ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Θανάσης Λαμπρόπουλος
Δημήτρης Μανιάς
Δήμητρα Λαμπροπούλου
Νίκος Λαμπρόπουλος

ΑΛΓΕΒΡΑ

Α′ Λυκείου

Βιβλίο Μαθητή/
Μαθήτριας

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΑΛΓΕΒΡΑ

(Γενική Παιδεία)

Α΄ Λυκείου

Επιστημονική Επιτροπή Αξιολόγησης

Συντονιστής / Αξιολογητής	**Ανδρέας Αρβανιτογεώργος** Εν ενεργεία μέλος Διδακτικού Ερευνητικού Προσωπικού
Αξιολογητής	**Αθανάσιος Αρβανιτίδης** Εν ενεργεία Εκπαιδευτικός
Αξιολογήτρια	**Σεβαστή Ήβη Τσαντίλη** Εν ενεργεία Εκπαιδευτικός
Τεχνικός Εμπειρογνώμονας	**Φωτεινή Φιλιππίδου** Πτυχιούχος Πληροφορικής
Επικουρικός Εμπειρογνώμονας	**Ειρήνη Σταυριανού** Πτυχιούχος Τεχνολογίας Γραφικών Τεχνών
Υπεύθυνος Διδακτικού Πακέτου για το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής	**Στυλιανός Μαυρατζάς** Σύμβουλος Α΄ του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Πράξη με τίτλο: «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ 6010165 στο Πρόγραμμα «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή» 2021-2027

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ
Σπυρίδων Δουκάκης
Πρόεδρος του Δ.Σ. του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Υπεύθυνος Πράξης
Διονύσιος Μουρελάτος
Σύμβουλος Α΄ του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Αναπληρωτής Υπεύθυνος Πράξης
Στυλιανός Μαυρατζάς
Σύμβουλος Α΄ του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

«Με τη συγχρηματοδότηση της Ευρωπαϊκής Ένωσης»
και το Πρόγραμμα «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή»

Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας, Θρησκευμάτων και Αθλητισμού
ΙΕΠ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2021-2027
Πρόγραμμα Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Θανάσης Λαμπρόπουλος
Δήμητρα Λαμπροπούλου
Δημήτρης Μανιάς
Νίκος Λαμπρόπουλος

ΑΛΓΕΒΡΑ

(Γενική Παιδεία)

Α΄ Λυκείου

Βιβλίο Μαθητή/Μαθήτριας

εκδόσεις Ελληνική γραφή

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

Συγγραφείς	**Θανάσης Λαμπρόπουλος (MSc)** Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο **Δήμητρα Λαμπροπούλου (MSc, PhD)** Τμήμα Χημικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Πατρών **Νίκος Λαμπρόπουλος (MSc, PhD)** Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο **Δημήτρης Μανιάς (MSc, PhD)** Mathematics Department, Khalifa University, Abu Dhabi
Επιστημονική Επιμέλεια	Η συγγραφική ομάδα
Εκδότης	ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΓΡΑΦΗ Α.Ε.
Υπεύθυνος έργου **Επιμέλεια Έκδοσης** **Εξώφυλλο**	**Κέλλυ Σαρρή Πασχαλίδη** Παιδαγωγός
Εικονογράφηση	Σχεδιαστική ομάδα των εκδόσεων
Ψηφιακά Μαθησιακά Αντικείμενα **Σύλληψη - Δημιουργία - Υλοποίηση**	Συγγραφική ομάδα του βιβλίου Τεχνική ομάδα των εκδόσεων

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Αγαπητές μαθήτριες, Αγαπητοί μαθητές

Το βιβλίο που έχετε στα χέρια σας είναι ένα νέο βιβλίο άλγεβρας για την Α' Τάξη του Λυκείου. Καλωσορίσατε στον κόσμο της άλγεβρας, έναν κόσμο γεμάτο από μαθηματική ομορφιά και λογική που απευθύνεται σε εσάς, τους μαθητές της Α΄ Λυκείου. Πριν αρχίσετε τη μελέτη του, είναι απαραίτητο να διαβάσετε αυτό το εισαγωγικό μέρος.

Οι ακρογωνιαίοι λίθοι της άλγεβρας (και γενικά των μαθηματικών) είναι *ο ορισμός*, *το θεώρημα* και *η απόδειξη*. Οι *ορισμοί* προσδιορίζουν με ακρίβεια τις έννοιες οι οποίες μας ενδιαφέρουν, τα *θεωρήματα* βεβαιώνουν τι ακριβώς ισχύει για αυτές τις έννοιες και οι *αποδείξεις* καταδεικνύουν αδιαμφισβήτητα την αλήθεια αυτών των ισχυρισμών.

Εισαγωγή

Ορισμός
Θεώρημα
Απόδειξη

Σε αυτό το βιβλίο θα χρησιμοποιήσουμε περισσότερο συστηματικά τα σύμβολα της συνεπαγωγής (⇒) και της ισοδυναμίας (⇔).

Τη Συνεπαγωγή (⇒)

τη χρησιμοποιούμε όταν θέλουμε να δηλώσουμε ότι αν μία πρόταση Α, είναι αληθής, τότε και η πρόταση Β είναι αληθής, χωρίς όμως να συμβαίνει και το αντίθετο. Δηλαδή αν η Β είναι αληθής δεν έπεται ότι και η Α είναι αληθής. Για παράδειγμα, αν έχουμε την πρόταση *«Αν οι αριθμοί α και β είναι ίσοι, τότε και τα τετράγωνά τους είναι ίσα»* συμβολικά γράφουμε: $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2$. Το αντίστροφο, δεν ισχύει (π.χ. είναι $(-5)^2 = 5^2$, ενώ $-5 \neq 5$).

Την Ισοδυναμία (⇔)

ή **διπλή συνεπαγωγή** τη χρησιμοποιούμε όταν θέλουμε να δηλώσουμε ότι αν μία πρόταση Α, είναι αληθής, τότε και η πρόταση Β είναι αληθής, και αντίστροφα. Δηλαδή αν η Β είναι αληθής τότε και η Α είναι αληθής. Για παράδειγμα: Η πρόταση *«Αν ένας ακέραιος x είναι άρτιος, τότε ο x + 1 είναι περιττός και αν ο x +1 είναι περιττός, τότε ο x είναι άρτιος»* συμβολικά γράφεται: x είναι άρτιος ⇔ $x + 1$ είναι περιττός.

Στα μαθηματικά χρησιμοποιούνται πολύ οι λέξεις *και*, *ή*, και *όχι* με πολύ ακριβείς τρόπους και με πολύ σαφές και συγκεκριμένο νόημα. Η μαθηματική χρήση του *και* ή του *ή* είναι ουσιαστικά η ίδια με αυτή της καθομιλουμένης. Για παράδειγμα: Η πρόταση «*Το γινόμενο δύο πραγματικών αριθμών α και β είναι διάφορο του μηδενός, αν και μόνο αν, και οι δύο αριθμοί α και β είναι διάφοροι του μηδενός*» γράφεται: $\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$.

Το όχι στα μαθηματικά λέγεται άρνηση. Η άρνηση μίας πρότασης που είναι αληθής είναι μία ψευδής πρόταση. Όμοια η άρνηση μίας ψευδούς πρότασης είναι αληθής. Για παράδειγμα, η πρόταση *«Το 2 είναι άρτιος»* είναι αληθής, ενώ η πρόταση *«Το 2 δεν είναι άρτιος»* είναι ψευδής. Η πρόταση *«Το 10 δεν είναι πολλαπλάσιο του 5»* είναι ψευδής, ενώ η πρόταση *«Το 10 είναι πολλαπλάσιο του 5»* είναι αληθής.

Η χρήση του *ή* χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή. Στο παράδειγμα που αμέσως ακολουθεί, τα πράγματα είναι ξεκάθαρα. Για παράδειγμα, η πρόταση *«Το γινόμενο δύο πραγματικών αριθμών α και β είναι ίσο με το μηδέν, αν και μόνο αν, ένας τουλάχιστον από αυτούς είναι ίσος με το μηδέν»* γράφεται: $\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ή $\beta = 0$. Ωστόσο, στην καθομιλουμένη γλώσσα, το *ή* συχνά προτείνει τη δυνατότητα της μίας ή της άλλης επιλογής, αλλά όχι και τα δύο.

Έχοντας αυτά τα λίγα αλλά πολύ σημαντικά εφόδια και ανακαλώντας γνώσεις και ιδέες από την προηγούμενη σχολική σας εμπειρία ετοιμαστείτε να ξεκινήσετε το ταξίδι σας στον ενδιαφέροντα κόσμο της άλγεβρας, όπου η γνώση συναντά την εξερεύνηση και η ανακάλυψη συναντά την διασκέδαση! Στο τέλος αυτού του ταξιδιού, ελπίζουμε να έχετε αποκτήσει ένα πολύ καλό υπόβαθρο στην άλγεβρα, αλλά και γενικότερα στα μαθηματικά, καθώς και την αυτοπεποίθηση ώστε να επιχειρήσετε να εξερευνήσετε παραπέρα τον κόσμο των μαθηματικών αλλά και τον ευρύτερο κόσμο της επιστήμης και της τεχνολογίας.

Οι Συγγραφείς

ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Το βιβλίο αυτό, όπως και κάθε βιβλίο έχει τα δικά του ιδιαίτερα χαρακτηριστικά τόσο στη δομή του και στην οργάνωσή του, όσο και στον τρόπο παρουσίασης της ύλης. Είναι επομένως απαραίτητο πριν αρχίσετε να το διαβάζετε να τα γνωρίζετε ώστε να μπορέσετε να το διαβάσετε με ευχαρίστηση και το κυριότερο να το αξιοποιήσετε με τον καλύτερο δυνατό τρόπο.

Το βιβλίο αποτελείται από την «Εισαγωγή» και από δύο «ΘΕΜΑΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ»: «ΑΡΙΘΜΟΙ» και «ΑΛΓΕΒΡΑ». Τα Θεματικά Πεδία αποτελούνται από «ΘΕΜΑΤΙΚΕΣ ΕΝΟΤΗΤΕΣ» και η κάθε Θεματική Ενότητα αποτελείται από «Υποενότητες». Κάθε Ενότητα έχει τίτλο το γνωστικό αντικείμενο στο οποίο είναι αφιερωμένη. Κάθε Υποενότητα αρχίζει με ένα έργο εξερεύνησης, δηλαδή, με το τι «Θα μάθουμε» (μελετήσουμε-προβληματιστούμε-συζητήσουμε) με το τι «Έχουμε μάθει» (μία σύντομη επισκόπηση σχετική με το θέμα που πραγματεύεται) και όταν κρίνετε σκόπιμο με το «Υπενθυμίζουμε ότι» (δηλαδή με κάποιες απαραίτητες σχετικές υπενθυμίσεις). Στη συνέχεια, παρουσιάζεται το κυρίως θέμα της υποενότητας όπου υπάρχουν οι απαραίτητοι «Ορισμοί», οι «Προτάσεις» με τις αποδείξεις τους, καθώς και στοχευμένα «Παραδείγματα» με υποδειγματικές απαντήσεις-λύσεις, για την εμπέδωση της θεωρίας αλλά και με στόχο την παρακολούθηση του τρόπου σκέψης και γραφής από τον μαθητή. Η ύλη παρουσιάζεται με λιτό, αφηγηματικό και περιγραφικό τρόπο ώστε κάθε νέα έννοια να εισάγεται σαν μία φυσιολογική αναγκαιότητα. Σε όλες τις υποενότητες και όπου κρίνεται απαραίτητο υπάρχουν παρατηρήσεις, επισημάνσεις, υπενθυμίσεις, καθώς και συμπληρωματικά σχόλια. Στο τέλος

Θα μάθουμε:

- να συμβολίζουμε με διαστήματα τα υποσύνολα των πραγματικών αριθμών που προσδιορίζονται από ανισοτικές σχέσεις.

Έχουμε μάθει:

να τοποθετούμε τους πραγματικούς αριθμούς σε μία ευθεία.

Υπενθυμίζουμε ότι:

Οι **πραγματικοί αριθμοί** είναι ένα διατεταγμένο σύνολο, δηλαδή ένα σύνολο που τα στοιχεία του είναι τοποθετημένα σε μία ευθεία (ευθεία των πραγματικών αριθμών) με μία σειρά και συγκεκριμένα όπως κινούμαστε από τα αριστερά προς τα δεξιά με αύξουσα σειρά. Η θέση κάθε αριθμού καθορίζεται από την απόστασή του από το μηδέν και από το αν βρίσκεται προς τα αριστερά ή προς τα δεξιά του μηδενός.

Ορισμός

Άλλες μορφές διαστημάτων είναι:

- Το **ανοικτό δεξιά** διάστημα $[\alpha, \beta)$ που αποτελείται από τους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $\alpha \leq x < \beta$ και
- Το **ανοικτό αριστερά** διάστημα $(\alpha, \beta]$ που αποτελείται από τους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $\alpha < x \leq \beta$.

Πρόταση 1.1.3.1

Για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\rho > 0$ ισχύει

$$d(x, x_0) < \rho \Leftrightarrow x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho) \Leftrightarrow x_0 - \rho < x < x_0 + \rho.$$

Εργαζόμενοι με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι

$$d(x, x_0) \leq \rho \Leftrightarrow x \in [x_0 - \rho, x_0 + \rho] \Leftrightarrow x_0 - \rho \leq x \leq x_0 + \rho.$$

Παράδειγμα 1.1.4.1

Ο αριθμός $|x-1|$, $x \in \mathbb{R}$ εκφράζει την απόσταση του σημείου του άξονα των πραγματικών αριθμών, στον οποίο απεικονίζεται ο αριθμός $x \in \mathbb{R}$, από το σημείο στο οποίο απεικονίζεται ο αριθμός 1.

Ασκήσεις - Δραστηριότητες

Α' ΟΜΑΔΑ

1 Αποδείξτε ότι μεταξύ οποιωνδήποτε δύο πραγματικών αριθμών υπάρχει ένας άλλος πραγματικός αριθμός. Χρησιμοποιήστε αυτή τη διαπίστωση για να βρείτε έναν πραγματικό αριθμό μεταξύ του 0,3333 και του 0,3334.

2 Δεδομένου ότι οι πραγματικοί αριθμοί είναι πυκνοί, αναφέρετε πέντε διαφορετικούς πραγματικούς αριθμούς μεταξύ του $\sqrt{2}$ και του $\sqrt{3}$. Εξηγήστε πώς γνωρίζετε ότι αυτοί οι αριθμοί βρίσκονται μεταξύ του $\sqrt{2}$ και του $\sqrt{3}$.

κάθε υποενότητας θα βρείτε την παράγραφο «Ασκήσεις-Δραστηριότητες» η οποία περιέχει κάποιες βασικές ασκήσεις για εμπέδωση της ύλης, αλλά και άλλες δραστηριότητες, όπως, αναζητήσεις, γεωμετρικές ερμηνείες, γεωμετρικές λύσεις και, γενικά, ερωτήσεις γενικότερου μαθηματικού ενδιαφέροντος που ξεφεύγουν από το «κλασικό ασκησιογραφικό μοντέλο». Όλες οι ασκήσεις αλλά και οι δραστηριότητες ενθαρρύνουν την διαισθητική κατανόηση και απαιτούν δημιουργική και συνθετική σκέψη και είναι επιλογή το να μην υπάρχουν ερωτήσεις του τύπου «Σωστό» ή «Λάθος» που «παροτρύνουν» άμεσα ή έμμεσα τον μαθητή στο να πάρει μία απόφαση και να δώσει μία απάντηση.

Στο τέλος του βιβλίου θα βρείτε τις «ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ-ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ» καθώς και το «ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΟΡΩΝ» του βιβλίου.

Η αρίθμηση που υπάρχει στο βιβλίο αποτελείται πάντα από τρεις αριθμούς (Θεματικό Πεδίο-Ενότητα-Υποενότητα). Οι προτάσεις και τα παραδείγματα αριθμούνται με τέσσερις αριθμούς (τρεις για την υποενότητα και έναν ακόμα για την επιμέρους αρίθμηση). Δηλαδή, όταν αναφερόμαστε στο «Παράδειγμα 2.3.7.1» εννοούμε το Παράδειγμα 1 της Υποενότητας 7 της Ενότητας 3 του Θεματικού Πεδίου 2. Οι «Ασκήσεις-Δραστηριότητες» κάθε υποενότητας αριθμούνται πάντα με έναν αριθμό και οι Ομάδες Α και Β είναι αριθμημένες πάντοτε αρχίζοντας από το 1. Η Ομάδα Α περιέχει ασκήσεις ή δραστηριότητες που συνήθως είναι εφαρμογές της αντίστοιχης θεωρίας, ενώ η Ομάδα Β περιέχει ασκήσεις ή δραστηριότητες που δεν είναι απαραίτητα πιο δύσκολες από εκείνες της Α αλλά απαιτούν πιο σύνθετη και κάποιες φορές πιο ελεύθερη σκέψη.

Σε κάθε κεφάλαιο υπάρχουν Ψηφιακά Μαθησιακά Αντικείμενα, και ανάλογα με τη μορφή τους μπορείτε να τα χρησιμοποιήσετε για να κατανοήσετε κάτι καλύτερα, για να επεκτείνεται τις γνώσεις σας, να δείτε ξανά κάποιες αποδείξεις, για να παίξετε παιγνίδια γνώσεων κ.α.

Για να μελετήσετε με ευκολία το βιβλίο πρέπει να έχετε κάποιες απαραίτητες γνώσεις. Κάποιες από αυτές θα βρείτε στο κεφάλαιο «Εισαγωγή» του βιβλίου και κάποιες άλλες βρίσκονται διάσπαρτες μέσα στο βιβλίο (εκεί όπου είναι απαραίτητο να τις θυμηθούμε), ωστόσο ένα πλήρες βοήθημα αποτελεί το Συμπληρωματικό Υλικό (Σ.Υ.) στο οποίο θα βρείτε Συμπληρώσεις, Επαναλήψεις, Σχόλια, Παρατηρήσεις, Μεθοδολογικά λυμένα Παραδείγματα και Ασκήσεις, Ασκήσεις υψηλότερου επιπέδου για απαιτητικούς λύτες καθώς και τις αναλυτικές Απαντήσεις-Λύσεις των Ασκήσεων-Δραστηριοτήτων του βιβλίου.

Για παράδειγμα αν έχουμε έναν οποιοδήποτε ακέραιο, ας τον ονομάσουμε α, τότε ο επόμενός του είναι ο α + 1 και ο προηγούμενος του είναι ο α – 1. Ο μεθεπόμενος του είναι ο α + 2 και ο προ-προηγούμενός του ο α – 2 κ.ο.κ. Γνωρίζουμε επίσης ότι αν ο α είναι ένας περιττός ακέραιος, ο α + 1 είναι άρτιος. Το ίδιο και ο α – 1.

Με την ελπίδα ότι αυτό το βιβλίο θα σας εμπνεύσει και θα το αξιοποιήσετε σας ευχόμαστε
Καλή Σχολική Χρονιά

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΘΕΜΑΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ 1

ΑΡΙΘΜΟΙ

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ 1.1

Πραγματικοί αριθμοί

1.1.1 Οι πραγματικοί αριθμοί και οι ιδιότητές τους

Θα μάθουμε:

- να διακρίνουμε τους ρητούς από τους άρρητους αριθμούς μέσα από τις διάφορες αναπαραστάσεις τους.
- να ταξινομούμε τους αριθμούς στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, δηλαδή στους φυσικούς $\mathbb{N}$, τους ακέραιους $\mathbb{Z}$, τους ρητούς $\mathbb{Q}$ και τους άρρητους $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Έχουμε μάθει:

Τα βασικά σύνολα αριθμών με πρώτο το σύνολο των φυσικών αριθμών

$$\mathbb{N}=\{0, 1, 2, 3,...\}$$

Θεωρώντας γνωστό το σύνολο των **φυσικών** $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ κατασκευάζουμε το σύνολο των αντιθέτων τους $\{0, -1, -2, -3, ...\}$ (ο αντίθετος του 0 είναι ο εαυτός του) και στη συνέχεια παίρνουμε το σύνολο των **ακέραιων** ως το σύνολο που περιέχει τους φυσικούς και τους αντιθέτους τους, δηλαδή, το σύνολο

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

Οι Φυσικοί Αριθμοί

Οι Ακέραιοι Αριθμοί

Υποθέτουμε ότι ξέρουμε πώς να προσθέτουμε, να αφαιρούμε, να πολλαπλασιάζουμε και να διαιρούμε (χρειάζεται λίγη προσοχή η διαίρεση) ακέραιους αριθμούς και δεν χρειάζεται να εξηγήσουμε τίποτα για το πώς το κάνουμε και γιατί κάνει τόσο. Αν επιχειρήσουμε να κάνουμε στους ακέραιους τη διαίρεση 4 : 5 θα βρούμε τον αριθμό 4/5 σε κλασματική μορφή ή τον 0,8 σε δεκαδική μορφή. Σε κάθε περίπτωση, όχι ακέραιο. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι η διαίρεση μεταξύ των ακέραιων δεν δίνει πάντα ακέραιο. Επομένως, μας «βγάζει έξω» από τους ακέραιους και μας δίνει νέους αριθμούς, τα κλάσματα. Αυτό έχει σαν συνέπεια την ανάγκη επέκτασης του συνόλου των ακέραιων σε ένα πιο μεγάλο σύνολο που εκτός από τους ακέραιους να συμπεριλαμβάνει και τα κλάσματα, δηλαδή, τους γνωστούς μας ρητούς αριθμούς. Υπενθυμίζουμε ότι:

Υπενθυμίζουμε ότι:

Ρητός είναι κάθε αριθμός που μπορεί να γραφεί σαν κλάσμα με αριθμητή οποιονδήποτε ακέραιο και παρονομαστή ένα φυσικό διάφορο από το μηδέν. Θα μπορούσαμε να πούμε «και παρονομαστή έναν **ακέραιο** διάφορο από το μηδέν» αλλά δεν χρειάζεται. Γιατί;

Τους ρητούς τους συμβολίζουμε με το $\mathbb{Q}$. Δηλαδή, είναι:

$$\mathbb{Q} = \{\alpha/\beta : \beta \neq 0, \alpha,\beta \in \mathbb{Z}\}.$$

Οι Δεκαδικοί Περιοδικοί Αριθμοί

Οι Πράξεις στους Ακέραιους

Παραμένοντας λίγο ακόμα στα κλάσματα παρατηρούμε ότι κάποια από αυτά παριστάνουν ένα δεκαδικό αριθμό που μπορούμε να βρούμε εύκολα διαιρώντας τον αριθμητή με τον παρονομαστή, για παράδειγμα, το *3/4* είναι ίσο με το *0,75*, ενώ κάποια άλλα παριστάνουν ένα «δεκαδικό» που «δεν μπορούμε να βρούμε ποτέ». Για παράδειγμα, το *2/3 = 0,666...* Ωστόσο τα δεκαδικά ψηφία δεν τελειώνουν ποτέ. Είναι άπειρα όπως λέμε ή άπειρου πλήθους. Επομένως, υπάρχουν και δεκαδικοί με άπειρο πλήθος στοιχείων που γράφονται σαν κλάσματα, που είναι ρητοί. Αυτό ίσως να μην το έχετε ξανακούσει ή να μην το θυμάστε, αλλά θα σας το δείξουμε αμέσως τώρα. Η παραπάνω συζήτηση μας δίνει το ερέθισμα αλλά και την ελευθερία να φανταζόμαστε και να κατασκευάζουμε δεκαδικούς με άπειρα δεκαδικά ψηφία ακολουθώντας διάφορες τακτικές. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε το δεκαδικό αριθμό *0,222...* . Οι τρεις τελείες στο τέλος δηλώνουν ότι το *2* επαναλαμβάνεται για πάντα. Και είναι πραγματικά αλήθεια αυτό. Είναι ένας γνωστός μας αριθμός γραμμένος με διαφορετικό τρόπο και το πιο εντυπωσιακό ένας ρητός αριθμός, όπως άλλωστε και *ο 0,666...* που συναντήσαμε παραπάνω, μόνο που ξέρουμε ότι αυτός είναι ο ρητός *2/3*. Μπορούμε να επιβεβαιώσουμε αυτό τον ισχυρισμό, ότι δηλαδή, ο αριθμός *0,222...* είναι ρητός, βρίσκοντας ποιο κλάσμα αντιπροσωπεύει με ένα πολύ απλό τρικ.

Παράδειγμα 1.1.1.1

Ο δεκαδικός 0,222... *είναι ρητός.*

Συμβολίζουμε τον 0,222... με x, οπότε ο αριθμός 10 φορές το x θα είναι ο $10x$ και προκύπτει από τον 0,222... με τη μετακίνηση της υποδιαστολής μία θέση δεξιά. Έχουμε, δηλαδή,

$$10x = 2{,}222\ldots \quad \text{και} \quad x = 0{,}222\ldots$$

Παρατηρούμε ότι οι δυο τελευταίοι αριθμοί έχουν το ίδιο δεκαδικό μέρος, άπειρα δεκαδικά ψηφία που προκύπτουν με επανάληψη του 2. Επομένως, οι αριθμοί $10x$ και x θα διαφέρουν μόνο κατά το ακέραιο μέρος τους, δηλαδή θα έχουμε

$$10x - x = 2 \quad \text{ή} \quad 9x = 2 \quad \text{ή} \quad x = \frac{2}{9}.$$

Άρα, $0{,}222\ldots = \frac{2}{9}$, δηλαδή, το 0,222... αντιπροσωπεύει το κλάσμα 2/9, που σημαίνει ότι είναι ρητός.

Έχοντας υπόψη τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι κάθε ρητός αριθμός μπορεί να γραφεί ως δεκαδικός ή περιοδικός δεκαδικός και, αντιστρόφως, κάθε δεκαδικός ή περιοδικός δεκαδικός μπορεί να πάρει κλασματική μορφή.

Μπορούμε να αποδείξουμε ότι ο $\sqrt{2}$ δεν είναι ρητός. Στην πραγματικότητα ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι ένας δεκαδικός με άπειρα δεκαδικά ψηφία, μη περιοδικός. Επομένως, σύμφωνα με τα παραπάνω ο αριθμός $\sqrt{2}$ δεν μπορεί να είναι ένας ρητός αριθμός (γιατί τότε θα γραφόταν σαν κλάσμα). Το ίδιο και οι $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ κ.λπ. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν αριθμοί, οι οποίοι δεν είναι ρητοί, οι οποίοι ονομάζονται **άρρητοι** (*α* στερητικό + *ρητοί*).

Ορισμός

Κάθε ρητός αριθμός έχει (ή μπορεί να πάρει) κλασματική μορφή, δηλαδή, τη μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου α, β ακέραιοι, με $\beta \neq 0$.

Έχουμε μία εικόνα για κάποιους άρρητους. Οι $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ και όλες οι ρίζες των αριθμών που δεν είναι τετράγωνα άλλων αριθμών είναι άρρητοι. Αυτό αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο που αποδεικνύεται ότι το $\sqrt{2}$ είναι άρρητος. Οι αριθμοί με άπειρα δεκαδικά ψηφία που δεν είναι περιοδικοί είναι άρρητοι. Το γνωστό μας $\pi = 3{,}14159...$ είναι άρρητος.

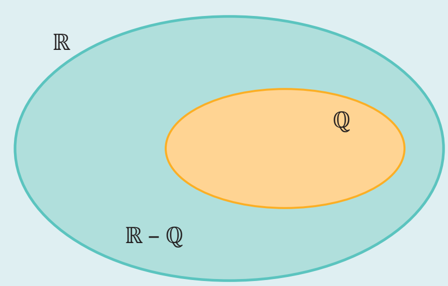
Κάθε άρρητος αριθμός σε δεκαδική μορφή έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία αλλά δεν είναι περιοδικός.

Οι Ρίζες των Αριθμών που δεν είναι Τέλεια Τετράγωνα

Σύνολο πραγματικών αριθμών

Ας θεωρήσουμε τώρα το σύνολο που περιέχει όλους τους ρητούς και όλους τους άρρητους και μόνο αυτούς. Στο εξής αυτό το σύνολο θα είναι το «βασικό» μας σύνολο στα μαθηματικά και ονομάζεται q των πραγματικών αριθμών. Ωστόσο, το σύνολο των πραγματικών δεν είναι το πιο μεγάλο σύνολο αριθμών που χρησιμοποιείται στα μαθηματικά, αλλά αυτό δεν θα μας απασχολήσει σε αυτή την τάξη.

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{R}$. Δεν είναι ανάγκη να επινοήσουμε ένα σύμβολο για τους άρρητους. Είναι οι πραγματικοί που δεν είναι ρητοί, οπότε ας τους συμβολίσουμε με $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ή $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.



Ορισμός

Το σύνολο που αποτελείται από τους ρητούς και τους άρρητους λέγεται σύνολο των πραγματικών αριθμών.

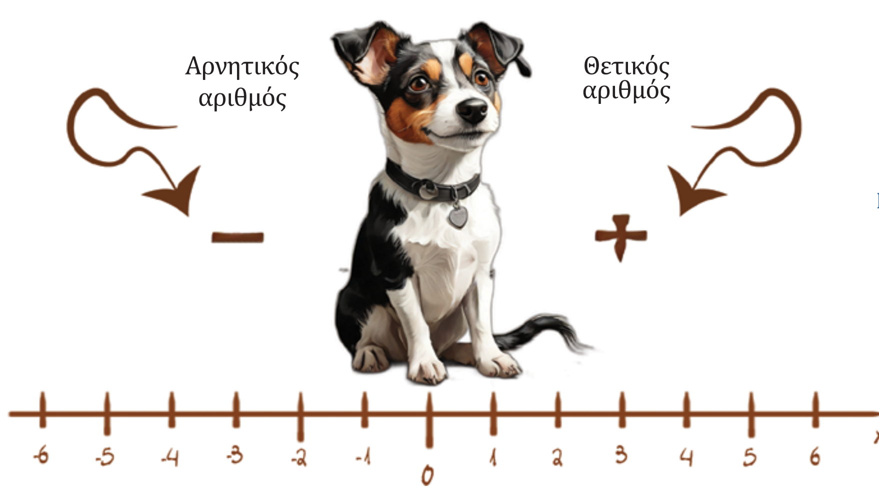
Παρατήρηση

Είναι πολύ εύκολο να αντιληφθεί κάποιος ότι οι φυσικοί αριθμοί είναι άπειροι, δηλαδή δεν μπορούμε να τους μετρήσουμε και αυτό συμβαίνει γιατί δεν τελειώνουν ποτέ. Μπορούμε να επιβεβαιώσουμε αυτό τον ισχυρισμό με την απλή παρατήρηση (αλλά η απόδειξη αυτού δεν είναι προφανής, βλ. Στοιχεία Ευκλείδη) ότι αν φανταστούμε έναν οποιοδήποτε και οσοδήποτε μεγάλο φυσικό αριθμό, προσθέτοντας το 1 βρίσκουμε ένα μεγαλύτερο και προφανώς αυτή η διαδικασία μπορεί να επαναλαμβάνεται. Το ίδιο συμβαίνει και με τους ακέραιους καθώς και με τους ρητούς και τους άρρητους. Επομένως, οι πραγματικοί αριθμοί είναι άπειροι.

Έξυπνοι φίλοι

Η ευθεία των πραγματικών αριθμών

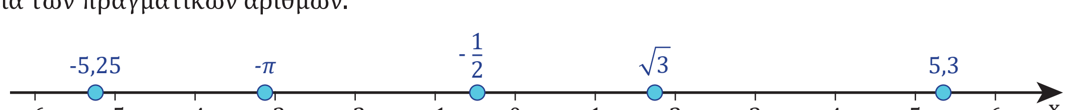
Στο Γυμνάσιο είχαμε ένα τρόπο να τοποθετούμε τους αριθμούς κατά μήκος μιας ευθείας. Την **ευθεία των πραγματικών αριθμών**, όπως τη λέμε. Τοποθετούμε σε ένα σημείο το 0, ορίζουμε ένα μήκος ίσο με 1 και στη συνέχεια τοποθετούμε σε ίσες αποστάσεις το 2, το 3 κ.λπ. Το ίδιο και προς τα αριστερά, με τον ίδιο τρόπο τοποθετούμε το –1, το –2 κ.λπ. Η τοποθέτηση των ρητών γίνεται με τον ίδιο τρόπο. Το 1/2 θα το τοποθετήσουμε ανάμεσα στο 0 και το 1 ακριβώς στη μέση, το 3/4 ανάμεσα στο 1/2 και το 1, ακριβώς στη μέση, το –4/3 ανάμεσα στο –2 και το –1 στο 1/3 της απόστασης από το –1 κ.ο.κ.



Τοποθέτηση του $\sqrt{2}$ στην Πραγματική Ευθεία

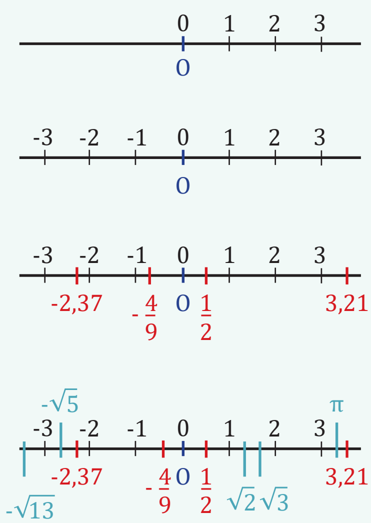
Παράδειγμα 1.1.1.2

Στο πιο κάτω σχήμα βλέπουμε την αναπαράσταση των αριθμών $-5{,}25$, $-\pi$, $-\frac{1}{2}$, $\sqrt{3}$ και 5,3 πάνω στην ευθεία των πραγματικών αριθμών.



Ας ανακεφαλαιώσουμε γεωμετρικά τα σύνολα των αριθμών για τα οποία συζητήσαμε παραπάνω:

Πραγματικοί αριθμοί



Ας θυμηθούμε όλα τα σύνολα αριθμών που έχουμε συναντήσει.

- Οι φυσικοί αριθμοί: 0, 1, 2, 3, ... παριστάνονται στη διπλανή ευθεία με σημεία. Στην αρχή O έχουμε τοποθετήσει το μηδέν (0).
- Οι ακέραιοι αριθμοί: ... −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, ... παριστάνονται πάλι με σημεία. Τοποθετούμε στα δεξιά της αρχής O τους θετικούς ακέραιους αριθμούς και αριστερά τους αρνητικούς.
- Το σύνολο των ρητών αριθμών, δηλαδή των αριθμών που μπορούν να γραφούν στην μορφή $\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ ακέραιος και ν φυσικός αριθμός διάφορος από το μηδέν. Οι ρητοί αριθμοί έχουν γνωστή δεκαδική μορφή και γεμίζουν την ευθεία, αλλά όχι πλήρως.
- Οι πραγματικοί αριθμοί αποτελούνται όχι μόνο από τους ρητούς αλλά και όλους τους άρρητους.

Οι πραγματικοί αριθμοί καλύπτουν πλήρως την ευθεία, δηλαδή κάθε σημείο της ευθείας αντιστοιχεί σε έναν πραγματικό αριθμό και αντίστροφα κάθε πραγματικός αριθμός αντιστοιχεί σε μοναδικό σημείο της ευθείας. Για το λόγο αυτό, την ευθεία αυτή την ονομάζουμε **ευθεία** ή **άξονα των πραγματικών αριθμών**.

Η Ευθεία των Πραγματικών Αριθμών

Αναφορικά με τους πραγματικούς αριθμούς έχει υποτεθεί ότι οι πράξεις καθώς και οι βασικές τους ιδιότητες είναι γνωστά. Πλούσιο υλικό θα βρείτε στο Συμπληρωματικό Υλικό.

Οι Ιδιότητες των Τεσσάρων Πράξεων

Μερικές ακόμα Βασικές Ιδιότητες των Πραγματικών Αριθμών

Ασκήσεις - Δραστηριότητες

Α' ΟΜΑΔΑ

1 Επιβεβαιώστε με όποιο τρόπο θέλετε ότι οι παρακάτω αριθμοί είναι ρητοί: 0,5, −0,666..., 3,2, $5,\overline{23}$.

2 Με δεδομένο ότι οι φυσικοί είναι άπειροι δείξτε ότι και οι ακέραιοι είναι άπειροι.

3 Θεωρείστε όλα τα κλάσματα της μορφής $1/\nu$, $\nu = 1,2\ldots$. Αφού εξηγήσετε γιατί το σύνολο αυτών των κλασμάτων είναι άπειρο, δείξτε ότι το σύνολο των θετικών ρητών που είναι μικρότεροι από το 1 είναι άπειρο.

Β' ΟΜΑΔΑ

1 Θεωρείστε ότι σας διατίθεται ένας υπερυπολογιστής στην οθόνη του οποίου φαίνεται ο άρρητος αριθμός $\sqrt{2}$ = 1,4142135624... και υποθέστε ότι με κάθε πάτημα του πλήκτρου enter σας δίνει ακόμα ένα δεκαδικό ψηφίο. Εξηγήστε γιατί υπάρχουν άπειροι ρητοί που είναι μεγαλύτεροι από το 1,4142135624... και μικρότεροι από το $\sqrt{2}$.

2 Προσδιορίστε γεωμετρικά τις τετραγωνικές ρίζες των αριθμών 2, 3, 5 και 7. Αν εργαστείτε σε όλες τις περιπτώσεις στο ίδιο σχήμα θα προκύψει μία πολύ όμορφη κατασκευή καθώς επίσης και μία μέθοδος γεωμετρικού υπολογισμού κάθε άρρητου της μορφής $\sqrt{\nu}$, όπου το ν είναι ένας θετικός ακέραιος ο οποίος δεν είναι τέλειο τετράγωνο (δηλαδή, δεν υπάρχει $x > 0$, τέτοιο ώστε $\nu = x^2$).

1.1.2 Πυκνότητα και διαδοχικότητα πραγματικών αριθμών

Έξυπνοι φίλοι

Θα μάθουμε:

- την απάντηση στο ερώτημα, σε ποια βασικά σύνολα των πραγματικών αριθμών μπορούμε να έχουμε διαδοχικότητα. Δηλαδή, αν ξέρουμε κάποιο αριθμό, να μπορούμε να βρούμε τον επόμενό του.
- την απάντηση στο ερώτημα της πυκνότητας. Δηλαδή, πόσο «κοντά» βρίσκονται δύο αριθμοί στην πραγματική ευθεία.

Εύρεση μέσου ευθύγραμμου τμήματος

Διαδοχικότητα ακέραιων αριθμών

Γνωρίζουμε ότι για να κατασκευάσουμε τους φυσικούς αριθμούς μπορούμε να ξεκινήσουμε από το 1 (ή και από το 0) και προσθέτοντας το 1 βρίσκουμε τον επόμενό του, δηλαδή το 2, και επαναλαμβάνοντας αυτή τη διαδικασία μπορούμε να κατασκευάσουμε κάθε φυσικό αριθμό. Για παράδειγμα, ο επόμενος του 3 είναι ο 4 και ο προηγούμενος του 2 είναι ο 1. Ο επόμενος του −1 είναι το 0 και ο προηγούμενος του το −2.

Το ίδιο συμβαίνει και για τους αρνητικούς ακέραιους. Ξεκινώντας από το 0 και αφαιρώντας το 1 βρίσκουμε τον −1 κ.ο.κ. Το γεγονός αυτό μας οδηγεί στη διαπίστωση ότι υπάρχει προηγούμενος και επόμενος για κάθε ακέραιο αριθμό.

Η διαδοχικότητα των ακέραιων είναι μία πολύ χρήσιμη ιδιότητα.

> Για κάθε ακέραιο αριθμό υπάρχει ο προηγούμενος ακέραιος αριθμός και ο επόμενος από αυτόν ακέραιος αριθμός.

Για παράδειγμα αν έχουμε έναν οποιοδήποτε ακέραιο, ας τον ονομάσουμε α, τότε ο επόμενός του είναι ο α + 1 και ο προηγούμενος του είναι ο α − 1. Ο μεθεπόμενος του είναι ο α + 2 και ο προ-προηγούμενός του ο α − 2 κ.ο.κ. Γνωρίζουμε επίσης ότι αν ο α είναι ένας περιττός ακέραιος, ο α + 1 είναι άρτιος. Το ίδιο και ο α − 1.

Περιττοί και Άρτιοι Φυσικοί Αριθμοί

Ορισμός

1. Ένας ακέραιος ονομάζεται **άρτιος** αν διαιρείται με το 2.
2. Ένας ακέραιος ονομάζεται **περιττός** αν δεν διαιρείται με το 2.

Για τον τρόπο συμβολικής περιγραφής των άρτιων και των περιττών βλ. διαδικτυακό υλικό

Επομένως:

1. *Κάθε άρτιος μπορεί να γραφεί στη μορφή 2κ, όπου κ ακέραιος.*
2. *Κάθε περιττός μπορεί να γραφεί στη μορφή 2κ + 1 ή και στην 2κ − 1, όπου κ ακέραιος.*

Το παράδειγμα που ακολουθεί αποτελεί μία εφαρμογή των παραπάνω συμβολισμών για τους άρτιους και τους περιττούς.

Παράδειγμα 1.1.2.1 Το άθροισμα δύο περιττών είναι άρτιος.

Έστω α και β δύο περιττοί ακέραιοι. Τότε, $\alpha = 2\kappa + 1$ και $\beta = 2\lambda + 1$, με κ, λ ακέραιους.

Άρα, $\alpha + \beta = (2\kappa + 1) + (2\lambda + 1) = 2\kappa + 1 + 2\lambda + 1 = 2\kappa + 2\lambda + 2 = 2(\kappa + \lambda + 1) = 2\mu$,

όπου το $\mu = \kappa + \lambda + 1$ είναι ένας ακέραιος ως άθροισμα ακέραιων. Επομένως, ο $\alpha + \beta$ είναι άρτιος ως πολλαπλάσιο του 2.

Ας δούμε άλλο ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 1.1.2.2 Το γινόμενο τριών διαδοχικών ακέραιων διαιρείται με το 6.

Έστω α ένας ακέραιος. Τότε, ο επόμενός του είναι ο $\alpha + 1$ και ο μεθεπόμενός του ο $\alpha + 2$. Επομένως, τρεις διαδοχικοί ακέραιοι έχουν τη γενική μορφή

$$\alpha, \alpha + 1, \alpha + 2$$

Τώρα, αν ο α είναι διαιρετός με το 3, θα έχει τη μορφή $\alpha = 3\kappa$, με κ ακέραιο, οπότε, $\alpha + 1 = 3\kappa + 1$ και $\alpha + 2 = 3\kappa + 2$. Άρα,

$$\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) = 3\kappa(3\kappa + 1)(3\kappa + 2) = 3\kappa 2\mu = 6\kappa\mu,$$

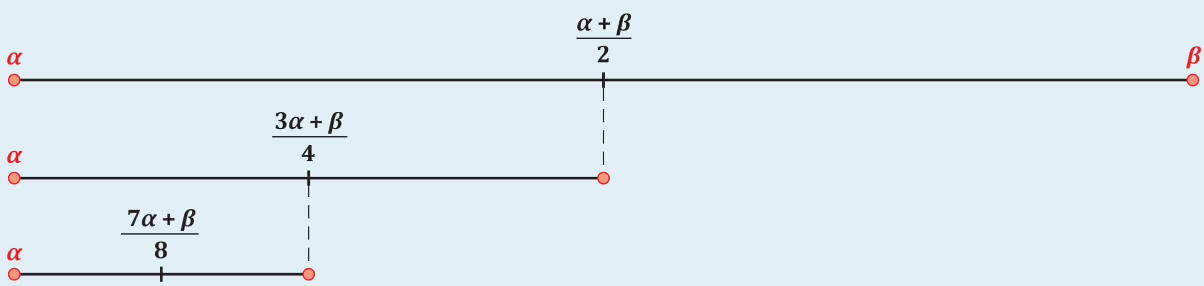
επειδή ο $(3\kappa + 1)(3\kappa + 2) = 2\mu$, δηλαδή, άρτιος ως γινόμενο δύο διαδοχικών ακέραιων (σκεφτείτε το λίγο.) Αν ο α δεν είναι πολλαπλάσιο του 3, τότε η διαίρεση του α με το 3 θα αφήνει υπόλοιπο και από τη δοκιμή της παίρνουμε ότι $\alpha = 3\kappa + 1$ ή $\alpha = 3\kappa + 2$ (γιατί;). Θέτοντας στο α τη μία ή την άλλη τιμή και παίρνοντας το γινόμενο $\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)$ με τα ίδια επιχειρήματα όπως και στην πρώτη περίπτωση βρίσκουμε ότι σε κάθε περίπτωση το γινόμενο τριών ακέραιων διαιρείται με το 6.

Η **διαδοχικότητα** των φυσικών και κατ' επέκταση και των ακέραιων είναι πολύ σημαντική ιδιότητα των συνόλων αυτών και τα χαρακτηρίζει με την έννοια ότι δεν μπορεί να επεκταθεί ούτε στους ρητούς ούτε στους άρρητους.

Πυκνότητα πραγματικών αριθμών

Πυκνότητα Πραγματικών Αριθμών

Αν θεωρήσουμε δύο πραγματικούς αριθμούς α και β με τον α να είναι μικρότερος από τον β, τότε σύμφωνα με τα πιο πάνω αυτοί θα αντιπροσωπεύουν δύο διαφορετικά σημεία στην πραγματική ευθεία, με τον α να βρίσκεται αριστερά από τον β. Γνωρίζουμε επίσης ότι ο αριθμός $\frac{\alpha+\beta}{2}$ (ο γνωστός μας μέσος όρος των α και β) είναι μεγαλύτερος από τον α και μικρότερος από τον β, που σημαίνει ότι βρίσκεται ανάμεσα στους α και β (στην πραγματικότητα ακριβώς στο μέσο του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα τους α και β). Αν επαναλάβουμε αυτή τη διαδικασία για το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα τα σημεία α και $\frac{\alpha+\beta}{2}$ (ή $\frac{\alpha+\beta}{2}$ και β) βρίσκουμε ένα πραγματικό ανάμεσα τους κ.ο.κ.



Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν άπειροι αριθμοί αναμεσά τους. Η ιδιότητα αυτή, δηλαδή, ότι το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι πυκνό, (μάλιστα «πολύ» πυκνό) ονομάζεται **πυκνότητα των πραγματικών αριθμών** και είναι από τις πιο σημαντικές τους ιδιότητες. Μπορούμε, επίσης, να δείξουμε, ότι ανάμεσα σε δύο ρητούς υπάρχουν άπειροι ρητοί και άπειροι άρρητοι. Το ίδιο ισχύει και για δύο άρρητους ή ένα ρητό και έναν άρρητο.

Δεν έχει νόημα η συζήτηση για πυκνότητα στους ακέραιους, αφού *η απόσταση μεταξύ δυο οποιονδήποτε διαδοχικών ακέραιων είναι ίση με* 1.

Παρατήρηση

Η διαισθητική άποψη μιας ευθείας είναι ότι έχουμε να κάνουμε με μία συνεχόμενη γραμμή. Η πραγματική ευθεία επομένως (ως ευθεία) δεν διακόπτεται και πουθενά, δεν έχει κενά. Δηλαδή, δεν υπάρχει σημείο της που να μην αντιστοιχεί σε κάποιο πραγματικό αριθμό, ούτε πραγματικός αριθμός που να μην έχει θέση στην πραγματική ευθεία. Η ιδιότητα αυτή των πραγματικών αριθμών ονομάζεται **πληρότητα**. Η πληρότητα, δηλαδή, είναι η ιδιότητα των πραγματικών αριθμών που, διαισθητικά, υποδηλώνει ότι στην πραγματική ευθεία δεν υπάρχουν «κενά» ή «σημεία που λείπουν». Αυτό δεν έρχεται σε αντίθεση με τους ρητούς αριθμούς, των οποίων η αντίστοιχη ευθεία έχει ένα «κενό» σε κάθε άρρητη τιμή.

Προφανώς, η συζήτηση αυτή, σχετικά με την πληρότητα, γίνεται σε ένα εντελώς διαισθητικό επίπεδο. Ωστόσο, σκοπός της είναι η διαισθητική κατανόηση του τρόπου με τον οποίο είναι συγκροτημένο το σύνολο των πραγματικών αριθμών, καθώς και ο τρόπος με τον οποίο είναι τοποθετημένοι στην πραγματική ευθεία.

Ασκήσεις - Δραστηριότητες

Α' ΟΜΑΔΑ

1 Αποδείξτε ότι μεταξύ οποιωνδήποτε δύο πραγματικών αριθμών υπάρχει ένας άλλος πραγματικός αριθμός. Χρησιμοποιήστε αυτή τη διαπίστωση για να βρείτε έναν πραγματικό αριθμό μεταξύ του 0,3333 και του 0,3334.

2 Δεδομένου ότι οι πραγματικοί αριθμοί είναι πυκνοί, αναφέρετε πέντε διαφορετικούς πραγματικούς αριθμούς μεταξύ του $\sqrt{2}$ και του $\sqrt{3}$. Εξηγήστε πώς γνωρίζετε ότι αυτοί οι αριθμοί βρίσκονται μεταξύ του $\sqrt{2}$ και του $\sqrt{3}$.

Β' ΟΜΑΔΑ

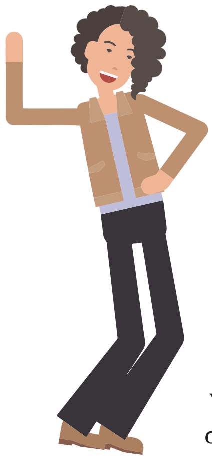
1 Δείξτε ότι και οι ρητοί και οι άρρητοι αριθμοί είναι πυκνοί στους πραγματικούς αριθμούς. Για αυτό το σκοπό αρκεί να βρείτε ένα ρητό μεταξύ δύο τυχαίων άρρητων. Για παράδειγμα, βρείτε έναν ρητό και έναν άρρητο αριθμό μεταξύ του 1,414 και του 1,415 και στη συνέχεια παρουσιάστε σε βήματα μία διαδικασία που να αποδεικνύει αυτό τον ισχυρισμό για δύο τυχόντες ρητούς ή άρρητους αριθμούς.

2 Βρείτε δύο ρητούς αριθμούς μεταξύ των αριθμών $\pi - 0{,}1$ και π. Εξηγήστε πώς επιλέξατε τους συγκεκριμένους ρητούς αριθμούς.

3 Αν a και b είναι πραγματικοί αριθμοί με $a<b$, εξηγήστε πώς μπορείτε να βρείτε έναν πραγματικό αριθμό c τέτοιο ώστε $a < c < b$. Στη συνέχεια, εφαρμόστε αυτή τη μέθοδο για να βρείτε έναν πραγματικό αριθμό μεταξύ των αριθμών 0,9999 και 1.

1.1.3 Διάταξη πραγματικών αριθμών

Έξυπνοι φίλοι



Θα μάθουμε:

- να συμβολίζουμε με διαστήματα τα υποσύνολα των πραγματικών αριθμών που προσδιορίζονται από ανισοτικές σχέσεις.

Έχουμε μάθει:

να τοποθετούμε τους πραγματικούς αριθμούς σε μία ευθεία.

Οι έννοιες «μεγαλύτερος από» και «μικρότερος από» είναι γνωστές τόσο στην καθημερινή ζωή όσο και στα μαθηματικά. Ειδικά, στα μαθηματικά είναι πολύ σημαντικές έννοιες γιατί περιγράφουν με απόλυτο τρόπο τη σύγκριση δύο ποσοτήτων γενικά, ωστόσο θα τις ορίσουμε συγκρίνοντας δύο αριθμούς.

Σχετικά με τους πραγματικούς αριθμούς έχουμε μάθει ότι είναι τοποθετημένοι στην πραγματική ευθεία με τέτοιο τρόπο ώστε σε κάθε σημείο της να βρίσκεται ένας αριθμός και μάλιστα καθώς κινούμαστε από τα αριστερά προς τα δεξιά οι αριθμοί να αυξάνουν.

Αν επιλέξουμε δύο σημεία α και β πάνω στην πραγματική ευθεία, τότε ή το α θα είναι αριστερά του β ή το α θα είναι δεξιά του β, ή το α θα συμπέσει με το β. Στην πρώτη περίπτωση, λέμε ότι ο αριθμός α είναι μικρότερος από τον β (συμβολικά, $\alpha < \beta$), στη δεύτερη ότι ο α είναι μεγαλύτερος από τον β (συμβολικά, $\alpha > \beta$) και στην τρίτη ότι οι αριθμοί α και β είναι ίσοι (συμβολικά, $\alpha = \beta$).

Δηλαδή, αν επιλέξουμε δύο αριθμούς α και β, τότε θα ισχύει μία από τις παρακάτω τρεις σχέσεις:

$$\alpha < \beta \quad \text{ή} \quad \alpha > \beta \quad \text{ή} \quad \alpha = \beta.$$

Η ιδιότητα αυτή του συνόλου των πραγματικών αριθμών λέγεται **διάταξη** και επειδή όλοι οι πραγματικοί αριθμοί είναι διατεταγμένοι, το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι **ολικά διατεταγμένο**.

Από τα παραπάνω προκύπτουν τα εξής:

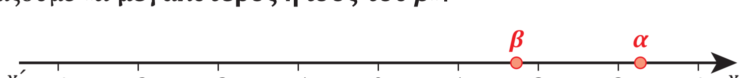
- Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από το μηδέν.
- Κάθε αρνητικός αριθμός είναι μικρότερος από το μηδέν.

Οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί συμβολίζονται με το σύμβολο $\mathbb{R}^+$ και οι αρνητικοί με το $\mathbb{R}^-$.

Η ανισότητα $\alpha > \beta$ εκφράζει αλγεβρικά τη διάταξη των αριθμών α και β. Από την πλευρά της γεωμετρίας η διάταξη αυτή αναπαρίσταται στο σχήμα 1.1.3.1

Αν για τους αριθμούς α και β ισχύει $\alpha > \beta$ ή $\alpha = \beta$, τότε γράφουμε $\alpha \geq \beta$ και διαβάζουμε «***α* μεγαλύτερος ή ίσος του *β***».

Καθεμία από τις σχέσεις $\alpha<\beta$ και $\alpha > \beta$ λέγεται **ανισοτική σχέση**. Ανισοτικές λέγονται επίσης και οι σχέσεις $\alpha \leq \beta$ και $\alpha \geq \beta$, οι οποίες ωστόσο λέγονται και **ανισο-ισότητες**.



Σχήμα 1.1.3.1

Διαστήματα στην Πραγματική Ευθεία

Με τη βοήθεια των ανισοτικών σχέσεων μπορούμε να ορίσουμε διαστήματα πάνω στην ευθεία των πραγματικών αριθμών.

Ορισμός

Έστω οι πραγματικοί αριθμοί α και β με $\alpha < \beta$. Με άκρα τα σημεία α και β ορίζονται τα ακόλουθα διαστήματα:

- Το σύνολο των πραγματικών αριθμών x με $\alpha \le x \le \beta$, $\alpha < \beta$ λέγεται **κλειστό διάστημα** από α μέχρι β και συμβολίζεται με $[\alpha, \beta]$.
- Το σύνολο των πραγματικών αριθμών x με $\alpha < x < \beta$, $\alpha < \beta$ λέγεται **ανοικτό διάστημα** από α μέχρι β και συμβολίζεται με (α, β).

Οι αριθμοί α και β λέγονται **άκρα** των διαστημάτων αυτών και κάθε αριθμός μεταξύ των α και β λέγεται **εσωτερικό σημείο** αυτών.

Η διαφορά δηλαδή μεταξύ ενός κλειστού και του αντίστοιχου ανοικτού διαστήματος είναι ότι το πρώτο περιέχει τα άκρα του, ενώ το δεύτερο δεν τα περιέχει.

Ορισμός

Άλλες μορφές διαστημάτων είναι:

- Το **ανοικτό δεξιά** διάστημα $[\alpha, \beta)$ που αποτελείται από τους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $\alpha \le x < \beta$ και
- Το **ανοικτό αριστερά** διάστημα $(\alpha, \beta]$ που αποτελείται από τους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $\alpha < x \le \beta$.

Όταν ένας αριθμός x βρίσκεται μέσα σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$, λέμε ότι το x είναι στοιχείο του διαστήματος ή ότι ανήκει (ή περιέχεται) στο διάστημα και το συμβολίζουμε $x \in [\alpha, \beta]$. Το $\in$ ονομάζεται **σύμβολο του ανήκει.**

Αντίστοιχα: Όταν ένας αριθμός x δεν βρίσκεται μέσα σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$, λέμε ότι το x δεν είναι στοιχείο του διαστήματος ή ότι δεν ανήκει (ή δεν περιέχεται) στο διάστημα και το συμβολίζουμε $x \notin [\alpha, \beta]$. Το $\notin$ ονομάζεται **σύμβολο του δεν ανήκει.**

Για παράδειγμα, έχουμε

$$2 \in (1, 3),\ 1 \in [1, 3),\ 3 \in (1, 3],\ 2 \in (1, 3),\ 0 \notin (1, 3),\ 1 \notin (1, 3),\ 3 \notin (1, 3).$$

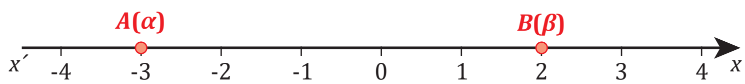
ΔΙΑΣΤΗΜΑ	ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ	ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ
x' α β x	$\alpha \le x \le \beta$	$[\alpha, \beta]$
x' α β x	$\alpha \le x < \beta$	$[\alpha, \beta)$
x' α β x	$\alpha < x \le \beta$	$(\alpha, \beta]$
x' α β x	$\alpha < x < \beta$	(α, β)
x' α x	$x \ge \alpha$	$[\alpha, +\infty)$
x' α x	$x > \alpha$	$(\alpha, +\infty)$
x' α x	$x \le \alpha$	$(-\infty, \alpha]$
x' α x	$x < \alpha$	$(-\infty, \alpha)$

Σχήμα 1.1.3.2

Απόσταση δύο αριθμών (Μήκος διαστήματος)

Αν πάρουμε τους αριθμούς -3 και 2 πάνω στην ευθεία των πραγματικών αριθμών, εύκολα βλέπουμε ότι η απόστασή τους είναι 5 (μονάδες).

Ας θεωρήσουμε τώρα τους πραγματικούς αριθμούς α και β, με τον α να βρίσκεται αριστερά από τον β και οι οποίοι παριστάνονται πάνω στον άξονα των αριθμών με τα σημεία A και B αντιστοίχως.



Σχήμα 1.1.3.3

Το μήκος του τμήματος AB λέγεται **απόσταση** των αριθμών α και β, συμβολίζεται με $d(\alpha, \beta)$ και είναι ίση με τη διαφορά $\beta - \alpha$, δηλαδή, είναι

$$d(\alpha, \beta) = \beta - \alpha.$$

Η απόσταση των αριθμών α και β λέγεται ***μήκος*** του διαστήματος $[\alpha, \beta]$ και ισχύει

$$d(\alpha, \beta) = d(\beta, \alpha).$$

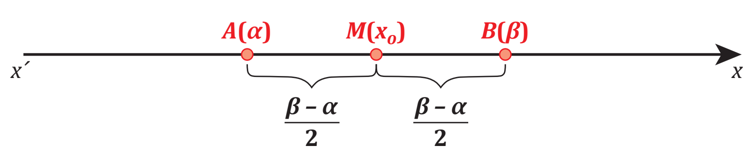
Αν $\alpha = \beta$, τότε $d(\alpha, \beta) = d(\alpha, \alpha) = \alpha - \alpha = 0$.

Κέντρο διαστήματος

Ας θεωρήσουμε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Ονομάζουμε A και B τα σημεία που παριστάνουν στον άξονα τα άκρα του α και β αντιστοίχως και $M(x_0)$ το μέσον του τμήματος AB. Τότε, οι αποστάσεις των σημείων A και M και των σημείων M και B είναι ίσες. Επομένως, έχουμε

$$d(\alpha, x_0) = d(x_0, \beta) \Leftrightarrow x_0 - \alpha = \beta - x_0 \qquad (\text{γιατί } \alpha < x_0 < \beta)$$
$$\Leftrightarrow 2x_0 = \alpha + \beta$$
$$\Leftrightarrow x_0 = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Διαίρεση Ευθύγραμμου Τμήματος



Σχήμα 1.1.3.4

Ο αριθμός $x_0 = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$ που αντιστοιχεί στο μέσον M του τμήματος AB λέγεται **κέντρο του διαστήματος** $[\alpha, \beta]$, και ο αριθμός $\rho = \dfrac{\beta - \alpha}{2}$ (δηλαδή, το μισό της απόστασης των α και β) λέγεται **ακτίνα** του $[\alpha, \beta]$.

Ως μήκος, κέντρο και ακτίνα των διαστημάτων (α, β), $(\alpha, \beta]$ και $[\alpha, \beta)$ ορίζουμε το μήκος, το κέντρο και την ακτίνα του $[\alpha, \beta]$.

Τέλος, με μορφή διαστήματος, έχουμε και τα ακόλουθα υποσύνολα της ευθείας των πραγματικών αριθμών.

Ορισμός

- Το σύνολο των αριθμών x για τους οποίους ισχύει $\alpha \le x$ συμβολίζεται με $[\alpha, +\infty)$, ενώ
- Το σύνολο των αριθμών x για τους οποίους ισχύει $x \le \alpha$ συμβολίζεται με $(-\infty, \alpha]$.

Με ανάλογο τρόπο ορίζονται και τα διαστήματα $(\alpha, +\infty)$ και $(-\infty, \alpha)$.
Τα σύμβολα $+\infty$ και $-\infty$, που διαβάζονται «συν άπειρο» και «πλην άπειρο» αντιστοίχως, δεν παριστάνουν πραγματικούς αριθμούς.

Από τους δύο παραπάνω ορισμούς συμπεραίνουμε ότι:

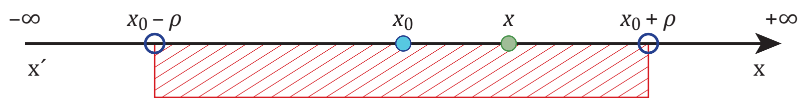
Ένα διάστημα της ευθείας των πραγματικών αριθμών είναι ή ένα ευθύγραμμο τμήμα ή μία ημιευθεία.

Άμεσες συνέπειες της έννοιας της απόστασης δύο πραγματικών αριθμών

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε να λύσουμε μία ανισότητα της μορφής $d(x, x_0) < \rho$, $\rho > 0$.

Η ανισότητα αυτή σημαίνει ότι το x είναι ένας αριθμός που απέχει από το x_0 απόσταση μικρότερη από το ρ και επειδή οι αριθμοί που απέχουν από το x_0 απόσταση ίση με ρ είναι οι $x_0 - \rho$ και $x_0 + \rho$, έπεται ότι τα x για τα οποία ισχύει η ανισότητα είναι όλοι οι αριθμοί x που βρίσκονται μεταξύ των $x_0 - \rho$ και $x_0 + \rho$, δηλαδή, $x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$. Άρα, $x_0 - \rho < x < x_0 + \rho$.

Συμπερασματικά, ισχύει η Πρόταση 1.1.3.1.



Σχήμα 1.1.3.5

Πρόταση 1.1.3.1

Για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\rho > 0$ ισχύει

$$\begin{aligned} d(x, x_0) < \rho &\Leftrightarrow x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho) \\ &\Leftrightarrow x_0 - \rho < x < x_0 + \rho. \end{aligned}$$

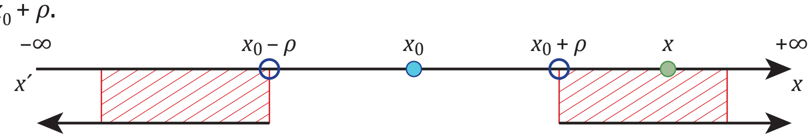
Εργαζόμενοι με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} d(x, x_0) \leq \rho &\Leftrightarrow x \in [x_0 - \rho, x_0 + \rho] \\ &\Leftrightarrow x_0 - \rho \leq x \leq x_0 + \rho. \end{aligned}$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε να λύσουμε μία ανισότητα της μορφής

$$d(x, x_0) > \rho, \ \rho > 0.$$

Σε αυτή την περίπτωση αναζητούμε τα x που απέχουν από το x_0 απόσταση μεγαλύτερη από το ρ και επειδή οι αριθμοί που απέχουν από το x_0 απόσταση ίση με ρ, είναι οι $x_0 - \rho$ και $x_0 + \rho$, έπεται ότι τα x για τα οποία ισχύει η ανισότητα είναι όλοι οι αριθμοί x που βρίσκονται εκτός του διαστήματος $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$, δηλαδή, $x \notin (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$. Άρα, $x < x_0 - \rho$ ή $x > x_0 + \rho$.



Σχήμα 1.1.3.6

Πρόταση 1.1.3.2

Για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\rho > 0$ ισχύει

$$\begin{aligned} d(x, x_0) > \rho &\Leftrightarrow x \in (-\infty, x_0 - \rho) \quad \text{ή} \quad x \in (x_0 + \rho, +\infty) \\ &\Leftrightarrow x < x_0 - \rho \quad \text{ή} \quad x > x_0 + \rho. \end{aligned}$$

Εργαζόμενοι με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} d(x, x_0) \geq \rho &\Leftrightarrow x \in (-\infty, x_0 - \rho] \quad \text{ή} \quad x \in [x_0 + \rho, +\infty) \\ &\Leftrightarrow x \leq x_0 - \rho \quad \text{ή} \quad x \geq x_0 + \rho. \end{aligned}$$

Στην ειδική περίπτωση που είναι $x_0=0$, έχουμε τις ισοδυναμίες

- $d(x, 0) < \rho \Leftrightarrow -\rho < x < \rho$
- $d(x, 0) > \rho \Leftrightarrow x < -\rho \quad \text{ή} \quad x > \rho$.

Στο παράδειγμα που αμέσως ακολουθεί αναδεικνύεται η χρησιμότητα της έννοιας της απόστασης στην επίλυση στοιχειωδών εξισώσεων και ανισώσεων που περιέχουν αποστάσεις και απόλυτες τιμές. Επιπλέον δίνεται, όπως θα δούμε στη συνέχεια, μία διαισθητική εικόνα του συνόλου των λύσεων.

Παράδειγμα 1.1.3.1

Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει

(α) $d(x, 0) < 5$ (β) $d(x, 0) > 3$ (γ) $d(x, 2) < 3$ (δ) $d(x, -3) \geq 2$

Λύση

(α) Από την Πρόταση 1.1.3.1 έχουμε

$$d(x, 0) < 5 \Leftrightarrow -5 < x < 5.$$

(β) Από την Πρόταση 1.1.3.2 έχουμε

$$d(x, 0) > 3 \Leftrightarrow x < -3 \quad \text{ή} \quad x > 3.$$

(γ) Από την Πρόταση 1.1.3.1 έχουμε

$$\begin{aligned} d(x, 2) < 3 &\Leftrightarrow -3 < x - 2 < 3 \\ &\Leftrightarrow -3 + 2 < x - 2 + 2 < 3 + 2 \\ &\Leftrightarrow -1 < x < 5. \end{aligned}$$

(δ) Από την Πρόταση 1.1.3.2 έχουμε

$$\begin{aligned} d(x, -3) \geq 2 &\Leftrightarrow x + 3 \leq -2 \quad \text{ή} \quad x + 3 \geq 2 \\ &\Leftrightarrow x + 3 - 3 \leq -2 - 3 \quad \text{ή} \quad x + 3 - 3 \geq 2 - 3 \\ &\Leftrightarrow x \leq -5 \quad \text{ή} \quad x \geq -1. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 1.1.3.2

Ασκήσεις - Δραστηριότητες

Α' ΟΜΑΔΑ

1 Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει

(α) $d(x, 1) = 5$ (β) $d(x, 5) = d(x, -1)$ (γ) $d(x, -3) = d(7, x)$ (δ) $d(2x, 2) = d(5, x)$

2 Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει

(α) $d(x, -5) = \frac{1}{3} d(-5, 1)$ (β) $d(x, 2) = 3d(x, 6)$

(γ) $4d(x, 5) = 5d(x, -4)$ (δ) $2d(x, 1) = \frac{1}{2} d(x, 8)$

Σε κάθε περίπτωση κατασκευάστε την πραγματική ευθεία και προσπαθήστε να εντοπίσετε «χονδρικά» τη θέση του x.

Β' ΟΜΑΔΑ

1 Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει

(α) $2d(x, 0) < 1$ (β) $d(x, 0) > \frac{3}{5}$ (γ) $4d(x, 2) < 3$ (δ) $5d(x, -3) \geq 2$

2 Αφού βρείτε τη λύση της εξίσωσης $2d(x, -3) = 3d(x, 2)$, κατασκευάστε τη γεωμετρικά. Στη συνέχεια γενικεύστε τις ιδέες σας για να λύσετε την εξίσωση $\kappa d(x, \alpha) = \lambda d(x, \beta)$, όπου α, β, κ και λ είναι γνωστοί θετικοί αριθμοί. (Θεωρείστε τους αριθμούς α και β με $\alpha < \beta$ στην πραγματική ευθεία και στη συνέχεια χωρίστε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε $\kappa + \lambda$ διαστήματα με ίσα μήκη. Η συνέχεια είναι εύκολη.)

Σημείωση

Ο χωρισμός ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι μία πολύ ενδιαφέρουσα γεωμετρική κατασκευή.

3 Έστω οι θετικοί αριθμοί α και β με $\alpha < \beta$. Να τοποθετήσετε στην ευθεία των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς $1, \alpha/\beta$ και β/α με τρόπο ώστε να είναι εμφανές το ποιος είναι πιο κοντά σε ποιον. (Αρκεί να βρείτε ποιος από τους α/β και β/α βρίσκεται πιο κοντά στο 1.)

1.1.4 Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

Έξυπνοι φίλοι

Θα μάθουμε:

- να ορίζουμε αλγεβρικά την απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού και να τη συνδέουμε με την απόσταση του αριθμού από το μηδέν.
- να ερμηνεύουμε γεωμετρικά την απόλυτη τιμή της διαφοράς δύο πραγματικών αριθμών.

Έχουμε μάθει:

Ότι οι αποστάσεις όλων των αριθμών καθορίζονται με βάση την απόσταση του αριθμού 1 από το μηδέν και οι θέσεις τους, σχετικά με το μηδέν, προσδιορίζονται με τη χρήση του προσήμου του αριθμού.

Υπενθυμίζουμε ότι:

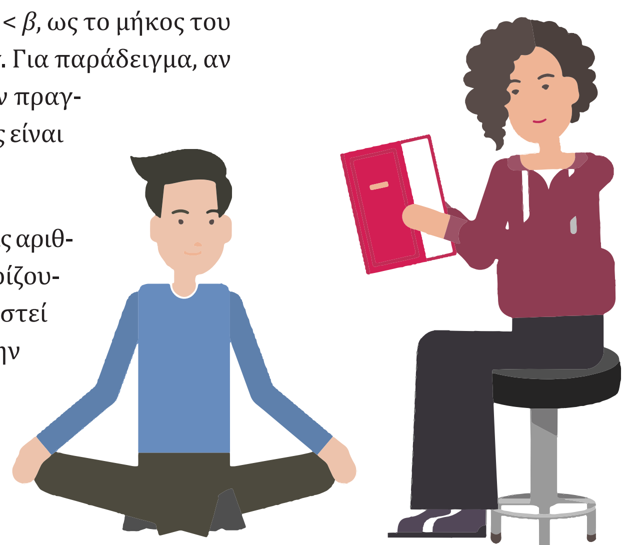
Οι **πραγματικοί αριθμοί** είναι ένα διατεταγμένο σύνολο, δηλαδή ένα σύνολο που τα στοιχεία του είναι τοποθετημένα στην ευθεία των πραγματικών αριθμών με μία σειρά και συγκεκριμένα όπως κινούμαστε από τα αριστερά προς τα δεξιά με αύξουσα σειρά καθώς και το ότι η θέση κάθε αριθμού καθορίζεται από την απόστασή του από το μηδέν και από το αν βρίσκεται προς τα αριστερά ή προς τα δεξιά του μηδενός.

Για παράδειγμα, ο αριθμός +3 (ή 3) (για τους θετικούς μπορούμε να παραλείπουμε το πρόσημο) βρίσκεται στα δεξιά του 0 και απέχει από αυτό 3 φορές την απόσταση του 1 από το 0. Ο αριθμός –2 βρίσκεται στα αριστερά του 0 και απέχει απόσταση 2 φορές την απόσταση του 1 από το 0. Ακόμα, οι αριθμοί 4 και –4 απέχουν ίσες αποστάσεις από το 0 και 4 φορές φορές την απόσταση του 1 από το 0. Ωστόσο ο –4 βρίσκεται στα αριστερά του 0 ενώ ο 4 στα δεξιά του.

Έχουμε ορίσει την απόσταση δύο αριθμών α και β, με $\alpha < \beta$, ως το μήκος του διαστήματος μεταξύ των α και β, δηλαδή, $d(\alpha, \beta) = \beta - \alpha$. Για παράδειγμα, αν πάρουμε τους αριθμούς –3 και 2 πάνω στην ευθεία των πραγματικών αριθμών, εύκολα βλέπουμε ότι η απόστασή τους είναι

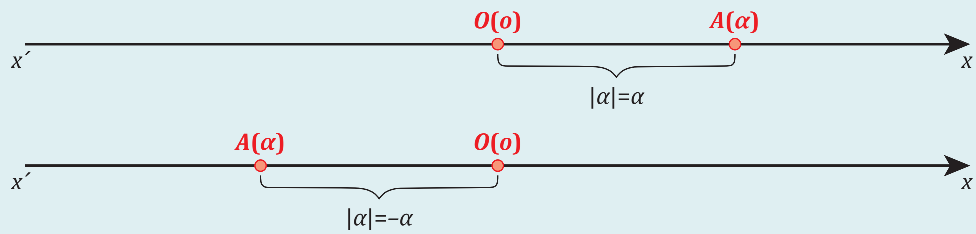
$$d(-3,2) = 2 - (-3) = 5 \text{ (μονάδες)}.$$

Είναι, ωστόσο, σημαντικό να γνωρίζουμε πόσο απέχει ένας αριθμός α, από το 0 ή από έναν άλλο αριθμό β, χωρίς να γνωρίζουμε ποιος είναι μεγαλύτερος. Για το σκοπό αυτό θα χρειαστεί να ορίσουμε την έννοια της **απόλυτης τιμής**. Σε αυτή την παράγραφο θα μελετήσουμε αυτή την έννοια καθώς και τον τρόπο με τον οποίο τη διαχειριζόμαστε, δηλαδή, τις ιδιότητές της.



Απόλυτη τιμή

Θεωρούμε έναν αριθμό α που, όπως γνωρίζουμε, παριστάνεται με το σημείο A πάνω σε έναν άξονα.



Σχήμα 1.1.4.1

Γνωρίζουμε, από το γυμνάσιο, ότι η απόσταση του σημείου A από την αρχή O, δηλαδή το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος OA, ονομάζεται **απόλυτη τιμή** του αριθμού α και συμβολίζεται με $|\alpha|$.

Από τον τρόπο με τον οποίο κατασκευάστηκε ο άξονας προκύπτει ότι

- $|5|=5$, $|3|=3$, $\left|\frac{2}{3}\right|=\frac{2}{3}$ και γενικά $|\alpha| = \alpha$, για κάθε $\alpha > 0$.

  Δηλαδή:

  Η απόλυτη τιμή θετικού αριθμού είναι ο ίδιος ο αριθμός.

- $|-5| = 5$, $|-3| = 3$, $\left|-\frac{2}{3}\right|=\frac{2}{3}$ και γενικά $|\alpha| = -\alpha$, για κάθε $\alpha < 0$.

  Δηλαδή:

  Η απόλυτη τιμή αρνητικού αριθμού είναι ο αντίθετός του.

- $|0| = 0$

Επομένως, έχουμε τον ακόλουθο ορισμό της απόλυτης τιμής πραγματικού αριθμού:

Ορισμός

Η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού α συμβολίζεται με $|\alpha|$ και ορίζεται ως εξής:

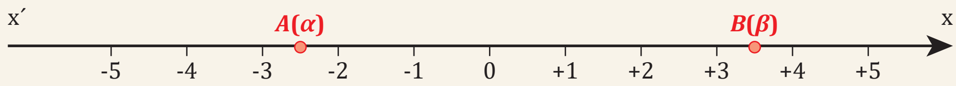
$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{αν } \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$$

Για παράδειγμα,

- $|\pi - 3| = \pi - 3$ γιατί $\pi \simeq 3{,}14 > 2$, οπότε η διαφορά $\pi - 3$ είναι θετική.
- $|1 - \sqrt{2}\,| = -(1 - \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$, γιατί $\sqrt{2} \simeq 1{,}41 > 1$, οπότε η διαφορά $1 - \sqrt{2}$ είναι αρνητική.
- $|\sqrt{5} - 2| = \sqrt{5} - 2$, γιατί $\sqrt{5} > \sqrt{4} = 2$, οπότε η διαφορά $\sqrt{5} - 2$ είναι θετική.
- $|\pi^2 - 10| = -(\pi^2 - 10)$, γιατί $\pi^2 \simeq 9{,}87 < 10$, οπότε η διαφορά $\pi^2 - 10$ είναι αρνητική.

Ας θεωρήσουμε τώρα τους πραγματικούς αριθμούς α και β που παριστάνονται πάνω στον άξονα των αριθμών με τα σημεία A και B αντιστοίχως.

Επομένως, η απόσταση των αριθμών α και β (δηλαδή, το μήκος του τμήματος AB) είναι ίση με την απόλυτη τιμή της διαφοράς τους.



Σχήμα 1.1.4.2

Δηλαδή,

$$d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta| = |\beta - \alpha|.$$

Επιβεβαιώστε αυτό τον ισχυρισμό παίρνοντας τρεις περιπτώσεις: $\alpha < \beta$, $\alpha > \beta$ και $\alpha = \beta$.

Παράδειγμα 1.1.4.1

Ο αριθμός $|x - 1|$, $x \in \mathbb{R}$ εκφράζει την απόσταση του σημείου του άξονα των πραγματικών αριθμών, στο οποίο απεικονίζεται ο αριθμός $x \in \mathbb{R}$, από το σημείο στο οποίο απεικονίζεται ο αριθμός 1.

Παράδειγμα 1.1.4.2

Να υπολογιστούν οι αποστάσεις $d(1, 3)$, $d(-5, -2)$, $d(2, -4)$ και $d(0, -8)$.

Λύση

Έχουμε
- $d(1, 3) = |1 - 3| = |-2| = 2$,
- $d(-5, -2) = |-5 + 2| = |-3| = 3$,
- $d(-4, 2) = |-4 - 2| = |-6| = 6$,
- $d(-8, 0) = |-8| = 8 = d(8, 0)$.

Παράδειγμα 1.1.4.3

Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις

(α) $|2x - 1| = 0$ (β) $|x - 3| = 2$ (γ) $|1 - 5x| = -1$ (δ) $||x| - 1| = 1$

Λύση

(α) Έχουμε $|2x - 1| = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

(β) Έχουμε $|x - 3| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = 2 \\ \text{ή} \\ x - 3 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ \text{ή} \\ x = 1 \end{cases}$.

(γ) Η εξίσωση είναι αδύνατη, αφού η απόλυτη τιμή κάθε πραγματικού αριθμού είναι μη αρνητικός αριθμός.

(δ) Έχουμε $\left||x| - 1\right| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} |x| - 1 = 1 \\ \text{ή} \\ |x| - 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = 2 \\ \text{ή} \\ |x| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ \text{ή} \\ x = 0 \end{cases}$.

Παράδειγμα 1.1.4.4

Να αποδείξετε ότι $(|x| - x)(|x| + x) = 0$, για κάθε αριθμό x.

Λύση

- Αν $x \geq 0$, τότε $|x| = x$, οπότε

$$(|x| - x)(|x| + x) = (x - x)(x + x) = 0 \cdot 2x = 0.$$

- Αν $x<0$, τότε $|x|=-x$, οπότε

$$(|x| - x)(|x| + x) = (-x - x)(-x + x) = (-2x) \cdot 0 = 0.$$

Ασκήσεις - Δραστηριότητες

Α' ΟΜΑΔΑ

1 Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς απόλυτα

(α) $|\sqrt{2} - 1|$ (β) $|\sqrt{2} - \sqrt{3}|$ (γ) $|\pi - 3| - |4 - \pi|$ (δ) $|11 - \pi^2|$

2 Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = |\sqrt{5} - 5| - |5 - \sqrt{5}|$

3 Αν το x συμβολίζει έναν οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό, να γράψετε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής τις ακόλουθες παραστάσεις

(α) $|-x|$ (β) $|x - 1|$ (γ) $|x^2 + 1|$ (δ) $|-x^2 - 1|$

4 Αν $\alpha>\beta>\gamma$ να γράψετε χωρίς τη χρήση του συμβόλου της απόλυτης τιμής την παράσταση

$$A = |\alpha - \beta| - 2\,|\beta - \gamma| + 3\,|\gamma - \alpha|.$$

5 Να λύσετε τις εξισώσεις

(α) $2|x| - 1 = 0$ (β) $|2 + x| - 1 = 0$ (γ) $|3 - 2x| = 3 - 2x$ (δ) $|2x| = -x^2$

Β' ΟΜΑΔΑ

1 Τι συμπεραίνετε για τους αριθμούς α και β, αναφορικά με το πρόσημό τους, αν $|\alpha\beta| = -\alpha\beta$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

2 Να βρείτε τις δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει η παράσταση $A = \frac{|x|}{x} + \frac{|y|}{y}$, με $xy \neq 0$ και να αποδείξετε ότι $|A| \leq 2$. Τι συμπεραίνετε για τους αριθμούς x και y, αν $|A| = 1$;

3 Αν το x συμβολίζει έναν οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό, να γράψετε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής τις ακόλουθες παραστάσεις

(α) $A = x + |x|$ (β) $B = x|x|$ (γ) $\Gamma = |1 - x| + |1 + x|$ (δ) $\Delta = |x - 2| + |x| + |x + 2|$

1.1.5 Ιδιότητες απόλυτης τιμής

Θα μάθουμε:

- να αποδεικνύουμε τις βασικές ιδιότητες της απόλυτης τιμής.

Για τις απόλυτες τιμές ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

1. $|\alpha| \geq 0$, για κάθε αριθμό α.
2. $|\alpha| = |-\alpha|$, για κάθε αριθμό α.
3. $|\alpha| \geq \alpha$ και $|\alpha| \geq -\alpha$, για κάθε αριθμό α.
4. $|\alpha|^2 = \alpha^2$, για κάθε αριθμό α.

   Γενικά, $|\alpha|^{2\nu} = \alpha^{2\nu}$, $\quad |\alpha|^{2\nu+1} = \begin{cases} \alpha^{2\nu+1}, & \alpha \geq 0 \\ -\alpha^{2\nu+1}, & \alpha < 0 \end{cases}$, για κάθε θετικό ακέραιο ν.
5. $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta$ ή $x = -\theta$, για κάθε $\theta > 0$.

   $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
6. $|x| = |\alpha| \Leftrightarrow x = \alpha$ ή $x = -\alpha$, για κάθε αριθμό α.

Επιβεβαιώστε με ένα παράδειγμα ότι η ιδιότητα $|\alpha|^\nu = \alpha^\nu$ δεν ισχύει αν ο εκθέτης είναι περιττός και διατυπώστε το συμπέρασμά σας σε μορφή μιας ιδιότητας.

Απόδειξη

1. Αν $\alpha \geq 0$, τότε $|\alpha| = \alpha \geq 0$.

   Αν $\alpha < 0$, τότε $|\alpha| = -\alpha > 0$.

   Άρα, σε κάθε περίπτωση ισχύει $|\alpha| \geq 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό α.
2. Η ιδιότητα αυτή είναι άμεση συνέπεια του ορισμού και λέει ότι:

   Οι αντίθετοι αριθμοί έχουν την ίδια απόλυτη τιμή.
3. Αν $\alpha > 0$, τότε $|\alpha| = \alpha > -\alpha$.

   Αν $\alpha < 0$, τότε $|\alpha| = -\alpha > \alpha$.

   Δηλαδή, σε κάθε περίπτωση:
   - Η απόλυτη τιμή δύο αντίθετων αριθμών είναι ίση με τον μεγαλύτερο, δηλαδή, τον θετικό.
   - $|0| = 0$ (Αν $\alpha = 0$, τότε $-\alpha = 0$ και επομένως $|\alpha| = \alpha = -\alpha = 0$.)
4. Αν $\alpha > 0$ τότε $|\alpha| = \alpha$, οπότε $|\alpha|^2 = \alpha^2$.

   Αν $\alpha < 0$ τότε $|\alpha| = -\alpha$, οπότε $|\alpha|^2 = (-\alpha)^2 = \alpha^2$.
5. Η ιδιότητα αυτή είναι άμεση συνέπεια του ορισμού της απόλυτης τιμής, ωστόσο, στη συνέχεια δίνεται μια εναλλακτική προσέγγιση

   $$\begin{aligned} |x| = \theta &\Leftrightarrow |x|^2 = \theta^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 = \theta^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - \theta^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-\theta)(x+\theta) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \theta \quad \text{ή} \quad x = -\theta. \end{aligned}$$
6. Άμεση συνέπεια του ορισμού ή της ιδιότητας 5.

   Δύο αριθμοί με την ίδια απόλυτη τιμή είναι ίσοι ή αντίθετοι.

Το τετράγωνο της απόλυτης τιμής ενός αριθμού ισούται με το τετράγωνο του ίδιου του αριθμού, και γενικά, η άρτια δύναμη της απόλυτης τιμής ενός αριθμού ισούται με την ίδια δύναμη του ίδιου του αριθμού. Η γενίκευση αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο.

Κάθε θετικός αριθμός είναι η απόλυτη τιμή του εαυτού του και του αντίθετού του.

Παραδείγματα Ενότητας 1.1.5

Αν $|\alpha| + |\beta| \neq 0$, όπου α, β δύο πραγματικοί αριθμοί, τότε ένας τουλάχιστον από αυτούς τους αριθμούς είναι διάφορος του μηδενός.

Αν $|\alpha| + |\beta| = 0$, όπου α, β δύο πραγματικοί αριθμοί, τότε $\alpha = \beta = 0$.

Μπορούμε τώρα να επαναδιατυπώσουμε τις Προτάσεις 1.1.3.1 και 1.1.3.2 της προηγούμενης ενότητας με τη χρήση της έννοιας της απόλυτης τιμής.

Πρόταση 1.1.5.1 Για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\rho > 0$ ισχύει

$$|x-x_0| < \rho \Leftrightarrow x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$$
$$\Leftrightarrow x_0 - \rho < x < x_0 + \rho$$

Πρόταση 1.1.5.2 Για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\rho > 0$ ισχύει

$$|x - x_0| > \rho \Leftrightarrow x \notin (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$$
$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, x_0 - \rho) \quad \text{ή} \quad x \in (x_0 + \rho, +\infty)$$
$$\Leftrightarrow x < x_0 - \rho \quad \text{ή} \quad x > x_0 + \rho$$

Ανισώσεις με απόλυτες τιμές I

Στην ειδική περίπτωση που είναι $x_0 = 0$, έχουμε τις ισοδυναμίες

- $|x| < \rho \Leftrightarrow -\rho < x < \rho$
- $|x| > \rho \Leftrightarrow x < -\rho \quad \text{ή} \quad x > \rho$

Οι αποδείξεις των Προτάσεων 1.1.5.1 και 1.1.5.2 είναι ίδιες με τις αποδείξεις των Προτάσεων 1.1.3.1 και 1.1.3.2 αρκεί να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|$. Θα τις αποδείξουμε, ωστόσο, στην ειδική περίπτωση όπου $x_0 = 0$, με ένα διαφορετικό τρόπο.

Πρόταση 1.1.5.3 Για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\rho > 0$ ισχύει $|x| < \rho \Leftrightarrow -\rho < x < \rho$

Απόδειξη

Έχουμε $|x| < \rho \Leftrightarrow |x|^2 < \rho^2$
$\Leftrightarrow x^2 < \rho^2$
$\Leftrightarrow x^2 - \rho^2 < 0$
$\Leftrightarrow (x - \rho)(x + \rho) < 0$

Από την τελευταία ανίσωση συμπεραίνουμε ότι οι αριθμοί $x - \rho$ και $x + \rho$ είναι ετερόσημοι, οπότε θα έχουμε τις περιπτώσεις:
i) $x - \rho < 0$ και $x + \rho > 0$ ή ii) $x - \rho > 0$ και $x + \rho < 0$.
Από την i) παίρνουμε $x < \rho$ και $x > -\rho$ ή ισοδύναμα $-\rho < x < \rho$.
Η ii) δίνει $x > \rho$ και $x < -\rho$, το οποίο είναι αδύνατο.

Πρόταση 1.1.5.4 Για κάθε $\rho > 0$ ισχύει $|x| > \rho \Leftrightarrow x < -\rho \quad \text{ή} \quad x > \rho$

Απόδειξη

Αποδεικνύεται όπως η Πρόταση 1.1.5.3.

Μπορείτε να επιβεβαιώσετε τα πιο πάνω αποτελέσματα με τη χρήση της πραγματικής ευθείας.

Παρατήρηση

Μπορούμε να κάνουμε μία πιο «ευφυή» απόδειξη στην Πρόταση 1.1.5.4. Επειδή η Πρόταση 1.1.5.3 ισχύει για τα σημεία που ανήκουν στο διάστημα $(-\rho, \rho)$, η Πρόταση 1.1.5.4 θα ισχύει για τα σημεία έξω από αυτό το διάστημα και επειδή η ανισότητα είναι αυστηρή εξαιρούνται και τα άκρα του δηλαδή, τα σημεία $-\rho$ και ρ. Επομένως, ισχύει για $x < -\rho$ και $x > \rho$.

Στις Προτάσεις 1.1.5.3 και 1.1.5.4 μπορούμε αντί για αυστηρές ανισότητες να έχουμε και ανισο-ισότητες.

Στα παραδείγματα που αμέσως ακολουθούν αναδεικνύεται η χρησιμότητα της έννοιας της απόλυτης τιμής και μας δίνεται μία διαισθητική εικόνα του συνόλου των λύσεων.

Παράδειγμα 1.1.5.1

Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει
(α) $|x| < 5$ (β) $|x| > 3$ (γ) $|x-2| < 3$ (δ) $|x+3| > 2$

Λύση

Έχουμε

(α) $|x| < 5 \Leftrightarrow -5 < x < 5$ (Πρόταση 1.1.5.1, ειδική περίπτωση)

(β) $|x| > 3 \Leftrightarrow x < -3$ ή $x > 3$ (Πρόταση 1.1.5.2, ειδική περίπτωση)

(γ) $|x-2| < 3 \Leftrightarrow -3 < x-2 < 3 \Leftrightarrow -3+2 < x-2+2 < 3+2 \Leftrightarrow -1 < x < 5$ (Πρόταση 1.1.5.1)

(δ) $|x+3| \geq 2 \Leftrightarrow (x+3 \leq -2$ ή $x+3 \geq 2) \Leftrightarrow (x+3-3 \leq -2-3$ ή $x+3-3 \geq 2-3)$

$\Leftrightarrow x \leq -5$ ή $x \geq -1$ (Πρόταση 1.1.5.2)

Παράδειγμα 1.1.5.2

Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις
(α) $|x| \geq 1$ (β) $|2x+1| \leq 3$ (γ) $2 \leq |x| \leq 4$ (δ) $2 < |x-5| \leq 4$

Λύση

(α) Έχουμε $|x| \geq 1 \Leftrightarrow x \leq -1$ ή $x \geq 1$

(β) Έχουμε $|2x+1| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq 2x+1 \leq 3 \Leftrightarrow -3-1 \leq 2x \leq 3-1$

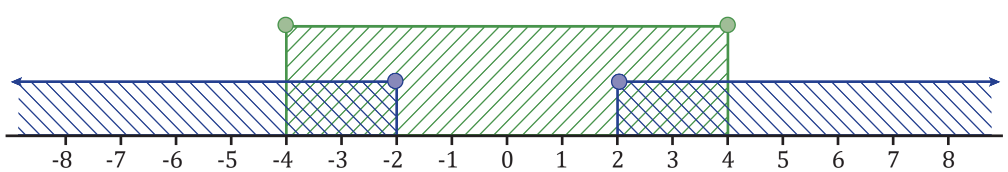
$\Leftrightarrow -4 \leq 2x \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 1$

$\Leftrightarrow x \in [-2,1]$

(γ) Έχουμε $2 \leq |x| \leq 4 \Leftrightarrow |x| \leq 4$ και $|x| \geq 2$

$-4 \leq x \leq 4$ και $x \geq 2$ ή $x \leq -2$

Αναπαριστούμε τις λύσεις των δύο ανισώσεων στον άξονα των πραγματικών αριθμών, όπως φαίνεται στο σχήμα



Σχήμα 1.1.5.1

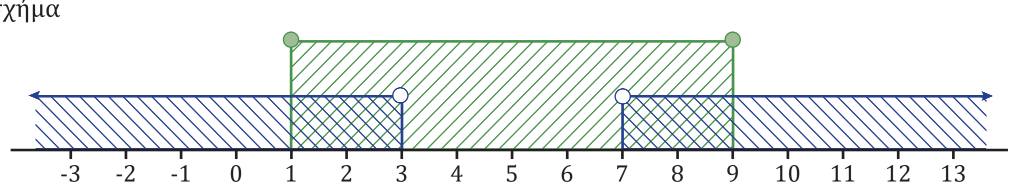
Επομένως, έχουμε ότι $x \in [-4,-2] \cup [2,4]$. (Αυτό σημαίνει ότι οι δυο ανισο-ισότητες ισχύουν για όλα τα x που ανήκουν είτε στο διάστημα $[-4,-2]$ είτε στο $[2,4]$.)

(δ) Έχουμε $2 < |x-5| \leq 4 \Leftrightarrow |x-5| \leq 4$ και $|x-5| > 2$

$\Leftrightarrow -4 \leq x-5 \leq 4$ και $x-5 > 2$ ή $x-5 < -2$

$\Leftrightarrow 1 \leq x \leq 9$ και $x > 7$ ή $x < 3$

Αναπαριστούμε τις λύσεις των δύο ανισώσεων στον άξονα των πραγματικών αριθμών, όπως φαίνεται στο σχήμα



Σχήμα 1.1.5.2

Επομένως, έχουμε ότι $x \in [1,3) \cup (7,9]$.

Το ∪ είναι το σύμβολο της ένωσης δύο συνόλων, δηλαδή του συνόλου που αποτελείται από τα στοιχεία και των δύο (βλ. και Ενότητα 2.1.4)

Ανισώσεις με απόλυτες τιμές ΙΙ

Απόλυτη τιμή γινομένου και πηλίκου δύο αριθμών

Για την απόλυτη τιμή του γινομένου και του πηλίκου δύο πραγματικών αριθμών $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

Πρόταση 1.1.5.5

1. $|\alpha\cdot\beta| = |\alpha|\cdot|\beta|$ 2. $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}, \beta\neq 0$

Απόδειξη

1. Ισχύει ότι $|\alpha\cdot\beta| = |\alpha|\cdot|\beta| \Leftrightarrow |\alpha\cdot\beta|^2 = (|\alpha|\cdot|\beta|)^2$

$\Leftrightarrow (\alpha\cdot\beta)^2 = |\alpha|^2\cdot|\beta|^2$

$\Leftrightarrow (\alpha\cdot\beta)^2 = \alpha^2\cdot\beta^2$, που ισχύει

Η ιδιότητα αυτή ισχύει και για περισσότερους παράγοντες. Συγκεκριμένα ισχύει:

$$|\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\nu| = |\alpha_1||\alpha_2|\cdots|\alpha_\nu|$$

Στην ειδική μάλιστα περίπτωση που είναι $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_\nu = \alpha$, έχουμε $|\alpha^\nu| = |\alpha|^\nu$.

2. Η απόδειξη της ιδιότητας, αφήνεται ως άσκηση. (*Υπόδειξη*: $\alpha = \dfrac{\alpha}{\beta}\cdot\beta$)

Η σχέση $(\alpha\beta)^2=\alpha^2\beta^2$ είναι αληθής για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α, β και επειδή έχουμε ισοδυναμίες, δηλαδή, συνεπαγωγές και προς τις δύο κατευθύνσεις, έπεται ότι αφού η τελευταία ισότητα είναι αληθής και η αρχική θα είναι αληθής.

Μία διαφορετική απόδειξη της ιδιότητας $|\alpha\cdot\beta| = |\alpha|\cdot|\beta|$ υπάρχει στο **Σ.Υ. 1.5.1.**

Απόλυτη τιμή αθροίσματος

Για την απόλυτη τιμή του αθροίσματος δύο πραγματικών αριθμών $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$ ισχύει η παρακάτω πρόταση:

Απόλυτη τιμή του γινομένου και πηλίκου δύο αριθμών

Απόλυτη τιμή αθροίσματος

Πρόταση 1.1.5.6

$$|\alpha+\beta| \leq |\alpha| + |\beta|$$

Απόδειξη

Γνωρίζουμε ότι αν έχουμε δύο μη αρνητικούς αριθμούς άνισους τα τετράγωνά τους είναι ομοίως άνισοι αριθμοί. Επειδή οι αριθμοί $|\alpha+\beta|$ και $|\alpha|+|\beta|$ είναι μη αρνητικοί μπορούμε να υψώσουμε στο τετράγωνο την ανισότητα $|\alpha+\beta|\leq|\alpha|+|\beta|$ κατά μέλη. Οπότε παίρνουμε

$|\alpha+\beta| \leq |\alpha|+|\beta| \Leftrightarrow |\alpha+\beta|^2 \leq (|\alpha|+|\beta|)^2$ (Υψώνουμε στο τετράγωνο)

$\Leftrightarrow \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 \leq |\alpha|^2+2|\alpha||\beta|+|\beta|^2$ (Εκτελούμε τις πράξεις)

$\Leftrightarrow \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 \leq \alpha^2+2|\alpha\beta|+\beta^2$ (Εφαρμόζουμε ιδιότητες)

$\Leftrightarrow \alpha\beta \leq |\alpha\beta|$ (Συνέπεια του ορισμού της απόλυτης τιμής)

Από τις παραπάνω ισοδυναμίες φαίνεται ότι η ισότητα $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$ ισχύει αν και μόνο αν $\alpha\beta = |\alpha\beta|$, δηλαδή αν και μόνο αν οι αριθμοί α και β είναι ομόσημοι ή ένας τουλάχιστον από αυτούς είναι ίσος με μηδέν.

Η παραπάνω ιδιότητα ισχύει και για περισσότερους προσθετέους. Συγκεκριμένα ισχύει

$$|\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu| \leq |\alpha_1| + |\alpha_2| + \cdots + |\alpha_\nu|.$$

Παραδείγματα Ενότητας 1.1.5

Ασκήσεις - Δραστηριότητες

Α' ΟΜΑΔΑ

1 Αν $|x| \leq 2$ να δείξετε ότι η παράσταση $A = |x - 3| + |x - 2| + |x + 2| + |x + 3|$ είναι ανεξάρτητη του x.

2 Αν $|x| \leq 3$ να δείξετε ότι $|x^3 - x^2 + x - 1| \leq 40$.
(Χρησιμοποιήστε τη γενίκευση της ιδιότητας «Απόλυτη τιμή αθροίσματος»)

3 Να λύσετε τις εξισώσεις

(α) $\left|\dfrac{x-2}{x+1}\right| = \dfrac{1}{2}$ (β) $|5 - 3x| = |2x - 1|$ (γ) $|2x - 1| = 1 - 2x$ (δ) $|2x - 1| = x - 1$

4 Να λυθούν οι ανισώσεις

(α) $|3 - 2x| < 1$ (β) $|3 - 2x| \geq 3$ (γ) $|1 - x| > 0$ (δ) $1 < |x-2| \leq 3$

5 Να λύσετε καθεμία από τις παρακάτω ανισότητες και στη συνέχεια να εκφράσετε τη λύση με τη χρήση της έννοιας της απόστασης καθώς και της απόλυτης τιμής.

(α) $|5(x - 3)| \leq 15$ (β) $|5x - 3| \leq 15$ (γ) $|2(x - 1)| > 1$ (δ) $|4x - 3| > 12$

Β' ΟΜΑΔΑ

1 Αν θεωρήσουμε το διάστημα μεταξύ δυο αριθμών α και β με $\alpha < \beta$ και ένα σημείο του γ, να αποδείξετε ότι $|\alpha - \beta| = |\alpha - \gamma| + |\gamma - \beta|$. (Δεν χρειάζεται να κάνετε καθόλου πράξεις, αρκεί να κάνετε μία παρατήρηση.) Αν τώρα θεωρήσουμε τρεις τυχαίους αριθμούς α, β και γ, να αποδείξετε ότι δεν συνεχίζει να ισχύει η παραπάνω ανισότητα, ωστόσο να αποδείξετε ότι σε κάθε περίπτωση ισχύει η ανισότητα $|\alpha - \beta| \leq |\alpha - \gamma| + |\gamma - \beta|$.

2 Να βρείτε τον αριθμό α, ώστε να ισχύει

$$|\alpha^2 - 1| + |2 - 2\alpha| = 0$$

3 Να βρείτε τους αριθμούς α και β, ώστε

$$|2\alpha - 3\beta - 2| + \alpha^2 + 4\beta^2 = 4\alpha\beta$$

4 Αν $|x| \leq 3$ και $|y| \leq 2$, να δείξετε ότι $|2x + 3y| \leq 12$.

5 Αν $\dfrac{2\alpha + 3\beta}{3\alpha + 2\beta} \leq 1$, με $\alpha \neq 0$ και $3\alpha + 2\beta \neq 0$, να αποδείξετε ότι $|\alpha| \geq |\beta|$.

Ασκήσεις Β' Ομάδας Ενότητας 1.1.5

1.1.6 Ν-οστή ρίζα πραγματικού αριθμού

Έξυπνοι φίλοι

Θα μάθουμε:

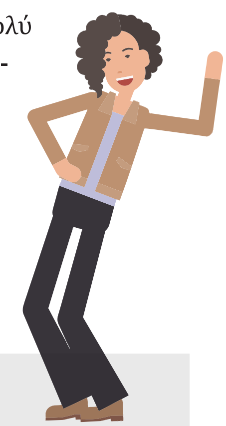
- να ορίζουμε τη ν-οστή ρίζα (διαβάζεται νιοστή) ενός μη αρνητικού αριθμού α ως τη μοναδική μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^\nu = \alpha$ και να αποδεικνύουμε τις βασικές ιδιότητες (γινόμενο και πηλίκο ριζών).

Έχουμε μάθει:

Έχουμε μάθει στο Γυμνάσιο την έννοια της τετραγωνικής ρίζας μη αρνητικού αριθμού καθώς και τις ιδιότητές της.

Η Έννοια της Τετραγωνικής Ρίζας

Ας υποθέσουμε τώρα ότι θέλουμε, να αναζητήσουμε έναν αριθμό που η τρίτη του δύναμη είναι το 8 ή η τέταρτη δύναμή του είναι το 81, δηλαδή, $x^3 = 8$ ή $x^4 = 81$, αντίστοιχα. Διαφορετικά, ας υποθέσουμε, ότι για έναν αριθμό α, και για οποιοδήποτε θετικό ακέραιο ν αναζητούμε έναν αριθμό x που αν υψωθεί στην ν δίνει τον α. Μας ενδιαφέρει, δηλαδή, να γενικεύσουμε την έννοια της τετραγωνικής ρίζας και να μιλάμε για κάποια «ν-οστή» ρίζα. Ωστόσο, πριν κάνουμε αυτή τη γενίκευση πρέπει να παρατηρήσουμε κάτι πολύ σημαντικό. Ενώ για παράδειγμα, το τετράγωνο και γενικά κάθε άρτια δύναμη οποιουδήποτε αριθμού (είτε θετικού, είτε αρνητικού, είτε του μηδενός) είναι μη αρνητικός αριθμός, δεν συμβαίνει το ίδιο για τις περιττές δυνάμεις των αρνητικών αριθμών. Για παράδειγμα, έχουμε $(-2)^3 = -8$, οπότε η λύση της εξίσωσης $x^3 = -8$ είναι η $x = -2$. Εξάλλου, οι λύσεις της εξίσωσης $x^4 = 81$ είναι το -3 και το 3, επειδή $(-3)^4 = 3^4 = 81$.



Για να αποφύγουμε παρερμηνείες και λάθη, θα ορίσουμε την έννοια της ν-οστής ρίζας με ανάλογο τρόπο που ορίσαμε την έννοια της τετραγωνικής ρίζας. Δηλαδή, για κάθε θετικό ακέραιο ν, θα ορίσουμε την *ν-οστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α*.

Ορισμός

Η **ν-οστή ρίζα** ενός μη αρνητικού αριθμού α, όπου ν θετικός ακέραιος, είναι ο μη αρνητικός αριθμός x, ο οποίος, όταν υψωθεί σε δύναμη με εκθέτη ν, δίνει τον αριθμό α.

Ή ισοδύναμα:

Η **ν-οστή ρίζα** ενός μη αρνητικού αριθμού α, όπου ν θετικός ακέραιος ορίζεται ως η μοναδική μη αρνητική ρίζα της εξίσωσης $x^\nu = \alpha$.

Συμβολίζεται με $\sqrt[\nu]{\alpha}$ και ισχύει ότι

$$\sqrt[\nu]{\alpha} = x \Leftrightarrow x^\nu = \alpha \text{ με } x \geq 0 \text{ και } \sqrt[\nu]{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$$

Η επεξήγηση του συμβολισμού $\sqrt[\nu]{\alpha}$ της ν-οστής ρίζας μη αρνητικού πραγματικού αριθμού είναι η εξής: Το ν λέγεται **τάξη** της ρίζας, το α λέγεται **υπόρριζη ποσότητα** και το σύμβολο $\sqrt{\ }$ λέγεται **ριζικό**.

Για παράδειγμα, έχουμε ότι

- $\sqrt{9} = 3$, διότι $3^2 = 9$
- $\sqrt[3]{64} = 4$, διότι $4^3 = 64$
- $\sqrt[4]{81} = 3$, διότι $3^4 = 81$

Για τη ν-οστή ρίζα 1ης και 2ης τάξης γράφουμε, αντίστοιχα,
$\sqrt[1]{\alpha} = \alpha$ και $\sqrt[2]{\alpha} = \sqrt{\alpha}$
Ενώ, έχουμε ότι $\sqrt[\nu]{1} = 1$, $\sqrt[\nu]{0} = 0$.

Από τον πιο πάνω ορισμό έχουμε:

$$\text{Αν } \alpha \geq 0, \text{ τότε } \sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = (\sqrt[\nu]{\alpha})^\nu = \alpha.$$

$$\text{Αν } \alpha \leq 0 \text{ και } \nu \text{ άρτιος, τότε } \sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = (\sqrt[\nu]{|\alpha|})^\nu = |\alpha|.$$

Για παράδειγμα, έχουμε

$$\sqrt[4]{2^4}=\left(\sqrt[4]{2}\right)^4=2 \quad \text{ενώ} \quad \sqrt[4]{(-2)^4}=\left(\sqrt[4]{|-2|}\right)^4=|-2|=2.$$

Μπορούμε πιο εύκολα να υπολογίσουμε μία ν-οστή ρίζα, όταν το υπόρριζο γράφεται ως δύναμη με εκθέτη ν.
Για παράδειγμα

- $\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{3^4}=3$
- $\sqrt[6]{64}=\sqrt[6]{2^6}=2$
- $\sqrt[8]{\alpha^{40}}=\sqrt[8]{(\alpha^5)^8}=\alpha^5,\ \alpha\geq 0$

Αποδεικνύεται ότι «για κάθε πραγματικό αριθμό $\alpha>0$ υπάρχει **μοναδικός** πραγματικός $x>0$ τέτοιος ώστε $x^\nu=\alpha$».

Για κάθε πραγματικό αριθμό α>0 υπάρχει μοναδικός πραγματικός x>0

Η Χρυσή Τομή

Γνωρίζουμε ότι οι τετραγωνικές ρίζες των θετικών αριθμών που δεν είναι τέλεια τετράγωνα είναι άρρητοι αριθμοί. Για παράδειγμα οι αριθμοί $\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5}$ είναι *άρρητοι*. Ανάλογα, και οι ν-οστές ρίζες θετικών ακέραιων που δεν είναι δυνάμεις θετικών ακέραιων είναι επίσης άρρητοι αριθμοί. Για παράδειγμα οι αριθμοί $\sqrt[3]{2},\sqrt[4]{5},\sqrt[6]{3}$ είναι *άρρητοι*.

Παράδειγμα 1.1.6.1

Να υπολογίσετε τις ρίζες

(α) $\sqrt[3]{27}$ (β) $\sqrt[5]{32}$ (γ) $\sqrt[3]{216}$

Λύση

(α) $\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$ (β) $\sqrt[5]{32}=\sqrt[5]{2^5}=2$ (γ) $\sqrt[3]{216}=\sqrt[3]{6^3}=6$

Παράδειγμα 1.1.6.2

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

(α) $\sqrt{2^6}$ (β) $\sqrt[5]{5^{15}}$ (γ) $\sqrt[3]{\dfrac{64\alpha^6}{125}}$ (δ) $\sqrt[10]{1024\alpha^{20}}$

Λύση

(α) $\sqrt{2^3}=\sqrt{(2^3)^2}=2^3=8$

(β) $\sqrt[5]{5^{15}}=\sqrt[5]{(5^3)^5}=125$

(γ) $\sqrt[3]{\dfrac{64\alpha^6}{125}}=\sqrt[3]{\left(\dfrac{4\alpha^2}{5}\right)^3}=\dfrac{4\alpha^2}{5}$

(δ) $\sqrt[10]{1024\alpha^{20}}=\sqrt[10]{2^{10}(\alpha^2)^{10}}=\sqrt[10]{(2\alpha^2)^{10}}=2\alpha^2$

Ιδιότητες των ν-οστών ριζών

Για τις ν-οστές ρίζες ισχύουν όμως και οι ακόλουθες ιδιότητες, από τις οποίες οι δύο πρώτες είναι ανάλογες των ιδιοτήτων των τετραγωνικών ριζών.

1. $\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha\beta}$
2. $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}=\sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$
3. $\alpha\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha^\nu\beta}$
4. $\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\kappa=\sqrt[\nu]{\alpha^\kappa}$
5. $\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}}=\sqrt[\nu\cdot\mu]{\alpha}$
6. $\sqrt[\nu\cdot\rho]{\alpha^{\mu\cdot\rho}}=\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$

Οι Ιδιότητες των Τετραγωνικών Ριζών

Θεωρήστε ότι τα α,β είναι κατάλληλα ώστε σε κάθε περίπτωση οι ρίζες που εμφανίζονται και γενικότερα οι παραστάσεις να έχουν νόημα. Για παράδειγμα, στην πρώτη ιδιότητα πρέπει τα α,β να είναι μη αρνητικοί, στη δεύτερη το α να είναι μη αρνητικός και το β θετικός κ.λπ.

Απόδειξη

1. Έχουμε

$$\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha\beta} \Leftrightarrow \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}\right)^{\nu}=\left(\sqrt[\nu]{\alpha\beta}\right)^{\nu}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu}\left(\sqrt[\nu]{\beta}\right)^{\nu}=\alpha\cdot\beta$$

$$\Leftrightarrow \alpha\cdot\beta=\alpha\cdot\beta, \qquad \text{που ισχύει.}$$

Για παράδειγμα, έχουμε ότι

- $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}=\sqrt{3\cdot 27}=\sqrt{81}=9$
- $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{8}=\sqrt[4]{2\cdot 8}=\sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{2^4}=2$
- $\sqrt[3]{128}=\sqrt[3]{64\cdot 2}=\sqrt[3]{64}\cdot\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{4^3}\cdot\sqrt[3]{2}=4\sqrt[3]{2}$

Όπως και στις τετραγωνικές ρίζες η Ιδιότητα 1 ισχύει και για περισσότερους από δύο μη αρνητικούς παράγοντες. Συγκεκριμένα, για μη αρνητικούς αριθμούς α_1, α_2, ..., α_κ ισχύει

$$\sqrt[\nu]{\alpha_1}\cdot\sqrt[\nu]{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[\nu]{\alpha_\kappa}=\sqrt[\nu]{\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\ldots\cdot\alpha_\kappa}$$

Στην ειδική περίπτωση που είναι $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_\kappa=\alpha\geq 0$, ισχύει $\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\kappa}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\kappa}}$ δηλαδή, προκύπτει η ιδιότητα 4. (*Στη συνέχεια δίνεται μία άλλη απόδειξη για την 4.*)

2. Αποδεικνύεται όπως η 1.

Για παράδειγμα, έχουμε ότι

- $\sqrt{12}:\sqrt{3}=\sqrt{12:3}=\sqrt{4}=2$
- $\sqrt[4]{32}:\sqrt[4]{2}=\sqrt[4]{32:2}=\sqrt[4]{16}=2$
- $\sqrt[3]{\dfrac{256}{81}}=\dfrac{\sqrt[3]{4^4}}{\sqrt[3]{3^4}}=\dfrac{\sqrt[3]{4^3\cdot 2}}{\sqrt[3]{3^3\cdot 3}}=\dfrac{\sqrt[3]{4^3}\cdot\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3^3}\cdot\sqrt[3]{3}}=\dfrac{4\sqrt[3]{2}}{3\sqrt[3]{3}}=\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}$

3. Από την 1 λόγω της $\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}}=\alpha$ έχουμε

$$\alpha\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}\beta}$$

Για παράδειγμα, έχουμε ότι

- $\sqrt{12}=\sqrt{2^2\cdot 3}=2\sqrt{3}$
- $\sqrt[3]{24}=\sqrt[3]{8\cdot 3}=\sqrt[3]{2^3\cdot 3}=2\sqrt[3]{3}$
- $\sqrt{12}+\sqrt{27}=\sqrt{2^2\cdot 3}+\sqrt{3^2\cdot 3}=2\sqrt{3}+3\sqrt{3}=5\sqrt{3}$

4. Έστω ότι $\sqrt[\nu]{\alpha}=x$. Τότε, από την $\sqrt[\nu]{\alpha}=x\Rightarrow x^{\nu}=\alpha$ *(βλ. Ορισμός ν-οστής ρίζας)* παίρνουμε

$$\sqrt[\nu]{\alpha}=x\Rightarrow\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu}=x^{\nu} \quad\Rightarrow \alpha=x^{\nu}$$

$$\Rightarrow \alpha^{\kappa}=(x^{\nu})^{\kappa} \quad\Rightarrow \alpha^{\kappa}=x^{\nu\kappa}$$

$$\Rightarrow \sqrt[\nu]{\alpha^{\kappa}}=\sqrt[\nu]{x^{\nu\kappa}} \quad\Rightarrow \sqrt[\nu]{\alpha^{\kappa}}=\sqrt[\nu]{(x^{\kappa})^{\nu}}$$

$$\Rightarrow \sqrt[\nu]{\alpha^{\kappa}}=x^{\kappa} \quad\Rightarrow \sqrt[\nu]{\alpha^{\kappa}}=\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\kappa}$$

Για παράδειγμα, έχουμε ότι

- $\sqrt[3]{8^2}=\left(\sqrt[3]{8}\right)^2=2^2=4$
- $\sqrt[4]{48}=\sqrt[4]{16\cdot 3}=\sqrt[4]{2^4\cdot 3}=2\sqrt[4]{3}$
- $\sqrt{8}+\sqrt{32}=\sqrt{2^2\cdot 2}+\sqrt{4^2\cdot 2}=2\sqrt{2}+4\sqrt{2}=6\sqrt{2}$

5. Έχουμε

$$\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}}=\sqrt[\nu\cdot\mu]{\alpha} \Leftrightarrow \left(\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}}\right)^{\nu\cdot\mu}=\left(\sqrt[\nu\cdot\mu]{\alpha}\right)^{\nu\cdot\mu}$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}}\right)^{\nu}\right]^{\mu}=\alpha$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[\mu]{\alpha}\right)^{\mu}=\alpha, \qquad \text{που ισχύει.}$$

Για παράδειγμα, έχουμε ότι

- $\sqrt[4]{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[12]{2}$
- $\sqrt{\sqrt{5}}=\sqrt[4]{5}$
- $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{3}}}=\sqrt[2\cdot 3\cdot 4]{3}=\sqrt[24]{3}$

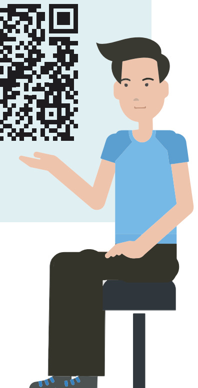
6. Έχουμε

$$\sqrt[\nu\cdot\rho]{\alpha^{\mu\cdot\rho}}=\sqrt[\nu]{\sqrt[\rho]{\alpha^{\mu\cdot\rho}}}=\sqrt[\nu]{\left(\sqrt[\rho]{\alpha^{\mu}}\right)^{\rho}}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$$

Για παράδειγμα, έχουμε ότι

- $\sqrt[6]{2^4}=\sqrt[2\cdot 3]{2^{2\cdot 2}}=\sqrt[3]{2^2}=\sqrt[3]{4}$
- $\sqrt[36]{5^{12}}=\sqrt[12\cdot 3]{5^{12}}=\sqrt[3]{5}$
- $\sqrt[8]{3^4}=\sqrt[2\cdot 4]{3^{1\cdot 4}}=\sqrt{3}$

Παραδείγματα Ενότητας 1.1.6



Ασκήσεις - Δραστηριότητες

Α' ΟΜΑΔΑ

1 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

(α) $\sqrt{(-2)^2}$ (β) $\sqrt{2^{10}}$ (γ) $\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[3]{49}$ (δ) $\sqrt[3]{625}:\sqrt[3]{5}$

2 Να εκφράσετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς τη χρήση του συμβόλου της ρίζας

(α) $\sqrt{x^2}$ (β) $\sqrt{x^2}$, $x\geq 0$ (γ) $\sqrt[3]{x^6}$ (δ) $\sqrt{4x^4}$

3 Να δείξετε ότι ο αριθμός $\varphi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $\varphi^2=\varphi+1$. Να βρείτε και την άλλη ρίζα της εξίσωσης. (Μπορείτε να τη βρείτε χωρίς να λύσετε την εξίσωση. Εναλλακτικά λύστε την εξίσωση.)

4 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

(α) $\sqrt{8}+\sqrt{32}-\sqrt{18}$ (β) $\sqrt[3]{375}-\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{81}$

(γ) $\sqrt{3\sqrt[4]{3\sqrt[5]{3}}}$ (δ) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$

Ο αριθμός $\varphi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ όχι μόνο στα μαθηματικά αλλά και στις τέχνες (αρχιτεκτονική, γλυπτική, ζωγραφική) ονομάζεται **χρυσή τομή**.

5 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

(α) $\sqrt{45}+3\sqrt{20}-\sqrt{5}$ (β) $\sqrt{\sqrt[3]{4}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{16}}$

(γ) $\sqrt{\sqrt[3]{4}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{16}}$ (δ) $\sqrt{7-2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{7+2\sqrt{6}}$

6 Να απλοποιήσετε τις ακόλουθες παραστάσεις

(α) $\sqrt{8}\cdot\sqrt{18}\cdot\sqrt{32}$ (β) $\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[3]{30}\cdot\sqrt[3]{150}$ (γ) $\sqrt[4]{24}\cdot\sqrt[4]{48}\cdot\sqrt[4]{96}$

Β' ΟΜΑΔΑ

1 Να απλοποιήσετε τις ακόλουθες παραστάσεις

(α) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{\alpha^{10}}}:\sqrt[30]{\alpha^{10}}$ (β) $\left(\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt[5]{\alpha^3}\right):\sqrt[10]{\alpha^4}$ (γ) $\sqrt[3]{3}:\sqrt[4]{3}$

2 Έστω $A=\sqrt{18}+\sqrt{50}-\sqrt{98}$ και $B=\sqrt{12}+\sqrt{27}-\sqrt{48}$ να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\Pi=\sqrt{4A^2-4AB+B^2}$$

3 Αν $x=1+\sqrt{2}$ και $y=1-\sqrt{2}$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων

(α) $\sqrt{(x-y)^2}$ (β) $\sqrt{|x|+|y|}$ (γ) $\sqrt{|xy|}$ (δ) $\sqrt{|x^2|-|y^2|}$

4 Να δείξετε ότι ο αριθμός $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ είναι άρρητος.

5 Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt{7}-\sqrt{5}$ και $\sqrt{5}-\sqrt{3}$.
(Υποθέστε ότι $\sqrt{7}-\sqrt{5}>\sqrt{5}-\sqrt{3}$ και προσπαθήστε να καταλήξετε σε μία αλήθεια ή σε ένα ψέμα.)

Ασκήσεις Β' Ομάδας Ενότητας 1.1.6

1.1.7 Δυνάμεις με ρητό εκθέτη

Θα μάθουμε:

- να ορίζουμε δυνάμεις με ρητό εκθέτη και θα διερευνήσουμε τις ιδιότητές τους.

Με δεδομένο τον ορισμό της δύναμης ενός πραγματικού αριθμού με ακέραιο εκθέτη τίθεται το ερώτημα αν θα είχε νόημα να ορίσουμε μία δύναμη με κλασματικό και γενικότερα με ρητό εκθέτη με τέτοιο τρόπο, ώστε να συνεχίζουν να ισχύουν οι γνωστές μας ιδιότητες των δυνάμεων.

Για παράδειγμα τι θα πρέπει να σημαίνει το $2^{\frac{1}{5}}$; Μία πρώτη σκέψη οδηγεί στο συμπέρασμα ότι αφού θέλουμε να ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες των δυνάμεων θα πρέπει να ισχύει και η ιδιότητα $(\alpha^{\kappa})^{\lambda} = \alpha^{\kappa\lambda}$ με τα κ, λ να είναι ρητοί αριθμοί. Επομένως, αν υποθέσουμε ότι το $2^{\frac{1}{5}}$ είναι ένας πραγματικός αριθμός, ας τον συμβολίσουμε x, τότε θα έχουμε

$$2^{\frac{1}{5}} = x \Leftrightarrow \left(2^{\frac{1}{5}}\right)^5 = x^5 \Leftrightarrow 2 = x^5 \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{2},$$

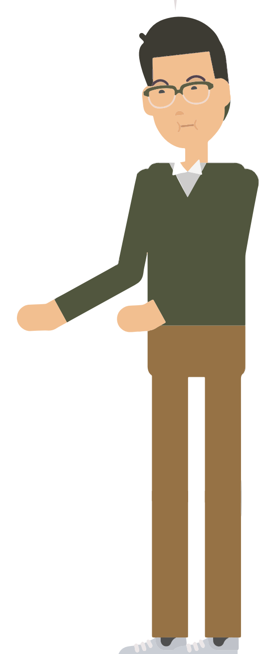
όπου η τελευταία ισοδυναμία είναι συνέπεια του ορισμού της ν-οστής ρίζας ενός θετικού αριθμού. Πρέπει, δηλαδή να είναι $2^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{2}$. Επομένως, αν α είναι θετικός αριθμός και ν είναι επίσης ένας θετικός ακέραιος θα πρέπει να ορίσουμε το $\alpha^{\frac{1}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha}$.

Ας θεωρήσουμε ένα δεύτερο παράδειγμα: Τι θα πρέπει να σημαίνει το $2^{\frac{3}{5}}$; Αν υποθέσουμε ότι το $2^{\frac{3}{5}}$ είναι ένας πραγματικός αριθμός, ας τον συμβολίσουμε x, τότε θα έχουμε

$$2^{\frac{3}{5}} = x \Leftrightarrow \left(2^{\frac{3}{5}}\right)^5 = x^5 \Leftrightarrow 2^3 = x^5 \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{2^3},$$

όπου η τελευταία ισοδυναμία είναι συνέπεια του ορισμού της ν-οστής ρίζας ενός θετικού αριθμού. Δηλαδή, πρέπει, να είναι $2^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2^3}$. Επομένως, αν α είναι θετικός αριθμός και μ, ν είναι θετικοί ακέραιοι ή αν α είναι θετικός αριθμός, ν είναι επίσης θετικός ακέραιος και μ οποιοσδήποτε ακέραιος θα πρέπει να ορίσουμε το $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$.

Προσπαθήστε να δικαιολογήσετε αυτό το «οποιοσδήποτε ακέραιος» για το μ.



Έχουμε οδηγηθεί στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός

Αν $\alpha>0$, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$.
Επιπλέον, αν μ, ν θετικοί ακέραιοι, τότε ορίζουμε $0^{\frac{\mu}{\nu}} = 0$

.

Άμεσες συνέπειες του ορισμού είναι οι ακόλουθες.

1. Για $\alpha > 0$ και για κάθε φυσικό ν, ισχύει

$$\alpha^{-\frac{1}{\nu}} = (\alpha^{-1})^{\frac{1}{\nu}} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\nu}} = \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{\nu}}} = \frac{1}{\sqrt[\nu]{\alpha}}$$

2. Για $\alpha > 0$, κάθε ακέραιο μ και κάθε θετικό ακέραιο ν, ισχύει

$$\alpha^{-\frac{\mu}{\nu}} = (\alpha^{-1})^{\frac{\mu}{\nu}} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{1}{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}} = \frac{1}{\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}}$$

Η χρήση ριζικών πολλές φορές διευκολύνει την εκτέλεση των πράξεων, αλλά κάποιες φορές δεν συμβαίνει αυτό. Ωστόσο η σωστή επιλογή χρήσης ή μη είναι θέμα εξάσκησης και εμπειρίας.

Για παράδειγμα, έχουμε

- $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[6]{128}=\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[6]{2^7}=2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{7}{6}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{7}{6}}=2^{\frac{3+2+7}{6}}=2^{\frac{12}{6}}=2^2=4$

- $x\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[6]{x}=x^1\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{1}{6}}=x^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=x^{\frac{6+3+2+1}{6}}=x^{\frac{12}{6}}=x^2$

Παράδειγμα 1.1.7.1

Να υπολογίσετε τις πιο κάτω παραστάσεις, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής

(α) $4^{\frac{1}{2}}$ (β) $25^{-\frac{1}{2}}$ (γ) $16^{\frac{3}{4}}$ (δ) $64^{\frac{2}{3}}$

Λύση

(α) Έχουμε

$$4^{\frac{1}{2}}=\sqrt{4}=2$$

(β) Έχουμε

$$25^{-\frac{1}{2}}=\left(25^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{25}}=\frac{1}{5}$$

(γ) Έχουμε

$$16^{\frac{3}{4}}=\left(2^4\right)^{\frac{3}{4}}=2^3=8$$

(δ) Έχουμε

$$64^{\frac{2}{3}}=\left(4^3\right)^{\frac{2}{3}}=4^2=16$$

Παράδειγμα 1.1.7.2

Να υπολογίσετε τις πιο κάτω παραστάσεις, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής

(α) $3^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{12}$ (β) $2^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[3]{4}$ (γ) $\sqrt{5}+5^{\frac{3}{2}}-20^{\frac{1}{2}}$ (δ) $\sqrt{10}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[6]{40}$

Λύση

(α) Έχουμε $3^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{12}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}=\sqrt{36}=6$

(β) Έχουμε $2^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2\cdot 4}=\sqrt[3]{8}=2$

(γ) Έχουμε $\sqrt{5}+5^{\frac{3}{2}}-20^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}+\sqrt{5^3}-\sqrt{20}$

$$=\sqrt{5}+\sqrt{25\cdot 5}-\sqrt{4\cdot 5}=\sqrt{5}+5\sqrt{5}-2\sqrt{5}$$

$$=4\sqrt{5}$$

(δ) Έχουμε $\sqrt{10}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[6]{40}=10^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{\frac{1}{3}}\cdot 40^{\frac{1}{6}}=(2\cdot 5)^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{\frac{1}{3}}\cdot\left(2^3\cdot 5\right)^{\frac{1}{6}}$

$$=2^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{\frac{1}{3}}\cdot\left(2^3\right)^{\frac{1}{6}}\cdot 5^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{3}{6}}\cdot 5^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{\frac{1}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{6}}$$

$$=2^{\frac{1}{2}+\frac{3}{6}}\cdot 5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=2^1\cdot 5^1=2\cdot 5=10$$

Στο παράδειγμα που ακολουθεί έχουμε να λύσουμε εξισώσεις στις οποίες οι άγνωστοι εμφανίζονται με ρητούς εκθέτες. Επισημαίνεται ότι:

Ερώτημα: Ορίζονται καλώς γενικά οι δυνάμεις $a^{\frac{\mu}{\nu}}$ με μ, ν ακεραίους και $a<0$; Σκεφτείτε παραδείγματα. Συζητήστε το στην τάξη.

Παράδειγμα 1.1.7.3

Να βρείτε τους μη αρνητικούς αριθμούς που είναι λύσεις των παρακάτω εξισώσεων

(α) $x^{\frac{1}{2}}=5$ (β) $y^{\frac{2}{3}}=9$ (γ) $z^{-\frac{2}{3}}=16$ (δ) $t^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{27}$

Λύση

(α) Υψώνουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης στη δύναμη 2, ώστε ο εκθέτης του x να γίνει 1. Έχουμε

$$x^{\frac{1}{2}}=5 \Leftrightarrow \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2=5^2 \Leftrightarrow x=25$$

(β) Υψώνουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης στη δύναμη 3/2, ώστε ο εκθέτης του y να γίνει 1. Έχουμε

$$y^{\frac{2}{3}}=9 \Leftrightarrow \left(y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}=9^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow y=\left(3^2\right)^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow y=3^3 \Leftrightarrow y=27$$

Παρατήρηση

Θα μπορούσε κάποιος να ακολουθήσει την εξής διαδικασία επίλυσης:

$$y^{\frac{2}{3}}=9 \Leftrightarrow \left(y^{\frac{2}{3}}\right)^3=9^3 \Leftrightarrow y^2=\left(3^2\right)^3 \Leftrightarrow y^2=3^{23}.$$

Η τελευταία εξίσωση, ωστόσο, έχει δύο ρίζες τις

$$y_1=\sqrt{3^{23}}=3^3=27 \quad \text{και} \quad y_2=-\sqrt{3^{23}}=-3^3=-27.$$

Η y_2 όμως δεν είναι ρίζα της αρχικής εξίσωσης αφού ο ορισμός της δύναμης με ρητό εκθέτη απαιτεί η βάση να είναι μη αρνητική. Συγκεκριμένα, εδώ, πρέπει να είναι $y>0$ αφού δεν μπορεί να είναι $y=0$. Γενικά: Όταν υψώνουμε μία εξίσωση κατά μέλη στο τετράγωνο, η νέα εξίσωση ενδέχεται να μην είναι ισοδύναμη με την αρχική και να έχει επιπλέον ρίζες από αυτές της αρχικής. Για αυτό σε κάθε περίπτωση απαιτείται μία διερεύνηση (ένας έλεγχος) ως προς το ποιες ρίζες θα γίνουν αποδεκτές και ποιες θα απορριφθούν.

(γ) Υψώνουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης στη δύναμη $-3/2$, ώστε ο εκθέτης του z να γίνει 1. Έχουμε

$$z^{-\frac{2}{3}}=16 \Leftrightarrow \left(z^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{2}}=\left(2^4\right)^{-\frac{3}{2}} \Leftrightarrow z=\frac{1}{\left(2^4\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{2^6}=\frac{1}{64}$$

(δ) (Εδώ θα ακολουθήσουμε μία «έξυπνη» διαδικασία.) Έχουμε

$$t^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{27} \Leftrightarrow t^{-\frac{3}{2}}=3^{-3} \Leftrightarrow \left(t^{\frac{1}{2}}\right)^{-3}=3^{-3} \Leftrightarrow t^{\frac{1}{2}}=3 \Leftrightarrow \left(t^{\frac{1}{2}}\right)^2=3^2 \Leftrightarrow t=9$$

Ασκήσεις - Δραστηριότητες

Α' ΟΜΑΔΑ

1 Να μετατρέψετε τα παρακάτω ριζικά σε δυνάμεις με ρητό εκθέτη

(α) $\sqrt[3]{3^2}$ (β) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (γ) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}}$ (δ) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{64}}$

2 Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις (χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής)

(α) $9^{\frac{1}{2}}$ (β) $27^{-\frac{1}{3}}$ (γ) $81^{\frac{1}{4}}$ (δ) $64^{\frac{2}{3}}$

3 Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις (χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής)

(α) $9^{-\frac{1}{2}}$ (β) $\left(\dfrac{1}{32}\right)^{-\frac{2}{3}}$ (γ) $\left(\dfrac{8}{216}\right)^{\frac{1}{3}}$ (δ) $\left(\sqrt[3]{\dfrac{8}{27}}\right)^{-2}$

4 Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $A = 4^{\frac{3}{8}} \cdot \sqrt[4]{2} + 9^{-\frac{1}{4}} \cdot 27^{\frac{1}{2}}$ είναι φυσικός αριθμός.

5 Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις (χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής)

(α) $2^{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{8}$ (β) $\sqrt[5]{64} \cdot 4^{\frac{2}{5}}$ (γ) $2^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{3}{2}} + 2^{\frac{5}{2}}$ (δ) $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{6}} \cdot \sqrt[3]{4}$

6 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις

(α) $x^{\frac{1}{2}} = 3,\ x \geq 0$ (β) $x^{\frac{2}{5}} = 2,\ x \geq 0$ (γ) $\sqrt[3]{x^2} \cdot x^{\frac{4}{3}} = 4,\ x \geq 0$ (δ) $(x-1)^{\frac{3}{5}} = \sqrt[10]{64},\ x \geq 1$

Β' ΟΜΑΔΑ

1 Αφού λύσετε τις εξισώσεις $\sqrt[3]{x^2} = 4$ και $x^{\frac{2}{3}} = 8,\ x \geq 0$, να εξηγήσετε γιατί δεν είναι ισοδύναμες (δηλαδή, δεν έχουν τις ίδιες ακριβώς λύσεις).

2 Να γράψετε χωρίς κλασματικούς εκθέτες τις παραστάσεις

(α) $\left(\alpha^{\frac{1}{2}} - \beta^{\frac{1}{2}}\right)\left(\alpha^{\frac{1}{2}} + \beta^{\frac{1}{2}}\right)$ (β) $\left(\alpha^{\frac{1}{2}} - \beta^{\frac{1}{2}}\right)^2$ (γ) $\alpha^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{1}{2}}\left(\alpha^{\frac{1}{2}} + \beta^{\frac{1}{2}}\right)$

3 Να αποδείξετε ότι για κάθε x,y≥0 ισχύουν οι ανισότητες

(α) $\left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 2(x+y)$ (β) $\left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 4\sqrt{xy}$

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

(α) $\alpha + \beta + 3\alpha^{\frac{1}{3}}\beta^{\frac{1}{3}}\left(\alpha^{\frac{1}{3}} + \beta^{\frac{1}{3}}\right)$

(β) $\left(\alpha^{\frac{1}{2}} - \alpha^{\frac{1}{4}} + 1\right)\left(\alpha^{\frac{1}{2}} + \alpha^{\frac{1}{4}} + 1\right)\left(\alpha - \alpha^{\frac{1}{2}} + 1\right)$

(γ) $\left(\alpha^{\frac{1}{2}} - 2\alpha^{\frac{1}{4}} + 1\right) : \left(\alpha^{\frac{1}{4}} - 2\alpha^{\frac{1}{8}} + 1\right)$

Υπόδειξη: Να θέσετε

(α) $\alpha^{\frac{1}{3}} = x,\ \beta^{\frac{1}{3}} = y$ (β) $\alpha^{\frac{1}{4}} = z$ (γ) $\alpha^{\frac{1}{8}} = t.$

1.1.8 Αλγεβρικές παραστάσεις με ρίζες

Θα μάθουμε:

- να χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό και τις ιδιότητες των ν-οστών ριζών και γενικότερα των δυνάμεων με ρητό εκθέτη στον υπολογισμό της τιμής αριθμητικών παραστάσεων.

Μετατροπή άρρητου παρονομαστή σε ρητό

Θα ήταν ενδιαφέρον (ακόμα και σαν ένα μαθηματικό παιχνίδι) να δίνεται ένα κλάσμα με άρρητο παρονομαστή και να αναζητούμε ένα άλλο κλάσμα ισοδύναμο με αυτό αλλά με ρητό παρονομαστή. Φυσικά, δεν πρόκειται για μαθηματικό παιχνίδι αλλά για μία διαδικασία ιδιαίτερα χρήσιμη όταν έχουμε να διαχειριστούμε τέτοια κλάσματα. Για παράδειγμα, με ποιο κλάσμα με ρητό παρονομαστή είναι ισοδύναμο το κλάσμα $\frac{1}{\sqrt{5}}$;

Γνωρίζουμε ότι αν πολλαπλασιάσουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή ενός κλάσματος με τον ίδιο αριθμό, παίρνουμε κλάσμα ισοδύναμο με αυτό, δηλαδή η τιμή του δεν αλλάζει. Επομένως, υπάρχει μία λογική βάση για να τεθεί μία τέτοια ερώτηση.

Αρκεί να βρούμε ένα, γιατί αν υπάρχει ένα υπάρχουν άπειρα. Στην περίπτωση αυτή η απάντηση είναι μάλλον προφανής και ο αριθμός με τον οποίο πρέπει να πολλαπλασιάσουμε τους όρους του κλάσματος $\frac{1}{\sqrt{5}}$ είναι το $\sqrt{5}$, αφού $\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{1\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Ας θεωρήσουμε, ένα ακόμα παράδειγμα. Με ποιο κλάσμα με ρητό παρονομαστή είναι ισοδύναμο το κλάσμα $\frac{1}{3-\sqrt{5}}$; Αυτό είναι πιο δύσκολο. Ωστόσο, ο στόχος παραμένει ο ίδιος. Να πολλαπλασιάσουμε αριθμητή και παρονομαστή με κατάλληλο αριθμό ώστε ο παρονομαστής να γίνει ρητός. Εδώ, ο κατάλληλος αριθμός είναι το $3+\sqrt{5}$, γιατί $\left(3-\sqrt{5}\right)\left(3+\sqrt{5}\right)=3^2-\left(\sqrt{5}\right)^2=9-5=4$. Επομένως,

$$\frac{1}{3-\sqrt{5}}=\frac{1\cdot\left(3+\sqrt{5}\right)}{\left(3-\sqrt{5}\right)\cdot\left(3+\sqrt{5}\right)}=\frac{3+\sqrt{5}}{3^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{3+\sqrt{5}}{9-5}=\frac{3+\sqrt{5}}{4}.$$

Πολλές φορές χρειάζεται να μετατρέψουμε ένα κλάσμα με άρρητο παρονομαστή σε ισοδύναμο με παρονομαστή ρητό. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται **μετατροπή άρρητου παρονομαστή σε ρητό.** Ο λόγος που εφαρμόζουμε αυτή τη διαδικασία είναι το γεγονός ότι ο παρονομαστής ενός κλάσματος εκφράζει «σε πόσα μέρη χωρίζεται ο αριθμητής». Άρα, θέλουμε, σε κάθε περίπτωση που είναι εφικτό, ο παρονομαστής να είναι φυσικός αριθμός. Στη συνέχεια, θα συστηματοποιήσουμε στο μέτρο του δυνατού τη διαδικασία μετατροπής άρρητου παρονομαστή σε ρητό και θα δώσουμε μερικά αντιπροσωπευτικά παραδείγματα. Για παράδειγμα,

(α) $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}=\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\alpha}}=\frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha}$ (Πολλαπλασιάζουμε τους όρους του κλάσματος με $\sqrt{\alpha}$)

Ακόμη, έχουμε

(β) $\frac{6}{\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$

$\frac{1}{\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}}=\frac{\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-\mu}}}{\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}\cdot\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-\mu}}}=\frac{\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-\mu}}}{\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-\mu+\mu}}}=\frac{\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-\mu}}}{\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}}}=\frac{\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-\mu}}}{\alpha}$ (Πολλαπλασιάζουμε τους όρους του κλάσματος με $\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-\mu}}$)

Επίσης,

(γ) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{2^3}}=\dfrac{\sqrt[5]{2^{5-3}}}{\sqrt[5]{2^3}\cdot\sqrt[5]{2^{5-3}}}=\dfrac{\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^3}\cdot\sqrt[5]{2^2}}=\dfrac{\sqrt[5]{4}}{\sqrt[5]{2^3\cdot 2^2}}=\dfrac{\sqrt[5]{4}}{\sqrt[5]{2^5}}=\dfrac{\sqrt[5]{4}}{2}$

$$\frac{\kappa}{\sqrt{\alpha}-\beta}=\frac{\kappa(\sqrt{\alpha}+\beta)}{(\sqrt{\alpha}-\beta)(\sqrt{\alpha}+\beta)}=\frac{\kappa(\sqrt{\alpha}+\beta)}{(\sqrt{\alpha})^2-\beta^2}=\frac{\kappa(\sqrt{\alpha}+\beta)}{\alpha-\beta^2}$$

$$\frac{\kappa}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}=\frac{\kappa(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}{(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}=\frac{\kappa(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}{(\sqrt{\alpha})^2-(\sqrt{\beta})^2}=\frac{\kappa(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}{\alpha-\beta}$$

i) Πολλαπλασιάζουμε και τους δύο όρους του κλάσματος με την παράσταση $\sqrt{\alpha}+\beta$ (αντίστοιχα με την $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$).

ii) Μετατρέπουμε τον παρονομαστή από άρρητο σε ρητό χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2-\beta^2$.

Γενικά, όταν έχουμε την άρρητη παράσταση $A=\alpha-\beta$, όπου α, β είναι πραγματικοί αριθμοί, (από τους οποίους ο ένας τουλάχιστον είναι ένας *άρρητος με μορφή τετραγωνικής ρίζας*) τότε πολλαπλασιάζουμε με την άρρητη παράσταση $B=\alpha+\beta$. Έτσι, από την ταυτότητα $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2-\beta^2$, οδηγούμαστε στη ρητή παράσταση $A\cdot B=\alpha^2-\beta^2$. Οι δύο άρρητες παραστάσεις A και B λέγονται **συζυγείς**.
Στα παραδείγματα (γ) παραπάνω, η παράσταση $\sqrt{\alpha}+\beta$ είναι η συζυγής της παράστασης $\sqrt{\alpha}-\beta$ και η παράσταση $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ είναι η συζυγής της παράστασης $\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}$.
Αν α, β είναι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί και κ, λ είναι ρητοί πραγματικοί αριθμοί, τότε στον πίνακα που ακολουθεί οι παραστάσεις A και B είναι συζυγείς.

A	*B*	*A B*
$\sqrt{\alpha}+\beta$	$\sqrt{\alpha}-\beta$	$(\sqrt{\alpha}-\beta)\cdot(\sqrt{\alpha}-\beta)=(\sqrt{\alpha})^2-\beta^2=\alpha-\beta^2$
$\alpha+\sqrt{\beta}$	$\alpha-\sqrt{\beta}$	$(\alpha+\sqrt{\beta})\cdot(\alpha-\sqrt{\beta})=(\alpha)^2-(\sqrt{\beta})^2=\alpha^2-\beta$
$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}$	$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})\cdot(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})=(\sqrt{\alpha})^2-(\sqrt{\beta})^2=\alpha-\beta$
$\kappa\sqrt{\alpha}+\lambda\sqrt{\beta}$	$\kappa\sqrt{\alpha}-\lambda\sqrt{\beta}$	$(\kappa\sqrt{\alpha}+\lambda\sqrt{\beta})\cdot(\kappa\sqrt{\alpha}-\lambda\sqrt{\beta})=(\kappa\sqrt{\alpha})^2-(\lambda\sqrt{\beta})^2=\kappa^2\alpha-\lambda^2\beta$

Παράδειγμα 1.1.8.1

Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

(α) $\sqrt{24}+\sqrt{32}-\sqrt{18}$ (β) $\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{192}$ (γ) $\dfrac{\sqrt[6]{4}\cdot\sqrt[3]{3}}{\sqrt[5]{6}}$ (δ) $\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[5]{9}:\sqrt[6]{9}$

Λύση

(α) Έχουμε

$$\sqrt{2}+\sqrt{32}-\sqrt{18}=\sqrt{2}+\sqrt{16\cdot 2}-\sqrt{9\cdot 2}=\sqrt{2}+\sqrt{16}\cdot\sqrt{2}-\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}==\sqrt{2}+4\sqrt{2}-3\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$

(β) Έχουμε

$$\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{192}=\sqrt[3]{8\cdot 3}-\sqrt[3]{27\cdot 3}+\sqrt[3]{64\cdot 3}=\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{64}\cdot\sqrt[3]{3}=2\sqrt[3]{3}-3\sqrt[3]{3}+4\sqrt[3]{3}=3\sqrt[3]{3}$$

(γ) Έχουμε

$$\frac{\sqrt[6]{4}\cdot\sqrt[3]{3}}{\sqrt[5]{6}}=\frac{\sqrt[30]{4^5}\cdot\sqrt[30]{3^{10}}}{\sqrt[30]{6^6}}==\frac{\sqrt[30]{2^{10}}\cdot\sqrt[30]{3^{10}}}{\sqrt[30]{6^6}}=\sqrt[30]{\frac{2^{10}\cdot 3^{10}}{6^6}}=\sqrt[30]{\frac{6^{10}}{6^6}}=\sqrt[30]{6^4}=\sqrt[1]{6^2}=\sqrt[15]{36}$$

(δ) Έχουμε

$$\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[5]{9}:\sqrt[6]{9}=\frac{\sqrt[30]{9^{10}}\cdot\sqrt[30]{9^6}}{\sqrt[30]{9^5}}=\frac{\sqrt[30]{9^{16}}}{\sqrt[30]{9^5}}=\sqrt[30]{9^{11}}=\sqrt[30]{3^{2\cdot 11}}=\sqrt[150]{3^{11}}$$

Παράδειγμα 1.1.8.2

Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

(α) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}\cdot\sqrt{18}$ (β) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{18}:\sqrt[4]{2}$ (γ) $\sqrt[4]{32}-\sqrt[4]{162}+\sqrt[4]{2}$ (δ) $\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[3]{30}:\sqrt[3]{150}$

Λύση

(α) Έχουμε

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}\cdot\sqrt{18}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{4\cdot 2}\cdot\sqrt{9\cdot 2}=\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}=3\left(\sqrt{2}\right)^2\sqrt{2}=3\cdot 2\sqrt{2}=6\sqrt{2}$$

(β) Έχουμε

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{18}:\sqrt[4]{2}=\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt[4]{18}:\sqrt[4]{2}\right)=\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt[4]{18:2}\right)=\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{9}=\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{3^2}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=3$$

(γ) Έχουμε

$$\sqrt[4]{32}-\sqrt[4]{162}+\sqrt[4]{2}=\sqrt[4]{16\cdot 2}-\sqrt[4]{81\cdot 2}+\sqrt[4]{2}=\sqrt[4]{2^4\cdot 2}-\sqrt[4]{3^4\cdot 2}+\sqrt[4]{2}==2\sqrt[4]{2}-3\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{2}=0$$

(δ) Έχουμε

$$\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[3]{30}\cdot\sqrt[3]{150}=\sqrt[3]{6\cdot 30\cdot 150}=\sqrt[3]{6\cdot(5\cdot 6)\cdot(5^2\cdot 6)}=\sqrt[3]{5^3\cdot 6^3}=\sqrt[3]{(5\cdot 6)^3}=\sqrt[3]{30^3}=30$$

Παράδειγμα 1.1.8.3

Να δείξετε ότι ο αριθμός $A=\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}-\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}$ είναι ακέραιος.

Λύση

Έχουμε

$$A=\frac{1}{\sqrt{5}+2}-\frac{1}{\sqrt{5}-2}=\frac{1\cdot\left(\sqrt{5}-2\right)}{\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{5}-2\right)}-\frac{1\cdot\left(\sqrt{5}+2\right)}{\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}+2\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{5}-2}{\left(\sqrt{5}\right)^2-2^2}-\frac{\sqrt{5}+2}{\left(\sqrt{5}\right)^2-2^2}=\frac{\sqrt{5}-2}{5-4}-\frac{\sqrt{5}+2}{5-4}=\sqrt{5}-2-\sqrt{5}-2=-4$$

Παράδειγμα 1.1.8.4

Να δείξετε ότι ο αριθμός $B=\sqrt{\frac{1}{\left(5+2\sqrt{6}\right)^2}}+\sqrt{\frac{1}{\left(5-2\sqrt{6}\right)^2}}$ είναι ακέραιος.

Λύση

Έχουμε

$$B=\sqrt{\frac{1}{\left(5+2\sqrt{6}\right)^2}}+\sqrt{\frac{1}{\left(5-2\sqrt{6}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{\left(5+2\sqrt{6}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{\left(5-2\sqrt{6}\right)^2}}$$

$$=\frac{1}{|5+2\sqrt{6}|}+\frac{1}{|5-2\sqrt{6}|}=\frac{1}{5+2\sqrt{6}}+\frac{1}{5-2\sqrt{6}}$$

$$=\frac{1\cdot\left(5-2\sqrt{6}\right)+1\cdot\left(5+2\sqrt{6}\right)}{\left(5+2\sqrt{6}\right)\cdot\left(5-2\sqrt{6}\right)}=\frac{5-2\sqrt{6}+5+2\sqrt{6}}{5^2-\left(2\sqrt{6}\right)^2}=\frac{10}{25-24}=10$$

Λάβαμε υπόψη ότι
$|5-2\sqrt{6}|=5-2\sqrt{6}$.
(Αποδείξτε το.)

Ασκήσεις - Δραστηριότητες

Α' ΟΜΑΔΑ

1 Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

(α) $\sqrt{8}-2\sqrt{32}+\sqrt{50}$ (β) $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{50}$ (γ) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[6]{32}$ (δ) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}:\sqrt[6]{32}$

2 Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

(α) $\sqrt{8}+\sqrt{32}-\sqrt{18}$ (β) $\sqrt[3]{375}-\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{81}$ (γ) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{9}:\sqrt[6]{27}$ (δ) $\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{5}:\sqrt[6]{125}$

3 Να μετατρέψετε τις παρακάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή

(α) $\frac{3}{\sqrt{2}-1}$ (β) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$ (γ) $\frac{4}{\sqrt{\sqrt{7}-\sqrt{3}}}$ (δ) $\frac{7}{5\sqrt{5}-3\sqrt{3}}$

Β' ΟΜΑΔΑ

1 Να υπολογίσετε τα παρακάτω αθροίσματα

(α) $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{12-\sqrt{2}}{2}$ (β) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}$ (γ) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ (δ) $\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$

2 Να δείξετε ότι οι αριθμοί $\frac{\sqrt{17}-\sqrt{13}}{2}$ και $\frac{2}{\sqrt{17}+\sqrt{13}}$ είναι ίσοι.

3 Να δείξετε ότι οι αριθμοί $\frac{\sqrt{18}-\sqrt{12}}{2}$ και $\frac{\sqrt{18}+\sqrt{12}}{3}$ είναι αντίστροφοι.

Ασκήσεις Β' Ομάδας Ενότητας 1.1.8

Σύνοψη Ενότητας 1.1 Πραγματικοί Αριθμοί

Σε αυτή την ενότητα μελετήσαμε το σύνολο των πραγματικών αριθμών και τις βασικές του ιδιότητες, την έννοια της διάταξης και της πυκνότητας, την απόλυτη τιμή και τις ιδιότητές της, καθώς και τις νιοστές ρίζες και τις δυνάμεις με ρητό εκθέτη, εφαρμόζοντας τα παραπάνω σε αλγεβρικές παραστάσεις.

ΘΕΜΑΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ 2

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ 2.1

Σύνολα

2.1.1 Εισαγωγή στα σύνολα

Θα μάθουμε:

- να αναγνωρίζουμε αν μία ιδιότητα ορίζει ένα σύνολο.

Η έννοια του συνόλου

Έχουμε κάνει μία σύντομη αναφορά στην έννοια του συνόλου. Ωστόσο, σε αυτή την ενότητα θα αναφερθούμε εκτενέστερα. Οι άνθρωποι, άλλοτε από ανάγκη και άλλοτε για χόμπι, συνηθίζουν να συλλέγουν διάφορα αντικείμενα, όπως π.χ. γραμματόσημα, νομίσματα, πίνακες ζωγραφικής, εφημερίδες, βιβλία, cd, κ.λπ. και να ταξινομούν τις συλλογές τους σε ομάδες σύμφωνα με κάποια κριτήρια που οι ίδιοι επιλέγουν. Για παράδειγμα, γραμματόσημα που προέρχονται από την ίδια χώρα, νομίσματα από διάφορες χώρες, πίνακες ανάλογα με το θέμα τους, cd ανάλογα με το είδος της μουσικής κ.λπ. Η ταξινόμηση των φυσικών αριθμών, επίσης, σε άρτιους και περιττούς ήταν ένα θέμα που απασχόλησε, τους ασχολούμενους με αυτούς, από την αρχαιότητα.

Συλλογές ή κατηγορίες ή ομάδες αντικειμένων, ομοειδών ή όχι, που μπορούμε με κάποιο τρόπο να τα ξεχωρίσουμε στα Μαθηματικά ονομάζονται **σύνολα**. Ωστόσο, η έννοια του συνόλου στα μαθηματικά είναι έννοια πρωταρχική και έτσι δεν είναι δυνατόν να ορισθεί. Μπορούμε όμως αντί ορισμού επεξηγηματικά να πούμε:

Η διατύπωση αυτή οφείλεται στον σπουδαίο μαθηματικό φιλόσοφο Cantor (1845–1918) και λέγεται «Ορισμός του Cantor».

Σύνολο ονομάζουμε κάθε συλλογή από αντικείμενα, τα οποία υπόκεινται στην αντίληψή μας είτε από την εμπειρία μας είτε από τη διανόησή μας, είναι καλά ορισμένα και διακρίνονται μεταξύ τους με σαφήνεια.

Η έννοια του συνόλου είναι αρχική στα μαθηματικά, όπως π.χ. και η έννοια του αριθμού, για αυτό και δεν μπορεί να οριστεί με τη χρήση απλούστερων εννοιών αλλά γίνεται αποδεκτή αξιωματικά. Δηλαδή, με τέτοιο τρόπο που τα στοιχεία του να μπορούν να αναγνωρίζονται με σιγουριά.

Για παράδειγμα, δεν μπορούμε να λέμε «το σύνολο των γραμμάτων της αλφαβήτου» χωρίς να προσδιορίζουμε τη γλώσσα στην οποία αναφερόμαστε. Μιλάμε για το ελληνικό αλφάβητο, για το αγγλικό ή για κάποιο άλλο. Στη μαθηματική γλώσσα αυτό το λέμε με τη φράση «ένα σύνολο πρέπει να είναι καλά ορισμένο». Αν πούμε «οι καλοί μαθητές της τάξης» αναφερόμαστε σε μία ομάδα μαθητών που δεν είναι «καλά ορισμένη», γιατί δεν γνωρίζουμε ούτε για ποια τάξη μιλάμε ούτε από ποιος είναι ο ελάχιστος βαθμός για ένα μαθητή για να θεωρείται «καλός». Επομένως, αυτή η ομάδα για τα μαθηματικά δεν αποτελεί σύνολο. Οι αριθμοί 1, 2 και 3 αποτελούν σύνολο. Το ίδιο και τα φωνήεντα της ελληνικής γλώσσας. Άρα, είναι σημαντικό να μπορεί να γίνεται αναγνώριση αν τα αντικείμενα μιας συλλογής είναι ή όχι «καλά ορισμένα» και «διακριτά» ώστε να αποτελούν σύνολο. Ένα δοσμένο αντικείμενο είτε είναι μέλος ενός συνόλου είτε όχι, ωστόσο, αν είναι, δεν μπορεί να εμφανίζεται «περισσότερες από μία φορές». Δεν υπάρχει σειρά γραφής στα μέλη ενός συνόλου. Ο απλούστερος τρόπος για να γράψουμε ένα σύνολο είναι να καταχωρήσουμε τα στοιχεία του μεταξύ αγκίστρων. Για παράδειγμα, το σύνολο $\left\{2,3,\frac{4}{5}\right\}$ είναι ένα σύνολο με ακριβώς τρία μέλη: τους ακέραιους αριθμούς 2 και 3 και το κλάσμα $\frac{4}{5}$. Δεν υπάρχουν άλλα αντικείμενα σε αυτό το σύνολο.

Για να συμβολίσουμε ένα σύνολο χρησιμοποιούμε ένα από τα κεφαλαία γράμματα του ελληνικού ή του λατινικού αλφαβήτου ενώ τα στοιχεία του συμβολίζονται με μικρά γράμματα.

Παραδείγματα συνόλων

- Το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$.
- Το σύνολο των φωνηέντων της ελληνικής αλφαβήτας.
- Το σύνολο των ρητών αριθμών $\mathbb{Q}$.

Ασκήσεις - Δραστηριότητες

Α' ΟΜΑΔΑ

1 Να βρείτε τα στοιχεία του συνόλου των θεών του Ολύμπου (Ελληνική Μυθολογία) *(Μπορείτε να τους αναζητήσετε στο wikipedia).*

2 Να βρείτε τα στοιχεία του συνόλου που περιλαμβάνει τα θαύματα του αρχαίου κόσμου *(Μπορείτε να τα αναζητήσετε στο wikipedia).*

3 Να βρείτε το πλήθος των στοιχείων των κρατών της βαλκανικής χερσονήσου *(Μπορείτε να τα αναζητήσετε στο wikipedia).*

4 Οι εκλογικοί κατάλογοι της Ελλάδας συνήθως περιλαμβάνουν διπλοεγγραφές, δηλαδή, ονόματα εκλογέων που είναι γραμμένα δύο ή και περισσότερες φορές (είτε από αμέλεια είτε από λάθος είτε για οποιονδήποτε άλλο λόγο). Διαθέτουμε ένα πρόγραμμα για υπολογιστή που μπορεί να χειρίζεται σύνο-

λα. Μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε; Αν ναι, γιατί; Αν όχι, τι πρέπει να κάνουμε για να το χρησιμοποιήσουμε. *(Υποθέστε ότι δεν υπάρχουν άνθρωποι με όλα τους τα στοιχεία ίδια.)*

5 Θεωρήστε το σύνολο που έχει ως στοιχεία τα γράμματα *α*, *β* και *γ*. Πόσα σύνολα μπορείτε να κατασκευάσετε με 1 τουλάχιστον στοιχείο του; Πόσα με 2 το πολύ στοιχεία του;

6 Να βρείτε τα στοιχεία του συνόλου των φυσικών αριθμών που είναι μικρότεροι από το 20 και διαιρούνται με το 3 και με το 4.

Β' ΟΜΑΔΑ

1 Πόσα σύνολα μπορείτε να κατασκευάσετε χρησιμοποιώντας τους αριθμούς 1, 2, 3 και 4; *Υπόδειξη: Δεν είναι απαραίτητο να τους χρησιμοποιείτε όλους κάθε φορά.*

2 Να βρείτε το σύνολο των αριθμών που είναι τετράγωνα φυσικών αριθμών και είναι μεγαλύτεροι από το 100 και μικρότεροι από το 1000.

3 Να βρείτε το σύνολο που περιλαμβάνει τους 5 πρώτους φυσικούς αριθμούς. (**Πρώτος** ονομάζεται κάθε φυσικός αριθμός που διαιρείται μόνο με τον εαυτό του και το 1. Το μηδέν και το ένα δεν θεωρούνται πρώτοι αριθμοί. Ο αριθμός 2 είναι ο μόνος άρτιος (ζυγός) πρώτος αριθμός. Όλοι οι άλλοι πρώτοι είναι περιττοί (μονοί). Ένας φυσικός αριθμός, ο οποίος δεν είναι πρώτος αριθμός ονομάζεται **σύνθετος αριθμός**. Το πρόβλημα της εύρεσης πρώτων αριθμών απασχόλησε από τους αρχαίους χρόνους τους μαθηματικούς. Ένας απλός τρόπος για την εύρεση πρώτων αριθμών είναι το ***κόσκινο του Ερατοσθένη***: Στο σύνολο των φυσικών αριθμών διαγράφουμε πρώτα τα πολλαπλάσια του 2, μετά διαγράφουμε τα πολλαπλάσια του επόμενου μη διαγραμμένου αριθμού κ.λπ. Οι αριθμοί που θα απομείνουν είναι όλοι πρώτοι.)

4 Να βρείτε το σύνολο που περιλαμβάνει όλα τα ζεύγη των φυσικών με στοιχεία μικρότερα του 8 που είναι **πρώτοι μεταξύ τους**, δηλαδή, έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη το 1.

5 Να βρείτε το σύνολο που περιλαμβάνει όλους τους φυσικούς αριθμούς που διαιρούνται με το 3 είναι μικρότεροι του 18 και δεν διαιρούνται με το 4 και το 5. Πόσα στοιχεία έχει το σύνολο που αποτελείται από τους αριθμούς που όταν διαιρούνται με το 4 αφήνουν υπόλοιπο 3, ενώ όταν διαιρούνται με το 8 αφήνουν υπόλοιπο 2;

6 Να δείξετε ότι το σύνολο που αποτελείται από τα πολλαπλάσια του 7 έχει το ίδιο πλήθος στοιχείων με το σύνολο των φυσικών αριθμών. *Υπόδειξη: Δεν χρειάζεται να κάνετε κάποια απόδειξη, απλά περιγράψτε τον τρόπο.*

2.1.2 Αναπαράσταση συνόλων

Θα μάθουμε:

- να αναπαριστούμε τα σύνολα με διάφορους τρόπους (αναγραφή, περιγραφή στοιχείων, διάγραμμα Venn).

Διαγράμματα Venn τριών συνόλων

Τα μέλη ενός συνόλου λέγονται **στοιχεία** του συνόλου.
Υπάρχουν δύο κύριοι τρόποι γραφής (αλλά και προσδιορισμού) ενός συνόλου.

- **Με αναγραφή των στοιχείων του**: Είναι ο πιο άμεσος τρόπος. Γράφουμε τα στοιχεία του συνόλου ένα – ένα μεταξύ δύο αγκίστρων (δημιουργούμε, δηλαδή, μία λίστα) και τα χωρίζουμε με κόμματα.

  π.χ. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $\Phi = \{\alpha, \varepsilon, \eta, \iota, o, \upsilon, \omega\}$, $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$

- **Με περιγραφή των στοιχείων του**: Γράφουμε πάλι μεταξύ αγκίστρων μία *χαρακτηριστική ιδιότητα* των στοιχείων του συνόλου.

Χαρακτηριστική ιδιότητα σημαίνει να καθορίζονται ακριβώς τα στοιχεία του συνόλου με βάση μόνο αυτή.

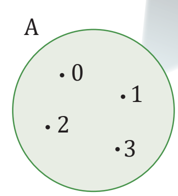
Συνήθως, όταν καθορίζουμε τα στοιχεία ενός συνόλου με περιγραφή γράφουμε μέσα σε άγκιστρα πρώτα ένα πιο μεγάλο σύνολο, του οποίου τα στοιχεία είναι αυτά του συνόλου που μας ενδιαφέρει, έπειτα, τοποθετούμε μία κατακόρυφη μπάρα και στη συνέχεια γράφουμε τη χαρακτηριστική ιδιότητα.
Για παράδειγμα:

- Το σύνολο $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0\}$ είναι το σύνολο των θετικών ακέραιων αριθμών.
- Το σύνολο $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2\kappa + 1, \kappa \in \mathbb{Z}\}$ είναι το σύνολο των περιττών ακέραιων.
- Το σύνολο $\Gamma = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0\}$ είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$.
- Το σύνολο $\Delta = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x < 100\}$ είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών από 1 έως και 99. Μπορούμε να το συμβολίσουμε και ως $\Delta = \{1, 2, ..., 99\}$.
- Το σύνολο $\Lambda = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4 = 0\}$ είναι το σύνολο των ριζών της εξίσωσης $x^2 - 4 = 0$, δηλαδή, $\Lambda = \{-2, 2\}$.

Πολλές φορές, ιδιαίτερα στην αμερικανική βιβλιογραφία, αντί για την μπάρα βάζουν άνω και κάτω τελεία. Για παράδειγμα, αν γράψουμε $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ ή $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ είναι το ίδιο.

- **Με διάγραμμα (Venn)**: Ένα διάγραμμα Venn είναι μία εικονογραφική αναπαράσταση στην οποία τα σύνολα αναπαρίστανται με κύκλους ή άλλες κλειστές καμπύλες.

Ένα διάγραμμα για το σύνολο $A = \{0, 1, 2, 3\}$ είναι αυτό που εικονίζεται στα δεξιά.



Εάν ένα στοιχείο α ανήκει σε ένα σύνολο A γράφουμε $\alpha \in A$, διαφορετικά γράφουμε $\alpha \notin A$. π.χ. Αν $B = \{1, 7, 8\}$, τότε $7 \in B$, αλλά $2 \notin B$.

John Venn (1834-1923)
Άγγλος φιλόσοφος, εμπνευστής των διαγραμμάτων που χρησιμοποιούνται σε πολλά επιστημονικά πεδία, συμπεριλαμβανομένης της θεωρίας συνόλων.

Ασκήσεις - Δραστηριότητες

Α' ΟΜΑΔΑ

1 Δίνεται το σύνολο $A = \{x \mid x$ είναι φυσικός αριθμός και $2 < x < 10\}$. Να βρείτε το σύνολο των τετραγώνων των στοιχείων του A.

2 Έστω A το σύνολο των πρώτων φυσικών αριθμών που είναι μικρότεροι από το 20. Βρείτε το σύνολο B των περιττών αριθμών που είναι μικρότεροι από το 20 και δεν περιέχονται στο A.

3 Αν $A = \{x \mid x = 2n - 1, n \in \mathbb{N}, 1 \le n \le 6\}$, αναπαραστήστε το A σε διάγραμμα Venn.

4 Αν $A = \{x \mid x = 3n, n \in \mathbb{Z}, -3 \le n \le 3\}$, αναπαραστήστε το A σε διάγραμμα Venn.

5 Γράψτε τα στοιχεία του συνόλου $K = \{x \mid x = 2^n, n \in \mathbb{N}, 1 \le n \le 5\}$ με αναγραφή και αναπαραστήστε τα σε ένα διάγραμμα Venn.

6 Να γράψετε με περιγραφή τα παρακάτω σύνολα

(α) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ (β) $B = \{-2, 0, 2, 4, 6, ..., 88\}$

Β' ΟΜΑΔΑ

1 Να γράψετε με περιγραφή τα παρακάτω σύνολα

(α) $\Gamma = \{1, 3, 5, 9, ...\}$ (β) $\Delta = \{1, 5, 9, 13, ...\}$

2 Να γράψετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα παρακάτω σύνολα

(α) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \le 10 \text{ και } 3 \mid x\}$ (β) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid \text{ο } x \text{ είναι πρώτος και } 2 \mid x\}$

(Ο συμβολισμός $\alpha \mid \beta$ σημαίνει ότι το α διαιρεί το β.)

3 Να γράψετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα παρακάτω σύνολα

(α) $\Gamma = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 4\}$ (β) $\Delta = \{x \in \mathbb{Z} : 10 \mid x \text{ και } x \mid 100\}$

4 Να γράψετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα σύνολα $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \le 1\}$ και $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^3 = x\}$. Τι παρατηρείτε;

5 Δίνονται τα σύνολα $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2n + 1, n \in \mathbb{N}\}$ και $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 4n + 1, n \in \mathbb{N}\}$.

(α) Δείξτε ότι υπάρχουν στοιχεία του ενός συνόλου που δεν ανήκουν στο άλλο.

(β) Δείξτε ότι όλα τα στοιχεία του ενός συνόλου είναι στοιχεία και του άλλου.

(γ) Δεδομένου ότι και τα δύο σύνολα έχουν άπειρο πλήθος στοιχείων (είναι σχεδόν προφανές, αλλά γιατί;) σε ποιο «παράξενο» συμπέρασμα οδηγήστε;

2.1.3 Τα σύμβολα $\in$ και $\notin$

Θα μάθουμε:

- να εξετάζουμε αν ένα αντικείμενο ανήκει ή όχι σε ένα σύνολο και να δηλώνουμε αυτή τη σχέση συμβολικά.

Ο συμβολισμός $x \in A$ σημαίνει ότι το αντικείμενο x είναι μέλος του συνόλου A.

Για παράδειγμα, το $2 \in \left\{2, 3, \frac{4}{5}\right\}$ είναι αληθές, αλλά το $6 \in \left\{2, 3, \frac{4}{5}\right\}$ είναι ψευδές. Στην τελευταία περίπτωση, μπορούμε να γράψουμε $6 \notin \left\{2, 3, \frac{4}{5}\right\}$.

Ο συμβολισμός $x \notin A$ σημαίνει ότι το x δεν είναι στοιχείο του A.

Ο αριθμός των στοιχείων σε ένα σύνολο A λέγεται **πληθάριθμος** (ή **πληθικός αριθμός**) του A. Ο πληθάριθμος του συνόλου $\left\{2, 3, \frac{4}{5}\right\}$ είναι 3.

Ο πληθάριθμος του συνόλου των ακέραιων $\mathbb{Z}$ είναι άπειρος.

Εξετάστε ως προς την αλήθεια τους ισχυρισμούς

$1 \in \mathbb{N}$, $\quad -2 \notin \mathbb{N}$, $\quad -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, $\quad \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, $\quad 0 \notin \mathbb{N}$, $\quad \pi \notin \mathbb{R}$

Τα σύνολα $A = \{1, 3, 5, ...\}$, $B = \{2, 4, 6, ...\}$ είναι άπειρα ενώ το $\Gamma = \{1, 4, 7, ..., 96\}$ δεν είναι. Πόσα στοιχεία έχει το Γ; (Εύκολο!)

Ένα σύνολο λέγεται **πεπερασμένο** αν ο πληθάριθμός του είναι ένας φυσικός. Αλλιώς, λέγεται **άπειρο** ή **απειροσύνολο**.

Το **κενό σύνολο**
Μπορεί ένα σύνολο να μην έχει κανένα στοιχείο.

Ορισμός

Ένα σύνολο χωρίς στοιχεία λέγεται **κενό** σύνολο.

Το κενό σύνολο μπορεί να συμβολίζεται με { }, αλλά είναι καλύτερα να χρησιμοποιήσουμε το ειδικό σύμβολο $\emptyset$ (δεν είναι το κεφαλαίο Φ). Ο πληθάριθμος του κενού συνόλου είναι μηδέν.

Για παράδειγμα,

- Τα σύνολα $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = -1\}$ και $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x + 1 = 0\}$ είναι κενά.
- Το σύνολο $\Gamma = \{x \in \mathbb{N} \mid (4x - 1)(x + 2)(x - 3) = 0\}$ δεν είναι κενό. Πόσα στοιχεία έχει; Πόσα θα είχε αν $x \in \mathbb{Z}$ και πόσα αν $x \in \mathbb{R}$;
- Το σύνολο $\Delta = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 = 2\}$ είναι κενό, ενώ το $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 2, x < 0\}$ δεν είναι.
- Το σύνολο $\{\emptyset\}$ δεν είναι κενό. Ούτε το $\{\{\ \}\}$ (γιατί;).

Ασκήσεις - Δραστηριότητες

Α' ΟΜΑΔΑ

1 Έστω το σύνολο $A = \{\{1\}, \{2\}, \{3,4\}\}$. Ελέγξτε εάν το $\{2\}$ ανήκει στο A. Το ίδιο και για το 2.

2 Αν $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2^n, n \in \mathbb{N}\}$ ελέγξτε εάν το 12 ανήκει στο A. Το ίδιο και για το 64.

3 Δίνεται το σύνολο $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x^3 - 4x^2 + x = 0\}$. Ελέγξτε αν το $2 \in A$. Το $1 \in A$; Ποια είναι τα άλλα στοιχεία του A;

4 Να θέσετε το σωστό σύμβολο στη θέση κάθε τετραγώνου ($\square$)

(α) $2 \square \{1, 2, 3\}$ (β) $\{2\} \square \{1, 2, 3\}$ (γ) $\{2\} \square \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ (δ) $2 \square \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$

5 Να θέσετε το σωστό σύμβολο στη θέση κάθε τετραγώνου ($\square$)

(α) $\emptyset \square \{1, 2, 3\}$ (β) $\{\emptyset\} \square \{1, 2, 3\}$ (γ) $\{\emptyset\} \square \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ (δ) $\{\{\emptyset\}\} \square \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$

Β' ΟΜΑΔΑ

1 Δίνεται το σύνολο $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 4x^3 - x = 0\}$ και $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 4x^3 - x = 0\}$. Εξετάστε αν τα A και B έχουν κοινά στοιχεία.

2 Να γράψετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα παρακάτω σύνολα $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x\,(|x|^3 - 1) = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^3 = x\}$ και $\Gamma = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-1)^2 + (x-2)^2 = 0\}$. Ποια από αυτά έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία;

3 Έστω το σύνολο $A = \{x \mid x = 4n + 2, n \in \mathbb{N}\}$. Ελέγξτε αν το 1024 ανήκει στο A. Το 514 ανήκει; Δείξτε ότι τα σύνολα $E = \{x \mid x = 2n, n \in \mathbb{N}\}$ και $F = \{z \mid z = x - y, x, y \in A\}$ έχουν τα ίδια στοιχεία.

4 Δίνονται τα σύνολα $A = \{x \mid x = 4\kappa + 3, \kappa = 1, 2, ...\}$ και $B = \{x \mid x = 6\lambda + 2, \lambda = 1, 2, ...\}$. Να αποδείξετε ότι τα σύνολα A και B δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο.

5 Δίνεται το σύνολο $A = \{x \mid x = 2n, n = 1, 2, ...\}$ και B το σύνολο των πρώτων αριθμών. Ελέγξτε αν το A και το B έχουν κοινά στοιχεία. Αν έχουν να βρείτε το πλήθος τους αν όχι εξηγήστε γιατί; Αν Γ είναι το σύνολο που δημιουργείται από τα στοιχεία του B προσθέτοντας σε καθένα το 1, υπάρχουν στοιχεία του Γ που δεν ανήκουν στο B; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

2.1.4 Σχέσεις και πράξεις μεταξύ συνόλων

Έξυπνοι φίλοι

Θα μάθουμε:

- να αναγνωρίζουμε και να δηλώνουμε σχέσεις και πράξεις μεταξύ συνόλων με χρήση διαφορετικών αναπαραστάσεων και λεκτικά με κατάλληλη χρήση των συνδέσμων «ή» και «και».

Ισότητα συνόλων

Τι σημαίνει δύο σύνολα να είναι *ίσα*;

- Τα σύνολα $A = \{1, 2\}$ και $B = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-1)(x-2) = 0\}$ είναι ίσα (γιατί;).
- Τα σύνολα $\Gamma = \{-3, 4\}$ και $B = \{x \in \mathbb{N} \mid (x+3)(x-4) = 0\}$ δεν είναι ίσα (γιατί;).
- Τα σύνολα $E = \{-1, -2\}$ και $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x+1)(x+2)(x+3) = 0\}$ δεν είναι ίσα (γιατί;), ωστόσο υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ τους (ποια είναι αυτή;).

Ορισμός

Δύο σύνολα είναι **ίσα** όταν έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία.

Σύνολα αριθμών

Για να αποδείξουμε ότι δύο σύνολα A και B είναι ίσα, δείχνουμε ότι κάθε στοιχείο του A είναι επίσης στοιχείο του B και αντίστροφα. Αν τα σύνολα A και B είναι ίσα, γράφουμε $A = B$.

Παράδειγμα 2.1.4.1

Τα ακόλουθα σύνολα είναι ίσα

$E = \{x \in \mathbb{Z} \mid$ ο x είναι άρτιος$\}$ και $F = \{z \in \mathbb{Z} \mid z = \alpha + \beta$, όπου α και β είναι περιττοί$\}$.

Λύση

Έστω ότι $x \in E$. Τότε, ο x είναι άρτιος, οπότε θα έχει τη (γενική) μορφή των άρτιων, δηλαδή, θα είναι $x = 2\kappa$ όπου κ είναι ένας ακέραιος. Προσθέτοντας και αφαιρώντας το 1 μπορούμε να γράψουμε

$$x = 2\kappa + 1 - 1 = (2\kappa + 1) + (-1) = \alpha + \beta,$$

όπου $\alpha = 2\kappa + 1$ και $\beta = -1$, δηλαδή οι α και β είναι και οι δύο περιττοί. Επομένως, ο x είναι το άθροισμα δύο περιττών, οπότε ανήκει στο σύνολο F.

Αντίστροφα, έστω $x \in F$. Τότε, υπάρχουν περιττοί α και β τέτοιοι ώστε $x = \alpha + \beta$. Επειδή οι α και β είναι περιττοί υπάρχουν ακέραιοι κ και λ τέτοιοι ώστε $\alpha = 2\kappa + 1$ και $\beta = 2\lambda + 1$. Επομένως,

$x = \alpha + \beta = (2\kappa + 1) + (2\lambda + 1) = 2\kappa + 2\lambda + 2 = 2(\kappa + \lambda + 1) = 2\mu$, δηλαδή ο x είναι άρτιος, και επομένως, $x \in E$.

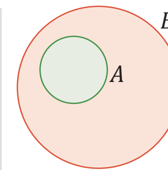
Αποδείξαμε ότι το τυχόν στοιχείο του E είναι και στοιχείο του F και το τυχόν στοιχείο του F είναι και στοιχείο του E. Άρα, $E = F$.

Μπορούμε να δώσουμε μία πιο σύντομη λύση, αρκεί να θυμηθούμε ότι το άθροισμα δύο περιττών είναι άρτιος, οπότε το σύνολο F είναι το σύνολο όλων των άρτιων όπως και το E. Άρα, $E = F$. Ωστόσο, ακολουθήσαμε, αυτή την «κουραστική» ίσως διαδικασία, γιατί αποτελεί σημαντική μέθοδο απόδειξης ότι δύο σύνολα είναι ίσα.

Σημειώνουμε ότι το Παράδειγμα 2.1.4.1 μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής:
Ένας ακέραιος είναι άρτιος αν και μόνο αν μπορεί να εκφραστεί ως το άθροισμα δύο περιττών αριθμών.

Ορισμός **Υποσύνολο**

Έστω ότι τα A και B είναι σύνολα. Λέμε ότι το A είναι ένα **υποσύνολο** του B αν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B. Ο συμβολισμός $A \subseteq B$ σημαίνει ότι το A είναι υποσύνολο του B.



- Αν $A = \{1, 2, 3\}$ και $B = \{0, 1, 2, 3\}$, τότε $A \subseteq B$.
- $\mathbb{N}^* \subseteq \mathbb{N}$ (Κάντε ένα διάγραμμα Venn για το $\mathbb{N}^*$ και το $\mathbb{N}$).
- Αν $A = \{1, 2, 3\}$ και $B = \{1, 2, 3\}$, τότε $A \subseteq B$.
- Κάθε σύνολο είναι υποσύνολο ενός συνόλου με τα ίδια ακριβώς στοιχεία, δηλαδή, του εαυτού του.

Άμεσες συνέπειες του ορισμού είναι οι ακόλουθες ιδιότητες:
i) $A \subseteq A$ για κάθε σύνολο A.
ii) Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$, τότε $A = B$.
iii) Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma$, τότε $A \subseteq \Gamma$.

Ορισμός

Ένα σύνολο A λέγεται **γνήσιο υποσύνολο** ενός συνόλου B όταν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B και το A δεν είναι ίσο με το B ($A \neq B$). Τότε γράφουμε $A \subset B$.

Είναι πολύ εύκολο να επιβεβαιώσετε ότι οι ιδιότητες αυτές ισχύουν. *(Προτείνουμε να χρησιμοποιήσετε διαγράμματα Venn.)*

Αν θέλουμε να αποκλείσουμε την ισότητα των δύο συνόλων, στην περίπτωση που το A είναι υποσύνολο του B μπορούμε να πούμε ότι το A είναι **γνήσιο** υποσύνολο του B.

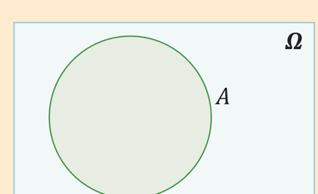
- Αν $A = \{1, 2, 3\}$ και $B = \{0, 1, 2, 3\}$, τότε $A \subset B$.
  (Μπορούμε να γράψουμε και $A \subseteq B$ αν μας ενδιαφέρει αν το A είναι υποσύνολο του B και δεν μας ενδιαφέρει αν είναι γνήσιο υποσύνολό του.)
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
  *(Να κάνετε ένα διάγραμμα και να γεμίσετε με ένα χρώμα το σύνολο των άρρητων.
  Στη συνέχεια, να σημειώσετε το 0 με ένα διαφορετικό χρώμα και να γεμίσετε το $\mathbb{N}^*$ με άλλο χρώμα.
  Τέλος, να κάνετε ένα νέο περίγραμμα για το $\mathbb{N}$.)*
- Το κενό σύνολο είναι υποσύνολο κάθε συνόλου.

Οι σύνδεσμοι *και, ή, και όχι*

Βασικό σύνολο

Κάθε φορά που εργαζόμαστε με σύνολα, τα σύνολα αυτά θεωρούνται υποσύνολα ενός συνόλου που λέγεται **βασικό** σύνολο και συμβολίζεται με Ω. Για παράδειγμα, τα σύνολα $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{Q}$ είναι υποσύνολα του βασικού συνόλου $\Omega = \mathbb{R}$.

Σε μία εποπτική παρουσίαση των συνόλων και των μεταξύ τους σχέσεων με διαγράμματα Venn, το βασικό σύνολο συμβολίζεται με το εσωτερικό ενός ορθογωνίου, ενώ κάθε υποσύνολο ενός βασικού συνόλου παριστάνεται με το εσωτερικό μιας κλειστής καμπύλης (όπως, άλλωστε έχουμε προαναφέρει) που περιέχεται στο εσωτερικό του ορθογωνίου.



Πράξεις με σύνολα

Έστω $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ένα βασικό σύνολο και τα υποσύνολά του $A = \{1, 2, 3, 4\}$ και $B = \{3, 4, 5, 6\}$.

Σχηματίζουμε:

Το σύνολο $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ που έχει ως στοιχεία τα κοινά και τα μη κοινά στοιχεία των A και B.

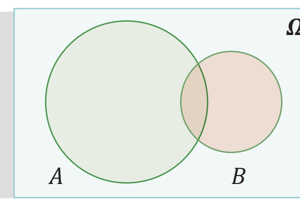
Το σύνολο $\{3, 4\}$ που αποτελείται από στοιχεία που ανήκουν συγχρόνως και στο A και στο B.

Τα σύνολα αυτά είναι πολύ σημαντικά στη μελέτη των συνόλων και γι' αυτό θα τους δώσουμε ειδικά ονόματα και συμβολισμούς.

Ορισμοί

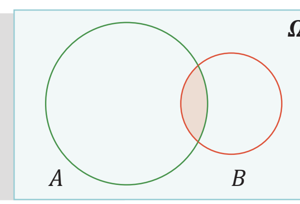
Ένωση δύο υποσυνόλων A, B ενός βασικού συνόλου Ω λέγεται το σύνολο των στοιχείων του Ω που ανήκουν τουλάχιστον σε ένα από τα σύνολα A και B και συμβολίζεται με $A \cup B$. Δηλαδή, είναι

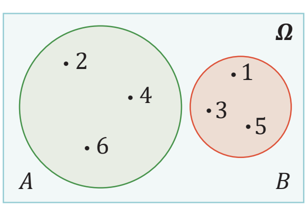
$$A \cup B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ ή } x \in B\}$$



Τομή δύο υποσυνόλων A, B ενός βασικού συνόλου Ω λέγεται το σύνολο των στοιχείων του Ω που ανήκουν και στα δύο σύνολα A, B και συμβολίζεται με $A \cap B$. Δηλαδή, είναι

$$A \cap B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ και } x \in B\}$$





Στην περίπτωση που δύο σύνολα A και B δεν έχουν κοινά στοιχεία, δηλαδή όταν $A \cap B = \emptyset$, τα δύο σύνολα λέγονται **ξένα** μεταξύ τους.

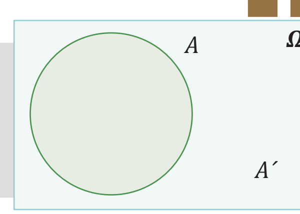
Δεν είναι απαραίτητο να αναφερόμαστε σε κάποιο βασικό σύνολο για να ορίσουμε την ένωση και την τομή δύο συνόλων.

Προσέξτε τη χρήση του ή και του και στους ορισμούς της ένωσης και της τομής δύο συνόλων.

Μπορούμε να μιλάμε και για την ένωση και για την τομή περισσοτέρων των δύο συνόλων. (Μας ενδιαφέρουν, ωστόσο, ενώσεις και τομές μόνο πεπερασμένου πλήθους συνόλων.)

Ορισμός

Συμπλήρωμα ενός υποσυνόλου A ενός βασικού συνόλου Ω λέγεται το σύνολο των στοιχείων του Ω που δεν ανήκουν στο A και συμβολίζεται με A' (ή A^c ή $\Omega - A$ ή και $\Omega \setminus A$).



Για παράδειγμα,

- Το συμπλήρωμα του $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ως προς βασικό σύνολο το $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ είναι το σύνολο $A' = \{0, 5, 6, 7, 8, 9\}$, ενώ ως προς βασικό σύνολο το $\Omega_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ είναι το σύνολο $A_1' = \{0, 5, 6\}$.
- Το συμπλήρωμα του συνόλου των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ ως προς το σύνολο των ακέραιων $\mathbb{Z}$ είναι οι αρνητικοί ακέραιοι, $\mathbb{Z}^- = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 0\}$.
- Το συμπλήρωμα του συνόλου των ρητών $\mathbb{Q}$ ως προς το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ είναι οι άρρητοι $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.
- Το συμπλήρωμα του συμπληρώματος του A είναι το ίδιο το A, $(A')' = A$.

Διατεταγμένο ζεύγος- Καρτεσιανές συντεταγμένες

Ασκήσεις - Δραστηριότητες

Α' ΟΜΑΔΑ

1 Να δείξετε ότι τα σύνολα $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 1\}$ και $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^3 = x\}$ είναι ίσα.

2 Να προσδιοριστούν τα λ και μ ώστε τα σύνολα $A = \{6, \lambda^3 - \lambda\}$ και $B = \{6, 1 - \mu + \lambda^3 - \lambda\}$ να ορίζονται και να είναι ίσα.

3 Να βρείτε τον πληθάριθμο (δηλαδή, το πλήθος των στοιχείων) των παρακάτω συνόλων

(α) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 10\}$ (β) $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid 1 \leq x^2 \leq 2\}$

4 Να βρείτε τον πληθάριθμο των παρακάτω συνόλων

(α) $\Gamma = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x^2 \leq 2\}$ (β) $\Delta = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$.

5 Δίνονται τα σύνολα $A = \{x | x$ περιττός αριθμός και $1 \leq x \leq 10\}$ και $B = \{x \mid x$ πρώτος αριθμός και $1 \leq x \leq 10\}$. Να υπολογίσετε το πλήθος των στοιχείων των συνόλων $A \cup B$, $A \cap B$ και του B' αν θεωρήσουμε ως βασικό σύνολο το $A \cup \{2\}$.

6 Δίνονται τα σύνολα $\Gamma = \{x \mid x$ πολλαπλάσιο του 3 και $1 \leq x \leq 20\}$ και $\Delta = \{x \mid x$ πρώτος αριθμός και $1 \leq x \leq 20\}$. Να υπολογίσετε το πλήθος των στοιχείων των συνόλων $\Gamma \cup \Delta$, $\Gamma \cap \Delta$ και του Γ' αν θεωρήσουμε ως βασικό σύνολο το $\{x \mid 1 \leq x \leq 20\}$.

Β' ΟΜΑΔΑ

1 Έστω E το σύνολο των άρτιων φυσικών και P το σύνολο των πρώτων φυσικών. Να βρείτε το σύνολο $E \cap P$ και να προσδιορίσετε το σύνολο P' αν θεωρήσουμε ως βασικό σύνολο το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$.

2 Να βρείτε την ένωση και την τομή των συνόλων $A = \{x, y \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 0\}$ και $B = \{x, y \in \mathbb{R} \mid |x| + |y| \neq 0\}$.

3 Για τις περιπτώσεις που ακολουθούν, τα x και y αναφέρονται σε πραγματικούς αριθμούς. Να βρεθεί η σχέση των συνόλων A και B σε καθεμία περίπτωση

(α) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 > 0\}$ και $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0$ ή $x < 0\}$ (β) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 0\}$ και $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 0\}$

4 Ο Hardy (1877-1947) (https://en.wikipedia.org/wiki/G._H._Hardy) ήταν ένας διάσημος Βρετανός μαθηματικός και γνωστός για τα επιτεύγματά του στη θεωρία αριθμών και στην ανάλυση. Αλλά είναι ίσως ακόμη περισσότερο γνωστός για την υιοθέτηση της αυτοδίδακτης Ινδής μαθηματικής ιδιοφυΐας, Srinivasa Ramanujan (1887-1920) (https://en.wikipedia.org/wiki/Srinivasa_Ramanujan). Ο Hardy γράφει στα απομνημονεύματά του: «Θυμάμαι πήγαινα να επισκεφτώ τον Ramanujan στο Putney επειδή ήταν άρρωστος. Είχα πάρει ένα ταξί με νούμερο 1729 και σχολίασα πως ο αριθμός αυτός μου φαινόταν αρκετά άσχημος ώστε να μην αποτελούσε κάποιον άσχημο οιωνό. «Όχι», μου απάντησε, «είναι ένας πολύ ενδιαφέρον αριθμός, είναι ο μικρότερος αριθμός που μπορεί να εκφραστεί ως το άθροισμα δύο θετικών αλγεβρικών κύβων με δύο διαφορετικούς τρόπους. Βρείτε το σύνολο των αριθμών αυτών σε κάθε περίπτωση.

Ασκήσεις Β' Ομάδας Ενότητας 2.1.4

Η γενίκευση αυτής της ιδέας οδήγησε στην ιδέα των αριθμών "ταξί", που είναι οι αριθμοί που συμβολίζονται, Ta(n) ή Taxicab(n), και ορίζονται ως εξής: Ο μικρότερος αριθμός ο οποίος μπορεί να εκφραστεί ως το άθροισμα δύο θετικών αλγεβρικών κύβων, με n διαφορετικούς τρόπους.

Σύνοψη Ενότητας 2.1 Σύνολα

Σε αυτή την ενότητα γνωρίσαμε την έννοια του συνόλου και τους τρόπους αναπαράστασής του, μάθαμε τη χρήση των συμβόλων $\in$ και $\notin$ για την έκφραση της συμμετοχής ή μη ενός στοιχείου σε σύνολο και μελετήσαμε βασικές σχέσεις και πράξεις μεταξύ συνόλων όπως η ένωση, η τομή, η διαφορά και το συμπλήρωμα.

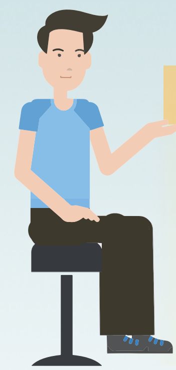
ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ 2.2

Αλγεβρικές παραστάσεις

2.2.1 Αξιοσημείωτες ταυτότητες

Θα μάθουμε:

- να αποδεικνύουμε τις ταυτότητες που σχετίζονται με τις παραστάσεις $(\alpha \pm \beta)^3$ και $\alpha^3 \pm \beta^3$.



Επαναλήψεις – Συμπληρώσεις

Η έννοια της ταυτότητας είναι γνωστή από το Γυμνάσιο. Ωστόσο, στην ενότητα αυτή θα επανέλθουμε και θα μελετήσουμε κάποιες ταυτότητες που είναι ιδιαίτερα χρήσιμες και θα παρουσιάσουμε κάποιες πολύ βασικές εφαρμογές τους.

Ορισμός

Ονομάζουμε **ταυτότητα** κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για όλες τις (επιτρεπτές) τιμές των μεταβλητών αυτών.

Για παράδειγμα, η ισότητα $z(x+y) = z \cdot x + z \cdot y$ είναι ταυτότητα, γιατί αληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών, δηλαδή, για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z.

Στη συνέχεια ακολουθούν οι πιο γνωστές και πιο συχνά εμφανιζόμενες ταυτότητες οι οποίες αναφέρονται και ως **αξιοσημείωτες ταυτότητες.**

1. $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ *(τετράγωνο αθροίσματος 2 όρων)*
2. $(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$ *(τετράγωνο διαφοράς 2 όρων)*
3. $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta) = \alpha^2 - \beta^2$ *(διαφορά 2 τετραγώνων)*
4. $(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$ *(κύβος αθροίσματος 2 όρων)*
5. $(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$ *(κύβος διαφοράς 2 όρων)*
6. $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$ *(άθροισμα 2 κύβων)*
7. $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha-\beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$ *(διαφορά 2 κύβων)*
8. $(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha$ *(τετράγωνο αθροίσματος 3 όρων)*

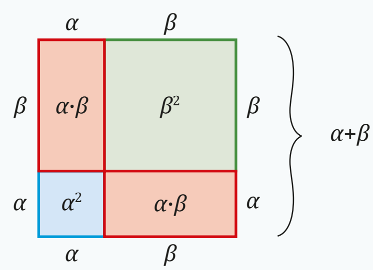
Οι παραστάσεις που μπορούν να λάβουν τη μορφή $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ ή την $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$ λέγονται **τέλεια τετράγωνα** (ή αναπτύγματα τέλειων τετραγώνων) και εκείνες που μπορούν να λάβουν τη μορφή $\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$ ή την $\alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$ λέγονται **τέλειοι κύβοι** (ή αναπτύγματα τέλειων κύβων).

Η απόδειξη των παραπάνω ταυτοτήτων είναι τετριμμένη και γίνεται με την εκτέλεση των πράξεων είτε στο α' μέλος (το αριστερό μέλος της ισότητας) είτε στο β' μέλος (το δεξί μέλος της ισότητας).

Ενδεικτικά για τις ταυτότητες 1, 4, 6 και 8, έχουμε

1. $$\begin{aligned}(\alpha+\beta)^2 &= (\alpha+\beta)(\alpha+\beta)\\ &= \alpha^2+\alpha\beta+\alpha\beta+\beta^2\\ &= \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2\end{aligned}$$

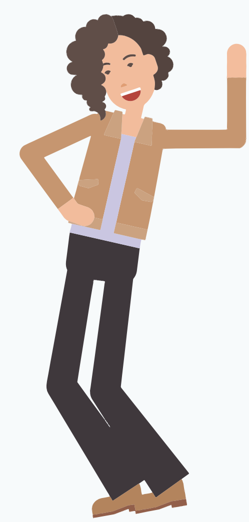
Η ταυτότητα $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ επιδέχεται την ακόλουθη γεωμετρική ερμηνεία. (Επιβεβαιώστε το.)



4. $$\begin{aligned}(\alpha+\beta)^3 &= (\alpha+\beta)(\alpha+\beta)^2\\ &= (\alpha+\beta)(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)\\ &= \alpha^3+2\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta\alpha^2+2\alpha\beta^2+\beta^3\\ &= \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3\end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned}(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2) &= \alpha^3-\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta\alpha^2-\alpha\beta^2+\beta^3\\ &= \alpha^3-\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\alpha^2\beta-\alpha\beta^2+\beta^3\\ &= \alpha^3+\beta^3\end{aligned}$$

8. $$\begin{aligned}(\alpha+\beta+\gamma)^2 &= [(\alpha+\beta)+\gamma]^2\\ &= (\alpha+\beta)^2+2(\alpha+\beta)\,\gamma+\gamma^2\\ &= \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2+2\alpha\gamma+2\beta\gamma+\gamma^2\\ &= \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha\end{aligned}$$



Παράδειγμα 2.2.1.1

Δίνεται η παράσταση

$$A=\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2-\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)^2,\ \alpha\neq 0$$

(α) Να δείξετε ότι η παράσταση A είναι ανεξάρτητη του α.

(β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$B=\left(\frac{2024}{2023}+\frac{2023}{2024}\right)^2-\left(\frac{2024}{2023}-\frac{2023}{2024}\right)^2$$

Λύση

(α) Έχουμε

$$\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2-\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)^2=\left(\alpha^2+2\cdot\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}+\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2\right)-\left(\alpha^2-2\cdot\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}+\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2\right)=\alpha^2+2+\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2-\alpha^2+2-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2=4$$

(β) Παρατηρούμε ότι η παράσταση B προκύπτει από την A για $\alpha=\dfrac{2024}{2023}$ και επειδή, $A=4$ για κάθε $\alpha\neq 0$ έπεται ότι $B=4$.

Παράδειγμα 2.2.1.2

Να υπολογίσετε την τιμή καθεμιάς παράστασης με σύντομο τρόπο και χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής

(α) 1002^2 (β) 999^2 (γ) $995\cdot 1005$ (δ) $\dfrac{2{,}19^2-0{,}83^2}{1{,}24^2-0{,}12^2}$

Λύση

Έχουμε

(α) $1002^2=(1000+2)^2=1000^2+2\cdot 1000\cdot 2+2^2=1000000+4000+4=1004004$

(β) $999^2=(1000-1)^2=1000^2-2\cdot 1000\cdot 1+1^2=1000000-2000+1=998001$

(γ) $995\cdot 1005=(1000-5)(1000+5)=1000^2-5^2=1000000-25=999975$

(δ) $\dfrac{2{,}19^2-0{,}83^2}{1{,}24^2-0{,}12^2}=\dfrac{(2{,}19-0{,}83)(2{,}19+0{,}83)}{(1{,}24-0{,}12)(1{,}24+0{,}12)}=\dfrac{1{,}36\cdot 3{,}02}{1{,}12\cdot 1{,}36}=\dfrac{3{,}02}{1{,}12}=\dfrac{151}{56}$

Παράδειγμα 2.2.1.3

Αν $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=3$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων $\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}$ και $\alpha^3+\dfrac{1}{\alpha^3}$.

Λύση

Αφού ισχύει $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=3$ έχουμε

$$\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2=3^2$$

$$\alpha^2+2\cdot\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}=9$$

$$\alpha^2+2+\frac{1}{\alpha^2}=9$$

$$\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}=9-2$$

$$\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}=7$$

Όμοια

$$\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^3=3^3$$

$$\alpha^3+3\cdot\alpha^2\cdot\frac{1}{\alpha}+3\cdot\alpha\cdot\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^3}=27$$

$$\alpha^3+3\alpha+3\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^3}=27$$

$$\alpha^3+3\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)+\frac{1}{\alpha^3}=27$$

$$\alpha^3+3\cdot 3+\frac{1}{\alpha^3}=27$$

$$\alpha^3+9+\frac{1}{\alpha^3}=27$$

$$\alpha^3+\frac{1}{\alpha^3}=27-9$$

$$\alpha^3+\frac{1}{\alpha^3}=18$$

Χρήσιμες Ταυτότητες Ενότητας 2.2.1

Ασκήσεις - Δραστηριότητες

Α΄ ΟΜΑΔΑ

1 Αν $\frac{\alpha}{x} = \frac{\beta}{y} \neq 0$, να δειχθεί ότι $(\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) = (\alpha x + \beta y)^2$. *(Υπόδειξη: $\frac{\alpha}{x} = \frac{\beta}{y} = \lambda$ κ.λπ.)*

2 Αν $\frac{\alpha}{y-\omega} = \frac{\beta}{\omega-x} = \frac{\gamma}{z-y}$, να δειχθεί ότι $\alpha(y + \omega) + \beta(\omega + x) + \gamma(x + y) = 0$.

3 Αν $4x(x-y) + y^2 = 0$, να βρεθεί ο λόγος $\frac{x}{y}$ καθώς και η τιμή του κλάσματος $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

4 Αν $x + y = \sqrt{2}$ και $x^3 + y^3 = 2\sqrt{2}$, υπολογίστε το xy και τους x, y.

5 Αν $x - y = \sqrt{3}$ και $(xy)^2 = 4(xy - 1)$, υπολογίστε τα $x^2 + y^2$ και $x^3 + y^3$.

6 Αν $x - y = 1$ και $x^2 + y^2 = 4$, να βρεθεί η αριθμητική τιμή της παράστασης $A = x^3 - y^3 + (x + y)^2$.

7 Αν $xyz = x + y + z \neq 0$ τότε $\frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} = xy + yz + zx - 3$. *(Υπόδειξη: Δείξτε πρώτα ότι $\frac{x+y}{z} = xy - 1$ κ.λπ.)*

Β΄ ΟΜΑΔΑ

1 Αν $x + y + z = 1$ και $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $xy + yz + zx$.

2 Αν $\alpha = \frac{x^2+1}{2}$, $\beta = x$ και $\gamma = \frac{x^2-1}{2}$, $x > 0$, να αποδείξετε ότι $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$. (Οι αριθμοί αυτοί λέγονται **ορθογώνιες τριάδες**.)

3 Αν $\alpha x = \beta y = \gamma z$, δείξτε ότι $\frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{xz} + \frac{z^2}{xy} = \frac{\beta\gamma}{\alpha^2} + \frac{\alpha\gamma}{\beta^2} + \frac{\alpha\beta}{\gamma^2}$. *(Υπόδειξη: Θέτουμε $\alpha x = \beta y = \gamma z = \lambda$ κ.λπ.)*

(i) Να δειχθεί ότι $(\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) = (\alpha x + \beta y)^2 + (\alpha y - \beta x)^2$.

(ii) Να γραφεί ο αριθμός $13 \cdot 41$ ως άθροισμα τετραγώνων ακέραιων αριθμών.

Ασκήσεις Β' Ομάδας Ενότητας 2.2.1

4 Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ διαδοχικοί φυσικοί με τη σειρά που δίνονται, να αποδείξετε ότι

(i) $\beta\gamma - \alpha\delta = 2$,

(ii) $\beta\delta - \alpha\gamma$ περιττός,

(iii) $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ άρτιος αλλά όχι πολλαπλάσιο του 4.

5 Αν α, β, γ μήκη πλευρών τριγώνου και $\alpha + \beta + \gamma = 1$, δείξτε ότι $2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) < 1$.
(Υπόδειξη: Είναι $1 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 \Leftrightarrow 2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) < (\alpha + \beta + \gamma)^2$ κ.λπ.)

6 (i) Αποδείξτε ότι $(x - y)^2 + 4xy = (x + y)^2$.

(ii) Από όλα τα ορθογώνια με το ίδιο εμβαδόν, ποιο έχει την ελάχιστη περίμετρο; (*Υπόδειξη: Υποθέστε ότι οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι x και y και χρησιμοποιήστε το (i).)*

7 Αν $\alpha^2 + \beta^2 + 5 = 2(2\alpha + \beta)$, να λυθεί η ανίσωση $\frac{(\alpha+1)x}{3} < \frac{(\beta-1)x}{4} + \frac{2x+1}{6}$. *(Υπόδειξη: Γράψτε το $5 = 4 + 1$ κ.λπ.)*

2.2.2 Παραγοντοποίηση – Μετασχηματισμός αλγεβρικών παραστάσεων

Θα μάθουμε:

- να χρησιμοποιούμε τις ταυτότητες σε συνδυασμό με τις ιδιότητες των ν-οστών ριζών και γενικότερα των δυνάμεων με ρητό εκθέτη στο μετασχηματισμό αλγεβρικών παραστάσεων.

Επαναλήψεις – Συμπληρώσεις

Υπενθυμίζουμε ότι, **παραγοντοποίηση** λέγεται η μετατροπή μιας αλγεβρικής παράστασης σε μία άλλη ισοδύναμη με αυτή που έχει τη μορφή γινομένου. Η παραγοντοποίηση είναι μία πολύ βασική διαδικασία για τα μαθηματικά, ωστόσο κάποιες φορές είναι δύσκολο να παραγοντοποιηθεί μία παράσταση. Βέβαια, αυτό αποτελεί και μία πρόκληση. Όταν η παράσταση δεν επιδέχεται περαιτέρω παραγοντοποίηση, θα λέμε ότι έχει αναλυθεί σε **γινόμενο πρώτων παραγόντων**.

Η παράσταση $6x^2-12x$ γράφεται ως γινόμενο με περισσότερους από έναν τρόπους.
Για παράδειγμα,
$6x^2 - 12x = 2(3x^2 - 6x)$
$6x^2 - 12x = 2x(3x - 6)$
$6x^2 - 12x = 3x(2x - 4)$
$6x^2 - 12x = 6(x^2 - 2x)$
$6x^2 - 12x = 6x(x - 2)$

Στο εξής, όταν λέμε ότι παραγοντοποιούμε μία παράσταση θα εννοούμε ότι την αναλύουμε *σε γινόμενο πρώτων παραγόντων*.

Η μόνη απάντηση που δεν επιδέχεται περαιτέρω παραγοντοποίηση είναι η τελευταία και αυτή είναι που μας ενδιαφέρει. Στη συνέχεια υπενθυμίζουμε τις βασικές περιπτώσεις παραγοντοποίησης.

Βασικές περιπτώσεις παραγοντοποίησης

1. Κοινός παράγοντας

Για να παραγοντοποιήσουμε μία παράσταση της οποίας οι όροι έχουν κοινό παράγοντα, χρησιμοποιούμε την επιμεριστική ιδιότητα για την εξαγωγή του.

Η εξαγωγή κοινού παράγοντα βασίζεται στην επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση, αρκεί να την γράψουμε από το β' μέλος προς το α': $\kappa\alpha+\kappa\beta=\kappa(\alpha+\beta)$.

Για παράδειγμα,
- $3\alpha - 3\beta + 3\gamma = 3(\alpha - \beta + \gamma)$
- $6x^2 - 2x = 2x \cdot 3x - 2x \cdot 1 = 2x(3x - 1)$
- $\alpha(x + y) - x - y = \alpha(x + y) - 1 \cdot (x + y) = (x + y)(\alpha - 1)$
- $(\alpha - \beta)x + (\beta - \alpha)y = (\alpha - \beta)x - (\alpha - \beta)y = (\alpha - \beta)(x - y)$

2. Ομαδοποίηση

Για να παραγοντοποιήσουμε μία παράσταση με ομαδοποίηση:
(1) Δεν πρέπει να έχουν κοινό παράγοντα όλοι οι όροι της παράστασης.
(2) Πρέπει να μπορούμε να σχηματίσουμε ομάδες ώστε:

Η ομαδοποίηση βασίζεται στην εξαγωγή κοινού παράγοντα, ωστόσο, πρέπει πρώτα να «ομαδοποιήσουμε» κατάλληλα τους όρους της παράστασης, ώστε να προκύψει ένας κοινός παράγοντας σε κάθε ομάδα, ο οποίος να είναι κοινός και στην επομένη φάση. Αν αυτό δεν συμβεί, αλλάζουμε τον τρόπο της ομαδοποίησης.

i. Σε κάθε ομάδα που σχηματίζεται να υπάρχει κοινός παράγοντας.
ii. Οι όροι που προκύπτουν, μετά την εξαγωγή του κοινού παράγοντα της κάθε ομάδας, να έχουν κοινό παράγοντα.

Για παράδειγμα,
- $\kappa x + \kappa y + \lambda x + \lambda y = \kappa(x + y) + \lambda(x + y) = (x + y)(\kappa + \lambda)$
- $\alpha x - \alpha y + \beta x - \beta y = \alpha(x - y) + \beta(x - y) = (x - y)(\alpha + \beta)$
- $\alpha^2 + \alpha\beta + \alpha + \beta = \alpha(\alpha + \beta) + (\alpha + \beta) = (\alpha + \beta)(\alpha + 1)$
- $x^3 + x^2 + x + 1 = x^2(x + 1) + (x + 1) = (x + 1)(x^2 + 1)$

3. Διαφορά τετραγώνων

Για να παραγοντοποιήσουμε μία αλγεβρική παράσταση που είναι διαφορά δύο τετραγώνων, χρησιμοποιούμε τη γνωστή μας ταυτότητα της διαφοράς τετραγώνων γραμμένη από το β' μέλος προς το α' : $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$.

Για παράδειγμα,
- $x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x - 3)(x + 3)$
- $(3x - 1)^2 - y^2 = (3x - 1 - y)(3x - 1 + y)$
- $(x + 2y)^2 - (2x - y)^2 = [(x + 2y) + (2x - y)][(x + 2y) - (2x - y)] = (3x + y)(-x + 3y)$
- $\alpha^4 - \beta^4 = (\alpha^2)^2 - (\beta^2)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^2 - \beta^2) = (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$
- $x^2 - y^2 + 2x + 1 = (x^2 + 2x + 1) - y^2 = (x + 1)^2 - y^2 = (x + 1 - y)(x + 1 + y)$

4. Άθροισμα – Διαφορά κύβων

Για να παραγοντοποιήσουμε μία αλγεβρική παράσταση που είναι άθροισμα ή διαφορά δύο κύβων, χρησιμοποιούμε τις γνωστές μας ταυτότητες, άθροισμα και διαφορά κύβων γραμμένες από το β' μέλος προς το α': $\alpha^3+\beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$ και $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$.

Για παράδειγμα,
- $\alpha^3 + 1 = \alpha^3 + 1^3 = (\alpha + 1)(\alpha^2 - \alpha + 1)$
- $x^3 - 8 = x^3 - 2^3 = (x - 2)(x^2 + x \cdot 2 + 2^2) = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$
- $8x^3 + 27 = (2x)^3 + 3^3 = (2x + 3)[(2x)^2 - 2x \cdot 3 + 3^2] = (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9)$
- $x^3y^3 - x^3 + y^3 - 1 = x^3(y^3 - 1) + 1 \cdot (y^3 - 1) = (y^3 - 1)(x^3 + 1)$
  $= (y^3 - 1^3)(x^3 + 1^3)$
  $= (y - 1)(y^2 + y \cdot 1 + 1^2)(x + 1)(x^2 - x \cdot 1 + 1^2)$
  $= (y - 1)(y^2 + y + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)$

Παρατήρηση

Σε πολλές περιπτώσεις για να παραγοντοποιηθεί μία αλγεβρική παράσταση απαιτείται να συνδυάσουμε κατάλληλα κάποιες από τις μεθόδους παραγοντοποίησης.

Για παράδειγμα,
- $4\alpha^2 - 9\beta^2 = (2\alpha)^2 - (3\beta)^2 = (2\alpha - 3\beta)(2\alpha + 3\beta)$
- $8x^3 + 27y^3 = (2x)^3 + (3y)^3 = (2x + 3y)[(2x)^2 - 2x \cdot 3y + (3y)^2]$
  $= (2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$
- $8\alpha^3 + 27 = (2\alpha)^3 + 3^3 = (2\alpha + 3)[(2\alpha)^2 - 2\alpha \cdot 3 + 3^2] = (2\alpha + 3)(4\alpha^2 - 6\alpha + 9)$
- $3x^3 - 24 = 3 \cdot x^3 - 3 \cdot 8 = 3(x^3 - 8) = 3(x^3 - 2^3) = 3(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

5. Τριώνυμο ($\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$) (Πολυώνυμο 2ου βαθμού μιας μεταβλητής)

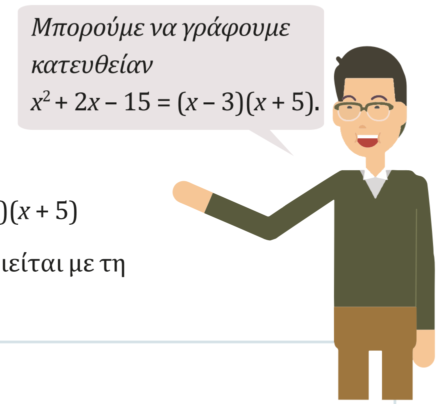
Το πολυώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ λέγεται τριώνυμο 2ου βαθμού, ή απλά τριώνυμο.

Γνωρίζουμε από το Γυμνάσιο ότι η παραγοντοποίηση του τριωνύμου 2ου βαθμού, όταν $\alpha = 1$, δηλαδή του τριωνύμου της μορφής $x^2 + \beta x + \gamma$ γίνεται ως εξής:

Αναζητούμε δύο ακέραιους αριθμούς κ, λ, αν υπάρχουν, που να έχουν γινόμενο γ και άθροισμα β, δηλαδή $\kappa \cdot \lambda = \gamma$ και $\kappa + \lambda = \beta$.

Τότε

$$\begin{aligned} x^2 + \beta x + \gamma &= x^2 + (\kappa + \lambda)\, x + \kappa\lambda = x^2 + \kappa x + \lambda x + \kappa\lambda \\ &= x \cdot x + \kappa \cdot x + x \cdot \lambda + \kappa \cdot \lambda \\ &= (x + \kappa) \cdot x + (x + \kappa) \cdot \lambda \\ &= (x + \kappa) \cdot (x + \lambda) \end{aligned}$$



Για παράδειγμα, για το τριώνυμο $x^2 + 2x - 15$ αναζητούμε δύο ακέραιους αριθμούς με γινόμενο -15 και άθροισμα 2. (Από τους ακέραιους με γινόμενο -15, επιλέγουμε αυτούς που έχουν άθροισμα 2, δηλαδή το -3 και το 5.) Άρα,

$$x^2 + 2x - 15 = x^2 + 2x + (-15) = x^2 + (-3 + 5)\, x + (-3) \cdot 5 = [x + (-3)](x + 5) = (x - 3)(x + 5)$$

Γνωρίζουμε ακόμα ότι ένα τριώνυμο που είναι τέλειο τετράγωνο παραγοντοποιείται με τη χρήση των ταυτοτήτων $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2$ και $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2$.

Για παράδειγμα,
- $4x^2 + 12x + 9 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = (2x + 3)^2$
- $\alpha^2 - 8\alpha\beta + 16\beta^2 = (\alpha)^2 - 2 \cdot \alpha \cdot 4\beta + (4\beta)^2 = (\alpha - 4\beta)^2$

Στη γενική περίπτωση, όπου έχουμε να παραγοντοποιήσουμε ένα τριώνυμο που δεν μπορούμε (για οποιονδήποτε λόγο) να το παραγοντοποιήσουμε με τις παραπάνω δύο διαδικασίες υπενθυμίζουμε ότι εργαζόμαστε ως εξής:

Βρίσκουμε τη **διακρίνουσα** $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ και διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $\Delta > 0$, το τριώνυμο έχει δύο ρίζες διαφορετικές μεταξύ τους τις $\rho_1 = \dfrac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ και $\rho_2 = \dfrac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$, οπότε $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - \rho_1)(x - \rho_2)$
- Αν $\Delta = 0$, το τριώνυμο έχει μοναδική ρίζα (στην πραγματικότητα έχει δύο αλλά είναι ίσες) την $\rho_1 = \rho_2 = \rho = \dfrac{-\beta}{2\alpha}$, οπότε $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - \rho)^2$

Σ' αυτήν την περίπτωση το τριώνυμο είναι τέλειο τετράγωνο, οπότε χρησιμοποιούμε και τις ταυτότητες $\alpha^2 \pm 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha \pm \beta)^2$.

Για παράδειγμα
- Για το τριώνυμο $2x^2 - 5x + 3$ έχουμε $\alpha = 2$, $\beta = -5$, $\gamma = 3$, οπότε $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25 - 24 = 1$.

  Άρα $\rho_1 = \dfrac{5+1}{2 \cdot 2} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$ και $\rho_2 = \dfrac{5-1}{2 \cdot 2} = \dfrac{4}{4} = 1$.

  Επομένως, $2x^2 - 5x + 3 = 2\left(x - \dfrac{3}{2}\right)(x - 1) = (2x - 3)(x - 1)$
- Για το τριώνυμο $4x^2 - 12x + 9$ έχουμε $\alpha = 4$, $\beta = -12$, $\gamma = 9$, οπότε $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 144 - 144 = 0$.

  Άρα $\rho = \dfrac{12}{2 \cdot 4} = \dfrac{12}{8} = \dfrac{3}{2}$, οπότε $4x^2 - 12x + 9 = 4\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 = 2^2\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 = \left[2\left(x - \dfrac{3}{2}\right)\right]^2 = (2x - 3)^2$
- Για το τριώνυμο $x^2 - x + 1$ έχουμε $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = 1$, οπότε $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0$.

  Άρα, το τριώνυμο $x^2 - x + 1$ δεν παραγοντοποιείται.

Μπορούμε να εργαστούμε και ως εξής:

- $2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 - 2x - 3x + 3 = 2x(x-1) - 3(x-1) = (2x-3)(x-1)$
- $4x^2 - 12x + 9 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = (2x - 3)^2$

• $x^2 - x + 1 = x^2 - 2x\dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + 1 = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} + 1 = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$

Παρατηρήστε ότι στην τελευταία περίπτωση προκύπτει άθροισμα τετραγώνων, το οποίο, προφανώς, δεν παραγοντοποιείται.

Κάποιες περιπτώσεις παραγοντοποίησης ξεφεύγουν από το στενό πλαίσιο κάποιας προτεινόμενης «ίσως» μεθοδολογίας. Χρειάζεται να επιστρατεύσει κανείς και άλλες γνώσεις αλλά και ιδέες. Δείτε τα παραδείγματα που ακολουθούν.

• $x^2 - 3y^2 + 2xy = x^2 + 2xy + y^2 - 4y^2 = (x + y)^2 - (2y)^2 = (x + y + 2y)(x + y - 2y) = (x + 3y)(x - y)$

• $\kappa^4 + \lambda^4 + \kappa^2\lambda^2 = \kappa^4 + 2\kappa^2\lambda^2 + \lambda^4 - \kappa^2\lambda^2 = (\kappa^2 + \lambda^2)^2 - (\kappa\lambda)^2 = (\kappa^2 + \lambda^2 + \kappa\lambda)(\kappa^2 + \lambda^2 - \kappa\lambda)$

Περισσότερη εξάσκηση

• $\mu^4 + \nu^4 = \mu^4 + 2\mu^2\nu^2 + \nu^4 - 2\mu^2\nu^2 = (\mu^2 + \nu^2)^2 - (\sqrt{2}\mu\nu)^2 = (\mu^2 + \nu^2 + \sqrt{2}\mu\nu)(\mu^2 + \nu^2 - \sqrt{2}\mu\nu)$

• $\alpha^5 - 5\alpha^4\beta + 4\alpha^3\beta^2 = \alpha^3(\alpha^2 - 5\alpha\beta + 4\beta^2)$

$= \alpha^3(\alpha^2 - \alpha\beta + 4\beta^2 - 4\alpha\beta) = \alpha^3[\alpha(\alpha - \beta) + 4\beta(\beta - \alpha)] = \alpha^3[\alpha(\alpha - \beta) - 4\beta(\alpha - \beta)]$

$= \alpha^3(\alpha - \beta)(\alpha - 4\beta)$

• $z^4 - 9z^2 + 18 = z^4 - 3z^2 - 6z^2 + 18 = z^2(z^2 - 3) - 6(z^2 - 3) = (z^2 - 3)(z^2 - 6) = \left(z - \sqrt{3}\right)\left(z + \sqrt{3}\right)\left(z - \sqrt{6}\right)\left(z + \sqrt{6}\right)$

Ασκήσεις - Δραστηριότητες

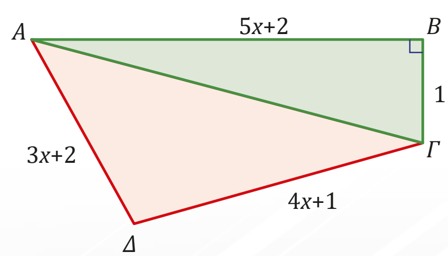
Α΄ ΟΜΑΔΑ

1 Να υπολογίσετε με σύντομο τρόπο τους αριθμούς

(α) 9999^2 (β) $1111^2 - 111^2$ (γ) $98 \cdot 102$ (δ) $\dfrac{2{,}18^2 - 0{,}82^2}{136}$

(Για να μπορούμε να λύνουμε ασκήσεις που αναφέρονται στις ιδιότητες των φυσικών αριθμών εργαζόμαστε με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των πράξεων και των δυνάμεων καθώς και με τη βοήθεια των ταυτοτήτων.)

2 Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΑΓΔ του διπλανού σχήματος



3 Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις

(α) $x^3 - x$ (β) $4(2x - 3y)^2 - 9(6x + 7y)^2$

(γ) $(x - 1)^3 - 8x^3$ (δ) $x^3y^6 + z^3$

4 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

(α) $\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{y^2}\right) : \dfrac{x - y}{x + y}$ (β) $\left(\dfrac{2}{\alpha+\beta} + \dfrac{3}{\alpha-\beta}\right) : \dfrac{5\alpha+\beta}{\alpha^2-\beta^2}$ (γ) $\dfrac{3x + 2}{x^2 - 1} + \dfrac{x}{x + 1} - \dfrac{x + 1}{x - 1}$ (δ) $\left(\dfrac{x - 1}{x + 1} - \dfrac{x - 2}{x + 2}\right) : \dfrac{2x^3 - 2x}{x^2 - 4}$

5 Αν $\alpha - \dfrac{1}{\alpha} = 4$, να υπολογιστούν τα αθροίσματα $\alpha^2 + \dfrac{1}{\alpha^2}$ και $\alpha^3 - \dfrac{1}{\alpha^3}$.

Τριώνυμο που δεν παραγοντοποιείται

6 Αν $3(x^2 + y^2 + z^2) = (x + y + z)^2$, να δειχτεί ότι $x = y = z$.

7 Αν $x + y = -3$ και $xy = -2$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων

(α) x^2+y^2 (β) $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2}$ (γ) x^3+y^3 (δ) x^4+y^4

Β' ΟΜΑΔΑ

1 Αν $\frac{x}{4}=\frac{y}{3}$ και $x + y = 35$, να βρείτε τους αριθμούς x και y. (Δεν είναι απαραίτητο να προσπαθήσετε να θυμηθείτε πώς λύνουμε γραμμικά συστήματα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.)

2 Οι αριθμοί x, y, z είναι ανάλογοι προς τους αριθμούς 3, 4, 5, αντίστοιχα (δηλαδή, $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{5}$) και ισχύει $4x - 3y + 2z = 40$. Να βρεθούν οι αριθμοί.

3 Αν $\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$, υπολογίστε τις παραστάσεις $\text{Α}=\frac{2x-y}{3x+2y}$ και $\frac{3x^2-xy}{x^2+3xy}$, $xy\neq 0$. (Είναι $\frac{x}{y}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\frac{x}{2}=\frac{y}{3}$.)

4 Να δειχτεί ότι ο αριθμός $\nu^3 - \nu$ είναι πολλαπλάσιο του 3, καθώς και ότι ο αριθμός $\nu^3 + 11\nu$ είναι πολλαπλάσιο του 6. (Αν παραγοντοποιήσετε το $\nu^3 - \nu$ αρκεί να δείξετε ότι το γινόμενο που προκύπτει διαιρείται και με το 2 και με το 3. Παρατηρήστε ότι $\nu^3 + 11\nu = (\nu^3 - \nu) + 12\nu$.)

5 Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις

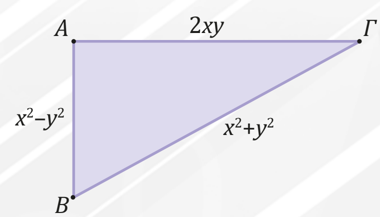
(α) $4\alpha^2\beta^2 - 4\alpha\beta + 1 - 16\alpha^2$ (β) $\alpha^4 + \beta^4 + \alpha^2\beta^2$ (γ) $\alpha^2 - 3\beta^2 + 2\alpha\beta$ (δ) $\alpha^4 - 9\alpha^2 + 18$

6 Θεωρήστε το διπλανό τρίγωνο.

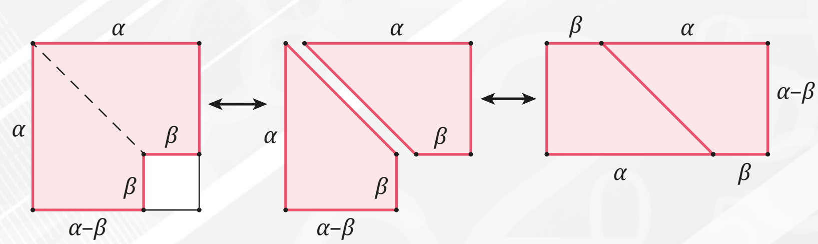
(α) Τι μπορείτε να πείτε για τους αριθμούς x και y;

(β) Δίνοντας στα x και y επιτρεπτές τιμές προφανώς μπορούμε να υπολογίσουμε τα μήκη των πλευρών (μπορούμε να λέμε απλά τις πλευρές) ενός τέτοιου τριγώνου. Πόσα τέτοια τρίγωνα μπορείτε να βρείτε που να είναι ορθογώνια;

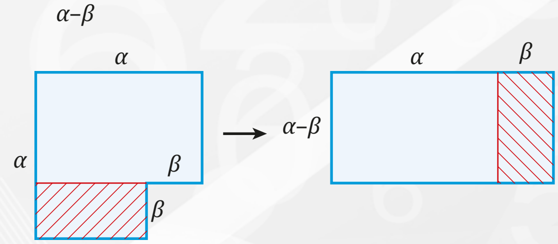
(γ) Να διατυπώσετε ένα γενικό συμπέρασμα.



7 Σε ένα διαγώνισμα ζητείται να αποδειχτεί η ταυτότητα $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$ με τον περιορισμό η απόδειξη να είναι από το α' μέλος προς το β' μέλος. Ένας μαθητής διαμαρτυρόμενος στον διδάσκοντα ότι ο χρόνος που δόθηκε ήταν ανεπαρκής του έδωσε ως απάντηση το παρακάτω σκίτσο, ισχυριζόμενος ότι λόγω έλλειψης χρόνου δεν πρόφτασε να δώσει λεπτομέρειες σχετικά με την απόδειξή του, ωστόσο ζήτησε να γίνει δεκτή η απάντησή του γιατί κατά τη γνώμη του είναι απολύτως σωστή. Ποια είναι η γνώμη σας;



8 Στο ίδιο διαγώνισμα της Άσκησης 7 ένας άλλος μαθητής έδωσε για απάντηση το παρακάτω σκίτσο με τους ίδιους ισχυρισμούς. Ποια είναι η γνώμη σας;



Ασκήσεις Β' Ομάδας Ενότητας 2.2.2

Κοινός παράγοντας - Ομαδοποίηση

Παραγοντοποίηση τριωνύμου με διπλή ρίζα

Παραγοντοποίηση τριώνυμου με δυο άνισες ρίζες

Σύνοψη Ενότητας 2.2 Αλγεβρικές Παραστάσεις

Σε αυτή την ενότητα μελετήσαμε τις βασικές αξιοσημείωτες ταυτότητες, καθώς και τεχνικές παραγοντοποίησης, εργαλεία που μας επιτρέπουν να μετασχηματίζουμε και να απλοποιούμε αλγεβρικές παραστάσεις.

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ 2.3

Αλγεβρικές Σχέσεις

2.3.1 Εξισώσεις 1ου βαθμού

Θα μάθουμε:

- να επιλύουμε απλές παραμετρικές εξισώσεις 1ου βαθμού και ρεαλιστικά προβλήματα που ανάγονται σε εξισώσεις αυτής της μορφής.

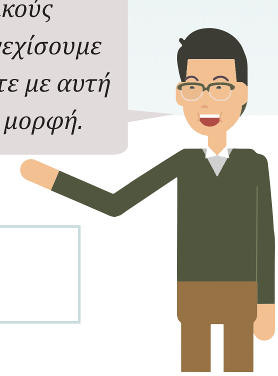
Εξισώσεις 1ου Βαθμού

Η εξίσωση $\boldsymbol{\alpha x + \beta = 0}$

Εξίσωση πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο ονομάζουμε την εξίσωση που περιέχει μόνο έναν άγνωστο και που ο άγνωστος αυτός έχει εκθέτη 1.

Στο Γυμνάσιο μάθαμε τον τρόπο επίλυσης των εξισώσεων της μορφής $\alpha x + \beta = 0$ για συγκεκριμένους αριθμούς α, β, με $\alpha \neq 0$. Η γενική μορφή της εξίσωσης $\alpha x + \beta = 0$ μπορεί να γραφεί και ως $\alpha x = -\beta$ και αν θέσουμε όπου $-\beta$ το β προκύπτει η ισοδύναμη γενική μορφή εξίσωσης 1ου βαθμού $\alpha x = \beta$.

Για παιδαγωγικούς λόγους θα συνεχίσουμε να εργαζόμαστε με αυτή την τελευταία μορφή.



Κάθε εξίσωση της μορφής $\boldsymbol{\alpha x = \beta}$ είναι εξίσωση πρώτου βαθμού με άγνωστο τον x.

- Όταν $\alpha \neq 0$, η εξίσωση $\alpha x = \beta$ έχει **μία μοναδική** λύση, την $x = \frac{\beta}{\alpha}$.

> *Για παράδειγμα,* $2x = -6 \Leftrightarrow x = -\frac{6}{2} \Leftrightarrow x = -3$ *. Η εξίσωση έχει* ***μοναδική*** *λύση τον αριθμό –3.*

- Όταν $\alpha = 0$ και $\beta \neq 0$, η εξίσωση $\alpha x = \beta$ παίρνει τη μορφή, $\boldsymbol{0x = \beta}$ και **δεν έχει λύση**. Η εξίσωση αυτή είναι **αδύνατη**.

> *Για παράδειγμα, η εξίσωση* $0x = -3$ *είναι* ***αδύνατη****, αφού κανένας αριθμός δεν την επαληθεύει.*
> *Άρα, η εξίσωση δεν έχει λύση.*

- Όταν $\alpha = 0$ και $\beta = 0$, η εξίσωση $\alpha x = \beta$ παίρνει τη μορφή $\boldsymbol{0x = 0}$ και έχει ως λύση **κάθε πραγματικό αριθμό.** Η εξίσωση αυτή είναι **αόριστη (ή ταυτότητα)**.

> *Για παράδειγμα, η εξίσωση $0x = 0$ έχει άπειρες λύσεις, αφού κάθε αριθμός την επαληθεύει.*
> *Άρα, η εξίσωση είναι* ***αόριστη.***
> $$0 \cdot (-2) = 0,\ 0 \cdot (-1) = 0,\ 0 \cdot 0 = 0,\ 0 \cdot 1 = 0,\ 0 \cdot 2 = 0, \dots$$

Συνοψίζοντας τα παραπάνω έχουμε ότι η εξίσωση $\alpha x = \beta$:

- Έχει μοναδική λύση τη $x = \dfrac{\beta}{\alpha}$, όταν $\alpha \neq 0$.
- Δεν έχει λύση, όταν $\alpha = 0$ και $\beta \neq 0$.
- Έχει άπειρες λύσεις, όταν $\alpha = 0$ και $\beta = 0$.

Η λύση της εξίσωσης $\alpha x + \beta = 0$ και γενικά η λύση κάθε εξίσωσης λέγεται και **ρίζα** αυτής.

Παράδειγμα 2.3.1.1

Να λύσετε την εξίσωση $\dfrac{2}{3} - \dfrac{3x+7}{4} = \dfrac{5-x}{6}$.

Λύση

Έχουμε $\dfrac{2}{3} - \dfrac{3x+7}{4} = \dfrac{5-x}{6} \overset{12\cdot}{\Leftrightarrow} 12\cdot\dfrac{2}{3} - 12\cdot\dfrac{3x+7}{4} = 12\cdot\dfrac{5-x}{6}$ (ΕΚΠ,(3,4,6)=12)

$$\Leftrightarrow 4\cdot 2 - 3\cdot(3x+7) = 2\cdot(5-x)$$
$$\Leftrightarrow 8 - 9x - 21 = 10 - 2x$$
$$\Leftrightarrow -9x + 2x = -8 + 21 + 10$$
$$\Leftrightarrow -7x = 23 \Leftrightarrow x = \frac{23}{-7} = -\frac{23}{7}$$

Υπενθυμίζουμε τα εξής:

Για να λύσουμε μία πρωτοβάθμια εξίσωση ή μία εξίσωση που ανάγεται σε πρωτοβάθμια ακολουθούμε τα παρακάτω:

1. *Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών αν υπάρχουν.*
2. *Εκτελούμε όλες τις δυνατές πράξεις.*
3. *Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους όρους.*
4. *Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.*
5. *Διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου αν είναι διάφορος του μηδενός.*

*Σύμφωνα με τα παραπάνω παραδείγματα και λαμβάνοντας υπόψη και το πιο πάνω σχόλιο συμπεραίνουμε ότι κάθε φορά καταλήγουμε σε εξίσωση της μορφής αx = β, της οποίας οι συντελεστές α και β είναι συγκεκριμένοι αριθμοί οπότε μπορούμε να τη λύσουμε. Όταν όμως οι συντελεστές α και β της εξίσωσης αx+β=0 εκφράζονται με τη βοήθεια γραμμάτων (σε τέτοιες περιπτώσεις, τα γράμματα αυτά λέγονται **παράμετροι**) η εξίσωση λέγεται **παραμετρική** και η εργασία που κάνουμε για την εύρεση του πλήθους των ριζών της λέγεται **διερεύνηση**.*

Παράδειγμα 2.3.1.2

Να λυθεί η εξίσωση $(\lambda^2 - 4)\,x - \lambda + 2 = 0,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

Λύση

Η εξίσωση έχει παράμετρο το λ και γράφεται ισοδύναμα

$$(\lambda^2 - 4)\,x - \lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 - 4)\,x = \lambda - 2$$
$$\Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 2)\,x = \lambda - 2$$

Επομένως

- Αν $\lambda \neq -2$ και $\lambda \neq 2$, η εξίσωση έχει μοναδική λύση, την $x = \dfrac{\lambda - 2}{(\lambda - 2)(\lambda + 2)} = \dfrac{1}{\lambda + 2}$.
- Αν $\lambda = -2$, η εξίσωση γίνεται $0x = -4$ και είναι αδύνατη.
- Αν $\lambda = 2$, η εξίσωση γίνεται $0x = 0$ και είναι ταυτότητα.

Παράδειγμα 2.3.1.3

Να λυθεί η εξίσωση $\lambda^2(x-1)+2(x+\lambda)=3\lambda x,\ \lambda\in\mathbb{R}$.

Λύση

Έχουμε $\lambda^2(x-1)+2(x+\lambda)=3\lambda x \Leftrightarrow \lambda^2 x-\lambda^2+2x+2\lambda=3\lambda x$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 x-3\lambda x+2x=\lambda^2-2\lambda$$
$$\Leftrightarrow (\lambda^2-3\lambda+2)x=\lambda(\lambda-2)$$
$$\Leftrightarrow (\lambda^2-2\lambda-\lambda+2)x=\lambda(\lambda-2)$$
$$\Leftrightarrow [\lambda(\lambda-1)-2(\lambda-1)]x=\lambda(\lambda-2)$$
$$\Leftrightarrow (\lambda-2)(\lambda-1)x=\lambda(\lambda-2) \qquad (E)$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $(\lambda-2)(\lambda-1)\neq 0 \Leftrightarrow \lambda-2\neq 0$ και $\lambda-1\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq 2$ και $\lambda\neq 1$, οπότε $x=\dfrac{\lambda(\lambda-2)}{(\lambda-2)(\lambda-1)}=\dfrac{\lambda}{\lambda-1}$.
- $(\lambda-2)(\lambda-1)=0 \Leftrightarrow \lambda-2=0$ ή $\lambda-1=0 \Leftrightarrow \lambda=2$ ή $\lambda=1$
  (i) Για $\lambda=1$ η εξίσωση (E) γράφεται ισοδύναμα $(1-2)(1-1)x=1(1-2) \Leftrightarrow 0x=-1$, δηλαδή είναι αδύνατη.
  (ii) Για $\lambda=2$ η εξίσωση (E) γράφεται ισοδύναμα $(2-2)(2-1)x=2(2-2) \Leftrightarrow 0x=0$, δηλαδή είναι ταυτότητα.

Προβλήματα

Όταν έχουμε να λύσουμε ασκήσεις που αναφέρονται στην επίλυση προβλημάτων, με βάση τα δεδομένα του προβλήματος σχηματίζουμε εξίσωση την οποία λύνουμε και απορρίπτουμε τις λύσεις εκείνες για τις οποίες δεν έχει νόημα το πρόβλημα.

Σε μερικά προβλήματα έχουμε μία σχέση που συνδέει δύο ή περισσότερες μεταβλητές. Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να επιλύσουμε τη σχέση αυτή ως προς μία μεταβλητή της, χρησιμοποιώντας τις τεχνικές επίλυσης εξίσωσης. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται **μετασχηματισμός τύπου** ή **επίλυση τύπου**.

Μπορούμε, φυσικά να αντικαταστήσουμε τις γνωστές μεταβλητές με τις τιμές τους και να λύσουμε την εξίσωση με έναν άγνωστο που θα προκύψει, ωστόσο, πολλές φορές είναι χρήσιμο (ιδιαίτερα σε προβλήματα της Φυσικής και Χημείας ή και άλλων επιστημών) να καταλήγουμε σε ένα τελικό τύπο που θα δίνει κατευθείαν την άγνωστη μεταβλητή ως συνάρτηση των υπολοίπων (γνωστών) μεταβλητών.

Για παράδειγμα, γνωρίζουμε ότι *ο τύπος που δίνει το εμβαδόν ενός τριγώνου είναι* $E=\dfrac{\beta\cdot\upsilon}{2}$, *όπου β είναι μία βάση του και υ το αντίστοιχο ύψος του. Αν είναι γνωστό το εμβαδόν E και η βάση του β, τότε ο τύπος του εμβαδού επιλύεται ως προς το ύψος ως εξής:* $E=\dfrac{\beta\cdot\upsilon}{2} \Leftrightarrow 2\cdot E=2\cdot\dfrac{\beta\cdot\upsilon}{2} \Leftrightarrow 2\cdot E=\beta\cdot\upsilon \Leftrightarrow \dfrac{2E}{\beta}=\dfrac{\beta\cdot\upsilon}{\beta} \Leftrightarrow \dfrac{2E}{\beta}=\upsilon$ ή $\upsilon=\dfrac{2E}{\beta}$.

Όμοια, μπορούμε να λύσουμε ως προς τη βάση, οπότε θα πάρουμε $\beta=\dfrac{2E}{\upsilon}$.

Ένα ακόμα παράδειγμα αποτελεί ο τύπος που δίνει το εμβαδόν ενός τραπεζίου. Γνωρίζουμε ότι αν Β και β είναι οι βάσεις ενός τραπεζίου και υ είναι το ύψος του, τότε το εμβαδόν δίνεται από τον τύπο $E=\dfrac{2(B+\beta)\upsilon}{2}$. Ο τύπος αυτός επιλύεται ως προς τη μεταβλητή υ (σε αυτή την περίπτωση τα E, B και β θεωρούνται γνωστά) ως εξής:

$$E=\frac{(B+\beta)\upsilon}{2} \Leftrightarrow 2\cdot E=2\cdot\frac{(B+\beta)\upsilon}{2} \Leftrightarrow 2E=(B+\beta)\upsilon \Leftrightarrow \frac{2E}{B+\beta}=\frac{(B+\beta)\upsilon}{B+\beta} \Leftrightarrow \upsilon=\frac{2E}{B+\beta}$$

Μπορούμε να λύσουμε ως προς τη βάση, ας πούμε ως προς τη B, ως εξής:

$$E=\frac{(B+\beta)\upsilon}{2} \Leftrightarrow 2\cdot E=2\cdot\frac{(B+\beta)\upsilon}{2} \Leftrightarrow 2E=(B+\beta)\upsilon \Leftrightarrow \frac{2E}{\upsilon}=\frac{(B+\beta)\upsilon}{\upsilon} \Leftrightarrow B=\frac{2E}{\upsilon}-\beta$$

Παραδείγματα Ενότητας 2.3.1

Ασκήσεις - Δραστηριότητες

Α' ΟΜΑΔΑ

1 Να λύσετε τις εξισώσεις

(α) $\frac{x-1}{3}-\frac{2-5x}{4}=\frac{x}{2}-\frac{1}{8}$ (β) $\frac{x-1}{3}-\frac{2-5x}{4}=\frac{x}{2}-\frac{1}{8}$

(γ) $\frac{3}{2x-1}+\frac{7}{2x+1}+\frac{4(5x^2-1)}{1-4x^2}=0$ (δ) $\frac{1-3x}{1+3x}-\frac{1+3x}{1-3x}=\frac{12}{1-9x^2}$

2 Να λύσετε τις εξισώσεις για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda\in\mathbb{R}$.

(α) $(\lambda^2-1)x=\lambda+1$ (β) $(\lambda^2-\lambda)x=\lambda-1$ (γ) $(\lambda^2-1)x=\lambda^2+\lambda$ (δ) $(\lambda^2-1)x=\lambda+2$

3 Να προσδιορίσετε τον αριθμό λ σε καθεμία από τις πιο κάτω εξισώσεις, έτσι ώστε οι εξισώσεις να είναι αδύνατες.

(α) $3x+\lambda x+6=15-6x$ (β) $4x=4-\lambda x+\lambda$ (γ) $3x+\lambda=3x+\lambda^2$ (δ) $(\lambda+4)x=\lambda^2-16$

4 Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α και β σε καθεμία από τις πιο κάτω εξισώσεις έτσι ώστε οι εξισώσεις να είναι αόριστες.

(α) $(\alpha-4)x-5=2\beta-1$ (β) $\alpha x-4=5x+4\beta$

Β' ΟΜΑΔΑ

1 Να βρεθούν τρεις διαδοχικοί περιττοί αριθμοί με άθροισμα 33.

2 Το άθροισμα τριών διαδοχικών άρτιων είναι 48. Βρείτε τους αριθμούς αυτούς.

3 Να βρείτε τρεις διαδοχικούς ακέραιους αριθμούς τέτοιους ώστε το άθροισμά τους να ισούται με το γινόμενό τους.

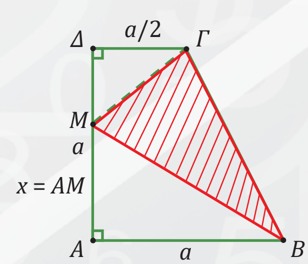
4 Να προσδιορίσετε το $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση $(\lambda^2-1)x=\lambda^2-\lambda-2$ να είναι αδύνατη.

5 Να προσδιορίσετε το $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε το 2 να είναι λύση της εξίσωσης $(4\lambda^2-1)(x-2)=2\lambda^2+\lambda-1$. Υπάρχουν άλλες λύσεις;

6 Να λύσετε τις εξισώσεις

(α) $\frac{x+1}{x}=x^2+x$ (β) $\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{2(x-1)}{x^2-2x+1}$ (γ) $\frac{|x|-1}{3}+1=\frac{|x|+5}{4}$ (δ) $\frac{|x^2-7|-1}{3}+1=\frac{|x^2-7|+1}{4}$

7 Να βρείτε το x ως συνάρτηση του α ώστε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου τμήματος στο διπλανό σχήμα να είναι ίσο με το μισό του εμβαδού του τραπεζίου. Βρείτε ακόμα για ποια τιμή του x τα σχηματιζόμενα τρίγωνα έχουν ίσα εμβαδά.



Ασκήσεις Β' Ομάδας Ενότητας 2.3.1

2.3.2 Ανισοτικές σχέσεις και διάταξη

Έξυπνοι φίλοι

Έννοιες «μεγαλύτερος από» και «μικρότερος από»

Μαθηματικά παράδοξα

Θα μάθουμε:

- να διερευνούμε τις ιδιότητες που συνδέουν τη διάταξη με τις πράξεις και αποδεικνύουν ανισοτικές σχέσεις.

Ορισμός

Ένας αριθμός α είναι μεγαλύτερος από έναν αριθμό β όταν η διαφορά $\alpha-\beta$ είναι θετικός αριθμός. Συμβολικά

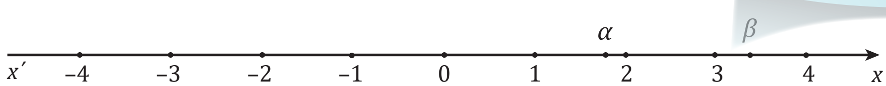
$$\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha-\beta>0$$

Σε αυτή την περίπτωση λέμε επίσης ότι ο β είναι μικρότερος του α και γράφουμε $\beta<\alpha$.

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτουν τα εξής:
- Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από το μηδέν.
- Κάθε αρνητικός αριθμός είναι μικρότερος από το μηδέν.

Οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί συμβολίζονται με το σύμβολο $\mathbb{R}^+$ και οι αρνητικοί με το $\mathbb{R}^-$.
Από την πλευρά της γεωμετρίας η ανισότητα $\alpha > \beta$ σημαίνει ότι ο αριθμός α βρίσκεται δεξιότερα από τον αριθμό β πάνω στην ευθεία των πραγματικών αριθμών.

Αν για τους αριθμούς α και β ισχύει $\alpha > \beta$ ή $\alpha = \beta$, τότε γράφουμε $\alpha \geq \beta$ και διαβάζουμε «α μεγαλύτερος ή ίσος του β».



Εδώ, είναι α<β

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι ολικά διατεταγμένο. Δηλαδή, αν επιλέξουμε δύο αριθμούς α και β σε αυτό, τότε θα ισχύει μία από τις παρακάτω τρεις σχέσεις:

$$\alpha < \beta \qquad \text{ή} \qquad \alpha = \beta \qquad \text{ή} \qquad \alpha > \beta$$

Στην πραγματική ευθεία, αυτό σημαίνει ότι αν επιλέξουμε δύο σημεία α και β πάνω της, τότε ή το α είναι αριστερά του β ή το α θα συμπέσει με το β ή το α θα είναι δεξιά του β.
Στη συνέχεια, θα αποδείξουμε βασικές ιδιότητες διάταξης που ισχύουν στους πραγματικούς αριθμούς. Όλες οι ιδιότητες της διάταξης είναι συνέπεια τριών αξιωμάτων.

Τα τρία αξιώματα που χρησιμοποιούμε είναι τα ακόλουθα:

1. Το άθροισμα δύο θετικών αριθμών είναι θετικός αριθμός. Δηλαδή

$$\textbf{Αν } \alpha > 0 \textbf{ και } \beta > 0\textbf{, τότε } \alpha + \beta > 0$$

Άμεση συνέπεια αυτού είναι η ακόλουθη:

$$\textbf{Αν } \alpha < 0 \textbf{ και } \beta < 0\textbf{, τότε } \alpha + \beta < 0$$

2. Το γινόμενο δύο ομόσημων αριθμών είναι θετικός αριθμός. Δηλαδή:

$$\text{Αν } \alpha, \beta \text{ ομόσημοι, τότε } \alpha\beta > 0 \text{ και (επομένως) } \frac{\alpha}{\beta} > 0$$

Άμεση συνέπεια αυτού είναι η ακόλουθη:

$$\text{Αν } \alpha, \beta \text{ ετερόσημοι, τότε } \alpha\beta < 0 \text{ και (επομένως) } \frac{\alpha}{\beta} < 0$$

3. Ένας τυχαίος πραγματικός αριθμός x, είναι είτε θετικός, είτε αρνητικός, είτε μηδέν. Δηλαδή:

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow \quad x > 0 \quad ή \quad x < 0 \quad ή \quad x = 0$$

Ιδιότητες της διάταξης των πραγματικών αριθμών

Έχουμε μάθει στο Γυμνάσιο να επιλύουμε ανισώσεις α΄ βαθμού, στηριζόμενοι σε βασικές ιδιότητες της διάταξης των πραγματικών αριθμών. Συγκεκριμένα, είδαμε πως κατά την επίλυση μιας ανίσωσης, γίνεται χρήση ιδιοτήτων των ανισοτήτων. (Δεν είναι απαραίτητο να θυμάστε όλες τις παρακάτω ιδιότητες, ωστόσο οι ιδιότητες 1-11 είναι πολύ βασικές.)

1. $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$
   Για παράδειγμα, αν έχουμε ότι
   $x - 3 > 5 \Rightarrow x - 3 + 3 > 5 + 3 \Rightarrow x > 8$.
2. $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \gamma > \beta - \gamma$
   Για παράδειγμα, αν έχουμε ότι
   $x + 3 > 5 \Rightarrow x + 3 - 3 > 5 - 3 \Rightarrow x > 2$.
3. $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma > \beta\gamma$ ή $\alpha > \beta \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$, όταν $\gamma > 0$.
   Για παράδειγμα, αν έχουμε ότι
   $2x > 8 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 2x > \frac{1}{2} \cdot 8 \Rightarrow x > 4$.
4. $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma < \beta\gamma$ ή $\alpha > \beta \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$, όταν $\gamma < 0$.
   Για παράδειγμα, αν έχουμε ότι
   $-2x > 8 \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-2\,x) < \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 8 \Rightarrow x < -4$.

ΣΧΟΛΙΑ:

1. Μπορούμε να προσθέσουμε και στα δύο μέλη μιας ανισότητας τον ίδιο αριθμό.
2. Μπορούμε να αφαιρέσουμε από τα δύο μέλη μιας ανισότητας τον ίδιο αριθμό.
3. Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε ή να διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο θετικό αριθμό, χωρίς να αλλάξει η φορά της ανισότητας.
4. Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε ή να διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο αρνητικό αριθμό, αρκεί να αλλάξουμε τη φορά της ανισότητας.

Για τις Ιδιότητες 5 έως 18 θα βρείτε αποδείξεις, σχόλια και παραδείγματα στο **Σ.Υ. 2.3.2.2**.

Βασικές ανισότητες και οι αποδείξεις τους

5. (Μεταβατική Ιδιότητα) Αν $\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma$, τότε $\alpha > \gamma$.
6. Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$, τότε $\alpha + \gamma > \beta + \delta$.
7. Αν $\alpha > \beta > 0$ και $\gamma > \delta > 0$, τότε $\alpha\gamma > \beta\delta$.
8. Ισχύει ότι $\alpha^2 \geq 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό α. Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $\alpha = 0$.
9. Αν α, β ομόσημοι, τότε $\alpha > \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}$.
10. Για θετικούς αριθμούς α, β και θετικό ακέραιο ν ισχύει η ισοδυναμία
$$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu > \beta^\nu$$
11. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α και β και για κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει η ισοδυναμία
$$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^{2\nu+1} > \beta^{2\nu+1}$$
12. Για κάθε θετικό αριθμό α και κ, λ θετικούς ακέραιους με $\kappa > \lambda$ ισχύει
   (i) $\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha^\kappa > \alpha^\lambda$ (ii) $0 < \alpha < 1 \Leftrightarrow \alpha^\kappa < \alpha^\lambda$
13. Για οποιουσδήποτε αριθμούς α και β ισχύει η ανισότητα
$$\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta$$
14. Για οποιουσδήποτε αριθμούς α και β ισχύει η ανισότητα
$$\alpha^2 \pm \alpha\beta + \beta^2 \geq 0$$
15. Για οποιουσδήποτε αριθμούς α, β και γ ισχύει η ανισότητα
$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$$

Οι ανισότητες είναι σημαντικές για τα Μαθηματικά, μάλιστα, κάποιες θεωρούνται βασικές γιατί είναι ιδιαίτερα χρήσιμες και εμφανίζονται πολύ συχνά.

16. Αν $\alpha > 0$, τότε $\alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha + \dfrac{1}{\alpha} \geq 2$.

17. (i) Αν α, β ομόσημοι τότε $\dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha} \geq 2$.

(ii) Αν α, β ετερόσημοι τότε $\dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha} \leq -2$.

18. Αν $\alpha + \beta + \gamma > 0$ τότε $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 \geq 3\alpha\beta\gamma$.

Σημείωση: Η απόδειξη καθεμιάς από τις παραπάνω ιδιότητες αποτελεί μία ωραία άσκηση. Οι ιδιότητες 1-10 αποδεικνύονται εύκολα με τη χρήση του ορισμού $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$. Οι υπόλοιπες είναι πιο απαιτητικές. Σας προτρέπουμε να προσπαθήσετε να τις αποδείξετε όλες. Όπου δυσκολεύεστε συμβουλευτείτε τον διδάσκοντά σας.

Παράδειγμα 2.3.2.1

Αν $x_1<x_2$, να συγκρίνετε τις παραστάσεις

(α) $2x_1 + 5, 2x_2 + 5$ και (β) $\dfrac{-2x_1+3}{4}, \dfrac{-2x_2+3}{4}$

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό του $\alpha < \beta$.

(α) Επειδή, $x_1 < x_2$ έχουμε

$$(2x_1 + 5) - (2x_2 + 5) = 2x_1 + 5 - 2x_2 - 5 = 2x_1 - 2x_2 = 2(x_1 - x_2) < 0,$$

οπότε $2x_1 + 5 < 2x_2 + 5$.

(β) Όμοια, επειδή, $x_1 < x_2$ έχουμε

$$\frac{-2x_1+3}{4} - \frac{-2x_2+3}{4} = \frac{(-2x_1+3)-(-2x_2+3)}{4} = \frac{-2x_1+3+2x_2-3}{4} = \frac{-2(x_1-x_2)}{4} > 0,$$

οπότε $\dfrac{-2x_1+3}{4} > \dfrac{-2x_2+3}{4}$.

Στο παραπάνω παράδειγμα μπορούμε να συγκρίνουμε τις παραστάσεις, παίρνοντας τη δοσμένη σχέση $x_1<x_2$ και εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των ανισοτικών σχέσεων. Έχουμε διαδοχικά

(α) $x_1 < x_2 \Leftrightarrow 2x_1 < 2x_2$ $\quad (\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma < \beta\gamma, \gamma > 0)$

$\Leftrightarrow 2x_1 + 5 < 2x_2 + 5$ $\quad (\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma < \beta + \gamma)$

(β) $x_1 < x_2 \Leftrightarrow -2x_1 > -2x_2$ $\quad (\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma > \beta\gamma, \gamma < 0)$

$\Leftrightarrow -2x_1 + 5 > -2x_2 + 5$ $\quad (\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma < \beta + \gamma)$

$\Leftrightarrow \dfrac{-2x_1+5}{4} > \dfrac{-2x_2+5}{4}$ $\quad (\alpha < \beta \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\gamma} < \dfrac{\beta}{\gamma}, \gamma > 0)$

Παράδειγμα 2.3.2.2

Αν $3 < x < 4$ και $-2 < y < -1$, να βρείτε το μικρότερο δυνατό διάστημα, στο οποίο ανήκουν οι πραγματικοί αριθμοί

(α) $x + y$ (β) $x - y$ (γ) xy (δ) $\dfrac{x}{y}$

Λύση

(α) Έχουμε

$$\left.\begin{array}{l} 3 < x < 4 \\ -2 < y < -1 \end{array}\right\} \Rightarrow 3 + (-2) < x + y < 4 + (-1) \qquad (\alpha > \beta, \gamma > \delta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \delta)$$

$$\Rightarrow 1 < x + y < 3$$

(β) Έχουμε:

$$\left.\begin{matrix}3<x<4\\-2<y<-1\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}3<x<4\\1<-y<2\end{matrix}\right\}\qquad(\alpha<\beta,\Leftrightarrow\alpha\gamma>\beta\delta,\ \gamma<0)$$

$$\Rightarrow 3+1<x+(-y)<4+2\qquad(\alpha<\beta,\ \gamma<\delta\Rightarrow\alpha+\gamma<\beta+\delta)$$

$$\Rightarrow 4<x-y<6$$

(γ) Έχουμε

$$\left.\begin{matrix}3<x<4\\-2<y<-1\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}3<x<4\\1<-y<2\end{matrix}\right\}\qquad(\alpha<\beta\Leftrightarrow\alpha\gamma>\beta\delta,\ \gamma<0)$$

$$\Rightarrow 3\cdot 1<x\cdot(-y)<4\cdot 2\qquad(0<\alpha<\beta,\ 0<\gamma<\delta\Rightarrow\alpha\gamma<\beta\delta)$$

$$\Rightarrow 4<x(-y)<8$$

$$\Rightarrow -8<xy<-4\qquad(\alpha<\beta\Leftrightarrow\alpha\gamma>\beta\delta,\ \gamma<0)$$

(δ) Έχουμε

$$\left.\begin{matrix}3<x<4\\-2<y<-1\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}3<x<4\\1<-y<2\end{matrix}\right\}\qquad(\alpha<\beta\Leftrightarrow\alpha\gamma>\beta\delta,\ \gamma<0)$$

$$\Rightarrow\left.\begin{matrix}3<x<4\\\frac{1}{2}<-\frac{1}{y}<1\end{matrix}\right\}\qquad\left(\alpha<\beta\Leftrightarrow\frac{1}{\beta}<\frac{1}{\alpha},\ \alpha\beta>0\right)$$

$$\Rightarrow 3\cdot\frac{1}{2}<x\left(-\frac{1}{y}\right)<4\cdot 1\qquad(0<\alpha<\beta,\ 0<\gamma<\delta\Rightarrow\alpha\gamma<\beta\delta)$$

$$\Rightarrow\frac{3}{2}<-\frac{x}{y}<4$$

$$\Rightarrow -4<\frac{x}{y}<-\frac{3}{2}\qquad(\alpha<\beta\Leftrightarrow\alpha\gamma>\beta\delta,\ \gamma<0)$$

Διάταξη στην πραγματική ευθεία

Αν το κάθε μέλος της ανισότητας $\alpha<x<\beta$ πολλαπλασιαστεί με -1, τότε η ανισότητα μετατρέπεται σε $-\beta<-x<-\alpha$.

Ασκήσεις - Δραστηριότητες

Α' ΟΜΑΔΑ

1 Να αποδειχτούν οι ανισότητες
(α) $\alpha^2-6\alpha+10>0$ (β) $\alpha^2+\beta^2+2(\alpha+\beta)+2\geq 0$

2 Αν $x^3-2x^2+x>2$, να δείξετε ότι $x>2$.

3 Αν $2x+4y=1$, να δειχτεί ότι $x^2+y^2\geq\dfrac{1}{20}$.

4 Να δειχτεί ότι $\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2\geq\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$. *(Χρησιμοποιήστε την ανισότητα $\alpha^2+\beta^2\geq 2\alpha\beta$.)*

5 Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις
(α) $(2x-y-4)^2+(5x+y-3)^2=0$ (β) $x^2+y^2-4(x-y)+8=0$

6 Οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου κυμαίνονται μεταξύ των αριθμών 2 και 5, και 3 και 7, αντίστοιχα. Αν αυξήσουμε την πρώτη κατά 1 μονάδα και ελαττώσουμε τη δεύτερη επίσης κατά 1 μονάδα, να βρείτε την ελάχιστη καθώς και τη μέγιστη τιμή που μπορούν να πάρουν η περίμετρος και το εμβαδόν του.

7 Έστω ότι έχουμε ένα κλάσμα, ας πούμε το $\frac{\alpha}{\beta}$, με θετικούς όρους και έναν θετικό αριθμό γ. Να συγκρίνετε το κλάσμα $\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma}$ με το $\frac{\alpha}{\beta}$. *(Θα χρειαστεί να πάρετε δύο περιπτώσεις σχετικά με το αρχικό κλάσμα:* $\frac{\alpha}{\beta}<1$ *και* $\frac{\alpha}{\beta}>1$.)

8 Αν $1{,}2 < x < 1{,}3$ και $2{,}1 < y < 3{,}2$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχεται η τιμή καθεμίας από τις παραστάσεις

(α) $2x + 3y$ (β) $3x - 2y$ (γ) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ (δ) $\frac{x}{y}$

9 Αν $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$ και $\frac{1}{2} < y < \frac{2}{3}$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχεται η τιμή καθεμίας από τις παραστάσεις.

(α) $x - y$ (β) $x^2 + y^2$ (γ) $\frac{x^2+y^2}{x+y}$ (δ) $\frac{x^2+y^2}{x-y}$

10 Αν οι α, β είναι θετικοί, να αποδείξετε ότι $(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right) \geq 4$.

Β' ΟΜΑΔΑ

Για να συγκρίνουμε δύο αριθμούς A και B βρίσκουμε το πρόσημο της διαφοράς τους $A - B$.

1 Αν $\alpha > \beta$, να συγκρίνετε τους αριθμούς $\alpha^3 - \beta$ και $\alpha^2\beta - \alpha$.

2 Αν οι α, β είναι θετικοί, να συγκρίνετε τους αριθμούς $\alpha^3 + \beta^3$ και $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2$.

3 Αν οι α, β είναι θετικοί, να συγκρίνετε τους αριθμούς $\alpha + \beta$ και $\alpha\beta + 1$. *(Θα χρειαστεί να διακρίνετε περιπτώσεις.)*

4 Από ένα παραλληλόγραμμο με διαστάσεις α και β αφαιρούμε ένα παραλληλόγραμμο με πλευρές παράλληλες στις πλευρές του αρχικού. Αν $2 < \alpha < 3$ και $3 < \beta < 7$, να αποδείξετε ότι για την περίμετρο Π του σχήματος που απομένει ισχύει $10 < \Pi < 20$.

5 Αν $x > y > 0$, να συγκρίνετε τους αριθμούς $\alpha = \frac{x-y}{x+y}$ και $\beta = \frac{x^3-y^3}{x+y}$.

6 Αν $\alpha < \beta < \gamma < \delta$ και $\beta + \gamma = \alpha + \delta$, να συγκρίνετε τους αριθμούς $\alpha\delta$ και $\beta\gamma$.

7 Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$.

8 Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 \geq (\alpha+\beta)(\gamma+\delta)$. *(Υπόδειξη: Πολλαπλασιάστε κατά μέλη με το 2.)*

9 Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\gamma}{\delta}$, να αποδείξετε ότι

(i) $\alpha^2 + \delta^2 \geq \beta^2 + \gamma^2$ (ii) $|\alpha - \delta| \geq 3\,|\beta - \gamma|$. *(Υπόδειξη: Να θέσετε* $\frac{\alpha}{\beta} = \lambda$.)

10 Να αποδείξετε ότι $\left(\frac{5}{7}\right)^3 + \left(\frac{6}{7}\right)^3 < 1$ και στη συνέχεια ότι $5^{100} + 6^{100} < 7^{100}$.

2.3.3 Εξισώσεις και ανισώσεις με απόλυτες τιμές

Έξυπνοι φίλοι

Θα μάθουμε:

- να επιλύουμε αλγεβρικά και γεωμετρικά απλές εξισώσεις, ανισώσεις και προβλήματα χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της απόλυτης τιμής.

Ανισώσεις 1ου βαθμού (Επαναλήψεις - Συμπληρώσεις)

Οι ανισώσεις $\alpha x + \beta > 0$ και $\alpha x + \beta < 0$

Η ανισότητα που περιέχει μεταβλητή ονομάζεται **ανίσωση**. Για παράδειγμα, η $2x - 1 > 3$ είναι μία ανίσωση. **Λύση** της ανίσωσης είναι κάθε τιμή της μεταβλητής που την επαληθεύει. Για παράδειγμα, αν έχουμε την ανίσωση $2x - 1 > 5$, τότε κάθε πραγματικός αριθμός μεγαλύτερος του 3 την επαληθεύει, και επομένως, είναι λύση της. Η διαδικασία που ακολουθούμε, για να βρούμε τις λύσεις μιας ανίσωσης, ονομάζεται **επίλυση** της ανίσωσης. Για κάθε ανίσωση ορίζεται ένα σύνολο λύσεων του οποίου κάθε στοιχείο επαληθεύει την ανίσωση. Το σύνολο αυτό μπορεί να αναπαρασταθεί συμβολικά, γραφικά στην ευθεία των πραγματικών αριθμών και λεκτικά. Για παράδειγμα, τις λύσεις της ανίσωσης $2x - 1 > 5$ μπορούμε να τις αναπαραστήσουμε ως εξής:

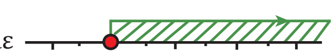
Συμβολικά	Γραφικά στην ευθεία των πραγματικών αριθμών	Λεκτικά
$x>3$		Το x μεγαλύτερο του 3

Στη γραφική αναπαράσταση της λύσης της ανίσωσης στην ευθεία των πραγματικών αριθμών τοποθετούμε:
Το σύμβολο ○ πάνω στην τιμή α, όταν η τιμή α *δεν* συμπεριλαμβάνεται στη λύση της ανίσωσης.

Για παράδειγμα τη λύση της ανίσωσης $x > 3$ την αναπαριστούμε

Το σύμβολο ● πάνω στην τιμή α, όταν η τιμή α συμπεριλαμβάνεται στη λύση της ανίσωσης.

Για παράδειγμα τη λύση της ανίσωσης $x \geq 3$ την αναπαριστούμε



Ανίσωση 1ου βαθμού με έναν άγνωστο ονομάζουμε την ανίσωση που περιέχει μόνο έναν άγνωστο και που ο άγνωστος αυτός έχει εκθέτη 1.

Έχουμε μάθει στο Γυμνάσιο τον τρόπο επίλυσης των ανισώσεων της μορφής $\alpha x + \beta > 0$ (ή της $\alpha x + \beta < 0$) για συγκεκριμένους αριθμούς α, β, με $\alpha \neq 0$. (Οι ανισώσεις της μορφής $\alpha x + \beta \geq 0$ ή της μορφής $\alpha x + \beta \leq 0$ αντιμετωπίζονται ανάλογα.)

Η γενική μορφή της ανίσωσης $\alpha x + \beta > 0$ μπορεί να γραφεί και ως $\alpha x > -\beta$ και αν θέσουμε όπου $-\beta$ το β προκύπτει η ισοδύναμη γενική μορφή ανίσωσης 1ου βαθμού $\alpha x > \beta$.

Για να λύσουμε μία ανίσωση της μορφής $\alpha x > \beta$ εργαζόμαστε ως εξής:

- Αν $\alpha \neq 0$, τότε

(i) αν $\alpha > 0$, η ανίσωση έχει λύση κάθε πραγματικό αριθμό $x > \dfrac{\beta}{\alpha}$.

(ii) αν $\alpha < 0$, η ανίσωση έχει λύση κάθε πραγματικό αριθμό $x < \dfrac{\beta}{\alpha}$.

Για παράδειγμα,

- Η ανίσωση $2x > -6$ έχει λύση κάθε πραγματικό αριθμό μεγαλύτερο από το -3. Πραγματικά έχουμε

$$2x > -6 \Leftrightarrow \frac{2x}{2} > \frac{-6}{2} \Leftrightarrow x > -3$$

- Η ανίσωση $-2x > 6$ έχει λύση κάθε πραγματικό αριθμό μικρότερο από το -3. Πραγματικά έχουμε

$$-2x > 6 \Leftrightarrow \frac{-2x}{-2} < \frac{6}{-2} \Leftrightarrow x < -3$$

- Αν $\alpha = 0$, τότε

(i) αν $\beta > 0$, τότε η ανίσωση δεν έχει λύση. (Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι η ανίσωση είναι αδύνατη.)

Για παράδειγμα,

- Η ανίσωση $0x > 2$ είναι αδύνατη, αφού κανένας αριθμός δεν την επαληθεύει.

(ii) αν $\beta < 0$, τότε η ανίσωση έχει λύση κάθε πραγματικό αριθμό. (Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι η ανίσωση είναι αόριστη ή ταυτότητα.)

Για παράδειγμα,

- Η ανίσωση $0x > -2$ είναι αόριστη, αφού την επαληθεύουν όλοι οι πραγματικοί αριθμοί.

Για να λύσουμε μία ανίσωση χρησιμοποιούμε τα ίδια βήματα όπως στις εξισώσεις, προσέχοντας ότι

Όταν πολλαπλασιάζουμε ή διαιρούμε και τα δύο μέλη μιας ανίσωσης με θετικό αριθμό διατηρούμε τη φορά της ανίσωσης.

Ενώ:

Όταν πολλαπλασιάζουμε ή διαιρούμε και τα δύο μέλη μιας ανίσωσης με αρνητικό αριθμό αλλάζουμε τη φορά της ανίσωσης.

Με εντελώς ανάλογο τρόπο λύνονται και οι ανισώσεις $\alpha x + \beta < 0$, $\alpha x + \beta \geq 0$ και $\alpha x + \beta \leq 0$.

Παράδειγμα 2.3.3.1

Να λύσετε την ανίσωση $\frac{2(x-3)}{3} - \frac{3x-2}{6} \leq \frac{x-4}{2}$.

Λύση

Έχουμε

$\frac{2(x-3)}{3} - \frac{3x-2}{6} \leq \frac{x-4}{2} \Leftrightarrow$	ΕΚΠ(2, 3, 6) = 6
$6 \cdot \frac{2(x-3)}{3} - 6 \cdot \frac{3x-2}{6} \leq 6 \cdot \frac{x-4}{2} \Leftrightarrow$	Πολλαπλασιάζουμε με το ΕΚΠ
$2 \cdot 2(x-3) - 1 \cdot (3x-2) \leq 3 \cdot (x-4) \Leftrightarrow$	Απαλείφουμε τους παρονομαστές
$4x - 12 - 3x + 2 \leq 3x - 12 \Leftrightarrow$	Κάνουμε τις πράξεις
$4x - 3x - 3x \leq 12 - 2 - 12 \Leftrightarrow$	Κάνουμε αναγωγές ομοίων όρων
$-2x \leq -2 \Leftrightarrow \frac{-2x}{-2} \geq \frac{-2}{-2} \Leftrightarrow x \geq 1$	Διαιρούμε με το $-2 < 0$ οπότε αλλάζουμε φορά στην ανίσωση

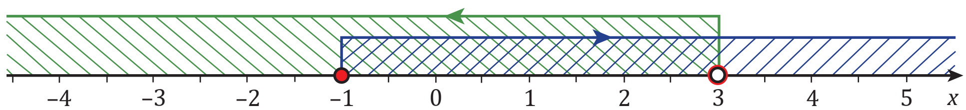
Το σύνολο των λύσεων μιας ανίσωσης ή το σύνολο των κοινών λύσεων δύο ή περισσότερων ανισώσεων μπορεί να αναπαρασταθεί με τη μορφή διαστήματος ή ένωσης διαστημάτων πραγματικών αριθμών.

Παράδειγμα 2.3.3.2

Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων $3x - 5 \geq 2x - 6$ και $x + 6 < 9$ καθώς και τις ακέραιες κοινές λύσεις τους.

Λύση

Εύκολα βρίσκουμε ότι η πρώτη ανίσωση επαληθεύεται για κάθε $x \geq -1$ και η δεύτερη για κάθε $x < 3$. Στη συνέχεια αναπαριστάνουμε τις λύσεις των δύο ανισώσεων στην ίδια ευθεία των πραγματικών αριθμών και προσδιορίζουμε «χρωματίζοντας» το τμήμα της ευθείας που περιέχει τις κοινές λύσεις, βρίσκουμε δηλαδή, τις κοινές λύσεις των εξισώσεων.



Επομένως το σύνολο των κοινών λύσεων των ανισώσεων είναι το διάστημα $[-1,3)$ ή το σύνολο $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 3\}$. Το σύνολο των κοινών ακέραιων λύσεων των ανισώσεων είναι, προφανώς, το σύνολο $\{-1, 0, 1, 2\}$.

Παράδειγμα 2.3.3.3

Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων

(α) $(x-1)(x-2) < 2 + (x-2)(x-3)$

(β) $x^2(x+1) > (x+1)(x^2-2)$

καθώς και τις ακέραιες κοινές λύσεις τους.

Λύση

(α) Έχουμε

$(x-1)(x-2) < 2 + (x-2)(x-3) \Leftrightarrow$ Κάνουμε τις πράξεις

$x^2 - x - 2x + 2 < 2 + x^2 - 2x - 3x + 6 \Leftrightarrow$ Παρατηρούμε ότι οι όροι στο τετράγωνο διαγράφονται

$-x - 2x + 2x + 3x < -2 + 2 + 6 \Leftrightarrow$ Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους

$\frac{2x}{2} < \frac{6}{2} \Leftrightarrow$ Διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου

$x < 3$

(β) Έχουμε

$x^2(x+1) > (x+1)(x^2-2) \Leftrightarrow$ Κάνουμε τις πράξεις

$x^3 + x^2 > x^3 + x^2 - 2x - 2 \Leftrightarrow$ Παρατηρούμε ότι οι όροι στον κύβο και στο τετράγωνο διαγράφονται

$2x > -2 \Leftrightarrow$ Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους

$\frac{2x}{2} > \frac{-2}{2} \Leftrightarrow$ Διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου

$x > -1$

Επομένως το σύνολο των κοινών λύσεων των ανισώσεων είναι το διάστημα $(-1,3)$ ή το σύνολο $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 3\}$. Το σύνολο των κοινών ακέραιων λύσεων των ανισώσεων είναι, προφανώς, το σύνολο $\{0, 1, 2\}$.

Παράδειγμα 2.3.3.4

Να λύσετε την ανίσωση $1 \leq |x-2| \leq 3$.

Λύση

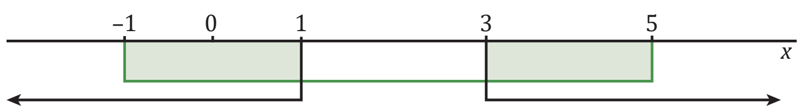
Έχουμε

$$1 \leq |x-2| \leq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq |x-2| & (1) \\ \text{και} \\ |x-2| \leq 3 & (2) \end{cases}$$

$(1) \Leftrightarrow (x-2 \leq -1 \quad \text{ή} \quad x-2 \geq 1) \Leftrightarrow (x \leq 1 \quad \text{ή} \quad x \geq 3)$

$(2) \Leftrightarrow -3 \leq x-2 \leq 3 \Leftrightarrow -3+2 \leq x-2+2 \leq 3+2 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 5$

Συναληθεύουμε τις λύσεις που βρήκαμε (δηλαδή, βρίσκουμε τις κοινές λύσεις).



Άρα τελικά $-1 \leq x \leq 1$ ή $3 \leq x \leq 5$.

Παράδειγμα 2.3.3.5

Να λύσετε την εξίσωση $|x+5| = 3x-7$.

Λύση

Η πιο πάνω εξίσωση έχει λύση στο $\mathbb{R}$, αν $3x-7 \geq 0$ ή ισοδύναμα $x \geq 7/3$.

Έχουμε $\quad |x+5| = 3x-7 \Leftrightarrow x+5 = \pm(3x-7)$

Επομένως

$$x+5 = 3x-7 \Leftrightarrow x-3x = -5-7 \Leftrightarrow -2x = -12 \Leftrightarrow x = 6$$

ή

$$x+5 = -(3x-7) \Leftrightarrow x+5 = -3x+7 \Leftrightarrow 4x = 2 \Leftrightarrow x = 1/2$$

Η λύση $x = 1/2$ απορρίπτεται, αφού $x \geq 7/3$. Έτσι, η μοναδική δεκτή λύση της εξίσωσης είναι η $x = 6$.

Παράδειγμα 2.3.3.6

Να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{x-\lambda}{2} - \dfrac{(\lambda-1)x}{3} < \dfrac{x-1}{4}$.

Λύση

Έχουμε

$$\frac{x-\lambda}{2} - \frac{(\lambda-1)x}{3} < \frac{x-1}{4} \Leftrightarrow 12 \cdot \frac{x-\lambda}{2} - 12 \cdot \frac{(\lambda-1)x}{3} < 12 \cdot \frac{x-1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6 \cdot (x-\lambda) - 4 \cdot (\lambda-1)\,x < 3 \cdot (x-1)$$

$$\Leftrightarrow 6x - 6\lambda - 4\lambda x + 4x < 3x - 3$$

$$\Leftrightarrow 6x - 4\lambda x + 4x - 3x < 6\lambda - 3$$

$$\Leftrightarrow (7-4\lambda)x < 6\lambda - 3 \qquad (\alpha x < \beta)$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $\alpha > 0 \Leftrightarrow 7-4\lambda > 0 \Leftrightarrow \lambda < \dfrac{7}{4}$, τότε $x < \dfrac{6\lambda-3}{7-4\lambda}$.
- Αν $\alpha < 0 \Leftrightarrow 7-4\lambda < 0 \Leftrightarrow \lambda > \dfrac{7}{4}$, τότε $x > \dfrac{6\lambda-3}{7-4\lambda}$.
- Αν $\alpha = 0 \Leftrightarrow 7-4\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{7}{4}$, τότε η ανίσωση γράφεται $0 \cdot x < 6 \cdot \dfrac{7}{4} - 3$ ή ισοδύναμα $0 \cdot x < \dfrac{30}{4}$, που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Ασκήσεις - Δραστηριότητες

Α΄ ΟΜΑΔΑ

1 Να λυθούν οι εξισώσεις

(α) $|3x + 2| = |2x - 7|$ (β) $|4y - 6| = |3y + 9|$

2 Να λυθούν οι εξισώσεις

(α) $|5x + 8| = |2x - 3|$ (β) $|2y - 4| = |y^2 - 9|$

3 Να λυθούν οι ανισώσεις

(α) $|4x - 2| > |x + 9|$ (β) $|5y - 3| \leq |2y + 8|$

4 Να λυθούν οι ανισώσεις

(α) $|x^2 - 4| < |4x - 2|$ (β) $|4y - 6| \geq |3y + 9|$

5 Να λυθούν οι ανισώσεις

(α) $|1 - x| > 0$ (β) $1 < |x - 2| \leq 3$

6 Να βρεθούν οι ακέραιες κοινές λύσεις των ανισώσεων $|3x - 2| \leq 4$ και $|2x + 5| < 3$.

Β΄ ΟΜΑΔΑ

1 Να λύσετε καθεμία από τις παρακάτω ανισότητες και στη συνέχεια να εκφράσετε τη λύση με τη χρήση της έννοιας της απόστασης καθώς και της απόλυτης τιμής

(α) $|5x - 3| \leq 15$ (β) $|4x - 3| > 12$

2 Να βρεθούν οι ακέραιες κοινές λύσεις των ανισώσεων $|4x + 3| > 5$ και $|2x - 1| \leq 2$.

3 Να βρεθούν οι ακέραιες κοινές λύσεις της ανίσωσης $(x - 1)^2 - |x + 1|^2 < 0$.

4 Να λύσετε τις εξισώσεις

(α) $|2x - 1| = 1 - 2x$ (β) $|2x - 1| = x - 1$

5 Να λυθούν οι εξισώσεις

(α) $|x - 2| + |x + 3| = 10$ (β) $|x^2 - 4| + |(x + 2)(x + 3)| = |10x + 20|$

6 Να λυθεί η εξίσωση $|x^2 - 4| = \lambda$.

7 Να λυθεί η ανίσωση $|x^2 + 1| = \mu$.

2.3.4 Εξισώσεις της μορφής $x^\nu=\alpha$

Θα μάθουμε:

- να επιλύουμε εξισώσεις της μορφής $x^\nu = \alpha$.

Η εξίσωση $x^\nu=\alpha$ (όπου α ένας πραγματικός αριθμός και ν θετικός ακέραιος)

Είναι φανερό ότι η έννοια της ν-οστής ρίζας είναι άμεσα συνδεδεμένη με τη λύση της εξίσωσης που έχει τη μορφή $x^\nu = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ και ν είναι ένας θετικός ακέραιος. Ας ξεκινήσουμε με μερικά παραδείγματα τέτοιων εξισώσεων.

Για παράδειγμα,

- Αν έχουμε την εξίσωση $x^2=4$, τότε από τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας παίρνουμε ότι $x=\sqrt{4}=2$. Επομένως, η $x=2$ είναι μία λύση ή ρίζα της εξίσωσης. Όμως, και το -2 είναι λύση της παραπάνω εξίσωσης, αφού $(-2)^2=4$. Έτσι, όταν έχουμε την εξίσωση $x^2=4$, γράφουμε $x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{4}=\pm 2$.

Όμοια, $x^4=81 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt[4]{81}=\pm 3$.

- Αν έχουμε την εξίσωση $x^6=-62$, τότε προφανώς αυτή δεν έχει λύση στο $\mathbb{R}$, αφού δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός που αν υψωθεί στην έκτη δύναμη, να δώσει αρνητικό αριθμό.
- Αν έχουμε την εξίσωση $x^3=8$, τότε από τον ορισμό της ρίζας παίρνουμε ότι $x=\sqrt[3]{8}=2$. Επομένως, η $x=2$ είναι μία λύση της εξίσωσης και μάλιστα μοναδική στο $\mathbb{R}$, διότι δεν υπάρχει άλλος πραγματικός αριθμός (βλ. παρακάτω το γενικό συμπέρασμα) που αν υψωθεί στην τρίτη δύναμη, να δώσει τον αριθμό 8. Έτσι, όταν έχουμε την εξίσωση $x^3=8$, γράφουμε $x^3=8 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{8}=2$.
- Αν έχουμε την εξίσωση $x^3=-8$, τότε ο ορισμός της τρίτης ρίζας δεν μας επιτρέπει να γράψουμε ότι το x είναι ίσο με την τρίτη ρίζα του -8, διότι το υπόρριζο θα ήταν αρνητικός αριθμός. Όμως, η παραπάνω εξίσωση έχει λύση στο $\mathbb{R}$ την $x=-2$, γιατί $(-2)^3=-8$ και αυτή είναι μοναδική (βλ. παρακάτω το γενικό συμπέρασμα). Επομένως, σε αυτήν την περίπτωση, γράφουμε $x^3=-8 \Leftrightarrow x=-\sqrt[3]{8}=-2$.

Γενικά για την εξίσωση $x^\nu=\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ και ν είναι ένας θετικός ακέραιος, που ονομάζεται **διώνυμη εξίσωση**, διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

Αν ν περιττός, τότε η εξίσωση $x^\nu=\alpha$ έχει πάντα μία μόνο πραγματική λύση, ανεξάρτητα από το αν ο α είναι θετικός, αρνητικός ή ίσος με μηδέν.

Συγκεκριμένα, η μοναδική πραγματική λύση της εξίσωσης είναι

- $x=\sqrt[\nu]{\alpha}$, όταν $\alpha \geq 0$
- $x=-\sqrt[\nu]{-\alpha}$, όταν $\alpha < 0$

Για παράδειγμα,

- Η εξίσωση $x^5=32$ έχει μόνο μία πραγματική λύση, τον αριθμό $x=\sqrt[5]{32}=2$.
- Η εξίσωση $x^3=-125$ έχει μόνο μία πραγματική λύση, τον αριθμό $x=-\sqrt[3]{125}=-5$.

Αν ν άρτιος τότε η εξίσωση $x^\nu=\alpha$ ενδέχεται να έχει ή να μην έχει πραγματικές λύσεις, ανάλογα από το αν ο α είναι θετικός, αρνητικός ή ίσος με μηδέν.

Συγκεκριμένα, η εξίσωση $x^\nu=\alpha$, ν άρτιος

- δεν έχει πραγματικές λύσεις, όταν $\alpha < 0$.
- έχει δύο πραγματικές λύσεις, τις $x=\sqrt[\nu]{\alpha}$, $x=-\sqrt[\nu]{\alpha}$, όταν $\alpha > 0$.
- έχει μία μόνο πραγματική λύση, τη $x=0$, όταν $\alpha=0$.

Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα το μηδέν. Γιατί τη λέμε διπλή ρίζα;

Για παράδειγμα,

- Η εξίσωση $x^4 = 256$ έχει δύο πραγματικές λύσεις, τις $x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{256} = \pm 4$.
- Η εξίσωση $x^4 = -16$ δεν έχει πραγματικές λύσεις.
- Η εξίσωση $x^4 = 0$ έχει μοναδική ρίζα το μηδέν.

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το μηδέν είναι τετραπλή ρίζα της εξίσωσης ή ρίζα πολλαπλότητας τέσσερα.

Παράδειγμα 2.3.4.1

(α) $x^5 = -32$ (β) $x^3 = 64$ (γ) $x^4 = 256$ (δ) $4x^3 = x$

Λύση

(α) $x^5 = -32 \Leftrightarrow x^5 = (-2)^5 \Leftrightarrow x = -2$ (γ) $x^4 = 256 \Leftrightarrow x^4 = 4^4 \Leftrightarrow x = 4$ ή $x = -4$

(β) $x^3 = 64 \Leftrightarrow x^3 = 4^3 \Leftrightarrow x = 4$ (δ) $4x^3 = x \Leftrightarrow 4x^3 - x = 0 \Leftrightarrow 4x\left(x^2 - \frac{1}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(4x = 0 \text{ ή } x^2 = \frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow \left(x = 0 \text{ ή } x = \pm\frac{1}{2}\right)$

Παράδειγμα 2.3.4.2

Να λυθούν οι εξισώσεις

(α) $x^5 + 64x^2 = 0$ (β) $x^4 - 27x = 0$ (γ) $(x-1)^3 + 216 = 0$ (δ) $(x+2)^4 - 125(x+2) = 0$

Λύση

(α) $x^5 + 64x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^3 + 64) = 0 \Leftrightarrow (x^2 = 0$ ή $x^3 = -64) \Leftrightarrow (x = 0$(διπλή ρίζα) ή $x = -4)$

(β) $x^4 - 27x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 27) = 0 \Leftrightarrow (x = 0$ ή $x^3 = 27) \Leftrightarrow (x = 0$ ή $x = 3)$

(γ) $(x-1)^3 + 216 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^3 = -216 \Leftrightarrow (x-1)^3 = (-6)^3 \Leftrightarrow x - 1 = -6 \Leftrightarrow x = 1 - 6 \Leftrightarrow x = -5$

(δ) $(x+2)^4 - 125(x+2) = 0 \Leftrightarrow (x+2)[(x+2)^3 - 125] = 0 \Leftrightarrow (x = -2$ ή $(x+2)^3 = 125)$

$\Leftrightarrow (x = -2$ ή $(x+2)^3 = 5^3) \Leftrightarrow (x = -2$ ή $x + 2 = 5) \Leftrightarrow (x = -2$ ή $x = 3)$

Ασκήσεις - Δραστηριότητες

Α' ΟΜΑΔΑ

1 Να λύσετε τις εξισώσεις
(α) $x^3 = 1000$ (β) $x^5 = 243$ (γ) $x^7 = 128$ (δ) $x^5 = 10^{-10}$

2 Να λύσετε τις εξισώσεις
(α) $x^3 - 125 = 0$ (β) $x^7 - 1 = 0$ (γ) $x^5 + 243 = 0$ (δ) $x^5 + 10^{10} = 0$

3 Να λύσετε τις εξισώσεις
(α) $x^4 = 10000$ (β) $x^6 = 64$ (γ) $x^8 = 256$ (δ) $x^{10} = -10^{10}$

4 Να λύσετε τις εξισώσεις
(α) $x^4 - 25 = 0$ (β) $x^6 - 64 = 0$ (γ) $x^{18} - 512 = 0$ (δ) $x^5 + 10^{10} = 0$

Β' ΟΜΑΔΑ

1 Να λύσετε τις εξισώσεις
(α) $x^3 = x$ (β) $x^4 + x = 0$ (γ) $4x^4 - x^2 = 0$ (δ) $x^5 = 16x$

2 Να λύσετε τις εξισώσεις
(α) $27(x+1)^3 - 1 = 0$ (β) $216(1-x)^6 + 64 = 0$ (γ) $(x+2)^8 - 256 = 0$ (δ) $(x+1)^4 - 8(x+1) = 0$

3 Να λύσετε τις εξισώσεις
(α) $(x+1)^4 = 81$ (β) $(1-x)^5 + 1024 = 0$ (γ) $(1-x)^4 = x - 1$ (δ) $(x-3)^4 + 1000(x-3) = 0$

4 Να λύσετε τις εξισώσεις
(α) $x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} = 0$ (β) $x^{\frac{4}{5}} - 9x^{\frac{2}{5}} = 0$ (γ) $x^{\frac{2}{3}} - 4x^{\frac{1}{6}} = 0$ (δ) $(4x-3)^{\frac{3}{4}} = 1$

2.3.5 Εξισώσεις 2ου βαθμού

Θα μάθουμε:

- να επιλύουμε αλγεβρικά εξισώσεις 2ου βαθμού.

Επίλυση της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha\neq 0$

Η λύση πολλών προβλημάτων της Γεωμετρίας, της Φυσικής καθώς και άλλων επιστημών ανάγεται στην επίλυση μιας εξίσωσης της μορφής: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$. Για παράδειγμα, είναι γνωστό ότι το διάστημα s που διανύει ένα κινητό που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα v_0 και επιτάχυνση α σε χρόνο t δίνεται από τον τύπο $s = v_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$. Αν θεωρήσουμε ως άγνωστο το χρόνο t, έχουμε να λύσουμε την εξίσωση $\frac{1}{2}\alpha t^2 + v_0 t - s = 0$, η οποία είναι 2ου βαθμού. Φυσικά γνωρίζουμε ότι όταν έχουμε να λύσουμε μία εξίσωση 2ου βαθμού προσπαθούμε να την παραγοντοποιήσουμε γράφοντάς την ως γινόμενο δύο παραγόντων το οποίο ισούται με μηδέν, οπότε τουλάχιστον ένας από αυτούς τους παράγοντες ισούται με μηδέν και αντίστροφα. Δηλαδή

$$A(x)\cdot B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0 \quad \text{ή} \quad B(x) = 0$$

Γενικά

$A_1(x)\cdot A_2(x)\cdot \ldots \cdot A_\nu(x) = 0 \Leftrightarrow A_1(x) = 0 \quad \text{ή} \quad A_2(x) = 0 \quad \text{ή} \quad \ldots \quad \text{ή} \quad A_\nu(x) = 0.$

Για παράδειγμα, έχουμε

- $(x-2)\cdot(2x-5) = 0 \Leftrightarrow (x-2=0 \;\text{ή}\; 2x-5=0) \Leftrightarrow \left(x=2 \;\text{ή}\; x=\frac{5}{2}\right)$

- $x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x^2-2x-x+2=0 \Leftrightarrow x(x-2)-(x-2)=0$
  $\Leftrightarrow (x-1)(x-2)=0 \Leftrightarrow x-1=0 \quad \text{ή} \quad x-2=0$
  $\Leftrightarrow x=1 \quad \text{ή} \quad x=2$

- $x^3+4x^2+4x=0 \Leftrightarrow x(x^2+4x+4)=0 \Leftrightarrow x(x+2)^2=0$
  $\Leftrightarrow x=0 \quad \text{ή} \quad (x+2)^2=0 \Leftrightarrow x=0 \quad \text{ή} \quad (x+2)(x+2)=0$
  $\Leftrightarrow x=0 \quad \text{ή} \quad x=-2$ (διπλή ρίζα)

Αν και στις περισσότερες των περιπτώσεων μπορούμε να λύσουμε μία εξίσωση 2ου βαθμού κάνοντας παραγοντοποίηση στο εξής θα ακολουθούμε μία πιο οργανωμένη διαδικασία επίλυσης αναπτύσσοντας μία βασική θεωρία στην οποία θα στηριζόμαστε όχι μόνο για να λύσουμε εξισώσεις, αλλά και ανισώσεις, καθώς επίσης και άλλα πιο σύνθετα προβλήματα.

Στο εξής θα λέμε εξίσωση δεύτερου βαθμού ή δευτεροβάθμια εξίσωση κάθε εξίσωση που έχει ή μπορεί να πάρει τη μορφή $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$.

- Οι αριθμοί α, β, γ είναι πραγματικοί και λέγονται **συντελεστές** της εξίσωσης.

  Ειδικότερα
  - Ο α λέγεται **συντελεστής του δευτεροβάθμιου** (ή του μεγιστοβάθμιου) **όρου**.
  - Ο β λέγεται **συντελεστής του πρωτοβάθμιου όρου**.
  - Ο γ λέγεται **σταθερός όρος**.
  - Ο x λέγεται **άγνωστος**.

Ρίζες

Υπενθυμίζουμε ότι με τη χρήση αυτού του συμβολισμού τα παραπάνω συμπεράσματα σχετικά με τις ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ συνοψίζονται ως εξής:

- Αν $\Delta > 0$, τότε η εξίσωση έχει δύο πραγματικές ρίζες άνισες τις $x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$.
- Αν $\Delta = 0$, τότε η εξίσωση έχει μία διπλή πραγματική ρίζα την $x_{1,2} = \dfrac{-\beta}{2\alpha}$.
- Αν $\Delta < 0$, τότε η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες (είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$).

Σχόλιο σχετικά με το σύνολο των μιγαδικών αριθμών

Για παράδειγμα,

- Η εξίσωση $2x^2 - x - 1 = 0$ έχει διακρίνουσα $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 1 + 8 = 9 > 0$, οπότε έχει δύο ρίζες άνισες τις $x_1 = \dfrac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{-(-1) + \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \dfrac{1+3}{4} = 1$ και $x_2 = \dfrac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{-(-1) - \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \dfrac{1-3}{4} = -\dfrac{1}{2}$
- Η εξίσωση $4x^2 - 4x + 1 = 0$ έχει διακρίνουσα $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 16 - 16 = 0$, οπότε έχει μία ρίζα διπλή (δύο ρίζες ίσες) την $x = x_{1,2} = -\dfrac{\beta}{2\alpha} = -\dfrac{-4}{2 \cdot 4} = \dfrac{1}{2}$
- Η εξίσωση $2x^2 - 2x + 1 = 0$ έχει διακρίνουσα $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 4 - 8 = -4 < 0$, οπότε είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

Παρατήρηση

Αν στην εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ οι συντελεστές α και γ είναι ετερόσημοι τότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

Πραγματικά, αν $\alpha\gamma < 0$, τότε $-4\alpha\gamma > 0$, οπότε $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$, δηλαδή, $\Delta > 0$. Για παράδειγμα, η εξίσωση $2023x^2 - 2024x - 2025 = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

Όταν έχουμε να λύσουμε ασκήσεις μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης αν η εξίσωση είναι ελλιπής (δηλαδή, β = 0 ή γ = 0) τη λύνουμε με παραγοντοποίηση, διαφορετικά τη λύνουμε με τη χρήση των παραπάνω τύπων καθώς και με παραγοντοποίηση.

Παράδειγμα 2.3.5.1

Να λυθούν οι εξισώσεις

(α) $x^2 = 2x$ (β) $3x^2 = 4$ (γ) $0{,}2x^2 + 10x = 0$ (δ) $4x^2 + 1 = 0$

Λύση

(α) $x^2 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \quad \text{ή} \quad x - 2 = 0) \Leftrightarrow (x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 2)$

(β) $3x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{4}{3}} = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}} = \pm\dfrac{2 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

(γ) $0{,}2x^2 + 10x = 0 \Leftrightarrow 0{,}2x\,(x + 50) = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \quad \text{ή} \quad x + 50 = 0) \Leftrightarrow (x = 0 \quad \text{ή} \quad x = -50)$

(δ) $4x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = -1 \Leftrightarrow x^2 = -\dfrac{1}{4}$, το οποίο είναι αδύνατο γιατί ισχύει $x^2 \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 2.3.5.2

Να λυθούν οι εξισώσεις

(α) $15x^2 - 11x + 2 = 0$ (β) $x^2 - 0{,}54x + 0{,}072 = 0$

(γ) $x^2 - \left(1 + 3\sqrt{3}\right)x + 2\left(3 + \sqrt{3}\right) = 0$ (δ) $x^2 - \alpha(\beta - 1)x - \alpha^2\beta = 0$

Άθροισμα και γινόμενο των ριζών της εξίσωσης

Λύση

(α) Είναι $\Delta = (-11)^2 - 4 \cdot 15 \cdot 2 = 121 - 120 = 1$, οπότε $x_1 = \dfrac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{11 + \sqrt{1}}{2 \cdot 15} = \dfrac{12}{30} = \dfrac{2}{5}$

και $x_2 = \dfrac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{11 - \sqrt{1}}{2 \cdot 15} = \dfrac{10}{30} = \dfrac{1}{3}$.

(β) Είναι $\Delta = (-0{,}54)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0{,}072 = 0{,}2916 - 0{,}288 = 0{,}0036$, οπότε $\sqrt{\Delta} = \sqrt{0{,}0036} = 0{,}06$.

Άρα $x_1 = \dfrac{0{,}54 + 0{,}06}{2} = \dfrac{0{,}60}{2} = 0{,}3$ και $x_2 = \dfrac{0{,}54 - 0{,}06}{2} = \dfrac{0{,}48}{2} = 0{,}24$.

(γ) Είναι $\Delta = \left(1 + 3\sqrt{3}\right)^2 - 4 \cdot 2 \cdot \left(3 + \sqrt{3}\right) = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 3\sqrt{3} + \left(3\sqrt{3}\right)^2 - 24 - 8\sqrt{3}$

$= 1 + 6\sqrt{3} + 27 - 24 - 8\sqrt{3} = 1 - 2\sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2 = \left(\sqrt{3} - 1\right)^2$

Άρα $x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{\left(1 + 3\sqrt{3}\right) \pm \left(\sqrt{3} - 1\right)}{2 \cdot 1}$, οπότε $x_1 = \dfrac{\left(1 + 3\sqrt{3}\right) + \left(\sqrt{3} - 1\right)}{2} = \dfrac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

και $x_2 = \dfrac{\left(1 + 3\sqrt{3}\right) - \left(\sqrt{3} - 1\right)}{2 \cdot 1} = \dfrac{2 + 2\sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{3}$.

(δ) Είναι $\Delta = \alpha^2(\beta - 1)^2 + 4\alpha^2\beta = \alpha^2[(\beta - 1)^2 + 4\beta] = \alpha^2(\beta^2 - 2\beta + 1 + 4\beta)$

$= \alpha^2(\beta^2 + 2\beta + 1) = \alpha^2(\beta + 1)^2$

Άρα $x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{\alpha(\beta - 1) \pm \alpha(\beta + 1)}{2 \cdot 1}$, οπότε $x_1 = \dfrac{\alpha(\beta - 1) + \alpha(\beta + 1)}{2} = \dfrac{2\alpha\beta}{2} = \alpha\beta$

και $x_2 = \dfrac{\alpha(\beta - 1) - \alpha(\beta + 1)}{2} = \dfrac{-2\alpha}{2} = -\alpha$.

Ασκήσεις δραστηριότητας α' ομάδας

Ασκήσεις δραστηριότητας β' ομάδας

Ασκήσεις β' ομάδας 2.3.5

Ασκήσεις - Δραστηριότητες

Α' ΟΜΑΔΑ

1 Να λυθούν οι εξισώσεις

(α) $2x^2 - x = 0$ (β) $0{,}25x^2 = 0{,}5x$ (γ) $0{,}25x^2 - 1 = 0$

(δ) $4x^2 - 7x + 3 = 0$ (ε) $x^2 = x + \dfrac{1}{4}$ (στ) $x^2 - x = 1$

2 Να λυθούν οι εξισώσεις

(α) $(x - 2)(x + 2) = 3x$ (β) $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)(2x - 1) = 2$ (γ) $\dfrac{x^2 - 1}{4} = x - 1$

(δ) $x^2 - \sqrt{2}x - 8 = 0$ (ε) $8x^2 - 4\sqrt{2}x + 1 = 0$ (στ) $x^2 - x = 1$

3 Να λυθούν οι εξισώσεις

(α) $x^2 - 2023x - 2024 = 0$ (β) $x^2 - 0{,}55x + 0{,}0736 = 0$ (γ) $x^2 - 2x + 2\left(\sqrt{2} - 1\right) = 0$

(δ) $2x^2 + \left(3 - 2\sqrt{2}\right)x - 3\sqrt{2} = 0$ (ε) $3x^2 + \left(\sqrt{6} - \sqrt{3}\right)x - \sqrt{2} = 0$ (στ) $4x^2 + 2\left(\sqrt{3} - 1\right)x - \sqrt{3} = 0$

Σε κάποιες από τις παραπάνω εξισώσεις η χρήση των τύπων των ριζών δεν είναι ο πιο σύντομος τρόπος εύρεσής τους.

4 Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν πραγματικές ρίζες για κάθε $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

(α) $x^2 + (4\alpha - \beta)x - 4\alpha\beta = 0$ (β) $x^2 - (2\alpha + 3\beta)x + 6\alpha\beta = 0$

5 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις, αφού διαπιστώσετε ότι έχουν πραγματικές ρίζες για κάθε $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

(α) $x^2 + 2\beta x - \alpha^2 - 2\alpha\beta = 0$ (β) $x^2 - (2\alpha - 3\beta)\, x - 6\alpha\beta = 0$ (γ) $x^2 -(\alpha - 2\beta)x - 2\alpha\beta = 0$

6 Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ οι εξισώσεις που ακολουθούν έχουν πραγματικές ρίζες και στη συνέχεια να τις λύσετε

(α) $(1 - \lambda^2)x^2 + 2x + 1 = 0$ (β) $(\lambda^2 - \lambda)x^2 - x - (\lambda^2 + \lambda) = 0$ (γ) $x^2 + (2\lambda - 3)x - 3\lambda - 7 = 0$

Πότε οι εξισώσεις έχουν δύο ρίζες ίσες;

Β' ΟΜΑΔΑ

1 Αν οι αριθμοί α και β είναι ρητοί να αποδειχτεί ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν ρητές ρίζες

(α) $3\alpha x^2 + (3\alpha - \beta)x - \beta = 0$ (β) $x^2 - (\alpha + 5\beta)x + 6(\beta^2 - \alpha^2) = 0$

2 Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση $x^2 - 2x - 2\lambda + 1 = 0$

(α) έχει δύο ρίζες άνισες (β) έχει μία διπλή ρίζα (γ) είναι αδύνατη;

3 Αν μία ρίζα της εξίσωσης $x^2 - (\lambda + 6)x - 2(\lambda^2 + 2) = 0$ είναι το 11 να βρεθεί η άλλη ρίζα της.

4 Να υπολογίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση $x^2 + (\lambda + 1)x + 1 = 0$

(α) έχει ρίζα το -2 (β) έχει δύο πραγματικές και ίσες ρίζες

5 Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,\ \alpha \neq 0$. Συμβολίζουμε με S το άθροισμα των ριζών της, δηλαδή, $S = x_1 + x_2$ και με P το γινόμενό τους, δηλαδή, $P = x_1x_2$.

(α) Να αποδείξετε ότι $S = -\dfrac{\beta}{\alpha}$ και $P = \dfrac{\gamma}{\alpha}$.

(β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 - Sx + P = 0$ είναι ισοδύναμη με την αρχική (δηλαδή, έχουν τις ίδιες ρίζες). (Βλέπε **Σ.Υ. 2.3.5.2**)

(γ) Αν $x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}$ και $x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}$ να αποδείξετε ότι $x_1 + x_2 = 2\sqrt{3}$ και $x_1x_2 = 1$.

(Παρατηρήστε ότι $5 \pm 2\sqrt{6} = 3 + 2 \pm 2\sqrt{6} = \left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 \pm 2\sqrt{2}\sqrt{3} = \ldots$)

(δ) Να κατασκευάσετε εξίσωση β' βαθμού με ρίζες τις x_1, x_2.

(ε) Να κατασκευάσετε εξίσωση β' βαθμού με ρίζες τις $\dfrac{1}{x_1}, \dfrac{1}{x_2}$. (Αυτή η άσκηση παρέχει έναν τρόπο να κατασκευάζουμε εξισώσεις 2ου βαθμού με γνωστές πραγματικές ρίζες.)

Πρόσημο των ριζών της εξίσωσης αx²+βx+γ=0

6 Να βρεθούν τα πρόσημα των ριζών των εξισώσεων

(α) $2x^2 + 7x + 4 = 0$ (β) $x^2 - \kappa^2 x - 2 = 0$ (γ) $\alpha^2x^2 + x - \beta^2 = 0,\ \alpha \neq 0$ (δ) $x^2 + |\lambda|x + \lambda - 1 = 0$.

(Παρατηρήστε ότι το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,\ \alpha \neq 0$ (βλ. προηγούμενη άσκηση) καθορίζουν το πρόσημό τους. Για παράδειγμα, αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης και $P > 0$, $S > 0$, τότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες θετικές. Αν $P > 0$, $S < 0$, τότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες αρνητικές κ.λπ. Βλέπε και **Σ.Υ. 2.3.5.3**).

2.3.6 Αναγωγή σε εξισώσεις 2ου βαθμού

Θα μάθουμε:

- να επιλύουμε εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις 2ου βαθμού.

Στη συνέχεια θα δούμε, με τη βοήθεια παραδειγμάτων, πώς μπορούμε να επιλύσουμε εξισώσεις οι οποίες δεν είναι μεν 2ου βαθμού, αλλά, με κατάλληλους «μετασχηματισμούς» (εννοούμε τροποποιήσεις στην εμφάνισή τους χρησιμοποιώντας βοηθητικούς αγνώστους), ανάγονται σε εξισώσεις 2ου βαθμού. Οι εξισώσεις της κατηγορίας αυτής λύνονται με τη βοήθεια αντικαταστάσεων και μετασχηματισμών με σκοπό το σχηματισμό μιας εξίσωσης 2ου βαθμού. Η διορατικότητα, η εμπειρία και γενικά η δεινότητα καθενός που θα προσπαθήσει να λύσει μία τέτοια εξίσωση θα παίξουν τον πρώτο ρόλο στο να βρει γρήγορα και σωστά τη λύση ή τις λύσεις.

Αναλυτικά συχνότερα συναντάμε τις παρακάτω μορφές εξισώσεων που ανάγονται σε δευτεροβάθμιες:

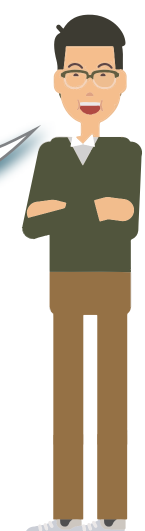
(i) Κλασματικές εξισώσεις οι οποίες μετά την απαλοιφή των παρονομαστών καταλήγουν σε δευτεροβάθμιες.

(ii) Εξισώσεις της μορφής $\alpha x^2 + \beta|x| + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ (ή γενικότερα της μορφής $\alpha f^2(x) + \beta|f(x)| + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$).

Κάνουμε την αντικατάσταση $|x| = y \geq 0$ (ή την $|f(x)| = y \geq 0$) και λύνουμε τη δευτεροβάθμια εξίσωση που προκύπτει. (Υπενθυμίζουμε ότι $x^2 = |x|^2$).

(iii) Εξισώσεις της μορφής $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ (ή γενικότερα της μορφής $\alpha f^{2\nu}(x) + \beta f^{\nu}(x) + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$, $\nu \in \mathbb{N}^*$) Κάνουμε την αντικατάσταση $x^2 = y \geq 0$ (ή την $f^{\nu}(x) = y \geq 0$) και λύνουμε τη δευτεροβάθμια εξίσωση που προκύπτει.

*Κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ λέγεται **διτετράγωνη**. Η εξίσωση $\alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0$ στην οποία οδηγούμαστε με την αντικατάσταση $x^2 = y \geq 0$ λέγεται **επιλύουσα** της διτετράγωνης.*



Παράδειγμα 2.3.6.1

Να λυθούν οι εξισώσεις

(α) $\dfrac{x-2}{x} + \dfrac{4}{x-2} = \dfrac{8}{x^2-2x}$ (β) $x^2 - |x| - 2 = 0$

Παράδειγμα 2.3.6.1 ερωτήματα γ-δ

Λύση

(α) Για να ορίζεται η εξίσωση πρέπει $x \neq 0$, $x - 2 \neq 0$ και $x^2 - 2x \neq 0$, δηλαδή $x(x-2) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ και $x \neq 2$. Με αυτούς τους περιορισμούς του x έχουμε

$$\frac{x-2}{x} + \frac{4}{x-2} = \frac{8}{x(x-2)} \Leftrightarrow x(x-2)\cdot\frac{x-2}{x} + x(x-2)\cdot\frac{4}{x-2} = x(x-2)\cdot\frac{8}{x(x-2)}$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\cdot(x-2) + x\cdot 4 = 1\cdot 8 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + 4x = 8$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4 = 0$$

Η τελευταία εξίσωση έχει ρίζες τις $x_1 = -2$ και $x_2 = 2$. Από αυτές, λόγω του περιορισμού, δεκτή είναι μόνο η $x_1 = -2$.

(β) Επειδή $x^2 = |x|^2$, η εξίσωση γράφεται $|x|^2 - |x| - 2 = 0$. Αν θέσουμε $|x| = y$, τότε η εξίσωση γίνεται $y^2 - y - 2 = 0$.
Η εξίσωση αυτή έχει ρίζες τις $y_1 = -1$ και $y_2 = 2$. Από αυτές δεκτή είναι μόνο η θετική, αφού $y = |x| \geq 0$. Επομένως, $|x| = 2$, που σημαίνει ότι $x = -2$ ή $x = 2$.

Παραδείγματα Ενότητας 2.3.6

Ασκήσεις Ενότητας 2.3.6

2.3.7 Εφαρμογές εξισώσεων 2ου βαθμού

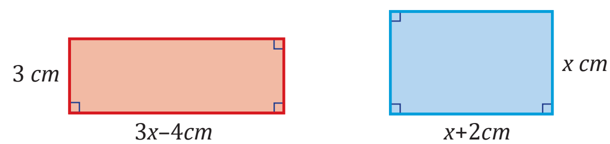
Θα μάθουμε:

- να χρησιμοποιούμε εξισώσεις 2ου βαθμού στη μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων.

Σε τέτοια προβλήματα το σημαντικότερο στάδιο της διαδικασίας επίλυσης είναι η «μοντελοποίησή» τους, δηλαδή, ο σχηματισμός της κατάλληλης δευτεροβάθμιας εξίσωσης που τα επιλύει. Τα παραδείγματα που ακολουθούν είναι ενδεικτικά.

Παράδειγμα 2.3.7.1

Τα ορθογώνια που φαίνονται στο σχήμα έχουν ίδιο εμβαδόν αλλά δεν είναι ίσα. Να υπολογιστεί η τιμή του x.



Λύση

Ο τύπος του εμβαδού ενός ορθογωνίου με διαστάσεις α και β είναι $E = \alpha\beta$. Επομένως, θα έχουμε

$$3(3x - 4) = x(x + 2) \Leftrightarrow 9x - 12 = x^2 + 2x \Leftrightarrow x^2 + 2x - 9x + 12 = 0$$

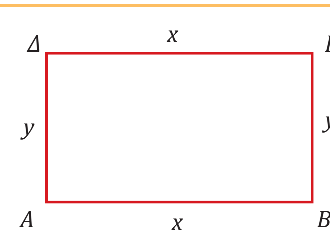
$$\Leftrightarrow x^2 - 7x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \quad \text{ή} \quad x = 4$$

Για $x = 3$ οι διαστάσεις και των δύο ορθογωνίων είναι 3 *cm* και 5 *cm*, και επομένως η τιμή 3 απορρίπτεται, γιατί τα ορθογώνια δεν είναι ίσα (από εκφώνηση).

Για $x = 4$ οι διαστάσεις και των δύο ορθογωνίων είναι 3 *cm* και 8 *cm*, και 4 cm και 6 *cm*, οπότε η τιμή 4 είναι η μόνη δεκτή λύση.

Παράδειγμα 2.3.7.2

Να αποδείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με σταθερή περίμετρο το τετράγωνο έχει το μέγιστο εμβαδό.



Λύση

Έστω 2τ η περίμετρος των ορθογωνίων, x, y οι διαστάσεις ενός από αυτά και E το εμβαδόν του. Τότε

$$\left.\begin{aligned} 2(x+y) &= 2\tau \\ xy &= E \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} x + y &= \tau \\ xy &= E \end{aligned}$$

Επομένως, οι πραγματικοί αριθμοί x και y είναι ρίζες της εξίσωσης $\omega^2 - \tau\omega + E = 0$. (βλ. 2.3.5, Άσκηση 5, σελίδα 85)

Επειδή τα x και y είναι πραγματικοί αριθμοί η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης θα είναι μη αρνητική, οπότε

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \tau^2 - 4E \geq 0 \Leftrightarrow E \leq \frac{\tau^2}{4} \;.$$

Άρα $E_{max} = \frac{\tau^2}{4}$, οπότε $\Delta = 0$ και επομένως η εξίσωση έχει δύο ρίζες ίσες, δηλαδή, $x = y = \frac{\tau}{2}$.

Ασκήσεις - Δραστηριότητες

Οι δραστηριότητες αυτής της ενότητας, όπως και των Ενοτήτων 2.3.9 και 2.3.10 συνδέουν τις εξισώσεις ή τις ανισώσεις, με προβλήματα του πραγματικού κόσμου. Αυτό το γεγονός δεν είναι κάτι εντελώς άγνωστο. Έχουμε συναντήσει πολλές φορές προβλήματα που λύνονται πολύ εύκολα με τη χρήση εξισώσεων 1ου βαθμού, για παράδειγμα. Ωστόσο, τα προβλήματα αυτής της ενότητας, αλλά ακόμα περισσότερο των Ενοτήτων 2.3.9 και 2.3.10 είναι αρκετά πιο απαιτητικά από άλλα που συναντήσαμε στο παρελθόν. Θα λέγαμε ότι κάποια από αυτά είναι «προβλήματα προκλήσεις» και από την πρώτη ματιά φαίνεται όχι μόνο η στενή σχέση των καθαρών μαθηματικών (εδώ των εξισώσεων) με πραγματικά προβλήματα αλλά και το γεγονός ότι τα μαθηματικά αποτελούν το μοναδικό εργαλείο αντιμετώπισής τους. Είμαστε σίγουροι ότι οι διδάσκοντες γνωρίζουν ότι πρέπει να συζητούν, να σχολιάζουν και να αναλύουν τέτοια προβλήματα, δηλαδή, προβλήματα που απαιτείται «μαθηματική προτυποποίηση» για να λυθούν, με άλλα λόγια προβλήματα που για να λυθούν πρέπει να κατασκευαστεί μία εξίσωση ή μία ανίσωση. Προτρέπουμε τους μαθητές να διαβάζουν με πολλή προσοχή ξανά και ξανά κάθε τέτοιο πρόβλημα και μετά να μπαίνουν στη διαδικασία της επίλυσης του προβλήματος. Σε περίπτωση αδυναμίας τους ενθαρρύνουμε να συζητούν το πρόβλημα με τους συμμαθητές τους ή και με τους καθηγητές τους.

Α' ΟΜΑΔΑ

1 Να βρεθούν οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου του οποίου η διαγώνιος ισούται με 85 cm και το εμβαδόν του με 3.000 cm^2.

2 Να βρεθεί αριθμός ο οποίος αυξανόμενος κατά το 5πλάσιο της τετραγωνικής του ρίζας γίνεται 266.

3 Να βρεθεί αριθμός του οποίου το τετράγωνο ελαττωμένο κατά το 20πλάσιο της τετραγωνικής του ρίζας ισούται με 21.

4 Να βρεθούν δύο διαδοχικοί περιττοί των οποίων το άθροισμα των τετραγώνων ισούται με 130.

5 Οι πλευρές ενός τριγώνου είναι 8, 15, 16 μονάδες. Πόσο πρέπει να ελαττωθούν ώστε να προκύψει τρίγωνο ορθογώνιο.

6 Να βρεθούν δύο αριθμοί με άθροισμα 14 και άθροισμα τετραγώνων 100.

Β' ΟΜΑΔΑ

1 Αν ένας αριθμός αυξηθεί κατά μία μονάδα ο κύβος του αυξάνεται κατά 217. Να βρεθεί ο αριθμός.

2 Να βρεθεί τριψήφιος αριθμός του οποίου το ψηφίο των μονάδων είναι μέσο ανάλογο των δύο άλλων, το ψηφίο των δεκάδων είναι το 1/6 του αθροίσματος των δύο άλλων, αν δε αντιστραφεί η σειρά των ψηφίων του προκύπτει αριθμός μικρότερος κατά 396.

3 Η πλευρά ενός τετραγώνου έχει μήκος x και είναι ίση με τη μία διάσταση ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου του οποίου η άλλη διάσταση είναι 3 m. Να βρεθεί η τιμή του x ώστε το άθροισμα των εμβαδών τους να μην ξεπερνάει τα 10 m^2. Πότε είναι ίσο με 10 m^2;

4 Να αποδείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με το ίδιο εμβαδόν E, την ελάχιστη περίμετρο την έχει το τετράγωνο.

5 Να αποδείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια τρίγωνα με σταθερή υποτείνουσα $α$, τη μεγαλύτερη περίμετρο την έχει το ισοσκελές.

6 Να βρεθεί διψήφιος αριθμός του οποίου το άθροισμα των τετραγώνων των ψηφίων του ισούται με τον αριθμό αυξημένο κατά το γινόμενο των ψηφίων του και αν στον αριθμό προσθέσουμε το 36 θα προκύψει ο αριθμός που έχει τα ψηφία του πρώτου γραμμένα με αντίστροφη σειρά.

2.3.8 Ανισώσεις 2ου βαθμού

Θα μάθουμε:

- να επιλύουμε ανισώσεις 2ου βαθμού αλγεβρικά και γραφικά.

Έχουμε μάθει:

την παραγοντοποίηση τριωνύμου

Παραγοντοποίηση τριωνύμου

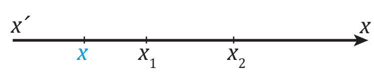
Πρόσημο των τιμών του τριωνύμου

Όπως έχουμε αναφέρει το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$ όπου τα α, β και γ είναι γνωστοί πραγματικοί αριθμοί και το x είναι μία μεταβλητή, είναι μία αλγεβρική παράσταση που παίρνει πραγματικές τιμές. Κάθε φορά που το x παίρνει μία συγκεκριμένη πραγματική τιμή, το τριώνυμο παίρνει μία αριθμητική τιμή. Καθώς οι τιμές που μπορεί να πάρει είναι άπειρες, είναι απαραίτητο να βρεθεί ένας «σύντομος» τρόπος που θα μας δίνει το πρόσημο αυτών των τιμών καθώς το x μεταβάλλεται. Για να μελετήσουμε το πρόσημο των τιμών του τριωνύμου και να βρούμε ένα μεθοδικό τρόπο εύρεσής του, θα χρησιμοποιήσουμε τις μορφές του ανάλογα με τη διακρίνουσα και πιο συγκεκριμένα ανάλογα με το πρόσημο της διακρίνουσας. Επομένως, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

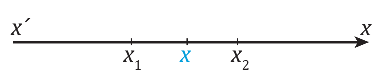
- Αν $\Delta>0$, τότε, γνωρίζουμε ότι, ισχύει

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x_1)(x-x_2) \quad (1)$$

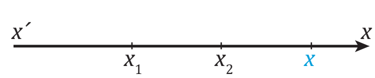
Υποθέτουμε ότι $x_1<x_2$ και τοποθετούμε τις ρίζες σε έναν άξονα.
Παρατηρούμε ότι:



– Αν $x<x_1<x_2$ (βλ. σχήμα), τότε $x-x_1<0$ και $x-x_2<0$, οπότε $(x-x_1)(x-x_2)>0$. Επομένως, λόγω της (1), το τριώνυμο είναι ομόσημο του α.



– Αν $x_1<x<x_2$ (βλ. σχήμα), τότε $x-x_1>0$ και $x-x_2>0$, οπότε $(x-x_1)(x-x_2)<0$. Επομένως, λόγω της (1), το τριώνυμο είναι ετερόσημο του α.



– Αν $x_1<x_2<x$ (βλ. σχήμα), τότε $x-x_1>0$ και $x-x_2>0$, οπότε $(x-x_1)(x-x_2)>0$. Επομένως, λόγω της (1), το τριώνυμο είναι ομόσημο του α.

- Αν $\Delta=0$, τότε ισχύει

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$$

Επομένως, το τριώνυμο είναι ομόσημο του α για κάθε πραγματικό x, ενώ μηδενίζεται για $x=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$.

- Αν $\Delta<0$, τότε ισχύει

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right]$$

Όμως η παράσταση μέσα στην αγκύλη είναι θετική για κάθε πραγματικό αριθμό x. Επομένως, το τριώνυμο είναι ομόσημο του α σε όλο το $\mathbb{R}$.

Με βάση τα παραπάνω καταλήγουμε στο εξής συμπέρασμα:

> Το τριώνυμο είναι ετερόσημο του α για τις τιμές του x που βρίσκονται μεταξύ των ριζών του (δηλαδή, μόνο όταν είναι $\Delta > 0$), μηδενίζεται όταν το x πάρει την τιμή ρίζας και είναι ομόσημο του α σε κάθε άλλη περίπτωση.

Παράδειγμα 2.3.8.1

Να βρείτε το πρόσημο των παρακάτω τριωνύμων

(α) $x^2 - 4x + 3$ (β) $-3x^2 + 4x - 1$ (γ) $x^2 - 2x + 1$

(δ) $-9x^2 + 12x - 4$ (ε) $x^2 - x + 1$ (στ) $-x^2 - 2x - 2$

Λύση

(α) Είναι $\alpha = 1 > 0$ και εύκολα βρίσκουμε ότι $\Delta = 4 > 0$, $x_1 = 1$ και $x_2 = 3$, οπότε το τριώνυμο $x^2 - 4x + 3$ παίρνει τιμές ομόσημες του α, δηλαδή θετικές όταν το x βρίσκεται εκτός του διαστήματος των ριζών, δηλαδή όταν $x < 1$ ή $x > 3$, ετερόσημες του α, δηλαδή αρνητικές στο διάστημα εντός των ριζών, δηλαδή όταν $1 < x < 3$ και μηδενίζεται για $x = 1$ και για $x = 3$.

Τα παραπάνω συμπεράσματα φαίνονται συνοπτικά στον πίνακα

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
x^2-4x+3		$+$	0	$-$	0	$+$	

(β) Είναι $\alpha = -3 < 0$, $\Delta = 4 > 0$, $x_1 = \frac{1}{3}$ και $x_2 = 1$, οπότε το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον πίνακα

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$-3x^2+4x-1$		$-$	0	$+$	0	$-$	

(γ) Είναι $\alpha = 1 > 0$, $\Delta = 0$ και $x_1 = x_2 = 1$, οπότε για το πρόσημο του τριωνύμου έχουμε τον πίνακα

x	$-\infty$		1		$+\infty$
x^2-2x+1		$+$	0	$+$	

(δ) Είναι $\alpha = -9 < 0$, $\Delta = 0$ και $x_1 = x_2 = \frac{2}{3}$, οπότε για το πρόσημο του τριωνύμου έχουμε τον πίνακα

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$-9x^2+12x-4$		$-$	0	$-$	

(ε) Είναι $\alpha = 1 > 0$, $\Delta = -3 < 0$, οπότε το τριώνυμο είναι θετικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
x^2-x+1		$+$	

(στ) Είναι $\alpha = -1 < 0$, $\Delta = -4 < 0$, οπότε το τριώνυμο είναι αρνητικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$-x^2-2x-2$		$-$	

Παράδειγμα 2.3.8.2

Να βρείτε για ποιες τιμές του λ το τριώνυμο $(2-\lambda)x^2-(2\lambda-1)x+1-\lambda$ είναι
(i) θετικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
(ii) αρνητικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
(iii) μη αρνητικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση

Είναι $\alpha = 2-\lambda$ και $\Delta = (2\lambda-1)^2-4(2-\lambda)(1-\lambda)$.
(i) Πρέπει να είναι $\alpha > 0$ και $\Delta < 0$. Έχουμε

$$\left.\begin{aligned} &\alpha>0\\ &\text{και}\\ &\Delta<0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} &2-\lambda>0\\ &\text{και}\\ &(2\lambda-1)^2-4(2-\lambda)(1-\lambda)<0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} &\lambda<2\\ &\text{και}\\ &(4\lambda^2-4\lambda+1)-4(\lambda^2-3\lambda+2)<0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} &\lambda<2\\ &\text{και}\\ &8\lambda-7<0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} &\lambda<2\\ &\text{και}\\ &\lambda<\frac{7}{8} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \lambda<\frac{7}{8}$$

(ii) Πρέπει να είναι $\alpha < 0$ και $\Delta < 0$, οπότε

$$\left.\begin{aligned} &2-\lambda<0\\ &\text{και}\\ &(2\lambda-1)^2-4(2-\lambda)(1-\lambda)<0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} &\lambda>2\\ &\text{και}\\ &\lambda<\frac{7}{8} \end{aligned}\right\} \text{ το οποίο είναι αδύνατο}$$

(iii) Πρέπει να είναι $\alpha > 0$ και $\Delta \le 0$, οπότε

$$\left.\begin{aligned} &2-\lambda>0\\ &\text{και}\\ &(2\lambda-1)^2-4(2-\lambda)(1-\lambda)\le 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} &\lambda<2\\ &\text{και}\\ &\lambda\le\frac{7}{8} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \lambda\le\frac{7}{8}$$

Ανισώσεις της μορφής $\alpha x^2+\beta x+\gamma>0,\ \alpha\neq 0$ ή της $\alpha x^2+\beta x+\gamma<0,\ \alpha\neq 0$

Για την επίλυση αυτών των ανισώσεων χρησιμοποιούμε τα προηγούμενα συμπεράσματα. Αρκεί να βρούμε το πρόσημο του τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha \neq 0$.

Ο τρόπος επίλυσης αυτών φαίνεται στα παρακάτω παραδείγματα.

Οι ανισώσεις της μορφής $\alpha x^2+\beta x+\gamma>0$, $\alpha\neq 0$ ή της $\alpha x^2+\beta x+\gamma<0$, $\alpha\neq 0$ ονομάζονται **ανισώσεις δευτέρου βαθμού**.

Παράδειγμα 2.3.8.3

Να λυθούν οι ανισώσεις

(α) $x^2-2x-3>0$ (β) $x^2-7x+6\le 0$ (γ) $x^2-6x+9\ge 0$
(δ) $x^2-2x+1>0$ (ε) $x^2+4x+4\le 0$ (στ) $4x^2-20x+25<0$
(ζ) $-2x^2+3x-1<0$ (η) $-x^2-x-2\ge 0$

Λύση

(α) Το τριώνυμο $x^2 - 2x - 3$ έχει $\alpha = 1 > 0$, $\Delta = 16$ και ρίζες τις $x_1 = -1$ και $x_2 = 3$. Λύσεις της ανίσωσης $x^2 - 2x - 3 > 0$ είναι οι πραγματικοί x για τους οποίους το τριώνυμο είναι θετικό, δηλαδή, οι $x \in \mathbb{R}$ με $x < -1$ ή $x > 3$.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
x^2-2x-3		+	0	−	0	+	

(β) Το τριώνυμο $x^2 - 7x + 6$ έχει $\alpha = 1 > 0$, και ρίζες τις $x_1 = 1$ και $x_2 = 6$. Άρα λύσεις της ανίσωσης $x^2 - 7x + 6 \le 0$ είναι οι $x \in \mathbb{R}$ με $1 \le x \le 6$.

x	$-\infty$		1		6		$+\infty$
x^2-7x+6		+	0	−	0	+	

(γ) Για το τριώνυμο $x^2 - 6x + 9$, έχουμε $\alpha = 1 > 0$, $\Delta = 0$ και $x_1 = x_2 = 3$. Άρα το τριώνυμο είναι θετικό για κάθε $x \in \mathbb{R}\backslash\{3\}$ και για $x = 3$ μηδενίζεται. Συνεπώς λύσεις της ανίσωσης $x^2 - 6x + 9 \ge 0$ είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί.

(δ) Έχουμε $x^2 - 2x + 1 > 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 > 0 \Leftrightarrow x \ne 1$. Άρα λύσεις της ανίσωσης $x^2 - 2x + 1 > 0$ είναι όλοι οι πραγματικοί εκτός από το 1.

(ε) Έχουμε $x^2 + 4x + 4 \le 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 \le 0$. Επειδή $(x + 2)^2 \ge 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, λύση της δοσμένης ανισότητας είναι το $x = -2$.

(στ) Έχουμε $4x^2 - 20x + 25 < 0 \Leftrightarrow (2x - 5)^2 < 0$ και επειδή $4x^2 - 20x + 25 \ge 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η ανισότητα είναι αδύνατη.

(ζ) Είναι $\alpha = -2$, $\Delta = 1$, $x_1 = \frac{1}{2}$ και $x_2 = 1$, οπότε $-2x^2 + 3x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$ ή $x > 1$.

(η) Είναι $\alpha = -1$, $\Delta = -7 < 0$ οπότε το τριώνυμο $-x^2 - x - 2$ είναι ομόσημο του $\alpha = -1$, δηλαδή αρνητικό σε όλο το $\mathbb{R}$. Άρα, η ανίσωση $-x^2 - x - 2 \ge 0$ είναι αδύνατη.

Ανισώσεις της μορφής $A(x) \cdot B(x) \cdot \ldots \cdot \Phi(x) > 0$ (ή <0)

Όταν θέλουμε να μελετήσουμε ένα γινόμενο $P(x) = A(x) \cdot B(x) \cdot \ldots \cdot \Phi(x)$ ως προς το πρόσημό του, όπου οι παράγοντες $A(x), B(x), \ldots, \Phi(x)$ είναι της μορφής $\alpha x + \beta$ (πρωτοβάθμιες) ή της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \ne 0$ (τριώνυμα), βρίσκουμε το πρόσημο κάθε παράγοντα χωριστά και στη συνέχεια το πρόσημο του $P(x)$, όπως φαίνεται στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα 2.3.8.4

(i) Να βρεθεί το πρόσημο του γινομένου $P(x) = (x - 2)(x^2 + x + 1)(x^2 - x)$ για τις διάφορες τιμές του x.

(ii) Να λυθεί η ανίσωση $(x - 2)(x^2 + x + 1)(x^2 - x) \ge 0$.

Λύση

(i) Βρίσκουμε το πρόσημο κάθε παράγοντα χωριστά.

- Το $x-2$ είναι θετικό για $x>2$, μηδέν για $x=2$ και αρνητικό για $x<2$.
- Το x^2+x+1 έχει $\alpha=1>0$ και $\Delta=-3<0$ συνεπώς είναι θετικό για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
- Το $x^2-x=x(x-1)$ έχει προφανώς ρίζες τις $x_1=0$ και $x_2=1$ και είναι θετικό για $x<0$ ή $x>1$, μηδέν για $x=0$ ή $x=1$ και αρνητικό για $0<x<1$.

Για να προσδιορίσουμε το πρόσημο του $P(x)$ κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα και εφαρμόζουμε τον κανόνα των προσήμων.

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$x-2$		−		−		−	0	+	
x^2+x+1		+		+		+		+	
x^2-x		+	0	−	0	+		+	
$P(x)$		−	0	+	0	−	0	+	

Άρα το γινόμενο $P(x)$ είναι θετικό για $0<x<1$ ή $x>2$, αρνητικό για $x<0$ ή $1<x<2$ και μηδενίζεται για $x=0$ ή $x=1$ ή $x=2$.

(ii) Σύμφωνα με το (i) ερώτημα οι λύσεις της ανίσωσης είναι οι λύσεις της $P(x)\geq 0$ δηλαδή τα $x\in\mathbb{R}$ με $0\leq x\leq 1$ ή $x\geq 2$.

Ανισώσεις της μορφής $A(x)/B(x)>0$ (ή <0)

Γνωρίζουμε ότι το πρόσημο του πηλίκου δύο μη μηδενικών αριθμών είναι το ίδιο με το πρόσημο του γινομένου τους, επομένως για $B(x)\neq 0$ ισχύει ότι $\dfrac{A(x)}{B(x)}>0 \Leftrightarrow A(x)\cdot B(x)>0$ και $\dfrac{A(x)}{B(x)}<0 \Leftrightarrow A(x)\cdot B(x)<0$.

Αν έχουμε ανίσωση της μορφής $\dfrac{A(x)}{B(x)}>\Gamma(x)$ ή της $\dfrac{A(x)}{B(x)}<\Gamma(x)$ γράφουμε ισοδύναμα

$$\frac{A(x)}{B(x)}-\Gamma(x)>0 \Leftrightarrow \frac{A(x)-B(x)\Gamma(x)}{B(x)}>0 \quad \text{ή} \quad \frac{A(x)}{B(x)}-\Gamma(x)<0 \Leftrightarrow \frac{A(x)-B(x)\Gamma(x)}{B(x)}<0$$

οι οποίες λύνονται όπως στην προηγούμενη περίπτωση.

Παράδειγμα 2.3.8.5

Να λυθούν οι ανισώσεις:

(α) $\dfrac{x-2}{x-3}>0$ (β) $\dfrac{x-3}{-2x+3}\leq 0$ (γ) $\dfrac{2x-1}{x-3}<1$ (δ) $\dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-2}\geq 1$

Λύση

(α) Έχουμε $\dfrac{x-2}{x-3}>0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3)>0 \Leftrightarrow x<2$ ή $x>3$ $(\alpha=1>0, x_1=2, x_2=3)$

(β) Έχουμε $\dfrac{x-3}{-2x+3}\leq 0 \Leftrightarrow (x-3)(-2x+3)\leq 0$ και $-2x+3\neq 0 \Leftrightarrow x\geq 3$ ή $x<\dfrac{3}{2}$

(γ) Έχουμε

$$\frac{2x-1}{x-3}<1 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x-3}-1<0 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x-3}-\frac{1\cdot(x-3)}{x-3}<0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-1-1\cdot(x-3)}{x-3}<0 \Leftrightarrow \frac{2x-1-x+3}{x-3}<0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+2}{x-3}<0 \Leftrightarrow (x+2)(x-3)<0 \Leftrightarrow -2<x<3$$

(δ) Έχουμε $\dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-2}\geq 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-2}-1\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-2}-\dfrac{x^2+x-2}{x^2+x-2}\geq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-x-2-x^2-x+2}{x^2+x-2}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{-2x}{x^2+x-2}\geq 0$$

$\Leftrightarrow -2x(x^2+x-2)\geq 0$ και $x^2+x-2\neq 0$

$\Leftrightarrow x(x^2+x-2)\leq 0$ και $x^2+x-2\neq 0$ (Διαιρέσαμε με $-2<0$)

Οπότε με τη βοήθεια του πίνακα

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2+x-2		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x(x^2+x-2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

και λαμβάνοντας υπόψιν τον περιορισμό $x^2+x-2\neq 0$ παίρνουμε $x<-2$ ή $0\leq x<1$.

Ασκήσεις - Δραστηριότητες

Α' ΟΜΑΔΑ

1 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις

(α) $\alpha^2-11\alpha-12$ (β) $2\beta^2-3\beta-2$ (γ) $21x^2-x-2$

(δ) $3x^2-x-2$ (ε) $x^2-xy-2y^2$ (στ) $x^2+4y^2-4z^2-4xy$

2 Να απλοποιήσετε τα κλάσματα

(α) $\dfrac{\alpha^2-11\alpha-12}{\alpha^2-1}$ (β) $\dfrac{2\beta^2-3\beta-2}{2\beta^2-\beta-1}$ (γ) $\dfrac{3x^2-13x+12}{3x^2+14x-24}$

3 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις

(α) $x^2-\sqrt{2}x-4$

(β) $\kappa^2-0{,}23\kappa+0{,}006$

(γ) $12(\alpha+\beta)^2+(\alpha+\beta)-6$ (Θεωρήστε την παράσταση ως τριώνυμο με μεταβλητή το $\alpha+\beta$.)

(δ) $3\alpha^2-5\alpha\beta-2\beta^2$ (Θεωρήστε την παράσταση ως τριώνυμο με μεταβλητή το α ή το β.)

4 Να απλοποιήσετε τα κλάσματα

(α) $\dfrac{2\alpha+\sqrt{\alpha}-1}{8\alpha+2\sqrt{\alpha}-3}$ (β) $\dfrac{2\alpha^2-\alpha\beta-3\beta^2}{2\alpha^2-5\alpha\beta+3\beta^2}$ (γ) $\dfrac{9x^4-37x^2+4}{3x^2+5x-2}$

5 Για ποιες τιμές της παραμέτρου λ το τριώνυμο $x^2-(3\lambda+1)x+2\lambda^2-\lambda-2$ είναι

(i) διαφορά τετραγώνων (ii) τέλειο τετράγωνο (iii) άθροισμα τετραγώνων.

6 Να βρείτε το πρόσημο των τιμών των τριωνύμων

(α) $3x^2-2x-1$ (β) $-2x^2+x+1$ (γ) $x^2-x+0{,}25$

(δ) $-x^2+4x-4$ (ε) x^2-x+1 (στ) $-x^2-x-1$

7 Να βρείτε το πρόσημο των τιμών των τριωνύμων

(α) $-x^2+2\sqrt{2}x-4$

(β) $-\sqrt{2}x^2+\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x-\sqrt{3}$ (Δείξτε πρώτα ότι η διακρίνουσα είναι τέλειο τετράγωνο.)

(γ) $x^2-(2\alpha-\beta)x-2\alpha\beta$ (Εξετάστε τις περιπτώσεις $\Delta>0$ και $\Delta=0$.)

(δ) $\alpha x^2-(\alpha+\beta)x+\beta$, $\alpha\neq 0$ (Εξετάστε τις περιπτώσεις $\alpha>0$ και $\alpha<0$.)

8 Για ποιες τιμές του λ το τριώνυμο $(\lambda-2)x^2+2(2\lambda-3)x+5\lambda-6$ είναι θετικό για κάθε $x\in\mathbb{R}$;

9 Να δειχτεί ότι η εξίσωση $(3\lambda-1)x^2-(\lambda+1)x+1-\lambda=0$, $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

10 Να λυθούν οι ανισώσεις

(α) $4x^2-3x-1>0$ (β) $-5x^2+3x+2\leq 0$ (γ) $-x^2+\left(\sqrt{2}-1\right)x-\sqrt{2}>0$

(δ) $-x^2+4x-4\geq 0$ (ε) $x^2-6x+9>0$ (στ) $6x^2-2x-10<0$

11 Να λυθούν οι ανισώσεις

(α) $x^3+x^2\geq 2x$ (β) $(x-2)(x^2-x+1)(x^2-x)\geq 0$

(γ) $(x-2)(x^2-4)(x^2-3x+2)<0$ (δ) $(x-3)(x^2-9)(x^2-4x+3)\leq 0$

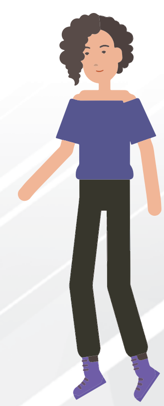
12 Να λύσετε τις ανισώσεις

(α) $\dfrac{x-2}{x+3}>0$ (β) $\dfrac{-x+4}{2x+1}\leq 0$ (γ) $\dfrac{2x+1}{x+2}>1$ (δ) $\dfrac{-2x+3}{3x-2}\leq -1$

13 Να λύσετε τις ανισώσεις

(α) $\dfrac{x^2-2x-8}{x^2+3x+2}\geq 0$ (β) $\dfrac{1}{x-1}>\dfrac{2}{3x+1}$

(γ) $\dfrac{x-1}{x+1}>\dfrac{x-2}{x+5}$ (δ) $\dfrac{(x-1)(x^2-5x+6)}{(x^2+2x-8)}<0$



Ασκήσεις Β' Ομάδας Ενότητας 2.3.8

B' ΟΜΑΔΑ

1 Να προσδιορίσετε το $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε το τριώνυμο $x^2-(\lambda-1)x+1$ να είναι

(i) τέλειο τετράγωνο (ii) διαφορά τετραγώνων (iii) άθροισμα τετραγώνων.

2 Αν τα α, β και γ είναι πλευρές τριγώνου να αποδείξετε ότι $x^2-2\alpha x+(\beta+\gamma)^2>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. (Χρησιμοποιήστε την τριγωνική ανισότητα.)

3 Να δειχτεί ότι το κλάσμα $\dfrac{x^2+\alpha x+2\alpha^2}{-x^2+\alpha x-3\alpha^2}$, $\alpha\neq 0$ είναι αρνητικό για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

4 Για ποιες τιμές του λ η παράσταση $(\lambda-2)x^2+4x+\lambda+1$ διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε $x\in\mathbb{R}$;

5 (i) Για ποιες τιμές του x το τριώνυμο x^2+2x-4 παίρνει αρνητικές τιμές;

(ii) Να αποδείξετε ότι $\sqrt{2}+2\sqrt[4]{2}<4$. (Να βρείτε την τιμή του τριωνύμου για $x=\sqrt[4]{2}$.)

2.3.9 Εφαρμογές ανισώσεων 2ου βαθμού

Θα μάθουμε:

- να χρησιμοποιούμε ανισώσεις 2ου βαθμού στη μοντελοποίηση και στην επίλυση προβλημάτων.

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζονται μερικά προβλήματα που χρησιμοποιούν ανισώσεις 2ου βαθμού στη μοντελοποίηση και στην επίλυση προβλημάτων.

Παράδειγμα 2.3.9.1

(α) Ποιοι πραγματικοί αριθμοί είναι μεγαλύτεροι από το τετράγωνό τους;
(β) Να δείξετε ότι η ν-οστή δύναμη $\nu \geq 2$ ενός αριθμού μεγαλύτερου από το τετράγωνό του είναι μεγαλύτερη από τη $(\nu + 1)$-δύναμή του
(γ) Ποιοι πραγματικοί αριθμοί έχουν απόλυτη τιμή μεγαλύτερη από το τετράγωνό τους;

Λύση

(α) Έστω x ένας τέτοιος αριθμός. Τότε θα έχουμε

$$x > x^2 \Leftrightarrow x^2 - x < 0 \Leftrightarrow x(x-1) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1.$$

(β) Αρκεί να δείξουμε ότι για τυχαίο φυσικό αριθμό $\nu \geq 2$ και για τυχαίο πραγματικό x μεταξύ 0 και 1 ισχύει $x^\nu > x^{\nu+1}$. Έχουμε

$$x^{\nu+1} < x^\nu \Leftrightarrow x^{\nu+1} - x^\nu < 0 \Leftrightarrow x^\nu(x-1) < 0,$$

που ισχύει, αφού έχουμε υποθέσει ότι $0 < x < 1$.

(γ) Έστω x ένας τέτοιος αριθμός. Τότε θα έχουμε

$$|x| > x^2 \Leftrightarrow |x| > |x|^2 \Leftrightarrow |x|^2 - |x| < 0 \Leftrightarrow |x|\,(|x|-1) < 0 \Leftrightarrow |x| \neq 0 \quad \text{και} \quad |x| < 1$$
$$\Leftrightarrow x \neq 0 \quad \text{και} \quad -1 < x < 1 \Leftrightarrow x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$$

Παράδειγμα 2.3.9.2

Ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο 20 m. Να δειχθεί ότι το εμβαδόν του δεν μπορεί να υπερβαίνει τα 25 m^2. Ποιες είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου όταν το εμβαδόν του είναι 25 m^2;

Λύση

Έστω x, y οι διαστάσεις του ορθογωνίου. Τότε θα έχουμε $2x + 2y = 20$, οπότε $x + y = 10$ και $y = 10 - x$. Ο τύπος του εμβαδού του ορθογωνίου είναι $E = xy$. Επομένως, για να είναι $E \leq 25$ αρκεί να αποδείξουμε ότι ισχύει η ανισοϊσότητα

$$\begin{aligned} xy \leq 25 &\Leftrightarrow x(10-x) \leq 25 \\ &\Leftrightarrow 10x - x^2 \leq 25 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x-5)^2 \geq 0 \text{ που ισχύει.} \end{aligned}$$

Αν είναι $E = 25$, τότε η παραπάνω ανισοϊσότητα ισχύει ως ισότητα, οπότε $x = 5$ και συνεπώς και $y = 5$. Επομένως, το εμβαδόν γίνεται μέγιστο όταν το ορθογώνιο γίνεται τετράγωνο.

Ασκήσεις - Δραστηριότητες

Α' ΟΜΑΔΑ

1 (α) Ποιοι πραγματικοί αριθμοί είναι μεγαλύτεροι από τον κύβο τους;

(β) Να δείξετε ότι κάθε περιττή δύναμη $\nu > 3$ ενός αριθμού μεγαλύτερου από το τετράγωνό του έχει την ιδιότητα (α) και μάλιστα όσο πιο μεγάλος είναι ο εκθέτης ν τόσο μικρότερος είναι ο αριθμός.

(γ) Ποιοι πραγματικοί αριθμοί έχουν απόλυτη τιμή μεγαλύτερη από τον κύβο τους;

2 Ένα ορθογώνιο έχει εμβαδόν 64 m^2. Να δειχτεί ότι η περίμετρός του δεν μπορεί να είναι μικρότερη από 32 m. Ποιες είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου όταν η περίμετρός του είναι 32 m;

3 Η περίμετρος ενός ορθογωνίου είναι 28. Να αποδειχτεί ότι η διαγώνιος του ορθογωνίου δεν μπορεί να είναι μικρότερη από $7\sqrt{2}$. Ποιο είναι το εμβαδόν του ορθογωνίου με τη διαγώνιο με το ελάχιστο μήκος;

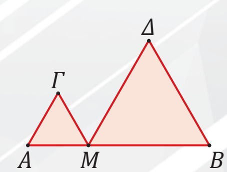
4 Θεωρούμε ένα τετράγωνο $ΑΒΓΔ$ πλευράς 10 cm. Εγγράφουμε στο εσωτερικό του ένα τετράγωνο πλευράς α cm (υπάρχουν τέτοια τετράγωνα και μάλιστα υπάρχουν άπειρες επιλογές). Να αποδείξετε ότι $\alpha \geq 5\sqrt{2}$.

(Μία απλή ιδέα κατασκευής ενός τέτοιου τετραγώνου είναι να πάρουμε πάνω στις πλευρές $ΑΒ$, $ΒΓ$, $ΓΔ$ και $ΔΑ$ σημεία $Κ$, $Λ$, $Μ$ και $Ν$ τέτοια ώστε $ΑΚ = ΒΛ = ΓΜ = ΔΝ = x$ με $0 < x < 10$.)

5 Ένα σημείο $Μ$ κινείται κατά μήκος του ευθυγράμμου τμήματος $ΑΒ = 8$ cm. Με πλευρές τα $ΑΜ$ και $ΜΒ$ κατασκευάζουμε τετράγωνα με εμβαδά $Ε_1$ και $Ε_2$. Να αποδείξετε ότι $Ε_1 + Ε_2 \geq 32$. Πότε ισχύει $Ε_1 + Ε_2 = 32$;

Β' ΟΜΑΔΑ

1 Ένα σημείο Μ κινείται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $ΑΒ = 12$ cm. Με πλευρές τα $ΜΑ$ και $ΜΒ$ κατασκευάζουμε ισόπλευρα τρίγωνα. Για ποια θέση του $Μ$ το άθροισμα των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ελάχιστο; Παρατηρώντας ότι το άθροισμα των περιμέτρων των τριγώνων είναι σταθερό δώστε μία γενική διατύπωση του προβλήματος.



2 Για ποιες θετικές τιμές του x οι αριθμοί $x^2 - 2x + 14$, $x^2 + 3$ και $2x + 1$ είναι μήκη πλευρών τριγώνου; Προσδιορίστε το x ώστε το τρίγωνο να είναι ορθογώνιο. Προσδιορίστε τα μήκη των πλευρών αν το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

(Για το α' ερώτημα χρησιμοποιήστε την τριγωνική ανισότητα.)

3 Αν αφεθεί ελεύθερο ένα σώμα από ύψος h (σε m), τότε ο χρόνος t (σε sec) που χρειάζεται για να φτάσει στο έδαφος συνδέεται με τη σχέση $h = 5t^2$.

Να υπολογίσετε

(α) το ύψος από το οποίο αφέθηκε μία μπάλα που χρειάστηκε 2 sec για να φτάσει στο έδαφος.

(β) τον χρόνο που χρειάζεται για να πέσει στο έδαφος μία μπάλα που αφήνεται από ύψος 80 m.

(γ) Αν κατά την πτώση του σώματος ληφθεί υπόψη ότι η αντίσταση του αέρα α και το ύψος h με το χρόνο καθόδου t συνδέονται με τη σχέση $h = 5t^2 - \alpha t$, $\alpha \geq \frac{1}{4}$, να δείξετε ότι το μέγιστο ύψος από το οποίο μπορεί να αφεθεί το σώμα και να φτάσει στον ίδιο χρόνο, όπως παραπάνω, είναι 79 m.

4 Ένα σώμα βάλλεται κατακόρυφα προς τα πάνω και το ύψος h του σώματος συναρτήσει του χρόνου t κίνησης του δίνεται από τον τύπο $h = 20t - 5t^2$. Να δείξετε ότι το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει το σώμα είναι 20 m. (i) Να βρεθεί ο χρόνος ανόδου του σώματος. (ii) Παρατηρείστε ότι για $t = 1$ s και $t = 3$ s το σώμα βρίσκεται στο ίδιο ύψος. Ποια ερμηνεία δίνεται σε αυτό το γεγονός; Με βάση αυτή την παρατήρηση μπορείτε να βρείτε το συνολικό χρόνο κίνησης του σώματος;

2.3.10 Κατασκευή προβλημάτων που επιλύονται με εξισώσεις ή/και ανισώσεις 2ου βαθμού

Θα μάθουμε:

- Να κατασκευάζουμε δικά μας προβλήματα που επιλύονται με εξισώσεις ή/και ανισώσεις 2ου βαθμού.

Η ενότητα αυτή είναι αφιερωμένη στην κατασκευή προβλημάτων που επιλύονται με εξισώσεις ή/και ανισώσεις 2ου βαθμού. Παρακάτω παρουσιάζονται μερικά ενδεικτικά λυμένα παραδείγματα που αξιοποιούν δημιουργικά τους τύπους Vieta ή/και άλλες στρατηγικές.

Παράδειγμα 2.3.10.1

Μελετώντας το Παράδειγμα 2.3.9.2 της προηγούμενης παραγράφου να κατασκευαστεί ένα πρόβλημα που να επιλύεται χρησιμοποιώντας τους τύπους Vieta με $xy \geq 16$ και $x + y = 10$.

Λύση

Πρόβλημα: Να βρείτε τις πιθανές τιμές του μήκους και του πλάτους ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου, ώστε η περίμετρός του να είναι 20 m και το εμβαδόν του να είναι τουλάχιστον 16 m^2. Βρείτε ποιο από όλα τα πιθανά ορθογώνια παραλληλόγραμμα έχει ελάχιστο εμβαδόν.

Μπορείτε εύκολα να διαπιστώσετε ότι υπάρχουν άπειρα παραλληλόγραμμα με περίμετρο 20 m. Πάρτε ένα νήμα και δέστε τις δύο άκρες του περνώντας το μέσα από το δείκτη και τον αντίχειρα και των δύο χεριών σας και ανοιγοκλείστε τα δάχτυλά σας. Σε κάθε θέση σχηματίζεται και ένα ορθογώνιο. Υπάρχει και ένα όμορφο παιχνίδι που μπορείτε να παίξετε στη συνέχεια, αλλά χρειάζεστε άλλο ένα άτομο. Το παιχνίδι βοηθάει να κατανοήσετε κάποιες από τις βασικές ιδιότητες των ορθογωνίων.

(Η επίλυση του προβλήματος αφήνεται ως άσκηση)

Α' ΟΜΑΔΑ

1. Κατασκευάστε ένα πρόβλημα όπου δίνεται το τετράγωνο ενός αριθμού δεν υπερβαίνει το 25.
2. Κατασκευάστε ένα πρόβλημα που να λύνεται με την εξίσωση $x^2 = x + 2$ και στη συνέχεια βρείτε τη λύση του. (Υπόδειξη: Το τετράγωνο ενός αριθμού είναι ίσο ....)
3. Κατασκευάστε ένα πρόβλημα που να λύνεται με την ανίσωση $x(x + 2) \leq 8$ και στη συνέχεια βρείτε τη λύση του. (Υπόδειξη: Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με διαστάσεις .... Και ..... δεν υπερβαίνει το ....)
4. Κατασκευάστε ένα πρόβλημα όπου δίνεται το άθροισμα και το γινόμενο δύο αριθμών ίσα μ ε 11 και 28 αντιστοίχως. (Υπόδειξη: Η περίμετρος και το εμβαδόν ενός ορθογωνίου είναι ....)
5. Δίνεται ότι δύο αριθμοί έχουν διαφορά 3 και γινόμενο 40. Κατασκευάσετε ένα πρόβλημα που θα ζητούνται αυτοί οι αριθμοί.
6. Οι πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι x, $2x + 2$ και $2x + 3$. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου και το ύψος του.
7. Οι πλευρές ενός ορθογωνίου είναι ίσες με $2x + 1$ και $3x - 1$. Να βρείτε τις τιμές του x ώστε το εμβαδόν του να μην είναι λιγότερο από 56. Πότε είναι ίσο με 56; Πότε είναι ίσο με 99;
8. Η βάση και το αντίστοιχο ύψος ενός τριγώνου είναι $2x$ και $2x + 4$ και το εμβαδόν του είναι 60. Να βρεθούν τα μήκη των πλευρών του τριγώνου.
9. Ένα ορθογώνιο έχει μήκη πλευρών 6 και 14. Βρείτε την τιμή του x για την οποία το παραλληλόγραμμο με μήκη πλευρών $6 + x$ και $14 + x$ έχει εμβαδόν ίσο με 105.

10 Ένα ορθογώνιο έχει μήκη πλευρών 6 και 8. Βρείτε την τιμή του x για την οποία το παραλληλόγραμμο με μήκη πλευρών $6 + x$ και $8 - x$ έχει το ίδιο εμβαδόν με το αρχικό παραλληλόγραμμο. Σχολιάστε το αποτέλεσμα.

11 Ένα σώμα πέφτει ελεύθερα από την κορυφή ενός ουρανοξύστη και το κατακόρυφο διάστημα που διανύει σε χρόνο t δίνεται από την εξίσωση $h = 5t^2$. Αν κατά τα τελευταία 2 δευτερόλεπτα της κίνησής του διανύει τα 5/9 του ύψους του ουρανοξύστη να βρείτε το χρόνο που διήρκησε η πτώση και το ύψος του ουρανοξύστη.

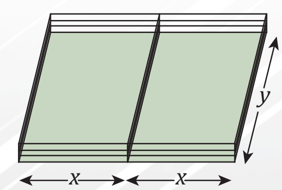
Β' ΟΜΑΔΑ

1 Να υπολογίσετε τις πλευρές ορθογωνίου τριγώνου αν οι κάθετες πλευρές του διαφέρουν κατά 10 και η υποτείνουσα με το ύψος που άγεται σ' αυτήν έχουν άθροισμα 74.

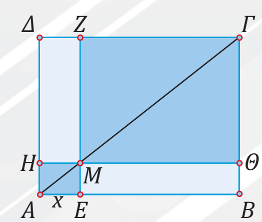
2 Η μία βάση ενός τραπεζίου είναι 10 και το άθροισμα της άλλης και του ύψους είναι 20. Να βρείτε την άγνωστη βάση και το ύψος ώστε το εμβαδόν του τραπεζίου να γίνεται μέγιστο. Ποιο είναι τότε το εμβαδόν;

3 Μία εταιρεία παράγει ένα προϊόν και το τμήμα έρευνας αγοράς εκτιμά ότι αν η τιμή κάθε μονάδας του προϊόντος είναι x ευρώ τότε το μηνιαίο κόστος Κ και τα μηνιαία έσοδα Ε δίνονται από τους τύπους $K = 15 - 4x$ και $E = 4x - x^2$. (i) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η εταιρεία έχει κέρδος. (ii) Πότε το κέρδος γίνεται μέγιστο;

4 Θέλουμε να περιφράξουμε δύο εφαπτόμενους χώρους (όπως φαίνονται στο διπλανό σχήμα) με συνολικό εμβαδόν 2500 m^2 οι οποίοι αποτελούν τμήμα μιας μεγαλύτερης ιδιοκτησίας μας. Να βρείτε τις διαστάσεις x και y των ορθογωνίων ώστε το μήκος της περίφραξης των δύο χώρων να είναι το μικρότερο δυνατόν.



5 Στο διπλανό σχήμα το $ΑΒΓΔ$ είναι τετράγωνο πλευράς $ΑΒ = 3$ και το $Μ$ είναι ένα σημείο της διαγωνίου $ΑΓ$. Να βρείτε τις θέσεις του σημείου $Μ$ πάνω στη διαγώνιο $ΑΓ$ για τις οποίες το άθροισμα των εμβαδών των σκισμένων τετραγώνων είναι μικρότερο από 5. Ποια είναι η μέγιστη τιμή αυτού του αθροίσματος των εμβαδών. (Για το δεύτερο ερώτημα μπορείτε πρώτα να δώσετε μία διαισθητική απάντηση και να την επιβεβαιώσετε στη συνέχεια.)



6 Ένας αγωγός πετρελαίου πρόκειται να τοποθετηθεί σε μία πλαγιά ενός βουνού. Ωστόσο η κλίση της πλαγιάς είναι πολύ μεγάλη και αν τοποθετηθεί παράλληλα με την πλαγιά υπάρχει ο κίνδυνος να σπάσει λόγω της μεγάλης ταχύτητας που θα αποκτήσει το πετρέλαιο σε αυτή την περίπτωση. Η κατασκευάστρια εταιρεία του αγωγού έχει τοποθετήσει μία ετικέτα στον αγωγό όπου γράφει ότι η μέγιστη επιτρεπτή ταχύτητα μέσα στον αγωγό όταν τοποθετείται με κλίση είναι 15 m/s. Μία μελέτη σχετική με την ταχύτητα του πετρελαίου σε τέτοιους αγωγούς έδειξε ότι η ταχύτητα v ως συνάρτηση της κλίσης $λ$ δίνεται από τη σχέση $v = 25λ^2 + 70λ$. Να βρείτε την μέγιστη επιτρεπτή τιμή της κλίσης των αγωγών αυτού του τύπου.

7 Να βρεθεί διψήφιος αριθμός τέτοιος ώστε το ψηφίο των δεκάδων να είναι κατά 2 μεγαλύτερο του διπλάσιου του ψηφίου των μονάδων διαιρούμενος δε με το γινόμενο των ψηφίων του δίνει πηλίκο 3 και υπόλοιπο 11.

8 Κατασκευάστε ένα πρόβλημα που η επίλυσή του οδηγεί στην ανίσωση $x^2 - 8x + 15 = 0$.

9 Κατασκευάστε ένα πρόβλημα που η επίλυσή του οδηγεί στην ανίσωση $x^2 - 7x - 30 \geq 0$. (Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι $x^2 - 7x - 30 \geq 0 \Leftrightarrow x(x - 7) \geq 30$ και θεωρήσετε ένα ορθογώνιο με διαστάσεις … και ….. .)

10 Κατασκευάστε μία εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς 2 και 5 και τη συνέχεια κατασκευάσετε ένα πρόβλημα με λύση τους δύο αυτούς αριθμούς.

11 Κατασκευάστε ένα πρόβλημα όπου η επίλυσή του οδηγεί στην αναζήτηση δύο αριθμών με διαφορά 4 και γινόμενο τουλάχιστον 21.

Σύνοψη Ενότητας 2.3 Αλγεβρικές Σχέσεις

Σε αυτή την ενότητα εμβαθύναμε στις εξισώσεις και ανισώσεις πρώτου και δευτέρου βαθμού, με ή χωρίς απόλυτες τιμές, και αναδείξαμε τη χρησιμότητά τους μέσα από εφαρμογές και προβλήματα. Αποκτήσαμε τα απαραίτητα εργαλεία για την επίλυση πλήθους αλγεβρικών προβλημάτων με πρακτικό και θεωρητικό ενδιαφέρον.

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ

2.4 Συναρτήσεις

2.4.1 Η έννοια της συνάρτησης

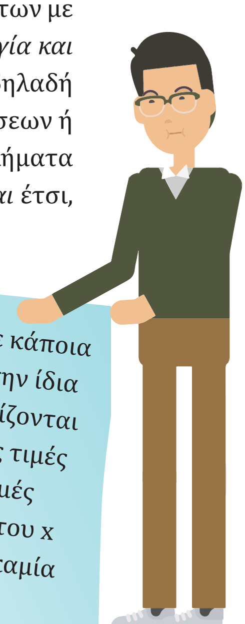
Έξυπνοι φίλοι

Θα μάθουμε:

- να αναγνωρίζουμε συναρτήσεις μέσα από καταστάσεις συμμεταβολής της καθημερινής ζωής και να τις διακρίνουμε από άλλες σχέσεις συμμεταβολής.

Τα Μαθηματικά εκτός από το ενδιαφέρον που παρουσιάζουν ως αυτόνομη και προπάντων «αφηρημένη» επιστήμη, οφείλουν το μεγαλύτερο μέρος της γοητείας τους στην μοναδική και αναντικατάστατη χρησιμότητά τους στην πραγματική ζωή. Ίσως και να μην υπήρχαν, ή αν υπήρχαν δεν θα είχαν αυτή την εξέχουσα θέση μεταξύ των επιστημών, αν δεν ήταν τόσο πολύ χρήσιμα στην δημιουργία του σύγχρονου κόσμου. Είδαμε σε προηγούμενα κεφάλαια ότι η χρήση απλών μαθηματικών συμβάλλει αποτελεσματικά, και κάποιες φορές αποκλειστικά, στην επίλυση προβλημάτων της καθημερινής ζωής αλλά και των άλλων επιστημών, όπως της φυσικής, της χημείας, της οικονομίας κ.λπ. Εννοούμε την επίλυση προβλημάτων με εξισώσεις και ανισώσεις. Δύο ήταν τα κύρια εργαλεία για αυτό το σκοπό. Η *δημιουργία και χρήση της έννοιας του αγνώστου* και η *μαθηματική προτυποποίηση του προβλήματος*, δηλαδή η κατασκευή μιας εξίσωσης ή μιας ανίσωσης ή ενός συνδυασμού εξισώσεων ή ανισώσεων ή και των δύο (τότε λέμε ότι έχουμε ένα *σύστημα*). Ωστόσο, σε πολλά καθημερινά προβλήματα καθώς και σε πολλά φαινόμενα εμφανίζονται *δύο* μεγέθη, τα οποία *συμμεταβάλλονται* έτσι, ώστε η τιμή του ενός να καθορίζει την τιμή του άλλου. Σε τέτοιες περιπτώσεις το μέγεθος που καθορίζει με «κάποιο τρόπο» τις τιμές του άλλου το συμβολίζουμε με το γράμμα x και το άλλο το συμβολίζουμε με το γράμμα y. Αυτό που είναι μοναδικά σημαντικό είναι η κάθε τιμή του x να δίνει (πολλές φορές λέμε *να αντιστοιχίζεται σε*) μία ακριβώς τιμή του y και φυσικά θα πρέπει για όλες τις τιμές του x να υπάρχει το αντίστοιχό τους y. Διαφορετικά, θα έχουμε μία «αντιστοιχία» η οποία, πέρα από το γεγονός ότι δεν θα είναι χρηστική, δεν θα είναι και αξιόπιστη.

> Φανταστείτε να έχουμε κάποια αντιστοιχία η οποία στην ίδια τιμή του x να αντιστοιχίζονται δύο ή και περισσότερες τιμές του y ή σε κάποιες τιμές (έστω και σε μία τιμή) του x να μην αντιστοιχίζεται καμία τιμή του y.



Για παράδειγμα, στο πρόβλημα: «*Να βρεθεί ένας αριθμός που το τετράγωνό του είναι 4*» δεν μπορεί να δοθεί απάντηση, γιατί υπάρχουν 2 τέτοιοι αριθμοί, το −2 και το 2. Ζητείται, ωστόσο, **ένας** και δεν έχει δοθεί κριτήριο επιλογής.

Επιβεβαιώστε με παράδειγμα ότι η ιδιότητα αυτή δεν ισχύει αν ο εκθέτης είναι περιττός και διατυπώστε το συμπέρασμά σας σε μορφή μιας ιδιότητας.

Εδώ έχουμε αντιστοιχία όπου στην ίδια τιμή του x να αντιστοιχίζονται δύο τιμές του y.

Ένα ακόμα παράδειγμα: «*Έχουμε 5 μαθητές και 4 στυλό. Δίνουμε ένα στυλό σε κάθε μαθητή και ζητάμε να γράψουν και οι 5*». Προφανώς, αυτό δεν είναι εφικτό, γιατί σε ένα μαθητή δεν έχουμε δώσει στυλό.

Εδώ έχουμε αντιστοιχία όπου σε κάποιο x δεν αντιστοιχίζεται καμία τιμή του y.

Η διαδικασία με την οποία *κάθε τιμή του ενός μεγέθους αντιστοιχίζεται σε μία ακριβώς τιμή του άλλου μεγέθους*, όπως θα δούμε παρακάτω, μπορεί να δοθεί με πολλούς τρόπους. Για παράδειγμα, με λεκτική – περιγραφική διατύπωση, με ένα διάγραμμα (το ονομάζουμε βελοειδές διάγραμμα), με ένα μαθηματικό τύπο, με έναν πίνακα και ακόμα μερικούς άλλους που θα τους δούμε παρακάτω. Ανάλογα με το πρόβλημα και ανεξάρτητα από τον τρόπο με τον οποίο περιγράφεται, η χρήση των γραμμάτων x και y για το συμβολισμό των δύο μεγεθών, όπως φαίνεται στα παραδείγματα που ακολουθούν, δεν είναι δεσμευτική.

Παράδειγμα 2.4.1.1

Όταν ένα κινητό κινείται σε μία ευθεία και κάθε 1 δευτερόλεπτο διανύει 10 m (δηλαδή, κάνει *ευθύγραμμη ομαλή κίνηση*), τότε το μέγεθος που καθορίζει τις τιμές του άλλου είναι ο χρόνος, ο οποίος συμβολίζεται με t (και όχι με το x) και το διάστημα που είναι το μέγεθος του οποίου οι τιμές καθορίζονται από το χρόνο το συμβολίζουμε με το γράμμα s (και όχι με το y). Στο παράδειγμα αυτό μάλιστα τα t και s συνδέονται με μοναδικό τρόπο με τη σχέση $s = 10t$ (*τύπος του διαστήματος στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με ταχύτητα* $v = 10m/s$).

Παράδειγμα 2.4.1.2

Το μήκος $Γ$ ενός κύκλου δίνεται από τον τύπο $Γ = 2πρ$ ($π \simeq 3{,}14$), όπου $ρ$ είναι η ακτίνα του.

Παράδειγμα 2.4.1.3

Οι βαθμοί Φαρενάιτ F μετατρέπονται σε βαθμούς Κελσίου C με τον τύπο $C = \frac{5}{9}(F - 32)$.

Ποιος είναι ο τύπος που μετατρέπει βαθμούς Κελσίου σε Φαρενάιτ;

Παράδειγμα 2.4.1.4

Η κατακόρυφη απόσταση h που διανύει ένα σώμα όταν πέφτει ελεύθερα (δηλαδή, όταν *η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα*) δίνεται (προσεγγιστικά) από τον τύπο $h = 5t^2$, όπου t είναι ο χρόνος καθόδου.

Αν χρησιμοποιούσατε αυτόν τον τύπο, πότε θα είχατε μεγαλύτερη ακρίβεια στον Ισημερινό; Στους πόλους; Ή το πού δεν έχει σημασία; Η απάντηση δεν εξαρτάται αμιγώς από τα μαθηματικά.

Παράδειγμα 2.4.1.5

Ο τύπος που δίνει τον τόκο T που αποδίδει ένα συγκεκριμένο κεφάλαιο K με ετήσιο επιτόκιο $\varepsilon\%$ δίνεται από τον τύπο $T = K\dfrac{\varepsilon}{100}$.

Από την παραπάνω συζήτηση προκύπτουν τα εξής. Πρώτον, ότι υπάρχει ένας κανόνας που συνδέει τις δύο μεταβλητές που *συμμεταβάλλονται*. Αν φανταστούμε ότι η καθεμία μεταβλητή ανήκει σε κάποιο σύνολο (*σκεφτείτε το σύνολο αυτό σαν την οικογένειά της*), ας πούμε ότι το x ανήκει στο σύνολο A (συμβολικά, $x \in A$) και το y ανήκει στο σύνολο B ($y \in B$), μπορούμε να πούμε ότι αυτός ο κανόνας είναι μία **αντιστοιχία** που συνδέει τα στοιχεία ενός συνόλου με στοιχεία ενός άλλου συνόλου. Δεύτερον, ότι *για κάθε στοιχείο $x \in A$ υπάρχει οπωσδήποτε ένα στοιχείο $y \in B$ στο οποίο το x αντιστοιχίζεται*. Δηλαδή, συμμετέχουν όλα τα στοιχεία του A στη διαδικασία αντιστοίχισης. Τρίτον, ότι *κάθε στοιχείο ενός συνόλου A αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο κάποιου συνόλου B*.

Θεωρούμε ότι η έννοια της συνάρτησης καθώς και κάποιων σχετιζόμενων βασικών εννοιών είναι γνωστά από το Γυμνάσιο, τουλάχιστον στο βαθμό που απαιτείται για περαιτέρω εμβάθυνση και μελέτη.

Ασκήσεις - Δραστηριότητες

Α' ΟΜΑΔΑ

1 Να βρείτε μία συνάρτηση που να είναι ορισμένη σε κάθε πραγματικό αριθμό x και

(α) να μην παίρνει ποτέ τιμή ίση με το 0.

(β) να παίρνει την τιμή 0 μόνο μία φορά.

(γ) να παίρνει την τιμή 0 δύο φορές.

2 Να βρείτε μία συνάρτηση που να είναι ορισμένη σε κάθε πραγματικό αριθμό x εκτός

(α) από το 0. (β) από το 0 και το 1. (γ) από το -1 και το 2.

Β' ΟΜΑΔΑ

1 Να βρείτε μία συνάρτηση που να είναι ορισμένη μόνο

(α) στο διάστημα $[-1, 1]$. (β) στο διάστημα $(-1, 1)$.

2 Να βρείτε μία συνάρτηση που να είναι ορισμένη μόνο

(α) για μη αρνητικές τιμές του x. (β) για θετικές τιμές του x.

3 Θεωρείστε τη διαδικασία όπου σε κάθε μη αρνητικό αριθμό x αντιστοιχίζεται ένας αριθμός που όταν υψωθεί στο τετράγωνο δίνει τον x. Να εξηγήσετε γιατί αυτή η διαδικασία δεν είναι συνάρτηση. Να εξετάσετε πότε είναι (αν είναι) συνάρτηση μία διαδικασία που σε κάθε μη αρνητικό αριθμό x αντιστοιχίζει μία ν–οστή ρίζα του με $\nu > 2$. Τέλος, διατυπώστε ένα σχετικό κανόνα.

Ασκήσεις Β' Ομάδας Ενότητας 2.4.1

2.4.2 Πότε μία σχέση είναι συνάρτηση;

Θα μάθουμε:

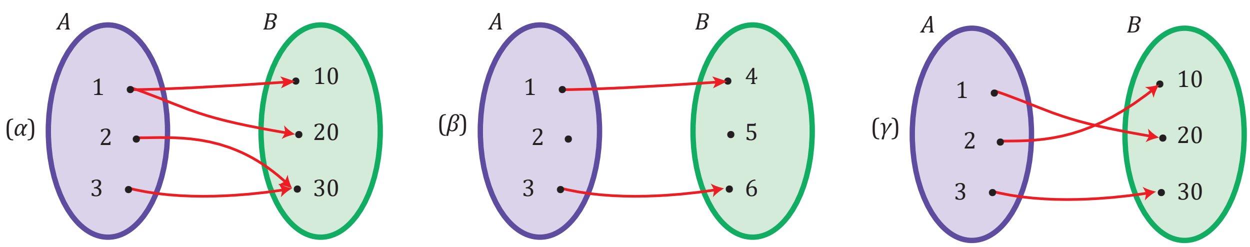
- να χρησιμοποιούμε τον ορισμό της συνάρτησης για να εξετάσουμε αν μία σχέση ή αντιστοιχία είναι συνάρτηση ή όχι.

Ορισμός

Συνάρτηση από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B λέγεται μία διαδικασία (κανόνας) με την οποία κάθε στοιχείο του συνόλου A αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου B. Μία συνάρτηση f από το σύνολο A στο σύνολο B συμβολίζεται ως

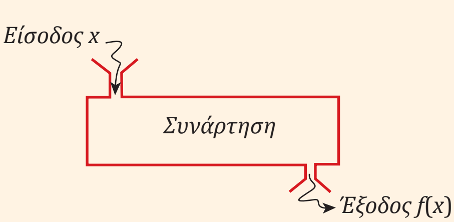
$$f : A \to B$$

Για παράδειγμα, από τις παρακάτω αντιστοιχίες μόνο η (γ) είναι συνάρτηση. (Γιατί;)



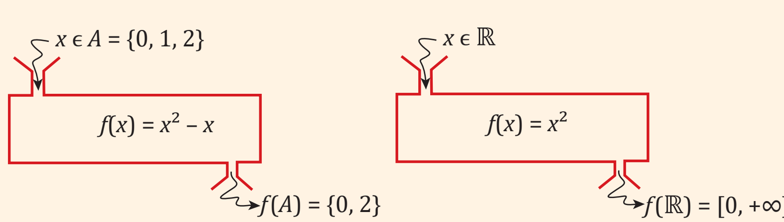
Οι συναρτήσεις συμβολίζονται με τα μικρά γράμματα της Ελληνικής ή της Λατινικής αλφαβήτου π.χ. φ, σ, f, g, h κ.λπ. Ωστόσο, το γράμμα που συνήθως χρησιμοποιείται για το συμβολισμό μιας συνάρτησης είναι το f (αρχικό της λέξης «function» που σημαίνει *λειτουργία, διαδικασία*). Ο όρος «συνάρτηση» ως μαθηματικός όρος εισήχθη από τον πολυμαθή Γερμανό Gottfried Leibniz το 1673.

Σχόλιο



Μπορούμε να πούμε ότι μία συνάρτηση είναι μία μηχανή με *είσοδο* και *έξοδο*, στην οποία εισάγονται αριθμοί (συνήθως συμβολίζονται με το γράμμα x) και μετά από μία συγκεκριμένη διεργασία (που εξαρτάται από την ίδια τη συνάρτηση) εξέρχονται επίσης αριθμοί (που συνήθως συμβολίζονται με το γράμμα y).

Στη συνέχεια παρουσιάζονται δύο «μηχανές–συναρτήσεις» όπου δίνεται το πεδίο ορισμού, ο τρόπος αντιστοίχισης και το σύνολο τιμών.



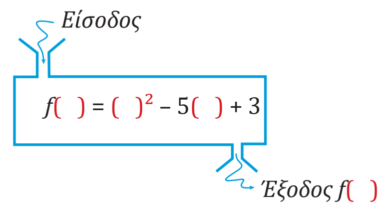
Όπως προαναφέρθηκε, συνήθως για το συμβολισμό του τυχαίου στοιχείου του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης χρησιμοποιούμε το γράμμα x, ωστόσο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και άλλα γράμματα. Για παράδειγμα, t, s, z κ.λπ.

Για παράδειγμα, οι σχέσεις

$$f(x) = x^2 - 5x + 3,\ f(t) = t^2 - 5t + 3 \text{ και } f(s) = s^2 - 5s + 3$$

ορίζουν την ίδια συνάρτηση. Αυτή που αν στη θέση του x (ή του t ή του s) βάλουμε έναν αριθμό, θα βρούμε το αντίστοιχο y.

Για παράδειγμα: Για $x = 1$ παίρνουμε: $f(1) = 1^2 - 5 \cdot 1 + 3 = 1 - 5 + 3 = -1$
Για $x = 2$ παίρνουμε: $f(2) = 2^2 - 5 \cdot 2 + 3 = 4 - 10 + 3 = -3$
Για $x = 0$ παίρνουμε: $f(0) = 0^2 - 5 \cdot 0 + 3 = 0 - 0 + 3 = 3$



Επομένως το x στον τύπο μιας συνάρτησης παίζει το ρόλο μιας «άδειας θέσης», οπότε η παραπάνω συνάρτηση θα μπορούσε να έχει τη μορφή

$$f(\ ) = (\ )^2 - 5(\ ) + 3,$$

όπου οι παρενθέσεις έχουν πάρει τη θέση ενός γράμματος.

Πολλές φορές, ωστόσο, (ειδικότερα στις επιστήμες Φυσική, Χημεία, Οικονομία κ.λπ.) δεν χρησιμοποιείται η τυπική μαθηματική γλώσσα για το συμβολισμό μιας συνάρτησης αλλά και μία απλοποιημένη μορφή. Για παράδειγμα, στον τύπο του διαστήματος στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με σταθερή ταχύτητα $v = 10m/s$ γράφουμε $s = 10t$ και όχι $s = s(t)$, υπονοώντας ότι το s είναι συνάρτηση του t.

Συμβολισμός συνάρτησης

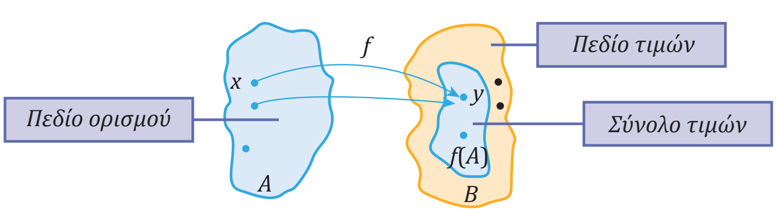
Ας θεωρήσουμε μία συνάρτηση $f : A \to B$. Τότε:

- Το σύνολο A λέγεται **πεδίο ορισμού** ή **σύνολο ορισμού** της f. Το πεδίο ορισμού συμβολίζεται συνήθως με $D(f)$ ή και $ΠΟ_f$.
- Το σύνολο B λέγεται **πεδίο τιμών** ή **σύνολο αφίξεως**.
- Αν με την συνάρτηση f από το A στο B, το $x \in A$ αντιστοιχίζεται στο $y \in B$, τότε γράφουμε

$$y = f(x)$$

και διαβάζουμε «y ίσον f του x». Το $f(x)$ λέγεται τότε **τιμή της f στο x**.

Εξάσκηση με βελοειδή διαγράμματα



Συνήθως, μία συνάρτηση δίνεται ως μία σχέση της μορφής $y = f(x)$ που δίνει το y ως έκφραση του x. Η σχέση αυτή λέγεται *τύπος της συνάρτησης*.

Το γράμμα x, που παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του πεδίου ορισμού της f, ονομάζεται **ανεξάρτητη μεταβλητή,** ενώ το y, που παριστάνει την τιμή της συνάρτησης στο x, ονομάζεται **εξαρτημένη μεταβλητή.**

Το σύνολο, που έχει για στοιχεία του τις τιμές $f(x)$, για όλα τα $x \in A$, λέγεται **σύνολο τιμών** της f και το συμβολίζουμε με $f(A)$ ή $R(f)$.

Η συνάρτηση $f : A \to B$ πολλές φορές συμβολίζεται ως

$$x \to f(x)$$

Το σύνολο τιμών μπορεί να είναι ολόκληρο το B μπορεί και όχι και αυτό γιατί μερικά στοιχεία του B μπορεί να μην αποτελούν τιμές της f. Δηλαδή, το σύνολο τιμών μπορεί να είναι υποσύνολο του B. [*Βλ. Παράδειγμα 2.4.2.1 (α) και (γ).*]

Από τα παραπάνω, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι βασικές έννοιες που εμπλέκονται στον καθορισμό μιας συνάρτησης $f: A \to B$ είναι

- το πεδίο ορισμού της A.
- το σύνολο B.
- το $f(x)$ που δίνει τις τιμές της για κάθε $x \in A$.

Παρατήρηση

Όταν γράφουμε $y = f(x)$, προφανώς βάσει των πιο πάνω ορισμών το x είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή και το y η εξαρτημένη. Αν για οποιοδήποτε λόγο για μία συνάρτηση $g: \Gamma \to \Delta$ γράψουμε $x = g(y)$ τότε οι ρόλοι των x και y εναλλάσσονται.

Οι συναρτήσεις με τις οποίες θα ασχοληθούμε στο εξής (σε αυτό το βιβλίο) είναι της μορφής $f: A \to B$, όπου $A \subseteq \mathbb{R}$ και $B \subseteq \mathbb{R}$, είναι δηλαδή, όπως τις λέμε, **πραγματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής.** Επίσης, στο εξής για όλες τις συναρτήσεις θα θεωρούμε ότι $B \subseteq \mathbb{R}$, εκτός και αν δίνεται διαφορετικά.

Παρόλο που φαίνεται ότι για μία συνάρτηση απαιτείται να είναι γνωστά τα A, B και $f(x)$, συνήθως αναφερόμαστε σε μία συνάρτηση δίνοντας μόνο τον τύπο που μας δίνει το $f(x)$. Λέμε, για παράδειγμα, δίνεται «η συνάρτηση, με $f(x) = \sqrt{1-2x}$ » ή πιο απλά «η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1-2x}$ » ή και «η συνάρτηση $y = \sqrt{1-2x}$ ». Σε μία τέτοια περίπτωση, δεχόμαστε συμβατικά τα εξής:

- Το πεδίο ορισμού A της f είναι το «ευρύτερο» υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο το $f(x)$ έχει νόημα. Συμβολικά

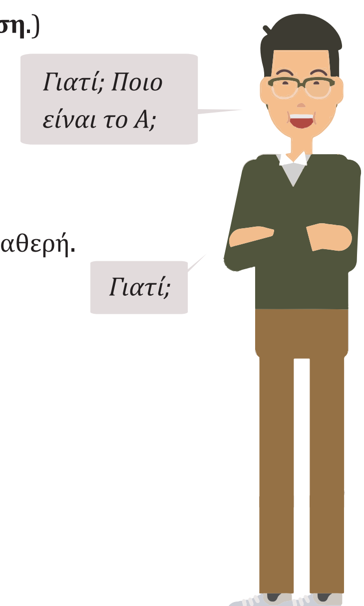
$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\}.$$

- Το σύνολο B είναι ολόκληρο το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Για παράδειγμα:

(α) Αν $f(x) = x$, τότε $A = \mathbb{R}$ και $B = \mathbb{R}$. (Η $f(x) = x$ λέγεται **ταυτοτική συνάρτηση**.)

Η συνάρτηση $f(x) = (x+1)^2 - \dfrac{x^3-1}{x-1}$ δεν είναι ταυτοτική.



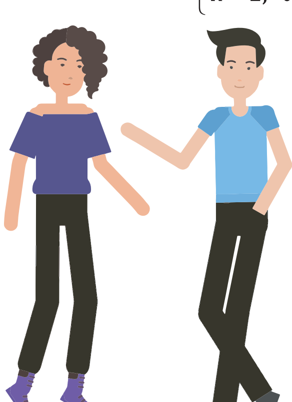
(β) Αν $f(x) = c$, όπου c είναι μία πραγματική σταθερά, τότε $A = \mathbb{R}$.
(Παρατηρήστε *ότι* $f(A) = \{c\}$.) (Η $f(x) = c$ λέγεται **σταθερή συνάρτηση**.)
Η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 1$ με πεδίο ορισμού το σύνολο $A = \{-1, 1\}$ είναι σταθερή.

(γ) Αν $f(x) = \dfrac{1}{x}$, τότε $A = \mathbb{R} - \{0\}$ (γιατί;). Ποιο είναι το $f(A)$;

(δ) Αν $f(x) = \sqrt{x-1}$, τότε $A = [1, +\infty)$ (γιατί;). Ποιο είναι το $f(A)$;

(ε) Αν $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, τότε $A = (0, +\infty)$ (γιατί;).

(στ) Αν $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{αν } x < 0 \\ x + 1, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$, τότε $A = (-\infty, 0) \cup [0, +\infty) = \mathbb{R}$.

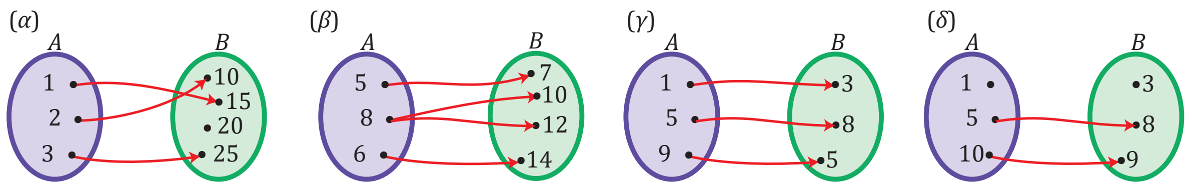


Στα παραδείγματα που ακολουθούν ζητείται να βρεθούν τα πεδία ορισμού κάποιων συναρτήσεων για εμπέδωση και εξάσκηση. Ωστόσο, πρέπει να θυμόμαστε ότι

Κάθε φορά που μας δίνεται μία συνάρτηση βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της είτε μας ζητείται είτε όχι.

Παράδειγμα 2.4.2.1

Να εξετάσετε αν οι παρακάτω αντιστοιχίες από το σύνολο A στο σύνολο B ορίζουν συναρτήσεις και στη συνέχεια, σε κάθε περίπτωση που ορίζεται συνάρτηση, να γράψετε το πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών και το πεδίο τιμών της.



Λύση

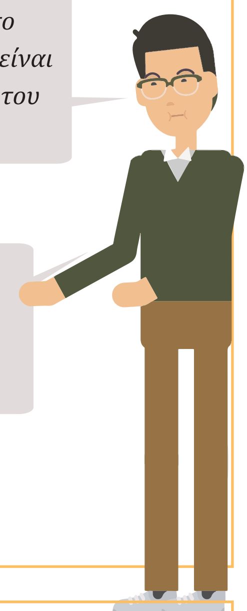
(α) Η αντιστοιχία ορίζει συνάρτηση από το σύνολο A στο σύνολο B, γιατί κάθε στοιχείο του συνόλου A αντιστοιχίζεται με ένα μόνο στοιχείο του συνόλου B.
Το πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών και το πεδίο τιμών της συνάρτησης είναι
$A = \{1, 2, 3\}$, $f(A) = \{10, 15, 25\}$ και $B = \{10, 15, 20, 25\}$.

Παρατηρήστε ότι το σύνολο τιμών f(A) είναι γνήσιο υποσύνολο του πεδίου τιμών B.

(β) Η αντιστοιχία δεν ορίζει συνάρτηση από το σύνολο A στο σύνολο B, γιατί υπάρχει στοιχείο (το 8) του συνόλου A που αντιστοιχίζεται με δύο στοιχεία (το 10 και το 12) του συνόλου B.

(γ) Η αντιστοιχία ορίζει συνάρτηση από το σύνολο A στο σύνολο B, γιατί κάθε στοιχείο του συνόλου A αντιστοιχίζεται με ένα μόνο στοιχείο του συνόλου B.
Το πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών και το πεδίο τιμών της συνάρτησης είναι
$A = \{1, 5, 9\}$, $f(A) = \{3, 8, 5\}$ *και* $B = \{3, 8, 5\}$.

Παρατηρήστε ότι το σύνολο τιμών f(A) είναι ίσο με το πεδίο τιμών B.



(δ) Η αντιστοιχία δεν ορίζει συνάρτηση από το σύνολο A στο σύνολο B, γιατί υπάρχει στοιχείο του συνόλου A (το 1) που δεν αντιστοιχίζεται με ένα στοιχείο του συνόλου B.

Παράδειγμα 2.4.2.2

Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων

(α) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x}$ (β) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ (γ) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-2x}$ (δ) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-x-2}$

Λύση

(α) Πρέπει να είναι: $x^2-2x \neq 0 \Leftrightarrow x(x-2) \neq 0 \Leftrightarrow (x \neq 0$ και $x-2 \neq 0) \Leftrightarrow x \neq 0$ και $x \neq 2$.
Άρα, $A = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$.

(β) Πρέπει να είναι: $x^2+1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq -1$.
Η τελευταία ανίσωση ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό x (αφού $x^2 \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$).
Άρα $A = \mathbb{R}$.

(γ) Πρέπει να είναι: $x^2-2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ και $x \neq 2$ (*βλ. (α)*).
Άρα, $A = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$. Για κάθε $x \in A = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$, έχουμε
$$f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-2x}=\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)x}=\frac{x+2}{x}$$

Σημαντική επισήμανση: Όταν θέλουμε να απλοποιήσουμε τον τύπο μιας συνάρτησης πρώτα βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της και μετά κάνουμε την απλοποίηση. (*Αιτιολογήστε αυτό τον ισχυρισμό.*)

(δ) Πρέπει να είναι: $x^2-x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ και $x \neq 2$ (γιατί;)
Άρα, $A = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$. Για κάθε $x \in A = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$, έχουμε $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-x-2} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \dfrac{x-1}{x-2}$.

Παράδειγμα 2.4.2.3

Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων

(α) $f(x)=\sqrt{3-5x}$ (β) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3-5x}}$ (γ) $f(x)=\sqrt{1-|x|}$ (δ) $f(x)=\sqrt{x-|x|}$

Λύση

(α) Πρέπει να είναι:

$3-5x\geq 0 \Leftrightarrow$ (Το υπόρριζο σε μία ρίζα είναι πάντοτε μη αρνητικός αριθμός)

$-5x\geq -3 \Leftrightarrow$

$\dfrac{-5x}{-5}\leq\dfrac{-3}{-5} \Leftrightarrow$ (Όταν διαιρούμε τα μέλη μιας ανισότητας με αρνητικό αλλάζουμε τη φορά της)

$x\leq\dfrac{3}{5}$

Άρα, $A=\left(-\infty,\dfrac{3}{5}\right]$.

(β) Πρέπει να είναι:

$\left.\begin{array}{l}3-5x\geq 0\\ 3-5x\neq 0\end{array}\right\}\Leftrightarrow$ (Το υπόρριζο σε μία ρίζα είναι πάντοτε μη αρνητικός αριθμός)

$x\leq\dfrac{3}{5}$ (βλ. (α)) και $x\neq\dfrac{3}{5}$ (Ο παρονομαστής είναι πάντοτε διάφορος από το μηδέν)

Άρα, $A=\left(-\infty,\dfrac{3}{5}\right)$.

(γ) Πρέπει να είναι:

$1-|x|\geq 0 \Leftrightarrow |x|\leq 1$ ($|x|\leq\rho\Leftrightarrow -\rho\leq x\leq\rho$)

$\Leftrightarrow -1\leq x\leq 1$

Άρα, $A=[-1,1]$.

(δ) Πρέπει να είναι

$x-|x|\geq 0\Leftrightarrow |x|\leq x$ (1)

Όμως για κάθε πραγματικό αριθμό (*βλ. Ιδιότητες της Απόλυτης Τιμής*) ισχύει

$-|x|\leq x\leq |x|$ (2)

Για να ισχύουν ταυτόχρονα οι (1) και (2) πρέπει

$|x|=x\Leftrightarrow x\geq 0$ (*βλ. Ορισμός της Απόλυτης Τιμής*).

Άρα, $A=[0,+\infty)$.

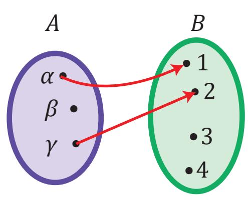
Παράδειγμα Ενότητας 2.4.2

Ασκήσεις - Δραστηριότητες

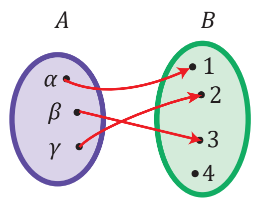
Α' ΟΜΑΔΑ

1 Να εξετάσετε ποια από τα παρακάτω βελοειδή διαγράμματα ορίζουν συνάρτηση και ποια όχι. Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

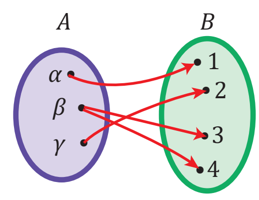
(α)



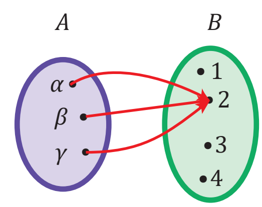
(β)



(γ)

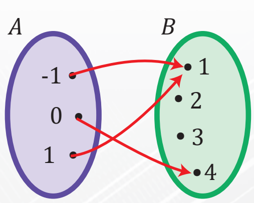


(δ)

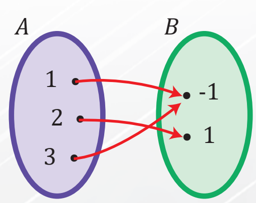


2 Όλα τα παρακάτω βελοειδή διαγράμματα ορίζουν συνάρτηση. Υπάρχουν τρεις συναρτήσεις που μπορούμε να βρούμε τον τύπο τους. Ποιες είναι αυτές;

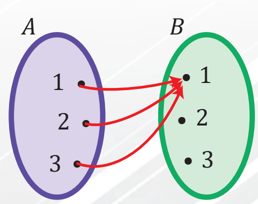
(α)



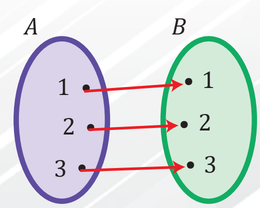
(β)



(γ)

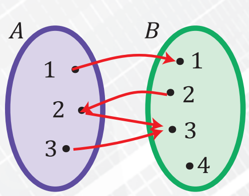


(δ)

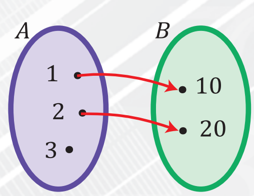


3 Κανένα από τα παρακάτω βελοειδή διαγράμματα δεν ορίζει συνάρτηση. Σε κάθε περίπτωση εντοπίστε το λόγο για τον οποίο συμβαίνει αυτό. (Ίσως κάπου να υπάρχουν περισσότεροι από ένας λόγοι.)

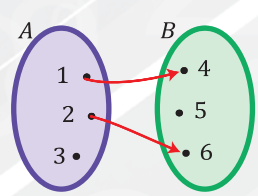
(α)



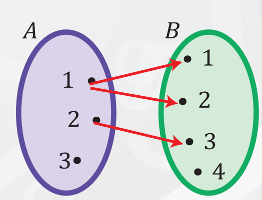
(β)



(γ)

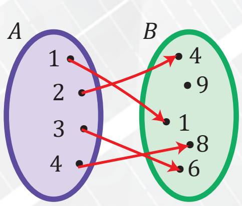


(δ)

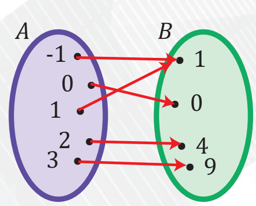


4 Όλα τα παρακάτω βελοειδή διαγράμματα ορίζουν συναρτήσεις. Να βρείτε τον τύπο κάθε συνάρτησης.

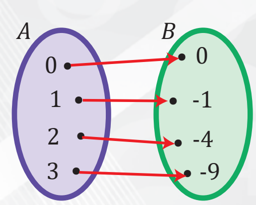
(α)



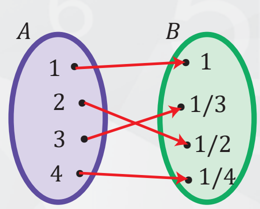
(β)



(γ)



(δ)



5 Να βρεθούν τα πεδία ορισμού και να γραφούν σε απλούστερη μορφή (όπου είναι δυνατόν) οι τύποι των παρακάτω συναρτήσεων

(α) $f(x)=\frac{2}{x-3}+1$ (β) $g(x)=\frac{(x-2)^2}{x^2-4}-\frac{1}{2}$ (γ) $h(x)=\sqrt{x^2-4}+5$ (δ) $k(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+9}}$

(i) Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες ισχύει

(α) $f(x) = 2$ (β) $g(x) = 6$ (γ) $h(x) = 5$ (δ) $k(x)=\frac{1}{5}$

(ii) Υπάρχει τιμή του x για την οποία έχουμε

(α) $f(x) = 1$ (β) $g(x)=-\frac{1}{2}$ (γ) $h(x) = 4$ (δ) $k(x)=\frac{1}{3}$;

Β' ΟΜΑΔΑ

1 Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων

(α) $f(x)=\sqrt{2|x|-1}$ (β) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2|x|-1}}$ (γ) $f(x)=\frac{1}{x^2-|x|}$ (δ) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-|x|}}$

2 Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων

(α) $f(x)=\sqrt{1-2|x|}$ (β) $f(x)=\sqrt{|x-1|-2}$ (γ) $f(x)=\sqrt{\left||x|-2\right|-2}$ (δ) $f(x)=\sqrt{|x|-x}$

3 Να βρεθούν τα πεδία ορισμού και να γραφούν σε απλούστερη μορφή (όπου είναι δυνατόν) οι τύποι των παρακάτω συναρτήσεων

(α) $f(x)=\frac{1}{\left||x|-1\right|}$ (β) $f(x)=\frac{x^2-x}{x^2-|x|}$ (γ) $f(x)=\frac{x^2-2x}{x^3-3x^2+2x}$ (δ) $f(x)=\frac{x^2-4x+4}{x^3-2x}$

4 Να βρείτε τα πεδία ορισμού και το σύνολο τιμών των συναρτήσεων

(α) $f(x)=|x|$ (β) $f(x)=\sqrt{x}$ (γ) $f(x)=\sqrt{|x|}$ (δ) $f(x)=\sqrt{x+|x|}$

5 Να βρείτε τα πεδία ορισμού και το σύνολο τιμών των συναρτήσεων

(α) $f(x)=\frac{x-1}{|x-1|}$ (β) $f(x)=\frac{2x}{|x|+x}$ (γ) $f(x)=\sqrt{x-2}-\sqrt{2-x}$ (δ) $f(x)=\sqrt{x-1}\,\sqrt{1-x}$

6 Να βρεθούν τα πεδία ορισμού και να γραφούν σε απλούστερη μορφή (όπου είναι δυνατόν) οι τύποι των παρακάτω συναρτήσεων

(α) $f(x)=\sqrt{x^2}$ (β) $f(x)=\sqrt{x^3}$

(γ) $f(x)=\frac{1}{x-|x|}$ (δ) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$

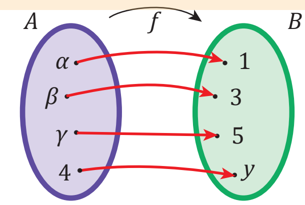
Υπάρχει μία πολύ «κομψή» και σύντομη διαδικασία επίλυσης για το (δ). Αρκεί να χρησιμοποιήσετε την προφανή ανισότητα $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x|$

Ασκήσεις Β' Ομάδας Ενότητας 2.4.2

2.4.3 Τρόποι αναπαράστασης μιας συνάρτησης

Θα μάθουμε:

• να συνδέουμε διαφορετικές αναπαραστάσεις μιας συνάρτησης.



Μία συνάρτηση μεταξύ των στοιχείων των δύο συνόλων A και B μπορεί να δοθεί με διάφορους τρόπους όπως:

- με βελοειδές διάγραμμα.

Για παράδειγμα, η αντιστοιχία (γ) στο παράδειγμα που συνοδεύει τον Ορισμό, οι αντιστοιχίες (α) και (γ) στο Παράδειγμα 2.4.2.1 και η αντιστοιχία στο διπλανό σχήμα, είναι βελοειδή διαγράμματα συναρτήσεων. Αν στο διπλανό διάγραμμα δίνεται ότι κάθε στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχίζεται στο άθροισμά του με την τετραγωνική του ρίζα ποιος είναι ο τύπος της συνάρτησης f και ποιες είναι οι τιμές των $α$, $β$, $γ$ και y;

- με λεκτική – περιγραφική διατύπωση.

Για παράδειγμα, η αντιστοιχία μεταξύ των παιχτών μιας ομάδας μπάσκετ και του αριθμού της φανέλας τους.

Ο Γιάννης Αντετοκούνμπο με τη φανέλα της Εθνικής Ελλάδας.
Πηγή: Διαδίκτυο.

- με γράφημα (σύνολο διατεταγμένων ζευγών).

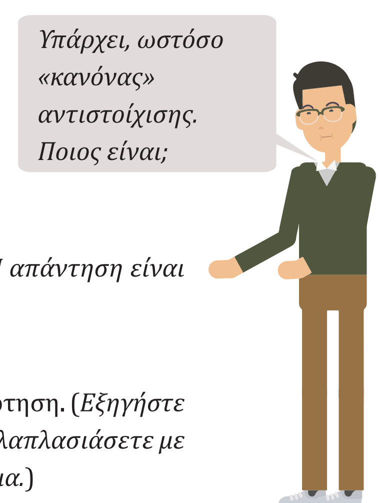
Για παράδειγμα, το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών

$$G = \{(-1, 2), (0, 3), (1, 4), (2, 5)\}$$

ορίζει μία συνάρτηση (*βρείτε τον «κανόνα» της αντιστοίχισης*), ενώ το σύνολο

$$H = \{(0, 0), (1, -1), (1, 1), (4, -2), (4, 2)\}$$

δεν ορίζει κάποια συνάρτηση.



- με τη χρήση τύπου.

Για παράδειγμα, ο τύπος $E = πρ^2$ ορίζει μία συνάρτηση. Ο τύπος $y^2 = x$ ορίζει; (*Η απάντηση είναι «εξαρτάται», ωστόσο σκεφτείτε το και συζητήστε το με τον διδάσκοντα.*)

- με πίνακα τιμών.

Για παράδειγμα, από τους δύο πίνακες που δίνονται μόνο ο δεύτερος ορίζει συνάρτηση. (*Εξηγήστε γιατί και βρείτε τον τύπο της. Το δεύτερο είναι μία μικρή «πρόκληση», αλλά αν πολλαπλασιάσετε με το 2 τους αριθμούς που δεν έχουν 2 στον αριθμητή, θα έχετε κάνει ένα μεγάλο βήμα.*)

(α)

x	0	0	1	2
y	−1	1	0	0

(β)

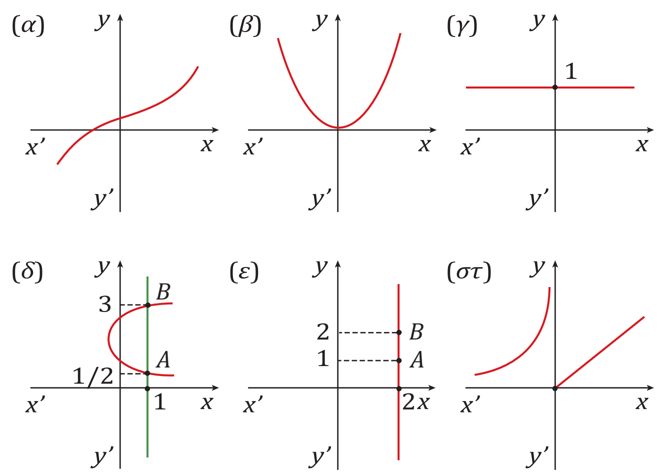
x	1	2	3	4
y	2	1/2	2/9	1/8

- με γραφική παράσταση.

Για παράδειγμα, από τις καμπύλες (κόκκινες γραμμές) που παρουσιάζονται παρακάτω, συναρτήσεις αντιπροσωπεύουν οι καμπύλες των περιπτώσεων (α), (β), (γ) και (στ).
Οι καμπύλες των περιπτώσεων (δ) και (ε) δεν είναι.

Στην περίπτωση (δ) η καμπύλη δεν αντιπροσωπεύει συνάρτηση γιατί υπάρχουν σημεία του άξονα $x'x$, (δηλαδή, τιμές του x) στα οποία αντιστοιχίζονται δύο τιμές του y. Παρατηρήστε ότι η κατακόρυφη ευθεία (βλ. ευθεία με το πράσινο χρώμα) τέμνει τον άξονα $x'x$ στο 1 και την καμπύλη σε δύο σημεία το $A\left(1,\frac{1}{2}\right)$ και το $B(1,3)$, που σημαίνει ότι το 1 αντιστοιχεί στο $\frac{1}{2}$ και στο 3, το οποίο δεν επιτρέπεται να συμβαίνει σε μία συνάρτηση.

Στην περίπτωση (ε) η ευθεία δεν αντιπροσωπεύει συνάρτηση γιατί όλα της τα σημεία έχουν το ίδιο x, που σημαίνει ότι το 2 αντιστοιχεί σε άπειρες τιμές του y.



Παρατηρήσεις

Από το παράδειγμα (δ) εξάγεται το ακόλουθο χρήσιμο κριτήριο:

Μία καμπύλη αντιπροσωπεύει συνάρτηση αν οποιαδήποτε κατακόρυφη ευθεία που την τέμνει, την τέμνει ακριβώς σε ένα σημείο.

Από το παράδειγμα (ε) εξάγεται το ακόλουθο συμπέρασμα:

Οι κατακόρυφες ευθείες δεν είναι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων.

Αν και αργότερα θα «συνηθίσουμε» να «βλέπουμε» τη συνάρτηση σαν μία καμπύλη (γραφική παράσταση) και το αντίστροφο, οπότε η μελέτη μιας συνάρτησης θα βασίζεται στον τύπο της και την γραφική της παράσταση, προς το παρόν θα αναπαριστούμε μία συνάρτηση με όλους τους παραπάνω τρόπους και θα τη «βλέπουμε» περισσότερο σαν αντιστοιχία, λόγω του έντονα διαισθητικού χαρακτήρα της αντιστοιχίας.

Παράδειγμα 2.4.3.1

Θεωρούμε την αντιστοιχία $f: A \to B$ όπου $A=\left\{0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2\right\}$ και B είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$. Ορίζουμε την f με τον εξής τρόπο:

«*Σε κάθε στοιχείο του A αντιστοιχίζουμε το τετραπλάσιό του ελαττωμένο κατά 1*».

Να εξηγήσετε γιατί αυτή η αντιστοιχία είναι συνάρτηση και στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Λύση

Από τον τρόπο που ορίζεται η αντιστοιχία f προκύπτει ότι $f(x) = 4x - 1$, για κάθε $x \in A$ καθώς και ότι η αντιστοιχία αυτή είναι μία συνάρτηση γιατί σε κάθε $x \in A$ αντιστοιχίζεται ένα ακριβώς $y \in B$ *(γιατί είναι γνωστό ότι το αποτέλεσμα πράξεων της αριθμητικής και κάθε συνδυασμού αυτών είναι μοναδικό).*

Για να βρούμε το σύνολο τιμών αρκεί να υπολογίσουμε τις τιμές της f σε κάθε στοιχείο x του A.

Έχουμε

$$f(0)=4\cdot 0-1=-1,$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=4\cdot\frac{1}{2}-1=2-1=1$$

$$f(1)=4\cdot 1-1=4-1=3$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=4\cdot\frac{3}{2}-1=6-1=5$$

$$f(2)=4\cdot 2-1=8-1=7$$

Επομένως, το σύνολο τιμών της f είναι το $f(A) = \{-1, 1, 3, 5, 7\}$.

Παράδειγμα 2.4.3.2

Θεωρούμε την αντιστοιχία $f: A \to B$ όπου A είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ και το B είναι επίσης το $\mathbb{R}$. Ορίζουμε την f με τον εξής τρόπο:

«Σε κάθε στοιχείο του A αντιστοιχίζουμε το τετράγωνό του».

Να εξηγήσετε γιατί αυτή η αντιστοιχία είναι συνάρτηση, να γράψετε τον τύπο της και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Λύση

Η αντιστοιχία $x \to x^2$ είναι συνάρτηση γιατί για κάθε πραγματικό αριθμό ορίζεται το τετράγωνό του και είναι μοναδικό. Ο τύπος της συνάρτησης είναι $f(x) = x^2$ και το σύνολο τιμών της είναι $[0, +\infty)$. Παρατηρήστε ότι το σύνολο τιμών $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$ είναι γνήσιο υποσύνολο του $B = \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 2.4.3.3

Θεωρούμε την αντιστοιχία $f: A \to B$ όπου A είναι το σύνολο $[0, +\infty)$ και B είναι το $\mathbb{R}$. Ορίζουμε την f με τον εξής τρόπο:

«Σε κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζουμε την ρίζα της εξίσωσης $t^2 = x$».

Να εξηγήσετε γιατί αυτή η αντιστοιχία δεν είναι συνάρτηση και στη συνέχεια να τροποποιήσετε κατάλληλα τον τρόπο αντιστοίχισης ώστε να πάρετε μία συνάρτηση με το ίδιο πεδίο ορισμού.

Λύση

Η αντιστοιχία δεν είναι συνάρτηση γιατί κάθε θετικός πραγματικός αριθμός x έχει δύο ρίζες την $\sqrt{x}$ και την $-\sqrt{x}$ και επομένως δεν ικανοποιείται ο ορισμός της συνάρτησης. Ωστόσο, οι αντιστοιχίες $x \to \sqrt{x}$ και $x \to -\sqrt{x}$ με $x \in [0, +\infty)$ είναι και οι δύο συναρτήσεις.

Παράδειγμα 2.4.3.4

Στον πίνακα που ακολουθεί δίνονται μερικές τιμές στο πεδίο ορισμού A μιας συνάρτησης f και κάποιες στο σύνολο τιμών της $f(A)$.

x	0	1	2		4
$y = f(x)$	1	3	5	7	

Να προσδιορίσετε τον τύπο της συνάρτησης και να βρείτε τα στοιχεία του πίνακα που λείπουν.

Λύση

Παρόλο που δεν είναι δυνατόν να βρούμε τον τύπο της συνάρτησης μέσα από μία «οργανωμένη διαδικασία» γιατί δεν γνωρίζουμε τίποτα σχετικό με τον τύπο μπορούμε να τον βρούμε από τα δεδομένα του πίνακα που δίνεται. Πραγματικά, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι οι τρεις πρώτες τιμές του x, δηλαδή, το 0, το 1 και το 2 αντιστοιχίζονται στα 1, 3 και 5 που είναι τα διπλάσιά τους συν 1. Επομένως, ο τύπος της συνάρτησης είναι $f(x) = 2x + 1$.

Για $x = 4$ έχουμε $f(4) = 2 \cdot 4 + 1 = 8 + 1 = 9$.

Για $y = 7$ έχουμε $f(x) = 7 \Leftrightarrow 2x + 1 = 7 \Leftrightarrow 2x = 7 - 1 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$.

Παρατήρηση

Όταν δίνεται ένα στοιχείο y στο σύνολο τιμών μιας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε εφικτό να βρούμε ένα x στο πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f έτσι ώστε $f(x) = y$. Αυτό το γεγονός οφείλεται στο ότι μπορεί στο ίδιο y να αντιστοιχούν περισσότερα από ένα x. Για παράδειγμα αν έχουμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ για $y = 4$ έχουμε $x^2 = 4$, οπότε $x = 2$ ή $x = -2$. Ωστόσο, οι συναρτήσεις που μας επιτρέπουν να βρούμε το x όταν δίνεται το y αποτελούν μία πολύ σημαντική περίπτωση συναρτήσεων, τις ονομαζόμενες *ένα προς ένα* (1 – 1), η οποία θα μας απασχολήσει στο μέλλον.

Ασκήσεις - Δραστηριότητες

Α' ΟΜΑΔΑ

1 Οι πλευρές ενός ισοπλεύρου τριγώνου είναι ίσες με x. Να εκφράσετε το ύψος του τριγώνου ως συνάρτηση του x καθώς και το εμβαδόν του.

2 Οι διαστάσεις x, y ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου έχουν άθροισμα α. Να εκφράσετε το εμβαδόν του ως συνάρτηση της μιας από αυτές καθώς και τη διαγώνιό του.

3 Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο η βάση του έχει μήκος $2x - 4$ και το αντίστοιχο ύψος έχει μήκος x. Αν $E(x)$ είναι η συνάρτηση που δίνει το εμβαδόν του τριγώνου ως συνάρτηση του x και $3 \leq E(x) \leq 24$, να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Για ποια τιμή του x είναι $E(x) = 8$;

4 Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 - x + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν $f(2) = 0$, να βρείτε το α και να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 10$.

5 Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} -2x - 4, x < 1 \\ x^2 - 5, x \geq 1 \end{cases}$.

(α) Να βρεθούν οι τιμές $f(-2)$, $f(0)$, $f(2)$ και $f(4)$.

(β) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 4$. (Να διακρίνετε δύο περιπτώσεις.)

Κλαδικές συναρτήσεις 2.4.3

Ασκήσεις Β' Ομάδας Ενότητας 2.4.3

6 Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x + 1, x \in \mathbb{Z} \\ -2x + 3, x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$.

(α) Να βρεθούν οι τιμές $f(-1)$, $f(0)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(1)$.

(β) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 5$. (Να διακρίνετε δύο περιπτώσεις.)

Β' ΟΜΑΔΑ

1 Να βρεθούν οι τιμές των αριθμών α και β ώστε οι τιμές της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} \alpha x - 1, \ x \geq 0 \\ \beta x^2 + \frac{1}{2}, x < 0 \end{cases}$ στα σημεία $1/2$ και $-1/2$ να είναι αντίστοιχα $-1/2$ και $1/2$.

2 Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$.

Μάντεψε τις τιμες

(α) Να βρεθούν οι τιμές $f(-1)$, $f(0)$, $f\left(\frac{1}{3}\right)$, $f(1)$, $f\left(\sqrt{2}\right)$ και $f(\pi)$.

(β) Να λυθεί η εξίσωση $|2x - f(2)| = |1 - x| + f(\pi)$.

3 Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2x^2 - x - \alpha$, $\alpha > 0$. Αν $f(\alpha) = 0$, να βρείτε το α και να αποδείξετε ότι $f(x) \geq -\frac{9}{8}$. Πότε αυτή η ανισοϊσότητα ισχύει ως ισότητα;

4 Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $f(x + 1) = x^2 + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

(α) να βρείτε τις τιμές $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ και $f(2)$. (*Για να βρείτε τις τιμές δεν είναι απαραίτητο να βρείτε τον τύπο της f.*)

(β) να βρείτε τον τύπο της f.

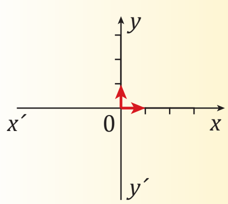
(γ) να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 1$.

2.4.4 Γραφική παράσταση συνάρτησης

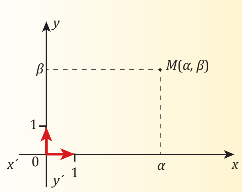
Θα μάθουμε:

- να ερμηνεύουμε μία δοσμένη γραφική παράσταση συνάρτησης για να επιλύσουμε ένα πρόβλημα.

Συντεταγμένες στο επίπεδο – Καρτεσιανές συντεταγμένες (Επαναλήψεις – Συμπληρώσεις)



Η παράσταση ενός σημείου του επιπέδου με ένα διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών (δηλαδή, ένα σύνολο με δύο στοιχεία όπου το πρώτο γράφεται πάντα πρώτο και το δεύτερο πάντα δεύτερο) συνέβαλε σημαντικά στην επίλυση προβλημάτων της γεωμετρίας, της φυσικής, της αστρονομίας, πρωτίστως, αλλά και των άλλων επιστημών με αλγεβρικές μεθόδους. Η διαδικασία είναι η εξής:



Σε ένα επίπεδο σχεδιάζουμε δύο κάθετους (βαθμολογημένους με τις αποστάσεις στους άξονες να μετριούνται με ίδιες μονάδες μήκους) άξονες $x'x$ (οριζόντιος άξονας) και $y'y$ (κατακόρυφος άξονας) με κοινή αρχή ένα σημείο O. Λέμε ότι οι άξονες $x'x$ και $y'y$ αποτελούν ένα ορθοκανονικό ή καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. (Πολλές φορές λέμε απλά "ορθογώνιο σύστημα" και εννοούμε καρτεσιανό σύστημα). Ο οριζόντιος $x'x$ λέγεται **άξονας των τετμημένων** ή **άξονας των x**, ενώ ο κατακόρυφος $y'y$ **άξονας των τεταγμένων** ή **άξονας των y** και το σημείο O λέγεται αρχή ενώ το επίπεδο στο οποίο ορίστηκε το σύστημα αυτό, το λέμε **καρτεσιανό επίπεδο.** Η ιδέα της χρησιμοποίησης ζευγών για την παράσταση σημείων του επιπέδου πρόκειται περί ενός επιστημονικού «άλματος» και ανήκει στον Γάλλο φιλόσοφο, μαθηματικό και επιστήμονα φυσικών επιστημών **René Descartes** (1596–1650) γνωστό μας ως Καρτέσιο. (Σημειώνουμε ότι, δεν είναι όλα τα συστήματα ορθοκανονικά και κάποιες φορές ούτε καν ορθογώνια, ωστόσο, δεν θα μας απασχολήσουν τέτοια συστήματα.).

Στην πραγματικότητα οι άξονες είναι δύο ευθείες των πραγματικών αριθμών που τέμνονται κάθετα στο σημείο 0 και των δύο.

Ορθοκανονικά Συστήματα

Απόσταση σημείων του καρτεσιανού επιπέδου

Στη συνέχεια, σε κάθε σημείο M του επιπέδου των αξόνων μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα διατεταγμένο ζεύγος (α,β) πραγματικών αριθμών και αντιστρόφως, σε κάθε διατεταγμένο ζεύγος (α,β) πραγματικών αριθμών, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα μοναδικό σημείο M του επιπέδου. Το α είναι το σημείο του άξονα $x'x$ στο οποίο τέμνει μία κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από το σημείο M και το β είναι το σημείο του άξονα $y'y$ στο οποίο τέμνει μία οριζόντια ευθεία που διέρχεται από το σημείο M. Οι αριθμοί α,β λέγονται **συντεταγμένες** του M. Ειδικότερα, ο α λέγεται **τετμημένη** και ο β **τεταγμένη** του σημείου M. Το σημείο M που έχει συντεταγμένες α και β συμβολίζεται με $M(\alpha,\beta)$ ή, απλά, με (α,β).

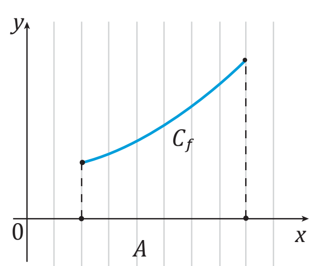
Επανερχόμενοι στα διαισθητικά συμπεράσματα των παραπάνω, έχοντας ορίσει πλέον τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f, μπορούμε να τα επαναδιατυπώσουμε. Επειδή κάθε $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο $y \in \mathbb{R}$, δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τετμημένη. Γενικά ισχύει:

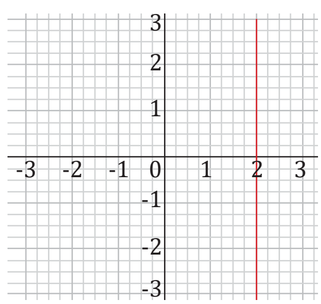
> Μία κατακόρυφη ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f το πολύ σε ένα σημείο (βλ. σχήμα κάτω αριστερά).

Η κατακόρυφη ευθεία (βλ. σχήμα κάτω δεξιά) δεν αποτελεί γραφική παράσταση καμιάς συνάρτησης γιατί όλα τα σημεία της ευθείας έχουν την ίδια τετμημένη $x = 2$, που σημαίνει ότι το $x = 2$ αντιστοιχίζεται σε άπειρα y, το οποίο δεν μπορεί να συμβαίνει σε μία συνάρτηση.

Γενικά ισχύει:

> Οι κατακόρυφες ευθείες δεν είναι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων.





Γραφική παράσταση συνάρτησης (Επαναλήψεις – Συμπληρώσεις)

Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A και το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy. Το σύνολο των σημείων $M(x,y)$ με $x \in A$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x,f(x))$, λέγεται γραφική παράσταση της f και συμβολίζεται με C_f.

Από τον τρόπο που ορίζονται τα σημεία της γραφικής παράστασης προκύπτει ότι η εξίσωση $y = f(x)$ επαληθεύεται μόνο από τα σημεία (x, y) που ανήκουν στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και από κανένα άλλο σημείο.

Επομένως, η $y = f(x)$ είναι η εξίσωση που ορίζει τη γραφική παράσταση. Γι' αυτό το λόγο, τη γραφική παράσταση C_f της f τη συμβολίζουμε με την εξίσωσή της, δηλαδή, με $y = f(x)$.

Για παράδειγμα, αν $f(x) = x^2 - x$, τότε τα σημεία $A(1,0)$ και $B(2,2)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της f, ενώ το σημείο $\Gamma(0,1)$ δεν ανήκει. Πραγματικά, έχουμε

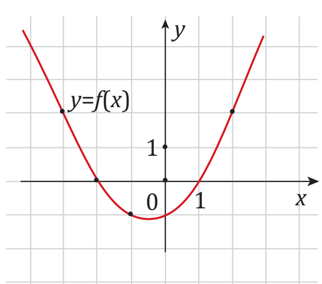
$f(1) = 1^2 - 1 = 0$, οπότε το $A \in C_f$.

$f(2) = 2^2 - 2 = 2$, οπότε το $B \in C_f$.

$f(0) = 0^2 - 0 = 0 \neq 1$, οπότε το $\Gamma \notin C_f$.

Παράδειγμα 2.4.4.4

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.



(i) Να βρείτε τις τιμές της f στα σημεία $-3, -2, -1, 0, 1$ και 2.

(ii) Να βρείτε τις λύσεις των εξισώσεων
(α) $f(x) = 0$ (β) $f(x) = 2$ (γ) $f(x) = -2$

(iii) Να βρείτε τις λύσεις των ανισώσεων
(α) $f(x) < 0$ (β) $f(x) \geq 0$ (γ) $1 \leq f(x) < 2$

(iv) Υποθέστε, (όπως φαίνεται και στο σχήμα αλλά και από κάποιες τιμές που υπολογίσαμε στο (i)), ότι η C_f έχει έναν *άξονα συμμετρίας* (δηλαδή, μία ευθεία ως προς την οποία είναι συμμετρική). Ποιος είναι ο άξονας συμμετρίας της C_f;

Λύση

(i) Είναι $f(-3) = 2, f(-2) = 0, f(-1) = -1, f(0) = -1, f(1) = 0$ και $f(2) = 2$.

(ii) (α) Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ είναι οι τετμημένες των σημείων στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$, δηλαδή, οι αριθμοί -2 και 1.

(β) Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 2$ είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που έχουν τεταγμένη 2, δηλαδή, οι αριθμοί -3 και 2.

(γ) Η εξίσωση $f(x) = -2$ είναι αδύνατη, γιατί δεν υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της f με τεταγμένη 2.

(iii) (α) Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x) < 0$ είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$, δηλαδή, όλα τα $x \in (-2, 1)$.

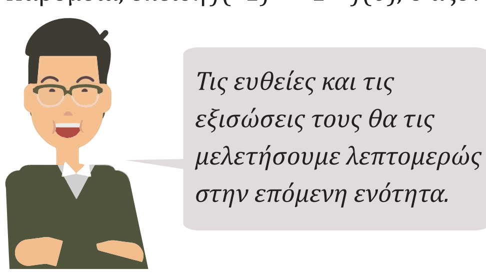
(β) Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x) \geq 0$ είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που τέμνουν τον άξονα $x'x$ και των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$, δηλαδή, όλα τα $x \in (-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$.

(Υπάρχει μία πολύ πιο σύντομη αιτιολόγηση στην απάντηση αυτή. Ποια είναι;)

(γ) Με επιχειρήματα όμοια όπως και στα προηγούμενα ερωτήματα βλέπουμε ότι οι λύσεις της $1 \leq f(x) < 2$ είναι όλα τα $x \in \left(-3, -\frac{5}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, 2\right)$.

(iv) Επειδή, $f(-3) = 2 = f(2)$ ο άξονας συμμετρίας θα διέρχεται από το μέσο του διαστήματος με άκρα τα σημεία $(-3,2)$ και $(2,2)$, του οποίου η τετμημένη είναι ίση με $\frac{-3+2}{2} = -\frac{1}{2}$ *(βλ. παραπάνω σχήμα ή Ενότητα 1.1.3, Μέσο διαστήματος).*

Παρόμοια, επειδή $f(-1) = -1 = f(0)$, ο άξονας συμμετρίας θα διέρχεται από το μέσο του διαστήματος με άκρα τα σημεία $(-1,-1)$ και $(0,-1)$, του οποίου η τετμημένη είναι ίση με $\frac{-1+0}{2} = -\frac{1}{2}$.



Επομένως, ο άξονας συμμετρίας έχει δύο σημεία με τετμημένη $-\frac{1}{2}$, οπότε όλα του τα σημεία έχουν τετμημένη $-\frac{1}{2}$, δηλαδή, είναι η *κατακόρυφη ευθεία με εξίσωση* $x = -\frac{1}{2}$.

Παραδείγματα Ενότητας 2.4.4

Οι λύσεις εξισώσεων και ανισώσεων που βασίζονται σε γραφικές παραστάσεις λέγονται **γραφικές λύσεις.** Σε τέτοιες περιπτώσεις λέμε «*Λύστε γραφικά* ....» ή απλά «*Λύστε* ....».

Ασκήσεις - Δραστηριότητες

Α' ΟΜΑΔΑ

Σημεία με ιδιαίτερο ενδιαφέρον

1 Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου $A(-3,2)$ ως προς
(i) τον άξονα $x'x$. (ii) τον άξονα $y'y$.
(iii) την αρχή O των αξόνων. (iv) τη διχοτόμο της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων.

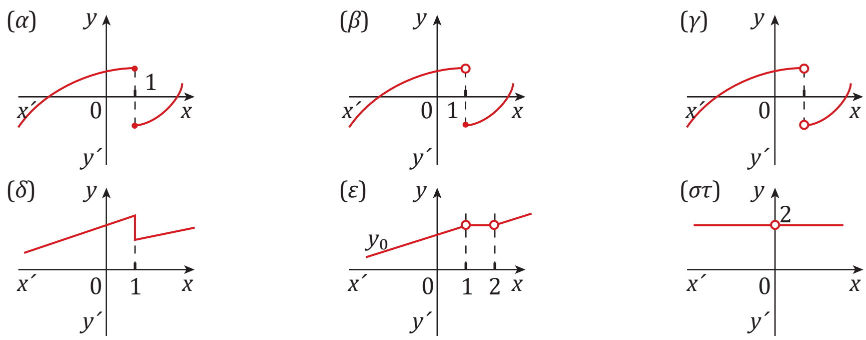
2 Προσδιορίστε τους αριθμούς λ και μ (αν υπάρχουν) ώστε
(i) τα σημεία $A(0, -1)$ και $B(0, \lambda^2)$ να είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$.
(ii) τα σημεία $\Gamma(1, -2)$ και $\Delta(\mu, |\mu + 1|)$ να είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων.

3 Να βρεθεί το x, ώστε η απόσταση των σημείων $A(x, -1)$ και $B(1, 5)$ να είναι ίση με 10.

4 Να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(1, 2)$, $B(-1, -2)$ και $\Gamma(4, -2)$ είναι κορυφές ισοσκελούς τριγώνου. Ποιο είναι το είδος του τριγώνου $AO\Gamma$ όπου O η αρχή των αξόνων.

5 Δίνονται τα σημεία $A(1, 3)$, $B(-2, -1)$ και $\Gamma(6, x)$. Να βρεθεί το x ώστε το τρίγωνο $AB\Gamma$ να είναι ισοσκελές.

6 Να βρείτε ποιες από τις καμπύλες που φαίνονται στο σχήμα που ακολουθεί είναι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων (δεν χρειάζεται να βρείτε τις συναρτήσεις) και να βρείτε (κατ' εκτίμηση) το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών αυτών των συναρτήσεων.



Τι κοινό μπορεί να έχουμε;

Ασκήσεις Β' Ομάδας Ενότητας 2.4.4

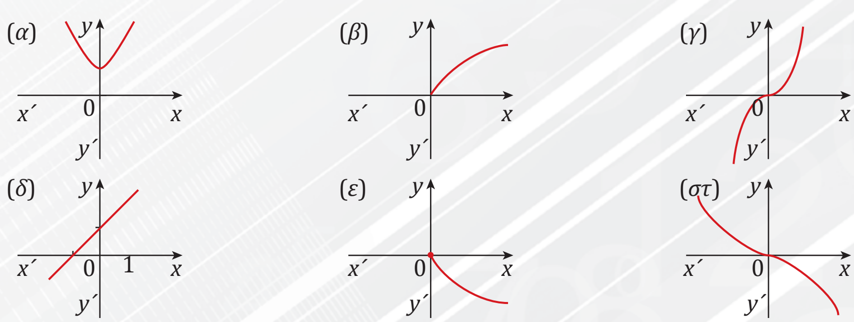
Β' ΟΜΑΔΑ

1 Δίνονται οι συναρτήσεις

(i) $f(x) = x + 1$ (ii) $f(x) = \sqrt{x}$ (iii) $f(x) = x^2 + 1$

(iv) $f(x) = -x^3$ (v) $f(x) = -\sqrt{x}$ (vi) $f(x) = x^3$

Καθεμία από τις καμπύλες που φαίνονται στο σχήμα που ακολουθεί είναι η γραφική παράσταση μιας από τις παραπάνω συναρτήσεις. Να αντιστοιχίσετε σε κάθε συνάρτηση τη γραφική της παράσταση και να βρείτε τα σύνολα τιμών αυτών των συναρτήσεων *(Δεν χρειάζεται να κάνετε πράξεις.)*



Αναζητώντας το κατάλληλο μέλος της οικογένειας

2 Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις να βρείτε την τιμή του k για την οποία το σημείο M ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

(i) $f(x) = x^2 + (k-1)x - 8$, $M(2,2)$ (ii) $f(x) = (x+k)^2\sqrt{7-x}$, $M(-2,3)$

(iii) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-k} + 1$, $M(3,6)$ (iv) $f(x) = (x^2-k)\sqrt{1-x}$, $M(-3,16)$

3 Αν $f(x) = x^2 + 2x$ και $g(x) = 2x + 9$, να βρείτε τις συντεταγμένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g καθώς και τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g.

4 Να βρεθεί το λ ώστε το σημείο (x_0, y_0) να ανήκει στις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g, όταν

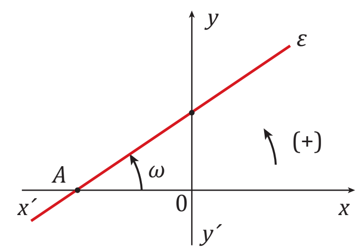
(i) $f(x) = 2x^2 + \lambda x + 3$ και $(x_0, y_0) = (-1, 2)$ (ii) $g(x) = \lambda x\sqrt{x - \lambda}$ και $(x_0, y_0) = (9, 90)$

2.4.5 Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$

Θα μάθουμε:

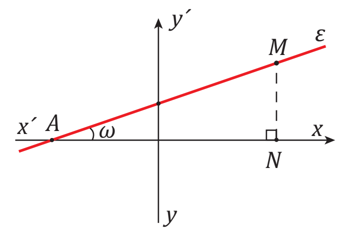
- να ερμηνεύουμε τον ρόλο των παραμέτρων α και β στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x + \beta$.

Συντελεστής διεύθυνσης (ή κλίση) ευθείας



Θεωρούμε ένα σύστημα συντεταγμένων Oxy στο επίπεδο και μία ευθεία ε που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο A. Τη γωνία ω που διαγράφει η ημιευθεία Ax, όταν στραφεί γύρω από το Α κατά τη *θετική φορά* (δηλαδή, αντίθετα με τους δείκτες του ωρολογίου) μέχρι να πέσει πάνω στην ευθεία ε, την ονομάζουμε **γωνία της ευθείας με τον άξονα $x'x$.**

Αν η ευθεία ε είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ ή συμπίπτει με αυτόν, τότε λέμε ότι η ευθεία ε σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = 0°$. Σε κάθε περίπτωση για τη γωνία ω ισχύει $0° \leq \omega < 180°$.

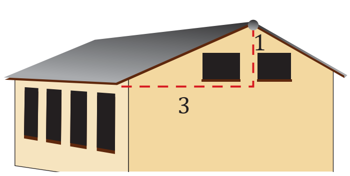


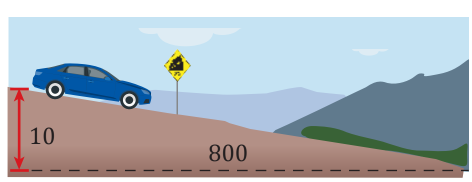
Καθώς η ημιευθεία Ax στρέφεται γύρω από το σημείο A, απομακρυνόμενη από την αρχική οριζόντια θέση της, η γωνία ω που σχηματίζει με την αρχική της θέση (δηλαδή, τον άξονα $x'x$) αποτελεί ένα μέτρο (έναν τρόπο μέτρησης) του πόσο απομακρύνεται από την αρχική της (οριζόντια) θέση. Δηλαδή, όσο πιο μεγάλη γίνεται η γωνία τόσο πιο μεγάλη είναι η κλίση της ευθείας ε. Θα διατηρήσουμε αυτό τον όρο, και θα ονομάσουμε **συντελεστή διεύθυνσης** ή **κλίση της ευθείας** ε την εφαπτομένη της γωνίας ω.

Υπενθυμίζουμε ότι: $\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{προσκείμενη κάθετη}} = \dfrac{MN}{AN}$.

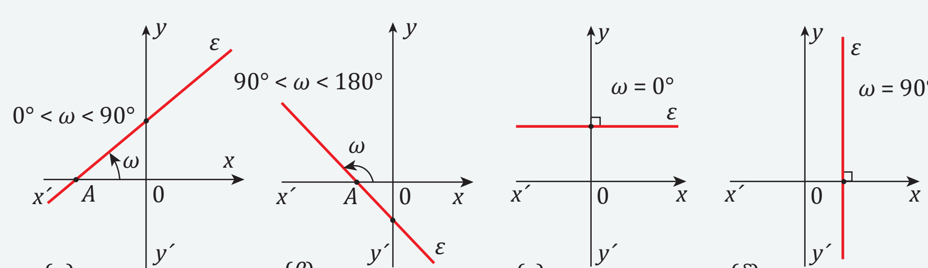
Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας ε συμβολίζεται συνήθως με λ ή με α (ή και με λ_ε αν κρίνεται απαραίτητο).

Για παράδειγμα, η κλίση της στέγης και του δρόμου στα παρακάτω σχήματα είναι, αντίστοιχα, $\frac{1}{3} \simeq 33{,}33\%$ και $\frac{10}{800} = 1{,}25\%$. (*Συνηθίζεται στις εφαρμογές η κλίση να εκφράζεται επί τοις %.*)





Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας ε είναι θετικός αν η γωνία ω είναι οξεία (βλ. Σχήμα (α)), αρνητικός, αν η γωνία ω είναι αμβλεία (βλ. Σχήμα (β)) και μηδέν, αν η γωνία ω είναι μηδέν (βλ. Σχήμα (γ)). Στην περίπτωση που η γωνία ω είναι ίση με 90°, δηλαδή όταν η ευθεία ε είναι κάθετη στον άξονα $x'x$, δεν ορίζουμε συντελεστή διεύθυνσης για την ε (βλ. Σχήμα (δ)).



Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = αx + β$

Η ιδέα της χρησιμοποίησης ενός συστήματος συντεταγμένων για τον προσδιορισμό της θέσης ενός σημείου πάνω σε μία επιφάνεια ήταν γνωστή από την αρχαιότητα και ιδιαίτερα στους αρχαίους γεωγράφους. Στην εφαρμογή αυτής της ιδέας στη Γεωμετρία συνέβαλε σημαντικά η εισαγωγή του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων από τον Descartes και ιδιαίτερα το έργο «La Géométrie» (1637), στο οποίο εισάγεται η χρήση του αλγεβρικού λογισμού στη Γεωμετρία. Για να γίνει πιο αποτελεσματική αυτή η πρώτη «σύνθεση» της Άλγεβρας με τη Γεωμετρία εισάγονται στην Άλγεβρα νέοι συμβολισμοί που τη φέρνουν ουσιαστικά στη σημερινή της μορφή. Η ιδέα είναι απλή: *Να δοθεί ο ορισμός μιας καμπύλης (με τη γενική έννοια, δηλαδή, συμπεριλαμβανόμενης και της ευθείας) με αλγεβρικό τρόπο, με μία εξίσωση.*

Μια εξίσωση με δύο αγνώστους x, y λέγεται εξίσωση μιας γραμμής C, όταν οι συντεταγμένες των σημείων της C, και μόνο αυτές, την επαληθεύουν.

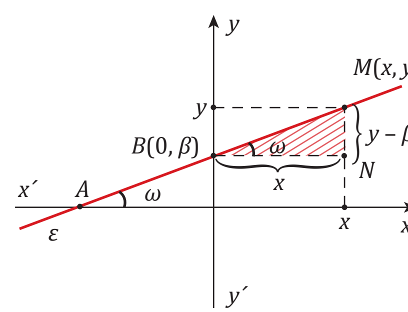
Έτσι, η εξίσωση μιας καμπύλης, από βοηθητικό μέσο για τη λύση ενός γεωμετρικού προβλήματος, γίνεται μέσο ορισμού και αναπαράστασης αυτής της καμπύλης.

Για παράδειγμα, το $A(-2,3)$ είναι σημείο της γραμμής $x + 2y = 4$, επαληθεύει την εξίσωσή της, (πραγματικά, είναι $-2 + 2 \cdot 3 = 4$), ενώ το σημείο $P(1,1)$ δεν είναι (γιατί, $1 + 2 \cdot 1 = 3 \neq 4$).

Το σημείο $M(-2,2)$ ανήκει στη γραμμή $y = \frac{1}{2}x^2$, (αφού $\frac{1}{2}(-2)^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$), ενώ το $N(1,3)$ δεν ανήκει (γιατί $\frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \neq 3$).

Η ευθεία γραμμή είναι η απλούστερη και η πιο συχνά χρησιμοποιούμενη γραμμή. Στην διαδικασία της αναζήτησης της εξίσωσης μιας ευθείας θα βασιστούμε αφενός στο συντελεστή διεύθυνσής της (δηλαδή, την κλίση της) και αφετέρου στη θέση της σε σχέση με τον κατακόρυφο άξονα (δηλαδή, σε ποιο σημείο τον τέμνει).

Ας θεωρήσουμε την ευθεία $ε$ στο διπλανό σχήμα που σχηματίζει γωνία $ω$ με τον θετικό ημιάξονα Ox και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο B με τεταγμένη $β$. Ας συμβολίσουμε το συντελεστή διεύθυνσης της $ε$ με $α$. Προφανώς, είναι $α \neq 0$, γιατί για $α = 0$ η $ε$ θα ήταν παράλληλη στον άξονα $x'x$.



Για να βρούμε την εξίσωση της ευθείας αρκεί να βρούμε την εξίσωση που ικανοποιούν οι συντεταγμένες x, y του τυχαίου σημείου της $M(x,y)$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο BNM έχουμε

$$εφω = \frac{y - β}{x} \Leftrightarrow α = \frac{y - β}{x} \Leftrightarrow αx = y - β \Leftrightarrow y = αx + β$$

Επομένως, η εξίσωση της ευθείας $ε$ είναι η $y = αx + β$, δηλαδή, η ευθεία $ε$ είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = αx + β$.

Άμεσες συνέπειες των παραπάνω είναι οι ακόλουθες:

- *Κάθε συνάρτηση της μορφής $f(x) = αx + β$, όπου $α, β \in \mathbb{R}$, έχει ως γραφική παράσταση μία ευθεία, την ευθεία με εξίσωση $y = αx + β$, η οποία δεν είναι ποτέ κάθετη στον άξονα $x'x$. Αντίστροφα:*

  Κάθε ευθεία που δεν είναι κάθετη στον άξονα $x'x$ έχει εξίσωση της μορφής $y = αx + β$, που είναι γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = αx + β$.
- *Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = αx + β$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0,β)$ και τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A\left(-\frac{β}{α}, 0\right)$.*

Γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο του με τεταγμένη $β$, δηλαδή, στο $(0,f(0))$ και είναι $f(0) = α \cdot 0 + β = β$. Γνωρίζουμε, επίσης ότι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία x για τα οποία είναι $f(x) = 0$ και έχουμε $f(x) = 0 \Leftrightarrow α \cdot x + β = 0 \Leftrightarrow α \cdot x = -β \Leftrightarrow x = -\frac{β}{α}$.

- *Η ευθεία ε έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με α.*
  - *Αν $\alpha > 0$, τότε $0^o < \omega < 90^o$.*
  - *Αν $\alpha < 0$, τότε $90^o < \omega < 180^o$.*
  - *Αν $\alpha = 0$, τότε $\omega = 0^o$.*

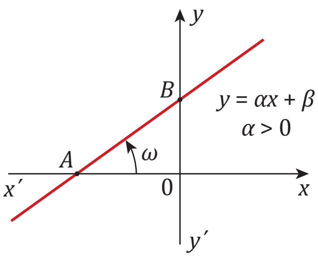
Στην περίπτωση που είναι $\alpha=0$, η συνάρτηση παίρνει τη μορφή $f(x) = \beta$, είναι δηλαδή, μία σταθερή συνάρτηση, γιατί η τιμή της είναι η ίδια για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

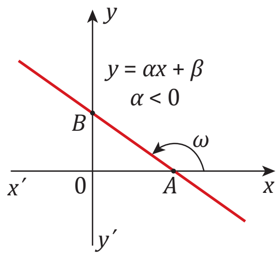
Αν $\alpha = 0$ και $\beta = 0$, τότε $f(x) = 0x + 0 = 0$, για όλες τις τιμές του x, και επομένως

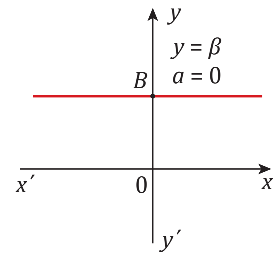
> Ο άξονας $x'x$ έχει εξίσωση $y = 0$ (γιατί τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο του με τεταγμένη 0).

Η κλίση της ευθείας $y = \alpha x$

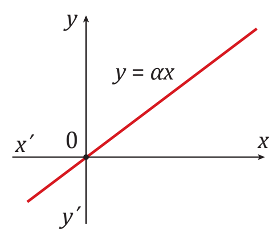
Ο ρόλος των συντελεστών στην $y = \alpha x + v$





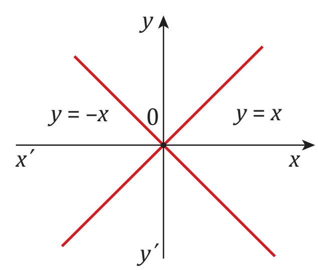


- *Αν $\beta = 0$, τότε η f παίρνει τη μορφή $f(x) = \alpha x$, οπότε η γραφική της παράσταση είναι η ευθεία $y = \alpha x$ και διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Ειδικότερα:*
  - *Για $\alpha = 1$ έχουμε την ευθεία $y = x$. Για τη γωνία ω, που σχηματίζει η ευθεία αυτή με τον άξονα $x'x$, ισχύει $\varepsilon\varphi\omega = \alpha = 1$, δηλαδή, $\omega = 45^o$. Επομένως:*

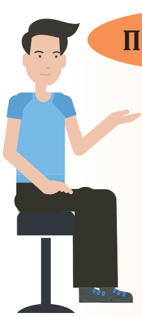


> Η ευθεία $y = x$ είναι η διχοτόμος των γωνιών xOy και $x'Oy'$ των αξόνων.

  - *Για $\alpha = -1$ έχουμε την ευθεία $y = -x$. Για τη γωνία ω, που σχηματίζει η ευθεία αυτή με τον άξονα $x'x$, ισχύει $\varepsilon\varphi\omega = \alpha = -1$, δηλαδή, $\omega = 135^o$. Επομένως:*

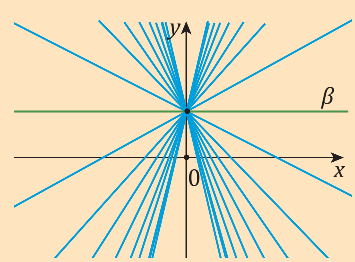


> Η ευθεία $y = -x$ είναι η διχοτόμος των γωνιών yOx' και $y'Ox$ των αξόνων.

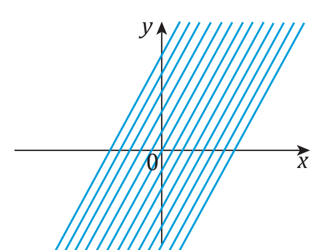


Παρατήρηση

Οι ευθείες της μορφής $y = \alpha x + \beta$, αν το β παραμένει σταθερό και το α μεταβάλλεται, διέρχονται όλες από το σημείο β του άξονα $y'y$ (βλ. διπλανό σχήμα). Περιστρέφοντας την ευθεία ε, για παράδειγμα, λαμβάνουμε σε κάθε θέση μία ευθεία που αντιστοιχεί σε μία ορισμένη τιμή του α. Με αυτό τον τρόπο λαμβάνουμε κάθε ευθεία που διέρχεται από το σημείο β του άξονα $y'y$ εκτός από τον ίδιο τον άξονα $y'y$.



Οι ευθείες της μορφής $y = \alpha x + \beta$, αν το α παραμένει σταθερό και το β μεταβάλλεται, είναι όλες παράλληλες μεταξύ τους (βλ. διπλανό σχήμα). Δεδομένου ότι η τιμή του β καθορίζει το σημείο στο οποίο η ευθεία τέμνει τον άξονα $y'y$ μπορούμε να πούμε ότι

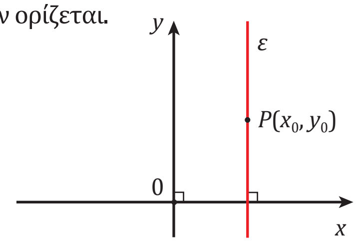


> Οι γραφικές παραστάσεις όλων των συναρτήσεων της μορφής $f(x) = \alpha x + \beta$ με α σταθερό προκύπτουν από την μετατόπιση μιας από αυτές παράλληλα με τον άξονα $x'x$.

Στη συνέχεια θα γενικεύσουμε αυτή την ιδέα σε όλες τις συναρτήσεις.

Η ευθεία $x = x_0$

Σύμφωνα με την Παρατήρηση παραπάνω η εξίσωση οποιασδήποτε ευθείας που διέρχεται από ένα σημείο β του άξονα $y'y$ (εκτός από τον ίδιο τον άξονα $y'y$) είναι της μορφής $y = \alpha x + \beta$. Ο λόγος της εξαίρεσης του άξονα $y'y$ είναι ότι η γωνία που σχηματίζει ο άξονας $y'y$ με τον άξονα $x'x$ είναι 90^o και η εφαπτομένη των 90^o δεν ορίζεται.



Το ίδιο ακριβώς συμβαίνει και με κάθε ευθεία ε κάθετη στον άξονα $x'x$. Επιπλέον, όλα τα σημεία της ευθείας ε έχουν την ίδια τετμημένη x_0, την τετμημένη του σημείου στο οποίο τέμνει τον άξονα $x'x$, με συνέπεια στο σημείο x_0 να αντιστοιχίζονται άπειρες τεταγμένες y. Επομένως, όλα τα σημεία της ε έχουν την μορφή (x_0, y), $y \in \mathbb{R}$. (Ένα τέτοιο σημείο είναι το $P(x_0, y_0)$ βλ. διπλανό σχήμα.). Η αντιστοιχία αυτή προφανώς δεν ορίζει συνάρτηση, ωστόσο:

Όλα τα σημεία της ευθείας που είναι κάθετη στον άξονα $x'x$ και τον τέμνει στο σημείο με τετμημένη x_0 χαρακτηρίζονται από την κοινή τους τετμημένη x_0 και η εξίσωση $x{=}x_0$ ονομάζεται εξίσωση της ευθείας αυτής. Ο άξονας $y'y$ έχει εξίσωση $x = 0$ (γιατί τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο του με τετμημένη 0).

Παράδειγμα 2.4.5.1

Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ η ευθεία με εξίσωση

(i) $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x - 2$ (ii) $y = -\sqrt{3}x + 1$ (iii) $y = 2$ (iv) $x = -1$

Λύση

(i) Είναι εφω = $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ και $0^o \le \omega < 180^o$, οπότε, $\omega = 30^o$.

(ii) Είναι εφω = $-\sqrt{3}$ και $0^o \le \omega < 180^o$, οπότε, $\omega = 120^o$.

(iii) Η ευθεία αυτή είναι παράλληλη στον $x'x$, επομένως, $\omega = 0^o$.

(iv) Η ευθεία αυτή είναι κάθετη στον $x'x$, επομένως, $\omega = 90^o$.

Παράδειγμα 2.4.5.2

Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(-2, 3)$ καθώς και η γωνία ω που σχηματίζει με το θετικό ημιάξονα Ox αν

(i) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\dfrac{1}{2}$.

(ii) έχει συντελεστή διεύθυνσης -1.

(iii) έχει συντελεστή διεύθυνσης 0.

(iv) δεν έχει συντελεστή διεύθυνσης.

Λύση

(i) Αφού η ζητούμενη ευθεία έχει συντελεστή διεύθυνσης $\dfrac{1}{2}$, θα έχει εξίσωση της μορφής $y = \dfrac{1}{2}x + \beta$, οπότε αρκεί να βρούμε το β. Αφού η ευθεία διέρχεται από το σημείο $A(-2,3)$, συμπεραίνουμε ότι οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωσή της, οπότε θα έχουμε $3 = \dfrac{1}{2}(-2) + \beta \Leftrightarrow 3 = -1 + \beta \Leftrightarrow \beta = 4$. Άρα, η εξίσωση της ευθείας είναι $y = \dfrac{1}{2}x + 4$. Τέλος, επειδή ο συντελεστής διεύθυνσης είναι $\dfrac{1}{2}$, θα έχουμε εφω = $\dfrac{1}{2}$, οπότε $\omega \simeq 27^o$.

(ii) Μία ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης -1 έχει τη μορφή $y = -1x + \beta$ ή την $y = -x + \beta$ και επειδή διέρχεται από το σημείο $A(-2, 3)$, θα επαληθεύεται για $x = -2$ και $y = 3$. Άρα, θα ισχύει $3 = -(-2) + \beta \Leftrightarrow 3 = 2 + \beta \Leftrightarrow \beta = 1$, και η εξίσωση της ευθείας είναι $y = -x + 1$. Επειδή ο συντελεστής διεύθυνσης είναι -1, θα έχουμε εφω $= -1$, οπότε $\omega = 135^o$.

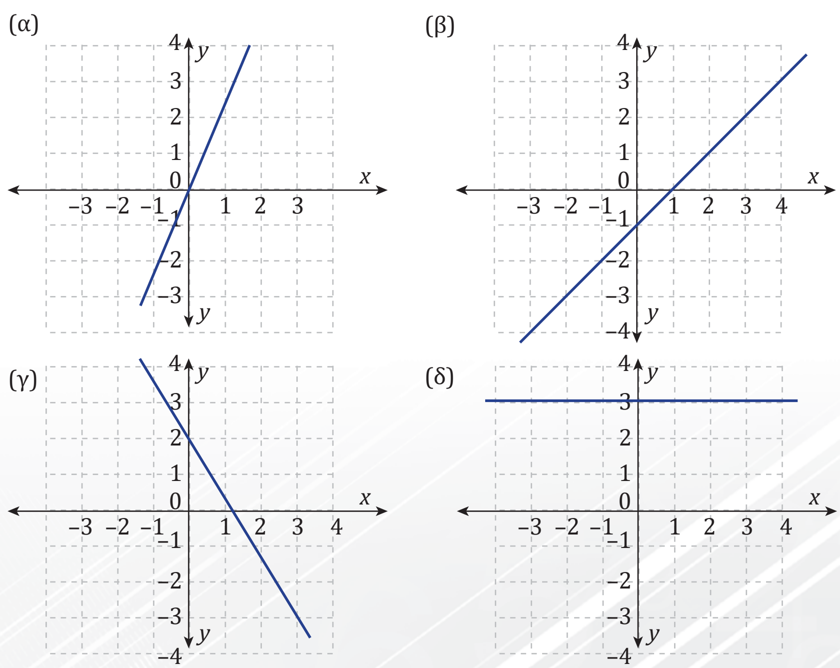
(iii) Αφού η ευθεία έχει συντελεστή διεύθυνσης 0 και διέρχεται από το σημείο $A(-2,3)$, θα έχει εξίσωση $y = 3$.

(iv) Αφού η ευθεία δεν έχει συντελεστή διεύθυνσης θα είναι κάθετη στον άξονα $x'x$ και επειδή διέρχεται από το σημείο $A(-2,3)$, θα έχει εξίσωση $x = -2$.

Ασκήσεις - Δραστηριότητες

Α' ΟΜΑΔΑ

1 Να βρεθεί η κλίση των παρακάτω ευθειών



2 Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ η ευθεία

(i) $y=\sqrt{3}x+2$ (ii) $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+2$ (iii) $y = -1$ (iv) $x = 3$

3 Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία ίση με

(i) 45^{o} (ii) 60^{o} (iii) 90^{o} (iv) 0^{o}

4 Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία

(i) έχει κλίση $\alpha = -2$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0,-2)$.

(ii) σχηματίζει γωνία 150^{o} με τον άξονα $x'x$ και τον τέμνει στο σημείο $A(2,\sqrt{3}-1)$.

(iii) έχει κλίση $\alpha = 3$ και διέρχεται από το σημείο $P(-3,3)$.

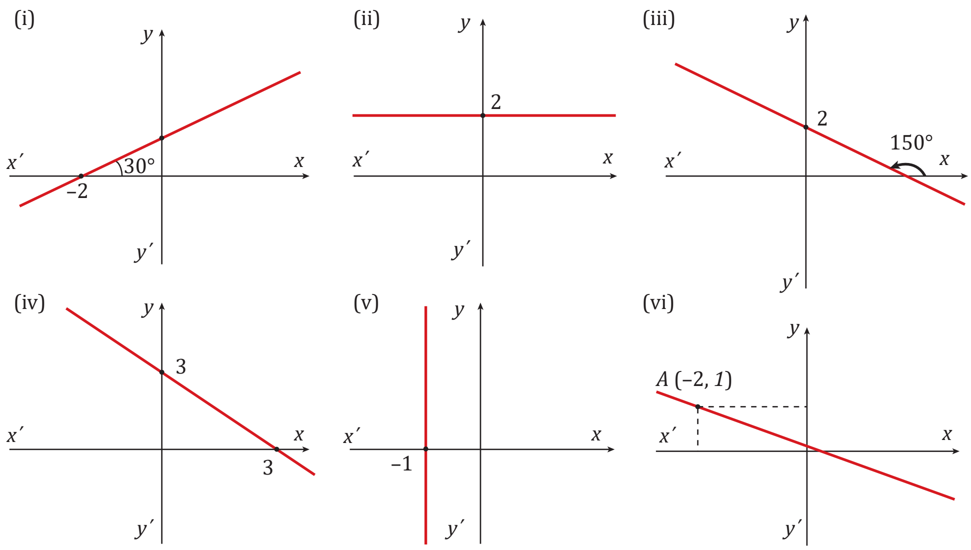
(iv) διέρχεται από το σημείο $A(2,1)$ και είναι παράλληλη (α) στον άξονα $x'x$ (β) στον άξονα $y'y$.

5 Να βρεθεί ο αριθμός α ώστε η ευθεία με εξίσωση $y = \alpha x$

(i) να διέρχεται από το σημείο (α) $A(-2,1)$ (β) $A(2,0)$

(ii) να διχοτομεί τη γωνία (α) xOy (β) yOx'

6 Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας ε σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα



7 Να αποδείξετε ότι όλα τα σημεία $M(1-\lambda, 2\lambda+1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, ανήκουν στην ευθεία $y=-2x+3$.

8 Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από την ευθεία $4x-3y=12$ και τους άξονες.

Β' ΟΜΑΔΑ

1 Οι ευθείες ε και ζ είναι κάθετες μεταξύ τους, τέμνονται στο σημείο $B(2,2)$ και ζ σχηματίζει με τον ημιάξονα Ox γωνία 135 μοιρών. Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών ε και ζ και να υπολογιστεί το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν οι ευθείες ε και ζ με τον άξονα $x'x$.

2 Δίνεται η εξίσωση $(\lambda-1)x+(2\lambda+1)y+5-2\lambda=0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή του αριθμού λ. (Να διακρίνετε τις περιπτώσεις $\lambda=1$, $\lambda=-\frac{1}{2}$ και $\lambda \neq -\frac{1}{2}$).

3 Αν η ευθεία $y=x+2-\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ σχηματίζει με τους άξονες εμβαδόν ίσο με 1/2 τ.μ., να βρεθεί η τιμή του λ.

4 Η ευθεία ε τέμνει τους άξονες στα σημεία $A(\alpha, 0)$ και $B(0, \beta)$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ε είναι η $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1$.

5 Να αποδείξετε ότι όλα τα σημεία $M(\lambda+2, -1-3\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, ανήκουν σε ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση (Υπόδειξη: Υποθέστε ότι το M έχει συντεταμένες (x,y) και βρείτε τη σχέση μεταξύ των x και y).

2.4.6 Σχετικές θέσεις δύο ευθειών

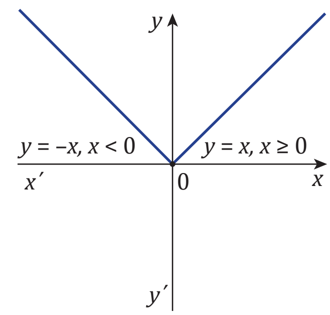
Εισαγωγή Ενότητας

Θα μάθουμε:

- να αντλούμε από τη γραφική παράσταση μίας συνάρτησης της μορφής $f(x) = αx + β$ πληροφορίες για τη συνάρτηση, όπως η κλίση της και η εξίσωσή της.

Παράδειγμα 2.4.6.1

Η συνάρτηση $f(x) = |x|$



Σύμφωνα με τον ορισμό της απόλυτης τιμής έχουμε:

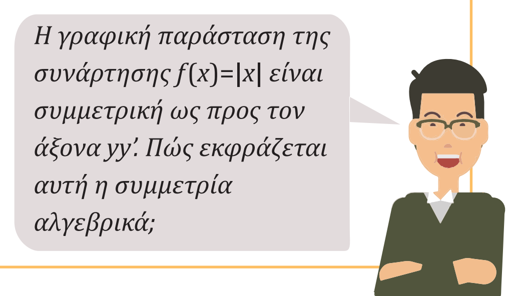
$$|x| = \begin{cases} x, & \text{αν } x \geq 0 \\ -x, & \text{αν } x < 0 \end{cases}, \text{ οπότε } f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \geq 0 \\ -x, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

Επομένως, η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = |x|$ αποτελείται από τις δύο ημιευθείες

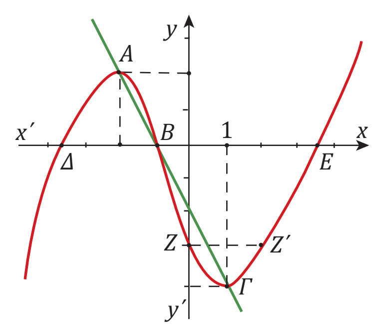
- $y = x$, με $x \geq 0$ και
- $y = -x$, με $x < 0$.

Οι κάθετες ημιευθείες $y = x$, με $x \geq 0$ και $y = -x$, με $x < 0$ διχοτομούν τις γωνίες xOy και yOx', αντιστοίχως.

Από τη γραφική παράσταση φαίνεται ότι το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = |x|$ είναι το $[0, +\infty)$.



Παράδειγμα 2.4.6.2



Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που είναι ορισμένη σε ολόκληρο το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

(i) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $ε$ που διέρχεται από τα σημεία $A(-2,2)$ και $B(-1,0)$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι η ευθεία αυτή διέρχεται και από το σημείο $Γ(1,-4)$.

(ii) Να λύσετε γραφικά την ανίσωση $f(x) > 0$. (Δίνεται ότι οι τετμημένες των σημείων $Δ$ και E είναι $-3{,}5$ και $3{,}5$, αντίστοιχα.)

(iii) Να βρείτε την εξίσωση που ικανοποιούν οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f και της ευθείας $ε$ και να προσδιορίσετε γραφικά τα σημεία τομής.

(iv) Να βρείτε την ανίσωση που ικανοποιούν οι τετμημένες των σημείων που βρίσκονται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f και της ευθείας $ε$.

Λύση

Κλίση ευθείας που διέρχεται από δύο σημεία

(i) Η ευθεία AB έχει εξίσωση της μορφής $y = αx + β$ και επειδή διέρχεται από τα σημεία $A(-2,2)$ και $B(-1,0)$ θα ισχύει $2 = α(-2) + β$ και $0 = α(-1) + β$, οπότε θα έχουμε $α = -2$ και $β = -2$. Άρα η εξίσωση της AB είναι $y = -2x - 2$.
Για να δείξουμε τώρα ότι η ευθεία αυτή διέρχεται και από το σημείο $Γ(1,-4)$, αρκεί να δείξουμε ότι οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωσή της, δηλαδή, αρκεί να δείξουμε ότι $-4 = -2 \cdot 1 - 2$, που ισχύει.

(ii) Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x) > 0$ είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$. Επομένως, η ανίσωση αυτή αληθεύει για $x \in (-3{,}5, -1) \cup (3{,}5, +\infty)$.

(iii) Η εξίσωση που ικανοποιούν οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f και της ευθείας ε είναι $f(x) = -2x - 2$ και τα σημεία τομής τους είναι τα $A(-2{,}2)$, $B(-1{,}0)$ και $\Gamma(1{,}-4)$.

(iv) Οι τετμημένες των σημείων που βρίσκονται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f και της ευθείας ε, για κάθε $x \in (-2, -1)$ ικανοποιούν την ανίσωση $f(x) > -2x - 2$, γιατί η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από την ευθεία ε και για κάθε $x \in (-1, 1)$ ικανοποιούν την ανίσωση $f(x) < -2x - 2$, γιατί η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από την ευθεία ε.

Ασκήσεις Β' Ομάδας Ενότητας 2.4.6

Ασκήσεις - Δραστηριότητες

Α' ΟΜΑΔΑ

1 Να βρείτε την εξίσωση μιας ευθείας που

(α) διέρχεται από τα σημεία $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ και $B\left(2, -\frac{3}{4}\right)$.

(β) τέμνει τους άξονες στα σημεία $A(4{,}0)$ και $B(0{,}5)$.

2 Να προσδιοριστεί ο αριθμός λ ώστε οι ευθείες $\varepsilon_1\!: y = |\lambda + 1|\, x - 2$ και $\varepsilon_1\!: y = 2\lambda x + 2$ να είναι παράλληλες.

3 Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(-4{,}5)$ και είναι παράλληλη στην ευθεία $2x + 3y = 1$.

Β' ΟΜΑΔΑ

1 Να βρείτε τις τιμές των κ και λ, έτσι ώστε η ευθεία $(\kappa - 1)x + (\lambda + 2)\,y = 5$ να είναι

(α) παράλληλη με τον άξονα των τετμημένων.

(β) κάθετη με τον άξονα των τετμημένων.

2 Να βρείτε την τιμή του μ, ώστε οι ευθείες $x - 2y = 1$ και $(\mu - 1)x + (3 - 2\mu)y = 6$ να τέμνουν στο ίδιο σημείο τον άξονα (α) $x'x$ (β) $y'y$.

3 Αφού αποδείξετε ότι οι ευθείες ε_1, ε_2 και ε_3 με εξισώσεις $y = 0$, $y = \frac{3}{2}x + 2$ και $y = -\frac{3}{2}x + 2$ σχηματίζουν ισοσκελές τρίγωνο να βρείτε το εμβαδόν του και την εξίσωση του ύψους που αντιστοιχεί στη βάση του. Επιπλέον, να δοθεί το σχήμα.

2.4.7 Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$

Θα μάθουμε:

- να αναγνωρίζουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ και τις τετμημένες των σημείων τομής της με τον άξονα $x'x$ ως τις ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$.

Ορισμός

Θα δώσουμε πρώτα τον ακόλουθο ορισμό.

Κάθε συνάρτηση της μορφής $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ λέγεται **παραβολή**.

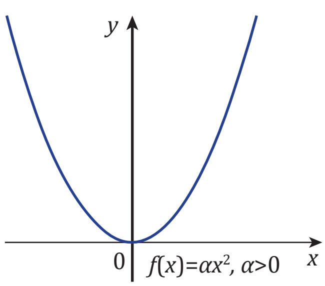
Για να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ θα χρησιμοποιήσουμε τη γνωστή μας συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2$, $\alpha \neq 0$, ωστόσο, ας θυμηθούμε πρώτα κάποια βασικά χαρακτηριστικά της.

Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2$, $\alpha \neq 0$

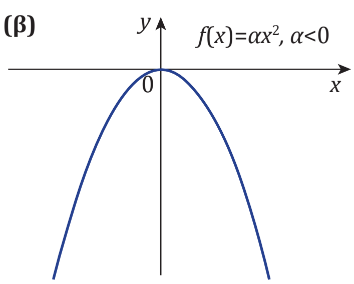
Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2$, $\alpha \neq 0$. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση αυτή έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$ και ισχύει $f(-x) = \alpha(-x)^2 = \alpha x^2 = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή, είναι μία *άρτια* συνάρτηση, όπως λέγονται οι συναρτήσεις με αυτή την ιδιότητα, που σημαίνει ότι η γραφική της παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$. Αυτή η παρατήρηση μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι για να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση αρκεί να πάρουμε μερικές τιμές του x στο διάστημα $[0,+\infty)$, να σχεδιάσουμε τη γραφική της στο διάστημα αυτό και στη συνέχεια να πάρουμε τη συμμετρική της ως προς τον άξονα $y'y$.

Ανεξάρτητα με τη μέθοδο που θα ακολουθήσουμε ανάλογα με το πρόσημο του α θα πάρουμε τη γραφική παράσταση (σχήμα (α)) για $\alpha > 0$ και τη γραφική παράσταση (σχήμα (β)) για $\alpha < 0$.

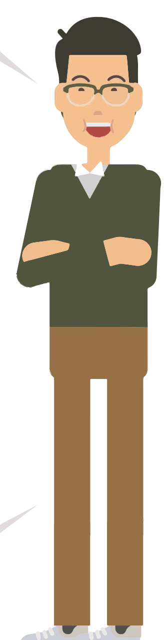
(α)



(β)



Θα μπορούσαμε φυσικά να κατασκευάσουμε έναν πίνακα τιμών με συμμετρικές τιμές ως προς το 0 και να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.



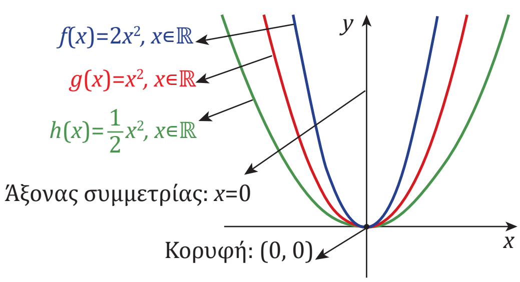
Για τη συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2$, $\alpha \neq 0$ συνάγονται τα ακόλουθα συμπεράσματα:

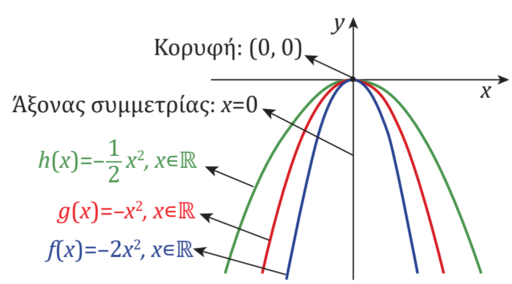
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2$, $\alpha \neq 0$ έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα των τεταγμένων, ο οποίος ονομάζεται *άξονας* της παραβολής.
- Αν $\alpha > 0$, τότε
  - Το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το $[0,+\infty)$.
  - Στο $x = 0$ η συνάρτηση λαμβάνει την *ελάχιστη τιμή* της, την $y = 0$, η οποία λέγεται **ελάχιστο** της συνάρτησης και επειδή είναι η μικρότερη τιμή σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της λέγεται **ολικό ελάχιστο**.
  - Στο διάστημα $(-\infty, 0]$ καθώς οι τιμές του x αυξάνουν (δηλαδή, καθώς το x κινείται προς τα δεξιά) οι τιμές του y ελαττώνονται. Σε κάθε τέτοια περίπτωση λέμε ότι η συνάρτηση είναι **γνησίως φθίνουσα**.
  - Στο διάστημα $[0,+\infty)$ καθώς οι τιμές του x αυξάνουν (δηλαδή, καθώς το x κινείται προς τα δεξιά) οι τιμές του y αυξάνουν. Σε κάθε τέτοια περίπτωση λέμε ότι η συνάρτηση είναι **γνησίως αύξουσα**.

*Ένα ελάχιστο που λαμβάνεται τοπικά σε ένα διάστημα του πεδίου ορισμού λέγεται **τοπικό ελάχιστο**.*

- Αν $\alpha<0$, τότε
  - Το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το $(-\infty, 0]$.
  - Στο $x = 0$ η συνάρτηση λαμβάνει τη *μέγιστη τιμή* της, την $y = 0$, η οποία λέγεται **μέγιστο** της συνάρτησης και επειδή είναι η μεγαλύτερη τιμή σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της λέγεται **ολικό μέγιστο**.
  - Στο διάστημα $[-\infty,0)$ καθώς οι τιμές του x αυξάνουν (δηλαδή, καθώς το x κινείται προς τα δεξιά) οι τιμές του y αυξάνουν και επομένως η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.
  - Στο διάστημα $[0,+\infty)$ καθώς οι τιμές του x αυξάνουν (δηλαδή, καθώς το x κινείται προς τα δεξιά) οι τιμές του y ελαττώνονται και επομένως η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.
- Το σημείο με συντεταγμένες $(0,0)$ λέγεται **κορυφή** της παραβολής.
- Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = \alpha x^2$ και $y = -\alpha x^2$, $\alpha \neq 0$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $x'x$.
- Καθώς οι τιμές του $|\alpha|$ αυξάνουν, η καμπύλη πλησιάζει τον άξονα $y'y$.

Ένα μέγιστο που λαμβάνεται τοπικά σε ένα διάστημα του πεδίου ορισμού λέγεται **τοπικό μέγιστο**.





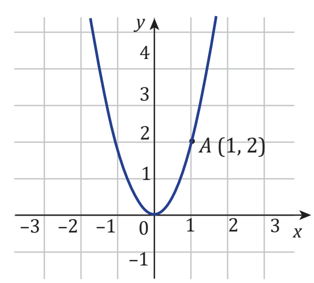
Μονοτονία και ακρότατα παραβολής με β=γ=0

Παράδειγμα Ενότητας 2.4.7

Άρτιες και Περιττές Συναρτήσεις

Παράδειγμα 2.4.7.1

Η καμπύλη στο διπλανό σχήμα αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = (\lambda^2 - \lambda)x^2$. Να βρείτε το λ καθώς και τις τετμημένες των σημείων της με τεταγμένη 18.



Λύση

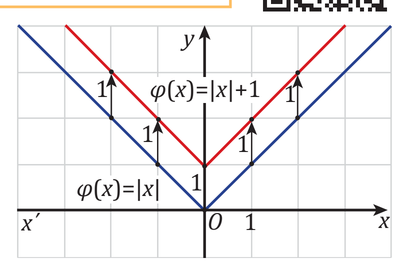
Επειδή το σημείο $A(1,2)$ ανήκει στην καμπύλη θα επαληθεύει την εξίσωσή της. Επομένως θα έχουμε

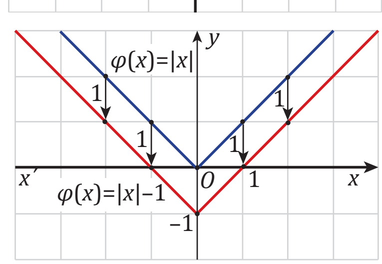
$$2 = (\lambda^2 - \lambda)1^2 \Leftrightarrow 2 = \lambda^2 - \lambda \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1 \quad \text{ή} \quad \lambda = 2.$$

Άρα, για $\lambda = -1$ ή $\lambda = 2$ θα έχουμε $y = 2x^2$.

Για τα σημεία της καμπύλης με τεταγμένη 18 έχουμε $18 = 2x^2 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = -3 \quad$ ή $\quad x = 3$.

Κατακόρυφη μετατόπιση καμπύλης





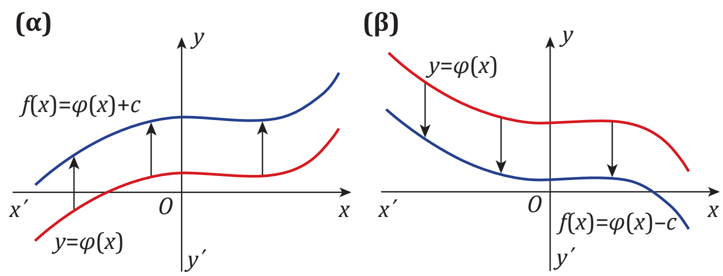
Στο διπλανό σχήμα έχουμε χαράξει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\varphi(x)=|x|$ καθώς και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = |x| + 1$. Είναι φανερό ότι αν μετατοπίσουμε τη γραφική παράσταση της $\varphi(x) = |x|$ κατακόρυφα προς τα πάνω κατά 1 μονάδα, τότε αυτή θα συμπέσει με τη γραφική παράσταση της $f(x) = |x| + 1$, αφού ισχύει $f(x) = |x| + 1 = \phi(x) + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, που σημαίνει ότι το $f(x)$ είναι κατά 1 μονάδα μεγαλύτερο του $\phi(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αντίστοιχα, η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = |x| - 1$ προκύπτει από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\varphi(x) = |x|$ με κατακόρυφη μετατόπιση προς τα κάτω κατά 1 μονάδα, αφού ισχύει $f(x) = |x| -1 = \phi(x) - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, που σημαίνει ότι το $f(x)$ είναι κατά 1 μονάδα μικρότερο του $\phi(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μπορούμε, φυσικά να σχεδιάσουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = |x| + 1$ και $y = |x| - 1$ ανεξάρτητα από τη γραφική παράσταση της $φ(x) = |x|$. Αν γράψουμε τους τύπους τους στη μορφή $y = \begin{cases} x+1, \text{αν } x \geq 0 \\ -x+1, \text{αν } x<0 \end{cases}$ και $y = \begin{cases} x-1, \text{αν } x \geq 0 \\ -x-1, \text{αν } x<0 \end{cases}$ αντίστοιχα, τότε η γραφική παράσταση της πρώτης θα αποτελείται από τις κάθετες ημιευθείες $y = x + 1$, με $x \geq 0$ και $y = -x + 1$, με $x \leq 0$, και η γραφική παράσταση της δεύτερης από τις κάθετες ημιευθείες $y = x - 1$, με $x \geq 0$ και $y = -x - 1$, με $x < 0$. Ωστόσο, «θέλουμε να δούμε» τη γραφική παράσταση της f σαν κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $φ$ για να γενικεύσουμε αυτή την ιδέα.

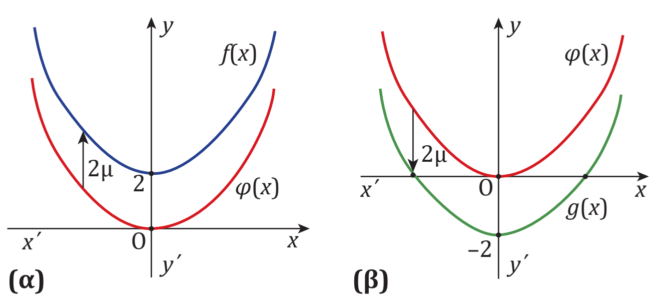
Γενικά:

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = φ(x) + c$, $c > 0$ προκύπτει από μία κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $φ$ κατά c μονάδες προς τα πάνω (*βλ. σχήμα (α)*).
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = φ(x) - c$, $c > 0$ προκύπτει από μία κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $φ$ κατά c μονάδες προς τα κάτω (*βλ. σχήμα (β)*).



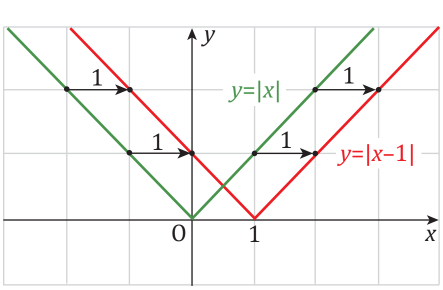
Παράδειγμα 2.4.7.2

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2 + 2$ και $g(x) = x^2 - 2$ προκύπτουν από μία κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $φ(x) = x^2$ κατά 2 μονάδες προς τα πάνω (*βλ. σχήμα (α)*) και κάτω αντίστοιχα (*βλ. σχήμα (β)*) γιατί $f(x) = x^2 + 2 = \phi(x) + 2$ και $g(x) = x^2 - 2 = \phi(x) - 2$.



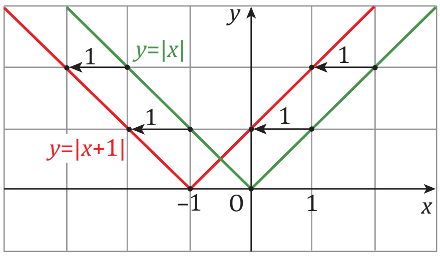
Σημεία πάνω από τον άξονα x′x

Οριζόντια μετατόπιση καμπύλης



Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = |x - 1|$. Επειδή, $f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{αν } x \geq 1 \\ -x + 1, & \text{αν } x < 1 \end{cases}$

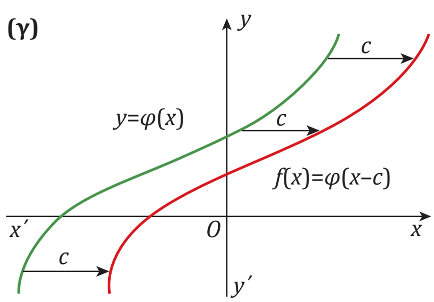
η γραφική της παράσταση θα αποτελείται από τις ημιευθείες $y = x - 1$ με $x \geq 1$ και $y = -x + 1$ με $x < 1$, που έχουν αρχή το σημείο 1 του άξονα $x'x$ και είναι παράλληλες με τις διχοτόμους των γωνιών xOy, yOx' από τις οποίες αποτελείται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $φ(x) = |x|$. Επομένως, είναι φανερό ότι αν μετατοπίσουμε τη γραφική παράσταση της $φ(x) = |x|$ οριζόντια προς τα δεξιά κατά 1 μονάδα, τότε αυτή θα συμπέσει με τη γραφική παράσταση της $f(x) = |x - 1|$, αφού ισχύει $f(x) = |x - 1| = \phi(x - 1)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, που σημαίνει ότι η τιμή της $f(x) = |x - 1|$ στο σημείο x είναι ίδια με την τιμή της $\varphi(x) = |x|$ στο σημείο $x - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αλλά το σημείο $(x, f(x))$ βρίσκεται κατά μία μονάδα πιο δεξιά από το σημείο $(x - 1, \varphi(x - 1))$.

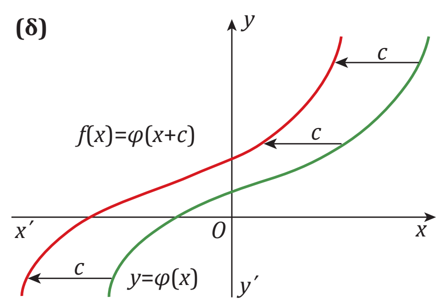


Αντίστοιχα, η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = |x + 1|$ προκύπτει από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\varphi(x) = |x|$ με οριζόντια μετατόπιση προς τα αριστερά κατά 1 μονάδα, αφού ισχύει $f(x) = |x + 1| = \phi(x + 1)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, που σημαίνει ότι η τιμή της $f(x) = |x + 1|$ στο σημείο x είναι ίδια με την τιμή της $\varphi(x) = |x|$ στο σημείο $x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αλλά το σημείο $(x, f(x))$ βρίσκεται κατά μία μονάδα πιο αριστερά από το σημείο $(x + 1, \varphi(x + 1))$.

Γενικά:

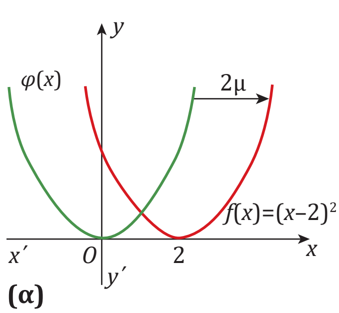
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \varphi(x - c)$, $c > 0$ προκύπτει από μία οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ κατά c μονάδες προς τα δεξιά (*βλ. σχήμα* (γ)).
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \varphi(x + c)$, $c > 0$ προκύπτει από μία οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες προς τα αριστερά (*βλ. σχήμα* (δ)).

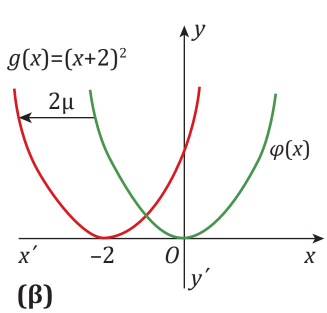




Παράδειγμα 2.4.7.3

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = (x - 2)^2$ και $g(x) = (x + 2)^2$ προκύπτουν από μία οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $\varphi(x) = x^2$ κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά (*βλ. σχήμα* (α)) και προς τα αριστερά αντίστοιχα (*βλ. σχήμα* (β)) γιατί $f(x) = (x - 2)^2 = \phi(x - 2)$ και $g(x) = (x + 2)^2 = \phi(x + 2)$.



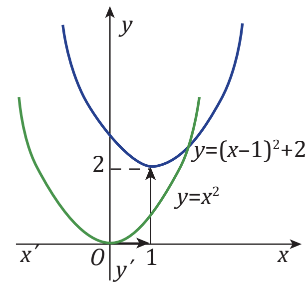


Γραφική παράσταση και μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,\ \alpha \neq 0$

Θα μελετήσουμε πρώτα δύο ειδικές περιπτώσεις της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ (*βλ. Παράδειγμα* 2.4.7.4 *και Παράδειγμα* 2.4.7.5, *αντίστοιχα*).

Παράδειγμα 2.4.7.4

Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 2x + 3$.



Λύση

Έχουμε

$$f(x) = x^2 - 2x + 3 = (x^2 - 2x + 1) + 2 = (x - 1)^2 + 2 = \phi(x - 1) + 2,$$

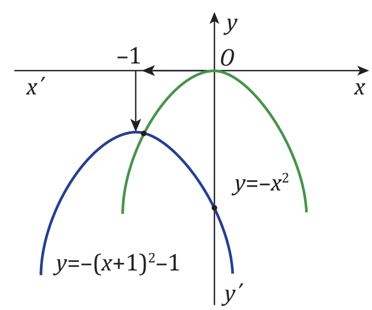
όπου $\varphi(x) = x^2$. Έτσι η γραφική παράσταση της f προκύπτει από τη γραφική παράσταση της $\varphi(x) = x^2$ κατά 1 μονάδα οριζόντια προς τα δεξιά και κατά 2 μονάδες κατακόρυφα προς τα πάνω.

Με βάση τα συμπεράσματα που έχουμε από την μελέτη της $\varphi(x) = \alpha x^2$, $\alpha \neq 0$ και τη μορφή της γραφικής παράστασης της f προκύπτουν τα εξής:

- Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το $[2,+\infty)$.
- Είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,2]$, γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2,+\infty)$ και έχει ελάχιστη τιμή την $y_{min} = 2$, για $x = 1$.
- Η γραφική παράσταση της f είναι μία παραβολή με άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = 1$.

Παράδειγμα 2.4.7.5

Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = -x^2 - 2x - 2$.



Λύση

Έχουμε

$$g(x) = -x^2 - 2x - 2 = -(x^2 + 2x + 1) - 1 = -(x + 1)^2 - 1 = \phi(x + 1) - 1,$$

όπου $\varphi(x) = -x^2$. Έτσι η γραφική παράσταση της g προκύπτει από τη γραφική παράσταση της $\varphi(x) = -x^2$ κατά 1 μονάδα οριζόντια προς τα αριστερά και κατά 1 μονάδα κατακόρυφα προς τα κάτω.

Η συνάρτηση g έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το $(-\infty,-1]$.

Είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,-1]$, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1+\infty)$, και έχει μέγιστη τιμή την $y_{max} = -1$ για $x = -1$.

Η γραφική παράσταση της g είναι μία παραβολή με άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -1$.

Θα μελετήσουμε τώρα τη συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$. Για να σχεδιάσουμε τη γραφική της παράσταση εργαζόμαστε ως εξής:

Γράφουμε την $f(x)$ στη μορφή (*βλ. Ενότητα* 2.3.8)

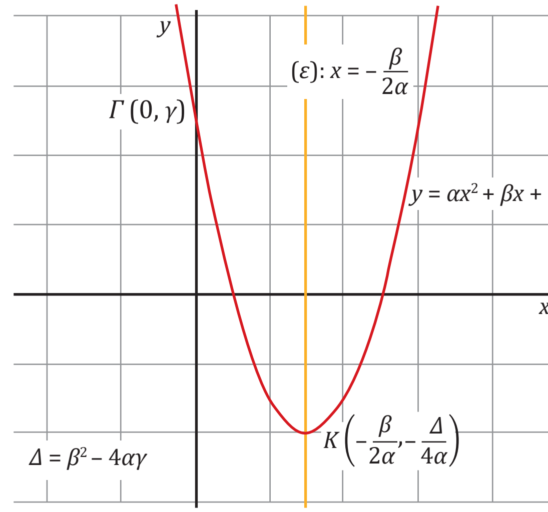
$$f(x) = \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha^2}\right] \text{ ή } f(x) = \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha}, \text{ όπου } \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \text{ (η διακρίνουσα)}$$

Αξιοποιώντας τα παραπάνω συμπεράσματα (σχετικά με την οριζόντια και την κατακόρυφη μετατόπιση μιας γραφικής παράστασης) συμπεραίνουμε ότι:

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι η παραβολή $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ και προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της παραβολής $y = \alpha x^2$, μιας οριζόντιας και μιας κατακόρυφης, έτσι ώστε η κορυφή της να συμπέσει με το σημείο $K\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$.

Επομένως η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, η γραφική παράστασή της είναι **παραβολή με κο-**

ρυφή το σημείο $K\left(-\dfrac{\beta}{2\alpha},-\dfrac{\Delta}{4\alpha}\right)$, **άξονα συμμετρίας** την κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από την κορυφή K, με εξίσωση $x=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\Gamma(0,\gamma)$, αφού $f(0)=\gamma$.



Αν $\alpha>0$ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-\infty,-\dfrac{\beta}{2\alpha}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[-\dfrac{\beta}{2\alpha},+\infty\right)$ και έχει ελάχιστη τιμή για $x=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$ το $y_{max}=f\left(-\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)=-\dfrac{\Delta}{4\alpha}$.

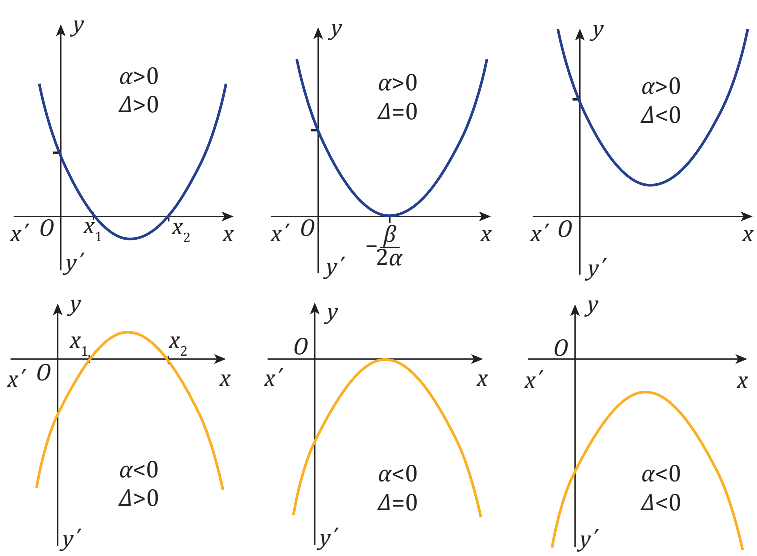
Αν $\alpha<0$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\infty,-\dfrac{\beta}{2\alpha}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[-\dfrac{\beta}{2\alpha},+\infty\right)$ και έχει μέγιστη τιμή για $x=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$ το $y_{max}=f\left(-\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)=-\dfrac{\Delta}{4\alpha}$.

Σχετικά με τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$, όταν υπάρχουν, έχουμε τα εξής:

Γραφική επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού

- Αν $\Delta>0$, η εξίσωση έχει δύο ρίζες τις $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$, οπότε η παραβολή τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία του με τετμημένες τις ρίζες, δηλαδή, τα $A(x_1,0)$ και $B(x_2,0)$.
- Αν $\Delta=0$, η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα την $\rho=\dfrac{-\beta}{2\alpha}$, οπότε η παραβολή εφάπτεται στον άξονα $x'x$ στο σημείο του με τετμημένη τη ρίζα, δηλαδή, το $A(\rho,0)$.
- Αν $\Delta<0$, η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες, οπότε η παραβολή δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$.

Τα παρακάτω διαγράμματα δείχνουν τη θέση της καμπύλης της γραφικής της f σε σχέση με τους άξονες ανάλογα με τα πρόσημα του συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου α και της διακρίνουσας Δ.



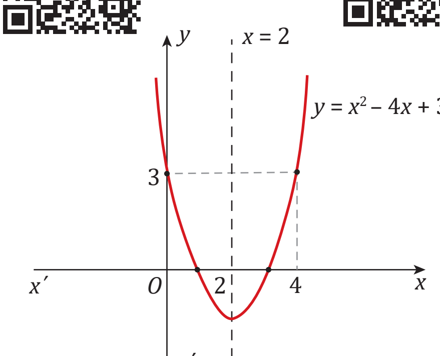
Στις περιπτώσεις που είναι $\alpha>0$ λέμε ότι η καμπύλη της f είναι **κυρτή** ή **στρέφει τα κοίλα άνω**, ενώ όταν $\alpha<0$ λέμε ότι είναι **κοίλη** ή **στρέφει τα κοίλα κάτω**.

Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με την βοήθεια τύπου

Βρείτε το τριώνυμο!

Για παράδειγμα, για τη συνάρτηση $f(x)=x^2-4x+3$ έχουμε

- $K\left(-\dfrac{\beta}{2\alpha},-\dfrac{\Delta}{4\alpha}\right)=(2,-1)$
- $\Gamma(0,\gamma)=\Gamma(0,f(0))=(0,3)$
- $f(x)=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=3$
- $x=-\dfrac{\beta}{2\alpha}=-\dfrac{-4}{2\cdot 1}=2$



Σχόλιο

Μπορούμε να σχεδιάσουμε προσεγγιστικά τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ έχοντας όλα τα χαρακτηριστικά που περιγράψαμε, χρησιμοποιώντας κάποια σημεία της, και ως εξής:

- Βρίσκουμε την κορυφή της παραβολής $K\left(-\dfrac{\beta}{2\alpha}, -\dfrac{\Delta}{4\alpha}\right)$
- Βρίσκουμε τα σημεία τομής της με τον άξονα $x'x$ (αν υπάρχουν).
- Βρίσκουμε το σημείο τομής $\Gamma(0,\gamma)$ με τον άξονα $y'y$ (υπάρχει πάντα).
- Σχεδιάζουμε τον άξονα συμμετρίας της παραβολής, δηλαδή, την ευθεία $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$.
- Βρίσκουμε τις συντεταγμένες δύο σημείων συμμετρικών ως προς την ευθεία $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$.

Παραδείγματα Ενότητας 2.4.7

Ασκήσεις - Δραστηριότητες

Α' ΟΜΑΔΑ

1 Να αναφέρετε πόσες μονάδες οριζόντια ή κατακόρυφα ή και τα δύο πρέπει να μετατοπιστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\varphi(x) = x^2$, ώστε να προκύψει η γραφική παράσταση της συνάρτησης

(i) $f(x) = x^2 - 3$ (ii) $g(x) = (x - 7)^2$ (iii) $h(x) = (x + 5)^2 - 5$

Ασκήσεις β' ομάδας ενότητας 2.4.7

2 Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

(i) $f(x) = (x - 1)^2 + 1$ (ii) $g(x) = -(x + 4)^2 + 2$ (iii) $h(x) = 2(x - 8)^2 + 4$

3 Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

(i) $f(x) = x^2 - x - 2$ (ii) $g(x) = x^2 + x + \dfrac{1}{4}$ (iii) $h(x) = x^2 - 2x + 2$

4 Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

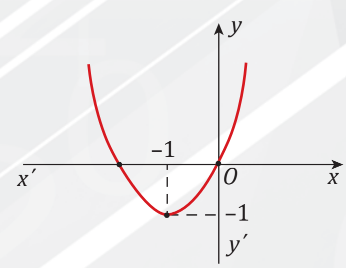
(i) $f(x) = -x^2 + x + 6$ (ii) $g(x) = -x^2 + 2x - 1$ (iii) $h(x) = -x^2 - 2x - 2$

5 Αν η παραβολή τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία με τετμημένη 2 και τεταγμένη 4 και διέρχεται από το σημείο (1,3), να βρείτε την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της.

6 Να βρείτε την παραβολή που έχει κορυφή το σημείο $A(2, 1)$ και διέρχεται από το σημείο $B(3,2)$.

Β' ΟΜΑΔΑ

1 Στο διπλανό σχήμα έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$. Να βρεθούν οι συντελεστές α, β και γ. Προσδιορίστε τις θέσεις των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $g(x) = f(x - 1) + 1$ και $h(x) = f(x + 1) - 1$, χωρίς να τις σχεδιάσετε.



2 Να βρείτε τα κοινά σημεία της παραβολής $y = x^2$ και της ευθείας $y = -x + 2$ και να τα ερμηνεύσετε γεωμετρικά. Δώστε μία διαφορετική (και πιο απλή) διατύπωση στο πρόβλημα.

3 Να βρεθεί το α ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 + (2\alpha + 1)x + 16$ να εφάπτεται στον άξονα $x'x$.

4 Να βρεθεί το λ ώστε η συνάρτηση $f(x) = \lambda x^2 - (\lambda^2 + 2)x + \lambda + 1$ να έχει ελάχιστη τιμή το 3.

5 Να αποδείξετε γραφικά ότι η ευθεία $y = 4x - 4$ εφάπτεται της παραβολής $y = x^2$ και να επιβεβαιώσετε το αποτέλεσμα αλγεβρικά. Ποιο είναι το σημείο επαφής; Πότε μία ευθεία εφάπτεται σε μία παραβολή; Διατυπώστε ένα γενικό κριτήριο.

6 Να βρεθούν τα κοινά σημεία της παραβολής $y = 4x^2$ και της ευθείας $y = 4x - \kappa$ για τις διάφορες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$.

2.4.8 Το πρόσημο της συνάρτησης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha \neq 0$

Θα μάθουμε:

- να προσδιορίζουμε αλγεβρικά και να ερμηνεύουμε γραφικά το πρόσημο της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

Έχουμε ήδη μελετήσει αλγεβρικά το πρόσημο του τριωνύμου (*βλ. Ενότητα 2.3.8*), όπου είχαμε ασχοληθεί γενικότερα με την αλγεβρική και την γραφική επίλυση (δηλαδή, τη χρήση της ευθείας των πραγματικών αριθμών) ανισώσεων 2ου βαθμού.

Στην ενότητα αυτή θα προσθέσουμε ένα ακόμα στοιχείο στη διαδικασία εύρεσης των λύσεων τέτοιων προβλημάτων δίνοντας έμφαση στη γεωμετρική προσέγγιση των λύσεων. Τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha \neq 0$ με τη βοήθεια της οποίας θα προσδιορίσουμε το πρόσημο του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha \neq 0$.

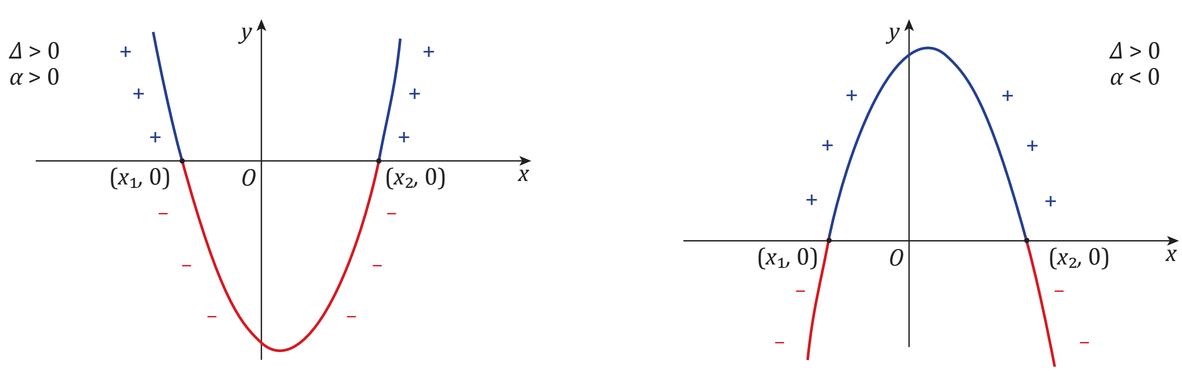
Γνωρίζουμε πλέον ότι το πρόσημο της διακρίνουσας του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha \neq 0$ καθορίζει τη θέση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha \neq 0$ σε σχέση με τον άξονα $x'x$, και επομένως καθορίζει και το πρόσημό του.

Για το πρόσημο του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha \neq 0$ διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

1. $\Delta > 0$

Η γραφική παράσταση της $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha \neq 0$ τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία με συντεταγμένες $(x_1, 0)$ και $(x_2, 0)$, όπου x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \alpha \neq 0$.

- Όταν $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$, τότε η τιμή $f(x)$ είναι ομόσημη του α. (*Λέμε απλά ότι το τριώνυμο είναι ομόσημο του α.*)
- Όταν $x \in (x_1, x_2)$, τότε η τιμή $f(x)$ είναι ετερόσημη του α. (*Λέμε απλά ότι το τριώνυμο είναι ετερόσημο του α.*)



Τα παραπάνω συμπεράσματα συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα προσήμων

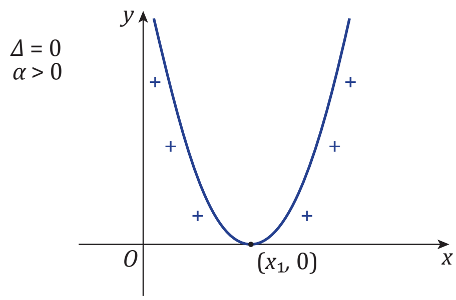
x	$-\infty$ $\qquad x_1$	x_2	$+\infty$
Πρόσημο του $f(x)$	*Ομόσημο του α*	*Ετερόσημο του α*	*Ομόσημο του α*

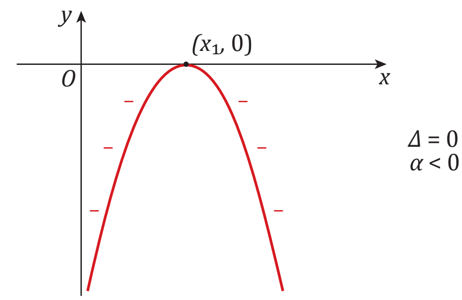
2. $\Delta = 0$

Η γραφική παράσταση της $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha \neq 0$ εφάπτεται του άξονα $x'x$ σε ένα σημείο με συντεταγμένες $(x_1, 0)$, όπου $x_1 = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$ η διπλή ρίζα της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \alpha \neq 0$.

Σε αυτή την περίπτωση

> Η τιμή $f(x)$ είναι ομόσημη του α για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1\}$. *(Λέμε απλά ότι το τριώνυμο είναι ομόσημο του α σε όλο το $\mathbb{R}$ εκτός από τη ρίζα του.)*





Τα παραπάνω συμπεράσματα συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα προσήμων

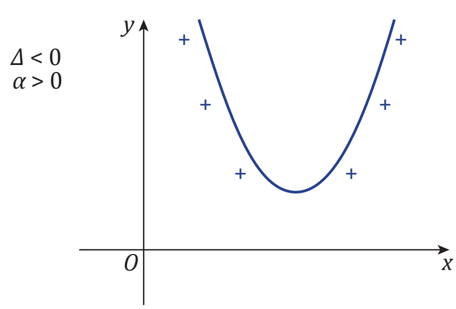
x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
Πρόσημο του $f(x)$	*Ομόσημο του α*		*Ομόσημο του α*

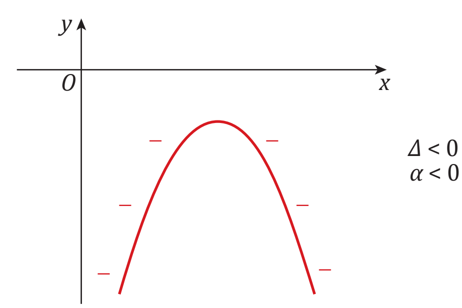
3. $\Delta < 0$

Η γραφική παράσταση της $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ δεν τέμνει άξονα $x'x$ σε κανένα σημείο του, αφού η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Σε αυτή την περίπτωση

> Η τιμή $f(x)$ είναι ομόσημη του α για κάθε $x \in \mathbb{R}$. *(Λέμε απλά ότι το τριώνυμο είναι ομόσημο του α σε όλο το $\mathbb{R}$.)*





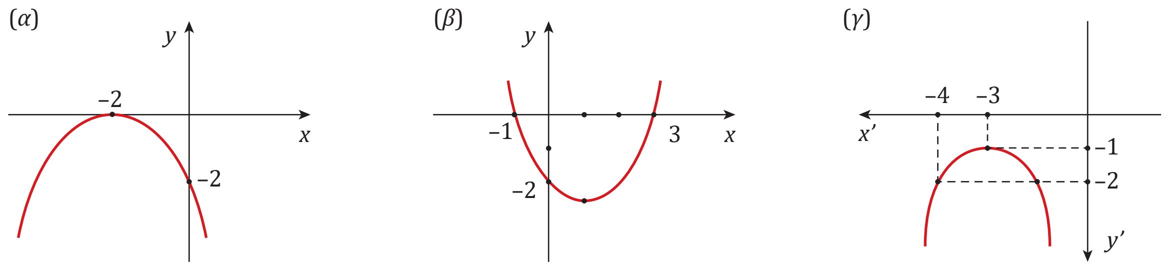
Τα παραπάνω συμπεράσματα συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα προσήμων

x	$-\infty$	$+\infty$
Πρόσημο του $f(x)$	*Ομόσημο του α*	

Πρόσημο των τιμών του τριώνυμου

Παράδειγμα 2.4.8.1

Με βάση τα παρακάτω σχήματα να βρείτε σε κάθε περίπτωση τους συντελεστές α, β και γ και να μελετήσετε το πρόσημο του τριωνύμου $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ για τις διάφορες τιμές του x, $x \in \mathbb{R}$.



Λύση

(α) Η γραφική παράσταση της f, έχει διπλή ρίζα το -2, οπότε θα έχει τη μορφή

$$f(x) = \alpha[x-(-2)]^2 = \alpha(x+2)^2$$

και επειδή τέμνει τον άξονα yy' στο σημείο με τεταγμένη -2, θα έχουμε

$$f(0) = -2 \Leftrightarrow \alpha\,[0-(-2)]^2 = -2 \Leftrightarrow 4\alpha = -2 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{2}.$$

Άρα, $f(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^2$.

Από το σχήμα *(βλ. σχήμα (α))* συμπεραίνουμε ότι $f(x) < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$ και $f(-2) = 0$.

(β) Οι ρίζες του τριωνύμου είναι το -1 και το 3 (τα σημεία τομής της παραβολής με τον άξονα $x'x$) και άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = 1$ (δηλαδή, την κάθετη στον άξονα $x'x$ στο μέσο του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία $(-1,0)$ και $(3,0)$ που είναι το σημείο με τετμημένη $x = \frac{-1+3}{2} = 1$). Επομένως, η μορφή του θα είναι

$$f(x) = \alpha[x-(-1)](x-3) = \alpha(x+1)(x-3) = \alpha(x^2-3x+x-3)$$
$$= \alpha(x^2-2x-3) = \alpha x^2 - 2\alpha x - 3\alpha$$

και επειδή το $\gamma = -2$ (είναι $\gamma = f(0) = -2$) θα έχουμε $-3\alpha = -2 \Leftrightarrow \alpha = \frac{2}{3}$. Άρα, $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - 2$.

Από το σχήμα (*βλ. σχήμα (β)*) συμπεραίνουμε ότι $f(x) > 0$, για κάθε $x \in (-\infty,-1) \cup (3,+\infty)$, $f(x) < 0$, για κάθε $x \in (-1,3)$ και $f(-1) = f(3) = 0$.

(γ) Ο άξονας συμμετρίας είναι η ευθεία $x = -3$, άρα $-\frac{\beta}{2\alpha} = -3 \Leftrightarrow \beta = 6\alpha$. Επομένως, το τριώνυμο θα έχει τη μορφή $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha x^2 + 6\alpha x + \gamma$.

Γνωρίζουμε ακόμα, ότι $f(-4) = -2$ και $f(-3) = -1$. Από τις δύο τελευταίες παίρνουμε

$$\left.\begin{array}{l}\alpha(-4)^2 + 6\alpha(-4) + \gamma = -2\\ \alpha(-3)^2 + 6\alpha(-3) + \gamma = -1\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}16\alpha - 24\alpha + \gamma = -2\\ 9\alpha - 18\alpha + \gamma = -1\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}-8\alpha + \gamma = -2\\ -9\alpha + \gamma = -1\end{array}\right\} \Leftrightarrow \alpha = -1 \text{ και } \gamma = -10$$

Για $\alpha = -1$ έχουμε $\beta = 6(-1) = -6$. Άρα, $f(x) = -x^2 - 6x - 10$.

Από το σχήμα (*βλ. σχήμα (γ)*) συμπεραίνουμε ότι $f(x) < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Παραγοντοποίηση τριωνύμου

Παράδειγμα Ενότητας 2.4.8

Ασκήσεις - Δραστηριότητες

Α' ΟΜΑΔΑ

1 Να βρείτε (με όποιο τρόπο θεωρείτε πιο σύντομο) το πρόσημο των παρακάτω συναρτήσεων

(i) $3x^2$ (ii) $-2x^2$ (iii) x^2+1 (iv) $-x^2-4$ (v) $(x+1)^2$ (vi) $-(x-7)^2$

2 Να βρείτε (με όποιο τρόπο θεωρείτε πιο κατάλληλο) το πρόσημο των παρακάτω συναρτήσεων

(i) $(x+4)(x-3)$ (ii) $-(2x+9)(3x-2)$ (iii) $-x^2+9$ (iv) $-x^2-4x-5$ (v) $x^2-3x-54$ (vi) $x^2-16x+20$

3 Να βρείτε τα πρόσημα των συναρτήσεων με βάση τις γραφικές τους παραστάσεις

(i) x^2-x-12 (ii) $-2x^2-3x+5$ (iii) $x^2-x+\frac{1}{4}$

4 Να κατασκευάσετε τους πίνακες προσήμων των συναρτήσεων

(i) $-2x^2+5x-3$ (ii) $4x^2-6x+\frac{9}{4}$ (iii) $\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{2}x-4$

5 Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες οι παρακάτω συναρτήσεις είναι θετικές

(i) $-x^2+\left(\sqrt{3}-1\right)x+\sqrt{3}$ (ii) $-x^2-3\sqrt{2}x+4$ (iii) $2x^2-\sqrt{2}x+\frac{1}{4}$

Β' ΟΜΑΔΑ

1 Να μελετήσετε το πρόσημο της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$ η οποία έχει ρίζες το -1 και το 3 και μέγιστη τιμή το 4.

2 Να μελετήσετε το πρόσημο της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$ η οποία έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x=1$, τέμνει τον άξονα yy' στο 3 και εφάπτεται στον άξονα xx'.

3 Να μελετήσετε το πρόσημο της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$ η οποία έχει ρίζες το -5, άξονα συμμετρίας την ευθεία και τέμνει τον άξονα yy' στο -15.

4 Να προσδιοριστεί το λ ώστε η ανίσωση $x^2-2(3\lambda-1)x-4(2\lambda^2-1)>0$ να ισχύει για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

5 Να αποδειχτεί ότι το τριώνυμο $x^2+\mu x+(\mu-1)$ δεν παίρνει αρνητικές τιμές για κάθε $\mu\in\mathbb{R}$.

6 Θεωρείστε το τριώνυμο $f(x)=(\lambda-2)x^2-2\lambda x+2\lambda-3$, $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda\neq 2$.

(α) Να βρείτε τη διακρίνουσα του τριωνύμου και να μελετήσετε το πρόσημό της.

(β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση $f(x)=0$ έχει

(i) δύο ρίζες διαφορετικές μεταξύ τους.

(ii) δύο ρίζες ίσες.

7 Για ποιες τιμές του αριθμού α η γραφική παράσταση του τριωνύμου $2(\alpha^2+\alpha-2)\,x^2+\sqrt{5}\alpha x+1$ δεν τέμνει τον άξονα $x'x$; *(Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι πρέπει $\alpha^2+\alpha-2\neq 0$ και $\Delta<0$.)*

8 Δίνονται τα τριώνυμα

(i) x^2-2x-8 (ii) $-x^2-x+6$ (iii) x^2+4x+4

(α) Να βρείτε με οποιοδήποτε τρόπο τα πρόσημα των τριωνύμων.

(β) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

(i) $f(x)=\sqrt{x^2-2x-8}$ (ii) $g(x)=\sqrt{-x^2-x+6}$ (iii) $h(x)=\sqrt{x^2+4x+4}$

Ασκήσεις
Β' Ομάδας
Ενότητας 2.4.8

2.4.9 Μοντελοποίηση και Επίλυση Προβλημάτων με Συναρτήσεις 1ου και 2ου βαθμού

Θα μάθουμε:

- να χρησιμοποιούμε πολυωνυμικές συναρτήσεις 1ου και 2ου βαθμού στη μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων.

Παραδείγματα συναρτήσεων

Παράδειγμα 2.4.9.1

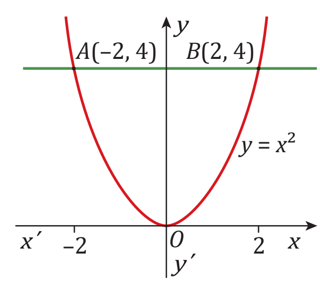
Να λυθούν γραφικά

(α) οι εξισώσεις (i) $x^2 - 4 = 0$ (ii) $x^2 - |x| = 0$

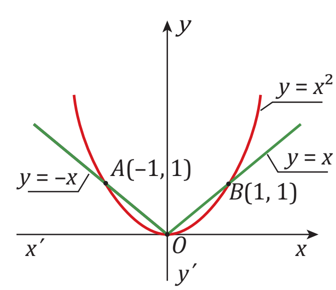
(β) οι ανισώσεις (i) $x^2 - 4 \leq 0$ (ii) $x^2 - |x| < 0$

Λύση

(α) (i) Αν γράψουμε την εξίσωση στη μορφή $x^2 = 4$, οι ρίζες της εξίσωσης αυτής είναι οι τετμημένες των σημείων τομής της παραβολής $y = x^2$ και της ευθείας $y = 4$. Από το διπλανό σχήμα όπου έχουν σχεδιαστεί οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων αυτών, διαπιστώνουμε ότι αυτές τέμνονται στα σημεία $A(-2,4)$ και $B(2,4)$. Πραγματικά αν λύσουμε αλγεβρικά την εξίσωση βρίσκουμε τις λύσεις -2 και 2.



(ii) Οι λύσεις της εξίσωσης αυτής θα είναι κατά τα γνωστά οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων $y = x^2$ και $y = |x|$. Από τις γραφικές παραστάσεις, που είναι σχεδιασμένες στο διπλανό σχήμα διαπιστώνουμε ότι αυτές έχουν κοινά τα σημεία $A(-1,1)$ και $B(1,1)$ και φυσικά το $O(0,0)$ από το οποίο διέρχονται και οι δύο. (Λύστε και αλγεβρικά την εξίσωση.)



(β) (i) Από το σχήμα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η ανίσωση $x^2 - 4 \leq 0$ επαληθεύεται για κάθε τιμή του x για την οποία η γραφική παράσταση της παραβολής $y = x^2$ βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = 4$, δηλαδή, για κάθε $x \in [-2,2]$.

Εξάλλου έχουμε

$$x^2 - 4 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} \leq \sqrt{4} \Leftrightarrow |x| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow x \in [-2,2]$$

Δηλαδή η αλγεβρική λύση επιβεβαιώνει τη γεωμετρική λύση.

(ii) Από το σχήμα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η ανίσωση $x^2 - |x| < 0$ επαληθεύεται για κάθε τιμή του x για την οποία η γραφική παράσταση της παραβολής $y = x^2$ βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της ευθείας $y = |x|$, δηλαδή, για κάθε $x \in (-1,0) \cup (0,1)$.

Παράδειγμα Ενότητας 2.4.9

Ασκήσεις - Δραστηριότητες

Α' ΟΜΑΔΑ

1 Να λύσετε γεωμετρικά τις ανισώσεις
(i) $2x^2 \leq 1$ (ii) $3x^2 \leq 2x$ (iii) $-x^2 > x$ (iv) $x^2 - 1 \leq x$
(Υπόδειξη: Θεωρήστε ότι αναζητάτε την εύρεση των σχετικών θέσεων των γραφικών παραστάσεων μιας παραβολής και μιας ευθείας.)

Σημεία με ιδιαίτερο ενδιαφέρον

2 Να λύσετε γεωμετρικά τις ανισώσεις
(i) $-7x^2 \leq 6x + 1$ (ii) $\frac{x^2}{4} > x - 1$ (iii) $x^2 \leq 6x + 9$ (iv) $-x^2 - 1 < 2x$

3 Να λύσετε γεωμετρικά τις ανισώσεις
(i) $-x^2 \geq -2\,|x|$ (ii) $-x^2 \geq -2|x| - 3$ (iii) $-x^2 \geq -2|x| + 1$ (iv) $-x^2 \geq -2|x| + 2$

4 Να λύσετε τις ανισώσεις
(i) $-x^2 + x + 42 < 0$ (ii) $5x^2 - x - 4 \geq 0$ (iii) $100x^2 - 10x + \frac{1}{100} \leq 0$

5 Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x|x|$ και $g(x) = x$ και στη συνέχεια να λύσετε γεωμετρικά τις ανισώσεις $f(x) \leq g(x)$ και $f(x) \geq g(x)$. Ποια αλγεβρική ιδιότητα περιγράφουν οι ανισώσεις αυτές;

6 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3$ και $g(x) = x$. Να λύσετε γεωμετρικά τις ανισώσεις $f(x) \leq g(x)$ και $f(x) \geq g(x)$. (Δεν είναι απαραίτητο να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις αυτών των συναρτήσεων.)

Β' ΟΜΑΔΑ

1 (α) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων την ημιευθεία $y = x$, $x \geq 0$ και τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$, $g(x) = x^3$ για $x \geq 0$.
(Υπόδειξη: Για όσο το δυνατόν ακριβέστερη σχεδίαση χρησιμοποιήστε επιλεγμένες τιμές για το x, ώστε να δημιουργήσετε κατάλληλους πίνακες τιμών.)
(β) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων των παραπάνω συναρτήσεων να διατάξετε από τη μικρότερη τιμή στη μεγαλύτερη τα $\sqrt{x}, x, x^2, x^3$.
(Υπόδειξη: Πρέπει να διακρίνετε δύο περιπτώσεις αναφορικά με το x.)
(γ) Με βάση τα παραπάνω συμπεράσματα να διατάξετε από τη μικρότερη τιμή στη μεγαλύτερη τα $x^{\frac{1}{\nu}}, ..., x^{\frac{1}{4}}, x^{\frac{1}{3}}, x^{\frac{1}{2}}, x, x^2, x^3, x^4, ..., x^\nu$, $\nu = 1, 2, ...$.
(Υπόδειξη: Να διακρίνετε δύο περιπτώσεις αναφορικά με το x και να μην κάνετε πράξεις.)

2 Να γίνει η γραφική παράσταση της παραβολής που διέρχεται από τα σημεία $A(1, 0)$, $B(2, 5)$ και $\Gamma(-1, 2)$.

3 Υπάρχει παραβολή που διέρχεται από τα σημεία $A(-1, -3)$, $B(1, 1)$ και $\Gamma(2, 3)$;

4 Να βρεθεί το μέγιστο του ελάχιστου της $f(x) = x^2 - 2x - \lambda^2 + 3\lambda$.

5 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 4x$ και $g(x) = \frac{9}{x}$.
(α) Να λύσετε γραφικά την ανίσωση $f(x) \leq g(x)$. *(Υπόδειξη: Δεν είναι απαραίτητο να χρησιμοποιήστε τις γραφικές παραστάσεις των συγκεκριμένων συναρτήσεων.)*
(β) Να επιβεβαιώσετε και αλγεβρικά το συμπέρασμα.

Ασκήσεις Β' Ομάδας Ενότητας 2.4.9

2.4.10 Τριγωνομετρικοί αριθμοί

Έξυπνοι φίλοι

Θα μάθουμε:

- να ορίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνίας μεταξύ 0° και 360° με τη βοήθεια ενός συστήματος συντεταγμένων.

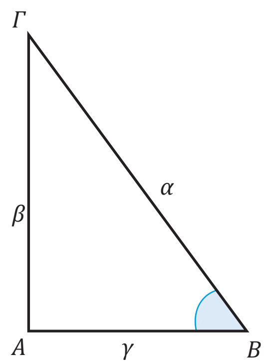
Έχουμε μάθει στο Γυμνάσιο να υπολογίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς, μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου. Συγκεκριμένα υπενθυμίζουμε ότι αν έχουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($Α = 90°$), τότε για κάθε οξεία γωνία του ορθογωνίου τριγώνου ορίζονται τέσσερις αριθμοί, το ημίτονο, το συνημίτονο, η εφαπτομένη και η συνεφαπτομένη οι οποίοι ονομάζονται τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας αυτής. Για παράδειγμα, για την οξεία γωνία $Β$ του ορθογωνίου τριγώνου $ΑΒΓ$ έχουμε

$$\text{ημ}B = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}}\right)$$

$$\text{συν}B = \frac{\gamma}{\alpha}\left(\frac{\text{προσκείμενη κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}}\right)$$

$$\text{εφ}B = \frac{\beta}{\gamma}\left(\frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{προσκείμενη κάθετη}}\right)$$

$$\text{σφ}B = \frac{\gamma}{\beta}\left(\frac{\text{προσκείμενη κάθετη}}{\text{απέναντι κάθετη}}\right)$$



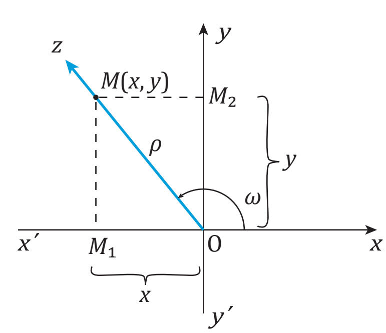
Να ορίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας Γ και να τους συσχετίσετε με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας Β. Σε ποιο συμπέρασμα οδηγήστε;

Με τον ίδιο τρόπο ορίζονται και οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της οξείας γωνίας $Γ$.

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί είναι χρήσιμοι στην επίλυση ασκήσεων και πραγματικών προβλημάτων. Ωστόσο, ένα ερώτημα που τίθεται είναι το αν θα μπορούσαμε να ορίσουμε τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνιών που δεν είναι οξείες. Γενικότερα, τίθεται το ερώτημα, αν θα μπορούσαμε να ορίσουμε τριγωνομετρικούς αριθμούς για οποιαδήποτε γωνία. Ωστόσο, σε αυτό το σημείο θα περιορίσουμε το ερώτημα ώστε να αφορά γωνίες από 0° έως 360°. Στην παράγραφο που ακολουθεί θα ορίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς οποιασδήποτε γωνίας ω με $0° \leq \omega \leq 360°$, με τη βοήθεια ενός καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων.

Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω, με ω μεταξύ των 0° και 360°

Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο, Oz μία ημιευθεία αυτού και ω η γωνία που γράφεται από τον ημιάξονα Ox αν περιστραφεί κατά τη θετική φορά (αντίθετη από την φορά της κίνησης των δεικτών του ρολογιού) γύρω από το O μέχρι να συμπέσει για πρώτη φορά με την ημιευθεία Oz (βλ. σχήμα). Ο θετικός ημιάξονας Ox λέγεται **αρχική πλευρά** της γωνίας ω, ενώ η ημιευθεία Oz λέγεται **τελική πλευρά** της ω.



Στην τελική πλευρά της γωνίας ω παίρνουμε τυχαίο σημείο $M(x, y)$ και φέρνουμε την κάθετη MM_1 στον άξονα $x'x$ και την κάθετη MM_2 στον άξονα yy' *(βλ. σχήμα)*. Τότε, έχουμε

$$(OM_1) = x, \qquad (OM_2) = y \qquad \text{και} \qquad (OM) = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho > 0$$

Ορίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς οποιασδήποτε γωνίας ω με $0° \leq \omega \leq 360°$ ως εξής

$$\text{ημ}\omega = \frac{y}{\rho},\ \ \text{συν}\omega = \frac{x}{\rho},\ \ \text{εφ}\omega = \frac{y}{x}, x \neq 0 \ \ \text{και} \ \ \text{σφ}\omega = \frac{x}{y}, y \neq 0\cdot$$

Για παράδειγμα,

- Αν οι συντεταγμένες του σημείου M είναι οι $\left(1, \sqrt{3}\right)$, τότε $x = 1, y = \sqrt{3}$ και $\rho = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = 2$, οπότε
  $\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{1}{2}$, $\varepsilon\varphi\omega = \frac{y}{x} = \sqrt{3}$ και $\sigma\varphi\omega = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

  Σε αυτή την περίπτωση έχουμε $\omega = 60°$.

Δώστε μία γεωμετρική αιτιολόγηση αυτού του ισχυρισμού.

- Αν οι συντεταγμένες του σημείου M είναι οι $(-1, 1)$, τότε $x = -1, y = 1$ και $\rho = \sqrt{\left(-1\right)^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, οπότε
  $\eta\mu\omega = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\varepsilon\varphi\omega = \frac{1}{-1} = -1$ και $\sigma\varphi\omega = \frac{-1}{1} = -1$.

  Σε αυτή την περίπτωση έχουμε $\omega = 135°$.

Δώστε μία γεωμετρική αιτιολόγηση αυτού του ισχυρισμού.

- Αν οι συντεταγμένες του σημείου M είναι οι $(2,0)$, δηλαδή, το σημείο M βρίσκεται στο θετικό ημιάξονα xx', τότε $x = 2$, $y = 0$ και $\rho = \sqrt{2^2 + 0^2} = \sqrt{4} = 2$, οπότε $\eta\mu\omega = \frac{0}{2} = 0$, $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{2}{2} = 1$, $\varepsilon\varphi\omega = \frac{0}{2} = 0$, η σφω δεν ορίζεται και $\omega = 0°$.

- Αν οι συντεταγμένες του σημείου M είναι οι $(0,3)$, τότε $x = 0, y = 3$ και $\rho = \sqrt{0^2 + 3^2} = \sqrt{9} = 3$, οπότε
  $\eta\mu\omega = \frac{3}{3} = 1$, $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{0}{3} = 0$, η εφω δεν ορίζεται, σφω =0 και $\omega = 90°$.

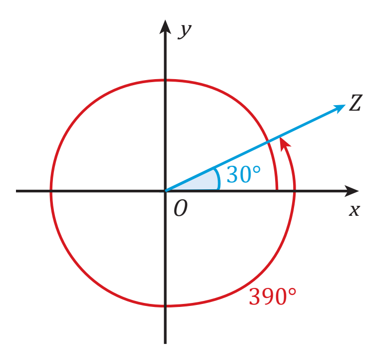
- Αν οι συντεταγμένες του σημείου M είναι οι $(-1,0)$, τότε $x = -1, y = 0$ και $\rho = \sqrt{(-1^2)+0^2} = \sqrt{1} = 1$, οπότε
  $\eta\mu\omega = \frac{0}{1} = 0$, $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{-1}{1} = -1$, $\varepsilon\varphi\omega = 0$, η σφω δεν ορίζεται και $\omega = 180°$.

- Αν οι συντεταγμένες του σημείου M είναι οι $(0,-4)$, τότε $x = 0, y = -4$ και $\rho = \sqrt{0^2+(-4^2)} = \sqrt{16} = 4$, οπότε
  $\eta\mu\omega = \frac{-4}{4} = -1$, $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{0}{4} = 0$, η εφω δεν ορίζεται, σφω =0 και $\omega = 270°$.

Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών μεγαλύτερων των 360° και αρνητικών γωνιών

Ας υποθέσουμε ότι ο ημιάξονας Ox ενός συστήματος συντεταγμένων Oxy περιστρέφεται γύρω από το O κατά τη θετική φορά. Αν πραγματοποιήσει μία πλήρη περιστροφή και περιστραφεί επιπλέον και κατά γωνία με μέτρο (άνοιγμα) 30°, τότε λέμε ότι ο Ox έχει διαγράψει γωνία

$$\omega = 360° + 30° = 390°.$$



Αν πραγματοποιήσει δύο πλήρεις περιστροφές και περιστραφεί επιπλέον και κατά γωνία μέτρου 30°, τότε ο άξονας Ox έχει διαγράψει γωνία

$$\omega = 2 \cdot 360° + 30° = 720° + 30° = 750°.$$

Γενικά, αν πραγματοποιήσει ν πλήρεις περιστροφές και περιστραφεί επιπλέον και κατά γωνία μέτρου 30°, τότε η γωνία που διαγράφει ο ημιάξονας Ox είναι

$$\omega = \kappa \cdot 360° + 30°, \text{ όπου } \kappa \in \mathbb{N}^*.$$

Επομένως, οι γωνίες που είναι μεγαλύτερες από 360° μπορούν να πάρουν τη μορφή

$$\omega = \kappa \cdot 360° + \theta°, \text{ όπου } \kappa \in \mathbb{N}^* \text{ και } 0° \leq \theta° < 360°.$$

Από την πλευρά της γεωμετρίας (ή της διαισθητικής κατανόησης) το παραπάνω συμπέρασμα σημαίνει ότι η γωνία $\omega°$ έχει την ίδια τελική πλευρά με τη γωνία $\theta°$ οπότε, οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της $\omega°$ θα είναι οι ίδιοι με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της $\theta°$.

Τριγωνομετρικοί αριθμοί

Αυτό από πρακτικής πλευράς, μας λέει ότι

Αν γνωρίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών από 0° έως 360°, τότε γνωρίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς οποιασδήποτε γωνίας που είναι μεγαλύτερη από 360°.

Τριγωνομετρικός κύκλος

Τριγωνομετρικός κύκλος

Παράδειγμα 2.4.10.1

Να βρείτε τις μικρότερες δυνατές γωνίες που γράφονται κατά την περιστροφή (κατά τη θετική φορά) μιας ημιευθείας Oz, η οποία αρχικά ταυτίζεται με τον θετικό ημιάξονα Ox ενός καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων Oxy και η τελική τους πλευρά διέρχεται από τα σημεία:

(i) $A(3,0)$ (ii) $B(0,2)$ (iii) $\Gamma(-4,0)$ (iv) $\Delta(0,-5)$.

Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των παραπάνω γωνιών.

Λύση

(i) Το σημείο $A(3,0)$ βρίσκεται στο θετικό ημιάξονα Ox που σημαίνει ότι η τελική πλευρά της ζητούμενης γωνίας ταυτίζεται με τον θετικό ημιάξονα Ox και επομένως η γωνία είναι ίση με 0°. Παρατηρούμε ότι το σημείο $A'(1,0)$ βρίσκεται στον θετικό ημιάξονα Ox και η απόσταση του ρ από την αρχή είναι ίση με 1. Επομένως,

συν0° = 1 = τετμημένη του A' ημ0° = 0 = τεταγμένη του A' εφ0° = 0 σφ 0° δεν ορίζεται.

(ii) Το σημείο Β(0,2) βρίσκεται στο θετικό ημιάξονα Οy που σημαίνει ότι η τελική πλευρά της ζητούμενης γωνίας σχηματίζει με τον θετικό ημιάξονα Οx γωνία ίση με 90°. Παρατηρούμε ότι το σημείο Β'(0,1) βρίσκεται στον θετικό ημιάξονα Οy και η απόστασή του ρ από την αρχή είναι ίση με 1. Επομένως,

συν90° = 0 = τετμημένη του B' ημ90° = 1 = τεταγμένη του B' εφ0° δεν ορίζεται σφ0° = 0.

(iii) Το σημείο Γ(−4,0) βρίσκεται στον αρνητικό ημιάξονα Οx που σημαίνει ότι η τελική πλευρά της ζητούμενης γωνίας σχηματίζει με τον θετικό ημιάξονα Οx γωνία ίση με 180°. Παρατηρούμε ότι το σημείο Γ'(−1,0) βρίσκεται στον αρνητικό ημιάξονα Οx' και η απόστασή του ρ από την αρχή είναι ίση με 1. Επομένως,

συν180° = −1 = τετμημένη του Γ' ημ180° = 0 = τεταγμένη του Γ' εφ180° = 0 σφ180° δεν ορίζεται.

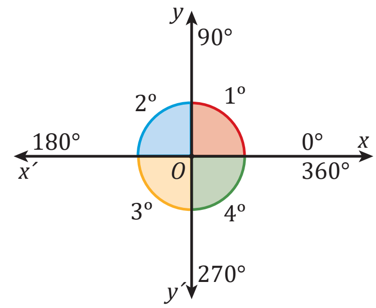
(iv) Το σημείο $\Delta(0,-5)$ βρίσκεται στον αρνητικό ημιάξονα Οy' που σημαίνει ότι η τελική πλευρά της ζητούμενης γωνίας σχηματίζει με τον θετικό ημιάξονα Οx γωνία ίση με 270°. Παρατηρούμε ότι το σημείο $\Delta'(0,-1)$ βρίσκεται στον αρνητικό ημιάξονα Οy' και η απόστασή του ρ από την αρχή είναι ίση με 1. Επομένως,

συν270° = 0 = τετμημένη του Δ' ημ270° = −1 = τεταγμένη του Δ' εφ270° δεν ορίζεται σφ270° = 0.

Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών μεγαλύτερων των 360° και αρνητικών γωνιών

Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας *Ο* με *Ο* μεταξύ των 0° και 360°

Πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών



Οι άξονες xx' και yy' διαιρούν τον τριγωνομετρικό κύκλο σε τέσσερα τεταρτημόρια, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

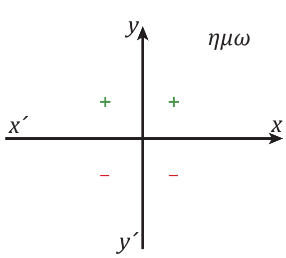
Με βάση τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών οποιασδήποτε γωνίας του τριγωνομετρικού κύκλου προκύπτει ότι το πρόσημό τους εξαρτάται από το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας. Έτσι

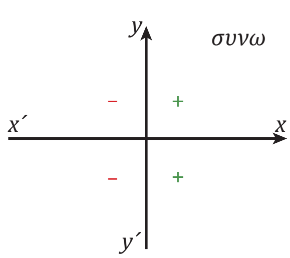
- Αν η τελική πλευρά της γωνίας βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο τότε οι συντεταγμένες (x, y) οποιουδήποτε σημείου της είναι θετικές οπότε
  $$\eta\mu\omega > 0, \quad \sigma\upsilon\nu\omega > 0, \quad \varepsilon\varphi\omega > 0 \quad \text{και} \quad \sigma\varphi\omega > 0.$$
- Αν η τελική πλευρά της βρίσκεται στο 2ο τεταρτημόριο είναι $x < 0$ και $y > 0$, οπότε
  $$\eta\mu\omega > 0, \quad \sigma\upsilon\nu\omega < 0, \quad \varepsilon\varphi\omega < 0 \quad \text{και} \quad \sigma\varphi\omega < 0.$$
- Στο 3ο τεταρτημόριο είναι $x < 0$ και $y < 0$ οπότε
  $$\eta\mu\omega < 0, \quad \sigma\upsilon\nu\omega < 0, \quad \varepsilon\varphi\omega > 0 \quad \text{και} \quad \sigma\varphi\omega > 0.$$
- Στο 4ο τεταρτημόριο είναι $x > 0$, $y < 0$ οπότε
  $$\eta\mu\omega < 0, \quad \sigma\upsilon\nu\omega > 0, \quad \varepsilon\varphi\omega < 0 \quad \text{και} \quad \sigma\varphi\omega < 0.$$

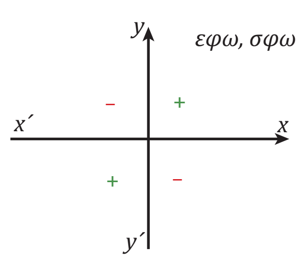
Όλα τα σχετικά συμπεράσματα συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα.

	1ο τεταρτημόριο	2ο τεταρτημόριο	3ο τεταρτημόριο	4ο τεταρτημόριο
ημω	+	+	–	–
συνω	+	–	–	+
εφω	+	–	+	–
σφω	+	–	+	–

Για το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών έχουμε τα παρακάτω σχήματα.





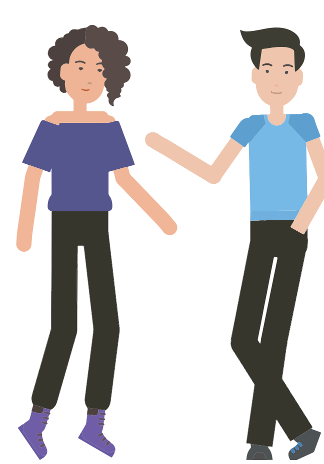


Το ακτίνιο ως μονάδα μέτρησης γωνιών

Παρατηρήσεις

- Η εφω και η σφω είναι πάντοτε ομόσημοι αριθμοί.
- Για τις γωνίες που η τελική τους πλευρά βρίσκεται πάνω στον άξονα yy' δεν ορίζεται η εφαπτομένη (αφού $x = 0$).
- Για τις γωνίες που η τελική τους πλευρά βρίσκεται πάνω στον άξονα xx' δεν ορίζεται η συνεφαπτομένη (αφού $y = 0$).

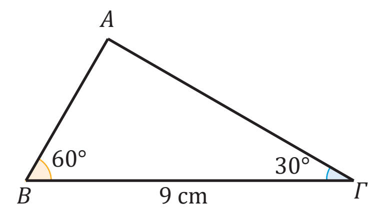
Παραδείγματα Ενότητας 2.4.10



Ασκήσεις - Δραστηριότητες

Α' ΟΜΑΔΑ

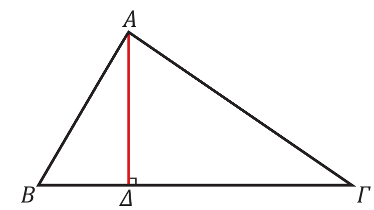
1 Να υπολογίσετε τις πλευρές του τριγώνου του διπλανού σχήματος.



2 Στο σχήμα της Άσκησης 1 έστω *ΑΔ* το ύψος του τριγώνου *ΑΒΓ* που άγεται από την κορυφή *Α*. (Σχεδιάστε το). Να υπολογίσετε τα μήκη *ΔΒ*, *ΔΓ*, το ύψος *ΑΔ* και το λόγο των εμβαδών των τριγώνων *ΑΒΔ* και *ΑΓΔ*.

3 Αφού σχεδιάσετε ένα ισόπλευρο τρίγωνο *ΑΒΓ* με πλευρά 2 καθώς και το ύψος του *ΑΔ*, με βάση αυτό, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών 30° και 60°.

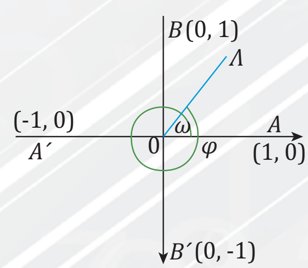
4 Αφού σχεδιάσετε ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο *ΑΒΓ* (*ΑΒ* = *ΑΓ*) με πλευρά 2, με βάση αυτό, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 45°.



5 Αν σε ένα τρίγωνο *ΑΒΓ* ισχύει η σχέση $\alpha = 2\beta$συν*Γ*, να αποδείξετε ότι είναι ισοσκελές. *(Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΔ και αποδείξτε ότι το Δ είναι μέσον της ΑΓ, παρόλο που (σκοπίμως) δεν έχει σχεδιαστεί σωστά.)*

6 Να κατασκευάσετε σε ένα καρτεσιανό σύστημα αξόνων τις γωνίες
(α) 210° (β) –45° (γ) 450° (δ) –210°
και να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς τους αριθμούς.

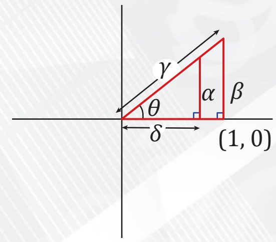
7 Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί δυο γωνίες, η φ και η ω. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών φ, φ – ω, 360° – ω και 270° + ω συναρτήσει των τριγωνομετρικών αριθμών της γωνίας ω.



Β' ΟΜΑΔΑ

1 Στο σχήμα της Άσκησης 7 να ονομάσετε με θ τη γωνία ΛΟΒ και να υπολογίσετε γεωμετρικά τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας θ συναρτήσει των τριγωνομετρικών αριθμών της γωνίας ω.

2 Αφού εκφράσετε τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων α, β, γ και δ όπως φαίνονται στο παρακάτω σχήμα συναρτήσει των τριγωνομετρικών αριθμών της γωνίας θ, στη συνέχεια να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της $-\theta$.



Ασκήσεις Β' Ομάδας Ενότητας 2.4.10

2.4.11 Αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο και βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες

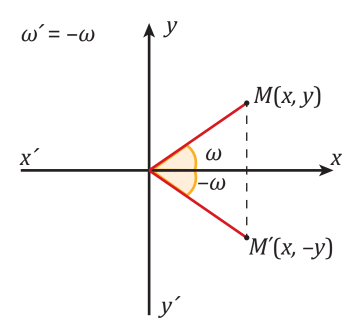
Θα μάθουμε:

- να αποδεικνύουμε τις βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες ($εφx = ημx/συνx$, $σφx = συνx/ημx$, $ημ^2x + συν^2x = 1$) και να υπολογίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας γωνίας μεταξύ 0° και 360° όταν ένας από αυτούς είναι γνωστός.

Στην ενότητα αυτή πρώτα θα δείξουμε ότι ο υπολογισμός των τριγωνομετρικών αριθμών οποιασδήποτε γωνίας ανάγεται στον υπολογισμό των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας του 1ου τεταρτημόριου και μάλιστα σε περίπτωση που μας είναι χρήσιμο μπορούμε να πάμε ένα βήμα παραπέρα και να εκφράσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς οποιασδήποτε γωνίας μόνο μέσω των τριγωνομετρικών γωνιών από 1° έως 45°. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε τις πιο βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες, δηλαδή, κάποιες σχέσεις με τις οποίες συνδέονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μεταξύ τους.

Μετατροπή τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας σε τριγωνομετρικούς αριθμούς οξείας γωνίας (Αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο)

Έστω δυο γωνίες $ω$ και $ω'$ με αρχική πλευρά τον θετικό ημιάξονα Ox των οποίων οι τελικές πλευρές τέμνουν τον τριγωνομετρικό κύκλο στα σημεία M και M' αντίστοιχα.



Γωνίες αντίθετες

Αν οι γωνίες $ω$ και $ω'$ είναι αντίθετες, τα σημεία M και M' θα είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα xx', οπότε θα έχουν την ίδια τετμημένη και αντίθετες τεταγμένες.

Επομένως

- $ημω' = ημ(-ω) = -y = -ημω$
- $συνω' = συν(-ω) = x = συνω$
- $εφω' = εφ(-ω) = -\dfrac{y}{x} = -εφω$
- $σφω' = σφ(-ω) = -\dfrac{x}{y} = -σφω$

Άρα

Οι αντίθετες γωνίες έχουν το ίδιο συνημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

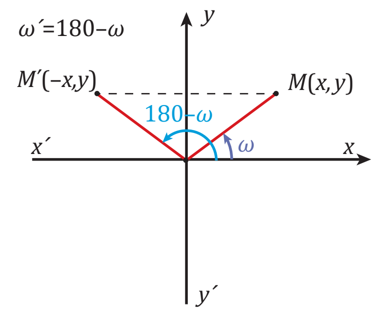
Για παράδειγμα, έχουμε

- $ημ(-30°) = -ημ30° = -\dfrac{1}{2}$
- $συν(-30°) = συν30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $εφ(-30°) = -εφ30° = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
- $σφ(-30°) = -σφ30° = -\sqrt{3}$

Επίσης, έχουμε

- $ημ\left(-\dfrac{π}{4}\right) = -ημ\dfrac{π}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $συν\left(-\dfrac{π}{4}\right) = συν\dfrac{π}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $εφ\left(-\dfrac{π}{4}\right) = -εφ\dfrac{π}{4} = -1$
- $σφ\left(-\dfrac{π}{4}\right) = -σφ\dfrac{π}{4} = -1$

Γωνίες με άθροισμα 180° (Παραπληρωματικές γωνίες)



Αν οι γωνίες ω και ω' είναι παραπληρωματικές, δηλαδή,

$$\omega + \omega' = 180° \text{ ή } \omega' = 180° - \omega,$$

τα σημεία M και M' θα είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα yy', οπότε θα έχουν αντίθετες τετμημένες και την ίδια τεταγμένη.

Επομένως

- $\etaμ\omega' = \etaμ(180°-\omega) = y = \etaμ\omega$
- $συν\omega' = συν(180°-\omega) = -x = -συν\omega$
- $εφ\omega' = εφ(180°-\omega) = -\frac{y}{x} = -εφ\omega$
- $σφ\omega' = σφ(180°-\omega) = -\frac{x}{y} = -σφ\omega$

Άρα

Οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν το ίδιο ημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

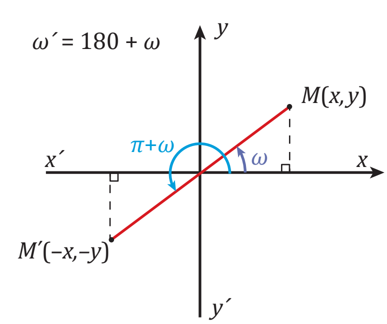
Για παράδειγμα, έχουμε

- $ημ120° = ημ(180°-60°) = ημ60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $συν120° = συν(180°-60°) = -συν60° = -\frac{1}{2}$
- $εφ120° = εφ(180°-60°) = -εφ60° = -\sqrt{3}$
- $σφ120° = σφ(180°-60°) = -σφ60° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Επίσης, έχουμε

- $ημ\frac{2\pi}{3} = ημ\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = ημ\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $συν\frac{2\pi}{3} = συν\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -συν\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$
- $εφ\frac{2\pi}{3} = εφ\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -εφ\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$
- $σφ\frac{2\pi}{3} = σφ\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -σφ\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Γωνίες που διαφέρουν κατά 180°



Αν οι γωνίες ω και ω' διαφέρουν κατά 180°, δηλαδή,

$$\omega' - \omega = 180°,$$

τα σημεία M και M' είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων, οπότε έχουν αντίθετες τετμημένες και αντίθετες τεταγμένες.

Επομένως

- $ημ\omega' = ημ(180°+\omega) = -y = -ημ\omega$
- $συν\omega' = συν(180°+\omega) = -x = -συν\omega$
- $εφ\omega' = εφ(180°+\omega) = \frac{-y}{-x} = εφ\omega$
- $σφ\omega' = σφ(180°+\omega) = \frac{-x}{-y} = σφ\omega$

Γωνίες που διαφέρουν κατά 180°

Άρα

Οι γωνίες που διαφέρουν κατά 180° έχουν αντίθετο ημίτονο και συνημίτονο και την ίδια εφαπτομένη και συνεφαπτομένη.

Για παράδειγμα, έχουμε

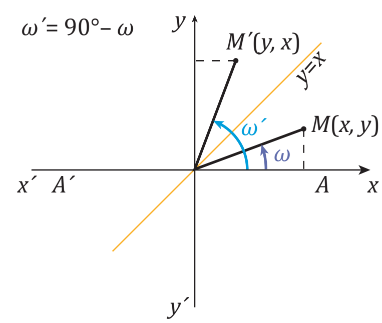
- $\eta\mu 210° = \eta\mu(180° + 30°) = -\eta\mu 30° = -\dfrac{1}{2}$
- $\sigma\upsilon\nu 210° = \sigma\upsilon\nu(180° + 30°) = -\sigma\upsilon\nu 30° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\varepsilon\varphi 210° = \varepsilon\varphi(180° + 30°) = \varepsilon\varphi 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$
- $\sigma\varphi 210° = \sigma\varphi(180° + 30°) = \sigma\varphi 30° = \sqrt{3}$

Επίσης, έχουμε

- $\eta\mu\dfrac{4\pi}{3} = \eta\mu\left(\pi + \dfrac{\pi}{3}\right) = -\eta\mu\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\sigma\upsilon\nu\dfrac{4\pi}{3} = \sigma\upsilon\nu\left(\pi + \dfrac{\pi}{3}\right) = -\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$
- $\varepsilon\varphi\dfrac{4\pi}{3} = \varepsilon\varphi\left(\pi + \dfrac{\pi}{3}\right) = \varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$
- $\sigma\varphi\dfrac{4\pi}{3} = \sigma\varphi\left(\pi + \dfrac{\pi}{3}\right) = \sigma\varphi\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Γωνίες με άθροισμα 90° (Συμπληρωματικές γωνίες)

Αν οι γωνίες ω και ω' είναι συμπληρωματικές, δηλαδή $\omega + \omega' = 90°$ θα είναι $\omega' = 90° - \omega$ και τα σημεία M και M' θα είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο της γωνίας xOy, δηλαδή την ευθεία $y = x$ οπότε η τετμημένη του ενός θα ισούται με την τεταγμένη του άλλου. Επομένως,



- $\eta\mu\omega' = \eta\mu(90° - \omega) = x = \sigma\upsilon\nu\omega$
- $\sigma\upsilon\nu\omega' = \sigma\upsilon\nu(90° - \omega) = y = \eta\mu\omega$
- $\varepsilon\varphi\omega' = \varepsilon\varphi(90° - \omega) = \dfrac{x}{y} = \sigma\varphi\omega$
- $\sigma\varphi\omega' = \sigma\varphi(90° - \omega) = \dfrac{y}{x} = \varepsilon\varphi\omega$

Άρα

Στις συμπληρωματικές γωνίες το ημίτονο της μιας ισούται με το συνημίτονο της άλλης και η εφαπτομένη της μιας με την συνεφαπτομένη της άλλης και αντίστροφα.

Για παράδειγμα, έχουμε

- $\eta\mu 30° = \eta\mu(90° - 60°) = \sigma\upsilon\nu 60° = \dfrac{1}{2}$
- $\sigma\upsilon\nu 30° = \sigma\upsilon\nu(90° - 60°) = \eta\mu 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\varepsilon\varphi 30° = \varepsilon\varphi(90° - 60°) = \sigma\varphi 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$
- $\sigma\varphi 30° = \sigma\varphi(90° - 60°) = \varepsilon\varphi 60° = \sqrt{3}$

Επίσης, έχουμε

- $\eta\mu\dfrac{\pi}{6} = \eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{3}\right) = \sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$
- $\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{6} = \sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{3}\right) = \eta\mu\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{6} = \varepsilon\varphi\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{3}\right) = \sigma\varphi\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$
- $\sigma\varphi\dfrac{\pi}{6} = \sigma\varphi\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{3}\right) = \varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

Με βάση την ιδιότητα των συμπληρωματικών γωνιών όσον αφορά στις σχέσεις των τριγωνομετρικών τους αριθμών, συμπεραίνουμε ότι ο υπολογισμός των τριγωνομετρικών αριθμών μιας οποιασδήποτε γωνίας ανάγεται στον υπολογισμό των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας από 0° μέχρι 45°.

Για παράδειγμα,

• $\eta\mu 1680^{o} = \eta\mu(4 \cdot 360^{o} + 240^{o}) = \eta\mu 240^{o}$
$= \eta\mu(180^{o} + 60^{o}) = -\eta\mu 60^{o}$
$= -\eta\mu(90^{o} - 30^{o}) = -\sigma\upsilon\nu 30^{o} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

• $\sigma\upsilon\nu 1215^{o} = \sigma\upsilon\nu(3 \cdot 360^{o} + 135^{o}) = \sigma\upsilon\nu 135^{o}$
$= \sigma\upsilon\nu(180^{o} - 45^{o}) = -\sigma\upsilon\nu 45^{o} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Οι γωνίες $90° + \omega$, $270° - \omega$ και $270° + \omega$

Με τη βοήθεια των τριγωνομετρικών αριθμών της γωνίας ω θα υπολογίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών

(i) $90° + \omega$ (ii) $270° - \omega$ (iii) $270° + \omega$

Σε κάθε περίπτωση θα βασιστούμε σε προηγούμενα συμπεράσματα προσαρμόζοντας κατάλληλα τη μορφή της κάθε γωνίας.

(i) Έχουμε $90° + \omega = 90° - (-\omega)$ οπότε

- $\eta\mu(90° + \omega) = \eta\mu(90° - (-\omega)) = \sigma\upsilon\nu(-\omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$
- $\sigma\upsilon\nu(90° + \omega) = \sigma\upsilon\nu(90° - (-\omega)) = \eta\mu(-\omega) = -\eta\mu\omega$
- $\varepsilon\varphi(90° + \omega) = \varepsilon\varphi(90° - (-\omega)) = \sigma\varphi(-\omega) = -\sigma\varphi\omega$
- $\sigma\varphi(90° + \omega) = \sigma\varphi(90° - (-\omega)) = \varepsilon\varphi(-\omega) = -\varepsilon\varphi\omega$

(ii) Έχουμε $270° - \omega = 180° + (90° - \omega)$ οπότε

- $\eta\mu(270° - \omega) = \eta\mu[180° + (90° - \omega)] = -\eta\mu(90° - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$
- $\sigma\upsilon\nu(270° - \omega) = \sigma\upsilon\nu[180° + (90° - \omega)] = -\sigma\upsilon\nu(90° - \omega) = -\eta\mu\omega$
- $\varepsilon\varphi(270° - \omega) = \varepsilon\varphi[180° + (90° - \omega)] = \varepsilon\varphi(90° - \omega) = \sigma\varphi\omega$
- $\sigma\varphi(270° - \omega) = \sigma\varphi[180° + (90° - \omega)] = \sigma\varphi(90° - \omega) = \varepsilon\varphi\omega$

(iii) Έχουμε $270° + \omega = 180° + (90° + \omega)$ οπότε

- $\eta\mu(270° + \omega) = \eta\mu[180° + (90° + \omega)] = -\eta\mu(90° + \omega) \overset{(i)}{=} -\sigma\upsilon\nu\omega$
- $\sigma\upsilon\nu(270° + \omega) = \sigma\upsilon\nu[180° + (90° + \omega)] = -\sigma\upsilon\nu(90° + \omega) \overset{(i)}{=} \eta\mu\omega$
- $\varepsilon\varphi(270° + \omega) = \varepsilon\varphi[180° + (90° + \omega)] = \varepsilon\varphi(90° + \omega) \overset{(i)}{=} -\sigma\varphi\omega$
- $\sigma\varphi(270° + \omega) = \sigma\varphi[180° + (90° + \omega)] = \sigma\varphi(90° + \omega) \overset{(i)}{=} -\varepsilon\varphi\omega$

Για τον υπολογισμό των τριγωνομετρικών αριθμών των γωνιών $90°+\omega$, $270°-\omega$ και $270°+\omega$ βασιζόμαστε σε προηγούμενα συμπεράσματα προσαρμόζοντας κατάλληλα τη μορφή της κάθε γωνίας. Υπάρχει δυνατότητα ωστόσο να δοθούν απλές και κομψές απαντήσεις και στις τρεις περιπτώσεις χρησιμοποιώντας τη γεωμετρία. Σε κάθε περίπτωση σχεδιάστε την γωνία ω και προσπαθήστε το.

Παράδειγμα 2.4.11.1

Να μετατρέψετε τους παρακάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς σε τριγωνομετρικούς αριθμούς οξείας γωνίας

(α) $\eta\mu 160°$ (β) $\sigma\upsilon\nu 130°$ (γ) $\sigma\varphi 110°$

Λύση

(α) Η παραπληρωματική γωνία των $160°$ είναι $180° - 160° = 20°$.
Άρα, $\eta\mu 160° = \eta\mu 20°$.

(β) Η παραπληρωματική γωνία των $130°$ είναι $180° - 130° = 50°$.
Άρα, $\sigma\upsilon\nu 130° = -\sigma\upsilon\nu 50°$.

(γ) Η παραπληρωματική γωνία των $110°$ είναι $180° - 110° = 70°$.
Άρα, $\sigma\varphi 110° = -\sigma\varphi 70°$.

Παράδειγμα 2.4.11.2

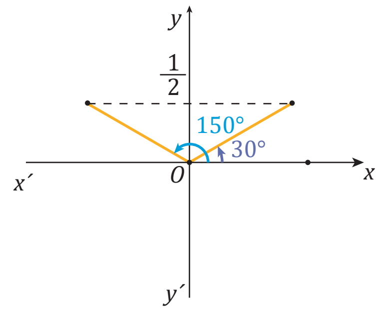
Να λύσετε την εξίσωση ημ$x = \frac{1}{2}$ αν $0° \leq x \leq 180°$.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι αν δύο γωνίες α και β είναι παραπληρωματικές, τότε ημα = ημβ.

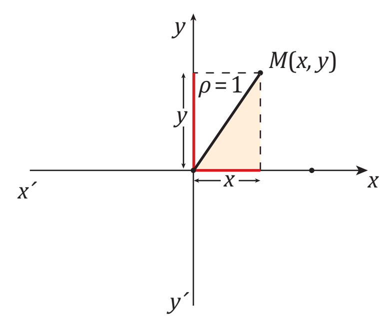
Η παραπληρωματική γωνία των 30° είναι 180° – 30° = 150°.

Επομένως, οι λύσεις της πιο πάνω εξίσωσης είναι $x = 30°$ και $x = 150°$.



Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες

Από τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας ω προκύπτουν ορισμένες σχέσεις που τους συνδέουν, ισχύουν για κάθε γωνία ω και λέγονται **τριγωνομετρικές ταυτότητες**. Οι ταυτότητες αυτές είναι χρήσιμες στο λογισμό με παραστάσεις που περιέχουν τριγωνομετρικούς αριθμούς αλλά και γενικότερα αφού είναι από τις πλέον συχνά εμφανιζόμενες ταυτότητες στα μαθηματικά.



Έστω μία γωνία ω και $M(x, y)$ το σημείο στο οποίο η τελική της πλευρά τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο. Τότε έχουμε

x = συνω και y = ημω και επειδή εφ$\omega = \frac{y}{x}$ για $x \neq 0$, σφ$\omega = \frac{x}{y}$ για $y \neq 0$ θα έχουμε

$$\text{εφ}\omega = \frac{\text{ημ}\omega}{\text{συν}\omega} \; (\text{εφόσον } x = \text{συν}\omega \neq 0) \qquad (1)$$

και

$$\text{σφ}\omega = \frac{\text{συν}\omega}{\text{ημ}\omega} \; (\text{εφόσον } y = \text{ημ}\omega \neq 0) \qquad (2)$$

Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες

Από τις ταυτότητες αυτές με πολλαπλασιασμό κατά μέλη παίρνουμε

$$\text{εφ}\omega \cdot \text{σφ}\omega = 1 \; (\text{εφόσον συν}\omega \neq 0 \text{ και ημ}\omega \neq 0) \qquad (3)$$

Επειδή $(OM) = \rho = 1$, από την εφαρμογή του Πυθαγόρειου Θεωρήματος (*βλ. χρωματισμένο ορθογώνιο τρίγωνο*) έχουμε

$$x^2 + y^2 = 1,$$

οπότε με αντικατάσταση του x και του y με το συνω και το ημω, αντίστοιχα, παίρνουμε

$$\text{ημ}^2\omega + \text{συν}^2\omega = 1. \qquad (4)$$

Από την (4) παίρνουμε

$$\text{ημ}^2\omega = 1 - \text{συν}^2\omega \qquad (5)$$

και

$$\text{συν}^2\omega = 1 - \text{ημ}^2\omega. \qquad (6)$$

Παρατήρηση

Η ταυτότητα ημ$^2\omega$ + συν$^2\omega$ = 1 ισχύει χωρίς κανένα περιορισμό για το ημίτονο και το συνημίτονο, επομένως, ισχύει για όλες τις γωνίες ω.

Αν συν$\omega \neq 0$ από την ταυτότητα ημ$^2\omega$ + συν$^2\omega$ = 1 παίρνουμε διαδοχικά

$$\frac{\text{ημ}^2\omega}{\text{συν}^2\omega} + \frac{\text{συν}^2\omega}{\text{συν}^2\omega} = \frac{1}{\text{συν}^2\omega} \Leftrightarrow \text{εφ}^2\omega + 1 = \frac{1}{\text{συν}^2\omega},$$

οπότε

$$\text{συν}^2\omega = \frac{1}{1 + \text{εφ}^2\omega}. \qquad (7)$$

Ακόμα, από την ταυτότητα $ημ^2ω + συν^2ω = 1$ παίρνουμε

$ημ^2ω = 1 - συν^2ω$

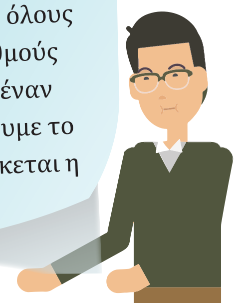
η οποία λόγω της (7) γράφεται

$$ημ^2ω = 1 - \frac{1}{1+εφ^2ω} = \frac{1+εφ^2ω}{1+εφ^2ω} - \frac{1}{1+εφ^2ω} = \frac{1+εφ^2ω-1}{1+εφ^2ω},$$

οπότε

$$ημ^2ω = \frac{εφ^2ω}{1+εφ^2ω} \qquad (8)$$

Με βάση τους τύπους (5)–(8) μπορούμε να προσδιορίσουμε όλους τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας γωνίας αν γνωρίζουμε έναν από αυτούς αρκεί να γνωρίζουμε το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται η τελική τους πλευρά.



Παράδειγμα 2.4.11.3

Αν $ημω = -\dfrac{8}{17}$ και $180° < ω < 270°$

να υπολογιστούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $ω$.

Ασκήσεις Β' Ομάδας Ενότητας 2.4.11

Λύση

Έχουμε

$$ημ^2ω + συν^2ω = 1 \Leftrightarrow \left(-\frac{8}{17}\right)^2 + συν^2ω = 1 \Leftrightarrow \frac{64}{289} + συν^2ω = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow συν^2ω = 1 - \frac{64}{289} = \frac{289-64}{289} = \frac{225}{289}$$

$$\Leftrightarrow συν^2ω = \frac{225}{289} \Leftrightarrow συνω = \pm\sqrt{\frac{225}{289}} = \pm\frac{15}{17}$$

Επειδή όμως είναι $180° < ω < 270°$ το συνω θα είναι αρνητικό.

Επομένως, θα έχουμε $συνω = -\dfrac{15}{17}$

και $εφω = \dfrac{ημω}{συνω} = \dfrac{-\frac{8}{17}}{-\frac{15}{17}} = \dfrac{8}{15}$ και

$σφω = \dfrac{1}{εφω} = \dfrac{15}{8}$

Παράδειγμα 2.4.11.4

Αν $εφx = -\sqrt{3}$ και $\dfrac{π}{2} < x < π$ να υπολογιστούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας x.

Λύση

Έχουμε (*βλ. τύπος (3)*) $σφx = -\dfrac{1}{εφx} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Επίσης, έχουμε (*βλ. τύπος (7) παραπάνω*) $συν^2x = \dfrac{1}{1+εφ^2x} = \dfrac{1}{1+\left(-\sqrt{3}\right)^2} = \dfrac{1}{1+3} = \dfrac{1}{4}$

και επειδή είναι $\dfrac{π}{2} < x < π$ το συνημίτονο της γωνίας x θα είναι αρνητικό.

Επομένως, $συνx = -\dfrac{1}{2}$.

Τέλος, έχουμε (*βλ. τύπος (8) παραπάνω*) $ημ^2x = \dfrac{εφ^2x}{1+εφ^2x} = \dfrac{\left(-\sqrt{3}\right)^2}{1+\left(-\sqrt{3}\right)^2} = \dfrac{3}{1+3} = \dfrac{3}{4}$

και επειδή είναι $\dfrac{π}{2} < x < π$ το ημίτονο της γωνίας x θα είναι θετικό.

Επομένως, $ημx = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Ο υπολογισμός του ημx και του συνx μπορεί να γίνει και ως εξής.

Είναι $εφx = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \dfrac{ημx}{συνx} = -\sqrt{3} \Leftrightarrow ημx = -\sqrt{3}\,συνx$ και από τον τύπο (4) θα έχουμε

$\left(-\sqrt{3}\,συνx\right)^2 + συν^2x = 1 \Leftrightarrow 3συν^2x + συν^2x = 1 \Leftrightarrow 4συν^2x = 1 \Leftrightarrow συν^2x = \dfrac{1}{4}$ κ.λπ..

Παράδειγμα 2.4.11.5

Να προσδιορίσετε το $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$ ώστε να υπάρχει γωνία ω για την οποία να ισχύει ότι $ημω = \dfrac{3\lambda - 1}{5\lambda}$ και $συνω = \dfrac{4\lambda + 1}{5\lambda}$.

Λύση

Έχουμε

$$ημ^2\omega + συν^2\omega = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3\lambda - 1}{5\lambda}\right)^2 + \left(\frac{4\lambda + 1}{5\lambda}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{9\lambda^2 - 6\lambda + 1}{25\lambda^2} + \frac{16\lambda^2 + 8\lambda + 1}{25\lambda^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow 9\lambda^2 - 6\lambda + 1 + 16\lambda^2 + 8\lambda + 1 = 25\lambda^2$$

$$\Leftrightarrow 2\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$$

Η λύση $\lambda = -1$ είναι προφανώς δεκτή αφού ικανοποιεί τον μοναδικό περιορισμό $\lambda \neq 0$.

Παράδειγμα 2.4.11.6

Να αποδειχτεί ότι

(i) $ημ^4\omega + συν^4\omega = 1 - 2ημ^2\omega συν^2\omega$

(ii) $ημ^4\omega - συν^4\omega = ημ^2\omega - συν^2\omega = 2ημ^2\omega - 1 = 1 - 2συν^2\omega$.

Λύση

(i) Έχουμε διαδοχικά

$ημ^4\omega + συν^4\omega = (ημ^2\omega)^2 + (συν^2\omega)^2$

$= (ημ^2\omega + συν^2\omega)^2 - 2ημ^2\omega συν^2\omega$ (Επειδή $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta$)

$= 1 - 2ημ^2\omega συν^2\omega$ (Επειδή $ημ^2\omega + συν^2\omega = 1$)

(ii) Έχουμε διαδοχικά

$ημ^4\omega - συν^4\omega = (ημ^2\omega)^2 - (συν^2\omega)^2$

$= (ημ^2\omega + συν^2\omega)(ημ^2\omega - συν^2\omega)$ (Επειδή $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$)

$= ημ^2\omega - συν^2\omega$ (Επειδή $ημ^2\omega + συν^2\omega = 1$)

$= ημ^2\omega - (1 - ημ^2\omega)$ (Επειδή $συν^2\omega = 1 - ημ^2\omega$)

$= 2ημ^2\omega - 1$

$= 2(1 - συν^2\omega) - 1$ (Επειδή $ημ^2\omega = 1 - συν^2\omega$)

$= 1 - 2συν^2\omega$

Ασκήσεις - Δραστηριότητες

Α' ΟΜΑΔΑ

1 Να γράψετε τους παρακάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς αμβλείας γωνίας

(α) ημ155° (β) συν110° (γ) εφ140° (δ) σφ95°

2 Αν για τη γωνία x ισχύει $0° \leq x \leq 180°$, να βρείτε τις τιμές της γωνίας x στις παρακάτω περιπτώσεις

(α) $ημx = ημ60°$ (β) $συνx = -συν20°$ (γ) $εφx = εφ30°$ (δ) $σφx = -σφ15°$

3 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις στο διάστημα $0° \leq x \leq 180°$.

(α) $ημx = 1/2$ (β) $συνx = -συν45°$ (γ) $εφx = εφ(-240)°$ (δ) $σφx = -σφ30°$

4 Να υπολογίσετε

(α) το $ημ(\alpha - 270°)$ και την $εφ(360° - \alpha)$ αν $ημ\alpha = -5/13$ και $180° < \alpha < 270°$.

(β) την $εφ(\beta - 180°)$ και τη $σφ(\beta - 90°)$ αν $συν\beta = -1/4$ και $90° < \beta < 180°$.

5 Να αποδείξετε ότι

(i) $\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$ και $\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) = \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$

(ii) $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \sigma\upsilon\nu\alpha$ και $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\eta\mu\alpha$

(Μπορείτε να δώσετε και γεωμετρική απόδειξη.)

6 Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει

(i) $\eta\mu(B+\Gamma) = \eta\mu A$ (ii) $\sigma\upsilon\nu(B+\Gamma) = -\sigma\upsilon\nu A$

(iii) $\eta\mu\frac{A+B}{2} = \sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$ (iv) $\sigma\upsilon\nu(2A+B+\Gamma) = -\sigma\upsilon\nu A$

7 Να απλοποιηθούν τα κλάσματα

(i) $A = \dfrac{\eta\mu(180°-\alpha)\ \sigma\varphi(270°-\alpha)\ \sigma\upsilon\nu(\alpha-360°)}{\varepsilon\varphi(180°+\alpha)\ \varepsilon\varphi(90°+\alpha)\ \sigma\upsilon\nu(270°+\alpha)}$

(ii) $B = \dfrac{\varepsilon\varphi(\pi-\theta)\ \sigma\varphi(\pi+\theta)\ \varepsilon\varphi(-\theta)\ \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\varepsilon\varphi(\pi+\theta)\ \sigma\varphi(\pi-\theta)\ \sigma\varphi\theta\ \varepsilon\varphi(2\pi-\theta)}$

8 Να δείξετε ότι $\varepsilon\varphi(260°+x)+\sigma\varphi(170°+x)+\sigma\varphi(180°+x)+\sigma\varphi(180°-x)=0$.

Β' ΟΜΑΔΑ

1 Να δείξετε ότι η παράσταση $A = \eta\mu^2(180°+x) + \sigma\upsilon\nu x\,\sigma\upsilon\nu(180°-x) + 2\eta\mu^2(90-x)$ έχει την ίδια τιμή για όλες τις τιμές του x (τότε λέμε ότι είναι ανεξάρτητη από το x).

2 Αν $\eta\mu\theta = 40/41$ και $90° < \theta < 180°$, να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας θ και της γωνίας $180°-\theta$.

3 Αν $\varepsilon\varphi x = -7/24$ και $\pi/2 < x < \pi$ να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας θ.

4 Αν $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = 0$, $x \in (0, 2\pi)$ να βρείτε το x.

Στις Ασκήσεις 5 και 6 που αμέσως ακολουθούν υποθέστε ότι όλες οι εμφανιζόμενες παραστάσεις έχουν νόημα.

5 Να αποδείξετε τις ταυτότητες

(i) $(\eta\mu\varphi+\sigma\upsilon\nu\varphi)^2 = 1 + 2\eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu\varphi$ (ii) $1-\dfrac{\eta\mu^2\theta}{\varepsilon\varphi^2\theta} = \eta\mu^2\theta$

(iii) $\eta\mu\theta - \eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu^2\theta = \eta\mu^3\theta$ (iv) $\dfrac{1+\varepsilon\varphi x}{1+\sigma\varphi x} = \varepsilon\varphi x$

6 Να αποδείξετε τις ταυτότητες

(i) $(\eta\mu\varphi+\sigma\upsilon\nu\varphi)^2 + (\eta\mu\varphi-\sigma\upsilon\nu\varphi)^2 = 2$ (ii) $(\eta\mu\varphi+\sigma\upsilon\nu\varphi)(\eta\mu\varphi-\sigma\upsilon\nu\varphi) = 1-2\sigma\upsilon\nu^2\varphi$

(iii) $\dfrac{\eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu\varphi+\eta\mu\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi+\sigma\upsilon\nu^2\varphi} = \varepsilon\varphi\varphi$ (iv) $\dfrac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1-\eta\mu\theta} - \dfrac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1+\eta\mu\theta} = 2\varepsilon\varphi\theta$

Ευρετήριο

Γλωσσάρι

Απαντήσεις των Ασκήσεων

Βιβλιογραφία

Σύνοψη Ενότητας 2.4 Συναρτήσεις

Η ενότητα αυτή μάς εισάγει στην έννοια της συνάρτησης, στους τρόπους αναπαράστασής της και στη γραφική της απεικόνιση. Μελετήσαμε συναρτήσεις πρώτου και δευτέρου βαθμού, τη χρήση τους στην επίλυση προβλημάτων και τις σχετικές θέσεις των ευθειών. Τέλος, έγινε εισαγωγή στους τριγωνομετρικούς αριθμούς και παρουσιάστηκαν οι βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες.