ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Βερύκιος Πέτρος | Κόσυβας Γιωργος | Μπαραλός Γιώργος
Πούλου Μαρία Ελένη | Φιλιππάκης Μιχάλης | Στρεμπέλιας Πάνος

Μαθηματικά

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Επιστημονική Επιτροπή Αξιολόγησης

Συντονίστρια / Αξιολογήτρια: **Τριανταφύλλου Χρυσαυγή**
Εν ενεργεία μέλος Διδακτικού Ερευνητικού Προσωπικού Πανεπιστημίου

Αξιολογητής: **Ψαρουδάκης Νικόλαος**
Εν ενεργεία Εκπαιδευτικός

Αξιολογητής: **Τάτσης Ιωάννης**
Εν ενεργεία Εκπαιδευτικός

Τεχνικός Εμπειρογνώμονας: **Ζάχος Γεώργιος**
Πτυχιούχος Πληροφορικής

Επικουρικός Εμπειρογνώμονας: **Τσόλκας Ιωάννης**
Πτυχιούχος γραφιστικής

Υπεύθυνη του μαθήματος / γνωστικού αντικειμένου στο πλαίσιο της Πράξης: **Ειρήνη Γεωργάκη, Σύμβουλος Α΄ ΙΕΠ,**
μέλος της Επιστημονικής Ομάδας Έργου (ΕΟΕ) της Πράξης

Πράξη με τίτλο: «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ 6010165 στο Πρόγραμμα «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή» 2021-2027

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ
Σπυρίδων Δουκάκης
Πρόεδρος του Δ.Σ. του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Υπεύθυνη Πράξης
Πολυξένη Μπίλλα
Σύμβουλος Α΄ του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής
Προϊσταμένη Τμήματος Β΄ Προγραμμάτων Σπουδών και Εκπαιδευτικού Υλικού

Αναπληρώτρια Υπεύθυνη Πράξης
Άννα-Αικατερίνη Λυκούρη
Σύμβουλος Α΄ του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

«Με τη συγχρηματοδότηση της Ευρωπαϊκής Ένωσης»
και το Πρόγραμμα «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή»

Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων | ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ Υπουργείο Παιδείας, Θρησκευμάτων και Αθλητισμού | ΙΕΠ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ | Με τη συγχρηματοδότηση της Ευρωπαϊκής Ένωσης | ΕΣΠΑ 2021-2027 | Πρόγραμμα Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Βερύκιος Πέτρος
Κόσυβας Γιώργος
Μπαραλός Γιώργος
Πούλου Μαρία Ελένη
Φιλιππάκης Μιχάλης
Στρεμπέλιας Πάνος

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

εκδόσεις πουκαμισάς

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΥΓΓΡΑΦΗΣ

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ	**Βερύκιος Πέτρος** *Επιτ. Σχ. Σύμβουλος Μαθηματικών* **Κόσυβας Γιώργος** *Σύμβουλος Εκπαίδευσης Μαθηματικών* **Μπαραλός Γιώργος** *Επιτ. Σχ. Σύμβουλος Μαθηματικών* **Πούλου Μαρία Ελένη** *Επίκουρη Καθηγήτρια Πανεπιστημίου Δυτ. Αττικής* **Φιλιππάκης Μιχάλης** *Καθηγητής Πανεπιστημίου Πειραιά - ΠΑΠΕΙ* **Στρεμπέλιας Πάνος** *Μαθηματικός Ιδ. Εκπαίδευσης*
ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ	**Μπαραλός Γιώργος**
ΣΕΛΙΔΟΠΟΙΗΣΗ	**Δημιουργικό Τμήμα Εκδόσεων Πουκαμισάς**
ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΕΞΩΦΥΛΛΟΥ	**Αλέξανδρος Γιαννακούλιας**
ΤΥΠΟΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ	**Τμήμα επιμέλειας Εκδόσεων Πουκαμισάς**

Περιεχόμενα

Ταυτότητα του Βιβλίου

Το βιβλίο αυτό αποτελεί υλοποίηση των νέων Προγραμμάτων Σπουδών (ΠΣ) για τα Μαθηματικά της Τρίτης τάξης Γυμνασίου και κατά τη συγγραφή του λάβαμε υπόψη μας όλες τις σχετικές οδηγίες του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (ΙΕΠ).

Στο βιβλίο αναπτύσσονται, κυρίως, έργα που συναντούν τις εμπειρίες των μαθητών, ώστε να εμπλέκονται δημιουργικά στην αναζήτηση ιδιοτήτων και σχέσεων, στη δημιουργία διασυνδέσεων καθώς και σε δράσεις διερεύνησης, πειραματισμού και αναστοχασμού σε συνδυασμό με το αντίστοιχο θεωρητικό πλαίσιο.

Για τον σκοπό αυτό παραθέτουμε εισαγωγικές διερευνήσεις σε κάθε ενότητα, οι οποίες χρησιμεύουν ως προκαταβολικοί οργανωτές, διευκολύνουν τον διδακτικό μετασχηματισμό και υποβοηθούνται από πολλές ψηφιακές εφαρμογές και ψηφιακά δομήματα.

Καινοτόμα στοιχεία του βιβλίου είναι:

1. Η έμφαση στην ενεργό εμπλοκή των μαθητών μέσα από ένα μεγάλο πλήθος διερευνήσεων, οι οποίες συνδέουν τις υπάρχουσες με τις νέες γνώσεις.

2. Οι ψηφιακές δραστηριότητες οι οποίες παρέχουν ευκαιρίες διερεύνησης, αξιολόγησης, εξάσκησης και διεύρυνσης των νέων γνώσεων, κυρίως με τη χρήση του ελεύθερου λογισμικού GeoGebra το οποίο είναι ιδιαίτερα εύχρηστο από διδάσκοντες και μαθητές/τριες.

3. Οι πολλές και στοχευμένες εφαρμογές που παρέχουν παραδείγματα επίλυσης ασκήσεων και προβλημάτων περιγράφοντας αναλυτικά τις σχετικές διαδικασίες για την επιτυχή αντιμετώπιση νέων προβλημάτων.

4. Η ποικιλία των προβλημάτων ρεαλιστικού πλαισίου σε συνδυασμό με την εισαγωγή στον κύκλο της μοντελοποίησης.

5. Η παράθεση έργων αυτοαξιολόγησης, ψηφιακών κουίζ και προβλημάτων.

Ειδικότερα, η υλοποίηση των νέων ΠΣ ως προς τους βασικούς άξονες, περιεχόμενο, μάθηση και διδασκαλία, δομή και οργάνωση, συμπληρωματικό υλικό, διαρθρώνεται ως εξής:

Περιεχόμενο

Για την επίτευξη των Προσδοκώμενων Μαθησιακών Αποτελεσμάτων (ΠΜΑ) υιοθετήθηκε η σύγχρονη αντίληψη ότι στην τάξη των Μαθηματικών, η μάθηση και η διδασκαλία εξελίσσονται τόσο σε ατομικό όσο και σε συλλογικό επίπεδο, μέσα σε διερευνητικά περιβάλλοντα μάθησης τα οποία δίνουν τη δυνατότητα δημιουργίας συνδέσεων της γνώσης και των περιεχομένων των Μαθηματικών με την εφαρμογή των εννοιών και τις διαδικασίες τους.

Τα ΠΜΑ παρατίθενται αναλυτικά σε κάθε διδακτική ενότητα, προσδιορίζοντας τους επιμέρους στόχους που πρέπει να επιτευχθούν σε αντιστοίχιση με τα επιμέρους μαθηματικά περιεχόμενα. Για την αξιολόγηση της επίτευξης των ΠΜΑ παραθέτουμε:

Α. *Στο τέλος κάθε ενότητας:* Ερωτήσεις αυτοαξιολόγησης, Ασκήσεις και προβλήματα συνδεδεμένα με εμπειρίες των μαθητών/τριών.

Β. *Στο τέλος κάθε κεφαλαίου:* Ανακεφαλαίωση και Επαναληπτικές ασκήσεις.

Γ. *Στο τέλος του βιβλίου:* Υποδείξεις και απαντήσεις των προτεινόμενων ασκήσεων.

Οι διδακτικές ενότητες και η πρότασή μας για τη σειρά διαχείρισής τους αποτυπώνονται στην ενότητα των περιεχομένων.

Μάθηση και Διδασκαλία

Ως βασική διδακτική αρχή υιοθετήθηκε η μάθηση μέσω της καθοδηγούμενης ανακάλυψης, η οποία έχει ως συνέπεια τη δημιουργία και παράθεση έργων εμπλοκής των μαθητών/τριών τα οποία λαμβάνουν υπόψη τους τη διεύρυνση της γνωστικής τους δυνατότητας με την παροχή βοήθειας (ζώνη επικείμενης ανάπτυξης).

Κατά τη συγγραφή λάβαμε υπόψη μας βασικά συμπεράσματα της διδακτικής των Μαθηματικών καθώς και των Παιδαγωγικών όπως:

- Τη μάθηση μέσα από τη διερεύνηση και ανακάλυψη των νέων ιδεών με την ενεργό συμμετοχή των μαθητών.
- Τη διαπίστωση ότι η μάθηση και η διδασκαλία εξελίσσονται ταυτόχρονα, τόσο σε ατομικό όσο και σε συλλογικό επίπεδο.
- Την ένταξη πλούσιων έργων μάθησης και ρεαλιστικών προβλημάτων που υπηρετούν μεγάλες ιδέες των Μαθηματικών και υποστηρίζουν συνεργατικές-συμμετοχικές διαδικασίες των μαθητών/τριών, αναπτύσσοντας τη Μαθηματική σκέψη και τη συγκρότηση των μαθηματικών νοημάτων.
- Την υποστήριξη της γνωστικής - ατομικής και της κοινωνικοπολιτισμικής συμμετοχικής προσέγγισης στη μάθηση των Μαθηματικών, τις οποίες θεωρούμε ως συμπληρωματικές και σε συνεχή αλληλεπίδραση.

- Την υποστήριξη διδακτικών στρατηγικών συμπερίληψης και διαφοροποίησης, παραθέτοντας διαφοροποιημένα έργα με ποικίλα πλαίσια αναφοράς.
- Τον καθοριστικό και καίριας σημασίας ρόλο του/της εκπαιδευτικού για τον μετασχηματισμό της διδακτέας ύλης σε διδάξιμη στο εκάστοτε πλαίσιο αναφοράς.

Δομή και Οργάνωση

Η διδακτέα ύλη των ενοτήτων επιμερίζεται σε κεφάλαια και διαρθρώνεται σε υποενότητες.

Κάθε υποενότητα περιέχει:

- Διατύπωση μαθησιακών στόχων (ΠΜΑ).
- Διερευνήσεις με στόχο την ανάκληση πρότερων γνώσεων και την αναγνώριση της ανάγκης διεύρυνσής της για την επίλυση νέων προβλημάτων.
- Ψηφιακά δομήματα και χειραπτικά μέσα τα οποία ενθαρρύνουν την εμπλοκή των μαθητών/τριών και βοηθούν τη διερεύνηση.
- Ανάλυση του μαθηματικού περιεχομένου.
- Εφαρμογές του μαθηματικού περιεχομένου.
- Ερωτήσεις κατανόησης και αυτοαξιολόγησης.
- Ασκήσεις και προβλήματα για την αξιολόγηση της επίτευξης των μαθησιακών στόχων.

Η ανάπτυξη της ύλης πλαισιώνεται με:

- Συμπληρωματικό υλικό που αναπτύσσεται παράλληλα ως ψηφιακό, με τη μορφή γραμμωτού κώδικα και είναι διαθέσιμο μέσω διαδικτύου.
- Ανακεφαλαίωση-Επανάληψη σε κάθε κεφάλαιο.
- Επαναληπτικές ασκήσεις και προβλήματα.

Συμπληρωματικό υλικό

Το συμπληρωματικό υλικό περιλαμβάνει:

- Ψηφιακά δομήματα τα οποία δίνουν τη δυνατότητα για ποικίλες επιπλέον διερευνήσεις, δημιουργία εικασιών, εξάσκηση και αξιολόγηση επίτευξης γνωστικών στόχων. Αναπτύσσονται παράλληλα με το μαθηματικό περιεχόμενο και μπορούν να χρησιμοποιηθούν επιλεκτικά από τους διδάσκοντες και από τους μαθητές και τις μαθήτριες.

- Ιστορικά σημειώματα τα οποία συνδυάζονται με εργασίες που αποσκοπούν στην ανάδειξη της συνοχής και της διαχρονικής εξέλιξης των Μαθηματικών εννοιών.

- Ευκαιρίες ενασχόλησης με χρήσιμα λογισμικά όπως το GeoGebra και το Excel.

- Εργασίες άσκησης και εμβάθυνσης στις σχετικές έννοιες.

Πιστεύουμε ότι κανένα έργο δεν μπορεί να υλοποιηθεί αποτελεσματικά χωρίς την ανεκτίμητη βοήθεια των συνάδελφων εκπαιδευτικών της τάξης, οι οποίοι είμαστε βέβαιοι ότι θα ζωντανέψουν τις ιδέες που εμπεριέχονται στο βιβλίο αυτό.

Προσπαθήσαμε για το καλύτερο αλλά αυτό δεν μας απαλλάσσει από όποια ενδεχόμενη αστοχία για την οποία αναλαμβάνουμε την αποκλειστική ευθύνη. Θα είμαστε υποχρεωμένοι σε όποιον/α θα επικοινωνούσε μαζί μας για τη βελτίωση του παρόντος βιβλίου.

Οι Συγγραφείς

Διδακτική διαχείριση και μαθηματική δραστηριότητα μαθητών/τριών.

Πλοήγηση στο συμπληρωματικό υλικό. Διασύνδεση έργων με ΠΣ.

Κεφάλαιο

1

Πραγματικοί Αριθμοί

Ρητοί και άρρητοι αριθμοί

Πράξεις και δυνάμεις

Ιδιότητες τετραγωνικών ριζών

Επίλυση προβλημάτων

Στο Κεφάλαιο αυτό θα μάθουμε:

- Να διερευνούμε τους άρρητους αριθμούς.
- Να διακρίνουμε τις δεκαδικές αναπαραστάσεις των ρητών και άρρητων αριθμών.
- Να συγκρίνουμε και να διατάσσουμε πραγματικούς αριθμούς.
- Να επεκτείνουμε τις πράξεις και τις δυνάμεις των ρητών και τις ιδιότητές τους στους πραγματικούς.
- Να εφαρμόζουμε τις ιδιότητες των τετραγωνικών ριζών.
- Να χρησιμοποιούμε τους πραγματικούς αριθμούς στην επίλυση προβλημάτων.

1.1 Δεκαδική μορφή των ρητών αριθμών

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθήτριες και οι μαθητές να μπορούν:

Να διερευνούν και να διακρίνουν τις μορφές των κλασματικών και δεκαδικών αναπαραστάσεων των ρητών αριθμών και να κάνουν μετατροπές από τη μία μορφή στην άλλη.

Διερεύνηση: Δεκαδική αναπαράσταση ρητών αριθμών

Να εργαστείτε ατομικά ή ανά δύο και να συζητήσετε τα αποτελέσματά σας στην τάξη.

α) Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε δεκαδικούς.

$$\frac{783}{100} \quad \frac{27}{40} \quad \frac{5}{12} \quad \frac{14}{11}$$

β) Να γράψετε σε κλάσματα τους δεκαδικούς αριθμούς 0,37 και 0,249.

γ) Να εξετάσετε αν ισχύουν οι παρακάτω ισότητες:

$$0{,}444\ldots = \frac{4}{9} \qquad 0{,}\overline{36} = \frac{36}{99} \text{ και } 0{,}\overline{19} = \frac{18}{90}$$

Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες μάθησης

Έχουμε μάθει ότι:

Ρητός αριθμός λέγεται κάθε αριθμός που μπορεί να γραφτεί στη μορφή $\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ, ν ακέραιοι και $\nu \neq 0$.

Τα κλάσματα, οι ακέραιοι και οι δεκαδικοί, είναι ρητοί αριθμοί. Για παράδειγμα: $\frac{5}{8}$, $-\frac{2}{3}$, -1, 0, 12, $-4{,}999\ldots$

Κάθε ρητός αριθμός που δεν είναι ακέραιος μετατρέπεται σε δεκαδικό αριθμό, όταν διαιρέσουμε τον αριθμητή με τον παρονομαστή του. Με τον τρόπο αυτό βρίσκουμε:

$$\frac{22}{25} = 0{,}88, \quad -\frac{5}{8} = -0{,}625, \quad \frac{7}{9} = 0{,}777\ldots, \ldots, \quad -\frac{5}{11} = -0{,}454545\ldots\ldots$$

Στα προηγούμενα παραδείγματα βλέπουμε ότι οι δύο πρώτοι ρητοί αριθμοί έχουν δεκαδικό μέρος που τερματίζεται, ενώ οι δύο τελευταίοι έχουν δεκαδικό μέρος που δεν τερματίζεται, δηλαδή έχουν άπειρα δεκαδικά ψηφία. Ωστόσο, από ένα σημείο και μετά έχουμε τα ίδια πάντοτε επαναλαμβανόμενα ψηφία και με την ίδια σειρά. Δεκαδικοί αριθμοί όπως αυτοί ονομάζονται *περιοδικοί δεκαδικοί αριθμοί.*

Περιοδικός δεκαδικός αριθμός ονομάζεται ο δεκαδικός που έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία, τα οποία από ένα ψηφίο και μετά επαναλαμβάνονται τα ίδια και με ίδια σειρά.
Περίοδος ενός περιοδικού δεκαδικού αριθμού, ονομάζεται η ομάδα των δεκαδικών ψηφίων τα οποία επαναλαμβάνονται.

Σημείωση:

Οι τρεις τελείες στο τέλος των απειροψήφιων περιοδικών δεκαδικών αριθμών δηλώνουν ότι το εμφανιζόμενο μοτίβο συνεχίζεται επ' άπειρον. Συμβολίζουμε έναν περιοδικό δεκαδικό βάζοντας μία παύλα πάνω από τα ψηφία της περιόδου του.

Παραδείγματα:

- Ο αριθμός $\frac{7}{9} = 0,777... = 0,\overline{7}$ είναι περιοδικός δεκαδικός με περίοδο 7.
- Ο αριθμός $\frac{27}{11}$ = 2,454545... = $2,\overline{45}$ είναι περιοδικός δεκαδικός με περίοδο το 45.

Τα κλάσματα μπορούμε να τα μετατρέπουμε σε δεκαδικούς καθώς και τους δεκαδικούς σε κλάσματα. Για παράδειγμα:$0,3 = \frac{3}{10}$, $0,65 = \frac{65}{100} = \frac{13}{20}$. Μπορούμε επίσης κάθε περιοδικό δεκαδικό αριθμό να τον μετατρέπουμε σε κλασματική μορφή. Ας δούμε για παράδειγμα πώς μπορούμε να μετατρέψουμε τον περιοδικό δεκαδικό αριθμό 0,555... σε κλάσμα.
Θέτουμε x = 0,555...

10x = 5,555...	(πολλαπλασιάζουμε με 10)
10x−x = 5,555...−0,555...	(αφαιρούμε κατά μέλη)
9x = 5 ή $x = \frac{5}{9}$	Άρα $0,555... = \frac{5}{9}$

Γενικά, κάθε περιοδικός δεκαδικός αριθμός μπορεί να εκφραστεί ως κλάσμα, του οποίου ο αριθμητής και ο παρονομαστής είναι ακέραιοι αριθμοί, οπότε οι περιοδικοί δεκαδικοί αριθμοί είναι ρητοί. Τα κλάσματα, οι τερματιζόμενοι δεκαδικοί και οι περιοδικοί δεκαδικοί αριθμοί αποτελούν ισοδύναμες εκφράσεις ρητών αριθμών.
Γενικά:

- Κάθε τερματιζόμενος δεκαδικός όπως και κάθε περιοδικός δεκαδικός αριθμός είναι ρητός.
- Κάθε ρητός γράφεται ως τερματιζόμενος δεκαδικός ή περιοδικός δεκαδικός αριθμός.
- Οι κλασματικές και οι δεκαδικές αναπαραστάσεις των ρητών αριθμών είναι ισοδύναμες.

Σημείωση:

Στα επόμενα, όπου αναφέρεται δεκαδικός χωρίς άλλη διευκρίνιση, θα εννοούμε τερματιζόμενος δεκαδικός αριθμός, δηλαδή δεκαδικός αριθμός με πεπερασμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων.

Εφαρμογή 1

Να γράψετε σε δεκαδική μορφή τους ρητούς αριθμούς:

α) $\frac{91}{70}$, **β)** $\frac{24}{150}$

Απάντηση

Αναλύουμε τους παρονομαστές σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

α) $\frac{91}{70} = \frac{13 \cdot 7}{2 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{13}{2 \cdot 5} = \frac{13}{10} = 1,3$ β) $\frac{24}{150} = \frac{2^3 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 5^2} = \frac{4}{5^2} = \frac{4}{25} = \frac{16}{100} = 0,16$

Παρατήρηση:
Βλέπουμε εδώ ότι τα κλάσματα $\frac{91}{70}$ και $\frac{24}{150}$ μετατρέπονται σε ισοδύναμα, που έχουν παρονομαστές 10, 100 οι οποίοι μετατρέπονται σε γινόμενα δυνάμεων του 2 και του 5.

Γενικά, ένας ρητός $\frac{\mu}{\nu}$ με μ, ν ακέραιους και ν ≠ 0 γράφεται ως δεκαδικός όταν μπορεί να παρασταθεί ως ισοδύναμο κλάσμα με παρονομαστή γινόμενο δυνάμεων *μόνο του 2 ή μόνο του 5 ή και των δύο*. Σε κάθε άλλη περίπτωση αυτός ο ρητός είναι περιοδικός δεκαδικός αριθμός.

Να ανοίξετε τον σύνδεσμο και να απαντήσετε στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής για να εξοικειωθείτε με τη μετατροπή ρητού αριθμού από κλασματική σε δεκαδική μορφή.

Εφαρμογή 2

α) Να γράψετε σε κλασματική μορφή τους περιοδικούς δεκαδικούς α = 0,999... , β = 2,999... και γ = 3,4999...
β) Τι παρατηρείτε;

Απάντηση:
α) Εργαζόμενοι όπως στο παραπάνω παράδειγμα έχουμε.

α = 0,999...
ή 10α = 9,999... (πολλαπλασιάζουμε με 10)
ή 10α – α = 9,999... –0,999 = (αφαιρούμε κατά μέλη)
ή 9α = 9 ή α = $\frac{9}{9}$ = 1. Άρα: 0,999... = 1

Ομοίως:
β = 2,999...
ή 10β = 29,999... (πολλαπλασιάζουμε με 10)
ή 10β – β = 29,999... –2,999 = (αφαιρούμε κατά μέλη)
ή 9β = 27 ή β = $\frac{27}{9}$ = 3. Άρα: 2,999... = 3

Ανάλογα:
γ = 3,4999...
ή 10γ = 34,999... (πολλαπλασιάζουμε με 10)
ή 100γ = 349,999... (πολλαπλασιάζουμε με 10)
ή 100γ – 10γ = 315 = (αφαιρούμε κατά μέλη τις δύο τελευταίες ισότητες)
ή 90γ = 315 ή γ = $\frac{315}{90}$ = 3. Άρα: 3,4999... = 3,5

β) Παρατηρούμε ότι:
- Οι περιοδικοί δεκαδικοί αριθμοί 0,999... και 2,999... με περίοδο 9 είναι ακέραιοι. Δηλαδή 0,999... και 1 είναι δύο διαφορετικές μορφές του ίδιου αριθμού. Ομοίως οι αριθμοί 2,999... και 3.
- Ο δεκαδικός περιοδικός αριθμός 3,49999... με περίοδο 9 στον οποίο η περίοδος δεν ξεκινάει αμέσως μετά την υποδιαστολή είναι τερματιζόμενος δεκαδικός αριθμός. Δηλαδή 3,4999... και 3,5 είναι δύο διαφορετικές μορφές του ίδιου αριθμού.

Να ανοίξετε τον σύνδεσμο και να απαντήσετε στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής για να εξοικειωθείτε με τη μετατροπή ρητού αριθμού από δεκαδική σε κλασματική μορφή.

Ερωτήσεις για Αυτοαξιολόγηση

1 Να γράψετε τους ρητούς $\frac{2}{5}$ και $-\frac{5}{6}$ σε δεκαδική μορφή και τους $0,\overline{7}$ και $2,\overline{35}$ σε κλασματική μορφή.

2 Το δεκαδικό ανάπτυγμα ενός ρητού αριθμού δεν μπορεί να είναι:

Α. 0,27 **Β.** $0,77\overline{38}$ **Γ.** $0,\overline{7738}$ **Δ.** 0,5080080008...

3 Πόσα ψηφία έχει η περίοδος του δεκαδικού αναπτύγματος του αριθμού $\frac{13}{7}$;

Α. 16 **Β.** 6 **Γ.** 24 **Δ.** 7

4 Ο αριθμός $0,\overline{6}$ σε μορφή ανάγωγου κλάσματος είναι ίσος με:

Α. $\frac{8}{5}$ **Β.** $\frac{6}{9}$ **Γ.** $\frac{5}{3}$ **Δ.** $\frac{2}{3}$

Ασκήσεις και Προβλήματα

1 Να γράψετε σε δεκαδική μορφή τους ρητούς:

$\frac{43}{50}$, $\frac{11}{250}$, $-\frac{9}{25}$, $\frac{27}{32}$, $-\frac{10}{21}$, $\frac{71}{160}$, $\frac{20}{33}$

2 Ποια από τα κλάσματα τρέπονται σε δεκαδικούς και ποια σε περιοδικούς δεκαδικούς αριθμούς.

$\frac{7}{100}$, $\frac{19}{8}$, $-\frac{13}{5}$, $\frac{23}{64}$, $\frac{3}{14}$, $-\frac{7}{11}$, $\frac{17}{30}$

3 Να μετατρέψετε σε κλασματική μορφή τους ρητούς:

α) 0,8888... **β)** 0,1333... **γ)** 0,131313 **δ)** $-2,\overline{4}$

4 Να μετατρέψετε σε κλασματική μορφή τους ρητούς:

α) $0,\overline{09}$ **β)** $0,38\overline{16}$ **γ)** 2,1505050...

5 Να μετατρέψετε σε κλασματική μορφή τους ρητούς:

α) $9,\overline{9}$ **β)** $1,2\overline{9}$ **γ)** 3,519999...

6 Να εκφράσετε τους παρακάτω αριθμούς σε μορφή ανάγωγου κλάσματος.

2,48 $0,1\overline{9}$ $4,\overline{45}$

7 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$A = 0,\overline{25} - \frac{9}{4} \cdot 0,\overline{8}$ και $B = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 0,\overline{2} - 0,\overline{3} + \frac{1}{2} - 0,\overline{4}$

8 Να λύσετε τις εξισώσεις: $3x + 0,\overline{3} = 1,\overline{5}$ και $2x - 0,\overline{2} = 1,\overline{4}$. Τι παρατηρείτε;

9 Να συγκρίνετε τους παρακάτω αριθμούς:

α) $0,5\overline{0}$ και $0,4\overline{9}$ **β)** $0,9784\overline{9}$ και $0,9786\overline{0}$

γ) $0,\overline{9}$ και 1 **δ)** $0,\overline{110}$ και $0,\overline{111}$

10 Να βρείτε τα εξαγόμενα των πράξεων:

α) $0,\overline{8} + 1,\overline{3}$ **β)** $0,\overline{38} - 0,\overline{27}$

γ) $(0,\overline{47}) \cdot (0,\overline{2})$ **δ)** $(0,\overline{683}) : (0,\overline{49})$

11 Δίνονται τα κλάσματα: $\frac{5}{2}, \frac{4}{5}, \frac{13}{2^2}, \frac{9}{2^3 \cdot 5}$

α) Να πολαπλασιάσετε τους όρους κάθε κλάσματος με κατάλληλο αριθμό, ώστε να προκύψουν ισοδύναμα δεκαδικά κλάσματα.

β) Να γράψετε τα κλάσματα που θα προκύψουν σε δεκαδική μορφή.

12 Να αντικαταστήσετε τους αριθμούς

α) $2,\overline{9}$ **β)** $3,24\overline{9}$ **γ)** $3,1\overline{9}$

με τους αντίστοιχους δεκαδικούς.

1.2 Δεκαδική μορφή των άρρητων αριθμών

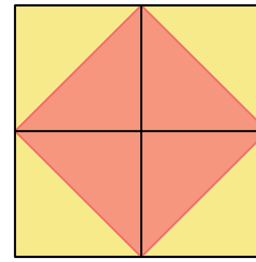
Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθήτριες και οι μαθητές να μπορούν:

- Να αναγνωρίζουν την ανάγκη εισαγωγής των άρρητων αριθμών.
- Να ορίζουν τους άρρητους αριθμούς.
- Να αναγνωρίζουν τους άρρητους οι οποίοι έχουν άπειρο πλήθος δεκαδικών ψηφίων μη περιοδικών.

Διερεύνηση 1: Αναγνώριση των άρρητων αριθμών.

Να συνεργαστείτε ανά δύο ή σε μικρές ομάδες.

Το μεγάλο τετράγωνο έχει εμβαδόν 4 cm^2 και αποτελείται από 4 ίσα τετράγωνα. Αν συνδέσουμε τα μέσα των πλευρών του, παίρνουμε πάλι τετράγωνο.



α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κόκκινου τετραγώνου και να δώσετε το μήκος της πλευράς του με χρήση του συμβόλου της τετραγωνικής ρίζας.

β) Να βρείτε με αριθμομηχανή την τετραγωνική ρίζα του εμβαδού του κόκκινου τετραγώνου. Η τιμή που παρέχει η αριθμομηχανή είναι ακριβής; Να εκτιμήσετε τις ρητές προσεγγίσεις του μήκους της πλευράς του στο δέκατο, στο εκατοστό και στο χιλιοστό. Μπορούμε να συνεχίσουμε τις ρητές προσεγγίσεις;

γ) Ποιος αριθμός εκφράζει την ακριβή τιμή του μήκους της πλευράς του κόκκινου τετραγώνου; Τι είδους αριθμός είναι αυτός;

δ) Οι παρακάτω αριθμοί έχουν άπειρα δεκαδικά ψηφία που δεν επαναλαμβάνονται περιοδικά:

$$\sqrt{2} = 1{,}414213\ldots \quad \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618033\ldots \quad \pi = 3{,}141592653589\ldots$$

Οι αριθμοί αυτοί είναι ρητοί ή άρρητοι; Μπορούμε να έχουμε πλήρη εικόνα του δεκαδικού αναπτύγματος αυτών;

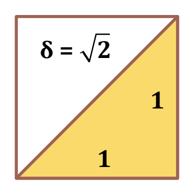
Συζητούμε στην τάξη για τους διάφορους άρρητους αριθμούς, τις απειροψήφιες δεκαδικές αναπαραστάσεις τους και τις ρητές προσεγγίσεις τους.

Να ανοίξετε το αρχείο και να διερευνήσετε σε διάστικτο καμβά την «Κατασκευή τετραγώνων όταν τα εμβαδά τους είναι μη τετράγωνοι αριθμοί».

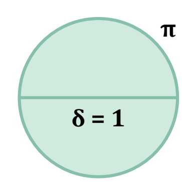
Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες μάθησης

Όπως είδαμε στη Β' Γυμνασίου, δεν μπορούμε να «μετρήσουμε» όλα τα μεγέθη με τη βοήθεια των ρητών αριθμών. Για παράδειγμα, είδαμε ότι η πλευρά και η διαγώνιος του τετραγώνου δεν έχουν κοινή μονάδα μέτρησης (Σχήμα 1). Το ίδιο ισχύει με το μήκος κύκλου και τη διάμετρο (Σχήμα 2).

Τέτοιους αριθμούς οι οποίοι δεν μπορούν να γραφτούν στη μορφή $\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ, ν ακέραιοι με $\nu \neq 0$, τους ονομάσαμε άρρητους.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Άρρητοι αριθμοί ονομάζονται οι αριθμοί που δεν είναι ρητοί.

Άρρητος αριθμός είναι ο $\sqrt{2}$, όπως επίσης και όλες οι τετραγωνικές ρίζες, οι οποίες δεν είναι τετράγωνα ρητών αριθμών. Τους άρρητους αριθμούς τους προσεγγίζουμε μέσω ρητών προσεγγίσεων. Για παράδειγμα, επειδή $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$, ο αριθμός 1,414 είναι μία ρητή προσέγγιση χιλιοστού του ο $\sqrt{2}$ με **έλλειψη** και ο αριθμός 1,415 είναι μία ρητή προσέγγιση χιλιοστού τουο $\sqrt{2}$ με **υπεροχή**. Συμβολικά, γράφουμε αντίστοιχα:ο $\sqrt{2} \approx 1{,}414$ ή ο $\sqrt{2} \approx 1{,}415$.

Από αυτές, ακριβέστερη είναι εκείνη η προσέγγιση που το τετράγωνό της απέχει λιγότερο από το 2:ο $\sqrt{2} \approx 1{,}414$.

Παρόμοια, για τον άρρητο αριθμό π, που είναι ο λόγος του μήκους ενός κύκλου προς τη διάμετρό του, μία ρητή προσέγγιση στο εκατοστό είναι ο αριθμός 3,14 και γράφουμε συμβολικά: $\pi \approx 3{,}14$.

Η διαδικασία υπολογισμού των δεκαδικών προσεγγίσεων ενός άρρητου δεν τελειώνει. Οι άρρητοι αριθμοί έχουν άπειρα δεκαδικά ψηφία, αλλά δεν εμφανίζουν περιοδικότητα. Αυτή είναι η διαφορά τους από τους απειροψήφιους περιοδικούς δεκαδικούς αριθμούς, οι οποίοι είναι ρητοί αριθμοί.

Έτσι:

- Οι απειροψήφιοι δεκαδικοί αριθμοί με περίοδο είναι ρητοί αριθμοί.
- Οι απειροψήφιοι δεκαδικοί αριθμοί χωρίς περίοδο είναι άρρητοι αριθμοί.

Παραδείγματα:

Ρητοί αριθμοί: $0{,}333\ldots = \frac{1}{3}$ $\quad 0{,}58333\ldots = \frac{7}{12}$ $\quad 4{,}5\overline{97} = \frac{2276}{495}$

Άρρητοι αριθμοί:ο $\sqrt{2} = 1{,}4142135623\ldots$ $\quad \pi = 3{,}141592653\ldots$ $\quad 0{,}1\overbrace{01}^{1}\overbrace{001}^{2}\overbrace{0001}^{3}\overbrace{00001}^{4}\ldots$

Σχόλιο:
Ο τελευταίος άρρητος αριθμός δεν έχει περίοδο, αλλά παρουσιάζει κανονικότητα, γιατί ανάμεσα σε δύο μονάδες στο δεκαδικό του μέρος υπάρχουν μηδενικά που κάθε φορά αυξάνονται κατά ένα.

Από τα προηγούμενα παραδείγματα αντιλαμβανόμαστε ότι δεν μπορούμε να έχουμε πλήρη εικόνα της δεκαδικής μορφής των άρρητων αριθμών, δηλαδή δεν μπορούμε να δούμε γραμμένα όλα τα ψηφία της απειροψήφιας δεκαδικής αναπαράστασής τους. Οι τρεις τελείες στο τέλος των απειροψήφιων δεκαδικών αριθμών, στους οποίους δεν διακρίνουμε περιοδικότητα από τα ψηφία που δίνονται, δεχόμαστε ότι δηλώνουν άρρητους αριθμούς.

Να ανοίξετε τον σύνδεσμο, και εφαρμόζοντας την τεχνική μεταφοράς και απόθεσης να διακρίνετε ρητούς και άρρητους αριθμούς.

Εφαρμογή 1

Να βρείτε τη ρητή προσέγγιση του άρρητου αριθμού $\sqrt{27}$ στο εκατοστό και στο χιλιοστό.

Απάντηση:

Πρώτα βρίσκουμε δύο διαδοχικούς ακέραιους αριθμούς μεταξύ των οποίων βρίσκεται ο $\sqrt{27}$.

Επειδή $5^2 = 25$ και $6^2 = 36$, ο $\sqrt{27}$ βρίσκεται μεταξύ 5 και 6, οπότε: $5 < \sqrt{27} < 6$.

Με δοκιμές βρίσκουμε:

$5{,}1 < \sqrt{27} < 5{,}2$ ή $5{,}19 < \sqrt{27} < 5{,}20$ ή $5{,}195 < \sqrt{27} < 5{,}196$

Άρα, μία ρητή προσέγγιση στο εκατοστό είναι $\sqrt{27} \approx 5{,}20$ και στο χιλιοστό $\sqrt{27} \approx 5{,}196$

Να διερευνήσετε τη ρητή προσέγγιση άρρητου αριθμού ανοίγοντας την εφαρμογή.

Εφαρμογή 2

α) Μεταξύ των αριθμών 5 και 6 να γράψετε έναν άρρητο που είναι ρίζα μη τετράγωνου αριθμού και έναν άρρητο που δεν εκφράζεται με τετραγωνική ρίζα.
β) Να γράψετε δύο ρητούς και δύο άρρητους μεταξύ των αριθμών $\sqrt{5}$ και $\sqrt{7}$.

Απάντηση:

α) Αναζητούμε έναν θετικό ακέραιο αριθμό x τέτοιον ώστε $5 < \sqrt{x} < 6$. Εξάλλου $5^2 = 25$ και $6^2 = 36$, οπότε αρκεί να βρούμε έναν θετικό ακέραιο αριθμό x ο οποίος να μην είναι τέλειο τετράγωνο, τέτοιον ώστε $25 < x < 36$.

Υπάρχουν αρκετοί. Για παράδειγμα, ο 29 είναι ένας από αυτούς. Άρα, ο $\sqrt{29}$ είναι άρρητος αριθμός μεταξύ των αριθμών 5 και 6.

Για να βρούμε έναν άρρητο αριθμό που δεν είναι τετραγωνική ρίζα θετικού ακέραιου αριθμού, αναζητούμε έναν δεκαδικό με ακέραιο μέρος 5 και άπειρα δεκαδικά ψηφία χωρίς περιοδικότητα. Ένας τέτοιος αριθμός είναι ο 5,12723... ο οποίος είναι άρρητος, εφόσον έχει άπειρο πλήθος μη περιοδικών δεκαδικών ψηφίων.

β) Επειδή οι αριθμοί 5 και 7 δεν είναι τετράγωνοι, οι αριθμοί $\sqrt{5}$ και $\sqrt{7}$ θα είναι άρρητοι. Με δοκιμές ή με αριθμομηχανή βρίσκουμε τις ρητές προσεγγίσεις τους. Θα έχουν τη μορφή απειροψήφιων δεκαδικών αριθμών χωρίς περιοδική επανάληψη των ψηφίων τους: $\sqrt{5} = 2{,}2360...$ και και $\sqrt{7} = 2{,}6457...$

Επομένως, δύο ρητοί μεταξύ των αριθμών $\sqrt{5}$ και $\sqrt{7}$ είναι οι δεκαδικοί αριθμοί: 2,4 και 2,5 και δύο άρρητοι αριθμοί είναι: 2,3030030003... και 2,51789778899777...

Ερωτήσεις για Αυτοαξιολόγηση

1. Να γράψετε δύο άρρητους αριθμούς μεταξύ του 2 και του 3.
2. Να γράψετε έναν άρρητο μεταξύ του $\sqrt{2}$ και του $\sqrt{3}$.
3. Ποιοι από τους αριθμούς $\frac{2}{5}$, $\sqrt{0}$, 2,0202020202..., $\sqrt{16}$, $\sqrt{8}$, $7,\overline{35}$ είναι ρητοί και ποιοι άρρητοι;
4. Ποιος από τους παρακάτω είναι άρρητος αριθμός; Να αιτιολογήσετε.
   Α. 3,14 **Β.** 3,141414... **Γ.** 3,14444... **Δ.** 3,14114111411114...
5. Η δεκαδική αναπαράσταση ενός άρρητου αριθμού είναι:
   Α. Τερματιζόμενος δεκαδικός **Β.** Περιοδικός δεκαδικός **Γ.** Δεκαδικός μη περιοδικός αριθμός με άπειρα ψηφία

Ασκήσεις και Προβλήματα

1 Ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι ρητοί και ποιοι άρρητοι; Να τεκμηριώσετε την απάντησή σας.

α) $\sqrt{0,81}$

β) $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

γ) 77,881212121212...

δ) 723,101100111000...

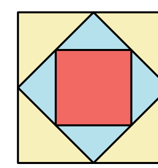
2 Να βρείτε μεταξύ ποιων διαδοχικών ακεραίων βρίσκονται οι αριθμοί: $\sqrt{5}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{20}$, $\sqrt{29}$, $\sqrt{99}$.

3 Ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι ρητοί και ποιοι άρρητοι;$\sqrt{6}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{20}$, $\sqrt{25}$, $\sqrt{71}$, $-\sqrt{49}$, $-\sqrt{144}$.

4 Να βρείτε με αριθμομηχανή τις ρητές προσεγγίσεις στο χιλιοστό των παρακάτω άρρητων αριθμών:$\sqrt{6}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{28}$, $\sqrt{70}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{29}$, $\sqrt{47}$, $\sqrt{73}$, $\sqrt{155}$.

5 **α)** Μεταξύ των αριθμών 10 και 11, να γράψετε έναν άρρητο που είναι ρίζα μη τετράγωνου αριθμού και έναν άρρητο που δεν εκφράζεται με τετραγωνική ρίζα.
β) Να γράψετε δύο ρητούς και δύο άρρητους μεταξύ των αριθμών $\sqrt{10}$ και $\sqrt{11}$.

6 Αν το κόκκινο τετράγωνο (το μικρότερο) έχει εμβαδόν 1 cm^2 να βρείτε:
α) Το εμβαδόν και την πλευρά του μπλε τετραγώνου (που περιβάλλει το μικρό).
β) Το εμβαδόν και την πλευρά του κίτρινου τετραγώνου (που περιβάλλει το μπλε).



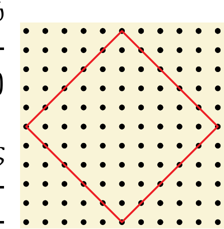
7 Ένας τετραγωνικός κήπος έχει εμβαδόν 137 m^2. Να βρείτε την καλύτερη προσέγγιση εκατοστού για το μήκος της πλευράς του.
α) Με διαδοχικές δεκαδικές προσεγγίσεις (δοκιμές).
β) Με αριθμομηχανή.

8 **Εργασία μαθητών κατά ζεύγη.** Οι μαθήτριες και μαθητές συζητούν για τον αριθμό $0,\overline{123}$:

- **Μαρία**: Ο αριθμός $0,\overline{123}$ είναι άρρητος.
- **Ελένη**: Όχι! Είναι ρητός, επειδή ο $0,\overline{123}$ μπορεί να γραφτεί ως κλάσμα.
- **Φατιμά**: Νομίζω ότι έχεις δίκιο, επειδή $0,\overline{123} = \frac{123}{1000}$.
- **Θανάσης**: Νομίζω ότι ο παρονομαστής είναι 999, όχι 1000.
- **Χασάν**: Πάντως, ο αριθμός $0,\overline{123}$ γράφεται 0,123123. . . , συνεχίζεται για πάντα και είναι άρρητος.

Να διατυπώσετε γραπτά με ποιον ισχυρισμό συμφωνείτε ή διαφωνείτε και να το εξηγήσετε.

9 **Εργασία σε ομάδες.** Στο παρακάτω τετραγωνικό πλέγμα οι αποστάσεις μεταξύ δύο διαδοχικών στιγμών οριζόντια και κάθετα είναι μία (1) μονάδα μήκους.



α) Να βρείτε το μήκος της πλευράς του κόκκινου τετραγώνου με την αναφερόμενη μονάδα μήκους.
β) Να βρείτε την τιμή του μήκους της πλευράς του τετραγώνου με αριθμομηχανή. Πού οφεί-

λεται η διαφορά από την τιμή που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα;

γ) Να βρείτε τις ρητές προσεγγίσεις στο δέκατο, στο εκατοστό και στο χιλιοστό της πλευράς του τετραγώνου. Μπορούμε να συνεχίσουμε τις ρητές προσεγγίσεις; Πόσο;

Συζητούμε στην τάξη για τους άρρητους αριθμούς, την απειροψήφια δεκαδική αναπαράστασή τους και τις ρητές προσεγγίσεις τους.

Να διερευνήσετε τη γεωμετρική κατασκευή του πραγματικού αριθμού φ.

Να μελετήσετε το ιστορικό σημείωμα με θέμα: «Το πρόβλημα του διπλασιασμού του τετραγώνου».

1.3 Πραγματικοί αριθμοί

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθήτριες και οι μαθητές να μπορούν:

- Να αναγνωρίζουν το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Να διερευνούν τις σχέσεις των συνόλων των φυσικών, των ακεραίων, των ρητών, των άρρητων και των πραγματικών.
- Να συγκρίνουν και να διατάσσουν πραγματικούς αριθμούς χρησιμοποιώντας την ευθεία των πραγματικών αριθμών.
- Να χρησιμοποιούν τους πραγματικούς αριθμούς στην επίλυση προβλημάτων.

Διερεύνηση 1: Αναγνώριση σχέσεων μεταξύ συνόλων αριθμών.

Να εργαστείτε είτε ατομικά είτε ανά δύο και να συζητήσετε τα αποτελέσματά σας στην τάξη.

Να εξετάσετε αν είναι σωστές ή λανθασμένες οι παρακάτω προτάσεις:

α) Κάθε ρητός αριθμός είναι πραγματικός.
β) Κάθε φυσικός αριθμός είναι ρητός.
γ) Κάθε ρητός αριθμός είναι ακέραιος.
δ) Κάθε πραγματικός είναι άρρητος.
ε) Κάθε φυσικός είναι ακέραιος.

Διερεύνηση 2: Διάταξη πραγματικών αριθμών και τοποθέτησή τους στον άξονα.

Να συνεργαστείτε ανά δύο ή σε μικρές ομάδες.

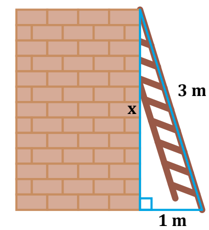
α) Να τοποθετήσετε με τη χρήση γεωμετρικών οργάνων στον άξονα τους αριθμούς: $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}$.
β) Να βρείτε τις ρητές προσεγγίσεις στο εκατοστό και να τοποθετήσετε στον άξονα τους αριθμούς: $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}$.
γ) Ποια από τις δύο μεθόδους είναι ακριβέστερη;

Συζητούμε για τη διάταξη των πραγματικών αριθμών και την τοποθέτηση αυτών σε σημεία του άξονα.

Διερεύνηση 3: Λύση πραγματικού προβλήματος.

Να συνεργαστείτε ανά δύο ή σε ομάδες των τριών.

Μία σκάλα ακουμπά σε έναν τοίχο. Για λόγους ασφάλειας, η απόσταση από τη βάση της σκάλας έως τον τοίχο πρέπει να είναι τουλάχιστον ίση με το $\frac{1}{4}$ του ύψους x του τοίχου.



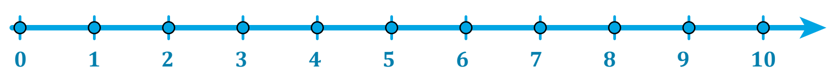
α) Πώς μπορούμε να ελέγξουμε εάν η τοποθέτηση της σκάλας της εικόνας είναι ασφαλής;
β) Είναι ασφαλής μια άλλη σκάλα μήκους 9 m που απέχει 2 m από τον τοίχο;
Εξηγούμε στην ολομέλεια τη στρατηγική λύσης που επινοήσαμε.

Να ανοίξετε το αρχείο και να διερευνήσετε σε διάστικτο καμβά την «Κατασκευή τετραγώνων όταν τα εμβαδά τους είναι τετράγωνοι και μη τετράγωνοι αριθμοί».

Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες μάθησης

Όπως ξέρουμε, το *σύνολο των φυσικών αριθμών* είναι: **N**: 0, 1, 2, 3, 4, . . .

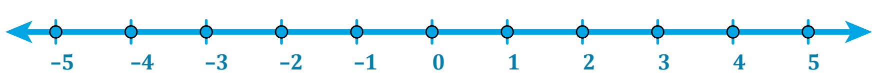
Τα στοιχεία του συνόλου **N** τα αντιστοιχίσαμε σε σημεία της ευθείας των αριθμών.



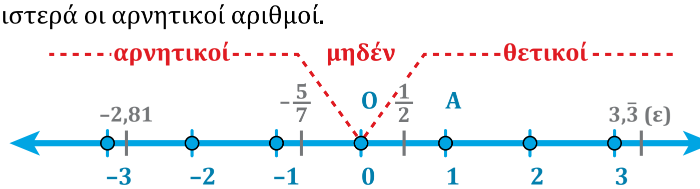
Στη συνέχεια «επεκτείναμε» το σύνολο των φυσικών αριθμών και δημιουργήσαμε το *σύνολο των ακεραίων:*

Z: . . . −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4, . . .

Τα στοιχεία του συνόλου **Z** των ακέραιων αριθμών τα αντιστοιχίσαμε επίσης σε σημεία της ευθείας, επεκτείνοντας την ευθεία αριστερά του μηδενός, για να συμπεριλάβουμε εκτός από τους φυσικούς και τους αντίθετούς τους, αρνητικούς αριθμούς.

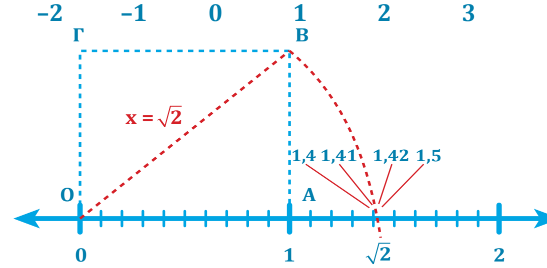


Ακολούθως, από το σύνολο των ακέραιων αριθμών δημιουργήσαμε το *σύνολο των ρητών αριθμών* **Q**. Οι ρητοί αριθμοί περιλαμβάνουν εκτός από τους ακέραιους, τα κλάσματα, τους τερματιζόμενους δεκαδικούς και τους περιοδικούς δεκαδικούς αριθμούς. Είδαμε ότι όλοι οι ρητοί αριθμοί απεικονίζονται σε σημεία μίας ευθείας (ε), η οποία ονομάζεται *άξονας των ρητών αριθμών*. Συγκεκριμένα, στο σημείο Ο αντιστοιχίζουμε το μηδέν (0) και ορίζουμε ΟΑ=1. Δεξιά διατάσσονται οι θετικοί αριθμοί και αριστερά οι αρνητικοί αριθμοί.



Οι ρητοί αριθμοί είναι άπειροι αλλά δεν καλύπτουν την ευθεία. Τα κενά που υπάρχουν ανάμεσα στους ρητούς τα «γεμίζουν» οι άρρητοι αριθμοί με τους οποίους κλείνουν όλα τα κενά.

Για παράδειγμα, όπως είδαμε, ο άρρητος $\sqrt{2}$ παριστάνει το μήκος της διαγωνίου ενός τετραγώνου που έχει πλευρά ίση με μία (1) μονάδα μήκους. Επομένως, αν πάρουμε ένα τετράγωνο με πλευρά μήκους 1 και, στη συνέχεια, με κέντρο το σημείο 0 και ακτίνα $x = \sqrt{2}$ γράψουμε κύκλο, όπως στο σχήμα, τότε το σημείο τομής του με την ευθεία ορίζει ακριβώς την εικόνα του πάνω στον θετικό ημιάξονα των ρητών που



απέχει από την αρχή απόσταση ίση με τη διαγώνιο του τετραγώνου. Τη θέση του άρρητου $\sqrt{2}$ πάνω στον θετικό ημιάξονα των ρητών μπορούμε να την εκτιμήσουμε παίρνοντας διαδοχικές ρητές προσεγγίσεις του, όπως φαίνεται στο προηγούμενο σχήμα.

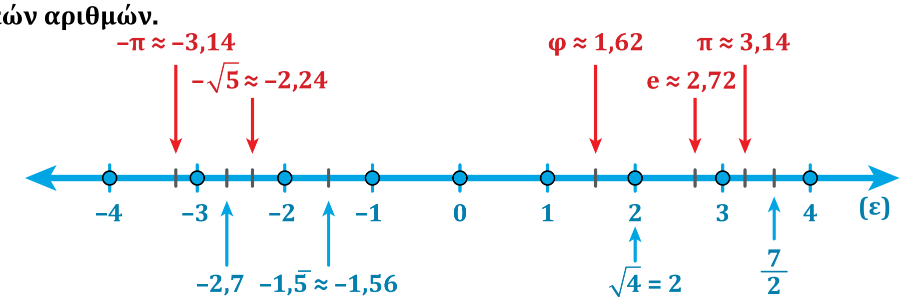
Γενικά, έναν άρρητο αριθμό μπορούμε να τον απεικονίσουμε κατ' εκτίμηση στην ευθεία με τη βοήθεια των ρητών προσεγγίσεών του.

Το σύνολο που αποτελείται από όλους τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς, ονομάζεται σύνολο των **πραγματικών αριθμών** και συμβολίζεται με **R**. Οι πραγματικοί αριθμοί καλύπτουν πλήρως την ευθεία.

Έτσι:

- κάθε πραγματικός αριθμός αντιστοιχεί σε ένα μόνο σημείο της ευθείας και
- κάθε σημείο της ευθείας αντιστοιχεί σε έναν μόνο πραγματικό αριθμό.

Μια τέτοια ευθεία, στην οποία απεικονίζουμε όλους τους πραγματικούς αριθμούς, ονομάζεται **ευθεία** ή **άξονας** των **πραγματικών αριθμών.**



Στον άξονα, κάθε αριθμός που σημειώνεται δεξιότερα από έναν άλλον είναι μεγαλύτερος.

Έτσι έχουμε: $-4 < -\pi < -2,7 < -\sqrt{5} < -1,\overline{5} < \varphi < \sqrt{4} < e < \pi < \frac{7}{2} < 4$

Να διερευνήσετε τη θέση άρρητων αριθμών στην αριθμογραμμή ανοίγοντας την εφαρμογή.

Για να διερευνήσετε τις τετραγωνικές ρίζες φυσικών στην αριθμογραμμή να ανοίξετε την εφαρμογή.

Να διερευνήσετε τη γεωμετρική κατασκευή άρρητων αριθμών με τη «Σπείρα του Κυρηναίου».

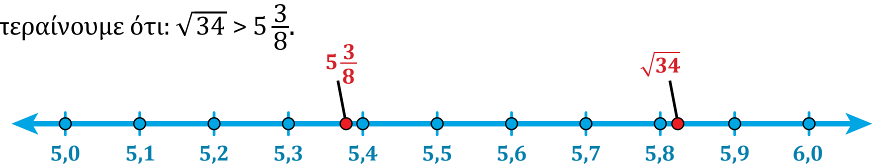
Εφαρμογή 1

α) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt{34}$, $5\frac{3}{8}$, και να τους τοποθετήσετε στον άξονα των αριθμών.

β) Να διατάξετε από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους πραγματικούς αριθμούς: 4,99..., $4\frac{1}{2}$, $\sqrt{17}$, $4,\overline{4}$, $\sqrt{23}$ και $\sqrt{16}$. Να τους τοποθετήσετε στον άξονα.

Απάντηση:

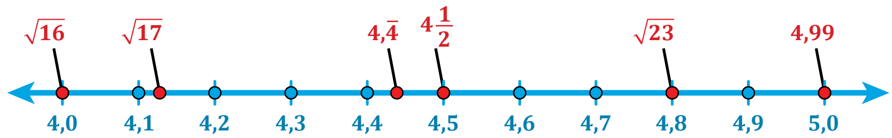
α) Εκφράζουμε τους πραγματικούς αριθμούς σε δεκαδική μορφή και τους τοποθετούμε στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Έχουμε: $\sqrt{34} \approx 5,83$ (ρητή προσέγγιση εκατοστού) και $5\frac{3}{8} = \frac{43}{8} = 5,375$. Επειδή είναι: $5,83 > 5,375$ συμπεραίνουμε ότι: $\sqrt{34} > 5\frac{3}{8}$.



β) Εκφράζουμε τους αριθμούς σε δεκαδική μορφή και τους τοποθετούμε στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

Έχουμε: $\sqrt{16} = 4$ $\sqrt{17} \approx 4{,}123$, $4{,}\overline{4} = 4{,}44444\ldots$, $4\frac{1}{2} = 4{,}5$, $\sqrt{23} \approx 4{,}80$ και $4{,}99\ldots = 5{,}0$.

Άρα, η διάταξη είναι: $\sqrt{16} < \sqrt{17} < 4{,}\overline{4} < 4\frac{1}{2} < \sqrt{23} < 4{,}99\ldots$



Εφαρμογή 2

α) Ποιος είναι ο επόμενος φυσικός του 8; Ποιος είναι ο επόμενος ρητός του 8;

β) Να συγκρίνετε τους παρακάτω αριθμούς και να τους τοποθετήσετε στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

$$\sqrt{25}, \sqrt{28}, \sqrt{30}, \sqrt{32}, \sqrt{35}, \sqrt{36}$$

Απάντηση:

α) Ο επόμενος φυσικός του 8 είναι ο 9. Επόμενος ρητός του 8 δεν υπάρχει, διότι αν υποθέσουμε ότι είναι ο 8,1, τότε μπορούμε να βρούμε έναν αριθμό μεγαλύτερο του 8 και μικρότερο του 8,1. Ένας τέτοιος αριθμός είναι ο 8,05. Γενικά, μεταξύ δύο ρητών μπορούμε να βρίσκουμε πάντοτε έναν άλλο ρητό και επομένως δεν υπάρχει επόμενος ενός ρητού αριθμού.

β) Είναι: $\sqrt{25} = 5$ και $\sqrt{36} = 6$. Οι αριθμοί $\sqrt{28}$, $\sqrt{30}$, $\sqrt{32}$ και $\sqrt{35}$ είναι μεταξύ 5 και 6.

Με δοκιμές διαπιστώνουμε ότι:

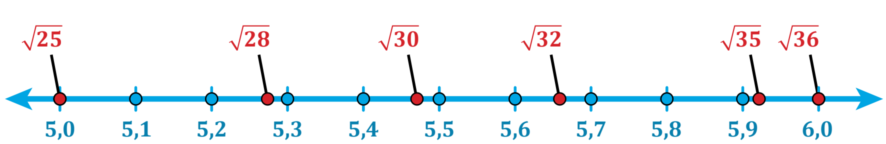
Ο αριθμός $\sqrt{28}$ είναι μεταξύ 5,2 και 5,3 επειδή $(5{,}2)^2 < (\sqrt{28})^2 < (5{,}3)^2$

Ο αριθμός $\sqrt{30}$ είναι μεταξύ 5,4 και 5,5 επειδή $(5{,}4)^2 < (\sqrt{30})^2 < (5{,}5)^2$

Ο αριθμός $\sqrt{32}$ είναι μεταξύ 5,6 και 5,7 επειδή $(5{,}6)^2 < (\sqrt{32})^2 < (5{,}7)^2$

Ο αριθμός $\sqrt{35}$ είναι μεταξύ 5,9 και 6,0 επειδή $(5{,}9)^2 < (\sqrt{35})^2 < (6{,}0)^2$

Επομένως:



Ερωτήσεις για Αυτοαξιολόγηση

1. Ένας ρητός αριθμός είναι πραγματικός; Να εξηγήσετε την απάντησή σας.
2. Ένας πραγματικός είναι ρητός; Ναι ή όχι και γιατί;
3. Υπάρχει αριθμός που να είναι ρητός και άρρητος; Να εξηγήσετε.
4. Μπορείτε να βρείτε έναν αριθμό που να είναι ρητός και ακέραιος; Να αιτιολογήσετε.
5. Μπορείτε να βρείτε έναν αριθμό, που να είναι ακέραιος και να μην είναι ρητός; Να εξηγήσετε.
6. Να αναγνωρίσετε ποιοι από τους επόμενους αριθμούς είναι ρητοί και ποιοι άρρητοι; Να εξηγήσετε.

$$\sqrt{4}, \sqrt{7}, -2, \overline{12}, -\frac{1}{2}, \quad 4{,}09009000900009\ldots$$

7 Ποιος είναι ο επόμενος ακέραιος του -12; Ποιος είναι ο επόμενος ρητός του 2,3; Να εξηγήσετε.

8 Να εξετάσετε αν «όλες οι τετραγωνικές ρίζες είναι άρρητοι». Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

9 Κάθε ρητός αριθμός είναι:

Α. φυσικός αριθμός **Β.** ακέραιος αριθμός **Γ.** αρνητικός αριθμός **Δ.** πραγματικός αριθμός.

10 Ο αριθμός π είναι:

Α. φυσικός αριθμός **Β.** ακέραιος αριθμός **Γ.** ρητός αριθμός **Δ.** άρρητος αριθμός.

Να ανοίξετε τον σύνδεσμο για να ανακεφαλαιώσετε τα διαφορετικά είδη πραγματικών αριθμών.

Να διερευνήσετε τα σύνολα των πραγματικών αριθμών.

Ασκήσεις και Προβλήματα

1 Να βρείτε έναν ρητό κι έναν άρρητο μεταξύ:

α) 3 και 4 **β)** $\sqrt{2}$ και $\sqrt{3}$ **γ)** 1,2 και 1,3.

2 Να τοποθετήσετε στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς:

$$\sqrt{5},\ 2{,}23,\ 2{,}\overline{23},\ \frac{11}{5}.$$

3 **α)** Να τοποθετήσετε στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς $\frac{1}{3}$ και $\frac{1}{2}$.

β) Να βρείτε δύο πραγματικούς αριθμούς μεταξύ αυτών και να τους τοποθετήσετε στον ίδιο άξονα.

4 Να βρείτε τα σημεία του άξονα των πραγματικών αριθμών που παριστάνουν τους αριθμούς:

$$\sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7} \text{ και } \sqrt{8}.$$

α) Με ρητή προσέγγιση στο εκατοστό.
β) Με τη χρήση γεωμετρικών οργάνων.

5 Να βρείτε τις ρητές προσεγγίσεις των παρακάτω αριθμών στο εκατοστό, να τους συγκρίνετε και να τους τοποθετήσετε στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

α) $\sqrt{30}$ και 5,5, **β)** $3{,}5,\ 3\frac{1}{2},\ \sqrt{12},\ 3{,}\overline{4}$.

6 Να συγκρίνετε τους πραγματικούς αριθμούς:

$$6 \text{ και } \sqrt{37}$$

7 Να εξετάσετε αν είναι σωστές ή λανθασμένες οι προτάσεις. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

α) Οι ακέραιοι αριθμοί περιέχουν όλους τους φυσικούς και τουλάχιστον έναν μη φυσικό.
β) Οι ρητοί αριθμοί περιέχουν όλους τους ακέραιους και τουλάχιστον έναν μη ακέραιο.
γ) Οι ρητοί αριθμοί περιέχουν όλους τους πραγματικούς και τουλάχιστον έναν μη πραγματικό.
δ) Οι ρητοί περιέχουν όλους τους δεκαδικούς με άπειρο πλήθος δεκαδικών ψηφίων με περιοδικότητα και τουλάχιστον έναν με άπειρο πλήθος δεκαδικών ψηφίων χωρίς περιοδικότητα.

8 Η κυρία Ελένη θέλει να τοποθετήσει μία τετράγωνη ξύλινη κορνίζα γύρω από έναν ζωγραφικό πίνακα εμβαδού 28 dm^2. Ποια θα είναι η καλύτερη ρητή προσέγγιση του μήκους της εσωτερικής περιμέτρου της κορνίζας στο εκατοστό;

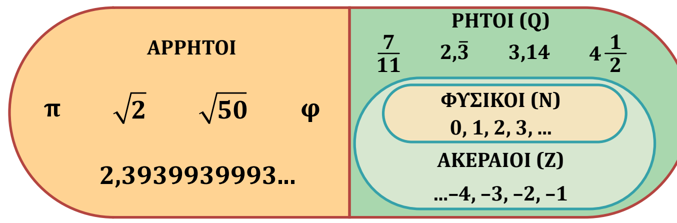
9 **Εργασία σε ομάδες.** Ένας αγρότης θέλει να περιφράξει μέσα στο αγρόκτημά του μία τετράγωνη περιοχή με εμβαδόν 45 m^2 για τις γαλοπούλες του. Πόσα μέτρα σύρμα θα χρειαστεί για την περίφραξη;

10 Ο Γιάννης προσπαθεί να βάλει στο σπίτι του έναν τετράγωνο καθρέφτη με πλευρά 2,10 m. Η πόρτα έχει διαστάσεις 2 m ύψος και 1 m πλάτος.
Να εξετάσετε αν ο καθρέφτης είναι δυνατό να περάσει από την πόρτα της εισόδου. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

11 Ένας τηλεπικοινωνιακός δορυφόρος είναι εξοπλισμένος από 8 ίσους ηλιακούς συλλέκτες σχήματος τετραγώνου που χρησιμοποιούν μπαταρίες για τη μετατροπή της ηλιακής ενέργειας σε ηλεκτρική. Η συνολική παραγωγή ηλεκτρικής ισχύος είναι 4000 Watt. Κάθε ηλιακός συλλέκτης παράγει 0,01 Watt ηλεκτρικής ισχύος ανά τετραγωνικό εκατοστό.

α) Ποιο είναι το εμβαδόν ενός ηλιακού συλλέκτη σε τετραγωνικά μέτρα (m^2);
β) Ποιο είναι το μήκος της πλευράς ενός ηλιακού συλλέκτη σε μέτρα (m);

Πραγματικοί αριθμοί (R)



1.4 Οι πράξεις στους πραγματικούς αριθμούς

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθήτριες και οι μαθητές να μπορούν:

- Να επεκτείνουν τις πράξεις των ρητών αριθμών και τις ιδιότητές τους στους πραγματικούς.

Διερεύνηση 1: Πράξεις με πραγματικούς αριθμούς.

Να εργαστείτε είτε ατομικά είτε ανά δύο.

Να κάνετε τις πράξεις και να γράψετε σε απλούστερη μορφή τους αριθμούς Α, Β, Γ, Δ.

$A = \sqrt{6} + 2\frac{3}{8} - \sqrt{6}$, $\quad B = -\sqrt{4} + 5\pi - 2(3\pi - 1)$,

$\Gamma = (-\sqrt{3} - 2)(-\sqrt{3} + 2)$, $\quad \Delta = (\sqrt{6} + 1)\sqrt{6} - \sqrt{6}$

Το αποτέλεσμα είναι ρητός ή άρρητος αριθμός;

Διερεύνηση 2: Επέκταση των πράξεων στους πραγματικούς αριθμούς.

Να εργαστείτε είτε ατομικά είτε ανά δύο.

α) Να βρείτε τις ρητές προσεγγίσεις των άρρητων αριθμών $\sqrt{3}$, $\sqrt{31}$ και $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ στο εκατοστό.

β) Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων: $A = -\varphi + \sqrt{3} + \sqrt{31}$, $B = \frac{3}{2}(\sqrt{3} + \varphi)$.

Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες μάθησης

Πράξεις στους πραγματικούς αριθμούς

Το σύνολο ℝ των πραγματικών αριθμών αποτελείται, όπως είπαμε, από τους ρητούς και τους άρρητους. Όλες οι πράξεις που μάθαμε μέχρι τώρα αφορούσαν τους ρητούς αριθμούς. Οι πράξεις μεταξύ ρητών αριθμών έχουν ως αποτέλεσμα ρητό αριθμό. Για παράδειγμα:

$$-\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{2}{6}-\frac{15}{6} = -\frac{13}{6} \qquad \left(-\frac{4}{7}\right):\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{4}{7}\right)\cdot(-3) = +\frac{12}{7}$$

Τώρα θα δούμε πώς γίνονται οι πράξεις μεταξύ ρητών και άρρητων αριθμών ή μεταξύ άρρητων αριθμών.
Είδαμε ότι κάθε άρρητος αριθμός προσεγγίζεται όσο θέλουμε με έναν ρητό αριθμό. Μπορούμε, λοιπόν, κάθε φορά, που θα εμφανίζεται σε μία πράξη ένας άρρητος, να τον αντικαθιστούμε με μία ρητή προσέγγισή του. Για παράδειγμα, αντικαθιστώντας τους άρρητους με ρητές προσεγγίσεις έχουμε:

$5+\sqrt{2} \simeq 5+1,41 = 6,41$≈ 5+1,41 = 6,41 και $2\cdot\sqrt{7} \simeq 2\cdot 2,64 = 5,28$≈ 2·2,64 = 5,28 (**προσεγγιστικά** αποτελέσματα)

Κατά κανόνα, στις πράξεις μεταξύ άρρητων αριθμών ή μεταξύ άρρητων και ρητών εκτιμούμε το αποτέλεσμα κατά προσέγγιση. Ωστόσο, υπάρχουν και περιπτώσεις στις οποίες δεν χρειάζεται αντικατάσταση των άρρητων με ρητές προσεγγίσεις τους, γιατί η εφαρμογή των ιδιοτήτων των πράξεων δίνει αποτέλεσμα ρητό. Για παράδειγμα:

$$(-\sqrt{7})+(+\sqrt{7}) = -\sqrt{7}+\sqrt{7} = 0$$

Επειδή οι πράξεις με άρρητους αριθμούς ανάγονται σε πράξεις ρητών αριθμών, δεχόμαστε ότι όλες οι ιδιότητες των πράξεων, όπως τις γνωρίζουμε από τους ρητούς αριθμούς, ισχύουν και στους πραγματικούς αριθμούς. Έτσι, αν α, β, γ είναι πραγματικοί αριθμοί, για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό ισχύουν οι ιδιότητες:

Ιδιότητα	Πρόσθεση	Πολλαπλασιασμός
Αντιμεταθετική	$\alpha+\beta=\beta+\alpha$	$\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$
Προσεταιριστική	$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$	$\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)=(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma$
Ουδέτερο στοιχείο	$\alpha+0=\alpha$	$\alpha\cdot 1=\alpha$
Αντίθετοι αριθμοί	$\alpha+(-\alpha)=0$	
Αντίστροφοι αριθμοί		$\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}=1,\ \alpha\neq 0$
Επιμεριστική	$\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$ $\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta+\gamma)$	

Η αφαίρεση και η διαίρεση ορίζονται ως αντίστροφες πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, αντίστοιχα, ως εξής:

Πράξη	Συμβολισμός	Παράδειγμα
Αφαίρεση	$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$	$7-9=7+(-9)=-2$
Διαίρεση	$\alpha:\beta=\frac{\alpha}{\beta}=\alpha\cdot\frac{1}{\beta}=1,\ \beta\neq 0$	$-6:14=-6\cdot\frac{1}{14}=\frac{-6}{14}=-\frac{3}{7}.$

Σημείωση: **Προτεραιότητα των πράξεων**
Για να υπολογίσουμε μία παράσταση κάνουμε τις πράξεις με την ακόλουθη σειρά:
- Υπολογίζουμε πρώτα τις δυνάμεις (αν υπάρχουν).
- Κατόπιν εκτελούμε τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις.
- Τέλος, κάνουμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις.

Αν η παράσταση έχει παρενθέσεις ή αγκύλες, κάνουμε πρώτα τις πράξεις μέσα σε αυτές σύμφωνα με τη σειρά που αναφέραμε πιο πάνω.

Να διερευνήσετε την αντιμεταθετική ιδιότητα στον πολλαπλασιασμό πραγματικών αριθμών ανοίγοντας την εφαρμογή.

Να διερευνήσετε την επιμεριστική ιδιότητα πραγματικών αριθμών ανοίγοντας την εφαρμογή.

Εφαρμογή 1

Δίνεται η αλγεβρική παράσταση $A=-(\omega-2x)+2(y-\frac{z}{2})$. Να τη γράψετε σε απλούστερη μορφή εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των πράξεων και ύστερα να βρείτε την αριθμητική της τιμή αν $x+y=-4$ και $\omega+z=0{,}5$.

Απάντηση:

$A=-(\omega-2x)+2(y-\frac{z}{2})$ [απαλοιφή παρενθέσεων και επιμεριστική ιδιότητα]

$=-\omega+2x+2y-z$ [αντιμεταθετική ιδιότητα]

$=-\omega-z+2x+2y$ [επιμεριστική ιδιότητα]

$=-(\omega+z)+2(x+y)$ [αντικατάσταση]

$=-0{,}5+2(-4)=-0{,}5-8=-8{,}5$ [πράξεις].

Εφαρμογή 2

Να βρεθούν τρεις αριθμοί x, y, z ανάλογοι προς τους 2, $\sqrt{2}$ και $\sqrt{5}$ για τους οποίους ισχύει: $x-y\sqrt{2}+z\sqrt{5}=25$.

Απάντηση:

Θέτουμε $\frac{x}{2}=\frac{y}{\sqrt{2}}=\frac{z}{\sqrt{5}}=\lambda$. Τότε:

- $\frac{x}{2}=\lambda$, οπότε $x=2\lambda$ (1)
- $\frac{y}{\sqrt{2}}=\lambda$, οπότε $y=\sqrt{2}\lambda$ (2)
- $\frac{z}{\sqrt{5}}=\lambda$, οπότε $z=\sqrt{5}\lambda$ (3)

Λόγω των (1), (2), (3) η ισότητα $x-y\sqrt{2}+z\sqrt{5}=25$ γράφεται:

$2\lambda-\sqrt{2}\lambda\cdot\sqrt{2}+\sqrt{5}\lambda\cdot\sqrt{5}=25$ ή $2\lambda-2\lambda+5\lambda=25$ ή $\lambda=5$ (4).

Λόγω της (4) οι σχέσεις (1), (2) και (3) δίνουν $x=10$, $y=5\sqrt{2}$ και $z=5\sqrt{5}$.

Εφαρμογή 3

α) Να βρείτε δύο ετερόσημους αριθμούς με άθροισμα αρνητικό.

β) Δύο αριθμοί έχουν άθροισμα θετικό και γινόμενο αρνητικό. Να βρείτε το πρόσημο των αριθμών. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. Να δώσετε ένα παράδειγμα.

γ) Αν θ και α πραγματικοί αριθμοί με θ>0 και α<0 να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $7\cdot\alpha\cdot\theta$.

Απάντηση:

α) Αν α, β οι ζητούμενοι αριθμοί, τότε $α\cdot β<0$ και $α+β<0$. Δύο τέτοιοι αριθμοί είναι οι 2 και (-3), αφού: $2\cdot(-3) = -6 < 0$ και $2+(-3) = -1 < 0$.

β) Αφού οι δύο αριθμοί έχουν γινόμενο αρνητικό είναι ετερόσημοι. Επειδή το άθροισμα των δύο ετερόσημων αριθμών είναι θετικό, ο θετικός αριθμός έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή. Για παράδειγμα 12 και -5, διότι $|12| > |-5|$ και $12+(-5) = 7 > 0$ (άθροισμα θετικό) και $12\cdot(-5) = -60 < 0$ (γινόμενο αρνητικό).

γ) Ο αριθμός $7\cdot α\cdot θ$ είναι γινόμενο δύο παραγόντων. Του θετικού αριθμού 7 και του αριθμού $α\cdot θ$, ο οποίος είναι αρνητικός αφού $θ > 0$ και $α < 0$. Άρα, το πρόσημο του αριθμού $7\cdot α\cdot θ$ είναι αρνητικό.

Εφαρμογή 4

Αν α, β, γ πραγματικοί αριθμοί, να βρείτε το άθροισμα:
$A = (2α-6β+5γ)+(3α+4β-2γ)-(7α-3β+γ)$.

Απάντηση:

$A = (2α-6β+5γ)+(3α+4β-2γ)-(7α-3β+γ)$	
$= (2α-6β+5γ)+(3α+4β-2γ)+(-7α+3β-γ)$	[αφαίρεση είναι η πρόσθεση του αντιθέτου]
$= (2α+3α-7α)+(-6β+4β+3β)+(5γ-2γ-γ)$	[αντιμεταθετική/προσεταιριστική]
$= (2+3-7)α+(-6+4+3)β+(5-2-1)γ$	[επιμεριστική]
$= -2α+1β+2γ=-2α+β+2γ$	[$1β = β$]

Να ανοίξετε τον σύνδεσμο και να απαντήσετε στις ερωτήσεις αυτοαξιολόγησης για τις πράξεις με πραγματικούς αριθμούς.

Ερωτήσεις για Αυτοαξιολόγηση

1 Αν $α < 0$ και $θ > 0$ να βρείτε το πρόσημο της παράστασης: $(-1)(-α)(-θ)$.

2 Να βρείτε τους αντίθετους και τους αντίστροφους των αριθμών: $-\sqrt{2}$ και $\frac{-2}{5}$.

3 Να δείξετε ότι οι αριθμοί $\sqrt{3}$ και $\frac{1+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$ είναι αντίστροφοι.

4 Να υπολογίσετε με τον ευκολότερο τρόπο την τιμή της παράστασης: $A = -67,98\cdot 88,179 - 67,98\cdot 11,821$. Να εξηγήσετε γιατί είναι προτιμότερο να χρησιμοποιηθεί η επιμεριστική ιδιότητα.

5 Να απλοποιήσετε την παράσταση $A = -(-α-2β+γ)+(-α-β-γ)-β$. Να βρείτε την τιμή της, αν $γ = -5$.

6 Αν οι πραγματικοί αριθμοί α, β με $α \neq 0$, $β \neq 0$ είναι αντίθετοι, τότε ο αριθμός $α:β$ είναι ίσος με:

Α. 0,5 **Β.** -1 **Γ.** 1 **Δ.** 0

7 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με τη λέξη Σωστό **(Σ)**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος **(Λ)**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

α) Δύο πραγματικοί αριθμοί με πηλίκο αρνητικό έχουν γινόμενο θετικό.
β) Οι αντίθετοι πραγματικοί αριθμοί έχουν ίσες απόλυτες τιμές.
γ) Δύο πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα μηδέν είναι αντίστροφοι.
δ) Το άθροισμα και το γινόμενο δύο πραγματικών αριθμών μπορεί να είναι αριθμοί ετερόσημοι.
ε) Το άθροισμα και το πηλίκο δύο πραγματικών αριθμών μπορεί να είναι αριθμοί ομόσημοι.

Ασκήσεις και Προβλήματα

1 Στην αριθμητική παράσταση Α = $4 \cdot 3 : 5 - 2$, να τοποθετήσετε τις παρενθέσεις, έτσι ώστε το αποτέλεσμα να είναι:

α) 0,4 **β)** 4 **γ)** –5,6

2 Να μετατρέψετε την αλγεβρική παράσταση $6(x-2)+4(-3x+y)$ σε απλούστερη μορφή και να γράψετε τις ιδιότητες που χρησιμοποιήσατε.

3 Αν οι αριθμοί $x + \sqrt{y}$ και $x - \sqrt{y}$ είναι αντίστροφοι και $x = -7$, να βρείτε τον y.

4 Αν x και y είναι πραγματικοί αριθμοί, και $x * y = 2x - 5y - xy$, να βρείτε:

α) Τους αριθμούς $2 * 3$ και $7 * \frac{1}{7}$.

β) Για ποιες τιμές του ω ισχύει $6 * \omega = 1$.

5 Αν α, β, γ πραγματικοί αριθμοί, να βρείτε το άθροισμα:

$A = (3\alpha-5\beta+2\gamma)+(7\alpha+\beta-3\gamma)-(6\alpha-9\beta-4\gamma)$.

6 Αν $\alpha = 8$, $\beta = -5$, $\gamma = 11$ και $\alpha-\beta-(\gamma-\delta) = -15$, να βρείτε την τιμή του δ.

7 Χρησιμοποιώντας παραδείγματα, να υπολογίσετε:

α) Το γινόμενο των αντίστροφων δύο αριθμών.

β) Τον αντίστροφο του γινομένου τους.

γ) Τι παρατηρείτε; Να διατυπώσετε μία εικασία.

8 Αν $\theta>0$ και $\alpha<0$, να βρείτε το πρόσημο των αριθμών:

α) $-\sqrt{2} \cdot \alpha \cdot \theta$ **β)** $(-\sqrt{2}) \cdot (-\alpha) \cdot (-\alpha\theta)$ και **γ)** $\frac{-\sqrt{2}}{\theta \cdot (-\alpha)}$.

9 **Εργασία σε ομάδες.** Τέσσερα αδέλφια μοίρασαν την παρακάτω έκταση σε τέσσερα οικόπεδα. Το οικόπεδο της Αθηνάς έχει περίμετρο 68 m, της Ιωάννας 70 m, του Μάνου 54 m και του Θάνου 60 m.

α) Να βρείτε την περίμετρο του συνολικού οικοπέδου.

β) Πόσα μέτρα συρματόπλεγμα θα χρειαστεί για να γίνει η περίφραξη των 4 οικοπέδων;

Αθηνά	**Ιωάννα**
Μάνος	**Θάνος**

10 Να βρεθούν τρεις αριθμοί x, y, z ανάλογοι προς τους 3, $\sqrt{3}$ και $\sqrt{7}$ για τους οποίους ισχύει:

$$x - y\sqrt{3} + z\sqrt{7} = 63.$$

11 Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης: $A = [(-2x-5)x-6]-1$ για $x = -7$.

12 Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης: $A = (-x+1)(7x-19)$ για τις ακόλουθες τιμές του x:

α) 0, **β)** $\frac{19}{7}$, **γ)** $\frac{4}{3}$, **δ)** $-\frac{7}{5}$.

13 Αν $x+y = -4$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$A = 4x-(3x-y)+7$

$B = -7-3(x-3y)+4(x-y)-4y$

$\Gamma = 4x-3(2x-3y-1)+2(3x-y+5)+3x-13$

14 Ποιους προσθετέους πρέπει να βγάλουμε από το άθροισμα

$$A = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}$$

ώστε το άθροισμα των όρων που απομένουν να είναι ίσο με 1.

15 Να υπολογίσετε τις τιμές των αριθμητικών παραστάσεων:

$$A = \left(\frac{1}{2}+\frac{5}{3}\right) \cdot \left(3+\frac{7}{4}\right) : \left(\frac{1}{2}-\frac{5}{6}\right)$$

$$B = \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{-2}{5}\right) + \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{-7}{4}\right)$$

$$\Gamma = \left(1-\frac{5}{2}\right) \cdot \left(\frac{2}{5}-1\right) - 5 \cdot \left(\frac{-3}{5}\right)$$

16 Έστω $\alpha=\beta+2005$. Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = -3[2(\alpha+2\beta)-2(3\beta-2\alpha)-4\beta]+19(\alpha-\beta).$$

(**Διαγωνισμός** Ε.Μ.Ε. "Ο Θαλής" 2005– Γ΄ Γυμνασίου)

17 Αν ο πραγματικός αριθμός α είναι η ρητή προσέγγιση δεκάτου του άρρητου αριθμού $\sqrt{5}$, να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης: $A = 3 \cdot (3\alpha-4,6) - 2 \cdot (\alpha-0,2)$.

(**Διαγωνισμός** Ε.Μ.Ε. "Ο Θαλής" 2013 – Γ΄ Γυμνασίου)

1.5 Οι δυνάμεις στους πραγματικούς αριθμούς

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθήτριες και οι μαθητές να μπορούν:

- Να επεκτείνουν τις δυνάμεις των ρητών και τις ιδιότητές τους στους πραγματικούς.

Διερεύνηση 1: Ιδιότητες των δυνάμεων

Να συνεργαστείτε ανά δύο και να συζητήσετε τα αποτελέσματά σας στην τάξη.

Να χρησιμοποιήσετε τον διπλανό πίνακα για να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων (χωρίς να εκτελέσετε τις πράξεις):

$A = 27 \cdot 243$ $\qquad B = 6561 \cdot 81$ $\qquad \Gamma = 59049 : 2871$

$\Delta = \dfrac{19683}{531441}$ $\qquad E = \dfrac{729 \cdot 729}{177147}$ $\qquad \Sigma T = \dfrac{1}{243} \cdot \dfrac{1}{2187} \cdot 531441$

Ζ. Να βρείτε το τελευταίο ψηφίο του αποτελέσματος της δύναμης $K = 3^{1500}$.

Η. Να υπολογίσετε τη δύναμη $\Lambda = 3^{3^2}$

Σημείωση: Η δύναμη 3^{3^2} έχει βάση το 3 και εκθέτη τη δύναμη 3^2.

Δύναμη	Αποτέλεσμα
3^1	3
3^2	9
3^3	27
3^4	81
3^5	243
3^6	729
3^7	2187
3^8	6561
3^9	19683
3^{10}	59049
3^{11}	177147
3^{12}	531441

Διερεύνηση 2: Ιδιότητες των δυνάμεων

Να συνεργαστείτε ανά δύο και να συζητήσετε τα αποτελέσματά σας στην τάξη.

Αν οι ιδιότητες των δυνάμεων ισχύουν και στους πραγματικούς αριθμούς:

α) Να συμπληρώσετε τις τελείες στις παρακάτω ισότητες:

$(\sqrt{2})^3 \cdot (\sqrt{2})^4 = (\sqrt{2})^{\dots}$ $\qquad (\sqrt{5})^4 : (\sqrt{5})^6 = (\sqrt{5})^{\dots}$

$\dfrac{(\sqrt{7})^3}{(\sqrt{5})^3} = \left(\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}\right)^{\dots}$ $\qquad \left((\sqrt{2})^{\dots}\right)^2 = (\sqrt{2})^{-6}$

β) Να γράψετε τους παρακάτω πραγματικούς αριθμούς από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο.

$(\sqrt{13})^{-1}$ $\qquad (\sqrt{29})^0$ $\qquad 0^{17}$ $\qquad (\sqrt{5})^2$ $\qquad -(\sqrt{3})^5$ $\qquad -(\sqrt{2^2})^6$

Να αιτιολογήσετε τον συλλογισμό σας.

Να διερευνήσετε τη δύναμη με βάση τον αρνητικό αριθμό -1, ανοίγοντας την εφαρμογή.

Να διερευνήσετε τη δύναμη με εκθέτη θετικό ακέραιο αριθμό, ανοίγοντας την εφαρμογή.

Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες μάθησης

Δυνάμεις με βάση πραγματικό αριθμό $\alpha \neq 0$ και εκθέτη ακέραιο αριθμό

Είδαμε ότι το γινόμενο $(-7)\cdot(-7)$ γράφεται $(-7)^2$, το γινόμενο $\left(+\frac{2}{5}\right)\cdot\left(+\frac{2}{5}\right)\cdot\left(+\frac{2}{5}\right)$ γράφεται $\left(+\frac{2}{5}\right)^3$ κ.λπ. Ανάλογα συμβολίζουμε το γινόμενο $(-\sqrt{6})\cdot(-\sqrt{6})$ ως $(-\sqrt{6})^2$, και το γινόμενο $(+\sqrt{2})\cdot(+\sqrt{2})(+\sqrt{2})\cdot(+\sqrt{2})$ ως $(+\sqrt{2})^4$.
Γενικά, ο ορισμός της δύναμης με εκθέτη ακέραιο επεκτείνεται στους πραγματικούς αριθμούς.

- Αν **α** είναι *πραγματικός αριθμός* και ν φυσικός, με $\nu > 1$, το γινόμενο ν παραγόντων ίσων προς τον α σημειώνεται α^ν και ονομάζεται *δύναμη με βάση α και εκθέτη ν,* δηλαδή:

$$\alpha^\nu = \underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\ldots\cdot\alpha\cdot\alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}},\ \nu>\mathbf{1}$$

- Για $\nu = 1$, $\alpha^1 = \alpha$
- Για $\nu = 0$ και $\alpha \neq 0$, ορίζουμε $\alpha^0 = 1$.
- Η *δύναμη πραγματικού αριθμού* **α** διάφορου του μηδενός ($\alpha \neq 0$) με *εκθέτη αρνητικό ακέραιο* είναι ίση με ένα κλάσμα που έχει αριθμητή τη μονάδα και παρονομαστή τη δύναμη του αριθμού αυτού με αντίθετο εκθέτη: $\boldsymbol{\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu}}$ με $\alpha \neq 0$

Παραδείγματα: $\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{7} = (\sqrt{7})^3$, $(\sqrt{3})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $(-\sqrt{5})^0 = 1$

Ιδιότητες δυνάμεων

Δεχόμαστε ότι όλες οι ιδιότητες των δυνάμεων, όπως τις γνωρίζουμε από τους ρητούς αριθμούς, επεκτείνονται στους πραγματικούς αριθμούς. Για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α και β με $\alpha\neq0$ και $\beta\neq0$ και όλους τους ακέραιους εκθέτες μ και ν ισχύουν:

$\alpha^\mu\cdot\alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$	$\frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu$
$\alpha^\mu:\alpha^\nu = \alpha^{\mu-\nu}$	$(\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu\cdot\nu}$
$\alpha^\nu\cdot\beta^\nu = (\alpha\cdot\beta)^\nu$	$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\nu$

Σημείωση:
Οι ιδιότητες των δυνάμεων με βάση πραγματικό και εκθέτη ακέραιο ισχύουν με την προϋπόθεση ότι κάθε φορά ορίζονται οι δυνάμεις και οι πράξεις που σημειώνονται.

Τυποποιημένη (επιστημονική) μορφή μικρών και μεγάλων αριθμών

Ένας αριθμός είναι γραμμένος στην τυποποιημένη (ή επιστημονική) μορφή όταν έχει τη μορφή $\alpha\cdot10^\nu$, όπου $1 \leq \alpha < 10$ και **ν** ακέραιος. Παραδείγματα:

Δεκαδική μορφή	Μορφή γινομένου	Τυποποιημένη μορφή
7350000	7,35·1000000	$7{,}35\cdot10^6$
0,0000008	8·0,0000001	$8\cdot10^{-7}$

Να διερευνήσετε την τυποποιημένη μορφή μικρών και μεγάλων αριθμών και τη σύνδεσή τους με την καθημερινότητα, ανοίγοντας την εφαρμογή.

Εφαρμογή 1

Να υπολογίσετε την παράσταση: $A = (-2)^3 - 5^2 - [(3^2 - 4):5 - 11]$.

Απάντηση:

$A = (-2)^3 - 5^2 - [(3^2-4):5-11] = (-2)^3 - 5^2 - [(9-4):5-11] = (-2)^3 - 5^2 - (5:5-11)$
$= (-2)^3 - 5^2 - (1-11) = (-2)^3 - 5^2 - (-10) = -8-25+10 = -23.$

Εφαρμογή 2

Να υπολογίσετε τις δυνάμεις.

α) $(\sqrt{6})^2$ **β)** $(\sqrt{6})^5$ **γ)** $(\sqrt{6})^6$ **δ)** $(\sqrt{6})^{-2}$ **ε)** $(\sqrt{6})^0$

Απάντηση:

α) $(\sqrt{6})^2 = 6.$ [συνέπεια ορισμού τετραγωνικής ρίζας: $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$]

β) $(\sqrt{6})^5 = (\sqrt{6})^4 \cdot \sqrt{6} = \left((\sqrt{6})^2\right)^2 \cdot \sqrt{6} = 6^2 \cdot \sqrt{6} = 36\sqrt{6}.$ [εφαρμογή της ιδιότητας $\alpha^{\nu+\mu} = \alpha^\nu \alpha^\mu$ και $\alpha^{\nu\mu} = (\alpha^\nu)^\mu$]

γ) $(\sqrt{6})^6 = (\sqrt{6})^2 \cdot (\sqrt{6})^2 \cdot (\sqrt{6})^2 = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216.$ [εφαρμογή της ιδιότητας $\alpha^{\nu+\mu} = \alpha^\nu \alpha^\mu$]

δ) $(\sqrt{6})^{-2} = \dfrac{1}{(\sqrt{6})^2} = \dfrac{1}{6}$ [επέκταση της δύναμης με βάση πραγματικό και εκθέτη ακέραιο $\alpha^{-\nu} = \dfrac{1}{\alpha^\nu}$.]

ε) $(\sqrt{6})^0 = 1.$ [επέκταση της της ιδιότητας $\alpha^0 = 1$ για βάση πραγματικό αριθμό]

Εφαρμογή 3

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$A = x^{-3} \cdot (-x)^6 \qquad B = \frac{(2xy)^4}{8y^4} \qquad \Gamma = \frac{4^2x^5y^4}{20x^2y^3} \qquad \Delta = (-3 \cdot x^3 \cdot y)^4$$

Απάντηση:

$$A = x^{-3} \cdot (-x)^6 = x^{-3} \cdot x^6 = x^{-3+6} = x^3$$

$$B = \frac{(2xy)^4}{8y^4} = \frac{1}{8}\left(\frac{2xy}{y}\right)^4 = \frac{1}{8}(2x)^4 = \frac{1 \cdot 2^4x^4}{8} = \frac{16x^4}{8} = 2x^4$$

$$\Gamma = \frac{4^2x^5y^4}{20x^2y^3} = \frac{16}{20} \cdot \frac{x^5}{x^2} \cdot \frac{y^4}{y^3} = \frac{4}{5}x^{5-2}y^{4-3} = \frac{4}{5}x^3y$$

$$\Delta = (-3 \cdot x^3 \cdot y)^4 = (-3)^4 (x^3)^4 y^4 = 81x^{3\cdot 4}y^4 = 81x^{12}y^4$$

Ερωτήσεις για Αυτοαξιολόγηση

1 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^4 \cdot (\sqrt{5})^2$ **β)** $(\sqrt{5})^{-3} : (\sqrt{5})^{-5}$ **γ)** $(\sqrt{5})^5 \cdot 5$ **δ)** $(\sqrt{5})^{-2}$

2 Να γράψετε μία παράσταση με βάση άρρητο και εκθέτη αρνητικό της οποίας η τιμή να είναι μεταξύ 0 και π.

3 Χωρίς να υπολογίσετε τις δυνάμεις, να διατάξετε τους αριθμούς π^2, π^{-3} και π^0 από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

4 Να κάνετε το ίδιο για τις δυνάμεις $\left(\frac{1}{\pi}\right)^2, \left(\frac{1}{\pi}\right)^{-3}$ και $\left(\frac{1}{\pi}\right)^0$.

5 Αν διπλασιάσουμε την ακμή ενός κύβου, κατά πόσο αυξάνεται ο όγκος του;

6 Να γράψετε τον δεκαδικό αριθμό $0,\underbrace{000...01}_{\nu \text{ θέσεις}}$ σε μορφή δύναμης (ν φυσικός αριθμός ν>0).

7 Ο αριθμός 37.000.000.000 είναι ίσος με:

Α. $3,7 \cdot 10^{10}$ **Β.** $3,7 \cdot 10^{11}$ **Γ.** $3,7 \cdot 10^{9}$

8 Ο αριθμός 0,00000000000023 είναι ίσος με:

Α. $2,3 \cdot 10^{-12}$ **Β.** $2,3 \cdot 10^{-13}$ **Γ.** $2,3 \cdot 10^{-11}$

Ασκήσεις και Προβλήματα

1 Να υπολογίσετε τις δυνάμεις:

$(\sqrt{7})^3, \quad (\sqrt{7})^4, \quad (\sqrt{7})^5, \quad (\sqrt{7})^6$

2 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις με δυνάμεις:

α) $\varphi^2 \cdot \varphi^3 \cdot \varphi^5$ **β)** $(\sqrt{8})^{-2} \cdot (\sqrt{8})^5 \cdot (\sqrt{8})^{-3}$

γ) $\frac{8 \cdot 3^7 \cdot \pi^4}{-4 \cdot 3^9 \cdot \pi^3}$ **δ)** $\left(\frac{-2 \cdot \pi^{-2}}{\pi^{-1} \cdot \pi^{-6}}\right)^3$

3 Να υπολογίσετε τους αριθμούς:

$A = (\sqrt{5})^{-2} + (\sqrt{5})^{-2}$

$B = (\sqrt{2})^{-2} + (\sqrt{2})^{-4} + (\sqrt{2})^{-6}$

$\Gamma = (\sqrt{7})^{-9} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^{-5}$

4 Να γράψετε σε τυποποιημένη μορφή τους αριθμούς:

$A = 25 \cdot 10^3 \cdot 1,24 \cdot 10^2$

$B = 1,3 \cdot 10^4 \cdot 9,86 \cdot 10^3$

$\Gamma = 3 \cdot 10^{-5} \cdot 5 \cdot 10^{-2}$

5 Να κάνετε τις πράξεις και να γράψετε τα αποτελέσματα σε τυποποιημένη μορφή:

α) 5076000000000·34000000

β) 0,00000012·0,00000035

γ) 5400000000:0,0000009

6 Να γράψετε στην απλούστερη δυνατή μορφή τις αριθμητικές παραστάσεις:

α) $(13^3)^2 : 13^4$ **β)** $5^2 \cdot \frac{1}{11^3}(5 \cdot 11)^4$ **γ)** $\frac{2^3 \cdot 5^{-2}}{2^4 \cdot 5^{-3}}$

δ) $\frac{8^{73} \cdot 3^{-31}}{9^{15} \cdot 2^{220}}$ **ε)** $\left(\frac{2}{3}\right)^{11} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{10}$

7 Να απλοποιήσετε τις ακόλουθες αλγεβρικές παραστάσεις, με την προϋπόθεση ότι έχουν νόημα:

α) $\left(\frac{x^4 y^2}{-3x^3}\right)^2$ **β)** $(-2x)^5 x^2 x^3$

γ) $\frac{6\alpha^5\beta^5}{-3\alpha^5\beta^3}$ **δ)** $\frac{(3\kappa^4\lambda)^4}{-27\kappa^{10}\lambda^4}$.

8 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $10^{-5}x = 10^{-3}$

β) $-3^{-11} \cdot x = 3^{-9}$

γ) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-5} \cdot x = 5^{-3}$.

9 Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$A = (-1)^{-1} + (-1)^{-2} + (-1)^{-3} + \dots + (-1)^{-2023} + (-1)^{-2024}$

10 Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$A = \left(3 - \frac{7}{2}\right)^3 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^2 - (-1)^8$

$B = \left(-\frac{1}{9}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} - (-2)^3 - [(2^3 - 4):2 - 7]$

11 Να γράψετε ως δύναμη ενός μόνο ρητού τα γινόμενα:

$A = 2^4 \cdot 9^2 \cdot 25^2 \qquad B = (-8) \cdot (-3)^3 \cdot 5^6$

$\Gamma = 2^{53} \cdot 0,25^{24} \qquad \Delta = \left(-\frac{2}{5}\right)^4 \cdot \left(-\frac{49}{121}\right)^2 \cdot \frac{1}{3^4}$

12 Η μάζα της Γης είναι $5{,}974 \cdot 10^{21}$ τόνους και η μάζα ενός πρωτονίου $1{,}7 \cdot 10^{-27}$ kg. Πόσα πρωτόνια έχει η μάζα της Γης; Να δώσετε το αποτέλεσμα σε τυποποιημένη μορφή.

13 Το πρόβλημα των πυρκαγιών παγκοσμίως, αλλά και στη χώρα μας, αποτελεί μεγάλη οικολογική καταστροφή. Το καλοκαίρι του 2023 οι φωτιές μέχρι τις 2 Σεπτεμβρίου είχαν κάψει πάνω από $1{,}8 \cdot 10^9$ m^2 δασικής έκτασης. Η έκταση αυτή αντιστοιχεί περίπου στην έκταση του νομού Λασιθίου. Να βρείτε την έκταση του νομού Λασιθίου σε km^2.

14 Ο Εγγύτατος του Κενταύρου είναι αστέρας, τύπου ερυθρού νάνου, και εντοπίζεται στον αστερισμό «Κένταυρος». Παρόλο που δεν είναι ορατός με γυμνό μάτι, είναι ο κοντινότερος (εγγύτερος) αστέρας στο Ηλιακό μας Σύστημα. Απέχει από τη Γη $2{,}5 \cdot 10^5$ φορές περισσότερο από την απόσταση Γης–Ήλιου. Αν η απόσταση «Γη–Ήλιος» είναι $1{,}5 \cdot 10^8$ km, να βρείτε πόσο απέχει ο Εγγύτατος του Κενταύρου από τη Γη.

15 Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 1^{x-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{x} - \left(\frac{1}{9}\right)^{x+2} - \left(\frac{1}{27}\right)^{x+4} \text{ για } x = -4.$$

16 Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$A = x^4 - 4x^2 + 3x + 3 \text{ για } x = -\sqrt{3}$$

$$B = -x^3 - 2x^2 + 5x + 3 \text{ για } x = -\sqrt{5}$$

$$\Gamma = -x^3 - 5x^4 - x^3 + x + 10 \text{ για } x = -2$$

$$\Delta = x^3 - x^2 - x + 2 \text{ για } x = -\frac{1}{2}$$

17 **(Ανοιχτό πρόβλημα)**

α) Χρησιμοποιώντας τρεις φορές το 3 να γράψετε τον μεγαλύτερο αριθμό που μπορείτε.

β) Χρησιμοποιώντας τρεις φορές το 4 να γράψετε τον μεγαλύτερο αριθμό που μπορείτε.

γ) Να γράψετε τους αριθμούς στην τυποποιημένη μορφή και να βρείτε πόσες φορές είναι μεγαλύτερος ο δεύτερος από τον πρώτο. (Να χρησιμοποιήσετε την αριθμομηχανή σας)

18 **Νευρώνες**

α) Μια μελέτη διαπίστωσε ότι ο μέσος ανθρώπινος εγκέφαλος έχει $8{,}6 \cdot 10^{10}$νευρώνες. Να γράψετε αυτόν τον αριθμό σε δεκαδική μορφή.

β) Τα κυτταρικά σώματα των νευρώνων έχουν πλάτος που κυμαίνεται μεταξύ 0,000004 και 0,0001 μέτρων. Να γράψετε αυτό το εύρος στην τυποποιημένη μορφή.

1.6 Ιδιότητες των τετραγωνικών ριζών

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθήτριες και οι μαθητές να μπορούν:

- Να διερευνούν και να αποδεικνύουν τις ιδιότητες του γινομένου και του πηλίκου τετραγωνικών ριζών.
- Να χρησιμοποιούν τις τετραγωνικές ρίζες και τις ιδιότητές τους στην απλοποίηση παραστάσεων και την επίλυση προβλημάτων.

Διερεύνηση 1: Γινόμενο τετραγωνικών ριζών

Να συνεργαστείτε ανά δύο και να συζητήσετε τα αποτελέσματά σας στην τάξη.

Ο εκπαιδευτικός γράφει στον πίνακα: $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$.

Εκπαιδευτικός: Πόσο νομίζετε ότι κάνει αυτό το γινόμενο;
Μυρτώ: Νομίζω ότι κάνει 6.
Πέτρος: Αποκλείεται, δεν μπορεί να είναι ακέραιος αριθμός.

α) Πώς νομίζετε ότι οδηγήθηκε ο Πέτρος στο συμπέρασμά του;
β) Πώς νομίζετε ότι οδηγήθηκε η Μυρτώ στο συμπέρασμά της;
γ) Συμφωνείτε με τον Πέτρο ή με τη Μυρτώ και γιατί;

Διερεύνηση 2: Ιδιότητες γινομένου και πηλίκου τετραγωνικών ριζών.

Να εργαστείτε είτε ατομικά είτε ανά δύο και να συζητήσετε τα αποτελέσματά σας στην τάξη.

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

α	β	$\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha\cdot\beta}$	$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$	$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$
4	9				
16	9				
4	25				
0,25	4				
25	16				

Παρατηρώντας τα αποτελέσματα του πίνακα να διατυπώσετε μία εικασία:

α) Για το γινόμενο των τετραγωνικών ριζών.

β) Για το πηλίκο των τετραγωνικών ριζών.

Να διερευνήσετε τις πράξεις με τετραγωνικές ρίζες, ανοίγοντας την εφαρμογή.

Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες μάθησης

Γνωρίζουμε από τη Β΄ Γυμνασίου ότι:

Τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού **α** είναι ο μη αρνητικός αριθμός ο οποίος όταν υψωθεί στο τετράγωνο, μας δίνει τον αριθμό **α.** Η τετραγωνική ρίζα του α συμβολίζεται με $\sqrt{\alpha}$.

Συγκεκριμένα: Αν $\sqrt{\alpha} = x$, με $\alpha \geq 0$ και $x \geq 0$, τότε $x^2 = \alpha$ ή $\sqrt{\alpha^2} = (\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$.

Παραδείγματα: Είναι $\sqrt{36} = 6$, αφού $6^2=36$ και $\sqrt{0,25} = 0,5$ αφού $(0,5)^2 = 0,25$.

Σημείωση:

Το σύμβολο $\sqrt{\alpha}$ από τον ορισμό έχει νόημα όταν $\alpha \geq 0$.
Δεν ορίζεται τετραγωνική ρίζα αρνητικού αριθμού, γιατί δεν υπάρχει αριθμός που το τετράγωνό του να είναι αρνητικός αριθμός.

Παρατηρούμε ότι: $(\sqrt{9})^2 = \sqrt{9^2} = 9$.

Γενικά

Αν $\alpha \geq 0$ τότε $\sqrt{\alpha^2} = (\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$.

Η εξίσωση $x^2 = 25$ έχει λύσεις τους αριθμούς 5 και -5 αφού $5^2 = 25$ και $(-5)^2 = 25$.

Ωστόσο, σύμφωνα με τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας ισχύει $\sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5$, αλλά δεν ισχύει $\sqrt{(-5)^2} = -5 < 0$, αφού η τετραγωνική ρίζα μη αρνητικού αριθμού είναι μη αρνητικός αριθμός.

Παρατηρούμε επίσης ότι: $\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5 = |5|$ και $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5 = |-5|$. Γενικά:

Για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει: $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$.

Παράδειγμα: $\sqrt{7^2} = |7| = 7$ και $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = -(-5) = 5$.

Να διερευνήσετε τις παραστάσεις $(\sqrt{\alpha})^2$ και $\sqrt{\alpha^2}$, ανοίγοντας την εφαρμογή.

Ιδιότητες των τετραγωνικών ριζών

Πολλές φορές, σε μεγάλο αριθμό παραδειγμάτων βλέπουμε να διαφαίνεται κάποια κανονικότητα. Είναι λογικό να σκεφτούμε ότι μπορεί αυτή η κανονικότητα να ισχύει γενικότερα. Αυτό αποτελεί μία **εικασία.** Οι εικασίες στα Μαθηματικά είναι πολύ χρήσιμες για την ανακάλυψη νέων προτάσεων. Ωστόσο, μία εικασία για να γίνει ιδιότητα, δηλαδή κανόνας με καθολική ισχύ, δεν αρκούν τα παραδείγματα, ακόμα κι αν αυτά είναι πολλά, διότι απλά δεν μπορούμε να τα εξετάσουμε όλα. Για να απορριφθεί μία εικασία, αρκεί να βρεθεί ένα παράδειγμα για το οποίο αυτή να μην ισχύει (αντιπαράδειγμα). Αν δεν μπορούμε να βρούμε κατάλληλο αντιπαράδειγμα δεν σημαίνει απαραίτητα ότι η εικασία είναι αληθής. Για να καταστεί μια εικασία ιδιότητα, απαιτείται **απόδειξη**.

ΕΙΚΑΣΙΑ ΤΟΥ ΓΚΟΛΝΤΜΠΑΧ
Μια διάσημη εικασία
Κάθε άρτιος αριθμός μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο πρώτων αριθμών.
Παραδείγματα:
8 = 5+3
10 = 5+5 = 7+3
20 = 13+7 = 17+3

Ανατρέχοντας στη διερεύνηση (2) διαπιστώνουμε ότι για τους συγκεκριμένους θετικούς αριθμούς ισχύει ότι $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha \cdot \beta}$ και διατυπώνουμε την εικασία:

«Για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς α, β ισχύει ότι: $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha \cdot \beta}$»

Απόδειξη

Ξέρουμε ότι: **«αν τα τετράγωνα δύο θετικών αριθμών είναι ίσα τότε και οι αριθμοί θα είναι ίσοι»**, οπότε αρκεί να συγκρίνουμε τα τετράγωνα των αριθμώνι $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$ και $\sqrt{\alpha \cdot \beta}$.

Είναι:

- $\left(\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}\right)^2 = (\sqrt{\alpha})^2 \cdot \left(\sqrt{\beta}\right)^2 = \alpha \cdot \beta$ (ιδιότητα δυνάμεων και ορισμός ρίζας)
- $\left(\sqrt{\alpha \cdot \beta}\right)^2 = \alpha \cdot \beta$ (συνέπεια του ορισμού της ρίζας)

Άρα: $\left(\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}\right)^2 = \left(\sqrt{\alpha \cdot \beta}\right)^2$ και επομένως: $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha \cdot \beta}$.

Η εικασία πλέον, αφού αποδείχτηκε, έγινε ιδιότητα, δηλαδή κανόνας με καθολική ισχύ.

Η ιδιότητα που αποδείξαμε ισχύει και όταν $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$ ή $\alpha = \beta = 0$ και, επομένως, ισχύει για μη αρνητικούς αριθμούς α, β. Από τη διερεύνηση (2) προκύπτει επίσης μία εικασία για το πηλίκο δύο ριζών. Η απόδειξή της μπορεί να γίνει με ανάλογο τρόπο προς το γινόμενο των ριζών.

Για το γινόμενο και το πηλίκο τετραγωνικών ριζών ισχύουν οι ιδιότητες:

$$\boldsymbol{\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha \cdot \beta}} \quad \alpha \geq 0, \beta \geq 0$$

$$\boldsymbol{\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}} \quad \alpha \geq 0, \beta > 0$$

Σχόλιο: Οι ιδιότητες ισχύουν με την προϋπόθεση ότι έχουν νόημα οι εμφανιζόμενες παραστάσεις και όπου στη συνέχεια δεν αναφέρονται θεωρούμε ότι ισχύουν.

Παρατήρηση:

Είναι $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$, $\sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$. Άρα, $\sqrt{16 + 9} \neq \sqrt{16} + \sqrt{9}$.

Γενικά

Αν α, β θετικοί πραγματικοί αριθμοί, τότε $\sqrt{\alpha + \beta} \neq \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$.

Όταν έχουμε παραστάσεις με άρρητους αριθμούς, πριν αντικαταστήσουμε τους άρρητους με ρητές προσεγγίσεις τους, εξετάζουμε αν μπορούμε να βρούμε αποτέλεσμα ρητό αριθμό με την εφαρμογή των ιδιοτήτων.

Παράδειγμα:

$\sqrt{5}\cdot\sqrt{20} = \sqrt{5\cdot 20} = \sqrt{100} = 10$ [Με εφαρμογή των ιδιοτήτων]

$\sqrt{5}\cdot\sqrt{20} \approx (2,2360)\cdot(4,4721) \approx 9,9996$ [Με ρητές προσεγγίσεις]

Να διερευνήσετε τις ιδιότητες των πράξεων τετραγωνικών ριζών ανοίγοντας την εφαρμογή.

Εφαρμογή 1

Να υπολογίσετε τους αριθμούς $A=(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)$ και $B = (\sqrt{7}-\sqrt{2})(\sqrt{2}+\sqrt{7})$.

Απάντηση:

Χρησιμοποιώντας τη διπλή επιμεριστική ιδιότητα (α+β)(γ+δ)=αγ+αδ+βγ+βδ έχουμε:

$A = (\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2) = \sqrt{5}(\sqrt{5}-2) + 2(\sqrt{5}-2)$

$= (\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 4 = 5 - 4 = 1.$

$B = (\sqrt{7}-\sqrt{2})(\sqrt{2}+\sqrt{7}) = \sqrt{7}\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{7}) - \sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{7})$

$= \sqrt{7}\cdot\sqrt{2} + (\sqrt{7})^2 - (\sqrt{2})^2 - \sqrt{2}\cdot\sqrt{7}$

$= \sqrt{14} + 7 - 2 - \sqrt{14} = 7 - 2 = 5.$

Εφαρμογή 2

α) Να αποδείξετε ότι: $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ και $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

β) Αν $\alpha = 2\sqrt{2} - 5\sqrt{3}$ και $\beta = 3\sqrt{2} + \sqrt{3}$, να βρείτε το άθροισμα α+β και το γινόμενο α·β.

Απάντηση:

α) $\sqrt{12} = \sqrt{4\cdot 3} = \sqrt{2^2\cdot 3} = \sqrt{2^2}\cdot\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$. και $\sqrt{32} = \sqrt{16\cdot 2} = \sqrt{4^2\cdot 2} = \sqrt{4^2}\cdot\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.

β) $\alpha+\beta = 2\sqrt{2} - 5\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + \sqrt{3} = (2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}) + (-5\sqrt{3} + \sqrt{3}) = (2+3)\sqrt{2} + (-5+1)\sqrt{3} = 5\sqrt{2} - 4\sqrt{3}$

$\alpha\cdot\beta = (2\sqrt{2} - 5\sqrt{3})(3\sqrt{2} + \sqrt{3}) = 2\sqrt{2}(3\sqrt{2} + \sqrt{3}) - 5\sqrt{3}(3\sqrt{2} + \sqrt{3}) = 6(\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} - 15\sqrt{3}\cdot\sqrt{2} - 5(\sqrt{3})^2$

$= 6\cdot 2 + 2\sqrt{2\cdot 3} - 15\sqrt{3\cdot 2} - 5\cdot 3 = 12 + 2\sqrt{6} - 15\sqrt{6} - 15 = 12 - 15 + (2-15)\sqrt{6} = -3 - 13\sqrt{6}.$

Εφαρμογή 3

Να μετατρέψετε τα ακόλουθα κλάσματα με άρρητους παρονομαστές σε κλάσματα με ρητούς παρονομαστές.

α) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ **β)** $(\sqrt{5})^{-1}$ **γ)** $\dfrac{2}{\sqrt{8}}$

Απάντηση:

α) Πολλαπλασιάζουμε τους όρους του κλάσματος με $\sqrt{3}$ βρίσκοντας ισοδύναμο κλάσμα με ρητό παρονομαστή.

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

β) Όμοια για τον αριθμό $\left(\sqrt{5}\right)^{-1}$ έχουμε: $\left(\sqrt{5}\right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\left(\sqrt{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

γ) Είναι $\sqrt{8} = \sqrt{4\cdot 2} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$. Άρα $\frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε και ως εξής:

$$\frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{2\cdot\sqrt{8}}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{8}} = \frac{2\cdot\sqrt{4\cdot 2}}{(\sqrt{8})^2} = \frac{2\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}}{8} = \frac{2\cdot 2\cdot\sqrt{2}}{8} = \frac{4\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

> Συνήθως όταν εργαζόμαστε με κλάσματα μας διευκολύνει να μην έχουμε άρρητους αριθμούς σε παρονομαστές. Σε περιπτώσεις σαν κι αυτές μετατρέπουμε τα κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή και η διαδικασία αυτή ονομάζεται *ρητοποίηση του παρονομαστή.*

Εφαρμογή 4

- **Εκπαιδευτικός**: «Η ισότητα $\sqrt{\alpha^2\beta} = \alpha\sqrt{\beta}$ ισχύει πάντοτε;»
- **Κώστας**: «Πρέπει ο β να μην είναι αρνητικός, αλλιώς δεν ορίζεται η τετραγωνική ρίζα του $\sqrt{\beta}$. Επειδή ο α^2 είναι μη αρνητικός, το γινόμενο των α^2 και β θα είναι μη αρνητικό, δηλαδή θα είναι $\alpha^2\beta \geq 0$, οπότε ορίζεται η πρώτη ρίζα. Άρα είναι αληθής, όταν β μη αρνητικός».
- **Βασιλική**: «Νομίζω ότι πρέπει και ο α να είναι μη αρνητικός, γιατί αν $\alpha = -1$ και $\beta = 1$, τότε $\sqrt{\alpha^2\beta} = \sqrt{(-1)^2\cdot 1} = \sqrt{1} = 1$ και $\alpha\sqrt{\beta} = -1\sqrt{1} = -1\cdot 1 = -1$, οπότε δεν ισχύει».

α) Συμφωνείτε με τον Κώστα ή τη Βασιλική; Να εξηγήσετε.

β) Αν δεν ισχύει πάντα, να αναδιατυπώσετε την πρόταση, έτσι ώστε να ισχύει πάντα και να εξηγήσετε.

Απάντηση:

α) Ο Κώστας διατύπωσε τον περιορισμό $\beta \geq 0$, που είναι σωστός, αλλά δεν αρκεί για να εξασφαλίσει τις προϋποθέσεις εφαρμογής της ισότητας. Η Βασιλική έχει δίκιο και με το αντιπαράδειγμά της έδειξε ότι δεν ισχύει για όλους τους αριθμούς ο ισχυρισμός του Κώστα. Συμπλήρωσε τον ισχυρισμό του Κώστα προσθέτοντας ότι πρέπει επιπλέον $\alpha \geq 0$.

β) Για να ισχύει πάντοτε ο ισχυρισμός, πρέπει να αναδιατυπωθεί ως εξής: «αν $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$, τότε $\sqrt{\alpha^2\beta} = \alpha\sqrt{\beta}$». Με $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$ έχουμε $\sqrt{\alpha^2\beta} = \sqrt{\alpha^2}\cdot\sqrt{\beta} = |\alpha|\cdot\sqrt{\beta} = \alpha\sqrt{\beta}$.

Ερωτήσεις για Αυτοαξιολόγηση

1 Να γράψετε σε απλούστερη μορφή τις παραστάσεις: **α)** $\left(-\sqrt{7}\right)^{-2}$ **β)** $5\sqrt{5} - 7\sqrt{5} + \sqrt{5}$ **γ)** $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\,0$

2 Να εξετάσετε αν ισχύουν οι ισότητες: **α)** $\sqrt{100} - \sqrt{64} = \sqrt{100-64}$ και **β)** $\sqrt{12} + \sqrt{75} = \sqrt{48} + \sqrt{27}$

3 Να υπολογίσετε όσες ρίζες μπορείτε και να διατυπώσετε έναν κανόνα.
α) $\sqrt{9}$ $\sqrt{90.000}$ $\sqrt{0,09}$ $\sqrt{0,0009}$ $\sqrt{900}$ **β)** $\sqrt{400}$ $\sqrt{40}$ $\sqrt{4}$ $\sqrt{0,4}$ $\sqrt{0,04}$

4 Να υπολογίσετε την τιμή κάθε παράστασης: $(\sqrt{17})^{-4}(\sqrt{17})^{4}$ $\quad \left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\right)^{-2}$

5 Να υπολογίσετε τις τετραγωνικές ρίζες εφόσον έχουν νόημα: $\sqrt{\dfrac{4}{9}}$, $\sqrt{4 \cdot 25}$, $\sqrt{-7}$, $\sqrt{-7^2}$, $\sqrt{(-7)^2}$.

6 **(Αριθμότοιχοι)** Ο αριθμός που βρίσκεται σε ένα τουβλάκι είναι ίσος με το γινόμενο των αριθμών στα δύο τουβλάκια που βρίσκονται κάτω του. Να συμπληρώσετε τους αριθμότοιχους.

Πρώτος αριθμότοιχος (από πάνω προς τα κάτω):
- $15\sqrt{210}$
- ___ , ___
- $\sqrt{10}$, ___ , ___
- $\sqrt{2}$, ___ , ___ , $\sqrt{3}$

Δεύτερος αριθμότοιχος (από πάνω προς τα κάτω):
- $384\sqrt{2}$
- ___ , ___
- ___ , ___ , $4\sqrt{3}$
- $\sqrt{8}$, ___ , ___ , $\sqrt{6}$

7 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις με ριζικά χωρίς να υπολογίσετε τις ρίζες ή να υψώσετε στο τετράγωνο. Να εξηγήσετε την προσέγγισή σας.

α) $\sqrt{11^2}$ **β)** $(\sqrt{36})^2$ **γ)** $-\sqrt{32^2}$ **δ)** $(\sqrt{676})^2$ **ε)** $-\sqrt{49}$

8 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με τη λέξη Σωστό (Σ), αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος (Λ), αν η πρόταση είναι λανθασμένη. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

α) $\sqrt{81} = -9$ **β)** $-\sqrt{25} = -5$ **γ)** $\sqrt{-36} = -6$ **δ)** $\sqrt{(-4)^2} = 4$

ε) $\sqrt{64} = \pm 8$ **στ)** $\sqrt{-49} = |-7|$ **ζ)** $\sqrt{9 \cdot \dfrac{2}{7}} = 9\sqrt{\dfrac{2}{7}}$ **η)** $\sqrt{(-9)\cdot(-4)} = -|-6|$

θ) Αν $\alpha \geq 0$, ο διπλάσιος του $\sqrt{\alpha}$ είναι ο $\sqrt{4\alpha}$.

Ασκήσεις και Προβλήματα

1 Να εκφράσετε τα γινόμενα σε μορφή μιας τετραγωνικής ρίζας και να την υπολογίσετε:

α) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$ **β)** $\sqrt{2} \cdot \sqrt{32}$ **γ)** $\sqrt{6} \cdot \sqrt{150}$

δ) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{28}$ **ε)** $\sqrt{320} \cdot \sqrt{0,2}$

2 Να γράψετε τις τετραγωνικές ρίζες σε απλούστερη μορφή.

α) $\sqrt{44}$ **β)** $\sqrt{27}$ **γ)** $\sqrt{18}$

δ) $\sqrt{45}$ **ε)** $\sqrt{112}$

3 Να τρέψετε τα κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή.

α) $-\dfrac{7}{\sqrt{7}}$ **β)** $\dfrac{4}{\sqrt{2}}$ **γ)** $\dfrac{22}{\sqrt{11}}$ **δ)** $\dfrac{17}{\sqrt{17}}$

ε) $\dfrac{6}{\sqrt{48}}$

4 Να συμπτύξετε τα αθροίσματα:

α) $2\sqrt{7} - 7\sqrt{7} + \sqrt{7}$ **β)** $2\sqrt{3} - 5\sqrt{5} - 4\sqrt{3} + 6\sqrt{5}$

γ) $3\sqrt{20} - 2\sqrt{5} + \sqrt{8} - 2\sqrt{2}$

5 **(Μαγικά τετράγωνα)** Ένα τετράγωνο είναι μαγικό αν βρίσκουμε το ίδιο άθροισμα αριθμών σε κάθε γραμμή, στήλη ή διαγώνιο. Να συμπληρώσετε τα τετράγωνα με αριθμούς της μορφής $\sqrt{\alpha}$, με α θετικό ακέραιο αριθμό, έτσι ώστε να γίνουν μαγικά.

$\sqrt{128}$		
	$\sqrt{50}$	
	$\sqrt{162}$	$\sqrt{8}$

	$7\sqrt{5}$	$\sqrt{180}$
	$\sqrt{125}$	
$\sqrt{80}$		

6 Να υπολογίσετε ακριβώς ή κατά προσέγγιση τον αριθμό που αντιπροσωπεύει κάθε γινόμενο:

α) $\sqrt{3} \cdot (2 - \sqrt{3})$ **β)** $\sqrt{3} \cdot (\sqrt{12} + \sqrt{21})$

γ) $\sqrt{7} \cdot (\sqrt{175} - \sqrt{63})$

7 Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

α) $(\sqrt{5} - \sqrt{6})(\sqrt{5} + \sqrt{6})$

β) $(2\sqrt{7} - 3\sqrt{5})(3\sqrt{5} + 2\sqrt{7})$

γ) $(2\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - 3\sqrt{2})$

8 Να αποδείξετε ότι:

α) $\sqrt{18} + \sqrt{50} = 8\sqrt{2}$ **β)** $2\sqrt{48} - 5\sqrt{75} + 17\sqrt{3} = 0$

γ) $\sqrt{20} + \sqrt{45} = \sqrt{125}$

9 Να αποδείξετε ότι:

α) $\sqrt{18} + \sqrt{50} = 8\sqrt{2}$

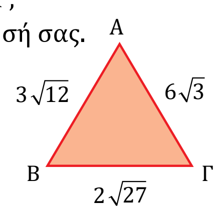
β) $(-\sqrt{8} + \sqrt{18})(\sqrt{50} + \sqrt{72} - \sqrt{32}) = 14$

γ) $\dfrac{\sqrt{72} + \sqrt{50}}{-11\sqrt{2}} = -1$

10 **α)** Τι είδους τρίγωνο είναι το ΑΒΓ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να υπολογίσετε πρώτα ένα ύψος και ύστερα το εμβαδόν του τριγώνου.

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου και να τη γράψετε στην απλούστερη δυνατή μορφή.



11 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\sqrt{3} \cdot x = \sqrt{18}$, **β)** $(\sqrt{5})^{-2} \cdot x = 2(\sqrt{2})^2$

γ) $(\sqrt{50})^{-1} x = \sqrt{2}$ **δ)** $\sqrt{12} \cdot x\text{-}5 = 2 \cdot x\sqrt{3}$

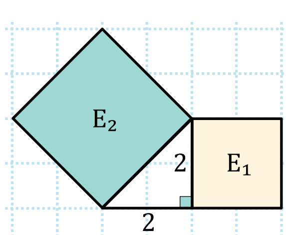
12 Να εξετάσετε αν για όλους τους θετικούς αριθμούς α, β με α > β ισχύει ότι: $\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha - \beta}$. Να αιτιολογήσετε.

13 Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο οι κάθετες πλευρές του είναι $\sqrt{3} - 1$ και $\sqrt{3} + 1$. Να βρείτε την υποτείνουσα.

14 Το διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο έχει κάθετες πλευρές ίσες με 2 μονάδες μήκους. Να δείξετε ότι:

α) Η πλευρά του τετραγώνου με εμβαδόν E_2 είναι ίση με $2\sqrt{2}$.

β) Για τα εμβαδά E_1 και E_2 ισχύει $E_2 = 2E_1$.



15 Να υπολογίσετε:

α) $-\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{75} - \sqrt{(-5)^2}$

β) $\left(\sqrt{5^2} - \sqrt{(-2)^2}\right)^{-2}$

16 Να γράψετε τους αριθμούς στη μορφή $\alpha\sqrt{\beta}$ με α ακέραιο και β τον μικρότερο δυνατό θετικό ακέραιο.

Α $= 4\sqrt{108} - 3\sqrt{75} + \sqrt{27} - 12\sqrt{3}$

Β $= 7\sqrt{18} - \sqrt{50} + 2\sqrt{98} - 6\sqrt{72}$

Γ $= 2\sqrt{48} - 3\sqrt{108} + 5\sqrt{75} - 4\sqrt{147}$.

17 Να αποδείξετε ότι:

α) $\sqrt{\sqrt{37} - 1} \cdot \sqrt{\sqrt{37} + 1} = 6$

β) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{3}} \cdot \sqrt{3 + \sqrt{3}} = 6$

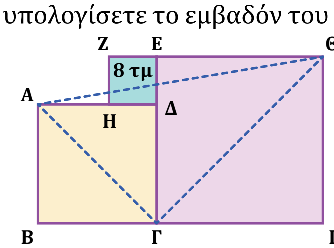
γ) $\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}} - \dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{10}}{5}$

18 **Εργασία σε ομάδες.** Το παρακάτω σχήμα αποτελείται από 3 τετράγωνα με:
$E_{ΑΒΓΔ} = 50m^2$, $E_{ΔΕΖΗ} = 8m^2$.

α) Να βρείτε το εμβαδόν του τετραγώνου ΓΕΘΙ.

β) Να υπολογίσετε τις διαγωνίους ΑΓ και ΓΘ των τετραγώνων ΑΒΓΔ και ΓΕΘΙ αντίστοιχα.

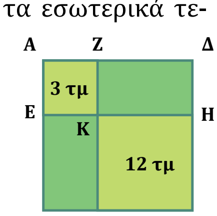
γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΓΘ.



19 Στο διπλανό τετράγωνο ΑΒΓΔ, τα εσωτερικά τετράγωνα ΑΖΚΕ και ΚΗΓΘ έχουν εμβαδόν 3 m² και 12 m², αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του μεγάλου τετραγώνου ΑΒΓΔ.

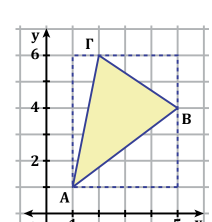
β) Να δείξετε ότι ΒΔ=$3\sqrt{6}$.



20 Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε:

α) Την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.



1.7 Ανακεφαλαίωση και διεύρυνση της θεματικής ενότητας

Οι πραγματικοί αριθμοί

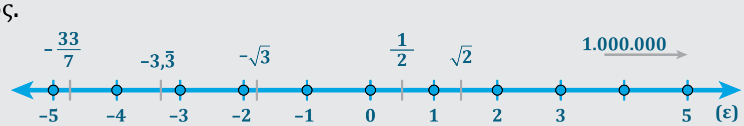
1 Δεκαδική αναπαράσταση πραγματικών αριθμών.

Οι πραγματικοί αριθμοί αποτελούνται από τους ρητούς και τους άρρητους. Όλοι οι πραγματικοί αριθμοί έχουν δεκαδικές αναπαραστάσεις.

- Κάθε ρητός στη δεκαδική του μορφή γράφεται είτε ως τερματιζόμενος δεκαδικός με πεπερασμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων, π.χ. 2,247 είτε ως περιοδικός δεκαδικός με άπειρο πλήθος ψηφίων, με περιοδικότητα, π.χ. 1,8454545… .
- Η δεκαδική αναπαράσταση ενός άρρητου είναι ένας δεκαδικός με άπειρα δεκαδικά ψηφία χωρίς περιοδικότητα (π.χ. 1,0110111011110...).

2 Ο άξονας των πραγματικών αριθμών

Οι πραγματικοί αριθμοί παριστάνονται με σημεία μιας ευθείας. Κάθε πραγματικός αριθμός αντιστοιχεί σε ένα σημείο της ευθείας και σε κάθε σημείο της ευθείας αντιστοιχεί ένας πραγματικός αριθμός. Η ευθεία αυτή λέγεται άξονας των πραγματικών αριθμών. Μεταξύ δύο αριθμών αυτός που βρίσκεται δεξιότερα είναι μεγαλύτερος.



3 Πράξεις και δυνάμεις στους πραγματικούς αριθμούς

Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους καθώς και οι δυνάμεις και οι ιδιότητές τους, οι οποίες ισχύουν στους ρητούς αριθμούς, επεκτείνονται και ισχύουν και στους πραγματικούς αριθμούς.

4 Τετραγωνικές ρίζες

Αν $\sqrt{α} = x$ x με $α \geq 0$ και $x \geq 0$, τότε $x^2 = α$.

Για τις τετραγωνικές ρίζες ισχύουν οι ιδιότητες:

α) Γινόμενο ριζών: $\sqrt{α} \cdot \sqrt{β} = \sqrt{α \cdot β}$, $α \geq 0$, $β \geq 0$

β) Πηλίκο ριζών: $\dfrac{\sqrt{α}}{\sqrt{β}} = \sqrt{\dfrac{α}{β}}$, $α \geq 0$, $β > 0$

Με τη βοήθεια διάστικτου καμβά να κάνετε την εργασία με προεκτάσεις:
«Ψάχνοντας για "οικογένειες τετραγώνων"».

Ερωτήσεις για συζήτηση και αναστοχασμό

1. Να γράψετε τον αριθμό 0,00034 ως κλάσμα στην απλούστερη δυνατή μορφή.
2. Να γράψετε τον αριθμό $0,\overline{34}$ ως κλάσμα στην απλούστερη δυνατή μορφή.
3. Ο αριθμός $5,14\overline{6852}$ είναι ρητός ή άρρητος; Να αιτιολογήσετε.
4. Να γράψετε τους παρακάτω αριθμούς κατά σειρά μεγέθους από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο.
   25, 80, 4^{-2}, $\sqrt{169}$, 2^{-5}
5. Να γράψετε χωρίς δυνάμεις του 10 τους αριθμούς: **α)** $3{,}08 \cdot 10^4$ **β)** $4{,}8 \cdot 10^{-5}$

6 Να γράψετε τις παρακάτω τετραγωνικές ρίζες μεταξύ δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών: **α)** $\sqrt{29}$, **β)** $\sqrt{70}$.

7 Ισχύει $\sqrt{x^2+y^2} = x + y$ για όλες τις τιμές των x και y; Να εξηγήσετε τον συλλογισμό σας.

8 Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α ισχύει η ισότητα $\sqrt{\alpha^2} = -\alpha$;

Επαναληπτικά έργα και προεκτάσεις.

1 Να υπολογίσετε τις τιμές των αριθμητικών παραστάσεων:

$$A = -\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}-5\right)+\frac{7}{4}\cdot\left(-\frac{3}{8}\right),\quad B = \left(\frac{5}{2}-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{5}{6}-\left(3-\frac{7}{6}\right),\quad \Gamma = 4\cdot\left(\frac{-21}{24}\right)-\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}+8\right)-1$$

2 Να υπολογίσετε τις τιμές των αριθμητικών παραστάσεων:

$$A = -\frac{1-\frac{7}{3}}{\frac{5}{2}-2}\qquad B = -\frac{3:\frac{3}{4}}{\frac{7}{5}:7}\qquad \Gamma = \frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{3}{7}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{6}-\frac{4}{7}}$$

3 Να γράψετε στην απλούστατη δυνατή μορφή τις αριθμητικές παραστάσεις:

$$A = \frac{(3^6\cdot 2^{-2})^3}{(9^{-3}\cdot 2^2)^2}\quad B = \left(\frac{5^4\cdot 2^{-4}}{125\cdot 2^2}\right)^2 : \frac{5\cdot 10^3}{14}\quad \Gamma = \left(\frac{\alpha^3\cdot\beta^{-2}}{9\cdot\beta^2}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{\alpha^2\cdot\beta^{-3}}{6\cdot\beta^3}\right)^2\quad \Delta = \left[\left(\frac{x}{2y^4}\right)^2\cdot\left(\frac{y^2}{2x^2}\right)^2\right]:(4xy^2)^{-2}$$

4 Να γράψετε την παράσταση $A = (-16)^2\cdot\left(-\frac{1}{32}\right)^{-4}$ ως δύναμη με βάση τον αριθμό 2.

5 **Εργασία σε ομάδες**. Κάθε μέλος της ομάδας επιλέγει έναν αριθμό μεταξύ του μηδενός και της μονάδας και με αριθμομηχανή υπολογίζει το τετράγωνό του. Στο αποτέλεσμα που βρίσκει υπολογίζει ξανά το τετράγωνό του. Αυτό το κάνει διαδοχικά πολλές φορές μέχρι να γίνει σαφές ότι δεν υπάρχει λόγος να συνεχιστεί η διαδικασία.

α) Να συγκρίνετε τις απαντήσεις σας, να περιγράψετε τη διαδικασία και να διατυπώσετε μία εικασία που να βασίζεται στις παρατηρήσεις σας.

β) Να αιτιολογήσετε γιατί προκύπτει το συγκεκριμένο αποτέλεσμα.

6 **(Ανοιχτό πρόβλημα)** Να γράψετε πέντε άρρητους ανάμεσα στους αριθμούς $\frac{1}{2}$ και $\frac{3}{4}$.

7 Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \frac{8\cdot 10^{15}\cdot 15\cdot 10^{-6}}{20\cdot(10^2)^5}$, $B = \frac{1,5\cdot 10^7\cdot 4\cdot 10^{-5}}{25\cdot 10^2}$ και $\Gamma = \frac{6\cdot 10^5\cdot(10^{-2})^4}{15\cdot 10^2}$.

α) Να εκφράσετε την παράσταση Α με μορφή ανάγωγου κλάσματος.

β) Να εκφράσετε την παράσταση Β σε μορφή δεκαδικού αριθμού.

γ) Ποια είναι η τυποποιημένη μορφή της παράστασης Γ;

8 **Μαθηματική πρόκληση.** Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $(-0,25)^{1002}:8^{670}$ **β)** $(-0,125)^{101}:2^{300}$.

9 Αν $x = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}-\left(-\frac{1}{4}\right)^{-1}$ και $y = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-3}:\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-1}$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = x^{-3}-y^{-2}$.

10 **(Ανοιχτό πρόβλημα)** Χρησιμοποιώντας τον αριθμό 2 τρεις φορές να γράψετε τον μεγαλύτερο δυνατό αριθμό. Να κάνετε το ίδιο με τον αριθμό 5.

11 Να βρείτε για ποιες τιμές του α έχουν νόημα οι παραστάσεις: $\sqrt{-(-\alpha)^2}$, $\sqrt{\alpha(-\alpha)}$, $\sqrt{\frac{1}{\alpha}}$.

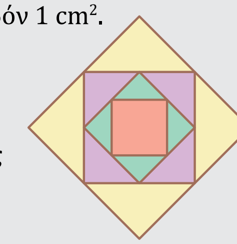
12 **Εργασία σε μικρές ομάδες.** Στο διπλανό σχήμα το κόκκινο τετράγωνο έχει εμβαδόν 1 cm^2.

α) Ποιο είναι το εμβαδόν των άλλων τριών τετραγώνων;

β) Ποια είναι η περίμετρος καθενός από αυτά τα τετράγωνα;

γ) Ποιος είναι ο λόγος των περιμέτρων δύο διαδοχικών τετραγώνων;

δ) Ποιος είναι ο λόγος των περιμέτρων δύο τετραγώνων των οποίων οι πλευρές είναι παράλληλες;



13 Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \left[\left(\frac{(-22)^5}{2^5} + \frac{(-44)^5}{(-4)^5}\right) \cdot (-2022)^2 + 10^6\right] : \left(\frac{2^{-10}}{(-10)^{-10}} - (-5)^{10} + 10^3\right)$$

(Διαγωνισμός Ε.Μ.Ε. «Ο Θαλής» 2022 – Γ΄ Γυμνασίου)

14 Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{\alpha - 1}{\alpha - 3} + \frac{1}{33} + \alpha^{-1} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{27}, \text{ αν } \alpha = \left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}$$

(Διαγωνισμός Ε.Μ.Ε. «Ο Θαλής» 2015 – Γ΄ Γυμνασίου)

15 Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{x^4 - 1}{(x^2 + 1)(x^2 - 3)} - \frac{6}{13}, \text{ αν } x = \left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}.$$

(Διαγωνισμός Ε.Μ.Ε. "Ο Θαλής" 2014 – Γ΄ Γυμνασίου)

16 Ο πληθυσμός της πόλης Α είναι 324100 κάτοικοι και ο πληθυσμός της πόλης Β είναι $7{,}64 \cdot 10^4$ κάτοικοι.

α) Να γράψετε τον πληθυσμό της πόλης Α σε τυποποιημένη μορφή.

β) Ποια πόλη, η Α ή η Β, έχει τον μεγαλύτερο πληθυσμό και κατά πόσο; Να δώσετε την απάντησή σας σε τυποποιημένη μορφή.

17 Το βάρος ενός κόκκου σιταριού είναι $8{,}8 \cdot 10^{-2}$ γραμμάρια και το βάρος ενός κόκκου ζάχαρης $4{,}4 \cdot 10^{-4}$ γραμμάρια. Ζυγίζει περισσότερο, ένας κόκκος σιτάρι ή 100 κόκκοι ζάχαρη; Να εξηγήσετε πώς θα αποφασίσετε.

18 Αν ισχύει $2{,}62 \cdot 10^x + 4{,}1 \cdot 10^y = 262{,}41$, να υπολογίσετε τις τιμές των x και y.

19 **α)** Να εξηγήσετε γιατί οι παρακάτω αριθμητικές παραστάσεις είναι ίσες:

$A=2^3 \cdot 2^3$ $\quad$ $B=(2^3)^2$ $\quad$ $\Gamma=4^3$ $\quad$ $\Delta=2^6$

β) Αν αλλάξουμε την πρώτη παράσταση σε $A=2^\nu \cdot 2^\nu$, μπορείτε να προτείνετε τρεις νέες παραστάσεις για τις Β, Γ και Δ, έτσι ώστε να είναι πάλι όλες οι παραστάσεις ίσες μεταξύ τους;

20 Αν ν φυσικός αριθμός, να βρείτε την τιμή των αριθμών x και y:

$$x = 1^{-2\nu} + (-1)^{-2\nu} \text{ και } y = 2^{-(2\nu+1)} + (-2)^{-(2\nu+1)}.$$

21 Αν ν φυσικός αριθμός, να υπολογίσετε τον αριθμό $A = (-1)^{\nu+3}$.

22 Αν ν φυσικός αριθμός, να υπολογίσετε τον αριθμό $A=[(-1)^\nu+(-1)^{\nu+1}+(-1)^{\nu+2}+(-1)^{\nu+3}]^{2025}$

23 **α)** Πόσα μηδενικά έχει ο αριθμός $10^{10^{10}}$; **β)** Αν θέλουμε να τον γράψουμε σε μία χαρτοταινία και για κάθε ψηφίο χρειαζόμαστε 0,5 cm, πόσο μήκος πρέπει να έχει η χαρτοταινία; **γ)** Πόσος χρόνος απαιτείται να γραφτεί ο αριθμός αυτός, αν για κάθε ψηφίο χρειαζόμαστε 1 δευτερόλεπτο και εργαζόμαστε 40 ώρες την εβδομάδα;

24 Να συγκρίνετε τους αριθμούς $A = 16 + \sqrt{3}$ και $B = \sqrt{360}$.

25 Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων: $Α = \sqrt{21 + \sqrt{5 + \sqrt{133 - \sqrt{144}}}}$

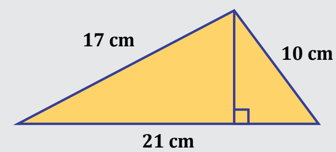
$Β = \sqrt{\dfrac{(1+\sqrt{3})^2}{3}} + \sqrt{\dfrac{(1-\sqrt{3})^2}{3}} = 2$

26 Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει διαστάσεις $x = 3\sqrt{48} - 2\sqrt{75} + 4\sqrt{108}$ και $y = \sqrt{48} + 2\sqrt{75} + 2\sqrt{108}$.

α) Να εξετάσετε αν το ορθογώνιο είναι τετράγωνο. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του και να εξετάσετε αν είναι ρητός ή άρρητος αριθμός.

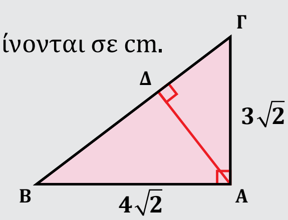
β) Να υπολογίσετε την περίμετρό του και να την εκφράσετε στη μορφή $α\sqrt{β}$, όπου α και β είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί και β ο μικρότερος δυνατός ακέραιος αριθμός. Να δώσετε τη ρητή προσέγγιση της περιμέτρου στο χιλιοστό.

27 Το εμβαδόν ενός τριγώνου δίνεται από τον τύπο $Ε = \sqrt{τ\cdot(τ-α)\cdot(τ-β)\cdot(τ-γ)}$ όπου α, β, γ, οι πλευρές και τ η ημιπερίμετρος. Να βρείτε:



α) Το εμβαδόν του τριγώνου. **β)** Το ύψος του τριγώνου.

28 Θεωρούμε το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος. Οι διαστάσεις δίνονται σε cm.



α) Να υπολογίσετε την πλευρά ΒΓ.

β) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

δ) Να βρείτε το ύψος ΑΔ και να το εκφράσετε στη μορφή $\frac{α}{β}\sqrt{2}$, όπου α, β θετικοί ακέραιοι.

29 **Μοντελοποίηση της πραγματικής ζωής.** Ένα από τα επακόλουθα υπερθέρμανσης του πλανήτη μας είναι το λιώσιμο των πάγων. Δώδεκα χρόνια μετά το λιώσιμο των πάγων αρχίζουν να αναπτύσσονται στους βράχους μικροσκοπικά φυτά που ονομάζονται λειχήνες. Κάθε λειχήνα αναπτύσσεται περίπου σε κυκλικό σχήμα. Ο παρακάτω τύπος χρησιμοποιείται για να υπολογιστεί, κατά προσέγγιση, η διάμετρος (δ) της λειχήνας σε σχέση με την ηλικία της:

$$δ = 7\sqrt{t - 12} \text{ για } t \geq 12$$

Όπου δ η διάμετρος της λειχήνας σε mm και t ο αριθμός των ετών που έχουν περάσει από το λιώσιμο των πάγων.

α) Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω τύπο, να υπολογίσετε τη διάμετρο που θα έχει μία λειχήνα, 16 έτη μετά το λιώσιμο των πάγων.

β) Η Αννα μέτρησε τη διάμετρο μίας λειχήνας που βρήκε σε κάποιο μέρος και διαπίστωσε ότι ήταν 28 mm. Πόσα χρόνια έχουν περάσει από το λιώσιμο των πάγων σε αυτό το μέρος; Να εξηγήσετε πώς βρήκατε την απάντησή σας.

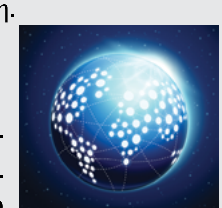
γ) Σε πόσα χρόνια από σήμερα μία λειχήνα που έχει διάμετρο 35 mm θα διπλασιάσει τη διάμετρό της; Να εξηγήσετε πώς βρήκατε την απάντησή σας. **(Διαγωνισμός PISA 2000)**

30 **Μοντελοποίηση πραγματικής ζωής.** Η μάζα των έμβιων όντων της βιόσφαιρας υπολογίζεται σε 10^{20} gr. Οι φυτικοί οργανισμοί αποτελούν το 99,99% της μάζας αυτής. Το υπόλοιπο αποτελούν οι ζωικοί οργανισμοί. Πόσοι τόνοι είναι η μάζα των ζωικών οργανισμών;

31 **Αστρονομία.** Το φωτεινότερο άστρο, που φαίνεται από τη Γη είναι ο Σείριος και απέχει $9 \cdot 10^{13}$ kmπερίπου.

α) Να βρείτε πόσα δευτερόλεπτα ταξιδεύει το φως για να έρθει από τον Σείριο στη Γη.

β) Να βρείτε πόσα έτη ταξιδεύει το φως για να έρθει από τον Σείριο στη Γη.
(1 έτος=$3{,}15\cdot10^7$s, ταχύτητα φωτός = $3\cdot10^7$ m/s)



32 **Μοντελοποίηση πραγματικής ζωής.** Η οπτική ίνα είναι τεχνολογία αιχμής που επιτρέπει τη μεταφορά τεράστιων ποσοτήτων δεδομένων με την ταχύτητα του φωτός. Χρησιμοποιείται, μεταξύ άλλων, στη λειτουργία του τηλεφώνου ή για τη σύνδεση στο

διαδίκτυο. Τα καλώδια οπτικών ινών καλύπτουν πλέον περισσότερα από 25 εκατομμύρια χιλιόμετρα σε όλο τον κόσμο. Τα καλώδια περιέχουν πολλές οπτικές ίνες κυλινδρικού σχήματος. Η διάμετρος μίας ίνας είναι περίπου 130 μικρόμετρα (μm).
Να εκφράσετε σε τυποποιημένη μορφή:
α) Σε μέτρα τις αποστάσεις σε παγκόσμιο επίπεδο που χρησιμοποιούνται οπτικές ίνες.
β) Σε μέτρα τη διάμετρο της οπτικής ίνας.

33 Ένα άτομο υδρογόνου έχει μάζα περίπου $1,67 \cdot 10^{-27}$ kg. Να βρείτε πόσα άτομα περιέχει 1g υδρογόνου.

34 **Αστρονομία.** Ο πίνακας δείχνει τις αποστάσεις μερικών πλανητών από τον Ήλιο. Το φως κινείται με ταχύτητα 300.000 km/s (ή $3 \cdot 10^5$ km/s). Να εκτιμήσετε πόσο χρόνο χρειάζεται το φως για να «ταξιδέψει» από τον Ήλιο σε κάθε πλανήτη του πίνακα.

Πλανήτης	Απόσταση από τον Ήλιο (σε km)
Γη	$1,55 \cdot 10^8$
Άρης	$2,28 \cdot 10^8$
Δίας	$7,78 \cdot 10^8$
Κρόνος	$1,43 \cdot 10^9$
Πλούτωνας	$5,9 \cdot 10^9$

Να ανοίξετε την εφαρμογή «ΓΛΩΣΣΑΡΙ-ΑΡΙΘΜΟΙ» για να συνοψίσετε τους όρους και τις έννοιες που μάθατε και πρέπει να γνωρίζετε από το κεφάλαιο αυτό.

Κεφάλαιο

2

Αλγεβρικές Παραστάσεις

Στο Κεφάλαιο αυτό θα μάθουμε:

- Να εκφράζουμε ρεαλιστικές καταστάσεις με απλές αλγεβρικές παραστάσεις.
- Να αναγνωρίζουμε μονώνυμα, πολυώνυμα, τον βαθμό τους και να υπολογίζουμε την αριθμητική τιμή ενός πολυωνύμου.
- Να υπολογίζουμε το άθροισμα, τη διαφορά και το γινόμενο μονωνύμων και απλών πολυωνύμων κυρίως μιας μεταβλητής.
- Να διερευνούμε και να αποδεικνύουμε αλγεβρικά και να ερμηνεύουμε γεωμετρικά τις ταυτότητες: $(α±β)2 = α2±2αβ+β2$, $α2−β2 = (α−β)(α+β)$
- Να χρησιμοποιούμε τις ταυτότητες για να μετατρέπουμε αλγεβρικές παραστάσεις σε άλλη μορφή.
- Να αναγνωρίζουμε την επιμεριστική ιδιότητα ως το βασικό κοινό στοιχείο των πράξεων πολυωνύμων, των ταυτοτήτων και της παραγοντοποίησης.
- Να παραγοντοποιούμε απλά πολυώνυμα (κυρίως μίας μεταβλητής) με κοινό παράγοντα, ομαδοποίηση και χρήση ταυτοτήτων.
- Να απλοποιούμε ρητές παραστάσεις. Να υπολογίζουμε το αποτέλεσμα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης απλών ρητών παραστάσεων.
- Να προσδιορίζουμε το ΕΚΠ μονωνύμων και απλών πολυωνύμων μίας μεταβλητής και να το χρησιμοποιούμε για να υπολογίζουμε το αποτέλεσμα πρόσθεσης και αφαίρεσης απλών ρητών παραστάσεων.

2.1.1 Μονώνυμα – Πολυώνυμα

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθήτριες και οι μαθητές να μπορούν:

- Να εκφράζουν ρεαλιστικές καταστάσεις με απλές αλγεβρικές παραστάσεις.
- Να αναγνωρίζουν τα μονώνυμα, τα πολυώνυμα, τον βαθμό τους και να υπολογίζουν την αριθμητική τιμή ενός πολυωνύμου.
- Να υπολογίζουν το άθροισμα, τη διαφορά και το γινόμενο μονωνύμων και απλών πολυωνύμων κυρίως μίας μεταβλητής.

Από τις προηγούμενες τάξεις γνωρίζουμε ότι μια παράσταση που περιέχει πράξεις με αριθμούς λέγεται **αριθμητική παράσταση**, ενώ μια παράσταση που περιέχει πράξεις με αριθμούς και μεταβλητές λέγεται **αλγεβρική παράσταση.**

Παραδείγματα: α^2, $2\alpha+3\beta$, x^2-2x+3.

Αριθμητική τιμή μιας αλγεβρικής παράστασης λέγεται ο αριθμός που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές με αριθμούς και εκτελέσουμε τις πράξεις που σημειώνονται.

Παράδειγμα: Αν $x=3$, η αριθμητική τιμή της αλγεβρικής παράστασης x^2-2x+3 είναι: $3^2-2\cdot3+3=9-6+3=6$.

Διερεύνηση 1: Αλγεβρικές παραστάσεις–Μονώνυμα

Σε οικόπεδο με διαστάσεις x m και 1,5x m, πρόκειται να κατασκευαστεί πισίνα όπως φαίνεται στο σχήμα.
Να βρείτε μία αλγεβρική παράσταση που να εκφράζει:

α) Το εμβαδόν του οικοπέδου.
β) Την περίμετρο του οικοπέδου.
γ) Το εμβαδόν της πισίνας.
δ) Την περίμετρο της πισίνας.
ε) Τον όγκο της πισίνας, αν το βάθος της είναι 1,5 m.
στ) Αν x=20 m, να βρείτε πόσα λίτρα νερού (lt) απαιτούνται για να γεμίσει η πισίνα.

Να μελετήσετε το ιστορικό σημείωμα: «Η συμβολή των Viète και Descartes στην επινόηση αλγεβρικού συμβολισμού».

Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες μάθησης

Μονώνυμα ονομάζονται οι αλγεβρικές παραστάσεις που περιέχουν μόνο πολλαπλασιασμό μεταξύ αριθμών και μεταβλητών με εκθέτες φυσικούς αριθμούς.

Παραδείγματα μονωνύμων είναι: $-3x^2$, $\frac{1}{3}xy$, $0{,}2t^3$, $-\alpha$.

Ο αριθμητικός παράγοντας λέγεται **συντελεστής** του μονωνύμου και συνήθως γράφεται πριν τις μεταβλητές, ενώ το γινόμενο όλων των μεταβλητών λέγεται **κύριο μέρος** του μονωνύμου.

Ο εκθέτης κάθε μεταβλητής λέγεται **βαθμός** του μονωνύμου ως προς τη μεταβλητή αυτή, ενώ το άθροισμα των βαθμών όλων των μεταβλητών λέγεται βαθμός του μονωνύμου.

Με άλλα λόγια, μονώνυμο είναι ένας αριθμός, μία μεταβλητή ή ένα γινόμενο ενός αριθμού και μίας ή περισσότερων μεταβλητών με εκθέτες φυσικούς αριθμούς.

- **Όμοια** λέγονται τα μονώνυμα που έχουν ίδιο κύριο μέρος. Για παράδειγμα: $-2x^2y$, $0{,}7x^2y$, x^2y, $-yx^2$.
- **Αντίθετα** λέγονται τα όμοια μονώνυμα τα οποία έχουν αντίθετους συντελεστές. Για παράδειγμα: $3αβ$, $-3αβ$.

Κάθε αριθμός θεωρείται μονώνυμο μηδενικού βαθμού και λέγεται **σταθερό** μονώνυμο. Για παράδειγμα: $5 = 5x^0$.
Το 0 λέγεται **μηδενικό** μονώνυμο και δεν έχει βαθμό.

Μονώνυμο

Συντελεστής 2
Κύριο μέρος $α^2β$

$$\boxed{2α^2β} \left\{ \begin{array}{l} \text{2ου βαθμού ως προς α} \\ \text{1ου βαθμού ως προς β} \\ \text{3ου βαθμού ως προς α και β} \end{array} \right.$$

Να ανοίξετε την ψηφιακή εφαρμογή για να διερευνήσετε τις έννοιες του συντελεστή και του βαθμού πολυωνύμου.

Εφαρμογή 1: Μονώνυμα

Δίνονται οι αλγεβρικές παραστάσεις $5x$, $-xy^3$, $\frac{6}{x}$, $1{,}7t^2$, $7+x$, 3^x, x^{-1}.

Να εξετάσετε ποιες είναι μονώνυμα, ποιες δεν είναι και να εξηγήσετε γιατί.
Στα μονώνυμα να βρείτε τον συντελεστή, το κύριο μέρος και τον βαθμό τους ως προς όλες τις μεταβλητές.

Απάντηση

Μονώνυμα είναι:

- $5x$: Συντελεστής 5, κύριο μέρος x, βαθμός 1,
- $-xy^3$: Συντελεστής -1, κύριο μέρος xy^3, βαθμός 4 ως προς x και y.
- $1{,}7t^2$: Συντελεστής 1,7, κύριο μέρος t^2, βαθμός 2.

Δεν είναι μονώνυμα:

- $\frac{6}{x}$: Διότι έχει μεταβλητή στον παρονομαστή, οπότε $\frac{1}{x} = x^{-1}$ και επομένως δεν έχει εκθέτη φυσικό αριθμό.
- $7+x$: Διότι είναι άθροισμα.
- 3^x: Διότι ο εκθέτης είναι μεταβλητή και όχι φυσικός αριθμός.
- x^{-1}: Διότι ο εκθέτης δεν είναι φυσικός αριθμός.

Για να εξοικειωθείτε στον εντοπισμό και τα χαρακτηριστικά των μονωνύμων να ανοίξετε την ψηφιακή εφαρμογή.

Εφαρμογή 2

Χρησιμοποιώντας μία αλγεβρική παράσταση, να περιγράψετε τις καταστάσεις:

α) Μία οικογένεια αποτελείται από x παιδιά και y ενήλικες. Για την είσοδο στο θέατρο τα παιδιά πληρώνουν 6 € και οι ενήλικες 8 €. Πόσα είναι τα συνολικά έξοδα της οικογένειας;

β) Σε ένα σχολικό αναγνωστήριο υπάρχουν x τραπέζια με τρία καθίσματα, y με τέσσερα και z με πέντε. Ποιος είναι ο συνολικός αριθμός καθισμάτων του αναγνωστηρίου;

γ) Μία τάξη αποτελείται από κ κορίτσια, α αγόρια και δ δασκάλους. Ποιος είναι ο αριθμός των ανθρώπων της σχολικής τάξης;

Απάντηση

α) Αν ένα παιδί πληρώνει 6 €, τότε τα x παιδιά θα πληρώσουν $6x$. Αντίστοιχα οι y ενήλικες θα πληρώσουν $8y$. Επομένως η οικογένεια θα πληρώσει συνολικά $\mathbf{6x + 8y}$.

β) Αν ένα τραπέζι έχει 3 καθίσματα, τότε στα x τραπέζια με 3 καθίσματα θα υπάρχουν $3x$ καθίσματα. Αντίστοιχα, στα y τραπέζια 4 καθισμάτων θα υπάρχουν $4y$ καθίσματα και στα z τραπέζια 5 καθισμάτων θα υπάρχουν $5z$ καθίσματα. Συνολικά στο αναγνωστήριο υπάρχουν $\mathbf{3x + 4y + 5z}$ καθίσματα.

γ) Ο συνολικός αριθμός ανθρώπων της τάξης είναι $\mathbf{α + κ + δ}$.

Πράξεις μονωνύμων – πολυώνυμα

Η **πρόσθεση** και η αφαίρεση **όμοιων μονωνύμων** γίνεται με την επιμεριστική ιδιότητα και, όπως έχουμε μάθει, ονομάζεται **αναγωγή όμοιων όρων**.

Παραδείγματα:

$-2x + 15x + 4x = (-2+15+4)x = 17x$ $\qquad$ $2x^2y - 7x^2y + x^2y = (2-7+1)x^2y = -4x^2y$

Σημείωση:

- Το άθροισμα όμοιων μονωνύμων είναι μονώνυμο.
- Μονώνυμα τα οποία δεν είναι όμοια δεν μπορούν να προστεθούν.

Πολυώνυμο ονομάζεται ένα άθροισμα δύο τουλάχιστον μονωνύμων, τα οποία δεν είναι όμοια.

Παραδείγματα:

$2xy^2 + xy - 4x^2 + 7$, $\quad 3x^2 - 6x + 8$, $\quad 3x^4 - 2x^2 + 6x - 5$.

Κάθε μονώνυμο που περιέχεται σε ένα πολυώνυμο λέγεται **όρος** του πολυωνύμου.
Διώνυμο ονομάζεται ένα πολυώνυμο με δύο όρους. Παραδείγματα: $7x-9$, x^2+5.
Τριώνυμο ονομάζεται ένα πολυώνυμο με τρεις όρους. Παραδείγματα: $2x^2-5x+11$, $2x^3-x^2+5$.
Βαθμός ενός πολυωνύμου λέγεται ο μεγαλύτερος από τους βαθμούς των όρων του.

Παραδείγματα:

Ο βαθμός του πολυωνύμου $2x^2-x+11$ είναι 2. Ο βαθμός του πολυωνύμου $-x^3+x^5+7$ είναι 5.

Ένα πολυώνυμο μίας μεταβλητής λέμε ότι είναι γραμμένο στην κανονική του μορφή όταν οι εκθέτες των όρων του ελαττώνονται από αριστερά προς τα δεξιά.

Πολυώνυμο

3ου βαθμού
Όροι: $2x^3$, $-x^2$, $5x$, -7

$\boxed{2x^3-x^2+5x-7}$ { Κανονική μορφή

Παραδείγματα:

$2x^2-5x+11$, $-x^5+2x^3+5$

Ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση μονώνυμων γίνεται με βάση τις ιδιότητες των δυνάμεων.

Παραδείγματα:

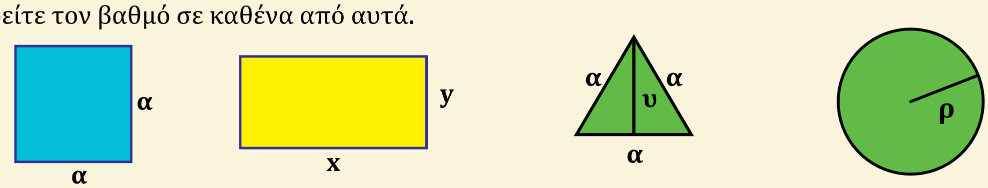
$(-2x^2y)(3xy) = (-2\cdot 3)(x^2\cdot x)(y\cdot y) = -6x^3y^2$, $\quad (-\frac{1}{3}x^2)(3x) = (-\frac{1}{3}\cdot 3)x^2x = -1x^3 = -x^3$,

$(-4x^4y):(2xy) = (-4:2)(x^4:x)(y:y) = -2x^3$ $\quad (-2x^3y):(x^2y^2) = -2x^{3-2}y^{1-2} = -2xy^{-1} = -2\cdot\frac{x}{y}$.

Το γινόμενο μονωνύμων είναι πάντα μονώνυμο, ενώ το πηλίκο μονωνύμων δεν είναι πάντα μονώνυμο.

Εφαρμογή 3: Μονώνυμα και πολυώνυμα στη Γεωμετρία

Στα παρακάτω γεωμετρικά σχήματα:
α) Να γράψετε τις αλγεβρικές παραστάσεις που εκφράζουν το εμβαδόν Ε και την περίμετρο Π κάθε σχήματος.
β) Να εξετάσετε ποιες από αυτές είναι μονώνυμα και ποιες είναι πολυώνυμα.
γ) Να βρείτε τον βαθμό σε καθένα από αυτά.



Απάντηση

	Εμβαδόν	**Περίμετρος**
Τετράγωνο	α^2, μονώνυμο 2ου βαθμού	**4α**, μονώνυμο 1ου βαθμού
Ορθογώνιο	**xy**, μονώνυμο 2ου βαθμού	**2x+2y**, πολυώνυμο 1ου βαθμού
Ισόπλευρο τρίγωνο	$\frac{\alpha\sqrt{3}}{4}$, μονώνυμο 2ου βαθμού	**3α**, μονώνυμο 1ου βαθμού
Κύκλος	$\pi\rho^2$, μονώνυμο 2ου βαθμού	**2πρ**, μονώνυμο 1ου βαθμού

Ερωτήσεις για Αυτοαξιολόγηση

1 Να βρείτε τον βαθμό, τον συντελεστή και το κύριο μέρος κάθε μονωνύμου:

α) $-3x^3$ **β)** $\frac{1}{2}x^2y^3$ **γ)** $0{,}7s$ **δ)** -8.

2 Να εξετάσετε ποιες από τις αλγεβρικές παραστάσεις είναι μονώνυμα, ποιες πολυώνυμα και ποιες τίποτα από αυτά:

α) $1{,}7t+6t-3{,}7t$, **β)** $3y^2-2y-3y^2$, **γ)** $4+x$, **δ)** $5z^{-2}+3z$, **ε)** z^3-2z+6^{-2}, **στ)** $3^{-1}x^2y-x^2y$.

3 Να κάνετε τις αναγωγές όμοιων όρων και να γράψετε το πολυώνυμο $-4x^2-3x+7x^2-x^3+6x-12$ στην κανονική του μορφή.

4 Να βρείτε το αποτέλεσμα στις πράξεις των μονωνύμων:

α) $-4x^2(-0{,}25x^3y)(-xy)^0$, **β)** $(4x^3y^3):(-8xy^4)$, **γ)** $6xy^2-7xy^2+xy^2$.

5 Να βρείτε τον βαθμό των πολυωνύμων:

α) $4+5x^2-x$, **β)** $8q+q^5$, **γ)** $7-2x$.

6 Να γράψετε ένα μονώνυμο 1ου βαθμού, ένα διώνυμο 3ου βαθμού και ένα τριώνυμο 2ου βαθμού.

7 Να γράψετε την αλγεβρική παράσταση που δίνει το εμβαδόν τριγώνου, σημειώνοντας πάνω στο σχήμα τι συμβολίζει η κάθε μεταβλητή που χρησιμοποιήσατε και να εξετάσετε αν η αλγεβρική παράσταση είναι μονώνυμο, πολυώνυμο ή τίποτα από αυτά.

8 Να βρείτε την αριθμητική τιμή του πολυωνύμου $5x^3-7x^2+x-9$ για $x = -3$.

Ασκήσεις και Προβλήματα

1 Να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις με μία από τις λέξεις: *πάντα, μερικές φορές* ή *ποτέ*.

α) Οι όροι ενός πολυωνύμου είναι .... μονώνυμα.

β) Η διαφορά δύο μονωνύμων είναι .... ένα μονώνυμο.

γ) Ένα διώνυμο είναι .... ένα πολυώνυμο 2ου βαθμού.

δ) Η διαίρεση δύο μονωνύμων είναι .... μονώνυμο.

ε) Ο πολλαπλασιασμός δύο μονωνύμων είναι .... μονώνυμο.

στ) .... το άθροισμα δύο μη όμοιων μονωνύμων δεν είναι μονώνυμο.

ζ) Ένα πολυώνυμο 3ου βαθμού είναι .... τριώνυμο.

η) Το άθροισμα δύο μη όμοιων μονωνύμων δεν είναι .... μονώνυμο.

2 Να γράψετε τα ακόλουθα πολυώνυμα στην κανονική τους μορφή. Να βρείτε τον βαθμό τους. Να τα κατηγοριοποιήσετε με βάση τον αριθμό των όρων τους:

α) $3y^2-y-y^3$, **β)** $4t^3-t^4$, **γ)** π^3-x+2x^2, **δ)** $\sqrt{2}\cdot x^3$.

3 Να εξετάσετε:

α) Αν η αλγεβρική παράσταση $5x-2y-x-5+2y-2x$ είναι πολυώνυμο. Να αιτιολογήσετε.

β) Αν είναι πολυώνυμο, να γράψετε τους όρους του.

γ) Να εξετάσετε αν το πολυώνυμο είναι στην κανονική μορφή. Να εξηγήσετε.

δ) Αν δεν είναι, να κάνετε αναγωγή όμοιων όρων και να το γράψετε στην κανονική μορφή.

ε) Να βρείτε την αριθμητική τιμή του πολυωνύμου για $x = -3$.

4 Ποια από τις ακόλουθες αλγεβρικές παραστάσεις δεν ταιριάζει με τις άλλες; Να εξηγήσετε γιατί.

α) x^2+5y **β)** x^2+2^x **γ)** $2y-3^{-1}$ **δ)** $\pi+5x^3y$

5 Ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει ύψος α, μήκος 3α και πλάτος 2α. Να εκφράσετε με μία αλγεβρική παράσταση:

α) Το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας.

β) Τον όγκο του.

Να εξετάσετε αν οι αλγεβρικές παραστάσεις είναι μονώνυμα ή πολυώνυμα και να βρείτε τον βαθμό τους.

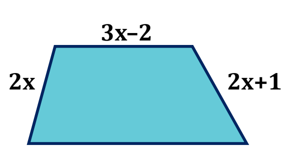
6 Να βρείτε την αριθμητική τιμή των πολυωνύμων:

α) $-3x^2+7x-14$ για $x = -2$.

β) $4x^2y-3xy^2-15$ για $x = -1$ και $y = 4$.

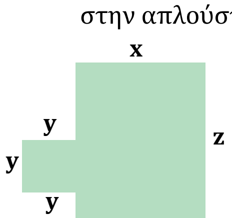
7 Να γράψετε ένα διώνυμο 1ου βαθμού, ένα διώνυμο 2ου βαθμού, ένα τριώνυμο 2ου βαθμού και ένα τριώνυμο 3ου βαθμού. Να εξηγήσετε.

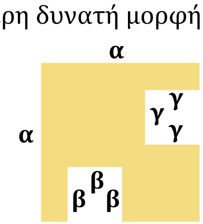
8 **α)** Να γράψετε ένα πολυώνυμο στην κανονική του μορφή, το οποίο να εκφράζει την περίμετρο του διπλανού τραπεζίου.

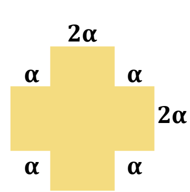


β) Αν $x = 5$ cm, να βρείτε τις πλευρές και την περίμετρο του τραπεζίου.

9 Να γράψετε μία αλγεβρική παράσταση για το εμβαδόν και μία για την περίμετρο κάθε σχήματος στην απλούστερη δυνατή μορφή της.







10 Ένας ποδηλάτης και ένας πεζός ξεκινούν από την ίδια πόλη και κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση.

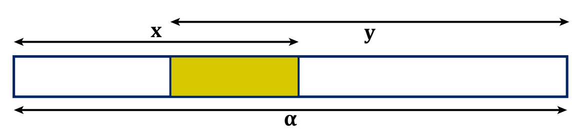
α) Αν ο ποδηλάτης έχει ταχύτητα **υ** km/h και ο πεζός **τ** km/h, να βρείτε μία αλγεβρική παράσταση που να παριστάνει πόσο θα απέχουν μεταξύ τους μετά από 3 ώρες.

β) Αν ο ποδηλάτης έτρεξε **4** ώρες με ταχύτητα **α** km/h και **3** ώρες με ταχύτητα **β** km/h, να βρείτε μία αλγεβρική παράσταση που να εκφράζει τη μέση ταχύτητα του ποδηλάτη.

11 Ένα τετράγωνο ονομάζεται μαγικό αν το άθροισμα οριζόντια, κάθετα και διαγώνια είναι το ίδιο. Να συμπληρώσετε το τετράγωνο ώστε να είναι μαγικό.

$-2x^2$		$3x^2$
	$-4x^2$	
		x^2

12 Να βρείτε μία αλγεβρική παράσταση για το μήκος του κίτρινου μέρους της κορδέλας:



13 Μία σιδηροδρομική εταιρεία κατασκευάζει τρένα με βαγόνια δύο κατηγοριών: πρώτης και δεύτερης. Ένα βαγόνι πρώτης κατηγορίας έχει 60 θέσεις και ένα βαγόνι δεύτερης κατηγορίας έχει 90 θέσεις. Να δώσετε μία αλγεβρική παράσταση που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό του αριθμού των θέσεων σε ένα τρένο της εταιρείας.

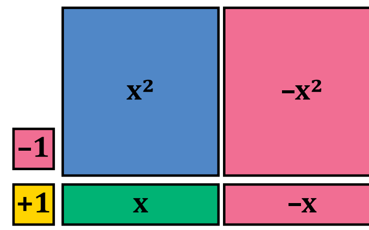
14 Μία ποδοσφαιρική ομάδα έλαβε μέρος σε 15 αγώνες και έφερε 6 ήττες. Να γράψετε μία αλγεβρική παράσταση που να εκφράζει τους βαθμούς που συγκέντρωσε, αν σε κάθε νίκη λαμβάνει 3 βαθμούς, σε κάθε ισοπαλία 1 βαθμό και στις ήττες κανέναν βαθμό.

2.1.2 Πρόσθεση – Αφαίρεση πολυωνύμων

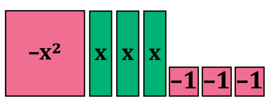
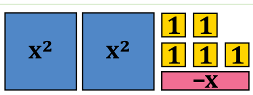
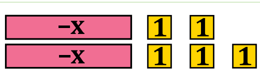
Διερεύνηση 1: Πρόσθεση – Αφαίρεση πολυωνύμων

Πολλές φορές την επίλυση προβλημάτων διευκολύνει η χρήση ενός μοντέλου. Για παράδειγμα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε «αλγεβρικά πλακίδια» για να παραστήσουμε αλγεβρικές παραστάσεις και πράξεις μεταξύ αυτών. Ένα μοντέλο «αλγεβρικών πλακιδίων» φαίνεται στη διπλανή εικόνα:

- το πλακίδιο **+1** είναι ένα κίτρινο τετράγωνο (1×1),
- το πλακίδιο **–1** ένα αντίστοιχο κόκκινο,
- το x ένα πράσινο ορθογώνιο (1×x),
- το πλακίδιο **–x** ένα αντίστοιχο κόκκινο ορθογώνιο,
- το πλακίδιο $\mathbf{x^2}$ ένα μπλε τετράγωνο (x×x) και
- το πλακίδιο $\mathbf{-x^2}$ ένα αντίστοιχο κόκκινο τετράγωνο.



Να συνεργαστείτε για να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

	Αλγεβρικά Πλακίδια	Πολυώνυμο
1)		$-x^2 + 3x - 3$
2)		
3)		

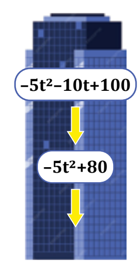
Να διερευνήσετε την έννοια του πολυωνύμου με τη βοήθεια αγλεβρικών πλακιδίων.

Να διερευνήσετε την πρόσθεση πολυωνύμων με τη βοήθεια αλγεβρικών πλακιδίων.

Να διερευνήσετε την αφαίρεση πολυωνύμων με τη βοήθεια αλγεβρικών πλακιδίων.

Διερεύνηση 2: Μοντελοποίηση

Ένα κέρμα 2 € αφήνεται να πέσει από ύψος 100 m. Ταυτόχρονα, ένα κέρμα 20 λεπτών πέφτει από ύψος 80 m. Τα πολυώνυμα $-5t^2-10t+100$ και $-5t^2+80$ δίνουν το ύψος (σε μέτρα) μετά από t δευτερόλεπτα, αντίστοιχα για τα δύο κέρματα.



α) Να γράψετε ένα πολυώνυμο που να παριστάνει την απόσταση μεταξύ των κερμάτων μετά από t δευτερόλεπτα (sec).

β) Να βρείτε την απόσταση s μεταξύ των δύο κερμάτων σε χρόνο:
i) t = 0 sec, **ii)** t = 1 sec, **iii)** t = 2 sec.

γ) Σε πόσα δευτερόλεπτα τα δύο κέρματα θα βρίσκονται στο ίδιο ύψος;

Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες μάθησης

Πρόσθεση–Αφαίρεση πολυωνύμων

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των πραγματικών αριθμών, μπορούμε να προσθέτουμε ή να αφαιρούμε πολυώνυμα. Για να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε πολυώνυμα, βγάζουμε τις παρενθέσεις και αντικαθιστούμε τους όμοιους όρους με το άθροισμά τους. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται **αναγωγή όμοιων όρων**.

Όταν κάνουμε απαλοιφή παρένθεσης που έχει το πρόσημο «–» μπροστά, γράφουμε τους όρους της παρένθεσης με αντίθετα πρόσημα. Για παράδειγμα: $(2x^2+3)-(-x+2)=2x^2+3+x-2$

Εφαρμογή 1

Να βρείτε τα αθροίσματα και τη διαφορά:

α) $(2x^3-5x^2+3x)+(3x^2+x-4)$, **β)** $(2x^2+x-7)+(-2x^2+5x+11)$, **γ)** $(2x^3-5x^2+3x)-(3x^2+x-4)$.

Απάντηση

α) $(2x^3-5x^2+3x)+(3x^2+x-4) =$ [απαλοιφή παρενθέσεων]
$2x^3-5x^2+3x+3x^2+x-4 =$ [αντιμεταθετική ιδιότητα]
$2x^3+(-5x^2+3x^2)+(3x+x)-4 =$ [αναγωγή όμοιων όρων]
$2x^3+(-5+3)x^2+(3+1)x-4 =$ [πράξεις]
$2x^3-2x^2+4x-4$ [κανονική μορφή]

β) $(2x^2+x-7)+(-2x^2+5x+11) =$
$2x^2+x-7-2x^2+5x+11 = 2x^2-2x^2+x+5x-7+11 = 6x+4$

γ) $(2x^3-5x^2+3x)-(3x^2+x-4) =$ [απαλοιφή παρενθέσεων]
$2x^3-5x^2+3x-3x^2-x+4 =$ [αλλάζουμε τα πρόσημα των όρων στο 2ο πολυώνυμο]
$2x^3+(-5x^2-3x^2)+(3x-x)+4 =$ [αναγωγή όμοιων όρων]
$2x^3+(-5-3)x^2+(3-1)x+4 =$ [πράξεις]
$2x^3-8x^2+2x+4$ [κανονική μορφή]

Να εξοικειωθείτε με την κάθετη πρόσθεση και αφαίρεση πολυωνύμων ανοίγοντας την εφαρμογή.

Ερωτήσεις για Αυτοαξιολόγηση

1 Να κάνετε αναγωγή όμοιων όρων: $12x^2-10y-7x^2+15y$.

2 Να κάνετε τις πράξεις:

α) $(12x^3-9x^2+x) + (2x^2+x^3-1)$, **β)** $(7x^2 +2x-6)-(x^2+4x+11)$.

3 Να εξετάσετε αν το άθροισμα δύο πολυωνύμων έχει βαθμό ίσο με το άθροισμα των βαθμών των δύο πολυωνύμων που προστίθενται. Να αιτιολογήσετε.

4 Να περιγράψετε και να διορθώσετε το λάθος:

$$(x^2 + 2x)-(2x^2- x) = x^2+2x-2x^2-x = (x^2-2x^2)+(2x-x) = -x^2+x.$$

5 Να συμπληρώσετε τα κενά:
α) $(\square- 5x - \square)+(9x^2 -\square + 8) = 11x^2-9x+12$
β) $(\square+\square-3)-(2x^2-\square) = 5x^3-x^2-10$

Στην εφαρμογή μπορείτε να εξοικειωθείτε με την πρόσθεση πολυωνύμων με το μοντέλο των αλγεβρικών πλακιδίων.

Μπορείτε στην εφαρμογή να διερευνήσετε την αφαίρεση πολυωνύμων με τη βοήθεια του μοντέλου των αλγεβρικών πλακιδίων.

Ασκήσεις και Προβλήματα

1 Να απαλείψετε τις παρενθέσεις και να κάνετε τις αναγωγές των όμοιων όρων στις αλγεβρικές παραστάσεις:
α) $10\alpha^2-2\beta^3+17\gamma-(13\alpha^2-15\gamma)-(-19\alpha^2-3\beta^3+4\gamma)$,
β) $-2xy+5x-11-(-5xy+7x-15)+(6xy+x-20)$,
γ) $(2{,}5\kappa-5{,}9\lambda+6{,}3\mu)-(3{,}8\kappa-7{,}2\mu-4{,}5\lambda)$,
δ) $(2x^2+x-7)-(-x^2+5x+11)$.

2 Να βρείτε την αριθμητική τιμή του πολυωνύμου $2x^2+5x-3$ για **α)** $x=1/2$ και **β)** $x=-3$.

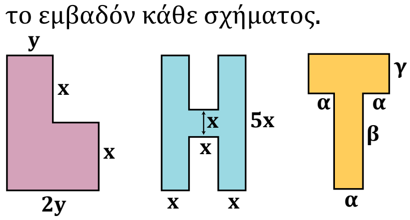
3 Να βρείτε ποιο πολυώνυμο πρέπει να προσθέσουμε στο $2x^2+3x+8$, ώστε να προκύψει άθροισμα $5x^2+4x-6$.

4 Να συμπληρώσετε τα κενά:
α) $(\square-15x-\square)+(2x^2-\square+5)=13x^2-4x+9$,
β) $(-x^4+\square+\square-3)-(2x^2-\square)=\square+4x^3-x^2-1$.

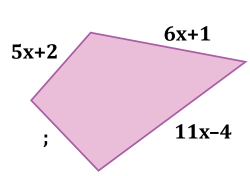
5 **(Μαγικό τετράγωνο)** Ένα τετράγωνο λέγεται μαγικό, αν το άθροισμα, οριζόντια, κάθετα και διαγώνια είναι το ίδιο. Να συμπληρώσετε το τετράγωνο ώστε να είναι μαγικό.

$-2x^2+1$		$3x^2-x$
	$4x^2-2x+2$	
$7x^2+2x-3$		

6 Να γράψετε μία αλγεβρική παράσταση:
α) για την περίμετρο κάθε σχήματος.
β) για το εμβαδόν κάθε σχήματος.



7 Στο διπλανό σχήμα η περίμετρος είναι $26x+2$ cm. Να βρείτε το μήκος της πλευράς που λείπει. Όλα τα μήκη δίνονται σε cm.



8 **Μαγικό τετράγωνο.** Να αντιγράψετε στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε το παρακάτω μαγικό τετράγωνο. Το άθροισμα των πολυωνύμων που καταλαμβάνουν τις θέσεις μίας γραμμής, στήλης ή διαγωνίου είναι $3x^2+6x-9$.

x^2+5x-4	$-x+1$	
		$2x^2+5x-2$
	$5x-6$	

9 Ο Νικήτας είναι 26 χρόνια μεγαλύτερος από την κόρη του και 3 χρόνια μεγαλύτερος από τη γυναίκα του. Αν η κόρη του είναι x ετών, ποιο είναι το άθροισμα των ηλικιών των μελών της οικογένειας;

10 Ένα πλυντήριο αυτοκινήτων χρεώνει για το πλύσιμο των μικρών επιβατηγών αυτοκινήτων $(2x)$ € και των μεγάλων $(3y)$ €. Για την αγορά προϊόντων καθαρισμού ξόδεψε $(20x-6y^2)$ €. Αν στο τέλος της ημέρας έπλυνε 65 μικρά και 29 μεγάλα αυτοκίνητα, να γράψετε μία αλγεβρική παράσταση, στην απλούστερη δυνατή μορφή της, που να δείχνει πόσα χρήματα κέρδισε.

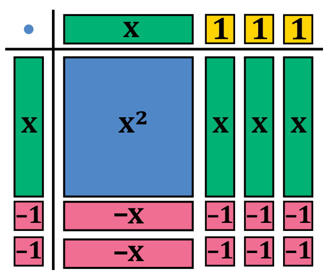
11 Η Φανή και η οικογένειά της πήγαν σε αγώνα καγιάκ. Η Φανή έτρεξε 7 km περισσότερα από τα διπλάσια χιλιόμετρα, που διάνυσε η αδερφή της η Κατερίνα. Ο αδερφός τους, ο Λευτέρης, έτρεξε 5 km λιγότερα από το διπλάσιο των χιλιομέτρων που διάνυσε η αδερφή του Φανή. Ο πατέρας τους διάνυσε τα μισά από τα συνολικά χιλιόμετρα που διάνυσαν τα τρία παιδιά του. Αν η Κατερίνα έτρεξε x km, να γράψετε την αλγεβρική παράσταση που δείχνει την απόσταση που διάνυσε ο πατέρας τους.

2.1.3 Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων

Διερεύνηση 1: Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων

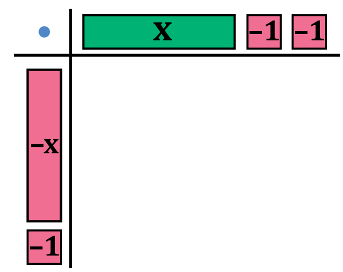
Να συνεργαστείτε ανά δύο και να συζητήσετε τα αποτελέσματά σας στην τάξη.

α) Το παρακάτω σχήμα δείχνει τον πολλαπλασιασμό διωνύμων (x+3)(x–2) με «αλγεβρικά πλακίδια». Να εξηγήσετε τον πολλαπλασιασμό και να βρείτε το αποτέλεσμα.



(x+3)(x–2)=…………….

β) Να βρείτε το γινόμενο (x–2)(–x–1) συμπληρώνοντας την ορθογώνια διάταξη με «αλγεβρικά πλακίδια» όπως στο (α).



(x–2)(–x–1)=……………..

Να διερευνήσετε τον πολλαπλασιασμό διωνύμων με τη βοήθεια αλγεβρικών πλακιδίων ανοίγοντας την εφαρμογή.

Διερεύνηση 2: Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων

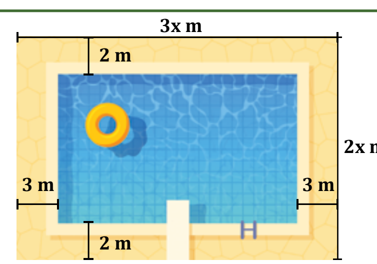
Να βρείτε μία αλγεβρική παράσταση η οποία να εκφράζει:

α) Το εμβαδόν της πισίνας.

β) Την περίμετρο της πισίνας.

γ) Αν η ορθογώνια έκταση που περιβάλλει την πισίνα έχει εμβαδόν 288 m^2, να υπολογίσετε τις διαστάσεις της πισίνας.

δ) Αν η πισίνα έχει βάθος 1,5 m, να βρείτε πόσα lt νερού απαιτούνται για να γεμίσει.



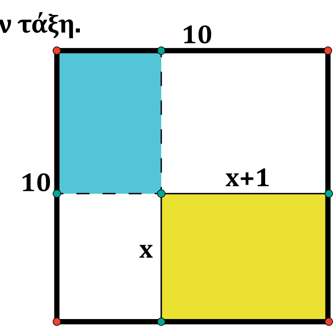
Διερεύνηση 3: Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων

Να συνεργαστείτε ανά δύο και να συζητήσετε τα αποτελέσματά σας στην τάξη.

Από μία μεταλλική τετράγωνη λαμαρίνα πλευράς 10 m, όπως στο σχήμα, κόβεται από μία γωνία το κίτρινο ορθογώνιο κομμάτι διαστάσεων x και x+1.

1) Να γράψετε μία αλγεβρική παράσταση για να εκφράσετε το εμβαδόν του κίτρινου κομματιού που κόβεται. Να εκφράσετε το εμβαδόν χωρίς παρενθέσεις με τη μορφή ενός πολυωνύμου. Ποιον κανόνα χρησιμοποιήσατε;

2) Στη συνέχεια κόβεται και ένα ορθογώνιο κομμάτι, με μπλε χρώμα, όπως στο σχήμα. Να βρείτε τις διαστάσεις του και να εκφράσετε το εμβαδόν του νέου κομματιού που κόβεται με ένα πολυώνυμο.



3) Να εκφράσετε το συνολικό εμβαδόν των δύο κομματιών που κόβονται (κίτρινου και μπλε) με ένα πολυώνυμο.

4) Να εκφράσετε το εμβαδόν που απομένει (λευκό μέρος) με ένα πολυώνυμο.

5) Να προσθέσετε τα πολυώνυμα που βρήκατε στο (3) και στο (4). Να κάνετε μία εικασία για το αποτέλεσμα και να την επιβεβαιώσετε εκτελώντας τις πράξεις.

Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες μάθησης

Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων

Για να πολλαπλασιάσουμε δύο πολυώνυμα χρησιμοποιούμε την **επιμεριστική ιδιότητα**.

$$\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta+\alpha\gamma \quad \text{ή} \quad (\alpha+\beta)(\gamma+\delta) = \alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta$$

Δηλαδή:

Για να πολλαπλασιάσουμε δύο πολυώνυμα, πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο του ενός πολυωνύμου με κάθε όρο του άλλου και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν.

Όταν κάνουμε πολλαπλασιασμό μονωνύμου με πολυώνυμο ή πολλαπλασιάζουμε δύο πολυώνυμα, πολλές φορές λέμε ότι **αναπτύσσουμε** το γινόμενο και το αποτέλεσμα λέγεται **ανάπτυγμα του γινομένου**.

Παράδειγμα:

$(2x+3)(x-2) =$	[επιμεριστική ιδιότητα του $(x-2)$ με κάθε όρο του $(2x+3)$]
$2x(x-2)+3(x-2) =$	[επιμεριστική ιδιότητα]
$2x^2-4x+3x-3\cdot 2 =$	[αναγωγή όμοιων όρων]
$2x^2-x-6$	[ανάπτυγμα]

Να διερευνήσετε τη διπλή επιμεριστική ιδιότητα ανοίγοντας την εφαρμογή.

Εφαρμογή 1

Να κάνετε τους πολλαπλασιασμούς των παρακάτω πολυωνύμων χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα:

α) $(x-3)(x^2-\frac{1}{3})$, β) $(3x+5)(2x^2-x+7)$, γ) $(3-x^2)(2x+1)(3x-4)$.

Απάντηση

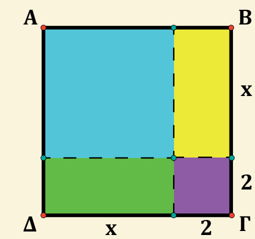
α) $(x-3)(x^2-\frac{1}{3}) = x\cdot x^2 - x\cdot\frac{1}{3} - 3\cdot x^2 + 3\cdot\frac{1}{3} = x^3 - \frac{1}{3}x - 3x^2 + \frac{3}{3} = x^3 - 3x^2 - \frac{1}{3}x + 1$

β) $(3x+5)(2x^2-x+7) = 3x\cdot 2x^2 - 3x\cdot x + 3x\cdot 7 + 5\cdot 2x^2 - 5\cdot x + 5\cdot 7 = 6x^3 - 3x^2 + 21x + 10x^2 - 5x + 35 =$
$= 6x^3 + 7x^2 + 16x + 35$

γ) $(3-x^2)(2x+1)(3x-4) = (3-x^2)[(2x+1)(3x-4)] = (3-x^2)(2x\cdot 3x - 2x\cdot 4 + 1\cdot 3x - 1\cdot 4) =$
$(3-x^2)(6x^2-8x+3x-4) = (3-x^2)(6x^2-5x-4) = 3\cdot 6x^2 - 3\cdot 5x - 3\cdot 4 - x^2\cdot 6x^2 + x^2\cdot 5x + 4x^2 =$
$18x^2 - 15x - 12 - 6x^4 + 5x^3 + 4x^2 = -6x^4 + 5x^3 + 22x^2 - 15x - 12$

Εφαρμογή 2

Να εκφράσετε το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ με ένα πολυώνυμο.



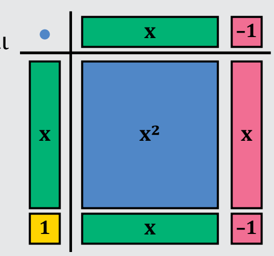
Απάντηση

1ος τρόπος: Το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά x+2. Επομένως:
$Ε_{ΑΒΓΔ} = (x+2)^2 = (x+2)(x+2) = x \cdot x + x \cdot 2 + 2x + 2 \cdot 2 = x^2+4x+4$.

2ος τρόπος: Το τετράγωνο ΑΒΓΔ αποτελείται από δύο τετράγωνα με πλευρές x και 2 αντίστοιχα (μπλε και μοβ) και δύο ίσα ορθογώνια με διαστάσεις 2 και x (πράσινο και κίτρινο). Επομένως: $Ε_{ΑΒΓΔ}=x^2+2 \cdot 2 \cdot x+2^2=x^2+4x+4$.

Ερωτήσεις για Αυτοαξιολόγηση

1 Να γράψετε αναλυτικά όλα τα βήματα για τον πολλαπλασιασμό που σημειώνεται στο σχήμα με τα «αλγεβρικά πλακίδια».



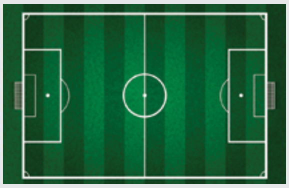
2 Να βρείτε τα αναπτύγματα των πολλαπλασιασμών:

α) $(x-2)(x+2)$ **β)** $(x+3)(x^2-3x+9)$

3 Η Διεθνής Ποδοσφαιρική Ομοσπονδία (FIFA) έχει ορίσει τις διαστάσεις σε ένα γήπεδο ποδοσφαίρου για διεθνείς ποδοσφαιρικούς αγώνες ενηλίκων. Η πλάγια γραμμή πρέπει να έχει μήκος από 100 μέχρι 110 μέτρα και η γραμμή τέρματος (το πλάτος του γηπέδου) από 64 μέχρι 75 μέτρα.

α) Το γήπεδο στην εικόνα έχει διαστάσεις x m και (x+35) m. Να εκφράσετε με μία αλγεβρική παράσταση: **i)** το εμβαδόν και **ii)** την περίμετρό του.

β) Αν η περίμετρος του γηπέδου είναι 350 m, να εξετάσετε αν μπορούν να γίνουν διεθνείς ποδοσφαιρικοί αγώνες ενηλίκων σύμφωνα με τις προδιαγραφές της FIFA.



4 Να εξετάσετε αν ισχύει ότι: «ο βαθμός του γινομένου δύο πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών των δύο πολυωνύμων».

Για να εξοικειωθείτε με τον πολλαπλασιασμό διωνύμων με τη βοήθεια των αλγεβρικών πλακιδίων, να ανοίξετε την ψηφιακή εφαρμογή.

Ασκήσεις και Προβλήματα

1 Να κάνετε τις πράξεις:
α) $2x(x^2-3)-2x^2(x-5)-2x+3(x^2-1)$,
β) $(x^2+x+1)(x-1)$, γ) $(-3+x)(2x+1)(3x-5)$.

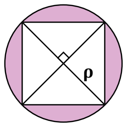
2 Να βρείτε το λάθος στον πολλαπλασιασμό και να το διορθώσετε: $(x-2)(x+5) = x-2(x+5) = x-2x-10 = -x-10$.

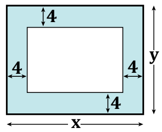
3 Να κάνετε τους πολλαπλασιασμούς:
α) $(α+β)(α-β)$, **β)** $(α+β)(α+β)$, **γ)** $(α-β)(α-β)$.

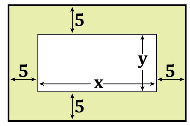
4 Να κάνετε τους πολλαπλασιασμούς
α) $(x+1)(x-2)(x+3)$,
β) $(2y-1)(3y-1)(4-y)$,
γ) $z(z+2z)(z-1)(2+z)$.

5 Αν xy = 5, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης: $(x-y)(x-y)-(x^2-1)-y^2$.

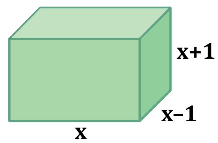
6 Να εκφράσετε το εμβαδόν κάθε χρωματισμένου μέρους των ακόλουθων σχημάτων με τη βοήθεια ενός πολυωνύμου.





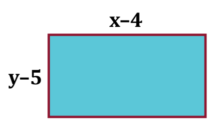


7 Να δείξετε ότι ο όγκος και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι: $V = x^3 - x$ και $E_{ολ} = 6x^2 - 2$ αντίστοιχα. Αν $x=5$, πόσος είναι ο όγκος V και πόσο το εμβαδόν $E_{ολ}$;



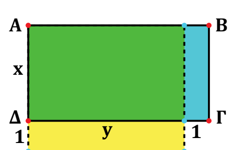
8 Να εξετάσετε αν οι παρακάτω ισότητες αληθεύουν «πάντα, μερικές φορές ή ποτέ».
α) $x(x+1) = x^2+x$, **β)** $2x+x = 3x^2$, **γ)** $x^2+4 = 0$.

9 **(Εξέταση περιορισμών)**: Η Κατερίνα σχεδίασε ένα ορθογώνιο με άγνωστες διαστάσεις. Στο σχήμα οι δύο διαστάσεις είναι $y–5$ και $x–4$. Το εμβαδόν είναι: $(x–4)(y–5)$.



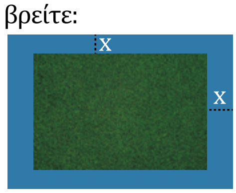
α) Εάν $x = 7$ και $y = 9$, ποια είναι η τιμή του εμβαδού του ορθογωνίου;
β) Ποια είναι η τιμή της παράστασης $(x–4)(y–5)$ αν $x=2$ και $y=2$;
γ) Η Κατερίνα ισχυρίζεται ότι εάν $x=2$ και $y=2$, τότε το ορθογώνιο έχει εμβαδόν 6. Ποιο λάθος υπάρχει στον ισχυρισμό της;

10 Το ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει διαστάσεις x και y. Αν η μία πλευρά του αυξηθεί μία μονάδα και η άλλη μειωθεί μία μονάδα προκύπτει ένα νέο ορθογώνιο.



α) Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του ορθογωνίου, που θα προκύψει.
β) Να εξετάσετε πόσο μεταβάλλεται η περίμετρος και πόσο το εμβαδόν του ορθογωνίου.

11 Ο κήπος έχει διαστάσεις 10 m και 16 m. Θα στρωθεί εσωτερικά με γκαζόν και περιμετρικά θα κατασκευαστεί διάδρομος πλάτους x m. Να βρείτε:

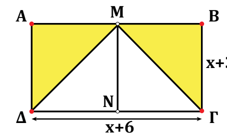


α) Το εμβαδόν του διαδρόμου.
β) Το εμβαδόν του γκαζόν.
γ) Το κόστος κατασκευής, αν οι πλάκες που θα τοποθετηθούν στον διάδρομο κοστίζουν 50 €/m^2, και το γκαζόν κοστίζει 40 €/m^2.

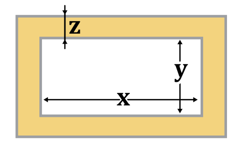
12 Το ανάπτυγμα του γινόμενου $(x+m)(x+n)$ είναι $x^2+βx+γ$.
α) Να βρείτε πώς συνδέονται τα m, n με το β.
β) Ποιο είναι το πρόσημο των m και n όταν $γ>0$ και όταν $γ<0$;

13 Να βρείτε δύο πολυώνυμα τα οποία να έχουν γινόμενο ένα τριώνυμο 3ου βαθμού.

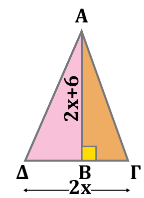
14 Να βρείτε μία αλγεβρική παράσταση που να εκφράζει το εμβαδόν του κίτρινου μέρους του σχήματος.

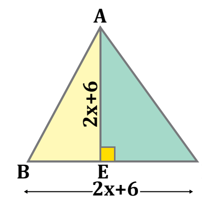


15 Γύρω από ένα αγρόκτημα μήκους x και πλάτους y θέλουμε να δημιουργηθεί ένα μονοπάτι πλάτους z. Να προσδιορίσετε την αλγεβρική παράσταση που περιγράφει το εμβαδόν του μονοπατιού με δύο διαφορετικούς τρόπους.



16 Στις ακόλουθες δύο περιπτώσεις να εκφράσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ με μια αλγεβρική παράσταση.





Όλες οι μετρήσεις εκφράζονται στην ίδια μονάδα. Να βρείτε τα αναπτύγματα των αλγεβρικών παραστάσεων και να κάνετε τις αναγωγές όμοιων όρων.

17 **(Εικασία, αιτιολόγηση)** Στο τετραγωνικό πλέγμα αριθμών επιλέγουμε 2×2 τετράγωνα τα οποία περιέχουν 4 αριθμούς, όπως φαίνεται στο σχήμα.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30
31	32	33	34	35
36	37	38	39	40

α) Να υπολογίσετε τα διαγώνια γινόμενα στα 2×2 χρωματισμένα τετράγωνα και να τα αφαιρέσετε. Π.χ. για το κόκκινο: 9×5–4×10 = 45–40 = 5. Να κάνετε το ίδιο για το πράσινο και το μπλε τετράγωνο. Τι παρατηρείτε;
β) Να κάνετε το ίδιο και σε άλλα 2×2 τετράγωνα.
γ) Να διατυπώσετε μία εικασία και να την αποδείξετε.

18 Έστω φυσικός αριθμός ν, ν > 1.
α) Να βρείτε το γινόμενο: $(ν^2+2ν+2)(ν^2–2ν+2)$.
β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $ν^4+4$ δεν είναι πρώτος αριθμός. Να εξετάσετε σε ποια περίπτωση θα μπορούσε να είναι πρώτος.

19 Να βρείτε μερικές πιθανές διαστάσεις ενός ορθογωνίου, το οποίο έχει εμβαδόν:
α) 20 cm^2 **β)** $(20α^2+5α)$ cm^2.

20 Οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου είναι x–6 και x+6. Αν το εμβαδόν του είναι 64 cm^2, να βρείτε τις διαστάσεις και την περίμετρό του.

2.2 Αξιοσημείωτες ταυτότητες

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθήτριες και οι μαθητές να μπορούν:

- Να διερευνούν και να αποδεικνύουν αλγεβρικά και να ερμηνεύουν, όπου είναι δυνατόν, γεωμετρικά τις ταυτότητες: $(\alpha\pm\beta)^2 = \alpha^2\pm2\alpha\beta+\beta^2$ και $\alpha^2-\beta^2 = (\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$.
- Να χρησιμοποιούν τις ταυτότητες για να μετατρέπουν αλγεβρικές παραστάσεις σε άλλη μορφή.

Διερεύνηση 1

Να εξετάσετε, αιτιολογώντας την απάντησή σας, αν καθεμία από τις ισότητες αληθεύει «πάντα, μερικές φορές ή ποτέ».

α) $x(x+2)=x^2+2x$ **β)** $3x+x=4x^2$ **γ)** $x^2+2=-1$.

Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες μάθησης

Αλγεβρική ταυτότητα ή απλά **ταυτότητα** ονομάζεται κάθε ισότητα, η οποία περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών της.

Παραδείγματα:
Η ισότητα $x(2x+y) = 2x^2+xy$ είναι ταυτότητα, διότι αν κάνουμε τον πολλαπλασιασμό $x(2x+y)$ θα προκύψει $2x^2+xy$, δηλαδή η ισότητα αληθεύει για κάθε τιμή των μεταβλητών x και y, αφού οι δύο παραστάσεις παριστάνουν τον ίδιο πάντα αριθμό. Η ισότητα $4x = 8$, δεν είναι ταυτότητα, διότι αληθεύει μόνο για $x = 2$.
Το αριστερό μέρος μιας ισότητας ή ταυτότητας ονομάζεται **1ο μέλος** και το δεξιό μέρος της **2ο μέλος**. Για παράδειγμα, στην ταυτότητα $x(y+z) = xy+xz$ το 1ο μέλος είναι η αλγεβρική παράσταση $x(y+z)$, και το 2ο η αλγεβρική παράσταση $xy+xz$.

Εφαρμογή

Να εξετάσετε αν οι ισότητες αποτελούν ταυτότητες:

α) $3x+2x = 5x$, **β)** $7x+x = 8x^2$, **γ)** $x^2+1 = -5$.

Απάντηση

α) Η ισότητα $3x+2x = 5x$ αληθεύει για κάθε τιμή της μεταβλητής x, αφού οι δύο αλγεβρικές παραστάσεις της αντιπροσωπεύουν τον ίδιο αριθμό. Άρα είναι μία ταυτότητα.
β) Η ισότητα $7x+x = 8x^2$ αληθεύει μόνο για $x=0$ και $x=1$ και για καμία άλλη τιμή της μεταβλητής x. Άρα δεν είναι ταυτότητα.
γ) Η ισότητα $x^2+1 = -5$ δεν αληθεύει για καμία τιμή της μεταβλητής, διότι για κάθε πραγματικό αριθμό x είναι $x^2+1 > 0$ ενώ $-5 < 0$. Άρα δεν είναι ταυτότητα.

Πώς αποδεικνύουμε μια ταυτότητα

Όταν θέλουμε να διαπιστώσουμε αν μία ισότητα είναι ταυτότητα, συνήθως είναι αδύνατο να δοκιμάσουμε όλες τις τιμές των μεταβλητών για να διαπιστώσουμε αν αληθεύει πάντα. Σε αυτή την περίπτωση, χρειάζεται να κάνουμε **απόδειξη**, δηλαδή να εφαρμόσουμε μια διαδικασία η οποία δεν στηρίζεται σε συγκεκριμένα παραδείγματα.
Για να αποδείξουμε μια ταυτότητα:

- Μπορούμε να ξεκινήσουμε από το ένα μέλος, εφαρμόζοντας πράξεις και ιδιότητες που γνωρίζουμε ότι ισχύουν και να καταλήξουμε στο άλλο μέλος.

- Μπορούμε να κάνουμε πράξεις και στα δύο μέλη μέχρι να καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα, οπότε συμπεραίνουμε ότι τα δύο μέλη είναι ίσα.

Στη συνέχεια, θα δούμε μερικές αξιοσημείωτες ταυτότητες και την απόδειξή τους. Οι αξιοσημείωτες ταυτότητες είναι πολύ χρήσιμες για τη μετατροπή αλγεβρικών παραστάσεων από μία μορφή σε άλλη, στην απόδειξη άλλων ταυτοτήτων ή στη μετατροπή ενός πολυωνύμου σε γινόμενο παραγόντων, που θα μελετήσουμε στην επόμενη ενότητα.

2.2.1 Τετράγωνο αθροίσματος

Διερεύνηση 2

Να συνεργαστείτε ανά δύο και να συζητήσετε τα αποτελέσματά σας στην τάξη.

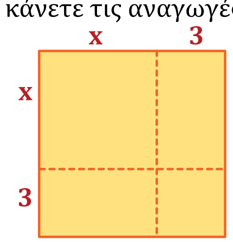
α) Να γράψετε την παράσταση $(x+3)^2$ σε μορφή γινομένου, να την αναπτύξετε και να κάνετε τις αναγωγές όμοιων όρων.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του διπλανού τετραγώνου με δύο διαφορετικούς τρόπους.

γ) Να αναπτύξετε και να κάνετε αναγωγή όμοιων όρων στην παράσταση $(x+α)^2$.

δ) Να χρησιμοποιήσετε το προηγούμενο αποτέλεσμα για να βρείτε σύντομα τα αναπτύγματα: $(x+4)^2$ και $(2x+3)^2$.

ε) Να υπολογίσετε χωρίς αριθμομηχανή τη δύναμη 61^2.



Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες μάθησης

Για κάθε α, β ισχύει:

$$(α+β)^2 = α^2+2αβ+β^2$$

Αλγεβρική απόδειξη

Τη δύναμη $(α+β)^2$ τη γράφουμε ως γινόμενο $(α+β)(α+β)$ οπότε έχουμε:

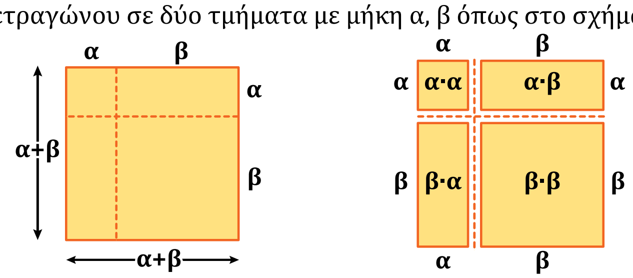
$$(α + β)^2 = (α + β)(α + β) = α^2 + αβ + βα + β^2 = α^2 + 2αβ + β^2.$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

Το τετράγωνο του αθροίσματος δύο όρων είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο όρων, αυξημένο κατά το διπλάσιο γινόμενο αυτών.

Γεωμετρική ερμηνεία

Αν χωρίσουμε μια πλευρά τετραγώνου σε δύο τμήματα με μήκη α, β όπως στο σχήμα, έχουμε:



- Το εμβαδόν του κίτρινου τετραγώνου είναι το τετράγωνο με μήκος πλευράς α+β:
$$Ε = (α+β)^2$$
- Αν προσθέσουμε τα εμβαδά των μικρών ορθογωνίων στα οποία χωρίζεται το τετράγωνο, έχουμε:
$$Ε = α^2+αβ+αβ+β^2 = α^2+2αβ+β^2$$
- Οι δύο παραστάσεις παριστάνουν το εμβαδόν του ίδιου τετραγώνου, οπότε προκύπτει:
$$\mathbf{(α+β)^2 = α^2+2αβ+β^2}$$

Σχόλιο: Στην εφαρμογή της ταυτότητας τα **α** και **β** μπορεί να είναι αριθμοί, μονώνυμα ή αλγεβρικές παραστάσεις.

Παραδείγματα:

$(x+2)^2=x^2+2\cdot x\cdot 2+2^2 = x^2+4x+4$ *(ο πρώτος όρος είναι x και ο δεύτερος 2),*

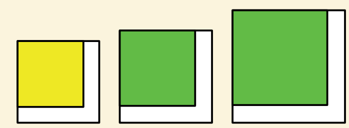
$(3x+2z)^2 = (3x)^2+2\cdot 3x\cdot 2z+(2z)^2 = 9x^2+12xz+4z^2$ *(ο πρώτος όρος είναι 3x και ο δεύτερος 2z)*

Να μελετήσετε το ιστορικό σημείωμα με τίτλο: «Η ταυτότητα του τετραγώνου αθροίσματος στον Ευκλείδη».

Εφαρμογή

Ο εκπαιδευτικός θέτει το εξής πρόβλημα στην τάξη:

«Θα σας δίνω ένα τετράγωνο με συγκεκριμένη πλευρά (π.χ. 23 cm, 59 cm, 196 cm κ.λπ.). Εσείς θα αυξάνετε το μήκος της πλευράς του τετραγώνου κατά 1 cm και θα υπολογίζετε πόσο μεγαλύτερο γίνεται το εμβαδόν του νέου τετραγώνου. Δηλαδή, στα σχήματα που βλέπετε στην εικόνα, θα πρέπει να βρίσκετε το εμβαδόν του λευκού μέρους που αντιστοιχεί στην αύξηση».



Ο εκπαιδευτικός δίνει τις πλευρές των τετραγώνων και οι μαθητές συνεργάζονται για να απαντήσουν στο ερώτημα. Οι περισσότεροι μαθητές βρίσκουν τα εμβαδά του αρχικού και του νέου τετραγώνου και μετά βρίσκουν τη διαφορά τους.

Σε λίγο ο Φώτης με την Αιμιλία, που συνεργάζονταν, ισχυρίζονται ότι βρήκαν έναν τρόπο να απαντούν στο ερώτημα χωρίς να είναι υποχρεωμένοι να υπολογίζουν τα εμβαδά του αρχικού και του νέου τετραγώνου και μετά τη διαφορά τους.

Ποιον τρόπο νομίζετε ότι βρήκαν ο Φώτης και η Αιμιλία για να απαντούν γρήγορα;

Απάντηση

Η Αιμιλία και ο Φώτης σκέφτηκαν πιο γενικά. Θεώρησαν ότι αν η πλευρά του αρχικού τετραγώνου είναι **α**, τότε η πλευρά του νέου τετραγώνου θα είναι **α+1**. Άρα τα εμβαδά των δύο τετραγώνων θα είναι α^2 (αρχικό) και $(\alpha+1)^2$ (νέο). Επομένως η διαφορά τους είναι $(\alpha+1)^2-\alpha^2 = \alpha^2+2\alpha+1-\alpha^2 = \mathbf{2\alpha+1}$. Η τελευταία ισότητα ισχύει για κάθε α και είναι ανεξάρτητη από τα συγκεκριμένα εμβαδά. Έτσι έχουμε έναν γενικό τύπο που δίνει την αύξηση του εμβαδού οποιαδήποτε κι αν είναι η αρχική πλευρά του τετραγώνου. Για το προηγούμενο παράδειγμα, με πλευρά αρχικού τετραγώνου α = 196 cm, η αύξηση είναι $2\cdot 196+1 = 392+1 = 393$ cm^2.

Να δημιουργήσετε μία γεωμετρική απόδειξη της ταυτότητας «τετράγωνο αθροίσματος» ανοίγοντας την εφαρμογή.

2.2.2 Τετράγωνο διαφοράς

Διερεύνηση 3

α) Να γράψετε την παράσταση $(x-2)^2$ σε μορφή γινομένου, να την αναπτύξετε και να κάνετε τις αναγωγές όμοιων όρων.

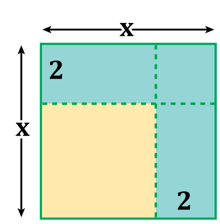
β) Να εκφράσετε το εμβαδόν του τετραγώνου πλευράς x–2 με δύο διαφορετικούς τρόπους.

γ) Να αναπτύξετε την παράσταση $(x-\alpha)^2$ και να κάνετε αναγωγή όμοιων όρων.

δ) Να χρησιμοποιήσετε το προηγούμενο αποτέλεσμα για να βρείτε σύντομα τα αναπτύγματα:

$(x-1)^2 =$ .... $\qquad (x-0{,}5)^2 =$ ....

ε) Να υπολογίσετε χωρίς αριθμομηχανή τη δύναμη 79^2.



Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες μάθησης

Για κάθε α, β, ισχύει:

$$(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$$

Αλγεβρική απόδειξη

Τη δύναμη $(\alpha-\beta)^2$ την γράφουμε ως γινόμενο $(\alpha-\beta)(\alpha-\beta)$ οπότε έχουμε:

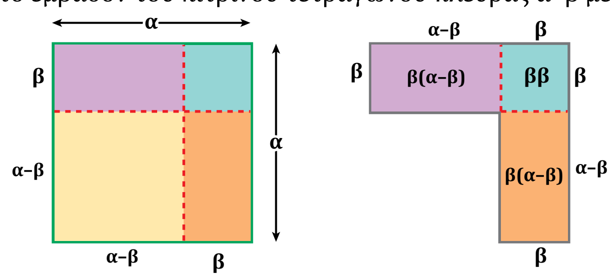
$$(\alpha-\beta)^2 = (\alpha-\beta)(\alpha-\beta) = \alpha^2-\alpha\beta-\beta\alpha+\beta^2 = \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2.$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

Το τετράγωνο της διαφοράς δύο όρων είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο όρων, ελαττωμένο κατά το διπλάσιο γινόμενο αυτών.

Γεωμετρική ερμηνεία

- Αν συμβολίσουμε με α την πλευρά του μεγάλου τετραγώνου και με β την πλευρά του μικρού τετραγώνου, τότε μπορούμε να εκφράσουμε το εμβαδόν του κίτρινου τετραγώνου πλευράς α–β με δύο διαφορετικούς τρόπους.



- Βρίσκουμε το εμβαδόν του κίτρινου τετραγώνου υψώνοντας στο τετράγωνο το μήκος της πλευράς α–β:
$$E=(\alpha-\beta)^2$$
- Αφαιρούμε από το εμβαδόν ολόκληρου του τετραγώνου τα δύο ορθογώνια (μοβ και πορτοκαλί) και το μικρό τετράγωνο (πράσινο):
$$E = \alpha^2-2\beta(\alpha-\beta)-\beta\beta = \alpha^2-2\alpha\beta+2\beta^2-\beta^2 = \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2.$$
- Οι δύο παραστάσεις παριστάνουν το εμβαδόν του ίδιου τετραγώνου, οπότε προκύπτει:
$$(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$$

Σχόλιο: Στην εφαρμογή της ταυτότητας τα **α** και **β** μπορεί να είναι αριθμοί, μονώνυμα ή αλγεβρικές παραστάσεις.
Παραδείγματα: $(x-3)^2 = x^2-2\cdot x\cdot 3+3^2 = x^2-6x+9$, $(2y-\alpha)^2=(2y)^2-2\cdot(2y)\cdot\alpha+\alpha^2 = 4y^2-4\alpha y+\alpha^2$.

Για να δημιουργήσετε μία γεωμετρική απόδειξη της ταυτότητας «τετράγωνο διαφοράς» να ανοίξετε την ψηφιακή εφαρμογή.

2.2.3 Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά

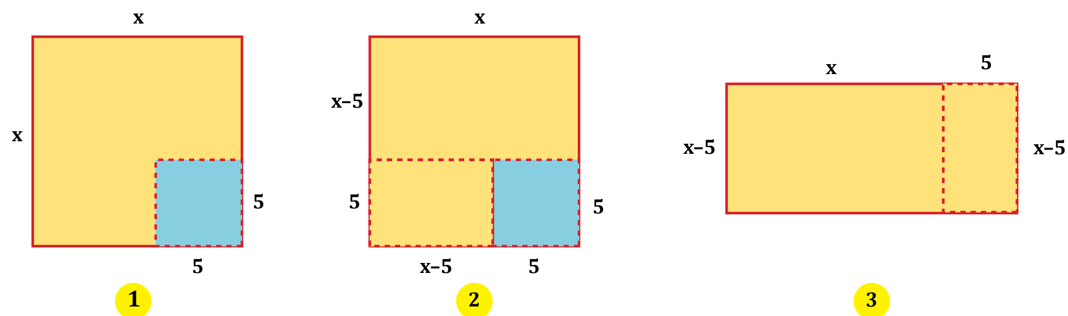
Διερεύνηση 4

Να συνεργαστείτε ανά δύο και να συζητήσετε τα αποτελέσματά σας στην τάξη.

α) Να αναπτύξετε την παράσταση $(x-5)(x+5)$ και να κάνετε τις αναγωγές όμοιων όρων.

β) Να εξηγήσετε, γιατί τα κίτρινα εμβαδά στα σχήματα (1) και (3) είναι ίσα, με τη βοήθεια του σχήματος (2). Στη συνέχεια με βάση την ισότητα των εμβαδών στα σχήματα αυτά να συμπληρώσετε την ισότητα:

$$x^2-5^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$$



γ) Να αναπτύξετε την παράσταση (α–β)(α+β) και να κάνετε αναγωγή όμοιων όρων.

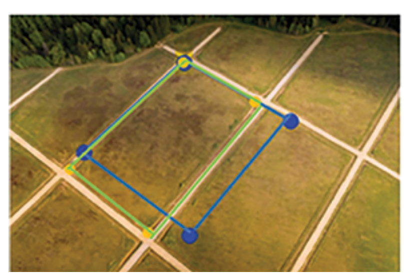
δ) (i) Να χρησιμοποιήσετε το προηγούμενο αποτέλεσμα για να βρείτε σύντομα τα αναπτύγματα των παραστάσεων Α = (x–1)(x+1) και Β = (2x+3)(2x–3).

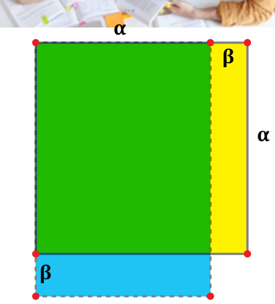
(ii) Να υπολογίσετε νοερά τα γινόμενα: 49·51 και 92·88.

Διερεύνηση 5: Ρυμοτόμιση περιοχής

Μία καινούργια περιοχή πρόκειται να ενταχθεί στο σχέδιο πόλης. Η πολεοδομία του δήμου ρυμοτομεί την περιοχή κάνοντας μία ορθολογική αναδιάταξη των οικοπέδων για την κατασκευή δρόμων και κοινόχρηστων χώρων.

Ο κ. Γεωργίου έχει το τετράγωνο οικόπεδο, πλευράς α (τα όριά του σημειώνονται στην αεροφωτογραφία με μπλε χρώμα). Κατά την αναδιάταξη, το οικόπεδο μικραίνει στη μία πλευρά του κατά μήκος β και μεγαλώνει στην άλλη πλευρά του κατά ίδιο μήκος β (τα νέα όρια σημειώνονται στην αεροφωτογραφία με πράσινο χρώμα). Δημιουργείται έτσι ένα νέο ορθογώνιο οικόπεδο, που περικλείεται από 4 δρόμους. Δίπλα φαίνεται ένα έγχρωμο σχεδιάγραμμα του υφιστάμενου και του νέου οικοπέδου. Να εξετάσετε αν συμφέρει τον κ. Γεωργίου η πρόταση της πολεοδομίας του δήμου να ανταλλάξει το αρχικό του τετράγωνο οικόπεδο πλευράς α με το προτεινόμενο ορθογώνιο με πλευρές α+β και α-β.





Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες μάθησης

Για κάθε α, β ισχύει ότι:

$$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = \alpha^2-\beta^2$$

Αλγεβρική απόδειξη

Αναπτύσσουμε το γινόμενο (α+β)(α–β) κάνοντας τον πολλαπλασιασμό, οπότε έχουμε:

$$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\alpha\beta+\alpha\beta-\beta^2=\alpha^2-\beta^2$$

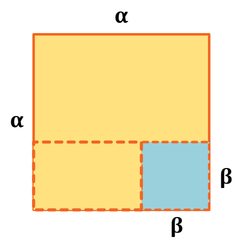
Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

Το γινόμενο του αθροίσματος δύο όρων επί τη διαφορά τους είναι ίσο με τη διαφορά των τετραγώνων των δύο όρων.

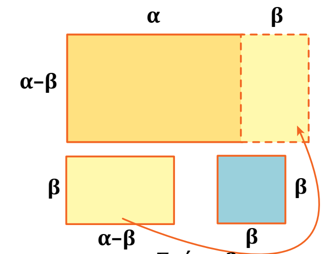
Γεωμετρική ερμηνεία

Στο σχήμα αναζητούμε το εμβαδόν της κίτρινης περιοχής.

- Αν αφαιρέσουμε από το εμβαδόν ολόκληρου του τετραγώνου πλευράς α το εμβαδόν του μπλε τετραγώνου πλευράς β (Σχήμα 1), έχουμε: $E = \alpha^2 - \beta^2$
- Αν κόψουμε το σχήμα και τοποθετήσουμε τα δύο κίτρινα ορθογώνια σε ένα μεγάλο ορθογώνιο με μήκη πλευρών α+β και α-β (Σχήμα 2), παίρνουμε: $E = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Οι δύο αλγεβρικές παραστάσεις παριστάνουν την ίδια κίτρινη περιοχή και επομένως: $\mathbf{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = \alpha^2-\beta^2}$.

Σχόλια:

1) Στην εφαρμογή της ταυτότητας τα **α** και **β** μπορεί να είναι αριθμοί, μονώνυμα ή αλγεβρικές παραστάσεις.

2) $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta) = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = \alpha^2-\beta^2$

Παραδείγματα:

$(x+5)(x-5) = x^2-5^2 = x^2-25$.

$(3y+2z)(3y-2z) = (3y)^2-(2z)^2 = 3^2y^2-2^2z^2 = 9y^2-4z^2$.

$49\cdot 51 = (50-1)\cdot(50+1) = 50^2-1^2 = 2500-1 = 2499$.

Για να δημιουργήσετε μια απόδειξη της ταυτότητας «άθροισμα επί διαφορά» (ή διαφορά τετραγώνων), να ανοίξετε την ψηφιακή εφαρμογή.

Εφαρμογή 1

1) Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(\sqrt{17} - \sqrt{15})(\sqrt{17} + \sqrt{15})$, **β)** $(2x-1)(2x+1)$, **γ)** $(5x+3)^2$, **δ)** $(6-3x)^2$,

2) Να γίνουν οι πράξεις:

α) $(2x - 3)^2 - 2(3x - 1)(3x + 1)$, **β)** $(4-5x)^2-(4-5x)(4+5x)$

Απάντηση

1) α) Εφαρμόζουμε την ταυτότητα $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = \alpha^2-\beta^2$ για $\alpha\sqrt{17}$ και $\beta\sqrt{15}$, οπότε έχουμε:

$(\sqrt{17} - \sqrt{15})(\sqrt{17} + \sqrt{15}) = (\sqrt{17})^2 - (\sqrt{15})^2 = 17 - 15 = 2.$

β) Εφαρμόζουμε την ταυτότητα $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = \alpha^2-\beta^2$ για $\alpha = 2x$ και $\beta = 1$, οπότε έχουμε:

$(2x-1)(2x+1) = (2x)^2 - 1^2 = 4x^2-1.$

γ) Εφαρμόζουμε την ταυτότητα $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ για $\alpha = 5x$ και $\beta = 3$, οπότε έχουμε:

$(5x+3)^2 = (5x)^2+2\cdot 5x\cdot 3+3^2 = 25x^2+30x+9.$

δ) Εφαρμόζουμε την ταυτότητα $(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$ για $\alpha = 6$ και $\beta = 3x$, οπότε έχουμε:

$(6-3x)^2 = 6^2-2\cdot 6\cdot 3x+(3x)^2 = 36-36x+9x^2$ ή στην κανονική μορφή: $9x^2-36x+36$.

2) α)

$(2x - 3)^2 - 2(3x - 1)(3x + 1) =$	[αναπτύσσουμε τα $(2x-3)^2$ και $(3x - 1)(3x + 1)$]
$(2x)^2-2\cdot 2x\cdot 3+3^2-2[(3x)^2-1^2] =$	[δυνάμεις–πολλαπλασιασμοί]
$4x^2-12x+9-2\,(9x^2-1) =$	[επιμεριστική ιδιότητα]
$4x^2-12x+9-18x^2+2 =$	[αντιμεταθετική ιδιότητα]
$4x^2-18x^2-12x+9+2 =$	[αναγωγή όμοιων όρων]
$-14x^2 -12x+11$	[κανονική μορφή]

β) $(4-5x)^2-(4-5x)(4+5x) =$ [αναπτύσσουμε τα $(4-5x)^2$ και $(4-5x)(4+5x)$]

$4^2-2\cdot4\cdot5x+(5x)^2-[4^2-(5x)^2] =$ [δυνάμεις–πολλαπλασιασμοί]

$16-40x+25x^2-(16-25x^2) =$ [απαλοιφή παρένθεσης]

$16-40x+25x^2-16+25x^2 =$ [αντιμεταθετική ιδιότητα]

$25x^2+25x^2-40x+16-16 =$ [αναγωγή όμοιων όρων]

$50x^2-40x$ [κανονική μορφή]

Εφαρμογή 2

α) Να αποδειχθούν οι ταυτότητες:

i) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$, ii) $(x-y)^3 = x^3-3xy(x-y)-y^3$.

β) Αν $\alpha+\beta = 3$ και $\alpha\beta = -18$ να υπολογιστεί η αριθμητική τιμή της παράστασης $\alpha^2+\beta^2$.

Απάντηση

α) i) Για να αποδείξουμε την ταυτότητα $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$ ξεκινάμε από το 2ο μέλος:

$(x+y)(x^2-xy+y^2) =$ [βρίσκουμε το ανάπτυγμα του πολλαπλασιασμού]

$x\cdot x^2-x\cdot x\cdot y+xy^2+yx^2-yxy+y^3 =$ [κάνουμε τις δυνάμεις]

$x^3-x^2y+xy^2+yx^2-xy^2+y^3 =$ [αναγωγή όμοιων όρων]

x^3+y^3 [κανονική μορφή]

ii) Για να αποδείξουμε την ταυτότητα $(x-y)^3 = x^3-3xy(x-y)+y^3$ ξεκινάμε από το 1ο μέλος:

$(x-y)^3=$ [γράφουμε τη δύναμη ως γινόμενο $(x-y)(x-y)^2$]

$(x-y)(x-y)^2 =$ [αναπτύσσουμε το $(x-y)^2$]

$(x-y)(x^2-2xy+y^2) =$ [πολλαπλασιάζουμε τα πολυώνυμα]

$xx^2-x2xy+xy^2-yx^2+y2x\,y-y^3 =$ [πράξεις στα μονώνυμα]

$x^3-2x^2y+xy^2-yx^2+2xy^2-y^3 =$ [αντιμεταθετική ιδιότητα]

$x^3-2x^2y-x^2y+xy^2+2xy^2-y^3 =$ [αναγωγή όμοιων όρων]

$x^3-3x^2y+3xy^2-y^3 =$ [επιμεριστική ιδιότητα στον 2ο και 3ο όρο]

$x^3-3xy(x-y)-y^3$

β) Από την ταυτότητα $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ έχουμε:

$$(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta + 2\alpha\beta \text{ ή } (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \alpha^2 + \beta^2 \text{ ή } \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta.$$

Από την τελευταία θέτοντας $\alpha+\beta = 3$ και $\alpha\beta = -18$ παίρνουμε:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 3^2 - 2(-18) = 9 + 36 = 45.$$

Εφαρμογή 3

Ο Ευκλείδης «παίζοντας» με την «αριθμομηχανή» του παρατηρεί ότι:

$2\times4+1 = 9 = 3^2$, $4\times6+1 = 25 = 5^2$, $5\times7+1 = 36 = 6^2$, $9\times11+1 = 100 = 10^2$.

Μετά από πολλές δοκιμές λέει: *«αν πολλαπλασιάσω δύο θετικούς ακέραιους αριθμούς οι οποίοι διαφέρουν κατά 2 και μετά προσθέσω 1, τότε παίρνω πάντα το τετράγωνο του αριθμού που βρίσκεται μεταξύ αυτών των αριθμών».*

Είναι σωστή η εικασία του Ευκλείδη; Μπορείτε να την αποδείξετε;

Απάντηση

Διατυπώνουμε με αλγεβρικό συμβολισμό την εικασία του Ευκλείδη.

Αν συμβολίσουμε με ν τον μεσαίο αριθμό από τους τρεις διαδοχικούς θετικούς ακέραιους, τότε οι αριθμοί είναι **ν–1**, **ν**, **ν+1** (γιατί;) και η εικασία είναι: $(\nu-1)(\nu+1)+1 = \nu^2$.
Πράγματι, κάνοντας πράξεις στο πρώτο μέλος της ισότητας παίρνουμε:
$(\nu-1)(\nu+1)+1 = (\nu^2-1)+1 = \nu^2-1+1 = \nu^2$ οπότε η εικασία επιβεβαιώνεται και επομένως ισχύει η ταυτότητα του Ευκλείδη.

Να δημιουργήσετε μία γεωμετρική απόδειξη της ταυτότητας του κύβου αθροίσματος ανοίγοντας την εφαρμογή.

Να ανοίξετε την εφαρμογή για να εξασκηθείτε στις «ταυτότητες».

Ερωτήσεις για Αυτοαξιολόγηση

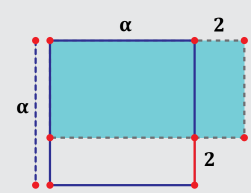
1 Δίνεται η ισότητα $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2+\beta^2$
α) Να εξετάσετε αν είναι ταυτότητα.
β) Να εξετάσετε αν *«ισχύει πάντα», «ποτέ», «μερικές φορές»*.

2 Να εξετάσετε αν ο αριθμός $(\sqrt{11}-\sqrt{8})(\sqrt{11}+\sqrt{8})$ είναι ρητός ή άρρητος.

3 Το ανάπτυγμα του $(2x+1)^2$ είναι:
α) $2x^2+1^2$ **β)** $4x^2+1+2x$ **γ)** $4x^2+1+4x$ **δ)** $(2x)^2+1^2$;

4 Να βρείτε τα αναπτύγματα:
α) $(1-2y)^2$ **β)** $(x^2+2x)^2$ **γ)** $(x-3)(x+3)(x^2+9)$

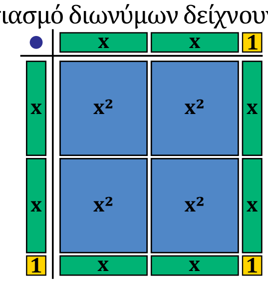
5 Να συμπληρώσετε τα κενά □ για να είναι σωστή η ισότητα: $(\square+7)^2=\square+28x+\square$



6 Σε ένα τετράγωνο με πλευρά **α** cm, μειώνουμε τη μία πλευρά του κατά 2 cm και αυξάνουμε την άλλη κατά 2 cm (σχήμα), οπότε προκύπτει ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Να εξετάσετε αν και πόσο μεταβλήθηκε το εμβαδόν του τετραγώνου.

Ασκήσεις και Προβλήματα

1 Να βρείτε ποιον πολλαπλασιασμό διωνύμων δείχνουν τα «αλγεβρικά πλακίδια» του διπλανού σχήματος. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού.



2 Να κάνετε τις πράξεις
α) $(x-5)^2+(2x+3)^2$,
β) $(x^2-2)^2-(x^2-2)(x^2+2)$,
γ) $(4x-3)^2+(4x+3)^2-2(4x-3)(4x+3)$.

3 Να συμπληρώσετε τα κενά, ώστε να ισχύουν οι ισότητες:
α) $\square+\alpha^2-\square = (x-\square)^2$,
β) $9x^2+1+\square = (\square+\square)^2$,
γ) $\square+\square+16y^2 = (4x+\square)^2$,
δ) $\square-4x+1 = (\square-\square)^2$,
ε) $(y-\square)(\square+\square) = \square-0{,}25$.

4 Ποιες από τις παρακάτω ισότητες είναι ταυτότητες:
α) $0x = 0$, **β)** $\alpha+\beta = 0$, **γ)** $\alpha\cdot\beta = 0$, **δ)** $x(x+1) = x^2+x$,
ε) $(x+2)^2 = x^2+2^2$, **στ)** $(\alpha-1)^2 = \alpha^2+1-2\alpha$.

5 Να αποδείξετε τις ταυτότητες:
α) $(\alpha-1)^2+2\alpha-2 = (\alpha-1)(\alpha+1)$,
β) $2y^2+(x-y)(x+y) = (x-y)^2+2xy$,
γ) $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1) = x^8-1$,
δ) $(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)+\beta^3$.

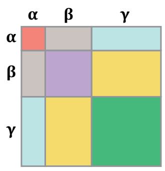
6 Να εφαρμόσετε τις κατάλληλες ταυτότητες, για να υπολογίσετε τους αριθμούς:
α) 105^2, **β)** $49\cdot49$, **γ)** $201\cdot199$, **δ)** $197\cdot203$.

7 Να υπολογίσετε νοερά:
$(100+1)^2$, 102^2, 104^2, $(100-1)^2$, 95^2, 97^2, $(100-2)(100+2)$, $101\cdot99$, $103\cdot97$

8 Να αποδείξετε τις ταυτότητες:
α) $(x-y)(x^2+xy+y^2) = x^3-y^3$,

β) $(x+\alpha)(x+\beta) = x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$,
γ) $(x + y + z)^2 = x^2+y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$.

9 **α)** Να χρησιμοποιήσετε το τετράγωνο που φαίνεται στα δεξιά για να αναπτύξετε έναν τύπο για το $(\alpha+\beta+\gamma)^2$,

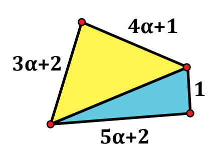


β) Να υπολογίσετε την παράσταση: $(x+2y+3z)^2$,
γ) Να γράψετε ως γινόμενο την αλγεβρική παράσταση:
$4\kappa^2 + 9\lambda^2 + 16\mu^2 + 12\kappa\lambda + 16\kappa\mu + 24\lambda\mu$

10 Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:
$A = 2025^2 - 2024^2$ και $B = 2026^2-2024^2$

11 **α)** Να αποδείξετε την ταυτότητα $(\alpha-1)(\alpha+1)+1=\alpha^2$
β) Να αποδείξετε, χωρίς να κάνετε τις πράξεις, ότι ο αριθμός $2024{\cdot}2026+1$ είναι τέλειο τετράγωνο και να βρείτε ποιο.

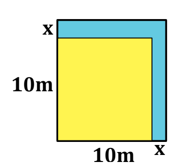
12 Να αποδείξετε ότι αν το ένα από τα δύο τρίγωνα του σχήματος είναι ορθογώνιο, τότε και το άλλο τρίγωνο θα είναι ορθογώνιο.



13 **α)** Να αποδείξετε την ταυτότητα:
$$\left(x+\frac{4}{x}\right)^2 - \left(x-\frac{4}{x}\right)^2 = 16$$
β) Να υπολογίσετε τον αριθμό:
$$\alpha=\left(2024+\frac{1}{506}\right)^2-\left(2024-\frac{1}{506}\right)^2$$

14 Αν $x+y = 5$ και $x{\cdot}y = 4$, να υπολογίσετε τις αριθμητικές τιμές των παραστάσεων:
α) $x^2 + y^2$, **β)** $(x-y)^2$.

15 Ο κ. Νικολάου θέλει να κάνει ανακαίνιση στο σπίτι του (διαστάσεων 10 m×10 m) και να το επεκτείνει κατά x m και προς τις δύο πλευρές (σχήμα).
α) Να βρείτε το εμβαδόν του ανακαινισμένου σπιτιού.



β) Ο κ. Νικολάου μπορεί να διαθέσει το πολύ 40.000 €. Αν το κόστος κατασκευής είναι 1.000 €/m^2, να εξετάσετε αν μπορεί να επεκτείνει το σπίτι κατά 2 m.

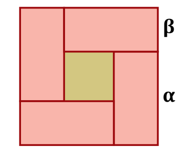
16 Να βρείτε το ανάπτυγμα:
$(x-3)^2+(3x+1)^2+10(1-x)(1+x)$. Μετά να βρείτε τον βαθμό του πολυωνύμου που θα προκύψει και την αριθμητική του τιμή για $x = -3$.

17 Να βρείτε την τιμή της παράστασης x^2+y^2, αν $x-y = 1$ και $xy = 12$.

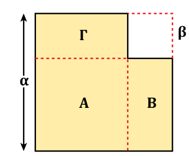
18 Αν $x+y = \alpha$ και $xy = \beta$, να δείξετε ότι: $x^2+y^2=\alpha^2-2\beta$.

19 Αν $x - \dfrac{1}{x} = 4$ να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$.

20 Τέσσερα γήπεδα τένις παρουσιάζονται στο παρακάτω σχήμα με έναν τετράγωνο αποθηκευτικό χώρο στο κέντρο. Κάθε γήπεδο έχει διαστάσεις α, β. Να γράψετε μία αλγεβρική παράσταση:
α) Για το συνολικό εμβαδόν,
β) Για το εμβαδόν του εσωτερικού αποθηκευτικού χώρου,
γ) Για το εμβαδόν ενός γηπέδου τένις.

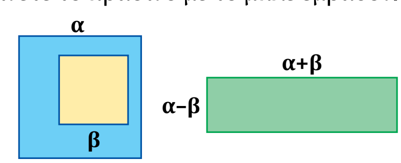


21 Ένα τετράγωνο με μήκος πλευράς β αποκόπτεται από τετράγωνο με μήκος πλευράς α.

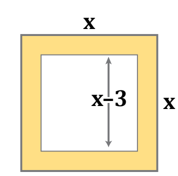


α) Χρησιμοποιώντας αφαίρεση να γράψετε μία αλγεβρική παράσταση για το εμβαδόν που απομένει.
β) Να γράψετε αλγεβρικές παραστάσεις για το εμβαδόν των περιοχών Α, Β και Γ.
γ) Να προσθέσετε τις αλγεβρικές παραστάσεις του **β)** για να δείτε αν θα πάρετε την απάντηση από το **α)**.

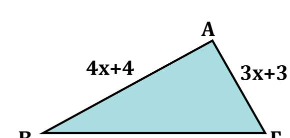
22 Δίνονται τα τετράγωνα με πλευρές α και β με $\alpha > \beta$. Να συγκρίνετε το πράσινο με το μπλε εμβαδόν. Να εξηγήσετε.



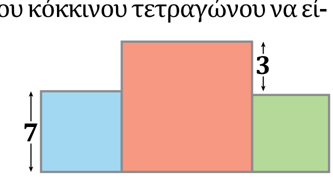
23 Να γράψετε μια αλγεβρική παράσταση για το εμβαδόν της κίτρινης περιοχής μεταξύ των δύο τετραγώνων και να την απλοποιήσετε.



24 Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο. Τα μήκη των πλευρών εκφράζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης.



25 Δίνονται τρία τετράγωνα. Ποια είναι τα μήκη των πλευρών του πράσινου και του κόκκινου τετραγώνου, έτσι ώστε το εμβαδόν του κόκκινου τετραγώνου να είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών του μπλε και του πράσινου τετραγώνου.



26 **α)** Να αποδείξετε ότι

το γινόμενο δύο θετικών διαδοχικών ακεραίων είναι άρτιος.
β) Να αποδείξετε ότι το τετράγωνο περιττού φυσικού αριθμού έχει τη μορφή 8κ+1, όπου κ είναι φυσικός αριθμός.
γ) Να αποδείξετε ότι ανάμεσα σε τρεις διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς ο ένας είναι πάντοτε πολλαπλάσιο του 3.
δ) Να δείξετε ότι για ν φυσικό αριθμό η διαφορά $ν^3–ν$ είναι διαιρετή με το 6.

Ανοίγοντας την εφαρμογή, να κάνετε την «Εργασία με προεκτάσεις» με θέμα το τρίγωνο του Pascal.

Να διερευνήσετε τη σχέση του τριγώνου του Pascal με τους συντελεστές του διωνυμικού αναπτύγματος ανοίγοντας την εφαρμογή.

2.3 Παραγοντοποίηση απλών πολυωνύμων

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθήτριες και οι μαθητές να μπορούν:

- Να αναγνωρίζουν την επιμεριστική ιδιότητα ως το βασικό κοινό στοιχείο των πράξεων πολυωνύμων, των ταυτοτήτων και της παραγοντοποίησης.
- Να παραγοντοποιούν απλά πολυώνυμα (κυρίως μίας μεταβλητής) με κοινό παράγοντα, ομαδοποίηση και χρήση ταυτοτήτων.

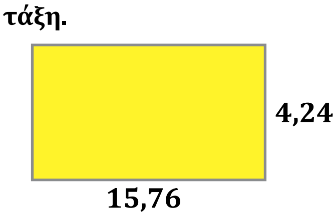
Πολλές φορές, για λόγους συντομίας υπολογισμών, απλοποίησης παραστάσεων και επίλυσης εξισώσεων, είναι χρήσιμη η μετατροπή μιας παράστασης από άθροισμα σε γινόμενο. Η διαδικασία αυτή λέγεται **παραγοντοποίηση**. Για την παραγοντοποίηση πολυωνύμων είναι πολύ χρήσιμες οι αξιοσημείωτες ταυτότητες και η επιμεριστική ιδιότητα. Στη συνέχεια θα δούμε τις πιο χαρακτηριστικές περιπτώσεις παραγοντοποίησης πολυωνύμων.

2.3.1 Κοινός παράγοντας

Διερεύνηση 1

Να συνεργαστείτε ανά δύο και να συζητήσετε τα αποτελέσματά σας στην τάξη.

α) Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης $Α = 0{,}2x+5{,}7x+4{,}1x$, αν $x=3{,}6$.
β) Ο υπολογισμός της τιμής της παράστασης $Β = 27{,}89·179{,}427 – 27{,}89·79{,}427$ μπορεί να γίνει με δύο τρόπους. Να υπολογίσετε την τιμή της Β με τον τρόπο που θεωρείτε πιο βολικό. Να εξηγήσετε γιατί.
γ) Να βρείτε την περίμετρο του ορθογωνίου με τον τρόπο που θεωρείτε πιο σύντομο. Να αιτιολογήσετε.



Διερεύνηση 2

Να συνεργαστείτε ανά δύο και να συζητήσετε τα αποτελέσματά σας στην τάξη.
Η αυλή του διπλανού σπιτιού είναι σχήματος ορθογωνίου με εμβαδόν x^2+x (m^2) και περίμετρο $4x+2$ (m).

α) Να βρείτε δύο αλγεβρικές παραστάσεις, οι οποίες παριστάνουν τις διαστάσεις της αυλής.
β) Αν η μικρότερη διάσταση είναι 10 m, να βρείτε το εμβαδόν και την περίμετρο της αυλής.

Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες μάθησης

Αν όλοι οι όροι ενός πολυωνύμου έχουν κοινό παράγοντα, το πολυώνυμο αυτό μετατρέπεται σε γινόμενο, σύμφωνα με την επιμεριστική ιδιότητα: **$\alpha\beta \pm \alpha\gamma \pm \alpha\delta = \alpha(\beta \pm \gamma \pm \delta)$.**

Βγάζουμε κοινό παράγοντα

$7\alpha + 7\beta = 7(\alpha + \beta)$

Πολλαπλασιάζουμε

Παραδείγματα:

$18 - 3x = 3 \cdot 6 - 3 \cdot x = 3(6 - x)$,

$7x^2 - x = 7 \cdot x \cdot x - 1 \cdot x = x(7x - 1)$.

Να διερευνήσετε την έννοια του κοινού παράγοντα με την ψηφιακή εφαρμογή.

Εφαρμογή 1

Να παραγοντοποιήσετε τις αλγεβρικές παραστάσεις:

α) $2x(3x-1)+5(3x-1)$, **β)** $2(3x+1)-x(6x+2)$.

Απάντηση

α) Βγάζουμε κοινό παράγοντα το $3x-1$ οπότε έχουμε: $2x(3x-1)+5(3x-1) = (3x-1)(2x+5)$.

β) Βγάζουμε κοινό παράγοντα στο διώνυμο $6x+2$ το 2, οπότε έχουμε:

$$2(3x+1) - x(6x+2) = \underbrace{2(3x+1) - 2x(3x+1)}_{\text{κοινός παράγοντας } 2(3x1)} = 2(3x+1)(1-x)$$

Εφαρμογή 2

Στο ερώτημα ενός τεστ που ζητούσε την παραγοντοποίηση του πολυωνύμου $6x^2 - 12x$, πέντε μαθητές και μαθήτριες έδωσαν τις εξής απαντήσεις:

- Ελένη: $6x^2 - 12x = 2(3x^2 - 6x)$
- Έλκα: $6x^2 - 12x = 3(2x^2 - 4x)$
- Φωτεινή: $6x^2 - 12x = x(6x - 12)$
- Δημήτρης: $6x^2 - 12x = 3x(2x - 4)$
- Βασίλης: $6x^2 - 12x = 6x(x - 2)$

α) Να εξηγήσετε τον τρόπο που εργάστηκε κάθε μαθητής/τρια.

β) Ποια απάντηση δεν επιδέχεται επιπλέον παραγοντοποίηση;

γ) Πώς θα εξηγούσατε σε κάποιον τη διαδικασία της παραγοντοποίησης, έτσι ώστε ένα πολυώνυμο να μην επιδέχεται περαιτέρω παραγοντοποίηση;

Απάντηση

α) Η Ελένη έβγαλε κοινό παράγοντα το 2, αλλά ο παράγοντας $3x^2 - 6x$ δέχεται επιπλέον παραγοντοποίηση: $3x^2 - 6x = 3x(x-2)$. Επομένως: $6x^2 - 12x = 2(3x^2 - 6x) = 2 \cdot 3x(x-2) = 6x(x-2)$.

Η Έλκα έβγαλε κοινό παράγοντα το 3, αλλά ο παράγοντας $2x^2 - 4x$ δέχεται επιπλέον παραγοντοποίηση: $2x^2 - 4x = 2x(x-2)$. Επομένως: $6x^2 - 12x = 3(2x^2 - 4x) = 3 \cdot 2x(x-2) = 6x(x-2)$.

Η Φωτεινή έβγαλε κοινό παράγοντα το x, αλλά ο παράγοντας $6x - 12$ δέχεται επιπλέον παραγοντοποίηση: $6x - 12 = 6(x-2)$. Επομένως: $6x^2 - 12x = x(6x - 12) = x6(x-2) = 6x(x-2)$.

Ο Δημήτρης έβγαλε κοινό παράγοντα το 3x, αλλά ο παράγοντας $2x - 4$ παραγοντοποιείται κι άλλο:

$2x-4 = 2(x-2)$. Επομένως: $6x^2-12x = 3x(2x-4) = 3x\cdot 2(x-2)=6x(x-2)$.

β) Η απάντηση του Βασίλη δεν επιδέχεται επιπλέον παραγοντοποίηση.

γ) Ένα πολυώνυμο λέμε ότι έχει παραγοντοποιηθεί όταν κανένας παράγοντάς του δεν επιδέχεται επιπλέον παραγοντοποίηση.

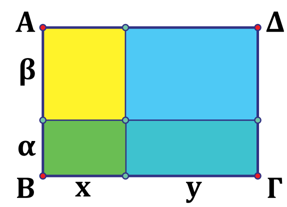
2.3.2 Ομαδοποίηση (κοινός παράγοντας κατά ομάδες)

Διερεύνηση 1

Να συνεργαστείτε για να απαντήσετε στη διερεύνηση και να συζητήσετε τα αποτελέσματά σας στην τάξη.

α) Να εκφράσετε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ με δύο αλγεβρικές παραστάσεις.

β) Τι συμπέρασμα βγάζετε;



Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες μάθησης

Στο πολυώνυμο $\underline{αγ+αδ}+\underline{βγ+βδ}$ δεν έχουν όλοι οι όροι κοινό παράγοντα. Αν όμως βγάλουμε κοινό παράγοντα στους δύο πρώτους το **α** και στους δύο τελευταίους το **β**, εμφανίζεται ως κοινός παράγοντας το γ+δ, οπότε το πολυώνυμο, μπορεί να παραγοντοποιηθεί. Πράγματι:

$$αγ+αδ+βγ+βδ = α(γ+δ)+β(γ+δ) = (γ+δ)(α+β)$$

Σημείωση:

Το πολυώνυμο μπορεί να χωριστεί και σε άλλες ομάδες, αλλά το αποτέλεσμα δεν αλλάζει. Για παράδειγμα:

$$αγ + αδ + βγ + βδ = γ(α + β) + δ(α + β) = (α + β)(γ + δ)$$

Παραδείγματα:

$$z^3 + 5z^2 + 4z + 20 = z^2(z + 5) + 4(z + 5) = (z + 5)(z^2 + 4),$$

$$αγ - αδ - βγ + βδ = α(γ - δ) - β(γ - δ) = (γ - δ)(α - β).$$

Εφαρμογή

Να παραγοντοποιηθούν τα πολυώνυμα:

α) $4x^3-16x^2+3x-12$, **β)** x^3-2-x^2+2x, **γ)** $5x^2+7xy+2y^2$, **δ)** x^2+6x+8.

Απάντηση

α) Οι δύο πρώτοι όροι είναι η μία ομάδα και οι δύο τελευταίοι η άλλη ομάδα.

$$4x^3 - 16x^2 + 3x - 12 = \underbrace{4x^3 - 16x^2}_{1η\ ομάδα} + \underbrace{3x - 12}_{2η\ ομάδα} = \underbrace{4x^2(x-4) + 3(x-4)}_{κοιν.\ παρ.\ x-4} = (x-4)(4x^2+3)$$

β) Έχουμε: $x^3 \underbrace{-2 - x^2}_{αντιμ.\ ιδιοτ.} + 2x = \underbrace{x^3 - x^2}_{1η\ ομάδα} + \underbrace{2x - 2}_{2η\ ομάδα} = x^2(x-1)+2(x-1) = (x-1)(x^2+2)$

γ) Για να δημιουργηθούν ομάδες, πολλές φορές χρειάζεται να γράψουμε έναν όρο ως άθροισμα, έτσι εδώ γράφουμε τον όρο 7xy ως το άθροισμα 5xy+2xy, οπότε έχουμε:

$$5x^2 + \underbrace{7xy}_{5xy+2xy} + 2y^2 = \underbrace{5x^2 + 5xy}_{1η\ ομάδα} + \underbrace{2xy + 2y^2}_{2η\ ομάδα} = 5x(x+y) + 2y(x+y) = (x+y)(5x+2y)$$

δ) Στο τριώνυμο x^2+6x+8 για να προκύψουν ομάδες γράφουμε το 6x ως άθροισμα 2x+4x, οπότε έχουμε:

$$x^2 \underbrace{+6x}_{2x+4x} + 8 = \underbrace{x^2+2x}_{\text{η ομάδα}} + \underbrace{4x+8}_{\text{2η ομάδα}} = x(x+2)+4(x+2) = (x+2)(x+4)$$

Σχόλιο: Πολλά τριώνυμα δευτέρου βαθμού, παραγοντοποιούνται με ομαδοποίηση, γράφοντας κατάλληλα τον πρωτοβάθμιο όρο ως άθροισμα, ώστε να προκύψουν ομάδες με κοινό παράγοντα.

2.3.3 Διαφορά τετραγώνων

Διερεύνηση 1

Να εργαστείτε είτε ατομικά είτε ανά δύο και να συζητήσετε τα αποτελέσματά σας στην τάξη.
Να αποδείξετε, χωρίς να κάνετε τον πολλαπλασιασμό, ότι οι φυσικοί αριθμοί **α** = 2024·2026 και **β** = 2025^2 είναι διαδοχικοί αριθμοί.

Διερεύνηση 2

Βήμα 1ο

Σκέψου δύο διαδοχικούς θετικούς ακέραιους.

Βήμα 2ο

Ύψωσε καθέναν στο τετράγωνο και βρες τη διαφορά του μικρότερου από τον μεγαλύτερο.

Βήμα 3ο

Πρόσθεσε τους δύο διαδοχικούς αριθμούς που σκέφτηκες.

Βήμα 4ο

Εξήγησε γιατί τα βήματα 2 και 3 δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα.

α) Να συμπληρώσετε τον διπλανό πίνακα και να εξηγήσετε γιατί τα βήματα 2 και 3 δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα.
β) Να κάνετε μία εικασία και να την αποδείξετε.
γ) Να σκεφτείτε δύο αριθμούς που διαφέρουν κατά 2 και να επαναλάβετε τα βήματα 2 και 3. Μπορείτε να καταλήξετε σε ένα παρόμοιο συμπέρασμα όπως στο (β); Να κάνετε μία εικασία και να την αποδείξετε.

Βήμα 1		Βήμα 2	Βήμα 3
1	2	$2^2-1^2 = 4-1=3$	1+2=3
2	3		
3			
5			

Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες μάθησης

Η αξιοσημείωτη ταυτότητα $(α+β)(α-β) = α^2-β^2$ που γνωρίζουμε μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$\mathbf{α^2-β^2 = (α+β)(α-β)}$$

Η ταυτότητα αυτή λέγεται **διαφορά τετραγώνων**. Με την ταυτότητα αυτή μπορούμε να μετατρέψουμε σε γινόμενο ένα πολυώνυμο, το οποίο είναι ή μπορούμε να το γράψουμε ως διαφορά δύο τετραγώνων.

Παραδείγματα:

$$x^2-25 = x^2-5^2 = (x+5)(x-5), 36x^2-4 = (6x)^2-2^2 = (6x+2)(6x-2).$$

Μπορείτε να εξοικειωθείτε στην παραγοντοποίηση με διαφορά τετραγώνων ανοίγοντας την εφαρμογή.

Εφαρμογή 1

α) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο $4x^2–36$, **β)** Να λύσετε την εξίσωση $4x^2–36 = 0$.

Απάντηση

α) $4x^2 - 36 = (2x)^2 - 6^2 = (2x + 6)(2x - 6)$

β) Θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα: **«αν α·β = 0 τότε α = 0 ή β = 0 και αντίστροφα».** Δηλαδή αν ένα γινόμενο είναι ίσο με μηδέν, τότε τουλάχιστον ένας παράγοντάς του είναι ίσος με μηδέν και αντίστροφα. Επομένως:

$4x^2–36 = 0$ ή	Παραγοντοποιούμε το πολυώνυμο του 1ου μέλους.
$(2x)^2–6^2 = 0$ ή	
$(2x+6)(2x–6) = 0$ ή	Ένας τουλάχιστον παράγοντας του γινομένου πρέπει να είναι 0.
$(2x+6 = 0$ ή $2x–6 = 0)$ ή	Λύνουμε τις πρωτοβάθμιες εξισώσεις.
$(2x = –6$ ή $2x = 6)$ ή	
$x = –3$ ή $x = 3$	Λύσεις είναι οι αριθμοί –3 και 3.

Εφαρμογή 2

Να αποδειχθεί ότι:

α) Κάθε θετικός ακέραιος αριθμός ν έχει μία από τις μορφές: $ν = 2κ$ (άρτιος) ή $ν = 2κ + 1$ (περιττός) όπου κ ακέραιος αριθμός.

β) Η διαφορά των τετραγώνων δύο περιττών αριθμών είναι πολλαπλάσιο του 4.

Απάντηση

α) Αν διαιρέσουμε έναν θετικό ακέραιο αριθμό ν με τον αριθμό 2, τότε σύμφωνα με την ευκλείδεια διαίρεση έχουμε: $ν = 2κ + υ$, με $0 \leq υ < 2$, όπου κ το πηλίκο και υ το υπόλοιπο της διαίρεσης. Επειδή $υ = 0$ ή $υ = 1$, έχουμε: Αν $υ = 0$, τότε **ν = 2κ (άρτιος)**, ενώ αν $υ = 1$, τότε **ν = 2κ+1 (περιττός)**.

β) Έστω δύο περιττοί αριθμοί $2λ+ 1$ και $2μ + 1$, όπου λ, μ ακέραιοι. Βρίσκουμε τη διαφορά των τετραγώνων τους.

$$\begin{aligned}(2λ +1)^2–(2μ+1)^2 &= [(2λ +1)+(2μ+1)][(2λ+1)–(2μ+1)]\\ &= (2λ +1+2μ+1)(2λ +1–2μ–1)\\ &= (2λ + 2μ + 2)(2λ– 2μ)\\ &= 4(λ + μ + 1)(λ – μ)\end{aligned}$$

Οι αριθμοί $λ+μ+1$ και $λ–μ$ είναι ακέραιοι και επομένως το γινόμενο είναι πολλαπλάσιο του 4.

2.3.4 Ανάπτυγμα τετραγώνου

Διερεύνηση 1

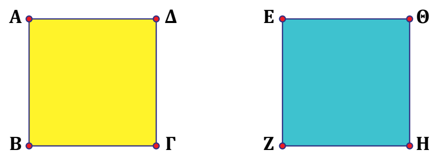
Να εργαστείτε είτε ατομικά είτε ανά δύο και να συζητήσετε τα αποτελέσματά σας στην τάξη.

α) Να δείξετε με παραγοντοποίηση ότι ο αριθμός **x** $=171^2+161^2–2·171·161$ είναι τέλειο τετράγωνο, το οποίο να προσδιορίσετε.

β) Να δείξετε με παραγοντοποίηση ότι ο αριθμός **y** $=999999^2+2·999999+1$ είναι μία δύναμη του 10, την οποία να προσδιορίσετε.

Διερεύνηση 2

Να εργαστείτε είτε ατομικά είτε ανά δύο και να συζητήσετε τα αποτελέσματά σας στην τάξη.
Το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι x^2+4x+4 και του τετραγώνου ΕΖΗΘ είναι $4x^2-16x+16$.



α) Να βρείτε την πλευρά κάθε τετραγώνου,
β) Αν τα τετράγωνα έχουν το ίδιο εμβαδόν, να υπολογίσετε την πλευρά τους και το εμβαδόν τους.

Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες μάθησης

Οι γνωστές ταυτότητες $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ και $(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$ γράφονται και ως εξής:

$$\boldsymbol{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2 \text{ και } \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2 = (\alpha-\beta)^2}$$

Καθεμία από αυτές τις ταυτότητες λέγεται **ανάπτυγμα τετραγώνου**.
Παρατηρούμε ότι με τις ταυτότητες αυτές μπορούμε να μετατρέψουμε σε γινόμενο ένα τριώνυμο, όταν αυτό είναι ανάπτυγμα τετραγώνου. Η παράσταση $(\alpha\pm\beta)^2$ είναι γινόμενο, διότι $(\alpha\pm\beta)^2 = (\alpha\pm\beta)(\alpha\pm\beta)$.

Παραδείγματα:

$x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2\cdot 5\cdot x + 5^2 = (x+5)^2$, $x^2 - 20xy + 100y^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 10y + (10y)^2 = (x-10y)^2$.

Εφαρμογή 1

Να παραγοντοποιήσετε τα πολυώνυμα:
α) $x^2-10x+25$, **β)** $4x^2+12x+9$, **γ)** $9y^2+16-24y$.

Απάντηση

α) $x^2 - 10x + 25 = x^2 - 2\cdot x\cdot 5 + 5^2 = (x-5)^2$. *Εφαρμόσαμε την ταυτότητα* $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2 = (\alpha-\beta)^2$

β) $4x^2 + 12x + 9 = (2x)^2 + 2\cdot 2x\cdot 3 + 3^2 = (2x+3)^2$. *Εφαρμόσαμε την ταυτότητα* $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2$

γ) $9y^2 + 16 - 24y = (3y)^2 - 2\cdot 3y\cdot 4 + 4^2 = (3y-4)^2$. *Εφαρμόσαμε την ταυτότητα* $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2 = (\alpha-\beta)^2$

2.3.5 Τριώνυμο της μορφής $x^2+(\beta+\gamma)x+\beta\gamma$

Το τριώνυμο $x^2+(\beta+\gamma)x+\beta\gamma$ γράφεται διαδοχικά:

$$x^2 + (\beta+\gamma)x + \beta\gamma = \underbrace{x^2 + \beta x}_{\alpha'\text{ ομάδα}} + \underbrace{\gamma x + \beta\gamma}_{\beta'\text{ ομάδα}} = x(x+\beta) + \gamma(x+\beta) = (x+\gamma)(x+\beta)$$

Επομένως:

$$\boldsymbol{x^2+(\beta+\gamma)x+\beta\gamma = (x+\beta)(x+\gamma)}$$

Παράδειγμα:
Για να παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο $x^2+7x+12$ αναζητούμε δύο αριθμούς, οι οποίοι έχουν άθροισμα 7 και γινόμενο 12. Με δοκιμές βρίσκουμε ότι οι αριθμοί είναι ο 3 και ο 4. Γράφοντας πλέον τον 7 ως 3+4 και τον 12 ως 3·4, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα $x^2+(\beta+\gamma)x+\beta\gamma = (x+\beta)(x+\gamma)$, οπότε έχουμε:

$$x^2+7x+12 = x^2+(3+4)x+3\cdot 4 = x^2+3x+4x+3\cdot 4 = x(x+3)+4(x+3) = (x+3)(x+4).$$

Εφαρμογή 1

Να παραγοντοποιηθούν τα τριώνυμα:

α) $x^2+3x-10$, **β)** $2x^2-10x+12$

Απάντηση

α) Για να παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο $x^2+3x-10$, αναζητούμε δύο αριθμούς με άθροισμα 3 και γινόμενο -10. Οι αριθμοί αυτοί, επειδή έχουν γινόμενο αρνητικό, πρέπει να είναι ετερόσημοι. Με δοκιμές βρίσκουμε ότι οι αριθμοί με άθροισμα 3 και γινόμενο -10 είναι ο 5 και ο -2, οπότε έχουμε:

$$x^2+\underbrace{3}_{-2+5}x\underbrace{-10}_{(-2)\cdot 5} = (x-2)(x+5)$$

β) Για να παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο $2x^2-10x+12$, βγάζουμε κοινό παράγοντα το 2 ώστε ο συντελεστής του x^2 να γίνει 1, οπότε έχουμε $2x^2-10x+12 = 2(x^2-5x+6)$. Για την παραγοντοποίηση του x^2-5x+6, αναζητούμε δύο αριθμούς με γινόμενο 6 και άθροισμα -5. Οι αριθμοί αυτοί, επειδή έχουν γινόμενο θετικό, πρέπει να είναι ομόσημοι. Με δοκιμές βρίσκουμε ότι οι αριθμοί είναι ο -2 και ο -3. Άρα:

$$2x^2-10x+12 = 2(x^2-\underbrace{5}_{(-2)+(-3)}x+\overbrace{6}^{(-2)\cdot(-3)}) = 2(x-2)(x-3)$$

Εφαρμογή 2

Να λύσετε την εξίσωση: $x^2+5x+6=0$.

Απάντηση

Για να επιλύσουμε την εξίσωση $x^2+5x+6=0$, πρέπει το α΄ μέλος να γίνει γινόμενο.
Χρησιμοποιούμε γι' αυτό την ταυτότητα: $x^2+(\beta+\gamma)x+\beta\gamma = (x+\beta)(x+\gamma)$ γράφοντας διαδοχικά:

$$x^2+\underbrace{5}_{2+3}x+\underbrace{6}_{2\cdot 3} = 0$$

ή $(x+2)(x+3)=0$ [Ένας τουλάχιστον παράγοντας του γινομένου πρέπει να είναι μηδέν]
ή $(x+2=0$ ή $x+3=0)$ [Λύνουμε κατά τα γνωστά τις πρωτοβάθμιες εξισώσεις]
$x=-2$ ή $x=-3$ [Λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί -2 και -3]

Ερωτήσεις για Αυτοαξιολόγηση

1 **α)** Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο $2x^2-14x$.
β) Να λύσετε την εξίσωση $x^2-7x=0$.

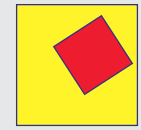
2 Να υπολογίσετε με τον συντομότερο τρόπο τις παραστάσεις:
α $= 1{,}87\cdot 23+1{,}87\cdot 77$, **β** $= 751^2-750^2$, **γ** $= 1001^2-2002+1$.

3 Να παραγοντοποιήσετε την αλγεβρική παράσταση: $(3x-1)^2-81$.

4 Να παραγοντοποιήσετε τα πολυώνυμα:
α) x^3-x^2+2x-2, **β)** $4y^2+4y+1$, **γ)** $2x^2-18$.

5 Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο x^2-5x+6 με ομαδοποίηση, γράφοντας τον όρο 5x ως άθροισμα δύο όρων ώστε να προκύψουν 2 ομάδες με κοινό παράγοντα.

6 Να βρείτε το εμβαδόν της κίτρινης περιοχής αν γνωρίζουμε ότι το άθροισμα και η διαφορά των πλευρών των δύο τετραγώνων είναι 15 cm και 1 cm αντίστοιχα.



7 Να συμπληρώσετε τα □

α) $x^2+7x+10=(x+\square)(x+\square)$ **β)** $x^2+8x+7=(x+\square)(x+\square)$

γ) $x^2-7x-8=(x+\square)(x-\square)$ **δ)** $x^2-7x+10=(x-\square)(x-\square)$.

Ασκήσεις και Προβλήματα

1 Να παραγοντοποιήσετε τα πολυώνυμα:
α) $5x+5$ **β)** $2x+2y$ **γ)** $3xy-y$ **δ)** $-12x^2-4x$.

2 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:
α) $x(\alpha+\beta)-y(\alpha+\beta)$ **β)** $5(x-y)-x+y$.

3 Να παραγοντοποιήσετε τα πολυώνυμα:
α) $2t^3-t^2+10t-5$ **β)** x^2y+xy^2-x-y **γ)** $x^3+21+7x^2+3x$.

4 Να παραγοντοποιήσετε τα πολυώνυμα:
α) $49x^2-121$ **β)** x^3+2x^2-x-2 **γ)** $(x+2)^2-(1-2x)^2$.

5 Να βρεθούν με τη βοήθεια των ταυτοτήτων τα αποτελέσματα:
α) 100^2-1 **β)** 1000^2-999^2 **γ)** 503^2
δ) 55^2-45^2 **ε)** 102^2-98^2 **στ)** 75^2-25^2.

6 Να παραγοντοποιήσετε τα πολυώνυμα:
α) x^2+6x+9 **β)** t^2-4t+4 **γ)** $x^2-4xy+4y^2$
δ) $1-6x+9x^2$ **ε)** $\frac{x^2}{4}-x+1$ **στ)** x^2-y^2-2y-1.

7 Να δείξετε ότι ο αριθμός $x=149^2+149\cdot80+40^2$ είναι τέλειο τετράγωνο.

8 Να δείξετε ότι ο αριθμός $y=100001^2-200002+1$ είναι μία δύναμη του 10.

9 Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα:
α) x^2+6x+8 **β)** x^2-6x+8 **γ)** x^2+x-12 **δ)** x^2-x-2.

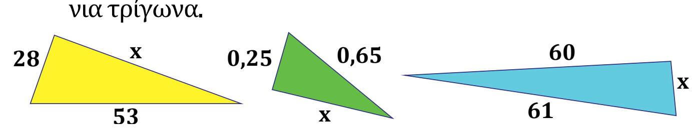
10 Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα:
α) $3x^2-15x+18$ **β)** $4x^2-8x-12$ **γ)** $2x^2+22x+56$.

11 Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $x^2+2x=0$ **β)** $x^2-25x=0$
γ) $x^2+6x+8=0$ **δ)** $x^2-6x+8=0$.

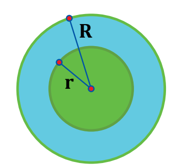
12 Σε καθεμιά από τις επόμενες παραστάσεις να βγάλετε πρώτα κοινό παράγοντα και μετά να μετατρέψετε σε γινόμενο την παράσταση μέσα στην παρένθεση.
α) $\alpha x^2-\alpha y^2$ **β)** $3x^2-12$ **γ)** $2\alpha^2-8$
δ) $5x^2-30x+45$ **ε)** $3x^3+6x^2+3x$.

13 Να συμπληρώσετε τις ισότητες:
α) $\square-9\omega^2=(2+\square)\cdot(2-\square)$ **β)** $196-\square=(\square+x^3)(\square-x^3)$
γ) $4x^2+4xy+\square=(\square+\square)^2$ **δ)** $0{,}25+\square+\square=(\square+x)^2$.

14 Να υπολογίσετε την πλευρά x στα παρακάτω ορθογώνια τρίγωνα.

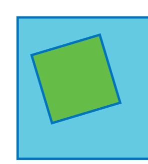


15 **α)** Αν οι κύκλοι του σχήματος έχουν ακτίνες r και R, να δείξετε ότι το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου (το μέρος μεταξύ των δύο κύκλων) είναι $E=\pi(R+r)(R-r)$.



β) Αν οι ακτίνες των κύκλων έχουν άθροισμα 11 cm και ο κυκλικός δακτύλιος έχει εμβαδόν 34,54 cm², να βρείτε τις ακτίνες των δύο κύκλων, (να πάρετε $\pi=3{,}14$).

16 Να βρείτε τις πλευρές των τετραγώνων του σχήματος, αν γνωρίζετε ότι είναι διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί και το εμβαδόν της μπλε περιοχής είναι 21 cm².



17 Να αποδείξετε ότι:
α) Το τετράγωνο ενός περιττού αριθμού είναι περιττός αριθμός.
β) Το άθροισμα δύο περιττών αριθμών είναι άρτιος αριθμός.
γ) Το γινόμενο δύο περιττών αριθμών είναι περιττός αριθμός.
δ) Αν ο πρώτος, από τρεις διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς, είναι περιττός, τότε το άθροισμά τους είναι πολλαπλάσιο του 6.

18 Να απλοποιήσετε το κλάσμα $\frac{809(2024^2-2023^2)}{4046^2-1}$ με τον συντομότερο τρόπο.

19 Δύο ορθογώνια έχουν εμβαδά $E_1=x^2+6x+5$ και $E_2=x^2+4x+4$. Να εξετάσετε αν κάποιο από τα δύο είναι τετράγωνο. Να βρείτε τις περιμέτρους κάθε σχήματος.

20 Να υπολογίσετε και να απλοποιήσετε:

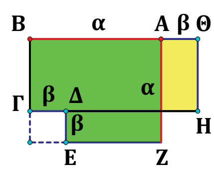
$$A=\left(\frac{89}{79}+\frac{79}{89}\right)^2-\left(\frac{89}{79}+\frac{79}{89}\right)^2$$

21 Ο Αντώνης ισχυρίζεται: «Αν υψώσω έναν φυσικό αριθμό στο τετράγωνο, το αποτέλεσμα είναι πάντα κατά 1 μεγαλύτερο από ό,τι αν πολλαπλασιάσω τους δύο γειτονικούς του αριθμούς. Για παράδειγμα, $5^2 = 25$ και $4 \cdot 6 = 24$».

α) Να ελέγξετε τον ισχυρισμό του Αντώνη για τους αριθμούς: 9, 2, 12 και 100.

β) Να δείξετε ότι ο Αντώνης έχει δίκιο συμβολίζοντας τον φυσικό αριθμό με ν.

22 Αν ΑΒ = ΑΖ = α, ΑΘ = ΔΓ = ΔΕ = β, τότε:



α) Να συγκρίνετε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΒΓΗΘ με το εμβαδόν του εξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ.

δ) Να διατυπώσετε το συμπέρασμά σας με μία αλγεβρική ισότητα.

23 Να δείξετε ότι ο αριθμός $2040^2 – 2025^2$ είναι πολλαπλάσιο του 15.

24 **α)** Να επαληθεύσετε τις ισότητες:

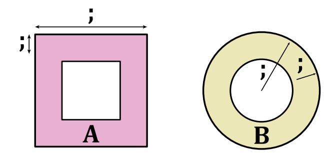
$$5^2–4^2 = 5+4$$
$$8^2–7^2 = 8+7$$
$$12^2–11^2 = 12+11$$
$$15^2–14^2 = 15+14$$

β) Να διατυπώσετε μία εικασία.

γ) Να αποδείξετε την εικασία.

25 **Ανεύρεση δεδομένων**

α) Στα σχήματα να βρείτε τα γράμματα ή τους αριθμούς που λείπουν. Δίνονται οι ακόλουθες πληροφορίες.



Εμβαδόν της τετραγωνικής ταινίας:

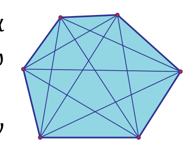
$$A = x^2 - (x-2)^2$$

Εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου:

$$B = \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \pi\left(\frac{x}{2}-1\right)^2$$

β) Να δείξετε ότι $B = \frac{\pi}{4}A$. Ποιο εμβαδόν είναι μεγαλύτερο; Το Β ή το Α;

26 Το πλήθος των διαγωνίων δ ενός πολυγώνου με ν πλευρές δίνεται από τον τύπο $\delta = \frac{\nu(\nu-3)}{2}$.



α) Να επαληθεύσετε τον τύπο για το πλήθος των διαγωνίων του διπλανού εξαγώνου.

β) Να υπολογίσετε το πλήθος των διαγωνίων ενός δεκαγώνου.

γ) Να βρείτε ποιο πολύγωνο έχει 20 διαγωνίους.

27 Δίνονται οι φυσικοί αριθμοί $x=998 \cdot 999+998$ και $y = 998 \cdot 999+999$. Να δείξετε ότι:

α) Είναι διαδοχικοί.

β) Ο x είναι πολλαπλάσιο του 998 και ο y πολλαπλάσιο του 999.

γ) Να βρείτε 3 διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς που ο πρώτος να διαιρείται με το 2024, ο δεύτερος με το 2025 και ο τρίτος με το 2026.

2.4 Ρητές παραστάσεις

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθήτριες και οι μαθητές να μπορούν:

- Να απλοποιούν ρητές παραστάσεις.
- Να υπολογίζουν το αποτέλεσμα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης απλών ρητών παραστάσεων.
- Να προσδιορίζουν το ΕΚΠ μονωνύμων και απλών πολυωνύμων μίας μεταβλητής και να το χρησιμοποιούν για να υπολογίζουν το αποτέλεσμα πρόσθεσης και αφαίρεσης απλών ρητών παραστάσεων.

Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες μάθησης

Όταν ένα αυτοκίνητο διανύει σε χρόνο t διάστημα s, τότε η μέση ταχύτητά του v είναι $v = \frac{s}{t}$. Μία αλγεβρική παράσταση, όπως η $\frac{s}{t}$, που περιέχει μεταβλητή στον παρονομαστή λέγεται ρητή ή κλασματική παράσταση. Για παράδειγμα, ρητές παραστάσεις είναι:

$$\frac{1}{x},\ \frac{x^2}{2x+1},\ \frac{x^3-2x}{2x^2},\ \frac{15}{x-3}$$

Γενικά:

Ρητή αλγεβρική παράσταση ή απλώς **ρητή παράσταση** είναι ένα κλάσμα, του οποίου ο αριθμητής και ο παρονομαστής είναι πολυώνυμα. Οι ρητές παραστάσεις έχουν νόημα για τις τιμές της μεταβλητής που δεν μηδενίζουν τον παρονομαστή.

Για παράδειγμα, για τη ρητή παράσταση $\frac{1}{x}$, πρέπει $x \neq 0$. Όμοια, για την παράσταση $\frac{x^2}{x-1}$ πρέπει $x-1 \neq 0$ ή $x \neq 1$.

2.4.1 Απλοποίηση ρητών παραστάσεων

Διερεύνηση

Να συνεργαστείτε για να απαντήσετε στη δραστηριότητα και να συζητήσετε τα αποτελέσματά σας στην τάξη.

α) Να απλοποιήσετε τα κλάσματα: $\frac{18}{33}$, $\frac{14}{18}$, $\frac{88}{140}$.

β) Να απλοποιήσετε τις ρητές παραστάσεις: $\frac{5}{x^2}$, $\frac{2x^2y}{xy^2}$, $\frac{x^2-4}{x+2}$

Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες μάθησης

Γνωρίζουμε ότι ένα κλάσμα είναι σε απλοποιημένη μορφή όταν ο αριθμητής και ο παρονομαστής δεν έχουν κοινούς παράγοντες. Για παράδειγμα, το κλάσμα $\frac{14}{15}$ είναι σε απλοποιημένη μορφή αφού οι όροι του δεν έχουν κοινό παράγοντα. Αντίθετα, το κλάσμα $\frac{32}{18}$ έχει όρους που έχουν κοινό παράγοντα, οπότε απλοποιείται ως εξής: $\frac{32}{18} = \frac{2^5}{2 \cdot 3^2} = \frac{\cancel{2} \cdot 2^4}{\cancel{2} \cdot 3^2} = \frac{16}{9}$.

Για να απλοποιήσουμε ένα κλάσμα με αριθμούς αναλύουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και «διαγράφουμε» τους κοινούς παράγοντές τους. Το ίδιο κάνουμε και σε μια ρητή παράσταση.

Παραδείγματα:

α) Η ρητή παράσταση $\frac{x}{y}$ δεν απλοποιείται, διότι οι όροι x και y δεν έχουν κοινό παράγοντα.

β) Η ρητή παράσταση $\frac{3xy^2}{6xy}$ απλοποιείται διότι οι όροι του κλάσματος είναι γινόμενα και έχουν κοινό παράγοντα το 3xy. Έτσι: $\frac{3xy^2}{6xy} = \frac{\cancel{3}\cancel{x}\cancel{y}y}{2 \cdot \cancel{3}\cancel{x}\cancel{y}} = \frac{y}{2}$.

Εφαρμογή

α) Να απλοποιηθούν οι ρητές παραστάσεις: i) $\frac{3(x+y)^2}{x^2-y^2}$ ii) $\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}$

β) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση: $\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$;

Απάντηση

α) i) Η ρητή παράσταση $\frac{3(x+y)^2}{x^2-y^2}$ έχει παρονομαστή που δεν είναι γινόμενο. Ωστόσο, αν κάνουμε παραγοντοποίηση στον παρονομαστή προκύπτει κοινός παράγοντας το (x+y), οπότε το κλάσμα απλοποιείται. Έτσι έχουμε:

$$\frac{3(x+y)^2}{x^2-y^2} = \frac{3(x+y)(x+y)}{(x-y)(x+y)} = \frac{3(x+y)}{x-y}$$

ii) Η ρητή παράσταση $\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}$ έχει όρους πολυώνυμα. Αν τα παραγοντοποιήσουμε, προκύπτει κοινός παράγοντας το (x–2), που διαγράφεται. Έτσι έχουμε:

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2-4} = \frac{x^2-2x-3x+6}{x^2-2^2} = \frac{x(x-2)-3(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x-3}{x+2}.$$

β)) Η παράσταση $\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ ορίζεται όταν $x^2-3x+2 \neq 0$.

Για να βρούμε τις τιμές που μηδενίζουν το τριώνυμο x^2-3x+2. Χρειάζεται να λύσουμε την εξίσωση $x^2-3x+2 = 0$. Κάνουμε για αυτό παραγοντοποίηση γράφοντας το 3x σε δύο προσθετέους, οπότε: $x^2 - 3x + 2 = x^2 - x - 2x + 2 = (x^2 - x) - (2x - 2) = x(x - 1) - 2(x - 1) = (x - 1)(x - 2)$.

Άρα, $x^2-3x+2 = 0$ ή $(x-1)(x-2) = 0$ ή ($x-1 = 0$ ή $x-2 = 0$) ή ($x = 1$ ή $x = 2$).

Επομένως $x^2-3x+2 \neq 0$ όταν: $x \neq 1$ και $x \neq 2$.

Σημείωση:

Οι απλοποιήσεις γίνονται με την προϋπόθεση ότι έχουν νόημα οι παραστάσεις.

Για να εξασκηθείτε στην απλοποίηση ρητών αλγεβρικών παραστάσεων, να ανοίξετε την ψηφιακή εφαρμογή.

2.4.2 Πολλαπλασιασμός και διαίρεση ρητών παραστάσεων

Διερεύνηση

Να συνεργαστείτε για να απαντήσετε στην επόμενη δραστηριότητα και να συζητήσετε τα αποτελέσματά σας στην τάξη.

α) Να κάνετε τις πράξεις στα κλάσματα: $\frac{-2}{5} \cdot \frac{1}{4}$, $\frac{6}{7} : \frac{18}{14}$

β) Με ανάλογο τρόπο να κάνετε τις πράξεις στις ρητές παραστάσεις:

$$3x \cdot \frac{y^2}{6x}, \frac{2x^2}{x+y} \cdot \frac{(x+y)^2}{4x} \text{ και } \frac{x+1}{2x^2} : \frac{(x+1)^2}{4x^3}.$$

Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες μάθησης

Πολλαπλασιασμός

Γνωρίζουμε ότι για τον πολλαπλασιασμό ρητών αριθμών ισχύουν οι κανόνες:

$$\alpha \cdot \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha\beta}{\gamma} \text{ και } \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$$

Οι ίδιοι κανόνες ισχύουν και για τον πολλαπλασιασμό ρητών παραστάσεων.

Παράδειγμα: $4x \cdot \frac{y}{2x^2} = \frac{4xy}{2x^2} = \frac{2y}{x}$, $\quad \frac{x-4}{2x-2} \cdot \frac{x-1}{x+2} = \frac{(x-4)(x-1)}{2(x-1)(x+2)} = \frac{x-4}{2(x+2)} = \frac{x-4}{2x+4}$.

Μετά τον πολλαπλασιασμό των ρητών παραστάσεων κάνουμε τις απλοποιήσεις, όπου χρειάζεται.

Διαίρεση

Γνωρίζουμε ότι για τη διαίρεση δύο ρητών αριθμών ισχύουν οι ιδιότητες:

$$\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}.$$

Οι ίδιες ιδιότητες ισχύουν και για τη διαίρεση ρητών παραστάσεων.

Παράδειγμα:

$$\frac{4x^2}{5y} : \frac{x}{10y} = \frac{4x^2}{5y} \cdot \frac{10y}{x} = \frac{4x^2 \cdot 10y}{5yx} = \frac{40x^2y}{5xy} = 8x.$$

Μετά τη διαίρεση των ρητών παραστάσεων κάνουμε τις απλοποιήσεις, όπου χρειάζεται.

Εφαρμογή

Να κάνετε τις πράξεις:

α) $-2x \cdot \frac{3y}{x^2}$, **β)** $\frac{x^2-4}{2x-2} \cdot \frac{x-1}{x+2}$, **γ)** $\frac{x-3}{3x^2} : \frac{1}{x-2}$, **δ)** $\dfrac{\frac{x}{5y}}{\frac{x^2}{10y^2}}$,

Απάντηση

α) $-2x \cdot \frac{3y}{x^2} = \frac{-2x \cdot 3y}{x^2} = \frac{-6y}{x}$, **β)** $\frac{x^2-4}{2x-2} \cdot \frac{x-1}{x+2} = \frac{(x^2-4)(x-1)}{(2x-2)(x+2)} = \frac{(x-2)(x+2)(x-1)}{2\,(x-1)(x+2)} = \frac{x-2}{2}$,

γ) $\frac{x-3}{3x^2} : \frac{1}{x-2} = \frac{x-3}{3x^2} \cdot \frac{x-2}{1} = \frac{(x-3)(x-2)}{3x^2} = \frac{x^2-5x+6}{3x^2}$, **δ)** $\dfrac{\frac{x}{5y}}{\frac{x^2}{10y^2}} = \frac{x}{5y} : \frac{x^2}{10y^2} = \frac{x \cdot 10y^2}{5yx^2} = \frac{2y}{x}$.

Ερωτήσεις για Αυτοαξιολόγηση

Να κάνετε τις πράξεις και να απλοποιήσετε όπου είναι δυνατόν τις παραστάσεις.

α) $\frac{6x^3y}{2xy^2} \cdot \frac{4x^4y^3}{3y}$, **β)** $\frac{2x^2-8}{x^2-4x+4} \cdot \frac{3x-6}{6x+6}$, **γ)** $\frac{13x^5y^2}{8xy} : \frac{26x^3y}{6xy^2}$, **δ)** $\frac{5}{x+1} : \frac{x+2}{x^2\ 1}$, **ε)** $\dfrac{\frac{x^2+y^2}{x+y}}{\frac{x^2-y^2}{x-y}}$.

Ασκήσεις και Προβλήματα

1 Να βρείτε τις τιμές των μεταβλητών για τις οποίες δεν ορίζονται οι ρητές παραστάσεις: **α)** $\frac{3}{2x}$, **β)** $\frac{x}{x-1}$, **γ)** $\frac{2}{2x-3}$, **δ)** $\frac{3x}{x^2-16}$, **ε)** $\frac{2}{x^2+1}$.

2 Να απλοποιήσετε την κλασματική αλγεβρική παράσταση:

$$A = \frac{4x^3-25x}{4x^3+20x^2+25x}.$$

Για ποιες τιμές του x ορίζεται;

3 Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\frac{5x^2}{2xy^2}\cdot\frac{6xy^3}{10y}$, **β)** $\frac{7\alpha^4\beta^3}{4\beta}:\frac{2\alpha\beta^2}{8\alpha^3\beta}$, **γ)** $\frac{-3x^2+3x}{x^2+4x-5}\cdot\frac{x^2-25}{3x}$

δ) $\frac{x^2-2x+1}{3x^2}:\frac{2x^2-2x}{6x^3}$, **ε)** $\dfrac{\dfrac{x^2-y^2}{2x+2y}}{\dfrac{x^2+y^2}{3x-3y}}$.

4 Να περιγράψετε και να διορθώσετε το λάθος στην απλοποίηση της ρητής παράστασης:

α) $\frac{2x^3+1}{2x^3+3} = \frac{1}{3}$, **β)** $\frac{x^2+\cancel{8}^{2}x+\cancel{9}^{3}}{x^2+\cancel{4}^{1}x+\cancel{3}^{1}} = \frac{x^2+2x+3}{x^2+x+1}$.

5 **[Κριτική σκέψη]** Να βρείτε το πολυώνυμο που λείπει για να είναι σωστή η πράξη.

α) $\frac{x+1}{x-6}:\frac{x^2-1}{\dots\dots}=1$, **β)** $\frac{x^2+1}{3x-6}:\frac{\dots\dots}{x^2-4}=\frac{x+2}{15}$.

2.4.3 Πρόσθεση και αφαίρεση ρητών παραστάσεων

Διερεύνηση

Να συνεργαστείτε για να απαντήσετε στην επόμενη δραστηριότητα και να συζητήσετε τα αποτελέσματά σας στην τάξη.

α) Να κάνετε τις πράξεις:

i) $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}$, **ii)** $\frac{2}{7}-\frac{4}{7}$, **iii)** $\frac{5}{12}+\frac{4}{15}$, **iv)** $\frac{11}{14}-\frac{9}{35}$.

β) Με τον ίδιο τρόπο να κάνετε τις πράξεις:

i) $\frac{x}{x-1}+\frac{4}{x-1}$, **ii)** $\frac{5}{x}-\frac{4}{x}$, **iii)** $\frac{5}{x}+\frac{4}{3x}$, **iv)** $\frac{x}{x+1}-\frac{2}{x-1}$.

γ) Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τους αριθμούς 18, 24, 60 και μετά να βρείτε το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιό τους (ΕΚΠ).

δ) Μπορείτε με την ίδια διαδικασία να βρείτε το ΕΚΠ των μονωνύμων $2x^2y$, $8x^3y^2$, $12x$;

Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες μάθησης

Για την πρόσθεση και την αφαίρεση ομώνυμων κλασμάτων χρησιμοποιούμε τους κανόνες:

$$\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\alpha+\beta}{\gamma} \text{ και } \frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\alpha-\beta}{\gamma}$$

Με τον ίδιο τρόπο εργαζόμαστε για την πρόσθεση και αφαίρεση ομώνυμων ρητών παραστάσεων.

Παράδειγμα:

$$\frac{5}{x+1}+\frac{2x}{x+1}-\frac{3}{x+1}=\frac{5+2x-3}{x+1}=\frac{2x+2}{x+1}=\frac{2(x+1)}{x+1}=2.$$

Για την πρόσθεση και την αφαίρεση ετερώνυμων κλασμάτων, τα μετατρέπουμε σε ομώνυμα με τη βοήθεια του ΕΚΠ των παρονομαστών.

Όπως ξέρουμε, για να βρούμε το ΕΚΠ αριθμών, τους αναλύουμε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και μετά σχηματίζουμε το γινόμενο των κοινών και μη κοινών παραγόντων με εκθέτη κάθε παράγοντα τον μεγαλύτερο από τους εκθέτες του.

Παράδειγμα:
Για να βρούμε το ΕΚΠ (12, 50, 75) αναλύουμε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τους αριθμούς 12, 50, 75.
Επειδή: $12 = 2^2 \cdot 3$ και $50 = 2 \cdot 5^2$, $75 = 3 \cdot 5^2$ παίρνουμε ΕΚΠ $(12, 50, 75) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 300$.
Ανάλογα εργαζόμαστε και για την εύρεση του ΕΚΠ πολυωνύμων, το οποίο ορίζεται ως εξής:

Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ) δύο ή περισσότερων πολυωνύμων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο παραγόντων ονομάζεται το γινόμενο **όλων των παραγόντων τους, κοινών και μη κοινών**, με εκθέτη κάθε παράγοντα τον μεγαλύτερο από τους εκθέτες του.

Παραδείγματα:
ΕΚΠ $(3xy^2, 8x^2y, 6xy) = 24x^2y^2$, ΕΚΠ $[(x-y)(x+y), 2(x+y)^2, (x-y)] = 2(x-y)(x+y)^2$.

Να ανοίξετε τον σύνδεσμο και να απαντήσετε στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής για την εύρεση Ελάχιστου Κοινού Πολλαπλάσιου σε μονώνυμα και πολυώνυμα.

Εφαρμογή

α) Να βρείτε το ΕΚΠ $(x^2-1, 4(x^2+2x+1), 2x-2)$.

β) Να υπολογίσετε την διαφορά $\frac{x}{2x-2} - \frac{3}{x^2-1}$.

Απάντηση

α) Για να βρούμε το ΕΚΠ $(x^2-1, 4(x^2+2x+1), 2x-2)$ πρέπει πρώτα να παραγοντοποιήσουμε τα πολυώνυμα.
Έχουμε: $x^2-1 = (x-1)(x+1)$, $4(x^2+2x+1) = 4(x+1)^2$, $2x-2 = 2(x-1)$.
Συνεπώς: ΕΚΠ $[x^2-1, 4(x^2+2x+1), 2x-2] =$ ΕΚΠ $[(x-1)(x+1), 4(x+1)^2, 2(x-1)] = 4(x-1)(x+1)^2$.

β) Με βάση τα παραπάνω:

$\frac{x}{2x-2} - \frac{3}{x^2-1} =$	[Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές]
$\frac{x}{2(x-1)} - \frac{3}{(x-1)(x+1)} =$	[Βρίσκουμε το ΕΚΠ των παρονομαστών που είναι το $2(x-1)(x+1)$]
$\frac{x}{2(x-1)} \cdot \frac{x+1}{x+1} - \frac{3}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{2}{2} =$	[Κάνουμε ομώνυμα. Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή: το πρώτο κλάσμα με x+1 και το δεύτερο με 2]
$\frac{x(x+1)}{2(x-1)(x+1)} - \frac{3 \cdot 2}{2(x-1)(x+1)} =$	[Κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς]
$\frac{x(x+1)-6}{2(x-1)(x+1)} =$	[Πράξεις σε αριθμητή–παρονομαστή]
$\frac{x^2+x-6}{2(x^2-1)} =$	[Αποτέλεσμα]

Ερωτήσεις για Αυτοαξιολόγηση

1 Να βρείτε το ΕΚΠ των πολυωνύμων: $4x^2-16$ και $6x^2-24x+24$.

2 Να κάνετε τις πράξεις: $\frac{2}{x}+\frac{3}{2x^2}-\frac{4}{3x^3}$.

3 Να βρείτε τη διαφορά: $\frac{7}{9x^2}-\frac{x}{3x^2+3x}$.

4 Να βρείτε το λάθος και το διορθώσετε: $\frac{y}{y-1}+\frac{7}{y+1}=\frac{y+7}{(y-1)(y+1)}=\frac{y+7}{y^2-1}$.

5 Να κάνετε τις πράξεις και να βρείτε μία ρητή παράσταση: $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}$.

Ασκήσεις και Προβλήματα

1 Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\frac{x}{x-1}-\frac{1}{x-1}$, **β)** $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+2$, **γ)** $\frac{3}{x^2y}+\frac{2}{xy^2}-\frac{x+y}{x^2y^2}$

δ) $\frac{3}{x}-\frac{2}{x+1}$, **ε)** $\frac{3x}{x^3-x}-\frac{2}{3(x+1)}$,

στ) $\frac{x-2}{x}-\frac{4}{x^2-2x}+\frac{8}{x-2}$

2 Να γράψετε δύο ρητές παραστάσεις που να έχουν:
α) παρονομαστή $x+3$ και άθροισμα 1,
β) παρονομαστή $x-3$ και άθροισμα 0.

3 Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$
Να χρησιμοποιήσετε την ταυτότητα για να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

α) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}$,

β) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{99\cdot 100}$.

4 Να βρείτε δύο ρητές παραστάσεις που να έχουν άθροισμα x^2+3.

5 **α)** Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του ορθογωνίου ΑΒΓΔ με διαστάσεις $ΑΒ=\frac{x-2}{x-1}$ και $ΒΓ=\frac{x}{x-1}$ είναι ανεξάρτητη του x.

β) Αν $\frac{ΑΒ}{ΑΔ}=\frac{1}{3}$ να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου, την περίμετρο και το εμβαδόν του.

6 Να εκτελέσετε τις πράξεις και να βρείτε μία ρητή παράσταση: $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{y}}}$

7 Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\frac{1}{ν}=\frac{1}{ν+1}+\frac{1}{ν(ν+1)}$. Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη ταυτότητα, να βρείτε δύο κλασματικές μονάδες που να έχουν άθροισμα: α) $\frac{1}{2}$, β) $\frac{1}{3}$, γ) $\frac{1}{10}$. Σε κάθε περίπτωση, να κάνετε επαλήθευση.

Να ανοίξετε την ψηφιακή εφαρμογή για να πληροφορηθείτε για τις Πυθαγόρειες τριάδες και να εκπονήσετε σχετική εργασία.

2.5 Ανακεφαλαίωση και διεύρυνση της θεματικής ενότητας

1 Μονώνυμα – Πολυώνυμα

- **Αλγεβρική παράσταση** λέγεται μια έκφραση που περιέχει πράξεις μεταξύ αριθμών και μεταβλητών. Για παράδειγμα: $2x^2-3y+1$.
- **Μονώνυμο** λέγεται μια αλγεβρική παράσταση που περιέχει μόνο πολλαπλασιασμούς μεταξύ αριθμών και μεταβλητών. Π.χ. $-2xy^2$ (συντελεστής -2, κύριο μέρος xy^2, 1ου βαθμού ως προς x, 2ου ως προς y και 3ου ως προς x και y).
- **Όμοια** λέγονται τα μονώνυμα που έχουν ίδιο κύριο μέρος, π.χ.: $-0{,}7xy^2$ και $5xy^2$.
  Τα όμοια μονώνυμα μπορούν να προστεθούν (αφαιρεθούν) με βάση την επιμεριστική ιδιότητα (**αναγωγή όμοιων όρων**), π.χ.: $3x^2+2x^2-x^2 = (3+2-1)x^2 = 4x^2$.

  Ο πολλαπλασιασμός μονωνύμων έχει ως αποτέλεσμα πάντα μονώνυμο, π.χ. $(-2x3y)(-5xy^2) = 10x^4y^3$, ενώ η διαίρεση όχι πάντα, π.χ. $(-2x^3y):(-5xy^2) = \frac{2}{5}\frac{x^2}{y}$.
- **Πολυώνυμο** ονομάζεται ένα άθροισμα από μονώνυμα τα οποία δεν είναι όμοια, π.χ. $3x^3-2x^2+11$. Τα μονώνυμα $3x^3$, $-2x^2$ και 11 λέγονται **όροι** του πολυωνύμου. Ένα πολυώνυμο με δύο όρους λέγεται **διώνυμο** (x^2+5) και με τρεις όρους **τριώνυμο** (x^2-2x+7).
- **Βαθμός** του πολυώνυμου λέγεται ο μεγαλύτερος από τους βαθμούς των όρων του, για παράδειγμα, το $3x^3-2x^2+11$ είναι 3ου βαθμού. Ένα πολυώνυμο που είναι γραμμένο κατά τις φθίνουσες δυνάμεις των όρων του λέμε ότι είναι γραμμένο στην **κανονική** μορφή. Για παράδειγμα, το $3x^3-2x^2+11-x^4$ δεν είναι γραμμένο στην κανονική του μορφή. Η κανονική του μορφή είναι $-x^4+3x^3-2x^2+11$.
- **Πρόσθεση και αφαίρεση πολυωνύμων** γίνεται με αναγωγή όμοιων όρων. Για παράδειγμα:
  $(-x^4+3x^3-2x^2+11)-(x^3-2x-1) = -x^4+3x^3-2x^2+11-x^3+2x+1=-x^4+2x^3-2x^2+2x+1$.
- **Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων** γίνεται με την επιμεριστική ιδιότητα. Για παράδειγμα:
  $(2x+3)(x^2-3x)=2x^3-6x^2+3x^2-9x=2x^3-3x^2-9x$ (για να γραφεί στην κανονική μορφή κάνουμε αναγωγές όμοιων όρων).

2 Ταυτότητες

- **Ταυτότητα** λέγεται μία ισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών. Για παράδειγμα, $3x(x+2)=3x^2+6x$.
  Αξιοσημείωτες ταυτότητες:

$$(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2, \quad (\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 -2\alpha\beta+\beta^2, \quad (\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = \alpha^2-\beta^2.$$

3 Παραγοντοποίηση

Πολλές φορές χρειάζεται ένα πολυώνυμο να είναι γραμμένο ως γινόμενο παραγόντων (επίλυση εξισώσεων, απλοποιήσεις, κ.ά.). Οι πιο χαρακτηριστικές περιπτώσεις παραγοντοποίησης είναι:
- **Κοινός παράγοντας** (με επιμεριστική ιδιότητα): $\alpha x+\alpha y-\alpha z = \alpha(x+y-z)$.
- **Ομαδοποίηση** (κοινός παράγοντας σε ομάδες όρων): $\alpha\gamma+\beta\gamma+\alpha\delta+\beta\delta = \gamma(\alpha+\beta) +\delta(\alpha+\beta) = (\alpha+\beta)(\gamma+\delta)$.
- **Διαφορά τετραγώνων:** $\alpha^2-\beta^2 = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$.
- **Ανάπτυγμα τετραγώνου:** $(\alpha\pm\beta)^2 = \alpha^2\pm2\alpha\beta+\beta^2$.

4 Ρητές παραστάσεις

Ρητή παράσταση λέγεται ένα κλάσμα που έχει όρους πολυώνυμα. Παράδειγμα: $\frac{x^3-4x}{x+4}$.

Οι πράξεις στις ρητές παραστάσεις ακολουθούν τους ίδιους κανόνες με τις πράξεις κλασμάτων.
Στην πρόσθεση ρητών παραστάσεων, πολλές φορές είναι απαραίτητο να κάνουμε τα κλάσματα ομώνυμα. Απαιτείται τότε να βρούμε το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ) των παρονομαστών που είναι πολυώνυμα. Για να βρούμε το ΕΚΠ δύο ή περισσότερων πολυωνύμων, τα αναλύουμε πρώτα σε γινόμενο

πρώτων παραγόντων και σχηματίζουμε το γινόμενο όλων των παραγόντων τους, κοινών και μη κοινών, με εκθέτη κάθε παράγοντα τον μεγαλύτερο από τους εκθέτες του. Παράδειγμα:

$$\text{ΕΚΠ }(x^2-1,\ 3(x-1)^2,\ x^2+2x+1) = \text{ΕΚΠ }[(x-1)(x+1),\ 3(x-1)^2,\ (x+1)^2] = 3(x-1)^2(x+1)^2.$$

Ερωτήσεις για συζήτηση και αναστοχασμό

1 Η κλασματική αλγεβρική παράσταση $\frac{x^3-36x}{x(x+6)}$ με x $x \neq -6, x \neq 0$ είναι ισοδύναμη με την:

Α. $\frac{1}{x+6}$ **Β.** $x-6$ **Γ.** $\frac{1}{x}-\frac{1}{6}$ **Δ.** x^2-36

2 Ο βαθμός του πολυωνύμου $3α^3+2α^2-8α$ είναι:

Α. 1 **Β.** 2 **Γ.** 3 **Δ.** 8

3 Η αλγεβρική παράσταση $-3(2x-6)$ ισούται με:

Α. $-3x+18$ **Β.** $-8x-18$ **Γ.** $-6x+18$ **Δ.** $-3(-4x)$

4 Το γινόμενο $(4x-5)(4x+5)$ ισούται με:

Α. $4x^2-25$ **Β.** $16x^2-5$ **Γ.** $16x^2-25$ **Δ.** $16x^2+25$

5 Η αλγεβρική παράσταση $16x^2-24x+9$ ισούται με:

Α. $4x^2-3^2$ **Β.** $(4x-3)(4x+3)$ **Γ.** $(8x-3)^2$ **Δ.** $(4x-3)^2$

6 Η αλγεβρική παράσταση $(x-2)(3x-1)-(x-2)^2$ ισούται με:

Α. $(x-2)(3x-2)$ **Β.** $(x-2)(2x-3)$ **Γ.** $(x-2)^2(3x-2)$ **Δ.** $(x-2)(2x+1)$

7 Αν $x-y = y-z = 2$, τότε η ρητή αλγεβρική παράσταση $\frac{(x-y)^2+(y-z)^2}{(x-z)^2}$ είναι ίση με:

Α. $\frac{1}{4}$ **Β.** $\frac{1}{2}$ **Γ.** 2 **Δ.** 4

8 Αν $x+\frac{1}{x} = 3$, τότε η ρητή αλγεβρική παράσταση $x^2+\frac{1}{x^2}$ είναι ίση με:

Α. 9 **Β.** 3 **Γ.** 1 **Δ.** 7

9 Αν $x^{10} = 5$ και $\frac{x^9}{y} = 5555$, τότε η ρητή αλγεβρική παράσταση $\frac{1}{xy}$ είναι ίση με:

Α. 5 **Β.** 1111 **Γ.** 2525 **Δ.** 5555

10 Αν $5x+3y = 3$, τότε η παράσταση $32^x \cdot 8^y$ είναι ίση με:

Α. 8 **Β.** 32 **Γ.** 16 **Δ.** 4

Επαναληπτικά έργα και προεκτάσεις

1 **Βρίσκουμε έναν συνδετικό κρίκο στα παρακάτω θέματα που έχουμε μάθει.**
Στην πρώτη στήλη του πίνακα αναφέρονται μερικά από τα θέματα που έχουμε μελετήσει. Στη δεύτερη στήλη υπάρχει ένα παράδειγμα του θέματος.

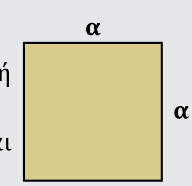
α) Να παρατηρήσετε προσεκτικά όλα τα θέματα και τα παραδείγματα. Μεταξύ τους υπάρχει μία μαθηματική έννοια που τα συνδέει. Ένας συνδετικός κρίκος. Μπορείτε να ανακαλύψετε ποιος είναι;

β) Να γράψετε για κάθε θέμα ένα δικό σας παράδειγμα.

Θέμα που μάθαμε	**Παράδειγμα**
Πολλαπλασιασμός μονώνυμου με πολυώνυμο	$2x^2(x^3+1) = 2x^5+2x^2$
Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων	$\underbrace{(x+1)(x^2+2x-4)}_{\text{επιμεριστική ιδιότητα}} = x^3+2x^2-4x+x^2+2x-4 =$ $= x^3+\underbrace{2x^2+x^2-4x+2x}_{\text{αναγωγή όμοιων}}-4 = x^3+3x^2-2x-4$
Πρόσθεση πολυωνύμων Αναγωγή όμοιων όρων	$(2x^2+7x-4)+(-3x^2-4x+9) =$ $2x^2+7x-4-3x^2-4x+9 =$ $\underbrace{2x^2-3x^2}_{\text{αναγ. όμοιων όρων}} + \underbrace{7x-4}_{\text{αναγ. όμοιων όρων}} -4+9 =$ $-x^2+3x+5$
Παραγοντοποίηση πολυωνύμων	$2x^2-4x = 2x(x-4)$ $αx+βx-αy-βy = x(α+β)-y(α+β) = (α+β)(x-y)$
Επίλυση εξισώσεων	$4x^2-4x = 0$ $4x(x-1) = 0$ $x = 0$ ή $x = 1$
Συντόμευση πράξεων	$9{,}3 \cdot 2{,}78+9{,}3 \cdot 7{,}22 = 9{,}3(2{,}78+7{,}22) = 9{,}3 \cdot 10 = 93$

2 **Φυσιολογία**: Κατά τη διάρκεια ενός αναπνευστικού κύκλου πέντε δευτερολέπτων, ο όγκος του αέρα σε λίτρα στους ανθρώπινους πνεύμονες μπορεί να περιγραφεί με το πολυώνυμο $V = 0{,}179t + 0{,}1522t^2 - 0{,}0374t^3$, όπου t είναι ο χρόνος σε δευτερόλεπτα. Να βρείτε τον όγκο του αέρα στους πνεύμονες στο 3ο δευτερόλεπτο του κύκλου.

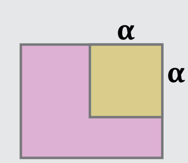
3 Δίνεται τετράγωνο με μήκος πλευράς α.



α) Το τετράγωνο αυξάνεται κατά 2 cm και στις δύο πλευρές. Να γράψετε μία αλγεβρική παράσταση για το νέο εμβαδόν.

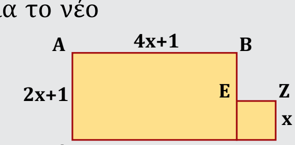
β) Πώς μεταβλήθηκαν τα μήκη των πλευρών του τετραγώνου αν το νέο εμβαδόν είναι $Ε = α^2+8α+15$;

γ) Η μία πλευρά του τετραγώνου μεγαλώνει κατά 7 εκατοστά και η άλλη πλευρά μικραίνει κατά 3 εκατοστά. Να γράψετε μία αλγεβρική παράσταση για το εμβαδόν του νέου σχήματος.

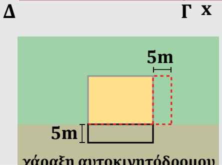


δ) Δίνεται η αλγεβρική παράσταση $(α-4)(α+4)$. Να απεικονίσετε την αλγεβρική παράσταση γεωμετρικά και να εξετάσετε ποιες τιμές μπορεί να πάρει.

ε) Η μία πλευρά του τετραγώνου διπλασιάζεται, η άλλη πλευρά μεγαλώνει κατά το ήμισυ του μήκους της πλευράς α. Να δώσετε την απλούστερη δυνατή έκφραση για το νέο εμβαδόν.



4 Στο διπλανό σχήμα, η επιφάνεια ΑΒΕΖΗΓΔ αποτελείται από ορθογώνιο διαστάσεων ΑΒ=4x+1 και ΑΔ=2x+1 και τετράγωνο πλευράς ΖΗ=x. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του σχήματος ΑΒΕΖΗΓΔ είναι ίσο με το εμβαδόν ενός τετραγώνου.

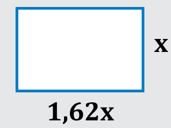


5 Το αγρόκτημα του Μάρκου επηρεάζεται από τη χάραξη ενός μελλοντικού αυτοκινητόδρομου. Ο δήμος του προτείνει να ανταλλάξει τις διαστάσεις του τετράγωνου αγροκτήματος ως εξής: «Αυξάνουμε μία πλευρά κατά 5 m και ελαττώνουμε την άλλη κατά 5 m και δεν αλλάζει το εμβαδόν του αγροκτήματος» . Ο Μάρκος οφείλει να είναι προσεκτικός. Να εξηγήσετε γιατί.

6 **Γεωμετρία**: Οι αρχαίοι Έλληνες είχαν ενσωματώσει τον «χρυσό λόγο» στην τέχνη και στην αρχιτεκτονική τους, π.χ. στην κατασκευή του Παρθενώνα. Τα μήκη των πλευρών του «χρυσού» ορθογωνίου είναι σε αναλογία 1:1,62. Δηλαδή, το μήκος ενός χρυσού ορθογωνίου είναι περίπου 1,62 φορές μεγαλύτερο από το πλάτος του.

α) Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν ενός χρυσού ορθογωνίου.

β) Ένα κάδρο για φωτογραφίες, που έχει σχήμα χρυσού ορθογωνίου, έχει περίμετρο 52,4 cm. Να βρείτε τις διαστάσεις του κάδρου.

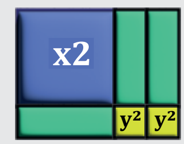


7 Το ορθογώνιο στο σχήμα αποτελείται από τρία τετράγωνα και τρία ορθογώνια. Να εκφράσετε με αλγεβρικές παραστάσεις:

α) Τις διαστάσεις του.

β) Την περίμετρό του.

γ) Το εμβαδόν του.



8 **Γεωμετρία**: Η Υπατία σχεδιάζει να κόψει μία εικόνα για να χωρέσει σε ένα πλαίσιο. Το εμβαδόν της εικόνας είναι $2x^2+11x+12$ τετραγωνικές μονάδες, αλλά η περιοχή μέσα στο πλαίσιο είναι μόνο $2x^2+5x+2$ τετραγωνικές μονάδες. Πόσες τετραγωνικές μονάδες της εικόνας θα πρέπει να κόψει ώστε να χωρέσει στο πλαίσιο;

9 Τα Α και Β είναι πολυώνυμα με άθροισμα $A+B = 3x^2+2x-2$ και διαφορά $A-B = -x^2+4x-8$. Να βρείτε τα πολυώνυμα Α και Β.

10 Ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει εμβαδόν βάσης $x^2+7x+10$ και ύψος $2x$. Να βρείτε:

α) Τον όγκο του.

β) Τις διαστάσεις της βάσης.

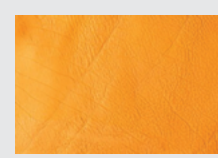
γ) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειάς του.

11 Ένας τεχνίτης επεξεργασίας δέρματος θέλει να κόψει 12 κυκλικά κομμάτια δέρματος ακτίνας r, από ένα ορθογώνιο κομμάτι δέρματος με διαστάσεις 6r και 10r.

α) Να βρείτε τη συνολική επιφάνεια δέρματος που έχουν τα 12 κυκλικά κομμάτια.

β) Να βρείτε την επιφάνεια δέρματος που μένει αχρησιμοποίητο.

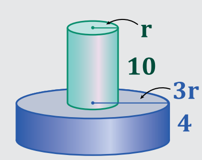
γ) Μπορεί ο τεχνίτης να κόψει κι άλλους κύκλους από το ορθογώνιο κομμάτι; Να κάνετε ένα σχήμα για να εξηγήσετε.



12 Το διπλανό στερεό σχήμα αποτελείται από 2 κυλίνδρους.

α) Να γράψετε ένα πολυώνυμο στην κανονική του μορφή για τη συνολική επιφάνεια του σχήματος.

β) Να γράψετε ένα μονώνυμο για τον όγκο του στερεού.

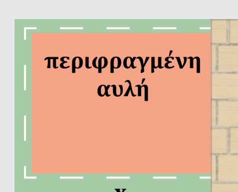


13 Μπροστά από το σπίτι (σχήμα) περιφράσσεται ορθογώνια αυλή από σύρμα 50 m. Αν το μήκος της αυλής είναι x, να βρείτε:

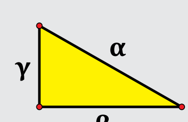
α) Ένα διώνυμο για το πλάτος της περιφραγμένης αυλής.

β) Ένα πολυώνυμο για το εμβαδόν της.

γ) Αν x = 20 m, να βρείτε το εμβαδόν της αυλής.



14 Η περίμετρος ενός ορθογώνιου τριγώνου είναι 30 cm και η υποτείνουσά του είναι 13 cm. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου.



15 **α)** Να αποδείξετε την ταυτότητα: $(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2)-(\alpha x+\beta y)^2 = (\alpha y-\beta x)^2$.

β) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση: $(\alpha x+\beta y)^2+(\alpha y-\beta x)^2$.

16 **α)** Να αποδείξετε την ταυτότητα: $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$.

β) Ομοίως την ταυτότητα: $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x + y + z)[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]$.

γ) Αν $x+y+z = 0$, να αποδείξετε ότι $x^3+y^3+z^3 = 3xyz$.

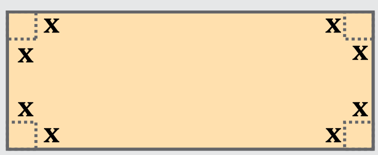
δ) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση: $(α - β)^3 + (β - γ)^3 + (γ - α)^3$.

ε) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $Α = 185^3+(-300)^3+115^3$ είναι αρνητικός και διαιρείται με το 3.

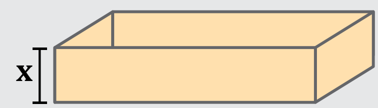
17 **Εργασία μαθητών ανά δύο ή σε μικρές ομάδες.**
Από ένα ορθογώνιο χαρτόνι 12×6 κόβουμε από τις 4 γωνίες τετράγωνα κομμάτια (σχήμα 1) και μετά το διπλώνουμε κατάλληλα και κατασκευάζουμε ένα κουτί ύψους x (σχήμα 2). Να γράψετε ένα πολυώνυμο στην κανονική μορφή που να εκφράζει:

α) Το εμβαδόν της επιφάνειας του κουτιού.

β) Τον όγκο του κουτιού.



Σχήμα 1

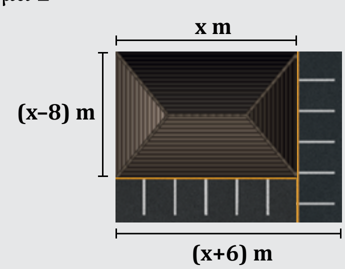


Σχήμα 2

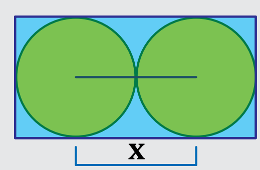
18 Μέσα σε ένα ορθογώνιο οικόπεδο είναι χτισμένο ένα σπίτι και γύρω του υπάρχουν θέσεις πάρκινγκ. Το εμβαδόν του οικοπέδου σε m^2 δίνεται από το πολυώνυμο x^2+x-30.

α) Η μία διάσταση του οικοπέδου είναι $x+6$. Να βρείτε την άλλη διάσταση του οικοπέδου.

β) Αν η περίμετρος του σπιτιού είναι 72 m, να βρείτε το εμβαδόν του σπιτιού και του οικοπέδου.



19 Να βρείτε μία αλγεβρική παράσταση που να εκφράζει το εμβαδόν της μπλε περιοχής (μεταξύ κύκλων και ορθογωνίου).



20 Να υπολογιστεί η παράσταση:
$$Α = (2024^2 \cdot 2023^2 - 2023^2 \cdot 2022^2) : (2024 \cdot 2023^2 + 2023^2 \cdot 2022).$$

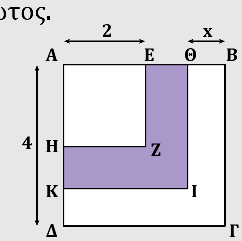
21 Να βρείτε την τιμή του αριθμού:
$$Κ = \frac{2023^2 - 2022 \cdot 2025 + 4047}{2023^3 - 2022 \cdot 2023 \cdot 2024 + 3}.$$

22 Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $x = 2024^2 - 2023^2 + 2022^2 - 2021^2 + 2020^2 - 2019^2 + ...+2^2 - 1$ διαιρείται με το 2025.

23 Να υπολογίσετε τις τιμές του φυσικού $ν \neq 0$ ώστε ο αριθμός $ν^3-ν^2+ν-1$ να είναι πρώτος.

24 Στο διπλανό σχήμα τα ΑΒΓΔ, ΑΕΖΗ και ΑΘΙΚ είναι τετράγωνα.

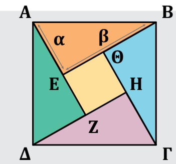
α) Να υπολογίσετε το ΑΘ συναρτήσει του x και να βρείτε το εμβαδόν του ΑΘΙΚ. Στη συνέχεια να επιλέξετε ποια (ή ποιες) από τις ακόλουθες αλγεβρικές παραστάσεις αντιστοιχεί στο εμβαδόν του χρωματισμένου μέρους.



Α. $Μ = (4-x)^2-2^2$ **Β.** $Ν = (4-x-2)^2$ **Γ.** $Ρ = 4^2-x^2-2^2$

β) Να αναπτύξετε και να κάνετε αναγωγή όμοιων όρων στην παράσταση:
$$Σ = (4-x)^2-4$$

γ) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση Σ.

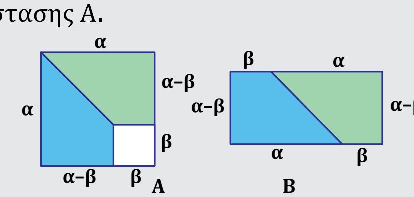


25 Μέσα στο τετράγωνο ΑΒΓΔ έχουν διευθετηθεί τέσσερα ίσα ορθογώνια τρίγωνα.
α) Να εκφράσετε το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ συναρτήσει των α και β.
β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ είναι ίσο με $(α–β)^2$.

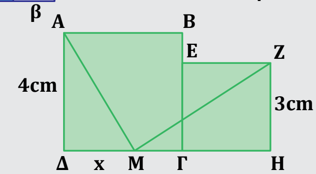
26 Να αποδείξετε ότι η αλγεβρική παράσταση $Α = (x–y)(x+2y)+(x+y)^2+(x–2y)^2–5xy$ είναι τέλειο τετράγωνο ενός πολυωνύμου πρώτου βαθμού.

27 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:
α) $Α = (2+x)(8x+4)+(14x+7)(3+x)$
β) $Β = x^7–x^5+x^3–x$
γ) $Γ = x^2–2xy–3y^2$

28 Να δείξετε ότι η αλγεβρική παράσταση $Α = (α–1)^2+2(α–1)(β+1)+(β+1)^2$ είναι τέλειο τετράγωνο. Εάν α, β πραγματικοί αριθμοί με $α+β = 2$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης Α.



29 Ποια ταυτότητα μπορούμε να ερμηνεύσουμε γεωμετρικά χρησιμοποιώντας το διπλανό σχήμα; Να εξηγήσετε.



30 Στο διπλανό σχήμα τα ΑΒΓΔ και ΓΕΖΗ είναι τετράγωνα και τα Δ, Γ, Η είναι συνευθειακά.
α) Να εκφράσετε τα τμήματα $ΑΜ^2$ και $ΜΖ^2$ συναρτήσει του x. Να κάνετε σε αυτά τις πράξεις και τις αναγωγές.
β) Αν ΑΜ = ΜΖ να βρείτε τον αριθμό x. Να βρείτε τις πλευρές του τριγώνου ΑΜΓ και μετά να δείξετε ότι είναι ορθογώνιο.

31 Να δείξετε ότι ο αριθμός $x = 2025^2–2025–2024$ είναι τέλειο τετράγωνο.

32 Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο η υποτείνουσα είναι 20 cm και είναι 28 cm μικρότερη από την περίμετρο του τριγώνου, να βρείτε: **α)** την περίμετρο, **β)** το εμβαδόν του τριγώνου.

33 Αν για τους αριθμούς α, β, γ, δ ≠ 0 ισχύει αδ = βγ, να υπολογίσετε το άθροισμα: $\frac{β^2}{α^2 + +β^2} + \frac{γ^2}{γ^2 + +δ^2}$.

Να ανοίξετε την ψηφιακή εφαρμογή «ΓΛΩΣΣΑΡΙ-ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ» για να συνοψίσετε τους όρους και τις έννοιες που μάθατε και πρέπει να γνωρίζετε από το κεφάλαιο αυτό.

Κεφάλαιο

3

Κανονικότητες

Κανονικότητες της μορφής $y = \alpha\nu^2$

Επίλυση προβλημάτων

Στο Κεφάλαιο αυτό θα μάθουμε:

- Να διερευνούμε κανονικότητες τετραγωνικού τύπου.
- Να εκφράζουμε κανονικότητες με αλγεβρικές παραστάσεις της μορφής $y = \alpha\nu^2$, με $\alpha > 0$ και ν ακέραιο αριθμό.
- Να λύνουμε προβήματα με κανονικότητες.

Να μελετήσετε το Ενημερωτικό σημείωμα: «Φράκταλ και μαθηματικές κανονικότητες».

3.1 Η τετραγωνική κανονικότητα $y = αν^2$

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/ριες να μπορούν:

Να διερευνούν μαθηματικές κανονικότητες και να τις εκφράζουν με αλγεβρικές παραστάσεις της μορφής $y = αν^2$, με $α > 0$.

Θυμάμαι

Στη Β΄ Γυμνασίου μελετήσαμε **γραμμικές αριθμητικές κανονικότητες** της μορφής **$y = αν + β$**. Στις κανονικότητες αυτής της μορφής, κάθε όρος εκτός από τον πρώτο προκύπτει από τον προηγούμενό του προσθέτοντας τον ίδιο πάντοτε αριθμό. Ο αριθμός αυτός είναι ο συντελεστής **α** του ν στον τύπο **$y = αν + β$**.

Χαρακτηριστική ιδιότητα γραμμικής κανονικότητας (Μέθοδος των διαφορών):

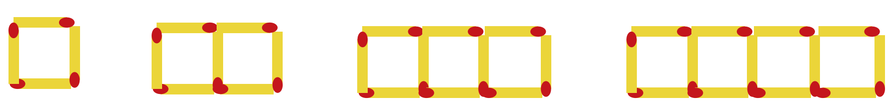
Μια αριθμητική ακολουθία είναι **γραμμική κανονικότητα** όταν οι διαφορές των διαδοχικών όρων της είναι ίσες.

Παράδειγμα:

Η γραφική παράσταση των γραμμικών κανονικοτήτων αποτελείται από σημεία τα οποία βρίσκονται πάνω στην ευθεία $y = αx + β$ και γι' αυτό λέγεται γραμμική. Στις γραμμικές κανονικότητες ο συντελεστής α είναι η διαφορά των διαδοχικών όρων.
Μια γραμμική κανονικότητα μπορεί να παρασταθεί με **τύπο**, **πίνακα** ή **γραφική παράσταση**.

Παράδειγμα:

Η ακολουθία τετραγώνων από σπίρτα του παρακάτω σχήματος αποτελεί μία γραμμική κανονικότητα.

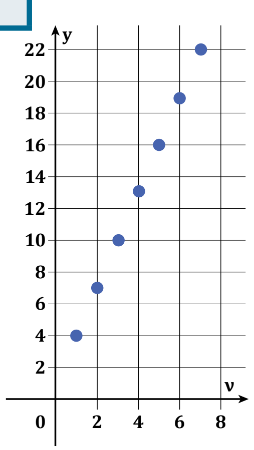


Οι όροι της κανονικότητας είναι οι αριθμοί των σπίρτων κάθε ορθογωνίου και οι διαφορές των διαδοχικών όρων είναι ίσες: 7-4 = 10-7 = 13-10=3…

- *Τύπος:* Αν συμβολίσουμε με **ν = 1, 2, 3, …** έναν τυχαίο όρο της κανονικότητας και **y** τον αντίστοιχο αριθμό των σπίρτων του όρου, τότε ο τύπος είναι **$y = 3ν + 1$**, δηλαδή είναι της μορφής **$y = αν + β$** με $α = 3$ και $β = 1$.
- *Πίνακας:* Θέτοντας στον τύπο **$y = 3ν + 1$** τιμές στο ν, προκύπτουν οι αντίστοιχες τιμές του y που είναι οι όροι της κανονικότητας.

ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	4	7	10	13	16	19	22	25	28

- *Γραφική παράσταση:* Αν αναπαραστήσουμε τα διατεταγμένα ζεύγη του προηγούμενου πίνακα τιμών σε ένα σύστημα συντεταγμένων, τότε προκύπτει η γραφική παράσταση της κανονικότητας. Όπως φαίνεται στο σχήμα αποτελείται από σημεία που βρίσκονται πάνω στην ευθεία $y = 3x + 1$.
- *Εύρεση τύπου όταν δίνεται ο πίνακας ή οι όροι της κανονικότητας:* Όταν διαπιστώσουμε ότι οι διαδοχικοί όροι μιας ακολουθίας έχουν σταθερή διαφορά, τότε είναι της μορφής $y = αν + β$ και προσδιορίζουμε τους συντελεστές α, β ως εξής:
  - ◊ Ο συντελεστής **α** ισούται με τη διαφορά των διαδοχικών όρων.
  - ◊ Ο συντελεστής **β** προσδιορίζεται από τον γενικό τύπο $y = αν + β$, θέτοντας την τιμή του α και ένα ζεύγος τιμών (ν, y) από τις τιμές του πίνακα.



Στο προηγούμενο παράδειγμα οι διαδοχικοί όροι έχουν σταθερή διαφορά 3, οπότε α = 3 και ο γενικός τύπος γράφεται $\mathbf{y = 3ν + β}$.
Για να βρούμε τον συντελεστή β, θέτουμε στην εξίσωση $\mathbf{y = 3ν + β}$, ν = 1 και y = 4, οπότε βρίσκουμε β = 1. Άρα, ο τύπος της κανονικότητας είναι: $\mathbf{y = 3ν + 1}$.

Σημείωση:
Σε όλες τις περιπτώσεις που ζητείται κάποια κανονικότητα, θεωρούμε ότι το μοτίβο συνεχίζεται.

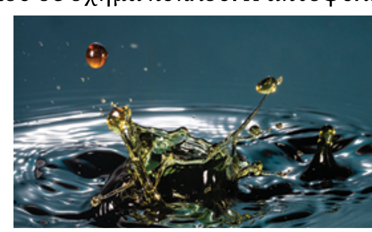
Τετραγωνικές Κανονικότητες

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε κανονικότητες της μορφής $\mathbf{y = αν^2}$, με α > 0 και ν θετικό ακέραιο αριθμό. Οι κανονικότητες αυτές ανήκουν σε μια κατηγορία κανονικοτήτων με γενική μορφή $y = αν^2 + βν + γ$, $α \neq 0$, οι οποίες λέγονται **τετραγωνικές**. Τη γενική μορφή θα εξετάσουμε σε επόμενη τάξη.

Να ανοίξετε την ψηφιακή εφαρμογή «Πετρελαιοπηγή» για να διερευνήσετε την ανάπτυξη της πετρελαιοκηλίδας.

Διερεύνηση 1

Σε μία υπεράκτια πετρελαιοπηγή έχει γίνει στη θάλασσα διαρροή πετρελαίου σε σχήμα κύκλου. Η ακτοφυλακή καταγράφει κάθε ημέρα τη διάμετρο της κηλίδας (σε ναυτικά μίλια) και οι καταγραφές τις πρώτες οχτώ ημέρες παρουσιάζονται στον πίνακα:



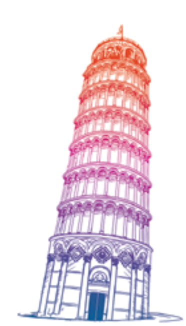
Ημέρες (ν)	1	2	3	4	5	6	7	8
Διάμετρος (y)	1,5	6	13,5	24	37,5	54	73,5	96

α) Να βρείτε τις διαφορές των διαδοχικών τιμών των διαμέτρων. Είναι η ακολουθία των διαμέτρων γραμμική κανονικότητα; Να εξηγήσετε την απάντησή σας.
β) Να βρείτε τις διαφορές των διαφορών των διαμέτρων που βρήκατε στο (α) ερώτημα. Τι παρατηρείτε;
γ) Να παραστήσετε γραφικά τα δεδομένα του πίνακα. Τι παρατηρείτε; Να διατυπώσετε μία εικασία για το είδος της γραφικής παράστασης που φαίνεται να προκύπτει.
δ) Να συμπληρώσετε τον πίνακα.
ε) Να εξετάσετε τους λόγους $\frac{y}{ν^2}$. Τι παρατηρείτε;
στ) Να προσδιορίσετε τον τύπο της κανονικότητας.

Ημέρες (ν)	1	2	3	4	5	6	7	8
Διάμετρος (y)	1,5	6	13,5	24	37,5	54	73,5	96
$ν^2$								
$\frac{y}{ν^2}$								

Διερεύνηση 2

Η ελεύθερη πτώση μελετήθηκε κατά τον 17ο αιώνα από τον Γαλιλαίο και τον Καρτέσιο. Λέγεται ότι ο Γαλιλαίος άφησε να πέσουν από τον πύργο της Πίζας ταυτόχρονα δύο μεταλλικές σφαίρες διαφορετικής μάζας και παρατήρησε ότι έφτασαν ταυτόχρονα στο έδαφος. Το 1687, ο Νεύτωνας διατύπωσε γενικούς νόμους για την κίνηση των σωμάτων, οι οποίοι περιγράφουν κάθε μορφή κίνησης.
Σε ένα πείραμα για να προσδιορίσουμε την κίνηση ενός αντικειμένου σε ελεύθερη πτώση, αφήνουμε μία σφαίρα από ύψος 120 m και μετράμε την απόσταση που διανύει σε διάφορες χρονικές στιγμές.



Χρόνος t (σε min)	0	1	2	3	4	5
Απόσταση S (σε m)	0	4,8	19,2	43,2	76,8	120

α) Να βρείτε τις διαφορές των διαδοχικών τιμών των αποστάσεων. Είναι η ακολουθία των αποστάσεων γραμμική κανονικότητα; Να εξηγήσετε την απάντησή σας.

β) Να βρείτε τις διαφορές των διαφορών των αποστάσεων που βρήκατε στο (α) ερώτημα. Τι παρατηρείτε;

γ) Να παραστήσετε γραφικά τα δεδομένα του πίνακα. Τι παρατηρείτε; Να διατυπώσετε μία εικασία για το είδος της γραφικής παράστασης που φαίνεται να προκύπτει.

δ) Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

Χρόνος t (σε min)	0	1	2	3	4	5
Απόσταση S (σε m)	0	4,8	19,2	43,2	76,8	120
t^2						
$\frac{S}{t^2}$						

ε) Να εξετάσετε τους λόγους $\frac{S}{t^2}$, $t \neq 0$. Τι παρατηρείτε;

στ) Να προσδιορίσετε τον τύπο της κανονικότητας.

Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες μάθησης

Οι κανονικότητες της μορφής $\mathbf{y = \alpha\nu^2}$, με $\alpha > 0$ και ν θετικό ακέραιο, ονομάζονται **τετραγωνικές**. Οι μορφές παρουσίασης μιας κανονικότητας, εκτός από τη λεκτική διατύπωση, περιλαμβάνουν: μαθηματικό τύπο, πίνακα τιμών και γραφική παράσταση.

Χαρακτηριστικές ιδιότητες των τετραγωνικών κανονικοτήτων:

- Μια αριθμητική κανονικότητα είναι τετραγωνική όταν η ακολουθία των «δεύτερων διαφορών» της είναι σταθερή, δηλαδή όταν οι διαφορές των «πρώτων διαφορών» μεταξύ των διαδοχικών όρων της είναι ίσες.
- Μια κανονικότητα είναι τετραγωνική της μορφής $\mathbf{y = \alpha\nu^2}$ όταν ο λόγος $\frac{y}{\nu^2}$, $\nu \neq 0$ είναι σταθερός.

Παράδειγμα

- *Πίνακας τιμών*

Σειρά όρου (ν)	1	2	3	4	5	6	7
Όρος (y)	1	4	9	16	25	36	49

Πρώτες διαφορές: 3 5 7 9 11 13

Δεύτερες διαφορές: 2 2 2 2 2

Οι «δεύτερες διαφορές» είναι ίσες, οπότε η ακολουθία 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 είναι τετραγωνική κανονικότητα.

Παρατήρηση: Σε μια τετραγωνική κανονικότητα οι «πρώτες διαφορές» είναι όροι μιας γραμμικής κανονικότητας.

- *Τύπος*

Για να διαπιστώσουμε αν ένας πίνακας περιγράφει κανονικότητα της μορφής $\mathbf{y = \alpha\nu^2}$ (1) αντικαθιστούμε ένα ζεύγος τιμών από τον πίνακα στην (1).

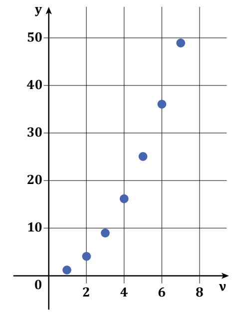
Για $\nu = 1$ και $y = 1$ έχουμε: $1 = \alpha \cdot 1^2$, οπότε $\alpha = 1$ και η (1) γράφεται: $y = 1 \cdot \nu^2$ ή $y = \nu^2$.

Ο τύπος αυτός επαληθεύεται από όλα τα ζεύγη του πίνακα και επομένως η ακολουθία 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 είναι η τετραγωνική κανονικότητα $y = \nu^2$.

Σχόλιο: Στη συγκεκριμένη κανονικότητα φαίνεται άμεσα με παρατήρηση ότι κάθε όρος (y) είναι το τετράγωνο του όρου ν της αντίστοιχης σειράς (ν), οπότε ο τύπος είναι $\mathbf{y = \nu^2}$.

- *Γραφική παράσταση*

Η αποτύπωση των ζευγών (ν, y) του πίνακα με σημεία σε ένα σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων μας δίνει τη γραφική παράσταση της κανονικότητας (σχήμα). Φαίνεται ότι τα σημεία δεν βρίσκονται πάνω σε ευθεία, αλλά σε μια καμπύλη, που, όπως θα μάθουμε σε επόμενη ενότητα, λέγεται παραβολή.



Γενικά

Για να εξετάσουμε αν μία ακολουθία είναι τετραγωνική κανονικότητα της μορφής $\mathbf{y = αν^2}$ και να την προσδιορίσουμε, εργαζόμαστε με βάση τις χαρακτηριστικές ιδιότητες, όπως παρουσιάζονται στις εφαρμογές που ακολουθούν.

Μπορείτε να εξοικειωθείτε με τις «κανονικότητες» της μορφής $y = αν^2$ για τις διάφορες τιμές της μεταβλητής ν, ανοίγοντας την εφαρμογή.

Εφαρμογή 1: Θα τρακάρει ο οδηγός;

Τα μέτρα που διανύει ένα αυτοκίνητο για να σταματήσει όταν φρενάρει, εξαρτώνται και από τον χρόνο αντίδρασης του οδηγού, δηλαδή από τα δευτερόλεπτα που μεσολαβούν από τη στιγμή που ο οδηγός βλέπει κάποιο εμπόδιο μέχρι τη στιγμή που πατάει φρένο. Στον πίνακα παρουσιάζονται οι χρόνοι αντίδρασης ενός οδηγού και τα μέτρα που θα διανύσει με το αυτοκίνητό του μέχρι να σταματήσει τελείως από τη στιγμή που θα φρενάρει.

Χρόνος αντίδρασης (ν σε s)	1	2	3	4	5
Μέτρα	2	8	18	32	50

α) Να εξετάσετε αν υπάρχει γραμμική ή τετραγωνική κανονικότητα των αποστάσεων φρεναρίσματος.
β) Να προσδιορίσετε τον τύπο της κανονικότητας.
γ) Με βάση το μοντέλο που προσδιορίσατε, αν ο χρόνος αντίδρασης ενός οδηγού είναι 7 sec, θα καταφέρει ο οδηγός να αποφύγει τη σύγκρουση με ένα σταματημένο αυτοκίνητο, που βλέπει μπροστά του στα 90 μέτρα;

Απάντηση

α) Οι διαφορές των διαδοχικών αποστάσεων του πίνακα δεν είναι ίσες, αφού για παράδειγμα: $8 - 2 = 4 \neq 18 - 8 = 10$. Άρα δεν υπάρχει γραμμική κανονικότητα των αποστάσεων φρεναρίσματος.

2 8 18 32 50
6 10 14 18
4 4 4

Για να εξετάσουμε αν υπάρχει τετραγωνική κανονικότητα, ένας τρόπος είναι να βρούμε τις «δεύτερες διαφορές» των διαδοχικών αποστάσεων. Πράγματι, όπως φαίνεται στο σχήμα αυτές είναι ίσες, οπότε οι αποστάσεις φρεναρίσματος αποτελούν τετραγωνική κανονικότητα.

β) Για να δούμε αν η τετραγωνική κανονικότητα είναι της μορφής $y = αν^2$ (1) αντικαθιστούμε ένα ζεύγος τιμών από τον πίνακα στην (1). Για $ν = 1$ και $y = 2$ έχουμε: $2 = α \cdot 1^2$, οπότε $α = 2$ και η (1) γράφεται: $y = 2ν^2$. Η τελευταία επαληθεύεται από όλα τα ζεύγη του πίνακα και επομένως ο τύπος της τετραγωνικής κανονικότητας των αποστάσεων φρεναρίσματος είναι: $\mathbf{y = 2ν^2}$.

γ) Αν ο χρόνος αντίδρασης ενός οδηγού που βλέπει μπροστά του ένα σταματημένο αυτοκίνητο είναι y = 7 sec, τότε με βάση το μοντέλο η απόσταση φρεναρίσματος είναι: $y = 2 \cdot 7^2 = 2 \cdot 49 = 98$ μέτρα.

Επομένως ο οδηγός δεν θα αποφύγει τη σύγκρουση.

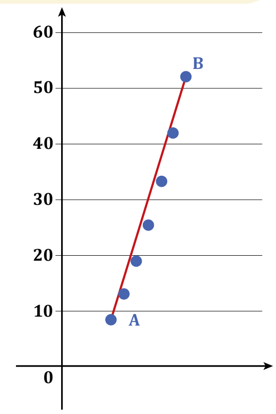
Εφαρμογή 2: Μυϊκή δύναμη βραχίονα

Η μυϊκή δύναμη του άνω βραχίονα ενός ατόμου και η περιφέρεια του βραχίονα παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα:

Περιφέρεια ν (cm)	8	10	12	14	16	18	20
Μυϊκή δύναμη y (N)	8,32	13	18,72	25,48	33,28	42,12	52

α) Η περιφέρεια του βραχίονα και η μυϊκή δύναμη συνδέονται; Αν ναι, πώς;
β) Να παραστήσετε σε ένα σύστημα αξόνων τα δεδομένα. Τι παρατηρείτε; Να διατυπώσετε μία εικασία.
γ) Να εξετάσετε αν η μυϊκή δύναμη είναι γραμμική κανονικότητα, τετραγωνική κανονικότητα ή τίποτα από τα δύο.
δ) Αν είναι κανονικότητα, να βρείτε τον τύπο της.

Απάντηση



α) Από τις τιμές του πίνακα παρατηρούμε ότι καθώς αυξάνεται η τιμή του βραχίονα, αυξάνεται και η τιμή της μυϊκής δύναμης.

β) Από την αναπαράσταση και την παρατήρηση των σημείων του πίνακα σε ένα σύστημα αξόνων, διατυπώνουμε την εικασία ότι δεν ανήκουν σε μια ευθεία και επομένως η κανονικότητα δεν είναι γραμμική.

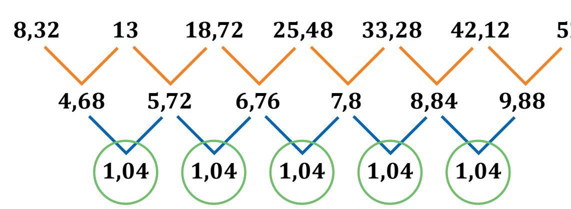
γ) Η μυϊκή δύναμη πράγματι δεν είναι γραμμική κανονικότητα, αφού οι διαφορές των διαδοχικών όρων δεν είναι ίσες. Για παράδειγμα, 13 – 8,32 = 4,68 ≠ 18,72 – 13 = 5,72. Για να εξετάσουμε αν πρόκειται για τετραγωνική κανονικότητα της μορφής $\mathbf{y = αν^2}$ εξετάζουμε αν είναι ίσοι οι λόγοι $\frac{y}{ν^2} = \frac{\text{μυϊκή δύναμη}}{(\text{περιφέρεια})^2}$. Πράγματι, είναι:

$$\frac{8{,}32}{8^2} = 0{,}13,\ \frac{13}{10^2} = 0{,}13,\ \frac{18{,}72}{12^2} = 0{,}13,\ \frac{25{,}48}{14^2} = 0{,}13,\ \frac{33{,}28}{16^2} = 0{,}13,\ \frac{42{,}12}{18^2} = 0{,}13,\ \frac{52}{20^2} = 0{,}13.$$

οπότε πρόκειται για τετραγωνική κανονικότητα της μορφής $\mathbf{y = αν^2}$.

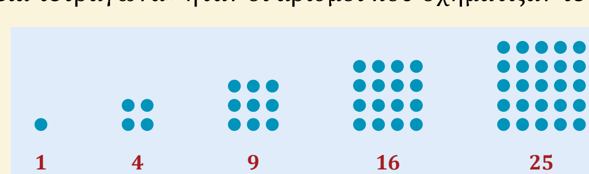
δ) Στο προηγούμενο ερώτημα βρήκαμε ότι $\frac{y}{ν^2} = 0,13$ και επομένως ο τύπος της κανονικότητας είναι: $\mathbf{y = 0{,}13ν^2}$.

Σημείωση
Θα μπορούσαμε όπως στην προηγούμενη εφαρμογή να διαπιστώσουμε ότι πρόκειται για τετραγωνική κανονικότητα εξετάζοντας τις «δεύτερες διαφορές» (σχήμα) και στη συνέχεια να προσδιορίσουμε τον συντελεστή **α** της τετραγωνικής κανονικότητας.



Εφαρμογή 3: Τετράγωνοι αριθμοί

Οι Πυθαγόρειοι είχαν τους φυσικούς αριθμούς ως βάση της φιλοσοφίας τους. Τους αναπαριστούσαν με διακριτές ψηφίδες και τους είχαν κατηγοριοποιήσει σε: άρτιους, περιττούς, τρίγωνους, τετράγωνους, φίλιους, τέλειους κ.λπ. Τετράγωνοι ή με σημερινή ορολογία «τέλεια τετράγωνα» ήταν οι αριθμοί που σχημάτιζαν τετράγωνο, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α. Ποιος είναι ο επόμενος τετράγωνος αριθμός;
β. Ποιος είναι ο 10ος στη σειρά τετράγωνος αριθμός;
γ. Ποιος είναι ο 100ός στη σειρά τετράγωνος αριθμός;
δ. Πώς θα μπορούσατε να διαπιστώσετε αν οι αριθμοί

144 και 170 είναι τετράγωνοι;

ε. Να περιγράψετε λεκτικά και συμβολικά έναν τρόπο με τον οποίο δημιουργούνται τετράγωνοι αριθμοί.

στ. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τετράγωνων αριθμών.

Σειρά στην ακολουθία (ν)	1	2	3	4	5	6	9			30	50
Τετράγωνος αριθμός (y)	1	4	9	16	25			100	400		

Απάντηση

α) Όπως φαίνεται από το σχήμα, κάθε τετράγωνος αριθμός σχηματίζει ένα τετράγωνο διαστάσεων 1×1, 2×2, 3×3, 4×4, 5×5. Άρα ο επόμενος τετράγωνος αριθμός θα σχηματίζει τετράγωνο 6×6 και θα αποτελείται από 36 ψηφίδες, δηλαδή θα είναι ο 36.

β) Ο 10ος στη σειρά θα σχηματίζει τετράγωνο 10×10. Άρα ο 10ος στη σειρά τετράγωνος αριθμός θα είναι 100.

γ) Ομοίως ο 100ός θα είναι ο 100×100=10000. Άρα ο 100ός στη σειρά τετράγωνος αριθμός θα είναι 10000.

δ) Με δοκιμές διαπιστώνουμε ότι 11×11 = 121, 12×12 = 144. Άρα ο 144 είναι τετράγωνος αριθμός.
Με δοκιμές επίσης βλέπουμε ότι 13×13 = 169 και 14×14 = 196, αλλά 169 < 170 < 196 οπότε ο 170 δεν είναι τετράγωνος αριθμός (τέλειο τετράγωνο), δηλαδή δεν υπάρχει φυσικός αριθμός ν, έτσι ώστε $\nu^2 = 170$.

ε) Παρατηρώντας τον τρόπο δημιουργίας των τετράγωνων αριθμών, θα έχουμε:
Για τον έκτο στη σειρά αριθμό, $y = 6^2 = 36$ και για τον ένατο, $y = 9^2 = 81$. Γενικότερα αν η σειρά ενός τετράγωνου αριθμού είναι **ν,** τότε ο τετράγωνος αριθμός **y** είναι ο ν^2, δηλαδή $\mathbf{y = \nu^2}$, ο οποίος είναι και ο τύπος που περιγράφει την κανονικότητα.

στ) Από τον τύπο της κανονικότητας $\mathbf{y = \nu^2}$ με αντικατάσταση έχουμε:
Για $\nu = 30$, $y = 30^2 = 900$ και για $\nu = 50$, $y = 50^2 = 2500$.
Για y=100, $100 = \nu^2$, οπότε $\nu=\sqrt{100}= 10$ και για y = 400, $400 = \nu^2$, οπότε: $\nu= \sqrt{400} = 20$.

Επομένως ο πίνακας γράφεται:

Σειρά στην ακολουθία (ν)	1	2	3	4	5	6	9	10	20	30	50
Τετράγωνος αριθμός (y)	1	4	9	16	25	36	81	100	400	900	2500

Μπορείτε να εξοικειωθείτε με τους τετράγωνους αριθμούς, ανοίγοντας την εφαρμογή.

Ερωτήσεις για Αυτοαξιολόγηση

1 Να εξετάσετε αν κάποιος από τους πίνακες είναι πίνακας τετραγωνικής κανονικότητας και να βρείτε τον τύπο της.

ν	1	2	3	4	5
y	–2	–5	–8	–11	–14

ν	2	3	4	5	10
y	0	4	5	6	20

ν	1	2	3	4
y	3	12	27	48

2 Για να αξιολογήσετε τις γνώσεις σας στις γραμμικές και τετραγωνικές κανονικότητες να ανοίξετε την εφαρμογή.

3 «Σκέφτομαι έναν ακέραιο αριθμό. Υψώνω στο τετράγωνο. Πολλαπλασιάζω με το 3. Τελικό αποτέλεσμα».

α) Αν η Μαρία σκέφτηκε το 5, ποιος αριθμός είναι το τελικό αποτέλεσμα;

β) Αν ο Γιώργος βρήκε τελικό αποτέλεσμα 108, ποιον αριθμό σκέφτηκε;

γ) Αν ο αριθμός που σκεφτόμαστε είναι ο ν και το τελικό αποτέλεσμα y, ποια σχέση (τύπος) συνδέει τα ν και y;

δ) Ο Νίκος και ο Βασίλης ξεκίνησαν από διαφορετικούς αριθμούς και βρήκαν και οι δύο το ίδιο τελικό αποτέλεσμα 300. Ποιους αριθμούς σκέφτηκαν;

4 Για να αξιολογήσετε τις γνώσεις σας στις τετραγωνικές κανονικότητες, να ανοίξετε την εφαρμογή.

5 **α)** Να εξετάσετε αν ο πίνακας της παρακάτω κανονικότητας είναι πίνακας γραμμικής ή τετραγωνικής κανονικότητας.

ν	1	2	3	4	5	6
y	0,4	1,6	3,6	6,4	10	14,4

β) Να βρείτε τον τύπο της κανονικότητας.

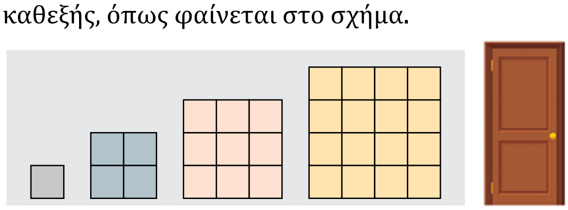
γ) Σε ένα σύστημα συντεταγμένων να αναπαραστήσετε τα ζεύγη του πίνακα τιμών με σημεία του επιπέδου.

6 Να εξετάσετε ποιες από τις ακολουθίες αριθμών αποτελούν γραμμική κανονικότητα, τετραγωνική κανονικότητα ή τίποτα από τα δύο:

α) –15, –8, –1, 6, 13, 20, … **β)** 2, 0,5, 0, 0,5, 2, 4,5, …. **γ)** 2, 4, 8, 16, 32, 64, … **δ)** 4, 1, 0, 1, 4, 9, …

Ασκήσεις και Προβλήματα

1 Ένα εργοστάσιο κατασκευάζει κουφώματα διαφόρων τύπων. Ο τύπος 1 έχει ένα τζάμι, ο τύπος 2 έχει τέσσερα τζάμια, ο τύπος 3 έχει εννέα τζάμια και ούτω καθεξής, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Πόσα τζάμια θα υπάρχουν στον τύπο 5;

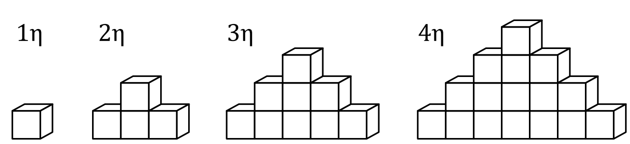
β) Πόσα τζάμια θα υπάρχουν στον τύπο 6;

γ) Πόσα τζάμια θα υπάρχουν στον τύπο 12; Να εξηγήσετε την απάντησή σας.

δ) Να συμπληρώσετε τον πίνακα. Να δείξετε τους υπολογισμούς σας.

Τύπος κουφώματος	3	4	5	12			20	ν
Αριθμός τζαμιών					196	256		

2 Με κύβους κατασκευάζουμε «σκάλες» διαφόρων μεγεθών.



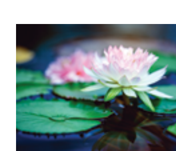
α) Παρατηρείτε κάποια κανονικότητα στις διαδοχικές σκάλες; Αν ναι, να την περιγράψετε.

β) Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

«Σκάλα»	1η	2η	3η	4η	5η		20η		100η
«Κύβοι»	1	4	9			121		900	

γ) Να βρείτε τον τύπο που εκφράζει την κανονικότητα.

3 Σε μια μικρή τεχνητή λίμνη έχει τοποθετηθεί στο κέντρο της ένα κατά προσέγγιση κυκλικό νούφαρο, το οποίο αναπτύσσεται καθημερινά



με έναν συγκεκριμένο ρυθμό, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα. Σε 30 ημέρες καλύπτει όλη τη λίμνη.

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

Ημέρα	1	2	3	4	5		15	20	30
Εμβαδό νούφαρου (m^2)	3,14	12,56	28,26	50,24	78,5	314			
Ακτίνα νούφαρου (m)									

β) Πώς αυξάνεται η ακτίνα του νούφαρου από ημέρα σε ημέρα;

γ) Να περιγράψετε την κανονικότητα που διέπει την ανάπτυξη του νούφαρου με λόγια και με έναν τύπο συμβολίζοντας με ν την ημέρα και Ε το εμβαδόν.

δ) Πόση είναι η έκταση της λίμνης σε m^2;

4 Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται η επισκεψιμότητα σε έναν αρχαιολογικό χώρο κατά τον μήνα Ιούλιο.

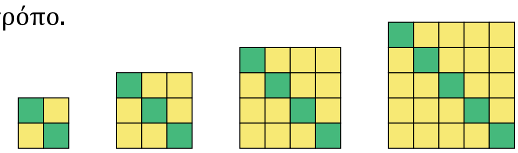
Ημέρα	1η	2η	3η	4η	5η	6η		15η	30η
Επισκέπτες	10	40	90	160	250	360	1000		

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα, αν η αύξηση της επισκεψιμότητας συνεχιζόταν και μετά την 5η ημέρα με τον ίδιο τρόπο.

β) Να περιγράψετε την κανονικότητα που διέπει την επισκεψιμότητα με λόγια και με έναν τύπο, συμβολίζοντας με ν την ημέρα και με ε τον αριθμό των επισκεπτών.

γ) Να παραστήσετε σε ένα σύστημα συντεταγμένων τα ζεύγη του πίνακα με σημεία.

5 Στην παρακάτω κανονικότητα διαδοχικών τετραγώνων, τα τετράγωνα συνεχίζονται με τον ίδιο τρόπο.



α) Πόσα πράσινα και πόσα κίτρινα τετράγωνα θα υπάρχουν στο 5ο σχήμα.

β) Να περιγράψετε την κανονικότητα που διέπει τα πράσινα τετράγωνα.

γ) Να περιγράψετε την κανονικότητα που διέπει τα κίτρινα τετράγωνα.

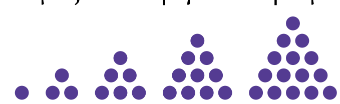
δ) Να εξετάσετε αν οι κανονικότητες είναι γραμμικές, τετραγωνικές ή τίποτα από αυτά.

ε) Να βρείτε τον τύπο κάθε κανονικότητας.

6 Να εξετάσετε αν οι παρακάτω αριθμητικές ακολουθίες είναι γραμμικές κανονικότητες, τετραγωνικές κανονικότητες ή τίποτα από αυτά. Όπου είναι δυνατόν, να βρείτε έναν κανόνα για να προσδιορίζετε οποιονδήποτε όρο της ακολουθίας. Να εξηγήσετε γιατί ο κανόνας λειτουργεί.

α) 3, 8, 15, 24, 35, … **β)** 2, 4, 8, 16, 32, 64, …
γ) 3, –1, –5, –9, –13, … **δ)** 2, 5, 10, 22,5, 40, 62,5, …

7 Οι Πυθαγόρειοι θεωρούσαν ότι όλα στο σύμπαν μπορούσαν να εξηγηθούν με τη βοήθεια των αριθμών. Για αυτόν τον λόγο έφτιαχναν διάφορες ακολουθίες αριθμών με βάση γεωμετρικά σχήματα. Οι παρακάτω εικονιζόμενοι αριθμοί σχηματίζουν τρίγωνα και ονομάζονται τρίγωνοι αριθμοί.



α) Ποιοι είναι οι δύο επόμενοι τρίγωνοι αριθμοί;

β) Να περιγράψετε την κανονικότητα που διέπει τους τρίγωνους αριθμούς.

γ) Να εξετάσετε αν η κανονικότητα των τρίγωνων αριθμών είναι γραμμική, τετραγωνική ή τίποτα από τα δύο.

8 Η απόσταση που διανύει ένα χτύπημα του μπέιζμπολ εξαρτάται από τη γωνία με την οποία χτυπάει ο παίκτης και από την ταχύτητα του χτυπήματος. Ο πίνακας δείχνει τις αποστάσεις που διανύει ένα χτύπημα υπό γωνία 40° με διάφορες ταχύτητες.

α) Να περιγράψετε την κανονικότητα των αποστάσεων.

β) Να βρείτε τον τύπο της κανονικότητας.

Ταχύτητα (km/h)	110	120	130	140	150	160	170	180
Απόσταση (m)	48,4	57,6	70,98	82,32	90	102,4	115,6	129,6

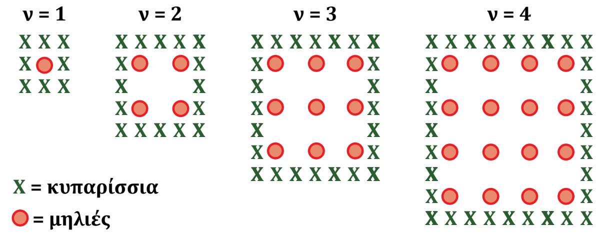
9 **Εργασία κατά ζεύγη ή σε μικρές ομάδες**

Ένας αγρότης θέλει να φυτέψει μηλιές σε σειρές και σε τετράγωνο σχήμα. Σκέφτεται να προστατέψει τις μηλιές από τον αέρα, περιφράζοντάς τες με κυπαρίσσια. Στα διπλανά διαγράμματα βλέπουμε τη διάταξη των δέντρων, όπως τα φαντάζεται ο αγρότης. Κάθε διάγραμμα περιλαμβάνει διαφορετικές σειρές από μηλιές. (ν = σειρές από μηλιές)

α) Να συμπληρώσετε τα στοιχεία που λείπουν στον πίνακα. Στη συνέχεια να γενικεύσετε το πρόβλημα δίνοντας το πλήθος των δέντρων μηλιάς και το πλήθος των κυπαρισσιών για ν σειρές από μηλιές.

β) Υπάρχει μια τιμή του ν, για την οποία το πλήθος των δέντρων από τις μηλιές ισούται με το πλήθος των κυπαρισσιών. Να βρείτε αυτήν την τιμή του ν και να περιγράψετε τον τρόπο, με τον οποίο την υπολογίσατε.

γ) Ας υποθέσουμε ότι ο αγρότης μεγαλώνει συνέχεια το περιβόλι του προσθέτοντας συνεχώς σειρές δέντρων. Καθώς ο αγρότης μεγαλώνει το περιβόλι του προσθέτοντας σειρές, θα χρειαστεί περισσότερες μηλιές ή κυπαρίσσια; Να γράψετε **παρακάτω** τον τρόπο με τον οποίο βρήκατε την απάντησή σας.



ν	Πλήθος από μηλιές	Πλήθος κυπαρισσιών
1	1	8
2	4	
3		
4		
5		

(Διαγωνισμός Pisa 2000)

3.2 Ανακεφαλαίωση και διεύρυνση της θεματικής ενότητας

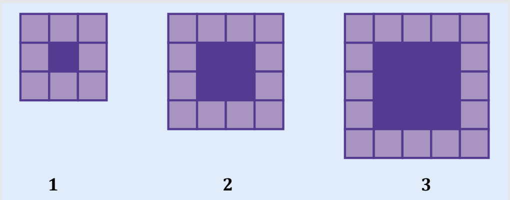
Στο κεφάλαιο αυτό διερευνήσαμε μαθηματικές κανονικότητες της μορφής $\mathbf{y = αν^2}$ με $α > 0$ και ν θετικό ακέραιο, οι οποίες ονομάζονται **τετραγωνικές**. Εκτός της λεκτικής διατύπωσης, μία κανονικότητα μπορεί να παρουσιαστεί με: τύπο, πίνακα τιμών και γραφική παράσταση.

Χαρακτηριστικές ιδιότητες των τετραγωνικών κανονικοτήτων:

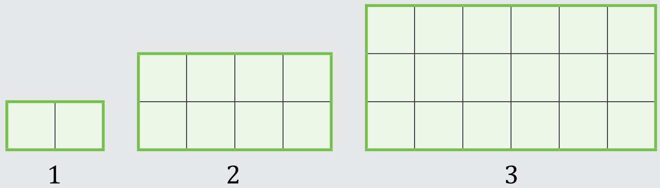
- Μια αριθμητική κανονικότητα είναι τετραγωνική όταν η ακολουθία των «δεύτερων διαφορών» της είναι σταθερή, δηλαδή όταν οι διαφορές των «πρώτων διαφορών» μεταξύ των διαδοχικών όρων της είναι ίσες.
- Μια αριθμητική κανονικότητα είναι τετραγωνική της μορφής $\mathbf{y = αν^2}$ όταν ο λόγος $\frac{y}{ν^2}$, $ν \neq 0$ είναι σταθερός.

Επαναληπτικά έργα και προεκτάσεις

1 Στη διπλανή ακολουθία σχημάτων στο μέσον υπάρχει μία πισίνα με περιμετρική πλακόστρωση. Μπορείτε να περιγράψετε το 4ο και το 5ο σχήμα; Διακρίνετε κάποια ή κάποιες κανονικότητες; Αν ναι, να την/τις περιγράψετε λεκτικά, με έναν πίνακα τιμών, με γραφική παράσταση και με έναν τύπο.



2 Η ακολουθία των παρακάτω σχημάτων συνεχίζεται με τον ίδιο τρόπο.



α) Μπορείτε να διακρίνετε μια κανονικότητα; Αν ναι, να την περιγράψετε.

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Σχήμα	1	2	3	4	5	6
Αριθμός τετραγώνων	2	8				

γ) Να εξετάσετε αν η κανονικότητα είναι γραμμική, τετραγωνική ή τίποτα από τα δύο.

δ) Να προσπαθήσετε να βρείτε τον τύπο της κανονικότητας συμβολίζοντας με ν τον αριθμό του σχήματος και με y τον αριθμό των τετραγώνων του αντίστοιχου σχήματος.

ε) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της κανονικότητας σε ένα σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων.

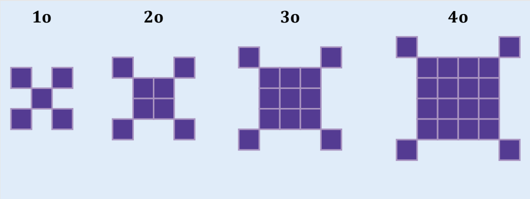
3 **α)** Στην παρακάτω ακολουθία σχημάτων μπορείτε να περιγράψετε το 5ο και το 6ο σχήμα;

β) Διακρίνετε κάποια κανονικότητα;

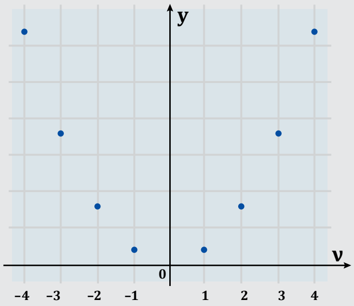
γ) Να κατασκευάσετε έναν πίνακα.

δ) Να εξετάσετε αν είναι γραμμική κανονικότητα, τετραγωνική κανονικότητα ή τίποτα από τα δύο.

ε) Ποιο σχήμα της κανονικότητας αποτελείται από 85 τετράγωνα;



4 Στο σχήμα παρουσιάζεται η γραφική παράσταση μίας κανονικότητας.



α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα, χρησιμοποιώντας τη γραφική παράσταση.

ν	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y									

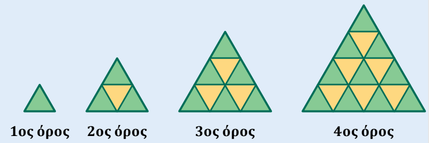
β) Να εξετάσετε αν η κανονικότητα είναι γραμμική ή τετραγωνική.

γ) Να βρείτε τον τύπο της κανονικότητας.

δ) Υπάρχει άξονας συμμετρίας στη γραφική παράσταση; Αν ναι, ποια ευθεία είναι;

ε) Να εξετάσετε αν τα σημεία (−10, 40) και (8, 25) είναι σημεία της γραφικής παράστασης.

5 Στη διπλανή κανονικότητα φαίνονται οι 4 πρώτοι όροι της.



α) Να σχεδιάσετε τον 5ο όρο της κανονικότητας.

β) Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

	Αριθμός κίτρινων τριγώνων	Αριθμός πράσινων τριγώνων	Συνολικός αριθμός τριγώνων
1ος όρος			
2ος όρος			
3ος όρος			
4ος όρος			
5ος όρος			
6ος όρος			
7ος όρος			

γ) Πόσα (συνολικά) τρίγωνα υπάρχουν στον 100ό όρο;

δ) Να εξετάσετε αν η κανονικότητα είναι γραμμική κανονικότητα, τετραγωνική κανονικότητα ή τίποτα από τα δύο.

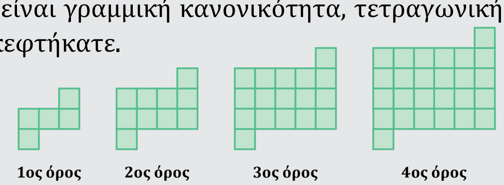
ε) Να βρείτε τον τύπο για τον ν-ιοστό όρο της κανονικότητας.

στ) Να εξετάσετε αν κάποιος όρος της κανονικότητας αποτελείται από 216 μικρά τρίγωνα.

ζ) Να εξετάσετε αν η ακολουθία των κίτρινων τριγώνων είναι γραμμική κανονικότητα, τετραγωνική κανονικότητα ή τίποτα από τα δύο. Να εξηγήσετε πώς σκεφτήκατε.

η) Να εξετάσετε αν η ακολουθία των πράσινων τριγώνων είναι γραμμική κανονικότητα, τετραγωνική κανονικότητα ή τίποτα από τα δύο. Να εξηγήσετε πώς σκεφτήκατε.

6 Θεωρούμε μια ακολουθία σχημάτων από πλακίδια. Η σειρά συνεχίζεται κανονικά. Τι αλλάζει από τον έναν όρο στον επόμενο;



α) Πόσα πλακίδια έχει το σχήμα του 7ου όρου;

β) Πόσα πλακίδια έχει το σχήμα του εκατοστού όρου; Να εξηγήσετε την απάντησή σας;

γ) Πόσα πλακίδια θα υπάρχουν στον νιοστό όρο; Να γράψετε έναν κανόνα για να βρίσκετε πόσα πλακίδια θα έχει το νιοστό σχήμα. Να εξηγήσετε γιατί λειτουργεί ο κανόνας.

Να ανοίξετε την εφαρμογή «ΓΛΩΣΣΑΡΙ-ΚΑΝΟΝΙΚΟΤΗΤΕΣ» για να συνοψίσετε έννοιες και όρους που μάθατε στο κεφάλαιο αυτό.

Κεφάλαιο

4

Συναρτήσεις

Η συνάρτηση $y = αx^2$

Γραφική επίλυση εξίσωσης $αx^2 = β$

Η γραμμική εξίσωση $αx+βy=γ$

Γραφική επίλυση γραμμικού συστήματος

Επίλυση προβλημάτων

Στο Κεφάλαιο αυτό θα μάθουμε:

- Να διερευνούμε, μέσω της γραφικής της παράστασης, τις ιδιότητες της συνάρτησης $y = αx^2$, $α \neq 0$ και τον ρόλο της παραμέτρου α.
- Να διερευνούμε τη μεταβολή του y για οποιαδήποτε μοναδιαία αύξηση του x σε συναρτήσεις της μορφής $y = αx^2$.
- Να ερμηνεύουμε και να επιλύουμε γραφικά την εξίσωση $αx^2 = β$.
- Να επιλύουμε προβλήματα χρησιμοποιώντας τις αναπαραστάσεις της συνάρτησης $y = αx^2$, $α \neq 0$.
- Να αναγνωρίζουμε γραμμικές εξισώσεις της μορφής $αx+βy = γ$ και να τις ερμηνεύουμε γραφικά.
- Να επιλύουμε γραφικά προβλήματα με γραμμικά συστήματα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους.
- Να διερευνούμε και να ερμηνεύουμε γραφικά ένα γραμμικό σύστημα και το πλήθος των λύσεών του.

Εισαγωγή

Η *μεταβολή* συνδέεται με την αλλαγή ενός μεγέθους σε σχέση με ένα άλλο. Οι μεταβολές αποτελούν ένα από τα σημαντικότερα φαινόμενα του περιβάλλοντος και της ζωής μας γενικότερα. Η διερεύνηση και η μοντελοποίηση αυτών των αλλαγών αποτελεί κεντρική δραστηριότητα στο πεδίο της Άλγεβρας και των Μαθηματικών γενικότερα.
Τη μεταβολή την αναγνωρίζουμε μέσα από τη διερεύνηση σχέσεων μεταξύ *συμμεταβαλλόμενων μεγεθών* και έχουμε ήδη μελετήσει ειδικές περιπτώσεις *συμμεταβολής,* όπως είναι τα *ανάλογα* και τα *αντιστρόφως ανάλογα* ποσά. Η έννοια της συμμεταβολής μορφοποιείται με τις γραμμικές συναρτήσεις, που μελετήσαμε στη Β΄ Γυμνασίου, ή τις μη γραμμικές συναρτήσεις, που θα μελετήσουμε σε αυτή την ενότητα.
Στη Β΄ τάξη γνωρίσαμε την έννοια της συνάρτησης, μια ειδική σχέση μεταξύ συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων. Συγκεκριμένα μάθαμε ότι «*Συνάρτηση μεταξύ δύο μεταβλητών ποσοτήτων **x** και **y** είναι μια διαδικασία σύμφωνα με την οποία **σε κάθε τιμή της μεταβλητής x αντιστοιχεί μια μόνο τιμή της μεταβλητής y***».
Σε μια τέτοια περίπτωση λέμε ότι **η μεταβλητή y εκφράζεται ως συνάρτηση της μεταβλητής x** ή ότι η μεταβλητή y είναι συνάρτηση της μεταβλητής x.
Η μεταβλητή x ονομάζεται **ανεξάρτητη μεταβλητή** και η μεταβλητή y, η οποία εξαρτάται από τη x, ονομάζεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.

Μια συνάρτηση μπορούμε να την παραστήσουμε:

- **Λεκτικά** με φραστική περιγραφή.
- **Αριθμητικά** με **πίνακα** τιμών.
- **Συμβολικά** με **τύπο**.
- **Γεωμετρικά** με **γραφική παράσταση**.

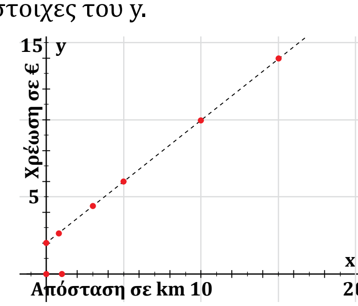
Οι αναπαραστάσεις συνδέονται μεταξύ τους και είναι πολύ χρήσιμο στην επίλυση προβλημάτων να μπορούμε να μεταβαίνουμε από τη μία αναπαράσταση στην άλλη.

Να μελετήσετε το ιστορικό σημείωμα με τίτλο «Η διαμόρφωση της έννοιας της συνάρτησης στους αιώνες».

Παράδειγμα: Το ταξί (απόσταση και χρέωση)

Μία εταιρεία ταξί χρεώνει για τη «σημαία» 2 € και 0,80 € για κάθε χιλιόμετρο. Το κόστος y εξαρτάται από τα χιλιόμετρα x της διαδρομής. Σε κάθε διαδρομή x αντιστοιχεί μία μόνο χρέωση y. Δηλαδή το y είναι συνάρτηση του x. Ο **τύπος** που συνδέει τα **x** και **y** είναι: Χρέωση = (τιμή ανά χιλιόμετρο)×(αριθμός χιλιομέτρων)+«σημαία» ή **y = 0,8x+2**. Η συνάρτηση αυτή, όπως έχουμε μάθει, είναι της μορφής **y=αx+β.**
Ο πίνακας προκύπτει από τον τύπο, θέτοντας τιμές στο x και βρίσκοντας τις αντίστοιχες του y.

Απόσταση (x)	1	2	3	5	10	15
Χρέωση (y)	2,80	3,60	4,40	6	10	14
(x,y)	(1, 2,80)	(2, 3,6)	(3, 4,40)	(5,6)	(10,10)	(15,14)



Η **γραφική παράσταση** προκύπτει με αποτύπωση των ζευγών (x, y) σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, και είναι η ημιευθεία του σχήματος, αφού x≥0.

Σημείωση:

> Γνωρίζουμε ότι οι συναρτήσεις της μορφής y = αx και y = αx+β έχουν γραφικές παραστάσεις ευθείες γραμμές και γι' αυτό λέγονται γραμμικές συναρτήσεις.

Χαρακτηριστική ιδιότητα των γραμμικών συναρτήσεων

Όπως είδαμε στις κανονικότητες της μορφής y = αν+β, όπου ν θετικός ακέραιος αριθμός, οι διαφορές των διαδοχικών όρων της είναι ο ίδιος σταθερός αριθμός. Ανάλογα:

Στις γραμμικές συναρτήσεις **y = αx+β**, όπου x πραγματικός αριθμός, η μεταβολή των διαδοχικών τιμών του y σε κάθε μοναδιαία αύξηση του x είναι σταθερή. Με άλλα λόγια, οι διαφορές μεταξύ των διαδοχικών τιμών της συνάρτησης σε κάθε μοναδιαία αύξηση του x είναι σταθερές και ίσες με α.

Παράδειγμα:

Για τη συνάρτηση y = 0,8x + 2 κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών και βρίσκουμε τις διαφορές μεταξύ διαδοχικών τιμών του y.

x (διαδρομή σε km)	1	2	3	4	5	6
y (χρέωση σε €)	2,80	3,60	4,40	5,20	6	6,80

Διαφορές → **0,80** **0,80** **0,80** **0,80** **0,80**

Οι γραμμικές συναρτήσεις είναι πολύ σημαντικές για τη μελέτη διαφόρων φαινομένων, αλλά δεν μπορούν να περιγράψουν όλα τα φαινόμενα. Υπάρχουν πολύ περισσότερες συναρτήσεις που δεν είναι γραμμικές και στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε τη μη γραμμική συνάρτηση **y = αx²**, α ≠ 0.

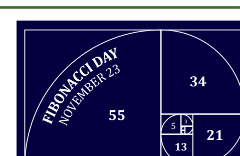
4.1 Η συνάρτηση y = αx², α ≠ 0

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθήτριες και οι μαθητές να μπορούν:

- Να διερευνούν, μέσω της γραφικής παράστασης, τις ιδιότητες της συνάρτησης $y = αx^2$, $α \neq 0$ και τον ρόλο της παραμέτρου α.
- Να διερευνούν τη μεταβολή του y για οποιαδήποτε μοναδιαία αύξηση του x σε συναρτήσεις της μορφής $y = αx^2$.
- Να ερμηνεύουν και να επιλύουν γραφικά την εξίσωση $αx^2 = β$.
- Να επιλύουν προβλήματα χρησιμοποιώντας τις αναπαραστάσεις της συνάρτησης $y = αx^2$, $α \neq 0$.

Ένας τύπος μη γραμμικής συνάρτησης είναι η συνάρτηση $y = αx^2$, η οποία ανήκει σε μια ευρύτερη κατηγορία συναρτήσεων, με γενικό τύπο $y = αx^2+βx+γ$, οι οποίες ονομάζονται **τετραγωνικές** συναρτήσεις.
Στις τετραγωνικές κανονικότητες $y = αν^2$, που γνωρίσαμε, ο ν ήταν θετικός ακέραιος αριθμός.
Στις τετραγωνικές συναρτήσεις $y = αx^2$, ο x είναι πραγματικός αριθμός. Οι τετραγωνικές συναρτήσεις $y = αx^2$ είναι μια επέκταση των τετραγωνικών κανονικοτήτων $y = αν^2$ και ισχύουν γι' αυτές οι ιδιότητες που μάθαμε για τις τετραγωνικές κανονικότητες.
Στη συνέχεια θα εξετάσουμε μερικές ιδιότητες της συνάρτησης $\mathbf{y = αx^2}$ και τον ρόλο του συντελεστή **α**.

Διερεύνηση 1: Το «χρυσό ορθογώνιο»



«Χρυσό ορθογώνιο» είναι ένα ορθογώνιο με λόγο μήκους προς πλάτος περίπου 1,62.

α) Να εξετάσετε αν το εμβαδόν του είναι συνάρτηση του πλάτους του.

β) Να εκφράσετε το εμβαδόν **E** ενός χρυσού ορθογωνίου με έναν τύπο ως συνάρτηση του πλάτους **x**.

γ) Να συμπληρώσετε τον διπλανό πίνακα:

Πλάτος (**x**)	0	1	2	3	5	6	7	8	20
Εμβαδόν (**E**)									
(x, E)									

δ) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι γραμμική, βρίσκοντας τις διαφορές των τιμών του E, για κάθε μοναδιαία αύξηση του x. Αν δεν είναι, να εξετάσετε τις «δεύτερες» διαφορές τους, δηλαδή τις διαφορές των πρώτων διαφορών τους.

ε) Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.
στ) Να χρησιμοποιήσετε τη γραφική παράσταση για να βρείτε τις διαστάσεις μιας κορνίζας σχήματος χρυσού ορθογωνίου που έχει εμβαδόν 162 cm^2. Να επιβεβαιώσετε την απάντησή σας αλγεβρικά.

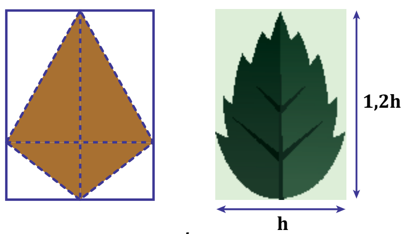
Με τη βοήθεια της εφαρμογής, να διερευνήσετε τη συνάρτηση $y = αx^2$, μέσω του χρυσού ορθογωνίου.

Διερεύνηση 2: Εκτιμώντας το εμβαδόν των φύλλων της λεύκας

Να συνεργαστείτε ανά δύο και να συζητήσετε τα αποτελέσματά σας στην τάξη.

Η βασική λειτουργία των φύλλων είναι να παράγουν θρεπτικά συστατικά για ολόκληρο το φυτό, μέσω της βιοχημικής λειτουργίας της φωτοσύνθεσης. Η ικανότητα ενός φύλλου να παρασκευάζει φυτική τροφή εξαρτάται και από το εμβαδόν του.
Στην περίπτωσή μας εξετάζουμε τα φύλλα της λεύκας, τα οποία είναι πανομοιότυπα, αλλά όχι ίδια (ίσα), όπως φαίνεται στο σχήμα (1).
Ένας τρόπος για να εκτιμήσουμε το εμβαδόν ενός φύλλου είναι να σχεδιάσουμε ένα ορθογώνιο γύρω του, όπως φαίνεται στο σχήμα (2) δεξιά και να υπολογίσουμε το εμβαδόν του. Μία άλλη εκτίμηση προκύπτει από το μοντέλο σε σχήμα χαρταετού στα αριστερά, το οποίο καλύπτει περίπου το πραγματικό φύλλο (σχήμα 2).


Σχήμα 1



Σχήμα 2

α) Ποιο περίπου τμήμα του ορθογωνίου καλύπτει το φύλλο; Να εξηγήσετε το σκεπτικό σας.
β) Αν γνωρίζετε το πλάτος (h) και το ύψος (1,2 h) ενός τέτοιου φύλλου, μπορείτε να εκτιμήσετε το εμβαδόν του Ε; Μπορείτε εδώ να αναγνωρίσετε ποσά που συμμεταβάλλονται; (δηλαδή η μεταβολή του ενός να προκαλεί ταυτόχρονη μεταβολή και του άλλου). Είναι συνάρτηση αυτή η σχέση;
γ) Να συμπληρώσετε τον διπλανό πίνακα.

h (cm)	1	2	3	4	5			8	9		11	12
Ε (cm^2)						21,6	29,4			60		

δ) Να εξετάσετε με τη μέθοδο των διαφορών αν η συνάρτηση είναι γραμμική ή τετραγωνική.
ε) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση, απεικονίζοντας τα ζεύγη του πίνακα σε ένα σύστημα συντεταγμένων.

Να διερευνήσετε την τετραγωνική συνάρτηση ανοίγοντας την εφαρμογή.

Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες μάθησης

Στη Β΄ Γυμνασίου μάθαμε ότι μια ισότητα που συνδέει δύο συμμεταβαλλόμενες ποσότητες x και y είναι συνάρτηση όταν σε κάθε τιμή του x αντιστοιχεί μία μόνο τιμή του y. Για παράδειγμα, οι ισότητες $y = -x^2$, $y = 1{,}62x^2$, $y = 1{,}2x^2$ είναι τύποι συναρτήσεων, αφού σε κάθε τιμή της μεταβλητής x αντιστοιχεί μόνο μία τιμή της μεταβλητής y.
Συναρτήσεις με γενική μορφή $y = αx^2$, όπου $α \neq 0$ και x πραγματικός αριθμός ονομάζονται **τετραγωνικές**.
Όλες οι ιδιότητες των τετραγωνικών κανονικοτήτων $y = αν^2$ όπου $α>0$ και ν θετικός ακέραιος αριθμός που είδαμε, ισχύουν και για τις τετραγωνικές συναρτήσεις $y = αx^2$, όπου $α \neq 0$ και x πραγματικός αριθμός.

Η γραφική παράσταση των τετραγωνικών συναρτήσεων είναι μια καμπύλη που λέγεται **παραβολή**. Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε χαρακτηριστικές ιδιότητες αυτών των συναρτήσεων, ενώ τη γενική μορφή τους θα μελετήσουμε στο Λύκειο.

Χαρακτηριστικές ιδιότητες των τετραγωνικών συναρτήσεων

- Μια συνάρτηση είναι τετραγωνική, όταν σε κάθε μοναδιαία αύξηση του x, η ακολουθία των «δεύτερων διαφορών» των διαδοχικών τιμών του y είναι σταθερή, δηλαδή όταν οι αντίστοιχες διαφορές των «πρώτων διαφορών» είναι ίσες.
- Μια τετραγωνική συνάρτηση είναι της μορφής $y = \alpha x^2$, όταν ο λόγος $\frac{y}{x^2}$, $x \neq 0$ είναι σταθερός.

Η ισότητα των «δεύτερων διαφορών» των τιμών μιας συνάρτησης δείχνει ότι η συνάρτηση είναι τετραγωνική αλλά όχι απαραίτητα της μορφής $y = \alpha x^2$. Για να διαπιστώσουμε ότι είναι της μορφής $y = \alpha x^2$ και να βρούμε τον συντελεστή α, εξετάζουμε την ισότητα των λόγων $\frac{y}{x^2}$, $\alpha \neq 0$.

Παράδειγμα:

Ο παρακάτω πίνακας είναι πίνακας μιας συνάρτησης, διότι σε κάθε τιμή του x αντιστοιχεί μόνο μία τιμή του y. Εξετάζουμε με τη μέθοδο των διαφορών αν η συνάρτηση είναι γραμμική, τετραγωνική ή τίποτα από τα δύο.

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	48	27	12	3	0	3	12	27	48

Πρώτες διαφορές: −21 −15 −9 −3 3 9 15 21

Δεύτερες διαφορές: **6 6 6 6 6 6 6**

Οι δεύτερες διαφορές είναι ίσες, άρα η συνάρτηση είναι τετραγωνική.

Για να δούμε αν η συνάρτηση είναι της μορφής $y = \alpha x^2$ εξετάζουμε τους λόγους $\frac{y}{x^2}$.

Έχουμε $\frac{48}{(-4)^2} = 3$, $\frac{27}{(-3)^2} = 3$, $\frac{12}{(-2)^2} = 3$, $\frac{48}{4^2} = 3$, οπότε οι λόγοι είναι ίσοι και επομένως η τετραγωνική συνάρτηση είναι της μορφής $y = \alpha x^2$. Επειδή $\frac{y}{x^2} = 3$ προκύπτει ότι ο τύπος είναι: $y = 3x^2$.

Να ανοίξετε τον σύνδεσμο και να απαντήσετε στις ερωτήσεις Σωστού-Λάθους για να εξοικειωθείτε στην αναγνώριση της τετραγωνικής συνάρτησης από τον πίνακα τιμών.

4.1.1 Οι συναρτήσεις $y = x^2$ και $y = -x^2$

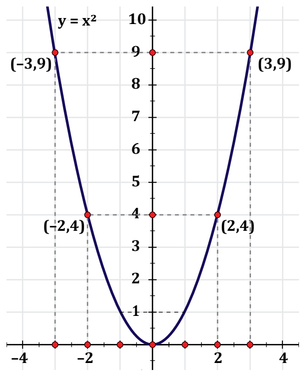
Για να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της $y = x^2$ κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών:

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	16	9	4	1	0	1	4	9	16
(x, y)	(−4,16)	(−3,9)	(−2,4)	(−1,1)	(0,0)	(1,1)	(2,4)	(3,9)	(4,16)

Με όμοιο τρόπο κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών και τη γραφική παράσταση της $y = -x^2$:

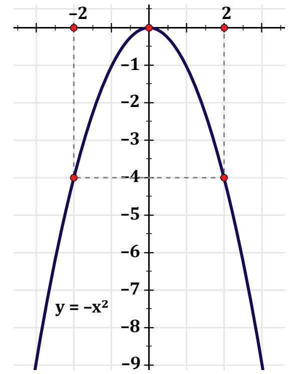
x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	−16	−9	−4	−1	0	−1	−4	−9	−16
(x, y)	(−4,−16)	(−3,−9)	(−2,−4)	(−1,−1)	(0,0)	(1,−1)	(2,−4)	(3,−9)	(4,−16)

Η συνάρτηση $y = x^2$



- Για κάθε $x \neq 0$ έχουμε $y > 0$ και η παραβολή βρίσκεται πάνω από τον άξονα x′x.
- Η παραβολή έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y′y.
- Η συνάρτηση έχει ελάχιστη τιμή $y = 0$, για $x = 0$. Το σημείο Ο (0,0) λέγεται **κορυφή** της παραβολής.

Η συνάρτηση $y = -x^2$

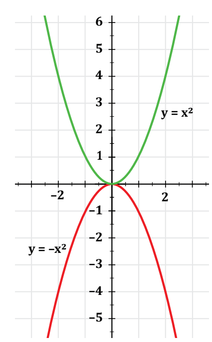


- Για κάθε $x \neq 0$ έχουμε $y < 0$ και η παραβολή βρίσκεται κάτω από τον άξονα x′x.
- Η παραβολή έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y′y.
- Η συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή $y = 0$, για $x = 0$. Το σημείο Ο (0,0) λέγεται **κορυφή** της παραβολής.

Γενικά

Η συνάρτηση $y = αx^2$ έχει για $x = 0$, ελάχιστη τιμή 0 όταν $α > 0$ και μέγιστη τιμή 0 όταν $α < 0$.
Η γραφική της παράσταση είναι παραβολή και έχει κορυφή το σημείο Ο(0,0).
Όταν $α > 0$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα x′x και κάτω από τον άξονα x′x όταν $α < 0$.

Αν σχεδιάσουμε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις παραβολές $y = x^2$ και $y = -x^2$, θα διαπιστώσουμε ότι είναι συμμετρικές με άξονα συμμετρίας τον άξονα x′x, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Γενικά

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = αx^2$ και $y = -αx^2$, $α \neq 0$ είναι παραβολές συμμετρικές ως προς τον άξονα x′x.

Σημείωση:
Η γραφική παράσταση της τετραγωνικής συνάρτησης $y = αx^2$, με $α \neq 0$ και x πραγματικό αριθμό, είναι μια συνεχής γραμμή, σε αντίθεση με τη γραφική παράσταση της τετραγωνικής κανονικότητας $y = αν^2$, με $α > 0$ και ν θετικό ακέραιο αριθμό, η οποία αποτελείται από μεμονωμένα σημεία.

Να διερευνήσετε τον ρόλο του α για τη συνάρτηση $y = αx^2$ ανοίγοντας την εφαρμογή.

Να ανοίξετε την εφαρμογή για να μελετήσετε το συμπληρωματικό υλικό «Γραφική παράσταση συνάρτησης».

Εφαρμογή 1: Από τον πίνακα στον τύπο

Δίνεται ο διπλανός πίνακας.

α) Να εξετάσετε αν είναι πίνακας συνάρτησης.
β) Αν είναι συνάρτηση, να εξετάσετε αν είναι γραμμική, τετραγωνική ή τίποτα από τα δύο.
γ) Αν είναι συνάρτηση, να βρείτε τον τύπο της.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5

Απάντηση

α) Ο πίνακας είναι πίνακας συνάρτησης διότι όπως παρατηρούμε, σε κάθε τιμή της μεταβλητής x αντιστοιχεί μόνο μία τιμή της μεταβλητής y.

β)

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5

Πρώτες διαφορές: –2,5 –1,5 –0,5 0,5 1,5 2,5

Δεύτερες διαφορές: **1 1 1 1 1**

Οι δεύτερες διαφορές είναι ίσες, άρα η συνάρτηση είναι τετραγωνική.

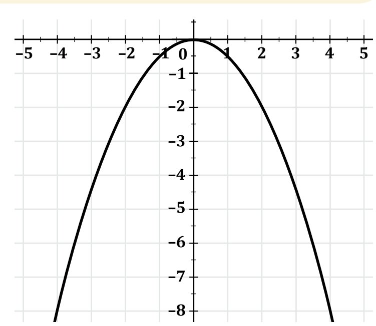
γ) Εξετάζουμε τους λόγους $\frac{y}{x^2}$.

Έχουμε: $\frac{4,5}{(-3)^2} = 0,5, \frac{2}{(-2)^2} = 0,5, \frac{0,5}{(-1)^2} = 0,5, \frac{4,5}{3^2} = 0,5$. Οι λόγοι είναι ίσοι, άρα η συνάρτηση είναι της μορφής $y = αx^2$. Εξάλλου $\frac{y}{x^2} = 0,5$, οπότε: $y = 0,5x^2$.

Εφαρμογή 2: Από τη γραφική παράσταση στον τύπο

Δίνεται η παρακάτω παραβολή. Να βρείτε την εξίσωσή της (δηλαδή τον τύπο της συνάρτησης, του οποίου είναι γραφική παράσταση).

Απάντηση



Αφού είναι παραβολή με κορυφή το Ο (0, 0) ο γενικός τύπος της είναι $\mathbf{y = αx^2}$. Αρκεί να προσδιορίσουμε τον συντελεστή α. Οι συντεταγμένες των σημείων της παραβολής (διατεταγμένα ζεύγη) επαληθεύουν τον τύπο της. Παρατηρούμε ότι στην παραβολή ανήκουν σημεία όπως τα: (–2,–2), (2,–2), (–4,–8), (4,–8). Αντικαθιστώντας στον τύπο τις συνταγμένες του σημείου (–2,–2), έχουμε:

$-2=α(-2)^2$ ή $-2=α\cdot 4$ ή $α=-\frac{2}{4}$ ή $α=-0,5$.

Άρα, ο τύπος της παραβολής είναι: $y = -0,5x^2$

Εφαρμογή 3: Ο ρόλος του α στην παραβολή $y = αx^2$

Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί 6 παραβολές της μορφής $\mathbf{y = αx^2}$.

α) Να βρείτε ποιες από αυτές έχουν **α** > 0 και ποιες **α** < 0.

β) Να βρείτε ποιες έχουν μέγιστη και ποιες ελάχιστη τιμή.

γ) Να βρείτε ποια ζεύγη των παραβολών είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα x΄x.

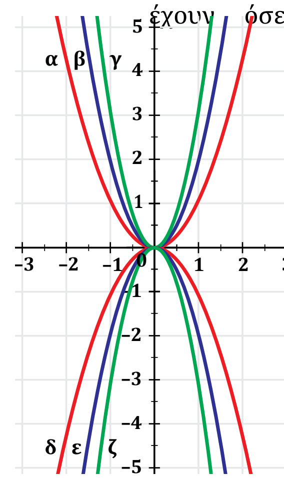
δ) Αν οι τύποι τους είναι $y = -3x^2$, $y = 3x^2$, $y = -2x^2$, $y = 2x^2$, $y = -x^2$, $y = x^2$, να αντιστοιχίσετε κάθε τύπο με τη γραφική του παράσταση.

ε) Να παρατηρήσετε τι συμβαίνει με τους κλάδους της παραβολής όταν αυξάνει η απόλυτη τιμή του α. Να εξετάσετε δύο περιπτώσεις, για α > 0 και για α < 0.

Απάντηση

α) Οι παραβολές α, β, γ έχουν $\alpha > 0$ διότι βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x. Οι παραβολές δ, ε, ζ έχουν $\alpha < 0$ διότι βρίσκονται κάτω από τον άξονα x΄x.

β) Μέγιστη τιμή $y = 0$ έχουν όσες έχουν $\alpha < 0$, δηλαδή οι δ, ε, ζ. Ελάχιστη τιμή $y = 0$ έχουν όσες έχουν $\alpha > 0$, δηλαδή οι α, β, γ.



γ) Συμμετρικά ζεύγη είναι τα: (α, δ), (β, ε) και (γ, ζ).

δ) Βρίσκουμε ένα σημείο της παραβολής (α), έστω το (1, 1) και εξετάζουμε ποιον τύπο επαληθεύει (δες και εφαρμογή 2). Το (1,1) με δοκιμές στους τύπους διαπιστώνουμε ότι επαληθεύει τον τύπο $y = x^2$. Άρα η α έχει τύπο $y = x^2$. Με όμοιο τρόπο διαπιστώνουμε ότι: η β έχει τύπο $y = 2x^2$, η γ έχει τύπο $y = 3x^2$, η δ έχει τύπο $y = -x^2$, η ε έχει τύπο $y = -2x^2$ και η ζ έχει τύπο $y = -3x^2$.

ε) Για $\alpha > 0$. Η παραβολή (α) έχει $\alpha = 1$, η παραβολή (β) έχει $\alpha = 2$ και η παραβολή (γ) έχει $\alpha = 3$. Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνει η απόλυτη τιμή του α, η παραβολή «κλείνει», γίνεται πιο απότομη και οι κλάδοι της πλησιάζουν τον άξονα y΄y. Για $\alpha < 0$. Η παραβολή (δ) έχει $\alpha = -1$, δηλαδή $|-\alpha| = 1$. Η παραβολή (ε) έχει $\alpha = -2$, δηλαδή $|-2| = 2$. Η παραβολή (ζ) έχει $\alpha = -3$, δηλαδή $|-3| = 3$. Παρατηρούμε κι εδώ ότι όσο αυξάνει η απόλυτη τιμή του α, η παραβολή «κλείνει», γίνεται πιο απότομη και οι κλάδοι της πλησιάζουν τον άξονα y΄y.

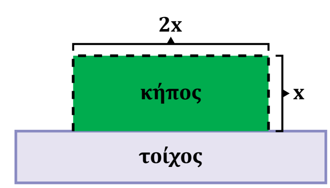
Να ανοίξετε τον σύνδεσμο και εφαρμόζοντας την τεχνική μεταφοράς και τοποθέτησης, να εξοικειωθείτε με τη σχέση ανάμεσα στο α και τη μορφή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y = \alpha x^2$.

4.1.2 Γραφική επίλυση της εξίσωσης $\alpha x^2 = \beta$

Διερεύνηση 1: Περίφραξη κήπου

Να εργαστείτε ανά δύο. Να συζητήσετε τα αποτελέσματά σας στην τάξη.

Ο κ. Μαρίνος θέλει να περιφράξει στο αγρόκτημά του έναν κήπο ορθογώνιου σχήματος, εμβαδού 128 cm^2. Η μία πλευρά του κήπου είναι ένα τμήμα τοίχου.



α) Αν το μήκος του κήπου είναι διπλάσιο από το πλάτος του, να εκφράσετε το εμβαδόν του κήπου ως συνάρτηση του x.

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

γ) Χρησιμοποιώντας τη γραφική παράσταση της συνάρτησης να βρείτε τις διαστάσεις του κήπου.

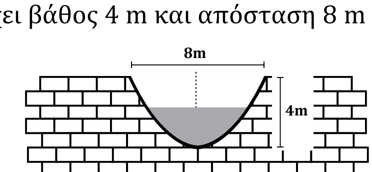
δ) Αν ο κ. Μαρίνος διαθέτει σύρμα περίφραξης 35 m, μπορεί να περιφράξει τον κήπο του;

Διερεύνηση 2: Κανάλι αποστράγγισης

Να εργαστείτε είτε ανά δύο είτε σε μικρές ομάδες και να συζητήσετε τα αποτελέσματά σας στην τάξη.

Ένα κανάλι αποστράγγισης έχει διατομή σε σχήμα παραβολής. Το κανάλι έχει βάθος 4 m και απόσταση 8 m στην κορυφή, όπως στο σχήμα. Εάν το βάθος του νερού στην τάφρο είναι 2 m, να εκτιμήσετε το πλάτος που έχει η επιφάνεια του νερού στην τάφρο.

Υπόδειξη: Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής. Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση και να λύσετε γραφικά μια εξίσωση της μορφής $\alpha x^2 = \beta$.



Διερεύνηση 3: Γραφική επίλυση εξίσωσης

Να εργαστείτε είτε ανά δύο είτε σε μικρές ομάδες και να συζητήσετε τα αποτελέσματά σας στην τάξη.

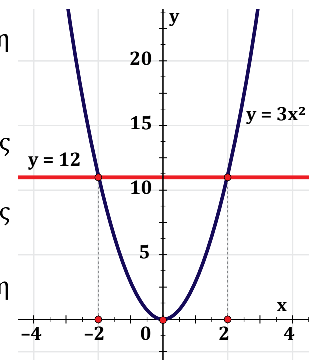
α) Στο σχήμα είναι σχεδιασμένες, στο ίδιο σύστημα αξόνων, η ευθεία $y = 12$ και η παραβολή $y = 3x^2$.

i) Να βρείτε τα κοινά σημεία των δύο γραφικών παραστάσεων.

ii) Να εξηγήσετε τι σημαίνουν οι συντεταγμένες των κοινών σημείων για τις δύο συναρτήσεις με τύπους $y = 12$ και $y = 3x^2$.

iii) Να εξηγήσετε γιατί οι τετμημένες των κοινών σημείων αποτελούν λύση της εξίσωσης $3x^2 = 12$.

β) Να περιγράψετε τα βήματα με τα οποία θα μπορούσε να επιλυθεί γραφικά η εξίσωση: $-\frac{1}{2}x^2=-2$.



Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες μάθησης

Για να επιλύσουμε γραφικά την εξίσωση $\boldsymbol{\alpha x^2 = \beta}$ ακολουθούμε τα εξής βήματα:

α) Σχεδιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $\boldsymbol{y = \alpha x^2}$ (παραβολή) και $\boldsymbol{y = \beta}$ (ευθεία) στο ίδιο σύστημα αξόνων.

β) Βρίσκουμε τα κοινά σημεία (αν υπάρχουν) παραβολής και ευθείας.

γ) Οι τετμημένες των κοινών σημείων είναι οι λύσεις της εξίσωσης $\boldsymbol{\alpha x^2 = \beta}$.

Εφαρμογή 1: Γραφική επίλυση εξίσωσης

Στο ίδιο σύστημα αξόνων έχουν σχεδιαστεί οι γραφικές παραστάσεις της παραβολής $y = 2x^2$ και της ευθείας $y = 8$.

α) Να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας και της παραβολής.

β) Να βρείτε από τις γραφικές παραστάσεις τις λύσεις της εξίσωσης $2x^2 = 8$.

γ) Να επαληθεύσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (β).

Απάντηση

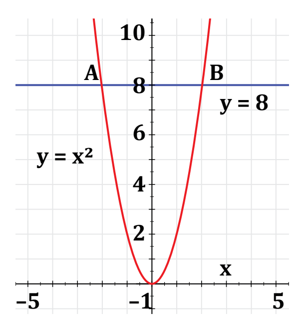
α) Τα κοινά σημεία παραβολής και ευθείας είναι τα Α $(-2, 8)$ και Β $(2, 8)$.

β) Αφού τα σημεία Α και Β ανήκουν στην παραβολή, οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν τον τύπο $y = 2x^2$. Έτσι:

Για το Α$(-2, 8)$ έχουμε: $8 = 2(-2)^2$ ή $2(-2)2 = 8$, που ισχύει.

Για το Β$(2, 8)$ έχουμε: $8=2\cdot 2^2$ ή $2\cdot 2^2 = 8$, που ισχύει.

γ) Από τις προηγούμενες ισότητες συμπεραίνουμε ότι οι αριθμοί **−2** και **2** επαληθεύουν την εξίσωση $\boldsymbol{2x^2 = 8}$. Δηλαδή οι αριθμοί -2 και 2, που είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων της παραβολής $y = 2x^2$ και της ευθείας $y=8$, είναι οι λύσεις της εξίσωσης $2x^2 = 8$.



Εφαρμογή 2: Γραφική επίλυση εξίσωσης

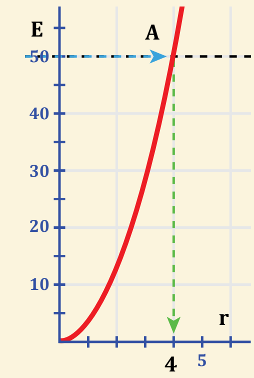
α) Να γράψετε τον τύπο που δίνει το εμβαδόν Ε κύκλου ακτίνας r. Να εξηγήσετε γιατί το εμβαδόν είναι τετραγωνική συνάρτηση. Να διακρίνετε την ανεξάρτητη και την εξαρτημένη μεταβλητή.

β) Αν θέλουμε να βρούμε την ακτίνα r ενός κύκλου με εμβαδόν 50 cm^2, ποια από τις ακόλουθες εξισώσεις πρέπει να λύσουμε;

i) $50\cdot 3{,}14 = r^2$, **ii)** $3{,}14\cdot r = 50$, **iii)** $3{,}14 = 50r$, **iv)** $3{,}14\cdot r^2 = 50$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $3{,}14r^2 = 50$

δ) Να εξηγήσετε γιατί το τμήμα της παραβολής είναι κατά προσέγγιση η γραφική παράσταση της συνάρτησης εμβαδού του κυκλικού δίσκου.



Απάντηση

α) Το εμβαδόν κυκλικού δίσκου ακτίνας r γνωρίζουμε ότι δίνεται από τον τύπο $E = \pi r^2$ ή $E \approx 3{,}14r^2$, που είναι μια τετραγωνική συνάρτηση της μορφής $y = \alpha x^2$ με $\alpha = 3{,}14$ και $x = r$. Ανεξάρτητη μεταβλητή είναι η ακτίνα r και εξαρτημένη το εμβαδόν E.

β) Γνωρίζουμε ότι $E = 50$ και αναζητούμε το r. Θέτουμε $E = 50$ στον τύπο $E = 3{,}14r^2$, οπότε προκύπτει η εξίσωση $50 = 3{,}14r^2$ ή $3{,}14r^2 = 50$.
Άρα σωστή απάντηση είναι η (iv).

γ) Είναι $3{,}14 \cdot r^2 = 50$ ή $\approx r^2 = \dfrac{50}{3,14}$ ή $r^2 \approx 16$, οπότε $r \approx 4$ ή $r \approx -4$ και επειδή $r > 0$ ως ακτίνα κύκλου, θα είναι $r \approx 4$.

δ) Η γραφική παράσταση είναι τμήμα παραβολής της μορφής $y = \alpha x^2$ η οποία με $y = E$ και $x = r$ γράφεται $E = \alpha r^2$. Από το σχήμα βλέπουμε ότι το $(4, 50)$ είναι σημείο της παραβολής, οπότε ισχύει ότι: $50 = \alpha \cdot 4^2$ ή $50 = 16\alpha$ ή $\alpha \approx 3{,}13$. Άρα $E \approx 3{,}13r^2$ και, επομένως, είναι κατά προσέγγιση η γραφική παράσταση της συνάρτησης εμβαδού.

Να διερευνήσετε τη λύση της εξίσωσης $\alpha x^2 = \beta$, ανοίγοντας την εφαρμογή.

Ερωτήσεις για Αυτοαξιολόγηση

Στις παρακάτω ερωτήσεις να βάλετε σε κύκλο το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

1 Η συνάρτηση με τύπο $y = \alpha x^2$, $\alpha \neq 0$ έχει γραφική παράσταση:

Α) Μία παραβολή που βρίσκεται πάντα πάνω από τον άξονα x΄x.
Β) Μία παραβολή που βρίσκεται πάντα κάτω από τον άξονα x΄x.
Γ) Μία παραβολή η οποία για $x \neq 0$ βρίσκεται πάνω ή κάτω από τον άξονα x΄x σύμφωνα με την τιμή του α.
Δ) Μία παραβολή που βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x, αν $\alpha < 0$, και κάτω, αν $\alpha > 0$.

2 Οι παραβολές $y = 2x^2$ και $y = -2x^2$:

Α) Δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.
Β) Είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα x΄x.
Γ) Είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα y΄y.
Δ) Έχουν δύο κοινά σημεία.

3 Οι κλάδοι της παραβολής $y = 2x^2$ σε σύγκριση με τους κλάδους της $y = 3x^2$ είναι:

Α) «Πιο κοντά» στον άξονα y΄y.
Β) «Πιο μακριά» στον άξονα y΄y.

4 **Α)** Όταν $|\alpha|$ αυξάνεται, τότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \alpha x^2$ απομακρύνεται από τον άξονα y΄y.
Β) Όταν $|\alpha|$ ελαττώνεται, τότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \alpha x^2$ πλησιάζει στον άξονα y΄y.
Γ) Όταν $|\alpha|$ αυξάνεται, τότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \alpha x^2$ πλησιάζει στον άξονα y΄y.

5 Οι λύσεις της εξίσωσης $2x^2 = 7$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων:

Α) Της παραβολής $y = 2x^2$ και της ευθείας $y = -7$.
Β) Της παραβολής $y = -2x^2$ και της ευθείας $y = 7$.
Γ) Της παραβολής $y = 7x^2$ και της ευθείας $y = 2$.
Δ) Της παραβολής $y = 2x^2$ και της ευθείας $y = 7$.

6 Το σημείο (–2,5, –12,5) είναι σημείο της παραβολής:

Α) $y = 2x^2$ **Β)** $y = 3x^2$ **Γ)** $y = -2x^2$ **Δ)** $y = -0{,}5x^2$

7 Στην παραβολή $y=\frac{3}{4}x^2$ ανήκει το σημείο:

Α) $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$ **Β)** $\left(-1, \frac{4}{3}\right)$ **Γ)** (–2, 3) **Δ)** (–3, 7)

Να ανοίξετε τον σύνδεσμο και να απαντήσετε στις ερωτήσεις αυτοαξιολόγησης.

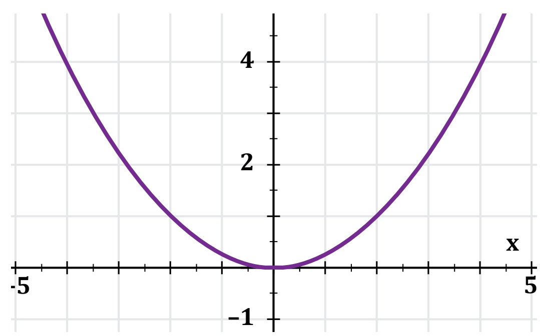
Ασκήσεις και Προβλήματα

1 Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων

$$y=3x^2,\ y=-3x^2,\ y=-\frac{1}{3}x^2,\ y=\frac{1}{3}x^2$$

στο ίδιο σύστημα αξόνων.

2 **α)** Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης που έχει γραφική παράσταση την παραβολή.



β) Να εξετάσετε αν τα σημεία (–8, 16), (5, 10) ανήκουν στην παραβολή.

γ) Να προσδιορίσετε το κ ώστε το σημείο (κ, 9) να ανήκει στην παραβολή.

δ) Να γράψετε την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της παραβολής.

ε) Να γράψετε δύο σημεία της παραβολής, συμμετρικά ως προς τον άξονα συμμετρίας της παραβολής.

3 Αν το σημείο Α(–3, –36) ανήκει στην παραβολή που έχει κορυφή το Ο(0, 0), να βρείτε την εξίσωση της παραβολής (δηλαδή τον τύπο της συνάρτησης που έχει γραφική παράσταση την παραβολή αυτή).

4 «Σκέφτομαι έναν ακέραιο αριθμό. Υψώνω στο τετράγωνο. Πολλαπλασιάζω με το –2. Αποτέλεσμα».

α) Αν η Μαρία σκέφτηκε τον 6, ποιον αριθμό βρήκε;

β) Αν ο Θανάσης σκέφτηκε τον –7, ποιον αριθμό βρήκε;

γ) Να κατασκευάσετε έναν πίνακα τιμών για x = –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5.

δ) Με τη μέθοδο των διαφορών, να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι γραμμική, τετραγωνική ή τίποτα από τα δύο.

ε) Αν «ο αριθμός που σκέφτομαι» είναι ο x και «το αποτέλεσμα» ο y, να εξετάσετε αν η σχέση μεταξύ των x και y είναι συνάρτηση. Αν είναι, να βρείτε τον τύπο της.

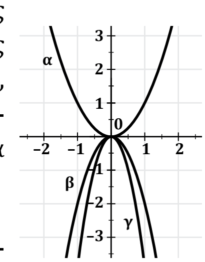
στ) Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

ζ) Αν η Εύα βρήκε –24,5, ποιον αριθμό σκέφτηκε;

η) Η Ραχήλ και ο Αδάμ ξεκίνησαν από διαφορετικούς αριθμούς και βρήκαν και οι δύο –200. Ποιους αριθμούς σκέφτηκαν;

Για να παίξετε το παιχνίδι «Βρες τον αριθμό» ανοίξτε την εφαρμογή.

5 Να αντιστοιχίσετε καθεμία από τις παραβολές α, β, γ με έναν από τους τύπους: $y = -3x^2$, $y = x^2$, $y = -2x^2$, $y = -4x^2$. Να βρείτε σε ποια παραβολή αντιστοιχεί κάθε τύπος. Να εξηγήσετε πώς σκεφθήκατε.



6 Να εξετάσετε αν ο παρακάτω πίνακας μπορεί να είναι πίνακας συνάρτησης. Αν είναι, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης. Να εξηγήσετε αναλυτικά πώς εργαστήκατε.

x	0	1	2	3	4	5
y	0	0,4	1,6	3,6	6,4	10

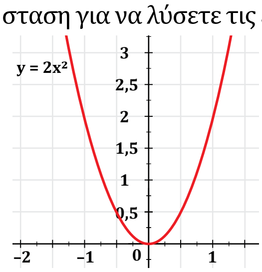
7 Να λύσετε γραφικά τις εξισώσεις:

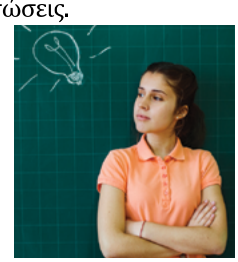
α) $3x^2 = 12$ **β)** $x^2–4 = 0$

Να περιγράψετε αναλυτικά όλα τα βήματα που κάνετε.

8 Να υπολογίσετε την τιμή του k ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = (2–k)x^2$ να είναι παραβολή και να παρουσιάζει μέγιστη τιμή.

9 Να χρησιμοποιήσετε την παρακάτω γραφική παράσταση για να λύσετε τις εξισώσεις.

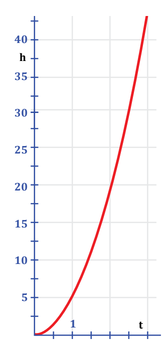


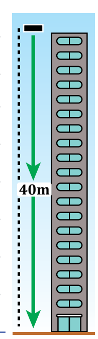


α) $2x^2 = 0,5$ **β)** $2x^2–2 = 0$ **γ)** $2x^2= 3$ (προσεγγιστικά).

10 **Μοντελοποίηση.**

Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, η οποία δείχνει το διάστημα h (σε m), που έχει διανύσει ένα αντικείμενο, το οποίο αφήνεται να πέσει από ύψος 40 m ως συνάρτηση του χρόνου t (σε sec).





α) Πόσος χρόνος πέρασε όταν το αντικείμενο είχε διανύσει 20 m; Να γράψετε μία εξίσωση η οποία να περιγράφει την κατάσταση και να τη λύσετε γραφικά.

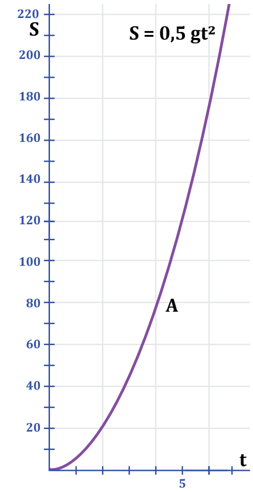
β) Σε πόσο χρόνο το αντικείμενο έφθασε στο έδαφος;

γ) Σε ποιο ύψος από το έδαφος βρισκόταν το αντικείμενο 1 sec μετά την πτώση του;

δ) Πόσος περίπου χρόνος πέρασε όταν το αντικείμενο βρισκόταν σε ύψος 15 m από το έδαφος;

11 Γνωρίζουμε από τη Φυσική ότι αν ένα σώμα βρίσκεται σε ελεύθερη πτώση, τότε σε χρόνο t διανύει διάστημα S που δίνεται από τον τύπο $S = 0,5gt^2$($g \approx 10m/sec^2$). Το διάγραμμα διαστήματος χρόνου δίνεται στο διπλανό σχήμα.

α) Να εξηγήσετε γιατί ο τύπος $S = 0,5gt^2$ είναι τύπος τετραγωνικής συνάρτησης της μορφής $\mathbf{y = \alpha x^2}$.



Να βρείτε: το α του τύπου, την ανεξάρτητη και την εξαρτημένη μεταβλητή.

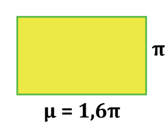
β) Να εξηγήσετε γιατί το διάγραμμα είναι παραβολή με κορυφή (0,0) και έχει μόνο έναν κλάδο, που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο.

γ) Αν το σώμα πέφτει από ύψος 180 m, να βρείτε από το διάγραμμα σε πόσο χρόνο θα φθάσει στο έδαφος. Να κάνετε επαλήθευση της απάντησής σας χρησιμοποιώντας τον τύπο.

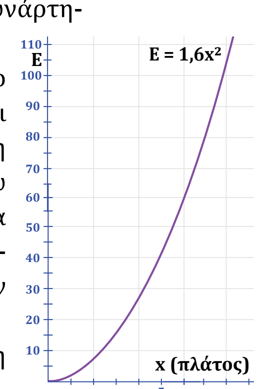
δ) Να βρείτε, από το διάγραμμα, σε ποιο ύψος βρισκόταν το σώμα 3 sec μετά την πτώση του. Να κάνετε επαλήθευση της απάντησής σας χρησιμοποιώντας τον τύπο.

ε) Να ερμηνεύσετε τις συντεταγμένες του σημείου Α (4, 80) με βάση το πλαίσιο του προβλήματος.

12 Σε ένα «χρυσό ορθογώνιο» ισχύει: «μήκος ≈ 1,6·πλάτος».



α) Αν συμβολίσουμε με x το πλάτος του ορθογωνίου, να εκφράσετε το εμβαδόν Ε ως συνάρτηση του x.



β) Να εξηγήσετε γιατί το διπλανό διάγραμμα είναι η γραφική παράσταση «πλάτους-εμβαδού» του χρυσού ορθογωνίου. Να εξηγήσετε γιατί η παραβολή έχει μόνο έναν «κλάδο»;

γ) Να εκτιμήσετε από τη γραφική παράσταση:

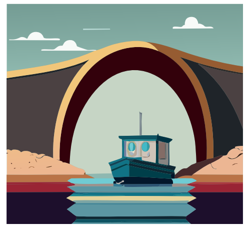
i) Τις διαστάσεις του ορθογωνίου με εβαδόν 102 cm^2.

ii) Το εμβαδόν του ορθογώνιου, που έχει πλάτος 4 cm.

iii) Να επαληθεύσετε τα αποτελέσματά σας με τον τύπο.

13 **Παραβολική γέφυρα.**

Το πλάτος ενός πλωτού ποταμού σε κάποιο σημείο στενεύει σημαντικά και στο μέρος αυτό υπάρχει μία παραβολική γέφυρα, ύψους 6 m και πλάτους 12 m (εικόνα). Ένα ρυμουλκό θέλει να περάσει μια πλατφόρμα με κιβώτια γεμάτα εμπόρευμα, κάτω από τη γέφυρα. Η πλατφόρμα έχει πλάτος 8 m και ύψος 2,5 m. Θα μπορέσει να περάσει κάτω από τη γέφυρα;



14 Στη μηχανική, η κινητική ενέργεια Ε ενός σώματος μάζας m που κινείται με ταχύτητα v ισούται με: $E=\frac{1}{2}mv^2$.

α) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση Ε της ενέργειας ως προς την ταχύτητα v, για ένα σώμα μάζας 4 kg.

β) Αν η ταχύτητα του σώματος διπλασιαστεί, πόσο θα αυξηθεί η ενέργειά του;

4.2 Γραφική επίλυση συστήματος δύο γραμμικών εξισώσεων

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθήτριες και οι μαθητές να μπορούν:

- Να αναγνωρίζουν γραμμικές εξισώσεις της μορφής αx+βy = γ και να τις ερμηνεύουν γραφικά.
- Να επιλύουν γραφικά προβλήματα με γραμμικά συστήματα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους.
- Να διερευνούν και να ερμηνεύουν γραφικά ένα γραμμικό σύστημα και το πλήθος των λύσεών του.

4.2.1 Η έννοια της γραμμικής εξίσωσης

Διερεύνηση 1: Γραμμική εξίσωση

Να συνεργαστείτε ανά δύο και να συζητήσετε τα αποτελέσματά σας στην τάξη.
Αν θέλετε να ανταλλάξετε ένα χαρτονόμισμα 50 € με κέρματα του ενός και των δύο ευρώ, με πόσους τρόπους μπορείτε να το κάνετε;
Υπόδειξη: Αν x είναι ο αριθμός των νομισμάτων με 1 € και y των νομισμάτων με 2 €, να γράψετε μία εξίσωση η οποία να περιγράφει την κατάσταση. Να κατασκευάσετε έναν πίνακα τιμών. Να παραστήσετε τα ζεύγη του πίνακα με σημεία σε ένα σύστημα συντεταγμένων. Τι παρατηρείτε;

Διερεύνηση 2: Γραμμική εξίσωση

Να συνεργαστείτε ανά δύο και να συζητήσετε τα αποτελέσματά σας στην τάξη.
Μια παρέα φίλων συναντιούνται συνήθως κάθε Σάββατο για καφέ και κουβέντα. Στην τελευταία συνάντησή τους όλοι πήραν κάποιο ρόφημα. Κάποιοι απ’ αυτούς πήραν καφέ και οι υπόλοιποι ζεστή σοκολάτα. Ο καφές κοστίζει 2 € και η σοκολάτα 3 €. Πλήρωσαν συνολικά 24 €.
Πόσοι φίλοι μπορεί να ήταν στην παρέα; Να εξηγήσετε πώς σκεφθήκατε.
Ο Γιώργος ισχυρίζεται ότι οι φίλοι ήταν 9, ενώ η Μαρία 10. Ποιος νομίζετε ότι έχει δίκιο;

Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες μάθησης

Η εξίσωση αx+βy = γ

Υπάρχουν προβλήματα που η επίλυσή τους οδηγεί σε **εξίσωση με δύο αγνώστους**, όπως για παράδειγμα οι εξισώσεις: x+y = 5 ή 5x+20y = 100 ή 2x–y = –30 κ.λπ. Η γενική μορφή της εξίσωσης είναι: **αx+βy = γ**.

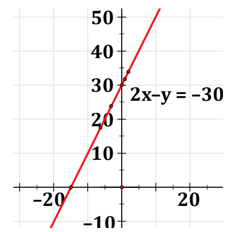
Λύση μιας εξίσωσης με 2 αγνώστους είναι κάθε ζεύγος αριθμών (x, y) που την επαληθεύει.

Παράδειγμα:

Έστω η εξίσωση $2x–y = –30$. Το ζεύγος $(–6, 18)$ είναι λύση διότι αν θέσουμε στην εξίσωση $x = –6$ και $y = 18$ προκύπτει: $2·(–6)–18 = –12–18 = –30$, οπότε την επαληθεύει.
Το ζεύγος (1, 5) δεν είναι λύση, διότι αν θέσουμε στην εξίσωση $x = 1$ και $y = 5$, προκύπτει: $2·1–5 = 2–5 = –3 \neq –30$, δηλαδή δεν την επαληθεύει.

x	0	1	2	–3	–6
y	30	32	34	24	18

Μία εξίσωση της μορφής $αx+βy = γ$ έχει γενικά άπειρες λύσεις και μπορούμε να βρούμε όσες θέλουμε δίνοντας τιμές στο x προσδιορίζοντας για καθεμία τις αντίστοιχες τιμές του y. Για παράδειγμα, δίνοντας διαδοχικά στο x τις τιμές: 0, 1, 2, –3 και –6 βρίσκουμε από την εξίσωση $2x–y = –30$ τις αντίστοιχες τιμές του y όπως φαίνονται στον πίνακα.



Αν τα ζεύγη (x, y) των λύσεων τα απεικονίσουμε σε ένα σύστημα συντεταγμένων, θα δούμε ότι βρίσκονται πάνω σε μία ευθεία. Όλα τα σημεία της ευθείας έχουν συντεταγμένες (x, y) που είναι λύσεις της εξίσωσης $2x–y = –30$ και αντίστροφα. Κάθε ζεύγος (x, y) που είναι λύση της εξίσωσης $2x–y = –30$ είναι σημείο της ευθείας. Η ευθεία αυτή λέμε ότι έχει εξίσωση $2x–y = –30$ και είναι της μορφής $αx+βy = γ$ με $α = 2$, $β = –1$ και $γ = –30$.
Αν επιλύσουμε την $2x–y = –30$ ως προς y, προκύπτει η ισοδύναμη εξίσωση $y = 2x+30$, που είναι γραμμική συνάρτηση της μορφής $y = αx+β$ με $α = 2$ και $β = 30$.

Γενικά

Η εξίσωση **αx+βy = γ** λέγεται **γραμμική εξίσωση.** Λύση της είναι κάθε διατεταγμένο ζεύγος (x, y) το οποίο επαληθεύει την εξίσωση και το σύνολο των λύσεών της βρίσκονται πάνω σε μία **ευθεία** η οποία αποτελεί τη γραφική της παράσταση.

Σημείωση:

Για να κατασκευάσουμε τη γραφική παράσταση μιας ευθείας όπως η $αx+βy = γ$ αρκεί να προσδιορίσουμε δύο μόνο σημεία της.

Να διερευνήσετε τη σχέση μιας εξίσωσης ευθείας με τα σημεία που την επαληθεύουν ανοίγοντας την εφαρμογή.

Εφαρμογή 1

α) Να κατασκευάσετε έναν πίνακα τιμών και τη γραφική παράσταση της ευθείας $4x+2y = 6$.
β) Να εξετάσετε αν τα σημεία $(3, –3)$ και $(–1, 4)$ βρίσκονται πάνω στην ευθεία $4x+2y = 6$.

Απάντηση

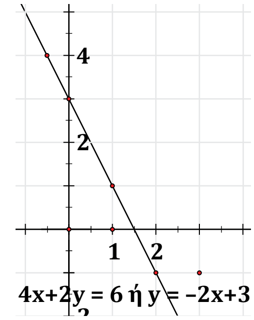
α) Η εξίσωση $4x+2y = 6$ γράφεται ισοδύναμα: $2y = –4x+6$ ή $y = –2x+3$.
Δίνουμε τιμές στο x, βρίσκουμε τις αντίστοιχες για το y και κατασκευάζουμε τον αντίστοιχο πίνακα.

x	0	1
y	3	1

Απεικονίζουμε τα ζεύγη (x, y) σε ένα σύστημα αξόνων και σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση.

Σχόλιο:

Μπορούμε να βρούμε τις ίδιες λύσεις αντικαθιστώντας τιμές του x στην αρχική εξίσωση 4x+2y = 6.



β) Είναι 4·3+2·(–3) = 12–6 = 6, οπότε το σημείο (3,–3) βρίσκεται πάνω στην ευθεία 4x+2y = 6 αφού οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωσή της.
Επειδή 4·(–1)+2·4 = 4 ≠ 6, το σημείο (-1, 4) δεν ενήκει στην ευθεία, αφού οι συντεταγμένες του δεν επαληθεύουν την εξίσωσή της.

Να ανοίξετε τον σύνδεσμο και να απαντήσετε στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής για να εξοικειωθείτε με τη γραφική παράσταση της εξίσωσης της ευθείας αx+βy = γ ή y = αx+β.

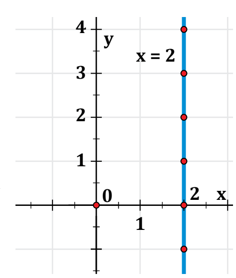
4.2.2 Ειδικές περιπτώσεις της εξίσωσης αx+βy = γ

Διερεύνηση

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση **x = 3** είναι μία εξίσωση της μορφής αx+βy = γ. Να κατασκευάσετε έναν πίνακα τιμών και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση **y = –2** είναι μία εξίσωση της μορφής αx+βy = γ. Να κατασκευάσετε έναν πίνακα τιμών και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

Η εξίσωση x = k

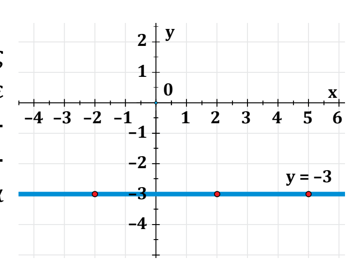


Η εξίσωση x = 2 γράφεται: 1·x+0·y = 2, οπότε είναι ισοδύναμη με μία εξίσωση της μορφής αx+βy = γ με α = 1, β = 0 και γ = 2. Από τη μορφή της διαπιστώνουμε ότι λύσεις της είναι ζεύγη, όπως τα (**2**, –2), (**2**, 2), (**2**, 0), (**2**, 3), (**2**, 7), που έχουν τετμημένη 2 και οποιαδήποτε τεταγμένη. Αν απεικονίσουμε σε ένα σύστημα αξόνων σημεία με x = 2 και οποιοδήποτε y, διαπιστώνουμε ότι η **x = 2** είναι μια ευθεία παράλληλη στον άξονα y΄y (ή κάθετη στον x΄x) που τέμνει τον άξονα x΄x στο (2, 0).

Γενικά

Όταν β = 0 και α ≠ 0, από τη γραμμική εξίσωση αx+βy = γ προκύπτει μία εξίσωση της μορφής x = k, η οποία είναι παράλληλη στον άξονα y΄y και τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο (k, 0).

Η εξίσωση y = k



Η εξίσωση y = –3 γράφεται: 0·x+1·y = –3 , οπότε είναι ισοδύναμη με μία εξίσωση της μορφής αx+βy = γ με α = 0, β = 1 και γ = –3. Από τη μορφή της αυτή διαπιστώνουμε ότι λύσεις της είναι ζεύγη, όπως τα (2, –**3**), (–2, –**3**), (–4, –**3**), (5, –**3**), που έχουν τεταγμένη –3 και οποιαδήποτε τετμημένη. Αν απεικονίσουμε σε ένα σύστημα αξόνων πολλά σημεία με y = –3 και οποιοδήποτε x, διαπιστώνουμε ότι η **y = –3** είναι μια ευθεία κάθετη στον y΄y (ή παράλληλη στον άξονα x΄x που τέμνει τον άξονα y΄y στο (0,–3).

Γενικά

Όταν α = 0 και β ≠ 0, από τη γραμμική εξίσωση αx+βy = γ προκύπτει μία εξίσωση της μορφής y=k, η οποία είναι παράλληλη στον άξονα x΄x και τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο (0, k).

Σημείωση:
Όταν $α = β = 0$ και $γ \neq 0$, τότε η γραμμική εξίσωση $αx+βy = γ$ είναι αδύνατη, δηλαδή κανένα ζεύγος τιμών (x, y) δεν είναι λύση της.
Όταν $α = β = γ = 0$, τότε η γραμμική εξίσωση $αx+βy = γ$ είναι αόριστη, δηλαδή όλα τα ζεύγη (x, y) είναι λύσεις της.

Συμπερασματικά:

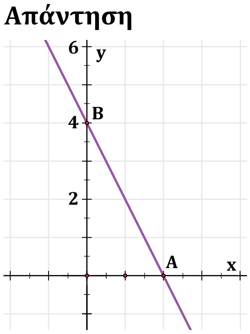
Όταν $α \neq 0$ ή $β \neq 0$, η γραμμική εξίσωση $αx+βy = γ$ με αγνώστους x και y παριστάνει ευθεία.

Να διερευνήσετε τις ειδικές περιπτώσεις της γραμμικής εξίσωσης ανοίγοντας την εφαρμογή.

Εφαρμογή: Σημεία τομής με τους άξονες

Να σχεδιάσετε την ευθεία $2x+y = 4$ και να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας με τους άξονες.

Απάντηση



Αρκούν δύο σημεία για να σχεδιαστεί η ευθεία.
Κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών για τη $2x+y = 4$.
Για $x = 0$, $2\cdot0+y = 4$ ή $y = 4$.
Για $y = 0$, $2x = 4$ ή $x = 2$.
Τα κοινά σημεία της ευθείας με τους άξονες είναι:
$(2, 0)$ με τον x΄x και $(0, 4)$ με τον y΄y.
Με τη βοήθεια αυτών των σημείων σχεδιάζουμε την ευθεία $2x+y = 4$.

x	0	2
y	4	0
(x, y)	(0, 4)	(2, 0)

- Για να βρούμε το σημείο στο οποίο η ευθεία τέμνει τον άξονα x΄x θέτουμε όπου $y = 0$ και προσδιορίζουμε το x.
- Για να βρούμε το σημείο στο οποίο η ευθεία τέμνει τον άξονα y΄y, θέτουμε όπου $x = 0$ και προσδιορίζουμε το y.

Ερωτήσεις για Αυτοαξιολόγηση

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση σε καθεμία από τις ερωτήσεις 1–4.

1 Ποια από τις παρακάτω εξισώσεις δεν είναι γραμμική.
Α) $3x–5 = 0$ **Β)** $2x^2+5y = 7$ **Γ)** $x = 5$ **Δ)** $y = –x+1$

2 Ποιο ζεύγος είναι λύση της γραμμικής εξίσωσης $3x–2y = 6$;
Α) (2,2) **Β)** (1,–4) **Γ)** (–2,0) **Δ)** (0,–3)

3 Ισοδύναμη με την $4x–2y = 2$ είναι η:
Α) $y = 4x+2$ **Β)** $y = 1–4x$ **Γ)** $y = 2x+1$ **Δ)** $y = 2x–1$

4 Η εξίσωση $x = –1$ είναι μία ευθεία που:
Α) Τέμνει τον άξονα y΄y στο –1.
Β) Είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.
Γ) Είναι παράλληλη στον άξονα y΄y και διέρχεται από το σημείο (1, –1).
Δ) Είναι κάθετη στον άξονα x΄x στο σημείο (–1, 0).

5 Να βρείτε τρεις λύσεις της γραμμικής εξίσωσης $-3x-2y = 12$.

6 Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων στα οποία η ευθεία $3x-2y = 9$ τέμνει τους άξονες.

7 Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη προς τον άξονα x΄x και διέρχεται από το σημείο (3, 4).

8 Με πόσους τρόπους μπορείτε ανταλλάξετε ένα χαρτονόμισμα 100 € σε χαρτονομίσματα των 5 € και 10 €;
α) Να βρείτε 3 διαφορετικές λύσεις.
β) Να γράψετε μια γραμμική εξίσωση που να μοντελοποιεί την κατάσταση και να σχεδιάσετε την αντίστοιχη ευθεία.
γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων της ευθείας με τους άξονες και να τις ερμηνεύσετε με βάση το πλαίσιο της κατάστασης.

Να ανοίξετε την ψηφιακή εφαρμογή «Αξιολόγηση στην έννοια της εξίσωσης ευθείας» για να ελέγξετε τις απαντήσεις σας στις ερωτήσεις αξιολόγησης.

Ασκήσεις και Προβλήματα

1 Ένα ξενοδοχείο διαθέτει δίκλινα και τρίκλινα δωμάτια και μπορεί να εξυπηρετήσει 120 πελάτες.

α) Πόσα δίκλινα και πόσα τρίκλινα δωμάτια μπορεί να έχει το ξενοδοχείο; Να βρείτε τουλάχιστον 3 διαφορετικές απαντήσεις.
β) Αν συμβολίσουμε με x τον αριθμό των δίκλινων και με y το αριθμό των τρίκλινων δωματίων, να γράψετε μία γραμμική εξίσωση που να συνδέει τα x και y και να σχεδιάσετε την αντίστοιχη ευθεία.
γ) Από τη γραφική παράσταση να βρείτε τουλάχιστον 3 διαφορετικές λύσεις.
δ) Να ερμηνεύσετε, με βάση το πλαίσιο της κατάστασης, τις συντεταγμένες των σημείων στα οποία η ευθεία τέμνει τους άξονες.

2 Μία ευθεία τέμνει τους άξονες στα σημεία (1, 0) και (0, 1). Να βρείτε την εξίσωσή της.

3 Να σχεδιάσετε τις ευθείες $x-y = 5$ και $x+y = 11$ στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων.
α) Να βρείτε το κοινό σημείο και τις συντεταγμένες του.
β) Να επαληθεύσετε την απάντησή σας αλγεβρικά.

4 Να γράψετε τις γραμμικές εξισώσεις στη μορφή $y = αx+β$.
α) $2x-y = -1$ **β)** $3x+3y = 9$ **γ)** $2y-6x = -4$ **δ)** $x+y = -7$

5 Το σημείο (0,5, −3) σε ποια από τις παρακάτω ευθείες ανήκει;
α) $4x+y = 1$ **β)** $-4x-y = -1$ **γ)** $x+y = 5$ **δ)** $4x-y = 5$.

6 Ποιο σημείο ανήκει στην ευθεία $-2x+y = -3$;
α) (1, 1) **β)** (2, 2) **γ)** (3, 3) **δ)** (−3, −3) **ε)** (2, 7)

7 Ένα πρακτορείο ενοικίασης αυτοκινήτων νοικιάζει αυτοκίνητα με την ακόλουθη ημερήσια χρέωση: «15 € πάγιο και 0,40 €/km».

α) Αν για x km το κόστος είναι y €, να γράψετε μία γραμμική εξίσωση που να συνδέει τις μεταβλητές x και y.
β) Να σχεδιάσετε την αντίστοιχη ευθεία.
γ) Από τη γραφική παράσταση, να βρείτε πόσα χρήματα θα πληρώσει κάποιος που έκανε 50 km.
δ) Από τη γραφική παράσταση, να βρείτε πόσα km έκανε κάποιος που πλήρωσε 47 €.
ε) Να επιβεβαιώσετε τις απαντήσεις στα ερωτήματα γ και δ και αλγεβρικά.

8 **Επίλυση προβλήματος.**

Το σχολείο σας σχεδιάζει ένα συμπόσιο απονομής βραβείων. Χρειάζεται να νοικιάσει τραπέζια για 180 άτομα. Τα τραπέζια διατίθενται σε δύο μεγέθη. Μικρά τραπέζια 6 θέσεων και μεγάλα τραπέζια 10 θέσεων.

α) Αν x είναι ο αριθμός των μικρών τραπεζιών και y είναι ο αριθμός των μεγάλων τραπεζιών, να γράψετε μία γραμμική εξίσωση που να περιγράφει την κατάσταση.
β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της γραμμικής εξίσωσης.
γ) Να κάνετε μια ερμηνεία των σημείων τομής της ευθείας με τους άξονες.
δ) Να βρείτε τέσσερις πιθανές λύσεις στο πλαίσιο του προβλήματος.

9 Επίλυση προβλήματος. Μοντελοποίηση

Πρόκειται να παραγγείλετε πουκάμισα για το μαθηματικό κλαμπ στο σχολείο σας. Τα κοντομάνικα πουκάμισα κοστίζουν 10 € το καθένα. Τα μακρυμάνικα πουκάμισα κοστίζουν 12 € το καθένα. Έχετε έναν προϋπολογισμό 300 € για τα πουκάμισα.
α) Αν x είναι ο αριθμός των κοντομάνικων πουκάμισων και y ο αριθμός των μακρυμάνικων πουκάμισων, να γράψετε μία γραμμική εξίσωση που να περιγράφει την κατάσταση.
β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση γραμμικής εξίσωσης.
γ) Να ερμηνεύσετε τα σημεία τομής της ευθείας με τους άξονες.
δ) Δώδεκα μαθητές αποφασίζουν ότι θέλουν κοντομάνικα πουκάμισα. Πόσα μακρυμάνικα πουκάμισα μπορείτε να παραγγείλετε;

10 Επίλυση προβλήματος. Μοντελοποίηση

Μία ποδοσφαιρική ομάδα έχει ένα εκτός έδρας παιχνίδι και το λεωφορείο χαλάει. Οι προπονητές αποφασίζουν να οδηγήσουν την ομάδα στο παιχνίδι με ταξί και βαν. Τέσσερα άτομα μπορούν να μπουν σε κάθε ταξί και έξι μπορούν σε κάθε βαν. Στην ομάδα συμμετέχουν 48 άτομα (παίκτες, προπονητές, ιατρικό προσωπικό κ.λπ.).
α) Αν x ο αριθμός των ταξί και y ο αριθμός των βαν, να γράψετε μία γραμμική εξίσωση που να περιγράφει την κατάσταση.
β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της εξίσωσης.
γ) Να ερμηνεύσετε τα κοινά σημεία της ευθείας με τους άξονες.
δ) Να βρείτε τέσσερις πιθανές λύσεις στο πλαίσιο του προβλήματος.

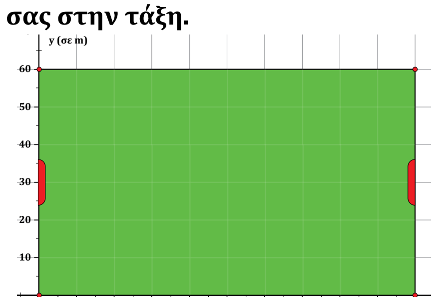
4.2.3 Γραφική επίλυση συστήματος δύο γραμμικών εξισώσεων

Διερεύνηση 1: Κοινό σημείο ευθειών

Να συνεργαστείτε ανά δύο και να συζητήσετε τα αποτελέσματά σας στην τάξη.
α) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις ευθείες με εξισώσεις: $2x+y = 4$ και $3x-y = 1$.
β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του κοινού σημείου των δύο ευθειών (αν υπάρχει) και να εξηγήσετε τι σημαίνει το κοινό σημείο για τις δύο εξισώσεις.

Διερεύνηση 2: Πού είναι η μπάλα;

Να συνεργαστείτε ανά δύο και να συζητήσετε τα αποτελέσματά σας στην τάξη.
Στο σχήμα απεικονίζεται σε μικρογραφία ένα «πραγματικό» γήπεδο ποδοσφαίρου με διαστάσεις 100 m και 60 m. Τα κόκκινα τμήματα είναι τα δύο τέρματα. Η μπάλα βρίσκεται στο κοινό σημείο των ευθειών: $x+y = 41$ και $2x+y = 52$.
Να σχεδιάσετε τις ευθείες και να προσδιορίσετε τη θέση της μπάλας μέσα στο γήπεδο.
Σε πόση απόσταση από το τέρμα, που είναι πάνω στον άξονα y, βρίσκεται η μπάλα;



Δύο παίκτες κινούνται πάνω σε ισάριθμες ευθείες στο γήπεδο. Ανοίξτε την εφαρμογή για να διερευνήσετε τη θέση συνάντησής τους.

Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες μάθησης

Προβλήματα του πραγματικού κόσμου συχνά περιγράφονται με περισσότερες από μία μεταβλητές και περισσότερες από μία εξισώσεις. Όταν έχουμε ένα σύνολο δύο ή περισσότερων εξισώσεων με τους ίδιους αγνώστους και αναζητούμε την κοινή λύση των εξισώσεων, λέμε ότι έχουμε ένα σύστημα. Σε αυτή την ενότητα, θα μελετήσουμε **γραμμικά συστήματα** που αποτελούνται από δύο γραμμικές εξισώσεις της μορφής αx+βy = γ με αγνώστους x και y.

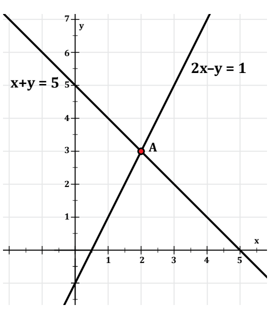
> Λύση ενός γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους είναι κάθε ζεύγος (x, y) το οποίο επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις.

Παράδειγμα:

Το σύστημα: $\begin{cases} x+y=5 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ έχει λύση το διατεταγμένο ζεύγος (2, 3), διότι επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις.
Πράγματι, με αντικατάσταση στις δύο εξισώσεις προκύπτει: 2+3 = 5 ή 5 = 5 που ισχύει, καθώς και 2·2–3 = 1 ή 1 = 1 που επίσης ισχύει.

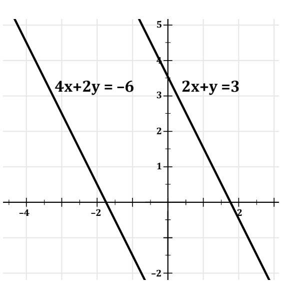
Γραφική επίλυση γραμμικού συστήματος.

Σύστημα με μοναδική λύση



Για τη γραφική λύση του συστήματος $\begin{cases} x+y=5 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ σχεδιάζουμε κατά τα γνωστά τις ευθείες x+y = 5 και 2x–y = 1 στο ίδιο σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων.
Παρατηρούμε ότι οι δύο ευθείες τέμνονται σε ένα σημείο το οποίο προσεγγιστικά είναι το Α(2, 3). Επειδή το Α ανήκει και στις δύο ευθείες οι συντεταγμένες του (2, 3) επαληθεύουν και τις δύο εξισώσεις, άρα το ζεύγος (2, 3) είναι λύση του συστήματος. Εξάλλου οι ευθείες τέμνονται σε ένα μόνο σημείο και επομένως το σύστημα έχει **μοναδική λύση** το ζεύγος (2, 3).

Αδύνατο σύστημα



Για τη γραφική λύση του συστήματος $\begin{cases} 2x+y=3 \\ 4x+2y=-6 \end{cases}$ σχεδιάζουμε κατά τα γνωστά τις ευθείες 2x+y = 3 και 4x+2y = –6 στο ίδιο σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων.
Παρατηρούμε ότι οι δύο ευθείες είναι παράλληλες, δηλαδή δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, οπότε το σύστημα δεν έχει λύση. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το σύστημα είναι **αδύνατο.**

Αόριστο σύστημα

Για το σύστημα $\begin{cases} x-3y=1 \\ 2x-6y=2 \end{cases}$ παρατηρούμε ότι η δεύτερη εξίσωσή του γράφεται: 2·(x–3y) = 2·1 ή x–3y = 1 και επομένως είναι ίδια με την πρώτη. Άρα το σύστημα έχει ίδιες λύσεις με την εξίσωση x–3y = 1, η οποία όπως ξέρουμε έχει άπειρες λύσεις, που είναι όλα τα ζεύγη (x, y) που την επαληθεύουν. Σε μια τέτοια περίπτωση, οι ευθείες που παριστάνουν οι εξισώσεις του συστήματος συμπίπτουν και λέμε ότι το σύστημα είναι αόριστο ή ότι έχει **άπειρες λύσεις**.

Γενικά

Για να λύσουμε γραφικά ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων της μορφής αx+βy = γ:

α) Σχεδιάζουμε τις δύο ευθείες στο ίδιο σύστημα αξόνων.

β) Βρίσκουμε τη σχετική θέση των δύο ευθειών:

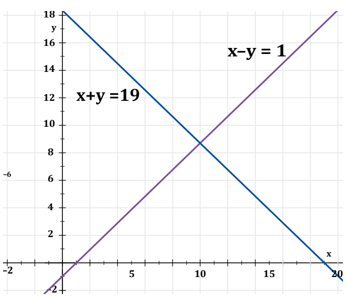
- Αν οι ευθείες τέμνονται, τότε το σύστημα έχει μία μόνο λύση και είναι οι συντεταγμένες του κοινού τους σημείου.
- Αν οι ευθείες είναι παράλληλες, τότε το σύστημα δεν έχει λύση (είναι αδύνατο).
- Αν οι ευθείες συμπίπτουν, τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις (είναι αόριστο).

Εφαρμογή 1

Να βρείτε δύο αριθμούς, οι οποίοι να έχουν διαφορά 1 και άθροισμα 19.

Απάντηση

Αν x ο μεγαλύτερος αριθμός και y ο μικρότερος, τότε οι x, y είναι οι λύσεις του συστήματος: $\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=19 \end{cases}$



Σχεδιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις των δύο γραμμικών εξισώσεων στο ίδιο σύστημα αξόνων και διαπιστώνουμε ότι οι γραφικές παραστάσεις τέμνονται στο σημείο (10, 9).

Επειδή το σημείο αυτό ανήκει και στις δυο ευθείες, οι συντεταγμένες του x = 10 και y = 9, επαληθεύουν και τις δύο εξισώσεις.

Επομένως, το ζεύγος (10, 9) είναι η λύση του συστήματος και οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι 9 και 10.

Εφαρμογή 2: Εταιρείες κινητής τηλεφωνίας: Προσφορές καρτοκινητού

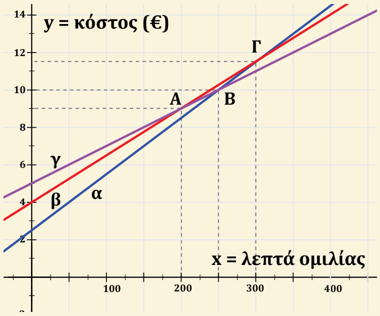
Το γράφημα δείχνει τη συνολική χρέωση y σε € τριών διαφορετικών εταιρειών κινητής τηλεφωνίας (α), (β) και (γ) για x λεπτά ομιλίας. Οι γραμμικές εξισώσεις που δείχνουν τη χρέωση κάθε εταιρείας είναι:

(α) y = 0,03x+2 **(β)** y = 4+0,025x **(γ)** y = 5 + 0,02x

α) Για πόσα λεπτά ομιλίας θα πληρώσει ένας πελάτης το ίδιο ποσό στις εταιρείες;

(i) (β) και (γ); **(ii)** (α) και (γ); **(iii)** (α) και (β);

β) Ποια συστήματα έχουν λύση τις συντεταγμένες των σημείων Α, Β, Γ ;



Απάντηση

α) Οι συντεταγμένες του σημείου Α δείχνουν για πόσα λεπτά ομιλίας θα πληρώσει ο καταναλωτής το ίδιο ποσό στις εταιρείες (β) και (γ). Αντίστοιχα το σημείο Β για τις εταιρείες (α) και (γ) και το σημείο Γ για τις εταιρείες (α) και (β).

Συγκεκριμένα, όπως φαίνεται από τις γραφικές παραστάσεις:

Για τις εταιρείες (β) και (γ) για 200 λεπτά ομιλίας θα πληρώσει 9 €, για τις εταιρείες (α) και (γ) για 250 λεπτά ομιλίας θα πληρώσει 10 € και για τις εταιρείες α και β για 300 λεπτά ομιλίας θα πληρώσει 11,5 €.

β) Οι συντεταγμένες των σημείων Α, Β , Γ αντίστοιχα είναι οι λύσεις των συστημάτων:

$$\begin{cases} y=4+0{,}02x \\ y=5+0{,}02x \end{cases}, \begin{cases} y=2{,}5+0{,}03x \\ y=4+0{,}025x \end{cases}.$$

Να διερευνήσετε τη γραφική επίλυση συστήματος δύο γραμμικών εξισώσεων, ανοίγοντας την εφαρμογή.

Ερωτήσεις για Αυτοαξιολόγηση

1 Να επιλύσετε γραφικά τα συστήματα.

α) $\begin{cases} x+2y=3 \\ x-y=9 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} x+y=3 \\ y=5 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} x-2y=1 \\ 3x-6y=3 \end{cases}$

2 Χωρίς να κάνετε γραφική επίλυση, να βρείτε πόσες λύσεις έχει καθένα από τα συστήματα:

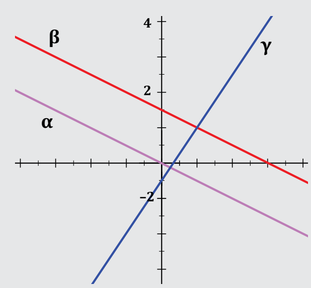
α) $\begin{cases} -x-y=3 \\ x-y=9 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} x+y=3 \\ y=-x+5 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} x-2y=2 \\ -2x+4y=-4 \end{cases}$

3 Στο διπλανό σχήμα κάθε ζεύγος ευθειών είναι η γραφική λύση ενός συστήματος.

α) Να βρείτε ποιες ευθείες αποτελούν τη γραφική λύση κάθε συστήματος και πόσες λύσεις έχει το αντίστοιχο σύστημα. Να εξηγήσετε πώς σκεφθήκατε.

β) Να εξετάσετε ποια από τις ευθείες (α), (β), (γ) του σχήματος έχει εξίσωση $x+3y = 0$.

γ) Να εξετάσετε αν τα σημεία $(6, -2)$ και $(-12, 6)$ ανήκουν στην ευθεία (α).



4 Μία ρακέτα και ένα μπαλάκι κοστίζουν μαζί 1,10 €. Η ρακέτα κοστίζει 1 ευρώ περισσότερο από το μπαλάκι. Ο Μωχάμεντ απάντησε ότι η ρακέτα κάνει 1 € και το μπαλάκι 10 λεπτά. Συμφωνείτε μαζί του; Να αιτιολογήσετε.

Ασκήσεις και Προβλήματα

1 Οι εξισώσεις ενός γραμμικού συστήματος παριστάνονται σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων με τις ευθείες (δ) και (ε). Ποια είναι η σχετική θέση των ευθειών (δ) και (ε);

α) Αν το σύστημα είναι αδύνατο.
β) Αν το σύστημα είναι αόριστο.
γ) Αν το σύστημα έχει μία λύση.

2 Να λύσετε γραφικά τα συστήματα:

α) $\begin{cases} x-y=3 \\ x+y=9 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} 2x+y=3 \\ y=-2x+5 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} x-y=4 \\ -3x+3y=-12 \end{cases}$

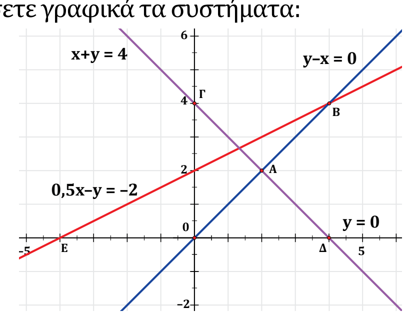
3 Να λύσετε γραφικά τα συστήματα:

α) $\begin{cases} x-y=3 \\ y=-2 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} 2x+y=3 \\ y=0 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} 2x-2y=8 \\ y=x-4 \end{cases}$

4 Να λύσετε γραφικά το σύστημα $\begin{cases} x-y=-3 \\ 2x+y=1 \end{cases}$

Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν οι ευθείες $x-y = -4$ και $2x+y = 1$ με τον άξονα $x'x$.

5 **i)** Να χρησιμοποιήσετε το παρακάτω σχήμα για να λύσετε γραφικά τα συστήματα:



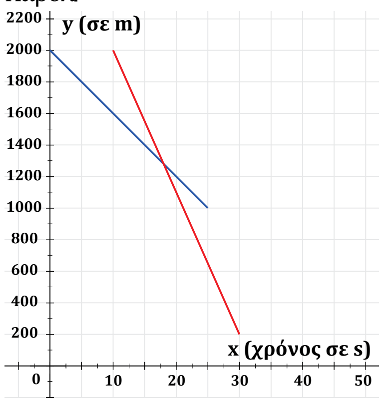
α) $\begin{cases} x+y=-3 \\ y=0 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} x+y=4 \\ y-x=0 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} 0{,}5x-y=-2 \\ y-x=0 \end{cases}$ **δ)** $\begin{cases} 0{,}5x-y=-2 \\ y=0 \end{cases}$

ii) Να βρείτε τα εμβαδά των τριγώνων:

α) ΒΕΟ **β)** ΑΓΟ.

6 Ο Παύλος πηδάει με το αλεξίπτωτο ακολουθούμενος από την Κάρολ.



α) Πόσα δευτερόλεπτα μετά τον Παύλο πήδηξε η Κάρολ.

β) Κατά την πτώση τους κάποιος περνάει τον άλλον. Ποιος, πότε και σε ποιο ύψος;

γ) Σε τι ύψος βρισκόταν ο καθένας, 30 s μετά την πτώση του Παύλου;

7 Ένας όμιλος τένις προσφέρει στα μέλη του 2 τρόπους για να κάνουν χρήση των γηπέδων του.

1ος τρόπος: Να πληρώνουν για κάθε ώρα παιχνιδιού 7 €.

2ος τρόπος: Να πληρώνουν ετήσια συνδρομή 84 € και για κάθε ώρα παιχνιδιού 4,2 €.

α) Αν κάποιος παίζει x ώρες και πληρώνει y €, να γράψετε μία γραμμική εξίσωση για κάθε τρόπο.

β) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις αντίστοιχες ευθείες.

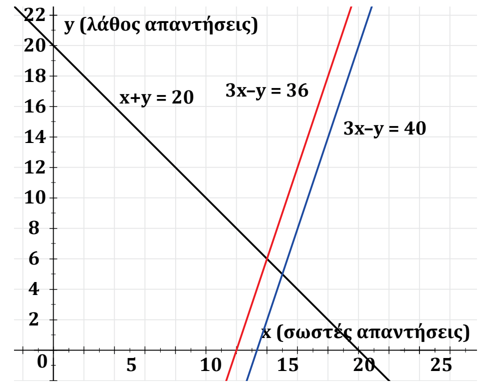
γ) Να προσδιορίσετε από το γράφημα για πόσες ώρες θα πληρώνει τα ίδια χρήματα και με τους δύο τρόπους.

δ) Μπορείτε από τις γραφικές παραστάσεις να προσδιορίσετε πότε συμφέρει ο 1ος και πότε ο 2ος τρόπος; Να εξηγήσετε πώς το σκεφτήκατε.

8 Σε ένα τεστ Μαθηματικών υπήρχαν 20 ερωτήσεις, που έπρεπε να απαντήσουν οι εξεταζόμενοι. Κάθε σωστή απάντηση έπαιρνε 3 μονάδες και κάθε λανθασμένη –1 μονάδα. Στο τεστ, ο Περικλής βαθμολογήθηκε με 36 μονάδες και η Ασπασία με 40.

α) Να γράψετε ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων προκειμένου να βρείτε σε πόσες ερωτήσεις απάντησε σωστά και σε πόσες λανθασμένα ο Περικλής.

β) Να κάνετε το ίδιο και για την Ασπασία.



Στο διάγραμμα υπάρχουν τρεις ευθείες.

γ) Να βρείτε ποιες ευθείες αντιστοιχούν στο σύστημα για τον Περικλή.

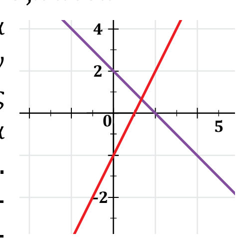
δ) Να βρείτε ποιες ευθείες αντιστοιχούν στο σύστημα για την Ασπασία.

ε) Με βάση το διάγραμμα να βρείτε σε πόσες ερωτήσεις απάντησε σωστά ο Περικλής.

στ) Σε πόσες απάντησε σωστά η Ασπασία.

ζ) Να επαληθεύσετε τα αποτελέσματα που βρήκατε.

9 Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι γραφικές παραστάσεις ενός συστήματος δύο γραμμικών εξισώσεων.

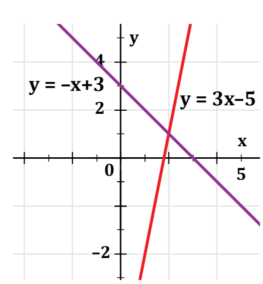


α) Να γράψετε το σύστημα των γραμμικών εξισώσεων που παριστάνονται από τις γραφικές παραστάσεις. Να εξηγήσετε πώς σκεφτήκατε.

β) Ποια είναι η λύση του συστήματος; Να κάνετε επαλήθευση.

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που περικλείεται από τις δύο ευθείες και τον άξονα x΄x.

10 Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} x+y=3 \\ 3x-y=5 \end{cases}$



α) Να δείξετε ότι οι ευθείες του σχήματος παριστάνουν αυτό το σύστημα. Να εξηγήσετε πώς σκεφθήκατε.

β) Ποια είναι η λύση του συστήματος; Να κάνετε επαλήθευση.

γ) Να χρησιμοποιήσετε το σχήμα για να βρείτε τη λύση της εξίσωσης: $3x-5 = -x+3$. Να εξηγήσετε πώς σκεφθήκατε.

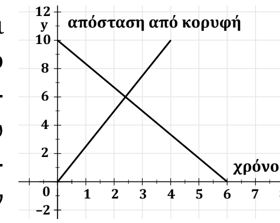
δ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου, στο οποίο η «κόκκινη» ευθεία τέμνει τον άξονα x΄x και τον y΄y. (Το σημείο είναι εκτός του πλαισίου του σχήματος).

11 Ένα κατάστημα κάνει την παρακάτω προσφορά. Αν κάθε καπέλο κοστίζει x € και κάθε ζεύγος γυαλιών y €, να γράψετε μία εξίσωση που να περιγράφει την παρακάτω κατάσταση. Να βρείτε δύο πιθανές τιμές για τα καπέλα και τα γυαλιά.


→ 160 €

12 **Οι ορειβάτες**

Ο Γιώργος ξεκινάει το πρωί από τη βάση της κατασκήνωσης, για να ανέβει στην κορυφή του Ολύμπου, η οποία απέχει 10 χιλιόμετρα. Ο Ηλίας ξεκινάει *την ίδια ώρα* από την κορυφή, για να επιστρέψει στην κατασκήνωση από την ίδια διαδρομή. Οι γραφικές παραστάσεις που περιγράφουν την απόσταση κάθε ορειβάτη από την *κορυφή* του βουνού φαίνονται στο σχήμα.



α) Ποια γραμμή αντιστοιχεί στον Γιώργο και ποια στον Ηλία;

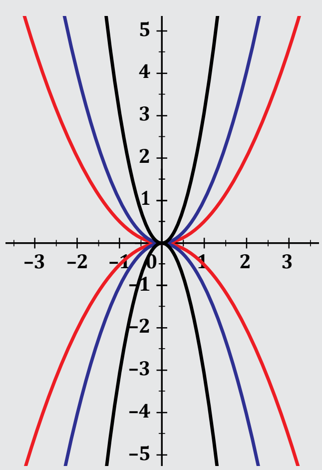
β) Τι εκφράζει το σημείο τομής των δύο γραμμών;

γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των δύο ευθειών.

4.3 Ανακεφαλαίωση και διεύρυνση της θεματικής ενότητας

1 Τετραγωνική συνάρτηση $y = αx^2$

Η γραφική παράσταση μιας τετραγωνικής συνάρτησης $y = αx^2$ είναι μια καμπύλη που λέγεται παραβολή.



- αν **α > 0**
  1. Η παραβολή έχει **κορυφή** το σημείο (0,0).
  2. Έχει **ελάχιστο** για x = 0, το y = 0.
  3. Έχει **άξονα συμμετρίας** τον άξονα y΄y.
- αν **α < 0**
  1. Η παραβολή έχει **κορυφή** το σημείο (0,0).
  2. Έχει **μέγιστο** για x = 0, το y = 0.
  3. Έχει **άξονα συμμετρίας** τον άξονα y΄y.
- Μια μεγαλύτερη τιμή του $|α|$ έχει ως αποτέλεσμα μια πιο «απότομη» (στενότερη) παραβολή (π.χ. το γράφημα της $y = 3x^2$ είναι πιο «κλειστό» από το γράφημα της $y = x^2$).
- **Γραφική Επίλυση της εξίσωσης $αx^2 = β$.**

Για να επιλύσουμε γραφικά την εξίσωση $αx^2 = β$, σχεδιάζουμε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων την παραβολή $y = αx^2$ και την ευθεία $y = β$. Οι τετμημένες των κοινών σημείων ευθείας και παραβολής (αν υπάρχουν) είναι οι λύσεις της εξίσωσης $αx^2 = β$.

Χαρακτηριστικές ιδιότητες των τετραγωνικών συναρτήσεων

- Μια συνάρτηση είναι τετραγωνική όταν σε κάθε μοναδιαία αύξηση του x, η ακολουθία των «δεύτερων διαφορών» των διαδοχικών τιμών του y είναι σταθερή, δηλαδή όταν οι αντίστοιχες διαφορές των «πρώτων διαφορών» είναι ίσες.
- Μια τετραγωνική συνάρτηση είναι της μορφής $y = αx^2$ όταν ο λόγος $\frac{y}{x^2}$, $x \neq 0$ είναι σταθερός.

2 Γραμμική εξίσωση. Γραμμικό σύστημα.

- Κάθε εξίσωση με δύο αγνώστους της μορφής $\alpha x + \beta y = \gamma$ ονομάζεται γραμμική εξίσωση με άγνωστους x και y. Λύσεις της εξίσωσης είναι ζεύγη αριθμών (x, y) που την επαληθεύουν και παριστάνει μια ευθεία, όταν $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$.
- Γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους ονομάζουμε δύο γραμμικές εξισώσεις των οποίων ζητάμε την κοινή λύση.
- **Γραφική επίλυση γραμμικού συστήματος.**

Στο ίδιο σύστημα αξόνων παριστάνουμε τις ευθείες του συστήματος.
Αν οι ευθείες τέμνονται, τότε **λύση** είναι οι συντεταγμένες του κοινού σημείου.
Αν οι ευθείες είναι παράλληλες, τότε το σύστημα είναι **αδύνατο**.
Αν οι ευθείες ταυτίζονται, τότε το σύστημα είναι **αόριστο**. Δηλαδή οι συντεταγμένες των άπειρων σημείων της ευθείας είναι λύσεις του συστήματος.

Ένας καλαθοσφαιριστής θέλει να βάλει καλάθι. Ανοίγοντας την εφαρμογή, να ανακαλύψετε τη συνάρτηση που οδηγεί σε εύστοχη βολή.

Ασκήσεις επανάληψης

1 «Σκέφτομαι έναν αριθμό»

α) $x \xrightarrow{\text{διπλασιάζω}} \square \xrightarrow{\text{υψώνω στο τετράγωνο}} y$ **β)** $x \xrightarrow{\text{υψώνω στο τετράγωνο}} \square \xrightarrow{\text{διπλασιάζω}} y$

α) Να εξετάσετε αν οι δύο διαδικασίες περιγράφουν την ίδια κατάσταση.
β) Να εξετάσετε σε κάθε περίπτωση αν το y είναι συνάρτηση του x.
γ) Αν είναι, να βρείτε τον τύπο κάθε συνάρτησης.
δ) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις τους.
ε) Να γράψετε τις εξισώσεις που προκύπτουν από τις διαδικασίες (α) και (β) αν το αποτέλεσμα είναι 8 και στις δύο περιπτώσεις.
στ) Να βρείτε τη λύση κάθε εξίσωσης γραφικά και αλγεβρικά.
ζ) Υπάρχει αριθμός που να δίνει το ίδιο αποτέλεσμα και με τις δύο διαδικασίες;

2 Φυσική: το πείραμα του Γαλιλαίου.

Ο Γαλιλαίος χρησιμοποιούσε ένα κεκλιμένο επίπεδο με αυλάκι, στο οποίο άφηνε να κυλούν σφαίρες και χρονομετρούσε την κίνησή τους. Αυτό ήταν το πρώτο πείραμα στην ιστορία της επιστήμης, το οποίο έθεσε τα θεμέλια για να προσδιοριστούν οι νόμοι της Φυσικής που αφορούν την κίνηση των σωμάτων.

Δύο φοιτητές Φυσικής επαναλαμβάνουν στο εργαστήριο το πείραμα. Αφήνουν μία σφαίρα χωρίς αρχική ταχύτητα στην κορυφή του αυλακιού στο κεκλιμένο επίπεδο. Μερικές μετρήσεις του χρόνου και του αντίστοιχου διαστήματος που διάνυσε η σφαίρα τις καταχώρησαν σε έναν πίνακα.

Χρόνος t	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
Διάστημα s	0	0,5	2	4,5	8	1,25	18

α) Να εξετάσετε αν ο πίνακας μπορεί να είναι πίνακας συνάρτησης.
β) Αν ναι, να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι γραμμική, τετραγωνική ή τίποτα από τα δύο.
γ) Να βρείτε τον τύπο της και να σχεδιάσετε τη γραφική παράστασή της.

3 **α)** Να εξετάσετε αν ο παρακάτω πίνακας είναι πίνακας γραμμικής ή τετραγωνικής συνάρτησης.

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
y	50	32	18	8	2	0	2	8	18	32	50

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης.

β) Να εξετάσετε αν ο παρακάτω πίνακας είναι πίνακας γραμμικής, τετραγωνικής συνάρτησης.

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
y	49	31	17	7	1	–1	1	7	17	31	49

γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων.
δ) Μπορείτε να κάνετε μία εικασία για τον τύπο της δεύτερης συνάρτησης; Να χρησιμοποιήσετε πληροφορίες από την πρώτη συνάρτηση.

4 Τα μεγέθη v και t συμμεταβάλλονται. Μερικές μετρήσεις των μεγεθών αυτών, μετά την εκτέλεση ενός πειράματος, καταχωρίστηκαν στον πίνακα.

t	0	1	2	3	4	5	6
v	0	4,9	19,6	44,1	78,4	122,5	176,4

α) Να εξετάσετε αν η σχέση είναι συνάρτηση.
β) Να βρείτε τον τύπο της.
γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράστασή της.

5 **α)** Να προσδιορίσετε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ ώστε η παραβολή $y = (λ–1)x^2$ να έχει μέγιστη τιμή. Αν $λ = 3$, η παραβολή παρουσιάζει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή;

β) Να εξετάσετε αν η παραβολή $y = |α|x^2$ έχει ελάχιστη ή μέγιστη τιμή. Να σχεδιάσετε την παραβολή αν $α = –2$.

6 **α)** Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ είναι γραμμική, δηλαδή εξίσωση ευθείας.

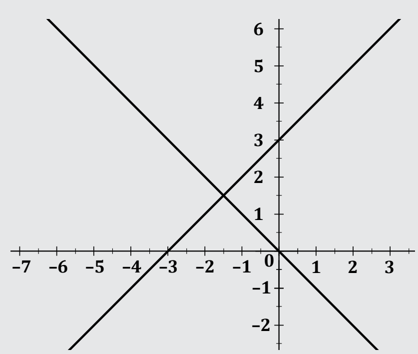
β) Να δείξετε ότι η ευθεία $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ τέμνει τους άξονες στα σημεία (3, 0) και (0, 4).

γ) Να τη σχεδιάσετε.

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία με τους άξονες.

ε) Να βρείτε τα σημεία, στα οποία η ευθεία $\frac{x}{κ} + \frac{y}{λ} = 1$ (με κ, λ πραγματικούς αριθμούς ≠ 0), τέμνει τους άξονες.

7 Ποιο σύστημα παριστάνει το διπλανό σχήμα; Να βρείτε την λύση του.



8 Το άθροισμα των ψηφίων ενός διψήφιου αριθμού είναι 11. Αν αντιστρέψουμε την θέση των ψηφίων του αριθμού, παίρνουμε αριθμό μικρότερο κατά 27.
α) Να γράψετε ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων που περιγράφει την κατάσταση.
β) Να σχεδιάσετε τη γραφική λύση του συστήματος και να βρείτε τον αριθμό.

9 Να εξετάσετε αν ένα γραμμικό σύστημα μπορεί να έχει ακριβώς δύο λύσεις. Να εξηγήσετε πώς σκεφθήκατε.

10 **Μοντελοποίηση.**

Η Μόνικα έχει 40 λεπτά στη διάθεσή της για να γυμναστεί. Θέλει να χάσει 300 θερμίδες χρησιμοποιώντας δύο όργανα. Με το ένα «καίει» 8 θερμίδες το λεπτό και με το άλλο 6. Σκέφτεται πόσο χρόνο πρέπει να αφιερώσει σε καθένα.

α) Να γράψετε ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων προκειμένου να μοντελοποιήσετε την κατάσταση.

β) Να λύσετε γραφικά το σύστημα για να βρείτε την απάντηση που αναζητά η Μόνικα.

11 Δίνεται η εξίσωση $x+2 = 3x-6$.

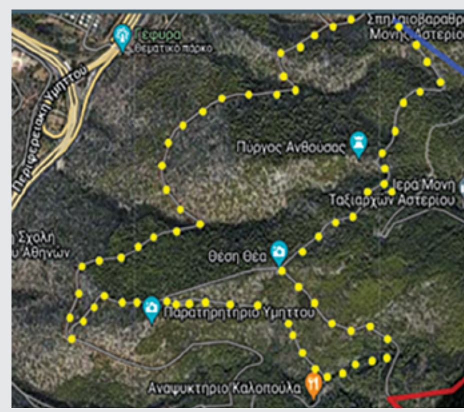
α) Να λύσετε την εξίσωση αλγεβρικά.

β) Να λύσετε γραφικά το σύστημα των εξισώσεων $y = x+2$ και $y = 3x-6$.

γ) Με ποιο τρόπο συσχετίζονται το γραμμικό σύστημα και η γραφική λύση του συστήματος στο ερώτημα (β) με την αρχική εξίσωση και τη λύση της εξίσωσης στο ερώτημα (α);

12 **Μοντελοποίηση.**

Δύο φίλοι, ο Πέτρος και ο Παναγιώτης, πηγαίνουν συχνά για περπάτημα στον Υμηττό. Η συνήθης διαδρομή που ακολουθούν φαίνεται στον χάρτη με τις κίτρινες τελείες. Αφετηρία είναι το «Αναψυκτήριο Καλοπούλα», μετά συνεχίζουν προς «Ιερά Μονή Ταξιαρχών Αστερίου - Σπηλαιοβάραθρο Μονής Αστερίου - Παρατηρητήριο Υμηττού» και ολοκληρώνουν την πορεία τους πάλι στο «Αναψυκτήριο Καλοπούλα».



Αυτή τη φορά, ο Παναγιώτης ξεκίνησε νωρίτερα το περπάτημα. Όταν ξεκίνησε το περπάτημα ο Πέτρος, ο Παναγιώτης βρισκόταν στην Ιερά Μονή Ταξιαρχών Αστερίου. Ο Παναγιώτης περπατάει με ταχύτητα 4 km/h. Ο Πέτρος περπατάει με ταχύτητα 5 km/h. Η απόσταση «Αναψυκτήριο Καλοπούλας - Ιερά Μονή Ταξιαρχών Αστερίου» είναι 1 km.

α) Να γράψετε ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων προκειμένου να μοντελοποιήσετε την κατάσταση και να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των δύο εξισώσεων στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων.

β) Ο Πέτρος υπολογίζει ότι θα συναντήσει τον Παναγιώτη μετά από μία ώρα. Να χρησιμοποιήσετε τις γραφικές παραστάσεις προκειμένου να εξετάσετε αν είναι σωστός ο ισχυρισμός του Πέτρου.

Να ανοίξετε την εφαρμογή «ΓΛΩΣΣΑΡΙ-ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ» για να συνοψίσετε εννοιες και όρους, που μάθατε στο κεφάλαιο αυτό.

Κεφάλαιο

5

Αλγεβρικές σχέσεις

Στο Κεφάλαιο αυτό θα μάθουμε:

- Να αναγνωρίζουμε ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους και να εξετάζουμε αν ένα ζεύγος αριθμών είναι λύση του.
- Να επιλύουμε το σύστημα αλγεβρικά με τις μεθόδους των αντίθετων συντελεστών και της αντικατάστασης και να επαληθεύουμε τη λύση με βάση το πλαίσιο του προβλήματος.
- Να επιλύουμε απλές πολυωνυμικές εξισώσεις δευτέρου βαθμού ελλιπούς ή και πλήρους μορφής, αλλά και μεγαλύτερου βαθμού με παραγοντοποίηση.
- Να επιλύουμε προβλήματα εξισώσεων 1ου και 2ου βαθμού (με παραγοντοποίηση).
- Να διερευνούμε και να διατυπώνουμε τις βασικές ιδιότητες της διάταξης.
- Να διακρίνουμε τις διαφορές μεταξύ εξίσωσης και ανίσωσης.
- Να μετατρέπουμε πραγματικά προβλήματα σε ανισώσεις της μορφής $\alpha x+\beta<\gamma$, να τις επιλύουμε και να παριστάνουμε τις λύσεις γραφικά.
- Να βρίσκουμε τις κοινές λύσεις δύο ανισώσεων χρησιμοποιώντας τον άξονα των πραγματικών αριθμών.

5.1 Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθήτριες και οι μαθητές να μπορούν:

- Να αναγνωρίζουν ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους και να εξετάζουν αν ένα ζεύγος αριθμών είναι λύση του.
- Να επιλύουν το σύστημα αλγεβρικά με τις μεθόδους των αντίθετων συντελεστών και της αντικατάστασης και να επαληθεύουν τη λύση με βάση το πλαίσιο του προβλήματος.

Διερεύνηση 1: Γραμμικά συστήματα

Να συνεργαστείτε ανά δύο και να συζητήσετε τα αποτελέσματά σας στην τάξη.

α) Να εξετάσετε ποια από τα παρακάτω συστήματα είναι γραμμικά και ποια όχι. Να αιτιολογήσετε.

i) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$ **ii)** $\begin{cases} xy = 3 \\ x - y = -1 \end{cases}$ **iii)** $\begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$ **iv)** $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ x - y = 5 \end{cases}$

β) Να βρείτε αν καθένα από τα ακόλουθα ζεύγη είναι λύση σε ένα ή περισσότερα από τα παραπάνω συστήματα:

i) $(2,1)$ **ii)** $(-2,-1)$ **iii)** $(3,-2)$

Να ανοίξετε τον σύνδεσμο και να απαντήσετε στις ερωτήσεις Σωστού-Λάθους για να εξοικειωθείτε με τη διάκριση γραμμικών συστημάτων από άλλα.

Διερεύνηση 2

Να συνεργαστείτε ανά δύο και να συζητήσετε τα αποτελέσματά σας στην τάξη.

Ο Έρικ θέλει να αγοράσει ένα καπέλο κι ένα ζευγάρι γυαλιά. Προσπαθεί να βρει την τιμή κάθε είδους από την παρακάτω εικόνα, αλλά δυσκολεύεται.

α) Ποιο είδος νομίζετε ότι είναι πιο ακριβό; Να εξηγήσετε πώς το σκεφτήκατε.

β) Πώς θα βοηθούσατε τον Έρικ να βρει πόσο κοστίζει ένα καπέλο και πόσο ένα ζευγάρι γυαλιά ;

Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες μάθησης

Τις έννοιες της γραμμικής εξίσωσης και του γραμμικού συστήματος τις γνωρίσαμε ήδη στην προηγούμενη ενότητα. Συγκεκριμένα, ένα σύστημα είναι γραμμικό με δύο αγνώστους όταν αποτελείται από δύο γραμμικές εξισώσεις των οποίων αναζητούμε την κοινή λύση. **Λύση** ενός γραμμικού συστήματος με δύο αγνώστους είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος αριθμών που επαληθεύει συγχρόνως και τις δύο εξισώσεις.

Συνήθως η **γραφική λύση** ενός συστήματος είναι μια προσεγγιστική λύση (εκτίμηση) και όχι ακριβής λύση. Η αλγεβρική επίλυση, την οποία θα γνωρίσουμε σ' αυτή την ενότητα, μπορεί πάντα να μας δίνει, αν υπάρχει, την ακριβή λύση του συστήματος.

Για να λύσουμε αλγεβρικά ένα σύστημα, προσπαθούμε να απαλείψουμε τον έναν από τους δύο αγνώστους και να οδηγηθούμε σε μια εξίσωση πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο.

Στη συνέχεια θα γνωρίσουμε δύο από τις μεθόδους που χρησιμοποιούνται στην επίλυση ενός συστήματος. Τη **μέθοδο της αντικατάστασης** και τη **μέθοδο των αντίθετων συντελεστών.**

Μέθοδος αντικατάστασης

Πρόβλημα αγορών

α) Χωρίς να γνωρίζετε πόσο κοστίζει το μπλουζάκι και πόσο το σορτσάκι, μπορείτε να εκτιμήσετε ποιο από τα δύο είδη είναι ακριβότερο; Να εξηγήσετε πώς σκεφτήκατε.

β) Να βρείτε πόσο κοστίζει ένα μπλουζάκι και ένα σορτσάκι.

Απάντηση

α) Όπως βλέπουμε στην πρώτη τετράδα τα 3 μπλουζάκια και το 1 σορτσάκι κοστίζουν 74 €. Στη δεύτερη τετράδα αντικαταστάθηκε ένα μπλουζάκι με ένα σορτσάκι και το κόστος έγινε 72, δηλαδή πιο φθηνό. Αυτό δείχνει ότι το μπλουζάκι είναι πιο ακριβό.

β) Αν ένα μπλουζάκι κοστίζει x € και ένα σορτσάκι y €, τότε έχουμε:

$\begin{cases} 3x+y = 74 \\ 2x+2y=72 \end{cases}$, το οποίο είναι ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.

Για να το επιλύσουμε με τη **μέθοδο της αντικατάστασης** εργαζόμαστε ως εξής:

Βήμα 1: Λύνουμε την πρώτη εξίσωση ως προς έναν άγνωστο.
Εδώ επιλέγουμε να λύσουμε ως προς y, οπότε έχουμε:
$3x+y = 74$ ή $y = -3x+74$.

Βήμα 2: Αντικαθιστούμε την τιμή του y που βρήκαμε στη δεύτερη εξίσωση, οπότε:
$2x+2(-3x+74) = 72$ ή $2x-6x+148 = 72$ ή $2x-6x = 72-148$ ή $-4x = -76$ ή $x = \frac{-76}{-4}$ ή $x = 19$.

Βήμα 3: Αντικαθιστώντας την τιμή $x = 19$ σε μία από τις δύο εξισώσεις του συστήματος παίρνουμε: $y = 17$.
Άρα, $x = 19$ και $y = 17$ ή $(x, y) = (19, 17)$.

Επαλήθευση: Αντικαθιστώντας στις αρχικές εξισώσεις τις τιμές $x = 19$ και $y = 17$ έχουμε:

- 1η εξίσωση: $3\cdot19+17 = 57+17 = 74$, που ισχύει.
- 2η εξίσωση: $2\cdot19+2\cdot17 = 38+34 = 72$, που ισχύει.

Άρα η λύση του συστήματος είναι $x = 19$ και $y = 17$ ή το ζεύγος $(19, 17)$, οπότε ένα μπλουζάκι κοστίζει 19 € και ένα σορτσάκι 17 €.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

Βήμα 1: Λύνουμε μία από τις εξισώσεις ως προς τον έναν άγνωστο.
Βήμα 2: Αντικαθιστούμε στην άλλη εξίσωση τον άγνωστο οπότε προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο, την οποία λύνουμε.
Βήμα 3: Την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε την αντικαθιστούμε στην προηγούμενη εξίσωση και βρίσκουμε και τον άλλο άγνωστο.

Σημείωση:
Η λύση του συστήματος θα ήταν ίδια αν στο πρώτο βήμα λύναμε μία από τις δύο εξισώσεις του συστήματος ως προς x και ακολουθούσαμε αντίστοιχη πορεία.

Για να να εξασκηθείτε στην επίλυση γραμμικού συστήματος με τη μέθοδο της αντικατάστασης να ανοίξετε την ψηφιακή εφαρμογή.

Μέθοδος αντίθετων συντελεστών

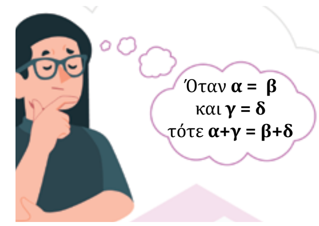
Για την επίλυση του ίδιου συστήματος με τη **μέθοδο των αντίθετων συντελεστών** εργαζόμαστε ως εξής:

Βήμα 1: Πολλαπλασιάζουμε με κατάλληλο αριθμό και τα δύο μέλη μιας εξίσωσης ώστε να προκύψει και στις δύο εξισώσεις ο ίδιος άγνωστος με αντίθετους συντελεστές.
Εδώ, διαλέγουμε να δημιουργήσουμε αντίθετους συντελεστές για τον y, γιατί έχει μικρότερους συντελεστές. Πολλαπλασιάζουμε γι' αυτό και τα δύο μέλη της πρώτης εξίσωσης με το (–2), οπότε παίρνουμε:
$(-2)(3x+y) = (-2)\cdot74$ ή $-6x-2y = -148$.

Έτσι το σύστημα γράφεται: $\begin{cases} -6x - 2y = -148 \\ 2x+2y = 72 \end{cases}$

Βήμα 2: Προσθέτοντας κατά μέλη τις εξισώσεις του συστήματος, παίρνουμε:
$(-6x-2y)+(2x+2y) = -148+72$ ή $-6x+2x-\cancel{2y}+\cancel{2y} = -76$ ή $-4x = -76$ ή $x = \frac{-76}{-4}$ ή $x = 19$.

Βήμα 3: Αντικαθιστώντας την τιμή x = 19 σε μία από τις αρχικές εξισώσεις του συστήματος, για παράδειγμα στην πρώτη, παίρνουμε: y = 17.
Άρα και με τη μέθοδο αυτή βρίσκουμε την ίδια λύση: x = 19 και y = 17 ή (x, y) = (19, 17).



Για να εξασκηθείτε στην επίλυση γραμμικού συστήματος με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών να ανοίξετε την ψηφιακή εφαρμογή.

Εφαρμογή 1: Μοντελοποίηση

Για ένα πάρτι γενεθλίων αγοράσθηκαν συνολικά 50 μπιφτέκια, γαλοπούλας και λαχανικών, τα οποία κόστισαν 90 €. Το μπιφτέκι γαλοπούλας κοστίζει 2 € και το μπιφτέκι λαχανικών 1,50 €. Πόσα μπιφτέκια από κάθε είδος αγοράστηκαν;

Απάντηση

Αν αγοράστηκαν x μπιφτέκια γαλοπούλας και y μπιφτέκια λαχανικών, τότε x+y = 50.
Για τα x μπιφτέκια γαλοπούλας πληρώθηκαν 2x € και για τα y μπιφτέκια λαχανικών πληρώθηκαν 1,5y €. Άρα συνολικά πληρώθηκαν 2x+1,5y = 90 €.
Σχηματίζουμε έτσι το γραμμικό σύστημα: $\begin{cases} x + y = 50 \\ 2x+1{,}5y=90 \end{cases}$ το οποίο θα λύσουμε με τη μέθοδο της αντικατάστασης.
Από την πρώτη εξίσωση έχουμε y = 50–x και αντικαθιστώντας στη δεύτερη παίρνουμε:

$$2x + 1{,}5 \cdot (50 - x) = 90 \text{ ή } 2x + 75 - 1{,}5 \cdot x = 90 \text{ ή } (2 - 1{,}5)x = 90 - 75 \text{ ή } 0{,}5x = 15 \text{ ή } x = \frac{15}{0{,}5} \text{ ή } x = 30.$$

Για x = 30 από την πρώτη εξίσωση του συστήματος, παίρνουμε: 30+y = 50 ή y = 20.
Άρα: x = 30 και y = 20.
Επαλήθευση: Με x = 30 και y = 20, 30+20 = 50 που ισχύει. Επίσης, 2·30+1,5·20 = 90 που ισχύει.
Επομένως, η λύση του συστήματος είναι x = 30 και y = 20 ή (x, y)=(30, 20), οπότε αγοράστηκαν 30 μπιφτέκια γαλοπούλας και 20 μπιφτέκια λαχανικών.

Εφαρμογή 2: Αόριστο ή Αδύνατο σύστημα

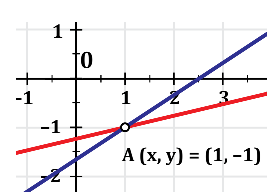
Να λυθούν τα συστήματα:

α) $\begin{cases} 3x - 5y=8 \\ -x+5x=-6 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} 4x - 2y=8 \\ y=2x=-4 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} 3x+y=10 \\ 3x+y=9 \end{cases}$

Απάντηση

α) Παρατηρούμε ότι το y έχει αντίθετους συντελεστές στις δύο εξισώσεις του συστήματος. Άρα είναι προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών. Προσθέτοντας τις δύο εξισώσεις κατά μέλη παίρνουμε:
$(3x-5y)+(-x+5y)=8-6$ ή $2x=2$ ή $x=\frac{2}{2}$ ή $x=1$ και αντικαθιστώντας στη δεύτερη εξίσωση του συστήματος έχουμε –1+5y = –6 ή 5y = –5 ή y = –1.
Επαλήθευση: Για x = 1 και y = –1, οι εξισώσεις του συστήματος δίνουν 3+5 = 8 και –1–5 = –6 που ισχύουν. Άρα η λύση του συστήματος είναι: x = 1 και y = –1 ή (x, y) = (1, –1).

Σημείωση:
Αν κάνουμε τις γραφικές παραστάσεις των εξισώσεων του συστήματος, θα διαπιστώσουμε ότι οι αντίστοιχες ευθείες τέμνονται σε ένα σημείο με συντεταγμένες τη λύση του συστήματος (Σχήμα).



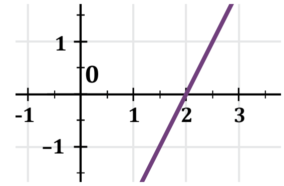
β) Στο δεύτερο σύστημα παρατηρούμε ότι η δεύτερη εξίσωση είναι λυμένη ως προς y και αντικαθιστώντας την τιμή αυτή στην πρώτη εξίσωση έχουμε:

$$4x-2(2x-4) = 8 \text{ ή } 4x-4x+8 = 8 \text{ ή } 8 = 8.$$

Η τελευταία εξίσωση αληθεύει για κάθε τιμή του x και επομένως το σύστημα έχει **άπειρο πλήθος λύσεων (αόριστο).**

Σημείωση:

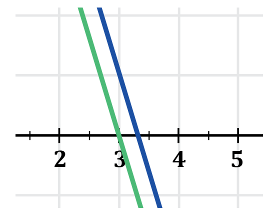
- Άπειρες λύσεις δεν σημαίνει ότι κάθε ζεύγος (x, y) είναι λύση του συστήματος, αλλά ότι τα ζεύγη (x, y) που επαληθεύουν την εξίσωση $y = 2x - 4$ είναι άπειρα.
- Αν κάνουμε τις γραφικές παραστάσεις των εξισώσεων του συστήματος, θα διαπιστώσουμε ότι αυτές ταυτίζονται (Σχήμα).



γ) Παρατηρούμε ότι τα πρώτα μέλη των δύο εξισώσεων του συστήματος είναι ίσα. Επομένως, αν το σύστημα είχε λύση θα έπρεπε και τα δεύτερα μέλη τους να ήταν ίσα. Αυτό όμως δεν ισχύει, αφού $9 \neq 10$. Άρα το σύστημα **δεν έχει λύση.** Όταν ένα σύστημα δεν έχει λύση, λέμε ότι είναι **αδύνατο.**

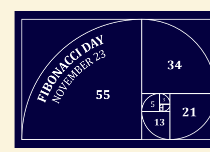
Σημείωση:

Αν σχεδιάσουμε τις γραφικές παραστάσεις των εξισώσεων του συστήματος, θα διαπιστώσουμε ότι οι αντίστοιχες ευθείες είναι παράλληλες (Σχήμα).



Εφαρμογή 3: Χρυσός λόγος φ

Ένα ορθογώνιο λέγεται χρυσό όταν οι διαστάσεις του έχουν λόγο περίπου 1,6. Οι αρχαίοι Έλληνες συμβόλιζαν αυτόν τον αριθμό με το γράμμα φ και λεγόταν χρυσός λόγος. Αν οι διαστάσεις ενός χρυσού ορθογωνίου διαφέρουν κατά 6 cm, να βρείτε το εμβαδόν του.



Απάντηση

Αν x το μήκος και y το πλάτος του χρυσού ορθογωνίου, τότε: $\frac{x}{y} = 1{,}6$ και $x - y = 6$.

Η πρώτη εξίσωση μπορεί να γραφεί ισοδύναμα: $x = 1{,}6y$, που είναι γραμμική.

Έτσι έχουμε για λύση το γραμμικό σύστημα: $\begin{cases} x=1{,}6y \\ x-y=6 \end{cases}$

Λύνουμε το σύστημα με τη μέθοδο της αντικατάστασης.

$$\begin{cases} x=1{,}6y \\ 1{,}6y-y=6 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x=1{,}6y \\ 0{,}6y=6 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x=1{,}6y \\ y=10 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x=1{,}6 \cdot 10 \\ y=10 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x=16 \\ y=10 \end{cases}$$

Οι $x = 16$ και $y = 10$ επαληθεύουν τις εξισώσεις του συστήματος και επομένως αποτελούν τη λύση του.

Άρα οι διαστάσεις είναι 16 cm, 10 cm και το εμβαδόν του Ε είναι: $E = 16 \cdot 10 = 160 \text{ cm}^2$.

Ερωτήσεις για Αυτοαξιολόγηση

1 Ποια μέθοδο επίλυσης θα επιλέγατε και γιατί, για να λύσετε καθένα από τα ακόλουθα συστήματα:

α) $\begin{cases} -2x + 4y=1 \\ 2x+y=-23 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} 2x-3y=5 \\ y=11-2x \end{cases}$

2 Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} 2x-y=19 \\ 3x+y=16 \end{cases}$

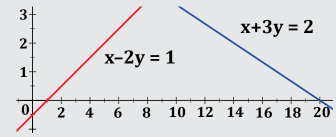
3 Σε μια βιοτεχνία ένας κατασκευαστής κεριών πουλούσε κεριά, μικρά με 2 € το ένα και μεγάλα με 3 € το ένα. Πούλησε συνολικά 50 κεριά και εισέπραξε 115 €. Πόσα κεριά από κάθε είδος πούλησε;

4 **α)** Να λύσετε την εξίσωση $3x+1 = 5x-7$.

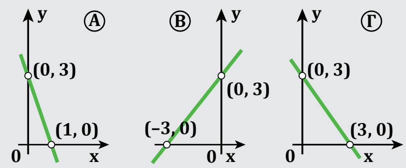
β) Να λύσετε γραφικά το σύστημα $\begin{cases} y= 3x + 1 \\ y5x-7 \end{cases}$

γ) Να εξηγήσετε πώς σχετίζεται η λύση της εξίσωσης με τη λύση του συστήματος.

5 Να βρείτε τις συντεταγμένες του κοινού σημείου των ευθειών του σχήματος.



6 Ποια, από τις παρακάτω, είναι η γραφική παράσταση της ευθείας με εξίσωση x+y = 3; Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.



7 Να κατασκευάσετε ένα σύστημα 2 γραμμικών εξισώσεων που να έχει λύση το ζεύγος (1,3).

Να διερευνήσετε τη γραφική παράσταση και τη λύση γραμμικού συστήματος με την ψηφιακή εφαρμογή.

Να ανοίξετε τον σύνδεσμο και να απαντήσετε στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής για να εξοικειωθείτε με την αναγνώριση αδύνατων και αόριστων γραμμικών συστημάτων.

Ασκήσεις και Προβλήματα

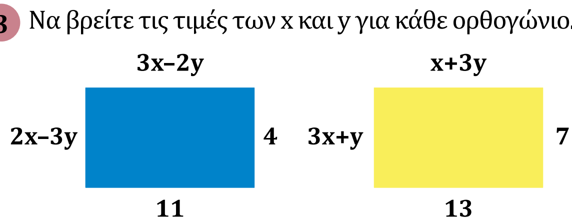
1 Να βρείτε πόσο κοστίζει ένα καπέλο και πόσο ένα ζευγάρι γυαλιά.

2 Να λύσετε δύο συστήματα με τη μέθοδο αντικατάστασης και δύο με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών.

α) $\begin{cases} x+5y=17 \\ 3x+2y=-1 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} 4x+5y=2 \\ 5x+3y=9 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} 3x+5y=24 \\ x+7y=56 \end{cases}$ **δ)** $\begin{cases} 0,5x+2y=16 \\ 2x+0,5y=19 \end{cases}$

3 Να βρείτε τις τιμές των x και y για κάθε ορθογώνιο.



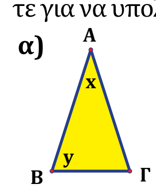
4 Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} x + 2y=5 \\ 2x - 0,5y=1 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} 0x + 5y = 8 \\ 3x + 0y = 0 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} x - 3y = -2(x + 2y) + 9 \\ 2(2x - y) + 6 = 4(4 - y) \end{cases}$

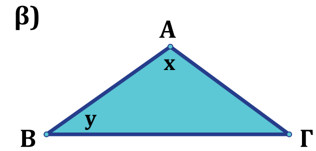
5 Τα παρακάτω τρίγωνα είναι ισοσκελή (ΑΒ = ΑΓ). Να κατασκευάσετε ένα γραμμικό σύστημα και να το λύσετε για να υπολογίσετε τις γωνίες για κάθε περίπτωση:

α)



Η γωνία Β είναι διπλάσια της Α.

β)



Η γωνία Α είναι τριπλάσια της Β.

6 Να συμπληρώσετε το □ ώστε το σύστημα να είναι αδύνατο. $\begin{cases} \square x + 2y = 4 \\ 6x + 4y = -1 \end{cases}$

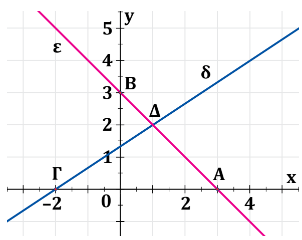
7 Να βρείτε τη σχετική θέση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία (2, 5) και (1, 2) με την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία (0, 1) και (1, 4), χωρίς να τις σχεδιάσετε.

8 Η μία εξίσωση ενός γραμμικού συστήματος είναι η $3x – 2y = 4$ και η λύση του είναι το ζεύγος $(–2, –5)$. Ποια μπορεί να είναι η άλλη εξίσωση του συστήματος;

9 *Μυρτώ:* Αν μου δώσεις 1 €, τότε θα έχω διπλάσια από σένα.
Μιχάλης: Αν μου δώσεις εσύ 1 €, τότε θα έχουμε τα ίδια.
Πόσα € έχει κάθε παιδί;

10 Ο Σεβάχ ανοίγει τον κουμπαρά του και διαπιστώνει ότι περιέχει 60 κέρματα του ενός (1) € και των 2 €. Τα μετράει και βρίσκει ότι έχει συνολικά 105 €. Πόσα κέρματα από κάθε είδος υπήρχαν;

11 **α)** Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών δ και ε.
β) Ποιο σύστημα εξισώσεων παριστάνουν οι ευθείες αυτές;
γ) Να βρείτε τη λύση του συστήματος γραφικά και αλγεβρικά.



12 Ο Ιάσονας και η Φαίδρα λύνουν το σύστημα

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 4x - 6y = 2 \end{cases}$$ και καταλήγουν στην ισότητα: $2 = 2$.

Ιάσονας: δηλαδή είναι αόριστο.
Φαίδρα: Φυσικά, έχει άπειρες λύσεις.
Ιάσονας: Νομίζω κάτι δεν πάει καλά, αν πάρουμε το ζευγάρι (1,1) και αντικαταστήσουμε στην πρώτη εξίσωση, τότε $2 \cdot 1 – 3 \cdot 1 = 2 – 3 = –1$, δηλαδή δεν την επαληθεύει. Ούτε τη δεύτερη επαληθεύει $4 \cdot 1 – 6 \cdot 1 = 4 – 6 = –2$. Δηλαδή, το $(1, 1)$ δεν είναι λύση, άρα δεν έχει άπειρες λύσεις.
Φαίδρα: Σωστό μου φαίνεται. Δεν μπορώ να καταλάβω τι κάναμε λάθος.
Πώς σχολιάζετε τον παραπάνω διάλογο;
Έχουν κάνει κάποιο λάθος τα παιδιά ή κάτι δεν έχουν καταλάβει καλά;

13 Ο πίνακας δείχνει τις ερευνητικές δραστηριότητες δύο ερευνητών στο αστεροσκοπείο.

	Χρήση τηλεσκοπίου	Χρήση υπερυπολογιστή	Συνολικό κόστος
Ερευνητής 1	5 ώρες	3 ώρες	76 €
Ερευνητής 2	6 ώρες	2 ώρες	72 €

Πόσο κοστίζει η χρήση του τηλεσκοπίου και του υπερυπολογιστή για μία ώρα;

14 Να βρείτε τα κ και λ, αν το σύστημα $\begin{cases} κx + λy = 2 \\ κx - λy = -1 \end{cases}$ έχει λύση το ζεύγος $(–1, 2)$.

15 Ένα ορθογώνιο έχει διαστάσεις που διαφέρουν κατά 6 cm και περίμετρο 36 cm. Να βρείτε το εμβαδόν του.

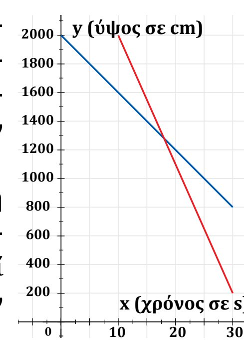
16 Μία ομάδα φοιτητών γεωπονικής παρατηρούν τα ύψη δύο φυτών σε ένα πείραμα. Το φυτό Α έχει ύψος 8 εκατοστά και μεγαλώνει 1 εκατοστό κάθε εβδομάδα. Το φυτό Β έχει ύψος 4 εκατοστά και μεγαλώνει 2 εκατοστά κάθε εβδομάδα.

α) Να γράψετε ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων που να περιγράφει την κατάσταση.
β) Θα έχουν ποτέ τα φυτά το ίδιο ύψος; Αν ναι, πότε και ποιο είναι το ύψος αυτό.

17 Να κατασκευάσετε ένα σύστημα που να έχει λύση το ζεύγος $(x, y) = (–3, 7)$. Να εξηγήσετε πώς σκεφτήκατε.

18 Η επίσκεψη στο ζωολογικό πάρκο κοστίζει 20 € για τους ενήλικες και 15 € για τα παιδιά. Μία Τρίτη επισκέφθηκαν το πάρκο 250 άτομα και το πάρκο εισέπραξε 4.250 €. Πόσα παιδιά και πόσοι ενήλικες επισκέφθηκαν το πάρκο;

19 Δύο φίλοι κάνουν σπορ με αλεξίπτωτα. Πρώτα πηδάει ο Βασίλης και μετά ο Πάνος. Το διπλανό γράφημα παριστάνει την πτώση τους.



α) Να βρείτε την εξίσωση κάθε ευθείας. Να προσδιορίσετε ποια αντιστοιχεί στον Βασίλη και ποια στον Πάνο.
β) Να λύσετε το σύστημα των δύο γραμμικών εξισώσεων. Τι παριστάνει η λύση του συστήματος στο συγκεκριμένο πλαίσιο;

20 Ένας όμιλος τένις προσφέρει στα μέλη του 2 τρόπους για να κάνουν χρήση των γηπέδων του.
1ος τρόπος: Να πληρώνουν για κάθε ώρα παιχνιδιού 8 €.
2ος τρόπος: Να πληρώνουν ετήσια συνδρομή 90 € και για κάθε ώρα παιχνιδιού 5 €.
α) Αν κάποιος παίζει x ώρες και πληρώνει y €, να γράψετε μία γραμμική εξίσωση για κάθε τρόπο.
β) Να λύσετε το σύστημα των γραμμικών εξισώσεων που βρήκατε.

γ) Να ερμηνεύσετε τη λύση του συστήματος στο συγκεκριμένο πλαίσιο.

21 Ένα τεστ ιστορίας περιλάμβανε 15 ερωτήσεις. Κάθε σωστή απάντηση έπαιρνε 5 μονάδες, κάθε λανθασμένη –2 μονάδες και οι ερωτήσεις χωρίς απάντηση 0 μονάδες. Αν η Ελένη δεν απάντησε μόνο σε μία ερώτηση και αξιολογήθηκε με βαθμό 42, να βρείτε σε πόσες ερωτήσεις απάντησε σωστά και σε πόσες λάθος.

22 Στην ομάδα κινηματογράφου και στην ομάδα θεάτρου του σχολείου συμμετέχουν συνολικά 57 μαθητές και μαθήτριες. Η ομάδα κινηματογράφου έχει 7 μέλη περισσότερα από την ομάδα θεάτρου.

α) Να γράψετε ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων το οποίο να περιγράφει την κατάσταση.

β) Πόσα μέλη έχει κάθε ομάδα;

23 Το άθροισμα των ψηφίων ενός διψήφιου αριθμού είναι 6. Αν τα ψηφία αντιστραφούν, προκύπτει αριθμός μεγαλύτερος κατά 18. Ποιος είναι ο αρχικός αριθμός;

24 Σε ένα νοσοκομείο η αναλογία νοσηλευτών προς γιατρούς είναι 7/2. Στο νοσοκομείο απασχολούνται συνολικά 72 γιατροί και νοσηλευτές. Πόσοι νοσηλευτές και πόσοι γιατροί εργάζονται στο νοσοκομείο;

25 Το άθροισμα δύο αριθμών είναι 15. Η διαφορά των τετραγώνων των αριθμών είναι επίσης 15. Να βρείτε τους αριθμούς.

26 Ένα πακέτο 32 χαρτονομισμάτων περιέχει μόνο χαρτονομίσματα των 5 € και των 10 €. Αν η αξία του πακέτου είναι 220 €, πόσα χαρτονομίσματα των 5 € και των 10 € υπάρχουν;

5.2 Επίλυση εξισώσεων δευτέρου ή μεγαλύτερου βαθμού με παραγοντοποίηση

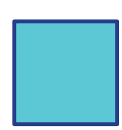
Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθήτριες και οι μαθητές να μπορούν:

- Να λύνουν απλές πολυωνυμικές εξισώσεις δευτέρου βαθμού ελλιπούς ή και πλήρους μορφής, αλλά και μεγαλύτερου βαθμού με παραγοντοποίηση.
- Να λύνουν προβλήματα εξισώσεων 1ου και 2ου βαθμού (με παραγοντοποίηση) και να ερμηνεύουν τις λύσεις τους στο πλαίσιο του προβλήματος.

Στις διερευνήσεις που ακολουθούν, να συνεργαστείτε ανά δύο.

Διερεύνηση 1

Ένα τετράγωνο έχει εμβαδόν ίσο με την περίμετρό του.
Να κατασκευάσετε μία εξίσωση και να τη λύσετε για να βρείτε την πλευρά του τετραγώνου.


x

Διερεύνηση 2

α) Να παραγοντοποιήσετε το διώνυμο $5x^2–80$.

β) Από τη Φυσική γνωρίζουμε ότι στην ελεύθερη πτώση το διάστημα S σε μέτρα, που διανύει ένα σώμα, είναι με μεγάλη προσέγγιση $S = 5t^2$, όπου t ο χρόνος σε δευτερόλεπτα. Να υπολογιστεί ο χρόνος που χρειάζεται ένα σώμα για να διανύσει διάστημα 80 μέτρων.

Διερεύνηση 3

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2+2x-63$.
β) Οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου είναι διαδοχικοί περιττοί αριθμοί. Το εμβαδόν του είναι $63\ cm^2$. Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του.

Διερεύνηση 4

α) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο x^3+2x^2-x-2.
β) Να λύσετε την εξίσωση $x^3+2x^2-x-2=0$.

Διερεύνηση 5

Η Αναστασία έχει δύο κόρες, τη Γεωργία και τη Βασιλική. Το 2020:
α) Η ηλικία της Γεωργίας ήταν διπλάσια από την ηλικία της Βασιλικής.
β) Η ηλικία της Αναστασίας ήταν ίση με το τετράγωνο της ηλικίας της Γεωργίας.
γ) Η ηλικία της Αναστασίας ήταν ίση με το τετραπλάσιο του αθροίσματος των δύο κοριτσιών. Να βρείτε την ηλικία της μαμάς και των κοριτσιών της σήμερα.

Να ανοίξετε τον σύνδεσμο για να μελετήσετε το ιστορικό σημείωμα «Από τον Διόφαντο στον Αλ Χουαρίζμι ».

Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες μάθησης

Πολλές φορές η επίλυση ενός προβλήματος δεν οδηγεί σε εξίσωση 1ου βαθμού, αλλά σε εξισώσεις 2ου ή και μεγαλύτερου βαθμού, όπως $x^2+7x+10 = 0$, $x^3-2x = 11$, $x^2+3 = 0$ κ.λπ.
Έχουμε μάθει ότι κάποια πολυώνυμα μπορούν να γραφτούν σε *κανονική* ή σε *παραγοντοποιημένη* μορφή.

Παραδείγματα:
α) Η μορφή x^2+5x+6 είναι η κανονική, ενώ η μορφή $(x+2)(x+3)$ είναι η παραγοντοποιημένη.
β) Η μορφή $2x^2-8x$ είναι η κανονική, ενώ η μορφή $2x(x-4)$ είναι η παραγοντοποιημένη.

Η ***γενική μορφή εξίσωσης 2ου βαθμού*** είναι $\alpha x^2+\beta x+\gamma = 0$, με $\alpha \neq 0$.
Αν $\beta = 0$ ή $\gamma = 0$, προκύπτουν αντίστοιχα οι εξισώσεις $\mathbf{\alpha x^2+\gamma = 0}$ και $\mathbf{\alpha x^2+\beta x = 0}$. Οι εξισώσεις αυτές ονομάζονται **ελλιπείς μορφές** της εξίσωσης 2ου βαθμού.

Επίλυση εξίσωσης 2ου βαθμού

Η λύση εξισώσεων **2ου ή μεγαλύτερου βαθμού** στηρίζεται στην ιδιότητα **«αν $\alpha\cdot\beta = 0$, τότε $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$»** με τη βοήθεια της οποίας ανάγεται στην επίλυση άλλων απλούστερων εξισώσεων (μικρότερου βαθμού).
Για να λύσουμε μία εξίσωση δευτέρου βαθμού ακολουθούμε τα εξής βήματα:
Βήμα 1: Αν το 2ο μέλος δεν είναι μηδέν, μεταφέρουμε όλους τους όρους στο 1ο μέλος, ώστε το 2ο μέλος να γίνει ίσο με μηδέν.
Βήμα 2: Αναλύουμε σε γινόμενο παραγόντων το πολυώνυμο στο 1ο μέλος.
Βήμα 3: Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα: **«αν $\alpha\cdot\beta = 0$, τότε $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$»**.

Σημείωση:
Η ιδιότητα **«αν $\alpha\cdot\beta = 0$, τότε $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$»** γενικεύεται και για περισσότερους παράγοντες.

Στη συνέχεια θα δούμε παραδείγματα επίλυσης εξισώσεων, κυρίως δευτέρου βαθμού, με παραγοντοποίηση. Άλλες μεθόδους επίλυσης θα μάθουμε σε μεγαλύτερες τάξεις.

5.2.1 Επίλυση εξίσωσης ελλιπούς μορφής $αx^2+βx = 0$

Για να λύσουμε την εξίσωση $\mathbf{x^2 = 5x}$, εργαζόμαστε ως εξής:

Βήμα 1	Μεταφέρουμε το 5x στο 1ο μέλος, ώστε το 2ο μέλος να γίνει ίσο με 0.	$x^2–5x = 0$
Βήμα 2	Παραγοντοποιούμε το πολυώνυμο $x^2–5x$ στο 1ο μέλος.	$x(x–5) = 0$
Βήμα 3	Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα: **«αν α·β = 0, τότε α = 0 ή β = 0».**	$x = 0$ ή $x–5 = 0$
	και λύνουμε τις πρωτοβάθμιες εξισώσεις οι οποίες προκύπτουν.	$x = 0$ ή $x =5$

Επαλήθευση: αντικαθιστούμε τις λύσεις στην αρχική εξίσωση.

- Αν $x = 0$ τότε $0^2 = 5·0$ ή $0 = 0$, που ισχύει.
- Αν $x = 5$ τότε $5^2 = 5·5$ ή $25 = 25$, που ισχύει.

Άρα, λύσεις της εξίσωσης $\mathbf{x^2 = 5x}$ είναι οι αριθμοί 0 και 5.

Να διερευνήσετε την επίλυση της εξίσωσης $αx^2 +βx = 0$, ανοίγοντας την εφαρμογή.

5.2.2 Επίλυση εξίσωσης ελλιπούς μορφής $αx^2 +γ = 0$

Για να λύσουμε την εξίσωση $\mathbf{x^2–25 = 0}$, εργαζόμαστε ως εξής:

Βήμα 1	Το 2ο μέλος είναι ήδη 0.	$x^2–25 = 0$
Βήμα 2	Παραγοντοποιούμε το πολυώνυμο $x^2–25$ στο 1ο μέλος.	$x^2–5^2 = 0$
Βήμα 3	Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα: **«αν α·β = 0, τότε α = 0 ή β = 0».**	$(x+5)(x–5) = 0$
	και λύνουμε τις πρωτοβάθμιες εξισώσεις οι οποίες προκύπτουν.	$x+5 = 0$ ή $x–5 = 0$
		$x = –5$ ή $x = 5$

Επαλήθευση: αντικαθιστούμε τις λύσεις στην αρχική εξίσωση.

- Αν $x = –5$, τότε $(–5)^2–25 = 25–25 = 0$, άρα την επαληθεύει.
- Αν $x = 5$, τότε $5^2–25=25–25=0$, άρα την επαληθεύει.

Άρα, λύσεις της εξίσωσης $\mathbf{x^2–25=0}$ είναι οι αριθμοί –5 και 5.

Σχόλιο: Την εξίσωση αυτή μπορούμε να τη λύσουμε και ως εξής:
$x^2–25 = 0$ ή $x^2 = 25$ ή ($x = \sqrt{25}$ ή $x = -\sqrt{25}$) ή ($x = –5$ ή $x = 5$).

Για να διερευνήσετε την επίλυση της εξίσωσης $αx^2 +γ = 0$, να ανοίξετε την εφαρμογή.

5.2.3 Επίλυση εξίσωσης πλήρους μορφής $αx^2+βx+γ = 0$

Για να λύσουμε την εξίσωση $\mathbf{x^2–5x+6=0}$ εργαζόμαστε ως εξής:

Βήμα 1	Το 2ο μέλος είναι ήδη 0.	$x^2–5x+6 = 0$
Βήμα 2	Αναλύουμε σε γινόμενο παραγόντων το πολυώνυμο $x^2–5x+6$ στο 1ο μέλος. Για να δημιουργήσουμε κοινούς παράγοντες, γράφουμε το $–5x$ ως $–3x–2x$	$x^2–3x–2x+6 = 0$ $x(x–3)–2(x–3) = 0$
Βήμα 3	Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα: **«αν α·β = 0, τότε α = 0 ή β = 0»**	$(x–3)(x–2) = 0$
	και επιλύουμε τις πρωτοβάθμιες εξισώσεις που προκύπτουν.	$x–3 = 0$ ή $x–2 = 0$
	Οι αριθμοί 2 και 3 είναι οι λύσεις της αρχικής εξίσωσης $\mathbf{x^2–5x+6 = 0}$.	$x = 3$ ή $x = 2$

Επαλήθευση: αντικαθιστούμε τις λύσεις στην αρχική εξίσωση.

- Αν $x = 2$, τότε $2^2-5\cdot2+6 = 4-10+6=0$, άρα την επαληθεύει.
- Αν $x = 3$, τότε $3^2-5\cdot3+6 = 9-15+6=0$, άρα την επαληθεύει.

Άρα, λύσεις της εξίσωσης $x^2-5x+6=0$ είναι οι αριθμοί 2 και 3.

Να ανοίξετε τον σύνδεσμο και να απαντήσετε στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής για να εξοικειωθείτε με την επίλυση της εξίσωσης $αx^2+βx+γ = 0$.

5.2.4 Επίλυση εξίσωσης βαθμού μεγαλύτερου του πρώτου.

Η επίλυση εξισώσεων βαθμού μεγαλύτερου του πρώτου παρουσιάζει δυσκολίες και γι' αυτό έχουν αναπτυχθεί διάφορες μέθοδοι επίλυσής τους, όπως θα δούμε σε μεγαλύτερες τάξεις. Γενικά, για την επίλυσή τους ακολουθούμε την πορεία που έχουμε περιγράψει κάνοντας παραγοντοποίηση, λαμβάνοντας υπόψη μας ότι η ιδιότητα **«αν $α\cdotβ = 0$, τότε $α = 0$ ή $β = 0$»** ισχύει και για περισσότερους παράγοντες.

Ενδεικτικά, για να λύσουμε την εξίσωση: $\mathbf{x^3-x = 2-2x^2}$ εργαζόμαστε ως εξής:

Βήμα 1	Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο 1ο μέλος, ώστε το 2ο μέλος να γίνει μηδέν.	$x^3-x = 2-2x^2$ $x^3+2x^2-x-2 = 0$
Βήμα 2	Παραγοντοποιούμε το 1ο μέλος με ομαδοποίηση. Διαφορά τετραγώνων.	$x^2(x+2)-(x+2) = 0$ $(x+2)(x^2-1) = 0$
Βήμα 3	Εφαρμόζουμε την ιδιότητα: **«αν $α\cdotβ = 0$, τότε $α = 0$ ή $β = 0$»**	$(x+2)(x-1)(x+1) = 0$
και λύνουμε τις πρωτοβάθμιες εξισώσεις που προκύπτουν.		$x+2 = 0$ ή $x-1 = 0$ ή $x+1 = 0$
Λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί, -2, -1 και 1.		$x = -2$ ή $x = 1$ ή $x = -1$

Επαλήθευση: αντικαθιστούμε τις λύσεις στην αρχική εξίσωση.

- Αν $x = -2$, τότε: $(-2)^3-(-2) = 2-2(-2)^2$ ή $-8+2 = 2-2\cdot4$ ή $-6 = 2-8$ ή $-6 = -6$, που ισχύει.
- Αν $x = -1$, τότε: $(-1)^3-(-1) = 2-2(-1)^2$ ή $-1+1 = 2-2\cdot1$ ή $0 = 2-2$ ή $0 = 0$, που ισχύει.
- Αν $x = 1$, τότε: $(1)^3-(1) = 2-2(1)^2$ ή $1-1 = 2-2\cdot1$ ή $0 = 2-2$ ή $0 = 0$, που ισχύει.

Συνεπώς λύσεις της εξίσωσης $\mathbf{x^3-x = 2-2x^2}$ είναι οι αριθμοί -2, -1, και 1.

Σημείωση:

Στα επόμενα, όπου δεν γίνεται επαλήθευση, αφήνεται ως εργασία για τον/την μαθητή/τρια.

Να ανοίξετε τον σύνδεσμο και να απαντήσετε στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής για να εξοικειωθείτε με την επίλυση εξισώσεων βαθμού μεγαλύτερου του δευτέρου.

Εφαρμογή 1: Εξισώσεις 2ου βαθμού

Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $x(x+7) = 0$ **β)** $4x^2-4x+1 = 0$ **γ)** $x^2-100 = 0$ **δ)** $x^2+x-56 = 0$ **ε)** $x^2+49 = 0$

Απάντηση

α)

$x(x+7) = 0$
$x = 0$ ή $x+7 = 0$
$x = 0$ ή $x = -7$

β)

$4x^2 - 4x + 1=0$
$(2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1^2=0$
$(2x - 1)^2=0$
$2x - 1=0$
$x=\frac{1}{2}$

γ)

$x^2-100 = 0$
$x^2-10^2 = 0$
$(x-10)(x+10) = 0$
$x-10 = 0$ ή $x+10 = 0$
$x = 10$ ή $x = -10$

δ)

$x^2+x-56 = 0$
$x^2+8x-7x-56 = 0$
$x(x+8)-7(x+8) = 0$
$(x+8)(x-7) = 0$
$x+8 = 0$ ή $x-7 = 0$
$x = -8$ ή $x = 7$

ε)

$x^2+49 = 0$
$x^2 \geq 0$ και $49 > 0$
Άρα: $x^2+49 > 0$
οπότε είναι αδύνατη.

Εφαρμογή 2: Προβλήματα εξισώσεων 2ου βαθμού

α) Να βρείτε έναν αριθμό του οποίου το τετράγωνο να ισούται με το επταπλάσιό του.
β) Το τριπλάσιο του τετραγώνου ενός αριθμού ισούται με 147. Ποιος είναι ο αριθμός;

Απάντηση

α) Αν x ο άγνωστος αριθμός, τότε έχουμε την εξίσωση $x^2 = 7x$.

Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο 1ο μέλος, ώστε το 2ο μέλος να γίνει μηδέν.	$x^2 = 7x$
Παραγοντοποιούμε με κοινό παράγοντα το x.	$x^2-7x = 0$
Εφαρμόζουμε την ιδιότητα: **«αν α·β = 0, τότε α = 0 ή β = 0».**	$x(x-7) = 0$
Λύνουμε τις 2 πρωτοβάθμιες εξισώσεις.	$x = 0$ ή $x-7 = 0$
Βρίσκουμε τις λύσεις της αρχικής εξίσωσης.	$x = 0$ ή $x = 7$

Με επαλήθευση βλέπουμε ότι και οι δύο αριθμοί αποτελούν λύση του προβλήματος.

β) Έστω x ο αριθμός. Αφού το τριπλάσιο του τετραγώνου του ισούται με 147, οπότε προκύπτει η εξίσωση $3x^2 = 147$, την οποία λύνουμε ως εξής:

$$3x^2 = 147 \text{ ή } 3x^2 - 147 = 0 \text{ ή } 3(x^2-49) = 0 \text{ ή } x^2 - 49 = 0 \text{ ή }$$
$$(x-7)(x+7) = 0 \text{ ή } (x-7 = 0 \text{ ή } x+7 = 0) \text{ ή } (x = 7 \text{ ή } x = -7).$$

Με επαλήθευση βλέπουμε ότι οι δύο αριθμοί αποτελούν λύση του προβλήματος.

Εφαρμογή 3: Πρόβλημα εξίσωσης 2ου βαθμού

Το άθροισμα των τετραγώνων δύο διαδοχικών ακέραιων αριθμών είναι 41. Να βρείτε τους αριθμούς.

Απάντηση

Αν x ο πρώτος ακέραιος αριθμός, τότε ο επόμενός του είναι ο x+1, οπότε προκύπτει η εξίσωση: $x^2+(x+1)^2 = 41$, την οποία λύνουμε ως εξής:

$x^2 + (x+1)^2 = 41$ ή $x^2 + (x^2+2x+1) - 41 = 0$ ή $2x^2 + 2x - 40 = 0$ ή $2(x^2+x-20) = 0$ ή x^2+x-20 ή
$x^2 + 5x - 4x - 20 = 0$ ή $x(x+5) - 4(x+5) = 0$ ή $(x+5)(x-4) = 0$ ή $(x+5 = 0$ ή $x-4 = 0)$ ή $(x=-5$ ή $x=4)$.

- Αν $x = -5$, τότε ο επόμενός του είναι $-5+1 = -4$ και, επειδή $(-5)^2+(-4)^2 = 25+16 = 41$, ο αριθμός -5 είναι λύση της εξίσωσης. Άρα οι αριθμοί -5 και -4 είναι μία λύση του προβλήματος.
- Αν $x = 4$, τότε ο επόμενός του είναι $4+1 = 5$ και, επειδή $4^2+5^2 = 25+16 = 41$, και ο αριθμός 4 είναι λύση της εξίσωσης. Άρα οι αριθμοί 4 και 5 είναι μία δεύτερη λύση του προβλήματος.

Να εκπονήσετε την *Εργασία με προεκτάσεις* με τίτλο: «Μοντελοποίηση με Υπολογιστικό Φύλλο».

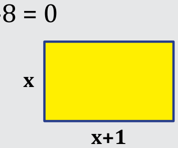
Ερωτήσεις για Αυτοαξιολόγηση

1 Να εξετάσετε ποιος ή ποιοι από τους αριθμούς −1, −2, 1, 4, 6, 7 είναι λύση των εξισώσεων:

α) $x^2-7x+6 = 0$ **β)** $2x^2-16x+32$

2 Να λύσετε τις εξισώσεις: **α)** $(x-1)(x+2)(x-2) = 0$ **β)** $x^2-13x = 0$ **γ)** $x^2-2x-8 = 0$

3 Να λύσετε την εξίσωση: $x^3+x^2-4x+4 = 0$



4 Αν το διπλανό ορθογώνιο έχει εμβαδόν 20 cm^2, να βρείτε την περίμετρό του.

5 Ο Γιάννης σε ένα τεστ έλυσε την εξίσωση $2x^2 = 4x$ ως εξής:

$$2x^2 = 4x \quad ή \quad \frac{2x^2}{2x} = \frac{4x}{2x} \quad ή \quad x = 2$$

Συμφωνείτε με τη λύση του Γιάννη; Αν έχει κάποιο λάθος, να το διορθώσετε.

6 Η Ντενίζ έλυσε την εξίσωση $(x-1)(x+2) = 1$ ως εξής:

$$(x-1)(x+2) = 1$$
$$x-1 = 1 \text{ ή } x+2 = 1$$
$$x = 2 \text{ ή } x = -1$$

Συμφωνείτε με τη λύση της Ντενίζ;
Αν έχει κάποιο λάθος, να το διορθώσετε και να λύσετε την εξίσωση.

7 Δύο μαθήτριες έλυσαν την εξίσωση $(x+7)(2x-3) = (x+7)(5x+3)$ ως εξής:

- Αφροδίτη: $2x+3 = 5x+3$ ή $0 = 3x$ ή $x = 0$
- Περσεφόνη: $2x^2+17x+21 = 5x^2+38x+21$ ή $3x^2+21x = 0$ ή $3x+21 = 0$ ή $x = -7$

Να βρείτε τα λάθη τους και έπειτα να λύσετε την εξίσωση.

Ασκήσεις και Προβλήματα

1 Να βρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων Α και Β, στα οποία τέμνονται η παραβολή $y = 2x^2$ και η ευθεία $y = 32$ χωρίς να τις σχεδιάσετε.

2 Να λύσετε τις εξισώσεις.

α) $x^2-4x+4 = 0$ **β)** $(x-1)(x-2)(x+3) = 0$ **γ)** $5x^2 = 45$

δ) $5x^2 = 45x$ **ε)** $x^2+8x+12 = 0$ **στ)** $2x^2-16x+32 = 0$

3 Να λύσετε τις εξισώσεις.

α) $(x-1)(x+1) = 3$ **β)** $x^3+2x^2+x = 0$ **γ)** $x^3-7x+6 = 0$

4 Να ελέγξετε τις παρακάτω λύσεις των εξισώσεων. Να βρείτε τα λάθη (αν υπάρχουν) και να τα διορθώσετε

α) $3y^2 = 21y$

$$3y^2 = 21y$$
$$3y = 21$$
$$y = 7$$

β) $6x(x+5) = 0$

$$6x(x+5) = 0$$
$$x+5 = 0$$
$$x = -5$$

γ) $x^2 = 9$

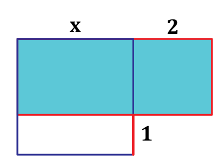
$$x^2 = 9$$
$$x = \sqrt{9}$$
$$x = 3$$

5 Να βρείτε έναν διψήφιο αριθμό του οποίου τα ψηφία είναι διαδοχικοί ακέραιοι αριθμοί και το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι 25.

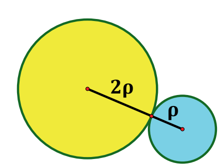
6 Να βρείτε έναν διψήφιο αριθμό του οποίου το άθροισμα των ψηφίων είναι 12 και το γινόμενο των ψηφίων του είναι 36.

7 Να βρείτε δύο αριθμούς με διαφορά 12 και γινόμενο –35.

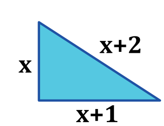
8 Αν αυξήσουμε την πλευρά ενός τετραγώνου κατά 2 cm και μειώσουμε την άλλη κατά 1 cm, προκύπτει ορθογώνιο με εμβαδόν 28 cm^2. Να βρείτε το εμβαδόν του τετραγώνου.



9 Στο διπλανό σχήμα ο μεγάλος κύκλος έχει ακτίνα διπλάσια του μικρού. Αν το άθροισμα των εμβαδών των δύο κύκλων είναι $\approx 37{,}68\ cm^2$, να βρείτε το εμβαδόν κάθε κύκλου.



10 Να βρείτε τις πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου.



11 Να βρείτε τρεις διαδοχικούς ακέραιους τέτοιους ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με το γινόμενό τους.

12 Το ύψος h σε m που βρίσκεται ένας πύραυλος, t sec μετά την εκτόξευσή του, δίνεται από τον τύπο $h = 16t-t^2$.

α) Σε τι ύψος βρισκόταν ο πύραυλος 2 sec μετά την εκτόξευσή του;

β) Σε τι ύψος βρισκόταν ο πύραυλος 8 sec μετά την εκτόξευσή του;

γ) Μετά από πόσα sec ο πύραυλος βρισκόταν σε ύψος 48 m;

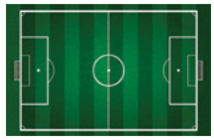
13 Δύο αντίγραφα διάσημων πινάκων του Βαν Γκογκ, έχουν το ίδιο εμβαδόν. Ο πρώτος είναι σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις που διαφέρουν κατά 10 cm.

Ο δεύτερος είναι σχήματος τετραγώνου, του οποίου η πλευρά είναι 4 cm μεγαλύτερη από τη μικρή πλευρά του ορθογώνιου πίνακα. Να βρείτε:

α) τις διαστάσεις των δύο πινάκων,

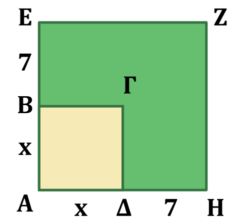
β) το εμβαδόν τους.

14 Για να μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένα γήπεδο ποδοσφαίρου για διεθνείς αγώνες πρέπει το μήκος να είναι από 110 m έως 120 m και το πλάτος από 70 m έως 90 m. Αν το μήκος ενός γηπέδου είναι μεγαλύτερο από το πλάτος κατά 30 m και έχει εμβαδόν 10800 m^2, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για διεθνείς αγώνες;



15 **Εργασία σε ζεύγη ή μικρές ομάδες.**

Είστε μηχανικός σε μια Δημοτική Υπηρεσία και έχετε αναλάβει την κατασκευή ενός τετραγωνικού δημοτικού πάρκου ΑΕΖΗ. Το τετράγωνο ΑΒΓΔ θα στρωθεί με χαλίκι και το πράσινο μέρος με γκαζόν. Το εμβαδόν του γκαζόν θα είναι 189 m^2. Ποιο είναι το μήκος της πλευράς x;



5.3 Ανισώσεις πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθήτριες και οι μαθητές να μπορούν:

- Να διερευνούν (με μοντέλα – μεταφορές) και να διατυπώνουν τις βασικές ιδιότητες της διάταξης.
- Να διακρίνουν τις διαφορές μεταξύ εξίσωσης και ανίσωσης.
- Να μετατρέπουν πραγματικά προβλήματα σε ανισώσεις της μορφής αx+βx<γ, να τις επιλύουν, να παριστάνουν τις λύσεις γραφικά και να εξετάζουν αν ένας αριθμός είναι λύση μιας ανίσωσης ή του προβλήματος.
- Να βρίσκουν τις κοινές λύσεις δύο ανισώσεων χρησιμοποιώντας τον άξονα των πραγματικών αριθμών.

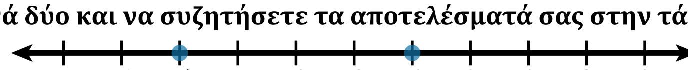
Διερεύνηση 1: Μαθηματικοποίηση καθημερινών καταστάσεων

Να συνεργαστείτε ανά δύο και να συζητήσετε τα αποτελέσματά σας στην τάξη.

Παρακάτω φαίνονται 4 πινακίδες, τις οποίες πιθανότατα θα έχετε συναντήσει. Να τις σχολιάσετε και να σκεφτείτε ποιο μαθηματικό αντικείμενο μπορεί να τις συνδέει.

Διερεύνηση 2: Διάταξη στον άξονα των πραγματικών αριθμών

Να συνεργαστείτε ανά δύο και να συζητήσετε τα αποτελέσματά σας στην τάξη.



α) Να συμπληρώσετε το □ στην πρόταση –1 □ –5 με >, <, ή =.

Όμοια: **i)** 2 □ 7 **ii)** –4□–6 **iii)** –9□–16 **iv)** |–4|□|4| **v)** 5□|–8|

β) Ο αριθμός **α** είναι αριστερά του αριθμού **β** στην αριθμογραμμή. Να συγκρίνετε τους αριθμούς –**α** και –**β**. Να εξηγήσετε πώς σκεφτήκατε.

Να κάνετε τη διερεύνηση με τίτλο «Ζυγίζοντας αλγεβρικές παραστάσεις».

Διερεύνηση 3: Η έννοια των συμβόλων <, >, ≤, ≥

1) Να γράψετε σε μαθηματική μορφή τις παρακάτω προτάσεις, χρησιμοποιώντας τα σύμβολα < , >, ≤ , ≥ :

α) Τουλάχιστον 5 μαθητές του τμήματος θα συμμετάσχουν στον διαγωνισμό «Μαθηματικών».

β) Η θερμοκρασία σήμερα δεν θα ξεπεράσει τους 11 βαθμούς C.

γ) Το ημερήσιο χαρτζιλίκι του Α είναι το πολύ 5 €.

δ) Ο αθλητής Α τρέχει τα εκατό m κάτω από 10 s.

ε) Το ύψος της αίθουσας είναι μεγαλύτερό από 3,8 m.

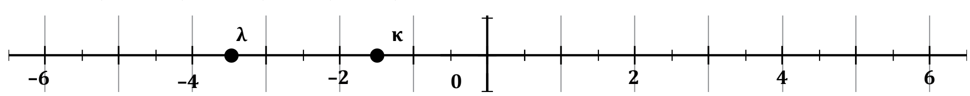
2) Πώς θα μπορούσατε να παραστήσετε την απάντηση κάθε πρότασης στην αριθμογραμμή;

Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες μάθησης

Γνωρίζουμε ότι πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών δύο αριθμοί διατάσσονται και μπορούμε να τους συγκρίνουμε χρησιμοποιώντας μία ανισότητα.

Η **ανισότητα** είναι μια μαθηματική σχέση, με την οποία συγκρίνουμε και διατάσσουμε αριθμούς και παραστάσεις. Χρησιμοποιούνται γι' αυτό τα σύμβολα ≤ , ≥ , < , > και γνωρίζουμε ότι από δύο αριθμούς πάνω στον άξονα μεγαλύτερος είναι αυτός που βρίσκεται δεξιότερα.

Για παράδειγμα: $4 > -3$, $0 > -2$, $1 > -4$, $3 > 1$, $κ > λ$, κ.λπ.



Επομένως:

- Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από το μηδέν.
- Κάθε αρνητικός αριθμός είναι μικρότερος από το μηδέν.
- Κάθε αρνητικός αριθμός είναι μικρότερος από κάθε θετικό αριθμό.
- $x \geq α$ σημαίνει ότι ο x είναι μεγαλύτερος ή ίσος από τον α, δηλαδή $x > α$ ή $x = α$. Αντίστοιχα για το $x \leq α$.

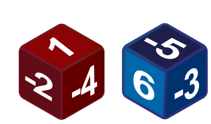
5.3.1 Ιδιότητες ανισοτήτων

Διερεύνηση 4: Ιδιότητες ανισότητας

Να συνεργαστείτε ανά δύο και να συζητήσετε τα αποτελέσματά σας στην τάξη.

Έχουμε δύο ζάρια. Στο ένα ζάρι οι άρτιοι αριθμοί είναι αρνητικοί, στο άλλο ζάρι οι περιττοί αριθμοί είναι αρνητικοί. Να πραγματοποιήσετε τις εξής δύο δραστηριότητες:

Δραστηριότητα 1



Βήμα 1: Να ρίξετε τα ζάρια και να γράψετε το αποτέλεσμα με μία **ανισότητα** (π.χ. αν φέρατε -2 και 3 τότε γράφετε $-2 < 3$ ή $3 > -2$).

Βήμα 2: Να ρίξετε το ένα ζάρι και να **προσθέσετε** τον αριθμό που φέρατε σε κάθε μέλος της προηγούμενης ανισότητας. Να καταγράψετε το αποτέλεσμα σαν μία νέα ανισότητα.

Να επαναλάβετε τα προηγούμενα δύο βήματα 5 φορές.

α) Όταν προσθέτετε σε κάθε πλευρά της ανισότητας τον ίδιο αριθμό, η νέα ανισότητα είναι αληθής; Αλλάζει η φορά της ανισότητας; Να εξηγήσετε την απάντησή σας.

β) Όταν αφαιρείτε από κάθε πλευρά της ανισότητας τον ίδιο αριθμό, η νέα ανισότητα είναι αληθής; Αλλάζει η φορά της; Να χρησιμοποιήσετε τα ζάρια για να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να χρησιμοποιήσετε τα αποτελέσματά σας στα (α) και (β) για να κάνετε μία εικασία για τον τρόπο λύσης των ανισώσεων: x+5 > 15 και **x+α > β** ως προς x.

Δραστηριότητα 2

Βήμα 1: Όπως στη Δραστηριότητα 1.

Βήμα 2: Να ρίξετε το ένα ζάρι και να **πολλαπλασιάσετε** τον αριθμό που φέρατε με κάθε μέλος της προηγούμενης ανισότητας. Να καταγράψετε το αποτέλεσμα με μία νέα ανισότητα.

Να επαναλάβετε τα προηγούμενα δύο βήματα 10 φορές.

α) Όταν πολλαπλασιάζετε κάθε πλευρά της ανισότητας με τον ίδιο αριθμό, η νέα ανισότητα είναι αληθής; Αλλάζει η φορά της; Να εξηγήσετε την απάντησή σας.

β) Όταν διαιρείτε κάθε πλευρά της ανισότητας με τον ίδιο αριθμό, η νέα ανισότητα είναι αληθής; Να χρησιμοποιήσετε τα ζάρια για να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να χρησιμοποιήσετε τα αποτελέσματά σας στα (α) και (β) για να κάνετε μία εικασία για τον τρόπο λύσης των ανισώσεων:

i) αx > β όταν α > 0 και όταν α < 0.

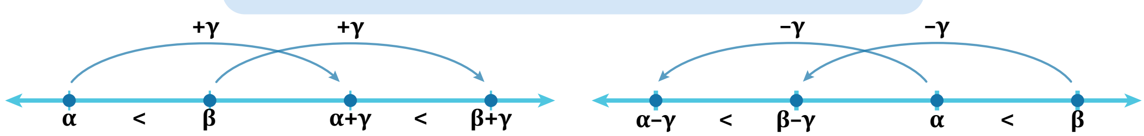
ii) Να χρησιμοποιήσετε ένα αντιπαράδειγμα για να δείξετε ότι η σχέση 2κ > κ δεν αληθεύει για κάθε τιμή του κ.

Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες μάθησης

1. Αν προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό και στα δύο μέλη μιας ανισότητας, τότε προκύπτει ανισότητα ίδιας φοράς.

- Αν προσθέτουμε το 5 και στα δύο μέλη της ανισότητας **3 > –1**, τότε προκύπτει **8 > –4**, δηλαδή ανισότητα με την ίδια φορά.
- Αν αφαιρέσουμε το 5 και από τα δύο μέλη της ανισότητας **3 > –1,** τότε προκύπτει **–2 > –6**, δηλαδή ανισότητα με την ίδια φορά.

Αν α > β, τότε α+γ > β+γ και α–γ > β–γ



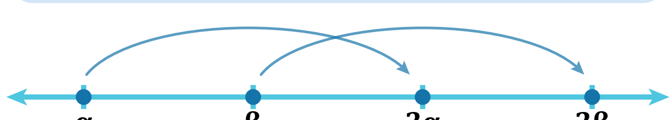
Να διερευνήσετε τη μεταβολή μιας ανισότητας αν προσθέσουμε και στα δύο μέλη της τον ίδιο αριθμό, ανοίγοντας την εφαρμογή.

Να διερευνήσετε τη μεταβολή μιας ανισότητας αν αφαιρέσουμε και από τα δύο μέλη της τον ίδιο αριθμό, ανοίγοντας την εφαρμογή.

2. Αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο θετικό αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.

- Αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της ανισότητας **3 > –1** με το 5, τότε προκύπτει **15 > –4,** δηλαδή ανισότητα με την ίδια φορά.
- Αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη της ανισότητας **3 > –1** με το 3, τότε προκύπτει **1 > –1/3**, δηλαδή ανισότητα με την ίδια φορά.

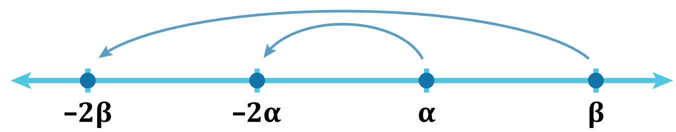
Αν α > β και γ > 0 τότε α·γ > β·γ και α:γ > β:γ



3. Αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο αρνητικό αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με αντίθετη φορά.

- Αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της ανισότητας **$-3 < -1$** με το **-5**, τότε **$15 > 5$**, δηλαδή προκύπτει ανισότητα με αντίθετη φορά.
- Αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη της ανισότητας **$-6 < 9$** με το **-3**, τότε **$2 > -3$**, δηλαδή προκύπτει ανισότητα με αντίθετη φορά.

Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma < 0$, τότε $\alpha\gamma > \beta\gamma$ και $\alpha:\gamma > \beta:\gamma$



Να διερευνήσετε τη μεταβολή μιας ανισότητας αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της με τον ίδιο αριθμό, ανοίγοντας την εφαρμογή.

Να διερευνήσετε τη μεταβολή μιας ανισότητας αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη της με τον ίδιο μη μηδενικό αριθμό, ανοίγοντας την εφαρμογή.

5.3.2 Η έννοια της ανίσωσης και της λύσης της

Στην καθημερινή ζωή πολλές φορές χρειάζεται να συγκρίνουμε δύο μεγέθη με μια σχέση ισότητας ή ανισότητας, χρησιμοποιώντας τα σύμβολα <, >, ≤, ≥, =. Επίσης, συχνά χρησιμοποιούμε εκφράσεις όπως «μεγαλύτερος από», «μικρότερος από», «τουλάχιστον», «το πολύ» κ.λπ. Όταν θέλουμε να γράψουμε προτάσεις που περιέχουν τέτοιες εκφράσεις σε μαθηματική μορφή, χρησιμοποιούμε ανισότητες. Στον πίνακα παρουσιάζεται η αντιστοιχία εκφράσεων και συμβόλων.

Σύμβολο	<	>	≤	≥
Έκφραση	Μικρότερο Λιγότερο	Μεγαλύτερο Περισσότερο	Μικρότερο ή ίσο Το πολύ Όχι περισσότερο	Μεγαλύτερο ή ίσο Τουλάχιστον Όχι μικρότερο

Παράδειγμα:
Για να γράψουμε σε συμβολική μορφή την πρόταση: «ένας αριθμός αυξημένος κατά 4 είναι μεγαλύτερος ή ίσος από 8,9», χρησιμοποιούμε για τον αριθμό τη μεταβλητή x και η έκφραση γίνεται:

$\underbrace{\text{ένας αριθμός αυξημένος κατά 4}}_{x+4}$ $\underbrace{\text{είναι μεγαλύτερος ή ίσως από 8,9}}_{\geq\ 8,9}$, δηλαδή: $x+4 \geq 8,9$.

Ανίσωση με έναν άγνωστο ονομάζεται μια ανισότητα η οποία περιέχει έναν άγνωστο x.

Για κάθε τιμή της μεταβλητής x από την ανίσωση προκύπτει μια ανισότητα, η οποία μπορεί να είναι αληθής ή ψευδής. Ας δοκιμάσουμε μερικές τιμές για το x στην προηγούμενη ανίσωση.
Για $x = 3$ προκύπτει η ανισότητα $7 \geq 8,9$, η οποία είναι ψευδής. Το 3 δεν επαληθεύει την ανίσωση.
Για $x = 4,9$ προκύπτει η ανισότητα $8,9 \geq 8,9$, η οποία είναι αληθής. Το 4,9 επαληθεύει την ανίσωση.
Για $x = 5$ προκύπτει η ανισότητα $9 \geq 8,9$, η οποία είναι αληθής. Το 5 επαληθεύει την ανίσωση, κ.λπ.

Λύση μιας ανίσωσης ονομάζεται κάθε αριθμός που επαληθεύει την ανίσωση.

Συνεπώς, το 4,9 και το 5 είναι λύσεις της ανίσωσης $x+4 \geq 8{,}9$, ενώ το 3 και το 4 δεν είναι. Όμως η ανίσωση $x+4 \geq 8{,}9$ έχει κι άλλες λύσεις. Για παράδειγμα, τους αριθμούς: 6, 10, 11 κ.λπ.

Όλες οι λύσεις μιας ανίσωσης αποτελούν το σύνολο λύσεων της ανίσωσης.

Να ανοίξετε τον σύνδεσμο και να απαντήσετε στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής για να εξοικειωθείτε στη μετάφραση ανισώσεων από τη λεκτική στη συμβολική μορφή.

Να ανοίξετε τον σύνδεσμο και να απαντήσετε στις ερωτήσεις Σωστού-Λάθους για να διακρίνετε αν ένας αριθμός είναι λύση μίας ανίσωσης.

Εφαρμογή

Να γράψετε με μορφή ανίσωσης την πρόταση:
α) «Ο αριθμός x είναι τουλάχιστον −2». **β)** «Το τριπλάσιο ενός αριθμού y είναι το πολύ 12».
γ) Να εξετάσετε αν κάποιος ή κάποιοι από τους αριθμούς −3, −2, 4, 5, 6, είναι λύση των προηγούμενων ανισώσεων.

Απάντηση

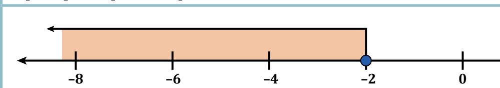
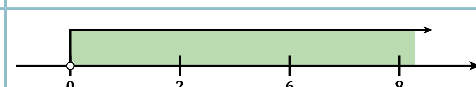
α) $x \geq -2$
β) $3x \leq 12$

γ)

Τιμή του x	$x \geq -2$	Λύση	$3x \leq 12$	Λύση
-3	$-3 < -2$	Όχι	$3\cdot(-3) = -9 < 12$	Ναι
-2	$-2 \geq -2$	Ναι	$3\cdot(-2) = -6 < 12$	Ναι
4	$4 \geq -2$	Ναι	$3\cdot 4 = 12 \leq 12$	Ναι
5	$5 \geq -2$	Ναι	$3\cdot 5 = 15 > 12$	Όχι
6	$6 \geq -2$	Ναι	$3\cdot 6 = 18 > 12$	Όχι

Γραφική παράσταση των λύσεων ανίσωσης στον άξονα των αριθμών

Ο ανοιχτός κύκλος ○, χρησιμοποιείται όταν ο αριθμός δεν είναι λύση (π.χ. το 0 στην ανίσωση $x > 0$).
Ο κλειστός κύκλος •, χρησιμοποιείται όταν ο αριθμός είναι λύση της ανίσωσης (π. χ. το −2 στην ανίσωση $x \leq -2$). Το βέλος προς τα αριστερά ή προς τα δεξιά δείχνει πού βρίσκονται οι λύσεις της ανίσωσης.

Ανίσωση	Λεκτική περιγραφή	Γραφική λύση
$x \leq -2$	Όλοι οι αριθμοί οι μικρότεροι ή ίσοι του −2	
$x > 0$	Όλοι οι θετικοί αριθμοί	

Να διερευνήσετε την παράσταση της διάταξης στον άξονα των παραγματικών αριθμών, ανοίγοντας την εφαρμογή.

Ερωτήσεις για Αυτοαξιολόγηση

1 Αν α < 3, τότε α–7 < 3–7. Να συμπληρώσετε ανάλογα τα κενά παρακάτω:

Αν x < 3, τότε x+2 …..   Αν x > 3, τότε x–5 …..   Αν x ≥ 3, τότε 2x …..
Αν x < y, τότε –x …..   Αν x > y, τότε 4x …..   Αν x < y, τότε –4x …..

2 Να εξετάσετε αν η λύση της εξίσωσης x = 2 είναι και λύση της ανίσωσης x ≥ 2.

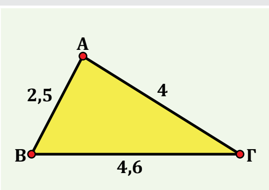
3 Να συμπληρώσετε τα κενά ώστε να προκύψει αληθής πρόταση:

α) αν x = 5, τότε –3·x … –3·5   **β)** αν x < 5, τότε –3·x … –3·5

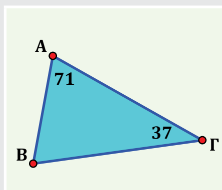
4 Να αναφέρετε τουλάχιστον 5 λύσεις της ανίσωσης x ≥ 1. Ποια είναι η μικρότερη λύση της ανίσωσης;

5 Ποια είναι η μεγαλύτερη ακέραια λύση της ανίσωσης: x < 8.

6 «Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από μεγαλύτερη πλευρά βρίσκεται μεγαλύτερη γωνία» και αντιστρόφως «απέναντι από μεγαλύτερη γωνία βρίσκεται μεγαλύτερη πλευρά». Να συμπληρώσετε με το κατάλληλο σύμβολο <, >, =, ≥, ≤ ώστε να προκύψει αληθής σχέση:

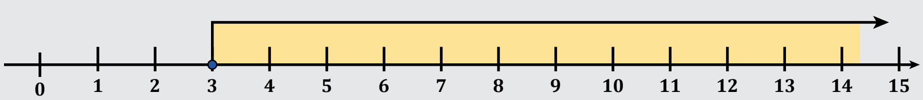


$\hat{A}$…$\hat{B}$
$\hat{\Gamma}$…$\hat{B}$
$\frac{\hat{A}}{2}$…$\frac{\hat{\Gamma}}{2}$



ΑΒ…ΑΓ
ΑΓ…ΒΓ
ΑΒ…ΒΓ
ΑΒ+ΑΓ…ΑΒ+ΒΓ

7 **α)** Να γράψετε μία ανίσωση της οποίας η γραφική παράσταση της λύσης είναι:

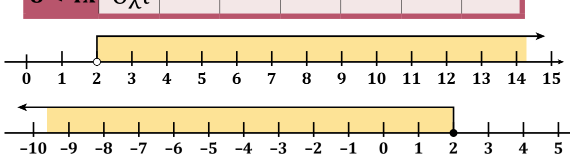


β) Να διατυπώσετε λεκτικά και να γράψετε συμβολικά όλους τους αριθμούς που δεν είναι λύσεις της προηγούμενης ανίσωσης.

Ασκήσεις και Προβλήματα

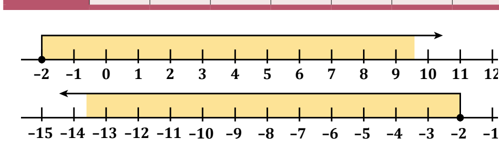
1 Να συμπληρώσετε τον πίνακα. Ποια από τις γραφικές παραστάσεις αποτελεί το σύνολο λύσεων της ανίσωσης 8 < 4x. Να γράψετε τη λύση με μία ανίσωση.

x	–1	0	1	2	3	4	5
4x	–4						
8 < 4x	Όχι						



2 Να συμπληρώσετε τον πίνακα. Ποια από τις γραφικές παραστάσεις αποτελεί το σύνολο λύσεων της ανίσωσης 8 ≤ – 4x. Να γράψετε τη λύση με μία ανίσωση;

x	–1	0	1	2	3	4	5
4x	–4						
8 ≤ –4x	Όχι						



3 Δίνεται η ανίσωση y < –3.

α) να περιγράψετε τις τιμές του y, οι οποίες είναι λύσεις της ανίσωσης.

β) να περιγράψετε τις τιμές του y, που δεν είναι λύσεις της ανίσωσης. Να γράψετε μία ανίσωση που να παριστάνει αυτές τις τιμές.

γ) τι παριστάνουν όλες οι τιμές του y στις ερωτήσεις (α) και (β); Αληθεύει το συμπέρασμά σας για κάθε y;

4 Να εξετάσετε ποιος ή ποιοι από τους αριθμούς $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ είναι λύσεις της ανίσωσης:
α) $x-2 > -1$, **β)** $3x-1 < 0$, **γ)** $x:2 \geq 2$.

5 Να εξετάσετε αν η λύση της εξίσωσης $2x = 6$ είναι και λύση της ανίσωσης $x < 3$.

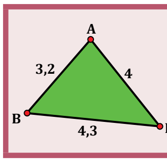
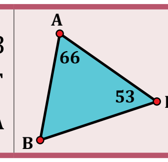
6 Να συμπληρώσετε τα κενά ώστε να προκύψει αληθής πρόταση:
α) αν $x < 5$, τότε $-3 \cdot x$ ... $-3 \cdot 5$,
β) αν $x > 5$, τότε $x:(-4)$ ... $5:(-4)$

7 **α)** Πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $x = 4$
β) Πόσες λύσεις έχει η ανίσωση $x > 4$
γ) Να εξετάσετε αν η εξίσωση $x = 4$ και η ανίσωση $x \geq 4$ έχουν κοινή λύση.

8 Να εκφράσετε με ανισώσεις τις προτάσεις:
α) Το διπλάσιο ενός αριθμού ελαττωμένο κατά 3 είναι τουλάχιστον 7.
β) Το άθροισμα δύο διαδοχικών φυσικών είναι το πολύ 10.
γ) Ένας αριθμός είναι μεγαλύτερος του 2 και μικρότερος του 12.

9 Αν $x > 8$, ποια είναι η μικρότερη ακέραια τιμή που μπορεί να πάρει ο x;

10 Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά βρίσκεται η μεγαλύτερη γωνία και αντιστρόφως, απέναντι από τη μεγαλύτερη γωνία βρίσκεται η μεγαλύτερη πλευρά. Να συμπληρώσετε με το κατάλληλο σύμβολο <, >, =, ≥, ≤ ώστε να προκύψει αληθής σχέση:

	$\hat{A}$...$\hat{B}$ $\hat{B}$...$\hat{\Gamma}$ $\hat{\Gamma}$...$\hat{A}$		ΑΒ...ΑΓ ΑΓ...ΒΓ ΒΓ...ΑΒ

5.3.3 Η ανίσωση αx+β<γ

Διερεύνηση 1: Χυμός πορτοκαλιού

Στο ποτήρι της Μαίρης υπάρχει χυμός πορτοκαλιού 80 ml και στο ποτήρι του αδελφού της του Γιάννη 100 ml. Η Μαίρη έβαλε στο ποτήρι της κι άλλη ποσότητα χυμού και τώρα έχει μεγαλύτερη ποσότητα από τον Γιάννη. Πόσα ml πρόσθεσε;

Διερεύνηση 2: Το πρόβλημα του Ταξί Ι

Να συνεργαστείτε ανά δύο και να συζητήσετε τα αποτελέσματά σας στην τάξη.
Η εταιρεία ταξί «ΒΟΛΤΑ» χρεώνει 3,60 € «σημαία» και 0,90 € για κάθε χιλιόμετρο διαδρομής. Οι φίλοι Γιώργος και Κώστας βρίσκονται στο Σύνταγμα και παίρνουν ταξί της ίδιας εταιρείας ξεχωριστά ο καθένας για το σπίτι του.
α) Ο Γιώργος για τη διαδρομή που κάνει πληρώνει 7,20 €. Πόσα χιλιόμετρα απέχει το σπίτι του Γιώργου από το Σύνταγμα;
β) Ο Κώστας, φθάνοντας στο σπίτι του δίνει χαρτονόμισμα 10 € στον ταξιτζή και παίρνει και ρέστα. Πόσα χιλιόμετρα απέχει το σπίτι του Κώστα από το Σύνταγμα;

Διερεύνηση 3: Υπερφόρτωση κυκλώματος

Να συνεργαστείτε ανά δύο και να συζητήσετε τα αποτελέσματά σας στην τάξη.
Ένα κύκλωμα υπερφορτώνεται όταν συνδεθούν ηλεκτρικές συσκευές που απαιτούν ισχύ ρεύματος μεγαλύτερη από 1800 w. Να συνδέσετε στο κύκλωμα έναν φούρνο μικροκυμάτων, ισχύος 1100 w.

α) Να γράψετε και να λύσετε μία ανίσωση η οποία να παριστάνει πόση ισχύ (w) αντέχει ακόμα το κύκλωμα χωρίς να το υπερφορτώσετε.
β) Εκτός από τον φούρνο μικροκυμάτων, ποιες από τις παρακάτω συσκευές μπορείτε να συνδέσετε ταυτόχρονα στο κύκλωμα χωρίς υπερφορτωθεί; Συσκευή: Ρολόι 50 w, Μπλέντερ 300 w, Ηλεκτρική ψησταριά 1200 w, Τοστιέρα 800 w.

Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες μάθησης

Πολλά προβλήματα οδηγούν σε ανισώσεις της μορφής $αx+β < γ$, $αx+β > γ$, $αx+β \leq γ$, $αx+β \geq γ$, δηλαδή ανισώσεις στις οποίες ο άγνωστος παρουσιάζεται μόνο στο ένα μέλος. Για να λύσουμε μια τέτοια ανίσωση χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες των ανισοτήτων, ώστε να δημιουργήσουμε απλούστερες ισοδύναμες ανισώσεις, δηλαδή ανισώσεις που να έχουν τις ίδιες λύσεις με τις αρχικές. Τη διαδικασία επίλυσης ανισώσεων θα δούμε στις επόμενες εφαρμογές.

Εφαρμογή 1

Να λυθούν οι ανισώσεις: **α)** $2x-5 > 11$ **β)** $-4x+3 \geq -13$ **γ)** $2(x-2) < 2x$ **δ)** $3x > 3(x-1)$

Απάντηση:

α) $2x-5 > 11$ ή [Προσθέτουμε το 5 και στα δύο μέλη της ανίσωσης]

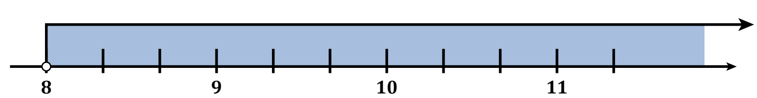
$2x-5+5 > 11+5$ ή [Η φορά της νέας ανίσωσης δεν αλλάζει]

$2x > 16$ ή [Διαιρούμε και τα δύο μέλη με το $2 > 0$]

$\frac{2x}{2} > \frac{16}{2}$ ή [Η φορά της νέας ανίσωσης δεν αλλάζει]

$\mathbf{x > 8}$

Παράσταση της λύσης στον άξονα:



β) $-4x+3 \geq -13$ ή [Αφαιρούμε το 3 και στα δύο μέλη της ανίσωσης]

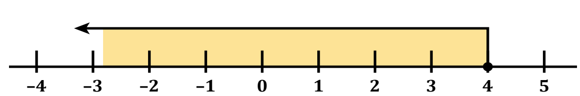
$-4x+3-3 \geq -13-3$ ή [Η φορά της νέας ανίσωσης δεν αλλάζει]

$-4x \geq -16$ ή [Διαιρούμε και τα δύο μέλη με το $-4 < 0$]

$\frac{-4x}{-4} \leq \frac{-16}{-4}$ ή [Η φορά της νέας ανίσωσης ***αλλάζει***]

$\mathbf{x \leq 4}$

Παράσταση της λύσης στον άξονα:



γ) $2(x-2) > 2x$ ή [Απαλοιφή παρένθεσης]

$2x-4 > 2x$ ή [Προσθέτουμε το 4 και στα δύο μέλη]

$2x-4+4 > 2x+4$ ή [Αναγωγή όμοιων όρων]

$2x > 2x+4$ ή [Αφαιρούμε το 2x και από τα δύο μέλη]

$2x-2x > 4$ ή [Αναγωγή όμοιων όρων]

$0x > 4$ ή

$\mathbf{0 > 4}$ [Η τελευταία, οπότε και η αρχική είναι ***αδύνατη***]

δ) $3x > 3(x-1)$ ή [Απαλοιφή παρένθεσης]

$3x > 3x-3$ ή [Αφαιρούμε το 3x και από τα δύο μέλη]

$3x-3x > 3x-3-3x$ ή [Αναγωγή όμοιων όρων]

$0x > -3$ ή

$\mathbf{0 > -3}$ [Η τελευταία, οπότε και η αρχική αληθεύει για κάθε αριθμό x.]

Να ανοίξετε την εφαρμογή και να διερευνήσετε την ανίσωση $αx+β>0$ και τη γραφική της παράσταση.

Για να διερευνήσετε την ανίσωση αx+β>γ και τη γραφική της παράσταση, να ανοίξετε την ψηφιακή εφαρμογή.

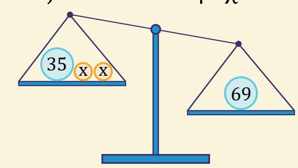
Εφαρμογή 2

Η παραδοσιακή ζυγαριά αποτελείται από δύο δίσκους που αιωρούνται σε ίσες αποστάσεις από ένα υπομόχλιο.

α) Να γράψετε μία ανίσωση που να περιγράφει την κατάσταση της ζυγαριάς, η οποία δεν ισορροπεί.

β) Να λύσετε την ανίσωση.

γ) Τι συμπεραίνετε για τη μάζα x;



Απάντηση:

α) Ο δίσκος της ζυγαριάς που βρίσκεται ψηλότερα περιέχει τη μικρότερη μάζα. Άρα, η ανίσωση που περιγράφει την κατάσταση ανισορροπίας της ζυγαριάς είναι: $2x+35<69$.

β) Έχουμε: $2x+35<69$ ή $2x+35-35<69-35$ ή $2x<34$ ή $\frac{2x}{2}<\frac{34}{2}$ ή $x<17$.

γ) Το x ως μάζα παριστάνει θετικούς αριθμούς που είναι μικρότεροι από τον 17, οπότε: $0<x<17$.

Εφαρμογή 3

Στο μάθημα της αστρονομίας οι φοιτητές για να περάσουν το μάθημα πρέπει στις 5 γραπτές εργασίες της ακαδημαϊκής χρονιάς να βγάλουν μέσο όρο τουλάχιστον 90.

Η Μαρία έχει τις εξής επιδόσεις στις 4 πρώτες εργασίες:

1η εργασία: 97, 2η εργασία: 78, 3η εργασία: 88, 4η εργασία: 89.

Πόσο τουλάχιστον πρέπει να γράψει στην 5η εργασία για να περάσει το μάθημα;

Απάντηση:

Αν στην 5η γραπτή εργασία ο βαθμός της Μαρίας είναι x, τότε ο μέσος όρος (Μ.Ο.) των 5 γραπτών πρέπει να είναι τουλάχιστον 90, δηλαδή Μ.Ο. ≥ 90.

Ο μέσος όρος των 5 γραπτών είναι: $\text{Μ.Ο.}=\frac{97+78+88+89+x}{5}$, οπότε προκύπτει η ανίσωση: $\frac{97+78+88+89+x}{5}\geq 90$ για την οποία έχουμε:

$\frac{97+78+88+89+x}{5}\geq 90$ ή [Κάνουμε τις πράξεις στον αριθμητή]

$\frac{352+x}{5}\geq 90$ ή [Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με $5>0$]

$5\cdot\frac{352+x}{5}\geq 5\cdot 90$ ή [Η νέα ανίσωση έχει την ίδια φορά]

$352+x\geq 450$ ή

$352+x-352\geq 450-352$ ή [Αφαιρούμε και από τα δύο μέλη το 352]

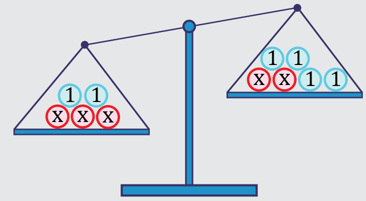
$x\geq 98$.

Άρα, η Μαρία πρέπει να γράψει τουλάχιστον 98.

Ερωτήσεις για Αυτοαξιολόγηση

1 Ποια ανισότητα περιγράφει την κατάσταση ανισορροπίας της ζυγαριάς;

α) $3x+2<2x+4$ **β)** $3x+2<4x+4$ **γ)** $3x+2>2x+4$



2 Να χαρακτηρίσετε τις ανισώσεις ως προς το πλήθος των λύσεων: $0x < 1$, $0x > 2$, $0x < -1$, $0x \geq 0$

3 Ποιος είναι ο μικρότερος ακέραιος αριθμός που είναι λύση της ανίσωσης $-6x < 12$;

4 Δίνεται η ανίσωση $x > 4$.
α) Να γράψετε πέντε λύσεις της ανίσωσης.
β) Να γράψετε τις τρεις μικρότερες ακέραιες λύσεις της ανίσωσης.
γ) Πόσες λύσεις έχει η ανίσωση;

5 Να λύσετε τις ανισώσεις και να τις παραστήσετε γραφικά:

α) $2y-14 < -12$ **β)** $3(x-1)-5 \geq 7$

6 Η μηνιαία κάρτα διαδρομών με τα μέσα μαζικής μεταφοράς κοστίζει 27 €. Μία απλή διαδρομή χωρίς κάρτα κοστίζει 1,20 €. Να υπολογίσετε πόσες τουλάχιστον διαδρομές το μήνα πρέπει να κάνει κάποιος, για να τον συμφέρει οικονομικά η αγορά της κάρτας.

Ασκήσεις και Προβλήματα

1 Να λυθούν οι ανισώσεις:
α) $3x-4 < x-2$ **β)** $3(y-2)+6 > 12$
γ) $2-3(x-2) \leq 11$ **δ)** $3(x-1)-x \geq 2-4x$

2 Για ποιες τιμές του αριθμού x, ο αριθμός $A = 3(x-1)-4$ δεν είναι αρνητικός;

3 Μία διαδρομή στα μέσα μαζικής μεταφοράς (ΜΜΜ) για έναν φοιτητή κοστίζει 0,50 €. Μία μηνιαία κάρτα κοστίζει 13,50 €.
α) Αν ένας φοιτητής χρησιμοποιεί τα ΜΜΜ 20 φορές τον μήνα τον συμφέρει η αγορά μηνιαίας κάρτας;
β) Αν χρησιμοποιεί τα ΜΜΜ, 40 φορές τον μήνα τον συμφέρει η αγορά μηνιαίας κάρτας;

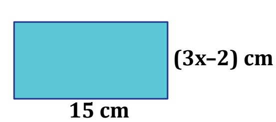
γ) Πόσες τουλάχιστον διαδρομές πρέπει να κάνει τον μήνα για να τον συμφέρει η κάρτα;

4 Ο Θανάσης έχει γράψει τρία διαγωνίσματα με βαθμούς 12, 14 και 12. Τι βαθμό πρέπει να γράψει στο επόμενο διαγώνισμα για να έχει μέσο όρο τουλάχιστον 14;

5 Μια έκταση 5000 m^2 θα γίνει χώρος στάθμευσης αυτοκινήτων. Υπολογίζεται ότι κάθε αυτοκίνητο χρειάζεται 25 m^2 για να σταθμεύει και για τις διάφορες εγκαταστάσεις χρειάζονται συνολικά 850 m^2. Πόσα το πολύ αυτοκίνητα θα μπορούν να σταθμεύσουν στον χώρο στάθμευσης;

6 Η αντοχή μιας γέφυρας είναι 9 t. Ένα φορτηγό με απόβαρο 4 t είναι φορτωμένο με σωλήνες, που ο καθένας ζυγίζει 200 kg. Πόσους το πολύ σωλήνες μπορεί να μεταφέρει το φορτηγό, ώστε να περάσει με ασφάλεια τη γέφυρα;

7 Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι μεγαλύτερο από 60 cm^2. Να κατασκευάσετε μία ανίσωση και να τη λύσετε για να προσδιορίσετε τις πιθανές τιμές του x.



8 Οι χρόνοι μιας αθλήτριας δρόμου (σε λεπτά) στους τέσσερις αγώνες που έχει ολοκληρώσει είναι 25,5, 24,3, 24,8 και 23,5. Η αθλήτρια σχεδιάζει να τρέξει τουλάχιστον έναν ακόμη αγώνα και θέλει να έχει μέσο χρόνο λιγότερο από 24 λεπτά.

Να γράψετε και να λύσετε μία ανίσωση για να δείξετε πώς μπορεί να πετύχει τον στόχο της.

9 **α)** Να λύσετε την εξίσωση: $-3(x-3)-8-x=-2x+11$

β) Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{-2x}{5}+2>-1$.

γ) Να εξετάσετε αν η λύση της εξίσωσης είναι και λύση της ανίσωσης.

δ) Να βρείτε τις θετικές και ακέραιες λύσεις της ανίσωσης.

5.3.4 Η ανίσωση αχ+β < γχ+δ

Διερεύνηση 1: Το πρόβλημα του Ταξί ΙΙ

Να συνεργαστείτε είτε ανά δύο είτε σε μικρές ομάδες.

Η εταιρεία ταξί «ΑΝΕΣΗ» χρεώνει 3,60 € «σημαία» και 0,80 € για κάθε χιλιόμετρο διαδρομής. Η εταιρεία ταξί «ΧΑΛΑΡΑ» χρεώνει «σημαία» 2 € και 0,90 € για κάθε χιλιόμετρο.

α) Ποια εταιρεία θα προτιμήσετε αν κάνετε μια διαδρομή 10 χιλιομέτρων;

β) Σε ποια περίπτωση σας συμφέρει να χρησιμοποιήσετε την εταιρεία «ΧΑΛΑΡΑ»; Να απαντήσετε στο ερώτημα με όσους περισσότερους τρόπους μπορείτε.

Διερεύνηση 2

Η Χάνα έχει στο πορτοφόλι της 16 χαρτονομίσματα των 5 ευρώ και ο μικρότερος αδελφός της 25 κέρματα των 2 ευρώ. Με την έναρξη της πανδημίας η Χάνα άρχισε να ξοδεύει κάθε μέρα ένα χαρτονόμισμα και ο αδερφός της ένα κέρμα μέχρι κάποιο πορτοφόλι να αδειάσει. Μια μέρα κοίταξαν τα πορτοφόλια τους και διαπίστωσαν ότι το ποσό των χρημάτων του μικρότερου αδελφού ήταν μεγαλύτερο από το ποσό της Χάνα. Πόσες μέρες πέρασαν από την αρχή της πανδημίας μέχρι την ημέρα που διαπίστωσαν ότι ο μικρότερος αδελφός είχε στο πορτοφόλι του περισσότερα χρήματα από τη Χάνα; Να λύσετε το πρόβλημα με όσους περισσότερους τρόπους μπορείτε.

Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες μάθησης

Πολλά προβλήματα οδηγούν σε ανισώσεις της μορφής: $αx+β < γx+δ$, $αx+β > γx+δ$, $αx+β \le γx+δ$, $αx+β \ge γx+δ$, δηλαδή ανισώσεις με άγνωστο και στα δύο μέλη της ανίσωσης. Η επίλυση τέτοιων ανισώσεων γίνεται, με εφαρμογή των ιδιοτήτων των ανισοτήτων, ώστε να δημιουργήσουμε ισοδύναμες ανισώσεις με άγνωστο μόνο στο ένα μέλος, τη λύση των οποίων μελετήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Τη διαδικασία επίλυσης ανισώσεων με άγνωστο και στα δύο μέλη θα την εξετάσουμε στις επόμενες εφαρμογές.

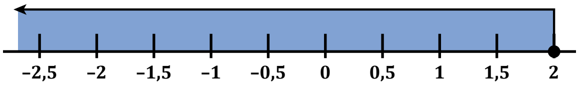
Εφαρμογή 1

Να λυθούν οι ανισώσεις και να παρασταθούν γραφικά οι λύσεις τους:

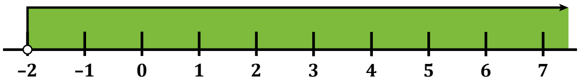
α) $2x+3 \le x+5$ **β)** $-8x+2(x-9) < 2(x-1)$

Απάντηση

α) $2x+3 \le x+5$ ή $2x-x \le 5-3$ ή $\mathbf{x \le 2}$



β) $-8x+2(x-9) < 2(x-1)$ ή $-8x+2x-18 < 2x-2$ ή $-8x+2x-2x < 18-2$ ή $-8x < 16$ ή $\frac{-8x}{-8} > \frac{16}{-8}$ ή $x > -2$.



Να διερευνήσετε τη λύση της ανίσωσης αx+β < γx +δ και τη γραφική παράστασή της σε ένα σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων, ανοίγοντας την εφαρμογή.

Εφαρμογή 2

Ένας όμιλος τένις προσφέρει στα μέλη του δύο τρόπους για να κάνουν χρήση των γηπέδων του.
1ος τρόπος: Να πληρώνουν για κάθε ώρα παιχνιδιού 8 €.
2ος τρόπος: Να πληρώνουν ετήσια συνδρομή 120 € και για κάθε ώρα παιχνιδιού 5 €.

α) Αν κάποιος παίξει 50 ώρες πόσα χρήματα θα πληρώσει με κάθε τρόπο.
β) Να προσδιορίσετε πότε συμφέρει ο 1ος και πότε ο 2ος τρόπος;

Απάντηση

α) *1ος τρόπος:* $8\cdot 50 = 400$ € *2ος τρόπος:* $5\cdot 50+120 = 370$ €.

β) Αν ο παίκτης παίξει συνολικά x παιχνίδια, τότε τα ποσά που θα πληρώσει σε κάθε περίπτωση είναι:
1ος τρόπος: 8x € *2ος τρόπος*: 5x+120 €
Ο πρώτος τρόπος τον συμφέρει όταν: $8x < 5x+120$ ή $8x-5x <120$ ή $3x < 120$ ή $x < 40$, δηλαδή όταν παίζει λιγότερα από 40 παιχνίδια.
Ο δεύτερος τρόπος τον συμφέρει όταν $5x+120 <8x$ ή $x>40$, δηλαδή όταν παίζει περισσότερα από 40 παιχνίδια.

Εφαρμογή 3

Να βρείτε τον μεγαλύτερο ακέραιο αριθμό για τον οποίο ισχύει: «Αν στο μισό ενός αριθμού προσθέσουμε 10, προκύπτει αριθμός μεγαλύτερος από τον αρχικό».

Απάντηση

Αν x ο αριθμός, τότε προκύπτει σύμφωνα με τα δεδομένα η ανίσωση: $\frac{x}{2}+10>x$. Για να τη λύσουμε, πρώτα κάνουμε απαλοιφή παρονομαστή. Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με το 2

$2\cdot\left(\frac{x}{2}+10\right)>2x$, κάνουμε επιμεριστική ιδιότητα

$2\cdot\frac{x}{2}+2\cdot 10) >2x$, κάνουμε την απλοποίηση και τον πολλαπλασιασμό στο 1ο μέλος

$x+20 > 2x$ αφαιρούμε το x και από τα δύο μέλη (χωρίζουμε γνωστούς από άγνωστους όρους)
$x+20-x>2x-x$ κάνουμε αναγωγή όμοιων όρων
$20>x$ ή ισοδύναμα $x<20$. Ο μεγαλύτερος ακέραιος που την επαληθεύει είναι ο 19.
Επαλήθευση: $\frac{19}{2}+10=9{,}5+10=19{,}5>19$. Άρα ο ζητούμενος αριθμός είναι ο 19.

Γενικά:

Για να λύσουμε μια ανίσωση ακολουθούμε τα εξής βήματα:
- Απαλείφουμε παρονομαστές και παρενθέσεις (αν υπάρχουν).
- Χωρίζουμε γνωστούς από άγνωστους όρους.
- Κάνουμε αναγωγή όμοιων όρων.
- Διαιρούμε με τον συντελεστή του άγνωστου και τα δύο μέλη.
  – Αν ο συντελεστής είναι θετικός, η ανίσωση δεν αλλάζει φορά.
  – Αν ο συντελεστής είναι αρνητικός, η ανίσωση αλλάζει φορά.

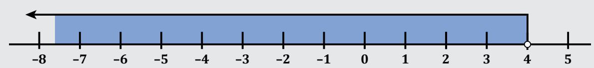
Ερωτήσεις για Αυτοαξιολόγηση

1 Να λυθούν οι ανισώσεις και να παρασταθούν οι λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

α) $7x-1 > 9(x+1)$ **β)** $8(3x-2) \leq 12(2x+1)$ **γ)** $6(2x-1) \geq 3(4x+1)$

2 Μια εταιρεία κινητής τηλεφωνίας έχει δύο καρτοπρογράμματα:
1ο πρόγραμμα: πάγιο 5 € και 0,05 €/λεπτό ομιλίας.
2ο πρόγραμμα: 0,06 €/λεπτό ομιλίας.
Πόσα τουλάχιστον λεπτά πρέπει να μιλάει κάποιος για να τον συμφέρει το 2ο πρόγραμμα;

3 Να βρείτε ποιας από τις επόμενες ανισώσεις η λύση της παριστάνεται στον άξονα:



α) $3x+2 < 4x-2$ **β)** $x-2 < -6$ **γ)** $-2x > -8$ **δ)** $\frac{x}{2}>-2$

Ασκήσεις και Προβλήματα

1 Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

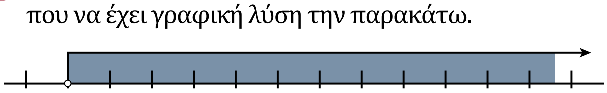
α) $3(8x-2) \leq 12(2x+1)$ **β)** $2(6x-1) \geq 4(3x+1)$

γ) $\frac{x}{3} - 2 \geq x$ **δ)** $\frac{x}{3} - \frac{1}{2} \leq 0,5x$

2 Η τάξη ετοιμάζει εκδρομή στο τέλος της σχολικής χρονιάς. Δύο γραφεία ταξιδιών προσφέρουν τις υπηρεσίες τους νοικιάζοντας εκδρομικά λεωφορεία όπως φαίνεται παρακάτω:

Γραφείο «4 εποχές»: 200 € και 1,80 € για κάθε χιλιόμετρο.
Γραφείο «Κόσμος»: 400 € και 1 € για κάθε χιλιόμετρο.
Σε ποια περίπτωση συμφέρει η επιλογή του γραφείου «Κόσμος»;

3 Να γράψετε μία ανίσωση της μορφής $αx+β < γx + δ$ που να έχει γραφική λύση την παρακάτω.



4 Να βρείτε τους 3 μικρότερους άρτιους διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς, οι οποίοι να έχουν άθροισμα μεγαλύτερο του 50.

5 Η Μαρίνα αγόρασε ένα αυτοκίνητο με καύσιμο (μόνο) βενζίνη, αξίας 20.000 € και η φίλη της η Σάρα το ίδιο αυτοκίνητο, αλλά υβριδικό με 23.000 €. Σύμφωνα με τους κατασκευαστές, το αυτοκίνητο της Μαρίνας καταναλώνει 7 lt βενζίνη/100 km και της Σάρας 4,5 lt βενζίνη/100 km. Υποθέτουμε ότι κατά μέσο όρο και οι δύο κάνουν περίπου 10.000 km τον χρόνο και η βενζίνη κοστίζει 1,80 €/lt. Να βρείτε σε πόσα χρόνια η Σάρα θα κάνει απόσβεση των επιπλέον χρημάτων που πλήρωσε. Υποθέτουμε ότι όλα τα υπόλοιπα έξοδα για τα δύο αυτοκίνητα είναι ίδια.

6 Να βρείτε τους 3 μεγαλύτερους διαδοχικούς περιττούς φυσικούς αριθμούς, οι οποίοι να έχουν άθροισμα το πολύ 50.

7 Η Αννέτα σκοπεύει να κάνει συχνά πατινάζ στον πάγο αυτόν τον χειμώνα. Το παγοδρόμιο χρεώνει 4 € για την είσοδο. Μπορεί είτε να νοικιάσει παγοπέδιλα στο παγοδρόμιο για 5 € την ημέρα ή να αγοράσει το δικό της ζευγάρι για 45 €. Πόσες φορές πρέπει να χρησιμοποιήσει τα παγοπέδιλα προκειμένου το κόστος αγοράς τους να είναι μικρότερο από το συνολικό κόστος ενοικίασης;

8 Κατά τη σύγκριση των προγραμμάτων προπληρωμής τηλεφώνου, η Μίλα διαπίστωσε ότι η *ParlaPhone* χρεώνει 3,5 € πάγια μηνιαία χρέωση συν 0,06 € ανά λεπτό. Η Μίλα έχει αυτήν τη στιγμή την υπηρεσία *BestPhone* με 6 € το μήνα συν 0,03 € ανά λεπτό. Η Μίλα υπολογίζει ότι ο μηνιαίος λογαριασμός της θα ήταν μεγαλύτερος με την *ParlaPhone*. Πόσα λεπτά τον μήνα χρησιμοποιεί το τηλέφωνο;

9 Ο Γιώργος έχει τριπλάσια χρήματα από τον Νίκο. Αγόρασε ένα βιβλίο για 20 € και τώρα έχει λιγότερα χρήματα από τον Νίκο.

α) Να γράψετε μία ανίσωση που να μαθηματικοποιεί την κατάσταση.

β) Να αποδείξετε ότι ο Νίκος έχει λιγότερα από 10 €.

10 **Είναι δίκαιο το παιχνίδι;**. Ένα παιχνίδι παίζεται ως εξής: επιλέγεται τυχαία ένας αριθμός από το 1 μέχρι το 100. Αν ο αριθμός τοποθετηθεί στη «μηχανή Α», αυτή τον πολλαπλασιάζει με 99 και προσθέτει 20, δίνοντας το αποτέλεσμα. Αν τοποθετηθεί στη «μηχανή Β», αυτή τον πολλαπλασιάζει με 100 και αφαιρεί 20, δίνοντας το αποτέλεσμα. Κερδίζει η μηχανή που δίνει το μεγαλύτερο αποτέλεσμα.
Πρόκειται να παίξετε το παιχνίδι με έναν φίλο σας. Νομίζετε ότι είναι δίκαιο το παιχνίδι (δηλαδή και οι δύο μηχανές έχουν ίσες πιθανότητες επιτυχίας) ή πρέπει να επιλέξετε μηχανή για να έχετε περισσότερες πιθανότητες επιτυχίας; Να εξηγήσετε την επιλογή σας.

5.3.5 Κοινές λύσεις ανισώσεων

Διερεύνηση 1

α) Να λύσετε τις ανισώσεις: $5(x+1)-3x > x+6$ και $3(x-2)+2 \leq 2x$.

β) Να παραστήσετε στον ίδιο άξονα τις λύσεις τους γραφικά.

γ) Για ποιες τιμές αληθεύουν και οι δύο ανισώσεις;

Διερεύνηση 2: Μοντελοποίηση

Οι ηλεκτρικές συσκευές λειτουργούν αποτελεσματικά μέσα σε ένα συγκεκριμένο εύρος θερμοκρασίας. Οι συσκευές που λειτουργούν εκτός του προβλεπόμενου εύρους θερμοκρασίας μπορεί να παρουσιάσουν βλάβη.

α) Να γράψετε και να λύσετε μια σύνθετη ανίσωση που να παριστάνει τις πιθανές θερμοκρασίες λειτουργίας (σε βαθμούς C) ενός smartphone.

β) Να δώσετε θερμοκρασίες περιβάλλοντος έξω από τα όρια λειτουργίας του smartphone.

Σημείωση: Η σχέση μεταξύ F και C είναι $F = 1{,}8C+32$.

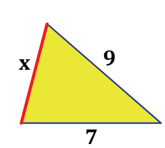
ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑ ΑΠΟ 32° F
ΜΕΧΡΙ ΚΑΙ 95° F

Διερεύνηση 3

Σε ένα τρίγωνο πρέπει «κάθε πλευρά να έχει μήκος μικρότερο από το άθροισμα των μηκών των άλλων δύο πλευρών του».

α) Να χρησιμοποιήσετε το διπλανό τρίγωνο για να γράψετε 3 ανισώσεις ώστε να προσδιορίσετε τις τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά x.

β) Ένας φίλος σας ισχυρίζεται ότι η πλευρά x μπορεί να έχει μήκος 3. Είναι σωστή η άποψη του φίλου σας;



Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες μάθησης

Πολλές φορές παρουσιάζονται προβλήματα, τα οποία μοντελοποιούνται με δύο ή περισσότερες ανισώσεις για τις οποίες αναζητάμε τις τιμές για τις οποίες ισχύουν όλες ταυτόχρονα. Σε μια τέτοια περίπτωση λέμε ότι έχουμε συναληθεύουσες ανισώσεις ή σύστημα ανισώσεων και αναζητάμε τις κοινές τους λύσεις.

Εφαρμογή 1

Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων και να παρασταθούν γραφικά:

α) $3x-18 < 4x-23$ και $2(x-9) < 22$ **β)** $3(x+1) \geq 2(x+2)$ και $3(2-x)+x > 10$

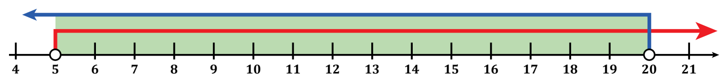
Απάντηση

α) Λύνουμε κάθε ανίσωση ξεχωριστά.

- $3x-18 < 4x-23$ ή $3x-4x < 18-23$ ή $-x < -5$ ή $x > 5$.
- $2(x-9) < 22$ ή $2x-18 < 22$ ή $2x < 22+18$ ή $2x < 40$ ή $x < 20$.

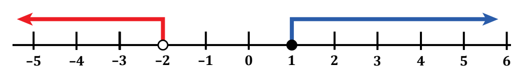
Στον ίδιο άξονα παριστάνουμε τις λύσεις των δύο ανισώσεων και προσδιορίζουμε τις κοινές λύσεις.

Όπως βλέπουμε και από το διάγραμμα, οι ανισώσεις συναληθεύουν και κοινές λύσεις είναι όλοι οι αριθμοί από 5 μέχρι 20. Άρα: $5 < x < 20$.



β) Λύνουμε κάθε ανίσωση ξεχωριστά.

- $3(x+1) \geq 2(x+2)$ ή $3x+3 \geq 2x+4$ ή $3x-2x \geq 4-3$ ή $x \geq 1$.
- $3(2-x)+x > 10$ ή $6-3x+x > 10$ ή $-3x+x > 10-6$ ή $-2x > 4$ ή $x < -2$.



Στον ίδιο άξονα παριστάνουμε τις λύσεις και όπως βλέπουμε δεν υπάρχουν κοινές λύσεις, δηλαδή οι ανισώσεις δεν συναληθεύουν.

Να διερευνήσετε τις κοινές λύσεις δύο ανισώσεων με την ψηφιακή εφαρμογή.

Εφαρμογή 2

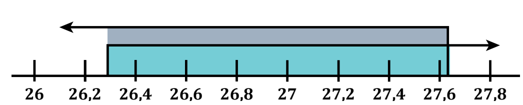
Τρεις διαδοχικοί ακέραιοι έχουν άθροισμα μεταξύ 82 και 86. Να βρεθούν οι αριθμοί.

Απάντηση

Αν x ο μικρότερος ακέραιος τότε το άθροισμα τους είναι $x + (x + 1) + (x + 2) = 3x + 3$, οπότε προκύπτουν οι ανισώσεις $3x + 3 > 82$ και $3x + 3 < 86$.

Λύνουμε την κάθε ανίσωση ξεχωριστά.

- $3x+3 > 82$ ή $3x > 82-3$ ή $\frac{3x}{3} > \frac{79}{3}$ ή $x > 26{,}33...$
- $3x+3 < 86$ ή $3x < 86-3$ ή $3x < 83$ ή $\frac{3x}{3} < \frac{83}{3}$ ή $x < 27{,}66...$



Άρα οι κοινές λύσεις όπως φαίνεται και από το διάγραμμα είναι: $26{,}33... < x < 27{,}66...$

Ο μοναδικός ακέραιος που είναι λύση του προβλήματος είναι ο αριθμός 27.

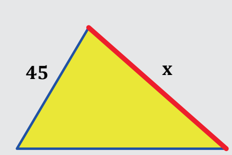
Για $x = 27$, οι ζητούμενοι αριθμοί είναι 27, 28, 29 με άθροισμα 84.

Ερωτήσεις για Αυτοαξιολόγηση

1 Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων (αν υπάρχουν) και να τις παραστήσετε γραφικά.

α) $x < 4$ και $x \geq -1$
β) $x < -2$ και $x \geq 0$
γ) $y \geq -3$ και $y \leq -1$
δ) $2 > x$ και $x < 9$

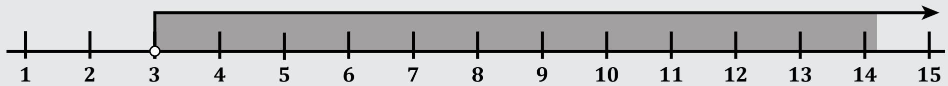
2 Οι δύο πλευρές του ενός τριγώνου είναι 45 και 61.



α) Ένας φίλος σας ισχυρίζεται ότι η τρίτη πλευρά μπορεί να είναι 17. Είναι σωστός ο ισχυρισμός του φίλου σας;

β) Μία εκδοχή του τριγώνου φαίνεται στο σχήμα. Να προσδιορίσετε τις τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά x.

3 Να βρείτε δύο ανισώσεις, των οποίων οι κοινές λύσεις παρουσιάζονται στο παρακάτω διάγραμμα:



4 Να βρείτε τις τιμές του x όταν: $-2 < 2(x-1) \leq 3$. Να παραστήσετε γραφικά τη λύση.

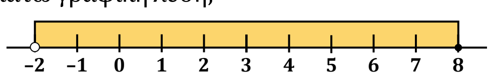
Ασκήσεις και Προβλήματα

1 Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων (αν υπάρχουν) και να τις παραστήσετε γραφικά στον άξονα των αριθμών.:

α) $-2x < x+3$ και $3(x-1) < 5-x$
β) $2(2x-1) > 2(1-x)$ και $x > 0$
γ) $4(x+1) < x-4$ και $5x+1 \geq 7x-5$
δ) $\frac{x-1}{7} < -1$ και $-5x+3 < 2(1-x)$
ε) $2(x-1) \geq x-2$ και $\frac{6-x}{3} > 3$.

2 Να βρείτε τις τιμές του x αν $\frac{1}{2} \leq \frac{x-1}{3} < 2$. Να παραστήσετε γραφικά τις λύσεις στον άξονα των αριθμών.

3 Σε ποιες συναληθεύουσες ανισώσεις αντιστοιχεί η παρακάτω γραφική λύση;



α) $x > 8$ και $x < -2$ **β)** $x \geq -2$ και $x < 8$
γ) $x \leq 8$ και $x > -2$ **δ)** $x \leq 8$ και $x \geq -2$.

4 Ο Δήμος σχεδιάζει να κατασκευάσει μία πλατεία με εμβαδόν μεταξύ 1000 m^2 και 1200 m^2. Το μήκος της πλατείας είναι συγκεκριμένο: 40 m. Μεταξύ ποιων ορίων θα περιέχεται το πλάτος της πλατείας;

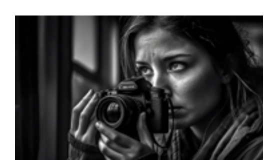
5 Οι δύο πλευρές ενός τριγώνου είναι αντίστοιχα ίσες με 7 cm και 10 cm.

α) Μπορεί η 3η πλευρά του να είναι 3 cm;
β) Να βρείτε πόσο μπορεί να είναι η τρίτη πλευρά του.

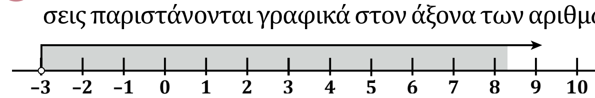
6 Να βρείτε τους φυσικούς αριθμούς μεταξύ 50 και 100, οι οποίοι όταν διαιρεθούν με το 13 αφήνουν υπόλοιπο 9.

7 Να βρείτε δύο διαδοχικούς περιττούς φυσικούς αριθμούς, των οποίων το άθροισμα είναι μεγαλύτερο από 140 και μικρότερο από 150.

9 Η φωτογράφος μιας εφημερίδας έχει βασικό μισθό 600 €, ενώ για κάθε φωτογραφία της που δημοσιεύεται πληρώνεται επιπλέον 25 €. Η εφημερίδα δεν μπορεί να διαθέσει περισσότερα από 2500 € μηνιαίως για τον μισθό της φωτογράφου. Πόσες φωτογραφίες πρέπει να δημοσιεύονται μηνιαίως, ώστε ο μισθός της φωτογράφου να είναι πάνω από 2000 €;



10 Να γράψετε δύο ανισώσεις των οποίων οι κοινές λύσεις παριστάνονται γραφικά στον άξονα των αριθμών:



5.4 Ανακεφαλαίωση και διεύρυνση της θεματικής ενότητας

Αλγεβρική λύση γραμμικών συστημάτων

Γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους λέγεται κάθε σύστημα της μορφής:

$$\begin{cases} αx + βy=γ \\ δx + εy=ζ \end{cases}$$

Λύση του συστήματος είναι κάθε ζεύγος τιμών (x, y) που επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις.
Ένα γραμμικό σύστημα λύνεται με τη **μέθοδο της αντικατάστασης**, και με τη μέθοδο των **αντίθετων συ-**

ντελεστών. Και στις δύο περιπτώσεις ο στόχος είναι να απαλειφθεί ο ένας άγνωστος και να προκύψει εξίσωση πρώτου βαθμού.

Επίλυση εξισώσεων δευτέρου και μεγαλύτερου βαθμού με παραγοντοποίηση

Η επίλυση εξισώσεων **2ου ή μεγαλύτερου βαθμού** στηρίζεται στην παραγοντοποίηση και στην εφαρμογή της ιδιότητας **«αν $\alpha \cdot \beta = 0$ τότε $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$»** με τη βοήθεια της οποίας ανάγεται στην επίλυση άλλων απλούστερων εξισώσεων.

Ανισώσεις πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο

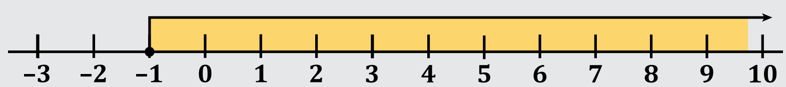
Η **ανισότητα** είναι μια μαθηματική σχέση, με την οποία συγκρίνουμε και διατάσσουμε αριθμούς και παραστάσεις. Χρησιμοποιούνται τα σύμβολα $<$, $>$, $\leq$, $\geq$.

Ιδιότητες της ανισότητας:

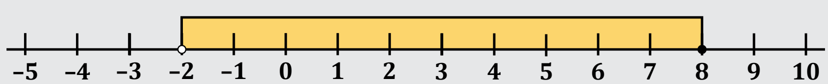
- Αν $\alpha<\beta$ τότε $\alpha+\gamma<\beta+\gamma$ και $\alpha-\gamma<\beta-\gamma$.
- Αν $\alpha<\beta$ και $\gamma>0$ τότε $\alpha\gamma<\beta\gamma$ και $\alpha:\gamma<\beta:\gamma$.
- Αν $\alpha<\beta$ και $\gamma<0$ τότε $\alpha\gamma>\beta\gamma$ και $\alpha:\gamma>\beta:\gamma$.

Ανίσωση ονομάζεται μια ανισότητα που περιέχει μεταβλητή. Π.χ. $x+5>10$.

Λύσεις μιας ανίσωσης ονομάζονται οι τιμές της μεταβλητής x που επαληθεύουν την ανίσωση. Για την επίλυση μιας ανίσωσης χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες των ανισοτήτων. Τις λύσεις μιας ανίσωσης τις παριστάνουμε πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Π.χ. για την ανίσωση $x \geq -1$ έχουμε:



Κοινές λύσεις ανισώσεων ή συναλήθευση ανισώσεων ή σύστημα ανισώσεων έχουμε όταν αναζητούμε τις κοινές λύσεις δύο (ή περισσότερων) ανισώσεων. Η εύρεση των κοινών τους λύσεων διευκολύνεται από την παράστασή τους πάνω στον ίδιο άξονα. Π.χ. οι κοινές λύσεις των ανισώσεων $x \leq 8$ και $x > -2$ (ή $-2 < x \leq 8$) φαίνονται στον άξονα:



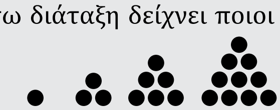
Να ανοίξετε την ψηφιακή εφαρμογή και να λύσετε το πρόβλημα «Ενοικίαση ποδηλάτων».

Επαναληπτικά έργα και προεκτάσεις

1 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2-2x-3 = 0$ **β)** $2x^2-4x-6 = 0$ **γ)** $2x^2 = 18x-28$ **δ)** $x^3+4 = x^2+4x$

2 **Τρίγωνοι αριθμοί:** Μερικοί φυσικοί αριθμοί λέγονται τρίγωνοι και η παρακάτω διάταξη δείχνει ποιοι είναι και πώς τους βρίσκουμε. Οι 4 πρώτοι τρίγωνοι είναι οι: 1, 3, 6, 10.



α) Με ποιον τρόπο παράγονται οι τρίγωνοι αριθμοί;

β) Ποιος είναι ο 5ος τρίγωνος αριθμός; Ποιος είναι ο 6ος τρίγωνος αριθμός;

γ) Αν ο **ν**-οστός τρίγωνος αριθμός δίνεται από τον τύπο $\dfrac{\nu(\nu+1)}{2}$ να εξετάσετε αν οι αριθμοί 55 και 120 είναι τρίγωνοι.

3 **α)** Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $3x^2-21x+36$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $3x^2-21x+36 = 0$.

4 **α)** Να υπολογίσετε τα κ και λ όταν: **i)** $\kappa\cdot\lambda = 0$, **ii)** $\kappa\cdot\lambda = 2$.

β) Να λύσετε τις εξισώσεις: **i)** $x(x-1) = 0$, **ii)** $x(x-1) = 2$.

5 Να λύσετε τις εξισώσεις:

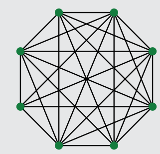
α) $x^3 = 49x$ **β)** $x(x-18)+81 = 0$ **γ)** $(2x-3)^2 = 9$

6 **α)** Να κάνετε τις πράξεις στην παράσταση $(2x-1)^2 = 9$ και να γράψετε το πολυώνυμο που θα προκύψει στην κανονική του μορφή.

β) Να λύσετε την εξίσωση $4x^2-4x-8 = 0$.

7 **Γεωμετρία:**

α) Να εξηγήσετε γιατί ο αριθμός των διαγωνίων δ, ενός πολυγώνου ν πλευρών δίνεται από τον τύπο $δ=\dfrac{ν(ν-3)}{2}$.



β) Να βρείτε πόσες διαγωνίους έχει ένα πεντάγωνο και πόσες ένα οκτάγωνο.

γ) Να βρείτε ποιο πολύγωνο έχει 35 διαγωνίους.

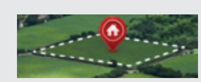
8 **Γεωμετρία:** Οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου διαφέρουν κατά 1 cm.

α) Αν το εμβαδόν του είναι 30 cm^2, να υπολογίσετε την περίμετρό του.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραγώνου, που έχει την ίδια περίμετρο με το ορθογώνιο.

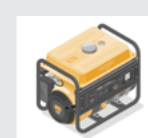
9 **Μαθηματική πρόκληση:** Το σύστημα $\begin{cases} y = kx + 2 \\ y = mx + 3 \end{cases}$ έχει πάντοτε λύση, όταν $k = m$ ή $k \neq m$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

10 **Γεωμετρία:** Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου οικοπέδου είναι 420 m^2. Η περίμετρός του είναι 82 m. Να βρείτε τις διαστάσεις του.



11 **Μοντελοποίηση.** Στην τάξη έχουν δοθεί για εργασία στο σπίτι συνολικά 42 ασκήσεις Μαθηματικών και Φυσικής. Οι ασκήσεις των Μαθηματικών είναι 10 περισσότερες από τις ασκήσεις της Φυσικής. Πόσες ασκήσεις αντιστοιχούν σε κάθε μάθημα;

12 **Επίλυση προβλήματος.** Μία γεννήτρια περιέχει 60 lt καυσίμου και καταναλώνει 2,5 lt την ώρα. Μία πιο αποδοτική γεννήτρια περιέχει 40 lt καυσίμου και καταναλώνει 1,5 lt την ώρα. Μετά από πόσες ώρες λειτουργίας οι γεννήτριες θα περιέχουν την ίδια ποσότητα καυσίμου; Ποια γεννήτρια θα λειτουργεί περισσότερο χρόνο;



13 **Ηλικίες:** Πριν από 2 χρόνια η Ναόμι είχε τριπλάσια ηλικία από τη μικρότερη αδελφή της. Μετά από 5 χρόνια το άθροισμα των ηλικιών τους θα είναι 46 έτη. Ποιες είναι οι σημερινές ηλικίες τους;

14 **Παραξενιές μαθηματικού:** Ο καθηγητής λέει στα παιδιά να ανοίξουν το βιβλίο τους στις σελίδες των οποίων το γινόμενο είναι 600. Σε ποιες σελίδες θα ανοίξουν το βιβλίο;

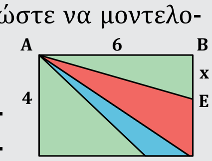
15 **Το πάρτι:** Σε μια συγκέντρωση είναι 30 άτομα, άνδρες και γυναίκες. Όταν έφυγαν 5 ανδρόγυνα, οι άνδρες ήταν τριπλάσιοι των γυναικών. Πόσοι είναι άνδρες και πόσες γυναίκες;

16 **Πεζοπορία:** Δύο φίλοι πεζοπόροι που βαδίζουν με σταθερές ταχύτητες απέχουν μεταξύ τους 6 km. Όταν περπατούν προς την ίδια κατεύθυνση συναντιούνται σε 3 h. Όταν περπατούν προς αντίθετες κατευθύνσεις, συναντιούνται σε 1 h. Να βρείτε τις ταχύτητές τους.

17 **Μαθηματική πρόκληση:** Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x έτσι ώστε: $6x+3 < x < 3x+9$.

18 **Μαθηματική πρόκληση:** Να διατυπώσετε ένα δικό σας πρόβλημα, το οποίο να μοντελοποιείται από την ανίσωση $3x-5 < 3x-8$ και να το λύσετε. Να αναδιατυπώσετε το πρόβλημά σας έτσι ώστε να μοντελοποιείται από την ανίσωση $3x-5 > 3x-8$.

19 **Γεωμετρία:** Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ = 6 cm και ΑΔ = 4 cm. Έστω τα σημεία Ε και Ζ των ΒΓ και ΓΔ αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΒΕ = ΓΖ = x cm, $0 < x < 4$.



Να εκφράσετε συναρτήσει της μεταβλητής x τα εμβαδά των τριγώνων ΑΓΕ και ΑΖΓ. Για ποιες τιμές του x το εμβαδόν του τριγώνου ΑΓΕ είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν του τριγώνου ΑΖΓ;

20 **Αντιπαράδειγμα:** Να βρείτε από ένα αντιπαράδειγμα για να δείξετε ότι δεν ισχύουν οι προτάσεις:

α) «αν $α > β$ τότε $α^2 > β^2$ ».

β) «αν $α > β$ και $γ > δ$ τότε $α–γ > β–δ$».

γ) «αν $α > β$ και $γ > δ$ τότε $α·γ > β·δ$».

21 **Μαθηματική πρόκληση:**

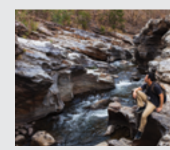
α) Αν $α = x–2$, τότε η $\sqrt{α}$ ορίζεται «πάντοτε», «μερικές φορές» ή «ποτέ»; Να εξηγήσετε πώς το σκεφτήκατε;

β) Αν $x = 1$, ορίζεται η $\sqrt{α}$;

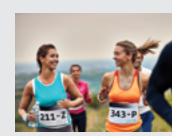
γ) Αν $x = 3$, ορίζεται η $\sqrt{α}$;

22 **Τηρείτε τα όρια ταχύτητας:** Η Νάντια οδηγεί σε αυτοκινητόδρομο με ελάχιστο όριο ταχύτητας 70 km/h και μέγιστο 110 km/h. Με βάση αυτές τις πληροφορίες, ποιος είναι ο πιθανός χρόνος, σε ώρες, που θα χρειαστεί για να διανύσει μία διαδρομή 420 km;

23 **Περπάτημα:** Ο στόχος της Βίκυς είναι να περπατά κατά μέσο όρο 25 km την εβδομάδα για 4 εβδομάδες. Περπάτησε 30 km την πρώτη εβδομάδα, 24 km τη δεύτερη εβδομάδα και 18 km την τρίτη εβδομάδα. Πόσα τουλάχιστον km πρέπει να περπατήσει η Βίκυ την τέταρτη εβδομάδα για να πετύχει τον στόχο της;



24 **Προπόνηση για αγώνα δρόμου:** Ένας εμπειρικός κανόνας για έναν αθλητή δρόμου είναι ότι γενικά «θα έχει αρκετή αντοχή για να τερματίσει έναν αγώνα ο οποίος να είναι το πολύ 3 φορές τη μέση ημερήσια απόσταση που τρέχει. Η Μαίρη κάνει μέση ημερήσια προπόνηση 3 km. Πόσο πρέπει να αυξήσει το ημερήσιο τρέξιμό της για να έχει αρκετή αντοχή για έναν αγώνα 12 km;



25 **Τραπεζικά δάνεια:** Οι τράπεζες υπολογίζουν την αξία μιας επιχείρησης για να καθορίσουν δάνεια και ασφάλειες. Ο τύπος για την αξία ενός καταστήματος καφέ είναι το 40% των ετήσιων πωλήσεών του συν την αξία του αποθέματός του. Η αξία του Brazilian Coffee είναι τουλάχιστον 100.000 €. Να γράψετε και να λύσετε μία ανίσωση για να βρείτε τις ετήσιες πωλήσεις στο Brazilian Coffee εάν το απόθεμά του είναι 20.000 €.

26 **Πωλητής αυτοκινήτων:** Ένας συνεργάτης πωλήσεων αυτοκινήτων λαμβάνει μηνιαίο μισθό 1500 € τον μήνα συν 5% προμήθεια για κάθε αυτοκίνητο που πωλείται. Για ποιο ποσό μηνιαίων πωλήσεων ο συνεργάτης θα έχει αμοιβή τουλάχιστον 4000 €;

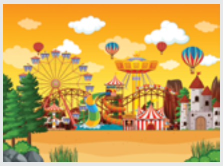
27 **Διαφημίσεις:** Μια μικρή εταιρεία έχει διαφημιστικό προϋπολογισμό 20.000 €. Η εταιρεία σχεδιάζει την παραγωγή και τη μετάδοση μιας τηλεοπτικής διαφήμισης. Η παραγωγή του διαφημιστικού θα κοστίσει 600 € και επιπλέον 50 € κάθε φορά που προβάλλεται το διαφημιστικό. Για πόσες μέρες, από μία φορά την ημέρα, μπορεί να προβάλλει η εταιρεία το διαφημιστικό σποτ με βάση τον οικονομικό προϋπολογισμό της;

28 **Επιλογή γυμναστηρίου:** Ο πίνακας δείχνει την ετήσια αμοιβή σε δύο γυμναστήρια και την αμοιβή κάθε φορά που τα μέλη παρακολουθούν ένα μάθημα αερόβιας γυμναστικής.

	Ετήσια χρέωση	**Χρέωση μαθήματος**
Γυμναστήριο Α	400€	2,5€
Γυμναστήριο Β	250€	4€

α) Αν σκοπεύετε να παρακολουθείτε 4 μαθήματα αερόβιας γυμναστικής κάθε μήνα για έναν χρόνο, ποιο γυμναστήριο συμφέρει να επιλέξετε;
β) Σε ποια περίπτωση δεν έχει σημασία ποιο γυμναστήριο θα επιλέξετε;
γ) Να γράψετε και να λύσετε μία ανίσωση για να προσδιορίσετε τον αριθμό των μαθημάτων αερόβιας γυμναστικής για τα οποία το συνολικό κόστος για ένα έτος στο γυμναστήριο Α είναι μικρότερο από αυτό στο γυμναστήριο Β.
δ) Πόσα μαθήματα αερόβιας πρέπει να κάνετε κατά μέσο όρο κάθε μήνα, ώστε το συνολικό κόστος για ένα έτος στο γυμναστήριο Β να είναι μικρότερο από αυτό στο γυμναστήριο Α;

29 **Λούνα Παρκ.** Ο Ντιέγκο σκέφτεται αν θα αγοράσει προς 120 € μία ετήσια κάρτα για την είσοδο σε ένα λούνα παρκ. Η κάρτα τού παρέχει απεριόριστο αριθμό επισκέψεων στο πάρκο και μειωμένο εισιτήριο 6 € στο πάρκινγκ. Αν δεν αγοράσει την κάρτα, θα πληρώνει 20 € είσοδο και 8 € στο πάρκινγκ κάθε φορά που θα επισκέπτεται το πάρκο. Μετά από πόσες επισκέψεις στο πάρκο θα τον συμφέρει η αγορά της κάρτας;



30 **Ενοικίαση Ταινιών από πλατφόρμα:** Σε ένα διαδικτυακό κατάστημα ενοικίασης ταινιών έχετε δύο επιλογές. Μπορείτε να πληρώσετε 4 € ανά ταινία ή μπορείτε να πληρώσετε μια εφάπαξ συνδρομή 10 € και στη συνέχεια να πληρώσετε μόνο 1,50 € ανά ταινία. Μετά από πόσες ενοικιάσεις ταινιών το κόστος της συνδρομής θα είναι μικρότερο από το κόστος ενοικίασης ταινιών χωρίς τη συνδρομή;

31 **Συγκέντρωση χρημάτων.** Η Πέτρα σχεδιάζει ευχετήριες κάρτες στον υπολογιστή της για να συγκεντρώσει χρήματα για μια φιλανθρωπική οργάνωση. Αγοράζει απόθεμα καρτών με κόστος 0,40 € ανά κάρτα και νοικιάζει ένα τραπέζι στον χώρο που γίνεται ο έρανος για 20 €. Θα πουλάει τις κάρτες σε σετ των 12 για 10,80 €. Πόσα σετ καρτών πρέπει να πουλήσει για να βγάλει περισσότερα από αυτά που ξόδεψε;

32 **Σχολική εκδήλωση:** Το σχολείο σας διοργανώνει χορό για συγκέντρωση χρημάτων. Το κόστος περιλαμβάνει 100 € για έναν DJ και 50 € για διακοσμήσεις. Ορίζετε το εισιτήριο στο 4,5 €.

α) Πόσα εισιτήρια πρέπει να πουλήσετε πριν αρχίσετε να βγάζετε κέρδος;
β) Πόσα εισιτήρια πρέπει να πουλήσετε για να έχετε κέρδος τουλάχιστον 300 €;
γ) Αν αυξήσετε την τιμή του εισιτηρίου στα 6 €, πώς επηρεάζονται οι απαντήσεις σας στα ερωτήματα (α) και (β); Να εξηγήσετε πώς το σκεφτήκατε.

Να ανοίξετε την εφαρμογή «Γλωσσάρι αλγεβρικές σχέσεις» για να συνοψίσετε τους όρους και τις έννοιες που μάθατε και πρέπει να γνωρίζετε από το κεφάλαιο αυτό.

Να ανοίξετε την εφαρμογή «Γλωσσάρι συνολικό άλγεβρας» για να συνοψίσετε όσα μάθατε στα κεφάλαια 1-5.

Κεφάλαιο 6

Γεωμετρία του επιπέδου

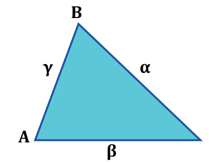
Ισότητα τριγώνων

Επίλυση προβλημάτων

Στο Κεφάλαιο αυτό θα μάθουμε:

- Να διερευνούμε τον ρόλο των κριτηρίων ισότητας τριγώνων στη σύγκριση τριγώνων και να τα συσχετίζουμε με τον ορισμό της ισότητας των τριγώνων.
- Να αξιοποιούμε τα κριτήρια ισότητας τριγώνων για την αιτιολόγηση των ιδιοτήτων της μεσοκαθέτου ευθύγραμμου τμήματος και της διχοτόμου γωνίας καθώς και των ιδιοτήτων των παραλληλογράμμων.

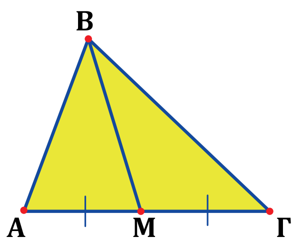
Εισαγωγή



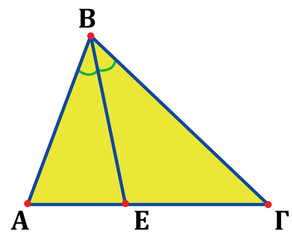
Έχουμε μάθει από προηγούμενες τάξεις ότι οι πλευρές και οι γωνίες ενός τριγώνου είναι τα κύρια στοιχεία του. Οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις γωνίες $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ σημειώνονται αντίστοιχα ως εξής: ΒΓ = α, ΑΓ = β και ΑΒ = γ.
Σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα των γωνιών του ισούται με 180°. Δηλαδή:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ.$$

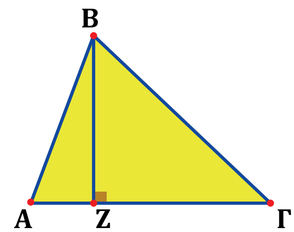
Σε κάθε τρίγωνο, εκτός από τα κύρια στοιχεία του, διακρίνουμε και τα **δευτερεύοντα στοιχεία** του που είναι οι **διάμεσοι**, τα **ύψη** και οι **διχοτόμοι** των γωνιών του (Σχήμα). Κάθε τρίγωνο έχει τρεις διαμέσους, τρία ύψη και τρεις διχοτόμους.



Διάμεσος ΒΜ
(ΜΑ = ΜΓ)



Διχοτόμος ΒΕ
($A\hat{B}E = E\hat{B}\Gamma$)



Ύψος
(ΒΖ⊥ΑΓ)

Τα τρίγωνα διακρίνονται:

- Ως προς τις γωνίες τους σε **οξυγώνια** (έχουν και τις τρεις γωνίες οξείες), σε **αμβλυγώνια** (έχουν μία αμβλεία γωνία) και σε **ορθογώνια** (έχουν μία γωνία ορθή).
- Ως προς τις πλευρές τους σε **σκαληνά** (έχουν και τις τρεις πλευρές άνισες), σε **ισοσκελή** (έχουν δύο πλευρές ίσες) και σε **ισόπλευρα** (έχουν και τις τρεις πλευρές ίσες).

6.1 Ισότητα τριγώνων

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθήτριες και οι μαθητές να μπορούν:

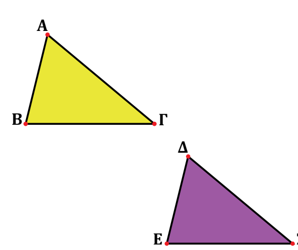
- Να διαπιστώνουν ότι δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν με κατάλληλη μετακίνηση συμπίπτουν.
- Να διαπιστώνουν ότι τα ίσα τρίγωνα έχουν τα κύρια στοιχεία τους ένα προς ένα ίσα.

Διερεύνηση: Χαρτοκοπτική – μεταφορά – ταύτιση

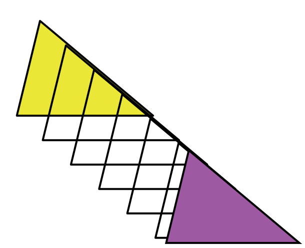
Πώς μπορούμε να συγκρίνουμε τρίγωνα;

α) Να αποτυπώσετε σε διαφανές χαρτί το κίτρινο τρίγωνο (σχήμα 1) και να το μεταφέρετε (σχήμα 2) προκειμένου να διαπιστώσετε αν με τη μεταφορά του μπορεί να ταυτιστεί με το μοβ τρίγωνο.

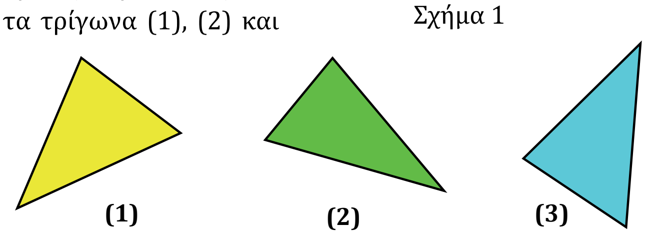
β) Χρησιμοποιώντας διαφανές χαρτί, να εξετάσετε αν κάποια από τα τρίγωνα (1), (2) και (3) είναι ίσα.



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες μάθησης

Ισότητα σχημάτων

Ο Ευκλείδης (350 – 270 π.Χ.), στο σημαντικότατο για την εξέλιξη των Μαθηματικών έργο του «Στοιχεία», αναφέρεται στην ισότητα σχημάτων δίνοντας τον εξής ορισμό «καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἄλληλα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν», δηλαδή «και αυτά που εφαρμόζουν το ένα πάνω στο άλλο είναι ίσα μεταξύ τους».
Με άλλα λόγια δύο σχήματα είναι ίσα όταν με κατάλληλες μετατοπίσεις συμπίπτουν, δηλαδή υπάρχει ταύτιση των δύο σχημάτων. Στα «Στοιχεία», η ισότητα αναφέρεται ως η ιδιότητα σύμφωνα με την οποία ένα σχήμα είναι ίσο με ένα άλλο, όταν έχουν ίδιο μέγεθος και μορφή. Γενικά, δύο σχήματα είναι ίσα όταν έχουν όλες τις πλευρές τους και όλες τις γωνίες τους ίσες μία προς μία. Αντίστροφα, όταν δύο σχήματα είναι ίσα, τότε έχουν όλες τις αντίστοιχες πλευρές τους και όλες τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.

Ισότητα τριγώνων

Δύο τρίγωνα είναι ίσα, όταν μετά από κατάλληλη μετακίνηση συμπίπτουν.
Όταν δύο τρίγωνα ταυτίζονται θα έχουν τις πλευρές και τις γωνίες τους ίσες μία προς μία.
Σε ίσα τρίγωνα, **αντίστοιχες γωνίες** λέγονται αυτές που βρίσκονται απέναντι από ίσες πλευρές και **αντίστοιχες πλευρές** αυτές που βρίσκονται απέναντι από ίσες γωνίες.
Συνεπώς:

Δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν οι πλευρές τους και οι αντίστοιχες γωνίες τους είναι ίσες μία προς μία.

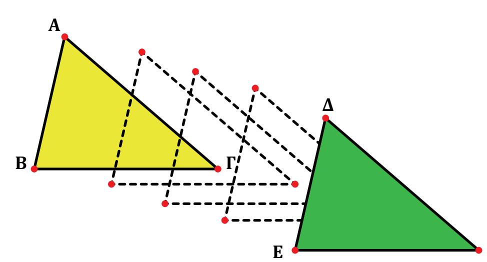
Ισχύει και το αντίστροφο:

Στα ίσα τρίγωνα οι ίσες πλευρές βρίσκονται απέναντι από ίσες γωνίες και αντίστροφα.

Σημείωση:
Κατά τη μετακίνηση ενός τριγώνου δεν αλλάζουν τα μήκη και τα μέτρα των γωνιών του.

Να ανοίξετε στην εφαρμογή το ιστορικό σημείωμα με θέμα «Η Ευκλείδεια Γεωμετρία».

Παράδειγμα:

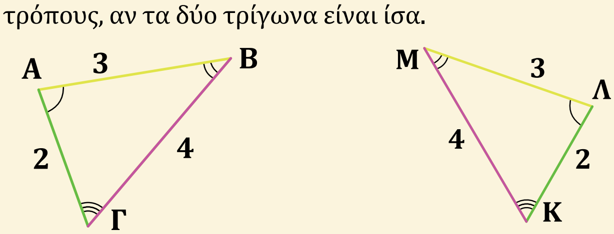


Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ μετά από κατάλληλη μετατόπιση ταυτίζονται. Άρα είναι ίσα, οπότε:

$$ΑΒ = ΔΕ, ΑΓ = ΔΖ, ΒΓ = ΕΖ \text{ και } \hat{Α} = \hat{Δ}, \hat{Β} = \hat{Ε}, \hat{Γ} = \hat{Ζ}$$

Εφαρμογή 1

Να εξεταστεί, με δύο τρόπους, αν τα δύο τρίγωνα είναι ίσα.



Απάντηση

1ος τρόπος:
Αντιγράφουμε το τρίγωνο ΑΒΓ με διαφανές χαρτί και το μετακινούμε πάνω στο τρίγωνο ΚΛΜ έτσι ώστε η κορυφή

Α να ταυτιστεί με την κορυφή Λ, η κορυφή Β με την κορυφή Μ και η κορυφή Γ με την κορυφή Κ. Παρατηρούμε ότι οι πλευρές τους συμπίπτουν, δηλαδή ΑΒ = ΛΜ, ΑΓ = ΛΚ και ΒΓ = ΜΚ καθώς και οι αντίστοιχες γωνίες τους, δηλαδή $\hat{A}=\hat{\Lambda}$, $\hat{B}=\hat{M}$ και $\hat{\Gamma}=\hat{K}$.

2ος τρόπος:

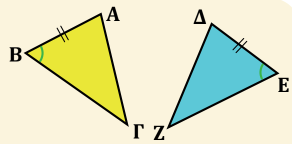
Από τα δεδομένα που δίνονται βλέπουμε ότι οι πλευρές είναι ίσες: ΑΒ = ΛΜ = 3, ΑΓ = ΛΚ = 2 και ΒΓ = ΜΚ = 4 καθώς και οι αντίστοιχες γωνίες τους, δηλαδή: $\hat{A}=\hat{\Lambda}$, $\hat{B}=\hat{M}$, $\hat{\Gamma}=\hat{K}$

Άρα, τα τρίγωνα είναι ίσα και γράφουμε $A\hat{B}\Gamma=\Lambda\hat{M}K$.

Να ανοίξετε την εφαρμογή για να πειραματιστείτε στην ισότητα των τριγώνων.

Εφαρμογή 2

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ του διπλανού σχήματος είναι ίσα και έχουν ΑΒ = ΔΕ και $\hat{B}=\hat{E}$. Να γράψετε τις υπόλοιπες ισότητες των αντίστοιχων κύριων στοιχείων τους.



Απάντηση

Γνωρίζουμε ότι σε ίσα τρίγωνα, απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες και απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές.
Επειδή ΑΒ = ΔΕ θα είναι $\hat{\Gamma}=\hat{Z}$. Επειδή $\hat{B}=\hat{E}$ θα είναι ΑΓ = ΔΖ.
Αφού τα τρίγωνα είναι ίσα, θα έχουν ίσα και τα υπόλοιπα κύρια στοιχεία τους, οπότε θα είναι επίσης ΒΓ = ΕΖ καθώς και$\hat{A}=\hat{\Delta}$.

Ερωτήσεις για Αυτοαξιολόγηση

1. Να εξετάσετε αν ένα ορθογώνιο τρίγωνο μπορεί να είναι ισοσκελές.
2. Να εξετάσετε αν ένα τρίγωνο μπορεί να έχει δύο αμβλείες γωνίες.
3. Η μία οξεία γωνία ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι 55^o. Να βρείτε την άλλη οξεία γωνία του.
4. Ένα ισοσκελές και αμβλυγώνιο τρίγωνο έχει μία γωνία 40^o. Να βρείτε τις άλλες δύο γωνίες του.
5. Το ισόπλευρο τρίγωνο έχει τις πλευρές του ίσες. Να εξηγήσετε γιατί έχει και γωνίες ίσες.
6. Το ύψος ενός τριγώνου συμπίπτει με μία πλευρά του. Να εξετάσετε τι τρίγωνο είναι.
7. Να εξετάσετε αν δύο ίσα τρίγωνα έχουν ίσες περιμέτρους.
8. Να εξετάσετε αν δύο τρίγωνα με ίσες περιμέτρους είναι ίσα.

6.2 Κριτήρια ισότητας τριγώνων

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθήτριες και οι μαθητές να μπορούν:

- Να διερευνούν τον ρόλο των κριτηρίων ισότητας τριγώνων στη σύγκριση τριγώνων και να τα συσχετίζουν με τον ορισμό της ισότητας των τριγώνων.

Είδαμε ότι δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν τα κύρια στοιχεία τους ένα προς ένα ίσα.
Ωστόσο για να αποδείξουμε ότι δύο τρίγωνα είναι ίσα δεν χρειάζεται να αποδείξουμε ότι έχουν ίσες τις τρεις πλευρές τους και ίσες τις τρεις γωνίες τους. Ακριβέστερα, αρκεί να έχουν τρία συγκεκριμένα από τα έξι κύρια στοιχεία τους ίσα, ένα από τα οποία να είναι οπωσδήποτε πλευρά, όπως θα δούμε στις επόμενες προτάσεις που αναφέρονται ως κριτήρια ισότητας τριγώνων.

6.2.1 1ο κριτήριο ισότητας τριγώνων

Διερεύνηση 1: Κατασκευή και σύγκριση τριγώνων

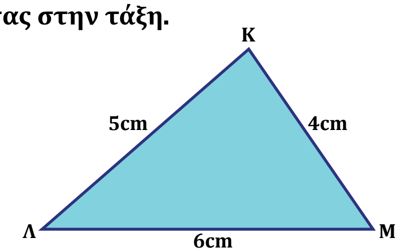
Να συνεργαστείτε ανά δύο και να συζητήσετε τα αποτελέσματά σας στην τάξη.

α) Να σχεδιάσετε με τη χρήση γεωμετρικών οργάνων τρίγωνο με πλευρές 4 cm, 5 cm, 6 cm.

β) Με διαφανές χαρτί να αποτυπώσετε το τρίγωνο που σχεδιάσατε και να ελέγξετε αν ταυτίζεται με το τρίγωνο που σχεδίασε ο/η συμμαθητής/τριά σας.

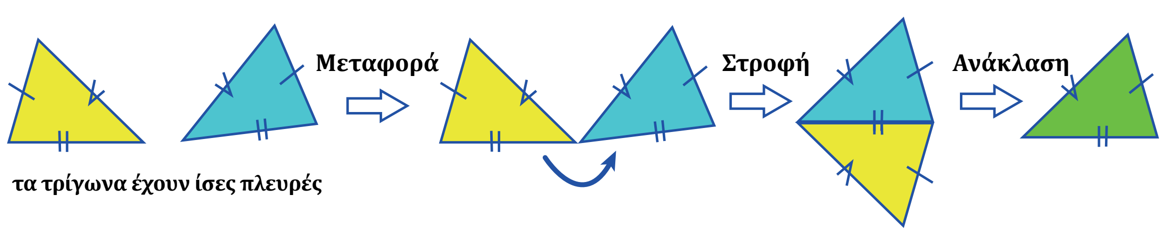
γ) Από τον πειραματισμό σας τι συμπέρασμα βγάζετε;

Να συζητήσετε τα συμπεράσματά σας στην τάξη.



Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες μάθησης

Παίρνουμε δύο τρίγωνα (κίτρινο και μπλε στο σχήμα) τα οποία έχουν τις πλευρές τους μία προς μία ίσες. Με διαδοχικούς μετασχηματισμούς παρατηρούμε ότι ταυτίζονται. Άρα είναι ίσα.



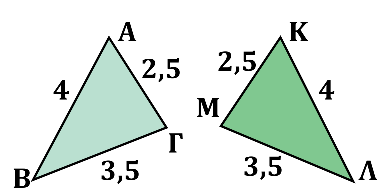
1ο κριτήριο ισότητας τριγώνων (Π-Π-Π)

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

Η συντομογραφία Π-Π-Π δηλώνει: πλευρά-πλευρά-πλευρά.

Παράδειγμα:

Τα τρίγωνα της εικόνας είναι μεταξύ τους ίσα διότι έχουν τις πλευρές τους μία προς μία ίσες (1ο κριτήριο ισότητας τριγώνων Π-Π-Π). Συγκεκριμένα ΑΒ = ΚΛ, ΑΓ = ΚΜ και ΒΓ = ΛΜ. Εφόσον είναι ίσα, θα έχουν και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες. Οι ίσες γωνίες βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές οπότε είναι: $\hat{A} = \hat{K}$, $\hat{B} = \hat{\Lambda}$, $\hat{\Gamma} = \hat{M}$. Για την ισότητα των συγκεκριμένων τριγώνων γράφουμε συμβολικά: $A\hat{B}\Gamma = K\hat{\Lambda}M$ ή ΑΒΓ = ΚΛΜ όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης.



Διερεύνηση: Να ανοίξετε την εφαρμογή «Κατασκευή και σύγκριση τριγώνων από τρεις πλευρές» και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

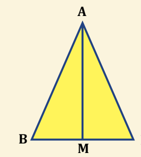
Εφαρμογή 3

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές (ΑΒ = ΑΓ) και η ΑΜ είναι διάμεσος. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΑΓΜ είναι ίσα.

β) Η διάμεσος ΑΜ είναι και διχοτόμος.

γ) Η διάμεσος ΑΜ είναι και ύψος.



Απάντηση

α) Τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΑΓΜ έχουν ΑΒ = ΑΓ, ΜΒ = ΜΓ (επειδή η ΑΜ είναι διάμεσος) και η ΑΜ είναι κοινή πλευρά των δύο τριγώνων. Άρα, έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία και επομένως σύμφωνα με το $1^{ο}$ κριτήριο ισότητας τριγώνων (Π-Π-Π) τα τρίγωνα είναι ίσα.

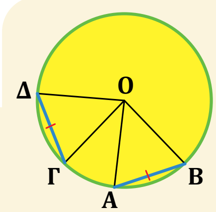
β) Αφού ΑΒΜ = ΑΓΜ, τα τρίγωνα θα έχουν τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, οπότε:
$B\hat{A}M = \Gamma\hat{A}M$, $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ και $A\hat{M}B = A\hat{M}\Gamma$.
Αφού $B\hat{A}M = \Gamma\hat{A}M$ η ΑΜ είναι διχοτόμος.

γ) Αφού $A\hat{M}B = A\hat{M}\Gamma$, τότε $A\hat{M}B + A\hat{M}\Gamma = 180^0$ ή $2A\hat{M}B = 180^0$ ή $A\hat{M}B = 90^0$ και επομένως η ΑΜ κάθετη στη ΒΓ, δηλαδή η διάμεσος ΑΜ είναι ύψος.

Συμπέρασμα:

Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση είναι διχοτόμος και ύψος.

Εφαρμογή 4



Αν οι χορδές ΑΒ και ΓΔ ενός κύκλου (Ο, ρ) είναι ίσες, τότε και τα αντίστοιχα τόξα $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ θα είναι ίσα.

Απάντηση

Φέρνουμε τις ακτίνες ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ. Τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ έχουν: ΟΑ = ΟΓ = ρ, ΟΒ = ΟΔ = ρ και ΑΒ = ΓΔ (υπόθεση). Επομένως, σύμφωνα με το 1ο κριτήριο ισότητας (Π-Π-Π) θα είναι ίσα. Άρα θα έχουν ίσες και τις γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΒ και ΓΔ. Επομένως και τα τόξα $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ θα είναι ίσα, αφού οι αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες $A\hat{O}B$ και $\Gamma\hat{O}\Delta$, είναι ίσες.

Στο συμπληρωματικό υλικό μπορείτε να δείτε πώς χρησιμοποιείται το 1ο κριτήριο για να βεβαιωθούμε ότι ισχύει το «Αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος».

6.2.2 2ο κριτήριο ισότητας τριγώνων

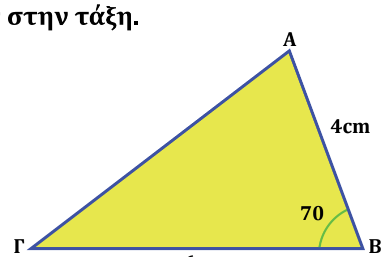
Διερεύνηση 2: Κατασκευή και σύγκριση τριγώνων

Να συνεργαστείτε ανά δύο και να συζητήσετε τα αποτελέσματά σας στην τάξη.

α) Να κατασκευάσετε με τη χρήση γεωμετρικών οργάνων ένα τρίγωνο με πλευρά ΑΒ = 4 cm, γωνία $\hat{B} = 70^o$ και πλευρά ΒΓ = 6 cm (η γωνία $\hat{B}$ είναι περιεχόμενη στις πλευρές ΒΑ και ΒΓ).

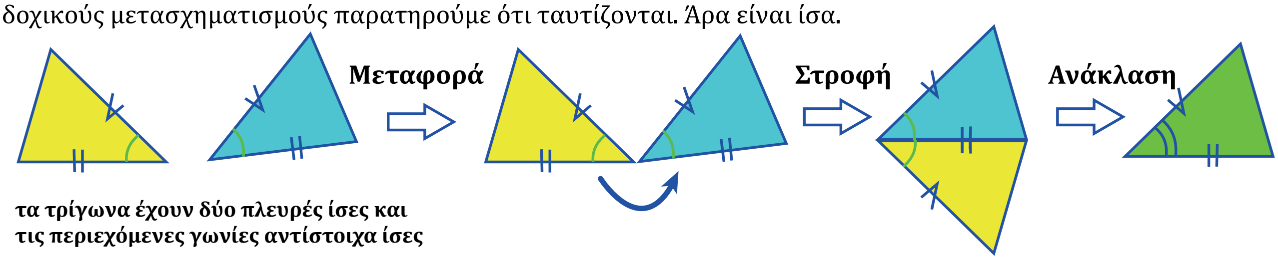
β) Με διαφανές χαρτί να αποτυπώσετε το τρίγωνο που κατασκευάσατε και να ελέγξετε αν ταυτίζεται με το τρίγωνο που κατασκεύασε ο συμμαθητής σας.

γ) Από τον πειραματισμό σας τι συμπέρασμα βγάζετε;



Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες μάθησης

Παίρνουμε δύο τρίγωνα, τα οποία έχουν δύο πλευρές και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες αντίστοιχα ίσες. Με διαδοχικούς μετασχηματισμούς παρατηρούμε ότι ταυτίζονται. Άρα είναι ίσα.



Διερεύνηση: Να ανοίξετε την εφαρμογή «Εκτίμηση για την ισότητα τριγώνων Ι» και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

2ο κριτήριο ισότητας τριγώνων (Π-Γ-Π)

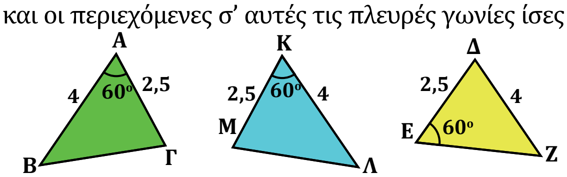
Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις ίσες πλευρές γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα.

Η συντομογραφία Π-Γ-Π δηλώνει πλευρά-γωνία-πλευρά.

Παράδειγμα:

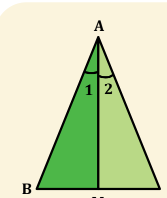
Για τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΜ εφαρμόζεται το 2ο κριτήριο ισότητας (Π-Γ-Π), δηλαδή είναι ίσα διότι δύο πλευρές του ΑΒΓ είναι ίσες με δύο πλευρές του ΚΛΜ (ΑΒ = ΚΛ = 4 και ΑΓ = ΚΜ = 2,5) και οι περιεχόμενες σ' αυτές τις πλευρές γωνίες ίσες ($\hat{A}=\hat{K}=\widehat{60}^{\circ}$).

Το τρίγωνο ΔΕΖ έχει δύο πλευρές ίσες με δύο πλευρές των άλλων τριγώνων και μια γωνία ίση, αλλά δεν είναι η περιεχόμενη στις δύο ίσες πλευρές, οπότε δεν είναι ίσα (δεν εφαρμόζεται το κριτήριο Π-Γ-Π).



Διερεύνηση: Να ανοίξετε την εφαρμογή «Κατασκευή και σύγκριση τριγώνων από δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία» και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

Εφαρμογή 5



Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές (ΑΒ = ΑΓ). Αν ΑΜ διχοτόμος, να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{B}=\hat{\Gamma}$

β) Η ΑΜ είναι διάμεσος και ύψος.

Απάντηση

α) Τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΑΓΜ έχουν ΑΒ = ΑΓ, ΑΜ κοινή πλευρά και $\hat{A}_1=\hat{A}_2$.
Άρα, σύμφωνα με το 2ο κριτήριο ισότητας τριγώνων (Π-Γ-Π) τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε θα έχουν και τα υπόλοιπα κύρια στοιχεία τους ίσα. Άρα $\hat{B}=\hat{\Gamma}$ αφού βρίσκονται απέναντι από την κοινή πλευρά ΑΜ.

β) Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΜ και ΑΓΜ, παίρνουμε ότι:

- ΒΜ = ΜΓ αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{A}_1$ και $\hat{A}_2$.
- $A\hat{M}B = A\hat{M}\Gamma$ οπότε $A\hat{M}B + A\hat{M}\Gamma = 180°$ ή $2A\hat{M}B = 180°$ ή $A\hat{M}B = 90°$. Άρα, $AM \perp B\Gamma$.

Συμπέρασμα:

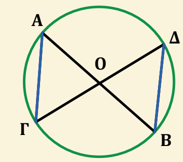
Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο ισχύει ότι: α) οι γωνίες της βάσης είναι ίσες, β) η διχοτόμος της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος.

Παρατήρηση: Αποδεικνύεται ότι ισχύει και η πρόταση: **«αν ένα τίγωνο έχει δύο γωνίες ίσες τότε είναι ισοσκελές»**.

Να ανοίξετε την εφαρμογή «Διχοτόμος ισοσκελούς τριγώνου» για να μελετήσετε τις ιδιότητες της διχοτόμου ισοσκελούς τριγώνου.

Εφαρμογή 6

Στον κύκλο (Ο, ρ) τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ είναι διάμετροι του κύκλου.
Να αποδείξετε ότι:
α) Οι χορδές ΑΓ και ΒΔ είναι ίσες.
β) Τα τόξα $\overset{\frown}{ΑΓ}$ και $\overset{\frown}{ΒΔ}$ είναι ίσα.



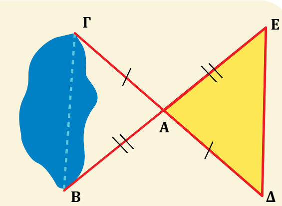
Απάντηση

α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΟΑΓ και ΟΒΔ. Έχουν ΟΑ = ΟΒ και ΟΓ = ΟΔ (ως ακτίνες). Επίσης οι περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες $Α\hat{Ο}Γ$ και $Β\hat{Ο}Δ$ είναι ίσες ως κατακορυφήν. Άρα ΟΑΓ = ΟΒΔ (κριτήριο Π-Γ-Π). Συνεπώς θα έχουν και τις τρίτες πλευρές ίσες, δηλαδή ΑΓ = ΒΔ.

β) Είναι $\overset{\frown}{ΑΓ}=\overset{\frown}{ΒΔ}$ διότι αντιστοιχούν στις ίσες επίκεντρες γωνίες $Α\hat{Ο}Γ$ και $Β\hat{Ο}Δ$.

Εφαρμογή 7

Ένας τοπογράφος για να μετρήσει το μήκος μιας μικρής λίμνης, τοποθετεί δύο δείκτες Β και Γ στις όχθες της λίμνης (όπως στο σχήμα) και έναν δείκτη Α τέτοιον ώστε οι αποστάσεις ΑΒ και ΑΓ να μπορούν να μετρηθούν στην ξηρά. Στη συνέχεια παίρνει στην προέκταση της ΑΒ ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ = ΑΒ και στην προέκταση της ΑΓ ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ = ΑΓ. Πώς μπορεί να μετρήσει το πλάτος ΒΓ της λίμνης με τη βοήθεια αυτού του σχήματος;



Απάντηση

Εφόσον οι αποστάσεις ΑΒ και ΑΓ μπορούν να μετρηθούν θεωρούνται γνωστές. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα διότι ΑΒ = ΑΕ, ΑΓ = ΑΔ και οι περιεχόμενες σ' αυτές γωνίες $Β\hat{Α}Γ$ και $Δ\hat{Α}Ε$ είναι ίσες ως κατακορυφήν (κριτήριο Π-Γ-Π). Τα ίσα τρίγωνα θα έχουν και τις τρίτες πλευρές τους ίσες, δηλαδή ΒΓ = ΕΔ. Επομένως, μετρώντας ο τοπογράφος την απόσταση ΕΔ στην ξηρά γνωρίζει και το μήκος της λίμνης.

Να ανοίξετε την εφαρμογή για να πειραματιστείτε με την εφαρμογή της ισότητας τριγώνων στη μέτρηση μιας λίμνης.

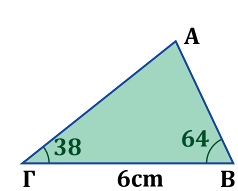
6.2.3 3ο κριτήριο ισότητας τριγώνων

Διερεύνηση 3: Κατασκευή και σύγκριση τριγώνων

Να συνεργαστείτε ανά δύο και να συζητήσετε τα αποτελέσματά σας στην τάξη.

α) Να κατασκευάσετε με τη χρήση γεωμετρικών οργάνων ένα τρίγωνο με γωνία $\hat{Β}=64^{ο}$, πλευρά ΒΓ = 6 cm, και γωνία $\hat{Γ}=38^{ο}$, (οι γωνίες $\hat{Β}$ και $\hat{Γ}$ είναι προσκείμενες στην πλευρά ΒΓ).

β) Με διαφανές χαρτί να αποτυπώσετε το τρίγωνο που κατασκευάσατε και να ελέγξετε αν ταυτίζεται με το τρίγωνο που κατασκεύασε ο συμμαθητής σας.

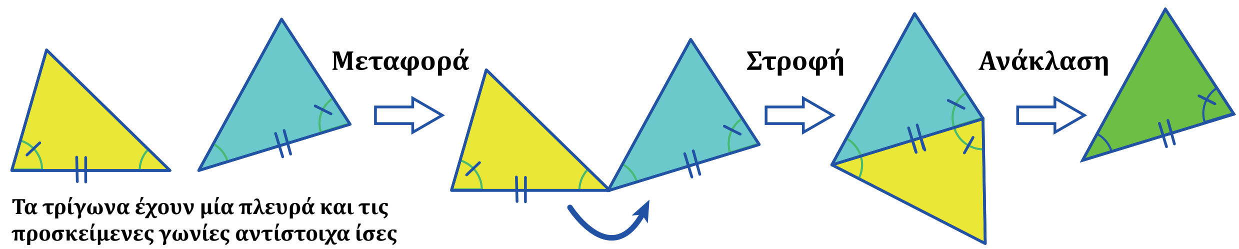


γ) Από τον πειραματισμό σας τι συμπέρασμα βγάζετε;

Διερεύνηση: Να ανοίξετε την εφαρμογή «Εκτίμηση για την ισότητα τριγώνων ΙΙ» και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες μάθησης

Παίρνουμε δύο τρίγωνα, τα οποία έχουν μία πλευρά και τις προσκείμενες γωνίες αντίστοιχα ίσες. Με διαδοχικούς μετασχηματισμούς παρατηρούμε ότι ταυτίζονται. Άρα είναι ίσα.



3ο κριτήριο ισότητας τριγώνων (Γ-Π-Γ)

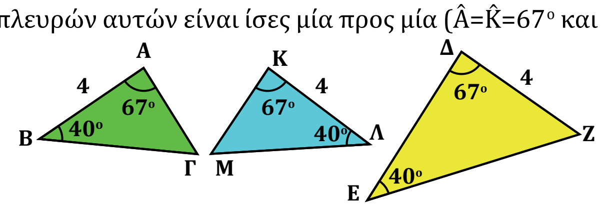
Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην ίση πλευρά γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα.

Η συντομογραφία Γ-Π-Γ υποδηλώνει γωνία-πλευρά-γωνία.

Παράδειγμα:

Είναι ΑΒΓ = ΚΛΜ διότι εφαρμόζεται το 3ο κριτήριο ισότητας (Γ-Π-Γ), δηλαδή μία πλευρά του ΑΒΓ είναι ίση με μία πλευρά του ΚΛΜ (ΑΒ=ΚΛ=4) και οι προσκείμενες γωνίες των πλευρών αυτών είναι ίσες μία προς μία ($\hat{A}=\hat{K}=67^o$ και $\hat{B}=\hat{\Lambda}=40^o$).

Το τρίγωνο ΔΕΖ έχει δύο γωνίες ίσες με τα άλλα δύο τρίγωνα και μία πλευρά ίση, αλλά οι γωνίες δεν είναι προσκείμενες σ' αυτή την πλευρά, οπότε δεν είναι ίσα (δεν εφαρμόζεται το κριτήριο Γ-Π-Γ).



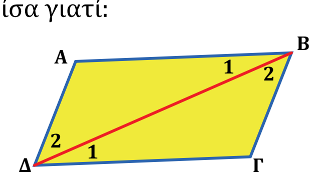
Διερεύνηση: Να ανοίξετε την εφαρμογή «Κατασκευή και σύγκριση τριγώνων από μια πλευρά και τις προσκείμενες γωνίες» και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

Εφαρμογή 8

Δίνεται ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ και ΒΓ//ΑΔ).
Να δείξετε ότι: ΑΒ = ΓΔ και ΑΔ = ΒΓ.

Απάντηση

Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ φέρνουμε τη διαγώνιο ΒΔ. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΔ είναι ίσα γιατί:



- ΒΔ κοινή πλευρά,
- $\hat{B}_1=\hat{\Delta}_1$ ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται από τη ΒΔ,
- $\hat{B}_2=\hat{\Delta}_2$ ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ΑΔ και ΒΓ που τέμνονται από τη ΒΔ.

Άρα, σύμφωνα με το 3ο κριτήριο ισότητας τριγώνων (Γ-Π-Γ) είναι ΑΒΔ=ΒΓΔ.
Αφού είναι ίσα, τότε:

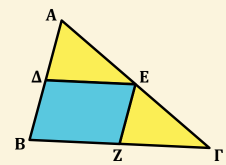
- ΑΔ = ΒΓ, αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{B}_1=\hat{\Delta}_1$ και
- ΑΒ = ΓΔ, αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{B}_2=\hat{\Delta}_2$.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

Σε κάθε παραλληλόγραμμο οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.

Εφαρμογή 9

Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ το Δ είναι μέσο της πλευράς ΑΒ και ΔΕ//ΒΓ, ΕΖ//ΑΒ.
Να αποδείξετε ότι:
α) τα Ε και Ζ είναι μέσα των πλευρών ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα.
β) $\Delta E=\frac{B\Gamma}{2}$ και $EZ=\frac{AB}{2}$.



Απάντηση

α) Το ΒΔΕΖ είναι παραλληλόγραμμο επειδή έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες. Επομένως, οι απέναντι πλευρές του θα είναι ίσες, οπότε: ΕΖ = ΔΒ και ΔΕ = ΒΖ. Λόγω των παραλληλιών έχουμε $A\hat{\Delta}E=\Delta\hat{B}Z=E\hat{Z}\Gamma$ και $\hat{A}=Z\hat{E}\Gamma$ και συνεπώς τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΕΖΓ θα είναι ίσα, αφού: ΑΔ = ΕΖ, $\hat{A}=Z\hat{E}\Gamma$ και $A\hat{\Delta}E=\Delta\hat{B}Z=E\hat{Z}\Gamma$ (κριτήριο Γ-Π-Γ).
Άρα ΑΕ = ΕΓ, οπότε το Ε είναι μέσο της ΑΓ και ΔΕ = ΖΓ.
Επειδή ΔΕ = ΒΖ και ΔΕ = ΖΓ, θα είναι ΒΖ = ΖΓ και επομένως το Ζ θα είναι μέσο της ΒΓ.

β) Επειδή ΔΕ = ΒΖ = ΖΓ (από το (α) ερώτημα) συνεπάγεται ότι $\Delta E=\frac{B\Gamma}{2}$ και ανάλογα: $EZ=\frac{AB}{2}$.

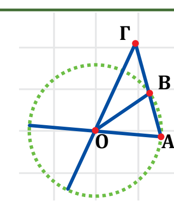
Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι τυχαίο και επομένως:

Σε κάθε τρίγωνο, το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών, είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.

Υπάρχουν άλλα κριτήρια ισότητας τριγώνων;

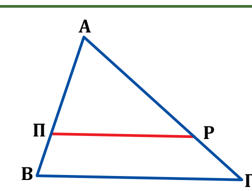
Διερεύνηση 1: Υπάρχει κριτήριο Π-Π-Γ;

α) Το τρίγωνο ΟΑΓ και το τρίγωνο ΟΒΓ έχουν δύο πλευρές ίσες και από μία γωνία ίση. Να βρείτε τις πλευρές και τη γωνία που είναι ίσες;
β) Μπορούμε να πούμε ότι $O\hat{A}\Gamma=O\hat{B}\Gamma$;
γ) Είναι κριτήριο ισότητας τριγώνων το Π-Π-Γ; Να εξηγήσετε γιατί.



Διερεύνηση 2: Υπάρχει κριτήριο Γ- Γ- Γ;

Στο σχήμα είναι ΠΡ//ΒΓ.
α) Να αποδείξετε ότι $A\hat{\Pi}P=A\hat{B}\Gamma$ και $A\hat{P}\Pi=A\hat{\Gamma}B$.
β) Είναι ίσα τα τρίγωνα $A\hat{B}\Gamma$ και $A\hat{\Pi}P$;
γ) Είναι κριτήριο ισότητας τριγώνων το Γ-Γ-Γ; Να εξηγήσετε γιατί.



Διερεύνηση 3: Υπάρχει κριτήριο Γ-Γ-Π;

Αν σε δύο τρίγωνα μία πλευρά του ενός είναι ίση με μία πλευρά του άλλου και δύο γωνίες του ενός είναι ίσες με δύο γωνίες του άλλου, όχι προσκείμενες στις ίσες πλευρές, είναι ίσα;

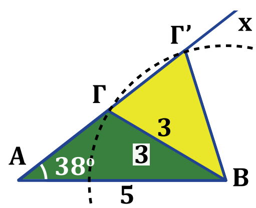
Να κατασκευάσετε δύο τρίγωνα τα οποία να έχουν από μία πλευρά ίση με 4cm και δύο γωνίες, όχι προσκείμενες και οι δύο στην πλευρά αυτή, ίσες με 40° και 70°. Να διακρίνετε δύο περιπτώσεις στην κατασκευή. Είναι ίσα τα τρίγωνα που κατασκευάσατε; Να εξηγήσετε.

Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες μάθησης

Δεν υπάρχουν άλλα κριτήρια ισότητας τριγώνων εκτός από τα: **α)** Π-Π-Π, **β)** Π-Γ-Π, **γ)** Γ-Π-Γ.

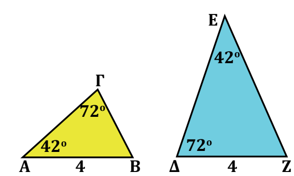
Παράδειγμα 1: Δύο πλευρές ίσες και μία γωνία.

Αν θέλουμε να κατασκευάσουμε το τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 5, ΒÂΓ=38°, δηλαδή τρίγωνο με δεδομένες δύο πλευρές και μια γωνία (όχι περιεχόμενη στις πλευρές αυτές), τότε όπως φαίνεται στην κατασκευή (σχήμα) προκύπτουν δύο τρίγωνα με αυτά τα στοιχεία, το ΑΒΓ και το ΑΒΓ′, τα οποία δεν είναι ίσα.
Άρα δεν είναι κριτήριο ισότητας τριγώνων η ισότητα δύο πλευρών και μιας γωνίας που δεν είναι περιεχόμενη στις πλευρές αυτές.



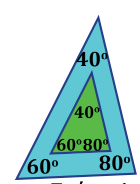
Παράδειγμα 2: Δύο γωνίες ίσες και μία πλευρά.

Έστω ότι θέλουμε να κατασκευάσουμε τρίγωνο με μία πλευρά 4 cm και δύο γωνίες 72° και 42°, από τις οποίες μόνο μία είναι προσκείμενη στην πλευρά.
Όπως φαίνεται στο σχήμα, κατασκευάζονται 2 τρίγωνα με αυτά τα στοιχεία, τα οποία δεν είναι ίσα.

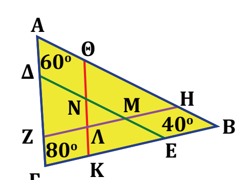


Παράδειγμα 3: Τρεις γωνίες ίσες.

Αν θέλουμε να κατασκευάσουμε τρίγωνο με δεδομένες και τις τρεις γωνίες, π.χ. με γωνίες 40°, 60°, 80° μπορούν να κατασκευαστούν περισσότερα από ένα τρίγωνα με αυτές τις γωνίες, όπως φαίνεται στα σχήματα 1 και 2.
Στο σχήμα 2 είναι ΔΕ//ΑΒ, ΖΗ//ΒΓ, ΘΚ//ΑΓ. Στο σχήμα αυτό μπορούμε να διακρίνουμε τουλάχιστον 5 τρίγωνα, που να έχουν ίσες γωνίες με το ΑΒΓ τα οποία δεν είναι ίσα (ποια είναι;).



Σχήμα 1



Σχήμα 2

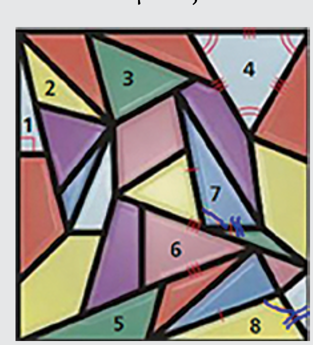
Σημείωση:
Όπως θα μάθουμε παρακάτω, τα τρίγωνα που έχουν ίσες γωνίες λέγονται όμοια.

Σημαντική παρατήρηση:
Όλα τα κριτήρια ισότητας τριγώνων περιλαμβάνουν τουλάχιστον την ισότητα μίας πλευράς.
Δεν υπάρχει κριτήριο ισότητας τριγώνων μόνο με γωνίες.

Ερωτήσεις για Αυτοαξιολόγηση

1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ αν είναι σωστές ή με Λ αν είναι λανθασμένες.

α) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους μία προς μία ίσες, τότε είναι ίσα.
β) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους μία προς μία ίσες, τότε είναι ίσα.
γ) Σε δύο ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες.
δ) Σε δύο τρίγωνα απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές.
ε) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες και μία γωνία ίση τότε θα είναι ίσα.

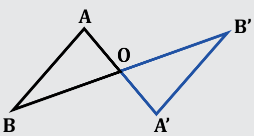


2 Στην εικόνα φαίνεται ένα πολύχρωμο παράθυρο με γεωμετρικά σχήματα.

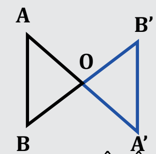
α) Να κατηγοριοποιήσετε τα τρίγωνα 1, 2, 3, 4 ως προς τις γωνίες και τα τρίγωνα 4, 5, 6 ως προς τις πλευρές.

β) Είναι επαρκή τα στοιχεία για να διαπιστώσουμε αν τα τρίγωνα 7 και 8 είναι ίσα; Αν ναι, να εξηγήσετε γιατί είναι ίσα, αν όχι, να βρείτε τα επιπλέον στοιχεία που απαιτούνται.

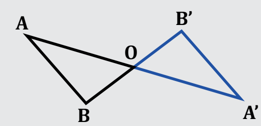
3 Να εξετάσετε αν τα παρακάτω ζεύγη τριγώνων είναι ίσα.



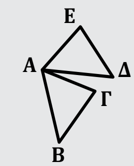
ΟΑ = ΟΑ', $\hat{A}=\hat{A}'$



ΟΑ = ΟΑ', $\hat{B}=\hat{B}'$



ΟΑ = ΟΑ', ΟΒ = ΟΒ'



ΑΕ = ΑΓ, ΕΔ = ΒΓ, $\hat{B}=\hat{\Delta}$

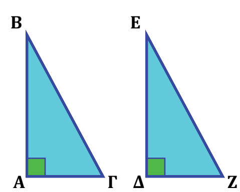
6.2.4 Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

Διερεύνηση

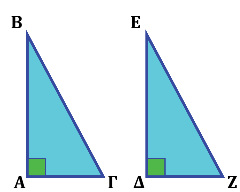
Να συνεργαστείτε με έναν συμμαθητή σας και να συζητήσετε τα αποτελέσματά σας στην τάξη.

α) Να εξετάσετε αν τα παρακάτω ζεύγη ορθογωνίων τριγώνων είναι ίσα με τα στοιχεία που δίνονται.

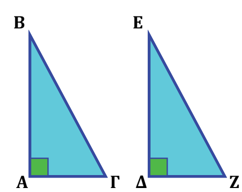
β) Σε κάθε περίπτωση να περιγράψετε ποια στοιχεία έχουν ίσα και να προσπαθήσετε να διατυπώσετε κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων.



ΒΓ = ΕΖ, ΑΒ = ΕΔ



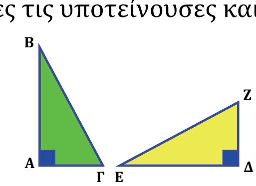
ΑΓ = ΔΖ, $\hat{B}=\hat{B}$



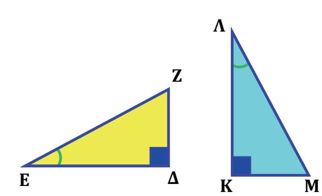
ΒΓ = ΕΖ, $\hat{B}=\hat{E}$

Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες μάθησης

- Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν ΑΒ = ΔΕ = 4 και ΒΓ = ΕΖ = 5. Δηλαδή έχουν ίσες τις υποτείνουσες και από μία κάθετη πλευρά. Η ορθή γωνία δεν είναι περιεχόμενη, οπότε δεν μπορεί να εφαρμοστεί το 2ο κριτήριο ισότητας (Π-Γ-Π). Ωστόσο, αν εφαρμόσουμε σε κάθε τρίγωνο Πυθαγόρειο θεώρημα θα διαπιστώσουμε ότι: $ΑΓ^2=5^2-4^2=25-16=9$ ή ΑΓ=3 και $ΔΖ^2 = 5^2-4^2 = 25-16 = 9$ ή ΔΖ = 3. Άρα τα τρίγωνα έχουν και τις τρεις πλευρές ίσες, οπότε εφαρμόζεται το 1ο κριτήριο ισότητας (Π-Π-Π), δηλαδή: $Α\hat{Β}Γ=Γ\hat{Δ}Ε$.



- Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΕΖ και ΚΛΜ έχουν ΔΖ = ΚΜ = 3 και $\hat{E}=\hat{\Lambda}=29^o$. Δηλαδή έχουν ίσες από μία κάθετη πλευρά και μία οξεία γωνία. Όμως οι δύο γωνίες $\hat{\Delta}=\hat{K}=90^o$ και $\hat{E}=\hat{\Lambda}=29^o$, δεν είναι προσκείμενες στις ίσες πλευρές ΔΖ και ΚΜ, άρα δεν μπορεί να εφαρμοστεί το κριτήριο Γ-Π-Γ. Ωστόσο για τις τρίτες γωνίες ισχύει: $\hat{Z}=90^o-29^o=61^o$ και $\hat{M}=90^o-29^o=61^o$ οπότε $\hat{Z}=\hat{M}$.
  Άρα μπορεί να εφαρμοστεί το κριτήριο Γ-Π-Γ και επομένως τα τρίγωνα είναι ίσα.



Σημείωση:

Το ίδιο θα συνέβαινε αν είχαν τις υποτείνουσές τους ίσες και μία οξεία γωνία ίση.

Τα προηγούμενα συνοψίζονται και γενικεύονται στα παρακάτω:

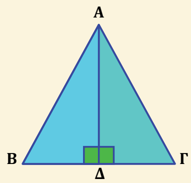
Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

Επειδή δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν πάντοτε μια ίση γωνία (την ορθή), είναι ίσα όταν έχουν:

- **Δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία.**
- **Μία αντίστοιχη πλευρά και μία αντίστοιχη οξεία γωνία.**

Εφαρμογή 10

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές (ΑΒ=ΑΓ) και το ΑΔ είναι ύψος.
Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ίσα.
β) Το ύψος ΑΔ είναι και διάμεσος.
γ) Το ύψος ΑΔ είναι και διχοτόμος.



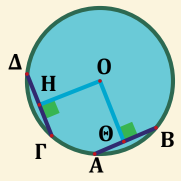
Απάντηση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ έχουν τις υποτείνουσές τους ΑΒ και ΑΓ ίσες. Επίσης έχουν κοινή την κάθετη πλευρά ΑΔ. Άρα έχουν δύο πλευρές ίσες, οπότε σύμφωνα με το αντίστοιχο κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων θα είναι ίσα. Άρα, ΑΒΔ = ΑΓΔ οπότε θα έχουν ίσα και τα υπόλοιπα κύρια στοιχεία τους: $\hat{B}=\hat{\Gamma}$ (απέναντι από την κοινή πλευρά ΑΔ), $B\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{A}\Delta$ (αφού οι δύο άλλες γωνίες τους είναι ίσες) και ΒΔ = ΓΔ (βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $B\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{A}\Delta$).
β) Αποδείξαμε ότι ΒΔ = ΔΓ, δηλαδή το Δ είναι μέσον της πλευράς ΒΓ. Συνεπώς το ύψος ΑΔ είναι και διάμεσος.
γ) Αποδείξαμε ότι $B\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{A}\Delta$. Συνεπώς το ΑΔ είναι και διχοτόμος της γωνίας Α.

Συνεπώς:

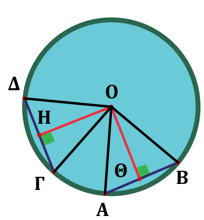
Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο το ύψος που αντιστοιχεί στη βάση είναι διχοτόμος και διάμεσος.

Εφαρμογή 11



Στον κύκλο (Ο, ρ) οι χορδές ΑΒ και ΓΔ είναι ίσες.
Αν ΟΗ⊥ΔΓ και ΟΘ⊥ΑΒ να δείξετε ότι ΟΗ = ΟΘ.

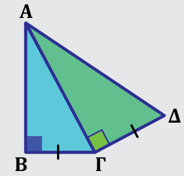
Απάντηση



Φέρνουμε τις ακτίνες ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ. Τα τρίγωνα ΟΔΓ και ΟΑΒ είναι ίσα ισοσκελή, διότι ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ = ΟΔ = ρ και ΑΒ = ΓΔ, οπότε εφαρμόζεται το κριτήριο Π-Π-Π. Άρα θα είναι και $\hat{A}=\hat{B}=\hat{\Gamma}=\hat{\Delta}$, αφού βρίσκονται απέναντι από ίσες πλευρές.
Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΘΒ και ΟΗΓ. Έχουν: ΟΒ = ΟΓ = ρ και $\hat{B}=\hat{\Gamma}$. Άρα είναι ίσα διότι έχουν τις υποτείνουσές τους ίσες και μια οξεία γωνία τους ίση. Άρα ΟΗ = ΟΘ, διότι βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.

Σημείωση:
Το ΟΗ λέγεται **απόστημα** της χορδής ΔΓ. Αντίστοιχα το ΟΘ για την ΑΒ.
Αποδείξαμε λοιπόν ότι: «Σε ίσες χορδές (του ίδιου κύκλου) αντιστοιχούν ίσα αποστήματα».

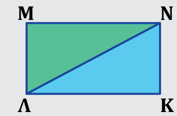
Ερωτήσεις για Αυτοαξιολόγηση



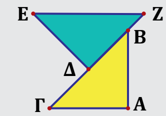
1 Ποια κύρια στοιχεία έχουν ίσα τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΔ του σχήματος;
Να εξετάσετε αν τα τρίγωνα είναι ίσα. Να αιτιολογήσετε.

2 Να εξετάσετε αν είναι αληθής η πρόταση: «δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, αν δύο πλευρές του ενός είναι ίσες με δύο πλευρές του άλλου». Να αιτιολογήσετε.

3 Να εξετάσετε αν είναι αληθής η πρόταση: «δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, αν μια οξεία γωνία και μια πλευρά του ενός είναι ίσες με μία οξεία γωνία και μία πλευρά του άλλου». Να αιτιολογήσετε.



4 Δίνεται το ορθογώνιο ΚΛΜΝ.
Να αποδείξετε με δύο διαφορετικά κριτήρια ότι τα τρίγωνα ΛΜΝ και ΝΚΛ είναι ίσα.



5 Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ορθογώνια και έχουν ίσες υποτείνουσες (ΒΓ = ΕΖ) και ΕΖ//ΑΓ. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα είναι ίσα.

6.3 Βασικές ιδιότητες γεωμετρικών σχημάτων: Εφαρμογές της ισότητας τριγώνων

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθήτριες και οι μαθητές να μπορούν:

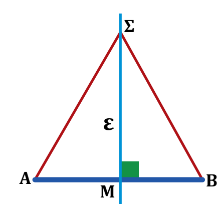
- Να αξιοποιούν τα κριτήρια ισότητας τριγώνων για την αιτιολόγηση των ιδιοτήτων της μεσοκάθετης ευθύγραμμου τμήματος και της διχοτόμου γωνίας καθώς και των ιδιοτήτων των παραλληλογράμμων.

6.3.1 Χαρακτηριστική ιδιότητα της μεσοκαθέτου ευθύγραμμου τμήματος

Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος απέχει εξίσου από τα άκρα του.

Απάντηση

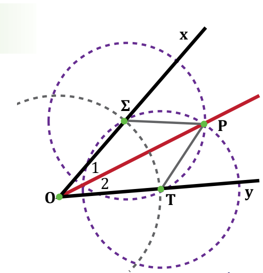
Θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και σχεδιάζουμε τη μεσοκάθετο ε. Αν Σ είναι ένα τυχαίο σημείο της μεσοκαθέτου, θα αποδείξουμε ότι ΣΑ = ΣΒ. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΣΑΜ και ΣΒΜ, τα οποία έχουν: ΜΑ=ΜΒ (αφού το Μ είναι μέσο του ΑΒ) και ΣΜ κοινή πλευρά. Τα τρίγωνα είναι ίσα διότι έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία ίση (κριτήριο Π-Γ-Π) ή κριτήριο ορθογωνίων τριγώνων (δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες). Αφού είναι ίσα τα τρίγωνα θα έχουν και τις τρίτες πλευρές ίσες, δηλαδή ΣΑ = ΣΒ. Η πρόταση που αποδείξαμε είναι η χαρακτηριστική ιδιότητα της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος.



Συνεπώς:

Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.

6.3.2 Χαρακτηριστική ιδιότητα της διχοτόμου γωνίας

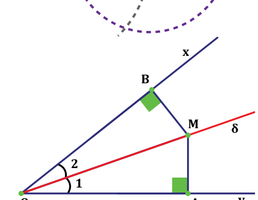


Κατασκευή και χαρακτηριστική ιδιότητα διχοτόμου γωνίας

Κατασκευή:

Για να κατασκευάσουμε τη διχοτόμο της γωνίας $x\hat{O}y$, σχεδιάζουμε κύκλο με κέντρο Ο, ο οποίος τέμνει τις πλευρές της στα σημεία Σ και Τ. Σχεδιάζουμε στη συνέχεια τους κύκλους (Σ, ρ) και (Τ, ρ) οι οποίοι τέμνονται στο σημείο Ρ. Τα τρίγωνα ΡΟΣ και ΡΟΤ είναι ίσα (γιατί;) οπότε $\hat{O}_1=\hat{O}_2$ και επομένως η Οδ είναι η διχοτόμος της.

Χαρακτηριστική ιδιότητα:



Αν από τυχαίο σημείο Μ της διχοτόμου Οδ φέρουμε τις κάθετες ΜΑ και ΜΒ προς τις πλευρές της γωνίας, τότε ΜΑ=ΜΒ (πώς;). Αντίστροφα: Αν Μ σημείο που ισαπέχει από τις πλευρές τις γωνίας, τότε η ΟΜ είναι διχοτόμος της (γιατί;). Συνεπώς: **Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας και αντιστρόφως, κάθε σημείο που ισαπέχει από τις πλευρές μιας γωνίας είναι σημείο της διχοτόμου.**

6.3.3 Χαρακτηριστικές ιδιότητες παραλληλογράμμων

Γνωρίζουμε ότι ***παραλληλόγραμμο είναι το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές παράλληλες.*** Με εφαρμογή των κριτηρίων ισότητας τριγώνων αποδεικνύεται ότι :

- Οι απέναντι πλευρές παραλληλογράμου είναι ίσες (εφαρμογή 8).
- Οι απέναντι γωνίες παραλληλογράμου είναι ίσες.
- Οι διαγώνιοι παραλληλογράμου διχοτομούνται (έχουν κοινό μέσο).

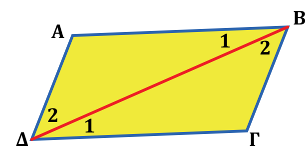
Αποδεικνύουμε ότι **«Οι απέναντι γωνίες παραλληλογράμου είναι ίσες».** Ανάλογα αποδεικνύονται και οι υπόλοιπες περιπτώσεις.

Εφαρμογή 12

Δίνεται ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ και ΒΓ//ΑΔ).
Να δείξετε ότι: $\hat{B}=\hat{\Delta}$ και $\hat{A}=\hat{\Gamma}$.

Απάντηση

Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ φέρνουμε τη διαγώνιο ΒΔ, οπότε:



- $\hat{B}_1=\hat{\Delta}_1$ ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται από τη ΒΔ,
- $\hat{B}_2=\hat{\Delta}_2$ ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ΑΔ και ΒΓ που τέμνονται από τη ΒΔ.

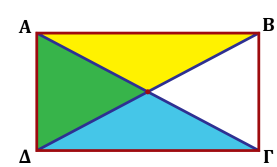
Άρα, $\hat{B}=\hat{B}_1+\hat{B}_2=\hat{\Delta}_1+\hat{\Delta}_2=\hat{\Delta}$.
Εξάλλου, τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΒΓΔ είναι ίσα από το κριτήριο Γ-Π-Γ ($\hat{B}_1=\hat{\Delta}_1$, κοινή πλευρά ΒΔ, $\hat{B}_2=\hat{\Delta}_2$) και επομένως $\hat{A}=\hat{\Gamma}$, αφού βρίσκονται απέναντι από την κοινή πλευρά ΒΔ.
Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

Σε κάθε παραλληλόγραμμο οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες.

Εφαρμογή 13

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με διαγωνίους ΑΓ, ΒΔ. Να δείξετε ΑΓ = ΒΔ.

Απάντηση



Θα συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ. Έχουν:

- ΑΔ κοινή πλευρά.
- ΑΒ = ΓΔ (απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου, όπως αποδείξαμε παραπάνω).

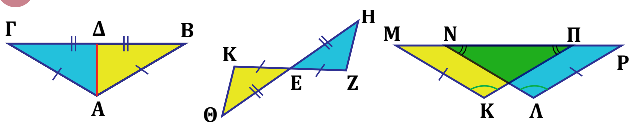
Συνεπώς τα ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα διότι έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες. Άρα θα έχουν και τις τρίτες πλευρές ίσες, δηλαδή ΑΓ=ΒΔ. (Η ισότητα ΑΒΔ = ΑΓΔ προκύπτει και με το κριτήριο Π-Γ-Π).
Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

Οι διαγώνιοι ενός ορθογωνίου είναι ίσες.

Διερευνήστε την ισότητα τριγώνων στο παραλληλόγραμμο.

Ασκήσεις και Προβλήματα

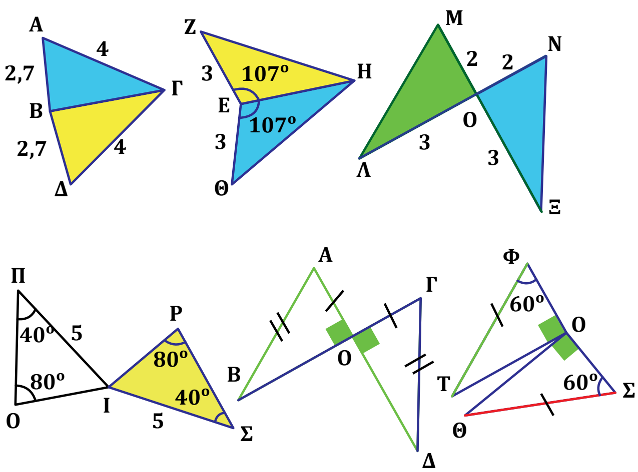
1 Σε κάθε περίπτωση να συγκρίνετε τα τρίγωνα.



ΜΠ = ΝΡ

2 Αν τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν ΑΒ=ΔΕ, $\hat{B}=\hat{E}$ και $\hat{\Gamma}=\hat{Z}$ να εξετάσετε αν είναι ίσα. Να δικαιολογήσετε πώς το σκεφτήκατε.

3 Να συγκρίνετε τα παρακάτω ζεύγη τριγώνων. Στη συνέχεια να συγκρίνετε τα υπόλοιπα κύρια στοιχεία τους.



4 Να εξετάσετε αν μπορεί:

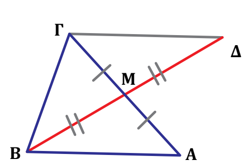
α) Ένα ισοσκελές τρίγωνο να είναι ίσο με ένα σκαληνό τρίγωνο.

β) Ένα ορθογώνιο τρίγωνο να είναι ίσο με ένα ισόπλευρο τρίγωνο.

γ) Ένα ορθογώνιο τρίγωνο να είναι ίσο με ένα ισοσκελές τρίγωνο.

5 Να εξετάσετε αν δύο ίσα τρίγωνα έχουν ίσες περιμέτρους. Να εξετάσετε αν ισχύει το αντίστροφο, δηλαδή, αν δύο τρίγωνα έχουν ίσες περιμέτρους είναι ίσα.

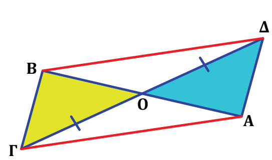
6 Στο τρίγωνο ΑΒΓ η διάμεσος ΒΜ προεκτείνεται κατά ΜΔ = ΒΜ. Να δείξετε ότι:



α) Τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΓΔΜ είναι ίσα.

β) Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

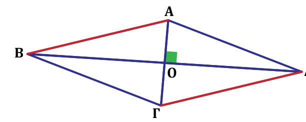
7 Στο σχήμα τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ τέμνονται στο Ο και είναι ΟΓ = ΟΔ και ΒΓ//ΑΔ.



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΒΓ και ΟΑΔ είναι ίσα.

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΒΓ είναι παραλληλόγραμμο.

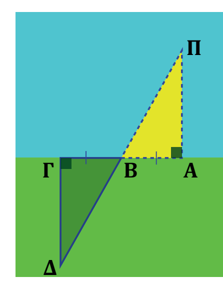
8 Αν το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχει τις διαγωνίους του ΑΓ και ΒΔ κάθετες να δείξετε ότι:



α) Το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος,

β) Οι διαγώνιοι διχοτομούν τις γωνίες του παραλληλογράμμου.

9 Λέγεται ότι ο Θαλής ο Μιλήσιος 2500 χρόνια πριν, υπολόγισε την απόσταση ενός πλοίου από τη στεριά με τον εξής τρόπο. Το πλοίο βρισκόταν στη θέση Π και ο Θαλής στη θέση Α. Περπάτησε πάνω στην ακτογραμμή κάθετα στην ΑΠ, μέχρι το σημείο Β και εκεί τοποθέτησε ένα σημάδι. Μετά συνέχισε να περπατά πάνω στην ίδια ευθεία μέχρι το Γ, απόσταση ΓΒ ίση με την ΑΒ. Εκεί τοποθέτησε άλλο σημάδι και μετά περπάτησε κάθετα στην ευθεία ΑΓ μέχρι ένα σημείο Δ, από το οποίο τα σημεία Β, Π να φαίνονται πάνω στην ίδια ευθεία. Στη συνέχεια, μέτρησε την απόσταση ΓΔ και συμπέρανε ότι το πλοίο απέχει από το σημείο Α της στεριάς ίση απόσταση με τη ΓΔ.



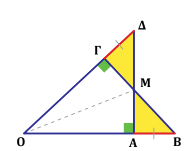
Πώς ήταν σίγουρος ο Θαλής ότι ΑΠ = ΓΔ;

10 Αν ΑΒ = ΓΔ, ΑΔ ⊥ ΟΒ και ΒΓ ⊥ ΟΔ να δείξετε ότι:

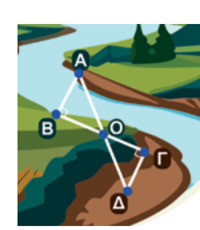
α) ΜΓΔ = ΜΑΒ

β) ΜΑΟ = ΜΟΓ

γ) η ΟΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{O}\Delta$.

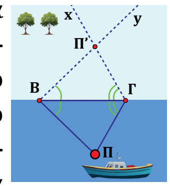


11 Ο Όμηρος θέλει να κάνει εκτίμηση του πλάτους ΑΒ του ποταμού. Προχωράει από το Β κατά μήκος της ακτής μέχρι το σημείο Ο, απόσταση 10 μέτρων. Μετά περπατάει άλλα 10 m μέχρι το Γ. Να συμπληρώσετε τα υπόλοιπα στοιχεία του σχήματος και παρατηρώντας το σχήμα να εξηγήσετε πώς θα υπολογίσετε το πλάτος του ποταμού.



12 Η γωνία $x\hat{O}y$ στο σχήμα είναι 42^o. Να κατασκευάσετε γωνία ίση με τη $x\hat{O}y$ με τη χρήση γεωμετρικών οργάνων.

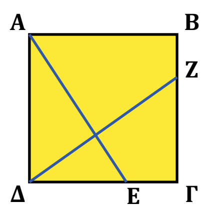
13 Στη θέση **Π** στη θάλασσα βρίσκεται ένα πλοίο. Ένας παρατηρητής για να μετρήσει την απόσταση του πλοίου **Π** από το σημείο Β της ακτής, θεωρεί και ένα άλλο σημείο Γ της ακτής, μετράει την απόσταση ΒΓ και με ένα γωνιόμετρο μετρά τις γωνίες $\Pi\hat{B}\Gamma$ και $\Pi\hat{\Gamma}B$. Στη συνέχεια μετρά δύο γωνίες $B\hat{\Gamma}x$ και $\Gamma\hat{B}y$ ίσες αντίστοιχα με τις προηγούμενες. Μπορείτε να εξηγήσετε τη μέθοδο του παρατηρητή;



14 Στις πλευρές ΒΓ και ΓΔ του τετραγώνου παίρνουμε τα σημεία Ε και Ζ έτσι ώστε να είναι ΒΖ = ΕΓ. Να δείξετε ότι:

α) ΑΕ = ΔΖ.

β) ΑΕ⊥ΔΖ.



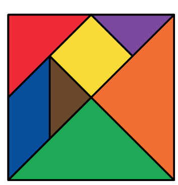
15 Να χρησιμοποιήσετε το παζλ tangram (σχήμα) για να απαντήσετε:

α) Ποια τρίγωνα είναι ίσα;

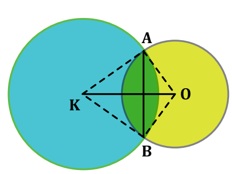
β) Ποιο τρίγωνο έχει εμβαδόν διπλάσιο από το εμβαδόν του μοβ τριγώνου;

γ) Πόσες φορές μεγαλύτερο είναι το εμβαδόν του πορτοκαλόχρωμου τριγώνου από το εμβαδόν του μοβ τριγώνου;

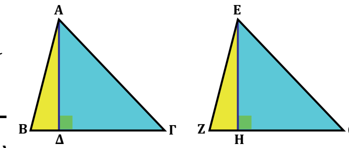
δ) Το τετράγωνο με ποιο τρίγωνο έχει το ίδιο εμβαδόν;



16 Οι κύκλοι με κέντρα Κ και Ο τέμνονται στα σημεία Α και Β. Να δείξετε ότι η ΚΟ είναι μεσοκάθετη του ΑΒ



17 Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΖΘ είναι ίσα.



α) Αν ΑΔ και ΕΗ είναι τα ύψη που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές ΒΓ και ΖΘ, να δείξετε ότι ΑΔ = ΕΗ.

β) Να σχεδιάσετε τις διαμέσους που αντιστοιχούν σε δύο ίσες πλευρές και να δείξετε ότι είναι ίσες.

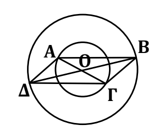
γ) Να σχεδιάσετε τις διχοτόμους δύο ίσων γωνιών και να δείξετε ότι είναι ίσες.

18 Οι ΒΟ και ΓΟ είναι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ. Τα τμήματα ΟΚ, ΟΛ, ΟΜ είναι οι αποστάσεις του σημείου τομής Ο των διχοτόμων από τις πλευρές του τριγώνου. Να δείξετε ότι:

α) ΟΚ = ΟΛ = ΟΜ.

β) Η ΑΟ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.

19 Δύο κύκλοι με διαμέτρους ΑΓ και ΒΔ έχουν κοινό κέντρο Ο. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

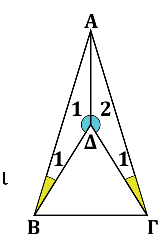


20 Στο διπλανό σχήμα ισχύουν: $\hat{\Delta}_1=\hat{\Delta}_2$ και $\hat{B}_1=\hat{\Gamma}_1$. Να αποδείξετε ότι:

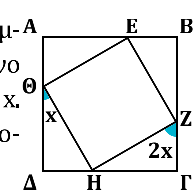
α) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

β) Η ΑΔ είναι μεσοκάθετη της ΒΓ.

γ) Το σημείο Δ ισαπέχει από τις ΑΒ και ΑΓ.



21 Ένα τετράγωνο ΕΖΗΘ είναι εγγεγραμμένο σε ένα μεγαλύτερο τετράγωνο ΑΒΓΔ έτσι ώστε $\Gamma\hat{Z}H = 2x$ και $\Delta\hat{\Theta}H = x$. Να υπολογίσετε τη γωνία x. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



Διερεύνηση: Να ανοίξετε την εφαρμογή «Ισότητα τριγώνων και διπλή αξονική συμμετρία» και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

Να κάνετε τη συνθετική εργασία: «Αιτιολόγηση των κριτηρίων ισότητας τριγώνων με μετασχηματισμούς».

6.4 Ανακεφαλαίωση και διεύρυνση της θεματικής ενότητας

Ισότητα τριγώνων

Δύο τρίγωνα λέγονται ίσα, όταν μετά από κατάλληλη μετακίνηση συμπίπτουν. Στα ίσα τρίγωνα οι πλευρές τους είναι ίσες μία προς μία και οι αντίστοιχες γωνίες τους είναι ίσες μία προς μία.

Στα ίσα τρίγωνα οι ίσες πλευρές βρίσκονται απέναντι από ίσες γωνίες και αντίστροφα.

Κριτήρια ισότητας τριγώνων:

1ο Κριτήριο: Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

2ο Κριτήριο: Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις ίσες πλευρές γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα.

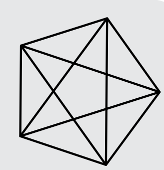
3ο Κριτήριο: Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην ίση πλευρά γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα.

Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων:

Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν:
- **Δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία.**
- **Μία αντίστοιχη πλευρά και μία αντίστοιχη (οξεία) γωνία.**

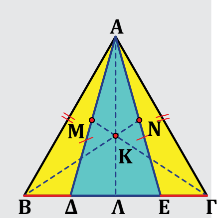
Ασκήσεις επανάληψης

1 Δίνεται κανονικό πεντάγωνο.



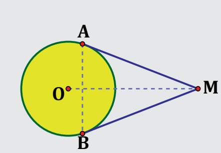
α) Να αποδείξετε ότι οι διαγώνιοί του είναι ίσες.
β) Να βρείτε 5 ίσα τρίγωνα, των οποίων η μία πλευρά να είναι πλευρά του κανονικού πενταγώνου.
γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής των διαγωνίων του σχηματίζουν κανονικό πεντάγωνο.

2 Στο σχήμα είναι ΑΒ = ΑΓ, ΑΔ = ΑΕ και τα Μ, Ν είναι μέσα των ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



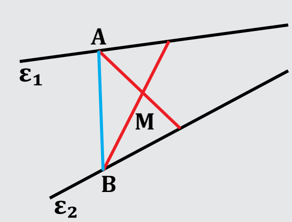
α) $A\hat{B}\Delta = A\hat{E}\Gamma$.
β) $N\hat{B}E = M\hat{\Gamma}\Delta$.
γ) Το τρίγωνο ΚΒΓ είναι ισοσκελές.
δ) Τα σημεία Α και Κ ισαπέχουν από τα άκρα του ΒΓ.
ε) Η ΑΛ είναι ύψος και διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ.

3 Τα τμήματα ΜΑ και ΜΒ είναι εφαπτόμενα του κύκλου στα Α, Β. Να αποδείξετε ότι:



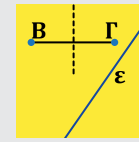
α) ΜΑ = ΜΒ.
β) η ΟΜ είναι διχοτόμος της γωνίας Μ.
γ) Η ΟΜ είναι μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

4 Ανοιχτό πρόβλημα. Δύο ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται στο εξωτερικό του φύλλου σχεδίασης. Θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και κατασκευάζουμε τις διχοτόμους των γωνιών Α και Β όπως φαίνεται στο σχήμα, οι οποίες τέμνονται στο Μ.



i. Να αιτιολογήσετε γιατί το σημείο Μ ισαπέχει από τις ε_1, ε_2.
ii. Να χαράξετε τη διχοτόμο της γωνίας που σχηματίζουν οι ε_1, ε_2 χωρίς να βγείτε έξω από το φύλλο σχεδίασης.

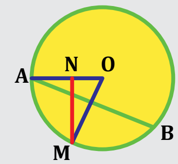
5 Δίνεται ευθεία ε και ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ. Να βρείτε σημείο Μ της ε ώστε να ισαπέχει από τα Β και Γ. Υπάρχει πάντοτε ένα τέτοιο σημείο;



6 Αν Μ είναι το μέσο του τόξου $\overset{\frown}{AB}$ και ΜΝ⊥ΟΑ να αποδείξετε:

α) ΜΟ μεσοκάθετη ΑΒ.

β) ΜΝ $= \frac{1}{2}$ΑΒ.

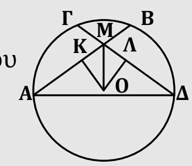


7 Αν ΑΒ = ΓΔ, Κ, Λ τα μέσα των ΑΒ, ΓΔ αντίστοιχα και Ο το κέντρο του κύκλου, να αποδείξετε ότι:

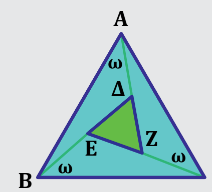
α) ΟΚ = ΟΛ.

β) ΟΜ διχοτόμος της ΑΜ̂Δ.

γ) ΜΟ⊥ΑΔ.



8 Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο και ΒΑ̂Δ = ΕΒ̂Γ = ΖΓ̂Α = ω, να αποδείξετε ότι και το ΔΕΖ θα είναι ισόπλευρο.



9 Αν ένα τρίγωνο έχει δύο ύψη ίσα, να αποδείξετε ότι είναι ισοσκελές.

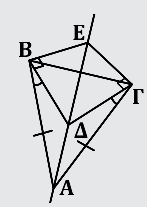
10 Η πρόταση-κριτήριο «δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν δύο οποιεσδήποτε πλευρές τους μία προς μία ίσες» αληθεύει πάντα; Αν δεν αληθεύει πάντα, να βρείτε μια τέτοια περίπτωση (αντιπαράδειγμα). Να συμπληρώσετε την πρόταση με μια κατάλληλη φράση ώστε να αληθεύει πάντα.

11 Στο ακόλουθο σχήμα ισχύουν: ΑΒ = ΑΓ και ΑΒ̂Δ = ΑΓ̂Δ. Το σημείο Ε ανήκει στην ευθεία ΑΔ. Να αποδείξετε ότι:

α) ΔΒ = ΔΓ.

β) Η ευθεία ΑΔ είναι μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος ΒΓ.

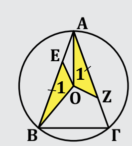
γ) ΕΒ = ΕΓ.



12 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ), ΒΕ = ΑΖ και Ο το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου. Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$

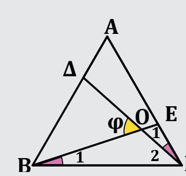
β) ΟΕ = ΟΖ.



13 Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Πάνω στην πλευρά ΑΓ παίρνουμε τμήμα ΓΕ και πάνω στην πλευρά ΑΒ παίρνουμε τμήμα ΑΔ ώστε ΓΕ = ΑΔ. Φέρνουμε τις ΒΕ και ΔΓ, οι οποίες τέμνονται στο σημείο Ο. Να αποδείξετε ότι:

α) ΕΒ̂Γ=ΔΓ̂Α

β) ΔÔΒ=60°

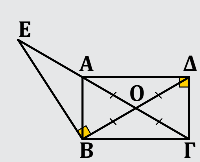


14 Στο ακόλουθο σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, τα τρίγωνα ΑΒΟ και ΓΔΟ είναι ισόπλευρα και η ΒΕ είναι κάθετη προς τη ΒΔ. Να αποδείξετε ότι:

α) ΑÊΒ=30°

β) ΕΒ = ΒΓ

γ) ΕΑ = ΑΒ



Μαθηματικές προκλήσεις: Να ανοίξετε την εφαρμογή για να βρείτε προβλήματα αυξημένης δυσκολίας: «Γεωμετρικά προβλήματα στα ίσα τρίγωνα».

Να ανοίξετε την εφαρμογή «Γλωσσάρι - Γεωμετρία επιπέδου» για να συνοψίσετε έννοιες και όρους που μάθατε στο κεφάλαιο αυτό.

Κεφάλαιο

7

Μετασχηματισμοί

Λόγος ευθύγραμμων τμημάτων

Ομοιοθεσία

Ομοιότητα

Σχεδιασμός ομοίων σχημάτων

Στο Κεφάλαιο αυτό θα μάθουμε:

- Να αναγνωρίζουμε και να υπολογίζουμε τον λόγο ευθύγραμμων τμημάτων ως λόγο των μηκών τους στην ίδια μονάδα μέτρησης.
- Να καθορίζουμε τα χαρακτηριστικά στοιχεία του μετασχηματισμού της ομοιοθεσίας.
- Να αναγνωρίζουμε ως όμοια τα σχήματα που το ένα είναι μεγέθυνση ή σμίκρυνση του άλλου.
- Να διαπιστώνουμε και να περιγράφουμε μεγεθύνσεις και σμικρύνσεις μέσω της ομοιοθεσίας, χρησιμοποιώντας μια ποικιλία εργαλείων.
- Να διερευνούμε και να εντοπίζουμε τις ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά των ομοιόθετων σχημάτων.
- Να αξιοποιούμε τις ιδιότητες της ομοιοθεσίας ως προς κέντρο και λόγο ομοιοθεσίας στον σχεδιασμό σχημάτων και στην αιτιολόγηση ιδιοτήτων τους.
- Να σχεδιάζουμε ομοιόθετα και όμοια σχήματα, χρησιμοποιώντας μια ποικιλία υλικών, εργαλείων και στρατηγικών.

Εισαγωγή

Στις προηγούμενες τάξεις μάθαμε τους μετασχηματισμούς της αξονικής συμμετρίας (ανάκλασης), της μεταφοράς (κατά διάνυσμα) και της στροφής (κατά γωνία). Οι μετασχηματισμοί αυτοί επειδή διατηρούν τα μήκη των σχημάτων ονομάζονται ισομετρίες. Εδώ θα ασχοληθούμε με έναν ακόμα μετασχηματισμό, την **ομοιοθεσία.**
Η ομοιοθεσία διατηρεί τη μορφή των αρχικών σχημάτων, αλλά αλλάζει τα μεγέθη τους. Άλλοτε δίνει όμοια σχήματα με μικρότερο μέγεθος, οπότε έχουμε σμίκρυνση και άλλοτε με μεγαλύτερο μέγεθος, οπότε έχουμε μεγέθυνση. Στην ομοιοθεσία δεν διατηρούνται τα μήκη και επομένως δεν είναι ισομετρία. Είναι ένα ισχυρό εργαλείο με πολλές εφαρμογές στη Γεωμετρία, τη Μηχανική, τη Χαρτογραφία, τους ηλεκτρονικούς υπολογιστές και σε άλλους κλάδους. Απασχόλησε τους ανθρώπους από την αρχαιότητα, όπως φαίνεται από αναφορές που γίνονται σε αυτή. Για παράδειγμα, ο παντογράφος του Ήρωνος (2ος αι. π.Χ.), είναι η πρώτη συσκευή αντιγραφής, μεγέθυνσης και σμίκρυνσης σχεδίων. Πρόκειται για μια εντυπωσιακή διάταξη αντιγραφής με δυνατότητα σμίκρυνσης ή μεγέθυνσης σχεδίων.

Να μελετήσετε το ιστορικό σημείωμα: «Παντογράφος του Ήρωνος».

7.1 Λόγος ευθύγραμμων τμημάτων

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθήτριες και οι μαθητές να μπορούν:

- Να αναγνωρίζουν και να υπολογίζουν τον λόγο ευθύγραμμων τμημάτων ως λόγο των μηκών τους στην ίδια μονάδα μέτρησης.

Διερεύνηση

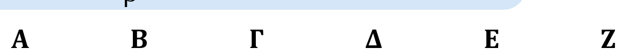
α) Αν το ύψος της Αθηνάς είναι 1,65 m και το ύψος της μητέρας της 1,75 m, πόσο ψηλότερη από την Αθηνά είναι η μητέρα της;
β) Αν το ύψος ενός κτιρίου είναι 60 m και το ύψος του Γιάννη 1,70 m, πόσες φορές ψηλότερο είναι το κτίριο από τον Γιάννη;

Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες μάθησης

Για να συγκρίνουμε δύο ευθύγραμμα τμήματα χρησιμοποιούμε τη διαφορά ή τον λόγο των μηκών τους.
Ο λόγος δύο ευθύγραμμων τμημάτων δεν εξαρτάται από τη μονάδα με την οποία μετριούνται και είναι ίσος με τον λόγο των μηκών τους.

Λόγος δύο ευθύγραμμων τμημάτων α, β ονομάζεται ένας αριθμός λ, για τον οποίο ισχύει
$\alpha = \lambda \cdot \beta$ και συμβολίζεται ως $\lambda = \frac{\alpha}{\beta}$.

Παράδειγμα:



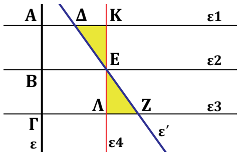
Τα σημεία Β, Γ, Δ, και Ε χωρίζουν το τμήμα ΑΖ σε πέντε ίσα μέρη. Το τμήμα ΑΓ είναι τα δύο από τα πέντε ίσα μέρη του ΑΖ, επομένως ΑΓ$=\frac{2}{5}$ ΑΖ. Ο αριθμός $\frac{2}{5}$ είναι ο λόγος του τμήματος ΑΓ προς το τμήμα ΑΖ, δηλαδή $\frac{ΑΓ}{ΑΖ}=\frac{2}{5}$. Αντίστοιχα, επειδή ΑΖ$=\frac{5}{2}$ΑΓ, ο λόγος του ΑΖ προς το ΑΓ είναι $\frac{ΑΖ}{ΑΓ}=\frac{5}{2}$. Επίσης, επειδή $\frac{ΑΒ}{ΑΓ}=\frac{1}{2}$ και $\frac{ΒΔ}{ΒΖ}=\frac{1}{2}$ θα είναι $\frac{ΑΒ}{ΑΓ}=\frac{ΒΔ}{ΒΖ}$. Η τελευταία ισότητα ονομάζεται **αναλογία**.

Παραδείγματα αναλογιών: α) $\frac{AB}{A\Delta} = \frac{B\Gamma}{\Gamma Z} = \frac{1}{3}$, β) $\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$.

Εφαρμογή

Αν τρεις παράλληλες ευθείες (ε_1, ε_2, ε_3) τέμνουν την ευθεία ε έτσι ώστε ΑΒ = ΒΓ, τότε θα τέμνουν και κάθε άλλη ευθεία ε΄ σε ίσα τμήματα (δηλαδή, οι παράλληλες θα τέμνουν και την ευθεία ε΄ έτσι ώστε ΔΕ = ΕΖ).

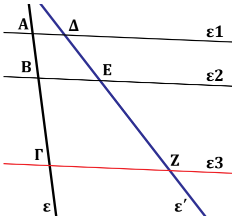
Απάντηση



Αν φέρουμε από το Ε ευθεία $\varepsilon_4 // \varepsilon$, που τέμνει τις ε_1 και ε_3 στα Κ και Λ, τα τρίγωνα ΔΕΚ και ΖΕΛ, έχουν ΚΕ = ΕΛ (γιατί;), $\hat{\Delta K E} = \hat{E \Lambda Z}$ και $\hat{\Delta E K} = \hat{Z E \Lambda}$ (γιατί;), άρα σύμφωνα με το κριτήριο Γ-Π-Γ είναι ίσα, συνεπώς θα είναι και ΕΔ = ΕΖ.

Παρατήρηση: Ισχύει η αναλογία $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{\Delta E}{EZ}$ ή ισοδύναμα η αναλογία $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ}$.

Γενικότερα ισχύει η επόμενη πρόταση, η οποία είναι γνωστή ως **Θεώρημα του Θαλή:**



Αν τρεις (ή περισσότερες) παράλληλες ευθείες (ε_1, ε_2, ε_3) τέμνουν δύο άλλες ευθείες (ε) και (ε΄), τα τμήματα που ορίζουν στη μία είναι ανάλογα με τα αντίστοιχα τμήματα που ορίζουν στην άλλη.

Δηλαδή, ισχύει η αναλογία: $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{\Delta E}{EZ}$

Ισχύει και η αντίστροφη πρόταση, δηλαδή:

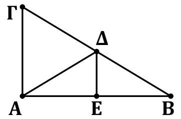
Αν τρεις ή περισσότερες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες (ε) και (ε΄) και τα τμήματα που ορίζουν στη μία είναι ανάλογα με τα αντίστοιχα τμήματα που ορίζουν στην άλλη, τότε οι ευθείες είναι παράλληλες.

Ασκήσεις και Προβλήματα

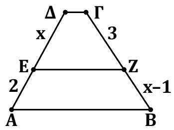
1 Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\hat{B}\Gamma$(Α=90°) είναι ΑΔ διάμεσος και ΔΕ//ΑΓ. Να δείξετε ότι:

α) ΔΕ μεσοκάθετος της ΑΒ

β) $A\Delta = \frac{B\Gamma}{2}$



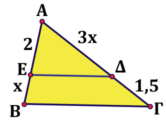
2 Το ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο και ΕΖ//ΑΒ. Να βρείτε:



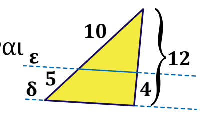
α) τα ΒΖ και ΔΕ

β) το είδος του τραπεζίου.

3 Να υπολογίσετε τις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ του διπλανού σχήματος:



4 Να δείξετε ότι οι ευθείες δ και ε είναι παράλληλες.



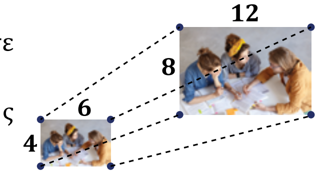
7.2 Ομοιοθεσία

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθήτριες και οι μαθητές να μπορούν:

- Να καθορίζουν τα χαρακτηριστικά στοιχεία του μετασχηματισμού της ομοιοθεσίας.
- Να διαπιστώνουν και να περιγράφουν μεγεθύνσεις και σμικρύνσεις μέσω της ομοιοθεσίας χρησιμοποιώντας μια ποικιλία εργαλείων.

Διερεύνηση 1: Μεγέθυνση φωτογραφίας

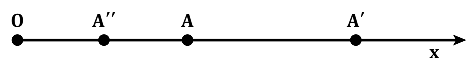
Ο Σωκράτης πήγε στο φωτογραφείο για να μεγεθύνει μία φωτογραφία 4×6 cm σε 8×12 cm.
Να παρατηρήσετε και να γράψετε τη σχέση που έχουν οι αντίστοιχες πλευρές της αρχικής και της φωτογραφίας που έχει μεγεθυνθεί.



Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες μάθησης

Στην ημιευθεία Οx παίρνουμε τα σημεία Α, Α΄ και Α΄΄, έτσι ώστε $OA' = 2OA$ ή $\frac{OA'}{OA} = 2$ και $OA'' = \frac{1}{2}OA$ ή $\frac{OA''}{OA} = \frac{1}{2}$.
Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι:

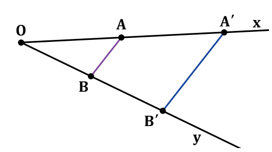
- Το σημείο Α΄ είναι **ομοιόθετο** του Α με λόγο 2, ως προς κέντρο Ο.
- Το σημείο Α΄΄ είναι **ομοιόθετο** του Α με λόγο 1/2, ως προς κέντρο Ο.



Η διαδικασία με την οποία αντιστοιχίζουμε στο σημείο Α, ένα σημείο Α΄ με λόγο λ ως προς κέντρο Ο, λέγεται **ομοιοθεσία**. Το σημείο Ο λέγεται **κέντρο της ομοιοθεσίας** και ο λόγος λ, **λόγος της ομοιοθεσίας**. Την ομοιοθεσία συμβολίζουμε με **(Ο, λ)**, όπου Ο το κέντρο της και λ ο λόγος της. Η ομοιοθεσία είναι ένας **μετασχηματισμός**.
Όταν ο λόγος λ είναι μικρότερος του 1 ($\lambda < 1$), τότε το ομοιόθετο Α΄΄ του σημείου Α βρίσκεται μεταξύ των Ο και Α, ενώ όταν ο λόγος λ είναι μεγαλύτερος του 1 ($\lambda > 1$), τότε το ομοιόθετο Α΄ του σημείου Α βρίσκεται εκτός του ΟΑ και Α προς το μέρος του Α.

Να διερευνήσετε το ομοιόθετο σημείου με την ψηφιακή εφαρμογή.

Ομοιοθεσία ευθυγράμμων τμημάτων



Για να βρούμε το ομοιόθετο ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ στην ομοιοθεσία με κέντρο Ο και λόγο π.χ. $\lambda = 2$, βρίσκουμε τα ομοιόθετα των άκρων του Α και Β. Επειδή $OA' = 2OA$ και $OB' = 2OB$, στο τρίγωνο ΟΑ΄Β΄ τα Α, Β είναι μέσα των πλευρών ΟΑ΄ και ΟΒ΄. Έχουμε αποδείξει, ότι ΑΒ//Α΄Β΄ και $A'B' = 2AB$ ή $\frac{A'B'}{AB} = 2$. Επομένως τα ομοιόθετα ευθύγραμμα τμήματα είναι παράλληλα και ο λόγος τους είναι ίσος με τον λόγο ομοιοθεσίας 2. Στη συγκεκριμένη περίπτωση επειδή $\lambda = 2 > 1$, έχουμε **μεγέθυνση**, δηλαδή το Α΄Β΄ είναι μεγέθυνση του ΑΒ. Στην ομοιοθεσία με κέντρο Ο και λόγο $\lambda = 0{,}5 < 1$ το Α΄Β΄ είναι ομοιόθετο του Α΄Β΄ και έχουμε **σμίκρυνση**, δηλαδή το ΑΒ είναι σμίκρυνση του ΑΒ.

Γενικά:

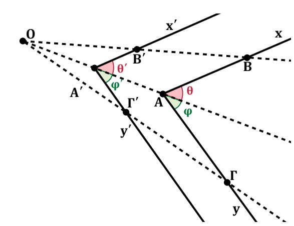
Τα ομοιόθετα ευθύγραμμα τμήματα ως προς μία ομοιοθεσία είναι μεταξύ τους παράλληλα και ο λόγος τους είναι ίσος με τον λόγο της ομοιοθεσίας.
Η ομοιοθεσία διατηρεί την παραλληλία, αλλά δεν διατηρεί τα μήκη των ευθύγραμμων τμημάτων.

Όπως ξέρουμε, δύο σημεία ορίζουν μία ευθεία, οπότε:

- Η ομοιόθετη μιας ευθείας x΄x είναι μία ευθεία y΄y, παράλληλη της x΄x και κατασκευάζεται βρίσκοντας τα ομοιόθετα δύο τυχαίων σημείων της.
- Η ομοιόθετη μιας ημιευθείας Αx είναι μία ημιευθεία Α΄x΄ παράλληλη στην Αx και κατασκευάζεται βρίσκοντας τα ομοιόθετα του σημείου της αρχής και ενός άλλου τυχαίου σημείου της.

Με την ψηφιακή εφαρμογή, να διερευνήσετε το ομοιόθετο ευθύγραμμου τμήματος.

Ομοιοθεσία γωνιών

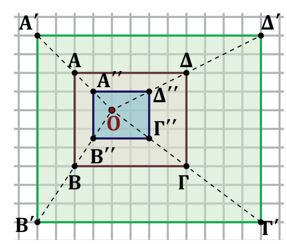


Για να βρούμε το ομοιόθετο μίας γωνίας $x\hat{A}y$ ως προς το κέντρο Ο με λόγο λ, π.χ. $\lambda = \frac{1}{2}$ αρκεί να βρούμε τα ομοιόθετα των πλευρών της Ax και Ay. Έτσι, η ομοιόθετη της γωνίας $x\hat{A}y$ είναι η γωνία $x'\hat{A}'y'$ (Σχήμα) που προκύπτει από τις ημιευθείες $A'x'$ και $A'y'$ που είναι οι ομοιόθετες ημιευθείες των πλευρών της γωνίας $x\hat{A}y$. Επειδή οι ομοιόθετες ημιευθείες είναι παράλληλες θα ισχύει $\hat{\theta}=\hat{\theta}'$, ως εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες των παραλλήλων ευθειών Ax και Ax′ που τέμνονται από την ΟΑ. Ομοίως θα ισχύει $\hat{\varphi}=\hat{\varphi}'$, ως εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες των παραλλήλων ευθειών Ay και Ay′ που τέμνονται από την ΟΑ. Έτσι έχουμε: $\hat{\theta}+\hat{\varphi} = \hat{\theta}'=\hat{\varphi}'$, ή $x\hat{A}y = x'\hat{A}'y'$, δηλαδή οι ομοιόθετες γωνίες είναι ίσες. Συνεπώς:

Οι ομοιόθετες γωνίες είναι ίσες, δηλαδή η ομοιοθεσία διατηρεί την ισότητα των γωνιών.

Με την ψηφιακή εφαρμογή, να διερευνήσετε το ομοιόθετο γωνίας.

Ομοιοθεσία πολυγώνων



Στην ομοιοθεσία με κέντρο Ο και λόγο λ = 2, το ορθογώνιο ΑΒΓΔ, μετασχηματίζεται στο ορθογώνιο Α′Β′Γ′Δ′, όπου Α′, Β′, Γ′, Δ′, είναι τα ομοιόθετα των κορυφών Α, Β, Γ, Δ αντίστοιχα. Οι πλευρές και οι γωνίες του Α′Β′Γ′Δ′ είναι ομοιόθετες με τις αντίστοιχες πλευρές και γωνίες του ΑΒΓΔ, οπότε ισχύουν: $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'\Gamma'}{B\Gamma} = \frac{\Gamma'\Delta'}{\Gamma\Delta} = \frac{\Gamma'\Delta'}{\Gamma\Delta} = \frac{A'\Delta'}{A\Delta} = 2$ και $\hat{A}=\hat{A}'$, $\hat{B}=\hat{B}'$, $\hat{\Gamma}=\hat{\Gamma}'$, $\hat{\Delta}=\hat{\Delta}'$. Το τετράπλευρο Α′Β′Γ′Δ′, που είναι ομοιόθετο του ΑΒΓΔ με λόγο λ = 2 είναι μεγέθυνση του ΑΒΓΔ. Το τετράπλευρο Α′′Β′′Γ′′Δ′′ που είναι ομοιόθετο του ΑΒΓΔ με λόγο $\lambda = \frac{1}{2}$ είναι σμίκρυνση του ΑΒΓΔ.

Το αρχικό ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει περίμετρο $\Pi = 2\cdot6+2\cdot5 = 22$ μονάδες (μ) και εμβαδόν $E = 6\cdot5 = 30$ τετραγωνικές μονάδες (τ.μ.), το ορθογώνιο Α′Β′Γ′Δ′ έχει περίμετρο $\Pi = 2\cdot12+2\cdot10 = 44$ μ και $E = 12\cdot10 = 120$ τ.μ., το ορθογώνιο Α′′Β′′Γ′′Δ′′ έχει περίμετρο Π′′=11μ και Ε′′=7,5 τ.μ. Επομένως, έχουμε: $\frac{\Pi'}{\Pi} = \frac{44}{22} = 2 = \lambda$ και $\frac{E'}{E} = \frac{120}{30} = 4 = 2^2$. Ομοίως $\frac{\Pi''}{\Pi} = \frac{11}{22} = \frac{1}{2} = \lambda$ και $\frac{E''}{E} = \frac{7{,}5}{30} = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \lambda^2$.

Γενικά:

Στα ομοιόθετα σχήματα:
- Οι γωνίες τους είναι ίσες και οι πλευρές τους είναι ανάλογες. Ο λόγος δύο ομόλογων (ομοιόθετων) πλευρών είναι ίσος με τον λόγο ομοιοθεσίας.
- Ο λόγος των περιμέτρων ισούται με τον λόγο της ομοιοθεσίας.
- Ο λόγος των εμβαδών ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιοθεσίας.

Στην εφαρμογή μπορείτε να δείτε μια γενικότερη αιτιολόγηση της πρότασης ότι «ο λόγος των περιμέτρων δύο ομοιόθετων σχημάτων είναι ίσος με τον λόγο ομοιοθεσίας».

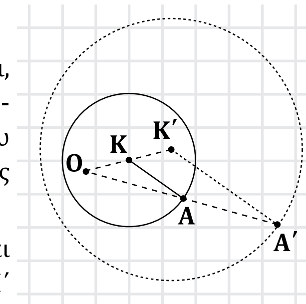
Με την ψηφιακή εφαρμογή, να διερευνήσετε το ομοιόθετο πολυγώνου.

Εφαρμογή 1

Να σχεδιάσετε έναν κύκλο με κέντρο Κ και ακτίνα 2 cm. Παίρνουμε κέντρο ομοιοθεσίας ένα σημείο Ο στο εσωτερικό του κύκλου, διαφορετικό από το κέντρο του και λόγο λ = 2.

α) Να σχεδιάσετε τον ομοιόθετο κύκλο.
β) Να βρείτε τον λόγο των περιμέτρων και τον λόγο των εμβαδών.

Απάντηση



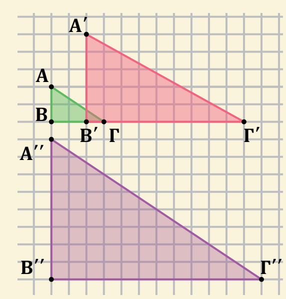
α) Ένας κύκλος προσδιορίζεται πλήρως από το κέντρο του και την ακτίνα του. Έτσι, αρκεί να βρούμε τα ομοιόθετα του κέντρου και ενός τυχαίου σημείου του Α. Στο σχήμα τα σημεία Κ′ και Α′ είναι τα ομοιόθετα σημεία των Κ και Α. Η ακτίνα του νέου κύκλου είναι 4 cm, δηλαδή διπλάσια της αρχικής. Στο σχήμα ο ομοιόθετος κύκλος παρουσιάζεται με διακεκομμένη γραμμή.

β) Η περίμετρος και το εμβαδόν του κύκλου (Κ, 2) είναι $\Pi = 2\pi R = 2\cdot\pi\cdot 2 = 4\pi$ cm και $E = \pi R^2 = \pi\cdot 2^2 = 4\pi$ cm^2. Η περίμετρος Π′ και το εμβαδόν Ε′ του κύκλου (Κ′,4) είναι $\Pi' = 2\pi R = 2\cdot\pi\cdot 4 = 8\pi$ cm και $E' = \pi R^2 = \pi\cdot 4^2 = 16\pi$ cm^2. Άρα: $\frac{\Pi'}{\Pi}=2$ και $\frac{E'}{E}=2^2=4$.

Με την ψηφιακή εφαρμογή, να διερευνήσετε το ομοιόθετο κύκλου.

Εφαρμογή 2

Στο διπλανό σχήμα να βρείτε ποιο τρίγωνο αποτελεί μεγέθυνση του τριγώνου ΑΒΓ δικαιολογώντας την άποψή σας. Να βρείτε τον λόγο ομοιοθεσίας.



Απάντηση

Το ορθογώνιο τρίγωνο Α′Β′Γ′ δεν είναι ομοιόθετο του ΑΒΓ, διότι:

$\frac{AB}{A'B'}=\frac{2}{5}\neq\frac{3}{9}=\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}$. Παρατηρούμε ότι: $\frac{A''B''}{AB}=\frac{B''\Gamma''}{B\Gamma}=4$ και υπολογίζοντας με το Πυθαγόρειο Θεώρημα τις υποτείνουσες προκύπτει επίσης ότι: $\frac{A''\Gamma''}{A\Gamma}=4$.

Άρα, οι πλευρές των τριγώνων είναι ανάλογες $\frac{A''B''}{AB}=\frac{B''\Gamma''}{B\Gamma}=\frac{A''\Gamma''}{A\Gamma}=4=\lambda$, οπότε το τρίγωνο Α′′Β′′Γ′′ είναι ομοιόθετο του ΑΒΓ με λόγο ομοιοθεσίας $\lambda=4$. Το κέντρο ομοιοθεσίας είναι το σημείο τομής των ευθειών ΑΑ′′, ΒΒ′′, ΓΓ′′ και επειδή $\lambda > 1$, το τρίγωνο Α′′Β′′Γ′′ είναι μεγέθυνση του ΑΒΓ.

Ερωτήσεις για Αυτοαξιολόγηση

Να συμπληρώσετε τα κενά κελιά χαρακτηρίζοντας τις προτάσεις που ακολουθούν με Σ (Σωστό), αν η πρόταση είναι σωστή, ή με Λ (Λάθος), αν η πρόταση είναι λανθασμένη. Να αιτιολογήσετε τις επιλογές.

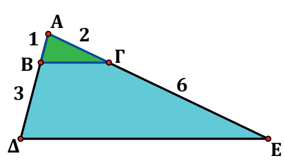
α)	Η ομοιοθεσία είναι ένας μετασχηματισμός.	
β)	Η ομοιοθεσία είναι μια ισομετρία (δηλαδή διατηρεί τα μήκη).	
γ)	Τα ομοιόθετα ευθύγραμμα τμήματα ως προς ομοιοθεσία με κέντρο Ο και λόγο $\lambda = 1$ είναι μεταξύ τους παράλληλα και απέχουν μεταξύ τους 1 μονάδα.	

δ)	Το ομοιόθετο ενός πολυγώνου σε ομοιοθεσία με κέντρο οποιοδήποτε σημείο και λόγο ομοιοθεσίας 1 είναι το ίδιο πολύγωνο.	
ε)	Αν το λ είναι μεγαλύτερο της μονάδας (λ > 1), το τμήμα ΑΒ μετασχηματίζεται σε τμήμα μεγαλύτερο του αρχικού (μεγέθυνση).	
στ)	Το ομοιόθετο μιας ευθείας xx΄ είναι ευθεία yy΄ παράλληλη προς αυτήν και κατασκευάζεται βρίσκοντας τα ομοιόθετα δύο τυχαίων σημείων της.	
ζ)	Στα ομοιόθετα σχήματα ο λόγος των περιμέτρων ισούται με τον λόγο της ομοιοθεσίας, ενώ ο λόγος των εμβαδών ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας.	
η)	Ο κύκλος (Κ΄, ρ΄) είναι ομοιόθετος του κύκλου (Κ, ρ) με κέντρο ομοιοθεσίας Ο και λόγο λ = 2. Το μήκος του κύκλου (Κ΄, ρ΄) είναι διπλάσιο του μήκους του κύκλου(Κ, ρ).	
θ)	Αν σε ομοιοθεσία ενός πολυγώνου η περίμετρος τριπλασιάζεται, τότε τριπλασιάζεται και το εμβαδόν του.	
ι)	Το ομοιόθετο ενός ισόπλευρου τριγώνου σε οποιαδήποτε ομοιοθεσία είναι πάντα ισόπλευρο τρίγωνο.	

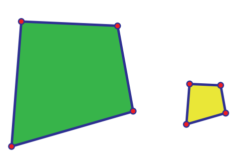
Ασκήσεις και Προβλήματα

1 **α)** Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ομοιόθετο του τριγώνου ΑΒΓ με κέντρο ομοιοθεσίας το Α. Να βρείτε τον λόγο ομοιοθεσίας.

β) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ομοιόθετο του τριγώνου ΑΔΕ με κέντρο ομοιοθεσίας το Α. Να βρείτε τον λόγο ομοιοθεσίας.



2 Τα δύο τετράπλευρα του διπλανού σχήματος είναι ομοιόθετα σε ομοιοθεσία με κέντρο Ο και λόγο λ. Με τη χρήση γεωμετρικών οργάνων να προσδιορίσετε το κέντρο ομοιοθεσίας Ο και τον λόγο λ.



3 Να βρείτε το ομοιόθετο του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, ως προς κέντρο ομοιοθεσίας το σημείο Ε της διαγωνίου ΑΓ, για το οποίο ισχύει ΑΓ = 3ΑΕ και λόγο:

α) λ = 0,5

β) $\lambda = \frac{3}{2}$

4 Το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχει τις κορυφές του τα σημεία Α (1, 2), Β (4, 2) και Γ (1, 5). Το κέντρο ομοιοθεσίας είναι το σημείο Ο (0, 3). Να βρείτε το ομοιόθετο του ΑΒΓ ως προς κέντρο το Ο και λόγο λ = 3. Τι τρίγωνο είναι το νέο τρίγωνο; Να αιτιολογήσετε.

5 Να σχεδιάσετε το ομοιόθετο του κύκλου (Κ, 3cm) με λόγο λ=1,5 και κέντρο ομοιοθεσίας Ο.

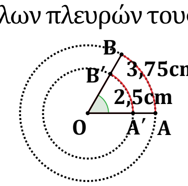
α) Στο εξωτερικό του κύκλου.

β) Πάνω στον κύκλο.

γ) Στο εσωτερικό του κύκλου.

6 Να δικαιολογήσετε ότι οι παράλληλες πλευρές ενός τραπεζίου είναι ομοιόθετες ως προς κέντρο ομοιοθεσίας το σημείο τομής των μη παραλλήλων πλευρών τους.

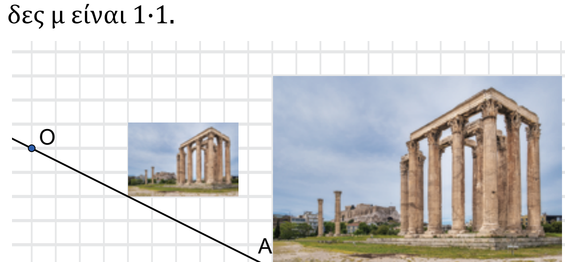
7 Τα μήκη των τόξων ΑΒ και Α΄Β΄ δύο ομόκεντρων κύκλων είναι αντίστοιχα ίσα με 3,75 cm και 2,5 cm. Να βρείτε:



α) Τον λόγο των ακτίνων των δύο κύκλων.

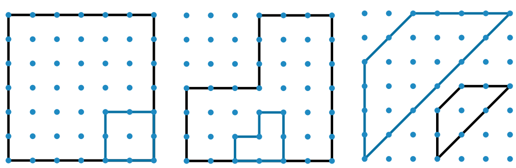
β) Τον λόγο των εμβαδών των δύο κύκλων.

8 Ο Αλέξανδρος φωτογράφισε τον ναό του Ολυμπίου Διός και στη συνέχεια έκανε σμίκρυνση της εικόνας. Τα τετραγωνάκια στην παρακάτω εικόνα σε μονάδες μ είναι 1·1.



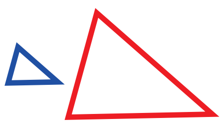
α) Να υπολογίσετε σε μονάδες μ τις διαστάσεις των δύο εικόνων.
β) Να δικαιολογήσετε ότι το O είναι το κέντρο της ομοιοθεσίας.
γ) Να επαληθεύσετε τον κανόνα για τον λόγο των περιμέτρων.

9 Το μπλε σχήμα είναι ομοιόθετο του μαύρου σχήματος.



Το σημειωμένο σημείο είναι το κέντρο της ομοιοθεσίας. Να εξετάσετε αν η ομοιοθεσία είναι μεγέθυνση ή σμίκρυνση. Στη συνέχεια, να βρείτε τον λόγο ομοιοθεσίας.

10 Ο Μιχάλης ισχυρίζεται ότι το μπλε τρίγωνο με δύο μετασχηματισμούς μπορεί να μετασχηματιστεί στο κόκκινο τρίγωνο.



α) Να χρησημοποιήσετε γεωμετρικά όργανα για να περιγράψετε τους μετασχηματισμούς.
β) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των γωνιών των δύο τριγώνων.
γ) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των πλευρών των δύο τριγώνων.

11 Δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με γωνία $\hat{A} = 90°$, ΑΒ = 9 και ΑΓ = 12. Στην πλευρά ΑΒ παίρνουμε σημείο Δ ώστε ΑΔ = 6. Από το Δ φέρνουμε ευθεία παράλληλη προς την πλευρά ΑΓ, η οποία τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ε.
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ομοιόθετο του ΒΔΕ. Να βρείτε το κέντρο και τον λόγο ομοιοθεσίας.
β) Να δείξετε ότι: ΒΕ = 5 και ΔΕ = 4.
γ) Να βρείτε πόσες φορές το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΕ.

Να ελέγξετε με τη χρήση της εφαρμογής την ομοιοθεσία δύο εικόνων.

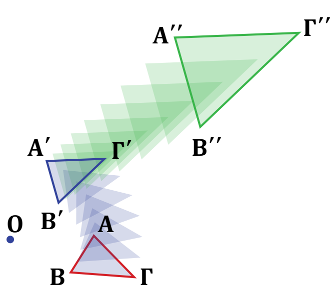
Ομοιότητα

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθήτριες και οι μαθητές να μπορούν:

- Να αναγνωρίζουν ως όμοια τα σχήματα τα οποία το ένα είναι μεγέθυνση ή σμίκρυνση του άλλου.
- Να διερευνούν τη σχέση των περιμέτρων και των εμβαδών όμοιων σχημάτων.
- Να διερευνούν και να εντοπίζουν τις ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά των ομοιόθετων σχημάτων.

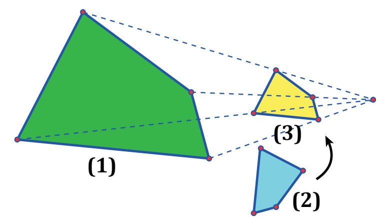
Διερεύνηση: Σχήματα που μετασχηματίζονται

Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε το κέντρο Ο και τρία τρίγωνα: το αρχικό ΑΒΓ, και τα τρίγωνα Α΄Β΄Γ΄ και Α΄΄ Β΄΄Γ΄΄ που προέκυψαν από μετασχηματισμούς.
α) Να αναγνωρίσετε τους δύο μετασχηματισμούς.
β) Να καταγράψετε τι έχει διατηρηθεί σταθερό σε καθέναν από τους δύο μετασχηματισμούς.
γ) Να συζητήσετε στην τάξη πώς συνδέονται τα στοιχεία του πρώτου και του τελευταίου τριγώνου.



Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες μάθησης

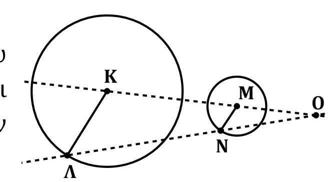
Όμοια σχήματα



Τα ομοιόθετα σχήματα είδαμε ότι μοιάζουν ως προς τη μορφή και με βάση την τιμή του λόγου ομοιοθεσίας έχουμε σμίκρυνση ή μεγέθυνση, εκτός της περίπτωσης $\lambda = 1$ στην οποία τα δύο σχήματα είναι ίσα. Τα ομοιόθετα σχήματα είδαμε επίσης ότι έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία και τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες.
Τα σχήματα που έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία και τις πλευρές τους ανάλογες μπορούν με κατάλληλο ή κατάλληλους μετασχηματισμούς να γίνουν ομοιόθετα. Τα σχήματα αυτά ονομάζονται **όμοια.**
Στο σχήμα, το τετράπλευρο (2) με στροφή και μεταφορά μεταφέρεται στη θέση (3) και γίνεται ομοιόθετο του σχήματος (1). Συνεπώς, τα τετράπλευρα (1) και (2) είναι όμοια.
Γενικά:

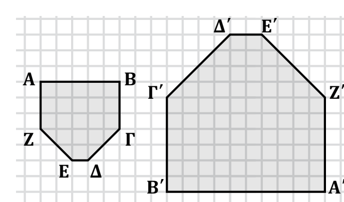
- Δύο σχήματα τα οποία είναι ή μπορούν να γίνουν ομοιόθετα ονομάζονται όμοια.
- Τα όμοια σχήματα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία και τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες.
- Ο λόγος ομοιοθεσίας λέγεται λόγος ομοιότητας.

Παράδειγμα 1:



Δύο κύκλοι είναι όμοιοι επειδή πάντοτε μπορούν να γίνουν ομοιόθετοι ως εξής: Παίρνουμε τυχαία το σημείο Λ στον κύκλο με κέντρο το Κ και από το κέντρο Μ του δεύτερου κύκλου φέρνουμε ΜΝ//ΚΛ και προσδιορίζουμε το Ν. Η τομή των ΚΜ και ΛΝ προσδιορίζει το κέντρο Ο της ομοιοθεσίας. Ο λόγος ομοιοθεσίας είναι ο λόγος των ακτίνων τους. Άρα, οι δύο κύκλοι είναι όμοιοι.

Παράδειγμα 2:



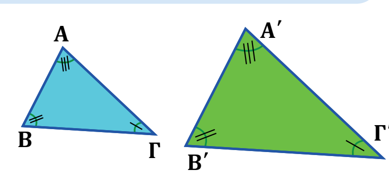
Τα δύο εξάγωνα ΑΒΓΔΕΖ και Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄Ζ΄ είναι όμοια επειδή έχουν τις πλευρές τους ανάλογες (γιατί;) και τις γωνίες τους ίσες (γιατί;).
Ο λόγος ομοιότητας λ είναι ίσος με τον λόγο δύο πλευρών τους: $\lambda=\frac{AB}{A'B'}=\frac{1}{2}$.
Ο λόγος των εμβαδών τους είναι $\frac{(AB\Gamma\Delta EZ)}{(A'B'\Gamma'\Delta'E'Z')}=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}=\lambda^2$ και ο λόγος των περιμέτρων τους $\frac{\Pi}{\Pi'}=\frac{1}{2}=\lambda$.
Γενικά

Σε δύο όμοια πολύγωνα:
- Ο λόγος των περιμέτρων τους ισούται με τον λόγο ομοιότητας.
- Ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας.

Όμοια τρίγωνα

Σύμφωνα με όσα αναφέραμε παραπάνω,

Δύο τρίγωνα είναι όμοια αν έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία και τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες.



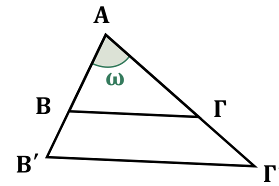
Τα όμοια τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν $\hat{A}=\hat{A}'$, $\hat{B}=\hat{B}'$, $\hat{\Gamma}=\hat{\Gamma}'$ και $\frac{AB}{A'B'}=\frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}=\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}$.
Οι ομόλογες πλευρές βρίσκονται απέναντι από ίσες γωνίες.
Για να συμβολίσουμε ότι τα τρίγωνα αυτά είναι όμοια γράφουμε: $AB\Gamma \approx A'B'\Gamma'$.
Στον συμβολισμό γράφουμε με την ίδια σειρά τα γράμματα που αντιστοιχούν στις ίσες γωνίες, γιατί μας διευκολύνει να βρίσκουμε εύκολα τις ομόλογες πλευρές.

Για να διαπιστώσουμε αν δύο τρίγωνα είναι όμοια δεν χρειάζεται να ελέγξουμε και τα 6 κύρια στοιχεία τους (3 πλευρές και 3 γωνίες) όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Κριτήρια ομοιότητας τριγώνων

1ο Κριτήριο

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, τότε μπορούμε να τοποθετήσουμε το ένα πάνω στο άλλο, έτσι ώστε οι γωνίες να ταυτιστούν και οι ομόλογες πλευρές τους να συμπέσουν. Τα Α, Β και Β΄ βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Το ίδιο συμβαίνει και για τα Α, Γ, Γ΄ και επιπλέον $\frac{AB}{AB'} = \frac{A\Gamma}{A\Gamma'}$. Άρα, το Β΄Γ΄ είναι το ομοιόθετο του ΒΓ με κέντρο ομοιοθεσίας το Α. Επομένως τα τρίγωνα είναι ομοιόθετα και συνεπώς όμοια.

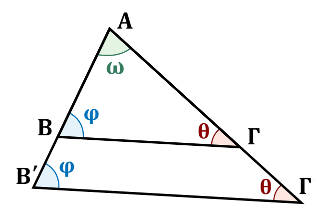


Επομένως:

> Όταν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές τους ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές τις πλευρές γωνίες ίσες, τότε είναι **όμοια.**

2ο Κριτήριο

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, τότε προφανώς έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες. Έτσι αν τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν όλες τις γωνίες τους ίσες και τοποθετήσουμε το ένα πάνω στο άλλο, έτσι ώστε οι γωνίες Α και Α΄ να συμπέσουν (όπως φαίνεται στο σχήμα), τότε ΒΓ//Β΄Γ΄. Αυτό σημαίνει ότι τα ΒΓ και Β΄Γ΄ είναι ομοιόθετα με κέντρο ομοιοθεσίας το Α και λόγο ομοιοθεσίας $\frac{AB}{AB'} = \frac{A\Gamma}{A\Gamma'} = \lambda$. Άρα, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒ΄Γ΄ είναι ομοιόθετα με κέντρο ομοιοθεσίας Α και λόγο λ. Άρα, είναι όμοια.



Συνεπώς:

> Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες, μία προς μία τότε είναι όμοια οπότε θα έχουν και τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες.

Ισχύει και το αντίστροφο:

> Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες, τότε θα είναι όμοια, οπότε θα έχουν και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες μία προς μία.

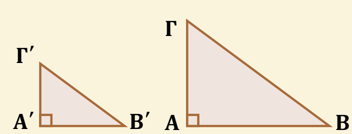
Να χρησιμοποιήσετε την ψηφιακή εφαρμογή για να ερευνήσετε τους λόγους των εμβαδών και των περιμέτρων όμοιων σχημάτων.

Εφαρμογή 1

Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι όμοια όταν:

α) Έχουν τις κάθετες πλευρές τους ανάλογες.

β) Μία οξεία γωνία του ενός είναι ίση με μία οξεία γωνία του άλλου.



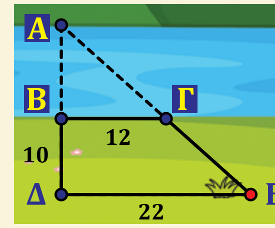
Απάντηση

α) Επειδή τα δύο τρίγωνα είναι ορθογώνια, θα έχουν τις ορθές γωνίες τους ίσες. Επιπλέον, από την υπόθεση, οι κάθετες πλευρές τους που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι ανάλογες (δίνεται). Άρα, σύμφωνα με το πρώτο κριτήριο τα τρίγωνα θα είναι όμοια.

β) Επειδή τα τρίγωνα είναι ορθογώνια και μία οξεία γωνία του ενός είναι ίση με μία οξεία γωνία του άλλου, τα τρίγωνα θα έχουν δύο γωνίες τους ίσες. Άρα, σύμφωνα με το δεύτερο κριτήριο τα τρίγωνα θα είναι όμοια.

Εφαρμογή 2

Να μετρήσετε το πλάτος του ποταμού σε κάποιο δεδομένο σημείο της κοίτης του.



Απάντηση

Επιλέγουμε κάποιο σταθερό σημείο Α στην κοίτη του ποταμού και σε μια νοητή ευθεία, κάθετη στην κοίτη, παίρνουμε δύο σημεία τα Β και Δ τα οποία να απέχουν μεταξύ τους 10 m. Φέρνουμε κάθετη στην ΑΔ στο σημείο Β και παίρνουμε το σημείο Γ έτσι ώστε ΒΓ = 12 m. Φέρνουμε κάθετη στην ΑΔ στο σημείο Δ, η οποία τέμνει την προέκταση της ΑΓ στο σημείο Ε, και μετρώντας τη βρίσκουμε ΔΕ = 22 m.

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια, επειδή είναι ορθογώνια και έχουν τη γωνία $\hat{A}$ κοινή, δηλαδή έχουν δύο γωνίες ίσες (δεύτερο κριτήριο ομοιότητας).

Αφού τα τρίγωνα είναι όμοια, τότε θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. Αν λοιπόν θέσουμε ΑΒ = x m, τότε έχουμε:

$$\frac{ΑΒ}{ΑΔ}=\frac{ΒΓ}{ΔΕ} \text{ ή } \frac{x}{x+10}=\frac{12}{22} \text{ ή } 22x=12(x+10) \text{ ή } 22x=12x+120 \text{ ή } 22x-12x=120 \text{ ή } 10x=120 \text{ ή } x=12\text{m}.$$

Να ανοίξετε την εφαρμογή για να διερευνήσετε ψηφιακά το πρόβλημα.

Να ανοίξετε τον σύνδεσμο «Πλοίο-Ακτή» για να μελετήσετε με ποιο τρόπο μπορεί να εκτιμηθεί η απόσταση πλοίου από την ακτή.

Ερωτήσεις για Αυτοαξιολόγηση

1 Να συμπληρώσετε τα κενά κελιά χαρακτηρίζοντας τις προτάσεις που ακολουθούν με Σ (Σωστό), αν η πρόταση είναι σωστή, ή με Λ (Λάθος), αν η πρόταση είναι λανθασμένη. Να αιτιολογήσετε τις επιλογές σας.

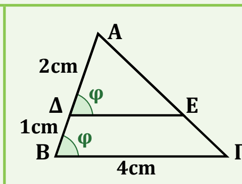
α)	Ένα πολύγωνο είναι σμίκρυνση ή μεγέθυνση ενός άλλου αν είναι, ή μπορεί να γίνει, ομοιόθετο του άλλου.	
β)	Δύο κύκλοι είναι όμοιοι και ο λόγος ομοιότητας είναι ο λόγος των ακτίνων τους.	
γ)	Δύο πολύγωνα είναι όμοια όταν έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία και τις αντίστοιχες πλευρές τους ανάλογες.	
δ)	Σε δύο όμοια πολύγωνα ο λόγος των περιμέτρων τους ισούται με τον λόγο ομοιότητας, ενώ ο λόγος των εμβαδών τους με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας.	
ε)	Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι όμοια όταν έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία.	
στ)	Δύο ισόπλευρα τρίγωνα είναι όμοια.	
ζ)	Δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια.	
η)	Δύο ισοσκελή τρίγωνα είναι όμοια.	
θ)	Δύο ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα είναι όμοια.	

2 Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις, δικαιολογώντας την επιλογή σας.

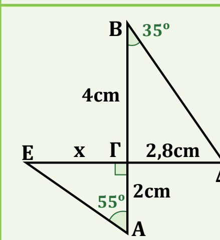
α) Αν διπλασιάσουμε κάθε πλευρά ενός τετραγώνου, τότε το εμβαδόν του γίνεται .... φορές μεγαλύτερο.

β) Αν ένας ρόμβος έχει πλευρά 7 cm και ένας άλλος όμοιός του ρόμβος έχει πλευρά 3,5 cm, τότε ο δεύτερος ρόμβος έχει εμβαδόν .... φορές μικρότερο από το εμβαδόν του πρώτου ρόμβου.

γ) Αν τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ έχουν ΑΔ = 2 cm, ΒΔ = 1 cm και ΒΓ = 4 cm, τότε ΔΕ = ...



δ) Στο διπλανό σχήμα οι ΕΔ και ΑΒ είναι κάθετες και οι γωνίες $A\hat{B}\Delta$ και $B\hat{A}E$ είναι αντίστοιχα 35° και 55°. Αν ΑΓ = 2 cm, ΓΒ = 4 cm και ΓΔ = 2,8 cm, τότε x = ...

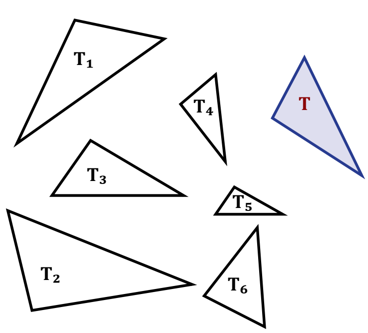


Ασκήσεις και Προβλήματα

1 Σε διαφανές χαρτί να αντιγράψετε το μπλε τρίγωνο και να το μετακινήσετε κατάλληλα ώστε να βρείτε:

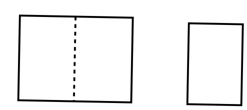
α) Ποια από τα υπόλοιπα τρίγωνα μπορούν να γίνουν ομοιόθετα με αυτό.

β) Να καταγράψετε τους μετασχηματισμούς που χρησιμοποιήσατε στις προσπάθειες που κάνατε.

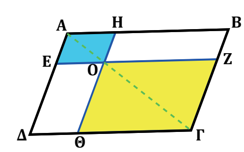


Εναλλακτικά, να ανοίξετε την ψηφιακή εφαρμογή και να πειραματιστείτε.

2 Ένα φύλλο Α4 έχει την εξής ιδιότητα: αν διπλωθεί στα μέσα των μεγάλων πλευρών προκύπτει ορθογώνιο όμοιο με το αρχικό. Να βρείτε τον λόγο ομοιότητας των δύο φύλλων.



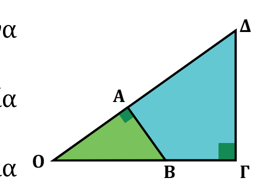
3 Από σημείο Ο της διαγωνίου του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ φέρνουμε παράλληλες προς τις πλευρές του. Να δείξετε ότι τα παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ, ΟΕΑΗ και ΟΖΓΘ είναι όμοια μεταξύ τους.



4 **α)** Να δείξετε τότι τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ είναι όμοια.

β) Να γράψετε την αναλογία των πλευρών.

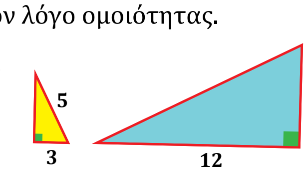
γ) Να χρησιμοποιήσετε όποια γεωμετρικά οργανα θέλετε για να εκτιμήσετε τον λόγο ομοιότητας.



5 Τα τρίγωνα της εικόνας είναι όμοια και η άγνωστη κάθετη πλευρά του κίτρινου τριγώνου είναι ομόλογη της πλευράς μήκους 12 του μπλε τριγώνου. Να βρείτε:

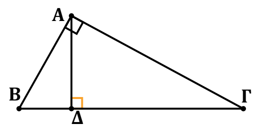
α) Τον λόγο ομοιότητας.

β) Το εμβαδόν του μπλε (μεγάλου) τριγώνου.



6 Ο Γιάννης θέλει να εκτιμήσει το ύψος του δέντρου και μετράει τη σκιά του δέντρου και τη δική του. Αν το ύψος του Γιάννη είναι 1,75 m, η σκιά του Γιάννη είναι 1,20 m και η σκιά του δέντρου 3,60 m, με ποιο τρόπο θα εκτιμήσετε το ύψος t του δέντρου;

7 **α)** Να δείξετε ότι το ύψος ΑΔ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($\hat{A}=90^{o}$), το οποίο αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, χωρίζει το τρίγωνο σε δύο όμοια μεταξύ τους ορθογώνια τρίγωνα και όμοια με το αρχικό.



β) Να συμπληρώσετε τον πίνακα γράφοντας στην ίδια στήλη τις ομόλογες πλευρές των τριών τριγώνων.

Τρίγωνα	Πλευρές		
ΑΒΓ			
ΔΒΑ			
ΔΑΓ			

γ) Αν ΑΔ = 8 cm και ΑΒ = 10 cm, να υπολογίσετε το τμήμα ΒΔ και να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΔ.

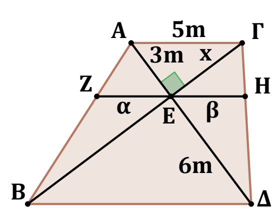
δ) Να υπολογίσετε τον λόγο ομοιότητας των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΒΔ και στη συνέχεια το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

8 Σε ένα τραπέζιο να βρείτε τα δύο όμοια τρίγωνα που ορίζουν:

α) Οι διαγώνιοι.

β) Οι μη παράλληλες πλευρές του τραπεζίου, όταν τις προεκτείνουμε.

9 Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ του σχήματος, οι διαγώνιοι ΑΔ και ΒΓ τέμνονται κάθετα στο σημείο Ε. Τα τμήματα ΑΓ, ΑΕ και ΕΔ είναι αντίστοιχα 5 m, 3 m και 6 m. Να υπολογίσετε:



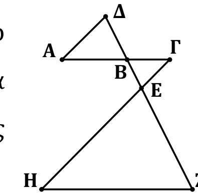
α) Τα τμήματα ΒΔ, ΒΕ και ΓΕ.

β) Αν η ΖΗ διέρχεται από το Ε και τέμνει τις μη παράλληλες πλευρές στα Ζ και Η, να υπολογίσετε τα ΕΖ και ΕΗ.

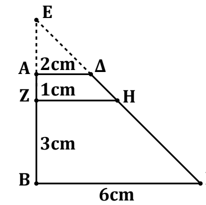
10 Στο παρακάτω σχήμα είναι ΑΓ//ΗΖ και ΑΔ//ΓΗ.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρία τρίγωνα που σχηματίζονται είναι όμοια.

β) Αν ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων ΑΒΔ και ΓΒΕ είναι $\frac{3}{2}$, ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων ΑΒΔ και ΗΖΕ είναι $\frac{3}{7}$ και το τμήμα ΒΔ = 6 cm, τότε να βρείτε το μέτρο του τμήματος ΔΖ.



11 Στο διπλανό τραπέζιο ΑΒΓΔ οι πλευρές ΑΔ και ΒΓ είναι παράλληλες. Οι γωνίες Α και Β είναι ορθές και η ΖΗ είναι παράλληλη στις δύο βάσεις. Αν ΑΔ = 2 cm, ΒΓ = 6 cm, ΑΖ = 1 cm και ΒΖ = 3 cm. Να υπολογίσετε:

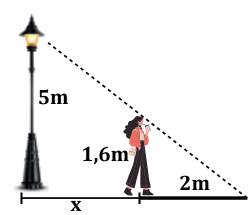


α) Την απόσταση (ΕΑ) του σημείου τομής των μη παράλληλων πλευρών από τη μικρή βάση του τραπεζίου.

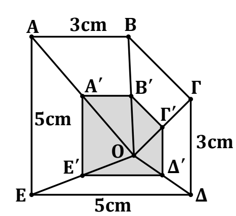
β) Το μήκος του τμήματος ΖΗ.

12 Δύο ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ ($\hat{A} = \hat{A}'= 90^{o}$) έχουν Α΄Β΄= λ·ΑΒ και Β΄Γ΄= λ·ΒΓ. Να βρείτε τον λόγο των πλευρών ΑΓ και Α΄Γ΄ (να χρησιμοποιήσετε το Πυθαγόρειο Θεώρημα). Να δικαιολογήσετε γιατί δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι όμοια αν έχουν ανάλογες δύο οποιεσδήποτε πλευρές τους.

13 Μια γυναίκα ύψους 1,6 m απομακρυνόμενη από τον φανοστάτη ύψους 5 m βλέπει τη σκιά της να μεγαλώνει. Όταν η σκιά της γίνει 2 m, πόσο απέχει από τον φανοστάτη;



14 Στο πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ, οι γωνίες Α, Δ και Ε είναι ορθές. Καθεμία από τις πλευρές ΑΕ και ΔΕ είναι 5 cm, ενώ οι πλευρές ΑΒ και ΓΔ είναι 3 cm. Το Ο είναι τυχαίο σημείο στο εσωτερικό του πενταγώνου. Τα Α΄ Β΄, Γ΄, Δ΄ και Ε΄ είναι αντίστοιχα τα μέσα των τμημάτων ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ και ΟΕ αντίστοιχα. Να βρεθεί το εμβαδόν του πενταγώνου Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄.

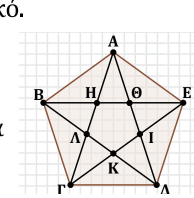


15 Το πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ είναι κανονικό.

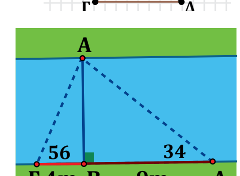
α) Να δείξετε ότι: $A\hat{\Gamma}\Delta \approx A\hat{I}E$

β) Να δείξετε ότι: $A\hat{H}B \approx \Gamma\hat{\Delta}E$

γ) Να βρείτε τρία τρίγωνα όμοια με το $A\hat{H}\Theta$.



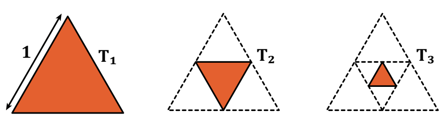
16 Ένας τοπογράφος μηχανικός για να εκτιμήσει το πλάτος ΑΒ του ποταμού έκανε με τα όργανά του τις μετρήσεις που φαίνονται στο σχήμα.



Να περιγράψετε τι ακριβώς έκανε και να εκτιμήσετε το πλάτος ΑΒ του ποταμού .

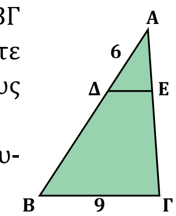
17 Να παρατηρήσετε τη διαδοχή των ισόπλευρων τριγώνων. Το T_2 προκύπτει αν ενώσουμε τα μέσα των πλευρών του T_1. Το T_3 προκύπτει αν ενώσουμε τα μέσα των πλευρών του T_2.

α) Να δείξετε ότι $T_1 \sim T_2 \sim T_3$.
β) Σε κάθε περίπτωση να βρείτε τον λόγο ομοιότητας.
γ) Να βρείτε τους λόγους των περιμέτρων τους.
δ) Να βρείτε τους λόγους των εμβαδών τους.



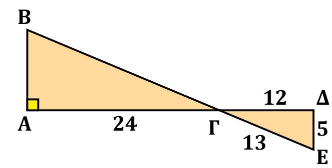
18 Στο τρίγωνο ΑΒΓ δίνονται ΔΕ//ΒΓ, ΔΕ = 3 cm, ΒΓ = 9 cm και ΑΔ = 6 cm. Η περίμετρος του ΑΒΓ είναι ίση με 40,5 cm.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια. Να γράψετε τη σχέση που συνδέει τους ίσους λόγους.
β) Να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΕΓ.



19 Με βάση τα στοιχεία του σχήματος:

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΓΔΕ είναι ορθογώνιο.
β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΑΒ και ΔΕ είναι παράλληλες.
γ) Να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. (Όλα τα μήκη σε cm).



Να επεξεργαστείτε τις μαθηματικές προκλήσεις: «Γεωμετρικά προβλήματα στα όμοια τρίγωνα».

7.4 Σχεδιασμός ομοίων σχημάτων

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθήτριες και οι μαθητές να μπορούν:

- Να αξιοποιούν τις ιδιότητες της ομοιοθεσίας ως προς κέντρο και λόγο ομοιοθεσίας.

Διερεύνηση: Παντογράφος

Να συνεργαστείτε ανά δύο για να απαντήσετε στις ερωτήσεις και να παρουσιάσετε τα αποτελέσματά σας στην τάξη.

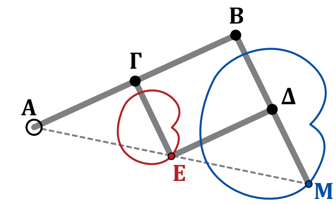
Στη διπλανή εικόνα φαίνεται ένα όργανο το οποίο ονομάζεται παντογράφος.

α) Τι προσπαθεί να κάνει ο τεχνίτης που το χρησιμοποιεί;
β) Ποιος νομίζετε ότι είναι ο τρόπος λειτουργίας του παντογράφου;
γ) Σε ποια βασική αρχή στηρίζεται;
δ) Να δημιουργήσετε ένα γεωμετρικό σχέδιο του οργάνου, χρησιμοποιώντας κανόνα και υποδεκάμετρο.

Εναλλακτικά, να ανοίξετε την ψηφιακή εφαρμογή για να ερευνήσετε τη μεγέθυνση και τη σμίκρυνση καθώς και τις ιδιότητες του παντογράφου.

Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες μάθησης

Σχεδιασμός ομοιόθετων σχημάτων με παντογράφο

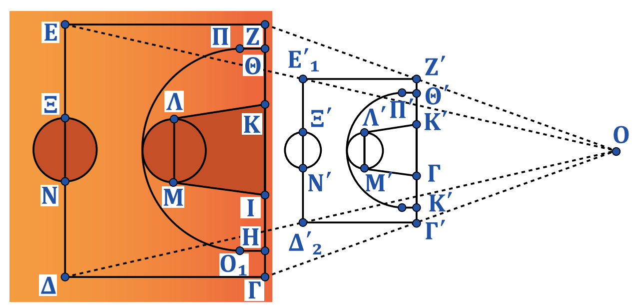


Ο **παντογράφος** (σχήμα) είναι ένα εργαλείο που αξιοποιεί τις ιδιότητες της ομοιοθεσίας στον σχεδιασμό σχημάτων με σμίκρυνση ή μεγέθυνση. Το A είναι σταθερό σημείο. Τα Γ, Δ και E μπορούν να μετακινούνται, έτσι ώστε τα B, Γ, E, Δ να σχηματίζουν παραλληλόγραμμο. Τα A, E, M είναι συνευθειακά. Ανάλογα με τη θέση στην οποία τοποθετούνται τα σημεία Γ και Δ αλλάζει ο λόγος ομοιότητας. Στην προκειμένη περίπτωση τα Γ και Δ είναι μέσα των AB και BM αντίστοιχα. Τα τρίγωνα ΑΓΕ και ABM είναι όμοια. Ο λόγος ομοιότητας (ομοιοθεσίας) είναι $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{BM}{B\Delta} = \frac{AM}{AE} = 2$.

Το σταθερό σημείο A είναι το κέντρο της ομοιοθεσίας και τα σημεία M και E είναι ομοιόθετα. Το σημείο E ακολουθεί το σχήμα και το M, στο οποίο έχει τοποθετηθεί μια γραφίδα, σχηματίζει το σχήμα σε μεγέθυνση. Αν η γραφίδα τοποθετηθεί στο E και το M ακολουθεί το σχήμα τότε το νέο σχήμα είναι σμίκρυνση του αρχικού.

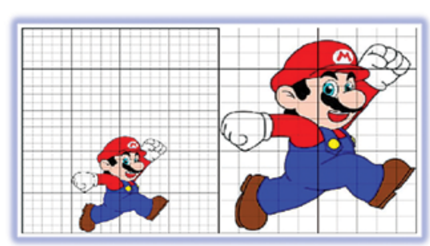
Σε αυτόν τον σύνδεσμο μπορείτε να δείτε τη λειτουργία του παντογράφου.
https://el.wikipedia.org/wiki/Παντογράφος

Σχεδιασμός ομοιόθετων σχημάτων με γεωμετρικά όργανα.



Αν έχουμε ένα σχήμα που αποτελείται από γεωμετρικά κατασκευάσιμα τμήματα, τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε τα ομοιόθετα τμήματα γεωμετρικά. Για παράδειγμα, το γήπεδο του μπάσκετ αποτελείται από ευθύγραμμα τμήματα, κύκλους και ημικύκλια. Έτσι, σημειώνοντας τα χαρακτηριστικά σημεία των ευθύγραμμων τμημάτων, των κύκλων και των ημικυκλίων, μπορούμε να βρούμε το ομοιόθετο του γηπέδου σε σμίκρυνση. Στη διπλανή εικόνα, το κέντρο ομοιοθεσίας είναι το σημείο O και ο λόγος ομοιοθεσίας είναι $\lambda = 0{,}5$.

Παράδειγμα σχεδιασμού όμοιων σχημάτων με τετραγωνικό πλέγμα

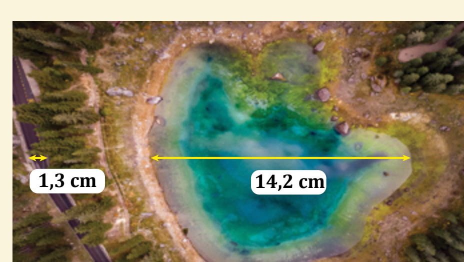


Μία διαφορετική στρατηγική μεγέθυνσης και σμίκρυνσης είναι αυτή των όμοιων σχημάτων. Στην περίπτωση αυτή το σχήμα μας δεν έχει γεωμετρικά χαρακτηριστικά. Για να κάνουμε μεγέθυνση ή σμίκρυνση δημιουργούμε ένα τετραγωνικό πλέγμα πάνω από το αντικείμενο και στη συνέχεια δουλεύουμε σε ένα άλλο πλέγμα το οποίο δημιουργούμε με κάποιο λόγο (στο σχήμα μας είναι $\lambda = 2$), δηλαδή τα τετράγωνα στο νέο πλέγμα έχουν διπλάσια πλευρά. Κάθε τμήμα του σχεδίου μας που βρίσκεται σε ένα τετράγωνο του πρώτου πλαισίου μεταφέρεται στο αντίστοιχο (μεγαλύτερο) τετράγωνο του νέου πλαισίου. Με αυτή τη διαδικασία, ολόκληρη η εικόνα μεταφέρεται στο νέο πλαίσιο. Επειδή $\lambda > 1$, κάναμε μεγέθυνση της εικόνας. Αν μεταφέρουμε την εικόνα σε πλαίσιο με πλευρά τετραγώνων μικρότερη της αρχικής πλευράς (δηλαδή $\lambda < 1$), τότε κάνουμε σμίκρυνση της εικόνας.

Ο λόγος $\frac{\text{νέα πλευρά τετραγώνου}}{\text{αρχική πλευρά τετραγώνου}}$ μας δίνει τον λόγο ομοιοθεσίας και καθορίζει αν θα έχουμε σμίκρυνση ή μεγέθυνση.

Εφαρμογή 1

Η αεροφωτογραφία είναι μια ομοιοθεσία. Στη διπλανή αεροφωτογραφία απεικονίζεται μία λίμνη στις Άλπεις της Ιταλίας. Το πλάτος του δρόμου κοντά στη λίμνη είναι 6 m. Να βρείτε το πλάτος της λίμνης.



Απάντηση

Αφού η αεροφωτογραφία είναι μια ομοιοθεσία ο λόγος των αποστάσεων, όταν μετριούνται με την ίδια μονάδα μέτρησης, είναι ο λόγος ομοιότητας. Έτσι, αφού ο δρόμος είναι 6 m = 600 cm, ο λόγος ομοιότητας είναι:

$\lambda = \frac{600\text{ cm}}{1,3\text{ cm}} = 461,54$.

Αν θέσουμε x cm το πλάτος της λίμνης, τότε θα έχουμε: $\frac{x}{14,2} = 461,54$ ή $x = 14,2 \cdot 461,54$ ή $x \approx 6554$ cm. Άρα, το πλάτος είναι περίπου 65,54 m.

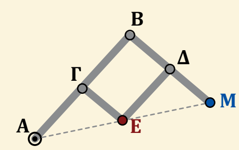
Σημείωση

Ο λόγος ομοιότητας στις αεροφωτογραφίες, συνήθως, αναφέρεται ως **κλίμακα**.

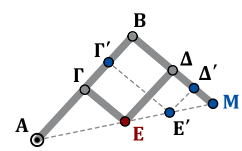
Εφαρμογή 2

Στους βραχίονες ΑΒ και ΒΜ του παντογράφου, οι συνδέσεις Γ και Δ βρίσκονται αντίστοιχα στα μέσα των ΑΒ και ΒΜ (σχήμα). Η γραφίδα βρίσκεται στο Μ, αντιγράφοντας το σχήμα που ακολουθεί ο οδηγός Ε. Να βρείτε τον λόγο ομοιοθεσίας.

Αν θέλουμε ο λόγος ομοιοθεσίας να είναι $\frac{3}{4}$ να βρεθεί πού πρέπει να τοποθετηθούν οι συνδέσεις Γ και Δ.



Απάντηση



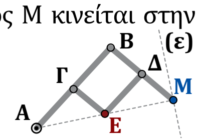
Από τα όμοια τρίγωνα ΑΓΕ και ΑΒΜ προκύπτει η αναλογία $\frac{AM}{AE} = \frac{AB}{A\Gamma} = 2$, δηλαδή ο λόγος ομοιοθεσίας είναι 2 (μεγέθυνση).

Αν θέλουμε $\lambda = \frac{3}{4}$ (σμίκρυνση), τότε αν οι νέες συνδέσεις θα τοποθετηθούν στα σημεία Γ′, Ε′, Δ′ (σχήμα) , θα ισχύει ότι: $\frac{A\Gamma'}{AB} = \frac{AE'}{AM} = \frac{B\Delta'}{BM} = \frac{3}{4}$. Συνεπώς, οι καινούργιες συνδέσεις πρέπει να γίνουν στα σημεία Γ′, Δ′ και Ε′ έτσι ώστε: $B\Delta' = \frac{3}{4}BM$, $AE' = \frac{3}{4}AM$, $A\Gamma' = \frac{3}{4}AB$.

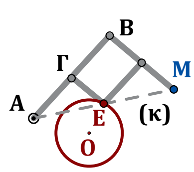
Σε αυτή την περίπτωση, ο οδηγός θα είναι στο Μ και η γραφίδα στο Ε′.

Ασκήσεις και Προβλήματα

1 Στον διπλανό παντογράφο ο οδηγός Μ κινείται στην ευθεία (ε). Τι σχήμα γράφει η γραφίδα Ε; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



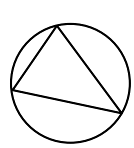
2 Στον διπλανό παντογράφο, ο οδηγός Ε κινείται στον κύκλο (κ). Τι σχήμα γράφει η γραφίδα Μ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



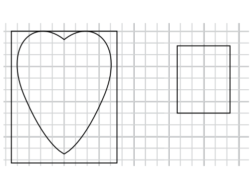
3 Να πάρετε ένα τυχαίο κέντρο ομοιοθεσίας Ο και να σχεδιάσετε το ομοιόθετο του σχήματος, με λόγο

α) λ = 2,5

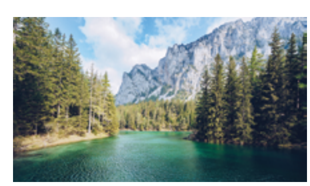
β) $\lambda = \frac{3}{4}$



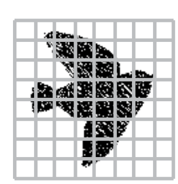
4 Να σχεδιάσετε ένα όμοιο σχήμα με την εικονιζόμενη καρδιά στο εσωτερικό του ορθογώνιου μικρού πλαισίου. Ποιος θα είναι ο λόγος σχεδίασης των δύο σχημάτων;



5 Η διπλανή αεροφωτογραφία είναι με κλίμακα 1:250. Στη φωτογραφία, το μικρότερο πλάτος του ποταμού είναι 6,5 cm. Ποιο είναι το πραγματικό πλάτος του ποταμού σε εκείνο το σημείο;



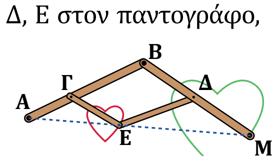
6 Να μεγεθύνετε την εικόνα του πουλιού με λόγο 2, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του τετράγωνου πλέγματος.



7 Να βρείτε σε ποια θέση πρέπει να τοποθετηθούν οι συνδέσεις Γ, Δ, Ε στον παντογράφο, ώστε η εικόνα της καρδιάς που γράφεται να έχει εμβαδόν:

α) 9πλάσιο της αρχικής και

β) ¼ της αρχικής.



7.5 Ανακεφαλαίωση και διεύρυνση της θεματικής ενότητας

Λόγος-Αναλογία

Λόγος του ευθύγραμμου τμήματος α προς το ευθύγραμμο τμήμα β είναι ο αριθμός λ, που όταν πολλαπλασιαστεί με το τμήμα β μας δίνει το τμήμα α, δηλαδή: $\boldsymbol{\alpha = \lambda \cdot \beta}$ ή $\boldsymbol{\frac{\alpha}{\beta} = \lambda}$

Αναλογία ονομάζουμε την ισότητα δύο ή περισσότερων λόγων.

Θεώρημα του Θαλή. Αν τρεις ή περισσότερες παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες (ε) και (ε΄), τα τμήματα που ορίζουν στη μία είναι ανάλογα με τα αντίστοιχα τμήματα που ορίζουν στην άλλη.

Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή:

Αν τρεις ή περισσότερες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες (ε) και (ε΄) και τα τμήματα που ορίζουν στη μία είναι ανάλογα με τα αντίστοιχα τμήματα που ορίζουν στην άλλη, τότε οι ευθείες είναι παράλληλες.

Ομοιοθεσία

Η **ομοιοθεσία** είναι ένας μετασχηματισμός, στον οποίο απαιτείται ένα σημείο ως κέντρο ομοιοθεσίας και ένας αριθμός ως λόγος ομοιοθεσίας. Συγκεκριμένα:

Θα λέμε ότι το σημείο Α΄ είναι ομοιόθετο του Α με λόγο λ, ως προς κέντρο Ο, όταν το Α΄ ανήκει στην ημιευθεία ΟΑ και ισχύει ΟΑ΄ = λ·ΟΑ. Η διαδικασία με την οποία αντιστοιχίζουμε στο σημείο Α στο Α΄ λέγεται ομοιοθεσία.

Όταν $\lambda < 1$ τότε έχουμε **σμίκρυνση,** ενώ όταν $\lambda > 1$, τότε έχουμε **μεγέθυνση.**

- Τα ομοιόθετα ευθύγραμμα τμήματα είναι παράλληλα και ο λόγος τους είναι ίσος με τον λόγο ομοιοθεσίας .
- Οι ομοιόθετες γωνίες είναι ίσες και έχουν παράλληλες πλευρές.
- Η ομοιοθεσία διατηρεί την παραλληλία και τις γωνίες, αλλά όχι τα μήκη.
- Στα ομοιόθετα σχήματα ο λόγος των περιμέτρων ισούται με τον λόγο της ομοιοθεσίας, ενώ ο λόγος των εμβαδών ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιοθεσίας.

Ομοιότητα

Δύο πολύγωνα λέγονται **όμοια** αν είναι ή μπορούν να γίνουν ομοιόθετα.

- Δύο όμοια πολύγωνα έχουν τις **πλευρές** τους **ανάλογες** και τις αντίστοιχες **γωνίες** τους **ίσες** μία προς μία. Ο λόγος των πλευρών λέγεται λόγος ομοιότητας.
- Σε δύο όμοια πολύγωνα ο λόγος των περιμέτρων τους ισούται με τον λόγο ομοιότητας, ενώ ο λόγος των εμβαδών τους με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας.

Όμοια τρίγωνα

- Δύο όμοια τρίγωνα έχουν όλες τις γωνίες τους ίσες και τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες.
- Δύο τρίγωνα είναι όμοια αν έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες.
- Δύο τρίγωνα είναι όμοια αν έχουν δύο γωνίες ίσες.

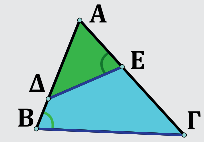
Ο παντογράφος είναι ένα εργαλείο που αξιοποιεί τις ιδιότητες της ομοιοθεσίας στον σχεδιασμό όμοιων σχημάτων (σμίκρυνση ή μεγέθυνση).

Επαναληπτικά έργα και προεκτάσεις

1 Στην ευθεία x΄x να πάρετε αυθαίρετα ένα τμήμα ΑΒ. Να σημειώσετε τα σημεία Γ, Δ και Ε, έτσι ώστε $ΑΓ=\frac{1}{2}ΑΒ$, $ΑΔ=\frac{5}{6}ΑΒ$ και $ΓΕ=\frac{3}{2}ΓΒ$. Να βρείτε τους λόγους $\frac{ΓΒ}{ΑΔ}$ και $\frac{ΑΕ}{ΑΔ}$.

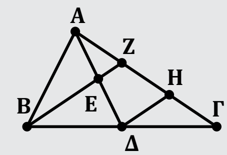
2 Να σχεδιάσετε το ύψος ΑΔ ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ από την κορυφή της ορθής γωνίας. Να δικαιολογήσετε ότι τα επόμενα ζεύγη τριγώνων είναι όμοια: **α)** ΑΒΓ και ΔΒΑ. **β)** ΑΒΓ και ΔΑΓ και **γ)** ΔΒΑ και ΔΑΓ.

3 Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια. Να γράψετε την αναλογία των πλευρών. Αν ΑΔ = 6 cm, ΑΕ = 4 cm, ΕΔ = 6,5 cm, ΔΒ = 2 cm. Να υπολογίσετε τις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ.

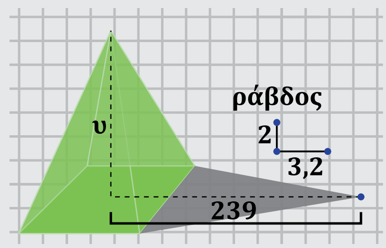


4 Στο τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΔ είναι διάμεσος. Το Ε είναι μέσον της ΑΔ, η ΒΕ τέμνει την ΑΓ στο Ζ. Η παράλληλη από το Δ στη ΒΖ τέμνει την ΑΓ στο Η. Να αποδείξετε ότι

α) ΑΖ = ΖΗ
β) ΓΗ = ΖΗ

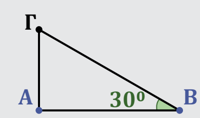


5 Όταν βρέθηκε στην Αίγυπτο, ο Θαλής υπολόγισε το ύψος της Μεγάλης Πυραμίδας. Σύμφωνα με τον μύθο, ο Θαλής τοποθέτησε μία ράβδο δίπλα στη σκιά της πυραμίδας και χρησιμοποίησε όμοια τρίγωνα για να υπολογίσει το ύψος της. Έκανε κάποιες εκτιμήσεις για τη σκιά γιατί δεν μπορούσε να μετρήσει την απόσταση μέσα στην πυραμίδα. Παρατηρώντας το σχήμα να εξηγήσετε τη μέθοδό του. Να υπολογίσετε το ύψος της πυραμίδας από τις πληροφορίες που δίνει το σχήμα.



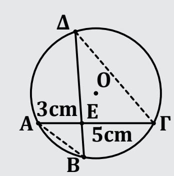
6 Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με Α = 90° και Β = 30° κατασκευάζουμε τη διάμεσο ΑΔ. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισόπλευρο.
β) Η διάμεσος ΑΔ είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

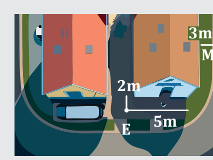


7 Στον κύκλο με κέντρο Ο οι χορδές ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο Ε και είναι ΑΕ = 3 cm και ΕΓ = 5 cm.

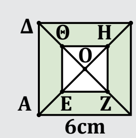
α) Να δικαιολογήσετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΓΕ είναι όμοια.
β) Να βρείτε το γινόμενο των μέτρων των τμημάτων ΒΕ και ΕΔ.



8 Ο Μιχάλης βρίσκεται στη θέση Μ και βαδίζει (όπως δείχνει το βέλος) παράλληλα προς την πλευρά του κτιρίου, σε απόσταση 3 m. Να προσδιορίσετε τη θέση του Μιχάλη τη στιγμή που θα μπορεί να δει για πρώτη φορά τη σημαία που βρίσκεται στο σημείο Ε.

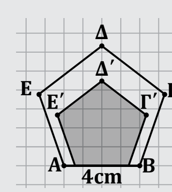


9 Οι διαγώνιοι του τετραγώνου τέμνονται στο Ο. Τα Ε, Ζ, Η και Θ είναι τα μέσα των ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ και ΟΔ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της χρωματισμένης περιοχής χωρίς να υπολογίσετε την πλευρά του μικρού τετραγώνου.



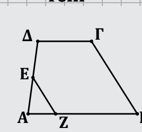
10 Το εμβαδόν του χρωματισμένου πολυγώνου είναι 13,49 cm^2 ενώ το εμβαδόν του πολυγώνου ΑΒΓΔΕ είναι 27,53 cm^2. Τα δύο σχήματα είναι ομοιόθετα. Να βρείτε:

α) Το κέντρο ομοιοθεσίας και τον λόγο ομοιοθεσίας.
β) Την πλευρά του χρωματισμένου πολυγώνου.



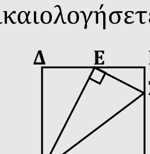
11 Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) οι παράλληλες πλευρές ΑΒ και ΓΔ είναι αντίστοιχα ίσες με 6 cm και 3 cm. Αν Ε είναι το μέσον της ΑΔ και η ΕΖ είναι παράλληλη στη ΒΓ:

α) Να βρείτε το μήκος του ΑΖ.
β) Να δικαιολογήσετε ότι $\frac{\text{Εμβ(ΑΕΖ)}}{\text{Εμβ(ΑΒΓΔ)}} = \frac{1}{12}$.



12 Στο τετράγωνο ΑΒΓΔ, το Ε είναι το μέσον της πλευράς ΓΔ. Η ΕΖ είναι κάθετος στην ΑΕ. Να δικαιολογήσετε ότι:

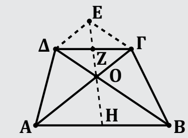
α) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΕΓΖ είναι όμοια.
β) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΕΖ είναι όμοια.
γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΓΕΖ αν η πλευρά του τριγώνου είναι 4 cm.



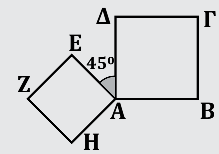
13 Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ, οι διαγώνιοί του τέμνονται στο σημείο Ο. Οι ΕΔ και ΕΓ είναι παράλληλες προς τις διαγώνιους ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί η ΕΟ διέρχεται από το μέσον της πλευράς ΓΔ.

β) Να δικαιολογήσετε γιατί η ΖΟ διέρχεται από το μέσον της πλευράς ΑΒ.



14 Να περιγράψετε τους μετασχηματισμούς που εφαρμόστηκαν στο τετράγωνο ΑΒΓΔ για να μετασχηματιστεί στο τετράγωνο ΑΕΖΗ. Ποιους μετασχηματισμούς θα εφαρμόσετε στο τετράγωνο ΑΕΖΗ ώστε να μετασχηματιστεί στο τετράγωνο ΑΒΓΔ;

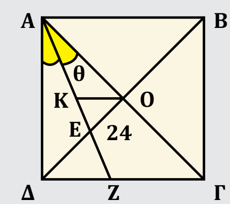


15 Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ κέντρου Ο. Η διχοτόμος της γωνίας ΔÂΓ τέμνει τη διαγώνιο ΒΔ στο Ε και την πλευρά ΔΓ στο Ζ. Η παράλληλη από το Ο προς την ΑΒ τέμνει την ΑΕ στο Κ. Επίσης δίνεται ΟΕ = 24 cm.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία ΕÂΒ.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΟΚΕ είναι ισοσκελές.

γ) Να βρείτε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΖΓ.



Να ανοίξετε την ψηφιακή εφαρμογή για να διερευνήσετε το ύψος ενός ξενοδοχείου.

Εργασία 1

Να ανοίξετε την ψηφιακή εφαρμογή και να μελετήσετε τους μετασχηματισμούς που περιέχει.

α) Να περιγράψετε τα μέρη που αποτελούνται και τον τρόπο λειτουργίας.

β) Να ανακαλύψετε και να δικαιολογήσετε τους μετασχηματισμούς που περιέχει.

γ) Να βρείτε την περιοχή που μετασχηματίζεται.

Να ανοίξετε την εφαρμογή «Γλωσσάρι - Μετασχηματισμοί» για να συνοψίσετε έννοιες και όρους, που μάθατε στο κεφάλαιο αυτό.

Να κάνετε τη συνθετική εργασία «Ανακαλύπτοντας τη χρυσή αναλογία».

Κεφάλαιο

8

Τριγωνομετρία

Εφαπτομένη οξείας γωνίας

Ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας

Επίλυση προβλημάτων

Στο Κεφάλαιο αυτό θα μάθουμε:

- Να αναγνωρίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς οξείας γωνίας ως τον σταθερό λόγο ζεύγους πλευρών ορθογώνιου τριγώνου.
- Να χρησιμοποιούμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς για την εύρεση του μέτρου γωνίας αξιοποιώντας τους τριγωνομετρικούς πίνακες.

Να μελετήσετε το ιστορικό σημείωμα: «Τι είναι Τριγωνομετρία».

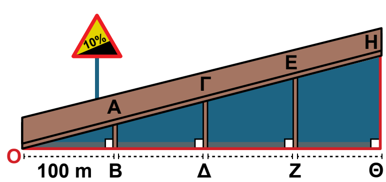
8.1 Εφαπτομένη οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθήτριες και οι μαθητές να μπορούν:

- Να αναγνωρίζουν την εφαπτομένη οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου ως τον λόγο της απέναντι κάθετης πλευράς προς την προσκείμενη κάθετη πλευρά του.

Διερεύνηση 1

Πολλές φορές βλέπουμε στον δρόμο πινακίδες, όπως αυτή του σχήματος, οι οποίες δηλώνουν με ένα ποσοστό πόσο ανεβαίνουμε ή κατεβαίνουμε σε κάθε 100 m οριζόντιας απόστασης. Για παράδειγμα, το ποσοστό 10% στην πινακίδα του σχήματος μας πληροφορεί ότι για κάθε 100 m οριζόντιας απόστασης ανεβαίνουμε 10 m.



Ένας οδοιπόρος ξεκινά να περπατά στη διαδρομή ΟΗ.

α) Σε ποιο ύψος από το οριζόντιο επίπεδο θα βρίσκεται όταν θα φτάσει στο σημείο Α;

β) Σε ποιο ύψος από το οριζόντιο επίπεδο θα βρίσκεται όταν θα φτάσει στα σημεία Γ, Ε, Η;

γ) Να βρείτε και να συγκρίνετε τους λόγους: $\frac{AB}{OB}, \frac{\Gamma\Delta}{O\Delta}, \frac{EZ}{OZ}, \frac{H\Theta}{O\Theta}$.

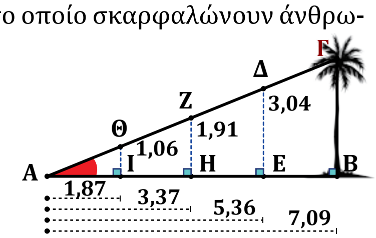
δ) Η τιμή των λόγων εξαρτάται από το τρίγωνο στο οποίο ανήκουν οι πλευρές;

ε) Να διατυπώσετε μία εικασία για τη σχέση της γωνίας $\hat{\omega}$ και των λόγων.

Διερεύνηση 2

Ο κατακόρυφος κοκοφοίνικας του σχήματος είναι ένα πολύ ψηλό δέντρο, στο οποίο σκαρφαλώνουν άνθρωποι για να κόψουν τους καρπούς του, τις καρύδες. Πριν ξεκινήσουν να ανέβουν αναρωτιούνται για το ύψος του.

Ένας έμπειρος εργάτης μέτρησε τα ύψη ΘΙ, ΖΗ και ΔΕ μέχρι το σημείο Δ που μπορούσε να φτάσει καθώς και τα τμήματα ΑΙ, ΑΗ, ΑΕ και ΑΒ. Οι μετρήσεις παρουσιάζονται στο σχήμα.



α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

ΘΙ = 1,06	ΑΙ = 1,87	$\frac{\Theta I}{AI}$ =
ΖΗ =	ΑΗ =	$\frac{ZH}{AH}$ =
ΔΕ =	ΑΕ =	$\frac{\Delta E}{AE}$ =

β) Τι παρατηρείτε για τα τρίγωνα ΑΘΙ, ΑΖΗ, ΑΔΕ, ΑΓΒ;

γ) Πώς από τις παραπάνω παρατηρήσεις θα μπορούσατε να υπολογίσετε το ύψος ΒΓ του κοκοφοίνικα;

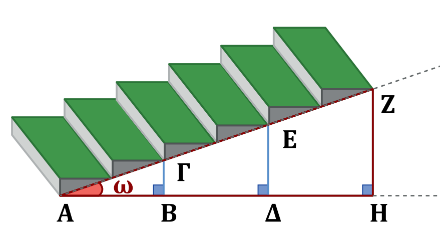
Για να διερευνήσετε την έννοια της εφαπτομένης, να ανοίξετε την εφαρμογή «Κοκοφοίνικας» που θα βρείτε εδώ

Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες μάθησης

Παρατηρώντας τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΔΕ και ΑΖΗ του σχήματος, διαπιστώνουμε ότι είναι ορθογώνια και έχουν κοινή γωνία την $\hat{\omega}$.

Άρα και οι άλλες γωνίες τους θα είναι ίσες, δηλαδή $\hat{\Gamma} = \hat{E} = \hat{Z}$.

Επομένως είναι όμοια, οπότε οι λόγοι των ομόλογων πλευρών τους θα είναι ίσοι.



Άρα: $\frac{ΒΓ}{ΑΒ} = \frac{ΔΕ}{ΑΔ} = \frac{ΗΖ}{ΑΗ}$. Στα συγκεκριμένα λοιπόν ορθογώνια τρίγωνα, ο λόγος της απέναντι από την οξεία γωνία ω κάθετης πλευράς τους, προς την προσκείμενη κάθετη πλευρά τους, παραμένει σταθερός.

Τον λόγο $\frac{\text{ύψος}}{\text{οριζόντια απόσταση}}$ ονομάζουμε εφαπτομένη της γωνίας ω και γράφουμε συμβολικά ως **εφω.**

Κλίση στην περίπτωση της σκάλας λέμε την εφαπτομένη της γωνίας ω, η οποία μας πληροφορεί πόσο απότομη είναι η σκάλα. Όσο μεγαλύτερη είναι η εφω, τόσο μεγαλύτερη είναι η κλίση της και επομένως πιο απότομη είναι η σκάλα.

Για την **κλίση ενός δρόμου,** οι πινακίδες σήμανσης μας πληροφορούν για την τιμή της εφαπτομένης ή του λόγου του ύψους προς την οριζόντια απόσταση εκφρασμένη με ποσοστό επί τοις εκατό.

Κλίση μιας ευθείας λέμε την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει με τον οριζόντιο άξονα.

Στην περίπτωση των ευθειών της μορφής **y = αx, y = αx+β**, ο συντελεστής **α** είναι η εφαπτομένη που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα x΄x, δηλαδή **εφω = α**.

Θεωρούμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{Β} = 90^o$). Σύμφωνα με όσα είπαμε παραπάνω θα είναι εφ$\hat{Α} = \frac{ΒΓ}{ΑΒ}$ και εφ$\hat{Γ} = \frac{ΑΒ}{ΒΓ}$.

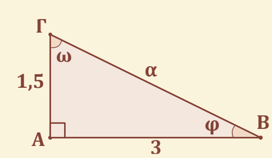
Γενικά, αν ω είναι οξεία γωνία ορθογωνίου τριγώνου, τότε:

$$εφω = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}$$

Σχόλιο: Την εφαπτομένη μιας γωνίας από 1° έως 89° τη βρίσκουμε με τη βοήθεια του πίνακα τριγωνομετρικών αριθμών που βρίσκεται στο τέλος του βιβλίου ή ψηφιακά.

Εφαρμογή 1

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος, να υπολογιστούν οι εφαπτόμενες των γωνιών $\hat{ω}$ και $\hat{φ}$.



Απάντηση

Ισχύει ότι: $εφω = \frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{3}{1,5} = 2$ και $εφφ = \frac{ΑΓ}{ΑΒ} = \frac{1,5}{3} = 0,5$.

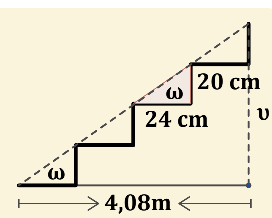
Σχόλιο: Να παρατηρήσετε ότι οι εφαπτόμενες των δύο οξειών γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου είναι αντίστροφοι αριθμοί. Να εξετάσετε αν ισχύει και σε άλλα ορθογώνια τρίγωνα. Τι συμπεραίνετε;

Εφαρμογή 2

Μια χτιστή σκάλα οδηγεί από το ισόγειο στον πρώτο όροφο μιας κατοικίας. Το κάθε σκαλοπάτι έχει πλάτος 24 cm και ύψος 20 cm.

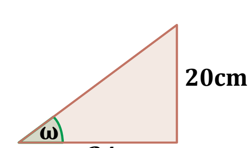
α) Να βρεθεί η κλίση της σκάλας.

β) Να βρεθεί το ύψος του ισόγειου σπιτιού από το πάτωμά του μέχρι το πάτωμα του πρώτου ορόφου, με τα δεδομένα του σχήματος.



Απάντηση

α) Αν ω η γωνία της κλίσης τότε, όπως φαίνεται και στο σχήμα, είναι $εφω = \frac{20}{24} \approx 0,83$.
Άρα, η κλίση είναι 0,83.

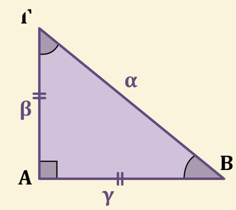


β) Αν υ το ζητούμενο ύψος, τότε από το αρχικό σχήμα της σκάλας έχουμε:
$εφω = \frac{υ}{4,08}$ ή $υ = 4,08 \cdot εφω$ ή $υ = (4,08) \cdot (0,83)$ ή $υ \approx 3,4$m.

Εφαρμογή 3

α) Να υπολογιστούν οι εφαπτόμενες των γωνιών $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ ενός ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^o$.

β) Να αποδείξετε ότι εφ$45^o = 1$.



Απάντηση

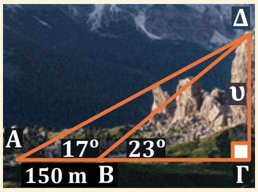
α) Παίρνουμε ένα τυχαίο ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^o$ και ΑΒ = ΑΓ.

Έχουμε: εφΒ $= \frac{ΑΓ}{ΑΒ} = 1$ και ομοίως εφΓ $= \frac{ΑΒ}{ΑΓ} = 1$.

β) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $\hat{A} = 90^o$ και ΑΒ = ΑΓ, έχουμε: $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^o$ και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, οπότε $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 45^o$. Άρα, από το (α) παίρνουμε: εφ$45^o = 1$.

Εφαρμογή 4

Ένας τοπογράφος θέλει να μετρήσει το ύψος ενός βουνού. Από το σημείο Β του σχήματος στο οποίο βρίσκεται, «βλέπει» το βουνό υπό γωνία 23^o. Απομακρύνεται 150 m από τη θέση Β στη θέση Α, περπατώντας πάνω στην ευθεία ΓΒ, από την οποία τώρα το βουνό «φαίνεται» υπό γωνία 17^o. Πόσο είναι το ύψος υ του βουνού;



Απάντηση

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΔ έχουμε: εφ$23^o = \frac{υ}{ΒΓ}$ ή ΒΓ $= \frac{υ}{εφ23^o}$. Από τον πίνακα των τριγωνομετρικών αριθμών βρίσκουμε ότι εφ$23^o \approx 0{,}424$ και επομένως: ΒΓ $\approx \frac{υ}{0{,}424}$.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε: εφ$17^o = \frac{υ}{ΑΓ}$ ή ΑΓ $= \frac{υ}{εφ17^o}$. Από τον πίνακα των τριγωνομετρικών αριθμών βρίσκουμε ότι εφ$17^o \approx 0{,}306$ και επομένως: ΑΓ $\approx \frac{υ}{0{,}306}$.

Επειδή ΑΓ = ΑΒ+ΒΓ ή ΑΓ = 150+ΒΓ, αντικαθιστώντας τις τιμές των ΑΓ και ΒΓ παίρνουμε:

$$\frac{υ}{0{,}306} \approx 150 + \frac{υ}{0{,}424} \text{ ή } υ \cdot \left(\frac{1}{0{,}306} - \frac{1}{0{,}424}\right) = 150 \text{ ή } υ \cdot (3{,}27 - 2{,}36) \approx 150 \text{ ή } υ \cdot (0{,}91) = 150 \text{ ή } υ = \frac{150}{0{,}91} \text{ ή } υ \approx 164{,}8\text{m}.$$

Συνθετική εργασία

Η ράμπα είναι ένα κεκλιμένο επίπεδο, στο οποίο μπορεί να ανέβει ένα αναπηρικό αμαξίδιο. Πολλές φορές άνθρωποι με αναπηρίες και ιδιαίτερα παιδιά, που κινούνται με αναπηρικό αμαξίδιο δεν έχουν πρόσβαση σε κτίρια και υπηρεσίες, διότι δεν υπάρχει κατάλληλη ράμπα για να την ανέβουν.

Να ανοίξετε την ψηφιακή εφαρμογή «Υπολογισμοί στη ράμπα», για να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται και να διατυπώσετε προτάσεις για τον υπολογισμό της θέσης των κατακόρυφων στηριγμάτων, καθώς και του μήκους τους για την κατασκευή της ράμπας.

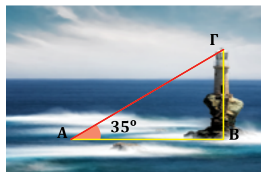
Ασκήσεις και Προβλήματα

1 Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^o$) είναι ΑΒ = 3 m και εφΒ = 2.

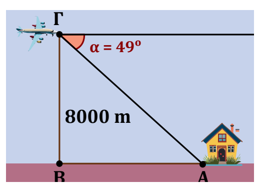
α) Να υπολογιστούν οι άλλες πλευρές του.

β) Να υπολογιστεί η εφΓ.

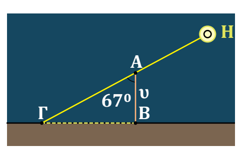
2 Για τη μέτρηση του ύψους του φάρου, απομακρυνθήκαμε με τη βάρκα 12 m από τη βάση του και με το γωνιόμετρο μετρήσαμε τη γωνία $\hat{A}=35^o$. Να υπολογιστεί το ύψος του φάρου.



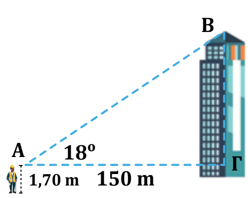
3 Καθώς ένα αεροπλάνο προσεγγίζει τον πύργο ελέγχου, σε κάποιο σημείο Γ βρίσκεται σε ύψος 8000 m και η γωνία βάθους είναι ίση με 49°. Να υπολογιστεί η απόστασή του από τον πύργο ελέγχου.



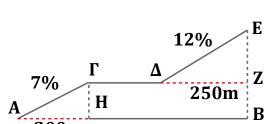
4 Οι ακτίνες του Ήλιου σχηματίζουν γωνία $\hat{A}=67^o$ και μήκος σκιάς 7 m. Να υπολογιστεί το ύψος υ του στύλου.



5 Ένας τοπογράφος για να μετρήσει το ύψος ενός κτιρίου, απομακρύνεται από αυτό 150 m και μετράει με μια συσκευή τη γωνία υπό την οποία βλέπει το κτίριο από τη θέση στην οποία βρίσκεται. Αν το ύψος στο οποίο βρίσκεται η συσκευή είναι 1,70 m και η γωνία υπό την οποία βλέπει το κτίριο είναι 18°, να βρεθεί το ύψος του κτιρίου.



6 Η κλίση του δρόμου ΑΓ είναι 7% και η κλίση του δρόμου ΔΕ είναι 12%. Με τα δεδομένα του σχήματος να βρείτε πόσο πιο ψηλά βρίσκεται το σημείο Ε από το σημείο Α του δρόμου.



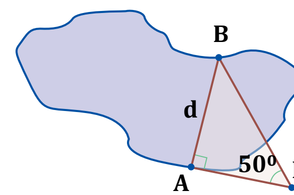
7 Στον πίνακα δίνονται οι κλίσεις κάποιων δρόμων. Να συμπληρώσετε τον πίνακα με τις γωνίες στις οποίες αντιστοιχούν.

Κλίση	Γωνία
12,5%	
15%	
50%	
100%	

8 Να βρεθεί η κλίση των ευθειών:
$y = 2x$, $y = 1+x$, $y-3x = 4$.

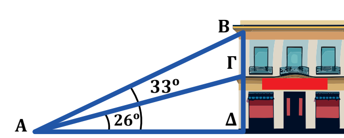
9 Μία ευθεία (ε) διέρχεται από τα σημεία Α(−1, 2) και Β(4, 5). Να βρεθεί η κλίση της.

10 Για να μετρήσουμε την απόσταση δύο σημείων Α, Β της λίμνης σχεδιάσαμε το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και μετρήσαμε τη γωνία $\hat{\Gamma}$. Αν ΑΓ = 10 m, $\hat{\Gamma} = 50^o$, να υπολογιστεί το ΑΒ.



11 Στην αυλή του σχολείου υπάρχει ένα ψηλό δέντρο. Ο καθηγητής την ώρα των Μαθηματικών βγάζει τους μαθητές στην αυλή, τους δίνει μια μετροταινία, ένα μοιρογνωμόνιο και τους ζητάει να μετρήσουν το ύψος του δέντρου χωρίς να σκαρφαλώσει κανένας σε αυτό. Πώς θα μπορούσατε να τους βοηθήσετε να βρουν το ύψος του δέντρου;

12 Ο κύριος Μιχάλης θέλει να αγοράσει ένα μαγαζί με ισόγειο και 1ο όροφο. Στον 1ο όροφο θέλει να βάλει μία επιγραφή ύψους ΒΓ (σχήμα). Από ένα σημείο που απέχει απόσταση ΑΔ = 26 m, το ισόγειο φαίνεται υπό γωνία 26° και το ισόγειο μαζί με τον 1ο όροφο υπό γωνία 33°. Πόσο ύψος θα έχει η επιγραφή;



8.2 Ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθήτριες και οι μαθητές να μπορούν:

- Να αναγνωρίζουν το ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου.

Διερεύνηση

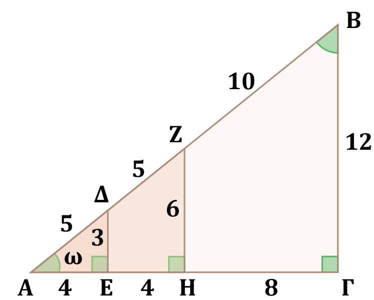
Για τα τρίγωνα ΑΔΕ, ΑΖΗ και ΑΒΓ του σχήματος:

α) Να βρείτε τους λόγους: $\frac{ΔΕ}{ΑΔ}$, $\frac{ΖΗ}{ΑΖ}$, $\frac{ΒΓ}{ΑΒ}$. Τι παρατηρείτε ;

β) Να βρείτε τους λόγους: $\frac{ΑΕ}{ΑΔ}$, $\frac{ΑΗ}{ΑΖ}$, $\frac{ΑΓ}{ΑΒ}$. Τι παρατηρείτε;

γ) Η τιμή των λόγων εξαρτάται από το τρίγωνο στο οποίο ανήκουν οι πλευρές;

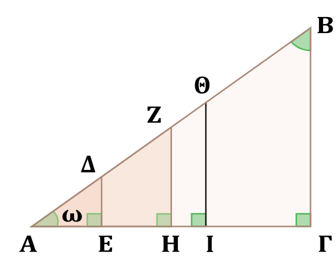
δ) Να διατυπώσετε μία εικασία για τη σχέση της γωνίας ω και των λόγων.



Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες μάθησης

Τα τρίγωνα ΑΔΕ, ΑΗΖ, ΑΙΘ και ΑΒΓ του σχήματος είναι ορθογώνια και έχουν κοινή γωνία την $\hat{ω}$. Επομένως είναι όμοια, οπότε οι λόγοι των ομόλογων πλευρών τους θα είναι ίσοι.

Άρα: $\frac{ΔΕ}{ΑΔ} = \frac{ΖΗ}{ΑΖ} = \frac{ΘΙ}{ΑΘ} = \frac{ΒΓ}{ΑΒ}$.



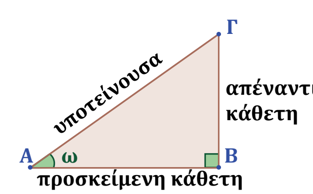
Στα συγκεκριμένα ορθογώνια τρίγωνα, ο λόγος που σχηματίζεται αν διαιρέσουμε την απέναντι κάθετη πλευρά της οξείας γωνίας $\hat{ω}$ με την υποτείνουσα είναι πάντοτε σταθερός.

Ο λόγος αυτός ονομάζεται **ημίτονο** της γωνίας $\hat{ω}$ και συμβολίζεται **ημω**.

Παρατηρούμε επίσης ότι στα ίδια όμοια τρίγωνα είναι ίσοι και οι λόγοι:

$\frac{ΑΕ}{ΑΔ} = \frac{ΑΗ}{ΑΖ} = \frac{ΑΙ}{ΑΘ} = \frac{ΑΓ}{ΑΒ}$

Ο λόγος αυτός ονομάζεται **συνημίτονο** της γωνίας ω και συμβολίζεται με **συνω.**



Θεωρούμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{Β} = 90^o$). Σύμφωνα με όσα είπαμε παραπάνω θα είναι ημ$\hat{Α}$ = $\frac{ΒΓ}{ΑΓ}$, συν$\hat{Α}$ = $\frac{ΑΒ}{ΑΓ}$ και ημ$\hat{Γ}$ = $\frac{ΑΒ}{ΑΓ}$, συν$\hat{Γ}$ = $\frac{ΒΓ}{ΑΓ}$.

Γενικά, αν ω είναι οξεία γωνία ορθογωνίου τριγώνου, τότε:

$$ημω = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} \text{ και } συνω = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$$

Επειδή η υποτείνουσα είναι η μεγαλύτερη πλευρά σε ορθογώνιο τρίγωνο, θα ισχύουν:

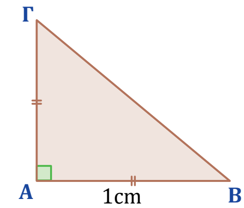
$$0 < ημω < 1 \text{ και } 0 < συνω < 1$$

Σημείωση:

1) Η εφαπτομένη, το ημίτονο και το συνημίτονο μιας γωνίας ονομάζονται τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας.
2) Τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας γωνίας από 1^o έως 89^o τους βρίσκουμε με τη βοήθεια του πίνακα τριγωνομετρικών αριθμών, που βρίσκεται στο τέλος του βιβλίου ή ψηφιακά.

Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας: 30°, 45° και 60°

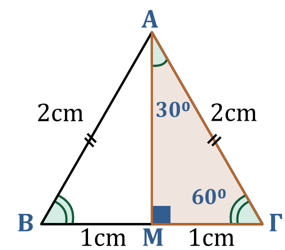
Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας 45°



Για να βρούμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 45°, παίρνουμε ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=90^\circ$ και ΑΒ = ΑΓ = 1 cm (Σχήμα). Στο τρίγωνο αυτό θα είναι $\hat{B}=\hat{\Gamma}=45^\circ$. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα βρίσκουμε ότι ΒΓ = (ΒΓ) $=\sqrt{2}$. Οπότε:

εφ$45^\circ=\frac{ΑΓ}{ΑΒ}=\frac{1}{1}=1$, ημ$45^\circ=\frac{ΑΓ}{ΒΓ}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, όμοια και συν$45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας 30° και 60°



Για να βρούμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών 30° και 60°, παίρνουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ = ΑΓ = ΒΓ = 2 cm και γωνίες $\hat{A}=\hat{B}=\hat{\Gamma}=60^\circ$ (Σχήμα). Φέρνουμε το ύψος ΑΜ το οποίο στο ισόπλευρο τρίγωνο είναι διάμεσος και διχοτόμος. Άρα ΒΜ = ΜΓ= 1 cm και $M\hat{A}\Gamma=30^\circ$.
Επίσης στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΜΓ από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:
$ΑΓ^2 = ΑΜ^2 + ΜΓ^2$ ή $2^2 = ΑΜ^2 + 1^2$ ή $ΑΜ^2 = 2^2-1^2$ ή $ΑΜ^2 = 3$ ή $ΑΜ=\sqrt{3}$.
Από το ορθογώνιο πλέον τρίγωνο ΑΜΓ έχουμε:

$$ημ\,30^\circ=\frac{ΜΓ}{ΑΓ}=\frac{1}{2},\ συν\,30^\circ=\frac{ΑΜ}{ΑΓ}=\frac{\sqrt{3}}{2},\ εφ\,30^\circ=\frac{ΜΓ}{ΑΜ}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

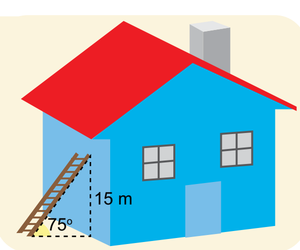
$$ημ\,60^\circ=\frac{ΑΜ}{ΑΓ}=\frac{\sqrt{3}}{2},\ συν\,60^\circ=\frac{ΜΓ}{ΑΓ}=\frac{1}{2},\ εφ\,60^\circ=\frac{ΑΜ}{ΜΓ}=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$$

Γενικά, ανεξάρτητα από το συγκεκριμένο τρίγωνο ισχύει ότι:

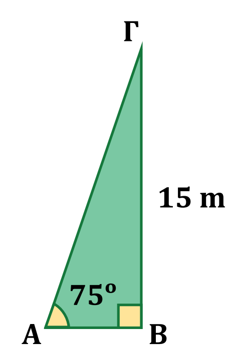
	30°	45°	60°
ημίτονο	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
συνημίτονο	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
εφαπτομένη	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Εφαρμογή 1

Ένας τεχνίτης θέλει να τοποθετήσει μία σκάλα για να κάνει μία επισκευή στον τοίχο ενός σπιτιού. Η σκάλα πρέπει να φτάνει σε ύψος 15 m από το έδαφος και η γωνία που θα σχηματίζει με το έδαφος να είναι 75°. Πόσα μέτρα σκάλα θα χρειαστεί ο τεχνίτης;



Απάντηση



Σχεδιάζουμε το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Στο τρίγωνο αυτό ξέρουμε την κάθετη πλευρά ΒΓ, την απέναντι σε αυτήν οξεία γωνία $\hat{A}=75^\circ$ και ζητάμε την υποτείνουσα ΑΒ.
Το ημίτονο συνδέει τα στοιχεία αυτά, οπότε:

ημ$75^\circ=\frac{ΒΓ}{ΑΓ}$ ή ημ$75^\circ=\frac{15}{ΑΓ}$ ή ΑΓ · ημ$75^\circ = 15$ ή $ΑΓ=\frac{15}{ημ\,75^\circ}$

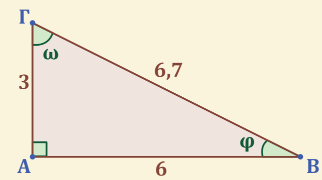
Από τον πίνακα των τριγωνομετρικών αριθμών βρίσκουμε ότι:

ημ75° = 0,97 και επομένως: $ΑΓ=\frac{15}{0{,}97}$ ή ΑΓ ≈ 15,5

Άρα, ο τεχνίτης θα χρειαστεί μία σκάλα με μήκος περίπου 15,5 m.

Εφαρμογή 2

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος, να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών ω και φ.



Απάντηση

Έχουμε:

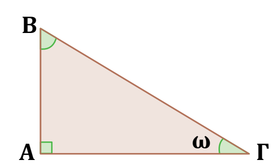
ημω $= \frac{6}{6,7} = 0,895$, συνω $= \frac{3}{6,7} = 0,448$ και εφω $= \frac{6}{3} = 2$.

ημφ $= \frac{3}{6,7} = 0,448$, συνφ $= \frac{6}{6,7} = 0,895$ και εφφ $= \frac{3}{6} = 0,5$.

Εφαρμογή 3

Αν ω μια οξεία γωνία ορθογωνίου τριγώνου, να αποδείξετε ότι: εφω $= \frac{ημω}{συνω}$

Απάντηση



Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ για την οξεία γωνία ω έχουμε εφω $= \frac{ΑΒ}{ΑΓ}$, την οποία γράφουμε ισοδύναμα ως εξής: εφω $= \frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{\frac{ΑΒ}{ΒΓ}}{\frac{ΑΓ}{ΒΓ}} = \frac{ημω}{συνω}$. Αποδείξαμε λοιπόν ότι: εφω $= \frac{ημω}{συνω}$.

Εφαρμογή 4

Να αποδείξετε ότι: ημ^{2}30°+ημ^{2}60° = εφ45°.

Απάντηση

Είναι ημ 30° $= \frac{1}{2}$, οπότε ημ^{2}30° $= \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ και ημ 60° $= \frac{\sqrt{3}}{2}$, οπότε ημ^{2}60° $= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ ή ημ^{2}60° $= \frac{3}{4}$.

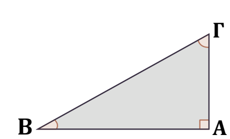
Επομένως: ημ^{2}30° + ημ^{2}60° $= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1 =$ εφ45°

Σχόλιο: Συνηθίζουμε να γράφουμε ημ^{2}ω αντί για (ημω)^2. Αντίστοιχα συν^{2}ω, εφ^{2}ω.

Εφαρμογή 5

Αν ΒΑΓ ορθογώνιο τρίγωνο με οξείες γωνίες Β και Γ, να αποδείξετε ότι ισχύει: ημ^{2}Β+συν^{2}Β = 1 και ημ^{2}Γ+συν^{2}Γ = 1.

Απάντηση



Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ για την οξεία γωνία του Β έχουμε: ημΒ $= \frac{ΑΓ}{ΒΓ}$ οπότε: ημ^{2}Β $= \frac{ΑΓ^2}{ΒΓ^2}$

Ανάλογα:

συνΒ $= \frac{ΑΒ}{ΒΓ}$ και επομένως: συν^{2}Β $= \frac{ΑΒ^2}{ΒΓ^2}$

Άρα: $ημ^2Β+συν^2Β = \frac{ΑΓ^2}{ΒΓ^2} + \frac{ΑΒ^2}{ΒΓ^2} = \frac{ΑΓ^2+ΑΒ^2}{ΒΓ^2} = \frac{ΒΓ^2}{ΒΓ^2} = 1$, αφού από το Πυθαγόρειο Θεώρημα ισχύει ότι $ΑΒ^2+ΑΓ^2 = ΒΓ^2$.
Ανάλογα αποδεικνύεται ότι $ημ^2Γ+συν^2Γ = 1$.

Σημείωση:

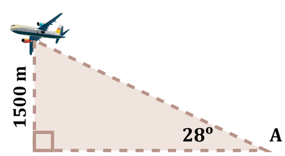
Για κάθε οξεία γωνία ω ορθογωνίου τριγώνου ισχύει ότι: $ημ^2ω+συν^2ω = 1$.

Να επιλέξετε την ψηφιακή εφαρμογή «Τριγωνομετρικοί λόγοι » και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται. Να διατυπώσετε ένα συμπέρασμα για τους τριγωνομετρικούς λόγους οξείας γωνίας.

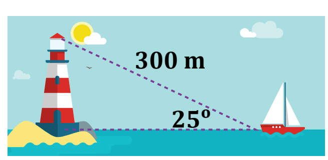
Να επιλέξετε την ψηφιακή εφαρμογή «Ορθογώνιο τρίγωνο» και να διερευνήσετε τη σχέση που έχουν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των οξειών γωνιών του.

Ασκήσεις και Προβλήματα

1 Ένα αεροπλάνο φαίνεται από ένα σημείο Α στο έδαφος υπό γωνία 28°. Το υψόμετρο του αεροπλάνου είναι 1500 m. Ποια είναι η απόσταση του αεροπλάνου από το σημείο Α;

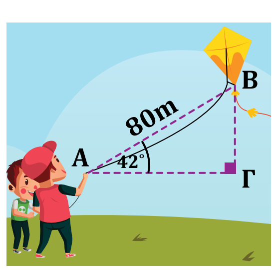


2 Ένα πλοίο βλέπει υπό γωνία 25° έναν φάρο και η απόσταση από την κορυφή του είναι 300 m. Πόσο απέχει από τον φάρο;

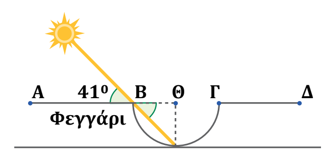


3 **Εκτίμηση και υπολογισμός ημίτονου και συνημίτονου**
Να εκτιμήσετε και στη συνέχεια να υπολογίσετε το ημίτονο και το συνημίτονο των οξειών γωνιών των ορθογωνίων τριγώνων με την ψηφιακή εφαρμογή.

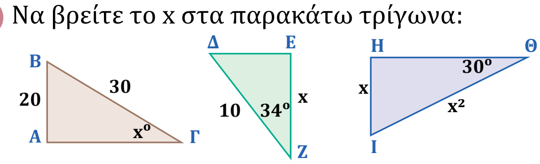
4 Ο Μιχάλης πετάει με τον Κώστα έναν χαρτεατό. Όταν έχουν αφήσει 80 μέτρα σπάγγο, ο χαρταετός από το χέρι του Κώστα φαίνεται υπό γωνία 42°. Αν το χέρι του Κώστα βρίσκεται 1,40 m από το έδαφος, να βρεθεί το ύψος στο οποίο βρίσκεται ο χαρταετός.



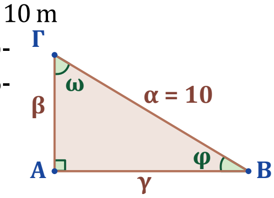
5 Στο φεγγάρι υπάρχει ένας κρατήρας για τον οποίο ξέρουμε ότι ΒΘ = 350 m. Όταν ο ήλιος σχηματίζει γωνία 41° τότε οι ακτίνες του πέφτουν στο βαθύτερο σημείο του κρατήρα. Πόσο είναι το βάθος του κρατήρα;



6 Να βρείτε το x στα παρακάτω τρίγωνα:



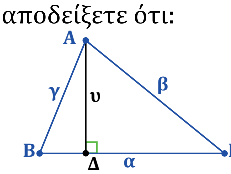
7 Αν ημφ = 0,6, ημω = 0,8 και α = 10 m
α) Να υπολογιστούν οι πλευρές β και γ του ορθογωνίου τριγώνου ΒΑΓ.
β) Να αποδείξετε ότι
συνω = ημ(90°−ω) και
συνφ = ημ(90°−φ).



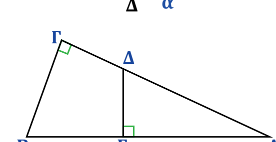
8 Ξέρουμε ότι το εμβαδόν Ε τριγώνου δίνεται από τον τύπο: $Ε = \frac{1}{2}(βάση) \cdot (ύψος)$. Να αποδείξετε ότι:

α) $Ε = \frac{1}{2} α \cdot γ \cdot ημΒ$

β) $Ε = \frac{1}{2} α \cdot β \cdot ημΓ$



9 Για τα ευθύγραμμα τμήματα του σχήματος να αποδείξετε ότι:
α) ΑΒ·ΔΕ = ΑΔ·ΒΓ
β) ΑΕ·ΑΒ = ΑΔ·ΑΓ
γ) ΑΓ·ΔΕ = ΑΕ·ΒΓ

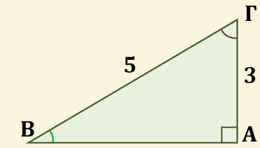


8.3 Εύρεση γωνιών και πλευρών με χρήση τριγωνομετρικού πίνακα

Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο μπορούμε να βρίσκουμε τις οξείες γωνίες του και τους τριγωνομετρικούς αριθμούς αυτών με τη βοήθεια του πίνακα της προηγούμενης παραγράφου, όταν πρόκειται για γωνίες 30°, 45° και 60°. Ωστόσο, στην πράξη συνήθως οι γωνίες είναι διαφορετικές από αυτές και για να τις βρούμε χρησιμοποιούμε τον τριγωνομετρικό πίνακα των γωνιών που παρατίθεται στο τέλος του βιβλίου. Με αυτόν τον πίνακα μπορούμε να βρίσκουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς, εφαπτομένη, ημίτονο και συνημίτονο γωνιών από 1° έως και 89°. Αντίστροφα, όταν ξέρουμε την εφαπτομένη, το ημίτονο ή το συνημίτονο μίας γωνίας, τότε μπορούμε να βρούμε την αντίστοιχη γωνία.

Εφαρμογή 1

Να βρεθούν οι γωνίες του ορθογώνιου τριγώνου του σχήματος (Α=90°).



Απάντηση

Για την οξεία γωνία Β του ορθογωνίου τριγώνου ΒΑΓ έχουμε: $ημB = \frac{3}{5} = 0{,}6$.

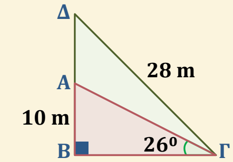
Από τον πίνακα τριγωνομετρικών αριθμών βρίσκουμε ότι αυτή η τιμή του ημίτονου αντιστοιχεί περίπου στη γωνία των 37°. Άρα, $\hat{B} = 37°$.

Επειδή για τη γωνία $\hat{A}$ έχουμε $\hat{A} = 90°$ και το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180°, παίρνουμε:

$37° + 90° + \hat{Γ} = 180°$ ή $127° + \hat{Γ} = 180°$ ή $\hat{Γ} = 180° - 127°$ ή $\hat{Γ} = 53°$.

Εφαρμογή 2

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΒΔ με $\hat{B} = 90°$ να υπολογιστεί η γωνία του $\hat{Γ}$ με τα στοιχεία του σχήματος.



Απάντηση

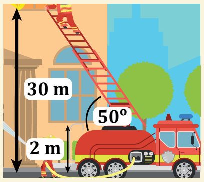
Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε: $εφ\,26° = \frac{10}{ΒΓ}$ ή $ΒΓ = \frac{10}{εφ\,26°}$. Από τον πίνακα τριγωνομετρικών αριθμών έχουμε $εφ26° = 0{,}488$ και επομένως: $ΒΓ = \frac{10}{0{,}488}$ ή $ΒΓ \approx 20{,}5$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΓΔΒ έχουμε: $συν\hat{Γ} = \frac{ΒΓ}{28}$ ή $συν\hat{Γ} = \frac{20{,}5}{39}$ ή $συν\hat{Γ} = 0{,}732$.

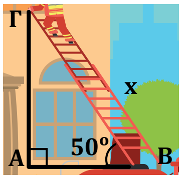
Από τον πίνακα τριγωνομετρικών αριθμών έχουμε $συν43° = 0{,}732$ και επομένως: $\hat{Γ} \approx 43°$.

Εφαρμογή 3

Ένα πυροσβεστικό όχημα βρίσκεται μπροστά σε ένα σπίτι που καίγεται. Στην οροφή του οχήματος βρίσκεται σκάλα, σε απόσταση 2m από το έδαφος, η οποία μπορεί να σηκωθεί το πολύ 50° ως προς το οριζόντιο επίπεδο. Αν η σκάλα μπορεί να επεκταθεί μέχρι 40 m, θα καταφέρει ο πυροσβέστης να φτάσει σε ένα σημείο που απέχει 30 m από το έδαφος;



Απάντηση



Σχεδιάζουμε το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΑΓ (σχήμα), για το οποίο έχουμε: ΑΓ = 30–2 = 28 m και αν x το απαιτούμενο μήκος της σκάλας, τότε $ημ50° = \frac{28}{x}$. Από τον πίνακα των τριγωνομετρικών αριθμών βρίσκουμε ότι $ημ50° = 0{,}766$, οπότε παίρνουμε:

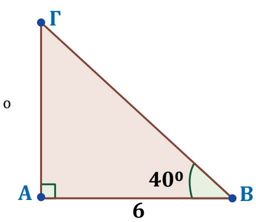
ημ$50^\circ = \frac{28}{x}$ ή $0{,}766 = \frac{28}{x}$ ή $(0{,}766)\cdot x = 28$ ή $x = \frac{28}{0{,}766}$ ή $x \approx 36{,}55$.

Επειδή $40 > 36{,}55$ ο πυροσβέστης θα καταφέρει να φτάσει στο σημείο αυτό.

Εφαρμογή 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{B} = 40^\circ$ και ΑΒ = 6 cm. Να υπολογιστούν οι πλευρές ΑΓ και ΒΓ και γωνία Γ.

Απάντηση



Αρχικά φτιάχνουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με τα στοιχεία που δίνονται.

- Για τον προσδιορισμό της πλευράς ΑΓ έχουμε: εφΒ $= \frac{ΑΓ}{ΑΒ} = \frac{ΑΓ}{6}$ ή ΑΓ = 6 · εφΒ ή ΑΓ = 6 · εφ40°

Από τον πίνακα των τριγωνομετρικών αριθμών βρίσκουμε ότι εφ40 ≈ 0,84 οπότε:
ΑΓ = 6 · 0,84 ≈ 5,04. Άρα, ΑΓ = 5 cm.

- Για τον προσδιορισμό της πλευράς ΒΓ έχουμε: συν $40^\circ = \frac{6}{ΒΓ}$ ή ΒΓ · συν40° = 6 ή ΒΓ $= \frac{6}{συν\,40^\circ}$

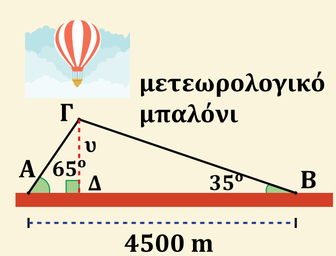
Από τον πίνακα των τριγωνομετρικών αριθμών βρίσκουμε ότι συν40° ≈ 0,766 οπότε: ΒΓ $= \frac{6}{0,766}$ ή ΒΓ ≈ 7,83. Άρα, ΒΓ ≈ 7,83 cm.

Σχόλιο: Για τον προσδιορισμό της ΒΓ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

- Για τον προσδιορισμό της γωνίας $\hat{Γ}$ έχουμε: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{Γ} = 180^\circ$ ή $90^\circ + 40^\circ + \hat{Γ} = 180^\circ$ ή $\hat{Γ} = 180^\circ - 130^\circ$ ή $\hat{Γ} = 50^\circ$

Εφαρμογή 5

Δύο σταθμοί καταγραφής δεδομένων για τον καιρό Α, Β, οι οποίοι απέχουν μεταξύ τους 4500 m σε ευθεία γραμμή, έχουν σηκώσει ένα μετεωρολογικό μπαλόνι που τους στέλνει σήματα. Αν ο σταθμός Α βλέπει υπό γωνία 65° το μπαλόνι και ο σταθμός Β υπό γωνία 35⁰, να βρεθεί πόσο απέχει το μπαλόνι από το έδαφος.

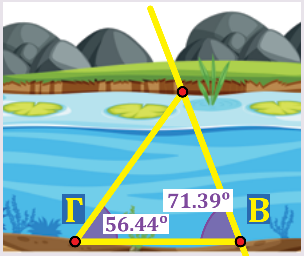


Απάντηση

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε: εφ$65^\circ = \frac{υ}{ΑΔ}$ ή Α $= \frac{υ}{εφ65^\circ}$. Από τον πίνακα των τριγωνομετρικών αριθμών βρίσκουμε ότι εφ65° ≈ 2,145 και επομένως: ΑΔ $= \frac{υ}{2{,}145}$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΔΓ έχουμε: εφ$35^\circ = \frac{υ}{ΔΒ}$ ή ΔΒ $= \frac{υ}{εφ35^\circ}$. Από τον πίνακα των τριγωνομετρικών αριθμών βρίσκουμε ότι εφ35° ≈ 0,7 και επομένως: ΑΔ $= \frac{υ}{0{,}7}$. Επειδή ΑΒ = ΑΔ + ΔΒ ή ΑΔ + ΔΒ = 4500, αντικαθιστώντας τις τιμές των ΑΔ και ΔΒ παίρνουμε:

$$\frac{υ}{2{,}145} + \frac{υ}{0{,}7} = 4500 \text{ ή } υ \cdot \left(\frac{1}{2{,}145} + \frac{1}{0{,}7}\right) = 4500 \text{ ή } υ \cdot (0{,}47 + 1{,}43) \approx 4500 \text{ ή } υ \cdot (1{,}9) \approx 4500 \text{ ή } υ \approx \frac{4500}{1{,}9} \text{ ή } υ \approx 2368{,}5\text{m}.$$

Επίλυση ορθογωνίου τριγώνου. Να επιλέξετε την ψηφιακή εφαρμογή «Επίλυση ορθογωνίου τριγώνου» και να κάνετε τα πειράματα που απαιτούνται, για να βρείτε τις πλευρές και τις γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου και να επαληθεύσετε το αποτέλεσμα της επίλυσης του τριγώνου.

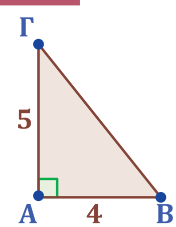


Μέτρηση του πλάτους του ποταμού. Δύο εκδρομείς βρέθηκαν στην όχθη ενός ορμητικού ποταμού και θέλουν να υπολογίσουν το πλάτος του από την όχθη που βρίσκονται.
Έχουν στη διάθεσή τους ένα γωνιόμετρο, μια αριθμομηχανή και μια μετροταινία. Να επιλέξετε την ψηφιακή εφαρμογή «πλάτος ποταμού» και να κάνετε τα πειράματα που απαιτούνται για να αναπτύξετε μια μέθοδο υπολογισμού του πλάτους του ποταμού.

Μεταβολές τριγωνομετρικών αριθμών. Για να διερευνήσετε πώς μεταβάλλονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας οξείας γωνίας, όταν αυτή αυξάνεται από 0° έως 90°, να ανοίξετε την ψηφιακή εφαρμογή «Μεταβολές» και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

Ασκήσεις και Προβλήματα

1 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^o$) με ΑΓ = 5 cm και ΑΒ = 4 cm. Να υπολογιστούν το μήκος της πλευράς ΒΓ και οι οξείες γωνίες του.



Στις ασκήσεις 2-6 δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90°$. Να υπολογίσετε, σε κάθε περίπτωση, τα υπόλοιπα κύρια στοιχεία του τριγώνου, αν δίνονται:

2 ΑΒ = 6 cm και (ΑΓ) = 5 cm.

3 ΒΓ = 10 cm και (ΑΒ) = 5 cm.

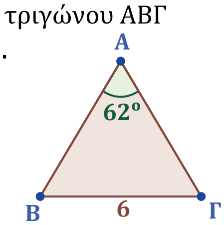
4 ΒΓ = 10 cm και $\hat{B}=70^o$.

5 ΑΒ = 8 cm και $\hat{B}=38^o$.

6 ΑΓ = 12 cm και $\hat{B}=52^o$.

7 Να βρείτε τις πλευρές και γωνίες τριγώνου ΑΒΓ όταν Α(–2, 1), Β(–2, 3) και Γ(2, 1).

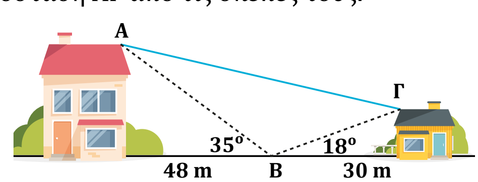
8 Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ, $\hat{A}=62^o$ και (ΒΓ) = 6, να βρείτε τις υπόλοιπες πλευρές και γωνίες.



9

Εκτίμηση και υπολογισμός μέτρων γωνιών ορθογωνίου τριγώνου.
Να εκτιμήσετε και στη συνέχεια να υπολογίσετε τα μέτρα των οξειών γωνιών των ορθογωνίων τριγώνων που θα βρείτε στην ψηφιακή εφαρμογή «Εκτίμηση για την ισότητα τριγώνων Ι».

10 Ο Γιώργος στέκεται στο σημείο Β του δρόμου που ενώνει τα δύο σπίτια. Απέχει 48 m από το μπλε σπίτι, το οποίο φαίνεται από το Β υπό γωνία 35° και 30 m από το κίτρινο σπίτι, το οποίο φαίνεται από το Β υπό γωνία 18°. Να υπολογίσετε την απόσταση ΑΓ από τις σκεπές τους.

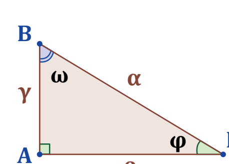


8.4 Ανακεφαλαίωση και διεύρυνση της θεματικής ενότητας

Αν $\hat{\omega}$ και $\hat{\varphi}$ οι οξείες γωνίες ορθογωνίου τριγώνου ΒΑΓ ($\hat{A}=90^o$) τότε ορίζουμε:

$$\eta\mu\omega = \frac{\beta}{\alpha},\ \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\gamma}{\alpha},\ \varepsilon\varphi\omega = \frac{\beta}{\gamma}$$

$$\eta\mu\varphi = \frac{\gamma}{\alpha},\ \sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{\beta}{\alpha},\ \varepsilon\varphi\varphi = \frac{\gamma}{\beta}$$



Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών 30°, 45° και 60° είναι:

	30°	45°	60°
ημ	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
συν	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
εφ	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Ερωτήσεις για Αυτοαξιολόγηση

1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ αν είναι σωστές ή με Λ αν είναι λανθασμένες.

- $ημ(2^\circ) = συν(88^\circ)$ **Σ Λ**
- Αν $ημω = \frac{1}{2}$, τότε $συνω = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **Σ Λ**
- Αν $ω = 45^\circ$, τότε $ημω = συνω = εφω$ **Σ Λ**

2 Να βρεθούν τα υπόλοιπα κύρια στοιχεία ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ ($\hat{A}=90^\circ$), όταν ΑΒ = 5 μονάδες και συνΒ = 0,5.

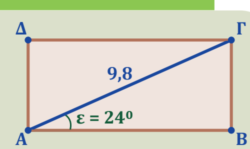
3 Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι όταν σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο η μία οξεία γωνία του είναι διπλάσια της άλλης τότε και η απέναντι κάθετη πλευρά είναι επίσης διπλάσια από την άλλη κάθετη. Σωστό ή λάθος;

4 Η εφαπτομένη μιας οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου είναι πάντοτε μικρότερη από 1. Σωστό ή λάθος;

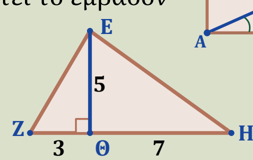
5 Το ημίτονο και το συνημίτονο μιας οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου είναι πάντοτε μεγαλύτερα από 1. Σωστό ή λάθος;

Επαναληπτικά έργα, προεκτάσεις και μαθηματικές προκλήσεις

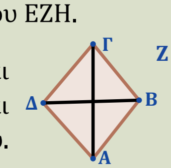
1 Στο ορθογώνιο του σχήματος γνωρίζουμε ότι το μήκος της διαγωνίου ΑΓ είναι 9,8 cm και η γωνία που σχηματίζει με την ΑΒ είναι $\hat{B}=24^\circ$. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του και η περίμετρός του.



2 Να υπολογίσετε τις πλευρές και τις γωνίες του τριγώνου ΕΖΗ.



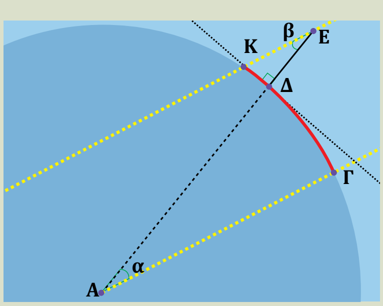
3 Στον ρόμβο γνωρίζουμε ότι οι διαγώνιοι διχοτομούνται κάθετα. Στον ρόμβο του σχήματος είναι ΑΓ = 8 cm και ΔΒ = 6 cm. Να υπολογίσετε τις πλευρές και τις γωνίες του.



4 **Μέτρηση της ακτίνας της Γης (πείραμα Ερατοσθένη)**
Για τη μέτρηση της ακτίνας της Γης μια ομάδα μαθητών της Τρίτης Τάξης την πρώτη ημέρα της άνοιξης (εαρινή ισημερία) τοποθετεί έναν πάσσαλο ΔΕ μήκους 5 μέτρων κάθετα στη Γη. Την ώρα που στο σημείο Γ οι ακτίνες του Ήλιου πέφτουν κάθετα στη Γη, οι μαθητές μετρούν τη σκιά του πασσάλου και τη βρίσκουν 0,25 m.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\beta}$.

β) Αν η απόσταση ΓΔ, δηλαδή το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{ΓΔ}$ είναι λ να αποδείξετε με τη βοήθεια του σχήματος ότι η ακτίνα R της Γης δίνεται από τον τύπο: $R = \frac{λ \cdot 180^\circ}{π \cdot β^\circ}$.



5 **Μέτρηση της κλίσης του Πύργου της Πίζας**

Ο επιβλέπων μηχανικός ελέγχει τη μεταβολή της κλίσης του πύργου της Πίζας ως εξής: Ανεβαίνει στο τελευταίο μπαλκόνι και από εκεί αφήνει ένα βαρύ αντικείμενο να πέσει στο έδαφος. Στη συνέχεια μετρά την απόσταση του σημείου πρόσκρουσης από τη βάση του πύργου.

α) Αν ο πύργος έχει ύψος 50 m και η απόσταση του σημείου πρόσκρουσης με το έδαφος είναι 3,5 m, να υπολογίσετε τη γωνία της κλίσης του πύργου.

β) Μετά από δύο χρόνια επαναλαμβάνει την ίδια διαδικασία και βρίσκει ότι το σημείο της πρόσκρουσης απείχε από τη βάση 3,6 m. Έγειρε περισσότερο ο πύργος;

6

Για να εξοικειωθείτε με την εκτίμηση και τον υπολογισμό του μέτρου της οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου να ανοίξετε την ψηφιακή δραστηριότητα.

7 **Γωνιόμετρα (Εργασία με προεκτάσεις)**

Συμμετέχετε σε μια ομάδα μαθητών Γ' τάξης που βρίσκεται σε μια ακτή και θέλει να μετρήσει την απόσταση ενός πλοίου που βρίσκεται ακίνητο στα ανοικτά της θάλασσας. Στη διάθεσή σας έχετε χαρτόνι, μαρκαδόρους, κανόνα, μοιρογνωμόνιο και ψαλίδι.

- Να βρείτε πληροφορίες για τον εξάντα ή άλλο γωνιόμετρο.
- Να περιγράψετε την κατασκευή ενός απλού γωνιόμετρου.
- Να περιγράψετε τη διαδικασία μέτρησης της απόστασης.

8

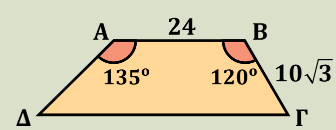
Να ανοίξετε την ψηφιακή δραστηριότητα «Γωνιόμετρα», και να κάνετε τις δραστηριότητες που προτείνονται.

9 Με βάση τα στοιχεία στο διπλανό τραπέζιο ΑΒΓΔ να υπολογίσετε:

α) Το ύψος του τραπεζίου ΑΒΓΔ.

β) Την ακριβή τιμή της πλευράς ΑΔ.

γ) Την ακριβή τιμή του εμβαδού του τραπεζίου ΑΒΓΔ.

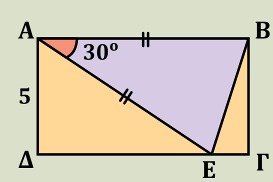


10 Το σχήμα ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο. Με βάση τα στοιχεία του σχήματος:

α) Να υπολογίσετε τα τμήματα ΑΕ και ΔΓ.

β) Να αποδείξετε ότι: $ΕΓ = 5(2-\sqrt{3})$ m.

γ) Να υπολογίσετε την ακριβή τιμή της εφ15°.



Να ανοίξετε την εφαρμογή «Γλωσσάρι-Τριγωνομετρία» για να συνοψίσετε έννοιες και όρους,που μάθετε στο κεφάλαιο αυτό.

Κεφάλαιο

9

Γεωμετρία του χώρου

Εμβαδόν και όγκος πρίσματος, κυλίνδρου, πυραμίδας, κώνου και σφαίρας.

Υπολογισμοί με σύνθετα στερεά σώματα.

Στο Κεφάλαιο αυτό θα μάθουμε:

- Να αξιοποιούμε τα αναπτύγματα ορθών πρισμάτων, πυραμίδων, κυλίνδρων και κώνων για να προσδιορίζουμε το εμβαδόν της επιφάνειάς τους.
- Να λύνουμε προβλήματα υπολογισμού του εμβαδού της επιφάνειας ορθού πρίσματος, πυραμίδας, κυλίνδρου, κώνου και σφαίρας.
- Να υπολογίζουμε τον όγκο του κύβου και του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου επιλέγοντας κατάλληλη μονάδα μέτρησης.
- Να συσχετίζουμε τον όγκο ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου και κυλίνδρου, καθώς και πρίσματος και πυραμίδας, με την ίδια βάση και το ίδιο ύψος με εμπειρικούς τρόπους.
- Να συσχετίζουμε τον όγκο κυλίνδρου και κώνου με την ίδια βάση και το ίδιο ύψος με εμπειρικούς τρόπους.
- Να υπολογίζουμε τον όγκο της σφαίρας.
- Να λύνουμε προβλήματα υπολογισμού του όγκου σύνθετων στερεών σχημάτων αναπτύσσοντας ποικιλία μεθόδων και στρατηγικών.

9.1 Εμβαδόν και όγκος πρίσματος και κυλίνδρου

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθήτριες και οι μαθητές να μπορούν:

- Να αξιοποιούν τα αναπτύγματα ορθών πρισμάτων και κυλίνδρων για να προσδιορίζουν το εμβαδόν της επιφάνειάς τους.
- Να επιλύουν προβλήματα υπολογισμού του εμβαδού της επιφάνειας ορθού πρίσματος και κυλίνδρου.
- Να υπολογίζουν τον όγκο του κύβου και του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου επιλέγοντας κατάλληλη μονάδα μέτρησης.
- Να συσχετίζουν τον όγκο ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου και κυλίνδρου με την ίδια βάση και το ίδιο ύψος με εμπειρικούς τρόπους.

Ο κλάδος της **Γεωμετρίας του χώρου** μελετά τα μη επίπεδα σχήματα. Στην Α΄ Γυμνασίου γνωρίσαμε βασικά γεωμετρικά στερεά, όπως είναι το ορθό πρίσμα, το παραλληλεπίπεδο, ο κύβος, η πυραμίδα, ο κύλινδρος, ο κώνος και η σφαίρα και προσδιορίσαμε τα στοιχεία τους. Επίσης, μάθαμε να σχεδιάζουμε τα αναπτύγματα ορθών πρισμάτων, πυραμίδων, κυλίνδρων και κώνων. Στο κεφάλαιο αυτό, θα ασχοληθούμε με τις μετρήσεις αυτών των στερεών σωμάτων του χώρου.

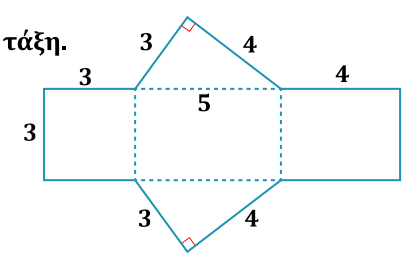
Να μελετήσετε το ιστορικό σημείωμα με τίτλο: «Γεωμετρία του χώρου».

Διερεύνηση 1: Εμβαδόν ολικής επιφάνειας πρισμάτων

Να εργαστείτε ανά δύο. Να συζητήσετε τα αποτελέσματά σας στην τάξη.

α) Ποιο στερεό σώμα παριστάνει το ανάπτυγμα; Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού.

β) Να περιγράψετε μία μέθοδο για την εύρεση του εμβαδού της ολικής επιφάνειας οποιουδήποτε πρίσματος



Διερεύνηση 2: Εύρεση του εμβαδού ολικής επιφάνειας κυλίνδρου

Να εργαστείτε ανά δύο. Να συζητήσετε τα αποτελέσματά σας στην τάξη.

α) Να δημιουργήσετε το ανάπτυγμα μίας κυλινδρικής κονσέρβας. Ποια είναι τα επιμέρους σχήματα του αναπτύγματος;

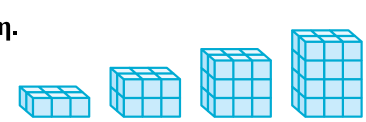
β) Πώς συνδέονται οι διαστάσεις του χαρτιού με τις διαστάσεις της κονσέρβας;

γ) Να γράψετε έναν τύπο που παριστάνει το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας κυλίνδρου με ύψος **υ** και ακτίνα του κύκλου της βάσης **ρ**, να μετρήσετε τα **υ** και **ρ** και να υπολογίσετε το εμβαδόν ($E_{ολ}$) της ολικής επιφάνειας των κυλίνδρων.

Διερεύνηση 3: Εύρεση όγκου πρίσματος

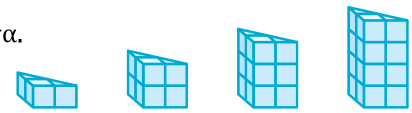
Να εργαστείτε ανά δύο. Να συζητήσετε τα αποτελέσματά σας στην τάξη.

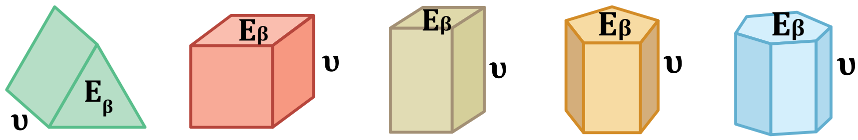
α) Στα ακόλουθα στερεά σώματα, κάθε κύβος έχει όγκο 1 κυβική μονάδα. Να συγκρίνετε τον όγκο **V** (σε κυβικές μονάδες) κάθε ορθού πρίσματος με το εμβαδόν $\mathbf{E_β}$ (σε τετραγωνικές μονάδες) της βάσης του. Τι παρατηρείτε;



β) Να επαναλάβετε το μέρος (α) χρησιμοποιώντας τα διπλανά πρίσματα.

γ) Να εφαρμόσετε τις διαπιστώσεις σας στα (α) και (β) για να γράψετε έναν τύπο που να δίνει τον όγκο οποιουδήποτε πρίσματος.





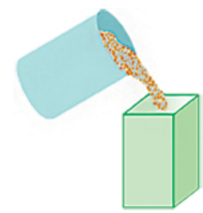
Διερεύνηση 4: Πειραματική εύρεση του όγκου κυλίνδρου

Να εργαστείτε ανά δύο ή σε μικρές ομάδες.

Να κατασκευάσετε τα αναπτύγματα ενός κυλίνδρου και ενός πρίσματος (π.χ. ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου) με ανοιχτή την άνω βάση που έχουν ίδιο ύψος και περίπου ίδιο εμβαδόν βάσης.

α) Να γεμίσετε τον κύλινδρο με ρύζι. Να ρίξετε το ρύζι στο ανοιχτό πρίσμα. Τι εικάζετε για τη σχέση ανάμεσα στον όγκο του πρίσματος και του κυλίνδρου;

β) Να βρείτε τον όγκο του ρυζιού στο πρίσμα. Ποιος είναι ο τύπος του όγκου του κυλίνδρου; Να εξηγήσετε τον συλλογισμό σας.



Να διερευνήσετε με την ψηφιακή εφαρμογή το ανάπτυγμα του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

Να διερευνήσετε στην ψηφιακή εφαρμογή τη σχέση **Κ+Ε = Α+2** για τα πρίσματα.

Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες μάθησης

Το ορθό πρίσμα

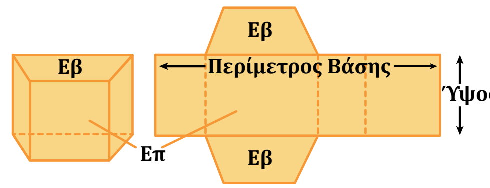
Στον κοινωνικό μας περίγυρο πολλά στερεά σώματα δίνουν την έννοια του ορθού πρίσματος. Τα παρακάτω γεωμετρικά στερεά είναι **ορθά πρίσματα**. Στη συνέχεια, τα ορθά πρίσματα θα τα λέμε απλά **πρίσματα**.

Κάθε πρίσμα έχει δύο έδρες παράλληλες, οι οποίες είναι ίσα πολύγωνα. Οι άλλες έδρες του είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα και ονομάζονται **παράπλευρες έδρες**. Οι δύο παράλληλες έδρες του λέγονται **βάσεις** του πρίσματος. Οι παράπλευρες έδρες σχηματίζουν την παράπλευρη επιφάνεια του πρίσματος. Οι πλευρές των εδρών του πρίσματος ονομάζονται **ακμές**. Οι ακμές που περιέχονται μεταξύ των βάσεων του πρίσματος ονομάζονται **παράπλευρες ακμές**. Η απόσταση των δύο βάσεων, η οποία είναι ίση με το ύψος μιας παράπλευρης έδρας, λέγεται **ύψος** του ορθού πρίσματος. Αν οι βάσεις του πρίσματος είναι τρίγωνο, τετράπλευρο, πεντάγωνο κ.ο.κ, τότε αντίστοιχα το πρίσμα λέγεται **τριγωνικό, τετραπλευρικό, πενταγωνικό** κ.ο.κ. Ένα ορθό πρίσμα του οποίου οι βάσεις είναι κανονικά πολύγωνα ονομάζεται **κανονικό πρίσμα**. Ένα πρίσμα με βάσεις ορθογώνια παραλληλόγραμμα λέγεται **ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο**. Ειδικότερα, ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο που έχει όλες τις έδρες του τετράγωνα λέγεται κύβος.

Εμβαδόν επιφάνειας ορθού πρίσματος

Ο υπολογισμός του εμβαδού των εδρών ενός πρίσματος συμβάλλει στην επίλυση προβλημάτων της καθημερινής

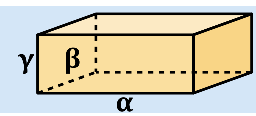
ζωής (π. χ. οικοδόμηση κτιρίων, βαφή πρισματικών επιφανειών), αλλά και σε εφαρμογές των επιστημών.
Επειδή οι παράπλευρες ακμές είναι κάθετες στις βάσεις του, θα είναι ίσες με το ύψος του πρίσματος, ενώ οι παράπλευρες έδρες είναι ορθογώνια. Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε το ανάπτυγμα της επιφάνειας ενός πρίσματος, δηλαδή την επίπεδη επιφάνεια που προκύπτει αν «ξεδιπλώσουμε» την παράπλευρη επιφάνειά του και τις βάσεις του. Για να βρούμε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του πρίσματος, προσθέτουμε τα εμβαδά των παράπλευρων εδρών του. Η παράπλευρη επιφάνεια σχηματίζει ένα ορθογώνιο, που η μία διάστασή του είναι η περίμετρος της βάσης και η άλλη το ύψος του πρίσματος.



- Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας πρίσματος ισούται με το γινόμενο της περιμέτρου της βάσης του $Π_β$ επί το ύψος υ του πρίσματος. Δηλαδή: $\mathbf{E_π = Π_β \cdot υ}$
- Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας πρίσματος ($\mathbf{E_{ολ}}$) είναι το άθροισμα του εμβαδού της παράπλευρης επιφάνειας $\mathbf{E_π}$ και των εμβαδών $\mathbf{E_β}$ των δύο βάσεων. Δηλαδή: $\mathbf{E_{ολ} = E_π + 2E_β}$

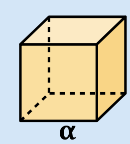
Ας θεωρήσουμε τώρα ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Τα μήκη των ακμών που ξεκινούν από μία κορυφή λέγονται **διαστάσεις** (μήκος, πλάτος, ύψος).

- Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις **α, β**, και **γ** είναι: $\mathbf{E_{ολ} = 2αβ+2βγ+2γα}$



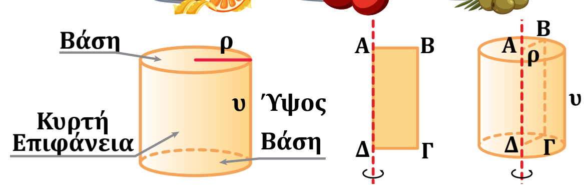
Ειδικότερα για τον κύβο, στον οποίο οι τρεις διαστάσεις του είναι ίσες ισχύει:

- Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας κύβου με ακμή **α** είναι: $\mathbf{E_{ολ} = 6α^2}$



Κύλινδρος

Τα ακόλουθα στερεά σώματα δίνουν την έννοια του κυλίνδρου. Ένας κύλινδρος αποτελείται από δύο ίσους και παράλληλους κυκλικούς δίσκους, που είναι οι **βάσεις** του, και την **«καμπυλωτή»** επιφάνεια την οποία αν ξετυλίξουμε, θα δούμε ότι έχει σχήμα ορθογωνίου.
Η απόσταση των δύο βάσεων λέγεται **ύψος** του κυλίνδρου.
Ένας κύλινδρος ο οποίος παράγεται από την πλήρη περιστροφή ενός ορθογωνίου ΑΒΓΔ γύρω από μία πλευρά του, π.χ. την ΑΔ, λέγεται **κύλινδρος εκ περιστροφής**. Η επιφάνεια που δημιουργείται από την κίνηση της πλευράς ΒΓ λέγεται **παράπλευρη** ή **κυρτή επιφάνεια** του κυλίνδρου. Η πλευρά ΒΓ λέγεται **γενέτειρα** του κυλίνδρου και ισούται με το ύψος του υ.

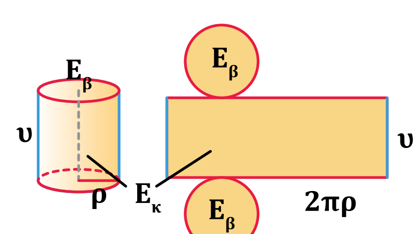


Να διερευνήσετε το είδος του στερεού που παράγεται από την περιστροφή ενός ορθογωνίου, ανοίγοντας την εφαρμογή.

Να διερευνήσετε το ανάπτυγμα του κυλίνδρου, ανοίγοντας την εφαρμογή.

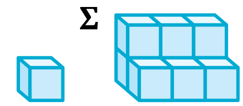
Εμβαδόν επιφάνειας κυλίνδρου

Ας θεωρήσουμε το ανάπτυγμα ενός κυλίνδρου. Είναι φανερό ότι το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κυλίνδρου ισούται με το εμβαδόν του ορθογωνίου που σχηματίζεται, οπότε ισούται με το γινόμενο της περιμέτρου της βάσης επί το ύψος του κυλίνδρου. Η περίμετρος της βάσης ισούται με το μήκος του κύκλου, δηλαδή 2πρ. Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κυλίνδρου, πρέπει στο εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας να προσθέσουμε τα εμβαδά των δύο βάσεων.



- Το εμβαδόν $\mathbf{E_κ}$ της κυρτής επιφάνειας και το εμβαδόν $\mathbf{E_{ολ}}$ της ολικής επιφάνειας ενός κυλίνδρου με ακτίνα βάσης **ρ** και ύψος **υ** είναι: $\mathbf{E_κ = 2πρυ}$, $\mathbf{E_{ολ} = 2πρυ+2πρ^2}$

Η έννοια του όγκου



Ας θεωρήσουμε ένα στερεό σώμα Σ και έναν κύβο με ακμή μήκους μίας μονάδας. Ο θετικός αριθμός που δηλώνει με πόσες επαναλήψεις του κύβου σχηματίζεται το στερεό σώμα Σ, λέγεται όγκος του σώματος.

Να λύσετε τη *Μαθηματική πρόκληση* (Pisa 2003) με τίτλο: «Συλλογισμός με μικρούς κύβους».

Μονάδες μέτρησης όγκου

Ως μονάδα μέτρησης όγκου θεωρούμε έναν κύβο με ακμή μήκους 1 μέτρο (m). Ο όγκος του ισούται με 1 κυβικό μέτρο (m^3). Οι κυριότερες υποδιαιρέσεις του κυβικού μέτρου είναι:

α) Το **κυβικό δεκατόμετρο** (dm^3) που είναι όγκος κύβου με ακμή 1 dm. Αφού 1 m = 10 dm, τότε: $1m^3 = 10^3 dm^3 = 1000\ dm^3$ και $1\ dm^3 = \frac{1}{1000}\ m^3 = 0{,}001\ m^3$

β) Το **κυβικό εκατοστόμετρο** (cm^3) είναι ο όγκος κύβου με ακμή 1 cm τότε: 1m = 10dm = 100 cm, οπότε $1m^3 = 10^3\ dm^3 = 100^3\ cm^3$. Αντίστροφα ισχύει ότι: $1\ cm^3 = \frac{1}{1000}\ dm^3 = \frac{1}{1000000}\ m^3$

γ) Το **κυβικό χιλιοστόμετρο** (mm^3) είναι ο όγκος κύβου με ακμή 1 mm. Ισχύει ότι 1 m = 10 dm = 100 cm = 1000 mm, οπότε $1\ m^3 = 10^3\ dm^3 = 100^3\ cm^3 = 1000^3\ mm^3$.

Αντίστροφα ισχύει ότι: $1\ mm^3 = \frac{1}{1000}\ cm^3 = \frac{1}{1000000}\ dm^3 = \frac{1}{1000000000}\ m^3$

Κατά τις μετρήσεις του όγκου των υγρών συνηθίζουμε να ονομάζουμε το dm^3 λίτρο (lt), δηλαδή $1\ lt = 1000\ cm^3$. Το cm^3 λέγεται χιλιοστόλιτρο (ml).

Όγκος πρίσματος

Συμβολίζουμε με V τον όγκο του πρίσματος. Ειδικά πρίσματα είναι το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και ο κύβος. Για αυτά τα γεωμετρικά στερεά γνωρίζουμε ότι:

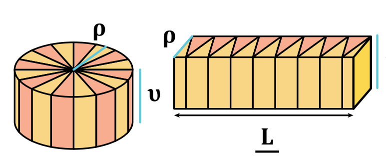
Ο όγκος κύβου με ακμή **α** είναι: $\mathbf{V = α^3}$
Ο όγκος ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις **α, β, γ** είναι: $\mathbf{V = α \cdot β \cdot γ}$ (1)

Επειδή αβ είναι το εμβαδόν της βάσης ($E_β$) ενός ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου και γ το ύψος (υ), ο τύπος (1) γίνεται: $V = E_β \cdot υ$. Ο τύπος αυτός ισχύει γενικά για οποιοδήποτε πρίσμα.
Ο όγκος V πρίσματος ισούται με το γινόμενο του εμβαδού της βάσης του επί το ύψος. Δηλαδή: $\mathbf{V = E_β \cdot υ}$

Υπολογισμός του όγκου κυλίνδρου

Ο όγκος ενός κυλίνδρου δεν αλλάζει αν τον τεμαχίσουμε σε «κομμάτια πίτας» ίσου μεγέθους και τα τακτοποιήσουμε όπως φαίνεται στη διπλανή εικόνα, παίρνοντας ένα στερεό που κατά προσέγγιση είναι ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

Να διερευνήσετε με την ψηφιακή εφαρμογή τη μορφή ενός κανονικού πρίσματος όταν αυξάνεται το πλήθος των πλευρών της βάσης του.



Όσο πιο στενά είναι τα μέρη, τόσο περισσότερο ικανοποιητικά προσεγγίζουμε το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.
Για τον όγκο του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου ισχύει: $V = \frac{L}{2} \cdot ρ \cdot υ$

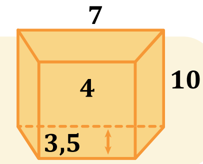
Αν αντικαταστήσουμε το L με το 2πρ, παίρνουμε: $V = \frac{2\pi\rho}{2} \cdot \rho \cdot \upsilon$

Εφόσον ο κύλινδρος και το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχουν τον ίδιο όγκο, ισχύει:

Ο όγκος ενός κυλίνδρου ισούται με το γινόμενο του εμβαδού της βάσης του επί το ύψος, δηλαδή:
$V = E_\beta \cdot \upsilon$ ή $V = \pi\rho^2 \cdot \upsilon$.

Εφαρμογή 1

Να υπολογίσετε τον όγκο του ορθού πρίσματος του οποίου η βάση είναι τραπέζιο (οι αριθμοί δίνονται σε cm).



Απάντηση

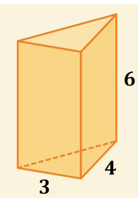
Η βάση του πρίσματος είναι τραπέζιο με εμβαδόν: $E_\beta = \frac{B+\beta}{2} \cdot \upsilon_{\tau\rho} = \frac{7+4}{2} \cdot 3{,}5 = 19{,}25$ (cm^2).

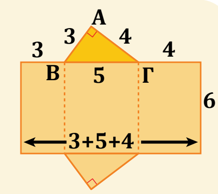
Για να βρούμε τον όγκο του ορθού πρίσματος πολλαπλασιάζουμε το εμβαδόν του τραπεζίου με το ύψος του πρίσματος, οπότε: $V = E_\beta \cdot \upsilon = 19{,}25 \cdot 10 = 192{,}5$(cm^3).

Εφαρμογή 2

α) Να βρείτε πόσο χαρτόνι (σε cm^2) χρειάζεται για να κατασκευαστεί το ορθό πρίσμα του σχήματος, του οποίου οι βάσεις είναι ορθογώνια τρίγωνα με κάθετες πλευρές 3 cm και 4 cm και το ύψος είναι 6 cm.

β) Να υπολογίσετε τον όγκο του πρίσματος.





Απάντηση

α) Οι βάσεις του πρίσματος είναι ορθογώνια τρίγωνα με κάθετες πλευρές 3 cm και 4 cm. Άρα, το εμβαδόν κάθε βάσης θα είναι: $E_\beta = \frac{1}{2}\beta \cdot \upsilon = \frac{1}{2} 3 \cdot 4 = 6$ (cm^2).

Για να βρούμε την περίμετρο της βάσης υπολογίζουμε τη ΒΓ η οποία είναι υποτείνουσα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, οπότε από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε: $B\Gamma^2 = 3^2+4^2$ ή $B\Gamma^2 = 25$ ή $B\Gamma = 5$ (cm)

Επομένως: E_π = (περίμετρος βάσης)·(ύψος) = 12·6 = 72 (cm^2) και $E_{o\lambda} = E_\pi + 2E_\beta = 72+2\cdot 6 = 84$ (cm^2)

β) Ο όγκος του ορθού πρίσματος είναι: $V = E_\beta \cdot \upsilon = 6 \cdot 6 = 36$ (cm^3).

Εφαρμογή 3

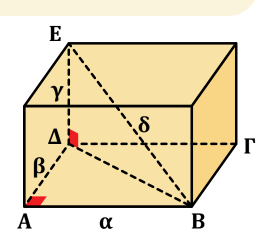
Οι διαστάσεις ενός ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου είναι α = 3 cm, β = 2 cm και γ = 6 cm.

α) Διαγώνιος (δ) του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο κορυφές που δεν ανήκουν στο ίδιο επίπεδο. Να υπολογίσετε μία διαγώνιό του.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειάς του.

γ) Να βρείτε τον όγκο του.

Απάντηση



α) Το τμήμα ΒΔ είναι η διαγώνιος της βάσης. Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε: $B\Delta^2 = \alpha^2+\beta^2$. Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΕΔΒ έχουμε: $EB^2 = \Delta B^2 + E\Delta^2$.

Άρα: $\delta^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ ή $\delta = \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$ ή $\delta = \sqrt{6^2+2^2+3^2} = \sqrt{36+4+9} = \sqrt{49} = 7$ (cm).

β) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου είναι: $E_{ολ} = 2αβ+2βγ+2γα = 2·2·3+2·3·6+2·6·2 = 12+36+24 = 72(cm^2)$.

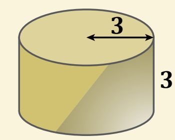
γ) Ο όγκος του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου είναι: $V = α·β·γ = 2·3·6 = 36(cm^3)$.

Εφαρμογή 4

Μία κλειστή δεξαμενή αποθήκευσης καυσίμων έχει σχήμα κυλίνδρου με ύψος 3 m και ακτίνα βάσης ρ = 3 m. Είναι κατασκευασμένη από ειδική λαμαρίνα που κοστίζει 30 € το τετραγωνικό μέτρο.

α) Ποιο είναι το κόστος της λαμαρίνας για την κατασκευή της δεξαμενής;

β) Πόσα χρήματα θα πληρώσουμε αν γεμίσουμε τη δεξαμενή με πετρέλαιο το οποίο στοιχίζει 1,5 € το λίτρο;



Απάντηση

α) Πρέπει να βρούμε πόσα τετραγωνικά μέτρα λαμαρίνας χρησιμοποιήθηκαν, δηλαδή το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και να το πολλαπλασιάσουμε με το κόστος 30 € ανά τετραγωνικό μέτρο. Η κυρτή επιφάνεια έχει εμβαδόν: $E_κ = 2πρυ \approx 2·3,14·3·3 = 56,52\ (m^2)$. Καθεμία από τις βάσεις έχει εμβαδόν: $E_β = πρ^2 \approx 3,14·3^2 = 28,26\ (m^2)$. Το ολικό εμβαδόν του κυλίνδρου είναι: $E_{ολ} = E_κ+2E_β = 56,52+2·28,26 = 113,04\ (m^2)$. Επομένως, το κόστος της λαμαρίνας είναι 113,04·30 = 3391,2 €.

β) Ο όγκος της κυλινδρικής δεξαμενής είναι: $V = πρ^2υ \approx (3,14)·3^2·3 = 84,78\ (m^3)$. Ο όγκος του πετρελαίου σε λίτρα είναι: V = 84,78·1000 = 84780 (lt). Το κόστος είναι: 84780·1,5 = 127170 €.

Εφαρμογή 5

Ένας κύλινδρος έχει ακτίνα βάσης 3 cm και το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειάς του είναι $48π\ (cm^2)$. Να υπολογίσετε: **α)** το ύψος του κυλίνδρου **β)** τον όγκο του κυλίνδρου.

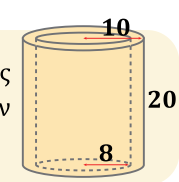
Απάντηση

α) Για το ύψος του κυλίνδρου έχουμε: $E_κ = 48π$ ή $2·π·ρ·υ = 48π$ ή $2·π·3·υ = 48π$ ή $6πυ = 48π$ ή $υ=\frac{48π}{6π}$ ή υ=8(cm).

β) Ο όγκος του κυλίνδρου είναι: $V = πρ^2υ = π·3^2·8 = 72π(cm^3)$.

Εφαρμογή 6

Ένα μονωτικό δοχείο είναι κατασκευασμένο όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Οι διαστάσεις δίνονται σε εκατοστά (cm). Να βρείτε τον όγκο του μονωτικού υλικού που υπάρχει μεταξύ των δύο κυλίνδρων.



Απάντηση

Η ακτίνα του μεγάλου κυλίνδρου είναι 10 cm και του μικρού 8 cm. Το ύψος των δύο κυλίνδρων είναι 20 cm. Για να βρούμε τον όγκο του μονωτικού υλικού, αφαιρούμε από τον όγκο του μεγάλου κυλίνδρου, τον όγκο του μικρού κυλίνδρου. Έτσι έχουμε: $V = π·10^2·20–π·8^2·20 = 20π(100–64) = 720π\ (cm^3)$.

Ερωτήσεις για Αυτοαξιολόγηση

1. Ένας κύβος είναι ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο; Το αντίστροφο ισχύει;
2. Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας ενός κύβου είναι $150\ cm^2$. Ποιο είναι το μήκος μίας ακμής του;

3 Πώς μεταβάλλεται ο όγκος ενός πρίσματος αν το ύψος του διπλασιαστεί και το εμβαδόν βάσης παραμένει το ίδιο;

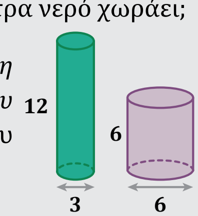
4 Να εξηγήσετε πώς μεταβάλλεται ο όγκος ενός πρίσματος αν το ύψος του διπλασιαστεί και το εμβαδόν βάσης μειωθεί στο μισό.

5 Η Ελένη ισχυρίζεται ότι αν το πλήθος των πλευρών των βάσεων του πρίσματος αυξάνεται συνεχώς, τότε προσεγγιστικά οι βάσεις του πρίσματος γίνονται βάσεις του κυλίνδρου και το πρίσμα γίνεται κύλινδρος. Επομένως, ο τύπος του όγκου πρίσματος ισχύει και στον κύλινδρο. Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό; Να αιτιολογήσετε.

6 Η κυρτή επιφάνεια κυλίνδρου είναι 301,44 m^2. Η ακτίνα της βάσης είναι 4 m. Να βρείτε το ύψος του κυλίνδρου.

7 Η ακτίνα της βάσης ενός κυλινδρικού δοχείου είναι 1,4 m και το ύψος του 2 m. Πόσα λίτρα νερό χωράει;

8 Η Μαρία ισχυρίζεται: *«Αφού η διάμετρος του δεύτερου κυλίνδρου είναι διπλάσια από τη διάμετρο του πρώτου κυλίνδρου και το ύψος του πρώτου είναι διπλάσιο από το ύψος του δεύτερου, τα δύο δοχεία θα έχουν την ίδια χωρητικότητα».* Να εξετάσετε την ορθότητα του συλλογισμού.



9 Οι κύλινδροι, που προκύπτουν από την περιστροφή ορθογώνιου ΑΒΓΔ γύρω από τις πλευρές ΑΒ και ΑΔ έχουν τον ίδιο όγκο;

10 Μία κυλινδρική δεξαμενή έχει βάθος 4 m και όγκο 36π m^3. Ποια είναι η ακτίνα της βάσης;

Να κάνετε την *Εργασία με προεκτάσεις* με τίτλο: «Οι σχολικές ζαρντινιέρες».

Ασκήσεις και Προβλήματα

1 Θέλουμε να βάψουμε τους τοίχους μίας σχολικής αίθουσας σχήματος ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις: πλάτος 5 m, μήκος 6m και ύψος 3 m. Πόσα κιλά χρώμα πρέπει να αγοράσουμε, αν είναι γνωστό ότι ένα κιλό χρώμα καλύπτει περίπου 8 m^2;

2 Οι διαστάσεις ενός ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου είναι α = 6 cm, β = 3 cm και γ = 5 cm.
- **α)** Να σχεδιάσετε σε χαρτόνι το ανάπτυγμά του.
- **β)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειάς του.
- **γ)** Να βρείτε τον όγκο του.

3 Οι διαστάσεις ενός ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου είναι ανάλογες προς τους αριθμούς 2, 3 και 5. Αν το εμβαδόν της ολικής επιφάνειάς του είναι 558 cm^2, να υπολογίσετε τον όγκο του.

4 Ένα δοχείο έχει σχήμα ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου με βάση τετράγωνο πλευράς 1 m. Το δοχείο περιέχει νερό μέχρι το ύψος των 30 cm. Αν τοποθετηθεί σε αυτό μία πέτρα, τότε το ύψος του νερού ανεβαίνει στα 50 cm. Ποιος είναι ο όγκος της πέτρας;

5 Μια πισίνα έχει διαστάσεις 12 m μήκος, 7 m πλάτος και 2 m ύψος. Να βρείτε:
- **α)** Την εσωτερική επιφάνεια της πισίνας.
- **β)** Πόσα τετράγωνα πλακάκια πλευράς 30 cm χρειαζόμαστε για να την επενδύσουμε εσωτερικά.
- **γ)** Πόσα κυβικά μέτρα νερού χρειάζονται για να γεμίσει;

6 Οι διαστάσεις ενός ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου είναι 8, 9, 12 cm. Να υπολογίσετε μία διαγώνιό του.

7 Αν η διαγώνιος κύβου είναι $\delta = 11\sqrt{3}$ cm, να υπολογίσετε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας και τον όγκο του.

8 Κύβος έχει εμβαδόν ολικής επιφάνειας $E_{ολ} = 294\ cm^2$.

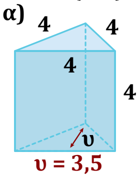
α) Να υπολογίσετε την ακμή του κύβου και το εμβαδόν μίας έδρας του.

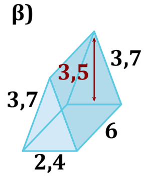
β) Να υπολογίσετε τον όγκο του κύβου.

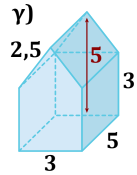
γ) Να σχεδιάσετε και να υπολογίσετε μία διαγώνιο του κύβου.

9 Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας ενός ορθού τετραγωνικού πρίσματος με βάση ρόμβο είναι $E_π = 270\ cm^2$. Το ύψος του πρίσματος είναι 10 cm. Να βρείτε το μήκος της πλευράς του ρόμβου.

10 Να σχεδιάσετε τα αναπτύγματα των ορθών πρισμάτων και να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας αυτών. Όλες οι μετρήσεις είναι σε εκατοστά (cm).

α)


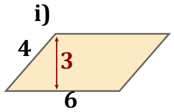
β)


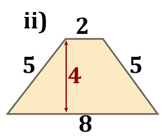
γ)


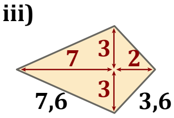
11 Ένα πρίσμα έχει ύψος 8 cm και η βάση του φαίνεται στο αντίστοιχο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας κάθε πρίσματος.

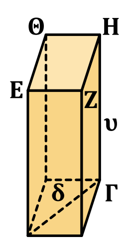
β) Να υπολογίσετε τον όγκο κάθε πρίσματος.

i)


ii)


iii)


12 **Εργασία σε ομάδες.** Μία διαγώνιος της τετραγωνικής βάσης ενός κανονικού πρίσματος έχει μήκος $δ = \sqrt{50}$ cm και το ύψος του είναι διπλάσιο της ακμής της βάσης του.



α) Να υπολογίσετε την ακμή της βάσης του.

β) Να υπολογίσετε το ύψος του πρίσματος.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του πρίσματος.

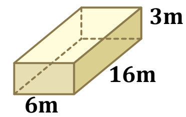
δ) Να υπολογίσετε τον όγκο του πρίσματος.

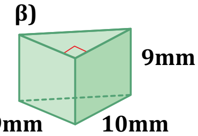
13 Ένα πρίσμα έχει όγκο $72\ cm^3$.

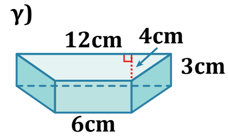
α) Το εμβαδόν της βάσης είναι $12\ cm^2$. Να υπολογίσετε το ύψος του πρίσματος.

β) Το πρίσμα έχει ύψος 8 cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της βάσης.

14 Να υπολογίσετε τους όγκους των παρακάτω πρισμάτων:

α)


β)


γ)


15 Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα κουτί σχήματος ορθού πρίσματος με βάση τετράγωνο, με χαρτόνι εμβαδού $686\ cm^2$. Η παράπλευρη πλευρά του ορθού πρίσματος είναι τριπλάσια της πλευράς της βάσης.

α) Να βρείτε την πλευρά της βάσης του κουτιού, καθώς και το ύψος του.

β) Να βρείτε τον όγκο του κουτιού.

16 Ένα ορθό τριγωνικό πρίσμα έχει βάση ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 5 cm και 12 cm και ύψος ίσο με την υποτείνουσα της βάσης του.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του πρίσματος.

β) Να υπολογίσετε τον όγκο του πρίσματος.

17 Ένα ορθό πρίσμα έχει βάση ισοσκελές τραπέζιο με παράλληλες πλευρές 2 cm και 10 cm, τις άλλες πλευρές του από 5 cm και ύψος του πρίσματος 12 cm.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του πρίσματος.

β) Να υπολογίσετε τον όγκο του πρίσματος.

18 Να υπολογίσετε τον όγκο του πρίσματος με τριγωνική βάση:

	α)	β)	γ)	δ)
Βάση τριγώνου	6 cm	1,6 m	0,23 m	0,4 km
Ύψος τριγώνου	3 cm	4,8 m	5 dm	125 m
Ύψος πρίσματος	4 cm	5,3 m	1,5 dm	1,75 m

19 **Εργασία μαθητών κατά ζεύγη ή σε μικρές ομάδες.**
Σε ένα εξαγωνικό πρίσμα που έχει βάση κανονικό εξάγωνο, το απόστημα της βάσης του είναι $2\sqrt{3}$ cm και το ύψος του πρίσματος είναι τριπλάσιο από την πλευρά της βάσης του. Να υπολογίσετε:

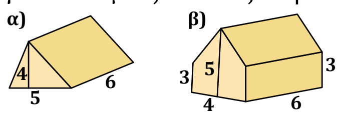
α) Την πλευρά και το εμβαδόν της βάσης του πρίσματος.

β) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειάς του.

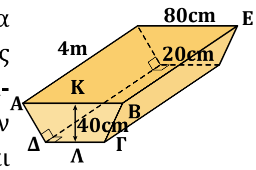
γ) Τον όγκο του πρίσματος.

20 Δίνεται πρίσμα με βάση ισόπλευρο τρίγωνο. Αν γνωρίζετε ότι το ύψος του είναι εννιαπλάσιο από την πλευρά του ισόπλευρου τριγώνου της βάσης του και η παράπλευρη επιφάνειά του έχει εμβαδόν $432\ cm^2$, να υπολογίσετε τον όγκο του.

21 Να υπολογίσετε τον όγκο καθεμίας από τις παρακάτω σκηνές. Όλες οι μετρήσεις είναι σε μέτρα.



22 Στο διπλανό σχήμα έχουμε μία ξύλινη κατασκευή σχήματος ορθού πρίσματος για να βάζουμε την τροφή των ζώων (ταΐστρα). Η βάση ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο. Οι διαστάσεις είναι ΒΕ = 4 m, ΚΛ = 40 cm, ΑΒ = 80 cm, ΓΔ = 20 cm. Να βρείτε πόσα τετραγωνικά μέτρα σανίδια χρειαζόμαστε για να την κατασκευάσουμε.



23 Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας των κυλίνδρων με ύψος υ και ακτίνα βάσης ρ.

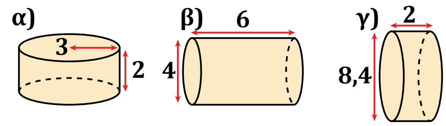
α) υ = 20 m και ρ = 5 m.
β) υ = 30 cm και ρ = 10 cm.
γ) υ = 18 mm και ρ = 5 mm.

24 Οι κονσέρβες μιας εταιρείας έχουν σχήμα κυλίνδρου με ύψος 17 cm και ακτίνα βάσης 6 cm. Παραγγέλθηκαν στο τυπογραφείο 500 ετικέτες που θα καλύψουν την κυρτή επιφάνεια της κάθε κονσέρβας. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χαρτιού που θα χρειαστεί για να τυπωθούν οι ετικέτες.

25 Ο όγκος ενός κυλίνδρου είναι 500 cm^3.

α) Η βάση του έχει ακτίνα 3,5 cm. Να βρείτε το ύψος του.
β) Έχει ύψος 20 cm. Να βρείτε την ακτίνα της βάσης του.

26 Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο των κυλίνδρων. Οι μετρήσεις είναι σε m.



27 Να υπολογίσετε τον όγκο των κυλίνδρων με ύψος υ και ακτίνα βάσης ρ.

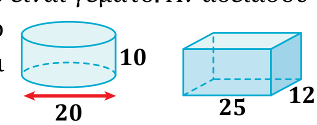
α) υ = 2 m και ρ = 8,4 m.
β) υ = 6 cm και ρ = 5 cm.
γ) υ = 10 mm και ρ = 8 mm.

28 Να βρείτε τον όγκο του κυλίνδρου στις ακόλουθες περιπτώσεις:

α) Με ακτίνα βάσης 2 cm και ύψος 4 cm.
β) Με διάμετρο βάσης 6 cm και ύψος 5 cm.
γ) Με μήκος του κύκλου της βάσης 62,8 cm και ύψος 3 cm.

29 Κυλινδρικός κορμός δέντρου έχει μήκος 6 m και διάμετρο βάσης 0,4 m. Η τιμή της ξυλείας είναι 550 € ανά κυβικό μέτρο. Πόσο αξίζει ο κορμός;

30 Στα ακόλουθα σχήματα οι μετρήσεις δίνονται σε μέτρα. Το πρώτο δοχείο είναι γεμάτο. Αν αδειάσουμε το νερό στο δεύτερο δοχείο, να βρείτε μέχρι ποιο ύψος θα φθάσει.



9.2 Εμβαδόν και όγκος πυραμίδας και κώνου

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθήτριες και οι μαθητές να μπορούν:

- Να αξιοποιούν τα αναπτύγματα πυραμίδων και κώνων για να προσδιορίζουν το εμβαδόν της επιφάνειάς τους.
- Να επιλύουν προβλήματα υπολογισμού εμβαδού πυραμίδας και κώνου.
- Να συσχετίζουν τον όγκο πρίσματος και πυραμίδας καθώς και κυλίνδρου και κώνου, που έχουν την ίδια βάση και το ίδιο ύψος, με εμπειρικούς τρόπους.

Διερεύνηση 1: Σχεδίαση πυραμίδας -εύρεση του εμβαδού της ολικής επιφάνειας

Να εργαστείτε ανά δύο. Να συζητήσετε τα αποτελέσματά σας στην τάξη.
Καθεμία από τις παρακάτω πυραμίδες έχει τετράγωνη βάση.

Πυραμίδα του Χέοπα στην Αίγυπτο
Πλευρά ≈ 230 m, Παράπλευρο ύψος ≈ 186 m

Πυραμίδα του Λούβρου στο Παρίσι
Πλευρά ≈ 35 m, Παράπλευρο ύψος ≈ 28 m

Παράπλευρο ύψος μιας κανονικής πυραμίδας είναι το ύψος οποιασδήποτε παράπλευρης έδρας της, το οποίο φέρνουμε από την κορυφή της.

α) Να σχεδιάσετε σε κλίμακα το ανάπτυγμα μίας από τις πυραμίδες. Ποια είναι η κλίμακα του σχεδίου;

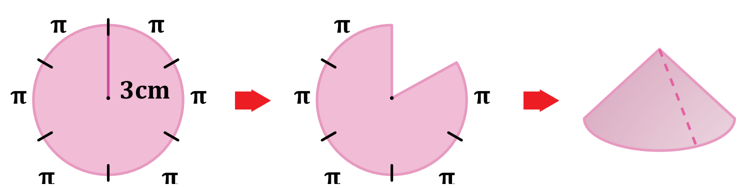
β) Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πραγματικής πυραμίδας που επιλέξαμε στο μέρος (α). Να εξηγήσετε πώς βρήκαμε τη απάντησή μας.

γ) Να σχεδιάσετε το ανάπτυγμα μίας μη τετραγωνικής πυραμίδας και να βρείτε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας. Να εξηγήσετε πώς βρήκαμε την απάντησή μας.

Διερεύνηση 2: Σχεδίαση αναπτύγματος κώνου - εύρεση εμβαδού της ολικής επιφάνειας

Να εργαστείτε ανά δύο. Να συζητήσετε τα αποτελέσματά σας στην τάξη.

Να σχεδιάσετε με τον διαβήτη έναν κυκλικό δίσκο ακτίνας 3 cm. Να χωρίσετε τον κύκλο σε έξι ίσα τόξα και να σημειώσετε το μήκος καθενός. Να κόψετε με το ψαλίδι κατά μήκος του κύκλου. Στη συνέχεια να αφαιρέσετε ένα από τα ίσα μέρη. Τέλος, να ενώσετε τον κυκλικό τομέα στα δύο ευθύγραμμα τμήματα, να τα κολλήσετε και να σχηματίσετε την κυρτή επιφάνεια του κώνου. Τέλος να προσθέσετε τον κυκλικό δίσκο της βάσης.



α) Να εξηγήσετε γιατί η βάση του κώνου είναι κύκλος. Ποιο είναι το μήκος και η ακτίνα της βάσης;

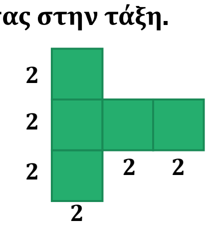
β) Ποιο είναι το εμβαδόν του αρχικού κυκλικού δίσκου; Ποιο είναι το εμβαδόν του κυκλικού τομέα που λείπει;

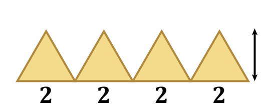
γ) Να περιγράψετε την επιφάνεια του κώνου, συμπεριλαμβανομένης της βάσης. Να χρησιμοποιήσετε την περιγραφή σας για να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας.

Διερεύνηση 3: Πειραματική εύρεση του όγκου πυραμίδας

Να εργαστείτε ανά δύο. Να συζητήσετε τα αποτελέσματά σας στην τάξη.

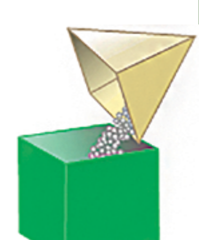
Να σχεδιάσετε σε χαρτόνι τα δύο αναπτύγματα και να κατασκευάσετε έναν ανοιχτό κύβο (πρίσμα) και μία ανοιχτή τετραγωνική πυραμίδα. Τα δύο στερεά σώματα πρέπει να έχουν την ίδια τετραγωνική βάση και το ίδιο ύψος.





α) Η Θεανώ ισχυρίζεται ότι ο όγκος του κύβου γράφεται $V_κ = E_β \cdot υ$. Ισχύει ο τύπος; Να αιτιολογήσετε.

β) Να γεμίσετε την τετραγωνική πυραμίδα με ρύζι και να ρίξετε το ρύζι στο πρίσμα. Να επαναλάβετε τη διαδικασία μέχρι να γεμίσει το πρίσμα. Πόσα «γεμίσματα» με την πυραμίδα χρειάζονται για να γεμίσει το πρίσμα; Πώς σχετίζεται ο όγκος της πυραμίδας με τον όγκο του πρίσματος;



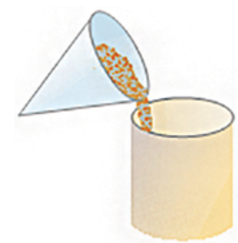
γ) Να χρησιμοποιήσετε τις παρατηρήσεις σας από τη σύγκριση των όγκων των δύο στερεών σωμάτων για να γράψετε έναν τύπο για τον όγκο **V** της πυραμίδας.

δ) Ο τύπος του όγκου **V** ισχύει για όλες τις πυραμίδες; Να εξηγήσετε τον συλλογισμό σας.

Διερεύνηση 4: Πειραματική εύρεση του όγκου κώνου

Να εργαστείτε ανά δύο. Να συζητήσετε τα αποτελέσματά σας στην τάξη.
Διαθέτουμε έναν ανοιχτό κώνο και έναν ανοιχτό κύλινδρο που έχουν το ίδιο ύψος και την ίδια κυκλική βάση.

α) Να βρείτε τον όγκο του κυλίνδρου.
β) Να γεμίσετε τον κώνο με ρύζι και να ρίξετε το ρύζι στον κύλινδρο. Να επαναλάβετε τη διαδικασία μέχρι να γεμίσει ο κύλινδρος. Πόσα «γεμίσματα» με τον κώνο χρειάζονται για να γεμίσει ο κύλινδρος; Πώς σχετίζεται ο όγκος του κώνου με τον όγκο του κυλίνδρου;
γ) Να χρησιμοποιήσετε το αποτέλεσμα και να γράψετε έναν τύπο για τον όγκο **V** του κυλίνδρου;.
δ) Ο τύπος για τον όγκο **V** του κώνου ισχύει και για όλους τους κώνους; Να εξηγήσετε τον συλλογισμό σας.



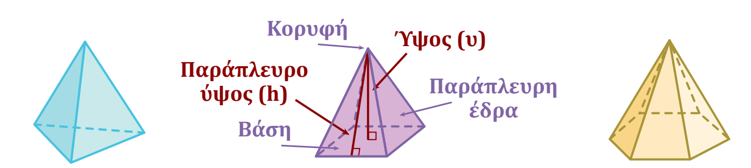
Να διερευνήσετε στην ψηφιακή εφαρμογή το ανάπτυγμα της πυραμίδας.

Να διερευνήσετε στην ψηφιακή εφαρμογή τη σχέση των όγκων πρίσματος και πυραμίδας με την ίδια βάση και το ίδιο ύψος.

Να διερευνήσετε στην ψηφιακή εφαρμογή το ανάπτυγμα κώνου εκ περιστροφής.

Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες μάθησης

Πολλές γνωστές πυραμίδες έχουν τετράγωνες βάσεις, ωστόσο, η βάση μιας πυραμίδας μπορεί να είναι οποιοδήποτε πολύγωνο. Τα παρακάτω στερεά σώματα μας δίνουν την έννοια της πυραμίδας.



Τριγωνική Βάση **Τετραγωνική Βάση** **Εξαγωνική Βάση**

Πυραμίδα ονομάζεται το στερεό σώμα του οποίου μία έδρα είναι πολύγωνο και όλες οι άλλες έδρες του είναι τρίγωνα με κοινή κορυφή.

Το πολύγωνο ονομάζεται **βάση** της πυραμίδας, ενώ οι άλλες έδρες ονομάζονται παράπλευρες έδρες της πυραμίδας. Το ευθύγραμμο τμήμα που φέρεται από την κορυφή της πυραμίδας και είναι κάθετο στη βάση της ονομάζεται **ύψος** (υ) της πυραμίδας. Οι παράπλευρες ακμές έχουν κοινό άκρο την **κορυφή** της πυραμίδας.
Μια πυραμίδα που έχει βάση τρίγωνο, τετράπλευρο, πεντάγωνο κ.λπ. λέγεται αντίστοιχα **τριγωνική**, **τετραπλευρική**, **πενταγωνική** κ.λπ. Η τριγωνική πυραμίδα έχει συνολικά 4 έδρες, γι' αυτό λέγεται και **τετράεδρο.**
Οι **παράπλευρες έδρες** κάθε κανονικής πυραμίδας είναι ίσα και ισοσκελή τρίγωνα. Το ύψος μιας οποιασδήποτε παράπλευρης έδρας της, η οποία φέρεται από την κορυφή της, λέγεται **παράπλευρο ύψος** (h) της κανονικής πυραμίδας. Μια τριγωνική πυραμίδα που έχει όλες τις ακμές της ίσες ονομάζεται **κανονικό τετράεδρο.**

Κανονική λέγεται κάθε πυραμίδα με βάση κανονικό πολύγωνο, της οποίας το ύψος τέμνει τη βάση στο κέντρο της.

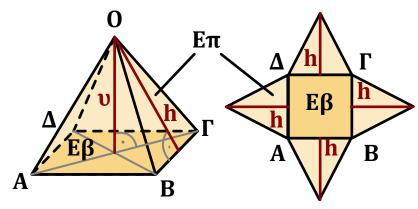
Εμβαδόν επιφάνειας πυραμίδας

Η ολική επιφάνεια της πυραμίδας αποτελείται από δύο μέρη: την επιφάνεια των παράπλευρων εδρών της, που ονομάζεται παράπλευρη επιφάνεια και την επιφάνεια της βάσης της. Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας E_{π} μιας πυραμίδας, υπολογίζουμε το εμβαδόν κάθε παράπλευρης έδρας (που είναι τρίγωνο) και προσθέτουμε αυτά τα εμβαδά.

Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας πυραμίδας **$Ε_{ολ}$** είναι ίσο με το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας **$Ε_π$** και το εμβαδόν της βάσης **$Ε_β$**, δηλαδή:

$$\mathbf{Ε_{ολ} = Ε_π + Ε_β}$$

Όταν η πυραμίδα είναι κανονική, η παράπλευρη επιφάνειά της αποτελείται από ίσα ισοσκελή τρίγωνα, τα οποία έχουν ίσα ύψη h, όπως φαίνεται στο ανάπτυγμα. Η παράπλευρη επιφάνεια μιας κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας θα έχει εμβαδόν:



$Ε_π=(ΟΑΒ)+(ΟΒΓ)+(ΟΓΔ)+(ΟΔΑ)$

$=\frac{1}{2}ΑΒ \cdot h + \frac{1}{2}ΒΓ \cdot h + \frac{1}{2}ΓΔ \cdot h + \frac{1}{2}ΔΑ \cdot h = \frac{1}{2}(ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΑ) \cdot h$

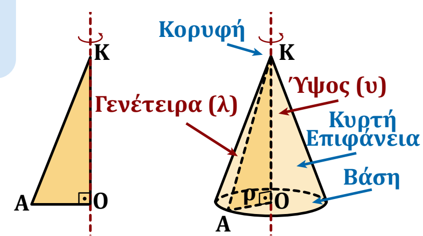
ή $Ε_π = \frac{1}{2}$ (περίμετρος βάσης) · (παράπλευρο ύψος).

Το συμπέρασμα αυτό ισχύει για κάθε κανονική πυραμίδα.

$$\mathbf{Ε_π = \frac{1}{2} Π_β \cdot h}$$

Ο κώνος

Διάφορα στερεά σώματα όπως κοχύλια, κωνοφόρα δένδρα, αποκριάτικα καπέλα και κωνικά δοχεία δίνουν μια έννοια του κώνου. Ένας κώνος μπορεί να προκύψει από την περιστροφή ενός ορθογώνιου τριγώνου ΟΑΚ γύρω από μία κάθετη πλευρά του, π.χ. την ΚΟ.



Κώνος λέγεται το στερεό σώμα που παράγεται από την περιστροφή ενός ορθογώνιου τριγώνου γύρω από μία κάθετη πλευρά του.

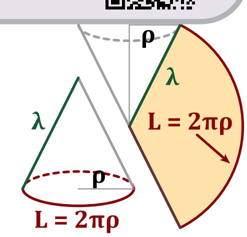
Ο κυκλικός δίσκος που παράγεται από την περιστροφή της άλλης κάθετης πλευράς ΟΑ του ορθογώνιου τριγώνου λέγεται **βάση** του κώνου και η ΟΑ = **ρ** λέγεται **ακτίνα** του κώνου. Η απόσταση ΚΟ της κορυφής του κώνου από τη βάση είναι το **ύψος** του κώνου. Η περιστροφή της υποτείνουσας ΚΑ δημιουργεί την κυρτή (ή παράπλευρη) επιφάνεια του κώνου, γι'αυτό η ΚΑ λέγεται γενέτειρα του κώνου. Συνήθως τη **γενέτειρα** την παριστάνουμε με λ.

Να διερευνήσετε με την ψηφιακή εφαρμογή την παραγωγή του κώνου με περιστροφή.

Εμβαδόν επιφάνειας κώνου

Να διερευνήσετε με την ψηφιακή εφαρμογή το ανάπτυγμα κώνου.

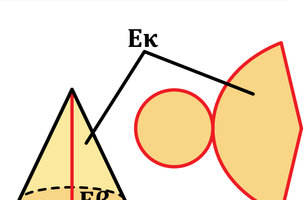
Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας $Ε_κ$ του κώνου, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι το ανάπτυγμά της προκύπτει αν «ξετυλίξουμε» τον κώνο, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Από το ανάπτυγμα του κώνου βλέπουμε ότι το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας είναι το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα, που έχει ακτίνα τη γενέτειρα λ του κώνου και μήκος τόξου το μήκος του κύκλου της βάσης, το οποίο είναι ίσο με 2πρ.



Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας ενός κώνου είναι ίσο με το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα, που έχει ακτίνα τη γενέτειρα **λ** του κώνου και μήκος τόξου το μήκος του κύκλου της βάσης του κώνου.

Επομένως $Ε_κ = \frac{1}{2} \cdot (2πρ) \cdot λ$ ή $\mathbf{Ε_κ = πρλ}$

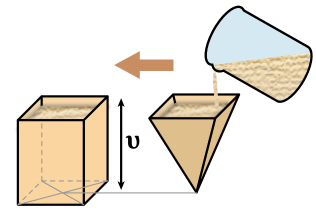
Σημείωση:
Ο προηγούμενος τύπος προκύπτει και ως εξής: $Ε_κ = \frac{2πρ}{2πλ} \cdot π \cdot λ^2 = πρλ$.



Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κώνου είναι $Ε_{ολ} = Ε_β + Ε_κ$ ή $\mathbf{Ε_{ολ} = πρ^2 + πρλ}$

Όγκος πυραμίδας

Κατασκευάζουμε με χαρτόνι ένα πρίσμα και μια πυραμίδα που να έχουν βάσεις ίσα τετράγωνα και ίσα ύψη. Αν γεμίσουμε διαδοχικά τρεις φορές με ρύζι την πυραμίδα και αδειάσουμε το ρύζι μέσα στο πρίσμα, θα δούμε ότι το πρίσμα γεμίζει τελείως. Η διαπίστωση αυτή ισχύει γενικότερα. Επομένως, με πειράματα διαπιστώνουμε ότι ο όγκος του πρίσματος είναι τριπλάσιος από τον όγκο της πυραμίδας. Αυτό ισχύει και για τον όγκο πυραμίδας με βάση οποιοδήποτε πολύγωνο.



Για τον όγκο πυραμίδας με εμβαδόν βάσης $Ε_β$ και ύψος υ ισχύει: $\mathbf{V = \frac{1}{3} Ε_β \cdot υ}$

Όγκος κώνου

Με την ψηφιακή εφαρμογή να εξετάσετε τι συμβαίνει αν αυξήσουμε τον αριθμό των πλευρών της βάσης μιας κανονικής πυραμίδας. Να διατυπώσετε μία εικασία.

Είδαμε ότι ο όγκος πυραμίδας σχετίζεται με τον όγκο πρίσματος. Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να ανακαλύψουμε ότι ο όγκος του κώνου συνδέεται με τον όγκο του κυλίνδρου. Για τον όγκο κώνου ισχύει:

$$\mathbf{V = \frac{1}{3} \cdot Ε_β \cdot υ \text{ ή } V = \frac{1}{3} π ρ^2 υ}$$

Εφαρμογή 1

Μία κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει βάση με πλευρά α = 6 cm και ύψος 5 cm.

α) Να σχεδιάσετε το ανάπτυγμα και να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας.

β) Να υπολογίσετε τον όγκο της πυραμίδας.

Απάντηση

α) Με βάση τα δεδομένα δημιουργούμε το ανάπτυγμα της πυραμίδας. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

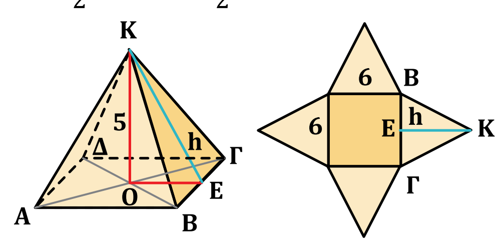
$$h^2 = 3^2 + 5^2 = 34 \text{ ή } h = \sqrt{34} \approx 5{,}8 \text{ (cm)}.$$

Το εμβαδόν μίας παράπλευρης έδρας της πυραμίδας είναι: $(ΚΒΓ) = \frac{1}{2} \cdot ΒΓ \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot h = \frac{6 \cdot 5{,}8}{2} = 17{,}4 \text{ (cm}^2)$.

$Ε_π = 4 \cdot (ΚΒΓ) \approx 4 \cdot 17{,}4 = 69{,}6 \text{ (cm}^2)$ και $Ε_β = 6^2 = 36 \text{ (cm}^2)$.

$Ε_{ολ} = Ε_π + Ε_β = 69{,}6 + 36$ ή $Ε_{ολ} \approx 105{,}6 \text{ (cm}^2)$

β) Ο όγκος της πυραμίδας είναι: $V = \frac{1}{3} \cdot Ε_β \cdot υ = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 5 = 60 \text{ (cm}^3)$.

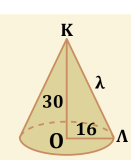


Εφαρμογή 2

Ένας κώνος έχει ύψος υ = 30 cm και ακτίνα βάσης ρ = 16 cm. Να υπολογίσετε:

α) Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κώνου.

β) Τον όγκο του κώνου.



Απάντηση

α) Για να υπολογίσουμε τη γενέτειρα λ του κώνου εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΚ: $λ^2 = 30^2 + 16^2$ ή $λ^2 = 1156$ ή $λ = \sqrt{1156}$ ή $λ = 34$ (cm).

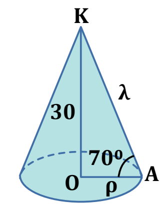
. Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κώνου είναι: $Ε_κ = πρλ \approx (3{,}14) \cdot 16 \cdot 34 = 1708{,}16 \text{ (cm}^2)$

β) Ο όγκος του κώνου είναι: $V = \frac{1}{3} πρ^2 υ \approx \frac{1}{3}(3{,}14) \cdot 16^2 \cdot 30 = 8038{,}4 \text{(cm}^3)$.

Εφαρμογή 3

Ένας κώνος έχει ύψος $υ = 30$ cm και $\hat{A}=70^\circ$ Να υπολογίσετε το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειάς του.

Απάντηση

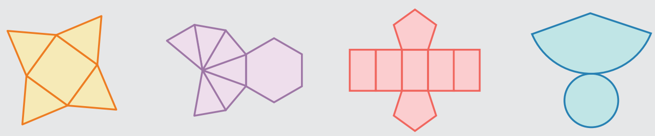


Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΚ έχουμε: $εφ\,70^\circ=\frac{OK}{OA}$ ή $2{,}75\approx\frac{30}{ρ}$ ή $ρ\approx\frac{30}{2{,}75}$ ή $ρ\approx10{,}9$(cm)

$εφ70^\circ=\frac{OK}{OA}$ ή $0{,}94\approx\frac{30}{λ}$ ή $λ\approx\frac{30}{0{,}94}$ ή $λ=31{,}9$(cm). Άρα, $Ε_κ = πρλ = π\cdot10{,}9\cdot31{,}9 \approx 1091{,}8$ (cm^2).

Ερωτήσεις για Αυτοαξιολόγηση

1. Να ονομάσετε τα στερεά που αντιστοιχούν στα παρακάτω αναπτύγματα.



2. Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας ενός κανονικού τετραέδρου ακμής α είναι: $Ε_{ολ}=α^2\sqrt{3}$. Να αιτιολογήσετε.

3. Η Ελίνα ισχυρίζεται ότι η γενέτειρα ενός κώνου είναι πάντα μεγαλύτερη από το ύψος του. Να εξετάσετε τον ισχυρισμό της.

4. Ο Θανάσης ισχυρίζεται ότι το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας ενός κώνου δίνεται από τον τύπο:

   $Ε_{ολ}=\frac{L(λ + ρ)}{2}$, όπου L είναι το μήκος του κύκλου της βάσης, ρ η ακτίνα του και λ η γενέτειρα. Συμφωνείτε ή όχι; Να αιτιολογήσετε τον συλλογισμό σας.

5. Μία πυραμίδα έχει την ίδια βάση και το ίδιο ύψος με ένα πρίσμα. Ποια σχέση συνδέει τον όγκο του πρίσματος και τον όγκο της πυραμίδας;

6. Ένας κώνος έχει την ίδια βάση και το ίδιο ύψος με έναν κύλινδρο. Ποια σχέση συνδέει τον όγκο του πρίσματος και τον όγκο της κυλίνδρου;

7. Πώς μεταβάλλεται ο όγκος μιας πυραμίδας αν διπλασιάσουμε το εμβαδόν της βάσης και διατηρήσουμε το ίδιο ύψος;

8. Πώς αλλάζει ο όγκος ενός κώνου αν το εμβαδόν της βάσης του παραμείνει το ίδιο και το ύψος μειωθεί στο μισό;

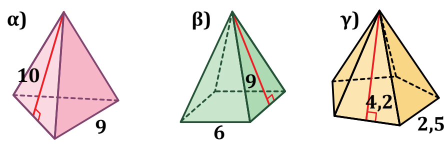
9. Ένα φακελάκι τσαγιού έχει σχήμα κανονικού τετράεδρου με μήκος ακμής 5 cm. Περιέχει περισσότερο τσάι από ένα συμβατικό φακελάκι, το οποίο συνήθως περιέχει το πολύ 10 cm^3 τσάι; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

10. Στο διπλανό σχήμα εννέα σπίρτα σχηματίζουν τέσσερα ισόπλευρα τρίγωνα. Να βρείτε έναν τρόπο να σχηματίσετε τέσσερα τρίγωνα ίδιου σχήματος και ίσου μεγέθους χρησιμοποιώντας μόνο έξι σπίρτα.

Να κάνετε την *Εργασία με προεκτάσεις* με τίτλο: «Μαζεύοντας κωνικά κοχύλια».

Ασκήσεις και Προβλήματα

1 Να βρείτε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας των παρακάτω κανονικών πυραμίδων. Οι διαστάσεις δίνονται σε εκατοστά (cm).

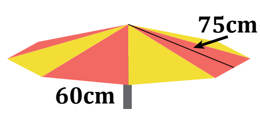


2 Για τις ακόλουθες πυραμίδες το εμβαδόν βάσης είναι $E_β$ και το ύψος υ. Να δημιουργήσετε το ανάπτυγμά τους, να σημειώσετε το παράπλευρο ύψος (h) και να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας:

α) $E_β$ (τετράγωνο με α = 8 cm) και υ = 12 cm.
β) $E_β$ (τετράγωνο με α = 3,5 cm) και υ = 5,5 cm.
γ) $E_β$ (ισόπλευρο τρίγωνο με α = 6 cm) και h = 7 cm.

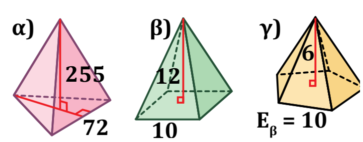
3 Μία ομπρέλα θαλάσσης έχει σχήμα κανονικής οκταγωνικής πυραμίδας.

α) Να υπολογίσετε πόσα τετραγωνικά μέτρα υφάσματος χρειάζονται για την κατασκευή της.



β) Αν το ύφασμα κοστίζει 18 €/m² και ο τεχνίτης πληρώνεται με 12 €/m² πόσο θα στοιχίζει η κατασκευή της ομπρέλας;

4 Να υπολογίσετε τους όγκους των παρακάτω κανονικών πυραμίδων. Οι διαστάσεις δίνονται σε εκατοστά (cm).



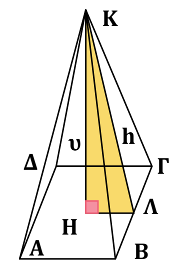
5 Να υπολογίσετε τον όγκο κανονικής πυραμίδας με βάση $E_β$ και ύψος υ.

α) $E_β$ (τετράγωνο με α = 9 cm) και υ = 10 cm.
β) $E_β$ (ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με α = 20 cm) και υ = 30 cm.

6 **Εργασία μαθητών σε μικρές ομάδες.** Η τετράγωνη βάση της πυραμίδας του Λούβρου στο Παρίσι έχει μήκος πλευράς περίπου 35 m και παράπλευρο ύψος περίπου 28 m.

α) Να υπολογίσετε τον όγκο της και να τον συγκρίνετε με αυτόν της τετραγωνικής Πυραμίδας του Χέοπα στην Αίγυπτο (Πλευρά βάσης περίπου 230 m και παράπλευρο ύψος περίπου 186 m).
β) Πόσα τετραγωνικά μέτρα γυαλιού χρησιμοποιήθηκαν για την παράπλευρη επιφάνεια της πυραμίδας;

7 Το διπλανό σχήμα δείχνει μία κανονική τετραγωνική πυραμίδα με ύψος υ = 40 cm και παράπλευρο ύψος h = 41 cm. Να υπολογίσετε:

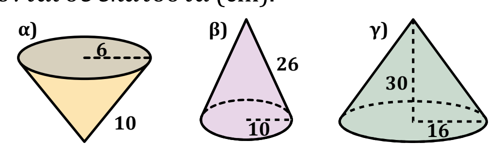


α) Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας της πυραμίδας.
β) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας.
γ) Τον όγκο της πυραμίδας.
δ) Την παράπλευρη ακμή ΚΒ.

8 Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας ισούται με 544 cm² και το παράπλευρο ύψος της είναι 17 cm. Να υπολογίσετε τον όγκο της πυραμίδας.

9 Κανονική πυραμίδα έχει βάση τετράγωνο πλευράς 6 cm και ολική επιφάνεια 96 cm². Να υπολογίσετε τον όγκο της.

10 Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο των ακόλουθων κώνων. Οι διαστάσεις δίνονται σε εκατοστά (cm).



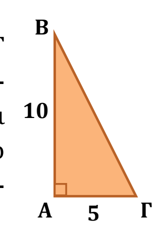
11 Ένα κερί έχει σχήμα κώνου με ακτίνα βάσης ρ = 3 cm και ύψος υ = 10 cm. Να υπολογίσετε πόσα κυβικά εκατοστά κεριού χρειάζονται για τη δημιουργία του κεριού.

12 Να υπολογίσετε τον όγκο του κώνου με τις ακόλουθες μετρήσεις.

α) ρ = 2 cm, υ = 4 cm **β)** ρ = 6 dm, υ = 9 dm
γ) ρ = 7,5 m, υ = 20 m **δ)** δ = 7,5 m, υ = 20 m

13 Εργασία μαθητών κατά ζεύγη ή σε μικρές ομάδες. Οι μετρήσεις του σχήματος δίνονται σε εκατοστά (cm).

α) Περιστρέφουμε το τρίγωνο ΑΒΓ γύρω από έναν άξονα που διέρχεται από το τμήμα ΑΒ. Ποιο είναι το στερεό που παράγεται και ποιο είναι το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειάς του;



β) Αν περιστρέψουμε το τρίγωνο γύρω από έναν άξονα που διέρχεται από το τμήμα ΑΓ, το παραγόμενο στερεό θα έχει το ίδιο εμβαδόν κυρτής επιφάνειας με το προηγούμενο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

14 Το εμβαδόν της βάσης ενός κώνου είναι $25\pi\ cm^2$. Αν η γενέτειρα του κώνου είναι ίση με 13 cm, να υπολογίσετε το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας και τον όγκο του κώνου.

15 Ένα κωνικό δοχείο κατασκευάστηκε από έναν κυκλικό τομέα ψευδαργύρου 80° και ακτίνας 50 cm. Να υπολογίσετε:

α) Την ακτίνα και το ύψος του δοχείου.
β) Τον όγκο του δοχείου.

16 Ένα ποτήρι έχει σχήμα κώνου. Η διάμετρος της βάσης του είναι 6 cm και η γενέτειρα 15 cm.
α) Να υπολογίσετε τον όγκο του ποτηριού.
β) Σε ποιο ποσοστό είναι γεμάτο το ποτήρι αν το υγρό που περιέχει έχει ύψος 8 cm;

9.3 Εμβαδόν σφαιρικής επιφάνειας και όγκος σφαίρας

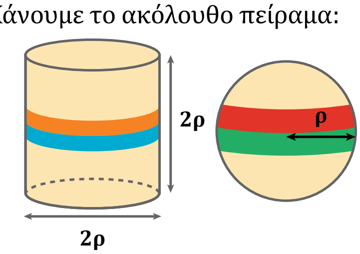
Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθήτριες και οι μαθητές να μπορούν:

- Να επιλύουν προβλήματα υπολογισμού του εμβαδού της σφαιρικής επιφάνειας και του όγκου σφαίρας.

Διερεύνηση 1: Πειραματική εύρεση σφαιρικής επιφάνειας

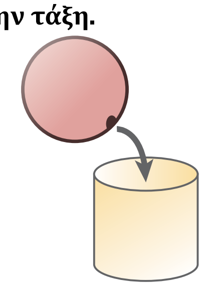
Να εργαστείτε ανά δύο. Να συζητήσετε τα αποτελέσματά σας στην τάξη.
Η διάμετρος και το ύψος του κυλίνδρου είναι ίσα με τη διάμετρο της σφαίρας. Κάνουμε το ακόλουθο πείραμα:

α) Τυλίγουμε πλήρως με κολλητική ταινία ή κορδέλα ίδιου πάχους την κυρτή επιφάνεια του κυλίνδρου και την επιφάνεια της σφαίρας. Πόσα μέτρα ταινία (ή κορδέλα) χρησιμοποιήσατε σε κάθε περίπτωση; Τι παρατηρείτε;
β) Να χρησιμοποιήσετε το αποτέλεσμά σας στο μέρος (α) και τον τύπο της κυρτής επιφάνειας του κυλίνδρου για να γράψετε έναν τύπο για τον υπολογισμό της σφαιρικής επιφάνειας. Να εξηγήσετε τον συλλογισμό σας.



Διερεύνηση 2: Πειραματική εύρεση του όγκου σφαίρας

Να εργαστείτε ανά δύο ή σε μικρές ομάδες. Να συζητήσετε τα αποτελέσματά σας στην τάξη.
Να χρησιμοποιήσετε μία σφαίρα (π. χ. πλαστική μπάλα) παρόμοια με αυτή που φαίνεται στην εικόνα. Η διάμετρος και το ύψος του κυλίνδρου είναι ίσα με τη διάμετρο της σφαίρας.
α) Πώς σχετίζεται το ύψος **υ** του κυλίνδρου με την ακτίνα **ρ** της σφαίρας;
β) Αφήνουμε στην μπάλα μία τρύπα ανοιχτή. Γεμίζουμε τη σφαίρα με ρύζι. Στη συνέχεια ρίχνουμε το ρύζι στον κύλινδρο. Τι μέρος του κυλίνδρου είναι γεμάτο με ρύζι;
γ) Να χρησιμοποιήσετε το αποτέλεσμά σας στο μέρος (β) και τον τύπο για τον όγκο ενός κυλίνδρου για να γράψετε έναν τύπο για τον όγκο μιας σφαίρας. Να εξηγήσετε τον συλλογισμό σας.

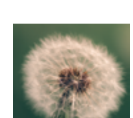


Να διερευνήσετε με τη ψηφιακή εφαρμογή την παραγωγή σφαίρας με περιστροφή.

Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες μάθησης

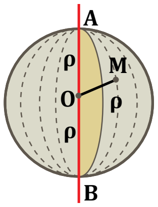
Η σφαίρα

Τα ακόλουθα σώματα μας δίνουν την έννοια της σφαίρας.

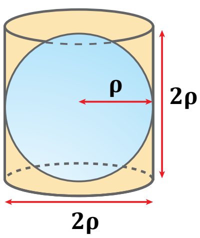
Αν ένας ημικυκλικός δίσκος κέντρου Ο και ακτίνας ρ περιστραφεί γύρω από μια διάμετρο ΑΒ, παρατηρούμε ότι σχηματίζεται μια σφαίρα. Το σημείο Ο λέγεται **κέντρο της σφαίρας** και η ακτίνα **ρ** του ημικυκλικού δίσκου λέγεται **ακτίνα της σφαίρας**.

Σφαίρα λέγεται το στερεό σώμα που παράγεται, από την πλήρη περιστροφή ενός ημικυκλικού δίσκου γύρω από τον φορέα μιας διαμέτρου του.



Κατά την πλήρη περιστροφή του, το ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ = 2ρ δημιουργεί τη σφαιρική επιφάνεια και λέγεται **γενέτειρα** της επιφάνειας αυτής. Η απόσταση ενός οποιουδήποτε σημείου Μ της επιφάνειας μιας σφαίρας από το κέντρο Ο είναι ίση με την ακτίνα ρ.

Εμβαδόν επιφάνειας σφαίρας



Πρώτος ο Αρχιμήδης έδειξε ότι αν η επιφάνεια μιας σφαίρας εφάπτεται της επιφάνειας ενός κυλίνδρου, όπως δείχνει το διπλανό σχήμα, τότε η επιφάνεια της σφαίρας είναι ίση με την κυρτή επιφάνεια του κυλίνδρου. Επομένως:

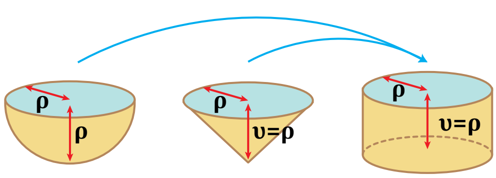
$$Ε_{σφ} = 2πρ·υ = 2πρ·2ρ \text{ ή } \boxed{Ε_{σφ} = 4πρ^2}$$

Το προηγούμενο συμπέρασμα διατυπώνεται ως εξής:

Το εμβαδόν της επιφάνειας μιας σφαίρας είναι ίσο με το τετραπλάσιο εμβαδόν ενός κύκλου που έχει ακτίνα την ακτίνα της σφαίρας.

Όγκος της σφαίρας

Κατασκευάζουμε ημισφαίριο ακτίνας **ρ**. Κατασκευάζουμε επίσης κώνο και κύλινδρο με ακτίνα του κύκλου της βάσης **ρ** και ύψος **ρ**. Γεμίζουμε με ρύζι το ημισφαίριο και τον κώνο και τα αδειάζουμε στον κύλινδρο. Διαπιστώνουμε ότι ο κύλινδρος γεμίζει πλήρως. Τα πειράματα πλήρωσης δείχνουν ότι το άθροισμα των όγκων του κώνου και του ημισφαιρίου ισοδυναμεί με τον όγκο του κυλίνδρου. Έτσι, ο όγκος του ημισφαιρίου μπορεί να βρεθεί ως εξής:



$$V_{ημισφ} = V_{κυλ} - V_{κών} = πρ^2 \cdot ρ - \frac{1}{3}πρ^2 \cdot ρ = \frac{2}{3}πρ^3$$

Ο όγκος της σφαίρας θα είναι διπλάσιος από τον όγκο του ημισφαιρίου και επομένως: $\boxed{V_{σφ} = \frac{4}{3}πρ^3}$

Σημείωση:
Στο ίδιο συμπέρασμα κατέληξε ο Αρχιμήδης ανακαλύπτοντας ότι ο όγκος εφαπτόμενης σφαίρας σε κύλινδρο είναι τα 2/3 του όγκου του κυλίνδρου.

Εφαρμογή 1

Δίνεται σφαίρα ακτίνας ρ = 7 cm. Να βρείτε: **α)** το εμβαδόν Ε της επιφάνειάς της. **β)** τον όγκο της.

Απάντηση

α) Γνωρίζουμε ότι: $Ε_{σφ} = 4πρ^2 = 4·3{,}14·7^2 = 4·3{,}14·49 = 615{,}44$ (cm²).

β) Γνωρίζουμε ότι: $V_{σφ} = \frac{4}{3}πρ^3 = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 7^3 \approx 1{,}33 \cdot 3{,}14 \cdot 343 = 1432{,}44$ (cm³).

Εφαρμογή 2

Η επιφάνεια μίας σφαίρας είναι 36π(m²). Να βρείτε τον όγκο της.

Απάντηση

Γνωρίζουμε ότι: $E_{σφ} = 4πρ^2$ οπότε $36π = 4πρ^2$ ή $ρ^2 = 9$ ή $ρ = 3$ (m)

Από τον τύπο υπολογισμού του όγκου της σφαίρας έχουμε: $V_{σφ}=\frac{4}{3}πρ^3 \approx \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 3^3 = 36 \cdot 3{,}14 = 113{,}04$ (m³).

Εφαρμογή 3

Να βρείτε πόσα χρήματα θα χρειαστούμε, για να βάψουμε μία σφαιρική δεξαμενή διαμέτρου δ = 10 m, αν το ένα κιλό χρώμα κοστίζει 12 € και καλύπτει επιφάνεια 4 m².

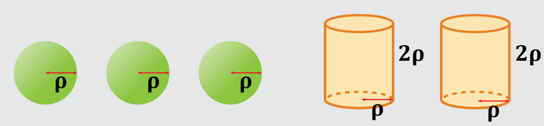
Απάντηση

Το εμβαδόν της σφαιρικής δεξαμενής είναι: $E_{σφ} = 4πρ^2 = 4π \cdot 5^2 \approx 314$ (m²). Αφού κάθε κιλό χρώμα καλύπτει επιφάνεια 4 m², για να καλυφθεί η επιφάνεια των 314 m² χρειάζονται 314:4 = 78,5 κιλά χρώμα, τα οποία κοστίζουν συνολικά 78,5·12=942 €.

Ερωτήσεις για Αυτοαξιολόγηση

1 Ο Νίκος διατύπωσε τον ισχυρισμό: «Το εμβαδόν της επιφάνειας σφαίρας με ακτίνα ρ είναι ίσο με το εμβαδόν τεσσάρων μέγιστων κύκλων της ίδιας σφαίρας». Συμφωνείτε ή όχι; Να αιτιολογήσετε.

2 Κατασκευάζουμε σφαίρα ακτίνας ρ και δύο κυλίνδρους με βάση κύκλο ακτίνας ρ και ύψος υ = 2ρ. Γεμίζουμε διαδοχικά με ρύζι τρεις φορές τη σφαίρα και αδειάζουμε το ρύζι στους δύο κυλίνδρους. Ποιο είναι το αποτέλεσμα; Να αιτιολογήσετε.



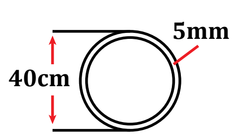
3 Ο Αρχιμήδης χρησιμοποίησε δύο ίδιους κυλίνδρους και μία πέτρινη σφαίρα. Η διάμετρος και το ύψος κάθε κυλίνδρου ήταν ίσα με τη διάμετρο της σφαίρας. Γέμισε πλήρως με νερό τον πρώτο κύλινδρο. Έβαλε τη σφαίρα στον δεύτερο κύλινδρο και τον γέμισε με νερό. Διαπίστωσε ότι για να γεμίσει με νερό ο κύλινδρος με την πέτρινη σφαίρα χρειάστηκε το 1/3 του νερού που έβαλε στον πρώτο. Να επαναλάβετε το πείραμα και να διατυπώσετε μία εικασία για τον τύπο του όγκου της σφαίρας. Να αιτιολογήσετε.

4 Να συγκρίνετε την επιφάνεια σφαίρας με ακτίνα ρ = 10 cm με την επιφάνεια σφαίρας με διάμετρο 10 cm.

Ασκήσεις και Προβλήματα

1 Να υπολογίσετε την επιφάνεια των σφαιρών με τις ακόλουθες ακτίνες:
α) ρ = 3 cm **β)** ρ=5,4 dm **γ)** ρ = 13,1 m **δ)** ρ = 4 πmm

2 Μία κοίλη μπάλα από καουτσούκ έχει εξωτερική διάμετρο 40 cm και πάχος 5 mm. Να υπολογίσετε τον όγκο του καουτσούκ που χρησιμοποιήθηκε για την κατασκευή της.



3 Να υπολογίσετε τον όγκο των σφαιρών για τις ακόλουθες ακτίνες:
α) ρ = 3 cm **β)** ρ = 2,5 dm **γ)** ρ = 3,7 m **δ)** ρ = 4π mm

4 Να βρείτε πόσα κιλά χρώμα θα χρειαστούμε, για να βάψουμε μία σφαιρική δεξαμενή ακτίνας ρ = 10 m, αν το ένα κιλό χρώμα βάφει επιφάνεια 6 m².

5 Να υπολογίσετε τους όγκους:
α) Μιας δερμάτινης ποδοσφαιρικής μπάλας που έχει διάμετρο 24 cm.
β) Μιας σφαίρας της οποίας η ακτίνα είναι 20 m.

6 Η επιφάνεια μιας σφαίρας είναι 113,04 cm². Να υπολογίσετε τον όγκο της σφαίρας.

7 Μία σφαιρική γυάλα έχει διάμετρο 36 cm. Να βρείτε πόσα λίτρα νερό χωράει.

8 **Εργασία μαθητών κατά ζεύγη ή σε μικρές ομάδες.**

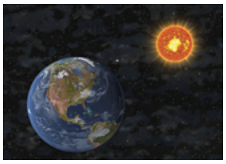
α) Μία σαλατιέρα έχει σχήμα ημισφαιρίου με ακτίνα 12 cm. Να υπολογίσετε τη μέγιστη χωρητικότητά της.

β) Να αναζητήσετε και άλλα ημισφαιρικά αντικείμενα. Να διατυπώσετε προβλήματα και να τα λύσετε. Να παρουσιάσετε τις λύσεις σας ο ένας στον άλλον και να τις συγκρίνετε.

9 Ο ισημερινός της Γης (αν τη θεωρήσουμε τέλεια σφαίρα) είναι 40000 km περίπου. Να υπολογίσετε:

α) την ακτίνα της Γης.

β) την επιφάνειά της.



10 Φανταστείτε τη Γη ως τέλεια σφαίρα με ακτίνα 6370 km με μέση πυκνότητα 5,5 g/cm^3. Η ακτίνα του Ήλιου (με μέση πυκνότητα 1,4 g/cm^3) είναι περίπου 109 φορές μεγαλύτερη από την ακτίνα της Γης.

α) Να υπολογίσετε τον όγκο και τη μάζα της Γης και του Ήλιου.

β) Πόσες φορές η μάζα του Ήλιου είναι μεγαλύτερη από τη μάζα της Γης;

γ) Πόσες φορές ο όγκος του Ήλιου είναι μεγαλύτερος από τον όγκο της Γης;

δ) Πόσες φορές η επιφάνεια του Ήλιου είναι μεγαλύτερη από την επιφάνεια της Γης;

9.4 Επίλυση προβλημάτων με σύνθετα στερεά σώματα

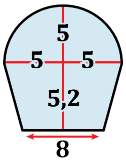
Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθήτριες και οι μαθητές να μπορούν:

- Να επιλύουν προβλήματα υπολογισμού του όγκου σύνθετων στερεών σχημάτων αναπτύσσοντας ποικιλία μεθόδων και στρατηγικών.

Διερεύνηση 1: Η σήραγγα

Να εργαστείτε ανά δύο ή σε μικρές ομάδες. Να συζητήσετε τα αποτελέσματά σας στην τάξη.

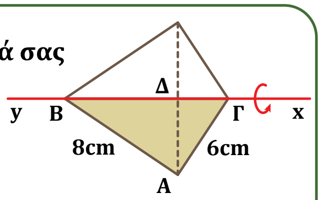
Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η διατομή μιας σήραγγας (τούνελ). Να βρείτε πόσα m^3 χώματος βγήκαν κατά την κατασκευή της, αν το μήκος της είναι 300 m.



Διερεύνηση 2: Στερεό σώμα εκ περιστροφής

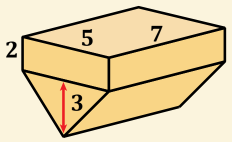
Να εργαστείτε ανά δύο ή σε μικρές ομάδες. Να συζητήσετε τα αποτελέσματά σας στην τάξη.

Το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΑΓ του διπλανού σχήματος περιστρέφεται γύρω από την υποτείνουσά του ΒΓ. Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την περιστροφή.



Να επεξεργαστείτε την εφαρμογή: «Κύλινδρος σε Κώνο».

Εφαρμογή 1



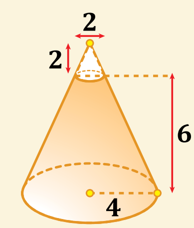
Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού σώματος που απεικονίζεται στο διπλανό σχήμα.

Απάντηση

Το σχήμα απεικονίζει ορθό πρίσμα. Η βάση του πρίσματος είναι πεντάγωνο, το οποίο χωρίζεται σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και ένα ισοσκελές τρίγωνο. Το εμβαδόν της βάσης του είναι: $E_\beta = 2 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 = 10 + 7,5 = 17,5$ (cm^2) και $V = E_\beta \cdot \upsilon = 17,5 \cdot 7 = 122,5$ (cm^3).

Εφαρμογή 2

Κόλουρος κώνος είναι το τμήμα ενός κώνου, το οποίο περιέχεται ανάμεσα στη βάση και μία παράλληλη τομή προς τη βάση του κώνου. Να υπολογίσετε τον όγκο του κόλουρου κώνου που απεικονίζεται στο διπλανό σχήμα. Όλες οι μετρήσεις είναι σε εκατοστά.



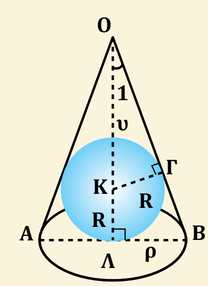
Απάντηση

Για να βρούμε τον όγκο του κόλουρου κώνου θα αφαιρέσουμε από τον όγκο του αρχικού κώνου (V_1) τον όγκο του μικρού κώνου που αποκόψαμε (V_2). Είναι: $V_1 = \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 4^2 \cdot 8 \approx 133,97$ (cm^3) και $V_2 = \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 1^2 \cdot 2 \approx 2,09$ (cm^3).

Επομένως: $V = V_1 - V_2 = 133,97 - 2,09 = 131,88$ (cm^3)

Εφαρμογή 3

Μία σφαίρα είναι εγγεγραμμένη σε κώνο ακτίνας ρ = 10 cm και ύψους υ = 24 cm. Να υπολογίσετε: **α)** την ακτίνα της σφαίρας, **β)** Τον όγκο του κώνου, **γ)** Τον όγκο της σφαίρας, **δ)** Τον όγκο που περιέχεται μεταξύ κώνου και σφαίρας.



Απάντηση

α) Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΛΒ βρίσκουμε: $OB^2 = \upsilon^2 + \rho^2$ ή $OB^2 = 24^2 + 10^2$ ή $OB^2 = 576 + 100$ ή $OB^2 = 676$ ή $OB = \sqrt{676}$. Άρα: ΟΒ = 26 (cm).

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΚΓ και ΟΛΒ είναι όμοια ($\hat{O}_1$ είναι κοινή γωνία). Επομένως:

$$\frac{K\Gamma}{\Lambda B} = \frac{OK}{OB} \text{ ή } \frac{R}{10} = \frac{24 - R}{26} \text{ ή } 26R = 10(24 - R) \text{ ή } 26R + 10R = 240 \text{ ή } 36R = 240 \text{ ή } R \approx 6,7 \text{(cm)}$$

β) Ο όγκος του κώνου είναι: $V_1 = \frac{1}{3} \pi \rho^2 \cdot \upsilon \approx \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 10^2 \cdot 24 = 2512$ (cm^3)

γ) Ο όγκος της σφαίρας είναι: $V_2 = \frac{4}{3} \pi R^3 \approx \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 6,7^3 = 1259,2$ (cm^3)

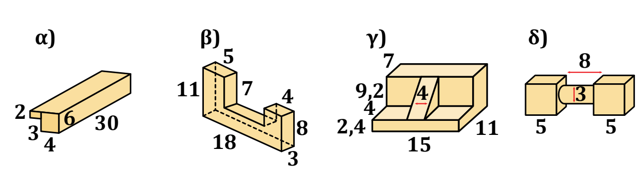
δ) Ο όγκος μεταξύ κυλίνδρου και σφαίρας είναι: $V = V_1 - V_2 = 2512 - 1259,2 = 1252,8$ (cm^3)

Να εργαστείτε στην ψηφιακή εφαρμογή: «Σφαίρα σε κύλινδρο».

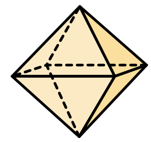
Να εργαστείτε στην ψηφιακή εφαρμογή: «Σφαίρα και κώνος».

Ασκήσεις και Προβλήματα

1 Να υπολογίσετε τους όγκους των στερεών. Όλες οι μετρήσεις των σχημάτων είναι σε εκατοστά (cm).

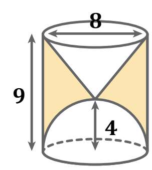


2 Εάν κολλήσουμε δύο πυραμίδες με ίδια τετράγωνη βάση των οποίων οι παράπλευρες έδρες είναι ισόπλευρα τρίγωνα, σχηματίζεται ένα οκτάεδρο. Αν το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του οκτάεδρου είναι 100 m, να υπολογίσετε το μήκος της ακμής του.



3 Να συγκρίνετε την επιφάνεια σφαίρας με ακτίνα $\rho = 10$ cm με την ολική επιφάνεια κύβου με ακμή 10 cm.

4 Από ένα μεταλλικό κυλινδρικό κομμάτι αφαιρέθηκαν με τη βοήθεια τόρνου, ένας κώνος και ένα ημισφαίριο, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που απέμεινε. Οι μετρήσεις του σχήματος είναι σε εκατοστά (cm).

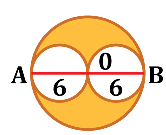


5 Μια υδρόγειος σφαίρα συσκευάζεται έτσι, ώστε να χωράει ακριβώς σε ένα κυβικό κιβώτιο που έχει πλευρά 48 cm.

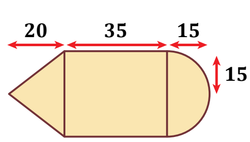
α) Να βρείτε την ακτίνα της σφαίρας.

β) Να βρείτε το μέρος του όγκου του κιβωτίου που μένει άδειο.

6 Στο διπλανό σχήμα οι δύο μικρές σφαίρες έχουν διαμέτρους ΑΟ = ΟΒ = 6 cm, που περιέχονται στη μεγάλη σφαίρα κέντρου Ο και ακτίνας ρ = ΟΑ = ΟΒ. Να βρείτε τον όγκο του χρωματισμένου στερεού.



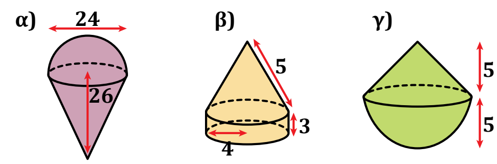
7 Στο διπλανό σχήμα απεικονίζεται η διατομή ενός χαλύβδινου τεμαχίου. Το εν λόγω σώμα αποτελείται από έναν κώνο, έναν κύλινδρο και ένα ημισφαίριο. Οι διαστάσεις δίνονται σε χιλιοστά (βλ. σκίτσο). Η πυκνότητα του χάλυβα είναι 7,85 g/cm^3.



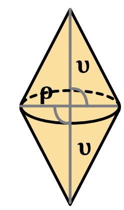
α) Να υπολογίσετε πόσο βαρύ είναι ένα τέτοιο τεμάχιο.

β) Να υπολογίσετε και να αιτιολογήστε εάν μπορείτε να σηκώσετε ένα κουτί με 100 τέτοια τεμάχια.

8 Να υπολογίσετε το εμβαδόν επιφάνειας και τον όγκο των στερεών σωμάτων. Όλες οι μετρήσεις είναι σε εκατοστά.



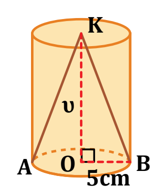
9 Το στερεό σώμα του διπλανού σχήματος αποτελείται από δύο κώνους με ίσα ύψη υ και την ίδια βάση κυκλικού δίσκου ακτίνας ρ.



α) Να βρείτε έναν τύπο για τον υπολογισμό της επιφάνειας και του όγκου του.

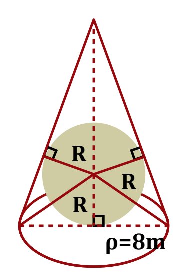
β) Να υπολογίσετε την επιφάνεια και τον όγκο του στερεού αν υ = 4 cm και ρ = 2 cm.

10 Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που βρίσκεται μεταξύ της επιφάνειας του κώνου και της επιφάνειας του κυλίνδρου, αν γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κυλίνδρου είναι $120\pi cm^2$ και η ακτίνα της βάσης έχει μήκος ρ = 5cm.

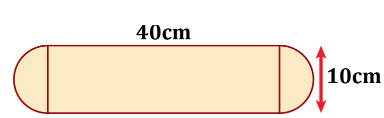


11 **Εργασία σε μικρές ομάδες.** Μια σφαίρα είναι εγγεγραμμένη σε κώνο που έχει ακτίνα ρ=8 cm και γενέτειρα λ=17 cm. Να υπολογίσετε:

α) Το ύψος του κώνου, **β)** Την ακτίνα της σφαίρας, **γ)** Τον όγκο του κώνου, **δ)** Τον όγκο της σφαίρας, **ε)** Τον όγκο που περιέχεται μεταξύ κώνου και σφαίρας.



12 Σε ένα κυλινδρικό έμβολο είναι προσαρτημένα δύο ημισφαίρια, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να βρείτε τον όγκο του εμβόλου καθώς και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του υλικού που χρειάζεται να κατασκευαστεί.



Να ανοίξετε την εφαρμογή «Γλωσσάρι - Γεωμετρία του χώρου» για να συνοψίσετε έννοιες και όρους, που μάθατε στο κεφάλαιο αυτό.

Να κάνετε την Εργασία με προεκτάσεις με τίτλο: «Κατασκευάζοντας τα αναπτύγματα των γεωμετρικών στερεών».

9.5 Ανακεφαλαίωση και διεύρυνση της θεματικής ενότητας

Εμβαδόν επιφάνειας πρίσματος

Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας: $\mathbf{E_{π} = Π_{β}\cdot υ}$. Εμβαδόν ολικής επιφάνειας: $\mathbf{E_{ολ} = E_{π} + 2E_{β}}$

Εμβαδόν επιφάνειας κυλίνδρου

Εμβαδόν κυρτής επιφάνειας: $\mathbf{E_{κ}=2πρυ}$. Εμβαδόν της ολικής επιφάνειας: $\mathbf{E_{ολ}=2πρυ+2πρ^2}$

Όγκος πρίσματος και κυλίνδρου

Όγκος πρίσματος: $\mathbf{V = E_{β}\cdot υ}$. Όγκος κυλίνδρου: $\mathbf{V = E_{β}\cdot υ}$ **ή** $\mathbf{V = πρ^2υ}$

Πυραμίδα

Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας: $\mathbf{E_{π}=\frac{1}{2}Π_{β}\cdot η}$. Εμβαδόν της ολικής επιφάνειας: $\mathbf{E_{ολ} = E_{π}+E_{β}}$. Όγκος: $\mathbf{V=\frac{1}{3}E_{β}\cdot υ}$.

Κώνος

Εμβαδόν κυρτής επιφάνειας: $\mathbf{E_{κ} = πρλ}$. Εμβαδόν της ολικής επιφάνειας: $\mathbf{E_{ολ} = πρ^2+πρλ}$. Όγκος: $\mathbf{V=\frac{1}{3}πρ^2υ}$.

Σφαίρα

Εμβαδόν σφαιρικής επιφάνειας: $\mathbf{V_{σφ}=\frac{4}{3}πρ^3}$. Όγκος: $\mathbf{E_{σφ} = 4πρ^2}$.

Να μελετήσετε το ιστορικό σημείωμα με τίτλο: «Πλατωνικά στερεά».

Να κάνετε την εργασία με προεκτάσεις «Πειραματισμοί με τα Πλατωνικά στερεά και κατασκευές αυτών».

Επαναληπτικά έργα, προεκτάσεις και μαθηματικές προκλήσεις

1 Να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου του οποίου μία διαγώνιος είναι 13 cm και δύο διαστάσεις του 3 cm και 4 cm.

2 Οι διαστάσεις ενός ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου 6x, 8x και 24x. Αν η διαγώνιός του είναι 52 cm, να υπολογίσετε τον όγκο του.

3 Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας ορθού πρίσματος, του οποίου η βάση είναι ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 8 cm και 15 cm και το ύψος του είναι ίσο με την υποτείνουσα της τριγωνικής βάσης του.

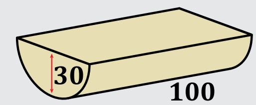
4 Ένα πρίσμα έχει βάση κανονικό εξάγωνο με πλευρά 4 m και ύψος 10 m. Να υπολογίσετε:
α) Το εμβαδόν της βάσης του, **β)** το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειάς του, **γ)** το εμβαδόν της ολικής επιφάνειάς του, **δ)** τον όγκο του.

5 Σε μία σφαίρα ο όγκος της συμπίπτει αριθμητικά με το εμβαδόν της επιφάνειάς της. Να βρείτε το ύψος του κυλίνδρου του οποίου η σφαίρα εφαρμόζει ακριβώς.

6 Ένα κουτί σε σχήμα πρίσματος έχει ως βάση ένα ορθογώνιο τρίγωνο με μήκη πλευρών 3 cm, 4 cm και 5 cm. Να υπολογίσετε το ύψος του κουτιού εάν είναι γνωστό, ότι:
α) Το εμβαδόν επιφάνειάς του είναι 96 cm^2, **β)** ο όγκος του V είναι 84 cm^3.

7 Ο όγκος ενός κυλίνδρου με ακτίνα βάσης ρ και ύψος υ είναι 160π cm^3. Αν ισχύει $2υ = 5ρ$, να βρείτε:
α) Την ακτίνα της βάσης του κυλίνδρου, **β)** το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κυλίνδρου.

8 Το διπλανό δοχείο έχει σχήμα μισού κυλίνδρου και χρησιμοποιείται για να πίνουν νερό τα ζώα. Να υπολογίσετε τον όγκο του νερού (σε λίτρα) που χωρά στο δοχείο. (Στην εικόνα είναι σημειωμένες σε cm οι διαστάσεις του εσωτερικού χώρου που γεμίζει με νερό)

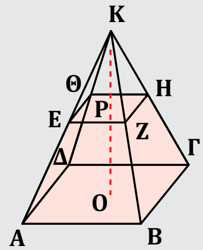


9 Ο όγκος μιας σφαίρας είναι $\frac{500\pi}{3}$ m^3. Να βρείτε το εμβαδόν της επίπεδης τομής της σφαίρας από ένα επίπεδο, το οποίο απέχει από το κέντρο της σφαίρας 3 m.

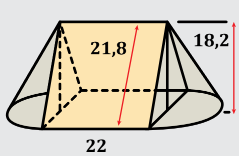
10 Σε ένα δοχείο γεμάτο με νερό αφήσαμε να πέσουν με προσοχή 3 μπάλες από μόλυβδο με διάμετρο 8 mm. Να υπολογίσετε τον όγκο του νερού που χύθηκε από το δοχείο.

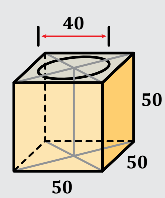
11 **Εργασία σε μικρές ομάδες.** Μία κανονική εξαγωνική πυραμίδα με κορυφή Ο και βάση ΑΒΓΔΕΖ, έχει ύψος ΟΚ = 24 cm και μία παράπλευρη ακμή ΟΑ = 26 cm.
α) Να σχεδιάσετε την πυραμίδα και να βρείτε την πλευρά του κανονικού εξαγώνου.
β) Να υπολογίσετε το παράπλευρο ύψος h και το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας της πυραμίδας.
γ) Να βρείτε το εμβαδόν της βάσης της πυραμίδας.
δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας.
ε) Σε ποια απόσταση από την κορυφή της πυραμίδας πρέπει να φέρουμε επίπεδο παράλληλο προς τη βάση της, έτσι ώστε το εμβαδόν της τομής να είναι $50\sqrt{3}$ cm;

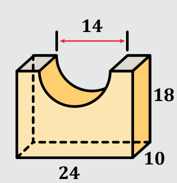
12 **Κόλουρη πυραμίδα** είναι το τμήμα μιας πυραμίδας το οποίο περιέχεται ανάμεσα στη βάση και μία παράλληλη τομή προς τη βάση της πυραμίδας. Να υπολογίσετε τον όγκο της κόλουρης πυραμίδας που απεικονίζεται στο διπλανό σχήμα. Δίνονται: ΑΒ = 20 cm, ΕΖ = 10 cm, ΚΡ = 15 cm και ΡΟ = 15 cm.



13 Να υπολογίσετε το εμβαδόν επιφάνειας και τον όγκο των παρακάτω στερεών σωμάτων. Όλες οι μετρήσεις είναι σε εκατοστά.

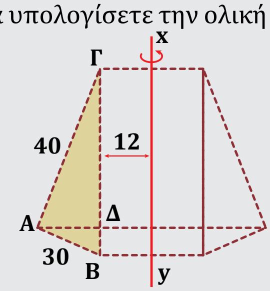
α) 

β) 

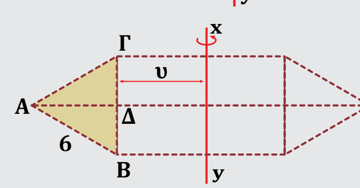
γ) 

14 **Ισόπλευρος κώνος** λέγεται ο κώνος που παράγεται από την περιστροφή ενός ισόπλευρου τριγώνου γύρω από ένα ύψος του. Αν η πλευρά ενός ισόπλευρου τριγώνου είναι α = 4 cm, να υπολογίσετε την ολική επιφάνεια και τον όγκο του ισόπλευρου κώνου.

15 **Μαθηματική πρόκληση.** Το ορθογώνιο τρίγωνο του διπλανού σχήματος περιστρέφεται γύρω από τη σταθερή ευθεία xy που βρίσκεται στο επίπεδό του και είναι παράλληλη προς τη ΒΓ. Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται εκ περιστροφής. Όλες οι μετρήσεις είναι σε εκατοστά.



16 **Μαθηματική πρόκληση. Να εργαστείτε ανά δύο ή σε μικρές ομάδες.**
Το ισόπλευρο τρίγωνο του διπλανού σχήματος πλευράς α = 6 cm περιστρέφεται γύρω από τη σταθερή ευθεία xy που βρίσκεται στο επίπεδό του και είναι παράλληλη προς τη ΒΓ και σε απόσταση ίση με το ύψος του ισοπλεύρου τριγώνου. Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται εκ περιστροφής.



Να ανοίξετε την εφαρμογή «Γλωσσάρι γεωμετρίας» για να συνοψίσετε έννοιες και όρους στα κεφάλαια της γεωμετρίας.

Κεφάλαιο 10

Στατιστική

Διατύπωση Στατιστικών Ερωτημάτων

Πληθυσμός και Δείγμα

Μεταβλητότητα Στατιστικών Δεικτών Μεταξύ Δειγμάτων

Στο Κεφάλαιο αυτό θα μάθουμε:

- Να διατυπώνουμε στατιστικά ερωτήματα από το ευρύτερο κοινωνικό περιβάλλον.
- Να διακρίνουμε το δείγμα από τον πληθυσμό.
- Να επιλέγουμε ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα με απλή τυχαία δειγματοληψία.
- Να γενικεύουμε τα συμπεράσματα από ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα στον πληθυσμό.
- Να αναγνωρίζουμε τη μεταβλητότητα στατιστικών δεικτών μεταξύ δειγμάτων.

10.1 Διατύπωση Στατιστικών Ερωτημάτων

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθήτριες και οι μαθητές να μπορούν:

- Να διατυπώνουν ερωτήματα που αφορούν το ευρύτερο κοινωνικό περιβάλλον και απαντώνται με δεδομένα εκτός του οικείου περιβάλλοντός τους.

Η έρευνα είναι ένα μέσο κατανόησης του κόσμου που μας περιβάλλει και συχνά πληροφορούμαστε για τα αποτελέσματα στατιστικών ερευνών που διεξάγονται από διάφορους φορείς για συγκεκριμένους σκοπούς. Για παράδειγμα:

- Ένας τηλεοπτικός σταθμός διενεργεί έρευνα για να πληροφορηθεί εάν και κατά πόσον οι τηλεθεατές είναι ικανοποιημένοι για κάποιο πρόγραμμα.
- Ένα πολιτικό κόμμα για να μάθει πόσοι ψηφοφόροι υποστηρίζουν τη φορολογική πολιτική της κυβέρνησης.
- Μια φαρμακευτική εταιρεία για να διαπιστώσει την αποτελεσματικότητα ενός νέου φαρμάκου.
- Ένα εργοστάσιο για να αξιολογήσει τη γραμμή παραγωγής ενός προϊόντος.

Αφετηρία κάθε στατιστικής έρευνας είναι ένα τουλάχιστον σωστά διατυπωμένο στατιστικο ερώτημα, το οποίο λαμβάνει υπόψη τη μεταβλητότητα των δεδομένων.

Διερεύνηση 1: Κλιματική κρίση

Να εργαστείτε είτε ανά δύο είτε σε μικρές ομάδες.

α) Θέλετε να γνωρίσετε εάν και κατά πόσον οι συνομήλικοί σας στον Δήμο σας είναι σύμφωνοι και επιθυμούν να λάβουν μέρος εθελοντικά στη δενδροφύτευση μιας περιοχής, η οποία θα γίνεται κάθε Σάββατο και σχεδιάζετε να κάνετε μία στατιστική έρευνα.
i) Για να απαντηθεί το στατιστικό ερώτημα (ή τα ερωτήματα), τι θα χρειαστείτε;
ii) Από πού και με ποιον τρόπο θα αντλήσετε τα δεδομένα;
iii) Πώς από τα δεδομένα θα απαντήσετε στην ερώτηση της έρευνας;

β) Πιστεύετε ότι η κλιματική αλλαγή ενδιαφέρει τους νέους της ηλικίας σας και θέλετε να συγκεντρώσετε στοιχεία για να πείσετε την επιτροπή περιβάλλοντος του Δήμου σας για το θέμα αυτό. Τι θα κάνατε; Να περιγράψετε αναλυτικά τις ενέργειές σας και να τις αιτιολογήσετε.

Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες μάθησης

Έρευνα είναι η συστηματική παρατήρηση φαινομένων, η συλλογή δεδομένων και η εξαγωγή συμπερασμάτων με βάση τα δεδομένα που έχουν συγκεντρωθεί. Τα δεδομένα προκύπτουν από παρατηρήσεις, μετρήσεις ή/και απαντήσεις σε ένα γραπτό ερωτηματολόγιο, το οποίο συμπληρώνουν οι ερωτώμενοι. Οι ερωτήσεις ενός ερωτηματολογίου είναι «κλειστές» ή «ανοιχτές» και καλύπτουν κατά το δυνατόν όλες τις πτυχές του μελετώμενου θέματος.

- Οι «κλειστές» ερωτήσεις περιλαμβάνουν μια κλίμακα απαντήσεων, συνήθως πεντάβαθμη και οι ερωτώμενοι σημειώνουν σε αυτές τον βαθμό της συμφωνίας τους. Για παράδειγμα: Θεωρείτε ότι το σχολείο σας πρέπει να έχει ένα όνομα , για παράδειγμα «Πυθαγόρας»; Σημειώστε ένα Χ στο αντίστοιχο πλαίσιο:

Καθόλου	Λίγο	Ούτε συμφωνώ Ούτε διαφωνώ	Πολύ	Πάρα πολύ

- Οι «ανοιχτές» ερωτήσεις, αντίθετα, δίνουν τη δυνατότητα στους ερωτώμενους να εκφράσουν και να αιτιολογήσουν τις απόψεις τους με λεπτομέρεια. Για παράδειγμα: Στο προηγούμενο ερώτημα αντί να τοποθετηθούν οι ερωτώμενοι σε μια κλίμακα απαντήσεων, ζητάμε:

Περιγράψτε εν συντομία την άποψή σας: ………………………………………………………………

Σε μια στατιστική έρευνα οι ερωτήσεις πρέπει να είναι *συγκεκριμένες, εστιασμένες, μετρήσιμες, σαφείς* και οι απαντήσεις σε αυτές να χαρακτηρίζονται από *μεταβλητότητα*.

Παραδείγματα:

- Η ερώτηση, «*Ποιο ήταν το ύψος της Μαρίας κατά τα τελευταία γενέθλιά της ;*» δεν είναι στατιστική ερώτηση, επειδή η απάντηση παραπέμπει σε μία τιμή του ύψους και απουσιάζει κάθε μεταβλητότητα των δεδομένων.
- Η ερώτηση, «*Ποιο είναι το ύψος των μαθητών της Τρίτης Γυμνασίου σε σχολεία του Δήμου σας;*» είναι στατιστική ερώτηση. Στην έρευνα καλούμαστε να συγκεντρώσουμε δεδομένα για τα ύψη μαθητών από Γυμνάσια του συγκεκριμένου Δήμου. Οι μαθητές δεν έχουν όλοι το ίδιο ύψος, και επομένως παρατηρείται μεταβλητότητα στα δεδομένα.

Να χρησιμοποιήσετε το ψηφιακό εργαλείο που θα βρείτε στον σύνδεσμο για να εξασκηθείτε στον εντοπισμό στατιστικών ερωτήσεων.

Τα βασικά στάδια μιας στατιστικής έρευνας όπως αναφέραμε στη Δευτέρα Γυμνασίου είναι τα ακόλουθα:

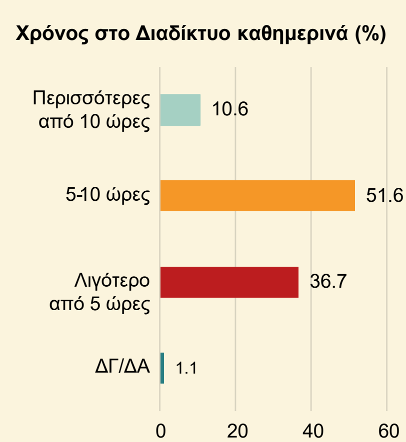
- Διατύπωση ερωτήσεων στατιστικής διερεύνησης.
- Συλλογή δεδομένων.
- Ανάλυση των δεδομένων με χρήση διαγραμμάτων και στατιστικών δεικτών.
- Ερμηνεία των αποτελεσμάτων και εξαγωγή συμπερασμάτων.

Η «*Απογραφή στο Σχολείο*» είναι ένα πρόγραμμα που υλοποιείται σε πολλές χώρες: (https://ww2.amstat.org/censusatschool/)

Για τη μύηση των μαθητών στη διενέργεια στατιστικής έρευνας η ΕΛΣΤΑΤ έχει θέσει σε λειτουργία το εκπαιδευτικό πρόγραμμα «*Απογραφή στο Σχολείο*»: www.statistics.gr/el/census-at-school.

Εφαρμογή 1: Γενιά Ζ

Το 2022 η εφημερίδα *Καθημερινή* παρουσίασε άρθρο με θέμα: *«Οι νέοι που γεννήθηκαν ανάμεσα στο 1995 και το 2010, η λεγόμενη Gen Z, αποκαλύπτονται μέσα από την έρευνα του Ινστιτούτου Eteron και της aboutpeople».* Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε δείγμα νέων 16-25 ετών.
Μεταξύ άλλων, σύμφωνα με την έρευνα, όπως φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα, το 51,6% των νέων αυτής της γενιάς περνάει 5-10 ώρες καθημερινά στο διαδίκτυο, ένα 10,6% περνάει περισσότερες από 10 ώρες, ενώ το 36,7% των νέων αυτής της γενιάς περνάει λιγότερο από 5 ώρες την ημέρα στο διαδίκτυο.



α) Το διπλανό διάγραμμα παρουσιάζει τα ευρήματα στο ακόλουθο πιθανό ερευνητικό ερώτημα:
«Πόσες ώρες την ημέρα είστε συνδεδεμένοι στο διαδίκτυο;» Να εξηγήσετε πώς μπορεί να προέκυψαν τα ευρήματα.

β) Σύμφωνα με το άρθρο και το διάγραμμα, τι συμπεραίνετε για την καθημερινή ενασχόληση της γενιάς Gen Z με το διαδίκτυο;

γ) Θα κάνατε επιπλέον ερωτήσεις στους συμμετέχοντες της έρευνας για να κατανοήσετε καλύτερα τις διαστάσεις του φαινομένου; Αν ναι, να διατυπώσετε τις ερωτήσεις αυτές.

Για να διαβάσετε το άρθρο: «Η Gen Z αποκαλύπτεται – Τι απασχολεί τους νέους», ανοίξτε το σύνδεσμο: https://www.kathimerini.gr/society/561784423/ereyna-i-gen-z-apokalyptetai-ti-apascholei-toys-neoys/

Απάντηση

α) Ναι, το ραβδόγραμμα θα μπορούσε να έχει προκύψει από μια τέτοια ερώτηση, η οποία θα ζητούσε από τους ερωτώμενους να δηλώσουν πόσες ώρες την ημέρα ήταν συνδεδεμένοι στο διαδίκτυο. Θα μπορούσε επίσης να τους έχει ζητηθεί να επιλέξουν μία από τις τέσσερις προκαθορισμένες κατηγορίες, οι οποίες εμφανίζονται στο ραβδόγραμμα. Τέλος, είναι ενδεχόμενο το ραβδόγραμμα να είναι αποτέλεσμα συγκερασμού διαφόρων δραστηριοτήτων στο διαδίκτυο τις οποίες δήλωσαν οι συμμετέχοντες και σε άλλες ερωτήσεις της έρευνας.

β) Σύμφωνα με το άρθρο της εφημερίδας και τα στοιχεία του διαγράμματος, είναι φανερό ότι η γενιά Gen Z ασχολείται με το διαδίκτυο πολλές ώρες καθημερινά. Μάλιστα φαίνεται ότι οι περισσότεροι από τους μισούς ερωτηθέντες διαθέτουν καθημερινά 5-10 ώρες στο διαδίκτυο και περίπου το 10% περνά σχεδόν τη μισή μέρα στο διαδίκτυο.

γ) Το άρθρο και το διάγραμμα δεν μας διαφωτίζουν επαρκώς για την καθημερινή απασχόληση της γενιάς Gen Z με το διαδίκτυο. Παρότι το άρθρο μεταφέρει με ακρίβεια τα ευρήματα της έρευνας, η διερεύνηση του θέματος, όπως παρουσιάζεται, δεν είναι πλήρης. Για παράδειγμα, φαίνεται ότι η γενιά Gen Z περνά μεγάλο μέρος καθημερινά στο διαδίκτυο, αλλά δεν παρέχονται πληροφορίες αν αυτό συμβαίνει λόγω επαγγελματικής υποχρέωσης ή όχι. Επιπρόσθετα ενδεικτικά ερωτήματα τα οποία θα εμπλούτιζαν την έρευνα και θα φώτιζαν περαιτέρω το φαινόμενο θα μπορούσαν να είναι:

- *«Πόσες ώρες την ημέρα περνάτε στο διαδίκτυο για ενημέρωση;»*
- *«Πόσες ώρες την ημέρα περνάτε στο διαδίκτυο για ψυχαγωγία;»*
- *«Πόσες ώρες την ημέρα περνάτε στο διαδίκτυο για δουλειά;»*
- *«Πόσες ώρες την ημέρα περνάτε στο διαδίκτυο για την επικοινωνία με τους φίλους σας;»*

Σημείωση:

Σε κάθε ποσοτική ή ποιοτική έρευνα, η μέθοδος συλλογής δεδομένων μας ενημερώνει για την εμπειρία των ερωτώμενων, γι' αυτό κάθε φορά πρέπει να είναι κατάλληλη προς τις ερωτήσεις που τίθενται. Μερικά ερευνητικά εργαλεία συλλογής δεδομένων είναι: *ερωτηματολόγιο, συνέντευξη, παρατήρηση, πείραμα, ομάδες εστίασης.* Επιπλέον, αξιοποιούνται πολύτιμες δευτερογενείς πηγές, όπως εφημερίδες, βιβλία, άρθρα, έρευνες, έγκυροι ιστότοποι, κ.λπ. Κατά τη διεξαγωγή μιας έρευνας, πρέπει να υποβάλλουμε τις σωστές ερωτήσεις που μπορούν να απαντηθούν από τους ερωτώμενους προκειμένου να καταφέρουμε να συλλέξουμε χρήσιμες πληροφορίες.

Να ανοίξετε τον σύνδεσμο και να κάνετε την εργασία σχεδιασμού ερωτηματολογίου που προτείνεται.

Ερωτήσεις για Αυτοαξιολόγηση

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με τη λέξη Σωστό (Σ), αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος (Λ), αν η πρόταση είναι λανθασμένη. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

1 Σε μια στατιστική έρευνα:
Α. Χρησιμοποιούνται μόνο έτοιμα δεδομένα.
Β. Δεν γίνεται ανάλυση και ερμηνεία των δεδομένων.
Γ. Υπάρχουν ερωτήσεις που επιδέχονται μοναδική απάντηση.
Δ. Λαμβάνεται υπόψη η μεταβλητότητα των απαντήσεων.

2 Σε μια στατιστική έρευνα:
Α. Χρησιμοποιούνται μόνο οι μέθοδοι της παρατήρησης και της συνέντευξης.
Β. Χρησιμοποιούνται ποικίλα ερευνητικά εργαλεία συλλογής δεδομένων.

Γ. Δεν χρησιμοποιούνται δευτερογενείς πηγές.
Δ. Αποφεύγονται τα διαδικτυακά ερωτηματολόγια.

3 Ένα ερωτηματολόγιο στατιστικής έρευνας:
Α. Περιέχει μόνο ανοιχτές ερωτήσεις.
Β. Δεν περιέχει προκαθορισμένες επιλογές απαντήσεων.
Γ. Περιέχει μόνο ερωτήσεις του τύπου Ναι/Όχι.
Δ. Περιέχει μεταξύ άλλων μια σειρά δηλώσεων με προκαθορισμένες επιλογές απαντήσεων στις οποίες οι ερωτώμενοι σημειώνουν τον βαθμό συμφωνίας ή διαφωνίας τους.

Ασκήσεις και Προβλήματα

1 Αναγνώριση και διατύπωση στατιστικών ερωτήσεων.
Ποιες από τις παρακάτω ερωτήσεις είναι στατιστικές ερωτήσεις και ποιες όχι;
α) Ποιο είναι το χρώμα των ματιών των μαθητών της Τρίτης Γυμνασίου του Δήμου σας;
β) Πόσες περιφέρειες υπάρχουν στην Ελλάδα;
γ) Πόσες ώρες την εβδομάδα ασχολούνται με τα κοινωνικά δίκτυα οι νέοι 15-24 ετών στον Δήμο σας;
δ) Πόσα κιλά φρούτα καταναλώνετε την εβδομάδα;
ε) Πόσες ώρες την ημέρα χρησιμοποιείτε το κινητό τηλέφωνο;
στ) Πόσο χρόνο την εβδομάδα αφιερώνετε σε κατ' οίκον σχολικές εργασίες;
ζ) Πόσο χρόνο αφιερώσατε για την εβδομαδιαία επικοινωνία σας με τους φίλους σας;
Στη συνέχεια να διατυπώσετε τρεις δικές σας στατιστικές ερωτήσεις.

2 Κατάρτιση ερωτηματολογίου έρευνας.
Να εξηγήσετε ποιες από τις παρακάτω ερωτήσεις είναι κατάλληλες για ένα γραπτό ερωτηματολόγιο στατιστικής έρευνας και ποιες όχι.
α) Πόσες κιλοβατώρες (Kwh) ηλεκτρισμού καταναλώνετε στο σπίτι σας κάθε μήνα;
β) Ποια είναι η μεγαλύτερη έρημος του κόσμου;
γ) Πόσες ώρες την εβδομάδα αφιερώνετε σε αθλητισμό;
δ) Ποιος είναι ο ψηλότερος μαθητής της τάξης σας;
στ) Ποιο είναι το βάρος των μαθητών της Τρίτης Γυμνασίου στα σχολεία του Δήμου σας;
ζ) Πόσες είναι οι ώρες διδασκαλίας των Μαθηματικών της Τρίτης Γυμνασίου στην τάξη σας;

3 Μεροληψία ερωτήσεων σε έρευνα.
Μια ερώτηση είναι μεροληπτική όταν παίρνει έμμεσα θέση υπέρ μιας άποψης-απάντησης.
Να εντοπίσετε ενδεχόμενη μεροληψία στις ακόλουθες ερωτήσεις:
α) Εκκλησιάζεσαι τις Κυριακές;
Α. Ναι **Β.** Όχι
β) Η συμμετοχή μας σε εθελοντικές εργασίες δείχνει κοινωνική ευαισθησία. Πόσο συνεισφέρεις σε εθελοντικές εργασίες στον Δήμο σου;
Α. Καθόλου **Β.** Λίγο **Γ.** Ουδέτερα **Δ.** Πολύ **Ε.** Πάρα Πολύ
γ) Οι περισσότεροι φίλαθλοι επιθυμούν τη νίκη της ομάδας τους όπως και αν αυτή προέρχεται. Να σημειώσεις τον βαθμό συμφωνίας σου με την επιθυμία των φιλάθλων:
Α. Καθόλου **Β.** Λίγο **Γ.** Ουδέτερα **Δ.** Πολύ **Ε.** Πάρα Πολύ
δ) Σε ποιον βαθμό αισθάνεσαι άβολα με τα κοινωνικά δίκτυα;
Α. Καθόλου **Β.** Λίγο **Γ.** Ουδέτερα **Δ.** Πολύ **Ε.** Πάρα Πολύ
ε) Πόσο συχνά επισκέπτεσαι τη δημοτική βιβλιοθήκη;
Α. Ποτέ **Β.** Μερικές φορές **Γ.** Αρκετές φορές **Δ.** Συνεχώς

4 Σχεδιασμός έρευνας: «Σχολικά κτίρια των γυμνασίων του Δήμου σας».
Ενδεικτικές ερωτήσεις:
- Είναι κατάλληλη η τοποθεσία του σχολικού κτιρίου;
- Υπάρχει αίθουσα πολλαπλών χρήσεων, κλειστό γυμναστήριο, κυλικείο, ευρύχωρο προαύλιο, χώροι πρασίνου;
- Πόσα τετραγωνικά μέτρα είναι μια τυπική αίθουσα διδασκαλίας;
- Η αρχιτεκτονική, οι υποδομές, τα έπιπλα, ο τεχνικός εξοπλισμός, τα ψηφιακά μέσα, συνδέονται με σύγχρονες παιδαγωγικές αντιλήψεις;
- Έχουν πρόσβαση τα άτομα με αναπηρία σε όλους τους χώρους του σχολείου;

- Εξασφαλίζονται οι όροι υγιεινής, ασφάλειας, θέρμανσης, αντισεισμικής προστασίας, γρήγορου διαδικτύου, κ.λπ.;

α) Να πραγματοποιήσετε μία προέρευνα πάνω σε ορισμένες από τις προηγούμενες διαστάσεις σε τρία κοντινά Γυμνάσια.
β) Μετά την προέρευνα να βελτιώσετε το ερωτηματολόγιο.
γ) Να διεξαγάγετε δεύτερη έρευνα με το ίδιο θέμα στον Δήμο σας.
δ) Να συγκρίνετε τα αποτελέσματα των δύο ερευνών.
ε) Να παρουσιάσετε τα αποτελέσματα σε ανοιχτή εκδήλωση στον Δήμο σας. Να διατυπώσετε προτάσεις.

5 **Εργασία σε ομάδες. Σχεδιασμός έρευνας: *«Περιβάλλον και καθημερινές συνήθειες των μαθητών».***
Να καταρτίσετε ένα γραπτό ερωτηματολόγιο με 10-15 ερωτήσεις (κλειστού τύπου σε πεντάβαθμη κλίμακα, τύπου ναι-όχι, ανοιχτού τύπου), το οποίο θα συμπληρώσουν διαδικτυακά μαθητές της Τρίτης Γυμνασίου σχολικών μονάδων της ευρύτερης περιοχής του Δήμου σας. Να επιλέξετε θέματα που σας ενδιαφέρουν περισσότερο. Για παράδειγμα, μπορείτε ενδεικτικά να ρωτήσετε:
- Τι κάνετε για την εξοικονόμηση ενέργειας και νερού;
- Προτιμάτε το περπάτημα, την ποδηλασία κ.λπ.;
- Ανακυκλώνετε προϊόντα; Ποια;
- Επιλέγετε τοπικά προϊόντα;
- Αγοράζετε μη τυποποιημένα προϊόντα;
- Αποφεύγετε προϊόντα μιας χρήσης;
- Αγοράζετε μεταχειρισμένα προϊόντα;
- Αγοράζετε βιολογικά προϊόντα;

10.2 Πληθυσμός και Δείγμα

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθήτριες και οι μαθητές να μπορούν:
- Να αναγνωρίζουν την αναγκαιότητα της χρήσης δείγματος και τη διαφορά του από τον πληθυσμό.
- Να χρησιμοποιούν απλή τυχαία δειγματοληψία για την επιλογή ενός αντιπροσωπευτικού δείγματος.
- Να αναγνωρίζουν τη δυνατότητα επαγωγικής εξαγωγής συμπερασμάτων για έναν πληθυσμό από ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα.

Διερεύνηση 1: Ποιοι θα πάρουν το δώρο;

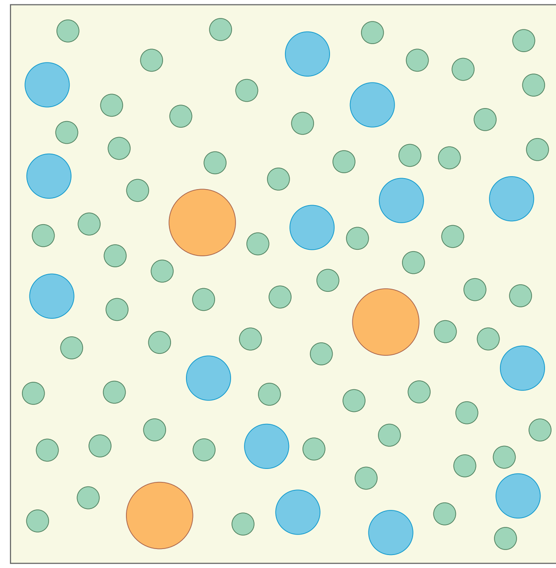
Να συνεργαστείτε ανά δύο και να συζητήσετε τα αποτελέσματά σας στην τάξη.

Μια εταιρεία πρόσφερε για 10 μαθητές της Πρώτης Γυμνασίου ενός σχολείου δωρεάν παρακολούθηση ενός προγράμματος εκμάθησης ηλεκτρονικών υπολογιστών. Η Πρώτη Τάξη του Γυμνασίου έχει 70 μαθητές. Ο Διευθυντής του Σχολείου ανακοίνωσε την εκπαιδευτική προσφορά στους μαθητές και δήλωσαν συμμετοχή όλοι οι μαθητές της Πρώτης Τάξης Γυμνασίου.
Πώς προτείνετε να επιλέξει ο Διευθυντής τους 10 μαθητές;

Διερεύνηση 2: Κύκλοι

Να συνεργαστείτε είτε ανά ζεύγη είτε σε μικρές ομάδες.

Στο παρακάτω σχήμα υπάρχουν 80 κύκλοι τριών μεγεθών. Οι μικροί έχουν διάμετρο 1 cm, οι μεσαίοι 2 cm και οι μεγάλοι 3 cm.
α) Να διαλέξετε σε 15 δευτερόλεπτα 5 κύκλους που νομίζετε ότι αντιπροσωπεύουν τα μεγέθη των 80 κύκλων.



β) Να βρείτε τη μέση τιμή των διαμέτρων των κύκλων που διαλέξατε.

γ) Να αριθμήσετε όλους τους κύκλους τοποθετώντας σε καθέναν αριθμούς από το 1 έως το 80.

δ) Να γράψετε σε όμοια χαρτάκια τους αριθμούς από το 1 έως το 80, να διπλώσετε τα χαρτάκια και να τα βάλετε σε ένα κουτί.

ε) Να ανακατέψετε καλά τα χαρτάκια με τους αριθμούς στο κουτί, να τραβήξετε στην τύχη 5 χαρτάκια και να σημειώσετε τους αριθμούς.

στ) Να βρείτε τη μέση τιμή των διαμέτρων των κύκλων που αντιστοιχούν στους αριθμούς οι οποίοι αναγράφονται στα χαρτάκια που τραβήξατε.

ζ) Να βρείτε τη μέση τιμή των διαμέτρων των κύκλων του σχήματος.

η) Να συγκρίνετε τη μέση τιμή των διαμέτρων των 5 κύκλων που βρήκατε στα ερωτήματα (β) και (στ) μεταξύ τους και με τη μέση τιμή της διαμέτρου όλων των κύκλων που βρήκατε στο (ζ) ερώτημα.

Ποια τιμή από τις μέσες τιμές των 5 κύκλων είναι πιο κοντά στη μέση τιμή όλων των κύκλων ;
Τι συμπεραίνετε ;

Σημείωση:
Μπορείτε όλοι μαζί να φτιάξετε χαρτάκια με αριθμούς για τους κύκλους και να τους τοποθετήσετε στο κουτί. Ακολούθως και διαδοχικά αφού τραβήξει ένας μαθητής 5 χαρτάκια και καταγράψει τους αριθμούς, να διπλώσει και να ξαναβάλει τα χαρτάκια στο κουτί για να τραβήξει ο επόμενος κ.ο.κ.

Διερεύνηση 3: Εκλογές

Να συνεργαστείτε είτε ανά δύο είτε σε μικρές ομάδες και να συζητήσετε τον προβληματισμό σας στην τάξη.

Το 1936, κατά την αμερικανική προεκλογική εκστρατεία, το περιοδικό Litery Digest έστειλε ένα ερωτηματολόγιο σε 10 εκατομμύρια Αμερικανούς σχετικά με την πρόθεση ψήφου. Αποδέκτες ήταν κυρίως συνδρομητές του περιοδικού, πολίτες που είχαν τηλέφωνο και ήταν ιδιοκτήτες αυτοκινήτων. Αντίπαλοι σε εκείνες τις εκλογές ήταν ο δημοκρατικός Franklin Roosvelt και ο ρεπουμπλικάνος Alfred Landon:
https://en.wikipedia.org/wiki/1936_United_States_presidential_election
Το περιοδικό συγκέντρωσε πάνω από 2 εκατομμύρια απαντήσεις, τις ανέλυσε και πρόβλεψε νίκη του Landon με ποσοστό 57%. Όμως, η ημέρα των εκλογών επιφύλαξε μια δυσάρεστη έκπληξη στους στατιστικούς αναλυτές της δημοσκόπησης, καθώς θριάμβευσε ο δημοκρατικός υποψήφιος Roosvelt, με το ιστορικό ποσοστό 60,8% έναντι 39,2% του Landon. Την ίδια περίοδο, η εταιρεία American Institute of Public Opinion του George Gallup (1901–1984) διεξήγαγε άλλη δημοσκοπική έρευνα σε 5.000 Αμερικανούς ηλικίας 18 ετών και άνω, με και χωρίς τηλέφωνο ή αυτοκίνητο, η οποία πρόβλεψε το σωστό αποτέλεσμα.

α) Ποια διαφορά εντοπίζετε στις δύο δημοσκοπήσεις σε σχέση με τους συμμετέχοντες στις έρευνες ;

β) Να εξηγήσετε γιατί είναι σημαντικό να λαμβάνεται υπόψη στις έρευνες πρόθεσης ψήφου η ετερογένεια του πληθυσμού;

Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες μάθησης

Πληθυσμός – Δείγμα

Στατιστικός πληθυσμός είναι το σύνολο των ατόμων ή αντικειμένων τα οποία εξετάζουμε ως προς ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά. Τα εν λόγω χαρακτηριστικά ονομάζονται **μεταβλητές**.

Παράδειγμα:

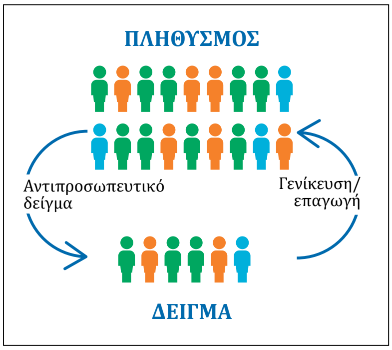
- 'Ενας δήμος δημοσιεύει αγγελία για να προσλάβει έναν ηλεκτρολόγο. Όλοι οι ηλεκτρολόγοι του δήμου που μπορούν να υποβάλουν αίτηση πρόσληψης αποτελούν τον πληθυσμό.
- Στις βουλευτικές εκλογές, πληθυσμός είναι όλοι οι ψηφοφόροι της χώρας, οι οποίοι είναι εγγεγραμμένοι στους εκλογικούς καταλόγους.

Η συλλογή στατιστικών δεδομένων γίνεται κυρίως με απογραφή ή με δειγματοληψία.

Απογραφή έχουμε όταν όλα τα άτομα ενός πληθυσμού συμμετέχουν σε μια έρευνα, αλλά αυτό για μεγάλους πληθυσμούς είναι δαπανηρό, χρονοβόρο και πρακτικά αδύνατο.
Παράδειγμα:

- Οι ερευνητές μιας φαρμακευτικής εταιρείας προκειμένου να κατανοήσουν την επίδραση ενός νέου φαρμάκου στον πληθυσμό θα έπρεπε να χορηγήσουν δοκιμαστικά το φάρμακο σε όλους και να αξιολογήσουν τα αποτελέσματα, κάτι που είναι πρακτικά αδύνατο και σε ορισμένες περιπτώσεις μη δεοντολογικό.
- Οι σχεδιαστές μιας εταιρείας αυτοκινήτων θέλουν να είναι ενήμεροι πόσο ανθεκτικό είναι στις συγκρούσεις ένα νέο μοντέλο αυτοκινήτου που κατασκεύασαν. Όμως, δεν μπορούν να υποβάλουν σε έλεγχο όλα τα αυτοκίνητα της γραμμής παραγωγής, γιατί τότε θα έπρεπε να καταστρέψουν ολόκληρη την παραγωγή αυτού του μοντέλου.

Τα προηγούμενα παραδείγματα δείχνουν τις δυσκολίες συγκέντρωσης παρατηρήσεων ή μετρήσεων από το σύνολο του πληθυσμού.
Όταν λοιπόν η *απογραφή* είναι δύσκολη, η επόμενη καλύτερη μέθοδος είναι να επιλέξουμε ένα υποσύνολο του πληθυσμού το οποίο έχει παρόμοια χαρακτηριστικά με τον πληθυσμό από τον οποίο προέρχεται.



Ένα τέτοιο υποσύνολο του πληθυσμού ονομάζεται **αντιπροσωπευτικό δείγμα** και η διαδικασία επιλογής δείγματος ονομάζεται **δειγματοληψία**.

Μετά την επιλογή ενός αντιπροσωπευτικού δείγματος εργαζόμαστε με τα δεδομένα του δείγματος και γενικεύουμε τα συμπεράσματα που προκύπτουν στον πληθυσμό**.**
Αυτή η γενίκευση *(επαγωγή)* των αποτελεσμάτων στον πληθυσμό αποτελεί πλέον εκτίμηση και όχι ακριβή μέτρηση.

Να χρησιμοποιήσετε το ψηφιακό εργαλείο που θα βρείτε στον σύνδεσμο για να εξασκηθείτε στην κριτική αν ένα δείγμα είναι αντιπροσωπευτικό ή όχι.

Απλή Τυχαία Δειγματοληψία

Η τυχαία δειγματοληψία από έναν μεγαλύτερο πληθυσμό δίνει ένα δείγμα που θεωρείται αντιπροσωπευτικό της ομάδας που μελετάται. Υπάρχουν πολλές διαφορετικές μέθοδοι τυχαίας δειγματοληψίας και η πιο απλή είναι η *απλή τυχαία δειγματοληψία.*

Απλή τυχαία δειγματοληψία ονομάζεται η δειγματοληψία στην οποία κάθε άτομο του πληθυσμού έχει ακριβώς την ίδια πιθανότητα να συμπεριληφθεί στο δείγμα με οποιοδήποτε άλλο άτομο.

Η μέθοδος αυτή είναι η πιο απλή από όλες τις μεθόδους δειγματοληψίας, αφού περιλαμβάνει μόνο μία τυχαία επιλογή και απαιτεί πολύ μικρή γνώση για τον πληθυσμό. Το γεγονός ότι με τη μέθοδο αυτή χρησιμοποιείται τυχαιοποίηση, έχει ως συνέπεια κάθε έρευνα που πραγματοποιείται με ένα τέτοιο δείγμα να μπορεί να γενικευθεί στον πληθυσμό και να υπάρχει χαμηλός κίνδυνος μεροληψίας.

Οι συνηθέστερες μέθοδοι για την επιλογή ενός δείγματος με απλή τυχαία δειγματοληψία είναι η μέθοδος της κληρωτίδας και η μέθοδος των τυχαίων αριθμών.

Παράδειγμα:

Μια εταιρεία, κατά την επέτειο των 10 ετών λειτουργίας της, προσφέρει ως δώρο μία εβδομάδα πληρωμένες διακοπές σε ένα νησί σε 15 από τους 60 υπαλλήλους της. Το δείγμα των 15 από τους 60 υπαλλήλους της οι οποίοι θα κερδίσουν το δώρο μπορεί να το επιλέξει με τις δύο ακόλουθες μεθόδους:

α) Μέθοδος της κληρωτίδας:

Γράφονται τα ονόματα και των 60 υπαλλήλων σε πανομοιότυπα χαρτάκια (κλήροι), διπλώνονται και τοποθετούνται στη συνέχεια σε ένα κουτί (κληρωτίδα). Αφού ανακατευτούν καλά, κάποιος υπάλληλος τραβάει στην τύχη διαδοχικά 15 χαρτάκια που όταν ξεδιπλωθούν αποκαλύπτουν τα ονόματα των 15 υπαλλήλων που κερδίζουν το δώρο.

β) Μέθοδος των τυχαίων αριθμών:

Γράφονται τα ονόματα των 60 υπαλλήλων σε έναν κατάλογο αντιστοιχίζοντας σε κάθε υπάλληλο έναν αριθμό από 1 έως 60. Ακολούθως εργαζόμαστε με έναν από τους παρακάτω τρόπους:

1. Ζητάμε από τον πρώτο πελάτη που θα επισκεφθεί την εταιρεία να πει 15 αριθμούς στην τύχη από 1 έως και 60.

2. Περιστρέφουμε δύο φορές τον δείκτη ενός τροχού της τύχης με 10 ίσους κυκλικούς τομείς αριθμημένους από 0 έως 9 και καταγράφουμε το αποτέλεσμα. Σχηματίζονται έτσι 15 διψήφιοι αριθμοί οι οποίοι αντιστοιχούν σε κάποιους από τους 60 υπάλληλους της εταιρείας.

Σημείωση: Το ίδιο είναι να γυρίσουμε ταυτόχρονα δύο τροχούς της τύχης.

3. Επιλέγουμε 15 αριθμούς από έναν πίνακα τυχαίων αριθμών, όπως μπορείτε να δείτε στην εφαρμογή.

4. Επιλέγουμε 15 αριθμούς με την εντολή «Δειγματοληψία» από την ανάλυση δεδομένων στο Excel, όπως μπορείτε να δείτε στην εφαρμογή.

5. Επιλέγουμε 15 αριθμούς με την εντολή «RANDBETWEEN()» στο Excel, όπως μπορείτε να δείτε στην εφαρμογή.

Με την Απλή Τυχαία Δειγματοληψία εξασφαλίζουμε ένα τυχαίο δείγμα το οποίο αντιπροσωπεύει τον πληθυσμό. Αυτό μειώνει τον κίνδυνο μεροληψίας και αυξάνει την αντιπροσωπευτικότητα του δείγματος. Έτσι μπορούμε να εκτιμήσουμε χαρακτηριστικά και ιδιότητες του πληθυσμού από αντίστοιχα χαρακτηριστικά του δείγματος.

Για να χρησιμοποιήσουμε την απλή τυχαία δειγματοληψία πρέπει :

- Να έχουμε έναν πλήρη κατάλογο με τα άτομα του πληθυσμού.
- Να γνωρίζουμε και να μπορούμε να επικοινωνήσουμε με κάθε άτομο του πληθυσμού που έχει επιλεγεί.
- Να διαθέτουμε επαρκή χρόνο και τους απαιτούμενους πόρους (ανθρώπινο δυναμικό, χρήματα, μέσα καταγραφής, κ.λπ.) για να συλλέξουμε δεδομένα με το απαραίτητο μέγεθος του δείγματος.

Εφαρμογή 1: Το αγαπημένο άθλημα των Ελλήνων μαθητών

Για να βρούμε ποιο είναι το αγαπημένο άθλημα των Ελλήνων μαθητών, ρωτήσαμε 80 μαθητές Γυμνασίων της Τρίπολης ποιο άθλημα τους αρέσει.

α) Ποιος είναι ο πληθυσμός, ποια είναι η μεταβλητή, ποιο είναι το δείγμα και ποιο είναι το μέγεθος του δείγματος;

β) Προκύπτουν από το δείγμα ασφαλή συμπεράσματα ;

Απάντηση:

α) Ο πληθυσμός είναι όλοι οι Έλληνες μαθητές.
Η μεταβλητή είναι το άθλημα.
Το δείγμα είναι οι 80 μαθητές των Γυμνασίων της Τρίπολης.
Το μέγεθος του δείγματος είναι οι 80 μαθητές που ρωτήσαμε.

β) Δεν προκύπτουν από ένα τέτοιο δείγμα ασφαλή συμπεράσματα γιατί το δείγμα δεν είναι αντιπροσωπευτικό, αφού Έλληνες μαθητές δεν είναι μόνον οι μαθητές των Γυμνασίων της Τρίπολης.

Να χρησιμοποιήσετε το ψηφιακό εργαλείο που θα βρείτε στον σύνδεσμο για να εξοικειωθείτε με τις έννοιες του πληθυσμού, του δείγματος και της μεταβλητής.

Εφαρμογή 2: Πληθυσμός ή δείγμα;

Στις παρακάτω περιπτώσεις να προσδιορίσετε αν χρησιμοποιήθηκε δείγμα ή πληθυσμός. Στις περιπτώσεις που χρησιμοποιήθηκε δείγμα να εξηγήσετε εάν το συμπέρασμα μπορεί να γενικευτεί.

α) Το Υπουργείο Παιδείας ανακοινώνει ότι κάνει συζητήσεις για να απαγορεύσει τα κινητά τηλέφωνα από τα Γυμνάσια της Αττικής. Για να γνωρίσετε τις απόψεις όλων των μαθητών των Γυμνασίων κάνετε μία έρευνα για το θέμα αυτό στην οποία συμμετέχουν όλοι οι μαθητές του σχολείου σας.

β) Μετά την ολοκλήρωση της Χριστουγεννιάτικης γιορτής του σχολείου, ο υπεύθυνος καθηγητής για την οργάνωσή της έστειλε στους μαθητές του Γυμνασίου ένα ηλεκτρονικό ερωτηματολόγιο αξιολόγησης της γιορτής και τους ζήτησε να το απαντήσουν διαδικτυακά. Απάντησαν όλοι οι μαθητές του Γυμνασίου.

γ) Για τον προσδιορισμό της μέσης διάρκειας ζωής ενός τύπου λαμπτήρα σε ένα εργοστάσιο επιλέχθηκαν τυχαία 150 λαμπτήρες από τη γραμμή παραγωγής και δοκιμάστηκαν.

Απάντηση:

α) Ο πληθυσμός είναι όλοι οι μαθητές των Γυμνασίων της Αττικής. Στην έρευνα χρησιμοποιήθηκε δείγμα το οποίο δεν είναι αντιπροσωπευτικό, οπότε το συμπέρασμα δεν μπορεί να γενικευτεί.

β) Ο πληθυσμός είναι όλοι οι μαθητές του συγκεκριμένου Γυμνασίου στο οποίο πραγματοποιήθηκε η Χριστουγεννιάτικη γιορτή. Αφού συμμετείχαν όλοι οι μαθητές, πρόκειται για απογραφή.

γ) Δεδομένου ότι δεν δοκιμάστηκαν όλοι οι λαμπτήρες, τα αποτελέσματα βασίζονται σε δείγμα. Εξάλλου, δεν θα ήταν λογικό να δοκιμαστεί ολόκληρος ο πληθυσμός, αφού οι λαμπτήρες με τη δοκιμή καταστρέφονται και δεν θα έμεναν λαμπτήρες προς πώληση. Επειδή οι λαμπτήρες του δείγματος συλλέχθηκαν τυχαία, τα συμπεράσματα μπορούν να γενικευτούν στον πληθυσμό, που είναι οι λαμπτήρες της συγκεκριμένης παραγωγής.

Να χρησιμοποιήσετε την ψηφιακή εφαρμογή για να εξοικειωθείτε με τη διάκριση μεταξύ πληθυσμού και δείγματος.

Εφαρμογή 3: Να φτιάξουμε χώρο ζωγραφικής;

Για να γράψει ο Γιώργος ένα άρθρο στη σχολική εφημερίδα, θέλει να μάθει αν οι μαθητές του σχολείου του πιστεύουν ότι πρέπει να δημιουργηθεί ένας χώρος ζωγραφικής στο σχολείο.
Ρωτάει γι' αυτό 15 φίλους του που συμμετέχουν στην ομάδα χορωδίας.
Δώδεκα από αυτούς απάντησαν πως πιστεύουν ότι χρειάζεται να δημιουργηθεί ένας χώρος ζωγραφικής στο σχολείο. Με βάση αυτό το εύρημα, ο Γιώργος αναφέρει στο άρθρο του ότι το 80% των μαθητών υποστηρίζουν το έργο.

α) Να προσδιορίσετε το δείγμα.

β) Να προτείνετε έναν πληθυσμό από τον οποίο επιλέχθηκε το δείγμα.

γ) Το δείγμα είναι αντιπροσωπευτικό;
δ) Το συμπέρασμα του Γιώργου είναι σωστό; Αν όχι, τι θα μπορούσε να γράψει ο Γιώργος ; Να εξηγήσετε την απάντησή σας.
ε) Να προτείνετε έναν τρόπο επιλογής του δείγματος ώστε τα συμπεράσματα να μπορούν να γενικευθούν στον πληθυσμό.

Απάντηση:

α) Το δείγμα είναι οι 15 μαθητές της χορωδίας του Σχολείου.

β) Ο πληθυσμός είναι όλοι οι μαθητές του σχολείου του Γιώργου.

γ) Το δείγμα δεν είναι αντιπροσωπευτικό, γιατί ο Γιώργος ρώτησε μόνο τους φίλους του, δηλαδή μόνο μαθητές που συμμετείχαν στη χορωδία.

δ) Το συμπέρασμα του Γιώργου δεν είναι σωστό, αφού το δείγμα δεν είναι αντιπροσωπευτικό του συνόλου των μαθητών του σχολείου. Δεν μπορεί, λοιπόν, ο Γιώργος να γενικεύσει το συμπέρασμά του στον πληθυσμό. Αυτό που θα μπορούσε να γράψει στο άρθρο του είναι: *«Το 80% των μαθητών της χορωδίας που ρωτήθηκαν, απάντησαν θετικά για τη δημιουργία ενός χώρου ζωγραφικής στο σχολείο».*

ε) Για να μπορεί ο Γιώργος να γενικεύσει τα συμπεράσματά του στο σύνολο των μαθητών του σχολείου (πληθυσμός), θα έπρεπε να επιλέξει ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα από όλον τον πληθυσμό με απλή τυχαία δειγματοληψία, με μία από τις μεθόδους που έχουν αναφερθεί (Κληρωτίδα, Τυχαίοι αριθμοί).

Να χρησιμοποιήσετε το ψηφιακό εργαλείο που θα βρείτε στον σύνδεσμο για να εξασκηθείτε στην επιλογή κατάλληλου πληθυσμού.

Ερωτήσεις για Αυτοαξιολόγηση

1 Η Ελένη για να βρει το δημοφιλέστερο τραγούδι, σκοπεύει να ρωτήσει τους μαθητές του σχολικού συγκροτήματος στο οποίο ανήκει το σχολείο της. Το σχολικό συγκρότημα περιλαμβάνει Γυμνάσιο, Λύκειο, ΕΠΑ.Λ και εσπερινό ΕΠΑ.Λ. Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί το αποτέλεσμα της έρευνας δεν θα είναι ασφαλές; Τι πρέπει να κάνει η Ελένη για να καταλήξει σ' ένα ασφαλές συμπέρασμα;

2 Πριν γεμίσει τα ποτήρια όλων των καλεσμένων, ο σερβιτόρος ρίχνει μια μικρή ποσότητα κρασιού στο ποτήρι του πατέρα της Μαρίας. Αυτός μυρίζει το άρωμα, γεύεται το κρασί και δίνει την έγκρισή του. Το κρασί που ήπιε ο πατέρας της Μαρίας μπορεί να θεωρηθεί ως αντιπροσωπευτικό δείγμα του περιεχομένου του μπουκαλιού; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

3 Σε μια εκπομπή δημόσιας συζήτησης, ενός τηλεοπτικού σταθμού, το κοινό καλείται να ψηφίσει αν συμφωνεί με την άποψη Α ή με την άποψη Β. Να αναφέρετε δύο λόγους για τους οποίους τα αποτελέσματα της ψηφοφορίας δεν μπορούν να γενικευτούν στον πληθυσμό της συγκεκριμένης χώρας.

4 Ο δήμαρχος μιας περιοχής θέλει να διερευνήσει τα προβλήματα του Δήμου με σκοπό να τα επιλύσει. Για τον λόγο αυτό, ανέθεσε σε μια εταιρεία δημοσκοπήσεων μία έρευνα κατά την οποία 600 δημότες κλήθηκαν να δηλώσουν, ποιο πρόβλημα του Δήμου θεωρούν πιο σημαντικό. Στις παρακάτω ερωτήσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

i. Ο πληθυσμός της έρευνας είναι:
α. Οι 600 δημότες που ρωτήθηκαν. **β.** Όλοι οι δημότες της πόλης. **γ.** Όλοι οι πολίτες της ελληνικής επικράτειας.

ii. Το δείγμα αποτελούν:
α. Οι 600 δημότες που ρωτήθηκαν. **β.** Όλοι οι δημότες της πόλης. **γ.** Όλοι οι πολίτες της ελληνικής επικράτειας.

iii. Η μεταβλητή της έρευνας είναι:
α. Τα προβλήματα του δήμου. **β.** Τα προβλήματα των δημοτών. **γ.** Τα προβλήματα μιας κοινότητας του Δήμου.

Να ανοίξετε τον σύνδεσμο για να δείτε και να απαντήσετε τις παρακάτω ερωτήσεις αυτοαξιολόγησης.

	5 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με τη λέξη Σωστό (Σ), αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος (Λ), αν η πρόταση είναι λανθασμένη. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.	**Σωστό**	**Λάθος**
α.	Για να επιλέξουμε ένα τυχαίο δείγμα δημοτών για ένα θέμα ενός Δήμου πηγαίνουμε σε 50 πολυκατοικίες και ρωτάμε όλους τους ενοίκους αν συμφωνούν ή διαφωνούν.		
β.	Για να βεβαιωθούμε ότι η σούπα που μαγειρεύουμε είναι έτοιμη, ανακατεύουμε καλά και δοκιμάζουμε 1-2 κουταλιές.		
γ.	Για να γνωρίσουμε τη γνώμη των κατοίκων μιας περιοχής για τις συγκοινωνίες, πηγαίνουμε σε μια στάση λεωφορείων 10-12 μ.μ. και καταγράφουμε τη γνώμη όσων επιβατών προσέρχονται στη στάση.		
δ.	Για να μάθουμε αν οι μαθητές ενός σχολείου είναι ευχαριστημένοι από το κυλικείο του σχολείου τους, ρωτάμε στην τύχη 20 μαθητές από κάθε τάξη.		
ε.	Για να πληροφορηθούμε πόσες ώρες την εβδομάδα αφιερώνουν για ψυχαγωγία στο διαδίκτυο οι μαθητές Γυμνασίου της πόλης μας, ρωτάμε όλους τους μαθητές Γυμνασίου των ομάδων ποδοσφαίρου της πόλης.		

Γραπτή συνθετική εργασία (ομαδική)

Μια ομάδα της Τρίτης Γυμνασίου ενός σχολείου έκανε μία στατιστική έρευνα για να διερευνήσει τη γνώμη εκείνων που χρησιμοποιούν το κέντρο της πόλης, στο σχέδιο του Δήμου για τη δημιουργία ζώνης ελεύθερης κίνησης οχημάτων στο κέντρο της πόλης.

Να κάνετε την εργασία που θα βρείτε στον σύνδεσμο.

Ασκήσεις και Προβλήματα

1 Να βρείτε τον πληθυσμό και το δείγμα στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) Στην Ελλάδα, μια έρευνα σε 1950 ενήλικες με ηλικία άνω των 18 ετών έδειξε ότι 850 από αυτούς έχουν τουλάχιστον ένα κατοικίδιο.

β) Το Ινστιτούτο προστασίας του καταναλωτή μιας χώρας, για να εκτιμήσει την κατανάλωση της βενζίνης μιας κατηγορίας νέων αυτοκινήτων στη χώρα αυτή, έλεγξε 1200 τέτοια αυτοκίνητα και βρήκε ότι η μέση κατανάλωση βενζίνης ήταν ένα λίτρο για κάθε 12,5 χιλιόμετρα.

2 Από ποιον πληθυσμό πρέπει να επιλέξουμε άτομα που θα αποτελέσουν το δείγμα για τη διεξαγωγή έρευνας σχετικά με:

α) Την τιμή πώλησης 1 κιλού ψωμιού ίδιου τύπου σε μια πόλη.

β) Την τιμή πώλησης της βενζίνης στην Αθήνα.

γ) Ποιο κανάλι βλέπουν 8-12 π.μ. οι τηλεθεατές/τηλεθεάτριες μιας πόλης;

3 Πραγματοποιούμε στατιστικές έρευνες για τα παρακάτω θέματα. Για καθένα από αυτά να εξηγήσετε αν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα μαθητών από το σχολείο σας.

α) Ανάπλαση της αυλής του σχολείου.

β) Εκτίμηση του χώρου που προορίζεται για ποδήλατα στο κέντρο της πόλης σας.

γ) Ο αριθμός των τσιγάρων που καταναλώνουν καθημερινά οι νέοι 15-24 ετών του Δήμου σας.

δ) Προορισμός διήμερης εκδρομής του σχολείου.

4 Από μία έρευνα που έγινε μεταξύ των μαθητών δύο Γυμνασίων στη Βόρεια Ελλάδα, σχετικά με τις ποδοσφαιρικές προτιμήσεις τους, προέκυψαν τα εξής αποτελέσματα: Από τους 60 μαθητές που απάντησαν στην έρευνα, 20 μαθητές προτιμούν τον Άρη, 15 τον ΠΑΟΚ, 10 τον Ολυμπιακό, 6 την ΑΕΚ, 4 τον Παναθηναϊκό, 3 τον Πανσερραϊκό και 2 τον Αστέρα Τρίπολης.

α) Ποιο είναι το ποσοστό των μαθητών του Γυμνασίου που προτιμούν τον Άρη και ποιο τον ΠΑΟΚ;

β) Ποια είναι τα αντίστοιχα ποσοστά για τις υπόλοιπες ομάδες;

γ) Μπορούν να γενικευτούν τα αποτελέσματα των ποδοσφαιρικών προτιμήσεων για τους μαθητές των Γυμνασίων ολόκληρης της Ελλάδας;

5 Το πενταμελές μαθητικό συμβούλιο της Τρίτης Γυμνασίου σχεδιάζει να οργανώσει έναν σχολικό χορό. Για να προσελκύσει τους μαθητές στον χορό, αποφάσισε να συλλέξει δεδομένα σχετικά με τα είδη μουσικής που προτιμούν οι μαθητές της τάξης. Δημιουργήθηκε μία ομάδα για τη συλλογή των δεδομένων και ρωτούσε στον διάδρομο του 1ου ορόφου όποιον μαθητή περνούσε. Μέχρι το τέλος της ημέρας είχε ρωτηθεί το 62% των μαθητών της Τρίτης Τάξης.

α) Είναι το δείγμα αντιπροσωπευτικό ;

β) Οι απόψεις των μαθητών του δείγματος θα αντικατοπτρίζουν τις απόψεις του πληθυσμού; Να εξηγήσετε.

6 Για να εκτιμήσουμε το αποτέλεσμα των προσεχών βουλευτικών εκλογών, ρωτήσαμε 3.000 φοιτητές για το κόμμα που θα ψηφίσουν.

α) Ποιος είναι ο πληθυσμός και ποιο είναι το δείγμα;

β) Είναι το δείγμα αντιπροσωπευτικό;

γ) Αν οι φοιτητές προτίμησαν τα κόμματα Α, Β, Γ με ποσοστά 45%, 20% και 15% αντίστοιχα, να βρείτε πόσοι από αυτούς προτίμησαν το Α κόμμα, πόσοι το Β και πόσοι το Γ.

7 Σε μία πόλη έγινε μία έρευνα σχετικά με τον αριθμό των αυτοκινήτων που έχει κάθε οικογένεια και από τους ερωτηθέντες προέκυψαν τα ακόλουθα αποτελέσματα: 120 οικογένειες δεν είχαν αυτοκίνητο, 135 οικογένειες είχαν ένα αυτοκίνητο και 45 άλλες οικογένειες είχαν δύο αυτοκίνητα.

α) Τι ποσοστό των οικογενειών έχει ένα αυτοκίνητο;

β) Τι ποσοστό των οικογενειών έχει τουλάχιστον ένα αυτοκίνητο;

γ) Τι ποσοστό των οικογενειών έχει το πολύ ένα αυτοκίνητο;

8 Η αρμόδια υπηρεσία ενός Δήμου για να μάθει τα προβλήματα που έχουν σε σχέση με τον Δήμο οι καταστηματάρχες του Δήμου, έκανε έρευνα ρωτώντας τους καταστηματάρχες που έχουν κατάστημα σε μία πλατεία.

α) Ποιο ήταν το δείγμα ;

β) Ποιος είναι ο πληθυσμός ;

γ) Είναι το δείγμα αντιπροσωπευτικό ;

δ) Μπορεί να ληφθεί απόφαση με βάση τα αποτελέσματα της έρευνας; Αν όχι, να εξηγήσετε γιατί και να προτείνετε τι θα έπρεπε να γίνει.

9 Ο σύλλογος φοιτητών ενός Πανεπιστημίου θέλει να διερευνήσει τη γνώμη των φοιτητών για τη δημιουργία χώρου ενόργανης άθλησης. Μέλη του συλλόγου ρωτούν γι' αυτό μία συγκεκριμένη ημέρα όσους σπουδαστές μπαίνουν στο Πανεπιστήμιο 7-10 π.μ. από την είσοδο Α΄ και ανακοινώνουν τα αποτελέσματα δηλώνοντας ότι αυτή είναι η γνώμη των φοιτητών του Πανεπιστημίου για το θέμα αυτό.

α) Ποιος είναι ο πληθυσμός της έρευνας;

β) Ποιο είναι το δείγμα της έρευνας;

γ) Συμφωνείτε ή διαφωνείτε με την ανακοίνωση του συλλόγου; Να εξηγήσετε την άποψή σας.

10 Μια εταιρεία κινητής τηλεφωνίας μετά από έρευνα διαπιστώνει ότι έχει τις περισσότερες συνδέσεις από άλλες ανταγωνιστικές εταιρείες σε μία πόλη της Ελλάδος και ανακοινώνει ότι κατέχει την πρώτη θέση στις συνδέσεις κινητών πανελλαδικά. Να σχολιάσετε την ανακοίνωση.

11 Μια εταιρεία παραγωγής απορρυπαντικών ανέθεσε σε ένα γραφείο ερευνών τη διεξαγωγή έρευνας σχετικά με τη γνώμη των καταναλωτών για το απορρυπαντικό Καθαρέξ που παρασκευάζει. Το γραφείο ερευνών διάλεξε τυχαία 1500 άτομα από τον τηλεφωνικό κατάλογο και έκανε την εξής ερώτηση: «Είναι γνωστό ότι οι περισσότεροι καταναλωτές πλένουν με Καθαρέξ. Ποιο κατά τη γνώμη σας είναι το καλύτερο απορρυπαντικό;». Να σχολιάσετε κατά πόσο οι απαντήσεις που κατέγραψε το γραφείο ερευνών αντιπροσωπεύουν τις απόψεις τον καταναλωτών.

12 Ο Γιώργος, η Ευγενία και η Βάλια διενεργούν μια έρευνα με σκοπό να εξαγάγουν συμπεράσματα για τον δημοφιλέστερο τόπο ημερήσιας εκδρομής του σχολείου τους στο οποίο φοιτούν 400 μαθητές.

- Ο Γιώργος ρωτά όλους τους μαθητές που συναντά στο κυλικείο του σχολείου.
- Η Ελένη ρωτάει όλους τους μαθητές του τμήματός της.
- Η Βάλια αντιστοιχίζει τους αριθμούς με μαθητές του σχολείου της από αλφαβητικό ονομαστικό κατάλογο με τους 400 και επιλέγει τυχαία 80 μαθητές, τους οποίους στη συνέχεια ρωτά.

Ακολούθως, ανακοινώνουν και οι τρεις τα ευρήματά τους στη Διευθύντρια του σχολείου.
Ποια ευρήματα πρέπει να εμπιστευτεί η Διευθύντρια του σχολείου και γιατί;

13 Σε μια φανταστική χώρα «Ζεντ» έγινε μια δημοσκόπηση, για να εκτιμηθεί το ποσοστό υποστήριξης του Προέδρου στις επερχόμενες εκλογές. Τρεις εκδότες εφημερίδων έκαναν ξεχωριστές εθνικές δημοσκοπήσεις. Τα αποτελέσματα για τις τρεις δημοσκοπήσεις των εφημερίδων είναι τα εξής:

- **Εφημερίδα 1:** 36,5% (η δημοσκόπηση έγινε στις 06 Ιανουαρίου, σε ένα τυχαίο δείγμα 2000 αναγνωστών της εφημερίδας).
- **Εφημερίδα 2**: 41% (η δημοσκόπηση έγινε στις 20 Ιανουαρίου, σε ένα τυχαίο δείγμα 1000 πολιτών με δικαίωμα ψήφου).
- **Εφημερίδα 3:** 39% (η δημοσκόπηση έγινε στις 6 Ιανουαρίου, σε ένα τυχαίο δείγμα 1000 πολιτών με δικαίωμα ψήφου).

Ποιας εφημερίδας τα αποτελέσματα θεωρείτε πιο έγκυρη εκτίμηση για το ποσοστό υποστήριξης του Προέδρου, εάν οι εκλογές γίνουν στις 25 Ιανουαρίου; Να γράψετε δύο επιχειρήματα για να υποστηρίξετε την απάντησή σας. (PISA, 2012)

Στις ασκήσεις 14, 15, 16 και 17 να επιλέξετε ένα τυχαίο δείγμα 15 ατόμων από έναν πληθυσμό 80 ατόμων.

14 Με τη μέθοδο της κληρωτίδας.

15 Με τη δειγματοληψία στο Excel, όπως παρουσιάζεται στο συμπληρωματικό υλικό στην εφαρμογή.

16 Με τη μέθοδο των τυχαίων αριθμών στο Excel, όπως παρουσιάζεται στο συμπληρωματικό υλικό στην εφαρμογή.

17 Με τη μέθοδο του πίνακα τυχαίων αριθμών, όπως παρουσιάζεται στο συμπληρωματικό υλικό στην εφαρμογή.

18 Μια εταιρεία κάνει δώρο 30 τσάντες στους μαθητές ενός σχολείου. Πώς προτείνετε να επιλέξει ο Διευθυντής του σχολείου τους τυχερούς μαθητές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

19 Σε έναν αγώνα μπάσκετ, τον οποίο παρακολουθούν 3000 θεατές, ανακοινώνεται ότι θα επιλεγούν τυχαία 30 θεατές οι οποίοι θα πάρουν δώρο τα εισιτήρια για τον επόμενο αγώνα της ομάδας τους. Πώς θα προτείνατε να επιλεχθούν οι τυχεροί;

20 **Να εργαστείτε ανά δύο ή σε μικρές ομάδες.**
Ένα εργοστάσιο παραγωγής βιδών θέλει να κάνει ποιοτικό έλεγχο στις βίδες που κατασκευάζει ως προς το μήκος τους, το βάρος τους και την αντοχή τους.

Η γραμμή παραγωγής δίνει 1000 βίδες την ώρα και λειτουργεί 8 ώρες τη ημέρα.

Πώς θα προτείνατε να γίνει ο έλεγχος; Να εξηγήσετε την πρότασή σας.

10.3 Μεταβλητότητα Στατιστικών Δεικτών μεταξύ Δειγμάτων

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθήτριες και οι μαθητές να μπορούν:

- Να αναγνωρίζουν τη μεταβλητότητα στατιστικών δεικτών μεταξύ δειγμάτων.

Όπως ξέρουμε, για την περιγραφή των δεδομένων χρησιμοποιούμε μέτρα θέσης και διασποράς. Για τα μέτρα θέσης έχουμε δει τη *μέση τιμή*, τη *διάμεσο* και την *επικρατούσα τιμή*. Για τα μέτρα διασποράς, εχουμε δει το *εύρος* και το *ενδοτεταρτημοριακό εύρος*.

Διερεύνηση: Ποιο είναι το ύψος μας;

Σχόλιο

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται τα ύψη των μαθητών ενός τμήματος της Γ΄ Τάξης Γυμνασίου σε ένα σχολείο.

1,74	1,8	1,64	1,74	1,84	1.8	1,7	1,66	1,78	1,71
1,59	1,62	1,81	1,63	1,6	1,58	1,69	1,75	1,84	1,79
1,74	1,80	1,64	1,68	1,74	1,84	1,60	1,78	1,80	1,74

α) Να βρείτε τη μέση τιμή και να κάνετε το θηκόγραμμα.

β) Να πάρετε δύο τυχαία δείγματα 10 υψών που αντιστοιχούν σε μαθητές αυτού του τμήματος. Να βρείτε τη μέση τιμή, και να κάνετε τα θηκογράμματα.

γ) Να πάρετε δύο τυχαία δείγματα 20 υψών που αντιστοιχούν σε μαθητές αυτού του τμήματος. Να βρείτε τη μέση τιμή, και να κάνετε τα θηκογράμματα.

δ) Τι παρατηρείτε για τις τιμές της μέσης και της διάμεσης τιμής των δειγμάτων, σε σύγκριση με τις αντίστοιχες των μαθητών της Τρίτης τάξης; Να εξηγήσετε.

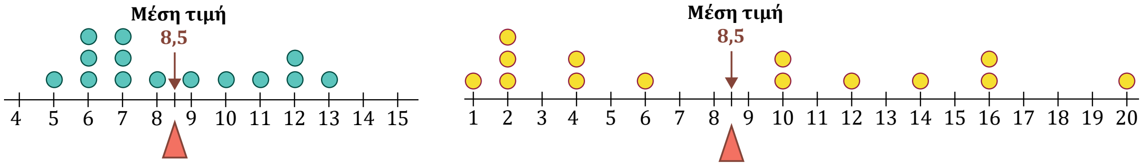
Με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής να διερευνήσετε την έννοια της μεταβλητότητας μεταξύ δειγμάτων.

Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες μάθησης

Όπως αναφέρθηκε, η επιλογή ενός τυχαίου δείγματος από τον πληθυσμό γίνεται με σκοπό να βρούμε δείκτες θέσης και διασποράς στο δείγμα, με τους οποίους στη συνέχεια μπορούμε να κάνουμε μία εκτίμηση για τους αντίστοιχους δείκτες του πληθυσμού. Οι δείκτες που βρίσκουμε σε κάθε δείγμα διαφέρουν λιγότερο ή περισσότερο από τους δείκτες του πληθυσμού. Οι διαφορές αυτές λέγονται *σφάλματα* και παρατηρούνται σε κάθε επιλογή δείγματος. Ωστόσο, με την προϋπόθεση της τυχαιότητας, όσο μεγαλύτερο δείγμα παίρνουμε τόσο περισσότερο πιθανό είναι να πετύχουμε μία καλύτερη εκτίμηση για τους δείκτες του πληθυσμού.

Μεταβλητότητα

Είδαμε ότι η μέση τιμή είναι ένα σημείο γύρω από το οποίο βρίσκονται οι τιμές των δεδομένων. Όταν τα δεδομένα είναι συγκεντρωμένα γύρω από τη μέση τιμή, τότε αυτή αντιπροσωπεύει ικανοποιητικά τα δεδομένα. Όταν όμως τα δεδομένα είναι πολύ διασκορπισμένα, τότε η μέση τιμή δεν παρέχει καλή συνοπτική περιγραφή των δεδομένων. Επίσης, διαφορετικά σύνολα δεδομένων μπορεί να έχουν την ίδια μέση τιμή αλλά να διαφέρουν ως προς το πόσο διασκορπισμένες ή πόσο συγκεντρωμένες είναι οι παρατηρήσεις γύρω από τη μέση τιμή τους. Για παράδειγμα, οι παρατηρήσεις 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 12, 13 έχουν την ίδια μέση τιμή 8,5 με τις παρατηρήσεις 1, 2, 2, 2, 4, 4, 6, 10, 10, 12, 14, 16, 16, 20, αλλά δεν είναι στον ίδιο βαθμό συγκεντρωμένες γύρω από τη μέση τιμή, όπως φαίνεται στα παρακάτω σημειογράμματα.

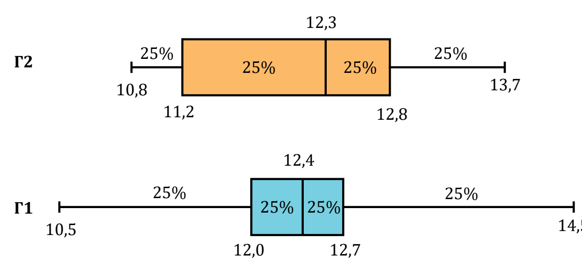


Με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής GeoGebra να διερευνήσετε την έννοια της μεταβλητότητας της μέσης τιμής.

Εφαρμογή 1: Σύγκριση μεταβλητότητας

Οι χρόνοι που κατέγραψαν σε αγώνα δρόμου 100 μέτρων οι μαθητές δύο τμημάτων Γ1 και Γ2 ενός Σχολείου παρουσιάζονται στα θηκογράμματα. Να συγκρίνετε τη μεταβλητότητα των χρόνων των μαθητών των δύο τμημάτων.

Απάντηση:



Οι χρόνοι των μαθητών του Γ1 διασπείρονται σε μεγαλύτερο εύρος από τους αντίστοιχους των μαθητών του Γ2. Ο πιο γρήγορος και ο πιο αργός μαθητής ανήκει στο τμήμα Γ1.
Οι διάμεσοι χρόνοι είναι περίπου ίδιοι για τους μαθητές και των δύο τμημάτων.
Το εύρος (13,7–10,8 = 2,9) των χρόνων των μαθητών του τμήματος Γ2 είναι μικρότερο από το αντίστοιχο του Γ1 (14,5–10,5 = 4), οπότε οι χρόνοι των μαθητών του τμήματος Γ2 παρουσιάζουν μικρότερη μεταβλητότητα.
Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος (12,7–12 = 0,7) που αντιστοιχεί στο μεσαίο 50% των χρόνων των μαθητών του τμήματος Γ1 είναι μικρότερο απο το αντίστοιχο του τμήματος Γ2 (12,8–11,2 = 1,6). Άρα οι χρόνοι του μεσαίου 50% του τμήματος Γ1 παρουσιάζουν μικρότερη μεταβλητότητα απο τους αντίστοιχους του τμήματος Γ2. Το κατώτερο 25% και το ανώτερο 25% των χρόνων του τμήματος Γ1 παρουσιάζουν μεγαλύτερη μεταβλητότητα από τα αντίστοιχα του τμήματος Γ2.

Για να θυμηθείτε την έννοια της μεταβλητότητας, ανοίξτε τον σύνδεσμο.

Εφαρμογή 2: Πόσο λίπος έχουμε;

Ένα γυμναστήριο παρέχει στα εγγεγραμμένα μέλη του δωρεάν λιπομέτρηση. Η λιπομέτρηση μιας ομάδας 60 μελών του σε ποσοστό επί τοις εκατό του συνολικού τους βάρους, παρουσιάζεται στον ακόλουθο πίνακα:

15,6	21,2	22,4	23,6	25,6	27,8	29,5	33,8	35,8	40
19,8	21,6	22,7	23,8	25,9	27,9	29,8	33,9	35,9	41,1

20,1	21,9	24,4	23,9	26,1	28	30,5	34	36	43,8
39,8	22,1	25,2	24,1	26,9	28,1	31,1	34,4	37,5	46,9
20,3	22,2	25,6	27,5	27,3	28,3	31,6	34,9	38,2	49,8
20,8	22,8	29,2	27,8	29,3	28,5	32,9	35,5	38,2	38,8

α) Να κάνετε ένα ιστόγραμμα 6 κλάσεων και να βρείτε τη μέση τιμή, τη διάμεσο, το εύρος και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος του ποσοστιαίου επί τοις εκατό λίπους των 60 μελών της ομάδας του γυμναστηρίου. Τι παρατηρείτε;

β) Να πάρετε τρία τυχαία δείγματα της λιπομέτρησης 10 μελών από τον παραπάνω πίνακα. Για το κάθε δείγμα να βρείτε τη μέση τιμή και την απόκλισή της από τη μέση τιμή της ομάδας. Τι παρατηρείτε; Να δώσετε μία εξήγηση για τις παρατηρήσεις σας.

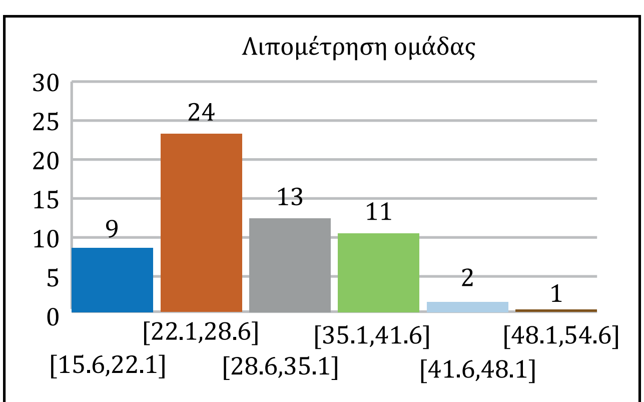
γ) Να βρείτε τη μέση τιμή, των μέσων τιμών, των τριών δειγμάτων που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα. Να τη συγκρίνετε με τη μέση τιμή της ομάδας. Τι παρατηρείτε;

δ) Να κάνετε τα θηκογράμματα των τριών δειγμάτων. Τι παρατηρείτε;

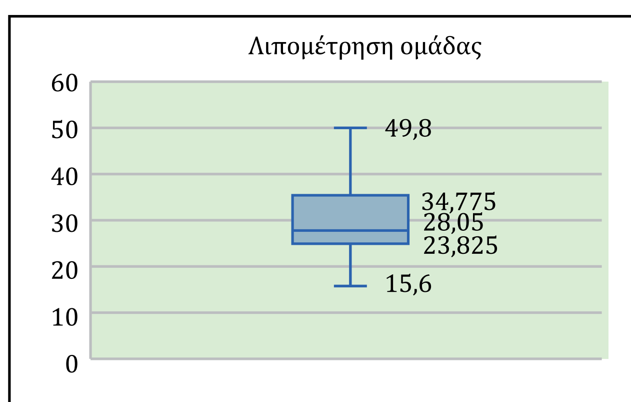
Για να θυμηθείτε τι είναι και πώς κατασκευάζεται ένα απλό θηκόγραμμα ανοίξτε τον σύνδεσμο.

Απάντηση:

α) Δημιουργούμε ένα ιστόγραμμα 6 κλάσεων πλάτους 6,5 (Σχήμα 1) από το οποίο παρατηρούμε ότι τα περισσότερα άτομα και συγκεκριμένα 24 στα 60 έχουν λίγο λίπος από 22,1 έως 28,6 μονάδες μέτρησης σε σχέση με τα υπόλοιπα μέλη της ομάδας. Επίσης υπάρχει ένα άτομο που έχει περισσότερο λίπος σε σχέση με όλα τα υπόλοιπα μέλη της ομάδας. Συγκεκριμένα 49,8 τοις εκατό του συνολικού του βάρους.
Η μέση τιμή που βρίσκουμε κατά τα γνωστά είναι 29,53 μονάδες μέτρησης και για τον προσδιορισμό της διάμεσης τιμής, του εύρους και του ενδοτεταρτημοριακού εύρους δημιουργούμε το αντίστοιχο θηκόγραμμα (Σχήμα 2) από το οποίο βλέπουμε ότι:



Σχήμα 1



Σχήμα 2

δ=28,05, το εύρος είναι 49,8-15,6=34,2 και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος : 34,775-23,825=10,95.
Επομένως, τα μέλη της ομάδας έχουν λίπος που διασπείρεται σε 34,2 μονάδες μέτρησης και το 50% των μελών της ομάδας έχουν λίπος που εκτείνεται κατά 10,95 μονάδες μέτρησης. Το υψηλότερο 25% εκτείνεται κατά: 49,8-34,775=15,025 ενώ το αντίστοιχο χαμηλότερο 25% εκτείνεται κατά: 23,825-15,6=8,225 μονάδες μέτρησης. Άρα, οι τιμές διασπείρονται περισσότερο προς τα δεξιά σε σχέση με τη διάμεσο.

β) Μεταφέρουμε σε μία στήλη ενός λογιστικού φύλλου τις λιπομετρήσεις του πίνακα και με την εντολή *«δειγματοληψία»*, ορίζοντας μέγεθος δείγματος 10, προσδιορίζουμε τα τρία δείγματα που παρουσιάζονται στον πίνακα (1). Στη συνέχεια, κατά τα γνωστά προσδιορίζουμε τη μέση τιμή των δειγμάτων, η οποία αναγράφεται στην τελευταία γραμμή.

Οι αποκλίσεις της μέσης τιμής κάθε δείγματος από τη μέση τιμή του τμήματος παρουσιάζονται στον πίνακα (2).

Πίνακας 2	**Αποκλίσεις**
Δείγμα 1	29,53-27,14=2,39
Δείγμα 2	31,89-29,53=2,36
Δείγμα 3	29,78-29,53=0,25

Παρατηρούμε ότι υπάρχει μεταβλητότητα στις τιμές της μέσης τιμής μεταξύ των δειγμάτων, η οποία οφείλεται στην τυχαιότητα. Ωστόσο, οι μέσες τιμές των δειγμάτων βρίσκονται σχετικά κοντά στη μέση τιμή της ομάδας.

γ) Η μέση τιμή των μέσων τιμών των τριών δειγμάτων (Πίνακας 1) είναι:

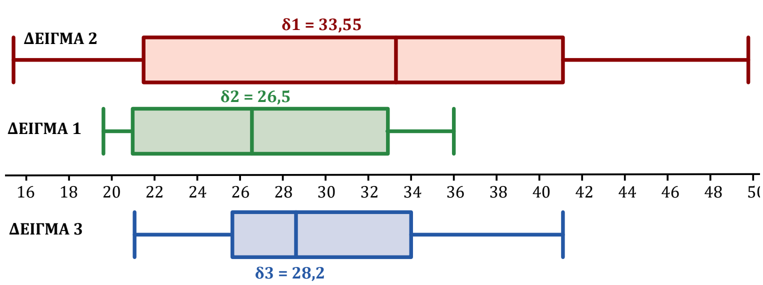
$$\frac{27{,}14 + 31{,}89 + 29{,}78}{3} = 29{,}60$$

Παρατηρούμε ότι η απόκλιση της μέσης τιμής των τριών μέσων τιμών, από τη μέση τιμή της ομάδας είναι: 29,6–29,53 = 0,07 και είναι καλύτερη κατά μέσο όρο προσέγγιση της μέσης τιμής της ομάδας.

Δείγμα 1	**Δείγμα 2**	**Δείγμα 3**
19,8	15,6	21,2
20,3	19,8	25,9
24,4	31,1	22,1
32,9	21,6	29,3
28,3	21,9	40
36	36	41,1
25,2	49,8	27,8
35,5	38,2	27,9
27,8	41,1	34
21,2	43,8	28,5
Μ.Τ.=27,14	**Μ.Τ.=31,89**	**Μ.Τ.=29,78**

Πίνακας 1

δ) Με τα δεδομένα του πίνακα (1) κάνουμε κατά τα γνωστά τα σχετικά θηκογράμματα:



Από τα θηκογράμματα βλέπουμε ότι: Σε σχέση με τη συνολική μεταβλητότητα, το δείγμα (2) έχει τη μεγαλύτερη, με τιμές που διασπείρονται σχεδόν από 16 έως 50, δηλαδή έχουν εύρος περίπου 50−16 = 34 μονάδες μέτρησης. Το δείγμα με τη μικρότερη συγκριτικά συνολική μεταβλητότητα είναι το πρώτο, με εύρος περίπου 36−20 = 16 μονάδες μέτρησης. Σε σχέση με τη μεταβλητότητα του μεσαίου 50% των τιμών λιπομέτρησης, το δείγμα (2) έχει τη μεγαλύτερη, με ενδοτεταρτημοριακό εύρος περίπου 40,5–20,6 = 19,9 μονάδες μέτρησης έναντι της αντίστοιχης του δείγματος (3), η οποία είναι περίπου 34–26 = 8 μονάδες μέτρησης και είναι η μικρότερη συνολικά. Από την εξέταση της μεταβλητότητας συμπεραίνουμε ότι το δεύτερο δείγμα συνεισφέρει περισσότερο στη συνολική μεταβλητότητα των τιμών λιπομέτρησης των συγκεκριμένων μελών.

Εφαρμογή 3: Πόση βροχή έπεσε;

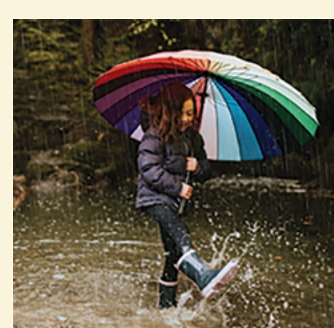
Για την εύρεση της μέσης βροχόπτωσης σε χιλιοστά κατά τη διάρκεια του χειμώνα σε μια πόλη, χρησιμοποιήθηκαν μετρήσεις του νερού σε mm, 40 βροχερές ημέρες του χειμώνα από δύο περιοχές Α , Β και ανακοινώθηκαν τα ακόλουθα αποτελέσματα :

Μ.Τ. = 29,53 mm, δ = 28 mm, Εύρος = 34,2 mm και Ενδοτεταρτημοριακό εύρος = 11 mm.

Την ίδια περίοδο, οι μετρήσεις σε 30 από αυτές τις ημέρες στις περιοχές Α , Β παρουσιάζονται στους πίνακες (1) και (2) αντίστοιχα:

34	15,6	25,6	21,2	27,5	28,5
34,4	19,8	25,9	21,6	27,8	29,2
34,9	20,1	26,1	21,9	27,8	29,3
35,5	20,3	26,9	22,1	27,9	29,5
23,8	20,8	27,3	33,9	28	29,5

Πίνακας 1



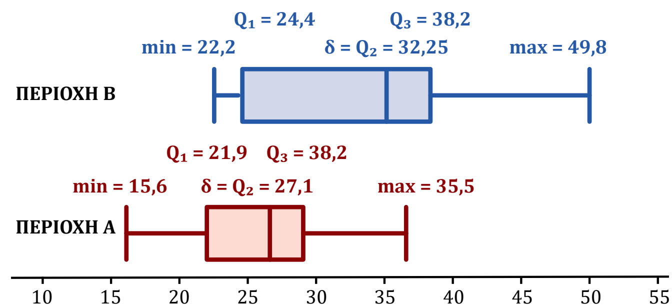
α) Να κάνετε θηκογράμματα για τις τιμές βροχόπτωσης στις δύο περιοχές.
β) Να συγκρίνετε τη βροχόπτωση στις δύο περιοχές.
γ) Να συγκρίνετε τη μεταβλητότητα της βροχόπτωσης στην πόλη με την αντίστοιχη στις περιοχές Α και Β.
δ) Τι παρατηρείτε ; Τι συμπεραίνετε;

39,8	22,4	29,8	35,8	40	28,1
22,2	22,7	30,5	35,9	41,1	28,3
22,8	24,4	31,1	36	43,8	38,2
23,9	25,2	31,6	37,5	46,9	38,8
24,1	23,6	32,9	38,2	49,8	33,8

Πίνακας 2

Απάντηση:

α) Κατά τα γνωστά, τα θηκογράμματα είναι:



β) Για να κάνουμε σύγκριση της βροχόπτωσης στις δύο περιοχές, θα χρησιμοποιήσουμε από τα μέτρα θέσης τη μέση τιμή και τη διάμεσο και από τα μέτρα μεταβλητότητας το εύρος και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος. Έτσι έχουμε:

- Η μέση τιμή βροχόπτωσης στην περιοχή Β βρίσκουμε κατά τα γνωστά ότι ήταν 32,64 mm, μεγαλύτερη από την αντίστοιχη στην περιοχή Α με τιμή 26,42 mm. Η διάμεση βροχόπτωση για την περιοχή Β ήταν 32,25 mm, επίσης μεγαλύτερη από την αντίστοιχη στην περιοχή Α με τιμή 27,1 mm.
- Το εύρος της βροχόπτωσης στην περιοχή Β ήταν 49,8–22,2 = 27,6 mm, μεγαλύτερο από το αντίστοιχο για την περιοχή Α με τιμή 35,5–15,6 = 19,9 mm. Ανάλογα και για τη μεταβλητότητα του μεσαίου 50% αφού το ενδοτεταρτημοριακό εύρος στην περιοχή Β ήταν 38,2–24,4 = 13,8 mm, μεγαλύτερο από το αντίστοιχο για την περιοχή Α με τιμή 29,2–21,9 = 7,3 mm.

γ) Για την περιοχή Β:

- Η μέση τιμή 32,64 mm και η διάμεση τιμή 32,25 mm της βροχόπτωσης για την περιοχή Β ήταν μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες της πόλης (ΜΤ=29,53 mm και δ=28 mm).
- Η μεταβλητότητα της βροχόπτωσης για την περιοχή Β ήταν: Εύρος = 27,6 mm και ενδοτεταρτημοριακό εύρος = 13,8 mm. Άρα το εύρος της βροχόπτωσης ήταν μικρότερο και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος μεγαλύτερο από τα αντίστοιχα της πόλης (34,2 και 11 αντίστοιχα).

Για την περιοχή Α:

- Η μέση τιμή 26,42 mm και η διάμεση τιμή 27,1 mm της βροχόπτωσης για την περιοχή Α ήταν μικρότερες από τις αντίστοιχες της πόλης (ΜΤ = 29,53 mm και δ = 28,05 mm).
- Η μεταβλητότητα της βροχόπτωσης για την περιοχή Α ήταν: Εύρος = 35,5–15,6 = 19,9 mm και ενδοτεταρτημοριακό εύρος = 29,2–21,9 = 7,3 mm. Οι τιμές αυτές είναι μικρότερες από τις αντίστοιχες της πόλης.

δ) Η μέση και η διάμεση τιμή της βροχόπτωσης στην περιοχή Β ήταν μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες της πόλης, ενώ της περιοχής Α μικρότερες. Άρα, η μέση και η διάμεση τιμή της βροχόπτωσης στην πόλη επηρεάζονται ανοδικά από τις αντίστοιχες της περιοχής Β.

- Η μέγιστη τιμή βροχόπτωσης στην περιοχή Β (49,8 mm) και η ελάχιστη στην περιοχή Α (15,6 mm) διαμορφώνουν το εύρος της βροχόπτωσης στην πόλη.

Ερωτήσεις για Αυτοαξιολόγηση

1 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με τη λέξη Σωστό (Σ), αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος (Λ), αν η πρόταση είναι λανθασμένη. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

α)	Μια απόμακρη τιμή βρίσκεται στο τέταρτο τεταρτημόριο.	
β)	Αν δύο δείγματα έχουν ίδιο εύρος, τότε έχουν την ίδια μεταβλητότητα.	

γ)	Αν δύο δείγματα έχουν το ίδιο ενδοτεταρτημοριακό εύρος, τότε έχουν την ίδια μεταβλητότητα.	
δ)	Αν δύο δείγματα έχουν την ίδια μεταβλητότητα, τότε έχουν και την ίδια διάμεσο.	
ε)	Αν ένα δείγμα Α χωρίς απόμακρες τιμές έχει μικρότερη μεταβλητότητα από ένα άλλο δείγμα Β, τότε θα έχει μικρότερη ελάχιστη τιμή.	
στ)	Αν το ενδοτεταρτημοριακό εύρος ενός δείγματος είναι μικρότερο από το αντίστοιχο ενός άλλου δείγματος, τότε το ίδιο θα ισχύει και για το εύρος.	
ζ)	Αν το εύρος ενός δείγματος είναι μικρότερο από το αντίστοιχο ενός άλλου δείγματος, τότε το ίδιο θα ισχύει και για το ενδοτεταρτημοριακό εύρος.	
η)	Αν το ενδοτεταρτημοριακό εύρος ενός δείγματος Α είναι μικρότερο από το αντίστοιχο ενός άλλου δείγματος Β, τότε το δείγμα Α θα έχει μικρότερη μεταβλητότητα.	
θ)	Αν ένα δείγμα Α χωρίς απόμακρες τιμές έχει μεγαλύτερη μεταβλητότητα από ένα άλλο δείγμα Β, τότε θα έχει μεγαλύτερη μέγιστη τιμή.	

Ασκήσεις και Προβλήματα

1 Σε μια έρευνα χρησιμοποιήθηκαν δύο δείγματα Α, Β και βρέθηκε ότι:
Δείγμα Α: min = 2, max = 6, Q1 = 3, Q3 = 5
Δείγμα Β: min = 3, max = 8, Q1 = 2, Q3 = 4

α) Να βρείτε και να συγκρίνετε τη μεταβλητότητα των δειγμάτων.

β) Να βρείτε και να συγκρίνετε τη μεταβλητότητα του μεσαίου 50% των δειγμάτων.

2 Σε μια έρευνα για τις τιμές ενός προϊόντος στα σουπερμάρκετ σε δύο πόλεις Α και Β και βρέθηκε ότι:
Πόλη Α: min = 1, max = 9, Q1 = 2, Q3 = 7
Πόλη Β: min = 2, max = 10, Q1 = 3, Q3 = 6. Να βρείτε και να συγκρίνετε στα σουπερμάρκετ των δύο πόλεων:

α) Τη μεταβλητότητα των τιμών.

β) Τη μεταβλητότητα του μεσαίου 50% των τιμών.

3 Η περίληψη των πέντε αριθμών για δύο δείγματα είναι:
Δείγμα Α: min = 4, max = 15, Q1 = 5, Q2 = 8, Q3 = 10.
Δείγμα Β: min = 3, max = 12, Q1 = 4, Q2 = 9, Q3 = 11.

α) Να βρείτε και να συγκρίνετε τη μεταβλητότητα των δειγμάτων.

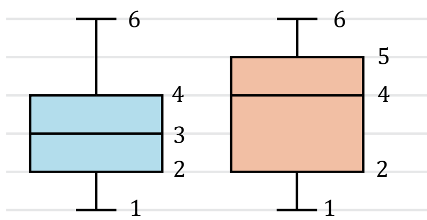
β) Να βρείτε και να συγκρίνετε τη μεταβλητότητα του μεσαίου 50% των δειγμάτων.

4 Η περίληψη των πέντε αριθμών για τους ετήσιους μισθούς των εργαζομένων σε χιλιάδες ευρώ, σε τρία παρόμοια εργοστάσια της ίδιας εταιρείας, με το ίδιο αντικείμενο σε τρεις χώρες της Ευρωπαϊκής Ένωσης είναι:
Χώρα Α: min=10, max=30, Q1=15, Q2=20, Q3=25
Χώρα Β: min=4, max=20, Q1=10, Q2=15, Q3=20
Χώρα Γ: min=8, max=40, Q1=8, Q2=30, Q3=35
Να βρείτε και να συγκρίνετε στα εργοστάσια των τριών χωρών:

α) Τη μεταβλητότητα των μισθών.

β) Τη μεταβλητότητα του μεσαίου 50% των δειγμάτων.

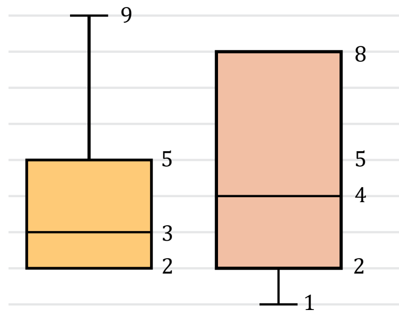
5 Από τα παρακάτω θηκογράμματα για δύο δείγματα μιας έρευνας, να βρείτε και να συγκρίνετε:



α) Τη μεταβλητότητα των δειγμάτων.

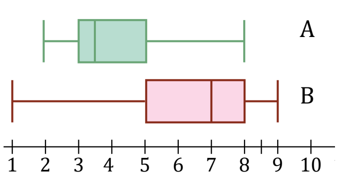
β) Τη μεταβλητότητα του μεσαίου 50% των δειγμάτων.

6 Από τα ακόλουθα θηκογράμματα για δύο δείγματα μιας έρευνας, να βρείτε και να συγκρίνετε:



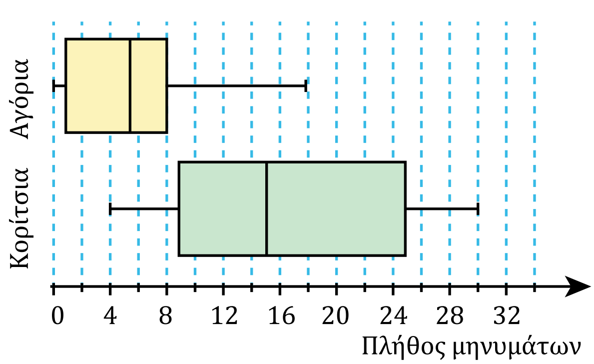
α) Τη μεταβλητότητα των δειγμάτων.
β) Τη μεταβλητότητα του μεσαίου 50% των δειγμάτων.

7 Οι χρόνοι αναμονής σε μια στάση του μετρό για δύο διαφορετικές γραμμές απεικονίζονται στα παρακάτω θηκογράμματα.



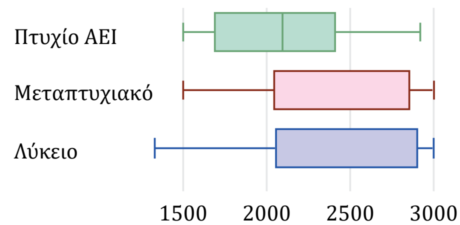
α) Να βρείτε και να συγκρίνετε τις διάμεσες τιμές των χρόνων αναμονής.
β) Να βρείτε και να συγκρίνετε τη μεταβλητότητα των χρόνων αναμονής.
γ) Να βρείτε και να συγκρίνετε τη μεταβλητότητα του μεσαίου 50% των χρόνων αναμονής.

8 Δεκατρία αγόρια και δεκαπέντε κορίτσια της Γ' Γυμνασίου σε ένα σχολείο δήλωσαν πόσα μηνύματα στέλνουν την ημέρα με τα κινητά τους τηλέφωνα και τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στα ακόλουθα θηκογράμματα.



α) Να ερμηνεύσετε τα θηκογράμματα για τις δύο ομάδες.
β) Να συγκρίνετε τα δύο θηκογράμματα.

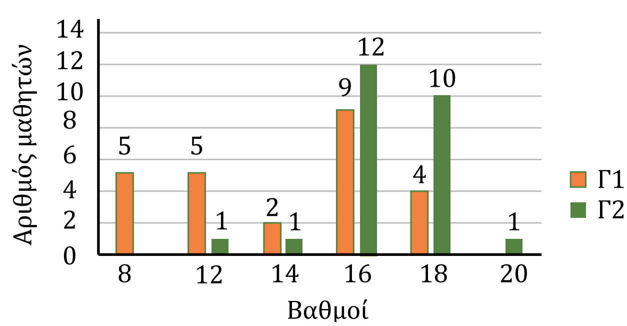
9 Στα θηκογράμματα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα μιας έρευνας για τους μηνιαίους μισθούς εργαζομένων σε χιλιάδες ευρώ, ανάλογα με το επίπεδο εκπαίδευσής τους. Να συγκρίνετε:



α) Τη μεταβλητότητα ανά επίπεδο εκπαίδευσης.
β) Τη μεταβλητότητα του μεσαίου 50% ανά επίπεδο εκπαίδευσης.

10 **Εργασία κατά ζεύγη ή σε μικρές ομάδες.** Το ραβδόγραμμα δείχνει τους βαθμούς των διαγωνισμάτων πρώτου τετραμήνου που έγραψαν οι μαθητές των τμημάτων $Γ_1$ και $Γ_2$.

Βαθμοί τεστ Α' τετραμήνου μαθητών Γ1 και Γ2



α) Πόσοι μαθητές σε κάθε τάξη έδωσαν το διαγώνισμα;
β) Να κατασκευάσετε με τα στοιχεία του διαγράμματος θηκογράμματα για τα τμήματα $Γ_1$ και $Γ_2$.
γ) Να συγκρίνετε τις μέσες τιμές και τις διαμέσους των δύο τμημάτων και να τις χρησιμοποιήσετε για να αξιολογήσετε τα αποτελέσματα των δύο τμημάτων.
δ) Να εξηγήσετε ποια πλεονεκτήματα έχει το θηκόγραμμα έναντι του ραβδογράμματος.

11 Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι τιμές πίεσης 30 πελατών ενός φαρμακείου.

12	11	10	15	17	19	8	10	13	16
8	10	14	11	12	18	16	19	14	13
8	9	14	10	10	8	12	13	16	20

α) Να βρείτε τη μέση τιμή, τη διάμεσο, το εύρος και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος της πίεσης των πελατών.

β) Να κατασκευάσετε το θηκόγραμμα.

γ) Να πάρετε δύο τυχαία δείγματα 10 πιέσεων που αντιστοιχούν σε πελάτες αυτής της ομάδας. Να κατασκευάσετε θηκογράμματα και να συγκρίνετε τη μεταβλητότητα της πίεσης μεταξύ των δειγμάτων.

δ) Να συγκρίνετε τη μεταβλητότητα των δειγμάτων με τη μεταβλητότητα της ομάδας. Τι παρατηρείτε; Τι συμπεραίνετε;

10.4 Ανακεφαλαίωση και διεύρυνση της θεματικής ενότητας

Πληθυσμός στη στατιστική είναι το σύνολο των ατόμων ή των αντικειμένων τα οποία εξετάζουμε ως προς μία ή περισσότερες ιδιότητες (χαρακτηριστικά) που μας ενδιαφέρουν. Τα εν λόγω χαρακτηριστικά ονομάζονται **μεταβλητές**.

Απογραφή έχουμε όταν όλα τα άτομα ενός πληθυσμού συμμετέχουν σε μια έρευνα.

Έρευνα είναι η συστηματική παρατήρηση φαινομένων, η συλλογή δεδομένων και η εξαγωγή συμπερασμάτων με βάση τα δεδομένα που έχουν συλλεχθεί.

Αντιπροσωπευτικό δείγμα ονομάζεται ένα υποσύνολο του πληθυσμού το οποίο έχει παρόμοια χαρακτηριστικά με τον πληθυσμό από τον οποίο προέρχεται.

Δειγματοληψία ονομάζεται η επιλογή ενός δείγματος από έναν πληθυσμό.

Απλή τυχαία δειγματοληψία ονομάζεται η δειγματοληψία στην οποία κάθε άτομο του πληθυσμού έχει ακριβώς την ίδια πιθανότητα να συμπεριληφθεί στο δείγμα με οποιοδήποτε άλλο άτομο.

Μέθοδοι Απλής Τυχαίας Δειγματοληψίας.
Οι συνηθέστερες μέθοδοι για την επιλογή ενός δείγματος με απλή τυχαία δειγματοληψία είναι : Η μέθοδος της κληρωτίδας και η μέθοδος τυχαίων αριθμών.

Απόμακρες τιμές ή απόμακρες παρατηρήσεις λέγονται αυτές που απέχουν πολύ από όλες τις άλλες τιμές/παρατηρήσεις.

Ανοίγουμε την εφαρμογή και μελετούμε το «Ιστορικό σημείωμα στη στατιστική».

Επαναληπτικά έργα και προεκτάσεις

1 Στον πίνακα παρουσιάζονται τα νούμερα παπουτσιών των μαθητών της Τρίτης Γυμνασίου σε ένα σχολείο.

30	37	35	40	42	36	38	41	31	38
34	38	36	39	42	37	39	42	36	29
35	34	38	40	34	37	30	34	37	40
36	35	39	41	35	38	40	32	38	38

α) Να βρείτε τη μέση τιμή, τη διάμεσο, το εύρος και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος των υψών των μαθητών αυτού του τμήματος.

β) Να πάρετε τρία τυχαία δείγματα με 10 νούμερα παπουτσιών που αντιστοιχούν σε μαθητές αυτής της τάξης. Να βρείτε τη μέση τιμή, τη διάμεσο, το εύρος και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος των δειγμάτων. Τι παρατηρείτε ; Να δώσετε μία εξήγηση για τις παρατηρήσεις σας.

γ) Να πάρετε τρία τυχαία δείγματα από 20 νούμερα παπουτσιών που αντιστοιχούν σε μαθητές αυτής της τάξης. Να βρείτε τη μέση τιμή, τη διάμεσο, το εύρος και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος του δείγματος. Τι παρατηρείτε; Να δώσετε μία εξήγηση για τις παρατηρήσεις σας.

δ) Να συγκρίνετε τη μέση τιμή, τη διάμεσο, το εύρος και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος από τα νούμερα παπουτσιών των μαθητών στα δύο δείγματα των 10 και 20 μελών με τους αντίστοιχους δείκτες του τμήματος. Τι παρατηρείτε; Να δώσετε μία εξήγηση για τις παρατηρήσεις σας.

2 Στον πίνακα παρουσιάζονται τα βάρη των μαθητών της Πρώτης Τάξης Γυμνασίου σε ένα σχολείο.

50	40	50	70	78	61	55	48	44	53
45	43	55	69	80	62	71	52	43	54
58	42	60	58	39	63	72	61	42	51
60	41	65	61	42	59	64	66	45	62
48	56	53	56	50	60	54	70	46	67

α) Να βρείτε τη μέση τιμή, τη διάμεσο, το εύρος και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος των βαρών των μαθητών αυτού του τμήματος.

β) Να πάρετε τρία τυχαία δείγματα 15 βαρών που αντιστοιχούν σε μαθητές αυτής της τάξης. Να βρείτε τη μέση τιμή, τη διάμεσο, το εύρος και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος των δειγμάτων.
Τι παρατηρείτε ; Να δώσετε μία εξήγηση για τις παρατηρήσεις σας.

γ) Να πάρετε τρία τυχαία δείγματα 25 βαρών που αντιστοιχούν σε μαθητές αυτής της τάξης. Να βρείτε τη μέση τιμή, τη διάμεσο, το εύρος και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος του δείγματος.
Τι παρατηρείτε; Να δώσετε μία εξήγηση για τις παρατηρήσεις σας.

δ) Να συγκρίνετε τη μέση τιμή, τη διάμεσο, το εύρος και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος των βαρών των μαθητών στα δύο δείγματα των 15 και 25 μελών με τους αντίστοιχους δείκτες του τμήματος.
Τι παρατηρείτε; Να δώσετε μία εξήγηση για τις παρατηρήσεις σας.

3 Οι μηνιαίοι μισθοί σε ευρώ των υπαλλήλων μιας εταιρείας παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα:

900	900	1300	1500	1300	900	1900	1600	2100	1200
800	950	1400	1900	1400	1500	1800	1700	2200	1100
850	1300	1500	2000	1500	1400	2000	1800	2000	2000
1100	1050	1600	2100	1600	1500	2100	1700	1700	1800
1150	1100	1700	2200	1700	1300	1800	1100	1600	1600

α) Να κάνετε ένα ιστόγραμμα 5 κλάσεων και να βρείτε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος των μισθών. Τι παρατηρείτε;

β) Να πάρετε τρία τυχαία δείγματα των 10 μισθών από τον πίνακα. Για το κάθε δείγμα να βρείτε τη μέση τιμή και την απόκλισή της από τη μέση τιμή των μισθών όλων των υπαλλήλων της εταιρείας.
Τι παρατηρείτε; Να δώσετε μία εξήγηση για τις παρατηρήσεις σας.

γ) Να βρείτε τη μέση τιμή, των μέσων τιμών, των τριών δειγμάτων που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα. Να τη συγκρίνετε με τη μέση τιμή των μισθών των υπαλλήλων της εταιρείας. Τι παρατηρείτε;

δ) Η Γεωργία πήρε το ακόλουθο δείγμα των μισθών 20 υπαλλήλων της εταιρείας.

1900	1700	1700	2100
1800	1900	1700	2200
2000	2000	1800	2000
2100	2100	1700	1700
1800	2200	1800	2000

i. Να βρείτε τη μέση τιμή και την απόκλισή της από τη μέση τιμή των μισθών των υπαλλήλων της εταιρείας.

ii. Να συγκρίνετε την απόκλιση της μέσης τιμής του δείγματος των μισθών των 20 υπαλλήλων της εταιρείας από τη μέση τιμή των μισθών των υπαλλήλων της εταιρείας, με τις αντίστοιχες αποκλίσεις των μέσων τιμών των δειγμάτων του (β) ερωτήματος.
Τι παρατηρείτε; Να δώσετε μία εξήγηση για τις παρατηρήσεις σας.

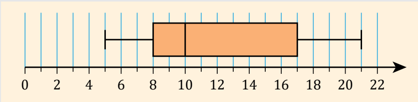
ε) Ο Χασάν πήρε το ακόλουθο δείγμα :

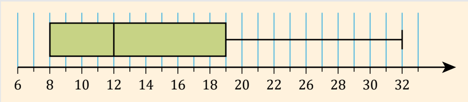
900	900	1100	900
800	950	1300	1200
850	1300	1400	1100
1100	1050	1500	1400

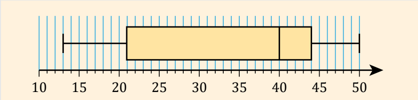
Να κάνετε σύγκριση με θηκογράμματα των δύο δειγμάτων μισθοδοσίας ανδρών και γυναικών που παρουσιάζονται με τους πίνακες της Γεωργίας και του Χασάν.

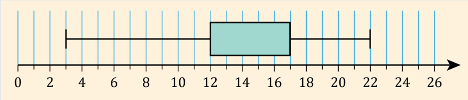
4 **Να εργαστείτε ανά δύο ή σε μικρές ομάδες.**

Για καθένα από τα ακόλουθα θηκογράμματα, να δημιουργήσετε μια κατανομή με τουλάχιστον 10 παρατηρήσεις :

1


3


2


4


Κεφάλαιο

11

Πιθανότητες

Πειράματα τύχης και πιθανότητας

Συσχέτιση

Στο Κεφάλαιο αυτό θα μάθουμε:

- Να αναγνωρίζουμε μέσα από προσομοιώσεις με χρήση λογισμικού και εκτελώντας πειράματα τύχης, ότι η σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου πλησιάζει την τιμή της πιθανότητας, όταν έχουμε μεγάλο αριθμό εκτελέσεων του ίδιου πειράματος (Νόμος των Μεγάλων Αριθμών).
- Να διερευνούμε την ανεξαρτησία ενδεχομένων μέσα από την εκτέλεση πειραμάτων τύχης και προσομοιώσεων.

11.1 Πειράματα τύχης, προσομοιώσεις και Νόμος Μεγάλων Αριθμών

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθήτριες και οι μαθητές να μπορούν:

- Να αναγνωρίζουν, μέσα από προσομοιώσεις με χρήση λογισμικού και εκτελώντας πειράματα τύχης, ότι η σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου πλησιάζει την τιμή της πιθανότητας, όταν έχουμε μεγάλο αριθμό εκτελέσεων του ίδιου πειράματος (Νόμος των Μεγάλων Αριθμών).

Νόμος των Μεγάλων Αριθμών.

Όπως ξέρουμε:

- **Συχνότητα** ενός ενδεχομένου είναι ο φυσικός αριθμός που δηλώνει πόσες φορές πραγματοποιείται (εμφανίζεται) ένα ενδεχόμενο σε ένα σύνολο δοκιμών ενός πειράματος τύχης ή σε ένα σύνολο παρατηρήσεων.
- **Σχετική συχνότητα** ενός ενδεχομένου είναι το πηλίκο της συχνότητας ενός ενδεχομένου προς το πλήθος των συνολικών δοκιμών ή παρατηρήσεων, δηλαδή:

$$\text{Σχετική συχνότητα} = \frac{\text{Πλήθος εμφανίσεων ενδεχομένου}}{\text{Πλήθος δοκιμών}}$$

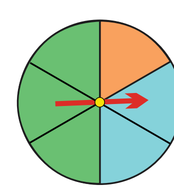
- **Πιθανότητα** P ενός ενδεχομένου A είναι το πηλίκο του πλήθους των ευνοϊκών περιπτώσεων προς το πλήθος των δυνατών περιπτώσεων και συμβολίζεται με P(A). Δηλαδή:

$$P(A) = \frac{\text{Πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\text{Πλήθος δυνατών περιπτώσεων}}$$

Ο ορισμός αυτός εφαρμόζεται σε ισοπίθανα ενδεχόμενα και ονομάζεται **κλασικός ορισμός** της πιθανότητας. Την πιθανότητα που βρίσκουμε με τον κλασικό ορισμό στα επόμενα, θα την ονομάζουμε **θεωρητική πιθανότητα.** Όταν εκτελούμε ένα πείραμα τύχης, η σχετική συχνότητα που προκύπτει για ένα ενδεχόμενο μετά από ένα πλήθος επαναλήψεων του πειράματος ονομάζεται **πειραματική πιθανότητα** και είναι μία εκτίμηση της θεωρητικής πιθανότητας. Η εκτίμηση βελτιώνεται όσο αυξάνεται ο αριθμός των επαναλήψεων του πειράματος.

Διερεύνηση 1: Τροχός της τύχης

Εργασία κατά ζεύγη ή σε μικρές ομάδες.



Μπορεί ένας μαθητής να χρωματίζει με διαφορετικά χρώματα κυκλικούς τομείς του τροχού, ένας δεύτερος να εκτελεί έναν μεγάλο αριθμό δοκιμών και ένας τρίτος να «μαντεύει» το συνολικό μέγεθος των τομέων κάθε χρώματος βάσει των αποτελεσμάτων.

Χωρίζουμε έναν τροχό της τύχης σε 6 ίσα μέρη και τα χρωματίζουμε, όπως φαίνεται στο σχήμα. Έτσι, δημιουργούμε τρεις κυκλικούς τομείς με τρία διαφορετικά χρώματα.

α) Αν περιστρέψουμε τον δείκτη, ποια νομίζετε ότι είναι η πιθανότητα να πετύχουμε μπλε, πορτοκαλί ή πράσινο χρώμα;

β) Να σημειώσετε σε ένα φύλλο εργασίας τις τιμές των σχετικών συχνοτήτων για τα τρία χρώματα μετά από 5, 10, 50, 100 δοκιμές, χρησιμοποιώντας την ψηφιακή εφαρμογή που ακολουθεί.

γ) Να διατυπώσετε εικασίες για τις πιθανότητες των τριων κυκλικών τομέων και να ελέγξετε πειραματικά τις εικασίες.

δ) Η σχετική συχνότητα του πράσινου χρώματος είναι αναμενόμενο να είναι ακριβώς 0,5 ή 50%;

ε) Τι συμβαίνει καθώς το πλήθος των δοκιμών μεγαλώνει; Με ποιον τρόπο μπορούμε να εκτιμήσουμε τις πιθανότητες;

Συγκρίνουμε τις απαντήσεις μας στις ομάδες. Επικυρώνουμε την ορθότητα των λύσεων.

Με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής να διερευνήσετε την έννοια της πιθανότητας.

Διερεύνηση 2: Το φύλο των κουταβιών (Προσομοίωση)

Σχόλιο

Μια σκυλίτσα έχει τρία κουτάβια. Το φύλο κάθε κουταβιού είναι εξίσου πιθανό.

α) Ο πίνακας δείχνει 40 τυχαίους τριψήφιους αριθμούς από το 0 έως το 999 οι οποίοι μοντελοποιούν το φύλο. Υποθέτουμε ότι κάθε αριθμός παριστάνει το φύλο των τριών κουταβιών.
Να χρησιμοποιήσετε τα ψηφία αυτών των αριθμών για να παραστήσετε ένα αρσενικό ή ένα θηλυκό κουτάβι.

045	186	701	479	272
809	304	573	484	973
796	206	428	684	947
416	690	844	504	797
272	958	222	382	652
174	384	709	601	128
191	430	866	334	668
482	897	143	514	715

β) Να χρησιμοποιήσετε μία προσομοίωση για να εκτιμήσετε την πιθανότητα :

- Ακριβώς δύο κουτάβια είναι αρσενικά.
- Το πολύ ένα κουτάβι είναι αρσενικό.
- Τουλάχιστον ένα κουτάβι είναι αρσενικό.

Για την κωδικοποίηση και την προσομοίωση να ανοίξετε την εφαρμογή.

Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες μάθησης

Στην Α΄ Γυμνασίου είδαμε ότι όταν εκτελούμε ένα ***πείραμα τύχης*** δεν μπορούμε να προβλέψουμε εκ των προτέρων ποιο συγκεκριμένο αποτέλεσμα θα εμφανιστεί σε μια επανάληψη του πειράματος. Ωστόσο, όταν γνωρίζουμε ή μπορούμε να βρούμε τις ευνοϊκές και τις δυνατές περιπτώσεις ενός πειράματος τύχης, τότε από τον κλασσικό ορισμό υπολογίζουμε τη θεωρητική πιθανότητα ενός ενδεχομένου. Όταν δεν ξέρουμε ή δεν μπορούμε να βρούμε τη θεωρητική πιθανότητα πραγματοποίησης ενός ενδεχομένου, τότε επαναλαμβάνουμε πολλές φορές το πείραμα και με βάση την πειραματική πιθανότητα (σχετική συχνότητα) κάνουμε μια εκτίμηση της πιθανότητας.

Για παράδειγμα, όταν στρίβουμε ένα νόμισμα υπάρχουν δύο ενδεχόμενα: «Κ»: Κεφάλι ή «Γ»: Γράμματα. Για να δούμε πώς μεταβάλλεται η σχετική συχνότητα των ενδεχόμενων «Κ» και «Γ», εκτελούμε πολλές φορές το πείραμα «στρίψιμο ενός νομίσματος». Μετά από κάθε επανάληψη καταγράφουμε την ένδειξη που προκύπτει.

Μπορεί μια τάξη να χωριστεί σε ομάδες, κάθε ομάδα να στρίψει ένα νόμισμα και να καταγράψει πόσες φορές εμφανίστηκαν τα ενδεχόμενα «Κ» και «Γ» στο σύνολο των επαναλήψεων.

Ακολούθως να προστεθούν τα αποτελέσματα από όλες τις ομάδες για να αυξηθεί ο αριθμός των επαναλήψεων και των καταγραφών του πειράματος.

Ωστόσο είναι φανερό ότι για να επαναλάβουμε πολλές φορές ένα πείραμα, χρειαζόμαστε πολύ χρόνο και γι' αυτό σε τέτοιες περιπτώσεις χρησιμοποιούμε **προσομοιώσεις** (simulations), δηλαδή αναδημιουργούμε τεχνητά πολλές φορές ένα τυχαίο φαινόμενο, συνήθως αλλά όχι αποκλειστικά, με τη βοήθεια της τεχνολογίας.

Με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής, να καταγράψετε τις πιθανότητες ενός πειράματος ρίψης κέρματος.

Ας δούμε τώρα πώς μεταβάλλεται η πειραματική πιθανότητα (σχετική συχνότητα) εμφάνισης του ενδεχόμενου «Κ» όταν αυξάνεται ο αριθμός των ρίψεων ενός συμμετρικού και ομογενούς κέρματος χρησιμοποιώντας την προσομοίωση της εφαρμογής:

Με τη βοήθεια της προσομοίωσης διερευνούμε τη μεταβολή της σχετικής συχνότητας εμφάνισης της πλευράς «κεφάλι» στρίβοντας διαδοχικά 5, 10, 50, 100, 500, 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 6000 φορές ένα κέρμα, καταγράφοντας κάθε φορά σε ένα φύλλο εργασίας *(Πίνακας 1)* το πλήθος των στριψιμάτων, τη συχνότητα εμφάνισης της πλευράς «κεφάλι» και τη σχετική συχνότητά του. (Βλέπε συμπληρωματικό υλικό)
Για παράδειγμα, σε 100 στριψίματα εμφανίζεται 55 φορές κεφαλή, οπότε η σχετική συχνότητα που προκύπτει από την προσομοίωση είναι: $\frac{55}{100}=0,55$.

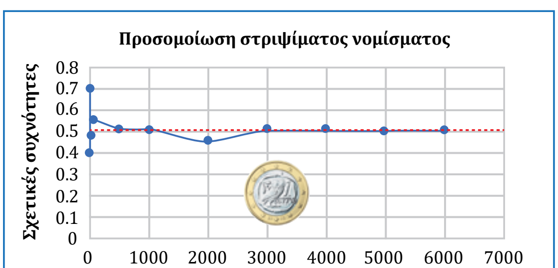
Στο συγκεκριμένο πείραμα, αυξάνοντας τον αριθμό των επαναλήψεων του πειράματος, δηλαδή τα στριψίματα του κέρματος, η σχετική συχνότητα εμφάνισης του ενδεχόμενου «Κ» για 5000 επαναλήψεις είναι 0,498 και για 6000 επαναλήψεις 0,50466.
Οι τιμές αυτές διαφέρουν πολύ λίγο από τη θεωρητική πιθανότητα εμφάνισης του ενδεχόμενου «Κ» που όπως ξέρουμε είναι 0,5.
Από τη γραφική παράσταση των στριψιμάτων με τις αντίστοιχες συχνότητες της πλευράς «κεφάλι» παρατηρούμε ότι στην αρχή, για μικρό αριθμό επαναλήψεων, υπάρχει έντονη μεταβλητότητα.
Στη συνέχεια, καθώς ο αριθμός των επαναλήψεων (δοκιμών) αυξάνει συνεχώς, η σχετική συχνότητα εμφάνισης του ενδεχόμενου «Κ» σταθεροποιείται γύρω από την τιμή 0,5 ή όπως αλλιώς λέμε πλησιάζει, «τείνει», στον αριθμό 0,5, δηλαδή στη θεωρητική πιθανότητα που υπολογίζουμε με τον κλασικό ορισμό.
Γενικά, εκτελώντας ανάλογα πειράματα, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι οι σχετικές συχνότητες πραγματοποίησης των ενδεχομένων ενός πειράματος σταθεροποιούνται γύρω από κάποιους αριθμούς (όχι πάντοτε ίδιους), καθώς ο αριθμός των δοκιμών του πειράματος επαναλαμβάνεται απεριόριστα.

Στριψίματα	Κεφάλι	Σχετική Συχνότητα
5	2	0.4
10	7	0.7
50	24	0.48
100	55	0.55
500	257	0.514
1000	510	0.51
2000	914	0.457
3000	1539	0.513
4000	2043	0.51075
5000	2490	0.498
6000	3028	0.50466

Πίνακας 1

Αυτό το εμπειρικό συμπέρασμα, το οποίο αποδεικνύεται και θεωρητικά, ονομάζεται **νόμος των μεγάλων αριθμών**.

Η **πειραματική πιθανότητα** σε ένα πείραμα είναι μία εκτίμηση της **θεωρητικής πιθανότητας** και πλησιάζει στη θεωρητική πιθανότητα όταν αυξάνει απεριόριστα ο αριθμός των δοκιμών του πειράματος.



Σχήμα 1

Σημείωση:

Αν επαναλάβουμε το παραπάνω πείραμα κάνοντας τον ίδιο αριθμό επαναλήψεων δεν σημαίνει ότι θα προκύψουν οι ίδιες πειραματικές πιθανότητες (σχετικές συχνότητες). Ωστόσο πάλι οι τιμές της πειραματικής πιθανότητας για το ενδεχόμενο «Κ» μετά από ένα μεγάλο αριθμό επαναλήψεων θα σταθεροποιηθούν γύρω από τον αριθμό 0,5.

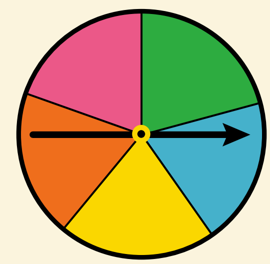
Να ανοίξετε τις ψηφιακές εφαρμογές για να γνωρίσετε περισσότερο τον «Νόμο των Μεγάλων Αριθμών».

Εφαρμογή 1

Ένας τροχός της τύχης είναι χωρισμένος σε πέντε ίσους χρωματισμένους κυκλικούς τομείς, όπως φαίνεται στο σχήμα. Περιστρέφουμε τον δείκτη 50 φορές και καταγράφουμε τα αποτελέσματα στον πίνακα:

Αριθμός	Συχνότητα
Μπλε	8
Πράσινο	11
Κίτρινο	12
Πορτοκαλί	10
Ροζ	9

Πίνακας 1



α) Ποια είναι η θεωρητική πιθανότητα εμφάνισης του πράσινου χρώματος ;

β) Ποια είναι η πειραματική πιθανότητα εμφάνισης του πράσινου χρώματος ;

γ) Να συγκρίνετε τη θεωρητική με την πειραματική πιθανότητα και να εξηγήσετε το αποτέλεσμα της σύγκρισης.

δ) Γυρίζουμε τον τροχό της τύχης 100 φορές και προκύπτουν τα αποτελέσματα του πίνακα. Να βρείτε την πειραματική πιθανότητα εμφάνισης του πράσινου χρώματος.

ε) Να συγκρίνετε την πειραματική πιθανότητα του πράσινου χρώματος που βρήκατε στο (δ) ερώτημα με τη θεωρητική πιθανότητα που βρήκατε στο (α) ερώτημα και με την πειραματική πιθανότητα που βρήκατε στο (β) ερώτημα. Να εξηγήσετε το αποτέλεσμα της σύγκρισης.

Αριθμός	Συχνότητα
Μπλε	19
Πράσινο	23
Κίτρινο	18
Πορτοκαλί	21
Ροζ	19

Πίνακας 2

Απάντηση:

α) Για την εύρεση της θεωρητικής πιθανότητας χρησιμοποιούμε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας. Οι κυκλικοί τομείς είναι ίσοι και επομένως υπάρχει μία ευνοϊκή περίπτωση εμφάνισης του πράσινου χρώματος στις πέντε δυνατές περιπτώσεις. Άρα, σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας βρίσκουμε ότι η θεωρητική πιθανότητα εμφάνισης του πράσινου χρώματος είναι: $P(\text{πράσινο χρώμα}) = \frac{1}{5} = 0,2$ ή 20%.

β) Για την εύρεση της πειραματικής πιθανότητας ανατρέχουμε στις εκβάσεις του πειράματος, οι οποίες έχουν καταγραφεί στον πίνακα που δίνεται. Το πράσινο χρώμα εμφανίστηκε 11 φορές στις 50 δοκιμές του πειράματος, οπότε η σχετική συχνότητα είναι: $\frac{11}{50}$ =0,22. Άρα, η πειραματική πιθανότητα εμφάνισης του πράσινου χρώματος στις 50 εκτελέσεις του πειράματος είναι: 0,22 ή 22%.

γ) Συγκρίνοντας την πειραματική με τη θεωρητική πιθανότητα, βλέπουμε ότι η πειραματική πιθανότητα είναι κοντά στη θεωρητική πιθανότητα αλλά μεγαλύτερη από αυτή. Η διαφορά οφείλεται στην τύχη.

δ) Στο νέο πείραμα με 100 δοκιμές, το πράσινο χρώμα εμφανίστηκε 23 φορές και επομένως η πειραματική πιθανότητα για το πράσινο χρώμα είναι: $\frac{23}{100}$ = 0,23 ή 23%.

ε) Συγκρίνοντας την πειραματική πιθανότητα (0,23) εμφάνισης του πράσινου χρώματος του πειράματος των 100 δοκιμών με τη θεωρητική πιθανότητα (0,20), παρατηρούμε ότι είναι πολύ κοντά στη θεωρητική πιθανότητα αλλά λίγο πιο μακριά συγκριτικά με την αντίστοιχη πειραματική πιθανότητα του πειράματος των 50 δοκιμών (0,22). Το αποτέλεσμα αυτό οφείλεται στη μεταβλητότητα, η οποία είναι πιο έντονη σε μικρό πλήθος δοκιμών (επαναλήψεων).

Σημείωση:

Γενικά, λόγω μεταβλητότητας μπορεί για περισσότερες δοκιμές να προκύψει καλύτερη ή όπως εδώ χειρότερη εκτίμηση. Ωστόσο, όσο οι δοκιμές αυξάνονται, τόσο η μεταβλητότητα μειώνεται και η πειραματική πιθανότητα (σχετική συχνότητα) πλησιάζει τη θεωρητική πιθανότητα.

Εφαρμογή 2: Προσομοίωση

Ένας καλαθοσφαιριστής πετυχαίνει το 80% των ελεύθερων βολών που κάνει.

α) Είναι πιθανό να πετύχει τουλάχιστον δύο από τις επόμενες τρεις ελεύθερες βολές που θα εκτελέσει; Να εξηγήσετε την απάντησή σας.

β) Ο πίνακας δείχνει 30 τυχαίους τριψήφιους αριθμούς από το 0 έως το 999. Υποθέτουμε ότι κάθε τριψήφιος αριθμός παριστάνει τρεις βολές. Πώς μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τα ψηφία αυτών των αριθμών για να παραστήσετε τα αποτελέσματα τριών βολών;

747	728	171	231	896
747	221	279	182	717
937	209	900	883	869
198	016	961	682	924
672	189	627	649	630
986	742	116	114	910

γ) Να χρησιμοποιήσετε τον πίνακα για να εκτιμήσετε την πιθανότητα να επιτύχει στις επόμενες τρεις ελεύθερες βολές που θα εκτελέσει:

i) Ακριβώς δύο. **ii)** Το πολύ μία. **iii)** Τουλάχιστον δύο. **iv)** Τουλάχιστον δύο συνεχόμενες.

Απάντηση:

α) Ναι, γιατί η πιθανότητα επιτυχίας είναι 80% οπότε αναμένουμε στις τρεις επόμενες ελεύθερες βολές να πετύχει: 3·80% = 2,4 βολές.

β) Καθένα από τα ψηφία ενός αριθμού παίρνει τις 10 τιμές: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
Στους αριθμούς 0, 1, 2, 3, 4 αντιστοιχίζουμε την αστοχία ή αποτυχία **Α** και στους αριθμούς 5, 6, 7, 8, 9 αντιστοιχίζουμε την ευστοχία ή επιτυχία **Ε.** Με βάση αυτή την αντιστοίχιση ο πίνακας των 30 τυχαίων αριθμών γράφεται ως εξής:

ΕΑΕ	ΕΑΕ	ΑΕΑ	ΑΑΑ	ΕΕΕ
ΕΑΕ	ΑΑΑ	ΑΕΕ	ΑΕΑ	ΕΑΕ
ΕΑΕ	ΑΑΕ	ΕΑΑ	ΕΕΑ	ΕΕΕ
ΑΕΕ	ΑΑΕ	ΕΕΑ	ΕΕΑ	ΕΑΑ
ΕΕΑ	ΑΕΕ	ΕΑΕ	ΕΑΕ	ΕΑΑ
ΕΕΕ	ΕΑΑ	ΑΑΕ	ΑΑΑ	ΕΑΑ

γ) Από τον πίνακα του (β) ερωτήματος έχουμε:

- Η πειραματική πιθανότητα του ενδεχόμενου *«ακριβώς δύο επιτυχίες»* είναι: $\frac{14}{30}$.

  Άρα, στη βάση των δεδομένων του πειράματος, η εκτίμηση για την πιθανότητα να επιτύχει ακριβώς δύο ελεύθερες βολές στις επόμενες τρεις είναι $\frac{14}{30} \approx 0{,}467$ ή περίπου 46,7%.

- Η πειραματική πιθανότητα του ενδεχόμενου *«το πολύ μία επιτυχία»* είναι: $\frac{12}{30}=0{,}4$.

  Άρα, στη βάση των δεδομένων του πειράματος, η εκτίμηση για την πιθανότητα να επιτύχει το πολύ μία στις επόμενες τρεις ελεύθερες βολές είναι περίπου 40%.

- Η πειραματική πιθανότητα του ενδεχόμενου *«Τουλάχιστον δύο επιτυχίες»* είναι: $\frac{17}{30}$.

  Άρα, στη βάση των δεδομένων του πειράματος, η εκτίμηση για την πιθανότητα να επιτύχει ακριβώς δύο ελεύθερες βολές στις επόμενες τρεις είναι περίπου 56,7%.

- Η πειραματική πιθανότητα (σχετική συχνότητα) του ενδεχόμενου *«Τουλάχιστον δύο συνεχόμενες επιτυχίες»* είναι: $\frac{10}{30}$=0,3. Άρα, στη βάση των δεδομένων του πειράματος, η εκτίμηση για την πιθανότητα να πετύχει τουλάχιστον δύο συνεχόμενες ελεύθερες βολές στις επόμενες τρεις είναι περίπου 30%.

Εφαρμογή 3

α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα όταν ρίξουμε ένα δίκαιο ζάρι να εμφανιστεί αριθμός μικρότερος του 3.

β) Να ρίξετε ένα δίκαιο ζάρι, 10, 50, 100, 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 6000 φορές και να καταγράψετε τις φορές που εμφανίζεται αριθμός μικρότερος του 3.

1. Να βρείτε τις αντίστοιχες πειραματικές πιθανότητες.
2. Με βάση τα δεδομένα του πειράματος να εκτιμήσετε την πιθανότητα να εμφανιστεί αριθμός μικρότερος του 3.
3. Υπάρχει διαφορά της τιμής που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα (β/2) από την πιθανότητα που υπολογίσατε στο ερώτημα (α); Αν ναι, να εξηγήσετε γιατί.

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την προσομοίωση: https://www.geogebra.org/m/UsoH4eNl

Απάντηση:

α) Αφού το ζάρι είναι δίκαιο, τότε καθεμία από τις έδρες του με τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6 έχει την ίδια πιθανότητα να εμφανιστεί. Άρα, θα έχουμε 6 ισοπίθανα δυνατά αποτελέσματα, με $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$.

Αν συμβολίσουμε με A το ενδεχόμενο «η ένδειξη του ζαριού να είναι αριθμός μικρότερος του 3», τότε έχουμε δύο ευνοϊκά αποτελέσματα για το A, δηλαδή $A = \{1, 2\}$ και επειδή τα ενδεχόμενα $\{1\}$, $\{2\}$ είναι ασυμβίβαστα, παίρνουμε: $P(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$.

β) 1. Επειδή θέλουμε να επαναλάβουμε πολλές φορές το πείραμα της ρίψης ενός δίκαιου ζαριού, χρησιμοποιούμε την προσομοίωση της εφαρμογής, εκτελώντας διαδοχικά 10, 50, 100, 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 6000 επαναλήψεις. Αναλυτικά οι απόλυτες συχνότητες και οι πειραματικές πιθανότητες παρουσιάζονται στο συμπληρωματικό υλικό που μπορείς να δεις στη διπλανή ψηφιακή εφαρμογή.

Μπορείτε να ανοίξετε την ψηφιακή εφαρμογή, να εξερευνήσετε το πείραμα ρίψης ζαριού και να καταγράψετε τις πιθανότητες.

Συγκεντρωτικά, οι απόλυτες συχνότητες και οι πειραματικές πιθανότητες παρουσιάζονται στους πίνακες:

Πλήθος επανατλήψεων	Απόλυτη συχνότητα					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
10	1	1	2	3	1	2
50	10	7	10	6	9	8
100	18	14	22	13	19	14
1000	163	163	185	167	152	170
2000	327	313	360	320	341	339
3000	497	467	541	484	506	505
4000	666	637	707	645	666	679
5000	834	805	893	789	844	835
6000	1023	999	941	1006	994	1037

Πίνακας 1

Πλήθος επαναλήψεων	Πειραματική πιθανότητα (κατά προσέγγιση)					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
10	0,1	0,1	0,2	0,3	0,1	0,2
50	0,2	0,14	0,2	0,12	0,18	0,16
100	0,18	0,14	0,22	0,13	0,19	0,14
1000	0,163	0,163	0,185	0,167	0,152	0,17
2000	0,164	0,157	0,18	0,16	0,1731	0,17
3000	0,166	0,156	0,18	0,161	0,169	0,168
4000	0,167	0,159	0,177	0,161	0,167	0,17
5000	0,167	0,161	0,179	0,158	0,169	0,167
6000	0,171	0,167	0,157	0,168	1,166	0,173

Πίνακας 2

Η πειραματική πιθανότητα για το ενδεχόμενο Α να έρθει ένδειξη μικρότερη από 3 είναι το άθροισμα των σχετικών συχνοτήτων των ενδεχόμενων να προκύψει ένδειξη 1 ή να προκύψει ένδειξη 2, αφού τα ενδεχόμενα είναι ασυμβίβαστα. Επομένως, στη βάση των αποτελεσμάτων του πειράματος, έχουμε:

Για 10 ρίψεις είναι: 0,1+0,1 = 0,2

Για 50 ρίψεις είναι: 0,2+0,14 = 0,34

Για 100 ρίψεις είναι: 0,18+0,14 = 0,32

Για 1000 ρίψεις είναι: 0,163+0,163 = 0,326

Για 2000 ρίψεις είναι: 0,164+0,157 = 0,321

Για 3000 ρίψεις είναι: 0,166+0,156 = 0,322

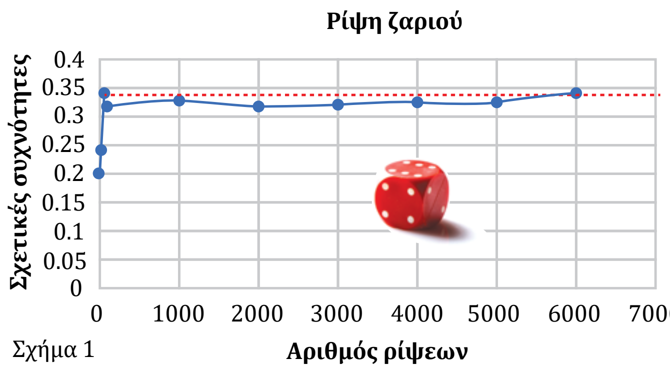
Για 4000 ρίψεις είναι: 0,167+0,159 = 0,326

Για 5000 ρίψεις είναι: 0,167+0,161 = 0,328

Για 6000 ρίψεις είναι: 0,171+0,167 = 0,338

2. Με βάση τα δεδομένα του πειράματος, η καλύτερη εκτίμηση για την πιθανότητα να προκύψει αριθμός μικρότερος από 3, είναι 0,338.

3. Υπάρχει διαφορά μεταξύ της τιμής της πειραματικής πιθανότητας του ενδεχόμενου Α που βρήκαμε στο προηγούμενο ερώτημα και στη θεωρητική πιθανότητα που υπολογίσαμε στο (α) ερώτημα.
Η διαφορά οφείλεται στο γεγονός ότι με την πειραματική πιθανότητα έχουμε εκτίμηση και όχι ακριβή υπολογισμό της πιθανότητας. Ωστόσο, επειδή έχουμε έναν μεγάλο αριθμό επαναλήψεων, η εκτίμηση της πιθανότητας είναι αρκετά καλή και η διαφορά της πειραματικής πιθανότητας για 6000 ρίψεις από τη θεωρητική πιθανότητα είναι πολύ μικρή : 0,338–0,333 ≈ 0,005.

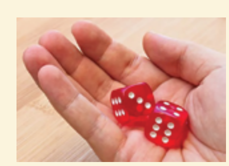


Σχήμα 1

Να χρησιμοποιήσετε το ψηφιακό εργαλείο που θα βρείτε στον σύνδεσμο για να αλληλεπιδράσετε με πολλαπλές ρίψεις ζαριού και την έννοια του νόμου των μεγάλων αριθμών.

Εφαρμογή 4

Να ρίξετε δύο ζάρια ταυτόχρονα και να προσθέσετε τις ενδείξεις.



α) Να σχεδιάσετε και να εκτελέσετε σειρά επαναλήψεων ενός πειράματος για να εκτιμήσετε πόσο πιθανό είναι να εμφανισθεί αριθμός μεγαλύτερος από το 9.

β) Να βρείτε τον δειγματικό χώρο του πειράματος.

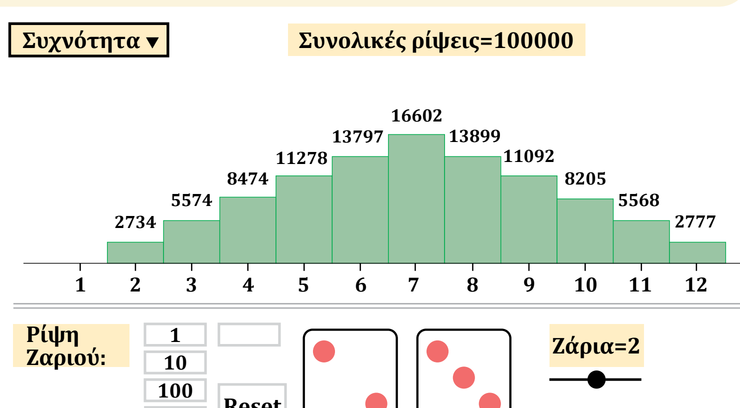
γ) Να βρείτε το ενδεχόμενο το άθροισμα των ενδείξεων των ζαριών να είναι αριθμός μεγαλύτερος από το 9.

δ) Να βρείτε τη θεωρητική πιθανότητα να εμφανισθεί αριθμός μεγαλύτερος από το 9, να τη συγκρίνετε με την εκτίμηση που κάνατε στο (α) ερώτημα και να εξηγήσετε το αποτέλεσμα της σύγκρισης.

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την προσομοίωση: https://www.geogebra.org/m/UsoH4eNl

Απάντηση:

α) Το πείραμα αφορά στην ταυτόχρονη ρίψη δύο όμοιων ζαριών, με σκοπό την καταγραφή του αθροίσματος των ενδείξεων σε κάθε ρίψη. Μας ενδιαφέρουν μόνο οι περιπτώσεις στις οποίες το άθροισμα των ενδείξεων είναι μεγαλύτερο από 9.
Αν εκτελέσουμε ένα μεγάλο πλήθος επαναλήψεων του πειράματος, τότε θα έχουμε μία καλή εκτίμηση της θεωρητικής πιθανότητας μέσω της πειραματικής πιθανότητας.



Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε την προσομοίωση της εφαρμογής και εκτελώντας 100000 επαναλήψεις βρίσκουμε ότι οι συχνότητες των αθροισμάτων 10, 11 και 12 αντίστοιχα είναι: 8205, 5568 και 2777.

Άρα, η συχνότητα του ενδεχόμενου Α: «*Το άθροισμα των ενδείξεων των ζαριών είναι μεγαλύτερο από 9*» είναι:

8205+5568+2777=16550 και επομένως η πειραματική πιθανότητα είναι: $\frac{16550}{100000} = 0{,}1655$ ή 16,55%.

Αυτή είναι και η εκτίμησή μας για την πιθανότητα αν ρίξουμε ταυτόχρονα δύο ζάρια να εμφανισθούν όψεις με άθροισμα ενδείξεων μεγαλύτερο από 9.

Για περισσότερες πληροφορίες, να ανοίξετε το συμπληρωματικό υλικό «Ρίψη δύο ζαριών».

β) Όταν ρίχνουμε ταυτόχρονα δύο ζάρια ο δειγματικός χώρος αποτελείται από ζεύγη με όλες τις δυνατές ενδείξεις. Για να βρούμε τον δειγματικό χώρο χρησιμοποιούμε τον διπλανό πίνακα διπλής εισόδου, από τον οποίο προκύπτει ότι ο δειγματικός χώρος του πειράματος αποτελείται από 6 · 6 = 36 ζεύγη αριθμών.

1ο / 2ο	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
2	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

γ) Το ενδεχόμενο Α: «*Το άθροισμα των ενδείξεων των ζαριών είναι μεγαλύτερο από 9*» πραγματοποιείται όταν το άθροισμα των ενδείξεων είναι 10, 11, 12. Το ενδεχόμενο Α = {(4,6),(5,5),(5,6),(6,4),(6,5),(6,6)} με Ν(Α) = 6 αποτελείται από τις ευνοϊκές περιπτώσεις του πειράματος τύχης.

δ) Το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων του ενδεχομένου Α είναι 6 και το πλήθος των δυνατών περιπτώσεων είναι 36. Επομένως:

$$P(A) = \frac{\text{Πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\text{Πλήθος δυνατών περιπτώσεων}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 0{,}167.$$

Η εκτίμηση που κάναμε στο (α) ερώτημα είναι σχεδόν ίδια με τη θεωρητική πιθανότητα και οφείλεται στον νόμο των μεγάλων αριθμών και στο μεγάλο πλήθος επαναλήψεων.

Εφαρμογή 5

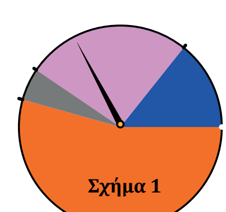
α) Να χωρίσετε έναν κυκλικό τροχό της τύχης σε τέσσερις άνισους κυκλικούς τομείς με τέσσερα διαφορετικά χρώματα. Να εκτιμήσετε την πιθανότητα εμφάνισης κάθε χρώματος.

β) Ένας κυκλικός δίσκος είναι χωρισμένος σε τέσσερις κυκλικούς τομείς. Μετά από 100.000 περιστροφές, οι συχνότητες εμφάνισης των τεσσάρων τομέων είναι, 55027 για τον τομέα με το πορτοκαλί χρώμα, 15166 για τον τομέα με το μπλε χρώμα, 25097 για τον τομέα με το ροζ χρώμα και 9737 για τον τομέα με το γκρι χρώμα. Να εκτιμήσετε τις κεντρικές γωνίες των κυκλικών τομέων κάθε χρώματος.

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την προσομοίωση:
http://www.shodor.org/interactivate/activities/BasicSpinner/

Απάντηση:

α) Χρησιμοποιώντας την προσομοίωση της εφαρμογής, ορίζουμε τέσσερις άνισους κυκλικούς τομείς όπως φαίνεται στο σχήμα (1).


Σχήμα 1

Για να εκτιμήσουμε την πιθανότητα, θα γυρίσουμε πολλές φορές τον τροχό της τύχης και θα καταγράψουμε τις πειραματικές πιθανότητες εμφάνισης κάθε χρώματος.

Ορίζουμε 100000 επαναλήψεις και γυρίζοντας τον δείκτη του τροχού της τύχης παίρνουμε τις συχνότητες του πίνακα.

Από τις συχνότητες αυτές βρίσκουμε:

- Για το πορτοκαλί χρώμα: $\frac{55027}{100000} = 0{,}55027$.
- Για το μπλε χρώμα: $\frac{15131}{100000} = 0{,}15131$.
- Για το ροζ χρώμα: $\frac{24926}{100000} = 0{,}24926$.
- Για το γκρι χρώμα: $\frac{4916}{100000} = 0{,}04916$.

Χρώμα	Συχνότητες	Πειραματικές πιθανότητες
Πορτοκαλί	55027	0,55027
Μπλε	15131	0,15131
Ροζ	24926	0,24926
Γκρι	4916	0,04916

Με βάση τα δεδομένα αυτού του πειράματος, η εκτίμηση για την πιθανότητα εμφάνισης κάθε χρώματος είναι περίπου:

Για το πορτοκαλί χρώμα: 55,03%. Για το μπλε χρώμα: 15,13%.

Για το ροζ χρώμα: 24,93%. Για το γκρι χρώμα: 4,92%.

β) Με τη βοήθεια των πειραματικών πιθανοτήτων, παίρνουμε ότι οι κεντρικές γωνίες των κυκλικών τομέων είναι:

- Για το πορτοκαλί χρώμα $360^\circ \cdot 55{,}03\% \approx 198{,}1^\circ$.
- Για το μπλε χρώμα $360^\circ \cdot 15{,}13\% \approx 54{,}5^\circ$.
- Για το ροζ χρώμα $360^\circ \cdot 24{,}93\% \approx 89{,}75^\circ$.
- Για το γκρι χρώμα $360^\circ \cdot 4{,}92\% \approx 17{,}7^\circ$.

Για περισσότερες πληροφορίες, ανοίξτε την εφαρμογή.

Εφαρμογή 6: Εκτίμηση ψαριών λίμνης

Ψαρεύοντας μια ημέρα σε μια λίμνη πιάνουμε 300 ψάρια. Σημειώνουμε ένα διακριτικό σημάδι πάνω τους και τα ρίχνουμε πάλι στη λίμνη. Την επόμενη μέρα, ψαρεύοντας στην ίδια λίμνη πιάνουμε 200 ψάρια, από τα οποία 20 είχαν το σημάδι που είχαμε κάνει την προηγούμενη ημέρα. Αυτά τα 200 ψάρια τα ρίχνουμε όλα πάλι στη λίμνη. Να εκτιμήσετε πόσα ψάρια υπάρχουν στη λίμνη.

Απάντηση:

Επειδή 20 από τα 200 ψάρια που πιάσαμε έχουν σημάδι, η σχετική συχνότητα είναι $\frac{20}{200}$ ή 0,1 και επομένως η πειραματική πιθανότητα να έχει ένα ψάρι σημάδι είναι 0,1. Άρα μια εκτίμηση για τα σημαδεμένα ψάρια είναι 0,1. Αν ν το πλήθος των ψαριών στη λίμνη, επειδή τα ψάρια με σημάδι είναι 300, τότε θα ισχύει ότι:

$\frac{1}{10}\nu = 300$ ή $\nu = 300 \cdot 10 = 3000$. Επομένως, μία εκτίμηση του πληθυσμού των ψαριών της λίμνης είναι 3000.

Εργασία με προεκτάσεις

Όταν ρίχνουμε ένα χάρτινο κύπελλο υπάρχουν τρεις τρόποι για το κύπελλο να προσγειωθεί: Με την πάνω ανοιχτή πλευρά, με την κάτω κλειστή πλευρά ή με το πλάι.

α) Να ρίξετε ένα χάρτινο κύπελλο 200 φορές και να καταγράψετε τα αποτελέσματα. Τα αποτελέσματα της ρίψης του χάρτινου κυπέλλου φαίνεται να είναι το ίδιο πιθανά ; Να εξηγήσετε την απάντησή σας.

β) Ποια είναι η εκτίμηση της πιθανότητας να πέσει το χάρτινο κύπελλο:

1. Με την πάνω ανοιχτή πλευρά.
2. Με την κάτω κλειστή πλευρά.
3. Με το πλάι.

γ) Να χρησιμοποιήσετε τα αποτελέσματά σας για να εκτιμήσετε πόσες φορές θα πέσει με το πλάι το χάρτινο κύπελλο σε 2000 ρίψεις.

δ) Να γεμίσετε το 20% του κυπέλλου προς τη βάση του με κάποιο σταθερό υλικό. Είναι λιγότερο ή περισσότερο πιθανό να προσγειωθεί τώρα με την πάνω ανοιχτή πλευρά ή με την κάτω κλειστή πλευρά ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Ερωτήσεις για Αυτοαξιολόγηση

Να χαρακτηρίσετε τους ισχυρισμούς που ακολουθούν με τη λέξη Σωστό (Σ), αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος (Λ), αν η πρόταση είναι λανθασμένη. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

1 Γυρίζοντας τον δείκτη ενός τροχού της τύχης 100 φορές είναι το ίδιο με την περιστροφή των δεικτών 100 ίδιων τροχών τύχης μία φορά;

2 Όσο περισσότερο επαναλαμβάνουμε ένα πείραμα τύχης τόσο η σχετική συχνότητα απομακρύνεται από τη θεωρητική πιθανότητα.

3 Εκτελούμε ένα πείραμα 1.000.000 φορές, βρίσκουμε ότι η σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου είναι 0,000001 και ισχυριζόμαστε ότι αυτή είναι η πιθανότητα του ενδεχόμενου.

4 Η πειραματική πιθανότητα δεν αλλάζει όσες φορές κι αν εκτελέσουμε ένα πείραμα.

5 Η θεωρητική πιθανότητα αλλάζει όταν αυξάνει ο αριθμός των επαναλήψεων ενός πειράματος.

6 Η πειραματική πιθανότητα είναι πάντοτε μικρότερη από τη θεωρητική πιθανότητα.

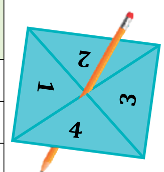
Να απαντήσετε στις ερωτήσεις αυτοαξιολόγησης που βρίσκονται στην ψηφιακή εφαρμογή.

Μπορείτε να αξιολογήσετε τις γνώσεις σας απαντώντας στις ερωτήσεις της ψηφιακής εφαρμογής.

Ασκήσεις και Προβλήματα

1 Ο Νικήτας έφτιαξε έναν τετράγωνο τροχό τύχης με χαρτόνι και ένα μολύβι όπως φαίνεται στο σχήμα. Τον γύρισε 150 φορές και κατέγραψε στον ακόλουθο πίνακα πόσες φορές «προσγειώθηκε» ο τροχός σε κάθε πλευρά με τους αριθμούς 1 έως και 4 :

Αριθμός	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
1	12	
2	39	
3		
4	48	



α) Ο Νικήτας ξέχασε να γράψει πόσες φορές προσγειώθηκε στην πλευρά με τον αριθμό 3. Να συμπληρώσετε τον αριθμό που λείπει.

β) Να συμπληρώσετε τον πίνακα με τις σχετικές συχνότητες.

γ) Πόσο είναι το άθροισμα των σχετικών συχνοτήτων; Να εξηγήσετε το αποτέλεσμα που βρήκατε.

δ) Ποια είναι η θεωρητική πιθανότητα εμφάνισης των ενδεχόμενων «1», «2», «3» και «4»;

ε) Ποια είναι η πειραματική πιθανότητα εμφάνισης των ενδεχόμενων «1», «2», «3» και «4» ;

στ) Ο τροχός του Νικήτα είναι αμερόληπτος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

2 Ένας καλαθοσφαιριστής πετυχαίνει το 70% των ελεύθερων βολών που κάνει.

α) Είναι πιθανό να πετύχει τουλάχιστον δύο από τις επόμενες τρεις ελεύθερες βολές που θα εκτελέσει; Να εξηγήσετε την απάντησή σας.

β) Ο πίνακας δείχνει 30 τυχαίους τριψήφιους αριθμούς από το 0 έως το 999. Υποθέτουμε ότι κάθε αριθμός παριστάνει τρεις βολές. Πώς μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τα ψηφία αυτών των αριθμών για να αναπαραστήσετε μία εύστοχη ή μία άστοχη βολή;

587	**2**	**47**	**123**	**818**
936	509	391	835	809
127	76	230	897	265
53	67	829	66	683
884	558	838	244	232
859	47	451	743	599

γ) Να χρησιμοποιήσετε τον πίνακα για να εκτιμήσετε την πιθανότητα ότι στις επόμενες τρεις ελεύθερες βολές που κάνει θα επιτύχει:

- Ακριβώς δύο.
- Το πολύ μία.
- Τουλάχιστον δύο.

Τουλάχιστον δύο συνεχόμενες.

3 * **α)** Να υπολογίσετε την πιθανότητα όταν ρίξουμε ένα δίκαιο ζάρι να εμφανισθεί αριθμός μεγαλύτερος του 4.

β) Να ρίξετε ένα δίκαιο ζάρι, 10, 50, 100, 1000, 2000, 3000, 4000, 5000 φορές και να καταγράψετε σε κάθε περίπτωση πόσες φορές εμφανίζεται αριθμός μεγαλύτερος του 4.

1. Να βρείτε τις αντίστοιχες πειραματικές πιθανότητες.
2. Με βάση τα δεδομένα του πειράματος να εκτιμήσετε την πιθανότητα να εμφανισθεί αριθμός μεγαλύτερος του 4.
3. Υπάρχει διαφορά της τιμής που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα από την αντίστοιχη πιθανότητα που υπολογίσατε στο (α) ; Αν ναι, να εξηγήσετε γιατί.

4 * Να ρίξετε δύο συνηθισμένα εξαεδρικά ζάρια ταυτόχρονα και να προσθέσετε τις ενδείξεις.

α) Να σχεδιάσετε και να εκτελέσετε ένα πείραμα για να εκτιμήσετε πόσο πιθανό είναι να εμφανισθεί αριθμός μικρότερος από 4.

β) Να βρείτε τον δειγματικό χώρο του πειράματος.

γ) Να βρείτε το ενδεχόμενο το άθροισμα των ενδείξεων των ζαριών να είναι αριθμός μικρότερος από 4.

δ) Να βρείτε τη θεωρητική πιθανότητα, να τη συγκρίνετε με την εκτίμηση που κάνατε στο (α) ερώτημα και να εξηγήσετε το αποτέλεσμα της σύγκρισης.

5 * Να ρίξετε δύο συνηθισμένα εξαεδρικά ζάρια και να καταγράψετε τα αποτελέσματα.

α) Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχόμενου «το άθροισμα των ενδείξεων των δύο ζαριών να είναι μεγαλύτερο από 9».

β) Να ρίξετε 10, 50, 100, 1000, 2000, 3000, 4000 φορές τα δύο ζάρια και να εκτιμήσετε την πιθανότητα του ενδεχόμενου «το άθροισμα των ενδείξεων των δύο ζαριών να είναι μεγαλύτερο από 9».

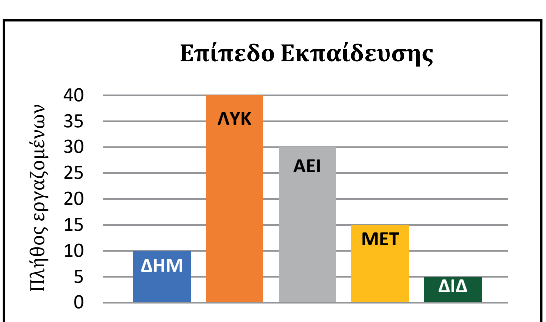
γ) Να συγκρίνετε την πιθανότητα που βρήκατε στο (α) και την εκτίμηση που κάνατε στο (β) ερώτημα. Να εξηγήσετε ομοιότητες και διαφορές.

Για τις ασκήσεις 3,4 και 5 (*) μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την προσομοίωση:
https://www.geogebra.org/m/UsoH4eNl.

6 Μια περιοχή αποθήκευσης τρένων έχει 2000 τρένα. 1000 από αυτά έχουν 30 βαγόνια, 600 έχουν 14 βαγόνια και 400 έχουν 9 βαγόνια. Ποια είναι η εκτίμησή σας για την πιθανότητα το 2001ο βαγόνι που θα αποθηκευτεί στον χώρο αυτό να έχει:

α) Περισσότερα από 9 βαγόνια.
β) Λιγότερα από 30 βαγόνια.

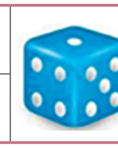
7 Το παρακάτω διάγραμμα δείχνει το υψηλότερο επίπεδο εκπαίδευσης των εργαζόμενων σε μια πολυεθνική εταιρεία. Να βρείτε την πιθανότητα, ένας εργαζόμενος που επιλέγεται στην τύχη από αυτή την εταιρεία να είναι κάτοχος:
α) Διδακτορικού τίτλου.
β) Μεταπτυχιακού τίτλου.
γ) Απολυτηρίου Λυκείου.
δ) Πτυχίου ΑΕΙ.



Για να εξασκηθείτε στην εύρεση πιθανοτήτων από ραβδογράμματα, ανοίξτε την εφαρμογή.

8 Ρίχνουμε ένα ζάρι 360 φορές και τα αποτελέσματα είναι:

Αποτέλεσμα	1	2	3	4	5	6
Συχνότητα	62	57	60	61	59	61



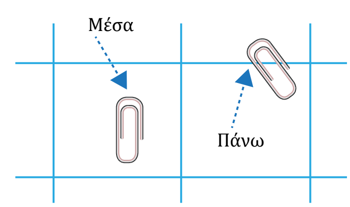
Ποια είναι η εκτίμηση της πιθανότητας στην επόμενη ρίψη του ζαριού να εμφανισθεί:
α) Ένα 2. **β)** Ένα 5. **γ)** Ένα 2 ή ένα 5.

9 Στρίβουμε δύο κέρματα 500 φορές και τα αποτελέσματα είναι:

Αποτέλεσμα	Δύο Κεφάλια	Κεφάλι και Γράμματα	Γράμματα
Συχνότητα	120	250	130

Ποια είναι η εκτίμηση της πιθανότητας στο 501ο στρίψιμο του ζαριού να προκύψει:
α) Δύο φορές Κεφάλι. **β)** Κεφάλι και Γράμματα. **γ)** Δύο φορές Γράμματα.

10 Μια δέσμη από 200 συνδετήρες έπεσαν σε ένα μεγάλο χαρτί με τετράγωνα πλευράς 5 cm όπως φαίνεται στο σχήμα. Από τους συνδετήρες, 150 έπεσαν μέσα σε τετράγωνα και 50 πάνω σε πλευρές τετραγώνων. Να βρείτε την εκτιμώμενη πιθανότητα ο επόμενος συνδετήρας που θα ρίξουμε να πέσει:



α) Μέσα σε ένα τετράγωνο.
β) Πάνω σε μία πλευρά.

Για να δείτε το ενδιαφέρον σχετικό πρόβλημα «Τα σπίρτα του Buffon», ανοίξτε την εφαρμογή.

11 Μια συγκεκριμένη διαδρομή ενός Δήμου εξυπηρετείται από δύο διαφορετικά μέσα μεταφοράς για καθένα από τα οποία η πιθανότητα λειτουργίας είναι 0,5.
α) Ο πίνακας δείχνει 40 τυχαίους διψήφιους αριθμούς από το 0 έως το 99 οι οποίοι μοντελοποιούν τη λειτουργία ή όχι αυτών των μέσων μεταφοράς.
Να χρησιμοποιήσετε τα ψηφία αυτών των αριθμών για να παραστήσετε τη λειτουργία ή όχι κάθε μέσου μεταφοράς.

β) Να χρησιμοποιήσετε την προσομοίωση για να εκτιμήσετε την πιθανότητα για τα δύο επόμενα δρομολόγια:

- Το πολύ ένα μέσο μεταφοράς λειτουργεί.
- Τουλάχιστον ένα μέσο μεταφοράς λειτουργεί.
- Λειτουργούν και τα δύο μέσα μεταφοράς.

07	04	89	68	14
26	60	88	82	03
83	34	19	58	61
48	44	25	52	17
65	72	51	10	30
55	97	75	85	92
82	27	01	85	52
06	82	33	73	50

12 Οι κανόνες του παιχνιδιού **Πέτρα-Ψαλίδι-Χαρτί** είναι: «Η πέτρα σπάει το ψαλίδι, το χαρτί τυλίγει την πέτρα και το ψαλίδι κόβει το χαρτί». Παίξτε 100 φορές το παιχνίδι και συμπληρώστε τον πίνακα του σχήματος.

α) Ποια είναι η σχετική συχνότητα του ενδεχόμενου «πέτρα».

β) Ποια είναι η σχετική συχνότητα του ενδεχόμενου «ψαλίδι».

γ) Ποια είναι η σχετική συχνότητα του ενδεχόμενου «χαρτί».

δ) Ποια είναι η εκτίμηση στο 101ο παιχνίδι να κερδίσει:

1. Η «πέτρα». **2.** Το «ψαλίδι». **3.** Το «χαρτί».

		Παίχτης Α		
		Πέτρα	Χαρτί	Ψαλίδι
Παίχτης Β	Πέτρα			
	Χαρτί			
	Ψαλίδι			

Πέτρα

Χαρτί

Ψαλίδι

Χρησιμοποιήστε το ψηφιακό εργαλείο που θα βρείτε στον σύνδεσμο για να παίξετε το παιχνίδι «πέτρα – ψαλίδι – χαρτί».

11.2 Ανεξαρτησία Ενδεχομένων (Συσχέτιση)

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθήτριες και οι μαθητές να μπορούν:

- Να διερευνούν την ανεξαρτησία ενδεχομένων μέσα από την εκτέλεση πειραμάτων τύχης και προσομοιώσεων.

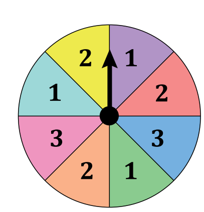
Διερεύνηση 1: Ανεξάρτητα ενδεχόμενα

Να εργαστείτε είτε ατομικά είτε ανά δύο και να εξηγήσετε πώς σκεφτήκατε.

Γυρίζουμε τον δείκτη του διπλανού τροχού της τύχης:

α) Ποια είναι η πιθανότητα να εμφανισθεί η ένδειξη 2 στο πρώτο γύρισμα του τροχού ;

β) Αν στο πρώτο γύρισμα του τροχού εμφανισθεί 3, ποια είναι η πιθανότητα να εμφανισθεί η ένδειξη 2 στο δεύτερο γύρισμα του τροχού;



Διερεύνηση 2: Εξαρτημένα ενδεχόμενα

Να εργαστείτε είτε ατομικά είτε ανά δύο και να εξηγήσετε πώς σκεφτήκατε.

Το διπλανό σακούλι περιέχει σφαίρες διαφόρων χρωμάτων:

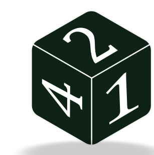
α) Ποια είναι η πιθανότητα να τραβήξουμε στην τύχη μία πράσινη σφαίρα από το σακούλι;

β) Αν τραβήξουμε μία κίτρινη σφαίρα και δεν την ξαναβάλουμε μέσα στο σακούλι, ποια είναι η πιθανότητα να τραβήξουμε στη συνέχεια στην τύχη μία πράσινη σφαίρα;

Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες μάθησης

Υπάρχουν ενδεχόμενα που η εμφάνιση ενός από αυτά δεν επηρεάζει την πιθανότητα εμφάνισης κάποιου άλλου. Για παράδειγμα, αν έχουμε ένα δίκαιο ζάρι, δηλαδή ένα ζάρι που όλες οι έδρες του έχουν την ίδια πιθανότητα να εμφανισθούν σε κάθε ρίψη, τότε κάθε έδρα του έχει πιθανότητα εμφάνισης: $\frac{1}{6}$ = 0,166... ή περίπου 16,7%.

Ρίχνουμε στην τύχη το ζάρι και ας υποθέσουμε ότι εμφανίζεται η έδρα με την ένδειξη «4».



Αν ξαναρίξουμε το ζάρι, τότε οι πιθανότητες των εδρών δεν έχουν αλλάξει και καθεμία έχει πάλι την ίδια πιθανότητα εμφάνισης $\frac{1}{6}$ = 0,166... ή περίπου 16,7%.

Έτσι η εμφάνιση του ενδεχόμενου «4» δεν επηρεάζει την πιθανότητα του ενδεχόμενου «2» όπως και κανενός άλλου.

Τέτοια ενδεχόμενα όπως τα ενδεχόμενα «4» και «2», «4» και «5» κ.λπ. λέμε ότι είναι ανεξάρτητα.

Γενικά:

Ανεξάρτητα ονομάζονται δύο ενδεχόμενα όταν η πραγματοποίηση του ενός δεν επηρεάζει την πιθανότητα πραγματοποίησης του άλλου.

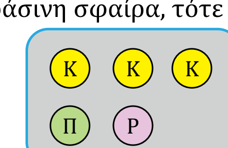
Παραδείγματα ανεξάρτητων ενδεχόμενων:

- Όταν ρίξουμε ένα ζάρι (ή ένα κέρμα) δύο φορές, οι ενδείξεις σε δύο οποιεσδήποτε ρίψεις είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα.
- Όταν κάνουμε διαδοχικές κληρώσεις από μία κάλπη ξαναβάζοντας μέσα στην κάλπη κάθε λαχνό που τραβάμε, τα αποτελέσματα δύο οποιωνδήποτε κληρώσεων είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα.
- Το χρώμα των μαλλιών και το νούμερο παπουτσιών των αθλητριών μιας ομάδας είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα.

Γενικά, όταν επαναλαμβάνουμε διαδοχικά ένα πείραμα τύχης, χωρίς να μεταβάλλονται οι βασικές πιθανότητες του δειγματικού χώρου του, τα αποτελέσματα σε δύο οποιεσδήποτε επαναλήψεις είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα.

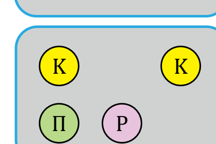
Εκτός από τα ανεξάρτητα ενδεχόμενα, υπάρχουν και ενδεχόμενα που η εμφάνιση ενός από αυτά επηρεάζει την πιθανότητα εμφάνισης κάποιου άλλου.

Για παράδειγμα, αν ένα κουτί περιέχει 5 ομοιόμορφες σφαίρες: 3 κίτρινες, μία ροζ και μία πράσινη σφαίρα, τότε η πιθανότητα να τραβήξουμε στην τύχη μία από αυτές είναι:



Κίτρινη σφαίρα: Ρ(Κ) = $\frac{3}{5}$ = 0,6 ή 60% Πράσινη σφαίρα: Ρ(Π)= $\frac{1}{5}$ = 0,2 ή 20% και

Ροζ σφαίρα: Ρ(Ρ) = $\frac{1}{5}$ 0,2 ή 20%.



Τραβάμε μία σφαίρα στην τύχη, βλέπουμε ότι είναι κίτρινη και την αφήνουμε απέξω.

Στο κουτί τώρα απομένουν: 2 κίτρινες, μία ροζ και μία πράσινη σφαίρα, οπότε για παράδειγμα η πιθανότητα να τραβήξουμε στην τύχη ροζ σφαίρα έχει πλέον αλλάξει και είναι:

$$Ρ(Ρ)= \frac{1}{4} = 0,25 \text{ ή } 25\%.$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι η εμφάνιση μίας κίτρινης σφαίρας επηρεάζει την πιθανότητα εμφάνισης της ροζ σφαίρας. Το ίδιο βέβαια στο συγκεκριμένο παράδειγμα θα μπορούσαμε να πούμε και για τα ενδεχόμενα «Κίτρινη σφαίρα» και «Πράσινη σφαίρα».
Τέτοια ενδεχόμενα, λέμε ότι είναι εξαρτημένα.

Με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής να εξοικειωθείτε με την έννοια των ανεξάρτητων - εξαρτημένων ενδεχομένων.

Γενικά:

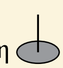
Εξαρτημένα ονομάζονται δύο ενδεχόμενα όταν η πραγματοποίηση του ενός επηρεάζει την πιθανότητα πραγματοποίησης του άλλου.

Παραδείγματα εξαρτημένων ενδεχόμενων:

- Η ντουλάπα μας περιέχει 3 λευκά και 2 πράσινα πουκάμισα. Διαλέγουμε διαδοχικά στην τύχη χωρίς επανατοποθέτηση δύο πουκάμισα. Τα ενδεχόμενα «λευκό πουκάμισο στην πρώτη επιλογή» και «πράσινο πουκάμισο στη δεύτερη επιλογή» είναι εξαρτημένα.
- Η πίεση ενός ανθρώπου και το βάρος του.
- Η αύξηση ενός φυτού και ο χρόνος έκθεσής του στον ήλιο.

Με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής μπορείτε να μάθετε περισσότερα για την έννοια των ανεξάρτητων - εξαρτημένων ενδεχομένων.

Εφαρμογή

Όταν ρίχνουμε μία πινέζα τότε αυτή μπορεί να σταθεί με την πλάτη  ή με το  πλάι.

α) Να ρίξετε μία πινέζα 100 φορές. Να βρείτε τη σχετική συχνότητα εμφάνισης των ενδεχόμενων «Πλάτη», «πλάι» και και τις αντίστοιχες πειραματικές πιθανότητες.

β) Να ρίξετε ταυτόχρονα δύο ίδιες πινέζες 100 φορές.
  i) Ποια είναι τα πιθανά ενδεχόμενα ;
  ii) Να καταγράψετε τα αποτελέσματα σε έναν πίνακα και να βρείτε τις πειραματικές πιθανότητες κάθε ενδεχομένου.

γ) Να εκτιμήσετε την πιθανότητα να προκύψει:
  i) Μία «Πλάτη» από μια πινέζα.
  ii) Δύο «Πλάτες» από δύο πινέζες.

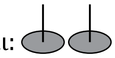
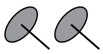
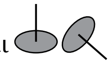
δ) Τα ενδεχόμενα: *«έρχεται πλάτη στη ρίψη μίας πινέζας»* και *«έρχεται πλάτη στη ρίψη μίας πινέζας διαφορετικής από την προηγούμενη»* είναι ανεξάρτητα;

ε) Να εξετάσετε αν ρίχνοντας δύο πινέζες ισχύει ότι:
P(πλάτη στην 1η ρίψη και πλάτη στη 2η ρίψη) ≈ P(πλάτη στην 1η ρίψη) · P(πλάτη στη 2η ρίψη).

Απάντηση:

α) Ρίχνοντας μία πινέζα 100 φορές και καταγράφοντας κάθε φορά το αποτέλεσμα, παίρνουμε:

Ρίψη μίας πινέζας		
	Πλάτη (Π)	πλάι (π)
Συχνότητες	32	68
Πειραματικές πιθανότητες	0,32	0,68

β) **i)** Όταν ρίχνουμε δύο πινέζες τα δυνατά αποτελέσματα μπορεί να είναι:  ΠΠ (Πλάτη & Πλάτη),  ππ (πλάι & πλάι) και  Ππ (Πλάτη & Πλάι).

ii) Ρίχνοντας δύο πινέζες 100 φορές και καταγράφοντας κάθε φορά το αποτέλεσμα, παίρνουμε:

Ρίψη δύο πινεζών			
	Πλάτη & Πλάτη (ΠΠ)	Πλάτη & πλάι(Ππ)	πλάι & πλάι (ππ)
Συχνότητες	10	43	47
Πειραματικές πιθανότητες	0,1	0,43	0,47

γ) Από τα δεδομένα αυτών των πειραμάτων με βάση τις συγκεκριμένες πειραματικές πιθανότητες που παρουσιάζονται στους πίνακες των ερωτημάτων (α) και (β) έχουμε:

i) Η εκτίμηση της πιθανότητας να εμφανισθεί «Πλάτη» στη ρίψη μίας πινέζας είναι περίπου 32%.
ii) Η εκτίμηση της πιθανότητας να εμφανισθεί «Πλάτη & Πλάτη» στη ρίψη δύο πινεζών είναι περίπου 10%.

δ) Τα ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα, αφού η εμφάνιση Πλάτης στη ρίψη μίας πινέζας δεν επηρεάζει το ενδεχόμενο να έρθει Πλάτη σε μια ρίψη μίας πινέζας διαφορετικής από την προηγούμενη.

ε) Από τις εκτιμήσεις των πιθανοτήτων που προκύπτουν από τις πειραματικές πιθανότητες στο συγκεκριμένο πείραμα έχουμε:
Ρ(Πλάτη στην 1η ρίψη & Πλάτη στη 2η ρίψη) = 0,1 και
Ρ(Πλάτη στην 1η ρίψη) · Ρ(Πλάτη στη 2η ρίψη) = 0,32 · 0,32 = 0,1024.
Άρα, η ισότητα ισχύει προσεγγιστικά.

Σημείωση:
Γενικά όπως θα μάθουμε σε επόμενη τάξη, για δύο ανεξάρτητα ενδεχόμενα Α, Β ισχύει ότι:
Ρ(Α και Β) = Ρ(Α)·Ρ(Β).

Ερωτήσεις για Αυτοαξιολόγηση

Στις επόμενες ερωτήσεις να αναγνωρίσετε, να καταγράψετε και να απαντήσετε αν τα δύο ενδεχόμενα που αναφέρονται είναι εξαρτημένα ή ανεξάρτητα.

1 Ένας πατέρας έχει γαλάζια μάτια και η κόρη του έχει γαλάζια μάτια.

2 Η θάλασσα είναι κρύα και ο καφές είναι παγωμένος.

3 Να οδηγεί κάποιος το αυτοκίνητό του με ταχύτητα 180 χλμ/ώρα και να προκαλέσει ατύχημα.

4 Η μητέρα μιας μαθήτριας έχει ξανθά μαλλιά και η μαθήτρια παίρνει 20 στα Μαθηματικά.

5 Η μεγάλη κατανάλωση αλατιού και η υψηλή πίεση αίματος.

6 Να μην βάλει κάποιος χρήματα σε ένα παρκόμετρο και να πάρει κλήση από τη Δημοτική αστυνομία.

7 Το τεστ για κορονοϊό βγαίνει θετικό και το κινητό παρουσιάζει πρόβλημα.

8 Το καθημερινό κάπνισμα ενός πακέτου τσιγάρων και η χρόνια πάθηση των πνευμόνων.

Για να ελέγξετε τις γνώσεις σας, ανοίξτε το συμπληρωματικό υλικό.

9 Μια μελέτη βρήκε ότι οι άνθρωποι που υποφέρουν από μέτρια έως σοβαρή υπνική άπνοια παρουσιάζουν αυξημένη πιθανότητα εμφάνισης υψηλής πίεσης.

10 Μελέτες έδειξαν ότι η καθημερινή έκθεση στον ήλιο δεν σχετίζεται με την εμφάνιση της νόσου Αλτσχάιμερ.

11 Σύμφωνα με ερευνητές, ο διαβήτης δεν εμφανίζεται συχνά σε κοινωνίες όπου η παχυσαρκία είναι σπάνια. Σε κοινωνίες στις οποίες παρουσιάζεται παχυσαρκία ο διαβήτης αποτελεί κοινή πάθηση.

Για να αξιολογήσετε τις γνώσεις σας, απαντήστε στις ερωτήσεις που θα βρείτε στο συμπληρωματικό υλικό.

Ασκήσεις και Προβλήματα

1 Ένα κουτί έχει σφαίρες αριθμημένες από το 1 έως το 25. Επιλέγουμε μία σφαίρα, καταγράφουμε την ένδειξη, την επιστρέφουμε στο κουτί και στη συνέχεια τραβάμε ακόμα μία σφαίρα. Να βρείτε την πιθανότητα:

α) Η πρώτη σφαίρα να είναι η 23.
β) Η δεύτερη σφαίρα να είναι το 23.
γ) Τα ενδεχόμενα «η πρώτη σφαίρα είναι το 23» και «η δεύτερη σφαίρα είναι το 23» είναι εξαρτημένα ή ανεξάρτητα;

2 Τα εισιτήρια διαφόρων κατηγοριών που πουλήθηκαν στην παράσταση ενός θεάτρου παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα.

Κατηγορία	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
Διάζωμα Γ’	150	
Διάζωμα Β’	75	
Διάζωμα Α’	50	
Πλατεία	25	

α) Πόσα εισιτήρια πουλήθηκαν ;
β) Να συμπληρώσετε τη στήλη των σχετικών συχνοτήτων.
γ) Να εκτιμήσετε την πιθανότητα ένας τυχαία επιλεγμένος θεατής στο θέατρο να είχε εισιτήριο για το διάζωμα Α΄.
δ) Να εκτιμήσετε την πιθανότητα ένας τυχαία επιλεγμένος θεατής στο θέατρο να είχε εισιτήριο για την πλατεία.

3 Ο πίνακας δείχνει την κατανομή των ηλικιών των φυλακισμένων σε μια φυλακή την 31η Μαρτίου του 2025. Αν ο Πρόεδρος μιας χώρας δώσει χάρη σε έναν φυλακισμένο αυτής της φυλακής στην τύχη, να βρείτε την πιθανότητα ο φυλακισμένος να ήταν:

α) Άντρας.
β) Να ήταν μεταξύ 20 και 25.
γ) Να ήταν μικρότερος από 25 με δεδομένο ότι ήταν γυναίκα.
δ) Να ήταν περισσότερο από 35 με δεδομένο ότι ήταν άντρας.

Κατανομή ηλικιών φυλακισμένων

Ηλικία	Άντρας	Γυναίκα	Σύνολο
16	10	0	8
17-20	350	30	380
20-25	1200	45	1245
25-30	1400	40	1440
30-35	1000	35	1035
35-40	800	30	830
40-50	700	25	725
50-60	600	20	620
60+	250	10	260
Σύνολο	4750	235	4985

4 **α)** Το ενδεχόμενο σε ένα γύρισμα του δείκτη του τροχού της τύχης με τους τρεις τομείς να εμφανισθεί 3 είναι ανεξάρτητο από το ενδεχόμενο:

i) Να εμφανισθεί 3 στον τροχό με τους πέντε τομείς;
ii) Να εμφανισθεί 2 στον τροχό με τους πέντε τομείς;
iii) Να εμφανισθεί 1 ή 2 στον τροχό με τους τρεις τομείς;

β) Το ενδεχόμενο σε ένα γύρισμα του δείκτη του τροχού της τύχης με τους πέντε τομείς να εμφανισθεί κόκκινο είναι ανεξάρτητο από το ενδεχόμενο:

i) Να εμφανισθεί μπλε στον τροχό με τους πέντε τομείς;

ii) Να εμφανισθεί κόκκινο στον τροχό με τους τρεις τομείς ;

iii) Να εμφανισθεί κόκκινο ή κίτρινο στον τροχό με τους τρεις τομείς;

5 Ρίχνουμε ένα κέρμα και ένα ζάρι. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

Α: «το κέρμα να εμφανίσει κεφαλή»,

Β: «το ζάρι να εμφανίσει άρτιο αριθμό».

α) Να φτιάξετε έναν πίνακα με όλα τα δυνατά αποτελέσματα.

β) Να βρείτε την πιθανότητα P(A και B).

γ) Να συγκρίνετε τις πιθανότητες P(A και B) και P(A)·P(B).

Τι παρατηρείτε;

6 Μια οικογένεια έχει δύο παιδιά. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

Α: «ένα μόνο παιδί είναι κορίτσι»,

Β: «τα παιδιά είναι διαφορετικού φύλου».

Να εξετάσετε αν είναι ανεξάρτητα τα ενδεχόμενα Α και Β.

7 Μια μικρή επιχείρηση έχει 10 εργαζόμενους. Κάθε χρόνο γίνεται κλήρωση και ένας τυχερός εργάτης πηγαίνει διακοπές με έξοδα της επιχείρησης. Τα ενδεχόμενα «Ο εργάτης Αλεξίου κληρώθηκε την πρώτη χρονιά» και « Ο εργάτης Αλεξίου κληρώθηκε τη δεύτερη χρονιά», είναι εξαρτημένα; Να εξηγήσετε την απάντησή σας.

8 Ένα σχολείο έχει δύο φωτοτυπικά μηχανήματα Α και Β. Η πιθανότητα να μην δουλεύει το Α φωτοτυπικό μηχάνημα είναι 5% και η πιθανότητα να μην δουλεύει το Β φωτοτυπικό μηχάνημα είναι 8%.

α) Ποια είναι η πιθανότητα να μην δουλεύει το Β φωτοτυπικό μηχάνημα όταν δεν δουλεύει το Α φωτοτυπικό μηχάνημα;

β) Ποια είναι η πιθανότητα να δουλεύει το Α όταν δουλεύει το Β;

γ) Τα ενδεχόμενα «Δεν δουλεύει το Α» και «δεν δουλεύει το Β» είναι εξαρτημένα ή ανεξάρτητα;

9 Ρίχνουμε ένα ζάρι και ένα κέρμα.

α) Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχόμενου «το ζάρι φέρνει 5 ή 6».

β) Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχόμενου το ζάρι να φέρει 5 ή 6 και το κέρμα να φέρει κεφαλή.

γ) Τα ενδεχόμενα Α: «το κέρμα φέρνει κεφαλή» και Β: «το ζάρι φέρνει 5 ή 6» είναι ανεξάρτητα;

δ) Να εξετάσετε αν στο συγκεκριμένο πείραμα ισχύει ότι: P(A και B) = P(A)·P(B).

11.3 Ανακεφαλαίωση και διεύρυνση της θεματικής ενότητας

- **Συχνότητα** είναι ο φυσικός αριθμός που δηλώνει το πλήθος των εμφανίσεων ενός ενδεχομένου σε ένα σύνολο δοκιμών ενός πειράματος τύχης ή σε ένα σύνολο παρατηρήσεων.
- **Σχετική συχνότητα** είναι το πηλίκο της συχνότητας εμφάνισης του ενδεχομένου προς το πλήθος των συνολικών δοκιμών ή παρατηρήσεων, δηλαδή:

$$\text{Σχετική συχνότητα} = \frac{\text{Πλήθος εμφανίσεων ενδεχομένου}}{\text{Πλήθος δοκιμών}}$$

- **Πιθανότητα ή Θεωρητική πιθανότητα** P ενός ενδεχομένου Α ονομάζεται το πηλίκο του πλήθους των ευνοϊκών περιπτώσεων προς το πλήθος των δυνατών περιπτώσεων και συμβολίζεται με P(A). Δηλαδή:

$$P(A) = \frac{\text{Πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\text{Πλήθος δυνατών περιπτώσεων}}$$

- **Πειραματική πιθανότητα** ονομάζεται η σχετική συχνότητα, η οποία είναι μία εκτίμηση της **θεωρητικής πιθανότητας.**
- **Νόμος των μεγάλων αριθμών** ονομάζεται το εμπειρικό συμπέρασμα, το οποίο αποδεικνύεται και θεωρητικά, σύμφωνα με το οποίο οι σχετικές συχνότητες πραγματοποίησης των ενδεχομένων ενός πει-

ράματος σταθεροποιούνται γύρω από κάποιους αριθμούς (όχι πάντοτε ίδιους), καθώς ο αριθμός των δοκιμών του πειράματος επαναλαμβάνεται απεριόριστα.

- **Ανεξάρτητα** ονομάζονται δύο ενδεχόμενα όταν η πραγματοποίηση του ενός δεν επηρεάζει την πιθανότητα πραγματοποίησης του άλλου.

Παραδείγματα ανεξάρτητων ενδεχόμενων:

◊ Ρίχνουμε ένα ζάρι και ένα κέρμα. Το ενδεχόμενο «εμφανίζεται 4» και το ενδεχόμενο «εμφανίζεται κεφαλή».
◊ Το ενδεχόμενο «βαθμολογία μαθητή σε ένα διαγώνισμα» και το ενδεχόμενο «φύλο μαθητή».

- **Εξαρτημένα** ονομάζονται δύο ενδεχόμενα όταν η πραγματοποίηση του ενός επηρεάζει την πιθανότητα πραγματοποίησης του άλλου.

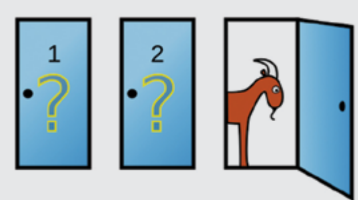
Παραδείγματα εξαρτημένων ενδεχόμενων:

◊ Η μη έγκαιρη πληρωμή του λογαριασμού του κινητού μας τηλεφώνου και η διακοπή της σύνδεσης από τον πάροχο της σύνδεσης.
◊ Η συμμετοχή σε συναθροίσεις σε κλειστούς χώρους χωρίς μάσκα και η νόσηση από κορονοϊό.

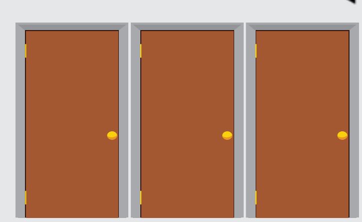
Να μελετήσετε το «Ιστορικό σημείωμα στις πιθανότητες».

Εργασία με προεκτάσεις *(Προσομοίωση)*

Το παράδοξο του Monty Hall



Ο **Monty Hall** ήταν ένας διάσημος τηλεπαρουσιαστής ο οποίος παρουσίαζε για χρόνια στην Αμερική ένα παιχνίδι με το όνομα **«Ας κάνουμε μια συμφωνία»** (Let's make a deal). Το παιχνίδι έγινε διάσημο και εμφανίστηκε στην τηλεόραση σε πάρα πολλές χώρες από το 1960 και μετά. Στην Ελλάδα παρουσιάστηκε με το όνομα **«Το μεγάλο παζάρι»**.



Το παιχνίδι έχει ως εξής: Υπάρχουν τρεις κλειστές πόρτες. Πίσω από μία πόρτα υπάρχει ένα αυτοκίνητο και πίσω από τις άλλες δύο πόρτες υπάρχει μια κατσίκα.

Ο συμμετέχων επιλέγει μία πόρτα χωρίς να την ανοίξει και δεν ξέρει τι υπάρχει πίσω από την πόρτα που έχει επιλέξει. Ο οικοδεσπότης του παιχνιδιού ξέρει τι υπάρχει πίσω από τις πόρτες και ανοίγει μία από τις άλλες δύο πόρτες που δεν επέλεξε ο συμμετέχων, η οποία περιέχει μια κατσίκα. Στη συνέχεια δίνει την ευκαιρία στον συμμετέχοντα να διατηρήσει την πόρτα που έχει επιλέξει ή να αλλάξει και να επιλέξει την άλλη κλειστή πόρτα.

Ποια είναι η πιο συμφέρουσα στρατηγική για τον συμμετέχοντα:

Να διατηρήσει την πόρτα που επέλεξε, να αλλάξει επιλέγοντας την άλλη κλειστή πόρτα ή είναι το ίδιο ό,τι και αν επιλέξει;

Για να δείτε πώς οι πιθανότητες μας βοηθούν να κερδίσουμε στο παιχνίδι αυτό, να κάνετε την εργασία με προσομοίωση που θα βρείτε στο συμπληρωματικό υλικό.

Για να κάνετε ηλεκτρονικά το παιχνίδι, να ανοίξετε την εφαρμογή.

Επαναληπτικά έργα, προεκτάσεις και μαθηματικές προκλήσεις

1 Ένα άρθρο σε μια εφημερίδα αποτελείται από 2000 λέξεις. Ο αρχισυντάκτης θέλει να μάθει ποιο είναι το μέσο πλήθος γραμμάτων των λέξεων που χρησιμοποιούνται στο άρθρο. Σκέπτεται να πάρει ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους 25% και να βρει το πλήθος γραμμάτων. Πώς θα τον συμβουλεύατε να επιλέξει το δείγμα με απλή τυχαία δειγματοληψία;

2 Ένας αστρονόμος εξερευνά τον ουρανό το βράδυ με ένα τηλεσκόπιο. Θέλει να μετρήσει τον αριθμό των άστρων που παρατηρεί κατά τη διάρκεια 30 ωρών παρατήρησης και αποφασίζει να καταγράφει τις μετρήσεις ανά διαστήματα 15 λεπτών για 5 ώρες. Να περιγράψετε πώς θα επιλέξει στην τύχη με απλή τυχαία δειγματοληψία τα διαστήματα.

3 **Εργασία σε μικρές ομάδες.**
Οι μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου θεώρησαν ότι ο ιδανικός αριθμός παιδιών σε μία οικογένεια με τέσσερα παιδιά είναι 2 αγόρια και 2 κορίτσια.

α) Ως ομάδα, να σχεδιάσετε μία προσομοίωση για να προσδιορίσετε την πιθανότητα να υπάρχουν σε μια οικογένεια τεσσάρων παιδιών δύο αγόρια και δύο κορίτσια.

β) Κάθε μέλος της ομάδας σας να κάνει μια προσομοίωση με 25 επαναλήψεις και να συγκρίνει τις πιθανότητες.

γ) Να συνδυάσετε τα αποτελέσματα όλων των μελών στην ομάδα σας και να χρησιμοποιήσετε αυτή την πληροφορία για να βρείτε μια πειραματική πιθανότητα.

δ) Να προσδιορίσετε τη θεωρητική πιθανότητα να υπάρχουν σε μια οικογένεια τεσσάρων παιδιών δύο αγόρια και δύο κορίτσια και να συγκρίνετε την απάντησή σας με την πειραματική πιθανότητα.

4 Μέσα σε ένα κουτί υπάρχουν 4 κόκκινα και 5 πράσινα σφαιρίδια. Βγάζουμε ένα σφαιρίδιο από το κουτί και ύστερα ένα δεύτερο.

α) Αν το πρώτο ήταν κόκκινο, να βρείτε την πιθανότητα να είναι πράσινο το δεύτερο σφαιρίδιο

i) Χωρίς επανατοποθέτηση **ii)** Με επανατοποθέτηση

β) Αν το πρώτο σφαιρίδιο είναι κόκκινο και το δεύτερο πράσινο, τότε ποια είναι η πιθανότητα αν τα αφήσουμε έξω απο το κουτί τραβώντας ένα ακόμα να είναι:

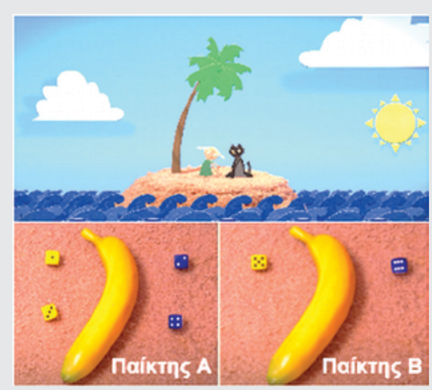
i) Κόκκινο; **ii)** Πράσινο;

5 **Ποιος θα φάει τη μπανάνα;**

Να συνεργαστείτε είτε ανά δύο είτε σε μικρές ομάδες.

Δύο ναυαγοί έχουν αποκλειστεί σε ένα μικρό νησί και έχουν μόνο μία μπανάνα για φαγητό και ένα ζάρι ο καθένας. Για να αποφασίσουν ποιος θα κερδίσει τη μπανάνα, συμφωνούν να ρίξουν τα ζάρια που έχουν και αν ο μεγαλύτερος αριθμός της άνω όψης είναι 1, 2, 3 ή 4, τότε κερδίζει ο ναυαγός Α, ενώ αν ο μεγαλύτερος αριθμός της άνω όψης είναι 5 ή 6, τότε κερδίζει ο ναυαγός Β.

Ποιος από τους δύο ναυαγούς είναι πιο πιθανό να φάει τη μπανάνα;



Για να βοηθηθείτε να απαντήσετε στο ερώτημα, να ανοίξετε την εργασία στο συμπληρωματικό υλικό και να απαντήσετε στα ερωτήματα που θα βρείτε.

Να ανοίξετε την εφαρμογή «Γλωσσάρι - Στοχαστικά Μαθηματικά» για να συνοψίσετε έννοιες και όρους, που μάθατε στο κεφάλαιο αυτό.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ – ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 – ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

1.1 Δεκαδική μορφή των ρητών αριθμών

Ερωτήσεις αξιολόγησης

1. 2/5 = 0,4, –5/6 = –0,83333…, $0,\overline{7} = \frac{7}{9}, \frac{233}{99}$

2. Δ.

3. Β.

4. Δ.

Ασκήσεις και προβλήματα

1. 0,86, 0,044, –0,36, 0,84375, $-0,\overline{476190}$, 0,44375, $0,\overline{60}$.

2. Σε δεκαδικούς τα $\frac{7}{100}, \frac{19}{8}, -\frac{13}{5}, \frac{23}{64}$, σε περιοδικούς τα υπόλοιπα.

3. **α)** $\frac{8}{9}$, **β)** $\frac{12}{90}$, **γ)** $\frac{13}{99}$, **γ)** $-\frac{22}{9}$.

4. **α)** $\frac{1}{11}$, **β)** $\frac{1889}{4950}$, **γ)** $\frac{2129}{990}$.

5. **α)** 10, **β)** $\frac{13}{10} = 1,3$, **γ)** $\frac{352}{100} = 3,52$.

6. **α)** $\frac{62}{25}$, **β)** $\frac{1}{5}$, **γ)** $\frac{49}{11}$.

7. Α=–1,747474…, $\widehat{A}=0,08\overline{3}$.

8. 11/27, 5/6.

9. **α)** ίσοι, **β)** $0,9784\overline{9} < 0,9786\overline{0}$, **γ)** ίσοι, **δ)** $0,\overline{110} < 0,\overline{111}$.

10. **α)** 2,222… **β)** 0,111…, **γ)** $\frac{94}{891}$, **δ)** $0,\overline{25}$.

11. **α)** κατά σειρά πολλαπλασιάζουμε τους όρους με: 5, 2, 25, 25. **β)** 2,5, 0,8, 3,25, 0,225.

12. **α)** 3, **β)** 3,25, **γ)** 3,2.

1.2 Δεκαδική μορφή των άρρητων

Ερωτήσεις αξιολόγησης

1. 2,01001000100001…., 2,1234567891011,…

2. 1,525225222522225…

3. Άρρητος μόνο ο $\sqrt{8}$.

4. Δ.

5. Γ.

Ασκήσεις και προβλήματα

1. Άρρητοι οι β και δ.

2. $2<\sqrt{5}<3$, $<\sqrt{14}<4$, $4<\sqrt{20}<5$, $5<\sqrt{29}<6$, $9<\sqrt{99}<10$.

3. Άρρητοι: $\sqrt{6}, \sqrt{20}, \sqrt{71}$. Οι υπόλοιποι ρητοί.

4. $\sqrt{6}$=2,449 ομοίως οι υπόλοιποι.

5. **α)** $\sqrt{110}$, 10,23223222322223… **β)** ρητοί: 3,18 και 3,2, άρρητοι: 3,1808008000800008…. και 3,298998999899998…

6. **α)** $\sqrt{2}$, **β)** 2.

7. **α)** Δες εφαρμογή 1, **β)** 11,70.

8. Μαρία: Λάθος, Ελένη: Σωστό, Φατιμά: Λάθος κλάσμα, Θανάσης: Σωστό, Χασάν: Λάθος.

9. **α)**$\sqrt{50}$, **β)** 7,07, **γ)** όπως εφαρμογή 1, συνεχίζονται απεριόριστα οι ρητές προσεγγίσεις.

1.3 Πραγματικοί αριθμοί

Ερωτήσεις αξιολόγησης

1. Ναι.

2. Όχι.

3. Όχι.

4. 5.

5. Όχι.

6. Άρρητοι: $\sqrt{7}$, 4,09009000900009… Οι υπόλοιποι ρητοί.

7. Επόμενος ακέραιος του –12 είναι ο –11. Επόμενος του 2,3 δεν υπάρχει.

8. Όχι. Αντιπαράδειγμα.

9. Δ.

10. Δ.

Ασκήσεις και προβλήματα

1. **α)** ρητοί: 3,1 και 3,5, άρρητοι: 3,1002000200002… και 3,123456789…., **β)**, **γ)** ομοίως.

2. Ένας τρόπος είναι να τους μετατρέψουμε πρώτα σε δεκαδικούς.

3. **α)** όπως στην άσκηση 2, **β)** 0,40 και 0,45.

4. Δες θεωρία σελίδα 13.

5. **α)** $\sqrt{30} = 5,48 < 5,5$, **β)** $3,\overline{4}<\sqrt{12}<3,5$.

6. $6<\sqrt{37}$.

7. **α)** Σ, **β)** Σ, **γ)** Λ, **δ)** Λ.

8. 5,29dm.

9. ≃27m.

10. Ναι.

11. **α)** 5m^2, **β)** 2,24m.

1.4 Οι πράξεις στους πραγματικούς αριθμούς.

Ερωτήσεις για αξιολόγηση

1. Θετικός.

2. $\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}$ και $\frac{2}{5}, \frac{-5}{2}$.

3. Να βρείτε το γινόμενό τους.

4. –6798. Διευκολύνει τις πράξεις.

5. Α=–2γ. Αριθμητική τιμή 10.

6. Β

7. **α)** Λ, **β)** Σ, **γ)** Λ, **δ)** Σ, **ε)** Σ.

Ασκήσεις και προβλήματα

1. **α)** Α = 4 · (3:5) –2, **β)** Α = 4 · 3:(5 – 2), Α = 4 · 3:5 – 2, **γ)** Α = 4 · (3:5 – 2).

2. Απαλοιφή παρενθέσεων, αναγωγή όμοιων όρων.

3. 48.

4. **α)** –17 και $\frac{86}{7}$, **β)** 3.

5. 4α+5β+3γ.

6. δ = –17.

7. Τα αποτελέσματα στα (α) και (β) είναι ίσα.

8. **α)** θετικός, **β)** αρνητικός, **γ)** αρνητικός.

9. **α)** 126, **β)** 189.

10. x=27, y=$9\sqrt{3}$, z=$9\sqrt{7}$.

11. –70.

12. **α)** –19, **β)** 0, **γ)** 29/9.

13. Α = 3, Β = –11, Γ = –28.

14. 1/8 και 1/10.

15. Α=247/8, Β =–6/5, Γ=3,9.

16. Α=–74185.

17. Α=2,28.

1.5 Οι δυνάμεις στους πραγματικούς αριθμούς

Ερωτήσεις αξιολόγησης

1. **α)** 1/5, **β)** 5, **γ)** $125\sqrt{5}$, **δ)** 1/5.

2. $(\sqrt{2})^{-2}$.

3. $\pi^{-3} < \pi^{0} < \pi^{2}$.

4. $\left(\frac{1}{\pi}\right)^{2} < \left(\frac{1}{\pi}\right)^{0} < \left(\frac{1}{\pi}\right)^{-3}$.

5. Οκταπλασιάζεται.

6. $10^{-\nu}$.

7. Α.

8. Β.

Ασκήσεις και προβλήματα

1. $7\sqrt{7}$, 49, $49\sqrt{7}$, 343.

2. **α)** φ^{10}, **β)** 1, **γ)** –2π/9, **δ)** $-8\pi^{15}$.

3. Α=2/5, Β=7/8, Γ=1/49.

4. $A=3,5\cdot10^{6}$, $B=1,2818\cdot10^{8}$, $\Gamma=1,5\cdot10^{-6}$.

5. Μετατροπή σε τυποποιημένη μορφή και κάνουμε ό,τι στην άσκηση 4.

6. **α)** 169, **β)** $11\cdot5^{6}$, **γ)** 5/2, **δ)** $\frac{1}{2\cdot3^{61}}$, **ε)** 2/3.

7. **α)** $\frac{x^2y^4}{9}$, **β)** $-32x^{10}$, **γ)** $-2\beta^{2}$, **δ)** $-3\kappa^{6}$.

8. **α)** x=100, **β)** x=–9, **γ)** x=–1/30375.
9. 0.
10. Β=–1,005, Β=94,008.
11. $Α=30^4$, $Β=150^3$, $Γ=2^5$, $Δ=(14/165)^4$.
12. $3,51 \cdot 10^{51}$.
13. 1800 km^2.
14. $3,75 \cdot 10^{13}$ km.
15. 0.
16. $Α=-3\sqrt{3}$, Β=–7, Γ=–56, Δ=11/8.
17. **α)** 3^{33}, **β)** 4^{4^4}, **γ)** $\frac{4^{4^4}}{3^{33}}=2,4 \cdot 10^{138}$.
18. **α)** 86000000000, **β)** Μεταξύ $4 \cdot 10^{-6}$ και 10^{-4} m.

1.6 Ιδιότητες των τετραγωνικών ριζών

Ερωτήσεις αξιολόγησης

1. **α)** 1/7, β) $-\sqrt{5}$, γ)$2\sqrt{10}$.
2. **α)** Όχι, β) Ναι.
3. **α)** 3, 300, 0,3, 0,03, 30, **β)** 20, $2\sqrt{10}$, 2, $\frac{\sqrt{10}}{5}$, 0,2.
4. 1, 2.
5. 2/3, 10, δεν ορίζεται, δεν ορίζεται, 7.
6. Πχ: $\sqrt{2} \cdot x=\sqrt{10}$ή $x=\sqrt{5}$κλπ.
7.
8. **α)** 11, **β)** 36, **γ)** –32, **δ)** 676, **ε)**–7.
9. **α)** Λ, **β)** Σ, **γ)** Λ, **δ)** Σ, **ε)** Λ, **στ)** Λ, **ζ)** Λ, **η)** Λ, **θ)** Σ.

Ασκήσεις και προβλήματα

1. **α)** 6, **β)** 8, **γ)** 30, **δ)** 14, **ε)** 8.
2. **α)** $2\sqrt{11}$, **β)** $3\sqrt{3}$, $3\sqrt{2}$, $3\sqrt{5}$, $4\sqrt{7}$.
3. **α)** $-\sqrt{7}$, **β)** $2\sqrt{2}$, **γ)** $2\sqrt{11}$, **δ)** $\sqrt{17}$, **ε)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
4. **α)** $-4\sqrt{7}$, **β)** $-2\sqrt{3}+\sqrt{5}$, **γ)** $4\sqrt{5}$.
5. Το άθροισμα στο πρώτο τετράγωνο είναι $15\sqrt{2}$. Στο δεύτερο είναι $15\sqrt{5}$.
6. **α)** 0,464, **β)** 13,9, **γ)** 14.
7. **α)** –1, **β)** –21, **γ)** $-5\sqrt{6}$
8. Γράφουμε τις ρίζες ως γινόμενο 2 παραγόντων πχ: $\sqrt{18}=\sqrt{2 \cdot 9}=\sqrt{2} \cdot \sqrt{9}=3\sqrt{2}$ κ.λπ.
9. Όπως στην άσκηση 8.
10. **α)** ισόπλευρο, **β)** $υ=3\sqrt{3}$, $Ε=27\sqrt{3}$., **γ)** $Π=18\sqrt{3}$.
11. **α)** $x=\sqrt{6}$, **β)** x=100, **γ)** x=10, **δ)** αδύνατη.
12. Δεν ισχύει.
13. $2\sqrt{2}$.
14. Εφαρμογή Πυθαγόρειου θεωρήματος.
15. **α)** 37, **β)** 19/4.
16. $Α=-3\sqrt{3}$, $Β=-5\sqrt{2}$, $Γ=-13\sqrt{3}$.
17. **α)** πολλαπλασιασμός ριζών, **β)** πολλαπλασιασμός ριζών, **γ)** πράξεις στο 1ο μέλος.
18. **α)** 98, **β)** 10, 14, **γ)** 70.
19. **α)** 27, **β)** Πυθαγόρειο θεώρημα στο ΑΒΔ.
20. **α)** $5+\sqrt{26}+\sqrt{13}$, **β)** 8,5.

1.7 Ανακεφαλαίωση

Ερωτήσεις για αναστοχασμό

1. $\frac{17}{50000}$
2. $\frac{34}{99}$
3. Ρητός, ως περιοδικός δεκαδικός.
4. 2^{-5}, 4^{-2}, 8^0,13, 2^5.
5. **α)** 30800, 0,000048.
6. **α)** 5 και 6, **β)** 8 και 9.
7. Όχι.
8. α<0.

Επαναληπτικά έργα

1. $Α=\frac{75}{32}$, $Β=\frac{2}{3}$, $Γ=-\frac{135}{8}$.
2. $Α=-\frac{8}{3}$, $Β=-20$, $Γ=\frac{17}{11}$.
3. $Α=\frac{3^{30}}{2^{10}}$, $Β=\frac{7}{2^{14}}$, $Γ=81/α^2β^4$, Δ = 1
4. 2^{28}.
5. Τείνει στο 0.
6. 0, 510110111011110… κλπ
7. $Α=\frac{3}{5}$, Β = 0,24, $Γ=4 \cdot 10^{-4}$.
8. **α)** 2^{-4014}, **β)** 2^{-603}.
9. Α≃0,01
10. 2^{22}
11. α ≥ 0, α = 0, α > 0.
12. **α)** 2, 4, 8, **β)** $4\sqrt{2}$, 8, $8\sqrt{2}$, **γ)** 2.
13. $Α=10^3$.
14. Α = 7/3.
15. Α = 13.
16. **α)** $3,241 \cdot 10^5$, **β)** Α, $2,477 \cdot 10^5$.
17. Ένας κόκκος σιτάρι.
18. x = 2, y = –1.
19. **α)** Μετατροπή σε δυνάμεις του 2, **β)** $(2^ν)^2$, $4^ν$, $2^{2ν}$.
20. x = 2, y = 0.
21. Να διακρίνετε περιπτώσεις άρτιου, περιττού για το ν.
22. 0.
23. **α)** 10000000000, **β)** 5000000000,5, **γ)** ≃190,8 χρόνια.
24. Β > Α.
25. Α=5, $Β=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.
26. **α)** είναι τετράγωνο, Το εμβαδόν είναι ρητός, **β)** $104\sqrt{3}$≈180,133.
27. **α)** 84, **β)** 8.
28. **α)** $5\sqrt{2}$, **β)** $12\sqrt{2}$, **γ)** 12, **δ)** $\frac{12}{5} \cdot \sqrt{2}$
29. **α)** 14 mm, **β)** t = 28 έτη, **γ)** 75 έτη.
30. 10^{10}.
31. **α)** $3 \cdot 10^8$s, **β)** 9,52 έτη.
32. **α)** $2,5 \cdot 10^{10}$m, **β)** $1,3 \cdot 10^{-4}$m.
33. $5,98 \cdot 10^{23}$.
34. $1,97 \cdot 10^4$s.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 – ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

2.1.1 Μονώνυμα–πολυώνυμα

Ερωτήσεις αξιολόγησης

1. **α)** 3, –3 και x^3, **β)** 5, ½ και x^2y^3, **γ)** 1, 0,7 και s, **δ)** –8 και x^0.
2. **α)** μονώνυμο, **β)** πολυώνυμο, **γ)** πολυώνυμο, **δ)** τίποτα, **ε)** πολυώνυμο, **στ)** μονώνυμο.
3. $-x^3+3x^2+3x-12$.
4. **α)** x^5y, **β)** $-0,5x^3y^{-1}$, **γ)** 0.
5. **α)** 2ου, **β)** 5ου, **γ)** 1ου.
6. **α)** x, **β)** x^3+1, **γ)** x^2-2x+2.
7. $Ε=\frac{(β+Β)\,υ}{2}$, β μικρή βάση, Β μεγάλη βάση, υ ύψος.
8. –210.

Ασκήσεις και προβλήματα

1. **α)** πάντα, **β)** μερικές φορές, **γ)** μερικές φορές, **δ)** μερικές φορές, **ε)** πάντα, **στ)** ποτέ, **ζ)** μερικές φορές, **η)** πάντα.
2. **α)** $-y^3+3y^2-y$, 3ου βαθμού, τριώνυμο, **β)** $-t^4+4t^3$ 4ου βαθμού, διώνυμο, **γ)** $2x^2-x+π^3$, 2ου βαθμού, τριώνυμο, 7. 2x+1, $2x^2+1$, $-3x^2+5x-1$, x^3-x+1. **δ)** $\sqrt{2} \cdot x^3$μονώνυμο 3ου βαθμού.
3. Ναι, μετά την αναγωγή όμοιων όρων. Όροι 2x, –5. Αρ. τιμή –11.
4. Β.
5. **α)** $22α^2$ μονώνυμο, **β)** $6α^3$ μονώνυμο.
6. **α)** –40, **β)** –7.
7. π.χ. x+1, x^2-3, x^2+2x-1, x^3-x-8.
8. **α)** 12x–3, **β)** 10, 13, 11, 23, Π = 57.
9. **α)** Π=2x+3y+z, $Ε=xz+y^2$, **β)** Π= 4α+2β+2γ, $Ε=α^2-β^2-γ^2$, **γ)** Π= 16α, $Ε=12α^2$.
10. **α)** 3υ–3τ, **β)** $\frac{4α+3β}{7}$.
11. Το άθροισμα είναι $-5x^2$.
12. x+y–α
13. Αν x τα βαγόνια πρώτης κατηγορίας και y δεύτερης τότε ο αριθμός θέσεων ενός τρένου είναι: 60x+90y.
14. Αν x οι νίκες τότε οι βαθμοί είναι 2x+9.

2.1.2 Πρόσθεση–Αφαίρεση πολυωνύμων

Ερωτήσεις αξιολόγησης

1. $5x^2+5y$.
2. Να κάνετε απαλοιφή παρενθέσεων και αναγωγή όμοιων όρων.
3. 6. Όχι.
4. 7. Λάθος στην απαλοιφή παρενθέσεων.
5. **α)** $2x^2$, -4, $-4x$, **β)** $5x^3$, x^2, -7.

Ασκήσεις και προβλήματα

1. **α)** $16\alpha^2+\beta^3+28\gamma$, **β)** $9xy-x-16$, **γ)** $-1{,}3\kappa-1{,}4\lambda+13{,}5\mu$, **δ)** $3x^2-4x-18$.
2. **α)** 0, β) 0.
3. $3x^2+x-14$.
4. **α)** $11x^2$, -4, $-11x$, **β)** $4x^3$, x^2, -2, $-x^4$.
5. Το άθροισμα είναι $14x^2+2x-1$
6. **α)** $4x+4y$, $3xy$, **β)** $24x$, $11x^2$, **γ)** $3\alpha+2\gamma+2\beta$, $3\alpha\gamma+\alpha\beta$.
7. $4x-5$.
8. Όπως στην 5.
9. $3x+49$.
10. $110x+87y+6y^2$
11. $2x+8$.

2.1.3 Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων

Ερωτήσεις αξιολόγησης

1. Όπως στη διερεύνηση 1
2. **α)** x^2-4, β) $\alpha^3+\beta^3$.
3. **α)** $E = x^2+35x$, $\Pi=4x+70$, **β)** Ναι μπορούν.
4. Ισχύει.

Ασκήσεις και προβλήματα

1. **α)** $8x^2-8x-3$, **β)** x^3-1, **γ)** $6x^3-25x^2+16x+15$.
2. $(x-2)(x+5) = x(x+5)-2(x+5) = \ldots$
3. **α)** $\alpha^2-\beta^2$, **β)** $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$, **γ)** $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$.
4. **α)** $(x+1)(x-2)(x+3)=(x^2-x-2)(x+3) =x^3-x^2-2x+3x^2-3x-6=x^3+2x^2-5x-6$, **β)**, **γ)** ομοίως.
5. -9
6. **α)** $\pi\rho^2-2\rho^2$, $(\pi-2)\rho^2$, **β)** $4x+4y+16$, $4(x+y+4)$, **γ)** $5x+5y+25$, $5(x+y+5)$.
7. Όγκος: γινόμενο διαστάσεων, Εμβαδόν: άθροισμα εμβαδών των 6 εδρών. $V+120$, $E = 148$.
8. **α)** πάντα, **β)** μερικές φορές, **γ)** ποτέ.
9. **α)** 20, **β)** 6, **γ)** Όχι αρνητικά μήκη.
10. **α)** $2x+2y$, $E = xy+x-y-1$, **β)** Περίμετροι ίσες, Μεταβολή εμβαδού: $xy+x-y-1$.
11. **α)** $26x-x^2$, **β)** $160-26x+x^2$, **γ)** $50(26x-x^2)+40(160-26x+x^2)$.
12. **α)** $m+n=\beta$, **β)** ομόσημοι αν $\gamma>0$ και ετερόσημοι αν $\gamma<0$.
13. x^2-x και $x+2$.
14. $0{,}5x^2+4{,}5x+9$.
15. $xz+yx+z^2$ ή $z(x+y+z)$.
16. $2x^2-18$, $2x^2+12x+18$.
17. **α)** 5, **β)** ομοίως, **γ)** να θέσετε x τον αριθμό στο πρώτο τετράγωνο και να εκφράσετε τα άλλα ως προς χ.
18. **α)** ν^4+4, **β)** Να χρησιμοποιήσετε το (α). Πρώτος αν $\nu = 1$.
19. **α)** 4, 5 ή 2, 10, **β)** α, $20\alpha+5$ ή 5α, $4\alpha+1$.
20. 4, 16, Π=40.
21. **α)** $\alpha^2-\beta^2$, **β)** $A = (\alpha-\beta)^2$, $B = \Gamma = \alpha\beta-\beta^2$, **γ)** Ναι.
22. Είναι ίσα.
    α) Αν συμβολίσετε με ν τον ακέραιο, πρέπει να αποδείξετε ότι: $\nu 2 = (\nu-1)(\nu+1)+1$. **β)** Να αναδιατάξετε κατάλληλα τα σχήματα. Να θεωρήσετε ν την πλευρά του τετραγώνου.
23. **α)** $6x-9$.
24. Να εφαρμόσετε το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος.
25. 20/3, 29/3.
26. **α)** Το γινόμενό τους περιέχει ως παράγοντα το 2, **β)** Να αναπτύξετε $(2\nu+1)^2$ και να χρησιμοποιήσετε στην πορεία το (α), **γ)** Για τον πρώτο αριθμό να θεωρήσετε δύο περιπτώσεις, άρτιος, περιττός, **δ)** Να χρησιμοποιήσετε τα (α) και (γ).

2.2 Αξιοσημείωτες ταυτότητες

Ερωτήσεις αξιολόγησης

1. **α)** όχι, **β)** μερικές φορές.
2. Ρητός.
3. Γ
4. **α)** $1-4y+4y^2$, **β)** $x^4+4x^3+4x^2$, **γ)** x^4-81.
5. $2x$, $4x^2$, 49.
6. Μειώθηκε κατά 4 cm^2.

Ασκήσεις και προβλήματα

1. $(2x+1)^2$.
2. **α)** $5x^2+2x+34$, **β)** $-x^4+8$, **γ)** 36.
3. **α)** x, 2αx, α., **β)** 6x, 3x, 1, **γ)** $16x^2$, $32xy$, $4y$, **δ)** $4x^2$, $2x$, 1, **ε)** 0,5, y, 0,5, y^2.
4. **α)** ναι, **β)** όχι, **γ)** όχι, **δ)** ναι, **ε)** όχι, **στ)** ναι.
5. **α)** Πράξεις στο 1ο μέλος, **β)** πράξεις και στα δύο μέλη, **γ)** πράξεις στο 1ο μέλος, **δ)** πράξεις και στα δύο μέλη
6. **α)** 105 = 100 = 5, **β)** 49 = 50–1, **γ)** (200+1)(200–1), **δ)** όπως στο (γ).
7. 10201, 10404, κλπ
8. **α)** πράξεις στο 1ο μέλος, **β)** πράξεις και στα δύο μέλη, **γ)** πράξεις στο 1ο μέλος.
9. **α)** Να βρείτε τα εμβαδά των ορθογωνίων μέσα στο τετράγωνο και να τα προσθέσετε, **β)** να εφαρμόσετε ότι βρήκατε στο (α), **γ)** ομοίως.
10. A=4049, B=8100.
11. **α)** πράξεις στο πρώτο μέλος, **β)** να χρησιμοποιήσετε την (α).
12. Να βρείτε για κάθε τρίγωνο την 3η πλευρά.
13. **α)** πράξεις στο 1ο μέλος, **β)** να χρησιμοποιήσετε την (α).
14. **α)** 17, β) 9.
15. **α)** $100+20x+x^2$, β) δεν μπορεί.
16. **α)** $12x+20$, 1ου βαθμού, -26.
17. 25.
18. Πράξεις στο 2ο μέλος, αφού αντικαταστήσετε τα α και β.
19. 18.
20. **α)** $(\alpha+\beta)^2$, **β)** $(\alpha-\beta)^2$, **γ)** αβ.

2.3 Παραγοντοποίηση

Ερωτήσεις αξιολόγησης

1. **α)** $2x(x-7)$, **β)** Να παραγοντοποιήσετε το 1ο μέλος.
2. α = 187, β = 1501, γ = 1000000.
3. Διαφορά τετραγώνων.
4. **α)** ομαδοποίηση, **β)** τετράγωνο αθροίσματος, **γ)** κοινός παράγοντας και διαφορά τετραγώνων.
5. Να γράψετε το $-5x=-3x-2x$ και να κάνετε ομαδοποίηση.
6. 15.
7. **α)** 2, 5, **β)** 1, 7, **γ)** 1, –8, **δ)** 2, 5.

Ασκήσεις και προβλήματα

1. **α)** κοινός παράγοντας το 5, **β)** κοινός παράγοντας το 2, **γ)** κοινός παράγοντας το y, **δ)** κοινός παράγοντας το $-4x$.
2. **α)** κοινός παράγοντας το α+β, **β)** κοινός παράγοντας το x–y.
3. Ομαδοποίηση.
4. **α)** διαφορά τετραγώνων, **β)** ομαδοποίηση, **γ)** διαφορά τετραγώνων.
5. **α)**, **β)**, **δ)**, **ε)**, **στ)**: διαφορά τετραγώνων, **γ)**: τετράγωνο αθροίσματος.
6. **α)** τετράγωνο αθροίσματος, **β)**, **γ)**, **δ)** τετράγωνο διαφοράς, **ε)** $x^2-(y+1)^2$ κλπ.
7. 189^2.
8. 10^{10}.
9. **α)** $(x+2)(x+4)$, **β)** $(x-2)(x-4)$, **γ)** $(x+4)(x-3)$, **δ)** $(x-2)(x+1)$.
10. Να βγάλετε κοινό παράγοντα και μετά παραγοντοποίηση τριωνύμου (όπως στην ασκ.9).
11. Να παραγοντοποιήσετε στο 1ο

μέλος και μετά να εφαρμόσετε την ιδιότητα: «αν αβ=0 τότε α=0 ή β=0».

12. **α)** $\alpha(x-y)(x+y)$, **β)** $3(x-4)(x+4)$, **γ)** ομοίως, **δ)** $5(x-3)^2$, **ε)** $3x(x+1)^2$.

13. **α)** 4, 3ω, 3ω, **β)** x^6, 14, 14, **γ)** y^2, 2x, y, **δ)** x, x^2, 0,5.

14. 45, 0,6, 11.

15. **α)** Να αφαιρέσετε το εμβαδόν του εσωτερικού κύκλου από το εμβαδόν του εξωτερικού, **β)** R=6, r=5.

16. 10, 11.

17. **α)** Να αναπτύξετε $(2\nu+1)^2$, **β)** $2\nu+1+2\kappa+1$ =..., **γ)** $(2\nu+1)(2\kappa+1)$ =..., **δ)** Αν $2\nu+1$ ο πρώτος, τότε οι επόμενοι είναι ...

18. 1/5. Διαφορά τετραγώνων σε αριθμητή και παρονομαστή κλπ.

19. Το δεύτερο είναι τετράγωνο με πλευρά x+2. Περίμετροι: 4x+12 και 4x+8.

20. 4.

21. **α)** ισχύει, **β)** Πρέπει να αποδείξετε ότι $\nu^2=(\nu-1)(\nu+1)+1$.

22. **α)** ίσα, **β)** $\alpha^2-\beta^2 = (\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$.

23. Διαφορά τετραγώνων.

24. **β)** εικασία: $(\nu+1)^2-\nu^2=\nu+1+\nu$, **γ)** για την απόδειξη: πράξεις στο πρώτο μέλος.

25. **α)** 2, 1, **β)** Α = 4(x–1), Β = π(x–1), **γ)** Α>Β.

26. **α)** 9, β) 35, **γ)** το οκτάγωνο.

27. **α)** $x = 999^2-1$, $y = 999^2$, **β)** να παραγοντοποιήσετε τα x και y, **γ)** Να χρησιμοποιήσετε την ιδέα από το (α).

2.4 Ρητές παραστάσεις

2.4.1 Απλοποίηση

2.4.2 Πολλαπλασιασμός–Διαίρεση ρητών παραστάσεων

Ερωτήσεις αξιολόγησης

α) $4x^6y$, **β)** $\frac{x+2}{x+1}$, **γ)** $\frac{3x^2y^2}{8}$,

δ) $\frac{5(x-1)}{x+2}$, **ε)** $\frac{x^2+y^2}{(x+y)^2}$.

Ασκήσεις και προβλήματα

1. **α)** 0, **β)** 1, **γ)** 3/2, **δ)** –4, 4, **ε)** καμία.

2. $\frac{2x+5}{2x-5}$. Δεν ορίζεται για ο και 5/2.

3. **α)** $\frac{3x^2}{2}$, **β)** $7\alpha^6$, **γ)** –1, **δ)** $\frac{x-1}{x+2}$,

ε) 1, **στ)** $\frac{3(x-y)^2}{2(x^2+y^2)}$.

4. Πρέπει να είναι παραγοντοποιημένοι οι αριθμητής και παρονομαστής.

5. **α)** x^2-7x+6, **β)** $5x^2+5$.

2.4.3 Πρόσθεση–αφαίρεση ρητών παραστάσεων

Ερωτήσεις αξιολόγησης

1. $12(x+2)(x-2)^2$.

2. $\frac{6x^2+9x-4}{3x^3}$.

3. $\frac{-3x^2+7x+7}{9x^2(x+1)}$.

4. Τα κλάσματα που προστίθενται δεν είναι ομώνυμα.

5. $\frac{2x+1}{x+1}$.

Ασκήσεις και προβλήματα

1. **α)** 1, **β)** $\frac{(x+y)^2}{xy}$, **γ)** $\frac{2y+x}{x^2y^2}$, **δ)** $\frac{x+3}{x(x+3)}$, **ε)** $\frac{x+2}{3(x^2-1)}$, **στ)** $\frac{x+4}{x+2}$.

2. **α)** $\frac{x}{x+3}$ και $\frac{3}{x+3}$, **β)** $\frac{x-1}{x-3}$ και $\frac{1-x}{x-3}$.

3. Να κάνετε πράξεις στο 2ο μέλος, **α)** ¾, **β)** 99/100.

4. Πχ. $\frac{x^3+3x}{x+1}$ και $\frac{x^2+3}{x+1}$

5. **α)** 4, **β)** διαστάσεις: ½ και 3/2, Π=4, Ε=3/4.

6. $\frac{2+3y}{1+2y}$.

7. Να κάνετε πράξεις στο 2ο μέλος. **α)** 1/3 και 1/6, **β)** ¼ και 1/12, **γ)** 1/11 και 1/110.

2.5 Ανακεφαλαίωση

Ερωτήσεις για αναστοχασμό

1) Β, 2) Γ, 3) Γ, 4) Γ, 5) Δ, 6) Δ, 7Β, 8) Δ, 9) Β, 10) Α.

Επαναληπτικά έργα

1. Επιμεριστική ιδιότητα.

2. 0,897

3. **α)** $\alpha^2+4\alpha+4$, **β)** α+3, α+5, **γ)** $\alpha^2+4\alpha-21$, **δ)** α>4, **ε)** $3\alpha^2$.

4. $(3x+1)^2$.

5. Μικραίνει το εμβαδόν του αγροκτήματος.

6. **α)** Π=5,24x, $E=1{,}62x^2$, **β)** 10, 16,2.

7. **α)** x+2y, x+y, **β)** Π=4x+6y, **γ)** $E=x^2+3xy+2y^2$.

8. 6x+10.

9. $A=x^2+x-3$, $B=2x^2-3x-1$.

10. **α)** $2x^3+14x^2+20x$, **β)** x+5, x+2, **γ)** $10x^2+42x+20$.

11. **α)** $12\pi r^2$, **β)** $22{,}32r^2$, **γ)** Ναι, μπορεί.

12. **α)** $9\pi r^2+44\pi r$, **β)** $46\pi r^2$.

13. **α)** 50–2x, **β)** $50x-2x^2$, **γ)** 200 m^2.

14. 30.

15. **α)** Να κάνετε πράξεις και στα δύο μέλη, **β)** Να χρησιμοποιήσετε το (α).

16. **α)** Πράξεις στο 2ο μέλος, **β)** ομοίως, **γ)** Να εφαρμόσετε την (α) ή τη (β), **δ)** Να εφαρμόσετε την (γ), **ε)** Να εφαρμόσετε την (γ).

17. **α)** $-4x^2+72$, **β)** (12–x)(6–x)x = ...

18. **α)** x–5, **β)** 308 m^2, 492 m^2.

19. $2{,}43x^2$.

20. Α = 2.

21. Κ = 1.

22. $x=2024^2-1^2-(2023^2-2^2)+2022^2-3^2-...$

23. Να παραγοντοποιήσετε. Για ν=2.

24. **α)** ΑΘ=4–x. Μ, **β)** $x^2-8x+12$, **γ)** (x–2)(x–6)

25. α) $\alpha^2+\beta^2$, β) (ΑΒΓΔ)–4(ΑΒΕ)=...

26. Πράξεις και παραγοντοποίηση

27. Α = (2χ+1)(15χ+26)
Β = $x(x-1)(x+1)(x^4+1)$
Γ = (x+y)(x–3y)

28. Η παράσταση Α είναι τετράγωνο αθροίσματος. Αν α+β = 4 τότε Α=4.

29. $\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)\cdot(\alpha+\beta)$

30. **α)** $AM^2=16+x^2$, $MZ^2=x^2-14x+5$ **β)** x=3, AM=MZ=5. Υπολογίσουμε την ΑΖ

31. 2024^2

32. **α)** 48, **β)** 96.

33. 1.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3–ΚΑΝΟΝΙΚΟΤΗΤΕΣ

Ερωτήσεις για αξιολόγηση

1. Ο τρίτος πίνακας. Τύπος $y = 3\nu^2$.

3. **α)** 75, **β)** 6, **γ)** $y=3\nu^2$, **δ)** –10 και 10.

5. **α)** τετραγωνική κανονικότητα, **β)** $y=0{,}4\nu^2$.

6. Να ελέγξετε τις δεύτερες διαφορές.

Ασκήσεις και προβλήματα

1. **α)** 25, **β)** 36, **γ)** 144, **δ)** (14, 196), (16, 256), (20, 400), (ν, ν^2).

2. Όπως στην άσκηση 1.

3. **α)**

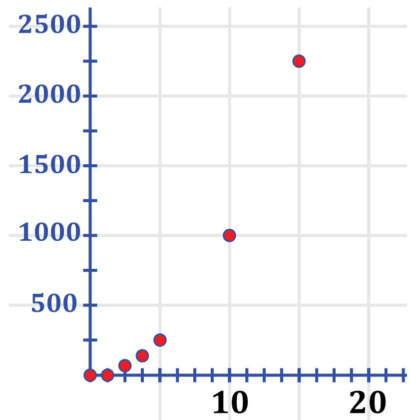
Ημέρα	1	2	3	4	5	10	15	20	30
Εμβαδό νούφαρου (m^2)	3,14	12,56	28,26	50,24	78,5	314	706,5	1256	2826
Ακτίνα νούφαρου (m^2)	1	2	3	4	5	10	15	20	30

β) Αυξάνεται γραμμικά, κατά 1m την ημέρα, **γ)** $E = 3{,}14\nu^2$, **δ)** 2896 m^2.

4. 4) **α)**

Ημέρα	1η	2η	3η	4η	5η	6η	10η	15η	30η
Επισκέπτες	10	40	90	160	250	360	1000	2250	9000

β) $E = 10v^2$, **γ)**



5. **α)** πράσινα 6 και κίτρινα 30, **β)** «σειρά +1», **γ)** «$(σειρά+1)^2–(σειρά+1)$», **δ)** γραμμική για τα πράσινα, τετραγωνική για τα κίτρινα, **ε)** Για τα πράσινα: αν ν η σειρά και y τα κόκκινα τετράγωνα: $y = ν+1$.
6. Να εξετάστε τις πρώτες και δεύτερες διαφορές. **α)** $(ν+1)^2–1$, **β)** τίποτα, άλλη $(2)^ν$, **γ)** $–4ν+7$, **δ)** τίποτα.
7. **α)** 21, 28, **β)** Για να βρούμε τον ν τρίγωνο αριθμό προσθέτουμε ν στον ν–1 τρίγωνο αριθμό, **γ)** τετραγωνική.
8. Να εξετάσετε τις δεύτερες διαφορές και τους λόγους s/v^2.
9. **α)** 1– 8, 4–16, 9– 24, 16–32,25–40, **β)** 8, **γ)** μηλιές.

Ανακεφαλαίωση

1. Η πλακόστρωση γραμμική, η πισίνα τετραγωνική κανονικότητα.
2. **α)** ναι, υπάρχει κανονικότητα, **β)** (3, 18), (4, 32), (5, 50), (6, 72), **γ)** Να εξετάσετε τις δεύτερες διαφορές, **δ)** Να εξετάσετε τους λόγους $y/ν^2$, **ε)** κλάδος παραβολής στο 1ο τεταρτημόριο.
3. **β)** ναι, **δ)** να εξετάσετε τις δεύτερες διαφορές από τον πίνακα, **ε)** το 9ο.
4. **α)**

ν	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	6,4	3,6	1,6	0,4	0	0,4	1,6	3,6	6,4

β) να εξετάσετε τις δεύτερες διαφορές, **γ)** $y=0{,}4 \cdot ν^2$, **δ)** ναι, y΄y, **ε)** ναι, όχι.

5. **α)** προσθέτουμε στη βάση μια σειρά από 9 τρίγωνα, **β)** συμπληρώνουμε τον πίνακα με συστηματική καταμέτρηση, **γ)** 100^2, **δ)**, **ε)** να εξετάσετε τις διαφορές και τους λόγους $y/ν^2$, **στ)** όχι, **ζ)** να εξετάσετε τις δεύτερες διαφορές, **η)** να εξετάσετε τις δεύτερες διαφορές.

6. **α)** 8^2+1, **β)** 101^2+1, **γ)** $(ν+1)^2+1$, δοκιμάζουμε τους προηγούμενους όρους και λειτουργεί.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 – ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

4.1 Η συνάρτηση $y = αx^2$

Ερωτήσεις αξιολόγησης

1. Γ, 2) Γ, 3) Β, 4) Γ, 5) Γ, 6) Γ, 7) Γ.

Ασκήσεις και προβλήματα

1. Παραβολές πάνω από τον άξονα x΄x οι 1η και η 4η και κάτω τον άξονα x΄x η 2η και η 3η.
2. **α)** $y=(1/4\,)x^2$, **β)** ναι, όχι, **γ)** –6 ή 6, **δ)** x=0, **ε)** (–10, 25) και (10, 25)
3. $y=–4x^2$
4. …
5. $(α, y = x^2)$, $(β, y=–2x^2)$, $(γ, y=–4x^2)$.
6. Ναι, $y = 0{,}4x^2$.
7. **α)** Τετμημένες των τομών των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $y = 3x^2$ και $y = 12$, **β)** Γράφουμε την εξίσωση $x^2 = 4$ και κάνουμε ότι στο α.
8. Πρέπει α<0, δηλαδή 2–κ<0
9. Όπως στην 7.
10. **α)** 2 s, $h = 5t^2$, $5t^2 = 20$, **β)** ~2,8s, **γ)** 5m, **δ)** ~1,7s
11. **α)** Είναι της μορφής $y=αx^2$ με $α=0{,}5g\simeq5$, **β)** α=5>0, έχει μόνο ένα α κλάδο διότι t>0, **γ)** 6s, **δ)** 180–40 =140m, **ε)** 4s μετά την πτώση του είχε διανύσει διάστημα 80m.
12. **α)** $E=1{,}6x^2$, **β)** είναι της μορφής $y=αx^2$, έχει ένα μόνο κλάδο διότι x>0, **γ)** ≃8.
13. Η παραβολική γέφυρα έχει εξίσωση $y=–1/6\,x^2$, για x = 4 το ύψος της γέφυρας είναι 4 m, άρα περνάει.
14. **α)** $E = 2v^2$, παραβολή στο πρώτο τεταρτημόριο, **β)** θα τετραπλασιαστεί.

4.2 Γραφική επίλυση συστήματος

4.2.1-4.2.2

Ερωτήσεις αξιολόγησης

1. Β
2. Δ
3. Δ
4. Δ
5. (0, –6), (–4, 0), (2, –9)
6. (0, –4,5), (3, 0)
7. y = 4
8. **α)** (0, 10), (4, 8), (20, 0), **β)** Αν x τα πεντόευρα και y τα δεκάευρα τότε 5x+10y = 100, **γ)** (0, 10) σημαίνει 0 πεντόερευρα και 10 δεκάευρα και (20, 0) σημαίνει 20 πεντόευρα και 0 δεκάευρα.

Ασκήσεις και προβλήματα

1. **α)** 12 δίκλινα, 32 τρίκλινα ή 15 δίκλινα, 30 τρίκλινα ή 45 δίκλινα, 15 τρίκλινα, **β)** 2x+3y = 120, **γ)** Να κατασκευάσετε την γραφική παράσταση, **δ)** (0, 40) σημαίνει 0 δίκλινα, 30 τρίκλινα και (60, 0) σημαίνει 60 δίκλινα και 0 τρίκλινα.
2. x+y=1.
3. **α)** Να κατασκευάσετε τις γραφικές παραστάσεις, **β)** (8, 3), γ) αντικατάσταση των συντεταγμένων στις δύο εξισώσεις.
4. **α)** y=2x+1, **β)** y=–x+3, **γ)** y=3x–2, **δ)** y=–x–7
5. δ
6. γ
7. **α)** y = 0,40x+15, **β)** Η γραφική παράσταση είναι ευθεία στο πρώτο τεταρτημόριο, **γ)** 35, **δ)** 80, **ε)** Να αντικαταστήσετε στην γραμμική εξίσωση.
8. **α)** 6x+10y=180, **β)** ευθεία που διέρχεται από τα σημεία (0, 18), (30, 0), **γ)** (0, 18) σημαίνει 0 μικρά τραπέζια και 18 μεγάλα και (30, 0) σημαίνει 30 μικρά τραπέζια και 0 μεγάλα, **δ)** (0, 18), (30, 0), (10, 12), (15, 9).
9. **α)** 10x+12y=300, **β)** Ευθεία στο πρώτο τεταρτημόριο που διέρχεται από τα σημεία (30, 0), (18, 10), **γ)** το (30, 0) σημαίνει 30 πουκάμισα των 10 € και 0 των 12€, **δ)** 15.
10. **α)** 4x+6y=48, **β)** Να βρείτε δύο σημεία και να χαράξετε την ευθεία, **γ)** (0, 8) σημαίνει 0 ταξί και 8 βαν και (12, 0) σημαίνει 12 ταξί και 0 βαν, **δ)** (3, 6), (6, 4), (9, 2).

4.2.3 Γραφική επίλυση συστήματος

Ερωτήσεις αξιολόγησης

1. **α)** σχεδιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις, λύση (7, 2), **β)** ομοίως (2, 5), **γ)** οι ευθείες ταυτίζονται, άπειρες λύσεις.
2. **α)** μία, **β)** καμία, **γ)** άπειρες.
3. **α)** (α, γ) μία λύση, (α, β) καμία λύση, (β, γ) μία λύση, **β)** η α, γ) το (6, –2) ναι, το (–12, 6) όχι.
4. Όχι. Ρακέτα 1,05 €, μπαλάκι 0,05 €.

Ασκήσεις και προβλήματα

1. **α)** παράλληλες, **β)** ταυτίζονται, **γ)** τέμνονται.

2. Σχεδιάζουμε τις ευθείες και διαπιστώνουμε ότι: **α)** λύση (6, 3), **β)** καμία λύση, **γ)** άπειρες λύσεις.
3. **α)** (1, –2), **β)** (1,5, 0), **γ)** άπειρες λύσεις.
4. Λύση (–1, 3). Ε = 6,75.
5. **i) α)** (4, 0), **β)** (2, 2), **γ)** (4, 4), **δ)** (0, –4). **ii) α)** 8, **β)** 4.
6. **α)** 10, **β)** η Κάρολ, στο 18 s, σε ύψος περίπου 130 m, **γ)** Κάρολ 200m, Παύλος 800m.
7. **α)** 1ος τρόπος: y=7x, 2ος τρόπος: y=4,2x+84, **β)** Σχεδιασμός γραφικών παραστάσεων, **γ)** 30 παιχνίδια, **δ)** ο 1ος τρόπος συμφέρει για λιγότερα από 30 παιχνίδια και ο 2ος για περισσότερα από 30.
8. **α)** Αν x ο αριθμός των σωστών απαντήσεων και y ο αριθμός των λανθασμένων τότε 3x–y=36 και x+y = 20, **β)** 3x–y=40 και x+y=20, **γ)** και **δ)** φαίνονται τα ζεύγη στο σχήμα, **ε)** 14, **στ)** 15, **ζ)** επαλήθευση από τις αντίστοιχες εξισώσεις.
9. **α)** Βρίσκουμε τις εξισώσεις στη μορφή y=αx+β. (y=–x+2, y=2x–1), **β)** (1, 1), **γ)** 0,75.
10. **α)** Λύνουμε ως προς y τις εξισώσεις του συστήματος, **β)** (2, 1), **γ)** Η τετμημένη του κοινού σημείου των ευθειών του σχήματος, **δ)** Θέτουμε στην εξίσωση όπου y=0 για τον x΄x και y=0 για τον y΄y.
11. 3x+2y=160. Δύο πιθανές τιμές (20, 50), (10, 65).
12. **α)** Αυτή που περνάει από την αρχή των αξόνων στον Ηλία και η άλλη στην Γιώργο, **β)** σε πόσην ώρα και σε ποιο ύψος θα συναντηθούν, **γ)** Γ: 5x+3y=30, Η: 2,5x–y=0.

4.3 Ανακεφαλαίωση

Ασκήσεις επανάληψης

1. **α)** όχι, **β)** ναι, **γ)** y=4x^2, y=2x^2, **ε)** 4x^2=8, 2x^2=8, **στ)** $\pm\sqrt{2}$ και ±2, **ζ)** 0.
2. **α)** ναι, **β)** τετραγωνικά (με τη μέθοδο των δεύτερων διαφορών), **γ)** εξετάστε τους λόγους s/t^2.
3. **α)** όπως στην 2, **β)** όπως στη 2 (α και β), **δ)** Να συγκρίνετε τις τιμές στους δύο πίνακες και να παρατηρήσετε τις γραφικές παραστάσεις.
4. **α)** ναι, **β)** Να εξετάσετε τους λόγους v/t^2.
5. **α)** λ–1<0. Αν λ=3 έχει ελάχιστη τιμή, **β)** έχει ελάχιστη τιμή. Να σχεδιάσετε την παραβολή y=2x^2.
6. **α)** απαλοιφή παρονομαστών, **β)** Θέτουμε όπου x=0 και βρίσκουμε το y και μετά όπου y=0 και βρίσκουμε το x, **γ)** ενώστε με μια ευθεία τα προηγούμενα σημεία, **δ)** 6, **ε)** (0, λ), (κ, 0).
7. Σύστημα: x+y=0, x–y=–3, λύση: (–1,5, 1,5).
8. **α)** Σύστημα: x+y=11, x–y=3, **β)** 74.
9. Όχι, διότι οι δύο ευθείες θα ταυτίζονταν.
10. **α)** Αν αφιερώσει x λεπτά στο πρώτο και y και στο δεύτερο τότε 8x+6y=300 και x+y=40, **β)** (30, 10).
11. **α)** x=4, **β)** (4, 6), **γ)** Η τετμημένη του κοινού σημείου των γραμμικών εξισώσεων y=x+2 και y=3x–6 είναι λύση της εξίσωσης x+2=3x–6.
12. **α)** Αν x ο χρόνος που περπατάει ο Παναγιώτης, τότε η απόσταση y που διανύει είναι y=4x. Η απόσταση που διανύει ο Πέτρος είναι y=5(x–1), **β)** δεν είναι σωστός ο ισχυρισμός του Πέτρου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 – ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

5.1 Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος

Ερωτήσεις αξιολόγησης

1. **α)** Με αντίθετους συντελεστές, **β)** Με αντικατάσταση.
2. (7, –5)
3. Μικρά 35, Μεγάλα 15.
4. **α)** x = 4, **β)** (4, 13), **γ)** Η λύση της εξίσωσης είναι ίδια με την τιμή του x στη λύση του συστήματος.
5. Λύνουμε το σύστημα των δύο εξισώσεων.
6. Γ.
7. x+y=4, 4x+2y=10.

Ασκήσεις

1. Το καπέλο κοστίζει 12,6 και τα γυαλιά 41,6€.
2. **α)** (–3, 4), **β)** (3, –2), **γ)** (119, –9), **δ)**
3. Λύνουμε τα συστήματα: 3x–2y= 11, 2x–3y=4 και 3x+y=7, x+3y= 13.
4. **α)** (1, 2), **β)** (0, 1,6), **γ)** (4, –3).
5. **α)** Σύστημα: x+2y=180, y=2x, λύση: (36, 72), **γ)** Σύστημα: x=3y, x+2y=180, λύση: (30, 120).
6. 3.
7. Όχι, είναι παράλληλες.
8. Μπορεί να είναι η x+y = –7.
9. 5 και 7.
10. 15 του 1€ και 45 των 2€.
11. **α)** δ: 2x–3y=–4, ε: x+y=3, **β)** των δύο προηγούμενων εξισώσεων, **γ)** (1, 2).
12. Οι ευθείες ταυτίζονται, άρα έχουν άπειρες λύσεις τα «σημεία» τους. Όχι όμως κάθε «σημείο» του επιπέδου.
13. Τηλεσκόπιο: 8€, υπερυπολογιστής: 12€.
14. κ=–1/2, λ=3/4.
15. Ε=72 cm^2.
16. **α)** αν x οι εβδομάδες και y το ύψος τότε: Α: y=8+x, Β: y=4+2x, **β)** σε 4 εβδομάδες θα έχουν και τα δύο ύψος 12 εκατοστά.
17. Πχ x+y=4 και –2x+y=13.
18. 100 ενήλικες και 150 παιδιά.
19. **α)** Βασίλης: y=–40x+2000, Πάνος: y=–90x+2900, **β)** (18, 1280) σημαίνει ότι 18 λεπτά μετά την πτώση βρίσκονταν και οι δύο σε ύψος 1280 μέτρα.
20. **α)** 1ος τρόπος: y=8x, 2ος τρόπος: y=5x+90, **β)** (30, 240), **γ)** για 30 ώρες πληρώνουμε το ίδιο ποσό, 240€.
21. Σωστές απαντήσεις 10 και λανθασμένες 4.
22. **α)** Αν x τα μέλη της ομάδας κινηματογράφου και y τα μέλη της ομάδας θεάτρου τότε x+y=57 και x=y+7, **β)** x=32 και y=25.
23. 24
24. 16 γιατροί και 56 νοσηλευτές.
25. 7 και 8.
26. 20 των 5€ και 12 των 10€.

5.2 Επίλυση εξισώσεων με παραγοντοποίηση

Ερωτήσεις για αξιολόγηση

1. **α)** 1 και 6, β) 4.
2. **α)** λύσεις –2, 1 και 2, **β)** λύσεις 0 και 13, **γ)** λύσεις –2 κι 4.
3. Παραγοντοποιούμε το πρώτο μέλος. Λύσεις –2, 1 και 2.
4. 18cm.
5. Όχι, διότι διαιρώντας με το x δεν εξασφάλισε ότι x≠0 έτσι έχασε την λύση x=0.
6. Όχι διότι ο κανόνας που εφάρμοσε ισχύει μόνο αν το 2ο μέλος είναι 0.
7. Αφροδίτη: Απλοποίησε με το x+7. Έχασε μια λύση. Περσεφόνη: Διαίρεσε με το χ και έχασε επίσης μία λύση. Έπρεπε να μεταφέρουν στο 1ο μέλος και να παραγοντοποιήσουν.

Ασκήσεις και προβλήματα

1. (–4, 32), (4, 32).
2. **α)** x=2, **β)** x=1, 2, –3, **γ)** x=–3, 3,

δ) x=0, –3, 3, **ε)** x=–2, –6, **στ)** x = 4.

3. **α)** x=–2, 2, **β)** x=–1, 0, **γ)** Παραγοντοποιούμε το πρώτο μέλος. x=–3, 1, 2.
4. **α)** λάθος, έχασε την λύση 0, **β)** έπρεπε και x=0, **γ)** λάθος, είναι και x=–3.
5. 34.
6. 66.
7. 7 και –5.
8. 25cm².
9. 7,536cm² και 30,144cm².
10. 3, 4, 5.
11. (–1, 0, 1), (1, 2, 3), (–3, –2, –1).
12. **α)** 28m, **β)** 64m, **γ)** 4 sec και 12 sec.
13. **α)** Ορθογωνίου: 8 και 18 και τετράγωνου: 12cm, **β)** Εμβαδόν 144cm².
14. Ναι, μπορεί.
15. 10.

5.3 Ανισώσεις

5.3.1 - 5.3.2

Ερωτήσεις για αξιολόγηση

1. x+2<3+2, x–5>3–5, 2x≥2·3, –x>–y, 4x>4y, –4x>–4y.
2. Ναι.
3. **α)** =, **β)** >.
4. 5 λύσεις: 1, 1,6, 2, 5, 12,9. Το 1.
5. Δεν υπάρχει.
6. **α)** Α>Β, Γ<Β, Α/2>Γ/2, **β)** ΑΒ<ΑΓ, ΑΓ>ΒΓ, ΑΒ<ΒΓ, ΑΒ+ΑΓ>ΑΒ+ΒΓ.
7. **α)** x≥3, **β)** x<3.

Ασκήσεις και προβλήματα

1. Η πρώτη. x>2.
2. Η δεύτερη.
3. **α)** όλοι οι αριθμοί οι μικρότεροι του –3, **β)** y≥–3, **γ)** παριστάνουν όλη την ευθεία των πραγματικών αριθμών.
4. **α)** 2, 3, 4, **β)** 0, –1, –2, –3, **γ)** 4.
5. Όχι.
6. **α)** >, **β)** <.
7. **α)** μία, **β)** άπειρες, **γ)** ναι.
8. **α)** 2x–7≥3, **β)** x+x+1≤10, **γ)** 2<x<12.
9. 9.
10. Α>Β, Β>Γ, Γ<Α και ΑΒ<ΑΓ, ΑΓ<ΒΓ, ΒΓ>ΑΒ.

5.3.3 Η ανίσωση αx+β<γ

Ερωτήσεις για αξιολόγηση

1. γ.
2. **α)** αόριστη, **β)** αδύνατη, **γ)** αδύνατη, **δ)** μία λύση.
3. –1.
4. **α)** 4,2, 5, 6,3, 7, 159, **β)** 5, 6, 7, **γ)** άπειρες.
5. **α)** y<1, **β)** x≥5.
6. 23.

Ασκήσεις και προβλήματα

1. **α)** x<1, **β)** y>4, **γ)** x≥–1, **δ)** x≥5/6.
2. x≥7/3.
3. **α)** όχι, **β)** ναι, **γ)** περισσότερες από 27.
4. Τουλάχιστον 18.
5. 166.
6. 25.
7. x≥2.
8. x≤21,9.
9. **α)** x=–5, **β)** x<10, **γ)** ναι, **δ)** 1, 2, 3,..., 9.

5.3.4 Η ανίσωση αx+β<γx+δ

Ερωτήσεις για αξιολόγηση

1. **α)** x<–5, **β)** άπειρες λύσεις, **γ)** αδύνατη.
2. Λιγότερα από 500 λεπτά.
3. γ.

Ασκήσεις

1. **α)** άπειρες λύσεις, **β)** αδύνατη, **γ)** x≤–3, δ) x≥–3.
2. Περισσότερα από 250 χιλιόμετρα.
3. 4x+10>3x+15.
4. 16, 18, 20.
5. Σε 4,4 περίπου χρόνια.
6. 13, 15, 17.
7. Περισσότερες από 9 φορές.
8. Λιγότερο από 83 λεπτά.
9. 3x–20<x.
10. Δεν είναι δίκαιο.

5.3.5 Συναληθεύουσες ανισώσεις

Αυτοαξιολόγηση

1. 2≤x≤3.
2. **α)** –1≤x<4, **β)** Δεν υπάρχουν κοινές λύσεις, **γ)** –3≤y≤–1, **δ)** x<2.
3. **α)** Όχι, διότι δεν ισχύει 16+45>61, **β)** 16<x<106.
4. Π.χ. x>2 και x≥3.
5. 0<x≤2,5.

Ασκήσεις και προβλήματα

1. **α)** Λύση: x>3, **β)** x>2/3, **γ)** x<–8/3, **δ)** δεν έχουν κοινές λύσεις, **ε)** δεν έχουν κοινές λύσεις.
2. 2,5≤x<7.
3. γ.
4. Περίπου από 28 μέχρι 34m.
5. **α)** όχι, **β)** 3<x<17.
6. 61, 74, 87.
7. (71, 73) και (73, 75).
8. Μεταξύ 882,4 και 937,5 km/h.
9. Από 56 μέχρι 76.
10. x>–5 και x>–3.

5.4 Ανακεφαλαίωση

Ασκήσεις επανάληψης

1. **α)** –1, 3, **β)** –1, 3, **γ)** –7, –2, **δ)** –2, 1, 2.
2. **α)** Για να προκύψει ο ν+1 τρίγωνος, προσθέτουμε στον ν–ισοστό ν+1 μονάδες, **β)** 15, **γ)** είναι και οι δύο.
3. **α)** 3(x–3)(x–4), **β)** 3, 4.
4. **α) i)** κ = 0 ή λ = 0, **ii)** άπειρες λύσεις, **β) i)** 0, 1, **ii)** –1, 2.
5. **α)** 0, ––7, 7, **β)** 9, **γ)** 0, 3.
6. **α)** 4x²–4x+10, **β)** –1/2, 2.
7. **α)** Να εξετάσετε από κάθε κορυφή πόσες διαγώνιες διέρχονται, **β)** 5, 20, **γ)** ν = 10.
8. **α)** 22cm, **β)** 30,25.
9. Όταν k = m όχι, όταν k≠m ναι. Να εξετάσετε τη σχετική θέση των ευθειών.
10. 20, 21.
11. 16 φυσικής και 26 μαθηματικών.
12. Μετά από 20 ώρες. Η δεύτερη.
13. 10 και 26.
14. 24 και 25.
15. 20 άνδρες, 10 γυναίκες.
16. 2km/h και 4km/h.
17. 0, 1, 2, 3, 4
18. ...
19. 12–3x. 2x, x>2,4.
20. **α)** α = 2, β = –5, **β)** 2>1 και 10>3, **γ)** 3>–4 και 1>–5.
21. **α)** μερικές φορές, **β)** όχι, **γ)** ναι.
22. Από 3h και 54΄(περίπου) μέχρι 6h.
23. 28.
24. 1km.
25. 200.000€.
26. ≥50000€.
27. 388.
28. **α)** το Β, **β)** Για 100 μαθήματα, **γ)** για περισσότερα από 100 μαθήματα, **δ)** ~8.
29. Πάνω από 5.
30. Πάνω από 4.
31. Από 4 δωδεκάδες και πάνω.
32. **α)** από 34 και πάνω, **β)** 100, **γ)** εργάζεστε όπως στα (α) και (β), αλλά με εισιτήριο 6€.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 – ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

6.1 Ισότητα τριγώνων

Ερωτήσεις αξιολόγησης

1. Μπορεί.
2. Δεν μπορεί.
3. 35⁰.
4. 40⁰, 100⁰.

5. Απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες.
6. Ορθογώνιο.
7. Ναι, έχουν.
8. Όχι πάντα.

6.2 Κριτήρια ισότητας τριγώνων

Ερωτήσεις αξιολόγησης

1. **α)** Σ, **β)** Λ, **γ)** Σ, **δ)** Λ, **ε)** Λ.
2. **α)** 1 ορθογώνιο, 2 αμβλυγώνιο, 3 οξυγώνιο, 4 οξυγώνιο, 4 ισόπλευρο, 5 σκαληνό, 6 ισοσκελές, **β)** Όχι.
3. Ναι, όχι, ναι, όχι

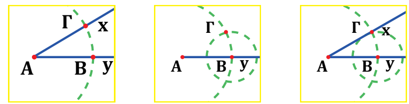
6.2.4 Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

6.3 Ερωτήσεις αυτοαξιολόγησης

1. Έχουν 2 πλευρές και μία γωνία, αλλά δεν είναι ίσα.
2. Όχι.
3. Όχι.
4. 3ο κριτήριο ισότητας και κριτήριο ορθογωνίων τριγώνων.
5. Κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

Ασκήσεις και προβλήματα κεφαλαίου

1. **α)** 1ο κριτήριο, **β)** 2ο κριτήριο, **γ)** μπορεί να εφαρμοστεί το 3ο κριτήριο.
2. Ναι, μπορούμε να μεταφερθούμε στο 3ο κριτήριο.
3. **α)** 1ο κριτήριο, **β)** 2ο κριτήριο, **γ)** 2ο κριτήριο, **δ)** δεν είναι ίσα, **ε)** κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων, **στ)** κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων.
4. **α)** όχι, **β)** όχι, **γ)** ναι.
5. Ναι, το αντίστροφο όχι.
6. **α)** 2ο κριτήριο ισότητας, **β)** να δείξετε ότι έχει τις απέναντι πλευρές παράλληλες.
7. **α)** 3ο κριτήριο ισότητας, **β)** να δείξετε ότι και ΑΓ//ΒΔ.
8. **α)** κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων, **β)** προκύπτει από το (α).
9. Κριτήριο ισότητα ορθογωνίων τριγώνων.
10. **α)** Κριτήριο ισότητα ορθογωνίων τριγώνων, **β)** Κριτήριο ισότητα ορθογωνίων τριγώνων, **γ)** προκύπτει από την προηγούμενη ισότητα.
11. Α, Ο, Δ στην ίδια ευθεία. Κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων. ΑΒ = ΓΔ.
12. Τα παρακάτω σχήματα δείχνουν τα βήματα κατασκευής μιας γωνίας ίσης με δεδομένη.



13. 3ο κριτήριο ισότητας τριγώνων.
14. **α)** Σύγκριση τριγώνων ΑΔΕ και ΔΓΖ, **β)** Να δείξετε ότι η γωνία στο σημείο τομής είναι 90°.
15. **α)** Τα δύο μικρότερα και τα δύο μεγαλύτερα. **β)** το πάνω αριστερά, **γ)** 4, **δ)** με το πάνω αριστερά.
16. Τα Κ, Ο ισαπέχουν από τα Α, Β.
17. **α)** Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΕΖΗ, **β)**, **γ)** όμοιες συγκρίσεις τριγώνων.
18. **α)** Να συγκρίνετε τα τρίγωνα **i)** ΒΟΚ και ΒΟΜ, **ii)** ΓΟΜ και ΓΟΛ, **β)** το Ο ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας Α.
19. Να δείξετε ότι οι διαγώνιες του τετραπλεύρου διχοτομούνται.
20. **α)** Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ, **β)** Να δείξετε ότι ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Α και μετά ότι είναι διάμεσος και ύψος στο τρίγωνο ΑΒΓ, **γ)** Το Δ ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας Α.
21. Να δείξετε ότι $\Delta\hat{H}\Theta=2x$, $x = 30°$.

6.4 Ανακεφαλαίωση

Επαναληπτικές ασκήσεις

1. **α)** Να συγκρίνετε τρίγωνα με μία πλευρά μία διαγώνιο του πενταγώνου, **β)** υπάρχουν πολλές πεντάδες, **γ)** Να δείξετε ότι έχει ίσες πλευρές και ίσες γωνίες.
2. **α)** 1ο κριτήριο ισότητας, **β)** 2ο κριτήριο ισότητας, **γ)** Να συγκρίνετε τις γωνίες της βάσης, **δ)** Συνέπεια των ισοσκελών τριγώνων ΑΒΓ και ΚΒΓ, **ε)** Να δείξετε ότι ΑΛ μεσοκάθετη της ΒΓ.
3. **α)** Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΜΑΟ και ΜΒΟ, **β)** Από τη συγκριση στο (α), γ) τα Μ, Ο ισαπέχουν από τα Α και Β.
4. Το Μ ισαπέχει από τις ΑΒ, ε1 και ε2.
5. Το σημείο τομής της μεσοκάθετης του ΒΓ με την ευθεία ε.
6. **α)** να δείξετε ότι Ο και Μ ισαπέχουν από τα Α και Β, **β)** αν Κ το σημείο τομής των ΟΜ και ΑΒ να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΚΟΑ και ΝΟΜ.
7. **α)** Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΚΟΑ και ΛΟΔ, **β)** Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΚΟΜ και ΛΟΜ, γ) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΜΑΔ είναι ισοσκελές.
8. Ένας τρόπος είναι να δείξετε ότι οι γωνίες ΑΔΒ, ΒΕΓ και ΓΖΑ είναι 120°.
9. Να σχεδιάσετε το τρίγωνο και τα ύψη και να συγκρίνετε δύο ορθογώνια τρίγωνα.
10. Όχι. Να δείτε και ερώτηση 1 αυτοαξιολόγησης (σελ.169). Το «οποιεσδήποτε» να γίνει «αντίστοιχες».
11. **α)** Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΔΒΓ είναι ισοσκελές, **β)** Τα σημεία Α και Δ ισαπέχουν από τα Β και Γ, **γ)** Το Ε είναι σημείο της μεσοκάθετης του ΒΓ.
12. **α)** Να φέρετε $ΟΚ\perp ΑΒ$ και $ΟΛ\perp ΑΓ$. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΟΚΒ και ΟΛΑ, **β)** να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΟΖ και ΒΟΕ.
13. **α)** Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΓΕΒ, **β)** να δείξετε ότι $\hat{\varphi}=\hat{B}_1+\hat{\Gamma}_2=60°$.
14. **α)** να δείξετε ότι $E\hat{B}A=30°$ και $E\hat{B}A=A\hat{E}B$, **β)** Να δείξετε ότι $A\hat{E}B=A\hat{\Gamma}B$, **γ)** να δείξετε ότι ΑΒΕ ισοσκελές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7– ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

7.1 Λόγος ευθυγράμμων τμημάτων

Ασκήσεις

1. **α)** Να δείξετε ότι ΔΑ = ΔΒ ή να χρησιμοποιήσετε το θ. Θαλή και να δείξετε ότι $\frac{EB}{EA}=1$, **β)** Να χρησιμοποιήσετε το (α).
2. **α)** Να εφαρμόσετε θ. Θαλή: $\frac{x}{2}=\frac{3}{x-1}$ **β)** ισοσκελές.
3. **α)** ΑΒ=3, ΑΓ=4,5, ΒΓ=4,2.
4. Να εφαρμόσετε το αντίστροφο του θ. Θαλή.

7.2 Ομοιοθεσία

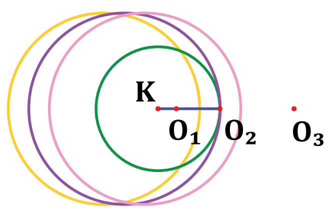
Αυτοαξιολόγηση

1. Σ.
2. Λ,
3. Λ,
4. Σ,
5. Σ,
6. Σ,
7. Σ,
8. Σ,

9. Λ,
10. Σ.

Ασκήσεις και προβλήματα

1. **α)** 4, **β)** ¼.
2. Το κέντρο προσδιορίζεται από την τομή των ημιευθειών ομοιόθετων σημείων. Ο λόγος προκύπτει με κατάλληλη μέτρηση.
3. **α)** σμίκρυνση, **β)** μεγέθυνση.
4. Α΄(3, 0), Β΄(12, 0), Γ΄(3, 9). Α΄Β΄Γ΄ ορθογώνιο.
5. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται και οι τρεις πιθανές ομοιοθεσίες.



6. Να χρησιμοποιήσετε το θ. Θαλή.
7. **α)** $\frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{2,5}{3,75}$, **β)** $\frac{E_1}{E_2}=(\frac{2,5}{3,75})^2$.
8. **α)** 3·4,5 και 8·12, **β)** Ενώνουμε τις ομόλογες κορυφές.
9. **α)** σμίκρυνση, λ=1/3, **β)** σμίκρυνση, λ = 1/3, **γ)** μεγέθυνση, λ = 2.
10. **α)** μεταφορά–ομοιοθεσία, **β)** ίσες, **γ)** να μετρήσετε και να βρείτε το λόγο των αντίστοιχων πλευρών.
11. **α)** ομοιοθεσία (Β, 3), **β)** Σχηματίστε τους λόγους των ομόλογων πλευρών, **γ)** 9.

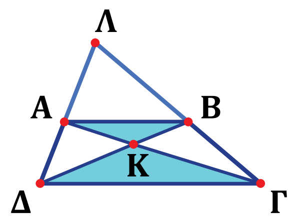
7.3 Ομοιότητα

Αυτοαξιολόγηση

1. **α)** Σ
   β) Σ
   γ) Σ
   δ) Σ
   ε) Λ
   στ) Σ
   ζ) Σ
   η) Λ
   θ) Σ
2. **α)** 4, **β)** 4, **γ)** 8/3, **δ)** ≃2,86.

Ασκήσεις και προβλήματα

1. Να χρησιμοποιήσετε το ΨΜΑ 8.
2. $\sqrt{2}$.
3. Να συγκρίνετε τους λόγους των πλευρών και τις γωνίες τους.
4. **α)** Δύο γωνίες ίσες, **β)** απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται οι ομόλογες πλευρές, **γ)** Βρείτε το λόγο δύο ομόλογων πλευρών.
5. **α)** 3, β) 54.
6. 5,25.
7. **α)** έχουν 2 ίσες γωνίες, **β)**… **γ)** 6, 24, **δ)** 5/3, 200/3.
8. **α)** ΑΚΒ, ΓΚΔ, **β)** ΑΒΛ, ΓΔΛ (σχήμα).



9. **α)** Το ΓΕ με πυθαγόρειο θεώρημα, τα ΒΔ και ΒΕ από ομοιότητα τριγώνων ΓΕΑ, ΒΕΔ., **β)** Τα ΕΖ και ΕΗ από όμοια τρίγωνα ΑΖΕ, ΑΒΔ και ΔΕΗ, ΔΑΓ.
10. **α)** έχουν ίσες γωνίες, **β)** να χρησιμοποιήσετε τις αναλογίες των όμοιων τριγώνων.
11. **α)** 2, **β)** 3.
12. Με Π.Θ. να δείξετε ότι και Α΄Γ΄/ΑΓ = λ.
13. 4,25.
14. 5,75.
15. **α)** έχουν 2 γωνίες ίσες, **β)** έχουν 2 γωνίες ίσες, **γ)** ΑΓΔ, ΒΗΛ, ΔΕΘ.
16. Όμοια τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ.
17. **α)** ίσες γωνίες, **β)** ½, **γ)** ½, **δ)** ¼.
18. **α)** έχουν ίσες γωνίες, **β)** 9.
19. **α)** αντίστροφο Π.Θ. **β)** ομοιότητα τριγώνων, **γ)** 10.

7.4 Σχεδιασμός όμοιων σχημάτων

Ασκήσεις και προβλήματα

1. Ευθεία //ε.
2. Κύκλος.
3. Όμοια σχήματα: **α)** μεγέθυνση, **β)** σμίκρυνση.
4. λ = ½.
5. 16,25m.
6. Όπως στο παράδειγμα σχεδιασμού όμοιων σχημάτων με τετραγωνικό πλέγμα.
7. **α)** λ = 3, **β)** λ = 1/2.

7.5 Ανακεφαλαίωση

1. **α)** 2/5, **β)** 1.
2. Τα τρίγωνα έχουν ίσες 2 γωνίες. Οι ομόλογες πλευρές βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες.
3. Έχουν 2 γωνίες ίσες. 8, 12, 13.
4. **α)** Στο ΑΔΗ με ΕΖ//ΔΗ θ. Θαλή ή όμοια τρίγωνα, **β)** Ομοίως στο ΒΖΓ, με ΔΗ//ΒΖ.
5. Όμοια ορθογώνια τρίγωνα, υ≃149.
6. **α)** ΑΔ = 1/2 ΒΓ και Α = 60°, **β)** προκύπτει από το (α).
7. **α)** ίσες γωνίες, **β)** 15.
8. Θα απέχει 1,2 m από τον οριζόντιο δρόμο και 3 m από την πλευρά του κτηρίου.
9. 27cm².
10. **α)** κέντρο ομοιοθεσίας το μέσο της ΑΒ, λόγος λ≃1,43, **β)** ≃2,79.
11. **α)** 1,5, **β)** Αν Η μέσο της ΑΒ να δείξετε ότι (ΑΕΖ)=$\frac{1}{4}$(ΑΔΗ) και (ΑΔΗ)=$\frac{1}{3}$(ΑΒΓΔ).
12. **α)** Έχουν ίσες γωνίες, **β)** έχουν τις πλευρές ανάλογες, **γ)** 1cm².
13. **α)** Το ΔΕΓΟ είναι παραλληλόγραμμο, **β)** Να δείξετε ότι ΑΗ = ΗΒ, από λόγους όμοιων τριγώνων (ΔΟΖ~ΒΟΗ, ΖΟΓ~ΗΟΑ).
14. **α)** Ομοιοθεσία με λόγο ΑΕ/ΑΔ και στροφή 135° αριστερόστροφα, **β)** στροφή 135° δεξιόστροφα και ομοιοθεσία με λόγο ΑΔ/ΑΕ.
15. **α)** 67,5°, **β)** Να δείξετε ότι οι γωνίες του Κ και Ε είναι ίσες, **γ)** 48 cm.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8 – ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

8.1 Εφαπτομένη οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου

Ασκήσεις και προβλήματα

1. **α)** ΑΓ = 6, ΒΓ = 6,7, **β)** 0,5.
2. 8,4 m
3. ≈10596m.
4. 2,97m.
5. ≈50,45.
6. 44.
7. 7°, 9°, 27°, 45°.
8. 2, 1, 3.
9. 0,6.
10. ≈ 1,9.
11. Από ένα σημείο μετρήστε την απόσταση σας από τη βάση του δέντρου, καθώς και τη γωνία που φαίνεται το δέντρο.
12. ≈4,2m.

8.2 Ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας

Ασκήσεις και προβλήματα

1. 3195m.
2. ≈271,9m.
3. ΨΜΑ
4. 54,9m.
5. 304 m.
6. 41°, 8,3, 2.
7. **α)** β=6, γ= 8, **β)** ημ(90–ω)=ημφ=συνω=… κ.λπ.
8. Να εκφράσετε τα ημΒ και ημΓ από τα ορθογώνια τριγωνα.
9. **α)** Να χρησιμοποιήσετε το ημΑ

δύο φορές, **β)** Να χρησιμοποιήσετε το συνΑ δύο φορές, **γ)** Να χρησιμοποιήσετε το εφΑ δύο φορές.

8.3 Εύρεση γωνιών και πλευρών

Ασκήσεις και προβλήματα

1. ΒΓ=$\sqrt{41}$, Β=51°, Γ=39°.
2. $\sqrt{61}$.
3. $5\sqrt{3}$.
4. ΑΓ=9,4, ΑΒ=3,4.
5. ΑΓ=6,2, ΒΓ=10,15
6. ΑΒ=9,4, ΒΓ=15,2.
7. Α=90°, Β=63°, Γ=27°.
8. Β=Γ=59°, ΑΒ=ΑΓ=5,82.
9. *ΨΜΑ.*
10. Να υπολογίσετε τα ύψη των δύο σπιτιών και μετά να φέρετε παράλληλη από το Γ προς τον δρόμο ώστε να προκύψει ορθογώνιο τρίγωνο (≈80m).

8.4 Ανακεφαλαίωση

Αυτοαξιολόγηση

1. Σ, Σ, Λ.
2. Β = 60°, Γ = 30°, ΑΓ = 8,6, ΒΓ = 10.
3. Λ.
4. Λ.
5. Λ.

Επαναληπτικά έργα

1. Ε = 35,6cm², Π = 25,86cm.
2. ΕΖ=$\sqrt{34}$, ΕΗ=$\sqrt{74}$, Ζ=59°, Η=35°, Ε = 86°.
3. 5, 74°, 106°.
4. **α)** 2,7°, **β)** Να χρησιμοποιήσετε τον τύπο για το μήκος τόξου.
5. Μέτρηση κλίσης πύργου Πίζας. Έγειρε ελάχιστα.
9. **α)** 15, **β)** $15\sqrt{2}$, **γ)** να υπολογίσετε τη βάση ΓΔ του τραπεζίου.
10. **α)** ΑΕ=ΔΓ=10, **β)** Π.Θ στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΕ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9 – ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ

9.1 Εμβαδόν και όγκος πρίσματος και κυλίνδρου

1. 12 κιλά
2. $E_{ολ}$ = 126 cm² **γ)** V = 90 cm³.
3. V = 810 cm³.
4. Vπέτ = 0,2 m³.
5. **α)** Εσωτερική επιφάνεια πισίνας: 160 m², **β)** Χρειάζονται 1778 πλακάκια, **γ)** Για να γεμίσει χρειάζονται 168 m³ νερού.
6. δ=17 cm.
7. Επ=484 cm², V=1331cm³.
8. **α)** 7 cm και 49 cm², **β)** V=343cm³. **γ)** δ=$7\sqrt{6}$cm.
9. Η πλευρά του ρόμβου είναι 6,75 cm.
10. **α)** $E_{ολ}$=62cm², **β)** $E_{ολ}$=67,2cm², **γ)** $E_{ολ}$=94cm².
11. **α) i)** $E_{ολ}$ = 196 cm², **ii)** $E_{ολ}$=200 cm², **iii)** $E_{ολ}$=233,2cm², **β) i)** V=144 cm³, **ii)** V=160cm³, **iii)** V=216cm³.
12. **α)** Ακμή βάσης 5cm, **β)** υ=10cm, **γ)** $E_{π}$=200 cm², **δ)** V=250cm³.
13. **α)** υ=6cm, **β)** $E_{β}$=9cm².
14. **α)** V=288m³, **β)** V=405mm³, **γ)** V= 108cm³.
15. **α)** α=7cm, υ=21cm, **β)** V=1029cm³.
16. **α)** $E_{ολ}$=450cm², **β)** V=390cm³.
17. **α)** $E_{π}$=264cm², **β)** V=216cm³.
18. **α)** V=36cm³, **β)** V=20,352m³, **γ)** V=8,625dm³, **δ)** V=43750m³.
19. **α)** 4cm και $E_{β}$=$24\sqrt{3}$ cm² ≈41,52, **β)** $E_{ολ}$≈371,03cm², **γ)** V≈498,24 cm³,
20. V=$144\sqrt{3}$cm³.
21. **α)** V=60m³, **β)** V=96m³.
22. Χρειάζονται 5,2m² σανίδια.
23. **α)** $E_{ολ}$ ≈785m², **β)** $E_{ολ}$≈2512cm², **γ)** $E_{ολ}$ ≈ 722,2mm².
24. Θα χρειαστεί 32,028m² χαρτί.
25. **α)** υ≈13cm, **β)** ρ≈2,82cm.
26. **α)** $E_{ολ}$≈94,2m², V≈56,52m³, **β)** $E_{ολ}$≈100,48m², V≈75,36m³, **γ)** $E_{ολ}$ ≈163,53m², V≈110,78 m³.
27. **α)** V≈443,12m³, **β)** V≈471cm³, **γ)** V≈2009,6mm³.
28. **α)** V≈50,24 cm³ **β)** V ≈ 141,3cm³ **γ)** V≈942cm³.
29. Ο κορμός κοστίζει 414,48€.
30. Το νερό στο δεύτερο δοχείο θα φθάσει σε ύψος 10,47m.

9.2 Εμβαδόν και όγκος πυραμίδας και κώνου

1. **α)** Επ=135cm², **β)** Επ=108cm², **γ)** Επ=26,25cm².
2. **α)** $E_{ολ}$≈266,39cm², **β)** $E_{ολ}$=52,64cm², **γ)** $E_{ολ}$ ≈ 78,57cm².
3. **α)** 1,8m², **β)** 54€.
4. **α)** V ≈ 190576,8 cm³, **β)** V=400cm³, **γ)** V=20cm³.
5. **α)** V=270cm³, **β)** V≈1730cm³.
6. **α)** $V_{Λουβ}$=8926,17m³ και $V_{Χεοπ}$=2577717m³. Η πυραμίδα του Χέοπα έχει 289 φορές μεγαλύτερο όγκο από την πυραμίδα του Λούβρου, **β)** 1960 m² γυαλί.
7. **α)** Επ=1476cm², **β)** $E_{ολ}$=1800cm², **γ)** V=4320 cm³, **δ)** ΚΒ≈41,98cm³.
8. V=1280cm³.
9. V=48cm³.
10. **α)** $E_{ολ}$ ≈301,44cm², V≈301,44cm³, **β)** $E_{ολ}$≈1130,4 cm², V≈2512 cm³, **γ)** $E_{ολ}$ ≈ 2512cm², V≈8038,4cm³.
11. 94,2 cm³.
12. **α)** V≈16,75cm³, **β)** V≈339,12dm³, **γ)** V≈1177,5m³, **δ)** V=294,38m³.
13. **α)** $E_{ΑΒ}$ ≈ 35,96 cm², **β)** $E_{ΑΓ}$≈271,92 cm².
14. $E_{κ}$ = 65π cm², **β)** V=100π cm³.
15. **α)** ρ≈11,11cm και υ≈48,75cm, **β)** V ≈ 6298,12 cm³.
16. **α)** V≈138,47cm³, **β)** 16,12% (Υπόδειξη: Να υπολογίσετε την ακτίνα του κώνου που σχηματίζει το νερό με ομοιότητα τριγώνων).

9.3 Εμβαδόν σφαιρικής επιφάνειας και όγκος σφαίρας

1. **α)** $E_{σφ}$≈113,04cm², **β)** $E_{σφ}$≈366,25dm², **γ)** $E_{σφ}$≈2155,42 m², **δ)** Εσφ ≈1981,39 mm².
2. 9922,92 cm³.
3. **α)** V≈113,04cm³, **β)** V≈65,42dm³ **γ)** V≈212,07m³, **δ)** V≈8295,4 mm³.
4. 209,33 κιλά χρώμα.
5. **α)** V_1≈7234,56 cm³, **β)** V_2≈33493,33 m³.
6. V ≈ 113,04 cm³.
7. 24,42 lt.
8. **α)** 3,62 lt.
9. **α)** ρ ≈ 6369,43 Km, **β)** $E_{σφ}$≈509554659,9 Km².
10. **α)** $V_{Γ}$ ≈1,08215·10¹²Km³ και $V_{Η}$ ≈1,41155·10¹⁸Km³, **β)** $m_{Η}$≈ 332028 $m_{Γ}$, **γ)** $V_{Η}$ ≈ 1304396 $V_{Γ}$, **δ)** $E_{Η}$ ≈ 11638 $E_{Γ}$.

9.4 Επίλυση προβλημάτων με σύνθετα στερεά σώματα

1. **α)** V=900cm³, **β)** V=369cm³, **γ)** V=1435,6cm³, **δ)** V=306,52 cm³.
2. α≈5,38m.
3. **α)** $E_{σφ}$≈1256cm² και $E_{κύβ}$=600cm², **β)** Ε=56,14cm², V=33,49cm³.
4. Ε≈406,94cm² και V≈234,45cm³.
5. **α)** 24cm, **β)** V≈52715,52cm³.
6. V=216π cm³.
7. **α)** 64,7g, **β)** 6,47Kg.
8. **α)** Ε≈1983,48cm², V≈7536cm³, **β)** Ε≈138,16cm², V≈200,96cm³, **γ)** Ε≈267,69cm², V≈392,5cm³.
9. **α)** $E=2\pi\rho\sqrt{\upsilon^2+\rho^2}$, $V=\frac{2}{3}\pi\rho^2\upsilon$.
10. V = 200π cm³.
11. **α)** 15cm, **β)** 4,8cm (Υπόδειξη: Να χρησιμοποιήσετε ομοιότητα τριγώνων), **γ)** $V_{κών}$=1004,8cm³, **δ)** $V_{σφ}$=463,01 cm³, **ε)** V=541,79 cm³.
12. V=3663,3 cm³ και $E_{ολ}$=1570 cm².

9.5 Επαναληπτικά έργα

1. $E_{ολ}=192\ cm^2$.
2. $V=9216\ cm^3$.
3. $E_{ολ}=800\ cm^2$.
4. **α)** $E_β=41{,}52m^2$, **β)** $E_β=240m^2$, **γ)** $E_{ολ}=323{,}04m^2$, **δ)** $V=415{,}2m^3$.
5. υ=6 μονάδες μήκους
6. **α)** υ=7cm, **β)** υ=14 cm.
7. **α)** ρ=4cm, **β)** Εκ=80π cm^2.
8. V=141,3 lt.
9. $E_κ=16π\ m^2$.
10. 0,804 cm^3.
11. **α)** ΑΒ=10 cm,
    β) h≈25, 51cm, $E_π≈765{,}3cm^2$,
    γ) ΚΓ≈8,66 cm, $E_β≈259$, cm^2,
    δ) $E_{ολ}≈1025{,}1cm^2$,
    ε) ΟΔ≈13,84cm,
12. $V_{κόλ}=3500\ cm^3$.
13. **α)**$E≈2496{,}78cm^2$,$V≈7547{,}9cm^3$,
    β)$V≈108253{,}33cm^3$, $E≈16256\ cm^2$,
    γ)$E≈1629{,}94\ c\,m^2$,$V≈3550{,}7m^3$.
14. $E_{ολ}≈37{,}68c\,m^2$,$V≈11{,}81cm^3$.
15. $V=24000π\ cm^3$.
16. $V=216π\ cm^3$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10 – ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

10.1 Στατιστικές ερωτήσεις

1. **α), γ), δ), ε), στ), ζ)**.
2. **α), στ)**.
3. **β), γ)**.
4. Εφαρμογή (2).
5. Εφαρμογή (2).

10.2 Πληθυσμός - Δείγμα

1. **α)** Πληθυσμός: Όλοι οι ενήλικες, Δείγμα: 1950, **β)** Πληθυσμός: Όλα τα νέα αυτοκίνητα της κατηγορίας, Δείγμα: 1200.
2. **α)** Από τους φούρνους της πόλης, **β)** Από τα βενζινάδικα της Αθήνας, **γ)** Μη εργαζόμενους της πόλης που παρακολουθούν 8–12 τηλεόραση.
3. **α)** Ναι, **β)** Όχι, **γ)** Όχι, **δ)**Ναι.
4. **α)** 7/12, **β)** 1/6, 1/10, 1/15, 1/20, 1/30, **γ)** Όχι.
5. **α)** Όχι, **β)** Όχι.
6. **α)** Πληθυσμός: Όλοι οι ψηφοφόροι, Δείγμα: 3000, **β)** Όχι, **γ)** Α:1350, Β:600, Γ:450.
7. **α)**135/300, **β)** 180/300, **γ)** 235/300.
8. **α)** Οι καταστηματάρχες της πλατείας, **β)** Όλοι οι καταστηματάρχες του Δήμου, **γ)** Όχι, **δ)** Όχι.
9. **α)** Οι φοιτητές του Πανεπιστημίου, **β)** Οι φοιτητές που πέρναγαν 7–10 πμ από την πύλη Α΄, **γ)** Διαφωνώ.
10. Λάθος.
11. Δεν αντιπροσωπεύουν. Μη αντιπροσωπευτικό δείγμα. Μεροληπτική ερώτηση.
12. Της Βάλιας, δείγμα αντιπροσωπευτικό.
13. Εφημερίδα (2)
14. 15,16 & 17. Υποδ. Σελ.12.
18. Υπ.: Με την μέθοδο των τυχαίων αριθμών και την εντολή «δειγματοληψία» στο Excel ή με πίνακα τυχαίων αριθμών
19. Υπ.: Με την μέθοδο των τυχαίων αριθμών και την εντολή «δειγματοληψία» στο Excel. Πληθυσμός: 3000 εισιτήρια. Δείγμα: 30
20. Υπ. Για έλεγχο μιας γραμμής παραγωγής, επιλογή 100 βιδών ανά ώρα και έλεγχος στις 800 βίδες του δείγματος.

10.3 Μεταβλητότητα

1. **α)** Εύρος$_A$=4 < Εύρος$_B$ = 5, **β)** Δείγμα Α: $Q_3–Q_1$ = 2 = Δείγμα Β: $Q_3–Q_1$ = 2.
2. **α)** Εύρος$_A$ = 8 = Εύρος$_B$ **β)** Δείγμα Α: $Q_3–Q_1$ = 5 > Δείγμα Β: $Q_3–Q_1$=3.
3. **α)** Εύρος$_A$=11>Εύρος$_B$ = 9, **β)** Δείγμα Α: $Q_3–Q_1$=3 > Δείγμα Β: $Q_3–Q_1$= 2.
4. **α)** Εύρος$_B$ = 16 < Εύρος$_A$ = 20 < Εύρος$_B$ = 32, **β)** Δείγμα Α: $Q_3–Q_1$ = 10 = Δείγμα Β: $Q_3–Q_1$ = 10 <Δείγμα Γ: $Q_3–Q_1$ = 5.
5. **α)** $δ_A≈3{,}5 < δ_B≈7$ **β)** β) Εύρος$_A$≈6 < Εύρος$_B$≈8, **β)** Δείγμα Α: $Q_3–Q_1≈2$ < Δείγμα Β: $Q_3–Q_1≈3$
6. **α)** Εύρος$_A$ = 5 = Εύρος$_B$, **β)** Δείγμα Α: $Q_3–Q_1$ = 2 < Δείγμα Β: $Q_3–Q_1$ = 3.
7. **α)** Εύρος$_A$ = 7 = Εύρος$_B$, **β)** Δείγμα Α: $Q_3–Q_1$ = 3 < Δείγμα Β: $Q_3–Q_1$ = 6.
8. **α)** Εύρος$_{ΑΓΟΡ}$≈17< Εύρος$_{ΚΟΡ}$ = 26, **β)** Δείγμα$_{ΚΟΡ}$: $Q_3–Q_1$ = 7< Δείγμα$_{ΛΥΚ}$: $Q_3–Q_1$ = 16.
9. **α)** Εύρος$_{ΑΕΙ}$≈1400< Εύρος$_{ΜΕΤ}$ = 1500< Εύρος$_{ΛΥΚ}$≈1750,
   β) Δείγμα$_{ΑΕΙ}$: $Q_3–Q_1$ = 850>
   Δείγμα$_{ΛΥΚ}$: Q3–Q1≈800>
   Δείγμα$_{ΜΕΤ}$: $Q_3–Q_1≈700$.
10. **α)** 25 **γ)** ΜΤ($Γ_1$) = 13,76 < ΜΤ($Γ_2$) = 16,72 και δ($Γ_1$) = 16 = δ($Γ_2$) **δ)** Εύρος($Γ_1$) = 10> Εύρος($Γ_2$) = 8, $Γ_1$:$Q_3–Q_1$ = 4> $Γ_2$:$Q_3–Q_1$ = 2.
11. **α)**ΜΤ≈12,9, δ = 13, Εύρος = 12, $Q_3–Q_1$ = 6 **β)** Υπ.: Εφαρμογές 2. 3

10.4 Επαναληπτικά έργα

1, 2, 3. Υπ: Εφαρμογές (2) και (3).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11 – ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Αυτοαξιολόγηση

1. Σωστό.
2. Λάθος.
3. Λάθος.
4. Λάθος.
5. Λάθος.
6. Σωστό.

11.1 Πειράματα τύχης - Νόμος Μεγάλων Αριθμών

1. **α)**51, **β)** 0,08 / 0,26 / 0,34 /0,32 **γ)** 1 **δ)** ¼ ε) βλ.(β), **στ)** Όχι.
2. Υπ.: Εφαρμογή (2).
3. Υπ.: Εφαρμογή (3).
4. Υπ.: Εφαρμογή (4).
5. Υπ.: Εφαρμογή (4).
6. **α)** 0,8 **β)** 0,5.
7. **α)** 0,05 **β)** 0,15 **γ)** 0,3 δ) 0,5.
8. **α)** 0,1583 **β)** 0,1638 γ) 0,3221.
9. **α)** 0,24 **β)** 0,5 **γ)** 0,26.
10. **α)** 0,75 **β)** 0,25.
11. 0 έως και 4 για την λειτουργία, 5 έως και 9 για μη λειτουργία.

11.2 Πειραματική πιθανότητα.

Αυτοαξιολόγηση

1. Ναι.
2. Οχι.
3. Ναι.
4. Όχι.
5. Ναι.
6. Ναι.
7. Όχι.
8. Ναι.
9. Όχι.
10. Ναι.

11.3 Ανεξαρτησία - Συσχέτιση

1. **α)** 1/25, **β)** 1/25, **γ)** Ναι.
2. **α)** 300, **β)** 1/6, **γ)** 1/12.
3. **α)** 4750/4985, **β)** 1245/4985, **γ)** 75/235, **δ)** 2350/4750.
4. Ναι σε όλα.
5. **β)** 0,25, **γ)** Ίσες.
6. Όχι.
7. Όχι.
8. **α)**8%, **β)**95%, **γ)**Ανεξάρτητα, **δ)** 1/Ναι, 2/100%.
9. **α)** 1/3, **β)** 1/6, **γ)** Ναι, **δ)** Ισχύει.

Επαναληπτικά έργα

1. 400 λέξεις με τυχαία δειγματοληψία.
2. 20 15λεπτα από τα 40 με τυχαία δειγματοληψία.
3. Υπ.: Εφαρμογή 2. Τετραψήφιοι με τυχαία δειγματοληψία. 0–4 Αγόρι και 5–9 Κορίτσι.
4. **α)** i/5/8 ii/5/9, **β)** i/3/7 ii/4/7.

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΟΡΩΝ

Πηγές εικόνων

Κεφάλαιο 6
Ευκλείδης. Αποθετήριο πολυμέσων Wikimedia: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Euklid2.jpg

Κεφάλαιο 7
Παντογράφος του Ήρωνα της Αλεξάνδρειας, Μουσείο Αρχαίας Ελληνικής Τεχνολογίας. Αποθετήριο πολυμέσων Wikimedia και Creative Commons Άδειες: Eunostos, CC BY-SA 4.0, μέσω των Wikimedia Commons. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pantograph_of_Heron_of_Alexandria,_Museum_of_ancient_Greek_technology.jpg

Παντογράφος. Αποθετήριο Πολυμέσων Wikimedia: https://en.wikipedia.org/wiki/File:Pantograph01.jpg

Κεφάλαιο 8
Πύργος της Πίζας. Αποθετήριο πολυμέσων Wikimedia και Creative Commons Άδειες: Diego Pierdant, CC BY –SA 4.0, μέσω των Wikimedia Commons. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Torre_Inclinada_de_Pisa,_Campanario_de_la_Catedral.jpg

Τριγωνομετρικοί Αριθμοί των γωνιών 1° –89°

Γωνία σε μοίρες	Ημίτονο	Συνημίτονο	Εφαπτομένη	Γωνία σε μοίρες	Ημίτονο	Συνημίτονο	Εφαπτομένη
0	0,000	1,000	0,000	46	0,719	0,695	1,036
1	0,017	1,000	0,017	47	0,731	0,682	1,072
2	0,035	0,999	0,035	48	0,743	0,669	1,111
3	0,052	0,999	0,052	49	0,755	0,656	1,150
4	0,070	0,998	0,070	50	0,766	0,643	1,192
5	0,087	0,996	0,087	51	0,777	0,629	1,235
6	0,105	0,995	0,105	52	0,788	0,616	1,280
7	0,122	0,993	0,123	53	0,799	0,602	1,327
8	0,139	0,990	0,141	54	0,809	0,588	1,376
9	0,156	0,988	0,158	55	0,819	0,574	1,428
10	0,174	0,985	0,176	56	0,829	0,559	1,483
11	0,191	0,982	0,194	57	0,839	0,545	1,540
12	0,208	0,978	0,213	58	0,848	0,530	1,600
13	0,225	0,974	0,231	59	0,857	0,515	1,664
14	0,242	0,970	0,249	60	0,866	0,500	1,732
15	0,259	0,966	0,268	61	0,875	0,485	1,804
16	0,276	0,961	0,287	62	0,883	0,469	1,881
17	0,292	0,956	0,306	63	0,891	0,454	1,963
18	0,309	0,951	0,325	64	0,899	0,438	2,050
19	0,326	0,946	0,344	65	0,906	0,423	2,145
20	0,342	0,940	0,364	66	0,914	0,407	2,246
21	0,358	0,934	0,384	67	0,921	0,391	2,356
22	0,375	0,927	0,404	68	0,927	0,375	2,475
23	0,391	0,921	0,424	69	0,934	0,358	2,605
24	0,407	0,914	0,445	70	0,940	0,342	2,747
25	0,423	0,906	0,466	71	0,946	0,326	2,904
26	0,438	0,899	0,488	72	0,951	0,309	3,078
27	0,454	0,891	0,510	73	0,956	0,292	3,271
28	0,469	0,883	0,532	74	0,961	0,276	3,487
29	0,485	0,875	0,554	75	0,966	0,259	3,732
30	0,500	0,866	0,577	76	0,970	0,242	4,011
31	0,515	0,857	0,601	77	0,974	0,225	4,331
32	0,530	0,848	0,625	78	0,978	0,208	4,705
33	0,545	0,839	0,649	79	0,982	0,191	5,145
34	0,559	0,829	0,675	80	0,985	0,174	5,671
35	0,574	0,819	0,700	81	0,988	0,156	6,314
36	0,588	0,809	0,727	82	0,990	0,139	7,115
37	0,602	0,799	0,754	83	0,993	0,122	8,144
38	0,616	0,788	0,781	84	0,995	0,105	9,514
39	0,629	0,777	0,810	85	0,996	0,087	11,430
40	0,643	0,766	0,839	86	0,998	0,070	14,301
41	0,656	0,755	0,869	87	0,999	0,052	19,081
42	0,669	0,743	0,900	88	0,999	0,035	28,636
43	0,682	0,731	0,933	89	1,000	0,017	57,290
44	0,695	0,719	0,966	90	1,000	0,000	#
45	0,707	0,707	1,000				