τέσσερα τα μόνα ψηφία που χρησιμοποιούνται είναι τα 0, 1, 2, 3, 4.	☐	☐
5. Οι αριθμοί 10_2, 10_5, 10_{10} είναι ίσοι.	☐	☐

Ιστορικό σημείωμα

Το εξηνταδικό σύστημα αρίθμησης έχει ως βάση το 60. Ξεκίνησε από τους αρχαίους Σουμέριους την 3η χιλιετία π.Χ. και πέρασε στους αρχαίους Βαβυλώνιους απ' όπου εξακολουθεί να χρησιμοποιείται ακόμη και σήμερα για τη μέτρηση του χρόνου, των γωνιών και των γεωγραφικών συντεταγμένων.
Ο αριθμός 60 είναι ένας πολυσύνθετος αριθμός αφού έχει δώδεκα παράγοντες, συγκεκριμένα 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 και 60. Με τόσους πολλούς παράγοντες, εύκολα μπορεί να χωριστεί σε ομοιόμορφα μέρη. Για παράδειγμα, μια ώρα μπορεί να χωριστεί σε μισάωρα (κομμάτια των 30 λεπτών), σε τέταρτα (κομμάτια των 15 λεπτών) κ.λπ.
Το σύστημα αυτό, ολόκληρο ή μέρος του, χρησιμοποιήθηκε από πολλούς λαούς και σε πολλούς πολιτισμούς τόσο στις κοινωνικές τους συναλλαγές όσο και τις πολιτιστικές τους εκφράσεις, απόδειξη ότι τα Μαθηματικά και γενικότερα οι επιστήμες ενώνουν και προάγουν τη συνύπαρξη των ανθρώπων.

Για περισσότερες πληροφορίες https://en.wikipedia.org/wiki/Sexagesimal

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να γράψετε τους επόμενους αριθμούς στο δυαδικό σύστημα.

α) 54 **β)** 35 **γ)** 7 **δ)** 8

2 Να γράψετε τους επόμενους αριθμούς στο δεκαδικό σύστημα.

α) 1011011_2 **β)** 110101_2 **γ)** 10204_5 **δ)** 2134_5

3 **α)** Σβήνοντας το ψηφίο των μονάδων του αριθμού 11010_2 γίνεται 1101_2. Ποιοι είναι οι αριθμοί;

β) Σβήνοντας το ψηφίο των μονάδων του αριθμού 110110_2 γίνεται 11011_2. Ποιοι είναι οι αριθμοί;

γ) Τι συνδέει τα δύο ζεύγη των αριθμών στα **(α)** και **(β)**; Να κάνετε μια εικασία.

δ) Να γράψετε τον 38 στο δυαδικό σύστημα.

ε) Να διαιρέσετε τον 38 με τον 2 στο δυαδικό σύστημα χρησιμοποιώντας την εικασία σας και να το επαληθεύσετε.

4 **α)** Προσθέτοντας το 0 στο τέλος του αριθμού 101_2 γίνεται 1010_2. Ποιοι είναι οι αριθμοί;

β) Προσθέτοντας το 0 στο τέλος του αριθμού 1011_2 γίνεται 10110_2. Ποιοι είναι οι αριθμοί;

γ) Τι συνδέει τα δύο ζεύγη των αριθμών στα **(α)** και **(β)**; Να κάνετε μια εικασία.

δ) Να γράψετε τον 27 στο δυαδικό σύστημα.

ε) Να βρείτε τον διπλάσιο του 27 στο δυαδικό σύστημα χρησιμοποιώντας την εικασία σας και να το επαληθεύσετε.

5 **α)** Πώς θα πολλαπλασιάζατε έναν αριθμό του δυαδικού συστήματος με τον 2;

β) Πώς θα πολλαπλασιάζατε έναν αριθμό του δυαδικού συστήματος με τον 4;

γ) Επαληθεύστε τις απαντήσεις σας στα **(α)**, **(β)** με ένα παράδειγμα.

6 Ποιος είναι ο μικρότερος και ποιος ο μεγαλύτερος τετραψήφιος στο δυαδικό σύστημα;

α) Να γράψετε τους αριθμούς στο δεκαδικό σύστημα.

β) Να προσθέσετε τους αριθμούς στο δεκαδικό και στο δυαδικό σύστημα.

Ανακεφαλαίωση

Φυσικοί αριθμοί είναι οι αριθμοί **0, 1, 2, 3**, … .

- Οι φυσικοί αριθμοί χωρίζονται στους άρτιους και στους περιττούς.
- **Άρτιοι** είναι όλοι οι φυσικοί αριθμοί που διαιρούνται με τον 2 και είναι της μορφής **2κ**, όπου κ φυσικός αριθμός.
- **Περιττοί** είναι όλοι οι φυσικοί αριθμοί που δεν διαιρούνται με τον 2 και είναι της μορφής 2κ + 1, όπου κ φυσικός αριθμός.
- Κάθε φυσικός προκύπτει από τον προηγούμενο προσθέτοντας τον ένα, με εξαίρεση το μηδέν που δεν έχει προηγούμενο.
- Όταν δίνονται δύο φυσικοί αριθμοί **α** και **β** πάντα μπορούμε να βρούμε έναν τρίτο που αντιστοιχεί στο **άθροισμά** τους. Δηλαδή α + β = γ.
- Όταν δίνονται δύο φυσικοί αριθμοί **α** και **β** πάντα μπορούμε να βρούμε έναν τρίτο που αντιστοιχεί στο **γινόμενό** τους. Δηλαδή α · β = γ.

Ο αριθμός **γ** λέμε ότι είναι **πολλαπλάσιο** του **α** και πολλαπλάσιο του **β**.

- **Νιοστή δύναμη** ενός μη μηδενικού αριθμού α ονομάζουμε το γινόμενο **ν** παραγόντων που ο καθένας είναι ίσος με α. Συμβολίζεται με $α^ν$ και διαβάζουμε **«α στη ν»**.

$$\underbrace{α \cdot α \cdots α}_{ν} = α^ν$$

Ο φυσικός αριθμός **α** λέγεται **βάση**, ενώ ο φυσικός αριθμός **ν εκθέτης**.

Ευκλείδεια διαίρεση. Όταν δίνονται δύο φυσικοί αριθμοί **α** και **β** πάντα μπορούμε να βρούμε δύο άλλους **Π** και **υ**, έτσι ώστε α = β · Π + υ, όπου 0 ≤ υ <β (Ταυτότητα Ευκλείδειας διαίρεσης)

- Όταν το υπόλοιπο της διαίρεσης του **α** με τον **β** είναι μηδέν η διαίρεση λέγεται **τέλεια,** διαφορετικά ονομάζεται **ατελής**.
- Όταν το υπόλοιπο της διαίρεσης του **α** με τον **β** είναι μηδέν λέμε ότι ο **β** διαιρεί τον **α** ή ότι ο **β** είναι **διαιρέτης** του **α**.

- **Πρώτος** ονομάζεται ένας αριθμός που διαιρείται μόνο από τον εαυτό του και τη μονάδα.
- **Σύνθετος** ονομάζεται ένας αριθμός που διαιρείται και με άλλους φυσικούς εκτός από τον εαυτό του και τη μονάδα.
- Κάθε σύνθετος αριθμός αναλύεται κατά μοναδικό τρόπο **σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.**

Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο (ΕΚΠ) δύο ή περισσότερων αριθμών λέγεται το μικρότερο από τα κοινά πολλαπλάσια των αριθμών.

- Το ΕΚΠ δύο ή περισσότερων αριθμών βρίσκεται με ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Μέγιστος κοινός διαιρέτης (ΜΚΔ) δύο ή περισσότερων αριθμών λέγεται ο μεγαλύτερος από τους κοινούς διαιρέτες των αριθμών.

- Ο ΜΚΔ δύο ή περισσότερων αριθμών βρίσκεται με ανάλυση σε γινόμενο πρώτων περιαγόντων, είτε με τον αλγόριθμο του Ευκλείδη.

Το **δεκαδικό** σύστημα αρίθμησης είναι ένα **θεσιακό** σύστημα αρίθμησης, δηλαδή η αξία του κάθε ψηφίου εξαρτάται από τη θέση την οποία κατέχει. Παρόμοια συστήματα αρίθμησης είναι το **δυαδικό** (0, 1), το **πενταδικό** (0, 1, 2, 3, 4) καθώς και το **οχταδικό** (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7).

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Να βρείτε τους φυσικούς αριθμούς που τα ψηφία τους είναι όλα ίσα, έχουν άθροισμα 12 και είναι μικρότεροι από το 10000.
2. Πόσα ψηφία χρειάστηκαν για να αριθμηθούν οι 423 σελίδες ενός βιβλίου;
3. Να βρείτε με το κόσκινο του Ερατοσθένη τους πρώτους μέχρι το 30.
4. Το γινόμενο δύο φυσικών αριθμών είναι 72. Οι δύο παράγοντες είναι μεγαλύτεροι από τον 5. Να βρείτε κατά πόσο μεταβάλλεται το γινόμενο, αν αυξήσουμε τον έναν παράγοντα κατά 4 και μειώσουμε τον άλλον κατά 5.
5. Πόσοι είναι οι φυσικοί αριθμοί, οι μικρότεροι από το 100 που δεν διαιρούνται ούτε με το 3 ούτε με το 5;
6. Οι αριθμοί 96 και 150 όταν διαιρεθούν με κάποιον αριθμό δίνουν υπόλοιπα αντίστοιχα 5 και 7. Να βρείτε τον αριθμό με τον οποίο διαιρούνται.
7. Ο διευθυντής ενός σχολείου ρωτήθηκε πόσους/πόσες μαθητές/τριες έχει και απάντησε : «Οι μαθητές/τριες του σχολείου είναι ανάμεσα από 150 και 200. Αν τους μετρήσω ανά 12 περισσεύουν 5 το ίδιο συμβαίνει και αν τους μετρήσω ανά 10». Πόσους/πόσες μαθητές/τριες έχει το σχολείο;
8. Ένας βοσκός μετρώντας τα πρόβατά του τα έβρισκε πάντα κάπου ανάμεσα στα 100 και 200. Τα μετρούσε σε οκτάδες, δεκάδες ή δωδεκάδες, του περίσσευαν πάντα πέντε. Βοηθήστε τον να βρει πόσα πρόβατα έχει ακριβώς.
9. Αν δίπλα σε μια ζυγαριά έχουμε τα βάρη 1γρ, 2γρ, 4γρ, έως 32γρ (δυνάμεις του 2), τότε μπορούμε να ισορροπήσουμε στη ζυγαριά μας κάθε βάρος φυσικού αριθμού (σε γραμμάρια) μικρότερο του 64, χρησιμοποιώντας τα βάρη μας το πολύ μια φορά το καθένα. Εφαρμογή: Πώς ισορροπούμε ένα βάρος 57 γραμμαρίων;
10. Δύο ποδηλάτες ξεκινούν από την ίδια πόλη. Ο ένας ξεκινά αφού ο άλλος είχε καλύψει 4 χιλιόμετρα. Να βρείτε πότε θα συναντηθούν, αν ο πρώτος ποδηλάτης καλύπτει 12 χιλιόμετρα την ώρα και ο δεύτερος 16 χιλιόμετρα την ώρα.
11. Σε έναν σταθμό φιλοξενούνται καθημερινά παιδάκια και για το πρωινό τους χρειάζεται 1 λίτρο γάλα για κάθε 4 παιδιά. Καθημερινά, ο σταθμός ξοδεύει 30 € για γάλα. Το γάλα είναι συσκευασμένο σε δοχεία των 4 λίτρων και το κάθε δοχείο κοστίζει 6 €. Πόσα παιδιά φιλοξενεί ο σταθμός;
12. Ο κ. Αμπντούλ κάνει συχνά τη διαδρομή από την πόλη του σε μια άλλη πόλη για δουλειές. Ταξιδεύει με μέση ταχύτητα 80 χιλιόμετρων την ώρα και φτάνει στον προορισμό του σε 8 ώρες. Σήμερα όμως, μετά από ταξίδι 160 χιλιομέτρων υποχρεώνεται να σταματήσει για μία ώρα. Να βρείτε με ποια ταχύτητα πρέπει να συνεχίσει το ταξίδι, για να φτάσει στον προορισμό του στην ώρα του.
13. Τρία αδέρφια μοιράζονται εξίσου μια κληρονομιά, που αποτελείται από δύο διαμερίσματα. Ο πρώτος παίρνει το ένα και ο δεύτερος το άλλο. Ο πρώτος δίνει στον τρίτο 140 χιλιάδες € και ο δεύτερος δίνει στον τρίτο 80 χιλιάδες €. Πόσο υπολογίστηκε η αξία του κάθε διαμερίσματος;

14 Ένας ηλεκτρονικός υπολογιστής μαζί με την οθόνη του κοστίζουν 565 €. Για να αγοράσουμε μόνο τον υπολογιστή χρειαζόμαστε τριπλάσια χρήματα απ' ό,τι για την οθόνη και 45 € επιπλέον. Να βρείτε πόσο κοστίζει ο υπολογιστής και πόσο η οθόνη.

15 Ένας μαθητής απάντησε σε 60 ερωτήματα και πήρε 2 μονάδες για κάθε σωστή απάντηση, ενώ έχασε 1 μονάδα για κάθε λανθασμένη απάντηση. Τελικά ο μαθητής πήρε συνολικά 90 μονάδες. Να βρείτε σε πόσα ερωτήματα απάντησε σωστά.

16 Μεταξύ των μελών ενός συλλόγου έγινε έρανος για να συγκεντρωθεί ένα ορισμένο ποσό. Αν κάθε μέλος έδινε 20 €, θα έλειπαν 900 € για να συμπληρωθεί το ποσό, ενώ αν κάθε μέλος έδινε 36 € θα συμπληρωνόταν το ποσό και θα περίσσευαν και 1260 €. Να βρείτε πόσα ήταν τα μέλη του συλλόγου και ποιο ποσό ήθελαν να συγκεντρώσουν.

17 Τρία χωριά χρηματοδότησαν από κοινού την κατασκευή μιας δεξαμενής για την ύδρευσή τους. Το κόστος της δεξαμενής ήταν 60000 € και κάθε κοινότητα κατέβαλε ποσό ανάλογο με τον αριθμό των κατοίκων της. Πόσο θα πληρώσει κάθε κοινότητα αν η πρώτη έχει 610 κατοίκους, η δεύτερη 660 και η τρίτη 730 κατοίκους;

Για να εξασκηθείτε περισσότερο στις έννοιες του κεφαλαίου, ανοίξτε και εργαστείτε με τις εφαρμογές:

Ανταλλάξτε κωδικοποιημένα μηνύματα

Μηχανή Παραγωγής Αριθμών

Πότε έχουμε Πάσχα;

Για μια επανάληψη στις έννοιες των φυσικών αριθμών, ανοίξτε την ψηφιακή εφαρμογή.

Γλωσσάρι Φυσικών Αριθμών

ΕΡΓΑΣΙΑ 1

Στον σύνδεσμο αναφέρεται η εικασία του Goldbach και η εικασία του Euler. Διαβάστε το λήμμα και διατυπώστε τις εικασίες που υπάρχουν σε αυτό. Επαληθεύστε τις εικασίες αυτές για φυσικούς αριθμούς που είναι μεταξύ του 40 και του 60.

https://el.wikipedia.org/wiki/Εικασία_του_Γκόλντμπαχ

ΕΡΓΑΣΙΑ 2

Στους παρακάτω συνδέσμους, αναζητήστε πληροφορίες για τους πρώτους αριθμούς του Μερσέν (Mersenne) και τους τέλειους αριθμούς. Γράψτε σχετικά με το πώς συνδέονται. Να επαληθεύσετε αιτιολογώντας, με οποιονδήποτε τρόπο, τους πρώτους του Μερσέν που είναι μικρότεροι από το 1000. Βρείτε τους 4 μικρότερους τέλειους αριθμούς και επαληθεύστε το αποτέλεσμα με οποιονδήποτε τρόπο.

https://el.wikipedia.org/wiki/Πρώτος_αριθμός_Μερσέν
https://el.wikipedia.org/wiki/Τέλειος_αριθμός

Για να βοηθηθείτε στην εργασία, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τη διπλανή εφαρμογή.

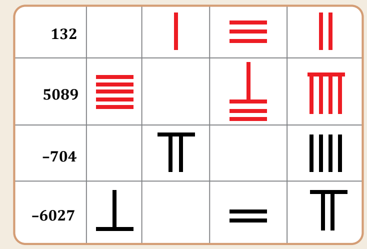
Διαιρέτες και Πολλαπλάσια

Κεφάλαιο

2

Ακέραιοι Αριθμοί

Εισαγωγή



Οι αρνητικοί αριθμοί εμφανίζονται ως έννοια γύρω στο 250 μ.Χ. στο ογκώδες έργο του μεγάλου Έλληνα μαθηματικού Διόφαντου «Τα αριθμητικά», που αποτελείται από 13 τόμους.

Το 200 π.Χ. το κινεζικό σύστημα ράβδων αριθμών, στη διπλανή εικόνα, αντιπροσώπευε θετικούς αριθμούς με κόκκινο και αρνητικούς αριθμούς με μαύρο. Αυτά χρησιμοποιήθηκαν για εμπορικούς και φορολογικούς υπολογισμούς, όπου το μαύρο ακύρωνε το κόκκινο. Το ποσό που πωλήθηκε ήταν θετικό (λόγω της λήψης χρημάτων) και το ποσό που δαπανήθηκε για αγορά ήταν αρνητικό (λόγω πληρωμής). Έτσι, ένα χρηματικό ισοζύγιο ήταν θετικό και ένα έλλειμμα αρνητικό.

Στην Ινδία τον 7ο μ.Χ. αιώνα, ο μαθηματικός Brahmagupta ασχολήθηκε με την έννοια των αρνητικών αριθμών, χρησιμοποιώντας τους όρους «κέρδος», «ζημιά» και διατύπωσε κανόνες και προτάσεις που ίδιες ισχύουν και σήμερα. Στην Ευρώπη η εμφάνιση των ακεραίων γίνεται τον 15ο αιώνα. Ο Michael Stifel (1487-1567) κάνει χρήση των προσήμων «+» και «–», ενώ αργότερα ο Hermann Hanuel (1839-1874) αναπτύσσει όλη αυτή τη θεωρία συστηματικότερα.

(Leo Rogers, The History of Negative Numbers https://nrich.maths.org/5961)

2.1 ΘΕΤΙΚΟΙ ΚΑΙ ΑΡΝΗΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

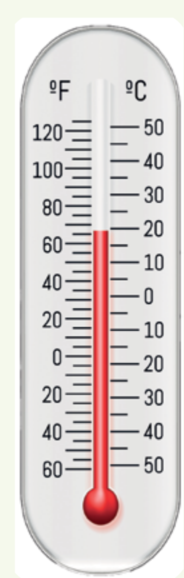
Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

- Να αναγνωρίζουν την ανάγκη εισαγωγής των ακέραιων αριθμών στην επίλυση προβλημάτων που δεν λύνονται στο πλαίσιο των φυσικών αριθμών.
- Να διακρίνουν θετικούς και αρνητικούς ακεραίους, καθώς και ομόσημους και ετερόσημους.
- Να διερευνούν τη σχέση των ακεραίων με τους φυσικούς αριθμούς.

Διερεύνηση 1

Στην πρώτη στήλη του παρακάτω πίνακα είναι κάποιες πόλεις της Ελλάδας και στη δεύτερη οι αντίστοιχες θερμοκρασίες μια ημέρα του χειμώνα. Να συμπληρώσετε συμβολικά την τρίτη στήλη.

Πόλη	Λεκτικά	Συμβολικά
Καστοριά	4 ^{0}C πάνω από το μηδέν	……
Πάτρα	1 ^{0}C κάτω από το μηδέν	……
Σέρρες	2 ^{0}C πάνω από το μηδέν	……
Αλεξανδρούπολη	1 ^{0}C κάτω από το μηδέν	……
Ιωάννινα	1 ^{0}C κάτω από το μηδέν	……
Ζάκυνθος	4 ^{0}C πάνω από το μηδέν	……
Τρίπολη	4 ^{0}C πάνω από το μηδέν	……



Να συγκρίνετε και να συζητήσετε τις προτάσεις σας με τους συμμαθητές σας.

Οι φυσικοί αριθμοί δεν αρκούν για να περιγράψουμε συμβολικά διάφορες καταστάσεις της καθημερινής ζωής. Για παράδειγμα, τη θέση ενός κολυμβητή, ο οποίος βρίσκεται σε 3 μέτρα βάθος κάτω από τη θάλασσα ή τη θέση ενός γλάρου που πετάει σε 5 μέτρα ύψος πάνω από τη θάλασσα.

Για να δηλώσουμε συμβολικά αυτές τις καταστάσεις, λέμε ότι ο κολυμβητής βρίσκεται σε βάθος –3 μέτρα και ο γλάρος σε ύψος +5 μέτρα σε σχέση με την επιφάνεια της θάλασσας, η οποία θεωρούμε ότι βρίσκεται στη θέση μηδέν.

Τα σύμβολα «+» και «–» που βάζουμε μπροστά από τους αριθμούς λέγονται **πρόσημα** και τους χαρακτηρίζουν ως **θετικούς** και **αρνητικούς** αντίστοιχα.

Όταν ένας αριθμός δεν έχει πρόσημο, τότε θεωρείται ότι είναι θετικός. Για παράδειγμα, 5 είναι ο θετικός αριθμός +5.

Φανερά, οι θετικοί αριθμοί είναι μεγαλύτεροι από το μηδέν και οι αρνητικοί μικρότεροι από το μηδέν.
• Το μηδέν δεν έχει πρόσημο, δηλαδή δεν είναι ούτε θετικός ούτε αρνητικός αριθμός.
• Οι αριθμοί με το ίδιο πρόσημο λέγονται **ομόσημοι**.
Για παράδειγμα, ομόσημοι είναι οι αριθμοί +2, +3, +19 καθώς και οι αριθμοί –1, –5, –17.

• Δύο αριθμοί με διαφορετικό πρόσημο λέγονται **ετερόσημοι**.
Για παράδειγμα, ετερόσημοι είναι οι αριθμοί +2 και –3 καθώς και οι αριθμοί –1, +5.

Ακέραιοι αριθμοί είναι οι φυσικοί αριθμοί μαζί με τους αντίστοιχους αρνητικούς αριθμούς. Το σύνολο των ακέραιων αριθμών το συμβολίζουμε με Z.

Το σύνολο των **ακέραιων** αριθμών αποτελείται από τους **θετικούς ακέραιους**, τους **αρνητικούς ακέραιους** και το **μηδέν** : ...–4, –3, –2, –1, 0, +1, +2, +3, +4,...

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Ο Πύργος του Άιφελ έχει πολλά επίπεδα στα οποία οι επισκέπτες μπορούν να ανέβουν. Το πρώτο είναι 57 μέτρα πάνω από το έδαφος, το δεύτερο έχει ύψος 115 μέτρα και το τρίτο επίπεδο έχει ύψος 276 μέτρα.

α) Ποια είναι συμβολικά η θέση κάποιου που στέκεται στο πρώτο επίπεδο σε σχέση με κάποιον που στέκεται στο έδαφος;
β) Ποια είναι συμβολικά η θέση κάποιου που στέκεται στο δεύτερο επίπεδο σε σχέση με κάποιον που στέκεται στο πρώτο επίπεδο;
γ) Ποια είναι συμβολικά η θέση κάποιου που στέκεται στο πρώτο επίπεδο σε σχέση με κάποιον που στέκεται στο τρίτο επίπεδο;

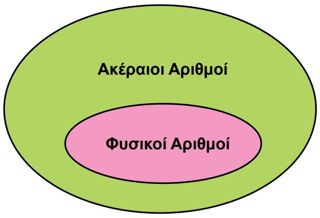
Απάντηση

α) Αν θεωρήσουμε ότι το έδαφος αντιστοιχεί στο 0, το πρώτο επίπεδο βρίσκεται στο +57.

β) Αυτός που στέκεται στο δεύτερο επίπεδο βρίσκεται 115 – 57 = 58 μέτρα πάνω από αυτόν που βρίσκεται στο πρώτο επίπεδο. Έτσι, αν θεωρήσουμε ότι το πρώτο επίπεδο αντιστοιχεί στο 0, το δεύτερο επίπεδο βρίσκεται στο +58.

γ) Αυτός που στέκεται στο πρώτο επίπεδο βρίσκεται 276 – 57 = 219 μέτρα κάτω από αυτόν που βρίσκεται στο τρίτο επίπεδο. Έτσι, αν θεωρήσουμε ότι το τρίτο επίπεδο αντιστοιχεί στο 0, το πρώτο επίπεδο βρίσκεται στο –219.

Σημείωση:
Οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί, μαζί με το μηδέν, ταυτίζονται με τους φυσικούς αριθμούς, το σύνολο των ακεραίων εμπεριέχει τους φυσικούς, όπως το 0, 1, 2, ... , αλλά και τους αρνητικούς, όπως, το –1, –2, –3, ... Σχηματικά αυτό φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα.



Αυτοαξιολόγηση

Να τοποθετήσετε στις στήλες ΣΩΣΤΟ, ΛΑΘΟΣ ένα ✓ ανάλογα με το αν η πρόταση είναι σωστή ή λανθασμένη.

	Σωστό	Λάθος
1. Οι φυσικοί αριθμοί εκτός από το 0 είναι θετικοί.	☐	☐
2. Ένας ακέραιος αριθμός μπορεί να είναι αρνητικός.	☐	☐
3. Οι φυσικοί αριθμοί είναι και ακέραιοι.	☐	☐
4. Ο αριθμός 0 είναι θετικός.	☐	☐
5. Ο αριθμός 0 δεν είναι ούτε θετικός ούτε αρνητικός.	☐	☐
6. Οι αριθμοί –2, –7, –9, –13, –34 είναι ομόσημοι.	☐	☐
7. Οι αριθμοί –17, +10, +200 είναι ομόσημοι.	☐	☐
8. Οι αριθμοί –2, +2 είναι ετερόσημοι.	☐	☐
9. Οι αριθμοί 8, +9 είναι ετερόσημοι.	☐	☐

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Στον παρακάτω πίνακα υπάρχουν τρεις στήλες. Στην πρώτη στήλη είναι πόλεις της Ελλάδας και στη δεύτερη στήλη οι θερμοκρασίες τους λεκτικά.

α) Να συμπληρώσετε στην τρίτη στήλη τις θερμοκρασίες συμβολικά.

Πόλη	Λεκτικά	Συμβολικά
Αθήνα	0 °C πάνω από το μηδέν	....
Θεσσαλονίκη	1 °C κάτω από το μηδέν	....
Αγρίνιο	2 °C πάνω από το μηδέν	....
Ερμούπολη	1 °C κάτω από το μηδέν	....
Ηράκλειο	1 °C κάτω από το μηδέν	....
Καλαμάτα	4 °C πάνω από το μηδέν	....

β) Προβλέπεται η θερμοκρασία στην Αθήνα το βράδυ να πέσει 8 βαθμούς. Τι θα δείξει το θερμόμετρο;

2 Να εκφράσετε τα παρακάτω χρησιμοποιώντας ακέραιους.

α) Αύξηση ενός προϊόντος κατά 10 €
β) Έκπτωση κατά 20 €
γ) Πτήση στα 30000 πόδια
δ) Κατάδυση στα 50 m
ε) Αύξηση βάρους 5 κιλά
στ) Αδυνάτισμα 3 κιλά
ζ) Κέρδος 200 €
η) Ζημιά 150 €
θ) Έξοδα σε μια ημέρα 200 €
ι) Έσοδα 250 €

3 Θεωρούμε τους ακέραιους αριθμούς: –7, 45, –45, 10, –100, –1020, +340, +15, –17, 0.
Ποιοι από αυτούς είναι φυσικοί αριθμοί;

4 Χρησιμοποιήστε ακέραιους αριθμούς για να περιγράψετε συμβολικά τις παρακάτω εκφράσεις:

α) Κατάθεση 230 €
β) Ανάληψη 320 €
γ) Έσοδα 200 €
δ) Έξοδα 150 €
ε) Ελάττωση του βάρους κατά 35 gr
στ) Ελάττωση θερμοκρασίας κατά 5°C

5 Να τοποθετήσετε σε όσα τετραγωνίδια πρέπει το σύμβολο ✓ όπως στο παράδειγμα.

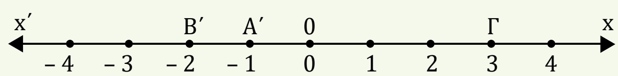
	ΦΥΣΙΚΟΣ	ΑΚΕΡΑΙΟΣ	ΘΕΤΙΚΟΣ	ΑΡΝΗΤΙΚΟΣ	ΟΜΟΣΗΜΟΙ	ΕΤΕΡΟΣΗΜΟΙ
126	✓	✓	✓			✓
–256						
–1000						
–25						
2^3						
– 300						

2.2 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

- Να αναγνωρίζουν την απόλυτη τιμή ακέραιων αριθμών ως την απόστασή τους από το μηδέν (0) στην αριθμογραμμή.
- Να περιγράφουν τα χαρακτηριστικά δύο αντίθετων αριθμών.

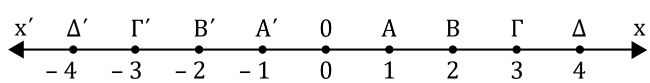
Διερεύνηση 1



Στον άξονα των ακέραιων αριθμών:
- Πόσο απέχουν τα σημεία B′, Γ και A′ από το μηδέν;
- Να σημειώσετε τα σημεία που η απόστασή τους από το 0 είναι 4.
- Να σημειώσετε τα σημεία που η απόστασή τους από το 0 είναι 2.

Στο προηγούμενο κεφάλαιο δημιουργήσαμε τον ημιάξονα των φυσικών αριθμών. Τώρα, μπορούμε αριστερά του Ο, στην ημιευθεία, να επιλέξουμε τα σημεία Α′, Β′, Γ′, Δ′ κ.λπ. έτσι ώστε ΟΑ′= ΟΑ, Α′Β′= ΟΑ, Β′Γ′= ΟΑ, Γ′Δ′= ΟΑ και να αντιστοιχίσουμε σε αυτά τους αριθμούς −1, −2, −3, −4 κ.λπ.

Με τον τρόπο αυτό δημιουργούμε τον **άξονα των ακέραιων αριθμών**



Στον άξονα των ακέραιων παρατηρούμε ότι:

Η απόσταση του παραστατικού σημείου Δ′ του αριθμού −4 από το παραστατικό σημείο Ο του μηδενός είναι 4. Αντίστοιχα η απόσταση του παραστατικού σημείου Γ του αριθμού 3 από το παραστατικό σημείο Ο του μηδενός είναι 3.

Την απόσταση του παραστατικού σημείου ενός αριθμού από το παραστατικό σημείο του μηδενός ονομάζουμε απόσταση του αριθμού από το μηδέν και δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Απόλυτη τιμή ενός αριθμού α ονομάζουμε την απόστασή του από το μηδέν και συμβολίζουμε με **|α|**.

Παραδείγματα: $|-3| = 3$, $|0| = 0$, $|5| = 5$.

Φανερά, η απόλυτη τιμή ενός αριθμού α δεν είναι ποτέ αρνητικός αριθμός, δηλαδή $|α| > 0$ ή $|α| = 0$.

Για να εξερευνήσετε και να πειραματιστείτε με την έννοια της απόλυτης τιμής ανοίξτε την εφαρμογή:

Ερευνώντας την απόσταση

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

1. Να βρείτε την απόλυτη τιμή των αριθμών: 4, –5, –10, +3, –7, +100, –100.

2. Να βρείτε τους αριθμούς με απόλυτη τιμή 20.

3. Ποια είναι η απόλυτη τιμή του –35; Ποιος άλλος αριθμός έχει την ίδια απόλυτη τιμή;

Απάντηση

1. $|4| = 4$, $|-5| = 5$, $|-10| = 10$, $|+3| = 3$, $|-7| = 7$, $|+100| = 100$, $|-100| = 100$.

2. Οι δύο αριθμοί είναι 20 και –20 αφού η απόστασή τους από το 0 είναι 20.

3. Η απόλυτη τιμή του αριθμού –35 είναι η απόστασή του από το μηδέν και επομένως: $|-35| = 35$. Την ίδια απόλυτη τιμή έχει και ο ακέραιος +35 αφού $|+35| = 35$.

Οι ετερόσημοι αριθμοί που απέχουν το ίδιο από το μηδέν ονομάζονται αντίθετοι.
Για παράδειγμα οι αριθμοί +1 και –1, όπως και οι αριθμοί –5 και +5 είναι αντίθετοι αριθμοί.

Αντίθετοι ονομάζονται δύο ετερόσημοι αριθμοί οι οποίοι έχουν την ίδια απόλυτη τιμή.
Ο αντίθετος του 0 είναι το μηδέν.

Για παράδειγμα οι αριθμοί +10 και –10 είναι αντίθετοι αφού είναι ετερόσημοι και έχουν την ίδια απόλυτη τιμή.

Για να συμβολίσουμε τον αντίθετο ενός αριθμού τοποθετούμε αριστερά του το « – ». Έτσι γράφουμε συμβολικά –6 για τον αντίθετο του 6.

Για να δηλώσουμε ότι ένας αριθμός α είναι αντίθετος ενός αριθμού β τοποθετούμε αριστερά του το « – ». Έτσι ο αντίθετος του 0 είναι το μηδέν, ο αντίθετος του +6 δηλώνεται ως –(+6) και είναι ο –6 , αφού αυτός έχει την ίδια απόλυτη τιμή και αντίθετο πρόσημο. Επίσης, για τον ίδιο λόγο για τον αντίθετο –10 του γράφουμε –(–10) = +10.

Διερεύνηση 2

Στο διπλανό διάγραμμα βλέπουμε τη μέση θερμοκρασία για κάθε μήνα σε μια πόλη.

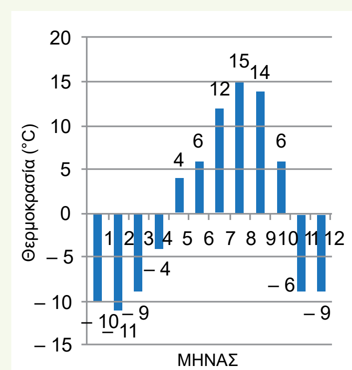
α) Ποια είναι η μέση θερμοκρασία τον Απρίλιο (4ος μήνας);

β) Ποια είναι η μέση θερμοκρασία τον Δεκέμβριο (12ος μήνας);

γ) Ποιο μήνα έχουμε τη χαμηλότερη μέση θερμοκρασία και ποια είναι αυτή;

δ) Ποιο μήνα έχουμε την υψηλότερη μέση θερμοκρασία και ποια είναι αυτή;

ε) Να διατάξετε τις μέσες θερμοκρασίες από τη μικρότερη στη μεγαλύτερη.



Η διάταξη των φυσικών αριθμών ισχύει και στους ακεραίους. Κάθε ακέραιος αριθμός που βρίσκεται δεξιότερα κάποιου άλλου στον άξονα των ακεραίων, είναι μεγαλύτερός του.

Ερευνώντας τη διάταξη

Για να διερευνήσετε τη διάταξη, ανοίξτε την εφαρμογή:

Έτσι,

• Κάθε θετικός ακέραιος είναι μεγαλύτερος από το μηδέν και από κάθε αρνητικό ακέραιο.
Για παράδειγμα: +1 > 0 > –1

• Κάθε αρνητικός ακέραιος είναι μικρότερος από το μηδέν και από κάθε θετικό ακέραιο.
Για παράδειγμα: –4 < 0 < +1.

- Μεταξύ δύο θετικών αριθμών **μεγαλύτερος** είναι εκείνος που έχει τη **μεγαλύτερη απόλυτη τιμή**.
  Για παράδειγμα: $+5 < +7$, επειδή $|+7| = 7 > 5 = |+5|$.
- Μεταξύ δύο αρνητικών αριθμών **μεγαλύτερος** είναι εκείνος που έχει τη **μικρότερη απόλυτη τιμή.**
  Για παράδειγμα: $-8 < -5$, επειδή $|-5| = 5 < 8 = |-8|$.

Αυτοαξιολόγηση

Να τοποθετήσετε δίπλα στις στήλες ΣΩΣΤΟ, ΛΑΘΟΣ ένα ✓ ανάλογα με το αν η πρόταση είναι σωστή ή λανθασμένη.

	Σωστό	Λάθος
1. Υπάρχει ακέραιος αριθμός y του οποίου η απόλυτη τιμή είναι αρνητική, δηλαδή $|y| < 0$.	☐	☐
2. Υπάρχει ακέραιος αριθμός z του οποίου η απόλυτη τιμή είναι μηδέν, δηλαδή $|z| = 0$.	☐	☐
3. Αν $|x| = 6$ τότε το x είναι το 6 ή το −6.	☐	☐
4. Αν $|x| = -10$ τότε το x είναι το 10 ή το −10.	☐	☐
5. Ο αντίθετος του $|6|$ είναι ο −6.	☐	☐
6. Ο αντίθετος του −10 είναι ο $-(-10)$.	☐	☐
7. Ο αντίθετος κάθε φυσικού είναι φυσικός.	☐	☐
8. Ο αντίθετος κάθε ακεραίου είναι ακέραιος.	☐	☐
9. Από δύο ή περισσότερους θετικούς ακέραιους μεγαλύτερος είναι αυτός που έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.	☐	☐
10. Από δύο ή περισσότερους αρνητικούς ακέραιους μικρότερος είναι αυτός που έχει τη μικρότερη απόλυτη τιμή.	☐	☐

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:
«Η απόσταση ενός αριθμού από το μηδέν ονομάζεται ....»
«Η απόλυτη τιμή ενός αριθμού είναι πάντα ....»

2 Να βρείτε τις απόλυτες τιμές των ακέραιων αριθμών: 15, 123, −256, +256, 80, −79, −12, 36.

3 Αν $|y| = 17$ τι τιμές μπορεί να πάρει η μεταβλητή y;

4 Να σχεδιάσετε τον άξονα των αριθμών και να τοποθετήσετε τους ακέραιους −5, −3, −2, 2, 3, 5, 6. Ποια ζεύγη αυτών των αριθμών είναι συμμετρικά ως προς την αρχή του άξονα;

5 Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

Αριθμός	9	−120			−90
Απόλυτη τιμή			155		

6 Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:
α) Δύο αντίθετοι μη μηδενικοί αριθμοί έχουν διαφορετικό ....
β) Δύο αντίθετοι αριθμοί έχουν την ίδια ....
γ) Τα σημεία του άξονα των αριθμών τα οποία αντιστοιχούν σε δύο αντίθετους αριθμούς είναι .... ως προς την αρχή του άξονα.

7 Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

Αριθμός	19	−125			900
Αντίθετος			230	−1010	

8 Να σχεδιάσετε τον άξονα των αριθμών και να τοποθετήσετε σε αυτόν τους αριθμούς 0, 2, −3, −5 και τους αντίθετούς τους.

9 Να διατάξετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς −3, +2, −1, +1, −5, +7.

10 Αν οι ακέραιοι −5 και (x+1) είναι αντίθετοι, να βρείτε το x.

2.3 ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

Να προσθέτουν και να αφαιρούν ακέραιους αριθμούς, χρησιμοποιώντας στην αρχή εποπτικά μοντέλα και ύστερα μαθηματικές ισότητες για να περιγράφουν προσθέσεις και αφαιρέσεις.

2.3.1 Πρόσθεση

Πρόσθεση ομόσημων αριθμών

Θεωρούμε ότι μια πράσινη κάρτα αντιστοιχεί στον αριθμό +1. Τότε δύο όμοιες πράσινες κάρτες αντιστοιχούν στον αριθμό +2, τρεις όμοιες στον αριθμό +3 κοκ. Έτσι λοιπόν αν παραθέσουμε δίπλα από τις δύο πράσινες κάρτες άλλες τρεις θα έχουμε συνολικά πέντε πράσινες κάρτες, δηλαδή θα έχουμε το άθροισμα:

+ = ή συμβολικά $(+2)+(+3)=+5$

Θεωρούμε ότι μια κόκκινη κάρτα αντιστοιχεί στον αριθμό −1. Τότε δύο όμοιες κόκκινες κάρτες αντιστοιχούν στον αριθμό −2, τρεις στον αριθμό −3 κοκ. Έτσι λοιπόν αν παραθέσουμε δίπλα από άλλες δύο κόκκινες κάρτες άλλες τρεις θα έχουμε συνολικά πέντε κόκκινες κάρτες, δηλαδή θα έχουμε το άθροισμα:

+ = ή συμβολικά $(-2)+(-3)=-5$

Πρόσθεση ακεραίων με κυκλάκια

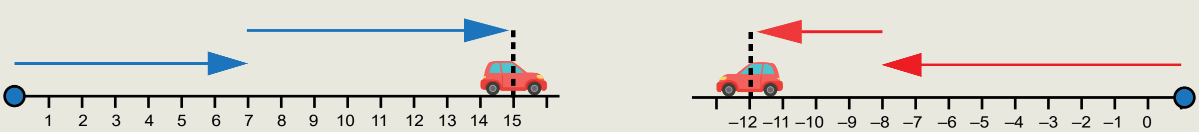
Ερευνήστε περισσότερο την πράξη της πρόσθεσης χρησιμοποιώντας τις ψηφιακές εφαρμογές:

Πρόσθεση ακεραίων με κάρτες

Για να **προσθέσουμε** δύο **ομόσημους** αριθμούς, **προσθέτουμε** τις απόλυτες τιμές τους και στο άθροισμά τους βάζουμε το κοινό τους πρόσημο.

Για παράδειγμα $(+12)+(+8)= +\left(|+12|+|+8|\right)=+20$, $(-7)+(-15)=-\left(|-7|+|-15|\right)=-(7+15)=-22$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1



Στον άξονα, κίνηση δεξιά ισοδυναμεί με αύξηση και συνεπώς αντιστοιχεί σε θετικό αριθμό. Ενώ κίνηση αριστερά, ισοδυναμεί με μείωση και αντιστοιχεί σε αρνητικό αριθμό. Περιγράψτε με λόγια και με πράξεις την κατάσταση που περιγράφεται στα παραπάνω σχήματα.

Απάντηση

- Το μπλε βέλος που δείχνει δεξιά σημαίνει ότι αρχικά κινηθήκαμε 7 μονάδες και στη συνέχεια άλλες 8 μονάδες και βρεθήκαμε στο 15. Επειδή δηλώνει αύξηση, έχουμε: $(+7)+(+8) = +15$.
- Το κόκκινο βέλος που δείχνει αριστερά σημαίνει ότι αρχικά κινηθήκαμε 8 μονάδες και στη συνέχεια άλλες 4 μονάδες και βρεθήκαμε στο 12. Επειδή δηλώνει μείωση, έχουμε: $(-8)+(-4)=-12$.

Πρόσθεση δύο θετικών στον άξονα

Μπορείτε να ερευνήσετε την πρόσθεση δύο θετικών στον άξονα x'x, με την εφαρμογή.

Πρόσθεση δύο αρνητικών στον άξονα

Μπορείτε να ερευνήσετε την πρόσθεση δύο αρνητικών στον άξονα x'x, με την εφαρμογή.

Πρόσθεση ετερόσημων αριθμών

Στον άξονα αν αρχικά βρισκόμαστε στο 0 και κινηθούμε 5 μονάδες δεξιά θα βρεθούμε στο +5. Στη συνέχεια αν κινηθούμε 5 μονάδες αριστερά ουσιαστικά θα βρεθούμε πάλι στο 0, δηλαδή, $(+5)+(-5)=0$.

Παρόμοια αν αρχικά κινηθούμε αριστερά 3 μονάδες και στη συνέχεια δεξιά 3 μονάδες, θα βρεθούμε πάλι στο 0, δηλαδή, $(-3)+(+3)=0$.

Αυτό σημαίνει ότι:

Το άθροισμα δύο αντίθετων αριθμών ισούται με το μηδέν.

Σχόλιο:

Λαμβάνοντας υπόψη τον ορισμό για τους αντίθετους αριθμούς που είδαμε στην παράγραφο 2.2 έχουμε:
Δύο αριθμοί είναι αντίθετοι όταν το άθροισμά τους είναι μηδέν.

Αφού $(+1)+(-1)=0$, μια πράσινη κάρτα 🟩 με αξία +1 και μια κόκκινη κάρτα 🟥 με αξία –1 θα εξουδετερώνονται.

Συνεπώς, αν σε δύο πράσινες κάρτες 🟩🟩 που αντιστοιχούν στον αριθμό +2, προσθέσουμε τρεις κόκκινες 🟥🟥🟥 κάρτες που αντιστοιχούν στον αριθμό –3 τότε θα έχουμε το άθροισμα:

🟩🟩 + 🟥🟥🟥 = 🟩🟩🟥🟥 🟥 = 🟥 ή συμβολικά $(+2)+(-3)=-1$

Παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα προκύπτει αν από το 3 αφαιρέσουμε το 2 και βάλουμε το πρόσημο του –3, που έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

Παρόμοια, αν σε τρεις κόκκινες κάρτες 🟥🟥🟥 που αντιστοιχούν στον αριθμό –3, προσθέσουμε τέσσερις πράσινες κάρτες 🟩🟩🟩🟩 που αντιστοιχούν στον αριθμό +4 θα έχουμε το άθροισμα:

🟥🟥🟥 + 🟩🟩🟩🟩 = 🟥🟥🟥🟩🟩🟩 🟩 = 🟩 ή συμβολικά $(-3)+(+4)=+1$

Δηλαδή, το αποτέλεσμα προκύπτει αν από το 4 αφαιρέσουμε το 3 και βάλουμε το πρόσημο του +4, που έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

Γενικά,

Για να **προσθέσουμε δύο ετερόσημους** αριθμούς, από τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή **αφαιρούμε** τη μικρότερη απόλυτη τιμή και στη διαφορά βάζουμε **το πρόσημο του αριθμού** με τη **μεγαλύτερη** απόλυτη τιμή.

Πρόσθεση θετικού με αρνητικό στον άξονα

Μπορείτε να ερευνήσετε την πρόσθεση θετικού με αρνητικό στον άξονα x'x, με την εφαρμογή.

Πρόσθεση αρνητικού με θετικό στον άξονα

Μπορείτε να ερευνήσετε την πρόσθεση αρνητικού με θετικό στον άξονα x'x, με την εφαρμογή.

Ιδιότητες της πρόσθεσης

• $\alpha+\beta=\beta+\alpha$ Αντιμεταθετική ιδιότητα:

Δηλώνει ότι η σειρά των προσθετέων μπορεί να αλλάξει.

Για παράδειγμα, $(-5)+(+4)=(+4)+(-5)=-1$

• $\alpha+\beta+\gamma=(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$ Προσεταιριστική ιδιότητα:

Δηλώνει ότι η σειρά της πρόσθεσης μπορεί να αλλάξει,

Για παράδειγμα, $(+5)+[(+1)+(-4)]=(+5)+(-3)=+2$ ή $[(+5)+(+1)]+(-4)=(+6)+(-4)=+2$

• $\boldsymbol{\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha}$ Αν σε οποιονδήποτε αριθμό προσθέσουμε το μηδέν 0 αυτός δεν αλλάζει. Το μηδέν λέγεται **ουδέτερο** στοιχείο.

• $\boldsymbol{\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0}$ Για κάθε ακέραιο **α** υπάρχει ο αντίθετός του, που είναι ο **−α.**

Παράδειγμα: $8 + (-8) = (-8) + 8 = 0$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να βρείτε το άθροισμα των παρακάτω προσθετέων.

$$(-2)+(+5)+(-11)+(+13)+(-7)+(-8)+(+14)$$

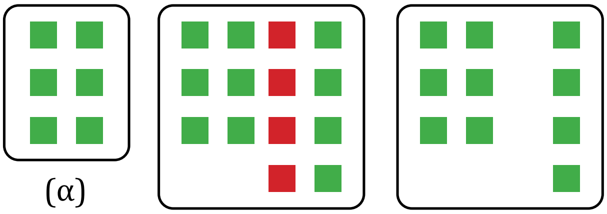
Απάντηση

Εφαρμόζοντας τις ιδιότητες της πρόσθεσης, συγκεντρώνουμε όλους τους θετικούς και όλους τους αρνητικούς μαζί οπότε:

$$(-2)+(+5)+(-11)+(+13)+(-7)+(-8)+(+14)=$$
$$[(+5)+(+14)+(+13)]+[(-2)+(-11)+(-7)+(-8)]=$$
$$(+32)+(-28)=+4$$

2.3.2 Αφαίρεση

Θεωρούμε ότι σε ένα κουτί (α) έχουμε 6 πράσινες κάρτες και θέλουμε να βγάλουμε (να αφαιρέσουμε) 4 κόκκινες κάρτες. Όμως κάτι τέτοιο είναι αδύνατον, αφού δεν υπάρχουν για να βγάλουμε κόκκινες κάρτες από το κουτί (α).



(α) (β) (γ)

Σκεφτόμαστε λοιπόν το εξής:
Βάζουμε στο κουτί (α) τέσσερις κόκκινες κάρτες και για να μην αλλάξει η αξία του περιεχομένου βάζουμε και τέσσερις πράσινες κάρτες. Ουσιαστικά προσθέτουμε το μηδέν το οποίο είναι ίσο με (−4) + (+4). Έτσι προκύπτει το κουτί (β) από το οποίο τώρα μπορούμε να αφαιρέσουμε 4 κόκκινες κάρτες.

Βγάζοντας πλέον τις 4 κόκκινες κάρτες, μένουν 10 πράσινες κάρτες (κουτί γ).

Συμβολικά: $\mathbf{(+6)-(-4)=+10}$

Παρατηρούμε ότι το ίδιο αποτέλεσμα έχουμε προσθέτοντας στον 6 τον αντίθετο του − 4, δηλαδή:

$$\mathbf{(+6)-(-4)=(+6)+(+4)=+10}.$$

Γενικά

Για να αφαιρέσουμε έναν αριθμό β από έναν αριθμό α, προσθέτουμε στον α τον αντίθετο του β.

$$\boldsymbol{\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)}$$

Για παράδειγμα, $(+12) - (+15) = (+12) + (-15) = -3$,

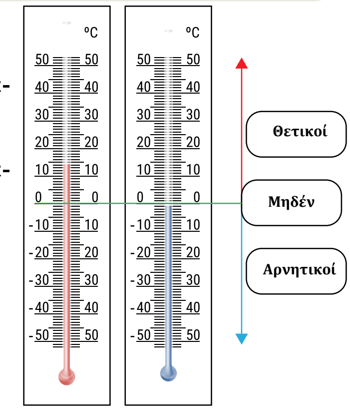
$(-13) - (+5) = (-13) + (-5) = -18$,
$(-22) - (-17) = (-12) + (+17) = +5$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Το θερμόμετρο στην Καλαμάτα δείχνει 15 °C ενώ στην Κοζάνη δείχνει –2 °C. Πόσους βαθμούς πρέπει να προσθέσουμε στη θερμοκρασία της μιας πόλης για να φτάσουμε τη θερμοκρασία της άλλης;

Απάντηση

- Για να φτάσουμε στην Κοζάνη τη θερμοκρασία της Καλαμάτας, πρέπει να προσθέσουμε τη διαφορά: $15 - (-2) = 15 + 2 = 17$ °C
- Για να φτάσουμε στην Καλαμάτα τη θερμοκρασία της Κοζάνης, πρέπει να προσθέσουμε τη διαφορά: $(-2) - (+15) = (-2) + (-15) = -17$ °C



Αυτοαξιολόγηση

Να τοποθετήσετε δίπλα στις στήλες ΣΩΣΤΟ, ΛΑΘΟΣ ένα ✓ ανάλογα με το αν η πρόταση είναι σωστή ή λανθασμένη.

	Σωστό	Λάθος
1. Το άθροισμα ομόσημων είναι πάντα θετικός.	☐	☐
2. Το άθροισμα δύο αρνητικών είναι πάντα αρνητικός.	☐	☐
3. Το άθροισμα δύο αντίθετων αριθμών μπορεί να μην είναι μηδέν.	☐	☐
4. Στην πρόσθεση δύο μη μηδενικών ακέραιων το αποτέλεσμα είναι μεγαλύτερο από κάθε έναν προσθετέο.	☐	☐
5. Αν το άθροισμα δύο ακέραιων είναι αρνητικός τότε και οι δύο προσθετέοι είναι αρνητικοί.	☐	☐
6. Αν $α + β = 0$ τότε ο β είναι ο αντίθετος του α.	☐	☐

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να υπολογίσετε τα αθροίσματα.

α) $(+8) + (+4)$ **δ)** $(+6) + (+12)$
β) $(+11) + (+8)$ **ε)** $(+22) + (+22)$
γ) $(+1) + (+1)$ **στ)** $(+56) + (+32)$

2 Να υπολογίσετε τα αθροίσματα.

α) $(-4) + (-5)$ **δ)** $(-3) + (-13)$
β) $(-50) + (-15)$ **ε)** $(-26) + (-26)$
γ) $(-1) + (-8)$ **στ)** $(-46) + (-21)$

3 Να υπολογίσετε τα αθροίσματα.

α) $(-4) + (+8)$ **δ)** $(-55) + (+15)$
β) $(+47) + (-10)$ **ε)** $(-26) + (+6)$
γ) $(+24) + (-7)$ **στ)** $(-46) + (+14)$

4 Να υπολογίσετε τις διαφορές.

α) $(+4) - (+2)$ **δ)** $(+35) - (-54)$
β) $(-12) - (-4)$ **ε)** $(-19) - (+15)$
γ) $(-28) - (+1)$ **στ)** $(-52) - (-12)$

5 Να υπολογίσετε τα αθροίσματα.

α) $(+12) + (-8) + (+2) + (-50) + (-30)$
β) $(-5) + (-6) + (+7) + (+8) + (-2) + (+10)$
γ) $(-19) + (-26) + (+17) + (+38) + (-22) + (+15)$

6 Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

α	β	α + β	α – β
–2	4		
	10	6	
20			–5

2.4 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

- Να πολλαπλασιάζουν ακέραιους αριθμούς χρησιμοποιώντας εποπτικά μοντέλα και να καταλήγουν στον ορισμό του πολλαπλασιασμού ακεραίων.
- Να διατυπώνουν και να χρησιμοποιούν τον ορισμό των δυνάμεων με βάση ακέραιο και εκθέτη φυσικό $ν > 0$ σε υπολογισμούς.

2.4.1 Πολλαπλασιασμός

Διερεύνηση 1

Ο Νίκος έχει ανοίξει ένα αρτοποιείο και ο Αποστόλης ένα εστιατόριο. Μετράνε τα κέρδη και τις ζημιές που έχουν μια συγκεκριμένη εποχή για 10 συνεχόμενες ημέρες και διαπιστώνουν ότι κάθε ημέρα:

Ο Νίκος έχει σταθερά κέρδη 200€ και ο Αποστόλης έχει σταθερά ζημιά 150€.

α) Τι παριστάνει και με τι ισούται ο αριθμός: $(+200) \cdot (+10)$;

β) Τι παριστάνει και με τι ισούται ο αριθμός: $(-150) \cdot (+10)$;

Πολλαπλασιασμός δύο θετικών ακεραίων

Διερευνήστε τον πολλαπλασιασμό θετικού αριθμού με θετικό αριθμό με την εφαρμογή.

Πολλαπλασιασμός ακεραίων (θετικός με αρνητικό)

Διερευνήστε τον πολλαπλασιασμό θετικού αριθμού με αρνητικό αριθμό με την εφαρμογή.

Παρατηρούμε στους διπλανούς πολλαπλασιασμούς ενός αρνητικού παράγοντα (-2) με έναν θετικό παράγοντα ο οποίος διαδοχικά μειώνεται κατά μία μονάδα κάθε φορά, ότι τα γινόμενα αυξάνονται αντίστοιχα κατά 2 μονάδες κάθε φορά:

Για να διατηρηθεί το ίδιο μοτίβο αύξησης και μετά τον μηδενισμό του δεύτερου παράγοντα, πρέπει να ορίσουμε ότι:
$(-2) \cdot (-1) = +2$, $(-2) \cdot (-2) = +4$, $(-2) \cdot (-3) = +6$, κ.λπ.

$(-2)\cdot(+3)$	$= \mathbf{-6}$
$(-2)\cdot(+2)$	$= \mathbf{-4}$
$(-2)\cdot(+1)$	$= \mathbf{-2}$
$(-2)\cdot 0$	$= \mathbf{0}$
$(-2)\cdot(-1)$	= ;
$(-2)\cdot(-2)$	= ;
$(-2)\cdot(-3)$	= ;

Πολλαπλασιασμός ακεραίων (αρνητικός με θετικό)

Διερευνήστε τον πολλαπλασιασμό αρνητικού με θετικό αριθμό με την εφαρμογή.

Γενικά:

- Για να **πολλαπλασιάσουμε** δύο **ομόσημους** ακέραιους αριθμούς πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο αποτέλεσμα βάζουμε το πρόσημο «+».
- Για να **πολλαπλασιάσουμε** δύο **ετερόσημους** ακέραιους αριθμούς πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο αποτέλεσμα βάζουμε το πρόσημο «–».

Να θυμάμαι

$(+) \cdot (+) = +$

$(-) \cdot (-) = +$

$(+) \cdot (-) = -$

$(-) \cdot (+) = -$

Πολλαπλασιασμός δύο αρνητικών ακεραίων

Διερευνήστε τον πολλαπλασιασμό αρνητικού αριθμού με αρνητικό αριθμό με την εφαρμογή.

Πολλαπλασιασμός ακεραίων

Πειραματιστείτε με τη βοήθεια της εφαρμογής και διαμορφώστε έναν μνημονικό κανόνα για τον «πολλαπλασιασμό προσήμων».

Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού

- $\boldsymbol{\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha}$ Αντιμεταθετική ιδιότητα: Μας επιτρέπει να εναλλάσσουμε τους παράγοντες

Για παράδειγμα, $(-5)\cdot(+4) = (+4)\cdot(-5) = -20$

- $\boldsymbol{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = (\alpha \cdot \beta)\cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)}$ Προσεταιριστική ιδιότητα: Μας επιτρέπει να πολλαπλασιάζουμε με όποια σειρά θέλουμε.

Για παράδειγμα, $(-3)\cdot(-1)\cdot(+4) = [(-3)\cdot(-1)]\cdot(+4) = (+3)\cdot(+4) = +12$
$(-3)\cdot(-1)\cdot(+4) = (-3)\cdot[(-1)\cdot(+4)] = (-3)\cdot(-4) = +12$

- $\boldsymbol{\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma}$ Επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση.

Για παράδειγμα, $(-2)\cdot[(-3)+(+4)] = (-2)\cdot(+1) = -2$
$(-2)\cdot[(-3)+(+4)] = (-2)\cdot(-3)+(-2)\cdot(+4) = (+6)+(-8) = -2$

- $\boldsymbol{\alpha \cdot (\beta - \gamma) = \alpha \cdot \beta - \alpha \cdot \gamma}$ Επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την αφαίρεση.

Για παράδειγμα, $(-2)\cdot[(-3)-(+4)] = (-2)\cdot(-7) = +14$
$(-2)\cdot[(-3)-(+4)] = (-2)\cdot(-3)-(-2)\cdot(+4) = (+6)-(-8) = +14$

- Αν $\boldsymbol{\alpha \cdot \beta = 1}$ τότε οι αριθμοί λέγονται **αντίστροφοι**.
- $\boldsymbol{\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha}$ Όταν ένας αριθμός πολλαπλασιάζεται με τον αριθμό 1 δεν μεταβάλλεται.

Ο αριθμός 1 λέγεται **ουδέτερο στοιχείο** του πολλαπλασιασμού.

- $\boldsymbol{\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0}$ Όταν ένας αριθμός πολλαπλασιάζεται με τον αριθμό 0 μηδενίζεται.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να βρείτε το γινόμενο των παρακάτω παραγόντων.

$$(-2)\cdot(+5)\cdot(-1)\cdot(+3)\cdot(-7)\cdot(-5)\cdot(+10)$$

Απάντηση

Για την εύρεση του γινομένου οι πολλαπλασιασμοί γίνονται με τη σειρά, δηλαδή:

$$(-2)\cdot(+5)\cdot(-1)\cdot(+3)\cdot(-7)\cdot(-5)\cdot(+10) =$$
$$(-10)\cdot(-1)\cdot(+3)\cdot(-7)\cdot(-5)\cdot(+10) =$$
$$(+10)\cdot(+3)\cdot(-7)\cdot(-5)\cdot(+10) =$$
$$(+30)\cdot(-7)\cdot(-5)\cdot(+10) =$$
$$(-210)\cdot(-5)\cdot(+10) =$$
$$(+1050)\cdot(+10) = +10500$$

Η διαδικασία όμως αυτή είναι χρονοβόρα και επίπονη. Γι’ αυτό, χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες του πολλαπλασιασμού. Γράφουμε όλους τους θετικούς παράγοντες μαζί και το ίδιο κάνουμε και για τους αρνητικούς παράγοντες, οπότε: $(-2)\cdot(+5)\cdot(-1)\cdot(+3)\cdot(-7)\cdot(-5)\cdot(+10) = (+5)\cdot(+3)\cdot(+10)\cdot(-2)\cdot(-1)\cdot(-7)\cdot(-5)$
Οι θετικοί παράγοντες δίνουν πρόσημο «+» και οι τέσσερις αρνητικοί παράγοντες πρόσημο, «+» οπότε το πρόσημο του αποτελέσματος θα είναι «+» και πολλαπλασιάζοντας τις απόλυτες τιμές των παραγόντων παίρνουμε: +10500.

Γενικά:

Το γινόμενο παραγόντων είναι:

- **Θετικός αριθμός**, όταν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι άρτιος αριθμός.
  Παράδειγμα: $(+3)\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(-5) = +90$
- **Αρνητικός αριθμός**, όταν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι περιττός αριθμός.
  Παράδειγμα: $(+3)\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot(-3) = -18$
- **Μηδέν**, όταν ένας τουλάχιστον απο τους παράγοντες είναι μηδέν.
  Παράδειγμα: $(+3)\cdot(-1)\cdot(2-2) = (+3)\cdot(-1)\cdot 0 = 0$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω σχέσεις με τα σύμβολα « = », « > », « < ».

α) Αν $(-2)\cdot x > 0$, τότε $x \ldots 0$

β) Αν $(+3)\cdot \alpha < 0$, τότε $\alpha \ldots 0$

γ) Αν $(+4)\cdot(-3)\cdot x = 0$, τότε $x \ldots 0$

Απάντηση

α) Επειδή το γινόμενο των δύο παραγόντων είναι θετικός αριθμός και ο ένας παράγοντας του γινομένου είναι αρνητικός αριθμός, τότε και ο άλλος παράγοντας θα πρέπει να είναι αρνητικός αριθμός, οπότε: $x < 0$.

β) Επειδή το γινόμενο των δύο παραγόντων είναι αρνητικός αριθμός και ο ένας παράγοντας του γινομένου είναι θετικός αριθμός, τότε ο άλλος παράγοντας θα πρέπει να είναι αρνητικός αριθμός, οπότε: $\alpha < 0$.

γ) Επειδή το γινόμενο είναι 0, ένας τουλάχιστον παράγοντας θα πρέπει να είναι μηδέν, οπότε: $x = 0$.

2.4.2 Δυνάμεις

Η δύναμη $\boldsymbol{\alpha^\nu}$ (α στη ν), για **α** ακέραιο και **ν** φυσικό με **ν >** 1, ορίζεται, όπως και στην περίπτωση που ο **α** είναι φυσικός, δηλαδή από τη σχέση: $\boldsymbol{\alpha^\nu = \underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdots\alpha}_{\nu}}$

Ειδικά, όταν ν = 1, έχουμε $\boldsymbol{\alpha^1 = \alpha}$.

Η δύναμη $\boldsymbol{\alpha^2}$ διαβάζεται «α στο τετράγωνο» (επειδή εκφράζει το εμβαδόν του τετραγώνου πλευράς α), η δύναμη $\boldsymbol{\alpha^3}$ διαβάζεται «α στον κύβο» (επειδή εκφράζει τον όγκο του κύβου ακμής α) και δύναμη $\boldsymbol{\alpha^\nu}$ διαβάζεται «α στη ν» ή «νιοστή δύναμη του α»

Παραδείγματα: $5^2 = 5\cdot 5 = 25$, $(-2)^2 = (-2)(-2) = 4$, $(-3)^4 = (-3)(-3)(-3)(-3) = 9\cdot 9 = 81$, $(-23)^1 = -23$.

Παρατηρούμε ότι:

$$(+3)^2 = +9,\ (+3)^3 = +27,\ (-3)^2 = +9 > 0\ ,\ (-3)^3 = -27 < 0$$

Γενικά

- Όταν η βάση α είναι θετικός ακέραιος, η δύναμη είναι θετικός αριθμός.
- Όταν η βάση είναι αρνητικός ακέραιος, δηλαδή $\alpha < 0$ τότε:
  ✓ αν ν άρτιος (ζυγός) τότε $\alpha^\nu > 0$
  ✓ αν ν περιττός (μονός) τότε $\alpha^\nu < 0$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να υπολογίσετε τις δυνάμεις.

α) 4^2 **δ)** -4^2 **ζ)** 1^{2024}

β) $(-4)^2$ **ε)** -4^3 **η)** $(-1)^{2024}$

γ) $(-4)^3$ **στ)** 1^3

Απάντηση

α) $4^2 = 4 \cdot 4 = 16$

β) $(-4)^2 = (-4)\cdot(-4) = 16$

γ) $(-4)^3 = (-4)\cdot(-4)\cdot(-4) = -64$

δ) $-4^2 = -4 \cdot 4 = -16$

ε) $-4^3 = -4 \cdot 4 \cdot 4 = -64$

στ) $1^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

ζ) $1^{2024} = \underbrace{1 \cdot 1 \cdots 1}_{2024} = 1$

η) $(-1)^{2024} = \underbrace{(-1)\cdot(-1)\cdots(-1)\cdot(-1)}_{2024} = 1$

Σημείωση:

$(-\alpha)^2 \neq -\alpha^2$, $\alpha \neq 0$ *Για παράδειγμα* $(-2)^2 = 4 \neq -2^2 = -4$

Αυτοαξιολόγηση

Να τοποθετήσετε δίπλα στις στήλες ΣΩΣΤΟ, ΛΑΘΟΣ ένα ✓ ανάλογα με το αν η πρόταση είναι σωστή ή λανθασμένη.

	Σωστό	Λάθος
1. Το γινόμενο δύο θετικών είναι πάντα θετικός αριθμός.	☐	☐
2. Το γινόμενο δύο αρνητικών ακέραιων είναι πάντα αρνητικός.	☐	☐
3. Το γινόμενο ενός μη μηδενικού ακεραίου με τον εαυτό του είναι πάντα θετικός.	☐	☐
4. Ισχύει $(-8)^2 = 64$	☐	☐
5. Ισχύει $-8^2 = 64$	☐	☐
6. Ο αριθμός $(-3)^{20}$ είναι θετικός.	☐	☐
7. Ο αριθμός $(-3)^{25}$ είναι θετικός.	☐	☐
8. Οι δυνάμεις με βάση το 1 είναι ίσες με το 1, π.χ. $1^9=1$.	☐	☐

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να υπολογίσετε τα γινόμενα.

α) $(+3)\cdot(+7)$ **δ)** $(-7)\cdot(-15)$

β) $(+9)\cdot(+80)$ **ε)** $(-2)\cdot(+20)$

γ) $(-6)\cdot(-8)$ **στ)** $(-6)\cdot(+12)$

2 Να υπολογίσετε τα γινόμενα.

α) $(+10)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(+5)$

β) $(-12)\cdot(+3)\cdot(-7)\cdot(-4)\cdot(+6)$

γ) $(-20)\cdot(-3)\cdot(-8)\cdot(+5)$

δ) $(+2)\cdot(+15)\cdot(-7)\cdot(-4)\cdot(-6)$

3 Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων με δύο τρόπους.

α) $(-1)\cdot[(-4)-(-3)]$

β) $(-10)\cdot[(-4)+(+10)]$

γ) $(-16)\cdot(-4)-(-16)\cdot(-3)$

δ) $(-4)\cdot(+2)+(-7)\cdot(-4)$

4 Να υπολογίσετε τις δυνάμεις.

α) 6^2 **ε)** -6^3

β) $(-6)^2$ **στ)** 1^{1000}

γ) $(-6)^3$ **ζ)** $(-1)^{1000}$

δ) -6^2 **η)** $(-1)^{1001}$

5 Να βρείτε το πρόσημο των δυνάμεων.

α) 25^{12}

β) $(-25)^{12}$

γ) $(-25)^{15}$

δ) $(-2)^{2023}$

6 Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

α	β	α + β	α – β	αβ
–6	3			
1		–3		
	–10			–20

7 Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις.

α) Αν $(-2)^\nu > 0$, τότε ο ν είναι ....

β) Αν $\alpha^{11} < 0$, τότε ο α είναι ....

γ) Αν $(-4)^\nu \cdot (-3)^5 > 0$, τότε ο ν είναι ....

2.5 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕ ΑΚΕΡΑΙΟΥΣ

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

- Να ερμηνεύουν τις πολλαπλές σημασίες των συμβόλων «+» και «–».
- Να συγκρίνουν το νόημα της πρόσθεσης ως αύξησης και της αφαίρεσης ως ελάττωσης στους φυσικούς με το νόημα των αντίστοιχων πράξεων στους ακέραιους.
- Να μοντελοποιούν και να λύνουν προβλήματα με ακέραιους σε πραγματικά και μαθηματικά πλαίσια.

Όπως αναφέραμε και στο πρώτο κεφάλαιο, συχνά κατά την επίλυση προβλημάτων, εμφανίζονται παραστάσεις με αριθμούς και πράξεις μεταξύ αυτών τις οποίες ονομάζουμε **«αριθμητικές παραστάσεις»**. Η σειρά με την οποία συμφωνούμε να εκτελούμε τις πράξεις είναι συγκεκριμένη, επηρεάζει το αποτέλεσμα και είναι η παρακάτω.

Προτεραιότητα των πράξεων:

- Εκτελούμε τις πράξεις με την ακόλουθη σειρά:
  1. Δυνάμεις.
  2. Πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις, με τη σειρά (από αριστερά προς τα δεξιά) που εμφανίζονται.
  3. Προσθέσεις και αφαιρέσεις με τη σειρά (από αριστερά προς τα δεξιά) που εμφανίζονται.
- Αν η παράσταση **έχει παρενθέσεις** εκτελούμε **πρώτα** τις πράξεις μέσα σε αυτές, με τη σειρά που ήδη περιγράψαμε.

Για παράδειγμα,

Α)
$$\begin{aligned}(-2)^2 + 3\cdot(-1) - 4\cdot(-3)^3 - 10 &=\\ 4 + 3\cdot(-1) - 4\cdot(-27) - 10 &=\\ 4 + (-3) + 108 - 10 &=\\ 4 - 3 + 108 - 10 &=\\ 1 + 108 - 10 &=\\ 109 - 10 &= 99\end{aligned}$$

Β)
$$\begin{aligned}(-3)^2 + (-2)\cdot[(+3)\cdot(-2)^2 + (-10)] &=\\ (-3)^2 + (-2)\cdot[(+3)\cdot(+4) + (-10)] &=\\ (-3)^2 + (-2)\cdot[(+12) + (-10)] &=\\ (-3)^2 + (-2)\cdot(+2) &=\\ (+9) + (-2)\cdot(+2) &=\\ (+9) + (-4) &= 5\end{aligned}$$

Όταν δεν υπάρχει ο κίνδυνος σύγχυσης, τα σημεία της πράξης της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού παραλείπονται. Έτσι, γράφουμε $+3-5$ αντί $(+3)+(-5)$ και $(-4)(+3)$ αντί $(-4)\cdot(+3)$.

Δεν παραλείπεται όμως **ποτέ** σημείο πράξης μεταξύ δύο αριθμών.
Για παράδειγμα: 23 είναι ο αριθμός είκοσι τρία, ενώ $2 \cdot 3$ είναι ο αριθμός 6.

Επιπλέον πρέπει να έχουμε υπόψη μας ότι εννοείται πολλαπλασιασμός, όταν δεν υπάρχει σημάδι πράξης:
- Μεταξύ δύο παρενθέσεων.
- Μεταξύ αριθμού και παρένθεσης.
- Μεταξύ αριθμού και μεταβλητής.

Διερεύνηση 1

Ο Ηλίας και η Έλενα, σε κάποιο βιβλίο βρήκαν την εξής παράσταση $+3 + (2 + 5)$. Μεταξύ τους υπήρξε διαφωνία σχετικά με το τι σύμβολο είναι το σύμβολο «+» και τι παριστάνει κάθε φορά, δηλαδή αν είναι «το σημάδι της πρόσθεσης» ή αν είναι «το πρόσημο του αριθμού». Βοηθήστε τους να λύσουν τη διαφορά.

Διερεύνηση 2

Η Μαρίνα και ο Νίκος, σε κάποιο βιβλίο βρήκαν την εξής παράσταση $-4 - (3 - 7)$. Μεταξύ τους υπήρξε διαφωνία σχετικά με το αν το σύμβολο «–» παριστάνει «το σημάδι της αφαίρεσης», «τον αντίθετο του αριθμού» ή «το πρόσημο αριθμού». Βοηθήστε τους να λύσουν τη διαφορά.

Τα σύμβολα «+» και «–» έχουν διαφορετική σημασία ανάλογα με το τι περιγράφουν.

Α. Το σύμβολο «+» συμβολίζει:

α) την πράξη της πρόσθεσης.

β) το πρόσημο των θετικών ακέραιων.

Β. Το σύμβολο «–» συμβολίζει:

α) την πράξη της αφαίρεσης.

β) το σύμβολο του αντίθετου αριθμού.

γ) το πρόσημο των αρνητικών ακέραιων.

Ωστόσο κατά την εκτέλεση των πράξεων, με όποια σημασία και αν ερμηνεύσουμε τα σύμβολα «+» και «–» το αποτέλεσμα δεν αλλάζει.

Διερεύνηση 3

Ο Γιώργος και η Λουίζα διαφωνούν σχετικά με την πρόσθεση και την αφαίρεση.
Η Λουίζα υποστηρίζει ότι η πρόσθεση πάντα αυξάνει κάποιο ποσό, ενώ η αφαίρεση πάντα το μειώνει.
Ο Γιώργος υποστηρίζει ότι έχει σημασία για το τι αριθμούς μιλάμε, αν δηλαδή είναι φυσικοί ή ακέραιοι.

Βοηθήστε τους να λύσουν τη διαφορά τους δίνοντας παραδείγματα προσθέσεων και αφαιρέσεων με φυσικούς και με ακέραιους αριθμούς. Τι συμπεραίνετε;

Στους φυσικούς αριθμούς πρόσθεση σημαίνει αύξηση. Αυτό όμως δεν ισχύει πάντοτε και στους ακέραιους αριθμούς. Στους αρνητικούς ακέραιους η πρόσθεση σημαίνει μείωση, ενώ στους ετερόσημους ακέραιους το άθροισμα είναι μεγαλύτερο από τον αρνητικό και μικρότερο από τον θετικό.

Ειδικότερα:

- **Φυσικοί αριθμοί διαφορετικοί από το μηδέν δηλαδή θετικοί ακέραιοι:**
  Σε όλες τις περιπτώσεις το άθροισμα είναι μεγαλύτερο και από δύο προσθετέους.
  Παραδείγματα: $15 + 17 = 32$, $(+12) + (+11) = +23$, $17 + (+23) = 40$.

- **Αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί:**
  Σε όλες τις περιπτώσεις το άθροισμα είναι μικρότερο και από δύο προσθετέους.
  Παραδείγματα: $(-12) + (-11) = -23$, $-17-23 = -40$, $-15 + (-11) = -26$.

- **Ετερόσημοι ακέραιοι αριθμοί:**
  Το άθροισμα είναι μεγαλύτερο από τον αρνητικό και μικρότερο από τον θετικό.
  Παραδείγματα: $(-18) + (+12) = -6$, $+26 -17 = +9$, $+17-26 = -9$.

Ανάλογα ισχύουν και για την αφαίρεση. Στους φυσικούς αριθμούς η αφαίρεση σημαίνει πάντα μείωση του μειωτέου. Στους ακεραίους όμως κάτι τέτοιο δεν ισχύει πάντοτε.

Ειδικότερα:

- **Φυσικοί αριθμοί διαφορετικοί από το μηδέν, δηλαδή θετικοί ακέραιοι:**
  Σε όλες τις περιπτώσεις η διαφορά είναι μικρότερη από τον μειωτέο.
  Παραδείγματα: $15 - 17 = -2$, $(+12) - (+11) = +1$, $17 - (+23) = -6$
- **Αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί:**
  Σε όλες τις περιπτώσεις η διαφορά είναι μεγαλύτερη από τον μειωτέο.
  Παραδείγματα: $(-12) - (-13) = +1$, $-17 - (-23) = +6$, $(-15) - (-11) = -4$.
- **Ετερόσημοι ακέραιοι αριθμοί:**
  Η διαφορά άλλοτε είναι μεγαλύτερη από τον μειωτέο και άλλοτε μικρότερη από αυτόν.
  Παραδείγματα: $(-18) - (+12) = -30$, $26 - 17 = +9$, $(+17) - (-26) = 43$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Σύμφωνα με την Εθνική Μετεωρολογική Υπηρεσία στην Κοζάνη, μια ημέρα του Ιανουαρίου ενός έτους, έχει καταγραφεί μέγιστη θερμοκρασία ίση με 6°C και ελάχιστη −5°C. Η απόλυτη τιμή της διαφοράς των τιμών αυτών καλείται Ημερήσιο Θερμομετρικό Εύρος (Η.Θ.Ε). Προσδιορίστε το Η.Θ.Ε. για την Κοζάνη τη συγκεκριμένη ημέρα.
Μια άλλη ημέρα του ίδιου μήνα καταγράφηκε στη Ρόδο μέγιστη θερμοκρασία 15°C και ελάχιστη 9°C περίπου. Ποιο ήταν το Η.Θ.Ε. για τη Ρόδο; Πώς εξηγείτε τη διαφορά των δύο τιμών;

Απάντηση

Για τη διαφορά θερμοκρασίας στην Κοζάνη έχουμε $|6 - (-5)| = |6 + 5| = 11$. Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει γράφοντας $|(-5) - 6| = |-5 - 6| = |-11| = -(-11) = 11$
Άρα $(\text{Η.Θ.Ε.})_{\text{Κ}} = 11^{\circ}\text{C}$.
Αντίστοιχα για τη Ρόδο παίρνουμε ότι $|15 - 9| = 6$, οπότε: $(\text{Η.Θ.Ε.})_{\text{Ρ}} = 6^{\circ}\text{C}$.
Όπως προκύπτει, στη Ρόδο έχουμε μικρότερο Η.Θ.Ε. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η Ρόδος βρέχεται από θάλασσα και γνωρίζουμε από τη Φυσική ότι το νερό ψύχεται και θερμαίνεται σχετικά δύσκολα. Απαιτείται, δηλαδή, πολλή θερμότητα (ενέργεια) για να μεταβληθεί η θερμοκρασία του κατά έναν βαθμό Κελσίου σε σχέση με το στερεό έδαφος.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Ένα υποβρύχιο βρίσκεται σε βάθος 72m. Ο κυβερνήτης στη συνέχεια έδωσε διαδοχικά κατά διαστήματα τις ακόλουθες εντολές: κατάδυση 5m, κατάδυση 7m, άνοδο 9m, άνοδο 5m, κατάδυση 7m, άνοδο 9m .
Ποιο είναι το βάθος στο οποίο βρίσκεται μετά την εκτέλεση των εντολών το υποβρύχιο;

Απάντηση

Το υποβρύχιο βρίσκεται στα −72m και κατάδυση σημαίνει αρνητικός αριθμός, **ενώ** άνοδος σημαίνει θετικός αριθμός. Έτσι μετά την εκτέλεση των εντολών έχουμε:

$$-72 - 5 - 7 + 9 + 5 - 7 + 9 = (9 + 5 + 9) + (-72 - 5 - 7 - 7) = 23 + (-91) = 23 - 91 = -68.$$

Άρα το υποβρύχιο βρίσκεται τελικά σε βάθος 68m.

Γλωσσάρι
Ακέραιων Αριθμών

Για μια επανάληψη στις έννοιες των ακέραιων αριθμών, ανοίξτε την ψηφιακή εφαρμογή.

Αυτοαξιολόγηση

Να τοποθετήσετε στις στήλες ΣΩΣΤΟ, ΛΑΘΟΣ ένα ✓ ανάλογα με το αν η πρόταση είναι σωστή ή λανθασμένη.	Σωστό	Λάθος
1. Σε μια αριθμητική παράσταση πρώτα εκτελούμε τις πράξεις στις παρενθέσεις.	☐	☐
2. Σε μια αριθμητική παράσταση, αν δεν έχουμε παρενθέσεις και δυνάμεις, πρώτα εκτελούμε τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις.	☐	☐
3. Αν αφαιρέσουμε αρνητικό από αρνητικό, προκύπτει αρνητικός.	☐	☐
4. Το σημείο «+» μπορούμε να το παραλείψουμε όταν συμβολίζει το πρόσημο του αριθμού.	☐	☐
5. Το σημείο «–» μπορούμε να το παραλείψουμε όταν συμβολίζει την αφαίρεση.	☐	☐
6. Στους ακέραιους αριθμούς η πρόσθεση σημαίνει πάντα αύξηση και η αφαίρεση πάντα ελάττωση.	☐	☐

Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις.

7. Το σύμβολο «+» συμβολίζει:

- την πράξη της ....
- το .... ακέραιων.

8. Το σύμβολο «–» συμβολίζει:

- την πράξη της ....
- το .... ακέραιων.
- τον ....ενός αριθμού.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

α. $A = (-1)^5 \cdot 2 - 4 + (-5)^2 - 3 \cdot 8 + 2^2[1 - (-1)^3 \cdot 2]$

β. $B = (-6)^2 - [+4 - 9 + (-2)(-3)]^2 - 4(-3)^2 - 13$

γ. $\Gamma = 3 + 2(-3)^3 - 8(-2)^3 - 12$

δ. $\Delta = 12 - 3[5 - (-2)^2] - 3[(-4) + 2] - 3^2$

2 Να γράψετε αναλυτικά την παράσταση $3 - 2(4 - 3) + 3(-1 + 2)$, χρησιμοποιώντας όλα τα σύμβολα των πράξεων και τα πρόσημα που έχουμε παραλείψει.

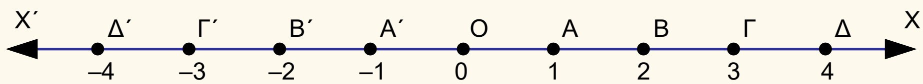
3 Ένας έμπορος αγόρασε 200 κιλά λάδι προς 6€ το κιλό. Στη συνέχεια πούλησε τα 150 προς 10€ το κιλό και αγόρασε άλλα 100 κιλά προς 8€ το κιλό. Τέλος τα πούλησε όλα προς 11€ το κιλό. Να γράψετε μια αριθμητική παράσταση που εκφράζει την οικονομική πράξη του εμπόρου. Να βρείτε το ποσό που κέρδισε ο έμπορος.

4 Στη Στοκχόλμη, μια ημέρα του Δεκεμβρίου, καταγράφεται μέγιστη θερμοκρασία ίση με −8 και ελάχιστη −14. Την ίδια μέρα στο Παρίσι , έχει καταγραφεί μέγιστη θερμοκρασία ίση με 8 και ελάχιστη −2, ενώ στην Αθήνα έχει καταγραφεί μέγιστη θερμοκρασία ίση με 18 και ελάχιστη 9. Να βρείτε το Ημερήσιο Θερμομετρικό Εύρος (Η.Θ.Ε) τη συγκεκριμένη ημέρα στις τρεις πόλεις.

5 Ένα αναγνωριστικό αεροπλάνο βρίσκεται σε ύψος 3200m. Ο κυβερνήτης στη συνέχεια έκανε διαδοχικά τους ακόλουθους ελιγμούς: Ανέβηκε 250m, κατέβηκε 700m, ανέβηκε 400m, ανέβηκε 500m, κατέβηκε 700m, ανέβηκε 800m. Ποιο είναι το ύψος στο οποίο θα βρεθεί, μετά τους ελιγμούς, το αεροπλάνο;

Ανακεφαλαίωση

- **Ακέραιοι αριθμοί** είναι οι φυσικοί αριθμοί μαζί με τους αντίστοιχους αρνητικούς αριθμούς.
  Το σύνολο των ακέραιων αριθμών το συμβολίζουμε με Ζ.
  Τα σύμβολα «+» και «–» που βάζουμε μπροστά από τους αριθμούς λέγονται **πρόσημα**.
  Το μηδέν δεν έχει πρόσημο, δηλαδή δεν είναι ούτε θετικός ούτε αρνητικός αριθμός.
- Δύο ή περισσότεροι αριθμοί με το ίδιο πρόσημο λέγονται **ομόσημοι**.
- Δύο αριθμοί με διαφορετικό πρόσημο λέγονται **ετερόσημοι**.
  Ο ημιάξονας των φυσικών επεκτείνεται στον άξονα των ακέραιων.



- **Απόλυτη τιμή** ενός αριθμού α ονομάζουμε την απόστασή του από το μηδέν και τη συμβολίζουμε με **|α|**.
  Η απόλυτη τιμή δεν είναι ποτέ αρνητικός αριθμός.
  Δύο **αντίθετοι αριθμοί** και διάφοροι του μηδενός είναι ετερόσημοι και έχουν την ίδια απόλυτη τιμή.
- Κάθε ακέραιος αριθμός που βρίσκεται δεξιά από έναν άλλο στον άξονα των ακεραίων, είναι μεγαλύτερός του.
- Κάθε ακέραιος αριθμός που βρίσκεται αριστερά από έναν άλλο στον άξονα των ακεραίων είναι μικρότερός του.

Έτσι:

✓ Κάθε θετικός ακέραιος είναι μεγαλύτερος από το μηδέν και από κάθε αρνητικό ακέραιο.
✓ Κάθε αρνητικός ακέραιος είναι μικρότερος από το μηδέν και από κάθε θετικό ακέραιο.
✓ Μεταξύ δύο θετικών αριθμών **μεγαλύτερος** είναι εκείνος που έχει τη **μεγαλύτερη απόλυτη τιμή**.
✓ Μεταξύ δύο αρνητικών αριθμών **μεγαλύτερος** είναι εκείνος που έχει τη **μικρότερη απόλυτη τιμή**.

Για παράδειγμα: $-8 < -5$, επειδή $|-5| = 5 < 8 = |-8|$.

- Για να **προσθέσουμε** δύο **ομόσημους** αριθμούς, προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο άθροισμά τους βάζουμε το κοινό τους πρόσημο.
  Για να **προσθέσουμε** δύο **ετερόσημους** αριθμούς, αφαιρούμε τη μικρότερη απόλυτη τιμή από τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή και στη διαφορά βάζουμε το πρόσημο του αριθμού με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

Ιδιότητες της πρόσθεσης

✓ $\boldsymbol{\alpha + \beta = \beta + \alpha}$ (Αντιμεταθετική ιδιότητα)
✓ $\boldsymbol{\alpha + \beta + \gamma = (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)}$ (Προσεταιριστική ιδιότητα)
✓ $\boldsymbol{\alpha} + 0 = 0 + \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}$. Το μηδέν λέγεται ουδέτερο στοιχείο.
✓ $\boldsymbol{\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha} = 0$. Για κάθε ακέραιο **α** υπάρχει ο αντίθετός του, που είναι ο $-\alpha$.

- Για να **αφαιρέσουμε** από έναν αριθμό α έναν αριθμό β, προσθέτουμε στον α τον αντίθετο του β,
  $\boldsymbol{\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)}$
  Το άθροισμα δύο **αντίθετων αριθμών** είναι μηδέν.
  Για να **πολλαπλασιάσουμε** δύο **ομόσημους** ακεραίους αριθμούς πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο αποτέλεσμα βάζουμε το πρόσημο «+».
- Για να **πολλαπλασιάσουμε** δύο **ετερόσημους** ακέραιους αριθμούς πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο αποτέλεσμα βάζουμε το πρόσημο «–».

Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού

✓ $\boldsymbol{\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha}$ (Αντιμεταθετική ιδιότητα)
✓ $\boldsymbol{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)}$ (Προσεταιριστική ιδιότητα)
✓ $\boldsymbol{\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma}$ (Επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση)
✓ $\boldsymbol{\alpha \cdot (\beta - \gamma) = \alpha \cdot \beta - \alpha \cdot \gamma}$ (Επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την αφαίρεση)
✓ Αν $\boldsymbol{\alpha \cdot \beta} = 1$, τότε οι αριθμοί α, β λέγονται **αντίστροφοι**.
✓ $\boldsymbol{\alpha} \cdot 1 = 1 \cdot \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}$. Ο αριθμός 1 λέγεται **ουδέτερο στοιχείο** του πολλαπλασιασμού.
✓ $\boldsymbol{\alpha} \cdot 0 = 0 \cdot \boldsymbol{\alpha} = 0$. Όταν ένας αριθμός πολλαπλασιάζεται με τον αριθμό 0 μηδενίζεται.

Το γινόμενο παραγόντων **είναι**:

✓ **Θετικός αριθμός**, όταν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι άρτιος.
✓ **Αρνητικός αριθμός**, όταν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι περιττός.
✓ **Μηδέν**, όταν τουλάχιστον ένας από τους παράγοντες είναι μηδέν.

- Η δύναμη α^ν (α στη ν), για **α** ακέραιο και ν φυσικό με **ν > 1**, ορίζεται, από τη σχέση $\alpha^\nu = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{\nu}$
  - ✓ Όταν η **βάση α** είναι **θετικός** ακέραιος, η δύναμη είναι **θετικός** αριθμός.
  - ✓ Όταν η **βάση α** είναι **αρνητικός** ακέραιος, δηλαδή, $\alpha < 0$, τότε:
    - ◆ αν ν άρτιος (ζυγός) τότε $\alpha^\nu > 0$.
    - ◆ αν ν περιττός (μονός) τότε $\alpha^\nu < 0$.

Τα **σύμβολα** «+» και «–» έχουν διαφορετική σημασία ανάλογα με το τι περιγράφουν.

- Το σύμβολο «+» συμβολίζει:
  α) την πράξη της πρόσθεσης.
  β) το πρόσημο των θετικών ακέραιων.
- Το σύμβολο «–» συμβολίζει:
  γ) την πράξη της αφαίρεσης.
  δ) τον αντίθετο ενός αριθμού.
  ε) το πρόσημο των αρνητικών ακέραιων.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να απαντήσετε δικαιολογώντας την απάντησή σας στα επόμενα:

α) Οι αριθμοί α, β είναι ομόσημοι και ο –5 είναι ετερόσημος του β. Ο αριθμός α είναι αρνητικός ή θετικός;

β) Οι αριθμοί α, β είναι ετερόσημοι και ο α είναι ομόσημος του 10. Ο αριθμός β είναι αρνητικός ή θετικός;

2 Πάνω στον άξονα x΄x έχουμε τα σημεία Α και Β που αντιστοιχούν στους αριθμούς –75 και 63. Να βρείτε πού αντιστοιχούν τα συμμετρικά τους σημεία ως προς την αρχή Ο του άξονα x΄x.

3 Να εξετάσετε με παραδείγματα, για δύο αριθμούς x και y αν η σχέση $x - |y| < x + y$, ισχύει πάντοτε, ποτέ ή μερικές φορές.

4 Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

α) $A = (-3)^2 \cdot 2 - 24 + (-4) - 3 \cdot 8 + 2[1 - (-1)^3 \cdot 2]$

β) $B = -6 - [-4 + 9 + (-2)3]^3 + 6(-3) - 13$

γ) $\Gamma = 3^2 - 2(-1) - 8(-2)^3 - 12$

δ) $\Delta = 12 - 3\,[5 - (-2)^2 - 3\,(-4) + 2] - 3^2$

5 Ο Όλυμπος είναι το ψηλότερο βουνό της Ελλάδας, γνωστό παγκοσμίως για το μυθολογικό του πλαίσιο. Στην κορυφή του Μύτικα, το υψόμετρο είναι 2.918 μέτρα. Το Αιγαίο πέλαγος έχει μέγιστο βάθος 4.710μ. σε απόσταση 14 μιλίων ανατολικά του φάρου της βραχονησίδας Παξιμάδα.

α) Να βρείτε την υψομετρική απόσταση της κορυφής του Μύτικα από το σημείο του μέγιστου βάθους του Αιγαίου.

β) Να βρείτε την υψομετρική διαφορά του σημείου του μέγιστου βάθους του Αιγαίου από την κορυφή του Μύτικα.

6 Σύμφωνα με τα δημοσιονομικά στοιχεία της ΕΛΣΤΑΤ την τετραετία 2019-2022, σχετικά με το ισοζύγιο, σημειώθηκαν τα εξής:

ΑΕΠ, Ισοζύγιο, Δαπάνες, Χρέος Γενικής Κυβέρνησης

		2019	2020	2021	2022
Ισοζύγιο Γενικής Κυβέρνησης	Εκατ. Ευρώ	1620	–16045	–12974	–4727
Έλλειμμα(–)/ Πλεόνασμα(+)	%του ΑΕΠ	0,9	–9,7	–7,1	–2,3

Να βρείτε το συνολικό ισοζύγιο της τετραετίας.

7 Να υπολογίσετε τη θερμοκρασία που θα προκύψει σε κάθε περίπτωση:

α) Η θερμοκρασία βρίσκεται στους –5 βαθμούς Κελσίου και ανεβαίνει κατά 4 βαθμούς Κελσίου.

β) Η θερμοκρασία βρίσκεται στους 10 βαθμούς Κελσίου και κατεβαίνει κατά 6 βαθμούς Κελσίου.

γ) Η θερμοκρασία βρίσκεται στους −1 βαθμούς Κελσίου και κατεβαίνει κατά 6 βαθμούς Κελσίου.

8 Η υψηλότερη καταγεγραμμένη θερμοκρασία στη Γη είναι 58° Κελσίου, που καταγράφηκε στην έρημο Σαχάρα το 1922. Η χαμηλότερη καταγεγραμμένη θερμοκρασία είναι 90° κάτω από 0° Κελσίου, που καταγράφηκε στην Ανταρκτική το 1983. Να βρείτε τη διαφορά μεταξύ της μεγαλύτερης και της μικρότερης θερμοκρασίας.

9 Η Ζωή έχασε 3 κιλά την πρώτη εβδομάδα της δίαιτάς της. Τις επόμενες τρεις εβδομάδες, πήρε 2 κιλά, πήρε 1 κιλό και μετά έχασε 4 κιλά. Ποια ήταν η αλλαγή στο βάρος της τις τέσσερις εβδομάδες;

10 Η εβδομάδα της 15ης Σεπτεμβρίου 2008 ήταν μια από τις πιο ασταθείς εβδομάδες για το χρηματιστήριο των ΗΠΑ. Η μεταβολή του βιομηχανικού μέσου όρου Dow Jones κάθε μέρα ήταν: Δευτέρα −504, Τρίτη +142, Τετάρτη −449, Πέμπτη +410, Παρασκευή +369. Ποια ήταν η συνολική αλλαγή του Dow Jones για την εβδομάδα;

11 Σε ένα σχολείο σε ένα νησί του Αιγαίου, κάποια Δευτέρα, ένας μαθητής, ενώ ήταν θετικός στον covid 19 πήγε στο σχολείο. Κάθε άτομο που είναι μολυσμένο μπορεί να μολύνει δύο ακόμα κάθε ημέρα. Πόσοι μαθητές είχαν μολυνθεί στο τέλος της εβδομάδας;

12 Να ανοίξετε και να πειραματιστείτε με τις ψηφιακές εφαρμογές που ακολουθούν.

Αριθμότοιχος (εύκολη)

Αριθμότοιχος (μέτρια)

Αριθμότοιχος (δύσκολη)

ΕΡΓΑΣΙΑ

Στο 1ο Κεφάλαιο είδαμε την Ευκλείδεια Διαίρεση. Θυμίζουμε ότι βασικός κανόνας της Ευκλείδειας διαίρεσης ήταν:

«Όταν δίνονται δύο φυσικοί αριθμοί Δ και δ (δ ≠ 0) τότε μπορούμε να βρούμε δύο άλλους Π και υ, οι οποίοι είναι μοναδικοί, έτσι ώστε Δ = δ · Π + υ, με 0 ≤ υ < δ».

Με τον ίδιο κανόνα να ορίσετε την Ευκλείδεια διαίρεση για όλες τις περιπτώσεις των ακέραιων αριθμών, δηλαδή όταν δίνονται δύο ακέραιοι αριθμοί Δ και δ (δ ≠ 0) τότε ...

Να δώσετε παραδείγματα για όλες τις περιπτώσεις.

Να χωρίσετε τους ακέραιους από το −20 μέχρι το 20 σε ομάδες που αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο όταν διαιρούνται με τον 4.

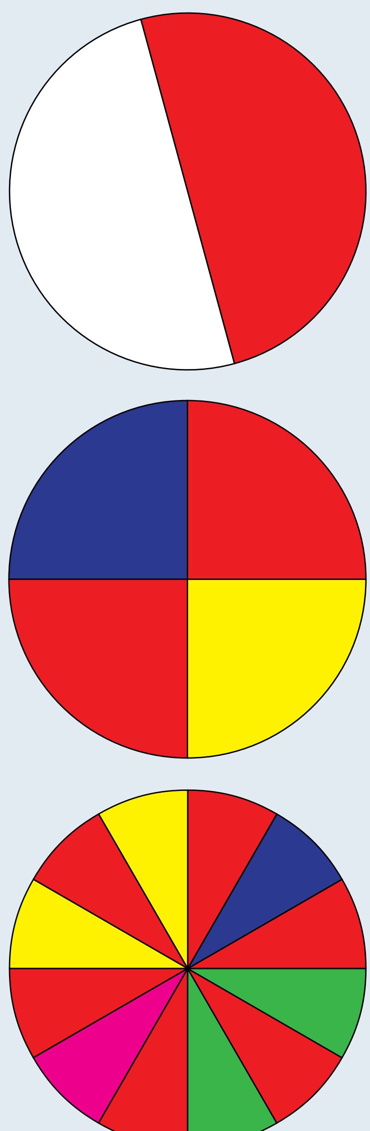
Ομοίως για τους ίδιους ακέραιους όταν διαιρούνται με τον −4.

Να διατυπώσετε τις παρατηρήσεις σας.

Κεφάλαιο

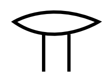
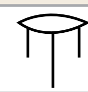
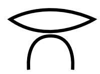
3

Ρητοί Αριθμοί



Εισαγωγή

Με τους ακέραιους αριθμούς μπορούμε να μετρήσουμε αντικείμενα ολόκληρα και αδιαίρετα, δηλαδή ακέραια. Υπάρχουν όμως και πολλές περιπτώσεις στις οποίες οι ακέραιοι δεν επαρκούν για τις σχετικές μετρήσεις. Έτσι, για να εκφράσουμε ποσότητες όπως το ύψος, το βάρος, η μάζα, η ταχύτητα, η ενέργεια κ.λπ. με βάση κάποια μονάδα ή για να πάρουμε ένα μέρος μιας ποσότητας, αναγκαστήκαμε να επεκτείνουμε το σύνολο των ακέραιων αριθμών στο σύνολο των ρητών αριθμών που θα δούμε στη συνέχεια.
Στο Μέσο Βασίλειο της Αιγύπτου, περίπου από το 2040 – 1780 π.Χ, εμφανίζονται τα αιγυπτιακά κλάσματα σε πέντε διαφορετικούς παπύρους. Ένας μεταγενέστερος πάπυρος, ο μαθηματικός πάπυρος Rhind, εισήγαγε βελτιωμένους τρόπους γραφής αιγυπτιακών κλασμάτων.

				
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$

Αιγυπτιακά κλάσματα σε ιερογλυφική γραφή.

Κλάσματα όμως εμφανίζονται και σε άλλους αρχαίους πολιτισμούς, όπως των Αρχαίων Ελλήνων (π.χ. Αριθμητικά του Διόφαντου), των Βαβυλωνίων κ.ά.

3.1 ΟΙ ΡΗΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ ΟΙ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΤΟΥΣ

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

- Να αναγνωρίζουν την ανάγκη εισαγωγής των ρητών αριθμών για την επίλυση προβλημάτων που δεν λύνονται στο πλαίσιο των ακέραιων.
- Να διερευνούν διαφορετικές αναπαραστάσεις ρητών αριθμών (δεκαδική, κλασματική) και να κάνουν μετατροπές από τη μία μορφή στην άλλη.

Διερεύνηση 1

Ο Γιώργος και η Βαλέρια ζήτησαν από τους γονείς τους πίτσα. Αυτοί παρήγγειλαν και ζήτησαν να είναι κομμένη σε τέσσερα κομμάτια για να τη μοιραστούν τα παιδιά.

Ξαφνικά, χτυπάει το τηλέφωνο και μαθαίνουν ότι πρόκειται να τους επισκεφθεί η ξαδέρφη τους η Μυρτώ.

Τι προτείνετε να κάνουν ώστε να μοιραστεί δίκαια η πίτσα και στα τρία παιδιά;

Στο Δημοτικό μάθαμε ότι:

Κλάσμα είναι ένας αριθμός που δηλώνει ένα πλήθος από τα ίσα μέρη στα οποία έχει χωριστεί μια ακέραια μονάδα. Σχηματίζεται από τον **αριθμητή** και τον **παρονομαστή**, που λέγονται όροι του κλάσματος και χωρίζονται με την **κλασματική γραμμή**.

- Ο **παρονομαστής** δείχνει σε πόσα ίσα μέρη χωρίζουμε το όλο.
- Ο **αριθμητής** δείχνει πόσα από αυτά τα ίσα μέρη παίρνουμε.
- Ο **παρονομαστής** είναι πάντοτε διαφορετικός από το μηδέν.

$\frac{\textbf{Αριθμητής}}{\textbf{Παρονομαστής}}$ Όροι του Κλάσματος

Διερεύνηση 2

Στο πάρτι του Ιάσονα, παράγγειλαν πίτσες που η κάθε μία ήταν χωρισμένη σε 8 ίδια κομμάτια. Περίσσεψαν 19 κομμάτια πίτσας. Η μητέρα του τα έβαλε σε στρογγυλά ταψάκια που το καθένα χωρούσε ακριβώς 8 κομμάτια.

- Τι μέρος της πίτσας ήταν το κάθε κομμάτι;
- Πόσα ταψάκια γέμισαν τα 19 κομμάτια;
- Πόσα κομμάτια της πίτσας περίσσεψαν;
- Πόσες πίτσες ήταν τα 19 κομμάτια;

Για να δηλώσουμε ότι έχουμε 3 πίτσες και επί πλέον $\frac{5}{6}$ μιας πίτσας, δηλαδή $3+\frac{5}{6}$ πίτσες γράφουμε συμβολικά: $3\frac{5}{6}$, δηλαδή $3\frac{5}{6}=3+\frac{5}{6}$.

Ο καινούριος αριθμός αυτός λέγεται **μεικτός**, επειδή αποτελείται από έναν ακέραιο (το 3) και ένα κλάσμα (το $\frac{5}{6}$).

Με τον μεικτό $3\frac{5}{6}$ μιας πίτσας εκφράζουμε ότι έχουμε τρεις ολόκληρες πίτσες και 5 από τα 6 ίδια κομμάτια της.

Κλάσματα με αριθμητή μεγαλύτερο από τον παρονομαστή λέγονται **καταχρηστικά** και εκφράζουν αριθμούς μεγαλύτερους του 1.

Παράδειγμα: Τα $\frac{7}{5}$ μιας σοκολάτας είναι τα $\frac{5}{5}$ της σοκολάτας και $\frac{2}{5}$ ακόμη, δηλαδή είναι μία ολόκληρη σοκολάτα και τα $\frac{2}{5}$ από μία άλλη ίδια.

Κλάσματα με αριθμητή μικρότερο από τον παρονομαστή λέγονται **γνήσια** κλάσματα.

Παράδειγμα: $\frac{2}{3}, \frac{5}{7}$

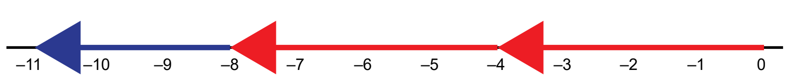
Από την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης του 11 με τον 4 έχουμε:

$11=2\cdot 4+3$, δηλαδή το 4 χωράει στο 11 δύο φορές και περισσεύουν τρία τέταρτα του 4.

Άρα, $\frac{11}{4}=2\frac{3}{4}$.

Άρα, η Ευκλείδεια διαίρεση του αριθμητή ενός κλάσματος με τον παρονομαστή παριστάνει έναν μεικτό αριθμό όπου ο ακέραιος είναι το πηλίκο της διαίρεσης και το κλάσμα είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης με παρονομαστή τον διαιρέτη.

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να μοιράσουμε το –11 σε 4 μέρη όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, γράφοντας $\frac{-11}{4}=-2\frac{3}{4}$.



Επειδή στην Ευκλείδεια διαίρεση του αριθμητή με τον παρονομαστή το υπόλοιπο είναι πάντα μικρότερο από τον διαιρέτη (παρονομαστή), το κλάσμα του μεικτού αριθμού είναι ένα **γνήσιο κλάσμα**.

Παραδείγματα: $\frac{35}{8}=4\frac{3}{8}$, επειδή $35=4\cdot 8+3$, ενώ $\frac{-24}{8}=-3=-\frac{24}{8}$, επειδή $(-24)=(-3)\cdot 8$

Με την αντίστροφη διαδικασία τρέπουμε τον μεικτό αριθμό σε κλάσμα.

Παράδειγμα. Ο μεικτός $7\frac{2}{5}$ έχει 7 ακέραιες μονάδες, οπότε $7\cdot 5$ ίσα κομμάτια και 2 επιπλέον ως αριθμητή του κλάσματος, δηλαδή $7\frac{2}{5}=\frac{7\cdot 5+2}{5}=\frac{37}{5}$.

Ο αριθμός, που εκφράζει ένα **κλάσμα** λέγεται **ρητός αριθμός**.

Ρητός αριθμός είναι κάθε αριθμός που μπορεί να γραφεί ως κλάσμα με αριθμητή έναν ακέραιο αριθμό και παρονομαστή έναν άλλο ακέραιο αριθμό, διαφορετικό από το μηδέν.

Παρατήρηση

Όλοι οι ακέραιοι αριθμοί είναι ρητοί αριθμοί, επειδή μπορούν να γραφούν ως κλάσματα με παρονομαστή τη μονάδα. *Για παράδειγμα,* $3=\frac{3}{1}, -5=-\frac{5}{1}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

• Τι εκφράζουν οι μεικτοί αριθμοί $2\frac{3}{4}, 4\frac{3}{5}$ όταν πρόκειται για σοκολάτες;

• Πόσα τέταρτα της σοκολάτας είναι ο μεικτός $2\frac{3}{4}$; • Πόσα πέμπτα της σοκολάτας είναι ο μεικτός $4\frac{3}{5}$;

Απάντηση

• Ο μεικτός $2\frac{3}{4}$ εκφράζει ότι έχουμε δύο ολόκληρες σοκολάτες και τα 3 τέταρτα από μία άλλη ίδια, ενώ ο $4\frac{3}{5}$ λέει ότι έχουμε τέσσερις ολόκληρες σοκολάτες και τα 3 πέμπτα από μία άλλη ίδια.

• Ο μεικτός $2\frac{3}{4}$ είναι $\frac{2\cdot 4+3}{4}=\frac{11}{4}$. • Ο μεικτός $4\frac{3}{5}$ είναι $\frac{4\cdot 5+3}{5}=\frac{23}{5}$.

Ο χωρισμός της μονάδας σε δέκα κομμάτια (δέκατα) μάς επιτρέπει να επεκτείνουμε έναν ακέραιο αριθμό και στα δεξιά του, προς μικρότερα μέρη. Έτσι, έχουμε τα δέκατα, τα εκατοστά, τα χιλιοστά κλπ. Για να ξεχωρίζει το ακέραιο μέρος από το δεκαδικό, χρησιμοποιούμε ένα σύμβολο, όπως το κόμμα «,» .

Παράδειγμα $3,4=3\frac{4}{10}$ και $-7,34=-7\frac{34}{100}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Στον παρακάτω πίνακα υπάρχει ένας πολύ μεγάλος ρητός αριθμός. Προσδιορίστε τι εκφράζουν τα ψηφία 3, 8 και 9. Ποιο ψηφίο έχει τη μεγαλύτερη και ποιο τη μικρότερη αξία;

εκατομμύρια			χιλιάδες									χιλιοστά			
εκατοντάδες	δεκάδες	μονάδες	εκατοντάδες	δεκάδες	μονάδες	εκατοντάδες	δεκάδες	μονάδες	ΚΟΜΜΑ	δέκατα	εκατοστά	χιλιοστά	δεκάκις χιλιοστά	εκατοντάκις χιλιοστά	εκατομμυ-ριοστά
			10^5	10^4	10^3	10^2	10	1	,	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$			
			8	**6**	**5**	**7**	**6**	**5**	**,**	**8**	**0**	**3**	**2**	**8**	**9**
Πίνακας															

Απάντηση

Ο ρητός αριθμός του πίνακα είναι ο 865.765,803289.

Το ψηφίο 3 εκφράζει χιλιοστά.

Το ψηφίο 8 εκφράζει εκατοντάδες χιλιάδων αλλά και δέκατα και εκατοντάκις χιλιοστά.

Τέλος, το ψηφίο 9 εκφράζει εκατομμυριοστά.

Τη μεγαλύτερη αξία έχει το ψηφίο 8 που εκφράζει εκατοντάδες χιλιάδων και τη μικρότερη αξία έχει το ψηφίο 9, που εκφράζει εκατομμυριοστά.

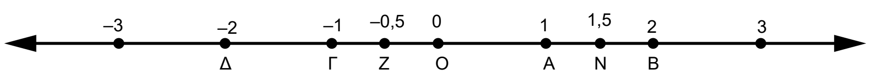
Όπως έχουμε αναφέρει $3,57 = 3\dfrac{57}{100} = \dfrac{357}{100}$, δηλαδή ο αριθμός 3,57 είναι ένας **ρητός αριθμός**. Με άλλα λόγια η **ακριβής διαίρεση** του αριθμητή με τον παρονομαστή μας οδηγεί στη **δεκαδική μορφή του ρητού αριθμού** (δεκαδικός αριθμός) ενώ η μετατροπή ενός **δεκαδικού αριθμού** σε κλάσμα μας οδηγεί στην **κλασματική του μορφή**.

Η γραφή των ρητών αριθμών με τον ένα ή τον άλλο τρόπο είναι ισοδύναμη και χρησιμοποιείται ανάλογα με τις ανάγκες μας.

Για παράδειγμα, λέμε ότι ένα πακέτο ζυμαρικά κοστίζει 1,67€, έφαγα τα $\dfrac{3}{8}$ μιας πίτσας κ.λπ. Ώστε τα κλάσματα και οι δεκαδικοί είναι ρητοί αριθμοί.

Μπορούμε να παραστήσουμε τους ρητούς αριθμούς με τα σημεία μιας ευθείας **τοποθετώντας τους μεταξύ των σημείων που παριστάνουν ακέραιους** ως εξής:

- Γράφουμε τον ρητό αριθμό ως μεικτό.
- Το τμήμα μεταξύ των δύο ακέραιων το χωρίζουμε σε όσα μέρη λέει ο παρονομαστής και παίρνουμε όσα **μέρη** λέει ο αριθμητής, προς τα δεξιά αν ο αριθμός είναι θετικός και προς τα αριστερά αν ο αριθμός είναι αρνητικός.



Για παράδειγμα, για να τοποθετήσουμε τον αριθμό 1,5 στον αξόνα γράφουμε $1,5 = 1\dfrac{1}{2}$, το τμήμα μεταξύ του 1 και του 2 το χωρίζουμε σε δύο μέρη και παίρνουμε το ένα. Παρόμοια, για να τοποθετήσουμε τον αριθμό –0,5 στον άξονα τον γράφουμε ως $-0,5 = -\dfrac{1}{2}$ χωρίζουμε το τμήμα ΟΓ σε δύο ίσα τμήματα και παίρνουμε το ένα.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

1) Να μετατρέψετε σε κλασματική μορφή τους αριθμούς: **α)** 0,23 **β)** 3,456 **γ)** –5,3

2) Να μετατρέψετε σε δεκαδική μορφή τους αριθμούς: **α)** $\dfrac{5}{4}$ **β)** $\dfrac{21}{15}$ **γ)** $\dfrac{115}{22}$

Απάντηση

1) α) $0,23 = \dfrac{23}{100}$ **β)** $3,456 = 3\dfrac{456}{1000} = \dfrac{3456}{1000}$ **γ)** $-5,3 = -5\dfrac{3}{10} = -\dfrac{53}{10}$

2) Κάνουμε την ακριβή διαίρεση του αριθμητή με τον παρονομαστή και βρίσκουμε τα εξής:

α)

$$\begin{array}{r|l} 5 & 4 \\ \cline{2-2} -4 & 1,25 \\ \hline 10 & \\ -8 & \\ \hline 20 & \\ -20 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\boxed{\dfrac{5}{4} = 1,25}$$

β)

$$\begin{array}{r|l} 21 & 15 \\ \cline{2-2} 15 & 1,4 \\ \hline 60 & \\ -60 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\boxed{\dfrac{21}{15} = 1,4}$$

γ)

$$\begin{array}{r|l} 115 & 22 \\ \cline{2-2} -110 & 5,227....... \\ \hline 50 & \\ -44 & \\ \hline 60 & \\ -44 & \\ \hline 160 & \\ -154 & \\ \hline 6 & \end{array}$$

....

$$\boxed{\dfrac{115}{22} = 5,22727...}$$

Ο αριθμός $\frac{115}{22}$ είναι ρητός αλλά η τελευταία διαίρεση στην εφαρμογή (3) δεν έχει τέλος. Ωστόσο, παρόλο που τα δεκαδικά ψηφία του είναι άπειρα, από το πρώτο δεκαδικό του ψηφίο και μετά επαναλαμβάνεται συνεχώς ο αριθμός 27. Για τον αριθμό αυτό αντί $\mathbf{\frac{115}{22} = 5{,}22727...}$ γράφουμε $\mathbf{\frac{115}{22} = 5{,}2\overline{27}}$, δηλαδή γράφουμε μια φορά τον αριθμό που επαναλαμβάνεται με μία παύλα από πάνω.

Αυτό κάνουμε σε όλες τις αντίστοιχες περιπτώσεις. Για παράδειγμα:
$0{,}\overline{3}$ αντί $0{,}333$ και $1{,}\overline{2}$ αντί $1{,}222...$
Αυτοί οι αριθμοί λέγονται περιοδικοί αριθμοί, το επαναλαμβανόμενο τμήμα λέγεται περίοδος και είναι ρητοί αριθμοί.

Γενικά

Ρητοί αριθμοί είναι τα κλάσματα, οι δεκαδικοί (με τερματιζόμενο δεκαδικό μέρος) και οι δεκαδικοί περιοδικοί με άπειρο πλήθος δεκαδικών ψηφίων.

Δεκαδική μορφή ρητού αριθμού

Ερευνήστε τους δεκαδικούς και τους περιοδικούς ρητούς αριθμούς με τη διπλανή ψηφιακή εφαρμογή.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Να συμπληρώσετε τα κενά κουτάκια. Στη συνέχεια να γράψετε τα καταχρηστικά κλάσματα και τους μεικτούς που εκφράζουν.
α) $47 = 6 \cdot \square + 5$ **β)** $52 = 5 \cdot \square + 7$

Απάντηση

α) Είναι $47 = 6 \cdot 7 + 5$ οπότε από την ταυτότητα της διαίρεσης η ισότητα εκφράζει τα καταχρηστικά κλάσματα:

$\frac{47}{7} = 6\frac{5}{7}$ και $\frac{47}{6} = 7\frac{5}{6}$, αφού $47 = 6 \cdot 7 + 5$ ή $\frac{47}{7} = \frac{6 \cdot 7 + 5}{7}$ ή $\frac{47}{7} = \frac{6 \cdot 7}{7} + \frac{5}{7}$ ή $\frac{47}{7} = 6 + \frac{5}{7}$ ή $\frac{47}{7} = 6\frac{5}{7}$ και ανάλογα $\frac{47}{6} = 7\frac{5}{6}$.

β) Είναι $52 = 5 \cdot 9 + 7$οπότε από την ταυτότητα της διαίρεσης η ισότητα εκφράζει το καταχρηστικό κλάσμα $\frac{52}{9}$, το οποίο είναι ο μεικτός $5\frac{7}{9}$ αφού $52 = 5 \cdot 9 + 7$ ή $\frac{52}{9} = \frac{5 \cdot 9 + 7}{9}$ ή $\frac{52}{9} = \frac{5 \cdot 9}{9} + \frac{7}{9}$ ή $\frac{52}{9} = 5 + \frac{7}{9}$ ή $\frac{52}{9} = 5\frac{7}{9}$.

Αυτοαξιολόγηση

Να τοποθετήσετε στις στήλες ΣΩΣΤΟ, ΛΑΘΟΣ ένα ✓ ανάλογα με το αν η πρόταση είναι σωστή ή λανθασμένη.	**Σωστό**	**Λάθος**
1. Ρητός αριθμός λέγεται ο αριθμός που μπορεί να γραφεί ως κλάσμα με αριθμητή ακέραιο και παρονομαστή μη μηδενικό ακέραιο.	☐	☐
2. Κάθε δεκαδικός αριθμός τρέπεται σε δεκαδικό κλάσμα αν γράψουμε τον αριθμό χωρίς την υποδιαστολή και παρονομαστή βάλουμε το 10.	☐	☐
3. Κάθε κλάσμα τρέπεται σε δεκαδικό αριθμό αν κάνουμε την ακριβή διαίρεση του αριθμητή με τον παρονομαστή.	☐	☐
4. Οι μεικτοί είναι ρητοί αριθμοί.	☐	☐
5. Κάθε ρητός αριθμός έχει πεπερασμένο πλήθος δεκαδικών στοιχείων.	☐	☐
6. Όταν ένα τμήμα του δεκαδικού μέρους ενός δεκαδικού αριθμού, από ένα σημείο και μετά, επαναλαμβάνεται, ο δεκαδικός είναι ρητός αριθμός.	☐	☐
7. Ο δεκαδικός αριθμός 2,01 μπορεί να γραφτεί ως μεικτός.	☐	☐

ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να γράψετε τα κλάσματα με μορφή μεικτού και να τα τοποθετήσετε στον άξονα.

α) $+\frac{21}{4}$, **β)** $\frac{32}{4}$, **γ)** $-\frac{15}{6}$, **δ)** $-\frac{19}{3}$

2 Να συμπληρώσετε τα κουτάκια. Στη συνέχεια να γράψετε τα καταχρηστικά κλάσματα και τους μεικτούς που εκφράζουν.

α) $43 = 5 \cdot \square + 3$

β) $87 = \square \cdot 7 + 3$

γ) $80 = 9 \cdot \square + 8$

3 Να γράψετε τους μεικτούς ως κλάσματα.

α) $+5\frac{3}{4}$, **β)** $7\frac{2}{5}$, **γ)** $-1\frac{5}{6}$, **δ)** $-7\frac{6}{7}$

4 Να μετατρέψετε σε κλασματική μορφή και να τοποθετήσετε στον άξονα τους αριθμούς:

α) 0,5 **β)** 3,5 **γ)** –5,5

5 Να μετατρέψετε σε δεκαδική μορφή τους αριθμούς:

α) $\frac{25}{4}$, **β)** $-\frac{36}{45}$, **γ)** $\frac{73}{22}$

6 Τι μορφή έχει ο αριθμητής των κλασμάτων που έχουν παρονομαστή το 5 και είναι ισοδύναμα με ακέραιο αριθμό;

7 Ποιοι μπορεί να είναι οι αριθμητές καταχρηστικών κλασμάτων με παρονομαστή το 3 που το κλασματικό τους μέρος τους είναι $\frac{2}{3}$;

8 Ποια κλάσματα, με αριθμητή διαφορετικό από μηδέν και με παρονομαστή το 5, έχουν το ακέραιο μέρος τους διπλάσιο από τον αριθμητή του κλασματικού;

9 Η ευκλείδεια διαίρεση $35 = 4 \cdot 8 + 3$ ποια καταχρηστικά κλάσματα και ποιους αντίστοιχους μεικτούς αναπαριστάνει;

3.2 Η ΔΙΑΤΑΞΗ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

3.2.1 Ισοδύναμα κλάσματα

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας, αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

- Να συγκρίνουν και να διατάσσουν ρητούς αριθμούς, να τους αναπαριστούν στην αριθμογραμμή και να αναγνωρίζουν ότι ένας ρητός δεν έχει επόμενο.
- Να αναγνωρίζουν την απόλυτη τιμή ρητών αριθμών ως την απόστασή τους από το μηδέν (0) στην αριθμογραμμή.

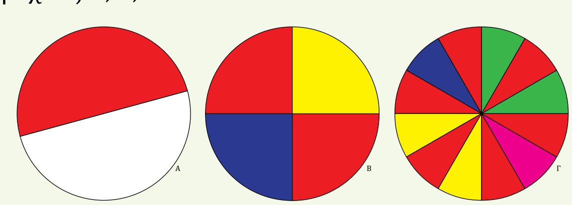
Διερεύνηση 1

Η Βαλέρια ανέλαβε να χρωματίσει καθέναν από τους τρεις τροχούς Α, Β, Γ.

α) Σε ποιον τροχό το κόκκινο είναι περισσότερο; Σε ποιον το κίτρινο;

β) Στον τρίτο τροχό, τι μέρος είναι το μπλε και τι μέρος είναι το πράσινο; Ποιο είναι μεγαλύτερο;

γ) Ποια σχέση έχουν οι όροι των κλασμάτων που εκφράζουν το κόκκινο χρώμα στους τρεις δίσκους;



δ) Ποια σχέση έχουν οι όροι των κλασμάτων που εκφράζουν το μπλε χρώμα στους δύο δίσκους;

Ισοδύναμα Κλάσματα

Χρησιμοποιήστε τους ψηφιακούς συνδέσμους για να ερευνήσετε τα ισοδύναμα κλάσματα.

Κλασματικές Μονάδες

Δύο κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$ ($\beta \neq 0$ και $\delta \neq 0$) λέμε ότι είναι **ίσα ή ισοδύναμα** και γράφουμε $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, όταν εκφράζουν **το ίδιο μέρος** ενός μεγέθους ή το ίδιο μέρος ίσων μεγεθών.

Παράδειγμα. Αν χωρίσουμε μία πίτσα σε 2 κομμάτια και πάρουμε το 1 ή τη χωρίσουμε σε 4 κομμάτια και πάρουμε τα 2 ή τη χωρίσουμε σε 8 κομμάτια και πάρουμε τα 4, τα κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$ και $\frac{4}{8}$ που προκύπτουν, είναι ισοδύναμα και γράφουμε $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$, επειδή εκφράζουν το ίδιο μέρος της ίδιας πίτσας.

Όταν **πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε** τους όρους ενός κλάσματος με τον ίδιο αριθμό **κ**, που είναι διαφορετικός από το μηδέν (**κ ≠ 0**), τότε προκύπτουν **ισοδύναμα** κλάσματα, δηλαδή:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\kappa \cdot \alpha}{\kappa \cdot \beta} \quad \text{και} \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha : \kappa}{\beta : \kappa}$$

Γενικά

Στα ισοδύναμα κλάσματα, τα γινόμενα που παίρνουμε αν πολλαπλασιάσουμε σταυρωτά τους όρους τους («χιαστί») είναι ίσα, δηλαδή αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ τότε $\alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$ και αντίστροφα.

Παράδειγμα: Τα κλάσματα $\frac{5}{6}$ και $\frac{35}{42}$ είναι ισοδύναμα επειδή $5 \cdot 42 = 6 \cdot 35 = 210$

Επειδή η διαίρεση των όρων ενός κλάσματος με τον ίδιο αριθμό **κ** μας δίνει ισοδύναμο πιο απλό κλάσμα, η πράξη λέγεται **απλοποίηση**.

Ο αριθμός **κ** είναι ένας από τους κοινούς διαιρέτες των όρων του κλάσματος και η μεγαλύτερη **απλοποίηση** επιτυγχάνεται όταν ο **κ** είναι ο **ΜΚΔ (αριθμητή, παρονομαστή)**.

Παράδειγμα: Για το κλάσμα $\frac{12}{18}$, οι κοινοί διαιρέτες των όρων του είναι οι αριθμοί 2, 3, 6 και ΜΚΔ (12, 18) = 6.
Έτσι, έχουμε τα αντίστοιχα ισοδύναμα κλάσματα: $\frac{12}{18} = \frac{12:2}{18:2} = \frac{6}{9}$, $\frac{12}{18} = \frac{12:3}{18:3} = \frac{4}{6}$ και $\frac{12}{18} = \frac{12:6}{18:6} = \frac{2}{3}$.

Κλάσματα που δεν μπορούν να απλοποιηθούν περισσότερο λέγονται **ανάγωγα**.

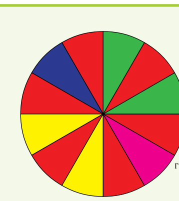
Αυτό συμβαίνει όταν ο αριθμητής και ο παρονομαστής δεν έχουν άλλο κοινό διαιρέτη εκτός από τη μονάδα ή διαφορετικά όταν ΜΚΔ (αριθμητή, παρονομαστή) = 1.

Παράδειγμα: Τα κλάσματα $\frac{5}{7}$, $\frac{15}{8}$, $\frac{125}{64}$ είναι ανάγωγα επειδή ΜΚΔ (5, 7) = 1, ΜΚΔ (15, 8) = 1, ΜΚΔ (125, 64) = 1.

3.2.2 Ομώνυμα και ετερώνυμα κλάσματα

Διερεύνηση 2

Στο διπλανό σχήμα, ο κύκλος είναι χωρισμένος σε ίσους κυκλικούς τομείς.
- Να εκφράσετε με κλάσματα το μέρος του κύκλου που καταλαμβάνει κάθε χρώμα.
- Τι παρατηρείτε στα κλάσματα αυτά;
- Να διατάξετε τα κλάσματα από το μικρότερο στο μεγαλύτερο.



- Τα κλάσματα που έχουν τον ίδιο παρονομαστή ονομάζονται **ομώνυμα**.
- Τα κλάσματα που έχουν διαφορετικό παρονομαστή ονομάζονται **ετερώνυμα**.

Για να μετατρέψουμε ετερώνυμα κλάσματα σε ομώνυμα εργαζόμαστε ως εξής:
1. Βρίσκουμε το ΕΚΠ των παρονομαστών.
2. Διαιρούμε το ΕΚΠ που βρήκαμε με καθένα από τους παρονομαστές.
3. Πολλαπλασιάζουμε τους δύο όρους κάθε κλάσματος με το αντίστοιχο πηλίκο που βρήκαμε.

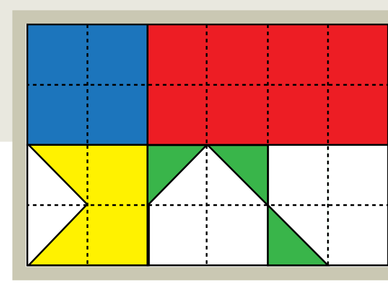
Παράδειγμα: Για να μετατρέψουμε σε ομώνυμα τα κλάσματα: $\frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}$ βρίσκουμε το ΕΚΠ των παρονομαστών.

Είναι: ΕΚΠ (5, 4, 6) = 60, οπότε: 60 : 5 = 12 και επομένως: $\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 12}{5 \cdot 12} = \frac{24}{60}$, 60 : 4 = 15 και επομένως: $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 15}{4 \cdot 15} = \frac{45}{60}$,

60 : 6 = 10 και επομένως: $\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 10}{6 \cdot 10} = \frac{50}{60}$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να εκφράσετε, στην απλούστερη μορφή, το μέρος του ορθογωνίου που καταλαμβάνει κάθε χρώμα στο διπλανό ορθογώνιο.
Ποιο χρώμα καταλαμβάνει το μεγαλύτερο μέρος και ποιο το μικρότερο;



Απάντηση

Στο ορθογώνιο έχουμε 24 **ίσα** τετραγωνάκια, οπότε κάθε τετραγωνάκι είναι το $\frac{1}{24}$ του ορθογωνίου.

Κάθε τετραγωνάκι αποτελείται από 2 **ίσα** τριγωνάκια, οπότε στο ορθογώνιο έχουμε 48 τριγωνάκια.

Άρα, το κάθε τριγωνάκι είναι το $\frac{1}{48}$ του ορθογωνίου και επομένως:

- Το κόκκινο χρώμα είναι $\frac{8}{24} = \frac{8:8}{24:8} = \frac{1}{3}$ του τετραγώνου. • Το μπλε χρώμα είναι $\frac{4}{24} = \frac{4:4}{24:4} = \frac{1}{6}$ του τετραγώνου.
- Το κίτρινο χρώμα είναι $\frac{6}{48} = \frac{6:6}{48:6} = \frac{1}{8}$ του τετραγώνου. • Το πράσινο χρώμα είναι $\frac{3}{48} = \frac{3:3}{48:3} = \frac{1}{16}$ του τετραγώνου.

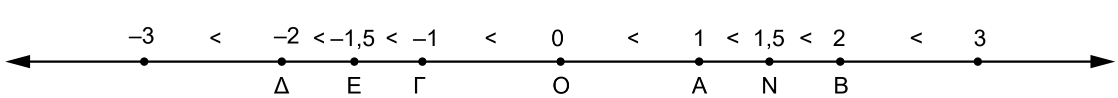
Το κόκκινο χρώμα καταλαμβάνει τον περισσότερο χώρο ενώ το πράσινο τον λιγότερο γιατί:

Το κόκκινο χρώμα αποτελεί τα $\frac{8}{24}$ (8 τετραγωνάκια από τα 24) ή $\frac{16}{48} = \frac{2 \cdot 8}{2 \cdot 24}$ (16 τριγωνάκια από τα 48) ενώ το πράσινο αποτελεί τα $\frac{3}{48}$ (3 τριγωνάκια από τα 48) του ορθογωνίου.

Γενικά

- Από τα θετικά ομώνυμα κλάσματα μεγαλύτερο είναι εκείνο που έχει τον μεγαλύτερο αριθμητή.
- Από τα θετικά κλάσματα με τον ίδιο αριθμητή, μεγαλύτερο είναι εκείνο που έχει τον μικρότερο παρονομαστή.

Για τη διάταξη των ρητών αριθμών ισχύει ό,τι ισχύει και στους ακέραιους, δηλαδή από δύο ή περισσότερους ρητούς αριθμούς μεγαλύτερος είναι αυτός που βρίσκεται δεξιότερα στον άξονα των ρητών.



Γενικά

- Από τα **αρνητικά** ομώνυμα κλάσματα, μεγαλύτερο είναι εκείνο που έχει τον **μικρότερο** αριθμητή.
- Από τα **αρνητικά** κλάσματα με τον **ίδιο αριθμητή**, μεγαλύτερο είναι εκείνο που έχει τον **μεγαλύτερο** παρονομαστή.

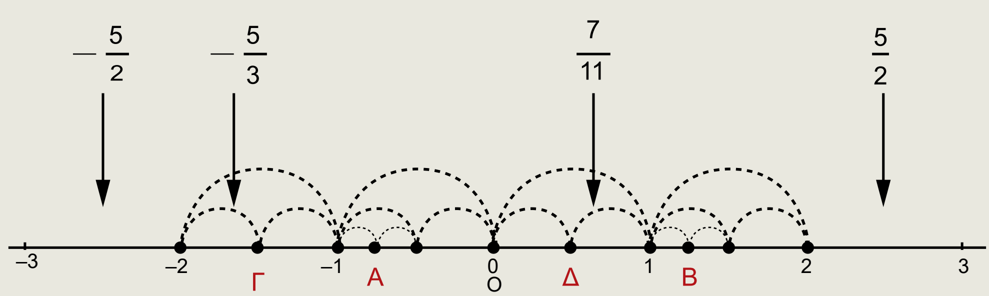
Έχουμε δει ότι απόλυτη τιμή ενός ακεραίου είναι η απόστασή του από το μηδέν.
Ο ορισμός αυτός ισχύει και για τους ρητούς αριθμούς. Έτσι, **απόλυτη τιμή** ενός ρητού αριθμού είναι η απόστασή του από το μηδέν.

Απόλυτη τιμή ενός ρητού αριθμού είναι ο ίδιος ο αριθμός όταν αυτός είναι θετικός ή ο αντίθετός του όταν αυτός είναι αρνητικός.

Για τη διάταξη των ρητών, ισχύει ότι:

- Αν οι ρητοί αριθμοί είναι **ετερόσημοι,** μεγαλύτερος είναι ο θετικός.
- Αν οι ρητοί αριθμοί είναι **ομόσημοι,** τότε:
  α) Αν είναι **θετικοί**, μεγαλύτερος είναι αυτός που έχει **μεγαλύτερη** απόλυτη τιμή.
  β) Αν είναι **αρνητικοί**, μεγαλύτερος είναι αυτός που έχει **μικρότερη** απόλυτη τιμή.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2



α) Στην παραπάνω αριθμογραμμή των ακέραιων αριθμών έχουν τοποθετηθεί 4 ρητοί αριθμοί με μορφή κλάσματος. Ποιοι δεκαδικοί είναι αυτοί;

β) Τα Α, Β, Γ, Δ είναι μέσα των διαμέτρων των ημικυκλίων. Ποιοι ρητοί αντιστοιχούν σε αυτά; Να γραφούν ως κλάσματα και ως δεκαδικοί.

γ) Ποιος είναι ο μεγαλύτερος από τους αρνητικούς ρητούς αριθμούς και ποιος από τους θετικούς;

Απάντηση

α) $-\frac{5}{2}=-2,5$, $-\frac{5}{3}=-1,\overline{6}$, $\frac{7}{11}=0,\overline{63}$ και $\frac{5}{2}=2,5$

β) Στο σημείο **Α** αντιστοιχεί ο ρητός $-0,75=-\frac{3}{4}$, στο σημείο **Β** ο ρητός $\frac{5}{4}=1,25$, στο σημείο **Γ** ο ρητός $-1,5=-\frac{3}{2}$ και στο σημείο **Δ** ο ρητός $\frac{1}{2}=0,5$.

γ) Ο μεγαλύτερος αρνητικός είναι ο ρητός $-0{,}75$ επειδή βρίσκεται δεξιότερα από όλους τους άλλους αρνητικούς αριθμούς (ή αλλιώς πιο κοντά στο μηδέν) και επομένως έχει τη μικρότερη απόλυτη τιμή.

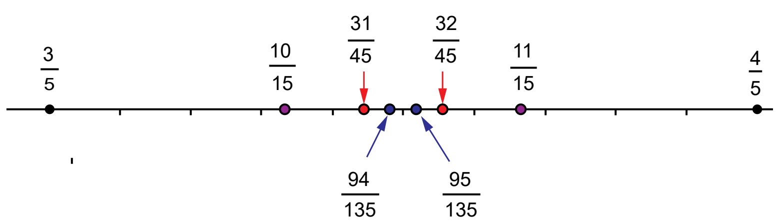
Από τους θετικούς αριθμούς, μεγαλύτερος είναι ο $\frac{5}{2}$ επειδή βρίσκεται δεξιότερα από όλους τους άλλους και επομένως έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

Διερεύνηση 3

Να βρείτε δύο ρητούς αριθμούς που βρίσκονται μεταξύ των αριθμών 2 και 3. Στη συνέχεια, να βρείτε άλλους δύο μεταξύ αυτών που βρήκατε. Ακολούθως, να βρείτε άλλους δύο μεταξύ αυτών που βρήκατε.
- Να επαναλάβετε τη διαδικασία άλλες δύο φορές.
- Πόσες φορές μπορούμε να επαναλάβουμε αυτή τη διαδικασία; Να κάνετε μια εικασία.

Ανάμεσα σε δύο οποιουσδήποτε ρητούς αριθμούς μπορούμε να βρούμε κι άλλους ρητούς μεταξύ τους.

Για παράδειγμα, αν μας δοθούν οι ρητοί αριθμοί $\frac{3}{5}$ και $\frac{4}{5}$ επειδή δεν φαίνεται αμέσως ποιοι άλλοι ρητοί είναι ανάμεσά τους:
- Τους μετατρέπουμε πολλαπλασιάζοντας τους αριθμητές και τους παρονομαστές τους με το 3 στους ισοδύναμους $\frac{9}{15}$ και $\frac{12}{15}$, οπότε εύκολα βλέπουμε ότι ανάμεσά τους είναι, για παράδειγμα, οι ρητοί $\frac{10}{15}$ και $\frac{11}{15}$.
- Για να βρούμε ρητούς ανάμεσα στους $\frac{10}{15}$ και $\frac{11}{15}$ τους μετατρέπουμε στους $\frac{30}{45}$ και $\frac{33}{45}$ (πολλαπλασιάζοντας πάλι με το 3 αριθμητή και παρονομαστή) οπότε εύκολα βλέπουμε ότι ανάμεσά τους είναι για παράδειγμα, οι ρητοί $\frac{31}{45}$ και $\frac{32}{45}$.
- Συνεχίζοντας, με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε τους $\frac{94}{135}$ και $\frac{95}{135}$ ανάμεσα στους $\frac{31}{45}$ και $\frac{32}{45}$ κ.ο.κ.



Όπως είδαμε στο συγκεκριμένο παράδειγμα μπορούμε ανάμεσα σε δύο ρητούς να βρούμε όσους θέλουμε ρητούς. Αυτό ισχύει για οποιουσδήποτε ρητούς και επομένως:

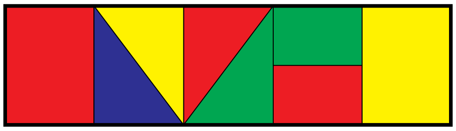
Δεν ορίζεται ο προηγούμενος και ο επόμενος ενός ρητού αριθμού.

Αυτοαξιολόγηση

Να τοποθετήσετε στις στήλες ΣΩΣΤΟ, ΛΑΘΟΣ ένα ✓ ανάλογα με το αν η πρόταση είναι σωστή ή λανθασμένη.	**Σωστό**	**Λάθος**
1. Από δύο ομώνυμα κλάσματα μεγαλύτερο είναι αυτό που έχει τον μεγαλύτερο αριθμητή.	☐	☐
2. Οι ρητοί αριθμοί $\frac{5}{4}$ και $-1{,}25$ έχουν την ίδια απόλυτη τιμή.	☐	☐
3. Δύο ετερώνυμα αρνητικά κλάσματα με τον ίδιο αριθμητή δεν μπορούν να συγκριθούν.	☐	☐
4. Το μηδέν είναι μεγαλύτερο από όλους τους αρνητικούς αριθμούς και μικρότερο από όλους τους θετικούς.	☐	☐
5. Για να συγκρίνουμε δύο ετερώνυμα κλάσματα τα τρέπουμε σε ομώνυμα.	☐	☐
6. Ο επόμενος του ρητού αριθμού $-5{,}7$ είναι ο ρητός αριθμός $-5{,}6$ και ο προηγούμενος ο $-5{,}8$.	☐	☐
7. Μεταξύ δύο ρητών αριθμών υπάρχει πάντα κάποιος άλλος ρητός.	☐	☐

ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Τι μέρος του παρακάτω ορθογωνίου αποτελεί το κάθε χρώμα; Να τα διατάξετε σε αύξουσα σειρά.



2 Να μετατρέψετε σε ομώνυμα τα κλάσματα.

α) $\frac{3}{5}, -\frac{7}{10}$ **β)** $\frac{5}{6}, \frac{13}{15}$

γ) $-\frac{5}{20}, -\frac{3}{4}$ **δ)** $-\frac{11}{6}, \frac{9}{5}$

3 Να συγκρίνετε τους παρακάτω ρητούς αριθμούς, γράφοντάς τους σε αύξουσα σειρά. Στη συνέχεια να βρείτε τις απόλυτες τιμές αυτών. Ποιος έχει τη μικρότερη και ποιος τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή;

$$-2{,}3,\ \frac{19}{3},\ 5{,}3434...,\ -\frac{5}{2},\ 5{,}34,\ \frac{3}{2},\ -\frac{7}{4}$$

4 Να συγκρίνετε τους αριθμούς χωρίς να κάνετε τα κλάσματα ομώνυμα, ούτε να τους τρέψετε σε δεκαδικούς.

α) $\frac{3}{5}, -\frac{2}{3}$, **β)** $\frac{6}{5}, \frac{5}{6}$, **γ)** $-\frac{7}{11}, -\frac{13}{9}$, **δ)** $\frac{1}{5}, -\frac{2}{10}$

5 Ποιοι δεκαδικοί αριθμοί είναι τα παρακάτω κλάσματα.

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}$

6 Η απόλυτη τιμή ενός αριθμού είναι $|α| = 1{,}75$. Ποιος μπορεί να είναι ο αριθμός;

7 Η απόλυτη τιμή ενός αριθμού είναι $|α| = \frac{5}{4}$. Ποιος μπορεί να είναι ο αριθμός;

8 Να βρείτε έναν ρητό μεταξύ των παρακάτω αριθμών.

α) $\frac{3}{7}$ και $\frac{4}{7}$ **β)** $-1{,}875$ και $-\frac{7}{4}$ **γ)** $\frac{1}{3}$ και $\frac{1}{4}$

δ) $-1{,}75$ και $-1{,}76$

9 Να γράψετε σε αύξουσα σειρά όλους τους αριθμούς που έχουν απόλυτη τιμή μικρότερη από το 1 και έχουν ένα δεκαδικό ψηφίο.

10 Πόσοι ρητοί αριθμοί έχουν δύο δεκαδικά ψηφία και έχουν απόλυτη τιμή μικρότερη του 1;

11 Μια νοικοκυρά ψωνίζει απορρυπαντικό πλυντηρίου. Το υγρό απορρυπαντικό Α κοστίζει 14,99€ και έχει 64 μεζούρες, ενώ το υγρό απορρυπαντικό Β κοστίζει 17,49€ και έχει 80 μεζούρες. Ποιο απορρυπαντικό είναι φθηνότερο;

3.3 ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΡΗΤΟΥΣ

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

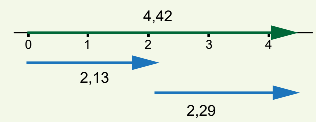
- Να επεκτείνουν στους ρητούς αριθμούς την πρόσθεση, την αφαίρεση και τον πολλαπλασιασμό των ακέραιων.
- Να διαιρούν ρητούς αριθμούς μέσω του πολλαπλασιασμού του ενός με τον αντίστροφο του άλλου.
- Να κάνουν πράξεις μεταξύ ρητών αριθμών, σε κλασματική ή δεκαδική μορφή.
- Να επεκτείνουν τις ιδιότητες των πράξεων των ακέραιων στους ρητούς.
- Να διατυπώνουν και να χρησιμοποιούν τον ορισμό των δυνάμεων με βάση ρητό και εκθέτη φυσικό αριθμό.
- Να προσδιορίζουν το πρόσημο της δύναμης ρητού αριθμού με βάση τον ορισμό.

3.3.1 Πρόσθεση ρητών αριθμών

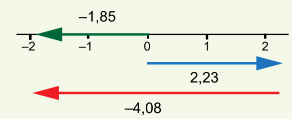
Διερεύνηση 1

- Να προσδιορίσετε και να διατυπώσετε τον κανόνα που περιγράφει κάθε μια από τις ακόλουθες εικόνες:

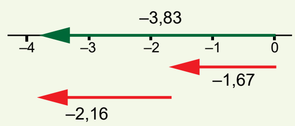
α)



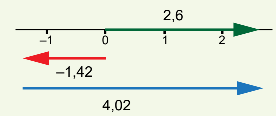
γ)



β)



δ)



• Σε ποιες περιπτώσεις έχουμε συνολικά αύξηση και σε ποιες μείωση και πόσο;

Η πρόσθεση των ρητών αριθμών ορίζεται όπως και στους ακεραίους.

Όταν οι αριθμοί είναι ομόσημοι προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους και θέτουμε το κοινό τους πρόσημο.

Παράδειγμα: $(+2{,}5)+(+3{,}7)=+(|+2{,}5|+|+3{,}7|)=+(2{,}5+3{,}7)=+6{,}2=6{,}2$,
Ομοίως $(-1{,}4)+(-2{,}3)=-(|-1{,}4|+|-2{,}3|)=-(1{,}4+2{,}3)=-3{,}7$.

Όταν οι αριθμοί είναι ετερόσημοι, αφαιρούμε από τη μεγαλύτερη τη μικρότερη απόλυτη τιμή και πρόσημο θέτουμε το πρόσημο του αριθμού με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

Παράδειγμα: $(-2{,}7)+(+3{,}7)=+(|+3{,}7|-|-2{,}5|)=+(3{,}7-2{,}5)=+1{,}2$,
Ομοίως $(+1{,}3)+(-3{,}8)=-(|-3{,}8|-|+1{,}3|)=-(3{,}8-1{,}3)=-2{,}5$

Πρόσθεση δύο Ρητών αριθμών στον άξονα

Μπορείτε να δερευνήσετε την πρόσθεση ρητών αριθμών στον διπλανό σύνδεσμο.

Θυμάμαι - Μαθαίνω

ΚΛΑΣΜΑΤΑ	ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ
Για να προσθέσω (ή να αφαιρέσω) δύο κλάσματα: • Αν είναι **ομώνυμα**, προσθέτουμε (ή αφαιρούμε) τους αριθμητές και αφήνουμε τον ίδιο παρονομαστή. • Αν είναι **ετερώνυμα**, πρώτα τα τρέπουμε σε ομώνυμα και στη συνέχεια προσθέτουμε (ή αφαιρούμε) τους αριθμητές και αφήνουμε τον ίδιο παρονομαστή.	• Για να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε δύο δεκαδικούς αριθμούς, τους τοποθετούμε τον έναν κάτω από τον άλλον, προσέχοντας οι υποδιαστολές και τα στοιχεία της ίδιας τάξης να είναι στις ίδιες στήλες. Στη συνέχεια, προσθέτουμε ή αφαιρούμε τα στοιχεία της ίδιας τάξης.

$$\frac{2}{3}+\frac{5}{6}=\frac{2\cdot 2}{3\cdot 2}+\frac{5}{6}=\frac{4}{6}+\frac{5}{6}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$$

$$\frac{5}{4}-\frac{1}{6}=\frac{5\cdot 3}{4\cdot 3}-\frac{1\cdot 2}{6\cdot 2}=\frac{15}{12}-\frac{2}{12}=\frac{13}{12}$$

$$\begin{array}{r} 32,37 \\ \underline{+9,18} \\ 41,55 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12,25 \\ \underline{-9,17} \\ 3,08 \end{array}$$

• Όπως στους ακέραιους αριθμούς έτσι και στους ρητούς, δύο αριθμοί λέγονται **αντίθετοι** όταν **το άθροισμά τους είναι μηδέν.**

• Δύο ρητοί αριθμοί με την ίδια απόλυτη τιμή και διαφορετικό πρόσημο είναι αντίθετοι. Έτσι, σε κάθε ρητό, διάφορο του 0, αντιστοιχεί ο αντίθετός του.
Παράδειγμα: οι αριθμοί **−2,4** και **+2,4** είναι αντίθετοι, επειδή έχουν διαφορετικά πρόσημα και την ίδια απόλυτη τιμή $|-2{,}4| = 2{,}4 = |+2{,}4|$.

• Ο αντίθετος του ρητού αριθμού **α** συμβολίζεται με **−α** . Έτσι, ο αντίθετος του +5,32 είναι ο −5,32 και συμβολίζεται με **−(+5,32)** , ενώ ο αντίθετος του −3,81 είναι ο +3,81 και συμβολίζεται με **−(−3,81)**. Παρατηρήστε ότι **ο αντίθετος ενός αριθμού δεν είναι πάντα αρνητικός αριθμός.**

• Ο αντίθετος του αντίθετου είναι ο ίδιος ο αριθμός, δηλαδή **−(−α) = α**

Παράδειγμα: −(−2,75) = +2,75 = 2,75 (ο αντίθετος του αντίθετου του 2,75 είναι ο 2,75), επίσης
$-\underbrace{(-(-3{,}56))}= -(+3{,}56) = -3{,}56$ (ο αντίθετος του αντίθετου του −3,56 είναι ο −3,56)

• Όπως στους ακέραιους, έτσι κι εδώ, το πρόσημο (+), αλλά και το σημείο της πρόσθεσης (+), στην περίπτωση που δεν υπάρχει ενδεχόμενο σύγχυσης, μπορούμε να τα παραλείψουμε.
Παράδειγμα: αντί για (−2,6)+(+7,2) γράφουμε −2,6 + 7,2 .

Ιδιότητες της πρόσθεσης των ρητών	
α + β = β + α	Ισχύει η **αντιμεταθετική ιδιότητα.**
α + (β + γ) = (α + β) + γ	Η πρόσθεση είναι πράξη **προσεταιριστική.**
α + 0 = 0 + α = α	Το μηδέν **δεν αλλάζει** το άθροισμα.
α + (−α) = 0	Για κάθε ρητό αριθμό **υπάρχει ο αντίθετός του.**

3.3.2 Αφαίρεση ρητών αριθμών

Για να βρούμε τη διαφορά **δ** ενός ρητού αριθμού **β** (αφαιρετέος) από **έναν** ρητό αριθμό **α** (μειωτέος), **προσθέτουμε** στον μειωτέο (α) τον **αντίθετο** του αφαιρετέου (β), δηλαδή:

$$\boldsymbol{\delta = \alpha - \beta = \alpha + (-\beta)}$$

Παραδείγματα: **α)** (+7,5)−(+3,4)= (+7,5)+(−3,4)= +4,1 **β)** (+7,5)−(−3,4)= (+7,5)+(+3,4)= +10,9
γ) (−7,5)−(+3,4)= (−7,5)+(−3,4)= −10,9 **δ)** (−7,5)−(−3,4)= (−7,5)+(+3,4)= −4,1
Στους ρητούς, όπως και στους ακέραιους αριθμούς, η αφαίρεση μετατρέπεται σε πρόσθεση.

Έτσι,
• Η Αφαίρεση είναι πάντοτε δυνατή στο σύνολο των ρητών αριθμών.
• Ο Μειωτέος δεν χρειάζεται να είναι μεγαλύτερος από τον αφαιρετέο.
• Η Διαφορά μπορεί να είναι θετικός ή αρνητικός αριθμός ή το μηδέν.

Αλγεβρικό άθροισμα

Πολλές φορές εμφανίζονται αλγεβρικές παραστάσεις με πολλές προσθέσεις και αφαιρέσεις. Το αποτέλεσμα πολλών προσθέσεων και αφαιρέσεων ονομάζεται **αλγεβρικό άθροισμα.**
Σε ένα αλγεβρικό άθροισμα εργαζόμαστε όπως παρακάτω:

- Μετατρέπουμε όλες τις αφαιρέσεις σε προσθέσεις $(+7{,}5)-(-3{,}4)+(-7{,}5)-(+8{,}5)-(+7{,}9)=$
- Διαγράφουμε τους αντίθετους $\cancel{(+7{,}5)}+(+3{,}4)+\cancel{(-7{,}5)}+(-8{,}5)+(-7{,}9)=$
- Αθροίζουμε όλους τους θετικούς και όλους τους αρνητικούς $(+3{,}4)+(-8{,}5)+(-7{,}9)=$
- Προσθέτουμε τους δύο ετερόσημους $(+3{,}4)+(-16{,}4)=-13$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να εκτελέσετε τις πράξεις:

$$\left(-\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{5}{6}\right)-\left(+\frac{7}{3}\right)-\left(-\frac{1}{6}\right)$$

Απάντηση

Είναι ΕΚΠ (2, 3, 6) = 6, οπότε:

$$\left(-\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{5}{6}\right)-\left(+\frac{7}{3}\right)-\left(-\frac{1}{6}\right)=\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{5}{6}\right)+\left(-\frac{7}{3}\right)+\left(+\frac{1}{6}\right)=$$

$$-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}-\frac{5}{6}-\frac{7}{3}+\frac{1}{6}=-\frac{2\cdot 2}{3\cdot 2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 3}-\frac{3\cdot 3}{2\cdot 3}-\frac{5}{6}-\frac{7\cdot 2}{3\cdot 2}+\frac{1}{6}=+\frac{1}{6}+\frac{3}{6}-\frac{9}{6}-\frac{5}{6}-\frac{14}{6}-\frac{4}{6}=\frac{4}{6}-\frac{32}{6}=-\frac{28}{6}$$

Αυτοαξιολόγηση

Να τοποθετήσετε δίπλα στις στήλες ΣΩΣΤΟ, ΛΑΘΟΣ ένα ✓ ανάλογα με το αν η πρόταση είναι σωστή ή λανθασμένη.

	Σωστό	Λάθος
1. Η αφαίρεση δύο ρητών ελαττώνει πάντα τον μειωτέο.	☐	☐
2. Δύο ρητοί αριθμοί με διαφορετικό πρόσημο και την ίδια απόλυτη τιμή είναι αντίθετοι.	☐	☐
3. Στην πρόσθεση δύο ρητών μπορούμε να αντιμεταθέσουμε τους όρους της.	☐	☐
4. Στην αφαίρεση δύο ρητών μπορούμε να αντιμεταθέσουμε τους όρους της.	☐	☐

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να βρείτε τα αθροίσματα.

α) (+12,82)+(+9,18) **β)** (+3,42)+(−15,39)

γ) (−1,32)+(+15,43) **δ)** (+1,32) + (− 15,43)

2 Να βρείτε τα αθροίσματα.

α) 1,82 + 19,18 **ε)** −2,59 + 4,27

β) 13,42 − 15,49 **στ)** 13,75 − 2,05

γ) −17,32 + 11,83 **ζ)** 1,59 − 4,23

δ) −5,75 − 9,17 **η)** −4,97 − 11,98

3 Να βρείτε τα αθροίσματα.

α) $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}$ **δ)** $\frac{5}{6}-\frac{2}{3}$

β) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$ **ε)** $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}$

γ) $-\frac{5}{8}+\frac{3}{12}$ **στ)** $-\frac{7}{3}-\frac{13}{6}$

4 Να συμπληρώσετε τα κουτάκια.

α) $4{,}3+\square=3{,}2$ **ε)** $5{,}2=\square+1{,}3$

β) $4{,}3-\square=-3{,}2$ **στ)** $5{,}2=-\square-1{,}3$

γ) $-4{,}3+\square=-3{,}2$ **ζ)** $-5{,}2=\square-1{,}3$

δ) $-4{,}3-\square=3{,}2$ **η)** $-5{,}2=-\square+1{,}3$

5 Να βρείτε τους αντίθετους των αριθμών.

α) +2,31 **β)** −2,34

γ) $+\frac{3}{4}$ **δ)** $-\frac{7}{5}$

6 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα (αν χρειαστεί μπορείτε να γράψετε δύο αριθμούς στο ίδιο κουτάκι). Όταν συμπληρώσετε τον πίνακα θα διαπιστώσετε ότι δύο ζεύγη γραμμών είναι ίδια. Πώς το δικαιολογείτε;

α	1,34				
−α		2,45			
−(−α)			−3,21		
|α|				2,31	
|−α|					4,5

7 Να βρείτε τα αποτελέσματα των πράξεων.

α) $(+17,72)-(+9,17)$
β) $(+5,41)-(-12,59)$
γ) $(-2,34)+(+5,53)-(-3,65)+(-10,23)$
δ) $(-11,72)-(+7,29)+(+14,75)-(-9,22)$

8 Να βρείτε τα αθροίσματα.

α) $1,59 - 4,23 - 1,59 + 4,23$
β) $-4,97 - 11,98 - 2,59 + 5,23$
γ) $4,05 + 16,61 - 2,59 + 4,27$
δ) $13,75 + 2,05 - 15,52 + 1,23$

9 Αν $\alpha = +2,75$, $\beta = -1,25$ και $\gamma = -3,15$ να κάνετε τις αντικαταστάσεις και στη συνέχεια να βρείτε το αποτέλεσμα.

α) $\alpha - (\beta + \gamma)$ **β)** $\alpha - (\beta - \gamma)$
γ) $-\alpha - (\beta - \gamma)$ **δ)** $-\alpha + (\beta + \gamma)$

10 Να βρείτε τα αθροίσματα.

α) $\frac{2}{3} + \frac{5}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ **γ)** $\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{12}$

β) $-\frac{5}{8} + \frac{3}{12} - \frac{7}{3} - \frac{13}{6}$ **δ)** $-\frac{5}{8} + \frac{3}{6} + \frac{7}{3} - \frac{3}{6}$

11 Η παρακάτω εικόνα είναι από λογαριασμό μιας τράπεζας. Να συμπληρώσετε το υπόλοιπο.

ΗΜ/ΝΙΑ ΑΞΙΑΣ	ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ	ΠΟΣΟ	ΥΠΟΛΟΙΠΟ
11/07/2023	ΑΝΑΛΗΨΗ ΜΕΤΡΗΤΩΝ ΑΠΟ ΑΤΜ	–250,00	
10/07/2023	PEIRA GR	–47,00	
07/07/2023	PEIRA GR	–51,00	4.417,09
07/07/2023	PEIRA GR	–2,20	
07/07/2023	PEIRA GR	–6,56	

3.3.3 Πολλαπλασιασμός ρητών αριθμών

Διερεύνηση 1

Συμπληρώστε τα κενά στα παρακάτω μοτίβα αριθμών.

$0,5 \cdot 0,3 = 0,15$	$(-0,5) \cdot 0,3 = -0,15$
$0,5 \cdot 0,2 = 0,10$	$(-0,5) \cdot 0,2 = -0,10$
$0,5 \cdot 0,1 = 0,05$	$(-0,5) \cdot 0,1 = -0,05$
$0,5 \cdot 0 = 0$	$(-0,5) \cdot 0 = 0$
$0,5 \cdot (-0,1) = \ldots\ldots$	$(-0,5) \cdot (-0,1) = \ldots\ldots$
$0,5 \cdot (-0,2) = \ldots\ldots$	$(-0,5) \cdot (-0,2) = \ldots\ldots$
$0,5 \cdot (-0,3) = \ldots\ldots$	$(-0,5) \cdot (-0,3) = \ldots\ldots$

- Πώς μεταβάλλονται τα γινόμενα στην πρώτη περίπτωση;
- Πώς μεταβάλλονται τα γινόμενα στη δεύτερη περίπτωση;

Θυμάμαι - Μαθαίνω

- Το γινόμενο δύο κλασμάτων $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$ ($\beta \neq 0$ και $\delta \neq 0$) είναι κλάσμα, με αριθμητή το γινόμενο των αριθμητών και παρονομαστή το γινόμενο των παρονομαστών, δηλαδή $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta \cdot \delta}$.

Παράδειγμα: $\frac{12}{5} \cdot \frac{15}{8} = \frac{12 \cdot 15}{5 \cdot 8} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5}{5 \cdot 2 \cdot 4} = \frac{9}{2}$

• Επειδή κάθε ακέραιος αριθμός μπορεί να γραφεί ως κλάσμα με παρονομαστή τη μονάδα, το γινόμενο ενός ακεραίου **κ** με ένα κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι κλάσμα, με αριθμητή το γινόμενο του ακεραίου με τον αριθμητή του κλάσματος και παρονομαστή τον ίδιο, δηλαδή $\kappa \cdot \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\kappa}{1} \cdot \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\kappa \cdot \alpha}{\beta}$.

Παράδειγμα: $3 \cdot \frac{5}{6} = \frac{3 \cdot 5}{6} = \frac{\cancel{3} \cdot 5}{2 \cdot \cancel{3}} = \frac{5}{2}$

Κανόνας πολλαπλασιασμού πρόσημων.

$(+) \cdot (+) = +$
$(+) \cdot (-) = -$
$(-) \cdot (+) = -$
$(-) \cdot (-) = +$

• Ειδικά για τους ρητούς αριθμούς λαμβάνουμε υπόψη μας τα πρόσημα, χρησιμοποιώντας τον κανόνα του πολλαπλασιασμού σε αυτά.

Έτσι,

• για να βρούμε **το γινόμενο δύο ομόσημων** ρητών αριθμών βάζουμε **πρόσημο το (+)** και πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές. *Παράδειγμα:*

$(+1{,}2) \cdot (+1{,}3) = +(1{,}2 \cdot 1{,}3) = +1{,}56$, $(-1{,}2) \cdot (-1{,}3) = +(1{,}2 \cdot 1{,}3) = +1{,}56$,

• για να βρούμε **το γινόμενο δύο ετερόσημων** ρητών αριθμών βάζουμε **πρόσημο το (–)** και πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές. *Παράδειγμα:*

$(-1{,}2) \cdot (+1{,}3) = -(1{,}2 \cdot 1{,}3) = -1{,}56$

• για να βρούμε **το γινόμενο πολλών παραγόντων μετράμε τα (–)** που υπάρχουν σε αυτό. Αν ο αριθμός είναι ζυγός, βάζουμε πρόσημο το (+) και πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές. Αν ο αριθμός των (–) είναι μονός, βάζουμε πρόσημο το (–) και πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές. *Παραδείγματα:*

$(-1{,}1) \cdot (+1) \cdot (-1{,}2) \cdot (+2) = +(1{,}1 \cdot 1 \cdot 1{,}2 \cdot 2) = +2{,}64$

$(-1{,}1) \cdot (+1) \cdot (-1{,}2) \cdot (-2) = -(1{,}1 \cdot 1 \cdot 1{,}2 \cdot 2) = -2{,}64$

Για να μελετήσετε λεπτομερώς τις πράξεις στους ρητούς, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τους ψηφιακούς συνδέσμους:

Γεωμετρική ερμηνεία της πρόσθεσης δύο κλασμάτων

Γεωμετρική ερμηνεία του πολλαπλασιασμού δύο κλασμάτων

Γεωμετρική ερμηνεία του πολλαπλασιασμού δύο κλασμάτων 2

Διερεύνηση 2

α) Δύο μαχητικά αεροπλάνα πετάνε στα 2000m πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας. Ξαφνικά χωρίζουν και το ένα πηγαίνει στα $\frac{5}{4}$ του ύψους τους ενώ το άλλο πηγαίνει στα $\frac{3}{4}$ αυτού.

Πόσα μέτρα πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας πετάνε τώρα τα μαχητικά;

β) Δύο υποβρύχια πλέουν –250m από την επιφάνεια της θάλασσας. Ξαφνικά χωρίζουν και το ένα πηγαίνει στα $\frac{5}{4}$ του βάθους τους ενώ το άλλο πηγαίνει στα $\frac{3}{4}$ αυτού.

Σε πόση απόσταση από την επιφάνεια της θάλασσας πλέουν τα υποβρύχια;

• Όταν πολλαπλασιάζουμε έναν θετικό αριθμό με κλάσμα μεγαλύτερο της μονάδας ο αριθμός μεγαλώνει, ενώ όταν τον πολλαπλασιάζουμε με θετικό κλάσμα μικρότερο της μονάδας ο αριθμός μικραίνει.

Παράδειγμα: $\frac{3}{2} \cdot 8 = \frac{3 \cdot 8}{2} = \frac{24}{2} = 12 > 8$, ενώ $\frac{1}{2} \cdot 8 = \frac{1 \cdot 8}{2} = \frac{8}{2} = 4 < 8$

- Αντίθετα, όταν πολλαπλασιάζουμε έναν αρνητικό αριθμό με κλάσμα μεγαλύτερο της μονάδας ο αριθμός μικραίνει, ενώ όταν τον πολλαπλασιάζουμε με θετικό κλάσμα μικρότερο της μονάδας ο αριθμός μεγαλώνει.

Παράδειγμα: $\frac{3}{2} \cdot (-8) = \frac{3 \cdot (-8)}{2} = \frac{-24}{2} = -12 < -8$, ενώ $\frac{1}{2} \cdot (-8) = \frac{1 \cdot (-8)}{2} = \frac{-8}{2} = -4 > -8$

Τι συμβαίνει όταν το κλάσμα είναι αρνητικός αριθμός;

Θυμάμαι - Μαθαίνω

Η **επιμεριστική ιδιότητα** του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση ισχύει και στους ρητούς αριθμούς.

Για παράδειγμα, παρατηρήστε τις παρακάτω πράξεις:

α) $\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{4}{5} + \frac{3}{4}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{4 \cdot 4}{5 \cdot 4} + \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{-16 + 15}{20}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{20}\right) = \left(-\frac{\cancel{2}}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{2} \cdot 10}\right) = \frac{1}{30}$

β) Ανάλογα προς το (α) ερώτημα

$$\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{4}{5} + \frac{3}{4}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{4}{5}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right)\left(+\frac{3}{4}\right) = \left(+\frac{8}{15}\right) + \left(-\frac{6}{12}\right) = \frac{32}{60} - \frac{30}{60} = \frac{2}{60} = \frac{1}{30}$$

γ) $\frac{3}{10} \cdot 5\frac{2}{3} = \frac{3}{10} \cdot \left(5 + \frac{2}{3}\right) = \frac{3}{10} \cdot 5 + \frac{\cancel{3}}{10} \cdot \frac{2}{\cancel{3}} = \frac{15}{10} + \frac{2}{10} = \frac{17}{10}$

Οι ρητοί αριθμοί έχουν μια σημαντική ιδιότητα που δεν έχουν οι ακέραιοι.

Για κάθε ρητό αριθμό α, εκτός από το μηδέν, υπάρχει ένας μοναδικός ρητός αριθμός β, έτσι ώστε **α · β = 1**.

Για παράδειγμα:

α) $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{6}{6} = 1$

β) $\left(-\frac{5}{8}\right) \cdot \left(-\frac{8}{5}\right) = +\frac{5 \cdot 8}{8 \cdot 5} = \frac{40}{40} = 1$

γ) $1{,}6 \cdot 0{,}625 = 1$

δ) $(-0{,}4) \cdot (-2{,}5) = 1$

ε) $7 \cdot \frac{1}{7} = \frac{7 \cdot 1}{7} = \frac{7}{7} = 1$

στ) $(-11) \cdot \left(-\frac{1}{11}\right) = \frac{11 \cdot 1}{11} = \frac{11}{11} = 1$

Γενικά

Δύο ρητοί αριθμοί που το γινόμενό τους είναι ίσο με τη μονάδα λέγονται **αντίστροφοι**.

Ο αντίστροφος ενός αριθμού **α** (α ≠ 0) συμβολίζεται $\frac{1}{\alpha}$.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι:

- Επειδή το **γινόμενο** των αντίστροφων αριθμών είναι ο θετικός αριθμός 1, οι **αντίστροφοι αριθμοί** είναι **ομόσημοι**.
- **Το μηδέν δεν έχει αντίστροφο**.
- Για να γράψουμε τον αντίστροφο ενός κλάσματος (με μη μηδενικούς όρους) αρκεί να γράψουμε τον αριθμητή ως παρονομαστή και τον παρονομαστή ως αριθμητή.

Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού στους ρητούς αριθμούς	
Αντιμεταθετική ιδιότητα.	$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$
Προσεταιριστική ιδιότητα.	$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$
Επιμεριστική ιδιότητα ως προς την πρόσθεση.	$\alpha \cdot (\beta + \gamma) - \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$
Ο αριθμός ένα (1) **δεν** μεταβάλλει το γινόμενο.	$\alpha \cdot 1 = \alpha = 1 \cdot \alpha$
Για κάθε ρητό, διαφορετικό από το μηδέν, **υπάρχει ο αντίστροφός** του.	$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1$ $(\alpha \neq 0)$
Το μηδέν (0) **μηδενίζει** το γινόμενο.	$\alpha \cdot 0 = 0 = 0 \cdot \alpha$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Ο Ιάσονας έφαγε το μεσημέρι τα $\frac{3}{8}$ από μια πίτσα και το υπόλοιπο το έβαλε στο ψυγείο. Το βράδυ έφαγε τα $\frac{2}{5}$ από ότι έμεινε από την πίτσα. Τι μέρος από ολόκληρη την πίτσα έφαγε το βράδυ;

Απάντηση

Αφού ο Ιάσονας έφαγε τα $\frac{3}{8}$ από την πίτσα το υπόλοιπο είναι $\frac{8}{8} - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$ και αυτά έβαλε στο ψυγείο. Το βράδυ έφαγε τα $\frac{2}{5}$ από τα $\frac{5}{8}$, δηλαδή έφαγε το $\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{8} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}}{\cancel{2} \cdot 4} = \frac{1}{4}$ της πίτσας.

3.3.4 Δύναμη ρητών με εκθέτη φυσικό αριθμό μεγαλύτερο από το μηδέν

Η έννοια της δύναμης με εκθέτη φυσικό αριθμό **ν > 1** , που είδαμε στους φυσικούς και στους ακέραιους αριθμούς, επεκτείνεται και στους ρητούς αριθμούς. Έτσι, το γινόμενο $\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}}$ συμβολίζεται με α^ν .

$$\alpha^\nu = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}}, \ \nu > 1$$

Το α^ν λέγεται δύναμη με βάση το **α**, εκθέτη το **ν** και διαβάζεται «**α στη νιοστή**» ή «**νιοστή δύναμη του α**».

- Για ν = 1, $\alpha^1 = \alpha$.
- Για ν = 2, το α^2 λέγεται και «**α στο τετράγωνο**» ή «**τετράγωνο του α**».
- Για ν = 3, το α^3 λέγεται και «**α στον κύβο**» ή «**κύβος του α**».

Παραδείγματα:

α) $\left(+\frac{2}{3}\right)^2 = \left(+\frac{2}{3}\right) \cdot \left(+\frac{2}{3}\right) = +\frac{4}{9} = \frac{4}{9}$ **β)** $\left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = +\frac{9}{16}$ **γ)** $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27}$

Διερεύνηση 3

Να υπολογίσετε τις δυνάμεις:

1) $(+1)^5$ **2)** $(+1)^6$ **3)** $(+1)^7$ **4)** $(+1)^8$ **5)** $(-1)^5$ **6)** $(-1)^6$ **7)** $(-1)^7$ **8)** $(-1)^8$

- Τι παρατηρείτε για τις δυνάμεις με βάση θετικό αριθμό; • Τι παρατηρείτε για τις δυνάμεις με βάση αρνητικό αριθμό;

Ιδιότητες των δυνάμεων

- Η δύναμη με βάση έναν θετικό ρητό αριθμό α και εκθέτη έναν θετικό ακέραιο αριθμό ν είναι θετικός αριθμός, δηλαδή,

$$\text{αν } \boldsymbol{\alpha > 0} \text{ και } \boldsymbol{\nu > 0}, \text{ τότε } \boldsymbol{\alpha^{\nu} > 0}$$

Παράδειγμα: $(1,5)^2 = 1,5 \cdot 1,5 = 2,25$, $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27}$

- Η δύναμη με βάση έναν αρνητικό ρητό αριθμό και εκθέτη έναν θετικό ακέραιο είναι θετικός αριθμός όταν ο εκθέτης είναι άρτιος και αρνητικός αριθμός όταν ο εκθέτης είναι περιττός. Δηλαδή,

> - αν $\boldsymbol{\alpha < 0}$ και **ν άρτιος**, τότε $\boldsymbol{\alpha^{\nu} > 0}$,
> - αν $\boldsymbol{\alpha < 0}$ και **ν περιττός**, τότε $\boldsymbol{\alpha^{\nu} < 0}$

Παράδειγμα: $(-1,3)^2 = (-1,3) \cdot (-1,3) = +1,69 = 1,69$, $\left(-\frac{3}{2}\right)^3 = \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8}$

- Η δύναμη ενός θετικού κλάσματος βρίσκεται αν υψωθεί στη δύναμη κάθε όρος του κλάσματος, δηλαδή,

$$\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}}\right)^{\nu} = \frac{\boldsymbol{\alpha}^{\nu}}{\boldsymbol{\beta}^{\nu}}, \ (\beta \neq 0)$$

Παράδειγμα: $\left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{3^5}{4^5}$,

- Για να βρούμε τη δύναμη ενός αρνητικού κλάσματος υψώνουμε στον εκθέτη κάθε όρο του κλάσματος και βάζουμε πρόσημο «+» αν ο εκθέτης είναι **άρτιος** ή πρόσημο «–» αν ο εκθέτης είναι **περιττός** θετικός ακέραιος αριθμός, δηλαδή:

$$\left(-\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}}\right)^{\nu} = \frac{\boldsymbol{\alpha}^{\nu}}{\boldsymbol{\beta}^{\nu}}, \ \boldsymbol{\nu} : \textbf{άρτιος}, \ \beta \neq 0.$$

$$\left(-\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}}\right)^{\nu} = -\frac{\boldsymbol{\alpha}^{\nu}}{\boldsymbol{\beta}^{\nu}}, \ \boldsymbol{\nu} : \textbf{περιττός}, \ \beta \neq 0.$$

Παράδειγμα: $\left(-\frac{3}{4}\right)^6 = +\left(\frac{3}{4}\right)^6 = \frac{3^6}{4^6}$

Παράδειγμα: $\left(-\frac{4}{3}\right)^{11} = -\left(\frac{4}{3}\right)^{11} = -\frac{4^{11}}{3^{11}}$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να βρείτε τα αποτελέσματα: **α)** $(-1,3)^2$ και $-(1,3)^2$ **β)** $(-1,3)^3$ και $-(1,3)^3$

Απάντηση

α) Το $(-1,3)^2$ σημαίνει ότι ο αριθμός $-1,3$ πρέπει να υψωθεί στο τετράγωνο και επομένως θα έχουμε $(-1,3)^2 = 1,69$.
Το $-(1,3)^2$ είναι ο αντίθετος του $(1,3)^2$ και επειδή $(1,3)^2 = 1,69$ παίρνουμε: $-(1,3)^2 = -1,69$.

β) Ομοίως το $(-1,3)^3$ σημαίνει ότι ο αριθμός $-1,3$ πρέπει να υψωθεί στον κύβο και επομένως θα έχουμε $(-1,3)^3 = -2,197$
Το $-(1,3)^3$ είναι ο αντίθετος του $(1,3)^3$ και επειδή $(1,3)^3 = 2,197$ παίρνουμε: $-(1,3)^3 = -2,197$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Να διατάξετε τους παρακάτω αριθμούς από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο:

α) $(+1,2)$, $(+1,2)^2$ και $(+1,2)^3$ **β)** $(+0,2)$, $(+0,2)^2$ και $(+0,2)^3$ **γ)** $(-0,2)$, $(-0,2)^2$, $(-0,2)^3$, $(-0,2)^4$

Απάντηση

α) Αφού $(+1,2)^2 = 1,44$, $(+1,2)^3 = (+1,2)^3 = 1,728$, και επειδή $1,44 < 1,728$ παίρνουμε $(+1,2)^2 < (+1,2)^3$

Άρα $+1,2 < (+1,2)^2 < (+1,2)^3$

β) Αφού $(+0,2)^2 = 0,04$, $(+0,2)^3 = +(0,2)^3 = 0,008$, και επειδή $0,04 > 0,008$ παίρνουμε $(+0,2)^2 > (+0,2)^3$

Άρα $+0,2 > (+0,2)^2 > (+0,2)^3$

γ) Αφού $(-0,2)^2 = 0,04$, $(-0,2)^3 = -(0,2)^3 = -0,008$, $(-0,2)^4 = +(0,2)^4 = 0,0016$,

και επειδή $-0,2 < -0,008 < 0,0016 < 0,04$, παίρνουμε $(-0,2) < (-0,2)^3 < (-0,2)^4 < (-0,2)^2$

Παρατήρηση

Η ύψωση σε δύναμη δεν μας δίνει ως αποτέλεσμα πάντοτε αριθμό μεγαλύτερο από τον αρχικό.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να τοποθετήσετε τα σύμβολα >, <, =, στις παρακάτω παραστάσεις:

α) $\left(+\frac{2}{3}\right) \ldots\ldots \left(+\frac{2}{3}\right)^2$ $\quad$ $\left(-\frac{2}{3}\right) \ldots\ldots \left(-\frac{2}{3}\right)^3$

β) $\left(+\frac{3}{2}\right) \ldots\ldots \left(+\frac{3}{2}\right)^2$ $\quad$ $\left(-\frac{3}{2}\right) \ldots\ldots \left(-\frac{3}{2}\right)^3$

2 Να διατάξετε τους παρακάτω αριθμούς από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο:

α) $(+1,1)$, $(+1,1)^2$ και $(+1,1)^3$

β) $(-0,3)$, $(-0,3)^2$ και $(-0,3)^3$

γ) $(-1,2)$, $(-1,2)^2$, $(-0,2)^3$, $(-0,2)^4$

δ) $(-1,2)$, $(+1,2)^2$, $(+1,2)^3$, $(-1,2)^4$

3 Να βρείτε τα αποτελέσματα:

α) $(-1,4)^2$ και $-(1,4)^2$

β) $(-1,1)^3$ και $-(1,1)^3$

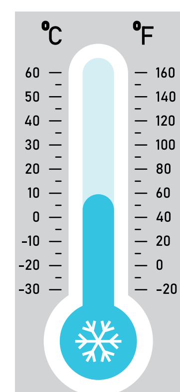
4 Για να χτίσουμε έναν τοίχο γύρω από την αυλή του σπιτιού μας αγοράζουμε 2500 τούβλα, που το καθένα ζυγίζει $\frac{4}{3}$ κιλά.

α) Να βρείτε τη συνολική μάζα των τούβλων.

β) Εάν το φορτηγό που θα τα μεταφέρει μπορεί να φορτώσει μέχρι 2 τόνους τη φορά, πόσες το λιγότερο διαδρομές του φορτηγού απαιτούνται για τη μεταφορά των τούβλων;

5 Ο Γιάννης και ο Βασίλης είναι ξαδέρφια. Ο Γιάννης ζει στην Ελλάδα και ο Βασίλης στις ΗΠΑ. Χθες αντάλλαξαν μηνύματα για τις θερμοκρασίες που επικρατούσαν στις πόλεις που ζουν. Ο Γιάννης έγραψε ότι χθες το πρωί που πήγαινε στο σχολείο είχε -2^o C . Ο Βασίλης έγραψε ότι καθώς πήγαινε στο σχολείο είχε 5^o F. Βοηθήστε τα παιδιά να συνεννοηθούν. [Οι τύποι μετατροπής των βαθμών Κελσίου και Φαρενάιτ είναι

$F = \frac{9}{5} \cdot C + 32$ και $C = \frac{5}{9} \cdot (F - 32)$]



6 Το πλάτος ενός λαχανόκηπου είναι το $\frac{1}{3}$ του μήκους του. Εάν το μήκος του κήπου είναι $10\frac{3}{4}$ m, ποιο είναι το πλάτος του;

7 Μια συνταγή, για να φτιάξετε ένα κέικ απαιτεί $4\frac{2}{3}$ φλιτζάνια αλεύρι. Πόσα φλιτζάνια αλεύρι χρειάζονται για να γίνουν 3 κέικ;

8 Ένα βράδυ, τα $\frac{2}{3}$ των συμμαθητών/τριών του Νικόλα παρακολούθησαν τηλεόραση. Από αυτούς/ές τους/τις μαθητές/τριες, τα $\frac{3}{8}$ παρακολούθησαν μια συναυλία. Το $\frac{1}{4}$ των μαθητών/τριών που παρακολούθησαν τη συναυλία την ηχογράφησαν επίσης. Ποιο μέρος των συμμαθητών/τριών της τάξης του Νικόλα παρακολούθησε και ηχογράφησε τη συναυλία;

9 Η οικιακή γάτα έχει μέση διάρκεια ζωής τα $\frac{4}{5}$ της διάρκειας ζωής ενός λιονταριού. Αν η μέση διάρκεια ζωής ενός λιονταριού είναι 15 χρόνια, βρείτε τη μέση διάρκεια ζωής της οικιακής γάτας.

10 Ο κ. Δημήτρης καθημερινά οδηγεί το αυτοκίνητό του και καλύπτει $75\frac{2}{5}$ χιλιόμετρα σε μία ώρα. Πόσα χιλιόμετρα κάλυψε σε $\frac{5}{6}$ της ώρας;

3.3.5 Διαίρεση ρητών αριθμών

Η διαίρεση είναι η αντίστροφη πράξη του πολλαπλασιασμού. Έτσι, αν $Δ = Π \cdot δ$, τότε ισοδύναμα έχουμε:

$$Π = Δ : δ = Δ \cdot \frac{1}{δ}, \; δ \neq 0$$

Ώστε:

Για να βρω το **πηλίκο Π** ενός ρητού αριθμού **Δ (Διαιρετέος)** με έναν άλλο ρητό αριθμό **δ (διαιρέτης)** ($δ \neq 0$), **πολλαπλασιάζω** τον **Διαιρετέο** με τον **αντίστροφο του διαιρέτη**, δηλαδή: $\mathbf{Π = Δ \cdot \frac{1}{δ}}$

Παραδείγματα:

$(-5) : (+4) = (-5) \cdot \left(+\frac{1}{4}\right) = -\frac{5}{4}$, $(-3) : (-4) = (-3) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = +\frac{3}{4}$

- Για να διαιρέσουμε έναν ρητό **α** με ένα κλάσμα $\frac{\beta}{\gamma}$ ($\gamma \neq 0$ και $\beta \neq 0$), αντιστρέφουμε τους όρους του κλάσματος και αντί για διαίρεση κάνουμε πολλαπλασιασμό, δηλαδή $\mathbf{α : \frac{β}{γ} = α \cdot \frac{γ}{β}}$

  Παράδειγμα: $(-3) : \frac{3}{4} = (-3) \cdot \frac{4}{3} = -\frac{\cancel{3} \cdot 4}{\cancel{3}} = -4$

- Αφού το κλάσμα είναι η ακριβής διαίρεση του αριθμητή με τον παρονομαστή, μετατρέπουμε ένα σύνθετο κλάσμα σε απλό, βάζοντας ως αριθμητή το γινόμενο των άκρων όρων του και ως παρονομαστή το γινόμενο των μέσων όρων του, δηλαδή:

$$\frac{\frac{α}{β}}{\frac{γ}{δ}} = \frac{α}{β} \cdot \frac{δ}{γ} = \frac{α \cdot δ}{β \cdot γ}, \; (β \neq 0, δ \neq 0, γ \neq 0)$$

Παράδειγμα: $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{5}} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 3} = \frac{10}{9}$

Για να διαιρέσουμε δύο ομόσημους αριθμούς. Διαιρούμε τις απόλυτες τιμές τους και πρόσημο βάζουμε το (+).

Για να διαιρέσουμε δύο ετερόσημους αριθμούς, διαιρούμε τις απόλυτες τιμές τους και πρόσημο βάζουμε το (–).

Για να διαιρέσουμε έναν ρητό με έναν μεικτό αριθμό, τρέπουμε πρώτα τον μεικτό αριθμό σε κλάσμα, δηλαδή: $\alpha : \beta\frac{\gamma}{\delta} = \alpha : \frac{\beta \cdot \delta + \gamma}{\delta}$, $(\delta \neq 0$ και $\gamma \neq 0)$

Παράδειγμα: $(+2) : \left(-3\frac{2}{5}\right) = (+2) : \left(-\frac{3 \cdot 5 + 2}{5}\right) = (+2) : \left(-\frac{17}{5}\right) = (+2) \cdot \left(-\frac{5}{17}\right) = -\frac{10}{17}$

Ερευνήστε περισσότερο τη διαίρεση των κλασμάτων με τη διπλανή ψηφιακή εφαρμογή.

Ερμηνεία της διαίρεσης ενός ακέραιου με ένα κλάσμα

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Ο Ευριπίδης έχει $8\frac{1}{2}$ ποτήρια χυμό φρούτων. Αν χωρίσει τον χυμό σε μερίδες των $\frac{3}{4}$ του ποτηριού, πόσες μερίδας θα έχει;

Απάντηση

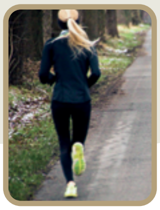
Για να βρει ο Ευριπίδης σε πόσες μερίδες των $\frac{3}{4}$ θα μοιράσει τον χυμό αρκεί να διαιρέσει την ποσότητα του χυμού με την ποσότητα της κάθε μερίδας, δηλαδή:

$$8\frac{1}{2} : \frac{3}{4} = 8\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \left(8 + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{4}{3} = 8 \cdot \frac{4}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{32}{3} + \frac{\cancel{2} \cdot 2}{\cancel{2} \cdot 3} = \frac{34}{3} = 11\frac{1}{3}$$

Επομένως, ο Ευριπίδης θα έχει 11 μερίδες και θα του περισσέψει και $\frac{1}{3}$ του ποτηριού χυμός.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Η Βαλέρια άρχισε να ασχολείται με το «βάδην». Χθες, περπάτησε $10\frac{1}{2}$ χιλιόμετρα σε $1\frac{2}{5}$ της ώρας. Ποιος ήταν ο ρυθμός βαδίσματός της, δηλαδή η ταχύτητά της, σε χιλιόμετρα την ώρα;



Απάντηση

Για να βρούμε τον ρυθμό βαδίσματος της Βαλέριας, αρκεί να διαιρέσουμε τα χιλιόμετρα που έκανε με τον χρόνο που χρειάστηκε. Έχουμε:

$$10\frac{1}{2} : 1\frac{2}{5} = \frac{21}{2} : \frac{7}{5} = \frac{21}{2} \cdot \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot \cancel{7}}{2} \cdot \frac{5}{\cancel{7}} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$$

Άρα, η Βαλέρια περπατούσε με ρυθμό 7,5 χιλιομέτρων την ώρα.

Αυτοαξιολόγηση

Να τοποθετήσετε στις στήλες ΣΩΣΤΟ, ΛΑΘΟΣ ένα ✓ ανάλογα με το αν η πρόταση είναι σωστή ή λανθασμένη.

		Σωστό	Λάθος
1.	Ο πολλαπλασιασμός ρητών αριθμών δίνει πάντα ρητό αριθμό.	☐	☐
2.	Ο πολλαπλασιασμός δύο ομόσημων αριθμών δίνει πάντα θετικό αριθμό.	☐	☐
3.	Το γινόμενο δύο ετερόσημων αριθμών είναι αρνητικός αριθμός.	☐	☐
4.	Το γινόμενο δύο αντίστροφων αριθμών είναι ίσο με +1.	☐	☐
5.	Το τετράγωνο ενός ρητού αριθμού, διαφορετικού του μηδενός, είναι θετικός αριθμός.	☐	☐
6.	Αν ο αριθμός α είναι ρητός και $\alpha < -1$, τότε θα ισχύει $\alpha^2 > 1$.	☐	☐
7.	Για κάθε ρητό αριθμό ισχύει η ισότητα $-\alpha^2 = (-\alpha)^2$.	☐	☐
8.	Το κλάσμα $\frac{1{,}2}{-2{,}3}$ είναι ρητός αριθμός.	☐	☐
9.	Ο αντίστροφος του ρητού αριθμού $\frac{1}{\alpha}$ είναι ο ρητός α.	☐	☐
10.	Οι αντίστροφοι αριθμοί είναι ετερόσημοι.	☐	☐

ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να κάνετε τις πράξεις.

α) $\frac{2}{3}:\frac{5}{6}$ **δ)** $\frac{2}{3}:\frac{10}{3}$ **ζ)** $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}}$

β) $\left(-\frac{1}{2}\right):\left(-\frac{1}{3}\right)$ **ε)** $\left(+\frac{1}{2}\right):\left(-2\frac{1}{3}\right)$ **η)** $\left(\dfrac{-3\frac{5}{8}}{12}\right)$

γ) $\left(-\frac{5}{8}\right):\left(+\frac{3}{12}\right)$ **στ)** $\left(-3\frac{3}{4}\right):\left(+\frac{3}{10}\right)$ **θ)** $\left(\dfrac{-1}{2\frac{1}{3}}\right)$

2 Οι μαθητές μιας τάξης στο εργαστήριο της τεχνολογίας φτιάχνουν πλαίσια των οποίων τα πλαϊνά κομμάτια πρέπει να έχουν μήκος 0,75 m. Πόσα πλαϊνά κομμάτια μπορούν να κοπούν από μια σανίδα μήκους 5,5m;

3 Ο Δημήτρης έχει $7\frac{1}{2}$ μήλα και κάθε μήλο χωρίζεται ομοιόμορφα σε οχτώ φέτες. Πόσες φέτες μήλου έχει ο Δημήτρης;

4 Ο Μιχάλης έχει $6\frac{1}{2}$ αχλάδια και τα χώρισε σε 39 ομοιόμορφα κομμάτια. Ο Φώτης πήρε 5 κομμάτια. Τι μέρος των αχλαδιών πήρε ο Φώτης;

5 Ο Ευριπίδης έχει $8\frac{1}{2}$ φλιτζάνια χυμό φρούτων. Αν χωρίσει τον χυμό σε μερίδες των $\frac{3}{4}$ του φλιτζανιού, πόσες μερίδες θα έχει;

6 Η Μαριάννα αγόρασε μια ντουζίνα φακέλους. Πήρε το $\frac{1}{3}$ από τη δωδεκάδα και μετά μοίρασε τους υπόλοιπους φακέλους εξίσου στους τέσσερις φίλους της. Τι κλάσμα από τη δωδεκάδα πήρε ο καθένας από τους τέσσερις φίλους της και πόσοι φάκελοι ήταν αυτό;

3.4 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥΣ

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

- Να υπολογίζουν την τιμή μιας αριθμητικής παράστασης με ρητούς αριθμούς, κάνοντας χρήση της προτεραιότητας των πράξεων (μπορεί να περιέχει δυνάμεις με εκθέτη φυσικό και παρενθέσεις).
- Να αξιοποιούν την τυποποιημένη μορφή των ρητών αριθμών για την αναπαράσταση φυσικών μεγεθών μεγάλου μεγέθους.
- Να χρησιμοποιούν τους ρητούς αριθμούς στην επίλυση προβλημάτων σε μαθηματικό και ρεαλιστικό πλαίσιο.

3.4.1 Προτεραιότητα των πράξεων

Διερεύνηση 1

Να επαληθεύσετε τα παρακάτω αποτελέσματα:

α) $1,3 + (-2,1) - (-2)\cdot(-2,3) + (-2)^2 = -\frac{7}{5}$

β) $1,3 - [2,1 + 2\cdot(-2,3)] + (-2)^2 = \frac{39}{5}$

γ) $(1,3 - 2,1 + 2)\cdot[(-2,3) + (-2)^2] = \frac{51}{25}$

δ) $1,3 - 2,1 + 2\cdot[(-2,3) + (-2)^2] = \frac{13}{5}$

Στις αλγεβρικές παραστάσεις με ρητούς αριθμούς, οι πράξεις γίνονται όπως έχουμε ήδη αναφέρει. Από τα αριστερά προς τα δεξιά όπως είναι σημειωμένες, ξεκινώντας από τις παρενθέσεις, με την ακόλουθη σειρά:

- **Πρώτα οι δυνάμεις.**
- **Στη συνέχεια οι πολλαπλασιασμοί και οι διαιρέσεις.**
- **Τέλος οι προσθέσεις και οι αφαιρέσεις.**

Πολλές φορές, στις πράξεις χρησιμοποιούμε παρενθέσεις και αγκύλες. Ο λόγος είναι ότι με αυτές αλλάζουμε τη σειρά των πράξεων. Έτσι, όταν υπάρχουν παρενθέσεις και αγκύλες, πρώτα γίνονται οι πράξεις που είναι μέσα στις παρενθέσεις με τη σειρά που είδαμε, και στη συνέχεια στις αγκύλες.

Παράδειγμα:

$(-2)\cdot(-3,1)^2 + [(-1,2)^2 - (-1):(-2,5)\cdot(+1,4)] =$ *[Δεν υπάρχουν πράξεις στις παρενθέσεις. Γίνονται οι πράξεις στις αγκύλες, πρώτα η δύναμη,]*

$(-2)\cdot(-3,1)^2 + [1,44 - (-1):(-2,5)\cdot(1,4)] =$ *[μετά η διαίρεση,]*

$(-2)\cdot(-3,1)^2 + [1,44 - (0,4)\cdot(1,4)] =$ *[στη συνέχεια, ο πολλαπλασιασμός,]*

$(-2)\cdot(-3,1)^2 + [1,44 - (0,56)] =$ *[μετά η αφαίρεση μέσα στην αγκύλη. Τέλος με την αγκύλη.]*

$(-2)\cdot(-3,1)^2 + (+0,88) =$ *[Πρώτα η δύναμη,]*

$(-2)\cdot(+9,61) + (+0,88) =$ *[μετά ο πολλαπλασιασμός]*

$(-19,22) + (+0,88) =$ *[στη συνέχεια η πρόσθεση]*

$-18,34 =$ *[Αποτέλεσμα.]*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $(-2)^3 - (-3)^2 - (-4)^2 : \left(+2\frac{2}{3}\right) - (-2)^2$

β) $5{,}25 - \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - (-1-2)^2 + (-3)^2 : (-4{,}2)$

2 Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

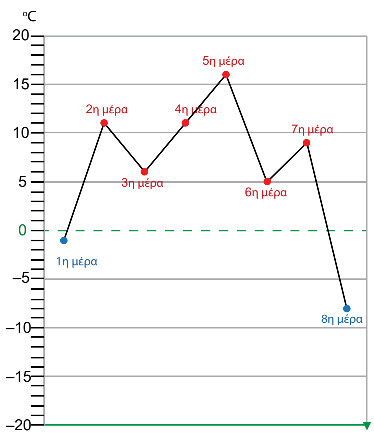
α) $(-1{,}2 + 2{,}1)^2 - (-0{,}5)^2$

β) $(-1{,}2)^2 - 2 \cdot (-1{,}2) \cdot (-2{,}1) - (-0{,}5)^2$

γ) $[(-1{,}2 - (-2{,}1) - (-0{,}5)]^2$

δ) $(-1{,}2)^2 + (-2{,}1) \cdot [(-2{,}1) - 2 \cdot (-1{,}2)]$

3 Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι θερμοκρασίες που καταγράφηκαν 8 συγκεκριμένες μέρες σε μια συγκεκριμένη πόλη. Να βάλετε τα δεδομένα στον πίνακα που ακολουθεί.



Μέρα	Θερμοκρασία	Διαφορά

α) Στη στήλη των διαφορών γράφεται η αλγεβρική τιμή της διαφοράς της θερμοκρασίας κάθε ημέρας από την προηγούμενη.

β) Να βρείτε το αλγεβρικό άθροισμα των διαφορών.

γ) Ποια σχέση έχει το αλγεβρικό άθροισμα των διαφορών με τη θερμοκρασία της 1ης και της 8ης ημέρας;

3.4.2 Τυποποιημένη μορφή μικρών και μεγάλων αριθμών

Διερεύνηση 2

Στις διπλανές εικόνες ζυγίζονται 3 γραμμάρια ρυζιού και μετριούνται οι κόκκοι του. Αν βρέθηκαν 372 κόκκοι ρυζιού, να υπολογιστεί:

- Πόσοι κόκκοι ρυζιού υπάρχουν στα 100 γραμμάρια
- Πόσοι κόκκοι ρυζιού υπάρχουν στο 1 κιλό.
- Πόσοι κόκκοι ρυζιού υπάρχουν στον 1 τόνο.
- Η παγκόσμια παραγωγή ρυζιού το 2023 ήταν 517,1 εκατομμύρια τόνοι. Πόσοι κόκκοι ρυζιού ήταν;

Για να εκφράσουμε πολύ μεγάλους ή πολύ μικρούς αριθμούς, γράφουμε τους αριθμούς ως γινόμενο ενός αριθμού από το 1 έως το 10 επί μία δύναμη του 10 ή του $\frac{1}{10}$.

Τυποποιημένη μορφή ενός θετικού αριθμού ονομάζουμε τη γραφή του στη μορφή $\alpha \cdot 10^{\nu}$ ή στη μορφή $\alpha \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{\nu}$ όπου α είναι δεκαδικός αριθμός, με $1 \le \alpha < 10$ και ν θετικός ακέραιος αριθμός.

Παράδειγμα **πολύ μεγάλου αριθμού** στην τυποποιημένη του μορφή:

• Η μάζα της γης είναι $5{,}9722 \times 10^{24}$ kg δηλαδή $59722\underbrace{00...0}_{20}$ Kg.

Ανοίξτε την εφαρμογή στον σύνδεσμο https://en.wikipedia.org/wiki/Earth_mass

• Η μάζα του ήλιου είναι $1{,}98847 \times 10^{30}$ Kg.

Ανοίξτε την εφαρμογή στον σύνδεσμο https://en.wikipedia.org/wiki/Solar_mass

• Αυτό σημαίνει ότι η μάζα του Ήλιου είναι $198847\underbrace{00...0}_{25}$ Kg

Παράδειγμα **πολύ μικρού αριθμού** στην τυποποιημένη του μορφή:

• Η μάζα ενός ηλεκτρονίου είναι $\frac{9{,}1094}{10^{31}}$ Kg, δηλαδή $0{,}\underbrace{00...0}_{30}91094$ Kg.

(Περισσότερα για το ηλεκτρόνιο στον σύνδεσμο https://el.wikipedia.org/wiki/Ηλεκτρόνιο)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να γράψετε στην τυποποιημένη τους μορφή τους αριθμούς:

α) 1234000000 **β)** 3450000000 **γ)** 6580000000

2 Να γράψετε στη δεκαδική τους μορφή τους αριθμούς:

α) $2{,}324 \cdot 10^{11}$ **β)** $1{,}324 \cdot 10^{18}$ **γ)** $\frac{1{,}5423}{10^{15}}$ **δ)** $35{,}27 \cdot 10^{8}$

3 Αφού βρείτε (με τη βοήθεια του διαδικτύου) την απόσταση της Γης από τον Ήλιο και την απόσταση της Σελήνης από τη Γη, να τις εκφράσετε στην τυποποιημένη τους μορφή.

3.4.3 Εφαρμογή των ρητών σε προβλήματα

Ένα κλάσμα με αριθμητή έναν ρητό **α** και παρονομαστή το 100 λέγεται **ποσοστό**, σημειώνεται ως **α %** και διαβάζεται «**α τοις εκατό**». Επειδή, τα ποσοστά είναι ομώνυμα κλάσματα με παρονομαστή το 100, η σύγκριση μεταξύ τους είναι εύκολη.

Παράδειγμα:

Αν η μπλούζα της Λουίζας πριν από τις εκπτώσεις κόστιζε 35€ και η Λουίζα την αγόρασε 28€, η έκπτωση που έγινε ήταν 35 – 28 = 7€. Συνεπώς, το ποσοστό της έκπτωσης ήταν $\frac{7}{35} = 0{,}2 = \frac{20}{100}$ επί της τιμής της. Η έκπτωση ως ποσοστό σημειώνεται **20%** και διαβάζεται «**20 τοις εκατό**».

Διερευνήστε τα ποσοστά με την εφαρμογή.

Διερεύνηση και εξάσκηση πάνω στην έννοια των ποσοστών

Όταν μια τράπεζα μας δανείζει χρήματα **(Κεφάλαιο)**, πληρώνουμε ένα επιπλέον ποσό που λέγεται **τόκος** το οποίο είναι ένα ποσοστό του χρηματικού ποσού που δανειστήκαμε. Η τράπεζα υπολογίζει τον τόκο σύμφωνα με το **επιτόκιο**, που είναι το ποσοστό των χρημάτων που έχει ορισθεί ως αμοιβή.

Αντίθετα, όταν εμείς καταθέτουμε χρήματα στην τράπεζα, τότε η τράπεζα πληρώνει τόκο σε εμάς, που τον υπολογίζει πάλι σύμφωνα με κάποιο επιτόκιο.

Ο τόκος **(Τ)** που προκύπτει για το Κεφάλαιο **(Κ)** που δανειστήκαμε/δανείσαμε για έναν χρόνο με επιτόκιο **(ε)** υπολογίζεται από τη σχέση: **Τ = ε · Κ**

Για παράδειγμα, ο τόκος που πληρώνουμε για ποσό 2500€ με επιτόκιο 3,5% είναι $T = \frac{3,5}{10\cancel{0}} \cdot 250\cancel{0} = 87,5$€.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Ένας έμπορος δανείστηκε ποσό 55000€ για δυόμισι χρόνια από την τράπεζα με επιτόκιο 3,2%. Η συμφωνία ήταν ότι στο τέλος κάθε χρόνου οι τόκοι θα προστίθενται στο κεφάλαιο (μια τέτοια διαδικασία λέγεται **ανατοκισμός**). Τι ποσό θα πληρώσει στο τέλος της συμφωνίας;

Απάντηση

Στο τέλος του 1ου χρόνου, ο τόκος θα είναι $T_1 = \frac{3,2}{1\cancel{00}} \cdot 550\cancel{00} = 3,2 \cdot 550 = 1760$€. Έτσι το νέο κεφάλαιο θα είναι $K_1 = 55000 + 1760 = 56760$€.

Στο τέλος του 2ου χρόνου, ο τόκος θα είναι $T_2 = \frac{3,2}{10\cancel{0}} \cdot 5676\cancel{0} = \frac{3,2 \cdot 5676}{10} = 1816,32$€. Έτσι το νέο κεφάλαιο θα είναι $K_2 = 56760 + 1816,32 = 58576,32$€.

Στο τέλος της συμφωνίας, δηλαδή μετά από μισό χρόνο ακόμα, το συνολικό ποσό K_3 θα είναι το κεφάλαιο $K_2 = 58576,32$€ και επιπλέον ο τόκος του μισού χρόνου για το κεφάλαιο K_2.

Είναι: $T_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3,2}{100} \cdot 58576,32 = \frac{3,2 \cdot 58576,32}{200} \simeq 937,22$€ και επομένως το συνολικό ποσό που θα επιστραφεί στην τράπεζα θα είναι $K_3 \simeq 58576,32 + 937,22 = 59513,54$€.

Για να συγκρίνουμε τις τιμές δύο μεγεθών που συμμεταβάλλονται, έτσι ώστε να δούμε τι μέρος του ενός είναι το άλλο, σχηματίζουμε το κλάσμα των τιμών τους. Το κλάσμα αυτό ονομάζεται **λόγος**.
Για παράδειγμα **το ποσοστό** είναι ένας **λόγος**. Επίσης, **το επιτόκιο** είναι ένας **λόγος**.

Παράδειγμα:
Στην Α΄ τάξη ενός γυμνασίου υπάρχουν 36 αγόρια και 45 κορίτσια. Ο λόγος των αγοριών προς τα κορίτσια είναι $\frac{36}{45} = \frac{4 \cdot \cancel{9}}{5 \cdot \cancel{9}} = \frac{4}{5}$. Επίσης, ο λόγος των κοριτσιών προς τα αγόρια είναι $\frac{45}{36} = \frac{5 \cdot \cancel{9}}{4 \cdot \cancel{9}} = \frac{5}{4}$.

Η ισότητα δύο λόγων λέγεται **αναλογία.**

Στην προηγούμενη εφαρμογή, ο λόγος του τόκου προς το κεφάλαιο το 1ο έτος είναι $\frac{1760}{55000}$ και ο λόγος του τόκου προς το κεφάλαιο το 2ο έτος είναι $\frac{1816,32}{56760}$.

Οι λόγοι είναι ίσοι (γιατί;) οπότε η ισότητα $\frac{1760}{55000} = \frac{1816,32}{56760}$ είναι **αναλογία**.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Ο λόγος του ύψους προς το πλάτος της οθόνης μιας τηλεόρασης είναι 9:16. Αν το ύψος της τηλεόρασης είναι 19, 61 cm ποιο είναι το πλάτος της;

Απάντηση

Αφού ο λόγος του ύψους προς το πλάτος είναι $\frac{9}{16}$ και το ύψος της τηλεόρασης είναι 19,61 cm τότε οι λόγοι $\frac{9}{16}$ και $\frac{19{,}61}{\text{πλάτος}}$ θα είναι ίσοι. Από την αναλογία $\frac{9}{16} = \frac{19{,}61}{\text{πλάτος}}$

παίρνουμε: πλάτος x 9 = 16 x 19,61 ή

πλάτος $= \frac{16 \cdot 19{,}61}{9} = \frac{313{,}76}{9} \approx 34{,}86$cm.

Ερεύνηση της έννοιας της κλίμακας

Ερευνήστε περισσότερο τον λόγο δύο συμμεταβαλλόμενων ποσών με τις εφαρμογές.

Διερεύνηση του λόγου δύο ποσών

Διερεύνηση 3

Ο πατέρας της Ιουλίας είναι γεωργός. Φέτος σκέφτεται να καλλιεργήσει πεπόνια. Ο γεωπόνος του, του είπε ότι «για κάθε στρέμμα που καλλιεργεί με την τρέχουσα τιμή θα έχει έξοδα 150€ και έσοδα 400€». Θέλει να διαθέσει για έξοδα 600€ και προσπαθεί να προγραμματίσει την παραγωγή κάνοντας τον παρακάτω πίνακα. Βοήθησέ τον να τον ολοκληρώσει.

Έξοδα	150	300			
Έσοδα	400				

Τι παρατηρείτε στις τιμές των μεγεθών «Έξοδα» και «Έσοδα»;
Δώστε παραδείγματα για τις τιμές μεγεθών που έχουν την ίδια σχέση.

Ανάλογα ονομάζουμε τα ποσά που **ο λόγος** των τιμών τους **παραμένει σταθερός.**

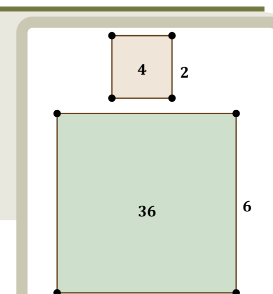
Στα ανάλογα ποσά, όταν η τιμή του ενός ποσού πολλαπλασιάζεται με έναν αριθμό, με τον ίδιο αριθμό πολλαπλασιάζεται και η τιμή του άλλου ποσού.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Να εξετάσετε αν τα ποσά:

α) «πλευρά τετραγώνου» και «περίμετρος» είναι ποσά ανάλογα.

β) «πλευρά τετραγώνου» και «εμβαδόν» τετραγώνου είναι ποσά ανάλογα.



Απάντηση

α) Αν υποθέσουμε ότι ένα τετράγωνο έχει πλευρά 2, η περίμετρός του θα είναι $4 \cdot 2 = 8$.
Αν πολλαπλασιάσουμε την πλευρά του με έναν αριθμό κ, τότε αυτή θα γίνει $κ \cdot 2$ και η περίμετρός του θα γίνει $4 \cdot (κ \cdot 2) = κ \cdot (4 \cdot 2) = κ \cdot 8$.
Επειδή όταν η πλευρά πολλαπλασιάζεται με έναν αριθμό κ, τότε και η περίμετρος πολλαπλασιάζεται με τον ίδιο αριθμό, τα ποσά «πλευρά τετραγώνου» και «περίμετρος» είναι ανάλογα.

β) Αν πάρουμε το ίδιο τετράγωνο με πλευρά 2, το εμβαδόν του είναι $2 \cdot 2 = 4$. Αν πολλαπλασιάσουμε την πλευρά του με έναν αριθμό, για παράδειγμα το 3, τότε η πλευρά του θα γίνει 6 και το εμβαδόν του θα γίνει 36. Δηλαδή, το εμβαδόν του δεν τριπλασιάζεται κι αυτό αλλά εννεαπλασιάζεται, αφού $36 = 9 \cdot 4$. Επομένως, τα ποσά «πλευρά τετραγώνου» και «εμβαδόν» δεν είναι ανάλογα ποσά.

Διερεύνηση 4

Ένας αγρότης θέλει να περιφράξει ένα τμήμα σχήματος ορθογωνίου στο χωράφι του εμβαδού 120 τετραγωνικών μέτρων.
Καταγράφει ποιες είναι οι διαστάσεις που πρέπει να έχει το ορθογώνιο, συμπληρώνοντας τον παρακάτω πίνακα.

Πλάτος	8	10			
Μήκος	15				

Τι παρατηρείτε στις τιμές των μεγεθών «Πλάτος» και «Μήκος»;
Δώστε παραδείγματα για τις τιμές μεγεθών που έχουν την ίδια σχέση.

Αντιστρόφως ανάλογα ονομάζονται τα ποσά για τα οποία **το γινόμενο** των τιμών τους **παραμένει σταθερό**.

Στα αντιστρόφως ανάλογα ποσά, όταν η τιμή του ενός ποσού πολλαπλασιάζεται με έναν αριθμό, η τιμή του άλλου ποσού διαιρείται με τον ίδιο αριθμό.
Για παράδειγμα, τα ποσά «ταχύτητα» και «χρόνος» για να φτάσουμε στον προορισμό μας είναι αντιστρόφως ανάλογα, επειδή αν διπλασιάσουμε, τριπλασιάσουμε την ταχύτητά μας ο χρόνος θα υποδιπλασιαστεί (θα γίνει ο μισός), θα υποτριπλασιαστεί κ.λπ.
Αντιθέτως, αν υποδιπλασιάσουμε, υποτριπλασιάσουμε την ταχύτητα, ο χρόνος θα διπλασιαστεί, θα τριπλασιαστεί κ.λπ.

Ένας τρόπος αντιμετώπισης των ανάλογων και αντιστρόφως αναλόγων ποσών είναι «η αναγωγή στη μονάδα». Δείχνουμε τη διαδικασία στις παρακάτω εφαρμογές.

Διερεύνηση των αντιστρόφως ανάλογων ποσών

Να διερευνήσετε τη σχέση ταχύτητας - χρόνου.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Το καλοριφέρ του σχολείου μας στα $\frac{2}{3}$ του μήνα έκαψε 720 λίτρα πετρέλαιο. Αν ανάβει τις ίδιες ώρες, πόσο πετρέλαιο θα κάψει σε ενάμιση μήνα;

Απάντηση

Ο ενάμισης μήνας είναι $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ του μήνα.

Τρέπουμε τα κλάσματα $\frac{2}{3}$ και $\frac{3}{2}$ σε ομώνυμα βρίσκοντας το ΕΚΠ των παρονομαστών τους.

Είναι ΕΚΠ $(3\,,2) = 6$, οπότε $\frac{2}{3}=\frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2}=\frac{4}{6}$ και $\frac{3}{2}=\frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 3}=\frac{9}{6}$.
Έτσι έχουμε:

- Στα $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=4 \cdot \frac{1}{6}$ του μήνα έκαψε 720 λίτρα, οπότε στο $\frac{1}{6}$ του μήνα θα κάψει $720 : 4 = 180$ λίτρα.
- Επομένως στα $\frac{3}{2}=\frac{9}{6}=9 \cdot \frac{1}{6}$ του μήνα θα κάψει $9 \cdot 180 = 1.620$ λίτρα.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 5

Ο Δήμος Ζίτσας, προκειμένου να καθαρίσει τα φρεάτια, γνωρίζει από προηγούμενη εμπειρία ότι 20 εργάτες χρειάζονται 8 ημέρες. Ωστόσο, φέτος δεν κατόρθωσε να βρει περισσότερους από 5 εργάτες. Πόσες μέρες θα χρειαστεί να δουλέψουν για να ολοκληρώσουν το έργο;

Απάντηση

Θεωρώντας ότι οι εργάτες είναι της ίδιας απόδοσης και αναγνωρίζοντας ότι τα ποσά «εργάτες» και «ημέρες» είναι ποσά αντιστρόφως ανάλογα, θα έχουμε,

- Οι 20 εργάτες ολοκληρώνουν το έργο σε 8 ημέρες.
- Ο ένας εργάτης ολοκληρώνει το έργο σε $20 \cdot 8 = 160$ ημέρες.
- Οι 5 εργάτες θα χρειαστούν $\frac{160}{5} = 32$ ημέρες.

Αυτοαξιολόγηση

Να τοποθετήσετε στις στήλες ΣΩΣΤΟ, ΛΑΘΟΣ ένα ✓ ανάλογα με το αν η πρόταση είναι σωστή ή λανθασμένη.	**Σωστό**	**Λάθος**
1. Η διαίρεση είναι αντίστροφη πράξη του πολλαπλασιασμού.	☐	☐
2. Η διαίρεση ομόσημων αριθμών δίνει αρνητικό αριθμό.	☐	☐
3. Η διαίρεση ετερόσημων αριθμών είναι θετικός αριθμός.	☐	☐
4. Το πηλίκο δύο αντίστροφων αριθμών είναι ίσο με 1.	☐	☐
5. Ο διαιρέτης μιας τέλειας διαίρεσης ισούται με το γινόμενο του Διαιρετέου με τον αντίστροφο του πηλίκου.	☐	☐
6. Ένα σύνθετο κλάσμα γίνεται απλό, αν πολλαπλασιάσουμε τον αριθμητή με τον αντίστροφο του παρονομαστή.	☐	☐
7. Στα ανάλογα ποσά, ο λόγος των τιμών τους παραμένει σταθερός.	☐	☐
8. Στα αντιστρόφως ανάλογα ποσά, όταν η τιμή του ενός πολλαπλασιάζεται με έναν αριθμό, με τον ίδιο αριθμό πολλαπλασιάζεται και η άλλη.	☐	☐
9. Η ηλικία της Άννας αυξάνει καθώς αυξάνει η ηλικία του πατέρα της. Άρα, η ηλικία της Άννας και η ηλικία του πατέρα της είναι ποσά ανάλογα.	☐	☐

ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Σε μια αλυσίδα γρήγορου φαγητού, ένα μπιφτέκι ζυγίζει 210 γραμμάρια και περιέχει 540 kcal, 29 γραμμάρια λίπους, 43 γραμμάρια υδατάνθρακες και 25 γραμμάρια πρωτεΐνης. Η αλυσίδα έχει και το μεγάλο μπιφτέκι, που είναι 320 γραμμάρια. Να βρείτε πόσες kcal, πόσα γραμμάρια λίπους, πόσα γραμμάρια υδατάνθρακες και πόσα γραμμάρια πρωτεΐνης περιέχει.

2 Μία μερίδα σαλάτας με ζυμαρικά περιέχει 67 γραμμάρια υδατάνθρακες, που είναι το 22% της συνιστώμενης ημερήσιας ποσότητας. Ποια είναι η συνολική συνιστώμενη ημερήσια ποσότητα υδατανθράκων;

3 Στο περίπτερο της γειτονιάς αναφέρεται ότι «Κάθε Δευτέρα στα 2 ίδια παγωτά δίνεται και ένα τρίτο ίδιο δωρεάν». Ποιο είναι το ποσοστό έκπτωσης που κάνει το περίπτερο στα παγωτά κάθε Δευτέρα;

4 Ο κύριος Νίκος καταθέτει αυτόματα το 12% του μηνιαίου μισθού του στο λογαριασμό ταμιευτηρίου του. Σε τρεις μήνες κατέθεσε 648 € τον μήνα. Ποιες είναι οι ετήσιες αποδοχές του κυρίου Νίκου;

5 Ένας αγρότης πούλησε τα $\frac{2}{5}$ από τις πατάτες του στην αγορά την περασμένη εβδομάδα. Αυτή την εβδομάδα πούλησε τα $\frac{2}{3}$ από τα υπόλοιπα.

α) Ποιο κλάσμα της σοδειάς του έχει βγει στην αγορά;
β) Αν του έχουν απομείνει 860 κιλά, πόσα κιλά είχε αρχικά;

6 Το δωμάτιο της Μαρίας έχει πλάτος 3,5 μέτρα και μήκος 4,2 μέτρα. Να σχεδιάσετε με κλίμακα 1:50 και να τοποθετήσετε τα εξής έπιπλα με την ίδια κλίμακα.

α) Γραφείο με διαστάσεις 0,80 × 1,30
β) Κρεβάτι με διαστάσεις 1,90 × 1,20
γ) Βιβλιοθήκη με διαστάσεις 1,40 × 0,65

7 Τρεις εργάτες, ο Άρης, ο Πάνος και ο Νίκος πήραν από μια εργασία 2025€. Μοιράστηκαν το ποσό ανάλογα προς τις ημέρες εργασίας τους. Ο Αρης εργάστηκε 15 ημέρες, ο Πάνος 12 ημέρες και ο Νίκος 18 ημέρες.

α) Τι ποσοστό ημερών δούλεψε ο καθένας;
β) Πόσα χρήματα πήρε;
γ) Τι ποσό ήταν το μεροκάματο;

8 Ένας οδηγός μπορεί να διανύσει μία διαδρομή σε 2 ώρες με μέση ταχύτητα 90Km την ώρα. Πόσο χρόνο θα χρειαστεί για ίδια διαδρομή με 70 Km την ώρα;

9 Ας υποθέσουμε ότι χρειάστηκαν 6 ημέρες για να διαβάσετε ένα βιβλίο, με ρυθμό 35 σελίδων την ημέρα. Πόσος χρόνος θα χρειαστεί για να διαβάσετε το ίδιο βιβλίο με ρυθμό 40 σελίδες την ημέρα;

10 Τέσσερις χτίστες ίδιας απόδοσης μπορούν να χτίσουν έναν τοίχο σε 30 ώρες. Πόσες ώρες θα χρειάζονταν 5 χτίστες για να χτίσουν τον ίδιο τοίχο;

11 Ο παρακάτω πίνακας δείχνει την αντιστοίχιση μεταξύ του μήκους μιας χορδής πιάνου και της συχνότητας των δονήσεών της.

Μήκος(cm)	48	36	24	12
Συχνότητα (κύκλοι/δευτ.)	360			1440

Αν τα ποσά «Μήκος» και «Συχνότητα» είναι ανάλογα ή αντιστρόφως ανάλογα, να συμπληρώσετε τον πίνακα.

Γλωσσάρι
Ρητών Αριθμών

Για μια επανάληψη στις έννοιες των ρητών αριθμών, ανοίξτε την ψηφιακή εφαρμογή.

Ανακεφαλαίωση

Ρητοί αριθμοί είναι οι αριθμοί που μπορούν να γραφούν ως κλάσματα με αριθμητή και παρονομαστή ακέραιους αριθμούς και παρονομαστή διαφορετικό από το μηδέν.

Ένας ρητός γράφεται ως κλάσμα, ως τερματιζόμενος δεκαδικός και ως περιοδικός δεκαδικός αριθμός,

- ✓ Οι φυσικοί και οι ακέραιοι αριθμοί είναι ρητοί.
- ✓ Τα κλάσματα (γνήσια, καταχρηστικά και μεικτά) είναι ρητοί αριθμοί.
- ✓ Οι δεκαδικοί αριθμοί που έχουν μόνο έναν περιορισμένο αριθμό δεκαδικών ψηφίων μετά την υποδιαστολή (τερματιζόμενοι δεκαδικοί) είναι ρητοί αριθμοί.
  Για παράδειγμα, οι αριθμοί 0,71, 0,2606 και 0,130453.
- ✓ Οι δεκαδικοί αριθμοί που έχουν απεριόριστο πλήθος δεκαδικών ψηφίων, τα οποία από ένα σημείο και μετά επαναλαμβάνονται συνεχώς μετά την υποδιαστολή, είναι ρητοί αριθμοί και λέγονται **περιοδικοί**. Το τμήμα που επαναλαμβάνεται λέγονται **περίοδος**.
  Για παράδειγμα, οι αριθμοί $0{,}66666... = 0{,}\overline{6}$, $0{,}272727... = 0{,}\overline{27}$ και $2{,}3444... = 2{,}3\overline{4}$ είναι περιοδικοί αριθμοί.

- Οι γνωστές πράξεις (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός και δύναμη) ρητών αριθμών είναι καλά ορισμένες και ακολουθούν τους κανόνες που ισχύουν για τους ακέραιους αριθμούς. Οι ιδιότητες των πράξεων των ακέραιων επεκτείνονται και στους ρητούς αριθμούς.

✓ Η δύναμη με βάση τον ρητό α και εκθέτη τον θετικό ακέραιο αριθμό ν > 1 είναι: $α^ν = \underbrace{α \cdot α \cdots α}_{\text{ν παράγοντας}}$.

✓ Αν ο εκθέτης είναι άρτιος αριθμός τότε το πρόσημο της δύναμης ρητού αριθμού είναι «+». Αν ο εκθέτης είναι περιττός αριθμός τότε το πρόσημο της δύναμης ρητού αριθμού είναι «+» όταν η βάση είναι θετικός και «–» όταν η βάση είναι αρνητικός αριθμός.

- Για να διαιρέσουμε τον ρητό αριθμό α με τον ρητό β, πολλαπλασιάζουμε τον α με τον αντίστροφο του β, δηλαδή $α : β = α \cdot \frac{1}{β}$.
- Οι ρητοί αριθμοί μπορούν να συγκριθούν μεταξύ τους. Ένας ρητός α είναι μεγαλύτερος από έναν ρητό β, αν η διαφορά α – β είναι θετικός αριθμός. Αν η διαφορά α – β είναι αρνητικός αριθμός, τότε ο ρητός α είναι μικρότερος από τον ρητό β.
- Για να συγκρίνουμε ετερώνυμα κλάσματα με διαφορετικούς αριθμητές, τα τρέπουμε σε ομώνυμα ή σε δεκαδικούς αριθμούς.
- Ανάμεσα σε δύο ρητούς αριθμούς, μπορούμε πάντα να βρούμε και άλλους ρητούς αριθμούς. Αυτό σημαίνει ότι δεν ορίζεται ο επόμενος και ο προηγούμενος ενός ρητού αριθμού.
- Στις αλγεβρικές παραστάσεις με ρητούς αριθμούς, η σειρά των πράξεων είναι η εξής:

  ✓ Πρώτα γίνονται οι δυνάμεις.
  ✓ Μετά οι πολλαπλασιασμοί και οι διαιρέσεις, με τη σειρά που τους βρίσκουμε.
  ✓ Τέλος, οι προσθέσεις και οι αφαιρέσεις.

  Όταν υπάρχουν παρενθέσεις και αγκύλες, πρώτα γίνονται οι πράξεις που είναι μέσα στις παρενθέσεις, με τη σειρά που αναφέραμε, και στη συνέχεια στις αγκύλες.
- Η τυποποιημένη μορφή ενός αριθμού χρησιμοποιείται για να εκφράσουμε έναν πολύ μεγάλο ή έναν πολύ μικρό αριθμό. Ο αριθμός γράφεται ως $\boldsymbol{α \cdot 10^ν}$, αν είναι πολύ μεγάλος ή ως $\boldsymbol{α \cdot \frac{1}{10^ν}}$ αν είναι πολύ μικρός, όπου ο α είναι ρητός με $1 \le α < 10$ και ο ν είναι θετικός ακέραιος.
- Ένα κλάσμα με αριθμητή έναν ρητό **α** και παρονομαστή το 100 λέγεται **ποσοστό**, σημειώνεται ως **α%** και διαβάζεται «**α τοις εκατό**».
- Όταν μια τράπεζα μας δανείζει χρήματα (**Κεφάλαιο**) πληρώνουμε επιπλέον ένα ποσό που λέγεται **τόκος**, το οποίο είναι ένα ποσοστό του χρηματικού ποσού που δανειστήκαμε. Η τράπεζα υπολογίζει τον τόκο σύμφωνα με το **επιτόκιο**, που είναι το ποσοστό των χρημάτων που έχει οριστεί ως αμοιβή.
- Για να συγκρίνουμε τις τιμές, δύο μεγεθών που συμμεταβάλλονται, έτσι ώστε να δούμε τι μέρος του ενός είναι το άλλο, σχηματίζουμε το κλάσμα των τιμών τους. Το κλάσμα αυτό ονομάζεται **λόγος**. Η ισότητα δύο λόγων λέγεται **αναλογία**. Δύο λόγοι είναι ίσοι όταν το σταυρωτό γινόμενο (χιαστί) δίνει ισότητα.
- Ποσά που **ο λόγος** των τιμών τους **παραμένει σταθερός** λέμε ότι είναι **ανάλογα**. Στα ανάλογα ποσά όταν το ένα διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται κ.λπ. τότε και το άλλο ομοίως διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται κ.λπ.
- Ποσά που **το γινόμενο** των τιμών τους **παραμένει σταθερό** λέμε ότι είναι ποσά **αντιστρόφως ανάλογα**. Στα αντιστρόφως ανάλογα ποσά, όταν το ένα διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται κ.λπ, το άλλο, αντίστοιχα, υποδιπλασιάζεται, υποτριπλασιάζεται κ.λπ.
- Ένας τρόπος αντιμετώπισης των προβλημάτων στα ανάλογα και αντιστρόφως ανάλογα ποσά είναι «η αναγωγή στη μονάδα».

Αυτοαξιολόγηση

Να τοποθετήσετε στις στήλες ΣΩΣΤΟ, ΛΑΘΟΣ ένα ✓ ανάλογα με το αν η πρόταση είναι σωστή ή λανθασμένη.	**Σωστό**	**Λάθος**
1. Οι φυσικοί και οι ακέραιοι αριθμοί δεν είναι ρητοί.	☐	☐
2. Τα κλάσματα (γνήσια, καταχρηστικά και μεικτά) είναι ρητοί αριθμοί.	☐	☐
3. Οι δεκαδικοί αριθμοί που έχουν ένα περιορισμένο αριθμό δεκαδικών ψηφίων μετά την υποδιαστολή είναι ρητοί αριθμοί.	☐	☐
4. Οι περιοδικοί δεκαδικοί αριθμοί δεν είναι ρητοί αριθμοί.	☐	☐
5. Για να διαιρέσουμε δύο ρητούς αριθμούς, τον α με τον β, πολλαπλασιάζουμε τον α με τον αντίστροφο του β.	☐	☐
6. Το πρόσημο της δύναμης ενός ρητού αριθμού είναι πάντοτε το (+) .	☐	☐
7. Το πρόσημο της δύναμης ρητού αριθμού είναι (–) αν η βάση είναι αρνητικός αριθμός και ο εκθέτης περιττός.	☐	☐
8. Από τα θετικά ομώνυμα κλάσματα μεγαλύτερο είναι εκείνο που έχει τον μεγαλύτερο αριθμητή.	☐	☐
9. Από τα αρνητικά κλάσματα με τον ίδιο αριθμητή, μεγαλύτερο είναι εκείνο που έχει τον μεγαλύτερο παρονομαστή.	☐	☐
10. Ο αριθμός 3,21 είναι ο επόμενος του 3,2 και ο προηγούμενος του 3,22.	☐	☐
11. Η τυποποιημένη μορφή του 16000 είναι ο αριθμός $16 \cdot 10^3$.	☐	☐
12. Το συνολικό ποσοστό δυο διαδοχικών αυξήσεων κατά 10% ισούται με 20%.	☐	☐
13. Μια αύξηση σε ποσοστό 15% και μια διαδοχική μείωση πάλι σε ποσοστό 15% οδηγούν στην αρχική τιμή.	☐	☐

Συμπληρώστε τα κενά με κατάλληλες λέξεις.

14. Ο ρητός α είναι μεγαλύτερος από τον ρητό β, αν η διαφορά α – β είναι .... αριθμός

15. Όταν μας δανείζει χρήματα (**Κεφάλαιο**) η τράπεζα, πληρώνουμε ένα ποσό που λέγεται ....

16. Ποσά που **ο λόγος** των τιμών τους **παραμένει σταθερός** λέμε ότι είναι ....

17. Ποσά που **το γινόμενο** των τιμών τους **παραμένει σταθερό** λέμε ότι είναι ποσά ....

ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι αποστάσεις των πλανητών από τον Ήλιο. Να συμπληρώσετε τον πίνακα με τις τυποποιημένες μορφές των αριθμών.

Πλανήτης	Απόσταση από τον ήλιο	Τυποποιημένη μορφή
Ερμής	60 εκ. χλμ	
Αφροδίτη	100 εκ. χλμ	
Γη	150 εκ. χλμ	$1,5 \cdot 10^8$ χλμ
Άρης	220 εκ. χλμ	
Δίας	780 εκ. χλμ	
Κρόνος	1,42 δις χλμ	
Ουρανός	2,87 δις χλμ	
Ποσειδώνας	4,5 δις χλμ	

2 Ο Μαχμούτ και η Σάρα, τρέχουν στον στίβο. Η Σάρα τρέχει το $\frac{1}{4}$ του στίβου και σταματά. Ο Μαχμούτ τρέχει τα $\frac{5}{8}$ του στίβου και γυρνά προς τα πίσω κατά το $\frac{1}{3}$ του στίβου. Κατά ποιο κλασματικό μέρος του στίβου διαφέρουν οι θέσεις τους;

3 Ένας αγρότης είχε 210 ρίζες ελιές και συμφώνησε με τον γείτονά του να εκμεταλλευτεί και τις δικές του 140 ρίζες ελιές, δίνοντάς του 20% της παραγωγής λαδιού. Στο τέλος της συγκομιδής, συγκεντρώθηκαν 15 τόνοι ελιές, οι οποίες, αφού το ελαιοτριβείο πήρε το ποσοστό του, έδωσαν 18% λάδι. Πόσο λάδι πήρε ο αγρότης και πόσο ο γείτονάς του;

4 Ένας ζαχαροπλάστης αγόρασε 20 κιλά κεράσια προς 3,2€ το κιλό. Καθάρισε τα κεράσια από τα κουκούτσια, που το βάρος των κουκουτσιών τους ήταν το $\frac{1}{5}$ του βάρους των κερασιών. Στα καθαρισμένα κεράσια πρόσθεσε ζάχαρη, αξίας 0,8€ ανά κιλό, ίση με τα $\frac{4}{5}$ του βάρους των καθαρισμένων κερασιών και έφτιαξε γλυκό του κουταλιού. Πόσο πρέπει να πουλήσει το κιλό το «γλυκό κεράσι» για να εισπράξει τριπλάσια χρήματα από ό,τι ξόδεψε; (Αναφέρεται ότι για το γλυκό χρησιμοποίησε και νερό το οποίο εξατμίστηκε κατά τον βρασμό του γλυκού).

5 Ένας έμπορος δανείστηκε από την Τράπεζα ποσό 10000€ με ετήσιο επιτόκιο 5,2%. Για να το εξοφλήσει συμφωνήθηκε να πληρώνει 3000 ευρώ στο τέλος κάθε χρόνου εκτός από την τελευταία χρονιά. Να βρείτε σε πόσα χρόνια εξοφλήθηκε το δάνειο, πόσα ευρώ πλήρωσε ο έμπορος την τελευταία χρονιά και με ποιο ποσό επιβαρύνθηκε από την Τράπεζα. (Οι τόκοι στο τέλος κάθε χρόνου προστίθενται στο κεφάλαιο).

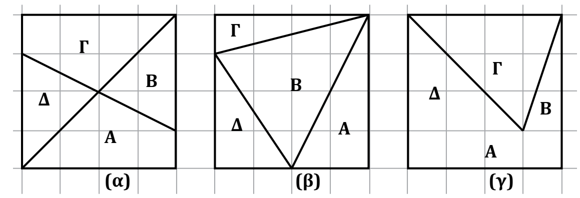
6 Το σιτάρι χάνει στο άλεσμα το $\frac{1}{4}$ του βάρους του.

Το αλεύρι για να ζυμωθεί χρειάζεται να του προσθέσουμε 64% του βάρους του νερό. Το ζυμάρι κατά το ψήσιμο χάνει το $\frac{1}{5}$ του βάρους του. Να βρείτε:

α) Πόσα κιλά ψωμί θα κάνουμε με 250 κιλά σιτάρι;
β) Πόσα κιλά σιτάρι χρειαζόμαστε για 250 κιλά ψωμί;

7 Ένας έμπορος αγόρασε 1,5 τόνους πατάτες συσκευασμένες σε σακιά των 30 κιλών το καθένα, προς 0,57€ το κιλό και πλήρωσε για έξοδα μεταφοράς 1,15€ το σακί. Τις πούλησε προς 27€ το σακί. Να υπολογίσετε το κέρδος του εμπόρου.

8 Σε καθένα από τα παρακάτω τετράγωνα τι μέρος του τετραγώνου είναι το κάθε κομμάτι από αυτά που ονομάζονται με τα γράμματα Α, Β, Γ και Δ;



9 Σε 6 ημέρες διαβάζεις και ολοκληρώνεις τα $\frac{3}{7}$ του βιβλίου με ρυθμό 35 σελίδες την ημέρα. Στη συνέχεια λόγω του ότι το βιβλίο έχει ενδιαφέρον αυξάνεις τον ρυθμό σου σε 40 σελίδες την ημέρα. Σε πόσες ημέρες θα τελειώσεις το βιβλίο;

10 Ένα πλοίο έχει πλήρωμα 140 άνδρες και τρόφιμα για 70 ημέρες. Μετά από ταξίδι 10 ημερών, παρέλαβε ναυαγούς και ο χρόνος του ταξιδιού αυξήθηκε κατά 10 μέρες. Ελαττώθηκε τότε η μερίδα κατά τα 2/5 της αρχικής. Πόσους ναυαγούς παρέλαβε;

Εργασία 1

Να χρησιμοποιήσετε μια από τις παρακάτω διευθύνσεις
- **Timeline JS**: https://timeline.knightlab.com/
- **Timetoast**: https://www.timetoast.com/
- **Hstr**: https://www.hstry.co/

ή οποιαδήποτε άλλη θέλετε για να δημιουργήσετε μια χρονογραμμή σχετική με τους γνωστούς σε εσάς αριθμούς (Φυσικούς, Ακέραιους, Ρητούς). Να αναφέρετε τους λόγους που οδήγησαν στη δημιουργία τους, τη συμβολή λαών αλλά και μεμονωμένων προσώπων στην εξέλιξη αυτών.

Πληροφορίες μπορείτε να χρησιμοποιήσετε από βιβλία ή ιστοσελίδες στο διαδίκτυο, αναφέροντας πάντα τις πηγές σας. Για παράδειγμα αρκετές πληροφορίες μπορείτε να αντλήσετε από τη διεύθυνση: https://en.wikipedia.org/wiki/History_of_mathematics .

Εργασία 2

Να χρησιμοποιήσετε μια από τις παρακάτω διευθύνσεις
- **Timeline JS:** https://timeline.knightlab.com/
- **Timetoast:** https://www.timetoast.com/
- **Hstr:** https://www.hstry.co/

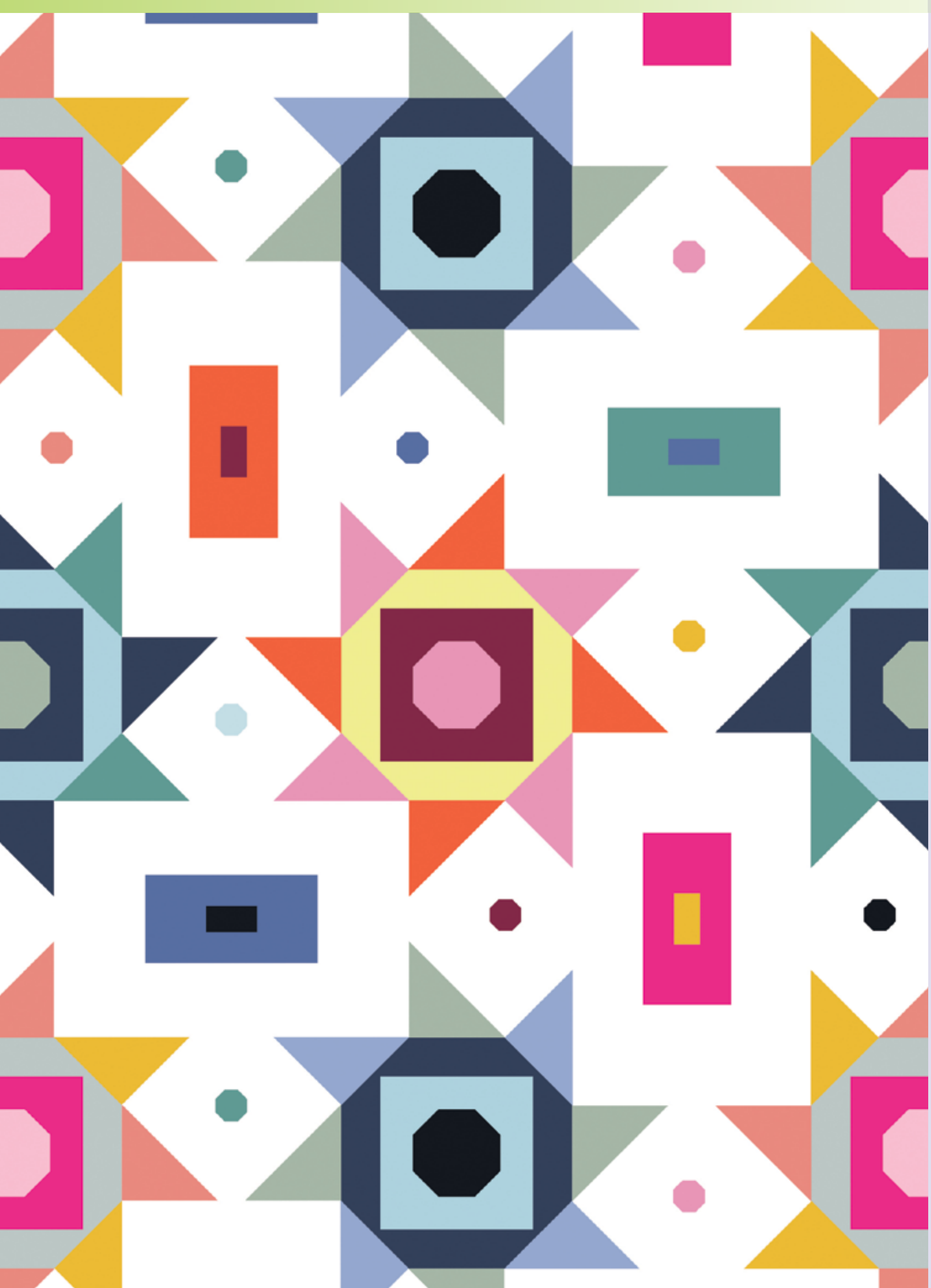
ή οποιαδήποτε άλλη θέλετε για να δημιουργήσετε μια χρονογραμμή σχετική με τις γυναίκες Μαθηματικούς που επηρέασαν την εξέλιξη των Μαθηματικών.
Πληροφορίες μπορείτε να χρησιμοποιήσετε από βιβλία ή ιστοσελίδες στο διαδίκτυο, αναφέροντας πάντα τις πηγές σας. Για παράδειγμα αρκετές πληροφορίες μπορείτε να αντλήσετε από τις διευθύνσεις:
https://www.alfavita.gr/ekpaideysi/401579_arhaia-ellada-oi-gynaikes-mathimatikoi-tis-arhaiotitas

https://blog.dioptra.gr/2020/08/26/gynaikes-mathimatikoi/
https://www.worldsecrets.gr/gynaikes-mathimatikoi/

Κεφάλαιο

4

Κανονικότητες



Εισαγωγή

Στη φύση, στις επιστήμες, στην τέχνη, στη λογοτεχνία, στη γλώσσα και στα μαθηματικά παρατηρούνται μοτίβα με σταθερά χαρακτηριστικά τα οποία επαναλαμβάνονται (επαναλαμβανόμενα μοτίβα) καθώς και μοτίβα που το καθένα προκύπτει από το προηγούμενό του με ένα συστηματικό τρόπο (εξελισσόμενα μοτίβα). Αυτά τα μοτίβα τα ονομάζουμε κανονικότητες. Για παράδειγμα, στη μουσική αφορά μια μελωδία που επαναλαμβάνεται στερεότυπα ή παραλλάσσεται ελαφρώς ή στις εικαστικές τέχνες σε ένα θέμα που επαναλαμβάνεται, στη διακόσμηση ενός αντικειμένου ή στα μαθηματικά μια ακολουθία που κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο προσθέτοντας τον ίδιο σταθερό αριθμό. Μια κανονικότητα μπορεί να παρατηρηθεί άμεσα ή να διαπιστωθεί έμμεσα, με ανάλυση.

Κανονικότητες στη φύση

Κανονικότητες στην τέχνη (Τα ανθρωπάκια του Γιάννη Γαΐτη)
Ο Γιάννης Γαΐτης (1923 – 1984) ήταν Έλληνας ζωγράφος, χαράκτης και γλύπτης. Είναι γνωστός για τα «Ανθρωπάκια» του, μορφές που δεν έχουν ατομικά χαρακτηριστικά, είναι επαναλαμβανόμενα και έχουν πανομοιότυπο ντύσιμο με ριγέ κοστούμι και καπέλο, σε ένδειξη διαμαρτυρίας για την απομόνωση και τη μοναξιά των ανθρώπων.
https://el.wikipedia.org/wiki/Αρχείο:Gaitis1.jpg

4.1 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΚΑΝΟΝΙΚΟΤΗΤΕΣ

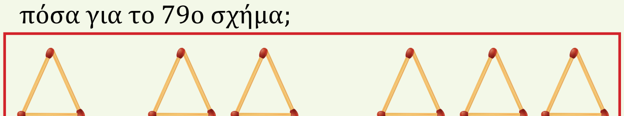
Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

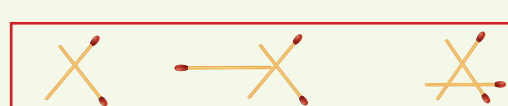
- Να αναγνωρίζουν, να συγκρίνουν, να περιγράφουν κανονικότητες και να τις εκφράζουν ως αριθμητικές κανονικότητες με φυσικούς αριθμούς.
- Να συμπληρώνουν, να επεκτείνουν και να δημιουργούν αριθμητικές κανονικότητες με φυσικούς αριθμούς.

Διερεύνηση 1 *«Αναγνώριση κανονικότητας, περιγραφή του κανόνα»*

Εργασία μαθητών/τριών ατομικά ή κατά ζεύγη
Να παρατηρήσετε τα σχήματα στις δύο παρακάτω εικόνες, που έχουν δημιουργηθεί με σπίρτα και να απαντήσετε στα ερωτήματα:

α) Σε ποια από τις δύο εικόνες υπάρχει ένας κανόνας για τα σχήματα;
β) Σε όποια εικόνα υπάρχει τέτοιος κανόνας να τον περιγράψετε.
γ) Στην εικόνα που βρήκατε έναν κανόνα, αν συνεχίσετε, πόσα σπίρτα θα χρειαστούν για το 10ο σχήμα, και πόσα για το 79ο σχήμα;



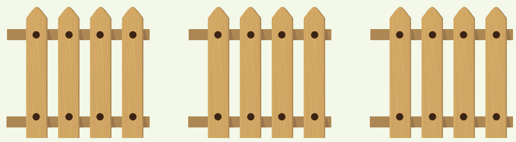


Να συζητήσετε στην τάξη τα αποτελέσματα.

Διερεύνηση 2 *«Γνωριμία με την αλγεβρική κανονικότητα»*

Εργασία μαθητών/τριών κατά ζεύγη ή σε μικρές ομάδες.

Ο κύριος Δημήτρης θέλει να περιφράξει τον κήπο του με ξύλινο φράκτη. Ψάχνοντας στην αγορά βρήκε τυποποιημένα κομμάτια φράχτη, με 4 κατακόρυφες ξύλινες «λόγχες» πλάτους 7,5 εκατοστών που απέχουν μεταξύ τους 5 εκατοστά. Τα μήκη των δύο οριζόντιων δοκών που περισσεύουν αριστερά και δεξιά δεν λαμβάνονται υπόψη, επειδή χρησιμοποιούνται για τις συνδέσεις.

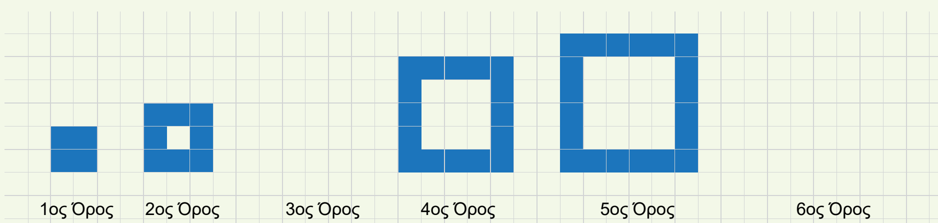


α) Ποιο είναι το μήκος σε εκατοστά ενός κομματιού φράχτη;
β) Ποιο θα είναι το μήκος ενός ξύλινου φράχτη με 2, 3, 4 κομμάτια;
γ) Ποιο θα είναι το μήκος ενός ξύλινου φράχτη με 10 ή 79 κομμάτια;
δ) Να βρείτε τον κανόνα με τον οποίο ο κύριος Δημήτρης θα μπορεί να υπολογίζει το μήκος του ξύλινου φράχτη για κάθε πλήθος κομματιών. Λειτουργεί ο κανόνας;

Να παρουσιάσετε τα αποτελέσματα της διερεύνησής σας στην τάξη σας.

Διερεύνηση 3 *«Συμπλήρωση και επέκταση κανονικότητας»*

Στην παρακάτω κανονικότητα λείπουν ο 3ος και ο 6ος όρος.



α) Σχεδιάζουμε τους όρους που λείπουν.
β) Γράφουμε σε έναν πίνακα τους όρους της κανονικότητας.
γ) Βρίσκουμε τον κανόνα με τον οποίο προκύπτει ο κάθε όρος από τον προηγούμενο.
δ) Βρίσκουμε τον γενικό τύπο της κανονικότητας.

Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες μάθησης

Πολλές φορές βρισκόμαστε στην ανάγκη να αναγνωρίσουμε και να περιγράψουμε κανονικότητες που εμφανίζονται στα μαθηματικά, στην καθημερινή ζωή αλλά και στις επιστήμες, στην τεχνολογία, στην οικονομία και στη φύση, ώστε να μελετήσουμε και να επιλύσουμε σχετικά προβλήματα. Για να κάνουμε όμως αυτή την περιγραφή πρέπει να βρούμε και να περιγράψουμε **τον κανόνα, τον νόμο,** που διέπει τις μεταβολές που εμφανίζονται στις κανονικότητες αυτές.

Στα Μαθηματικά μελετούμε γεωμετρικές και αριθμητικές κανονικότητες, την έννοια των οποίων συναντήσαμε σε προηγούμενες τάξεις. Ήδη, έχουμε δει την κανονικότητα των φυσικών αριθμών (0, 1, 2, 3, ..., ν, ...) στους οποίους ο πρώτος όρος είναι το μηδέν (0) και ο κανόνας δημιουργίας τους είναι: «Για να βρούμε κάθε όρο, εκτός από τον πρώτο, προσθέτουμε στον προηγούμενο τον αριθμό ένα».

Μια τέτοια συλλογή διατεταγμένων αριθμών, που ακολουθούν έναν κανόνα, λέγεται **αριθμητική κανονικότητα**. Καθένας από αυτούς τους αριθμούς λέγεται **όρος** της **αριθμητικής κανονικότητας**.

Οι όροι μιας αριθμητικής κανονικότητας αποκαλούνται 1ος όρος, 2ος όρος, 3ος όρος,. . . , **ν-οστός** όρος της αριθμητικής κανονικότητας και αντιστοιχίζονται στους φυσικούς αριθμούς. Τέτοιες κανονικότητες ονομάζονται **ακολουθίες**.

Ο κάθε όρος συμβολίζεται με ένα μικρό γράμμα της αλφαβήτας με δείκτη κάτω δεξιά τον αριθμό που δείχνει τη θέση του στη σειρά. Για παράδειγμα, $α_1$ είναι ο πρώτος όρος, $α_2$ είναι ο δεύτερος όρος κ.ο.κ.

Ο ν-οστός όρος καλείται και **γενικός** όρος ή **τύπος** της κανονικότητας και συνήθως συμβολίζεται με ένα μικρό γράμμα της αλφαβήτας με δείκτη ν κάτω δεξιά ($α_ν$). Στην περίπτωση των φυσικών αριθμών εκτός του 0, φανερά ισχύει $α_ν = ν$.

Παράδειγμα: Για τη συλλογή των αριθμών 50, 100, 150, 200, ... δημιουργώντας τον πίνακα:

Όροι	1ος	2ος	3ος	4ος	...	ν-οστός	...
Αριθμοί	50	100	150	200	...	$α_ν$	...

Παρατηρούμε ότι ο 1ος όρος είναι $1 \cdot 50 = 50$, ο 2ος όρος είναι $2 \cdot 50 = 100$, ο 3ος όρος είναι $3 \cdot 50 = 150$, ο 4ος όρος $4 \cdot 50 = 200$, κ.ο.κ . Άρα ο **ν-οστός** όρος είναι $\boldsymbol{α_ν = 50 \cdot ν}$.
Η εύρεση του τύπου του γενικού όρου μιας αριθμητικής κανονικότητας είναι πολύ σημαντική, γιατί μας δίνει τη δυνατότητα να βρίσκουμε οποιονδήποτε όρο της.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Οι άρτιοι φυσικοί αριθμοί 2, 4, 6, 8, ..., εκτός από τον πρώτο προκύπτουν προσθέτοντας στον προηγούμενό τους τον αριθμό 2.
α) Ποιος είναι ο γενικός όρος της αριθμητικής κανονικότητας;
β) Ποιος είναι ο 15ος άρτιος και ποιος ο 62ος;

Απάντηση

α) Δημιουργούμε τον πίνακα:

Φυσικοί αριθμοί	1	2	3	...	ν	...
Όροι	1ος	2ος	3ος	...	ν-οστός	...
Άρτιοι	2	4	6	...	$α_ν$	...

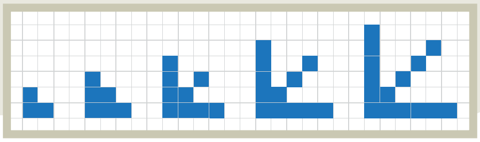
Παρατηρούμε ότι ο κάθε όρος προκύπτει προσθέτοντας στον προηγούμενο τον ίδιο αριθμό 2 ή από τον πρώτο όρο πολλαπλασιάζοντάς τον με τον αριθμό που δείχνει τη θέση που έχει στη σειρά.
Για παράδειγμα, ο 3ος όρος 6 δημιουργείται από τον προηγούμενό του 4 προσθέτοντας το 2 ($6 = 4 + 2$) ή πολλαπλασιάζοντάς τον αριθμό 2 με τον αριθμό 3, που δηλώνει τη θέση του ($6 = 2 \cdot 3$).
Έτσι για τον γενικό όρο (τύπο) θα έχουμε: $\boldsymbol{α_ν = 2ν}$, όπου ν = 1, 2, 3, . . .

β) Από τον γενικό όρο για ν = 15, ο 15ος άρτιος είναι: $2 \cdot 15 = 30$ και για ν = 62 ο 62ος είναι: $2 \cdot 62 = 124$.

Παρατήρηση: Από τον γενικό όρο βλέπουμε ότι και ο φυσικός αριθμός μηδέν προκύπτει από τον τύπο αφού $0 = 2 \cdot 0$. Αυτό σημαίνει ότι ο γενικός όρος (τύπος) εκφράζει όλους τους άρτιους φυσικούς αριθμούς.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Στην παρακάτω κανονικότητα:
α) Να βρείτε πώς προκύπτει γεωμετρικά ο κάθε όρος από τον προηγούμενο.
β) Να βρείτε ποια αριθμητική κανονικότητα προκύπτει.
γ) Να γράψετε σε πίνακα τους όρους της κανονικότητας.
δ) Να επεκτείνετε την κανονικότητα διατυπώνοντας τον γενικό όρο.



Απάντηση

α) Κάθε σχήμα προκύπτει από το προηγούμενο προσθέτοντας από ένα τετραγωνάκι στην κατακόρυφη στήλη, στην οριζόντια στήλη και στη διαγώνιό του. Συνεπώς, ο κάθε όρος προκύπτει από τον προηγούμενο προσθέτοντας 3 τετραγωνάκια.
β) Κάθε όρος προκύπτει πολλαπλασιάζοντας τον αριθμό 3 με τον αριθμό που δείχνει τη θέση του στη σειρά.

γ) Δημιουργούμε έναν πίνακα με τους φυσικούς αριθμούς και τους όρους.

Φυσικοί αριθμοί	1	2	3	4	5
Όροι της κανονικότητας	3	$6 = 3 \cdot 2$	$9 = 3 \cdot 3$	$12 = 3 \cdot 4$	$15 = 3 \cdot 5$

δ) Παρατηρώντας τη δημιουργία των όρων της κανονικότητας, ο γενικός όρος της κανονικότητας είναι $\alpha_\nu = 3\nu$.

Να ανοίξετε την ψηφιακή εφαρμογή για να ερευνήσετε περισσότερο τη σχέση των γεωμετρικών κανονικοτήτων με τις αριθμητικές.

Μελέτη μιας γεωμετρικής κανονικότητας

ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Σε κάθε μία από τις παρακάτω κανονικότητες, να γράψετε με λόγια τον κανόνα που ακολουθούν. Να αντιστοιχίσετε τους όρους αυτών στους αριθμούς και να βρείτε τον τύπο του γενικού όρου της καθεμίας. Ποιος είναι ο 10ος και ο 52ος όρος τους;

α) 7, 14, 21, 28, …

β) −3, −6, −9, −12, …

γ) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$

2 Να γράψετε σε έναν πίνακα τους πέντε πρώτους όρους από τις παρακάτω κανονικότητες.

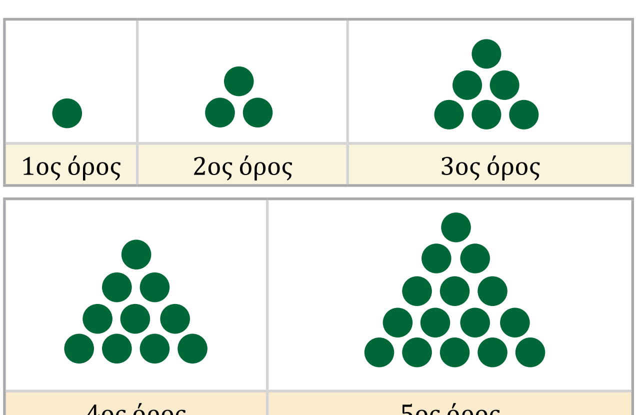
α) $\alpha_\nu = 2 \cdot \nu$

β) $\beta_\nu = -3 \cdot \nu$

γ) $\gamma_\nu = 3 + 3 \cdot (\nu - 1)$

δ) $\delta_\nu = \frac{1}{2} \cdot \nu$

3 Να περιγράψετε πώς προκύπτει ο 21ος όρος της παρακάτω κανονικότητας από τον προηγούμενο όρο.



4 Στο πάρκινγκ ενός αεροδρομίου χρεώνουν για κάθε μέρα 5€.

α) Να γράψετε σε έναν πίνακα το κόστος για τις πρώτες 5 ημέρες.

β) Να δώσετε τον τύπο της κανονικότητας που προκύπτει.

γ) Η Άννα διαθέτει 60€. Πόσες μέρες το πολύ μπορεί να αφήσει το αυτοκίνητό της στο πάρκινγκ;

5 Σε ένα σουπερμάρκετ χρησιμοποιούν καλάθια που έχουν ύψος 55cm. Όταν αποθηκεύονται σχηματίζουν πύργο. Οι πρώτες τιμές του πύργου σε εκατοστά είναι: 55, 61, 67, 73, 79, …

α) Να βρείτε τον γενικό τύπο της κανονικότητας της αύξησης των υψών του πύργου.

β) Προκειμένου οι πελάτες να μπορούν να παίρνουν καλάθι, οι υπάλληλοι έχουν εντολή το ύψος του πύργου να μην υπερβαίνει τα 170cm. Πόσα το πολύ καλάθια θα έχει ο κάθε πύργος;

6 Τρίγωνοι αριθμοί και η γενίκευσή τους

Να ανοίξετε την εφαρμογή και να ερευνήσετε τις γενικεύσεις των τρίγωνων αριθμών.

7 Οι τετράγωνοι και οι ορθογώνιοι αριθμοί

Να ανοίξετε τις εφαρμογές και να ερευνήσετε τις γενικεύσεις των τετράγωνων αριθμών.

4.2 ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΜΙΑΣ ΚΑΝΟΝΙΚΟΤΗΤΑΣ

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

- Να αναπαριστούν κανονικότητες με διάφορους τρόπους, όπως εικόνες ή γεωμετρικά σχήματα, πίνακες τιμών και σημεία σε σύστημα αξόνων, και να μεταβαίνουν από τη μία αναπαράσταση στην άλλη.
- Να διερευνούν κανονικότητες που μπορούν να εκφραστούν στη μορφή $\alpha \cdot \nu$ (με α ρητό αριθμό και ν τη σειρά του όρου) και να διατυπώνουν τον γενικό τους όρο λεκτικά και συμβολικά.
- Να λύνουν προβλήματα με κανονικότητες, που συναντούν στα Μαθηματικά και την καθημερινή ζωή.

Διερεύνηση 1

Δίνονται οι κανονικότητες: $\alpha_\nu = 0{,}25 \cdot \nu$ και $\beta_\nu = 0{,}5 \cdot \nu$

α) Να γράψετε τους όρους κάθε μιας σε δύο στήλες ενός πίνακα. Στη μία στήλη να γράψετε τη σειρά του όρου και στην άλλη στήλη τον αντίστοιχο όρο της κανονικότητας.

β) Να παραστήσετε με σημεία, στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων, τις τιμές του κάθε πίνακα.

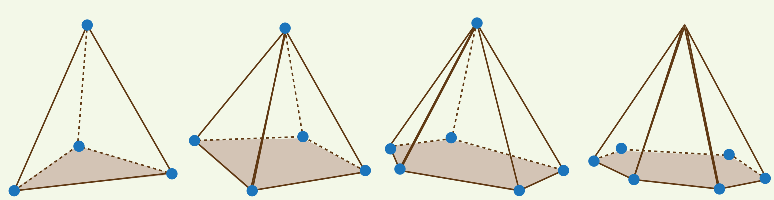
γ) Να διερευνήσετε τη σχέση των όρων των δύο κανονικοτήτων.

Να ανοίξετε την ψηφιακή εφαρμογή για να ερευνήσετε τη σχέση των όρων των αριθμητικών κανονικοτήτων.

Γραφική παράσταση μιας απλής κανονικότητας

Διερεύνηση 2

Τα παρακάτω σχήματα απεικονίζουν πυραμίδες με βάση τρίγωνο, τετράπλευρο, πεντάγωνο και εξάγωνο.

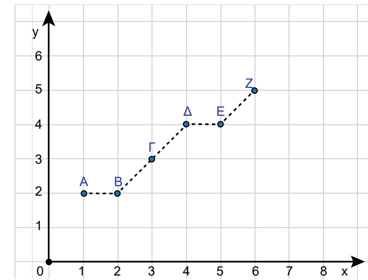


Αυξάνουμε τον αριθμό των πλευρών της βάσης των πυραμίδων και συμπληρώνουμε τον παρακάτω πίνακα:

Βάση:	τρίγωνο	τετράπλευρο	πεντάγωνο	εξάγωνο		ν-γωνο
Αριθμός κορυφών	4	5			...	
Αριθμός εδρών	4		6		...	
Αριθμός ακμών	6	8			...	

Βρίσκουμε τον αριθμό Κ + Ε – Α για καθεμιά από τις πυραμίδες.
Τι παρατηρείτε; Εξηγούμε γιατί συμβαίνει αυτό.
Το μοιραζόμαστε με τους συμμαθητές μας στην τάξη.

Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες μάθησης



- Η σειρά των όρων και οι όροι μιας κανονικότητας μπορούν να γραφούν σε πίνακα δύο γραμμών ή δύο στηλών που στη μία από αυτές περιέχεται η τάξη και στην άλλη οι όροι της κανονικότητας.
- Τα ζεύγη (τάξη, όρος) ενός πίνακα μπορούν να παρασταθούν με σημεία, σε ένα σύστημα συντεταγμένων. Η γραφική παράσταση που προκύπτει διευκολύνει ιδιαίτερα τη σύγκριση των όρων δύο κανονικοτήτων.

Ερευνούμε μια κανονικότητα θετικών όρων

Να ανοίξετε την εφαρμογή και να απαντήσετε στα ερωτήματα που αφορούν την εφαρμογή της μορφής $α_ν = α \cdot ν$, $α > 0$

Ερευνούμε μια κανονικότητα αρνητικών όρων

Να ανοίξετε την εφαρμογή και να απαντήσετε στα ερωτήματα που αφορούν την εφαρμογή της μορφής $α_ν = α \cdot ν$, $α < 0$

Η μελέτη των κανονικοτήτων είναι χρήσιμη με διάφορους τρόπους. Για παράδειγμα, μπορεί να μας βοηθήσει να προβλέψουμε μελλοντικές εξελίξεις, όπως η ανάπτυξη ενός πληθυσμού στη βιολογία ή τη διάσπαση ενός ραδιενεργού υλικού στη φυσική. Αυτό είναι εξαιρετικά σημαντικό για αυτές τις επιστήμες. Επιπλέον, η μελέτη των κανονικοτήτων σε σχήματα μπορεί να μας βοηθήσει να κατανοήσουμε, να σχεδιάσουμε και να κατασκευάσουμε αντικείμενα, ενώ η μελέτη τους σε χρηματοοικονομικά μοντέλα μπορεί να μας βοηθήσει να λύσουμε οικονομικά προβλήματα. Γενικά, η μελέτη των κανονικοτήτων μπορεί να μας βοηθήσει να κατανοήσουμε τον τρόπο λειτουργίας του κόσμου γύρω μας.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Θεωρούμε τις κανονικότητες $α_ν = 1,5 \cdot ν$, και $β_ν = 0,75 \cdot ν$

α) Να γράψετε τους 5 πρώτους όρους των κανονικοτήτων σε πίνακα δύο γραμμών. Η πρώτη γραμμή να περιέχει τη σειρά των όρων της και η δεύτερη τους όρους της.

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική τους παράσταση στο ίδιο σύστημα αξόνων.

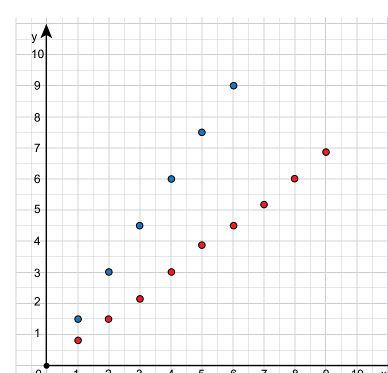
γ) Να διατυπώσετε τις παρατηρήσεις σας για τις δύο κανονικότητες.

Απάντηση

Η σειρά των όρων και οι όροι της γράφονται σε έναν πίνακα ως εξής:

$α_ν = 1,5 \cdot ν$	ν	1	2	3	4	5	...
	Όροι	1,5	3	4,5	6	7,5	...

$β_ν = 0,75 \cdot ν$	ν	1	2	3	4	5	...
	Όροι	0,75	1,5	2,25	3	3,75	...



Οι γραφικές παραστάσεις των σημείων των πινάκων φαίνονται στη διπλανή εικόνα.

Χρησιμοποιώντας έναν χάρακα παρατηρούμε ότι τα σημεία των δύο κανονικοτήτων είναι σημεία ευθειών. Επίσης, παρατηρούμε ότι οι όροι της κανονικότητας $α_ν$, είναι μεγαλύτεροι από τους αντίστοιχους όρους της κανονικότητας $β_ν$. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι οι όροι και των δύο κανονικοτήτων αυξάνονται συνεχώς.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Θεωρούμε τις κανονικότητες $α_ν = 0{,}4 \cdot ν$ και $β_ν = -0{,}2 \cdot ν$

α) Να γράψετε τους 5 πρώτους όρους των κανονικοτήτων σε πίνακα δύο γραμμών. Η πρώτη γραμμή να περιέχει τη σειρά τους και η δεύτερη τους όρους της.

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση αυτών στο ίδιο σύστημα αξόνων.

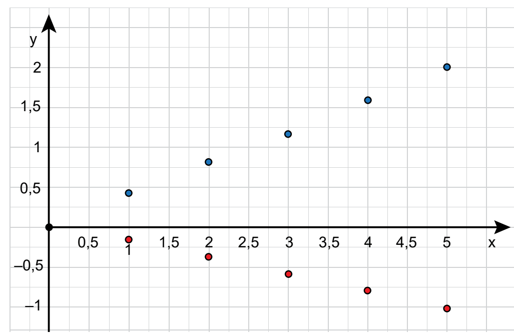
γ) Να διατυπώσετε μια εικασία παρατηρώντας τις δύο αυτές κανονικότητες.

Απάντηση

Η σειρά των όρων και οι όροι της κανονικότητας γράφονται σε έναν πίνακα ως εξής:

$ν$	1	2	3	4	5	...
$α_ν$	0,4	0,8	1,2	1,6	2	...

$ν$	1	2	3	4	5	...
$β_ν$	–0,2	–0,4	–0,6	–0,8	–1	...



Οι γραφικές παραστάσεις των σημείων των πινάκων φαίνονται στη διπλανή εικόνα.

Παρατηρούμε, χρησιμοποιώντας έναν χάρακα, ότι τα σημεία των δύο κανονικοτήτων είναι σημεία ευθειών. Επίσης, παρατηρούμε ότι τα σημεία της κανονικότητας $α_ν$ έχουν μια ανοδική (αύξουσα) πορεία, ενώ η πορεία των σημείων της $β_ν$ είναι καθοδική (φθίνουσα).

Σημείωση:

Σε μια κανονικότητα της μορφής $α_ν = κ \cdot ν$, όταν ο ρητός αριθμός κ είναι θετικός αριθμός οι τιμές των όρων της αυξάνουν, ενώ όταν είναι αρνητικός αριθμός οι τιμές των όρων της μειώνονται.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Η εικόνα αναπαριστά γεωμετρικά την κανονικότητα των άρτιων θετικών αριθμών.

α) Πόσους κυκλικούς δίσκους έχει ο 6ος όρος;

β) Από πόσους κύκλους αποτελείται ο 50ός όρος;

γ) Να βρείτε το άθροισμα των 25 πρώτων όρων της κανονικότητας αυτής,

Απάντηση

α) Παρατηρούμε ότι κάθε όρος προκύπτει από τον προηγούμενο προσθέτοντας τον αριθμό 2.
Άρα ο 6ος όρος της κανονικότητας έχει 10 + 2 = 12 κύκλους.

β) Η κανονικότητα είναι: 2, 4, 6, 8, 10, . . . και παρατηρούμε ότι κάθε όρος της δημιουργείται πολλαπλασιάζοντας κάθε φορά τον αριθμό 2 με τον αριθμό που δείχνει τη σειρά του όρου. Για παράδειγμα:
Δεύτερος όρος: $4 = 2 \cdot 2$, Τρίτος όρος: $6 = 2 \cdot 3$ κ.ο.κ.
Άρα ο γενικός της όρος είναι: $\boldsymbol{α_ν = 2 \cdot ν}$, $ν = 1, 2, 3, \ldots$
Επομένως ο 50ός όρος της για $ν = 50$ θα είναι ο $α_{50} = 2 \cdot 50 = 100$.

γ) Για να βρούμε το άθροισμα των 25 πρώτων όρων της θα χρησιμοποιήσουμε το «κόλπο» του Gauss. Έτσι, αν
Α = 2 + 4 + 6 + ... + 48 + 50, ξαναγράφοντας το άθροισμα με τους προσθετέους αντίστροφα, έχουμε:
Α = 50 + 48 + 46 + ... + 6 + 4 + 2
Επειδή 2 + 50 = 4 + 48 = . . . = 50 + 2 = 52 προσθέτοντας κατά μέλη, τις δύο ισότητες παίρνουμε:

$$2Α = 52 + 52 + 52 + \ldots + 52 \text{ (25 φορές) ή } 2Α = 25 \cdot 52 \text{ ή } 2Α = 1300 \text{ ή } Α = \frac{1300}{2} \text{ ή } Α = 650.$$

Ιστορικό σημείωμα

Ο Carl Friedrich Gauss (1777–1855) υπήρξε ένας από τους σημαντικότερους μαθηματικούς όλων των εποχών.
Όταν ο Gauss ήταν 8 ετών, ο δάσκαλός του ζήτησε από τους μαθητές του να προσθέσουν όλους τους φυσικούς αριθμούς από το 1 έως το 100. Ο Gauss βρήκε τη λύση σε λίγα δευτερόλεπτα χρησιμοποιώντας μια ωραία μαθηματική ιδέα.
Ο Gauss παρατήρησε ότι προσθέτοντας το 1 με το 100, το 2 με το 99, το 3 με το 98 κ.ο.κ. προκύπτει πάντα το ίδιο άθροισμα, δηλαδή, $1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = \ldots = 50 + 51$.
Έτσι ξαναέγραψε τους αριθμούς και πρόσθεσε τα αντίστοιχα ζευγάρια.

$$\begin{array}{l} \quad 1 + \quad 2 + \quad 3 + \ldots + 100 \\ \underline{100 + \ 99 + \ 98 + \ldots + 1 \qquad} \\ 101 + 101 + 101 + \ldots + 101 \ \textit{(100 φορές)} \end{array}$$

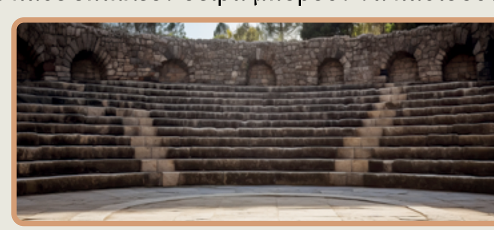
Πήρε με αυτόν τον τρόπο 100 φορές το 101 και επειδή αυτό που βρήκε ήταν το διπλάσιο από το ζητούμενο, διαιρώντας με το 2 βρήκε ότι το άθροισμα είναι: $\frac{1}{2} \cdot (100 \cdot 101) = 50 \cdot 101 = 5050$.

Να ανοίξετε τη διπλανή εφαρμογή και να απαντήσετε στα ερωτήματα που προτείνονται.

Ερευνούμε μια σκάλα

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Σε ένα υπαίθριο θέατρο στην πρώτη σειρά κάθονται 28 άτομα. Σε κάθε επιπλέον σειρά μπορούν να καθίσουν 12 άτομα παραπάνω. Το θέατρο έχει 11 σειρές καθισμάτων. Να βρείτε:



α) Πόσους όρους έχει η κανονικότητα της αύξησης των θέσεων στις σειρές των καθισμάτων.
β) Τον γενικό τύπο της κανονικότητας.
γ) Το πλήθος των επιπλέον θέσεων λόγω της αύξησης που έγινε.
δ) Πόσους θεατές χωράει το θέατρο.

Απάντηση

α) Επειδή το πλήθος των σειρών καθισμάτων είναι 11 και στην πρώτη σειρά καμία μεταβολή (αύξηση) δεν παρατηρείται, η κανονικότητα της αύξησης των θέσεων έχει 10 όρους, που σημαίνει ότι ο τελευταίος όρος είναι ο α_{10}.

β) Από την πρώτη σειρά στη δεύτερη η αύξηση των θέσεων είναι 12 άτομα, οπότε $\alpha_1 = 12$. Αφού κάθε φορά η αύξηση είναι 12 άτομα θα έχουμε $\alpha_2 = \alpha_1 + 12 = 24 = 2 \cdot 12$, $\alpha_3 = \alpha_2 + 12 = 36 = 3 \cdot 12$ κ.λπ. Έτσι, ο γενικός τύπος της αύξησης των θέσεων είναι $\alpha_\nu = 12 \cdot \nu$, με $\nu = 1, 2, 3, \ldots, 10$

γ) Οι επιπλέον θέσεις λόγω των αυξήσεων είναι το άθροισμα των όρων της κανονικότητας, δηλαδή $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_{10} = 1 \cdot 12 + 2 \cdot 12 + 3 \cdot 12 + \cdots + 10 \cdot 12$. Για να βρούμε αυτό το άθροισμα χρησιμοποιούμε την επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση και το «κόλπο» του Gauss. Έτσι οι επιπλέον θέσεις είναι: $1 \cdot 12 + 2 \cdot 12 + 3 \cdot 12 + \cdots + 10 \cdot 12 = 12 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + 10) = 12 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 11\right) = 660$

δ) Αν δεν είχαμε μεταβολή στον αριθμό των θέσεων, δηλαδή όλες οι σειρές είχαν τον ίδιο αριθμό θέσεων, τότε οι θέσεις θα ήταν $11 \cdot 28 = 308$. Υπάρχουν όμως 660 θέσεις επιπλέον, οπότε το θέατρο έχει $308 + 660 = 968$ θέσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

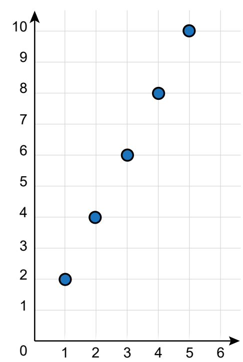
1 Κάθε μήνα ένας υπάλληλος σε ένα γραφείο ταξιδιών λαμβάνει βασικό μισθό 850 € και επιπλέον 30 € για κάθε εισιτήριο που πουλάει με προορισμό την Ευρώπη.

α) Να κατασκευάσετε έναν πίνακα με την αύξηση του εισοδήματος του υπαλλήλου όταν πουλάει από 1 ως 5 εισιτήρια το μήνα για Ευρώπη.

β) Να σχεδιάσετε το γράφημα της αύξησης του εισοδήματος.

γ) Να βρείτε την αμοιβή του υπαλλήλου όταν κάποιο μήνα πουλήσει 25 εισιτήρια για Ευρώπη.

2 Στο διπλανό γράφημα φαίνονται 5 όροι μιας κανονικότητας.



α) Να κατασκευάσετε έναν πίνακα τιμών της σειράς των όρων και των όρων της κανονικότητας.

β) Να βρείτε τον 6ο όρο της κανονικότητας.

γ) Να βρείτε τον γενικό όρο της κανονικότητας.

3 Τα κουτιά ενός λίτρου γάλακτος κοστίζουν 1,5€ το καθένα.

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

ν (Κουτιά)	1	2	3	4	5	6	7	8
$κ_ν$ (Ποσό)								

β) Να βρείτε τον τύπο της κανονικότητας.

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της κανονικότητας.

δ) Πόσα κουτιά γάλακτος θα μπορούσαν να αγοραστούν με 16,5€ και πόσα με 22€;

4 Ο Παναγιώτης έχει ένα μεγάλο δοχείο για νερό που χωράει 20 λίτρα. Αρχίζει να το γεμίζει χρησιμοποιώντας κανάτα 1,5 λίτρου. Κάθε κανάτα ανεβάζει το ύψος του νερού κατά 2,25 εκατοστά.

α) Να κάνετε έναν πίνακα τιμών για το ύψος του νερού στο δοχείο αφού ο Παναγιώτης ρίξει ν γεμάτες κανάτες νερό (ν = 1, 2, 3, ...) σε αυτό.

β) Να γράψετε τον γενικό τύπο της κανονικότητας.

γ) Πόσες γεμάτες κανάτες πρέπει να ρίξετε στο δοχείο για να φτάσει το ύψος 27 εκατοστά; Να εξετάσετε αν το δοχείο χωράει κι άλλο νερό.

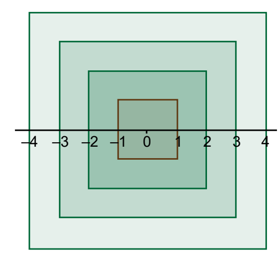
5 Ο κατασκευαστής μιας οκταώροφης πολυκατοικίας με πιλοτή και υπόγειο γκαράζ, έβαλε ως τιμή πώλησης του ισογείου 2200 € το τετραγωνικό μέτρο και για κάθε επόμενο όροφο 100 € ακριβότερα το τετραγωνικό μέτρο από τον προηγούμενό του.

α) Να κάνετε έναν πίνακα τιμών για τις αυξήσεις των τιμών πώλησης του τετραγωνικού μέτρου σε κάθε όροφο.

β) Να γράψετε τον γενικό τύπο της κανονικότητας των αυξήσεων.

γ) Να βρείτε την τιμή του τετραγωνικού του 5ου ορόφου.

6 Στο διπλανό σχήμα υπάρχουν φωλιασμένα 4 τετράγωνα.



α) Να βρείτε την περίμετρο του καθενός.

β) Να βρείτε πώς προκύπτει η περίμετρος κάθε τετραγώνου από την περίμετρο του προηγούμενου τετραγώνου.

γ) Να βρείτε τον γενικό τύπο της κανονικότητας των περιμέτρων.

δ) Να φτιάξετε έναν πίνακα τιμών για τους 6 πρώτους όρους της κανονικότητας και ακολούθως να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

ε) Να υπολογίσετε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της κανονικότητας.

Τετράγωνα σε Τετράγωνα

Για να διερευνήσετε τα ερωτήματα της άσκησης 6) ανοίξτε την εφαρμογή.

Ανακεφαλαίωση

Κανονικότητες είναι επαναλαμβανόμενα ή εξελισσόμενα **μοτίβα** που εμφανίζονται στα μαθηματικά, στις επιστήμες, στην καθημερινή μας ζωή και μας βοηθούν στην κατανόηση και στην επίλυση προβλημάτων.

- √ Για να περιγράψουμε μια κανονικότητα, προσδιορίζουμε τον **κανόνα** που ακολουθούν οι μεταβολές που εμφανίζονται σε αυτήν.
- √ Στα Μαθηματικά συναντούμε **αριθμητικές** και **γεωμετρικές** κανονικότητες.
- √ **Αριθμητική κανονικότητα** είναι μια συλλογή αριθμών που διέπονται από έναν κανόνα. Καθένας από τους αριθμούς λέγεται **όρος** της αριθμητικής κανονικότητας.
- √ Οι αριθμητικές κανονικότητες, στις οποίες οι όροι τους αντιστοιχίζονται στους φυσικούς αριθμούς, ονομάζονται **ακολουθίες**.
- √ Για να βρούμε τον κανόνα μιας αριθμητικής κανονικότητας, είναι χρήσιμο να φτιάχνουμε έναν πίνακα με τους όρους της κανονικότητας. Ο ν-οστός όρος της κανονικότητας καλείται **γενικός όρος ή τύπος** της κανονικότητας.
- √ Η εύρεση του τύπου μιας αριθμητικής κανονικότητας μας δίνει τη δυνατότητα να βρίσκουμε οποιονδήποτε όρο αυτής.
- √ Συμπληρώνουμε ή επεκτείνουμε τις κανονικότητες με παρατήρηση ή με ανάλυση.
- √ Αναπαριστούμε τις κανονικότητες με διάφορους τρόπους, όπως γεωμετρικά σχήματα, πίνακες τιμών και σημεία σε σύστημα αξόνων.

Αυτοαξιολόγηση

Να τοποθετήσετε στις στήλες ΣΩΣΤΟ, ΛΑΘΟΣ ένα √ ανάλογα με το αν η πρόταση είναι σωστή ή λανθασμένη. Να αιτιολογήσετε τις επιλογές σας.

	Σωστό	**Λάθος**
1. Μόνον οι αριθμητικές κανονικότητες διέπονται από έναν κανόνα.	☐	☐
2. Σε μια κανονικότητα μπορούμε να γράφουμε τους όρους της με όποια σειρά θέλουμε.	☐	☐
3. Τα επόμενα σχήματα  ... είναι μία γεωμετρική κανονικότητα.	☐	☐
4. Οι περιττοί φυσικοί αριθμοί είναι μία αριθμητική κανονικότητα.	☐	☐
5. Τα πολλαπλάσια του 3 είναι όροι μιας κανονικότητας με γενικό τύπο $α_ν = 3ν$.	☐	☐

Να συμπληρώσετε τα κενά με την κατάλληλη λέξη ή με τις κατάλληλες λέξεις.

6. Οι αριθμητικές κανονικότητες λέγονται ....

7. Ο ν-οστός όρος μιας αριθμητικής κανονικότητας λέγεται και .... ή .... της κανονικότητας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Σε κάθε μία από τις παρακάτω κανονικότητες, να γράψετε με λόγια τον κανόνα που τις διέπει. Να κατασκευάσετε έναν πίνακα αντιστοιχίζοντας τους όρους αυτών στους φυσικούς αριθμούς και να βρείτε τον τύπο του γενικού όρου της καθεμίας. Να βρείτε τον 10ο και τον 52ο όρο τους από τον γενικό τύπο.

α) $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots$

β) 1,3, 2,6, 3,9, 5,2, ...

2 Η Μαρία και η Νάγια κάνουν δύο διαφορετικές διαδρομές με το ποδήλατο. Η Μαρία έκανε τη διαδρομή της διασχίζοντας 4,2 χιλιόμετρα το τέταρτο, ενώ η Νάγια τη δική της διαδρομή κάνοντας 2,75 χιλιόμετρα το δεκάλεπτο.

α) Να συμπληρώσετε τους πίνακες τιμών για τις αριθμητικές κανονικότητες των χιλιομέτρων που διάνυσαν τα δύο κορίτσια.

Όροι	1ο τέταρτ.	2ο τέταρτ.	...
Χιλιόμετρα	4,2	8,4	...

Όροι	1ο δεκάλ.	2ο δεκάλ.	...
Χιλιόμετρα	2,75	5,5	...

β) Να γράψετε τον γενικό τύπο κάθε μιας κανονικότητας.

γ) Να βρείτε πόσα χιλιόμετρα διάνυσε το κάθε κορίτσι σε τρεισήμισι ώρες.

3 Να συμπληρώσετε τους όρους που λείπουν στην παρακάτω γεωμετρική κανονικότητα.

1ος όρος 2ος όρος 3ος όρος 4ος όρος 5ος όρος

α) Αν το πρώτο σχήμα αποτελείται από 3 ίσα ευθύγραμμα τμήματα, να περιγράψετε την αριθμητική κανονικότητα που προκύπτει.

β) Να βρείτε τον γενικό της όρο.

4 Να συμπληρώσετε τους όρους που λείπουν στην παρακάτω γεωμετρική κανονικότητα.

1ος 2ος 3ος 4ος 5ος

α) Να γράψετε την αριθμητική κανονικότητα που προκύπτει, από το κόκκινο δομικό στοιχείο με τα 4 τμήματα.

β) Να βρείτε τον γενικό της όρο.

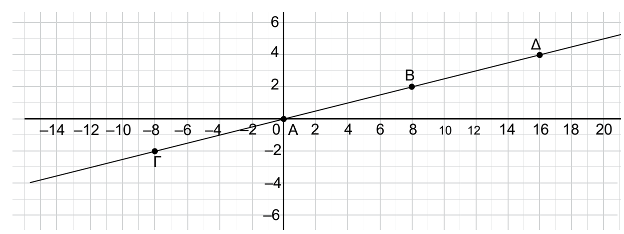
5 Ένας δρομέας σε έναν αγώνα δρόμου 14 χιλιομέτρων ξεκινά γρήγορα αλλά μετά επιβραδύνει. Τρέχει το πρώτο χιλιόμετρο σε 5 λεπτά, αλλά στη συνέχεια χρειάζεται επιπλέον 12 δευτερόλεπτα για κάθε παραπάνω χιλιόμετρο.

α) Να κάνετε έναν πίνακα τιμών για την αριθμητική κανονικότητα που ακολούθησε η αύξηση του χρόνου του δρομέα στα χιλιόμετρα που διέσχισε.

β) Πόσος χρόνος χρειάζεται για να τρέξει: το 6ο χιλιόμετρο; Το 13ο χιλιόμετρο;

γ) Πόσο χρόνο χρειάζεται ο δρομέας για να τερματίσει τον αγώνα;

6 Παρακάτω παρουσιάζεται η γραφική παράσταση μιας αριθμητικής κανονικότητας.



α) Να κάνετε έναν πίνακα τιμών για την κανονικότητα αυτή.

β) Να βρείτε τον γενικό τύπο της κανονικότητας.

γ) Αν αντιστοιχίσετε τους όρους της κανονικότητας στους ακέραιους αριθμούς, ποιος όρος αντιστοιχίζεται στους ακέραιους αριθμούς –4, –2, –12;

7 Η Άννα εργάζεται σε ένα μεγάλο κατάστημα που πουλάει τηλεοράσεις. Πληρώνεται 800€ τον μήνα και για κάθε τηλεόραση που πουλάει κερδίζει επιπλέον 60€.

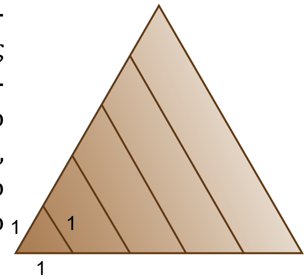
α) Να δημιουργήσετε έναν πίνακα τιμών που να δείχνει το επιπλέον ποσό που κερδίζει η Άννα ανάλογα με τις τηλεοράσεις που πουλάει.

β) Να παραστήσετε γραφικά τον προηγούμενο πίνακα τιμών.

γ) Να γράψετε τον γενικό τύπο για το επιπλέον ποσό που κερδίζει η Άννα από την πώληση των τηλεοράσεων.

δ) Ποιο είναι το ποσό που θα έχει εισπράξει η Άννα στο τέλος του χρόνου αν κατά μέσο όρο πουλάει 8 τηλεοράσεις τον μήνα;

8 Στο διπλανό σχήμα παρουσιάζονται οι όροι μιας γεωμετρικής κανονικότητας. Το πρώτο τρίγωνο έχει πλευρές 1 εκατοστό, είναι ο πρώτος όρος και το πιο μεγάλο τρίγωνο είναι ο πέμπτος όρος.



α) Να μεταφέρετε το σχήμα στο τετράδιό σας και να σχεδιάσετε τον έκτο όρο.
β) Να κάνετε έναν πίνακα τιμών για τις αριθμητικές κανονικότητες των περιμέτρων των τριγώνων
γ) Να γράψετε τον τύπο της αριθμητικής κανονικότητας που προκύπτει.
δ) Να βρείτε την περίμετρο του 11ου όρου και του 23ου όρου της κανονικότητας αυτής.

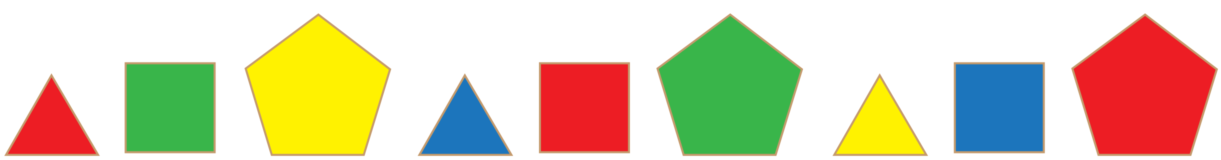
9 Ένα στάδιο έχει 26 σειρές καθισμάτων. Στην πρώτη σειρά έχει 680 θέσεις. Κάθε επόμενη σειρά έχει 32 θέσεις περισσότερες από την προηγούμενή της. Να βρείτε:

α) Τον κανόνα με τον οποίο αυξάνουν οι θέσεις στις σειρές των καθισμάτων.
β) Πόσους όρους έχει η κανονικότητα των αυξήσεων;
γ) Πόσοι θεατές κάθονται στην 26η σειρά;
δ) Πόσους θεατές χωράει το στάδιο; (Υπόδειξη: Εφάρμοσε το «κόλπο» του Gauss).

Γλωσσάρι Αριθμητικών Κανονικοτήτων

Για μια επανάληψη στις έννοιες των κανονικοτήτων, ανοίξτε την ψηφιακή εφαρμογή.

Εργασία



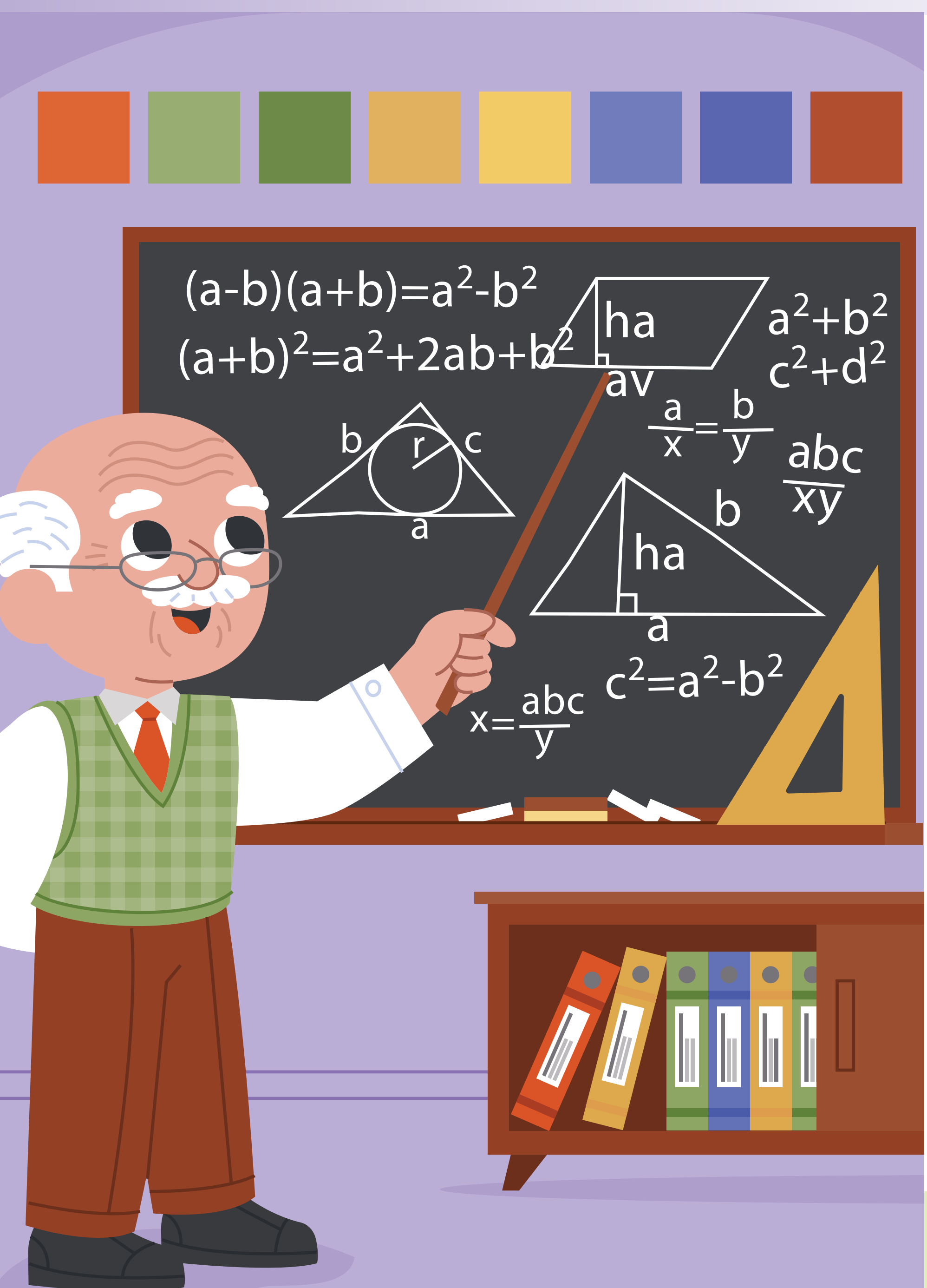
Στην εικόνα είναι οι 9 πρώτοι όροι μιας γεωμετρικής κανονικότητας, η οποία αποτελείται από χρωματιστά κανονικά πολύγωνα. Ο 1ος όρος είναι ένα κόκκινο ισόπλευρο τρίγωνο, ο 2ος όρος είναι ένα πράσινο τετράγωνο, ο τρίτος όρος είναι ένα κίτρινο κανονικό πεντάγωνο, ο 4ος όρος είναι ένα μπλε ισόπλευρο τρίγωνο, ο 5ος όρος είναι ένα κόκκινο τετράγωνο, ο 6ος όρος είναι ένα πράσινο κανονικό πεντάγωνο κ.ο.κ.

1) Να βρείτε την κανονικότητα των σχημάτων και την κανονικότητα των χρωμάτων.
2) Να βρείτε τι σχήμα και τι χρώμα είναι ο 11ος, ο 14ος και ο 18ος όρος της κανονικότητας.
3) Να βρείτε το σχήμα και το χρώμα του 126ου όρου, του 169ου όρου και του 215ου όρου.
4) Να βρείτε πόσα τετράγωνα, πόσα τρίγωνα και πόσα πεντάγωνα υπάρχουν στους 400 πρώτους όρους αυτής της κανονικότητας. Πόσα από αυτά έχουν το ίδιο χρώμα;
5) Να βρείτε το πλήθος των πλευρών των 500 πρώτων σχημάτων.

Κεφάλαιο

5

Αλγεβρικές Παραστάσεις



Εισαγωγή

Στην καθημερινή ζωή αλλά και στην επιστήμη, προσπαθούμε να διατυπώνουμε προβλήματα που αντιμετωπίζουμε με απλή γλώσσα. Ωστόσο, οι γλώσσες είναι συχνά ασαφείς και δεν περιγράφουν επακριβώς τις ποσότητες και τις σχέσεις που υπάρχουν στα προβλήματα, με αποτέλεσμα να δυσχεραίνεται η επίλυσή τους. Για να κατανοήσουμε και να λύσουμε αυτά τα προβλήματα, χρησιμοποιούμε τα Μαθηματικά (μαθηματική γλώσσα) που είναι πιο ακριβή και μας επιτρέπουν να χειριζόμαστε ποσότητες και σχέσεις, διευκολύνοντας την επίλυσή τους.

Ένα βασικό στοιχείο των Μαθηματικών είναι οι αριθμητικές και αλγεβρικές παραστάσεις. Οι αριθμητικές παραστάσεις είναι απλές και περιέχουν αριθμούς και πράξεις μεταξύ αυτών, όπως ήδη έχουμε δει. Οι αλγεβρικές παραστάσεις είναι πιο σύνθετες και περιλαμβάνουν σύμβολα για τις ποσότητες και τις σχέσεις των προβλημάτων. Θεμελιώδεις έννοιες των αλγεβρικών παραστάσεων είναι η έννοια των μεταβλητών αλλά και των σταθερών.

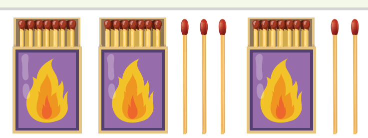
5.1 ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΟΥΣ

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

- Να μεταφράζουν από λεκτικές εκφράσεις σε απλές αλγεβρικές παραστάσεις και αντίστροφα.
- Να διακρίνουν τα στοιχεία μιας αλγεβρικής παράστασης.

Διερεύνηση 1

Ένα εργοστάσιο παραγωγής σπίρτων τοποθετεί τα σπίρτα σε κουτιά. Το πλήθος των σπίρτων σε κάθε κουτί δεν είναι σταθερό και μπορεί να αλλάζει από ημέρα σε ημέρα. Στις τέσσερις παρακάτω εικόνες εμφανίζονται τρία κουτιά σπίρτα από την ίδια ημέρα παραγωγής και 6 ακόμη σπίρτα. Στη δεύτερη εικόνα αυτό το έχουμε εκφράσει με μια παράσταση, όπου α είναι το πλήθος των σπίρτων σε κάθε κουτί. Συνεργαστείτε με τον διπλανό σας για να συμπληρώσετε τις εκφράσεις των άλλων εικόνων.

	
	$(2\alpha + 3)+(\alpha + 3)$
	

Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες μάθησης

Στα Μαθηματικά και όχι μόνο, συχνά χρησιμοποιούμε γράμματα για να εκφράσουμε μια κοινή ιδιότητα των στοιχείων ενός συνόλου. Για παράδειγμα, αντί να αναφερόμαστε στον βαθμό που πήρε ο κάθε μαθητής ενός τμήματος σε ένα διαγώνισμα ενός μαθήματος, λέμε η βαθμολογία x των μαθητών του τμήματος στο διαγώνισμα ήταν από 9 έως 20.

Σε τέτοιες περιπτώσεις χρησιμοποιούμε μεταβλητή ή μεταβλητές.

Μεταβλητή είναι ένα σύμβολο, συνήθως ένα γράμμα, που συμβολίζει ένα **οποιοδήποτε** στοιχείο ενός συνόλου και χρησιμεύει για να δηλωθεί μια ιδιότητα των στοιχείων του.

Για παράδειγμα, λέγοντας «ο φυσικός αριθμός ν» εννοούμε ότι η μεταβλητή ν είναι οποιοδήποτε στοιχείο του συνόλου των φυσικών αριθμών $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.
Κάθε έκφραση που περιλαμβάνει αριθμούς, μεταβλητές και πράξεις μεταξύ τους, λέμε ότι είναι μία **αλγεβρική παράσταση.**

Σημείωση:

Όταν δεν αναφέρεται ή δεν είναι φανερό το σύνολο από το οποίο παίρνει τιμές η μεταβλητή, θα θεωρούμε ότι είναι το σύνολο των ρητών αριθμών.

Για την ενοικίαση ενός αυτοκινήτου πληρώνουμε 20€ πάγιο και 25€ για κάθε ημέρα. Αν το ενοικιάσουμε για x ημέρες θα πληρώσουμε $25 \cdot x + 20$€. Η έκφραση αυτή περιέχει σταθερούς αριθμούς και αριθμούς που μπορούν να μεταβάλλονται ανάλογα με τις ημέρες ενοικίασης.

Στην έκφραση $25x + 20$, οι αριθμοί 25 και 20 είναι σταθεροί και το γράμμα x είναι η μεταβλητή που αναπαριστά τον αριθμό των ημερών ενοικίασης. Όταν σε μια αλγεβρική παράσταση η μεταβλητή πολλαπλασιάζεται με κάποιον αριθμό, ο αριθμός αυτός ονομάζεται **συντελεστής της μεταβλητής** και αν στο γινόμενο αυτό προστίθεται ένας αριθμός, αυτός λέγεται **σταθερός όρος ή σταθερά.**

Ο σταθερός όρος δεν περιέχει τη μεταβλητή και οι προσθετέοι λέγονται **όροι** της αλγεβρικής παράστασης.

Σε μια αλγεβρική παράσταση μπορεί να έχουμε περισσότερες από μια μεταβλητές. Για παράδειγμα, μια τέτοια αλγεβρική παράσταση είναι η $2 \cdot α - 5 \cdot β + 7$. Εδώ έχουμε δύο μεταβλητές, μια σταθερά και καθεμία από τις μεταβλητές έχει το δικό της συντελεστή. Η ποσότητα $5 \cdot α$ είναι ένας όρος, ένας άλλος όρος είναι η ποσότητα $-5 \cdot β$, και ένας τρίτος όρος είναι το $+7$.

Συντελεστής μεταβλητή σταθερός όρος

$25 \cdot x + 20$

Όροι με την ίδια μεταβλητή ανεξάρτητα από την τιμή του συντελεστή λέγονται **όμοιοι**. Για παράδειγμα στην αλγεβρική παράσταση $-2x + 3y + 5 + 4x - y + 2$, οι όροι $-2x$ και $4x$ είναι όμοιοι, όπως και οι όροι $3y$ και $-y$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Γράψτε με τη μορφή αλγεβρικών παραστάσεων τις παρακάτω φράσεις:

α) Ένας αριθμός αυξημένος κατά 1.
β) Ένας αριθμός μειωμένος κατά 15.
γ) Το μισό του πενταπλάσιου ενός αριθμού.
δ) Το τριπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 4.

Απάντηση

Όπου «ένας αριθμός» στις παραπάνω φράσεις χρησιμοποιούμε μεταβλητή. Έτσι, αν συμβολίσουμε με x ένα τυχαίο αριθμό, τότε οι φράσεις γράφονται συμβολικά:

α) $x + 1$ **β)** $x - 15$ **γ)** $\frac{5x}{2}$ **δ)** $3 \cdot x + 4$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Διατυπώστε λεκτικά τις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις:

α) $y - 12$ **β)** $10 \cdot y$ **γ)** $\frac{y}{2} + 8$

δ) $100 - 3 \cdot y$ **ε)** $8 \cdot y + 5$ **στ)** $3 \cdot y - 6$

Απάντηση

α) Ένας αριθμός ελαττωμένος κατά 12.
β) Το δεκαπλάσιο ενός αριθμού.
γ) Το μισό ενός αριθμού αυξημένο κατά 8.
δ) Το 100 ελαττωμένο κατά το τριπλάσιο ενός αριθμού.
ε) Το οχταπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 5.
στ) Το τριπλάσιο ενός αριθμού ελαττωμένο κατά 6.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να γράψετε με τη μορφή αλγεβρικών παραστάσεων τις παρακάτω φράσεις:

α) Ένας αριθμός αυξημένος κατά 7
β) Ο αντίθετός του αριθμός μειωμένος κατά 2
γ) Το πενταπλάσιο ενός αριθμού

2 Να γράψετε με τη μορφή αλγεβρικών παραστάσεων τις παρακάτω φράσεις:

α) Ένας αριθμός αυξημένος κατά –3
β) Ένας αριθμός μειωμένος κατά –2
γ) Το τριπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 1

3 Να διατυπώσετε λεκτικά τις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις:

α) $x - 1$
β) $2 \cdot y - 2$
γ) $-7 + z$

4 Να διατυπώσετε λεκτικά τις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις:

α) $\alpha + 1$
β) $4 + 5 \cdot x$
γ) $10 + x$

5 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αναγνωρίζοντας τα στοιχεία της κάθε αλγεβρικής παράστασης.

Αλγεβρική παράσταση	Μεταβλητή	Συντελεστής	Σταθερός όρος	Όροι
$-2 \cdot \alpha$				
$2 \cdot y - 1$				
$8 + 10 \cdot \beta$				

6 Να δημιουργήσετε μια αριθμητική ή αλγεβρική παράσταση, με τα στοιχεία που δίνονται κάθε φορά:

Μεταβλητή	Συντελεστής	Σταθερός όρος	Αλγεβρική παράσταση
δ	0	12	
x	3	–9	
ω	–7	6	

7 Θα χαρακτηρίζατε την παράσταση $0 \cdot x - 9 + 4^2$ αριθμητική ή αλγεβρική; Γιατί;

8 Να βρείτε τους όμοιους όρους στις παραστάσεις:

α) $1{,}2x - 4y + 5 - 3{,}8x + 2y - 1{,}5$
β) $2 + x + 1{,}4\beta - 3\beta + 2x - 7{,}5$

5.2 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΚΑΙ ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

- Να λύνουν πραγματικά και μαθηματικά προβλήματα χρησιμοποιώντας αριθμητικές και αλγεβρικές παραστάσεις.
- Να συνθέτουν προβλήματα τα οποία λύνονται με χρήση αριθμητικών και αλγεβρικών παραστάσεων.

Διερεύνηση 1

Ο Γιώργος, η Βαλέρια και η Ελένη μεταφέρουν ένα δίχτυ ο καθένας γεμάτο με μπάλες. Η Βαλέρια μεταφέρει τις διπλάσιες μπάλες από την Ελένη και ο Γιώργος τις τετραπλάσιες.

α) Να εκφράσετε το περιεχόμενο του κάθε διχτυού με αλγεβρική παράσταση.
β) Ομοίως το σύνολο που περιέχουν τα τρία δίχτυα.

Διερεύνηση 2

Να συνεργαστείτε με έναν/μια συμμαθητή/τριά σας για να:

α) Δημιουργήσετε ένα πρόβλημα, σχετικό με ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, που για να το αποδώσετε μαθηματικά, θα χρησιμοποιήσετε την παράσταση: $2 \cdot x + 2 \cdot (x + 10)$

β) Δημιουργήσετε ένα πρόβλημα, σχετικό με τρίγωνο, που για να το αποδώσετε μαθηματικά, θα χρησιμοποιήσετε την παράσταση: $180 - x - (x + 20)$

Στη συνέχεια με τις ίδιες αλγεβρικές παραστάσεις να δημιουργήσετε κατάλληλα προβλήματα της δικής σας έμπνευσης.

Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες μάθησης

Η μαθηματική γλώσσα αποφεύγει ασάφειες και διευκολύνει την επίλυση προβλημάτων. Μια αριθμητική ή αλγεβρική παράσταση αποτελεί ένα αφηρημένο μαθηματικό μοντέλο το οποίο μας δίνει τη δυνατότητα να εκφράσουμε διαφορετικά προβλήματα για ποικίλα θέματα. Για παράδειγμα το $2x$ μπορεί να εκφράζει τη διπλάσια θερμοκρασία καθώς και το διπλάσιο της ηλικίας.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Ο Γιώργος έχει δύο αδέλφια, την Ειρήνη και τον Νίκο. Οι γονείς του, του δίνουν x ευρώ κάθε πρωί για τα προσωπικά του έξοδα. Στην Ειρήνη, που είναι μεγαλύτερη, δίνουν το ίδιο ποσό αυξημένο κατά 1,5€ και στον Νίκο που είναι φοιτητής σε άλλη πόλη, με αυξημένα έξοδα, δίνουν κάθε μήνα το εκατονταπλάσιο του x και επιπλέον 300€ για το ενοίκιό του. Αν υποθέσουμε ότι ο μήνας έχει 30 ημέρες,

α) Ποια είναι η αλγεβρική παράσταση Α που συμβολίζει το συνολικό ποσό που ξοδεύουν οι γονείς για τα τρία παιδιά κάθε μήνα;

β) Ποια είναι η αλγεβρική παράσταση Β που συμβολίζει το συνολικό ποσό σε ετήσια βάση;

Απάντηση

Ο Γιώργος κάθε ημέρα παίρνει x € και η Ειρήνη αφού παίρνει το ίδιο ποσό αυξημένο κατά 1,5 θα παίρνει $x + 1,5$ €. Έτσι, κάθε μήνα, που έχει 30 ημέρες:

α) Ο Γιώργος παίρνει $30 \cdot x$€ και η Ειρήνη $30 \cdot (x + 1,5)$ €. Ο Νίκος παίρνει $100 \cdot x + 300$€. Συνολικά, λοιπόν, οι γονείς ξοδεύουν κάθε μήνα: $A = 30 \cdot x + 30 \cdot (x + 1,5) + 100 \cdot x + 300$€.

β) Σε ετήσια βάση, οι γονείς ξοδεύουν: $B = 12 \cdot A = 12 \cdot [30 \cdot x + 30 \cdot (x + 1,5) + 100 \cdot x + 300]$€.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Σε ένα εργαστήριο, έχουμε τέσσερις όμοιους δοκιμαστικούς σωλήνες με αντίστοιχες χημικές ουσίες διαφορετικού χρώματος, όπως στη διπλανή εικόνα. Μετράμε τον όγκο του υγρού που περιέχουν οι σωλήνες από τις ενδείξεις που φέρουν. Ο όγκος του υγρού μέχρι την πρώτη ένδειξη είναι 15 χιλιοστόλιτρα (ml).

α) Αν ο πρώτος σωλήνας με το πράσινο υγρό περιέχει $x + 15$ ml υγρού, πόσο περιέχουν οι άλλοι;

β) Ποια είναι η συνολική ποσότητα υγρών που περιέχουν;

Απάντηση

α) Επειδή κάθε σωλήνας χωρίζεται με τις μεγάλες υποδιαιρέσεις σε 6 ισομεγέθη τμήματα, και όλοι περιέχουν 15 ml μέχρι την πρώτη ένδειξη, έχουμε ότι:

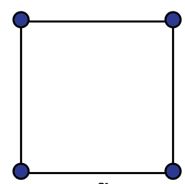
- ο δεύτερος σωλήνας με το κίτρινο υγρό περιέχει $\frac{3}{6}\cdot x + 15 = \frac{1}{2}\cdot x + 15$ ml,
- ο τρίτος σωλήνας περιέχει $\frac{2}{6}\cdot x + 15 = \frac{1}{3}\cdot x + 15$ ml και
- ο τέταρτος σωλήνας, επειδή ο σωλήνας χωρίζεται σε 12 ίσα μέρη με τις μικρές υποδιαιρέσεις θα περιέχει $\frac{7}{12}\cdot x + 15$ ml χημικής ουσίας.

β) Η συνολική ποσότητα υγρού δίνεται από το άθροισμα των παραπάνω ποσοτήτων:

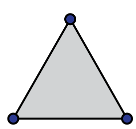
$$(x+15)+\left(\frac{1}{2}\cdot x+15\right)+\left(\frac{1}{3}\cdot x+15\right)+\left(\frac{7}{12}\cdot x+15\right) \text{ ml}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

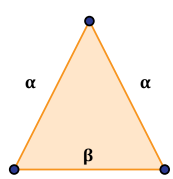
1 Το τετράγωνο του σχήματος έχει πλευρά α. Ποια είναι η αλγεβρική παράσταση που εκφράζει την περίμετρό του και ποια είναι αυτή που εκφράζει το εμβαδό του;



2 Το τρίγωνο του σχήματος έχει και τις τρεις πλευρές του ίσες με α. Ποια είναι η αλγεβρική παράσταση που εκφράζει την περίμετρό του;



3 Το τρίγωνο του σχήματος έχει δύο πλευρές ίσες με α και η βάση του είναι ίση με β (ισοσκελές). Ποια είναι η αλγεβρική παράσταση που εκφράζει την περίμετρό του;



4 Να εκφράσετε συμβολικά τρεις διαδοχικούς αριθμούς. Να γράψετε την αλγεβρική παράσταση του αθροίσματός τους.

5 Το οικόπεδο του κυρίου Τάκη έχει μήκος που είναι 10 m μεγαλύτερο από το πλάτος του.

α) Να βρείτε την αλγεβρική παράσταση που εκφράζει την περίμετρό του.

β) Να βρείτε την αλγεβρική παράσταση που εκφράζει το εμβαδό του οικοπέδου.

6 Ένας πατέρας μοιράζει ένα σημαντικό ποσό α στα τρία παιδιά του. Στον μεγαλύτερο δίνει το $\frac{1}{2}$ του ποσού, στον μεσαίο το $\frac{1}{3}$ και στον μικρότερο ό,τι έμεινε. Ποιες είναι οι αλγεβρικές παραστάσεις που εκφράζουν τα ποσά που παίρνουν τα παιδιά;

7 Η μητέρα της Ευγενίας της δίνει 3 € κάθε εργάσιμη ημέρα (Δευτέρα έως Παρασκευή), 5 € το Σάββατο και 5 € την Κυριακή.

α) Να βρείτε την αριθμητική παράσταση που εκφράζει το συνολικό ποσό που παίρνει η Ευγενία την εβδομάδα.

β) Ποιο είναι αυτό το ποσό;

γ) Ποιο το ποσό που παίρνει η Ευγενία σε ν εβδομάδες;

8 Να διατυπώσετε προβλήματα που εκφράζονται από τις παρακάτω αριθμητικές παραστάσεις.

α) $2\cdot 3$ **β)** $2\cdot 3+2\cdot 4$ **γ)** $4\cdot 7$

9 Να διατυπώσετε προβλήματα που εκφράζονται από τις αλγεβρικές παραστάσεις:

α) $x+1$ **β)** $2z$

10 Να διατυπώσετε ένα πρόβλημα που εκφράζεται από την αλγεβρική παράσταση $7y+4$.

11 Να διατυπώσετε ένα πρόβλημα που εκφράζεται από την αριθμητική παράσταση $4\cdot 5$ και να βρείτε με ποιον αριθμό είναι ίση.

12 Να διατυπώσετε ένα πρόβλημα που εκφράζεται από την αλγεβρική παράσταση $4x+y$.

13 Να διατυπώσετε ένα πρόβλημα που εκφράζεται από την αλγεβρική παράσταση $4x$.

14 Να διατυπώσετε ένα πρόβλημα που εκφράζεται από την αλγεβρική παράσταση $3(x+2)$.

15 Να διατυπώσετε ένα πρόβλημα που εκφράζεται από την αλγεβρική παράσταση $2x+3(x-2)$.

5.3 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΤΙΜΗ ΚΑΙ ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

- Να υπολογίζουν την αριθμητική τιμή μιας αλγεβρικής παράστασης για συγκεκριμένες τιμές των μεταβλητών και να κατασκευάζουν πίνακες τιμών.
- Να χρησιμοποιούν την επιμεριστική ιδιότητα $\alpha \cdot (\beta \pm \gamma)=\alpha \cdot \beta \pm \alpha \cdot \gamma$ για να μετατρέπουν αλγεβρικές παραστάσεις σε απλούστερη μορφή.
- Να ερμηνεύουν γεωμετρικά την επιμεριστική ιδιότητα: $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$ με α, β και γ θετικούς αριθμούς.

Διερεύνηση 1

Ο γενικός τύπος μιας αριθμητικής κανονικότητας είναι $\boldsymbol{\alpha_\nu = 1{,}5 \cdot \nu}$. Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

ν	5	10	50	100
α_ν				

Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες μάθησης

Όταν αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές μιας αλγεβρικής παράστασης με αριθμούς, τότε μετατρέπεται σε **αριθμητική παράσταση**. Το αποτέλεσμα που προκύπτει μετά την εκτέλεση των πράξεων στην αριθμητική παράσταση, λέγεται **αριθμητική τιμή της αλγεβρικής παράστασης**.

Παράδειγμα: Η αλγεβρική παράσταση $3 \cdot \alpha - 5 \cdot \beta + 4$ περιέχει τις μεταβλητές α και β. Αν θέσουμε $\alpha = 4$ και $\beta = -10$, λαμβάνοντας υπόψη μας την προτεραιότητα με την οποία εκτελούμε τις πράξεις, η αριθμητική της τιμή είναι:

$$3 \cdot \alpha - 5 \cdot \beta + 4 = 3 \cdot 4 - 5 \cdot (-10) + 4 = 12 + 50 + 4 = 62 + 4 = 66$$

Λέμε, λοιπόν, ότι η αριθμητική τιμή της αλγεβρικής μας παράστασης, όταν οι μεταβλητές της παίρνουν τις παραπάνω τιμές, είναι 66.

Ιδιότητες των πράξεων

- Αντιμεταθετική $\boldsymbol{\alpha+\beta = \beta+\alpha}$ και $\boldsymbol{\alpha\cdot\beta = \beta\cdot\alpha}$,
- Προσεταιριστική $\boldsymbol{\alpha+(\beta+\gamma) = (\alpha+\beta)+\gamma}$ και $\boldsymbol{\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma) = (\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma}$.
- Επιμεριστική του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση:

$$\boldsymbol{\alpha\cdot(\beta+\gamma) = \alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma} \quad \text{ή} \quad \boldsymbol{(\alpha+\beta)\cdot\gamma = \alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma}$$

Οι ιδιότητες μας βοηθούν να απλοποιούμε τις αλγεβρικές παραστάσεις.

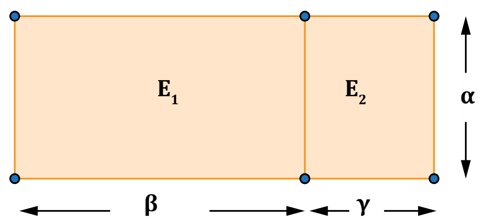
Παράδειγμα. $\underline{4 \cdot \alpha} - 3 + \underline{5 \cdot \alpha} + 2 = \underline{\alpha \cdot 4 + \alpha \cdot 5} - 3 + 2 = \alpha \cdot (4 + 5) - 3 + 2 = 9 \cdot \alpha - 1$

Η διαδικασία αυτή λέγεται **αναγωγή όμοιων όρων**. Στη συνέχεια δείχνουμε αναλυτικά τα βήματα της απλοποίησης μιας αλγεβρικής παράστασης.

Παράσταση		Αλγόριθμος (διαδικασία)
$-2(x+3y)+2(y-3x)-1{,}5$	1.	Με την επιμεριστική ιδιότητα βγάζουμε τις παρενθέσεις (εφόσον υπάρχουν).
$-2x-6y+2y-6x-1{,}5$	2.	Βρίσκουμε τους όμοιους όρους (εφόσον υπάρχουν).
$-2x-6x-6y+2y-1{,}5$	3.	Κάνουμε την αναγωγή όμοιων όρων με την επιμεριστική ιδιότητα (εφόσον υπάρχουν).
$(-2-6)x+(-6+2)y-1{,}5$	4.	Βρίσκουμε το αποτέλεσμα.
$-8x-4y-1{,}5$		

Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο του διπλανού σχήματος αποτελείται από δύο ορθογώνια.
Οι διαστάσεις του ενός ορθογωνίου είναι α, β και του άλλου α, γ.
Το εμβαδόν Ε ολόκληρου του ορθογωνίου είναι $E = \alpha \cdot (\beta + \gamma)$.
Τα εμβαδά E_1, E_2 των δύο μικρότερων ορθογώνιων είναι: $E_1 = \beta \cdot \alpha$, $E_2 = \gamma \cdot \alpha$ και επειδή $E = E_1 + E_2 = \beta \cdot \alpha + \gamma \cdot \alpha$ παίρνουμε ότι:

$$\boldsymbol{\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma}$$



Όμως τα εμβαδά δεν εξαρτώνται από τον τρόπο υπολογισμού τους, οπότε γενικά ισχύει ότι:

$$\boldsymbol{\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma}$$

Να ανοίξετε την εφαρμογή για να διερευνήσετε περισσότερο την επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση.

Γεωμετρική ερμηνεία της επιμεριστικής ιδιότητας του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση

Με άλλα λόγια καταλήξαμε στην επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση.
Ανάλογα προς την επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση, η επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την αφαίρεση είναι:

$$\boldsymbol{\alpha \cdot (\beta - \gamma) = \alpha \cdot \beta - \alpha \cdot \gamma}$$

Να ανοίξετε την εφαρμογή για να διερευνήσετε περισσότερο την επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την αφαίρεση.

Γεωμετρική ερμηνεία της επιμεριστικής ιδιότητας του πολλαπλασιασμού ως προς την αφαίρεση

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να βρείτε την τιμή της αλγεβρικής παράστασης $2 \cdot (\alpha - 10) + 3 \cdot (4\beta - \alpha) + 16 - \gamma$ όταν,

α) $\alpha = -1, \beta = 0, \gamma = 3$ **β)** $\alpha = 0, \beta = 7, \gamma = 1$

Απάντηση

1ος τρόπος

α)
$$\begin{aligned} &2 \cdot (\alpha - 10)+3 \cdot (4\beta - \alpha)+16 - \gamma = \\ &2 \cdot (-1 - 10)+3 \cdot [4 \cdot 0 - (-1)]+16 - 3 = \\ &2 \cdot (-11)+3 \cdot (+1)+16 - 3 = \\ &-22 + 3 + 16 - 3 = -6 \end{aligned}$$

β)
$$\begin{aligned} &2 \cdot (\alpha - 10)+3 \cdot (4\beta - \alpha)+16 - \gamma = \\ &2 \cdot (0 - 10)+3 \cdot (4 \cdot 7 - 0)+16 - 1 = \\ &2 \cdot (-10)+3 \cdot 28 + 16 - 1 = \\ &-20 + 84 + 16 - 1 = 79 \end{aligned}$$

2ος τρόπος

$2(\alpha-10)+3(4\beta-\alpha)+16-\gamma=2\alpha-20+12\beta-3\alpha+16-\gamma=-\alpha+12\beta-\gamma-4$
α) $-\alpha+12\beta-\gamma-4=-(-1)12\cdot0-3-4=1-3-4=-6$
β) $-\alpha+12\beta-\gamma-4=-(0)+12\cdot7-1-4=0+84-5=79$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Ένας φούρνος πουλάει τρεις τύπους ψωμιού. Το ψωμί τύπου Β είναι 0,8€ ακριβότερο ανά κιλό από το ψωμί τύπου Α, ενώ το ψωμί τύπου Γ είναι 10% ακριβότερο από το ψωμί τύπου Β. Μια μέρα, ο φούρνος πούλησε 60 κιλά ψωμί τύπου Α, 30 κιλά ψωμί τύπου Β και 15 κιλά ψωμί τύπου Γ. Πόσα χρήματα εισέπραξε; Αν το ψωμί τύπου Α κοστίζει 2,3€ το κιλό, ποιο είναι το ακριβές ποσό που εισέπραξε;

Απάντηση

Αν θεωρήσουμε ότι το ψωμί τύπου Α κοστίζει x € το κιλό, τότε το ψωμί τύπου Β κοστίζει x + 0,8 € το κιλό, ενώ το ψωμί τύπου Γ κοστίζει:

$$(x + 0{,}8)+\frac{10}{100}(x + 0{,}8) = (x + 0{,}8)+0{,}1(x + 0{,}8)= x + 0{,}8 + 0{,}1x + 0{,}08 = 1{,}1x + 0{,}88€ \text{ το κιλό.}$$

Συνολικά, εισέπραξε:

$$60x + 30(x + 0{,}8)+15(1{,}1x + 0{,}88) = 60x + 30x + 24 + 16{,}5x + 13{,}2 = 106{,}5x + 37{,}2€.$$

Αν ένα κιλό ψωμί τύπου Α κοστίζει 2,3€ εισέπραξε $106{,}5 \cdot 2{,}3 + 37{,}2 = 244{,}95 + 37{,}2 = 282{,}15€$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών για την παράσταση $B = -\frac{3}{2}x$.

Πίνακας τιμών της παράστασης Β									
x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
Β									

Απάντηση

Θέτοντας στη θέση του x τις τιμές: –4, –3, ... , 3 και 4 βρίσκουμε τις αντίστοιχες αλγεβρικές τιμές της παράστασης Β.

Πίνακας τιμών της παράστασης Β									
x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
Β	6	4,5	3	1,5	0	–1,5	–3	–4,5	–6

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Να απλοποιήσετε τις αλγεβρικές παραστάσεις.

α) $9α + 1 - 3α - 5$ **β)** $2(x + 3)-3(4 - 2x)$ **γ)** $x + \frac{1}{2}\cdot x + \frac{1}{3}\cdot x + \frac{7}{12}\cdot x + 60$

Απάντηση

α) $\underline{9α} + 1\underline{-3α} - 5 = \underline{9α - 3α} + 1 - 5 = (9 - 3)α - 4 = 6α - 4$

β) $2(x + 3)-3(4 - 2x)= \underline{2x} + 6 - 12\underline{+6x} = 8x - 6$

γ) $x + \frac{1}{2}\cdot x + \frac{1}{3}\cdot x + \frac{7}{12}\cdot x + 60 = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{7}{12}\right)\cdot x + 60 = \left(\frac{12}{12} + \frac{6}{12} + \frac{4}{12} + \frac{7}{12}\right)\cdot x + 60 = \frac{29}{12}\cdot x + 60$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να βρείτε τις αριθμητικές τιμές των παραστάσεων, όταν $α = 3$.

α) $4α$ **β)** $3α - 5α$ **γ)** $10α - 3α + 4$

2 Να βρείτε τις αριθμητικές τιμές των παραστάσεων της άσκησης 1, όταν $α = -2$.

3 Να βρείτε τις αριθμητικές τιμές των παραστάσεων, όταν 1) $α = 10$ και $β = 5$, 2) $α = -3$ και $β = 2{,}4$.

α) $α + β$ **β)** $-3α + 6β$ **γ)** $9α - 7β + 12$

4 Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης $α + 7β - β + 4 + 3α + 3 - 4 - 3α + 24$, όταν $α = 9$ και $β = -6$.

5 Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης $2α(5β - 1) + β - β(α - 2) + 7$, όταν $α = 8$ και $β = -1$.

6 Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης $α + 5β - 2 - \frac{1}{2}β$, όταν $α = \frac{3}{5}$ και $β = \frac{7}{10}$.

7 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της παράστασης **α)** $Β = -\frac{3}{2}x$, **β)** $Γ = 1{,}2x$.

Πίνακας τιμών των παραστάσεων Β και Γ							
x	−2	−1	0	1	2	3	4
Β							
Γ							

8 Να αντιστοιχίσετε κάθε αριθμητική παράσταση της στήλης Α με την ίση της από τη στήλη Β.

Στήλη Α		Στήλη Β	
α)	$2 \cdot (3 + 4)$	**i)**	$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{9}\right)$
β)	$5 \cdot 6 - 7 \cdot 5$	**ii)**	$2 \cdot 3 - 2 \cdot 4$
γ)	$2 \cdot (3 - 4)$	**iii)**	$5 \cdot (6 - 7)$
δ)	$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9}$	**iv)**	$2 \cdot 3 + 2 \cdot 4$
ε)	$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9}$	**v)**	$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{9}\right)$

9 Να υπολογίσετε τα γινόμενα με χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας:

α) $15 \cdot 16$ **β)** $65 \cdot 12$ **γ)** $8 \cdot 123$
δ) $90 \cdot 17$ **ε)** $56 \cdot 12$

10 Να απλοποιήσετε τις αλγεβρικές παραστάσεις:

α) $4α + 9α$ **β)** $-8α + 2 + α - 3$ **γ)** $4 - α + 11α - 11$

11 Να απλοποιήσετε τις αλγεβρικές παραστάσεις:

α) $4x - 5x + 24x - 12x$

β) $2z - z + 25z - 40$

γ) $3 - 2(-4x + 6) - 6x + (x + 3)$

δ) $\frac{5 - 3x}{3} - \frac{x + 1}{2} + \frac{15x}{6}$

12 Να απλοποιήσετε τις αλγεβρικές παραστάσεις:

α) $-24 + 10α - 45β + 9α - β + 30$

β) $-20β + 25α - 15 + 3α - 40β + 3$

13 Αν $α + β = -1$ να βρείτε την τιμή των παραστάσεων.

α) $-2(2α - 36β) - 1 + 4(18α - β + 1)$

β) $-2(5α + 4β - 5) + (-8α - 10β + 2) + 2$

14 Να βρείτε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων:

α) $20α + 16α - 3α + 12$

β) $α - 25α + 9α - 19 - 2α + 4$

όταν $α = 3{,}9$

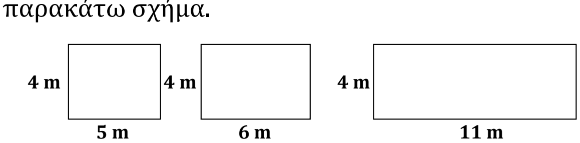
15 Να βρείτε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων:

α) $5(2α - 8β) + 3(-β + 6α)$

β) $α(2β - 2) - 7(-α + 18β + 2)$

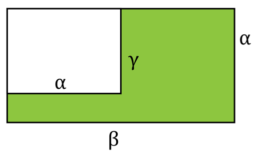
όταν $α = 2{,}73$ και $β = -3{,}41$

16 Να βρείτε το εμβαδόν των τριών ορθογωνίων στο παρακάτω σχήμα.



Τι παρατηρείτε; Ποια γνωστή ιδιότητα εκφράζουν;

17 Στο παρακάτω σχήμα υπάρχουν δύο ορθογώνια. Το μεγάλο έχει διαστάσεις α και β, ενώ το μικρό έχει διαστάσεις α και γ. Να εκφράσετε το εμβαδόν της χρωματισμένης περιοχής. Πώς θα μπορούσατε να τροποποιήσετε το σχήμα, ώστε να εκφράζει την επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την αφαίρεση;



18 Να βρείτε την αριθμητική τιμή των παρακάτω παραστάσεων χωρίς να κάνετε τους πολλαπλασιασμούς.

α) $45 \cdot 0,01 + 45 \cdot 0,99$ **β)** $30 \cdot 9,43 - 30 \cdot 0,43$

γ) $-80 \cdot 16,57 - 80 \cdot 3,43$ **δ)** $-10 \cdot (-8,87) - 10 \cdot 1,87$

ε) $\frac{2}{7} \cdot 5,47 - \frac{2}{7} \cdot 3,47$ **στ)** $-\frac{1}{5} \cdot 25,387 - \frac{1}{5} \cdot 4,613$

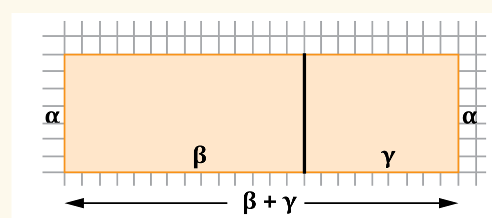
19 **α)** Να γενικεύσετε την επιμεριστική ιδιότητα για την περίπτωση αθροίσματος τριών όρων, δηλαδή να αποδείξετε ότι:

$$α(β + γ + δ) = αβ + αγ + αδ$$

β) Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά αυτή την ιδιότητα.

Ανακεφαλαίωση

- ✓ **Μεταβλητή** είναι ένα σύμβολο, συνήθως ένα γράμμα, που συμβολίζει ένα **οποιοδήποτε** στοιχείο ενός συνόλου και χρησιμεύει για να δηλωθεί μια ιδιότητα των στοιχείων του.
- ✓ Κάθε έκφραση που περιλαμβάνει αριθμούς, μεταβλητές και πράξεις μεταξύ αυτών λέμε ότι είναι μία **αλγεβρική παράσταση**.
- ✓ Όταν δεν αναφέρεται το σύνολο από το οποίο παίρνει τιμές η μεταβλητή, θεωρούμε ότι είναι το σύνολο των ρητών αριθμών.
- ✓ **Συντελεστής** είναι ο αριθμός με τον οποίο πολλαπλασιάζεται μια μεταβλητή στις απλές αλγεβρικές παραστάσεις.
- ✓ **Σταθερός όρος ή σταθερά** είναι ένας αριθμός χωρίς μεταβλητή.
- ✓ Με την **αναγωγή όμοιων όρων** απλοποιούμε τις αλγεβρικές παραστάσεις. Ο ένας όρος αποτελείται από τους όρους που περιέχουν τη μεταβλητή και ο άλλος τους σταθερούς όρους.
- ✓ Η **επιμεριστική ιδιότητα** του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση, **ερμηνεύεται γεωμετρικά** από το διπλανό σχήμα.



Αυτοαξιολόγηση

Να τοποθετήσετε στις στήλες ΣΩΣΤΟ, ΛΑΘΟΣ ένα ✓ ανάλογα με το αν η πρόταση είναι σωστή ή λανθασμένη.

	Σωστό	Λάθος
1. Στην παράσταση $y - 1$ η μεταβλητή y δεν έχει συντελεστή.	☐	☐
2. Στην παράσταση $19α$ ο σταθερός όρος είναι το 0.	☐	☐
3. Η παράσταση $87β + 14β$ έχει δύο μεταβλητές.	☐	☐
4. Η παράσταση $45α + 0β$ έχει δύο μεταβλητές.	☐	☐
5. Η αριθμητική τιμή της αλγεβρικής παράστασης $10x$ είναι 31 όταν $x = 3,1$.	☐	☐
6. Η αριθμητική τιμή της παράστασης $0x + 15$ δεν εξαρτάται από την τιμή του x.	☐	☐
7. Ισχύει ότι: $2 \cdot (x - 3) = 2x - 3$.	☐	☐
8. Η παράσταση $0,2x + 0,8x = x$.	☐	☐
9. Η παράσταση $x - \frac{1}{5}x = 0,8x$.	☐	☐
10. Η παράσταση $-α + 10α$ δεν μπορεί να απλοποιηθεί με χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας.	☐	☐

ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να εκφράσετε τις παρακάτω προτάσεις με τη χρήση μεταβλητών.

α) Δύο αριθμοί διαφέρουν κατά 11. Το άθροισμά τους είναι ....

β) Στην τάξη οι μαθητές είναι 3 λιγότεροι από τις μαθήτριες, τότε η τάξη έχει .... μαθητές.

γ) Αν α+2 η πλευρά τετραγώνου, τότε η περίμετρός του είναι ....

δ) Αν x είναι ένας αριθμός και y ο τριπλάσιός του, ελαττωμένος κατά 5, τότε και οι δύο μαζί έχουν άθροισμα ....

ε) Η ηλικία ενός πατέρα είναι τριπλάσια της ηλικίας του γιου του. Αν t η ηλικία του γιου τότε η ηλικία του πατέρα είναι .... Αν s η ηλικία του πατέρα τότε η ηλικία του γιου είναι ....

στ) Τέσσερις ακέραιοι είναι όροι μιας αριθμητικής κανονικότητας που κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο προσθέτοντας 2. Ο δεύτερος είναι ο $x - 1$. Να εκφράσετε τους άλλους τρεις.

ζ) Αν x οι κότες ενός αγροκτήματος και y τα κουνέλια του τότε τα πόδια τους είναι ....

η) Αν ω είναι μια γωνία, τότε η κατά 30° μεγαλύτερη από το διπλάσιό της είναι ....

2 Να εκφράσετε λεκτικά τις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις.

α) $5(x+2)$ **β)** $\dfrac{-2x+11}{2}$

γ) $-(x+y)+4$ **δ)** $12 - \dfrac{x}{3}$

ε) $(y+2)(2x+1)$ **στ)** $180 - x - (x+10)$

3 Να απλοποιήσετε τις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις και να βρείτε τις αριθμητικές τους τιμές για $x = -2$ και $y = -3$.

α) $5(x+2) - (2x+11)$ **β)** $6(1-2x) - (-4-7x)$

γ) $2(y+4) - 8(y-2) + 12$ **δ)** $4(3x+1) + 18 - x$

ε) $7x - 2(x+1) - 3$ **στ)** $14y - 5(2y-5) + 7$

4 Να απλοποιήσετε τις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις και να βρείτε τις αριθμητικές τους τιμές για $x = -1$ και $y = 3$.

α) $11 - (3 - x) - 5x$ **β)** $2x - 4(4 - 3y) - y + 10x$

γ) $2(x+4) - 7 + (3+y)$ **δ)** $2(x-6) + 7y - 3(3y-4)$

ε) $5(2x - 4y) - 4x + 2(1 - 3y)$

5 Να απλοποιήσετε και, στη συνέχεια, να βρείτε τις αριθμητικές τιμές των παραστάσεων, όταν $\beta = -4$.

α) $\beta + 2\beta - 9$

β) $7(\beta - 2) + 10$

γ) $10(\beta + 4) + 2(\beta - 1) - 1$

6 Να απλοποιήσετε και, στη συνέχεια, να βρείτε τις αριθμητικές τιμές των παραστάσεων, όταν $\alpha = 1$ και $\beta = 0,15$.

α) $2(\alpha - 1) + 9(\beta + 2\alpha) - 4$

β) $-(\alpha - 1) + 6(2\alpha + 3\beta) + 5$

7 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της αλγεβρικής παράστασης $A = 2(\alpha - 4) + 20$.

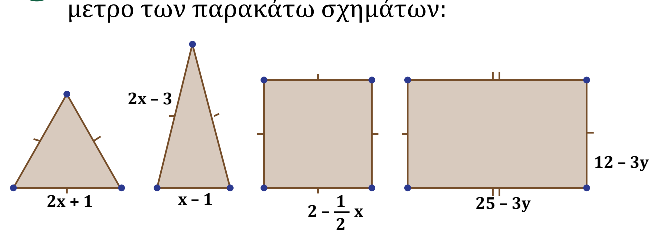
Πίνακας τιμών της παράστασης Α					
α	−4	−2	0	2	4
Α					

8 Ο Γιώργος θέλει να αγοράσει 4 τετράδια, 2 στιλό και 6 μαρκαδόρους, η αξία των οποίων διαφέρει από βιβλιοπωλείο σε βιβλιοπωλείο. Αν το κάθε τετράδιο κοστίζει x €, το κάθε στιλό y € και ο κάθε μαρκαδόρος z €:

α) Ποια είναι η αλγεβρική παράσταση που εκφράζει το ποσό που πρέπει να έχει ο Γιώργος για να μπορεί να αγοράσει και τα τρία είδη από οποιοδήποτε βιβλιοπωλείο;

β) Ποιο είναι το ποσό που θα χρειαστεί, αν αγοράσει από ένα βιβλιοπωλείο που πουλάει το τετράδιο 2 €, το στιλό 0,70 € και τον μαρκαδόρο 1,5 €;

9 Να εκφράσετε με αλγεβρική παράσταση την περίμετρο των παρακάτω σχημάτων:



Για μια επανάληψη στις έννοιες των αλγεβρικών παραστάσεων, ανοίξτε την ψηφιακή εφαρμογή.

Γλωσσάρι Αλγεβρικών Παραστάσεων

Εργασία

Στα Μαθηματικά αλλά και στις άλλες επιστήμες (τις φυσικές επιστήμες ή τις οικονομικές επιστήμες) πολλές φορές οι αλγεβρικές παραστάσεις εμφανίζονται με το όρο «τύποι». Για παράδειγμα για την εύρεση του εμβαδού του τραπεζίου που έχει μεγάλη βάση α, μικρή βάση β και ύψος υ, ο υπολογισμός του Εμβαδού του έχει την έκφραση $Ε = \frac{1}{2}(α + β) \cdot υ$

Από τον τύπο αυτό, για $α = 6$, $β = 4$ και $υ = 3$, βρίσκουμε ότι το εμβαδόν είναι $Ε = \frac{1}{2}(6 + 4) \cdot 3 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 3 = 5 \cdot 3 = 15$

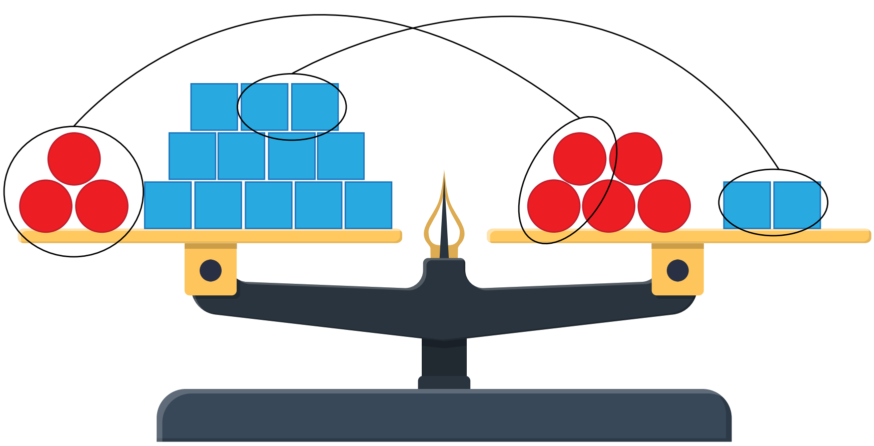
Στο βιβλίο που χρησιμοποιήσατε στην ΣΤ΄ Δημοτικού υπάρχουν τέτοιοι τύποι, που υπολογίζουν το εμβαδόν επίπεδων σχημάτων (τετραγώνου, παραλληλογράμμου, τριγώνου, τραπεζίου, κύκλου) αλλά και αναπτύγματος στερεών (κύβου, παραλληλεπιπέδου, κυλίνδρου) καθώς και τον όγκο στερεών σχημάτων.

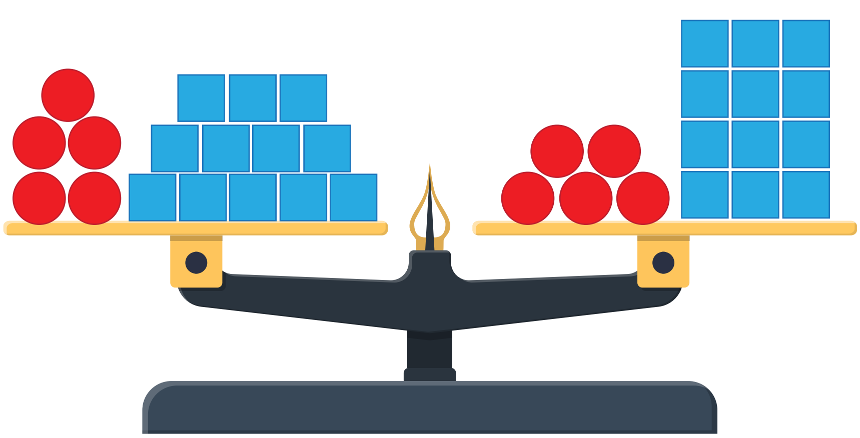
α) Να ανατρέξετε σε αυτό και να καταγράψετε τους σχετικούς τύπους που θα βρείτε.
β) Να εξηγήσετε τι εκφράζει η κάθε μεταβλητή.
γ) Να δώσετε από ένα παράδειγμα.

Κεφάλαιο

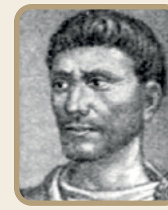
6

Αλγεβρικές Σχέσεις





Εισαγωγή



Ο Διόφαντος ο Αλεξανδρεύς ήταν Έλληνας μαθηματικός του τρίτου αιώνα (περίπου 210 – 290), ο οποίος έζησε στην Αλεξάνδρεια. Έχει αποκληθεί από τους Έλληνες «πατέρας της άλγεβρας» εξαιτίας του εμβληματικού έργου του «Αριθμητικά», όπου περιέχονται προβλήματα αριθμητικής τα οποία λύνονται σήμερα με εξισώσεις και συστήματα πρώτου και δευτέρου βαθμού. Ο Διόφαντος συνεισέφερε πολύ στην ανάπτυξη της αριθμητικής, καθιέρωσε και τυποποίησε έναν τύπο σύντομου μαθηματικού συμβολισμού για τη γραφή προβλημάτων, για πρώτη φορά άρχισε να χρησιμοποιεί τα κλάσματα ως πραγματικούς αριθμούς και ασχολήθηκε με την επίλυση εξισώσεων.

Ανακτήθηκε από https://el.wikipedia.org/wiki/Διόφαντος

6.1 ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ – ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

- Να διερευνούν και να διατυπώνουν τις ιδιότητες της ισότητας με βάση μοντέλα – μεταφορές.
- Να αναγνωρίζουν την εξίσωση με έναν άγνωστο αριθμό x ως μια μαθηματική ισότητα η οποία ισχύει για συγκεκριμένες τιμές του x, καθώς και τους όρους της.

Διερεύνηση 1

Ο Αλί και η Μάρα συζητάνε για τις εταιρείες τηλεφωνίας των κινητών τους. Η εταιρεία Α του Αλί έχει πάγιο 12€ τον μήνα και χρεώνει τρίλεπτα, ενώ η εταιρεία Β της Μάρα έχει πάγιο 18€ τον μήνα και χρεώνει 0,05€ λιγότερα το κάθε τρίλεπτο από το τρίλεπτο του Αλί. Τον μήνα που πέρασε ο Αλί μίλησε 65 τρίλεπτα ενώ η Μάρα 60. Αν χρησιμοποιήσουμε τη μεταβλητή x για να εκφράσουμε το ποσό που πληρώνει ο Αλί για το κάθε τρίλεπτο, να εκφράσετε αλγεβρικά τις παρακάτω προτάσεις.

- Ποσό που χρεώνεται η Μάρα το κάθε τρίλεπτο.
- Ποσό που πλήρωσε ο Αλί για τα λεπτά που μίλησε.
- Ποσό που πλήρωσε η Μάρα για τα λεπτά που μίλησε.
- Συνολικό ποσό που πλήρωσε ο Αλί.
- Συνολικό ποσό που πλήρωσε η Μάρα.
- Τα δύο παιδιά πλήρωσαν το ίδιο ποσό.

Όπως έχουμε δει, για να παραστήσουμε ένα οποιοδήποτε στοιχείο ενός συνόλου χρησιμοποιούμε ένα γράμμα που ονομάζουμε **μεταβλητή**. Επίσης, είδαμε ότι **αριθμητικές παραστάσεις** είναι εκφράσεις που περιέχουν αριθμούς και σύμβολα πράξεων, ενώ **αλγεβρικές παραστάσεις** είναι εκφράσεις που περιέχουν αριθμούς σύμβολα πράξεων και μεταβλητές.

Αλγεβρικές παραστάσεις που συνδέονται με το σύμβολο της **ισότητας** λέγονται **εξισώσεις**. Στην περίπτωση αυτή η μεταβλητή λέγεται **άγνωστος**.

Με άλλα λόγια, εξίσωση είναι μια ισότητα που περιέχει γράμματα και αριθμούς.
Ειδικότερα μια ισότητα με έναν άγνωστο (συνήθως ο x) και αριθμούς α, β, γ της μορφής αx + β = γ, όπου το α δεν είναι μηδέν, είναι εξίσωση πρώτου βαθμού.

Λύση ή ρίζα μιας εξίσωσης είναι κάθε αριθμός που όταν τον θέσουμε στη θέση του αγνώστου, τότε η εξίσωση αληθεύει.
Για παράδειγμα, στην ισότητα $\underbrace{2 \cdot x - 3}_{\text{Α' Μέλος}} = \underbrace{5}_{\text{Β' Μέλος}}$ οι εκφράσεις $2 \cdot x - 3$ και 5 συνδέονται με το σύμβολο της ισότητας, οπότε είναι μια εξίσωση. Η κάθε μία έκφραση λέγεται **μέλος** της εξίσωσης.

Το μέλος που βρίσκεται πριν από το «=» λέγεται **πρώτο μέλος** και εκείνο που βρίσκεται μετά το «=» λέγεται **δεύτερο μέλος**. Η τιμή $x = 4$ είναι η λύση της αφού την επαληθεύει: $2 \cdot 4 - 3 = 8 - 3 = 5$. **Επίλυση** μιας εξίσωσης είναι η διαδικασία με την οποία βρίσκουμε τη λύση της.

Σημείωση:

Ο αριθμός με τον οποίο πολλαπλασιάζεται ο άγνωστος x λέγεται **συντελεστής του αγνώστου.**

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Η Σοφία και η Χριστίνα εργάζονται ως πωλήτριες σε διπλανά καταστήματα. Η Χριστίνα αμείβεται με ωριαία αντιμισθία και για κάθε μέρα εργασίας αμείβεται επιπλέον με 10 ευρώ. Η Σοφία αμείβεται για κάθε ώρα εργασίας με 2 ευρώ περισσότερα από τη Χριστίνα. Σήμερα η Χριστίνα εργάστηκε 8 ώρες και η Σοφία 6 ώρες. Να χρησιμοποιήσετε τη μεταβλητή x ως ωριαία αντιμισθία της Χριστίνας.

α) Να εκφράσετε αλγεβρικά την αμοιβή της Χριστίνας.
β) Να εκφράσετε αλγεβρικά την αμοιβή της Σοφίας.
γ) Να γράψετε την εξίσωση προσδιορισμού των ωρών εργασίας της Σοφίας όταν η συνολική αμοιβή της μια ημέρα είναι 42 ευρώ.
δ) Να εξετάσετε ποιος από τους αριθμούς 4, 5, 6 είναι λύση της εξίσωσης.

Απάντηση

Έστω ότι η Χριστίνα παίρνει x € την ώρα.

α) Αφού η Χριστίνα εργάστηκε 8 ώρες, η αμοιβή της για τις ώρες που εργάστηκε είναι $8 \cdot x$. Επιπλέον, παίρνει και 10€ για κάθε ημέρα εργασίας, οπότε συνολικά για την ημέρα αυτή θα πάρει: $8 \cdot x + 10$ ευρώ.

β) Αφού η Σοφία αμείβεται με 2€ περισσότερα την ώρα από τη Χριστίνα, θα παίρνει για κάθε ώρα $(x + 2)$ ευρώ. Αφού εργάστηκε 6 ώρες, η αμοιβή της θα είναι $6 \cdot (x + 2)$.

γ) Επειδή, η Σοφία πήρε 42 ευρώ τη συγκεκριμένη ημέρα θα ισχύει η ισότητα: $6 \cdot (x + 2) = 42$.

δ) Θέτοντας διαδοχικά τις τιμές 4, 5, 6 στη θέση του x έχουμε:

i. Για $x = \mathbf{4}$, το αποτέλεσμα $\mathbf{6} \cdot \mathbf{(4 + 2)} = 6 \cdot 6 = 36$ είναι διαφορετικό από το 42, οπότε ο αριθμός 4 δεν είναι λύση της εξίσωσης.

ii. Για $x = \mathbf{5}$, το αποτέλεσμα $\mathbf{6} \cdot \mathbf{(5 + 2)} = 6 \cdot 7 = 42$ είναι ίδιο με το 42, οπότε ο αριθμός 5 είναι λύση της εξίσωσης.

iii. Για $x = \mathbf{6}$, το αποτέλεσμα $\mathbf{6} \cdot \mathbf{(6 + 2)} = 6 \cdot 8 = 48$ είναι διαφορετικό από το 42, οπότε ο αριθμός 6 δεν είναι λύση της εξίσωσης.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να μεταφράσετε κάθε πρόταση σε μια εξίσωση, χρησιμοποιώντας το x ως άγνωστη ποσότητα.

α) Αφαιρώντας έναν αριθμό από τον -4 βρίσκουμε το αποτέλεσμα να είναι 18.
β) Το γινόμενο ενός αριθμού με τον -15 δίνει αποτέλεσμα 90.
γ) Το 20 είναι 6 λιγότερο από το διπλάσιο ενός αριθμού.
δ) Η διαφορά μεταξύ ενός αριθμού και του 18 είναι 11.
ε) Το άθροισμα ενός αριθμού και του 19 είναι 41.

2 Για κάθε μία από τις παρακάτω εξισώσεις να εξετάσετε ποιος από τους αριθμούς x είναι λύση της εξίσωσης.

α) $12 \cdot x - (45 - 2 \cdot x) = 25, \quad x: -2, 0, 5$
β) $2 \cdot x - 4 \cdot (x - 5) = 2 \quad , \quad x: -2, 3, 7$
γ) $-15 \cdot x - (12 - 9 \cdot x) = 6, \quad x: -5, -3, 3$
δ) $4 \cdot (9 - 3x) - 2x = 8, \quad x: -1, 2, 5$

3 Να βάλετε τις παρακάτω φράσεις στην κατάλληλη στήλη του πίνακα.

x – 7	7 – x	x = –7	Κανένα από αυτά

α) Η διαφορά του 7x.
β) x μείον 7.
γ) 7 λιγότερο από το x.
δ) Το x είναι μικρότερο από το 7.
ε) x λιγότερο από το 7.
στ) Το x είναι –7.
ζ) Η διαφορά του x από το 7.
η) Από το x αφαιρώ 7.
θ) Από το 7 αφαιρούμε το x.
ι) Το 7 αφαιρείται από το x.
ια) Το x είναι μεγαλύτερο από το 7.
ιβ) Το 7 μειωμένο κατά x.

6.2 ΙΣΟΔΥΝΑΜΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

- Να αναγνωρίζουν ότι μια εξίσωση είναι ισοδύναμη με μια άλλη όταν έχουν τις ίδιες λύσεις.
- Να εφαρμόζουν ιδιότητες διατήρησης της ισότητας για να μετασχηματίσουν εξισώσεις της μορφής $α \cdot x + β = γ$ με ρητούς συντελεστές σε ισοδύναμες μορφές.

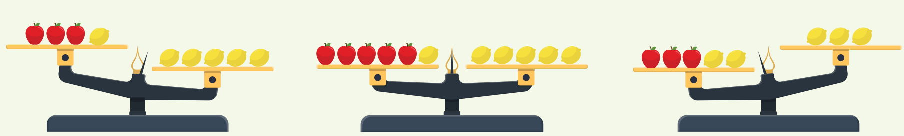
Διερεύνηση 2

Να βρείτε ποιοι από τους επόμενους αριθμούς: –2, –1, 0, 1, 2 αποτελούν λύση των παρακάτω εξισώσεων:

α) $4x - 3 = -2 + 7$
β) $15 = -6x + 3$
γ) $5x - 7 = +3$
δ) $-3x + 5 = 8$
ε) $5x + 5 = 10$
στ) $10 = 12x - 2$

- Να συνεργαστείτε με τον διπλανό σας.
- Να ομαδοποιήσετε τα αποτελέσματα.

Διερεύνηση 3 *«Εργασία μαθητών κατά ζεύγη»*



Στην παραπάνω εικόνα υπάρχουν μήλα (μ) και λεμόνια (λ). Αυτά έχουν τοποθετηθεί σε μία ζυγαριά. Η ζυγαριά άλλοτε γέρνει προς τη μία μεριά και άλλοτε προς την άλλη. Βάλτε το κατάλληλο σύμβολο της ισότητας (=) ή της ανισότητας (>) ή (<) στην άδεια θέση στις επόμενες σχέσεις που αντιστοιχούν στην κατάσταση που περιγράφει κάθε εικόνα:

- 1λ + 3μ 1λ + 3μ ☐ 5λ 5λ • 5μ + 1λ ☐ 5λ • 3μ + 2λ ☐ 3λ

Συζητήστε με τον διπλανό σας τι πρέπει να κάνετε για να ισορροπήσει η ζυγαριά στις δύο περιπτώσεις που γέρνει.

Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες μάθησης

Ισοδύναμες Ισότητες

Ανοίξτε την παραπάνω εφαρμογή για να διερευνήσετε ιδιότητες της ισότητας με τη βοήθεια της ισορροπίας του ζυγού.

Πολλές φορές συμβαίνει δύο εξισώσεις να έχουν τις ίδιες ακριβώς λύσεις. Τέτοιες εξισώσεις λέμε ότι είναι ισοδύναμες.

Ισοδύναμες εξισώσεις λέγονται οι εξισώσεις που έχουν τις **ίδιες** ακριβώς **λύσεις**.

Για παράδειγμα, οι εξισώσεις: $8\ (x-1{,}5)-4(1-x)=-10$, $8x-12+4x=-6$, $12x=6$ έχουν ως λύση τον αριθμό $x=0{,}5$ και καμία άλλη. Επειδή έχουν την ίδια λύση είναι ισοδύναμες.

Σημείωση:

Στην ενότητα αυτή ασχολούμαστε με εξισώσεις της μορφής $\alpha \cdot x+\beta=\gamma$ οι οποίες έχουν πάντοτε μία μόνο λύση (ρίζα), όταν ο α δεν είναι μηδέν.

- Μια ισότητα **δεν αλλάζει** αν **προσθέσουμε** και στα δύο μέλη της **την ίδια ποσότητα**.
- Μια ισότητα **δεν αλλάζει** αν **αφαιρέσουμε** και από τα δύο μέλη της **την ίδια ποσότητα.**

Ιδιότητες διατήρησης ισότητας

Μια ισότητα δεν μεταβάλλεται όταν:
- Προσθέσουμε και στα δύο μέλη της τον ίδιο αριθμό.
- Αφαιρέσουμε και από τα δύο μέλη της τον ίδιο αριθμό.
- Πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη με τον ίδιο αριθμό.
- Διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με τον ίδιο αριθμό, διαφορετικό από το μηδέν.

Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων αυτών, μετασχηματίζουμε μια εξίσωση σε απλούστερη από την οποία βρίσκουμε ευκολότερα τη λύση της.

Παραδείγματα:
- $x-3=5$ ή $(x-3)+3=5+3$ ή $x+(-3+3)=8$ ή $x+0=8$ ή $x=8$
- $2x+1=9$ ή $2x=9-1$ ή $2x=8$ ή $\frac{2x}{2}=\frac{8}{2}$ ή $x=4$

Επομένως, με την πρόσθεση και την αφαίρεση των ίδιων ποσοτήτων σε μια εξίσωση αυτή δεν αλλάζει, δηλαδή αυτή που προκύπτει έχει την ίδια λύση με την αρχική.

Έτσι, μετασχηματίζουμε μια εξίσωση σε απλούστερη από την οποία βρίσκουμε ευκολότερα τη λύση της.

Για παράδειγμα, την εξίσωση $8x-12=-6$, που έχει λύση το $x=0{,}75$, μπορούμε να τη μετασχηματίσουμε προσθέτοντας και στα δύο μέλη της το 12, οπότε θα έχουμε: $8x-12+12=-6+12$ ή $8x=6$. Η τελευταία είναι απλούστερη και ισοδύναμη με την αρχική επειδή το $x=0{,}75$ επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις.

- Μια ισότητα **δεν αλλάζει** αν **πολλαπλασιάσουμε** και τα δύο μέλη της με **την ίδια μη μηδενική ποσότητα.**
- Μια ισότητα **δεν αλλάζει** αν **διαιρέσουμε** και τα δύο μέλη της με **την ίδια μη μηδενική ποσότητα**.

Επομένως η εξίσωση που προκύπτει όταν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τα δύο μέλη της με τον ίδιο μη μηδενικό αριθμό, έχει την ίδια λύση με την αρχική.

Αφού με τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση μιας ισότητας με τον ίδιο αριθμό αυτή δεν αλλάζει, μπορούμε εύκολα να δημιουργούμε ισοδύναμες εξισώσεις.

Για παράδειγμα την εξίσωση $10x = 6$, που έχει λύση το $x = 0,6$ μπορούμε να τη μετασχηματίσουμε διαιρώντας και τα δύο μέλη της με τον αριθμό 10, οπότε θα έχουμε $\frac{\cancel{10}x}{\cancel{10}} = \frac{6}{10}$ ή $x = \frac{6}{10}$ ή $x = 0,6$. Η τελευταία είναι απλούστερη και ισοδύναμη με την αρχική επειδή το $x = 0,6$ επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις.

Γενικά

Για τη λύση εξισώσεων της μορφής $αx + β = γ$ $(α \neq 0)$ έχουμε:

$αx + β = γ$	[προσθέτουμε και στα δύο μέλη τον ίδιο αριθμό : $-β$]
ή $(αx + β) - β = γ - β$	[προσεταιριστική ιδιότητα]
ή $αx + (β - β) = γ - β$	[άθροισμα αντίθετων αριθμών $β, -β$ είναι μηδέν]
ή $αx = γ - β$	[διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου, όταν $α \neq 0$]
ή $\frac{αx}{α} = \frac{γ - β}{α}$	[$\frac{α}{α} = 1$]
ή $x = \frac{γ - β}{α}$	

Σημείωση:

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε αν αντί να διαιρέσουμε με $α \neq 0$ και τα δύο μέλη της εξίσωσης $αx = γ - β$, πολλαπλασιάσουμε με $\frac{1}{α}$, αφού: $α \cdot \frac{1}{α} = \frac{1}{α} \cdot α = 1$, $α \neq 0$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να μετασχηματίσετε στην απλούστερη δυνατή την εξίσωση: $-4x + 3(2x - 1) = 7$

Απάντηση

$-4x + 3(2x - 1) = 7$	[Κάνουμε τις πράξεις]
ή $-4x + 6x - 3 = 7$	[Προσθέτουμε και στα δύο μέλη τον ίδιο αριθμό: $+3$]
ή $-4x + 6x = 3 + 7$	
ή $(-4 + 6)x = 10$	[Αναγωγή όμοιων όρων (Επιμεριστική ιδιότητα)]
ή $2x = 10$	[Νέα μορφή]
ή $\frac{2x}{2} = \frac{10}{2}$	[Διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου]
ή $x = 5$	

ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να μετασχηματίσετε τις επόμενες εξισώσεις σε άλλες ισοδύναμες με αυτές, αφού κάνετε τις αναγωγές όμοιων όρων, προσθέτοντας κατάλληλη ποσότητα στα δύο μέλη της.

α) $3(x + 2) - 12 = 16$

β) $4(-x + 2) - 2 = 6$

γ) $-4(2 - x) - 5 = 7$

2 Να μετασχηματίσετε τις επόμενες εξισώσεις σε άλλες ισοδύναμες με αυτές, αφού κάνετε τις αναγωγές όμοιων όρων, προσθέτοντας κατάλληλη ποσότητα στα δύο μέλη της.

α) $-\frac{3}{4} - 5\left(2 - \frac{3}{5}x\right) = -\frac{7}{10}$

β) $-4,1x - 5,2(-x + 3) = -3,2$

γ) $-(2,1x - 3) - 2(-x + 3,2) = -3,7$

3 Να μετασχηματίσετε τις επόμενες εξισώσεις σε άλλες ισοδύναμες με αυτές, πολλαπλασιάζοντας ή διαιρώντας με κατάλληλη ποσότητα τα δύο μέλη της.

α) $2x = 4$ **β)** $-3x = 5$ **γ)** $-5x = -12$

4 Να μετασχηματίσετε τις επόμενες εξισώσεις σε άλλες ισοδύναμες με αυτές, πολλαπλασιάζοντας ή διαιρώντας με κατάλληλη ποσότητα τα δύο μέλη της.

α) $-\frac{5}{3}x = -10$ **β)** $\frac{2}{7}x = -\frac{5}{14}$ **γ)** $-3,4x = -1,7$

5 Να μετασχηματίσετε τις επόμενες εξισώσεις σε άλλες ισοδύναμες με αυτές.

α) $-\frac{1}{2} - 4\left(1 - \frac{3}{2}x\right) = -\frac{7}{4}$

β) $-2,1x - 3,2(-x + 3,2) = -3$

γ) $-(2,2x - 3) + 3(-x + 1,2) = -3,5$

6 Να μετασχηματίσετε τις επόμενες εξισώσεις σε άλλες ισοδύναμες με αυτές, πολλαπλασιάζοντας ή διαιρώντας με κατάλληλη ποσότητα τα δύο μέλη της.

α) $-\frac{5}{4}x = -12$ **β)** $\frac{5}{3}x = -\frac{7}{12}$

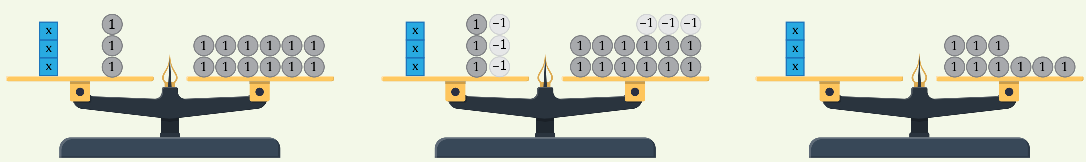
γ) $-5,3x = -1,2$ **δ)** $2,5x = -4,8$

6.3 ΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

Να επιλύουν εξισώσεις της μορφής $α \cdot x + β = γ$ με εφαρμογή των ιδιοτήτων της διατήρησης της ισότητας και των πράξεων.

Διερεύνηση 1



Στην παραπάνω εικόνα υπάρχουν η μεταβλητή x, ο αριθμός 1 και ο αριθμός −1. Έχουν τοποθετηθεί σε διάφορες ποσότητες σε τρεις ζυγαριές οι οποίες ισορροπούν.

- Να γράψετε τις εξισώσεις που εκφράζει κάθε ζυγαριά.
- Να δικαιολογήσετε την ισορροπία στη (Β) και στη (Γ) ζυγαριά.
- Να μετασχηματίσετε την εξίσωση της τρίτης ζυγαριάς στην πιο απλή μορφή.
- Να καταγράψετε τα βήματα που κάνατε και να τα συζητήσετε στην τάξη.

Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες μάθησης

Για να λύσουμε μια εξίσωση τη μετασχηματίζουμε διαδοχικά σε άλλες ισοδύναμες εξισώσεις χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες που έχουμε αναφέρει, μέχρι να φτάσουμε στη μορφή $x = α$, που είναι η λύση της.

Εφαρμόζοντας σωστά τις ιδιότητες οι εξισώσεις που προκύπτουν είναι ισοδύναμες οπότε η τελική εξίσωση και η αρχική έχουν την ίδια λύση.

Για να βεβαιωθούμε ότι δεν έχουμε κάνει λάθος στους ενδιάμεσους μετασχηματισμούς, ελέγχουμε αν η τιμή που βρήκαμε είναι λύση της αρχικής εξίσωσης αντικαθιστώντας στην αρχική εξίσωση (επαλήθευση).

Ο τρόπος με τον οποίο εργαζόμαστε παρουσιάζεται στις εφαρμογές που ακολουθούν.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1 *«Εξίσωση χωρίς κλάσματα»*

Να λύσετε την εξίσωση $2x - 3(4 - 5x) + 7 = 12$

Απάντηση

$2x-3(4-5x)+7=12$ ή	[Επιμεριστική ιδιότητα]
$2x-12+15x+7=12$ ή	[Αναγωγή όμοιων όρων]
$17x-5=12$ ή	[Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους προσθέτοντας το 5 και στα δύο μέλη]
$17x-5+5=12+5$ ή	[Πράξεις]
$17x=17$ ή	[Διαιρούμε και τα δύο μέλη με τον συντελεστή του αγνώστου]
$\frac{17x}{17}=\frac{17}{17}$ ή	[Πράξεις]
$x=1$	

Δημιουργός Εξισώσεων - Επίπεδο 2

Ανοίξτε την παραπάνω εφαρμογή για να εξασκηθείτε περισσότερο στην επίλυση των εξισώσεων με εφαρμογή των ιδιοτήτων της διατήρησης της ισότητας και των πράξεων.

Επαλήθευση:

Για $x=1$ το πρώτο μέλος της αρχικής εξίσωσης γράφεται: $2\cdot 1-3(4-5\cdot 1)+7=12$ ή $2-3(-1)+7=12$ ή $2+3+7=12$.
Άρα η λύση της εξίσωσης είναι: $\mathbf{x=1}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2 *«Εξίσωση με κλάσματα»*

Να λύσετε την εξίσωση $-\frac{2x}{3}-\frac{4-5x}{4}+\frac{5}{6}=15$

Απάντηση

Αρχικά απαλείφουμε τους παρονομαστές βρίσκοντας το ΕΚΠ των παρονομαστών και πολλαπλασιάζουμε τα δύο μέλη της εξίσωσης με αυτό. Η διαδικασία αυτή λέγεται **απαλοιφή παρονομαστών**.

$-\frac{2x}{3}-\frac{4-5x}{4}+\frac{5}{6}=15$ ή	[Εύρεση του ΕΚΠ]
$12\cdot\left(-\frac{2x}{3}-\frac{4-5x}{4}+\frac{5}{6}\right)=12\cdot 15$ ή	[Πολλαπλασιασμός των δύο μελών με ΕΚΠ]
${}^{4}\cancel{12}\cdot\left(-\frac{2x}{\cancel{3}}\right)-{}^{3}\cancel{12}\cdot\left(\frac{4-5x}{\cancel{4}}\right)+{}^{2}\cancel{12}\cdot\left(\frac{5}{\cancel{6}}\right)=12\cdot 15$ ή	[Απλοποιήσεις]
$4\cdot(-2x)-3\cdot(4-5x)+2\cdot(5)=12\cdot 15$ ή	[Επιμεριστική ιδιότητα]
$\underline{-8x}-12\underline{+15x}+10=180$ ή	[Αναγωγή ομοίων όρων]
$7x-2=180$ ή	[Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους προσθέτοντας κατάλληλη ποσότητα στα δύο μέλη]
$7x-2+2=180+2$ ή	[Πράξεις]
$7x=182$ ή	[Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με τον αντίστροφό του συντελεστή του αγνώστου]
$\frac{1}{\cancel{7}}\cdot(\cancel{7}x)=\frac{1}{7}\cdot 182$	[Πράξεις]
$x=26$	

Επαλήθευση:

Για x = 26 το πρώτο μέλος της αρχικής εξίσωσης γράφεται:

$$-\frac{2\cdot 26}{3}-\frac{4-5\cdot 26}{4}+\frac{5}{6}=-\frac{4\cdot 2\cdot 26}{4\cdot 3}-\frac{3\cdot 4-3\cdot 5\cdot 26}{3\cdot 4}+\frac{2\cdot 5}{2\cdot 6}=\frac{-8\cdot 26-12+15\cdot 26+10}{12}=$$

$$\frac{-220+400}{12}=\frac{180}{12}=15$$

Άρα η λύση της εξίσωσης είναι: $x = 26$

Δημιουργός Εξισώσεων - Επίπεδο 2

Ανοίξτε την εφαρμογή για να εξασκηθείτε στην επίλυση των εξισώσεων, με εφαρμογή των ιδιοτήτων της διατήρησης της ισότητας και των πράξεων.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3 «*Ταυτότητα*»

Να λύσετε την εξίσωση $x + 2(x - 3) - (3x - 1) = -5$

Απάντηση

$x + 2(x - 3) - (3x - 1) = -5$ ή	[Κάνουμε τις σχετικές πράξεις που υπάρχουν]
$\underline{x}\ \underline{+2x} - 6\underline{-3x} + 1 = -5$ ή	[Αναγωγή ομοίων όρων]
$0 \cdot x - 5 = -5$ ή	[Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους προσθέτοντας κατάλληλη ποσότητα στα δύο μέλη]
$0 \cdot x - 5 + 5 = -5 + 5$ή	[Πράξεις]
$0 \cdot x = 0$	

Παρατηρούμε ότι η τελευταία ισότητα αληθεύει για οποιαδήποτε τιμή του x. Μια τέτοια εξίσωση στην οποία όλοι οι αριθμοί είναι λύσεις της εξίσωσης, ονομάζεται **ταυτότητα**.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4 «*Αδύνατη*»

Να λύσετε την εξίσωση $-2(x - 4) + 5x - (3x - 3) = -5$

Απάντηση

$-2(x - 4) + 5x - (3x - 3) = -5$ ή	[Κάνουμε τις σχετικές πράξεις που υπάρχουν]
$\underline{-2x} + 8\underline{+5x}\ \ \underline{-3x} + 3 = -5$ ή	[Αναγωγή ομοίων όρων]
$0x + 11 = -5$ ή	[Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους προσθέτοντας 7 και στα δύο μέλη]
$0x + 11 - 11 = -5 - 11$ ή	[Πράξεις]
$0 \cdot x = -16$	

Παρατηρούμε ότι η τελευταία ισότητα είναι αδύνατη αφού το πρώτο μέλος είναι μηδέν και το δεύτερο αρνητικός αριθμός. Μια τέτοια εξίσωση η οποία δεν επαληθεύεται από κανένα αριθμό, δεν έχει λύση και λέμε ότι είναι **αδύνατη**.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να λύσετε τις εξισώσεις.

α) $2x - 3 = 7$ **β)** $-3x - 4 = 8$

γ) $\frac{2}{3}x - 3 = 5$ **δ)** $-7 = -\frac{2}{3}x - 5$

2 Να λύσετε τις εξισώσεις.

α) $-(x-4)+3x-2(3x-3)=-2$

β) $-4=-x-4+3x-2(2x-1)$

γ) $-2^2+3x-2(2x-1)=(-1)^3+2(3-2^2)$

3 Να λύσετε τις εξισώσεις.

α) $-1,2(x-4)+1,3x-2(3,1x-3)=7,75$

β) $-(x+4,2)+3,5x-(x-1,25)=-4,45$

γ) $-2(2x-1)-4,5(x+1,5)+3,2x=-15,35$

4 Να λύσετε τις εξισώσεις.

α) $-1.5(x-4,1)+3x-2,2(3x-4)=-5,45$

β) $-1,5=-2(x+4,1)+3,4x-(x-3,2)$

γ) $-1,5(x-4,1)+3x-2,2(3x-4)=-10,55$

5 Να λύσετε τις εξισώσεις.

α) $-\frac{3x+4}{2}-\frac{2-3x}{6}=-\frac{8}{3}$

β) $\frac{1}{2}=\frac{x+1}{3}-\frac{2x-1}{6}$

γ) $-3x-\frac{2-3x}{3}+2x=5$

6 Να λύσετε τις εξισώσεις.

α) $-2x-\frac{3-x}{4}+5=1$

β) $\dfrac{2-\frac{x}{2}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$

γ) $\frac{2}{3}=\frac{1+3(x-1)}{5}$

7 Να λύσετε τις εξισώσεις.

α) $\frac{1}{6}=-\frac{2(2-3x)}{3}$

β) $\frac{2(x+1)}{3}-\frac{5}{6}(2x-1)=\frac{3}{2}$

γ) $\frac{11}{2}=\frac{x}{2}-2x-\frac{1}{2}(1-3x)-5$

6.4 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

- Να επιλύουν προβλήματα της καθημερινής ζωής με εξισώσεις της μορφής αx + β = γ αριθμητικά, μέσω κατάλληλων μοντέλων και αλγεβρικά με τις ιδιότητες της ισότητας.
- Να συνθέτουν προβλήματα που επιλύονται με εξισώσεις της μορφής αx + β = γ.

Διερεύνηση 1

Η Έλενα και ο Ηλίας επισκέπτονται τον παππού τους, στο χωριό, την περίοδο των διακοπών. Την τελευταία φορά που τον επισκέφτηκαν τον ρώτησαν πόσα κουνέλια και πόσα κοτόπουλα έχει. Ο παππούς τους, τους απάντησε με τον εξής γρίφο: «Τα κουνέλια μου και τα κοτόπουλα έχουν 53 κεφάλια και 142 πόδια». Βοηθήστε την Έλενα και τον Ηλία να λύσουν τον γρίφο.

Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες μάθησης

Για την **επίλυση ενός προβλήματος** κάνουμε **μοντελοποίηση**, η οποία περιλαμβάνει τα ακόλουθα βήματα:

- Διαβάζουμε με προσοχή το πρόβλημα και **κατανοούμε** ποια είναι τα **δεδομένα** και ποια τα **ζητούμενα**, δηλαδή τι είναι **γνωστό** και τι **άγνωστο**.
- Αποφασίζουμε για ποια **ζητούμενη ποσότητα** θα χρησιμοποιήσουμε μια μεταβλητή (έναν **άγνωστο**) για να την παραστήσουμε. Συνήθως χρησιμοποιούμε το γράμμα **x**.
- **Εκφράζουμε** όλες τις άλλες άγνωστες ποσότητες χρησιμοποιώντας το γράμμα **x**.
- Βρίσκουμε από τα δεδομένα της εκφώνησης **ποια είναι** εκείνα που μας οδηγούν στην **εξίσωση**.
- Δημιουργούμε από τα δεδομένα της εκφώνησης την εξίσωση (**μοντέλο**).
- Λύνουμε την εξίσωση που καταστρώσαμε εφαρμόζοντας κατάλληλα τις ιδιότητες.
- Εξετάζουμε αν η λύση ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος και την αρχική εξίσωση κάνοντας επαλήθευση.

Ο τρόπος εφαρμογής της πορείας επίλυσης ενός προβλήματος παρουσιάζεται στις εφαρμογές που ακολουθούν.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Η Μάρα έχει 25 χαρτονομίσματα των 5€ και 10€. Η συνολική τους αξία είναι 160€. Πόσα χαρτονομίσματα των 5 και πόσα των 10 ευρώ έχει;

Απάντηση

1ο. **Τι είναι άγνωστο**; Τα χαρτονομίσματα των 5 και 10 ευρώ.

2ο. **Τι είναι γνωστό**; Τα χαρτονομίσματα είναι 25 και το συνολικό ποσό των ευρώ είναι 160.

3ο. **Σχηματίζουμε την εξίσωση** (Μαθηματικό μοντέλο): Αν θεωρήσουμε ότι η Μάρα έχει x χαρτονομίσματα των 5€ τότε τα **25 − x** είναι χαρτονομίσματα των 10€. Αφού η Μάρα έχει 25 χαρτονομίσματα των 5€ και 10€ συνολικά έχει $5x + 10(25 - x)$ ευρώ που από την εκφώνηση του προβλήματος είναι 160€. Συνεπώς έχουμε την εξίσωση $5x + 10(25 - x) = 160$.

4ο. **Λύνουμε την εξίσωση**:

$$\begin{aligned} 5x + 10(25 - x) &= 160 \text{ ή} \\ 5x + 250 - 10x &= 160 \text{ ή} \\ -5x + 250 &= 160 \text{ ή} \\ -5x + 250 - 250 &= 160 - 250 \text{ ή} \\ -5x &= -90 \text{ ή} \\ \left(-\frac{1}{5}\right)(-5)\,x &= \left(-\frac{1}{5}\right)(-90) \text{ ή} \\ x &= 18 \end{aligned}$$

5ο. **Κάνουμε επαλήθευση**:

Για x = 18 η αρχική εξίσωση αληθεύει αφού:
$5 \cdot 18 + 10(25 - 18) = 5 \cdot 18 + 10 \cdot 7 = 90 + 70 = 160.$
Άρα, η Μάρα έχει 18 χαρτονομίσματα των 5€ και 25 – 18 = 7 χαρτονομίσματα των 10€.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Ένα κατάστημα κάνει έκπτωση 40% στην τιμή πώλησης των τηλεοράσεων. Αν πουλάει μια τηλεόραση 1560€ ποια είναι η αρχική τιμή πώλησης της τηλεόρασης;

Απάντηση

1ο. **Τι είναι άγνωστο**;

Η αρχική τιμή πώλησης της τηλεόρασης είναι άγνωστη. Έστω λοιπόν **x** η αρχική τιμή πώλησης της τηλεόρασης.

Η έκπτωση εκφράζεται ως το $\frac{40}{100}x$.

2ο. **Τι είναι γνωστό**; Η τιμή πώλησης είναι 1560€.

3ο. **Σχηματίζουμε την εξίσωση (Μαθηματικό μοντέλο)**:

Αν από την αρχική τιμή αφαιρέσουμε την έκπτωση θα προκύψει η τιμή πώλησης,

δηλαδή $x - \frac{40}{100}x = 1560$.

4ο. **Λύνουμε την εξίσωση:** $x - \frac{40}{100}x = 1560$ ή

$$100\left(x - \frac{40}{100}x\right) = 100 \cdot 1560 \text{ ή}$$
$$100x - 40x = 156000 \text{ ή}$$
$$60x = 156000 \text{ ή}$$
$$\frac{1}{60}60x = \frac{1}{60} \cdot 156000 \text{ ή}$$
$$x = 2600$$

5ο. **Κάνουμε επαλήθευση:**

Για $x = 2600$ η αρχική εξίσωση αληθεύει αφού:

$2600 - \frac{40}{100}2600 = 2600 - 1040 = 1560$.

Άρα η λύση της αρχικής εξίσωσης και λύση του προβλήματος είναι $x = 2600$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Να βρείτε τρεις διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς, ώστε το άθροισμά τους να είναι 16.

Απάντηση

1ο. **Τι είναι άγνωστο**;

Οι συγκεκριμένοι φυσικοί αριθμοί. Αν ονομάσουμε x τον πρώτο απο αυτούς, τότε αφού είναι διαδοχικοί φυσικοί, ο δεύτερος θα είναι $x + 1$ και ο τρίτος, $x + 2$.

2ο. **Τι είναι γνωστό**; Το άθροισμά τους είναι 16.

3ο. **Δημιουργούμε την εξίσωση:**

Η εξίσωση είναι $x + (x + 1) + (x + 2) = 16$.

4ο. **Λύνουμε την εξίσωση:** $x + (x + 1) + (x + 2) = 16$ ή

$$x + x + 1 + x + 2 = 16 \text{ ή}$$
$$3x + 3 = 16 \text{ ή}$$
$$3x + 3 - 3 = 16 - 3 \text{ ή}$$
$$3x = 13 \text{ ή}$$
$$\left(\frac{1}{3}\right)3x = \left(\frac{1}{3}\right)13 \text{ ή}$$
$$x = \frac{13}{3}$$

Κάνουμε επαλήθευση: Για $x = \frac{13}{3}$ η αρχική εξίσωση αληθεύει αφού:

$$\frac{13}{3} + \left(\frac{13}{3} + 1\right) + \left(\frac{13}{3} + 2\right) = \frac{13}{3} + \frac{13}{3} + 1 + \frac{13}{3} + 2 = \frac{\cancel{3} \cdot 13}{\cancel{3}} + 3 = 13 + 3 = 16$$

Ωστόσο η λύση **απορρίπτεται** επειδή το $\frac{13}{3}$ δεν είναι φυσικός αριθμός.

Άρα το πρόβλημα δεν έχει λύση.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Το άθροισμα δύο αριθμών είναι 15. Όταν ένας από αυτούς τους αριθμούς προστεθεί στο τριπλάσιο του άλλου, το αποτέλεσμα είναι 27. Ποιοι είναι οι αριθμοί;

2 Ποιου αριθμού τα $\frac{2}{3}$ και τα $\frac{3}{4}$ έχουν άθροισμα 170;

3 Μια θεατρική παράσταση την παρακολούθησαν συνολικά 150 γονείς και παιδιά. Οι εισπράξεις ήταν 840 €. Αν κάθε παιδί πλήρωσε 5€ και κάθε γονέας 8€, να βρείτε πόσοι ήταν οι γονείς και πόσα τα παιδιά.

4 Ποιος αριθμός πρέπει να προστεθεί στον παρονομαστή του κλάσματος $\frac{2}{5}$ για να πάρουμε το κλάσμα $\frac{1}{3}$;

5 Ποιος αριθμός πρέπει να αφαιρεθεί από τον παρονομαστή του κλάσματος $\frac{3}{4}$ για να ληφθεί το κλάσμα $\frac{1}{3}$;

6 Ο Ιμπραήμ έχει τώρα το ένα τέταρτο της ηλικίας του πατέρα του. Σε 5 χρόνια η ηλικία του μαζί με την ηλικία του πατέρα του θα είναι 50. Πόσο χρονών είναι τώρα ο Ιμπραήμ;

7 Το ψυγείο ενός supermarket διαθέτει γάλα σε κουτιά των 0,6 του λίτρου και 1 λίτρου. Αν υπάρχουν συνολικά 54 κουτιά και 40 λίτρα γάλα, πόσα κουτιά των 0,6 του λίτρου υπάρχουν;

8

Αγώνες δρόμου

Ανοίξτε την εφαρμογή για να διερευνήσετε προβλήματα διαστήματος-ταχύτητας-χρόνου.

9

Βρύσες εισροής-εκροής

Ανοίξτε την εφαρμογή για να διερευνήσετε προβλήματα βρύσης-δοχείου-χρόνου.

10 Τα εισιτήρια για έναν ποδοσφαιρικό αγώνα κοστίζουν 8€, 15€ ή 20€ το καθένα. Ο αριθμός των εισιτηρίων 15€ που πουλήθηκαν ήταν διπλάσιος από τον αριθμό των εισιτηρίων 8€. Επίσης πουλήθηκαν 6000 εισιτήρια των 20€ περισσότερα από τα εισιτήρια 15€. Εάν οι εισπράξεις από τις πωλήσεις ήταν συνολικά 783.000€, πόσα από κάθε τύπο εισιτηρίου πουλήθηκαν;

11 Ένας πάγκος ποτών πουλά μικρά, μεσαία και μεγάλα φλιτζάνια σοκολάτα έναντι 1,50€, 2€ και 2,50€ αντίστοιχα. Ένα πρωί πουλήθηκαν τρεις φορές περισσότερα μεσαία φλιτζάνια από τα μικρά φλιτζάνια και ο αριθμός των μεγάλων φλιτζανιών ήταν 140 φορές μικρότερος από τον αριθμό των μεσαίων φλιτζανιών. Αν το σύνολο των πωλήσεων ποτών ήταν 1360€, πόσα φλιτζάνια από κάθε μέγεθος πουλήθηκαν;

12 Για να βρείτε το μέτρο κάθε άγνωστης γωνίας να γράψετε μια εξίσωση που να αντιπροσωπεύει την κατάσταση και να τη λύσετε.

α) Να βρείτε το μέτρο μιας γωνίας της οποίας το συμπλήρωμά της είναι 15° μικρότερο από το διπλάσιο του μέτρου της γωνίας.

β) Να βρείτε το μέτρο μιας γωνίας της οποίας το συμπλήρωμά της είναι 40° μεγαλύτερο από το μέτρο της γωνίας.

13 Σε τρίγωνο ΑΒΓ οι γωνίες Β και Γ έχουν το ίδιο μέτρο. Το μέτρο της γωνίας Α είναι τέσσερις φορές το μέτρο μιας από τις άλλες γωνίες. Βρείτε το μέτρο κάθε γωνίας στο τρίγωνο.

14

Γεωμετρικό πρόβλημα - Περίμετρος τριγώνου

Ανοίξτε την εφαρμογή για να διερευνήσετε προβλήματα σχετικά με τις πλευρές και την περίμετρο τριγώνου.

15

Γεωμετρικό πρόβλημα - Γωνίες ισοσκελούς τριγώνου

Ανοίξτε την εφαρμογή για να διερευνήσετε προβλήματα σχετικά με τις γωνίες ισοσκελούς τριγώνου.

16 Γεωμετρικό πρόβλημα - Γωνίες Παραλληλογράμμου

Ανοίξτε την εφαρμογή για να διερευνήσετε προβλήματα σχετικά με τις γωνίες παραλληλογράμμου.

17 Γεωμετρικό πρόβλημα - Πλευρές Παραλληλογράμμου

Ανοίξτε την εφαρμογή για να διερευνήσετε προβλήματα σχετικά με τις πλευρές και την περίμετρο παραλληλογράμμου.

18 Να τροποποιήσετε κατάλληλα τα προβλήματα (α) και (β) της άσκησης 12 ώστε να αναφέρονται σε παραπληρωματικές γωνίες και να τα λύσετε.

19 Να συνθέσετε ένα πρόβλημα το οποίο θα αφορά την ηλικία και θα λύνετε με εξίσωση της μορφής:

$$\frac{2x-5}{3}+2=5$$

20 Στον παρακάτω πίνακα δίνονται δύο στήλες. Η μία περιέχει εξισώσεις και η άλλη περιέχει το περιεχόμενο του προβλήματος. Να συνθέσετε τέσσερα προβλήματα επιλέγοντας εξίσωση και περιεχόμενο, όχι απαραίτητα από την ίδια γραμμή και να τα λύσετε.

Εξίσωση	Περιεχόμενο
$2x + 5 = 25$	Χρήματα
$4x + 50 = 90$	Βόλους
$3x - 5 = 28$	Αριθμούς
$5x - 30 = 15$	Χρόνια

21 Έχετε στη διάθεσή σας ένα συγκεκριμένο ποσό για την αγορά μήλων και πορτοκαλιών. Συνθέστε ένα πρόβλημα το οποίο και να λύσετε.

Αυτοαξιολόγηση

Να τοποθετήσετε στις στήλες ΣΩΣΤΟ, ΛΑΘΟΣ ένα ✓ ανάλογα με το αν η πρόταση είναι σωστή ή λανθασμένη.

	Σωστό	Λάθος
1. Μία ισότητα δεν αλλάζει αν προσθέσουμε τον ίδιο αριθμό και στα δύο μέλη της.	☐	☐
2. Μία ισότητα αλλάζει αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε με τον ίδιο αριθμό και τα δύο μέλη της (διαφορετικός απο το μηδέν).	☐	☐
3. Δύο εξισώσεις λέμε ότι είναι ισοδύναμες όταν έχουν ακριβώς τις ίδιες λύσεις.	☐	☐
4. Σε μία εξίσωση της μορφής $\alpha \cdot x + \beta = \gamma$, για να διαγράψουμε το β από το πρώτο μέλος, αφαιρούμε και από τα δύο μέλη το β.	☐	☐
5. Σε μία εξίσωση της μορφής $\alpha \cdot x = \beta$, για να διαγράψουμε το α από το πρώτο μέλος, διαιρούμε και τα δύο μέλη με το β.	☐	☐
6. Σε μία εξίσωση της μορφής $\alpha : x = \beta$, για να διαγράψουμε το α από το πρώτο μέλος, πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με τον α.	☐	☐

Ανακεφαλαίωση

✓ Αλγεβρικές παραστάσεις που συνδέονται με το σύμβολο της ισότητας λέγονται **εξισώσεις**. Στην περίπτωση αυτή η μεταβλητή λέγεται **άγνωστος**.

✓ Η τιμή που όταν τη θέσουμε στη θέση του αγνώστου η ισότητα ικανοποιείται λέγεται **λύση** της εξίσωσης.

✓ Οι εξισώσεις που έχουν τις ίδιες λύσεις μέσα στο ίδιο σύνολο αριθμών λέγονται **ισοδύναμες εξισώσεις**.

✓ Ιδιότητες **διατήρησης της ισότητας** κατά τον μετασχηματισμό εξισώσεων της μορφής $\alpha \cdot x + \beta = \gamma$ σε άλλες μορφές εξισώσεων:

- Μια ισότητα **δεν αλλάζει** αν **προσθέσουμε** και στα δύο μέλη της **την ίδια ποσότητα**.
- Μια ισότητα **δεν αλλάζει** αν **αφαιρέσουμε** και από τα δύο μέλη της **την ίδια ποσότητα**.

- Μια ισότητα **δεν αλλάζει** αν **πολλαπλασιάσουμε** και τα δύο μέλη της με **την ίδια ποσότητα διάφορη του μηδενός**.
- Μια ισότητα **δεν αλλάζει** αν **διαιρέσουμε** και τα δύο μέλη της με **την ίδια ποσότητα διάφορη του μηδενός**.

✓ Η πιο απλή μορφή εξίσωσης, που συγχρόνως δίνει και τη λύση της εξίσωσης, είναι η: $x = α$

✓ **Για να** λύσουμε **μία εξίσωση που δεν περιέχει κλάσματα κάνουμε τα εξής**:
- Κάνουμε τις σχετικές πράξεις που υπάρχουν (επιμεριστική ιδιότητα).
- Αναγωγή όμοιων όρων.
- Απομονώνουμε τους αγνώστους από τους γνωστούς, προσθέτοντας κατάλληλη ποσότητα στα δύο μέλη.
- Κάνουμε τις νέες πράξεις που προκύπτουν.
- Βρίσκουμε τον άγνωστο πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη με τον αντίστροφο του συντελεστή του αγνώστου.
- Ολοκληρώνουμε τις πράξεις.

✓ **Για να** λύσουμε **μία εξίσωση που περιέχει κλάσματα,** αρχικά κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών, πολλαπλασιάζοντας με το ΕΚΠ τους και τα δύο μέλη. Στη συνέχεια λύνουμε την εξίσωση που δεν περιέχει κλάσματα.

✓ Σε μια εξίσωση της μορφής $\mathbf{0 \cdot x = 0}$, όλοι οι ρητοί αριθμοί είναι λύσεις της. Μια τέτοια εξίσωση τη λέμε **ταυτότητα**.

✓ Μια εξίσωση της μορφής $\mathbf{0x = α}$ με $\mathbf{α \neq 0}$, δεν έχει λύσεις. Μια τέτοια εξίσωση τη λέμε **αδύνατη**.

✓ Για την **επίλυση ενός προβλήματος** με εξίσωση θα πρέπει να έχουμε στο μυαλό μας τα εξής:
- Διαβάζουμε με προσοχή το πρόβλημα και κατανοούμε ποια είναι τα δεδομένα και ποια τα ζητούμενα, δηλαδή **τι είναι γνωστό** και **τι άγνωστο**.
- Αποφασίζουμε για ποια ζητούμενη ποσότητα θα χρησιμοποιήσουμε μια **μεταβλητή** (έναν άγνωστο) για να την παραστήσουμε. Συνήθως χρησιμοποιούμε το γράμμα x.
- Εκφράζουμε όλες τις άλλες άγνωστες ποσότητες χρησιμοποιώντας το γράμμα x.
- Βρίσκουμε από τα δεδομένα της εκφώνησης ποια είναι εκείνα που μας οδηγούν στην εξίσωση.
- Δημιουργούμε από τα δεδομένα της εκφώνησης την **εξίσωση** (μοντέλο).
- Λύνουμε την εξίσωση που καταστρώσαμε εφαρμόζοντας κατάλληλα τις ιδιότητες.
- Εξετάζουμε αν η λύση ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος και την αρχική εξίσωση κάνοντας **επαλήθευση**.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να βρείτε τον ακέραιο x ώστε να είναι αντίθετοι οι αριθμοί $x - 1$ και $3x - 7$.

2 Η μία πλευρά ενός παραλληλογράμμου είναι διπλάσια της άλλης. Η περίμετρός του είναι 42 εκατοστά. Πόσο είναι η κάθε πλευρά;

3 Ενός παραλληλογράμμου η μία γωνία είναι το μισό της διπλανής της. Πόσο είναι η κάθε γωνία του;

4 Ενός ισοσκελούς τριγώνου η γωνία της κορυφής είναι όσο είναι μαζί οι δυο γωνίες της βάσης. Πόσο είναι η κάθε μία;

5 Ένα πουλόβερ πωλείται για 20,35€. Εάν αυτή η τιμή περιέχει έκπτωση 45% στην αρχική τιμή, ποια είναι η αρχική τιμή του πουλόβερ;

6 Το κινητό του Μάριου κόστισε 155€. Ο φόρος προστιθέμενης αξίας (ΦΠΑ) είναι 24%. Ποια η καθαρή αξία του κινητού;

7 Μια δεξαμενή έχει δύο βρύσες. Η μία βρύση γεμίζει σε ένα λεπτό το $\frac{1}{10}$ της δεξαμενής. Η άλλη βρύση αδειάζει σε ένα λεπτό το $\frac{1}{12}$ της ίδιας δεξαμενής. Σε πόσα λεπτά της ώρας θα γεμίζει η δεξαμενή, αν η δεξαμενή είναι γεμάτη ως τη μέση και οι δύο βρύσες ανοίξουν συγχρόνως;

8 Τρεις φίλοι μοιράστηκαν ένα χρηματικό ποσό. Ο πρώτος πήρε το $\frac{1}{3}$ του ποσού, ο δεύτερος πήρε το $\frac{1}{4}$ του ποσού και ο τρίτος πήρε το $\frac{1}{5}$ του ποσού και έμειναν 130€ που δόθηκαν στο κοινωνικό παντοπωλείο. Να βρείτε το αρχικό χρηματικό ποσό που μοιράστηκαν και το μερίδιο του καθενός.

9 Να βρείτε τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη τιμή του x όταν συμπληρώσουμε τα κουτάκια της επόμενης εξίσωσης με τους αριθμούς 10, 15 και 20. (Συνολικά 6 περιπτώσεις)

$$\square(x+\square)=\square$$

10 Ένας αγρότης από το ένα του περιβόλι μάζεψε 50 τόνους περισσότερα πορτοκάλια από το δεύτερο περιβόλι του. Πούλησε τη συγκομιδή από το 1ο περιβόλι προς 110 € τον τόνο και από το δεύτερο περιβόλι 130 € τον τόνο. Εισέπραξε έτσι 20000€. Πόσους τόνους πούλησε;

11 Δύο έμποροι είχαν μαζί 200000 € και συνεταιρίστηκαν σε μία επιχείρηση. Ο ένας έβαλε τα $\frac{3}{5}$ των χρημάτων του ενώ ο άλλος τα $\frac{3}{4}$ των δικών του χρημάτων.

Όμως ο πρώτος έβαλε 12000 € περισσότερα. Πόσα χρήματα έβαλε ο καθένας;

12 Μια χρονιά σε έναν εργαζόμενο περίσσεψαν 3600€. Την άλλη χρονιά ο μισθός του αυξήθηκε 5% και τα έξοδά του περιορίστηκαν 10% και έτσι κατάφερε να αποταμιεύσει 6000€. Τι μισθό είχε κάθε χρονιά;

13 Ποδηλάτης και πεζοπόρος αναχωρούν συγχρόνως από τις πόλεις Α και Β που απέχουν μεταξύ τους 20 χιλιόμετρα προς συνάντηση. Ο ποδηλάτης κινείται με 16 χιλιόμετρα την ώρα και ο πεζός με 5 χιλιόμετρα την ώρα. Μετά από πόση ώρα θα συναντηθούν και σε πόση απόσταση από την πόλη Α;

14 Ένας ιδιοκτήτης εισπράττει ενοίκια 2000€ από τρεις κατοικίες. Το ενοίκιο της Α κατοικίας είναι διπλάσιο του ενοικίου της δεύτερης, ενώ το ενοίκιο της τρίτης είναι 200€ περισσότερο από το μισό των άλλων δύο. Πόσο εισπράττει από κάθε κατοικία;

15 Η κυρία Μαρία από τα χόρτα που μάζεψε μια μέρα, πούλησε τα μισά κιλά και μισό κιλό ακόμη. Στη συνέχεια από τα κιλά χόρτα που της έμειναν πούλησε τα μισά και μισό κιλό ακόμη. Της έμειναν 3 κιλά χόρτα. Πόσα κιλά χόρτα είχε μαζέψει αρχικά;

Εργασία

Ο Διόφαντος ο Αλεξανδρεύς ήταν Έλληνας μαθηματικός του τρίτου αιώνα π.Χ, ο οποίος έζησε στην Αλεξάνδρεια. Στον τάφο του, αντί άλλου, είχε γραφτεί μια επιγραφή-αλγεβρικό πρόβλημα. Η επιγραφή αυτή έλεγε:

«Διαβάτη, σε αυτόν τον τάφο αναπαύεται ο Διόφαντος. Σε εσένα που είσαι σοφός, η επιστήμη θα δώσει το μέτρο της ζωής του. Άκουσε.

- *Οι θεοί του επέτρεψαν να είναι νέος για το ένα έκτο της ζωής του.*
- *Ακόμα ένα δωδέκατο και φύτρωσε το μαύρο γένι του.*
- *Μετά από ένα έβδομο ακόμα, ήρθε του γάμου του η μέρα.*
- *Τον πέμπτο χρόνο αυτού του γάμου, γεννήθηκε ένα παιδί.*
- *Τι κρίμα, για τον νεαρό του γιο. Αφού έζησε μονάχα τα μισά χρόνια από τον πάτερα του, γνώρισε την παγωνιά του θανάτου.*
- *Τέσσερα χρόνια αργότερα, ο Διόφαντος βρήκε παρηγοριά στη θλίψη του, φτάνοντας στο τέλος ζωής του.»*

α) Να επεκτείνετε αυτά που μάθατε και να βρείτε πόσα χρόνια έζησε ο Διόφαντος.

β) Αν ο Διόφαντος γεννήθηκε το 210 π.Χ. Να βρείτε πότε συνέβη το καθένα από αυτά που αναφέρονται στο πρόβλημα.

Για μια επανάληψη στις έννοιες των αλγεβρικών σχέσεων, ανοίξτε την ψηφιακή εφαρμογή.

Γλωσσάρι Αλγεβρικών Σχέσεων

1 Κεφάλαιο Γεωμετρία του επιπέδου

Εισαγωγή

Η Γεωμετρία είναι ο κλάδος των Μαθηματικών που μεταξύ των άλλων μελετά τα γεωμετρικά σχήματα.

Είναι ένα σημαντικό ανθρώπινο δημιούργημα με πολύ μεγάλη ιστορία.

Επιστήμονες, φιλόσοφοι, πνευματικοί άνθρωποι, καλλιτέχνες και τεχνίτες, χρησιμοποιούν τη Γεωμετρία για να στοχαστούν, να εκφράσουν τις σκέψεις τους και να δημιουργήσουν καλαίσθητα και χρήσιμα αντικείμενα.

Αν ισχύει αυτό που λένε, ότι οι σπουδαίες ανθρώπινες δημιουργίες έχουν και σπουδαία ιστορία, η Γεωμετρία το επιβεβαιώνει. Η ιστορία της είναι ένα πολύ καλό παράδειγμα, του πώς οι άνθρωποι δημιουργούν σημαντικά επιτεύγματα για τη ζωή, τον πολιτισμό και την επιστήμη. Ο Θαλής, ο Πλάτωνας, ο Πυθαγόρας, ο Ευκλείδης και πολλοί άλλοι σπουδαίοι στοχαστές, υπήρξαν ακούραστοι εργάτες της Γεωμετρίας.

Ο Ευκλείδης σε λεπτομέρεια του έργου η «Σχολή των Αθηνών» του Ραφαήλ

Η εξέλιξη της γεωμετρικής γνώσης είναι διαρκής. Σε ένα είδος σκυταλοδρομίας, κάθε γενιά αναλαμβάνει να κρατήσει τη σκυτάλη αυτής της εξέλιξης και να την προχωρήσει παραπέρα.

Για τα παιδιά, η μελέτη της Γεωμετρίας είναι ένα σημαντικό λιθαράκι στην εξέλιξη της σκέψης τους, στην ανάπτυξη των ικανοτήτων τους και στην κατανόηση του κόσμου που ζουν.

1.1 ΣΗΜΕΙΟ, ΕΥΘΕΙΑ, ΗΜΙΕΥΘΕΙΑ, ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟ ΤΜΗΜΑ

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

- Να αναγνωρίζουν και να περιγράφουν βασικές γεωμετρικές έννοιες (σημείο, ευθεία, ημιευθεία, ευθύγραμμο τμήμα) σε απλά και σύνθετα γεωμετρικά σχήματα.
- Να ορίζουν το μέσο ευθυγράμμου τμήματος.
- Να ορίζουν την απόσταση δύο σημείων.

Σύνδεση με τις γνώσεις μας

Στις προηγούμενες τάξεις γνωρίσαμε τα επίπεδα γεωμετρικά σχήματα. Μάθαμε για το τετράγωνο, το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, το πλάγιο παραλληλόγραμμο, τον ρόμβο, το τρίγωνο και άλλα. Εδώ θα τα ξαναθυμηθούμε και θα τα αξιοποιήσουμε για να μάθουμε περισσότερα.

Δραστηριότητα 1

Παρατηρήστε προσεκτικά την Αρκαδική Πύλη που απεικονίζεται στην εικόνα.
- Σχεδιάστε στο χαρτί σας, με τα γεωμετρικά σας όργανα, τα γεωμετρικά σχήματα που αναγνωρίσατε, στις αντίστοιχες θέσεις, ώστε να σχηματίσετε την πρόσοψη της εισόδου.
- Συζητήστε με τους συμμαθητές σας για τα διάφορα μέρη των σχημάτων που αναγνωρίσατε.

Η Αρκαδική Πύλη ήταν μία από τις δύο εισόδους της αρχαίας Μεσσήνης και είναι ένα εντυπωσιακό μνημείο που διατηρείται σε καλή κατάσταση.

Γεωμετρικά σχήματα στα ερείπια της Αρκαδικής πύλης

1.1.1 Γεωμετρικά σχήματα

Γεωμετρικό σχήμα ή απλά **σχήμα** είναι η ιδέα για κάποιο αντικείμενο χωρίς τα υλικά του χαρακτηριστικά, η οποία περιλαμβάνει όλες τις σχέσεις μεταξύ των στοιχείων του. Τα γεωμετρικά σχήματα θεωρούμε ότι αποτελούνται από ένα σύνολο σημείων και τα σχεδιάζουμε στο επίπεδο ή στον χώρο προκειμένου να μελετήσουμε σχέσεις και ιδιότητές τους.

Πρωταρχικές έννοιες οι οποίες προκύπτουν άμεσα από την εμπειρία μας και δεν αναλύονται σε απλούστερες είναι το **σημείο**, η **ευθεία** και το **επίπεδο**. Η μελέτη των σχημάτων των αντικειμένων είναι στην ουσία η μελέτη αντίστοιχων γεωμετρικών σχημάτων με την **αποδόμηση** στα συστατικά τους μέρη.

Διερεύνηση 1

Να ανοίξετε την εφαρμογή και να κάνετε την αποδόμηση των σχημάτων που προτείνονται.
- Να μελετήσετε και να περιγράψετε τη δομή των συγκεκριμένων σχημάτων.
- Να συζητήσετε στην τάξη σας για τα μέρη από τα οποία αποτελούνται τα σχήματα αυτά.

Αποδόμηση των γεωμετρικών σχημάτων

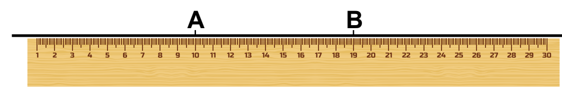
Τα γεωμετρικά σχήματα υπάρχουν στη νόησή μας και γίνονται αντιληπτά ως ιδέες. Μπορούμε να τα σχεδιάζουμε με τα γεωμετρικά μας όργανα και να τα μελετάμε με τη βοήθεια της αποδόμησης και των λογικών συλλογισμών μας. Τα γεωμετρικά σχήματα δεν έχουν ατέλειες και αποτελούνται από **επιφάνειες**, **γραμμές** και **σημεία**.

1.1.2 Βασικά γεωμετρικά σχήματα

Προκειμένου να αναφερθούμε στα βασικά γεωμετρικά σχήματα κάνουμε τις ακόλουθες παραδοχές:

◆ Από δύο σημεία διέρχεται μοναδική ευθεία.
◆ Για κάθε ευθεία υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο του επιπέδου που δεν ανήκει σε αυτή.
◆ Κάθε ευθεία έχει άπειρα σημεία και εκτείνεται απεριόριστα και προς τις δύο κατευθύνσεις, χωρίς διακοπές και κενά.

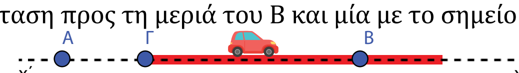
- Το **σημείο** είναι το απλούστερο γεωμετρικό σχήμα.
  - ✓ Αισθητοποιείται με μια τελεία.
  - ✓ Δεν έχει ούτε σχήμα, ούτε μέγεθος.
  - ✓ Το κατανοούμε μόνο από τη θέση που καταλαμβάνει.
  - ✓ Σχεδιάζεται με την άκρη του μολυβιού μας και συμβολίζεται συνήθως με κεφαλαία γράμματα, όπως Α, Β, Γ, ...



Βαθμολογημένος χάρακας

- Η **ευθεία** αισθητοποιείται από ένα τεντωμένο νήμα ή την πλευρά ενός χάρακα, αν προεκταθούν νοερά, όσο θέλουμε, και προς τις δύο κατευθύνσεις.
  - ✓ Ορίζεται από δύο σημεία και σχεδιάζεται με τη βοήθεια της ίσιας πλευράς ενός χάρακα.
  - ✓ Από δύο σημεία διέρχεται μόνο μία ευθεία.
  - ✓ Από ένα σημείο διέρχονται άπειρες ευθείες.
  - ✓ Ονομάζεται, είτε με τα δύο σημεία που την ορίζουν, π.χ. η ευθεία ΑΒ, είτε με ένα μικρό γράμμα, π.χ. η ευθεία (ε) είτε με δύο μικρά γράμματα x΄και x.
  - ✓ Αποτελείται από άπειρα σημεία και εκτείνεται απεριόριστα προς τις δύο κατευθύνσεις χωρίς διακοπές και κενά.
  - ✓ Κάθε ευθεία ορίζει μια διεύθυνση, όπως για παράδειγμα, στον χάρτη μπορεί να ορίζει τη διεύθυνση Ανατολής – Δύσης.

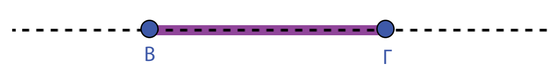
- **Ημιευθεία** είναι κάθε ένα από τα δύο μέρη στα οποία «χωρίζεται» μια ευθεία από ένα σημείο της. Στο σχήμα το σημείο Γ ορίζει δύο ημιευθείες. Μία με το σημείο Β κατά την προέκταση προς τη μεριά του Β και μία με το σημείο Α κατά την προέκταση προς τη μεριά του Α.



Ένα αυτοκίνητο δείχνει την κίνηση στην ημιευθεία

  - ✓ Η ημιευθεία έχει αρχή και δεν έχει τέλος.
  - ✓ Είναι μέρος της αντίστοιχης ευθείας και αποτελείται από άπειρα σημεία.
  - ✓ Ένα οποιοδήποτε σημείο μιας ευθείας μπορεί να θεωρηθεί ως αρχή για να ορίσουμε δύο ημιευθείες. Τις ημιευθείες αυτές τις ονομάζουμε ***αντικείμενες ημιευθείες***.
  - ✓ Σχεδιάζεται με τη βοήθεια του χάρακα, όπως η ευθεία.
  - ✓ Ονομάζεται από το σημείο της αρχής της και ένα κεφαλαίο ή μικρό γράμμα π.χ. ΓΒ, Γx, Γx΄.

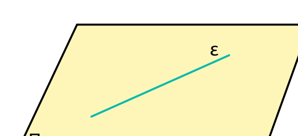
- **Ευθύγραμμο τμήμα** είναι το μέρος της ευθείας που ορίζεται από δύο σημεία της. Για παράδειγμα το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ ή ΓΒ στο σχήμα.



Ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ

  - ✓ Τα σημεία Β και Γ είναι τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος.
  - ✓ Το ευθύγραμμο τμήμα ονομάζεται με τα σημεία των άκρων του.
  - ✓ Σχεδιάζεται με τη βοήθεια ενός χάρακα.
  - ✓ Ως μέρος της ευθείας αποτελείται κι αυτό από άπειρα σημεία.

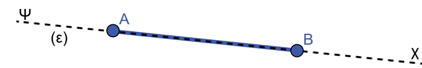
- **Επίπεδο**, είναι η επιφάνεια στην οποία η ευθεία γραμμή εφαρμόζει παντού.
  - ✓ Το επίπεδο εκτείνεται απεριόριστα.
  - ✓ Αποτελείται από άπειρα σημεία.
  - ✓ Από ένα ή δύο σημεία διέρχονται άπειρα επίπεδα.
  - ✓ Από τρία μη συνευθειακά σημεία διέρχεται μόνο ένα επίπεδο.
  - ✓ Κάθε ευθεία στο επίπεδο ορίζει δύο **ημιεπίπεδα**.
  - ✓ Το αισθητοποιούμε και το σχεδιάζουμε ως ένα πλάγιο παραλληλόγραμμο.
  - ✓ Το ονομάζουμε με ένα κεφαλαίο γράμμα μέσα σε παρενθέσεις, π.χ. (Π).



Ένα πλάγιο παραλληλόγραμμο αναπαριστά το επίπεδο (Π)

1.1.3 Τα σημεία της ευθείας

Αν σε μια ευθεία (ε) σχεδιάσουμε δύο σημεία Α και Β, τότε ορίζονται τα εξής μέρη:



• Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.
• Οι ημιευθείες Αχ, Αψ και οι ημιευθείες Βχ, Βψ.

Οι ημιευθείες Αψ και Βχ ονομάζονται και προεκτάσεις του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.

Η Αψ είναι **προέκταση του ΑΒ προς το μέρος του Α** και η Βχ είναι **προέκταση του ΑΒ προς το μέρος του Β.**

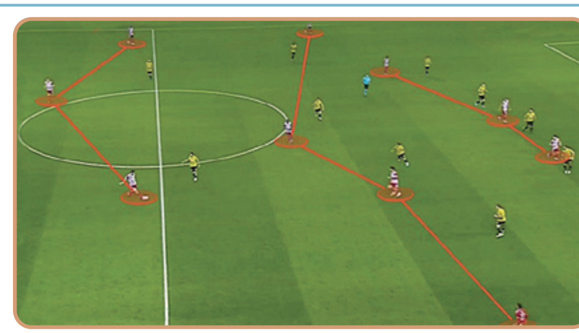
Μπορούμε να σχεδιάσουμε όσα σημεία θέλουμε, είτε **ανάμεσα στα Α και Β** είτε στις προεκτάσεις Αψ και Βχ. Τρία ή περισσότερα σημεία μιας ευθείας, όπως τα Α, Β, Γ ονομάζονται **συνευθειακά ή συγγραμμικά σημεία.**

1.1.4 Διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα - Τεθλασμένες ή πολυγωνικές γραμμές

Δραστηριότητα 1

Όσοι αγαπούν τον αθλητισμό και ιδιαίτερα το ποδόσφαιρο, μπορούν να διακρίνουν τι δηλώνουν οι κόκκινες γραμμές, της διπλανής εικόνας.

• Να αποδομήσετε καθένα από τα σχήματα και να περιγράψετε τα μέρη από τα οποία αποτελείται.
• Να σχεδιάσετε στο τετράδιό σας τα τρία σχήματα της εικόνας.
• Να ονομάσετε τα άκρα των ευθυγράμμων τμημάτων. Πόσα γράμματα χρησιμοποιήσατε για κάθε σχήμα;



Τα διαδοχικά ευθύγραμμα σχήματα δηλώνουν ένα είδος «σύνδεσης» που έχουν οι θέσεις των αθλητών κατά τη διεξαγωγή του αθλήματος

Δύο ευθύγραμμα τμήματα είναι **διαδοχικά**, όταν έχουν κοινό σημείο μόνο το ένα άκρο τους.

Τα σχήματα που δημιουργούνται από διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα, τα οποία ανήκουν σε διαφορετικές ευθείες, ονομάζονται **τεθλασμένες ή πολυγωνικές γραμμές**.

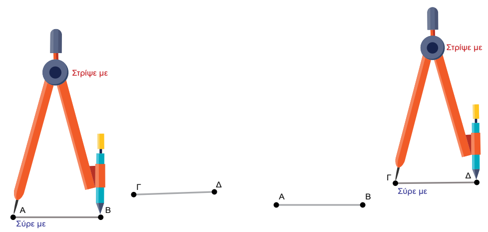
Οι τεθλασμένες ή πολυγωνικές γραμμές διακρίνονται σε **ανοικτές** και **κλειστές**.

1.1.5 Σύγκριση ευθυγράμμων τμημάτων

Τα ευθύγραμμα τμήματα έχουν διάφορα μεγέθη και για να τα συγκρίνουμε:
• Μετακινούμε-μεταφέρουμε το ένα πάνω στο άλλο και εξετάζουμε αν ταυτίζονται.
• Τα μετράμε.

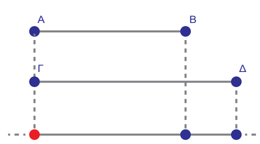
Δραστηριότητα 2

Στο χαρτί σας να σχεδιάσετε δύο ευθύγραμμα τμήματα, ΑΒ και ΓΔ. Να τα συγκρίνετε με τους εξής τρόπους:

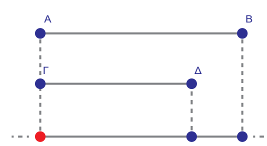


- Με διαφανές χαρτί. Να αποτυπώσετε στο διαφανές χαρτί το ΑΒ και να το τοποθετήσετε πάνω στο ΓΔ, ώστε να ταυτίζονται τα Α και Γ. Να εξετάσετε αν ταυτίζονται τα σημεία Β και Δ.
- Με τον διαβήτη σας. Να ανοίξετε τον διαβήτη σας όσο το ΑΒ και μετά να τοποθετήσετε την ακίδα στο Γ. Να εξετάσετε αν ταυτίζεται η άλλη άκρη του διαβήτη με το σημείο Δ.
- Με μέτρηση. Να μετρήσετε τα τμήματα με τον βαθμολογημένο σας χάρακα ή με άλλο μέσο και να εξετάσετε τα μήκη τους.
- Να συζητήσετε με τους συμμαθητές σας το αποτέλεσμα, καθώς και τη διαδικασία της σύγκρισης.
- Ποια είναι τα μειονεκτήματα και τα πλεονεκτήματα κάθε τρόπου;

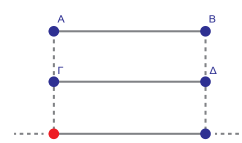
Για να συγκρίνουμε δύο ευθύγραμμα τμήματα, όπως για παράδειγμα τα ΑΒ και ΓΔ, μεταφέρουμε το ένα πάνω στο άλλο ή μεταφέρουμε και τα δύο σε μια ευθεία, ώστε να ταυτίζονται τα δύο άκρα τους, για παράδειγμα τα Α, Γ και εξετάζουμε αν ταυτίζονται και τα άλλα δύο άκρα τους Β, Δ.



ΑΒ < ΓΔ
(Σχήμα 1)



ΑΒ > ΓΔ
(Σχήμα 2)



ΑΒ = ΓΔ
(Σχήμα 3)

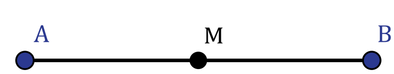
- Αν το άκρο Β είναι ανάμεσα στο κοινό σημείο και στο άκρο του Δ, τότε το ΑΒ είναι μικρότερο του ΓΔ και γράφουμε συμβολικά **ΑΒ < ΓΔ** (Σχήμα 1).
- Αν το άκρο Δ είναι ανάμεσα στο κοινό σημείο και στο άκρο του Β, τότε το ΑΒ είναι μεγαλύτερο του ΓΔ και γράφουμε συμβολικά **ΑΒ > ΓΔ** (Σχήμα 2).
- Αν τα άκρα τους Β και Δ ταυτίζονται, τότε το ΑΒ είναι ίσο με το ΓΔ και γράφουμε συμβολικά **ΑΒ = ΓΔ** (Σχήμα 3).

1.1.6 Το μέσο ευθυγράμμου τμήματος

Σε κάθε ευθύγραμμο τμήμα υπάρχει ένα μόνο σημείο του, που το χωρίζει σε δύο ίσα ευθύγραμμα τμήματα. Το σημείο αυτό ονομάζεται **μέσο του ευθυγράμμου τμήματος**.

Μέσο ενός ευθυγράμμου τμήματος ονομάζεται το σημείο του, που το χωρίζει σε δύο ίσα ευθύγραμμα τμήματα.

Για *παράδειγμα*, στο σχήμα το σημείο Μ για το οποίο ισχύει: ΜΑ=ΜΒ



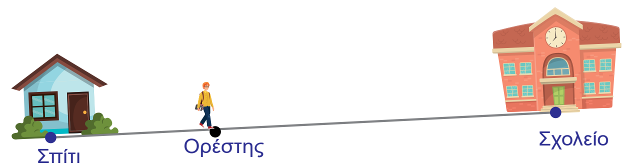
1.1.7 Κατασκευή του μέσου ευθυγράμμου τμήματος

Η κατασκευή του μέσου ενός ευθυγράμμου τμήματος μπορεί να γίνει με τους ακόλουθους τρόπους.

- **Με δίπλωση:** Φροντίζουμε τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος να ταυτιστούν, καθώς και τα δύο μέρη του ευθυγράμμου τμήματος. Το σημείο της δίπλωσης χωρίζει το ευθύγραμμο τμήμα σε δύο ίσα τμήματα και είναι το μέσο του.
- **Με βαθμολογημένο χάρακα:** Βρίσκουμε το σημείο που χωρίζει το ευθύγραμμο τμήμα σε δύο μέρη που έχουν ίσο μήκος.
- **Με διαβήτη:** Κατασκευάζουμε τη μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος. Ο τρόπος αυτός παρουσιάζεται στις επόμενες σελίδες.

1.1.8 Απόσταση δύο σημείων

Ο Ορέστης διανύει καθημερινά την ευθεία διαδρομή από το σπίτι του στο σχολείο και κάθε φορά διαμαρτύρεται ότι η απόσταση είναι αρκετά μεγάλη.



Η απόσταση, στην οποία αναφέρεται ο Ορέστης είναι το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος που ορίζεται στο σχήμα από τα σημεία που αναπαριστάνουν το Σπίτι και το Σχολείο.

Για να μετρήσουμε αποστάσεις όπως αυτή, χρειάζεται να τις συγκρίνουμε με μία άλλη την οποία θεωρούμε ως μέτρο σύγκρισης.

Η σύγκριση του ευθυγράμμου τμήματος με ένα άλλο, που το λαμβάνουμε ως μονάδα, ορίζει το **μήκος** του ευθυγράμμου τμήματος το οποίο μας πληροφορεί πόσες φορές χωράει το μοναδιαίο ευθύγραμμο τμήμα στο ευθύγραμμο τμήμα που μετράμε.

Απόσταση δύο σημείων ονομάζουμε το **μήκος** του ευθυγράμμου τμήματος, που έχει άκρα τα δύο σημεία.

Σχόλιο:

Όταν μετράμε με κάποιο όργανο, οι μετρήσεις δεν είναι απολύτως ακριβείς και υπάρχει ο κίνδυνος του σφάλματος. Γι’ αυτό στη Γεωμετρία προτιμούμε τη σύγκριση με αιτιολόγηση, που βασίζεται στους λογικούς συλλογισμούς, στις ιδιότητες και στις σχέσεις των γεωμετρικών σχημάτων.

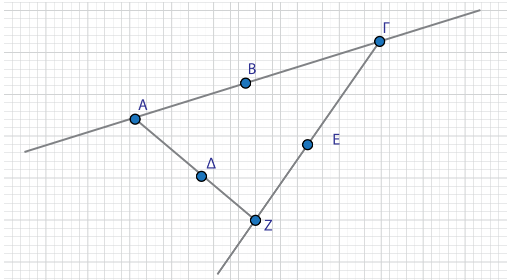
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

i) Να σχεδιάσετε στο επίπεδο χαρτί σας το σχήμα που προκύπτει από την εξής περιγραφή:
- Τα Α, Β, Γ ανήκουν στην ίδια ευθεία.
- Το Ε δεν ανήκει στην ευθεία ΑΒ.
- Το Ζ ανήκει στην ημιευθεία ΓΕ.
- Το Δ ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΖ.

ii) Να βρείτε και να περιγράψετε μια ευθεία, μια ημιευθεία και ένα ευθύγραμμο τμήμα.
iii) Να βρείτε και να περιγράψετε ποια ευθύγραμμα τμήματα ανήκουν σε διαφορετικές ευθείες.
iv) Ποια άλλα συνευθειακά σημεία εκτός από τα Α, Β, Γ σχεδιάσατε;

Απάντηση

i) Το σχήμα που προκύπτει είναι το διπλανό:



ii) Προκύπτει η ευθεία ΑΒ, η ημιευθεία ΓΖ και το ευθύγραμμο τμήμα ΑΖ.
iii) Τα ευθύγραμμα τμήματα που προέκυψαν και ανήκουν σε διαφορετικές ευθείες είναι τα εξής:
- Το ΑΒ, το ΒΓ και το ΑΓ
- Το ΓΕ, το ΕΖ και το ΓΖ
- Το ΑΔ, το ΔΖ και το ΑΖ

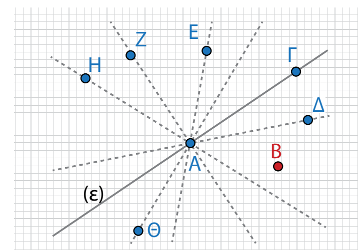
iv) Τα συνευθειακά σημεία που σχεδιάσαμε είναι τα Γ, Ε, Ζ και τα Α, Δ, Ζ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Πόσες ευθείες διέρχονται από ένα σημείο Α του επιπέδου;

Απάντηση

Για να σχεδιάσουμε μια ευθεία χρειαζόμαστε δύο σημεία. Επιλέγουμε ένα οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου διαφορετικό από το Α και στη συνέχεια σχεδιάζουμε την ευθεία ΑΒ που διέρχεται από το Α.



Για να σχεδιάσουμε μια ακόμα ευθεία που να διέρχεται από το Α, η οποία να είναι διαφορετική από την ΑΒ, επιλέγουμε ένα σημείο Γ του επιπέδου που δεν ανήκει στην ευθεία ΑΒ και στη συνέχεια σχεδιάζουμε την ευθεία ΑΓ.

Μπορούμε να σχεδιάσουμε με τον ίδιο τρόπο και άλλες ευθείες που να διέρχονται από το Α επιλέγοντας σημεία που δεν ανήκουν σε ευθείες που έχουμε ήδη σχεδιάσει.

Εφόσον μπορούμε να σχεδιάζουμε άπειρα σημεία, ανά τρία μη συνευθειακά, υπάρχουν άπειρες ευθείες που διέρχονται από το Α.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3 *«Εκτίμηση του μέσου ευθύγραμμου τμήματος»*

Να ανοίξετε την ψηφιακή εφαρμογή «Εκτίμηση Μέσου» και να εκτιμήσετε τη θέση του σημείου Γ, ώστε αυτό να γίνει μέσο του ΑΒ.

Εκτίμηση Μέσου

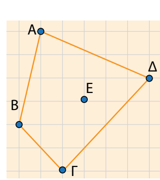
ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να σχεδιάσετε δύο σημεία Α και Β στο επίπεδο χαρτί σας, την ευθεία ΑΒ και ένα σημείο Γ σε αυτή.

i) Πόσες ημιευθείες ορίζονται με άκρα τα σημεία Α, Β, Γ;

ii) Να ονομάσετε τις ημιευθείες και να γράψετε όλα τα ζεύγη των αντικείμενων ημιευθειών.

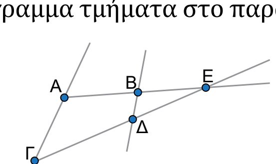
2 Σε τετραγωνισμένο επίπεδο χαρτί να σχεδιάσετε το παρακάτω σχήμα.



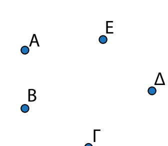
i) Να σχεδιάσετε και να ονομάσετε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα του σχήματος με ένα άκρο το Ε.

ii) Να σχεδιάσετε και να ονομάσετε τις ημιευθείες με αρχή το σημείο Ε, που ορίζουν τα άλλα σημεία.

3 Να ονομάσετε δύο ευθείες, τρεις ημιευθείες και τέσσερα ευθύγραμμα τμήματα στο παρακάτω σχήμα.



4 Να αντιγράψετε το παρακάτω σχήμα στο χαρτί σας.



Στη συνέχεια, να σχεδιάσετε:

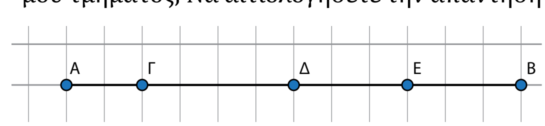
i) Ένα σημείο στην προέκταση του ΑΒ προς το Β.

ii) Ένα σημείο στο ευθύγραμμο τμήμα ΒΔ.

iii) Την αντικείμενη της ημιευθείας ΓΑ.

iv) Το πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ.

5 Ποια από τα παρακάτω σημεία είναι μέσα ευθυγράμμου τμήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



6 Να ανοίξετε την εφαρμογή «Σημεία και τμήματα» και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

Σημεία και τμήματα

7 Σε τετράγωνο πλέγμα να αντιγράψετε το παρακάτω σχήμα και στη συνέχεια να σχεδιάσετε δύο σημεία Γ και Δ στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, έτσι ώστε ΑΒ = 4 ΓΔ και ΓΔ = ΔΒ.

8 Σε ευθεία (ε) να σχεδιάσετε τα διαδοχικά σημεία Α, Γ και Β. Αν Μ είναι το μέσο του ΑΓ, Ν το μέσο του ΓΒ και Δ το μέσον του ΑΒ. Να συγκρίνετε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ και ΜΝ.
Να αξιοποιήσετε την εφαρμογή «Δυναμικά σχήματα» για να επαληθεύσετε το συμπέρασμά σας.

Δυναμικά σχήματα

9 Να σχεδιάσετε στο επίπεδο χαρτί σας ένα τρίγωνο ΑΒΓ. Στη συνέχεια να σχεδιάσετε ένα σημείο Δ στην προέκταση του τμήματος ΒΓ προς το μέρος του Γ, έτσι ώστε ΒΓ = ΓΔ. Να σχεδιάσετε επίσης ένα σημείο Ε, στην προέκταση της ΑΓ προς το μέρος του σημείου Γ, έτσι ώστε ΑΓ = ΓΕ.

i) Να συγκρίνετε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ.

ii) Να περιγράψετε στην τάξη το συμπέρασμά σας καθώς και τη διαδικασία που ακολουθήσατε.
Να ανοίξετε την εφαρμογή «Η ταύτιση» και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

Η ταύτιση

10 Ως συνεργάτες μιας νέας αεροπορικής εταιρείας αναλαμβάνετε να οργανώσετε τις αεροπορικές συνδέσεις στη χώρα σας.

Να επιλέξετε την εφαρμογή «Αεροπορικές συνδέσεις» και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

Αεροπορικές συνδέσεις

1.2 ΓΩΝΙΕΣ, ΕΙΔΗ ΓΩΝΙΩΝ, ΣΧΕΣΕΙΣ ΓΩΝΙΩΝ

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

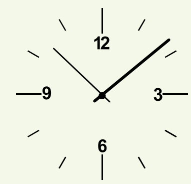
- Να προσδιορίζουν είδη γωνιών διατυπώνοντας τους σχετικούς ορισμούς.
- Να διερευνούν και να προσδιορίζουν σχέσεις μεταξύ γωνιών (κατακορυφήν, συμπληρωματικές και παραπληρωματικές).

1.2.1 Η έννοια της γωνίας

Η γωνία είναι ένα ακόμα βασικό σχήμα που μάθαμε στο Δημοτικό και τη συναντάμε σχεδόν σε κάθε γεωμετρικό σχήμα. Στην ενότητα αυτή θα θυμηθούμε όσα έχουμε μάθει για τις γωνίες και θα εμπλουτίσουμε τις γνώσεις μας γι' αυτές.

Διερεύνηση 1

Σ' ένα ρολόι τοίχου, όπως το διπλανό, ο ωροδείκτης και ο λεπτοδείκτης περιστρέφονται γύρω από το κέντρο του.



Να σχεδιάσετε ένα αντίστοιχο ρολόι στο επίπεδο χαρτί σας και ημιευθείες για τους δείκτες, ώστε να δείχνουν ακριβώς την ώρα 3.

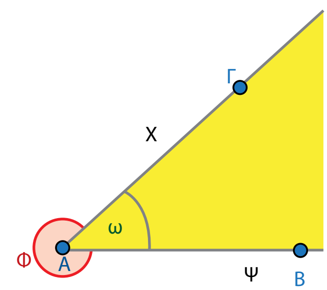
- Να επανασχεδιάσετε την ημιευθεία του λεπτοδείκτη, ώστε να δείχνει την ώρα 3:15'.
- Πόσο έστριψε ο λεπτοδείκτης από τις 3 έως τις 3:15;
- Τι γωνία ορίζουν οι ημιευθείες των δύο δεικτών, όταν το ρολόι δείχνει ακριβώς 3:15 και 3:45;
- Να ανοίξετε την εφαρμογή «Ρολόι» και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.
- Να συζητήσετε με τους συμμαθητές/τριές σας τα συμπεράσματά σας από τα πειράματα που κάνατε.

Ρολόι

Δύο ημιευθείες με κοινή αρχή χωρίζουν το επίπεδο σε δύο περιοχές. Κάθε μια περιοχή ονομάζεται **γωνία**.

- Η κοινή αρχή Α, των δύο ημιευθειών στο σχήμα ονομάζεται **κορυφή** της γωνίας.
- Οι ημιευθείες Αχ και Αψ ονομάζονται **πλευρές** της γωνίας.
- Κάθε γωνία ονομάζεται με τρία γράμματα που αντιστοιχούν στην κορυφή και σε δύο σημεία των πλευρών της ή με ένα μικρό γράμμα.

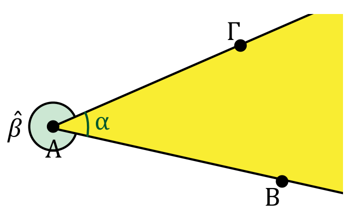
Όταν χρησιμοποιούμε τρία γράμματα, το σημείο της κορυφής της τοποθετείται ανάμεσα στα άλλα δύο. Για παράδειγμα, η χρωματισμένη γωνία του σχήματος ονομάζεται $\psi\hat{A}x$ ή $B\hat{A}\Gamma$. Όταν χρησιμοποιούμε ένα μικρό γράμμα, ονομάζεται όπως στο σχήμα $\hat{\omega}$ ή $\hat{\varphi}$.



1.2.2 Άνοιγμα γωνίας

Δύο ημιευθείες ΑΒ και ΑΓ με κοινή αρχή το σημείο Α σχηματίζουν στο επίπεδο τις γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$. Όλα τα σημεία μεταξύ των ΑΒ και ΑΓ στο σχήμα, που βρίσκονται στην κίτρινη χρωματισμένη περιοχή, είναι εσωτερικά για τη γωνία $\hat{\alpha}$ ($B\hat{A}\Gamma$).

Οποιοδήποτε σημείο, που δεν ανήκει στο εσωτερικό της γωνίας $\hat{\alpha}$, θα ανήκει είτε στις πλευρές της γωνίας, είτε στο **εξωτερικό** της μέρος, δηλαδή στη γωνία $\hat{\beta}$.



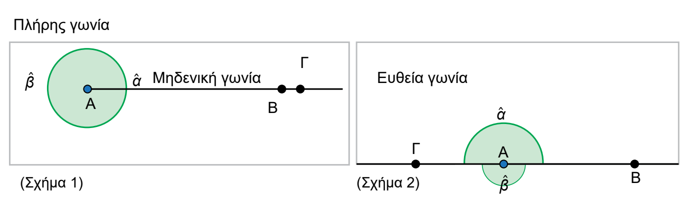
Το εσωτερικό μιας γωνίας αισθητοποιείται ως μέγεθος από το άνοιγμα των δύο πλευρών της. Το μέγεθος αυτό ονομάζεται **άνοιγμα της γωνίας**.

1.2.3 Είδη γωνιών

Όταν δύο ημιευθείες με κοινή αρχή ταυτίζονται, ορίζουν δύο γωνίες, εκ των οποίων η μία ονομάζεται **μηδενική γωνία** και η άλλη **πλήρης γωνία**.

Η **πλήρης γωνία** δημιουργείται με την πλήρη περιστροφή της ημιευθείας γύρω από την αρχή της (Σχήμα 1).

Η **ευθεία γωνία** δημιουργείται από δύο αντικείμενες ημιευθείες όπως οι ΑΒ και ΑΓ στο Σχήμα 2.

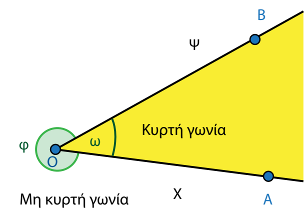


(Σχήμα 1)
(Σχήμα 2)

Η γωνία που ορίζουν δύο αντικείμενες ημιευθείες ονομάζεται **ευθεία γωνία.**

Στο διπλανό σχήμα, οι δύο ημιευθείες Οx και Οψ ορίζουν δύο γωνίες, τις $\hat{\omega}$ και $\hat{\varphi}$.

- Η γωνία $\hat{\omega}$ έχει άνοιγμα μικρότερο της ευθείας γωνίας και ονομάζεται **κυρτή γωνία**.
- Η γωνία $\hat{\varphi}$ έχει άνοιγμα μεγαλύτερο από την ευθεία γωνία και ονομάζεται **μη κυρτή γωνία**.



1.2.4 Σύγκριση γωνιών

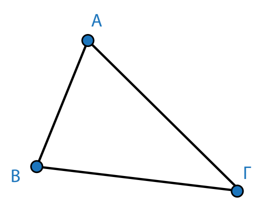
Διερεύνηση 2

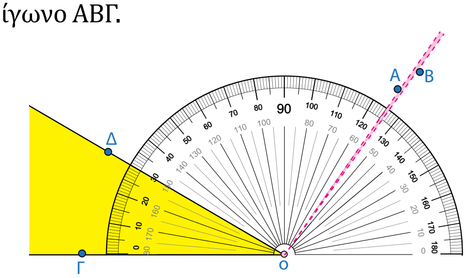
Να ανοίξετε την εφαρμογή «Σύγκριση» και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.
Να συζητήσετε τα συμπεράσματά σας με τους συμμαθητές σας.

Σύγκριση γωνιών

Δραστηριότητα 1

Σχεδιάστε στο επίπεδο χαρτί σας το παρακάτω τρίγωνο ΑΒΓ.





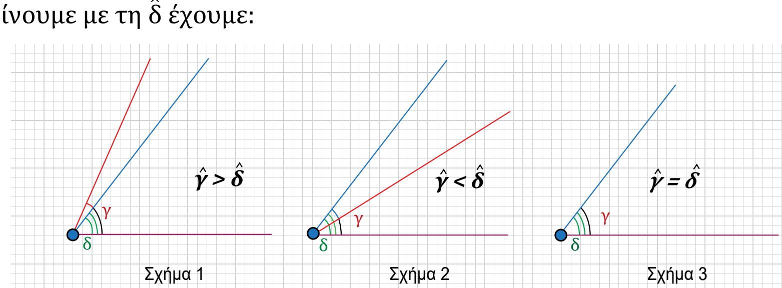
Μέτρηση του ανοίγματος των γωνιών με το μοιρογνωμόνιο. Μονάδα μέτρησης η μοίρα (1^o)

- Να ονομάσετε τις κυρτές και τις μη κυρτές γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.
- Να συγκρίνετε τις γωνίες του τριγώνου με το διαφανές χαρτί ή με το μοιρογνωμόνιο.
- Ποια σύγκριση είναι περισσότερο ακριβής;
- Να συζητήσετε με τους συμμαθητές σας τη διαδικασία και το αποτέλεσμα της σύγκρισης.

Η σύγκριση δύο γωνιών αφορά τη σύγκριση του ανοίγματός τους.
Για να συγκρίνουμε δύο γωνίες, μεταφέρουμε τη μια ώστε να ταυτιστούν οι κορυφές τους και μία πλευρά τους. Στη συνέχεια εξετάζουμε πού βρίσκεται η άλλη πλευρά της γωνίας που μεταφέραμε.

Μεταφέροντας τη γωνία $\hat{\gamma}$ για να τη συγκρίνουμε με τη $\hat{\delta}$ έχουμε:

- Αν η πλευρά που δεν ταυτίζεται πάρει θέση όπως στο σχήμα (1) τότε $\hat{\gamma} > \hat{\delta}$.
- Αν η πλευρά που δεν ταυτίζεται πάρει θέση όπως στο σχήμα (2) τότε $\hat{\gamma} < \hat{\delta}$.
- Αν η πλευρά που δεν ταυτίζεται αρχικά, πάρει θέση όπως στο σχήμα (3) τότε $\hat{\gamma} = \hat{\delta}$.



Δύο γωνίες είναι **ίσες**, όταν μπορούν να ταυτιστούν ή έχουν ίσα ανοίγματα. Διαφορετικά είναι **άνισες** και μεγαλύτερη είναι αυτή που έχει το μεγαλύτερο άνοιγμα.

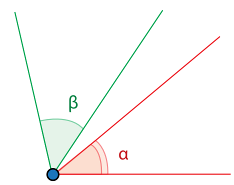
Σχόλιο:

Για τη μέτρηση των γωνιών στην οποία θα αναφερθούμε στα επόμενα, χρησιμοποιούμε ως μονάδα μέτρησης τη **μοίρα** (1^{o}) και τις υποδιαιρέσεις της **λεπτό** ($\frac{1}{60}$ της μοίρας) και το δευτερόλεπτο ($\frac{1}{60}$ του λεπτού). Το όργανο που χρησιμοποιούμε είναι το μοιρογνωμόνιο.

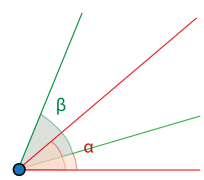
1.2.5 Εφεξής και διαδοχικές γωνίες

Όταν σχεδιάζουμε δύο γωνίες με κοινή κορυφή, υπάρχουν οι ακόλουθες περιπτώσεις:

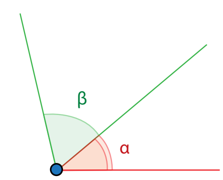
- Να έχουν κοινή κορυφή και να μην έχουν κανένα άλλο σημείο τους κοινό (Σχήμα 1).
- Να έχουν κοινή κορυφή και ένα μέρος της μιας να περιέχεται στο εσωτερικό της άλλης (Σχήμα 2).
- Να έχουν κοινή κορυφή, μια κοινή πλευρά και να μην έχουν άλλο κοινό σημείο (Σχήμα 3).



Σχήμα 1



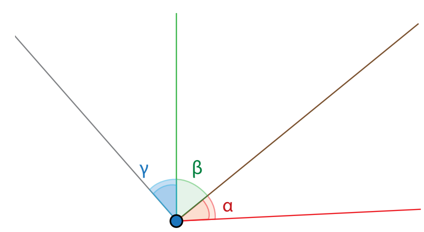
Σχήμα 2



Σχήμα 3

Οι γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ της τελευταίας περίπτωσης λέγονται **εφεξής γωνίες**.

Όταν περισσότερες από δύο γωνίες είναι ανά δύο εφεξής, οι γωνίες αυτές λέγονται **διαδοχικές**.



- **Εφεξής** ονομάζονται δύο γωνίες όταν έχουν κοινή κορυφή, μια κοινή πλευρά και κανένα άλλο σημείο κοινό.
- **Διαδοχικές** ονομάζονται τρεις ή περισσότερες γωνίες, όταν είναι ανά δύο εφεξής.

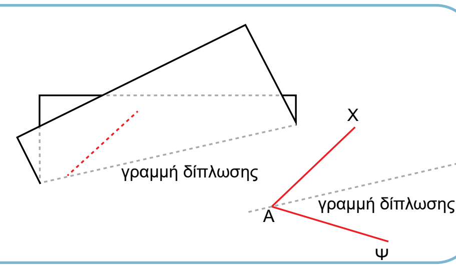
1.2.6 Διχοτόμος γωνίας

Δραστηριότητα 2

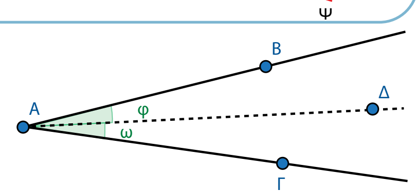
i) Να σχεδιάσετε σε ένα επίπεδο χαρτί μια κυρτή γωνία και στη συνέχεια να διπλώσετε το χαρτί, έτσι ώστε οι δύο πλευρές της να ταυτιστούν.

ii) Να τσακίσετε το χαρτί στο σημείο δίπλωσης, μετά να το ανοίξετε και να σχεδιάσετε την ημιευθεία της τσάκισης.

iii) Τι γωνίες σχηματίζει η ημιευθεία της τσάκισης (γραμμή δίπλωσης) με τις πλευρές της γωνίας;



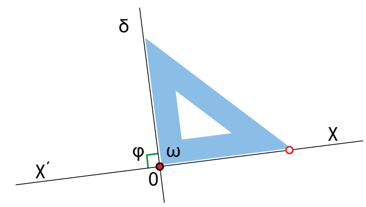
Διχοτόμος μιας γωνίας ονομάζεται η ημιευθεία που έχει αρχή την κορυφή μιας γωνίας, ανήκει στο εσωτερικό της και ορίζει με τις πλευρές της δύο ίσες γωνίες.



Παράδειγμα: Στο σχήμα διχοτόμος της γωνίας $\widehat{ΒΑΓ}$ είναι η ημιευθεία ΑΔ και τη χωρίζει σε δύο ίσες γωνίες:

$$\widehat{ΓΑΔ} = \widehat{ΔΑΒ} \text{ ή } \widehat{\omega} = \widehat{\varphi}$$

1.2.7 Ορθή γωνία - Κάθετες ευθείες



Η διχοτόμος μιας ευθείας γωνίας σχηματίζει ίσες γωνίες με τις πλευρές της. Οι γωνίες αυτές ονομάζονται **ορθές**.
Οι ευθείες στις οποίες ανήκουν οι πλευρές μιας ορθής γωνίας, ονομάζονται **κάθετες** ευθείες.

Για παράδειγμα, στο σχήμα η ημιευθεία Οδ είναι διχοτόμος της ευθείας γωνίας χ΄Οχ. Οι δύο γωνίες χ̂οδ και δ̂οχ είναι ορθές και η Οδ είναι κάθετη στην χ΄χ.

Η προέκταση της διχοτόμου Οδ είναι διχοτόμος της άλλης ευθείας γωνίας. Η ευθεία στην οποία ανήκει η Οδ είναι κάθετη στην χ΄χ.

Κάθετες ονομάζονται δύο ευθείες όταν σχηματίζουν μια ορθή γωνία.

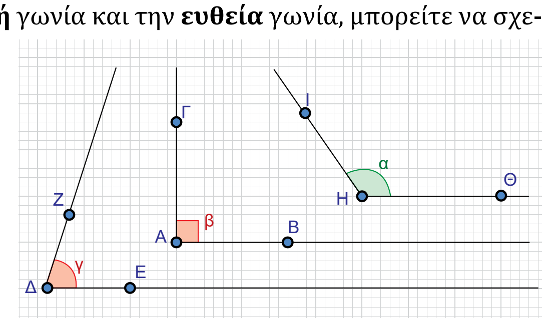
Σχόλια:

- Ο γνώμονας είναι το γεωμετρικό όργανο με το οποίο μπορούμε να ελέγχουμε αν μια γωνία είναι ορθή ή να σχεδιάσουμε δύο κάθετες ευθείες.
- Η ορθή γωνία έχει άνοιγμα ίσο με 90^o όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε με το μοιρογνωμόνιο.
- Μια ευθεία γωνία έχει άνοιγμα 180^o, διότι η ευθεία γωνία αποτελείται από δύο ορθές ή $2 \cdot 90^o = 180^o$.
- Μια πλήρης γωνία έχει άνοιγμα 360^o, διότι αποτελείται από τέσσερις ορθές γωνίες ή $4 \cdot 90^o = 360^o$.
- Μια κυρτή γωνία έχει άνοιγμα μικρότερο από 180^o, διότι είναι μικρότερη από μια ευθεία γωνία.
- Μια μη κυρτή γωνία έχει άνοιγμα μεγαλύτερο από 180^o, διότι είναι μεγαλύτερη από μια ευθεία γωνία.

1.2.8 Κατηγορίες γωνιών

Στο επίπεδο χαρτί σας, εκτός από την **πλήρη** γωνία, τη **μηδενική** γωνία και την **ευθεία** γωνία, μπορείτε να σχεδιάσετε τρία ακόμα είδη γωνιών.

- Την **ορθή** γωνία, αν σχεδιάσετε τη διχοτόμο μιας ευθείας γωνίας. Στο σχήμα είναι η γωνία $\hat{\beta}$.
- Μια γωνία μικρότερη της ορθής και μεγαλύτερη από 0°, που ονομάζεται **οξεία** γωνία. Στο σχήμα είναι η γωνία $\hat{\gamma}$.
- Μια γωνία μεγαλύτερη της ορθής και μικρότερη των 180° που ονομάζεται **αμβλεία** γωνία. Στο σχήμα είναι η γωνία $\hat{\alpha}$.



Διερεύνηση 3

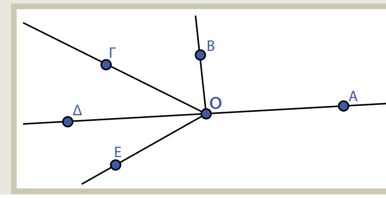
- Να ανοίξετε την εφαρμογή «Κατηγορίες γωνιών» και να ερευνήσετε τις κατηγορίες και τα είδη των γωνιών.
- Να διατυπώσετε στην τάξη τα συμπεράσματά σας για τις κατηγορίες και τα είδη των γωνιών.

Κατηγορίες γωνιών

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Στο διπλανό σχήμα οι ημιευθείες ΟΑ και ΟΒ είναι κάθετες και οι ημιευθείες ΟΑ και ΟΔ είναι αντικείμενες.

- Να εξετάσετε, αν στο σχήμα μία από τις ημιευθείες είναι διχοτόμος γωνίας. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- Να εξετάσετε το είδος των γωνιών $A\hat{O}B$, $A\hat{O}\Gamma$, $B\hat{O}\Gamma$ και $A\hat{O}\Delta$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- Να συγκρίνετε τις γωνίες $B\hat{O}E$ και $B\hat{O}A$.



Απάντηση

- Η ΟΒ είναι διχοτόμος της ευθείας γωνίας $A\hat{O}\Delta$, διότι είναι κάθετη στην ΑΔ.
- Το είδος των γωνιών και η αιτιολόγηση παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

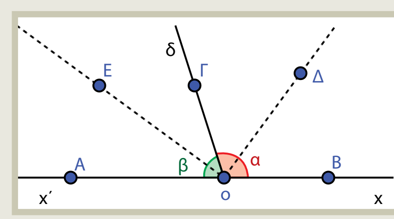
Γωνία	Είδος	Αιτιολόγηση
$A\hat{O}B$	Ορθή	Οι πλευρές της είναι κάθετες.
$A\hat{O}\Gamma$	Αμβλεία	Είναι μεγαλύτερη από την ορθή και μικρότερη των 180°.
$B\hat{O}\Gamma$	Οξεία	Είναι μικρότερη από την ορθή και μεγαλύτερη των 0°.
$A\hat{O}\Delta$	Ευθεία γωνία	Οι ΟΑ και ΟΔ είναι αντικείμενες.

- Η $B\hat{O}E$ είναι αμβλεία και η $B\hat{O}A$ ορθή, όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε με τα γεωμετρικά μας όργανα. Άρα $B\hat{O}E > B\hat{O}A$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Στο διπλανό σχήμα η $x'\hat{O}x$ είναι ευθεία γωνία και οι ΟΔ και ΟΕ διχοτόμοι των γωνιών $x\hat{O}\delta$ και $\delta\hat{O}x$.

- Να ονομάσετε όλες τις γωνίες με τη βοήθεια των σημείων Α, Β, Γ, Δ και Ε.
- Να ονομάσετε τρία ζεύγη εφεξής γωνιών.
- Να εξετάσετε το είδος της γωνίας των δύο διχοτόμων $\Gamma\hat{A}B$.
- Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



Απάντηση

- Οι γωνίες έχουν τα εξής ονόματα: $A\hat{O}E$, $A\hat{O}\Gamma$, $A\hat{O}\Delta$, $A\hat{O}B$
  $E\hat{O}\Gamma$, $E\hat{O}\Delta$, $E\hat{O}B$
  $\Gamma\hat{O}\Delta$, $\Gamma\hat{O}B$
  $\Delta\hat{O}B$
- Οι γωνίες $A\hat{O}E$ και $E\hat{O}\Gamma$ είναι εφεξής. Επίσης τα ζεύγη $E\hat{O}\Gamma$, $\Gamma\hat{O}\Delta$ και $\Gamma\hat{O}\Delta$, $\Delta\hat{O}B$ είναι επίσης εφεξής γωνίες.
- Με τη βοήθεια του γνώμονα διαπιστώνουμε ότι η γωνία $E\hat{O}\Delta$ είναι ορθή.
- Η δικαιολόγηση βασίζεται στους εξής συλλογισμούς:
  - Η γωνία των διχοτόμων $E\hat{O}\Delta$ είναι το άθροισμα των γωνιών $E\hat{O}\Gamma$ και $\Gamma\hat{O}\Delta$. Άρα είναι το άθροισμα των μισών των γωνιών $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$.
  - Οι γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ έχουν άθροισμα την ευθεία γωνία. Άρα η γωνία των διχοτόμων είναι το μισό της ευθείας γωνίας $x'\hat{O}x$.
  - Το μισό της γωνίας $x'\hat{O}x$ είναι ορθή. Άρα η γωνία $E\hat{O}\Delta$ είναι ορθή γωνία.

1.2.9 Σχέσεις γωνιών

Μέχρι τώρα για να διαπιστώσουμε αν δύο γωνίες είναι ίσες ή άνισες τις συγκρίναμε με κάποιο όργανο. Στην ενότητα αυτή θα αναφερθούμε σε σχέσεις μεταξύ δύο γωνιών, που είναι χρήσιμες στη μελέτη της Γεωμετρίας.

Κατακορυφήν γωνίες

Διερεύνηση 4

Να σχεδιάσετε στο επίπεδο χαρτί σας δύο ευθείες (ε) και (ζ) που να τέμνονται και να ονομάσετε Ο το σημείο τομής τους.

i) Να ερευνήσετε τη σχέση που έχουν οι γωνίες που σχηματίζονται μεταξύ τους, αφού τις μετρήσετε με το μοιρογνωμόνιο.

ii) Να σχεδιάσετε και άλλες τεμνόμενες ευθείες και να επαναλάβετε τις προηγούμενες μετρήσεις.

iii) Αν $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$, $\hat{\delta}$ οι γωνίες που σχηματίζονται στις διάφορες περιπτώσεις, όπως στο παρακάτω σχήμα, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα με τις μετρήσεις που κάνατε.

iv) Να διατυπώσετε ένα συμπέρασμα για τη σχέση των τεσσάρων γωνιών.

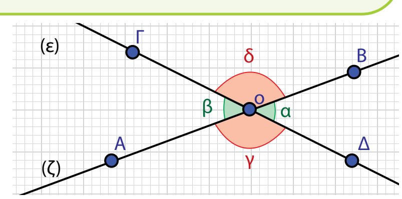
v) Να ανοίξετε την εφαρμογή «Κατακορυφήν γωνίες» να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται για να επιβεβαιώσετε το συμπέρασμά σας.

vi) Να συζητήσετε με τους συμμαθητές σας τα συμπεράσματά σας.

Μέτρα γωνιών $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$, $\hat{\delta}$			
$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\delta}$

Κατακορυφήν γωνίες

Οι γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ του σχήματος έχουν κοινή κορυφή και οι πλευρές της μιας είναι αντικείμενες ημιευθείες των πλευρών της άλλης.
Γωνίες όπως αυτές ονομάζονται **κατακορυφήν γωνίες**.
Κατακορυφήν γωνίες στο σχήμα είναι επίσης οι $\hat{\gamma}$ και $\hat{\delta}$.



Κατακορυφήν ονομάζονται δύο γωνίες, όταν οι πλευρές της μιας είναι αντικείμενες ημιευθείες των πλευρών της άλλης.

Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ***ίσες***.

Συμπληρωματικές γωνίες

Διερεύνηση 5

Να σχεδιάσετε στο εσωτερικό μιας ορθής γωνίας $\Gamma\hat{A}B$ μια ημιευθεία Αx. Έτσι θα δημιουργηθούν δύο οξείες γωνίες $\hat{\beta}$ και $\hat{\gamma}$.

i) Να βρείτε το άθροισμα των γωνιών $\hat{\beta}$ και $\hat{\gamma}$, αφού τις μετρήσετε με το μοιρογνωμόνιο.

ii) Να σχεδιάσετε και άλλες ημιευθείες όπως η Αx στο εσωτερικό της ορθής γωνίας $\Gamma\hat{A}B$ και να επαναλάβετε το ερώτημα (i) για τις νέες γωνίες που δημιουργούνται.

iii) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα για τις ημιευθείες που σχεδιάσατε. Τι παρατηρείτε;

iv) Να ανοίξετε την εφαρμογή «Συμπληρωματικές γωνίες» και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

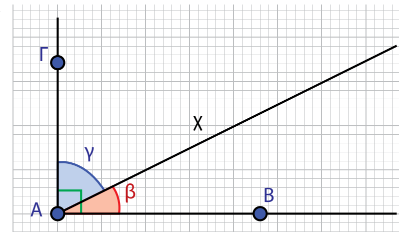
v) Να συζητήσετε με τους συμμαθητές σας τα αποτελέσματα των πειραμάτων και των συμπερασμάτων σας.

$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$	Άθροισμα των $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$

Συμπληρωματικές γωνίες

Αν σχεδιάσουμε μια ημιευθεία Αχ στο εσωτερικό μιας ορθής γωνίας $B\hat{A}\Gamma$ τότε δημιουργούνται δύο οξείες γωνίες, όπως οι $\hat{\beta}$ και $\hat{\gamma}$ στο σχήμα.

Οι γωνίες αυτές όπως είναι φανερό έχουν άθροισμα μια ορθή γωνία και το ίδιο συμβαίνει για τις αντίστοιχες γωνίες που σχηματίζονται από οποιαδήποτε άλλη ημιευθεία φέρουμε στο εσωτερικό της γωνίας. Ονομάζουμε αυτές τις γωνίες συμπληρωματικές.

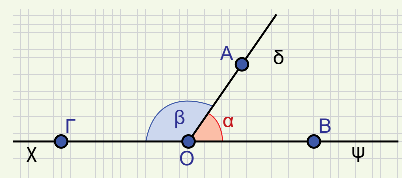


Συμπληρωματικές ονομάζονται δύο γωνίες όταν το άθροισμά τους είναι μία ορθή γωνία.

Παραπληρωματικές γωνίες

Διερεύνηση 6

Να σχεδιάσετε μια ευθεία γωνία $\chi\hat{O}\psi$ και μια ημιευθεία Οδ, όπως στο διπλανό σχήμα. Έτσι δημιουργούνται δύο γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$.



i) Να βρείτε το άθροισμα των γωνιών $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ αφού τις μετρήσετε με το μοιρογνωμόνιο.

ii) Να σχεδιάσετε και άλλες ημιευθείες όπως η Οδ και να επαναλάβετε το ερώτημα (i) για τις νέες γωνίες που δημιουργούνται.

iii) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα για τις ημιευθείες που σχεδιάσατε. Τι παρατηρείτε;

iv) Να ανοίξετε την εφαρμογή «Παραπληρωματικές γωνίες» και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

v) Να συζητήσετε με τους συμμαθητές σας τα συμπεράσματά σας.

$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	Άθροισμα των $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$

Παραπληρωματικές γωνίες

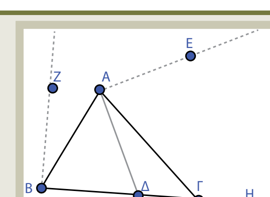
Αν σχεδιάσουμε μια ημιευθεία Οχ από ένα σημείο Ο μιας ευθείας, δημιουργούνται δύο γωνίες όπως οι $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ στο παραπάνω σχήμα.

Οι γωνίες αυτές όπως είναι φανερό έχουν άθροισμα την ευθεία γωνία ή δύο ορθές γωνίες και το ίδιο συμβαίνει για τις αντίστοιχες γωνίες που σχηματίζονται από οποιαδήποτε άλλη ημιευθεία φέρουμε, όπως η Οχ. Τις γωνίες αυτές τις ονομάζουμε παραπληρωματικές.

Παραπληρωματικές ονομάζονται δύο γωνίες όταν το άθροισμά τους είναι δύο ορθές γωνίες δηλαδή μια ευθεία γωνία.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Στο διπλανό σχήμα ισχύει ότι $BZ \perp B\Gamma$ και $AE \perp A\Delta$. Να αναγνωρίσετε και να ονομάσετε τις συμπληρωματικές και τις παραπληρωματικές γωνίες του σχήματος.



Απάντηση

Συμπληρωματικές γωνίες:

- $A\hat{B}Z$ και $A\hat{B}\Gamma$ διότι η ΑΒ είναι στο εσωτερικό της ορθής γωνίας $Z\hat{B}\Gamma$.
- $\Delta\hat{A}\Gamma$ και $\Gamma\hat{A}E$ διότι η ΑΓ είναι στο εσωτερικό της ορθής γωνίας $\Delta\hat{A}E$.

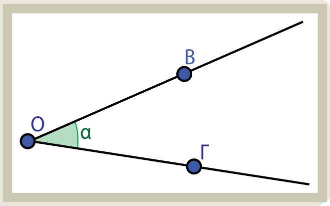
Παραπληρωματικές γωνίες:

- $A\hat{\Gamma}B$ και $A\hat{\Gamma}H$ διότι η $\Gamma\hat{\Delta}H$ είναι ευθεία γωνία.
- $A\hat{\Delta}B$ και $A\hat{\Delta}\Gamma$ διότι η $B\hat{\Delta}\Gamma$ είναι ευθεία γωνία.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

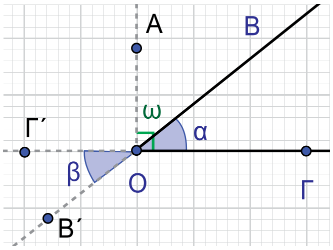
Να αντιγράψετε στο επίπεδο χαρτί σας τη διπλανή γωνία $\hat{\alpha}$ και στη συνέχεια να σχεδιάσετε:

- Την κατακορυφήν της.
- Τη συμπληρωματική της.
- Την παραπληρωματική της.



Απάντηση

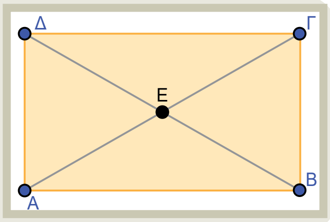
- Σχεδιάζουμε τις αντικείμενες ημιευθείες ΟΒ΄ και ΟΓ΄των ΟΒ και ΟΓ. Οι γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ είναι κατακορυφήν.
- Σχεδιάζουμε την ΟΑ κάθετη στην ΟΓ στο σημείο Ο. Η γωνία $\hat{\omega}$ είναι συμπληρωματική της γωνίας $\hat{\alpha}$ αφού έχουν άθροισμα 90^0.
- Η γωνία $B\hat{O}\Gamma$ είναι παραπληρωματική της γωνίας $\hat{\alpha}$ αφού το άθροισμά τους είναι 180^0.



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ οι ΑΓ και ΒΔ, όπως γνωρίζουμε, ονομάζονται διαγώνιες. Να αναγνωρίσετε και να ονομάσετε:

i) Δύο ζεύγη συμπληρωματικών γωνιών.
ii) Δύο ζεύγη κατακορυφήν γωνιών.
iii) Δύο ζεύγη παραπληρωματικών γωνιών.



Απάντηση

i) Συμπληρωματικές:

- $A\hat{\Delta}E$ και $E\hat{\Delta}\Gamma$ διότι $A\Delta \perp \Delta\Gamma$
- $\Delta\hat{A}E$ και $E\hat{A}B$ διότι $A\Delta \perp AB$

ii) Κατακορυφήν:

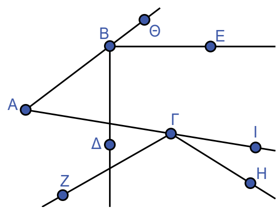
- $A\hat{E}\Delta$ και $B\hat{E}\Gamma$ διότι οι πλευρές ΕΑ και ΕΔ είναι αντικείμενες των ΕΓ και ΕΒ.
- $\Delta\hat{E}\Gamma$ και $A\hat{E}B$ διότι οι πλευρές ΕΓ και ΕΔ είναι αντικείμενες των ΕΑ και ΕΒ.

iii) Παραπληρωματικές:

- $A\hat{E}\Delta$ και $A\hat{E}B$ διότι η $\Delta\hat{E}B$ είναι ευθεία γωνία.
- $\Delta\hat{E}\Gamma$ και $B\hat{E}\Gamma$ διότι η $\Delta\hat{E}B$ είναι ευθεία γωνία.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

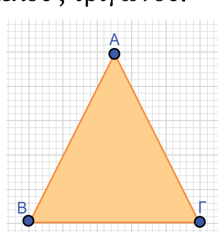
1 Να ονομάσετε και να κατηγοριοποιήσετε όλες τις κυρτές γωνίες του παρακάτω σχήματος.



i) Να διακρίνετε και να ονομάσετε τέσσερις οξείες γωνίες του σχήματος.
ii) Να διακρίνετε και να ονομάσετε τέσσερις αμβλείες και μια ορθή γωνία.

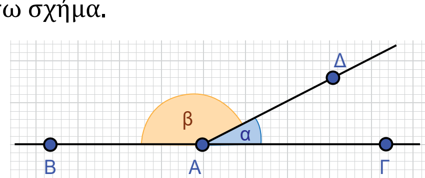
2 Να σχεδιάσετε μια ορθή γωνία $\chi\hat{O}\psi$ και τη διχοτόμο της Οδ.
i) Πόσες μοίρες είναι το άνοιγμα της γωνίας $\chi\hat{o}\delta$;
ii) Πόσες γωνίες, ίσες με την, $\chi\hat{o}\delta$, πρέπει να προσθέσεις για να πάρεις άθροισμα μια ευθεία γωνία;
iii) Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

3 Να ονομάσετε και να συγκρίνετε τις γωνίες του παρακάτω ισοσκελούς τριγώνου.



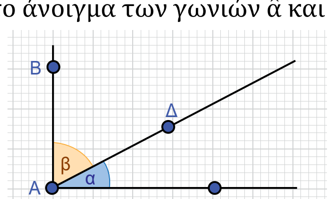
i) Ποιες γωνίες είναι ίσες;
ii) Να ονομάσετε μια μη κυρτή γωνία του τριγώνου.

4 Να βρείτε το άθροισμα των γωνιών $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ στο παρακάτω σχήμα.



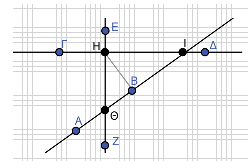
Να σχεδιάσετε δύο ακόμα ζεύγη που να έχουν το ίδιο άθροισμα. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

5 Στο παρακάτω σχήμα η γωνία $B\hat{A}\Gamma$ είναι ορθή γωνία. Να βρείτε το άνοιγμα των γωνιών $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$.

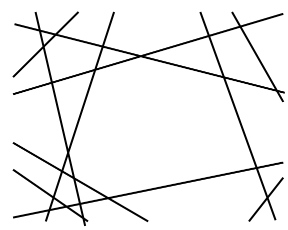


Να σχεδιάσετε δύο ακόμα ζεύγη που να έχουν το ίδιο άθροισμα. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

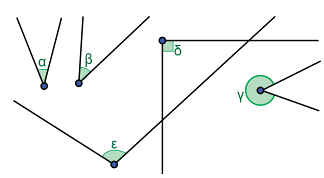
6 Στο παρακάτω σχήμα να αναγνωρίσετε και να ονομάσετε:
i) Δύο ζεύγη κατακορυφήν γωνιών.
ii) Δύο ζεύγη παραπληρωματικών γωνιών.
iii) Ένα ζεύγος συμπληρωματικών γωνιών.



7 Στην παρακάτω εικόνα να διακρίνετε και να ονομάσετε μια οξεία γωνία, μια αμβλεία γωνία, μια ευθεία γωνία, μια ορθή γωνία, μια πλήρη και μια μη κυρτή γωνία.



8 Να συγκρίνετε τις γωνίες του παρακάτω σχήματος και να τις ταξινομήσετε από τη μικρότερη μέχρι τη μεγαλύτερη.



9 Να σχεδιάσετε στο επίπεδο χαρτί σας μια αμβλεία γωνία $A\hat{O}B$. Στη συνέχεια με τα γεωμετρικά σας όργανα να σχεδιάσετε:
i) Την κατακορυφήν της.
ii) Την παραπληρωματική της.

10 **Εκτίμηση διχοτόμου γωνίας.**
Να ανοίξετε την εφαρμογή «Εκτίμηση της διχοτόμου» και να ορίσετε τη θέση της ΑΔ, ώστε να γίνει διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$.

Εκτίμηση της διχοτόμου

11 Να σχεδιάσετε μια ευθεία (ε) και ένα σημείο Α εκτός αυτής.

i) Να σχεδιάσετε μια ευθεία κάθετη στην (ε) που να διέρχεται από το σημείο Α.

ii) Να αναφέρετε στην τάξη σας ποιο όργανο χρησιμοποιήσατε και να εξηγήσετε πώς το χρησιμοποιήσατε.

1.3 ΜΕΣΟΚΑΘΕΤΟΣ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ, ΔΙΧΟΤΟΜΟΣ ΓΩΝΙΑΣ

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

- Να αναγνωρίζουν και να περιγράφουν τη χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων της μεσοκαθέτου ευθύγραμμου τμήματος και την ιδιότητα των σημείων της διχοτόμου γωνίας.
- Να εφαρμόζουν τη χαρακτηριστική ιδιότητα της μεσοκαθέτου ευθύγραμμου τμήματος, για να αναγνωρίζουν ιδιότητες του ισοσκελούς και του ισοπλεύρου τριγώνου.
- Να σχεδιάζουν με γεωμετρικά όργανα τη μεσοκάθετο ευθύγραμμου τμήματος, τη διχοτόμο γωνίας και να περιγράφουν τη διαδικασία.

1.3.1 Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος

Η λέξη «μεσοκάθετος» είναι ένας γεωμετρικός όρος που δημιουργήθηκε από τις λέξεις **μέσο** και **κάθετος** για να εκφράσει την κάθετη στο μέσο ευθυγράμμου τμήματος. Σε προηγούμενη ενότητα γνωρίσαμε την κάθετο σε ευθεία και μάθαμε να τη σχεδιάζουμε. Εδώ θα γνωρίσουμε τη μεσοκάθετο ευθυγράμμου τμήματος, θα μάθουμε να τη σχεδιάζουμε και θα ερευνήσουμε τις ιδιότητές της.

Διερεύνηση 1

Στο επίπεδο χαρτί σας να σχεδιάσετε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και το μέσο του Μ. Στη συνέχεια να σχεδιάσετε την κάθετη στο ΑΒ που να διέρχεται από το σημείο Μ.

i) Να σχεδιάσετε ένα σημείο Δ στη μεσοκάθετο του ΑΒ και να συγκρίνετε τα ευθύγραμμα τμήματα ΔΑ και ΔΒ.

ii) Να επαναλάβετε τη σύγκριση σχεδιάζοντας και άλλα σημεία στη μεσοκάθετο και να συμπληρώσετε τον διπλανό πίνακα.

Σημείο	Σύγκριση
Ε	ΕΑ = ΕΒ

iii) Να διατυπώσετε το συμπέρασμά σας, για τη σχέση των ευθυγράμμων τμημάτων που ενώνουν ένα σημείο της μεσοκαθέτου με τα άκρα Α και Β.

iv) Να ανοίξετε την ψηφιακή εφαρμογή «Διερεύνηση μεσοκαθέτου» να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται και να διατυπώσετε τα συμπεράσματά σας.

Διερεύνηση μεσοκαθέτου

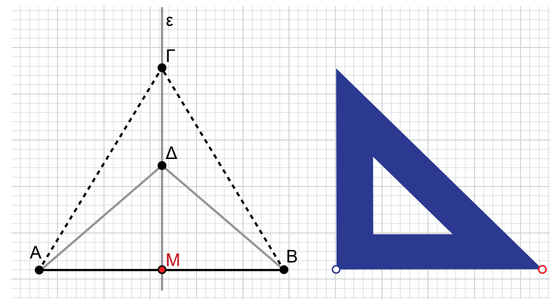
Μεσοκάθετος ενός ευθυγράμμου τμήματος ονομάζεται η ευθεία που είναι κάθετη προς αυτό και διέρχεται από το μέσο του.

Η μεσοκάθετος έχει τη χαρακτηριστική ιδιότητα:

- Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος έχει **ίσες αποστάσεις (ισαπέχει)** από τα άκρα του.

Ισχύει και το αντίστροφο:

- Κάθε σημείο που **ισαπέχει** από τα άκρα ενός ευθυγράμμου τμήματος βρίσκεται πάνω στη **μεσοκάθετό** του.
  Παράδειγμα.
- Για το σημείο Δ του διπλανού σχήματος που ανήκει στη μεσοκάθετο ΔΜ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ ισχύει ότι: ΔΑ = ΔΒ



- Αν για ένα σημείο Γ ισχύει ότι ΓΑ = ΓΒ τότε το σημείο Γ ανήκει στη μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.

1.3.2 Γεωμετρική κατασκευή της μεσοκαθέτου

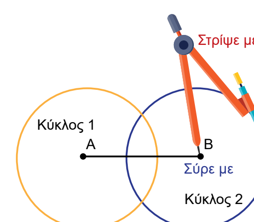
Στη Γεωμετρία, όταν αναφερόμαστε σε «γεωμετρική κατασκευή» εννοούμε την κατασκευή ενός σχήματος με τη βοήθεια μόνο του κανόνα (αβαθμολόγητου χάρακα, δηλαδή χωρίς αριθμητικές ενδείξεις) και του διαβήτη.

Πρόβλημα 1

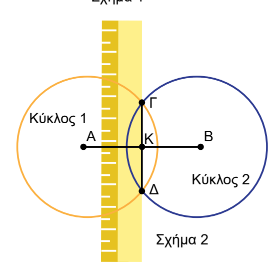
Κατασκευή μεσοκαθέτου ευθυγράμμου τμήματος με κανόνα και διαβήτη

Κατασκευή:

- Σχεδιάζουμε στο επίπεδο χαρτί ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.
- Ανοίγουμε τον διαβήτη μας, ώστε το άνοιγμα να είναι πιο μεγάλο από το μισό του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.
- Σχεδιάζουμε κύκλο με κέντρο το άκρο Α και ακτίνα το άνοιγμα που πήραμε. Έτσι σχεδιάζουμε όλα τα σημεία του επιπέδου, που ισαπέχουν από το Α. (Κύκλος 1-Σχήμα 1)
- Σχεδιάζουμε κύκλο με κέντρο το άκρο Β και την ίδια ακτίνα. Έτσι, σχεδιάζουμε όλα τα σημεία του επιπέδου, που ισαπέχουν από το Β. (Κύκλος 2-Σχήμα 1)
- Σχεδιάζουμε τα σημεία Γ, Δ που τέμνονται οι δύο κύκλοι. Τα σημεία αυτά ισαπέχουν από τα Α, Β.
- Σχεδιάζουμε την ευθεία που διέρχεται από τα δύο σημεία Γ και Δ (Σχήμα 2) και τέμνει το ΑΒ στο σημείο Κ.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Αιτιολόγηση:

- Το σημείο Γ απέχει ίσες αποστάσεις από τα άκρα Α και Β του ΑΒ. Άρα το Γ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΒ.
- Το σημείο Δ επίσης απέχει ίσες αποστάσεις από τα άκρα Α και Β του ΑΒ. Άρα κι αυτό ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΒ.

Επομένως η ευθεία ΓΔ είναι η μεσοκάθετος του ΑΒ.

Κατασκευή μεσοκαθέτου σε ψηφιακό περιβάλλον

Να ανοίξετε την εφαρμογή «Κατασκευή μεσοκαθέτου» και να κάνετε τις προτεινόμενες δραστηριότητες για την κατασκευή της μεσοκαθέτου σε ψηφιακό περιβάλλον.

Κατασκευή μεσοκαθέτου

Σχόλιο:

Η κατασκευή της μεσοκαθέτου είναι κατασκευή της καθέτου σε ευθεία σε σημείο της και συγχρόνως κατασκευή του μέσου ευθύγραμμου τμήματος.

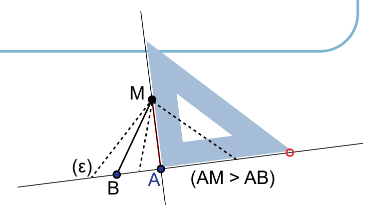
1.3.3 Κάθετη σε ευθεία από σημείο εκτός αυτής. Απόσταση σημείου από ευθεία

Δραστηριότητα 1

Να σχεδιάσετε μια ευθεία (ε) και ένα σημείο Μ εκτός αυτής. Με τον γνώμονα να σχεδιάσετε την κάθετο από το σημείο Μ στην ευθεία (ε).

- Αν Α το σημείο τομής της καθέτου με την ευθεία, να συγκρίνετε το ΜΑ με το ΜΒ, όπου Β ένα οποιοδήποτε άλλο σημείο της ευθείας (ε).
- Να σχεδιάσετε δύο άλλα σημεία, Γ και Δ στην ευθεία (ε) και να συγκρίνετε τα μήκη ΜΓ και ΜΔ με το μήκος ΜΑ.
- Τι παρατηρείτε;

Αν σχεδιάσουμε ένα κάθετο ευθύγραμμο τμήμα από σημείο Μ σε ευθεία (ε) όπως το ΜΑ στο διπλανό σχήμα, τότε το ΜΑ είναι μικρότερο από κάθε άλλο ευθύγραμμο τμήμα που έχει άκρα το Μ και οποιοδήποτε άλλο σημείο της ευθείας.

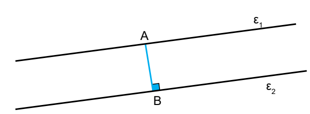


Απόσταση ενός σημείου από μια ευθεία ονομάζουμε **το μήκος** του κάθετου ευθύγραμμου τμήματος από το σημείο προς την ευθεία.

Το σημείο τομής της κάθετης από ένα σημείο προς μια ευθεία ονομάζεται **ίχνος** της κάθετης.

Σχόλιο:

Απόσταση δύο παράλληλων ευθειών είναι η απόσταση ενός σημείου της μιας από την άλλη ευθεία.
Στο σχήμα η απόσταση των παράλληλων ευθειών (ε_1) και (ε_2) είναι η απόσταση του σημείου Α της (ε_1) από την (ε_2), δηλαδή το μήκος (ΑΒ).

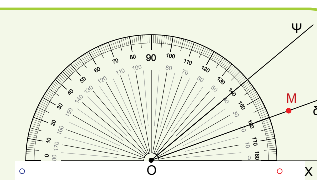


1.3.4 Διχοτόμος γωνίας

Στην προηγούμενη ενότητα γνωρίσαμε τη διχοτόμο γωνίας, ως την ημιευθεία που χωρίζει τη γωνία σε δύο ίσες γωνίες. Εδώ θα μάθουμε να τη σχεδιάζουμε και θα ερευνήσουμε μερικές ιδιότητές της.

Διερεύνηση 2

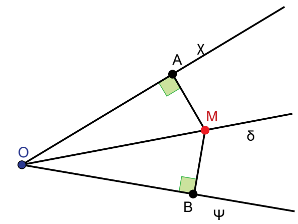
Στο επίπεδο χαρτί σας να σχεδιάσετε μια γωνία $x\hat{O}\psi$ και τη διχοτόμο της Οδ, όπως στο διπλανό σχήμα, με τη βοήθεια του μοιρογνωμονίου. Στη διχοτόμο να σχεδιάσετε ένα σημείο Μ και τις κάθετες από το Μ στις πλευρές της Οx και Οψ.
Να ονομάσετε Α και Β τα σημεία τομής των καθέτων με τις πλευρές της γωνίας.



- Να συγκρίνετε τις αποστάσεις ΜΑ και ΜΒ.
- Να σχεδιάσετε και άλλα σημεία στη διχοτόμο, όπως το Μ, και να συγκρίνετε τις αποστάσεις τους από τις πλευρές της γωνίας. Τι παρατηρείτε;
- Να διατυπώσετε το συμπέρασμά σας στην τάξη.
- Να σχεδιάσετε σημεία Ν εκτός της διχοτόμου και να συγκρίνετε τις αποστάσεις τους από τις πλευρές της γωνίας $x\hat{O}\psi$. Τι παρατηρείτε;
- Να ανοίξετε την εφαρμογή «Διχοτόμος γωνίας» και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται. Τι συμπεραίνετε;

Διχοτόμος γωνίας

Αν σχεδιάσουμε τη διχοτόμο Οδ μιας γωνίας $x\hat{O}\psi$, θεωρήσουμε ένα τυχαίο σημείο Μ σε αυτή και φέρουμε τις κάθετες από το Μ στις ημιευθείες Οχ και Οψ, τότε μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι ΜΑ = ΜΒ.



Δηλαδή οι αποστάσεις ενός τυχαίου σημείου της διχοτόμου μιας γωνίας από τις πλευρές της γωνίας είναι ίσες.

Καθώς αυτό δεν εξαρτάται από τα συγκεκριμένα σημεία ή τη συγκεκριμένη γωνία που χρησιμοποιήσαμε, συμπεραίνουμε την ακόλουθη χαρακτηριστική ιδιότητα της διχοτόμου.

Τα σημεία της διχοτόμου μιας γωνίας απέχουν ίσες αποστάσεις από τις πλευρές της.

Σχόλιο:

Αποδεικνύεται ότι ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή αν οι αποστάσεις ενός σημείου μιας γωνίας ισαπέχουν από τις πλευρές της, τότε το σημείο ανήκει στη διχοτόμο της.

1.3.5 Το ισοσκελές και το ισόπλευρο τρίγωνο

Διερεύνηση 3

Στο επίπεδο χαρτί σας να σχεδιάσετε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, το μέσο του Γ και τη μεσοκάθετο στο τμήμα ΑΒ.
Να σχεδιάσετε ένα σημείο Μ στη μεσοκάθετο και τα ευθύγραμμα τμήματα ΜΑ και ΜΒ.

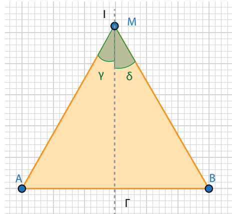
i) Να συγκρίνετε τα ευθύγραμμα τμήματα ΜΑ και ΜΒ.
ii) Να συγκρίνετε τις γωνίες του τριγώνου ΜΑΒ.
iii) Να σχεδιάσετε και άλλα σημεία στη μεσοκάθετο και να επαναλάβετε τα προηγούμενα ερωτήματα.
iv) Τι συμπεραίνετε;

Να ανοίξετε την εφαρμογή «Το τρίγωνο της μεσοκαθέτου» και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.
Να διατυπώσετε ένα συμπέρασμα για το τρίγωνο ΜΑΒ και τις ιδιότητες της μεσοκαθέτου.

Το τρίγωνο της μεσοκαθέτου

Το ισοσκελές τρίγωνο

Αν πάρουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, σχεδιάσουμε τη μεσοκάθετό του, όπως στο διπλανό σχήμα και πάρουμε ένα τυχαίο σημείο Μ πάνω σ' αυτή, τότε εύκολα διαπιστώνουμε ότι:



✓ Το τρίγωνο ΜΑΒ είναι ισοσκελές με κορυφή το Μ και βάση το ΑΒ, αφού ΜΑ = ΜΒ.

✓ Οι γωνίες $\hat{\gamma}$ και $\hat{\delta}$ που σχηματίζει η μεσοκάθετος ΜΓ της βάσης με τις πλευρές της απέναντι γωνίας $\hat{M}$ είναι ίσες, οπότε η μεσοκάθετος ΜΓ είναι και διχοτόμος της γωνίας $\hat{M}$ της κορυφής.
Καθώς το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι τυχαίο, το συμπέρασμα ισχύει σε κάθε ανάλογη περίπτωση.

Γενικά

Η μεσοκάθετος της βάσης ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι διχοτόμος της γωνίας της απέναντι κορυφής.

Επομένως σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο ισχύει ότι:

- Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει την κορυφή με το μέσο της βάσης του είναι κάθετο στη βάση και διχοτομεί τη γωνία της κορυφής.
- Οι προσκείμενες γωνίες στη βάση είναι ίσες.

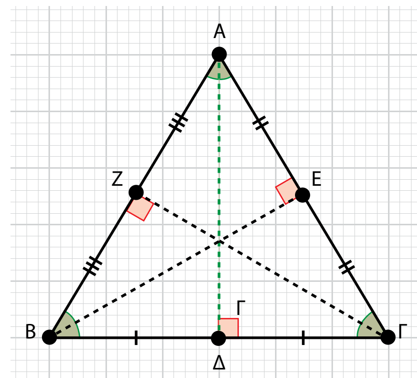
Σχόλια

Όπως θα δούμε αργότερα ισχύει ότι:

1. Η διχοτόμος της γωνίας της απέναντι στη βάση κορυφής ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι διάμεσος της βάσης του και ύψος.

2. Αν η ευθεία της διχοτόμου μιας γωνίας ενός τριγώνου είναι και μεσοκάθετος της απέναντι πλευράς, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Το ισόπλευρο τρίγωνο



Ένα ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές τρίγωνο κατά τρεις τρόπους.

✓ Ισοσκελές με βάση ΒΓ (ΑΒ = ΑΓ).

✓ Ισοσκελές με βάση ΑΓ (ΒΑ = ΒΓ).

✓ Ισοσκελές με βάση ΑΒ (ΓΑ = ΓΒ).

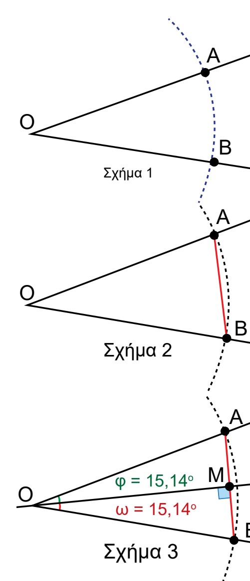
Άρα σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο ισχύει ότι:

- Το τμήμα που ενώνει την κάθε κορυφή του με το μέσο της απέναντι πλευράς είναι κάθετο στην πλευρά και διχοτομεί τη γωνία της κορυφής.
- Όλες οι πλευρές του είναι ίσες.
- Όλες οι γωνίες του είναι ίσες.

1.3.6 Κατασκευές με κανόνα και διαβήτη

Πρόβλημα 2

Κατασκευή διχοτόμου γωνίας με κανόνα και διαβήτη



Κατασκευή:

- Έστω γωνία $\widehat{ΑΟΒ}$ (Σχήμα 1).
- Σχεδιάζουμε κύκλο με κέντρο Ο και όποια ακτίνα θέλουμε (Σχήμα 1).
- Σχεδιάζουμε τα σημεία τομής Α και Β του κύκλου με τις πλευρές της γωνίας και το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ (Σχήμα 2).
- Κατασκευάζουμε τη μεσοκάθετο του ΑΒ όπως αναφέραμε στην παράγραφο 1.3.2. (Δραστηριότητα 1) και την προεκτείνουμε (Σχήμα 3).

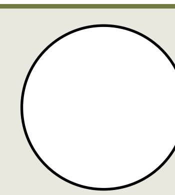
Αιτιολόγηση:

- Με τον κύκλο κέντρου Ο σχεδιάσαμε το τρίγωνο ΑΟΒ το οποίο είναι ισοσκελές αφού ΟΑ = ΑΒ.
- Η μεσοκάθετος της βάσης ΑΒ στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΟΒ διέρχεται από την κορυφή Ο αφού ΟΑ = ΟΒ.
- Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΟΒ η μεσοκάθετος της ΑΒ είναι και διχοτόμος της απέναντι γωνίας $\hat{Ο}$. Άρα η ΟΜ (Μ μέσο της ΑΒ) είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{ΑΟΒ}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

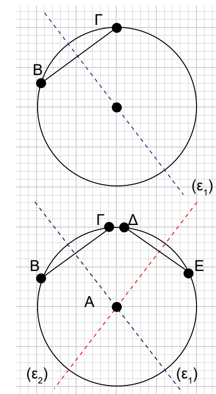
Πώς βρίσκουμε το κέντρο κύκλου;

Η βάση ενός ποτηριού, που έχει αποτυπωθεί στο χαρτί (διπλανή εικόνα) είναι κύκλος. Να βρείτε το κέντρο του.



Απάντηση

Από τις προηγούμενες τάξεις γνωρίζουμε ότι όλα τα σημεία του κύκλου απέχουν εξίσου από το κέντρο του κύκλου, οπότε:



- Σχεδιάζουμε δύο τυχαία σημεία Β, Γ του κύκλου και φέρνουμε τη μεσοκάθετη ευθεία (ε_1) του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ. Το ζητούμενο κέντρο θα ισαπέχει από τα Β και Γ. Άρα θα ανήκει στη μεσοκάθετο (ε_1) της ΒΓ.
- Σχεδιάζουμε στη συνέχεια δύο άλλα σημεία Δ, Ε στον ίδιο κύκλο και φέρνουμε τη μεσοκάθετη ευθεία (ε_2) του ευθύγραμμου τμήματος ΔΕ. Το ζητούμενο κέντρο θα ισαπέχει από τα Δ και Ε. Άρα θα ανήκει και στη μεσοκάθετο (ε_2) της ΔΕ.
- Το σημείο τομής Α των μεσοκάθετων ευθειών (ε_1) και (ε_2) ισαπέχει από τα σημεία Β, Γ, Δ και Ε.

Επειδή τα σημεία που σχεδιάσαμε είναι τυχαία, κάθε άλλο σημείο του κύκλου θα απέχει την ίδια απόσταση από το Α, αφού μπορούμε να επαναλάβουμε την παραπάνω κατασκευή. Επομένως το σημείο Α είναι το κέντρο του κύκλου.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Πού να χτιστεί ο σταθμός;

Σημείο που ισαπέχει από τρεις κορυφές

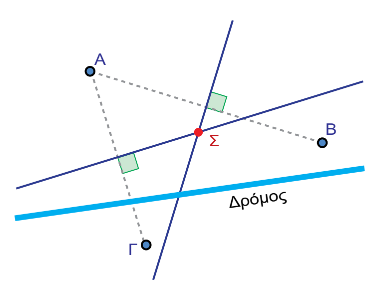
Στο γραφείο ενός μηχανικού είναι αναρτημένη η διπλανή αεροφωτογραφία στην οποία απεικονίζονται οι θέσεις τριών σπιτιών που πρόκειται να κατασκευάσει.

Ο μηχανικός θέλει να κατασκευάσει και έναν σταθμό υγειονομικής αποκομιδής σκουπιδιών, που να εξυπηρετεί και τα τρία σπίτια, δίκαια. Δηλαδή, ο σταθμός να ισαπέχει και από τα τρία σπίτια.

- Πού θα συμβουλεύατε τον μηχανικό να χτίσει τον σταθμό;
- Αιτιολογήστε γιατί η θέση που προτείνετε είναι σωστή.

Απάντηση

Δημιουργούμε ένα σχήμα θεωρώντας ότι τα σπίτια βρίσκονται στα σημεία Α, Β , Γ (Μαθηματικό μοντέλο).



Ο σταθμός πρέπει να απέχει εξίσου από τα τρία σημεία Α, Β και Γ.
Άρα ανήκει στις μεσοκαθέτους των τμημάτων ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ.
Για να βρούμε λοιπόν το σημείο του σταθμού αρκεί να σχεδιάσουμε τη μεσοκάθετο του ΑΒ και τη μεσοκάθετο του ΑΓ καθώς και το σημείο Σ της τομής τους.

Το σημείο Σ ισαπέχει από τα Α, Β, Γ που αντιστοιχούν στις θέσεις των σπιτιών και επομένως αντιστοιχεί στη θέση την οποία θα προτείνουμε στον μηχανικό για να κατασκευάσει τον σταθμό υγειονομικής αποκομιδής σκουπιδιών.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Κατασκευή κάθετης σε σημείο ευθείας

Να αξιοποιήσετε τα εργαλεία της εφαρμογής «Γεωμετρική κατασκευή» και να κατασκευάσετε ευθεία κάθετη σε ευθεία, σε σημείο της.

- Να περιγράψετε τα βήματα της κατασκευής και να τα εφαρμόσετε κάνοντας δικές σας κατασκευές στο χαρτί με τα αντίστοιχα γεωμετρικά όργανα.
- Να εξηγήσετε τον ρόλο των κύκλων στην κατασκευή.
- Να κάνετε τα πειράματα και τις κατασκευές που προτείνονται στην εφαρμογή.

Γεωμετρική κατασκευή

ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

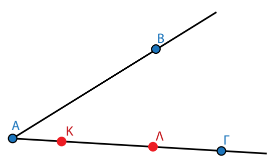
1 Εκτίμηση για τη μεσοκάθετο

Να ανοίξετε την εφαρμογή «Εκτίμηση μεσοκαθέτου» και να εκτιμήσετε τη θέση του Γ, ώστε να ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος ΑΒ.

Εκτίμηση μεσοκαθέτου

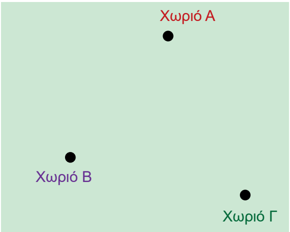
2 Το σημείο της γωνίας

Να αντιγράψετε στο επίπεδο χαρτί σας το διπλανό σχήμα και να κατασκευάσετε με τα γεωμετρικά σας όργανα ένα σημείο στην πλευρά ΑΒ της γωνίας, ώστε να ισαπέχει από τα σημεία Κ και Λ.

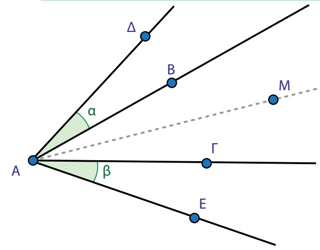


3 Το Γυμνάσιο

Πρόκειται να κατασκευαστεί ένα Γυμνάσιο που να εξυπηρετεί τα τρία χωριά Α, Β και Γ. Πού πρέπει να κατασκευαστεί για να μη νιώθουν αδικημένοι οι κάτοικοι των τριών χωριών;



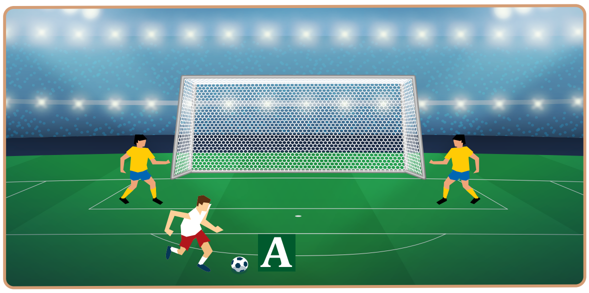
4 Στο σχήμα που ακολουθεί οι γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ είναι ίσες και η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$. Να αιτιολογήσετε ότι η ΑΜ είναι διχοτόμος και της γωνίας $\Delta\hat{A}E$.



5 Ο τερματοφύλακας

Κατά την προετοιμασία ενός ποδοσφαιρικού αγώνα, ο προπονητής ζήτησε από τον τερματοφύλακα να βρει την κατάλληλη θέση που πρέπει να έχει μπροστά από το τέρμα, ώστε να έχει τις πιο πολλές πιθανότητες να αποκρούσει το σουτ του ποδοσφαιριστή Α.

i) Να σχεδιάσετε στο χαρτί σας ένα ανάλογο σχήμα και ακολούθως τη γωνία μέσα στην οποία θα κινηθεί η μπάλα.



ii) Στη συνέχεια να σχεδιάσετε την κατάλληλη θέση του τερματοφύλακα μπροστά από το τέρμα του.

6 Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ και να κατασκευάσετε με τα γεωμετρικά σας όργανα ένα σημείο που να ισαπέχει από τις πλευρές του τριγώνου.

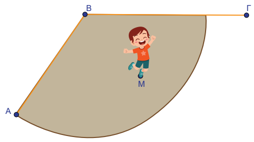
i) Να εξηγήσετε πώς εργαστήκατε.

ii) Να αιτιολογήσετε την ορθότητα της κατασκευής που κάνατε.

7 Ο Μάριος βρίσκεται στην πλατεία του σχήματος.

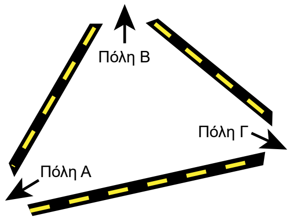
i) Να σχεδιάσετε το σημείο του δρόμου ΑΒ που απέχει τη μικρότερη απόσταση από τον Μάριο.

ii) Να σχεδιάσετε τη θέση που πρέπει να έχει ο Μάριος στην πλατεία ώστε να απέχει ίσες αποστάσεις από τους δύο δρόμους ΒΑ και ΒΓ.



8 Το αεροδρόμιο

Το παρακάτω διάγραμμα δείχνει τρεις αυτοκινητόδρομους που συνδέουν τις πόλεις Α, Β και Γ.



Να βρείτε πού πρέπει να κατασκευαστεί το αεροδρόμιο ώστε να εξυπηρετεί τις τρεις πόλεις με δίκαιο τρόπο.

1.4 ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΩΝ, ΓΩΝΙΕΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΜΕ ΤΕΜΝΟΥΣΑ

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

- Να διερευνούν και να περιγράφουν τις σχετικές θέσεις ευθειών στο επίπεδο.
- Να προσδιορίζουν σχέσεις γωνιών που σχηματίζονται από παράλληλες ευθείες και μια τέμνουσά τους και να τις εφαρμόζουν σε απλά προβλήματα.

1.4.1 Σχετικές θέσεις ευθειών στο επίπεδο

Στα προηγούμενα μαθήματα είδαμε ότι μια ευθεία ορίζεται και σχεδιάζεται, όταν γνωρίζουμε δύο σημεία της. Επίσης είδαμε ότι από ένα σημείο διέρχονται άπειρες ευθείες.
Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε ποιες είναι οι σχετικές θέσεις μεταξύ δύο ευθειών στο επίπεδο.

Διερεύνηση 1

Παρατηρήστε προσεκτικά τη διπλανή εικόνα. Υποθέστε ότι οι ράγες στις οποίες κινείται το τρένο είναι τμήματα ευθειών που εκτείνονται απεριόριστα προς τις δύο κατευθύνσεις, με τον ίδιο τρόπο.

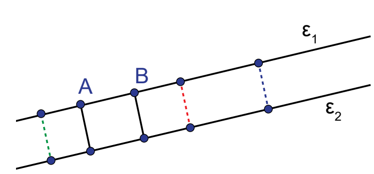
- Να συζητήσετε τον τρόπο με τον οποίο έχουν κατασκευαστεί οι ράγες του τρένου. Εξετάστε αν πράγματι τέμνονται στο βάθος, όπως φαίνεται στην εικόνα.
- Τι διατηρείται σταθερό καθώς επεκτείνονται προς τις δύο κατευθύνσεις;
- Να συζητήσετε στην τάξη για τις δύο ευθείες που αναπαριστούν οι δύο ράγες του τρένου.
- Να ανοίξετε την εφαρμογή και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

Σημεία σε απόσταση από ευθεία

Παρόλο που στη φωτογραφία φαίνεται ότι καθώς επεκτείνονται οι γραμμές του τρένου πλησιάζουν μεταξύ τους, όπως ξέρουμε αυτό δεν συμβαίνει, γιατί αλλιώς τα τρένα θα εκτροχιάζονταν.
Δύο ευθείες, όπως αυτές των γραμμών του τρένου οι οποίες όσο και αν προεκταθούν δεν τέμνονται ονομάζονται **παράλληλες ευθείες**.

Παράλληλες ονομάζονται δύο διαφορετικές ευθείες του επιπέδου όταν δεν τέμνονται.

Συμβολισμός παραλληλίας δύο ευθειών
Για να δηλώσουμε ότι δύο ευθείες $ε_1$, $ε_2$ είναι παράλληλες γράφουμε **συμβολικά:** $\boldsymbol{ε_1 // ε_2}$



Όπως είδαμε, η απόσταση μεταξύ των γραμμών του τρένου διατηρείται σταθερή σε όλο το δίκτυο.

Γενικά, όταν δύο ευθείες είναι παράλληλες, τότε τα σημεία της μιας απέχουν ίσες αποστάσεις από την άλλη, όπως στο διπλανό σχήμα.

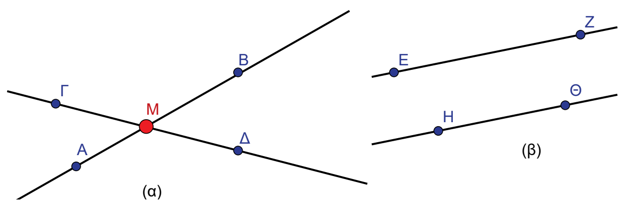
Αυτή την κοινή απόσταση ονομάζουμε **απόσταση των παραλλήλων**.
Για να βρούμε την απόσταση δύο παραλλήλων ευθειών, αρκεί να βρούμε την απόσταση ενός τυχαίου σημείου της μιας από την άλλη, όπως στο σχήμα, η απόσταση του Α από την $ε_2$ ή του Β από την $ε_2$.

Σημείωση:

Μια ευθεία και όλες οι παράλληλες προς αυτή ορίζουν μια διεύθυνση. Για παράδειγμα, στο σχήμα οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ έχουν την ίδια διεύθυνση. Το μέρος προς το οποίο κινούμαστε πάνω σε μια ευθεία ορίζει τη φορά. Σε κάθε ευθεία ορίζονται δύο κατευθύνσεις. Για παράδειγμα, στην ευθεία $ε_1$ του σχήματος, μια κατεύθυνση είναι να κινηθούμε από το σημείο Α προς το Β και η αντίθετή της κατεύθυνση είναι να κινηθούμε από το Β προς το Α.

Σχετικές θέσεις δύο ευθειών

1. Δύο διαφορετικές ευθείες του επιπέδου μπορεί να τέμνονται σε ένα σημείο (Σχήμα α) ή να είναι παράλληλες (Σχήμα β).

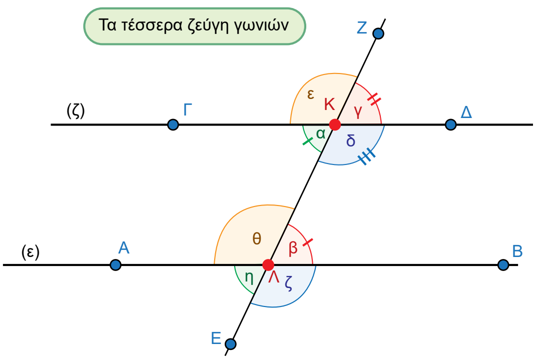


Διερεύνηση της σχετικής θέσης δύο ευθειών

2. Αν δύο ευθείες του επιπέδου έχουν δύο κοινά σημεία, τότε θα έχουν και όλα τα υπόλοιπα σημεία τους κοινά. Επομένως θα ταυτίζονται.

1.4.2 Οι γωνίες δύο παράλληλων ευθειών που τέμνονται από τρίτη

Όταν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, δημιουργούνται οκτώ γωνίες με κορυφές τα σημεία τομής. Κατηγοριοποιούμε τις γωνίες σε ζεύγη ανάλογα με τη θέση τους στις περιοχές που ορίζουν οι παράλληλες ευθείες και η τέμνουσα (διπλανό σχήμα) ως εξής:



Οι γωνίες $\hat{β}$ και $\hat{δ}$:

- βρίσκονται στην περιοχή ανάμεσα στις δύο παράλληλες (**εντός**) και
- προς το ίδιο μέρος της τέμνουσας ευθείας ΕΖ (**επί τα αυτά μέρη**).

Σύντομα:

Οι γωνίες $\hat{β}$ και $\hat{δ}$ είναι **εντός και επί τα αυτά** των δύο παραλλήλων που τέμνονται από την ΕΖ.

Εντός και επί τα αυτά των δύο παραλλήλων που τέμνονται από την ΕΖ είναι και οι γωνίες $\hat{α}$, $\hat{θ}$.

- Οι γωνίες $\hat{α}$ και $\hat{β}$ βρίσκονται **εντός** των παραλλήλων και **εναλλάξ** της τέμνουσας.

Σύντομα:

Οι γωνίες $\hat{α}$ και $\hat{β}$ είναι **εντός εναλλάξ** των δύο παραλλήλων που τέμνονται από την ΕΖ.

Εντός εναλλάξ των δύο παραλλήλων που τέμνονται από την ΕΖ είναι και οι γωνίες $\hat{θ}$, $\hat{δ}$.

- Οι γωνίες $\hat{β}$ και $\hat{γ}$ βρίσκονται η μία **εντός** των παραλλήλων ($\hat{β}$) και η άλλη **εκτός** της περιοχής των παραλλήλων ($\hat{γ}$) και **επί τα αυτά** της τέμνουσας ΕΖ.

Σύντομα:

Οι γωνίες $\hat{β}$ και $\hat{γ}$ είναι **εντός, εκτός και επί τα αυτά** των παραλλήλων που τέμνονται από την ΕΖ.

Εντός, εκτός και επί τα αυτά των δύο παραλλήλων που τέμνονται από την ΕΖ είναι και οι γωνίες $\hat{θ}$, $\hat{ε}$, καθώς και τα ζεύγη $\hat{α}$, $\hat{η}$ και $\hat{δ}$, $\hat{ζ}$.

Διερεύνηση 2

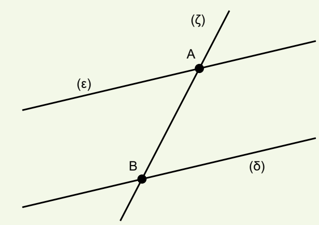
Να σχεδιάσετε δύο παράλληλες ευθείες (ε) και (δ) και μια ευθεία (ζ) που να τις τέμνει στα σημεία Α και Β, όπως στο σχήμα.

α) Να ονομάσετε τις οκτώ γωνίες που έχουν κορυφές τα σημεία Α και Β.

β) Με τα γεωμετρικά σας όργανα να συγκρίνετε:

- Τις εντός εναλλάξ γωνίες.
- Τις εντός, εκτός και επί τα αυτά γωνίες.
- Τις εντός και επί τα αυτά γωνίες.
- Να διατυπώσετε τις παρατηρήσεις σας.

γ) Να ανοίξετε την ψηφιακή εφαρμογή «Οι οκτώ γωνίες» και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται. Να διατυπώσετε συμπεράσματα για τη σχέση των γωνιών των τριών κατηγοριών.



Οι οκτώ γωνίες

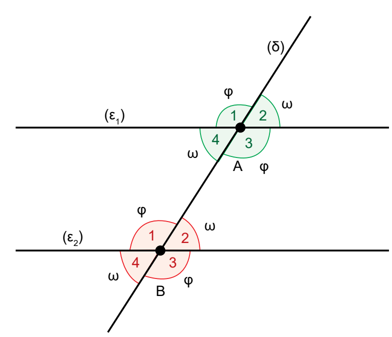
Όταν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από μια τρίτη, τότε:

- **Οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες.**
- **Οι εντός, εκτός και επί τα αυτά γωνίες είναι ίσες.**
- **Οι εντός και επί τα αυτά γωνίες είναι παραπληρωματικές.**

Παράδειγμα:

Για τις γωνίες του σχήματος που σχηματίζονται από τις παράλληλες ευθείες (ε_1), (ε_2) που τέμνονται από την ευθεία (δ), έχουμε:

- **Εντός εναλλάξ γωνίες ίσες:**
  $\widehat{B}_2 = \widehat{A}_4$, $\widehat{B}_1 = \widehat{A}_3$
- **Εντός, εκτός και επί τα αυτά γωνίες ίσες:**
  $\widehat{B}_2 = \widehat{A}_2$, $\widehat{B}_1 = \widehat{A}_1$, $\widehat{B}_3 = \widehat{A}_3$, $\widehat{B}_4 = \widehat{A}_4$
- **Εντός και επί τα αυτά παραπληρωματικές:**
  $\widehat{B}_2 + \widehat{A}_3 = 180^0$, $\widehat{B}_1 + \widehat{A}_4 = 180^0$



Σημείωση:

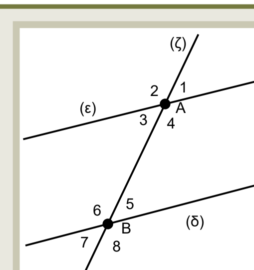
Αποδεικνύεται όπως θα μάθουμε αργότερα ότι ισχύει και το αντίστροφο. Δηλαδή αν δύο ευθείες τεμνόμενες από μια τρίτη σχηματίζουν:

- **Εντός εναλλάξ γωνίες ίσες ή**
- **Εντός, εκτός και επί τα αυτά γωνίες ίσες ή**
- **Εντός και επί τα αυτά γωνίες παραπληρωματικές**

τότε οι ευθείες είναι παράλληλες.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες (ε) και (δ) είναι παράλληλες και η γωνία $\hat{A}_1$ είναι 34^o. Να βρείτε τις άλλες γωνίες του σχήματος.

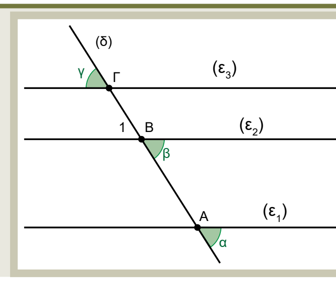


Απάντηση

- Οι γωνίες $\hat{A}_1$ και $\hat{A}_3$ είναι κατακορυφήν. Άρα είναι ίσες, οπότε: $\hat{A}_3 = 34^o$.
- Οι γωνίες $\hat{A}_3$ και $\hat{B}_5$ είναι εντός εναλλάξ. Άρα είναι ίσες, οπότε: $\hat{B}_5 = 34^o$.
- Οι γωνίες $\hat{A}_4$ και $\hat{B}_5$ είναι εντός και επί τα αυτά.
  Άρα είναι παραπληρωματικές, οπότε: $\hat{A}_4 = 180^o - 34^o = 146^o$.
- Οι γωνίες $\hat{A}_4$ και $\hat{B}_8$ είναι εντός, εκτός και επί τα αυτά.
  Άρα είναι ίσες, οπότε: $\hat{B}_8 = 146^0$.
- Η γωνία $\hat{A}_2 = 146^0$ διότι είναι κατακορυφήν με τη $\hat{A}_4$.
- Η γωνία $\hat{B}_6 = 146^0$ διότι είναι κατακορυφήν με τη $\hat{B}_8$.
- Η γωνία $\hat{B}_7 = 34^0$ διότι είναι κατακορυφήν με τη $\hat{B}_5$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες $(ε_1)$, $(ε_2)$ και $(ε_3)$ είναι παράλληλες και τέμνονται από τη (δ). Να αιτιολογήσετε γιατί οι γωνίες $\hat{α}$, $\hat{β}$ και $\hat{γ}$ είναι ίσες.



Απάντηση

- Είναι $\hat{α} = \hat{β}$, διότι είναι εντός, εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων $(ε_1)$ και $(ε_2)$ που τέμνονται από τη (δ).
- Είναι $\hat{β} = \hat{B}_1$, διότι είναι κατακορυφήν.
- Είναι $\hat{γ} = \hat{B}_1$, διότι είναι εντός, εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων $(ε_3)$ και $(ε_2)$ που τέμνονται από τη (δ).
  Ώστε $\hat{α} = \hat{β}$, $\hat{β} = \hat{B}_1$, και $\hat{γ} = \hat{B}_1$ οπότε $\hat{α} = \hat{β} = \hat{γ}$.

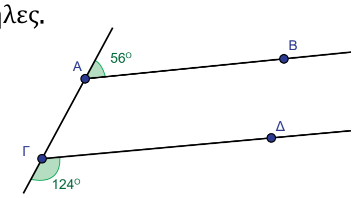
ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να σχεδιάσετε ένα ευθύγραμμο ΑΒ και δύο ευθείες που να είναι παράλληλες μεταξύ τους και να διέρχονται από τα Α και Β.

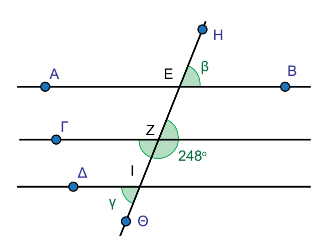
2 Να σχεδιάσετε τα κεφαλαία γράμματα του αλφαβήτου που περιέχουν παράλληλα τμήματα.

3 Να κατασκευάσετε με τα γεωμετρικά σας όργανα ευθεία (δ) παράλληλη σε μια ευθεία (ε) που να απέχει 2 εκατοστά από αυτή. Πόσες τέτοιες ευθείες υπάρχουν.

4 Να εξετάσετε στο σχήμα αν οι ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες.



5 Στο σχήμα οι ευθείες ΑΒ, ΓΖ και ΔΙ είναι παράλληλες.



Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{β}$ και $\hat{γ}$.

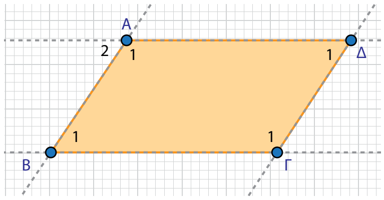
6 Στο παρακάτω σχήμα είναι ΑΒ//ΓΔ και ΑΔ//ΒΓ.

i) Να ονομάσετε δύο εντός και επί τα αυτά γωνίες.

ii) Να συγκρίνετε τις γωνίες $\hat{A}_1$, $\hat{B}_1$ και να αιτιολογήσετε ότι είναι παραπληρωματικές.

iii) Να αιτιολογήσετε την ισότητα των γωνιών $\hat{A}_2$ και $\hat{B}_1$.

iv) Να αιτιολογήσετε τις ισότητες $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1$ και $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1$.



7 **i)** Να ανοίξετε την εφαρμογή «Διερεύνηση γωνιών» και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

Διερεύνηση γωνιών

ii) Να διατυπώσετε στην τάξη και να συζητήσετε με τους συμμαθητές σας τα συμπεράσματά σας και τις αιτιολογήσεις σας.

Ανακεφαλαίωση

- **Το σημείο**
  Το σημείο δεν έχει μέγεθος. Σχεδιάζεται με την άκρη του μολυβιού ως μια τελεία. Ονομάζεται με τα κεφαλαία γράμματα της αλφαβήτας.
- **Η ευθεία**
  Δεν έχει ούτε αρχή, ούτε τέλος. Ορίζεται από δύο σημεία και σχεδιάζεται με τη βοήθεια δύο σημείων και του χάρακα. Αποτελείται από σημεία.
- **Η ημιευθεία**
  Είναι μέρος της ευθείας που ορίζεται από ένα σημείο της και τη μια της κατεύθυνση. Έχει αρχή και δεν έχει τέλος. Σχεδιάζεται με τη βοήθεια ενός χάρακα και ενός σημείου.
- **Το ευθύγραμμο τμήμα**
  Ορίζεται από δύο σημεία τα οποία είναι τα άκρα του. Σχεδιάζεται με τον χάρακα ενώνοντας τα δύο άκρα του. Ονομάζεται από τα ονόματα των δυο άκρων του.
- **Μέσο** ευθυγράμμου τμήματος είναι το σημείο που χωρίζει το ευθύγραμμο τμήμα σε δύο ίσα μέρη.
- **Απόσταση** δύο σημείων είναι το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος που ορίζεται από αυτά.

Η έννοια της γωνίας

- Γωνία είναι η περιοχή του επιπέδου που ορίζεται από δύο ημιευθείες (πλευρές της γωνίας) με κοινή αρχή (κορυφή της γωνίας).
- Όταν οι πλευρές μιας γωνίας ταυτίζονται, ορίζονται δύο γωνίες, η **μηδενική** και η **πλήρης** γωνία.
- Όταν οι πλευρές της είναι αντικείμενες ημιευθείες, η γωνία ονομάζεται **ευθεία** γωνία.
- Μια γωνία που είναι μικρότερη από την ευθεία γωνία ονομάζεται **κυρτή**. Αν είναι μεγαλύτερη ονομάζεται **μη κυρτή**.

Κατηγορίες γωνιών

- Δύο γωνίες είναι **εφεξής**, όταν έχουν κοινή κορυφή, μια κοινή πλευρά και κανένα άλλο σημείο κοινό.
- Δύο γωνίες είναι **ίσες** αν είναι και οι δύο κυρτές ή μη κυρτές και μπορούν να ταυτιστούν οι κορυφές τους και οι δύο τους πλευρές.
- Η διχοτόμος της ευθείας γωνίας ορίζει την **ορθή** γωνία.
- Οι πλευρές της ορθής γωνίας είναι **κάθετες** ευθείες.
- **Οξεία** ονομάζεται η γωνία που είναι μικρότερη της ορθής και μεγαλύτερη της μηδενικής.
- **Αμβλεία** ονομάζεται η γωνία που είναι μεγαλύτερη της ορθής και μικρότερη της ευθείας.

Σχέσεις γωνιών

- Δύο γωνίες είναι **κατακορυφήν**, όταν οι πλευρές της μιας είναι αντικείμενες ημιευθείες των πλευρών της άλλης. Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες.
- Δύο γωνίες είναι **συμπληρωματικές**, όταν έχουν άθροισμα μία ορθή γωνία.
- Δύο γωνίες είναι **παραπληρωματικές**, όταν έχουν άθροισμα μία ευθεία γωνία.

Μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος – Διχοτόμος γωνίας

- Μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος είναι η ευθεία που διέρχεται από το μέσο του και είναι κάθετος σε αυτό. Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου απέχει ίσες αποστάσεις από τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος.
- Κάθε σημείο της διχοτόμου γωνίας απέχει ίσες αποστάσεις από τις πλευρές της γωνίας.

Σχετικές θέσεις ευθειών

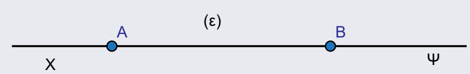
- Δύο ευθείες του επιπέδου ονομάζονται **παράλληλες** όταν δεν τέμνονται όσο και αν προεκταθούν.
- Δύο παράλληλες ευθείες, όταν τέμνονται από τρίτη, σχηματίζουν:

- **εντός εναλλάξ** γωνίες ίσες.
- **εντός, εκτός και επί τα αυτά** γωνίες ίσες.
- **εντός και επί τα αυτά** γωνίες παραπληρωματικές.

Αυτοαξιολόγηση

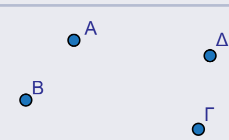
Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

1. Πόσες ημιευθείες ορίζουν τα σημεία Α και Β της ευθείας (ε);



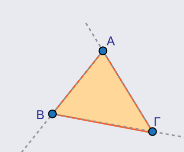
Α) 2 **Β)** 3 **Γ)** 4 **Δ)** 1

2. Πόσα ευθύγραμμα τμήματα ορίζουν τα σημεία Α, Β, Γ και Δ του διπλανού σχήματος;



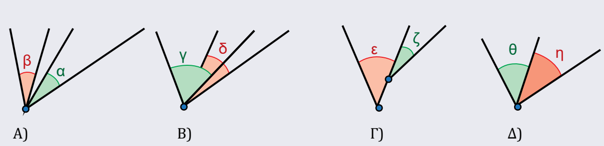
Α) 2 **Β)** 6 **Γ)** 4 **Δ)** 5

3. Στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουν σχεδιαστεί οι ημιευθείες ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ. Πόσες ακόμα ημιευθείες μπορούν να οριστούν, με αρχή τα τρία σημεία και να διέρχονται από κάποιο άλλο;



Α) 4 **Β)** 3 **Γ)** 5 **Δ)** 6

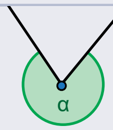
4. Ποιες από τις γωνίες του παρακάτω σχήματος είναι εφεξής;



5. Να απαντήσετε με **ΝΑΙ** ή **ΟΧΙ** τις παρακάτω ερωτήσεις.

- Η διχοτόμος χωρίζει μια γωνία σε δύο ίσες γωνίες;
- Κάθε κυρτή γωνία συνοδεύεται από μια μη κυρτή;
- Δύο κάθετες ευθείες ορίζουν τέσσερις ορθές γωνίες;

6. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση για τη γωνία $\hat{\alpha}$.



Α) οξεία **Β)** αμβλεία **Γ)** ορθή **Δ)** μη κυρτή

7. Δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία είναι μεταξύ τους παράλληλες.; **Α) Σωστό** **Β) Λάθος**

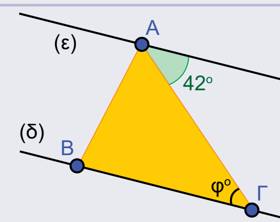
8. Σχεδιάσαμε τα σημεία Α, Β, Γ και την ευθεία (ε) που να διέρχεται από τα Α και Β. Σχεδιάσαμε ακόμα την ευθεία (δ) παράλληλη στην (ε) που να διέρχεται από το σημείο Γ. Τι θα συμβεί στις ευθείες αν τα Α, Β και Γ γίνουν συνευθειακά;

Α) Οι ευθείες (ε) και (δ) θα πάψουν να είναι παράλληλες.

Β) Οι ευθείες (ε) και (δ) θα ταυτίζονται.

Γ) Δεν μπορούν τα τρία σημεία να γίνουν συνευθειακά.

9. Πόσες μοίρες είναι η γωνία $\hat{\varphi}$ στο σχήμα αν ε//δ;



Α) 42^0

Β) 138^0

Γ) 48^0

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ – ΣΥΝΘΕΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ

1 **Σημεία και ευθύγραμμα τμήματα**

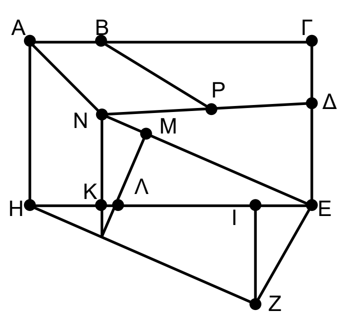
Να σχεδιάσετε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ στο επίπεδο χαρτί σας.

i) Πόσα ευθύγραμμα τμήματα δημιουργούνται αν σχεδιάσεις ένα ή δύο ή τρία ή είκοσι ή περισσότερα σημεία ανάμεσα σε αυτά;

ii) Με ποιο κανόνα μπορεί να υπολογίσεις το πλήθος των ευθυγράμμων τμημάτων που δημιουργούνται κάθε φορά;

2 **Καθετότητα και παραλληλία**

Να εξετάσετε την παραλληλία και την καθετότητα στο παρακάτω σχήμα.

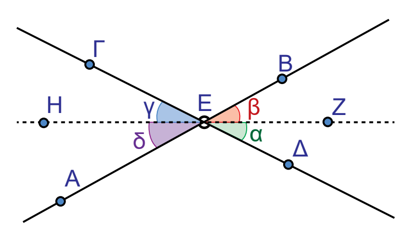


i) Να αναγνωρίσετε όσα περισσότερα παράλληλα ευθύγραμμα τμήματα μπορείτε. Εξηγήστε την απάντησή σας.

ii) Να αναγνωρίσετε όσα περισσότερα κάθετα μεταξύ τους ευθύγραμμα τμήματα. Εξηγήστε την απάντησή σας.

3 **Οι διχοτόμοι δύο κατακορυφήν γωνιών**

Η Αλίκη σχεδίασε δύο κατακορυφήν γωνίες $A\hat{E}\Gamma$, $B\hat{E}\Delta$ και τη διχοτόμο ΕΖ της δεύτερης.

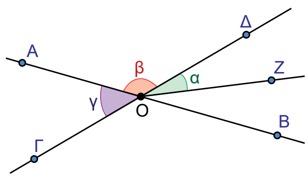


Ισχυρίζεται ότι η αντικείμενη ημιευθεία ΕΗ της ΕΖ, είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{E}\Gamma$.

Είναι σωστός ο ισχυρισμός της Αλίκης;

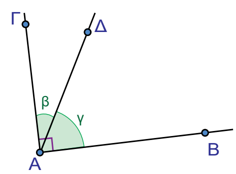
Να αιτιολογήσετε τον ισχυρισμό σας.

4 Στο παρακάτω σχήμα η ΟΖ είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{O}\Delta$ και η γωνία $\hat{\beta}$ είναι κατά 60^{o} μεγαλύτερη από το διπλάσιο της γωνίας $\hat{\alpha}$.

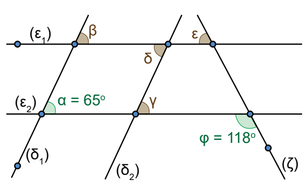


Να βρείτε τις γωνίες $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ και $\hat{\gamma}$.

5 Στο σχήμα που ακολουθεί η ΑΓ είναι κάθετη στην ΑΒ και η γωνία $\hat{\gamma}$ είναι κατά 40^{o} μεγαλύτερη από τη γωνία $\hat{\beta}$. Να βρείτε τις γωνίες $\hat{\beta}$ και $\hat{\gamma}$.



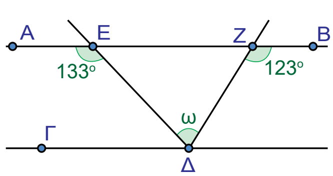
6 Στο σχήμα που ακολουθεί είναι $(\varepsilon_1)//(\varepsilon_2)$ και $(\delta_1)//(\delta_2)$. Να βρείτε τις γωνίες $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$, $\hat{\delta}$ και $\hat{\varepsilon}$.



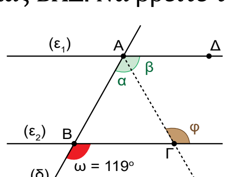
7 Στο σχήμα οι ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες.

i) Να βρείτε τη γωνία $\hat{\omega}$.

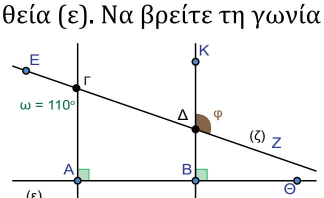
ii) Ποια θα ήταν η τιμή της γωνίας $\Delta\hat{Z}B$ αν η γωνία $\hat{\omega}$ ήταν 90^{o};



8 Στο παρακάτω σχήμα είναι $(\varepsilon_1)//(\varepsilon_2)$ και η ΑΓ διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}\Delta$. Να βρείτε τη γωνία $\hat{\varphi}$.



9 Στο παρακάτω σχήμα είναι οι ΑΓ και ΒΔ είναι κάθετες στην ευθεία (ε). Να βρείτε τη γωνία $\hat{\varphi}$.



10 **Το πρόβλημα του Ορέστη**

Ο Ορέστης ξέχασε μια μέρα να φέρει στο σχολείο τα γεωμετρικά όργανα και αναρωτιέται αν μπορεί να κατασκευάσει χωρίς αυτά τη μεσοκάθετο ενός ευθυγράμμου τμήματος. Σχεδίασε με την άκρη ενός βιβλίου ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.

Ο Γιάννης για να τον βοηθήσει να κατασκευάσει τη μεσοκάθετο, έβγαλε και του έδωσε το ένα κορδόνι του παπουτσιού του.

Τι πρέπει να κάνει ο Ορέστης για να κατασκευάσει τη μεσοκάθετο του ΑΒ;

11 **Οι γωνίες στην τέχνη (Συνθετική εργασία)**

Πολλοί καλλιτέχνες χρησιμοποιούν τη γωνία ως βασικό στοιχείο για να δημιουργήσουν καλαίσθητα έργα τέχνης.

i) Να ανοίξετε την εφαρμογή «Οι γωνίες στην τέχνη» και να μελετήσετε τις πληροφορίες και την προτεινόμενη διαδικασία.

Οι γωνίες στην τέχνη

ii) Να συμπληρώσετε το σχετικό φύλλο εργασίας.

12 **Συνδέσεις με την Ιστορία**

i) Να ανοίξετε την εφαρμογή «Σύντομη επισκόπηση της Γεωμετρίας» και να μελετήσετε τη σύντομη επισκόπηση της ιστορίας της Γεωμετρίας.

Σύντομη επισκόπηση της Γεωμετρίας

ii) Να συνεργαστείτε με τους συμμαθητές σας και να κάνετε μια εργασία για μια συγκεκριμένη ιστορική περίοδο από τις αναφερόμενες στο (i) ερώτημα, αντλώντας επι πλέον πληροφορίες από έγκυρες πηγές (τις οποίες να αναφέρετε) και να την παρουσιάσετε στην τάξη.

Προσομοίωση των γεωμετρικών οργάνων

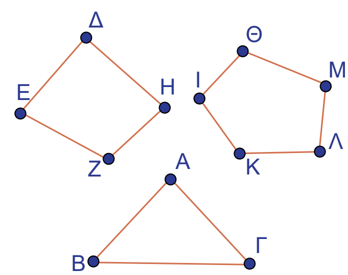
2
Κεφάλαιο

Τρίγωνα

2.1 ΤΡΙΓΩΝΑ

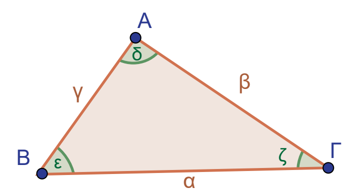
Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

- Να αναγνωρίζουν τα είδη των τριγώνων και να τα ταξινομούν με βάση τις πλευρές τους και το είδος των γωνιών τους.
- Να διατυπώνουν και να ελέγχουν εικασίες σχετικές με ιδιότητες που αφορούν τα κύρια και τα δευτερεύοντα στοιχεία των τριγώνων χρησιμοποιώντας γεωμετρικά όργανα και ψηφιακά μέσα.
- Να αναπτύσσουν λογικούς συλλογισμούς για να τεκμηριώσουν το άθροισμα των γωνιών τριγώνου.
- Να κατασκευάζουν τρίγωνα με τη βοήθεια των γεωμετρικών οργάνων.



Στα προηγούμενα μαθήματα γνωρίσαμε τα βασικά γεωμετρικά σχήματα. Μεταξύ αυτών και τις κλειστές πολυγωνικές γραμμές ή αλλιώς πολύγωνα.
Τα πολύγωνα αποτελούνται από πλευρές και κορυφές. Ένα πολύγωνο με τέσσερις κορυφές ή πλευρές ονομάζεται τετράπλευρο, με πέντε κορυφές ονομάζεται πεντάγωνο κ.ο.κ.
Το απλούστερο όλων των πολυγώνων είναι το **τρίγωνο**. Είναι το πολύγωνο που έχει τρεις κορυφές, όπως το τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος.

Τρίγωνο είναι το πολύγωνο που έχει τρεις κορυφές.



Το τρίγωνο ονομάζεται με τα ονόματα των τριών κορυφών του. Π.χ. ΑΒΓ, ΔΕΖ κ.ο.κ.
Οι πλευρές του ονομάζονται με τα ονόματα των άκρων τους ή με τα αντίστοιχα των απέναντι κορυφών μικρά γράμματα. Π.χ. ΒΓ ή α, ΑΒ ή γ, ΑΓ ή β.
Οι γωνίες του ονομάζονται με τα τρία γράμματα των κορυφών βάζοντας στη μέση το γράμμα της κορυφής της γωνίας. Ονομάζονται επίσης και με μικρά γράμματα. Π.χ. $B\hat{A}\Gamma$ ή $\hat{\delta}$ ή $\hat{A}$.
Ένα σημείο του επιπέδου είτε θα βρίσκεται στο **εσωτερικό** του (το χρωματισμένο μέρος στο σχήμα), είτε στις πλευρές του, είτε εκτός αυτού.

Οι τρεις πλευρές και οι τρεις γωνίες ενός τριγώνου ονομάζονται **πρωτεύοντα στοιχεία** του.

2.2 ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Τα τρίγωνα, ανάλογα με τη σχέση που έχουν τα μήκη των πλευρών τους ή το είδος των γωνιών τους διακρίνονται σε διάφορες κατηγορίες.

Διερεύνηση 1

Να ανοίξετε την εφαρμογή και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.
- Να ταξινομήσετε τα τρίγωνα του σχήματος σε κατηγορίες, σε σχέση με τα μήκη των πλευρών τους και σε σχέση με τα είδη των γωνιών τους.
- Να διατυπώσετε ορισμούς για τις διάφορες κατηγορίες τριγώνων.

Ταξινόμηση

Σε σχέση με τα μήκη των πλευρών του, ένα τρίγωνο ονομάζεται:
- **Σκαληνό,** όταν οι πλευρές του είναι άνισες.
- **Ισοσκελές,** όταν δύο από τις πλευρές του είναι ίσες.
- **Ισόπλευρο,** όταν όλες οι πλευρές του είναι ίσες.

Σε σχέση με το είδος των γωνιών του, ένα τρίγωνο ονομάζεται:
- **Οξυγώνιο,** όταν όλες του οι γωνίες είναι οξείες.
- **Ορθογώνιο,** όταν μία γωνία του είναι ορθή.
- **Αμβλυγώνιο,** όταν μία από τις γωνίες του είναι αμβλεία.

2.3 ΤΑ ΔΕΥΤΕΡΕΥΟΝΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

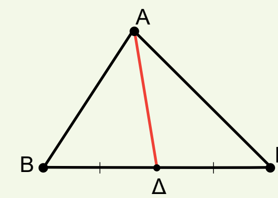
Διάμεσοι τριγώνου

Διάμεσος τριγώνου είναι το ευθύγραμμο τμήμα που έχει άκρα μια κορυφή του τριγώνου και το μέσο της απέναντι πλευράς του.

Διερεύνηση 2

Να σχεδιάσετε στο επίπεδο χαρτί σας ένα τρίγωνο και τις τρεις διαμέσους του.

- Να περιγράψετε στην τάξη τον τρόπο που εργαστήκατε.
- Να ανοίξετε την εφαρμογή και να ερευνήσετε, τη θέση των διαμέσων ως προς το τρίγωνο καθώς και το σημείο τομής τους.
- Να διατυπώσετε μια εικασία και να την ελέγξετε μετακινώντας τις κορυφές του τριγώνου.
- Να εξηγήσετε γιατί το σημείο τομής των διαμέσων βρίσκεται πάντοτε στο εσωτερικό του τριγώνου.
- Να διατυπώσετε το συμπέρασμά σας στην τάξη.



Δευτερεύοντα στοιχεία

Σε κάθε τρίγωνο οι τρεις διάμεσοι τέμνονται στο ίδιο σημείο.
Το σημείο τομής των διαμέσων ονομάζεται **κέντρο βάρους** ή **βαρύκεντρο** του τριγώνου και είναι πάντοτε στο εσωτερικό του.

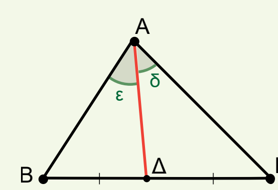
Διχοτόμοι τριγώνου

Διχοτόμος μιας γωνίας ενός τριγώνου είναι το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει την κορυφή της γωνίας με ένα σημείο της απέναντι πλευράς και διχοτομεί τη γωνία.

Διερεύνηση 3

Να σχεδιάσετε στο επίπεδο χαρτί σας ένα τρίγωνο και τις τρεις διχοτόμους του με τη βοήθεια του μοιρογνωμονίου.

- Να περιγράψετε στην τάξη τον τρόπο που εργαστήκατε.
- Να ανοίξετε την εφαρμογή και να ερευνήσετε, τη θέση των διχοτόμων ως προς το τρίγωνο, καθώς και το σημείο τομής τους.
- Να διατυπώσετε μια εικασία και να την ελέγξετε μετακινώντας τις κορυφές του τριγώνου.
- Να εξηγήσετε γιατί το σημείο τομής των διχοτόμων βρίσκεται πάντοτε στο εσωτερικό του τριγώνου.
- Διατυπώστε το συμπέρασμά σας στην τάξη.



Δευτερεύοντα στοιχεία

Σε κάθε τρίγωνο οι τρεις διχοτόμοι του τέμνονται στο ίδιο σημείο.
Το σημείο τομής των διχοτόμων ονομάζεται **έγκεντρο** και είναι πάντοτε στο εσωτερικό του τριγώνου.

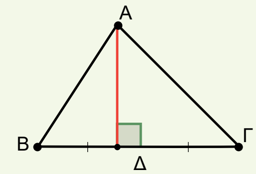
Ύψη τριγώνου

Ύψος ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα μια κορυφή του και το σημείο τομής της κάθετης από αυτή την κορυφή προς την ευθεία της απέναντι πλευράς του.

Διερεύνηση 4

Να σχεδιάσετε στο επίπεδο χαρτί σας ένα τρίγωνο και τα τρία ύψη του με τη βοήθεια του γνώμονα.

- Να περιγράψετε στην τάξη τον τρόπο που εργαστήκατε.
- Να ανοίξετε την εφαρμογή και να ερευνήσετε, τη θέση των υψών καθώς και το σημείο τομής τους ως προς το τρίγωνο.
- Να διατυπώσετε μια εικασία και να την ελέγξετε μετακινώντας τις κορυφές του τριγώνου.
- Να διατυπώσετε το συμπέρασμά σας στην τάξη.



Δευτερεύοντα στοιχεία

Σε κάθε τρίγωνο τα τρία ύψη του τέμνονται στο ίδιο σημείο.
Το σημείο τομής των τριών υψών (ή των φορέων τους) ονομάζεται **ορθόκεντρο** του τριγώνου.

- Στα οξυγώνια τρίγωνα το ορθόκεντρο είναι στο εσωτερικό του τριγώνου.
- Στα ορθογώνια τρίγωνα το ορθόκεντρο ταυτίζεται με την κορυφή της ορθής γωνίας (γιατί;).
- Στα αμβλυγώνια τρίγωνα βρίσκεται στο εξωτερικό του τριγώνου.

Οι τρεις **διάμεσοι**, οι τρεις **διχοτόμοι** και τα τρία **ύψη** ενός τριγώνου ονομάζονται **δευτερεύοντα στοιχεία.**

2.4 ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Ένα από τα κύρια χαρακτηριστικά του τριγώνου είναι το άθροισμα των γωνιών του.

Διερεύνηση 5

Να σχεδιάσετε στο επίπεδο χαρτί σας ένα τρίγωνο ΑΒΓ και με το μοιρογνωμόνιο να μετρήσετε προσεκτικά τις γωνίες του.

- Να διατυπώσετε μια εικασία για το άθροισμα των γωνιών του και να την ελέγξετε και με άλλα παραδείγματα.
- Να ανοίξετε την εφαρμογή και να ερευνήσετε το άθροισμα των γωνιών τριγώνου.
- Να διατυπώσετε το συμπέρασμά σας στην τάξη.

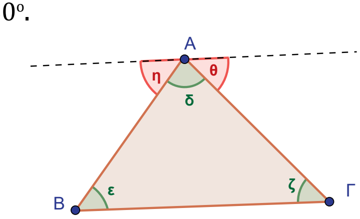
Άθροισμα γωνιών

Το άθροισμα γωνιών τριγώνου

Να αιτιολογήσετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ το άθροισμα των γωνιών του είναι 180^o.

Αιτιολόγηση:

- Σχεδιάζουμε ένα τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ, όπως στο διπλανό σχήμα.
- Σχεδιάζουμε την ευθεία που διέρχεται από το σημείο Α και είναι παράλληλη στην ευθεία ΒΓ.
- Οι γωνίες $\hat{\varepsilon}$ και $\hat{\eta}$ είναι εντός εναλλάξ των δύο παραλλήλων που τέμνονται από την ΑΒ. Άρα είναι $\hat{\varepsilon} = \hat{\eta}$.



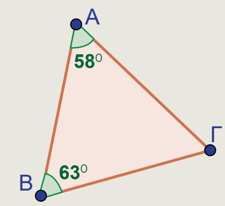
• Οι γωνίες $\hat{\zeta}$ και $\hat{\theta}$ είναι εντός εναλλάξ των δύο παραλλήλων που τέμνονται από την ΑΓ. Άρα είναι $\hat{\zeta} = \hat{\theta}$.
• Το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου $\hat{\delta} + \hat{\varepsilon} + \hat{\zeta}$ είναι ίσο με το άθροισμα $\hat{\delta} + \hat{\eta} + \hat{\theta}$.
• Είναι $\hat{\delta} + \hat{\eta} + \hat{\theta} = 180^o$ διότι σχηματίζουν μια ευθεία γωνία.

Άρα, το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου είναι: $\hat{\delta} + \hat{\varepsilon} + \hat{\zeta} = 180^o$.

Στο τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ αιτιολογήσαμε ότι το άθροισμα των γωνιών του είναι ίσο με 180^o. Άρα σε κάθε τρίγωνο ισχύει το ίδιο.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1 «*Υπολογισμός της τρίτης γωνίας τριγώνου*»

Στο τρίγωνο ΑΒΓ στο διπλανό σχήμα, είναι $\hat{A} = 58^o$ και $\hat{B} = 63^o$.
• Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\Gamma}$.
• Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του.

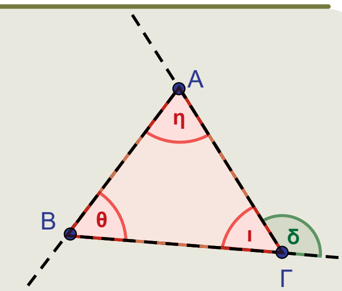


Απάντηση

Ισχύει $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o$. Άρα $\hat{\Gamma} = 180^o - \hat{A} - \hat{B} = 180^o - 58^o - 63^o = 59^o$.
Άρα, το τρίγωνο είναι οξυγώνιο, αφού όλες του οι γωνίες είναι οξείες.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2 «*Οι εξωτερικές γωνίες τριγώνου*»

Εξωτερική γωνία τριγώνου ονομάζεται η εφεξής και παραπληρωματική γωνία μιας γωνίας του τριγώνου.
Στο διπλανό σχήμα, η γωνία $\hat{\delta}$ είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου ΑΒΓ.
Να αιτιολογήσετε ότι $\hat{\delta} = \hat{\eta} + \hat{\theta}$



Αιτιολόγηση:

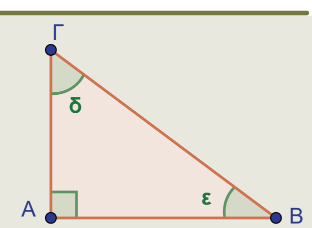
Ισχύει $\hat{\iota} + \hat{\delta} = 180^o$, οπότε: $\delta = 180^o - \hat{\iota}$ (1).
Είναι $\hat{\eta} + \hat{\theta} + \hat{\iota} = 180^o$. Άρα $\hat{\eta} + \hat{\theta} = 180^o - \hat{\iota}$ (2).
Στις ισότητες (1), (2) τα δεύτερα μέλη είναι ίσα. Συνεπώς και τα πρώτα μέλη είναι ίσα. Άρα $\hat{\delta} = \hat{\eta} + \hat{\theta}$.

Επειδή το τρίγωνο είναι τυχαίο, το συμπέρασμα θα ισχύει για κάθε τρίγωνο. Άρα:

Σε κάθε τρίγωνο, κάθε εξωτερική γωνία του είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3 «*Οι γωνίες στο ορθογώνιο τρίγωνο*»

Στο ορθογώνιο τρίγωνο η μια γωνία του είναι ορθή. Στο διπλανό τυχαίο ορθογώνιο τρίγωνο, η γωνία $\hat{A} = 90^o$.
Να αιτιολογήσετε ότι οι γωνίες $\hat{\delta}$ και $\hat{\varepsilon}$ είναι οξείες γωνίες και συμπληρωματικές.



Αιτιολόγηση:

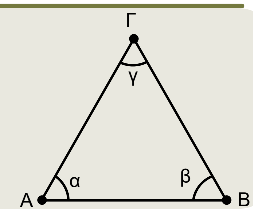
Σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα των γωνιών του είναι 180°, οπότε $\hat{Α} + \hat{Β} + \hat{Γ} = 180°$.
Η γωνία $\hat{Α}$ είναι ορθή. Άρα $\hat{Β} + \hat{Γ} = 90°$. Συνεπώς οι οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου είναι συμπληρωματικές.
Επειδή $\hat{Β} + \hat{Γ} = 90°$ θα είναι $\hat{Β} < 90°$ και $\hat{Γ} < 90°$. Επομένως οι γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου είναι οξείες.
Επειδή το τρίγωνο είναι τυχαίο, το συμπέρασμα θα ισχύει για κάθε ορθογώνιο τρίγωνο.

Γενικά:

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο δύο γωνίες του είναι οξείες και συμπληρωματικές.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4 *«Οι γωνίες του ισοπλεύρου τριγώνου»*

Το ισόπλευρο τρίγωνο έχει όλες τις πλευρές του και όλες τις γωνίες του επίσης ίσες, όπως στο διπλανό σχήμα.
Να αιτιολογήσετε ότι σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο οι γωνίες του είναι ίσες με 60°.



Αιτιολόγηση

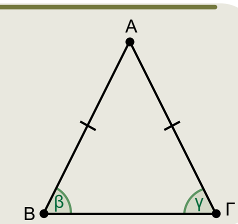
Το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ είναι $\hat{α} + \hat{β} + \hat{γ} = 180°$.
Αφού το τρίγωνο είναι ισόπλευρο, οι γωνίες του είναι ίσες και επομένως $\hat{α} = \hat{β} = \hat{γ} = \frac{180°}{3} = 60°$.

Επειδή το ισόπλευρο τρίγωνο του σχήματος είναι τυχαίο ως προς το μήκος των πλευρών του, το συμπέρασμα θα ισχύει για κάθε ισόπλευρο τρίγωνο. **Γενικά:**

Σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο οι γωνίες του είναι ίσες με 60°.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 5 *«Οι γωνίες στο ισοσκελές τρίγωνο»*

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ, και $\hat{β} = \hat{γ}$.
Αν η γωνία $\hat{Α}$ είναι 80° να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{β}$ και $\hat{γ}$.



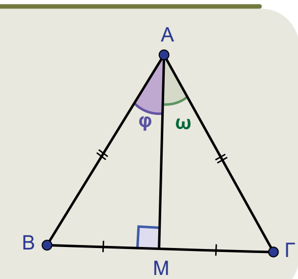
Απάντηση

Σε κάθε τρίγωνο οι γωνίες του έχουν άθροισμα 180°, οπότε $\hat{Α} + \hat{β} + \hat{γ} = 180°$.
Έχουμε από την εκφώνηση ότι $\hat{Α} = 80°$.
Άρα $\hat{β} + \hat{γ} = 180° - 80° = 100°$ και επειδή $\hat{β} = \hat{γ}$ παίρνουμε: $\hat{β} = \hat{γ} = 50°$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 6 *«Η μεσοκάθετος στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου»*

Το τρίγωνο ΑΒΓ στο διπλανό σχήμα είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ, γωνία $Β\hat{Α}Γ = 64°$ και ΑΜ ύψος του τριγώνου.

- Να κάνετε στο επίπεδο χαρτί σας ένα ανάλογο σχήμα, να μετρήσετε τις γωνίες του, τα μήκη ΒΜ, ΓΜ και να ερευνήσετε τις ιδιότητες του ύψους ΑΜ.
- Να αιτιολογήσετε το συμπέρασμά σας υπολογίζοντας τις γωνίες $\hat{Β}$, $\hat{Γ}$, $\hat{ω}$ και $\hat{φ}$ του τριγώνου.
- Να αιτιολογήσετε ότι το ύψος ΑΜ είναι μεσοκάθετος, διάμεσος και διχοτόμος.



Απάντηση

- *Με τη μέτρηση έχουμε* $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 58^o$.

  Αιτιολόγηση: Γνωρίζουμε ότι οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ στο ισοσκελές τρίγωνο είναι ίσες και ότι το άθροισμα των τριών γωνιών του είναι 180^o. Άρα $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o$ και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, οπότε $64^o + 2 \cdot \hat{B} = 180^o$ ή $2 \cdot \hat{B} = 180^o - 64^o = 116^o$. Επομένως $\hat{B} = \frac{116^o}{2} = 58^o$ και $\hat{\Gamma} = 58^o$.
- *Με τη μέτρηση έχουμε* $\hat{\omega} = \hat{\varphi} = 32^o$.

  Αιτιολόγηση: Το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ορθογώνιο στο Μ. Άρα οι γωνίες του $\hat{B}$ και $\hat{\varphi}$ είναι συμπληρωματικές. Επομένως $\hat{B} + \hat{\varphi} = 90^o$, οπότε $\hat{\varphi} = 90^o - 58^o = 32^o$. Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε ότι $\hat{\omega} = 32^o$.
- *Το ύψος είναι μεσοκάθετος, διάμεσος και διχοτόμος.*

  Αιτιολόγηση: Το ύψος ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$ διότι $\hat{\omega} = \hat{\varphi} = 32^o$.
  Η κορυφή Α απέχει ίσες αποστάσεις από τα σημεία Β και Γ. Άρα ανήκει στη μεσοκάθετο του ΒΓ.
  Επειδή ΑΜ ⊥ ΒΓ ο φορέας του ύψους ΑΜ θα είναι μεσοκάθετος του ΒΓ.
  Η ΑΜ είναι διάμεσος στο τρίγωνο διότι το σημείο Μ είναι μέσο της ΒΓ.

Τα παραπάνω ισχύουν σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, καθώς αλλάζει μόνο η γωνία της κορυφής $B\hat{A}\Gamma$ και τα μήκη των ίσων πλευρών. Άρα:

Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο το ύψος που αντιστοιχεί στη βάση του είναι ταυτόχρονα τμήμα της μεσοκαθέτου, διάμεσος και διχοτόμος της γωνίας της απέναντι κορυφής.

Το ισόπλευρο τρίγωνο είναι κατά τρεις τρόπους ισοσκελές. Άρα:

Στο ισόπλευρο τρίγωνο και τα τρία ύψη του είναι τμήματα των μεσοκαθέτων, διάμεσοι και διχοτόμοι ταυτόχρονα.

2.5 ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΡΙΓΩΝΩΝ ΜΕ ΤΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΟΡΓΑΝΑ

Ένα τρίγωνο έχει τρεις πλευρές και τρεις γωνίες. Πόσα άραγε το λιγότερο από τα έξι αυτά στοιχεία πρέπει να γνωρίζουμε για να κατασκευάσουμε με τα γεωμετρικά μας όργανα ένα τρίγωνο;
Για να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό, παραθέτουμε τρία σχετικά προβλήματα:

Πρόβλημα 1

Να κατασκευάσετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ που να έχει ΑΒ = 3 μονάδες, ΑΓ = 4 μονάδες και $\hat{A} = 50^o$.

Κατασκευή:

(α) Με το μοιρογνωμόνιό μας σχεδιάζουμε γωνία $\chi\hat{A}\psi$ ίση με 50^o.
(β) Στην πλευρά Αχ σχεδιάζουμε σημείο Β έτσι ώστε ΑΒ = 3cm.
(γ) Στην πλευρά Αψ σχεδιάζουμε σημείο Γ ώστε ΑΓ = 4cm.
(δ) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αυτό που μας ζητείται να κατασκευάσουμε, αφού $\hat{A} = 50^o$ και οι πλευρές ΑΒ και ΑΓ είναι ίσες με 3 cm και 4 cm, αντίστοιχα.

Σχόλιο:

Οποιοδήποτε άλλο τρίγωνο κατασκευαστεί με αυτά τα δεδομένα θα ταυτίζεται με αυτό. Άρα τα τρία αυτά δεδομένα, πλευρά, γωνία, πλευρά (Π-Γ-Π) είναι αρκετά για να ορίσουν ένα συγκεκριμένο τρίγωνο.

Να ανοίξετε την εφαρμογή και να κάνετε την παραπάνω κατασκευή σε ψηφιακό περιβάλλον.

Κατασκευή τριγώνου

Όταν γνωρίζουμε δύο πλευρές και την περιεχομένη γωνία ενός τριγώνου, γνωρίζουμε το τρίγωνο, γιατί μπορούμε να το κατασκευάσουμε.

Πρόβλημα 2

Να κατασκευάσετε τρίγωνο ΑΒΓ όταν γνωρίζετε την πλευρά ΒΓ = 4 μονάδες και τις γωνίες $\hat{B} = 48^o$ και $\hat{\Gamma} = 62^o$.

Κατασκευή:

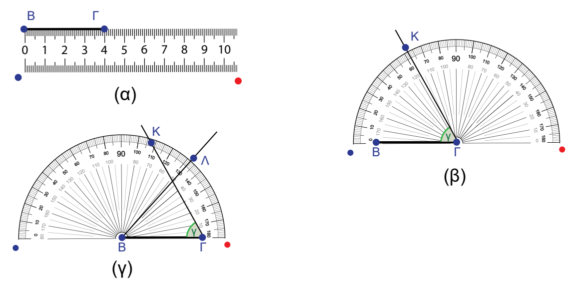
(α) Με τον χάρακα σχεδιάζουμε ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ = 4cm,

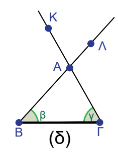
(β) Με το μοιρογνωμόνιο σχεδιάζουμε γωνία $B\hat{\Gamma}K = 62^o$.

(γ) Με το μοιρογνωμόνιο σχεδιάζουμε γωνία $\Gamma\hat{B}\Lambda = 48^o$.

(δ) Σχεδιάζουμε το σημείο τομής Α των ΒΛ και ΓΚ.

(ε) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι το ζητούμενο.





Να ανοίξετε την εφαρμογή και να κάνετε την παραπάνω κατασκευή σε ψηφιακό περιβάλλον.

Κατασκευή τριγώνου

Σχόλιο:

Σε κάθε όμοια περίπτωση πρέπει το άθροισμα των δύο προσκείμενων γωνιών να είναι μικρότερο των 180°.

Όταν γνωρίζουμε μια πλευρά και τις προσκείμενες γωνίες ενός τριγώνου, γνωρίζουμε το τρίγωνο γιατί μπορούμε να το κατασκευάσουμε.

Πρόβλημα 3

Να κατασκευάσετε τρίγωνο ΑΒΓ όταν ΑΒ = 3 cm, ΑΓ = 5cm και ΒΓ = 7cm.

Κατασκευή:

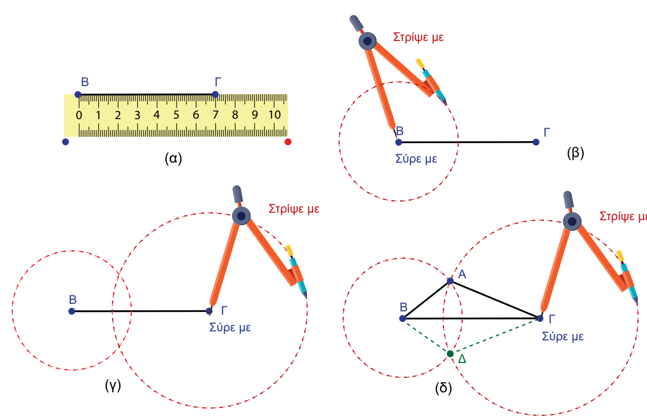
(α) Με τον χάρακα σχεδιάζουμε το τμήμα ΒΓ = 7cm.

(β) Με τον διαβήτη σχεδιάζουμε κύκλο με κέντρο το Β και ακτίνα 3 cm.

(γ) Με τον διαβήτη σχεδιάζουμε κύκλο με κέντρο το σημείο Γ και ακτίνα 5cm.

(δ) Σχεδιάζουμε το σημείο τομής των δύο κύκλων και το ονομάζουμε Α.

(ε) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι το ζητούμενο αφού έχει ΒΓ = 7 μονάδες, ΑΒ = 3cm και ΑΓ = 5cm.



Σημείωση:

Με την κατασκευή αυτή προκύπτει ακόμα ένα τρίγωνο, το ΒΔΓ που είναι ίσο με το ΑΒΓ.

Όταν γνωρίζουμε τις τρεις πλευρές ενός τριγώνου, μπορούμε να κατασκευάσουμε το τρίγωνο.

Να ανοίξετε την εφαρμογή και να κάνετε την παραπάνω κατασκευή σε ψηφιακό περιβάλλον.

Κατασκευή τριγώνου

ΑΣΚΗΣΕΙΣ, ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ & ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1 Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει $\hat{A}=112^\circ$ και $\hat{B}=22^\circ$. Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\Gamma}$.

2 Να εξετάσετε αν υπάρχει τρίγωνο που να έχει μια γωνία ορθή και μια αμβλεία. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

3 Να κατασκευάσετε με τα γεωμετρικά σας όργανα ένα τρίγωνο ΑΒΓ όταν γνωρίζετε ότι ΒΓ = 4 μονάδες, $\hat{B} = 62^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 44^\circ$. Στη συνέχεια να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{A}$ και να ελέγξετε αν συμφωνεί με τη γωνία $\hat{A}$ της κατασκευής σας.

4 Να εξετάσετε αν ένα τρίγωνο μπορεί να έχει δύο γωνίες αμβλείες. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

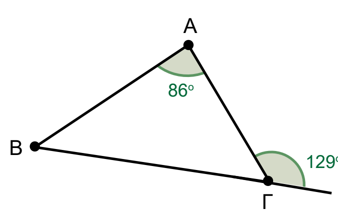
5 Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΑΒΓ στις παρακάτω περιπτώσεις

(α) Έχει $\hat{B} = 68^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 34^\circ$.

(β) Έχει $\hat{A} = 18^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 42^\circ$.

(γ) Έχει ΑΒ = 4 cm, $\hat{\Gamma} = 72^\circ$ και $\hat{A} = 18^\circ$.

6 Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ στο παρακάτω σχήμα.



7 Να κατασκευάσετε ένα αμβλυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 120^\circ$, ΑΒ = 3 μονάδες και ΑΓ = 4 μονάδες. Στη συνέχεια να σχεδιάσετε τη διάμεσό του ΑΜ, τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{B}$ και το ύψος από την κορυφή Γ.

8 Να κατασκευάσετε στο επίπεδο χαρτί σας ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ και τη διάμεσό του ΑΜ. Να συγκρίνετε τη διάμεσο ΑΜ με τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΜ και ΓΜ. Να διατυπώσετε ένα συμπέρασμα.

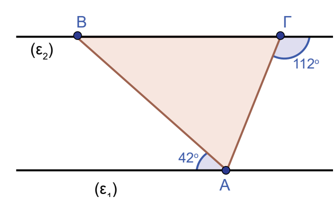
9 **Διερεύνηση για το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών τριγώνου**

Εξωτερικές γωνίες

Να ανοίξετε την ψηφιακή εφαρμογή και να ερευνήσετε το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ.

- Να διατυπώσετε μια εικασία για το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών του τριγώνου.
- Να κάνετε ένα ανάλογο σχήμα στο επίπεδο χαρτί σας και να ελέγξετε την εικασία σας.
- Να αιτιολογήσετε την εικασία σας.

10 Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι παράλληλες. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

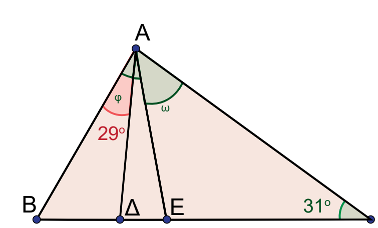


11 **Υπάρχει τέτοιο τρίγωνο;**

Ο Ορέστης σκέφτεται να κατασκευάσει ένα τρίγωνο ΑΒΓ που έχει τη γωνία $\hat{B}$ διπλάσια της γωνίας $\hat{A}$ και τη γωνία $\hat{\Gamma}$ τριπλάσια της $\hat{B}$.

- Υπάρχει τέτοιο τρίγωνο; Εξηγήστε.
- Αν υπάρχει, επιλέξτε η πλευρά ΒΓ να είναι 3cm και κατασκευάστε το.
- Περιγράψτε την κατασκευή του στους συμμαθητές σας.

12 Στο τρίγωνο ΑΒΓ το ΑΔ είναι ύψος και η ΑΕ διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$. Να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών $\hat{\omega}$, $\hat{\varphi}$ και να περιγράψετε τους συλλογισμούς που κάνατε κατά τους υπολογισμούς σας.



Ανακεφαλαίωση

Τρίγωνο είναι το πολύγωνο που έχει τρεις κορυφές.

Κάθε τρίγωνο έχει **τρεις πλευρές** και **τρεις γωνίες**. Ονομάζεται με τα γράμματα των κορυφών του. Οι γωνίες του ονομάζονται επίσης με τα γράμματα των κορυφών του ή με μικρά γράμματα.

- Τα τρίγωνα χαρακτηρίζονται σε σχέση με:
  - ► Τις πλευρές τους, σε **σκαληνά**, **ισοσκελή** και **ισόπλευρα**.
  - ► Τις γωνίες τους, σε **οξυγώνια**, **αμβλυγώνια** και **ορθογώνια**.
- **Διάμεσος** τριγώνου είναι το ευθύγραμμο τμήμα που έχει άκρα μια κορυφή και το μέσο της απέναντι πλευράς. Οι τρεις διάμεσοι τέμνονται στο ίδιο σημείο που ονομάζεται **κέντρο βάρους** του τριγώνου.
- **Διχοτόμος** μιας γωνίας ενός τριγώνου είναι το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει την κορυφή της γωνίας με ένα σημείο της απέναντι πλευράς και διχοτομεί τη γωνία. Οι τρεις διχοτόμοι του τέμνονται στο ίδιο σημείο που ονομάζεται **έγκεντρο** του τριγώνου.
- **Ύψος** ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα μια κορυφή του και το σημείο τομής της κάθετης από αυτή την κορυφή προς την ευθεία της απέναντι πλευράς του. Οι φορείς των υψών του τέμνονται σε ένα σημείο που ονομάζεται **ορθόκεντρο** του τριγώνου.
- Το **άθροισμα των γωνιών τριγώνου** είναι ίσο με μια ευθεία γωνία ή 180^o.
- Κάθε **εξωτερική γωνία** τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του.

Αυτοαξιολόγηση

1. Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει $\hat{A} = 65^o$ και $\hat{B} = 38^o$. Τι είδους τρίγωνο είναι; Επίλεξε τις σωστές απαντήσεις

Α) Οξυγώνιο **Β)** Αμβλυγώνιο **Γ)** Ορθογώνιο **Δ)** Σκαληνό **Ε)** Ισοσκελές

2. Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο οι ίσες γωνίες του έχουν μέτρο 42^o. Τι είδους τρίγωνο είναι; Επίλεξε τη σωστή απάντηση.

Α) Οξυγώνιο **Β)** Αμβλυγώνιο **Γ)** Ορθογώνιο

3. Να κυκλώσετε τους σωστούς από τους παρακάτω ισχυρισμούς.

Α) Ένα ισοσκελές τρίγωνο μπορεί να είναι ορθογώνιο.

Β) Ένα ορθογώνιο τρίγωνο μπορεί να είναι και αμβλυγώνιο.

Γ) Ένα σκαληνό τρίγωνο μπορεί να είναι και ορθογώνιο.

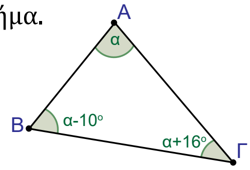
Δ) Ένα αμβλυγώνιο τρίγωνο μπορεί να είναι και ισοσκελές.

Ε) Ένα ορθογώνιο τρίγωνο μπορεί να είναι και ισόπλευρο.

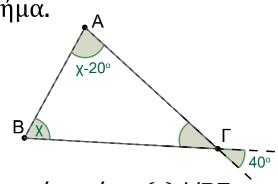
Επιλέξτε Σ ή Λ ανάλογα με το αν η πρόταση είναι σωστή ή λανθασμένη.	**Σωστό**	**Λάθος**
4. Ένα τρίγωνο δεν μπορεί να έχει δύο ορθές γωνίες.	☐	☐
5. «Η διχοτόμος της αμβλείας γωνίας ενός τριγώνου δημιουργεί δύο οξυγώνια τρίγωνα». Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.	☐	☐
6. «Υπάρχει τρίγωνο με μια από τις εξωτερικές του γωνίες να είναι οξεία γωνία». Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.	☐	☐
7. «Σε ένα τρίγωνο, το σημείο τομής των διαμέσων είναι πάντοτε εσωτερικό σημείο του τριγώνου». Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.	☐	☐
8. «Σε ένα τρίγωνο, το σημείο τομής των φορέων των υψών είναι πάντοτε εσωτερικό σημείο του τριγώνου». Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.	☐	☐

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ – ΣΥΝΘΕΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ

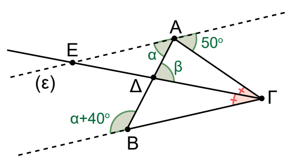
1 Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ στο παρακάτω σχήμα.



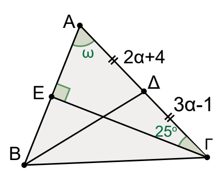
2 Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ στο παρακάτω σχήμα.



3 Στο παρακάτω σχήμα είναι (ε)//ΒΓ και η ΓΔ διχοτόμος της γωνίας $\text{Α}\hat{\Gamma}\text{Β}$. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$.

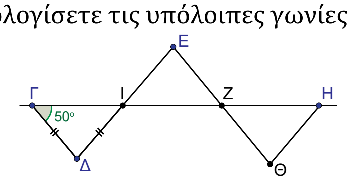


4 Να υπολογίσετε το μήκος της ΑΓ και τη γωνία $\hat{\omega}$.

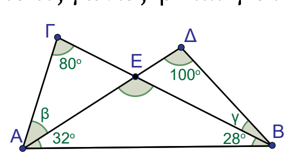


5 Στο παρακάτω σχήμα είναι ΓΔ//ΕΘ, ΕΔ//ΘΗ και ΓΔ = ΔΙ.

- Να υπολογίσετε τις υπόλοιπες γωνίες του σχήματος.



6 Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\beta}$ και $\hat{\gamma}$ στο παρακάτω σχήμα.



7 Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν τα εξής:

- Η εξωτερική γωνία Α, είναι ίση με 110° ($\hat{\text{Α}}_{\varepsilon\xi} = 110°$)
- Η γωνία Β είναι $\hat{\text{Β}} = \frac{2}{7}\hat{\text{Α}}$

Να βρείτε το είδος του τριγώνου.

8 **Τρίγωνα στην τέχνη (Συνθετική εργασία)**

Τα τρίγωνα, όπως και άλλα γεωμετρικά σχήματα, συχνά χρησιμοποιούνται ως αντικείμενα ή δομικές μονάδες για καλλιτεχνικές ή άλλες συνθέσεις. Διάσημοι ζωγράφοι, όπως ο Wassily Kandinsky, χρησιμοποίησαν το γεωμετρικό σχήμα του τριγώνου για να συνθέσουν έργα τέχνης που έμειναν ως πολιτιστική κληρονομιά στην ανθρωπότητα.

- Να μελετήσετε έργα διάσημων ζωγράφων και να δημιουργήσετε ένα αφηρημένο έργο τέχνης με θέμα ή δομική μονάδα το τρίγωνο.
- Να ανοίξετε την εφαρμογή που βρίσκεται εδώ και να ακολουθήσετε τις οδηγίες.

Τα τρίγωνα στην τέχνη

Σύνδεση της Γεωμετρίας με την Ιστορία

Να ανοίξετε την εφαρμογή και να μελετήσετε το προτεινόμενο από την ιστορία της Γεωμετρίας θέμα.

Πρόταση 32, Βιβλίο Ι των Στοιχείων

3

Κεφάλαιο

Τετράπλευρα

3 ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

- Να διερευνούν τα είδη των τετράπλευρων (παραλληλόγραμμα, τραπέζια) και να διατυπώνουν τους σχετικούς ορισμούς.
- Να χρησιμοποιούν τα γεωμετρικά όργανα και τα ψηφιακά εργαλεία για να διατυπώνουν και να ελέγχουν εικασίες σχετικές με τις ιδιότητες ορθογωνίου παραλληλογράμμου, ρόμβου και τετραγώνου τις οποίες να τεκμηριώνουν αναπτύσσοντας λογικούς συλλογισμούς.
- Να ταξινομούν τα είδη των τετράπλευρων με βάση τις ιδιότητές τους.
- Να σχεδιάζουν με τα γεωμετρικά όργανα παραλληλόγραμμα με δεδομένα χαρακτηριστικά και να περιγράφουν τα βήματα της σχεδίασης.
- Να αξιοποιούν τις ιδιότητες της μεσοκαθέτου, της παραλληλίας και της καθετότητας ευθειών και των παραλληλογράμμων στην επίλυση απλών προβλημάτων.

3.1 ΤΟ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟ

Το επόμενο γεωμετρικό σχήμα που θα εξετάσουμε, μετά το τρίγωνο (3-γωνο), είναι το τετράπλευρο (4-πλευρο). Το πολύγωνο, δηλαδή, που έχει τέσσερις κορυφές και τέσσερις πλευρές.

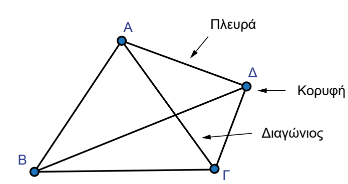
Τετράπλευρο ονομάζεται το πολύγωνο που έχει τέσσερις πλευρές.

Ο κανόνας 4-4-4-2

Κάθε τετράπλευρο έχει 4 κορυφές, 4 πλευρές, 4 γωνίες και 2 διαγωνίους.

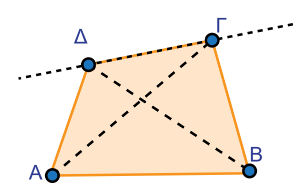
Οι απέναντι και οι διαδοχικές πλευρές και γωνίες

Σε κάθε τετράπλευρο υπάρχουν **απέναντι** πλευρές και απέναντι γωνίες. Επίσης διαδοχικές πλευρές και **διαδοχικές** γωνίες. Για παράδειγμα, στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος, οι ΑΔ και ΒΓ είναι απέναντι πλευρές, ενώ οι πλευρές ΑΔ και ΑΒ είναι διαδοχικές. Οι γωνίες $B\hat{A}\Delta$ και $B\hat{\Gamma}\Delta$ είναι απέναντι, ενώ οι $B\hat{A}\Delta$ και $A\hat{B}\Gamma$ είναι διαδοχικές γωνίες.



Οι διαγώνιοι

Κάθε τετράπλευρο έχει δύο διαγωνίους. Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ, οι ΑΓ και ΒΔ είναι διαγώνιοι.



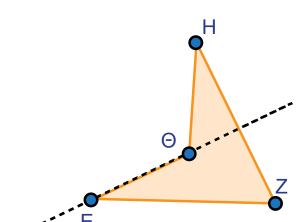
(1)

Είδη τετράπλευρων

Μπορούμε να χωρίσουμε τα τετράπλευρα σε **κυρτά** και **μη κυρτά**.

Όταν η προέκταση κάθε πλευράς τετραπλεύρου δεν το τέμνει σε άλλα σημεία ονομάζεται κυρτό. Παράδειγμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ στο διπλανό σχήμα.

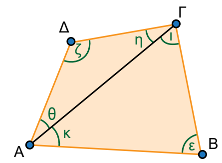
Αν η προέκταση, έστω και μίας πλευράς του, το τέμνει και σε άλλο σημείο, το τετράπλευρο ονομάζεται **μη κυρτό**.
Παράδειγμα, το τετράπλευρο ΕΖΗΘ.
Στο βιβλίο μελετούμε μόνο τα κυρτά τετράπλευρα.



(2)

Πρόταση 1

Να αιτιολογήσετε ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τετραπλεύρου είναι ίσο με 360°.



Αιτιολόγηση:
Έστω το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος.
Η διαγώνιος ΑΓ χωρίζει το τετράπλευρο σε δύο τρίγωνα. Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι ίσο με 180° οπότε:

- Στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε $\hat{\varepsilon} + \hat{\kappa} + \hat{\iota} = 180^\circ$.
- Στο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε $\hat{\zeta} + \hat{\eta} + \hat{\theta} = 180^\circ$.

Άρα $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = \hat{\varepsilon} + \hat{\kappa} + \hat{\iota} + \hat{\zeta} + \hat{\eta} + \hat{\theta} = 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$.

3.2 ΤΑ ΕΙΔΗ ΤΩΝ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΩΝ

Διερεύνηση 1

Χρησιμοποιήστε το τετραγωνισμένο χαρτί για να σχεδιάσετε:

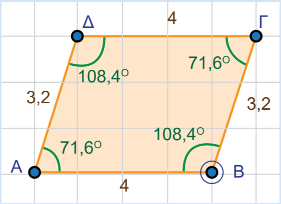
- Ένα κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ που να έχει ένα ζεύγος απέναντι πλευρών παράλληλες.
- Ένα κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ που να έχει και τα δύο ζεύγη των απέναντι πλευρών παράλληλα.
- Ένα κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ που να έχει όλες τις γωνίες του ορθές.
- Ένα κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ που να έχει όλες τις πλευρές του ίσες.
- Να περιγράψετε κάθε κατηγορία τετραπλεύρου.

Κυρτά τετράπλευρα

Να ανοίξετε την εφαρμογή «Κατηγορίες τετραπλεύρων» που θα βρείτε εδώ και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

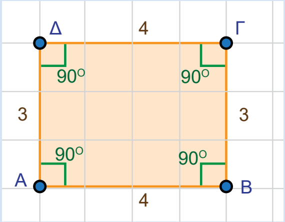
Παραλληλόγραμμο
Το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές παράλληλες, ονομάζεται **παραλληλόγραμμο.**

- Οποιαδήποτε πλευρά του μπορεί να ονομαστεί **βάση**.
- Η απόσταση ενός σημείου της απέναντι πλευράς από τη βάση ονομάζεται **ύψος** του παραλληλογράμμου.



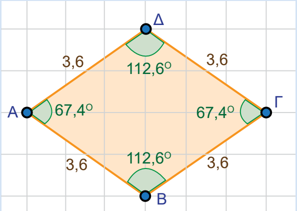
Ορθογώνιο
Το τετράπλευρο που έχει όλες τις γωνίες του ορθές, ονομάζεται **ορθογώνιο**.

- Η μια πλευρά του μπορεί να ονομαστεί **βάση** και η κάθετη πλευρά σε αυτήν **ύψος**.



Ρόμβος
Το τετράπλευρο που έχει όλες τις πλευρές του ίσες, ονομάζεται **ρόμβος**.

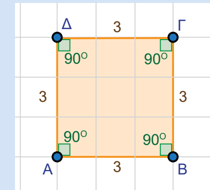
- Οποιαδήποτε πλευρά του μπορεί να ονομαστεί **βάση** και η απόσταση ενός σημείου της απέναντι πλευράς από αυτήν ονομάζεται **ύψος**.



Τετράγωνο

Το κυρτό τετράπλευρο που έχει όλες τις πλευρές ίσες και τις γωνίες του ορθές, ονομάζεται **τετράγωνο**.

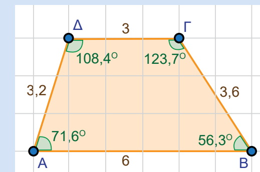
- Οποιαδήποτε πλευρά του μπορεί να ονομαστεί **βάση** και η κάθετη πλευρά σε αυτή ονομάζεται **ύψος**.



Τραπέζιο

Το κυρτό τετράπλευρο που έχει ένα μόνο ζεύγος απέναντι πλευρών παράλληλες, ονομάζεται **τραπέζιο**.

- Οι παράλληλες πλευρές ονομάζονται **βάσεις** και η απόσταση ενός σημείου της μιας από την άλλη ονομάζεται **ύψος** του τραπεζίου.
- Όταν οι μη παράλληλες πλευρές του είναι ίσες το τραπέζιο ονομάζεται **ισοσκελές τραπέζιο**.
- Όταν δύο γωνίες του είναι ορθές, το τραπέζιο ονομάζεται **ορθογώνιο τραπέζιο**.

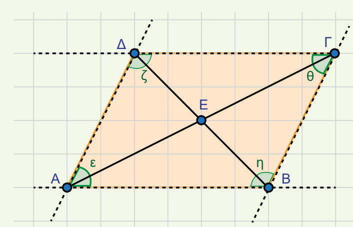


3.2.1 Το παραλληλόγραμμο

Διερεύνηση 2

Σε μιλιμετρέ χαρτί να σχεδιάσετε δύο ζεύγη παράλληλων ευθειών, όπως στο διπλανό σχήμα και να ονομάσετε Α, Β, Γ και Δ τα σημεία τομής τους.

- Με τα γεωμετρικά σας όργανα να συγκρίνετε τις πλευρές και τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.
- Επίσης, να συγκρίνετε τα τμήματα των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ που ορίζονται από το σημείο τομής τους Ε.
- Να διατυπώσετε εικασίες για τη σχέση των απέναντι πλευρών, των απέναντι γωνιών και των διαγωνίων του.



Παραλληλόγραμμα

Να ανοίξετε την εφαρμογή, να σύρετε τις κορυφές ώστε να σχηματίσετε ένα παραλληλόγραμμο και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

Σε κάθε παραλληλόγραμμο:

- Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.
- Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες.
- Οι διαγώνιοι διχοτομούνται.

Πρόταση 2

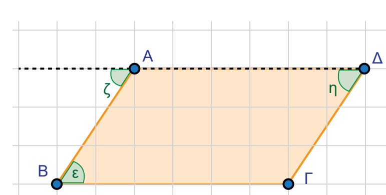
Να αιτιολογήσετε ότι οι απέναντι γωνίες ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες.

Αιτιολόγηση:

Έστω το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος.

- Οι γωνίες $\hat{\varepsilon}$ και $\hat{\zeta}$ είναι γωνίες εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΔ και ΒΓ που τέμνονται από την ΑΒ. Άρα $\hat{\varepsilon} = \hat{\zeta}$.
- Οι γωνίες $\hat{\zeta}$ και $\hat{\eta}$ είναι εντός, εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΑΒ και ΔΓ που τέμνονται από την ΑΔ.
  Άρα $\hat{\eta} = \hat{\zeta}$.
- Επειδή $\hat{\varepsilon} = \hat{\zeta}$ και $\hat{\eta} = \hat{\zeta}$ συμπεραίνουμε ότι: $\hat{\varepsilon} = \hat{\eta}$.

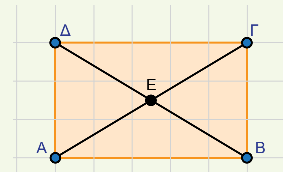
Άρα, οι απέναντι γωνίες σε κάθε παραλληλόγραμμο είναι ίσες.



3.2.2 Το ορθογώνιο

Διερεύνηση 3

Με τα γεωμετρικά σας όργανα να σχεδιάσετε στο μιλιμετρέ χαρτί σας ένα ορθογώνιο, όπως στο διπλανό σχήμα.



- Να εξετάσετε αν έχει τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου.
- Να συγκρίνετε τις διαγωνίους του.
- Να διατυπώσετε εικασίες για τη σχέση των απέναντι πλευρών, των απέναντι γωνιών και των διαγωνίων του.

Παραλληλόγραμμα

Να ανοίξετε την εφαρμογή, να σύρετε τις κορυφές του ΑΒΓΔ ώστε να σχηματίσετε ένα ορθογώνιο και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

- Να διατυπώσετε εικασίες για τη σχέση των απέναντι πλευρών, των απέναντι γωνιών και των διαγωνίων του.

Σε κάθε ορθογώνιο:

- Οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες και ίσες.
- Οι διαγώνιοι διχοτομούνται.
- Οι γωνίες του είναι ορθές.
- Οι διαγώνιοι είναι ίσες.

3.2.3 Ο ρόμβος

Διερεύνηση 4

Με τα γεωμετρικά σας όργανα να σχεδιάσετε στο μιλιμετρέ χαρτί σας έναν ρόμβο ΑΒΓΔ.

- Να εξετάσετε αν έχει τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου.
- Να εξετάσετε τις ιδιότητες των διαγωνίων του.
- Να διατυπώσετε εικασίες σχετικές με τις ιδιότητες του ρόμβου.

Παραλληλόγραμμα

Να ανοίξετε την εφαρμογή, να σύρετε τις κορυφές του ΑΒΓΔ ώστε να σχηματίσετε έναν ρόμβο και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

- Να διατυπώσετε εικασίες για τη σχέση των απέναντι πλευρών, των απέναντι γωνιών και των διαγωνίων του.

Σε κάθε ρόμβο:

- Όλες οι πλευρές του είναι ίσες.
- Οι διαγώνιοι διχοτομούνται και τέμνονται κάθετα.
- Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες.
- Κάθε διαγώνιος είναι διχοτόμος των αντίστοιχων γωνιών του ρόμβου.

3.2.4 Το τετράγωνο

Διερεύνηση 5

Με τα γεωμετρικά σας όργανα να σχεδιάσετε στο μιλιμετρέ χαρτί σας ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ.

- Να εξετάσετε αν έχει τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου.
- Να εξετάσετε τις ιδιότητες των διαγωνίων του.
- Να διατυπώσετε εικασίες σχετικές με τις ιδιότητες του τετραγώνου.

Να ανοίξετε την εφαρμογή και να σύρετε τις κορυφές του ΑΒΓΔ ώστε να σχηματίσετε έναν τετράγωνο και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

Παραλληλόγραμμα

- Να διατυπώσετε εικασίες και συμπεράσματα για τη σχέση των πλευρών, των απέναντι γωνιών και των διαγωνίων του.

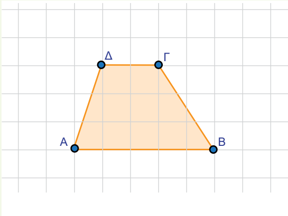
Σε κάθε τετράγωνο:

- Οι διαγώνιοι διχοτομούνται, όπως στο ορθογώνιο.
- Οι γωνίες του είναι ορθές, όπως στο ορθογώνιο.
- Οι διαγώνιοι είναι ίσες, όπως στο ορθογώνιο.
- Οι πλευρές του είναι ίσες, όπως στον ρόμβο.
- Κάθε διαγώνιος είναι μεσοκάθετος της άλλης, όπως στον ρόμβο.
- Κάθε διαγώνιος είναι διχοτόμος των αντίστοιχων γωνιών του τετραγώνου, όπως στον ρόμβο.

3.2.5 Το τραπέζιο

Διερεύνηση 6

Στο μιλιμετρέ χαρτί σας, με τα γεωμετρικά σας όργανα να σχεδιάσετε ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ, όπως στο διπλανό σχήμα.



- Να εξετάσετε τις ιδιότητες των διαγωνίων του.
- Να εξετάσετε τη σχέση των γωνιών του.
- Να διατυπώσετε εικασίες σχετικές με τις ιδιότητες του τραπεζίου.

Ισοσκελές τραπέζιο, ονομάζεται το τραπέζιο που έχει τις μη παράλληλες πλευρές του ίσες. Να εξετάσετε τις ιδιότητες των διαγωνίων του και των γωνιών του.

- Να ερευνήσετε την περίπτωση που στο τραπέζιο οι μη παράλληλες πλευρές του είναι ίσες (ισοσκελές τραπέζιο).
- Να διατυπώσετε εικασίες και συμπεράσματα για τη σχέση των γωνιών και των διαγωνίων του τυχαίου τραπεζίου καθώς και του ισοσκελούς τραπεζίου.

Να ανοίξετε την εφαρμογή και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

Τραπέζια

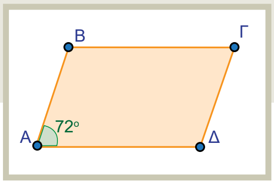
Σε ένα τραπέζιο:

- Οι γωνίες που σχηματίζονται από κάθε μη παράλληλη πλευρά του με τις βάσεις του είναι παραπληρωματικές.
- Οι γωνίες των βάσεων του ισοσκελούς τραπεζίου είναι ίσες.
- Οι διαγώνιες του ισοσκελούς τραπεζίου είναι ίσες.

3.2.6 Εφαρμογές

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Σε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $\hat{A} = 72°$.
Να υπολογίσετε τις υπόλοιπες γωνίες του παραλληλογράμμου.

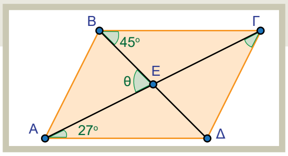


Απάντηση

Σε κάθε παραλληλόγραμμο οι απέναντι γωνίες είναι ίσες. Άρα $\hat{Γ} = 72°$.
Σε κάθε παραλληλόγραμμο οι διαδοχικές γωνίες του είναι παραπληρωματικές.
Άρα, $\hat{B} = 180° - 72° = 108°$, οπότε και $\hat{Δ} = 108°$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{θ}$ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ του σχήματος.



Απάντηση

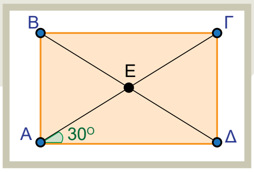
Οι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου είναι παράλληλες.

- Οι γωνίες $Β\hat{Γ}Α$ και $Δ\hat{Α}Γ$ είναι εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΒΓ και ΑΔ που τέμνονται από την ΑΓ, οπότε είναι ίσες. Άρα $Β\hat{Γ}Ε = 27°$.
- Η γωνία $\hat{θ}$ είναι εξωτερική γωνία στο τρίγωνο ΒΕΓ. Άρα είναι ίση με το άθροισμα των απέναντι εσωτερικών γωνιών του.
  Επομένως $\hat{θ} = 27° + 45° = 72°$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Δίνεται το ορθογώνιο ΑΒΓΔ του οποίου οι διαγώνιοι τέμνονται στο σημείο Ε.

- Να αιτιολογήσετε ότι οι διαγώνιοι ορίζουν τέσσερα ισοσκελή τρίγωνα.
- Αν $Ε\hat{Α}Δ = 30°$ να υπολογίσετε τη γωνία $Α\hat{Ε}Δ$.



Απάντηση

- Στο ορθογώνιο οι διαγώνιοι είναι ίσες και διχοτομούνται. Άρα ΑΕ = ΕΓ = ΒΕ = ΔΕ.
  Επομένως τα τέσσερα τρίγωνα, που ορίζουν οι διαγώνιοι είναι ισοσκελή.
- Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο οι γωνίες της βάσης του είναι ίσες.
  Άρα, στο τρίγωνο ΑΕΔ οι γωνίες $Α\hat{Δ}Ε$ και $Ε\hat{Δ}Α$ είναι ίσες.
  Επομένως $Ε\hat{Δ}Α = 30°$.
- Στο τρίγωνο ΑΕΔ έχουμε: $30° + Α\hat{Ε}Δ + 30° = 180°$ ή $Α\hat{Ε}Δ = 180° - 60°$ ή $Α\hat{Ε}Δ = 120°$.

3.3 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟΥ

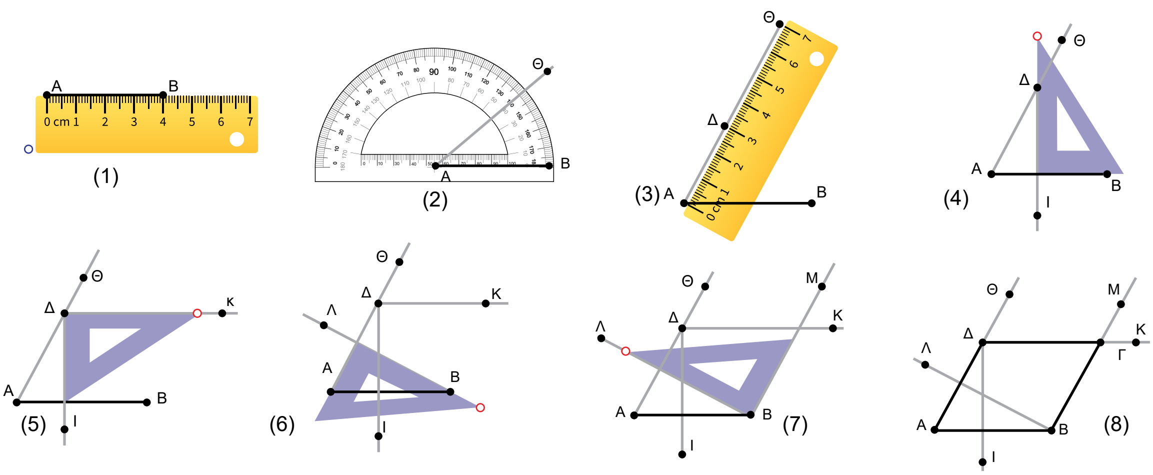
Πρόβλημα

Με τα γεωμετρικά σας όργανα να κατασκευάσετε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ που να έχει ΑΒ = 4 μονάδες, ΑΔ = 3 μονάδες και $\hat{A} = 42^{\circ}$.

Κατασκευή:

- Με τον χάρακα σχεδιάζουμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 4 μονάδες (σχήμα 1).
- Με το μοιρογνωμόνιο σχεδιάζουμε γωνία $B\hat{A}\Theta = 42^{\circ}$ (σχήμα 2).
- Με τον χάρακα, στην ημιευθεία ΑΘ σχεδιάζουμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ = 3 μονάδες (σχήμα 3).
- Με τον γνώμονα σχεδιάζουμε ημιευθεία ΔΙ κάθετη στην ΑΒ (σχήμα 4).
- Με τον γνώμονα πάλι, σχεδιάζουμε ημιευθεία ΔΚ κάθετη στην ΔΙ (σχήμα 5).
- Με τον γνώμονα σχεδιάζουμε από το Β ημιευθεία ΒΛ κάθετη στην ΑΔ (σχήμα 6).
- Με τον γνώμονα σχεδιάζουμε από το Β ημιευθεία ΒΜ κάθετη στην ΒΛ (σχήμα 7).

Σχεδιάζουμε το σημείο τομής Γ των ΔΚ και ΒΜ και έχουμε το ζητούμενο παραλληλόγραμμο (σχήμα 8).



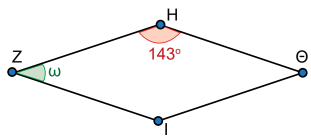
Σχόλιο:

Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα οποιοδήποτε παραλληλόγραμμο, αρκεί να εξασφαλίσουμε ότι ισχύουν οι ιδιότητές του. Για παράδειγμα, για να κατασκευάσουμε έναν ρόμβο πρέπει οι πλευρές ΑΒ και ΑΔ να είναι ίσες.

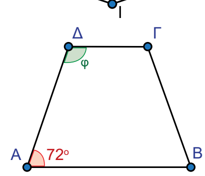
ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\omega}$ και $\hat{\varphi}$ στα παρακάτω παραλληλόγραμμα και στο παρακάτω τραπέζιο.

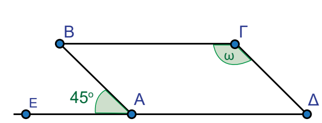
α)



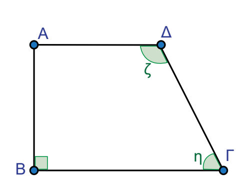
β)



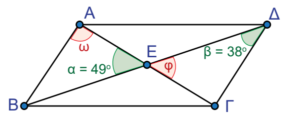
γ)



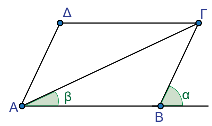
2 Στο παρακάτω ορθογώνιο τραπέζιο, η γωνία $\hat{\zeta}$ είναι διπλάσια της $\hat{\eta}$. Να υπολογίσετε τις δύο γωνίες.



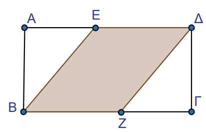
3 Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\omega}$ και $\hat{\varphi}$ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ στο παρακάτω σχήμα.



4 Στο παρακάτω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ οι γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ είναι συμπληρωματικές και διαφέρουν κατά 30°. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\mathrm{Α\hat{Δ}Γ}$ και $\mathrm{Α\hat{Γ}Δ}$.



5 Στο παρακάτω ορθογώνιο οι ΒΕ και ΔΖ είναι παράλληλες. Να αιτιολογήσετε ότι το τετράπλευρο ΒΕΔΖ είναι παραλληλόγραμμο.



6 **Κατασκευή ρόμβου**

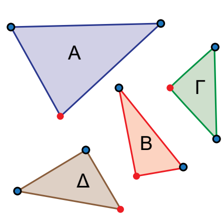
Να κατασκευάσετε έναν ρόμβο ώστε οι πλευρές του να είναι 4 μονάδες και η μία γωνία του να είναι 60°.

- Να υπολογίσετε τις υπόλοιπες γωνίες του ρόμβου.
- Να ερευνήσετε το είδος των τριγώνων που ορίζουν κάθε δύο πλευρές του με μια διαγώνιο και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

7 **Puzzle με παραλληλόγραμμο**

Να αντιγράψετε με διαφανές χαρτί τα τέσσερα σχήματα και στη συνέχεια να τα κόψετε με το ψαλίδι σας.

- Να συνθέσετε ένα παραλληλόγραμμο με τα τέσσερα σχήματα, τοποθετώντας τα έτσι ώστε να μην επικαλύπτονται, ούτε να αφήνουν κενά.



- Να συνθέσετε με τον ίδιο τρόπο ένα ορθογώνιο.
- Να ανοίξετε την εφαρμογή και να κάνετε πειράματα με τα τέσσερα σχήματα.

Puzzle

8 Να σχεδιάσετε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ ώστε ΑΒ//ΓΔ και ΑΔ//ΒΓ. Να σχεδιάσετε ακόμα τη διαγώνιο ΑΓ και τις κάθετες σε αυτή από τις κορυφές Β και Δ, ΒΕ και ΔΖ, όπου Ε και Ζ σημεία της ΑΓ.

- Με τα γεωμετρικά σας όργανα να ερευνήσετε το είδος του τετραπλεύρου ΔΕΒΖ.
- Να αιτιολογήσετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.

9 **Ο ανεμόμυλος**

Να ανοίξετε την εφαρμογή και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

Ανεμόμυλος

- Να συζητήσετε με τους συμμαθητές σας τα αποτελέσματα των πειραμάτων σας.
- Να χρησιμοποιήσετε το παραλληλόγραμμο για να κάνετε μια ανάλογη κατασκευή.

Ανακεφαλαίωση

- Τα τετράπλευρα διακρίνονται σε **κυρτά** και **μη κυρτά**.
- **Παραλληλόγραμμο** είναι το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες. Σε ένα παραλληλόγραμμο οι απέναντι πλευρές είναι ίσες, οι απέναντι γωνίες ίσες και οι διαγώνιοι διχοτομούνται.
- **Ορθογώνιο** είναι το τετράπλευρο που έχει όλες τις γωνίες του ορθές. Έχει όλες τις ιδιότητες των παραλληλογράμμων και επιπλέον οι διαγώνιοί του είναι ίσες.
- **Ρόμβος** είναι το τετράπλευρο που έχει όλες τις πλευρές του ίσες. Έχει όλες τις ιδιότητες των παραλληλογράμμων και επιπλέον οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα και διχοτομούν τις γωνίες του.
- **Τετράγωνο** είναι το τετράπλευρο που έχει όλες τις πλευρές ίσες και όλες τις γωνίες του ορθές. Έχει όλες τις ιδιότητες των παραλληλογράμμων και επιπλέον τις ιδιότητες του ορθογωνίου και του ρόμβου.
- **Τραπέζιο** είναι το κυρτό τετράπλευρο που έχει μόνο δύο απέναντι πλευρές παράλληλες.
- **Ισοσκελές τραπέζιο** είναι το τραπέζιο που έχει τις μη παράλληλες πλευρές του ίσες. Οι γωνίες των βάσεων είναι ίσες και οι διαγώνιοι είναι επίσης ίσες.

Αυτοαξιολόγηση

Να επιλέξετε τις σωστές απαντήσεις.

1. Κάθε ορθογώνιο και κάθε τετράγωνο έχουν τις παρακάτω κοινές ιδιότητες:

Α. Οι απέναντι πλευρές τους είναι παράλληλες.
Β. Οι διαδοχικές πλευρές τους είναι κάθετες και ίσες.
Γ. Οι απέναντι πλευρές τους είναι ίσες.
Δ. Οι γωνίες τους είναι ορθές.

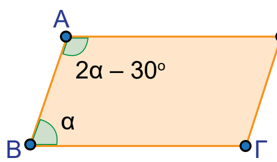
2. Ποιες από τις παρακάτω ιδιότητες ΔΕΝ είναι κοινές σε κάθε παραλληλόγραμμο και κάθε ρόμβο:

Α. Οι απέναντι πλευρές τους είναι παράλληλες.
Β. Όλες οι πλευρές τους είναι ίσες.
Γ. Όλες οι γωνίες τους είναι ίσες.
Δ. Οι απέναντι πλευρές τους είναι ίσες.

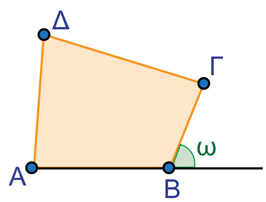
Να τοποθετήσετε δίπλα στις στήλες ΣΩΣΤΟ, ΛΑΘΟΣ ένα ✓ ανάλογα με το αν η πρόταση είναι σωστή ή λανθασμένη.	**Σωστό**	**Λάθος**
3. Το τετράγωνο είναι ταυτόχρονα και ορθογώνιο.	☐	☐
4. Κάποιος ισχυρίζεται ότι σε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ μπορεί για τις διαδοχικές γωνίες του, $\hat{A}$, $\hat{B}$ να ισχύει ότι: $\hat{A} = 50^{o}$ και $\hat{B} = 40^{o}$.	☐	☐
5. Κάποιος ισχυρίζεται ότι μπορεί να κατασκευάσει ένα συγκεκριμένο ορθογώνιο ΑΒΓΔ αν γνωρίζει μόνο ότι ΑΒ = 5 μονάδες και ΒΓ = 4 μονάδες.	☐	☐

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ – ΣΥΝΘΕΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ

1 Να υπολογίσετε τις γωνίες του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ στο παρακάτω σχήμα.



2 Εξωτερική γωνία σε ένα τετράπλευρο ονομάζουμε τη γωνία που δημιουργείται από μια κορυφή του, μια πλευρά και την κατάλληλη προέκταση της διαδοχικής πλευράς (η γωνία $\hat{\omega}$ στο σχήμα).

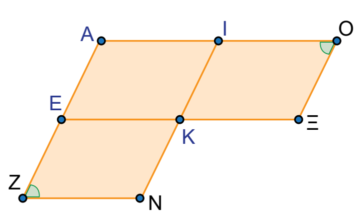


- Να σχεδιάσετε τετράπλευρο ΑΒΓΔ καθώς και τις εξωτερικές του γωνίες.
- Να εξετάσετε το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών τετραπλεύρου.
- Να αιτιολογήσετε το συμπέρασμά σας.

3 Να κατασκευάσετε με τα γεωμετρικά σας όργανα ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ του οποίου οι διαγώνιοι να έχουν μήκος 4cm και 6cm.

- Να περιγράψετε στην τάξη σας τα γεωμετρικά όργανα που χρησιμοποιήσατε, καθώς και τα βήματα της κατασκευής.

4 Το παρακάτω σχήμα συγκροτείται από τα παραλληλόγραμμα ΑΕΚΙ, ΕΖΝΚ και ΚΙΟΞ.



- Να αιτιολογήσετε ότι οι γωνίες $\hat{Z}$ και $\hat{O}$ είναι ίσες καθώς και ότι οι $\hat{Z}$ και $Ο\hat{Ι}Κ$ παραπληρωματικές.

5 Να κατασκευάσετε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ = 8 μονάδες, ΑΔ = 4 μονάδες και γωνία $Β\hat{Α}Δ = 60°$.

Αν Κ και Λ είναι τα μέσα των απέναντι πλευρών ΑΒ και ΔΓ να ερευνήσετε το είδος του τετραπλεύρου ΑΚΛΔ. Να χαρακτηρίσετε το είδος του παραλληλογράμμου και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

6 Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) κατασκευάζουμε με τα γεωμετρικά μας όργανα τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{Α}$, η οποία τέμνει τη ΔΓ στο Ε.

- Να συγκρίνετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΔΕ.
- Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

7 **Συνδέσεις με την Ιστορία.**

- Ταξινόμηση των τετράπλευρων.
- Πρόταση 33, Στοιχεία Ευκλείδη.

4
Κεφάλαιο

Κύκλος

4 ΚΥΚΛΟΣ

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

- Να προσδιορίζουν τη χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων του κύκλου και να περιγράφουν τα στοιχεία του κύκλου.
- Να σχεδιάζουν με τη χρήση του γνώμονα την εφαπτομένη του κύκλου σε σημείο του.
- Να διερευνούν και να προσδιορίζουν τις σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου.

4.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ

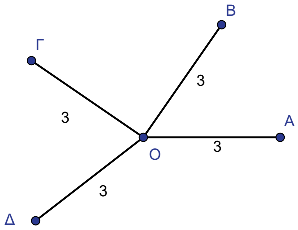
Η έννοια του κύκλου είναι αρχέγονη. Από την εποχή που οι άνθρωποι κάθονταν γύρω από τη φωτιά ή έχτιζαν τις καλύβες τους γύρω από την καλύβα του αρχηγού τους ή τα σπίτια τους κυκλικά γύρω από το κέντρο της πλατείας, αισθητοποιούσαν την κυκλική διάταξη και κατ' επέκταση την έννοια του κύκλου. Η διάταξη αυτή τους εξασφάλιζε ίσες αποστάσεις από το κέντρο του ενδιαφέροντός τους, που ήταν η φωτιά ή ο αρχηγός της φυλής τους ή το κέντρο της πλατείας.

Πολλές ανθρώπινες κατασκευές έχουν κυκλική διάταξη για πολλούς λόγους. Όμως, ο κυριότερος λόγος είναι οι ίσες αποστάσεις από κάποιο κέντρο.

Δραστηριότητα

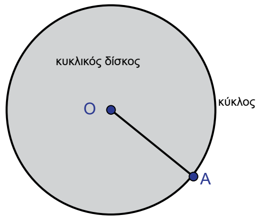
Να σχεδιάσετε στο χαρτί σας ένα σημείο Ο και στη συνέχεια σημεία Α, Β, Γ, Δ που να απέχουν από το Ο αποστάσεις ίσες με 3 μονάδες.

- Να συζητήσετε για το πλήθος των σημείων που μπορείτε να σχεδιάσετε με την ίδια ιδιότητα.
- Να συζητήσετε τον τρόπο με τον οποίο μπορείτε να σχεδιάσετε σημεία που απέχουν από το Ο απόσταση ίση με 3 μονάδες.
- Να συζητήσετε για το σχήμα που δημιουργούν αυτά τα σημεία καθώς και τα στοιχεία του.
- Να συζητήσετε για κυκλικά σχήματα που διακρίνετε γύρω σας.



Ο **κύκλος** είναι το γεωμετρικό σχήμα που δημιουργείται από τα σημεία του επιπέδου που απέχουν ίσες αποστάσεις από ένα σταθερό σημείο. Το σταθερό σημείο ονομάζεται **κέντρο του κύκλου**. Η απόσταση των σημείων του από το κέντρο ονομάζεται **ακτίνα του κύκλου**.

Ένας κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ΟΑ συμβολίζεται με (Ο, ΟΑ).

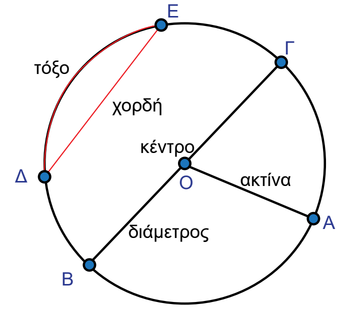


Ένα σημείο, που απέχει από το κέντρο κύκλου απόσταση ίση με την ακτίνα του, ανήκει στον **κύκλο**.
Ένα σημείο που απέχει από το κέντρο του κύκλου απόσταση μικρότερη ή ίση της ακτίνας του, ανήκει στον κύκλο ή στο **εσωτερικό του κύκλου**, δηλαδή στον **κυκλικό δίσκο**.
Ένα σημείο που απέχει από το κέντρο απόσταση μεγαλύτερη της ακτίνας βρίσκεται **εκτός** του κύκλου και του κυκλικού δίσκου.

4.2 ΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ

Το ευθύγραμμο τμήμα που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου και έχει τα άκρα του σε αυτόν ονομάζεται **διάμετρος** του κύκλου. Στο παρακάτω σχήμα το τμήμα ΒΓ είναι διάμετρος.

Ισχύει ότι: **Διάμετρος = 2· (Ακτίνα)**

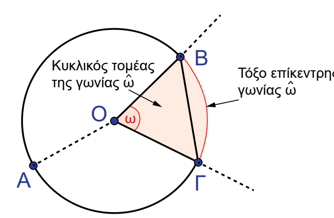


Δύο σημεία στον κύκλο ορίζουν ένα μέρος του που ονομάζεται **τόξο**. Στο διπλανό σχήμα το ΔΕ είναι ένα τόξο και συμβολίζεται $\overset{\frown}{ΔΕ}$.
Το ευθύγραμμο τμήμα που έχει άκρα, τα άκρα ενός τόξου ονομάζεται **χορδή** του τόξου. Στο διπλανό σχήμα το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ είναι η χορδή του τόξου $\overset{\frown}{ΔΕ}$.
Το τόξο που έχει χορδή τη διάμετρο του κύκλου ονομάζεται **ημικύκλιο**. Στο διπλανό σχήμα το τόξο ΒΑΓ είναι ένα ημικύκλιο.

Σχόλιο:
Δύο σημεία στον κύκλο ορίζουν δύο τόξα που συμπληρώνουν τον κύκλο. Εδώ, με τον όρο τόξο εννοούμε το μικρότερο από αυτά.

Σχόλιο:
Με τη μέθοδο της ταύτισης των σχημάτων μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι:
1. Τα ημικύκλια ενός κύκλου είναι ίσα μεταξύ τους.
2. Δύο κύκλοι είναι ίσοι όταν έχουν ίσες ακτίνες.
3. Αν οι χορδές ενός κύκλου ή ίσων κύκλων είναι ίσες, τότε και τα αντίστοιχα τόξα τους είναι ίσα. Αν είναι άνισες τότε και τα τόξα είναι ομοίως άνισα.

4.3 ΕΠΙΚΕΝΤΡΗ ΓΩΝΙΑ



Η γωνία που έχει κορυφή το κέντρο ενός κύκλου, ονομάζεται **επίκεντρη γωνία**. Το μέρος του κυκλικού δίσκου που ορίζει μια επίκεντρη γωνία ονομάζεται **κυκλικός τομέας,** που αντιστοιχεί στο τόξο της επίκεντρης γωνίας.

Στο σχήμα, η γωνία $\hat{ω}$ είναι επίκεντρη στον κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα ΟΑ. Σε αυτή, αντιστοιχεί ο κυκλικός τομέας $Ο\overset{\frown}{ΒΓ}$ (με το σήμα του τόξου πάνω στο ΒΓ), το τόξο $\overset{\frown}{ΒΓ}$ και η αντίστοιχη χορδή ΒΓ.

Διερεύνηση 1 «*Σχέσεις με επίκεντρες γωνίες*»

Να σχεδιάσετε κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα ΟΑ = 3 μονάδες. Στη συνέχεια, να σχεδιάσετε δύο ίσες επίκεντρες γωνίες $Γ\hat{Ο}Δ$ και $Δ\hat{Ο}Ε$.
- Να ερευνήσετε τη σχέση που έχουν τα τόξα και οι χορδές που αντιστοιχούν στις επίκεντρες γωνίες.
- Να διατυπώσετε τις εικασίες σας και να τις αιτιολογήσετε.
- Να σχεδιάσετε δύο ίσους κύκλους και να επαναλάβετε τα προηγούμενα.

Σύγκριση τόξων

Να ανοίξετε την εφαρμογή και να κάνετε τα πειράματα σύγκρισης τόξων που προτείνονται.

Γενικά στον ίδιο κύκλο ή σε ίσους κύκλους ισχύει ότι:

- Σε ίσες επίκεντρες γωνίες αντιστοιχούν ίσα τόξα και ίσες χορδές.
- Σε άνισες επίκεντρες κυρτές γωνίες αντιστοιχούν άνισες χορδές και άνισα τόξα.

Στην εφαρμογή 1, στο κεφάλαιο 1, στην ενότητα 1.3, ασχοληθήκαμε με την εύρεση του κέντρου κυκλικού δίσκου, αξιοποιώντας τη μεσοκάθετο ευθύγραμμου τμήματος. Εδώ εμβαθύνουμε περισσότερο.

4.4 ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΥ

Πόσα κοινά σημεία έχει μια ευθεία και ένας κύκλος;

Διερεύνηση 2

Να σχεδιάσετε στο χαρτί σας έναν κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας 3 μονάδων. Στη συνέχεια, με τα γεωμετρικά σας όργανα, να σχεδιάσετε μια ημιευθεία ΟΒ και μια ευθεία (ε) κάθετη σε αυτή σε ένα σημείο της Μ.

- Να ερευνήσετε πότε η (ε) τέμνει τον κύκλο.
- Να συσχετίσετε τη θέση της (ε) με την απόσταση ΟΜ.
- Να διατυπώσετε μια εικασία που να αφορά τα κοινά σημεία ευθείας και κύκλου.

Να ανοίξετε την εφαρμογή και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

Διερεύνηση της σχετικής θέσης ευθείας και κύκλου

Γενικά, για τη σχέση ευθείας και κύκλου ισχύει ότι:

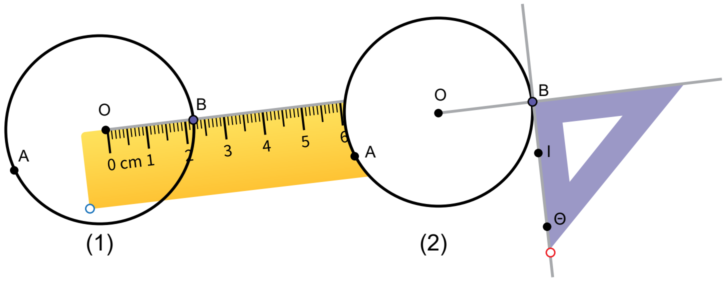
Ευθεία και κύκλος έχουν:
- **Δύο κοινά** σημεία όταν η απόσταση του κέντρου από την ευθεία είναι μικρότερη της ακτίνας (ΟΜ < ΟΑ).
- **Ένα κοινό** σημείο όταν η απόσταση του κέντρου από την ευθεία είναι ίση με τη ακτίνα (ΟΜ = ΟΑ).
- **Κανένα κοινό** σημείο όταν η απόσταση του κέντρου από την ευθεία είναι μεγαλύτερη της ακτίνας (ΟΜ > ΟΑ).

Η ευθεία που έχει ένα κοινό σημείο με τον κύκλο ονομάζεται **εφαπτομένη του κύκλου.**
Η ευθεία που έχει δύο κοινά σημεία με ένα κύκλο λέγεται **τέμνουσα του κύκλου**.

4.5 ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΗΣ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΚΥΚΛΟΥ ΣΕ ΣΗΜΕΙΟ ΤΟΥ

Με τα γεωμετρικά σας όργανα να κατασκευάσετε την εφαπτομένη κύκλου σε ένα σημείο του.

Κατασκευή:
Έστω κύκλος κέντρου Ο και ακτίνας ΟΑ και σημείο Β σε αυτόν.
1. Κατασκευάζουμε την ημιευθεία ΟΒ (Σχήμα 1).
2. Με τη βοήθεια του γνώμονα κατασκευάζουμε την κάθετη ΒΘ στην ημιευθεία ΟΒ στο σημείο Β (Σχήμα 2).
3. Η ευθεία ΒΘ είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Β.

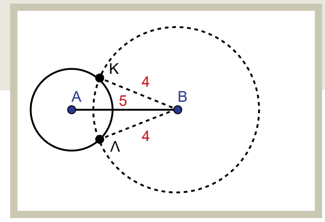


(1) (2)

Αιτιολόγηση:
- Το τμήμα ΟΒ είναι κάθετο στην ευθεία ΒΘ.
- Το τμήμα ΟΒ είναι ίσο με την ακτίνα του κύκλου.
- Άρα το κέντρο του κύκλου απέχει από την ευθεία ΒΘ απόσταση ίση με την ακτίνα.
- Η ΒΘ έχει ένα μόνο κοινό σημείο με τον κύκλο, οπότε είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Β.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να σχεδιάσετε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με μήκος 5 cm και τον κύκλο (Α, 2 cm). Να κατασκευάσετε αν υπάρχουν σημεία του κύκλου που να απέχουν από το σημείο Β απόσταση ίση με 4 cm.



Απάντηση

Σχεδιάζουμε τον κύκλο (Β, 4 cm). Αυτός τέμνει τον κύκλο (Α, 2cm) στα σημεία Κ και Λ. Τα σημεία αυτά είναι τα ζητούμενα.

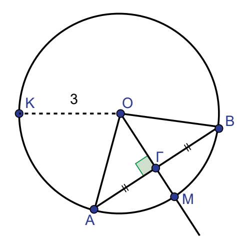
Αιτιολόγηση: Όλα τα σημεία του κύκλου (Β, 4 cm) απέχουν από το κέντρο του Β απόσταση ίση με 4 cm. Άρα και τα σημεία Κ και Λ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2 *«Γιατί η μεσοκάθετος μιας χορδής κύκλου διέρχεται από το μέσο του αντίστοιχου τόξου;»*

Να σχεδιάσετε έναν κύκλο (Ο, 3 cm) και μια χορδή ΑΒ. Να αιτιολογήσετε ότι η μεσοκάθετος της χορδής ΑΒ διέρχεται από το μέσο του αντίστοιχου τόξου.

Απάντηση

Έστω κύκλος (Ο, 3 cm) και μια χορδή ΑΒ, όπως στο διπλανό σχήμα.

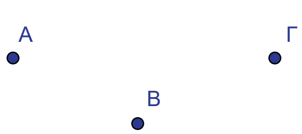


- Το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές, διότι ΟΑ = ΟΒ ως ακτίνες του κύκλου.
- Η μεσοκάθετος ΟΓ είναι φορέας της διαμέσου, ύψους και διχοτόμου της γωνίας ΑÔΒ. Άρα ΑÔΓ = ΒÔΓ.
- Οι γωνίες ΑÔΓ και ΒÔΓ είναι επίκεντρες και ίσες γωνίες στον ίδιο κύκλο (Ο, 3). Άρα τα αντίστοιχα τόξα $\overset{\frown}{AM}$ και $\overset{\frown}{BM}$ είναι ίσα και επομένως το σημείο Μ είναι το μέσο του τόξου $\overset{\frown}{AB}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

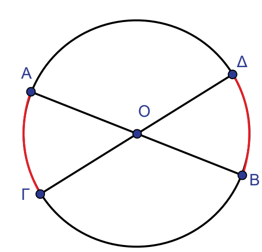
1 Δίνεται γωνία χÔψ και τα σημεία Α και Β στην Οχ. Να κατασκευάσετε κύκλο που να έχει το κέντρο του στην Οψ και να διέρχεται από τα Α και Β.

2 Να σχεδιάσετε στο χαρτί σας τρία σημεία Α, Β, Γ. Στη συνέχεια να σχεδιάσετε έναν κύκλο με κέντρο το σημείο Α, ώστε το σημείο Β να είναι εσωτερικό και το Γ στο εξωτερικό του κύκλου.



3 Να κατασκευάσετε με τα γεωμετρικά σας όργανα ένα ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρές ίσες με 4cm.

4 Να σχεδιάσετε στο επίπεδο χαρτί σας ένα κύκλο (Ο, 3cm) και δύο διαμέτρους ΑΒ και ΓΔ. Να συγκρίνετε τα δύο τόξα $\overset{\frown}{A\Gamma}$ και $\overset{\frown}{B\Delta}$ που ορίζουν οι επίκεντρες γωνίες ΑÔΓ και ΒÔΔ.



5 Να κατασκευάσετε με τα γεωμετρικά σας όργανα τρίγωνο ΑΒΓ ώστε ΑΒ = 2cm, ΑΓ = 4cm και ΒΓ = 5cm.

6 Να σχεδιάσετε στο χαρτί σας μια ευθεία (ε) και ένα σημείο Α σε αυτήν. Στη συνέχεια να κατασκευάσετε κύκλο που να εφάπτεται της ευθείας στο σημείο Α και να έχει ακτίνα 2cm.

7 Να σχεδιάσετε κύκλο (Ο, 2cm) και μια χορδή ΑΒ. Να κατασκευάσετε με τα γεωμετρικά σας όργανα τις εφαπτόμενες στα σημεία Α και Β. Αν Γ είναι το σημείο τομής των εφαπτομένων, να συγκρίνετε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΒΓ.

8 Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ και στη συνέχεια να κατασκευάσετε κύκλο με κέντρο το σημείο Α και να εφάπτεται στην πλευρά ΒΓ.

9 Στο χαρτί σας να σχεδιάσετε μια ευθεία (ε) και σε αυτήν τα διαδοχικά σημεία Α, Γ, Δ, Ε και Β, έτσι ώστε ΑΒ = 10cm, ΑΓ = 1cm, ΓΔ = 2cm και ΔΕ = 3cm. Στη συνέχεια να κατασκευάσετε τους κύκλους (Γ, ΓΑ), (Δ, ΓΔ), (Ε, ΕΔ) και (Β, ΒΕ).

- Να βρείτε τη διάμετρο σε καθέναν από τους τέσσερις κύκλους.
- Αν ο κύκλος (Ε, ΕΔ) τέμνει την (ε) στο σημείο Κ να βρείτε το μήκος ΒΚ.

Αυτοαξιολόγηση

Να επιλέξετε τις σωστές απαντήσεις

1. Η απόσταση του κέντρου του κύκλου (Ο, 4cm) από ευθεία είναι ίση με 3,9cm. Η σχετική θέση ευθείας και κύκλου είναι:
Α. Τέμνουσα του κύκλου.
Β. Εφαπτομένη του κύκλου.
Γ. Μη τέμνουσα του κύκλου.
Δ. Διάμετρος.

2. Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ έχει τα άκρα του στον κύκλο (Ο, 3cm) και μήκος 4cm. Να επιλέξετε την ιδιότητα του ευθύγραμμου τμήματος.
Α. Ακτίνα του κύκλου.
Β. Διάμετρος του κύκλου.
Γ. Χορδή κύκλου.
Δ. Τίποτα από τα προηγούμενα.

3. Ένα σημείο Α απέχει από το κέντρο κύκλου (Ο, 4cm) απόσταση μικρότερη από 4cm. Ποια από τις παρακάτω ιδιότητες είναι σωστή;
Α. Το σημείο ανήκει στον κύκλο.
Β. Το σημείο ανήκει στο εσωτερικό του κύκλου.
Γ. Το σημείο ανήκει στο εξωτερικό του κύκλου.
Δ. Τίποτα από τα παραπάνω.

Να τοποθετήσετε δίπλα στις στήλες ΣΩΣΤΟ, ΛΑΘΟΣ ένα ✓ ανάλογα με το αν η πρόταση είναι σωστή ή λανθασμένη.	**Σωστό**	**Λάθος**
4. Τα ημικύκλια ενός κύκλου είναι ίσα.	☐	☐
5. Η διάμετρος ενός κύκλου είναι ίση με 2 ακτίνες.	☐	☐

Ανακεφαλαίωση

Ορισμοί:

- **Κύκλος** είναι το γεωμετρικό σχήμα τα σημεία του οποίου απέχουν ίσες αποστάσεις από το ένα σταθερό σημείο. Το σταθερό σημείο ονομάζεται **κέντρο** του κύκλου.
- **Ακτίνα** του κύκλου είναι η απόσταση των σημείων του κύκλου από το κέντρο του.
- **Διάμετρος** κύκλου είναι το ευθύγραμμο τμήμα που έχει τα άκρα του στον κύκλο και διέρχεται από το κέντρο του.
- **Τόξο** κύκλου ονομάζεται ένα τμήμα του κύκλου.
- **Χορδή** κύκλου είναι το ευθύγραμμο τμήμα που έχει τα άκρα του στον κύκλο και αντιστοιχεί σε δύο τόξα.
- **Επίκεντρη** γωνία, ονομάζεται η γωνία που έχει κορυφή το κέντρο του κύκλου.
- **Τέμνουσα** κύκλου ονομάζεται η ευθεία που έχει δύο κοινά σημεία με τον κύκλο.
- **Εφαπτομένη** κύκλου σε σημείο του ονομάζεται η ευθεία που έχει μόνο αυτό το σημείο κοινό με τον κύκλο.

Σχέσεις:
- Η διάμετρος είναι ίση με το διπλάσιο της ακτίνας.
- Κάθε επίκεντρη γωνία αντιστοιχεί σε ένα τόξο και μία χορδή.
- Η μεσοκάθετος μιας χορδής διέρχεται από το κέντρο του κύκλου.

Στον ίδιο κύκλο ή σε ίσους κύκλους:
- Σε ίσες επίκεντρες γωνίες αντιστοιχούν ίσα τόξα και ίσες χορδές.
- Σε άνισες επίκεντρες γωνίες αντιστοιχούν ομοίως άνισα τόξα και ομοίως άνισες χορδές.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ - ΣΥΝΘΕΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ

1 Να σχεδιάσετε έναν κύκλο κέντρου Ο και τέσσερα διαδοχικά σημεία Α, Β, Γ και Δ σε αυτόν που δεν βρίσκονται σε ημικύκλιο. Να σχεδιάσετε τις ακτίνες ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ και ΟΔ και στη συνέχεια να ερευνήσετε το άθροισμα των γωνιών του τετράπλευρου ΑΒΓΔ, με χρήση ιδιοτήτων κύκλου.

2 Να αιτιολογήσετε ότι το άθροισμα των γωνιών ενός πενταγώνου που έχει τις κορυφές του σε έναν κύκλο που δεν βρίσκονται σε ημικύκλιο είναι ίσο με 540^{o}.

3 Να σχεδιάσετε στο χαρτί σας έναν κύκλο κέντρου Α και ακτίνας ΑΒ καθώς και δύο σημεία Γ και Δ σε αυτόν. Στη συνέχεια να σχεδιάσετε τις εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία Γ και Δ. Αν Ζ είναι το σημείο τομής των εφαπτομένων να ερευνήσετε το είδος της γωνίας $\Delta\hat{Z}\Gamma$ σε σχέση με το είδος της γωνίας $\Gamma\hat{A}\Delta$.

Δυναμική Γεωμετρία

Να ερευνήσετε το ίδιο θέμα στο περιβάλλον της «Δυναμικής Γεωμετρίας».
- Να μεταβάλετε τη θέση των σημείων Γ ή Δ και να παρατηρήσετε το είδος της γωνίας $\Delta\hat{Z}\Gamma$ σε σχέση με το είδος της γωνίας $\Gamma\hat{A}\Delta$.
- Να διατυπώσετε το συμπέρασμά σας και να το αιτιολογήσετε.

4 Να σχεδιάσετε δύο ομόκεντρους κύκλους (Ο, ΟΓ) και (Ο, ΟΒ) ώστε ο (Ο, ΟΒ) να έχει διπλάσια ακτίνα από τον (Ο, ΟΓ). Στον κύκλο (Ο, ΟΓ) να σχεδιάσετε ένα σημείο Δ και στη συνέχεια την εφαπτομένη σε αυτόν στο σημείο Δ. Αν η εφαπτομένη τέμνει τον κύκλο (Ο, ΟΒ) στα σημεία Ε και Ζ να ερευνήσετε τη σχέση των ευθύγραμμων τμημάτων ΕΔ και ΔΖ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

5 **Ο Κύκλος στον πολιτισμό μας (Συνθετική εργασία)**

Να ερευνήσετε τον τρόπο με τον οποίο ο κύκλος αντικατοπτρίζεται και χρησιμοποιείται σε διάφορες πτυχές του πολιτισμού μας. Να ανοίξετε την εφαρμογή για να συμπληρώσετε το φύλλο εργασίας.

Ο κύκλος στον πολιτισμό μας

6 **Σύνδεση με την Ιστορία**

Ο Θαλής, ο Ευκλείδης και πολλοί άλλοι ασχολήθηκαν και ερεύνησαν τον κύκλο ως γεωμετρικό σχήμα. Πληροφορίες για την ιστορία του κύκλου θα βρείτε στη διπλανή εφαρμογή.

Ψήγματα της ιστορίας του κύκλου

5

Κεφάλαιο

Μετασχηματισμοί

5 ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ ΩΣ ΠΡΟΣ ΑΞΟΝΑ

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

- Να αναγνωρίζουν τους μετασχηματισμούς συμμετρίας ως προς άξονα και να καθορίζουν τα στοιχεία και τα χαρακτηριστικά τους.
- Να αναγνωρίζουν σχήματα με άξονα συμμετρίας και να σχεδιάζουν τους άξονες συμμετρίας σε αυτά.
- Να διερευνούν και να εντοπίζουν τις ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά των σχημάτων που παραμένουν αναλλοίωτα από έναν μετασχηματισμό συμμετρίας ως προς άξονα.
- Να αξιοποιούν τις ιδιότητες της αξονικής συμμετρίας στον σχεδιασμό σχημάτων και στην αιτιολόγηση ιδιοτήτων τους.
- Να σχεδιάζουν τα συμμετρικά γεωμετρικών σχημάτων ως προς διάφορους άξονες χρησιμοποιώντας μια ποικιλία εργαλείων και στρατηγικών.

5.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΑΞΟΝΙΚΗΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ

Σε αυτό το κεφάλαιο, μελετάμε ένα ακόμα αντικείμενο της Γεωμετρίας, την αξονική συμμετρία. Είναι ιδιότητα που τη συναντάμε στη φύση, στις τέχνες και εκφράζει την αρμονία και την καλαισθησία.

Διερεύνηση 1 *«Οι μετασχηματισμοί της φύσης»*

Όπως παρατηρούμε στην εικόνα, στα ήρεμα νερά της λίμνης καθρεφτίζονται τα δέντρα της όχθης.

- Να επιλέξετε με τον νου σας ένα σημείο σε ένα δέντρο και να αναζητήσετε το αντίστοιχο σημείο στην αντανάκλαση.
- Να βρείτε την ευθεία γραμμή αντανάκλασης και να εκτιμήσετε τις αποστάσεις των δύο σημείων από αυτή.
- Να προσπαθήσετε να επιβεβαιώσετε τις εκτιμήσεις σας, μετρώντας τις αποστάσεις τους από την ευθεία αντανάκλασης.
  Να ανοίξετε την εφαρμογή και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

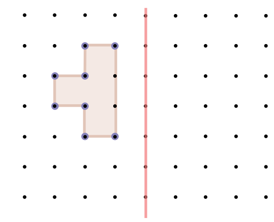
Αντανακλάσεις

- Να συζητήσετε στην τάξη για τα συμπεράσματά σας καθώς και τον τρόπο που εργαστήκατε.

Δραστηριότητα «*Στο χαρτί με τις κουκκίδες*»

Σε χαρτί με σημεία τετράγωνης διάταξης να σχεδιάσετε το διπλανό σχήμα.

- Αν η κόκκινη γραμμή αντιστοιχεί στην ευθεία αντανάκλασης, να σχεδιάσετε την εικόνα του χρωματισμένου πολυγώνου.
- Στη συνέχεια να διπλώσετε το χαρτί σας κατά μήκος της κόκκινης γραμμής και να εξετάσετε αν τα δύο σχήματα ταυτίζονται.
- Να περιγράψετε και να αιτιολογήσετε τη σχέση που έχει κάθε σημείο και κάθε πλευρά του αρχικού πολυγώνου με τα αντίστοιχα σημεία και πλευρές της εικόνας του.



Σύμφωνα με τα παραπάνω, αλλά όπως ισχύει και σε κάθε ανάλογη περίπτωση, διαπιστώνουμε ότι:

Στην αντανάκλαση ως προς την ευθεία, τα δύο σχήματα ταυτίζονται. Ακόμα, κάθε σημείο και η εικόνα του ορίζουν ευθεία κάθετη στην ευθεία της αντανάκλασης και απέχουν από αυτή ίσες αποστάσεις.

Η αντανάκλαση ενός σχήματος ως προς μια ευθεία είναι ένας **μετασχηματισμός** του σχήματος, καθώς δημιουργεί ένα νέο σχήμα σε μια άλλη θέση, που είναι η εικόνα του.

Ο μετασχηματισμός αυτός ονομάζεται **συμμετρία ως προς άξονα**, η γραμμή αντανάκλασης **άξονας συμμετρίας** και η εικόνα του σχήματος **συμμετρικό σχήμα**.

Γενικά:

- Το συμμετρικό σημείου ως προς άξονα μια ευθεία είναι σημείο.

Για δύο συμμετρικά σημεία:

- Οι αποστάσεις των δύο σημείων από τον άξονα συμμετρίας είναι ίσες.
- Ο άξονας συμμετρίας είναι μεσοκάθετος του τμήματος που ορίζουν τα δύο σημεία.

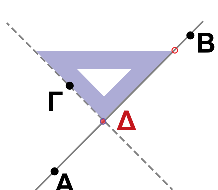
5.2 ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΟΥ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ ΩΣ ΠΡΟΣ ΑΞΟΝΑ

Το συμμετρικό ενός σημείου, με άξονα συμμετρίας μια ευθεία, μπορεί να κατασκευαστεί με τα γεωμετρικά όργανα.

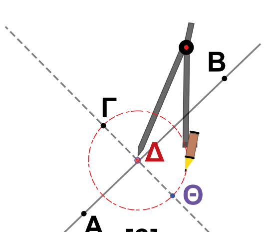
Κατασκευή σημείου συμμετρικού ως προς άξονα

Στο χαρτί σας να σχεδιάσετε μια ευθεία ΑΒ και ένα σημείο Γ εκτός αυτής.

1. Με τον γνώμονα να σχεδιάσετε την κάθετη ευθεία από το σημείο Γ, στην ευθεία ΑΒ (σχήμα α).
2. Να σχεδιάσετε το σημείο τομής Δ των δύο ευθειών.
3. Με τον διαβήτη σας να σχεδιάσετε τον κύκλο (Δ, ΔΓ) (σχήμα β).
4. Να σχεδιάσετε το σημείο τομής Θ, του κύκλου με την κάθετη ΓΔ.
5. Το Θ είναι το συμμετρικό του Γ, ως προς άξονα συμμετρίας την ευθεία ΑΒ.



[α]



[β]

Σημείωση:

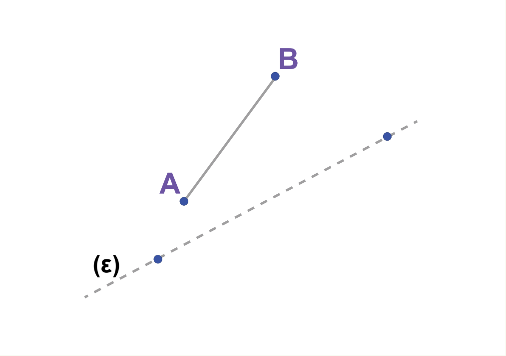
Αν ένα σημείο βρίσκεται πάνω στον άξονα συμμετρίας, τότε το συμμετρικό του ταυτίζεται με αυτό.

5.3 ΤΑ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΑ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΩΣ ΠΡΟΣ ΑΞΟΝΑ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ ΜΙΑ ΕΥΘΕΙΑ

Η κατασκευή του συμμετρικού ενός σχήματος ως προς άξονα συμμετρίας βασίζεται στην κατασκευή των συμμετρικών των σημείων του.

Διερεύνηση 2 «*Κατασκευή του συμμετρικού ευθυγράμμου τμήματος, ως προς άξονα μια ευθεία και διερεύνηση της σχέσης των δύο σχημάτων*»

Στο χαρτί σας να σχεδιάσετε μια ευθεία (ε) και ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, όπως στο σχήμα. Με τα γεωμετρικά σας όργανα να κάνετε τα εξής:



1. **Κατασκευή**
   - Να κατασκευάσετε τα συμμετρικά Α΄ και Β΄, των Α και Β ως προς άξονα την (ε).
   - Να σχεδιάσετε το ευθύγραμμο τμήμα Α΄Β΄.
2. **Διερεύνηση**
   - Με τον διαβήτη σας να εξετάσετε αν τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και Α΄Β΄ είναι ίσα.
   - Να εξετάσετε αν η ευθεία (ε) είναι μεσοκάθετος των ευθύγραμμων τμημάτων ΑΑ΄ και ΒΒ΄.
   - Να σχεδιάσετε ένα τυχαίο σημείο Γ στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.
   - Στη συνέχεια να κατασκευάσετε από το Γ ευθεία κάθετη στην (ε).
   - Να σχεδιάσετε το σημείο τομής Γ΄ της κάθετης με το τμήμα Α΄ Β΄.
   - Να εξετάσετε αν το Γ΄ είναι συμμετρικό του Γ ως προς την (ε) μετρώντας τις αποστάσεις των Γ και Γ΄ από αυτή.
   - Να ανοίξετε την εφαρμογή και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

Συμμετρία με δίπλωση

3. **Συμπεράσματα**
   - Να διατυπώσετε ένα συμπέρασμα για τη σχέση που έχουν ένα ευθύγραμμο τμήμα και το συμμετρικό του ως προς άξονα.
   - Να διατυπώσετε ένα συμπέρασμα για σχετική θέση του άξονα συμμετρίας ως προς το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει ένα σημείο και το συμμετρικό του.

Γενικά ισχύει ότι:

Το συμμετρικό ευθύγραμμου τμήματος ως προς άξονα μια ευθεία είναι ευθύγραμμο τμήμα ίσο με αυτό.

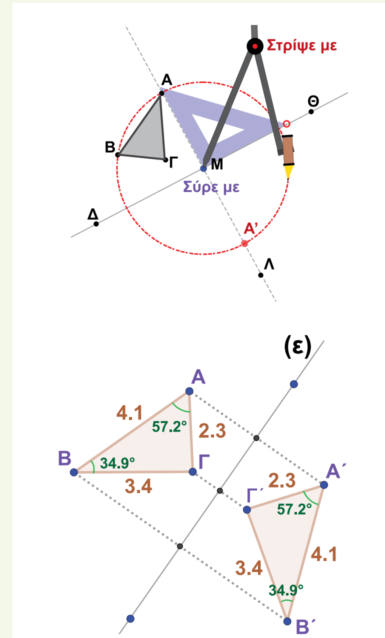
Διερεύνηση 3 «*Κατασκευή του συμμετρικού τριγώνου ΑΒΓ ως προς άξονα ευθεία (ε) και διερεύνηση της σχέσης τους*»

Στο χαρτί σας να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ καθώς και μια ευθεία (ε). Με τα γεωμετρικά σας όργανα να κατασκευάσετε το συμμετρικό του τριγώνου με άξονα την ευθεία (ε) και να ερευνήσετε τη σχέση των πλευρών και των γωνιών των δύο τριγώνων.

1. **Κατασκευή**
   - Να κατασκευάσετε τα συμμετρικά των κορυφών Α΄, Β΄, Γ΄ του ΑΒΓ.
   - Στη συνέχεια να σχεδιάσετε το τρίγωνο Α΄Β΄Γ΄ συμμετρικό του ΑΒΓ ως προς άξονα την ευθεία (ε).
2. **Διερεύνηση**
   - Να συγκρίνετε τα μήκη των συμμετρικών πλευρών των δύο τριγώνων.
   - Με το μοιρογνωμόνιο να μετρήσετε τις γωνίες των δύο τριγώνων.
   - Με δίπλωση του χαρτιού σας γύρω από τον άξονα, ή με άλλο τρόπο, να επιβεβαιώσετε την ισότητα των πλευρών και των γωνιών των δύο τριγώνων.

     Να ανοίξετε την εφαρμογή και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

Συμμετρία σχήματος



3. **Συμπεράσματα**
   - Να διατυπώσετε ένα συμπέρασμα για τη σχέση που έχουν οι πλευρές και οι γωνίες ενός τριγώνου και του συμμετρικού του ως προς άξονα.
   - Να διατυπώσετε ένα συμπέρασμα για τη σχέση που έχουν οι πλευρές και οι γωνίες ενός πολυγώνου και του συμμετρικού τους ως προς άξονα, λαμβάνοντας υπόψη ότι κάθε πολύγωνο μπορεί να διαιρεθεί σε τρίγωνα.

Γενικά η συμμετρία ως προς άξονα έχει τις εξής ιδιότητες:

- Το συμμετρικό ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι ίσο με το αρχικό.
- Το συμμετρικό μιας γωνίας είναι γωνία ίση με την αρχική.
- Το συμμετρικό ενός πολυγώνου είναι πολύγωνο ίσο με το αρχικό.

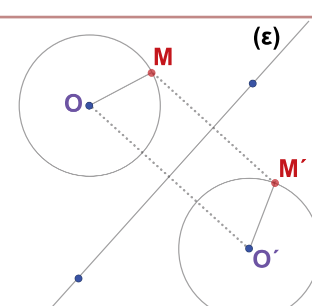
Η αξονική συμμετρία διατηρεί τις αποστάσεις και τις γωνίες. Γι' αυτό και ο μετασχηματισμός της αξονικής συμμετρίας ονομάζεται και **ισομετρία.**

5.4 ΤΟ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟ ΚΥΚΛΟΥ ΩΣ ΠΡΟΣ ΑΞΟΝΑ

Πρόβλημα

Ο Ορέστης, προκειμένου να κατασκευάσει το συμμετρικό ενός κύκλου (Ο, 3cm) ως προς άξονα μια ευθεία (ε), έκανε την εξής κατασκευή.

- Με τα γεωμετρικά του όργανα κατασκεύασε το συμμετρικό Ο΄ του σημείου Ο, με άξονα συμμετρίας την ευθεία (ε).
- Στη συνέχεια κατασκεύασε τον κύκλο (Ο΄, 3cm) και ισχυρίζεται ότι αυτός είναι ο συμμετρικός κύκλος του (Ο, 3cm). Έχει δίκιο;



Το συμμετρικό κάθε σημείου του κύκλου (Ο, 3cm) ως προς άξονα την ευθεία (ε) ανήκει στον κύκλο (Ο΄, 3cm).

Αιτιολόγηση:

- Έστω Μ σημείο του αρχικού κύκλου (Ο, 3cm). Ισχύει ΟΜ = 3cm.
- Αν Μ΄ είναι το συμμετρικό του σημείου Μ, επειδή Ο΄ είναι το συμμετρικό του Ο θα ισχύει Ο΄Μ΄ = ΟΜ.
- Άρα Ο΄Μ΄ = 3cm.
- Συνεπώς το σημείο Μ΄ ανήκει στον κύκλο (Ο΄, 3cm) γιατί απέχει από το κέντρο απόσταση ίση με την ακτίνα.
- Επειδή το συμμετρικό του τυχαίου σημείου Μ του κύκλου (Ο, 3cm) ανήκει στον κύκλο (Ο', 3cm) το ίδιο θα ισχύει και για κάθε σημείο του αρχικού κύκλου.

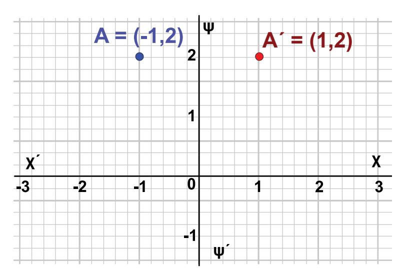
Γενικά ισχύει ότι:

Το συμμετρικό κύκλου ως προς άξονα μια ευθεία, είναι ο κύκλος που έχει κέντρο το συμμετρικό του κέντρου του αρχικού κύκλου και την ίδια ακτίνα.

5.5 ΑΞΟΝΙΚΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΣΤΟ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΞΟΝΩΝ

Δραστηριότητα *«Συμμετρία στο καρτεσιανό σύστημα αξόνων»*

Σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων xOψ να σχεδιάσετε ένα σημείο Α. Να ερευνήσετε τη σχέση του σημείου Α και του συμμετρικού του Α΄ ως προς τον άξονα ψ΄ψ και να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα.



- Αν το σημείο Α είναι στη θέση (–1, 2), σε ποια θέση θα βρίσκεται το συμμετρικό του ως προς τον άξονα x΄x;
- Αν το σημείο Α είναι στη θέση (–2, –1), σε ποια θέση θα βρίσκεται το συμμετρικό του ως προς τον άξονα x΄x;
- Αν το σημείο Α είναι στη θέση (3, 2), σε ποια θέση θα βρίσκεται το συμμετρικό του ως προς τον άξονα ψ΄ψ;
- Αν το σημείο Α είναι στη θέση (–2, 0), σε ποια θέση θα βρίσκεται το συμμετρικό του ως προς τον άξονα ψ΄ψ;

Να διατυπώσετε ένα συμπέρασμα για τη σχέση των συντεταγμένων ενός σημείου και των συντεταγμένων του συμμετρικού του ως προς άξονα τον ψ΄ψ και ως προς τον άξονα x΄x.

Γενικά ισχύει ότι:

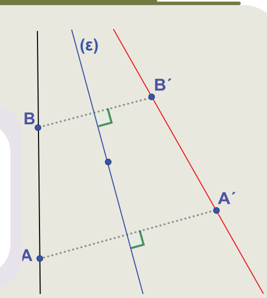
Το συμμετρικό του σημείου Α (α, β) ως προς άξονα συμμετρίας τον άξονα ψ΄ψ είναι το σημείο Α΄ (–α, β).
Το συμμετρικό του Α (α, β) ως προς άξονα συμμετρίας τον άξονα x΄x είναι το σημείο Α'' (α, –β)

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1 *«Κατασκευή και διερεύνηση του συμμετρικού ευθείας ως προς άξονα συμμετρίας μια ευθεία»*

Στο χαρτί σας να σχεδιάσετε μια ευθεία ΑΒ και μια δεύτερη ευθεία (ε).

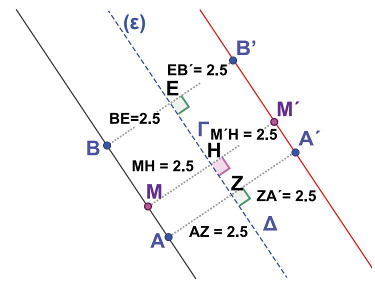
- Να κατασκευάσετε το συμμετρικό της ευθείας ΑΒ ως προς άξονα συμμετρίας την ευθεία (ε).
- Να ερευνήσετε τη σχετική θέση της συμμετρικής ευθείας ως προς την αρχική ευθεία ΑΒ, όταν αυτή τέμνει τον άξονα συμμετρίας (ε) ή είναι παράλληλη σε αυτόν.
- Αν η αρχική ευθεία ΑΒ τέμνει τον άξονα σε σημείο Ο, να βρείτε το συμμετρικό του ως προς τον άξονα (ε).
- Να ανοίξετε την εφαρμογή και να κάνετε τα πειράματα που σας προτείνονται.

Συμμετρία ευθείας



Απάντηση

- Για να κατασκευάσουμε μια ευθεία πρέπει να γνωρίζουμε δύο σημεία της. Έτσι, για να κατασκευάσουμε το συμμετρικό της ευθείας ΑΒ ως άξονα την ευθεία (ε), κατασκευάζουμε τα συμμετρικά Α΄ και Β΄ των Α και Β ως προς άξονα την (ε) και στη συνέχεια κατασκευάζουμε την ευθεία Α΄Β΄. Η Α΄Β΄ είναι η συμμετρική της ΑΒ.
- Σχεδιάζουμε την ΑΒ ώστε να είναι παράλληλη στην (ε). Η συμμετρική της ως προς τον άξονα (ε) είναι ευθεία παράλληλη προς την ΑΒ.



Αιτιολόγηση: Οι ευθείες ΑΒ και (ε) είναι παράλληλες. Άρα τα σημεία της ΑΒ απέχουν ίσες αποστάσεις από την (ε). Επομένως τα συμμετρικά των σημείων της ΑΒ απέχουν από την (ε) επίσης ίσες αποστάσεις. Συνεπώς τα σημεία της Α΄Β΄ απέχουν ίσες αποστάσεις από την ΑΒ. Τελικά η Α΄Β΄ είναι παράλληλη προς την ΑΒ.

- Σχεδιάζουμε την ευθεία ΑΒ ώστε να τέμνει τον άξονα (ε) σε ένα σημείο Ο. Η συμμετρική της Α΄Β΄ θα τέμνει τον άξονα στο ίδιο σημείο.

Αιτιολόγηση: Οι αποστάσεις του σημείου Μ και του συμμετρικού του Μ΄ από τον άξονα είναι πάντοτε ίσες. Το Ο απέχει από τον άξονα απόσταση 0 μονάδες. Άρα και το συμμετρικό του θα απέχει από τον άξονα απόσταση 0 μονάδες, οπότε το Ο και το συμμετρικό του θα ταυτίζονται. Επομένως από το σημείο τομής Ο διέρχεται και η συμμετρική της.

Οι ευθείες ΑΒ και (ε) είναι τυχαίες. Άρα:

- Το συμμετρικό ευθείας ως προς άξονα είναι επίσης ευθεία.
- Αν η ευθεία είναι παράλληλη προς τον άξονα και η συμμετρική της ευθεία θα είναι παράλληλη προς αυτή και προς τον άξονα.
- Αν η ευθεία τέμνει τον άξονα σε ένα σημείο, από αυτό διέρχεται και η συμμετρική της.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2 *«Κατασκευή και διερεύνηση του συμμετρικού γωνίας ως προς άξονα»*

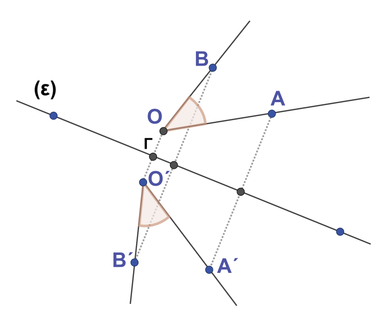
Στο χαρτί σας να σχεδιάσετε μια γωνία ΑÔΒ και μια ευθεία (ε).

- Να κατασκευάσετε το συμμετρικό της γωνίας ΑÔΒ ως προς άξονα συμμετρίας την ευθεία (ε).
- Να ερευνήσετε τη σχέση της γωνίας ΑÔΒ με τη συμμετρική της ως προς τον άξονα (ε).
  Να ανοίξετε την εφαρμογή και να διερευνήσετε το συμμετρικό γωνίας.

Συμμετρία σχήματος

Απάντηση

- Κατασκευάζουμε τα συμμετρικά Ο΄Α΄ και Ο΄Β΄ των ημιευθειών ΟΑ και ΟΒ ως προς άξονα την ευθεία (ε). Η γωνία Α΄Ô΄Β΄ είναι η συμμετρική της ΑÔΒ.
- Με το μοιρογνωμόνιο διαπιστώνουμε ότι οι δύο γωνίες είναι ίσες.



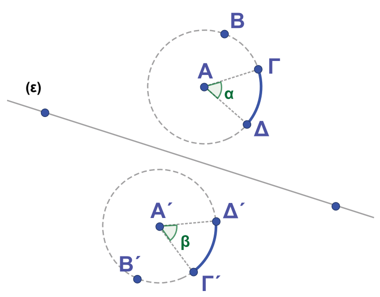
Η γωνία και ο άξονας συμμετρίας είναι τυχαία.
Συμπέρασμα: Το συμμετρικό γωνίας ως προς άξονα είναι γωνία ίση με αυτή.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Να κατασκευάσετε το συμμετρικό τόξου κύκλου (Α, ΑΒ) ως προς άξονα ευθεία (ε) και να αιτιολογήσετε ότι είναι τόξο ίσο με αυτό.

Κατασκευή:
- Κατασκευάζουμε το συμμετρικό (Α′, Α′Β′) του κύκλου (Α, ΑΒ).
- Κατασκευάζουμε τα συμμετρικά Γ′ και Δ′ των άκρων Γ και Δ του τόξου $\widehat{ΓΔ}$.
- Το τόξο $\widehat{Γ'Δ'}$ είναι το συμμετρικό του $\widehat{ΓΔ}$.

Αιτιολόγηση της ισότητας των δύο τόξων:
- Σχεδιάζουμε τις αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες και των δύο τόξων.
- Τα σημεία Α′, Δ′ , Γ′ είναι συμμετρικά των Α, Δ και Γ. Άρα οι επίκεντρες γωνίες είναι ίσες.
- Γνωρίζουμε ότι σε ίσους κύκλους, σε ίσες επίκεντρες γωνίες αντιστοιχούν ίσα τόξα. Άρα τα συμμετρικά τόξα είναι ίσα.



Ο κύκλος, το τόξο του και ο άξονας είναι τυχαία. Άρα:

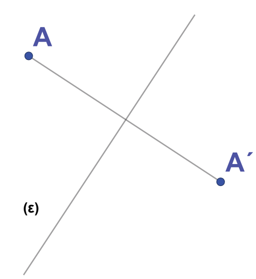
Το συμμετρικό τόξου ως προς άξονα είναι τόξο ίσο με αυτό.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4 *«Κατασκευή άξονα συμμετρίας δύο σημείων»*

Ο Ορέστης και η Αλίκη σχεδίασαν στο χαρτί τους δύο σημεία Α και Α′ και θέλουν να σχεδιάσουν μια ευθεία (ε), ώστε το Α′ να γίνει συμμετρικό του Α ως προς άξονα την ευθεία.
- Να σχεδιάσετε στο χαρτί σας τα δύο σημεία και να κατασκευάσετε τον άξονα συμμετρίας.
- Να υποδείξετε στους συμμαθητές σας δύο τρόπους κατασκευής του άξονα συμμετρίας.

Απάντηση

- Ο άξονας συμμετρίας είναι ευθεία κάθετη στην ΑΑ′ έτσι ώστε οι αποστάσεις των δύο σημείων από αυτόν να είναι ίσες. Άρα ο ζητούμενος άξονας είναι η μεσοκάθετος του ΑΑ′.
- **(α)** Η κατασκευή της μεσοκαθέτου μπορεί να γίνει με τη βοήθεια του υποδεκάμετρου και του γνώμονα.
  (β) Μπορεί να γίνει με τη βοήθεια ίσων κύκλων με κέντρα τα Α και Α′ και ακτίνα μεγαλύτερη του μισού της απόστασης ΑΑ′.
  (γ) Μπορεί να γίνει με δίπλωση του χαρτιού έτσι ώστε τα δύο σημεία να ταυτιστούν.



5.6 ΣΧΗΜΑΤΑ ΜΕ ΑΞΟΝΑ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ

Πολλά από τα καλαίσθητα δημιουργήματα της φύσης ή του ανθρώπου οφείλουν την ομορφιά τους και την αρμονία τους στην αξονική συμμετρία. Η πεταλούδα μονάρχης είναι ένα καλαίσθητο δημιούργημα της φύσης.

Διερεύνηση 4 *«Διερεύνηση του συμμετρικού του σχήματος της πεταλούδας»*

Να ανοίξετε το αρχείο και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.
Να διατυπώσετε ένα συμπέρασμα σχετικό με τον άξονα συμμετρίας του σχήματος της πεταλούδας καθώς και την εικόνα του σχήματος ως προς αυτόν.

Πεταλούδα

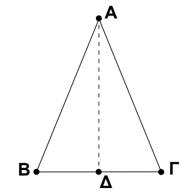
Γενικά:

Ένα σχήμα, που έχει συμμετρικό, ως προς μια ευθεία, τον εαυτό του λέμε ότι έχει **άξονα συμμετρίας.**

Δραστηριότητα 3

Να σχεδιάσετε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και το ύψος του ΑΔ που αντιστοιχεί στη βάση ΒΓ.

- Να εξετάσετε αν το ύψος ΑΔ είναι άξονας συμμετρίας του τριγώνου ΑΒΓ.
- Να βρείτε τα συμμετρικά των κορυφών, των πλευρών και των γωνιών του ΑΒΓ ως προς άξονα συμμετρίας το ύψος ΑΔ.
- Να διατυπώσετε συμπεράσματα σχετικά με την ισότητα των πλευρών και των γωνιών του ισοσκελούς τριγώνου.



Γενικά:

Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) ο φορέας του ύψους ΑΔ που αντιστοιχεί στη βάση του ΒΓ είναι άξονας συμμετρίας του τριγώνου και ισχύει ότι:

- Το συμμετρικό της κορυφής Α είναι ο εαυτός της.
- Το συμμετρικό της κορυφής Β είναι η κορυφή Γ και αντιστρόφως το συμμετρικό του Γ είναι το Β.
- Το συμμετρικό της πλευράς ΑΒ είναι η ΑΓ και αντιστρόφως το συμμετρικό της ΑΓ είναι η ΑΒ.
- Το συμμετρικό της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma$ είναι η γωνία $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{B}$.
- Το συμμετρικό της γωνίας $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta$ είναι η γωνία $\Gamma\hat{\mathrm{A}}\Delta$.
- Το συμμετρικό του ΒΔ είναι το ΓΔ.

Επίσης τα συμμετρικά ως προς άξονα σχήματα είναι ίσα, οπότε:

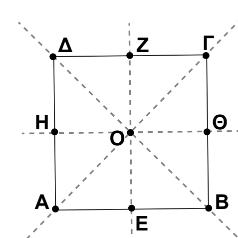
- Οι γωνίες της βάσης του $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma$ και $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{B}$ είναι ίσες.
- Το ύψος ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$, διάμεσος και ο φορέας (ή η ευθεία) του ύψους είναι μεσοκάθετος της πλευράς ΒΓ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1 *«Οι άξονες συμμετρίας του τετραγώνου»*

Στο χαρτί σας να σχεδιάσετε ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ.

- Να εξετάσετε αν οι ευθείες που ενώνουν τα μέσα των απέναντι πλευρών του και οι διαγώνιες είναι άξονες συμμετρίας του.
- Να βρείτε όλους τους άξονες συμμετρίας του τετραγώνου.

Απάντηση



Εξέταση για την ευθεία ΕΖ:

- Με το μοιρογνωμόνιο διαπιστώνουμε ότι η ευθεία ΕΖ είναι κάθετη στις πλευρές ΑΒ και ΓΔ.
- Τα σημεία Ε και Ζ είναι μέσα των αντίστοιχων πλευρών.
- Άρα η ΕΖ είναι μεσοκάθετος στις δύο πλευρές.

Συμπέρασμα:

- Το σημείο Β είναι συμμετρικό του Α ως προς άξονα την ΕΖ και αντιστρόφως.
- Το Δ είναι συμμετρικό του Γ ως προς άξονα την ΕΖ και αντιστρόφως.
- Άρα, η ΑΔ είναι συμμετρική της ΒΓ, η ΑΕ συμμετρική της ΕΒ, η ΔΖ συμμετρική της ΓΖ και αντιστρόφως.
- Τελικά, το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει συμμετρικό ως προς άξονα την ΕΖ τον εαυτό του.
  Άρα, η ΕΖ είναι άξονας συμμετρίας του τετραγώνου.

Με ανάλογο τρόπο διαπιστώνουμε ότι η ΗΘ είναι άξονας συμμετρίας του τετραγώνου, η διαγώνιος ΑΓ επίσης άξονας συμμετρίας καθώς και η διαγώνιος ΒΔ.

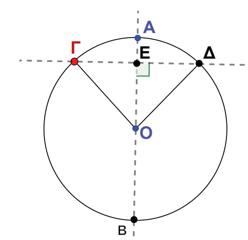
Το τετράγωνο που εξετάσαμε είναι τυχαίο. Άρα:

Το τετράγωνο έχει τέσσερις άξονες συμμετρίας, τις ευθείες που διέρχονται από τα μέσα των απέναντι πλευρών καθώς και τις διαγώνιες.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2 *«Άξονες συμμετρίας στον κύκλο»*

Να σχεδιάσετε στο χαρτί σας έναν κύκλο (Ο, 3cm) και να εξετάσετε αν ο κύκλος έχει άξονες συμμετρίας και πόσους.

Απάντηση



- Σχεδιάζουμε μια τυχαία διάμετρο ΑΒ του κύκλου και ένα τυχαίο σημείο Γ στον κύκλο.
- Σχεδιάζουμε την κάθετη από το Γ στην ΑΒ και στη συνέχεια το σημείο τομής της Δ με τον κύκλο.
- Το Δ είναι το συμμετρικό του Γ ως προς άξονα την ΑΒ.

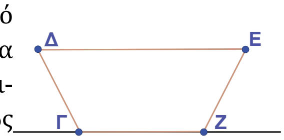
Αιτιολόγηση:
Είναι ΟΓ = ΟΔ, διότι είναι ακτίνες του κύκλου. Άρα το τρίγωνο ΟΓΔ είναι ισοσκελές και η ΟΕ κάθετη στη βάση του ΓΔ. Συνεπώς η ευθεία ΟΕ είναι μεσοκάθετος. Έτσι, ΓΕ = ΕΔ και τελικά το Δ είναι συμμετρικό του Γ και αντιστρόφως.

Ο κύκλος είναι τυχαίος, οπότε:

- Κάθε σημείο του κύκλου έχει συμμετρικό, ως προς άξονα μια διάμετρό του, σημείο που ανήκει στον κύκλο. Άρα η διάμετρος είναι άξονας συμμετρίας.
- Κάθε διάμετρος του κύκλου είναι άξονας συμμετρίας. Άρα ο κύκλος έχει άπειρους άξονες συμμετρίας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

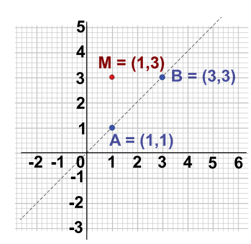
1 Να αντιγράψετε το διπλανό σχήμα στο χαρτί σας και να κατασκευάσετε το συμμετρικό του πολυγώνου ΓΔΕΖ ως προς άξονα την ευθεία ΓΖ.



2 Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ και στη συνέχεια να κατασκευάσετε, με τα γεωμετρικά σας όργανα, το συμμετρικό του ως προς άξονα την ευθεία ΒΓ.

- Να ονομάσετε το συμμετρικό τρίγωνο και να εξηγήσετε πώς εργαστήκατε.
- Να αιτιολογήσετε την ισότητα των δύο τριγώνων.

3 Στο καρτεσιανό σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τα σημεία Α(1,1), Β(3,3) και το σημείο Μ(1,3).



- Να σχεδιάσετε την ευθεία ΑΒ και να κατασκευάσετε το συμμετρικό του Μ ως προς άξονα την ΑΒ.
- Να βρείτε τα συμμετρικά και άλλων σημείων ως προς άξονα την ευθεία ΑΒ.
- Να διατυπώσετε έναν κανόνα για την εύρεση του συμμετρικού του σημείου Μ(α,β) ως προς άξονα την ΑΒ.

4 Να κατασκευάσετε ένα ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος του ΑΔ.

- Να κατασκευάσετε το συμμετρικό του τριγώνου ΑΒΓ ως προς άξονα συμμετρίας την ευθεία του ύψους ΑΔ.
- Να εξετάσετε αν η ευθεία του ύψους ΑΔ είναι άξονας συμμετρίας του τριγώνου και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

- Να εξετάσετε το πλήθος των αξόνων συμμετρίας του ισόπλευρου τριγώνου.

5 Να σχεδιάσετε στο επίπεδο χαρτί σας ένα ορθογώνιο και να εξετάσετε αν έχει άξονες συμμετρίας.
Διερεύνηση: Να ανοίξετε την εφαρμογή και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

Δίπλωση

- Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

6 Να σχεδιάσετε στο επίπεδο χαρτί σας έναν ρόμβο και να εξετάσετε αν έχει άξονες συμμετρίας.

- Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

7 Στο καρτεσιανό σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τα σημεία Α(2, 3), Β(2, –3), Γ(–2, –3) και Δ(–2,3).

- Να ερευνήσετε με τα γεωμετρικά σας όργανα το είδος του τετράπλευρου.
- Να εξετάσετε αν το τετράπλευρο έχει άξονες συμμετρίας.

8 Στο χαρτί σας να σχεδιάσετε δύο κάθετες μεταξύ τους ευθείες (ε) και (δ) και ένα σημείο Α εκτός αυτών.

- Να κατασκευάσετε το σημείο Α΄ συμμετρικό του Α ως προς την (ε).
- Να κατασκευάσετε το σημείο Α΄΄ συμμετρικό του Α΄ ως προς άξονα την ευθεία (δ).
- Να ερευνήσετε με τα γεωμετρικά σας όργανα το είδος του τριγώνου ΑΑ΄Α΄΄ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Ανακεφαλαίωση

- Η ανάκλαση ενός σχήματος ως προς μια ευθεία είναι ένας **μετασχηματισμός** του σχήματος που ονομάζεται **συμμετρία ως προς άξονα**. Η ευθεία ονομάζεται **άξονας συμμετρίας** και η εικόνα του σχήματος **συμμετρικό σχήμα**.
- Η συμμετρία ως προς άξονα έχει τις εξής ιδιότητες.
  - ➤ Το συμμετρικό ενός **σημείου** ως έναν άξονα είναι επίσης σημείο. Δύο συμμετρικά σημεία ισαπέχουν από τον άξονα.
  - ➤ Το συμμετρικό ενός **ευθύγραμμου** τμήματος είναι ευθύγραμμο τμήμα ίσο με το αρχικό.
  - ➤ Το συμμετρικό **ευθείας** ως προς άξονα είναι επίσης ευθεία.
  - ➤ Το συμμετρικό μιας **γωνίας** είναι γωνία ίση με την αρχική.
  - ➤ Το συμμετρικό ενός **πολυγώνου** είναι πολύγωνο που έχει πλευρές και γωνίες ίσες με αυτές του αρχικού σχήματος.
  - ➤ Το συμμετρικό **κύκλου** ως προς άξονα μια ευθεία, είναι ο κύκλος που έχει κέντρο το συμμετρικό του κέντρου του αρχικού κύκλου και την ίδια ακτίνα.
  - ➤ Το συμμετρικό τόξου ως προς άξονα είναι τόξο ίσο με αυτό.
  - ➤ Το συμμετρικό του σημείου **Α(α, β)** ως προς άξονα συμμετρίας τον άξονα ψ΄ψ είναι το σημείο **Α΄ (-α, β)**.
    Το συμμετρικό του **Α(α, β)** ως προς άξονα συμμετρίας τον άξονα χ΄χ είναι το σημείο **Α΄΄(α, -β).**
- Η αξονική συμμετρία ονομάζεται και **ισομετρία** γιατί διατηρεί τις αποστάσεις και τις γωνίες.

Σχήματα με άξονα συμμετρίας

- Στο **ισοσκελές τρίγωνο** ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) η ευθεία (ή φορέας) του ύψους ΑΔ που αντιστοιχεί στη βάση του είναι άξονας συμμετρίας του τριγώνου.
- Το **τετράγωνο** έχει τέσσερις άξονες συμμετρίας, τις ευθείες που διέρχονται από τα μέσα των απέναντι πλευρών καθώς και τις ευθείες των διαγώνιων.
- Κάθε **ευθεία (ή φορέας) διαμέτρου** του κύκλου είναι άξονας συμμετρίας.

Αυτοαξιολόγηση

Να επιλέξετε τις σωστές απαντήσεις

1. Ποιος είναι ο άξονας συμμετρίας μιας ευθείας;
Α. Δεν υπάρχει άξονας συμμετρίας.
Β. Η ίδια η ευθεία.
Γ. Οποιαδήποτε ευθεία κάθετη σε αυτή.

2. Ποιος είναι ο άξονας συμμετρίας ενός ευθυγράμμου τμήματος;
Α. Δεν υπάρχει άξονας συμμετρίας.
Β. Η μεσοκάθετός του.
Γ. Ο εαυτός του.

3. Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς δηλώνει το πλήθος των αξόνων συμμετρίας του ισόπλευρου τριγώνου;
Α. 1. **Β.** 2. **Γ.** 3.

Να τοποθετήσετε δίπλα στις στήλες ΣΩΣΤΟ, ΛΑΘΟΣ ένα ✓ ανάλογα με το αν η πρόταση είναι σωστή ή λανθασμένη.	**Σωστό**	**Λάθος**
4. Το τετράγωνο έχει 4 άξονες συμμετρίας.	☐	☐
5. Ο κύκλος έχει έναν μόνο άξονα συμμετρίας.	☐	☐
6. Το ισοσκελές τρίγωνο έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία (ή τον φορέα) του ύψους που αντιστοιχεί στη βάση του.	☐	☐
7. Ένα τόξο κύκλου έχει άξονα συμμετρίας τη μεσοκάθετο της χορδής του.	☐	☐

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ – ΣΥΝΘΕΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ

1 Σε καρτεσιανό σύστημα αξόνων σχεδιάστε τα σημεία Α(–1, 4), Β(2, 8), Γ(6, –5) και Δ(–3, –1).

- Να κατασκευάσετε το συμμετρικό του πολυγώνου ΑΒΓΔ ως προς τον άξονα χ΄χ και εν συνεχεία το συμμετρικό του συμμετρικού ως προς άξονα τον ψ΄ψ.
- Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του τελευταίου συμμετρικού.

2 Στο καρτεσιανό σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τα σημεία Α(2, 7), Β(–1, 3), Γ(2, –1) και Δ(5, 3).

- Να τροποποιήσετε τις συντεταγμένες των τεσσάρων σημείων ώστε οι άξονες χ΄χ και ψ΄ψ να γίνουν άξονες συμμετρίας του τετράπλευρου.

3 Να σχεδιάσετε ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ και τη διαγώνιο ΒΔ.

- Να κατασκευάσετε το συμμετρικό του ορθογωνίου ως προς άξονα συμμετρίας την ευθεία ΒΔ.
- Να ονομάσετε Α΄ΒΓ΄Δ το συμμετρικό ορθογωνίου και να ερευνήσετε ποια από τα τρίγωνα που δημιουργούνται είναι συμμετρικά ως προς άξονα τη ΒΔ.

4 Να σχεδιάσετε ένα τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ και τον φορέα του ύψους ΑΔ.

- Να κατασκευάσετε το συμμετρικό του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τον φορέα του ύψους ΑΔ.
- Αν ΑΒ΄Γ΄ είναι το συμμετρικό τρίγωνο να εξετάσετε το είδος των τριγώνων ΑΒΒ΄ και ΑΓΓ΄ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

5 **Διερεύνηση για το συμμετρικό ενός σχήματος ως προς άξονα**
Να ανοίξετε την εφαρμογή και να ερευνήσετε τις ιδιότητες του συμμετρικού ενός πολυγώνου.

Συμμετρία σχήματος

- Να διατυπώσετε συμπεράσματα για τη σχέση του αρχικού και του συμμετρικού ενός σχήματος.
- Τι συμβαίνει όταν μία ή περισσότερες κορυφές του αρχικού σχήματος γίνουν σημεία του άξονα;

6 Να σχεδιάσετε τον κύκλο (Α, 3cm) και ένα σημείο Β σε αυτόν.

- Να κατασκευάσετε την εφαπτομένη (ε) του κύκλου στο σημείο Β.
- Να κατασκευάσετε το συμμετρικό του κύκλου ως προς άξονα συμμετρίας την εφαπτομένη (ε).
- Αν Α΄ είναι το συμμετρικό του κέντρου Α:
  - ➤ Να αιτιολογήσετε ότι τα σημεία Α, Β, Α΄ είναι συνευθειακά.
  - ➤ Να εξετάσετε τη σχέση που έχει η ευθεία (ε) με το τμήμα ΑΑ΄.

7 Να σχεδιάσετε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και μια ευθεία (ε) που δεν το τέμνει.

- Να κατασκευάσετε το συμμετρικό του ΑΒ ως προς άξονα την ευθεία.
- Αν Α΄ και Β΄ είναι τα συμμετρικά των σημείων Α και Β να εξετάσετε το είδος του τετράπλευρου που ορίζουν τα σημεία Α, Β, Β΄, Α΄ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

8 **Η υφαντική τέχνη (Διερεύνηση - Συνθετική εργασία)**

Να ανοίξετε την εφαρμογή και να κάνετε τη συνθετική εργασία που προτείνεται.

Συμμετρία στην υφαντική

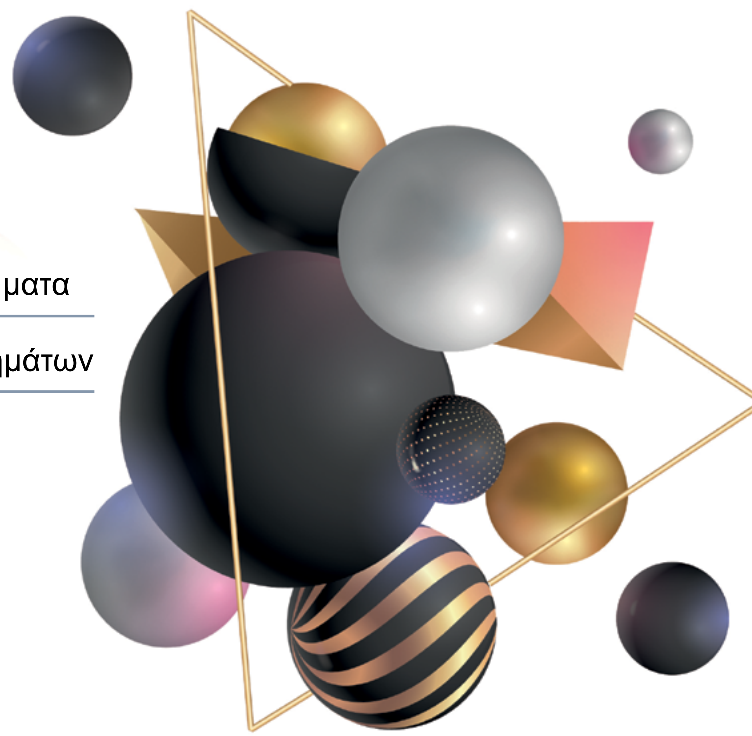
9 **Η αξονική συμμετρία στη φύση (Διερεύνηση - Συνθετική εργασία)**

Να ανοίξετε την εφαρμογή και να κάνετε τη συνθετική εργασία που προτείνεται.

Συμμετρία στη φύση

6
Κεφάλαιο

Γεωμετρία του χώρου



6 ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

- Να αναγνωρίζουν τα βασικά γεωμετρικά στερεά (ορθό πρίσμα, παραλληλεπίπεδο, κύβος, πυραμίδα) και να προσδιορίζουν τα στοιχεία τους.
- Να σχεδιάζουν τις όψεις και τα αναπτύγματα ορθών πρισμάτων και πυραμίδων με ψηφιακά εργαλεία, ισομετρικό χαρτί, γεωπίνακα ή με ελεύθερη σχεδίαση.
- Να αναγνωρίζουν τα στερεά (κύλινδρο, κώνο και σφαίρα) και να προσδιορίζουν τα στοιχεία τους.
- Να διερευνούν και να αναγνωρίζουν τον κύλινδρο, τον κώνο και τη σφαίρα ως στερεά που παράγονται από την περιστροφή βασικών γεωμετρικών σχημάτων.
- Να σχεδιάζουν τις όψεις και τα αναπτύγματα κυλίνδρων και κώνων με ψηφιακά εργαλεία ή με ελεύθερη σχεδίαση.

6.1 ΤΑ ΣΤΕΡΕΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

Έως τώρα συζητήσαμε για τα επίπεδα γεωμετρικά σχήματα και μάθαμε να τα αναγνωρίζουμε, να τα κατασκευάζουμε και να τα διακρίνουμε ως προς τις ιδιότητές τους.

Όμως κοιτάζοντας γύρω μας, παρατηρούμε ότι το σχήμα των υλικών αντικειμένων, εκτός από το μήκος και το πλάτος που συναντάμε στα επίπεδα σχήματα έχει βάθος ή ύψος. Τα σχήματα αυτά ονομάζονται **στερεά** ή **τρισδιάστατα σχήματα**. Ένα σπίτι, για παράδειγμα, έχει μήκος, πλάτος και ύψος.

Αυτά τα γεωμετρικά σχήματα μελετά η **Γεωμετρία του χώρου** ή **στερεομετρία**.

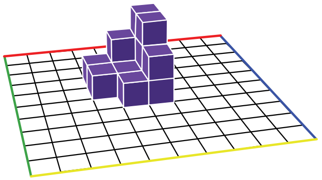
6.2 Η ΘΕΑΣΗ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Τα επίπεδα γεωμετρικά σχήματα τα σχεδιάζουμε στο επίπεδο χαρτί με τα γεωμετρικά μας όργανα. Σε αυτό σχεδιάζουμε και τα στερεά σχήματα. Το ερώτημα, «πώς είναι δυνατόν να σχεδιάζουμε στο επίπεδο χαρτί ένα στερεό σχήμα, με μήκος, πλάτος, ύψος», μπορεί να απαντηθεί με τον τρόπο θέασης των στερεών σχημάτων.

Δραστηριότητα 1

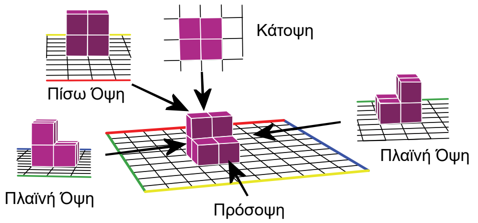
Παρατηρήστε προσεκτικά το σχήμα στη διπλανή εικόνα.
Ενώ είναι σχεδιασμένο στο επίπεδο χαρτί φαίνεται ξεκάθαρα το τρισδιάστατο σχήμα του.

- Να βρείτε πόσοι κύβοι συνολικά συγκροτούν το στερεό σχήμα.
- Να βρείτε πόσοι κύβοι, ενώ υπάρχουν, δεν φαίνονται καθόλου στο σχήμα.
- Να συζητήσετε στην τάξη το συμπέρασμά σας και τον τρόπο θέασης του σχήματος.
- Να βρείτε και δικά σας αντίστοιχα παραδείγματα τρισδιάστατων σχημάτων, στα οποία δεν διακρίνεται ένα μέρος τους.



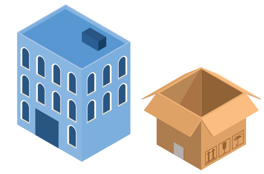
Για τη θέαση των στερεών σχημάτων απαιτείται να μπορούμε να «βλέπουμε» όλες τις όψεις τους. Την πρόσοψη, την πίσω όψη, την κάτοψη και τις πλαϊνές όψεις των σχημάτων.

Στο διπλανό σχήμα μπορούμε εύκολα να διακρίνουμε την πρόσοψη και τη μια πλαϊνή όψη, αλλά πρέπει να φανταστούμε την κάτοψη, την πίσω όψη και την πλαϊνή όψη. Να βρεθούμε με τη φαντασία μας απέναντι από αυτές. Για παράδειγμα, για να δούμε την κάτοψη πρέπει να «βρεθούμε» πάνω από το σχήμα. Για να δούμε τις πλαϊνές όψεις πρέπει να «βρεθούμε» απέναντι από αυτές. Το ίδιο ισχύει και για την πίσω όψη.



6.3 ΠΡΙΣΜΑΤΑ

Τα συνηθέστερα στερεά γεωμετρικά σχήματα είναι τα πρίσματα.
Πολλά κτίρια και πολλές συσκευασίες αντικειμένων έχουν πρισματικό σχήμα. Όπως για παράδειγμα τα σχήματα της διπλανής εικόνας. Έχουν βάση ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και πλευρές που είναι επίσης ορθογώνια παραλληλόγραμμα.



Διερεύνηση 1 «*Η ανύψωση ενός πολυγώνου*»

Να ανοίξετε την εφαρμογή και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

- Να διατυπώσετε τα χαρακτηριστικά των στερεών σχημάτων που δημιουργούνται από την ανύψωση ενός πολυγώνου.
- Να διατυπώσετε και να αιτιολογήσετε τα συμπεράσματά σας στην τάξη.

Ανύψωση

Και στις δύο περιπτώσεις της ανύψωσης ενός πολυγώνου, αλλά και σε κάθε ανάλογη περίπτωση, το στερεό σχήμα που δημιουργείται ονομάζεται **πρίσμα**. Τα κύρια χαρακτηριστικά του είναι τα εξής:

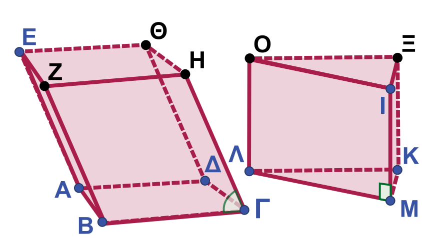
- Τα δύο πολύγωνα, το αρχικό και αυτό της ανύψωσης, είναι ίδια και παράλληλα και ονομάζονται **βάσεις** του στερεού σχήματος. Είναι παράλληλα γιατί δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.
- Τα υπόλοιπα πολύγωνα, που συγκροτούν το στερεό σχήμα, ορίζουν την **παράπλευρη επιφάνεια** του στερεού. Τα πολύγωνα αυτά είναι παραλληλόγραμμα και ονομάζονται **έδρες** του στερεού σχήματος.
- Οι πλευρές των παραλληλογράμων της παράπλευρης επιφάνειας ονομάζονται **ακμές**.

Πρίσμα, είναι ένα στερεό γεωμετρικό σχήμα που οριοθετείται από δύο ίσα παράλληλα πολύγωνα που ονομάζονται **βάσεις** και την **παράπλευρη επιφάνεια**.
Η παράπλευρη επιφάνεια αποτελείται από παραλληλόγραμμα που ονομάζονται **έδρες**.
Η κατακόρυφη ανύψωση ορίζει την (κατακόρυφη) απόσταση των δύο βάσεων που ονομάζεται **ύψος** του πρίσματος.
Το πρίσμα, εκτός από την επιφάνειά του, έχει και χωρητικότητα, που ονομάζεται **όγκος**.

Αν οι βάσεις είναι τρίγωνα, τετράπλευρα, πεντάγωνα κ.ο.κ. τότε το πρίσμα ονομάζεται αντίστοιχα τριγωνικό, τετραπλευρικό, πενταγωνικό κ.ο.κ.

6.3.1 Ορθό πρίσμα

Στη διπλανή εικόνα παρατηρούμε δύο πρίσματα. Το ένα έχει βάση το τετράπλευρο ΑΒΓΔ και το δεύτερο το τρίγωνο ΚΛΜ.



Στο πρώτο, που έχει προέλθει από μια πλάγια ανύψωση του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, παρατηρούμε ότι οι παράπλευρες έδρες είναι πλάγια παραλληλόγραμμα. Αυτό πιστοποιείται από τις γωνίες που σχηματίζουν οι παράπλευρες ακμές του με τις ακμές της βάσης του.

Στο δεύτερο, που έχει προέλθει από την κατακόρυφη ανύψωση του τριγώνου ΚΛΜ, παρατηρούμε ότι οι παράπλευρες έδρες του είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα. Αυτό πιστοποιείται από την ορθή γωνία που σχηματίζουν οι παράπλευρες ακμές του με τις ακμές της βάσης του.

Το δεύτερο πρίσμα, που σχηματίστηκε από την κατακόρυφη ανύψωση του τριγώνου είναι ένα **ορθό πρίσμα** και ονομάζεται **ορθό τριγωνικό πρίσμα**.

Ορθό πρίσμα ονομάζουμε το στερεό σχήμα του οποίου όλες οι παράπλευρες έδρες του είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα.

Στα επόμενα, θα ασχοληθούμε με τα ορθά πρίσματα και γενικότερα με τα ορθά στερεά σχήματα.

Διερεύνηση 2 «*Αποδόμηση του ορθού πρίσματος*»

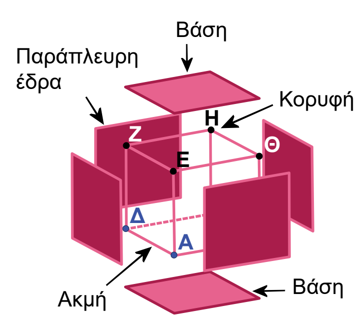
Να ανοίξετε την εφαρμογή και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

- Να καταγράψετε τις κατηγορίες των επίπεδων σχημάτων που συγκροτούν το πρίσμα.
- Να καταγράψετε το πλήθος των κορυφών του, των πλευρών του και των εδρών του.
- Να περιγράψετε στην τάξη τα μέρη του πρίσματος.

Αποδόμηση του πρίσματος

6.3.2 Τα στοιχεία του ορθού πρίσματος

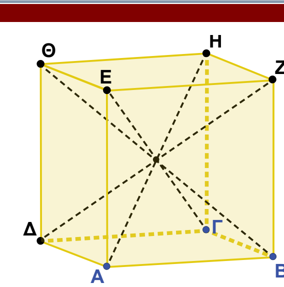
Στο ορθό πρίσμα, οι **βάσεις** του μπορεί να είναι ένα οποιοδήποτε πολύγωνο (τρίγωνο, τετράπλευρο κτλ).
Οι **παράπλευρες έδρες** του είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα και σχηματίζουν την **παράπλευρη επιφάνεια** του πρίσματος.
Οι βάσεις και η παράπλευρη επιφάνεια σχηματίζουν την **ολική επιφάνεια** του πρίσματος.
Ακμές ονομάζουμε τις πλευρές των εδρών του.
Κορυφές ονομάζουμε τις κορυφές των εδρών του.
Οι ακμές της παράπλευρης επιφάνειας στο ορθό πρίσμα, που είναι κάθετες στις βάσεις του, ονομάζονται **ύψος του πρίσματος**.



Ένα πρίσμα **συμβολίζεται** με τα γράμματα των κορυφών του, πρώτα τα γράμματα της βάσης και μετά τα υπόλοιπα γράμματα με παύλα ανάμεσα στα γράμματα της βάσης και τα υπόλοιπα. Για παράδειγμα, τα δύο πρίσματα του σχήματος της 6.3.1. γράφονται ΑΒΓΔ – ΕΖΗΘ και ΚΛΜ – ΞΟΙ.

6.3.3 Ο κύβος

Το πιο γνωστό μας ορθό πρίσμα είναι ο **κύβος**.
Στον κύβο, όλες οι έδρες του είναι τετράγωνα με ίσες πλευρές.
Οι ακμές του, που είναι οι πλευρές των τετραγώνων, είναι όλες ίσες μεταξύ τους.
Το ανάπτυγμά του αποτελείται από τα έξι τετράγωνα της επιφάνειάς του.
Τα ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν δύο κορυφές του κύβου που δεν βρίσκονται στην ίδια έδρα ονομάζονται διαγώνιοι του κύβου. Στο διπλανό σχήμα τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΗ, ΒΘ, ΕΓ και ΔΖ είναι οι τέσσερις διαγώνιοι του κύβου.



Κύβος είναι το ορθό πρίσμα του οποίου όλες οι έδρες είναι τετράγωνα.

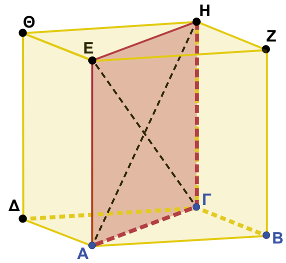
Διερεύνηση 3 «*Οι διαγώνιοι του κύβου*»

Να ανοίξετε την εφαρμογή και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

- Να διατυπώσετε και να αιτιολογήσετε τα συμπεράσματά σας στην τάξη.

Κύβος

Οι διαγώνιοι του κύβου



Σε έναν κύβο ισχύει ότι:
- Οι έδρες του κύβου είναι τετράγωνα με ίσες πλευρές. Για παράδειγμα, το ΑΒΖΕ, στον κύβο του διπλανού σχήματος, είναι τετράγωνο. Άρα οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες και ίσες.
- Ακόμα, οι ΒΖ και ΓΗ είναι επίσης ίσες και παράλληλες.
- Τελικά, οι ΑΕ και ΓΗ είναι ίσες και παράλληλες.
- Το ΑΕΗΓ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Άρα οι διαγώνιοι ΑΗ και ΓΕ είναι ίσες και διχοτομούνται.
- Το ίδιο ισχύει και για τη διαγώνιο ΒΘ σε σχέση με τις άλλες δύο διαγωνίους.

Σε κάθε κύβο, οι τέσσερις διαγώνιοί του είναι ίσες και διχοτομούνται.

6.3.4 Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο

Όταν οι βάσεις ενός ορθού πρίσματος είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα, το πρίσμα ονομάζεται **ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο**. Τέτοιο σχήμα έχουν πολλά αντικείμενα γύρω μας.

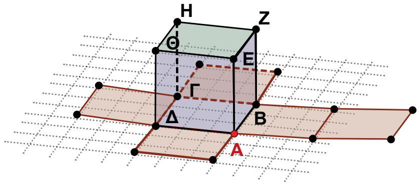
Διερεύνηση 4 «*Οι ιδιότητες του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου*»

Να ανοίξετε την εφαρμογή και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

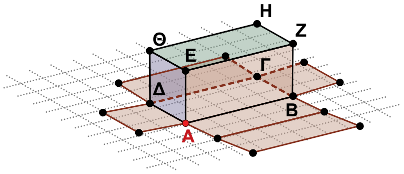
- Να διατυπώσετε τα συμπεράσματά σας στην τάξη.

Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο

Παραθέτουμε το ανάπτυγμα ενός κύβου και ενός παραλληλεπιπέδου:



Το ανάπτυγμα του κύβου



Το ανάπτυγμα του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου

Γενικά το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο είναι ένα ορθό πρίσμα που έχει τις ακόλουθες ιδιότητες.

1. Οι δύο βάσεις του είναι ίσα ορθογώνια παραλληλόγραμμα.

2. Οι έδρες του είναι επίσης ορθογώνια παραλληλόγραμμα.

3. Τα απέναντι ορθογώνια της παράπλευρης επιφάνειας είναι επίσης ίσα.

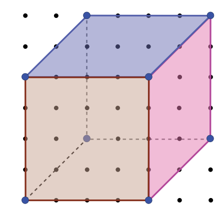
4. Το ανάπτυγμά του αποτελείται από τα δύο ορθογώνια των βάσεων και τα τέσσερα ορθογώνια της παράπλευρης επιφάνειας.

6.3.5 Σχεδίαση και κατασκευή κύβου και ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου στο χαρτί

1. Σχεδίαση σε τετράγωνο πλέγμα

Ο κύβος του διπλανού σχήματος έχει σχεδιαστεί σε τετράγωνο πλέγμα. Η πρόσοψη και η οπίσθια όψη είναι τετράγωνα. Η κάτοψη και οι πλαϊνές όψεις είναι πλάγια παραλληλόγραμμα. Η σχεδίαση αυτή δίνει την αίσθηση του βάθους και σε αυτό συνηγορούν και οι διακεκομμένες ακμές του που είναι ακμές που δεν φαίνονται. Να ανοίξετε την εφαρμογή και να σχεδιάσετε έναν κύβο.

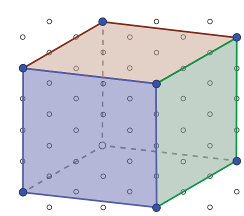
Τετραγωνικός γεωπίνακας



2. Σχεδίαση σε ισομετρικό χαρτί

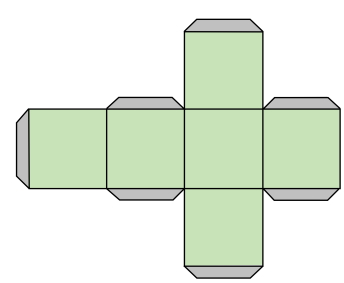
Το παραλληλεπίπεδο στο διπλανό σχήμα έχει σχεδιαστεί σε ισομετρικό πλέγμα. Στο ισομετρικό χαρτί οι πλάγιες γραμμές σχηματίζουν γωνία 30^{o} με τις οριζόντιες. Χρησιμοποιώντας το χαρτί αυτό μπορούμε να σχεδιάσουμε ορθογώνια παραλληλεπίπεδα και κύβους, όπως στο διπλανό σχήμα. Να ανοίξετε την εφαρμογή και να σχεδιάσετε έναν κύβο.

Ισομετρικό πλέγμα



3. Κατασκευή κύβου και ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου από το ανάπτυγμά τους

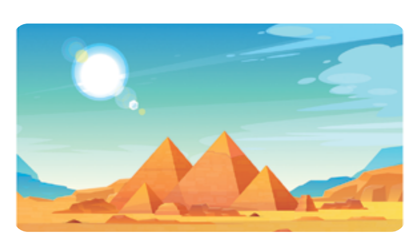
Στο διπλανό ανάπτυγμα του κύβου, τα έξι τετράπλευρα είναι τετράγωνα. Με τα γεωμετρικά σας όργανα να σχεδιάσετε στο χαρτί σας το διπλανό σχήμα και να το διπλώσετε κατάλληλα ώστε να σχηματίσετε τον κύβο. Τα γκρι πολύγωνα θα σας βοηθήσουν να στερεώσετε καλύτερα το σχήμα.



Μπορείτε να σχεδιάσετε με ανάλογο τρόπο το ανάπτυγμα ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου και να κατασκευάσετε στη συνέχεια το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Μπορείτε για παράδειγμα, να σχεδιάσετε το ανάπτυγμα ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου που οι διαστάσεις της βάσης του να είναι 4cm και 5cm και το ύψος του να είναι 3cm.

6.4 ΠΥΡΑΜΙΔΑ

Η πυραμίδα είναι, επίσης, ένα πολύ γνωστό στερεό γεωμετρικό σχήμα.



Στην αρχαία Αίγυπτο οι πυραμίδες χτίζονταν στην έρημο ως ταφικά μνημεία των Φαραώ και θαυμάζονταν για το επιβλητικό τους μέγεθος. Οι πυραμίδες των αρχαίων Αιγυπτίων ήταν τετραγωνικές και ορθές. Δηλαδή, η βάση τους είναι τετράγωνο και το ύψος τους διέρχεται από το κέντρο της βάσης.

Σήμερα πολλές κατασκευές έχουν σχήμα πυραμίδας.

Πυραμίδα είναι το στερεό γεωμετρικό σχήμα που έχει **βάση** ένα πολύγωνο και **παράπλευρες έδρες** τρίγωνα με μια κοινή κορυφή.

Διερεύνηση 5 «*Αποδόμηση της πυραμίδας*»

Να ανοίξετε την εφαρμογή και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

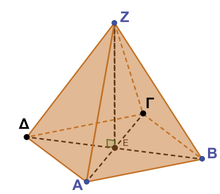
- Να καταγράψετε τις κατηγορίες των επίπεδων σχημάτων που συγκροτούν την πυραμίδα.
- Να καταγράψετε το πλήθος των κορυφών της, των ακμών της και των εδρών της.
- Να περιγράψετε στην τάξη τα μέρη της πυραμίδας.

Αποδόμηση της πυραμίδας

6.4.1 Τα στοιχεία της πυραμίδας

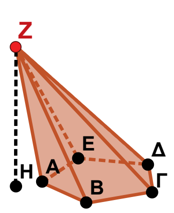
Οι πυραμίδες, ανάλογα με τη βάση τους, ονομάζονται **τριγωνικές** πυραμίδες, όταν έχουν βάση τρίγωνο, **τετραπλευρικές**, όταν έχουν βάση τετράπλευρο, **πενταγωνικές** όταν έχουν βάση πεντάγωνο κ.ο.κ.

- Η κοινή κορυφή των παράπλευρων εδρών λέγεται **κορυφή** της πυραμίδας.
- Οι **παράπλευρες έδρες** τους είναι τρίγωνα.
- Το κάθετο τμήμα από την κορυφή στη βάση ονομάζεται **ύψος** της πυραμίδας.
- Μια πυραμίδα **συμβολίζεται** με το γράμμα της κορυφής μετά τελεία και μετά τα γράμματα της βάσης. Η πυραμίδα στο παρακάτω σχήμα γράφεται Ζ.ΑΒΓΔ.
- Μια πυραμίδα ονομάζεται **κανονική** όταν η βάση της είναι κανονικό πολύγωνο (ισόπλευρο τρίγωνο, τετράγωνο, κανονικό πεντάγωνο κ.ο.κ.) και το ύψος της καταλήγει στο κέντρο του κανονικού πολυγώνου. Η πυραμίδα στο διπλανό σχήμα έχει βάση τετράγωνο και είναι κανονική.
- Το **ανάπτυγμα** μιας κανονικής πυραμίδας αποτελείται από τη βάση της και τα ισοσκελή τρίγωνα της παράπλευρης επιφάνειας.

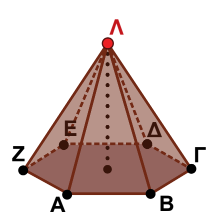


Η κανονική τετραγωνική πυραμίδα Ζ.ΑΒΓΔ

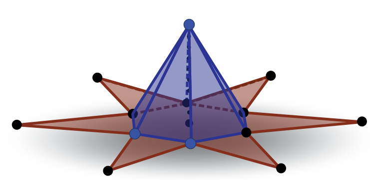
Κανονικό τετράεδρο ονομάζεται η κανονική πυραμίδα που έχει βάση ισόπλευρο τρίγωνο και οι έδρες της είναι επίσης ισόπλευρα τρίγωνα.



Πενταγωνική πυραμίδα



Κανονική εξαγωνική πυραμίδα


Ανάπτυγμα της κανονικής εξαγωνικής πυραμίδας

Διερεύνηση 6 «*Οι ιδιότητες της κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας*»

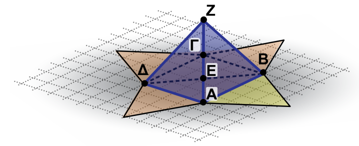
Να ανοίξετε την εφαρμογή και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

Να διατυπώσετε τα συμπεράσματά σας στην τάξη.

Πυραμίδα

Στις κανονικές τετραγωνικές πυραμίδες οι παράπλευρες έδρες είναι ισοσκελή τρίγωνα που έχουν ίσες βάσεις. Οι πλευρές τους είναι ίσες μεταξύ τους.

Το ανάπτυγμά της αποτελείται από ένα τετράγωνο και τέσσερα ισοσκελή τρίγωνα.



Διερεύνηση 7 «*Οι ιδιότητες του κανονικού τετράεδρου*»

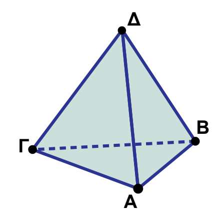
Να ανοίξετε την εφαρμογή και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

- Να διατυπώσετε τα συμπεράσματά σας στην τάξη.

Τετράεδρο

Στο τετράεδρο, όπως το ΑΒΓΔ της διπλανής εικόνας, ισχύουν τα εξής:

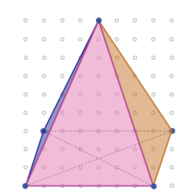
- Το κανονικό τετράεδρο είναι μια **τριγωνική πυραμίδα**.
- Οι τέσσερις έδρες του είναι **ισόπλευρα** τρίγωνα.
- Οποιαδήποτε έδρα του μπορεί να θεωρηθεί ως **βάση** του τετράεδρου.
- Το κάθετο τμήμα από μια κορυφή στην απέναντι έδρα ονομάζεται **ύψος** του τετράεδρου.
- Το **ανάπτυγμα** του κανονικού τετράεδρου αποτελείται από τέσσερα ισόπλευρα τρίγωνα.



6.4.2 Σχεδίαση και κατασκευή πυραμίδας στο χαρτί

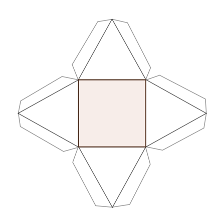
1. Σχεδίαση σε τετράγωνο πλέγμα

Η πυραμίδα του διπλανού σχήματος έχει σχεδιαστεί σε τετράγωνο πλέγμα. Η πρόσοψη και η οπίσθια όψη δίνουν την αίσθηση ότι είναι ισοσκελή τρίγωνα. Οι πλαϊνές όψεις είναι τρίγωνα που δίνουν την αίσθηση ότι είναι ισοσκελή. Η σχεδίαση αυτή δίνει την αίσθηση του βάθους και σε αυτό συνηγορούν και οι διακεκομμένες ακμές του. Ανάλογη σχεδίαση μπορεί να γίνει και σε ισομετρικό χαρτί.



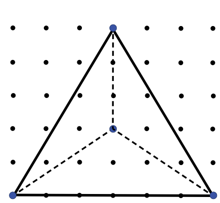
2. Κατασκευή με το ανάπτυγμα της πυραμίδας

Στο διπλανό ανάπτυγμα της τετραγωνικής πυραμίδας τα τέσσερα τρίγωνα είναι ισοσκελή. Στο χαρτί σας, με τα γεωμετρικά σας όργανα να σχεδιάσετε το διπλανό σχήμα και να το διπλώσετε κατάλληλα για να σχηματίσετε την πυραμίδα.

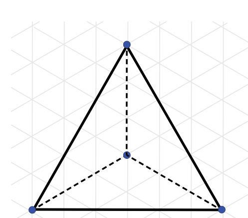


3. Σχεδίαση και κατασκευή τετράεδρου

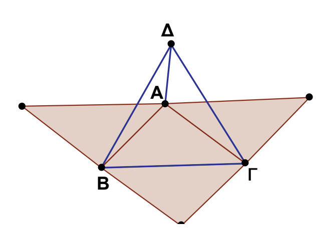
Με τα γεωμετρικά σας όργανα να **σχεδιάσετε** στο χαρτί σας το ανάπτυγμα του τετραέδρου και στη συνέχεια να το **κατασκευάσετε** διπλώνοντας κατάλληλα το χαρτί σας.



Σχεδίαση σε τετραγωνισμένο χαρτί



Σχεδίαση σε ισομετρικό χαρτί τετράεδρου



Ανάπτυγμα τετράεδρου

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1 *«Οι έδρες, οι ακμές και οι κορυφές των πρισμάτων»*

Ο σπουδαίος μαθηματικός Λέοναρντ Όιλερ (Leonhard Euler, 1707 – 1783) μελέτησε τα πολύεδρα και διατύπωσε το εξής θεώρημα:
«Αν Ε ο αριθμός των εδρών, Κ ο αριθμός των κορυφών και Α ο αριθμός των ακμών, **ισχύει Ε + Κ – Α = 2**».
Να εξετάσετε αν το θεώρημα επαληθεύεται για τα στερεά σχήματα που μελετήθηκαν παραπάνω.

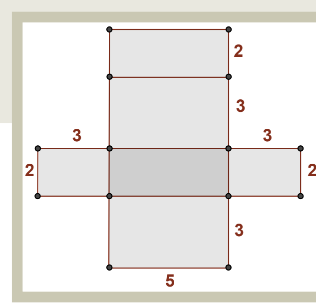
Απάντηση

Συμπληρώνουμε τον παρακάτω πίνακα.

Πρίσμα	Αριθμός εδρών (Ε)	Αριθμός ακμών (Α)	Αριθμών κορυφών (Κ)	Ε + Κ – Α
Κύβος	6	12	8	2
Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο	6	12	8	2
Τριγωνικό πρίσμα	5	9	6	2
Τετραγωνικό πρίσμα	6	12	8	2
Τετράεδρο	4	6	4	2
Τετραγωνική πυραμίδα	5	8	5	2

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2 *«Από το ανάπτυγμα στο στερεό»*

Το διπλανό σχήμα είναι το ανάπτυγμα ενός πρίσματος.
• Να αναγνωρίσετε το στερεό γεωμετρικό σχήμα.
• Να βρείτε τις διαστάσεις της βάσης του και το ύψος του.

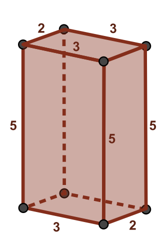
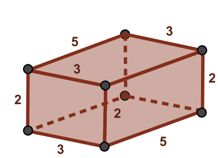
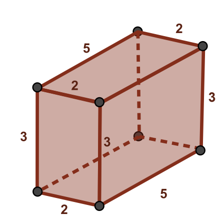


Απάντηση

Στο ανάπτυγμα διακρίνονται τα εξής:
- Δύο ορθογώνια με διαστάσεις 3 μονάδες και 5 μονάδες.
- Δύο ορθογώνια με διαστάσεις 3 μονάδες και 2 μονάδες.
- Δύο ορθογώνια με διαστάσεις 2 μονάδες και 5 μονάδες.

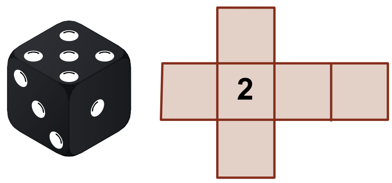
Άρα:

1. Αν βάση θεωρηθεί το ορθογώνιο με διαστάσεις 2 μονάδες και 3 μονάδες, το ύψος του θα είναι 5 μονάδες.
2. Αν βάση θεωρηθεί το ορθογώνιο με διαστάσεις 3 μονάδες και 5 μονάδες, το ύψος θα είναι 2 μονάδες.
3. Αν βάση θεωρηθεί το ορθογώνιο με διαστάσεις 2 μονάδες και 5 μονάδες, το ύψος θα είναι 3 μονάδες.

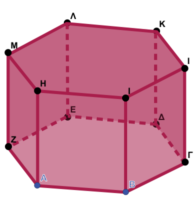




ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

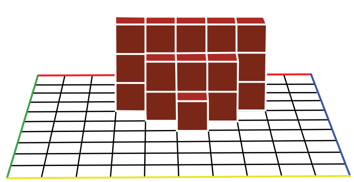
1 Στο ζάρι της παρακάτω εικόνας, οι αριθμοί στις απέναντι έδρες έχουν άθροισμα 7. Να συμπληρώσετε τους αριθμούς του ζαριού στο αντίστοιχο ανάπτυγμά του.



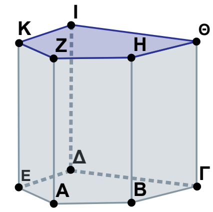
2 Να βρείτε το πλήθος των εδρών, των ακμών και των κορυφών στο παρακάτω εξαγωνικό πρίσμα και να εξετάσετε αν επαληθεύεται το θεώρημα του Euler (εφαρμογή 1).



3 Σε τετραγωνισμένο χαρτί να σχεδιάσετε την κάτοψη, την πίσω όψη και τις πλαϊνές όψεις του παρακάτω στερεού σχήματος.



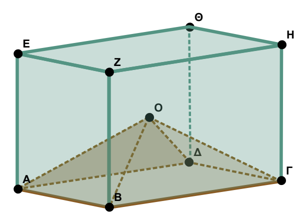
4 Στο παρακάτω πρίσμα οι πλευρές των παράπλευρων ακμών είναι κάθετες στις πλευρές της βάσης.



- Να αιτιολογήσετε ότι οι ακμές των βάσεων είναι παράλληλες μεταξύ τους.
- Αν ΗΖ = 3 μονάδες, να υπολογίσετε το μήκος της ακμής ΑΒ.

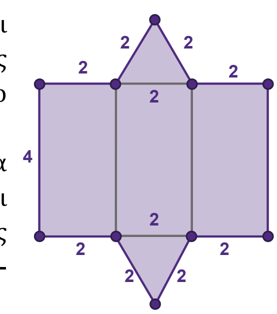
5 Στο εσωτερικό του παρακάτω ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου ΑΒΓΔ – ΕΖΗΘ έχει σχεδιαστεί η πυραμίδα Ο.ΑΒΓΔ.

- Να βρείτε και να ονομάσετε τις υπόλοιπες πυραμίδες που έχουν κορυφή το σημείο Ο.



6 Το διπλανό σχήμα έχει πλευρές με μήκη 2 μονάδες και 4 μονάδες και είναι το ανάπτυγμα ενός στερεού.

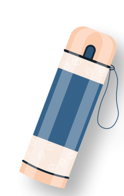
- Τι είδους στερεό σχήμα είναι και ποιες είναι οι διαστάσεις της βάσης του και των παράπλευρων ακμών του;



6.5 ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ

Ένα ακόμα στερεό σχήμα που βλέπουμε συχνά γύρω μας σε αντικείμενα είναι ο **κύλινδρος**.

Σε σχέση με το πρίσμα και την πυραμίδα, στον κύλινδρο οι βάσεις είναι κύκλοι, ενώ η παράπλευρη επιφάνειά του είναι ένα «τυλιγμένο» ορθογώνιο παραλληλόγραμμο γύρω από τις βάσεις.



Διερεύνηση 8

Να ανοίξετε την εφαρμογή και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

- Να περιγράψετε το είδος της επιφάνειας που δημιουργεί η περιστροφή του ορθογωνίου.

Κύλινδρος εκ περιστροφής

Κύλινδρος είναι το στερεό σχήμα που προκύπτει από την περιστροφή ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου γύρω από μια πλευρά του.

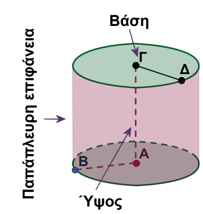
Διερεύνηση 9

Να ανοίξετε την εφαρμογή και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

- Να καταγράψετε τις κατηγορίες των επίπεδων σχημάτων που συγκροτούν τον κύλινδρο.

Αποδόμηση κυλίνδρου

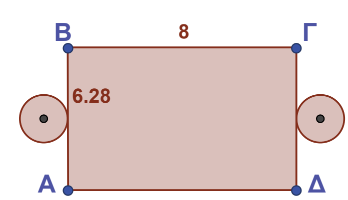
6.5.1 Τα στοιχεία του κυλίνδρου



Ο κύλινδρος αποτελείται από δύο κύκλους που είναι οι **βάσεις** του.
Ύψος του κυλίνδρου είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα κέντρα των δύο κύκλων.
Η παράπλευρη επιφάνεια ονομάζεται **κυλινδρική επιφάνεια** και έχει την εξής ιδιότητα:
Είναι μια καμπύλη επιφάνεια της οποίας το ανάπτυγμα είναι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με διαστάσεις ίσες με το μήκος του κύκλου και το ύψος του κυλίνδρου.

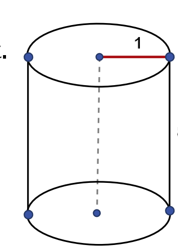
6.5.2 Σχεδίαση και κατασκευή κυλίνδρου στο χαρτί

1. Σχεδίαση στο χαρτί



Έστω ότι θέλουμε να κατασκευάσουμε κύλινδρο με ακτίνα βάσης 1 μονάδα και ύψος 8 μονάδες. Σχεδιάζουμε στο χαρτί μας το ανάπτυγμα του κυλίνδρου ως εξής:

- Σχεδιάζουμε ένα ορθογώνιο με τη μια πλευρά 8 μονάδες και την άλλη ίση με το μήκος του κύκλου ακτίνας 1 μονάδας. Αυτό όπως γνωρίζουμε από το Δημοτικό, είναι ίσο με $2 \cdot (3,14) \cdot 1 \;=\; 6,28$ μονάδες.
- Σχεδιάζουμε δύο κύκλους, που να εφάπτονται των πλευρών ΑΒ και ΓΔ, μήκους $6,28$ στο μέσο τους, ως εξής:
  - ➤ Σχεδιάζουμε με τον γνώμονα ευθεία κάθετη στις πλευρές ΑΒ και ΓΔ στο μέσο τους.
  - ➤ Σχεδιάζουμε σε αυτές τα κέντρα των δύο κύκλων, ώστε να απέχουν από τις πλευρές 1 μονάδα.
  - ➤ Σχεδιάζουμε με αυτά τα κέντρα και ακτίνα 1 μονάδα τους δύο κύκλους.
- Διπλώνουμε το χαρτί μας γύρω από τα σημεία επαφής των κύκλων και σχηματίζουμε την κυλινδρική επιφάνεια.
- Τέλος, διπλώνουμε τους δύο κύκλους ώστε να αποτελέσουν τις βάσεις του κυλίνδρου.



2. Με ελεύθερη σχεδίαση

Σχεδιάζουμε στο χαρτί μας δύο ελλείψεις (πεπλατυσμένοι κύκλοι), η μία απέναντι στην άλλη, και ενώνουμε τα άκρα τους, όπως στο παραπάνω σχήμα.

6.6 ΚΩΝΟΣ

Ένα ακόμα στερεό σχήμα που βλέπουμε επίσης γύρω μας σε διάφορα αντικείμενα είναι ο **κώνος**.

Σε σχέση με το πρίσμα, στον κώνο η βάση του είναι κύκλος, ενώ η παράπλευρη επιφάνειά του είναι ένας «τυλιγμένος» κυκλικός τομέας κύκλου.

Διερεύνηση 10

Να ανοίξετε την εφαρμογή και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

- Να περιγράψετε το είδος της επιφάνειας που δημιουργεί η περιστροφή του ορθογωνίου τριγώνου.

Κώνος εκ περιστροφής

Κώνος είναι το στερεό σχήμα που προκύπτει από την περιστροφή ενός ορθογωνίου τριγώνου γύρω από μια κάθετη πλευρά του.

Διερεύνηση 11

Να ανοίξετε την εφαρμογή και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

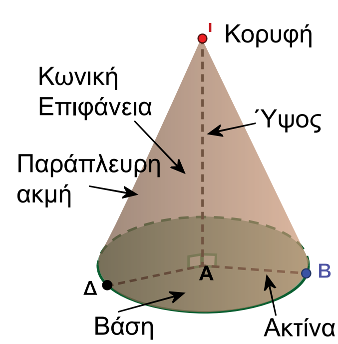
- Να περιγράψετε τις κατηγορίες των επίπεδων σχημάτων που συγκροτούν τον κώνο.

Αποδόμηση κώνου

6.6.1 Τα στοιχεία του κώνου

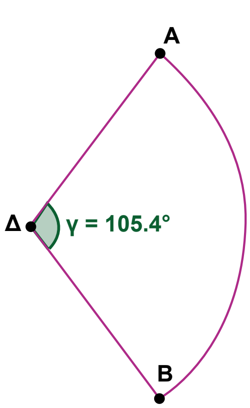
Ο κώνος αποτελείται από τη **βάση** του, που είναι κύκλος, και την **κωνική επιφάνεια**.

Ύψος του κώνου είναι το ευθύγραμμο τμήμα που έχει άκρα το κέντρο του κύκλου και την κορυφή του.



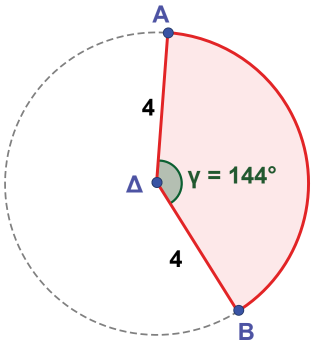
Παράπλευρη ακμή είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ανήκει στην παράπλευρη επιφάνεια και έχει άκρα την κορυφή και ένα σημείο του κύκλου της βάσης.

Το **ανάπτυγμα** του κώνου προκύπτει αν «ξετυλίξουμε» την επιφάνειά του στο επίπεδο. Τότε θα σχηματιστεί ένας κυκλικός τομέας που έχει κέντρο την κορυφή του κώνου και ακτίνα την παράπλευρη ακμή του. Το τόξο του έχει μήκος ίσο με το μήκος του κύκλου της βάσης.



6.6.2 Σχεδίαση του κώνου

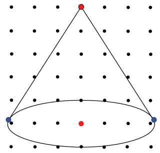
1. Σχεδίαση στο χαρτί



- Σχεδιάζουμε στο χαρτί μας κύκλο με κέντρο ένα σημείο, όπως το Δ του διπλανού σχήματος και ακτίνα, για παράδειγμα 4 μονάδες.
- Σχεδιάζουμε με το μοιρογνωμόνιο επίκεντρη γωνία, για παράδειγμα τη $\hat{\gamma} = 144^o$.
- Κόβουμε τον κυκλικό τομέα που δημιουργεί η επίκεντρη γωνία.
- Διπλώνουμε κατάλληλα και σχηματίζουμε τον κώνο.

2. Με ελεύθερη σχεδίαση

Σχεδιάζουμε στο χαρτί μας μία έλλειψη, ως βάση του κώνου, και ένα σημείο, ως κορυφή του. Ενώνουμε το σημείο με δύο άκρα της έλλειψης και έχουμε τον κώνο, όπως στο διπλανό σχήμα.



6.7 ΣΦΑΙΡΑ

Η σφαίρα είναι επίσης ένα στερεό σχήμα που βλέπουμε πολύ συχνά γύρω μας.

Διερεύνηση 12

Να ανοίξετε την εφαρμογή και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

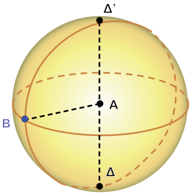
- Να περιγράψετε το είδος της επιφάνειας που δημιουργεί η περιστροφή του ημικυκλίου.

Σφαίρα εκ περιστροφής

Σφαίρα είναι το στερεό σχήμα που προκύπτει από την περιστροφή ενός κυκλικού δίσκου γύρω από μια διάμετρό του.

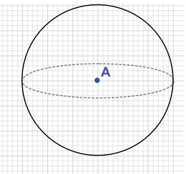
Κατά την περιστροφή του κυκλικού δίσκου, ο κύκλος δημιουργεί την **επιφάνεια** της σφαίρας.

6.7.1 Τα στοιχεία της σφαίρας



Όπως ο κύκλος, έτσι και η σφαίρα ορίζεται από το **κέντρο** της και την **ακτίνα** της.
Όπως στον κύκλο, ονομάζουμε **διάμετρο** το ευθύγραμμο τμήμα που έχει τα άκρα του στον κύκλο, έτσι και στη σφαίρα, η διάμετρος έχει τα άκρα της στην επιφάνεια της σφαίρας και διέρχεται από το κέντρο της.
Ο κύκλος που έχει κέντρο το κέντρο της σφαίρας λέγεται **μέγιστος κύκλος** της σφαίρας.

Σχεδίαση της σφαίρας στο χαρτί



Μπορούμε με τον διαβήτη μας να σχεδιάσουμε έναν κύκλο στο χαρτί μας. Στη συνέχεια να σχεδιάσουμε μια έλλειψη, όπως στο διπλανό σχήμα, ώστε να δείξουμε το «βάθος» που έχει η σφαίρα.

Διερεύνηση 13

Να ανοίξετε την εφαρμογή και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

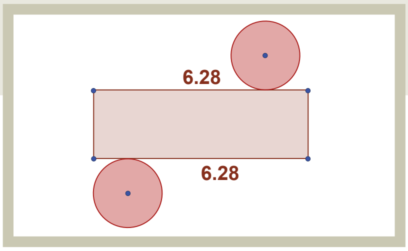
- Να περιγράψετε τα χαρακτηριστικά της επιφάνειας που συγκροτεί τη σφαίρα.

Σφαίρα

Τα σημεία της σφαιρικής επιφάνειας έχουν τα εξής χαρακτηριστικά:
- **Μέγιστος κύκλος** μιας σφαίρας είναι αυτός που χωρίζει τη σφαίρα σε δύο ίσα ημισφαίρια.
- Δύο σημεία στη σφαιρική επιφάνεια ορίζουν ένα τόξο στη σφαίρα που είναι τόξο ενός μέγιστου κύκλου.
- Τρία σημεία στη σφαιρική επιφάνεια δημιουργούν έναν κύκλο που δεν είναι πάντοτε μέγιστος κύκλος. Δηλαδή, το κέντρο του δεν ταυτίζεται πάντοτε με το κέντρο της σφαίρας.
- Τρία σημεία στην επιφάνεια της σφαίρας, που δεν ανήκουν και τα τρία σε έναν μέγιστο κύκλο, ορίζουν ένα **σφαιρικό τρίγωνο**. Δηλαδή, ένα τρίγωνο με πλευρές τόξα της σφαίρας.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1 *«Το ανάπτυγμα ενός κυλίνδρου»*

Στο διπλανό σχήμα έχει σχεδιαστεί το ανάπτυγμα ενός κυλίνδρου. Να υπολογιστεί η ακτίνα της βάσης του.

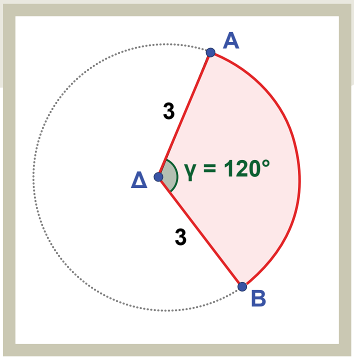


Απάντηση

Το μήκος της πλευράς η οποία θα τυλιχτεί για να σχηματιστεί ο κύλινδρος πρέπει να έχει μήκος ίσο με τη διάμετρο του κύκλου της βάσης επί 3,14. Δηλαδή, αν ρ είναι η ακτίνα του κύκλου της βάσης, το μήκος θα είναι ίσο με $2\pi\rho = 2 \cdot (3{,}14)\rho = 6{,}28\rho$ και επειδή το μήκος της είναι 6,28, η ακτίνα της βάσης του θα είναι ίση με 1 μονάδα.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2 *«Το ανάπτυγμα ενός κώνου»*

Το διπλανό σχήμα είναι το ανάπτυγμα ενός κώνου. Να σχηματίσετε τον κώνο στο χαρτί και να υπολογίσετε τα στοιχεία του.



Απάντηση

Η παράπλευρη ακμή του αντίστοιχου κώνου είναι ίση με την ακτίνα του κυκλικού τομέα. Δηλαδή ίση με 3 μονάδες.

Από τον σχηματισμό του κώνου προκύπτει ότι η ακτίνα της βάσης του είναι ίση με 1 μονάδα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να σχεδιάσετε στο χαρτί σας ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με διαστάσεις ΑΒ = 4 μονάδες και ΑΔ = 3 μονάδες.

- Να περιγράψετε το είδος του στερεού σχήματος που θα δημιουργηθεί αν περιστρέψετε το ορθογώνιο γύρω από την ΑΒ. Να περιγράψετε το ύψος του και την ακτίνα του στερεού σχήματος.
- Να κάνετε το ίδιο αν περιστρέψετε το ορθογώνιο γύρω από την πλευρά ΑΔ.

2 Να σχεδιάσετε στο χαρτί σας το ανάπτυγμα ενός κυλίνδρου με ακτίνα βάσης 5 μονάδες και ύψος 2 μονάδες. Στη συνέχεια να τυλίξετε το ανάπτυγμα και να επιβεβαιώσετε ότι ο κύλινδρος έχει τις διαστάσεις που ζητούνται.

3 Να σχεδιάσετε στο χαρτί σας ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) με ΑΒ = 4 μονάδες και ΑΓ = 3 μονάδες.

Να περιγράψετε το είδος του στερεού σχήματος που θα προκύψει αν περιστρέψετε το τρίγωνο γύρω από την πλευρά ΑΓ. Να περιγράψετε το ύψος και την ακτίνα της βάσης του στερεού σχήματος.

4 Να σχεδιάσετε στο χαρτί σας το ανάπτυγμα ενός κώνου με ακτίνα βάσης 3 μονάδες και παράπλευρη ακμή 5 μονάδες. Στη συνέχεια να τυλίξετε το ανάπτυγμα και να επιβεβαιώσετε ότι ο κώνος έχει τις διαστάσεις που ζητούνται.

Ανακεφαλαίωση

- **Πρίσμα** είναι ένα στερεό γεωμετρικό σχήμα που οριοθετείται από δύο ίδια παράλληλα πολύγωνα που ονομάζονται **βάσεις** και την **παράπλευρη επιφάνεια**. Η παράπλευρη επιφάνεια αποτελείται από παραλληλόγραμμα που ονομάζονται **έδρες**. Η απόσταση των δύο βάσεων ονομάζεται **ύψος** του πρίσματος. Το πρίσμα, εκτός από την επιφάνειά του, έχει και χωρητικότητα, που ονομάζεται **όγκος**.
- **Ορθό πρίσμα** ονομάζουμε το στερεό σχήμα του οποίου όλες οι παράπλευρες έδρες είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα.
- Ο **κύβος** είναι το ορθό πρίσμα του οποίου όλες οι έδρες είναι τετράγωνα.
- Το **ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο** είναι ένα ορθό πρίσμα που έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:
  - ➤ Οι δύο βάσεις του είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα.
  - ➤ Οι έδρες του είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα.
  - ➤ Τα απέναντι ορθογώνια παραλληλόγραμμα της παράπλευρης επιφάνειας έχουν ίσες διαστάσεις.
- **Πυραμίδα** είναι το στερεό γεωμετρικό σχήμα που έχει **βάση** ένα πολύγωνο και **παράπλευρες έδρες** τρίγωνα με κοινή κορυφή.
- **Κανονικό τετράεδρο** ονομάζεται η κανονική πυραμίδα που έχει βάση ισόπλευρο τρίγωνο και οι έδρες της είναι επίσης ισόπλευρα τρίγωνα.
- **Κύλινδρος** είναι το στερεό σχήμα που προκύπτει από την περιστροφή ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου γύρω από μια πλευρά του.
- **Κώνος** είναι το στερεό σχήμα που προκύπτει από την περιστροφή ενός ορθογωνίου τριγώνου γύρω από μια κάθετη πλευρά του.
- **Σφαίρα** είναι το στερεό σχήμα που προκύπτει από την περιστροφή ενός κυκλικού δίσκου γύρω από τη διάμετρό του.

Αυτοαξιολόγηση

Να επιλέξετε τις σωστές απαντήσεις.

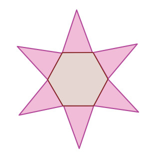
1. Ο κύβος έχει 12 ακμές και 12 κορυφές.
Α. Σωστό **Β.** Λάθος

2. Αν ένα πρίσμα έχει βάση πεντάγωνο, τότε οι κορυφές του πρίσματος είναι 10.
Α. Σωστό **Β.** Λάθος

3. Οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι $α = 4$ μονάδες, $β = 3$ μονάδες και $γ = 4$ μονάδες. Να επιλέξετε τις σωστές διαστάσεις της βάσης ώστε αυτό να θεωρείται ως ορθό τετραγωνικό πρίσμα (βάση τετράγωνο).
Α. $α = 4$ μονάδες και $β = 3$ μονάδες **Β.** $α = 4$ μονάδες και $γ = 4$ μονάδες. **Γ.** $β = 3$ μονάδες και $γ = 4$ μονάδες

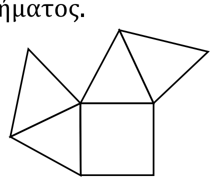
4. Αν περιστρέψουμε ένα τετράγωνο πλευράς 4 μονάδων γύρω από μια πλευρά του θα παραχθεί ένας κύλινδρος. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση για την ακτίνα της βάσης του ρ και το ύψος του υ.
Α. $ρ = 4$ μονάδες και $υ = 8$ μονάδες **Β.** $ρ = 12{,}56$ μονάδες και $υ = 4$ μονάδες **Γ.** $ρ = 4$ μονάδες και $υ = 4$ μονάδες

5. Τι είδους στερεό σχήμα θα προκύψει αν διπλώσουμε το διπλανό σχήμα;
Α. Δεν προκύπτει στερεό σχήμα.
Β. Θα προκύψει εξαγωνική πυραμίδα.
Γ. Θα προκύψει εξαγωνικό πρίσμα.

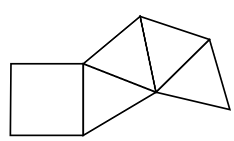


ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ – ΣΥΝΘΕΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ

1 Να βρείτε ποιο από τα παρακάτω σχήματα είναι ανάπτυγμα στερεού. Ποιο είναι το είδος του στερεού σχήματος.

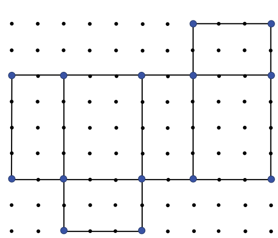


[1]

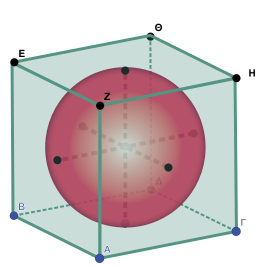


[2]

2 Σε τετράγωνο πλέγμα, έχουμε σχεδιάσει το παρακάτω σχήμα. Τι είδους στερεό σχήμα μπορεί να σχηματιστεί με δίπλωση; Και τι διαστάσεις έχει;



3 Στο παρακάτω σχήμα η σφαίρα είναι τοποθετημένη στο εσωτερικό του κύβου έτσι ώστε να εφάπτεται σε όλες στις έδρες του. Αν η ακμή του κύβου είναι 6 μονάδες, να βρείτε την ακτίνα της σφαίρας.



4 **Οι πυραμίδες της Αιγύπτου (Συνθετική εργασία)**
Να ανοίξετε την εφαρμογή και να κάνετε την εργασία που σας προτείνεται.

Οι πυραμίδες της Αιγύπτου

5 **Συνδέσεις με την ιστορία**
Να ανοίξετε την εφαρμογή και να κάνετε την εργασία που σας προτείνεται.

Στερεά σχήματα

6 **Γλωσσάρι της Γεωμετρίας**
Να ανοίξετε το γλωσσάρι της Γεωμετρίας για να κάνετε επανάληψη εννοιών και όρων στο κεφάλαιο αυτό.

Γλωσσάρι Γεωμετρίας

7 Κεφάλαιο

Μετρήσεις

Από τα πρώτα πράγματα που χρειάστηκε να κάνουν οι άνθρωποι στη ζωή τους ήταν να μετρούν. Για τη μέτρηση διακριτών αντικειμένων, όπως τα ζώα τους, χρησιμοποίησαν πέτρες ή χαραγές πάνω σε πέτρες ή οστά, ενώ για τη μέτρηση του μήκους, αρχικά χρησιμοποίησαν μέρη του σώματός τους. Το πόδι τους, την παλάμη τους, τον πήχη τους.

Για ποιο λόγο οι άνθρωποι αναγκάστηκαν να μετρούν;

7 ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

- Να επιλέγουν τις κατάλληλες μονάδες μέτρησης και να μετατρέπουν μονάδες μέτρησης από τη μία στην άλλη.
- Να προσθέτουν και να αφαιρούν ευθύγραμμα τμήματα με τα γεωμετρικά όργανα.
- Να υπολογίζουν το μέτρο του αθροίσματος και της διαφοράς μηκών ευθύγραμμων τμημάτων.
- Να υπολογίζουν τα μήκη των πλευρών και των περιμέτρων πολυγώνων.
- Να επιλύουν προβλήματα σύγκρισης τμημάτων, μήκους τμημάτων και περιμέτρων με κατάλληλες μονάδες μέτρησης.

7.1 Η ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΟΥ ΜΗΚΟΥΣ ΚΑΙ ΟΙ ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ

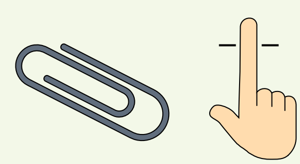
Αν σχεδιάσετε στο χαρτί σας διάφορα ευθύγραμμα τμήματα και τα συγκρίνετε μεταξύ τους θα διαπιστώσετε ότι άλλο είναι πιο μικρό, άλλο πιο μεγάλο. Η σύγκριση αυτή δηλώνει ότι τα ευθύγραμμα τμήματα έχουν μέγεθος.
Το μέγεθος που προκύπτει ως αποτέλεσμα της σύγκρισης ονομάζεται **μήκος**.

Όπως γνωρίζουμε, μπορούμε να μετρήσουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα με τον χάρακα και να βρούμε το μήκος του. Τι ακριβώς κάνουμε όταν μετράμε ένα ευθύγραμμο τμήμα με τον χάρακα;

Διερεύνηση 1

Να σχεδιάσετε στο χαρτί σας ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Χρησιμοποιήστε τα εξής εργαλεία για να μετρήσετε το μήκος του.

- Έναν συνδετήρα.
- Το πάχος του δεξιού δείκτη του χεριού σας.
- Να απαντήσετε στα εξής ερωτήματα:
  - ➤ Πόσοι συνδετήρες είναι το μήκος του ΑΒ;
  - ➤ Πόσοι δείκτες χεριού είναι το μήκος του;
  - ➤ Μπορούν να επαληθεύσουν τις απαντήσεις σας οι συμμαθητές σας;



- Ένας συμμαθητής σας βρήκε ότι το μήκος του ΑΒ που σχεδιάσατε είναι 4 δείκτες του χεριού του, ενώ εσείς βρήκατε ότι είναι 3 και κάτι δείκτες του δικού σας χεριού. Ποια μέτρηση είναι σωστή; Και γιατί;

Να συζητήσετε στην τάξη για τη σημασία των μονάδων μέτρησης στην καθημερινή ζωή, στο εμπόριο και στην οικονομία.

- Να αναζητήσετε πληροφορίες για το μέτρο και την ιστορία του και να παρουσιάσετε στην τάξη τα ευρήματά σας για τη μέτρηση και το μέτρο.
- Να ανοίξετε την εφαρμογή και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

Μετρήσεις

Γενικά:

- Μέτρηση ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι μια διαδικασία σύγκρισής του με ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα, που παίρνουμε ως μονάδα μέτρησης.
- Για την κοινωνική και οικονομική ζωή είναι σημαντικό να έχουν οι άνθρωποι κοινή μονάδα μέτρησης.
- Στις 7 Απριλίου 1795 θεσπίστηκε ως κοινή μονάδα μέτρησης το **μέτρο (m)**. Ως μέτρο ορίζουμε την απόσταση που ταξιδεύει το φως σε 1/299792458 δευτερόλεπτα.

Σήμερα, οι περισσότεροι λαοί χρησιμοποιούν το μέτρο, τις υποδιαιρέσεις του και τα παράγωγά τους για να μετρούν μήκη και αποστάσεις. Συγκεκριμένα:

Υποδιαιρέσεις του μέτρου (m)

Δεκατόμετρο (dm)= $\frac{1}{10}$ του μέτρου = 0,1 μέτρα. Εκατοστόμετρο (cm) = $\frac{1}{100}$ του μέτρου = 0,01 μέτρα. Χιλιοστόμετρο (mm) = $\frac{1}{1000}$ του μέτρου = 0,001 μέτρα.

Πολλαπλάσια του μέτρου (m)

Δεκάμετρο (dam)= 10 μέτρα = 10^1 μέτρα Εκατόμετρο (hm)= 100 μέτρα = 10^2 μέτρα Χιλιόμετρο (Km)= 1000 μέτρα = 10^3 μέτρα

7.1.1 Μετατροπές μονάδων μέτρησης

Συχνά, για να μετρήσουμε το μήκος ενός ευθυγράμμου τμήματος ή μιας απόστασης χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε περισσότερες από μια υποδιαιρέσεις ή πολλαπλάσια του μέτρου.

Δραστηριότητα 1

Οι γονείς της Αλίκης θέλουν να περιφράξουν μία πλευρά της αυλής του σπιτιού τους με συρματόπλεγμα. Η Αλίκη, για να μετρήσει το μήκος της πλευράς, χρησιμοποίησε το μέτρο και τις υποδιαιρέσεις του δεκατόμετρο (dm) εκατοστόμετρο (cm) και βρήκε ότι έχει μήκος 4m, 3dm και 8cm.

- Στην αγορά ένας έμπορος πουλά το συρματόπλεγμα προς 8 ευρώ το μέτρο (m). Ένας δεύτερος προς 0,80 λεπτά το δεκατόμετρο(dm) και ένας τρίτος προς 0,10 λεπτά το εκατοστόμετρο (cm). Πώς θα υπολογίσει η Αλίκη ποια αγορά τη συμφέρει;
- Πόσα μέτρα, δεκατόμετρα και εκατοστόμετρα είναι το μήκος της πλευράς;
- Να συζητήσετε στην τάξη τον τρόπο μετατροπής του μήκους από τη μία μονάδα στην άλλη.

Διερεύνηση 2

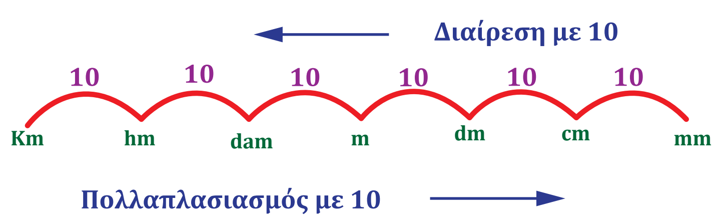
Μετρήθηκε το μήκος μιας πλευράς ενός οικοπέδου και βρέθηκε ίση με 42 m, 8dm, 7cm και 5mm.

- Πόσα μέτρα είναι το μήκος της;
- Πόσα dm, cm, mm είναι;

Να ανοίξετε την εφαρμογή και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

Μετατροπές

Οι μετατροπές του μήκους από τη μία μονάδα στην άλλη γίνονται με τη βοήθεια του πολλαπλασιασμού επί 10 ή της διαίρεσης δια 10, ανάλογα με την κατεύθυνση της μετατροπής.



Για παράδειγμα, η μετατροπή των 3dm σε μέτρα γίνεται προς τα αριστερά και είναι: 3dm = (3:10)m = 0,3m.
Επίσης, η μετατροπή των 3dm σε cm γίνεται προς τα δεξιά και είναι: 3dm = (3 · 10)cm = 30cm

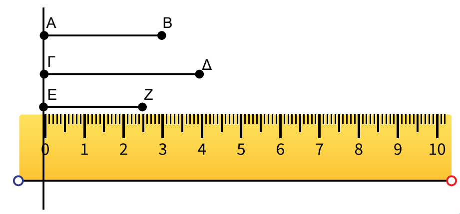
7.1.2 Σύγκριση ευθύγραμμων τμημάτων

Σε προηγούμενη ενότητα αναφερθήκαμε στη σύγκριση ευθύγραμμων τμημάτων και τα συγκρίναμε με τη βοήθεια της τοποθέτησης του ενός πάνω στο άλλο ή με τη χρήση του διαβήτη.
Μήκος ενός ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ είναι ο αριθμός που δείχνει το αποτέλεσμα της μέτρησής του.
Το μήκος του ΑΒ συμβολίζεται με (ΑΒ), αλλά συνήθως χρησιμοποιείται με το ίδιο νόημα και το ΑΒ.
Το μήκος του ΑΒ εκφράζει την απόσταση των σημείων Α, Β.

Δραστηριότητα 2

Στο χαρτί σας να σχεδιάσετε ένα ευθύγραμμο τμήμα με μήκος 3cm.
Στη συνέχεια να σχεδιάσετε ένα μικρότερο και ένα μεγαλύτερο από το ΑΒ.

- Να περιγράψετε τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιήσατε τον χάρακα για να σχεδιάσετε ένα ευθύγραμμο τμήμα μεγαλύτερο ή μικρότερο του ΑΒ.



Γενικά, ισχύει ότι:

- Αν δύο ευθύγραμμα είναι ίσα τότε έχουν ίσα μήκη. Αντιστρόφως, αν δύο τμήματα έχουν ίσα μήκη τότε είναι ίσα.

Αν **ΑΒ = ΓΔ** τότε **(ΑΒ) = (ΓΔ).** Αντιστρόφως, αν **(ΑΒ) = (ΓΔ)** τότε **ΑΒ = ΓΔ**

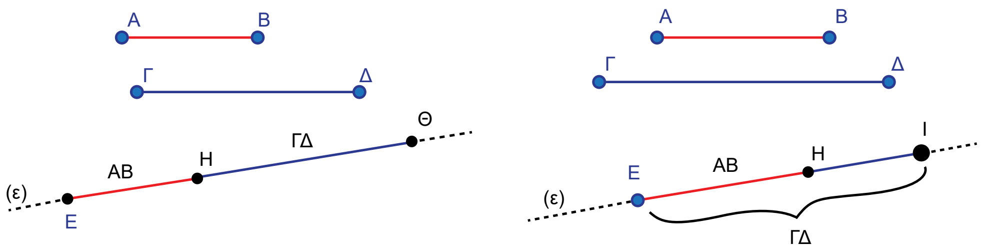
- Αν ένα ευθύγραμμο τμήμα είναι μεγαλύτερο από ένα άλλο, τότε έχει μεγαλύτερο μήκος από αυτό.

Αντίστροφα, αν έχει μεγαλύτερο μήκος από κάποιο άλλο, τότε είναι μεγαλύτερο από αυτό.

Αν **ΑΒ > ΓΔ** τότε **(ΑΒ) > (ΓΔ).** Αντιστρόφως, αν **(ΑΒ) > (ΓΔ)** τότε **ΑΒ > ΓΔ**

7.1.3 Άθροισμα και διαφορά ευθύγραμμων τμημάτων

Άθροισμα δύο ή περισσότερων ευθύγραμμων τμημάτων είναι το ευθύγραμμο τμήμα που προκύπτει αν αυτά μεταφερθούν σε μια ευθεία και γίνουν διαδοχικά.
Διαφορά δύο ευθύγραμμων τμημάτων είναι το ευθύγραμμο τμήμα που προκύπτει αν αυτά μεταφερθούν σε μια ευθεία, ώστε να έχουν κοινή αρχή ένα σημείο της και να βρίσκονται στην ίδια ημιευθεία που ορίζει το σημείο αυτό. Το ευθύγραμμο τμήμα που έχει άκρα τα άλλα άκρα των δύο τμημάτων ονομάζεται διαφορά.



(α) Το τμήμα ΕΘ είναι το άθροισμα των ΑΒ και ΓΔ ή ΕΘ = ΑΒ + ΓΔ.
(β) Το τμήμα ΗΙ είναι η διαφορά των ΑΒ και ΓΔ ή ΗΙ = ΓΔ – ΑΒ.

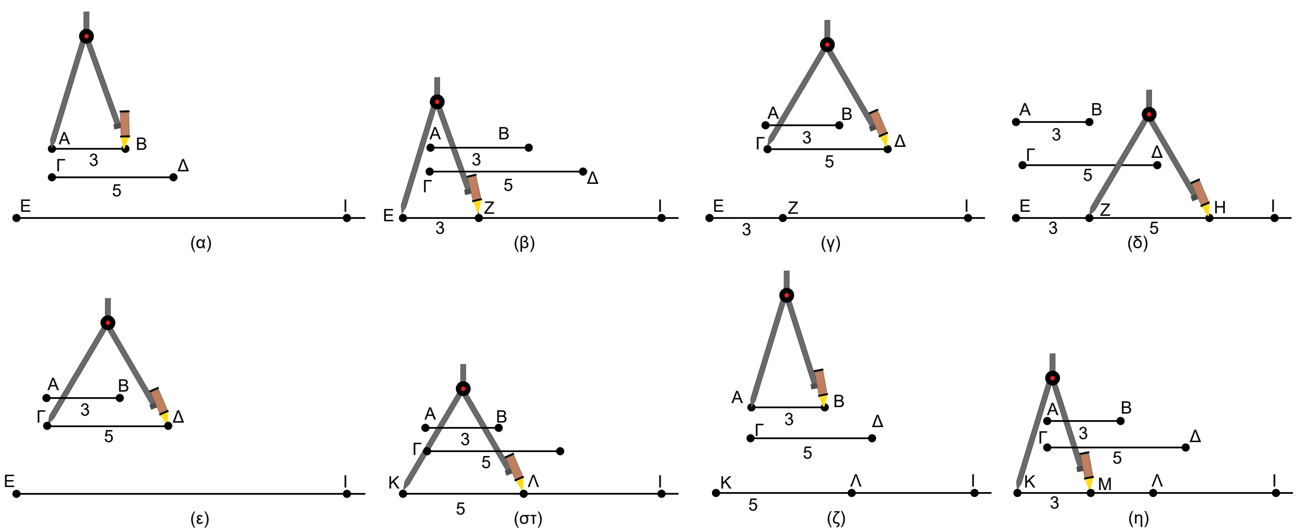
Πρόβλημα

Να σχεδιάσετε στο χαρτί σας δύο ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ = 3cm και ΓΔ = 5cm. Με τα γεωμετρικά σας όργανα να βρείτε το άθροισμά τους και τη διαφορά τους.

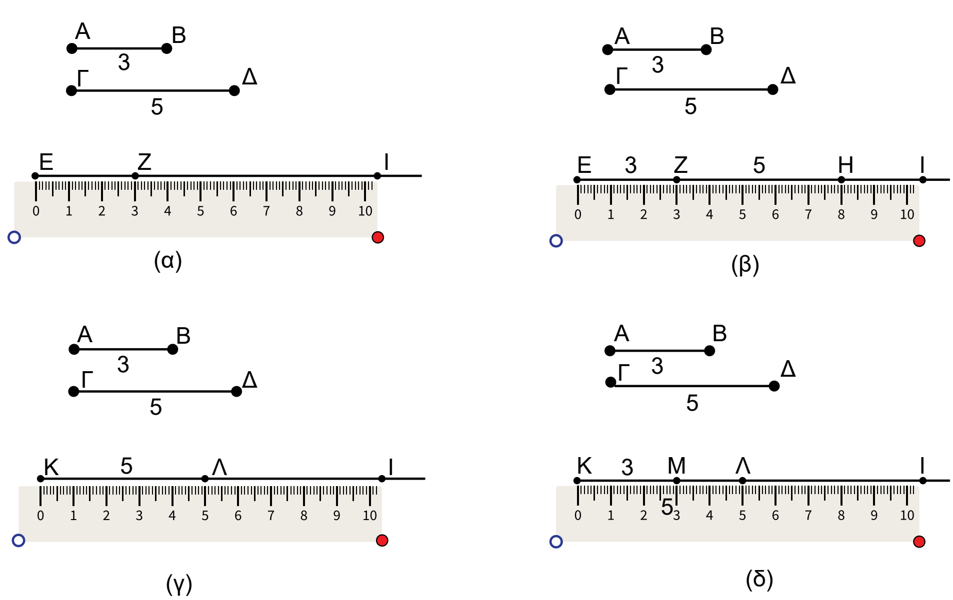
- Να προσθέσετε και να αφαιρέσετε τα δύο ευθύγραμμα τμήματα με τη χρήση του διαβήτη και να περιγράψετε τη διαδικασία.
- Να περιγράψετε την πρόσθεση και την αφαίρεση των δύο τμημάτων με τη βοήθεια του υποδεκάμετρου.
- Να βρείτε τη σχέση που έχει το μήκος του αθροίσματος με τα μήκη των δύο τμημάτων καθώς και το μήκος της διαφοράς με τα μήκη των δύο τμημάτων.

Λύση:

Να παρατηρήσετε προσεκτικά τις παρακάτω εικόνες και επαναλάβετε τη διαδικασία στο χαρτί σας με δικά σας ευθύγραμμα τμήματα.



Πάνω: Η διαδικασία πρόσθεσης (α), (β), (γ), (δ) δύο ευθυγράμμων τμημάτων ΑΒ και ΓΔ με διαβήτη.
Κάτω: Η διαδικασία αφαίρεσης (ε), (στ), (ζ), (η) δύο ευθυγράμμων τμημάτων ΑΒ και ΓΔ με διαβήτη.



Πάνω: Η διαδικασία της πρόσθεσης (α), (β) με υποδεκάμετρο.
Κάτω: Η διαδικασία της αφαίρεσης (γ), (δ) με υποδεκάμετρο.

Η ίδια διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί σε κάθε ανάλογη περίπτωση ευθύγραμμων τμημάτων με τα ίδια αποτελέσματα. Άρα:

- Το μήκος του αθροίσματος δύο ευθύγραμμων τμημάτων είναι ίσο με το άθροισμα των μηκών τους.
  Αν **ΑΒ + ΓΔ = ΕΖ** τότε **(ΑΒ) + (ΓΔ) = (ΕΖ)**
- Το μήκος της διαφοράς δύο ευθύγραμμων τμημάτων είναι ίσο με τη διαφορά των μηκών τους.
  Αν **ΑΒ – ΓΔ = ΚΛ** τότε **(ΑΒ) – (ΓΔ) = (ΚΛ)**

7.1.4 Το μήκος των πλευρών και η περίμετρος των πολυγώνων

Στα προηγούμενα μαθήματα μελετήσαμε τα είδη των τριγώνων και των πολυγώνων καθώς και τις ιδιότητές τους, εμπλέκοντας, όπου χρειαζόταν, και τα μήκη των πλευρών τους. Μάλιστα, σε προηγούμενες τάξεις συνδέσαμε τις πλευρές τους και με την περίμετρό τους.

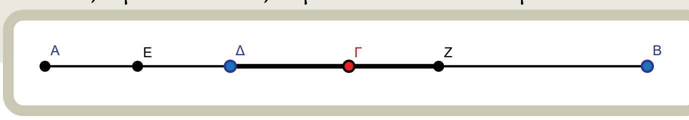
Περίμετρος ενός πολυγώνου είναι το άθροισμα των μηκών των πλευρών του.

Δραστηριότητα 3

Να σχεδιάσετε με τα γεωμετρικά σας όργανα ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ = 5cm και ΒΓ = 6cm.
- Να σχεδιάσετε με τα γεωμετρικά σας όργανα ένα ευθύγραμμο τμήμα που να είναι ίσο με την περίμετρό του.
- Να ελέγξετε το σχέδιό σας υπολογίζοντας την περίμετρό του.
- Να σχεδιάσετε με τα γεωμετρικά σας όργανα ένα τετράγωνο, που να έχει περίμετρο ίση με αυτή του τριγώνου.
- Να περιγράψετε τον τρόπο με τον οποίο εργαστήκατε.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Στο παρακάτω σχήμα είναι ΑΒ = 2,2dm, ΑΔ = 8cm, Γ μέσο του ΑΒ, Ε μέσο του ΑΔ και Ζ μέσο του ΔΒ.
Να υπολογίσετε το μήκος του ΕΓ.



Απάντηση

Για να έχουμε την ίδια μονάδα μέτρησης, μετατρέπουμε τα dm σε cm οπότε: ΑΒ = 22cm και ΑΔ = 8cm.

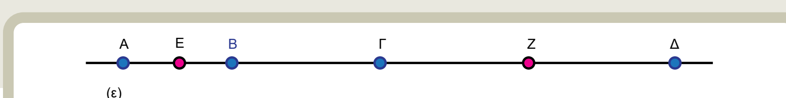
Είναι $ΑΓ = \dfrac{ΑΒ}{2} = 11cm$ και επομένως: ΔΓ = ΑΓ – ΑΔ = 11cm – 8cm = 3cm.

Άρα, ΕΓ = ΕΔ + ΔΓ = 4cm + 3cm = 7cm.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε (ΑΒ) = α cm, (ΒΓ) = (2 + α) cm, (ΓΔ) = (4 – α) cm και τα Ε, Ζ είναι μέσα των ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα. Να αιτιολογήσετε ότι

$$ΕΖ = \frac{ΑΔ + ΒΓ}{2}$$



Απάντηση

- Για το μήκος του ΑΔ, έχουμε: (ΑΔ) = (ΑΒ)+ (ΒΓ) + (ΓΔ) = α + 2 + α + 4 – α =6 + α

  Άρα, (ΑΔ) + (ΒΓ) = 6 + α +2 +α = 8 + 2α, οπότε $\dfrac{(ΑΔ)+(ΒΓ)}{2} = \dfrac{8 + 2\cdot α}{2} = 4 + α$

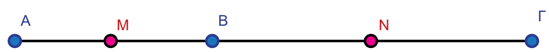
  Εξάλλου: $(ΕΖ) = (ΕΒ) + (ΒΓ) + (ΓΖ) = \left(\dfrac{α}{2}\right) + 2 + α + \dfrac{4 - α}{2} = \dfrac{α + 4 - α}{2} + 2 + α = 4 + α$, οπότε

  τα μήκη και επομένως τα ΕΖ και $\dfrac{ΑΔ + ΒΓ}{2}$ είναι ίσα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

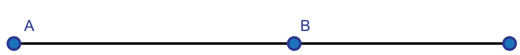
1 Το μήκος της πλευράς ΑΔ ενός ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι ίσο με το 80% του μήκους της πλευράς ΑΒ. Αν η περίμετρος είναι 36cm να βρείτε τα μήκη των πλευρών του ΑΒ και ΑΔ.

2 Στο παρακάτω σχήμα το Μ είναι μέσο του ΑΒ και το Ν μέσο του ΒΓ. Να μετρήσετε το τμήμα ΑΓ με μονάδα μέτρησης το τμήμα ΜΝ.

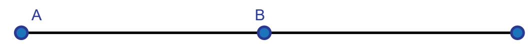


3 Η πλευρά ενός ισόπλευρου τριγώνου έχει μήκος 4dm. Να υπολογίσετε την πλευρά του τετραγώνου του οποίου η περίμετρος είναι 40cm μεγαλύτερη από την περίμετρο του τριγώνου.

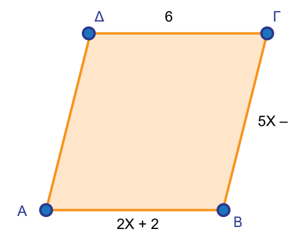
4 Στο παρακάτω σχήμα το τμήμα ΑΒ έχει μήκος (ΑΒ) = 10cm και το ΒΓ μήκος 4cm μικρότερο από το ΑΒ. Να υπολογίσετε το μήκος του ΑΓ.



5 Αν το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ είναι 3 cm μικρότερο του μήκους του ΒΓ και το ΑΓ έχει μήκος 21cm, να υπολογίσετε τα μήκη των ΑΒ και ΒΓ.



6 Σε ένα παλιό σκονισμένο τοπογραφικό σχέδιο, ο ιδιοκτήτης του παραλληλογράμμου οικοπέδου ΑΒΓΔ σημείωσε τα μήκη των τριών πλευρών του, χωρίς να αναφέρει το γράμμα x τι αντιπροσωπεύει. Αν τα μήκη μετρήθηκαν σε dm, να βρείτε τα μήκη των πλευρών του καθώς και την περίμετρό του.

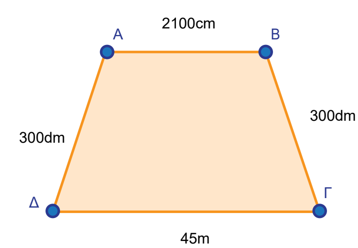


7 Σε ευθεία (ε) να σχεδιάσετε τα διαδοχικά σημεία Α, Β, Γ, Δ και Ε ώστε να ισχύουν τα εξής:

$$(AB) = \frac{(AE)}{2}, (B\Gamma) = \frac{(\Gamma\Delta)}{2}, (\Gamma\Delta) = \frac{(AB)}{2} \text{ και } AE = 12\text{cm}.$$

• Να δικαιολογήσετε ότι ΔΕ = ΒΓ.

8 Μετρήθηκαν οι πλευρές ενός οικοπέδου, σχήματος τραπεζίου, όπως φαίνεται στο σχήμα.
• Να υπολογίσετε την περίμετρο του οικοπέδου σε m, σε dm και σε cm.



7.2 ΜΕΤΡΗΣΗ ΓΩΝΙΩΝ

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

- Να προσθέτουν και να αφαιρούν γωνίες με επίθεση.
- Να συνδέουν το μέτρο της επίκεντρης γωνίας με το μέτρο του τόξου.
- Να υπολογίζουν γωνίες χρησιμοποιώντας ιδιότητες ή σχέσεις.

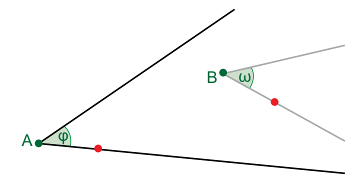
7.2.1 Η σύγκριση των γωνιών

Όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενα μαθήματα, η σύγκριση δύο γωνιών αφορά τη σύγκριση του ανοίγματος αυτών. Η σύγκριση γίνεται με διαφανές χαρτί ή με το μοιρογνωμόνιο.

Δραστηριότητα 1

Να σχεδιάσετε στο χαρτί σας δύο γωνίες όπως οι $\hat{\omega}$ και $\hat{\varphi}$ του διπλανού σχήματος και να τις συγκρίνετε με διαφανές χαρτί ή με το μοιρογνωμόνιο.

- Να συζητήσετε στην τάξη τη διαδικασία σύγκρισης με τους δύο τρόπους και να εντοπίσετε τις δυσκολίες των δύο μεθόδων.



Γενικά ισχύει ότι:

- Αν δύο γωνίες έχουν το ίδιο άνοιγμα είναι ίσες.
- Αν δύο γωνίες δεν είναι ίσες, μεγαλύτερη είναι αυτή που έχει μεγαλύτερο άνοιγμα.

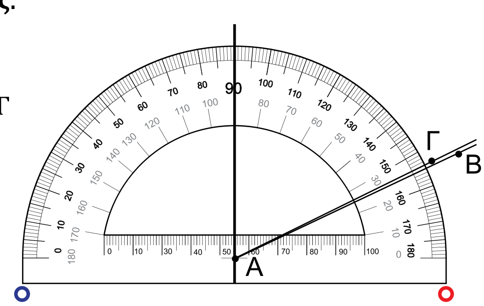
Σημείωση:

Η σύγκριση δύο γωνιών με την τοποθέτηση της μιας πάνω στην άλλη ή με το μοιρογνωμόνιο, δεν είναι ασφαλής και υπάρχει ο κίνδυνος σφάλματος.

7.2.2 Μέτρο γωνίας και μονάδες μέτρησης

Η μέτρηση μιας γωνίας αφορά τη σύγκριση του ανοίγματός της με το άνοιγμα μιας άλλης που τη θεωρούμε μονάδα μέτρησης. Το αποτέλεσμα της σύγκρισης ονομάζεται **μέτρο της γωνίας**.

Η καθιερωμένη μονάδα μέτρησης ονομάζεται **μοίρα** και είναι ίση με το $\frac{1}{90}$ της ορθής γωνίας ή με το $\frac{1}{360}$ της πλήρους γωνίας. Η γωνία $B\hat{A}\Gamma$ στο διπλανό σχήμα είναι ίση με μια μοίρα.



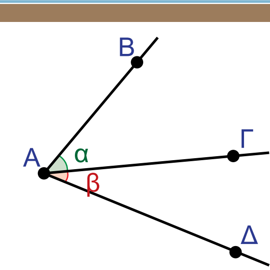
Η μοίρα υποδιαιρείται σε **πρώτα λεπτά** και σε **δεύτερα λεπτά**.

Το πρώτο λεπτό είναι ίσο με $\frac{1}{60}$ της μοίρας. Το δεύτερο λεπτό είναι ίσο με το $\frac{1}{60}$ του πρώτου λεπτού.

7.2.3 Πρόσθεση και αφαίρεση γωνιών

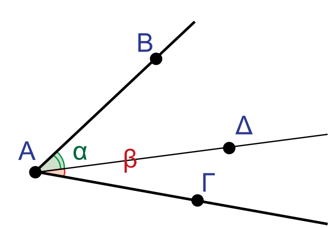
Πρόσθεση και αφαίρεση με «επίθεση» ή επικόλληση

Μπορούμε να προσθέσουμε δύο γωνίες, αν με κάποιο τρόπο μεταφέρουμε την μια έτσι ώστε να γίνει εφεξής με την άλλη. Τότε η νέα γωνία που θα προκύψει, όταν «κρύψουμε» τις ταυτισμένες πλευρές, είναι το άθροισμα των δύο γωνιών.
Στο σχήμα έχουμε $B\hat{A}\Delta = \hat{\alpha} + \hat{\beta}$.



Μπορούμε να αφαιρέσουμε δύο γωνίες, αν μεταφέρουμε τη μία πάνω στην άλλη, ώστε να ταυτιστούν οι κορυφές τους και η μία τους πλευρά, ενώ οι άλλες πλευρές τους να βρίσκονται προς το ίδιο μέρος των ταυτισμένων πλευρών. Τότε η νέα γωνία που θα προκύψει, όταν «κρύψουμε» τις ταυτισμένες πλευρές, είναι η διαφορά των δύο γωνιών.

Στο σχήμα έχουμε: $B\hat{A}\Delta = \hat{\alpha}$, $B\hat{A}\Gamma = \hat{\alpha} - \hat{\beta}$ και $\Delta\hat{A}\Gamma = \hat{\beta} - \hat{\alpha}$



Πρόσθεση και αφαίρεση με μοιρογνωμόνιο

Διερεύνηση 1

Να σχεδιάσετε στο χαρτί σας με το μοιρογνωμόνιο τις γωνίες $\hat{\omega} = 40^\circ$ και $\hat{\varphi} = 38^\circ$.

- Στη συνέχεια να σχεδιάσετε τη γωνία $\hat{\omega} + \hat{\varphi}$ καθώς και τη γωνία $\hat{\omega} - \hat{\varphi}$.

Να ανοίξετε την εφαρμογή και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

- Να περιγράψετε στην τάξη τη διαδικασία της πρόσθεσης και της αφαίρεσης των δύο γωνιών.

Πράξεις

Γενικά ισχύει ότι:

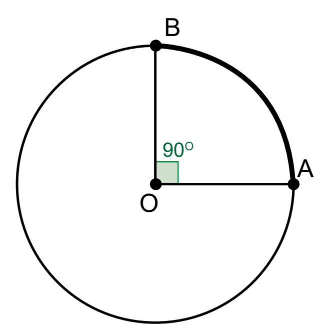
- Το μέτρο του αθροίσματος δύο γωνιών είναι ίσο με το άθροισμα των μέτρων τους.
- Το μέτρο της διαφοράς δύο γωνιών είναι ίσο με τη διαφορά των μέτρων τους.

7.2.4 Μέτρο γωνίας – Μέτρο τόξου

Δραστηριότητα 2

Να σχεδιάσετε στο χαρτί σας τον κύκλο (O, 3cm) και την επίκεντρη γωνία $A\hat{O}B = 90^\circ$.

- Να βρείτε τι μέρος της πλήρους γωνίας είναι η γωνία $A\hat{O}B$.
- Να βρείτε τι μέρος του κύκλου είναι το αντίστοιχο τόξο ΑΒ.
- Να σχεδιάσετε τη διάμετρο ΑΓ και να βρείτε τι μέρος της πλήρους γωνίας είναι η ευθεία γωνία $A\hat{O}\Gamma$ καθώς και τι μέρος του κύκλου είναι το ημικύκλιο ΑΓ.
- Να σχεδιάσετε και άλλες επίκεντρες γωνίες και να βρείτε τι μέρος του κύκλου είναι το αντίστοιχο τόξο τους.
- Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:



Επίκεντρη γωνία	Μέρος της πλήρους γωνίας	Το αντίστοιχο τόξο ως μέρος του κύκλου
90°	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
180°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
45°		
30°		
1°		

Γενικά ισχύει ότι:

- Ό,τι μέρος της πλήρους γωνίας είναι μια επίκεντρη γωνία το ίδιο μέρος του κύκλου είναι και το αντίστοιχο τόξο της.
- Το τόξο της επίκεντρης γωνίας μιας μοίρας αντιστοιχεί στο $\frac{1}{360}$ του κύκλου. Αυτό ονομάζεται **μοίρα τόξου**.

Μέτρηση τόξων

Μονάδα μέτρησης των τόξων είναι η **μοίρα τόξου** που συμβολίζεται όπως και το μέτρο της γωνίας 1^o. Όπως και η γωνία, έτσι και το τόξο έχει υποδιαιρέσεις το **πρώτο λεπτό τόξου** και το **δεύτερο λεπτό τόξου**. Το πρώτο λεπτό είναι ίσο με το $\frac{1}{60}$ του κύκλου. Το δεύτερο λεπτό είναι ίσο με το $\frac{1}{60}$ του πρώτου λεπτού.

Παραδείγματα μέτρου τόξων.

- Ένα ημικύκλιο έχει μέτρο 180^o (τόξου).
- Το τόξο που αντιστοιχεί στην επίκεντρη ορθή γωνία έχει μέτρο 90^o.
- Το αντίστοιχο τόξο μιας επίκεντρης γωνίας 60^o θα είναι επίσης 60^o.

7.2.5 Υπολογισμός γωνιών

Εκτός από τη μέτρηση των γωνιών και των τόξων, μπορούμε να υπολογίζουμε το μέτρο τους όταν γνωρίζουμε σχέσεις μεταξύ αυτών.

1. Υπολογισμός της συμπληρωματικής γωνίας και της παραπληρωματικής γωνίας

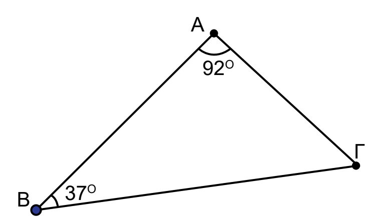
Δύο γωνίες λέγονται:

- **Συμπληρωματικές** όταν έχουν άθροισμα μια ορθή γωνία ή 90^o.
- **Παραπληρωματικές** όταν έχουν άθροισμα 180^o.

Παράδειγμα: Να υπολογίσετε τη συμπληρωματική και την παραπληρωματική της γωνίας $\hat{\omega} = 48^o$.

Λύση: Αν $\hat{\varphi}$ είναι η συμπληρωματική της $\hat{\omega}$ τότε: $\hat{\omega} + \hat{\varphi} = 90^o$.
Άρα, $\hat{\varphi} = 90^o - 48^o = 42^o$
Αν $\hat{\theta}$ είναι η παραπληρωματική της γωνίας $\hat{\omega}$ τότε: $\hat{\theta} = 180^o - 48^o = 132^o$

2. Υπολογισμός της τρίτης γωνίας τριγώνου



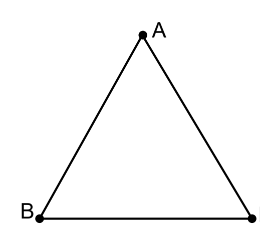
Σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα των γωνιών του είναι 180^o. Επομένως, αν γνωρίζουμε τις δύο γωνίες του μπορούμε να υπολογίσουμε την τρίτη γωνία.

Παράδειγμα: Σε τρίγωνο ΑΒΓ γνωρίζουμε ότι $\hat{A} = 92^o$ και $\hat{B} = 37^o$.

Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\Gamma}$.

Λύση: Γνωρίζουμε ότι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o$. Άρα $\hat{\Gamma} = 180^o - 92^o - 37^o = 51^o$.

3. Υπολογισμός των γωνιών του ισόπλευρου τριγώνου



Λύση:
Γνωρίζουμε ότι οι γωνίες στο ισόπλευρο τρίγωνο είναι ίσες και έχουν άθροισμα 180^o.
Άρα, αν $\hat{\theta}$ είναι μια γωνία του τότε θα ισχύει $3\hat{\theta} = 180^o$ και επομένως:
$\hat{\theta} = 60^o$.

Ώστε: **Καθε γωνία ενός ισόπλευρου τριγώνου είναι 60^o.**

4. Υπολογισμός των γωνιών τετραπλεύρου

Σε κάθε τετράπλευρο το άθροισμα των γωνιών του είναι 360^o. Άρα μπορούμε να υπολογίσουμε μια γωνία του αν γνωρίζουμε τις υπόλοιπες ή κατάλληλες σχέσεις τους.

Παράδειγμα:
Σε τετράπλευρο ΑΒΓΔ για τις απέναντι γωνίες $\hat{A}, \hat{\Gamma}$ είναι $\hat{A} = 104^o$ και $\hat{\Gamma} = 76^o$. Αν η γωνία $\hat{B}$ είναι μεγαλύτερη από τη $\hat{\Delta}$ κατά 6^o, να τις υπολογίσετε.

Λύση:

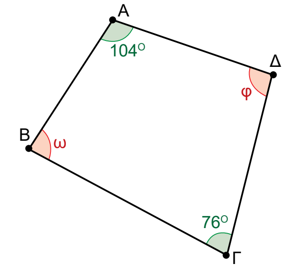
Για το άθροισμα των γωνιών του τετραπλεύρου έχουμε $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 360^o$.

Άρα, $104^o + \hat{\omega} + 76^o + \hat{\varphi} = 360^o$ ή $\hat{\omega} + \hat{\varphi} = 360^o - 104^o - 76^o$

ή $\hat{\omega} + \hat{\varphi} = 180^o$

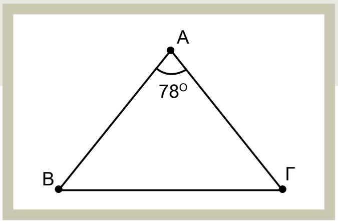
Εξάλλου $\hat{\omega} = \hat{\varphi} + 6$, οπότε από την παραπάνω έχουμε:

$\hat{\varphi} + 6^o + \hat{\varphi} = 180^o$ ή $2\hat{\varphi} = 174^o$. Άρα, $\hat{\Delta} = 87^o$ και $\hat{B} = 87^o + 6^o = 93^o$



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) είναι $\hat{A} = 78^o$.
Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.

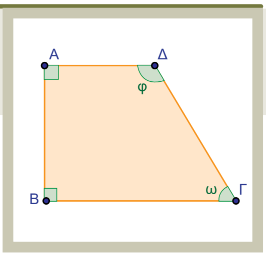


Απάντηση

Είναι: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o$ και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, οπότε:
$2\hat{B} = 180^o - 78^o = 102^o$ και επομένως $\hat{B} = 51^o$ και $\hat{\Gamma} = 51^o$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ του σχήματος η γωνία $\hat{\varphi}$ είναι διπλάσια της $\hat{\omega}$.
Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπεζίου.

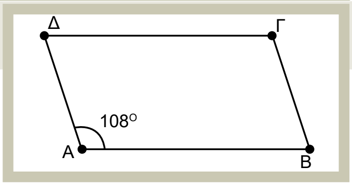


Απάντηση

Οι γωνίες $\hat{A}$, $\hat{B}$ είναι ορθές. Άρα $\hat{A} = \hat{B} = 90^o$.
Οι γωνίες $\hat{\omega}$ και $\hat{\varphi}$ είναι εντός και επί τα αυτά των παράλληλων ΑΔ και ΒΓ που τέμνονται από την ΔΓ. Άρα είναι παραπληρωματικές, οπότε: $\hat{\omega} + \hat{\varphi} = 180^o$.
Εξάλλου $\hat{\varphi} = 2\hat{\omega}$ οπότε $\hat{\omega} + 2\hat{\omega} = 180^o$ ή $3\hat{\omega} = 180^o$ και επομένως
$\hat{\omega} = 60^o$ και $\hat{\varphi} = 120^o$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Να υπολογίσετε τις γωνίες του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

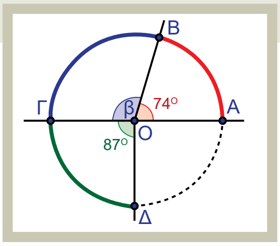


Απάντηση

Γνωρίζουμε ότι οι απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου είναι ίσες, ενώ οι διαδοχικές είναι παραπληρωματικές. Επομένως, ισχύουν τα εξής:
$\hat{A} = \hat{\Gamma}$, $\hat{B} = \hat{\Delta}$ και $\hat{A} + \hat{B} = 180^o$
Άρα $\hat{\Gamma} = 108^o$, $\hat{B} = 180^o - 108^o = 72^o$ και $\hat{\Delta} = 180^o - 108^o = 72^o$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Στο διπλανό σχήμα η ΑΓ είναι διάμετρος. Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\beta}$ και το τόξο ΑΔ.

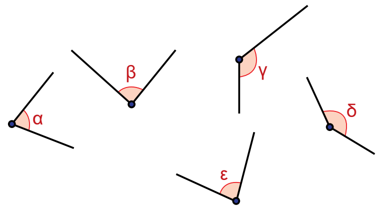


Απάντηση

Οι γωνίες $\hat{\beta}$ και $A\hat{O}B$ είναι παραπληρωματικές. Άρα $\hat{\beta} = 180^o - 74^o = 106^o$
Οι τέσσερις γωνίες έχουν άθροισμα μια πλήρη γωνία, οπότε:
$A\hat{O}B + B\hat{O}\Gamma + \Gamma\hat{O}\Delta + \Delta\hat{O}A = 360^o$
Επομένως $\Delta\hat{O}A = 360^o - 74^o - 106^o - 87^o = 93^o$, οπότε το τόξο ΑΔ είναι 93^o.

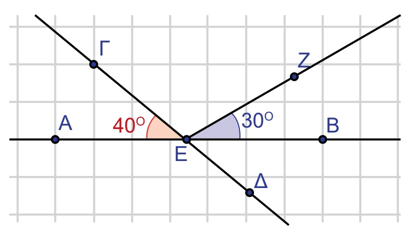
ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να ταξινομήσετε τις παρακάτω γωνίες ως προς το μέτρο τους από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη.

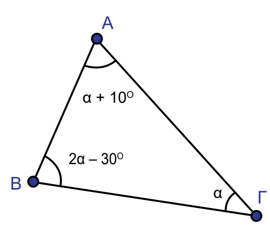


2 Να υπολογίσετε το μέτρο γωνίας όταν είναι διπλάσια της παραπληρωματικής της.

3 Να ονομάσεις και να μετρήσεις τις υπόλοιπες γωνίες στο παρακάτω σχήμα.



4 Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

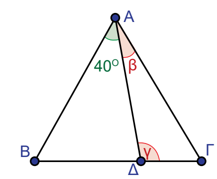


5 Να ανοίξετε την εφαρμογή και να ερευνήσετε τη σχέση της συμπληρωματικής και της παραπληρωματικής μιας γωνίας, κάνοντας τα προτεινόμενα πειράματα καθώς και δικά σας.

Μεταβολές

6 Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) η γωνία της κορυφής Α είναι διπλάσια των γωνιών της βάσης. Να βρείτε το είδος του τριγώνου.

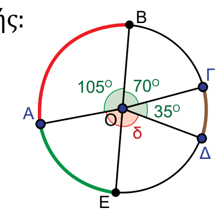
7 Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\beta}$ και $\hat{\gamma}$ στο παρακάτω ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ.



- Να περιγράψετε τα συμπεράσματά σας στην τάξη.

8 Στο σχήμα που ακολουθεί η ΟΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\delta}$. Να υπολογίσετε τα εξής:

- Το μέτρο του τόξου ΑΒ.
- Το μέτρο του τόξου ΓΔ.
- Το μέτρο της γωνίας $\hat{\delta}$.
- Το μέτρο του τόξου ΑΕ.



Ανακεφαλαίωση

- **Μέτρο** ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι το αποτέλεσμα της διαδικασίας σύγκρισής του με ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα που λαμβάνεται ως μονάδα μέτρησης.
- Καθιερωμένη μονάδα μέτρησης είναι το **μέτρο**. Υποδιαιρέσεις του είναι το **δεκατόμετρο** (dm), το **εκατοστόμετρο** (cm) και το **χιλιοστόμετρο** (mm). Πολλαπλάσιά του είναι το **δεκάμετρο** (dam), το **εκατόμετρο** (hm) και το **χιλιόμετρο** (Km).
- Αν δύο ευθύγραμμα τμήματα είναι ίσα και τα μέτρα τους θα είναι ίσα. Αντιστρόφως, αν τα μέτρα δύο ευθύγραμμων τμημάτων είναι ίσα και τα τμήματα θα είναι ίσα.

  Αν **ΑΒ = ΓΔ** τότε **(ΑΒ) = (ΓΔ)**

  Αν **(ΑΒ) = (ΓΔ)** τότε **ΑΒ = ΓΔ**
- Αν δύο ευθύγραμμα τμήματα είναι άνισα τότε ομοίως άνισα είναι και τα μέτρα τους. Αντιστρόφως, αν τα μέτρα δύο ευθύγραμμων τμημάτων είναι άνισα τότε και τα ευθύγραμμα τμήματα είναι ομοίως άνισα.

  Αν **ΑΒ < ΓΔ** τότε **(ΑΒ) < (ΓΔ)**

  Αν **(ΑΒ) < (ΓΔ)** τότε **ΑΒ < ΓΔ**
- **Μέτρο** γωνίας είναι το αποτέλεσμα της σύγκρισης με μία άλλη γωνία που λαμβάνεται ως μονάδα μέτρησης.
- Η **μοίρα γωνίας** είναι η καθιερωμένη μονάδα μέτρησης. Είναι ίση με το $\frac{1}{360}$ της πλήρους γωνίας.

- Υποδιαιρέσεις της είναι το λεπτό (= $\frac{1}{60}$ της μοίρας γωνίας) και το δευτερόλεπτο (= $\frac{1}{60}$ του λεπτού).
- Αν δύο γωνίες είναι ίσες και τα μέτρα τους θα είναι ίσα. Αντιστρόφως, αν τα μέτρα δύο γωνιών είναι ίσα και οι γωνίες θα είναι ίσες.

$$\text{Αν } \hat{\omega} = \hat{\varphi} \text{ τότε } (\hat{\omega}) = (\hat{\varphi})$$
$$\text{Αν } (\hat{\omega}) = (\hat{\varphi}) \text{ τότε } \hat{\omega} = \hat{\varphi}$$

- Αν δύο γωνίες είναι άνισες, τότε ομοίως άνισα είναι και τα μέτρα τους. Αντιστρόφως, αν τα μέτρα δυο γωνιών είναι άνισα, τότε και οι γωνίες είναι ομοίως άνισες.

$$\text{Αν } \hat{\omega} < \hat{\varphi} \text{ τότε } (\hat{\omega}) < (\hat{\varphi})$$
$$\text{Αν } (\hat{\omega}) < (\hat{\varphi}) \text{ τότε } \hat{\omega} < \hat{\varphi}$$

- Σε κύκλο το μέτρο της επίκεντρης γωνίας είναι ίσο με το μέτρο του αντίστοιχου τόξου.
- Μονάδα μέτρησης των τόξων ενός κύκλου είναι η **μοίρα τόξου**. Είναι ίση με το $\frac{1}{360}$ του κύκλου.
  Υποδιαιρέσεις της είναι το λεπτό (= $\frac{1}{60}$ της μοίρας τόξου) και το δευτερόλεπτο μοίρας τόξου (= $\frac{1}{60}$ του λεπτού).
- Στον ίδιο κύκλο ή σε ίσους κύκλους, σε ίσες επίκεντρες γωνίες αντιστοιχούν ίσα τόξα.
  Αντίστροφα, σε ίσα τόξα αντιστοιχούν ίσες επίκεντρες γωνίες.
- Στον ίδιο κύκλο ή σε ίσους κύκλους, σε άνισες επίκεντρες γωνίες αντιστοιχούν ομοίως άνισα τόξα.
  Αντίστροφα, σε άνισα τόξα αντιστοιχούν ομοίως άνισες επίκεντρες γωνίες.

Αυτοαξιολόγηση

Να συμπληρώσετε τα κενά στην παρακάτω πρόταση.

1. Μέτρο ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι το αποτέλεσμα της ____________________ με ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα που λαμβάνεται ως ____________________.

Να επιλέξετε τις σωστές απαντήσεις.

2. Δύο ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ έχουν μέτρα (ΑΒ) = 15cm και (ΓΔ) = 1,6dm. Ποια από τις παρακάτω σχέσεις είναι η σωστή;

Α. ΑΒ = ΓΔ **Β.** ΑΒ > ΓΔ **Γ.** ΑΒ < ΓΔ **Δ.** Δεν γνωρίζουμε

3. Το μέτρο της γωνίας $\hat{\omega} = 48^0$. Ποιο από τα παρακάτω είναι το μέτρο της συμπληρωματικής γωνίας;

Α. 65^0 **Β.** 42^0 **Γ.** 90^0 **Δ.** 132^0

4. Η περίμετρος ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι ίση με 14cm και οι ίσες πλευρές του έχουν μέτρο 4cm. Ποιο από τα παρακάτω είναι το μέτρο της βάσης του;

Α. 3cm **Β.** 4cm **Γ.** 5cm **Δ.** 6cm

5. Σε κύκλο σχεδιάσαμε δύο κάθετες διαμέτρους, ώστε να δημιουργηθούν τέσσερις επίκεντρες γωνίες. Ποιο από τα παρακάτω είναι το μέτρο των αντίστοιχων τόξων;

Α. 60^0 **Β.** 45^0 **Γ.** 90^0 **Δ.** 180^0

6. Το μισό της συμπληρωματικής μιας γωνίας $\hat{\alpha}$ είναι 13^0. Ποιο από τα παρακάτω είναι το μέτρο της γωνίας $\hat{\alpha}$;

Α. 64^0 **Β.** 45^0 **Γ.** 62^0 **Δ.** 77^0

	Να τοποθετήσετε δίπλα στις στήλες ΣΩΣΤΟ, ΛΑΘΟΣ ένα ✓ ανάλογα με το αν η πρόταση είναι σωστή ή λανθασμένη.	**Σωστό**	**Λάθος**
7.	Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο οι γωνίες του είναι ίσες με 60^o.	☐	☐
8.	Μια γωνία είναι πάντοτε μικρότερη της παραπληρωματικής της.	☐	☐
9.	Αν $\hat{\omega} > \hat{\varphi}$ τότε η παραπληρωματική της γωνίας $\hat{\omega}$ είναι μικρότερη της παραπληρωματικής της $\hat{\varphi}$.	☐	☐

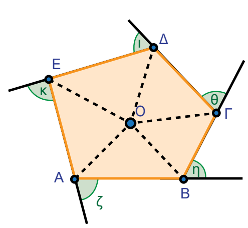
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ – ΣΥΝΘΕΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ

1 **Το άθροισμα γωνιών των πολυγώνων**
Να σχεδιάσετε έναν κύκλο και 3, 4, 5, 6, 7, ... σημεία σε αυτόν. Στη συνέχεια, να σχεδιάσετε το αντίστοιχο κυρτό πολύγωνο καθώς και τις επίκεντρες γωνίες που αντιστοιχούν στις πλευρές του. Τέλος, να υπολογίσετε το άθροισμα των γωνιών του πολυγώνου και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

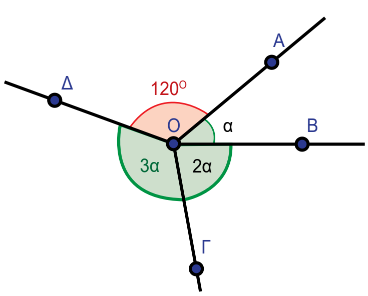
Πλήθος πλευρών	Πλήθος τριγώνων	Άθροισμα γωνιών
3	3	180^0
4	4	360^0
5		
6		

- Να διατυπώσετε έναν κανόνα υπολογισμού του αθροίσματος των γωνιών ενός κυρτού πολυγώνου με ν πλευρές.
- Να επιβεβαιώσετε τον κανόνα σχεδιάζοντας 10 σημεία για να κατασκευάσετε το κυρτό δεκάγωνο.

2 **Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών των πολυγώνων**
Το κυρτό πεντάγωνο έχει άθροισμα γωνιών 540^0.
- Να υπολογίσετε το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών του.



3 Να υπολογίσετε τις άγνωστες γωνίες του σχήματος.



4 Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με διαστάσεις α και β.
- Να σχεδιάσετε ένα τετράγωνο που να έχει περίμετρο ίση με την περίμετρο του ορθογωνίου.

5 Να σχεδιάσετε έναν κύκλο με κέντρο Ο και δύο διαμέτρους ΑΒ και ΓΔ.
- Να αιτιολογήσετε ότι το τετράπλευρο ΑΓΒΔ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

6 **Η ιστορία του Μέτρου (χρονογραμμή)**
Να ανοίξετε την εφαρμογή για να δείτε τη θέσπιση και την εξέλιξη του ορισμού της μονάδας μέτρησης του μήκους.

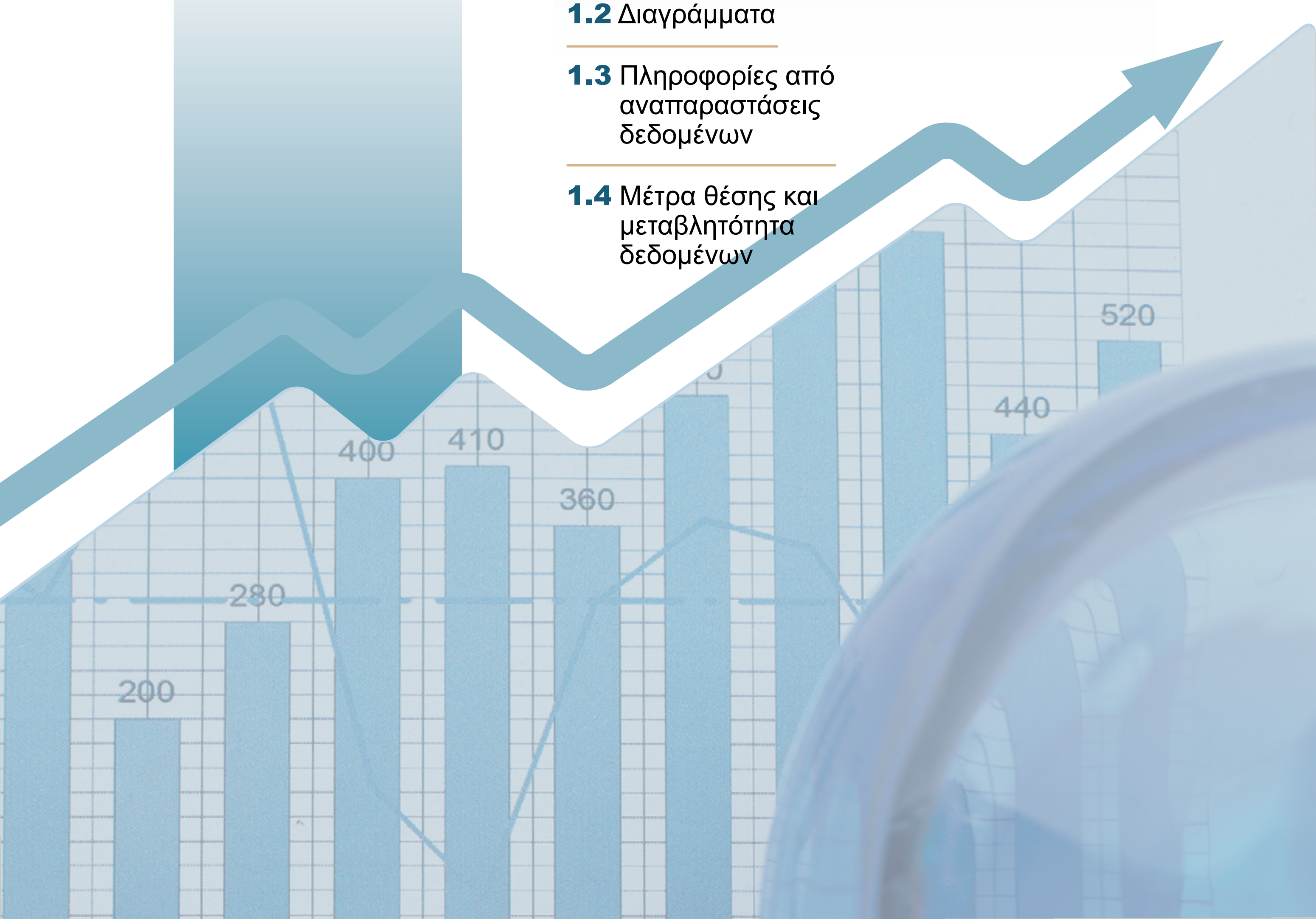
Η εξέλιξη του Μέτρου

7 **Γλωσσάρι των μετρήσεων**
Να ανοίξετε το γλωσσάρι των μετρήσεων που βρίσκεται για να επαναλάβετε έννοιες και όρους που συναντήσατε στο κεφάλαιο αυτό.

Γλωσσάρι των μετρήσεων

1 Κεφάλαιο

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ
ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ:



1.1 ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΜΟΣ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

- Να διατυπώνουν ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με συνεχή ποσοτικά δεδομένα από το οικείο περιβάλλον τους.
- Να χαρακτηρίζουν δεδομένα που έχουν προκύψει από απογραφή σε έναν πληθυσμό ως κατηγορικά, διακριτά ή συνεχή ποσοτικά.

Διερεύνηση 1

Για τους/τις μαθητές/τριες του τμήματός σας να διατυπώσετε ερωτήματα που αφορούν:

1. Το πλήθος των αδελφών τους.
2. Το πλήθος των εξωσχολικών δραστηριοτήτων τους.
3. Τα ύψη των συμμαθητών/τριών σας.
4. Τα βάρη των συμμαθητών/τριών σας.
5. Το είδος της μουσικής που προτιμούν.
6. Το είδος των δραστηριοτήτων με τις οποίες ασχολούνται.

Προκειμένου να αντλήσουμε πληροφορίες για θέματα που μας ενδιαφέρουν αναζητάμε καταγραφές που ήδη υπάρχουν. Αν δεν υπάρχουν έτοιμες καταγραφές, τότε χρειάζεται να τις αναζητήσουμε κάνοντας μια έρευνα μικρής ή μεγαλύτερης κλίμακας διατυπώνοντας ερωτήματα κατάλληλα για τις πληροφορίες που θέλουμε. Έτσι, για να μάθουμε ποιος είναι ο πιο ψηλός συμμαθητής μας στην τάξη, ρωτάμε τους συμμαθητές μας να καταγράψουν *πόσο* είναι το ύψος τους, ενώ για να μάθουμε το είδος των δραστηριοτήτων με τις οποίες ασχολούνται τους ρωτάμε να αναφέρουν με *ποιες* εξωσχολικές δραστηριότητες ασχολούνται.

Τα δεδομένα που χρησιμοποιούμε είναι δύο ειδών: Ποσοτικά και Ποιοτικά ή Κατηγορικά.

Ποσοτικά ονομάζονται τα αριθμητικά δεδομένα και διαχωρίζονται σε ***διακριτά*** και ***συνεχή.***

Διακριτά ποσοτικά ονομάζονται τα αριθμητικά δεδομένα που είναι διακεκριμένοι αριθμοί όπως οι ακέραιοι δεν μπορούν να διαιρεθούν περισσότερο και προκύπτουν με αρίθμηση.

Για παράδειγμα το πλήθος των σκύλων (Εικόνα 1) ή το πλήθος των μαθητών/τριών (Εικόνα 2).

(Εικόνα 1)

(Εικόνα 2)

Συνεχή ποσοτικά ονομάζονται τα δεδομένα όταν είναι οποιοιδήποτε αριθμοί οι οποίοι μπορούν να διαιρεθούν απεριόριστα και προκύπτουν με μέτρηση.

Για παράδειγμα το βάρος των σκύλων και το ύψος των μαθητών/τριών (Εικόνα 3) ή τα δεδομένα που προκύπτουν στα ερωτήματα (3) και (4).

Τα ύψη των συμμαθητών μας μπορεί να είναι: 1,52 μ, 1,554 μ , 1,6235 μ, 1,71835 μ ή 1,8237654 μ. Ακριβέστερα, μπορεί να είναι οποιοσδήποτε αριθμός ανάμεσά στο μικρότερο και στο μεγαλύτερο ύψος αν και συνήθως αναφερόμαστε σε αυτά με προσέγγιση δέκατου ή εκατοστού.

(Εικόνα 3)

Ανάλογα για τα βάρη και για όλα τα συνεχή δεδομένα.

Εκτός από τα ποσοτικά δεδομένα υπάρχουν και δεδομένα τα οποία δεν είναι αριθμοί και εκφράζουν κατηγορίες/είδη. Για παράδειγμα δεδομένα όπως: *περιπέτειες, κωμωδίες, θρίλερ, αστυνομικές* κ.ά. που προκύπτουν ως απαντήσεις στο ερώτημα «ποιο είδος ταινιών σας αρέσει;». Τέτοια δεδομένα λέγονται κατηγορικά.

Ποιοτικά ή Κατηγορικά ονομάζονται τα δεδομένα που δεν είναι ποσοτικά. Δηλαδή τα δεδομένα τα οποία δεν μετρούν, αλλά χαρακτηρίζουν, περιγράφουν είτε ταξινομούν τις ιδιότητες ενός αντικειμένου ή ενός φαινομένου.

Για να συλλέξουμε δεδομένα χρειάζεται να προσδιορίσουμε το σύνολο των στοιχείων από τα οποία θα αντλήσουμε πληροφορίες, καθώς επίσης ποια και πόσα από αυτά θα εξετάσουμε ως προς κάποιο χαρακτηριστικό τους.

Πληθυσμός στη στατιστική ονομάζεται ένα σύνολο του οποίου τα στοιχεία μελετάμε/εξετάζουμε ως προς κάποιο χαρακτηριστικό τους.

Για παράδειγμα, αν εξετάσουμε το σύνολο των συμμαθητών/τριών μας στο τμήμα μας ως προς το είδος της μουσικής που ακούνε, τότε πληθυσμός είναι οι μαθητές/τριες του τμήματός μας. Αν εξετάσουμε το σύνολο των μαθητών/τριών της τάξης μας, τότε πληθυσμός είναι οι μαθητές/τριες της τάξης μας, ενώ αν εξετάσουμε το σύνολο των μαθητών/τριών σε όλες τις τάξεις του σχολείου μας, τότε πληθυσμός είναι οι μαθητές/τριες του σχολείου μας.

Το χαρακτηριστικό, όπως το είδος της μουσικής, ως προς το οποίο μελετάμε/εξετάζουμε τα στοιχεία ενός πληθυσμού ονομάζεται **μεταβλητή**.

Απογραφή στη στατιστική ονομάζουμε την εξέταση όλων των ατόμων ενός πληθυσμού ως προς κάποιο χαρακτηριστικό τους.

Για παράδειγμα, η απογραφή πληθυσμού που κάνει η ΕΛΣΤΑΤ (Ελληνική Στατιστική Αρχή) κάθε δέκα χρόνια για το πλήθος των κατοίκων της χώρας μας.

Πολλές φορές επειδή η απογραφή είναι δύσκολη (χρόνος, κόστος κ.λπ.) μελετάμε/εξετάζουμε ένα κατάλληλο υποσύνολο του πληθυσμού το οποίο ονομάζεται **δείγμα**. Για τον προσδιορισμό των χαρακτηριστικών που πρέπει να έχει ένα δείγμα, ώστε να είναι κατάλληλο, και τρόπους επιλογής του, θα μάθουμε στην Γ΄ Γυμνασίου.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1 *«Διατύπωση ερωτημάτων»*

Να παρατηρήσετε τις διπλανές φωτογραφίες και να διατυπώσετε:

1. Τρία ερωτήματα που να αφορούν συνεχή δεδομένα.
2. Τρία ερωτήματα που να αφορούν διακριτά ποσοτικά δεδομένα.
3. Τρία ερωτήματα που να αφορούν κατηγορικά δεδομένα.

Απάντηση

1. Πόσα χιλιοστά βροχής πέφτουν κάθε εβδομάδα του χειμώνα στην Αθήνα;
   Πόσα κιλά φρούτα περιέχει κάθε καλάθι;
   Πόσα κυβικά εκατοστά χυμού μπορούν να δώσουν τα φρούτα κάθε καλαθιού;
2. Πόσες μπανάνες μπορεί να φάει ένας μαθητής σε μία ημέρα;
   Ποιο αποτέλεσμα μπορεί να προκύψει όταν ρίξουμε ένα ζάρι;
   Πόσα διαφορετικά χρώματα υπάρχουν στις παραπάνω εικόνες;
3. Ποια είναι τα χρώματα των φρούτων στα καλάθια;
   Ποια είναι τα είδη των φρούτων στα καλάθια;
   Ποιο είναι το φύλο των ατόμων στη φωτογραφία με τη βροχή;

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2 *«Χαρακτηρισμός δεδομένων»*

Να χαρακτηρίσετε τα ακόλουθα δεδομένα ως συνεχή, διακριτά ή κατηγορικά.

α) Το πλήθος των αυτοκινήτων που είναι παρκαρισμένα στο πάρκινγκ ενός σούπερ μάρκετ 10-12 π.μ. τις ημέρες μιας συγκεκριμένης εβδομάδας.

β) Τα ύψη των μαθητών/τριών ηλικίας 12 έως 15 ετών σε ένα Γυμνάσιο.

γ) Οι θερμοκρασίες κατά τη διάρκεια του Ιουνίου μιας χρονιάς στην Κρήτη.

δ) Τα μεγέθη των παπουτσιών που φοράνε παιδιά από 6 έως 15 ετών σε μια πόλη μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή.

ε) Τα μεγέθη των πελμάτων των παιδιών από 6 έως 15 ετών σε μια πόλη μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή.

στ) Οι ομάδες ποδοσφαίρου Α΄ Εθνικής που υποστηρίζουν οι μαθητές της τάξης ενός σχολείου.

Απάντηση

α) Το πλήθος των αυτοκινήτων που είναι παρκαρισμένα στο πάρκινγκ ενός σούπερ μάρκετ 10-12 π.μ. τις ημέρες μιας συγκεκριμένης εβδομάδας θα είναι συγκεκριμένος θετικός ακέραιος αριθμός και επομένως πρόκειται για διακριτά ποσοτικά δεδομένα.

β) Τα ύψη των μαθητών/τριών ηλικίας 12 έως 15 ετών σε ένα Γυμνάσιο μπορούν να είναι οποιοιδήποτε αριθμοί ανάμεσα στο μικρότερο και στο μεγαλύτερο ύψος. Επομένως είναι συνεχή ποσοτικά δεδομένα.

γ) Οι θερμοκρασίες κατά τη διάρκεια του Ιουνίου μιας χρονιάς στην Κρήτη μπορεί είναι οποιοιδήποτε αριθμοί ανάμεσα στη μικρότερη και στη μεγαλύτερη θερμοκρασία και επομένως είναι συνεχή ποσοτικά δεδομένα.

δ) Τα μεγέθη των παπουτσιών που φοράνε παιδιά από 6 έως 15 ετών σε μια πόλη μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή θα είναι για παράδειγμα 15, 16, 17,..., 40 εκατοστά. Δηλαδή θα είναι συγκεκριμένοι θετικοί αριθμοί και επομένως τα δεδομένα είναι διακριτά ποσοτικά.

ε) Τα μεγέθη των πελμάτων των παιδιών από 6 έως 15 ετών σε μια πόλη μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή θα είναι για παράδειγμα 15, 15,1, 15,115, ..., 16, 16, 3, 16, 32, 16, 421, έως 40 εκατοστά. Δηλαδή σε αντίθεση με τα μεγέθη των παπουτσιών στο προηγούμενο ερώτημα, τα μεγέθη των πελμάτων θα είναι οποιοιδήποτε αριθμοί ανάμεσα στο 15 και στο 40. Άρα τα δεδομένα είναι συνεχή ποσοτικά.

στ) Οι ομάδες ποδοσφαίρου Α΄ Εθνικής που υποστηρίζουν οι μαθητές της τάξης ενός σχολείου θα είναι: Ολυμπιακός, Παναθηναϊκός, ΑΕΚ, ΠΑΟΚ κ.ά. οπότε πρόκειται για κατηγορικά δεδομένα.

Αυτοαξιολόγηση

Να αντιστοιχίσετε τον σωστό χαρακτηρισμό για τα δεδομένα στον παρακάτω πίνακα.

Δεδομένα	Χαρακτηρισμός
Οι εταιρείες κινητής τηλεφωνίας στην Ελλάδα.	Ποσοτικά συνεχή
Τα χρήματα που πληρώνω για το κόστος αγοράς φρούτων από τον μανάβη.	
Το πλήθος των καθηγητών σε κάθε σχολείο μιας περιοχής.	Ποσοτικά διακριτά
Ο χρόνος που χρειάζεται κάθε μαθητής σε ένα τμήμα για να ολοκληρώσει τις απαντήσεις του σε ένα διαγώνισμα.	
Τα είδη των φαγητών που μου αρέσουν.	Κατηγορικά

Μπορείς να ελέγξεις τις γνώσεις σου στον χαρακτηρισμό δεδομένων με την ψηφιακή εφαρμογή.

Αυτοαξιολόγηση

ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να παρατηρήσετε τις παραπάνω φωτογραφίες και να διατυπώσετε:

α) Τρία ερωτήματα που να αφορούν σε ποσοτικά συνεχή δεδομένα.

β) Τρία ερωτήματα που να αφορούν σε διακριτά ποσοτικά δεδομένα.

γ) Τρία ερωτήματα που να αφορούν σε κατηγορικά δεδομένα.

2 **Σωστό ή λάθος;**

α) Τα δεδομένα που προκύπτουν ως απαντήσεις στο ερώτημα «Δηλώστε το φύλο σας» είναι διακριτά.

β) Οι ηλικίες είναι ποσοτικά συνεχή δεδομένα.

γ) Τα είδη λουλουδιών είναι ποσοτικά διακριτά δεδομένα.

δ) Οι χρόνοι μετάβασης ενός λεωφορείου μιας γραμμής από μια συγκεκριμένη στάση στην επόμενη είναι συνεχή δεδομένα.

ε) Οι ταχύτητες κίνησης των αυτοκινήτων είναι ποσοτικά διακριτά δεδομένα.

στ) Τα είδη μυθιστορημάτων είναι κατηγορικά δεδομένα.

3 Να διατυπώσετε τρία κατάλληλα ερωτήματα προς τους/τις συμμαθητές/τριες σας για το ύψος τους, ώστε τα δεδομένα που θα προκύψουν από τις απαντήσεις τους να είναι αντίστοιχα: Διακριτά, Συνεχή, Κατηγορικά.

4 Να διατυπώσετε τρία κατάλληλα ερωτήματα προς τους/τις συμμαθητές/τριές σας για το βάρος τους, ώστε τα δεδομένα που θα προκύψουν από τις απαντήσεις τους να είναι αντίστοιχα: Διακριτά, Συνεχή, Κατηγορικά.

5 Να χαρακτηρίσετε τα παρακάτω δεδομένα που προέκυψαν από απογραφή στους σχετικούς πληθυσμούς, ως κατηγορικά, διακριτά ή συνεχή ποσοτικά:

α) Η πίεση του αίματος ενός ανθρώπου τις ημέρες ενός μήνα.

β) Το επίπεδο εκπαίδευσης των κηδεμόνων των μαθητών/τριών ενός σχολείου.

γ) Το μέγεθος (νούμερα) της μπλούζας που φοράνε οι αθλητές/τριες ενός συλλόγου μια χρονιά.

δ) Το μέγεθος της μπλούζας που φοράνε οι αθλητές/τριες ενός συλλόγου μια χρονιά (S, M, L, XL, XXL)

ε) Η διάρκεια των ταινιών που προβάλλονται σε ένα κανάλι της τηλεόρασης τις ημέρες μιας εβδομάδας κάθε βράδυ από τις 6 μ.μ. έως τις 12 μ.μ.

6 Να χαρακτηρίσετε τα παρακάτω δεδομένα, που προέκυψαν από απογραφή στους σχετικούς πληθυσμούς, ως κατηγορικά, διακριτά ή συνεχή ποσοτικά:

α) Οι καρδιακοί παλμοί των εξεταζόμενων από έναν γιατρό μια συγκεκριμένη ημέρα.

β) Το χρώμα των ματιών των καθηγητών του σχολείου μου.

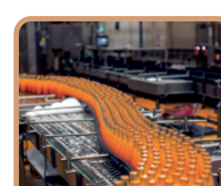
γ) Ο αριθμός των παραγγελιών που δέχεται ένα fast food τις ημέρες μιας εβδομάδας.

δ) Το κόστος των παραγγελιών που δέχεται ένα fast food μια συγκεκριμένη ημέρα μιας εβδομάδας.

ε) Το φύλο των υπαλλήλων σε ένα πολυκατάστημα.

7 Να χαρακτηρίσετε τα παρακάτω δεδομένα, που προέκυψαν από απογραφή στους σχετικούς πληθυσμούς, ως κατηγορικά, διακριτά ή συνεχή ποσοτικά:

α) Ο αριθμός των ελαττωματικών προϊόντων σε μια γραμμή παραγωγής ενός εργοστασίου την πρώτη εβδομάδα κάθε μήνα μιας χρονιάς.



β) Ο χρόνος που απαιτείται για την πώληση ενός προϊόντος σε ένα κατάστημα από την τοποθέτησή του στη βιτρίνα του.

γ) Το πλήθος των σελίδων των βιβλίων της τάξης μου.

δ) Η χώρα προέλευσης των τουριστών στην Ελλάδα μια συγκεκριμένη περίοδο.

ε) Το ύψος των βουνών της περιοχής μου.

8 Να χαρακτηρίσετε τα παρακάτω δεδομένα, που προέκυψαν από απογραφή στους σχετικούς πληθυσμούς, ως κατηγορικά, διακριτά ή συνεχή ποσοτικά:

α) Ο χρόνος που κάνει το λεωφορείο από τη στάση του σχολείου μέχρι το σπίτι μου από Δευτέρα μέχρι Παρασκευή.

β) Το πλήθος των κλήσεων που γράφουν οι τροχονόμοι της περιοχής μου τις ημέρες μιας εβδομάδας.

γ) Οι τηλεφωνικές κλήσεις που κάνω κάθε μήνα κατά τη διάρκεια ενός χρόνου.

δ) Η διάρκεια των τηλεφωνικών κλήσεων που κάνω κάθε μήνα κατά τη διάρκεια ενός χρόνου.

ε) Τα είδη παγωτού που πουλάει το σούπερ μάρκετ της γειτονιάς μου.

9 Να χαρακτηρίσετε τα παρακάτω δεδομένα, που προέκυψαν από απογραφή στους σχετικούς πληθυσμούς, ως κατηγορικά, διακριτά ή συνεχή ποσοτικά:

α) Το πλήθος των ασθενών που δέχεται ένα νοσοκομείο τις ημέρες ενός μήνα.

β) Οι τιμές της βενζίνης κάθε ημέρα κατά την διάρκεια μιας εβδομάδας στο πρατήριο της γειτονιάς μου.

γ) Το πλήθος των παραπόνων που κάνουν οι πελάτες ενός πολυκαταστήματος κάθε εβδομάδα.

δ) Τα βάρη των φορτηγών που περνάνε πάνω από μια συγκεκριμένη γέφυρα μια συγκεκριμένη ημέρα.

ε) Τα είδη λογοτεχνίας των βιβλίων στη βιβλιοθήκη του σχολείου μου.

1.2 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

- Να κατασκευάζουν κυκλικά διαγράμματα για κατηγορικά δεδομένα.
- Να κατασκευάζουν ιστογράμματα συχνοτήτων ίσου πλάτους, με δεδομένο πλήθος κλάσεων για συνεχή ποσοτικά δεδομένα.

Διερεύνηση 1

Σε μια έρευνα για τη χρήση του υπολογιστή σε ένα σχολείο, 80 μαθητές/τριες απάντησαν ότι τον χρησιμοποιούν μόνο για επικοινωνία (email, facebook, Instagram κ.ά.), 60 μόνο για εργασίες, 40 μόνο για πληροφορίες και 70 μόνο για να ακούνε μουσική.

α) Να χαρακτηρίσετε τα δεδομένα.

β) Τι ποσοστό των μαθητών/τριών χρησιμοποιεί τον υπολογιστή για επικοινωνία, για εργασίες, για πληροφορίες και για μουσική;

γ) Σε ποιες επίκεντρες γωνίες ενός κύκλου αντιστοιχούν τα ποσοστά που βρήκατε;

Όπως ξέρουμε: Συχνότητα μιας παρατήρησης είναι ο αριθμός που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η παρατήρηση αυτή στο σύνολο των παρατηρήσεων. Για παράδειγμα αν 1, **2**, 3, **2**, 4, 5, 8, 1, **2**, 9 οι παρατηρήσεις ενός πειράματος, τότε η συχνότητα της παρατήρησης 2 είναι 3 αφού εμφανίζεται τρεις φορές.

Σχετική συχνότητα μιας παρατήρησης είναι ο λόγος της συχνότητας εμφάνισής της προς το σύνολο των παρατηρήσεων και συνήθως εκφράζεται ως ποσοστό επί τοις εκατό (%). Για παράδειγμα η σχετική συχνότητα της παρατήρησης 2 είναι $\frac{3}{10} = 0,3$ ή 30%.

Τα ποσοτικά δεδομένα που συλλέγονται από μια έρευνα ταξινομούνται συνήθως σε μια αύξουσα σειρά, γίνεται διαλογή, καταμετρείται η συχνότητα εμφάνισής τους και τέλος παρουσιάζονται με διαγράμματα τα οποία απεικονίζουν τα ευρήματα συνοπτικά και παραστατικά.

Τα διαγράμματα πρέπει κάθε φορά να είναι κατάλληλα για το είδος των δεδομένων που χρησιμοποιούνται.

Κυκλικά διαγράμματα

Κυκλικό διάγραμμα (πίτα) είναι ένας κυκλικός δίσκος χωρισμένος σε κυκλικούς τομείς, οι επίκεντρες γωνίες των οποίων είναι ανάλογες προς τις αντίστοιχες συχνότητες (ή τις σχετικές συχνότητες) της μεταβλητής.

Για να πειραματιστείτε και να ερευνήσετε τα κυκλικά διαγράμματα χρησιμοποιήστε την ψηφιακή εφαρμογή.

Κυκλικά Διαγράμματα

Τα **κυκλικά διαγράμματα** παρουσιάζουν λόγους, ποσοστά και όχι απόλυτους αριθμούς. Είναι κατάλληλα όταν έχουμε κατηγορικά δεδομένα και θέλουμε να δούμε τη σχέση μεταξύ τους και ως προς το σύνολο.
Ο τρόπος κατασκευής τους παρουσιάζεται στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα: Σε μια έρευνα μεταξύ 300 τηλεθεατών, 120 απάντησαν ότι βλέπουν τηλεοπτικές σειρές, 75 ψυχαγωγικές εκπομπές, 45 ενημερωτικές και 60 ταινίες. Τα δεδομένα είναι κατηγορικά και αφορούν τις κατηγορίες: τηλεοπτικές σειρές, ψυχαγωγικές εκπομπές, ενημερωτικές εκπομπές και ταινίες.

Για να φτιάξουμε το κυκλικό διάγραμμα:
- *Υπολογίζουμε τα ποσοστά των κατηγοριών:*

Τηλεοπτικές σειρές: $\frac{120}{300} = 0,4$

Ενημερωτικές εκπομπές: $\frac{45}{300} = 0,15$

Ψυχαγωγικές εκπομπές: $\frac{75}{300} = 0,25$

Ταινίες: $\frac{60}{300} = 0,2$

- *Βρίσκουμε τις επίκεντρες γωνίες στο κυκλικό διάγραμμα που αντιστοιχούν στις παραπάνω κατηγορίες:*

Τηλεοπτικές σειρές: $(0{,}40) \cdot 360^0 = 144^0$

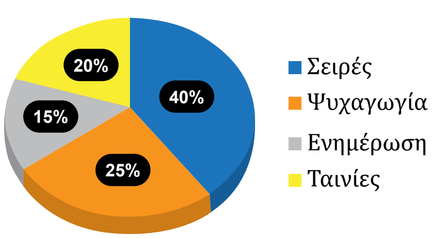
Ενημερωτικές εκπομπές: $(0{,}15) \cdot 360^0 = 54^0$

Ψυχαγωγικές εκπομπές: $(0{,}25) \cdot 360^0 = 90^0$

Ταινίες: $(0{,}2) \cdot 360^0 = 72^0$

- *Με τη βοήθεια ενός μοιρογνωμονίου κατασκευάζουμε το κυκλικό διάγραμμα προσδιορίζοντας κυκλικούς τομείς με κεντρικές γωνίες 144^o, 90^o, 54^o και 72^o* (Σχήμα 1).

Τηλεθεατές



Σχήμα 1

Για την κατασκευή κυκλικού διαγράμματος με το λογισμικό Excel μπορείς να δεις το video που βρίσκεται εδώ.

Κυκλικό Διάγραμμα Excel

Η κατασκευή κυκλικού διαγράμματος με το Excel περιγράφεται στο συμπληρωματικό υλικό.

Κατασκευή Κυκλικού Διαγράμματος με το Excel

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Σε μια έρευνα για το πόσες ώρες ακούνε ημερησίως μουσική οι νέοι/ες ηλικίας 12-15 ετών χρησιμοποιήθηκε ένα δείγμα 500 ατόμων και τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα:

Ώρες	Νέοι 12-15 ετών
1	100
2	150
3	200
4	50

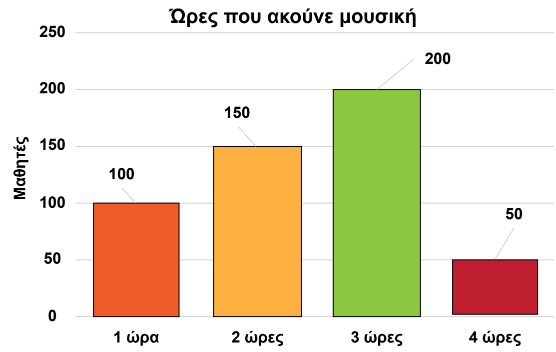
Για τα δεδομένα:
α) Να κατασκευάσετε ραβδόγραμμα.
β) Να κατασκευάσετε κυκλικό διάγραμμα.
γ) Να σχολιάσετε τις πληροφορίες που δίνουν τα δύο διαγράμματα.

Απάντηση

α) Ραβδόγραμμα:

Στον πίνακα που δίνεται παρουσιάζονται τέσσερις κατηγορίες που αφορούν τις ώρες που ακούνε ημερησίως μουσική οι νέοι/ες 12-15 ετών και οι αντίστοιχες συχνότητές τους.

Για την κατασκευή του ραβδογράμματος τοποθετούμε στον οριζόντιο άξονα τις ώρες και σε κάθε κατηγορία υψώνουμε ορθογώνια με ίδιο πλάτος και ύψη όσο και η αντίστοιχη συχνότητα (Σχήμα 2). Το πλάτος ορίζεται αυθαίρετα.



Σχήμα 2

Η κατασκευή ραβδογράμματος με το Excel περιγράφεται στο συμπληρωματικό υλικό.

Για την κατασκευή ραβδογράμματος με το λογισμικό Excel μπορείς να δεις το video που βρίσκεται στον διπλανό σύνδεσμο.

β) Κυκλικό διάγραμμα:

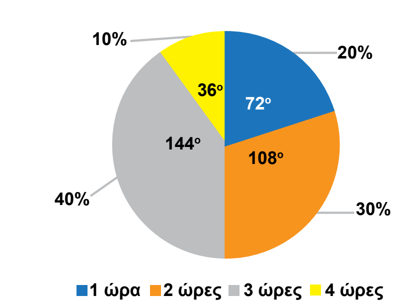
Θεωρώντας ως κατηγορίες τις ώρες, προκειμένου να δείξουμε διαγραμματικά τα ποσοστά του συνόλου των 500 ατόμων για τις ώρες μουσικής που ακούνε, εργαζόμαστε ως εξής:

Για την κατασκευή με το χέρι:

- *Υπολογίζουμε τα ποσοστά των κατηγοριών:*

Μία ώρα: $\frac{100}{500} = 0,2$ Δύο ώρες: $\frac{150}{500} = 0,3$

Τρεις ώρες: $\frac{200}{500} = 0,4$ Τέσσερις ώρες: $\frac{50}{500} = 0,1$



Σχήμα 3

- *Βρίσκουμε τις επίκεντρες γωνίες στο κυκλικό διάγραμμα που αντιστοιχούν στις παραπάνω κατηγορίες, υπολογίζοντας τις αναλογίες/τα ποσοστά των 360^0:*

Μία ώρα: $0{,}2 \cdot 360 = 72^0$ Δύο ώρες: $0{,}3 \cdot 360 = 108^0$

Τρεις ώρες: $0{,}4 \cdot 360 = 144^0$ Τέσσερις ώρες: $0{,}1 \cdot 360 = 36^0$

- *Με τη βοήθεια ενός μοιρογνωμονίου κατασκευάζουμε το κυκλικό διάγραμμα προσδιορίζοντας κυκλικούς τομείς με κεντρικές γωνίες 72^o, 108^o, 144^o και 36^o (Σχήμα 3).*

γ) Και τα δύο διαγράμματα απεικονίζουν πληροφορίες για το πόσες ώρες ακούνε ημερησίως μουσική οι νέοι/ες ηλικίας 12-15 ετών. Ειδικότερα:

- Το ραβδόγραμμα (Σχήμα 2) απεικονίζει συχνότητες. Δηλαδή πόσα άτομα του δείγματος ακούνε 1, 2, 3 ή 4 ώρες μουσική.
- Το κυκλικό διάγραμμα (Σχήμα 3) απεικονίζει σχετικές συχνότητες. Δηλαδή τι μέρος (ποσοστό, αναλογία) των ατόμων του δείγματος ακούνε 1, 2, 3 ή 4 ώρες μουσική.

Σημείωση:

Τα κυκλικά διαγράμματα δεν είναι κατάλληλα όταν έχουμε πολλές κατηγορίες.

Διερεύνηση 2

Σε μια έρευνα για τις ώρες που διαβάζουν οι μαθητές/τριες σε μια τάξη ενός σχολείου προέκυψαν τα ακόλουθα στοιχεία:

1	1,1	1,4	1,3	1.4	1.5	2	2,5	3	4
2	2,5	3	3	3	4	3	2	3	1,5
2,5	2	3	3	3,5	4	4	4,5	3	3
5	5	5	4	3	2	1	2	3	4
4	4,5	3,5	2	4	4	4,5	3	3,5	2
2	1	2	3	4	3	2	3	4	3
2	1	1,5	1,5	2	3	4	3,3	4	4,1
4	2	3	3	4	4	2	2	4,5	5

α) Να χαρακτηρίσετε το είδος των δεδομένων.
β) Να κατασκευάσετε το αντίστοιχο ραβδόγραμμα.
γ) Παρατηρείτε κάποιο πρόβλημα;
Αν ναι, χωριστείτε σε ομάδες και προτείνετε λύσεις διαχείρισης του προβλήματος.

Όταν έχουμε πολλά ποσοτικά δεδομένα, η κατασκευή ενός ραβδογράμματος ή ενός κυκλικού διαγράμματος δεν είναι λειτουργική και γι' αυτό κάνουμε ομαδοποίηση των παρατηρήσεων.

Ιστογράμματα

Ιστογράμματα λέμε τα διαγράμματα που χρησιμοποιούνται για συνεχή ποσοτικά δεδομένα. Είναι παρόμοια με τα ραβδογράμματα, αλλά τα ορθογώνια ενώνονται μεταξύ τους και έχουν τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

- Απεικονίζουν μια ***ομαδοποιημένη κατανομή*** με ***συνεχόμενα ορθογώνια.***
- Τα ορθογώνια των ιστογραμμάτων έχουν ως βάσεις τις ομάδες της ομαδοποίησης, οι οποίες ονομάζονται ***κλάσεις*** και συνήθως έχουν ***ίσα πλάτη.***
- Όταν λέμε **κλάση "α – β"** εννοούμε το α και όλες τις ενδιάμεσες τιμές από το α έως το β, αλλά όχι το β. Για παράδειγμα, η κλάση "15-20" περιλαμβάνει το 15 που είναι το κάτω άκρο της κλάσης και όλες τις ενδιάμεσες τιμές από το 15 μέχρι το 20 που είναι το πάνω άκρο αυτής της κλάσης και δεν συμπεριλαμβάνεται. Το 20 συμπεριλαμβάνεται στην αμέσως επόμενη κλάση "20-25".
- Η πρώτη κλάση περιλαμβάνει τη μικρότερη τιμή και η τελευταία κλάση τη μεγαλύτερη τιμή, δηλαδή η τελευταία κλάση περιλαμβάνει και τα δύο άκρα. Όταν για μια κλάση λέμε "από-έως" περιλαμβάνεται η κάτω τιμή αλλά όχι η πάνω.
- Τα ορθογώνια των ιστογραμμάτων με ίσες βάσεις, έχουν **ύψη ίσα με τις συχνότητες** της αντίστοιχης κλάσης. Δηλαδή ύψη ίσα με το πλήθος των παρατηρήσεων της αντίστοιχης κλάσης.

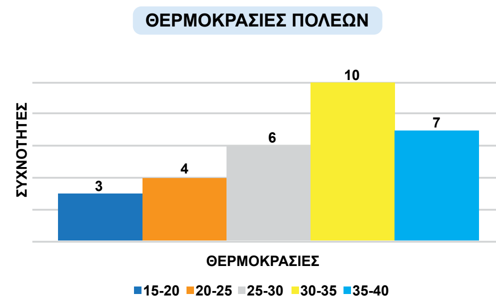
Παράδειγμα: Οι θερμοκρασίες που παρουσιάστηκαν σε διάφορες ευρωπαϊκές πόλεις μια συγκεκριμένη ημέρα καταγράφονται στον ακόλουθο πίνακα:

ΠΙΝΑΚΑΣ ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΩΝ									
15	20	22	16	37	25	31	32	36	32
29	28	34	40	31	39	33	34	35	27
38	21	34	23	19	26	32	33	37	26

Τα δεδομένα (θερμοκρασίες) είναι συνεχή ποσοτικά και για την κατασκευή ιστογράμματος εργαζόμαστε ως εξής:

- Αρχικά καθορίζουμε τις κλάσεις τις οποίες θα δημιουργήσουμε. Επειδή η ελάχιστη θερμοκρασία είναι 15 και η μέγιστη 40 μια εύλογη επιλογή είναι να χωρίσουμε σε ίσες κλάσεις, πλάτους 5 βαθμών, το εύρος 40 – 15 = 25 από 15 έως 40 βαθμούς. Έτσι δημιουργούμε : $\frac{40-15}{5} = \frac{25}{5} = 5$ κλάσεις ίσου πλάτους.
- Κάνουμε ομαδοποίηση των παρατηρήσεων - θερμοκρασιών:

Κλάσεις	Διαλογή	Συχνότητες
15-20	III	3
20-25	IIII	4
25-30	~~IIII~~ I	6
30-35	~~IIII~~ ~~IIII~~	10
35-40	~~IIII~~ II	7
	Σύνολο	**30**



- Φτιάχνουμε το ιστόγραμμα.

Στο συγκεκριμένο ιστόγραμμα, στην τελευταία κλάση “35-40” περιλαμβάνεται το 35, το 40 και όλες οι ενδιάμεσες παρατηρήσεις/θερμοκρασίες.

Η κατασκευή ιστογράμματος με το Excel περιγράφεται στο συμπληρωματικό υλικό.

Κατασκευή Ιστογράμματος με το Excel

Για την κατασκευή ιστογράμματος με το λογισμικό Excel μπορείς να δεις το video που βρίσκεται στον διπλανό σύνδεσμο.

Ιστόγραμμα Excel

Σημειώσεις:

1. Όπως δημιουργήσαμε το ιστόγραμμα συχνοτήτων, μπορούμε εργαζόμενοι ανάλογα να δημιουργήσουμε και το αντίστοιχο **ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων.**
2. Το πλήθος των κλάσεων είναι συνήθως 5 έως 10 και επιλέγεται έτσι ώστε να υπάρχουν αρκετές παρατηρήσεις σε κάθε κλάση.
3. **Κέντρο της κλάσης “α – β”** λέμε το ημιάθροισμα $\frac{α + β}{2}$.

   Για παράδειγμα το κέντρο της κλάσης “15-20” είναι: $\frac{15 + 20}{2} = 17,5$
4. Όταν έχουμε ομαδοποίηση, οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης θεωρούμε ότι αντιπροσωπεύονται από το κέντρο της κλάσης.

Ένα κυκλικό διάγραμμα (πίτα) δείχνει τις αναλογίες (ποσοστά) κατηγοριών με κυκλικούς τομείς.
Ένα ραβδόγραμμα με ίσα πλάτη, επιτρέπει συγκρίσεις μεταξύ διακριτών κατηγοριών συγκρίνοντας τα ύψη των ορθογωνίων.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Ένας αρτοποιός κατέγραψε τα κιλά διαφόρων σκευασμάτων που πούλησε κατά τη διάρκεια 45 συνηθισμένων εβδομάδων και τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα:

100	40	150	150	250	300	310	410	600
50	30	100	140	200	300	320	320	480
70	70	130	180	270	350	350	420	400
80	80	180	150	230	360	350	450	650
50	90	190	150	250	350	400	500	440

α) Να κατασκευάσετε ένα ιστόγραμμα συχνοτήτων για τα δεδομένα του πίνακα.

β) Πόσες εβδομάδες ο αρτοποιός πούλησε μέχρι 200 κιλά την εβδομάδα;

γ) Πόσες εβδομάδες ο αρτοποιός πούλησε τουλάχιστον 400 κιλά την εβδομάδα;

δ) Πόσα ήταν τα κιλά αρτοσκευασμάτων που πουλήθηκαν τις περισσότερες εβδομάδες και πόσα τις λιγότερες;

ε) Να κατασκευάσετε ένα ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων για τα δεδομένα του πίνακα.

στ) Να συγκρίνετε τις πληροφορίες που δίνουν τα ιστογράμματα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.

Απάντηση

α) Παρατηρούμε ότι η μικρότερη τιμή για τα κιλά πώλησης των σκευασμάτων είναι 30 και η μεγαλύτερη 600, οπότε το εύρος των κιλών είναι $600 - 30 = 570$. Επιλέγουμε να θεωρήσουμε 6 ίσες κλάσεις και επειδή:

$\frac{600-30}{6} = \frac{570}{6} = 95$, παίρνουμε τις κλάσεις: "30 – 125", "125 – 220", "220 – 315", "315 – 410", "410 – 505", "505 – 600".

Ωστόσο το ίδιο είναι να θεωρήσουμε τις 6 ίσες κλάσεις: "0 – 100", "100 – 200", "200 – 300", "300 – 400", "400 – 500" και "500 – 600". Για λόγους απλότητας εργαζόμαστε με τη δεύτερη επιλογή.

Κάνοντας διαλογή των παρατηρήσεων/κιλών παίρνουμε τον διπλανό πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων:

Κλάσεις	Διαλογή	Συχνότητες	Σχετικές συχνότητες
0-100	𝍸 IIII	9	$\frac{9}{45} = 0,2$
100-200	𝍸 𝍸 I	11	$\frac{11}{45} = 0,24$
200-300	𝍸	5	$\frac{5}{45} = 0,11$
300-400	𝍸 𝍸	10	$\frac{10}{45} = 0,22$
400-500	𝍸 II	7	$\frac{7}{45} = 0,16$
500-600	III	3	$\frac{3}{45} = 0,067$
	Σύνολα	45	**0,997**

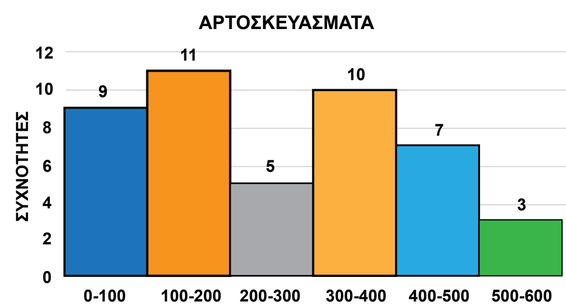
Παρατήρηση: Το άθροισμα των σχετικών συχνοτήτων όπως φαίνεται στον πίνακα ομαδοποίησης δεν είναι 1 γιατί οι σχετικές συχνότητες βρέθηκαν με στρογγυλοποίηση.

Με τη βοήθεια του πίνακα της ομαδοποίησης κατασκευάζουμε το ιστόγραμμα συχνοτήτων (Σχήμα 1).

β) Από το ιστόγραμμα διαπιστώνουμε ότι ο αρτοποιός σε 20 εβδομάδες πούλησε έως 200 κιλά.

γ) Από το ιστόγραμμα διαπιστώνουμε ότι ο αρτοποιός σε 10 εβδομάδες πούλησε τουλάχιστον 400 κιλά.

δ) Από το ιστόγραμμα διαπιστώνουμε ότι από 100 έως 200 κιλά πουλήθηκαν για 11 εβδομάδες που ήταν και οι περισσότερες, ενώ 500 έως 600 κιλά πουλήθηκαν μόνο για 3 εβδομάδες.



Σχήμα 1

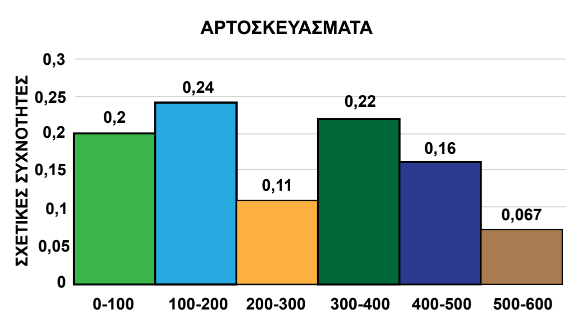
ε) Με τη βοήθεια του πίνακα της ομαδοποίησης κατασκευάζουμε το ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων (Σχήμα 2).

στ) Το ιστόγραμμα συχνοτήτων και το ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων δεν διαφέρουν ως προς την μορφή. Διαφέρουν όμως ως προς τις τιμές του κατακόρυφου άξονα.

Το ιστόγραμμα συχνοτήτων μας δίνει τις ακριβείς τιμές των κατηγοριών αλλά όχι τα ποσοστά τους.

Αντίθετα το ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων μας δίνει τις αναλογίες ή τα ποσοστά των κατηγοριών και όχι τις ακριβείς τιμές.

Από ένα ιστόγραμμα συχνοτήτων μπορούμε να βρούμε το πλήθος των παρατηρήσεων το οποίο δεν μπορούμε να βρούμε από το ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων.



Σχήμα 2

Και τα δύο είναι χρήσιμα για συγκρίσεις οι οποίες γίνονται συγκρίνοντας τα ύψη των ιστών.

Για να πειραματιστείτε και να ερευνήσετε τα γραφήματα μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τη διπλανή ψηφιακή εφαρμογή.

Αυτοαξιολόγηση

Να τοποθετήσετε στις στήλες ΣΩΣΤΟ, ΛΑΘΟΣ ένα ✓ ανάλογα με το αν η πρόταση είναι σωστή ή λανθασμένη.	Σωστό	Λάθος
1. Τα ιστογράμματα συχνοτήτων χρησιμοποιούνται μόνο για ομαδοποιημένα δεδομένα.	☐	☐
2. Τα κυκλικά διαγράμματα χρησιμοποιούνται μόνο για κατηγορικά δεδομένα.	☐	☐
3. Τα ραβδογράμματα είναι κατάλληλα για συνεχή δεδομένα.	☐	☐
4. Σε ένα ιστόγραμμα οι παρατηρήσεις σε ένα ορθογώνιο έχουν όλες την ίδια συχνότητα.	☐	☐
5. Σε κάθε ιστόγραμμα με κλάσεις που έχουν το ίδιο πλάτος, αν θεωρήσουμε τις βάσεις ως μονάδες, τότε το εμβαδόν κάθε ορθογωνίου ισούται με το ύψος.	☐	☐
6. Σε κάθε ιστόγραμμα με κλάσεις που έχουν το ίδιο πλάτος, αν θεωρήσουμε τις βάσεις, ως μονάδες, τότε το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων ισούται με το μέγεθος του δείγματος/πληθυσμού.	☐	☐
7. Από ένα ιστόγραμμα συχνοτήτων μπορούμε να βρούμε το πλήθος των συμμετεχόντων σε μια έρευνα.	☐	☐
8. Από ένα κυκλικό διάγραμμα στο οποίο απεικονίζονται μόνο αναλογίες, μπορούμε να υπολογίσουμε το πλήθος των συμμετεχόντων σε μια έρευνα.	☐	☐
9. Τα κυκλικά διαγράμματα δείχνουν αναλογίες/ποσοστά.	☐	☐
10. Από ένα ιστόγραμμα μπορούμε να βρούμε τα αρχικά δεδομένα από τα οποία κατασκευάστηκε.	☐	☐

Για την επίλυση των παρακάτω ασκήσεων μπορείς να χρησιμοποιήσεις τις δύο διπλανές ψηφιακές εφαρμογές.

Γραφήματα

Κυκλικά Διαγράμματα

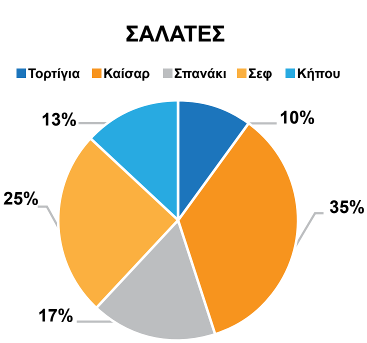
ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι προτιμήσεις για τα αθλήματα των μαθητών/τριών ενός σχολείου:

Άθλημα	Μπάσκετ	Ποδόσφαιρο	Βόλεϊ	Τένις	Άλλο
Αριθμός μαθητών/τριών	36	60	22	10	92

α) Πόσους μαθητές/τριες έχει το σχολείο;
β) Να κατασκευάσετε ένα κυκλικό διάγραμμα.

2 Ένας ιδιοκτήτης εστιατορίου παρήγγειλε σε μια εταιρεία μια έρευνα για να μάθει τις προτιμήσεις των πελατών του. Για τις σαλάτες που καταναλώνουν οι πελάτες του η εταιρεία του παρουσίασε το παρακάτω διάγραμμα το οποίο παρουσιάζει τα ποσοστά για τις σαλάτες: Τορτίγια, Καίσαρ, Σπανάκι, Σεφ, Κήπου.



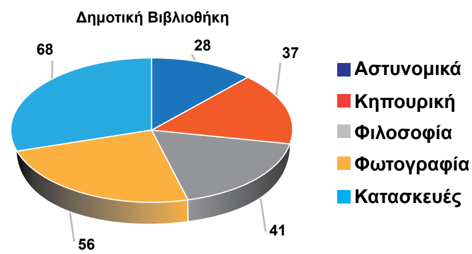
α) Ποια σαλάτα ήταν η περισσότερο και ποια η λιγότερο δημοφιλής;
β) Αν στην έρευνα συμμετείχαν 300 πελάτες, πόσοι πελάτες διάλεξαν κάθε σαλάτα;

3 Η βιβλιοθήκη ενός Δήμου κατέγραψε τις κατηγορίες των βιβλίων που δανείζονται κατά μέσο όρο κάθε εβδομάδα οι δημότες. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο κυκλικό διάγραμμα.

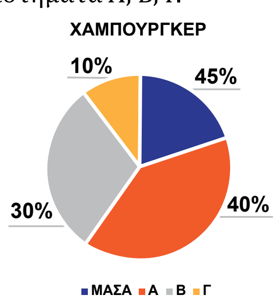
α) Τι ποσοστό βιβλίων αντιστοιχεί στην κάθε κατηγορία;

β) Ποια είναι η επίκεντρη γωνία κάθε τομέα;

γ) Τι φαίνεται από αυτά τα στοιχεία να ενδιαφέρει περισσότερο τους δημότες;



4 Το κατάστημα γρήγορου φαγητού η ΜΑΣΑ παρουσιάζει για διαφήμιση ένα κυκλικό διάγραμμα στο οποίο φαίνεται η προτίμηση των πελατών της στα χάμπουργκερ που πουλάει καθώς και στις αντίστοιχες πωλήσεις σε άλλα τρία γειτονικά ανταγωνιστικά καταστήματα Α, Β, Γ.



α) Αν οι πωλήσεις των ανταγωνιστών είναι ορθές τι γράφει παραπλανητικά το διάγραμμα;

β) Να διορθώσετε και να παρουσιάσετε σωστά το διάγραμμα.

γ) Αν συνολικά πωλούνται 1000 χάμπουργκερ από τα καταστήματα, πόσα πουλάει η ΜΑΣΑ;

5 Στο κυκλικό διάγραμμα παρουσιάζονται τα κύρια συστατικά μιας δίαιτας. Οι αριθμοί δείχνουν τις τιμές των επίκεντρων γωνιών.

α) Να βρείτε τα ποσοστά των τριών συστατικών.

β) Αν η δίαιτα αντιπροσωπεύει την πρόσληψη 2000 "θερμίδων", πόσες "θερμίδες" από κάθε συστατικό πρέπει να καταναλώνει όποιος ακολουθεί αυτή τη δίαιτα;

6 Η Τροχαία μιας πόλης έκανε έλεγχο της ταχύτητας των αυτοκινήτων που κινούνται σε ένα συγκεκριμένο τμήμα ενός αυτοκινητόδρομου και τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

Ταχύτητα σε χλμ/ώρα	Αριθμός αυτοκινήτων
130 ≤ x < 140	5
140 ≤ x < 150	30
150 ≤ x < 160	35
160 ≤ x < 170	20
170 ≤ x < 180	15
180 ≤ x ≤ 190	10

α) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων.

β) Πόσοι οδηγοί έτρεχαν με ταχύτητα μεγαλύτερη ή ίση από 160 χλμ/ώρα;

γ) Πόσοι οδηγοί έτρεχαν με ταχύτητα μικρότερη από 150 χλμ/ώρα;

δ) Πόσοι οδηγοί έτρεχαν με ταχύτητα από 130 έως 160 χλμ/ώρα;

ε) Πόσοι οδηγοί έτρεχαν με ταχύτητα από 170 έως και 190 χλμ/ώρα;

7 Οι δαπάνες ετησίως σε εκατομμύρια ευρώ ορισμένων χωρών για την προστασία του περιβάλλοντος παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

Δαπάνες σε εκατομμύρια ευρώ	Αριθμός Χωρών
20 ≤ x < 40	20
40 ≤ x < 60	15
60 ≤ x < 80	25
80 ≤ x < 100	15
100 ≤ x < 120	30
120 ≤ x ≤ 140	5

α) Πόσες χώρες συμμετείχαν στην έρευνα;

β) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων.

γ) Πόσες χώρες ξόδεψαν λιγότερα από 60 εκατομμύρια;

δ) Πόσες χώρες ξόδεψαν τουλάχιστον 100 εκατομμύρια;

ε) Πόσες χώρες ξόδεψαν από 80 έως και 140 εκατομμύρια;

8 Οι βαθμολογίες των μαθητών/τριών σε ένα διαγώνισμα παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

Βαθμολογίες Μαθητών/τριών								
10	11	9	18	20	10	9	14	17
17	16	8	13	14	14	11	15	18
19	12	16	13	14	8	14	13	20
20	10	18	15	18	19	18	9	20

α) Να κάνετε διαλογή των παρατηρήσεων.
β) Να κατασκευάσετε ιστόγραμμα συχνοτήτων με 4 κλάσεις.
γ) Πόσοι μαθητές/τριες έγραψαν κάτω από 14;
δ) Πόσοι μαθητές/τριες έγραψαν από 17 έως και 20;
ε) Πόσοι μαθητές/τριες έγραψαν από 11 έως 17;

9 Οι θερμοκρασίες σε βαθμούς κελσίου μιας χώρας κατά τη διάρκεια μιας χρονιάς παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

Θερμοκρασίες (°C)								
-20	22	-10	-5	5	20	-15	4	40
10	18	-12	25	15	38	-8	6	30
14	12	0	30	30	24	0	16	20
24	14	-15	15	-4	-2	19	-1	14

α) Να κάνετε διαλογή των παρατηρήσεων.
β) Να κατασκευάσετε ιστόγραμμα συχνοτήτων με 6 κλάσεις πλάτους 10.
γ) Πόσες μέρες αφορά η καταγραφή;
δ) Πόσες μέρες οι θερμοκρασίες ήταν από -20 έως μηδέν βαθμούς κελσίου;
ε) Πόσες μέρες οι θερμοκρασίες ήταν από 10 έως 30 βαθμούς κελσίου;
στ) Πόσες μέρες οι θερμοκρασίες ήταν από 20 έως και 40 βαθμούς κελσίου;

10 Τα ύψη όλων των δέντρων σε ένα πάρκο μετρημένα σε cm παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα:

Ύψη δέντρων (cm)	100 – 150	150 – 200	200 – 250	250 – 300	300 – 350
Αριθμός δέντρων	2	10	6	3	7

α) Πόσα δέντρα υπάρχουν στο πάρκο;
β) Να κατασκευάσετε ιστόγραμμα συχνοτήτων.
γ) Να κατασκευάσετε ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων.
δ) Τι ποσοστό των δέντρων έχουν ύψος από 1,5 m έως 2 m;

1.3 ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΕΣ ΑΠΟ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

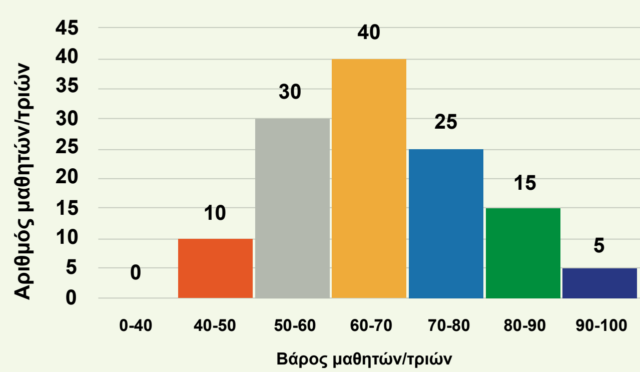
Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

- Να επιλέγουν πληροφορίες από διαφορετικές αναπαραστάσεις ποσοτικών δεδομένων και να καταλήγουν σε συμπεράσματα.
- Να επιλέγουν κατάλληλες μορφές αναπαράστασης και να επιχειρηματολογούν για τις επιλογές τους.

Διερεύνηση

Στο παρακάτω ιστόγραμμα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα μιας έρευνας για τη μάζα σε Kg των μαθητών/τριών σε ένα σχολείο.

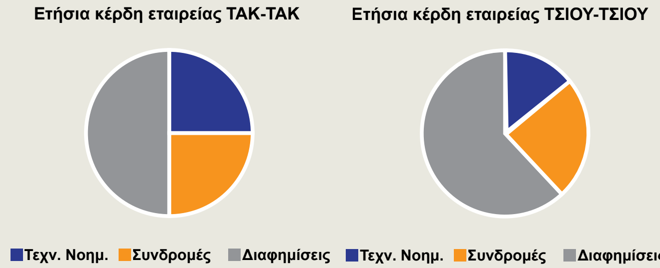
α) Πόσοι μαθητές/τριες συμμετείχαν στην έρευνα;
β) Πόσοι μαθητές/τριες είχαν μάζα έως 60 κιλά;
γ) Πόσοι μαθητές/τριες είχαν μάζα τουλάχιστον 80 κιλά;
δ) Πόσοι μαθητές/τριες είχαν μάζα από 50 έως 80 κιλά;
ε) Πόσοι μαθητές/τριες ανήκαν στην ομάδα με τη μικρότερη μάζα και πόσοι στην ομάδα με τη μεγαλύτερη;
δ) Αν ένας μαθητής/τρια θεωρείται υπέρβαρος/η όταν η μάζα του/της είναι μεγαλύτερη ή ίση από 80 κιλά, πόσοι μαθητές /τριες θα μπορούσαν να θεωρηθούν υπέρβαροι/ες στην έρευνα αυτή;



Όταν έχουμε πληροφορίες με τη μορφή δεδομένων τότε μπορούμε να παρουσιάσουμε αυτές τις πληροφορίες με διαγράμματα κατάλληλα για τη μορφή τους. Αντίστροφα, όταν δίνεται ένα διάγραμμα μπορούμε να αντλήσουμε από αυτό πληροφορίες, οι οποίες μας οδηγούν σε συμπεράσματα και μας βοηθούν στη λήψη αποφάσεων.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1 «*Τσίου-Τσίου ή Τακ-Τακ*»;

Οι εταιρείες «Τσίου-Τσίου» και «Τακ-τακ» δημοσίευσαν τα ετήσια κέρδη τους με τα παραπάνω κυκλικά διαγράμματα. Αν τα κέρδη από τις διαφημίσεις για την εταιρεία «Τακ-Τακ» είναι 4 εκατομμύρια ευρώ και για την εταιρεία «Τσίου-Τσίου» 15 εκατομμύρια ευρώ, τότε:



α) Έχει δίκιο ο Ασάρ ο οποίος ισχυρίζεται ότι τα ετήσια κέρδη της εταιρείας «Τακ-Τακ» είναι μεγαλύτερα από τα κέρδη της εταιρείας «Τσίου-Τσίου» στον τομέα της Τεχνητής νοημοσύνης; Αν όχι, διορθώστε την απάντησή του ώστε να είναι σωστή εξηγώντας γιατί.

β) Έχει δίκιο η Μαρία η οποία ισχυρίζεται ότι τα ετήσια κέρδη από τις Συνδρομές της εταιρείας «Τακ-Τακ» είναι τα ίδια με τα κέρδη της εταιρείας «Τσίου-Τσίου»; Εξηγήστε την απάντησή σας.

γ) Να συγκρίνετε τα κέρδη των εταιρειών.

Απάντηση

α) Ο Ασάρ παρατηρεί ότι ο κυκλικός τομέας της εταιρείας «Τακ-Τακ» στην Τεχνητή νοημοσύνη είναι μεγαλύτερος από τον αντίστοιχο της εταιρείας «Τσίου-Τσίου» και συμπεραίνει ότι η εταιρεία «Τακ-Τακ» έχει μεγαλύτερα κέρδη στον τομέα αυτό από την εταιρεία «Τσίου-Τσίου». Αυτό όμως δεν είναι σωστό γιατί οι αντίστοιχοι κυκλικοί τομείς απεικονίζουν ποσοστά (αναλογίες) του συνόλου των κερδών κάθε εταιρείας, τα οποία δεν είναι ίδια.

Ο Ασάρ θα είχε δίκιο αν απαντούσε ότι στον τομέα της Τεχνητής νοημοσύνης η εταιρεία «Τακ-Τακ» έχει μεγαλύτερα σε ποσοστό κέρδη από την εταιρεία «Τσίου-Τσίου».

β) Η Μαρία παρατηρεί ότι ο κυκλικός τομέας της εταιρείας «Τακ-Τακ» στις Συνδρομές είναι ίδιος με τον αντίστοιχο της εταιρείας «Τσίου-Τσίου» και συμπεραίνει ότι η εταιρεία «Τακ-Τακ» έχει τα ίδια κέρδη στον τομέα αυτό με την εταιρεία «Τσίου-Τσίου». Αυτό όμως δεν είναι σωστό γιατί οι αντίστοιχοι κυκλικοί τομείς απεικονίζουν ποσοστά (αναλογίες) του συνόλου των κερδών κάθε εταιρείας, τα οποία δεν είναι ίδια.

Η Μαρία θα είχε δίκιο αν απαντούσε ότι στις Συνδρομές η εταιρεία «Τακ-Τακ» έχει το ίδιο ποσοστό κέρδους με την εταιρεία «Τσίου-Τσίου».

γ) Για να συγκρίνουμε τα κέρδη των εταιρειών θα πρέπει να τα βρούμε. Χρησιμοποιώντας τις πληροφορίες που δίνονται και παρατηρώντας τα αντίστοιχα κυκλικά διαγράμματα έχουμε:

Εταιρεία «Τακ-Τακ»:

- Δίνεται ότι τα κέρδη της εταιρείας «Τακ-Τακ» από τη διαφήμιση είναι 4 εκατομμύρια ευρώ.
- Από το κυκλικό διάγραμμα παρατηρούμε ότι η διαφήμιση αντιπροσωπεύει το $\frac{1}{2}$ του συνόλου των κερδών της εταιρείας «Τακ-Τακ».
  Αν λοιπόν x εκατομμύρια ευρώ τα συνολικά κέρδη, τότε: $\frac{1}{2} \cdot x = 4$ ή $x = 2 \cdot 4$ ή $x = 8$.

  Άρα, τα συνολικά κέρδη της εταιρείας «Τακ-Τακ» είναι 8 εκατομμύρια ευρώ.

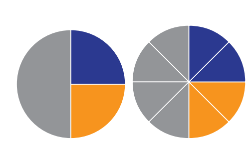
Εταιρεία «Τσίου-Τσίου»:

- Τα κέρδη της εταιρείας «Τσίου-Τσίου» από τη διαφήμιση είναι 15 εκατομμύρια ευρώ.
- Από το κυκλικό διάγραμμα παρατηρούμε ότι η διαφήμιση αντιπροσωπεύει τα $\frac{5}{8}$ του συνόλου των κερδών της εταιρείας «Τσίου-Τσίου».
  Αν λοιπόν x εκατομμύρια ευρώ τα συνολικά κέρδη, τότε $\frac{5}{8} \cdot x = 15$ ή $5 \cdot x = 8 \cdot 15$ ή $x = 24$.

  Άρα, τα συνολικά κέρδη της εταιρείας «Τσίου-Τσίου» είναι 24 εκατομμύρια ευρώ. Επομένως, τα συνολικά κέρδη της εταιρείας «Τσίου-Τσίου» είναι περισσότερα από τα αντίστοιχα της εταιρείας «Τακ-Τακ».

Σημείωση:

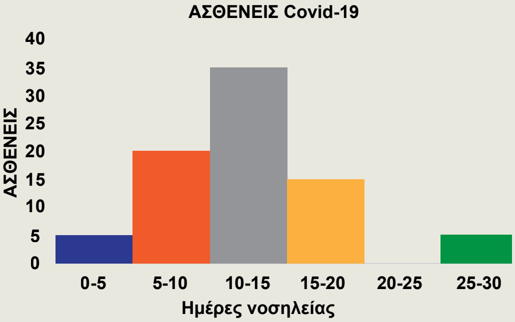
Τα ποσοστά (αναλογίες) των κυκλικών τομέων στα κυκλικά διαγράμματα τα βρίσκουμε αντιπαραβάλλοντάς τα με τη διαίρεση ενός κυκλικού δίσκου σε οχτώ ίσους κυκλικούς τομείς. Για παράδειγμα, τα διπλανά σχήματα στην περίπτωση του κυκλικού διαγράμματος για την εταιρεία «Τακ-Τακ».



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2 «*Νοσηλεία Covid-19*»

Τα αποτελέσματα μιας έρευνας για τον χρόνο νοσηλείας σε ημέρες των 110 ατόμων ενός δείγματος που νόσησαν με κορονοϊό (Covid-19) και νοσηλεύθηκαν σε ένα νοσοκομείο, παρουσιάζονται στο διάγραμμα:

α) Τι είδους είναι το διάγραμμα και ποια είναι τα χαρακτηριστικά του;
β) Πόσοι ασθενείς νοσηλεύτηκαν έως 10 ημέρες;
γ) Πόσοι ασθενείς νοσηλεύτηκαν από 5 έως 20 ημέρες;
δ) Πόσοι ασθενείς νοσηλεύτηκαν 20 έως 25 ημέρες;
ε) Συμπληρώστε το διάγραμμα με τη συχνότητα της κλάσης "20-25" και σχεδιάστε την πλήρη μορφή του. Τι παρατηρείτε;
στ) Πόσοι ασθενείς νοσηλεύτηκαν τουλάχιστον 15 ημέρες;
ζ) Πόσο χρόνο νοσηλείας χρειάστηκαν οι περισσότεροι ασθενείς και πόσοι ήταν;
η) Ποιος ήταν ο μικρότερος χρόνος νοσηλείας και πόσους ασθενείς αφορούσε;
θ) Ποιος ήταν ο μεγαλύτερος χρόνος νοσηλείας και πόσους ασθενείς αφορούσε;
ι) Πόσες ημέρες μπορούμε να πούμε ότι νοσηλεύτηκε κάθε ασθενής της κλάσης "10-15";

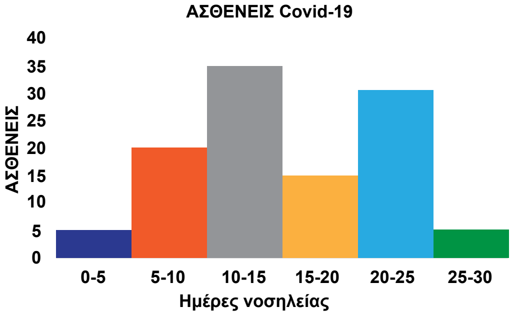


Απάντηση

α) Το διάγραμμα είναι ιστόγραμμα εύρους 30 με έξι ίσες κλάσεις πλάτους 5 από τις οποίες απουσιάζει η κλάση "20-25".

β) Από το ιστόγραμμα διαπιστώνουμε ότι:
- Η συχνότητα της κλάσης "0-5" είναι 5. Άρα 0-5 ημέρες νοσηλεύτηκαν 5 ασθενείς.
- Η συχνότητα της κλάσης "5-10" είναι 20. Άρα "5-10" ημέρες νοσηλεύτηκαν 20 ασθενείς.

Επομένως, έως 10 ημέρες νοσηλεύτηκαν: $5 + 20 = 25$ ασθενείς.



Ιστόγραμμα 1

γ) Από το προηγούμενο ερώτημα ξέρουμε ότι "5-10" ημέρες νοσηλεύτηκαν 20 ασθενείς.
Από το ιστόγραμμα διαπιστώνουμε ότι:
- Η συχνότητα της κλάσης "10-15" είναι 35. Άρα "10-15" ημέρες νοσηλεύτηκαν 35 ασθενείς.
- Η συχνότητα της κλάσης "15-20" είναι 15. Άρα "15-20" ημέρες νοσηλεύτηκαν 15 ασθενείς.

Επομένως, από 5 έως 20 ημέρες νοσηλεύτηκαν: $20 + 35 + 15 = 70$ ασθενείς.

δ) Διαπιστώνουμε ότι στο ιστόγραμμα δεν έχει σχεδιαστεί ο ιστός που αντιστοιχεί στην κλάση "20-25". Ξέρουμε όμως ότι συμμετείχαν συνολικά στην έρευνα 110 άτομα, οπότε αν x συχνότητα της κλάσης που λείπει τότε έχουμε:
$5 + 20 + 35 + 15 + x + 5 = 110$ ή $x + 80 = 110$ ή $x = 110 - 80$ ή $x = 30$.
Άρα 20 έως 25 ημέρες νοσηλεύτηκαν 30 ασθενείς.

ε) Συμπληρώνοντας τη συχνότητα που έλειπε το πλήρες ιστόγραμμα είναι το ιστόγραμμα (1). Παρατηρούμε την ύπαρξη δύο κλάσεων με συγκριτικά μεγαλύτερες συχνότητες από τις υπόλοιπες. Αυτό δείχνει την ύπαρξη δύο ομάδων συγκεντρωμένων γύρω από τους χρόνους νοσηλείας "10-15" και "20-25" ημερών.

στ) Από το πλήρες ιστόγραμμα (1) διαπιστώνουμε ότι τουλάχιστον 15 ημέρες νοσηλείας χρειάστηκαν: $15 + 30 + 5 = 50$ ασθενείς.

ζ) Από το πλήρες ιστόγραμμα (1) διαπιστώνουμε ότι οι περισσότεροι ασθενείς χρειάστηκαν "10-15" ημέρες και ήταν 35.

η) Από το πλήρες ιστόγραμμα (1) διαπιστώνουμε ότι ο μικρότερος χρόνος νοσηλείας ήταν έως 5 ημέρες και αφορούσε σε 5 ασθενείς.

θ) Από το πλήρες ιστόγραμμα (1) διαπιστώνουμε ότι ο μεγαλύτερος χρόνος νοσηλείας ήταν 25 έως 30 ημέρες και αφορούσε σε 5 ασθενείς.

ι) Οι ημέρες νοσηλείας κάθε ασθενή της κλάσης "10-15" αντιπροσωπεύονται από το κέντρο της κλάσης: $\frac{10 + 15}{2} = 12,5$
Άρα μπορούμε να πούμε ότι κάθε ασθενής της κλάσης "10-15" νοσηλεύτηκε 12,5 ημέρες.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3 «*Ατμοσφαιρική ρύπανση*»

Στα αποτελέσματα μιας έρευνας για την ατμοσφαιρική ρύπανση[1] σε μια ευρωπαϊκή πρωτεύουσα με ημερήσιες καταγραφές σε διαφορετικές ημέρες παρουσιάστηκαν μεταξύ άλλων και τα ακόλουθα στοιχεία:

α) Να παρουσιάσετε τα δεδομένα του πίνακα (1) με το κατάλληλο διάγραμμα. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

β) Με βάση τα στοιχεία του πίνακα (1):

1. Πόσες ημέρες υπήρξε συγκέντρωση από 80 έως 100 μικροσωματιδίων PM2,5 ανά cm^3;

2. Υπήρχαν περισσότερες από 15 ημέρες κατά τη διάρκεια της έρευνας κατά τις οποίες παρουσιάστηκαν από 40 έως 60 μικροσωματίδια PM2,5 ανά cm^3;

γ) Ο Παγκόσμιος Οργανισμός Υγείας συστήνει τη λήψη μέτρων όταν η συγκέντρωση μικροσωματιδίων PM2,5 είναι μεγαλύτερη ή ίση από 40 ανά cm^3. Με βάση τα στοιχεία της έρευνας θα συστήνατε στους ειδικούς να εξετάσουν τη λήψη μέτρων;

ΜΙΚΡΟΣΩΜΑΤΙΔΙΑ PM2,5[2] ΣΕ ΜΙΚΡΟΜΕΤΡΑ ΑΝΑ ΚΥΒΙΚΟ ΕΚΑΤΟΣΤΟ (μm/cm^3)

13	16	17	25	32	37	29	38	24	33	36	34
82	88	99	95	44	43	51	49	48	44	52	59
33	24	31	37	34	36	39	8	9	12	15	19
60	63	66	65	62	67	69	73	75	79	66	61
41	45	48	49	52	54	57	58	52	58	55	51

Πίνακας 1

Απάντηση

α) Τα δεδομένα του πίνακα μπορούν να θεωρηθούν συνεχή και επομένως κατάλληλο διάγραμμα είναι το ιστόγραμμα. Παρατηρούμε από τον πίνακα ότι η μικρότερη συγκέντρωση μικροσωματιδίων PM2,5 ανά κυβικό εκατοστό ήταν 8 και η μεγαλύτερη 99. Επιλέγουμε να χωρίσουμε το εύρος 99 − 8 = 91 στις ακόλουθες πέντε κλάσεις πλάτους 20: "0-20", "20-40", "40-60", "60-80", "80-100" και κάνοντας κατά γνωστά ομαδοποίηση των δεδομένων παίρνουμε τον πίνακα (2) με τη βοήθεια του οποίου κατασκευάζουμε το ιστόγραμμα.

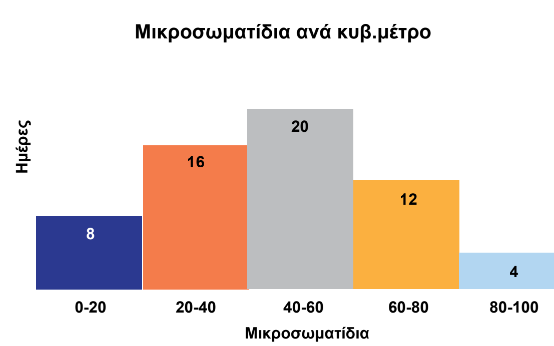
0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
8	16	20	12	4

Πίνακας 2

β) Για να απαντήσουμε στα ερωτήματα μπορούμε να κάνουμε καταμετρήσεις στα στοιχεία του πίνακα (1) που μας ενδιαφέρουν. Ωστόσο είναι πιο εύκολο να απαντήσουμε στα ερωτήματα με τη βοήθεια του ιστογράμματος που έχουμε ήδη κατασκευάσει, από το οποίο έχουμε:

1. Η μεγαλύτερη ατμοσφαιρική ρύπανση με την παρουσία από 80 έως 100 μικροσωματίδια PM2,5 ανά cm^3 παρουσιάστηκε 4 ημέρες από τις 60 της έρευνας.

2. Η ατμοσφαιρική ρύπανση με την παρουσία από 40 έως 60 μικροσωματίδια PM2,5 ανά cm^3 παρουσιάστηκε σε περισσότερες από 15 ημέρες και συγκεκριμένα σε 20 από τις 60 ημέρες της έρευνας.



γ) Από το ιστόγραμμα διαπιστώνουμε ότι η παρουσία περισσότερων από 40 μικροσωματιδίων PM2,5 ανά cm^3 εντοπίζεται σε: 20 + 12 + 4 = 36ημέρες

από τις 60 της έρευνας, δηλαδή σε ποσοστό $\frac{36}{60} = 0,6$ ή στο 60%.

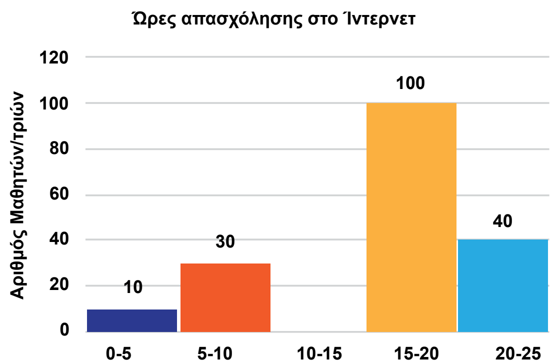
Επομένως με βάση την έρευνα και την οδηγία του Παγκόσμιου Οργανισμού Υγείας θα σύστηναμε στους ειδικούς να εξετάσουν τη λήψη μέτρων.

[1] Ατμοσφαιρική ρύπανση: https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%91%CF%84%CE%BC%CE%BF%CF%83%CF%86%CE%B1%CE%B9%CF%81%CE%B9%CE%BA%CE%AE_%CF%81%CF%8D%CF%80%CE%B1%CE%BD%CF%83%CE%B7

[2] PM2,5: Μικροσωματίδια με διάμετρο έως 2,5 μικρόμετρα (μm). Κάθε μm είναι όσο ένα χιλιοστό του χιλιοστού (10^{-6} του μέτρου) οπότε τα PM2,5 έχουν διάμετρο έως 2,5 εκατομμυριοστά του μέτρου. Για να φανταστούμε πόσο μικρό είναι ένα σωματίδιο έως 2,5 μm αρκεί να αναλογιστούμε ότι μια ανθρώπινη τρίχα έχει διάμετρο 50-70 μm.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Στο παρακάτω ιστόγραμμα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα μιας έρευνας σε ένα σχολείο για τον εβδομαδιαίο χρόνο απασχόλησης των 300 μαθητών/τριών στο ίντερνετ.



α) Τι είδους είναι το διάγραμμα και ποια είναι τα χαρακτηριστικά του;
β) Πόσοι μαθητές/τριες απασχολούνταν στο ίντερνετ έως 10 ώρες την εβδομάδα;
γ) Πόσοι μαθητές/τριες απασχολούνταν στο ίντερνετ 15 ή και περισσότερες ώρες την εβδομάδα;
δ) Να συμπληρώσετε το διάγραμμα με τη συχνότητα της κλάσης 10-15 και να σχεδιάσετε την πλήρη μορφή του.
ε) Πόσες ώρες την εβδομάδα μπορούμε να πούμε ότι απασχολούνταν στο ίντερνετ κάθε μαθητής/τρια της κλάσης 15-20;

2 Οι ημέρες νοσηλείας 110 ατόμων που νόσησαν με κορονοϊό (Covid-19) παρουσιάζονται στον πίνακα:

Ημέρες	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30
Ασθενείς	5	20	35	15	30	5

Πίνακας 1

α) Να κατασκευάσετε ιστόγραμμα με τρεις κλάσεις.
β) Τι πληροφορίες προκύπτουν από το ιστόγραμμα με τρεις κλάσεις;
γ) Να κατασκευάσετε με τη βοήθεια του πίνακα (2) ιστόγραμμα με δώδεκα κλάσεις.

0-2,5	2,5-5	5-7,5	7,5-10	10-12,5	12,5-15	15-17,5	17,5-20	20-22,5	22,5-25	25-27,5	27,5-30
3	2	8	12	17	18	10	5	10	20	4	1

Πίνακας 2

Συνέχεια πίνακα 2

δ) Τι πληροφορίες προκύπτουν από το ιστόγραμμα με δώδεκα κλάσεις;
ε) Να συγκρίνετε τις πληροφορίες που προκύπτουν από τα ιστογράμματα με 3 και 12 κλάσεις. Τι συμπεραίνετε;

3 Στον πίνακα παρουσιάζονται τα βάρη σε γραμμάρια ενός δείγματος των αβγών ενός ορνιθοτροφείου.

45	70	75	57	56	38	80	64	55
40	40	35	64	65	49	66	75	58
55	50	48	55	76	50	56	70	78
60	65	39	70	80	40	49	66	50

Ο ιδιοκτήτης του ορνιθοτροφείου θέλει να ξέρει τα βάρη των αβγών ώστε να τα πουλάει σε αντίστοιχες τιμές.
α) Με ποιο διάγραμμα θα παρουσιάζατε σχετικές πληροφορίες στον ιδιοκτήτη; Να εξηγήσετε την επιλογή σας.
β) Από πόσα αβγά αποτελείται το δείγμα;
γ) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα που προτείνετε.

4 Στα αποτελέσματα μιας έρευνας για την ατμοσφαιρική ρύπανση σε μια ευρωπαϊκή πρωτεύουσα με ημερήσιες καταγραφές σε διαφορετικές ημέρες παρουσιάστηκαν μεταξύ άλλων και τα ακόλουθα στοιχεία:

ΕΣΤΙΕΣ ΑΤΜΟΣΦΑΙΡΙΚΗΣ ΡΥΠΑΝΣΗΣ (%)				
Παραγωγή Ηλ/κού Ρεύματος	Βιομηχανία	Μεταφορές	Βιοκαύσιμα	Άλλες
3	16	38	17	26

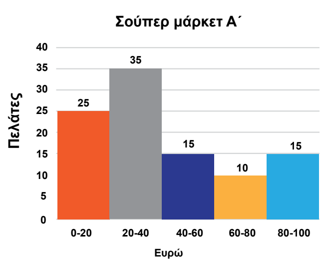
α) Να παρουσιάσετε τα δεδομένα του πίνακα με το κατάλληλο διάγραμμα. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.
β) Ποια είναι η μεγαλύτερη αναλογικά εστία ατμοσφαιρικής ρύπανσης στη συγκεκριμένη ευρωπαϊκή πρωτεύουσα με βάση τα στοιχεία της έρευνας;
γ) Αν θέλατε να μειώσετε κατά 50% την ατμοσφαιρική ρύπανση τι πρόταση θα κάνετε;

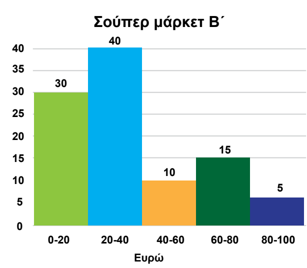
5 Ένα εργοστάσιο κατασκευής μπαταριών για ένα συγκεκριμένο κινητό έκανε δειγματοληπτικό έλεγχο για τον χρόνο διάρκειας της μπαταρίας με την οποία το εφοδιάζει. Οι χρόνοι σε ώρες παρουσιάζονται στον πίνακα.

30	46	50	75	48	66	48	59	62
40	58	65	30	38	38	88	75	66
45	67	63	90	56	49	90	71	88
65	58	78	82	77	60	78	63	90

α) Με ποιο διάγραμμα θα προτείνατε στην εταιρεία να παρουσιάσει τις σχετικές πληροφορίες στους πελάτες της; Να εξηγήσετε την επιλογή σας.
β) Σε πόσες μπαταρίες έκανε έλεγχο η εταιρεία;
γ) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα που προτείνετε.
δ) Πόσες μπαταρίες διαρκούν από 50 έως και 90 ώρες;

6 Τα αποτελέσματα μιας έρευνας σε δείγμα 100 πελατών σε δύο διαφορετικά Σούπερ μάρκετ για τα χρήματα που ξοδεύουν για να ψωνίσουν παρουσιάζονται με τα παρακάτω διαγράμματα.

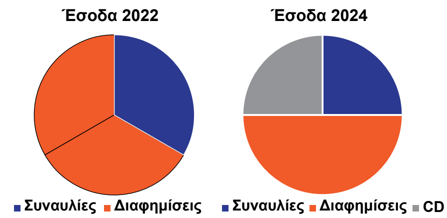




α) Πόσοι πελάτες ξοδεύουν στο Σούπερ μάρκετ Α από 20 έως 60 ευρώ;
β) Πόσοι πελάτες ξοδεύουν στο Σούπερ μάρκετ Β από 40 ευρώ και πάνω;
γ) Πόσοι πελάτες ξοδεύουν στο Σούπερ μάρκετ Α τουλάχιστον 60 ευρώ;
δ) Πόσοι πελάτες ξοδεύουν στο Σούπερ μάρκετ Β λιγότερα από 60 ευρώ;

7 Τα παρακάτω κυκλικά διαγράμματα δείχνουν τα έσοδα ενός τραγουδιστή μουσικής pop, το 2022 από συναυλίες και διαφημίσεις και το 2024 από συναυλίες, διαφημίσεις και πωλήσεις CD τα οποία ανέρχονται αντίστοιχα σε 120.000 και 400.000 ευρώ.

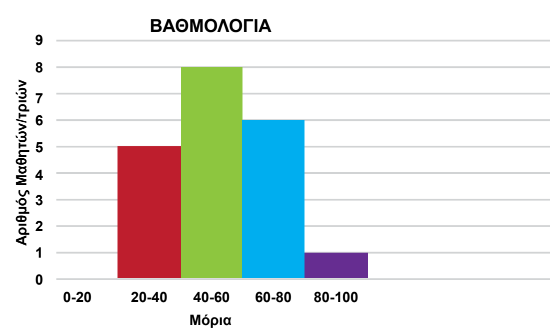
α) Αν γνωρίζουμε ότι το 2022, το $\frac{1}{3}$ των εσόδων του τραγουδιστή προέρχονταν από συναυλίες, να υπολογίσετε πόσα χρήματα κέρδισε ο τραγουδιστής από τις διαφημίσεις το 2022.
β) Να υπολογίσετε πόσα χρήματα κέρδισε ο τραγουδιστής από τις πωλήσεις των CDs το 2024;
γ) Η Ελένη ισχυρίζεται ότι:
«*Τα κυκλικά διαγράμματα δείχνουν ότι ο τραγουδιστής κέρδισε περισσότερα από τις συναυλίες το 2022 απ' ό,τι το 2024*».



Ο ισχυρισμός της Ελένης είναι σωστός ή λανθασμένος; Να εξηγήσετε την απάντησή σας.
δ) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα στον οποίο εμφανίζονται αναλυτικά τα έσοδα του τραγουδιστή και να κάνετε τα αντίστοιχα ραβδογράμματα.

	Συναυλίες	Διαφημίσεις	CD
2022			
2024			

8 Στο σχήμα απεικονίζονται οι βαθμολογίες των μαθητών/τριών ενός σχολείου στα Μαθηματικά.



α) Να βρείτε πόσοι ήταν οι μαθητές/τριες κάθε κλάσης.
β) Να βρείτε πόσοι ήταν συνολικά οι μαθητές/τριες.
γ) Να βρείτε πόσοι μαθητές/τριες πήραν έως 60 μόρια.
δ) Να βρείτε πόσοι μαθητές/τριες πήραν από 20 έως 80 μόρια.
ε) Για τα στοιχεία που προσδιορίσατε, να κατασκευάσετε ένα κυκλικό διάγραμμα.

1.4 ΜΕΤΡΑ ΘΕΣΗΣ ΚΑΙ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

- Να χρησιμοποιούν τα μέτρα θέσης για να περιγράψουν δεδομένα, να κάνουν συγκρίσεις και να εξαγάγουν συμπεράσματα.
- Να περιγράφουν χαρακτηριστικά των δεδομένων όπως το εύρος, η ύπαρξη πολλαπλών κορυφών και οι απόμακρες τιμές από ένα ιστόγραμμα συχνοτήτων.
- Να διερευνούν πιθανές ερμηνείες για χαρακτηριστικά των δεδομένων, όπως λόγοι ύπαρξης απόμακρων τιμών ή πιθανούς λόγους για τη μεταβλητότητα των δεδομένων.

Διερεύνηση

Οι βαθμοί που πήραν σε ένα διαγώνισμα οι μαθητές/τριες μιας τάξης παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα:

α) Να περιγράψετε με δύο αριθμητικούς δείκτες την επίδοση των μαθητών/τριών.

β) Να παρουσιάσετε τα δεδομένα με το κατάλληλο διάγραμμα.

γ) Πόσοι μαθητές/τριες έγραψαν από 12 έως και 14;

δ) Τι συμπεραίνετε από τους δείκτες και το διάγραμμα για την επίδοση των μαθητών/τριών;

ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΑ									
10	16	17	17	10	11	10	19	10	9
18	13	18	19	12	10	20	14	20	9
10	19	15	17	17	11	12	15	8	16
14	19	13	10	18	11	12	14	8	18
12	9	16	19	15	9	17	17	8	15
16	14	18	9	19	19	14	19	9	16

Έχουμε μάθει στο Δημοτικό τους αριθμητικούς δείκτες: Μέση Τιμή (Μ.Τ.) ή Μέσος Όρος (Μ.Ο.), Διάμεσος Επικρατούσα τιμή και Εύρος.

Ειδικότερα:

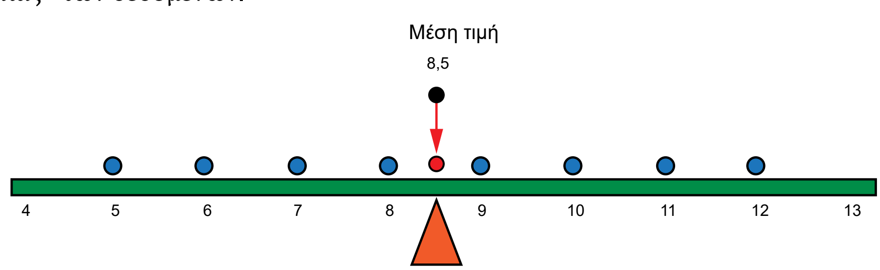
Μέση Τιμή (Μ.Τ.) ή **μέσος όρος** ενός συνόλου αριθμητικών δεδομένων είναι ο αριθμός που βρίσκουμε διαιρώντας το άθροισμα των αριθμών με το πλήθος τους.

Παράδειγμα: Η μέση τιμή των επτά αριθμών : 10, 12, 12, 12, 16, 18, 18 είναι:

$$\frac{10 + 12 + 12 + 12 + 16 + 18 + 18}{7} = 14$$

Η μέση τιμή είναι το «κέντρο ισορροπίας» των δεδομένων.

Για να καταλάβουμε τη φυσική της σημασία, ας φανταστούμε μία ομογενή αβαρή σανίδα πάνω στην οποία τοποθετούμε 8 ίδια σφαιρίδια. Ο αριθμός που αντιστοιχεί στο σημείο στήριξης της σανίδας ώστε να ισορροπεί σε οριζόντια θέση, είναι η μέση τιμή της θέσης των σφαιριδίων πάνω στη σανίδα, όπως φαίνεται και στο σχήμα.



Να πειραματιστείτε δημιουργώντας τρεις διαφορετικές ομάδες αριθμών που έχουν την ίδια μέση τιμή με τη διπλανή εφαρμογή.

Μέση τιμή και μεταβολή

Διάμεσος (δ) μιας ομάδας αριθμών οι οποίοι έχουν γραφτεί σε μια σειρά από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο είναι:
- Ο *μεσαίος όρος* αν το πλήθος τους είναι περιττός αριθμός.
- Το *ημιάθροισμα των δύο μεσαίων όρων* αν το πλήθος τους είναι άρτιος αριθμός.

Παράδειγμα: Η διάμεσος των επτά αριθμών 2, 3, 4, **5**, 7, 9, 12 είναι ο 5 ενώ η διάμεσος των οχτώ αριθμών 1, 2, 3, **4**, **5**, 6, 7, 8 είναι ο:

$$\frac{4+5}{2} = 4,5$$

Μέση τιμή και διάμεσος

Ένας εύκολος τρόπος για να βρούμε τη διάμεσο είναι να γράψουμε τους αριθμούς σε μια σειρά από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο και να αρχίσουμε να διαγράφουμε διαδοχικά έναν αριθμό από τα αριστερά και έναν αριθμό από τα δεξιά.

- Αν στο τέλος της διαδικασίας μείνει ένας αριθμός, αυτός είναι η διάμεσος (δ = 5) ~~2~~, ~~3~~, ~~4~~, 5, ~~7~~, ~~9~~, ~~12~~

- Αν στο τέλος της διαδικασίας μείνουν δύο αριθμοί, τότε διάμεσος είναι το ημιάθροισμά τους ~~2~~, ~~3~~, $\boxed{4,\ 5,}$ ~~7~~, ~~9~~,

Επικρατούσα τιμή ή **κορυφή** μιας ομάδας παρατηρήσεων είναι η παρατήρηση με τη μεγαλύτερη συχνότητα.

Παράδειγμα: Η επικρατούσα τιμή των παρατηρήσεων: 9, 13, 13, 13, 16, 18, 20 είναι ο αριθμός 13 που έχει τη μεγαλύτερη συχνότητα (εμφανίζεται τις περισσότερες φορές).

Παρατήρηση:

Μια σειρά παρατηρήσεων μπορεί να έχει περισσότερες από μία κορυφές.

Εύρος μιας ομάδας παρατηρήσεων είναι η διαφορά της μικρότερης από τη μεγαλύτερη τιμή.

Παράδειγμα: Μια έρευνα έδειξε ότι οι τιμές πώλησης ενός κιλού ψωμιού ίδιου τύπου στους φούρνους μια συγκεκριμένη εβδομάδα σε μια περιοχή ήταν: 60, 65, 70, 75, 80, 90, 100, 110,140 και 200 λεπτά. Επομένως, το εύρος των τιμών πώλησης ενός κιλού ψωμιού στους φούρνους αυτή τη συγκεκριμένη εβδομάδα σε αυτή την περιοχή ήταν: 200 – 60 = 140 λεπτά ή 1,40 ευρώ.

Απόμακρες τιμές

Απόμακρες ή ακραίες τιμές λέγονται αυτές που διαφέρουν πολύ από τις άλλες τιμές/παρατηρήσεις και φαίνονται ασυνήθιστες.

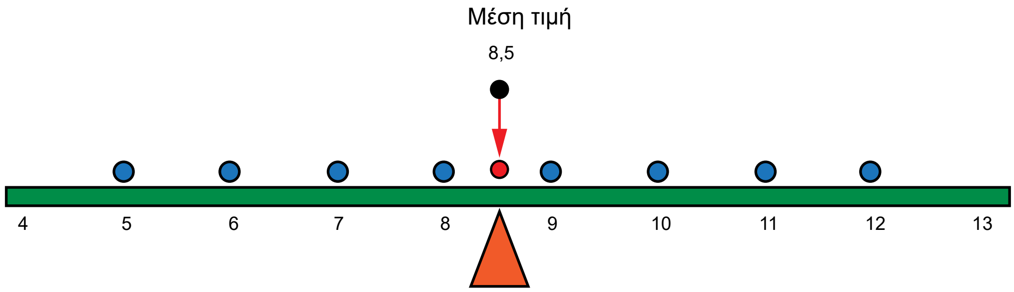
Οι απόμακρες τιμές διακρίνονται στα διαγράμματα από την ύπαρξη σημείων «αποκομμένων» από τα υπόλοιπα σημεία. Δηλαδή από την ύπαρξη σημείων αρκετά μακριά από τα υπόλοιπα σημεία.
Οι απόμακρες τιμές μπορεί να εμφανισθούν για διάφορους λόγους όπως: Τα σφάλματα μέτρησης που οφείλονται σε ατέλειες των οργάνων μέτρησης είτε λανθασμένες μετρήσεις των ερευνητών ή εξαιτίας της φύσης των αντικειμένων που μετριούνται (π.χ. η πίεση αίματος) κ.ά.

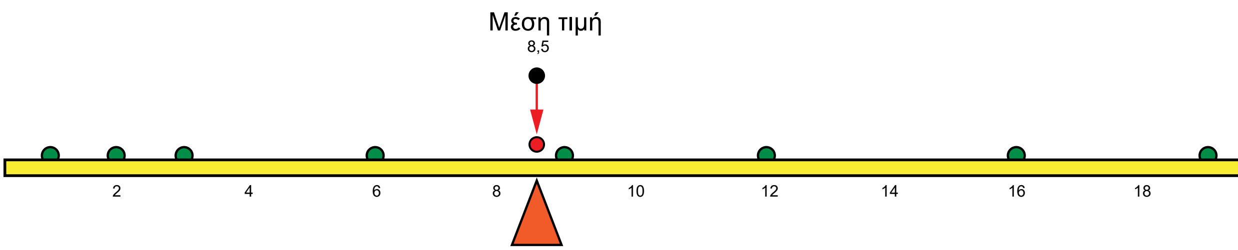
Όταν υπάρχουν απόμακρες τιμές τότε για την περιγραφή των δεδομένων προτιμάται η διάμεσος έναντι της μέσης τιμής.
Περισσότερα για τις απόμακρες ή ακραίες τιμές θα μάθουμε σε επόμενη τάξη.

Μεταβλητότητα

Όταν τα δεδομένα είναι συγκεντρωμένα γύρω από μία κεντρική τιμή, όπως η μέση τιμή, τότε αυτή αντιπροσωπεύει ικανοποιητικά τα δεδομένα. Όταν όμως τα δεδομένα είναι πολύ διασκορπισμένα και σε άνισες αποστάσεις τότε η μέση τιμή δεν δίνει καλή περιληπτική περιγραφή των δεδομένων. Επίσης, διαφορετικά σύνολα δεδομένων μπορεί να έχουν την ίδια μέση τιμή αλλά να διαφέρουν ως προς το πόσο διασκορπισμένα γύρω από αυτή βρίσκονται τα δεδομένα.

Το εύρος μας δίνει μια εικόνα της μεταβλητότητας.
Για παράδειγμα, οι αριθμοί 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 έχουν την ίδια μέση τιμή 8,5 με τους αριθμούς 1, 2, 3, 6, 9, 12, 16, 19 αλλά δεν είναι το ίδιο συγκεντρωμένοι γύρω από τη μέση τιμή, όπως απεικονίζεται στα ακόλουθα σχήματα, αφού το εύρος της πρώτης ομάδας αριθμών είναι 12 – 5 = 7 και της δεύτερης 19 – 1 = 18.





ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

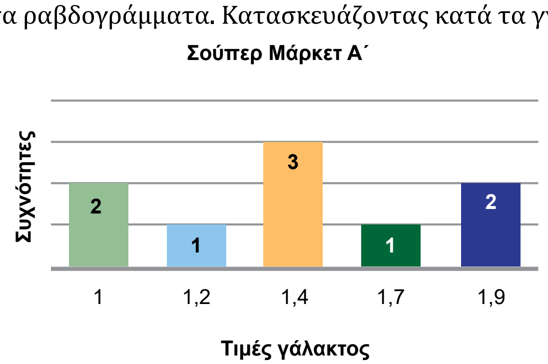
Σε μια έρευνα για τις τιμές πώλησης γάλακτος 1 lt διαφορετικών εταιρειών σε δύο διαφορετικά Σούπερ Μάρκετ βρέθηκαν οι ακόλουθες τιμές σε ευρώ:

Σούπερ Α΄: 1, 1.7, 1, 1.2 , 1.9, 1.4, 1.9, 1.4, 1.4.
Σούπερ Β΄: 1, 1.3, 1, 1.4 , 1.2, 1.5, 1.2, 1.5, 1.2, 4.8.

α) Να κάνετε διαγράμματα για τις τιμές γάλακτος στα δύο Σούπερ Μάρκετ.
β) Τι παρατηρείτε από το διάγραμμα τιμών για το Σούπερ Μάρκετ Β΄;
γ) Ποια είναι η επικρατούσα τιμή πώλησης γάλακτος σε κάθε Σούπερ Μάρκετ;
δ) Ποιο είναι το εύρος των τιμών πωλήσεων του γάλακτος στα δύο Σούπερ Μάρκετ; Ποιο είναι μεγαλύτερο και γιατί;
ε) Να συγκρίνετε τις μέσες τιμές και τις διαμέσους των τιμών γάλακτος στα δύο Σούπερ Μάρκετ. Τι παρατηρείτε;
στ) Να σχολιάσετε τη μεταβλητότητα των τιμών γάλακτος στα δύο Σούπερ Μάρκετ.
ζ) Το Σούπερ Μάρκετ Β΄ για να γίνει πιο ανταγωνιστικό στις τιμές γάλακτος από το Σούπερ Μάρκετ Α΄ σταματάει τις πωλήσεις του γάλακτος με την υψηλότερη τιμή.
   1. Πώς διαμορφώνεται στο Β΄ Σούπερ Μάρκετ η μέση τιμή και η διάμεσος;
   2. Τι παρατηρείτε;
η) Να κάνετε διάγραμμα για τις τιμές γάλακτος στο Σούπερ Μάρκετ Β΄ μετά την παύση πώλησης του γάλακτος με την υψηλότερη τιμή. Τι παρατηρείτε;

Απάντηση

α) Τα δεδομένα (παρατηρήσεις) είναι διακριτά ποσοτικά και δεν είναι πολλά, οπότε κατάλληλα διαγράμματα είναι τα ραβδογράμματα. Κατασκευάζοντας κατά τα γνωστά τα αντίστοιχα ραβδογράμματα, παίρνουμε:



β) Από το ραβδόγραμμα τιμών πώλησης του γάλακτος από το Β΄ Σούπερ Μάρκετ διαπιστώνουμε ότι υπάρχει μία τιμή που είναι πολύ απομακρυσμένη από όλες τις υπόλοιπες τιμές. Δηλαδή μια απόμακρη τιμή η οποία αντιστοιχεί στο γάλα μιας εταιρείας με πολύ υψηλή τιμή πώλησης 4,8€.

γ) Η επικρατούσα τιμή πώλησης γάλακτος είναι η τιμή πώλησης με τη μεγαλύτερη συχνότητα οπότε από τα ραβδογράμματα (ή από τους πίνακες) έχουμε:
- Στο Α΄ Σούπερ Μάρκετ η επικρατούσα τιμή πώλησης γάλακτος είναι 1,4€.
- Στο Β΄ Σούπερ Μάρκετ η επικρατούσα τιμή πώλησης γάλακτος είναι 1,2€.

δ) Το εύρος των τιμών πώλησης του γάλακτος είναι η διαφορά της μικρότερης από τη μεγαλύτερη τιμή πώλησης και επομένως:
- Στο Α΄ Σούπερ Μάρκετ το εύρος είναι : 1,9 – 1 = 0,9€
- Στο Β΄ Σούπερ Μάρκετ το εύρος είναι : 4,8 – 1 = 3,8€

Το εύρος των τιμών πώλησης γάλακτος στο Α΄ Σούπερ μάρκετ είναι μικρότερο από το εύρος των τιμών πώλησης γάλακτος στο Β΄ Σούπερ μάρκετ. Το μεγαλύτερο εύρος των τιμών πώλησης γάλακτος στο Β΄ Σούπερ μάρκετ εξηγείται με την πώληση τύπου γάλακτος σε πολύ μεγάλη συγκριτικά τιμή.

ε) Από τις τιμές πώλησης γάλακτος στα δύο Σούπερ Μάρκετ Α΄ και Β΄, παίρνουμε κατά τα γνωστά:
- Α΄ Σούπερ Μάρκετ: Μ.Τ. ≈ 1,43, δ = 1,4
- Β΄ Σούπερ Μάρκετ: Μ.Τ. ≈ 1,61, δ ≈ 1,25

Συγκρίνοντας τις μέσες τιμές φαίνεται ότι το Α΄ Σούπερ Μάρκετ πουλάει φθηνότερα κατά μέσο όρο το γάλα 1 lt από το Β΄ Σούπερ Μάρκετ, αφού Μ.Τ$_{Α}$ ≈ 1,43 < 1,61 ≈ Μ.Τ$_{Β}$

Συγκρίνοντας τις διάμεσες τιμές φαίνεται ότι το Β΄ Σούπερ Μάρκετ πουλάει φθηνότερα το γάλα 1 lt από το Α΄ Σούπερ Μάρκετ, αφού $δ_{Α}$ = 1,4 > $δ_{Β}$ ≈ 1,25

Από το ραβδόγραμμα για τις τιμές γάλακτος στο Β΄ Σούπερ μάρκετ ((α) ερώτημα) παρατηρούμε ότι υπάρχει μια πολύ απομακρυσμένη τιμή πώλησης («απόμακρη» τιμή) η οποία επηρεάζει αυξητικά την τιμή του μέσου όρου.

στ) Στο Β΄ Σούπερ Μάρκετ υπάρχει μεγαλύτερη μεταβλητότητα συγκριτικά με το Α΄ Σούπερ Μάρκετ, αφού το εύρος των τιμών πώλησης του γάλακτος 1 lt είναι 3,8€ έναντι 0,9€.

ζ) Αφαιρώντας την τιμή πώλησης του γάλακτος με την υψηλότερη τιμή, δηλαδή την «απόμακρη» τιμή από τον πίνακα με τις τιμές του Β΄ Σούπερ Μάρκετ και υπολογίζοντας ξανά τη μέση τιμή και τη διάμεσο για το νέο σύνολο τιμών έχουμε:

1. Β΄ Σούπερ Μάρκετ: Μ.Τ$_{Β}$ ≈ 1,26 και $δ_{Β}$ = 1,2

2. Παρατηρούμε ότι μετά την αφαίρεση του γάλακτος με την πολύ υψηλή συγκριτικά τιμή πώλησης, οι τιμές στο Β΄ Σούπερ Μάρκετ σε επίπεδο μέσης και διάμεσης τιμής μειώνονται.

η) Μετά την παύση πώλησης από το Β΄ Σούπερ Μάρκετ του γάλακτος με την υψηλότερη τιμή, δεν υπάρχει πλέον «απόμακρη» παρατήρηση όπως φαίνεται και στο διπλανό ραβδόγραμμα.
- Συγκρίνοντας τις μέσες τιμές πώλησης έχουμε: Μ.Τ$_{Β}$ ≈ 1,26 < Μ.Τ$_{Α}$ ≈ 1,43
- Συγκρίνοντας τις διάμεσες τιμές πώλησης έχουμε: $δ_{Α}$ = 1,4 > $δ_{Β}$ = 1,2

Παρατηρούμε ότι μετά την αφαίρεση της «απόμακρης» τιμής, η μέση τιμή πώλησης του γάλακτος στο Β΄ Σούπερ μάρκετ μειώθηκε αρκετά και έγινε μικρότερη από την τιμή πώλησης του γάλακτος 1 lt στο Α΄ Σούπερ μάρκετ. Δηλαδή άλλαξε το αποτέλεσμα της σύγκρισης των μέσων τιμών.

Η αντίστοιχη διάμεση τιμή μειώθηκε και αυτή αλλά πολύ λίγο και δεν άλλαξε το αποτέλεσμα της σύγκρισης των διάμεσων τιμών.

Μετά την αφαίρεση της ακραίας (απόμακρης) τιμής, το εύρος των τιμών στο Β΄ Σούπερ Μάρκετ έγινε 0,5 και είναι μικρότερο απο το εύρος 0,9 του Α΄ Σούπερ Μάρκετ.

Μέση τιμή (Μέσος όρος), ομαδοποιημένης κατανομής

Η μέση τιμή των επτά αριθμών: 10, **12, 12, 12**, 16, **18, 18** είναι:

$$\frac{10+12+12+12+16+18+18}{7}=14$$

Παρατηρώντας όμως ότι:
- ο αριθμός 12 εμφανίζεται 3 φορές, δηλαδή ότι η συχνότητά του 12 είναι 3 και
- ο αριθμός 18 εμφανίζεται 2 φορές, δηλαδή ότι η συχνότητά του 18 είναι 2

μπορούμε να βρούμε τη μέση τιμή γράφοντας:

$$\frac{10+3\cdot 12+16+2\cdot 18}{7}=14$$

Γενικά, για να βρούμε τη μέση τιμή μιας ομάδας αριθμών, πολλαπλασιάζουμε κάθε αριθμό της ομάδας με τη συχνότητά του (πόσες φορές εμφανίζεται) και διαιρούμε το άθροισμα με το πλήθος των τιμών.

Ειδικότερα, στην περίπτωση μιας ομαδοποιημένης κατανομής συνεχών δεδομένων, όταν θέλουμε να βρούμε τη μέση τιμή εργαζόμαστε ανάλογα, όπως στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα: Τα δεδομένα που προέκυψαν από μια έρευνα παρουσιάζονται στον πίνακα (1).

Κλάσεις	Διαλογή	Συχνότητες
0-2	|	1
2-4	||||	4
4-6	~~||||~~ ~~||||~~	10
6-8	||	2
8-10	~~||||~~ |	6
ΣΥΝΟΛΑ		23

Πίνακας 1

Από τον πίνακα (1) δημιουργούμε τον πίνακα (2) όπως ακολουθεί:
- Προσθέτουμε μια στήλη με τα κέντρα των κλάσεων (Πίνακας 2).
- Προσθέτουμε μια ακόμα στήλη με τα γινόμενα (**Συχνότητα**)·(**Κέντρο κλάσης**) θεωρώντας ότι τα κέντρα των κλάσεων αντιπροσωπεύουν τις τιμές των δεδομένων κάθε κλάσης (Πίνακας 2).
- Προσθέτουμε τους αριθμούς της τελευταίας στήλης και διαιρώντας με το πλήθος των δεδομένων βρίσκουμε τη μέση τιμή.

Κλάσεις	Διαλογή	Συχνότητες	Κέντρα κλάσεων	Γινόμενα (Συχνότητα) • (Κέντρο κλάσης)
0-2	|	1	$\frac{0+2}{2}=1$	$1\cdot 1=1$
2-4	||||	4	$\frac{2+4}{2}=3$	$4\cdot 3=12$
4-6	~~||||~~ ~~||||~~	10	$\frac{4+6}{2}=5$	$10\cdot 5=50$
6-8	||	2	$\frac{6+8}{2}=7$	$2\cdot 7=14$
8-10	~~||||~~ |	6	$\frac{8+10}{2}=9$	$6\cdot 9=54$
ΣΥΝΟΛΑ		23	-	131

Πίνακας 2

Για τη συγκεκριμένη ομαδοποιημένη κατανομή, με τη βοήθεια του πίνακα (2), βρίσκουμε ότι η μέση τιμή είναι: $\frac{131}{23}\simeq 5,69$

Σημείωση:

Σε μια ομαδοποιημένη κατανομή:

1. Υποθέτουμε ότι οι παρατηρήσεις (δεδομένα) κατανέμονται ομοιόμορφα μέσα σε κάθε κλάση.

2. Υποθέτουμε ότι οι παρατηρήσεις (δεδομένα) κάθε κλάσης εκπροσωπούνται από το κέντρο της κλάσης.

3. Αν κάποια παρατήρηση συμπίπτει με το δεξιό άκρο μιας κλάσης, τότε την τοποθετούμε στην αμέσως επόμενη κλάση, εκτός από την τελευταία κλάση.

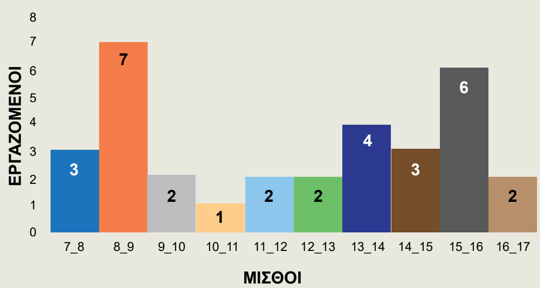
Λόγω των υποθέσεων (1) και (2) που κάνουμε σε μια ομαδοποίηση, έχουμε κάποια απώλεια πληροφοριών για τις αρχικές τιμές των παρατηρήσεων. Έτσι η μέση τιμή που βρίσκουμε από μια ομαδοποιημένη κατανομή είναι μια εκτίμηση και όχι η ακριβής τιμή του μέσου όρου που βρίσκουμε από τις αρχικές παρατηρήσεις.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

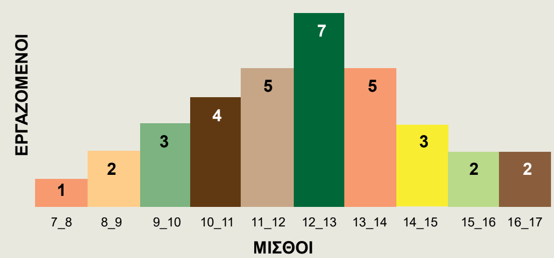
Σε μια έρευνα για τους ετήσιους μισθούς σε χιλιάδες ευρώ των υπαλλήλων σε δύο καταστήματα με ίδιο αντικείμενο εργασιών, στην ίδια περιοχή, το ίδιο έτος, τα αποτελέσματα παρουσιάστηκαν με τα παρακάτω ιστογράμματα.

α) Τι συμπεράσματα βγάζετε για τους μισθούς των εργαζομένων στο Α΄ κατάστημα;
β) Πώς ερμηνεύετε την ύπαρξη των κλάσεων "8-9" και "15-16" στο ιστόγραμμα των μισθών για το κατάστημα Α΄;
γ) Να εκτιμήσετε τα ετήσια έξοδα για το σύνολο των μισθών στο κατάστημα Α΄.
δ) Τι συμπεράσματα βγάζετε για τους μισθούς των εργαζομένων στο Β΄ κατάστημα;
ε) Να εκτιμήσετε τα ετήσια έξοδα για το σύνολο των μισθών στο κατάστημα Β΄.
στ) Να συγκρίνετε τους μισθούς στα δύο καταστήματα Α΄ και Β΄. Τι συμπεραίνετε;

ΚΑΤΑΣΤΗΜΑ Α΄



ΚΑΤΑΣΤΗΜΑ Β΄



Απάντηση

α) Από το ιστόγραμμα για τους 32 εργαζόμενους στο κατάστημα Α΄ διαπιστώνουμε ότι:

- Οι εργαζόμενοι αμείβονται με μισθούς από 7 έως και 17 χιλιάδες ευρώ ετησίως.
- Στο ιστόγραμμα οι κλάσεις από 8 έως 9 και από 15 έως 16 χιλιάδες ευρώ έχουν τις μεγαλύτερες συγκριτικά συχνότητες. Στην πολυπληθέστερη κατηγορία με μισθούς από 8 έως 9 χιλιάδες ευρώ ανήκουν χαμηλά αμειβόμενοι εργαζόμενοι, ενώ στην επίσης πολυπληθή κατηγορία εργαζομένων με μισθούς από 15 έως 16 χιλιάδες ευρώ ανήκουν υψηλά αμειβόμενοι εργαζόμενοι.
- Δεν υπάρχει συμμετρία στο ιστόγραμμα ως προς τις κεντρικές κλάσεις 11-12 και 12-13. Οι μισθοί δεν φαίνεται να κατανέμονται με τον ίδιο τρόπο πριν και μετά από αυτές τις κλάσεις.

β) Η ύπαρξη των κλασεων "8-9" και "15-16" στο ιστόγραμμα των μισθών για το κατάστημα Α΄ δηλώνει την ύπαρξη δύο διαφορετικών ομάδων μισθών. Η μία ομάδα μισθών έχει κορυφή την πολυπληθέστερη κατηγορία με μισθούς από 8 έως 9 χιλιάδες ευρώ και σε αυτήν εντάσσονται χαμηλά αμειβόμενοι εργαζόμενοι. Η άλλη ομάδα μισθών έχει κορυφή τη δεύτερη πολυπληθέστερη κατηγορία με μισθούς από 15 έως 16 χιλιάδες ευρώ και σε αυτήν εντάσσονται οι υψηλά αμειβόμενοι εργαζόμενοι στο κατάστημα Α΄.

γ) Το κέντρο κάθε κλάσης είναι μια εκτίμηση για τους μισθούς της κλάσης. Εξάλλου για τα κέντρα των κλάσεων από το ιστόγραμμα για το κατάστημα Α΄ έχουμε:

Κλάση	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17
Κέντρο	7,5	8,5	9,5	10,5	11,5	12,5	13,5	14,5	15,5	16,5

Άρα μια εκτίμηση για τα ετήσια έξοδα για το σύνολο των μισθών στο κατάστημα Α΄ είναι το άθροισμα:
$3 \cdot 7{,}5 + 7 \cdot 8{,}5 + 2 \cdot 9{,}5 + 1 \cdot 10{,}5 + 2 \cdot 11{,}5 + 2 \cdot 12{,}5 + 4 \cdot 13{,}5 + 3 \cdot 14{,}5 + 6 \cdot 15{,}5 + 2 \cdot 16{,}5 = 383$ χιλιάδες ευρώ τον χρόνο.

δ) Από το ιστόγραμμα για τους 34 εργαζόμενους στο κατάστημα Β΄ διαπιστώνουμε ότι:

- Οι εργαζόμενοι αμείβονται με μισθούς από 7 έως και 17 χιλιάδες ευρώ ετησίως.
- Οι υψηλά αμειβόμενοι εργαζόμενοι με μισθούς από 12 έως 13 χιλιάδες ευρώ ανήκουν στην πολυπληθέστερη κατηγορία, γύρω από την οποία είναι συγκεντρωμένες οι περισσότερες αμοιβές.
- Υπάρχει μια σχετική συμμετρία στο ιστόγραμμα ως προς τις κεντρικές κλάσεις. Οι μισθοί φαίνεται να κατανέμονται περίπου με τον ίδιο τρόπο πριν και μετά από αυτές τις κλάσεις.

ε) Το κέντρο κάθε κλάσης είναι μια εκτίμηση για τους μισθούς της κλάσης. Εξάλλου για τα κέντρα των κλάσεων από το ιστόγραμμα για το κατάστημα Α΄ έχουμε:

Κλάση	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17
Κέντρο	7,5	8,5	9,5	10,5	11,5	12,5	13,5	14,5	15,5	16,5

Άρα μια εκτίμηση για τα ετήσια έξοδα για το σύνολο των μισθών στο κατάστημα Β΄ είναι το άθροισμα:
$1\cdot 7{,}5+2\cdot 8{,}5+3\cdot 9{,}5+4\cdot 10{,}5+5\cdot 11{,}5+7\cdot 12{,}5+5\cdot 13{,}5+3\cdot 14{,}5+2\cdot 15{,}5+2\cdot 16{,}5=415$ χιλιάδες ευρώ τον χρόνο.

στ) Από όσα αναφέρθηκαν διαπιστώνουμε ότι:

- Το κατάστημα Β΄ δαπανά κατ' εκτίμηση περισσότερα χρήματα για μισθούς συγκριτικά με το κατάστημα Α΄ και συγκεκριμένα 415 – 383 = 32 χιλιάδες ευρώ ετησίως περισσότερα.
- Το κατάστημα Α΄ έχει 12 χαμηλά αμειβόμενους υπαλλήλους με μισθούς από 7 έως 10 χιλιάδες ευρώ ετησίως, οι οποίοι είναι περισσότεροι από τους 6 χαμηλά αμειβόμενους υπαλλήλους με αντίστοιχους μισθούς του Β΄ καταστήματος.
- Το κατάστημα Α΄ έχει 11 «υψηλά» αμειβόμενους υπαλλήλους με μισθούς από 14 έως 17 χιλιάδες ευρώ ετησίως οι οποίοι είναι περισσότεροι από τους 7 «υψηλά» αμειβόμενους υπαλλήλους με αντίστοιχους μισθούς του Β΄ καταστήματος.
- Το κατάστημα Α΄ έχει 9 «μέτρια» αμειβόμενους υπαλλήλους με μισθούς από 10 έως 14 χιλιάδες ευρώ ετησίως οι οποίοι είναι λιγότεροι από τους 21 «μέτρια» αμειβόμενους υπαλλήλους με αντίστοιχους μισθούς του Β΄ καταστήματος.

Συμπερασματικά, αν και οι εργαζόμενοι και στα δύο καταστήματα παίρνουν μισθούς από 7 έως και 17 χιλιάδες ευρώ ετησίως στο κατάστημα Β΄ φαίνεται να υπάρχει μια καλύτερη κατανομή των μισθών.

Αυτοαξιολόγηση

Να τοποθετήσετε στις στήλες ΣΩΣΤΟ, ΛΑΘΟΣ ένα ✓ ανάλογα με το αν η πρόταση είναι σωστή ή λανθασμένη.	Σωστό	Λάθος
1. Μια ομάδα μαθητών/τριών κάνει μια έρευνα για τα ύψη μεταξύ των μαθητών/τριών του σχολείου και βρίσκει από ένα πίνακα ομαδοποίησης των υψών ότι ο Μ.Ο. είναι 1,72. Μπορεί αν υπολογίσουμε από τα δεδομένα τον Μ.Ο. να βρούμε διαφορετική τιμή;	☐	☐
2. Η διάμεσος είναι πάντοτε μεγαλύτερη από τη μέση τιμή.	☐	☐
3. Η μέση τιμή επηρεάζεται από τις πολύ μεγάλες και από τις πολύ μικρές τιμές.	☐	☐
4. Η διάμεσος επηρεάζεται λιγότερο από τη μέση τιμή, από πολύ μεγάλες ή πολύ μικρές τιμές.	☐	☐
5. Το εύρος δείχνει πόσο περίπου είναι ο μέσος όρος.	☐	☐
6. Μια απόμακρη τιμή είναι πάντοτε μεγαλύτερη από τη διάμεσο.	☐	☐
7. Η μέση τιμή που βρίσκουμε με υπολογισμό είναι πάντοτε ίδια με τη μέση τιμή για τα ίδια δεδομένα που βρίσκουμε από έναν πίνακα ομαδοποίησης.	☐	☐

ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Ο Μιχάλης για να πάει στο σχολείο παίρνει κάθε ημέρα το λεωφορείο από την ίδια στάση. Μπορεί να πάρει το λεωφορείο της γραμμής Α ή το λεωφορείο της γραμμής Β. Οι καθυστερήσεις σε λεπτά των γραμμών για δέκα ημέρες καταγράφονται στον διπλανό πίνακα:

Γραμμή Α	2	3	5	5	4	4	3	6	3	20
Γραμμή Β	2	6	1	8	5	1	4	6	6	5

α) Ποιο είναι το εύρος των καθυστερήσεων κάθε γραμμής;

β) Ποια είναι η μέση τιμή των καθυστερήσεων κάθε γραμμής;

γ) Ποια είναι η διάμεση τιμή των καθυστερήσεων κάθε γραμμής;
δ) Υπάρχουν απόμακρες τιμές στις καθυστερήσεις των δύο γραμμών; Αν ναι, να τις προσδιορίσετε.
ε) Αν θέλαμε να συγκρίνουμε τις καθυστερήσεις των δύο γραμμών ποιο δείκτη θα χρησιμοποιούσατε και γιατί;

2 Η ένωση καταναλωτών ΕΚΠΟΙΖΩ κατέγραψε τις ακόλουθες αυξήσεις ρεύματος ανά μήνα πάνω στην τιμή στην αρχή του έτους κατά τη διάρκεια 12 μηνών:

Μήνας	1ος	2ος	3ος	4ος	5ος	6ος
Αύξηση (%)	2	3	4	10	5	4

Μήνας	7ος	8ος	9ος	10ος	11ος	12ος
Αύξηση (%)	3	7	18	8	5	4

α) Ποιο είναι το εύρος των αυξήσεων;
β) Ποια είναι η μέση τιμή των αυξήσεων;
γ) Ποια είναι η διάμεση τιμή των αυξήσεων;
δ) Υπάρχει κορύφωση των αυξήσεων κάποιους μήνες; Αν ναι, ποιους και πόση ήταν η αύξηση;

3 Οι γεννήσεις σε μια μικρή πόλη κατά τη διάρκεια ενός έτους ήταν:

Αριθμός γεννήσεων ανά ημέρα	0-2	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12
Αριθμός ημερών	40	35	120	85	55	30

α) Να κάνετε το κατάλληλο διάγραμμα.
β) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των γεννήσεων.

4 Οι τιμές πωλήσεων αυτοκινήτων σε μια χώρα σε χιλιάδες ευρώ κατά τη διάρκεια μιας περιόδου ήταν:

Τιμή πώλησης	0-15	15-30	30-45	45-60	60-75	75-90
Αριθμός αυτοκινήτων	80	40	85	-	-	30

α) Να κάνετε το κατάλληλο διάγραμμα.
β) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των πωλήσεων.
γ) Ποιο είναι το εύρος των τιμών πώλησης;
δ) Υπάρχει απόμακρη τιμή πώλησης; Αν ναι, ποια είναι και πώς επιδρά στη διαμόρφωση της μέσης τιμής;

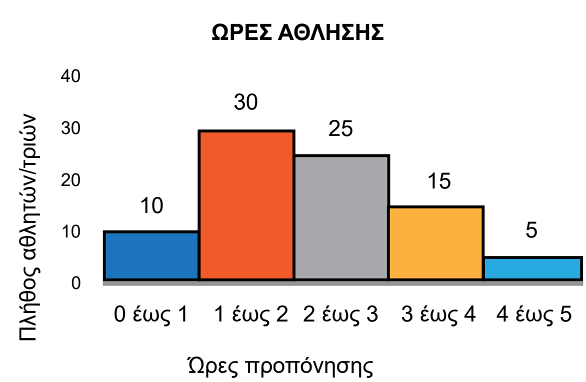
5 Μια εταιρεία μισθώσεως κατοικιών έκανε έρευνα σε δύο περιοχές της Αττικής για το εμβαδόν των κατοικιών σε τετραγωνικά μέτρα (τμ) που προτιμούν οι ενοικιαστές και τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στους παρακάτω πίνακες.

ΠΕΡΙΟΧΗ Α								
64	76	82	50	86	35	92	24	99
65	78	83	60	89	45	93	25	100
70	79	84	60	90	46	94	32	100
75	80	85	60	91	47	95	34	-

ΠΕΡΙΟΧΗ Β								
38	18	45	28	53	33	95	53	75
39	18	46	29	54	34	99	54	76
40	19	47	32	55	35	203	55	93
42	25	50	33	58	35	215	58	95

α) Να συγκρίνετε τις δύο περιοχές ως προς το εμβαδόν προτίμησης για ενοικίαση χωρίς να κάνετε διαγράμματα. Εξηγήστε τις επιλογές σας.
β) Να κάνετε διαγράμματα για τις μισθώσεις με τα στοιχεία των πινάκων εξηγώντας τις επιλογές σας.
γ) Τι συμπεράσματα βγάζετε από τα διαγράμματα;
δ) Να βρείτε από τα διαγράμματα που δημιουργήσατε στο (β) ερώτημα τους μέσους όρους μίσθωσης κατοικιών για κάθε περιοχή και να τους συγκρίνετε με τους αντίστοιχους μέσους όρους που προκύπτουν απο τα στοιχεία των πινάκων. Τι παρατηρείτε;
ε) Να βρείτε το εύρος των εμβαδών στις δύο περιοχές και να εξηγήσετε τη μεταβλητότητα σε κάθε περιοχή.

6 Το παρακάτω ιστόγραμμα παρουσιάζει τις ημερήσιες ώρες προπόνησης των αθλητών/τριών αντοχής ανώμαλου δρόμου ενός συλλόγου κατά τη διάρκεια μιας εβδομάδας.



α) Πόσοι ήταν οι αθλητές/τριες αντοχής ανώμαλου δρόμου του συλλόγου που συμμετείχαν;

β) Πόσοι από τους αθλητές/τριες αντοχής ανώμαλου δρόμου που συμμετείχαν προπονούνται έως 3 ώρες την εβδομάδα; Ποιο είναι το αντίστοιχο ποσοστό;

γ) Πόσοι από τους αθλητές/τριες αντοχής ανώμαλου δρόμου που συμμετείχαν προπονούνται τουλάχιστον 2 ώρες την εβδομάδα; Ποιο είναι το αντίστοιχο ποσοστό;

δ) Να παρουσιάσετε με ένα κυκλικό διάγραμμα τα δεδομένα που αποτυπώνονται στο ιστόγραμμα.

7 Μια βιοτεχνία παραγωγής και συσκευασίας αμυγδάλων έκανε μια έρευνα για το μήκος x σε εκατοστά (cm) των αμυγδάλων σε ένα δείγμα. Τα αμύγδαλα και τα αποτελέσματα των μετρήσεων παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα:

Μήκος αμυγδάλων (cm)								
3	2	4	5	3	5	4,5	5	2
2	3,5	2,5	4	4	4	3	5	3
4,5	4	2	5	2,5	3	2,5	3	4
5	2	3	5	4	1	3	1	5
4	3	1,5	3	4	3	3	2	3
3	1	4	4	3	2,5	2	2	1,5

α) Να περιγράψετε με δύο αριθμητικούς δείκτες το μήκος των αμυγδάλων.

β) Ποιο είναι το κατάλληλο διάγραμμα για την παρουσίαση των δεδομένων;

γ) Να κατασκευάσετε ιστόγραμμα τεσσάρων ίσων κλάσεων.

δ) Να βρείτε τη μέση τιμή από τον πίνακα και από τον ομαδοποιημένο πίνακα του ιστογράμματος. Τι παρατηρείτε;

ε) Τι ποσοστό αμυγδάλων έχουν μήκος από 3 έως και 5 cm;

στ) Τι συμπεραίνετε από τους δείκτες και το διάγραμμα για το μήκος των αμυγδάλων;

8 Σε μια έρευνα για τους χρόνους ολοκλήρωσης ενός τεστ από δύο ομάδες μαθητών/τριών καταγράφηκαν οι ακόλουθοι χρόνοι:

Ομάδα Α΄: 10, 10, 12, 14, 17, 19, 14, 14, 19

Ομάδα Β΄: 10, 10, 12, 13, 14, 15, 40, 12, 15, 12.

α) Να κάνετε διαγράμματα για τους χρόνους ολοκλήρωσης στις δύο ομάδες.

β) Τι παρατηρείτε από το διάγραμμα των χρόνων ολοκλήρωσης για την ομάδα Β΄;

γ) Ποια είναι η επικρατούσα τιμή για την ομάδα Β΄;

δ) Ποιο είναι το εύρος των χρόνων ολοκλήρωσης στις δύο ομάδες; Ποιο είναι μεγαλύτερο και γιατί;

ε) Να συγκρίνετε τις μέσες τιμές και τις διαμέσους των χρόνων ολοκλήρωσης στις δύο ομάδες. Τι παρατηρείτε;

στ) Να σχολιάσετε τη μεταβλητότητα των χρόνων ολοκλήρωσης στις δύο ομάδες.

ζ) Αν ο μεγαλύτερος χρόνος ολοκλήρωσης στη Β΄ ομάδα γράφτηκε κατά λάθος και τον διαγράψουμε,

1. Πώς διαμορφώνεται στη Β΄ ομάδα η μέση τιμή και η διάμεσος;

2. Τι παρατηρείτε;

η) Να κάνετε διαγράμματα για τους χρόνους ολοκλήρωσης στις δύο ομάδες μετά τη διαγραφή από την ομάδα Β΄ του μεγαλύτερου χρόνου. Τι παρατηρείτε;

Γλωσσάρι Στατιστικής

Για μια επανάληψη στις έννοιες της στατιστικής, ανοίξτε την ψηφιακή εφαρμογή.

Ανακεφαλαίωση

Διακριτά ποσοτικά ονομάζονται τα δεδομένα που είναι διακεκριμένοι αριθμοί, δεν μπορούν να διαιρεθούν περισσότερο και προκύπτουν με αρίθμηση.
Συνεχή ποσοτικά ονομάζονται τα δεδομένα όταν είναι οποιοιδήποτε αριθμοί οι οποίοι μπορούν να διαιρεθούν απεριόριστα και προκύπτουν με μέτρηση.
Ποιοτικά ή κατηγορικά ονομάζονται τα δεδομένα που δεν είναι ποσοτικά. Δηλαδή τα δεδομένα που δεν μετρούν, αλλά χαρακτηρίζουν, περιγράφουν, είτε ταξινομούν τις ιδιότητες ενός αντικειμένου ή ενός φαινομένου.

Πληθυσμός στη στατιστική ονομάζεται ένα σύνολο του οποίου τα στοιχεία μελετάμε/εξετάζουμε ως προς κάποιο χαρακτηριστικό τους.
Απογραφή στη στατιστική ονομάζουμε την εξέταση όλων των ατόμων ενός πληθυσμού ως προς κάποιο χαρακτηριστικό τους.
Κυκλικό διάγραμμα (πίτα) είναι ένας κυκλικός δίσκος χωρισμένος σε κυκλικούς τομείς, οι επίκεντρες γωνίες των οποίων είναι ανάλογες προς τις αντίστοιχες συχνότητες (ή τις σχετικές συχνότητες) της μεταβλητής.

Ιστογράμματα λέμε τα διαγράμματα που χρησιμοποιούνται για συνεχή ποσοτικά δεδομένα. Είναι παρόμοια με τα ραβδογράμματα, αλλά τα ορθογώνια ενώνονται μεταξύ τους και έχουν τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

- Απεικονίζουν μια ***ομαδοποιημένη κατανομή*** με ***συνεχόμενα ορθογώνια.***
- Τα ορθογώνια των ιστογραμμάτων έχουν ως βάσεις τις ομάδες της ομαδοποίησης, οι οποίες ονομάζονται ***κλάσεις*** και συνήθως έχουν ***ίσα πλάτη.***
- Όταν λέμε **κλάση "α – β"** εννοούμε το α και όλες τις ενδιάμεσες τιμές από το α έως το β, αλλά όχι το β. Για παράδειγμα, η κλάση "15-20" περιλαμβάνει το 15 που είναι το κάτω άκρο της κλάσης και όλες τις ενδιάμεσες τιμές από το 15 μέχρι το 20 που είναι το πάνω άκρο αυτής της κλάσης και δεν συμπεριλαμβάνεται. Το 20 συμπεριλαμβάνεται στην αμέσως επόμενη κλάση "20-25".
- Η πρώτη κλάση περιλαμβάνει τη μικρότερη τιμή και η τελευταία κλάση τη μεγαλύτερη τιμή, δηλαδή η τελευταία κλάση περιλαμβάνει και τα δύο άκρα.
- Τα ορθογώνια των ιστογραμμάτων με ίσες βάσεις έχουν ύψη ίσα με τις συχνότητες της αντίστοιχης κλάσης. Δηλαδή ύψη ίσα με το πλήθος των παρατηρήσεων της αντίστοιχης κλάσης.

Μέση Τιμή (Μ.Τ.) ή **μέσος όρος** ενός συνόλου αριθμητικών δεδομένων είναι ο αριθμός που βρίσκουμε διαιρώντας το άθροισμα των αριθμών με το πλήθος τους.
Διάμεσος (δ) μιας ομάδας αριθμών οι οποίοι έχουν γραφτεί σε μια αύξουσα σειρά από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο, είναι:
- Ο *μεσαίος όρος* αν το πλήθος τους είναι περιττός αριθμός.
- Το *ημιάθροισμα των δύο μεσαίων όρων* αν το πλήθος τους είναι άρτιος αριθμός.

Επικρατούσα τιμή ή **κορυφή** μιας ομάδας παρατηρήσεων είναι η παρατήρηση με τη μεγαλύτερη συχνότητα.
Εύρος μιας ομάδας παρατηρήσεων είναι η διαφορά της μικρότερης από τη μεγαλύτερη τιμή.
Απόμακρες τιμές λέγονται αυτές που διαφέρουν πολύ από τις άλλες τιμές/παρατηρήσεις και φαίνονται ασυνήθιστες.

2
Κεφάλαιο

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

2.1 ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ, ΔΕΝΤΡΟΔΙΑΓΡΑΜΜΑ

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

- Να προσδιορίζουν και να περιγράφουν τον δειγματικό χώρο ενός πειράματος τύχης που πραγματοποιείται σε ένα ή περισσότερα στάδια χρησιμοποιώντας αναπαραστάσεις του δειγματικού χώρου σε πίνακες ή δεντροδιαγράμματα.
- Να μεταφράζουν τα ενδεχόμενα από τη φυσική γλώσσα σε στοιχεία του δειγματικού χώρου.

Διερεύνηση 1

Προσπαθήστε να απαντήσετε στα παρακάτω εξηγώντας την απάντησή σας:

α) Οι καθηγητές/τριες πώς ξέρουν σε ποια θέση κάθεται ο κάθε μαθητής/τρια ενός τμήματος;

β) Όταν ο/η Διευθυντής/τρια του Σχολείου στο τέλος της πρωινής συγκέντρωσης λέει: «Το 1ο τμήμα της 1ης τάξης να μείνει στην αυλή» τι πρέπει να κάνουν οι μαθητές/τριες;

γ) Οι μαθητές/τριες του τμήματός σας είναι μαθητές/τριες και της τάξης σας;

δ) Οι μαθητές/τριες του σχολείου σας είναι μαθητές/τριες και της τάξης σας;

Σύνολα - Υποσύνολα

Σε πολλές περιπτώσεις στην καθημερινή ζωή ή/και στα Μαθηματικά, θεωρούμε συλλογές-ομάδες-κατηγορίες οι οποίες αποτελούνται από συγκεκριμένα άτομα ή αντικείμενα τα οποία ξεχωρίζουν με σαφήνεια μεταξύ τους.
Για παράδειγμα:
- Οι παίκτες της ομάδας ποδοσφαίρου που υποστηρίζουμε ή οι ημέρες της εβδομάδας.
- Οι άρτιοι (ζυγοί) αριθμοί ανάμεσα στο μηδέν και το δέκα.

Για τις συλλογές-ομάδες-κατηγορίες με τα παραπάνω χαρακτηριστικά δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Σύνολο ονομάζουμε μια συλλογή διαφορετικών μεταξύ τους αντικειμένων για τα οποία μπορούμε να πούμε με βεβαιότητα αν ένα στοιχείο ανήκει ή όχι στη συλλογή.

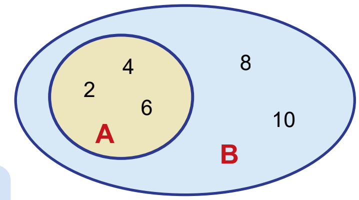
Τα αντικείμενα που αποτελούν ένα σύνολο τα ονομάζουμε **στοιχεία** του συνόλου.
Τα σύνολα συμβολίζονται συνήθως με κεφαλαία γράμματα Α, Β, Γ κτλ και παριστάνονται με τους ακόλουθους τρόπους:

α) Με **αναγραφή** των στοιχείων τους.
Γράφουμε τα στοιχεία μόνο μια φορά το καθένα και τα τοποθετούμε ανάμεσα σε δύο άγκιστρα. Για παράδειγμα:
- Το σύνολο Α των ψηφίων του αριθμού 2024 είναι Α={0, 2, 4}
- Το σύνολο Α των άρτιων φυσικών αριθμών ανάμεσα στο μηδέν και στο δέκα είναι Α = {2, 4, 6, 8}
- Το σύνολο Ν των φυσικών αριθμών είναι Ν = {0, 1, 2, 3, ...}

Σε κάθε σύνολο ένα στοιχείο γράφεται μόνο μια φορά.

β) Με **περιγραφή** των στοιχείων τους.
Γράφουμε την ιδιότητα που ικανοποιούν τα στοιχεία τους. Για παράδειγμα:
- Α: Οι φυσικοί περιττοί αριθμοί ή Α = {φυσικοί περιττοί αριθμοί} ή Α = {x∈N, όπου x περιττός αριθμός}
- Β: Άρτιοι φυσικοί μικρότεροι από το 10 ή Β = { x άρτιος φυσικός, με x<10}

γ) Με **διάγραμμα**, γράφοντας μέσα σε μια κλειστή γραμμή τα στοιχεία του.
Παράδειγμα: Σχήμα.



Για να δηλώσουμε ότι ένα στοιχείο x ανήκει σε ένα σύνολο Α γράφουμε **$x \in A$**

Για να δηλώσουμε ότι ένα στοιχείο x δεν ανήκει σε ένα σύνολο Α γράφουμε **$x \notin A$**

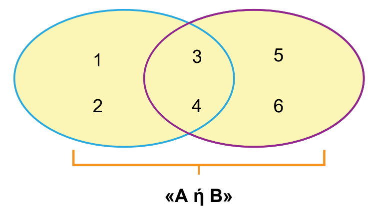
- Όταν κάθε στοιχείο ενός συνόλου Α ανήκει σε ένα άλλο σύνολο Β, τότε λέμε ότι το σύνολο Α είναι **υποσύνολο** του Β.

  Παράδειγμα: Το σύνολο Α με στοιχεία 2, 4, 6 είναι υποσύνολο του συνόλου Β με στοιχεία τα 2, 4, 6, 8, 10 αφού όλα τα στοιχεία του Α ανήκουν στο Β.

- Δύο σύνολα Α, Β λέμε ότι είναι **ίσα** όταν έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία.

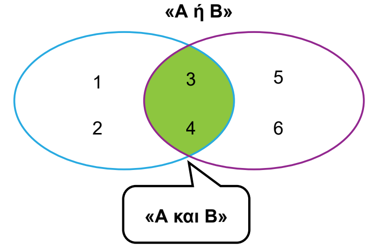
  Παράδειγμα: Αν Α = {2, 4, 6} και Β = {x άρτιος, με 1 < x < 7} τότε Α = Β, αφού οι άρτιοι (ζυγοί) αριθμοί ανάμεσα στο 1 και το 7 είναι οι αριθμοί 2, 4, 6 και επομένως Β = {2, 4, 6}.

- **Κενό σύνολο** ονομάζεται το σύνολο που δεν έχει κανένα στοιχείο και συμβολίζεται με ∅ ή{ }.
  Δεχόμαστε ότι το κενό σύνολο είναι υποσύνολο κάθε συνόλου.



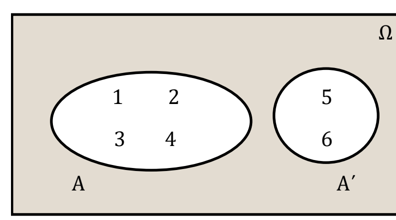
- **Ένωση** δύο συνόλων Α, Β ονομάζουμε το σύνολο **«Α ή Β»** που αποτελείται από τα κοινά και τα μη κοινά τους στοιχεία. Τα κοινά τους στοιχεία τα παίρνουμε μόνο μία φορά.
- **Τομή** δύο συνόλων Α, Β ονομάζουμε το σύνολο **«Α και Β»** που αποτελείται μόνο από τα κοινά τους στοιχεία.

  Παράδειγμα: Αν Α = {1, 2, 3, 4} και Β = {3, 4, 5, 6} τότε:
  «Α ή Β» = {1, 2, 3, 4, 5, 6} και «Α και Β» = {3, 4}.



- **Συμπλήρωμα** ή *Συμπληρωματικό σύνολο* Α′ ενός συνόλου Α ως προς το σύνολο Ω που περιέχει όλα τα στοιχεία, ονομάζουμε το σύνολο που αποτελείται από όλα τα στοιχεία του Ω που δεν ανήκουν στο Α.
  Το συμβολίζουμε με **Α′**.

  Παράδειγμα: Αν Α = {1, 2, 3, 4} και Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, τότε το συμπληρωματικό του συνόλου Α ως προς το σύνολο Ω είναι το σύνολο: Α′ = {5, 6}.

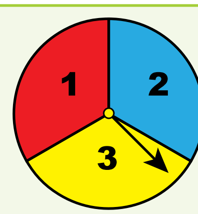


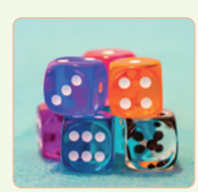
Διερεύνηση 2.

Α) Στα παρακάτω πειράματα προσπαθήστε να προβλέψετε το αποτέλεσμα:

α) Πέφτουμε στη θάλασσα. Θα βραχούμε;

β) Στρίβουμε τον δείκτη σε έναν τροχό τύχης με τρεις ίσους κυκλικούς τομείς χρωματισμένους σε κίτρινο, κόκκινο και μπλε. Πού θα σταματήσει;





γ) Χρησιμοποιούμε για μέρες ένα κινητό τηλέφωνο χωρίς να το φορτίσουμε. Θα σταματήσει να λειτουργεί κάποια στιγμή;

δ) Ρίχνουμε ένα ζάρι. Ποιο θα είναι το αποτέλεσμα;

ε) Στρίβουμε ένα αμερόληπτο κέρμα του ενός ευρώ. Ποια πλευρά θα προκύψει;

Β) Σε όσα πειράματα δεν μπορέσατε να προβλέψετε με βεβαιότητα το αποτέλεσμα, να καταγράψετε τα δυνατά αποτελέσματα.

Αναζητήστε στην ιστοσελίδα lifo.gr το άρθρο «Δείτε τι απεικονίζουν τα 23 διαφορετικά ευρώ ανά κράτος»
https://www.lifo.gr/culture/design/deite-ti-apeikonizoyn-ta-23-diaforetika-eyro-ana-kratos

Διερεύνηση 3

Ένα νέο κατάστημα γρήγορου φαγητού προσφέρει για διαφήμιση σε κάθε πελάτη που αγοράζει κυρίως πιάτο πίτσα ή κοτόπουλο τη δυνατότητα να επιλέξει δωρεάν ένα συνοδευτικό και ένα επιδόρπιο από τα αναγραφόμενα στον ακόλουθο πίνακα:

Κυρίως πιάτο	Συνοδευτικά	Επιδόρπια
• Πίτσα • Κοτόπουλο	• Πατάτες τηγανητές • Μαγιονέζα • Σκορδόψωμο	• Γλυκό • Παγωτό • Καφέ

Καταγράψτε ποιες είναι οι δυνατές επιλογές ενός πελάτη αν επιλέξει:
α) Μόνο κυρίως πιάτο
β) Κυρίως πιάτο και συνοδευτικό
γ) Κυρίως πιάτο, συνοδευτικό και επιδόρπιο

Στη στατιστική είδαμε πώς να συλλέγουμε, να οργανώνουμε και να παρουσιάζουμε δεδομένα προκειμένου να αντλήσουμε πληροφορίες από αυτά, ενώ στην Άλγεβρα με τη βοήθεια εξισώσεων μοντελοποιήσαμε πραγματικές καταστάσεις χρησιμοποιώντας ακριβείς κανόνες.

Ωστόσο, πολλές από τις καθημερινές μας δραστηριότητες δεν μπορούν να περιγραφούν με ακριβείς κανόνες (ή τουλάχιστον δεν τους γνωρίζουμε), περιλαμβάνουν τυχαιότητα και δεν μπορούμε να ξέρουμε με βεβαιότητα τι ακριβώς θα συμβεί.

Αφού λοιπόν δεν μπορούμε να ξέρουμε με βεβαιότητα τι ακριβώς θα συμβεί, είναι ιδιαίτερα χρήσιμο να μπορούμε τουλάχιστον να εκτιμήσουμε πόσο πιθανό είναι να εμφανισθεί ένα τυχαίο γεγονός κι αυτό είναι το αντικείμενο των Πιθανοτήτων.

Οι εκτιμήσεις της αβεβαιότητας είναι ιδιαίτερα χρήσιμες σε πολλές δραστηριότητες της ζωής μας.

Για παράδειγμα, οι φαρμακευτικές εταιρείες για να ελέγξουν την αποτελεσματικότητα ενός εμβολίου ή ενός φαρμάκου το δοκιμάζουν πρώτα σε ένα κατάλληλο τμήμα του πληθυσμού, συλλέγουν δεδομένα σχετικά με την αποτελεσματικότητα του φαρμάκου για τα άτομα αυτά και στη συνέχεια με τη βοήθεια των πιθανοτήτων εκτιμούν πόσο πιθανό είναι το εμβόλιο ή το φάρμακο να είναι αποτελεσματικό στον πληθυσμό.

Για να εκτιμήσουμε όμως την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα φαινόμενο χρειαζόμαστε δεδομένα κι αυτά τα βρίσκουμε με τη βοήθεια πειραμάτων τύχης.

Πείραμα τύχης

Όταν κάνουμε ένα πείραμα, κάποιες φορές είμαστε βέβαιοι για το αποτέλεσμα που μπορεί να προκύψει.
Για παράδειγμα:
- Όταν πετάμε μια μπάλα προς τα πάνω, είμαστε βέβαιοι ότι θα πέσει στο έδαφος.
- Αν περπατήσουμε στη βροχή χωρίς ομπρέλα τότε είμαστε βέβαιοι ότι θα βραχούμε.

Υπάρχουν όμως και πειράματα στα οποία δεν είμαστε βέβαιοι για το αποτέλεσμα που μπορεί να προκύψει.
Για παράδειγμα:
- Όταν στρίβουμε ένα κέρμα, δεν είμαστε βέβαιοι ποια από τις δύο όψεις του θα εμφανισθεί.
- Όταν ρίχνουμε ένα ζάρι, δεν ξέρουμε ποια από τις έξι όψεις του θα προκύψει.

Γενικά

Πείραμα τύχης ονομάζεται η μεθοδική αναπαραγωγή ενός φαινομένου με τα εξής χαρακτηριστικά:
1. Μπορούμε να την επαναλάβουμε κάτω από τις ίδιες συνθήκες όσες φορές θέλουμε.
2. Δεν μπορούμε να προβλέψουμε με βεβαιότητα το αποτέλεσμα που θα εμφανισθεί.

Δειγματικός χώρος και Ενδεχόμενο

Όταν στρίβουμε ένα νόμισμα μπορεί να εμφανισθεί κεφάλι «Κ» ή γράμματα «Γ». Δηλαδή το σύνολο των αποτελεσμάτων του πειράματος είναι (Κ,Γ).
Όταν ρίχνουμε ένα ζάρι μπορεί να εμφανισθεί ένας από τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6. Δηλαδή το σύνολο των αποτελεσμάτων Α του πειράματος είναι Α = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Γενικά

Δειγματικό χώρο ονομάζουμε το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης.

Ένας δειγματικός χώρος συμβολίζεται συνήθως με το γράμμα Ω.

Τα «Κ» και «Γ» είναι στοιχεία του συνόλου Ω των αποτελεσμάτων της ρίψης ενός νομίσματος και λέμε ότι είναι ενδεχόμενα του συνόλου Ω.

Ενδεχόμενο ονομάζεται κάθε υποσύνολο ενός δειγματικού χώρου Ω.

Ένα ενδεχόμενο λέμε ότι πραγματοποιήθηκε (*ή εμφανίστηκε ή συνέβη*) όταν σε μια εκτέλεση του πειράματος προκύπτει ένα από τα στοιχεία του. Για παράδειγμα, αν εμφανισθεί το 3, τότε λέμε ότι πραγματοποιήθηκε το ενδεχόμενο που έχει ως στοιχείο του το «3».

Απλό ονομάζεται ένα ενδεχόμενο όταν μπορεί να συμβεί με έναν μόνο τρόπο. Δηλαδή όταν έχει ένα μόνο στοιχείο.

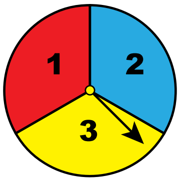
Σύνθετο ονομάζεται ένα ενδεχόμενο όταν μπορεί να συμβεί με περισσότερους από έναν τρόπους. Δηλαδή όταν έχει δύο ή περισσότερα στοιχεία.

Παράδειγμα: Όταν ρίχνω ένα ζάρι, ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος είναι: Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.
Τα ενδεχόμενα {1} και {3} είναι απλά γιατί είναι υποσύνολα του Ω με ένα μόνο στοιχείο, ενώ τα ενδεχόμενα {1, 5}, {2, 4, 6} είναι σύνθετα γιατί είναι υποσύνολα του Ω με 2 και 3 στοιχεία αντίστοιχα.

Βέβαιο ενδεχόμενο ονομάζεται το ενδεχόμενο που πραγματοποιείται πάντοτε όποιο και να είναι το αποτέλεσμα του πειράματος. Για παράδειγμα ο δειγματικός χώρος Ω.

Αδύνατο ενδεχόμενο ονομάζεται το ενδεχόμενο που δεν πραγματοποιείται ποτέ. Δεχόμαστε ως ενδεχόμενο το κενό σύνολο Ø που δεν πραγματοποιείται σε καμιά εκτέλεση του πειράματος τύχης και λέμε ότι το Ø είναι το **αδύνατο ενδεχόμενο**.

Για να βρούμε τον δειγματικό χώρο, δηλαδή όλα τα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης, μπορούμε να γράψουμε σε **λίστα** όλα τα δυνατά αποτελέσματα. Ωστόσο για να τα καταγράψουμε με ένα συστηματικό τρόπο χρησιμοποιούμε **δεντροδιάγραμμα, πίνακα ή πλέγμα**.



Παράδειγμα: Ρίχνουμε ένα νόμισμα και ακολούθως γυρίζουμε έναν τροχό τύχης με τρεις ίσους κυκλικούς τομείς που έχουν χρώματα κόκκινο, κίτρινο, μπλε. Για να βρούμε όλα τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος μπορούμε να εργαστούμε ως εξής:

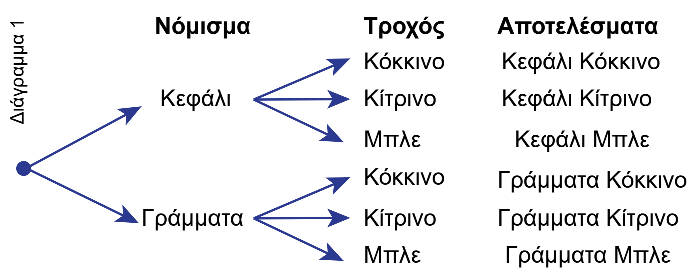
Λίστα

Καταγράφουμε αναλυτικά όλα τα δυνατά αποτελέσματα με τη μορφή λίστας:
Κεφάλι-Κόκκινο, Κεφάλι-Κίτρινο, Κεφάλι-Μπλε, Γράμματα-Κόκκινο, Γράμματα-Κίτρινο, Γράμματα-Μπλε.

Δεντροδιάγραμμα

Γράφουμε όλα τα ενδεχόμενα της 1ης φάσης κατακόρυφα σε μια στήλη. Σε κάθε ενδεχόμενο της 1ης φάσης αντιστοιχούμε όλα τα ενδεχόμενα της 2ης φάσης. Σε κάθε ενδεχόμενο της 2ης φάσης αντιστοιχούμε όλα τα ενδεχόμενα της 3ης φάσης κ.ο.κ. όπως παρουσιάζεται στο διάγραμμα (1), το οποίο ονομάζεται **δεντροδιάγραμμα**.

Τα δεντροδιαγράμματα είναι ιδιαίτερα χρήσιμα για την εύρεση ενός δειγματικού χώρου όταν ο αριθμός των ενδεχομένων δεν είναι πολύ μεγάλος.



Κάθε κλάδος του δεντροδιαγράμματος παριστάνει ένα δυνατό ενδεχόμενο.

Πίνακας

Γράφουμε στη πρώτη κάθετη στήλη τα ενδεχόμενα της πρώτης φάσης του πειράματος και στην πρώτη οριζόντια γραμμή τα ενδεχόμενα της δεύτερης φάσης του πειράματος.

Τα αποτελέσματα προκύπτουν από τη διασταύρωση γραμμών και στηλών στα κελιά του πίνακα, όπως παρουσιάζεται στον πίνακα.

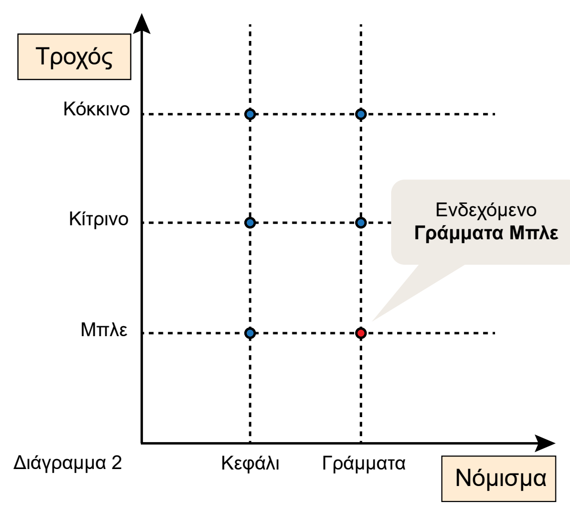
Τροχός / Νόμισμα	Κόκκινο	Κίτρινο	Μπλε
Κεφάλι	ΚεφΚοκ	ΚεφΚιτ	ΚεφΜπλε
Γράμματα	ΓραμΚοκ	ΓραμΚιτ	ΓραμΜπλε

Πλέγμα

Γράφουμε στον οριζόντιο άξονα τα ενδεχόμενα της πρώτης φάσης του πειράματος και στον κατακόρυφο άξονα τα ενδεχόμενα της δεύτερης φάσης του πειράματος.

Τα αποτελέσματα προκύπτουν στο πλέγμα από τις διασταυρώσεις που αναπαριστούν οι κουκκίδες, όπως στο διάγραμμα.

Ο δειγματικός χώρος ο οποίος προκύπτει σε όλες τις περιπτώσεις είναι το σύνολο Ω που τα στοιχεία του είναι: «Κεφάλι Κόκκινο», «Κεφάλι Κίτρινο», «Κεφάλι Μπλε», «Γράμματα Κόκκινο», «Γράμματα Κίτρινο» και «Γράμματα Μπλε»



Διάγραμμα 2

Σημειώσεις:

1. Άλλες φορές είναι καταλληλότερο να χρησιμοποιούμε δεντροδιάγραμμα και άλλες φορές πίνακα ή πλέγμα.
2. Η μέθοδος του πλέγματος είναι παρόμοια με τη μέθοδο του πίνακα και χρησιμοποιείται σπανιότερα.
3. Οι μέθοδοι του πίνακα και του πλέγματος είναι καταλληλότεροι για πειράματα δύο σταδίων.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Τι αυτοκίνητο να αγοράσω;

Ένας πελάτης αποφασίζει να αγοράσει αυτοκίνητο σεντάν ή τζιπ και απευθύνεται σε δύο καταστήματα πώλησης αυτοκινήτων που έχουν τέτοιου είδους αυτοκίνητα για πώληση.

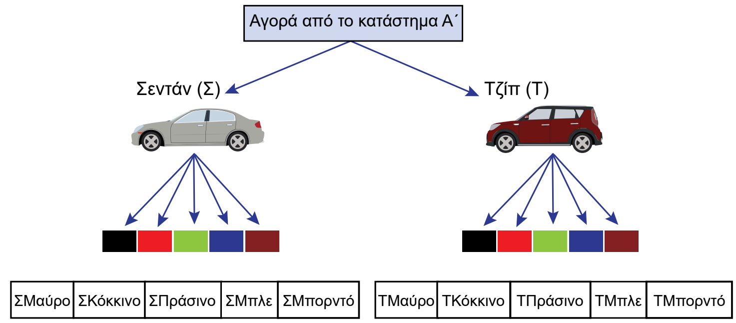
Το κατάστημα Α διαθέτει και για τους δύο τύπους αυτοκινήτου πέντε χρώματα: μαύρο, κόκκινο, πράσινο, μπλε και μπορντό. Το κατάστημα Β διαθέτει και για τους δύο τύπους αυτοκινήτου τα ίδια χρώματα εκτός από το μπορντό.

α) Να βρείτε πόσες και ποιες επιλογές έχει ο πελάτης αν αγοράσει αυτοκίνητο από το κατάστημα Α.

β) Να βρείτε πόσες και ποιες επιλογές έχει ο πελάτης αν αγοράσει αυτοκίνητο από το κατάστημα Β.

Απάντηση

α) Για να βρούμε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να επιλέξει αυτοκίνητο ο πελάτης από το κατάστημα Α κατασκευάζουμε ένα δεντροδιάγραμμα όπως το ακόλουθο:
Από το δεντροδιάγραμμα βλέπουμε ότι ο πελάτης έχει 2 · 5 = 10 επιλογές οι οποίες είναι: «ΣΜαύρο», «ΣΚόκκινο», «ΣΠράσινο», «ΣΜπλε», «ΣΜπορντό», «ΤΜαύρο», «ΤΚόκκινο», «ΤΠράσινο», «ΤΜπλε» και «ΤΜπορντό».



Σημείωση:
ΣΜαύρο σημαίνει: Σεντάν και Μαύρο χρώμα,
ΤΜπλε σημαίνει: Τζιπ και Μπλε χρώμα, κ.ο.κ.

β) Για να βρούμε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να επιλέξει αυτοκίνητο ο πελάτης από το κατάστημα Β κατασκευάζουμε όπως προηγουμένως ένα δεντροδιάγραμμα. Το δεντροδιάγραμμα είναι παρόμοιο αλλά χωρίς τον κλάδο που αναφέρεται στο μπορντό χρώμα αφού αυτό δεν είναι διαθέσιμο.
Επομένως ο πελάτης έχει 2 · 4 = 8 επιλογές στο κατάστημα Β οι οποίες είναι: «ΣΜαύρο», «ΣΚόκκινο», «ΣΠράσινο», «ΣΜπλε», «ΤΜαύρο», «ΤΚόκκινο», «ΤΠράσινο» και «ΤΜπλε».

Σημείωση:
Το δεντροδιάγραμμα μπορεί να είναι οριζόντιο ή κατακόρυφο, απλό ή διακοσμημένο όπως αυτό της εφαρμογής, αλλά σε όποια μορφή και να είναι τα αποτελέσματα είναι τα ίδια. Στα επόμενα χρησιμοποιούμε κυρίως απλά δεντροδιαγράμματα.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Μετακινήσεις.
Για να μετακινηθεί ο Γιάννης από το σπίτι του που βρίσκεται στη συνοικία Σ στη δουλειά του που βρίσκεται στην περιοχή Π, πρέπει πρώτα να μετακινηθεί από τη συνοικία του Σ στο κέντρο της πόλης Κ και στη συνέχεια με νέο μέσο μεταφοράς να μετακινηθεί στον τελικό προορισμό της εργασίας του.

Αν η μετακίνηση από τη συνοικία του Σ στο κέντρο της πόλης Κ μπορεί να γίνει με Λεωφορείο (Λ) ή Μετρό (Μ) και η μετακίνηση από το κέντρο Κ στην περιοχή Π μπορεί να γίνει με Λεωφορείο (Λ), Μετρό (Μ) ή Ταξί (Τ):

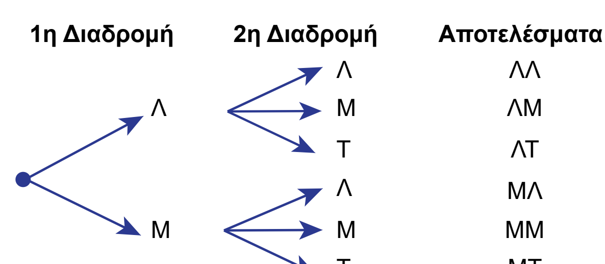
Α. Να βρείτε με πόσους και ποιους τρόπους μπορεί να μετακινηθεί από τη συνοικία Σ στην περιοχή Π;
α) Με δεντροδιάγραμμα **β)** Με πίνακα **γ)** Με πλέγμα

Β. Να βρείτε τα ενδεχόμενα:
α) Οι μετακινήσεις να γίνουν με το ίδιο μεταφορικό μέσο
β) Οι μετακινήσεις να γίνουν με διαφορετικό μεταφορικό μέσο

Απάντηση

α) Ξεκινάμε από τη συνοικία Σ και με βελάκια δείχνουμε όλους τους δυνατούς τρόπους μετακίνησης στο κέντρο της πόλης Κ. Ακολούθως από κάθε μία απόληξη βέλους σχεδιάζουμε με βελάκια όλους τους δυνατούς τρόπους μετακίνησης από το κέντρο της πόλης Κ στην περιοχή Π (Σχήμα 1).

Από το δεντροδιάγραμμα βρίσκουμε ότι ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από τα στοιχεία: ΛΛ, ΛΜ, ΛΤ, ΜΛ, ΜΜ, ΜΤ.



Σχήμα 1

β) Φτιάχνουμε έναν πίνακα βάζοντας στη μία στήλη του τους δυνατούς τρόπους μετακίνησης για την πρώτη διαδρομή από τη συνοικία Σ στο κέντρο Κ της πόλης και σε μια γραμμή του τους δυνατούς τρόπους μετακίνησης για τη δεύτερη διαδρομή από το κέντρο της πόλης Κ στην περιοχή εργασίας Π, όπως στον πίνακα (1).

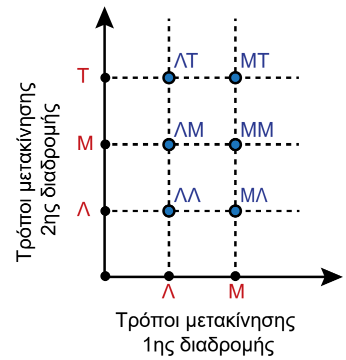
Οι δυνατές διαδρομές προκύπτουν από τις διασταυρώσεις γραμμών – στηλών από τις οποίες προκύπτει πάλι ο ίδιος δειγματικός χώρος Ω.

	Λ	**Μ**	**Τ**
Λ	ΛΛ	ΛΜ	ΛΤ
Μ	ΜΛ	ΜΜ	ΜΤ

Πίνακας 1

γ) Τα αποτελέσματα των διαδρομών προκύπτουν από τις τομές (διασταυρώσεις) των κάθετων ευθειών που φέρνουμε από τα σημεία πάνω στους άξονες με τα ονόματα των μέσων μετακίνησης όπως φαίνεται στο διπλανό πλέγμα.

Ο δειγματικός χώρος Ω είναι κι εδώ ο ίδιος.



Β. α) Το ενδεχόμενο να γίνουν με το ίδιο μεταφορικό μέσο αποτελείται από τα στοιχεία: ΛΛ, ΜΜ.

β) Το ενδεχόμενο να γίνουν με διαφορετικό μεταφορικό μέσο αποτελείται από τα στοιχεία: ΛΜ, ΛΤ, ΜΛ, ΜΤ.

Παρατηρήσεις:

- Το πείραμα πραγματοποιείται σε δύο στάδια (φάσεις).
- Τα ενδεχόμενα της 1ης φάσης (1ης διαδρομής) είναι {Λ, Μ}.
  Τα ενδεχόμενα της 2ης φάσης (2ης διαδρομής) είναι {Λ, Μ, Τ}.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Πόσα είναι τα κορίτσια;

α) Ένας ερευνητής χρησιμοποιεί τα αρχεία της ΕΛΣΤΑΤ (Ελληνική Στατιστική Υπηρεσία/Αρχή) για τις τρίτεκνες οικογένειες του νομού Αττικής και εκτελεί το πείραμα: « επιλέγουμε στην τύχη τα στοιχεία μιας οικογένειας από το αρχείο της ΕΛΣΤΑΤ και καταγράφουμε το πλήθος των κοριτσιών της οικογένειας».

Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος του πειράματος;

β) Ένας άλλος ερευνητής χρησιμοποιεί τα ίδια αρχεία και εκτελεί το πείραμα: «επιλέγουμε στην τύχη τα στοιχεία μιας οικογένειας από το αρχείο της ΕΛΣΤΑΤ και καταγράφουμε κατά σειρά γέννησης το φύλο των παιδιών της οικογένειας».

Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος του πειράματος;

γ) Μπορούμε από τον δειγματικό χώρο του δεύτερου πειράματος να δημιουργήσουμε τον δειγματικό χώρο του πρώτου πειράματος; Εξηγήστε την απάντησή σας.

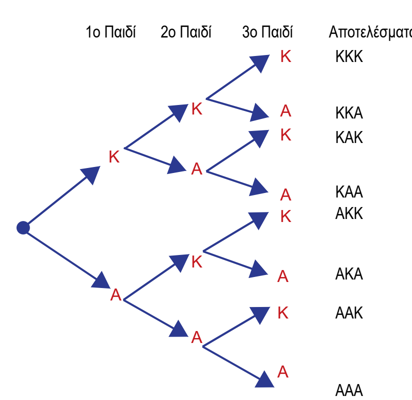
Απάντηση

α) Το πλήθος των κοριτσιών που μπορεί να έχει μια τρίτεκνη οικογένεια είναι 0, 1, 2, 3.

Άρα ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από τα στοιχεία 0, 1, 2, 3.

β) Αφού ο ερευνητής καταγράφει το φύλο και τη σειρά γέννησης των παιδιών μιας τρίτεκνης οικογένειας, ένα πιθανό αποτέλεσμα θα είναι της μορφής ΚΑΚ, δηλαδή το 1ο παιδί είναι κορίτσι (Κ), το 2ο παιδί είναι αγόρι (Α) και το 3ο παιδί είναι κορίτσι (Κ).

Με τη βοήθεια δεντροδιαγράμματος βρίσκουμε ότι όλα τα πιθανά αποτελέσματα είναι: ΚΚΚ, ΚΚΑ, ΚΑΚ, ΚΑΑ, ΑΚΚ, ΑΚΑ, ΑΑΚ και ΑΑΑ τα οποία συνιστούν τον δειγματικό χώρο Ω.



γ) Από τον δειγματικό χώρο Ω του δεύτερου πειράματος παρατηρούμε ότι:

- Το ενδεχόμενο ΚΚΚ σημαίνει ότι υπάρχουν 3 κορίτσια.
- Τα ενδεχόμενα ΚΚΑ, ΚΑΚ και ΑΚΚ σημαίνουν ότι υπάρχουν 2 κορίτσια.
- Τα ενδεχόμενα ΚΑΑ, ΑΑΚ και ΑΚΑ σημαίνουν ότι υπάρχει 1 κορίτσι.
- Το ενδεχόμενο ΑΑΑ σημαίνει ότι δεν υπάρχει κανένα κορίτσι. Δηλαδή υπάρχουν 0 κορίτσια.

Άρα εφόσον στο πρώτο πείραμα δεν μας ενδιαφέρει η σειρά γέννησης ενός αγοριού ή ενός κοριτσιού, μπορούμε από τον δειγματικό χώρο του δεύτερου πειράματος με αυτή την ερμηνεία να δημιουργήσουμε τον δειγματικό χώρο του πρώτου πειράματος.

Αυτοαξιολόγηση

Να αντιστοιχίσετε σε κάθε ισχυρισμό τον σωστό χαρακτηρισμό.

<table>
<tr><th>Δεδομένα</th><th>Χαρακτηρισμός</th></tr>
<tr><td>Ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης περιέχει μερικά μόνο από τα αποτελέσματα του πειράματος.</td><td rowspan="3">Σωστό</td></tr>
<tr><td>Αν οι δειγματικοί χώροι δύο πειραμάτων έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων, τότε τα πειράματα είναι ίδια.</td></tr>
<tr><td>Οι τεχνικές του πίνακα και του πλέγματος είναι πιο κατάλληλες για πειράματα με δύο στάδια.</td></tr>
<tr><td>Το δεντροδιάγραμμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο για πειράματα με δύο στάδια.</td><td rowspan="3">Λάθος</td></tr>
<tr><td>Αν σε ένα πείραμα με δύο στάδια τα δυνατά αποτελέσματα του πρώτου σταδίου είναι 5 και του δευτέρου σταδίου 5, τότε ο δειγματικός χώρος έχει 10 στοιχεία.</td></tr>
<tr><td>Αν Ω και S δύο διαφορετικοί δειγματικοί χώροι για το ίδιο πείραμα τότε αποκλείεται να έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων.</td></tr>
</table>

ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Ποιο από τα παρακάτω είναι πείραμα τύχης;

α) Παίζω ΛΟΤΤΟ.

β) Λέω τον πρώτο αριθμό που σκέφτομαι από το 1 έως το 1000.

γ) Ρίχνω ένα κέρμα και καταγράφω την πάνω όψη του.

δ) Για να μάθω πού είναι η στάση λεωφορείων ρωτάω τον πρώτο διαβάτη που συναντώ.

ε) Για να μάθω πού βρίσκονται τα αναψυκτικά σε ένα σούπερ μάρκετ ρωτάω έναν υπάλληλο του σούπερ μάρκετ.

Να εξηγήσετε την απάντησή σας.

2 Ποιο από τα παρακάτω είναι πείραμα τύχης;

α) Ανοίγω στην τύχη ένα βιβλίο και σημειώνω τον αριθμό της σελίδας.

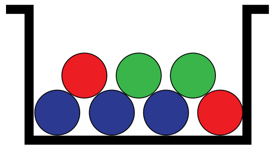
β) Ρίχνω ένα ζάρι και καταγράφω την πάνω όψη του.

γ) Μπαίνω χωρίς εισιτήριο στο τρένο. Θα «φάω» πρόστιμο;

δ) Δεν πληρώνω τον λογαριασμό του κινητού μου. Θα μου το κόψουν;

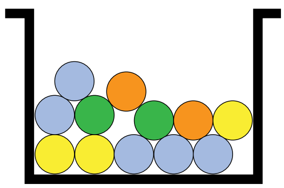
Να εξηγήσετε την απάντησή σας.

3 Ένα κουτί περιέχει πράσινες, κόκκινες και μπλε ομοιόμορφες μπάλες. Επιλέγουμε μια μπάλα. Να χαρακτηρίσετε ως «βέβαιο», «αδύνατο», «ούτε βέβαιο ούτε αδύνατο» καθένα από τα παρακάτω ενδεχόμενα:



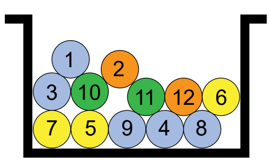
i. Η μπάλα είναι «μπλε ή κόκκινη ή πράσινη»
ii. Η μπάλα είναι «μπλε ή κόκκινη»
iii. Η μπάλα είναι «μαύρη»
iv. Η μπάλα δεν είναι «άσπρη»
v. Η μπάλα είναι «κόκκινη και μπλε»

4 Σε ένα κουτί υπάρχουν δώδεκα ομοιόμορφες μπάλες με τέσσερα χρώματα. Παίρνουμε στη τύχη μια μπάλα και καταγράφουμε το χρώμα της.



α) Είναι αυτό ένα πείραμα τύχης;
β) Να γράψετε τον δειγματικό χώρο.
γ) Να γράψετε πέντε ενδεχόμενα.

5 Σε ένα κουτί υπάρχουν δώδεκα ομοιόμορφες αριθμημένες μπάλες με τέσσερα χρώματα. Παίρνουμε στην τύχη μια μπάλα και καταγράφουμε τον αριθμό της.



α) Είναι αυτό ένα πείραμα τύχης;
β) Να γράψετε τον δειγματικό χώρο.
γ) Να γράψετε τρία ενδεχόμενα.

6 Η Ελένη θα ταξιδέψει με τους γονείς της από τη Λάρισα στην Αθήνα, από την Αθήνα στη Ρόδο και από τη Ρόδο στην Κρήτη.

Από τη Λάρισα στην Αθήνα μπορεί να ταξιδέψει: με τρένο και με αυτοκίνητο.
Από την Αθήνα στη Ρόδο μπορεί να ταξιδέψει: με πλοίο και με αεροπλάνο.
Από τη Ρόδο στην Κρήτη μπορεί να ταξιδέψει: με πλοίο και με αεροπλάνο.
Με πόσους και ποιους τρόπους μπορεί να ταξιδέψει από τη Λάρισα στην Κρήτη;

7 Ο Κώστας μπορεί να παραγγείλει για γεύμα ένα από κάθε είδος από τα παρακάτω:
- Κυρίως πιάτο: Πίτσα, Μακαρόνια, Σουβλάκι
- Συνοδευτικό: Πατάτες, Σαλάτα
- Γλυκό: Χαλβά, Παγωτό

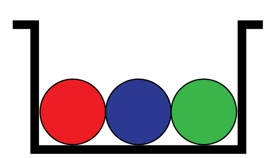
i. Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος του πειράματος;
ii. Ποιο είναι το ενδεχόμενο να επιλέξει σουβλάκι, συνοδευτικό και χαλβά;
iii. Ποιο είναι το ενδεχόμενο να επιλέξει πίτσα, σαλάτα και γλυκό;

8 Ρίχνουμε ένα νόμισμα τρεις διαδοχικές φορές.

α) Να βρείτε τον δειγματικό χώρο του πειράματος.
β) Να βρείτε τα ενδεχόμενα:
i. Να εμφανισθούν δύο ακριβώς κεφάλια
ii. Να εμφανισθούν δύο τουλάχιστον γράμματα
iii. Να εμφανισθεί το πολύ ένα κεφάλι

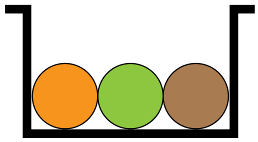
9 Μια καντίνα πουλάει από φαγητά τοστ, τυρόπιτα, σουβλάκι και από αναψυκτικά πορτοκαλάδα και κόκα κόλα. Με ποιους και πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε φαγητό και αναψυκτικό;

10 Ένα κουτί έχει τρεις μπάλες, μια μπλε, μια πράσινη και μια κόκκινη. Κάνουμε το εξής πείραμα: Παίρνουμε στην τύχη από το κουτί μια μπάλα, σημειώνουμε το χρώμα της και την ξαναβάζουμε στο κουτί. Στη συνέχεια παίρνουμε στην τύχη μια δεύτερη μπάλα και σημειώνουμε επίσης το χρώμα της.



i. Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος του πειράματος;
ii. Ποιο είναι το ενδεχόμενο «η πρώτη μπάλα να είναι πράσινη»;
iii. Ποιο είναι το ενδεχόμενο «να εξαχθεί και τις δυο φορές κόκκινη μπάλα»;

11 Ένα κουτί έχει τρεις μπάλες, μια πορτοκαλί, μια πράσινη και μια καφέ. Η Μαρία τραβάει στην τύχη μια μπάλα και την αφήνει έξω από το κουτί. Στη συνέχεια τραβάει στην τύχη μια ακόμα μπάλα.



i. Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος του πειράματος;

ii. Ποιο είναι το ενδεχόμενο «η πρώτη μπάλα να είναι καφέ»;

12 Σε ένα τουρνουά τένις ένας παίκτης περνάει στον δεύτερο γύρο, αν στους τρεις αγώνες του πρώτου γύρου επιτύχει, τρεις νίκες ή δύο νίκες και μία ισοπαλία.

Ποια αποτελέσματα μπορεί να φέρει ένας παίκτης;

2.2 ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΩΝ

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

Να χρησιμοποιούν τον κλασικό ορισμό των Πιθανοτήτων για να υπολογίσουν την πιθανότητα ενός σύνθετου ενδεχόμενου.

Διερεύνηση 1

Δίνεται ο διπλανός τροχός της τύχης.

α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα όταν περιστρέψουμε τον δείκτη του τροχού της τύχης να σταματήσει σε αριθμό μεγαλύτερο από το 6.

β) Η Μαρία έστριψε τον δείκτη του τροχού της τύχης 50 φορές και 13 από αυτές σταμάτησε σε έναν αριθμό μεγαλύτερο από το 6. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα που πήρε η Μαρία, ποια είναι η πιθανότητα να προκύψει σε ένα νέο γύρισμα του δείκτη αριθμός μεγαλύτερος από 6;

γ) Είναι το αποτέλεσμα που βρίσκει η Μαρία δικαιολογημένο;

Πιθανότητες με τον τροχό της τύχης

Να ανοίξετε την εφαρμογή για να διερευνήσετε και να απαντήσετε σε σχετικά ερωτήματα.

Διερεύνηση 2

Χρησιμοποιώντας τη διπλανή ψηφιακή εφαρμογή.

α) Να βρείτε τη θεωρητική πιθανότητα εμφάνισης πράσινου ή μπλε χρώματος στον τροχό της τύχης της εφαρμογής με τρεις ίσους τομείς.

β) Να γυρίσετε 10, 20, 50 φορές τον τροχό της τύχης και να βρείτε την πειραματική πιθανότητα εμφάνισης του τομέα με κόκκινο χρώμα.

Τι παρατηρείτε;

Τροχός με 3 ισοπίθανους τομείς

Κόκκινο ζάρι ή μπλε ζάρι;

Να ανοίξετε τη διπλανή ψηφιακή εφαρμογή για να πειραματιστείτε και για να διερευνήσετε τη ρίψη του ζαριού.

Κλασικός ορισμός πιθανότητας

Πιθανότητα ενός ενδεχομένου είναι ένας αριθμός που μετράει την προσδοκία να εμφανισθεί (να πραγματοποιηθεί) αυτό το ενδεχόμενο και ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας μας δίνει έναν τρόπο να βρίσκουμε αυτό τον αριθμό.

Ας θεωρήσουμε ότι ρίχνουμε ένα δίκαιο ζάρι με έξι έδρες. Όπως ξέρουμε τα δυνατά αποτελέσματα είναι 1, 2, 3, 4, 5, 6 και επομένως ο δειγματικός χώρος Ω έχει 6 στοιχεία.

Λόγω συμμετρίας, όλες οι πλευρές του ζαριού έχουν την ίδια δυνατότητα να εμφανισθούν και καμιά δεν προκρίνεται έναντι των άλλων. Δηλαδή η προσδοκία εμφάνισης κάθε έδρας είναι ίδια. Σε μια τέτοια περίπτωση, όπως αυτή, στην οποία όλα τα αποτελέσματα του δειγματικού χώρου έχουν την ίδια δυνατότητα επιλογής, λέμε ότι τα αποτελέσματα είναι **ισοπίθανα**.

Ρίχνοντας το ζάρι, το ενδεχόμενο Α να προκύψει άρτιος (ζυγός) αριθμός μικρότερος από το 6 είναι Α = {2, 4} και πραγματοποιείται όταν προκύψει 2 ή 4. Δηλαδή 2 από τους 6 αριθμούς του δειγματικού χώρου εξασφαλίζουν την πραγματοποίηση του ενδεχομένου και σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο Α είναι $\frac{2}{6} \approx 0{,}333$ ή 33, 3%.

Παρατηρούμε ότι ο αριθμητής είναι το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων πραγματοποίησης του ενδεχομένου Α και παρονομαστής το πλήθος των δυνατών περιπτώσεων του πειράματος.

Γενικά

Πιθανότητα ενός ενδεχομένου Α σε ένα πείραμα τύχης με ισοπίθανα αποτελέσματα, ονομάζεται ο αριθμός

$$\mathbf{P(A)} = \frac{\textbf{Πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\textbf{Πλήθος δυνατών περιπτώσεων}}$$

Σύμφωνα με τον ορισμό της πιθανότητας, αν Α οποιοδήποτε ενδεχόμενο και Ω ο αντίστοιχος δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης τότε:

$$P(A) \geq 0\ ,\ P(\Omega) = 1,\ P(A) \leq 1,\ P(\emptyset) = 0$$

Έτσι, η πιθανότητα ενός οποιουδήποτε ενδεχομένου Α είναι ένας μη αρνητικός αριθμός μικρότερος είτε ίσος με τη μονάδα:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Ο παραπάνω ορισμός της πιθανότητας είναι ο **θεωρητικός ορισμός** της πιθανότητας και λέγεται **κλασικός ορισμός**. Εφαρμόζεται όταν τα απλά ενδεχόμενα δεν είναι άπειρα και έχουν την ίδια πιθανότητα εμφάνισης. Για να τον χρησιμοποιήσουμε πρέπει να ξέρουμε ή να μπορούμε να βρούμε τις ευνοϊκές και τις δυνατές περιπτώσεις.

Όταν δεν ξέρουμε ή δεν μπορούμε να βρούμε το πλήθος των ευνοϊκών και των δυνατών περιπτώσεων, τότε μπορούμε να κάνουμε μια εκτίμηση της θεωρητικής πιθανότητας ενός ενδεχομένου κάνοντας ένα σχετικό πείραμα στο οποίο βρίσκουμε τη σχετική συχνότητα του ενδεχομένου σε ένα μεγάλο αριθμό επαναλήψεων. Αυτή η σχετική συχνότητα λέγεται **πειραματική πιθανότητα** και είναι μια εκτίμηση της θεωρητικής πιθανότητας. Όσο πιο μεγάλο πλήθος επαναλήψεων του πειράματος έχουμε, τόσο πιο καλή εκτίμηση της θεωρητικής πιθανότητας είναι η πειραματική πιθανότητα.
Για παράδειγμα, αν στα 40 από τα προηγούμενα 60 χρόνια, η μέση θερμοκρασία κάθε Αύγουστο σε μια περιοχή ήταν 38 °C, τότε η σχετική συχνότητα αυτής της θερμοκρασίας είναι $\frac{40}{60} = \frac{2}{3} \approx 0{,}67$ ή περίπου 67%.

Έτσι η πειραματική πιθανότητα είναι 67%, οπότε στη βάση αυτών των δεδομένων η εκτίμησή μας για την πιθανότητα τον προσεχή Αύγουστο να είναι στην περιοχή αυτή η θερμοκρασία 38 °C είναι 67%.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Τοποθετούμε σε μία κάλπη εννέα ίδιου μεγέθους χαρτάκια αριθμημένα από το 1 έως το 9, τα ανακατεύουμε καλά και τραβάμε στην τύχη ένα.

Να βρείτε την πιθανότητα ο αριθμός που θα τραβήξουμε να είναι:

α) 1 ή 5

β) Ανάμεσα στο 4 και στο 9

Απάντηση

Ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από όλα τα δυνατά αποτελέσματα που είναι οι 9 αριθμοί: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

α) Το ενδεχόμενο Α = {1, 5} είναι σύνθετο και πραγματοποιείται όταν τραβήξουμε 1 ή 5.

Άρα το πλήθος των ευνοϊκών αποτελεσμάτων είναι 2 και επομένως:

$$P\ (1 \text{ ή } 5) = P(A) = \frac{\text{Πλήθος ευνοϊκών αποτελεσμάτων}}{\text{Πλήθος δυνατών αποτελεσμάτων}} = \frac{2}{9} \approx 0{,}222 \text{ ή } 22{,}2\%$$

β) Το ενδεχόμενο να προκύψει αριθμός ανάμεσα στο 4 και στο 9 είναι το σύνθετο ενδεχόμενο Β = {5, 6, 7, 8} που πραγματοποιείται όταν τραβήξουμε 5 ή 6 ή 7 ή 8 οπότε το πλήθος των ευνοϊκών αποτελεσμάτων είναι 4.

Επομένως: $P\ (5 \text{ ή } 6 \text{ ή } 7 \text{ ή } 8) = P(B) = \dfrac{\text{Πλήθος ευνοϊκών αποτελεσμάτων}}{\text{Πλήθος δυνατών αποτελεσμάτων}} = \dfrac{4}{9} \approx 0{,}444 \text{ ή } 44{,}4\%$

Σημείωση:

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε γράφοντας:

$$P(5 \text{ ή } 6 \text{ ή } 7 \text{ ή } 8) = P(5) + P(6) + P(7) + P(8) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9} \approx 44{,}4\%$$

Σε επόμενη τάξη θα δούμε πότε μπορούμε να υπολογίζουμε έτσι πιθανότητες σύνθετων ενδεχομένων.

Να ανοίξετε τη διπλανή ψηφιακή εφαρμογή για να πειραματιστείτε και για να ερευνήσετε παρόμοιο πρόβλημα με μπάλες.

Επιλέξτε μια μπάλα

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Στρίβουμε ένα νόμισμα δύο φορές.

Ποια είναι η πιθανότητα να εμφανισθούν δύο κεφαλές;

Απάντηση

Αν συμβολίσουμε με Κ το ενδεχόμενο «Κεφάλι» και με Γ το ενδεχόμενο «Γράμματα», τότε το ενδεχόμενο του οποίου ζητάμε την πιθανότητα είναι το ενδεχόμενο Α: «Κεφάλι και Κεφάλι» ή Α = {ΚΚ}.

Το πείραμα είναι δύο φάσεων (σταδίων) και σε κάθε στρίψιμο η πιθανότητα να εμφανισθεί κεφάλι είναι $\frac{1}{2}$ αφού τα ενδεχόμενα «Κεφάλι» και «Γράμματα» είναι ισοπίθανα.

Κ: Κεφάλι Γ: Γράμματα	Γ	Κ
Κ	ΚΚ	ΚΓ
Γ	ΓΚ	ΓΓ

Ο δειγματικός χώρος Ω (δυνατά αποτελέσματα) τον οποίο βρίσκουμε με τη βοήθεια του πίνακα αποτελείται από τα: ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ.
Επομένως έχουμε ένα ευνοϊκό αποτέλεσμα και τέσσερα δυνατά αποτελέσματα, οπότε:

$$\text{P (ΚΚ)} = \text{P(A)} = \frac{\text{Πλήθος ευνοϊκών αποτελεσμάτων}}{\text{Πλήθος δυνατών αποτελεσμάτων}} = \frac{1}{4} = 0{,}25 \text{ ή } 25\%$$

Να ανοίξετε τη διπλανή ψηφιακή εφαρμογή για να πειραματιστείτε και για να διερευνήσετε παρόμοιο πρόβλημα με κέρματα.

Πειραματιστείτε παίζοντας κορώνα-γράμματα

Ιστορικό σημείωμα

Οι δειγματικοί χώροι πρέπει να προσδιορίζονται και να χρησιμοποιούνται κατάλληλα γιατί διαφορετικά δημιουργούνται σφάλματα στον υπολογισμό πιθανοτήτων.
Χαρακτηριστικό είναι το λάθος που ιστορικά αναφέρεται ότι έκανε ο μεγάλος Μαθηματικός D' Alembert σε σχετικό πρόβλημα υπολογισμού πιθανότητας, για το οποίο μπορείς να διαβάσεις στο συμπληρωματικό υλικό.

Δειγματικός Χώρος

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Από ένα κουτί που περιέχει τρεις ομοιόμορφους αριθμημένους δίσκους από το 1 έως και το 3, σχηματίζουμε ένα διψήφιο αριθμό παίρνοντας στην τύχη δύο δίσκους.

Να βρείτε την πιθανότητα να πάρουμε αριθμό μεταξύ του 21 και του 33:

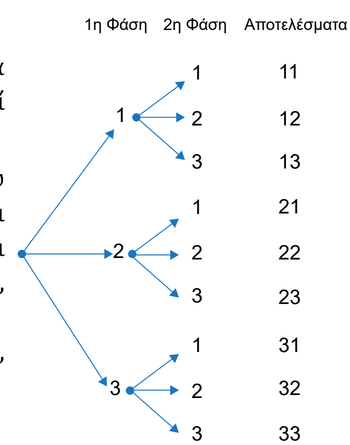
α) Αν πριν πάρουμε τον δεύτερο δίσκο τοποθετήσουμε πάλι στο κουτί το δίσκο που πήραμε την πρώτη φορά.

β) Αν πάρουμε το δεύτερο δίσκο χωρίς να τοποθετήσουμε πάλι στο κουτί το δίσκο που πήραμε την πρώτη φορά.

Απάντηση

α) Πρόκειται για ένα πείραμα τύχης με δύο φάσεις και ισοπίθανα αποτελέσματα αφού οι δίσκοι είναι ομοιόμορφοι και επιλέγονται χωρίς να κοιτάμε στο κουτί κάθε φορά που επιλέγουμε έναν δίσκο.

Αν πριν πάρουμε τον δεύτερο δίσκο τοποθετήσουμε πάλι στο κουτί τον δίσκο που πήραμε την πρώτη φορά, τότε όταν παίρνουμε τον δεύτερο δίσκο υπάρχουν πάλι 3 δίσκοι στο κουτί. Έτσι ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος όπως προκύπτει από το διπλανό δεντροδιάγραμμα αποτελείται από τα εννέα στοιχεία: 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33.



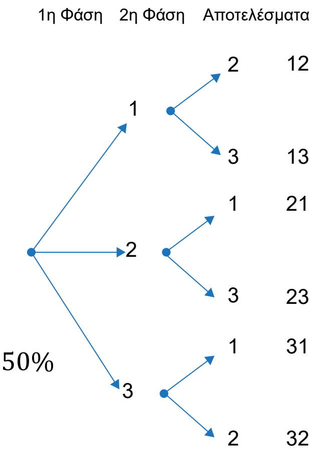
Μεταξύ του 21 και του 33 υπάρχουν στα δυνατά αποτελέσματα οι αριθμοί 22, 23, 31, 32 που είναι και τα ευνοϊκά αποτελέσματα.
Επομένως:

$$\text{P (Αριθμός μεταξύ του 21 και του 33)} = \frac{\text{Πλήθος ευνοϊκών αποτελεσμάτων}}{\text{Πλήθος δυνατών αποτελεσμάτων}} = \frac{4}{9} \approx 0{,}444 \text{ ή } 44{,}4\%$$

β) Αν πάρουμε τον δεύτερο δίσκο χωρίς να τοποθετήσουμε πάλι στο κουτί τον δίσκο που πήραμε την πρώτη φορά, τότε όταν παίρνουμε τον δεύτερο δίσκο υπάρχουν 2 δίσκοι στο κουτί. Έτσι ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος είναι διαφορετικός από τον προηγούμενο και όπως προκύπτει από το διπλανό δεντροδιάγραμμα αποτελείται από τα στοιχεία: 12, 13, 21, 23, 31, 32.

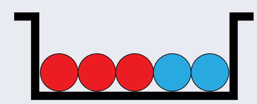
Στα δυνατά αποτελέσματα τώρα υπάρχουν τρεις αριθμοί μεταξύ του 21 και του 33. Οι αριθμοί 23, 31, 32 που είναι και τα ευνοϊκά αποτελέσματα.
Επομένως:

$$P\text{ (Αριθμός μεταξύ του 21 και του 33)} = \frac{\text{Πλήθος ευνοϊκών αποτελεσμάτων}}{\text{Πλήθος δυνατών αποτελεσμάτων}} = \frac{3}{6} = 0{,}5 \text{ ή } 50\%$$



Αυτοαξιολόγηση

Να αντιστοιχίσετε σε κάθε ισχυρισμό τον σωστό χαρακτηρισμό.

<table>
<tr><th colspan="2">Δεδομένα</th><th>Χαρακτηρισμός</th></tr>
<tr><td>Ένα κουτί περιέχει 2 μπλε και 3 κόκκινες ομοιόμορφες μπάλες από το οποίο παίρνουμε στην τύχη μια μπάλα: Το ενδεχόμενο να είναι κόκκινη η μπάλα έχει την ίδια πιθανότητα με το ενδεχόμενο να είναι μπλε η μπάλα.</td><td></td><td rowspan="3">Σωστό</td></tr>
<tr><td colspan="2">Αν τραβήξουμε μια μπάλα από το κουτί, τη βάλουμε πάλι μέσα στο κουτί και ξανατραβήξουμε πάλι μια μπάλα, η πιθανότητα να πάρουμε μπλε μπάλα και τις δύο φορές είναι ίδια.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Αν η πιθανότητα επιτυχίας σε ένα πείραμα είναι $\frac{1}{2}$ τότε αν επαναλάβουμε 2 φορές το πείραμα, η πιθανότητα επιτυχίας και τις δύο φορές θα είναι $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Αν στρίψουμε ένα συνηθισμένο κέρμα δύο φορές, το οποίο φέρνει κεφάλι με πιθανότητα $p = 0,5$, τότε τη μία θα έρθει σίγουρα κεφάλι.</td><td rowspan="5">Λάθος</td></tr>
<tr><td colspan="2">Αν η πιθανότητα ενός ενδεχομένου Α είναι 60%, τότε: $P(A) = 60$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ο δειγματικός χώρος όταν ρίχνουμε ένα ζάρι με 6 έδρες είναι ίδιος με τον δειγματικό χώρο όταν στρίβουμε έναν τροχό της τύχης με 6 ίσους κυκλικούς τομείς.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ρίχνουμε ένα ζάρι έξι φορές και εμφανίζεται κάθε φορά “έξι”. Επομένως, λέει ο Νίκος, η πιθανότητα να φέρουμε “έξι” σε μια ρίψη του ζαριού είναι $6 \cdot \frac{1}{6} = 1$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Αν στρίψουμε ένα νόμισμα 100 φορές και όλες έρθει κεφάλι, τότε στην 101 φορά που θα το στρίψουμε είναι πιο πιθανό να έρθει γράμματα.</td></tr>
</table>

ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Ένα κουτί περιέχει 10 ομοιόμορφες αριθμημένες μπάλες από το μηδέν έως το εννέα. Επιλέγουμε χωρίς να κοιτάμε, μια μπάλα. Ποια είναι η πιθανότητα να επιλέξουμε μπάλα με αριθμό μεγαλύτερο από έξι;

2 Επιλέγουμε στην τύχη έναν αριθμό από το 1 έως και το 12. Ποια είναι η πιθανότητα να είναι:

i. Άρτιος **ii.** Πολλαπλάσιο του 3;

3 Ανοίγουμε στην τύχη ένα βιβλίο με 200 σελίδες. Ποια είναι η πιθανότητα να πέσουμε σε σελίδα:

i. Μέχρι και το 100

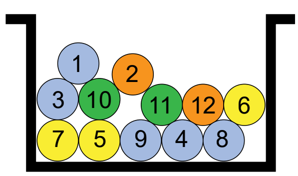
ii. Ανάμεσα στο 140 και στο 150;

4 Τοποθετούμε σε μία κάλπη δέκα ίδιου μεγέθους χαρτάκια αριθμημένα από το 0 έως το 9, τα ανακατεύουμε καλά και τραβάμε στην τύχη ένα. Να βρείτε την πιθανότητα ο αριθμός που θα τραβήξουμε να είναι:

α) 3 ή 8

β) Ανάμεσα στο 3 και στο 7

5 Σε ένα κουτί υπάρχουν δώδεκα ομοιόμορφες αριθμημένες μπάλες με τέσσερα διαφορετικά χρώματα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα από το οποίο παίρνουμε στην τύχη μια μπάλα.



α) Ποια είναι η πιθανότητα να είναι η μπάλα κίτρινη;

β) Ποια είναι η πιθανότητα να είναι η μπάλα κίτρινη ή πράσινη;

γ) Ποια είναι η πιθανότητα να έχει η μπάλα αριθμό μεγαλύτερο από 10;

δ) Ποια είναι η πιθανότητα να έχει η μπάλα αριθμό μικρότερο από 5;

ε) Ποια είναι η πιθανότητα να έχει η μπάλα αριθμό ανάμεσα στο 1 και στο τέσσερα;

6 Στρίβουμε ένα ζάρι δύο φορές. Ποια είναι η πιθανότητα να εμφανισθούν:

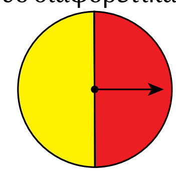
i. Δύο εξάρια;

ii. Δύο ίδιοι αριθμοί;

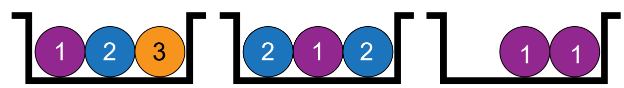
iii. Αριθμοί με άθροισμα οχτώ;

7 Περιστρέφουμε τρεις φορές έναν τροχό της τύχης χωρισμένο σε δύο ίσα τμήματα με δύο διαφορετικά χρώματα.

Ποια είναι η πιθανότητα να εμφανισθεί και τις τρεις φορές το ίδιο χρώμα;



8 Παίρνουμε από μια μπάλα από τα κουτιά του σχήματος. Να βρείτε την πιθανότητα το άθροισμα των τριών αριθμών να είναι πέντε.



Στις ασκήσεις (9) και (10) μπορείτε να πειραματιστείτε με τα αποτελέσματα των ζαριών χρησιμοποιώντας την εφαρμογή.

Διερεύνηση του αθροίσματος δύο ζαριών

Διερεύνηση της διαφοράς δύο ζαριών

9 Ο Λεωνίδας ρίχνει ένα ζάρι με έξι έδρες και η Λεϊλά ρίχνει μετά από αυτόν ξανά το ίδιο ζάρι.

i. Ποια είναι η πιθανότητα να φέρει η Λεϊλά μεγαλύτερο αριθμό από τον Λεωνίδα.

ii. Ποια είναι η πιθανότητα η Λεϊλά και ο Λεωνίδας να φέρουν ίδιο αριθμό;

10 Ρίχνουμε δύο ζάρια. Να βρείτε την πιθανότητα να φέρουμε άρτιο αριθμό στο ένα και αριθμό μεγαλύτερο από 3 στο άλλο.

11 Ρίχνουμε 1000 φορές ένα ζάρι με τέσσερις όψεις αριθμημένες από 1 έως 4 και παίρνουμε τα αποτελέσματα του πίνακα:

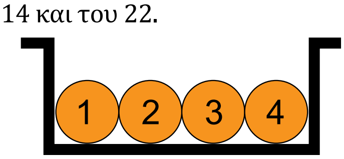
Αποτέλεσμα	1	2	3	4
Αριθμός εμφανίσεων	170	380	250	200

i. Ποια είναι η πειραματική πιθανότητα για καθένα από τα πιθανά αποτελέσματα;

ii. Το ζάρι είναι δίκαιο;

12 Από ένα κουτί που περιέχει τέσσερις ομοιόμορφους αριθμημένους δίσκους από το 1 έως και το 4, σχηματίζουμε ένα διψήφιο αριθμό παίρνοντας στην τύχη δύο δίσκους.

Να βρείτε την πιθανότητα να πάρουμε αριθμό μεταξύ του 14 και του 22.



α) Αν πριν πάρουμε τον δεύτερο δίσκο τοποθετήσουμε πάλι στο κουτί τον δίσκο που πήραμε την πρώτη φορά.

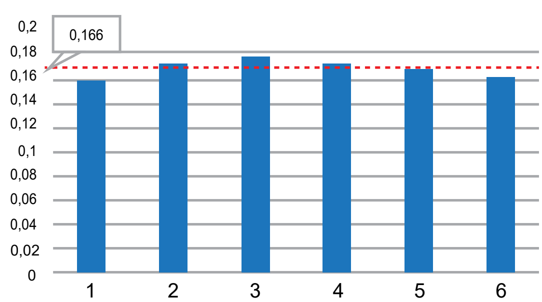
β) Αν πάρουμε τον δεύτερο δίσκο χωρίς να τοποθετήσουμε πάλι στο κουτί τον δίσκο που πήραμε την πρώτη φορά.

13 Σε ένα σχολικό παιχνίδι γνώσεων, στον τελικό συμμετέχουν δύο ομάδες. Η μία αποτελείται από 3 μαθητές/τριες και η άλλη από 4 μαθητές/τριες. Από κάθε ομάδα βγαίνει ένας «νικητής/τρια» και οι «νικητές/τριες» από τις δύο ομάδες συμμετέχουν στον τελικό διαγωνισμό από τον οποίο βγαίνει ο τελικός «νικητής/τρια» που παίρνει το βραβείο. Οι διαγωνιζόμενοι/νες τόσο σε κάθε ομάδα όσο και στον τελικό διαγωνισμό είναι όλοι πολύ καλοί και έχουν την ίδια πιθανότητα να προκριθούν. Να βρείτε την πιθανότητα να πάρει το βραβείο η Βάλια η οποία συμμετέχει στην ομάδα των τεσσάρων μαθητών/τριων.

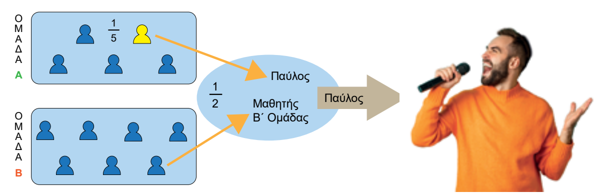
14 Ρίχνουμε ένα ζάρι.

α) Ποια είναι η πιθανότητα να εμφανιστεί κάθε πλευρά του;

β) Ρίχνουμε ένα ζάρι και παίρνουμε για κάθε όψη του ζαριού τις σχετικές συχνότητες που απεικονίζονται στο διάγραμμα. Με βάση αυτά τα αποτελέσματα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το ζάρι είναι δίκαιο;



15 Σε ένα σχολικό διαγωνισμό τραγουδιού μαθητών/τριών, οι διαγωνιζόμενοι/νες χωρίζονται σε δύο ομάδες οι οποίες αποτελούνται από 5 και 7 άτομα. Ο Παύλος συμμετέχει στην ομάδα των 5 ατόμων. Από κάθε ομάδα βγαίνει ένας «νικητής/τρια» και οι «νικητές/τριες» από τις δύο ομάδες συμμετέχουν στον τελικό διαγωνισμό από τον οποίο βγαίνει ο τελικός «νικητής/τρια» που παίρνει το βραβείο. Οι διαγωνιζόμενοι/νες τόσο σε κάθε ομάδα όσο και στον τελικό διαγωνισμό είναι όλοι πολύ καλοί και έχουν την ίδια πιθανότητα να προκριθούν.
Να βρείτε την πιθανότητα να πάρει το βραβείο ο Παύλος.



16 Να ανοίξετε την παρακάτω ψηφιακή εφαρμογή.

α) Να βρείτε τη θεωρητική πιθανότητα εμφάνισης πράσινου ή κόκκινου χρώματος στον τροχό της τύχης της εφαρμογής με πέντε ίσους τομείς.

β) Να γυρίσετε 10, 20, 50 φορές τον τροχό της τύχης και να βρείτε την πειραματική πιθανότητα εμφάνισης πράσινου ή κόκκινου χρώματος. Τι παρατηρείτε;

Τροχός με 5 ισοπίθανους τομείς

Γλωσσάρι Πιθανοτήτων

Για μια επανάληψη στις έννοιες των πιθανοτήτων, να ανοίξετε την ψηφιακή εφαρμογή.

Ανακεφαλαίωση

Πείραμα τύχης ονομάζεται η μεθοδική αναπαραγωγή ενός φαινομένου με τα εξής χαρακτηριστικά:
1. Μπορούμε να την επαναλάβουμε κάτω από τις ίδιες συνθήκες όσες φορές θέλουμε.
2. Δεν μπορούμε να προβλέψουμε με βεβαιότητα το αποτέλεσμα που θα εμφανιστεί.

Δειγματικό χώρο ονομάζουμε το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης.

Ενδεχόμενο ονομάζεται κάθε υποσύνολο ενός δειγματικού χώρου Ω.

Απλό ονομάζεται ένα ενδεχόμενο όταν μπορεί να συμβεί με έναν μόνο τρόπο, δηλαδή όταν έχει ένα μόνο στοιχείο.

Σύνθετο ονομάζεται ένα ενδεχόμενο όταν μπορεί να συμβεί με περισσότερους από έναν τρόπους, δηλαδή όταν έχει δύο ή περισσότερα στοιχεία.

Βέβαιο ενδεχόμενο ονομάζεται το ενδεχόμενο που πραγματοποιείται πάντοτε όποιο και να είναι το αποτέλεσμα του πειράματος. Για παράδειγμα ο δειγματικός χώρος Ω.

Αδύνατο ενδεχόμενο ονομάζεται το ενδεχόμενο που δεν πραγματοποιείται ποτέ. Συμβολίζεται με $\emptyset$ και δεν έχει κανένα στοιχείο.

Υποδείξεις – Απαντήσεις

ΑΡΙΘΜΟΙ

• ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 • ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

1.1. Προσδιορισμός των φυσικών αριθμών – Πολλαπλασιασμός – Δυνάμεις

1. **α)** 3^4 **β)** 5^3 **γ)** 2^{11} **δ)** $α^4$
2. **α)** 4^2 ή 2^4 **β)** 3^3 **γ)** 4^3 ή 8^2 ή 2^6 **δ)** 5^3
3. **α)** $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{\boxed{3}} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\boxed{4}} = 2^{\boxed{7}}$ **β)** $\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{\boxed{5}} \cdot \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3}_{\boxed{3}} = 3^{\boxed{8}}$ **γ)** $5^{\boxed{6}}$
4. **α)** 9 **β)** 18
5. Η Μυρτώ δεν έχει δίκιο.
6. κ = 3

1.2. Ευκλείδεια διαίρεση

1. **α)** Είναι ευκλείδεια διαίρεση. **β)** ΔΕΝ είναι Ε.Δ. **γ)** ΔΕΝ είναι Ε.Δ. **δ)** Είναι Ε.Δ. **ε)** Είναι Ε.Δ.
2. Εργαστείτε με τις συμβολικές εκφράσεις άρτιων – περιττών
3. Το πηλίκο, υπόλοιπο σε κάθε περίπτωση είναι **α)** 5,7 **β)** 16,0 **γ)** 13,3 **δ)** 13,16 **ε)** 18,0
4. 17
5. Εργαστείτε με τον γνωστό αλγόριθμο της διαίρεσης
6. Το πηλίκο και το υπόλοιπο δεν προσδιορίζουν ακριβώς τον διαιρέτη (δ) και τον διαιρετέο (Δ).
7. Εφαρμόστε την ταυτότητα της διαίρεσης
8. 1η Ιουλίου Σάββατο και 15 Αυγούστου Τρίτη
9. Το 23 θα βρίσκεται πίσω από τον συνοδηγό, ενώ το 26 θα βρίσκεται πίσω από τον οδηγό.

1.3.1 Κριτήρια διαιρετότητας

1. Εφαρμόστε τα κριτήρια διαιρετότητας
2. 2001 ή 2013 ή 2019.
3. **(α)** 0, 1, 3, 4, 6, 7 ή 9 **(β)** 1,2,3,4,6,7,8,9 **(γ)** 0, 1, 3, 4, 6, 7 ή 9 **(δ)** 6 **(ε)** 8, 5.
4. 8271 ή 8874
5. 120, 20
6. 1000 : 8 = 125
7. Θεωρήστε ότι κάθε τριψήφιος αριθμός ή μεγαλύτερος γράφεται ως άθροισμα ενός διψήφιου και ενός άλλου που είναι πολλαπλάσιο του 100.
8. $δ + μ = δ + 2 \cdot δ = 3 \cdot δ$
9. $α + α + α = 3 \cdot α$.

1.3.2 Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ)

1. ΕΚΠ(9,15)=45.
2. ΕΚΠ(12,15,20)=60.
3. Μετά από 1 ώρα.
4. 255.
5. Δύο. Στα 12 και στα 24 λεπτά. Στην 1η συνάντηση ο Γιώργος 3 και η Ειρήνη 2. Στη 2η συνάντηση ο Γιώργος 6 και η Ειρήνη 4.
6. **α)** 144 δευτερόλεπτα **β.1)** Σε 144, 288, 432 δευτερόλεπτα. **β.2)** Αυτή που κάθεται στο αλογάκι που κάνει μια περιστροφή σε 48 δευτερόλεπτα θα περάσει 10 φορές, ενώ η άλλη θα περάσει 6 φορές.

1.3.3 Μέγιστος κοινός διαιρέτης (ΜΚΔ)

1. (1) 20 (2) 118 (3) 1 (4) 14
2. 15, 20
3. 19, 76
4. **(α)** Αριθμός των ανθοδεσμών: 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21 και 42 **(β)** 42 **(γ)** 3 τουλίπες, 4 γαρίφαλλα, 5 τριαντάφυλλα.
5. Θα χρειαστούμε, 123 κουτιά για το Α είδος, 146 για το Β είδος και 185 για το Γ είδος.

1.3.4 Πρώτοι και σύνθετοι αριθμοί

1. **α)** Οι 12 και 15 δεν είναι **β)** Οι 18 και 35 είναι **γ)** Οι 24 και 35 είναι **δ)** Οι 65 και 84 είναι πρώτοι μεταξύ τους
2. **α)** $36 = 2^2 \cdot 3^2$ **β)** $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$ **γ)** $275 = 5^2 \cdot 11$ **δ)** $426 = 2 \cdot 3 \cdot 71$.
Με τον 6 διαιρούνται οι αριθμοί 36, 84, 426
3. $360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$
4. **(α)** ΕΚΠ(54,84) = 756, ΜΚΔ(54,84) = 6 **(β)** ΕΚΠ(18,35) = 630, ΜΚΔ(18,35) = 1 **(γ)** ΕΚΠ(48,72) = 144, ΜΚΔ(48,72) = 24 **(δ)** ΕΚΠ(65,84) = 5460, ΜΚΔ(65,84) = 1
5. ΜΚΔ(18,35) = 1, ΕΚΠ(18,35) = 630 = 18·35, ΜΚΔ(100,63)=1, Ε Κ Π (100,63) = 6300 = 100·63. Αυτό συμβαίνει επειδή δεν υπάρχουν κοινοί παράγοντες.
6. Αν ο ένας είναι ο 13 τότε ο άλλος είναι ο 78. Δύο άλλοι αριθμοί είναι οι 26 και 39.
7. Οι δύο αριθμοί θα έχουν ως κοινούς διαιρέτες όλους τους διαιρέτες του ΜΚΔ τους δηλαδή τον 3 και τον 5.
8. ΝΑΙ. Όταν ο ένας προσθετέος είναι το 2 (π.χ. 2+3=5 , 2+5=7 κ.α.)
9. Αφού η ανάλυση του αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων έχει τη μορφή $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$, ο αριθμός αυτός θα έχει διαιρέτες του και όλα τα γινόμενα αυτών.

1.4. Συστήματα αρίθμησης

1. **α)** $54_{10} = 110110_2$, **β)** $35_{10} = 100011_2$, **γ)** $7_{10} = 111_2$, **δ)** $8_{10} = 1000_2$
2. **(α)** $1011011_2 = 91_{10}$, **(β)** $110101_2 = 53_{10}$, **(γ)** $10244_5 = 699_{10}$ **(δ)** $2134_5 = 294_{10}$
3. $11010_2 = 26_{10}$, $1101_2 = 13_{10}$, $110110_2 = 54_{10}$, $11011_2 = 27_{10}$.
Παρατηρούμε ότι σβήνοντας τον 0 στο τέλος ενός δυαδικού προκύπτει το πηλίκο της διαίρεσης του αριθμού με τον 2.
$38_{10} = 100110_2$, $10011_2 = 19_{10}$.
4. $1001_2 = 9$, $10010_2 = 18_{10}$, $1011_2 = 11_{10}$, $10110_2 = 22_{10}$. Για να πολλαπλασιάσουμε έναν αριθμό με τον 2 στο δυαδικό σύστημα απλά προσθέτουμε ένα μηδενικό στο τέλος του αριθμού. $11011_2 = 27_{10}$, $110110_2 = 54_{10}$
5. Για να πολλαπλασιάσουμε έναν αριθμό του δυαδικού συστήματος με το 2 αρκεί να προσθέσουμε στο τέλος του αριθμού ένα μηδενικό. Όμοια, για να πολλαπλασιάσουμε με το 4 προσθέτουμε δύο μηδενικά. $11_{10} = 1011_2$, $101100_2 = 44_{10}$
6. Ο μικρότερος είναι ο 1000_2 και ο μεγαλύτερος ο 1111_2.
α) $1000_2 = 8_{10}$, $1111_2 = 15_{10}$ **β)** $1000_2 + 1111_2 = 8_{10} + 15_{10} = 23_{10} = 10111_2$

Επαναληπτικές ασκήσεις

1. 3333, 444, 66
2. Χρειάζονται 9+180+972=1161 ψηφία.
3. 2,3,5,7,11,13,17,19,23,29
4. Τα συγκεκριμένα ζεύγη που έχουν γινόμενο 72 είναι (6,12) και (8,9). Έτσι, το γινόμενο ελαττώνεται κατά 2, ή κατά 56, ή κατά 24 ή κατά 33.
5. 53
6. 13
7. 185
8. 125
9. $57_{10} = 111001_2$
10. Θα συναντηθούν μετά από μία ώρα.
11. 80 παιδιά
12. Με μέση ταχύτητα 96 χιλιόμετρα την ώρα.
13. Το πρώτο διαμέρισμα άξιζε 360000 € ενώ το δεύτερο διαμέρισμα 300000 €
14. 130€ είναι η αξία της οθόνης και η αξία του υπολογιστή είναι 435€
15. 50
16. Τα μέλη ήταν 135 και το ποσό 3600€
17. Η πρώτη κοινότητα 18300€, η δεύτερη 19800€ και η τρίτη 21900€

• ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 • ΑΚΕΡΑΙΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

2.1. Θετικοί και αρνητικοί ακέραιοι

1. α) 0, –1, +2, –1, –1, +4 Βαθμοί Κελσίου **β)** –8 Βαθμούς Κελσίου

2. α)+10 **β)** –20 **γ)** +30000 δ) –50 ε) +5 **στ)** –3 **ζ)** +200 **η)**–150 **θ)** –200 **ι)** +250

3. Φυσικοί: 45, 10, +340, +15, 0

4. α) +230 **β)** –320 **γ)** +200 **δ)** –150 **ε)** –35 **στ)** –5

5. Εργαζόμαστε όπως έχουμε μάθει

2.2. Απόλυτη τιμή

1. Η απόσταση ενός αριθμού x από το μηδέν ονομάζεται απόλυτη τιμή του x. Η απόλυτη τιμή ενός αριθμού είναι πάντα θετικός ή μηδέν.

2. $|15|=15$, $|123|=123$, $|-256|=256$, $|+256|=256$, $|80|=80$, $|-79|=79$, $|-12|=12$, $|36|=36$

3. y = 17 ή y = –17

4. Συμμετρικά: (–5,5), (–3,3), (–2,2)

5.

Αριθμός	9	–120	–155	155	–90
Απόλυτη τιμή	9	120	155	155	90

6. α) πρόσημο **β)** απόλυτη τιμή **γ)** συμμετρικά

7.

Αριθμός	19	–125	–230	1010	900
Αντίθετος	–19	125	230	–1010	–900

8. Εργαζόμαστε όπως μάθαμε παραπάνω

9. – 5 < – 3 < – 1 < + 1 < + 2 < + 7

10. 4

2.3. Πρόσθεση και αφαίρεση των ακεραίων

1. α) 12 **β)** 19 **γ)** 2 **δ)** 18 **ε)** 44 **στ)** 88

2. α) –9 **β)** –65 **γ)** –9 **δ)** –16 **ε)** –52 **στ)** –67

3. α) 4 **β)** 37 **γ)** 17 **δ)** –40 **ε)** –20 **στ)** –32

4. α) 2 **β)** –8 **γ)** –29 **δ)** 89 **ε)** –34 **στ)** –40

5. α) –74 **β)** 12 **γ)** 3

6.

α	β	α + β	α – β
–2	4	2	–6
–4	10	6	–14
20	25	45	–5

2.4. Πολλαπλασιασμός και δυνάμεις των ακεραίων

1. α) 21 **β)** 720 **γ)** 48 **δ)** 105 **ε)** –40 **στ)** –72

2. α) 300 **β)** –6048 **γ)** –2400 **δ)** –5040

3. α) 1 **β)** –60 **γ)** 16 **δ)** 20

4. α) 36 **β)** 36 **γ)** –216 **δ)** –36 **ε)** –216 **στ)** 1 **ζ)** 1 **η)** –1

5. α) + **β)** + **γ)** – **δ)** –

6.

α	β	α + β	α – β	αβ
–6	3	–3	–9	–18
1	–4	–3	5	–4
2	–10	–8	12	–20

7. α) άρτιος, **β)** αρνητικός, **γ)** περιττός.

2.5. Προβλήματα με ακεραίους

1. α) 7 **β)** –14 **γ)** 1 **δ)** 6

2. +3 – (+2)· [(+4)–(+3)]+(+3)· [(–1)+(+2)]

3. –200 · 6 + 150 · 10 – 100 · 8 + 150 · 11 . Κέρδισε 1150 ευρώ.

4. Στοκχόλμη 6, Παρίσι 10, Αθήνα 9

5. 3750 m

Επαναληπτικές ασκήσεις και προβλήματα

1. α) θετικός **β)** αρνητικός

2. +75, –63

3. Μερικές φορές

4. α) –28 **β)** –36 **γ)** –42

5. α) 7628 **β)** –7628

6. –32126 (–18,2%)

7. α) –1 **β)** 4 **γ)** –7

8. 148

9. Έχασε 4 κιλά

10. –32

11. 81

• ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 • ΡΗΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

3.1. Οι ρητοί αριθμοί και οι αναπαραστάσεις τους

1. α) $5\frac{1}{4}$ **β)** 8 **γ)** $-2\frac{3}{6}$ **δ)** $-6\frac{1}{3}$

2. α) 43 = 5 × 8 + 3 άρα εκφράζει το $\frac{43}{5} = 8\frac{3}{5}$ ή το $\frac{43}{8} = 5\frac{3}{8}$

β) 87 = 12 × 7 + 3 άρα εκφράζει το $\frac{87}{12} = 7\frac{3}{12}$ ή το $\frac{87}{7} = 12\frac{3}{7}$

γ) 80 = 9 × 8 + 8 άρα εκφράζει το $\frac{80}{9} = 8\frac{8}{9}$ ή το 10.

3. α) $\frac{23}{4}$ **β)** $\frac{37}{5}$ **γ)** $-\frac{11}{6}$ **δ)** $-\frac{55}{7}$

4. α) $\frac{25}{100}$ **β)** $\frac{3125}{1000}$ **γ)** $-\frac{5175}{1000}$

5. α) 6,25 **β)** –0,8 **γ)** 3,318...= $3,3\overline{18}$

6. Θα είναι το πενταπλάσιο του ακέραιου

7. Αν $\frac{\boxed{\mu}}{3} = \boxed{\nu}\,\frac{2}{3}$ θα είναι μ = 3 · ν + 2

8. $\frac{11}{5}, \frac{22}{5}, \frac{33}{5}, \frac{44}{5}$

9. $\frac{35}{4} = 8\frac{3}{4}$ ή $\frac{35}{8} = 4\frac{3}{8}$

3.2. Η διάταξη των ρητών αριθμών

1. Κόκκινο $\frac{4}{10}$, μπλε $\frac{1}{10}$, κίτρινο $\frac{3}{10}$, πράσινο $\frac{2}{10}$.

2. α) $\frac{6}{10}, \frac{-7}{10}$ **β)** $\frac{25}{30}, \frac{26}{30}$ **γ)** $\frac{-5}{20}, \frac{-15}{20}$ **δ)** $\frac{-55}{30}, \frac{54}{30}$

3. $-\frac{5}{2} < -2,3 < -\frac{7}{4} < \frac{3}{2} < 5,34 < 5,3434... < \frac{19}{3} \cdot \frac{5}{2}$, 2, 3, $\frac{7}{4}$, $\frac{3}{2}$, 5, 34, 5, 3434..., $\frac{19}{3}$. Τη μικρότερη α.τ. το $\frac{3}{2}$ και τη μεγαλύτερη α.τ. το $\frac{19}{3}$.

4. α) $\frac{3}{5} > -\frac{2}{3}$ **β)** $\frac{6}{5} > \frac{5}{6}$ **γ)** $-\frac{7}{11} > -\frac{13}{9}$ **δ)** $\frac{1}{5} > -\frac{2}{10}$

5. $\frac{1}{2} = 0,5$, $\frac{1}{3} = 0,\overline{3}$, $\frac{1}{4} = 0,25$, $\frac{1}{5} = 0,2$, $\frac{1}{6} = 0,1\overline{6}$, $\frac{1}{7} = 0,1428...$, $\frac{1}{8} = 0,125$, $\frac{1}{9} = 0,\overline{1}$

6. 1,75 ή –1,75

7. $\frac{5}{4}$ ή $-\frac{5}{4}$

8. α) $\frac{3}{7} < \frac{7}{14} < \frac{4}{7}$ **β)** $-1{,}875 < -1{,}80 < -\frac{7}{4}$ **γ)** $\frac{1}{4} < \frac{7}{24} < \frac{1}{3}$
δ) $-1{,}76 < -1{,}755 < -1{,}75$t

9. $-0{,}9 < -0{,}8 < -0{,}7 < -0{,}6 < -0{,}5 < -0{,}4 < -0{,}3 < -0{,}2 < -0{,}1 < 0$
και $0 < 0, 1 < 0, 2 < 0, 3 < 0, 4 < 0, 5 < 0, 6 < 0, 7 < 0, 8 < 0, 9$

10. 199

11. Το απορρυπαντικό σε σκόνη είναι φθηνότερο

3.3.1.-3.3.2. Πράξεις με ρητούς – Πρόσθεση – Αφαίρεση

1. α) 22 **β)** –11,97 **γ)** 14,11 **δ)** –25,02

2. α) 21 **β)** –2,07 **γ)** –5,49 **δ)** –14,92 **ε)** 1,68 **στ)** 11,7
ζ) –2,64 **η)** –16,95

3. α) $\frac{9}{6}$ **β)** $\frac{1}{6}$ **γ)** $-\frac{3}{8}$ **δ)** $\frac{1}{6}$ **ε)** $-\frac{1}{6}$ **στ)** $-\frac{9}{2}$

4. α) –1,1 **β)** 7,5 **γ)** 1,1 **δ)** –7,5 **ε)** 3,9 **στ)** –6,5 **ζ)** –3,9 **η)** 6,5

5. α) –2,31 **β)** 2,34 **γ)** $-\frac{3}{4}$ **δ)** $+\frac{7}{5}$

6. Η πρώτη στήλη: 1,34, –1,34, 1,34, 1,34, 1,34.

7. α) 8,55 **β)** 18 **γ)** –3,39 **δ)** 4,96

8. α) 0 **β)** –14,31 **γ)** 22,34 **δ)** 1,51

9. α) 7,15 **β)** 0,85 **γ)** –4,65 **δ)** –7,15

10. α) $\frac{5}{3}$ **β)** $-\frac{117}{24}$ **γ)** $\frac{1}{12}$ **δ)** $\frac{41}{24}$

11. Υπόλοιπα: 4515,09, 4468,09, 4417,09, 4414,89, 4408,33

3.3.3.-3.3.4. Πράξεις με ρητούς – Πολλαπλασιασμός – Δύναμη

1. α) $\left(+\frac{2}{3}\right) > \left(+\frac{2}{3}\right)^2$ **β)** $\left(-\frac{2}{3}\right) < \left(-\frac{2}{3}\right)^3$ **γ)** $\left(+\frac{3}{2}\right) < \left(+\frac{3}{2}\right)^2$

δ) $\left(-\frac{3}{2}\right) > \left(-\frac{3}{2}\right)^3$

2. α) $+1{,}1 < (+1{,}1)^2 < (+1{,}1)^3$ **β)** $-0{,}3 < (-0{,}3)^3 < (-0{,}3)^2$
γ) $(-1{,}2) < (-0{,}2)^3 < 0 < (-0{,}2)^4 < (-1{,}2)^2$ **δ)** $(-1{,}2) < 0 < (+1{,}2)^3 < (-1{,}2)^4$

3. α) $(-1{,}4)^2 = 1{,}96$και $-1{,}4^2 = -1{,}96$ **β)** $(-1{,}1)^3 = -1{,}331$
και $(-1{,}1)^3 = -1{,}331$

4. α) 3333,3 κιλά **β)** Δύο. π.χ 1η διαδρομή 1500 τούβλα και 1000 τη 2η ή 1278 και 1222, κ.ά.

5. 5°F = –15°C. –2°C = 28,4°F. Αντιλαμβάνονται ότι στις ΗΠΑ κάνει περισσότερο κρύο από την Ελλάδα.

6. 3,58 m **7.** 14 **8.** $\frac{1}{16}$ **9.** 12 χρόνια **10.** 62,83

3.3.5. Πράξεις με ρητούς – Διαίρεση

1. α) $\frac{4}{5}$ **β)** $\frac{3}{2}$ **γ)** $-\frac{5}{2}$ **δ)** $\frac{3}{10}$ **ε)** $-\frac{3}{14}$

στ) $-\frac{25}{2}$ **ζ)** $\frac{12}{15}$ **η)** $-\frac{29}{96}$ **θ)** $-\frac{3}{7}$

2. $7{,}\overline{3}$ **3.** 60 **4.** $\frac{65}{78}$ **5.** 11,3 **6.** Ο κάθε φίλος της πήρε 2 φακέλους, το $\frac{1}{6}$ της δωδεκάδας.

3.4.1. Αριθμητικές παραστάσεις και εφαρμογές τους – Προτεραιότητα των πράξεων

1. α) –27 **β)** $-\frac{57}{7}$

2. α) 0,56 **β)** –3,85 **γ)** 1,96 **δ)** 0,81

3. α) Οι θερμοκρασίες: –1, +11, +6, +11, +16, +5, +9, –8 **β)** –7
γ) (–8)–(–1)= –7

3.4.2. Αριθμητικές παραστάσεις και εφαρμογές τους – Τυποποιημένη μορφή μικρών και μεγάλων αριθμών

1. α) $1{,}234 \cdot 10^9$ **β)** $3{,}45 \cdot 10^9$ **γ)** $6{,}58 \cdot 10^{10}$

2. α) 232400000000 **β)** $1324\underbrace{0\cdots0}_{15}$ **γ)** $0{,}\underbrace{0\cdots0}_{14}15423$

3. Απόσταση Γης – Ηλίου $1{,}496 \cdot 10^{11}$ m και απόσταση Γης – Σελήνης $3{,}844 \cdot 10^8$ m

3.4.3. Αριθμητικές παραστάσεις και εφαρμογές τους – Εφαρμογή των ρητών σε προβλήματα

1. Τα 320 γραμ. περιέχουν 822,9 kcal, 44,19 γραμμ. λίπους, 65,52 γραμμ. υδατάνθρακες και 38,10 γραμμάρια πρωτεΐνης.

2. 304,55 γραμμάρια

3. 33,33%

4. 21600 €

5. α) $\frac{12}{15}$ **β)** 4300 κιλά

6. Δωμάτιο 0,07 × 0,084 και **α)** Γραφείο 0,016 × 0,026
β) κρεβάτι 0,038 × 0,024 **γ)** Βιβλιοθήκη 0,028 × 0,013

7. α) Ο Αρης 33,3%, ο Πάνος 26,7% και ο Νίκος 40%
β) Ο Αρης 674,32 €, ο Πάνος 540,68 € και ο Νίκος 810 € **γ)** 45 €

8. 2,4 ώρες

9. 5,25 ημέρες

10. 37,5 ώρες

11. Τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα. Οι αριθμοί που λείπουν: 480, 720

Επαναληπτικές ασκήσεις και προβλήματα

1. Αποστάσεις αντίστοιχα σε Km: $6 \cdot 10^7$, 10^8 , $1{,}5 \cdot 10^8$, $2\ 2 \cdot 10^8$, $7{,}8 \cdot 10^8$, $1{,}42 \cdot 10^9$, $2{,}87 \cdot 10^9$, $4{,}5 \cdot 10^9$

2. Το $\frac{1}{24}$ του στίβου

3. Έδωσε στον γείτονά του 540 κιλά λαδιού. Του έμειναν 2160 κιλά λάδι.

4. 7,73 € το κιλό.

5. Εξοφλήθηκε σε 4 χρόνια. Την τελευταία χρονιά πλήρωσε 2279,10€, το δάνειο του κόστισε 1279,10€.

6. α) 246 **β)** 254,065

7. 437,5 €

8. α) Για το (α) τετράγωνο: Η Α είναι τα $\frac{5}{16}$, η Γ τα $\frac{5}{16}$, η Β τα $\frac{3}{16}$ του τετραγώνου και το ίδιο για την Δ. Όμοια το β) και γ)

9. 14

10. 1260

• ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 • ΚΑΝΟΝΙΚΟΤΗΤΕΣ

4.1. Αριθμητικές κανονικότητες

1. α) α=7·ν. $10^{ος}$ όρος: 70, $52^{ος}$ όρος: 364.
β) α=(–3)·ν. $10^{ος}$ όρος: –30, 52ος όρος: –156.
γ) $α = \frac{ν}{ν+1}$. $10^{ος}$ όρος: $\frac{10}{11}$, $52^{ος}$ όρος: $\frac{52}{53}$

2. Οι πρώτοι όροι: **α)** 2 **β)** –3 **γ)** 3 **δ)** $\frac{1}{2}$. Όμοια οι υπόλοιποι

3. Προσθέτουμε στον εικοστό όρο, τον αριθμό 21.

4. α) 1η ημ. 5, 2η ημ. 10. Όμοια οι υπόλοιπες
β) α = 5ν
γ) 12

5. α) α = 6ν **β)** 20,

4.2. Αναπαράσταση μιας κανονικότητας

1. α) β) γ) 1600 €

2. α) Οι τρεις πρώτοι όροι: 9, 18, 27 **β)** 54 **γ)** α = 9ν

3. α) Οι τρεις πρώτες στήλες του πίνακα: 1,5, 3, 4,5 **β)** α = 1,5·ν **γ)** Βλ. εφ. 1, 2 **δ)** 11, 14 αντίστοιχα

4. α) Οι πρώτες 3 στήλες

Κανάτες	1	2	3
Ύψος νερού	2,25	4,5	6,75

β) α = 2,25·ν

γ) 12 κανάτες, Ναι

5. α) Οι πρώτες 3 αυξήσεις:

Όροφος	$1^{ος}$	$2^{ος}$	$3^{ος}$
Αυξήσεις	100	200	300

β) $α_ν = 100ν$, ν=1, 2, 3, ...

γ) 2700€

6. α) 8, 16, 24, ... **β)** Η περίμετρος του κάθε επόμενου τετραγώνου προκύπτει αν στην περίμετρο του προηγούμενου προσθέσουμε 8. **γ)** α = 8·ν **δ)** Βλ. εφ 1,2 **ε)** 1680

Επαναληπτικές ασκήσεις και προβλήματα

1. α) Έχει ως πρώτο όρο το 2/1 και ο επόμενος όρος είναι το κλάσμα με αριθμητή τον αριθμητή του προηγουμένου αυξημένου κατά 1 και παρονομαστή τον αριθμητή του προηγουμένου. Γεν.

όρος $\boldsymbol{α_ν = \frac{ν+1}{ν}}$ από όπου κατασκ. τον πίνακα (Βλ. εφ. 1).

Τέλος $\boldsymbol{α_{10} = \frac{11}{10}}$ και $\boldsymbol{α_{52} = \frac{53}{52}}$. **β)** Έχει ως πρώτο όρο το 1,3 και οι επόμενοι είναι τα πολλαπλάσιά του. Γεν. όρος $α_ν = 1,3 \cdot ν$. Για τον πίνακα βλ. εφ. 1. Τέλος $α_{10} = 13$ και $α_{52} = 67,6$.

2. α) Οι πίνακες έχουν τα πολλαπλάσια των πρώτων όρων **β)** Για την Μαρία $\boldsymbol{α_ν = 4,2 \cdot ν}$ και για την Νάγια $\boldsymbol{α_μ = 2,75 \cdot μ}$ **γ)** Η Μαρία διάνυσε 58,8 Km και η Νάγια 57,75 Km

3. Η κανονικότητα έχει δομικό στοιχείο τον πρώτο όρο. **α)** Τα πολλαπλάσια του 3. **β)** $α_ν = 3 \cdot ν$

4. Το δομικό στοιχείο είναι το 1/3 του 3ου όρου. **α)** Πολλαπλάσια του 4 .

5. α) Ο επόμενος όρος διαφέρει κατά 12 από τον προηγούμενο **β)** 360 και 444 sec αντίστοιχα **γ)** 88,2 λεπτά.

6. α) Μελετάμε το διάγραμμα **β)** $α_n = \frac{n}{4}$ **γ)** –1, –0,5 και –3

7. α) Έχουμε τα πολλαπλάσια του 60 **β)** Όπως εφ. 2 **γ)** $α_ν = 60 \cdot ν$ **δ)** 15360 €.

8. α) Σχεδιάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο **β)** Έχουμε τα πολλαπλάσια του 3 **γ)** $α_ν = 3 \cdot ν$ **δ)** $α_{11} = 33$ και $α_{23} = 69$ cm

9. α) Ο κανόνας είναι: προσθέτω 32 σε κάθε σειρά **β)** 25 **γ)** 680 + 32 · 25 = 1480 **δ)** Χρησιμοποίησε το κόλπο του Gauss (σελ.100), 28080

• ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 • ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

5.1. Αλγεβρικές παραστάσεις και τα στοιχεία τους

1. α) x + 7 **β)** –x–2 **γ)** 5x

2. α) y –3 **β)** y + 2 **γ)** 3y +1

3. α) Ένας αριθμός μειωμένος κατά 1 **β)** Όμοια (Βλ. και εφ. 2) **γ)** Όμοια (Βλ. και εφ. 2)

4. α) Ένας αριθμός αυξημένος κατά 1 **β)** Όμοια **γ)** Όμοια (Βλ. και ασκ. 3)

5. α) β) Βλ. εφ. 3 **γ)** Μετ.: β, συντ.: 10, σ. ο.: 8, όροι.: 10β, 8

6. 0δ + 12 = 12 , 3x – 9 , –7ω + 6

7. Αριθμητική

8. α) Όμοιοι είναι τα ζεύγη: 1,2x, –3,8x, –4y, 2y και 5, –1,5 **β)** Όμοιοι είναι τα ζεύγη: x, 2x, 1,4β, –3β και 2, –7,5

5.2. Αριθμητικές και αλγεβρικές παραστάσεις

1. Περίμετρος: 4α, εμβαδό: $α^2$

2. 3α

3. 2α + β

4. α, α +1, α + 2 . Άθροισμα: 3α + 3

5. α) 4α + 20 **β)** Ε = (α + 10)· α

6. Ο μεγαλύτερος θα εισπράξει $\frac{1}{2}α$, ο μεσαίος $\frac{1}{3}α$ και ο μικρότερος $α - \frac{1}{2}α - \frac{1}{3}α$

7. α) 5 · 3 + 2 · 5 **β)** 25 € **γ)** 25ν

8. α) «Ποιο το εμβαδό ορθογωνίου παραλληλογράμμου με μήκος 3 m και πλάτος 2 m;» 6 m^2 **β) γ)** Όμοια

9. α) «Έστω ακέραιος αριθμός x . Ποιος ο επόμενός του ακέραιος;» **β)** Όμοια.

10. «Μια δεξαμενή έχει ήδη 4 m^3 νερού. Επιπλέον δέχεται την ίδια περίπου ποσότητα νερού κάθε μέρα για μια βροχερή εβδομάδα. Πόσο νερό θα έχει στο τέλος της εβδομάδας;».

11. «Η περίμετρος ενός τετραγώνου είναι 4·5=20.»

12. «Η μητέρα της Άννας της δίνει από Δευτέρα έως Πέμπτη το ίδιο ποσό. Την Παρασκευή της δίνει ένα άλλο μεγαλύτερο ποσό για να μπορέσει το απόγευμα να βγει με τις φίλες και τους φίλους της. Ποιο το συνολικό ποσό;»

13. «Τα χρόνια μου είναι τετραπλάσια από τα δικά σου»

14. «Η περίμετρος ενός ισοπλεύρου τριγώνου που η πλευρά του αυξήθηκε κατά δύο.»

15. «Στο τριπλάσιο ενός αριθμού που τον ελαττώσαμε κατά δύο, προσθέσαμε το διπλάσιό του.»

5.3. Αριθμητική τιμή και απλοποίηση των αλγεβρικών παραστάσεων

1. α) 12 **β)** –6, **γ)** 25

2. α) –8 **β)** 4 **γ)** –10

3. 1) α) 15 **β)** 0 **γ)** 67 **2) α)** –0,6 **β)** 23,4 **γ)** –31,8

4. 0 **5.** –84 **6.** 7/4

7.

Πίνακας τιμών των παραστάσεων Β και Γ.							
x	–2	–1	0	1	2	3	4
Β	3	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	–3	$-\frac{9}{2}$	–6
Γ	–2,4	–1,2	0	1,2	2,4	3,6	4,8

8. (α)↔ (iv), (β)↔ (iii), (γ)↔ (ii), (δ)↔ (v), (ε)↔ (i)

9. α) 240 **β)** 780 **γ)** 984 **δ)** 1530 **ε)** 672

10. α) 13α **β)** –7α–1 **γ)** 10α–7

11. α) 11x **β)** 26z – 40 **γ)** 3x – 6 **δ)** $\frac{7}{6} + x$

12. α) 19α – 46β + 6 **β)** 28α – 60β – 12

13. α) –65 **β)** 32

14. α) 140,7 **β)** –81,3

15. α) 223,07 **β)** 410,691

16. 20, 24, 44 m^2 αντίστοιχα. Το άθροισμα των δύο πρώτων δίνει το τρίτο από την επιμεριστική ιδιότητα.

17. Το εμβαδό της χρωματισμένης περιοχής δίνεται από την αλγεβρική παράσταση αβ–αγ. Θα μπορούσαμε να περιστρέψουμε το μικρό ορθογώνιο κατά 90^0 .

18. α) 4500 **β)** 270 **γ)** –1600 **δ)** 70 **ε)** $\frac{4}{7}$ **στ)** –6

19. α) Εφαρμόστε την α(κ + λ), με κ = β και λ = γ + δ. **β)** Θεωρήστε ορθογώνια με πλευρές, α και β, α και γ, α και δ και να τα ενώσετε.

Επαναληπτικές ασκήσεις και προβλήματα

1. α) $2α + 11$ **β)** Αν κ τα κορίτσια, η τάξη έχει $2κ – 3$
γ) $4α + 8$ **δ)** $4x – 5$ **ε)** Η ηλικία του πατέρα $s = 3t$ και του γιου $t = s/3$ **στ)** $x – 3 , x – 1 , x + 1 , x + 3$ **ζ)** $2x + 4y$ **η)** $2ω + 30$

2. Αρχικά απλοποιούμε και στη συνέχεια εκφράζουμε λεκτικά. α) «Το πενταπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 10». Όμοια οι υπόλοιπες

3. α) –7 **β)** 20 **γ)** 54 **δ)** 0 **ε)** –15 **στ)** 20

4. α) 12 **β)** 5 **γ)**5 **δ)** –8 **ε)** –82

5. α) $3β – 9 = –21$ **β)** $7β – 4 = –32$ **γ)** $12β + 37 = –11$

6. α) $20α + 9β + 6 = 15{,}35$ **β)** $11α + 18β + 6 = 19{,}7$

7.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΙΜΩΝ ΤΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ Α					
α	–4	–2	0	2	4
Α	4	8	12	16	20

8. α) $4x + 2y + 6z$ **β)** 18,4 €

9. α) $6x + 3$ **β)** $5x – 7$ **γ)** $8 – 2x$ **δ)** $74 – 12y$

• ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 • ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

6.1. Αλγεβρικές σχέσεις – ορισμοί και ιδιότητες

1. α) $–4 –x = 18$ **β)** $x \cdot (–15) = 90$ **γ)** $2x –6 = 20$ **δ)** $x – 18 = 11$
ε) $x + 19 = 41$

2. α) 5 **β)** 3, 7 **γ)** –3 **δ)** 2

3.

x – 7	7 – x	x = – 7	Κανένα
β, γ, ζ, η	α, ε, ιβ	στ,	δ, ια

6.2. Ισοδύναμες εξισώσεις

1. α) $3x = 22$ **β)** $–4x = 0$ **γ)** $4x = 20$

2. α) $\frac{15}{5}x = \frac{201}{20}$ **β)** $1{,}1x = 12{,}4$ **γ)** $0{,}1x = 0{,}3$

3. α) $x = 2$ **β)** $x = –\frac{5}{3}$ **γ)** $x = \frac{12}{5}$

4. α) $x = 6$ **β)** $x = –\frac{5}{4}$ **γ)** $x = 0.5$

5. α) $24x = 11$ **β)** $1{,}1x = 7{,} 24$ **γ)** $–5{,}2x = –10{,}1$

6. α) $x = \frac{48}{5}$ **β)** $x = –\frac{21}{60}$ **γ)** $x = \frac{12}{53}$ **δ)** $x = –1{,}92$

6.3. Λύση εξισώσεων

1. α) 5 **β)** –4 **γ)** 12 δ) 3
2. α) 3 **β)** 1 **γ)** +1
3. α) 0,5 **β)** –1 **γ)** 2
4. **α)** 4 **β)** 8,75 **γ)** 5
5. α) $\frac{1}{3}$ **β)** Ταυτότητα **γ)** Αδύνατη
6. α) 13/7 **β)** 0 **γ)** 16/9
7. α) 3/4 **β)** 0 **γ)** Αδύνατη

6.4. Προβλήματα εξισώσεων

1. 9,6
2. 120
3. 120 παιδιά και 30 γονείς
4. 1
5. –5
6. 8
7. 35
8. Να ανοίξετε την εφαρμογή
9. Να ανοίξετε την εφαρμογή
10. 8500 εισιτήρια των 5€, 17000 εισιτήρια των 8€ και 23000 εισιτήρια των 20€
11. 114 μικρά φλιτζάνια καφέ, 342 μεσαία φλιτζάνια και 202 μεγάλα φλιτζάνια καφέ
12. α) 35 **β)** 25
13. 30, 30, 120
14. Να ανοίξετε την εφαρμογή
15. Να ανοίξετε την εφαρμογή
16. Να ανοίξετε την εφαρμογή
17. Να ανοίξετε την εφαρμογή
18. 65, 70 μοίρες
19. Βλ. εφ. 4
20. «Η μαμά της Ναταλίας της έδωσε ένα ποσό για την έξοδό της. Η γιαγιά της έδωσε το ίδιο ποσό και ο μπαμπάς της 5 €. Αν τελικά έχει 25€ πόσα της έδωσε η μαμά και η γιαγιά;» για την εξίσωση $2x + 5 = 25$. Όμοια τα υπόλοιπα.
21. «Τα μήλα κοστίζουν 1,8 € το κιλό και τα πορτοκάλια 0,85 € το κιλό. Αν έχω στη διάθεσή μου 20 € και θέλω να αγοράσω 5 κιλά μήλα, πόσα κιλά πορτοκάλια μπορώ να αγοράσω;»

Επαναληπτικές ασκήσεις και προβλήματα

1. 2
2. 7, 14
3. 120, 60 μοίρες
4. 45 μοίρες
5. 37 €
6. 125 €
7. Μισή ώρα
8. Μοιράστηκαν 600 € και πήραν: ο πρώτος 200 €, ο δεύτερος 150 €, ο τρίτος 120 € και τους έμειναν 130 €
9. –26/3, –58/3,
10. 170,84
11. Ο δεύτερος έβαλε 60000€. Ο πρώτος 72000€
12. Την πρώτη χρονιά 18400 € και την δεύτερη 19320 €
13. Θα συναντηθούν σε 57 λεπτά περίπου, 15,2 χιλιόμετρα από την πόλη Α
14. 800 €, 400 € και 800 € αντίστοιχα
15. 15 κιλά χόρτα

• ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 • ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

1.1. Σημείο, Ευθεία, Ημιευθεία, Ευθύγραμμο τμήμα

1. Ορίζονται 6 ημιευθείες. Ζεύγη αντικείμενων ημιευθειών, Αχ και Αψ, Βχ και Βψ και Γχ και Γψ
2. Ευθ. τμήματα, ΕΒ, ΕΔ, ΕΓ, ΕΑ. Ημιευθείες ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ
3. Ευθείες: ΑΓ,ΒΔ. Ημιευθείες:ΑΒ, ΑΓ, ΒΔ. Τμήματα: ΒΕ, ΓΑ, ΓΔ, ΔΕ
5. Το Ε είναι μέσο του τμήματος ΔΒ διότι ΔΕ = ΕΒ = 3 μονάδες. Το Δ είναι μέσον του ΑΒ διότι ΑΔ = ΔΒ = 6 μονάδες
7. Γ το μέσον του ΑΒ και Δ το μέσον του ΓΒ. Τότε ΑΒ = 2ΓΒ, ΓΒ = 2ΓΔ. Άρα ΑΒ = 4 ΓΔ και ΓΔ = ΔΒ.
8. Τα τμήματα ΑΔ και ΜΝ είναι ίσα.
9. Μπορείς με τους δρομείς να παρακολουθήσεις τη διαδικασία της σχεδίασης και την ταύτιση των ευθ. τμημάτων ΑΒ και ΔΕ.
10. Αναμένεται να βρεθούν 11 συνδέσεις στην 1η κατηγορία και 25 συνδέσεις στην δεύτερη κατηγορία.

1.2. Γωνίες

1. Οξείες γωνίες: $Γ\hat{Α}Β$, $Ε\hat{Β}Θ$, $Η\hat{Γ}Ι$, $Α\hat{Γ}Ζ$. Αμβλείες γωνίες: $Α\hat{Γ}Η$, $Η\hat{Γ}Ζ$, $Ε\hat{Β}Α$, $Ζ\hat{Γ}Ι$. Ορθή γωνία: $Ε\hat{Β}Δ$
2. Η $χ\hat{Ο}ψ$είναι 90°. Άρα η $χ\hat{Ο}δ$ είναι 45°. Η ευθεία γωνία αποτελείται από δύο ορθές άρα από τέσσερις γωνίες $χ\hat{Ο}δ$.

3. **i.** Οι γωνίες του ισοσκελούς τριγώνου είναι οι $A\hat{B}\Gamma$, $A\hat{\Gamma}B$ και $B\hat{A}\Gamma$. Οι γωνίες $A\hat{B}\Gamma$, $A\hat{\Gamma}B$ είναι ίσες. **ii.** Η εξωτερική γωνίαι $B\hat{A}\Gamma$.

4. Αιτιολόγηση: Επειδή οι δύο γωνίες έχουν άθροισμα 180^o, οποιοιδήποτε αριθμοί έχουν άθροισμα μπορεί να είναι μέτρα των δύο αυτών γωνιών.

5. Οι δύο γωνίες έχουν άθροισμα την ορθή γωνία που έχει μέτρο 90^o. Άρα οποιαδήποτε μέτρα έχουν άθροισμα 90^o μπορεί να είναι μέτρα των δύο αυτών γωνιών.

6. Δύο ζεύγη κατακορυφήν γωνιών: $A\hat{\Theta}Z$, $B\hat{\Theta}H$ και $\Gamma\hat{H}E$, $I\hat{H}\Theta$. Δύο ζεύγη παραπληρωματικών γωνιών: $A\hat{\Theta}H$,$H\hat{\Theta}B$ και $\Gamma\hat{H}E$, $E\hat{H}I$. Ένα ζεύγος συμπληρωματικών γωνιών: $\Theta\hat{H}B$, $B\hat{H}I$.

7. $E\hat{\Gamma}\Delta$ = οξεία γωνία, $\Gamma\hat{E}H$ = αμβλεία γωνία, $\Delta\hat{E}H$ = ευθεία γωνία, $E\hat{\Delta}Z$ = περίπου ορθή γωνία, γωνία με κορυφή το Γ = πλήρης γωνία και $\hat{\alpha}$ = μη κυρτή γωνία

8. Με την βοήθεια μοιρογνωμονίου ή άλλου τρόπου οι γωνίες ταξινομούνται ως εξής: $\hat{\alpha} < \hat{\beta} < \hat{\delta} < \hat{\varepsilon} < \hat{\gamma}$

1.3. Μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος – Διχοτόμος γωνίας

2. Κατασκευάζουμε την μεσοκάθετο του ΚΛ. Το σημείο τομής της με την ΑΒ είναι το ζητούμενο σημείο.

3. Χρειάζονται μόνο δύο μεσοκάθετοι, π.χ. των ΑΒ και ΑΓ

4. Οι γωνίες $B\hat{A}M$ και $\Gamma\hat{A}M$είναι ίσες διότι η ΑΜ είναι διχοτόμος. Άρα $\Gamma\hat{A}M+\hat{\beta}=B\hat{A}M+\hat{\alpha}$. Άρα η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{A}E$.

5. Ο τερματοφύλακας πρέπει να σταθεί σε σημείο της διχοτόμου της γωνίας.

6. Να κατασκευάσετε τις διχοτόμους δύο γωνιών του.

7. Αρκεί να σχεδιάσουμε την κάθετη από το σημείο Μ (θέση του Μάριου) στην ευθεία ΒΑ.

8. Να προεκτείνετε τους τρεις αυτοκινητόδρομους και στη συνέχεια να κατασκευάσετε ένα σημείο που να ισαπέχει από τις τρεις πλευρές του τριγώνου που θα δημιουργηθεί.

1.4. Σχετικές θέσεις ευθειών / Γωνίες παραλλήλων με τέμνουσα

1. Με την βοήθεια του γνώμονα σχεδιάζουμε δύο ευθείες κάθετες στο ΑΒ στα Α και Β. Αυτές είναι παράλληλες ως κάθετες στην ίδια ευθεία

4. Οι γωνίες με κορυφή το σημείο Γ είναι παραπληρωματικές. Άρα $\Delta\hat{\Gamma}A = 180^o - 124^o = 56^o$. Οι ευθείες ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες διότι σχηματίζουν εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες ίσες.

5. Γωνία $\hat{\beta} = 68^o$ και $\hat{\gamma} = 68^o$.

6. Οι $\hat{A}_1$ και $\hat{B}_1$ είναι παραπληρωματικές. Οι $\hat{A}_2$ και $\hat{B}_1$ είναι ίσες. Είναι $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1$. Ομοίως οι $\hat{B}_1$ και $\hat{\Delta}_1$ είναι ίσες ως παραπληρωματικές της γωνίας $\hat{A}_1$.

Αυτοαξιολόγηση

1. Γ)
2. Β)
3. Β)
4. Εφεξής στο (δ)
5. ΝΑΙ, ΝΑΙ, ΝΑΙ
6. (δ)
7. Α) Σωστό
8. Β
9. Α.

Επαναληπτικά θέματα – Συνθετικές εργασίες

1. Πολλαπλασιάζουμε το πλήθος των σημείων επί (το πλήθος –1) και το γινόμενο διαιρούμε με 2 ή $\dfrac{\text{Πλήθος} \times (\text{Πλήθος} -1)}{2}$

2. Με τον γνώμονα επιβεβαιώνεται η καθετότητα. Ισχύει $AH \perp HE$, $\Gamma E \perp AE$, $IZ \perp HE$ και $KN \perp HE$. Η παραλληλία προκύπτει από τις κάθετες στην ίδια ευθεία πλευρές. Έτσι ΑΗ//ΚΝ //ΓΕ//ΙΖ. Ακόμα ΑΓ//ΗΕ.

3. Η ΕΗ, η αντικείμενη ημιευθεία της ΕΖ είναι και αυτή διχοτόμος, επειδή οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες. Άρα $\hat{\alpha} = \hat{\gamma}$ και $\hat{\beta} = \hat{\delta}$. Είναι $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ διότι η ΕΖ είναι διχοτόμος . Άρα και $\hat{\gamma} = \hat{\delta}$. Συνεπώς η ΕΗ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{E}\Gamma$.

4. $\hat{\beta} + 2\hat{\alpha} = 180^o$. Άρα $\hat{\alpha} = 30°$ και $\hat{\beta} = 120°$ και $\hat{\gamma} = 60^o$

5. $\hat{\beta} = 25^o$ και $\hat{\gamma} = 65^o$

6. $\hat{\beta} = 65^o$, $\hat{\gamma} = 65^o$, $\hat{\delta} = 65^o$ και $\hat{\varepsilon} = 62^o$

7. i. $\hat{\omega} + (180^o - 133^o) + (180^o - 123^o) = 180$. Άρα $\hat{\omega} = 76^o$
ii. $\Delta\hat{Z}B = 90^o + (180^o - 133^o) = 137^o$

8. $\hat{\alpha} = \hat{\beta} = \dfrac{119^o}{2} = 59{,}5^o$. Τότε $\hat{\varphi} = 180^o - 59{,}5^o = 120{,}5^o$

9. $B\hat{\Delta}\Gamma = \hat{\varphi} = 110^o$διότι ΑΓ//ΒΔ

10. Με το κορδόνι του θα ορίσει δύο σημεία που θα απέχουν ίσες αποστάσεις από τα άκρα Α και Β.

• ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 • ΤΡΙΓΩΝΑ

1.1. Τρίγωνα

1. $\hat{\Gamma} = 180^o - 112^o - 22^o = 46^o$

2. Όχι, διότι το άθροισμα των τριών γωνιών υπερβαίνει τις 180^o.

3. Η γωνία $\hat{A}$ πρέπει να είναι ίση με $180^o - 62^o - 44^o = 74^o$

4. Όχι, διότι το άθροισμά τους υπερβαίνει τις 180^o, που είναι το άθροισμα και των τριών γωνιών.

5. **(α).** $\hat{A} = 180^o - 34^o - 68^o = 78^o$. Άρα είναι οξυγώνιο και σκαληνό.
(β). $\hat{\Gamma} = 180^o - 18^o - 42^o = 120^o$. Άρα είναι αμβλυγώνιο και σκαληνό.
(γ). $\hat{B} = 180^o - 82^o - 18^o = 90^o$. Άρα είναι ορθογώνιο και σκαληνό.

6. $\hat{B} = 129^o - 86^o = 43^o$ και $\hat{\Gamma} = 180^o - 129^o = 51^o$.

8. Με τα γεωμετρικά όργανα διαπιστώνουμε ότι ΑΜ = ΒΜ = ΓΜ.

10. $A\hat{B}\Gamma = 42^o$ $A\hat{\Gamma}B = 180^o - 112^o = 68^o$ και $B\hat{A}\Gamma = 180^o - 68^o - 42^o = 70^o$.

11. $\hat{A} = 20^o$, $\hat{B} = 40^o$ και $\hat{\Gamma} = 120^o$. Άρα υπάρχει τέτοιο τρίγωνο καθώς το άθροισμα των γωνιών του είναι 180^o.

12. $\hat{B} = 90^o - 29^o = 61^o$. Η γωνία $\hat{A} = 180^o - 31^o - 61^o = 88^o$. Η ΑΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$. Άρα $\hat{\omega} = \hat{\varphi} = 44^o$

Αυτοαξιολόγηση

1. Σ **2.** Α και Δ **3.** Β, 4, Α, Δ **5.** Σ, **6.** Σ, **7.** Σ, **8.** Λ

Επαναληπτικά θέματα – Συνθετικές εργασίες

1. Ισχύει $\alpha + \alpha - 10^0 + \alpha + 16^0 = 180^0$. Άρα $\hat{\alpha} = \dfrac{174^o}{3} = 58^o$.
Άρα $\hat{A} = 58^o$, $\hat{B} = 58^o - 10^o = 48^o$ και $\hat{\Gamma} = 58^o + 16^o = 74^o$.

2. Ισχύει $\chi + \chi - 20^0 + 40^0 = 180^0$. Άρα $2\chi + 20^0 = 180^0$. Τότε $\chi = 80^0$. Τελικά $\hat{A} = 80^o - 20^o = 60^o$, $\hat{B} = 80^o$ και $\hat{\Gamma} = 40^o$.

3. $\hat{\alpha} = 70^o$. $B\hat{A}\Gamma = 60^o$. Άρα $\hat{\Gamma} = 180^o - 60^o - 70^o = 50^o$. Άρα $\Delta\hat{\Gamma}B = 25^o$. Τέλος $\hat{\beta} = 25^o + 70^o = 95^o$

4. Ισχύει ΑΔ = ΔΓ. Συνεπώς $3\alpha - 1 = 2\alpha + 4$ ή $3\alpha - 2\alpha = 5$ ή $\alpha = 5$.
$\hat{\omega} = 90^o - 25^o = 65^o$

5. $\Gamma\hat{I}\Delta=50^o$, $\Gamma\hat{\Delta}I=180^o-50^o-50^o=80^o$. $E\hat{I}Z = 50^o$. $E\hat{Z}I = 50^o$ $I\hat{E}Z=80^o$
$H\hat{Z}\Theta = 50^o$ $Z\hat{H}\Theta = 50^o$, $Z\hat{\Theta}H = 80^o$.

6. $\hat{\alpha}=120^o$. $\hat{\beta}=120^o - 80^o = 40^o$. $\hat{\gamma}=120^o-100^o=20^o$.

7. Ισχύει $\hat{A}+\hat{A}_{\varepsilon\xi}=180^o$. Άρα $\hat{A}+110^o=180^o$. Συνεπώς $\hat{A} = 70^o$

• ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 • ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

Ασκήσεις και προβλήματα

1. **(α)** Η $\hat{\omega} = 180^o - 143^o = 37^o$. **(β)** Η $\hat{\varphi} = 180^o - 72^o = 108^o$
(γ) $B\hat{A}\Delta = 180^o - 45^o = 135^o$. Η $\hat{\omega} = 135^o$

2. Ισχύει $\hat{\zeta} + \hat{\eta} = 180^o$. Επειδή $\hat{\zeta} = 2\hat{\eta}$ θα ισχύει $2\hat{\eta} + \hat{\eta} = 180^o$ ή $3\hat{\eta} = 180^o$ και άρα $\hat{\eta} = 60^o$. Άρα $\hat{\zeta} = 120^o$.

3. Είναι $\hat{\varphi}=49^o$. Η $E\hat{B}A=38^o$ ως εντός εναλλάξ με τη γωνία $\hat{\beta}$.
Τέλος $\boldsymbol{\hat{\omega}=180^o - 38^o - 49^o=93^o}$ διότι οι γωνίες του τριγώνου ΕΑΒ έχουν άθροισμα 180^o

4. Είναι $\hat{\alpha}=60^o$ και $\hat{\beta}=30^o$. Επίσης $A\hat{B}\Gamma=180^o - \hat{\alpha}=180^o - 60^o=120^o$
Άρα $\boldsymbol{A\hat{\Delta}\Gamma=120^o}$. Τέλος $A\hat{\Gamma}\Delta=30^o$

5. Το τετράπλευρο ΒΕΔΖ είναι παραλληλόγραμμο διότι οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες.

6. Τα τρίγωνα που ορίζει η διαγώνιος ΒΔ είναι ισόπλευρα. Τα τρίγωνα που ορίζει η διαγώνιος ΑΓ είναι ισοσκελή.

7. Οι δύο λύσεις.

8. Το τετράπλευρο ΔΕΒΔ είναι παραλληλόγραμμο.

Αυτοαξιολόγηση

1. Α, Γ, Δ, **2.** Β, **3.** Σ, **4.** Λ, **5.** Σ

Επαναληπτικά θέματα – Συνθετικές εργασίες

1. Έτσι έχουμε τα εξής: $\hat{B}=70^0$, $\hat{A}=2 \cdot 70^o - 30^o=110^o$

2. Οι εσωτερικές γωνίες έχουν άθροισμα 360^o. Άρα οι εξωτερικές γωνίες έχουν άθροισμα 360^o.

3. Κατασκευάσουμε ΑΓ = 4cm το μέσον του Ο, και μια ευθεία που να διέρχεται από το Ο. Σχεδιάσουμε κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα 3cm.

4. Τελικά οι $\hat{Z}$ και $O\hat{I}K$ είναι παραπληρωματικές.

5. Όπως στην εφαρμογή 5. Άρα το ΑΚΛΔ είναι ρόμβος.

6. Είναι $\hat{E}_1=\hat{A}_1$.Επίσης $\hat{A}_1=\hat{A}_2$. Άρα $\hat{A}_2=\hat{E}_1$.

• ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 • ΚΥΚΛΟΣ

Ασκήσεις και προβλήματα

1. Κατασκευάζουμε την μεσοκάθετο του τμήματος ΑΒ κλπ.

2. Αρκεί ο κύκλος να έχει ακτίνα μεγαλύτερη από το τμήμα ΑΒ και μικρότερη από το τμήμα ΑΓ.

3. Σχεδιάζουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ μήκους 4 cm κλπ.

4. Άρα τα τόξα ΑΓ και ΒΔ είναι ίσα.

5. Αρχικά σχεδιάζουμε την πλευρά ΒΓ = 5cm. Στη συνέχεια σχεδιάζουμε τον κύκλο (Β, 2cm) και τον κύκλο (Γ, 4cm). Τα σημεία τομής ορίζουν τα ζητούμενα τρίγωνα.

6. Κάθετη στην (ε) στο Α. Στην κάθετη το ΟΑ = 2cm

7. Τα τμήματα ΓΑ και ΓΒ είναι ίσα.

8. Κάθετη από το Α στην ΒΓ , Δ το σημείο τομής. κύκλο (Α, ΑΔ).

9. Η διάμετρος του (Γ, ΓΑ) είναι 2cm, του (Δ, ΔΓ) είναι 4cm,
του (Ε, ΕΔ) είναι 6cm και του (Β, ΒΕ) είναι 8cm. Η απόσταση ΒΚ είναι 1cm

Αυτοαξιολόγηση

1. Α, **2.** Δ, **3.** Γ, **4.** Σ **5.** Σ, **6.** Σ

Επαναληπτικά θέματα – Συνθετικές εργασίες

1. Οι επίκεντρες γωνίες που αντιστοιχούν στις πλευρές του τετραπλεύρου συμπληρώνουν μια πλήρη γωνία, δηλαδή 360^o. Τα τέσσερα τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΒΓ, ΟΓΔ και ΟΔΑ έχουν άθροισμα γωνιών $4 \cdot 180^o = 720^o$. Αφαιρώντας τις γωνίες με κορυφή το Ο έχουμε άθροισμα των υπόλοιπων γωνιών 360^0.

2. Τα 5 σημεία στον κύκλο κέντρου Ο ορίζουν 5 τρίγωνα που έχουν άθροισμα γωνιών $5 \cdot 180^o = 900^o$. Οι γωνίες με κορυφή το Ο έχουν άθροισμα 360^o. Άρα οι υπόλοιπες γωνίες έχουν άθροισμα $900^o - 360^o = 540^o$. Συνεπώς, το άθροισμα των γωνιών του πενταγώνου είναι ίσο με 540^o.

3. Οι δύο γωνίες $\Delta\hat{Z}\Gamma$ και $\Gamma\hat{A}\Delta$ είναι παραπληρωματικές διότι στο τετράπλευρο ΑΓΖΔ οι γωνίες του έχουν άθροισμα 360^o ενώ οι γωνίες $A\hat{\Gamma}Z$ και $A\hat{\Delta}Z$ είναι ορθές. Άρα οι γωνίες $\Delta\hat{Z}\Gamma$ και $\Gamma\hat{A}\Delta$ έχουν άθροισμα 180^o. Συνεπώς όταν μεγαλώνει το άνοιγμα της μιας θα μικραίνει το άνοιγμα της άλλης.

4. Η ΕΖ είναι χορδή του κύκλου (Ο, ΟΒ). Η ΟΔ είναι κάθετη στη χορδή. Άρα είναι μεσοκάθετος. Άρα ΕΔ = ΔΖ

5. Η γωνία με κορυφή το σημείο Μ είναι πάντοτε ορθή.

6. Με τον γνώμονα διαπιστώνουμε ότι οι γωνίες του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ είναι ορθές. Άρα το τετράπλευρο είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

• ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 • ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

Ασκήσεις και προβλήματα

2. Να κοιτάξετε την κατασκευή του συμμετρικού ευθυγράμμου τμήματος ως προς άξονα μια ευθεία.

3. Το συμμετρικό ενός σημείου Ν(α, β) ως προς άξονα την ευθεία που διέρχεται από σημεία Α(κ, κ) και Β(λ, λ) είναι το σημείο που έχει συντεταγμένες (β, α).

4. Στο ισόπλευρο τρίγωνο το ύψος του είναι άξονας συμμετρίας. Το ισόπλευρο τρίγωνο έχει τρία ύψη. Άρα έχει τρεις άξονες συμμετρίας.

5. Το ορθογώνιο έχει δύο άξονες συμμετρίας.

6. Στον ρόμβο ΑΒΓΔ κάθε διαγώνιος είναι μεσοκάθετος στην άλλη. Άρα η ΑΓ είναι άξονας συμμετρίας του ρόμβου ανάλογα η ΒΔ είναι επίσης άξονας συμμετρίας.

7. Το τετράπλευρο είναι ορθογώνιο. Οι άξονες χ΄χ και ψ΄ψ είναι άξονες συμμετρίας του ορθογωνίου.

8. Το τρίγωνο ΑΑΑ΄΄ είναι ορθογώνιο.

Αυτοαξιολόγηση

1. Γ, **2.** Β, **3.** Σ, **4.** Λ, **5.** Σ, **6.** Σ

Επαναληπτικά θέματα – Συνθετικές εργασίες

1. Α(–1,4): Συμμετρικό ως προς χ΄χ Α΄(–1, –4). Συμμετρικό του συμμετρικού ως προς ψ΄ψ Α΄΄(1, –4).
Β(2,8) –> Β΄(2, –8) –> Β΄΄(–2, –8)
Γ(6,–5) –> Γ΄(6, 5) –> Γ΄΄(–6, 5)
Δ(–3,–1) –> Δ΄(–3, 1) –> Δ΄΄(3,1)

2. Για να γίνουν οι άξονες χ΄χ και ψ΄ψ άξονες συμμετρίας του σχήματος υπάρχουν πολλές λύσεις. Μια λύση είναι η εξής: Το σημείο Α(2,7) να μεταφερθεί στο Α΄(0,7), το σημείο Γ(2, –1) στο Γ΄(0, –7), το Β(–1,3) στο Β΄(–5, 0) και το Δ(5,3) στο Δ΄(5, 0)

3. Το συμμετρικό του σημείου Γ είναι το Γ΄. Το συμμετρικό του Β είναι το ίδιο το Β. Το συμμετρικό του Δ είναι το ίδιο το Δ. Το συμμετρικό του Α είναι το Α΄. Το συμμετρικό του ΒΓ είναι το ΒΓ΄. Το συμμετρικό του ΔΓ είναι το ΔΓ΄. Άρα το συμμετρικό του τριγώνου ΔΒΓ είναι το ΔΒΓ΄. Το συμμετρικό του ΑΒ είναι το Α΄Β. Το συμμετρικό του ΑΔ είναι το Α΄Δ. Άρα το συμμετρικό του τριγώνου ΑΒΔ είναι το Α΄ΒΔ

4. Το συμμετρικό του σημείου Β είναι το Β΄. Το συμμετρικό του σημείου Α είναι το Α. Άρα το συμμετρικό της πλευράς ΑΒ είναι η πλευρά ΑΒ΄ και ισχύει ΑΒ = ΑΒ΄. Συνεπώς το τρίγωνο ΑΒΒ΄ είναι ισοσκελές. Το συμμετρικό του Γ είναι το Γ΄. Άρα το συμμετρικό της πλευράς ΑΓ είναι η ΑΓ΄ και ισχύει ΑΓ = ΑΓ΄. Άρα το τρίγωνο ΑΓΓ΄ είναι ισοσκελές.

5. Το συμμετρικό του σημείου Α είναι το Α΄. Το συμμετρικό του Β είναι το ίδιο το Β διότι ανήκει στον κύκλο (Α, 3cm) και στην εφαπτομένη (ε). Οι ακτίνες των δύο κύκλων είναι ίσες. Δηλαδή ΑΒ=Α΄Β. Η (ε) είναι κάθετη στην ΑΒ. Οι γωνίες με κορυφή το σημείο Β είναι ορθές. Άρα η γωνία είναι ευθεία. Δηλαδή τα σημεία Α, Β, Α΄ είναι συνευθειακά. Άρα η (ε) είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΑ΄.

6. Το συμμετρικό του Α είναι το Α΄. Το συμμετρικό του Β είναι το Β΄. Η ΑΑ΄ είναι κάθετη στην (ε). Η ΒΒ΄ είναι κάθετη στην (ε). Άρα ΑΑ΄// ΒΒ΄ ως κάθετες στην ίδια ευθεία (ε). Συνεπώς το τετράπλευρο ΑΒΒ΄Α΄ είναι τραπέζιο διότι έχει μόνο δύο απέναντι πλευρές παράλληλες. Το συμμετρικό του τμήματος ΑΒ είναι το Α΄Β΄. Τα συμμετρικά ευθύγραμμα τμήματα είναι ίσα. Άρα το τραπέζιο είναι ισοσκελές.

• ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 • ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΧΩΡΟΥ

Ασκήσεις και προβλήματα

1. Μια λύση είναι η εξής: Ο αριθμός 5 είναι απέναντι από το 2.
2. Έδρες = 8, ακμές = 18, κορυφές = 12
4. Οι ΑΖ και ΒΗ είναι κάθετες στην πλευρά ΑΒ. Άρα μεταξύ τους είναι παράλληλες. Ομοίως ΗΒ// ΓΘ, ΘΓ//ΙΔ, ΙΔ//ΚΕ, ΚΕ//ΑΖ. Το ΑΒΗΖ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Και επειδή οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες θα έχουμε ΑΒ=3 μονάδες.
5. Μπορούν να σχεδιαστούν συνολικά 6 πυραμίδες. Κάθε μια έχει κορυφή το σημείο Ο και βάση μια από τις έξι έδρες του πρίσματος. Συγκεκριμένα είναι οι πυραμίδες Ο.ΑΒΓΔ, Ο.ΑΒΖΕ, Ο.ΒΓΗΖ, Ο.ΓΔΘΗ, Ο.ΑΕΘΔ, Ο.ΕΖΗΘ
6. Το σχήμα είναι ανάπτυγμα τριγωνικού πρίσματος με βάσεις ισόπλευρα τρίγωνα πλευράς 2 μονάδων και παράπλευρες έδρες ορθογώνια με παράπλευρες ακμές μήκους 4 μονάδων

Ασκήσεις και προβλήματα

1. Αν περιστρέψουμε το ορθογώνιο ΑΒΓΔ γύρω από την ΑΒ θα προκύψει ένας κύλινδρος με ύψος ίσο με ΑΒ και ακτίνα κύκλου

$\rho=\frac{3}{6,28}\approx 0,5$. Αν περιστρέψουμε το ορθογώνιο γύρω από την ΑΔ

ο κύλινδρος θα έχει ύψος ίσο με ΑΔ και ακτίνα βάσης

$\rho=\frac{4}{6,28}\approx 0,64$ μονάδες.

2. Το ανάπτυγμα θα είναι ένα ορθογώνιο με διαστάσεις 2 μονάδες και $5 \cdot 6{,}28 = 31{,}4$ μονάδες και δύο κύκλοι με ακτίνα 5 μονάδες.
3. Το στερεό που θα προκύψει είναι κώνος με βάση κύκλο ακτίνας 4 μονάδων και ύψος 3 μονάδων.
4. Το ανάπτυγμα του κώνου θα είναι ένας κυκλικός τομέας με ακτίνα

ίση με 5 μονάδες και επίκεντρη γωνία ίση με $\frac{3 \cdot 360^\circ}{5}=126^\circ$.

Αυτοαξιολόγηση

1. Β **2.** Α **3.** Β **4.** Γ **5.** Β

Επαναληπτικά θέματα – Συνθετικές εργασίες

1. Είναι το (2) και θα προκύψει πυραμίδα με βάση τετράγωνο.
2. Το στερεό που θα προκύψει θα είναι ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με διαστάσεις της βάσης 4 μονάδες και 3 μονάδες και 2 μονάδες.
3. Η διάμετρος της σφαίρας είναι ίση με την ακμή του κύβου. Άρα η διάμετρος είναι ίση με 6 μονάδες. Συνεπώς η ακτίνα της είναι ίση με 3 μονάδες

• ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 • ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ

Ασκήσεις και προβλήματα

7.1 Μέτρηση μήκους

1. (ΑΒ) = 10cm και (ΑΔ) = 8cm.
2. (ΑΓ) = 2 (ΜΝ)
3. Η πλευρά του θα είναι ίση με 160cm : 4 = 40cm.
4. (ΑΒ) = 10cm, (ΒΓ) = 10 – 4 = 6cm και (ΑΓ) = 10 + 6 = 16cm
5. (ΒΓ) = 12cm και (ΑΒ) = 12 – 3 = 9cm
6. $\chi = 2$, $(ΑΒ) = 2 \cdot 2 + 2 = 6$ dm, $(ΒΓ) = 5 \cdot 2 - 1 = 9$ dm, (ΑΔ) = 9 dm και περίμετρος $= 6 \cdot 2 + 9 \cdot 2 = 12 + 18 = 30$dm
7. Είναι (ΔΕ) = 12 – 6 – 3 –1,5 = 1,5 και (ΒΓ) = 1,5cm.
8. (ΑΒ) = 21m, (ΒΓ) = (ΑΔ) = 30m και (ΔΓ) = 45m.
Περίμετρος = 126m = 1260dm = 12600cm.

7.2 Μέτρηση γωνιών

1. $\hat{\varepsilon}<\hat{\alpha}<\hat{\beta}<\hat{\gamma}<\hat{\delta}$, 2. $\hat{\omega}=120^\circ$.
3. Ισχύει $Α\hat{Ε}Β=180^\circ$, $Γ\hat{Ε}Α=180^\circ - 40^\circ - 30^\circ=120^\circ$, $Δ\hat{Ε}Β=40^\circ$ ως κατακορυφήν με την $Α\hat{Ε}Γ$. Άρα $Α\hat{Ε}Δ=180^\circ - 40^\circ=140^\circ$.
4. Ισχύει $\hat{\alpha}=50^\circ$.
6. Ισχύει $\hat{Β}=\hat{Γ}=45^\circ$ και $\hat{Α}=90^\circ$. Άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και ισοσκελές
7. Είναι $\hat{\beta}=60^\circ - 40^\circ=20^\circ$ και $\hat{\gamma}=60^\circ + 40^\circ=100^\circ$
8. $\overset{\frown}{ΑΒ} = 105^\circ$, $Γ\hat{Δ}=35^\circ$, $\hat{\delta}=360^\circ - 105^\circ - 70^\circ - 35^\circ=150^\circ$.

Η ΟΕ είναι διχοτόμος της $\hat{\delta}$. Άρα $Α\hat{Ε}=\frac{150^\circ}{2}=75^\circ$

Αυτοαξιολόγηση

1. Μέτρο ενός ευθυγράμμου τμήματος είναι το αποτέλεσμα της σύγκρισης με ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα.
2. Γ **3.** Β **4.** Δ **5.** Γ **6.** Α **7.** Α **8.** Λ **9.** Λ **10.** Σ

Επαναληπτικά θέματα – Συνθετικές εργασίες

1. Το άθροισμα των γωνιών όλων των τριγώνων θα είναι ίσο με $\nu \cdot 180^\circ$. Το άθροισμα των γωνιών που έχουν κορυφή το κέντρο του κύκλου θα είναι ίσο με 360°. Άρα το άθροισμα των γωνιών του πολυγώνου θα είναι ίσο με $\nu \cdot 180^\circ - 360^\circ$.
2. Κάθε εξωτερική γωνία είναι παραπληρωματική της αντίστοιχης εσωτερικής. Το άθροισμα των 5 εξωτερικών γωνιών είναι
$\hat{\eta}+\hat{\theta}+\hat{\iota}+\hat{\kappa}+\hat{\lambda}=5 \cdot 180^\circ-(\hat{Α}+\hat{Β}+\hat{Γ}+\hat{Δ}+\hat{Ε}) =$
$900^\circ - (5 \cdot 180^\circ - 360^\circ) = 360^\circ$
3. Οι τέσσερις γωνίες έχουν άθροισμα 360°.
Άρα $\alpha + 2\alpha + 3\alpha + 120^\circ=360^\circ$ ή $6\alpha=240^\circ$ και άρα $\alpha=40^\circ$.
4. Αν α και β είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου, η περίμετρος είναι ίση με 2α + 2β και η πλευρά του τετραγώνου θα είναι
$\frac{2\alpha + 2\beta}{4}$ ή $\frac{\alpha + \beta}{2}$.
5. Οι δύο διάμετροι ορίζουν 4 ισοσκελή τρίγωνα. Οι γωνίες της βάσης τους είναι ίσες. Οι γωνίες δύο διαδοχικών τριγώνων έχουν δύο ζεύγη ίσων γωνιών και άθροισμα 180°. Άρα οι δύο γωνίες της μιας κορυφής του είναι 90°.

• ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ
• ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 • ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

1. Στατιστική διαχείριση δεδομένων

1. **α)** Ποιος ο καλύτερος χρόνος του αγώνα δρόμου; **β)** Πόσοι αθλητές συμμετέχουν στον αγώνα δρόμου; **γ)** Ποια τα χρώματα του ψωμιού των burger; Όμοια οι υπόλοιπες
2. **α)** Λ **β)** Σ **γ)** Λ **δ)** Σ ε) Λ **στ)** Σ
3. Πόσα αδέλφια ψηλότερα από καθένα από εσάς έχετε; (ΔΠ) Αντίστοιχα οι υπόλοιπες
4. Ποιο το βάρος του καθενός σας; (ΣΠ) Αντίστοιχα οι υπόλ.
5. **α)** ΣΠ **β)** Κ **γ)** ΔΠ **δ)** Κ **ε)** ΣΠ
6. **α)** ΔΠ **β)** Κ **γ)** ΔΠ **δ)** ΣΠ **ε)** Κ
7. **α)** ΔΠ **β)** ΣΠ **γ)** ΔΠ **δ)** Κ **ε)** ΣΠ
8. **α)** ΣΠ **β)** ΔΠ **γ)** ΔΠ **δ)** ΣΠ **ε)** Κ
9. **α)** ΔΠ **β)** ΣΠ **γ)** ΔΠ **δ)** ΣΠ **ε)** Κ

2. Διαγράμματα

1. **α)** 220 **β)** Βλ. εφ. 1β
2. **α)** Περισσότερο δημ. «Καίσαρ» (35%). Λιγότερο δημ. «Τορτίγια» (10%) **β)** «Τορτίγια» 30, «Καίσαρ» 105, «Σπανάκι» 51, «Σεφ» 75 και «Κήπου» 39 πελάτες
3. **α)** Αστ.: 12%, Κηπ.: 16%, Φιλ.: 18%, Φωτ.: 24%, Κατ.: 30%.
β) Αστ.: 43^0, Κηπ.: 58^0, Φιλ.: 65^0, Φωτ.: 86^0, Κατ.: 108^0.
γ) Κατασκευές

4. α) Το 45% για το «ΜΑΣΑ» είναι υπερβολικό **β)** Βλ. εφ. 1β **γ)** Η «ΜΑΣΑ» πουλάει το 20%, (200 χάμπ.)
5. α) Πρωτ. 50%, υδατ. 20% και λιπ. 30% **β)** 1000 kcal από πρωτ., 400 kcal από υδατ. και 600 kcal από λιπ.
6. α) Βλ. εφ. 2α **β)** 45 **γ)** 35 **δ)** 70 **ε)** 25
7. α) 110 **β)** Βλ. εφ. 2α **γ)** 35 **δ)** 35 **ε)** 50
8. α) Βλ. εφ. 2 **β)** βλ. εφ. 2 **γ)** 14 **δ)** 13 **ε)** 15
9. α) Βλ. εφ. 2α **β)** Βλ. εφ. 2α **γ)** 36 **δ)** 10 **ε)** 16 **στ)** 11
10. α) 28 **β)** Βλ. εφ 2α **γ)** Βλ. εφ. 2ε **δ)** 36%

3. Πληροφορίες από αναπαραστάσεις δεδομένων

1. α) Εδώ έχουμε ένα ιστόγραμμα με 5 κλάσεις πλ. 5 **β)** 40 **γ)** 140 **δ)** 120 **ε)** 100
2. α) Βλ. εφ. 2α **β)** Βλ. θεωρία **γ)** Βλ. εφ. 2α **δ)** Βλ. θεωρία **ε)** Με το ιστόγρ. των 12 κλάσεων έχουμε περισσότερη πληροφορία
3. α) Ιστόγραμμα **β)** 36 **γ)** Βλ. εφ. 2α
4. α) Κυκλικό διάγραμμα – Βλ. εφ. 1β **β)** Οι μεταφορές **γ)** Χρήση ηλεκτρικών οχημάτων
5. α) Ιστόγραμμα **β)** 36 γ) Βλ. εφ. 2α δ) 26
6. α) 50 **β)** 30 **γ)** 25 δ) 80
7. α) 80000 € **β)** 100000 € **γ)** Λάθος **δ)** Βλ. θεωρία
8. α) Στην κλ. 20–40 έχουμε 5 μαθ., στην 40–60 8 μαθ., στην 60–80 6 μαθ. και στην 80–100 έχουμε 1 μαθ. **β)** 20 **γ)** 13 **δ)** 19 **ε)** Βλ. εφ. 1β.

4. Μέτρα θέσης και Μεταβλητότητα δεδομένων

1. α) Για την γραμμή Α 18 λ.. Για την Β 7 λ. **β)** Για την γραμμή Α 5,5 λ. Για την Β 4,4 λ. **γ)** Για την γραμμή Α 4 λ. Για την Β 5 λεπτά **δ)** Για την γραμμή Α η τιμή 20. Για την Β δεν μπορούμε να ξεχωρίσουμε κάποια τιμή ως απόμακρη **ε)** Την διάμεσο
2. α) 16% β) 6,08 γ) 4,5 δ) Κορύφωση στους μήνες 10ο , 4ο και 9ο με τιμές 8%, 10% και 18% αντίστοιχα.
3. Να γίνει ιστόγραμμα, βλ. εφαρμ. **2α. β)** 5,9
4. α) Ιστόγραμμα – Βλ. εφ. 2α β) **β)** 30.479 € **γ)** 90 χιλ. € **δ)** Υπάρχει στο διάστημα 75–90
5. α) Μελετάμε το εύρος και τις μέσες τιμές. Η μ.τ. για την Α είναι 70,51 τ.μ. και για την Β 57,69 τ.μ. **β)** Ιστογρ. – Βλ. εφ. 2α **γ)** Στην Α έχουμε μικρότερο εύρος εμβαδών, σε σχέση με την Β. **δ)** Από τον πίνακα διαλογής έχουμε, αντίστοιχα, 71,29 και 57,5. Οι τελευταίες αποτελούν προσεγγίσεις **ε)** Το εύρος των εμβαδών είναι, αντίστοιχα, 76 τ.μ. και 197 τ.μ.
6. α) 85 **β)** 65 (76% περ.) **γ)** 45 (53% περ.) **δ)** Βλ. εφ. 1β
7. α) Διάμεσος 3, επικρατούσα τιμή 3 **β)** Ιστόγραμμα **γ)** Βλ. εφ. 2α **δ)** Από τον πίν. 3,21 και από τον ομαδ. Πίν. 3,48 **ε)** 69% περ. **στ)** Από περ. 3 cm έως περ. 3,5 cm.
8. **α)** Ραβδογράμματα – Βλ. θεωρία **β)** Ο μαθ. 7 έχει ολοκληρώσει το τεστ σε μεγαλύτερο χρόνο **γ)** 12 **δ)** 9 sec και 30 sec αντίστοιχα. Το μεγαλύτερο είναι αυτό της Β' και οφείλεται στον μεγάλο χρόνο των 40 sec **ε)** Η μ.τ. της Α' είναι 14,33 και η διάμεσος το 14. Η μ.τ. της Β' είναι 15,3 και η διάμεσος το 12,5 **στ)** Και στις δύο έχουμε μικρές μεταβολές στους χρόνους αν εξαιρέσουμε την τιμή 40 της Β' **ζ)** Η μ.τ. 12,55 και η διάμεσος 12.

• ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 • ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

1. Δειγματικός χώρος, δεντροδιάγραμμα

1. α) Ναι **β)** Ναι **γ)** Ναι **δ)** Ναι **ε)** Όχι
2. α) Ναι **β)** Ναι **γ)** Όχι **δ)** Όχι
3. i) Βέβαιο **ii)** Ούτε βέβαιο ούτε αδύνατο **iii)** Αδύνατο **iv)** Βέβαιο **v)** Αδύνατο
4. α) Ναι **β)** Το σύνολο «κίτρινο», «πράσινο», «γκρίζο» και «πορτοκαλί» **γ)** Ένα μπορεί να είναι: Το σύνολο «κίτρινο» και «πράσινο». Γράψτε άλλα 4 παρόμοια.
5. α) Ναι **β)** Το σύνολο «1», «2», «3», «4», «5», «6», «7», «8», «9», «10», «11», «12». **γ)** Ένα μπορεί να είναι: Το σύνολο «5» και «7». Γράψτε άλλα 2 παρόμοια.
6. Τα δυνατά αποτελέσματα, είναι, «ΑυΑεΑε», «ΑυΑεΠλ», «ΑυΠλΑε», «ΑυΠλΠλ», «ΤρΑεΑε», «ΤρΑεΠλ», «ΤρΠλΑε», «ΤρΠλΠλ», 8 τρόποι
7. i) Ο δειγματικός χώρος: «ΣουΣαλΠαγ», «ΣουΣαλΧαλ», «ΣουΠατΠαγ», «ΣουΠατΧαλ», «ΜακΣαλΠαγ», «ΜακΣαλΧαλ», «ΜακΠατΠαγ», «ΜακΠατΧαλ», «ΠιτΣαλΠαγ», «ΠιτΣαλΧαλ», «ΠιτΠατΠαγ», «ΠιτΠατΧαλ», 12 στοιχεία. **ii)** Το είναι το σύνολο «ΣουΣαλΧαλ», «ΣουΠατΧαλ» **iii)** Το σύνολο «ΠιτΣαλΠαγ», «ΠιτΣαλΧαλ»
8. α) Ο δειγματικός χώρος: «ΚΚΚ», «ΚΚΓ», «ΚΓΚ», «ΚΓΓ», «ΓΚΚ», «ΓΚΓ», «ΓΓΚ», «ΓΓΓ» β) i. Το σύνολο «ΚΚΓ», «ΚΓΚ», «ΓΚΚ» ii. Το σύνολο «ΚΓΓ», «ΓΚΓ», «ΓΓΚ», «ΓΓΓ» iii. Το σύνολο «ΚΓΓ», «ΓΚΓ», «ΓΓΚ», «ΓΓΓ».
9. 6 τρόποι, οι: «ΤοΠο», «ΤοΚο», «ΤυΠο», «ΤυΚο», «ΣουΠο», «ΣουΚο».
10. Ο δειγματικός χώρος: ΚΚ, ΚΜ, ΚΠ, ΜΚ, ΜΜ, ΜΠ, ΠΚ, ΠΜ, ΠΠ. **ii)** Το σύνολο: ΠΚ, ΠΜ, ΠΠ **iii)** Το ΚΚ
11. i) Το σύνολο: ΠοΠρ, ΠοΚα, ΠρΠο, ΠρΚα, ΚαΠο, ΚαΠρ. **ii)** Το σύνολο: ΚαΠο, ΚαΠρ.
12. 27

2. Πιθανότητα σύνθετων ενδεχομένων

1. 0,3
2. i) 0,5 **ii)** 0,33
3. i) 0,5 **ii)** 0,045
4. α) 0,2 **β)** 0,3
5. α) 0,25 **β)** 0,42 **γ)** 0,17 **δ)** 0,33 **ε)** 0,17
6. i) 1/36 **ii)** 0,17 **iii)** 0,14
7. 0,25
8. 0,22
9. i) 0,42 **ii)** 0,17
10. 0,39
11. i) 0,17, 0,38, 0,25, 0,20 **ii)** Όχι
12. α) 0,19 **β)** 0,125
13. 1/8
14. α) 0,167 **β)** Ναι
15. 0,1
16. Εφαρμογή (1)

Ευρετήριο Όρων

Πηγές

Άλγεβρα

Κεφάλαιο 1

- Καταμέτρηση βοοειδών σε τάφο στη Γκίζα. Αποθετήριο πολυμέσων Wikimedia: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Counts_tomb_75_gizeh-lepsius.png
- Ολυμπιακοί Αγώνες: Γυμναστική. Creative Commons και Αποθετήριο πολυμέσων Wikimedia: User: Bgabel at wikivoyage shared, CC BY-SA 3.0, via Wikimedia Commons. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:GR-olympia-palaestra.jpg
- Η σχολή των Αθηνών. Αποθετήριο πολυμέσων Wikimedia: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:0_Chambre_de_Rapha%C3%ABl_-_%C3%89cole_d%27Ath%C3%A8nes_-_Mus%C3%A9es_du_Vatican.JPG

Κεφάλαιο 2

- Η ψηλότερη κορυφή του Ολύμπου είναι ο Μύτικας (2917μ.). Θέα από την κορυφή της Σκάλας. Creative Commons και Αποθετήριο πολυμέσων Wikimedia: Stolbovsky, CC BY-SA 3.0, via Wikimedia Commons. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Mytikas_peak_02.jpg

Κεφάλαιο 4

- Carl Friedrich Gauss. Αποθετήριο πολυμέσων Wikimedia: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Carl_Friedrich_Gauss.jpg

Κεφάλαιο 5

- Γέφυρα Bailey, Wadi el Kuf, Λιβύη. Κατασκευάστηκε από τον Βρετανικό Στρατό, λίγο μετά τον Β' Παγκόσμιο Πόλεμο. Η πινακίδα κάτω από τη γέφυρα γράφει: "Αυτοί είναι οι ουάντι της τζιχάντ και το επιλεγμένο λάκκο λιονταριών". Creative Commons και Αποθετήριο πολυμέσων Wikimedia: Jollyswagman on Wikipedia, CC BY-SA 3.0, via Wikimedia Commons. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bailey_bridge,_Wadi_el_Kuf,_Libya.JPG

Κεφάλαιο 6

- Διόφαντος, Μαθηματικός, ~210 - ~290 μ.Χ., Αλεξάνδρεια. Αποθετήριο πολυμέσων Wikimedia: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:%CE%94%CE%B9%CF%8C%CF%86%CE%B1%CE%BD%CF%84%CE%BF%CF%82_-_Diophantos_-_%D0%94%D0%98%D0%9E%D0%A4%D0%90%D0%9D%D0%A2.jpg

Γεωμετρία

Κεφάλαιο 1

- Η σχολή των Αθηνών. Αποθετήριο πολυμέσων Wikimedia: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:0_Chambre_de_Rapha%C3%ABl_-_%C3%89cole_d%27Ath%C3%A8nes_-_Mus%C3%A9es_du_Vatican.JPG
- Αρκαδική Πύλη, Αρχαία Μεσσήνη. Creative Commons και Αποθετήριο πολυμέσων Wikimedia: Charismak, CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Arcadian_Gate.jpg
- Τα διαδοχικά ευθύγραμμα σχήματα δηλώνουν ένα είδος «σύνδεσης» που έχουν οι αθλητές κατά την διεξαγωγή του αθλήματος. Πηγή: Wyscout
- Zeustempel Olympia. Αποθετήριο πολυμέσων Wikimedia: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Zeustempel_Olympia.jpg

Κεφάλαιο 3

- Color Block Art Painting. Αποθετήριο πολυμέσων Public Domain Pictures: https://www.publicdomainpictures.net/en/view-image.php?image=21615&picture=color-block-art-painting

Στοχαστικά

Κεφάλαιο 1

- Λεωφορείο Mercedes 405 N στα χρώματα του λεωφορείου της Αθήνας, καθώς διασχίζει το Πανόραμα της Βούλας. Creative Commons και Αποθετήριο πολυμέσων Wikimedia: C messier, CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Mercedes_O405_N_%CE%9F%CE%91%CE%A3%CE%91_8495.JPG

Στοχαστικά

Κεφάλαιο 2

- Στρίβω νόμισμα. Creative Commons και Αποθετήριο πολυμέσων Wikimedia: ICMA Photos, CC BY-SA 2.0, via Wikimedia Commons: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Coin_Toss_(3635981474).jpg
- Ένα νέο τρένο HANWHA-Rotem 3ης γενιάς του Μετρό Αθηνών στον σταθμό Ανθούπολη Creative Commons και Αποθετήριο πολυμέσων Wikimedia: http://www.ipernity.com/home/777361, CC BY-SA 3.0, via Wikimedia Commons. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:20140622-Anthoupoli-62D304_(7872).jpg
- Λεωφορείο Mercedes 405 N στα χρώματα του λεωφορείου της Αθήνας, καθώς διασχίζει το Πανόραμα της Βούλας. Creative Commons και Αποθετήριο πολυμέσων Wikimedia: C messier, CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Mercedes_O405_N_%CE%9F%CE%91%CE%A3%CE%91_8495.JPG