ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Νικόλαος Αντωνόπουλος
Δημήτριος Αργύρης
Μαγδαληνή Κοκκαλιάρη
Ευανθία Κοντογούρη
Θεοχάρης Μετζιδάκης
Μάριος Σπάθης

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

(Γενική Παιδεία)

Α΄ Λυκείου

Βιβλίο Μαθητή/
Μαθήτριας

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

(Γενική Παιδεία)

Α΄ Λυκείου

Επιστημονική Επιτροπή Αξιολόγησης

Συντονιστής / Αξιολογητής	**Βασίλειος Παπαδουράκης** Εν ενεργεία Εκπαιδευτικός
Αξιολογητής	**Γεώργιος Τσαμπούρης** Εν ενεργεία Εκπαιδευτικός
Αξιολογητής	**Ιωάννης Σταματίου** Εν ενεργεία Εκπαιδευτικός
Τεχνικός Εμπειρογνώμονας	**Κωνσταντίνος Ζαχαρής** Πτυχιούχος Πληροφορικής
Επικουρικός Εμπειρογνώμονας	**Αλεξάνδρα Θεοδωράκη** Διπλωματούχος Τεχνολογίας Γραφικών Τεχνών
Υπεύθυνος Διδακτικού Πακέτου για το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής	**Στυλιανός Μαυρατζάς** Σύμβουλος Α΄ του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Πράξη με τίτλο: «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ 6010165 στο Πρόγραμμα «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή» 2021-2027

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ
Σπυρίδων Δουκάκης
Πρόεδρος του Δ.Σ. του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Υπεύθυνος Πράξης
Διονύσιος Μουρελάτος
Σύμβουλος Α΄ του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Αναπληρωτής Υπεύθυνος Πράξης
Στυλιανός Μαυρατζάς
Σύμβουλος Α΄ του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

«Με τη συγχρηματοδότηση της Ευρωπαϊκής Ένωσης»
και το Πρόγραμμα «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή»

Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας, Θρησκευμάτων και Αθλητισμού
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2021-2027
Πρόγραμμα Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Νικόλαος Αντωνόπουλος
Δημήτριος Αργύρης
Μαγδαληνή Κοκκαλιάρη
Ευανθία Κοντογούρη
Θεοχάρης Μετζιδάκης
Μάριος Σπάθης

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

(Γενική Παιδεία)

Α΄ Λυκείου

Βιβλίο Μαθητή/Μαθήτριας

εκδόσεις Ελληνική γραφή

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

Συγγραφείς

Νικόλαος Αντωνόπουλος
Μαθηματικός,
Εκπαιδευτικός Δ/θμιας Εκπαίδευσης

Δημήτριος Αργύρης
Μαθηματικός,
Σύμβουλος Εκπαίδευσης Μαθηματικών

Μαγδαληνή Κοκκαλιάρη
Μαθηματικός,
Σύμβουλος Εκπαίδευσης Μαθηματικών

Ευανθία Κοντογούρη
Μαθηματικός,
Εκπαιδευτικός Δ/θμίας Εκπαίδευσης

Θεοχάρης Μετζιδάκης
Μαθηματικός,
Εκπαιδευτικός Δ/θμιας Εκπαίδευσης

Μάριος Σπάθης
Μαθηματικός,
Εκπαιδευτικός Δ/θμιας Εκπαίδευσης

Επιστημονική Επιμέλεια

Εμμανουήλ Κρητικός
Καθηγητής Επιχειρησιακής Έρευνας και Πληροφοριακών Συστημάτων
Τμήμα Διοικητικής Επιστήμης και Τεχνολογίας του Οικονομικού
Πανεπιστημίου Αθηνών (ΟΠΑ)

Εκδότης

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΓΡΑΦΗ Α.Ε.

Υπεύθυνος έργου
Επιμέλεια Έκδοσης
Εξώφυλλο

Κέλλυ Σαρρή Πασχαλίδη
Παιδαγωγός

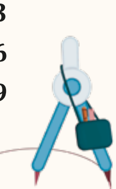
Εικονογράφηση

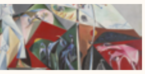
Σχεδιαστική ομάδα των εκδόσεων

Ψηφιακά Μαθησιακά Αντικείμενα
Σύλληψη - Δημιουργία - Υλοποίηση

Συγγραφική ομάδα του βιβλίου
Τεχνική ομάδα των εκδόσεων

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ





2ο Κεφάλαιο • Τρίγωνα / 51

3ο Κεφάλαιο • Τετράπλευρα / 91

4ο Κεφάλαιο • Γεωμετρία του Χώρου / 117

ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Το βιβλίο που κρατάτε θα σας συνοδεύσει στο ταξίδι σας στην εξερεύνηση της Γεωμετρίας όλη τη χρονιά. Όπως κάθε βιβλίο έχει τα δικά του χαρακτηριστικά. Είναι απαραίτητο να τα ξέρετε ώστε να έχετε την ευκαιρία να πειραματιστείτε, να ανακαλύψετε, να διευρύνετε τις γνώσεις σας, και να τις χρησιμοποιήσετε στη ζωή σας.

Τα κεφάλαια

Το βιβλίο αποτελείται από την «Εισαγωγή» και τέσσερα κεφάλαια: «Παράλληλες Ευθείες», «Τρίγωνα», «Τετράπλευρα» και «Γεωμετρία του χώρου». Τα κεφάλαια διαιρούνται σε ενότητες και μερικές από αυτές σε υποενότητες. Υπάρχει αρίθμηση που σας βοηθά να βρείτε το κεφάλαιο, τη διδακτική ενότητα και την υποενότητα.

Οι ενότητες

Κάθε ενότητα ξεκινά από αυτά που αναμένεται να μάθετε. Συνεχίζει με ένα έργο εξερεύνησης, δηλαδή ένα ερώτημα ή μια αφορμή για να προβληματιστείτε, να διατυπώσετε τις σκέψεις σας, να τις συζητήσετε στην τάξη. Από τη συζήτηση θα προκύψει η θεωρία για να οργανώσετε και να επικυρώσετε τις γνώσεις σας, οι εφαρμογές και τα παραδείγματα που τις εξειδικεύουν και τις προεκτείνουν και, τέλος, οι ερωτήσεις και οι ασκήσεις για να αξιολογήσετε τι έχετε μάθει. Για καθένα από τα παραπάνω υπάρχει ειδικό εικονίδιο που θα σας βοηθά να εντοπίζετε πιο εύκολα το πεδίο που αναζητάτε. Ακολουθούν ενδεικτικά παραδείγματα:

Έργο εξερεύνησης

Η Πυραμίδα του Χέοπα είναι το αρχαιότερο από τα επτά θαύματα του κόσμου και το μόνο που σώζεται μέχρι σήμερα. Σε ένα βιβλίο για τις πυραμίδες, διαβάσατε ότι «εάν από την κορυφή φέρουμε ένα νήμα κάθετο σε μια οποιαδήποτε ακμή της έδρας που αποτελεί τη βάση της, τότε αυτό διέρχεται από το μέσον της ακμής».

α) Να ελέγξετε την αλήθεια του ισχυρισμού: «οι ακμές που τέμνονται στην κορυφή είναι μεταξύ τους ίσες».

β) Με δεδομένο ότι σήμερα η κορυφή της πυραμίδας λείπει από τη θέση της, πώς θα μπορούσατε να ελέγξετε την αλήθεια του παραπάνω ισχυρισμού, εάν μπορούσατε να μετρήσετε σε μια πλαϊνή έδρα τις γωνίες που σχηματίζουν η οριζόντια ακμή με τις άλλες ακμές της και τις είχατε βρει ίσες;

Οργανώστε και επικυρώστε

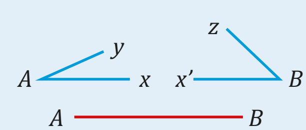
ΘΕΩΡΗΜΑ 2.1.2β

Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν ένα από τα παρακάτω:
α) την υποτείνουσα και μία οξεία γωνία ίσες μία προς μία,
β) μια κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία ίσες μία προς μία,
γ) μια κάθετη πλευρά και την απέναντι σε αυτή οξεία γωνία ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

Έστω τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΒΓ$ και Α′ Β′ Γ′ με $\hat{A} = \hat{A}' = 90^o$:
Αν $ΒΓ = Β'Γ'$ και $B = \hat{B}'$ τότε $ΑΒΓ = Α'Β'Γ'$ (έχουν τις υποτείνουσες και μία οξεία γωνία μία προς μία ίσες).

Εφαρμογή 2.2β

Να κατασκευάσετε, με κανόνα και διαβήτη, τρίγωνο όταν δίνονται η μία πλευρά του και οι προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες (βλ. σχήμα).



ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ

Εφαρμογή

Κατασκευάστε τη γωνία $x\hat{A}y$ και πάνω στην ημιευθεία A_x, προσδιορίστε τη θέση του σημείου B...

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.1α

Έστω τρίγωνο $ΑΒΓ$ και $ΑΜ$ η διάμεσος από την κορυφή $Α$. Προεκτείνουμε την $ΑΜ$ κατά τμήμα $ΜΔ = ΑΜ$. Να αποδειχθεί ότι $ΓΔ = ΑΒ$.

Παράδειγμα

Ασκήσεις - Δραστηριότητες

Ασκήσεις - Δραστηριότητες

1 Να χαρακτηρίσετε με την ένδειξη Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις:

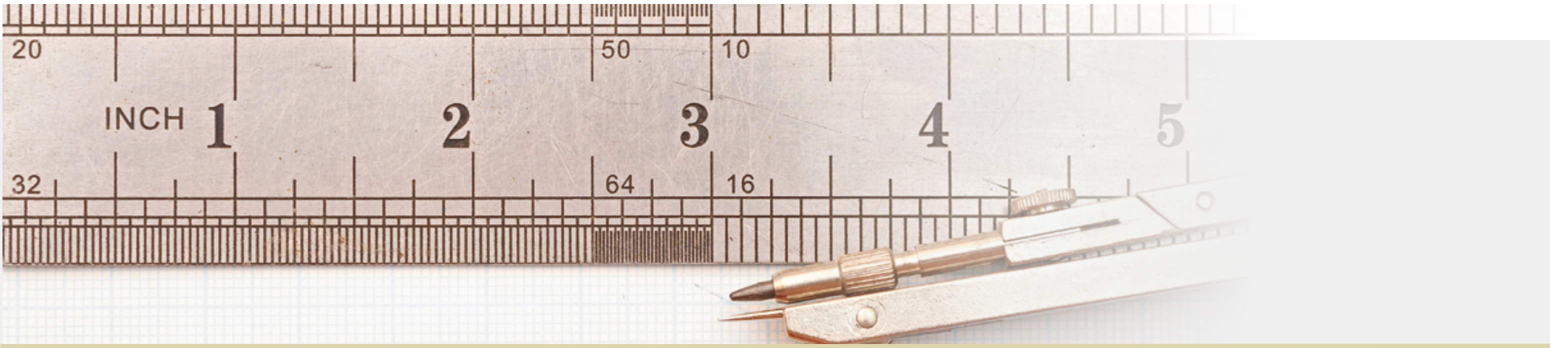
Υποδείξεις – Λύσεις Ασκήσεων

Τα ψηφιακά μαθησιακά αντικείμενα

Βρίσκονται σε κάθε κεφάλαιο στις διδακτικές ενότητες και στην ανακεφαλαίωση και ανάλογα με την μορφή τους, μπορείτε να τα χρησιμοποιήσετε για να αντλήσετε πληροφορίες, να πειραματιστείτε, να επεκτείνετε τις γνώσεις σας, να δείτε επιπλέον αποδείξεις, να τα έχετε ως οδηγό για τις κατασκευές σας, να παίξετε παιχνίδια γνώσεων, να ασχοληθείτε με επιπλέον ασκήσεις, αξιοποιώντας, αν χρειάζεται, τις υποδείξεις και τις απαντήσεις τους κ.ά.

Για να μελετήσετε με ευκολία το βιβλίο θα πρέπει να έχετε κάποιες απαραίτητες γνώσεις. Αυτές θα τις βρείτε στο εισαγωγικό κεφάλαιο ή/και στην αρχή των ενοτήτων.

Με την ελπίδα ότι θα αξιοποιήσετε με το καλύτερο τρόπο το βιβλίο που κρατάτε στα χέρια σας, ευχόμαστε **ΚΑΛΗ ΣΧΟΛΙΚΗ ΧΡΟΝΙΑ!**



ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Έχετε στα χέρια σας ένα νέο βιβλίο Γεωμετρίας για το λύκειο. Προτού ξεκινήσετε τη μελέτη του, θα ήταν σκόπιμο να διαβάσετε αυτό το εισαγωγικό μέρος, στο οποίο θα βρείτε έννοιες και σημαντικά στοιχεία της θεωρίας. Κάποια από αυτά ίσως τα έχετε συναντήσει στο Γυμνάσιο και είναι απαραίτητα για να ανταποκριθείτε με επιτυχία στις γνώσεις που αναμένεται να αποκτήσετε. Δεν θα δοθούν αποδείξεις και ασκήσεις, παρά μόνο επεξηγήσεις και υπενθυμίσεις.

Στην Ευκλείδεια Γεωμετρία δίνεται ιδιαίτερο βάρος στις γεωμετρικές κατασκευές στις οποίες τα μοναδικά όργανα που χρησιμοποιούνται είναι ο **κανόνας (αδιαβάθμητος χάρακας)** και ο **διαβήτης**. Στις προηγούμενες τάξεις μάθατε να χρησιμοποιείτε τον διαβαθμισμένο χάρακα (για μετρήσεις και χάραξη ευθειών), τον γνώμονα (για χάραξη καθέτων) και το μοιρογνωμόνιο (για μέτρηση γωνιών). Στη συνέχεια, τα όργανα αυτά μπορείτε να τα χρησιμοποιείτε στα έργα εξερεύνησης και στις ασκήσεις, εκτός αν ζητείται μόνο η χρήση κανόνα και διαβήτη.

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΜΑΘΗΣΙΑΚΩΝ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ

1 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

Αίτημα – Αξίωμα	Είναι μια πρόταση η οποία δεν αποδεικνύεται, αλλά θεωρείται είτε προφανής, ή αποτέλεσμα κάποιας απόφασης.
Θεώρημα	Είναι μια πρόταση η οποία αποδεικνύεται με τη βοήθεια των ορισμών, των διατυπωμένων αξιωμάτων και των προηγούμενων θεωρημάτων.
Πόρισμα	Είναι μια πρόταση που προκύπτει ως λογικό συμπέρασμα-επακόλουθο ενός θεωρήματος (το οποίο συνήθως προηγείται) και στις περισσότερες περιπτώσεις, η απόδειξή του παραλείπεται ή παρατίθεται σύντομα.

Σχετικά με τις αποδείξεις στο Θεώρημα

Οι αποδείξεις των θεωρημάτων ακολουθούν τη λογική «υπόθεση-συμπέρασμα». Τα δεδομένα του θεωρήματος θεωρούνται ως *υπόθεση*, ενώ ως *συμπέρασμα* ο ισχυρισμός που ζητείται να αποδειχθεί.

Π.χ. *στο ΘΕΩΡΗΜΑ 1.2α: Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, τότε οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες.*

Υπόθεση	Δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη
Συμπέρασμα	Οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες

2 ΠΡΩΤΑΡΧΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Η Ευκλείδεια Γεωμετρία έχει ως εφαλτήριο έννοιες που προκύπτουν άμεσα από την νόηση ή και την εμπειρία μας. Τέτοιες έννοιες είναι το **σημείο**, η **ευθεία**, η **επιφάνεια** και το **επίπεδο**. Τις έννοιες αυτές τις αποδεχόμαστε ως **πρωταρχικές**, χωρίς άλλες ερμηνείες.

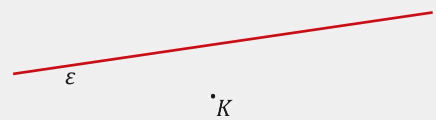
Αποδεχόμαστε ότι:

• Το σημείο δεν έχει διαστάσεις.
Συμφωνούμε να το παριστάνουμε με μια τελεία και να το ονομάζουμε με κεφαλαίο γράμμα **π.χ.** *Α*, *Β*, κ.λπ.

• Από δύο σημεία διέρχεται μία μόνο ευθεία.

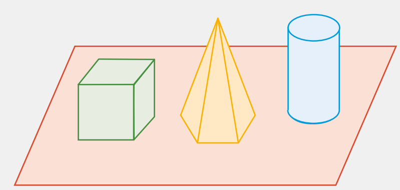
• Κάθε ευθεία έχει άπειρα σημεία και εκτείνεται απεριόριστα και προς τις δύο μεριές.

• Για κάθε ευθεία υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο του επιπέδου που δεν ανήκει σε αυτή.



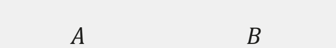
• Από όλες τις επιφάνειες πιο απλή είναι η **επίπεδη επιφάνεια** ή απλά το **επίπεδο** (μπορείτε να τη φανταστείτε π.χ. ως την επιφάνεια ενός τοίχου, την επιφάνεια του δαπέδου μιας τάξης κ.λπ.).

• Στα τρία πρώτα κεφάλαια αυτού του βιβλίου θα ασχοληθείτε με σχήματα τα οποία ανήκουν στο ίδιο επίπεδο, **τα επίπεδα σχήματα**, δηλαδή με **Γεωμετρία του επιπέδου**, που λέγεται και **Επιπεδομετρία**. Στο τελευταίο κεφάλαιο θα ασχοληθείτε με τη **Γεωμετρία του χώρου** η οποία λέγεται και **Στερεομετρία**.

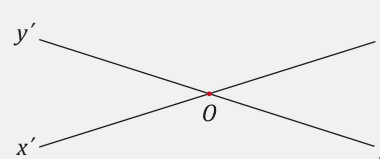


3 ΕΥΘΕΙΕΣ

Η μοναδική ευθεία που διέρχεται από δύο διαφορετικά σημεία *Α* και *Β* ονομάζεται ευθεία *ΑΒ* ή ευθεία *ΒΑ*. Αυτή μπορεί να συμβολίζεται με ένα μικρό γράμμα του αλφαβήτου, όπως ε, ζ, ε', ε_1 κ.λπ.) ή και με δύο μικρά γράμματα π.χ. $x'x$, τα οποία δηλώνουν, ότι η ευθεία επεκτείνεται και προς τις δύο μεριές.



Δύο ευθείες του επιπέδου μπορεί:

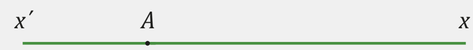


• Να έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, οπότε λέγονται **τεμνόμενες** ευθείες, και το κοινό τους σημείο λέγεται **τομή των δύο ευθειών**.

• Να μην έχουν κανένα κοινό σημείο, οπότε λέγονται **παράλληλες.** Το ότι οι ευθείες ε και ζ είναι παράλληλες, το συμβολίζουμε ως $\varepsilon // \zeta$.

• Να έχουν τουλάχιστον δύο κοινά σημεία, οπότε λέμε ότι **ταυτίζονται.**

4 ΗΜΙΕΥΘΕΙΕΣ



Έστω η ευθεία *x′x* και το σημείο της *A*, όπως στο σχήμα. Το σημείο χωρίζει την ευθεία σε δύο μέρη τα οποία συμβολίζονται *Ax* και *Ax′* και ονομάζονται **ημιευθείες, με αρχή το σημείο *A*.** Η ευθεία *x′x* λέγεται **φορέας** των ημιευθειών, και οι ημιευθείες *Ax* και *Ax′*, που έχουν κοινή αρχή και ίδιο φορέα, αλλά επεκτείνονται σε διαφορετικές μεριές του, ονομάζονται **αντικείμενες ημιευθείες**.

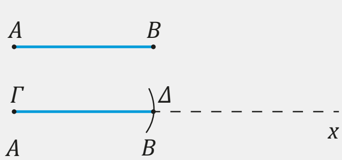
5 ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟ ΤΜΗΜΑ

Θεωρήστε δύο διαφορετικά σημεία *A* και *B* μιας ευθείας *ε*, όπως στο σχήμα. **Ευθύγραμμο τμήμα *AB* ή *BA*** λέγεται το σχήμα που αποτελείται από τα δύο σημεία *A* και *B* και τα σημεία της ευθείας *ε* που βρίσκονται μεταξύ των *A* και *B*. Τα σημεία *A* και *B* λέγονται **άκρα του ευθυγράμμου τμήματος *AB***, η ευθεία *ε* λέγεται **φορέας του *AB*** και τα σημεία του ευθυγράμμου τμήματος, εκτός των άκρων του, λέγονται **εσωτερικά σημεία του *AB***, π.χ. το *Γ* είναι εσωτερικό σημείο του *AB*. Τα υπόλοιπα σημεία της ευθείας *ε* λέγονται **εξωτερικά του ευθυγράμμου τμήματος *AB***, π.χ. το *Δ* είναι εξωτερικό του *AB*.

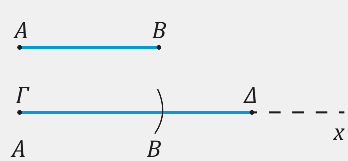
Σύγκριση ευθυγράμμων τμημάτων

Για να συγκρίνουμε δύο ευθύγραμμα τμήματα μετατοπίζουμε το ένα με τη βοήθεια του διαβήτη στον φορέα του άλλου, ώστε να έχουν κοινή αρχή, και μπορεί να είναι:

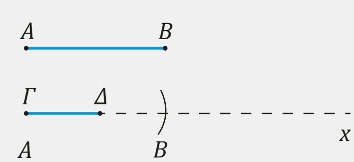
Ίσα, $AB = ΓΔ$.



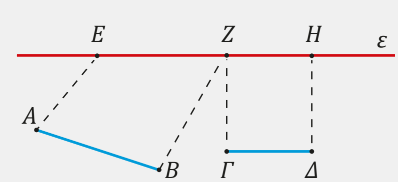
Άνισα, $AB < ΓΔ$



$AB > ΓΔ$



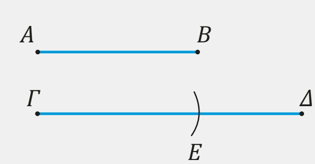
6 ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ



Για να προσθέσετε δύο ευθύγραμμα τμήματα τα μεταφέρετε σε μια ευθεία **διαδοχικά**, το ένα μετά το άλλο ώστε να έχουν κοινό άκρο (και κανένα κοινό εσωτερικό σημείο). Το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα μη κοινά άκρα τους είναι το άθροισμα των δύο ευθυγράμμων τμημάτων. Για παράδειγμα, στο σχήμα είναι

$$AB + ΓΔ = EZ + ZH = EH$$

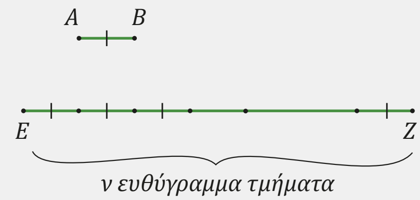
δηλαδή, το *EH* ονομάζεται **άθροισμα** των *AB* και *ΓΔ*



Για να αφαιρέσετε δύο ευθύγραμμα τμήματα μεταφέρετε το μικρότερο πάνω στο μεγαλύτερο, ώστε να έχουν κοινό άκρο. Το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα μη κοινά άκρα τους, είναι η **διαφορά** των δύο ευθυγράμμων τμημάτων.
Για παράδειγμα στο σχήμα $ΓΔ > AB$, οπότε $ΓΔ - AB = ΓΔ - ΓE = EΔ$
Το *EΔ* είναι η **διαφορά** του *AB* από το *AΔ*.

Για να πολλαπλασιάσουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα AB με ένα φυσικό αριθμό ν μεταφέρουμε σε ευθεία διαδοχικά ν φορές το AB.

$EZ = \nu \cdot AB$

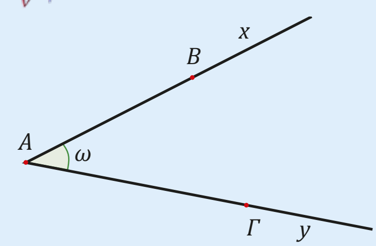


7 ΓΩΝΙΕΣ

Γνωρίζετε ότι:

Κυρτή γωνία

Κάθε ευθεία ε ενός επιπέδου το χωρίζει σε δύο ημιεπίπεδα μέρη. Κάθε ένα από αυτά τα μέρη, μαζί με τα σημεία της ε, ονομάζεται **ημιεπίπεδο.** Για να καθορίσουμε σε ποιο από τα δύο ημιεπίπεδα αναφερόμαστε κάθε φορά, εκτός από την ευθεία, χρειαζόμαστε και ένα σημείο του ημιεπιπέδου που δεν ανήκει σε αυτήν. Αν από το σημείο A ενός επιπέδου φέρουμε δύο ημιευθείες Ax και Ay, που δεν έχουν τον ίδιο φορέα, τότε το σχήμα που αποτελείται από τα κοινά σημεία των ημιεπιπέδων που ορίζονται από την Ax και το Γ και από την Ay και το B, όπου B σημείο της Ax και Γ της Ay, λέγεται **κυρτή γωνία** με **κορυφή** το A και **πλευρές** Ax και Ay. Συμβολίζεται με $\widehat{xAy}$ ή $\widehat{yAx}$ ή $\hat{A}$ ή $\widehat{BA\Gamma}$ ή $\widehat{\Gamma AB}$ ή $\hat{\omega}$.



Τα σημεία του επιπέδου που δεν ανήκουν στην κυρτή γωνία $\widehat{xAy}$ μαζί με τα σημεία των ημιευθειών Ax και Ay αποτελούν το σχήμα που ονομάζεται **μη κυρτή γωνία** με κορυφή A και πλευρές τις ημιευθείες Ax και Ay.

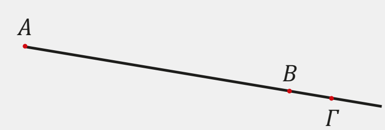
Τα σημεία μίας γωνίας, που δεν ανήκουν στις πλευρές της λέγονται **εσωτερικά σημεία της γωνίας** και αποτελούν το **εσωτερικό** της γωνίας. Τα σημεία που δεν ανήκουν στη γωνία λέγονται **εξωτερικά σημεία της γωνίας** και αποτελούν το **εξωτερικό** της γωνίας.

Σχόλιο

Γνωρίζετε ότι οι γωνίες μετρώνται σε μοίρες

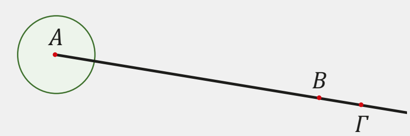
Μηδενική γωνία

Αν οι ημιευθείες AB και $A\Gamma$ ταυτίζονται, τότε η $\widehat{BA\Gamma}$ λέγεται **μηδενική γωνία** και έχει μέτρο 0^o.



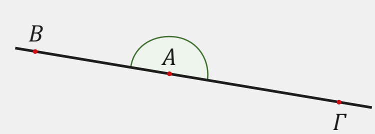
Πλήρης γωνία

Η μη κυρτή γωνία $\widehat{BA\Gamma}$ η οποία ταυτίζεται με όλο το επίπεδο, λέγεται **πλήρης γωνία** και έχει μέτρο 360^o.



Ευθεία γωνία

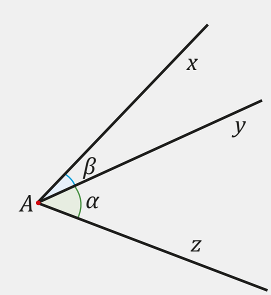
Αν οι ημιευθείες AB και $A\Gamma$ είναι αντικείμενες, τότε καθένα από τα δύο ημιεπίπεδα που ορίζει η ευθεία $B\Gamma$ λέγεται **ευθεία γωνία** και έχει μέτρο 180^o.



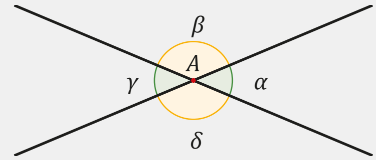
Εφεξής γωνίες

Δύο γωνίες λέγονται **εφεξής** αν έχουν κοινή κορυφή, μία κοινή πλευρά και τις μη-κοινές πλευρές εκατέρωθεν της κοινής.

Στο σχήμα εφεξής είναι οι $\widehat{xAy}$ και $\widehat{yAz}$ και ισχύουν $\widehat{xAz} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}$ και $\hat{\alpha} = \widehat{xAz} - \hat{\beta}$

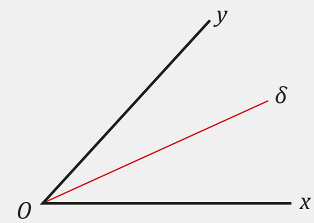


Κατακορυφήν γωνίες



Δύο γωνίες λέγονται **κατακορυφήν γωνίες** αν έχουν κοινή κορυφή και οι πλευρές τους είναι αντικείμενες ημιευθείες.
Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες (γιατί;), στο σχήμα οι $\hat{\alpha} = \hat{\gamma}$ και οι $\hat{\delta} = \hat{\beta}$.

Διχοτόμος γωνίας

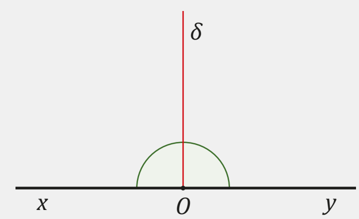


Διχοτόμος μιας γωνίας $x\hat{O}y$ λέγεται η ημιευθεία $O\delta$, η οποία βρίσκεται στο εσωτερικό της $x\hat{O}y$ και τη χωρίζει σε δύο ίσες γωνίες, δηλαδή

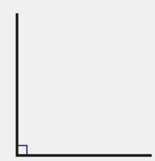
$x\hat{O}\delta = \delta\hat{O}y = \dfrac{x\hat{O}y}{2}$

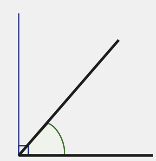
Κάθε γωνία έχει μοναδική διχοτόμο.

Κάθετες ευθείες και είδη γωνιών

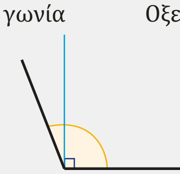


Έστω $x\hat{O}y$ μια ευθεία γωνία και $O\delta$ η διχοτόμος της. Καθεμία από τις γωνίες $x\hat{O}\delta$ και $\delta\hat{O}y$ που προκύπτουν λέγεται **ορθή γωνία**. Η ορθή συμβολίζεται με ∟. δηλαδή $x\hat{O}\delta = \delta\hat{O}y = 1$∟.
Κάθε ορθή γωνία έχει μέτρο 90^o.

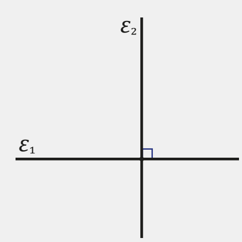

Ορθή γωνία


Οξεία γωνία

Οξεία γωνία: λέγεται η κυρτή γωνία που είναι μικρότερη από μια ορθή (έχει μέτρο μικρότερο από 90^o).

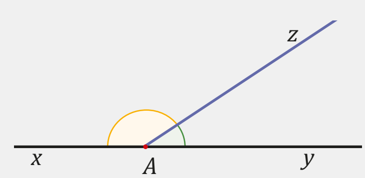

Αμβλεία γωνία

Αμβλεία γωνία: λέγεται η κυρτή γωνία που είναι μεγαλύτερη από μια ορθή (έχει μέτρο μεγαλύτερο από 90^o).



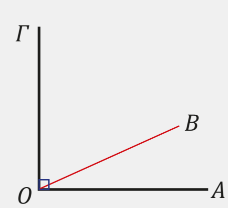
Οι ευθείες που είναι φορείς των πλευρών μίας ορθής γωνίας ονομάζονται **κάθετες μεταξύ τους**. Δύο κάθετες ευθείες ε_1, ε_2 συμβολίζονται με $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$.

Παραπληρωματικές Γωνίες



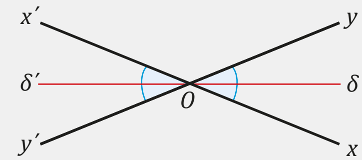
Δύο γωνίες λέγονται **παραπληρωματικές** αν το άθροισμά τους είναι ίσο με μία ευθεία γωνία (ή έχει μέτρο 180^o) και καθεμία από τις δύο λέγεται **παραπληρωματική** της άλλης. Στο σχήμα φαίνονται οι $\widehat{xAz}$ και $\widehat{zAy}$ που είναι δύο εφεξής και παραπληρωματικές γωνίες $\widehat{xAz} + \widehat{zAy} = 180^o$.

Συμπληρωματικές γωνίες



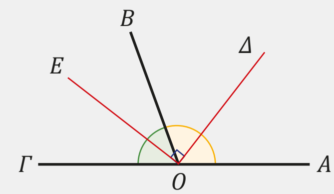
Δύο γωνίες λέγονται **συμπληρωματικές**, αν το άθροισμά τους είναι ίσο με μία ορθή γωνία (90^o). Καθεμία από αυτές λέγεται **συμπληρωματική ή συμπλήρωμα** της άλλης, οι γωνίες $A\hat{O}B$ και $B\hat{O}\Gamma$ είναι συμπληρωματικές.
$A\hat{O}B + B\hat{O}\Gamma = 90^o$. Στο σχήμα οι $\Gamma\hat{O}B$ και $B\hat{O}A$ είναι δύο εφεξής και συμπληρωματικές γωνίες.

Διχοτόμοι δύο κατακορυφήν γωνιών



Η προέκταση της διχοτόμου μιας γωνίας είναι και διχοτόμος της κατακορυφήν της. Γιατί;
Αν η $O\delta$ είναι διχοτόμος της $x\hat{O}y$, τότε η $O\delta΄$ θα είναι διχοτόμος της $x΄\hat{O}y΄$.

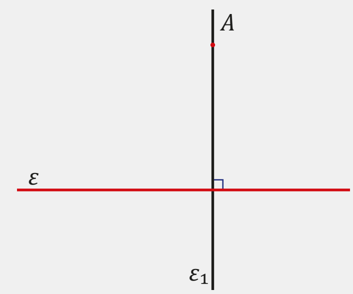
Διχοτόμοι δύο εφεξής παραπληρωματικών γωνιών



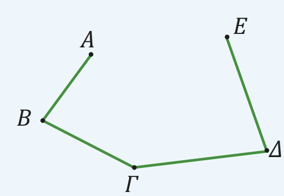
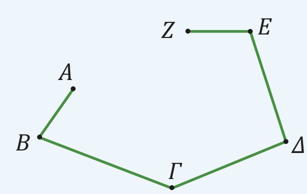
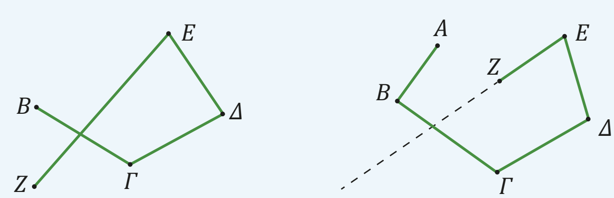
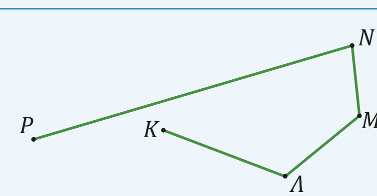
Οι διχοτόμοι δύο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών είναι μεταξύ τους κάθετες. Γιατί;
Αν η $O\Delta$ είναι διχοτόμος της $\widehat{AOB}$ και η ΟΕ διχοτόμος της $\widehat{BO\Gamma}$,
τότε $O\Delta \perp OE$.

8 ΕΥΘΕΙΑ ΚΑΘΕΤΗ ΑΠΟ ΣΗΜΕΙΟ ΣΕ ΕΥΘΕΙΑ

Από σημείο A εκτός ευθείας ε διέρχεται μοναδική κάθετη ε_1 προς την ε.
Αν το A είναι σημείο της ε τότε από το A διέρχεται επίσης μοναδική ευθεία κάθετη προς την ε.

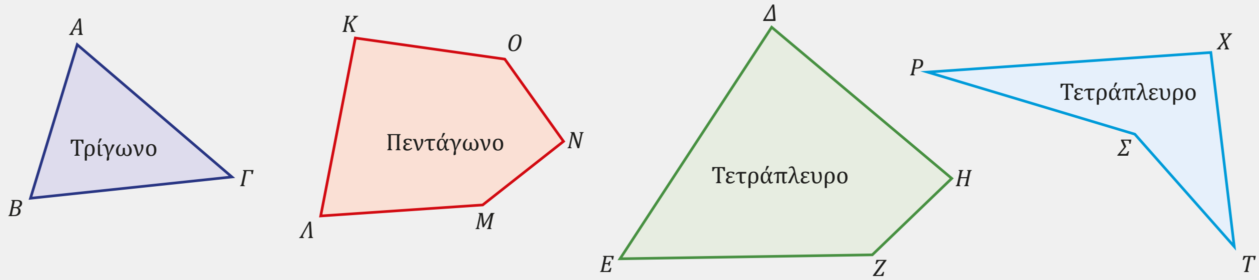


9 ΤΕΘΛΑΣΜΕΝΗ ΓΡΑΜΜΗ

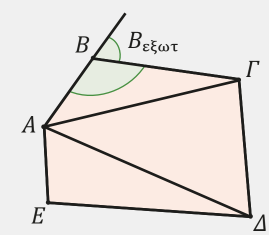
<table>
<tr><td>Το σχήμα ΑΒΓΔΕ λέγεται τεθλασμένη γραμμή ή απλά τεθλασμένη με άκρα Α και Ε.
Τα Α, Β, Γ, Δ, Ε λέγονται κορυφές, ενώ τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, λέγονται πλευρές της τεθλασμένης.</td><td></td></tr>
<tr><td>Η τεθλασμένη ΑΒΓΔΕΖ λέγεται κυρτή διότι η προέκταση του φορέα κάθε πλευράς αφήνει όλες τις άλλες κορυφές στο ίδιο ημιεπίπεδο.</td><td></td></tr>
<tr><td>Η τεθλασμένη ΑΒΓΔΕΖ λέγεται μη κυρτή, διότι ο φορέας της ΕΖ χωρίζει την τεθλασμένη σε διαφορετικά ημιεπίπεδα.</td><td></td></tr>
<tr><td>Η ΚΛΜΝΡ λέγεται απλή τεθλασμένη διότι δύο οποιεσδήποτε μη διαδοχικές πλευρές της δεν έχουν κοινό σημείο.</td><td></td></tr>
</table>

10 ΠΟΛΥΓΩΝΑ

Μια γραμμή ονομάζεται κλειστή όταν τα άκρα της ταυτίζονται.
Μια κλειστή και απλή τεθλασμένη λέγεται **πολύγωνο**.



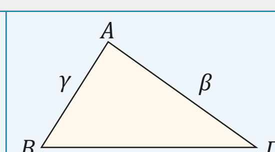
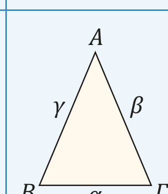
Αν η τεθλασμένη είναι κυρτή, τότε το **πολύγωνο** λέγεται **κυρτό**, ενώ αν η τεθλασμένη είναι μη κυρτή, τότε το **πολύγωνο** λέγεται **μη κυρτό**.
Τα πολύγωνα *ΑΒΓ*, *ΚΛΜΝΟ* και *ΔΕΖΗ* στα παραπάνω σχήματα είναι κυρτά, ενώ το *ΡΣΤΧ* είναι μη κυρτό. Στο εξής, λέγοντας πολύγωνο θα εννοούμε κυρτό πολύγωνο
Κάθε πολύγωνο με τρεις κορυφές λέγεται **τρίγωνο**, με τέσσερις **τετράπλευρο**, με πέντε **πεντάγωνο** και γενικά με ν κορυφές (πλην των τεσσάρων), **ν-γωνο**. Προφανώς, σε κάθε πολύγωνο το πλήθος των πλευρών είναι ίσο με το πλήθος των κορυφών.
Με τα γράμματα των κορυφών του πολυγώνου συμβολίζονται και οι **γωνίες του πολυγώνου** (π.χ. η γωνία $\hat{B} = \widehat{ΑΒΓ}$). Η **παραπληρωματική** μιας γωνίας του πολυγώνου λέγεται **εξωτερική της γωνία** π.χ. εξωτερική της $\hat{B}$ είναι η $\hat{B}_{εξωτ}$.
Κάθε ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δύο μη διαδοχικές κορυφές λέγεται **διαγώνιος του πολυγώνου.** Στο σχήμα *ΑΓ και ΑΔ* είναι οι διαγώνιοι από την κορυφή *Α*.

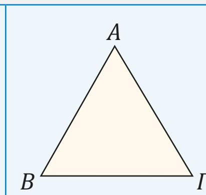


11 ΕΙΔΗ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

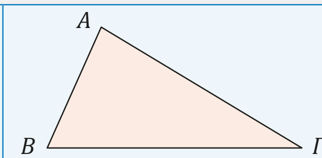
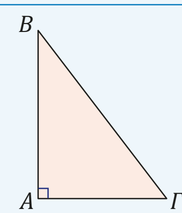
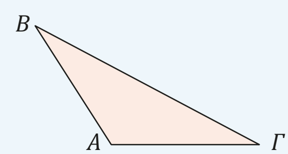
Ένα τρίγωνο *ΑΒΓ* έχει τρεις κορυφές *Α*, *Β*, *Γ*, τρεις **πλευρές** *ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ*, οι οποίες συμβολίζονται και με *γ, α, β* αντίστοιχα και τρεις γωνίες $\widehat{ΒΑΓ}$, $\widehat{ΑΒΓ}$, και $\widehat{ΒΓΑ}$ ή $\hat{Α}$, $\hat{Β}$ και $\hat{Γ}$ αντίστοιχα, οι κορυφές των οποίων λέγονται και **κορυφές** του τριγώνου. Οι πλευρές και οι γωνίες λέγονται **πρωτεύοντα ή κύρια στοιχεία τριγώνου**.

Τα τρίγωνα **ως προς τις πλευρές** χωρίζονται σε τρία είδη:

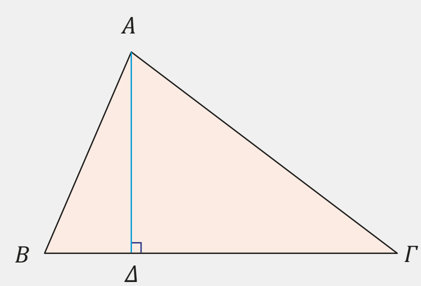
Σκαληνό τρίγωνο: αυτό που έχει τις τρεις πλευρές άνισες.	
Ισοσκελές τρίγωνο: αυτό που έχει δύο πλευρές ίσες. Στο σχήμα δεξιά ισχύει *ΑΒ=ΑΓ*. Η *ΒΓ* λέγεται **βάση** του ισοσκελούς και η *Α* **κορυφή** του ισοσκελούς.	

Ισόπλευρο τρίγωνο: αυτό που έχει και τις τρεις πλευρές ίσες. Στο σχήμα δεξιά ισχύει $AB = AΓ = BΓ$.	

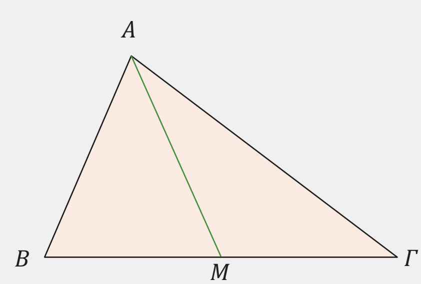
Τα τρίγωνα, επίσης, χωρίζονται σε τρία είδη **ως προς τις γωνίες**

Οξυγώνιο τρίγωνο: αυτό που έχει τρεις γωνίες οξείες.	
Ορθογώνιο τρίγωνο: αυτό που έχει μια γωνία ορθή.	
Αμβλυγώνιο τρίγωνο: αυτό που έχει μια γωνία αμβλεία.	

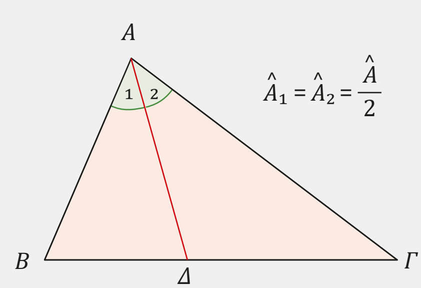
Εκτός από τα κύρια στοιχεία του τριγώνου ορίζονται και τα **δευτερεύοντα:**



Ύψος τριγώνου: λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα το οποίο φέρεται από μία κορυφή κάθετα στην απέναντι πλευρά, ή στον φορέα της. Προφανώς σε κάθε τρίγωνο υπάρχουν τρία ύψη, ένα από κάθε κορυφή. Στο τρίγωνο $ABΓ$ τα ύψη από τις κορυφές A, B, $Γ$ συμβολίζονται με $υ_α$, $υ_β$, $υ_γ$ αντίστοιχα. Στο σχήμα είναι $AΔ \perp BΓ$, επομένως $AΔ = υ_α$.



Διάμεσος τριγώνου: λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει μία κορυφή με το μέσο της απέναντι πλευράς. Σε κάθε τρίγωνο υπάρχουν τρεις διάμεσοι, μία από κάθε κορυφή. Στο τρίγωνο $ABΓ$ οι διάμεσοι από τις κορυφές A, B, $Γ$ συμβολίζονται με $μ_α$, $μ_β$, $μ_γ$ αντίστοιχα. Στο σχήμα είναι $BM = MΓ$, *επομένως* $AM = μ_α$.

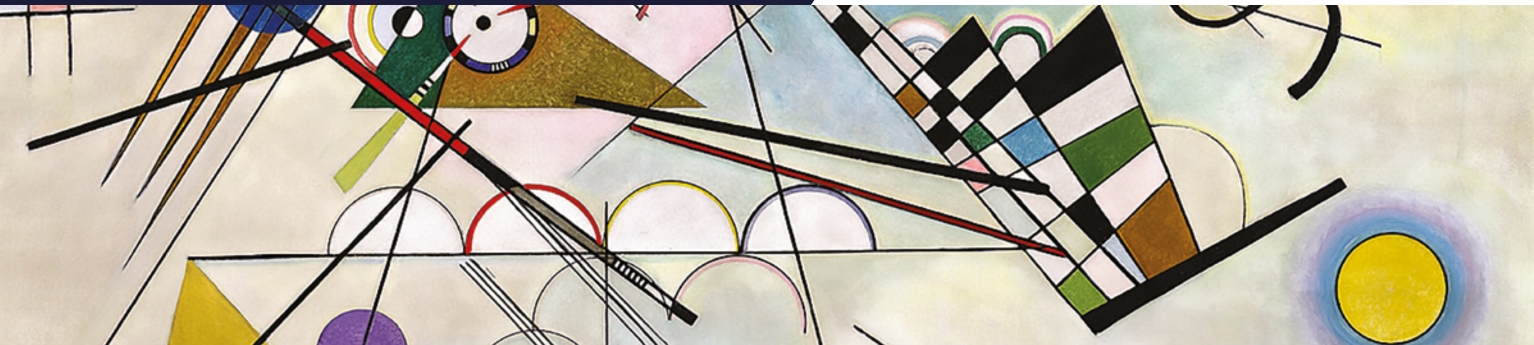


Διχοτόμος τριγώνου: λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει μία κορυφή με την απέναντι πλευρά και διχοτομεί την αντίστοιχη γωνία. Σε κάθε τρίγωνο υπάρχουν τρεις διχοτόμοι, μία από κάθε κορυφή. Στο τρίγωνο $ABΓ$ οι διχοτόμοι από τις κορυφές A, B, $Γ$ συμβολίζονται με $δ_α$, $δ_β$, $δ_γ$ αντίστοιχα. Στο σχήμα, το $AΔ$ διχοτομεί τη γωνία $\hat{A}$, επομένως $AΔ= δ_α$.

1ο Κεφάλαιο

Παράλληλες Ευθείες

- Το 5ο Αίτημα του Ευκλείδη στην Εξέλιξη της Γεωμετρίας
- Δύο Παράλληλες Ευθείες που τέμνονται από τρίτη
- Άθροισμα Γωνιών Τριγώνου
- Γωνίες με Πλευρές Κάθετες ή Παράλληλες
- Σχεδιασμός Παραλλήλων Ευθειών
- Οι Παράλληλες Ευθείες στη ζωή μας
- Άθροισμα Γωνιών Κυρτού *ν*-γώνου



ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

1

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

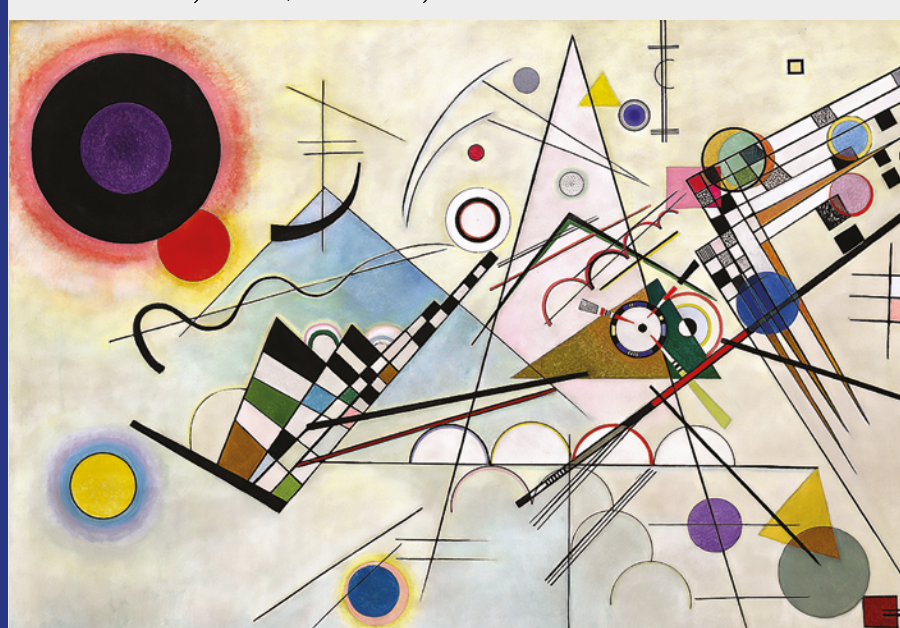
Θα μάθετε:

- Να αναγνωρίζετε τη σημασία του 5ου Ευκλείδειου Αιτήματος στην εξέλιξη της Γεωμετρίας.
- Να αποδεικνύετε τις σχέσεις γωνιών που σχηματίζουν παράλληλες ευθείες όταν τέμνονται από τρίτη, να διατυπώνετε τους αντίστροφους ισχυρισμούς και να τους αναγνωρίζετε ως κριτήρια παραλληλίας.
- Να αποδεικνύετε ότι το άθροισμα γωνιών τριγώνου είναι ίσο με μία ευθεία γωνία.
- Να αναγνωρίζετε γωνίες με πλευρές κάθετες ή παράλληλες, να διερευνάτε και να αποδεικνύετε τις μεταξύ τους σχέσεις.
- Να σχεδιάζετε με γεωμετρικά όργανα από σημείο εκτός ευθείας, ευθεία παράλληλη προς αυτήν και να αιτιολογείτε τη διαδικασία.
- Να χρησιμοποιείτε ιδιότητες των παράλληλων ευθειών για την επίλυση μαθηματικών και ρεαλιστικών προβλημάτων.
- Να αποδεικνύετε τον τύπο για το άθροισμα γωνιών κυρτού ν-γώνου, που θα έχετε ανακαλύψει.

Εάν σας ρωτούσαν σε ποια από τα παρακάτω εμφανίζονται παράλληλες ευθείες, ποια θα επιλέγατε;

- κλωστοϋφαντουργία
- ζωγραφική
- ρομποτική
- καλλιέργειες
- τροχιές των σταγόνων της βροχής
- γεωδαισία
- ναυσιπλοΐα
- κατασκευές
- οδοποιία
- βλαστούς των φυτών

Εάν τα επιλέξατε όλα, τότε επιλέξατε σωστά!



Σύνθεση VIII, W. Kandinsky, (1923)
The Solomon R. Guggenheim Museum, Νέα Υόρκη.

1.1 ΤΟ 5° ΑΙΤΗΜΑ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΗ ΣΤΗΝ ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

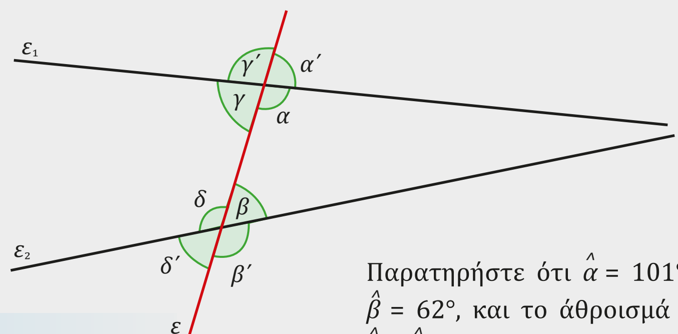
Στην ενότητα αυτή θα μάθετε:

- Να αναγνωρίζετε τη σημασία του 5ου Ευκλείδειου Αιτήματος στην εξέλιξη της Γεωμετρίας

Σχόλιο

Οι γωνίες που βρίσκονται εντός των ε_1 και ε_2 δηλαδή οι $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$ και $\hat{\delta}$ λέγονται **εντός**. Οι γωνίες $\hat{\alpha}', \hat{\beta}', \hat{\gamma}'$ και $\hat{\delta}'$ λέγονται **εκτός**. Η ευθεία ε λέγεται **τέμνουσα των ε_1 και ε_2**. Οι γωνίες προς το ίδιο μέρος της τέμνουσας λέγονται **επί τα αυτά μέρη** π.χ. οι $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ ή οι $\hat{\gamma}, \hat{\delta}'$. Οι γωνίες εκατέρωθεν της τέμνουσας λέγονται **εναλλάξ** π.χ. $\hat{\alpha}', \hat{\delta}$ ή οι $\hat{\beta}, \hat{\gamma}$.

Οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται από την ε, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Με τη βοήθεια του μοιρογνωμονίου μετρήστε τις γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$, βρείτε το άθροισμα $\hat{\alpha}+\hat{\beta}$ και συγκρίνετε το άθροισμα με την ευθεία γωνία.



Παρατηρήστε ότι $\hat{\alpha} = 101°$ και $\hat{\beta} = 62°$, και το άθροισμά τους $\hat{\alpha}+\hat{\beta}$, προφανώς, είναι μικρότερο από 180°.
Αν κάνετε το ίδιο για το άλλο ζεύγος $\hat{\gamma}$ και $\hat{\delta}$ των εντός και επί τα αυτά μέρη, θα διαπιστώσετε ότι το άθροισμά τους είναι μεγαλύτερο από 180°.
Διαπιστώνετε ότι οι ευθείες τέμνονται προς το μέρος που οι εντός και επί τα αυτά μέρη έχουν άθροισμα μικρότερο από 180°.

Τομή δύο ευθειών που τέμνονται από τρίτη

Η διπλανή διαπίστωση ισχύει γενικά;
Διατυπώστε μία **εικασία**.

Η εικασία είναι ένας ισχυρισμός που συχνά διατυπώνεται μετά από πειραματισμό και παρατήρηση

Πειραματίζομαι → **Παρατηρώ** → **Εικάζω**

Εικασία - άλυτα προβλήματα


EVCLIDI MEGAREN.

Το 5ο Αίτημα, όπως το διατύπωσε ο Ευκλείδης:
Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες.

Ο Ευκλείδης, όπως τον φαντάστηκε ο ζωγράφος Justus van Gent.
Wikimedia Commons / Public Domain

Το 5ο Αίτημα του Ευκλείδη στην Εξέλιξη της Γεωμετρίας

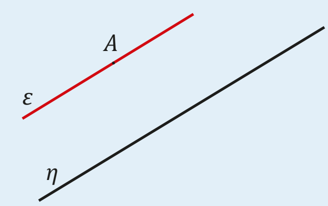
Την εικασία αυτή διατύπωσε ο Ευκλείδης ως εξής:
«Εάν μια ευθεία που τέμνει δύο ευθείες σχηματίζει τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες μικρότερες από δύο ορθές, τότε οι δύο ευθείες προεκτεινόμενες επ' άπειρον συναντώνται προς το μέρος που οι σχηματιζόμενες γωνίες είναι μικρότερες από δύο ορθές».
Επειδή όμως δεν μπορεί να αποδειχθεί με τις προϋπάρχουσες γνώσεις, τη διατύπωσε ως αξίωμα, γνωστό ως το **5° αίτημα του Ευκλείδη**.

Το αίτημα αυτό είναι ισοδύναμο με καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:

Π1 Από σημείο εκτός μιας ευθείας διέρχεται μόνο μια ευθεία παράλληλη προς αυτή (η επικρατούσα διατύπωση αντί του 5ου αιτήματος).

Π2 Αν μια ευθεία τέμνει δύο άλλες ευθείες και αυτές αποκλίνουν η μία από την άλλη από το ένα μέρος, τότε από το άλλο μέρος συγκλίνουν.

Η προσπάθεια να αποδειχθεί το 5ο αίτημα οδήγησε στη γέννηση άλλων γεωμετριών στις οποίες αυτό δεν ισχύει.

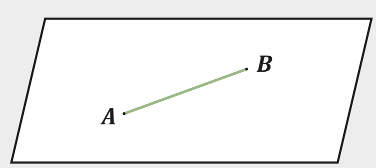


Ισχύουν οι παραπάνω ισοδύναμες προτάσεις σε οποιαδήποτε επιφάνεια;

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.1α

Αν σε μία επίπεδη επιφάνεια θέλετε να πάτε από ένα σημείο *A* σε ένα σημείο *B*, τότε η συντομότερη διαδρομή που θα διανύσετε είναι το ευθύγραμμο τμήμα *AB*. Ισχύει το ίδιο όταν μπορείτε να κινηθείτε μόνο πάνω στην επιφάνεια της Γης;

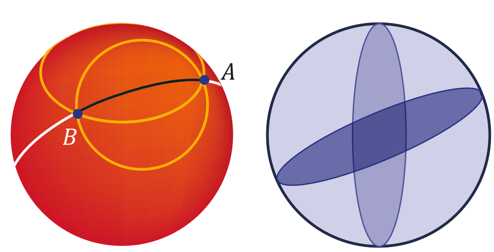
ΑΠΑΝΤΗΣΗ:
Η επιφάνεια της Γης είναι σφαιρική, άρα δεν μπορείτε να κινηθείτε ευθύγραμμα από το *A* στο *B* (εκτός κι αν σκάψετε τούνελ).



Εντός, εκτός, εναλλάξ, επί τα αυτά!!!

Σφαιρική γεωμετρία

Παρατηρήστε στην εικόνα, ή εκτελώντας το μικροπείραμα, ότι:
Όσο μεγαλώνει ο κύκλος, τόσο μικραίνει το τόξο που ενώνει τα *A* και *B*. Άρα το μικρότερο τόξο (δηλ., η συντομότερη σε μήκος διαδρομή) βρίσκεται στον μέγιστο κύκλο, δηλαδή εκείνον που έχει κέντρο το κέντρο της σφαίρας.



Προκύπτουν οι αντιστοιχίσεις:

Επίπεδο	→	Επιφάνεια Σφαίρας
Ευθεία	→	Μέγιστος κύκλος
Ευθύγραμμο τμήμα	→	Τόξο μέγιστου κύκλου

Επομένως δεν υπάρχουν παράλληλες ευθείες, αφού όλοι οι μέγιστοι κύκλοι τέμνονται μεταξύ τους.

Ελάχιστη απόσταση δύο σημείων A, B που βρίσκονται στην επιφάνεια μιας σφαίρας

Μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες

Εκτός από τη σφαιρική γεωμετρία υπάρχουν και άλλες γεωμετρίες στις οποίες δεν ισχύει το 5ο αίτημα και για αυτό το λόγο ονομάζονται μη – Ευκλείδειες Γεωμετρίες, όπως η Υπερβολική Γεωμετρία, στην οποία υπάρχουν άπειρες παράλληλες από σημείο προς ευθεία και η Προβολική Γεωμετρία που χρησιμοποιούν οι ζωγράφοι.

Εφαρμογή 1.1α

Στο διπλανό σχήμα έχουν χαραχτεί διαφορετικές διαδρομές από την Αθήνα στο Λονδίνο. Ποια διαδρομή πιστεύετε ότι είναι πιο κοντά στην απόσταση Αθήνας-Λονδίνου, αφού η απόσταση είναι μοναδική;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

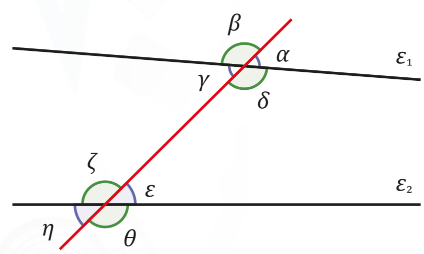
Η διαδρομή με το μαύρο χρώμα γιατί είναι η μικρότερη.

Ασκήσεις - Δραστηριότητες

Ομαδικές εργασίες για τα άλυτα προβλήματα των μαθηματικών

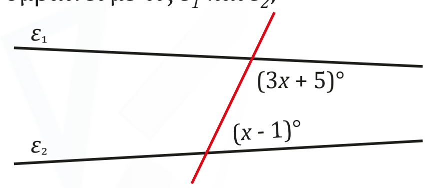
1 Να χαρακτηρίσετε τα ζεύγη των γωνιών:

α) $\hat{\beta}$ και $\hat{\varepsilon}$
β) $\hat{\alpha}$ και $\hat{\varepsilon}$
γ) $\hat{\beta}$ και $\hat{\theta}$
δ) $\hat{\zeta}$ και $\hat{\delta}$
ε) $\hat{\varepsilon}$ και $\hat{\delta}$

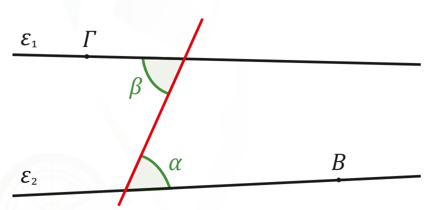


2 Αν ευθεία ε τέμνει τις ευθείες ε_1 και ε_2 και οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες που σχηματίζονται έχουν άθροισμα μικρότερο των 180°, τότε τι συμβαίνει με τις ε_1 και ε_2;

3 Να βρεθεί μεταξύ ποιων ορίων κυμαίνονται οι τιμές του x ώστε οι ευθείες ε_1 και ε_2 να τέμνονται.



4 Δύο ευθείες που τέμνονται από τρίτη σχηματίζουν τις γωνίες $\hat{\alpha} = 65°$ και $\hat{\beta} = 70°$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την τέμνουσα και το σημείο B ή από την τέμνουσα και το σημείο Γ;



5 Η απόσταση δύο σταθερών σημείων της γήινης σφαίρας, μετρήθηκε σε χιλιόμετρα σε διαφορετικά τόξα και βρέθηκαν τα εξής αποτελέσματα:

α) 2096 **β)** 2054 **γ)** 2200 **δ)** 2045

Ποιο από τα παραπάνω θεωρείτε ότι είναι πιο κοντά στην απόσταση;

6 Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι Σωστές και ποιες Λανθασμένες; Απαντήστε πρώτα για την Ευκλείδεια Γεωμετρία και μετά για τη Σφαιρική

α) Δύο ευθείες τέμνονται πάντα.
β) Αν δύο ευθείες αποκλίνουν από μία μεριά, τότε υποχρεωτικά τέμνονται.
γ) Από δύο σημεία A, B εκτός ευθείας ε διέρχεται μοναδική παράλληλος προς την ε.
δ) Από δύο σημεία A, B εκτός ευθείας ε διέρχεται πάντα ευθεία που τέμνει την ε.

1.2 ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ ΠΟΥ ΤΕΜΝΟΝΤΑΙ ΑΠΟ ΤΡΙΤΗ

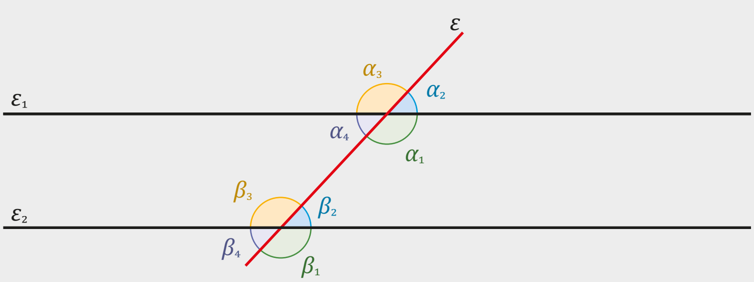
Στην ενότητα αυτή θα μάθετε:

- Να αποδεικνύετε τις σχέσεις γωνιών που σχηματίζουν παράλληλες ευθείες όταν τέμνονται από τρίτη, να διατυπώνετε τους αντίστροφους ισχυρισμούς και να τους αναγνωρίζετε ως κριτήρια παραλληλίας.

1.2.1 Γωνίες που σχηματίζονται από παράλληλες ευθείες

ΣΧΕΣΕΙΣ ΓΩΝΙΩΝ ΠΟΥ ΣΧΗΜΑΤΙΖΟΝΤΑΙ ΑΠΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

Οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται από την ε όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Κριτήριο τομής δύο ευθειών: Δύο ευθείες που τέμνονται από τρίτη

(α) Βρείτε ζεύγη εφεξής παραπληρωματικών γωνιών και ζεύγη κατακορυφήν γωνιών.

(β) Εάν γνωρίζετε ότι $\hat{\alpha}_2 = 47°$, τότε μπορείτε να υπολογίσετε και τις υπόλοιπες γωνίες;

(γ) Με τη βοήθεια του μοιρογνωμονίου μετρήστε τις γωνίες $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3, \hat{\beta}_4$.

(δ) Ποια σχέση συνδέει μεταξύ τους τις εντός εναλλάξ, τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη και τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες;

α

Ζεύγη εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών	$(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2), (\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_4), (\hat{\alpha}_3, \hat{\alpha}_2), (\hat{\alpha}_3, \hat{\alpha}_4), (\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$ κ.λπ.
Ζεύγη κατακορυφήν γωνιών	$(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_3), (\hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_4), (\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_3), (\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_4)$

β Επειδή $\hat{\alpha}_2 = 47°$, τότε $\hat{\alpha}_1 = 180° - \hat{\alpha}_2 = 180° - 47° = 133°$ ($\hat{\alpha}_1$ και $\hat{\alpha}_2$ είναι παραπληρωματικές) και $\hat{\alpha}_4 = \hat{\alpha}_2 = 47°$, $\hat{\alpha}_3 = \hat{\alpha}_1 = 133°$, αφού τα $(\hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_4)$ και $(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_3)$ είναι ζεύγη κατακορυφήν γωνιών.

γ Με το μοιρογνωμόνιο θα βρείτε ότι $\hat{\beta}_1 = \hat{\beta}_3 = 133°$ και $\hat{\beta}_2 = \hat{\beta}_4 = 47°$.

δ

Εντός εναλλάξ γωνίες	$\hat{\beta}_2 = \hat{\alpha}_4 = 47°$	$\hat{\beta}_3 = \hat{\alpha}_1 = 133°$
Εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες	$\hat{\beta}_2 = \hat{\alpha}_2 = 47°$	$\hat{\beta}_1 = \hat{\alpha}_1 = 133°$
Εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες	$\hat{\alpha}_1 = 133°, \hat{\beta}_2 = 47°$ οπότε, $\hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_2 = 180°$ (Παραπληρωματικές)	$\hat{\alpha}_4 = 47°, \hat{\beta}_3 = 133°$ οπότε, $\hat{\alpha}_4 + \hat{\beta}_3 = 180°$ (Παραπληρωματικές)

Μέτρηση γωνιών δύο παράλληλων ευθειών που τέμνονται από τρίτη

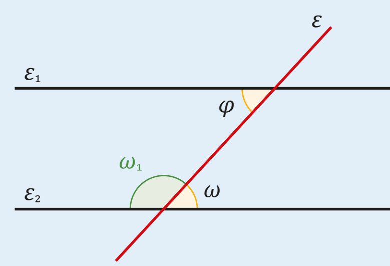
Μικροπείραμα

Μέτρηση γωνιών που σχηματίζονται από δύο παράλληλες που τέμνονται από τρίτη.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.2α

Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, τότε οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες.

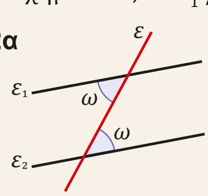
Απόδειξη Έστω ευθείες ε, ε_1 και ε_2, όπου $\varepsilon_1 \,//\, \varepsilon_2$ και η ε μία τέμνουσά τους. Θα δείξετε ότι οι εντός εναλλάξ γωνίες $\hat{\omega}$ και $\hat{\varphi}$ είναι ίσες. Ονομάστε $\hat{\omega}_1$ την παραπληρωματική της $\hat{\omega}$ που βρίσκεται εντός των παραλλήλων ευθειών ε_1 και ε_2. Αν υποθέσετε ότι οι $\hat{\omega}$ και $\hat{\varphi}$ δεν είναι ίσες, τότε θα ισχύει $\hat{\varphi} < \hat{\omega}$ ή $\hat{\varphi} > \hat{\omega}$.
Έστω $\hat{\varphi} < \hat{\omega}$, τότε $\hat{\varphi} + \hat{\omega}_1 < \hat{\omega} + \hat{\omega}_1$, όμως $\hat{\omega} + \hat{\omega}_1 = 180°$, οπότε $\hat{\varphi} + \hat{\omega}_1 < 180°$. Σύμφωνα λοιπόν με το 5ο αίτημα, εφόσον το άθροισμα των εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών είναι μικρότερο από δύο ορθές, οι ε_1 και ε_2 τέμνονται, το οποίο είναι **άτοπο** διότι $\varepsilon_1 \,//\, \varepsilon_2$.
Όμοια, καταλήγετε σε άτοπο εάν υποθέσετε ότι $\hat{\varphi} > \hat{\omega}$. Άρα $\hat{\omega} = \hat{\varphi}$.



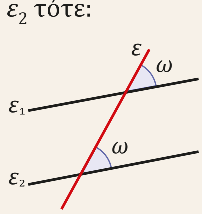
Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, τότε σχηματίζουν:

- **i.** Τις εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες και
- **ii.** Τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές.

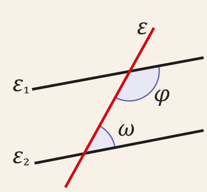
Σχηματικά, αν $\varepsilon_1 \,//\, \varepsilon_2$ τότε:



(Θεώρημα)



(Πόρισμα 1.2α i)



$\hat{\omega} + \hat{\varphi} = 180°$

(Πόρισμα 1.2α ii)

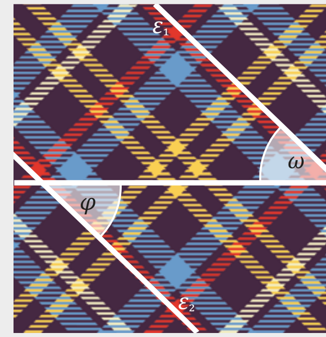
Απόδειξη του πορίσματος: δυο παράλληλες ευθείες που τέμνονται από τρίτη σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά μέρη παραπληρωματικές

Απόδειξη του πορίσματος: δυο παράλληλες ευθείες που τέμνονται από τρίτη σχηματίζουν τις εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες

1.2.2 Κριτήρια παραλληλίας

ΠΩΣ ΘΑ ΕΛΕΓΞΩ ΤΗΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑ;

Στη ραπτική είναι σημαντικό να κόβονται τα υφάσματα σε λωρίδες που οι άκρες τους είναι παράλληλες. Για τον λόγο αυτόν, οι ράφτες χρησιμοποιούν τις παράλληλες ίνες ύφανσης. Στο σχήμα, οι ευθείες ε_1 και ε_2 δεν σχηματίζονται από παράλληλες ίνες ύφανσης ε_1 και ε_2, αλλά σχηματίζουν με αυτές τις ίσες γωνίες $\hat{\omega}$ και $\hat{\varphi}$. Μπορεί ο ράφτης να χρησιμοποιήσει τις ε_1 και ε_2 αντί των ινών ύφανσης;



Το ερώτημα μπορεί να αναδιατυπωθεί ως εξής: «Εάν οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες, τότε οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες;».

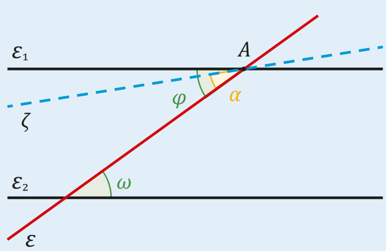
ΘΕΩΡΗΜΑ 1.2β

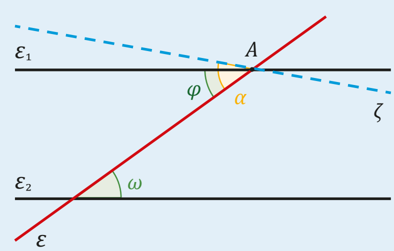
(Αντίστροφο του θεωρήματος 1.2α)

Αν δύο ευθείες που τέμνονται από τρίτη σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, τότε είναι παράλληλες.

Απόδειξη Στο σχήμα, θεωρήστε δεδομένο ότι οι εντός εναλλάξ γωνίες $\hat{\omega}$ και $\hat{\varphi}$ είναι ίσες.

Έστω ότι οι ε_1 και ε_2 δεν είναι παράλληλες, τότε θα υπάρχει μοναδική ευθεία ζ που διέρχεται από το A με $\zeta \,//\, \varepsilon_2$. Η ζ σχηματίζει με την ε γωνία $\hat{\alpha}$ με $\hat{\alpha} < \hat{\varphi}$ ή $\hat{\alpha} > \hat{\varphi}$. Όμως, $\hat{\alpha} = \hat{\omega}$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ε_2 και ζ που τέμνονται από την ε. Επομένως, $\hat{\omega} < \hat{\varphi}$ ή $\hat{\omega} > \hat{\varphi}$, που είναι άτοπο διότι $\hat{\omega} = \hat{\varphi}$. Άρα, $\varepsilon_1 \,//\, \varepsilon_2$.





Ανάλογα αποδεικνύεται το αντίστροφο του πορίσματος 1.2α και έχουμε το ακόλουθο:

ΠΟΡΙΣΜΑ 1.2β

Αν δύο ευθείες που τέμνονται από τρίτη σχηματίζουν
- δύο εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες

ή
- δύο εντός και επί τα αυτά μέρη παραπληρωματικές

τότε είναι **παράλληλες**.

Μεταβείτε στο ψηφιακό υλικό για την απόδειξη του πορίσματος.

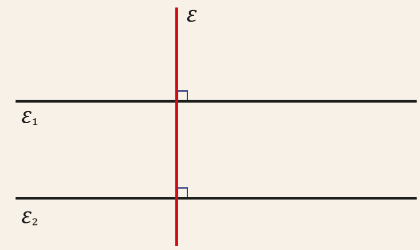
Ισοδύναμες προτάσεις στη λογική

Απόδειξη πορίσματος κριτηρίου παραλληλίας

ΠΟΡΙΣΜΑ 1.2γ

Δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία, σε διαφορετικά σημεία της, είναι μεταξύ τους παράλληλες.

Μεταβείτε στο ψηφιακό υλικό για να δείτε την απόδειξη του πορίσματος.

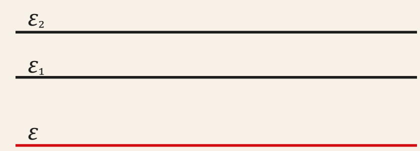


ΠΟΡΙΣΜΑ 1.2δ

Αν η ε_1 είναι παράλληλη με την ε και η ε_2 είναι επίσης παράλληλη με την ε, τότε και η ε_1 είναι παράλληλη με την ε_2. Δηλαδή, σχηματικά,

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_1 // \varepsilon \\ \varepsilon_2 // \varepsilon\end{aligned}\right\} \Rightarrow \varepsilon_1 // \varepsilon_2$$

Μεταβείτε στο ψηφιακό υλικό για να δείτε την απόδειξη του πορίσματος.



Παρατήρηση

Το Θεώρημα 1.2β και τα πορίσματα 1.2β, 1.2γ και 1.2δ λέγονται κριτήρια παραλληλίας διότι αν ισχύει ένα από αυτά, τότε οι ευθείες είναι παράλληλες.

Απόδειξη πορίσματος παραλληλίας κάθετων ευθειών σε τρίτη

Η μεταβατική ιδιότητα στην παραλληλία

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.2α

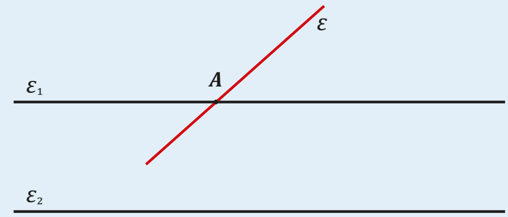
Προκειμένου να ανέβει με ασφάλεια το καροτσάκι στη ράμπα, είναι σημαντικό η κουπαστή να είναι παράλληλη σε αυτήν. Μετρήθηκαν οι γωνίες $\hat{\omega}$ και $\hat{\varphi}$ που σχηματίζονται από τη ράμπα, την κουπαστή και τα κάγκελα αντίστοιχα (βλ. εικόνα) και διαπιστώθηκε ότι είναι ίσες. Πώς θα ελέγξετε εάν οι ευθείες που ορίζονται από τη ράμπα και την κουπαστή είναι παράλληλες, εάν γνωρίζετε ότι τα κάγκελα είναι παράλληλα στην κατακόρυφο του τόπου;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Τα κάγκελα είναι παράλληλα στην κατακόρυφο, άρα είναι και μεταξύ τους παράλληλα (από το πόρισμα 1.2δ). Επομένως, $\hat{\varphi} = \hat{\rho}$ ως εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες των παραλλήλων που ορίζονται από τα κάγκελα και τέμνονται από την κουπαστή. Όμως, $\hat{\varphi} = \hat{\omega}$, άρα $\hat{\rho} = \hat{\omega}$. Συνεπώς (από το πόρισμα 1.2β), η ράμπα και η κουπαστή ορίζουν παράλληλες μεταξύ τους ευθείες.

Εφαρμογή 1.2β

Αν οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι μεταξύ τους παράλληλες και μία τρίτη ευθεία ε τέμνει την ε_1, τότε θα τέμνει και την ε_2.

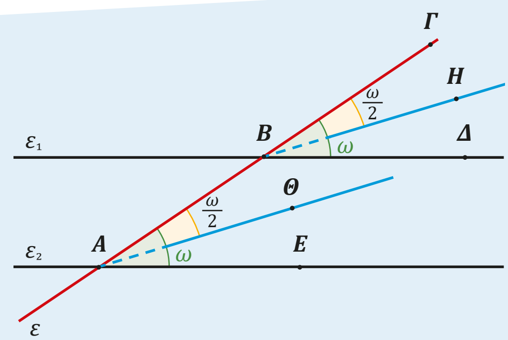


ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω A το σημείο στο οποίο η ε τέμνει την ε_1. Αν υποθέσετε ότι η ε δεν τέμνει την ε_2, τότε $\varepsilon \parallel \varepsilon_2$, οπότε από το A διέρχονται δύο ευθείες παράλληλες προς την ε_2, οι ε και ε_1. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού από ένα σημείο εκτός ευθείας μπορείτε να φέρετε μια μόνο παράλληλη προς αυτή. Άρα η ε τέμνει και την ε_2.

Εφαρμογή 1.2γ

Αν οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι μεταξύ τους παράλληλες, τότε οι διχοτόμοι δύο εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνιών τους είναι παράλληλες.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω BH και $A\Theta$ οι διχοτόμοι δύο εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνιών.

Αν, $\widehat{\Delta B\Gamma} = \widehat{EAB} = \hat{\omega}$, τότε, $\widehat{HB\Gamma} = \widehat{\Theta AB} = \dfrac{\hat{\omega}}{2}$

Άρα $BH \parallel A\Theta$ διότι σχηματίζουν τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.2β

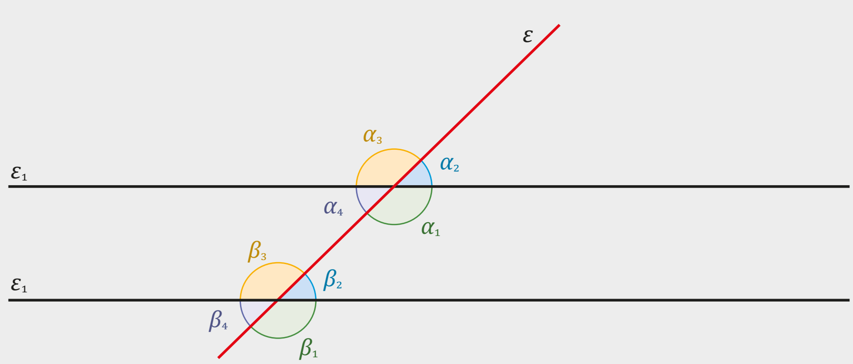
Στο παρακάτω σχήμα, αν $\hat{\alpha}_3 = 115°$ και $\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3 = 295°$, να αποδειχθεί ότι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$.

ΛΥΣΗ:

Γνωρίζετε ότι $\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3 + \hat{\beta}_4 = 360°$. Επειδή $\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3 = 295°$, θα έχετε $295° + \hat{\beta}_4 = 360°$, οπότε $\hat{\beta}_4 = 65°$.

Ακόμα, $\hat{\beta}_3 = 180° - \hat{\beta}_4 = 180° - 65° = 115°$.

Άρα, $\hat{\beta}_3 = \hat{\alpha}_3$, και συνεπώς, $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$, διότι έχουν τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες.



Ασκήσεις - Δραστηριότητες

Ασκήσεις με γωνίες από παράλληλες ευθείες

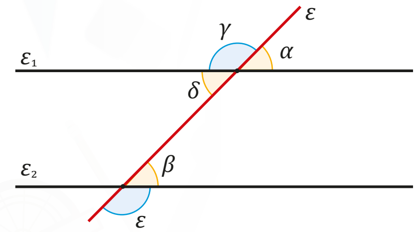
Αυτοαξιολόγηση μαθητών/μαθητριών στις παράλληλες ευθείες

1 Στο σχήμα:

α) Ποια σχέση συνδέει τις $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$;

β) Τι σχέση έχουν οι $\hat{\beta}$ και η κατακορυφήν της $\hat{\gamma}$;

γ) Τι σχέση έχουν οι $\hat{\beta}$ και $\hat{\delta}$;



2 Μπορείτε να αναφέρετε τουλάχιστον 4 διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορείτε να αποδείξετε ότι δύο ευθείες είναι παράλληλες;

3 Αν $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$, $\varepsilon_1 // \varepsilon_3$, $\varepsilon_4 // \varepsilon_2$ και η ε_5 τέμνει την ε_1, τότε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος;

α) $\varepsilon_3 // \varepsilon_2$

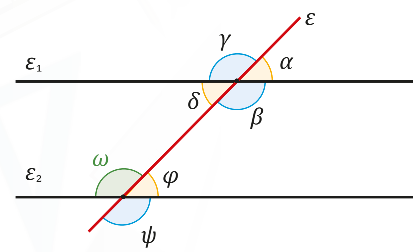
β) $\varepsilon_4 // \varepsilon_3$

γ) η ε_5 τέμνει μόνο την ε_1

δ) η ε_5 τέμνει τις ε_1, ε_2 και ε_3

ε) η ε_5 τέμνει όλες τις άλλες

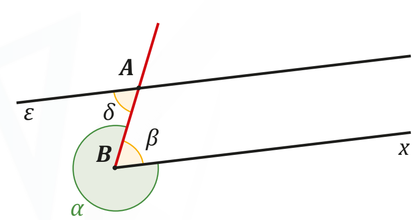
4 Οι παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται από την ε. Εάν $\hat{\alpha} = 45°$, να υπολογιστούν οι $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$, $\hat{\delta}$, $\hat{\varphi}$, $\hat{\psi}$, $\hat{\omega}$.



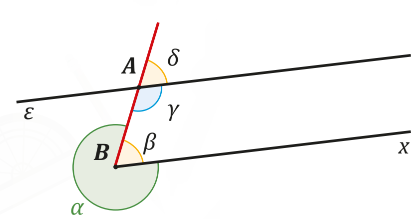
5 Στο σχήμα της άσκησης 4 να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$, $\hat{\delta}$, $\hat{\varphi}$, $\hat{\psi}$, $\hat{\omega}$, αν γνωρίζετε ότι $\hat{\alpha} = (2x - 3)°$ και $\hat{\omega} = (5x + 12)°$.

6 Εάν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των δύο εντός εναλλάξ γωνιών που σχηματίζονται είναι μεταξύ τους παράλληλες.

7 Στο διπλανό σχήμα, αν $\hat{\alpha} = 305°$ και η παραπληρωματική της $\hat{\delta}$ είναι 125°, να αποδείξετε ότι $\varepsilon // Bx$.



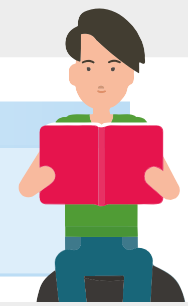
8 Στο διπλανό σχήμα, αν $\varepsilon // Bx$ και $\hat{\alpha} = 290°$, να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\gamma}$ και $\hat{\delta}$.



1.3 ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Στην ενότητα αυτή θα μάθετε:

- Να αποδεικνύετε ότι το άθροισμα γωνιών τριγώνου είναι ίσο με μία ευθεία γωνία.



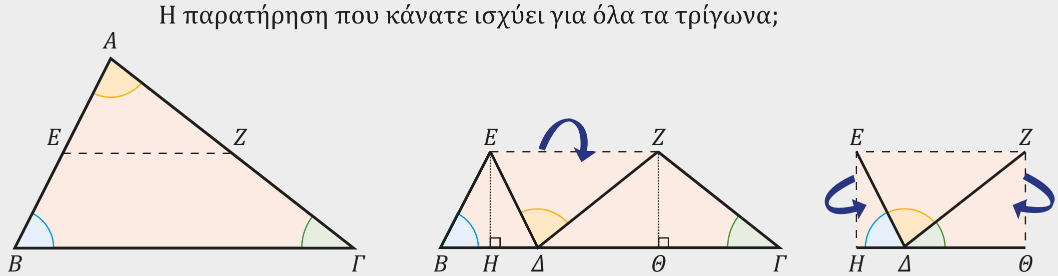
ΠΑΙΖΟΝΤΑΣ ΜΕ ΤΙΣ ΓΩΝΙΕΣ ΤΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Σχεδιάστε σε χαρτί ένα οξυγώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$. Διπλώστε στα δύο, κατά μήκος της $ΕΖ$, όπου $Ε$ και $Ζ$ είναι τα μέσα των $ΑΒ$ και $ΑΓ$, αντίστοιχα όπως βλέπετε παρακάτω. Διπλώστε ξανά, ώστε οι κορυφές $Β$ και $Γ$ να ταυτιστούν με το $Δ$.

Παρατηρήστε ότι το άθροισμα των γωνιών $\hat{Α}$, $\hat{Β}$ και $\hat{Γ}$ είναι ίσο με την πλήρη γωνία $\hat{Δ}$, δηλαδή ίσο με 180°.

Επαναλάβετε για αμβλυγώνιο και ορθογώνιο τρίγωνο.

Η παρατήρηση που κάνατε ισχύει για όλα τα τρίγωνα;



Μικροπείραμα

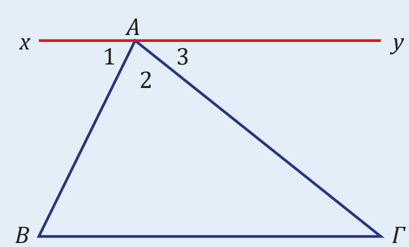
«Άθροισμα γωνιών τριγώνου»

Άθροισμα γωνιών τριγώνου με tangram

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.3

Το άθροισμα γωνιών τριγώνου είναι ίσο με 180°.

Απόδειξη



Εκτός από τα διάφορα είδη απόδειξης που συναντάτε στη Γεωμετρία, υπάρχουν και διαφορετικοί τρόποι παρουσίασης. Παρακάτω αναπτύσσονται ενδεικτικά τέσσερις.

Ανάπτυξη απόδειξης σε παράγραφο – 1ος τρόπος

Έστω $\hat{Α}$, $\hat{Β}$ και $\hat{Γ}$ οι γωνίες του τριγώνου. Από μια κορυφή του, π.χ. την $Α$, φέρτε ευθεία $xy \parallel ΒΓ$. Ονομάστε $\hat{Α}_1$, $\hat{Α}_2$ και $\hat{Α}_3$, τις γωνίες $\widehat{xΑΒ}$, $\hat{Α}$ και $\widehat{yΑΓ}$ αντίστοιχα. Παρατηρήστε ότι, $\hat{Α}_1 + \hat{Α}_2 + \hat{Α}_3 = \widehat{xΑy} = 180°$ (1). Όμως, $\hat{Α}_1 = \hat{Β}$ (2) και $\hat{Α}_3 = \hat{Γ}$ (3), ως εντός και εναλλάξ των παραλλήλων xy και $ΒΓ$ που τέμνονται από τις ευθείες $ΑΒ$ και $ΑΓ$ αντίστοιχα. Επομένως, αντικαθιστώντας τις (2) και (3) στην (1) προκύπτει ότι $\hat{Α} + \hat{Β} + \hat{Γ} = 180°$, δηλαδή ευθεία γωνία.

Απόδειξη σε δύο στήλες - 2ος τρόπος

ΥΠΟΘΕΣΗ $\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma}$ οι γωνίες του τριγώνου

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180°$

Πρόταση	**Αιτιολόγηση**
1. $\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma}$ οι γωνίες του τριγώνου.	**1.** Υπόθεση
2. Από το A φέρτε ευθεία $xy \parallel B\Gamma$.	**2.** Αίτημα παραλληλίας
3. Ονομάστε $\hat{A}_1, \hat{A}_2$ και $\hat{A}_3$ τις γωνίες $\widehat{xAB}$, $\hat{A}$ και $\widehat{yA\Gamma}$ αντίστοιχα.	**3.** Σχήμα
4. $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = \widehat{xAy} = 180°$ (1)	**4.** Άθροισμα διαδοχικών εφεξής γωνιών που σχηματίζουν ευθεία γωνία.
5. $\hat{A}_1 = \hat{B}$ (2) και $\hat{A}_3 = \hat{\Gamma}$ (3)	**5.** Ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ***xy*** και ***ΒΓ*** που τέμνονται από τις ευθείες ***ΑΒ*** και ***ΑΓ*** αντίστοιχα
6. $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180°$	**6.** Αντικατάσταση στην (1) των (2) και (3)

Διάγραμμα ροής απόδειξης – 3ος τρόπος

$\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma}$ οι γωνίες τριγώνου $AB\Gamma$

Υπόθεση

↓

Έστω $\hat{A}_1 = \widehat{xAB}$, $\hat{A}_2 = \hat{A}$ και $\hat{A}_3 = \widehat{yA\Gamma}$

Σχήμα

↓

$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = \widehat{xAy} = 180°$

Πρόσθεση κατά μέλη, άθροισμα διαδοχικών εφεξής γωνίων

$xy \parallel B\Gamma$

Αίτημα παραλληλίας

↓

$\hat{A}_1 = \hat{B}$, και $\hat{A}_3 = \hat{\Gamma}$

Ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων xy και $B\Gamma$ με τέμνουσες τις AB και $A\Gamma$

↓

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180°$

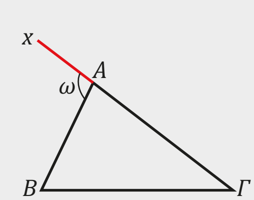
Αντικατάσταση

Άθροισμα γωνιών τριγώνου: Απόδειξη με λίγα λόγια-4ος τρόπος

Άθροισμα γωνιών τριγώνου: Απόδειξη με λίγα λόγια - 4ος τρόπος -

Ορισμός

Η εφεξής παραπληρωματική μιας γωνίας $\hat{A}$ ενός τριγώνου $AB\Gamma$, ονομάζεται **εξωτερική γωνία της $\hat{A}$**, δηλαδή η γωνία $\widehat{BAx} = \hat{\omega}$ του διπλανού σχήματος και συμβολίζεται με $\hat{A}_{\varepsilon\xi}$



ΠΟΡΙΣΜΑ 1.3α

Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου.

Διάγραμμα ροής απόδειξης:

Τρίγωνο $ΑΒΓ$ → (Υπόθεση) → $\hat{A} + \hat{B} + \hat{Γ} = 180°$ → (Θεώρημα αθροίσματος γωνιών τριγώνου) → $\hat{A} + \hat{B} + \hat{Γ} = \hat{A} + \hat{A}_{εξ}$

Οι $\hat{A}$ και $\hat{A}_{εξ}$ σχηματίζουν ευθεία γωνία → (Από τον ορισμό της ευθείας γωνίας) → $\hat{A} + \hat{A}_{εξ} = 180°$ → (Από τον ορισμό της ευθείας γωνίας και της εξωτερικής γωνίας τριγώνου) → $\hat{A} + \hat{B} + \hat{Γ} = \hat{A} + \hat{A}_{εξ}$

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{Γ} = \hat{A} + \hat{A}_{εξ}$ → (Αφού είναι ίσα τα δεύτερα μέλη, θα είναι ίσα και τα πρώτα) → $\hat{B} + \hat{Γ} = \hat{A}_{εξ}$

Ιδιότητα της διαγραφής

Το άθροισμα γωνιών ενός τριγώνου με τρεις διαφορετικούς τρόπους

Αποδείξεις των πορισμάτων με διαφορετικούς τρόπους

ΠΟΡΙΣΜΑ 1.3β

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες, μία προς μία, έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1.3γ

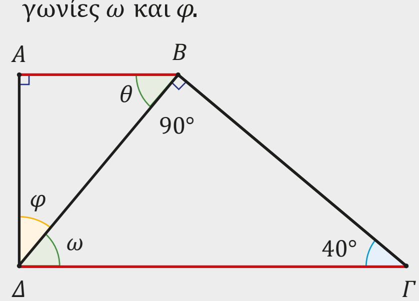
Οι οξείες γωνίες ενός ορθογώνιου τριγώνου έχουν άθροισμα 90° (δηλαδή, είναι συμπληρωματικές).

ΠΟΡΙΣΜΑ 1.3δ

Ένα τρίγωνο έχει το πολύ μία ορθή ή μία αμβλεία γωνία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.3α

Στο παρακάτω σχήμα γνωρίζετε ότι οι ευθείες $ΑΒ$ και $ΔΓ$ είναι παράλληλες. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{ω}$ και $\hat{φ}$.

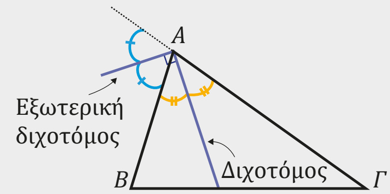


ΛΥΣΗ:

Από την υπόθεση γνωρίζετε (σχήμα) ότι $\widehat{ΔΒΓ} = 90°$, δηλαδή, το τρίγωνο $ΒΓΔ$ είναι ορθογώνιο και οι οξείες γωνίες του (Πόρισμα 1.3γ) είναι συμπληρωματικές. Επομένως, $\hat{Γ} + \hat{ω} = 90°$, δηλαδή $40° + \hat{ω} = 90°$, από όπου προκύπτει $\hat{ω} = 50°$ (1). Όμοια, στο τρίγωνο $ΑΒΓ$, $\hat{A} = 90°$. Οπότε $\hat{φ} + \hat{θ} = 90°$ (2). Όμως, $\hat{ω} = \hat{θ}$ (3), ως εντός εναλλάξ των $ΑΒ // ΓΔ$ που τέμνονται από τη ΒΔ. Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) έχετε $\hat{φ} + 50° = 90°$ και $\hat{φ} = 40°$. Μπορείτε να προτείνετε άλλη λύση;

Ορισμοί

Σε τρίγωνο $ΑΒΓ$, «**εσωτερική διχοτόμος**» ή απλώς «**διχοτόμος**» της $\hat{A}$, ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα της διχοτόμου της $\hat{A}$ που συνδέει την κορυφή $Α$ με την απέναντι πλευρά, ενώ «**εξωτερική διχοτόμος**» της $\hat{A}$ ονομάζεται **η διχοτόμος της $\hat{A}_{εξ}$**.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.3β

1. Στο παρακάτω σχήμα οι διχοτόμοι των $\hat{B}$ και $\hat{Γ}$ τέμνονται στο $Ι$.

i) Αν $\hat{A} = 70°$, και $\hat{B} = 80°$, τότε να υπολογίσετε:

α) τις γωνίες $\hat{B}_1$ και $\hat{Γ}_1$

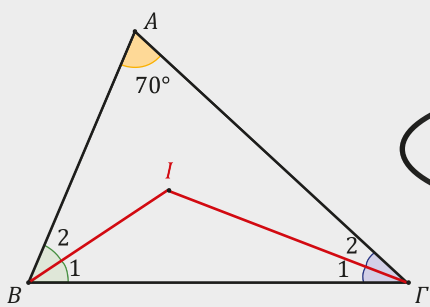
β) τη γωνία $\widehat{BIΓ}$

ii) Ομοίως, να υπολογίσετε τη $\widehat{BIΓ}$, αν $\hat{B} = 60°$.

iii) Τι παρατηρείτε;

2. Ισχύει η ίδια παρατήρηση αν $\hat{A} = 60°$ και $\hat{B} = 70°$;

3. Εργαστείτε με το μικροπείραμα «διχοτόμοι εσωτερικών γωνιών»



Μικροπείραμα

Γωνία εσωτερικών διχοτόμων

Γωνία εσωτερικών διχοτόμων

ΛΥΣΗ:

1. i) α) Ισχύει $\hat{A} + \hat{B} + \hat{Γ} = 180°$. Επειδή $\hat{A} = 70°$ και $\hat{B} = 80°$, προκύπτει ότι $\hat{Γ} + 150° = 180°$ δηλαδή $\hat{Γ} = 30°$. Όμως BI και $ΓΙ$ διχοτόμοι των $\hat{B}$ και $\hat{Γ}$ αντίστοιχα, επομένως

$$\hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2} = 40° \text{ και } \hat{Γ}_1 = \frac{\hat{Γ}}{2} = 15°.$$

β) Στο τρίγωνο $ΒΙΓ$ έχετε:

$$\widehat{BIΓ} + \hat{B}_1 + \hat{Γ}_1 = 180° \Rightarrow \widehat{BIΓ} + 40° + 15° = 180° \Rightarrow \widehat{BIΓ} = 180° - 55° \Rightarrow \widehat{BIΓ} = 125°$$

ii) Αν $\hat{B} = 60°$, με ανάλογους συλλογισμούς, προκύπτει ότι $\hat{Γ} = 50°$, οπότε

$$\widehat{BIΓ} = 180° - 55° \Rightarrow \widehat{BIΓ} = 125°$$

Παρατηρείστε ότι το αποτέλεσμα είναι το ίδιο

2. Στην περίπτωση αυτή έχουμε ... $\widehat{BIΓ} = 120°$.

3. Με το μικροπείραμα συμπεραίνετε ότι γενικά ισχύει $\widehat{BIΓ} = 90° + \frac{\hat{A}}{2}$.

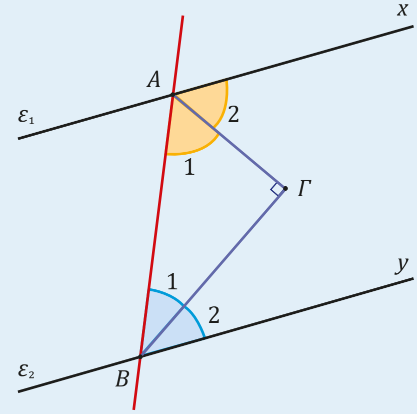
Απόδειξη

Αν $\hat{B}_1$ και $\hat{Γ}_1$ οι γωνίες του τριγώνου $ΒΙΓ$ και δεδομένου ότι $ΒΙ$, $ΓΙ$ διχοτόμοι, τότε

$$\hat{I} + \hat{B}_1 + \hat{Γ}_1 = 180° \Rightarrow I + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{Γ}}{2} = 180° \Rightarrow \hat{I} = 180° - \left(\frac{\hat{B} + \hat{Γ}}{2}\right) = 180° - \left(\frac{180° - \hat{A}}{2}\right) = 90° + \frac{\hat{A}}{2}.$$

Εφαρμογή 1.3α

Οι διχοτόμοι δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών τέμνονται κάθετα.

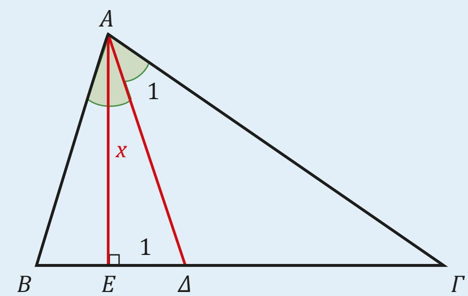


ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Οι $\widehat{xAB}$ και $\widehat{ABy}$ είναι γωνίες εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ευθειών ε_1 και ε_2, που τέμνονται από την AB. Επομένως, $\widehat{xAB} + \widehat{ABy} = 180^\circ$ και $\dfrac{\widehat{xAB}}{2} + \dfrac{\widehat{ABy}}{2} = 90^\circ$ (1). Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ έχουμε $\hat{A}_1 = \dfrac{\widehat{xAB}}{2}$ και $\hat{B}_1 = \dfrac{\widehat{ABy}}{2}$. Προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει ότι $\hat{A}_1 + \hat{B}_1 = 90^\circ$, λόγω της σχέσης (1). Άρα οι $ΑΓ$ και $ΒΓ$ τέμνονται κάθετα.

Εφαρμογή 1.3β

Σε τρίγωνο $ΑΒΓ$ στο οποίο ισχύει ότι $\hat{B} > \hat{Γ}$, η γωνία που σχηματίζουν η διχοτόμος $ΑΔ$ της $\hat{A}$ και το ύψος του $ΑΕ$ είναι ίση με $\dfrac{\hat{B} - \hat{Γ}}{2}$.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $ΑΕ$ και $ΑΔ$ το ύψος και η διχοτόμος, αντίστοιχα, του τριγώνου $ΑΒΓ$, $\widehat{ΕΑΔ} = \hat{x}$ η μεταξύ τους γωνία, $\widehat{ΑΔΕ} = \hat{Δ}_1$ και $\widehat{ΔΑΓ} = \dfrac{\hat{A}}{2} = \hat{A}_1$ (Η $ΑΔ$ είναι διχοτόμος της $\hat{A}$). Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΕΑΔ$ ($\hat{E} = 90^\circ$, αφού το $ΑΕ$ είναι ύψος), από το πόρισμα 1.3γ έχουμε $\hat{x} + \hat{Δ}_1 = 90^\circ \Rightarrow \hat{x} = 90^\circ - \hat{Δ}_1$ (1). Από το πόρισμα 1.3α, έχουμε ότι $\hat{Δ}_1 = \hat{Γ} + \hat{A}_1$ (2), αφού η $\hat{Δ}_1$ είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου $ΑΔΓ$. Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\hat{x} = 90^\circ - \left(\hat{Γ} + \hat{A}_1\right) = 90^\circ - \hat{Γ} - \hat{A}_1 = 90^\circ - \hat{Γ} - \frac{\hat{A}}{2} = 90^\circ - \hat{Γ} - \frac{180^\circ - \hat{B} - \hat{Γ}}{2} = \frac{\hat{B} - \hat{Γ}}{2}.$$

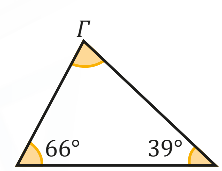
Ασκήσεις - Δραστηριότητες

1 Στα παρακάτω ερωτήματα επιλέξτε τη σωστή απάντηση:

α) Η γωνία $\hat{Γ}$ είναι ίση με:

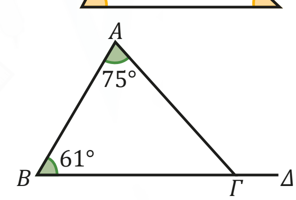
Α. 105° **Β.** 115° **Γ.** 85°

Δ. Τίποτα από τα παραπάνω



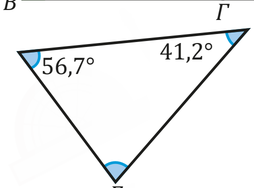
β) Η $\hat{Γ}_{εξ}$ είναι ίση με:

Α. 44° **Β.** 126° **Γ.** 136° **Δ.** 150°



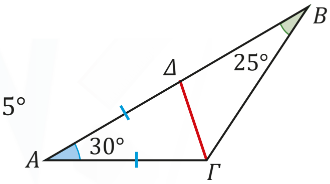
γ) Η $\hat{Γ}$ είναι ίση με:

Α. 82,1° **Β.** 83,1° **Γ.** 92,1° **Δ.** 97,9°

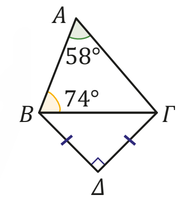


Ασκήσεις αθροίσματος γωνιών τριγώνου

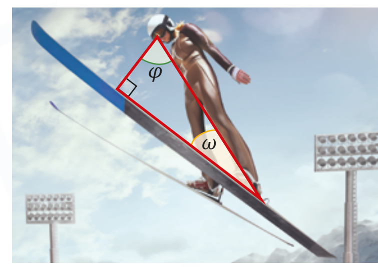
δ) Η $\widehat{B\Gamma\Delta}$ είναι ίση με:
Α. 30° **Β.** 50° **Γ.** 75° **Δ.** 105°



ε) Το ορθογώνιο τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ έχει ίσες γωνίες.
Η $\widehat{A\Gamma\Delta}$ είναι ίση με:
Α. 48° **Β.** 74° **Γ.** 90° **Δ.** 93°



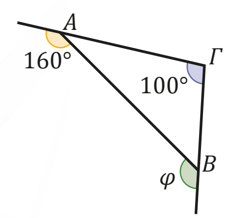
2 Το σώμα της σκιέρ της φωτογραφίας σχηματίζει με την επιφάνεια του πέδιλου γωνία $\hat{\omega} = 20°$. Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\varphi}$ που σχηματίζει το σώμα της με την κάθετη από το πρόσωπό της προς την επιφάνεια του πέδιλου.



3 Να υπολογίσετε τις γωνίες ενός τριγώνου, αν γνωρίζετε ότι είναι ίσες μεταξύ τους.

4 Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με
Α. 360° **Β.** 180° **Γ.** 90° **Δ.** 270° **Ε.** τίποτα από αυτά
Από τις παραπάνω να επιλέξετε τη μοναδική σωστή απάντηση.

5 Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε τη γωνία φ.

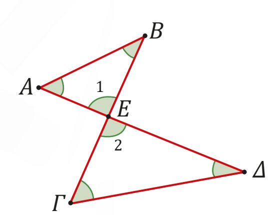


6 Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις να βρείτε τι είδους τρίγωνο είναι το $AB\Gamma$ ως προς τις γωνίες.
α) $\hat{A} = \hat{B} + \hat{\Gamma}$
β) $\hat{A} > \hat{B} - \hat{\Gamma}$
γ) $\hat{\Gamma} < \hat{B} < \hat{A} < \hat{B} + \hat{\Gamma}$
Σε κάθε περίπτωση να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

7 Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{B} = \dfrac{\hat{\Gamma}}{2}$. Να υπολογίσετε τις γωνίες του σε κάθε περίπτωση.

8 Οι γωνίες ενός τριγώνου, είναι ανάλογες των αριθμών 2, 3 και 4. Πόσες μοίρες είναι η μεγαλύτερη;

9 Στο διπλανό σχήμα είναι γνωστό ότι $\hat{A} = 48°$, $\hat{B} = 39°$ και $\hat{\Gamma} = 50°$. Να υπολογίσετε τις $\hat{\Delta}$, $\hat{E}_1$ και $\hat{E}_2$.



10 Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{B} = 60°$ και $\hat{\Gamma} = 40°$. Να υπολογίσετε **(α)** τη γωνία των εσωτερικών διχοτόμων των $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$, **(β)** τις γωνίες της εσωτερικής και της εξωτερικής διχοτόμου των $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$, **(γ)** τις γωνιές των εξωτερικών διχοτόμων των $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.
Κατόπιν, **(δ)** να συγκρίνετε τις γωνίες που βρήκατε με τη γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου.

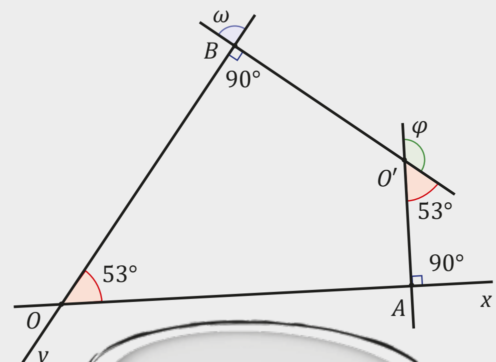
1.4 ΓΩΝΙΕΣ ΜΕ ΠΛΕΥΡΕΣ ΚΑΘΕΤΕΣ ή ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ

Στην ενότητα αυτή θα μάθετε:

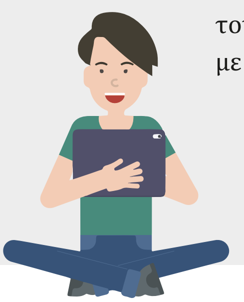
- Να αναγνωρίζετε γωνίες με πλευρές κάθετες ή παράλληλες, να διερευνάτε και να αποδεικνύετε τις μεταξύ τους σχέσεις.

1.4.1 Γωνίες με πλευρές κάθετες

Αναζητήστε στο σχήμα ζεύγη γωνιών που έχουν τις πλευρές τους κάθετες μία προς μία και είναι:
α) και οι δύο οξείες,
β) και οι δύο αμβλείες,
γ) η μία οξεία και η άλλη αμβλεία.



Υπολογίστε τα μέτρα τους. Συζητήστε στην τάξη τα αποτελέσματα που βρήκατε. Διατυπώστε μία εικασία. Οι γωνίες του σχήματος είναι ή ίσες ή παραπληρωματικές. Συμφωνεί με τη δική σας διαπίστωση;



Γωνίες με πλευρές κάθετες

Μικροπείραμα

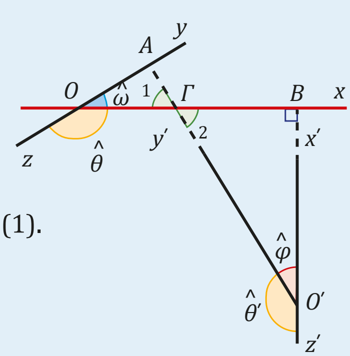
Σύγκριση γωνιών με κάθετες πλευρές.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.4.1.

Δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους μία προς μία κάθετες είναι ίσες ή παραπληρωματικές.

Απόδειξη

α′ περίπτωση



Έστω οι γωνίες $\widehat{xOy} = \hat{\omega}$ και $\widehat{x'O'y'} = \hat{\varphi}$ με πλευρές $Ox \perp O'x'$ και $Oy \perp O'y'$.
Τα τρίγωνα $AO\Gamma$ και $BO'\Gamma$ είναι ορθογώνια με
• $\hat{A} = \hat{B} = 90°$ και
• $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$ (κατακορυφήν).
Επομένως, θα έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες (πόρισμα 1.3β), δηλαδή $\hat{\omega} = \hat{\varphi}$ (1).

β′ περίπτωση

Επίσης, οι γωνίες $\widehat{x'O'y'} = \hat{\varphi}$ και $\widehat{z'O'y'} = \hat{\theta}'$ είναι παραπληρωματικές, δηλαδή $\hat{\varphi} + \hat{\theta}' = 180°$, επομένως, από τη σχέση (1) προκύπτει ότι $\hat{\omega} + \hat{\theta}' = 180°$ (2).
Ομοίως, $\hat{\omega} + \hat{\theta} = 180°$ και από τη σχέση (2) προκύπτει ότι οι αμβλείες γωνίες $\hat{\theta}$ και $\hat{\theta}'$ είναι ίσες, δηλαδή $\hat{\theta} = \hat{\theta}'$.

Επομένως, **δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες μία προς μία**

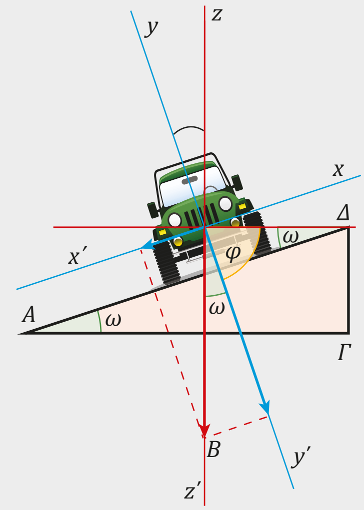
i) είναι ίσες, όταν είναι και οι δύο οξείες ή και οι δύο αμβλείες, ενώ

ii) είναι παραπληρωματικές, όταν η μία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.4.1

Στο μάθημα της Φυσικής μαθαίνετε ότι μια επίπεδη επιφάνεια, όπως αυτή στην οποία βρίσκεται το τζιπ της φωτογραφίας, που σχηματίζει γωνία $\hat{\omega}$ $(0° < \hat{\omega} < 90°)$ με το οριζόντιο επίπεδο, λέγεται κεκλιμένο επίπεδο. Επίσης, οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα που βρίσκεται στο **κεκλιμένο επίπεδο** αναλύονται σε συνιστώσες με σύστημα συντεταγμένων τους άξονες $x'x$ (παράλληλο στην επίπεδη επιφάνεια) και $y'y$ (κάθετο σε αυτή).

Παρατηρήστε ότι η γωνία που σχηματίζει ο $y'y$ με την κατακόρυφη διεύθυνση $z'z$ του βάρους B, είναι ίση με τη γωνία $\hat{\omega}$ του κεκλιμένου επιπέδου (επειδή οι δύο γωνίες είναι οξείες που έχουν τις πλευρές τους $ΑΔ$, $y'y$ και $ΑΓ$, $z'z$, μία προς μία κάθετες).



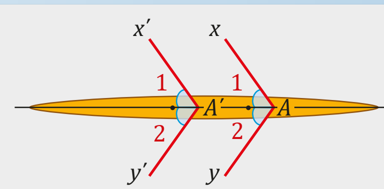
1.4.2 Γωνίες με πλευρές παράλληλες

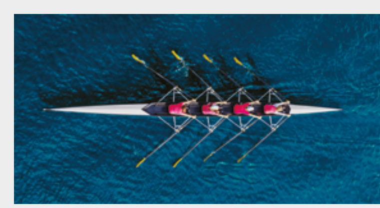
Στην εικόνα δεξιά βλέπετε μία φάση από αγώνα κωπηλασίας στο τετραπλό σκιφ. Παρατηρήστε ότι τα κουπιά είναι παράλληλα, όπως φαίνεται και στην περίπτωση του διπλού σκιφ, στο σχήμα δεξιά. Αυτό είναι απαραίτητο για να υπάρχει συγχρονισμός και το σκάφος να κινείται στην επιθυμητή πορεία. Τι ισχύει για τις γωνίες $\widehat{xAy}$ και $\widehat{x'A'y'}$;

Επειδή οι Ax και $A'x'$ είναι παράλληλες, ισχύει $\hat{A}_1 = \hat{A}'_1$ (εντός εκτός και επί τα αυτά) (1). Ομοίως, $\hat{A}_2 = \hat{A}'_2$ $(Ay \parallel A'y')$ (2).

Από τις (1) και (2), με πρόσθεση κατά μέλη, προκύπτει

$$\widehat{xAy} = \widehat{x'A'y'}.$$



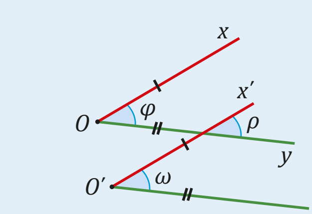


ΘΕΩΡΗΜΑ 1.4.2.

Δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους παράλληλες μία προς μία είναι ίσες ή παραπληρωματικές.

Απόδειξη **α΄ περίπτωση**

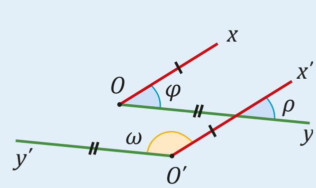
Έστω οι γωνίες $\widehat{xOy} = \hat{\varphi}$ και $\widehat{x'O'y'} = \hat{\omega}$, με πλευρές $Ox \parallel O'x'$ και $Oy \parallel O'y'$. Τότε, $\hat{\varphi} = \hat{\rho}$ (1) ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων Ox και $O'x'$ που τέμνονται από την Oy και $\hat{\omega} = \hat{\rho}$ (2) ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων Oy και $O'y'$ που τέμνονται από την $O'x'$. Επομένως, οι γωνίες $\hat{\omega}$ και $\hat{\varphi}$, που έχουν τις πλευρές τους παράλληλες μία προς μία, είναι ίσες λόγω των (1) και (2).



Σχήμα 1

β΄ περίπτωση

Έστω οι γωνίες $\widehat{xOy} = \hat{\varphi}$ και $\widehat{x'O'y'} = \hat{\omega}$, με πλευρές $Ox \parallel O'x'$ και $Oy \parallel O'y'$. Τότε, $\hat{\varphi} = \hat{\rho}$ (1), ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων Ox και $O'x'$, που τέμνονται από την Oy. Επίσης, $\hat{\omega} + \hat{\rho} = 180°$ (2) ως εντός εκτός εναλλάξ των παραλλήλων Oy και $O'y'$ που τέμνονται από την $O'x'$. Επομένως, οι γωνίες $\hat{\omega}$ και $\hat{\varphi}$, που έχουν τις πλευρές τους παράλληλες μία προς μία, είναι παραπληρωματικές λόγω των (1) και (2).



Σχήμα 2

Επομένως, δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους παράλληλες μία προς μία

i) είναι ίσες, όταν είναι και οι δύο οξείες ή και οι δύο αμβλείες, ενώ

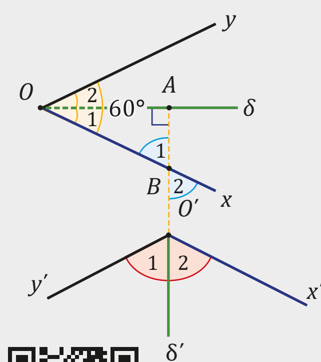
ii) είναι παραπληρωματικές, όταν η μία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.4.2α

Μικροπείραμα

Στο διπλανό σχήμα η ημιευθεία Ox είναι παράλληλη της $O'x'$ και η Oy είναι παράλληλη της $O'y'$, ενώ οι $O\delta$ και $O'\delta'$ διχοτομούν τις γωνίες $\widehat{yOx}$ και $\widehat{y'O'x'}$, αντίστοιχα. Αν $\widehat{yOx} = 60°$, να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{A}$ που σχηματίζουν οι $O\delta$ και $O'\delta'$.

Διχοτόμοι γωνιών με πλευρές παράλληλες



Οι παράλληλες και η ύφανση χαλιού

ΛΥΣΗ:

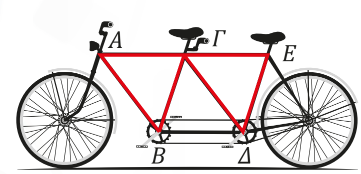
Γωνίες με πλευρές παράλληλες Γωνίες με πλευρές παράλληλες είναι ίσες ή παραπληρωματικές, άρα οι $\widehat{xOy}$ και $\widehat{x'O'y'}$ είναι παραπληρωματικές (οξεία–αμβλεία), οπότε $\widehat{x'O'y'} = 120°$

Ισότητες γωνιών Επειδή, οι $O\delta$ και $O'\delta'$ είναι διχοτόμοι των $\widehat{yOx}$ και $\widehat{y'O'x'}$: $60° = \hat{O}'_2 = \hat{B}_2$ (εντός εκτός και επί τα αυτά)
$\hat{B}_2 = \hat{B}_1$ (κατακορυφήν)

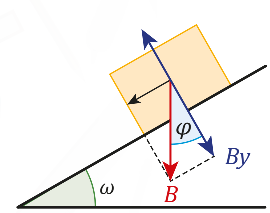
Συμπέρασμα $\hat{B}_1 + \hat{O}_1 = 60° + 30° = 90°$
Επομένως, στο τρίγωνο ABO έχουμε $\hat{A} = 90°$

Ασκήσεις - Δραστηριότητες

1 Στο διθέσιο ποδήλατο της φωτογραφίας γνωρίζετε ότι οι σωλήνες $B\Gamma$ και ΔE είναι μεταξύ τους παράλληλοι, όπως και οι AB και $\Gamma\Delta$. Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{\Gamma\Delta E}$, αν $\widehat{AB\Gamma} = 45°$.



2 Η γωνία του κεκλιμένου επιπέδου της φωτογραφίας είναι $\hat{\omega} = 31°$. Να βρείτε τη γωνία φ που σχηματίζει η δύναμη του βάρους B του σώματος με τη συνιστώσα του By.

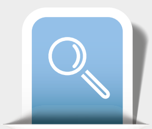


3 Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι δύο γωνιών που έχουν τις πλευρές τους παράλληλες μία προς μία, είναι μεταξύ τους παράλληλες ή κάθετες.

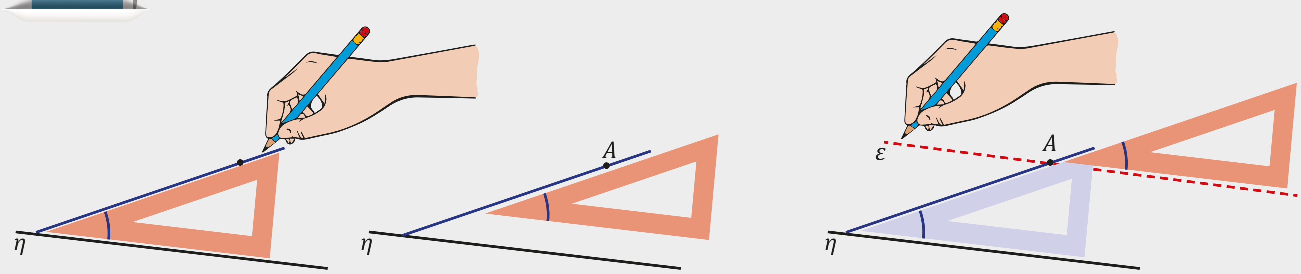
1.5 ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ

Στην ενότητα αυτή θα μάθετε:

- Να σχεδιάζετε με γεωμετρικά όργανα από σημείο εκτός ευθείας, ευθεία παράλληλη προς αυτήν και να αιτιολογείτε τη διαδικασία.



Στις προηγούμενες ενότητες, γίνεται λόγος για ευθείες παράλληλες. Πώς μπορείτε να σχεδιάσετε με γεωμετρικά όργανα μια ευθεία *ε*, η οποία διέρχεται από το σημείο *Α* του παρακάτω σχήματος και είναι παράλληλη στην ευθεία *η*;



Για ποιον λόγο οι παραπάνω ευθείες είναι παράλληλες;
Απ: οι εντός, εκτός και επί τα μέρη γωνίες είναι ίσες.

Για να κατασκευάσετε από σημείο *Α* εκτός ευθείας *η*, ευθεία παράλληλη προς αυτή, ακολουθείτε τα βήματα:

α) Τοποθετείτε μια κάθετη του γνώμονα στην ευθεία *η*
β) Χαράζετε την τέμνουσα
γ) Σύρετε τον γνώμονα πάνω στην τέμνουσα μέχρι το *Α* και χαράζετε την ευθεία.

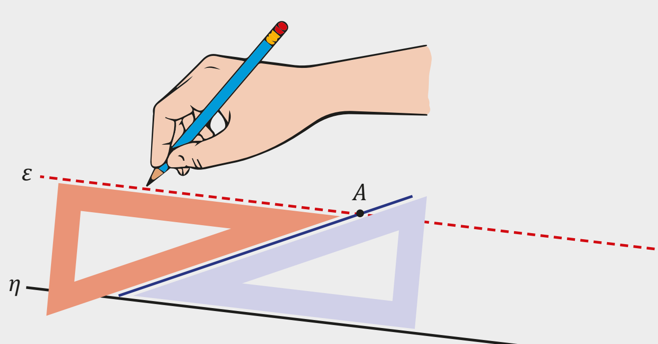
Μπορείτε να επαναλάβετε τη διαδικασία με χρήση της ορθής γωνίας του τριγώνου;

(Ποιο άλλο κριτήριο έχετε χρησιμοποιήσει;)

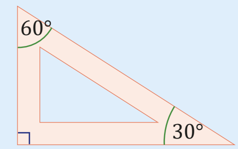
Γενικά, μπορείτε να φέρετε ευθεία *ε* παράλληλη στην *η* με χρήση βοηθητικής τέμνουσας ώστε να ικανοποιείται ένα από τα κριτήρια παραλληλίας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.5α

Στο διπλανό σχήμα, έχουν τοποθετηθεί δύο ίδιοι γνώμονες πάνω στη βοηθητική ευθεία με τέτοιον τρόπο ώστε αυτή α) να είναι η μία από τις πλευρές της μικρότερης γωνίας και β) να ορίζεται από τις υποτείνουσες των τριγώνων. Έτσι, η ευθεία *ε* είναι παράλληλη προς την *η*, καθώς οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες.



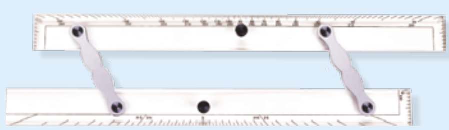
Γνωρίζετε ότι:



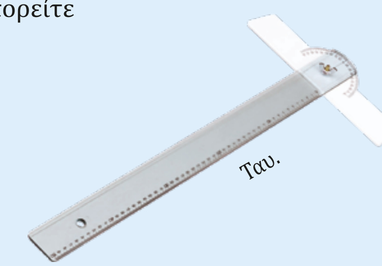
Όλα τα σκαληνά ορθογώνια τρίγωνα που κυκλοφορούν στο εμπόριο έχουν τις γωνίες τους ίσες με 90°, 60° και 30°. Έτσι, στην κατασκευή του παραπάνω παραδείγματος, εάν χρησιμοποιήσετε τρίγωνα του εμπορίου, τότε, αυτά δεν χρειάζεται να είναι ίδια.

Στην κατασκευή παραλλήλων ευθειών, αυτό που στην πραγματικότητα σας ενδιαφέρει, είναι η κατασκευή ίσων γωνιών. Σε επόμενο κεφάλαιο θα μάθετε πώς μπορείτε να το κάνετε αυτό χρησιμοποιώντας μόνο κανόνα και διαβήτη.

Υπάρχουν και άλλα μαθηματικά όργανα και εργαλεία με τα οποία μπορείτε να κατασκευάσετε παράλληλες ευθείες, όπως είναι τα παρακάτω:



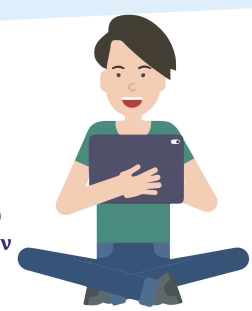
Διπαράλληλος χάρακας.



Ταυ.

Κυλιόμενος χάρακας.

Όργανα σχεδιασμού παραλλήλων ευθειών

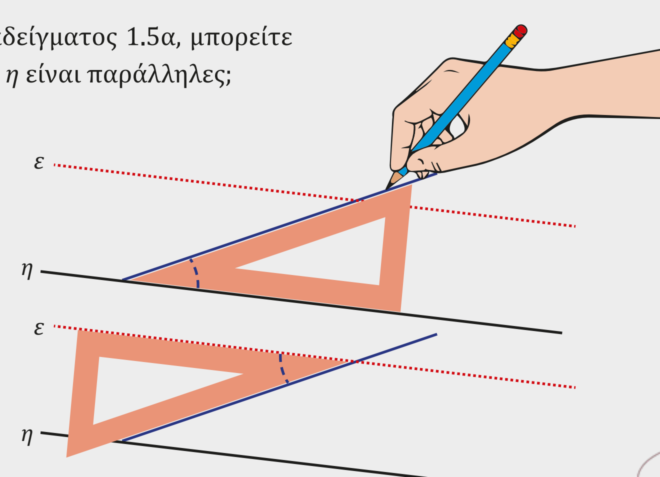


ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.5β

Με διαδικασία αντίστοιχη του παραδείγματος 1.5α, μπορείτε να διαπιστώσετε εάν οι ευθείες ε και η είναι παράλληλες;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

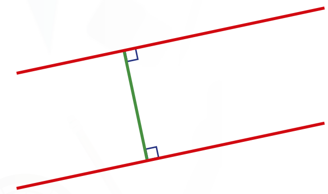
Τοποθετείτε το τρίγωνο ώστε η μια πλευρά του να εφάπτεται στη μια από τις δύο ευθείες και χαράσσετε ευθεία που τις τέμνει. Στη συνέχεια, ελέγχετε εάν οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες.



Ασκήσεις - Δραστηριότητες

Μη μαθηματικό εργαλείο για κατασκευή παραλλήλων

1 Στο διπλανό σχήμα, οι δύο ευθείες είναι παράλληλες. Πώς μπορεί να γίνει η κατασκευή τους με χρήση ορθογωνίων τριγώνων (περιγράψτε λεκτικά ή με σχήμα) και σε ποιο κριτήριο παραλληλίας στηρίζεται;



2 Στο σχήμα της διπλανής εικόνας, υπάρχουν πολλές ευθείες που φαίνονται παράλληλες μεταξύ τους. Θα μπορούσατε να χρησιμοποιήσετε τα γεωμετρικά όργανα που παρουσιάζονται στην ενότητα, για να ελέγξετε εάν οι ευθείες της παραπάνω άσκησης είναι μεταξύ τους παράλληλες, βάσει των κριτηρίων παραλληλίας; Εάν ναι, περιγράψτε τον τρόπο. Εάν όχι, περιγράψτε τι θα κάνατε για να εξασφαλίσετε την παραλληλία τους.

3 Με χρήση τριγώνου, να ελέγξετε εάν οι παρακάτω ευθείες *ε*, *ζ* και *η* είναι μεταξύ τους παράλληλες.

4 Με χρήση γεωμετρικών οργάνων, να αποδείξετε ότι οι παρακάτω ευθείες *ε* και *η* δεν είναι μεταξύ τους παράλληλες.

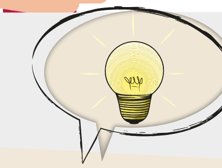
1.6 ΟΙ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ ΣΤΗ ΖΩΗ ΜΑΣ

Στην ενότητα αυτή θα μάθετε:

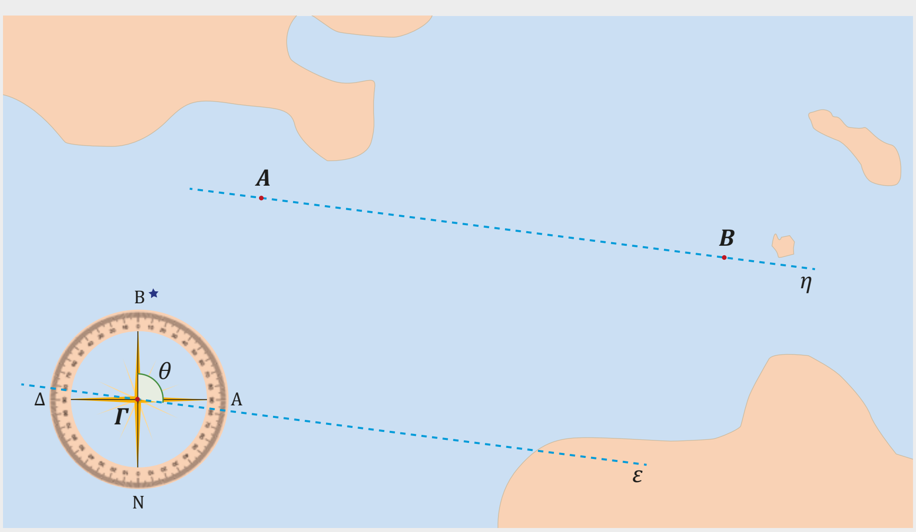
- Να χρησιμοποιείτε ιδιότητες των παράλληλων ευθειών για την επίλυση μαθηματικών και ρεαλιστικών προβλημάτων.

ΧΑΜΕΝΟΙ ΣΤΗ ΘΑΛΑΣΣΑ

Μετά από μια μαγνητική καταιγίδα, τα ηλεκτρονικά όργανα ενός πλοίου έπαθαν ζημιά και ο καπετάνιος πρέπει να βασιστεί στα υπόλοιπα όργανα για να χαράξει την πορεία του. Λειτουργεί η πυξίδα και ο καπετάνιος έχει χάρτες, διπαράλληλο χάρακα, διαβήτη, τρίγωνα κ.ά. Αφού βρει το στίγμα του, δηλαδή, αφού βρει στον χάρτη το σημείο A στο οποίο βρίσκεται το πλοίο, πρέπει να βρει πόσες μοίρες πρέπει να στρίψει το πηδάλιο σε σχέση με τον άξονα Βορράς-Νότος προκειμένου να πάει από το σημείο B που είναι ο προορισμός του. Με δεδομένο ότι δεν υπάρχουν ανάμεσα στα A και B εμπόδια όπως ύφαλοι, σκόπελοι, νησιά κ.ά., μπορείτε να τον βοηθήσετε, δουλεύοντας πάνω στον χάρτη της εικόνας;



Αρχικά, θα χαράξει την ευθεία η που ενώνει τα σημεία A και B στον χάρτη. Εν συνεχεία, με τη βοήθεια του διπαράλληλου χάρακα, θα χαράξει ευθεία ε παράλληλη προς την AB που θα διέρχεται από το κέντρο της ζωγραφισμένης στο χάρτη πυξίδας (ανεμολόγιο). Θα βρει τις μοίρες θ της γωνίας που σχηματίζει η ε με τον άξονα Βορράς – Νότος (Β-Ν) και αφού οι ευθείες ε και η είναι μεταξύ τους παράλληλες, θα συμπεράνει ότι και η η σχηματίζει με τον άξονα Β-Ν την ίδια γωνία. Επομένως, θα στρίψει το πηδάλιο κατά γωνία $\theta°$ σε σχέση με τον άξονα Β-Ν.

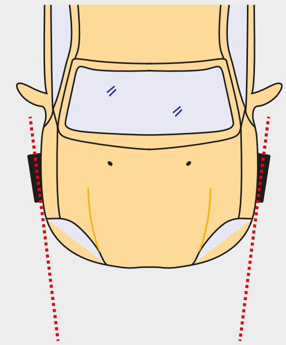


Διπαράλληλος χάρακας

Σε πάρα πολλά επαγγέλματα, χρειάζεται να γίνει κατασκευή ευθειών που είναι μεταξύ τους παράλληλες. Πολλοί επαγγελματίες χρησιμοποιούν σύγχρονα όργανα με ακτίνες λέιζερ και GPS, ενώ άλλοι χρησιμοποιούν τις συνήθεις γεωμετρικές μεθόδους.

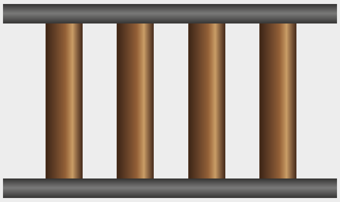
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.6α

Όταν γίνεται αλλαγή ελαστικών των αυτοκινήτων, είναι πολύ σημαντικό να γίνεται ευθυγράμμιση, δηλαδή, η θέση των τροχών να είναι τέτοια ώστε, εάν αφεθούν να κυλίσουν ελεύθερα σε λείο και οριζόντιο έδαφος, να κινηθούν πάνω σε παράλληλες ευθείες, ώστε το αυτοκίνητο να μην παρεκκλίνει εύκολα της πορείας του.

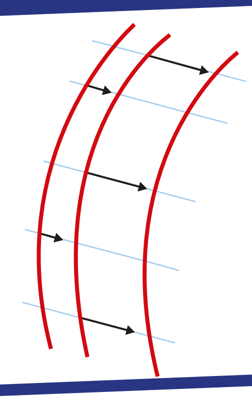


ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.6β

Στο προηγούμενο παράδειγμα, το αυτοκίνητο μπορεί να κινηθεί ακόμα και εάν δεν είναι απόλυτα ευθυγραμμισμένο. Στην περίπτωση όμως των σιδηροδρομικών γραμμών, εάν οι ράγες δεν είναι μεταξύ τους παράλληλες, η κίνηση του τρένου είναι αδύνατη.



Σε πολλές κατασκευές, όπως για παράδειγμα στην οδοποιία, στον σχεδιασμό αεροτομών κ.ά, χρειάζεται να γίνει μια «παράλληλη μετατόπιση καμπυλών» με τον τρόπο που υποδεικνύεται στο σχήμα.



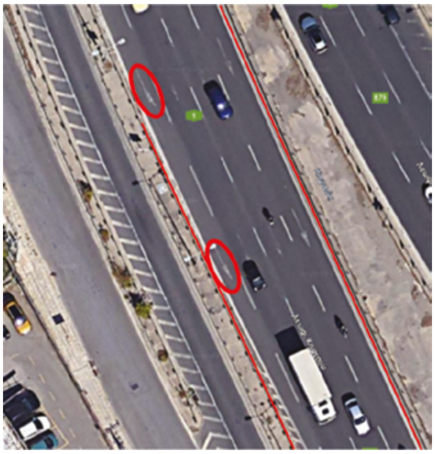
Ο **Ερατοσθένης ο Κυρηναίος**, γεννήθηκε στη Κυρήνη το 276 π.Χ. και πέθανε στην Αλεξάνδρεια, όπου έζησε το μεγαλύτερο μέρος της ζωής του, το 194 π.Χ.. Υπήρξε σπουδαίος μαθηματικός, αστρονόμος, γεωγράφος, γεωδαίτης, συγγραφέας και όχι μόνο. Με την παραδοχή ότι οι ακτίνες του ηλίου θεωρούνται παράλληλες μεταξύ τους, αφού ο ήλιος είναι πολύ μακριά από τη γη, κατάλαβε ότι η γη είναι σφαιρική και μπόρεσε να υπολογίσει την ακτίνα και την περιφέρειά της κατά μήκος ενός μεσημβρινού με σφάλμα μόλις 2%. Κάθε χρόνο, στις 21 Μαρτίου, σχολεία από όλον τον κόσμο εκτελούν το πείραμα του Ερατοσθένη και επανυπολογίζουν την περίμετρο της γης. Μπορείτε να το κάνετε και εσείς.

Η μέθοδος του Ερατοσθένη για τον υπολογισμό της περιμέτρου της γης

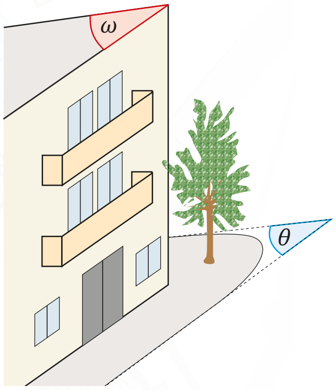
Ασκήσεις - Δραστηριότητες

1 Παρατηρήστε τη σχολική αίθουσα και καταγράψτε σε ποια αντικείμενα εντοπίζετε παράλληλες ευθείες. Αντιστοιχίστε τα αντικείμενα αυτά στα επαγγέλματα των ανθρώπων που τα έφτιαξαν.

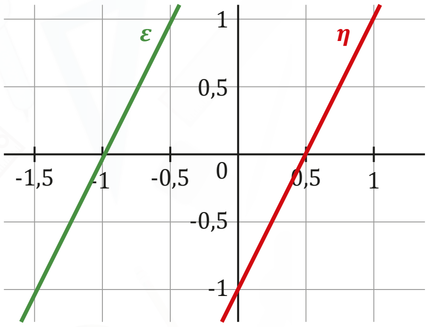
2 Στην εικόνα του διπλανού σχήματος, έχουν σημειωθεί με κόκκινες γραμμές τα όρια της λεωφόρου Κηφισού σε κάποια περιοχή. Διακρίνονται, επίσης, οι παράλληλες μεταξύ τους διαχωριστικές γραμμές που ορίζουν τις λωρίδες κυκλοφορίας, ενώ έχουν κυκλωθεί τα βέλη που δείχνουν ότι ο οδηγός πρέπει να στρίψει για να αλλάξει λωρίδα. Με αφορμή την εικόνα, σχολιάστε για ποιόν λόγο είναι σημαντικό τα όρια του δρόμου να προκύπτουν από παράλληλη μετατόπιση μιας γραμμής ως προς τον εαυτό της, καθώς και την ανάγκη ύπαρξης ειδικής σήμανσης για την περίπτωση που αυτό δεν συμβαίνει.



3 Ο πολιτικός μηχανικός σχεδίασε το κτίριο του διπλανού σχήματος, ώστε κάθε εξωτερικός τοίχος να είναι παράλληλος στα αντίστοιχα κράσπεδα του πεζοδρομίου. Τι συμπεραίνετε για τις γωνίες $\hat{\omega}$ και $\hat{\theta}$;



4 Στο σχήμα, έχουν σχεδιαστεί οι παράλληλες ευθείες ε και η. Ωστόσο, φαίνονται και ευθείες που είναι παράλληλες με τους άξονες.
Να διαπιστώσετε με γεωμετρικά όργανα ότι οι ευθείες ε και η είναι μεταξύ τους παράλληλες. Περιγράψτε τη διαδικασία.

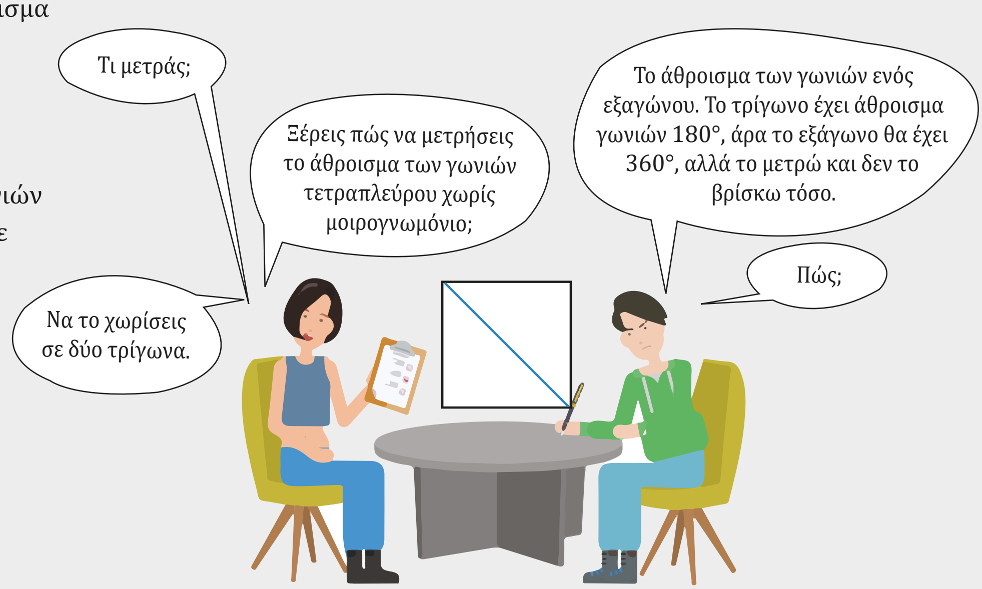


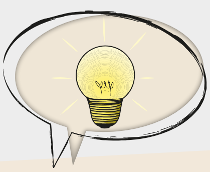
1.7 ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΓΩΝΙΩΝ ΚΥΡΤΟΥ ν-ΓΩΝΟΥ

Στην ενότητα αυτή θα μάθετε:

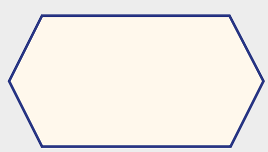
- Να ανακαλύπτετε και να αποδεικνύετε τον τύπο για το άθροισμα γωνιών κυρτού ν - γώνου.

Να βρείτε το άθροισμα των γωνιών ενός κυρτού εξαγώνου. Λύστε το ίδιο πρόβλημα για το άθροισμα των γωνιών ενός οποιουδήποτε κυρτού ν-γώνου.





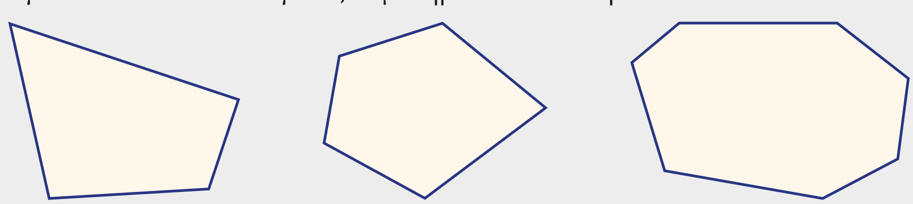
Με αφετηρία μια από τις κορυφές του παρακάτω εξαγώνου, χωρίστε το σε τρίγωνα και βρείτε το άθροισμα των γωνιών των τριγώνων.



Πόσα τρίγωνα προκύπτουν;
Ποιο είναι το άθροισμα των γωνιών τους;

Δουλεύοντας με παρόμοιο τρόπο για τα ακόλουθα πολύγωνα, συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα

Από το τρίγωνο στο ... ν-γωνο



Ο πίνακας που προκύπτει είναι ο διπλανός:

Υπολογίζοντας το άθροισμα των γωνιών πολυγώνου

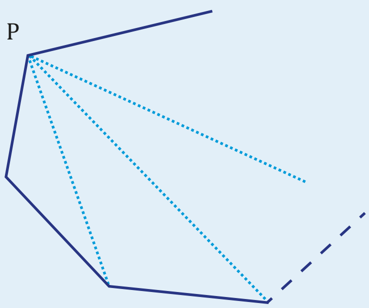
ΠΙΝΑΚΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΓΩΝΙΩΝ ΚΥΡΤΟΥ ν-ΓΩΝΟΥ			
Πλήθος γωνιών	Πλήθος τριγώνων	Άθροισμα γωνιών τριγώνων	Άθροισμα γωνιών πολυγώνου
3	1	$1 \cdot 180° = 180°$	180°
4	2	$2 \cdot 180° = 360°$	360°
5	3	$3 \cdot 180° = 540°$	540°
6	4	$4 \cdot 180° = 720°$	720°
7	5	$5 \cdot 180° = 900°$	900°

Ένας μαθητής συμπλήρωσε μια ακόμη σειρά στον πίνακα. Πώς νομίζετε ότι το σκέφτηκε;

ν	$\nu - 2$	$(\nu - 2) \cdot 180° = \nu \cdot 180° - 360°$	$\nu \cdot 180° - 360°$

Παρατηρώντας τις δύο πρώτες στήλες του πίνακα, προκύπτει ότι το πλήθος των τριγώνων είναι ίσο με το πλήθος των γωνιών του πολυγώνου μειωμένο κατά δύο. Επομένως το άθροισμα των γωνιών ενός πολυγώνου εξαρτάται μόνο από το πλήθος ν των πλευρών του και είναι ίσο με $\nu \cdot 180° - 360°$.

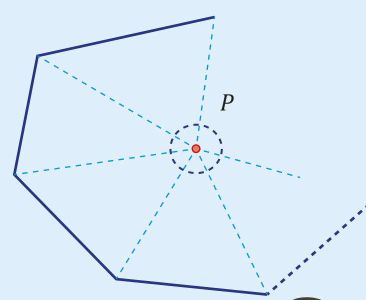
ΘΕΩΡΗΜΑ 1.7



Το άθροισμα των γωνιών ενός κυρτού ν-γώνου είναι $\Sigma = \nu \cdot 180° - 360°$.

Απόδειξη Ενώνουμε μια κορυφή P του ν-γώνου με κάθε άλλη μη γειτονική κορυφή του με ευθύγραμμα τμήματα. Τότε, σχηματίζονται $\nu - 2$ τρίγωνα (η προηγούμενη και η επόμενη της P κορυφές δεν δίνουν τρίγωνα). Το άθροισμα Σ των γωνιών των τριγώνων είναι ίσο με το άθροισμα των γωνιών του ν-γώνου, δηλαδή $\Sigma = \nu \cdot 180° - 360°$ ή διαφορετικά, $(2\nu - 4)$ ορθές.

Γνωρίζετε ότι:



Αρκετές προτάσεις στη Γεωμετρία και την Άλγεβρα μπορεί να αποδεικνύονται με περισσότερους από έναν τρόπους. Έτσι, το θεώρημα 1.7 μπορεί να αποδειχθεί και με τη βοήθεια του παρακάτω σχήματος, στο οποίο έχουμε χρησιμοποιήσει ένα βοηθητικό σημείο στο εσωτερικό του ν-γώνου, δηλαδή ένα σημείο που δεν ανήκει στο αρχικό σχήμα. Αντίστοιχα, για την απόδειξη άλλων προτάσεων, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε βοηθητικές ευθείες.
Μεταβείτε στο **ψηφιακό υλικό** για να δείτε την απόδειξη που στηρίζεται στο σχήμα με το βοηθητικό σημείο.

Υπολογισμός αθροίσματος γωνιών κυρτού ν-γώνου

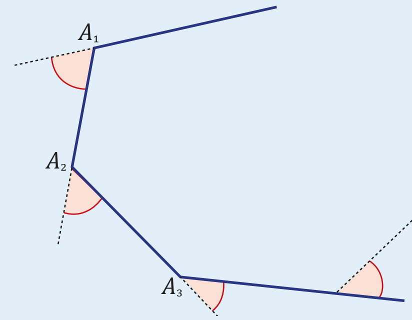
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.7α

Το διπλανό σχήμα είναι το ωρολόγιο του Κυρίστου, γνωστό και ως «Πύργος των Ανέμων» και βρίσκεται στο Μοναστηράκι. Το κτίσμα είναι οκταγωνικό με ίσες γωνίες και πλευρές. Μπορείτε να βρείτε πώς οι κατασκευαστές υπολόγισαν τις γωνίες που σχηματίζουν μεταξύ τους οι τοίχοι;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:
Το άθροισμα των γωνιών είναι $\Sigma = \nu \cdot 180° - 360° = 8 \cdot 180° - 360° = 1080°$.
Άρα, κάθε γωνία $\hat{\varphi}$ είναι $\hat{\varphi} = \dfrac{1080°}{8} = 135°$.

Εφαρμογή 1.7

Βρείτε το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών ενός κυρτού ν-γώνου.



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Κάθε εξωτερική γωνία του ν-γώνου είναι παραπληρωματική της αντίστοιχης εσωτερικής. Άρα,

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_{1\varepsilon\xi}=180^\circ-\hat{A}_1\\ \hat{A}_{2\varepsilon\xi}=180^\circ-\hat{A}_2\\ \quad\vdots\\ \hat{A}_{\nu\varepsilon\xi}=180^\circ-\hat{A}_\nu\end{array}\right\}\begin{array}{l}(+)\\ \Rightarrow \Sigma_{\varepsilon\xi}=\nu\cdot180^\circ-\Sigma=\nu\cdot180^\circ-\left(\nu\cdot180^\circ-360^\circ\right)=360^\circ\end{array}$$

Όπου $\Sigma_{\varepsilon\xi}$ και Σ είναι τα αθροίσματα των ν εξωτερικών και εσωτερικών γωνιών του ν-γώνου, αντίστοιχα.

Επομένως, το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών ενός κυρτού ν-γώνου, δεν εξαρτάται από το πλήθος των γωνιών του, αλλά είναι σταθερό και ίσο με 360°.

Ασκήσεις - Δραστηριότητες

1. Ποιο είναι το άθροισμα των γωνιών ενός κυρτού 10-γώνου, 12-γώνου, 100-γώνου;

2. Ποιο είναι το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών ενός κυρτού 10-γώνου, 12-γώνου, 100-γώνου;

3. Τι σχήμα είναι το πολύγωνο που έχει άθροισμα γωνιών 360°;

4. Υπάρχει πολύγωνο με άθροισμα γωνιών 200°;

5. Να βρείτε σε ποια κυρτά πολύγωνα το άθροισμα των γωνιών ισούται με το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών.

6. Το άθροισμα των γωνιών κυρτού πολυγώνου ισούται με 1620°. Να βρείτε το πλήθος των πλευρών του.

7. Σε κυρτό πολύγωνο με ίσες γωνίες, κάθε γωνία του είναι ίση με 120°.
   α) Να βρείτε το είδος του.
   β) Να βρείτε το πλήθος των πλευρών του.
   γ) Να βρείτε το άθροισμα των εξωτερικών του γωνιών.

8. Να ελέγξετε την αλήθεια της πρότασης: Το άθροισμα των γωνιών ενός 2ν-γώνου είναι διπλάσιο από το άθροισμα των γωνιών ενός ν-γώνου.

9. Με τις γνώσεις που αποκτήσατε σε αυτή τη διδακτική ενότητα, κατασκευάστε μια δική σας άσκηση και δώστε τη σε έναν συμμαθητή σας να τη λύσει. (Σημείωση: όταν προβαίνει κάποιος σε διαδικασία κατασκευής μιας άσκησης, είναι σημαντικό να γνωρίζει τι ακριβώς θέλει να εξετάσει, να περιγράφει με σαφήνεια το ζητούμενο και να λύνει ο ίδιος την άσκηση προτού τη δημοσιεύσει, προκειμένου να διαπιστώσει εάν χρειάζονται τροποποιήσεις ή διορθώσεις).

Ανακεφαλαίωση

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ – ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΕΡΓΑ ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗΣ:

Στις ερωτήσεις – ασκήσεις από 1 έως 6, να επιλέξετε τις σωστές απαντήσεις.

1. Από σημείο εκτός ευθείας πόσες ευθείες μπορούμε να φέρουμε παράλληλες προς αυτήν;

α. Μόνο μία
β. Καμία
γ. Άπειρες

2. Ισχύει ότι:

α. Δύο ευθείες είναι παράλληλες αν και μόνο αν οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες.
β. Αν δύο ευθείες είναι παράλληλες, τότε οι εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες είναι ίσες.
γ. Δύο ευθείες είναι παράλληλες όταν και μόνον όταν οι εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες είναι ίσες.
δ. Δύο ευθείες που είναι κάθετες σε μία τρίτη είναι και μεταξύ τους κάθετες.

3. Δίνεται η πρόταση «Αν οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες δύο ευθειών που τέμνονται από τρίτη είναι παραπληρωματικές, τότε οι ευθείες είναι παράλληλες». Η αντίστροφη πρόταση είναι:

α. Αν οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες δύο ευθειών που τέμνονται από τρίτη δεν είναι παραπληρωματικές, τότε οι ευθείες δεν είναι παράλληλες.
β. Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, τότε οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες είναι παραπληρωματικές.
γ. Αν δύο παράλληλες ευθείες δεν τέμνονται από τρίτη, τότε οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες δεν είναι παραπληρωματικές.

4. Δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους παράλληλες ανά δύο είναι:

α. Ίσες μεταξύ τους.
β. Παραπληρωματικές η μία της άλλης.
γ. Είτε ίσες είτε παραπληρωματικές, ανάλογα με το εάν είναι οξείες ή αμβλείες.

5. Δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες ανά δύο είναι:

α. Ίσες μεταξύ τους.
β. Παραπληρωματικές η μία της άλλης.
γ. Είτε ίσες είτε παραπληρωματικές, ανάλογα με το εάν είναι οξείες ή αμβλείες.

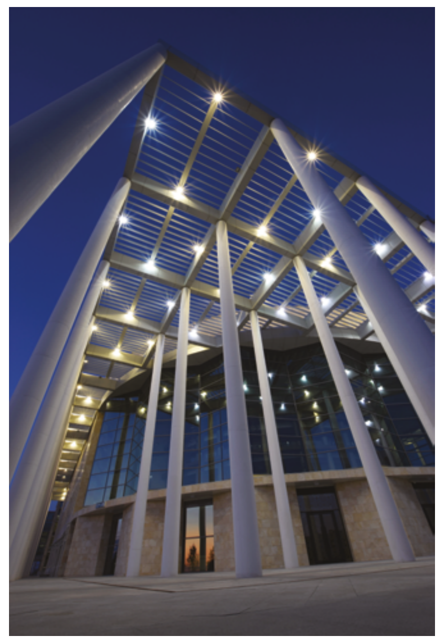
6. Η αντίστροφη της πρότασης «Δύο οξείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους παράλληλες μία προς μία είναι ίσες» είναι:

α. Αληθής.
β. Ψευδής.

7. Ποιες από τις έννοιες που μάθατε σε αυτήν τη διδακτική ενότητα, μπορείτε να εντοπίσετε στις παρακάτω φωτογραφίες;

8. Με αφορμή τις φωτογραφίες της άσκησης 7 γράψτε ένα μικρό (μαθηματικό) δοκίμιο σχετικό με τις παράλληλες ευθείες.

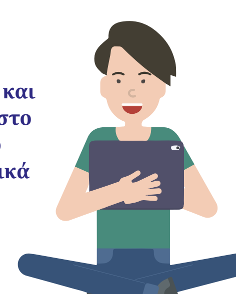


9. Με αφορμή τη φωτογραφία δημιουργήστε μια δική σας άσκηση που σχετίζεται με κάτι που μάθατε στο κεφάλαιο αυτό και δώστε τη στους/στις συμμαθητές/τριές σας προς επίλυση.

Ασκήσεις ανακεφαλαίωσης στις παράλληλες ευθείες

Ευθείες και γωνίες στο επίπεδο συνοπτικά



2ο Κεφάλαιο

Τρίγωνα

- Ισότητα Τριγώνων
- Κατασκευές με Κανόνα και Διαβήτη τριγώνων όταν δίνονται βασικά τους στοιχεία
- Ισοσκελή τρίγωνα
- Οι Ιδιότητες των ίσων τριγώνων στην επίλυση ρεαλιστικών προβλημάτων
- Μεσοκάθετος και Διχοτόμος
- Γεωμετρικές Κατασκευές Μεσοκαθέτου και Διχοτόμου
- Απλοί γεωμετρικοί τόποι (γ. τ.)
- Βασικές Ανισοτικές Σχέσεις Στοιχείων Τριγώνου
- Τόξα, Χορδές και Αποστήματα ίσων Κύκλων
- Κατασκευή Εφαπτομένης Κύκλου με Κανόνα και Διαβήτη

ΤΡΙΓΩΝΑ

2

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Θα μάθετε:

- Να ελέγχετε πότε σχέσεις μεταξύ βασικών στοιχείων τριγώνων και ορθογώνιων τριγώνων αποτελούν κριτήριο ισότητας αυτών.
- Να κατασκευάζετε με κανόνα και διαβήτη τρίγωνα με δεδομένα βασικά τους στοιχεία (γωνίες, πλευρές).
- Να αποδεικνύετε και να χρησιμοποιείτε κριτήρια που καθορίζουν ότι ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές.
- Να χρησιμοποιείτε ιδιότητες των ίσων τριγώνων στην επίλυση μαθηματικών και ρεαλιστικών προβλημάτων.
- Να αναγνωρίζετε τη διχοτόμο γωνίας και τη μεσοκάθετο ευθύγραμμου τμήματος ως γεωμετρικούς τόπους σημείων και να αποδεικνύετε τις ιδιότητές τους.
- Να κατασκευάζετε με κανόνα και διαβήτη τη διχοτόμο γωνίας και τη μεσοκάθετο ευθύγραμμου τμήματος και να αιτιολογείτε τη διαδικασία.
- Να βρίσκετε απλούς γεωμετρικούς τόπους εξηγώντας τον συλλογισμό σας.
- Να διευρευνάτε και να αποδεικνύετε βασικές ανισοτικές σχέσεις στοιχείων τριγώνου (τριγωνική ανισότητα και σύνδεση σχέσης πλευρών με σχέση αντίστοιχων γωνιών).
- Να αποδεικνύετε ότι, σε ίσους κύκλους, ίσα τόξα ορίζουν ίσες χορδές και ίσα αντίστοιχα σε αυτές αποστήματα. Να διατυπώνετε και ελέγχετε τους αντίστροφους ισχυρισμούς.
- Να κατασκευάζετε εφαπτομένη κύκλου σε σημείο του με κανόνα και διαβήτη.

Το τρίγωνο είναι βασικό σχήμα της Γεωμετρίας. Αρκετά σχήματα μελετώνται αφού πρώτα χωριστούν σε τρίγωνα, όπως στην περίπτωση της εύρεσης του αθροίσματος των γωνιών ενός πολυγώνου. Ακόμα, κλειστά καμπύλα σχήματα προσεγγίζονται από τρίγωνα για τη μέτρηση του εμβαδού της επιφάνειάς τους. Τα τρίγωνα χρησιμοποιούνται στη μηχανική για την ισοκατανομή φορτίων και τη σταθερότητα που προσδίδουν στις κατασκευές. Χρησιμοποιούνται επίσης στη Γεωδαισία για τον προσδιορισμό αποστάσεων.

Pastoral for P. W., John Craxton (1922–2009).

2.1 ΙΣΟΤΗΤΑ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Στην ενότητα αυτή θα μάθετε:

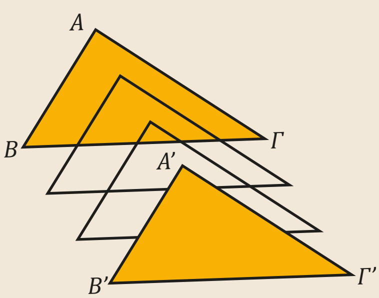
- Να ελέγχετε πότε σχέσεις μεταξύ βασικών στοιχείων τριγώνων και ορθογώνιων τριγώνων αποτελούν κριτήριο ισότητας αυτών.

Κριτήρια ισότητας τριγώνων

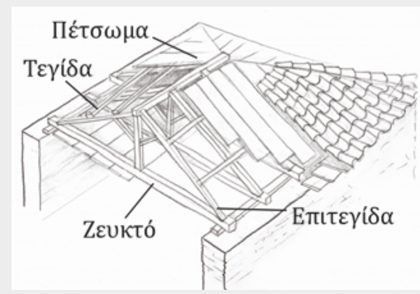
Έστω ένα τρίγωνο $ΑΒΓ$ το οποίο μετατοπίζεται όπως φαίνεται στο σχήμα, στη θέση $Α'Β'Γ'$. Τότε, προφανώς, το νέο τρίγωνο $Α'Β'Γ'$ είναι ίσο με το $ΑΒΓ$ και ισχύει ότι $\hat{Α} = \hat{Α}'$, $\hat{Β} = \hat{Β}'$, $\hat{Γ} = \hat{Γ}'$, $ΑΒ = Α'Β'$, $ΑΓ = Α'Γ'$ και $ΒΓ = Β'Γ'$.

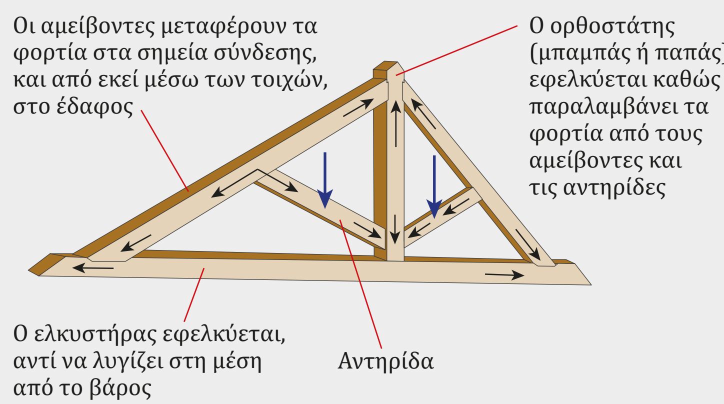
Γενικά, όταν με κατάλληλη μετατόπιση ή περιστροφή ένα τρίγωνο μπορεί να ταυτιστεί με ένα άλλο, τότε λέμε ότι τα τρίγωνα είναι ίσα.

Τα κύρια στοιχεία (πλευρές, γωνίες) που ταυτίζονται λέγονται **αντίστοιχα στοιχεία**.



Οι εργάτες που κατασκευάζουν στέγες σαν αυτή της φωτογραφίας τοποθετούν κεραμίδια στις πλάγιες πλευρές για να προστατεύουν τα κτήρια από βροχές και άλλα καιρικά φαινόμενα. Για να εξασφαλιστεί η ισορροπία χρησιμοποιούν ίσα τρίγωνα, που ονομάζονται ζευκτά.



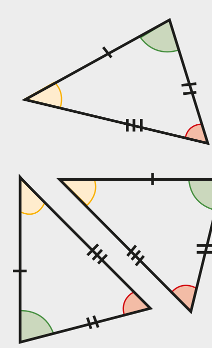


Ορισμός

Δύο τρίγωνα λέγονται ίσα αν και μόνον αν έχουν όλες τους πλευρές τους ίσες μία προς μια και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.

Αν δύο τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $Α'Β'Γ'$ είναι ίσα, γράφουμε $ΑΒΓ = Α'Β'Γ'$.

Σε δύο ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες και αντίστροφα.



Ίσα τρίγωνα

Σε ίσα τρίγωνα, οι ίσες πλευρές που βρίσκονται απέναντι από ίσες γωνίες είναι **αντίστοιχες** ή **ομόλογες** και οι ίσες γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές είναι **αντίστοιχες**.

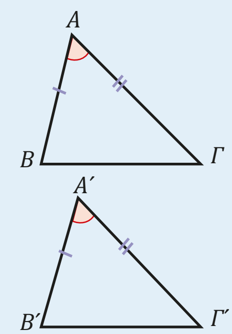
2.1.1 Κριτήρια ισότητας τριγώνων

Για να εξετάσετε αν δύο τρίγωνα είναι ίσα, όπως είδατε στο Γυμνάσιο, δεν χρειάζεται κάθε φορά να εξετάζετε την ισότητα όλων των γωνιών και πλευρών μία προς μία. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ένα από τα παρακάτω θεωρήματα, τα οποία ονομάζονται κριτήρια ισότητας τριγώνων.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.1.1α

1ο κριτήριο

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα (*ΠΓΠ*)



Απόδειξη Αν $AB = A'B'$, $A\Gamma = A'\Gamma'$ και $\hat{A} = \hat{A}'$, τότε $AB\Gamma = A'B'\Gamma'$.

1ο κριτήριο ισότητας τριγώνων (ΠΓΠ)

Μικροπείραμα

Για το 1ο Κριτήριο.

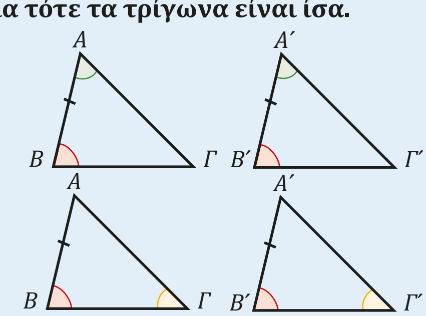
ΘΕΩΡΗΜΑ 2.1.1β

2ο Κριτήριο

Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά και δύο γωνίες ίσες μία προς μία τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

Απόδειξη Αν $AB = A'B'$, $\hat{B} = \hat{B}'$ και $\hat{A} = \hat{A}'$ τότε $AB\Gamma = A'B'\Gamma'$ (***ΓΠΓ***).

Αν $AB = A'B'$, $\hat{B} = \hat{B}'$ και $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$ τότε $AB\Gamma = A'B'\Gamma'$ (***ΠΓΓ***).



2ο κριτήριο ισότητας τριγώνων (ΓΠΓ)

Μικροπείραμα

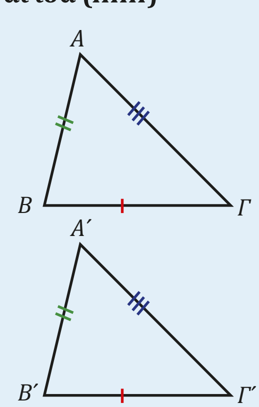
Για το 2ο Κριτήριο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.1.1γ

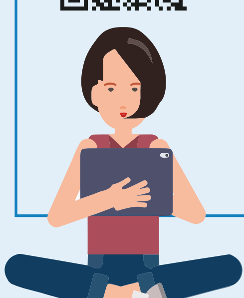
3ο Κριτήριο

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία τότε τα τρίγωνα είναι ίσα (*ΠΠΠ*)

Απόδειξη Αν $AB = A'B'$, $A\Gamma = A'\Gamma'$ και $B\Gamma = B'\Gamma'$, τότε $AB\Gamma = A'B'\Gamma'$.

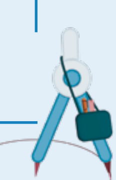


3ο κριτήριο ισότητας τριγώνων (ΠΠΠ)



Μικροπείραμα

Για το 3ο Κριτήριο.



2.1.2 Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

Τι συμβαίνει όμως όταν ζητείται να εξεταστεί πότε δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα; (δεδομένου ότι έχουν ίσες τις ορθές γωνίες)

Κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων που έχουν δύο πλευρές ίσες

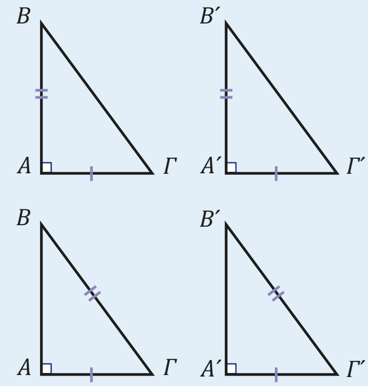
ΘΕΩΡΗΜΑ 2.1.2α

Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν δύο κάθετες ή μία κάθετη και τις υποτείνουσες ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

Έστω τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $Α'Β'Γ'$ με $\hat{A} = \hat{A}' = 90^o$.

α) Αν $ΑΒ = Α'Β'$ και $ΑΓ = Α'Γ'$, τότε $ΑΒΓ = Α'Β'Γ'$ (δύο κάθετες πλευρές μία προς μία ίσες)

β) Αν $ΒΓ = Β'Γ'$ και $ΑΓ = Α'Γ'$, τότε $ΑΒΓ = Α'Β'Γ'$ (μία κάθετη και την υποτείνουσα ίσες)



Μικροπείραμα

Μικροπείραμα για το παραπάνω θεώρημα.

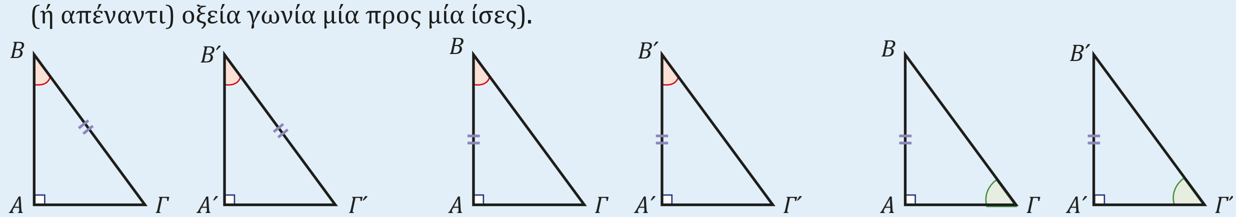
ΘΕΩΡΗΜΑ 2.1.2β

Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν ένα από τα παρακάτω:
(α) την υποτείνουσα και μία οξεία γωνία ίσες μία προς μία,
(β) μια κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία ίσες μία προς μία,
(γ) μια κάθετη πλευρά και την απέναντι σε αυτή οξεία γωνία ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

Έστω τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $Α'Β'Γ'$ με $\hat{A} = \hat{A}' = 90^o$:

α) Αν $ΒΓ = Β'Γ'$ και $\hat{B} = \hat{B}'$, τότε $ΑΒΓ = Α'Β'Γ'$ (έχουν τις υποτείνουσες και μία οξεία γωνία μία προς μία ίσες).

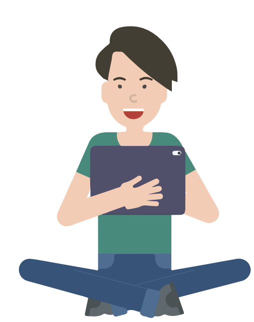
β) Αν $ΑΒ = Α'Β'$ και $\hat{B} = \hat{B}'$ (ή $\hat{Γ} = \hat{Γ}'$) τότε $ΑΒΓ = Α'Β'Γ'$ (έχουν μία κάθετη πλευρά και την προσκείμενη (ή απέναντι) οξεία γωνία μία προς μία ίσες).



(α) (β)

Συμπέρασμα

Από τα κριτήρια των ορθογωνίων τριγώνων είναι φανερό ότι για να ελέγξετε εάν δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, αρκεί να ελέγξετε την ισότητα **δύο αντίστοιχων στοιχείων (εκτός της ορθής) από τα οποία το ένα πρέπει να είναι πλευρά.**

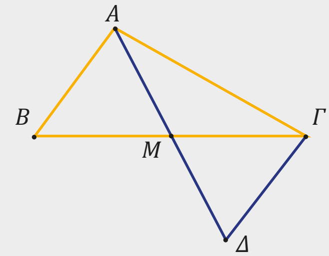


ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.1.2α

Έστω τρίγωνο *ΑΒΓ* και *ΑΜ* η διάμεσος από την κορυφή *Α*. Προεκτείνουμε την *ΑΜ* κατά *ΜΔ* = *ΑΜ*. Να αποδειχθεί ότι *ΓΔ* = *ΑΒ*.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ είναι πλευρές των τριγώνων *ΑΒΜ* και *ΓΜΔ*.
Τα τρίγωνα αυτά έχουν *ΑΜ* = *ΜΔ* (δίνεται), *ΒΜ* = *ΜΓ* (*Μ* μέσον της *ΒΓ*) και $\widehat{AMB} = \widehat{ΓΜΔ}$, (κατακορυφήν) οπότε είναι ίσα, άρα *ΑΒ* = *ΓΔ* (διότι βρίσκονται απέναντι από ίσες γωνίες στα ίσα τρίγωνα).

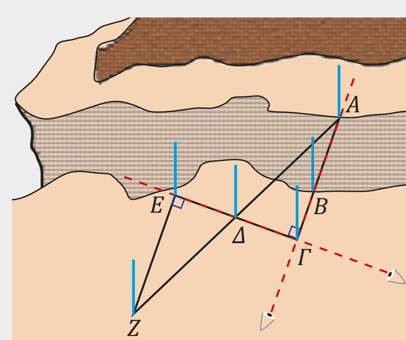


ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.1.2β

Να υπολογίσετε το άνοιγμα *ΑΒ* του γκρεμού μεταξύ των πασσάλων *Α* και *Β* που βρίσκονται στις θέσεις που φαίνονται στην εικόνα.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

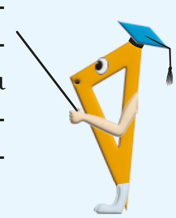
Σταθείτε σε ένα σημείο *Γ* ώστε τα *Α*, *Β* και *Γ* να είναι συνευθειακά. Τοποθετήστε ένα σημάδι (π.χ. έναν πάσσαλο) στο *Γ* και μετρήστε το μήκος του *ΓΒ*.
Στη συνέχεια, κινηθείτε από το *Γ* κάθετα στην *ΑΓ* μέχρι τυχαίο σημείο *Δ* και τοποθετείστε εκεί ένα ακόμα σημάδι. Μετρήστε το *ΓΔ*.
Ακολουθώντας την ευθεία *ΓΔ* πηγαίνετε στο *Ε* όπου *ΔΕ* = *ΓΔ* και βάλτε και εκεί ένα σημάδι.
Κατόπιν, από το *Ε* κινηθείτε κάθετα προς τη *ΓΕ* έως το *Ζ*, ώστε τα σημεία *Ζ*, *Δ* και *Α* να είναι στην ίδια ευθεία. Μετρήστε το *ΕΖ*.
Σχηματίστηκαν έτσι τα ίσα ορθογώνια τρίγωνα *ΓΔΑ* και *ΕΔΖ* (*ΓΔ* = *ΔΕ* και $\widehat{ΓΔΑ} = \widehat{ΕΔΖ}$ ως κατακορυφήν γωνίες), οπότε *ΑΓ* = *ΕΖ* και *ΑΒ* = *ΑΓ* – *ΒΓ* = *ΕΖ* – *ΒΓ*, που είναι γνωστά μήκη.



Γνωρίζετε ότι:

Από τη φυσική γνωρίζετε ότι το φως διαδίδεται ευθύγραμμα (όταν κινείται στο ίδιο μέσον), οπότε, εάν οι πάσσαλοι βρίσκονται στην ίδια ευθεία, τότε όταν βλέπετε τον έναν πάσσαλο και σταθείτε στην ευθεία που σχηματίζουν, οι άλλοι δεν θα πρέπει να φαίνονται, αφού κρύβονται πίσω από τον πρώτο.

Την παραπάνω μέθοδο μέτρησης αποστάσεων αναφέρεται ότι χρησιμοποίησε πρώτα ο Θαλής ο Μιλήσιος γύρω στο 600 π.Χ.



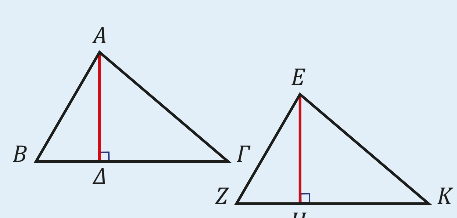
Εφαρμογή 2.1.2

Αν δύο τρίγωνα είναι ίσα τότε τα ύψη, οι διάμεσοι και οι διχοτόμοι που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές είναι επίσης ίσα/ ίσες αντίστοιχα.

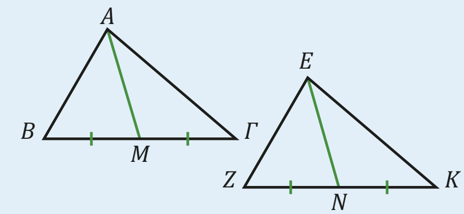
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρήστε τα ίσα τρίγωνα *ΑΒΓ* και *ΕΖΚ*.

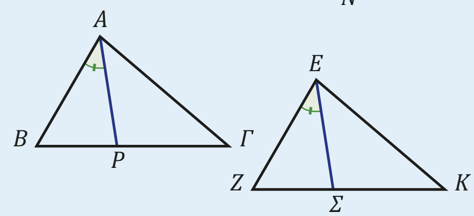
- Έστω *ΑΔ* και *ΕΗ* τα ύψη από τις κορυφές των ίσων γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{E}$ αντίστοιχα. Τα ορθογώνια τρίγωνα *ΑΒΔ* και *ΕΖΗ* είναι ίσα διότι *ΑΒ* = *ΕΖ* και $\hat{B}=\hat{Z}$, άρα *ΑΔ* = *ΕΗ*. Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι τα ύψη από τις άλλες κορυφές είναι ίσα.



- Έστω AM και EN οι διάμεσοι από τις κορυφές των ίσων γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{E}$ αντίστοιχα. Τα τρίγωνα ABM και EZN είναι ίσα διότι $AB = EZ$, $BM = ZN$ (είναι ίσα με το μισό των ίσων πλευρών: $B\Gamma = ZK \Rightarrow \frac{B\Gamma}{2} = \frac{ZK}{2}$) και $\hat{B} = \hat{Z}$, ($\Pi\Gamma\Pi$), άρα $AM = EN$. Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι οι διάμεσοι από τις άλλες κορυφές είναι ίσες.



- Έστω, τέλος, AP και $E\Sigma$ οι διχοτόμοι από τις κορυφές των ίσων γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{E}$ αντίστοιχα. Τα τρίγωνα ABP και $EZ\Sigma$ είναι ίσα διότι $AB = EZ$, $\hat{B} = \hat{Z}$ και $\widehat{BAP} = \widehat{ZE\Sigma}$ (είναι ίσες με το μισό των ίσων γωνιών: $\hat{A} = \hat{E} \Rightarrow \frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{E}}{2}$), ($\Gamma\Pi\Gamma$), άρα $AP = E\Sigma$. Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι οι διχοτόμοι από τις άλλες κορυφές είναι ίσες.



Ασκήσεις στην ισότητα τριγώνων

Ασκήσεις - Δραστηριότητες

1 Να χαρακτηρίσετε με την ένδειξη Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις:

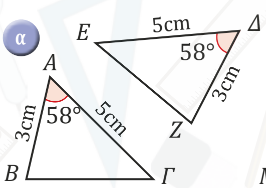
α) Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα όταν οι οξείες γωνίες τους είναι ίσες.

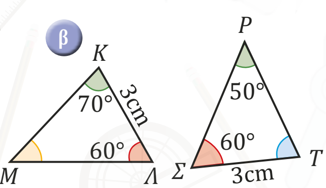
β) Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε οι διάμεσοι προς τις υποτείνουσές τους είναι ίσες.

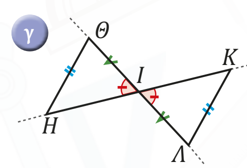
γ) Δύο τρίγωνα είναι πάντα ίσα όταν έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και μία γωνία ίση.

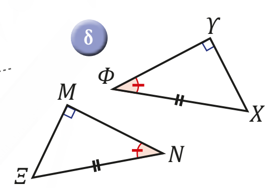
δ) Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά ίση και δύο γωνίες ίσες μία προς μία τότε οι διχοτόμοι προς την ίση πλευρά είναι ίσες.

2 Στα παρακάτω σχήματα να εξεταστεί ποια τρίγωνα είναι ίσα. Στη συνέχεια, να γράψετε τα υπόλοιπα στοιχεία των ίσων τριγώνων τα οποία είναι ίσα.









3 Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμεσός του AM. Από τις B και Γ φέρτε τα ευθύγραμμα τμήματα $B\Delta$ και ΓE κάθετα στην AM. Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \Gamma E$.

4 Στην προέκταση της διάμεσου AM τριγώνου $AB\Gamma$ θεωρήστε σημείο Δ τέτοιο ώστε $M\Delta = AM$. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $B\Gamma\Delta$ είναι ίσα.

5 Έστω γωνία $\widehat{xOy}$ και σημεία A, B στην Ox και Γ, Δ στην Oy με $OA = O\Gamma$ και $OB = O\Delta$. Να αποδείξετε ότι $A\Delta = B\Gamma$.

6 Έστω ευθείες ε_1 και ε_2 με $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ και ευθεία ε που τις τέμνει στα A και B αντίστοιχα. Από το μέσο M του AB διέρχεται ευθεία ζ που τέμνει τις ε_1 και ε_2 στα Γ και Δ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $A\Gamma = B\Delta$.

7 Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$. Στις προεκτάσεις των BA και ΓA (προς το A) θεωρήστε σημεία Δ και E αντίστοιχα με $A\Delta = AB$ και $AE = A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι $\Delta E // B\Gamma$.

8 Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ έχουν $\hat{A} = \hat{\Delta}$, $A\Gamma = \Delta Z$ και τα ύψη τους AH και ΔK ίσα. Να αποδείξετε ότι $AB\Gamma = \Delta EZ$.

9 Έστω τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ και $A\Delta$, $A'\Delta'$ οι διχοτόμοι τους. Αν $A\Delta = A'\Delta'$, $\hat{B} = \hat{B}'$ και $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$, να αποδείξετε ότι $AB\Gamma = A'B'\Gamma'$.

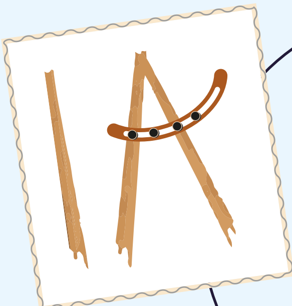
10 Προεκτείνετε τις πλευρές AB και $A\Gamma$ τριγώνου $AB\Gamma$ κατά τμήματα $B\Delta$ και ΓE ώστε $B\Delta = AB$ και $\Gamma E = A\Gamma$. Να φέρετε τα κάθετα ευθύγραμμα ΔZ και EK από τα σημεία Δ και E προς την $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι $\Delta Z = EK$. (ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Φέρτε το ύψος AH του τριγώνου $AB\Gamma$).

Κάρτα εξόδου

2.2 ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ ΜΕ ΚΑΝΟΝΑ ΚΑΙ ΔΙΑΒΗΤΗ ΤΡΙΓΩΝΩΝ ΟΤΑΝ ΔΙΝΟΝΤΑΙ ΒΑΣΙΚΑ ΤΟΥΣ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Στην ενότητα αυτή θα μάθετε:

- Να κατασκευάζετε με κανόνα και διαβήτη τρίγωνα με δεδομένα βασικά τους στοιχεία, δηλαδή τις γωνίες και τις πλευρές τους.



Κανόνας και διαβήτης

Πάντα δινόταν μεγάλη σημασία στην κατασκευή σχημάτων με τα απλούστερα όργανα που μπορούσε κάποιος να διαθέτει, δηλαδή με κανόνα (αδιαβάθμητο χάρακα) και διαβήτη.

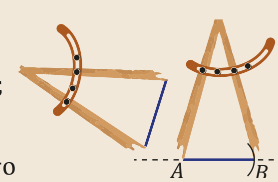
Ιστορία μαθηματικών: *Τα άλυτα γεωμετρικά προβλήματα της αρχαιότητας*

Στην προσπάθεια να γίνουν γεωμετρικές κατασκευές με κανόνα και διαβήτη, αναδείχθηκε η αδυναμία της επίλυσης των ακόλουθων τριών προβλημάτων:

- της τριχοτόμησης τυχαίας γωνίας,
- του τετραγωνισμού του κύκλου (δηλαδή η κατασκευή ενός τετραγώνου με εμβαδό ίσο με το εμβαδό ενός δοθέντος κύκλου),
- του διπλασιασμού του κύβου (δηλαδή η εύρεση της ακμής ενός κύβου με όγκο διπλάσιο ενός δοθέντος κύβου, πρόβλημα γνωστό και ως «Δήλιον πρόβλημα»),
- της κατασκευή κανονικού πολυγώνου με οποιοδήποτε πλήθος πλευρών.

Τα προβλήματα αυτά είναι γνωστά και με τη φράση «Τα άλυτα γεωμετρικά προβλήματα της αρχαιότητας».

Οι στέγες των σπιτιών της φωτογραφίας σχεδιάστηκαν ώστε ανά δύο να έχουν προσόψεις που αντιστοιχούν σε σκαληνά ίσα τρίγωνα. Είναι φανερό ότι, από όλα τα βασικά στοιχεία του κάθε τριγώνου, μπορείτε να μετρήσετε πιο εύκολα τη γωνία της άνω κορυφής και τα μήκη των πλευρών που την περιέχουν. Εάν θέλατε να φτιάξετε ένα παρόμοιο συγκρότημα κατοικιών, πώς θα κατασκευάζατε -με κανόνα και διαβήτη- στο σχέδιο, ένα τρίγωνο στέγης, εάν γνωρίζατε τις δύο πλευρές και την περιεχόμενη σε αυτές γωνία;



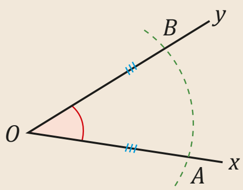
Για να λυθεί το πρόβλημα, πρέπει πρώτα να απαντηθούν τα εξής ερωτήματα:

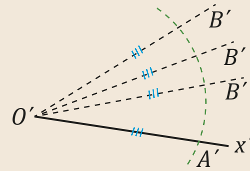
α) Πώς κατασκευάζεται με κανόνα και διαβήτη ευθύγραμμο τμήμα ίσο με δοθέν;

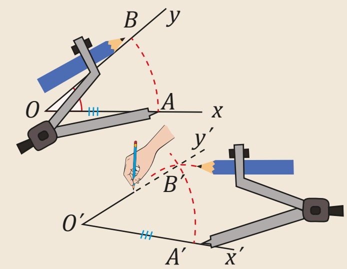
β) Πώς κατασκευάζεται με κανόνα και διαβήτη γωνία ίση με δοθείσα;

α) Όπως γνωρίζετε, για να κατασκευάστε πάνω σε μία ευθεία ευθύγραμμο τμήμα ίσο με δοσμένο, αρκεί να τοποθετήσετε τα άκρα του διαβήτη στα άκρα του δοθέντος ευθυγράμμου τμήματος και χωρίς να μεταβάλλετε το άνοιγμα του διαβήτη, με κέντρο σημείο Α της ευθείας να φέρετε τόξο που την τέμνει στο Β. Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ έχει ίδιο μέτρο με το δοθέν ευθύγραμμο τμήμα (αφού αποτελούν ακτίνες δύο ίσων κύκλων).

β) Έστω $\widehat{xOy}$ η δοθείσα γωνία.







Φέρτε τόξο κύκλου κέντρου O που τέμνει τις Ox και Oy στα σημεία A και B αντίστοιχα.

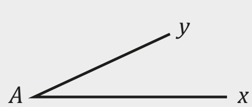
Διατηρώντας σταθερό το άνοιγμα του διαβήτη, τοποθετήστε το ένα άκρο του διαβήτη στο άκρο O' της ημιευθείας $O'x'$ και φέρτε τόξο που την τέμνει στο σημείο A'. Επομένως, πρέπει να προσδιοριστεί η ακριβής θέση του σημείου B' ώστε τα τρίγωνα OAB και $O'A'B'$ να είναι ίσα.

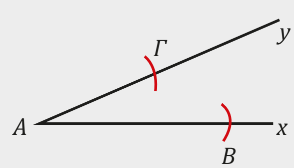
Μετρήστε την απόσταση AB και χαράξτε τόξο κύκλου με κέντρο το A' και ακτίνα AB, που τέμνει το προηγούμενο τόξο στο B'. Χαράξτε την ημιευθεία $O'B'$.

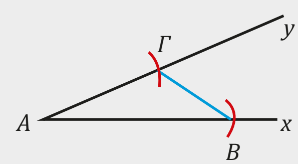
Κατασκευή γωνίας με κανόνα και διαβήτη

Πλήρης γεωμετρική κατασκευή γωνίας ίσης με δοθείσα

Αναδιατύπωση σε μαθηματική γλώσσα του έργου εξερεύνησης:
Να κατασκευάσετε (με κανόνα και διαβήτη) τρίγωνο όταν δίνονται οι δύο πλευρές του και η περιεχόμενη σε αυτές γωνία του.







Κατασκευάστε τη γωνία.

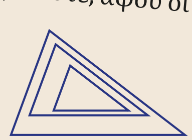
Πάνω στις ημιευθείες Ax και Ay με τη βοήθεια του διαβήτη, προσδιορίστε τη θέση των σημείων B και $Γ$ αντίστοιχα.

Ενώστε τα σημεία B και $Γ$. Το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι το ζητούμενο τρίγωνο.

Από σημείο εκτός ευθείας, με κανόνα και διαβήτη, μπορείτε να κατασκευάσετε παράλληλη προς την αρχική, κάνοντας μεταφορά γωνίας.

Σχόλιο

Εάν δε γνωρίζετε μία τουλάχιστον πλευρά, τότε η κατασκευή μπορεί να έχει άπειρες λύσεις. Για παράδειγμα, μπορείτε να κατασκευάσετε άπειρα τρίγωνα με δεδομένες τις τρεις γωνίες, όπως φαίνεται στο σχήμα. (Τα τρίγωνα έχουν πλευρές παράλληλες, οπότε, αφού οι γωνίες είναι οξείες είναι αντίστοιχα ίσες).



Όταν δίνονται βασικά στοιχεία ενός τριγώνου, τότε μπορείτε να κατασκευάσετε ένα ίσο με αυτό, εάν τα στοιχεία που δίνονται είναι εκείνα που αναφέρονται στα κριτήρια ισότητας. Χρειάζεστε, λοιπόν, τρία στοιχεία, εκ των οποίων το ένα τουλάχιστον να είναι πλευρά.

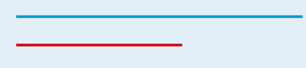
Μικροπείραμα κατασκευής τριγώνου με άπειρες δυνατές λύσεις

Μικροπείραμα

Κατασκευή με άπειρες δυνατές λύσεις.

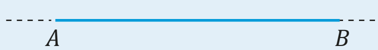
Εφαρμογή 2.2α

Να κατασκευάσετε, με κανόνα και διαβήτη, τρίγωνο που θα έχει πλευρές ίσες με δοσμένα ευθύγραμμα τμήματα, π.χ. αυτά που φαίνονται στο σχήμα.



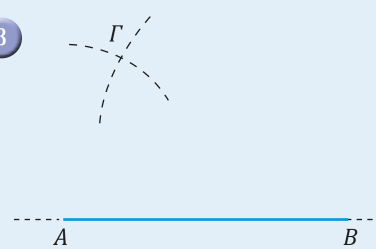
ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ

α



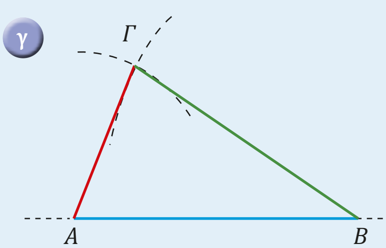
Κατασκευάστε ευθύγραμμο τμήμα AB ίσο με τη μία πλευρά.

β



Με κέντρο το A γράψτε τόξο κύκλου με ακτίνα ίση με τη δεύτερη πλευρά και με κέντρο το B γράψτε τόξο κύκλου με ακτίνα ίση με την τρίτη πλευρά. Ονομάστε Γ το σημείο τομής των τόξων.

γ



Ενώστε τα σημεία B και Γ. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι το ζητούμενο τρίγωνο.

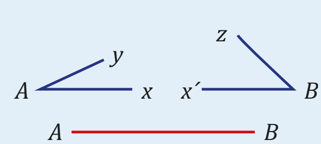
Σχόλιο

Το πρόβλημα έχει λύση όταν τα τόξα τέμνονται, δηλαδή όταν η μεγαλύτερη πλευρά είναι μικρότερη από το άθροισμα των άλλων δύο. Φυσικά η κορυφή Γ του τριγώνου θα μπορούσε να είναι και κάτω από την ΑΒ.

Φύλλο εργασίας για κατασκευές

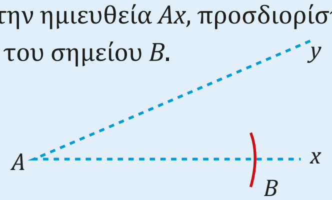
Εφαρμογή 2.2β

Να κατασκευάσετε, με κανόνα και διαβήτη, τρίγωνο όταν δίνονται η μία πλευρά του και οι προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες (βλ. σχήμα).

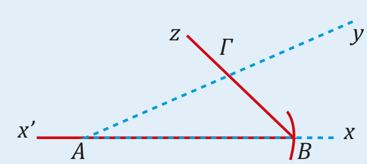


ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ

Κατασκευάστε τη γωνία $\widehat{xAy}$ και πάνω στην ημιευθεία Ax, προσδιορίστε τη θέση του σημείου B.



Κατασκευάστε τη $\widehat{x'Bz}$, με τέτοιον τρόπο, ώστε η $x'x$ να είναι ευθεία και οι Ax και Bz να βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της AB. Ονομάστε Γ το σημείο τομής των Ax και Bz. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι το ζητούμενο τρίγωνο.



Τι θα πρέπει να ισχύει για το άθροισμα των γωνιών που δίνονται στην παραπάνω κατασκευή;

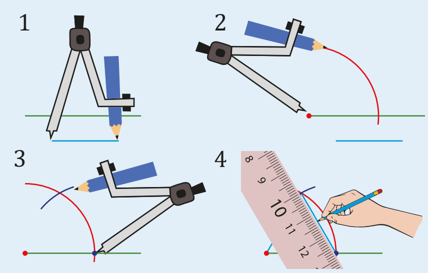
Εφαρμογή 2.2γ

Να κατασκευάσετε ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς α.

Λύση: Ακολουθήστε τα βήματα της εικόνας. Μπορείτε να τα περιγράψετε;

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ

Μετρήστε με τον διαβήτη το ευθύγραμμο τμήμα πλευράς α και κατασκευάστε πάνω σε μία ημιευθεία ευθύγραμμο τμήμα ίσο με αυτό. Με κέντρο τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος, κατασκευάστε τόξα που τέμνονται σε κάποιο σημείο (υπάρχουν δύο τέτοια σημεία). Κατασκευάστε το τρίγωνο με κορυφές τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος και το σημείο τομής των τόξων.



Ασκήσεις - Δραστηριότητες

1 Να χαρακτηρίσετε με την ένδειξη Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις:

α) Εάν δοθούν δύο από τα βασικά στοιχεία ενός τριγώνου, τότε μπορείτε να κατασκευάσετε ένα και μόνο τρίγωνο.

β) Εάν δοθούν τέσσερα από τα βασικά στοιχεία ενός τριγώνου, τότε μπορείτε να κατασκευάσετε ένα και μόνο τρίγωνο.

γ) Εάν δοθούν δύο πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου, τότε, μπορείτε να κατασκευάσετε ένα και μόνο ορθογώνιο τρίγωνο.

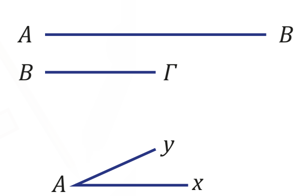
δ) Εάν δοθούν οι τρεις γωνίες ενός τριγώνου, τότε, μπορείτε να κατασκευάσετε ένα και μόνο τρίγωνο.

Πλήρης γεωμετρική κατασκευή τριγώνου όταν δίνονται μια πλευρά του και οι προσκείμενες σε αυτή γωνίες

2 Να κατασκευάσετε ένα ισοσκελές τρίγωνο.

3 Να κατασκευάσετε, με κανόνα και διαβήτη, τρίγωνο, όταν δίνονται μία πλευρά και δύο γωνίες εκ των οποίων η μία είναι απέναντι από την πλευρά αυτή.

4 Να κατασκευάσετε τρίγωνο όταν δίνονται οι δύο πλευρές του και μία από τις γωνίες που δεν περιέχεται στις πλευρές αυτές, όπως φαίνονται στο σχήμα. Στη συνέχεια, να διατυπώσετε την άποψή σας για τον λόγο για τον οποίο δεν μπορεί να αποτελεί κριτήριο ισότητας τριγώνων η πρόταση «Εάν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές και μία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα», αλλά πρέπει η γωνία να είναι η περιεχόμενη στις πλευρές αυτές.



2.3 ΙΣΟΣΚΕΛΗ ΤΡΙΓΩΝΑ

Στην ενότητα αυτή θα μάθετε:

- Να αποδεικνύετε και να χρησιμοποιείτε κριτήρια που καθορίζουν ότι ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Η Πυραμίδα του Χέοπα είναι το αρχαιότερο από τα επτά θαύματα του κόσμου και το μόνο που σώζεται μέχρι σήμερα. Σε ένα βιβλίο για τις πυραμίδες, διαβάσατε ότι «εάν από την κορυφή φέρουμε ένα νήμα κάθετο σε μια οποιαδήποτε ακμή της έδρας που αποτελεί τη βάση της, τότε αυτό διέρχεται από το μέσον της ακμής».

α) Να ελέγξετε την αλήθεια του ισχυρισμού : «οι ακμές που τέμνονται στην κορυφή είναι μεταξύ τους ίσες».

β) Με δεδομένο ότι σήμερα η κορυφή της πυραμίδας λείπει από τη θέση της, πώς θα μπορούσατε να ελέγξετε την αλήθεια του παραπάνω ισχυρισμού, εάν μπορούσατε να μετρήσετε σε μια πλαϊνή έδρα τις γωνίες που σχηματίζουν η οριζόντια ακμή με τις άλλες ακμές της και τις είχατε βρει ίσες;

Τα ισοσκελή τρίγωνα στις κατασκευές

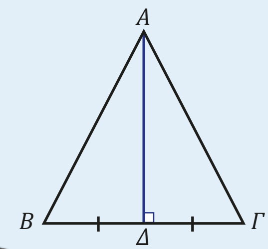
Θεωρήστε την πλαϊνή έδρα της πυραμίδας ως τρίγωνο $AB\Gamma$ με ύψος $A\Delta$. Τότε με βάση τις πληροφορίες σας, το ύψος θα είναι και διάμεσος.

Πολλές φορές, προκειμένου να μελετήσετε ένα πρόβλημα χρειάζεται να κάνετε κάποιες παραδοχές, όπως εδώ που υποθέσατε ότι οι έδρες της πυραμίδας είναι τρίγωνα, κάτι που πλέον δεν ισχύει μετά τις φθορές που έχει υποστεί με τον χρόνο. Έτσι, για να μαθηματικοποιήσετε, όπως λέγεται, ένα πρόβλημα ώστε να οδηγηθείτε στη λύση του, χρειάζεται να αγνοήσετε αρχικά κάποιες από τις πραγματικές συνθήκες, να το λύσετε στην ιδανική περίπτωση και να προσπαθήσετε να δείτε στη συνέχεια πώς μεταβάλλεται η λύση εάν λάβετε υπόψη και άλλους παράγοντες.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.3α

Εάν σε ένα τρίγωνο το ύψος από μια κορυφή ταυτίζεται με τη διάμεσο, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές (με βάση την πλευρά στην οποία καταλήγει το ύψος).

Απόδειξη Έστω τρίγωνο $ΑΒΓ$ και $ΑΔ$ το ύψος του. Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΔΑΒ$ και $ΔΑΓ$ έχουν $ΔΒ = ΔΓ$ και την $ΑΔ$ κοινή. Επομένως είναι ίσα, αφού έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία . Συνεπώς, θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε $ΑΒ = ΑΓ$ και, επομένως, το $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά στην οποία καταλήγει το ύψος.



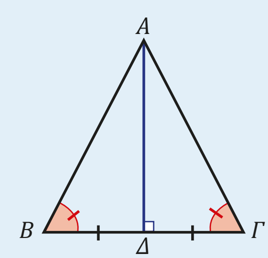
Παρατήρηση

Από την παραπάνω ισότητα των τριγώνων $ΔΑΒ$ και $ΔΑΓ$ έχουμε ότι $\widehat{ΔΒΑ} = \widehat{ΔΓΑ}$, δηλαδή, οι γωνίες της βάσης είναι ίσες. Επίσης, $\widehat{ΔΑΒ} = \widehat{ΔΑΓ}$, οπότε η $ΑΔ$ είναι και διχοτόμος και, επομένως, ύψος, διάμεσος και διχοτόμος ταυτίζονται.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.3β

Εάν δύο γωνίες ενός τριγώνου είναι ίσες, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές (με βάση την κοινή πλευρά των ίσων γωνιών).

Απόδειξη Έστω τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $\hat{Β} = \hat{Γ}$ και $ΑΔ$ το ύψος του. Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΔΑΒ$ και $ΔΑΓ$ έχουν $\hat{Β} = \hat{Γ}$ (δεδομένο) και την $ΑΔ$ κοινή. Επομένως είναι ίσα, αφού έχουν μία πλευρά και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες. Συνεπώς, θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε $ΑΒ = ΑΓ$. Άρα το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές με βάση την κοινή πλευρά των ίσων γωνιών.

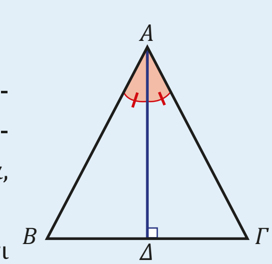


Ακόμα, για να ελέγξετε εάν ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε και τα ακόλουθα θεωρήματα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.3γ

Εάν σε ένα τρίγωνο το ύψος από μια κορυφή ταυτίζεται με την αντίστοιχη διχοτόμο, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές (με βάση την πλευρά στην οποία καταλήγει το ύψος).

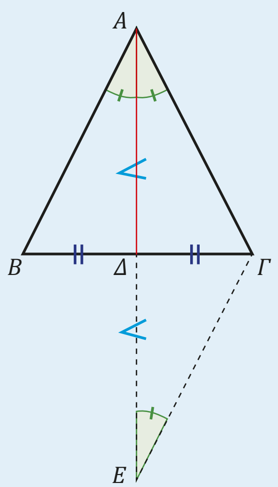
Απόδειξη Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΔΑΒ$ και $ΔΑΓ$ έχουν κοινή την $ΑΔ$ και ισχύει $\widehat{ΔΑΒ} = \widehat{ΔΑΓ}$. Επομένως είναι ίσα, αφού έχουν μία πλευρά και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες. Συνεπώς, θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε $ΑΒ = ΑΓ$, δηλαδή το τρίγωνο είναι ισοσκελές.
Παρατηρήστε ότι από την παραπάνω ισότητα τριγώνων προκύπτει επίσης ότι $ΔΒ = ΔΓ$, δηλαδή η $ΑΔ$ είναι και διάμεσος.



ΘΕΩΡΗΜΑ 2.3δ

Εάν σε ένα τρίγωνο η διάμεσος από μια κορυφή ταυτίζεται με τη διχοτόμο, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές (με βάση την πλευρά στην οποία καταλήγει η διάμεσος).

Απόδειξη Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και $A\Delta$ η διχοτόμος και διάμεσός του. Τότε $\Delta B = \Delta\Gamma$ και $\widehat{\Delta AB} = \widehat{\Delta A\Gamma}$. Προεκτείνουμε την $A\Delta$ κατά ίσο τμήμα ΔE.



Για την απόδειξη αυτή χρειάζεται να κατασκευάσετε ένα βοηθητικό τρίγωνο, δηλαδή ένα τρίγωνο που δεν υπάρχει στο αρχικό σχήμα.

Τα τρίγωνα ΔAB και $\Delta E\Gamma$ είναι ίσα.

↓ $\Delta B = \Delta\Gamma$, $A\Delta = \Delta E$, $\widehat{A\Delta B} = \widehat{\Gamma\Delta E}$ (κατακορυφήν γωνίες)

Τα τρίγωνα ΔAB και $\Delta E\Gamma$ έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα

$AB = E\Gamma$

$\widehat{\Delta AB} = \widehat{\Delta E\Gamma}$

$\widehat{\Delta AB} = \widehat{\Delta A\Gamma} = \dfrac{\hat{A}}{2}$ — $A\Delta$ διχοτομος της $\hat{A}$

↓

$\widehat{\Delta E\Gamma} = \widehat{\Delta A\Gamma}$

↓

Το τρίγωνο ΓAE είναι ισοσκελές με $E\Gamma = A\Gamma$

↓ Θεώρημα 2.3β

$AB = A\Gamma$, δηλαδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

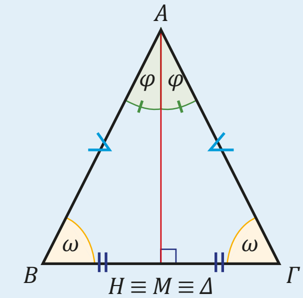
Τα παραπάνω θεωρήματα αποτελούν κριτήρια με τα οποία μπορείτε να αποδείξετε ότι ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Από τα κριτήρια ισότητας τριγώνων, αποδεικνύεται ότι:

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.3ε

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.3ε: Εάν ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές, τότε:
1. η διχοτόμος $ΑΔ$, το ύψος $ΑΗ$ και η διάμεσος $ΑΜ$ προς τη βάση ταυτίζονται και
2. οι γωνίες που είναι προσκείμενες στη βάση είναι ίσες μεταξύ τους.

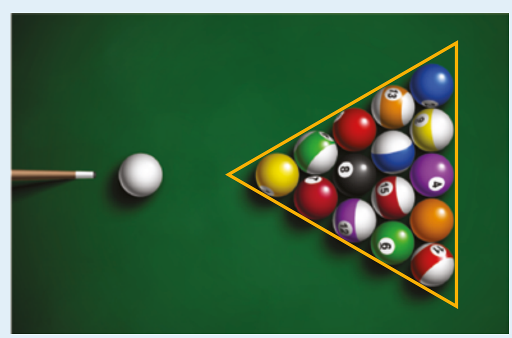
(στο σχήμα, το «≡» συμβολίζει την ταύτιση των σημείων)



Εφαρμογή 2.3

Να δείξετε ότι ένα τρίγωνο είναι ισόπλευρο αν και μόνο αν κάθε γωνία του ισούται με 60°.

Κατασκευή ισοσκελούς τριγώνου με γεωμετρικά όργανα



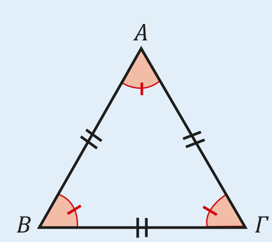
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

(Ευθύ)

Έστω ισόπλευρο τρίγωνο $ΑΒΓ$. Τότε $ΑΒ = ΑΓ = ΒΓ$. Από τη σχέση $ΑΒ = ΑΓ$ και το Θεώρημα 2.3ε έχουμε ότι $\hat{B} = \hat{Γ}$ (1). Ομοίως, από τη σχέση $ΑΓ = ΒΓ$ έχουμε ότι $\hat{A} = \hat{B}$ (2). Από τις (1), (2) και τη σχέση $\hat{A} + \hat{B} + \hat{Γ} = 180°$ έχουμε ότι $\hat{A} = \hat{B} = \hat{Γ} = 60°$.

(Αντίστροφο)

Έστω τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $\hat{A} = \hat{B} = \hat{Γ} = 60°$ Από τη σχέση $\hat{A} = \hat{B}$ και το Θεώρημα 2.3β, έχουμε ότι $ΑΓ = ΒΓ$ (3). Ομοίως, από τη σχέση $\hat{B} = \hat{Γ}$, έχουμε ότι $ΑΒ = ΑΓ$ (4). Από τις (3) και (4) έχουμε ότι $ΑΒ = ΑΓ = ΒΓ$, οπότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.



Ασκήσεις - Δραστηριότητες

1 Να χαρακτηρίσετε με την ένδειξη Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις και να δικαιολογήσετε τον ισχυρισμό σας:

α) Καθεμία από τις οξείες γωνίες ενός ορθογωνίου ισοσκελούς τριγώνου είναι ίση με το μισό της ορθής.

β) Έξι χαρτόνια σχήματος ισοπλεύρου τριγώνου μπορούν πάντα να τοποθετηθούν με τέτοιον τρόπο ώστε να έχουν κοινή κορυφή και να μην υπερκαλύπτουν το ένα το άλλο, ανεξάρτητα από το μήκος των πλευρών του καθενός.

γ) Υπάρχουν τρίγωνα στα οποία το ύψος ταυτίζεται με τη διάμεσο, αλλά δεν ταυτίζεται με τη διχοτόμο.

δ) Κάθε ισόπλευρο τρίγωνο είναι και ισοσκελές.

2 Να αποδείξετε ότι ένα ισοσκελές τρίγωνο είναι ισόπλευρο εάν έχει
α) γωνία κορυφής ίση με 60^{o}. **β)** γωνία βάσης ίση με 60^{o}.

3 Στις πλευρές AB, $A\Gamma$, $B\Gamma$ ισοπλεύρου τριγώνου $AB\Gamma$, θεωρήστε σημεία Δ, E και Z αντίστοιχα, ώστε $A\Delta = \Gamma E = BZ$. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΔEZ είναι ισόπλευρο.

4 Να αποδείξετε ότι εάν ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές, τότε τα ύψη που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσα και αντιστρόφως.

5 Να αποδείξετε ότι εάν ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές, τότε οι διάμεσοι που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσες.

6 Να αποδείξετε ότι εάν ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές, τότε οι διχοτόμοι που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσες μεταξύ τους.

7 Να αποδείξετε ότι η κάθετη από το κέντρο ενός κύκλου προς μια χορδή του, διέρχεται από το μέσον αυτής.

Η γέφυρα του γαϊδάρου

8 Προεκτείνετε τις ίσες πλευρές AB και $A\Gamma$ ενός ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ κατά ίσα μεταξύ τους τμήματα $B\Delta$ και ΓE αντίστοιχα. Δείξτε ότι:

α) Τα τρίγωνα ABE και $A\Gamma\Delta$ είναι μεταξύ τους ίσα.

β) $\widehat{AEB} = \widehat{A\Delta\Gamma}$.

γ) $\widehat{\Gamma B\Delta} = \widehat{B\Gamma E}$.

δ) Τα τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και ΓEB είναι μεταξύ τους ίσα.

Ερωτήσεις σχετικά με τα ισοσκελή τρίγωνα

9 Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=A\Gamma$, ευθεία $\varepsilon // B\Gamma$ και σημεία M και N της ε, τέτοια ώστε $AM=AN=B\Gamma$. Εάν οι ευθείες MB και $N\Gamma$ τέμνονται στο Z, να δείξετε ότι το τρίγωνο ZMN είναι ισοσκελές και η ευθεία του ύψους του ταυτίζεται με την ευθεία του ύψους του $AB\Gamma$.

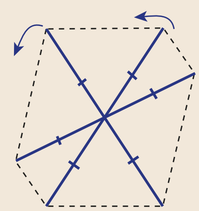
2.4 ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΙΣΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ ΣΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΡΕΑΛΙΣΤΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

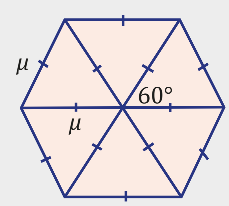
Στην ενότητα αυτή θα μάθετε:

- Να χρησιμοποιείτε ιδιότητες των ίσων τριγώνων στην επίλυση μαθηματικών και ρεαλιστικών προβλημάτων.

Όσοι κατασκευάζουν εξαγωνικούς χαρταετούς, γνωρίζουν ότι για να μπορούν να πετάξουν σωστά είναι σημαντικό να αποτελούνται από ίσα μεταξύ τους τρίγωνα. Πώς τους κατασκευάζουν χωρίς να χρησιμοποιούν γεωμετρικά όργανα;

1. Τρεις ίσες ξύλινες ράβδοι (μάνες) καρφώνονται ακριβώς στο κέντρο.
2. Οι ράβδοι ανοίγουν, ώστε να σχηματιστούν έξι ισοσκελή τρίγωνα. Για να είναι ίσα, πρέπει οι περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες, δηλαδή εκείνες που έχουν την κορυφή τους στο κέντρο του χαρταετού, να είναι ίσες. Άρα, καθεμία από αυτές είναι 60°. Επομένως, καθεμιά από τις γωνίες της βάσης των ισοσκελών είναι επίσης 60°, δηλαδή τα τρίγωνα είναι ισόπλευρα.
3. Τα άκρα των ράβδων ανοίγουν ώστε η απόσταση μεταξύ τους να ισούται με την απόσταση μ από το κέντρο του χαρταετού μέχρι το άκρο της ράβδου. (Η μέτρηση μπορεί να γίνει με τη βοήθεια ενός σπάγκου).

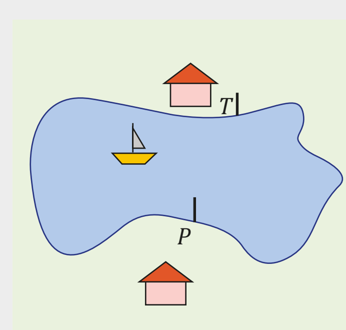




Γενικά, σε διάφορες εφαρμογές της καθημερινής ζωής μπορεί να χρειαστείτε ιδιότητες ίσων τριγώνων για να επιλύσετε διάφορα ζητήματα. Χρειάζεται όμως να γνωρίζετε τα κριτήρια ισότητας και να έχετε υπόψη ότι ίσα τρίγωνα έχουν ίσα και τα αντίστοιχα στοιχεία τους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.4α

Στα σημεία P και T του σχήματος υπάρχουν δύο πάσσαλοι που σηματοδοτούν τα άκρα μιας πλωτής γέφυρας που πρόκειται να κατασκευαστεί από σχοινί και σανίδες συγκεκριμένου πλάτους. Προκειμένου να υπολογιστεί το πλήθος των σανίδων και το μήκος του σχοινιού που θα χρειαστεί, είναι σημαντικό να υπολογιστεί η απόσταση PT. Πώς μπορείτε να την υπολογίσετε εάν το μόνο που διαθέτετε είναι μια μετροταινία μεγάλου μήκους και ένα όργανο με το οποίο μπορείτε να κατασκευάσετε ίσες γωνίες (π.χ. δύο ξύλα καρφωμένα ώστε να σχηματίζουν γωνία ή ένα μοιρογνωμόνιο);



ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

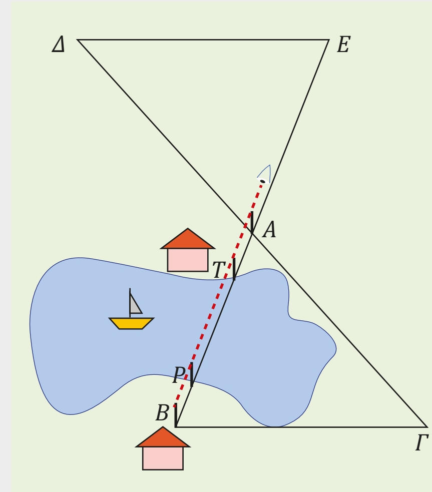
Εδώ θα δείτε μια διαφορετική λύση από αυτή που είδατε στο παράδειγμα 2.1.2β. Τοποθετείτε δύο πασσάλους σε σημεία *Α* και *Β*, ώστε να είναι στην ίδια ευθεία με τους *Ρ* και *Τ*, όπως φαίνεται στο σχήμα. Στη συνέχεια, επιλέγετε σημείο *Γ* από το οποίο βλέπετε τα *Α* και *Β*, τέτοιο ώστε να έχετε πρόσβαση σε αυτά, χωρίς εμπόδια. Μετράτε τις αποστάσεις *ΡΒ*, *ΤΑ*, *ΒΓ* και *ΑΓ* καθώς και τη γωνία $\widehat{ΒΓΑ}$.

Στην προέκταση της *ΓΑ* (προς τη μεριά του *Α*), βρίσκετε σημείο *Δ* τέτοιο ώστε *ΑΔ* = *ΑΓ*. Με το ένα άκρο της μετροταινίας στο *Δ* και με μήκος μετροταινίας ίσο με *ΒΓ*, εντοπίζετε σημείο *Ε*, τέτοιο ώστε να βρίσκεται στην ίδια ευθεία με τους άλλους πασσάλους και να ισχύει $\widehat{ΑΔΕ} = \widehat{ΒΓΑ}$. Μετράτε την *ΑΕ*.

Τα τρίγωνα *ΑΒΓ* και *ΑΔΕ* είναι ίσα καθώς έχουν μία πλευρά και δύο γωνίες αντίστοιχα ίσες μία προς μία (είναι επίσης $\widehat{ΒΑΓ} = \widehat{ΔΑΕ}$ ως κατακορυφήν γωνίες). Επομένως, τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα, άρα *ΒΑ* = *ΑΕ*.

Έχετε *ΡΤ* = *ΒΑ* – *ΒΡ* – *ΤΑ* = *ΑΕ* – *ΒΡ* – *ΤΑ*, σχέση στην οποία όλα τα μήκη είναι γνωστά.

Πλέον, για τη μέτρηση των αποστάσεων χρησιμοποιούμε GPS ή άλλα εργαλεία (π.χ. αποστασιόμετρα ή αισθητήρες υπερήχων) που στέλνουν σήμα από το ένα σημείο στο άλλο, και μετρούν το χρόνο που κάνει για να επιστρέψει.



Θαλής ο Μιλήσιος

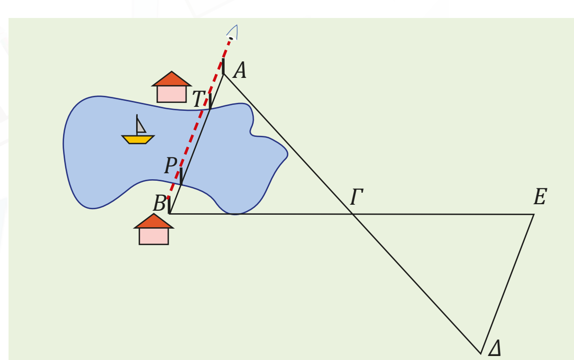
Ασκήσεις - Δραστηριότητες

1 Να χαρακτηρίσετε με την ένδειξη Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις:

α) Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ιδιότητες και κριτήρια ίσων τριγώνων για να μετρήσετε αποστάσεις μεταξύ σημείων που δεν μπορούν εύκολα να προσεγγιστούν.

β) Στο παράδειγμα της ενότητας, αντί να χρησιμοποιήσετε την ισότητα των γωνιών, μπορείτε να πάρετε *ΒΓ* = *ΔΕ*, ώστε και πάλι να προκύψουν ίσα τρίγωνα.

2 Με τη βοήθεια του σχήματος, προτείνετε έναν άλλον τρόπο να λυθεί το πρόβλημα του παραδείγματος 2.4α, στην περίπτωση που το μόνο εργαλείο που διαθέτετε είναι μια μετροταινία. Ποιο κριτήριο ισότητας έχει χρησιμοποιηθεί εδώ;

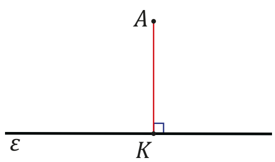


Ασκήσεις και δραστηριότητες στα τρίγωνα με εφαρμογή στην καθημερινότητα

2.5 ΜΕΣΟΚΑΘΕΤΟΣ ΚΑΙ ΔΙΧΟΤΟΜΟΣ

Στην ενότητα αυτή θα μάθετε:

- Να αναγνωρίζετε τη διχοτόμο γωνίας και τη μεσοκάθετο ευθύγραμμου τμήματος ως γεωμετρικούς τόπους σημείων και να αποδεικνύετε τις ιδιότητές τους.



Απόσταση του σημείου *Α* από το σημείο *Β*, ονομάζεται το **μήκος του ευθυγράμμου τμήματος *ΑΒ***.
Εάν από ένα σημείο *Α* εκτός ευθείας *ε* φέρουμε την κάθετη προς αυτή που την τέμνει στο *Κ*, τότε: το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος *ΑΚ* ονομάζεται **απόσταση του σημείου *Α* από την *ε***. Χάριν ευκολίας, στα παρακάτω, το ευθύγραμμο τμήμα *ΑΚ* θα ονομάζεται και αυτό **απόσταση του *Α* από την *ε***.

Με τη βοήθεια ενός διαβήτη, συγκρίνετε τις αποστάσεις που έχουν τα διάφορα σημεία του επιπέδου, που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα, από τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος *ΑΒ*.

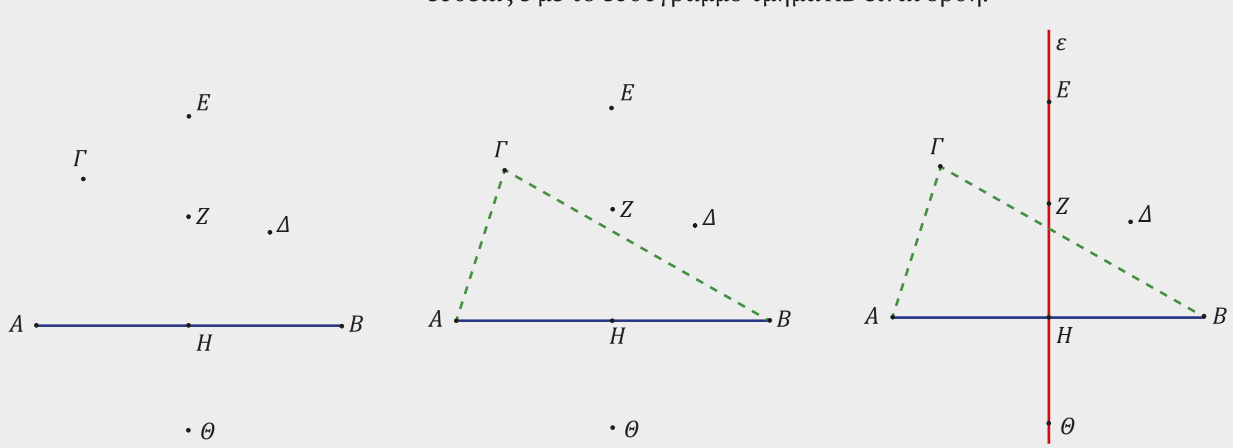
1. Παρατηρήστε ότι το σημείο *Γ* δεν έχει ίση απόσταση από τα *Α* και *Β*. Για να το διαπιστώσετε αρκεί να τοποθετήσετε τη μία άκρη του διαβήτη στο *Γ* και την άλλη στο *Α*. Χωρίς να αλλάξετε το άνοιγμα του διαβήτη δείτε αν οι δύο άκρες του μπορούν να τοποθετηθούν στα σημεία *Γ* και *Β* αντίστοιχα.

2. Αν επαναλάβετε τη διαδικασία για τα υπόλοιπα σημεία θα διαπιστώσετε ότι ούτε το σημείο *Δ* ισαπέχει από τα άκρα του *ΑΒ*, ενώ καθένα από τα σημεία *Ε, Ζ, Η, Θ* απέχουν ίδια απόσταση από τα άκρα του *ΑΒ*.

3. Με τη βοήθεια του κανόνα μπορούμε να φέρουμε μία ευθεία που θα διέρχεται από τα σημεία *Ε, Ζ, Η, Θ*. Δοκιμάστε να διαλέξετε πάνω στην ευθεία *ε* ένα διαφορετικό σημείο από τα δοσμένα. Τι παρατηρείτε;

4. Με τη βοήθεια ενός μοιρογνωμονίου επιβεβαιώστε ότι η γωνία της ευθείας *ε* με το ευθύγραμμο τμήμα *ΑΒ* είναι ορθή.

Μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος λέγεται η ευθεία που είναι κάθετη σε αυτό και διέρχεται από το μέσον του.

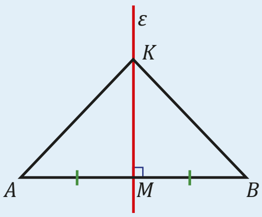


ΘΕΩΡΗΜΑ 2.5α

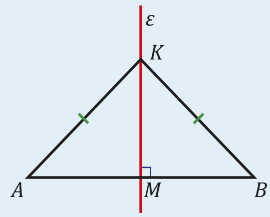
Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του και αντιστρόφως, κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός τμήματος ανήκει στη μεσοκάθετό του

Απόδειξη **(Ευθύ)**

Έστω η μεσοκάθετος ε ενός ευθύγραμμου τμήματος AB και M το σημείο τομής τους. Αν K ένα τυχαίο σημείο της ε (Σχήμα 1) τότε τα ορθογώνια τρίγωνα AKM και BKM θα είναι ίσα, διότι $AM = BM$ (M μέσο της AB), και KM κοινή. Άρα και $KA = KB$ αφού βρίσκονται απέναντι από ίσες γωνίες σε ίσα τρίγωνα.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

(Αντίστροφο)

Έστω ευθύγραμμο τμήμα AB (Σχήμα 2) και σημείο K εκτός αυτού, με $KA = KB$, τότε AKB είναι ισοσκελές. Αν το KM είναι ύψος θα είναι και διάμεσος. Άρα η ευθεία KM είναι μεσοκάθετος του AB.

Ορισμός

Γεωμετρικός τόπος λέγεται ένα σύνολο σημείων, που έχουν μία (κοινή) χαρακτηριστική ιδιότητα

Από το παραπάνω θεώρημα προκύπτει ότι όλα τα σημεία της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος και μόνο αυτά έχουν την ιδιότητα, να απέχουν ίση απόσταση από τα άκρα του. Η φράση «όλα τα σημεία του και μόνο αυτά» μας επιτρέπει να χαρακτηρίσουμε την μεσοκάθετο, ως γεωμετρικό τόπο. Ο χαρακτηρισμός αυτός έχει διπλή σημασία, με την έννοια ότι:

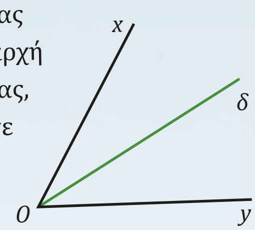
α) Όλα τα σημεία του γεωμετρικού τόπου ικανοποιούν την δεδομένη ιδιότητα.

β) Όλα τα σημεία που ικανοποιούν την δεδομένη ιδιότητα βρίσκονται πάνω στο γεωμετρικό τόπο.

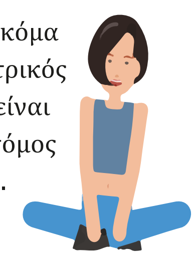
Συμπέρασμα

Η μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τα άκρα του.

Διχοτόμος μιας γωνίας είναι η ημιευθεία με αρχή την κορυφή της γωνίας, η οποία την χωρίζει σε δύο ίσες γωνίες.



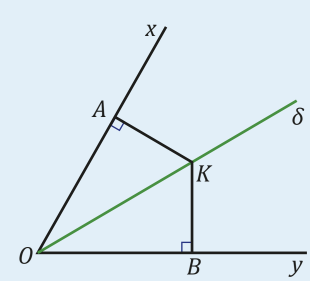
Ένας ακόμα γεωμετρικός τόπος είναι η διχοτόμος γωνίας.



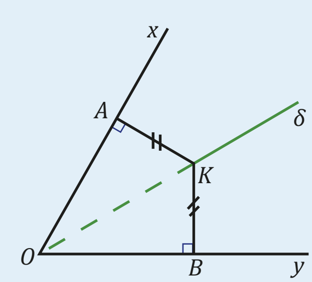
ΘΕΩΡΗΜΑ 2.5β

Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της και αντιστρόφως κάθε σημείο μιας γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές της είναι σημείο της διχοτόμου της.

Απόδειξη Έστω $O\delta$ η διχοτόμος γωνίας xOy και τυχαίο σημείο της K. Έστω οι αποστάσεις KA, KB του K από τις πλευρές Ox, Oy, αντίστοιχα. Τα ορθογώνια τρίγωνα OKA και OKB είναι ίσα διότι $\widehat{KOA} = \widehat{KOB}$ ($O\delta$ διχοτόμος) και OK κοινή. Άρα $KA = KB$ αφού είναι απέναντι από τις $\widehat{KOA}$ και $\widehat{KOB}$ αντίστοιχα.



Αντίστροφα, έστω K ένα σημείο της γωνίας $\widehat{xOy}$ και KA, KB οι αποστάσεις του K από τις πλευρές της γωνίας Ox και Oy αντίστοιχα, με $KA = KB$. Τα ορθογώνια τρίγωνα OKA και OKB είναι ίσα διότι έχουν την OK κοινή και $KA = KB$. Οπότε, και οι γωνίες που είναι απέναντι από τις KA, KB θα είναι ίσες, δηλαδή $\widehat{KOA} = \widehat{KOB}$, άρα η OK διχοτομεί τη γωνία.

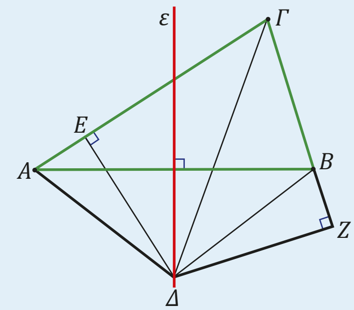


Συμπέρασμα

Η διχοτόμος μίας γωνίας είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τις πλευρές της γωνίας.

Εφαρμογή 2.5

Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΓΒ < ΑΓ$. Η διχοτόμος της γωνίας $Γ$ και η μεσοκάθετος $ε$ του $ΑΒ$ τέμνονται στο $Δ$. Στην πλευρά $ΑΓ$ θεωρούμε σημείο $Ε$ και στην προέκταση της $ΓΒ$ θεωρούμε σημείο $Ζ$ τέτοια ώστε $ΔΕ$, $ΔΖ$ κάθετες στις $ΑΓ$, $ΓΒ$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $ΑΔΕ$ και $ΒΔΖ$ είναι ίσα.



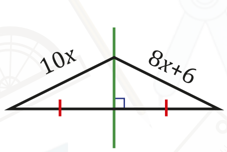
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

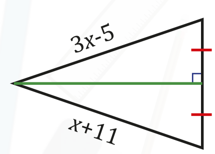
Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΔΕ$ και $ΒΔΖ$ έχουν $ΔΑ = ΔΒ$ ($Δ$ σημείο της μεσοκαθέτου του $ΑΒ$) και, $ΔΕ = ΔΖ$ ($Δ$ σημείο της διχοτόμου της $\widehat{ΑΓΒ}$). Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα.

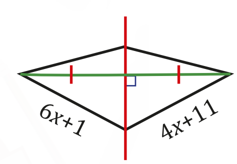
Ασκήσεις - Δραστηριότητες

Ασκήσεις στη μεσοκάθετο και τη διχοτόμο

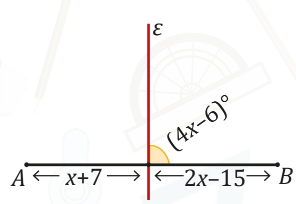
1 Να βρείτε το x στα παρακάτω σχήματα

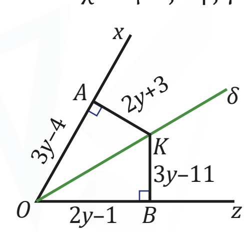






2 Στα παρακάτω σχήματα να εξετάσετε αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί x και y ώστε η ευθεία $ε$ να είναι μεσοκάθετος του $ΑΒ$ και η ημιευθεία $Οδ$ διχοτόμος της γωνίας xOz.





3 Έστω $ΑΒΓ$ ισοσκελές τρίγωνο και $Δ$, $Ε$ τα μέσα των ίσων πλευρών του $ΑΒ$, $ΑΓ$. Αν $ΔΚ$, $ΕΜ$ είναι οι αποστάσεις των $Δ$, $Ε$ από τις $ΑΓ$, $ΑΒ$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $ΔΚ=ΕΜ$.

4 Έστω ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ και $Μ$ το μέσο της βάσης.

α) Να αποδείξετε ότι το $Μ$ ισαπέχει από τις ίσες πλευρές του τριγώνου.

β) Να αποδείξετε ότι η $ΑΜ$ είναι διχοτόμος της γωνίας που έχει πλευρές τις αποστάσεις του $Μ$ από τις ίσες πλευρές του.

2.6 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ ΜΕΣΟΚΑΘΕΤΟΥ ΚΑΙ ΔΙΧΟΤΟΜΟΥ

Στην ενότητα αυτή θα μάθετε:

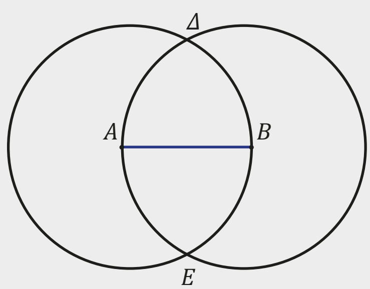
- Να κατασκευάζετε με κανόνα και διαβήτη τη διχοτόμο γωνίας και τη μεσοκάθετο ευθύγραμμου τμήματος και να αιτιολογείτε τη διαδικασία.

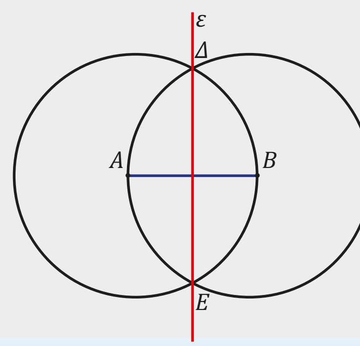
Κατασκευή 1

Να κατασκευάσετε, με κανόνα και διαβήτη, τη μεσοκάθετο ενός ευθύγραμμου τμήματος.

Εξερευνήστε σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας τι συμβαίνει όσο αλλάζετε την ακτίνα των δύο κύκλων που χρησιμοποιείτε. Παρατηρήστε πώς αυτό επηρεάζει τη θέση των σημείων Δ και E αλλά όχι της μεσοκάθετου ε.

Η μεσοκάθετος σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας





Σχεδιάστε δύο ίσους κύκλους, κέντρων A και B, και ακτίνας AB.

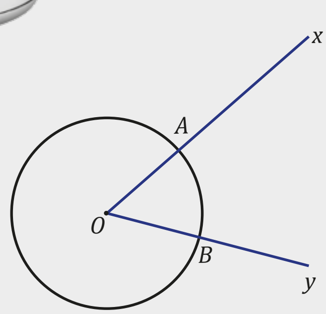
Σχεδιάστε την ευθεία ε που διέρχεται από τα σημεία τομής Δ και E των δύο κύκλων. Τα Δ και Ε ισαπέχουν από τα Α και Β.

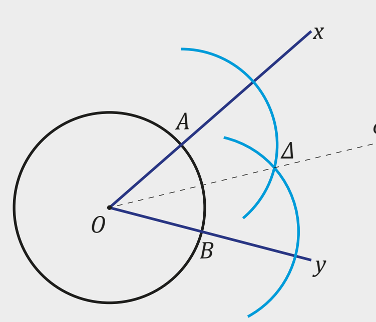
Πλήρης γεωμετρική κατασκευή μεσοκαθέτου

Κατασκευή μεσοκαθέτου

Κατασκευή 2

Να κατασκευάσετε, με κανόνα και διαβήτη, τη διχοτόμο μίας γωνίας.



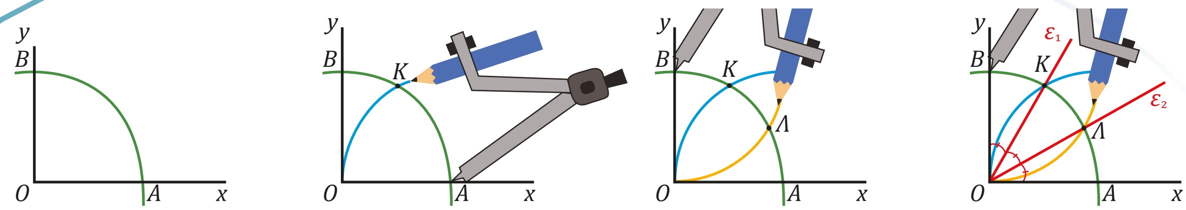


Έστω η δοσμένη γωνία $\widehat{xOy}$. Σχεδιάστε έναν κύκλο με κέντρο την κορυφή της γωνίας, που θα τέμνει τις δύο πλευρές της γωνίας στα σημεία A και B. Τότε $OA = OB$.

Με κέντρα τα A και B φέρτε κύκλους ακτίνας OA που τέμνονται στο Δ (και το O). Φέρτε το $O\Delta$. Η ημιευθεία $O\delta$ είναι η διχοτόμος της γωνίας. Γιατί;

Δραστηριότητα

Να χωρίσετε μία ορθή γωνία σε τρεις ίσες γωνίες (Τριχοτόμηση ορθής γωνίας).



Έστω η γωνία $\widehat{xOy} = 90^0$. Χαράξτε κύκλο κέντρου O και ακτίνας ρ που τέμνει τις πλευρές της γωνίας στα A και B, τότε $OA = OB = \rho$.

Χαράξτε κύκλους με κέντρα τα A και B και ακτίνα ρ που τέμνουν τον αρχικό κύκλο στο εσωτερικό της γωνίας στα σημεία K και Λ.

Φέρτε τις ημιευθείες OK και $O\Lambda$.

Παρατηρήστε ότι $\widehat{BOK} = \widehat{AO\Lambda} = \widehat{\Lambda OK} = 30°$ (Γιατί;).

Ιστορία μαθηματικών: Μηχανικοί τριχοτόμοι γωνίας

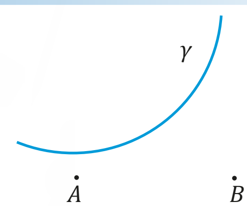
Πλήρης γεωμετρική κατασκευή διχοτόμου

Κατασκευή διχοτόμου

Πλήρης κατασκευή τριχοτόμων ορθής γωνίας

Ασκήσεις - Δραστηριότητες

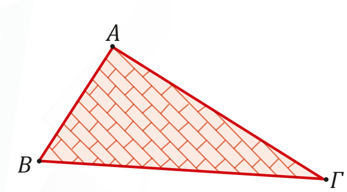
1 Στο διπλανό σχήμα, η καμπύλη γραμμή γ παριστά τμήμα της διαδρομής του αστικού λεωφορείου. Οι κάτοικοι των οικισμών A και B αποφάσισαν να κατασκευάσουν μια στάση, που να απέχει εξίσου από τους δύο οικισμούς. Βρείτε το κατάλληλο σημείο της διαδρομής και δικαιολογήστε την απάντησή σας.



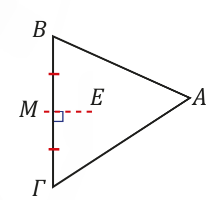
2 Να βρείτε σημείο του επιπέδου που ισαπέχει από τις τρεις πλευρές ενός τριγώνου.

3 Να βρείτε σημείο του επιπέδου που ισαπέχει από τις κορυφές ενός τριγώνου α) αν το τρίγωνο είναι οξυγώνιο, β) αν το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο, γ) αν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

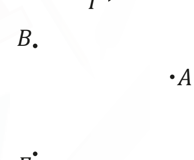
4 Στο διπλανό τρίγωνο, που παριστάνει τη στέγη ενός κτίσματος, ένας ξυλουργός θέλει να στερεώσει σ' ένα σημείο Δ της βάσης $B\Gamma$, δύο ίσα υποστυλώματα ΔE και ΔH για τις AB και $A\Gamma$, τα οποία πρέπει να είναι κάθετα τμήματα προς τις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να βρείτε τη θέση του Δ στη $B\Gamma$.



5 Εξηγήστε γιατί σε ένα τρίγωνο αν προεκτείνουμε το ευθύγραμμο τμήμα ME δε θα περάσει απαραίτητα από το A.



6 Οι δήμαρχοι τριών πόλεων Α, Β και Γ θέλουν να χτίσουν ένα νοσοκομείο που να ισαπέχει από καθεμιά τους. Βρείτε, αν υπάρχει, το σημείο που θα πρέπει να χτιστεί το νοσοκομείο. Ποια συνθήκη πρέπει να πληρείται για να υπάρχει το σημείο;



2.7 ΑΠΛΟΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ (Γ. Τ.)

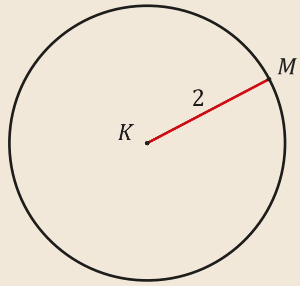
Στην ενότητα αυτή θα μάθετε:

- Να βρίσκετε απλούς γεωμετρικούς τόπους εξηγώντας το συλλογισμό σας.

Στην ενότητα 2.5 παρουσιάστηκαν η μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος και η διχοτόμος γωνίας ως γεωμετρικοί τόποι (γ.τ.).
Σε αυτήν την ενότητα θα γνωρίσετε κάποιους ακόμα απλούς γ.τ..

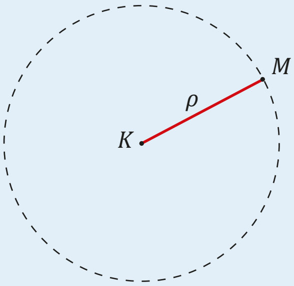
Να βρεθεί ο γ.τ. των σημείων του επιπέδου που απέχουν από το σταθερό σημείο K απόσταση ίση με 2.

ΛΥΣΗ:
Από τα Μαθηματικά της Α΄ Γυμνασίου είναι γνωστό ότι ο κύκλος με κέντρο K και ακτίνα 2, συμβολίζεται (Κ,2). Τα σημεία του απέχουν από το K απόσταση ίση με 2 (χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων του κύκλου).
Αν το M είναι σημείο του επιπέδου με $KM = 2$ τότε, προφανώς το M ανήκει στον κύκλο (Κ,2).



Γενικά

Κύκλος με κέντρο K και ακτίνα ρ, συμβολικά (K, ρ), είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M του επίπεδου τα οποία απέχουν από το K σταθερή απόσταση ίση με ρ $(KM = \rho)$.



Για να επιλυθεί ένα πρόβλημα στο οποίο ζητείται να βρεθεί ένας γ.τ. με μια συγκεκριμένη ιδιότητα τότε θα πρέπει να ακολουθήσετε τα παρακάτω βήματα:

Βήμα 1ο Έστω σημείο Μ του γ.τ. (δηλαδή σημείο που έχει την συγκεκριμένη ιδιότητα) – προσδιορίζετε το σύνολο των σημείων στο οποίο βρίσκεται το Μ.

Βήμα 2ο Κατασκευάζετε τον γ.τ. που προσδιορίσατε.

Βήμα 3ο Αντίστροφο, θεωρείτε τυχαίο σημείο της γραμμής που κατασκευάσετε και αποδεικνύετε ότι ικανοποιεί τη συγκεκριμένη ιδιότητα. Στη συνέχεια, γράφετε ότι η γραμμή αυτή είναι ο ζητούμενος γ.τ..

Βήμα 4ο Αν δίνεται ή προκύπτει κάποιος περιορισμός τότε θα πρέπει να γίνει διερεύνηση και να εξαιρεθούν, ίσως, κάποια σημεία ή και μέρος της γραμμής που κατασκευάσατε.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.7

Να βρείτε τον γ.τ. των κορυφών A τριγώνου $AB\Gamma$ όταν δίνονται η πλευρά $B\Gamma$ και το μήκος της διαμέσου από την κορυφή A.

Γεωμετρικός τόπος κορυφής τριγώνου με δοσμένη διάμεσο και πλευρά

Γεωμετρικός τόπος κέντρων κύκλων οι οποίοι διέρχονται από δύο σταθερά σημεία

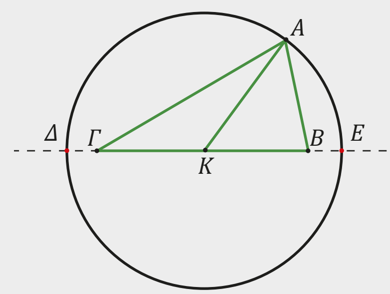
ΛΥΣΗ:

Έστω τυχαίο σημείο A του γ.τ. Τότε η απόστασή του από το μέσο K της $B\Gamma$ είναι σταθερή και είναι ίση με τη διάμεσο, η οποία έχει μήκος ρ, οπότε $AK = \rho$. Άρα το A ανήκει στον κύκλο (K, ρ).

Αντίστροφα: Κάθε σημείο A του κύκλου (K, ρ) απέχει από το K απόσταση ρ. Οπότε ο γ.τ. φαίνεται να είναι ο κύκλος (K, ρ).

Διερεύνηση: Αν Δ και E είναι τα σημεία στα οποία ο κύκλος τέμνει την ευθεία $B\Gamma$, τότε το A ταυτίζεται με το Δ ή το E οπότε, προφανώς, δεν ορίζεται τρίγωνο.

Άρα, ο ζητούμενος γ.τ. είναι ο κύκλος με κέντρο το μέσον της $B\Gamma$ και ακτίνα τη διάμεσο, εκτός των σημείων τομής του με την ευθεία $B\Gamma$.



Μικροπείραμα

Για τον γ.τ. του παραδείγματος.

Ασκήσεις - Δραστηριότητες

1. Να βρείτε τον γ.τ. των σημείων που ισαπέχουν από δύο σταθερά σημεία A, B.

2. Να βρείτε τον γ.τ. των μέσων των ακτίνων γνωστού κύκλου (K, ρ).

3. Να βρείτε τον γ.τ. των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από δύο τεμνόμενες ευθείες ε_1 και ε_2.

4. Έστω ευθύγραμμο τμήμα AB. Να βρείτε τον γ.τ. των σημείων M του επιπέδου για τα οποία ισχύει $MA > MB$.

Ασκήσεις - εργασία - γραφικός οργανωτής στους γεωμετρικούς τόπους

2.8 ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

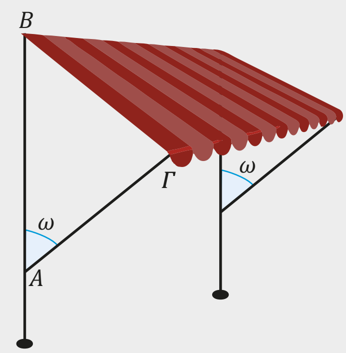
Στην ενότητα αυτή θα μάθετε:

- Να διερευνάτε και να αποδεικνύετε βασικές ανισοτικές σχέσεις στοιχείων τριγώνου (τριγωνική ανισότητα και σύνδεση σχέσης πλευρών με σχέση αντίστοιχων γωνιών)

2.8.1 Ανισοτικές σχέσεις πλευρών και γωνιών τριγώνου

Η τέντα του διπλανού σχήματος, και οι βραχίονές της ορίζουν τρίγωνο *ΑΒΓ*, με σταθερή πλευρά *ΑΒ*, με μεταβαλλόμενη ως προς τη θέση αλλά με σταθερό μήκος πλευρά *ΑΓ* και τη μεταβαλλόμενη ως προς το μήκος και τη θέση πλευρά *ΒΓ*. Η πλευρά *ΒΓ* είναι προφανώς το μήκος της τέντας η οποία, ανάλογα με τη σκίαση που χρειάζεται μεγαλώνει ή μικραίνει.

Ποια πλευρά του τριγώνου μεταβάλλεται καθώς μεγαλώνει η γωνία $\hat{A} = \hat{\omega}$;



Είναι φανερό ότι στο τρίγωνο *ΑΒΓ* καθώς μεγαλώνει η γωνία $\hat{A}$, μεγαλώνει και η πλευρά *ΒΓ* και αντίστροφα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.8.1α

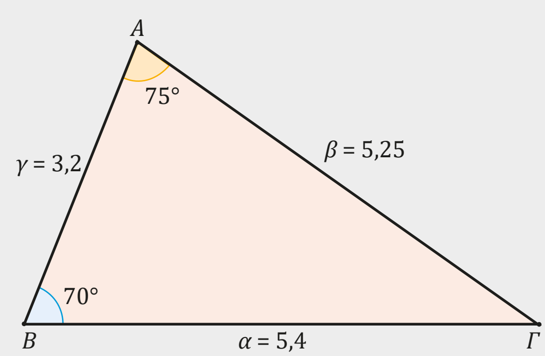
Στο διπλανό σχήμα έχουν μετρηθεί οι γωνίες *Α*, *Β* και τα μήκη των πλευρών του τριγώνου *ΑΒΓ*.

i. Να βρεθεί η γωνία $\hat{\Gamma}$.

ii. Συγκρίνετε τα μήκη των πλευρών.

iii. Συγκρίνετε τα μέτρα των γωνιών.

iv. Τι παρατηρείτε;



ΛΥΣΗ:

i. Είναι: γωνία $\hat{\Gamma} = 180^0 - 70^0 - 75^0 = 35^0$

ii. Για τα μήκη των πλευρών ισχύει $\alpha > \beta > \gamma$.

iii. Για τα μέτρα των γωνιών ισχύει $\hat{A} > \hat{B} > \hat{\Gamma}$.

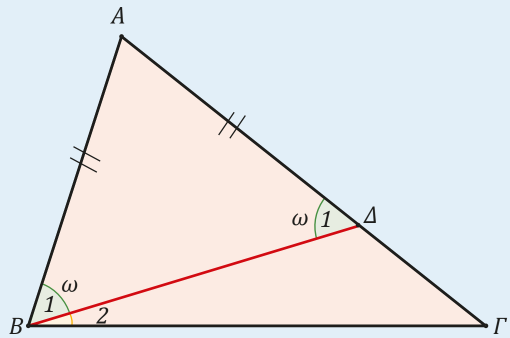
iv. Η ανισοτική σχέση που ισχύει για τα μήκη των πλευρών, ισχύει αντίστοιχα και για τα μέτρα των γωνιών και αντίστροφα. Δηλαδή στο τρίγωνο *ΑΒΓ* αν πάρουμε τυχαία δύο πλευρές και τις απέναντι γωνίες, τότε απέναντι από την μεγαλύτερη πλευρά βρίσκεται η μεγαλύτερη γωνία και αντίστροφα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.8.1

Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από μεγαλύτερη πλευρά βρίσκεται μεγαλύτερη γωνία και αντίστροφα.

Απόδειξη **(Ευθύ)**

Έστω τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΓ > ΑΒ$ θα δειχθεί ότι $\hat{B} > \hat{Γ}$. Επειδή $ΑΓ > ΑΒ$, υπάρχει σημείο $Δ$ στην $ΑΓ$ ώστε $ΑΔ = ΑΒ$.
Το τρίγωνο $ΑΒΔ$ είναι ισοσκελές και άρα $\hat{B}_1 = \hat{ω} = \hat{Δ}_1$.
Η $\hat{Δ}_1$ είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου $ΒΓΔ$ οπότε ότι $\hat{Δ}_1 = \hat{B}_2 + \hat{Γ}$, συνεπώς $\hat{Δ}_1 > \hat{Γ}$.
Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει $\hat{B}_1 > \hat{Γ}$ αλλά $\hat{B} > \hat{B}_1$, άρα $\hat{B} > \hat{Γ}$.



(Αντίστροφο)

Αν $\hat{B} > \hat{Γ}$ τότε θα δειχθεί ότι $ΑΓ > ΑΒ$.
Έστω $ΑΓ = ΑΒ$ ή $ΑΓ < ΑΒ$,

- αν $ΑΓ = ΑΒ$ τότε το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές οπότε $\hat{B} = \hat{Γ}$. Άτοπο.
- αν $ΑΓ < ΑΒ$ τότε από την παραπάνω απόδειξη θα πρέπει $\hat{B} < \hat{Γ}$. Άτοπο.

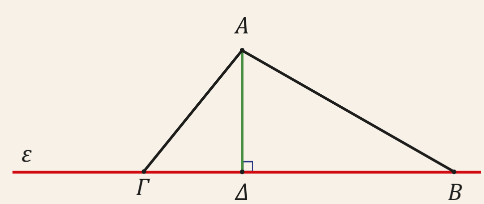
Άρα σε καθεμία από τις δύο περιπτώσεις προκύπτει άτοπο. Όποτε, αν $\hat{B} > \hat{Γ}$, τότε $ΑΓ > ΑΒ$.

ΠΟΡΙΣΜΑ

2.8.1α Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο μεγαλύτερη πλευρά είναι η υποτείνουσα.

ΠΟΡΙΣΜΑ

2.8.1β Το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα από σημείο προς ευθεία είναι μικρότερο από κάθε πλάγιο που συνδέει το σημείο με την ευθεία.
Στο σχήμα $ΑΔ < ΑΒ$, $ΑΔ < ΑΓ$ (από τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $ΑΓΔ$ όπου $ΑΔ$ απόσταση $Α$ από ευθεία $ε$ και $ΑΒ$, $ΑΓ$ πλάγιες).



ΠΟΡΙΣΜΑ

2.8.1γ Σε κάθε αμβλυγώνιο τρίγωνο μεγαλύτερη πλευρά είναι αυτή που βρίσκεται απέναντι από την αμβλεία γωνία.

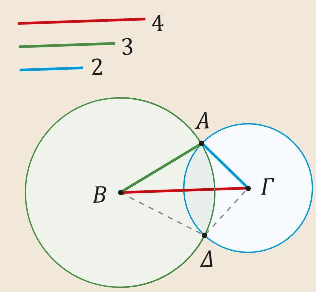
Ανισοτικές σχέσεις πλευρών και γωνιών τριγώνου

2.8.2 Τριγωνική ανισότητα

Να κατασκευαστεί τρίγωνο *ΑΒΓ* με πλευρές:

i. *ΒΓ*=4, *ΑΒ*=3 και *ΑΓ*=2
ii. *ΒΓ*=5, *ΑΒ*=3 και *ΑΓ*=1
iii. *ΒΓ*=2, *ΑΒ*=4 και *ΑΓ*=1
iv. *ΒΓ*=5, *ΑΒ*=4 και *ΑΓ*=1
v. *ΒΓ*=3, *ΑΒ*=4 και *ΑΓ*=1
vi. Τι παρατηρείτε από τις κατασκευές σχετικά με το άθροισμα και τη διαφορά των μηκών των πλευρών του τριγώνου;

Κατασκευή



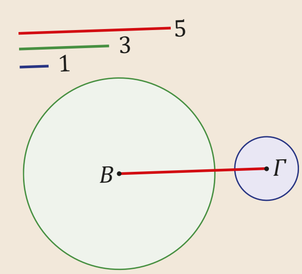
i. Σύμφωνα με την Εφαρμογή 2.2α για να κατασκευάσετε το τρίγωνο *ΑΒΓ*, πρέπει να ακολουθήσετε τα παρακάτω βήματα:

Βήμα 1ο σχεδιάστε ευθύγραμμο τμήμα *ΒΓ*=4

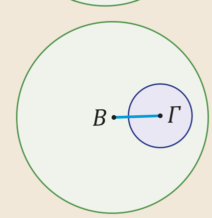
Βήμα 2ο με κέντρα τα *Β*, *Γ* γράφετε κύκλους (Β, 3) και (Γ, 2)

Βήμα 3ο οι κύκλοι τέμνονται (όπως φαίνεται στο σχήμα) στα σημεία *Α* και *Δ*

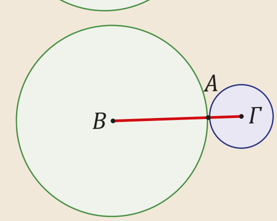
Άρα το ζητούμενο τρίγωνο είναι το *ΑΒΓ* (γιατί είναι το τρίγωνο με πλευρές *ΒΓ*=4, *ΑΒ*=3 και *ΑΓ*=2), βεβαίως ως λύση θεωρείται και το τρίγωνο *ΔΒΓ* το οποίο είναι ίσο με το *ΑΒΓ*.



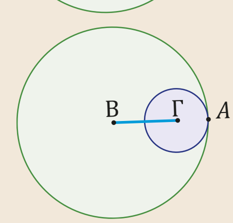
ii. Αν εργαστείτε με όμοιο τρόπο τότε όπως φαίνεται και στο σχήμα οι κύκλοι (Β, 3) και (Γ, 1) δεν τέμνονται οπότε, και σύμφωνα με το σχόλιο στην Εφαρμογή 2.2α δεν υπάρχει λύση.



iii. Αν εργαστείτε, επίσης, με όμοιο τρόπο τότε όπως φαίνεται και στο σχήμα οι κύκλοι (Β, 4) και (Γ, 1) δεν τέμνονται άρα, και σύμφωνα με το σχόλιο στην Εφαρμογή 2.2α δεν υπάρχει λύση.



iv. Επίσης, με όμοιο τρόπο όπως φαίνεται και στο σχήμα οι κύκλοι (Β, 4) και (Γ, 1) εφάπτονται εξωτερικά στο Α άρα, σύμφωνα με το σχόλιο στην Εφαρμογή 2.2α δεν υπάρχει λύση.



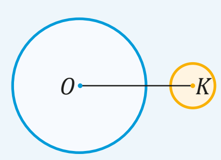
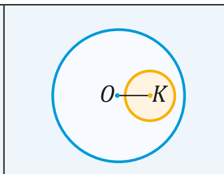
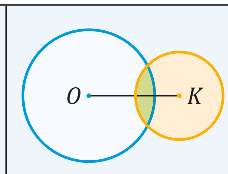
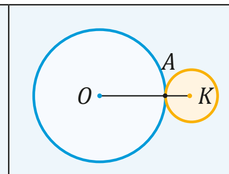
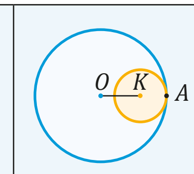
v. Επίσης, με όμοιο τρόπο όπως φαίνεται και στο σχήμα οι κύκλοι (Β, 4) και (Γ, 1) εφάπτονται εσωτερικά στο Α άρα, σύμφωνα με το σχόλιο στην Εφαρμογή 2.2α δεν υπάρχει λύση.

vi. Παρατηρούμε ότι δεν κατασκευάζεται πάντα τρίγωνο με οποιοδήποτε μήκος πλευρών και επιπλέον:
Στο (i) μπορείτε να παρατηρήσετε ότι *ΒΓ*<*ΑΒ*+*ΑΓ* (*ΒΓ*=4, *ΑΒ*+*ΑΓ*=7)
Στο (ii) μπορείτε να παρατηρήσετε ότι *ΒΓ*>*ΑΒ*+*ΑΓ* (*ΒΓ*=5, *ΑΒ*+*ΑΓ*=4)
Στο (iii) μπορείτε να παρατηρήσετε ότι *ΒΓ*<*ΑΒ*-*ΑΓ* (*ΒΓ*=2, *ΑΒ*-*ΑΓ*=3)
Στα (iv) και (v) επίσης δεν κατασκευάζεται τρίγωνο όταν *ΒΓ*=*ΑΒ*+*ΑΓ* και *ΒΓ*=*ΑΒ*-*ΑΓ* αντίστοιχα

Δραστηριότητα

ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΔΥΟ ΚΥΚΛΩΝ

Το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα κέντρα δύο κύκλων (O, ρ) και (K, R) λέγεται διάκεντρος και συμβολίζεται με δ ($\delta = OK$). Η σχετική θέση δυο κύκλων εξαρτάται από το άθροισμα ή τη διαφορά των ακτίνων τους σε σχέση με το μήκος της διακέντρου

				
$\delta > \rho + R \Leftrightarrow$ Οι κύκλοι δεν έχουν κανένα κοινό σημείο και ο ένας είναι εξωτερικός του άλλου	$\delta < \rho - R \Leftrightarrow$ Οι κύκλοι δεν έχουν κανένα κοινό σημείο και ο μικρότερος είναι εσωτερικός του μεγαλύτερου	$\rho - R < \delta < \rho + R \Leftrightarrow$ Οι κύκλοι τέμνονται σε δύο σημεία	$\delta = \rho + R \Leftrightarrow$ Οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά	$\delta = \rho - R \Leftrightarrow$ Οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά

Σχετική θέση δύο κύκλων

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.8.2

Κάθε πλευρά ενός τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων πλευρών και μεγαλύτερη από τη διαφορά τους.

Απόδειξη Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\beta>\gamma$, θα δειχθεί ότι $\alpha<\beta+\gamma$ και $\alpha>\beta-\gamma$.

Προεκτείνετε τη BA κατά $A\Delta = A\Gamma = \beta$.

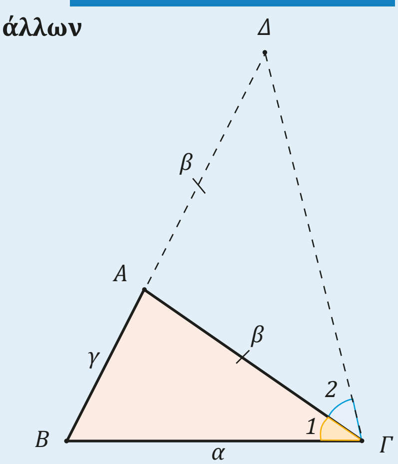
Το τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{\Gamma}_2 = \hat{\Delta}$ (1)

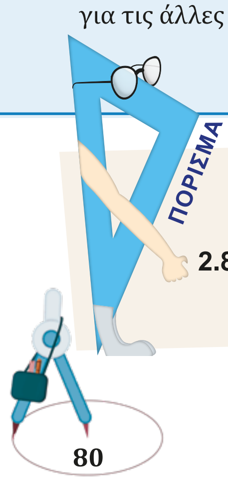
Επίσης, $\hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2 = \widehat{B\Gamma\Delta} \Rightarrow \hat{\Gamma}_2 < \widehat{B\Gamma\Delta}$, οπότε από την (1) είναι $\hat{\Delta} < \widehat{B\Gamma\Delta}$, άρα, από το Θεώρημα 2.8.1, στο τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι $B\Gamma < B\Delta \Rightarrow \alpha < \beta + \gamma$.

Όμοια προκύπτει ότι $\beta < \alpha + \gamma$ και $\gamma < \alpha + \beta$.

Επειδή $\beta > \gamma$ και $\beta < \alpha + \gamma$ προκύπτει $\beta - \gamma < \alpha$ ή $\alpha > \beta - \gamma$.

Τελικά αποδείχτηκε ότι $\beta - \gamma < \alpha < \beta + \gamma$ (ομοίως προκύπτουν ανισότητες για τις άλλες πλευρές του τριγώνου).





ΠΟΡΙΣΜΑ 2.8.2

Κάθε ευθύγραμμο τμήμα είναι μεγαλύτερο από κάθε τεθλασμένη που έχει τα ίδια άκρα.

Σχόλιο

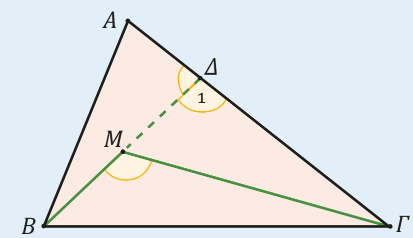
Η παραπάνω ανισότητα λέγεται τριγωνική ανισότητα.
Αν δε γνωρίζετε αν $\beta > \gamma$ ή $\beta < \gamma$ ή $\beta = \gamma$ η ανισότητα γράφεται:
$|\beta-\gamma| < \alpha < \beta+\gamma$.

Εφαρμογή 2.8.2α

Αν Μ εσωτερικό σημείο του ενός τριγώνου $ΑΒΓ$ να δείξετε ότι:

i. $\hat{Α} < \widehat{ΒΜΓ}$

ii. $ΜΒ + ΜΓ < ΑΒ + ΑΓ$



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i. Η προέκταση της $ΒΜ$ τέμνει την $ΑΓ$ στο $Δ$, η $\hat{Δ}_1$ είναι εξωτερική του τριγώνου $ΑΒΔ$, οπότε $\hat{Δ}_1 = \hat{Α} + \widehat{ΑΒΔ}$ άρα $\hat{Δ}_1 > \hat{Α}$ (1). Στο τρίγωνο $ΜΓΔ$ η γωνία $\widehat{ΒΜΓ}$ είναι εξωτερική οπότε $\widehat{ΒΜΓ} = \hat{Δ}_1 + \widehat{ΜΓΔ}$ άρα $\widehat{ΒΜΓ} > \hat{Δ}_1$ (2). Από (1), (2) προκύπτει $\widehat{ΒΜΓ} > \hat{Α}$.

ii. Από την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο $ΑΒΔ$ ισχύει $ΒΔ < ΑΒ + ΑΔ$ (3). Από την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο $ΜΓΔ$ ισχύει $ΜΓ < ΜΔ + ΔΓ$ (4). Προσθέτοντας τις (3) και (4) κατά μέλη προκύπτει $ΒΔ + ΜΓ < ΑΒ + ΑΔ + ΜΔ + ΔΓ$ ή $ΜΒ + ΜΔ + ΜΓ < ΑΒ + ΑΔ + ΔΓ + ΜΔ$ άρα $ΜΒ + ΜΓ < ΑΒ + ΑΓ$

Τριγωνική ανισότητα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.8.2

Να εξεταστεί αν υπάρχουν τρίγωνα $ΑΒΓ$ με πλευρές:

i. $α = 7, β = 5, γ = 4$

ii. $α = β/2$ και $γ = 2β/5$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

i. Για να υπάρχει το τρίγωνο $ΑΒΓ$ θα πρέπει οι πλευρές να ικανοποιούν την τριγωνική ανισότητα, οπότε $β - γ = 1$, $β + γ = 9$ και $1 < 7 < 9$ ή $β - γ < α < β + γ$ (όμοια αποδεικνύεται ότι ισχύει η τριγωνική ανισότητα για όλες τις πλευρές). Άρα υπάρχει τρίγωνο $ΑΒΓ$ με πλευρές 7, 5, 4

ii. Όμοια $β - γ = β - 2β/5 = 3β/5$ και $β + 2β/5 = 7β/5$ εδώ, όμως, $β - γ = 3β/5 > β/2 = α$ δηλαδή $β - γ > α$ επομένως δεν ισχύει η τριγωνική ανισότητα. Άρα δεν υπάρχει τρίγωνο $ΑΒΓ$ με πλευρές $α = β/2$ και $γ = 2β/5$.

Ασκήσεις - Δραστηριότητες

1 Να χαρακτηρίσετε με την ένδειξη Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) καθεμιά από τις παρακάτω:

α) Απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά σε ένα τρίγωνο βρίσκεται πάντα η μεγαλύτερη γωνία.

β) Η διαφορά μιας κάθετης από την υποτείνουσα σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο είναι μικρότερη από την άλλη κάθετη.

γ) Σε τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ < ΑΓ$ μπορεί να ισχύει $\hat{Β} = \hat{Γ}$.

2 Εξετάστε αν υπάρχουν τρίγωνα $ΑΒΓ$ με πλευρές:

α) $α = 12, β = 9, γ = 3$ **β)** $α = 15, β = 7, γ = 18$ **γ)** $α = 5γ/2, β = 4γ/3$

3 Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ $α = 8$, $β = 6$, $γ = x$, $x > 0$. Να εξετάσετε για ποιες τιμές του x τα $α, β, γ$ είναι πλευρές τριγώνου.

4 Έστω ευθεία ε και σημείο $Α$ το οποίο δεν ανήκει σε αυτή. Επίσης $ΑΔ$ η απόσταση του $Α$ από την $ε$ και $ΑΒ$, $ΑΓ$ πλάγια ευθύγραμμα τμήματα προς την $ε$. Αν $ΔΒ<ΔΓ$ τότε να δείξετε ότι $ΑΒ<ΑΓ$ και αντίστροφα (δηλαδή μεγαλύτερο πλάγιο είναι αυτό που η απόσταση του ίχνους του από το ίχνος της καθέτου είναι μεγαλύτερο και αντίστροφα).

Ασκήσεις-Δραστηριότητες-Εργασία-Κάρτα εξόδου στις ανισοτικές σχέσεις

5 Έστω $ΑΒΓ$ οξυγώνιο τρίγωνο και $Δ$ σημείο της προέκτασης της $ΒΓ$ προς το $Γ$ να δείξετε ότι $ΑΓ<ΑΔ$.

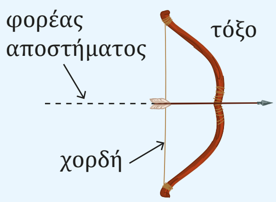
6 Αν $Κ$ σημείο της πλευράς $ΑΒ$ ισοπλεύρου τριγώνου $ΑΒΓ$ να δείξετε ότι $ΓΚ \leq ΑΒ$.

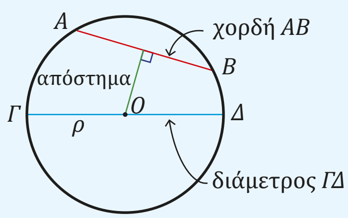
7 Έστω τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ < ΑΓ$ και σημείο $Δ$ της $ΑΓ$ με $ΑΔ = ΑΒ$. Αν $ΑΜ \perp ΒΔ$ να δείξετε ότι $ΜΓ > ΒΜ$.

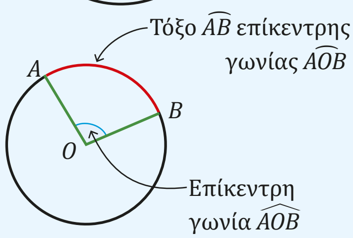
2.9 ΤΟΞΑ, ΧΟΡΔΕΣ ΚΑΙ ΑΠΟΣΤΗΜΑΤΑ ΙΣΩΝ ΚΥΚΛΩΝ

Στην ενότητα αυτή θα μάθετε:

- Να αποδεικνύετε ότι, σε ίσους κύκλους, ίσα τόξα ορίζουν ίσες χορδές και ίσα αντίστοιχα σε αυτές αποστήματα. Να διατυπώνετε και να ελέγχετε τους αντίστροφους ισχυρισμούς.







Το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα δύο σημεία A και B ενός κύκλου, ονομάζεται **χορδή *AB***.

Το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα το κέντρο του κύκλου και ένα σημείο μιας χορδής, που είναι κάθετο στη χορδή αυτή, ονομάζεται **απόστημα** της χορδής.

Κάθε χορδή που δεν είναι διάμετρος, χωρίζει τον κύκλο σε ένα μεγάλο και ένα μικρό τόξο. Στο εξής, εάν δεν αναφέρεται διαφορετικά, θα αναφερόμαστε στα μικρά (κυρτογώνια) τόξα.

Μια γωνία που έχει την κορυφή της στο κέντρο ενός κύκλου ονομάζεται **επίκεντρη γωνία**. Όταν λέμε ότι μια επίκεντρη γωνία **βαίνει** στο $\overset{\frown}{AB}$, εννοούμε ότι οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο στα σημεία A και B.

Αποδεικνύεται ότι **σε ίσους κύκλους ή στον ίδιο κύκλο, ίσες επίκεντρες γωνίες βαίνουν σε ίσα τόξα και αντιστρόφως**.

Στο αρχαίο θέατρο της Επιδαύρου, τα άκρα των κερκίδων κάθε τυχαίας σειράς ισαπέχουν από το κέντρο της σκηνής. Τα ευθύγραμμα τμήματα που φαίνονται στην εικόνα είναι στην ίδια σειρά κερκίδων και είναι μεταξύ τους ίσα.
Μπορείτε να δείξετε ότι είναι ίσα και τα αντίστοιχα μήκη των κερκίδων;
Με δεδομένο ότι η φωτογραφία δεν τραβήχτηκε ακριβώς πάνω από το θέατρο, σας ζητείται να διαπιστώσετε χωρίς να μετρήσετε, εάν το κέντρο της σκηνής ισαπέχει από τα ευθύγραμμα τμήματα.

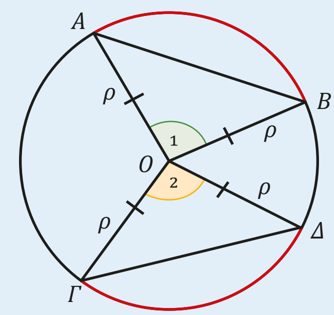
Τα άκρα των κερκίδων βρίσκονται πάνω σε τόξα ομόκεντρων κύκλων με κέντρο το κέντρο της σκηνής. Αρκεί λοιπόν να δείξετε ότι σε ίσες χορδές αντιστοιχούν ίσα τόξα και ίσα αποστήματα. Σε αρκετά προβλήματα μπορούμε να δώσουμε λύσεις, εάν πρώτα τα «μεταφράσουμε» σε μαθηματική γλώσσα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.9α

Σε ίσα τόξα του ίδιου κύκλου ή ίσων κύκλων αντιστοιχούν ίσες χορδές και αντιστρόφως.

Απόδειξη **(Ευθύ)**

Έστω κύκλος (O, ρ), δύο ίσα τόξα του $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ και $\hat{O}_1$, $\hat{O}_2$ οι αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες.
Τότε, τα τρίγωνα

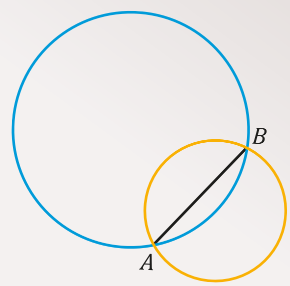


ΟΑΒ και ΟΓΔ είναι ίσα διότι έχουν:	
$OA = O\Gamma$	ως ακτίνες του ιδίου κύκλου
$OB = O\Delta$	ως ακτίνες του ιδίου κύκλου
$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$	ως επίκεντρες γωνίες που βαίνουν σε ίσα τόξα

Άρα, έχουν ίσα και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους, οπότε, $AB = \Gamma\Delta$, δηλαδή, σε ίσα τόξα αντιστοιχούν ίσες χορδές.

(Αντίστροφο)

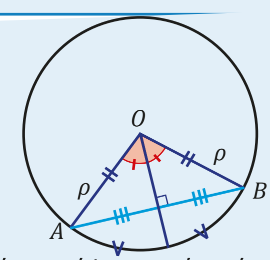
Έστω κύκλος (O, ρ), δύο ίσες χορδές του AB και $\Gamma\Delta$ και $\hat{O}_1$, $\hat{O}_2$ οι αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες.
Τα τρίγωνα OAB και $O\Gamma\Delta$ έχουν τις τρεις πλευρές τους ίσες μία προς μία, επομένως είναι ίσα και άρα έχουν ίσα και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους. Συνεπώς, $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$, άρα και τα αντίστοιχα τόξα είναι ίσα, δηλαδή $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$. Οπότε, σε ίσες χορδές αντιστοιχούν ίσα τόξα.
Όμοια εργάζεστε για τόξα και χορδές ίσων κύκλων.



Είναι σημαντικό ότι το θεώρημα αναφέρεται σε χορδές και τόξα του ιδίου κύκλου ή ίσων κύκλων. Όπως φαίνεται από το σχήμα, οι δύο μη ίσοι κύκλοι έχουν κοινή χορδή την AB στην οποία δεν αντιστοιχούν ίσα τόξα.

Εφαρμογή 2.9α

Το απόστημα μιας χορδής καταλήγει στο μέσο της και ο φορέας του διέρχεται από το μέσο του αντίστοιχου τόξου.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω κύκλος (O, ρ) και μια χορδή του AB. Το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές και το απόστημα είναι το ύψος του, άρα είναι και διάμεσος και διχοτόμος. Συνεπώς, καταλήγει στο μέσον της χορδής AB και διέρχεται από το μέσο του τόξου $\overset{\frown}{AB}$.

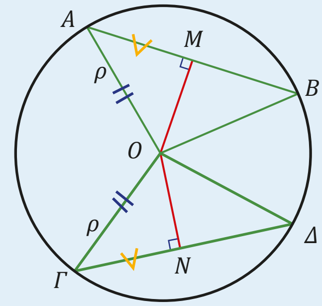
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.9

Στον τροχό του Λούνα Παρκ, η ισότητα των σιδερένιων δοκών που σημειώνονται στο σχήμα, εξασφαλίζει ίσες αποστάσεις μεταξύ των καλαθιών. Μπορείτε να εξηγήσετε τον λόγο για τον οποίο οι επίκεντρες γωνίες, που σχηματίζουν δύο διαδοχικές ακτίνες του τροχού, είναι μεταξύ τους ίσες;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:
Οι σιδερένιες δοκοί είναι χορδές τόξων. Αφού είναι ίσες, θα είναι ίσα και τα αντίστοιχα τόξα, οπότε θα είναι ίσες και οι επίκεντρες γωνίες που βαίνουν σε αυτά.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.9β

Σε ίσες χορδές του ίδιου κύκλου ή ίσων κύκλων αντιστοιχούν ίσα αποστήματα και αντιστρόφως.



Απόδειξη (Ευθύ)

Έστω κύκλος (O, ρ), δύο ίσες χορδές του AB και $\Gamma\Delta$ και τα αποστήματά τους OM και ON αντίστοιχα. Τα ισοσκελή τρίγωνα OAB και $O\Gamma\Delta$ είναι ίσα διότι έχουν τις τρεις πλευρές τους ίσες μία προς μία. Άρα έχουν ίσα και τα αντίστοιχα ύψη τους και, συνεπώς, $OM = ON$, δηλαδή σε ίσες χορδές αντιστοιχούν ίσα αποστήματα.

(Αντίστροφο)

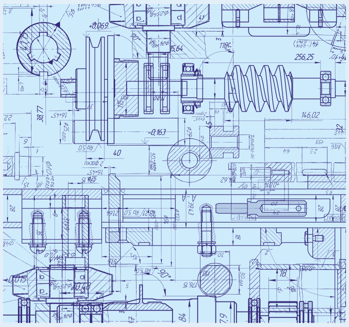
Έστω κύκλος (O, ρ) και τα ίσα μεταξύ τους αποστήματα τους OM και ON των χορδών AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα.
Τα ορθογώνια τρίγωνα:

OAM και $O\Gamma N$ είναι ίσα διότι έχουν:	
$OA = O\Gamma$	ως ακτίνες του ιδίου κύκλου
$OM = ON$	από υπόθεση

Άρα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα και, συνεπώς,

$$AM = \Gamma N \Leftrightarrow \frac{AB}{2} = \frac{A\Gamma}{2} \Leftrightarrow AB = A\Gamma,$$

(διότι στα ισοσκελή τρίγωνα OAB και $O\Gamma\Delta$ τα ύψη είναι και διάμεσοι) δηλαδή σε ίσα αποστήματα αντιστοιχούν ίσες χορδές.
Όμοια εργάζεστε για αποστήματα και χορδές ίσων κύκλων.



Κύκλοι, επίκεντρες γωνίες, χορδές και αποστήματα σε μηχανολογικό σχέδιο.

Τρίγωνο που σχηματίζεται από δυο ίσες χορδές που τέμνονται εξωτερικά του κύκλου

Ασκήσεις - Δραστηριότητες

Ασκήσεις Σ-Λ σε τόξα, χορδές, επίκεντρες γωνίες

1 Να χαρακτηρίσετε με την ένδειξη Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις:
α) Σε δύο κύκλους, ίσες χορδές αντιστοιχούν σε ίσα τόξα.
β) Σε κάθε κύκλο, αν τα αποστήματα δύο χορδών είναι ίσα τότε είναι ίσες και οι επίκεντρες γωνίες που βαίνουν στα τόξα των χορδών αυτών.
γ) Στους κύκλους (O, ρ) και (K, ρ), παίρνουμε δύο ίσα τόξα. Τότε, τα αποστήματα των χορδών τους είναι επίσης ίσα.

2 Ποιας χορδής το απόστημα έχει μηδενικό μήκος;

3 Σε έναν κύκλο, πάρτε τα διαδοχικά σημεία A, B, Γ και Δ, τέτοια ώστε οι χορδές AB και $\Gamma\Delta$ να είναι ίσες. Δείξτε ότι $\overset{\frown}{A\Gamma} = \overset{\frown}{B\Delta}$.

4 Μία ευθεία ε τέμνει τους ομόκεντρους κύκλους (K, ρ) και (K, σ), με $\rho < \sigma$, στα σημεία A, B και Γ, Δ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι $A\Gamma = B\Delta$ (δύο περιπτώσεις).

5 Σε μία διάμετρο ενός κύκλου (O, ρ), πάρτε τα διαφορετικά μεταξύ τους σημεία P και Σ, έτσι ώστε $OP = O\Sigma$. Από τα σημεία αυτά, φέρτε κάθετες στη διάμετρο που τέμνουν τον κύκλο στα A, B και Γ, Δ, αντίστοιχα. Δείξτε ότι $AB = \Gamma\Delta$.

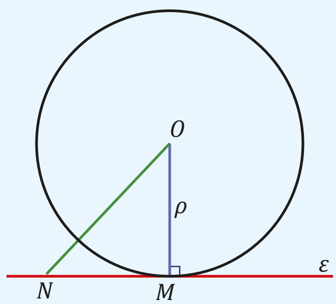
6 Έστω κύκλος (O, ρ) διαμέτρου $A\Gamma$ και δύο ίσες χορδές του AB και $\Gamma\Delta$ που τέμνονται σε σημείο E, εσωτερικά του κύκλου. Να δείξετε ότι: **α)** το τρίγωνο ΔEB είναι ισοσκελές και **β)** Η ευθεία OE διέρχεται από το μέσον της $B\Delta$.

7 Να δείξετε ότι εάν AB και $\Gamma\Delta$ είναι ίσες και μη παράλληλες μεταξύ τους χορδές, τότε η διχοτόμος της γωνίας των αποστημάτων τους διέρχεται από το μέσον του τόξου που ορίζεται από τα άκρα των χορδών που βρίσκονται προς τη μεριά που αυτές τέμνονται.

2.10 ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΚΥΚΛΟΥ ΜΕ ΚΑΝΟΝΑ ΚΑΙ ΔΙΑΒΗΤΗ

Στην ενότητα αυτή θα μάθετε:

- Να κατασκευάζετε εφαπτομένη κύκλου σε σημείο του με κανόνα και διαβήτη.

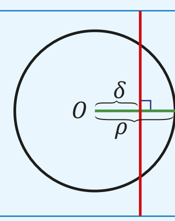
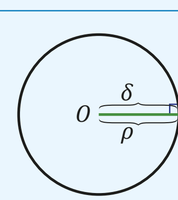
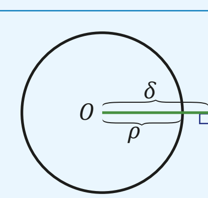


Εφαπτομένη ενός κύκλου είναι η ευθεία που έχει ένα μόνο κοινό σημείο με αυτόν.

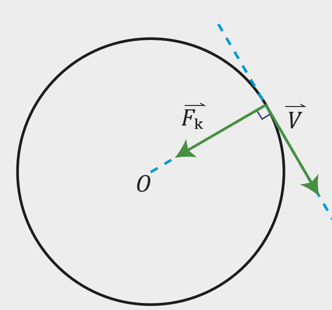
Το κοινό σημείο ενός κύκλου με μια εφαπτομένη του, ονομάζεται **σημείο επαφής**.

Εάν το σημείο M είναι σημείο επαφής κύκλου (O, ρ) με την εφαπτομένη του ε και το N είναι οποιοδήποτε άλλο τυχαίο σημείο αυτής, τότε από τις σχέσεις $OM = \rho$ και $ON > \rho$ (από τον ορισμό του κύκλου και αφού το N είναι εξωτερικό αυτού) προκύπτει ότι $OM < ON$. Επομένως, το OM είναι το μικρότερο ευθύγραμμο τμήμα από το O προς την ε και, συνεπώς, το OM είναι κάθετο στην ε.

Δηλαδή, η **ακτίνα** OM ενός κύκλου (O, ρ) **είναι κάθετη στην εφαπτομένη** στο σημείο επαφής M.

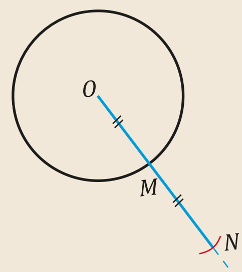
ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ - ΚΥΚΛΟΥ			
ΣΧΗΜΑ			
ΠΛΗΘΟΣ ΚΟΙΝΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ	Η ευθεία έχει δύο κοινά σημεία με τον κύκλο	Η ευθεία έχει ένα μόνο κοινό σημείο με τον κύκλο	Η ευθεία δεν έχει κοινά σημεία με τον κύκλο.
ΟΝΟΜΑΣΙΑ ΕΥΘΕΙΑΣ	τέμνουσα	εφαπτομένη	εξωτερική του κύκλου

Οι στροφές των δρόμων ταχείας κυκλοφορίας, κατασκευάζονται με κλίση ώστε η συνιστώσα της κάθετης δύναμης να λειτουργεί ως κεντρομόλος. Όταν ένα σώμα εκτελεί κυκλική τροχιά, και σταματήσει να ασκείται η κεντρομόλος τότε το σώμα θα κινηθεί πάνω στην εφαπτομένη της κυκλικής τροχιάς.
Βρείτε πώς θα σχεδιαστεί στο χαρτί, με κανόνα και διαβήτη, η εφαπτομένη ενός κύκλου σε ένα δεδομένο σημείο του.

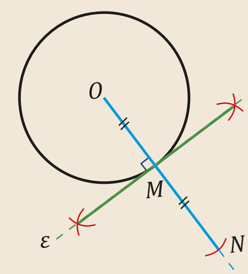


Το πρόβλημα ανάγεται στην κατασκευή ευθείας (της εφαπτομένης) που είναι κάθετη στο ένα άκρο ενός ευθυγράμμου τμήματος (της ακτίνας). Θα σχεδιάσετε την εφαπτομένη ως μεσοκάθετο ενός ευθυγράμμου τμήματος.

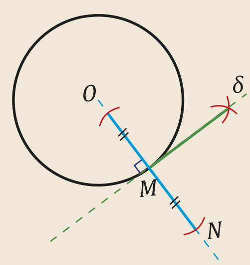
Έστω κύκλος (O, ρ) και σημείο του M, το σημείο επαφής με την εφαπτομένη. Φέρτε την ακτίνα OM και προεκτείνετέ την κατά ίσο τμήμα MN. Τότε, το M είναι το μέσον του ON.



Κατασκευάστε τη μεσοκάθετο ε του ON. Η ε είναι η ζητούμενη εφαπτομένη.



Ένας άλλος τρόπος επίλυσης του προβλήματος είναι να κατασκευάσετε την εφαπτομένη ως διχοτόμο μιας ευθείας γωνίας. Μπορείτε με τη βοήθεια του σχήματος να εξηγήσετε τα βήματα;

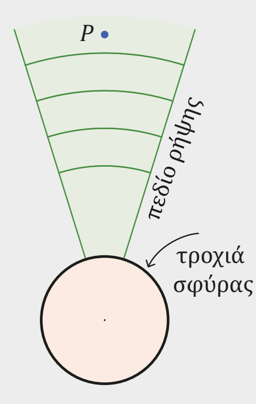


Κατασκευή εφαπτόμενης κύκλου σε σημείο του

Γενικά, για να κατασκευάσετε με κανόνα και διαβήτη την εφαπτομένη ενός κύκλου σε ένα σημείο του, αρκεί να βρείτε τρόπο να δημιουργήσετε ορθή γωνία με κορυφή το σημείο επαφής της εφαπτομένης με τον κύκλο και πλευρά την ακτίνα. Η άλλη πλευρά της γωνίας θα είναι η εφαπτομένη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.10

Ο σφυροβόλος προσπαθώντας να καταρρίψει το ατομικό του ρεκόρ και να μην ακυρωθεί, επιχειρεί να ρίξει τη σφύρα στο σημείο P του σχεδιαγράμματος. Για να το πετύχει αυτό, ο προπονητής του προσπαθεί να βρει σε ποιο σημείο της τροχιάς πρέπει να αφήσει τη σφύρα. Μπορείτε να τον βοηθήσετε;



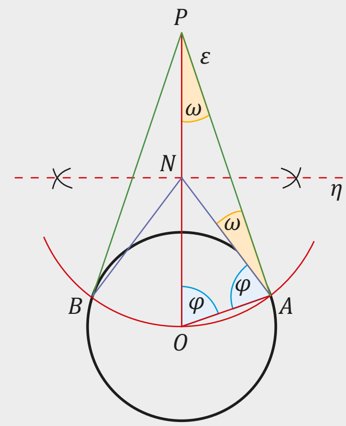
ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση του σημείου επαφής A του κύκλου (O, ρ) με την εφαπτομένη του ε που άγεται από το σημείο P, εκτός αυτού. Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα OP και τη μεσοκάθετό του η, που τέμνει την OP στο N. Τότε το N είναι το μέσον της OP. Ονομάστε A και B τα σημεία στα οποία ο κύκλος (N, NO) τέμνει τον (O, ρ). Οι ευθείες των PA και PB είναι οι ζητούμενες εφαπτόμενες. Παρατηρήστε ότι η γωνία $\widehat{OAP}$ είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο, άρα ορθή.

Ομοίως εργάζεστε και για τη PB.

Το πρόβλημα έχει πάντα λύση.

Κατασκευή εφαπτομένων κύκλου από σημείο εκτός αυτού

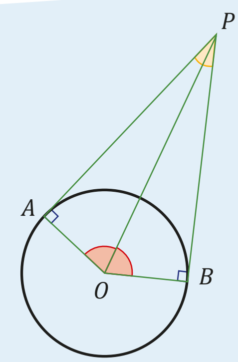


Εφαρμογή 2.10

Έστω κύκλος (O, ρ) και σημείο P εκτός αυτού. Να δείξετε ότι:

α) τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB του κύκλου που άγονται από το P, είναι μεταξύ τους ίσα και

β) η διακεντρική ευθεία PO διχοτομεί τη γωνία των PA και PB, καθώς και τη γωνία των ακτίνων OA και OB.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Τα ορθογώνια τρίγωνα OAP και OBP έχουν $OA = OB = \rho$ και την OP κοινή. Επομένως, είναι ίσα, οπότε έχουν ίσα και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους. Άρα, α) $PA = PB$ και β) $\widehat{APO} = \widehat{BPO}$ και $\widehat{AOP} = \widehat{BOP}$, δηλαδή, η διακεντρική ευθεία PO διχοτομεί τη γωνία των εφαπτομένων τμημάτων και τη γωνία των ακτίνων.

Κοινές εφαπτομένες δύο κύκλων

Ασκήσεις - Δραστηριότητες

1 Να χαρακτηρίσετε με την ένδειξη Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις:

α) Ένας κύκλος έχει άπειρες εφαπτομένες.

β) Ένας κύκλος έχει μόνο μία εφαπτόμενη σε ένα σημείο του.

γ) Μπορείτε, με κανόνα και διαβήτη, να κατασκευάσετε εφαπτομένη ενός κύκλου όταν γνωρίζετε το σημείο επαφής.

δ) Δεν γίνεται, με κανόνα και διαβήτη, να κατασκευάσετε την εφαπτομένη ενός κύκλου όταν γνωρίζετε ένα σημείο της διαφορετικό από το σημείο επαφής.

2 Έστω δύο ομόκεντροι κύκλοι (O, ρ) και (O, σ), με $\rho < \sigma$, και ευθεία ε που εφάπτεται στον (O, ρ) και τέμνει τον (O, σ) στα A και B. Αν M είναι το σημείο επαφής του (O, ρ) με την ε, να αποδείξετε ότι το M είναι το μέσον του AB.

3 Έστω κύκλος (O, ρ), P εξωτερικό σημείο αυτού, PA, PB τα εφαπτόμενα τμήματα και M, N τα σημεία τομής της διακεντρικής ευθείας OP με τον κύκλο. Να αποδείξετε ότι: α) $AM = BM$ και $AN = BN$, β) η OP διέρχεται από το μέσον της χορδής AB.

4 Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και M μέσον της $B\Gamma$. Να δειχθεί ότι η AM είναι εφαπτομένη του κύκλου(B, BM). Εάν $A\Delta$ είναι η άλλη εφαπτομένη από το A προς τον (B, BM). Να αποδείξετε ότι οι $\widehat{\Delta AB}$ και $\widehat{MA\Gamma}$ είναι ίσες.

Ανακεφαλαίωση

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ – ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΕΡΓΑ ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗΣ:

1. Να χαρακτηρίσετε με την ένδειξη Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις:

α. Δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν τρία οποιαδήποτε αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα.

β. Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές τους ίσες μία προς μία.

γ. Εάν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά και δύο γωνίες του ενός ίσες με μία πλευρά και δύο γωνίες του άλλου, τότε είναι ίσα.

δ. Κάθε σημείο που ισαπέχει από δύο πλευρές ενός τριγώνου βρίσκεται στη διχοτόμο της γωνίας των πλευρών αυτών.

ε. Κάθε σημείο του αποστήματος μιας χορδής βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετό της.

στ. Μπορούμε πάντα να χαράξουμε με κανόνα και διαβήτη την εφαπτομένη ενός κύκλου, αρκεί να γνωρίζουμε ένα οποιοδήποτε σημείο της.

ζ. Οι ιδιότητες των ισοσκελών τριγώνων ισχύουν και στα ισόπλευρα και αντιστρόφως.

η. Όταν μας δίνονται τρία ευθύγραμμα τμήματα, μπορούμε να κατασκευάσουμε τρίγωνο με πλευρές τα τμήματα αυτά.

2. Στις προτάσεις της παραπάνω άσκησης, για τις αληθείς να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και για τις ψευδείς να δώσετε αντιπαράδειγμα.

3. Σε ποιο σημείο μιας τριγωνικής πλατείας πρέπει να τοποθετηθεί ένας φανοστάτης, ώστε το βράδυ να φωτίζονται εξίσου και οι τρεις κορυφές της;

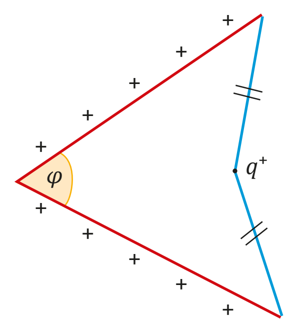
4. Να αποδείξετε ότι εάν οι κορυφές ενός πολυγώνου είναι σημεία ενός κύκλου, τότε οι μεσοκάθετοι των πλευρών του πολυγώνου συντρέχουν.

5. Με τις γνώσεις που αποκτήσατε στο κεφάλαιο αυτό, εξηγήστε με ποιον τρόπο θα βρείτε το ύψος του κτιρίου στη φωτογραφία, εάν διαθέτετε μόνο ένα εργαλείο που μετράει γωνίες και μια μετροταινία. Χωριστείτε σε ομάδες και μετρήστε, από το έδαφος, το ύψος του δικού σας σχολείου.

6. Δεδομένων δύο ευθυγράμμων τμημάτων, να σχεδιάσετε με κανόνα και διαβήτη, τόξο που να έχει ως χορδή το ένα από αυτά και το άλλο να είναι το απόστημα της χορδής.

7. Παραγγείλατε το τραπέζι και τα καθίσματα της φωτογραφίας, αλλά, για λόγους εξοικονόμησης χώρου στη συσκευασία, η μεταλλική βάση του τραπεζιού δεν ήταν ενωμένη με το ξύλινο κυκλικό άνω μέρος του. Εάν στο ξύλο δεν υπάρχουν σημάδια για το πού ακριβώς θα βιδωθεί η βάση, τότε πώς μπορείτε να εντοπίσετε με ακρίβεια το κέντρο του ώστε να κάνετε μια επιτυχή συναρμολόγηση;

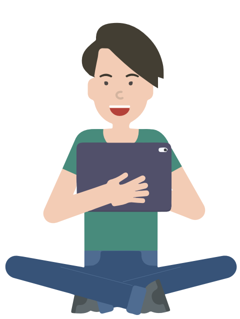
8. Ένα σημειακό θετικό φορτίο τοποθετείται ανάμεσα σε δύο ίδιες, σταθερές και όμοια θετικά φορτισμένες πλάκες που σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία $\hat{\varphi}$, στη θέση που φαίνεται στη απεικόνισή τους στο επίπεδο σχήμα. Να σχεδιαστεί στο επίπεδο σχήμα η τροχιά που θα ακολουθήσει εάν αφεθεί ελεύθερο. (Από τη φυσική, γνωρίζετε ότι: α) τα σώματα με το ίδιο είδος φορτίου απωθούνται μεταξύ τους,
β) η ηλεκτρική δύναμη που ασκείται μεταξύ δύο φορτίων είναι ανάλογη των φορτίων αυτών και αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της μεταξύ τους απόστασης.)



9. Σε έναν κύκλο, όταν μεταβάλλεται το μήκος μιας χορδής, μεταβάλλεται και το μήκος του αποστήματός της. Είναι δυνατόν τα μήκη της χορδής και του αποστήματός της να είναι μεταξύ τους ποσά ανάλογα ή αντιστρόφως ανάλογα; Αιτιολογήστε.

10. Εάν τα PA και PB είναι τα εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από εξωτερικό σημείο P κύκλου (O, ρ), να δείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών $\widehat{AOB}$ και $\widehat{APB}$ είναι σταθερό και ανεξάρτητο από τη θέση του P.

11. Φτιάξτε έναν χαρταετό, όπως υποδεικνύεται στο έργο εξερεύνησης της ενότητας 2.4



Μπορείς να φτάσεις το γλυκό;

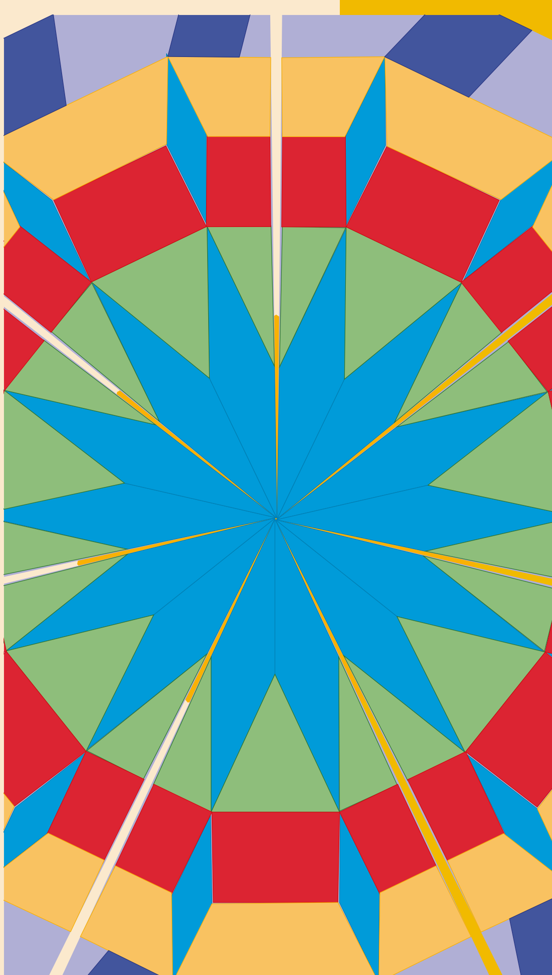
Σύνοψη στα τρίγωνα, τους γεωμετρικούς τόπους και κατασκευές. Τόξα - χορδές - εφαπτομένες

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

3ο Κεφάλαιο

Τετράπλευρα

- Είδη τετράπλευρων
- Εφαρμογές παραλληλογράμμων
- Κέντρα τριγώνων
- Τραπέζιο
- Εφαρμογές παραλληλογράμμων στη ζωή



ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

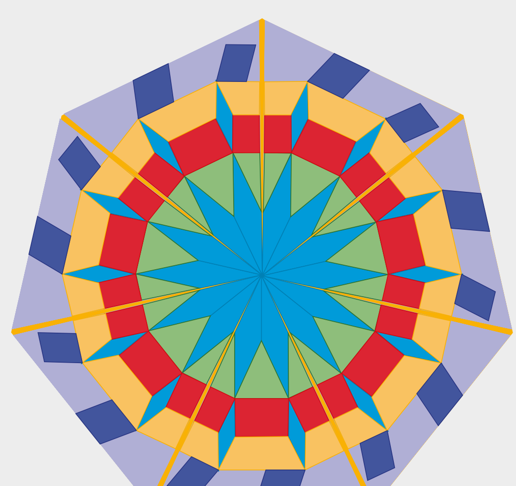
3
ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Θα μάθετε:

- Να διερευνάτε και να αποδεικνύετε τις βασικές ιδιότητες του παραλληλογράμμου και των ειδικών παραλληλογράμμων (ορθογώνιο, ρόμβος, τετράγωνο) και να διακρίνετε αυτές που τα χαρακτηρίζουν.
- Να αποδεικνύετε ιδιότητες που αφορούν στο ευθύγραμμο τμήμα το οποίο συνδέει μέσα πλευρών τριγώνου.
- Να προσδιορίζετε και να αποδεικνύετε τις σχέσεις που συνδέουν την υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου, αφενός με τη διάμεσο που αντιστοιχεί σε αυτήν και αφετέρου με την κάθετη πλευρά που είναι απέναντι από γωνία 30 μοιρών και να διαπιστώνετε ότι οι ιδιότητες αυτές χαρακτηρίζουν τα ορθογώνια τρίγωνα.
- Να αποδεικνύετε ότι οι μεσοκάθετοι των πλευρών ενός τριγώνου και οι διχοτόμοι των γωνιών του συντρέχουν αντιστοίχως σε σημεία που αποτελούν κέντρα χαρακτηριστικών κύκλων του.
- Να διαπιστώνετε ότι σε ένα τρίγωνο συντρέχουν, τόσο τα ύψη όσο και οι διάμεσοι.
- Να μοντελοποιείτε και να επιλύετε προβλήματα αξιοποιώντας τα κέντρα τριγώνου.
- Να αναγνωρίζετε το τραπέζιο ως το τετράπλευρο με μόνο δύο πλευρές παράλληλες, να αναγνωρίζετε το ισοσκελές τραπέζιο και να αποδεικνύετε τις βασικές ιδιότητές τους.
- Να μοντελοποιείτε και να επιλύετε προβλήματα χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των παραλληλογράμμων και των τραπεζίων.

Τα τετράπλευρα και οι ιδιότητές τους, ιδιαίτερα τα παραλληλόγραμμα και τα τραπέζια, έχουν πάρα πολλές εφαρμογές στην καθημερινή μας ζωή και σε πολλά επαγγέλματα. Τα χρησιμοποιούν:

- οι ξυλουργοί για την κατασκευή σκαλοπατιών (τις ράγες)
- οι σχεδιαστές αγωνιστικών αυτοκινήτων για τη διατήρηση του τροχού σε κάθετη θέση σε ανώμαλες επιφάνειες
- οι μαραγκοί και οι κορνιζοποιοί για την κατασκευή διαφόρων ειδών κορνίζας
- οι παρατηρητές πουλιών και πλανητών για τη στήριξη του τηλεσκόπιου και των διοπτρών (κιάλια)
- οι ναυτικοί για την πλοήγηση
- οι γεωλόγοι για την ταξινόμηση των κρυστάλλων
- και βέβαια στη Μηχανική, την Αρχιτεκτονική και στην Τέχνη.



Τέχνη Mandala.

3.1 ΕΙΔΗ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΩΝ

Στην ενότητα αυτή θα μάθετε:

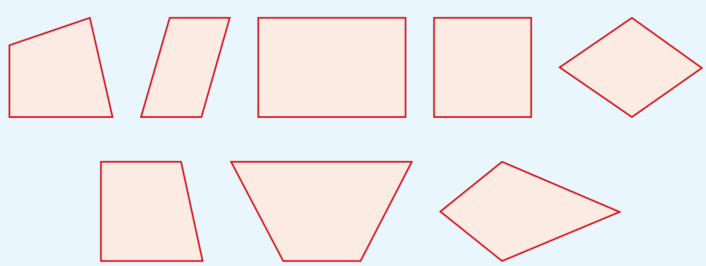
- Να διερευνάτε και να αποδεικνύετε τις βασικές ιδιότητες του παραλληλογράμμου και των ειδικών παραλληλογράμμων (ορθογώνιο, ρόμβος, τετράγωνο) και να διακρίνετε αυτές που τα χαρακτηρίζουν.

Στο προηγούμενο κεφάλαιο γνωρίσατε το πιο απλό πολύγωνο, το τρίγωνο, όπως και τα είδη και τις ιδιότητές του. Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθείτε με τα τετράπλευρα σχήματα και θα τα ταξινομήσετε ανάλογα με το είδος των γωνιών, των πλευρών και των σχέσεων μεταξύ τους.

Ανάλογα με την παραλληλία των πλευρών τους τα τετράπλευρα χωρίζονται σε αυτά:

1. που έχουν τις απέναντι πλευρές τους παράλληλες, τα **παραλληλόγραμμα**.
2. που έχουν μόνο δύο πλευρές παράλληλες, τα **τραπέζια.**
3. που δεν έχουν παράλληλες πλευρές.

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθείτε κυρίως με **κυρτά τετράπλευρα**, που θα αναφέρονται απλά ως **τετράπλευρα**.



Οι εικόνες όλων των τετραπλεύρων

Οι εικόνες όλων των τετραπλεύρων σε ταξινόμηση

3.1.1 Παραλληλόγραμμο και Ιδιότητες παραλληλογράμμου

ΕΞΕΡΕΥΝΩΝΤΑΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΩΝ...

Να σχεδιάσετε δύο ζεύγη παράλληλων ευθειών, που το ένα τέμνει το άλλο. Ονομάστε A, B, $Γ$ και $Δ$ τα σημεία τομής, κυκλικά. Τι σχήμα είναι το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$; Στη συνέχεια, να μετρήσετε τις πλευρές και τις γωνίες του $ΑΒΓΔ$ και να τις συγκρίνετε. Συζητήστε και καταγράψτε τα συμπεράσματά σας, διατυπώνοντας σχετικές εικασίες.

Κατόπιν, να φέρετε τις δύο διαγωνίους του $ΑΒΓΔ$ και να ονομάσετε $Ο$ το σημείο τομής τους. Να σχεδιάσετε τον κύκλο $(Ο, ΟΑ)$. Διέρχεται από άλλη κορυφή του παραλληλογράμμου και, αν ναι, θα ισχύει το ίδιο για κάθε παραλληλόγραμμο; Μπορείτε να διατυπώσετε μία αντίστοιχη εικασία για τον κύκλο $(Ο, ΟΒ)$;

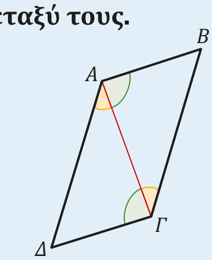
Οι ιδιότητες ενός παραλληλογράμμου

Μικροπείραμα

«Ιδιότητες παραλληλογράμμου».

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.1.1α

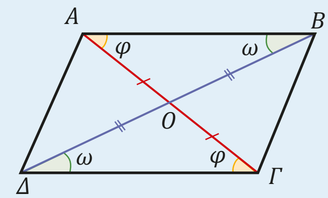
Οι απέναντι πλευρές και οι απέναντι γωνίες κάθε παραλληλογράμμου είναι ίσες μεταξύ τους.



Απόδειξη Έστω το παραλληλόγραμμο *ΑΒΓΔ* και *ΑΓ* η διαγώνιός του. Τότε τα τρίγωνα *ΑΒΓ* και *ΑΔΓ* έχουν την πλευρά *ΑΓ* κοινή και $\widehat{ΒΑΓ} = \widehat{ΑΓΔ}$, $\widehat{ΒΓΑ} = \widehat{ΓΑΔ}$ (ως γωνίες εντός εναλλάξ των *ΑΒ* // *ΓΔ* και *ΑΔ* // *ΒΓ*, αντίστοιχα, που τέμνονται από την *ΑΓ*). Άρα *ΑΒΓ* = *ΑΔΓ* (*ΓΠΓ*), οπότε τα τρίγωνα έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, δηλαδή *ΑΔ* = *ΒΓ*, *ΑΒ* = *ΔΓ* και $\hat{Β} = \hat{Δ}$. Επίσης, $\hat{Α} = \hat{Γ}$ ως άθροισμα ίσων γωνιών, των $\widehat{ΒΑΓ} = \widehat{ΑΓΔ}$, $\widehat{ΒΓΑ} = \widehat{ΓΑΔ}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.1.1β

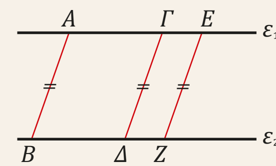
Οι διαγώνιοι κάθε παραλληλογράμμου διχοτομούνται, δηλαδή τέμνονται στο μέσον τους.



Απόδειξη Έστω *ΑΓ* και *ΒΔ* οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου *ΑΒΓΔ*, που τέμνονται στο *Ο*. Τα τρίγωνα *ΟΑΒ* και *ΟΓΔ* έχουν: *ΑΒ* = *ΔΓ* ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου και *ΑΒ*//*ΔΓ* οπότε, $\widehat{ΒΑΓ} = \widehat{ΔΓΑ} = \hat{φ}$ (ως εντός εναλλάξ των *ΑΒ*//*ΔΓ*, που τέμνονται από την *ΑΓ*) και $\widehat{ΑΒΔ} = \widehat{ΒΔΓ} = \hat{ω}$ (ως εντός εναλλάξ των *ΑΒ*//*ΔΓ*, που τέμνονται από την *ΒΔ*). Επομένως, *ΟΑΒ* = *ΟΓΔ* και οι αντίστοιχες πλευρές τους είναι ίσες, δηλαδή, *ΑΟ* = *ΟΓ* και *ΒΟ* = *ΟΔ*, άρα το Ο είναι κοινό μέσον των *ΑΓ* και *ΒΔ*, δηλαδή οι διαγώνιοι του *ΑΒΓΔ*, *ΑΓ* και *ΒΔ*, διχοτομούνται.

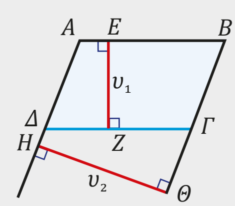
3.1.1α Το σημείο τομής των διαγωνίων ενός παραλληλογράμμου είναι κέντρο συμμετρίας του.
Το κέντρο συμμετρίας του παραλληλογράμμου ονομάζεται **κέντρο του παραλληλογράμμου**.

3.1.1β Παράλληλα ευθύγραμμα τμήματα που έχουν τα άκρα τους σε δύο παράλληλες ευθείες είναι μεταξύ τους ίσα, π.χ. στο διπλανό σχήμα *ΑΒ* = *ΓΔ* = *ΕΖ*.



Ορισμός

Κάθε ευθύγραμμο τμήμα που έχει τα άκρα του στις ευθείες των απέναντι πλευρών παραλληλογράμμου και είναι κάθετο σε αυτές λέγεται **ύψος του παραλληλογράμμου**, ενώ οι απέναντι πλευρές του λέγονται **βάσεις ως προς αυτό το ύψος**.



Π.χ. στο παραλληλόγραμμο *ΑΒΓΔ* του διπλανού σχήματος το $υ_1$ είναι ύψος με αντίστοιχες βάσεις *ΑΒ* και *ΓΔ*, όπως και το $υ_2$ με αντίστοιχες βάσεις *ΑΔ* και *ΒΓ*.

Συνοψίζοντας, σε κάθε παραλληλόγραμμο:

i. Οι απέναντι πλευρές του είναι ανά δύο ίσες.

ii. Οι απέναντι γωνίες του είναι ανά δύο ίσες.

iii. Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

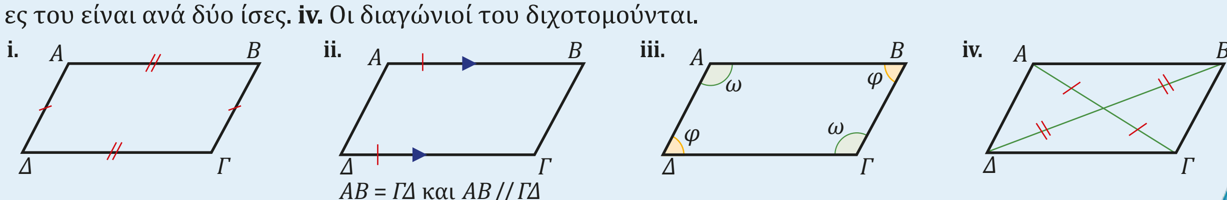
Ένα παραλληλόγραμμο έχει τις παραπάνω ιδιότητες.
Πότε, όμως, ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο;

Αποδείξεις των κριτηρίων παραλληλόγραμμου

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.1.1γ

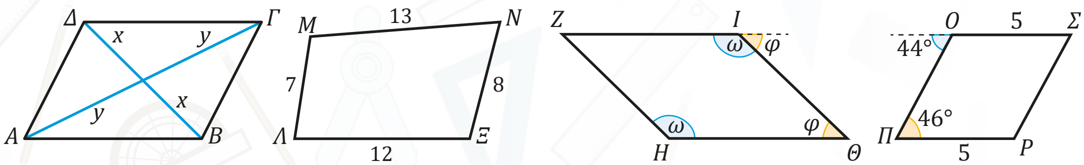
ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΩΝ

Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο, εάν έχει μία από τις παρακάτω ιδιότητες: **i.** Οι απέναντι πλευρές του είναι ανά δύο ίσες. **ii.** Δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες. **iii.** Οι απέναντι γωνίες του είναι ανά δύο ίσες. **iv.** Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

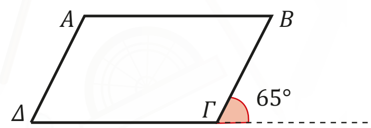


Ασκήσεις - Δραστηριότητες

1 Ποια από τα παρακάτω τετράπλευρα είναι παραλληλόγραμμα, ποια όχι και γιατί;



2 Να υπολογίσετε τις γωνίες του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος.



3 Να χαρακτηρίσετε με την ένδειξη Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις:

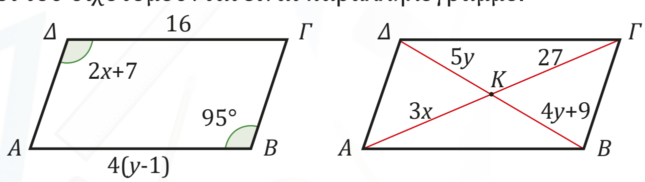
α) Δύο απέναντι πλευρές κάθε παραλληλογράμμου είναι πάντα παράλληλες.

β) Οι διαδοχικές γωνίες κάθε παραλληλογράμμου είναι ίσες.

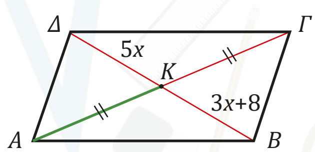
γ) Σε κάθε παραλληλόγραμμο οι δύο απέναντι γωνίες του είναι ίσες.

δ) Κάθε τετράπλευρο στο οποίο οι διαγώνιοί του διχοτομούνται είναι παραλληλόγραμμο.

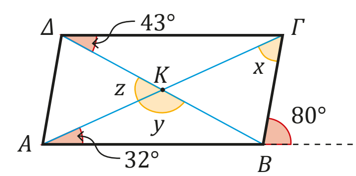
4 Σε καθένα από τα παραλληλόγραμμα, να βρείτε τους αριθμούς x, y.



5 Να βρείτε για ποια τιμή του x το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος είναι παραλληλόγραμμο.



6 Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε τις γωνίες x, y, z.

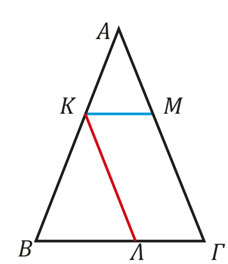


7 Σε ένα παραλληλόγραμμο *ΑΒΓΔ* με κέντρο *Ο* ισχύουν *ΟΑ*=5 και *ΟΒ*=7. Να βρείτε τα μήκη των διαγωνίων του.

8 Σε ένα παραλληλόγραμμο η μία γωνία του είναι ίση με τα $\frac{5}{18}$ του αθροίσματος των γωνιών του. Να βρείτε όλες τις γωνίες του.

9 Η περίμετρος ενός παραλληλογράμμου *ΑΒΓΔ* είναι ίση με 72. Αν ισχύει $AB = 1{,}25 \cdot B\Gamma$, να βρείτε τα μήκη των πλευρών του.

10 Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο *ΑΒΓ* είναι ισοσκελές και το τετράπλευρο *ΛΓΜΚ* είναι παραλληλόγραμμο. Να αιτιολογήσετε γιατί η γωνία *ΜΚΛ* είναι ίση με την γωνία *Β*.



11 Δίνεται παραλληλόγραμμο *ΑΒΓΔ* με κέντρο *Κ*. Μια ευθεία που διέρχεται από το Κ τέμνει τις πλευρές *ΑΒ* και *ΓΔ* στα σημεία *Λ, Μ* αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το *ΛΒΜΔ* είναι παραλληλόγραμμο.

12 Σε παραλληλόγραμμο *ΑΒΓΔ* ισχύει *ΑΓ*=27. Στην *ΑΓ* θεωρούμε σημεία Ε, Ζ ώστε να ισχύουν $AE = 8$ και $\Gamma Z = 8$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο *ΕΒΖΔ* είναι παραλληλόγραμμο.

13 Δίνεται παραλληλόγραμμο *ΑΒΓΔ* και *Ε, Ζ* σημεία της *ΑΓ* ώστε *ΔΖ//ΒΕ*. Να αποδείξετε ότι *ΔΕ//ΒΖ*.

14 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο *ΑΒΓ* και έστω *Μ* τυχαίο σημείο στην βάση του *ΒΓ*. Στις *ΑΒ, ΑΓ* θεωρούμε σημεία Κ, Λ ώστε *ΜΚ//ΑΓ* και *ΜΛ//ΑΒ*. Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο *ΚΜΛΑ* είναι παραλληλόγραμμο. **β)** *ΜΚ+ΜΛ=ΑΒ*.

15 Δίνεται παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ και στην προέκταση της πλευράς $ΑΒ$ θεωρούμε σημείο $Ε$ ώστε $ΒΕ = ΒΓ$. Στην ημιευθεία $ΔΑ$ θεωρούμε σημείο $Ζ$, ώστε $ΔΖ = ΔΓ$. Να αποδείξετε ότι $Ζ\hat{Γ}Ε=90°$.

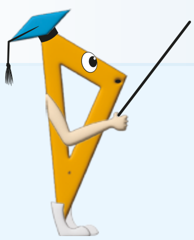
16 Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΔ παίρνουμε τμήματα $ΒΕ = ΒΓ$ και $ΔΖ = ΔΓ$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $ΒΕΓ$ και $ΔΓΖ$ έχουν τις γωνίες τους μια προς μια ίσες.

β) Τα σημεία $Ε, Γ, Ζ$ βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

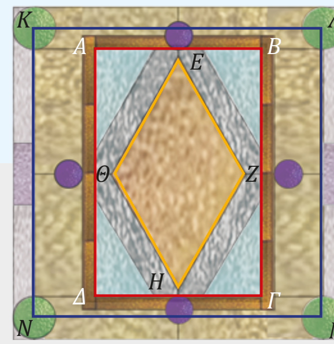
Είναι το σχήμα παραλληλό-γραμμο ή μήπως όχι;

3.1.2 Ειδικά παραλληλόγραμμα



Το παραλληλόγραμμο είναι μία ειδική περίπτωση τετράπλευρου. Παρακάτω θα διερευνηθούν ειδικές περιπτώσεις τετράπλευρων, που αποδεικνύεται ότι είναι παραλληλόγραμμα.

Παρατηρήστε τα τετράπλευρα στο βιτρό του σχήματος: Το $ΕΖΗΘ$ έχει τις τέσσερις πλευρές του ίσες. Το $ΑΒΓΔ$ έχει τις τέσσερις γωνίες του ίσες. Ενώ το $ΚΛΜΝ$ έχει και όλες τις πλευρές και όλες του τις γωνίες ίσες. Τι συμπεραίνετε για τα τετράπλευρα αυτά;



Ρόμβος λέγεται το τετράπλευρο που έχει τέσσερις ίσες πλευρές.

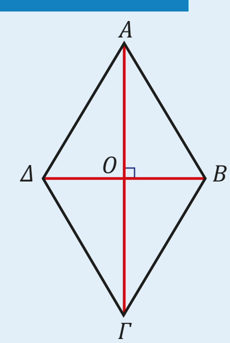
Είναι ο ρόμβος παραλληλόγραμμο;
Ναι, αφού οι απέναντι πλευρές του είναι ανά δύο ίσες.
Εκτός από τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου ο ρόμβος έχει και τις επιπλέον ιδιότητες:

Αποδείξεις των κριτηρίων ρόμβου

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.1.2α

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΡΟΜΒΟΥ

Οι διαγώνιοι ενός ρόμβου τέμνονται κάθετα και διχοτομούν τις γωνίες του.



Απόδειξη Το $ΑΒΓΔ$ είναι ρόμβος, άρα $ΑΒ=ΑΔ$, δηλαδή το τρίγωνο $ΑΒΔ$ είναι ισοσκελές (1).
Το $ΑΒΓΔ$ ως ρόμβος είναι και παραλληλόγραμμο. Επομένως, οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, δηλαδή το Ο είναι μέσον των $ΑΓ$ και $ΒΔ$, άρα η $ΑΟ$ είναι διάμεσος του $ΑΒΔ$ (2).
Από τις (1) και (2) η $ΑΟ$ είναι και ύψος, δηλαδή $ΑΟ \perp ΒΔ$ και διχοτόμος της $\hat{Α}$. Ομοίως, αποδεικνύεται ότι η $ΓΟ$ είναι διχοτόμος της $\hat{Γ}$ και η $ΒΔ$ διχοτόμος των $\hat{Β}$ και $\hat{Δ}$.
Αποδείχτηκε ότι οι διαγώνιοι ενός ρόμβου τέμνονται κάθετα και διχοτομούν τις γωνίες του.

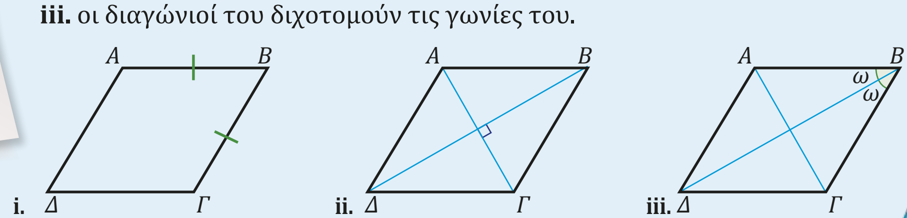
ΘΕΩΡΗΜΑ 3.1.2β

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, κάθε ρόμβος είναι και παραλληλόγραμμο. Οι προϋποθέσεις για το πότε ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος συνοψίζονται δίπλα:

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΡΟΜΒΟΥ

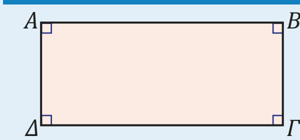
Ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, εάν:

i. δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.
ii. οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα.
iii. οι διαγώνιοί του διχοτομούν τις γωνίες του.



ΘΕΩΡΗΜΑ 3.1.2γ

Αν σε ένα τετράπλευρο οι γωνίες του είναι ίσες μεταξύ τους, τότε είναι ορθές. Η απόδειξη είναι προφανής, αφού το άθροισμα των γωνιών του είναι τέσσερις ορθές.



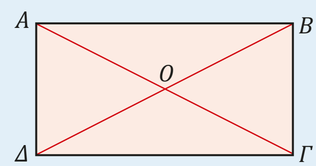
Ορθογώνιο λέγεται το τετράπλευρο που έχει όλες τις γωνίες του ίσες και είναι ορθές.

Είναι το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο; Ναι, διότι οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες. Εκτός από τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου, το ορθογώνιο έχει και τις επιπλέον ιδιότητες:

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.1.2δ

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ

Οι διαγώνιοι ενός ορθογωνίου είναι ίσες.



Απόδειξη Το $ΑΒΓΔ$ είναι ορθογώνιο, άρα $\hat{Δ} = \hat{Γ} = 90^o$. Αν $ΑΓ$, $ΒΔ$ οι διαγώνιοί του, τα τρίγωνα $ΑΔΓ$ και $ΔΒΓ$ είναι ορθογώνια με κοινή πλευρά τη $ΓΔ$. Επιπλέον, $ΑΔ=ΒΓ$ ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι τα τρίγωνα $ΑΔΓ$ και $ΑΒΓ$ είναι ίσα, επομένως έχουν $ΑΓ=ΒΔ$. Άρα, αποδείχτηκε ότι οι διαγώνιοι ενός ορθογωνίου είναι ίσες.

Από τα παραπάνω προέκυψαν κάποιες διαπιστώσεις που γεννούν τα αντίστοιχα ερωτήματα:

1. Ένα τετράπλευρο με όλες τις γωνίες του ίσες είναι ορθογώνιο.
Τι γίνεται αν έχει τρεις γωνίες (α) ίσες ή (β) ορθές;

2. Κάθε ορθογώνιο είναι και παραλληλόγραμμο. Ισχύει το αντίστροφο; Είναι κάθε παραλληλόγραμμο ορθογώνιο; Αν όχι, πότε είναι;

Οι προϋποθέσεις για να είναι ένα τετράπλευρο ορθογώνιο, δηλαδή τα κριτήρια, δίνονται παρακάτω:

Ένα κριτήριο ορθογωνίων

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.1.2ε

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ

Αποδείξεις των κριτηρίων ορθογωνίου

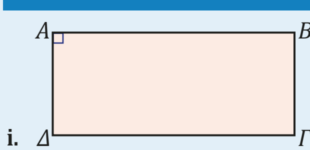
Ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο, εάν:

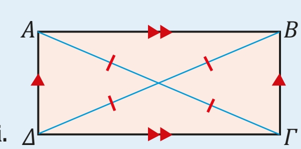
Α. έχει τρεις γωνίες ορθές.

Β. είναι παραλληλόγραμμο και, επιπλέον, ισχύει ένα από τα παρακάτω:

i. μία γωνία του είναι ορθή

ii. οι διαγώνιοί του είναι ίσες.





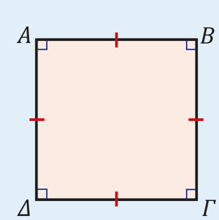
Τετράγωνο λέγεται το τετράπλευρο που έχει όλες τις πλευρές και όλες τις γωνίες του ίσες. Άρα το τετράγωνο είναι ρόμβος και ορθογώνιο ταυτόχρονα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.1.2στ

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΥ

Το τετράγωνο έχει όλες τις ιδιότητες του ορθογωνίου, του ρόμβου, και επομένως του παραλληλογράμμου:

i. Οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες.
ii. Όλες οι πλευρές του είναι ίσες.
iii. Όλες οι γωνίες του είναι ορθές.
iv. Οι διαγώνιοι του είναι ίσες, τέμνονται κάθετα, διχοτομούνται και διχοτομούν τις γωνίες του.



ΘΕΩΡΗΜΑ 3.1.2ζ

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΥ

Είδατε ότι ένα τετράπλευρο είναι τετράγωνο όταν είναι ορθογώνιο και ρόμβος. Επομένως, για να αποδείξετε ότι ένα παραλληλόγραμμο είναι τετράγωνο, αρκεί να συνδυάσετε ένα κριτήριο ορθογωνίου με ένα κριτήριο ρόμβου, δηλαδή: Ένα παραλληλόγραμμο είναι τετράγωνο, εάν ικανοποιεί ταυτόχρονα ένα κριτήριο από τη δεξιά και ένα από την αριστερή στήλη:

Κριτήρια ορθογωνίου	**Κριτήρια ρόμβου**
(i) μία γωνία του είναι ορθή.	(i) δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.
	(ii) οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα.
(ii) οι διαγώνιοί του είναι ίσες.	(iii) οι διαγώνιοί του διχοτομούν τις γωνίες του.

Η ταξινόμηση των τετράπλευρων και τα κοινά στοιχεία των κλάσεων

Βρες τα χαρακτηριστικά μου

Οι ιδιότητες των παραλληλογράμμων και όχι μόνο

Παντογράφος

Εφαρμογή 3.1.2α

Η ΙΣΟΤΗΤΑ ΣΤΑ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

Στο κεφάλαιο των τριγώνων ασχοληθήκατε με την ισότητα των τριγώνων. Τι ισχύει στα τετράπλευρα;

Σε αντιστοιχία με τον ορισμό ισότητας στα τρίγωνα:

Ορισμός

Δύο τετράπλευρα είναι ίσα όταν όλες οι πλευρές και όλες οι γωνίες τους είναι ίσες. Δηλαδή,
$ΑΒΓΔ = ΕΖΗΘ$ όταν $ΑΒ = ΕΖ$, $ΒΓ = ΖΗ$, $ΓΔ = ΗΘ$,
$ΔΑ = ΘΕ$ και $\hat{Α} = \hat{Ε}$, $\hat{Β} = \hat{Ζ}$, $\hat{Γ} = \hat{Η}$ και $\hat{Δ} = \hat{Θ}$.

Πώς διαμορφώνονται λοιπόν τα κριτήρια ισότητας των παραλληλογράμμων; Για παράδειγμα,
- δύο παραλληλόγραμμα με τέσσερις πλευρές ίσες μία προς μία, είναι ίσα;
- δύο ορθογώνια με ίσες διαγώνιους είναι ίσα;
- δύο ρόμβοι, πότε είναι ίσοι;

Εφαρμογή 3.1.2γ

ΟΙ ΔΙΧΟΤΟΜΟΙ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ ΕΝΟΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟΥ

Τι τετράπλευρο ορίζεται από τις διχοτόμους των γωνιών ενός παραλληλογράμμου, όταν δεν συμπίπτουν; Εξετάστε όλες τις περιπτώσεις.

Κριτήρια ισότητας παραλληλογράμμων

Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων και ρόμβων

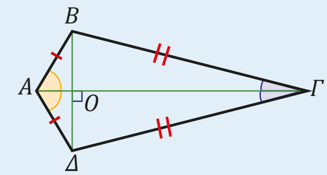
Κατασκευή παραλληλόγραμμου σε διάφορες περιπτώσεις

Πότε δύο παραλληλόγραμμα είναι ίσα;

Διχοτόμοι παραλληλογράμμου

Εφαρμογή 3.1.2δ

Βλέποντας το τετράπλευρο του διπλανού σχήματος, ο συμμαθητής σας υποστήριξε ότι είναι ρόμβος διότι οι δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες και οι διαγώνιοί του $ΑΓ$ και $ΒΔ$ τέμνονται κάθετα. Μάλιστα, είπε ότι η $ΑΓ$ διχοτομεί τις γωνίες του $\hat{Α}$ και $\hat{Γ}$. Απαντήστε αιτιολογημένα αν συμφωνείτε μαζί του.



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Παρατηρήστε ότι οι απέναντι πλευρές του $ΑΒΓΔ$ δεν είναι ίσες, άρα δεν είναι παραλληλόγραμμο, επομένως ούτε ρόμβος.

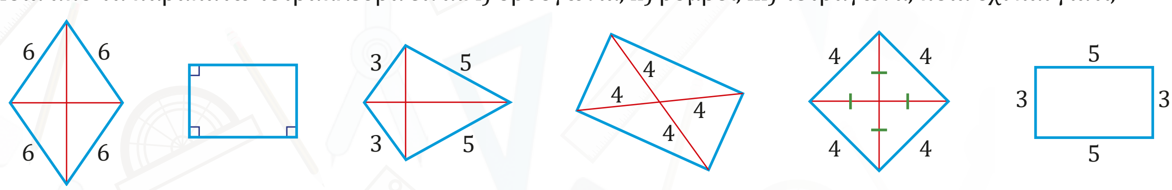
Το τετράπλευρο αυτό του οποίου οι διαγώνιοι τέμνονται κάθετα και διχοτομούν **μόνο** δύο απέναντι γωνίες λέγεται τετραπλευρικός χαρταετός, που από δω και στο εξής θα αναφέρεται απλώς ως **χαρταετός**.

Κατασκευή παραλληλόγραμμου

Κατασκευή ρόμβου και τετραγώνου

Ασκήσεις - Δραστηριότητες

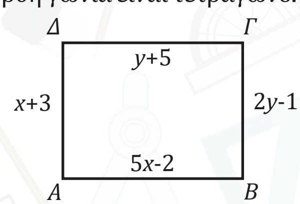
1 Ποια από τα παρακάτω τετράπλευρα είναι: i) ορθογώνια, ii) ρόμβοι, iii) τετράγωνα, ποια όχι και γιατί;



2 Σε τι είδους τρίγωνα χωρίζεται το καθένα από τα παρακάτω σχήματα αν φέρουμε τις διαγωνίους του;
α) Ορθογώνιο. **β)** Ρόμβος. **γ)** Τετράγωνο.

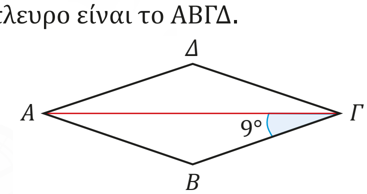
3 Να χαρακτηρίσετε με την ένδειξη Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις:
α) Οι διαγώνιοι κάθε ρόμβου είναι κάθετες μεταξύ τους. **β)** Όλες οι γωνίες οποιουδήποτε ρόμβου είναι ίσες.
γ) Ένας ρόμβος με μία ορθή γωνία είναι τετράγωνο. **δ)** Κάθε τετράγωνο είναι ρόμβος.

4 Στο διπλανό ορθογώνιο να υπολογίσετε τους αριθμούς x και y.



5 Σε ένα τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ οι πλευρές του έχουν μήκη $x + 3$, $2x - 2$, $3x - 7$ και $13 - x$. Αν είναι γνωστό ότι η περίμετρός του είναι 32, να βρείτε τι είδους τετράπλευρο είναι το ΑΒΓΔ.

6 Στον ρόμβο του διπλανού σχήματος, να υπολογίσετε τις γωνίες του.

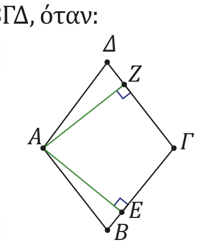


7 Δίνεται κύκλος με κέντρο $Κ$ και έστω $ΑΓ$, $ΒΔ$ δύο διάμετροί του. Να αιτιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι ορθογώνιο.

8 Σε παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ φέρουμε $ΑΕ \perp ΔΓ$ και $ΓΖ \perp ΑΒ$. Να αποδείξετε ότι το $ΑΖΓΕ$ είναι ορθογώνιο.

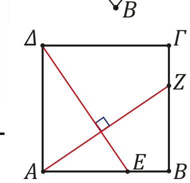
9 Δύο τμήματα ΑΓ, ΒΔ διχοτομούνται μεταξύ τους. Να βρείτε τι είδους τετράπλευρο είναι το ΑΒΓΔ, όταν:
α) Τα τμήματα δεν είναι κάθετα μεταξύ τους και ισχύει $ΑΓ=ΒΔ$.
β) Τα τμήματα είναι κάθετα μεταξύ τους αλλά δεν είναι ίσα.

10 Στον διπλανό ρόμβο ισχύουν $ΑΕ \perp ΒΓ$ και $ΑΖ \perp ΓΔ$. Να αποδείξετε ότι $ΑΕ=ΑΖ$.



11 Στις πλευρές $ΑΒ$ και $ΒΓ$, τετραγώνου $ΑΒΓΔ$ παίρνουμε σημεία $Ε$ και $Ζ$ αντίστοιχα, ώστε $ΑΕ = ΒΖ$. Να αποδείξετε ότι: **α)** $ΑΖ=ΔΕ$ **β)** $ΑΖ \perp ΔΕ$

12 Στο τετράγωνο του σχήματος τα τμήματα $ΑΖ$ και $ΔΕ$ είναι κάθετα μεταξύ τους.
α) Να αποδείξετε ότι είναι ίσα.
β) Θεωρήστε ότι αντί για τα τμήματα αυτά έχουμε δύο άλλα $ΚΛ$, $ΜΝ$ με άκρα πάνω στις απέναντι πλευρές του τετραγώνου που είναι κάθετα μεταξύ τους. Να αποδείξετε ότι $ΚΛ=ΜΝ$.



3.2 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΩΝ

3.2.1 Εφαρμογές στα τρίγωνα

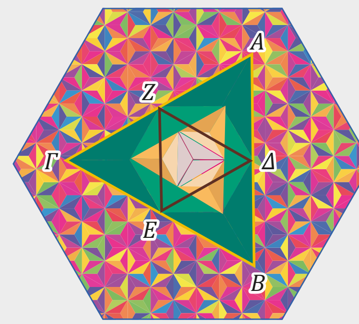
Στην ενότητα αυτή θα μάθετε:

- Να αποδεικνύετε ιδιότητες που αφορούν στο ευθύγραμμο τμήμα το οποίο συνδέει μέσα πλευρών τριγώνου.

Στο διπλανό καλειδοσκόπιο τα $Δ$, $Ε$, $Ζ$ είναι μέσα των πλευρών $ΑΒ$, $ΒΓ$ και $ΑΓ$ αντίστοιχα του τριγώνου $ΑΒΓ$.

Μετρώντας τις πλευρές των τριγώνων $ΑΒΓ$ και $ΔΕΖ$, παρατηρήστε ότι $ΔΕ = \frac{ΑΓ}{2}$, $ΕΖ = \frac{ΑΒ}{2}$ και $ΔΖ = \frac{ΒΓ}{2}$.

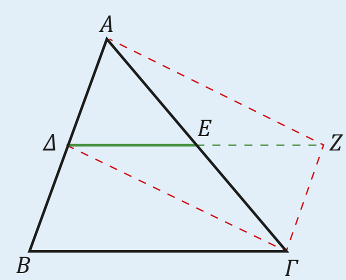
Επίσης, τα $ΔΕΓΖ$, $ΔΒΕΖ$ είναι παραλληλόγραμμα (γιατί;) που σημαίνει ότι $ΔΕ // ΑΓ$ και $ΔΖ // ΓΒ$.



ΘΕΩΡΗΜΑ 3.2.1α

Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.

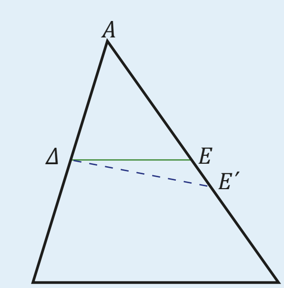
Απόδειξη Έστω Δ, Ε τα μέσα των πλευρών $ΑΒ$, $ΑΓ$, αντίστοιχα, του τριγώνου $ΑΒΓ$, όπως στο σχήμα. Στην προέκταση της $ΔΕ$ παίρνουμε τμήμα $ΕΖ = ΔΕ$. Το τετράπλευρο $ΑΔΓΖ$ είναι παραλληλόγραμμο, διότι οι διαγώνιοι του διχοτομούνται. Άρα $ΑΔ = //\ ΓΖ$, οπότε $ΔΒ = //\ ΓΖ$ (επειδή $ΑΔ=ΔΒ$, αφού $Δ$ είναι μέσον της $ΑΒ$). Επομένως, το $ΔΒΓΖ$ είναι παραλληλόγραμμο οπότε και $ΔΖ = //\ ΒΓ$. Όμως, αφού $ΔΖ = 2ΔΕ$, $ΔΕ // ΒΓ$ και $ΔΕ = \frac{ΑΓ}{2}$.



ΘΕΩΡΗΜΑ 3.2.1β

Αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μια άλλη πλευρά του, τότε η ευθεία αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του.

Απόδειξη Από το μέσο $Δ$ της $ΑΒ$ τριγώνου $ΑΒΓ$ φέρνουμε την παράλληλη προς την $ΒΓ$ που τέμνει την $ΑΓ$ στο $Ε$. Θα αποδείξουμε ότι το $Ε$ είναι το μέσο της $ΑΓ$.
Έστω ότι το $Ε$ δεν είναι μέσο της $ΑΓ$. Αν $Ε'$ είναι το μέσο της $ΑΓ$, το τμήμα $ΔΕ'$ ενώνει τα μέσα των πλευρών $ΑΒ$ και $ΑΓ$, οπότε σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα $ΔΕ' // ΒΓ$.
Δηλαδή, από το $Δ$ υπάρχουν δύο παράλληλες προς τη $ΒΓ$, που είναι άτοπο. Άρα τα $Ε$ και $Ε'$ ταυτίζονται και, επομένως, το $Ε$ είναι μέσο της $ΑΓ$.



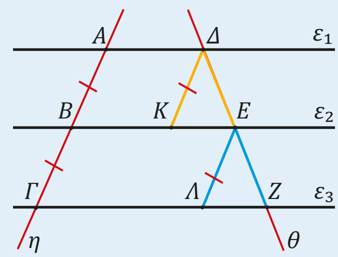
ΘΕΩΡΗΜΑ 3.2.1γ

Αν τρεις παράλληλες ευθείες ορίζουν σε μία ευθεία ίσα τμήματα, θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε κάθε άλλη ευθεία που τις τέμνει.

Απόδειξη

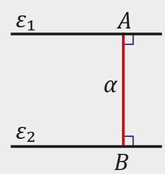
Ας θεωρήσουμε τις $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3$ που τέμνονται από τις η και θ, έτσι ώστε να ορίζουν στην η τμήματα $AB = B\Gamma$.

Από τα σημεία τομής Δ και E των ε_1 και ε_2 με τη θ φέρνουμε παράλληλα τμήματα ΔK και $E\Lambda$, προς την η αντίστοιχα. Τότε τα $AB K\Delta$ και $B\Gamma\Lambda E$ είναι παραλληλόγραμμα με συνέπεια να ισχύουν οι σχέσεις $\Delta K = AB$ και $E\Lambda = B\Gamma$. Όμως, $AB = B\Gamma$, οπότε $\Delta K = E\Lambda$. Επιπλέον, $\widehat{K\Delta E} = \widehat{\Lambda E Z}$ και $\widehat{KE\Delta} = \widehat{\Lambda Z E}$. Επομένως τα τρίγωνα ΔKE και $E\Lambda Z$ είναι ίσα, άρα $\Delta E = EZ$. Το θεώρημα αυτό γενικεύεται για περισσότερες από τρεις ευθείες.



Ορισμός

Αν θεωρήσετε δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 που τέμνονται κάθετα από τρίτη, με σημεία τομής A και B, το μήκος $\boldsymbol{\alpha}$ του ευθυγράμμου τμήματος $\boldsymbol{AB}$ ονομάζεται **απόσταση των παράλληλων ευθειών $\boldsymbol{\varepsilon_1}$ και $\boldsymbol{\varepsilon_2}$**. Στο εξής, με τη λέξη απόσταση παράλληλων ευθειών θα θεωρείται είτε το ευθύγραμμο τμήμα AB, είτε το μήκος του.



Δραστηριότητα

Να διατυπώσετε το παραπάνω θεώρημα για ν παράλληλες ευθείες, όπου ν φυσικός αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος του 3 και να το αποδείξετε.

Εφαρμογή 3.2.1α

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος (γ.τ.) των σημείων του επιπέδου τα οποία ισαπέχουν από δύο παράλληλες ευθείες $\boldsymbol{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ η απόσταση των οποίων είναι $\boldsymbol{\alpha}$.

ΛΥΣΗ

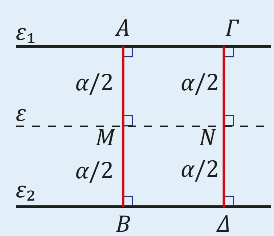
Έστω τυχαίο σημείο M του γ.τ.. Τότε το M είναι σημείο της απόστασης $AB = \alpha$ των ε_1, ε_2 με $MA = MB = \frac{\alpha}{2}$. Από το M διέρχεται μοναδική ευθεία $\varepsilon // \varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

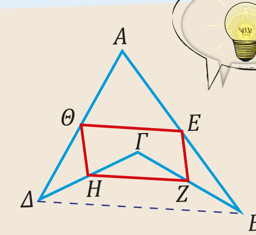
Η ε ισαπέχει από τις παράλληλες ε_1, ε_2, απόσταση ίση με $\frac{\alpha}{2}$ καθώς $MA = MB = \frac{\alpha}{2}$.

Αντίστροφα, αν N τυχαίο σημείο της ε και $N\Gamma \perp \varepsilon_1$, $N\Delta \perp \varepsilon_2$ τότε $N\Gamma = N\Delta = \frac{\alpha}{2}$. Άρα κάθε σημείο της ε ανήκει στον γ.τ..

Αρα ο γ.τ. είναι η ευθεία ε που είναι παράλληλη των $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ και απέχει από καθεμία απόσταση ίση με $\frac{\alpha}{2}$.

Η $\boldsymbol{\varepsilon}$ λέγεται και μεσοπαράλληλη των $\boldsymbol{\varepsilon_1 // \varepsilon_2}$. Τη μεσοπαράλληλη δύο παράλληλων ευθειών την κατασκευάζετε όπως τη μεσοκάθετη ενός ευθυγράμμου τμήματος που έχει τα άκρα του πάνω στις παράλληλες ευθείες και είναι κάθετο σε αυτές.





Ισχύει το ίδιο και στην περίπτωση που το $AB\Gamma\Delta$ είναι μη κυρτό τετράπλευρο, όπως στο παραπάνω σχήμα;

Εφαρμογή 3.2.1β

Να αποδειχθεί ότι τα μέσα των πλευρών ενός τετράπλευρου είναι κορυφές παραλληλογράμμου.

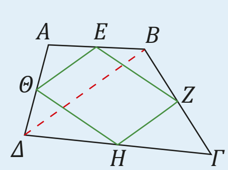
ΛΥΣΗ

Ας θεωρήσουμε μέσα E, Z, H, Θ των πλευρών AB, $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔA, αντίστοιχα, του τετράπλευρου $AB\Gamma\Delta$.

Φέρνουμε τη διαγώνιο $B\Delta$. Στο $AB\Delta$ τα E και Θ είναι τα μέσα δύο πλευρών του, οπότε $E\Theta = \frac{B\Delta}{2}$.

Όμοια, στο τρίγωνο $B\Gamma\Delta$, $ZH = \frac{B\Delta}{2}$.

Επομένως, το $EZH\Theta$ είναι παραλληλόγραμμο, αφού $E\Theta = // ZH$.

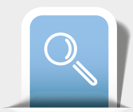


Μέσα πλευρών τετραπλεύρου

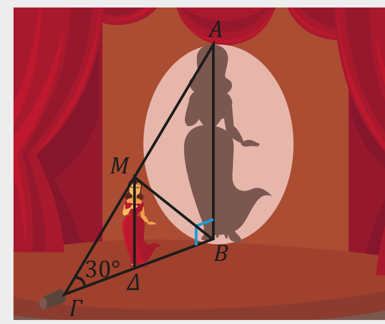
3.2.2 Εφαρμογές στα ορθογώνια τρίγωνα

Στην ενότητα αυτή θα είσαστε σε θέση:

- Να προσδιορίζετε και να αποδεικνύετε τις σχέσεις που συνδέουν την υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου αφενός με τη διάμεσο που αντιστοιχεί σε αυτήν και αφετέρου με την κάθετη πλευρά που είναι απέναντι από γωνία 30°.
- Να διαπιστώσετε ότι οι ιδιότητες αυτές χαρακτηρίζουν τα ορθογώνια τρίγωνα.



Διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου

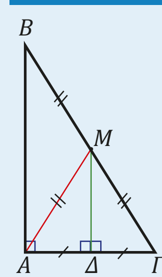


Στη διπλανή φωτογραφία ένας προβολέας, με γωνία προβολής 30° προς τα πάνω, είναι τοποθετημένος στο μπροστινό μέρος της σκηνής, όπως φαίνεται στη φωτογραφία. Η τραγουδίστρια στέκεται στο μέσο της απόστασης μεταξύ του προβολέα και της κουρτίνας, ώστε η κορυφή του κεφαλιού της να βρίσκεται στο μέσον *Μ* του *ΑΓ* και πατάει στο μέσον *Δ* του *ΓΒ*. Το *ΑΓ* είναι 640 cm. Τι ύψος έχει η σκιά της; Η ίδια υποστηρίζει ότι έχει 320 cm, όση είναι και η απόσταση της κορυφής του κεφαλιού της από τον προβολέα και από το σημείο *Β*. Έχει δίκιο;

Αναζητώντας την απάντησή της: Μετρήστε το ζητούμενο ύψος της σκιάς *ΑΒ*, το *ΜΒ* και το *ΑΓ*. Αφού το *ΑΓ* αντιστοιχεί σε 640 cm, πόσο θα είναι τα *ΜΒ* και *ΑΒ*;

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.2.2.α

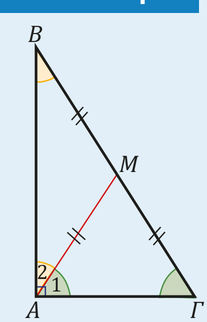
Η διάμεσος ενός ορθογωνίου τριγώνου που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίση με το μισό της.



Απόδειξη Έστω *ΑΜ* η διάμεσος του *ΑΒΓ*. Θεωρούμε τη διάμεσο *ΜΔ* του *ΜΑΓ*. Τα *Μ, Δ* είναι τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου *ΑΒΓ*, οπότε *ΜΔ* // *ΑΒ*. Όμως, $AB \perp A\Gamma$, άρα $M\Delta \perp A\Gamma$. Επομένως, στο τρίγωνο *ΑΜΓ* το *ΜΔ* είναι διάμεσος και ύψος, οπότε *ΑΜ* = *ΜΓ*, δηλαδή $AM = \frac{B\Gamma}{2}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.2.2.β

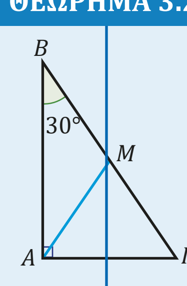
Αν για τη διάμεσο *ΑΜ* ενός τριγώνου *ΑΒΓ* ισχύει $AM = \frac{B\Gamma}{2}$, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\hat{A}$ =90°.



Απόδειξη Έστω *ΑΜ* η διάμεσος ενός τριγώνου *ΑΒΓ* με $AM = \frac{B\Gamma}{2} = MB = M\Gamma$.
Επομένως, το *ΑΜΓ* είναι ισοσκελές τρίγωνο με $\hat{\Gamma} = \hat{A}_1$.
Επίσης, το *ΑΜΒ* είναι ισοσκελές με $\hat{B} = \hat{A}_2$.
Γνωρίζετε ότι στο *ΑΒΓ*: $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^\circ$, δηλαδή $\hat{A}+\hat{A}_1+\hat{A}_2=180^\circ$, επομένως $2\hat{A}=180^\circ$, από όπου προκύπτει ότι $\hat{A}=90^\circ$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.2.2γ

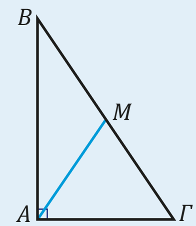
Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μία γωνία του είναι ίση με 30°, τότε η απέναντί της πλευρά είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας και αντίστροφα.



Απόδειξη (Ευθύ)
Έστω ορθογώνιο τρίγωνο *ΑΒΓ* με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 30^\circ$, οπότε $\hat{\Gamma} = 60^\circ$. Αν, η *ΑΜ* είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, τότε $AM = \frac{B\Gamma}{2} = M\Gamma$. Επομένως, το *ΑΜΓ* είναι ισοσκελές με γωνία 60°, συνεπώς το *ΑΒΓ* είναι ισόπλευρο, δηλαδή $A\Gamma = M\Gamma = AM = \frac{B\Gamma}{2}$.

(Αντίστροφο)

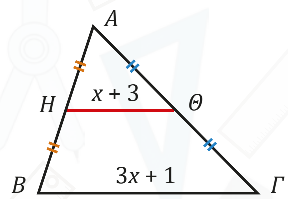
Έστω $ΑΒΓ$ ορθογώνιο τρίγωνο με $\hat{A} = 90°$. Για τη διάμεσό του $ΑΜ$ ισχύει $ΑΜ = \frac{ΒΓ}{2} = ΜΓ = ΑΓ$ (υπόθεση). Άρα το τρίγωνο $ΑΜΓ$ είναι ισόπλευρο, οπότε $\hat{Γ} = 60°$. Επομένως $\hat{B} = 90° - 60° = 30°$.

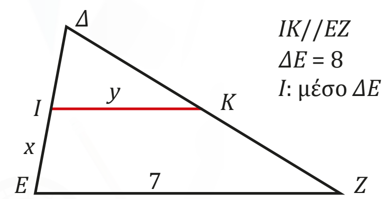


Θεωρήματα στο ορθογώνιο τρίγωνο

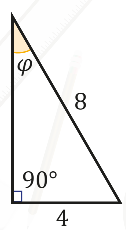
Ασκήσεις - Δραστηριότητες

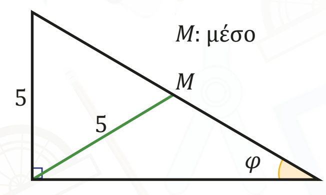
1 Σε καθένα από τα διπλανά σχήματα να υπολογίσετε τα x και y.

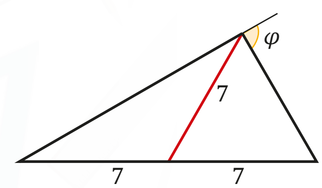




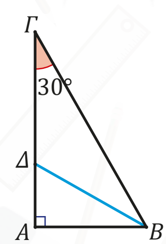
2 Σε καθένα από τα διπλανά σχήματα να βρείτε τη γωνία $φ$.





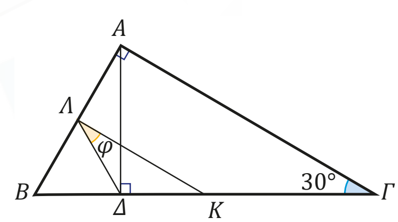


3 Στο διπλανό σχήμα η $ΒΔ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $Β$. Αν $ΑΓ = 15$, να υπολογίσετε τα τμήματα $ΑΔ$ και $ΔΓ$.



4 Σε τρίγωνο $ΑΒΓ$ φέρουμε τα ύψη $ΒΔ$ και $ΓΕ$. Αν $Μ$ είναι το μέσο της $ΒΓ$, να αποδείξετε ότι $ΜΔ = ΜΕ$.

5 Στο διπλανό σχήμα τα $Κ, Λ$ είναι τα μέσα των πλευρών $ΒΓ$ και $ΑΒ$ του ορθογωνίου τριγώνου $ΑΒΓ$ και $ΑΔ$ είναι ύψος του. Να υπολογίσετε τη γωνία $φ = \widehat{ΔΛΚ}$.



6 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($\hat{A} = 90°$) και έστω $Μ$ το μέσο της $ΒΓ$. Αν $Κ, Λ$ είναι τα μέσα των $ΑΒ, ΑΓ$ αντίστοιχα, τότε:

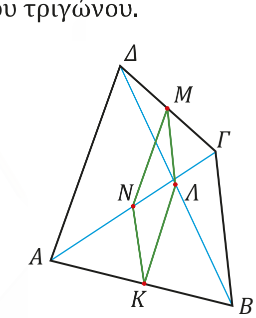
α) Να αποδείξετε ότι $ΑΜ = ΚΛ$.

β) Αν το τετράπλευρο $ΚΜΛΑ$ είναι τετράγωνο, να βρείτε τις γωνίες $Β$ και $Γ$ του τριγώνου.

7 Στο διπλανό σχήμα τα $Κ, Λ, Μ, Ν$ είναι τα μέσα των αντίστοιχων τμημάτων.

α) Να αποδείξετε ότι το $ΚΛΜΝ$ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Τι είδους παραλληλόγραμμο είναι το $ΚΛΜΝ$ όταν ισχύει $ΑΔ = ΒΓ$;



8 Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $\hat{B} > \hat{Γ}$ και έστω $ΑΔ$ ύψος του τριγώνου. Αν $Ε, Ζ$ είναι τα μέσα των $ΑΓ, ΒΓ$, να αποδείξετε ότι:

α) $\widehat{ΕΔΖ} = \hat{Γ}$ **β)** $\widehat{ΔΕΖ} = \hat{B} - \hat{Γ}$

9 Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) με $\hat{B} = 15°$, φέρτε το ύψος του $ΑΔ$. Να αποδείξετε ότι: $ΑΔ = \frac{ΒΓ}{4}$.

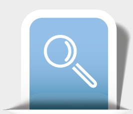
10 Να βρεθεί ο γ.τ. των σημείων του επιπέδου τα οποία απέχουν απόσταση α από σταθερή ευθεία ε.

3.3 ΚΕΝΤΡΑ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

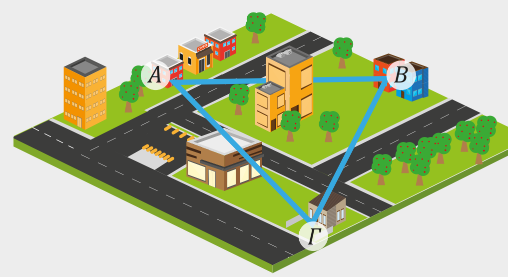
Στην ενότητα αυτή θα μάθετε:

- Να αποδεικνύετε ότι οι μεσοκάθετες των πλευρών ενός τριγώνου και οι διχοτόμοι των γωνιών του συντρέχουν αντιστοίχως σε σημεία που αποτελούν κέντρα χαρακτηριστικών κύκλων του.
- Να αναγνωρίζετε και να αξιοποιείτε τις ιδιότητες των κέντρων τριγώνου.

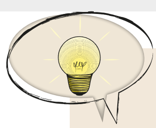
3.3.1 Περίκεντρο τριγώνου



Στο διπλανό σχήμα τα σημεία A, B και Γ είναι τα κεντρικά σημεία ενός χωριού. Ο Δήμαρχος του καλλικρατικού δήμου που ανήκουν ψάχνει το σημείο στο οποίο θα χτίσει το σχολείο ώστε να ισαπέχει από τα τρία σημεία. Υπάρχει τέτοιο σημείο;



Σημείο τομής μεσοκαθέτων

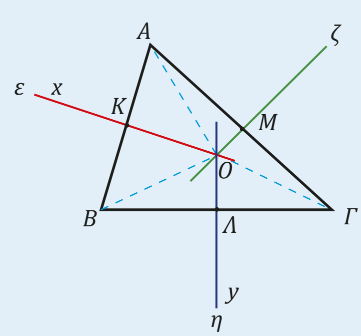


Σκεφτείτε ότι, αν το σχολείο βρίσκεται στη θέση O, τότε το O θα ισαπέχει από τα A και B. Δηλαδή, θα βρίσκεται στη μεσοκάθετη του AB. Όμοια, θα πρέπει να βρίσκεται στις μεσοκάθετες των $A\Gamma$ και $B\Gamma$. Συνοψίζοντας, το O θα πρέπει να είναι σημείο και των τριών μεσοκαθέτων των AB, $B\Gamma$ και ΓA. Υπάρχει όμως τέτοιο σημείο; Ή, όπως λέμε διαφορετικά, οι τρεις μεσοκάθετες συντρέχουν;

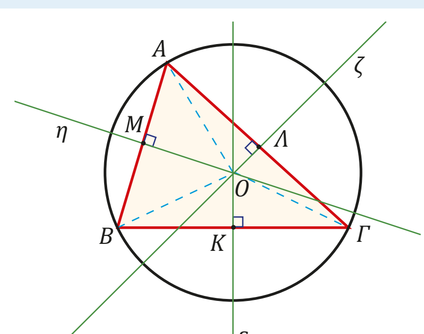
ΘΕΩΡΗΜΑ 3.3.1

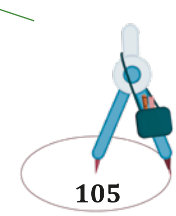
Οι μεσοκάθετοι των πλευρών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Απόδειξη Έστω ε, ζ, η οι μεσοκάθετοι των πλευρών AB, $A\Gamma$, $B\Gamma$, αντίστοιχα και O το σημείο τομής των ε και ζ. Τότε $OA = OB$ και $OA = O\Gamma$, αφού οι ε και ζ μεσοκάθετοι των AB και $A\Gamma$.
Άρα $OB = O\Gamma$, δηλαδή το O ισαπέχει από τα άκρα της πλευράς $B\Gamma$, οπότε είναι σημείο της μεσοκαθέτου της. Επομένως οι μεσοκάθετες ε, ζ και η των πλευρών του τριγώνου διέρχονται από το O, δηλαδή συντρέχουν.



Το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των πλευρών ενός τριγώνου, αφού ισαπέχει από τις κορυφές του τριγώνου, είναι το κέντρο ενός κύκλου που διέρχεται από αυτές. Ο κύκλος αυτός λέγεται **περιγεγραμμένος κύκλος στο τρίγωνο** και το σημείο τομής **περίκεντρο** του τριγώνου.



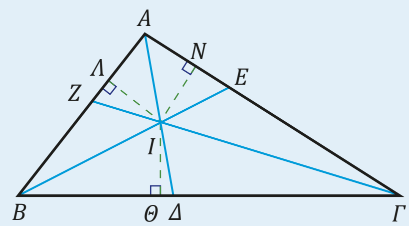


3.3.2 Έγκεντρο τριγώνου - Παράκεντρα

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.3.2

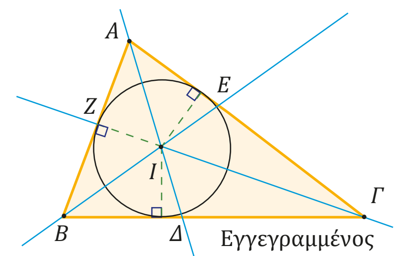
Οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Απόδειξη Έστω $ΑΔ$, $ΒΕ$ και $ΓΖ$ οι διχοτόμοι των $\hat{Α}$, $\hat{Β}$ και $\hat{Γ}$ του $ΑΒΓ$ αντίστοιχα, που τέμνονται ανά δύο μέσα στο τρίγωνο.
Έστω $Ι$ το σημείο τομής των $ΑΔ$ και $ΒΕ$, τότε $ΙΛ = ΙΝ$ και $ΙΛ = ΙΘ$, αφού $ΑΔ$ και $ΒΕ$ διχοτόμοι. Άρα $ΙΝ=ΙΘ$, επομένως το $Ι$ ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας $\hat{Γ}$, οπότε είναι σημείο της διχοτόμου της.
Επομένως οι διχοτόμοι των γωνιών του τριγώνου διέρχονται από το $Ι$, δηλαδή συντρέχουν.

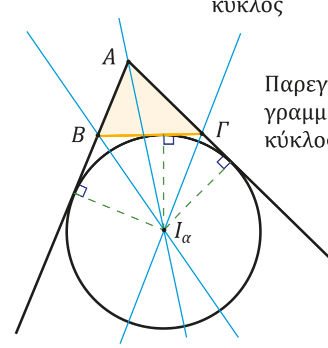


Το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών ενός τριγώνου, αφού ισαπέχει από τις πλευρές του, είναι το κέντρο ενός κύκλου που εφάπτεται σε αυτές. Ο κύκλος αυτός λέγεται **εγγεγραμμένος κύκλος στο τρίγωνο** και το σημείο τομής **έγκεντρο** του τριγώνου.

Σημείο τομής διχοτόμων



Αποδεικνύεται ότι οι εξωτερικές διχοτόμοι των γωνιών $Β$ και $Γ$ ενός τριγώνου τέμνονται πάνω στην διχοτόμο της γωνίας $Α$, έστω στο σημείο $\boldsymbol{Ι_α}$. Το σημείο τομής $\boldsymbol{Ι_α}$ λέγεται **παράκεντρο** $\boldsymbol{Ι_α}$ του $ΑΒΓ$ και είναι το κέντρο ενός κύκλου που εφάπτεται στη $ΒΓ$ και τις προεκτάσεις των $ΑΓ$ και $ΑΒ$ προς το Β και Γ, αντίστοιχα και λέγεται **παρεγγεγραμμένος**. Ανάλογα ορίζονται και τα παράκεντρα $Ι_β$ και $Ι_γ$, καθώς και οι αντίστοιχοι παρεγγεγραμμένοι κύκλοι.



3.3.3 Ορθόκεντρο τριγώνου και βαρύκεντρο τριγώνου

Αποδείξατε ότι οι μεσοκάθετοι και οι διχοτόμοι σε ένα τρίγωνο συντρέχουν. Τίθεται το ερώτημα: Συμβαίνει κάτι ανάλογο με τις διαμέσους και τα ύψη του;

Στην ενότητα αυτή θα είσαστε σε θέση:

- Να διαπιστώνετε ότι τα ύψη ή οι φορείς τους και οι διάμεσοι ενός τριγώνου συντρέχουν αντιστοίχως.
- Να ερμηνεύετε τη φυσική σημασία του κέντρου βάρους.

Εξερευνώντας ιδιότητες των υψών και των διαμέσων ενός τριγώνου:
α) Ανοίξτε το αρχείο **σημείο τομής υψών ενός τριγώνου ΑΒΓ**. Τι παρατηρείτε; Γράψετε μία εικασία και διερευνήστε την ισχύ της για διαφορετικά τρίγωνα, σύροντας τις κορυφές του $ΑΒΓ$.

Σημείο τομής υψών

β) Επαναλάβετε τα βήματα της παραπάνω εργασίας για το **σημείο τομής διαμέσων τριγώνου** και ακολουθήστε τις οδηγίες του.

γ) Συζητήστε τις παραπάνω εικασίες για τα ύψη και τις διαμέσους ενός τριγώνου στην ολομέλεια της τάξης. Διατυπώστε τα συμπεράσματα στα οποία καταλήξατε.

Σημείο τομής διαμέσων

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.3.3α

Τα ύψη (ή οι φορείς των υψών) ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Το σημείο τομής των υψών ενός τριγώνου ή των φορέων τους λέγεται **ορθόκεντρο.**

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.3.3β

Οι διάμεσοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, που χωρίζει κάθε διάμεσο σε δυο τμήματα από τα οποία το ένα είναι διπλάσιο του άλλου.

Το σημείο τομής των διαμέσων ενός τριγώνου λέγεται **βαρύκεντρο** ή **κέντρο βάρους**.

Εφαρμογή 3.3.3α

ΚΕΝΤΡΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Κέντρα τριγώνου

Εφαρμογή 3.3.3β

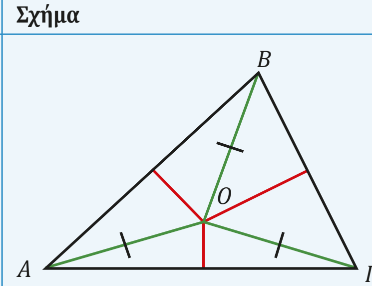
ΦΥΣΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΟΥ ΚΕΝΤΡΟΥ ΒΑΡΟΥΣ

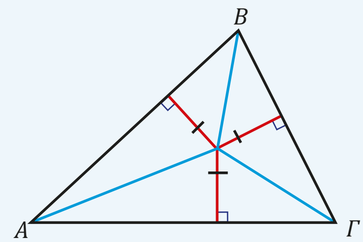
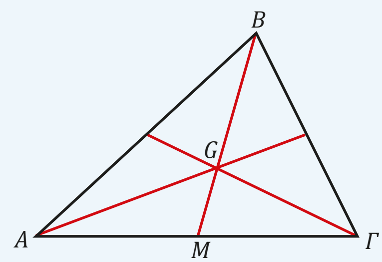
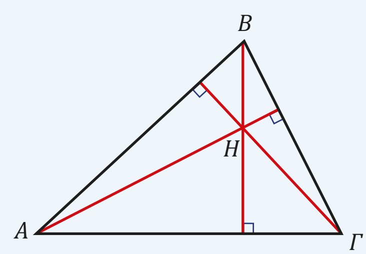
Ευθύγραμμα τμήματα με άκρα στις πλευρές τετραγώνου

Πείραμα με το βαρύκεντρο

Ασκήσεις - Δραστηριότητες

1 Συμπληρώστε τα κενά κελιά του παρακάτω πίνακα όπως έχει συμπληρωθεί στην πρώτη περίπτωση:.

Στοιχεία τριγώνου	Σημείο τομής- κέντρο	Ιδιότητα	Σχήμα
Μεσοκάθετοι	Περίκεντρο O	Το O ισαπέχει από τις κορυφές.	

Στοιχεία τριγώνου	**Σημείο τομής- κέντρο**	**Ιδιότητα**	**Σχήμα**
Μεσοκάθετοι			Ορθογώνιο τρίγωνο
	Περίκεντρο *O*		Αμβλυγώνιο τρίγωνο
Διχοτόμοι γωνιών	Έγκεντρο *I*	Το *I* ισαπέχει από τις πλευρές.	
Διάμεσοι	Βαρύκεντρο *G*	Η απόσταση του *G* από κάθε κορυφή είναι διπλάσια από την απόστασή του από την απέναντι πλευρά.	
Ύψη	Ορθόκεντρο *H*	Το *H* είναι το σημείο τομής των φορέων των υψών.	
Ύψη			Ορθογώνιο τρίγωνο
	Ορθόκεντρο *H*		Αμβλυγώνιο τρίγωνο

3.3.4 Προβλήματα με τα κέντρα τριγώνου

Στην ενότητα αυτή θα μάθετε:

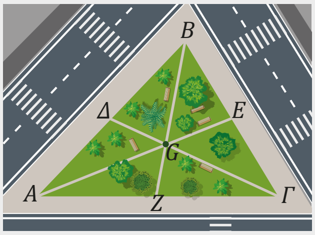
- Να μοντελοποιείτε και να επιλύετε προβλήματα αξιοποιώντας τα κέντρα τριγώνου.

Σ' ένα πάρκο με σχήμα τριγώνου ο Δήμος θέλει να φτιάξει τρία μονοπάτια για τους διαβάτες, με τρεις απαραίτητες προϋποθέσεις:

1. Καθένα να ξεκινάει από διαφορετική κορυφή (τα σημεία *Α*, *Β* και *Γ*),

2. Να καταλήγει στο απέναντι πεζοδρόμιο (*ΒΓ*, *ΓΑ*, *ΑΒ*) και

3. Να έχουν ένα κοινό σημείο συνάντησης, όπως φαίνεται στη μακέτα. Εσείς τι θα τους προτείνετε σχετικά με τη διαμόρφωση των μονοπατιών, αν σας ζητούσαν τρεις διαφορετικές λύσεις;



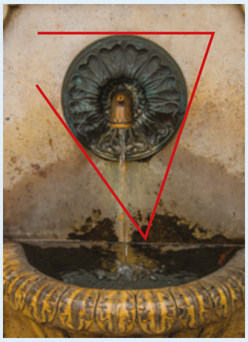
Στην περίπτωση που θα επιθυμούσαν οι διαβάτες να διανύουν τις ελάχιστες αποστάσεις *ΑΕ*, *ΒΖ* και *ΓΔ*, τα μονοπάτια θα ακολουθούν τα ύψη του τριγώνου *ΑΒΓ* και το σημείο συνάντησης θα είναι το ορθόκεντρο.

Στην περίπτωση που θα επιθυμούσαν οι διαβάτες στη διαδρομή τους να απέχουν εξίσου από τα δύο πεζοδρόμια, τα μονοπάτια θα ακολουθούν τις διχοτόμους του τριγώνου *ΑΒΓ* και το σημείο συνάντησης θα είναι το έγκεντρο.

Στην περίπτωση που θα επιθυμούσαν οι διαβάτες να καταλήγουν στο μέσο του πεζοδρομίου, τα μονοπάτια θα ακολουθούν τις διαμέσους του τριγώνου *ΑΒΓ* και το σημείο συνάντησης θα είναι το βαρύκεντρο.

Εφαρμογή 3.3.4

Περίκεντρο, Ορθόκεντρο, Έγκεντρο



Στη διπλανή εικόνα βλέπετε μία βρύση και ένα τρίγωνο σχεδιασμένο στον τοίχο. Πριν τοποθετηθεί η βρύση, είχε υπολογιστεί ότι η ροζέτα της θα εφαπτόταν στις πλευρές του τριγώνου. Εάν δεν έχετε μαζί σας τη βρύση και τη ροζέτα, πώς θα υπολογίσετε πού ακριβώς πρέπει να τρυπήσετε τον τοίχο ώστε να βάλετε τη βρύση και πίσω από αυτήν τον σωλήνα παροχής του νερού; Πειράζει που έχει σβηστεί από τον τοίχο η τρίτη κορυφή του τριγώνου;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Αφού η ροζέτα της θα εφάπτεται στις πλευρές του τριγώνου το κέντρο της θα είναι το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών του, δηλαδή το έγκεντρο του τριγώνου *Ι*. Ο τοίχος θα τρυπηθεί στο σημείο που τέμνονται οι διχοτόμοι των γωνιών που είναι ορατές οι κορυφές του.

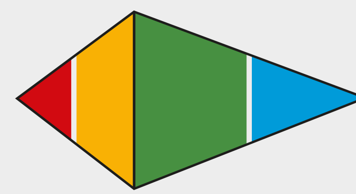
Η τρίτη κορυφή, επομένως, δεν πειράζει που έχει σβηστεί, διότι γνωρίζετε ότι και οι τρεις διχοτόμοι συντρέχουν στο *Ι*. Επομένως, αρκεί να φέρετε τις διχοτόμους των δύο γωνιών που δεν έχουν σβηστεί.

3.4 ΤΡΑΠΕΖΙΟ

Στην ενότητα αυτή θα μάθετε:

- Να αναγνωρίζετε το τραπέζιο ως το τετράπλευρο με μόνο δύο πλευρές παράλληλες, να αναγνωρίζετε το ισοσκελές τραπέζιο και να αποδεικνύετε τις βασικές ιδιότητές τους.

Ο χαρταετός που βλέπετε στο διπλανό σχήμα κατασκευάστηκε από δύο ισοσκελή τρίγωνα με κοινή βάση. Τα άσπρα ξυλάκια ενώνουν τα μέσα των ίσων πλευρών τους, άρα είναι παράλληλα προς τη βάση τους. Παρατηρήστε ότι το πορτοκαλί και το πράσινο τετράπλευρο έχουν δύο μόνο πλευρές παράλληλες. Επίσης, ότι οι μη παράλληλες πλευρές τους είναι ίσες (γιατί;).

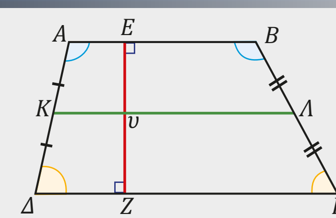


Ορισμοί

Τραπέζιο λέγεται το τετράπλευρο που έχει δύο μόνο πλευρές παράλληλες.
Βάσεις ενός τραπεζίου λέγονται οι παράλληλες πλευρές του.
Ύψος ενός τραπεζίου λέγεται η απόσταση των βάσεών του.
Διάμεσος ενός τραπεζίου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του.
Ισοσκελές τραπέζιο λέγεται το τραπέζιο που οι μη παράλληλες πλευρές του είναι ίσες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.4

Στο διπλανό σχήμα, το $ΑΒΓΔ$ είναι τραπέζιο με βάσεις $ΑΒ$ (μικρή βάση) και $ΓΔ$ (μεγάλη βάση). Το ύψος του τραπεζίου είναι το $ΕΖ$. Αν $Κ$ και $Λ$ είναι τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών $ΑΔ$ και $ΒΓ$, αντίστοιχα, η $ΚΛ$ είναι η διάμεσος που τραπεζίου. Αν $ΑΔ = ΒΓ$, τότε το $ΑΒΓΔ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



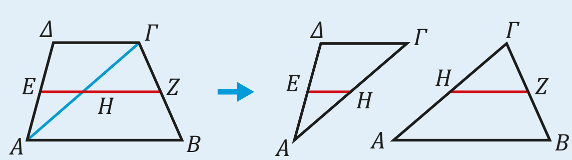
ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΡΑΠΕΖΙΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.4α

Η διάμεσος ενός τραπεζίου είναι παράλληλη με τις βάσεις του και ίση με το ημιάθροισμά τους.

Απόδειξη

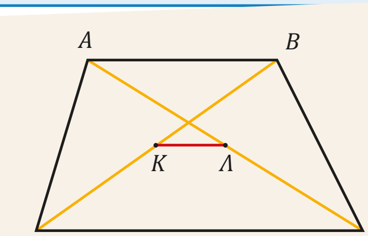
Υπόθεση	Συμπέρασμα
ΑΒΓΔ τραπέζιο. ΑΒ,ΓΔ οι βάσεις του με ΔΓ<ΑΒ. Ε,Ζ μέσα των ΑΒ και ΔΓ αντίστοιχα	$ΕΖ\ //\ ΑΒ\ //\ ΓΔ$ και $ΕΖ = \frac{ΑΒ + ΓΔ}{2}$



Στο τραπέζιο $ΑΒΓΔ$, τα $Ε$ και $Ζ$ είναι τα μέσα των $ΑΒ$ και $ΔΓ$ ($ΔΓ < ΑΒ$, βάσεις). Άρα, η ευθεία $ΕΖ$ είναι η μεσοπαράλληλη των $ΑΒ$ και $ΓΔ$ και τέμνει την $ΑΓ$ στο μέσον της $Η$. Επομένως, $ΕΗ = \frac{ΓΔ}{2}$ και $ΗΖ = \frac{ΑΒ}{2}$, αφού συνδέουν τα μέσα δύο πλευρών στα τρίγωνα $ΑΔΓ$ και $ΑΓΒ$ αντίστοιχα. Όμως, $ΕΖ = ΕΗ + ΗΖ$ και, αντικαθιστώντας προκύπτει $ΕΖ = \frac{ΔΓ}{2} + \frac{ΑΒ}{2} = \frac{ΑΒ + ΔΓ}{2}$

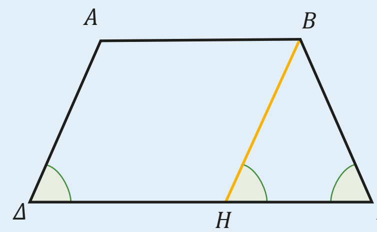
ΠΟΡΙΣΜΑ 3.4β

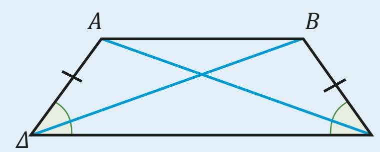
Το ευθύγραμμο τμήμα $ΚΛ$, που ενώνει τα μέσα Κ και Λ των διαγώνιων $ΑΓ$ και $ΒΔ$ ($ΓΔ > ΑΒ$) ενός τραπεζίου, είναι παράλληλο προς τις βάσεις του και ίσο με την ημιδιαφορά τους, δηλαδή $ΚΛ = \frac{ΔΓ - ΑΒ}{2}$



ΘΕΩΡΗΜΑ 3.4β

Αν ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, τότε:
α) Οι γωνίες που πρόσκεινται σε κάθε μία βάση του είναι ίσες.
β) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες.





Απόδειξη Έστω ΑΒΓΔ ισοσκελές τραπέζιο με ΑΒ//ΓΔ και ΑΔ=ΒΓ.

α) Από το Β φέρνουμε παράλληλη στην πλευρά ΑΔ, που τέμνει τη βάση ΔΓ στο σημείο Η.
Επομένως, το ΑΒΗΔ είναι παραλληλόγραμμο ($AB \,//\, H\Delta$ και $A\Delta \,//\, BH$), άρα $A\Delta = BH$. Αφού $A\Delta = B\Gamma$, προκύπτει ότι το $BH\Gamma$ είναι ισοσκελές τρίγωνο με $\hat{H} = \hat{\Gamma}$.
Επίσης, $\hat{H} = \hat{\Delta}$, ως εντός-εκτός επί τα αυτά μέρη.
Άρα $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$ και $\hat{A} = \hat{B}$, ως παραπληρωματικές τους, ως εντός και επί τα αυτά μέρη.

β) Τα τρίγωνα $A\Delta\Gamma$ και $B\Gamma\Delta$ είναι ίσα, διότι $A\Delta = B\Gamma$, $\Delta\Gamma$ κοινή και $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$.
Επομένως, $A\Gamma = B\Delta$.

Κριτήρια ισοσκελών τραπεζίων

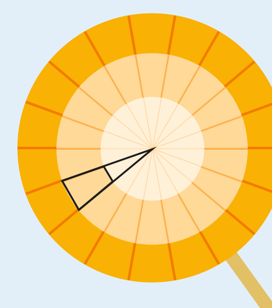
Ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, εάν ισχύει ένα από τα παρακάτω:
α) Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση του είναι ίσες.
β) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

Δραστηριότητα

Αποδείξτε τα διπλανά κριτήρια.

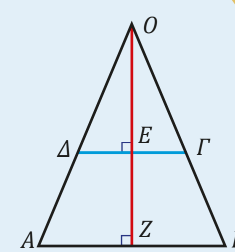
Εφαρμογή 3.4α

Στη βεντάλια της φωτογραφίας παρατηρήστε ότι οι μη παράλληλες πλευρές του ισοσκελούς τραπεζίου τέμνονται σε σημείο που σχηματίζει με τις βάσεις του δύο ισοσκελή τρίγωνα. Το σημείο αυτό και τα μέσα των βάσεών του είναι συνευθειακά και η ευθεία που ορίζουν είναι άξονας συμμετρίας του. Ισχύει αυτό σε όλα τα ισοσκελή τραπέζια;



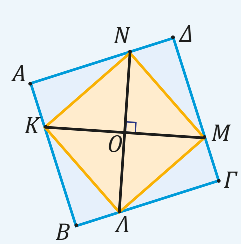
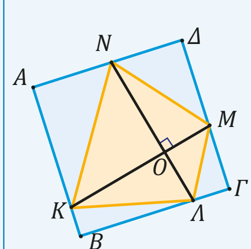
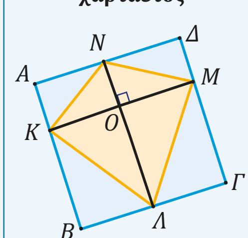
ΛΥΣΗ

Έστω ότι O είναι το σημείο τομής των μη παράλληλων πλευρών $A\Delta$ και $B\Gamma$ του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$. Το OAB είναι ισοσκελές τρίγωνο, αφού $\hat{A} = \hat{B}$, όπως και το $O\Gamma\Delta$, αφού $\widehat{O\Delta\Gamma} = \widehat{O\Gamma\Delta}$ (γιατί;). Αν E και Z είναι τα μέσα των $\Delta\Gamma$ και AB, αντίστοιχα, τότε οι OE και OZ είναι διάμεσοι των ισοσκελών $O\Delta\Gamma$ και OAB, επομένως και ύψη, άρα μεσοκάθετοι των $\Delta\Gamma$ και AB. Οι φορείς τους ταυτίζονται (γιατί;). Από αυτό προκύπτει ότι η OZ είναι άξονας συμμετρίας του $AB\Gamma\Delta$ και αυτό ισχύει για όλα τα ισοσκελή τραπέζια.



Εφαρμογή 3.4β

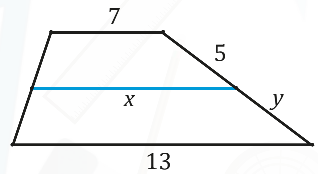
Στις πλευρές AB, $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ και ΔA ενός τετραγώνου παίρνουμε σημεία K, Λ, M, και N αντίστοιχα ώστε τα KM και ΛN να είναι κάθετα. Διερευνήστε πότε το τετράπλευρο $K\Lambda MN$ είναι:

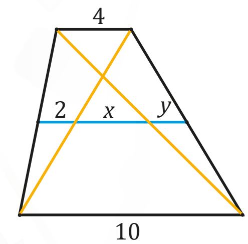
Τετράγωνο	Τραπέζιο	**Τετράπλευρος χαρταετός**
		

Τι παρατηρείτε στην περίπτωση του τραπεζίου;

Ασκήσεις - Δραστηριότητες

1 Από τα διπλανά τραπέζια, στα οποία έχουμε φέρει τις διαμέσους τους, να βρείτε τα x και y.

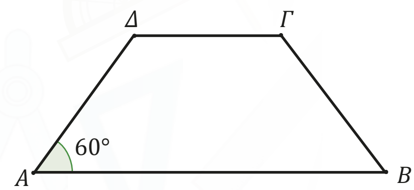




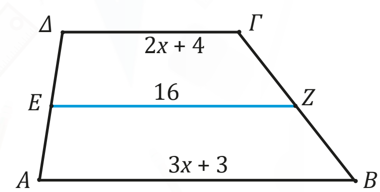
2 Στο ισοσκελές τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ είναι: $ΑΒ = 5x$, $ΔΓ = 3x$ και $\hat{A} = 60^{o}$. Η περίμετρος του τραπεζίου είναι:

α) $10x$ **β)** $11x$ **γ)** $12x$
δ) $13x$ **ε)** $14x$.

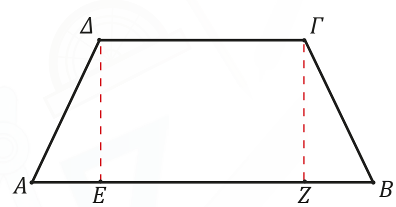
Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



3 Στο διπλανό σχήμα τα E, Z είναι τα μέσα των πλευρών $ΔΑ$ και $ΓΒ$ του τραπεζίου $ΑΒΓΔ$. Να βρείτε το x.



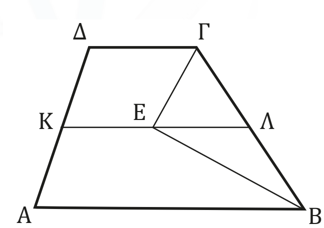
4 Στο ισοσκελές τραπέζιο του διπλανού σχήματος ισχύουν $ΑΒ = 14$, $ΓΔ = 8$ και $ΑΔ = 6$. Να βρείτε τις γωνίες του.



5 Στο διπλανό σχήμα η $ΚΛ$ είναι η διάμεσος του τραπεζίου $ΑΒΓΔ$ και η $ΒΕ$ είναι διχοτόμος της γωνίας Β. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $ΛΕΒ$ είναι ισοσκελές.

β) Η γωνία $ΒΕΓ$ είναι ορθή.



6 Θεωρούμε ορθογώνιο $ΑΒΓΔ$ και σημεία $Ε$, $Ζ$ στην $ΓΔ$ ώστε $ΓΕ=ΔΖ$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $ΕΑΒ$ και $ΖΑΒ$ είναι ίσα.

β) Τι είδους τετράπλευρο είναι το $ΑΒΕΖ$;

7 Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$, το ύψος του $ΑΔ$ και έστω $Κ$, $Λ$, $Μ$ τα μέσα των πλευρών $ΑΒ$, $ΒΓ$, $ΑΓ$ του τριγώνου.

α) Να συγκρίνετε τα τμήματα $ΔΚ$ και $ΛΜ$.

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ΚΔΛΜ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

8 Σε ένα τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ με $ΑΒ//ΓΔ$ ισχύει $ΑΔ = ΑΒ + ΓΔ$. Αν $Μ$ είναι το μέσο της $ΒΓ$. Να αποδείξετε ότι: $Α\hat{Μ}Δ=90^{o}$.

9 Δίνεται παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ και έστω $Ε$ το συμμετρικό του $Α$ ως προς την $ΒΔ$. Να αποδείξετε ότι:

α) $ΔΕ=ΒΓ$ **β)** Το $ΒΓΕΔ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

γ) Αν $Μ$ είναι το σημείο τομής της $ΑΕ$ με τη $ΒΔ$, να αποδείξετε ότι $ΒΔ = 2ΔΜ + ΓΕ$.

10 Δίνεται ρόμβος $ΑΒΓΔ$ και έστω $Ε$ σημείο της πλευράς $ΑΒ$ ώστε $ΓΕ=ΑΔ$. Αν η $ΑΓ$ τέμνει την $ΔΕ$ στο $Ζ$, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $ΑΕΓΔ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. **β)** $ΖΒ=ΖΓ$.

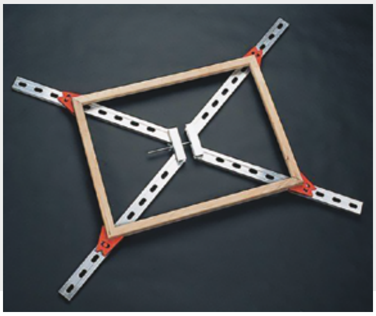
3.5 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΩΝ ΣΤΗ ΖΩΗ

Στην ενότητα αυτή θα μάθετε:

- Να μοντελοποιείτε και να επιλύετε προβλήματα χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των παραλληλογράμμων και των τραπεζίων.

Ταξινόμηση και ιδιότητες κυρτών τετράπλευρων

Ένας κορνιζοποιός φτιάχνει κορνίζες με όλα τα είδη τετραπλεύρου που συναντήσατε στο κεφάλαιο. Διαθέτει το εργαλείο του σχήματος, που αποτελείται από δύο μεταλλικές ράβδους που τέμνονται. Μπορεί να αυξομειώνει τη μεταξύ τους γωνία και να μεταβάλλει την απόσταση μεταξύ των σημείων στα οποία ενώνονται οι πλευρές της κορνίζας. Στο σχήμα, οι ράβδοι είναι οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου-κορνίζα.



Εφαρμογή 3.5α

Πλοήγηση. Αρχή λειτουργίας διπαράλληλου χάρακα (οι χάρακες και οι λάμες που τους ενώνουν σχηματίζουν παραλληλόγραμμο) στον χάρτη. Τοποθετείτε τον ένα χάρακα στην επιθυμητή πορεία και μετά τον δεύτερο χάρακα πάνω στην πυξίδα για να βρείτε πόσο θα στρίψετε το πηδάλιο.

Εφαρμογή 3.5β

Σχεδίαση αγωνιστικών αυτοκινήτων. Οι σχεδιαστές αγωνιστικών αυτοκινήτων χρησιμοποιούν μία σύνδεση που ενώνει το πλαίσιο του αυτοκινήτου με τον τροχό του, για να τον κρατήσει κάθετο σε ανώμαλες επιφάνειες. Όπως βλέπετε, το σχήμα της σύνδεσης είναι παραλληλόγραμμο διότι οι απέναντι πλευρές του είναι ανά δύο παράλληλες.

Εφαρμογή 3.5γ

Αυτοκίνητα. Καθώς γυρίζετε τη μανιβέλα ενός γρύλου αυτοκινήτου, η πλατφόρμα που υποστηρίζει το αυτοκίνητο ανεβαίνει. Χρησιμοποιήστε τις διαγώνιες του παραλληλογράμμου για να εξηγήσετε εάν ο γρύλος σχηματίζει ορθογώνιο, ρόμβο ή τετράγωνο.

Κατασκευή με παραλληλόγραμμο για την παρατήρηση πτηνών ή πλανητών

Ανακεφαλαίωση

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ – ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΕΡΓΑ ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗΣ:

1. Σε ένα παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ με κέντρο $Ο$ ισχύουν $ΟΑ = 9$ και $ΟΒ = 12$. Να βρείτε τα μήκη των διαγωνίων του.

2. Δίνεται παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$. Η διχοτόμος της γωνίας $Α$ τέμνει τη $ΔΓ$ στο $Ε$. Να αποδείξετε ότι $ΔΕ = ΒΓ$.

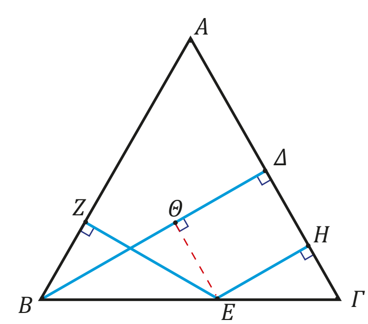
3. Έστω $Ε$ και $Ζ$, τα μέσα των πλευρών $ΑΒ$ και $ΓΔ$ αντίστοιχα, παραλληλογράμμου $ΑΒΓΔ$. Να αποδείξετε ότι:
α) Το τετράπλευρο $ΑΕΓΖ$ είναι παραλληλόγραμμο.
β) Οι $ΑΓ$, $ΒΔ$ και $ΕΖ$ συντρέχουν.

4. Δίνεται παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ και σημεία $Κ$, $Λ$ στις $ΑΒ$ και $ΓΔ$ ώστε $ΑΚ = \frac{1}{2}ΑΒ$ και $ΓΛ = \frac{3}{5}ΓΔ$.
Αν $Μ$ είναι το σημείο τομής των $ΒΔ$, $ΚΛ$, τότε:
α) Να αιτιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα $ΜΚΒ$ και $ΜΛΔ$ είναι ισογώνια.
β) Να εξετάσετε αν τα τρίγωνα είναι ίσα.

5. Ένας ποταμός, του οποίου οι όχθες είναι ευθύγραμμες, διέρχεται μεταξύ δύο χωριών που απέχουν άνισες αποστάσεις από τις όχθες του. Σε ποια θέση πρέπει να κατασκευασθεί μια γέφυρα κάθετη προς τον ποταμό, ώστε τα δύο χωριά να βρίσκονται σε ίσες αποστάσεις από τις αντίστοιχες εισόδους της γέφυρας;

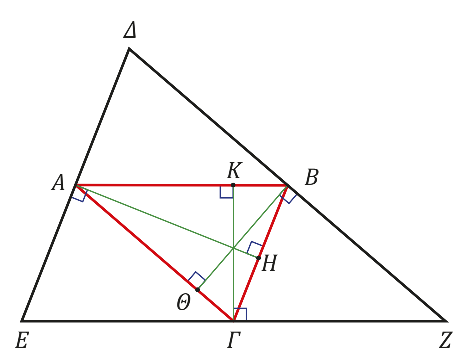
6. Δίνεται τετράγωνο $ΑΒΓΔ$ και έστω $Ο$ το κέντρο του. Στην διαγώνιο $ΒΔ$ θεωρούμε σημείο Ε ώστε $ΒΓ = ΒΕ$.
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $ΒΓΕ$.
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $ΕΑΓ$ είναι ισοσκελές.

7. Στο ισόπλευρο τρίγωνο $ΑΒΓ$ του σχήματος το Ε είναι τυχαίο σημείο της $ΒΓ$ και τα $ΕΖ$, $ΕΗ$, $ΕΘ$ είναι κάθετα στις πλευρές $ΑΒ$, $ΑΓ$ και το ύψος $ΒΔ$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) $ΕΖ = ΒΘ$.
β) $ΒΔ = ΕΖ + ΕΗ$.

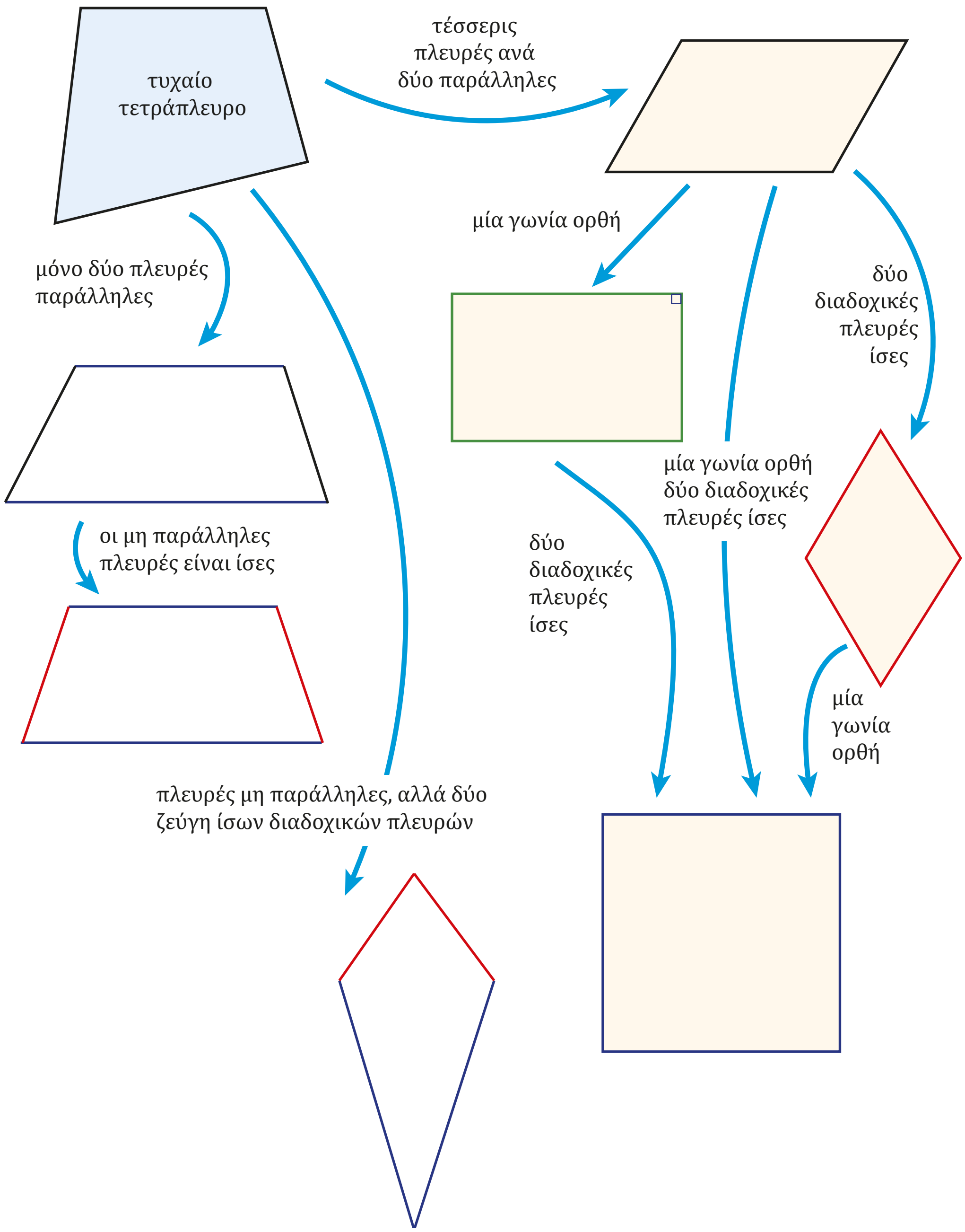


8. Εξηγήστε για ποιο λόγο, στα ισόπλευρα τρίγωνα το έγκεντρο και το περίκεντρο ταυτίζονται. Ισχύει το ίδιο και στα ισοσκελή; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

9. Εξηγήστε για ποιο λόγο το περίκεντρο ενός τριγώνου είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου που σχηματίζεται από τα μέσα των πλευρών του, όπως βλέπετε στο διπλανό σχήμα.



10. Συζητήστε στην τάξη τον παρακάτω πίνακα:

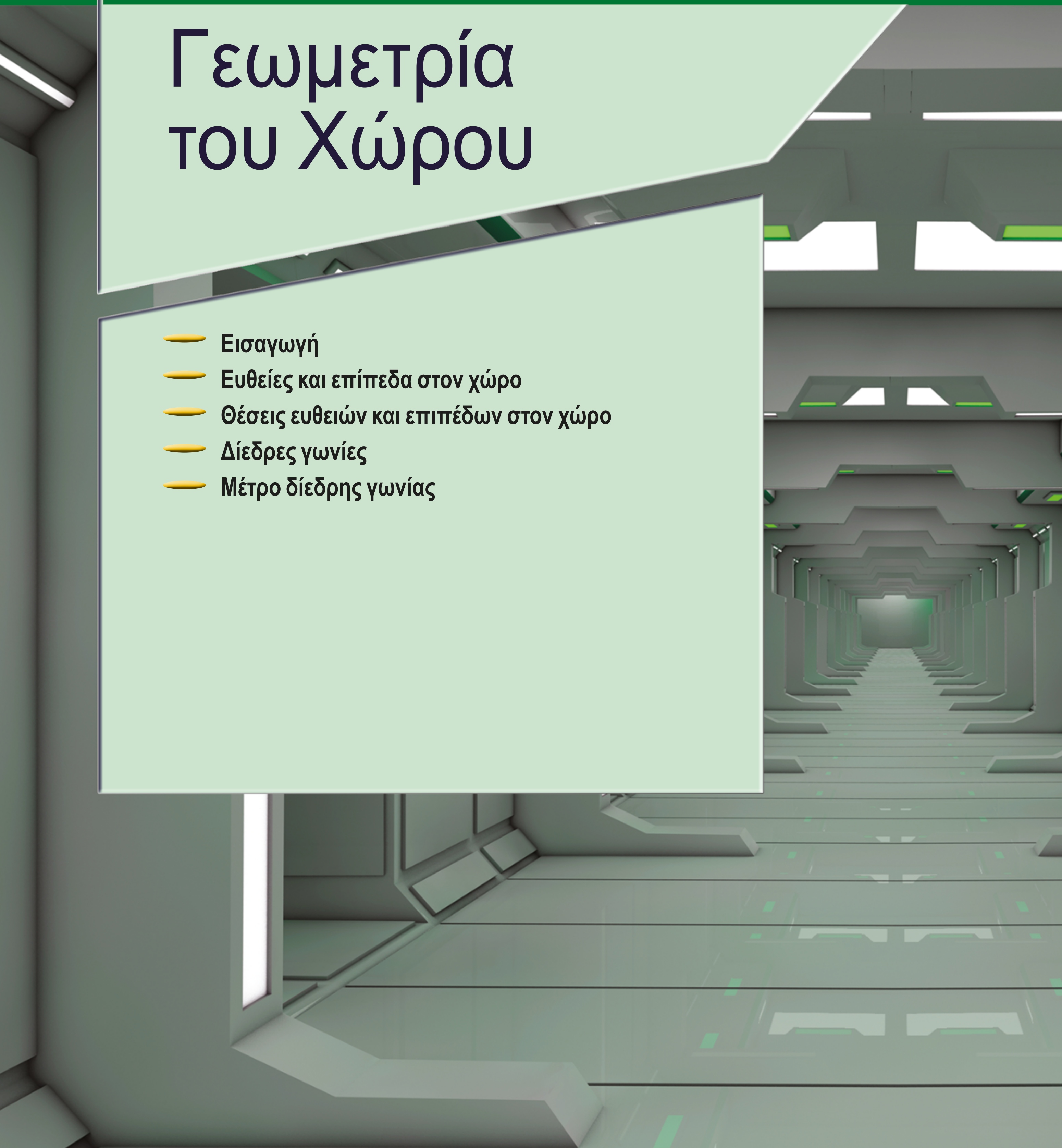


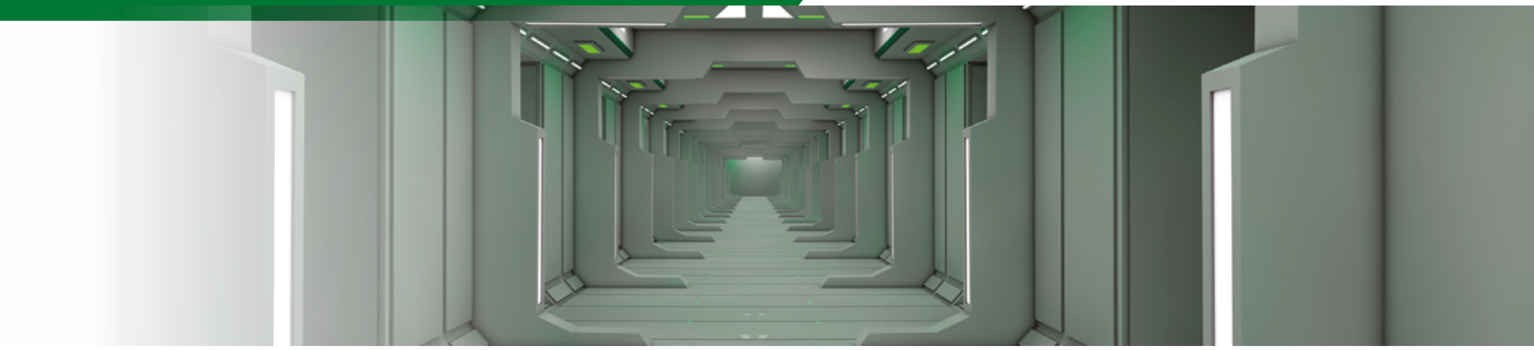
Εφαρμογές παραλληλογράμμων στη ζωή

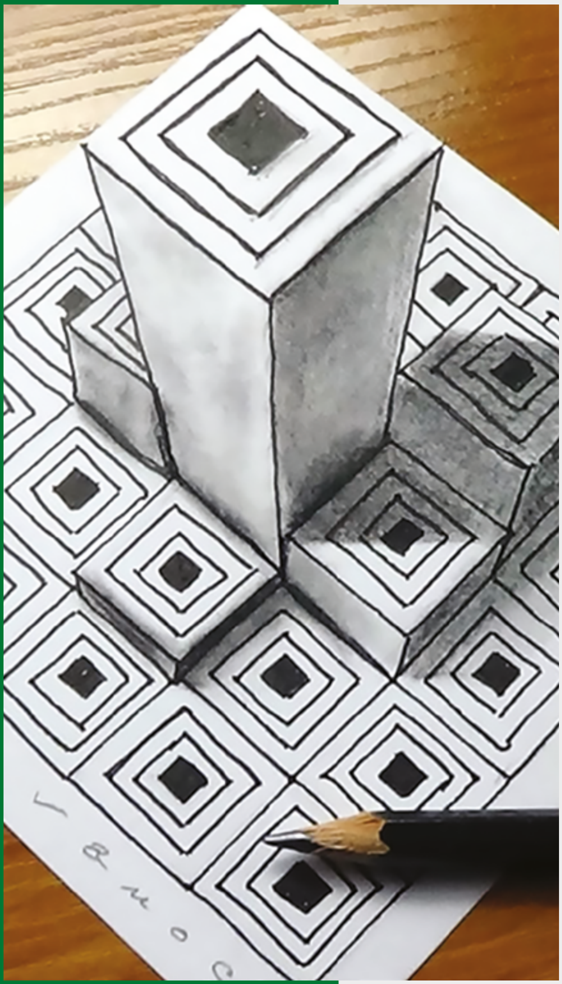
ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

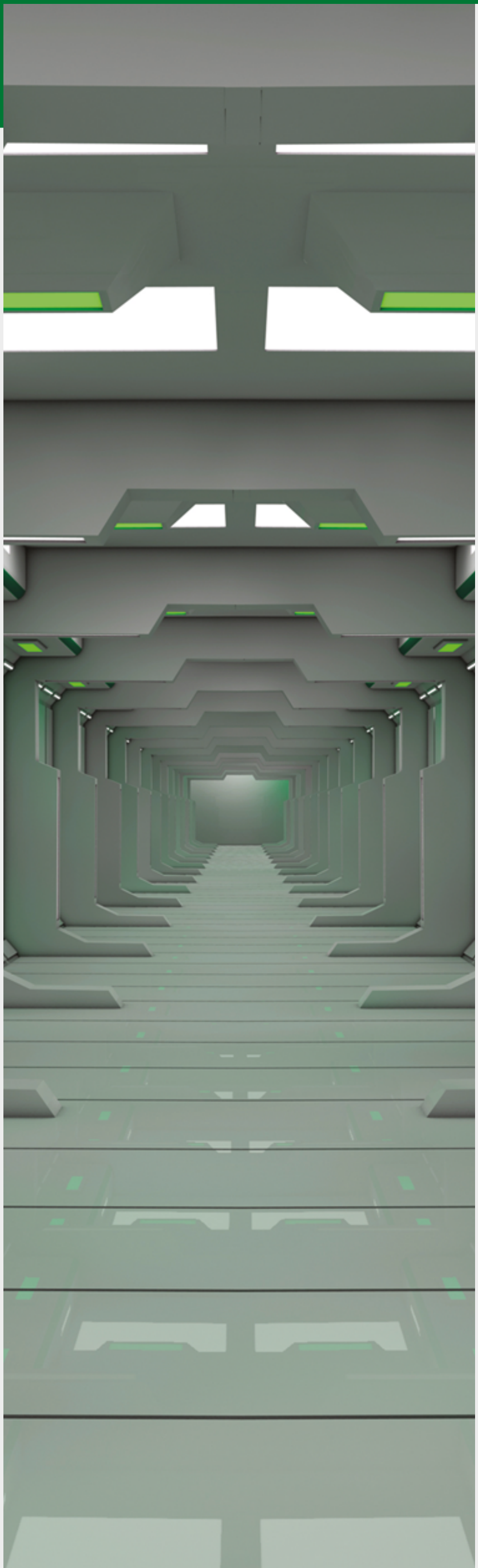
4 Κεφάλαιο

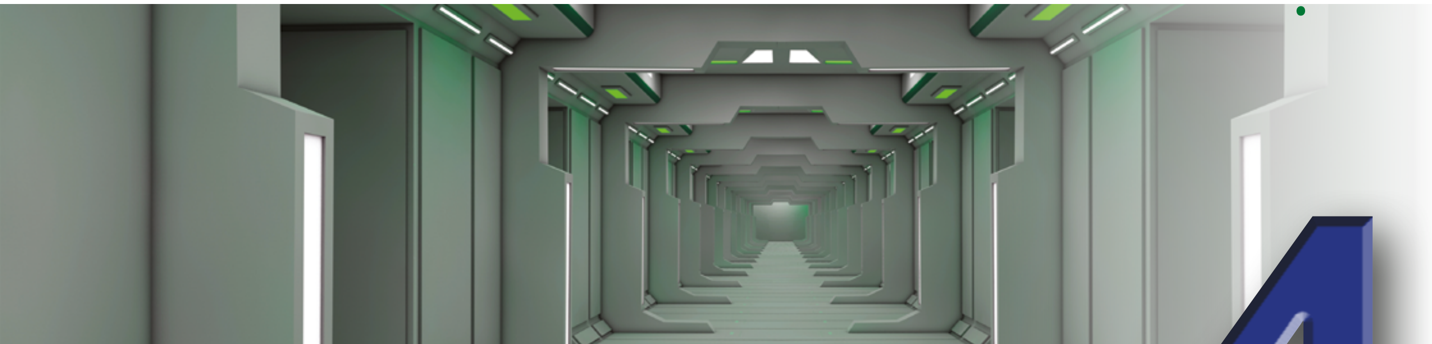
Γεωμετρία του Χώρου











4

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

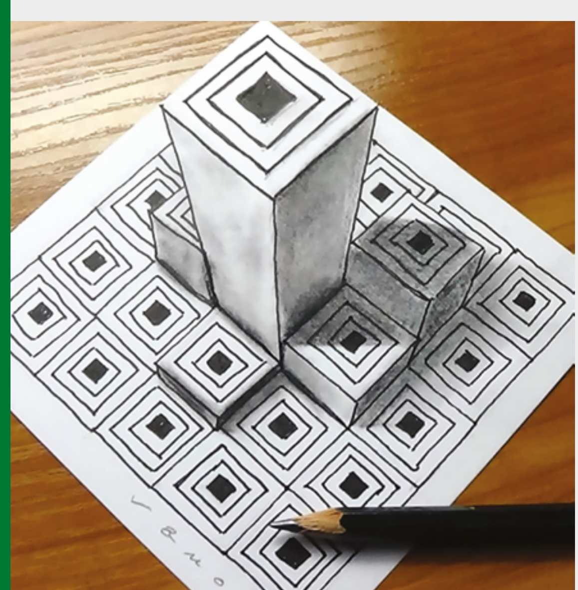
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ

Θα μάθετε:

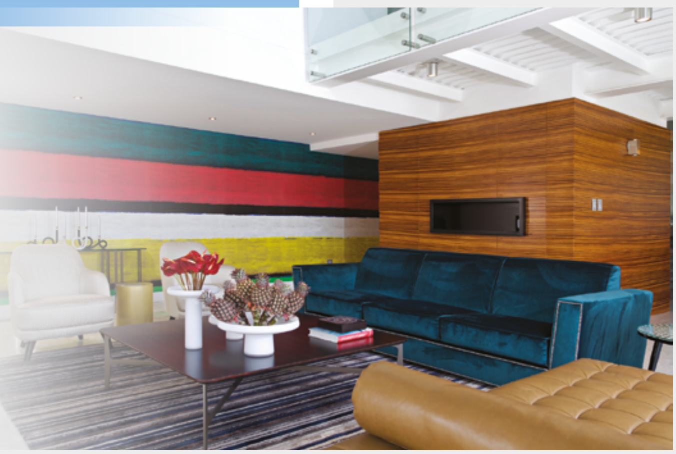
- Να σχεδιάζετε ευθείες και επίπεδα στον χώρο.
- Να διερευνάτε τις σχετικές θέσεις ευθειών και επιπέδων στον χώρο, καθώς και ευθείας και επιπέδου.
- Να αναγνωρίζετε τις δίεδρες γωνίες.
- Να ορίζετε το μέτρο δίεδρης γωνίας.

Ο χώρος που ζούμε είναι τρισδιάστατος. Λογικό είναι, λοιπόν, η γεωμετρία του χώρου να έχει πολλές εφαρμογές στην καθημερινή μας ζωή, και σε κάθε ανθρώπινη δραστηριότητα όπως στις τέχνες και όλα σχεδόν τα επαγγέλματα:

- Στους αρχιτέκτονες και τους πολιτικούς μηχανικούς για την κατασκευή κτηρίων, γεφυριών
- Στους φυσικούς, για τη μελέτη σωμάτων
- Στους χημικούς, για τη μελέτη μορίων
- Στους μηχανικούς, για την κατασκευή αεροπλάνων



Εισαγωγή

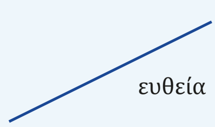
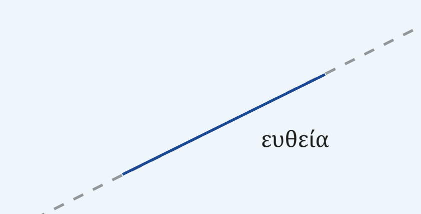
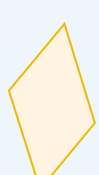
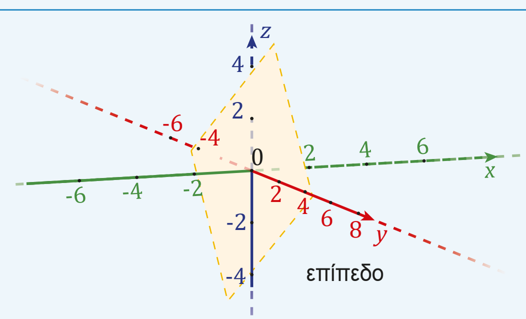


Στα προηγούμενα κεφάλαια ασχοληθήκατε με σχήματα του επιπέδου. Το επίπεδο έχει δύο διαστάσεις. Στη συνέχεια, πρόκειται να παρουσιαστούν σχήματα στον Γεωμετρικό χώρο ο οποίος έχει τρεις διαστάσεις. Ένα σημείο δεν έχει μήκος και πλάτος. Η διατύπωση είναι ότι το σημείο δεν έχει διαστάσεις. Αντίστοιχα, μία ευθεία έχει μήκος, αλλά δεν έχει πλάτος. Δηλαδή, η ευθεία έχει μία διάσταση. Είδατε ότι τα επίπεδα σχήματα, π.χ. το τετράγωνο, έχουν όλα τα σημεία τους σε ένα επίπεδο, που έχει δύο διαστάσεις, μήκος και πλάτος. Ανάλογα γνωρίζετε ότι ο κύβος, που είναι στερεό, έχει μήκος, πλάτος και ύψος, δηλαδή τρεις διαστάσεις. Όπως στη γεωμετρία του επιπέδου όλα τα σημεία βρίσκονται σε ένα επίπεδο, κατά αντίστοιχο τρόπο, στις τρεις διαστάσεις όλα τα σημεία βρίσκονται στον χώρο και η αντίστοιχη γεωμετρία, ονομάζεται **γεωμετρία του χώρου**. Μεταξύ της γεωμετρίας του χώρου και της γεωμετρίας του επιπέδου μπορούν να γίνουν σημαντικές αντιστοιχίες:

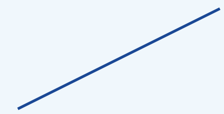
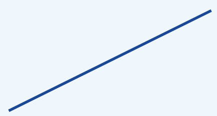
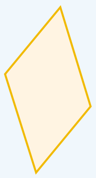
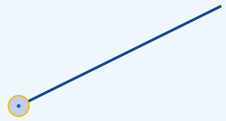
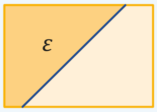
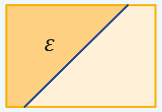
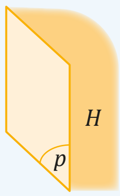
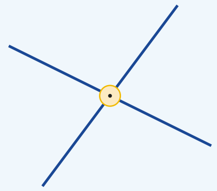
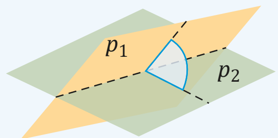
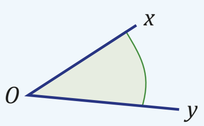
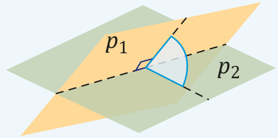
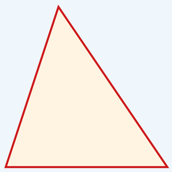
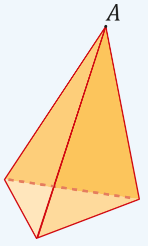
Στις εικόνες παρατηρήστε ποικιλία από γεωμετρικά σχήματα με φυσική ή τεχνητή υφή.

Στη Γεωμετρία του χώρου,
οι έννοιες σημείο, ευθεία και επίπεδο
είναι πρωταρχικές έννοιες, δηλαδή δεν ορίζονται.
Από τα επίπεδα προκύπτουν άλλα απλά
ή περισσότερο πολύπλοκα σχήματα.

Όπως μία ευθεία σχεδιάζεται ως ένα ευθύγραμμο τμήμα, αλλά θεωρείται ότι προεκτείνεται επ’ άπειρο, με ανάλογο τρόπο ένα επίπεδο σχεδιάζεται ως παραλληλόγραμμο και εκτείνεται στο άπειρο:

Τι σχεδιάζουμε	Τι εννοούμε
 ευθεία	 ευθεία
 επίπεδο	 επίπεδο

Περνώντας από το επίπεδο στον χώρο:

Σημείο		→	Σημείο	
Σημείο		→	Ευθεία	
Ευθεία		→	Επίπεδο	
Ημιευθεία		→	Ημιεπίπεδο	
Ημιεπίπεδο		→	Ημιχώρος	
Τομή ευθειών		→	Τομή επιπέδων	
Γωνία ευθειών		→	Γωνία επιπέδων	
Επίπεδο σχήμα		→	Στερεό σχήμα	

Τα αξιώματα και οι προτάσεις που έχουν αναφερθεί στο επίπεδο, ισχύουν και σε κάθε επίπεδο του χώρου. Επίσης, οι προτάσεις του επιπέδου μπορούν να επεκταθούν σε προτάσεις του χώρου.

4.1 ΕΥΘΕΙΕΣ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΑ ΣΤΟΝ ΧΩΡΟ

Στην ενότητα αυτή θα μάθετε:

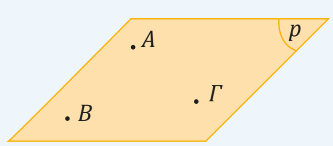
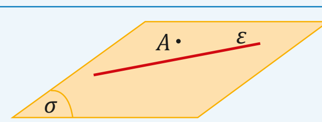
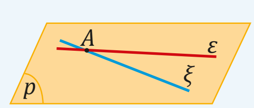
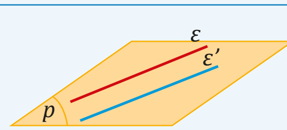
- Να σχεδιάζετε ευθείες και επίπεδα στον χώρο.

Ευθείες στο επίπεδο

Έχετε σκεφτεί γιατί οι φωτογράφοι χρησιμοποιούν τρίποδο για να τοποθετήσουν τη μηχανή τους; Ή γιατί, όταν κάθεστε σε καρέκλα με τρία πόδια δεν κουνιέται ποτέ, σε αντίθεση με αυτές που έχουν τέσσερα πόδια που μπορεί και να κουνιούνται; Διότι, τρία σημεία π.χ. τα A, B και Γ είναι πάντα στο ίδιο επίπεδο π.χ. στο p , ενώ το τέταρτο Δ μπορεί να βρίσκεται ή όχι στο επίπεδο των άλλων τριών. Δύο σημεία του p ορίζουν μία ευθεία, π.χ. τα A και B ορίζουν την ευθεία AB, η οποία ανήκει στο p, όπως και όλα τα σημεία της. Αξιοποιώντας το παραπάνω, η ευθεία AB και το σημείο Γ ορίζουν ένα επίπεδο. Ομοίως, οι ευθείες AB και $A\Gamma$ που τέμνονται ορίζουν ένα επίπεδο.

Θυμηθείτε ότι **παράλληλες ευθείες** λέγονται δύο ευθείες που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και δεν έχουν κοινό σημείο. Άρα, δύο παράλληλες ευθείες ορίζουν ένα επίπεδο.

Το επίπεδο, συνήθως, συμβολίζεται με p, q, σ, τ κ.λπ.. Γενικότερα, ισχύει:

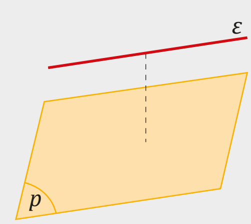
Ένα επίπεδο p ορίζεται από	Σχήμα	Συμβολισμός
τρία σημεία που δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία (μη συνευθειακά)		(A, B, Γ)
μία ευθεία και ένα σημείο εκτός αυτής		(ε, A)
δύο τεμνόμενες ευθείες		(ε, ξ)
δύο παράλληλες ευθείες		$(\varepsilon, \varepsilon')$

Τα σχήματα, τα σημεία και οι ευθείες που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο λέγονται **συνεπίπεδα** ή **ομοεπίπεδα**.
Δύο σημεία ενός επιπέδου ορίζουν μία ευθεία, τα σημεία της οποίας ανήκουν στο επίπεδο.
Στην επιπεδομετρία κατασκευάζετε σχήματα. Αυτά βρίσκονται πάντα στο ίδιο επίπεδο που μπορεί να ταυτιστεί π.χ. με το φύλλο του τετραδίου σας.
Στη γεωμετρία του χώρου, όμως, για να ξεπεράσετε τη δυσκολία της αναπαράστασης των τρισδιάστατων σχημάτων σε δύο διαστάσεις, χρειάζεται να επιστρατεύσετε τη φαντασία και την εμπειρία σας.

- Οι ευθείες σχεδιάζονται απλά όπως και στην επιπεδομετρία, αλλά πρέπει να φαίνεται αν ανήκουν ή όχι σε κάποιο επίπεδο.
- Τα επίπεδα σχεδιάζονται ως παραλληλόγραμμα και εννοείται ότι εκτείνονται απεριόριστα προς όλες τις μεριές, κατ' αντιστοιχία με τις ευθείες.

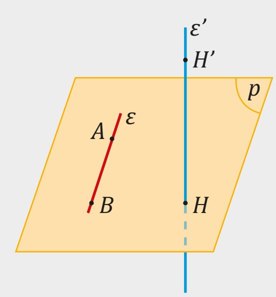
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.1α

Να σχεδιάσετε ευθεία ε η οποία δεν ανήκει στο **επίπεδο** p.



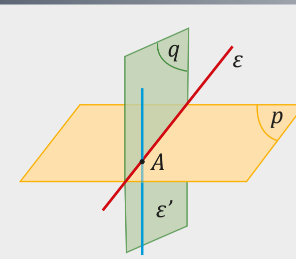
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.1β

Να σχεδιάσετε δύο ευθείες: την ε η οποία διέρχεται από τα σημεία A, B του επιπέδου p και ευθεία ε' η οποία τέμνει το p σε σημείο H και διέρχεται από το σημείο H' που δεν ανήκει στο p.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.1γ

Να σχεδιάσετε δύο ευθείες: την ε η οποία να ανήκει στο επίπεδο p, *και την* ε' η οποία διέρχεται από σημείο A της ε και δεν ανήκει στο p. Κατόπιν, να σχεδιάσετε το επίπεδο q που ορίζεται από τις ευθείες ε και ε'.



Ασκήσεις - Δραστηριότητες

1 Πόσα επίπεδα και πόσες ευθείες μπορείτε να διακρίνετε στην αίθουσα της τάξης σας;

2 Να σχεδιάστε δύο ευθείες ε_1 και ε_2 οι οποίες τέμνονται στο σημείο A και το επίπεδο π στο οποίο ανήκουν. Να δικαιολογήσετε γιατί οι ευθείες ε_1 και ε_2 ανήκουν στο ίδιο επίπεδο.

3 Να σχεδιάσετε επίπεδο π, ένα σημείο του M και μια ευθεία ε η οποία ανήκει στο π και διέρχεται από το M. Στη συνέχεια, να σχεδιάσετε ευθεία ζ, η οποία διέρχεται από το M, αλλά δεν ανήκει στο π. Γιατί η ευθεία που ορίζεται από δύο σημεία των ε και ζ, διαφορετικών του M, δεν ανήκει στο π;

4 Πόσα διαφορετικά επίπεδα ορίζονται από τέσσερα (4) σημεία στον χώρο; Εξετάστε όλες τις δυνατές περιπτώσεις.

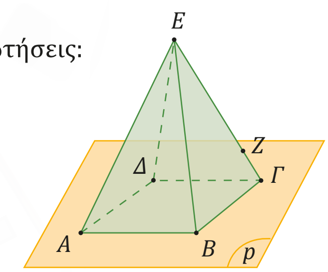
5 Με βάση το διπλανό σχήμα, απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις:

α) Πόσα επίπεδα φαίνονται στο διπλανό σχήμα και ποια;

β) Τα σημεία B, Γ και E σε πόσα επίπεδα ανήκουν;

γ) Να βρείτε τρία συνευθειακά σημεία.

δ) Να βρείτε ένα σημείο K του επιπέδου p ώστε τα K, A και B να είναι συνευθειακά.



Σημεία και επίπεδο

4.2 ΘΕΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΤΟΝ ΧΩΡΟ

Στην ενότητα αυτή θα μάθετε:

- Να διερευνάτε τις σχετικές θέσεις ευθειών και επιπέδων στο χώρο, καθώς και ευθείας και επιπέδου.

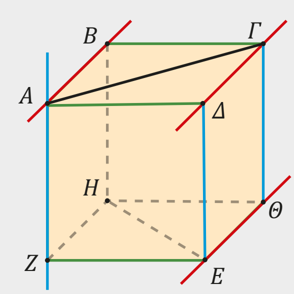
Το διπλανό σχήμα, είναι ένας κύβος. Σ΄ αυτόν μπορείτε να διακρίνετε:

α) Δύο ευθείες που:

i. Είναι παράλληλες, π.χ. οι ευθείες $A\Delta$ και ZE.

ii. Τέμνονται σε ένα σημείο, π.χ. οι ευθείες ΔE και $E\Theta$.

iii. Ούτε τέμνονται ούτε είναι παράλληλες, π.χ. $A\Delta$ και $E\Theta$.



β) Δύο επίπεδα που:

i. Τέμνονται, π.χ. τα επίπεδα $(AB, \Gamma\Delta)$ και (ZH, AB) τέμνονται κατά την ευθεία AB.

ii. Δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, π.χ. τα επίπεδα $(AB, \Gamma\Delta)$ και $(ZH, E\Theta)$.

γ) Μία ευθεία και ένα επίπεδο τέτοια ώστε:

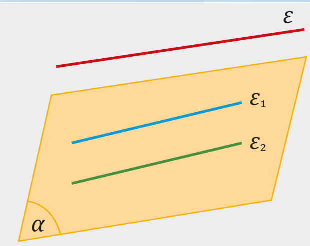
i. Η ευθεία να ανήκει στο επίπεδο, π.χ. η ευθεία $A\Gamma$ ανήκει στο $(AB, \Gamma\Delta)$.

ii. Η ευθεία να τέμνει το επίπεδο, π.χ. η ευθεία ΔE τέμνει το $(AB, \Gamma\Delta)$ στο σημείο Δ.

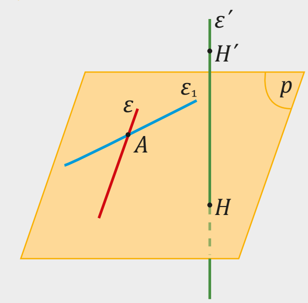
iii. Η ευθεία και το επίπεδο να μην έχουν κανένα κοινό σημείο, π.χ. η ευθεία HE και το επίπεδο $(AB, \Gamma\Delta)$.

4.2.1 Σχετικές θέσεις ευθειών στον χώρο

Στο διπλανό σχήμα παρατηρήστε τις παράλληλες ευθείες ε, ε_1 και ε_2.
Οι ευθείες ε_1 και ε_2 ανήκουν στο ίδιο επίπεδο α, ενώ η ε δεν ανήκει στο α. Το επίπεδο (ε, ε_1) που ορίζεται από τις παράλληλες ευθείες ε και ε_1 είναι διαφορετικό από το επίπεδο (ε, ε_2) που ορίζεται από τις παράλληλες ευθείες ε και ε_2.



Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες ε και ε_1 τέμνονται στο A, ενώ η ε' δεν έχει κοινά σημεία με τις ε και ε_1. Οι ε και ε' λέγονται **ασύμβατες**, διότι δεν υπάρχει επίπεδο που να περιέχει και τις δύο. Ασύμβατες είναι επίσης οι ε' και ε_1.



Δύο ευθείες στον χώρο μπορεί

- να είναι ασύμβατες, δηλαδή να μην υπάρχει επίπεδο που περιέχει και τις δύο.
- να είναι παράλληλες, οπότε ορίζουν ένα επίπεδο που τις περιέχει.
- να είναι τεμνόμενες, οπότε ορίζουν ένα επίπεδο που τις περιέχει.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.2.1

Οι ευθείες στην τάξη μου

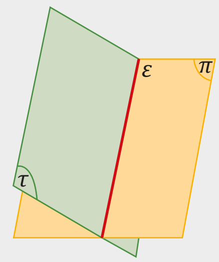
Άσκηση

Στην εικόνα της τάξης να συμπληρωθούν τρεις στήλες για ευθείες: Ασύμβατες, Παράλληλες, Τεμνόμενες

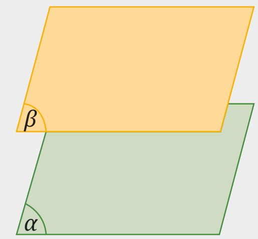
4.2.2 Σχετικές θέσεις επιπέδων στον χώρο

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.2.2α

Παρατηρήστε ότι τα επίπεδα π και τ τέμνονται και η τομή τους είναι η κοινή τους ευθεία ε.



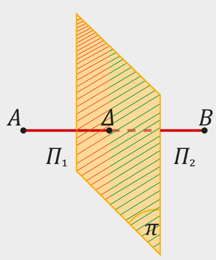
Παρατηρήστε ότι τα επίπεδα α και β είναι μεταξύ τους παράλληλα.



Δύο επίπεδα στον χώρο μπορεί

- Να μην έχουν κανένα κοινό σημείο, οπότε λέγονται **παράλληλα.**
- Να έχουν ένα κοινό σημείο, οπότε **τέμνονται σε μία ευθεία** που περιέχει το σημείο.

Ένα επίπεδο π χωρίζει τον χώρο σε δύο **ημιχώρους** Π_1 ή (A, π) και Π_2 ή (B, π), όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, οι οποίοι έχουν κοινά τα σημεία του επιπέδου π.



Ημιχώρος - καθετότητα ευθείας και επιπέδου

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.2.2β

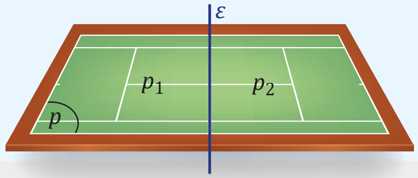
Βρίσκω σχετικές θέσεις επιπέδων και σχετικές θέσεις ευθειών

4.2.3 Σχετικές θέσεις ευθειών και επιπέδων στον χώρο

Μία ευθεία ε και ένα επίπεδο p στον χώρο μπορεί

- Η ε να είναι ευθεία του επιπέδου p.

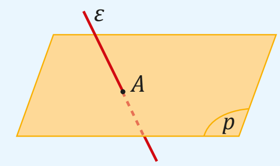
Στην περίπτωση αυτή, χωρίζει το επίπεδο δε δύο **ημιεπίπεδα**: τα p_1 και p_2

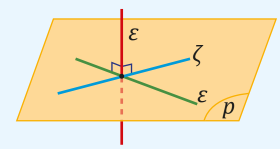


Η ε να μην είναι ευθεία του επιπέδου p, οπότε ισχύει ένα από τα εξής:

- η ε δεν τέμνει το επίπεδο, δηλαδή δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, οπότε η ευθεία λέγεται **παράλληλη προς το επίπεδο *p*** και συμβολίζουμε $\varepsilon // p$.

- η ε τέμνει το επίπεδο σ' ένα σημείο, δηλαδή έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, που λέγεται **ίχνος της *ε*** στο p.
  Στην περίπτωση αυτή τέμνεται με όλες τις ευθείες του επιπέδου που περνάνε από το ίχνος της. Με τις υπόλοιπες είναι ασύμβατη.
  Στην ειδική περίπτωση που μία ευθεία είναι κάθετη σε όλες τις ευθείες του επιπέδου που περνάνε από το ίχνος της, η ευθεία λέγεται **κάθετη ευθεία στο επίπεδο**. Διαφορετικά, λέγεται **πλάγια**.





ΣΧΟΛΙΟ: Αν μία ευθεία ξ είναι κάθετη σε ένα επίπεδο σ, τότε κάθε επίπεδο που την περιέχει είναι κάθετο στο σ.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

Στη συνέχεια αναφέρονται κάποιες σημαντικές προτάσεις οι οποίες προκύπτουν από τα παραπάνω, καθώς και κάποιες άλλες οι οποίες από τη γεωμετρία του επιπέδου, επεκτείνονται στη γεωμετρία του χώρου.

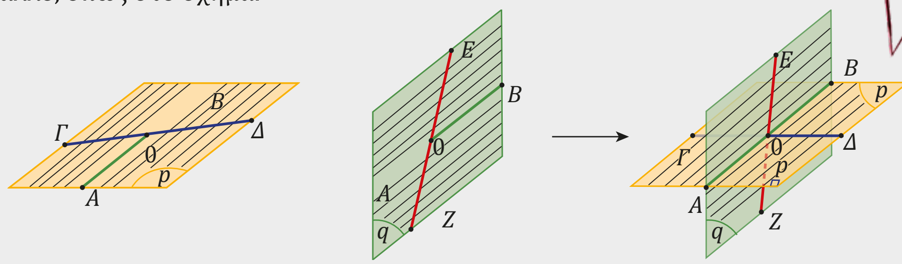
1. Η μοναδική παράλληλη προς μια ευθεία ε από ένα σημείο A εκτός αυτής βρίσκεται στο επίπεδο (ε, A). Κάθε άλλη ευθεία στον χώρο που διέρχεται από το A και τέμνει το επίπεδο (ε, A) είναι ασύμβατη με την ε.
2. Αν μία ευθεία ε' είναι παράλληλη σε μία ευθεία ε του επιπέδου p και δεν ανήκει σε αυτό, τότε είναι παράλληλη στο p.
3. Αν μία ευθεία ε τέμνει ένα επίπεδο p, τότε κάθε άλλη ευθεία παράλληλη στην ε τέμνει το επίπεδο p.
4. Από ένα σημείο A εκτός του επιπέδου p διέρχεται μόνον ένα επίπεδο παράλληλο στο p.
5. Αν δύο επίπεδα είναι παράλληλα προς τρίτο, τότε είναι και μεταξύ τους παράλληλα.
6. Επίπεδο p που τέμνει ένα επίπεδο q, τέμνει και κάθε επίπεδο παράλληλο στο q.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.2.3α

Σχετικές θέσεις ευθείας και επιπέδου

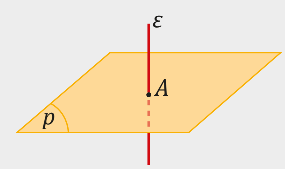
Παραδείγματα

1 Έστω ότι δύο φύλλα του τετραδίου σας αναπαριστούν δύο επίπεδα p και q. Κόψτε τα μέχρι τη μέση και περάστε το ένα στο άλλο, όπως στο σχήμα.

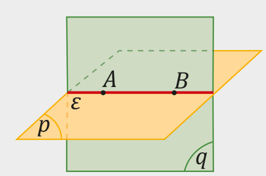


Τα δύο επίπεδα τέμνονται. Να εντοπίσετε την τομή τους. Παρατηρήστε ότι η τομή τους είναι η ευθεία AB. Σημειώστε δύο σημεία, το $Γ$ που βρίσκεται στο p και δε βρίσκεται στο q και το O που βρίσκεται και στα δύο.
Ποια είναι η θέση των σημείων $Γ$ και O ως προς την ευθεία AB (γιατί;).
Φέρετε την ευθεία $ΓΔ$ και παρατηρήστε ότι είναι ευθεία του p και τέμνει το q σε ένα σημείο.
Από το $Γ$ φέρετε μία ευθεία ε παράλληλη στην ΑΒ και παρατηρήστε ότι δεν μπορεί να τέμνει το q (γιατί;).
Αναπαραστήστε το σχήμα στο τετράδιό σας με όλα τα σημεία, τις ευθείες και τα επίπεδα.
Ποια είναι η τομή των AB και $ΓΔ$; Επίσης, των $ΓΔ$ και EZ; Των επιπέδων p και q;
Είναι συνεπίπεδες οι ευθείες $ΓΔ$ και EZ;

ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ:

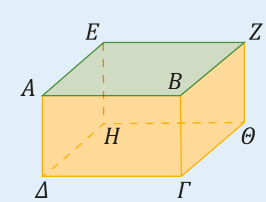


2 Η ευθεία $ε$ τέμνει το επίπεδο p στο σημείο A. Η διακεκομμένη γραμμή αναπαριστά το τμήμα της ευθείας που βρίσκεται κάτω από το επίπεδο.



3 Δύο επίπεδα p και q τέμνονται σε δύο σημεία A και B. Τότε όλα τα κοινά τους σημεία βρίσκονται στην ευθεία AB (γιατί;), που είναι η τομή τους. Οι διακεκομμένες γραμμές αναπαριστούν το τμήμα που δεν είναι ορατό γιατί βρίσκεται πίσω από το άλλο επίπεδο.

Εφαρμογή 4.2.3α



Στο διπλανό σχήμα, δίνεται ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.
Ποιες είναι οι σχετικές θέσεις των επιπέδων:

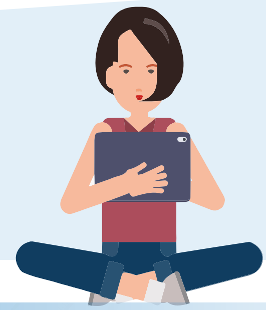
i. $(A, B, Γ)$ και $(B, Γ, Θ)$;
ii. των επιπέδων $(A, B, Γ)$ και $(E, Z, Θ)$;
iii. της ευθείας AB με τα επίπεδα (A, B, Z) και $(E, Z, Θ)$;
iv. των ευθειών $AΔ$ και $ΓΔ$, $AΔ$ και EH και των $AΔ$ και $ΓΘ$;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

i. Τα επίπεδα $(A, B, Γ)$ και $(B, Γ, Θ)$ τέμνονται κατά την ευθεία $BΓ$, ενώ
ii. Τα $(A, B, Γ)$ και $(E, Z, Θ)$ δεν τέμνονται.
iii. Η ευθεία AB ανήκει στο (Α, Β, Ζ), επομένως είναι παράλληλη στο $(E, Z, Θ)$.
iv. Οι ευθείες $AΔ$ και $ΓΔ$ ανήκουν στο ίδιο επίπεδο, το $(A, B, Γ)$, και έχουν ένα κοινό σημείο, άρα είναι τεμνόμενες. Οι $AΔ$ και EH ανήκουν στο ίδιο επίπεδο και δεν έχουν κοινά σημεία, οπότε είναι μεταξύ τους παράλληλες. Οι $AΔ$ και $ΓΘ$ δεν έχουν κοινά σημεία, ούτε είναι παράλληλες, οπότε είναι ασύμβατες.

Εφαρμογή 4.2.3β

Ευθείες σε ορθογώνιο πρίσμα

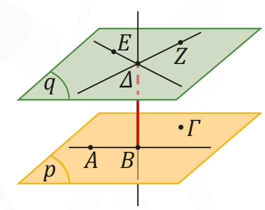


Ασκήσεις - Δραστηριότητες

Σχετικές θέσεις ευθειών και επιπέδων στο χώρο

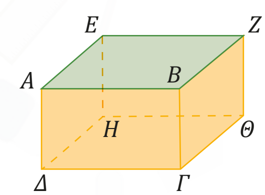
1 Θεωρήστε τα επίπεδα p και q, που ορίζονται από την ευθεία AB και το σημείο Γ και τις ευθείες ΔE και ΔZ, αντίστοιχα, όπως στο σχήμα.
Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:

α) Τα σημεία A, B και Γ είναι συνευθειακά.
β) Τα σημεία A, B και Γ είναι συνεπίπεδα.
γ) Το σημείο Z βρίσκεται στη ΔE.
δ) Η ευθεία $A\Gamma$ βρίσκεται στο επίπεδο p.
ε) Η $B\Delta$ είναι η τομή των επιπέδων p και q.

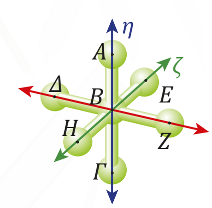


2 Στο διπλανό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο να βρείτε, αν υπάρχουν, και να ονομάσετε:

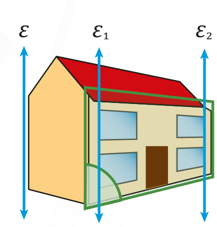
α) τρία συνεπίπεδα σημεία.
β) τέσσερα μη συνεπίπεδα σημεία.
γ) δύο τεμνόμενες ευθείες.
δ) δύο παράλληλες ευθείες.
ε) την τομή των επιπέδων (A, B, E) και (A, Δ, E).
στ) την τομή των επιπέδων (A, B, E) και (H, E, Z).



3 Στο σχήμα, βλέπετε ένα μόριο εξαφθοριούχου θείου του πιο ισχυρού αερίου του θερμοκηπίου στον κόσμο. Ονομάστε δύο διαφορετικά επίπεδα που περιέχουν την ευθεία ε.

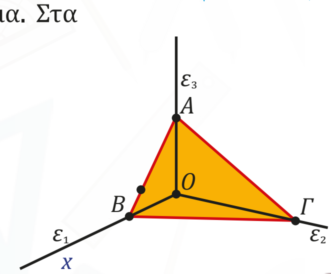


4 Στο διπλανό σχήμα που απεικονίζει ένα σπίτι, να βρείτε: ένα επίπεδο, μία ευθεία που να ανήκει σε αυτό, μία που το τέμνει και μία που δεν έχει με αυτό κανένα κοινό σημείο.



5 Θεωρήστε τρεις ευθείες ε_1, ε_2, ε_3, που τέμνονται στο O και ανά δύο δε βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, όπως στο σχήμα. Στα ευθύγραμμα τμήματα OA και $O\Gamma$ πάρτε εσωτερικά σημεία Δ και E αντίστοιχα. Να σχεδιάσετε την τομή των επιπέδων που ορίζονται, το ένα από τα A, B και Γ και το άλλο από τα Δ, E και Z, όπου Z σημείο της ημιευθείας Ox όταν:

α) Το Z δεν είναι σημείο του OB.
β) Το Z είναι σημείο εσωτερικό του OB.



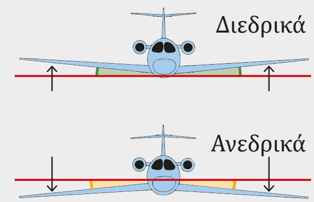
4.3 ΔΙΕΔΡΕΣ ΓΩΝΙΕΣ

Στην ενότητα αυτή θα μάθετε:

- Να αναγνωρίζετε τις δίεδρες γωνίες.

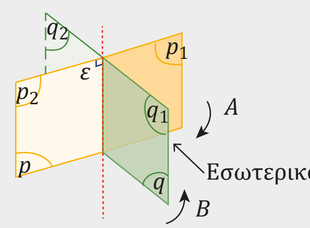
ΤΑ ΔΙΕΔΡΙΚΑ ΚΑΙ ΑΝΕΔΡΙΚΑ ΦΤΕΡΑ ΤΩΝ ΑΕΡΟΠΛΑΝΩΝ

Στην αεροναυπηγική, κατά την κατασκευή αεροσκαφών, ανάλογα με τις απαιτήσεις και τον σχεδιασμό, χρησιμοποιούνται διαφορετικών ειδών φτερά, τα διεδρικά ή ανοδικά και τα ανεδρικά ή καθοδικά, όπως βλέπετε στο σχήμα. Αυτό καθορίζεται από το είδος της γωνίας που σχηματίζεται από το επίπεδο της επιφάνειας του φτερού και το οριζόντιο επίπεδο. Μία τέτοια γωνία λέγεται **δίεδρη γωνία.**



Ορισμοί

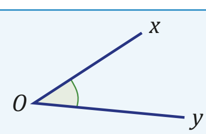
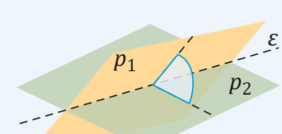
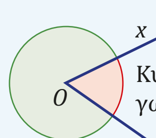
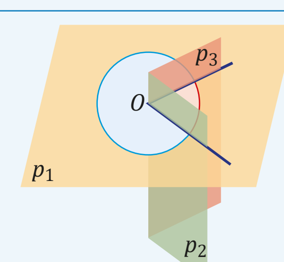
Παρατηρήστε στο σχήμα ότι η ευθεία ε είναι η τομή των επιπέδων p, q και ορίζει τα ημιεπίπεδα p_1, p_2 στο p και q_1, q_2 στο q.



1. Αντίστοιχα, το επίπεδο p ορίζει τον ημιχώρο A που περιέχει το ημιεπίπεδο q_1 και το επίπεδο q τον ημιχώρο B που περιέχει το ημιεπίπεδο p_1.
2. Ο κοινός χώρος των A και B λέγεται **κυρτή δίεδρη** γωνία με **ακμή** την ευθεία ε και **πλευρές** τα ημιεπίπεδα p_1, q_1, συμβολίζεται $\varepsilon(p_1, q_1)$.
3. Τα ημιεπίπεδα p_1 και q_1 λέγονται και **έδρες** της δίεδρης.
4. Η ακμή των p_1 και q_1 λέγεται και **αρχική ευθεία** της δίεδρης.
5. Τα παραπάνω κοινά σημεία των A, B εκτός από τα σημεία των εδρών ή της ακμής λέγονται **εσωτερικά σημεία** ή **εσωτερικό** της δίεδρης γωνίας. Τα υπόλοιπα σημεία του χώρου που δεν ανήκουν στις έδρες ή στην ακμή λέγονται **εξωτερικά σημεία** της δίεδρης.
6. Τα εξωτερικά σημεία, οι πλευρές και η ακμή ορίζουν τη **μη κυρτή δίεδρη** ή **αντικείμενη της αρχικής δίεδρης γωνίας**.

Σχόλιο: Στο εξής με τον όρο δίεδρη γωνία θα εννοούμε την κυρτή δίεδρη γωνία

Γωνίες από το επίπεδο στον χώρο:

Γωνία ευθειών		→	Γωνία επιπέδων	
Κορυφή γωνίας	Σημείο O	→	Αρχική ευθεία ε ή ακμή δίεδρης γωνίας	
Πλευρές γωνίας	Ημιευθείες Ox και Oy	→	Πλευρές ή έδρες Ημιεπίπεδα p_1 και p_2	
Κυρτή και μη κυρτή γωνία	Μη κυρτή γωνία  Κυρτή γωνία	→	Κυρτή και μη κυρτή δίεδρη γωνία	

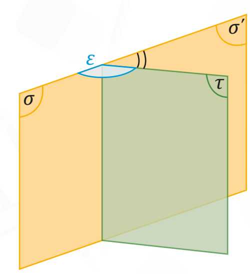
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.3

Αίθουσα: Παρατηρήστε τις δίεδρες γωνίες της αίθουσας στην τάξη σας και συζητήστε σχετικά με την ακμή τους, τις πλευρές τους και τα εσωτερικά τους σημεία:

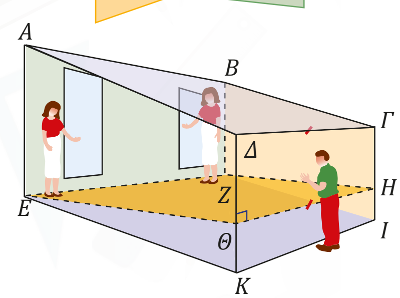
1. Την ευθεία που είναι η τομή των τοίχων (επίπεδα). Αντιστοιχεί στην αρχική ευθεία, που, στη γεωμετρία του επιπέδου, αντιστοίχει στην κορυφή της γωνίας.
2. Τους δύο τοίχους, ως ημιεπίπεδα, που τέμνονται. Αποτελούν τις έδρες της δίεδρης γωνίας, που, στη γεωμετρία του επιπέδου, αντιστοιχούν στις πλευρές της γωνίας.

Ασκήσεις - Δραστηριότητες

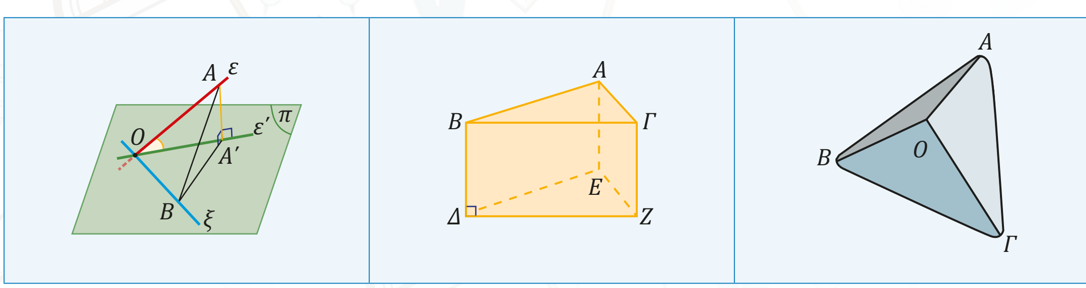
1 Να βρεθούν οι κυρτές δίεδρες γωνίες που σχηματίζονται στο σχήμα από τα ημιεπίπεδα σ, σ' και τ.



2 Στο διπλανό δωμάτιο των ψευδαισθήσεων (δωμάτιο του Έιμς) του διπλανού σχήματος να βρείτε δύο δίεδρες γωνίες.



3 Να βρείτε όλες τις δίεδρες γωνίες στις παρακάτω περιπτώσεις:



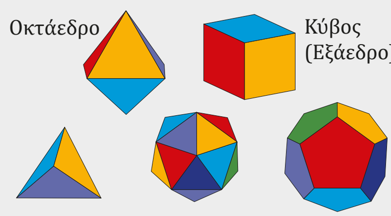
Ασκήσεις και εργασία για δίεδρες γωνίες

4.4 ΜΕΤΡΟ ΔΙΕΔΡΗΣ ΓΩΝΙΑΣ

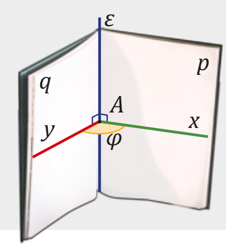
Στην ενότητα αυτή θα μάθετε:

- Να ορίζετε το μέτρο δίεδρης γωνίας.

Παρατηρήστε στη διπλανή εικόνα τα διάφορα πολύεδρα και αναζητήστε τις δίεδρες γωνίες που σχηματίζουν. Είδατε τις αντιστοιχίσεις της δίεδρης γωνίας με τα στοιχεία των γωνιών στο επίπεδο, χωρίς όμως το μέτρο τους που έχει τόσες εφαρμογές στο επίπεδο.



Πώς μπορείτε να μετρήσετε μια δίεδρη γωνία;
Στο βιβλίο του διπλανού σχήματος, ε είναι η ευθεία που ενώνονται οι σελίδες, δηλαδή η τομή των επιπέδων p και q. Αν, από το σημείο A της ε, φέρετε δύο ημιευθείες Ax του p, και Ay του q, ώστε $Ax \perp \varepsilon$ και $Ay \perp \varepsilon$. Αν ονομάσετε s το επίπεδο που ορίζουν οι Ax και Ay, τότε $\varepsilon \perp s$. Η γωνία $\varphi = \widehat{xAy}$ ανήκει στο επίπεδο s και λέγεται **αντίστοιχη επίπεδη γωνία της δίεδρης γωνίας $\varepsilon(p, q)$.**



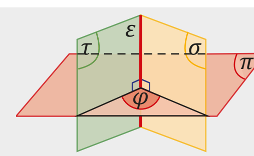
Ορισμοί

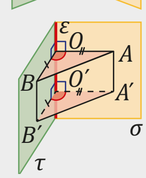
Η τομή της δίεδρης γωνίας ε (σ, τ) του διπλανού σχήματος με το κάθετο επίπεδο π στην ακμή της, είναι **μία γωνία φ** που βρίσκεται στο επίπεδο π και λέγεται **αντίστοιχη επίπεδη της δίεδρης γωνίας**. Το μέτρο της αντίστοιχης επίπεδης γωνίας μιας δίεδρης είναι το **μέτρο της δίεδρης γωνίας**.

Δύο δίεδρες γωνίες λέγονται **ίσες**, αν τοποθετώντας τη μία πάνω στην άλλη εφαρμόζουν ακριβώς.

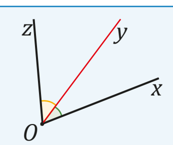
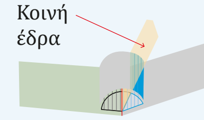
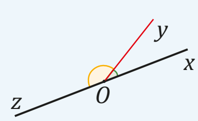
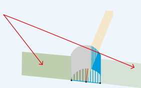
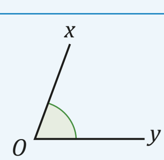
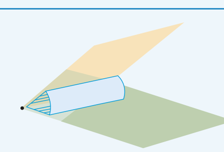
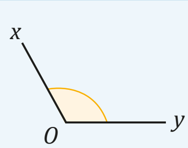
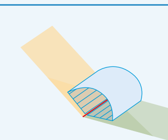
Αν δύο δίεδρες γωνίες είναι ίσες, τότε και οι αντίστοιχες επίπεδες γωνίες είναι ίσες και αντίστροφα.

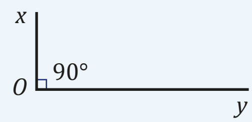
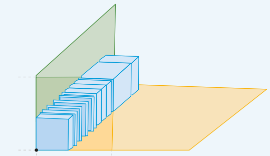
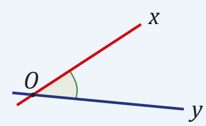
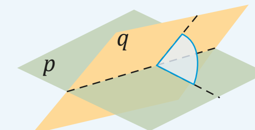
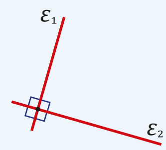
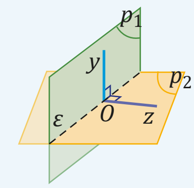
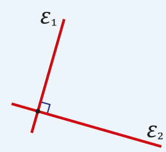
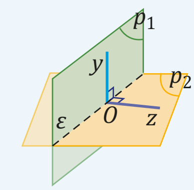
Μέτρο δίεδρης γωνίας





Πίνακας αντιστοιχίσεων όρων-σχημάτων επίπεδης γεωμετρίας με όρους-σχήματα γεωμετρίας του χώρου.

Εφεξής		→	Κοινή ακμή, μία έδρα κοινή και οι άλλες έδρες εκατέρωθεν της κοινής	 Κοινή έδρα
Εφεξής και παραπληρωματικές		→	Οι μη κοινές έδρες είναι αντικείμενα ημιεπίπεδα	 Αντικείμενα ημιεπίπεδα
Οξεία		→	Οξεία δίεδρη γωνία	
Αμβλεία		→	Αμβλεία δίεδρη γωνία	

Ορθή		→	Ορθή δίεδρη γωνία	
Γωνία ευθειών		→	Γωνία επιπέδων	
Αν δύο ευθείες τέμνονται και σχηματίζουν μία ορθή τότε και οι άλλες τρεις είναι ορθές		→	Όταν δύο επίπεδα τέμνονται και σχηματίζουν μία από τις τέσσερις δίεδρες γωνίες ορθή, τότε και οι τέσσερις είναι ορθές.	
Κάθετες ευθείες λέγονται δύο ευθείες που σχηματίζουν ορθή γωνία		→	**Κάθετα** λέγονται δύο επίπεδα *p* και *q* όταν σχηματίζουν μία ορθή δίεδρη και συμβολίζονται $p \perp q$.	

Εφαρμογή 4.4α

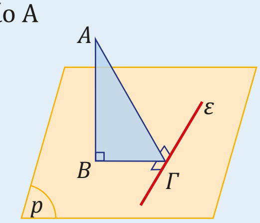
Το θεώρημα των τριών καθέτων

Στο διπλανό σχήμα έχετε ένα επίπεδο p, ένα σημείο A που δεν ανήκει σε αυτό και τρεις κάθετες: $AB \perp p$, $B\Gamma \perp \varepsilon$ και $A\Gamma \perp \varepsilon$ και ε, $B\Gamma$ είναι ευθείες του επιπέδου p. Γενικά, ισχύουν οι τρεις προτάσεις:

i. Αν $AB \perp p$ και $B\Gamma \perp \varepsilon$, τότε $A\Gamma \perp \varepsilon$.

ii. Αν $AB \perp p$ και $A\Gamma \perp \varepsilon$, τότε $B\Gamma \perp \varepsilon$.

iii. Αν $B\Gamma \perp \varepsilon$, $A\Gamma \perp \varepsilon$ και $AB \perp B\Gamma$, τότε $AB \perp p$.



Θεώρημα τριών καθέτων

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.4

Έστω ότι τα ημιεπίπεδα p, q, r και s είναι τα ημιεπίπεδα (A, B, O), (A, Γ, O), (B, Γ, O) και (A, B, Γ) αντίστοιχα, όπως φαίνονται στο σχήμα. Γνωρίζετε ότι η $O\Gamma$ είναι κάθετη στο επίπεδο p, η ΓM κάθετη στην AB και $O\Gamma = \Gamma M/2$. Να βρείτε τη δίεδρη γωνία των ημιεπιπέδων p και s, καθώς και την αντίστοιχη επίπεδη γωνία αυτής και το μέτρο της.

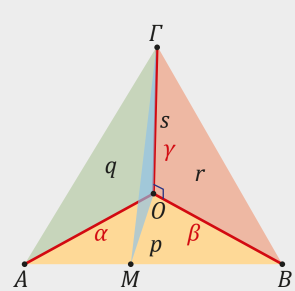
Παίζοντας με τις έννοιες του χώρου με κάρτες

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Τα ημιεπίπεδα p και s τέμνονται στην ευθεία AB.

Η ΓO είναι κάθετη στο p, επομένως η ΓO είναι κάθετη στην OM που διέρχεται από το ίχνος της και ανήκει στο p. Το ημιεπίπεδο (Γ, O, M), που περιέχει την ΓO, είναι κάθετο στο p. Επομένως, η δίεδρη γωνία των p και s είναι η $AO(p, s)$ με αντίστοιχη επίπεδη γωνία την ΓMO, αφού η ΓM είναι κάθετη στην AB και η MO κάθετη στην AB, από το θεώρημα των τριών καθέτων.

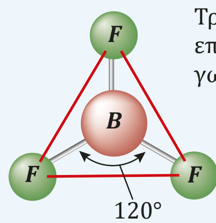
Το τρίγωνο $OM\Gamma$ είναι ορθογώνιο (ΓO είναι κάθετη στην OM) με κάθετη πλευρά $O\Gamma = \Gamma M/2$, όπου ΓM υποτείνουσα. Άρα $\widehat{\Gamma MO} = 30°$. Δηλαδή το μέτρο της αντίστοιχης επίπεδης γωνίας της δίεδρης γωνίας $AO\ (p, s)$ που ταυτίζεται με το μέτρο της δίεδρης είναι 30°.



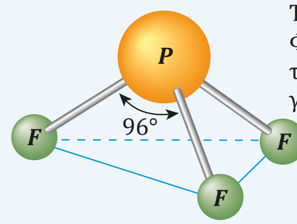
Εφαρμογή 4.4β

Μοριακή γεωμετρία στη χημεία

είναι η τρισδιάστατη διάταξη των ατόμων που αποτελούν ένα μόριο και καθορίζει πολλές ιδιότητες μιας ουσίας. Επειδή μόρια με ίδιο γενικό τύπο μπορούν να έχουν τελείως διαφορετική διάταξη ατόμων, επομένως τελείως διαφορετικές ιδιότητες, αναπτύχθηκε ο κλάδος της Μοριακής Γεωμετρίας (ή Στερεοχημείας). Αυτή περιγράφει τις θέσεις των ατόμων στον χώρο, τα μήκη δεσμών των δύο ενωμένων ατόμων, τις γωνίες δεσμών τριών συνδεδεμένων ατόμων και τις δίεδρες γωνίες τριών διαδοχικών δεσμών.



Τριφθοριούχο Βάριο BF_3, επίπεδο τρίγωνο γωνίες δεσμών 120°



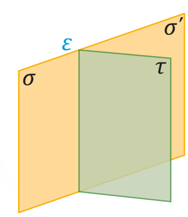
Τριφθοριούχος Φωσφόρος PF_3, τριγωνική πυραμίδα γωνίες δεσμών 96°

Παρατηρήστε στις παραπάνω ενώσεις ότι στο BF_3, τα τέσσερα άτομα είναι συνεπίπεδα, καθώς η γωνία είναι 120°, ενώ στο PF_3 το άτομο του φωσφόρου δεν ανήκει στο επίπεδο των τριών ατόμων του φθορίου και η διάταξη είναι τριγωνική πυραμίδα, με γωνία ακμών 96°.

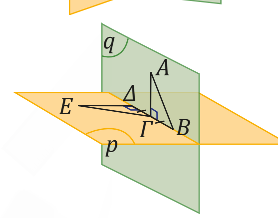
Ασκήσεις - Δραστηριότητες

1 **α)** Πόσες δίεδρες γωνίες σχηματίζουν δύο τεμνόμενα επίπεδα;
β) Αν δύο τεμνόμενα επίπεδα σχηματίζουν μία δίεδρη γωνία ίση με 35 °, πόσες μοίρες είναι οι άλλες δίεδρες γωνίες που σχηματίζουν;

2 Τα ημιεπίπεδα σ και σ' του διπλανού σχήματος είναι αντικείμενα. Τι σχέση έχουν οι δίεδρες γωνίες $\varepsilon(\sigma, \tau)$ και $\varepsilon(\sigma', \tau)$;

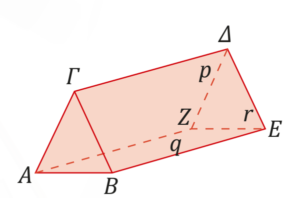


3 Ο συμμαθητής σας υποστηρίζει ότι η αντίστοιχη επίπεδη γωνία της δίεδρης του διπλανού σχήματος που ορίζεται από τα ημιεπίπεδα p και q είναι η γωνία $ΕΓΑ$. Συμφωνείτε μαζί του και τι θα του λέγατε για να τον πείσετε;



4 Στο διπλανό σχήμα, όπου φαίνεται μία σκηνή, γνωρίζετε ότι η ευθεία $ΑΖ$ είναι κάθετη στο επίπεδο r που ορίζεται από τα σημεία $Δ$, $Ε$ και $Ζ$ (της πόρτας) και το τρίγωνο $ΔΕΖ$ είναι ισόπλευρο.

α) Να ορίσετε τη δίεδρη γωνία των επιπέδων p που ορίζεται από τα σημεία $Α$, $Ζ$ και $Γ$ (πλαϊνό μέρος) και q που ορίζεται από τα σημεία $Α$, $Β$ και $Ε$ (δάπεδο).
β) Να βρείτε την αντίστοιχη επίπεδη γωνία της δίεδρης γωνίας του α ερωτήματος
γ) Ποιο είναι το μέτρο της δίεδρης γωνίας του α ερωτήματος.



Κατασκευάζοντας μια πυραμίδα ανακαλύπτεις το θεώρημα των τριών καθέτων

Ασκήσεις - Γραφικός Οργανωτής στις διέδρες γωνίες

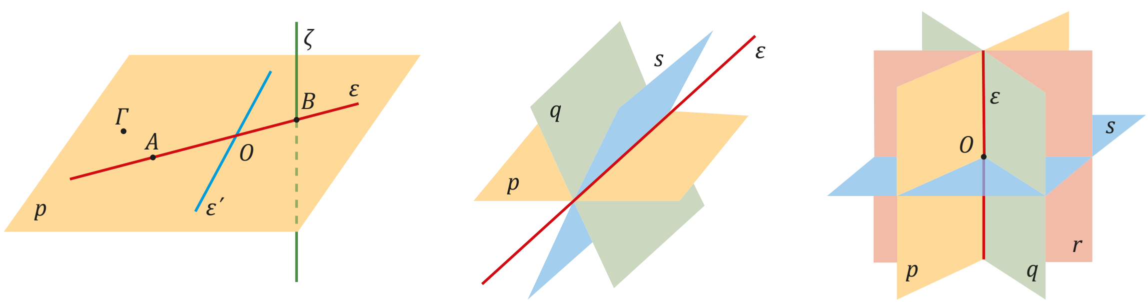
Βασικές έννοιες Γεωμετρίας του χώρου

Ελέγχετε τις γνώσεις σας για τα στοιχεία του χώρου

Ανακεφαλαίωση

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ – ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΕΡΓΑ ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗΣ:

1. Να περιγράψετε με λεπτομέρεια τα παρακάτω σχήματα:



2. Να φτιάξετε κατάλληλο σχήμα για την πρόταση: «Τα επίπεδα p, q και r δεν τέμνονται στην ίδια ακμή».

3. Απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις αιτιολογημένα με βάση το διπλανό σχήμα:

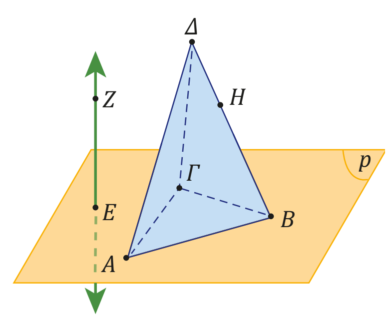
α. Πόσα επίπεδα ορίζονται από τα σημεία A, B, $Γ$ και $Δ$ στο διπλανό σχήμα;

β. Βρείτε τρία συνευθειακά σημεία.

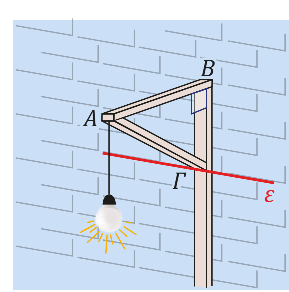
γ. Είναι τα σημεία H, A, B και E συνεπίπεδα; Αιτιολόγησε την απάντησή σου.

δ. Τέμνονται οι ευθείες AB και EZ;

ε. Ποια είναι η τομή των επιπέδων $(B, Γ, Δ)$ και p;



4. Εξηγήστε γιατί το ξύλο $AΓ$ είναι κάθετο στην ευθεία $ε$ του τοίχου αν γνωρίζετε ότι ο τοίχος είναι κατακόρυφος, η AB καρφώνεται κάθετα στον τοίχο και η $BΓ$ καρφώθηκε πάνω στον τοίχο κάθετα στην ευθεία $ε$, όπως στο διπλανό σχήμα.



Συμπλήρωσε τα κενά Ανακεφαλαιωτικές ασκήσεις

Οι βασικές γνώσεις της γεωμετρίας του χώρου

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΟΡΩΝ

ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ – ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1.1. Το 5ο Αίτημα του Ευκλείδη στην εξέλιξη της Γεωμετρίας

1. **α)** Εκτός εντός εναλλάξ
β) Εκτός εντός και επί τα αυτά
γ) Εκτός εναλλάξ
δ) Εντός εναλλάξ
ε) Εντός και επί τα αυτά

2. Οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται προς το μέρος που οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες είναι μικρότερες από 180°.

3. $3x + 5 + x - 1 < 180° \Leftrightarrow x < ...$

4. Η παραπληρωματική της γωνίας β είναι 110°. Οπότε 110° + 60° <180° .....

5. Το δ.

6. Ευκλείδεια: Λ, Σ, Λ, Λ. Σφαιρική: Σ, Σ, Λ, Σ.

1.2. Παράλληλες ευθείες που τέμνονται από τρίτη

1. i. $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη
ii. $\hat{\beta}$ + κατακορυφήν της $\hat{\gamma}$ = 180° εντός και επί τα αυτά μέρη
iii. $\hat{\beta} = \hat{\delta}$ ως εντός εναλλάξ

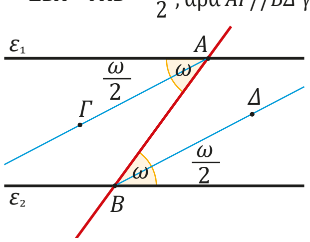
2. Κοιτάξτε τα κριτήρια.

3. Σ, Σ, Λ, Σ, Σ.

4. $\hat{\beta}$ = 180° – 45° = 135°, $\hat{\gamma}$=135°. Οι $\hat{\varphi}$, $\hat{\psi}$, $\hat{\omega}$ υπολογίζονται από την παραλληλία των ε_1 και ε_2 που τέμνονται από την ε.

5. $2x - 3 + 5x + 12 = 180 \Leftrightarrow x = (\hat{\alpha} = \hat{\varphi}$, άρα $\hat{\alpha} + \hat{\omega} = 180°)$

6. $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ τότε οι εντός εναλλάξ είναι ίσες με $\hat{\omega}$ οπότε,
$\widehat{\Delta B A} = \widehat{\Gamma A B} = \frac{\hat{\omega}}{2}$, άρα $A\Gamma // B\Delta$ γιατί έχουν εντός εναλλάξ ίσες



7. $\hat{\beta}$ = 360° – 305° = 55°, επίσης $\hat{\delta}$ = 180° – 125° = 75° ......

8. $\hat{\beta}$ = 360° – 290° κ.λπ.

1.3. Άθροισμα γωνιών τριγώνου

1. **α)** τίποτα, **β)** 136°, **γ)** 82,1°, **δ)** 50°, **ε)** 93°

2. 70°

3. 60°

4. 360°

5. 120°

6. **α)** Ορθογώνιο **β)** αμβλυγώνιο **γ)** οξυγώνιο

7. $(\hat{A},\hat{B},\hat{\Gamma}) = (90°,60°,30°)$ ή $(\hat{A},\hat{B},\hat{\Gamma}) = (45°,45°,90°)$.

8. 40°, 60°, 80°

9. $\hat{E}_1 = \hat{E}_2 = 93°$, $\hat{\Delta} = 37°$.

10. **α)** 130°, **β)** 40°, 50°

1.4. Γωνίες με πλευρές κάθετες ή παράλληλες

1. 45°

2. 31°

3. Αν οι γωνίες είναι και οι δυο οξείες ή αμβλείες είναι παράλληλες, ενώ αν η μια είναι οξεία και η άλλη αμβλεία είναι κάθετες.

1.5. Σχεδιασμός παραλλήλων ευθειών

1. Σχεδιάζουμε μία ευθεία ε_1. Τοποθετούμε τον γνώμονα ώστε η μία από τις κάθετες πλευρές του να βρίσκεται πάνω στην ευθεία. Χαράσσουμε την ευθεία ε_2 πάνω στην οποία βρίσκεται η άλλη κάθετη πλευρά του γνώμονα. Με τον ίδιο τρόπο χαράσσουμε τρίτη ευθεία ε_3 κάθετη στην ε_2. Οι ε_1 και ε_3 είναι μεταξύ τους παράλληλες. Η κατασκευή στηρίζεται σε κάθε ένα από τα κριτήρια: **α)** οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες, **β)** οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες είναι παραπληρωματικές, **γ)** οι εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες είναι ίσες, **δ)** οι ε_1 και ε_3 είναι κάθετες στην ίδια ευθεία (την ε_2).

2. Η κατασκευή είναι πολύ μεγάλη για να χρησιμοποιηθούν τα γεωμετρικά όργανα που χρησιμοποιείτε στο σχολείο. Θα πρέπει να βρείτε ή να κατασκευάσετε πολύ μεγάλα γεωμετρικά όργανα. Εναλλακτικά, αφού οι ευθείες που υποδεικνύονται με τα βέλη είναι κατακόρυφες, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το νήμα της στάθμης, ένα αλφάδι ή ένα ηλεκτρονικό χωροβάτη. Συμβουλευτείτε το συμπληρωματικό υλικό.

3. Η άσκηση αυτή στηρίζεται σε μια οφθαλμαπάτη. Αν και με μια βιαστική ματιά οι τρεις ευθείες δεν φαίνονται να είναι παράλληλες μεταξύ τους, εν τούτοις αυτό δεν είναι αληθές. Τοποθετείστε το τρίγωνο ώστε η μία από τις πλευρές του να βρίσκεται πάνω στη μία από τις τρεις ευθείες και χαράξτε την ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται μία άλλη από τις πλευρές του. Μετακινήστε το τρίγωνο ώστε η πλευρά του να βρίσκεται πάντα πάνω την ευθεία που χαράξατε και διαπιστώστε ότι η νέα ευθεία σχηματίζει ίσες γωνίες με τις ε, ζ και η (οι εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες είναι ίσες).

4. Θα επαναλάβετε τη διαδικασία της άσκησης 3 και θα διαπιστώσετε ότι η γωνία που σχηματίζει η νέα ευθεία με την ε δεν είναι ίση με τη γωνία που σχηματίζει με την η. Οπότε, αφού οι εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες δεν είναι ίσες, οι ευθείες ε και η δεν είναι μεταξύ τους παράλληλες.

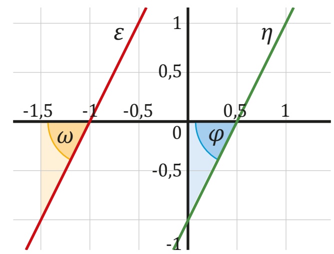
1.6. Οι παράλληλες ευθείες στη ζωή μας

1. Μερικά από τα αντικείμενα στα οποία βλέπετε παράλληλες ευθείες είναι ο πίνακας, τα παράθυρα, η πόρτα, τα βιβλία σας, τα θρανία και οι καρέκλες και τα κορδόνια των παπουτσιών σας. Επίσης, παράλληλες ευθείες βλέπετε στο πάτωμα, στο ταβάνι και στους τοίχους. Θα πρέπει να βρείτε τα επαγγέλματα των ανθρώπων που δημιούργησαν τα αντικείμενα αυτά.

2. Εάν οι γραμμές που σηματοδοτούν τα όρια του δρόμου δεν προκύπτουν από παράλληλη μετατόπιση η μία της άλλης, τότε ο δρόμος κάπου θα στενεύει και κάπου θα γίνεται πιο φαρδύς. Στα σημεία που στενεύει θα παρατηρείται πιο αργή κίνηση των οχημάτων ή και συγκρούσεις αφού τα οχήματα που κινούνταν αρχικά παράλληλα μεταξύ τους, θα πρέπει να χωρέσουν σε πιο στενό δρόμο. Για τον λόγο αυτό, θα πρέπει όταν ο δρόμος στενεύει να υπάρχει ειδική σήμανση.

3. Στην κάτοψη του σχεδίου, οι πλευρές των γωνιών είναι ημιευθείες που είναι παράλληλες μεταξύ τους. Επομένως, οι $\hat{\omega}$ και $\hat{\theta}$ έχουν πλευρές παράλληλες και είναι και οι δύο οξείες, οπότε είναι ίσες.

4. Μπορείτε να μετρήσετε τις γωνίες που σχηματίζουν οι ευθείες με τον άξονα $x'x$ ή με οποιαδήποτε παράλληλη προς αυτόν. Μπορείτε επίσης να κατασκευάσετε με χαρτί το τρίγωνο που ορίζεται από τα σημεία (0, 0), (0 – 1) και (0,5, 0) και να το μετακινήσετε με ολίσθηση κατά μήκος του άξονα $x'x$, ώστε η κορυφή που αντιστοιχούσε στο (0, 0) να βρεθεί στο σημείο (–1,5, 0). Θα διαπιστώσετε ότι οι εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες $\hat{\omega}$ και $\hat{\varphi}$ που σχηματίζουν οι ευθείες ε και η με τον άξονα $x'x$ είναι ίσες μεταξύ τους.



1.7. Άθροισμα γωνιών κυρτού ν-γώνου

1. Άθροισμα γωνιών κυρτού 10-γώνου: Με αντικατάσταση στον τύπο $\Sigma = \nu \cdot 180° - 360°$, έχετε
$\Sigma = 180° \cdot 10 - 360° = 1800° - 360° = 1440°$.
Με παρόμοιο τρόπο, για το 12-γωνο έχουμε: $A = 1800°$ και για το 100-γωνο $\Sigma = 17640°$.

2. Όπως έχετε μάθει, το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών ενός κυρτού ν-γώνου δεν εξαρτάται από το πλήθος αλλά είναι σταθερό και ίσο με 360°.

3. $\Sigma = 360° \Leftrightarrow \nu \cdot 180° - 360° = 360° \Leftrightarrow \nu \cdot 180° = 720° \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \nu = \dfrac{720°}{180°} \Leftrightarrow \nu = 4$
Επομένως, το σχήμα είναι τετράπλευρο.

4. Έστω ότι υπάρχει πολύγωνο με άθροισμα γωνιών 200°. Τότε έχετε:
$\Sigma = 200° \Leftrightarrow \nu \cdot 180° - 360° = 200° \Leftrightarrow \nu \cdot 180° = 560° \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \nu = \dfrac{28}{9}$
Αυτό είναι άτοπο διότι δεν είναι δυνατόν ένα πολύγωνο να έχει πλήθος πλευρών $\nu = \dfrac{28}{9}$.

5. Το άθροισμα των γωνιών κυρτού ν-γώνου είναι $\Sigma = \nu \cdot 180° - 360°$. Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών είναι πάντα ίσο με 360°. Επομένως, εάν το άθροισμα των γωνιών κυρτού ν-γώνου ισούται με το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών, τότε θα είναι $\Sigma = 360°$. Για τη συνέχεια της λύσης βλέπε άσκηση 3.

6. $\Sigma = 1620°$ από όπου προκύπτει ότι $\nu = 11$.

7. Αφού κάθε γωνία ισούται με 120°, το ν-γωνο έχει άθροισμα γωνιών $\Sigma = \nu \cdot 120°$ από όπου προκύπτει ότι $\nu = 6$. Άρα είναι 6-γωνο, οπότε θα έχει και 6 πλευρές. Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών είναι 360°.

8. Η πρόταση είναι αληθής αν και μόνο αν
$2\nu \cdot 180° - 360° = 2\,(\nu \cdot 180° - 360°)$
Η εξίσωση είναι αδύνατη.

Ανακεφαλαίωση

1. α	**3.** β	**5.** γ
2. α, β, γ	**4.** γ	**6.** β

7. Παράλληλες ευθείες παρατηρείτε στις ίνες του βλαστού και στις ίνες του φύλλου. Στη φωτογραφία με τα ρούχα διακρίνετε παράλληλες ευθείες στις ρίγες του πουκαμίσου και στις ίνες των ρούχων. Στις άκρες των δύο κρεμαστρών βλέπετε ίσες γωνίες διότι είναι οξείες και έχουν πλευρές μεταξύ τους παράλληλες. Στη φωτογραφία με το κτήριο υπάρχουν παράλληλες ευθείες διότι είναι κάθετες σε άλλες ευθείες ή διότι σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές κ.ά.

8. Θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε τις γνώσεις και τη φαντασία σας. Μην ξεχάσετε να βάλετε σχήματα.
9. Μπορείτε να δημιουργήσετε μια άσκηση για τις εντός εναλλάξ γωνίες, για τις ευθείες που είναι κάθετες στην ίδια ευθεία κ.ά.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

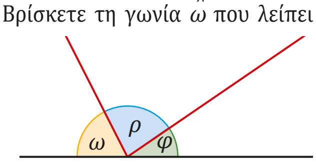
2.1. Ισότητα Τριγώνων

1. **α)** Λ, **β)** Σ, **γ)** Λ, **δ)** Σ.
2. α, β, δ.
3. Παρατηρήστε ότι $\widehat{BM\Delta} = \widehat{EM\Gamma}$ και οι υποτείνουσες $BM = M\Gamma$.
4. Συγκρίνετε πρώτα τα τρίγωνα ABM, $MB\Delta$ και $AM\Gamma$, $\Gamma M\Delta$. Οπότε τα τρίγωνα $AB\Gamma$, $B\Gamma\Delta$ θα είναι ίσα από το ΠΠΠ.
5. Συγκρίνετε τα τρίγωνα $OA\Delta$, $OB\Gamma$ με το ΠΓΠ.
6. Συγκρίνετε τα τρίγωνα $AM\Gamma$, ΔMB που θα έχουν $\widehat{\Gamma AM} = \widehat{MB\Delta}$ ως εντός εναλλάξ και $\widehat{AM\Gamma} = \widehat{BM\Delta}$ ως κατακορυφήν.
7. Τα τρίγωνα θα είναι ίσα, δηλαδή και τα αντίστοιχα στοιχεία τους θα είναι ίσα, δηλαδή οι εντός εναλλάξ γωνίες θα είναι ίσες.
8. Συγκρίνετε τα ορθογώνια τρίγωνα $AH\Gamma$, ΔKZ όπου έχουν υποτείνουσες και μία κάθετη πλευρά ίσες. Οπότε $\widehat{HA\Gamma} = \widehat{K\Delta Z} \Rightarrow \widehat{BAH} = \widehat{E\Delta K}$ και μετά συγκρίνετε τα τρίγωνα AHB, ΔKE για να βρείτε ότι $AB = \Delta E$.
9. Παρατηρήστε ότι $\hat{A} = \hat{A}'$ και άρα $\widehat{BA\Delta} = \widehat{B'A'\Delta'} = \widehat{\Delta A\Gamma} = \widehat{\Delta' A'\Gamma'} = \frac{\hat{A}}{2}$. Επιπλέον $\widehat{BA\Delta} = \widehat{B'A'\Delta'}$ και $\widehat{A\Delta\Gamma} = \widehat{A'\Delta'\Gamma'}$. Συγκρίνετε τα τρίγωνα $AB\Delta$, $A'B'\Delta'$ και $A\Delta\Gamma$, $A'\Delta'\Gamma'$. Τελικώς συγκρίνετε τα $AB\Gamma$, $A'B'\Gamma'$ με ΠΓΠ.
10. Συγκρίνετε τα τρίγωνα ABH, $B\Delta Z$ και $AH\Gamma$, ΓKE. Συμπεραίνετε ότι $\Delta Z = AH$ και $KE = AH$, από όπου προκύπτει το ζητούμενο.

2.2. Κατασκευές με κανόνα και διαβήτη τριγώνων όταν δίνονται βασικά τους στοιχεία

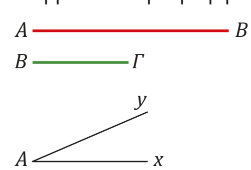
1. **α)** Λ, **β)** Σ, **γ)** Λ, **δ)** Λ.
2. Α΄ ΤΡΟΠΟΣ: Με τον διαβήτη γράφετε τυχαίο τόξο κύκλου με κέντρο O. Στο τόξο επιλέγετε δύο τυχαία σημεία A και B. Με τον κανόνα φέρνετε τα ευθύγραμμα τμήματα OA, OB και AB με άκρα το κέντρο του κύκλου και δύο τυχαία σημεία του τόξου. Τα ευθύγραμμα τμήματα OA και OB είναι τα ίσα σκέλη και το AB η βάση του ισοσκελούς τριγώνου.

   Β΄ ΤΡΟΠΟΣ: Φέρνετε ευθύγραμμο τμήμα AB. Με κέντρα τα σημεία A και B και τυχαία ακτίνα μήκους μεγαλύτερου από το μισό του AB, γράφετε τόξα κύκλων που τέμνονται σε σημείο O. Τα ευθύγραμμα τμήματα OA και OB είναι τα ίσα σκέλη και το AB η βάση του ισοσκελούς τριγώνου.
3. Έστω $\hat{\varphi}$ και $\hat{\rho}$ οι δύο γωνίες. Με κανόνα και διαβήτη, κάνετε μεταφορά γωνίας (όπως στο έργο εξερεύνησης) και τοποθετείτε τις γωνίες ώστε να είναι εφεξής. Βρίσκετε τη γωνία $\hat{\omega}$ που λείπει ώστε το συνολικό άθροισμα να είναι 180°. Η $\hat{\varphi}$ είναι η άλλη προσκείμενη γωνία στη δοθείσα πλευρά, οπότε η υπόλοιπη

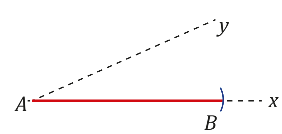


κατασκευή γίνεται όπως στην εφαρμογή 2.2β. Διερεύνηση: Το πρόβλημα έχει λύση, όταν οι γωνίες έχουν άθροισμα μικρότερο των 180°, όπως είδατε στη διδακτική ενότητα 1.2.
4. Έστω ότι δίνονται οι πλευρές AB και $B\Gamma$ ενός τριγώνου $AB\Gamma$. Τότε, η γωνία που δεν περιέχεται σε αυτές, θα είναι προσκείμενη σε μία από αυτές, έστω στην AB, οπότε θα είναι η $\hat{A}$. Υποθέτουμε ότι οι πλευρές και η γωνία είναι όπως δίνονται στο σχήμα.

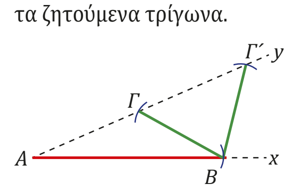
   Ανάλυση: Έστω ότι έχει ήδη γίνει η κατασκευή. Τότε, πάνω στην ημιευθεία Ax θα βρίσκεται π.χ. η AB, και πάνω στην Ay θα βρίσκεται η κορυφή Γ.



   Σύνθεση: Κατασκευάστε τη γωνία $\widehat{xAy}$ (όπως στην περίπτωση **(β)** του έργου εξερεύνησης). Πάνω στην ημιευθεία Ax, με τη βοήθεια του διαβήτη, προσδιορίστε τη θέση του σημείου B.



   Με κέντρο το σημείο B και ακτίνα ίση με το ευθύγραμμο τμήμα $B\Gamma$ γράψτε τόξο που τέμνει την Ay στα Γ και Γ'. Τα τρίγωνα είναι τα ζητούμενα τρίγωνα.



   Απόδειξη: Προφανής

   Διερεύνηση: Εδώ προέκυψαν δύο λύσεις. Εάν όμως η απόσταση της κορυφής B από την ημιευθεία Ay ισούται με το μήκος του $B\Gamma$, τότε προκύπτει μία λύση, ενώ εάν είναι μικρότερη, τότε δεν μπορείτε να κατασκευάσετε τρίγωνο.

   Επίσης, το τρίγωνο μπορεί να κατασκευαστεί και προς το άλλο μέρος της AB.

2.3. Ισοσκελή τρίγωνα

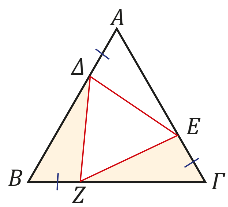
1. **α)** Σ, **β)** Σ, **γ)** Λ, **δ)** Σ.
2. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Τότε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (σχέση 1).

α) Αν $\hat{A} = 60°$, από τη σχέση 1 έχουμε $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180° \Longrightarrow 60° + \hat{B} + \hat{B} = 180° \Longrightarrow 2\hat{B} = 120° \Longrightarrow \hat{B} = 60°$. Οπότε από τη σχέση 1 έχουμε και $\hat{\Gamma} = 60°$. Τελικά, $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = 60°$ και το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

β. Αν $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 60°$, τότε από τη σχέση $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180°$ προκύπτει ότι $\hat{A} = 60°$. Συνεπώς, $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = 60°$, οπότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

3. Έχετε $B\Delta = AB - A\Delta = B\Gamma - BZ = \Gamma Z$ (σχέση 1).

Τα τρίγωνα $B\Delta Z$ και ΓZE είναι ίσα διότι $BZ = E\Gamma$ (δεδομένο), $B\Delta = \Gamma Z$ (από τη σχέση 1) και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (= 60° ως γωνίες ισοπλεύρου τριγώνου). Επομένως, έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε $\Delta Z = ZE$ (σχέση 2).

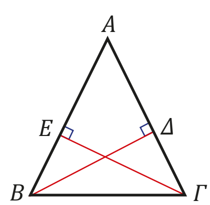


Με παρόμοιο τρόπο, με σύγκριση των τριγώνων $AE\Delta$ και ΓZE προκύπτει ότι $ZE = E\Delta$ (σχέση 3).

Από τις σχέσεις 2 και 3 έχετε: $\Delta Z = ZE = E\Delta$, οπότε το τρίγωνο ΔEZ είναι ισόπλευρο.

4. Ευθύ: Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $B\Delta$, ΓE, τα ύψη που αντιστοιχούν στις $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα. Αρκεί να δείξετε ότι $B\Delta = \Gamma E$.

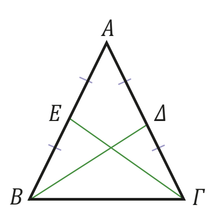
Τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα διότι έχουν μια οξεία γωνία ίση (η $\hat{A}$ είναι κοινή) και τις υποτείνουσες ίσες ($AB = A\Gamma$). Επομένως, έχουν ίσα και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους, άρα $B\Delta = \Gamma E$.



Αντίστροφο: Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και $B\Delta$, ΓE τα ύψη που αντιστοιχούν στις $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα, με $B\Delta = \Gamma E$. Αρκεί να δείξετε ότι $AB = A\Gamma$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα διότι έχουν μια οξεία γωνία ίση (η $\hat{A}$ είναι κοινή) και τις απέναντι από τις ίσες γωνίες κάθετες πλευρές ίσες ($B\Delta = \Gamma E$). Επομένως, έχουν ίσα και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους, άρα $AB = A\Gamma$.

5. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $B\Delta$, ΓE οι διάμεσοι που αντιστοιχούν στις $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα. Αρκεί να δείξετε ότι $B\Delta = \Gamma E$.

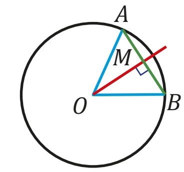


Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα διότι έχουν $AB = A\Gamma$ (ίσα σκέλη ισοσκελούς τριγώνου), $A\Delta = AE$ ($A\Delta = \frac{A\Gamma}{2} = \frac{AB}{2} = AE$) και την $\hat{A}$ κοινή. Επομένως έχουν ίσα και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους, άρα $B\Delta = \Gamma E$.

6. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $B\Delta$, ΓE οι διχοτόμοι που αντιστοιχούν στις $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα. Αρκεί να δείξετε ότι $B\Delta = \Gamma E$.

Είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ ως γωνίες προσκείμενες στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου. Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα διότι έχουν $AB = A\Gamma$ (ίσα σκέλη ισοσκελούς τριγώνου), $\widehat{AB\Delta} = \widehat{A\Gamma E}$, ($\widehat{AB\Delta} = \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{\Gamma}}{2} = \widehat{A\Gamma E}$) και την $\hat{A}$ κοινή. Επομένως έχουν ίσα και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους, άρα $B\Delta = \Gamma E$.

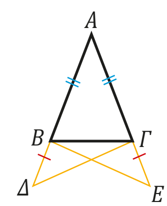
7. Έστω O το κέντρο του κύκλου, AB μια χορδή του και M το σημείο τομής της χορδής με την κάθετη από το O προς αυτήν. Τότε, το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές με $OA = OB$, οπότε το ύψος OM που αντιστοιχεί στη βάση είναι και διάμεσος, δηλαδή διέρχεται από τον μέσον της χορδής.



8. α) Τα τρίγωνα ABE και $A\Gamma\Delta$ έχουν $AB = A\Gamma$ (δεδομένο), $AE = A\Delta$ ($AE = A\Gamma + \Gamma E = AB + B\Delta = A\Delta$) και την $\hat{A}$ κοινή. Επομένως, είναι ίσα.

β) Από το προηγούμενο υποερώτημα, τα τρίγωνα ABE και $A\Gamma\Delta$ είναι ίσα, οπότε θα έχουν ίσα και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους. Συνεπώς, $\widehat{AEB} = \widehat{A\Delta\Gamma}$.

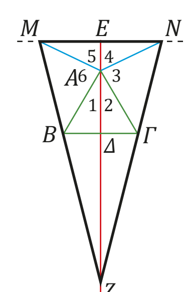
γ) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές, οπότε οι γωνίες της βάσης του είναι ίσες, δηλαδή $\widehat{\Gamma BA} = \widehat{B\Gamma A}$. Τα τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και ΓEB έχουν τη $B\Gamma$ κοινή, $B\Delta = \Gamma E$ (από κατασκευή) και $\widehat{\Gamma B\Delta} = \widehat{B\Gamma E}$, ($\widehat{\Gamma B\Delta} = 180° - \widehat{AB\Gamma} = 180° - \widehat{A\Gamma B} = \widehat{B\Gamma E}$). Άρα είναι ίσα διότι έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες.



δ) Αποδείχτηκε παραπάνω .

9. Θα μελετηθεί η περίπτωση που η ευθεία ε βρίσκεται έξω από το τρίγωνο.

Έστω $A\Delta$ το ύψος του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ και E το σημείο τομής της προέκτασής του με την ε. Από τις σχέσεις $\Delta E \perp B\Gamma$ και $\varepsilon // B\Gamma$ συμπεραίνουμε ότι $\Delta E \perp \varepsilon$. Επομένως τα $A\Delta$ και AE είναι ύψη που αντιστοιχούν στην βάση των ισοσκελών τριγώνων $AB\Gamma$ και AMN αντίστοιχα. Συνεπώς είναι και διχοτόμοι των γωνιών των κορυφών τους. Άρα $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ και $\hat{A}_4 = \hat{A}_5$ όμως, $\hat{A}_2 + \hat{A}_3 + \hat{A}_4 = \hat{A}_1 + \hat{A}_6 + \hat{A}_5 = 180°$. Από τις προηγούμενες σχέσεις έπεται ότι $\hat{A}_3 = \hat{A}_6$. Τα τρίγωνα AMB και $AN\Gamma$ έχουν $AM = AN$ (από κατασκευή), $AB = A\Gamma$ (δεδομένο) και $\hat{A}_3 = \hat{A}_6$ (αποδείχτηκε προηγουμένως). Άρα έχουν ίσα και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους. Έτσι, $\widehat{AMB} = \widehat{AN\Gamma}$ (σχέση 1).



Επίσης, $\widehat{AMN} = \widehat{ANM}$ (σχέση 2), ως γωνίες που πρόσκεινται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου AMN. Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) προκύπτει $\widehat{BMN} = \widehat{\Gamma NM}$ και συνεπώς το τρίγωνο ZMN είναι ισοσκελές.

Το ύψος του AMN είναι και διάμεσος. Άρα το E είναι μέσο της MN. Συνεπώς, η ZE είναι διάμεσος, άρα και ύψος. Τελικά, το $A\Delta$ είναι πάνω στη ZE.

Να μελετήσετε και της άλλες περιπτώσεις για τη θέση της ευθείας και να βρείτε ποια θα πρέπει να είναι η απόστασή της από το A, ώστε η κατασκευή να είναι εφικτή.

2.4. Οι ιδιότητες των ίσων τριγώνων στην επίλυση ρεαλιστικών προβλημάτων

1. **α)** Σ, **β)** Λ.
2. Προχωρήστε προς τυχαίο σημείο *Β*, ώστε τα *Β, Ρ* και *Τ* να είναι συνευθειακά. Κάντε το ίδιο προς σημείο *Α*, όπως φαίνεται στο σχήμα. Από το *Β* προχωρήστε προς τυχαίο σημείο *Γ*. Τοποθετήστε σημάδι. Προχωρήστε ευθεία κατά ίση απόσταση *ΓΕ*. Βάλτε σημάδι. Από το *Γ* προχωρήστε μέχρι σημείο *Δ* από το οποίο να βλέπετε τα *Γ, Δ* και *Α* να βρίσκονται στην ίδια ευθεία και να ισχύει *ΓΑ = ΓΔ*. Αποδείξτε ότι τα τρίγωνα *ΑΒΓ* και *ΓΔΕ* είναι ίσα. Από την ισότητα των πλευρών *ΑΒ* και *ΔΕ* και γνωρίζοντας τα μήκη *ΡΒ, ΑΤ* και *ΕΔ* μπορείτε να υπολογίσετε το *ΤΡ*.

2.5. Μεσοκάθετος και Διχοτόμος

1. Στο πρώτο σχήμα $x = 3$, στο δεύτερο σχήμα $x = 8$, στο τρίτο σχήμα $x = 5$.
2. Στο πρώτο σχήμα, πρέπει $x + 7 = 2x - 15$ και $4x - 6 = 90°$ (αδύνατο). Στο δεύτερο σχήμα, πρέπει *ΟΑ = ΟΒ* και *ΑΚ = ΒΚ* (αδύνατο).
3. Συγκρίνετε τα τρίγωνα *ΑΔΚ, ΑΜΕ.*
4. **α)** Φέρνετε την *ΑΜ* και συγκρίνετε τα τρίγωνα *ΑΜΒ, ΑΜΓ*. Θα είναι ίσα από το ΠΠΠ άρα και τα ύψη τους θα είναι ίσα. **β)** Αφού *Μ* ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας θα είναι σημείο της διχοτόμου.

2.6. Γεωμετρικές Κατασκευές Μεσοκαθέτου και Διχοτόμου

1. Κατασκευάστε τη μεσοκάθετο του *ΑΒ*. Εκεί που θα τέμνει την διαδρομή θα είναι το ζητούμενο σημείο.
2. Σε κάθε γωνία του τριγώνου φέρτε τη διχοτόμο της.
3. Κατασκευάστε τις μεσοκαθέτους κάθε πλευράς του τριγώνου.
4. Φέρτε τη διχοτόμο της γωνίας ΒΑΓ.
5. Γιατί θα φέρουμε τη μεσοκάθετο αλλά δεν ισαπέχει αναγκαστικά η κορυφή *Α* από τις άκρες του ευθύγραμμου τμήματος.
6. Φέρτε τις μεσοκαθέτους των *ΑΒ, ΑΓ.* Αν δεν τέμνονται δε θα υπάρχει σημείο.

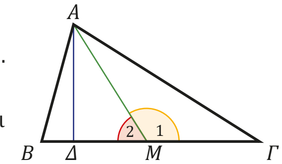
2.7. Απλοί γεωμετρικοί τόποι (γ. τ.)

1. Τα δύο σημεία ορίζουν ευθύγραμμο τμήμα, συνεπώς κατασκευάστε την μεσοκάθετο.
2. Τα μέσα ισαπέχουν από το κέντρο του κύκλου σταθερή απόσταση ίση με το μισό της ακτίνας του κύκλου.
3. Οι διχοτόμοι των γωνιών που σχηματίζονται με κορυφές τα σημεία τομής των ευθειών.
4. Να φέρετε τη μεσοκάθετο *ε* του *ΑΒ* και να παρατηρήσετε ότι το τυχαίο σημείο *Μ* του γ.τ. βρίσκεται στο ημιεπίπεδο που ορίζει η *ε* και το σημείο *Β*.

2.8. Βασικές Ανισοτικές Σχέσεις Στοιχείων Τριγώνου

1. Σ – Σ – Λ
2. **α)** δεν υπάρχει, **β)** υπάρχει, **γ)** δεν υπάρχει.
3. Θα πρέπει $2 < x < 14$.
4. Φέρτε την διάμεσο *ΑΜ* στο ορθογ. τρίγωνο *ΑΔΜ* η γωνία $\hat{M}_1$ είναι εξωτερική οπότε $\hat{M}_1 > 90°$ άρα $\hat{M}_1 > \hat{M}_2$.

   Τα τρίγωνα *ΑΜΒ* και *ΑΜΓ* έχουν *ΑΜ* = κοινή και *ΜΒ = ΜΓ* με $\hat{M}_1 > \hat{M}_2$. Από την εφαρμογή 2.8.2β του Συμπληρωματικού Υλικού, προκύπτει *ΑΓ > ΑΒ* κ.λπ.



5. Παρατηρήστε ότι η $\widehat{ΑΓΔ}$ είναι αμβλεία καθώς $\widehat{ΑΓΒ}$ οξεία. Άρα στο τρίγωνο *ΑΓΔ* η $\widehat{ΑΓΔ}$ είναι η μεγαλύτερη γωνία του.
6. Να εξετάσετε περιπτώσεις. Το *Κ* θα είναι στη μέση του *ΑΒ* ή ΑΚ ≠ ΚΒ. Σε κάθε περίπτωση μία τουλάχιστον από τις $\widehat{ΑΚΓ}$, $\widehat{ΓΚΒ}$ θα είναι ορθή ή αμβλεία. Άρα στο αντίστοιχο τρίγωνο θα είναι η μεγαλύτερη πλευρά.
7. Το τρίγωνο *ΑΒΔ* είναι ισοσκελές και *ΑΜ* ύψος άρα και διάμεσος του. Οπότε *ΒΜ = ΜΔ*, στο τρίγωνο *ΓΜΔ*, *ΜΔΓ* >90° ως εξωτερική τριγώνου κ.λπ.

2.9. Τόξα, χορδές και αποστήματα ίσων κύκλων

1. **α)** Λ, **β)** Σ, **γ)** Σ.
2. Της διαμέτρου.
3. $ΑΒ = ΓΔ \Leftrightarrow \overset{\frown}{ΑΒ} = \overset{\frown}{ΓΔ} \Leftrightarrow \overset{\frown}{ΑΒ} + \overset{\frown}{ΒΓ} = \overset{\frown}{ΓΔ} + \overset{\frown}{ΒΓ} \Leftrightarrow \overset{\frown}{ΑΓ} = \overset{\frown}{ΒΔ}$.
4. Εάν τα σημεία *Γ, Α, Β* και *Δ* είναι διαδοχικά, τότε, αν *Ο* είναι το μέσον του *ΑΒ*, θα είναι *ΑΓ = ΟΓ – ΟΑ = ΟΔ – ΟΒ = ΒΔ.*

   Εάν τα σημεία *Γ, Β, Α* και *Δ* είναι διαδοχικά, τότε *ΑΓ = ΟΓ + ΟΑ = ΟΔ + ΟΒ = ΒΔ.*
5. Τα *ΟΡ* και *ΟΣ* είναι αποστήματα των χορδών *ΑΒ* και *ΓΔ*. Στον ίδιο κύκλο ίσα αποστήματα αντιστοιχούν σε ίσες χορδές.
6. **α)** Έστω *Μ* και *Ν* τα μέσα των *ΑΒ* και *ΓΔ* αντίστοιχα. Συγκρίνετε τα ορθογώνια τρίγωνα *ΜΟΕ* και *ΝΟΕ*. Προκύπτει ότι *ΜΕ = ΝΕ* και, συνεπώς, *ΕΒ = ΜΒ - ΜΕ = ΝΔ - ΝΕ = ΕΔ.*

   β) Τα τρίγωνα *ΜΟΕ* και *ΝΟΕ* είναι ίσα, επομένως έχουν ίσα και τα αντίστοιχα στοιχεία τους. Οπότε $\widehat{ΟΕΜ} = \widehat{ΟΕΝ}$ και συνεπώς η ευθεία *ΟΕ* διχοτομεί τη γωνία $\widehat{ΜΕΝ}$ άρα και τη $\widehat{ΔΕΒ}$. Το τρίγωνο *ΔΕΒ* είναι ισοσκελές, οπότε η διχοτόμος του είναι και διάμεσος. Συνεπώς, η ευθεία *ΟΕ* διέρχεται από το μέσον της *ΒΔ*.
7. Ονομάστε *Ε* το σημείο τομής των χορδών, *ΟΚ* και *ΟΛ* τα αποστήματα των *ΑΒ* και *ΓΔ* αντίστοιχα. Συγκρίνετε τα τρίγωνα *ΟΚΕ* και *ΟΛΕ*. Δείξτε ότι το τρίγωνο *ΒΕΔ* (ή *ΒΕΓ*, ανάλογα με τη σειρά που έχετε ονομάσει τα σημεία) είναι ισοσκελές. Η διχοτόμος του ισοσκελούς τριγώνου είναι και διάμεσός του.

2.10. Κατασκευή εφαπτομένης κύκλου με κανόνα και διαβήτη

1. **α)** Σ, **β)** Σ, **γ)** Σ, **δ)** Λ.
2. Στον κύκλο (*Ο, σ*) το *ΟΜ* είναι απόστημα της χορδής *ΑΒ*.
3. **α)** Συγκρίνετε τα τρίγωνα *ΑΜΡ* και *ΒΜΡ* και τα τρίγωνα *ΑΝΡ* και *ΒΝΡ*.

   β) δείξτε ότι η *ΡΟ* είναι μεσοκάθετος του *ΑΒ*.
4. Δείξτε ότι *ΑΜ* ⊥ *ΒΓ*. Συγκρίνετε τη $\widehat{ΒΑΜ}$ με τις $\widehat{ΔΑΒ}$ και $\widehat{ΜΑΓ}$.

Ανακεφαλαίωση

1. **α)** Λ, **β)** Σ, **γ)** Λ, **δ)** Σ, **ε)** Σ, **στ)** Σ, **ζ)** Λ, η) Λ.

3. Στο σημείο τομής των μεσοκαθέτων των δύο πλεύρων.

4. Αποδείξτε ότι κάθε μεσοκάθετος είναι φορέας του αποστήματος της αντίστοιχης χορδής.

5. Μεταφέρτε το τρίγωνο στο οριζόντιο επίπεδο.

6. Τοποθετώ το άκρο του ενός στο μέσον του άλλου ώστε να είναι κάθετα μεταξύ τους. Τότε, το κέντρο του κύκλου είναι το άλλο άκρο του πρώτου ευθυγράμμου τμήματος και η ακτίνα είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το άκρο αυτό με το ένα από τα δύο άκρα του δεύτερου ευθύγραμμου τμήματος (εξηγήστε το γιατί).

7. Φέρτε δύο τυχαίες χορδές και τις μεσοκαθέτους τους. Το σημείο τομής τους είναι το κέντρο του κύκλου.

8. Κινείται πάνω στη διχοτόμο.

9. Όσο μεγαλώνει η χορδή μικραίνει το απόστημα άρα δεν μπορεί να είναι ανάλογα. Αντιστρόφως ανάλογα δε μπορεί να είναι γιατί η διάμετρος έχει μηδενικό απόστημα.

10. Παρατηρήστε ότι $\widehat{PAO} = \widehat{PBO} = 90°$ και χρησιμοποιήστε το άθροισμα των γωνιών τετραπλεύρου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

3.1.1. Παραλληλόγραμμο και Ιδιότητες παραλληλογράμμου

1. Το δεύτερο και το τέταρτο τετράπλευρο δεν είναι παραλληλόγραμμα, τα υπόλοιπα είναι.

2. Οι γωνίες του παραλληλογράμμου είναι $\hat{B} = \hat{\Delta} = \hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = 65°$ και $\hat{A} = \hat{\Gamma} = 180° - 65°$.

3. Σ – Λ – Σ – Σ

4. Στο πρώτο παραλληλόγραμμο βρίσκουμε $x = 44°$ και $y = 5$. Στο δεύτερο παραλληλόγραμμο βρίσκουμε $y = 9$ και $x = 9$.

5. Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο μόνο όταν $x = 4$.

6. Ισχύουν: $x = 48°$, $z = 75°$, $y = 105°$.

7. Στο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ ισχύουν:
$A\Gamma = 2\ OA = 10$ και $B\Delta = 2\ OB = 14$.

8. $\hat{A} = 100°$, οπότε $\hat{\Gamma} = 100°$, $\hat{B} = 80°$ και $\hat{\Delta} = 80°$.

9. Ισχύουν: $B\Gamma = 16$, $A\Delta = B\Gamma = 16$ και $AB = \Gamma\Delta = 1{,}25 \cdot 16 = 20$.

10. Από το παραλληλόγραμμο $\Lambda\Gamma MK$ έχουμε $M\hat{K}\Lambda = \hat{\Gamma}$ και $\hat{\Gamma} = \hat{B}$. Άρα $M\hat{K}\Lambda = \hat{B}$.

11. Τα τρίγωνα $KB\Lambda$ και $KM\Delta$ είναι ίσα οπότε $K\Lambda = KM$ και το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο.

12. Στο τετράπλευρο $BZ\Delta E$ οι διαγώνιές του διχοτομούνται. Άρα είναι παραλληλόγραμμο.

13. Τα τρίγωνα $A\Delta Z$ και ΓBE είναι ίσα και το $BZ\Delta E$ είναι παραλληλόγραμμο, αφού έχει τις δυο απέναντι πλευρές ΔZ, BE ίσες και παράλληλες.

14. **α)** Επειδή $MK \,//\, A\Gamma$ και $M\Lambda \,//\, AB$ το τετράπλευρο $AKM\Lambda$ είναι παραλληλόγραμμο.
β) Ισχύουν: $M\Lambda = AK$ και $MK = KB$, οπότε $MK + M\Lambda = AB$.

15. Τα τρίγωνα $BE\Gamma$ και $\Delta Z\Gamma$ είναι ισοσκελή, οπότε $\widehat{BE\Gamma} = \widehat{B\Gamma E} = \hat{\varphi}$, $\widehat{\Delta Z\Gamma} = \widehat{A\Gamma\Delta} = \hat{\omega}$. Προεκτείνουμε το τμήμα $E\Gamma$ κατά την ημιευθεία Ey. $\widehat{BE\Gamma} = \widehat{\Delta\Gamma y} = \hat{\varphi}$, $\widehat{\Delta Z\Gamma} = \widehat{Z\Gamma B} = \hat{\omega}$. $\widehat{Z\Gamma E} = \hat{\varphi} + \hat{\omega} = 90°$, διότι $2\hat{\varphi} + 2\hat{\omega} = 180°$.

16. i. Προκύπτει από την παραλληλία των πλευρών του $AB\Gamma\Delta$.
ii. Οι τρεις γωνίες που σχηματίζονται στην κορυφή Γ έχουν άθροισμα 180°.

3.1.2. Ειδικά παραλληλόγραμμα

1. Ρόμβος, ορθογώνιο, δεν είναι παραλληλόγραμμο, ορθογώνιο, τετράγωνο, παραλληλόγραμμο.

2. **α)** Ορθογώνια τρίγωνα και ισοσκελή τρίγωνα **β)** Ισοσκελή τρίγωνα και ορθογώνια τρίγωνα **γ)** Ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα

3. Σ – Λ – Σ – Σ.

4. $x = 2$ και $y = 3$.

5. Βρίσκουμε ότι $x = 5$, οπότε όλες οι πλευρές είναι ίσες και το τετράπλευρο είναι ρόμβος.

6. 18°, 162°, 18°, 162°.

7. Οι διαγώνιές του διχοτομούνται και είναι ίσες.

8. Είναι παραλληλόγραμμο με δυο ορθές.

9. **α)** Ορθογώνιο **β)** Ρόμβος

10. Τα ορθογώνια τρίγωνα $ZA\Delta$ και EAB είναι ίσα.

11. **α)** Τα ορθογώνια τρίγωνα ABZ και $A\Delta E$ είναι ίσα.
β) Το άθροισμα των γωνιών $\widehat{ZAB}$ και $\widehat{AE\Delta}$ είναι 90°.

12. **α)** Τα ορθογώνια τρίγωνα ABZ και $A\Delta E$ είναι ίσα.
β) Προκύπτει από το (α) αν «μεταφέρουμε» τα τμήματα παράλληλα ώστε το ένα άκρο τους να είναι κορυφή του τετραγώνου.

3.2. Εφαρμογές παραλληλογράμμων

1. Στο πρώτο σχήμα: $3x + 1 = 2(x + 3) \Leftrightarrow x = 5$.
Στο δεύτερο σχήμα $y = 3{,}5$ και $x = 4$.

2. 30°, 30°, 90°.

3. $A\Delta = 5$ και $\Delta\Gamma = 10$.

4. Τα τμήματα $M\Delta$ και ME είναι διάμεσοι ορθογωνίων τριγώνων με κοινή υποτείνουσα.

5. $\hat{\varphi} = 30°$. Η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισοσκελή τρίγωνα.

6. **α)** Καθένα από τα τμήματα είναι ίσο με το μισό της υποτείνουσας.
β) $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 45°$.

7. **α)** Τα τμήματα $K\Lambda$ και MN είναι ίσα και παράλληλα. **β)** Ρόμβος.

8. **α)** Το τρίγωνο $E\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές. **β)** Ισχύει: $E\hat{Z}\Gamma = E\hat{\Delta}Z + \Delta\hat{E}Z$.

9. Αν M μέσο της $B\Gamma$, τότε: $A\Delta = \frac{AM}{2}$ και $AM = BM = \frac{B\Gamma}{2}$.

10. Είναι δύο ευθείες παράλληλες στην ε που καθεμιά απέχει από την ε απόσταση α.

3.4. Τραπέζιο

1. Στο πρώτο σχήμα $x = 10, y = 5$ και $x = 3, y = 2$ στο δεύτερο.

2. $5x + 3x + 2x + 2x = 12x$.

3. $x = 5$.

4. 60°, 60°, 120°, 120°.

5. **α)** Το τρίγωνο έχει δύο γωνίες ίσες. **β)** Η διάμεσος $E\Lambda$ του τριγώνου είναι ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί.

6. **α)** Αποδεικνύουμε ότι έχουν τις πλευρές τους μία προς μία ίσες.
β) Ισοσκελές τραπέζιο.

7. **α)** Καθένα είναι ίσο με το μισό της AB.
β) Ισχύει $KM \,//\, \Delta\Lambda$ και $\Delta K = \Lambda M$.

8. Αν K είναι το μέσο της $A\Delta$, τότε $MK = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} = \frac{A\Delta}{2}$.

9. **α)** Ισχύει $\Delta E = \Delta A = B\Gamma$. **β)** Το τρίγωνο $E\Gamma A$ είναι ορθογώνιο αφού η διάμεσος στην υποτείνουσα είναι ίση με το μισό της. **γ)** Αν φέρουμε από το Γ κάθετη στην $B\Delta$, το τραπέζιο χωρίζεται σε ένα ορθογώνιο και δύο ίσα ορθογώνια τρίγωνα.

10. **α)** Ισχύουν: $AE \,//\, \Gamma\Delta$ και $\Gamma E = A\Delta$. **β)** Αποδείξτε ότι τα τρίγωνα ABZ και $A\Delta Z$ είναι ίσα. Επίσης, το Z είναι σημείο τομής των διαγωνίων του ισοσκελούς τραπεζίου $AE\Gamma\Delta$. Οπότε αποδείξτε ότι $ZB = Z\Delta = Z\Gamma$.

Ανακεφαλαίωση

1. $A\Gamma = 18$, $B\Delta = 24$.

2. Το τρίγωνο ΔAE είναι ισοσκελές.

3. **α)** Τα τμήματα AE και ΓZ είναι παράλληλα και ίσα.
β) Διέρχονται όλες από το κέντρο του παραλληλογράμμου.

4. **β)** Τα τρίγωνα δεν είναι ίσα, αφού ΚΒ ≠ ΛΔ.

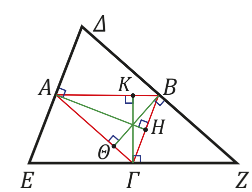
5. **β)** Αν A, B τα χωρία και $\Gamma\Delta$ η γέφυρα, φέρουμε τμήμα BE παράλληλο και ίσο με το $\Gamma\Delta$ και την μεσοκάθετη του AE.

6. **α)** Οι γωνίες είναι 45°, 67,5°, 67,5°.
β) Το E βρίσκεται στην μεσοκάθετη της $A\Gamma$.

7. **α)** Η ισότητα $EZ = B\Theta$ προκύπτει από τα ίσα τρίγωνα ZBE και ΘBE.
β) $B\Delta = B\Theta + \Delta\Theta$ και $\Theta\Delta = EH$.

8. Επειδή στα ισόπλευρα τρίγωνα οι τρεις διχοτόμοι ταυτίζονται με τις τρεις μεσοκάθετες, επομένως το έγκεντρο και το περίκεντρο ταυτίζονται. Δεν ισχύει το ίδιο και στα ισοσκελή, που ταυτίζεται μόνο η μια.

9. Έστω AH, ΓK, $B\Theta$ μεσοκάθετοι των πλευρών ΔE, EZ και ΔZ αντίστοιχα. Τα τετράπλευρα $A\Delta B\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $A\Delta // B\Gamma$. Επίσης, $AH \perp \Delta E \Rightarrow AH \perp B\Gamma$. Άρα το AH είναι ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$. Ομοίως, οι άλλες μεσοκάθετοι του ΔEZ είναι φορείς των υψών του $AB\Gamma$.

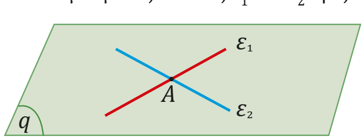


ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

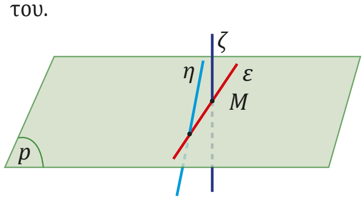
4.1. Ευθείες και επίπεδα στον χώρο

1. Τοίχοι, πάτωμα, οροφή και ακμές (ευθείες που τέμνονται).

2. Δύο τεμνόμενες ευθείες ε_1 και ε_2 ορίζουν ένα επίπεδο.



3. Γιατί τότε η ζ θα είχε δύο κοινά σημεία με το p, άρα θα ήταν ευθεία του.



4. Α. τέσσερα συνευθειακά: άπειρα, Β. τρία συνευθειακά και ένα εκτός: ένα, Γ. ανά τρία μη συνευθειακά: ένα (εάν δύο ζεύγη ορίζουν τεμνόμενες ή παράλληλες ευθείες), τέσσερα (σε διαφορετική περίπτωση).

5. **α)** 5 επίπεδα: τα p, (A,B,E), (A,Δ,E), (Δ,E,Γ) και (B,Γ,E)
β) Σε ένα: το (B,Γ,E)
γ) Τα σημεία Γ, E, Z.
δ) Ένα οποιοδήποτε σημείο της ευθείας AB, καθώς η AB ανήκει στο p.

4.2. Σχετικές Θέσεις ευθειών και επιπέδων στον χώρο

1. **α)** Λ, **β)** Σ, **γ)** Λ, **δ)** Σ, **ε)** Λ.

2. **α)** A, B, και Γ **β)** A, B, Γ και Z, **γ)** AB και $A\Delta$, **δ)** AB και EZ, **ε)** AE, **στ)** EZ.

3. (ε, η) και (ε, ζ).

4. Το επίπεδο που ορίζεται από τις ε_1 και ε_2. Η ε_1 ανήκει στο επίπεδο, η ευθεία που ορίζεται από την πλευρά της βάσης του σπιτιού και είναι κάθετη στο επίπεδο της πρόσοψης το τέμνει σε ένα σημείο και η ε δεν έχει κανένα κοινό σημείο με αυτό.

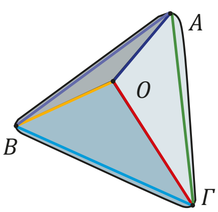
5. Σχεδιάστε το τρίγωνο ΔEZ. **α)** Η τομή των επιπέδων είναι η ευθεία που ορίζεται από τα σημεία τομής των AB και ΔZ και των $B\Gamma$ και EZ. **β)** Ομοίως για τα σημεία τομής των προεκτάσεων των πλευρών του ερωτήματος (α).

4.3. Δίεδρες γωνίες

1. Οι $\varepsilon(\sigma,\tau)$, $\varepsilon(\sigma',\tau)$, και $\varepsilon(\sigma,\sigma')$.

2. Έστω p και q τα επίπεδα (E, Z, H) και (E, Z, I) αντίστοιχα. Τα p και q τέμνονται στην ευθεία ε που διέρχεται από τα E και Z. Μία δίεδρη γωνία είναι η $\varepsilon(p, q)$. Ομοίως, εργαστείτε για την άλλη.

3. Εργαστείτε για τα **α)** και **β)**, όπως στο **γ)**:



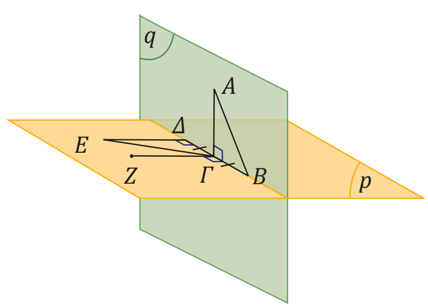
Για το **γ)** παρατηρήστε στο σχήμα ότι υπάρχουν τέσσερα ημιεπίπεδα που ανά δύο τέμνονται. Προκύπτουν έξι αρχικές ευθείες (οι ευθείες τομής τους) και κάθε αρχική ευθεία είναι η ακμή μίας δίεδρης γωνίας που ορίζει με τα ημιεπίπεδα: π.χ. η ευθεία ε που διέρχεται από τα B και Γ ορίζει με τα ημιεπίπεδα p_1 και q_1 που ορίζονται από τα σημεία O, B, Γ και A, B, Γ, αντίστοιχα τη δίεδρη γωνία $\varepsilon(p_1, q_1)$. Ομοίως βρείτε τις άλλες...

4.4. Μέτρο δίεδρης γωνίας

1. **α)** Τέσσερεις, **β)** η κατακορυφήν της 35° και οι άλλες δύο 145°.

2. παραπληρωματικές.

3. Οι $A\Gamma$ και $E\Gamma$ δεν ορίζουν επίπεδο κάθετο στην ακμή ΔB. Επομένως, η $\widehat{E\Gamma A}$ δεν είναι η αντίστοιχη επίπεδη γωνία της δίεδρης που ορίζεται από τα ημιεπίπεδα p και q. Η $A\Gamma$ είναι κάθετη στην ΔB. Αν φέρετε τη ΓZ του ημιεπιπέδου p κάθετη στην ακμή $B\Delta$, τότε οι $A\Gamma$ και ΓZ ορίζουν το κάθετο στην $B\Delta$ επίπεδο. Επομένως η $\widehat{Z\Gamma A}$ ορίζεται από τις $A\Gamma$ και ΓZ, είναι η αντίστοιχη επίπεδη γωνία της δίεδρης $\Delta B(p, q)$.



4. **α)** Αν ε είναι η ευθεία AZ, τότε η δίεδρη είναι η $\varepsilon(p,q)$
β) η γωνία ΔZE,
γ) 60 μοίρες.

Ανακεφαλαίωση

1. Περιγραφή σε μαθηματική γλώσσα.

2. Α΄περίπτωση: τρία παράλληλα επίπεδα
Β΄περίπτωση: ανά δύο παράλληλα με το τρίτο να τα τέμνει.

3. **α)** Ορίζονται 4 επίπεδα τα p, (A,Δ,B), (B,Γ,Δ), (A,Γ,Δ).
β) Τα σημεία Δ, B, H είναι συνευθειακά.
γ) τα σημεία H, A, B και Ε δεν είναι συνεπίπεδα γιατί: τα A, B, και E ανήκουν στο p, όχι όμως το H.
δ) όχι, οι AB και EZ είναι ασύμβατες.
ε) η ευθεία $B\Gamma$.

4. Εφαρμόστε το θεώρημα των τριών καθέτων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Πηγές στα Ελληνικά

1. Αργυρόπουλος, Η., Βλάμος, Π., Κατσούλης, Γ., Μαρκάτης, Σ., & Σίδερης, Π. (2019). *Ευκλείδεια Γεωμετρία Α' Γενικού Λυκείου – Βιβλίο Μαθητή Α' Τεύχος.* ΙΤΥΕ Διόφαντος.
2. Βλάχας, Φ., Ζαφειρόπουλος, Γ., Καλπακής, Γ., Καραγεωργίου, Χ., Κατσικάρης, Δ., Κυριάκου, Σ., Λαμπαδάρης, Δ., Λιαρέλλης, Σ., Λογοθέτη, Ν., Μοσχούδης, Θ., Οικονομόπουλος, Κ., Παπαγεωργόπουλος, Κ., Παπαδόπουλος, Κ., Πολυδωρόπουλος, Χ., Παπαλόπουλος, Χ., Συρεγγέλα, Γ., Τσιματσίδου, Β., Τσιμπουκίδης, Δ., Τσουνάκος, Θ., Τσουνάκος, Ο., Χαλαζιάς, Χ., Χατζή, Τ., Χατζηαντωνίου, Κ., & Χολέβας, Γ. (Επιμ.). (1993). Λήμμα. Στην Εγκυκλοπαίδεια Υδρία - Cambridge- *Ήλιος* (σσ. 1596). Τέσσερα Έψιλον.
3. Θωμαΐδης, Ι., Ξένος, Α., Παντελίδης, Γ., Πούλος, Α., & Στάμου, Γ. (1999). *Ευκλείδεια γεωμετρία Α' και Β' Ενιαίου Λυκείου.* Ο.Ε.Δ.Β.
4. Κανέλλος, Σ. Γ. (1970). *Ευκλείδειος Γεωμετρία επίπεδος*. Παπαδημητρόπουλος.
5. Katz, V. J. (2013). Ιστορία των Μαθηματικών: *Μια Εισαγωγή* (Κ. Χατζηκυριάκου, Μετ.). Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
6. Μπρίκας, Μ. Α. (1970). *Τα περίφημα άλυτα γεωμετρικά προβλήματα της αρχαιότητας*. Ζησούλης.
7. Struik, D. J. (1982). *Συνοπτική ιστορία μαθηματικών* (Α. Φερεντίνου-Νικολακοπούλου, Μετ.). Ι. Ζαχαρόπουλος.

Πηγές στα Αγγλικά

1. Boyd, C. J., Cummins, J., Carol, E. (2007). *Geometry* (Merrill Geometry). McGraw-Hill Education.
2. Boyd, C. J., Cummins, J., Malloy C. E. (2007). *California Geometry: Concepts, Skills, and Problem Solving.* McGraw-Hill.
3. Boyd, C. J., Cummins, J., Malloy, C., Carter, J., & Flores, A. (2005). *Glencoe Mathematics: Geometry.* McGraw-Hill.
4. Burger, E., Chard, D. J., Hall, E. J., Kennedy, P. A., & Leinwand, S. J. (2008). *Holt California Geometry.* Rinehart and Winston.
5. Gibilisco, S. (2011). *Geometry Demystified: A Self-Teaching Guide*. McGraw-Hill Professional.
6. Larson, R., Boswell, L., Kanold, T. D., & Stiff, L. (2007). *Geometry. Ed. McDougal Littell, a division of Houghton Mifflin Company.*
7. Larson, R., & Boswell, L. (2015). *Big Ideas Geometry*. Houghton Mifflin Harcourt.
8. Ma, A.,, Kuang, A. (2022). *Must Know High School Geometry* (2η έκδ.). McGraw-Hill.

Ιστότοποι & Ψηφιακές Πηγές

1. Encyclopaedia Britannica. (n.d.). The Bridge of Asses. https://www.britannica.com/science/The-Bridge-of-Asses
2. Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής. (n.d.). Νέα προγράμματα σπουδών – Μαθηματικά Λυκείου (Πρόγραμμα σπουδών, ΦΕΚ, Οδηγός εκπαιδευτικού). https://www.iep.edu.gr/el/nea-ps-provoli
3. Mathematica.gr. (n.d.). Η γέφυρα των γαϊδάρων. https://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?style=1&f=22&t=71218
4. Merriam-Webster. (n.d.). Asses' bridge. https://www.merriam-webster.com/dictionary/asses%27%20bridge
5. Nektar. (n.d.). Οι επτά σοφοί της αρχαιότητας. http://users.uoa.gr/~nektar/history/1antiquity/seven_wise.htm
6. PlanetMath. (n.d.). Pons Asinorum. https://planetmath.org/ponsasinorum
7. Roy Hess. (2021, Ιανουάριος). What is the Pons Asinorum? [Video]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=ZuOfxB08nXA
8. Roy Hess. (n.d.). Roy Hess Explains Pons Asinorum [Video]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=P2uluHEe_GI&ab_channel=RoyHess
9. Wikipedia. (n.d.). Pons asinorum. https://en.wikipedia.org/wiki/Pons_asinorum