

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Βερούκιος Πέτρος Κόσσυβας Γιώργος Μπαραλός Γιώργος Τσίτσος Βασίλης
Πούλου Μαρία Ελένη Φιλιππάκης Μιχάλης Μητσόπουλος Νίκος Στρεμπέλιας Πάνος

Μαθηματικά

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Επιστημονική Επιτροπή Αξιολόγησης

Συντονιστής / Αξιολογητής	Λουλάκης Μιχαήλ Εν ενεργεία μέλος Διδακτικού Ερευνητικού Προσωπικού Πανεπιστημίου
Αξιολογήτρια	Σταθοπούλου Νικολέτα Εν ενεργεία Εκπαιδευτικός
Αξιολογήτρια	Αργύρη Παναγιώτα Εν ενεργεία Εκπαιδευτικός
Τεχνικός Εμπειρογνώμονας	Γίδας Γεώργιος Πτυχιούχος Πληροφορικής
Επικουρικός Εμπειρογνώμονας	Στάθη Ευθυμία Διπλωματούχος Τεχνολογίας Γραφικών Τεχνών
Υπεύθυνη του μαθήματος / γνωστικού αντικείμενου στο πλαίσιο της Πράξης	Ειρήνη Γεωργάκη, Σύμβουλος Α΄ ΙΕΠ , μέλος της Επιστημονικής Ομάδας Έργου (ΕΟΕ) της Πράξης

Πράξη με τίτλο: «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ 6010165 στο Πρόγραμμα «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή» 2021-2027

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ
Σπυρίδων Δουκάκης
Πρόεδρος του Δ.Σ. του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Υπεύθυνη Πράξης
Πολυξένη Μπίλλα
Σύμβουλος Α΄ του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής
Προϊσταμένη Τμήματος Β΄ Προγραμμάτων Σπουδών και Εκπαιδευτικού Υλικού

Αναπληρώτρια Υπεύθυνη Πράξης
Άννα-Αικατερίνη Λυκούρη
Σύμβουλος Α΄ του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

**«Με τη συγχρηματοδότηση της Ευρωπαϊκής Ένωσης»
και το Πρόγραμμα «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή»**

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Βερύκιος Πέτρος
Κόσυβας Γιώργος
Μπαραλός Γιώργος
Τσίτσος Βασίλης
Πούλου Μαρία Ελένη
Φιλιππάκης Μιχάλης
Μητσόπουλος Νίκος
Στρεμπέλιας Πάνος

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ



ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΥΓΓΡΑΦΗΣ

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ

Βερύκιος Πέτρος

Επιτ. Σχ. Σύμβουλος Μαθηματικών

Κόσσυβας Γιώργος

Σύμβουλος Εκπαίδευσης Μαθηματικών

Μπαραλός Γιώργος

Επιτ. Σχ. Σύμβουλος Μαθηματικών

Τσίτσος Βασίλης

Σύμβουλος Εκπαίδευσης Μαθηματικών

Πούλου Μαρία Ελένη

Επίκουρη Καθηγήτρια Πανεπιστημίου Δυτ. Αττικής

Φιλιππάκης Μιχάλης

Καθηγητής Πανεπιστημίου Πειραιά - ΠΑΠΕΙ

Μητσόπουλος Νίκος

Μαθηματικός Ιδ. Εκπαίδευσης

Στρεμπέλιας Πάνος

Μαθηματικός Ιδ. Εκπαίδευσης

ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ

Μπαραλός Γιώργος

ΣΕΛΙΔΟΠΟΙΗΣΗ

ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΕΞΩΦΥΛΛΟΥ

Παπαδημητρίου Βαρβάρα

ΤΥΠΟΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

Τμήμα επιμέλειας Εκδόσεων Πουκαμισάς

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1: ΔΥΝΑΜΕΙΣ, ΡΗΤΟΙ ΚΑΙ ΑΡΡΗΤΟΙ.....	9
1.1: Ιδιότητες δυνάμεων ρητών αριθμών με εκθέτη θετικό ακέραιο.....	10
1.2: Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη ακέραιο.....	16
1.3: Τυποποιημένη μορφή ρητών αριθμών.....	20
1.4: Υπολογισμός αριθμητικών παραστάσεων.....	25
1.5: Τετράγωνοι αριθμοί και τετραγωνικές ρίζες.....	28
1.6: Ρητοί, άρρητοι αριθμοί και δεκαδικές αναπαραστάσεις τους.....	33
1.7: Πραγματικοί αριθμοί.....	42
1.8: Ανακεφαλαίωση και διεύρυνση της θεματικής ενότητας.....	49
Κεφάλαιο 2: ΑΛΓΕΒΡΑ.....	53
2.1: Γραμμικές αριθμητικές κανονικότητες ρητών αριθμών.....	54
2.2: Αλγεβρικές παραστάσεις.....	64
2.3: Εξίσωση 1ου βαθμού.....	74
2.4: Λύσεις εξίσωσης 1ου βαθμού με τις ιδιότητες της ισότητας.....	79
2.5: Λύση ρεαλιστικών προβλημάτων με εξισώσεις 1ου βαθμού.....	87
2.6: Ανακεφαλαίωση και διεύρυνση της θεματικής ενότητας.....	93
Κεφάλαιο 3: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ.....	97
3.1: Η έννοια της συνάρτησης: πίνακας τιμών και τύπος.....	98
3.2: Καρτεσιανές συντεταγμένες – Γραφική παράσταση συνάρτησης.....	105
3.3: Η συνάρτηση αναλογίας $y = ax$	112
3.4: Η γραμμική συνάρτηση $y = ax + \beta$	119
3.5: Η συνάρτηση της αντίστροφης αναλογίας $y = \frac{\alpha}{x}$	126
3.6: Ανακεφαλαίωση και διεύρυνση της θεματικής ενότητας.....	132
Κεφάλαιο 4: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ.....	137
4.1: Επίκεντρες και εγγεγραμμένες γωνίες.....	138
4.2: Κανονικά πολύγωνα.....	143
4.3: Πυθαγόρειο Θεώρημα.....	149
4.4: Ανακεφαλαίωση και διεύρυνση της θεματικής ενότητας.....	155
Κεφάλαιο 5: ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ.....	157
5.1: Γνωριμία με την έννοια του διανύσματος.....	158
5.2: Ο μετασχηματισμός της μεταφοράς.....	165
5.3: Ο μετασχηματισμός της στροφής.....	174
5.4: Συμμετρία ως προς κέντρο: Η περίπτωση στροφής κατά 180°	180
5.5: Εφαρμογές των μετασχηματισμών.....	184
5.6: Ανακεφαλαίωση και διεύρυνση της θεματικής ενότητας.....	189

Κεφάλαιο 6: ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ.....	193
6.1: Μήκος κύκλου.....	194
6.2: Μήκος τόξου.....	197
6.3: Εμβαδόν επίπεδης επιφάνειας.....	200
6.4: Μονάδες μέτρησης επιφανειών.....	203
6.5: Εμβαδά επίπεδων σχημάτων.....	207
6.6: Εμβαδόν κυκλικού δίσκου.....	214
6.7: Εμβαδόν κυκλικού τομέα.....	217
6.8: Εμβαδόν μεικτόγραμμων σχημάτων.....	221
6.9: Εμβαδόν και Πυθαγόρειο Θεώρημα.....	225
6.10: Ανακεφαλαίωση και διεύρυνση της θεματικής ενότητας.....	228
Κεφάλαιο 7: ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ.....	231
7.1: Απογραφικά Δεδομένα και χρονοδιαγράμματα.....	232
7.2: Θηκογράμματα.....	240
7.3: Μέτρα θέσης και μεταβλητότητας.....	246
7.4: Κριτική ανάγνωση στατιστικών διαγραμμάτων.....	256
7.5: Ανακεφαλαίωση και διεύρυνση της θεματικής ενότητας.....	262
Κεφάλαιο 8: ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ.....	265
8.1: Ασυμβίβαστα ενδεχόμενα.....	266
8.2: Βασική αρχή της απαρίθμησης.....	270
8.3: Απλός προσθετικός νόμος.....	276
8.4: Ανακεφαλαίωση και διεύρυνση της θεματικής ενότητας.....	282
Υποδείξεις – Απαντήσεις Ασκήσεων & Προβλημάτων.....	285
Ευρετήριο Όρων.....	297
Πηγές εικόνων.....	299

ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Το βιβλίο αυτό αποτελεί υλοποίηση των νέων Προγραμμάτων Σπουδών (ΠΣ) για τα Μαθηματικά της Β΄ τάξης Γυμνασίου και κατά τη συγγραφή του λάβαμε υπόψη μας όλες τις σχετικές οδηγίες του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (ΙΕΠ).

Στο βιβλίο αναπτύσσονται κυρίως έργα που συναντούν τις εμπειρίες των μαθητών, ώστε να εμπλέκονται δημιουργικά στην αναζήτηση ιδιοτήτων και σχέσεων, στη δημιουργία διασυνδέσεων καθώς και σε δράσεις διερεύνησης, πειραματισμού και αναστοχασμού σε συνδυασμό με το αντίστοιχο θεωρητικό πλαίσιο.

Για τον σκοπό αυτό παραθέτουμε εισαγωγικές διερευνήσεις σε κάθε ενότητα, οι οποίες χρησιμεύουν ως προκαταβολικοί οργανωτές, διευκολύνουν τον διδακτικό μετασχηματισμό και υποβοηθούνται από πολλές ψηφιακές εφαρμογές και ψηφιακά δομήματα.

Καινοτόμα στοιχεία του βιβλίου είναι:

1. Η έμφαση στην ενεργό εμπλοκή των μαθητών μέσα από ένα μεγάλο πλήθος διερευνήσεων οι οποίες συνδέουν τις υπάρχουσες με τις νέες γνώσεις.
2. Οι ψηφιακές δραστηριότητες οι οποίες παρέχουν ευκαιρίες διερεύνησης, αξιολόγησης, εξάσκησης και διεύρυνσης των νέων γνώσεων με τρόπο ιδιαίτερα εύχρηστο από διδάσκοντες και μαθητές/τριες.
3. Οι πολλές και στοχευμένες εφαρμογές που παρέχουν παραδείγματα επίλυσης ασκήσεων και προβλημάτων περιγράφοντας αναλυτικά τις σχετικές διαδικασίες για την επιτυχή αντιμετώπιση νέων προβλημάτων.
4. Η ποικιλία των προβλημάτων ρεαλιστικού πλαισίου σε συνδυασμό με την εισαγωγή στον κύκλο της μοντελοποίησης.
5. Η παράθεση έργων αξιολόγησης, ψηφιακών κουίζ, ιστορικών αναφορών με σχετικές εργασίες επαναληπτικών ασκήσεων καθώς και επιλεγμένων προβλημάτων με προεκτάσεις.

Ειδικότερα, η υλοποίηση των νέων ΠΣ ως προς τους βασικούς άξονες, περιεχόμενο, μάθηση και διδασκαλία, δομή και οργάνωση, συμπληρωματικό υλικό, διαρθρώνεται ως εξής:

Περιεχόμενο

Για την επίτευξη των Προσδοκώμενων Μαθησιακών Αποτελεσμάτων (ΠΜΑ) υιοθετήθηκε η σύγχρονη αντίληψη ότι στην τάξη των Μαθηματικών, η μάθηση και η διδασκαλία εξελίσσονται τόσο σε ατομικό όσο και σε συλλογικό επίπεδο μέσα σε διερευνητικά περιβάλλοντα μάθησης τα οποία δίνουν τη δυνατότητα δημιουργίας συνδέσεων της γνώσης και των περιεχομένων των Μαθηματικών με την εφαρμογή των εννοιών και τις διαδικασίες τους.

Τα ΠΜΑ παρατίθενται αναλυτικά σε κάθε διδακτική ενότητα προσδιορίζοντας τους επιμέρους στόχους που πρέπει να επιτευχθούν σε αντιστοιχία με τα επιμέρους μαθηματικά περιεχόμενα. Για την αξιολόγηση της επίτευξης των ΠΜΑ παραθέτουμε:

- A. Στο τέλος κάθε ενότητας: Ερωτήσεις αξιολόγησης, Ερωτήσεις κατανόησης, Ασκήσεις και προβλήματα συνδεδεμένα με εμπειρίες των μαθητών/τριών.
- B. Στο τέλος κάθε κεφαλαίου: Ανακεφαλαίωση, Επαναληπτικές ασκήσεις, προβλήματα καθώς και Συνθετικές εργασίες επέκτασης και διεύρυνσης των γνώσεων.
- Γ. Στο τέλος του βιβλίου: Απαντήσεις και υποδείξεις των προτεινόμενων ασκήσεων.

Οι διδακτικές ενότητες και η πρότασή μας για τη σειρά διαχείρισής τους αποτυπώνονται στην ενότητα των περιεχομένων.

Μάθηση και Διδασκαλία

Ως βασική διδακτική αρχή υιοθετήθηκε η μάθηση μέσω της καθοδηγούμενης ανακάλυψης, η οποία έχει ως συνέπεια τη δημιουργία και παράθεση έργων εμπλοκής των μαθητών/τριών, τα οποία λαμβάνουν υπόψη τους τη διεύρυνση της γνωστικής τους δυνατότητας με την παροχή βοήθειας (ζώνη επικείμενης ανάπτυξης).

Κατά τη συγγραφή λάβαμε υπόψη μας βασικά συμπεράσματα της διδακτικής των Μαθηματικών καθώς και των Παιδαγωγικών όπως:

- Τη μάθηση μέσα από τη διερεύνηση και ανακάλυψη των νέων ιδεών με την ενεργό συμμετοχή των μαθητών.
- Τη διαπίστωση ότι η μάθηση και η διδασκαλία εξελίσσονται ταυτόχρονα, τόσο σε ατομικό όσο και σε συλλογικό επίπεδο.
- Την ένταξη πλούσιων έργων μάθησης και ρεαλιστικών προβλημάτων που υπηρετούν μεγάλες ιδέες των Μαθηματικών και υποστηρίζουν συνεργατικές-συμμετοχικές διαδικασίες των μαθητών/τριών, αναπτύσσοντας

τη μαθηματική σκέψη και τη συγκρότηση των μαθηματικών νοημάτων.

- Την υποστήριξη της γνωστικής-ατομικής και της κοινωνικοπολιτισμικής συμμετοχικής προσέγγισης στη μάθηση των Μαθηματικών, τις οποίες θεωρούμε ως συμπληρωματικές και σε συνεχή αλληλεπίδραση.
- Την υποστήριξη διδακτικών στρατηγικών συμπερίληψης και διαφοροποίησης, παραθέτοντας διαφοροποιημένα έργα με ποικίλα πλαίσια αναφοράς.
- Τον καθοριστικό και καίριας σημασίας ρόλο του/της εκπαιδευτικού για τον μετασχηματισμό της διδακτέας ύλης σε διδάξιμη στο εκάστοτε πλαίσιο αναφοράς.

Δομή και Οργάνωση

Η διδακτέα ύλη των ενοτήτων επιμερίζεται σε κεφάλαια και αρθρώνεται σε υποενότητες.

Κάθε υποενότητα περιέχει:

- Διατύπωση μαθησιακών στόχων (ΠΜΑ)
- Διερευνήσεις με στόχο την ανάκληση πρότερων γνώσεων και την αναγνώριση της ανάγκης διεύρυνσής τους για την επίλυση νέων προβλημάτων.
- Ψηφιακά δομήματα και χειραπτικά μέσα τα οποία ενθαρρύνουν την εμπλοκή των μαθητών/τριών και βοηθούν τη διερεύνηση.
- Ανάλυση του μαθηματικού περιεχομένου.
- Εφαρμογές του μαθηματικού περιεχομένου.
- Ερωτήσεις κατανόησης και αξιολόγησης.
- Ασκήσεις και προβλήματα για την αξιολόγηση της επίτευξης των μαθησιακών στόχων.

Η ανάπτυξη της ύλης πλαισιώνεται με:

- Συμπληρωματικό υλικό που αναπτύσσεται παράλληλα ως ψηφιακό, με τη μορφή γραμμωτού κώδικα και είναι διαθέσιμο μέσω διαδικτύου.
- Ανακεφαλαίωση - Επανάληψη σε κάθε κεφάλαιο με συνθετικές εργασίες.
- Επαναληπτικές ασκήσεις και προβλήματα.

Συμπληρωματικό υλικό

Το συμπληρωματικό υλικό αποτελεί βασική συνιστώσα του βιβλίου και περιλαμβάνει:

- Ψηφιακά δομήματα τα οποία δίνουν τη δυνατότητα για ποικίλες επί πλέον διερευνήσεις, δημιουργία εικασιών, εξάσκηση και αξιολόγηση επίτευξης γνωστικών στόχων. Αναπτύσσονται παράλληλα με το μαθηματικό περιεχόμενο και μπορούν να χρησιμοποιηθούν επιλεκτικά από τους διδάσκοντες και από τους μαθητές και τις μαθήτριες.
- Ιστορικά σημειώματα τα οποία συνδυάζονται με εργασίες που αποσκοπούν στην ανάδειξη της συνοχής και της διαχρονικής εξέλιξης των μαθηματικών εννοιών.
- Ευκαιρίες εξοικείωσης με το περιβάλλον χρήσιμων λογισμικών.
- Ασκήσεις αξιολόγησης για περισσότερη άσκηση και εμπάθυνση στις σχετικές έννοιες.

Πιστεύουμε ότι κανένα έργο δεν μπορεί να υλοποιηθεί αποτελεσματικά χωρίς την ανεκτίμητη βοήθεια των συνάδελφων εκπαιδευτικών της τάξης, οι οποίοι είμαστε βέβαιοι ότι θα ζωντανέψουν τις ιδέες που εμπεριέχονται στο βιβλίο αυτό.

Προσπαθήσαμε για το καλύτερο αλλά αυτό δεν μας απαλλάσσει από όποια ενδεχόμενη αστοχία, για την οποία αναλαμβάνουμε την αποκλειστική ευθύνη. Ευχαριστούμε εκ των προτέρων όποιον/α επικοινωνήσει μαζί μας με προτάσεις για τη βελτίωση του βιβλίου.

Οι Συγγραφείς



Διδακτική διαχείριση και
μαθηματική
δραστηριότητα μαθητών



Πλοήγηση στο συμπληρωματικό υλικό.
Διασύνδεση έργων με ΠΣ.

Αριθμητικός Συλλογισμός

Κεφάλαιο

1

ΔΥΝΑΜΕΙΣ, ΡΗΤΟΙ ΚΑΙ ΑΡΡΗΤΟΙ

Ιδιότητες των δυνάμεων

Τυποποιημένη μορφή αριθμών

Τετραγωνική ρίζα

Ρητοί αριθμοί

Άρρητοι αριθμοί



Ραφαήλ «Η σχολή των Αθηνών» (1509 –1511).

Στο Κεφάλαιο αυτό θα μάθουμε:

- Να αξιοποιούμε τις ιδιότητες των δυνάμεων στους υπολογισμούς.
- Να εφαρμόζουμε την τυποποιημένη μορφή μικρών αριθμών στην επίλυση προβλημάτων.
- Να αναγνωρίζουμε την αναγκαιότητα εισαγωγής και χρήσης των τετραγωνικών ριζών.
- Να αποκτήσουμε μία πρώτη γνωριμία με τους άρρητους αριθμούς.
- Να διακρίνουμε τις δεκαδικές αναπαραστάσεις ρητών και άρρητων αριθμών.
- Να υπολογίζουμε ρητές προσεγγίσεις άρρητων αριθμών.

Να μελετήσετε το
Ιστορικό σημείωμα με
τίτλο: «Τα Μαθημα-
τικά και οι Αρχαίοι
Έλληνες».



1.1

Ιδιότητες δυνάμεων ρητών αριθμών με εκθέτη θετικό ακέραιο

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

Να διερευνούν τις ιδιότητες των δυνάμεων με βάση ρητό και εκθέτη θετικό ακέραιο, να τις διατυπώνουν συμβολικά και να τις αιτιολογούν χρησιμοποιώντας τον ορισμό της δύναμης.



Διερεύνηση 1. Γνωριμία με τις ιδιότητες των δυνάμεων.

Εργασία μαθητών κατά ζεύγη.

Αφού πρώτα συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα να δημιουργήσετε στο τετράδιό σας έναν άλλο πίνακα με 3 παραδείγματα για κάθε περίπτωση και να τον συμπληρώσετε. Με βάση τις ειδικές περιπτώσεις να εικάσετε τους γενικούς κανόνες.

Ιδιότητες	Παράδειγμα	Ανάλυση	Ισότητα με δυνάμεις	Γενίκευση
Γινόμενο δυνάμεων με την ίδια βάση	$2^2 \cdot 2^4$	$2^2 \cdot 2^4 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2+4=6 \text{ παράγοντες}}$	$2^2 \cdot 2^4 = 2^6$	$\alpha^u \cdot \alpha^v =$
Πηλίκο δυνάμεων με την ίδια βάση	$7^4 : 7^2$	$\frac{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}{7 \cdot 7}$	$\alpha^u : \alpha^v =$
Ύψωση δύναμης σε δύναμη	$(3^2)^2$	$(\alpha^u)^v =$
Γινόμενο δυνάμεων με τον ίδιο εκθέτη	$(3 \cdot 5)^2$	$(\alpha \cdot \beta)^v =$
Πηλίκο δυνάμεων με τον ίδιο εκθέτη	$\left(\frac{2}{7}\right)^3$	$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^v =$

Αιτιολογούμε πώς σκεφτήκαμε σε κάθε περίπτωση.



Διερεύνηση 2. Αναγνώριση και αιτιολόγηση των ιδιοτήτων των δυνάμεων.

Εργασία μαθητών κατά ζεύγη.

α) Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τις δυνάμεις του 2.

2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8
2	4	8	16	32	64	128	256

Με χρήση του πίνακα να γράψετε με τη μορφή δυνάμεων τους αριθμούς: $A = 4 \cdot 32$, $B = 256 : 32$, $\Gamma = 16^2$

β) Στον παρακάτω πίνακα να συμπληρώσετε με τους κατάλληλους αριθμούς τους εκθέτες των δυνάμεων για να ισχύουν οι ισότητες. Να αιτιολογήσετε.

Ισότητες με δυνάμεις		
$7^{\dots} \cdot 7^4 = 7^6$	$4^5 = 2^{\dots}$	$5^6 : 5^4 = 5^{\dots}$
$3^3 \cdot 4^3 = 12^{\dots}$	$(6^{\dots})^3 = 6^6$	$5^2 - 3^2 = 2^{\dots}$

γ) Η Εύα, η Λυδία, ο Περικλής και ο Νεκτάριος διατύπωσαν τους ακόλουθους ισχυρισμούς με δυνάμεις:

Μαθήτρια	Ισχυρισμός	Μαθητής	Ισχυρισμός
Εύα	$2^4 = 2 \cdot 4 = 8$	Περικλής	$5^3 \cdot 4^3 = 20^6$
Λυδία	$(-4)^2 = -16$	Νεκτάριος	$(7^2)^3 = 7^{2+3} = 7^5$

Ποιοι ισχυρισμοί είναι λανθασμένοι και γιατί;



Να ανοίξετε τον σύνδεσμο και να διερευνήσετε τις ιδιότητες των δυνάμεων ρητών αριθμών.

Μαθηματικές Έννοιες και Διεργασίες Μάθησης

Στην Α΄ Γυμνασίου μάθαμε ότι:

Ρητός αριθμός λέγεται κάθε αριθμός που μπορεί να γραφτεί στη μορφή $\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ, ν ακέραιοι και $\nu \neq 0$.

Οι ρητοί αριθμοί γράφονται με μορφή δεκαδικών ή περιοδικών δεκαδικών αριθμών:

- Οι δεκαδικοί αριθμοί έχουν πεπερασμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων π.χ. $-\frac{5}{8} = -0,625, \frac{3}{50} = 0,06$.
- Οι περιοδικοί δεκαδικοί αριθμοί είναι απειροψήφιοι και μπορούν να αναγνωριστούν από την περίοδο, δηλαδή το επαναλαμβανόμενο τμήμα ψηφίων π.χ. $\frac{7}{9} = 0,777... = 0,7\bar{7}, \frac{5}{11} = 0,4545... = 0,4\bar{5}$.

Ένα γινόμενο ρητών αριθμών με ίσους παράγοντες που επαναλαμβάνονται μπορεί να γραφτεί σε μορφή δύναμης.

Για παράδειγμα, το γινόμενο των αριθμών $\frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7}$ μπορεί να αντικατασταθεί με τη σύντομη έκφραση $(\frac{2}{7})^3$.

Γενικά

Δύναμη με βάση ρητό αριθμό α και εκθέτη φυσικό αριθμό n , με $n > 1$, ονομάζεται το γινόμενο n παραγόντων ίσων προς τον α και σημειώνεται α^n , δηλαδή:

$$\alpha^n = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha \cdot \alpha}_n$$

Για $n = 1, \alpha^1 = \alpha$.

Η δύναμη α^n διαβάζεται **νιοστή δύναμη του α ή α στη νιοστή**. Λέμε ακόμα ότι υψώνουμε τον α στη νιοστή.

Παραδείγματα:

$$\frac{5}{3} \cdot \frac{5}{3} = (\frac{5}{3})^2, (-0,5) \cdot (-0,5) \cdot (-0,5) = (-0,5)^3, (-2)^1 = -2, (-\frac{3}{7})^1 = -\frac{3}{7}$$

Επίσης:

- Η δύναμη $\alpha^2 = \alpha \cdot \alpha$ λέγεται και **τετράγωνο** του α ή **« α τετράγωνο»** επειδή δείχνει το εμβαδόν τετραγώνου πλευράς α .
- Η δύναμη $\alpha^3 = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha$ λέγεται και **κύβος** του α ή **« α κύβος»** διότι παριστάνει τον όγκο κύβου ακμής α .

Ιδιότητες των δυνάμεων με βάση ρητό και εκθέτη θετικό ακέραιο

• **Γινόμενο και πηλίκο δυνάμεων με την ίδια βάση**

Για να πολλαπλασιάσουμε δυνάμεις με βάση τον ίδιο ρητό αριθμό, γράφουμε τις δυνάμεις ως γινόμενα. Στο πρώτο παράδειγμα, η βάση 3 εμφανίζεται ως παράγοντας $4 + 2 = 6$ φορές. Άρα το γινόμενο γράφεται 3^6 .

$$3^4 \cdot 3^2 = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{4+2=6 \text{ παράγοντες}} = 3^{4+2} = 3^6$$

$$2^8 : 2^3 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 2^{8-3}$$

Στο δεύτερο παράδειγμα, κατά τη διαίρεση δυνάμεων με την ίδια βάση τελικά μένουν 5 παράγοντες του 2.

Γενικά

Αν α μη μηδενικός ρητός αριθμός και μ, ν θετικοί ακέραιοι, τότε:

$$\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu} \text{ και } \alpha^\mu : \alpha^\nu = \frac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu} = \alpha^{\mu-\nu}, \mu > \nu$$



Με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής να διερευνήσετε τον ορισμό της δύναμης ρητού αριθμού σε θετικό ακέραιο εκθέτη.

Παρατήρηση:

- Όταν πολλαπλασιάζουμε δυνάμεις που έχουν την ίδια βάση, η βάση παραμένει και οι εκθέτες προστίθενται.
- Όταν διαιρούμε δυνάμεις που έχουν την ίδια βάση, η βάση διατηρείται και οι εκθέτες αφαιρούνται, βάζοντας ως εκθέτη τη διαφορά του εκθέτη του διαιρέτη από τον εκθέτη του διαιρετέου.

• Ύψωση δύναμης σε εκθέτη

Παρατηρούμε ότι: $(5^3)^2 = 5^3 \cdot 5^3 = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{3 \cdot 2 = 6 \text{ παράγοντες}} = 5^{3 \cdot 2} = 5^6$, δηλαδή υψώνοντας τη δύναμη 5^3 στον εκθέτη 2 είναι σαν να υψώνουμε τη

βάση 5 στο γινόμενο των εκθετών.

Γενικά

Αν α μη μηδενικός ρητός αριθμός και μ, ν θετικοί ακέραιοι, τότε: $(a^μ)^ν = a^{μ \cdot ν}$

Παρατήρηση:

Όταν υψώνουμε δύναμη σε εκθέτη, η βάση διατηρείται και οι εκθέτες πολλαπλασιάζονται.

• Γινόμενο και πηλίκο δυνάμεων με τον ίδιο εκθέτη

Παρατηρούμε ότι:

$$2^3 \cdot 5^3 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3 \text{ παράγοντες}} \cdot \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5}_{3 \text{ παράγοντες}} = \underbrace{(2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5)}_{3 \text{ παράγοντες}} = (2 \cdot 5)^3 = 10^3$$
$$\frac{4^2}{3^2} = \frac{\overbrace{4 \cdot 4}^{2 \text{ παράγοντες}}}{\underbrace{3 \cdot 3}_{2 \text{ παράγοντες}}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} = \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

Γενικά

Αν α, β μη μηδενικοί ρητοί αριθμοί και μ, ν θετικοί ακέραιοι, τότε:

$$a^μ \cdot b^μ = (a \cdot b)^μ \quad \text{και} \quad \frac{a^μ}{b^μ} = \left(\frac{a}{b}\right)^μ$$

Παρατήρηση:

- Όταν πολλαπλασιάζουμε δυνάμεις που έχουν τον ίδιο εκθέτη, ο εκθέτης διατηρείται και οι βάσεις πολλαπλασιάζονται.
- Όταν διαιρούμε δυνάμεις που έχουν τον ίδιο εκθέτη, ο κοινός εκθέτης διατηρείται και οι βάσεις διαιρούνται.



Με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής να διερευνήσετε τις ιδιότητες του γινομένου και του πηλίκου δυνάμεων στον ίδιο εκθέτη.

Εφαρμογή 1

α) Να γράψετε τις παραστάσεις με μορφή μίας δύναμης:

i) $(-2)^3 \cdot (-2)^4$ ii) $2,5^3 \cdot 3,2^3$ iii) $(-27)^3 : (-3)^3$

β) Να βρείτε τα πρόσημα των δυνάμεων του (Α) ερωτήματος.



Απάντηση

α) i) Έχουμε: $(-2)^3 \cdot (-2)^4 = (-2)^{3+4} = (-2)^7$ ii) $2,5^3 \cdot 3,2^3 = (2,5 \cdot 3,2)^3 = 8^3$

iii) $(-27)^3 : (-3)^3 = [(-3)^3 : (-3)^3] = [(-3)^2]^3 = (-3)^6$

β) i) $(-2)^7 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = -2^7 < 0$

ii) $8^3 = (+8)^3 = (+8) \cdot (+8) \cdot (+8) = +512 > 0$

iii) $(-3)^6 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = +(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = +3^6 > 0$

Σημείωση:

- Όταν ένας θετικός ρητός αριθμός υψώνεται σε άρτια ή περιττή δύναμη, τότε το αποτέλεσμα είναι πάντοτε θετικός αριθμός.
- Όταν ένας αρνητικός ρητός αριθμός υψώνεται σε άρτια δύναμη 2, 4, 6, ... το αποτέλεσμα είναι θετικός αριθμός και όταν υψώνεται σε περιττή δύναμη 1, 3, 5, ... το αποτέλεσμα είναι αρνητικός αριθμός.



Με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής να διερευνήσετε τον ορισμό της δύναμης ρητού αριθμού σε ακέραιο εκθέτη.



Εφαρμογή 2

- α) Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $A = \left(-\frac{1}{7}\right)^{10} \cdot 7^{10}$ και $B = \frac{(8^2)^4}{(-2)^6 \cdot (-4)^6}$.
- β) Να διατάξετε τους αριθμούς από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο:
 $A = -3^2, B = (-3)^2, \Gamma = 2^3, \Delta = (-2)^3, E = -2^3$.

Απάντηση

- α) Πρώτα υπολογίζουμε τις δυνάμεις χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες.
- $$A = \left(-\frac{1}{7}\right)^{10} \cdot 7^{10} = \left(-\frac{1}{7} \cdot 7\right)^{10} = (-1)^{10} = 1.$$
- $$B = \frac{(8^2)^4}{(-2)^6 \cdot (-4)^6} = \frac{8^8}{[(-2) \cdot (-4)]^6} = \frac{8^8}{8^6} = 8^{8-6} = 8^2 = 64. \text{ Άρα } B > A.$$
- β) $A = -3^2 = -9, B = (-3)^2 = 9, \Gamma = 2^3 = 8, \Delta = (-2)^3 = -8, E = -2^3 = -8$.
 Άρα: $A < \Delta = E < \Gamma < B$.



Εφαρμογή 3

Να γράψετε ως δύναμη ενός μόνο ρητού τα γινόμενα:

$$A = 3^4 \cdot 4^2 \cdot 625 \quad B = \left(\frac{2}{7}\right)^2 \cdot \left(-\frac{4}{49}\right)^4 \cdot \frac{8}{343}$$

Απάντηση

$$A = 3^4 \cdot 4^2 \cdot 625 = 3^4 \cdot (2^2)^2 \cdot 5^4 = 3^4 \cdot 2^4 \cdot 5^4 = (3 \cdot 2 \cdot 5)^4 = 30^4.$$

$$B = \left(\frac{2}{7}\right)^2 \cdot \left(-\frac{4}{49}\right)^4 \cdot \frac{8}{343} = \left(\frac{2}{7}\right)^2 \cdot \left[-\left(\frac{2}{7}\right)^2\right]^4 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^3 = \left(\frac{2}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^8 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^3 = \left(\frac{2}{7}\right)^{2+8+3} = \left(\frac{2}{7}\right)^{13}.$$



Εφαρμογή 4. Μοντελοποίηση πραγματικής ζωής

Ένα γιγαμπάιτ (GB) αποθηκευτικού χώρου είναι 2^{30} μπάιτς (bytes). Ένας υπολογιστής με συνολικό χώρο αποθήκευσης 64 GB έχει ελεύθερο χώρο 16 GB. Πόσα bytes συνολικού αποθηκευτικού χώρου διαθέτει;

Απάντηση

Έχουμε $64 = 2^6$ GB. Για να βρούμε τον συνολικό αριθμό των bytes πολλαπλασιάζουμε τον αριθμό των bytes ενός GB επί τον αριθμό των GB. Έχουμε:

$$2^{30} \cdot 2^6 = 2^{30+6} = 2^{36} \text{ bytes}$$

Επομένως ο υπολογιστής έχει 2^{36} bytes συνολικού αποθηκευτικού χώρου.

Ερωτήσεις για Αξιολόγηση

- Γνωρίζοντας ότι $2^{10} = 1024$, να χρησιμοποιήσετε αυτό το αποτέλεσμα για να βρείτε: **α)** 2^{11} **β)** 2^{12} **γ)** 2^9 .
- Η δύναμη 3^2 είναι ίση με:
A. $2 \cdot 2 \cdot 2$ **B.** $3 \cdot 2$ **Γ.** $3 \cdot 3$ **Δ.** $3 + 2$
- Η δύναμη $(-2)^4$ είναι ίση με:
A. -16 **B.** 8 **Γ.** -8 **Δ.** 16
- Η δύναμη $(3^4)^2$ είναι ίση με:
A. $3 \cdot 4 \cdot 2$ **B.** 12^2 **Γ.** 3^2 **Δ.** 3^8
- Η δύναμη $(-1)^6$ είναι ίση με:
A. 6 **B.** -6 **Γ.** 1 **Δ.** -1
- Ο όγκος ενός κύβου με ακμή 6 cm είναι ίσος με:
A. 6^2 **B.** 6^3 **Γ.** 6^4 **Δ.** 6^6
- Ποια από τις ακόλουθες αριθμητικές παραστάσεις είναι ίση με $2^3 \cdot 3^4$;
A. $3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$ **B.** $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ **Γ.** $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ **Δ.** $6 \cdot 12$
- Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς είναι θετικός:
A. -2^2 **B.** $(-5)^3$ **Γ.** $-(-7)^4$ **Δ.** $-(-1)^7$
- Ποια από τις ακόλουθες ισότητες δεν είναι ιδιότητα των δυνάμεων:
A. $\alpha^m \cdot \alpha^n = \alpha^{m+n}$ **B.** $\alpha^n \cdot \beta^n = (\alpha \cdot \beta)^n$
Γ. $(\alpha^m)^n = \alpha^{m \cdot n}$ **Δ.** $\alpha^m + \alpha^n = \alpha^{m+n}$



Να ανοίξετε τον σύνδεσμο και να απαντήσετε στις ερωτήσεις αξιολόγησης για την έννοια της δύναμης ρητού αριθμού σε εκθέτη θετικό ακέραιο.



Να κάνετε την Εργασία με προεκτάσεις με τίτλο: «Καταναλωτισμός και Τέχνη».



Ασκήσεις και Προβλήματα

- Να γράψετε τις παραστάσεις με μορφή μίας δύναμης:
α) $2^3 \cdot 2^4$ **β)** $(-3) \cdot (-3)^2 \cdot (-3)^5$
γ) $2^4 \cdot 1,5^4$ **δ)** $x^4 \cdot x^{11}$
ε) $y \cdot y^3 \cdot x^2$ **στ)** $(z^3)^5$.
- Να γράψετε τα παρακάτω πηλικά με μορφή μίας δύναμης:
α) $\frac{7^{10}}{7^4}$ **β)** $\frac{(-3)^{17}}{(-3)^{16}}$ **γ)** $\frac{5^9}{5}$
δ) $(-0,9)^5 : 0,45^5$ **ε)** $\alpha^{10} : \alpha^7$ **στ)** $\frac{y^7}{y^5}$

3 Μαγικά τετράγωνα

Στα τετράγωνα Α, Β και Γ τα γινόμενα κάθε γραμμής, στήλης και διαγωνίου είναι ίσα.

Να αντιγράψετε τα τετράγωνα στο τετράδιό σας και να τα συμπληρώσετε.

A	B	Γ
1	1	3^3
2^4		3^8
2^3	5	3
	5^8	1
	5^3	

- Να υπολογίσετε τις τιμές των αριθμητικών παραστάσεων:
α) $(-5)^7 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^7$ **β)** $4^3 : 6^3$
γ) $\left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot 15^2$ **δ)** $3^4 : 6^4$

5 Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

x	(x + 1)2	x3 + 1	x2 + 2 (-x)5
4	(4+1) ² = 5 ² = 25		
-4		-63	
0,1			0,00998

6 Μία μπάλα αφήνεται να πέσει από ύψος 162 cm. Ύστερα από κάθε αναπήδηση φθάνει στα $\frac{2}{3}$ του προηγούμενου ύψους της. Να βρείτε το ύψος στο οποίο θα φτάσει η μπάλα μετά την 4η αναπήδηση.

7 **Εργασία μαθητών κατά ζεύγη ή σε μικρές ομάδες.** Ένα χωράφι μηδικής είναι ορθογώνιο μήκους 10⁴ m και πλάτους 10³ m.

α) Να γράψετε δύο αριθμητικές παραστάσεις, μία για το εμβαδόν και μία για την περίμετρο του χωραφιού, και να τις υπολογίσετε.



β) Για ένα άλλο ορθογώνιο χωράφι με το ίδιο εμβαδόν να βρείτε τις πιθανές διαστάσεις αν τα μήκη των πλευρών του είναι δυνάμεις του 10. Για κάθε τέτοιο χωράφι να βρείτε την περίμετρό του.

γ) Να εξηγήσετε γιατί οι ιδιότητες των δυνάμεων είναι χρήσιμες για την επίλυση προβλημάτων εμβαδών, αλλά όχι περιμέτρων.

8 Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τις τιμές των δυνάμεων του 7. Να γράψετε τους παρακάτω αριθμούς χρησιμοποιώντας δυνάμεις του 7:

α) 49 · 2401, β) 16807 : 343, γ) 343².

7 ¹	7 ²	7 ³	7 ⁴	7 ⁵	7 ⁶
7	49	343	2401	16807	117649

9 Να εφαρμόσετε τις ιδιότητες των δυνάμεων για να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

$$A = \frac{(3^3 \cdot 5^4 \cdot 2^2)^2}{5^2 \cdot 3^7} \cdot \frac{3^6 \cdot 5^2}{5^5 \cdot 3^2 \cdot 2^3}$$

$$\text{και } B = \frac{11^3 \cdot 7^5 \cdot 2^2}{7^3 \cdot 11^7} \cdot \frac{(11^2 \cdot 7^3 \cdot 2)^4}{7^6 \cdot 11 \cdot 2^3}$$

10 Ένας σεισμός μεγέθους 3,0 βαθμών της κλίμακας Ρίχτερ είναι 10² φορές ισχυρότερος από έναν σεισμό μεγέθους 1,0. Ένας σεισμός μεγέθους 8,0 βαθμών της κλίμακας Ρίχτερ είναι 10⁷ φορές ισχυρότερος από έναν σεισμό μεγέθους 1,0. Πόσες φορές ισχυρότερος είναι ένας σεισμός μεγέθους 8,0 από έναν σεισμό μεγέθους 3,0;

11 Να γράψετε τους παρακάτω αριθμούς με τη μορφή δύο δυνάμεων όπως στο παράδειγμα: 625 = 25² = 5⁴.

α) 16, β) 64, γ) 81, δ) 10.000, ε) 256.

12 **Σωστό ή λάθος.** Δίνεται: $\left(\frac{4}{3}\right)^{50} \cdot 0,75^{51} = \frac{3}{4}$. Είναι σωστό ή λάθος; Να αιτιολογήσετε.

13 **Ανοιχτό πρόβλημα.** Ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός που μπορούμε να δημιουργήσουμε με τρία 2;

14 **Εργασία ετεροαξιολόγησης.** Να γράψετε ως δύναμη ενός μόνο ρητού αριθμού το γινόμενο:

$$A = \left(-\frac{4}{9}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{8}{27}$$

Να ελέγξετε το αποτέλεσμα σας με το αποτέλεσμα του συμμαθητή σας;

Να μελετήσετε το
Ιστορικό σημείωμα
με τίτλο:
«Ο Αρχιμήδης και
οι δυνάμεις».



1.2 Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη ακέραιο

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

Να επεκτείνουν τον ορισμό και τις ιδιότητες της δύναμης στην περίπτωση του ακέραιου εκθέτη.



Διερεύνηση 1

Εργασία μαθητών ατομικά ή κατά ζεύγη.

α) Να συμπληρώσετε τα κλάσματα:

i. $\frac{3}{3} = \dots$ ii. $\frac{-2}{-2} = \dots$ iii. $\frac{\alpha^5}{\alpha^5} = \dots$ ($\alpha \neq 0$)

β) Αν υποθέσουμε ότι η ιδιότητα του πηλίκου δυνάμεων με την ίδια βάση ισχύει και όταν οι εκθέτες είναι ίσοι, τότε:

$\frac{\alpha^5}{\alpha^5} = \alpha^0$; ($\alpha \neq 0$). Να εξηγήσετε την απάντησή σας.

γ) Από τα (α) και (β) τι συμπεραίνετε για τη δύναμη α^0 με $\alpha \neq 0$;

δ) Ο Γιάννης ισχυρίζεται ότι $77^0 = 77$. Συμφωνείτε; Ναι ή όχι και γιατί;



Διερεύνηση 2. Δύναμη με ακέραιο εκθέτη.

Εργασία μαθητών ατομικά ή κατά ζεύγη.

α) Η Αντιγόνη βρήκε $\frac{5^2}{5^4} = \frac{1}{5^2}$. Είναι σωστό το αποτέλεσμα; Αν ναι, γιατί;

β) Η Μυρσίνη έγραψε την ισότητα: $\frac{5^2}{5^4} = 5^{-2}$. Αν είναι σωστή, τι συμπεραίνετε από τη σύγκριση των δύο αποτελεσμάτων;

Εκθετική μορφή	5^4	5^3	5^2	5^1	5^0	5^{-1}	5^{-2}	5^{-3}	5^{-4}
Φυσικός αριθμός ή κλάσμα	625						$\frac{1}{25} = \frac{1}{5^2}$		



γ) Να συμπληρώσετε τον πίνακα. Πώς συνδέονται οι δυνάμεις σε αρνητικούς εκθέτες της πρώτης σειράς με τα αντίστοιχα αποτελέσματα της δεύτερης;

δ) Πώς μπορούμε να γράψουμε διαφορετικά τους αριθμούς 5^{-5} και 5^{-6} ;

ε) Να συμπληρώσετε τα κενά στους εκθέτες των δυνάμεων: $3^5 : 3^{\dots} = 3^{\dots} = \frac{1}{3}$ και $2^3 : 2^{\dots} = 2^{\dots} = \frac{1}{2^6}$.

Συζητάμε στην τάξη και αιτιολογούμε τον ορισμό της δύναμης ρητού αριθμού σε ακέραιο εκθέτη.

Μαθηματικές Έννοιες και Διεργασίες Μάθησης

Δύναμη ρητού αριθμού με ακέραιο εκθέτη

Παρατηρούμε ότι:

$$\frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2, \quad \frac{2^5}{2^4} = 2^{5-4} = 2^1, \quad \frac{2^5}{2^5} = 1, \quad \frac{2^5}{2^6} = \frac{2^5}{2^5 \cdot 2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{2^5}{2^7} = \frac{2^5}{2^5 \cdot 2^2} = \frac{1}{2^2} \text{ κ.λπ.}$$

Να διερευνήσετε τη δύναμη ρητού αριθμού σε ακέραιο εκθέτη με τη βοήθεια Υπολογιστικών Φύλλων Excel.



Θεωρώντας ότι $2^0 = 1$, $\frac{1}{2} = 2^{-1}$, $\frac{1}{2^2} = 2^{-2}$ κ.λπ., τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα $\frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}} = \alpha^{\mu-\nu}$ όχι μόνο για $\mu > \nu$ αλλά για οποιουδήποτε ακέραιους εκθέτες μ, ν γράφοντας:

$$\frac{2^5}{2^5} = 2^{5-5} = 2^0 = 1, \quad \frac{2^5}{2^6} = 2^{5-6} = 2^{-1} = \frac{1}{2}, \quad \frac{2^5}{2^7} = 2^{5-7} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2}$$

Οδηγούμαστε έτσι στους ακόλουθους ορισμούς:

Κάθε ρητός αριθμός διαφορετικός από το μηδέν με εκθέτη μηδέν είναι ίσος με 1, δηλαδή: $\alpha^0 = 1, \alpha \neq 0$

Αν α ρητός αριθμός διαφορετικός από το μηδέν και ν ακέραιος, τότε: $\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^{\nu}}$

-1	$\alpha^3 = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha$	$):\alpha$
-1	$\alpha^2 = \alpha \cdot \alpha$	$):\alpha$
-1	$\alpha^1 = \alpha$	$):\alpha$
-1	$\alpha^0 = 1$	$):\alpha$
-1	$\alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha}$	$):\alpha$
-1	$\alpha^{-2} = \frac{1}{\alpha \cdot \alpha} = \frac{1}{\alpha^2}$	$):\alpha$
-1	$\alpha^{-3} = \frac{1}{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha} = \frac{1}{\alpha^3}$	$):\alpha$

Μία διαδικασία γενίκευσης φαίνεται στο πλαίσιο αριστερά. Παρατηρούμε ότι αν μειώνουμε διαδοχικά τον εκθέτη κατά 1, τότε αντιστοίχως διαιρούμε με τον αριθμό α. Συνεχίζουμε τη διαδικασία για το μηδέν και για αρνητικούς εκθέτες.

Παραδείγματα:

$$2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{16} \quad (-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{(-2) \cdot (-2) \cdot (-2)} = -\frac{1}{8}$$

$$\frac{3^6}{3^8} = 3^{6-8} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} \quad 7^{-1} = \frac{1}{7^1} = \frac{1}{7}$$



Εφαρμογή 1

α) Αν α, β ακέραιοι με, $\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$, να αιτιολογήσετε την ισότητα:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu}$$

β) Να αποδείξετε ότι τα ακόλουθα ζεύγη αριθμών είναι αντίστροφοι.

- i. 5^{-3} και 5^3 ii. α^{ν} και $\alpha^{-\nu}$, α ακέραιος με $\alpha \neq 0$



Απάντηση

α) $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \frac{1}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu}} = \frac{1}{\frac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}}} = \frac{\beta^{\nu}}{\alpha^{\nu}} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu}$

β) Δύο αριθμοί είναι αντίστροφοι όταν το γινόμενό τους είναι 1.

i. Είναι: $5^3 \cdot 5^{-3} = 5^3 \cdot \frac{1}{5^3} = \frac{5^3}{5^3} = 1$. ii. Είναι: $\alpha^{\nu} \cdot \alpha^{-\nu} = \alpha^{\nu} \cdot \frac{1}{\alpha^{\nu}} = \frac{\alpha^{\nu}}{\alpha^{\nu}} = 1$.



Με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής να διερευνήσετε τον ορισμό της δύναμης ρητού αριθμού σε ακέραιο εκθέτη.



Εφαρμογή 2

Να γράψετε με μορφή μίας δύναμης:

- α) $6^4 \cdot 6^{-7}$ β) $\alpha^5 : \alpha^{-2}, \alpha \neq 0$ γ) $(-4)^{-6} \cdot 0,5^{-6}$ δ) $2,5^{-4} : 0,5^{-4}$ ε) $(8^2)^{-5}$

Απάντηση

α) Διατηρούμε τη βάση 6 και προσθέτουμε τους εκθέτες: $4 + (-7) = -3$. Έχουμε: $6^4 \cdot 6^{-7} = 6^{4+(-7)} = 6^{-3}$

β) Διατηρούμε τη βάση α και αφαιρούμε τους εκθέτες: $5 - (-2) = 7$. Έχουμε: $\alpha^5 : \alpha^{-2} = \alpha^{5-(-2)} = \alpha^7$

γ) Διατηρούμε τον κοινό εκθέτη -6 και πολλαπλασιάζουμε τις βάσεις: $-4 \cdot 0,5 = -2$.

Έχουμε: $(-4)^{-6} \cdot 0,5^{-6} = (-4 \cdot 0,5)^{-6} = (-2)^{-6}$

δ) Διατηρούμε τον κοινό εκθέτη -4 και διαιρούμε τις βάσεις: $(2,5) : 0,5 = 5$. Έχουμε: $2 \cdot 5^{-4} : 0,5^{-4} = (2 \cdot 5 : 0,5)^{-4} = 5^{-4}$

ε) Διατηρούμε τη βάση 8 και πολλαπλασιάζουμε τους εκθέτες: $2 \cdot (-5) = -10$. Έχουμε: $(8^2)^{-5} = 8^{2 \cdot (-5)} = 8^{-10}$.



Να ανοίξετε τον σύνδεσμο και να απαντήσετε στις ερωτήσεις αξιολόγησης για την έννοια της δύναμης ρητού αριθμού σε ακέραιο εκθέτη.

Ερωτήσεις για Αξιολόγηση

- 1 Να εξηγήσετε τον ρόλο του πλην (-) στις δυνάμεις $(-3)^2$ και 3^{-2} .
- 2 Ισχύει η ισότητα $(x^3)^{-2} = (x^{-2})^3$; Να αιτιολογήσετε.
- 3 Ο αριθμός -1 είναι ίσος με:
Α. τον αντίθετό του Β. τον αντίστροφο του Γ. τον $(-1)^0$ Δ. τον 1^{-1}
- 4 Η δύναμη 5^{-3} είναι ίση με:
Α. -15 Β. $(-5)^3$ Γ. $5 - 3$ Δ. $\frac{1}{5 \cdot 5 \cdot 5}$
- 5 Η δύναμη 7^0 είναι ίση με:
Α. 0 Β. 8 Γ. 1 Δ. 7
- 6 Το γινόμενο $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$ είναι ίσο με:
Α. $-0,5 - 4$ Β. +16 Γ. $+\frac{1}{16}$ Δ. -16
- 7 Το γινόμενο $3^{-2} \cdot 7^{-2}$ είναι ίσο με:
Α. $(3 \cdot 7)^{-4}$ Β. $\frac{7^{-2}}{3^2}$ Γ. $(3 \cdot 7)^4$ Δ. $\frac{1}{21^4}$
- 8 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με τη λέξη Σωστό (Σ), αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος (Λ), αν η πρόταση είναι λανθασμένη. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.
α) $7^{-3} + 7^{-5} = 7^{-8}$ β) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = 5^2$ γ) $((-5)^{-2})^{-4} = 5^{-6}$
δ) $2^{-3} \cdot 2^5 = 2^{-15}$ ε) $3^{-5} : 3 = 3^{-4}$ στ) $(-6)^{-5} \cdot (-6)^{-3} = -6^{-8}$
Αν $\alpha > 0$, ζ) $(-\alpha)^{17} > 0$ η) $(-\alpha)^{22} > 0$



Ασκήσεις και Προβλήματα

1 Να υπολογίσετε τις αριθμητικές παραστάσεις:
 α) $(-2)^0 = \dots$ β) $9 + 10^0 = \dots$ γ) $(9 + 10)^0 = \dots$

2 Να συμπληρώσετε τους αριθμούς που λείπουν στον πίνακα.

Εκθετική μορφή	3^4	3^3	3^2	3^1	3^0	3^{-1}	3^{-2}	3^{-3}
Φυσικός αριθμός ή κλάσμα	81	27					$\frac{1}{9} = \frac{1}{3^2}$	

↖ ↗
↖ ↗
↖ ↗

3 Να υπολογίσετε τις δυνάμεις:

α) $(-7)^{-2}$ β) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-7}$ γ) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$ δ) $\left(-\frac{1}{5}\right)^{-3}$

4 Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $5^7 \cdot 5^{-5}$ β) $4^{-3} \cdot 5^{-3}$ γ) $7^0 \cdot 7^{-6}$
 δ) $21^{-3} : 7^{-3}$ ε) $\left(\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}\right)^{-1}$ στ) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} + 5^{-1}$

5 Να γράψετε με μορφή μίας δύναμης τις παραστάσεις:

α) $9^2 \cdot 9^{-9}$ β) $7^2 : 7^{-6}$ γ) $3, 5^{-6} : 0,5^{-6}$ δ) $(8^{-3})^{-2}$

6 Να υπολογίσετε τις τιμές των αριθμητικών παραστάσεων με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των δυνάμεων:

α) $A = \left(-\frac{3}{5}\right)^{-10} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^7$

β) $B = \left(-\frac{13}{29}\right)^{-3} \cdot \left(-\frac{13}{29}\right)^{-1} \cdot \left(-\frac{13}{29}\right)^4$

7 Να υπολογίσετε τις τιμές των αριθμητικών παραστάσεων:

α) $3 \cdot 5^{-2} + 3 \cdot 5^{-2}$ β) $7 \cdot 2^{-3} - 3 \cdot 2^{-3}$
 γ) $2 \cdot 6^{-4} - 7 \cdot 6^{-4}$ δ) $-3 \cdot 3^{-3} - 3 \cdot 3^{-3}$ ε) $(3^2 + 2^4)^{-2}$

8 Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

x	$(x + 1)^{-2}$	$x^{-2} + 1$	$x^{-2} + 2x^{-1} + 1$
2			
-2			
-10^{-1}			

9 Να υπολογίσετε τις τιμές των αριθμητικών παραστάσεων με τη βοήθεια των ιδιοτήτων :

α) $(-4)^{-4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-4}$ β) $4^{-3} : 6^{-3}$

γ) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot 12^{-2}$ δ) $0, 6^{-1} : 2^{-1}$

10 **Σωστό ή λάθος.** Είναι σωστό ή λάθος ότι $12^{100} \cdot 1, 5^{50} \cdot 6^{-149} = 6$; Να αιτιολογήσετε.

11 Να διερευνήσετε αν το κλάσμα $\frac{1}{2^v}$ αυξάνεται ή μειώνεται όσο αυξάνεται η τιμή του ακέραιου αριθμού v. Να εξηγήσετε.

12 **Εργασία ετεροαξιολόγησης:**

α) Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

$A = \left(-\frac{1}{3}\right)^{-5} \cdot 3^{-5}$ και $B = \frac{(-5)^{-6}}{(-125)^{-5} \cdot (-25)^2}$

β) Να διατάξετε τους αριθμούς από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο:

$A = (-7)^{-2}$, $B = -7^2$, $\Gamma = (-2)^{-5}$, $\Delta = 2^5$

Να ελέγξετε τις απαντήσεις σας με αυτές ενός συμμαθητή σας.

1.3 Τυποποιημένη μορφή ρητών αριθμών

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

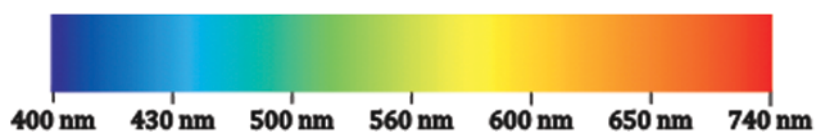
Να αξιοποιούν την τυποποιημένη μορφή των ρητών αριθμών για να αναπαριστούν μικρά φυσικά μεγέθη και να επιλύουν αντίστοιχα προβλήματα.



Διερεύνηση 1. Γραφή πολύ μικρών αριθμών.

Εργασία μαθητών ατομικά ή κατά ζεύγη.

Το σχήμα δείχνει το ηλεκτρομαγνητικό φάσμα του φωτός. Το νανόμετρο είναι ίσο με ένα δισεκατομμυριοστό του μέτρου. Το ορατό εύρος των κυμάτων φωτός κυμαίνεται από 400 νανόμετρα (υπεριώδες) έως 740 νανόμετρα (υπέρυθρο).



Να χρησιμοποιήσετε τις πληροφορίες της εικόνας για να εκφράσετε με αρνητικό εκθέτη:

- α) Το ένα νανόμετρο του μέτρου.
- β) Τα μήκη κύματος κάθε χρώματος του ορατού φωτός σε μέτρα.

Αιτιολογούμε πώς σκεφτήκαμε σε κάθε περίπτωση.



Με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής να διερευνήσετε την τυποποιημένη μορφή πολύ μικρών και πολύ μεγάλων αριθμών.



Διερεύνηση 2. Διαχείριση πολύ μεγάλων και πολύ μικρών αριθμών.

Εργασία μαθητών ατομικά ή κατά ζεύγη.

- α) Στην πρώτη εικόνα η ερευνήτρια μέτρησε με το μικροσκόπιο την ακτίνα ενός ατόμου ουρανίου και βρήκε ότι είναι 0,0000000004 m. Στη δεύτερη εικόνα ο ερευνητής μέτρησε με το τηλεσκόπιο την απόσταση ανάμεσα στον Δία και τον Ήλιο και βρήκε ότι είναι 780.000.000 km. Πώς νομίζετε ότι μπορούν να εκφραστούν καλύτερα τα αποτελέσματα των δύο μετρήσεων σε μέτρα (m);



- β) Η εύρεση κατάλληλων τρόπων γραφής πολύ μεγάλων και πολύ μικρών αριθμών διευκολύνει την παρουσίαση και σύγκριση δεδομένων του πραγματικού κόσμου. Να τεκμηριώσετε την αναγκαιότητα αξιοποίησής τους περιγράφοντας δύο δικά σας παραδείγματα.

Μαθηματικές Έννοιες και Διεργασίες Μάθησης

Τυποποιημένη μορφή πολύ μικρών και πολύ μεγάλων αριθμών

Πολύ μεγάλοι και πολύ μικροί θετικοί αριθμοί μπορούν να εκφραστούν σε σύντομη γραφή με τη βοήθεια δυνάμεων

του δέκα για τις οποίες ισχύουν: $10^v = \underbrace{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \dots \cdot 10 \cdot 10}_v = \underbrace{1000\dots0}_{1 \text{ και } v \text{ μηδενικά}}$ και $10^{-v} = \frac{1}{10^v} = \underbrace{0,000\dots01}_{v \text{ μηδενικά πριν το } 1}$

Παράδειγμα: $10^6 = 1.000.000$ (ένα εκατομμύριο). Το ψηφίο 1 ακολουθείται από 6 μηδενικά.
 Επίσης: $10^{-6} = \frac{1}{10^6} = 0,000001$ (ένα εκατομμυριοστό). Πριν το 1 υπάρχουν συνολικά 6 μηδενικά.

Τέτοιοι αριθμοί μπορούν να γραφούν ως γινόμενο ενός παράγοντα από το 1 έως το 10 επί έναν παράγοντα δύναμης του δέκα.

Γενικά

Τυποποιημένη μορφή θετικών αριθμών ονομάζεται η γραφή τους στη μορφή $\alpha \cdot 10^v$, όπου α είναι δεκαδικός αριθμός, με $1 \leq \alpha < 10$ και v ακέραιος αριθμός.


Παραδείγματα:

- Η απόσταση Γης – Ηλίου η οποία είναι 150.000.000 km στην τυποποιημένη μορφή γράφεται $1,5 \cdot 10^8$ km.
- Η μάζα ενός ατόμου χρυσού είναι $3,3 \cdot 10^{-22}$ gr.

Το εύρος εφαρμογής της τυποποιημένης μορφής των αριθμών είναι σχεδόν καθολικό. Χρησιμοποιείται τόσο στην επιστήμη όσο και στην καθημερινή ζωή διευκολύνοντας την ανάγνωση, τη γραφή και τη σύγκριση πολύ μεγάλων και πολύ μικρών αριθμών.

Να μελετήσετε τον τρόπο εφαρμογής του Πίνακα μετατροπών μονάδων.



 Εφαρμογή 1

Να γράψετε σε δεκαδική μορφή τους αριθμούς: **α)** $7,9 \cdot 10^5$ **β)** $3,8 \cdot 10^{-8}$.

Να διατυπώσετε έναν κανόνα για τη θέση της υποδιαστολής στα αποτελέσματα.

Απάντηση

α) Η δύναμη 10^5 σημαίνει ότι η υποδιαστολή πρέπει να μετατοπιστεί 5 θέσεις προς τα δεξιά, συμπληρώνοντας ενδεχομένως με μηδενικά.

$$7,9 \cdot 10^5 = 790000,0$$

Άρα ο ζητούμενος αριθμός χωρίς δυνάμεις του 10 είναι: **790.000.**

β) Η δύναμη 10^{-8} σημαίνει ότι η υποδιαστολή πρέπει να μετατοπιστεί 8 θέσεις προς τα αριστερά.

$$3,8 \cdot 10^{-8} = 0,000000038$$

Άρα ο ζητούμενος αριθμός χωρίς δυνάμεις του 10 είναι: **0,000000038.**

Σημείωση:

- Για να πολλαπλασιάσουμε έναν δεκαδικό αριθμό με $10^ν$ μετατοπίζουμε την υποδιαστολή ν θέσεις προς τα δεξιά.
- Για να πολλαπλασιάσουμε έναν δεκαδικό αριθμό με $10^{-ν}$ μετατοπίζουμε την υποδιαστολή ν θέσεις προς τα αριστερά, συμπληρώνοντας ενδεχομένως με μηδενικά.



Εφαρμογή 2

Να γράψετε στην τυποποιημένη μορφή τους αριθμούς:

- α) 65.000.000 β) 0,00000495.

Απάντηση

- α) Γράφουμε τον αριθμό 65.000.000 ως γινόμενο δύο αριθμών έτσι ώστε ο ένας να είναι από 1 έως 10 και ο άλλος μια δύναμη του 10. Έχουμε: $\underbrace{65.000.000,0}_{7 \text{ θέσεις αριστερά}} = 6,5 \cdot 10.000.000 = 6,5 \cdot 10^7$

- β) Ανάλογα έχουμε: $\underbrace{0,00000495}_{6 \text{ θέσεις δεξιά}} = 4,95 \cdot 0,000001 = 4,95 \cdot 10^{-6}$



Εφαρμογή 3. Μοντελοποίηση πραγματικής ζωής.

Ένας ψύλλος καταναλώνει περίπου $1,3 \cdot 10^{-5}$ lt αίμα την ημέρα. Ένας σκύλος έχει πάνω του 200 ψύλλους. Ποια είναι η συνολική ποσότητα αίματος που καταναλώνουν οι ψύλλοι κάθε ημέρα;



Απάντηση

Η συνολική ποσότητα αίματος που καταναλώνουν οι 200 ψύλλοι είναι:
 $200 \cdot 1,3 \cdot 10^{-5} \text{ lt} = 2 \cdot 10^2 \cdot 1,3 \cdot 10^{-5} \text{ lt} = 2,6 \cdot 10^{-3} \text{ lt} = 2,6 \cdot 10^{-3} \text{ lt} = 2,6 \text{ ml}$.



Να ανοίξετε τον σύνδεσμο και να απαντήσετε στις ερωτήσεις αξιολόγησης για την τυποποιημένη μορφή μικρών αριθμών.

Ερωτήσεις για Αξιολόγηση

1. Να γράψετε τα γινόμενα με μορφή δυνάμεων και τις δυνάμεις με μορφή γινομένων με παράγοντες δυνάμεις του 10.
A = $10 \cdot 10 \cdot 10$ B = 10^{-4} Γ = $0,1 \cdot 0,1$ Δ = 10^5
2. Να γράψετε τους αριθμούς στη δεκαδική μορφή χωρίς δυνάμεις του 10.
A = $0,001 \cdot 10^9$ B = $3 \cdot 10^{-3}$ Γ = $2 \cdot 10^5$
3. Να γράψετε σε τυποποιημένη μορφή:
14 δισεκατομμύρια 37,2 τρισεκατομμύρια 0,0000013
4. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:
A. $\left(\frac{1}{10}\right)^4 \cdot 10^2$ B. $10^{-3} \cdot 10^{-35}$ Γ. $10^5 \cdot 100$ Δ. $\frac{200 \cdot 10^{-4}}{10^{-3}}$

- 5 Ο αριθμός 37.000.000.000 είναι ίσος με:
 Α. $3,7 \cdot 10^{10}$ Β. $3,7 \cdot 10^{11}$ Γ. $3,7 \cdot 10^9$
- 6 Ο αριθμός 0,00000000000023 είναι ίσος με:
 Α. $2,3 \cdot 10^{-12}$ Β. $2,3 \cdot 10^{-13}$ Γ. $2,3 \cdot 10^{-11}$
- 7 Η δύναμη 10^{-4} ισούται με:
 Α. 0,0001 Β. $\frac{1}{100.000}$ Γ. 0,001



Ασκήσεις και Προβλήματα

- 1 Να εκφράσετε με δυνάμεις του 10 τις παραστάσεις:
 α) 0,001 β) 0,0001
 γ) $(0,001)^4$ δ) $0,001 \cdot 0,000001$

- 2 Να εκφράσετε τους αριθμούς στη δεκαδική τους μορφή χωρίς δυνάμεις του 10:
 Α = $23,56 \cdot 10^2$ Β = $1,236 \cdot 10^{-2}$ Γ = $37.000 \cdot 10^{-3}$
 Δ = $4.567,12 \cdot 10^{-8}$ Ε = $7,5 \cdot 10^0$

- 3 Να συγκρίνετε τους αριθμούς:
 $9,25 \cdot 10^{-5}$, $3,275 \cdot 10^{-3}$, $7,05 \cdot 10^{-4}$, $1,281 \cdot 10^7$.
 Παρατηρώντας τους εκθέτες του 10 να διατυπώσετε έναν κανόνα.

- 4 Να συγκρίνετε τους αριθμούς:
 α) $8 \cdot 10^6$ και $2 \cdot 10^7$ β) $7,16 \cdot 10^5$ και $7,24 \cdot 10^5$
 γ) 10^{-5} και $9 \cdot 10^{-7}$ δ) $3,2 \cdot 10^{-4}$ και $3,7 \cdot 10^{-4}$

- 5 Να διατάξετε τους αριθμούς από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο.
 $12,7 \cdot 10^3$ $1,2 \cdot 10^7$ $345 \cdot 10^3$ $0,078 \cdot 10^8$

- 6 Να γράψετε σε τυποποιημένη μορφή:
 α) Τη διάμετρο ενός ατόμου υδρογόνου η οποία είναι 0,000000000106 cm.
 β) Τη διάμετρο του πυρήνα του ατόμου υδρογόνου η οποία είναι 0,00000000000001 cm.

- 7 Με τη βοήθεια αριθμομηχανής να γράψετε τους παρακάτω αριθμούς σε μορφή δεκαδικού αριθμού. Στη συνέχεια να τους μετατρέψετε σε τυποποιημένη μορφή.

A = $50 \cdot 10^{-12} \cdot 30 \cdot 10^5$ B = $60 \cdot 10^9 \cdot 7 \cdot 10^{-4}$
 Γ = $70 \cdot 10^{-5} \cdot 6 \cdot 10^8$

- 8 Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων και να τις εκφράσετε σε τυποποιημένη μορφή.

A = $\frac{0,6 \cdot (10^6)^2 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{-4}}$ B = $\frac{0,4 \cdot (10^5)^2 \cdot 6 \cdot 10^{-2}}{8 \cdot 10^{-3}}$
 Γ = $\frac{0,15 \cdot 10^{-9} \cdot 6}{(10^{-3})^2 \cdot 0,5 \cdot 10^4}$

- 9 Να συμπληρώσετε τον πίνακα γράφοντας κάθε αριθμό ως δύναμη του 10:

x	10	1000	0,1	0,01	-10	-100	-0,1	-0,01
x ²								
x ⁻²								

- 10 Ο συνολικός όγκος των ωκεανών είναι 1,35 πεντάκις εκατομμύρια m³. Ο όγκος ενός μορίου νερού είναι $30 \cdot 10^{-30}$ m³. Πόσα μόρια νερού περιέχονται σε όλους τους ωκεανούς; Να εκφράσετε αυτόν τον αριθμό σε τυποποιημένη μορφή.

Υπόδειξη: Ο αριθμός 1,35 εκατομμύρια γράφεται $1,35 \cdot 10^6$ και ο αριθμός 1,35 δισεκατομμύρια γράφεται $1,35 \cdot 10^9$. Ακολουθήστε το μοτίβο.

- 11 **Ιατρική.** Ποιο είδος μορίου του πίνακα έχει μεγαλύτερη μάζα; Πόσες φορές είναι μεγαλύτερο από τον άλλο τύπο μορίου;

Μόριο	Μάζα (kg)
Πενικιλίνη	10^{-18}
Ινσουλίνη	10^{-23}

- 12 Μοντελοποίηση πραγματικής ζωής.** Ένα ιόν αλουμινίου έχει διάμετρο περίπου $5 \cdot 10^{-11}$ m. Πόσες φορές μεγαλύτερη είναι η διάμετρος του Ήλιου από τη διάμετρο του ιόντος; (η διάμετρος του Ήλιου είναι περίπου ίση με 1.393.000 km).

13 Μαγικά τετράγωνα.

- α) Στο μαγικό τετράγωνο A να επαληθεύσετε ότι τα γινόμενα κάθε γραμμής, στήλης και διαγωνίου είναι ίσα.

10^0	10^5	10^{-2}
10^{-1}	10^1	10^3
10^4	10^{-3}	10^2

A

- β) Να αντιγράψετε στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε το μαγικό τετράγωνο B, το οποίο ακολουθεί τον ίδιο κανόνα με το A.

	10^0	
10^1	10^2	10^{-3}

B

14 Βιολογία-Ιατρική.

Ένα κυβικό εκατοστό ή χιλιοστόλιτρο (ml) αίματος περιέχει περίπου $1,04 \cdot 10^4$ λευκά αιμοσφαίρια και $5 \cdot 10^6$ ερυθρά αιμοσφαίρια.



Μια νοσοκόμα πήρε ένα δείγμα αίματος, που περιέχει $8,32 \cdot 10^6$ ερυθρά αιμοσφαίρια.

- α) Πόσα περίπου χιλιοστόλιτρα (ml) αίματος υπάρχουν στο δείγμα;
 β) Πόσα λευκά αιμοσφαίρια υπάρχουν στο δείγμα;
 γ) Πόσες φορές είναι περισσότερα τα ερυθρά από τα λευκά αιμοσφαίρια σε ένα χιλιοστόλιτρο (ml) αίματος;

- 15 Εργασία μαθητών κατά ζεύγη.** Ο ακόλουθος πίνακας περιέχει επτά μετρήσεις γραμμένες σε δεκαδική ή τυποποιημένη μορφή.

Δεκαδική μορφή	Τυποποιημένη μορφή	1 = μικρότερο 7 = μεγαλύτερο
	$1 \cdot 10^{-2}$ m	
0,004 m		
200 m		
	$8 \cdot 10^5$ m	
4.000.000 m		
40 m		
	$8 \cdot 10^{-4}$ m	

- α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα γράφοντας κάθε μέτρηση σε δεκαδική και τυποποιημένη μορφή. Στην τελευταία στήλη, να τις ιεραρχήσετε κατά μέγεθος.

- β) Να γράψετε την παρακάτω ισότητα χρησιμοποιώντας δύο δεκαδικούς αριθμούς από τον συμπληρωμένο πίνακα.

..... \cdot 4000 =

- γ) Να συμπληρώσετε την ισότητα χρησιμοποιώντας από τον πίνακα δύο αριθμούς σε τυποποιημένη μορφή. Υπάρχει δεύτερη λύση;

..... \cdot 50.000 =

16 Εργασία μαθητών κατά ζεύγη ή σε μικρές ομάδες.

Περίπου $4 \cdot 10^{12}$ πλαστικές σακούλες χρησιμοποιήθηκαν κατά το έτος 2023 από τους $8 \cdot 10^9$ κατοίκους του πλανήτη. Την ίδια χρονιά καθένας από τους περίπου $11 \cdot 10^6$ Έλληνες κατανάλωσε κατά μέσο όρο 575 σακούλες.

- α) Να υπολογίσετε πόσες πλαστικές σακούλες χρησιμοποίησε κατά μέσο όρο κάθε κάτοικος του πλανήτη κατά το 2023. Να συγκρίνετε αυτό το αποτέλεσμα με το αντίστοιχο των Ελλήνων καταναλωτών.

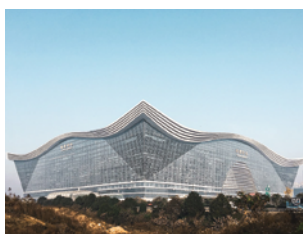
- β) Να υπολογίσετε πόσες πλαστικές σακούλες χρησιμοποιήθηκαν κατά το έτος 2023 στην Ελλάδα.



Να μοιραστείτε μεθόδους και ιδέες στις μικρές ομάδες και στην ολομέλεια της τάξης.

17 Μοντελοποίηση πραγματικής ζωής.

Το New Century Global Center στην Κίνα είναι ένα από τα ψηλότερα κτίρια στον κόσμο. Είναι περίπου ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο



και η βάση του έχει διαστάσεις 400 m και 500 m. Μια εφημερίδα αναφέρει: «Η έκταση είναι $2 \cdot 10^5$ m², δηλαδή 20.000 m², δηλαδή 20 στρέμματα». Ο Δημήτρης εκπλήσσεται με τις πληροφορίες της εφημερίδας, επειδή τα 20 στρέμματα δεν είναι πολλά και αντιστοιχούν σε τρία περίπου γήπεδα ποδοσφαίρου.

- α) Ποιο λάθος έκανε ο αρθρογράφος της εφημερίδας;
 β) Αν το ύψος του κτιρίου είναι 100 m ποιος είναι ο όγκος του;

Να κάνετε την Εργασία με προεκτάσεις: «Αλκαλική διαίτα».



1.4 Υπολογισμός αριθμητικών παραστάσεων

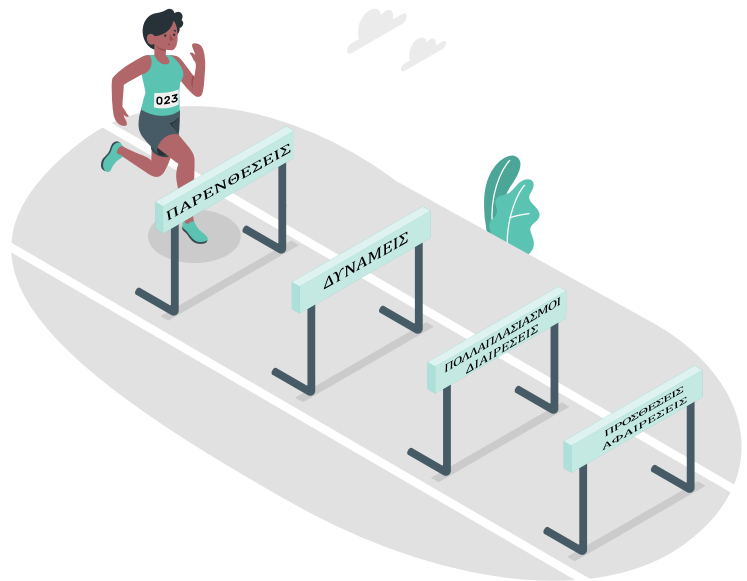
Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

Να υπολογίζουν την τιμή απλών αριθμητικών παραστάσεων με τις τέσσερις πράξεις και δυνάμεις, με την απαιτούμενη προτεραιότητα.

Στην Α' Γυμνασίου μάθαμε ότι για να υπολογίσουμε την τιμή μιας αριθμητικής παράστασης, που περιέχει παρενθέσεις και δυνάμεις κάνουμε τις πράξεις με την εξής σειρά:

- Εκτελούμε πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις.
- Κατόπιν υπολογίζουμε τις δυνάμεις.
- Στη συνέχεια εκτελούμε τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις (από τα αριστερά προς τα δεξιά, όποια πράξη συναντάμε πρώτη).
- Τέλος, κάνουμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις (από τα αριστερά προς τα δεξιά, όποια πράξη συναντάμε πρώτη).

Η προτεραιότητα των πράξεων ισχύει και για δυνάμεις με αρνητικό εκθέτη.



Εφαρμογή 1

Να κάνετε τις πράξεις:

$$\alpha) A = (5 \cdot 4)^3 - 1$$

$$\beta) B = 5 \cdot 4^3 - 1$$

$$\gamma) \Gamma = 5x^3 + 3x^2 - 1 \text{ για } x = -4$$

Απάντηση

$$A = (5 \cdot 4)^3 - 1$$

$$= 20^3 - 1$$

$$= 8.000 - 1 = 7.999$$

[αρχίζουμε κάνοντας τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις]

$$[20^3 = 20 \cdot 20 \cdot 20 = 8.000]$$

$$B = 5 \cdot 4^3 - 1$$

$$= 5 \cdot 64 - 1$$

$$= 320 - 1 = 319.$$

[αρχίζουμε με τον υπολογισμό των δυνάμεων: $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$]

$$\Gamma = 5(-4)^3 + 3(-4)^2 - 1$$

$$= 5 \cdot (-64) + 3 \cdot 16 - 1$$

$$= -320 + 48 - 1 = -273.$$

[αρχίζουμε με τον υπολογισμό των δυνάμεων: $(-4)^3 = -64$ και $(-4)^2 = 16$]



Εφαρμογή 2

Να υπολογίσετε τις τιμές των αριθμητικών παραστάσεων:

$$A = 5 + (12 - 8)^2 \cdot 2^{-3} \text{ και } B = 15 + 2 \cdot (3^2 - 2^3)^0 - (9 \cdot 3^{-1} - 2^3)$$

Απάντηση

$$\begin{aligned}
 A &= 5 + (12 - 8)^2 \cdot 2^{-3} \\
 &= 5 + 4^2 \cdot 2^{-3} \quad [\text{πράξη στην παρένθεση: } (12-8)=4] \\
 &= 5 + 4^2 \cdot \frac{1}{2^3} \quad [\text{ορισμός δύναμης σε αρνητικό εκθέτη: } 2^{-3} = \frac{1}{2^3}] \\
 &= 5 + 16 \cdot \frac{1}{8} \quad [\text{υπολογισμός δύναμης: } \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{8}] \\
 &= 5 + 2 \quad [\text{απλοποίηση: } 5 + 2 \cdot \cancel{8} \cdot \frac{1}{\cancel{8}} = 5 + 2] \\
 &= 7 \quad [\text{πρόσθεση: } 5 + 2 = 7]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B &= 15 + 2 \cdot (3^2 - 2^3)^0 - (9 \cdot 3^{-1} - 2^3) = 15 + 2 \cdot (9 - 8)^0 - (9 \cdot \frac{1}{3} - 8) \\
 &= 15 + 2 \cdot 1^0 - (9 \cdot 3 - 8) = 15 + 2 \cdot 1 - 19 = 15 + 2 - 19 = -2.
 \end{aligned}$$



Εφαρμογή 3

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = x^{x+1} - 2(x+1)^{x+2} - 4x^{x-1} \text{ για } x = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

Απάντηση

Έχουμε: $x = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} = \left(-\frac{2}{1}\right)^1 = -2$, οπότε για $x = -2$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
 A &= (-2)^{-2+1} - 2 \cdot (-2+1)^{-2+2} - 4 \cdot (-2)^{-2-1} = (-2)^{-1} - 2 \cdot (-1)^0 - 4 \cdot (-2)^{-3} \\
 &= -\frac{1}{2} - 2 \cdot 1 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) = -\frac{1}{2} - 2 + \cancel{4} \cdot \frac{1}{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}} = \cancel{\frac{1}{2}} - 2 + \cancel{2} \cdot \cancel{\frac{1}{2}} = -2.
 \end{aligned}$$



Με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής να εξοικειωθείτε με τον υπολογισμό αριθμητικών παραστάσεων.



Με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής να ασκηθείτε στον υπολογισμό της αριθμητικής τιμής αλγεβρικών παραστάσεων.



Ασκήσεις και Προβλήματα

- 1 Να υπολογίσετε τις τιμές των αριθμητικών παραστάσεων δίνοντας τα αποτελέσματα στη μορφή ακέραιου αριθμού ή ανάγωγου κλάσματος:

$$A = -\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4} \quad B = 2 - \frac{13}{7} + \left(1 + \frac{5}{2}\right)$$

$$\Gamma = \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4}\right) + 3 \cdot \left(\frac{4}{5} - \frac{5}{6}\right)$$

- 2 Να υπολογίσετε τις τιμές των αριθμητικών παραστάσεων:

$$A = \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{3}\right) \cdot \left(3 + \frac{7}{4}\right) : \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{6}\right)$$

$$B = \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{-2}{5}\right) + \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{-7}{4}\right)$$

$$\Gamma = \left(1 - \frac{5}{2}\right) \cdot \left(\frac{2}{5} - 1\right) - 5 \cdot \left(\frac{-3}{5}\right)$$

- 3 Να κάνετε τις πράξεις:

$$A = (-2 \cdot 5)^3 - 6 \quad B = -2 \cdot 5^3 - 6$$

$$\Gamma = -2x^3 - 3x^2 - 6 \text{ για } x = 5$$

- 4 **Μαγικά τετράγωνα.** α) Να συμπληρώσετε το μαγικό τετράγωνο A αν γνωρίζετε ότι το άθροισμα κάθε οριζόντιας σειράς, στήλης ή διαγωνίου είναι +2. β) Να συμπληρώσετε το μαγικό τετράγωνο B αν γνωρίζετε ότι τα γινόμενα σε κάθε οριζόντια σειρά, στήλη ή διαγώνιο είναι ίσα.

-7		-1			
	5	5		21	-5
2	-16				14
7	9		-4	-2	9
A				B	

- 5 Να υπολογίσετε τις τιμές των αριθμητικών παραστάσεων:

$$A = 7 + (2-9)^2 \cdot 7^{-1}$$

$$B = 9 - 5 \cdot (7^2 - 3 \cdot 2^4)^0 - (25 \cdot 5^{-1} - 5^{-1})$$

$$\Gamma = (-2)^3 - \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} + (3^2 - 4) : 5 - 17$$

- 6 Να υπολογίσετε τις τιμές των αριθμητικών παραστάσεων:

$$\alpha) A = -6 - (4 + 9 - 2^2)^3 + 6 \cdot (-3) - 13$$

$$\beta) B = 5 \cdot [7 - (-3)] - \frac{6}{-4} \cdot (-2)^3$$

- 7 **Αριθμομηχανή.** Δίνεται: $A = \frac{2^{40} + 10^{-3} - 2^{40}}{10^{-7}}$

Να συγκρίνετε το αποτέλεσμα με τη βοήθεια αριθμομηχανής και χωρίς αριθμομηχανή. Τι παρατηρείτε;

- 8 Να υπολογίσετε την τιμή των αριθμητικών παραστάσεων:

$$(\alpha + \beta)^2, \quad \alpha^2 + \beta^2, \quad \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta, \quad (\alpha + \beta)^{-2}$$

αν $\alpha = 1$ και $\beta = -3$

- 9 Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

$$A = 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5 \text{ και } B = -3x^3 + 2x^2 - 5x + 3$$

- α) για $x = 2$ β) για $x = -2$ γ) για $x = 3$ δ) για $x = -3$

- 10 Να αντιγράψετε τον πίνακα στο τετράδιό σας και να τον συμπληρώσετε.

x	$5x^2 - 3$	$2x - (x + 1)^2 - (x^2 + 2)^3$
4		
-2		

- 11 Να βρείτε τις τιμές των αριθμητικών παραστάσεων:

$$\alpha) 2^{x-4} + 2^{x-3} + 2^{x-2} + 2^{x-1} \text{ όταν } x = 1$$

$$\beta) 2^x + 2^{-x} + x^x + x^{-x}, \text{ όταν } x = -2.$$

- 12 Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης

$$A = 32 - 12 : 4 + 53 + 3 \cdot 4 + \frac{16}{9} : \frac{1}{8} - \frac{74}{9}.$$

Διαγωνισμός Ε.Μ.Ε. «Ο Θαλής» 2013 - Β' Γυμνασίου

- 13 **Ανοιχτό πρόβλημα.** Να βρείτε το πλήθος των ψηφίων του αριθμού $4^{16} \cdot 5^{25}$.

- 14 **Εργασία ετεροαξιολόγησης.** Να συγκρίνετε τις τιμές των αριθμητικών παραστάσεων:

$$A = 5 \cdot 2^3 - 44 \quad \text{και} \quad B = (5 \cdot 2)^3 - 44$$

Να ελέγξετε το αποτέλεσμά σας με το αποτέλεσμα του συμμαθητή σας.

1.5

Τετράγωνοι αριθμοί και τετραγωνικές ρίζες

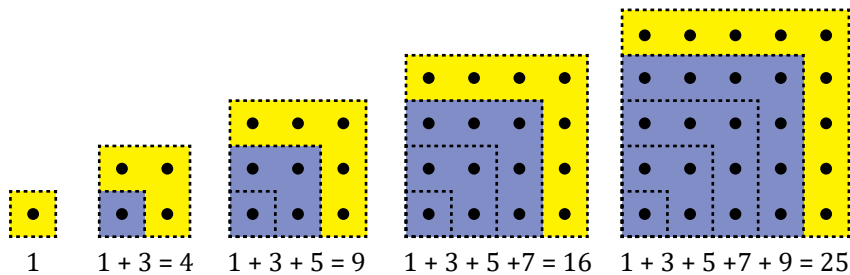
Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

Να αναγνωρίζουν, μέσα από προβλήματα, την αναγκαιότητα εισαγωγής και χρήσης των τετραγωνικών ριζών θετικών αριθμών. Να προσδιορίζουν τις τετραγωνικές ρίζες τέλειων τετραγώνων.
(Προτείνεται να προηγηθεί η διδασκαλία του Πυθαγόρειου Θεωρήματος από τη Γεωμετρία)



Διερεύνηση 1. Τετράγωνοι αριθμοί.

Εργασία μαθητών κατά ζεύγη ή σε μικρές ομάδες. Αν παραστήσουμε με μία κουκκίδα τον αριθμό 1, με τέσσερις κουκκίδες τον αριθμό 4, κ.ο.κ., τότε 1,4,9,16,25,... κουκκίδες μπορούν να διαταχθούν έτσι ώστε να σχηματίζουν τετράγωνα και ονομάζονται τετράγωνοι αριθμοί. Στο σχήμα παρατηρούμε τον τρόπο σχηματισμού τετράγωνων αριθμών καθώς και τις κίτρινες ορθές γωνίες που ονομάζονται «Γνώμονες του Πυθαγόρα».



- α) Να σχεδιάσετε στο τετράδιό σας τους τρεις επόμενους τετράγωνους αριθμούς με τον τρόπο των Πυθαγορείων.
- β) Πώς προκύπτει ένας τετράγωνος αριθμός από τον προηγούμενό του; Να διατυπώσετε μία εικασία.
- γ) Στο τετράδιό σας να δημιουργήσετε έναν πίνακα με τους φυσικούς 6, 7, 8, 9, 10, 11 και 12 και τους αντίστοιχους τετράγωνους αριθμούς που παράγονται από αυτούς.

Συζητάμε στην τάξη και εξηγούμε πώς βρήκαμε τις απαντήσεις μας.



Με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής να κατασκευάσετε τετράγωνους αριθμούς.



Διερεύνηση 2. Εισαγωγή στην τετραγωνική ρίζα.

Εργασία μαθητών κατά ζεύγη ή σε μικρές ομάδες. Σε μια αγροτική περιοχή επιτρέπεται να κτιστεί οικοδομή με εμβαδόν μέχρι 10% του εμβαδού του οικοπέδου. Ο κ. Γεωργίου έχει ένα αγρόκτημα 4 στρεμμάτων και θέλει να χτίσει ένα ισόγειο σπίτι.

- α) Ο κ. Γεωργίου ζήτησε από την μηχανικό του να σχεδιάσει μία τετράγωνη βάση εμβαδού E (σε m^2) με πλευρά ακέραιο αριθμό και πάνω σ' αυτήν να οικοδομήσει το σπίτι.
Να συμπληρώσετε τον πίνακα με την πλευρά x κάθε τετράγωνης βάσης.

Εμβαδόν: E (m^2)	256	289	324	361	400	441	484	529
Πλευρά: x (m)	16							

- β) Ο κ. Γεωργίου τελικά αποφάσισε να χτίσει ένα σπίτι με επιφάνεια μεταξύ 350 και 500 m^2 . Πόσα μέτρα (m) μπορεί να είναι η πλευρά της τετράγωνης βάσης για να είναι συμβατή με το περιορισμό του 10%;

Μοιραζόμαστε τον τρόπο που λύσαμε το πρόβλημα με τους συμμαθητές μας.



Μαθηματικές Έννοιες και Διεργασίες Μάθησης

Με τη βοήθεια γεωπίνακα με διάστικτους τετραγωνικούς καμβάδες να διερευνήσετε τετράγωνα αριθμούς και τις τετραγωνικές ρίζες αυτών.



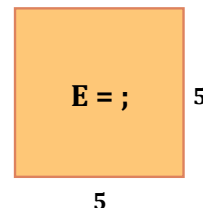
Τετράγωνοι αριθμοί ή τέλεια τετράγωνα

Στην εισαγωγή της διερεύνησης (1) αναφερθήκαμε στους τετράγωνους αριθμούς.

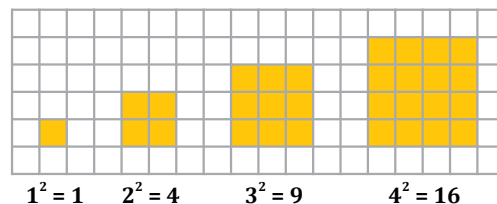
Γενικά, **τετράγωνος αριθμός** ονομάζεται ένας θετικός ακέραιος αριθμός όταν είναι το τετράγωνο ενός άλλου θετικού ακέραιου αριθμού.

Για παράδειγμα, ο αριθμός 25 είναι τετράγωνος γιατί $25 = 5^2$.

Ο τετράγωνος αριθμός 25 παραπέμπει στο εμβαδόν E ενός τετραγώνου με μήκος πλευράς 5, αφού $E = 5^2 = 25$.



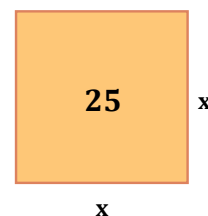
Στο σχήμα, αν κάθε μικρό τετράγωνο παριστάνει μία μονάδα, τότε τέσσερα μικρά τετραγωνάκια μπορούν να διευθετηθούν ώστε να σχηματίσουν ένα νέο τετράγωνο. Το ίδιο 9 και 16 μικρά τετραγωνάκια. Οι αριθμοί 1, 4, 9 και 16, είναι εμβαδά τετραγώνων, προκύπτουν από την ύψωση των φυσικών αριθμών 1, 2, 3 και 4 στο τετράγωνο και είναι τετράγωνοι αριθμοί. Οι αριθμοί 3 και 10 δεν είναι τετράγωνοι αριθμοί, γιατί δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι αριθμοί που τα τετράγωνά τους να κάνουν 3 ή 10 αντιστοίχως. Ένας τετράγωνος αριθμός ονομάζεται επίσης **τέλειο τετράγωνο**.



Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού

Όταν ξέρουμε μία πλευρά ενός τετραγώνου τότε μπορούμε να βρούμε το εμβαδόν του υψώνοντας τον αριθμό στο τετράγωνο (τετραγωνισμός). Αντίστροφα, όταν γνωρίζουμε το εμβαδόν ενός τετραγώνου, μπορούμε να βρούμε την πλευρά του (αποτετραγωνισμός).

Στο παράδειγμά μας για να βρούμε το μήκος της πλευράς του τετραγώνου που έχει εμβαδόν 25 αναζητούμε έναν αριθμό x που όταν πολλαπλασιαστεί με τον εαυτό του δίνει γινόμενο 25, δηλαδή $x^2 = 25$. Παρατηρούμε ότι οι αριθμοί 5 και -5 ικανοποιούν την εξίσωση, γιατί $5^2 = 25$ και $(-5)^2 = 25$. Επειδή όμως ο x εκφράζει μήκος ευθυγράμμου τμήματος που είναι θετικός αριθμός, η ζητούμενη πλευρά του τετραγώνου θα είναι $x = 5$.



Τον **θετικό** αριθμό 5 που όταν πολλαπλασιαστεί με τον εαυτό του δίνει γινόμενο 25 ονομάζουμε **τετραγωνική ρίζα** του 25 και τον συμβολίζουμε με $\sqrt{25}$.

Γενικά

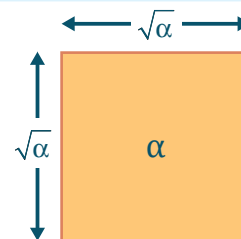
Τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού α, είναι ο θετικός αριθμός ο οποίος όταν υψωθεί στο τετράγωνο, μας δίνει τον αριθμό α και συμβολίζεται με $\sqrt{\alpha}$.

Επομένως: Αν $\sqrt{\alpha} = x$, τότε $x^2 = \alpha$ ή $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$.

Επιπλέον, επειδή $0^2 = 0$, ορίζουμε: $\sqrt{0} = 0$.

Ο αριθμός α ονομάζεται **υπόρριζο** και το σύμβολο $\sqrt{\quad}$ ονομάζεται **ριζικό**.

Παρατηρούμε ότι: $(\sqrt{16})^2 = (\sqrt{4^2})^2 = 4^2 = 16$ και $\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3 = (\sqrt{3})^2$



Το εμβαδόν του τετραγώνου είναι ίσο με α

Γενικά

Αν $\alpha \geq 0$, τότε $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$ και $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$, δηλαδή: $\sqrt{\alpha^2} = (\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$.

Η εξίσωση $x^2 = 25$ έχει λύσεις τους αριθμούς 5 και -5 αφού $5^2 = 25$ και $(-5)^2 = 25$.

Ωστόσο, σύμφωνα με τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας ισχύει

$\sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5$, αλλά δεν ισχύει $\sqrt{25} = \sqrt{(-5)^2} = -5 < 0$, αφού η τετραγωνική ρίζα μη αρνητικού αριθμού είναι μη αρνητικός αριθμός.



Να διακρίνετε τις παραστάσεις $\sqrt{a^2}$ και \sqrt{a}^2 ανοίγοντας την εφαρμογή.



Εφαρμογή 1

Να υπολογίσετε χωρίς αριθμομηχανή τις τετραγωνικές ρίζες: $\sqrt{144}$, $\sqrt{81}$, $\sqrt{0,16}$, $\sqrt{\frac{4}{25}}$.

Απάντηση

Όλα τα υπόρριζα είναι θετικοί αριθμοί. Βρίσκουμε κάθε φορά έναν θετικό αριθμό του οποίου το τετράγωνο είναι ίσο με το εκάστοτε υπόρριζο. Με διαδοχικές δοκιμές έχουμε, $10^2 = 100$, $11^2 = 121$, $12^2 = 144$.

Άρα $\sqrt{144} = 12$.

Ομοίως και για τους υπόλοιπους:

$$\sqrt{81} = 9, \text{ διότι } 9^2 = 81, \quad \sqrt{0,16} = 0,4, \text{ διότι } 0,4^2 = 0,16 \quad \sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}, \text{ διότι } \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}.$$



Εφαρμογή 2

Να υπολογίσετε χωρίς αριθμομηχανή τις τετραγωνικές ρίζες:

α) $\sqrt{3600}$

β) $\sqrt{0,0049}$

Απάντηση

α) Ο αριθμός 3600 είναι τετράγωνος γιατί $60 \cdot 60 = 3600$. Άρα, $\sqrt{3600} = \sqrt{(60)^2} = 60$

β) Ο αριθμός 0,0049 είναι τετράγωνος γιατί $7^2 = 49$, $(0,7)^2 = 0,49$ και $(0,07)^2 = 0,0049$, οπότε:

$$\sqrt{0,0049} = \sqrt{(0,07)^2} = 0,07$$



Να ανοίξετε τον σύνδεσμο και να απαντήσετε στις ερωτήσεις αξιολόγησης για τις έννοιες των τετράγωνων αριθμών και των τετραγωνικών ριζών.

Ερωτήσεις για Αξιολόγηση

- 1 Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς είναι τετράγωνος; Να αιτιολογήσετε.
A. 9 B. 2 Γ. 11 Δ. 10
- 2 Ποια είναι η τετραγωνική ρίζα του 169:
A. 3 B. 13 Γ. 169 Δ. 43
- 3 Ποιο είναι το μήκος της πλευράς ενός τετραγώνου με εμβαδόν 256 m^2 ;
- 4 Η εξίσωση $x^2 = 36$ έχει λύση:
A. μόνο τον αριθμό 6, B. μόνο τον -6 , Γ. τον 6 και τον -6 , Δ. είναι αδύνατη.

5 Στην ισότητα $\sqrt{\dots} + 5 = 13$ ο αριθμός που βρίσκεται κάτω από το ριζικό είναι:

A. 8

B. 64

Γ. 49

Δ. 81

6 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με τη λέξη Σωστό (Σ), αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος (Λ), αν η πρόταση είναι λανθασμένη. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

α) $\sqrt{4} = 2$

β) $\sqrt{16} = 8$

γ) $\sqrt{36} = 6$

δ) $\sqrt{64} = 32$

ε) $\sqrt{0,64} = 0,08$

στ) $\sqrt{0,49} = 0,7$

ζ) $\sqrt{(-0,1)^2} = -0,1$

η) $\sqrt{49} = -7$

θ) $\sqrt{16+9} = 4+3=7$

ι) $\sqrt{(-4)^2} = -4$

ια) $\sqrt{0} = 0$

ιβ) $(\sqrt{7})^2 = 7$



Ασκήσεις και Προβλήματα

1 Ποιοι από τους ακόλουθους αριθμούς είναι τετράγωνοι;
α) 36, β) 60, γ) 81, δ) 121, ε) 164, στ) 300

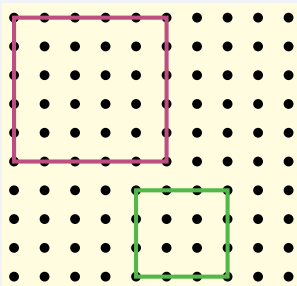
2 Να προσδιορίσετε τις πλευρές των τετραγώνων με τα εξής εμβαδά:
α) 121 m², β) 64 cm², γ) 400 dm², δ) 1024 mm², ε) 2,89 km²

3 Να γράψετε τους δύο γειτονικούς τετράγωνα αριθμούς μεταξύ των οποίων βρίσκεται καθένας από τους ακόλουθους αριθμούς.
α) 2, β) 17, γ) 50, δ) 83, ε) 99

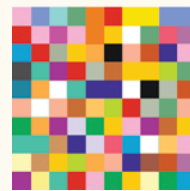
4 Να βρείτε με δοκιμές τις τετραγωνικές ρίζες των παρακάτω αριθμών.
α) $\sqrt{144}$, β) $\sqrt{400}$, γ) $\sqrt{900}$, δ) $\sqrt{729}$, ε) $\sqrt{3600}$.
Να επαληθεύσετε τα αποτελέσματα με αριθμομηχανή.

5 **Εργασία μαθητών ατομικά ή κατά ζεύγη.** Στην παρακάτω εικόνα βλέπουμε ένα τετραγωνικό πλέγμα με στιγμές και δύο σχήματα.

α) Γιατί τα σχήματα τα οποία έχουν σχεδιαστεί στο πλέγμα είναι «τετράγωνα»; Πόσες μονάδες είναι το μήκος μίας πλευράς κάθε τετραγώνου; Πόσες τετραγωνικές μονάδες έχει κάθε εμβαδόν;



Να κάνετε την Εργασία με προεκτάσεις: «Τετράγωνοι αριθμοί στη ζωγραφική» και η έκπληξη θα είναι ευχάριστη!



β) Γιατί οι αριθμοί 25 και 9 ονομάζονται «τετράγωνοι αριθμοί» ή «τέλεια τετράγωνα»;

γ) Πώς γράφεται το μήκος μίας πλευράς των τετραγώνων με εμβαδά 25 και 9 τετραγωνικές μονάδες με χρήση του συμβόλου της τετραγωνικής ρίζας. Να ελέγξετε τα αποτελέσματα.

δ) Να κατασκευάσετε στο τετράδιό σας έναν πίνακα και να συμπληρώσετε τα εμβαδά και τις τετραγωνικές ρίζες τους που αντιστοιχούν στα τετράγωνα με μήκη πλευρών 7, 10, 12 και 15 μονάδες.

6 Να υπολογίσετε με τον νο.

α) $\sqrt{64}$, β) $\sqrt{2,56}$, γ) $\sqrt{640000}$, δ) $\sqrt{25600}$

7 Αποτελούν τέλεια τετράγωνα οι αριθμοί; Να αιτιολογήσετε.

α) $\frac{49}{9}$, β) $\frac{8}{18}$, γ) $\frac{75}{27}$, δ) 6,25, ε) 0,64

8 Να υπολογίσετε τον αριθμό κάτω από το ριζικό και να βρείτε τη ρίζα.

α) $\sqrt{40+9}$, β) $\sqrt{3 \cdot 12}$, γ) $\sqrt{3^2 + 4^2}$, δ) $\sqrt{100-64}$

9 Να υπολογίσετε τους αριθμούς:

α) $(\sqrt{81})^2$, β) $\sqrt{7^2}$, γ) $\sqrt{(-6)^2}$, δ) $(\sqrt{2-\sqrt{2}})^2$

10 Να βρείτε τις τιμές του θετικού αριθμού x στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $x^2 = 4$, β) $x^2 = 36$, γ) $x^2 = 100$, δ) $x^2 = \frac{16}{81}$

Με βάση το Μαθηματικό έργο: «Τρίγωνοι αριθμοί» να ανακαλύψετε τις ιδιότητες των τριγώνων αριθμών.



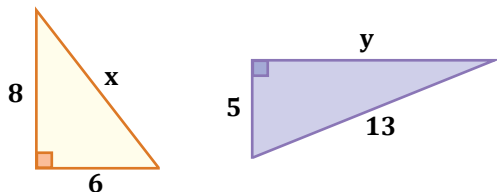
- 11 Ένας γεωπόνος θέλει να φυτέψει δέντρα σε ένα τετράγωνο αγροτεμάχιο με εμβαδόν 1.600 τετραγωνικά μέτρα. Πόσα μέτρα συρματοπλέγμα θα χρειαστεί για την περιφράξη του αγροτεμαχίου;

- 12 Να αντιγράψετε τον πίνακα στο τετράδιό σας. Να εκτελέσετε τους υπολογισμούς χωρίς αριθμομηχανή.

x	25		$\frac{9}{49}$	225		0,16
\sqrt{x}		3,5			0,02	

x				1,69
\sqrt{x}	$\frac{2}{5}$	$\sqrt{169}$	15	

- 13 Ένα ισοσκελές τρίγωνο έχει βάση 3 m και περίμετρο 8 m. Να υπολογίσετε το ύψος που αντιστοιχεί στη βάση και το εμβαδόν του.
- 14 Ο κύριος Λεωνίδας έχει έναν κήπο σχήματος ορθογώνιου παραλληλογράμμου με διαστάσεις 90 m και 40 m. Η κυρία Ευτέρπη έχει ένα αγρόκτημα σχήματος τετραγώνου με το ίδιο εμβαδόν. Ποιο είναι το μήκος της πλευράς του αγροκτήματος της κυρίας;
- 15 Στα ακόλουθα σχήματα οι μετρήσεις έχουν γίνει σε εκατοστά (cm). Να υπολογίσετε τις πλευρές x και y σε καθένα από τα ορθογώνια τρίγωνα:



- 16 **Εργασία μαθητών κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες.** Ο κύριος Παπαδόπουλος έχει ένα αγροτεμάχιο σχήματος ορθογώνιου παραλληλογράμμου με διαστάσεις 25 m και 64 m. Ο κ. Δημητρίου έχει ένα τετράγωνο αγροτεμάχιο με το ίδιο εμβαδόν. Ο κ. Δημητρίου υποστηρίζει ότι χρειάζεται λιγότερο υλικό για να περιφράξει ολόκληρη την ιδιοκτησία του. Συμφωνείτε μαζί του; Να αιτιολογήσετε.



- 17 **Ανοιχτό πρόβλημα: Εικασία.** Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$A = \sqrt{1^3 + 2^3} \quad B = \sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3} \quad \Gamma = \sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3}$$

Αναγνωρίζετε μία εικασία για να υπολογίσετε την παράσταση $\Delta = \sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3}$; Αν ναι, να την περιγράψετε.

- 18 Η πυραμίδα του Χέοπα έχει βάση τετράγωνη με εμβαδόν 52900 m². Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς της βάσης της πυραμίδας.

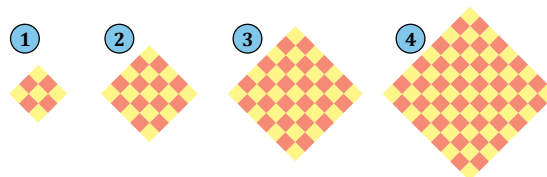


- 19 **Ανοιχτό πρόβλημα: Πυθαγόρειες τριάδες.** Οι αριθμοί 36, 64 και 100 είναι τέλεια τετράγωνα που συνδέονται με την ισότητα: $36 + 64 = 100$ ή $6^2 + 8^2 = 10^2$.

- α) Γιατί το όνομα «Πυθαγόρεια τριάδα» είναι κατάλληλο;
- β) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί (5, 12, 13), (8, 15, 17), (20, 21, 29), (11, 60, 61) και (13, 84, 85) σχηματίζουν Πυθαγόρειες τριάδες.
- γ) Να γράψετε όσες περισσότερες Πυθαγόρειες τριάδες μπορείτε.

- 20 Ένας μαθηματικός, που έζησε τον 20ό αιώνα, όταν ρωτήθηκε πόσων χρόνων είναι απάντησε: «Η τετραγωνική ρίζα του έτους που γεννήθηκα είναι η ηλικία που έχω σήμερα». α) Ποια χρονιά γεννήθηκε; β) Πόσων ετών ήταν τη χρονιά που ρωτήθηκε; γ) Ποια χρονιά ρωτήθηκε για την ηλικία του;

- 21 α) Να προσδιορίσετε τον αριθμό των κόκκινων τετραγώνων και τον αριθμό των κίτρινων τετραγώνων για κάθε σχήμα της εικόνας. β) Να προσδιορίσετε τον αριθμό των κόκκινων και τον αριθμό των κίτρινων τετραγώνων για το 100ό σχήμα.



1.6 Ρητοί, άρρητοι αριθμοί και δεκαδικές αναπαραστάσεις τους

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

- Να διερευνούν την ύπαρξη αριθμών που δεν είναι ρητοί και να αναγνωρίζουν τους άρρητους.
- Να διερευνούν και να διακρίνουν τις δεκαδικές αναπαραστάσεις των ρητών και άρρητων αριθμών.



Διερεύνηση 1. Αναγνώριση δεκαδικών αναπαραστάσεων των ρητών αριθμών.

Εργασία μαθητών ατομικά ή κατά ζεύγη.

α) Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε δεκαδικούς.

$$\frac{2986}{1000} \quad \frac{23}{80} \quad \frac{7}{12} \quad \frac{19}{250} \quad \frac{3}{11}$$

β) Να γράψετε τους δεκαδικούς αριθμούς 0,8 και 0,35 ως κλάσματα.

γ) Αν έναν δεκαδικό αριθμό με άπειρα δεκαδικά ψηφία όπως ο 0,4444... τον συμβολίσουμε με $0,\overline{4}$, ποιους από τους αριθμούς του (α) ερωτήματος θα μπορούσατε να γράψετε σε παρόμοια μορφή;

δ) Να εξετάσετε αν οι δεκαδικοί αριθμοί είναι ρητοί. Να αιτιολογήσετε.

Συζητάμε στην τάξη και εξηγούμε πώς βρήκαμε τις απαντήσεις μας.



Διερεύνηση 2. Ύπαρξη μη ρητών αριθμών.

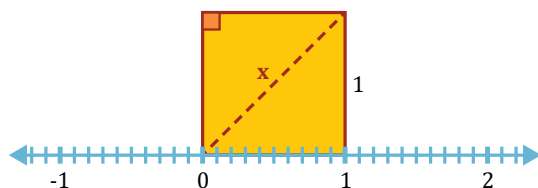
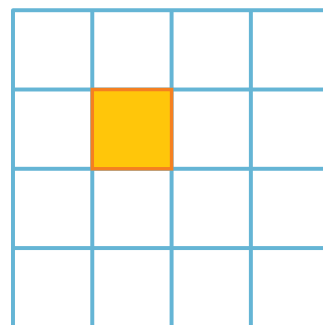
Εργασία μαθητών σε μικρές ομάδες.

α) Σε χαρτί με ίδια τετραγωνάκια να σχεδιάσετε ένα τετράγωνο και ύστερα ένα άλλο τετράγωνο με διπλάσιο εμβαδόν. Να περιγράψετε τη μέθοδό σας.

β) Αν το αρχικό τετράγωνο έχει πλευρά 1 cm, ποιο είναι το ακριβές μήκος μίας πλευράς του τετραγώνου με διπλάσιο εμβαδόν; Αυτός ο αριθμός είναι ρητός;

γ) Ποιοι είναι οι δύο διαδοχικοί ακέραιοι αριθμοί μεταξύ των οποίων βρίσκεται η τιμή του μήκους μίας πλευράς του τετραγώνου με διπλάσιο εμβαδόν;

δ) Από το παρακάτω σχήμα να προσεγγίσετε μετρώντας το μήκος της διαγωνίου του τετραγώνου στο πλησιέστερο δέκατο.



ε) Ποιος από τους αριθμούς 1,40, 1,41, 1,42, 1,43 είναι η καλύτερη προσέγγιση του μήκους της διαγωνίου x του τετραγώνου στο εκατοστό;

στ) Ποιος από τους αριθμούς 1,412, 1,413, 1,414, 1,415, 1,416 είναι η καλύτερη προσέγγιση του μήκους της διαγωνίου x του τετραγώνου στο χιλιοστό;

ζ) Με μονάδα μέτρησης την πλευρά του τετραγώνου, μπορούμε να «μετρήσουμε» ακριβώς τη διαγωνιά του; Τι είδους αριθμό νομίζετε ότι παριστάνει το μήκος της διαγωνίου του τετραγώνου;

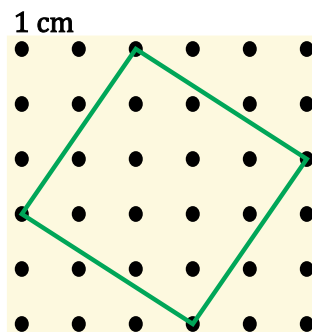
Αιτιολογούμε τις απαντήσεις μας στη μικρή ομάδα και σε ολόκληρη την τάξη.



Διερεύνηση 3. Ρητές προσεγγίσεις και δεκαδική παράσταση άρρητου.

Εργασία μαθητών ατομικά ή κατά ζεύγη.

- α) Να βρείτε το μήκος της πλευράς του τετραγώνου με χρήση του συμβόλου της τετραγωνικής ρίζας.
- β) Με δοκιμές να βρείτε τις ρητές προσεγγίσεις του μήκους της πλευράς του τετραγώνου στη μονάδα, στο δέκατο και στο εκατοστό. Να επαληθεύσετε τα αποτελέσματα με αριθμομηχανή. Μπορούμε να συνεχίσουμε; Κατά πόσο;
- γ) Αν $\sqrt{13} = 3,60555128...$, όπου τα δεκαδικά ψηφία είναι άπειρα και δεν επαναλαμβάνονται περιοδικά, μπορούμε να έχουμε μια πλήρη μη γεωμετρική εικόνα αυτού του αριθμού;



Συζητάμε στην τάξη για την απειροψήφια δεκαδική αναπαράσταση του άρρητου αριθμού, την έκφρασή του με το σύμβολο της τετραγωνικής ρίζας και τις ρητές προσεγγίσεις του.



Διερεύνηση 4. Δεκαδική μορφή περιοδικών αριθμών.

Εργασία μαθητών κατά ζεύγη. Πέντε μαθήτριες και μαθητές συζητούν για τον αριθμό $0,5\overline{7} = 0,575757...$

Ναταλία: Ο αριθμός $0,5\overline{7} = 0,575757...$ δεν είναι ρητός.

Ελεονώρα: Όχι! Ο αριθμός $0,5\overline{7}$ είναι ρητός, επειδή έχει περιοδικά δεκαδικά ψηφία.

Νεσχάν: Νομίζω ότι έχεις δίκιο, Ελεονώρα, επειδή ξέρουμε όλα τα ψηφία του αριθμού $0,5\overline{7}$

Γιώργος: Ο περιοδικός δεκαδικός αριθμός $0,5\overline{7}$ θα συνεχιζόταν για πάντα. Αυτό δηλώνει η γραμμή. Σωστά;

Στεφάν: Σωστά Γιώργο και επειδή συνεχίζεται για πάντα ο αριθμός $0,5\overline{7} = 0,575757...$ είναι άρρητος.

Συγκρίνουμε τις προηγούμενες απαντήσεις και προβάλλουμε επιχειρήματα. Συζητούμε στην τάξη για τις αναπαραστάσεις των ρητών και των άρρητων αριθμών.

Μαθηματικές Έννοιες και Διεργασίες Μάθησης

Δεκαδική μορφή ρητού αριθμού

Οι δεκαδικοί αριθμοί με πεπερασμένο πλήθος ψηφίων ή **τερματιζόμενοι δεκαδικοί** ή για συντομία **δεκαδικοί** δεν είναι τίποτα άλλο παρά δεκαδικά κλάσματα, δηλαδή κλάσματα με παρονομαστή 10, 100, 1000, ...

Παράδειγμα: Τα κλάσματα $\frac{19}{10}$, $\frac{67}{100}$, $\frac{7345}{1000}$, $\frac{31}{10000}$ σε δεκαδική μορφή γράφονται αντίστοιχα ως 1,9, 0,67, 7,345, 0,0031.

- Κάθε ακέραιος μπορεί να γραφτεί ως δεκαδικός προσθέτοντας μια υποδιαστολή και όσα μηδενικά θέλουμε μετά την υποδιαστολή. Για παράδειγμα: $3 = 3,000$ και $-5 = -5,0000000$.
- Κάθε ρητός αριθμός που δεν είναι ακέραιος μετατρέπεται σε δεκαδικό αριθμό, όταν διαιρέσουμε τον αριθμητή με τον παρονομαστή του. Για παράδειγμα, αν κάνουμε τις παρακάτω διαιρέσεις βρίσκουμε:

$$-\frac{3}{8} = -0,375, -\frac{17}{25} = -0,68, \frac{23}{80} = 0,2875, -\frac{5}{9} = -0,555... , \frac{8}{11} = 0,7272... , \frac{1201}{1665} = 0,7213213...$$

Με τη βοήθεια γεωπίνακα με διάστικτους τετραγωνικούς καμβάδες να διερευνήσετε την κατασκευή τετραγώνων με εμβαδά μη τετράγωνους αριθμούς.



Στα προηγούμενα παραδείγματα βλέπουμε ότι οι τρεις πρώτοι ρητοί αριθμοί έχουν δεκαδικό μέρος που τερματίζεται, ενώ οι τρεις τελευταίοι έχουν δεκαδικό μέρος με άπειρο πλήθος δεκαδικών ψηφίων, αλλά από ένα σημείο και μετά τα ψηφία αυτά επαναλαμβάνονται με την ίδια σειρά.

Για τους δεκαδικούς αριθμούς που έχουν άπειρα επαναλαμβανόμενα δεκαδικά ψηφία δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Περιοδικός δεκαδικός αριθμός ονομάζεται ο δεκαδικός που έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία, τα οποία από ένα ορισμένο ψηφίο και πέρα επαναλαμβάνονται τα ίδια με την ίδια σειρά.

Περίοδος ενός περιοδικού δεκαδικού αριθμού, ονομάζεται η ομάδα των δεκαδικών ψηφίων που επαναλαμβάνεται.

Για παράδειγμα:

- Επειδή $-\frac{5}{9} = -0,555 \dots$ ο αριθμός $-\frac{5}{9}$ είναι περιοδικός με περίοδο 5 και γράφουμε: $-\frac{5}{9} = -0,5\overline{5}$
- Επειδή $\frac{1201}{1665} = 0,7213213 \dots$ ο αριθμός $\frac{1201}{1665}$ είναι περιοδικός με περίοδο 213 και γράφουμε: $\frac{1201}{1665} = 0,721\overline{3}$

Αντίστροφα. Μπορούμε κάθε δεκαδικό αριθμό να τον γράφουμε με κλασματική μορφή.

Για παράδειγμα: $0,3 = \frac{3}{10}$, $0,65 = \frac{65}{100} = \frac{13}{20}$, $-1,125 = -\frac{1125}{1000} = -\frac{9}{8}$

Επομένως, οι δεκαδικοί και οι περιοδικοί δεκαδικοί είναι ρητοί και αποτελούν ισοδύναμες εκφράσεις των ίδιων αριθμών με τα κλάσματα π.χ. $\frac{19}{10} = 1,9$ και $-\frac{5}{9} = -0,5555 \dots$

Στην Γ' Γυμνασίου θα μάθουμε ότι και κάθε περιοδικός δεκαδικός αριθμός μπορεί να εκφραστεί ως κλάσμα, του οποίου ο αριθμητής και ο παρονομαστής είναι ακέραιοι αριθμοί.

Ωστε:

- Κάθε δεκαδικός με πεπερασμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων, ή περιοδικός δεκαδικός αριθμός, παριστάνει έναν κλασματικό αριθμό, δηλαδή είναι ρητός.
- Κάθε ρητός αριθμός γράφεται ως δεκαδικός ή περιοδικός δεκαδικός αριθμός.
- Οι κλασματικές και οι δεκαδικές αναπαραστάσεις των ρητών αριθμών είναι ισοδύναμες.

Σημείωση:

Οι τρεις τελείες στο τέλος των περιοδικών δεκαδικών αριθμών δηλώνουν ότι το εμφανιζόμενο μοτίβο συνεχίζεται επ' άπειρον.

Μέχρι τώρα μάθαμε να αναγνωρίζουμε τις αναπαραστάσεις των ρητών αριθμών. Είδαμε ότι όλα τα κλάσματα, οι ακέραιοι, οι δεκαδικοί και οι περιοδικοί δεκαδικοί συγκαταλέγονται στους ρητούς αριθμούς. Γεννιέται όμως το ερώτημα: *Υπάρχουν αριθμοί που δεν είναι ρητοί κι αν ναι τι μορφή μπορεί να έχουν;* Στο ερώτημα αυτό θα επιχειρήσουμε να απαντήσουμε στην επόμενη παράγραφο.

Ύπαρξη άρρητων αριθμών

Παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε τετράγωνο με μήκος πλευράς 1, τότε για το μήκος x της διαγωνίου, σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα (Σχήμα) έχουμε:

$$x^2 = 1^2 + 1^2 \text{ ή } x^2 = 2, \text{ οπότε } x = \sqrt{2}.$$

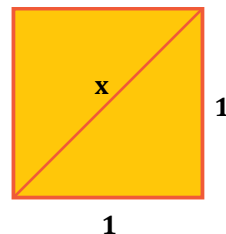
Για να βρούμε τον αριθμό $\sqrt{2}$, παρατηρούμε ότι $1^2 = 1 < 2$ και $2^2 = 4 > 2$ οπότε $1^2 < 2 < 2^2$ και επομένως $1 < \sqrt{2} < 2$. Άρα ο $\sqrt{2}$ δεν είναι ακέραιος, αλλά ένας αριθμός μεταξύ 1 και 2.

Στη συνέχεια παίρνουμε τα τετράγωνα των αριθμών:

$$1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5, 1, 6, 1, 7, 1, 8, 1, 9$$



Με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής να μετατρέψετε ρητούς αριθμούς από την κλασματική μορφή στη δεκαδική μορφή.



Επειδή $(1,4)^2 = 1,96 < 2$ και $(1,5)^2 = 2,25 > 2$ συμπεραίνουμε ότι κανένας από τους αριθμούς 1,4 και 1,5 δεν είναι το ακριβές μήκος της **διαγωνίου του τετραγώνου**, αλλά κάποιος άλλος αριθμός μεταξύ του 1,4 και 1,5, δηλαδή:

Συνεχίζουμε με τα τετράγωνα των αριθμών: $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$

1,41, 1,42, 1,43, 1,44, 1,45, 1,46

Υπολογίζοντας τα τετράγωνα τους βρίσκουμε ότι $(1,41)^2 = 1,9881 < 2$ και $(1,42)^2 = 2,0164 > 2$. Συνεπώς ούτε ο 1,41 ούτε ο 1,42 είναι το ακριβές μήκος της διαγωνίου, αλλά κάποιος άλλος αριθμός μεταξύ 1,41 και 1,42, **δηλαδή:**

Συνεχίζοντας ανάλογα βρίσκουμε ότι: $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$

$$1 < \sqrt{2} < 2$$

$$1,4 < \sqrt{2} < 1,5$$

$$1,41 < \sqrt{2} < 1,42$$

$$1,414 < \sqrt{2} < 1,415$$

$$1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143$$

...

Η προηγούμενη διαδικασία δεν φαίνεται να σταματάει ποτέ, οπότε δεν μπορούμε να βρούμε δεκαδικό αριθμό που να είναι ακριβώς ίσος με $\sqrt{2}$. Στην Α' Λυκείου θα αποδείξουμε ότι δεν υπάρχει ρητός αριθμός ίσος με $\sqrt{2}$.

Με άλλα λόγια ο $\sqrt{2}$ δεν είναι ακέραιος, ούτε δεκαδικός, ούτε περιοδικός δεκαδικός αριθμός, δηλαδή δεν είναι ρητός αριθμός και γι' αυτό τον ονομάζουμε **άρρητο**.

Άρρητος ονομάζεται ένας αριθμός που δεν είναι ρητός, δηλαδή όταν δεν υπάρχουν ακέραιοι μ, ν με $\nu \neq 0$ τέτοιοι ώστε να γράφεται με τη μορφή κλάσματος $\frac{\mu}{\nu}$.

Ωστε:

- Κάθε αριθμός που δεν είναι ρητός, ονομάζεται άρρητος αριθμός.
- Οι άρρητοι αριθμοί έχουν άπειρα δεκαδικά ψηφία χωρίς περίοδο.

Σημείωση

Όπως διαπιστώσαμε δεν μπορούμε να «μετρήσουμε» ακριβώς τη διαγώνιο του τετραγώνου με μονάδα μέτρησης την πλευρά του, δηλαδή οι ρητοί αριθμοί δεν μπορούν να εκφράσουν με αριθμητική ακρίβεια το μήκος της διαγωνίου του τετραγώνου, το οποίο είναι αντιληπτό από την εποπτεία. Πρόκειται για το ιστορικό πρόβλημα της ασυμμετρίας στο οποίο έδωσαν επιτυχή απάντηση οι αρχαίοι Έλληνες (βλ. Ιστορικό σημείωμα).

Να μελετήσετε το *Ιστορικό σημείωμα* με τίτλο: «Η ανακάλυψη της παράδοξης τετραγωνικής ρίζας του 2 και το πρόβλημα της ασυμμετρίας».



Ρητές προσεγγίσεις άρρητου αριθμού με συστηματικές διαδοχικές δοκιμές

Η προηγούμενη διαδικασία για την εύρεση ρητού αριθμού x που να είναι τέτοιος ώστε $x^2 = 2$ δεν φαίνεται να έχει τέλος. Ο αριθμός $\sqrt{2}$, όπως είδαμε, εκφράζεται ακριβώς ως γεωμετρικό μέγεθος από τη διαγώνιο τετραγώνου με πλευρά 1, αλλά δεν μπορούμε να τον υπολογίσουμε ακριβώς.

Παρόλο που δεν μπορούμε να υπολογίσουμε τον αριθμό $x = \sqrt{2}$, μπορούμε να τον προσεγγίσουμε με όση ακρίβεια θέλουμε από τις ανισώσεις που προσδιορίσαμε στην προηγούμενη παράγραφο.

Για παράδειγμα,

- Από την ανίσωση $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$ έχουμε:

$\sqrt{2} \approx 1,41$ προσέγγιση εκατοστού **με έλλειψη** και $\sqrt{2} \approx 1,42$ προσέγγιση εκατοστού **με υπεροχή**.

- Από την ανίσωση $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$ έχουμε:

$\sqrt{2} \approx 1,414$ προσέγγιση χιλιοστού **με έλλειψη** και $\sqrt{2} \approx 1,415$ προσέγγιση χιλιοστού **με υπεροχή**.

Οι αριθμοί 1, 1,4, 1,41, 1,414, 1,4142 κ.λπ. λέγονται **ρητές προσεγγίσεις** του $\sqrt{2}$.

Γενικά

Τους άρρητους αριθμούς τους προσεγγίζουμε με ρητούς.



Με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής να διερευνήσετε τη ρητή προσέγγιση τετραγωνικής ρίζας.

Σημείωση

- Η διαδικασία υπολογισμού των δεκαδικών προσεγγίσεων ενός αρρήτου δεν τελειώνει.
- Η προσεγγιστική εκτίμηση των τετραγωνικών ριζών άρρητων αριθμών γίνεται με τυχαίες δοκιμές, με συστηματικές διαδοχικές δεκαδικές προσεγγίσεις και με αριθμομηχανή.
- Οι άρρητοι αριθμοί σε αντίθεση με τους ρητούς δεν έχουν περιοδικότητα.

Απειροσμήνια δεκαδική μορφή των άρρητων αριθμών

Από τις προηγούμενες παρατηρήσεις για τον άρρητο αριθμό $\sqrt{2}$ προκύπτει ότι δεν υπάρχει δεκαδικός με πεπερασμένο πλήθος ψηφίων ή περιοδικός δεκαδικός αριθμός του οποίου το τετράγωνο να είναι ίσο με 2.

Αν συνεχίσουμε τη διαδικασία των διαδοχικών προσεγγίσεων του αριθμού $\sqrt{2}$ παίρνουμε:

$$\sqrt{2} = 1,4142135623730950 \dots$$

Επομένως μπορούμε να διατυπώσουμε την εικασία ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ θα έχει μετά την υποδιαστολή άπειρα δεκαδικά ψηφία μη περιοδικά κάτι που θα αποδείξουμε σε μεγαλύτερη τάξη. Αυτό συμβαίνει για όλους τους άρρητους αριθμούς, δηλαδή ένας άρρητος αριθμός έχει άπειρο πλήθος δεκαδικών ψηφίων χωρίς περιοδικότητα. Οι άρρητοι αριθμοί δεν είναι ούτε τερματιζόμενοι δεκαδικοί ούτε περιοδικοί δεκαδικοί αριθμοί. Η περιοδικότητα είναι το βασικό χαρακτηριστικό με το οποίο διακρίνουμε έναν ρητό από έναν άρρητο.

Άλλοι άρρητοι αριθμοί

Η τετραγωνική ρίζα κάθε θετικού αριθμού, που δεν είναι τέλειο τετράγωνο είναι άρρητος αριθμός. Ωστόσο άρρητοι αριθμοί δεν είναι μόνο οι τετραγωνικές ρίζες μη τετράγωνων ρητών αριθμών αλλά και πάρα πολλοί άλλοι αριθμοί.

Ο πιο δημοφιλής άρρητος αριθμός είναι ο

$$\pi = 3,141592653\dots$$

και η πιο συνηθισμένη ρητή του προσέγγιση είναι: $\pi \approx 3,14$.

Ο αριθμός π είναι ο λόγος του μήκους οποιουδήποτε κύκλου προς τη διάμετρό του. Διαφορετικά, το μήκος ενός κύκλου όταν η διάμετρος έχει μήκος ίσο με μία μονάδα. Ο π έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία και δεν μπορούμε να τον γράψουμε σε κλασματική μορφή.

Όσο κι αν ψάξουμε στο δεκαδικό του ανάπτυγμα και στην ακολουθία των ψηφίων του δεν πρόκειται να βρούμε κανένα τμήμα που να επαναλαμβάνεται περιοδικά.

Υπάρχουν πολλοί ακόμα άρρητοι αριθμοί όπως ο αριθμός:

$$0,0\overline{9}0\overline{99}0\overline{999}0\overline{9999}0\dots$$

ο οποίος αν και εμφανίζει κανονικότητα δεν χαρακτηρίζεται από περιοδική επανάληψη.



Με τη βοήθεια της εφαρμογής να διακρίνετε ρητούς και άρρητους αριθμούς.



Εφαρμογή 1

Ποια από τα κλάσματα $\frac{23}{80}$, $\frac{19}{250}$ και $\frac{7}{12}$ γράφονται σε μορφή δεκαδικού με πεπερασμένο πλήθος ψηφίων και ποιο ή ποια με μορφή περιοδικού δεκαδικού αριθμού; Να διατυπώσετε έναν κανόνα.

Απάντηση

Τα κλάσματα $\frac{23}{80}$ και $\frac{19}{250}$ γράφονται:

$$\frac{23}{80} = \frac{23 \cdot 125}{80 \cdot 125} = \frac{2875}{10000} = 0,2875 \text{ και } \frac{19}{250} = \frac{19 \cdot 4}{250 \cdot 4} = \frac{76}{1000} = 0,076.$$

Άρα, τα κλάσματα $\frac{23}{80}$ και $\frac{19}{250}$ γράφονται ως δεκαδικοί αριθμοί.

Επίσης είναι: $\frac{7}{12} = 0,583333\dots$ Άρα, αυτό το κλάσμα μετατρέπεται σε περιοδικό δεκαδικό αριθμό.

Επειδή οι πρώτοι παράγοντες του 10 είναι οι αριθμοί 2 και 5, για να μπορεί ένας αριθμός να γίνει δύναμη του 10, πρέπει να αναλύεται σε γινόμενο με πρώτους παράγοντες μόνο 2 ή μόνο 5 ή και τους δύο. Για τους παρονομαστές των δύο πρώτων κλασμάτων έχουμε: $80 = 2^4 \cdot 5$, $250 = 2 \cdot 5^3$ ενώ για τον παρονομαστή του τρίτου κλάσματος $12 = 2^2 \cdot 3$, οπότε μπορούμε να διατυπώσουμε τον ακόλουθο κανόνα:

«Κάθε κλάσμα με παρονομαστή παράγοντες μόνο 2 ή μόνο 5 ή και τους δύο, μπορεί να παρασταθεί ως δεκαδικός αριθμός με πεπερασμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων. Διαφορετικά, τρέπεται σε περιοδικό δεκαδικό αριθμό».



Εφαρμογή 2

Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt{11}$ και $\sqrt{21}$.

Απάντηση

Οι αριθμοί 11 και 21 δεν μπορούν να γραφτούν ως τετράγωνα ρητών οπότε οι αριθμοί $\sqrt{11}$ και $\sqrt{21}$ είναι άρρητοι. Υψώνοντας στο τετράγωνο τους αριθμούς παίρνουμε: $(\sqrt{11})^2 = 11$ και $(\sqrt{21})^2 = 21$

Επειδή $21 > 11$ συμπεραίνουμε ότι $(\sqrt{21})^2 > (\sqrt{11})^2$ και επομένως $\sqrt{21} > \sqrt{11}$.

Σημείωση: Αν α, β θετικοί αριθμοί με $\alpha^2 > \beta^2$, τότε $\alpha > \beta$.



Εφαρμογή 3

- α) Να βρείτε με συστηματικές δοκιμές μία ρητή προσέγγιση του $\sqrt{3}$ στο δέκατο με έλλειψη και μία με υπεροχή.
- β) Να βρείτε την καλύτερη δεκαδική προσέγγιση του $\sqrt{3}$ στο δέκατο και να την παραστήσετε στον άξονα.
- γ) Να βρείτε με χρήση αριθμομηχανής την καλύτερη ρητή προσέγγιση στο εκατοστό του αριθμού $\sqrt{3}$.

Απάντηση

- α) Αναζητούμε θετικό αριθμό ώστε το τετράγωνό του να είναι 3. Δεν μπορεί να είναι ούτε ο αριθμός 1, ούτε ο αριθμός 2, διότι $1^2 = 1 < 3$ και $2^2 = 4 > 3$. Άρα είναι $1 < \sqrt{3} < 2$.

Δημιουργούμε έναν πίνακα αριθμών μεταξύ 1 και 2 των οποίων τα τετράγωνα είναι κοντά στον αριθμό 3.

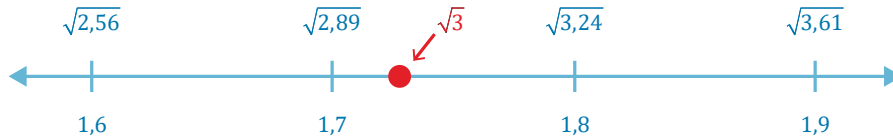
x	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
x ²	2,25	2,56	2,89	3,24	3,61

Διαπιστώνουμε ότι $1,7^2 = 2,89 < 3$ και $1,8^2 = 3,24 > 3$. Επομένως:

$$1,7 < \sqrt{3} < 1,8$$

Επομένως, η προσέγγιση με έλλειψη του $\sqrt{3}$ είναι 1,7 και η προσέγγιση με υπεροχή 1,8.

- β) Επειδή $|1,7^2 - 3| = |2,89 - 3| = 0,11$ και $|1,8^2 - 3| = |3,24 - 3| = 0,24$, ο αριθμός 3 βρίσκεται πλησιέστερα στον αριθμό 2,89 συγκριτικά με τον 3,24. Επομένως, ο $\sqrt{3}$ είναι πλησιέστερα στον 1,7 από τον 1,8.



Άρα η καλύτερη ρητή προσέγγιση δεκάτου για τον άρρητο αριθμό $\sqrt{3}$ είναι ο αριθμός 1,7 και γράφουμε $\sqrt{3} \approx 1,7$ (προσέγγιση με έλλειψη).

- γ) Πατώντας με τη σειρά τα πλήκτρα $\boxed{3}$ και $\boxed{\sqrt{\quad}}$ (ή $\boxed{\sqrt{\quad}} \boxed{3}$ και $\boxed{\equiv}$) σε μια αριθμομηχανή παίρνουμε: 1,73205080. Από τη δεκαδική αναπαράσταση περικόπτουμε τα δεκαδικά ψηφία μετά από το εκατοστό.

1,73205080

Βρίσκουμε δύο αριθμούς με δύο δεκαδικά ψηφία μετά το κόμμα, μεταξύ των οποίων περιέχεται ο $\sqrt{3}$.

$$1,73 < \sqrt{3} < 1,74$$



Με τη βοήθεια της εφαρμογής να γνωρίσετε τους πραγματικούς αριθμούς.

Στη συνέχεια για να προσδιορίσουμε ποιος από τους αριθμούς 1,73 και 1,74 είναι πιο κοντά στον $\sqrt{3}$, παρατηρούμε ότι το ψηφίο των χιλιοστών που φαίνεται στην οθόνη της αριθμομηχανής είναι το 2, το οποίο είναι μικρότερο από το 5, οπότε ο $\sqrt{3}$ είναι πιο κοντά στον 1,73. Επομένως $\sqrt{3} \approx 1,73$.



Να ανοίξετε τον σύνδεσμο και να απαντήσετε στις ερωτήσεις αξιολόγησης για τους ρητούς και άρρητους αριθμούς και τις αναπαραστάσεις τους.

Ερωτήσεις για Αξιολόγηση

- 1 Ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι ρητοί και ποιοι άρρητοι;

A. $\sqrt{36}$ B. $\frac{3}{7}$ Γ. 3,333... Δ. $-\sqrt{81}$

E. $-\sqrt{18}$ ΣΤ. 14
- 2 Η τετραγωνική ρίζα του 69 βρίσκεται μεταξύ των αριθμών:

A. 5 και 6 B. 7 και 8 Γ. 6 και 7 Δ. 8 και 9
- 3 Ποια από τις ακόλουθες ανισοτικές σχέσεις είναι σωστή;

A. $2 < \sqrt{3} < 4$ B. $5 < \sqrt{8} < 6$ Γ. $2 < \sqrt{6} < 3$ Δ. $6 < \sqrt{7} < 8$.
- 4 Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς είναι άρρητος; Να αιτιολογήσετε.

A. 0,575577555777... B. $2,\bar{9}$ Γ. $\frac{11}{4}$ Δ. 9,74813
- 5 Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς δεν είναι άρρητος; Να αιτιολογήσετε.

A. $\sqrt{111}$ B. $\sqrt{71}$ Γ. $\sqrt{81}$ Δ. $\pi = 3,14159...$
- 6 Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς είναι άρρητος; Να αιτιολογήσετε.

A. $\sqrt{39}$ B. $\sqrt{10.000}$ Γ. $\sqrt{\frac{175}{7}}$ Δ. 7,74

Να μελετήσετε το *Ιστορικό σημείωμα*: «Το πρόβλημα του διπλασιασμού του τετραγώνου» (πλατωνικός διάλογος *Μένων*).

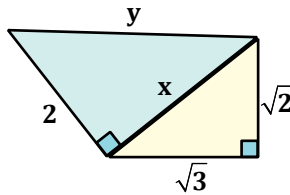


Ασκήσεις και Προβλήματα

- 1 Ποια από τα κλάσματα τρέπονται σε δεκαδικούς και ποια σε περιοδικούς δεκαδικούς αριθμούς.

$$\frac{3}{20}, \frac{49}{4}, -\frac{17}{5}, \frac{13}{32}, \frac{19}{14}, -\frac{7}{15}, \frac{19}{30}$$

- 2 Τα τρίγωνα στο σχήμα είναι ορθογώνια. Να υπολογίσετε τις πλευρές x και y .



- 3 Ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι ρητοί; Να αιτιολογήσετε.

$$\frac{4}{5}, -0,0\overline{123}, \sqrt{81}, (\sqrt{5})^2, \sqrt{7}+1, \pi$$

- 4 Ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι ρητοί και ποιοι άρρητοι; Να αιτιολογήσετε.

α) $A=3,137246\overline{8}$, β) $B=0,2547931834$,

γ) $\Gamma=0,36912151821\dots$,

δ) $\Delta=0,123112233111222333\dots$

- 5 Ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι ρητοί και ποιοι άρρητοι; Να αιτιολογήσετε.

α) $\sqrt{144}$, β) $\frac{4}{5}$, γ) 3π ,

δ) $22,858558555855558\dots$, ε) $0,333\dots$

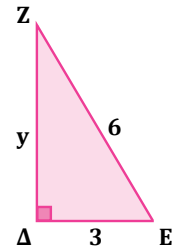
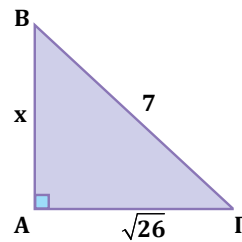
- 6 Να βρείτε ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι ρητοί και ποιοι άρρητοι; Να αιτιολογήσετε.

$$\sqrt{8}, -\sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{16}, \sqrt{160}, \sqrt{289}, -\sqrt{625}$$

- 7 Να γράψετε τις παρακάτω τετραγωνικές ρίζες μεταξύ δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών (π.χ. $(2 < \sqrt{5} < 3)$).

α) $\sqrt{7}$, β) $\sqrt{17}$, γ) $\sqrt{41}$, δ) $\sqrt{95}$, ε) $\sqrt{120}$, στ) $\sqrt{700}$

- 8 Δίνονται τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ . Ποια από τις κάθετες πλευρές x και y είναι μεγαλύτερη; Πόσο μεγάλη είναι κατά προσέγγιση η διαφορά τους;



- 9 Να βρείτε μία ρητή προσέγγιση στο εκατοστό, με έλλειψη ή με υπεροχή, για κάθε άρρητο με τη βοήθεια αριθμομηχανής.

α) $\sqrt{8}$, β) $\sqrt{11}$, γ) $\sqrt{33}$, δ) $\sqrt{\frac{5}{6}}$,

ε) $\sqrt{1000}$, στ) $\sqrt{88,52}$.

- 10 Να βρείτε τις καλύτερες ρητές προσεγγίσεις των αρρήτων στο εκατοστό με συστηματικές δοκιμές και να τις ελέγξετε με αριθμομηχανή.

α) $\sqrt{19}$, β) $\sqrt{10}$, γ) $\sqrt{35}$, δ) $-\sqrt{13}$, ε) $\sqrt{0,3}$.

- 11 Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

α) 5 και $\sqrt{17}$ β) $\sqrt{39}$ και $\sqrt{19}$.

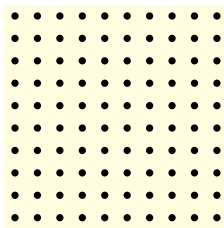
- 12 **Εργασία μαθητών στην τάξη κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες.** Στο ερώτημα «Να βρείτε, αν είναι δυνατόν, έναν αριθμό του οποίου το τετράγωνο να είναι ίσο με 2», τέσσερις μαθητές έδωσαν τις εξής απαντήσεις:



- **Σοφία:** Είναι: $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, οπότε ο ζητούμενος αριθμός δεν είναι ακέραιος. Βρίσκεται μεταξύ 1 και 2.
- **Αντώνης:** Δεν μπορούμε να βρούμε 2 πολλαπλασιάζοντας έναν αριθμό με τον εαυτό του, επειδή τα τετράγωνα τελειώνουν μόνο σε 1, 4, 9, 6 ή 5.
- **Αναστασία:** Αυτός ο αριθμός μπορεί να βρεθεί με το πάτημα της τετραγωνικής ρίζας στην αριθμομηχανή. Επομένως $\sqrt{2} = 1,414213562$.
- **Παναγιώτης:** Ο αριθμός υπάρχει, είναι το μήκος της υποτεινουσας ενός ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου, με κάθετες πλευρές 1 μονάδα.

Να συνοψίσετε τα επιχειρήματα της ομάδας σας σε μια χάρτινη αφίσα.

- 13 Να χρησιμοποιήσετε φύλλα με στιγμές όπως στο σχήμα για να σχεδιάσετε τετράγωνα στα οποία οι κάθετες πλευρές δεν έχουν οριζόντιο ή κατακόρυφο προσανατολισμό. Για κάθε τετράγωνο να βρείτε:



- Το εμβαδόν του. Να περιγράψετε και να εξηγήσετε τη μέθοδό σας.
- Το μήκος μίας πλευράς του με χρήση του συμβόλου της τετραγωνικής ρίζας.
- Μία ρητή προσέγγιση του μήκους της πλευράς του τετραγώνου στο εκατοστό.

- 14 Η κυρία Λουκία θέλει να τοποθετήσει μία τετράγωνη ξύλινη κορνίζα γύρω από έναν ζωγραφικό πίνακα εμβαδού 32 dm^2 . Ποια θα είναι η καλύτερη ρητή προσέγγιση του μήκους της εσωτερικής περιμέτρου της κορνίζας στο εκατοστό;
- 15 Ο κυρ Νίκος διάλεξε μια επιφάνεια γης από τον κήπο του σχήματος τετραγώνου με εμβαδόν 41 m^2 την οποία θέλει να περιφράξει για τις κόττες του. Πόσα μέτρα σύρμα θα χρειαστεί για την περιφράξη;
- 16 Οι δύο πλευρές ενός τριγώνου έχουν μήκη 15 cm και 8 cm αντίστοιχα. Να βρείτε την τρίτη πλευρά του, έτσι ώστε το τρίγωνο να είναι ορθογώνιο. Να διακρίνετε δύο περιπτώσεις.

17 Εργασία ετεροαξιολόγησης:

Μια μικρή αίθουσα του σχολείου έχει δάπεδο σχήματος τετραγώνου πλευράς 5 μέτρων. Μια άλλη αίθουσα έχει επίσης δάπεδο σχήματος τετραγώνου, αλλά το εμβαδόν της είναι διπλάσιο από το εμβαδόν της πρώτης αίθουσας.

- Ποιο είναι το ακριβές μήκος της πλευράς του δαπέδου της δεύτερης αίθουσας;
- Ποια είναι η ρητή προσέγγιση του μήκους της πλευράς του δαπέδου της δεύτερης αίθουσας στο δέκατο και στο εκατοστό;

1.7 Πραγματικοί αριθμοί

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

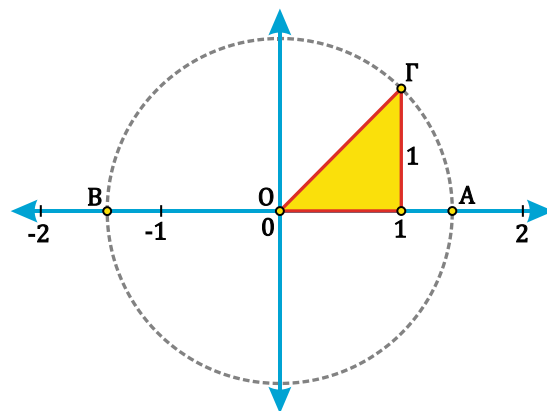
- Να τοποθετούν άρρητους αριθμούς στην ευθεία των πραγματικών αριθμών.
- Να λύνουν προβλήματα με τη χρήση πραγματικών αριθμών.
- Να επεκτείνουν τον ορισμό της δύναμης με βάση πραγματικό αριθμό και εκθέτη ακέραιο.



Διερεύνηση 1. Τοποθέτηση αρρήτων με μορφή τετραγωνικών ριζών στον άξονα.

Εργασία μαθητών ατομικά ή κατά ζεύγη.

- α) Είδαμε ότι ο άρρητος αριθμός $\sqrt{2}$ δεν είναι δεκαδικός με πεπερασμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων ούτε περιοδικός δεκαδικός αριθμός. Να εξετάσετε την παρακάτω γεωμετρική κατασκευή. Ποιος αριθμός αντιστοιχεί στο σημείο A; Ποιος αντιστοιχεί στο σημείο B; Να εξηγήσετε γιατί.
- β) Να κατασκευάσετε με κανόνα και διαβήτη τον αριθμό $\sqrt{3}$ και να τον τοποθετήσετε στον άξονα των αριθμών.
- γ) Να βρείτε τις ρητές προσεγγίσεις στο εκατοστό των αριθμών $\sqrt{2}$ και $\sqrt{3}$ και να τοποθετήσετε τους προσεγγιστικούς αντιπρόσωπούς τους σε σημεία του άξονα των αριθμών. Να εξηγήσετε πώς ενεργήσατε.
- δ) Το σημείο του άξονα που αντιστοιχεί στη γεωμετρική κατασκευή του αριθμού $\sqrt{2}$ είναι ίδιο ή διαφορετικό από το σημείο που αντιστοιχεί στον προσεγγιστικό αντιπρόσωπό του στον άξονα; Να αιτιολογήσετε.



Ανταλλάσσουμε επιχειρήματα στην τάξη για τη γεωμετρική κατασκευή των αρρήτων και την κατά προσέγγιση τοποθέτησή τους σε σημεία του άξονα των αριθμών.



Διερεύνηση 2. Εύρεση πλευράς τετραγώνου με μήκος άρρητο αριθμό.

Εργασία κατά ζεύγη ή σε μικρές ομάδες.

Αγρότισσα αγόρασε έκταση γης σχήματος τετραγώνου με 247 €/m^2 και πλήρωσε 6422 € . Γύρω-γύρω από την έκταση θέλει να κατασκευάσει έναν τετράγωνο ξύλινο φράκτη για τα κουνέλια της.

- α) Ποιο είναι το ακριβές μήκος της πλευράς του τετραγώνου;
- β) Να βρείτε δύο ρητές προσεγγίσεις του μήκους της πλευράς. Μία για έναν ερασιτέχνη κατασκευαστή και μία για έναν επαγγελματία μηχανικό. Να αποφασίσετε πόσα δεκαδικά ψηφία θα έχει η εκτίμησή σας σε κάθε περίπτωση.
- γ) Αν η περίφραξη κοστίζει 100 €/m , πόσα χρήματα θα πληρώσει η αγρότισσα για κάθε εκτίμηση;

Συζητούμε τις απαντήσεις και ελέγχουμε την ορθότητά τους.





Διερεύνηση 3. Δύναμη με βάση πραγματικό και εκθέτη ακέραιο.

Συνεργασία ανά ζεύγη μαθητών και συζήτηση στην τάξη.

Αν υποθέσουμε ότι ο ορισμός της δύναμης με βάση ρητό και εκθέτη ακέραιο ισχύει και όταν η βάση είναι πραγματικός αριθμός, να συμπληρώσετε στις τελείες τους αριθμούς που λείπουν.

$$\sqrt{7} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{7} = (\sqrt{7})^{\dots} \quad \pi \cdot \pi \cdot \pi \cdot \pi \cdot \pi = \pi^{\dots} \quad (\sqrt{13})^0 = \dots \quad (\sqrt{6})^{-2} = \frac{1}{(\sqrt{6})^{\dots}}$$

Συγκρίνουμε τις απαντήσεις μας και επιχειρηματολογούμε για να πείσουμε τον συμμαθητή μας στο θρανίο. Εξηγούμε πώς σκεφτήκαμε.

Μαθηματικές Έννοιες και Διεργασίες Μάθησης

Σύνολα φυσικών, ακεραίων, ρητών και άρρητων αριθμών

Στην Α΄ τάξη Γυμνασίου μάθαμε τα βασικά σύνολα αριθμών. Ξεκινήσαμε από το σύνολο των φυσικών αριθμών:

$$\mathbf{N}: 0, 1, 2, 3, 4, \dots$$

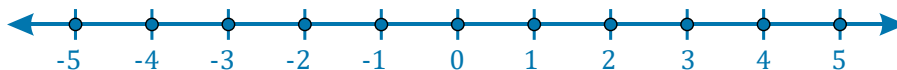
Τα στοιχεία του συνόλου **N** αντιστοιχίσαμε σε σημεία της ευθείας των αριθμών.



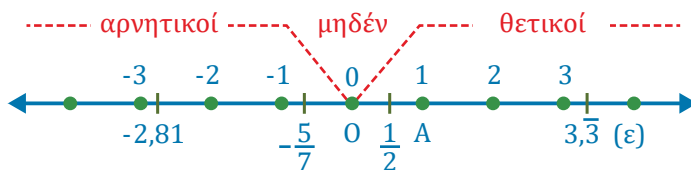
Στη συνέχεια «επεκτείναμε» το σύνολο των φυσικών αριθμών και δημιουργήσαμε το σύνολο των ακεραίων:

$$\mathbf{Z}: \dots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots$$

Τα στοιχεία του συνόλου **Z** των ακεραίων αριθμών αντιστοιχίσαμε επίσης σε σημεία της ευθείας, επεκτείνοντας την ευθεία αριστερά του μηδενός, για να συμπεριλάβουμε εκτός από τους φυσικούς και τους αντίθετους τους, αρνητικούς αριθμούς.



Ακολουθώντας από το σύνολο των ακεραίων αριθμών δημιουργήσαμε το σύνολο των ρητών αριθμών **Q**. Οι ρητοί αριθμοί περιλαμβάνουν εκτός από τους ακεραίους, τα κλάσματα, τους δεκαδικούς και τους περιοδικούς δεκαδικούς αριθμούς. Είδαμε ότι όλοι οι ρητοί αριθμοί απεικονίζονται σε σημεία μίας ευθείας (ε), η οποία ονομάζεται *άξονας των ρητών αριθμών*. Συγκεκριμένα, στο σημείο **O** αντιστοιχίζουμε το μηδέν (0) και ορίζουμε **OA = 1**. Δεξιά διατάσσονται οι θετικοί αριθμοί και αριστερά οι αρνητικοί αριθμοί.



Είδαμε ότι και με το νέο σύνολο **Q** των ρητών αριθμών δεν μπορούμε να λύσουμε ορισμένα προβλήματα, όπως να υπολογίσουμε το μήκος της διαγωνίου ενός τετραγώνου με πλευρά μία μονάδα μήκους.

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών

Το σύνολο που αποτελείται από τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς, ονομάζεται **σύνολο των πραγματικών αριθμών** και συμβολίζεται με **R**.

Παραδείγματα:

$$-6 \quad -\sqrt{12} \quad -0,333\dots \quad -\frac{7}{16} \quad 0 \quad 1,24 \quad 2,101101110\dots$$

Με τη βοήθεια γεωπίνακα με διάστικτους τετραγωνικούς καμβάδες να διερευνήσετε τα εμβαδά τετράγωνων και μη τετράγωνων αριθμών και τις τετραγωνικές τους ρίζες.



Σύμφωνα με όσα έχουν προηγηθεί κάθε πραγματικός αριθμός έχει δεκαδική αναπαράσταση. Συνεπώς, όλοι οι ρητοί και άρρητοι αριθμοί που έχουμε μάθει μέχρι τώρα είναι πραγματικοί αριθμοί. Άρα:

- Όλοι οι δεκαδικοί με πεπερασμένο πλήθος ψηφίων και όλοι οι περιοδικοί δεκαδικοί με άπειρο πλήθος δεκαδικών ψηφίων (ρητοί) είναι πραγματικοί αριθμοί. Π.χ.: $\frac{5}{8}=0,625$ $\frac{5}{11}=0,4545\dots$
- Όλοι οι δεκαδικοί με άπειρο πλήθος ψηφίων χωρίς περιοδικότητα (άρρητοι) είναι πραγματικοί αριθμοί. Π.χ.: $\sqrt{5}=2,2360679\dots$, $\pi=3,1415926\dots$, $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1,6180339\dots$

Επομένως:

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών **R** αποτελείται:

- Από δεκαδικούς και περιοδικούς δεκαδικούς αριθμούς, δηλαδή από τους ρητούς και
- Από απειροψήφιους μη περιοδικούς αριθμούς, δηλαδή από τους άρρητους.

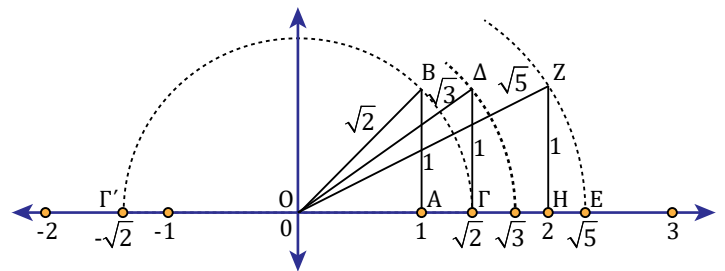
Η ευθεία των πραγματικών αριθμών

Πάνω σε μια ευθεία θεωρούμε ένα σημείο O το οποίο αντιστοιχίζουμε στον αριθμό μηδέν. Παίρνουμε επίσης αυθαίρετα ένα ευθύγραμμο τμήμα που θεωρούμε ότι έχει μήκος ίσο με τη μονάδα. Δεξιά από το σημείο O τοποθετούνται οι θετικοί αριθμοί και αριστερά οι αρνητικοί. Σε αυτήν την ευθεία μπορούμε να τοποθετήσουμε όλους τους ακέραιους και όλα τα κλάσματα, δηλαδή όλους τους ρητούς. Επίσης πάνω στην ίδια ευθεία μπορούμε να τοποθετήσουμε και όλους τους άρρητους ως εξής:

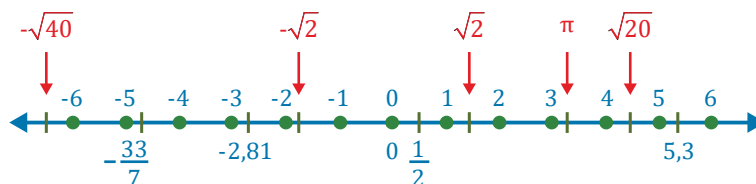


Με την ψηφιακή εφαρμογή να διερευνήσετε το σύνολο των πραγματικών αριθμών και τις σχέσεις του με άλλα σύνολα αριθμών.

Όπως είδαμε μπορούμε να προσεγγίσουμε έναν άρρητο με έναν ρητό αριθμό, οπότε βρίσκοντας μία ρητή προσέγγιση ενός άρρητου τον αντιστοιχίζουμε σε ένα σημείο της ευθείας με τη βοήθεια των προσεγγιστικών αντιπροσώπων τους, π.χ. $\sqrt{2} \approx 1,41$, $\pi = 3,14$, $\sqrt{20} \approx 4,47$. Ειδικότερα όταν μπορούμε να κατασκευάσουμε γεωμετρικά ένα ευθύγραμμο τμήμα με μήκος όσο ένας άρρητος, τότε μπορούμε να βρούμε σημείο Γ της ευθείας τέτοιο ώστε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $O\Gamma$ να ισούται με αυτό. Για παράδειγμα, αν κατασκευάσουμε το ορθογώνιο τρίγωνο AOB με $OA = AB = 1$ με το Πυθαγόρειο Θεώρημα βρίσκουμε ότι $OB = \sqrt{2}$ (Σχήμα). Γράφουμε τον κύκλο (O, OB) , ο οποίος τέμνει τον άξονα στα σημεία Γ και Γ' που παριστάνουν τους άρρητους $\sqrt{2}$ και $-\sqrt{2}$ αντίστοιχα.



Έτσι, μπορούμε να απεικονίσουμε κάθε πραγματικό αριθμό στην ευθεία.



Μια τέτοια ευθεία στην οποία απεικονίζουμε όλους τους πραγματικούς αριθμούς ονομάζεται **ευθεία ή άξονας των πραγματικών αριθμών**.

Έτσι:

- Κάθε πραγματικός αριθμός αντιστοιχεί σε ένα μόνο σημείο του άξονα.
- Αντίστροφα, κάθε σημείο του άξονα αντιστοιχεί σε έναν μόνο πραγματικό αριθμό.



Με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής να διερευνήσετε τις αναπαραστάσεις στην ευθεία των πραγματικών αριθμών ριζών φυσικών αριθμών που είναι άρρητοι.



Με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής να διερευνήσετε τις αναπαραστάσεις άρρητων στην ευθεία των πραγματικών αριθμών.

Δυνάμεις με βάση πραγματικό αριθμό $\alpha \neq 0$ και εκθέτη ακέραιο αριθμό

Ο ορισμός της δύναμης με εκθέτη ακέραιο επεκτείνεται και στους πραγματικούς αριθμούς.

Αν α πραγματικός αριθμός και n φυσικός, με $n > 1$, το γινόμενο n παραγόντων ίσων προς τον α σημειώνεται α^n και ονομάζεται δύναμη με βάση α και εκθέτη n . Δηλαδή:

$$\alpha^n = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha \cdot \alpha}_n$$

n παράγοντες

Για $n = 1, \alpha^1 = \alpha$.

Για πραγματικό αριθμό $\alpha, \alpha \neq 0: \alpha^0 = 1$ και $\alpha^{-n} = \frac{1}{\alpha^n}$

Γενικά, για τις δυνάμεις με βάση πραγματικό αριθμό και εκθέτη ακέραιο ισχύουν όσα έχουμε αναφέρει με βάση ρητό και εκθέτη ακέραιο.

Ορισμοί	Ιδιότητες
$\alpha^0 = 1, \alpha \neq 0$	$\alpha^m \cdot \alpha^n = \alpha^{m+n}$
$\alpha^1 = \alpha$	$\frac{\alpha^m}{\alpha^n} = \alpha^{m-n}, \alpha \neq 0$
$\alpha^n = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \dots \alpha$ <small>$n > 1, n$-παράγοντες</small>	$\alpha^n \cdot \beta^n = (\alpha\beta)^n$
	$\frac{\alpha^n}{\beta^n} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n, \beta \neq 0$
	$(\alpha^m)^n = \alpha^{m \cdot n}$



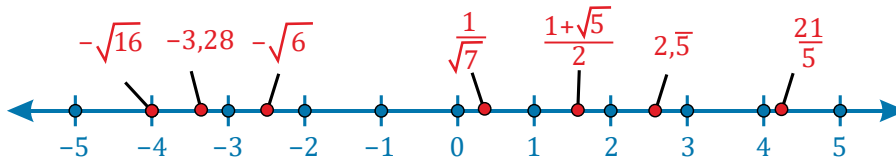
Εφαρμογή 1

Να τοποθετήσετε τους παρακάτω αριθμούς στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

$$-3,38, \quad -\sqrt{16}, \quad \frac{1}{\sqrt{7}}, \quad \frac{1+\sqrt{5}}{2} (= \varphi), \quad \frac{21}{5}, \quad 2,\bar{5}, \quad -\sqrt{6}$$

Απάντηση

Γράφουμε όλους τους αριθμούς σε δεκαδική μορφή χρησιμοποιώντας για τους άρρητους ρητές προσεγγίσεις δύο ψηφίων, οπότε έχουμε:



$$-\sqrt{16} = -4,0 < -3,38 < -\sqrt{6} \approx -2,45 < \frac{1}{\sqrt{7}} \approx 0,38 < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,62 < 2,\bar{5} \approx 2,56 < \frac{21}{5} = 4,2$$



Εφαρμογή 2

Να βρείτε τις τιμές του αριθμού x στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $x^2 = 3,24$

β) $x^2 = -36$

γ) $x^2 = 0$

Απάντηση

- α) Αναζητούμε όλους του αριθμούς οι οποίοι επαληθεύουν την εξίσωση $x^2 = 3,24$, δηλαδή αν υψωθούν στο τετράγωνο προκύπτει 3,24. Η εξίσωση έχει λύσεις τους αριθμούς $\sqrt{3,24}$ και $-\sqrt{3,24}$.
Εξάλλου $\sqrt{3,24} = 1,8$ και επομένως, η εξίσωση έχει δύο λύσεις: 1,8, -1,8.
- β) Για κάθε πραγματικό αριθμό x είναι $x^2 \geq 0$ και επειδή $-36 < 0$ δεν υπάρχει κανένας αριθμός του οποίου το τετράγωνο να είναι αρνητικός αριθμός, δηλαδή η εξίσωση δεν έχει λύση (αδύνατη).
- γ) Είναι $x^2 \geq 0$ και επομένως μοναδική λύση είναι ο αριθμός 0.



Εφαρμογή 3

Να βρείτε μία ρητή προσέγγιση στο πλησιέστερο δέκατο του μήκους της υποτείνουσας α του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ με κάθετες πλευρές $AB = 2$ cm και $B\Gamma = 7$ cm.

Απάντηση

Σχεδιάζουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = 90^\circ$ και υποτείνουσα α που παριστάνει την απόσταση ανάμεσα στα σημεία A, Γ . Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα παίρνουμε:

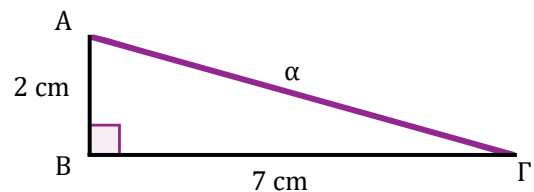
$$\alpha^2 = 2^2 + 7^2$$

$$\alpha^2 = 4 + 49$$

$$\alpha^2 = 53$$

$$\alpha = \sqrt{53}$$

Μία ρητή προσέγγιση στο δέκατο του αριθμού $\sqrt{53}$ είναι ο αριθμός 7,3 και επομένως μία ρητή προσέγγιση του μήκους της πλευράς α στο δέκατο είναι 7,3.



Να ανοίξετε τον σύνδεσμο και να απαντήσετε στις ερωτήσεις αξιολόγησης για τους πραγματικούς αριθμούς.

Ερωτήσεις για Αξιολόγηση

- 1 Ο Γιάννης βρήκε με την αριθμομηχανή ότι η τετραγωνική ρίζα του 10 είναι 3,162777 και έβγαλε το συμπέρασμα ότι: $\sqrt{10} = 3,1622\bar{7}$. Συμφωνείτε μαζί του; Να αιτιολογήσετε.
- 2 Ποια τετραγωνική ρίζα παριστάνει καλύτερα το σημείο P του άξονα;
A. $\sqrt{85}$ B. $\sqrt{81}$ Γ. $\sqrt{98}$ Δ. $\sqrt{79}$
- 3 Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς είναι άρρητος; Να αιτιολογήσετε.
A. $\pi (=3,14159\dots)$ B. 0,6161... Γ. 3,14159 Δ. $\sqrt{100}$
- 4 Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς είναι άρρητος; Να αιτιολογήσετε.
A. 0,7070070007... B. $\frac{7}{5}$ Γ. 0,88 $\bar{7}$ Δ. $-\sqrt{0,49}$



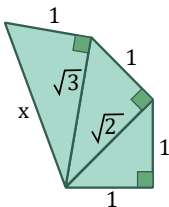
- 5 Να τοποθετήσετε τους αριθμούς κατά σειρά μεγέθους από τον μικρότερο αριθμό χωρίς αριθμομηχανή.
- A. $\sqrt{\frac{4900}{25}}$, $\sqrt{169}$, 11, 5^2 , $\frac{13}{3}$ B. $\sqrt{\frac{255+6}{10-3}}$, $\sqrt{4+4 \cdot 8}$, $2,7^2$, $\sqrt{7^2}$, $\frac{37}{5}$.
- 6 Να συμπληρώσετε τις ... με $>$, $<$ ή $=$ για να έχουμε αληθείς σχέσεις.
- A. $\sqrt{15} \dots 4,1$ B. $\sqrt{35} \dots 5,75$ Γ. $6,5 \dots \sqrt{45}$ Δ. $-3,3 \dots -\sqrt{10}$.
- 7 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με τη λέξη Σωστό (Σ), αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος (Λ), αν η πρόταση είναι λανθασμένη. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.
- α) Κάθε ακέραιος αριθμός είναι ρητός. β) Κάθε άρρητος αριθμός είναι πραγματικός.
 γ) Κάθε πραγματικός αριθμός είναι ακέραιος. δ) Κάθε ακέραιος αριθμός είναι φυσικός.
 ε) Κάθε ρητός αριθμός είναι ακέραιος. στ) Κάθε ρητός αριθμός είναι πραγματικός.
 ζ) Κάθε πραγματικός αριθμός είναι άρρητος. η) Κάθε φυσικός αριθμός είναι ακέραιος.
- 8 Να χαρακτηρίσετε τις διπλές ανισότητες που ακολουθούν με τη λέξη Σωστό (Σ), αν η ανισότητα είναι σωστή, ή Λάθος (Λ), αν η ανισότητα είναι λανθασμένη. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.
- α) $3 < \sqrt{5} < 4$ β) $5 < \sqrt{30} < 6$ γ) $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$ δ) $8 < \sqrt{17} < 9$
- 9 Να προσδιορίσετε αν ο αριθμός είναι ρητός (Ρ) ή άρρητος (Α).

Αριθμός	$\sqrt{121}$	97,385	$\sqrt{17}$	$\frac{11}{20}$	12,8759	33	$\sqrt{103}$	$\frac{16}{14}$	1,555...
Ρ ή Α									



Ασκήσεις και Προβλήματα

- 1 Να βρείτε τους διαδοχικούς ακεραίους του άξονα των αριθμών μεταξύ των οποίων βρίσκονται οι αριθμοί: $\sqrt{5}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$, $\sqrt{29}$, $\sqrt{125}$.
- 2 Να κατασκευάσετε γεωμετρικά στο τετράδιό σας ευθύγραμμα τμήματα με τα ακόλουθα μήκη:
 α) $\sqrt{2}$, β) $\sqrt{3}$, γ) $\sqrt{5}$, δ) $\sqrt{6}$, ε) $\sqrt{7}$.
- Να σημειώσετε στον άξονα την ακριβή θέση των πραγματικών αριθμών:
- α) $-\sqrt{2}$, β) $\sqrt{3}$, γ) $-\sqrt{5}$, δ) $\sqrt{6}$, ε) $-\sqrt{7}$.



- 3 Να κατασκευάσετε γεωμετρικά τους άρρητους αριθμούς: α) $\sqrt{10}$, β) $\sqrt{13}$, γ) $\sqrt{61}$.
- 4 Χρησιμοποιώντας γεωμετρικά όργανα να προσδιορίσετε την ακριβή θέση που καταλαμβάνουν οι παρακάτω αριθμοί στον άξονα των αριθμών.
 α) $-\sqrt{2}$ β) $1+\sqrt{2}$ γ) $1-\sqrt{2}$ δ) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ε) $3\sqrt{2}$
- 5 Να βρείτε τις ρητές προσεγγίσεις των ακόλουθων αριθμών στο δέκατο.
 α) $\sqrt{6}$ β) $\sqrt{19}$ γ) $\sqrt{2}$ δ) $\sqrt{18}$ ε) $\sqrt{23}$

Να τοποθετήσετε τις προσεγγίσεις που βρήκατε στον άξονα:

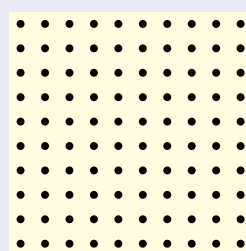


- 6 Να τοποθετήσετε στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς:
 -5 , $-3,43$, $0,45$, $-\sqrt{13}$, $\frac{35}{16}$, $\sqrt{27}$, $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

7 Εργασία μαθητών στην τάξη σε μικρές ομάδες.

Να χρησιμοποιήσετε φύλλα με στιγμές για να σχεδιάσετε τετράγωνα με ή χωρίς οριζόντιες και κατακόρυφες πλευρές. Για κάθε τετράγωνο να βρείτε:

- α) Το εμβαδόν του.
 β) Το ακριβές μήκος της πλευράς του.
 γ) Τη ρητή προσέγγιση του μήκους της πλευράς στο δέκατο και το εκατοστό για τα τετράγωνα που έχουν ως πλευρές άρρητους αριθμούς.
 δ) Να εξηγήσετε γιατί το εμβαδόν ενός τετραγώνου είναι ρητός αριθμός, ενώ το μήκος της πλευράς δεν είναι απαραίτητα ρητός αριθμός.
- Να μοιραστείτε τις απαντήσεις στη μικρή ομάδα και σε ολόκληρη την τάξη.**



- 8 Να βρείτε τις τιμές του αριθμού x στις παρακάτω περιπτώσεις, εφόσον υπάρχουν:

α) $x^2 = 400$ β) $x^2 = 17$ γ) $x^2 = 0,64$
 δ) $x^2 = 2500$ ε) $x^2 = -19600$

- 9 Να βρείτε τις τιμές του αριθμού x στις παρακάτω περιπτώσεις, εφόσον υπάρχουν:

α) $x^2 = -7$ β) $x^2 = 19$ γ) $1,69 = x^2$ δ) $x^2 = 0$

- 10 **Εργασία μαθητών στην τάξη κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες.** Να ελέγξετε τους ακόλουθους ισχυρισμούς και να διορθώσετε εάν χρειάζεται:

α) Ο Κώστας λέει: «Η εξίσωση $x^2 = 36$ έχει λύσεις τους αριθμούς 6 και -6 . Οι δύο λύσεις είναι επίσης τετραγωνικές ρίζες του 36, γιατί τα τετράγωνά τους είναι 36».

β) Ο Δημήτρης έλυσε την εξίσωση $x^2 - 2,4 = 0$ ως εξής: «έχω: $x^2 = 2,4$, οπότε βγάζω την τετραγωνική ρίζα και βρίσκω $x = 1,55$ ».

γ) Η Μαίρη έλυσε την εξίσωση $x^2 = 5$. Λέει: «Υπολόγισα με την αριθμομηχανή τη ρίζα του 5 και βρήκα $\sqrt{5} = 2,236$. Επομένως, υπάρχουν δύο λύσεις $x = 2,236$ και $x = -2,236$ ». Η Υπατία απαντά: «Οι λύσεις σας είναι λάθος, γιατί $2,236^2 = 4,999696$ και $(-2,236)^2 = 4,999696$ ».

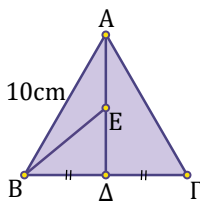
δ) Η Ιωάννα θέλει να υπολογίσει το μήκος της πλευράς ενός τετραγώνου με εμβαδόν 256. Έλυσε την εξίσωση $a^2 = 256$ και έδωσε ως λύσεις 16 και -16 .

Να μοιραστείτε τις απαντήσεις μας πρώτα στη μικρή ομάδα και ύστερα σε ολόκληρη την τάξη.

- 11 Να βρείτε ρητές προσεγγίσεις στο δέκατο και στο εκατοστό της υποτείνουσας ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές 3 cm και $\sqrt{5}$ cm.

- 12 Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρά 10 cm. Αν E είναι το μέσον της διαμέσου AD , να υπολογίσετε:

- α) Τη διάμεσο AD .
 β) Το μήκος του τμήματος BE .



- 13 **Ισχύς ανεμογεννήτριας.**

Η ισχύς P (σε W), που παρέχεται από μια ανεμογεννήτρια ποικίλλει ανάλογα με την ταχύτητα του ανέμου και το μήκος L (σε m) των πτερυγίων.



Για ταχύτητα ανέμου 72 km/h, έχουμε: $P = 1.600\pi L^2$.

- α) Να υπολογίσετε με στρογγυλοποίηση στη μονάδα: την ισχύ (σε kW) μιας ανεμογεννήτριας της οποίας τα πτερύγια έχουν μήκος $L = 35$ m.

- β) Να βρείτε το μήκος των πτερυγίων μιας ανεμογεννήτριας της οποίας η ισχύς είναι 10 MW (1 μεγαβάτ = 10^6 W και 1 kW = 10^3 W).

- 14 **Ηλιακός συλλέκτης.**

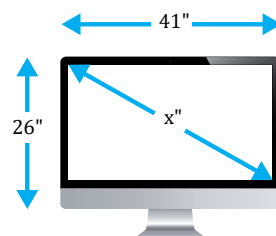
Ένας ηλιακός συλλέκτης συνδέεται με μπαταρία για τη μετατροπή της ηλιακής ενέργειας σε ηλεκτρική. Ο συλλέκτης έχει σχήμα τετραγώνου και παράγει 0,03 Watt ηλεκτρικής ισχύος ανά τετραγωνικό δεκατόμετρο. Αν ο συλλέκτης παρήγαγε συνολικά 9 Watt ηλεκτρικής ισχύος να βρείτε:



- α) Το εμβαδόν του ηλιακού συλλέκτη.

- β) Το μήκος της πλευράς του.

- 15 Το μέγεθος των τηλεοράσεων μετρείται σε ίντσες (1 ίντσα 2,54 cm). Όταν λέμε ότι μια τηλεόραση είναι 40 ίντσών εννοούμε το μήκος x της διαγωνίου. Η τηλεόραση του σχήματος έχει διαστάσεις 26 και



41 ίντσες αντίστοιχα (πλάτος και μήκος).

- α) Να βρείτε τη διαγώνιο x με προσέγγιση ακεραίου.
 β) Να εξετάσετε αν η οθόνη της τηλεόρασης είναι «χρυσό ορθογώνιο». Χρυσό είναι ένα ορθογώνιο αν ο λόγος της μεγαλύτερης προς τη μικρότερη πλευρά του είναι: $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,62$

Να συνεργαστείτε σε ομάδες και να λύσετε το πρόβλημα: «Στρογγυλό παράθυρο». Να το συνδέσετε με την πραγματική ζωή.



Να μελετήσετε το Ιστορικό σημείωμα με τίτλο: «Η χρυσή τομή και η ομορφιά των Μαθηματικών».



1.8

Ανακεφαλαίωση και διεύρυνση της θεματικής ενότητας

Δυνάμεις με βάση πραγματικό αριθμό $\alpha \neq 0$ και εκθέτη ακέραιο αριθμό

$$\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \dots \alpha}_v \text{ παράγοντες} = \alpha^v \begin{matrix} \swarrow \text{Εκθέτης} \\ \searrow \text{Βάση} \end{matrix} \text{ για } v > 1$$

$$\alpha^0 = 1 \quad (\alpha \neq 0), \quad \alpha^1 = \alpha$$

$$\alpha^{-v} = \frac{1}{\alpha^v}, \quad \alpha \neq 0$$

Παραδείγματα:

$$7^0 = 1, \quad \left(-\frac{5}{9}\right)^0 = 1, \quad (-\sqrt{7})^0 = 1,$$

$$5^1 = 5, \quad (-0,7)^1 = -0,7, \quad 0^1 = 0$$

$$0,7^3 = 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,7 = 0,343$$

$$-2^4 = -(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = -16$$

$$(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16, \quad (-4)^3 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = -64$$

$$\left(-\frac{3}{5}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(-\frac{3}{5}\right)^3} = -\frac{125}{27}, \quad (-\sqrt{5})^{-2} = \frac{1}{(-\sqrt{5})^2} = \frac{1}{(\sqrt{5})^2} = \frac{1}{5}, \quad \pi^{-1} = \frac{1}{\pi}$$

Ιδιότητες δυνάμεων με βάση ρητό αριθμό και εκθέτη ακέραιο αριθμό

Για όλους τους ρητούς αριθμούς α, β με $\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$ και όλους τους ακέραιους εκθέτες μ και ν ισχύουν:

Γινόμενα δυνάμεων:

$$\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu} \quad (\text{ίσες βάσεις})$$

$$(-8)^3 \cdot (-8)^{-3} = (-8)^{3-3} = (-8)^0 = 1$$

$$\alpha^\nu \cdot \beta^\nu = (\alpha \cdot \beta)^\nu \quad (\text{ίσοι εκθέτες})$$

$$2^{-4} \cdot 1,5^{-4} = (2 \cdot 1,5)^{-4} = 3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$$

Πηλίκα δυνάμεων:

$$\alpha^\mu : \alpha^\nu = \alpha^{\mu-\nu} \quad (\text{ίσες βάσεις})$$

$$7^6 : 7^{-5} = 7^{6-(-5)} = 7^{6+5} = 7^{11}$$

$$\alpha^\nu : \beta^\nu = (\alpha:\beta)^\nu \quad (\text{ίσοι εκθέτες})$$

$$0,9^{-5} : 0,45^{-5} = (0,9:0,45)^{-5} = 2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$$

Υψωση δύναμης σε εκθέτη:

$$(\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu \cdot \nu} = (\alpha^\nu)^\mu$$

$$(3^{-2})^3 = 3^{(-2) \cdot 3} = 3^{-6} = \frac{1}{3^6} = \frac{1}{729}$$

Τυποποιημένη μορφή αριθμών: Πολύ μεγάλοι ή πολύ μικροί θετικοί αριθμοί μπορούν να γραφούν στην τυποποιημένη μορφή $\alpha \cdot 10^\nu$, με $1 \leq \alpha < 10$, όπου ν ακέραιος αριθμός.

Παραδείγματα: $6,73 \cdot 10^5 = 673000$, $4,8 \cdot 10^{-3} = 0,0048$, $2.590.000 = 2,59 \cdot 10^6$, $0,0000071 = 7,1 \cdot 10^{-6}$

Τετραγωνική ρίζα

Τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α λέγεται ο μη αρνητικός αριθμός $\sqrt{\alpha}$, ο οποίος όταν υψωθεί στο τετράγωνο είναι ίσος με τον α .

Από τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας προκύπτουν: Αν $\alpha \geq 0$, τότε $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$ και $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$ και

Παραδείγματα: $\sqrt{169} = 13$, γιατί $13^2 = 169$, $\sqrt{\frac{49}{64}} = \frac{7}{8}$, γιατί $\left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{49}{64}$. Επίσης: $\sqrt{(7)^2} = 7$ και $\sqrt{7^2} = 7$.

Δεν υπάρχει τετραγωνική ρίζα αρνητικού αριθμού, αφού το τετράγωνο κάθε αριθμού είναι μη αρνητικός αριθμός.

Ρητοί και άρρητοι αριθμοί:

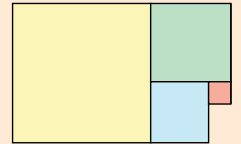
- Το σύνολο των ρητών αριθμών αποτελείται από τους ακέραιους, τους δεκαδικούς αριθμούς με πεπερασμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων και τους περιοδικούς δεκαδικούς αριθμούς. **Παράδειγμα:** 1, 2,53, 4,555...
- Το σύνολο των άρρητων αριθμών αποτελείται από όλους τους δεκαδικούς αριθμούς που έχουν άπειρο πλήθος δεκαδικών ψηφίων χωρίς περιοδικότητα. **Παράδειγμα:** $\sqrt{5}$, π , 0,12345101001000...
- Το σύνολο των ρητών αριθμών και το σύνολο των άρρητων αριθμών σχηματίζουν το σύνολο των πραγματικών αριθμών \mathbb{R} .
- Οι πραγματικοί αριθμοί παριστάνονται με τα σημεία του άξονα των πραγματικών αριθμών Συγκεκριμένα σε κάθε σημείο του άξονα αντιστοιχεί ένας πραγματικός αριθμός και σε κάθε πραγματικό αριθμό αντιστοιχεί ένα σημείο του άξονα.

Με τη βοήθεια γεωπίνακα με διάστικτους τετραγωνικούς καμβάδες να κάνετε την Εργασία με προεκτάσεις: «Ψάχνοντας για "οικογένειες τετραγώνων"».



Ερωτήσεις για συζήτηση και αναστοχασμό

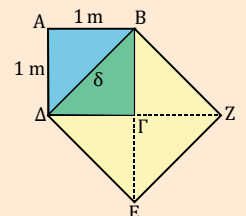
1. Ο αριθμός 65 μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα 2 τετράγωνων αριθμών με δύο τρόπους. Ποια είναι τα ζεύγη των τετράγωνων αριθμών;
2. Αν το εμβαδόν του μικρού κόκκινου τετραγώνου είναι μία τετραγωνική μονάδα και το εμβαδόν του μπλε τετραγώνου είναι 25 τετραγωνικές μονάδες να υπολογίσετε το εμβαδόν του κίτρινου τετραγώνου.



3. Να γράψετε αναλυτικά τις δυνάμεις με τους παράγοντες και να αιτιολογήσετε γιατί οι ισότητες είναι σωστές.

$$3^{-3} \cdot 2^{-3} = 6^{-3} \quad (2^3)^2 = (2^2)^3 \quad \alpha^4 \cdot \alpha^4 = \alpha^8 \quad x^5 : y^5 = \left(\frac{x}{y}\right)^5$$

4. Να γράψετε τους παρακάτω αριθμούς κατά σειρά μεγέθους από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο και να αιτιολογήσετε. 11^{-1} 10^0 0^{10} 5^2 2^5
5. Ποιος από τους αριθμούς είναι μεγαλύτερος;
α) $0,423 \cdot 10^8$ ή $0,791 \cdot 10^6$; **β)** $0,423 \cdot 10^{-8}$ ή $0,791 \cdot 10^{-6}$;
6. Η Δόμνα ισχυρίζεται ότι κάθε φορά που βλέπουμε το σύμβολο της τετραγωνικής ρίζας ο αριθμός είναι άρρητος. Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό της; Να αιτιολογήσετε.
7. Να γράψετε τις παρακάτω τετραγωνικές ρίζες μεταξύ δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών: **α)** $\sqrt{3}$ **β)** $\sqrt{7}$.
8. Να κατασκευάσετε με κανόνα και διαβήτη τους άρρητους αριθμούς $\sqrt{5}$ και $\sqrt{8}$.
9. Συγκρίνοντας τα εμβαδά των τετραγώνων ABΓΔ και BΖΕΔ πώς μπορείτε να καταλήξετε στη σχέση $\delta^2 = 2$;



10. Η Ισμήνη ισχυρίζεται ότι οι τετραγωνικές ρίζες μεγαλύτερων διαδοχικών αριθμών είναι πιο κοντά μεταξύ τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών από τις τετραγωνικές ρίζες μικρότερων διαδοχικών αριθμών. Να εξετάσετε τον ισχυρισμό με παραδείγματα.

Επαναληπτικά Έργα & Προεκτάσεις

- 1 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:
 α) $A = (-0,25)^{101} : 8^{68}$ β) $B = (-0,125)^{501} : 2^{1500}$.

- 2 **Ανοιχτό πρόβλημα.** Ποιο είναι το τελευταίο ψηφίο του αριθμού 2^{50} ;

- 3 Να βρείτε το πλήθος των ψηφίων των αριθμών:
 $A = 5^7 \cdot 6^7$ $B = 17 \cdot 4^6 \cdot 5^{12}$.

- 4 Η Ασημίνα υποστηρίζει ότι ο μεγαλύτερος φυσικός αριθμός που μπορεί να γραφτεί χρησιμοποιώντας μόνο 3 ψηφία είναι ο 999. Συμφωνείτε με αυτόν τον ισχυρισμό; Να εξηγήσετε την απάντησή σας;

- 5 **Ανοιχτό πρόβλημα.** Χρησιμοποιώντας ακριβώς τέσσερις φορές το ψηφίο 2 πώς μπορούμε να βρούμε:
 α) 16 β) 32 γ) 64 δ) 256

- 6 Να γράψετε στην απλούστατη δυνατή μορφή τις αριθμητικές παραστάσεις:
 $A = \frac{(3^5 \cdot 2^{-2})^2}{(9^{-1} \cdot 2^3)^3}$ $B = \left(\frac{5^3 \cdot 2^{-3}}{25 \cdot 2^2}\right)^2 : \frac{5 \cdot 10^2}{2^8}$

$$\Gamma = \left(\frac{x^2 \cdot y^{-1}}{9 \cdot y^{-2}}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{x^3 \cdot y^{-3}}{6 \cdot y^2}\right)^2$$

- 7 Αν $x = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} - \left(-\frac{1}{4}\right)^{-1}$ και $y = \left(-\frac{1}{3}\right)^{-3} : \left(\frac{1}{9}\right)^{-1}$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:
 $A = x^{-2} - y^{-1}$

- 8 Να γράψετε την παράσταση $A = (-8)^2 \cdot \left(-\frac{1}{16}\right)^{-4}$ ως δύναμη με βάση τον αριθμό 2.

- 9 Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:
 $A = \left(\frac{2}{7} + 1 - \frac{1}{14}\right) : \frac{17}{2} - \frac{1}{7} + 5 \cdot \frac{1}{6} - \left(\frac{3}{2} + \frac{7}{3} \cdot 2 - 1\right)$.
Διαγωνισμός Ε.Μ.Ε. «Ο Θαλής» 2011 - Β' Γυμνασίου

- 10 Να υπολογίσετε την τιμή των αριθμητικών παραστάσεων:
 $A = 24 : 6 + 5^2 - 2 \cdot 8 + 8 : 2^2 + \frac{3^2}{11}$
 $B = (2^5 + 112) : 3^2 - 1 + \frac{5}{7}$.
Διαγωνισμός Ε.Μ.Ε. «Ο Θαλής» 2015 - Β' Γυμνασίου

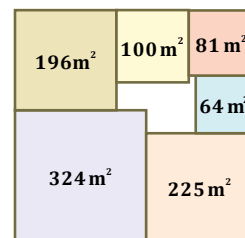
- 11 Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \left(\frac{(-21)^7}{7^7} + \frac{(-15)^7}{(-5)^7} + 4044\right) : \left(\frac{(-14)^3}{7^3} + \frac{(-18)^3}{(-9)^3} + 2\right)$$

Διαγωνισμός Ε.Μ.Ε. «Ο Θαλής» 2022 - Β' Γυμνασίου

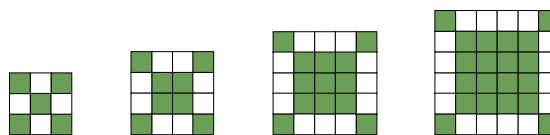
- 12 Το βάρος ενός κόκκου ρυζιού είναι $2,9 \cdot 10^{-2}$ γραμμάρια. Το βάρος ενός κόκκου ζάχαρης είναι $6,25 \cdot 10^{-4}$ γραμμάρια. Ζυγίζει περισσότερο, ένας κόκκος ρύζι ή 10 κόκκοι ζάχαρη; Να εξηγήσετε πώς θα αποφασίσετε;

- 13 **Μαθηματική πρόκληση.** Το διπλανό σχήμα περιέχει έξι τετράγωνα.



- α) Να ελέγξετε αν οι εξωτερικές διαστάσεις του σχήματος είναι ίσες.
 β) Ποια αναλογία του συνολικού εμβαδού των έξι τετραγώνων έχουν τα επιμέρους τετράγωνα; Να δημιουργήσετε έναν πίνακα.
 γ) Να εξετάσετε εάν η λευκή περιοχή μέσα στο σχήμα μπορεί να γεμίσει πλήρως με επιπρόσθετα τετράγωνα χωρίς επικάλυψη.

- 14 **Μαθηματική πρόκληση.**



- α) Να βρείτε τον αριθμό των πράσινων τετραγώνων σε καθένα από τα σχήματα της κανονικότητας.
 β) Ποιο σχήμα θα έχει 173 πράσινα τετράγωνα;
 15 Να βρείτε τα σημεία του άξονα των πραγματικών αριθμών που παριστάνουν τους αριθμούς: $\sqrt{12}$, $\sqrt{20}$ και $\sqrt{41}$. α) Με ρητή προσέγγιση στο εκατοστό. β) Με ακριβή γεωμετρική κατασκευή.
 16 Οι κάθετες πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι $2\sqrt{2}$ και $3\sqrt{2}$
 α) Να υπολογίσετε το ακριβές μήκος της υποτεινούς.
 β) Το εμβαδόν του τριγώνου είναι ρητός ή άρρητος. Γιατί;

17 Ελεύθερη πτώση. Ο τύπος $h = \frac{9,81}{2} t^2$ εκφράζει την απόσταση h (σε m) την οποία διανύει ένα σώμα κατά την ελεύθερη πτώση του ως προς τον χρόνο t (σε sec). Το σώμα αφήνεται να πέσει χωρίς αρχική ταχύτητα.

α) Πόσο διαρκεί η πτώση από την κορυφή ενός πύργου ύψους 50 m;

β) Μια πτώση από ύψος 4000 m (ύψος στο οποίο κινείται ένα τουριστικό αεροπλάνο) θα διαρκέσει περισσότερο από μισό λεπτό;

18 Φαινόμενο Joule. Όταν ηλεκτρικό ρεύμα έντασης I σε Αμπέρ (A) περνά από ηλεκτρικό αντιστάτη με αντίσταση R σε Ωμ (Ω) μίας ηλεκτρικής θερμάστρας, τότε η ισχύς P σε Βάτ (W) που καταναλώνεται είναι: $P = R \cdot I^2$. Να υπολογίσετε την ένταση του ρεύματος στο εκατοστό για μία ηλεκτρική θερμάστρα ισχύος 14 kW με αντίσταση 20 Ω .

19 Ταχύτητα διαφυγής.

Ένας πύραυλος είναι ένας εκτοξευτής που επιτρέπει στους δορυφόρους να τοποθετούνται σε τροχιά



γύρω από τη Γη. Η ταχύτητα διαφυγής είναι η ταχύτητα που πρέπει να δοθεί σε ένα αντικείμενο ώστε να μπορέσει να διαφύγει από την έλξη ενός πλανήτη. Αυτή η ταχύτητα συμβολίζεται με v και υπολογίζεται από τον τύπο:

$$v = \sqrt{\frac{13,4 \cdot 10^{-11} \cdot M}{r+h}}$$

όπου M είναι η μάζα του πλανήτη σε kg (για τη Γη έχουμε: $M = 6 \times 10^{24}$ kg), r είναι η ακτίνα του σε m (για τη Γη έχουμε: $r = 6,4 \times 10^6$ m), h είναι η απόσταση σε m του πυραύλου από τη Γη, εκεί που θα απελευθερώσει τον δορυφόρο ώστε να διαφύγει από την έλξη της Γης.

Η ταχύτητα v εκφράζεται σε m/s.

Ο πύραυλος απελευθερώνει έναν τηλεπικοινωνιακό δορυφόρο σε ένα υψόμετρο $h = 1,9 \times 10^6$ m.

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $r + h$.

β) Ποια πρέπει να είναι η ταχύτητα του πυραύλου σε αυτό το ύψος; Θα στρογγυλοποιήσετε το αποτέλεσμα σε m/s. Να γράψετε αυτό το αποτέλεσμα σε τυποποιημένη μορφή.

Σημείωση: Η ποσότητα $13,4 \cdot 10^{-11}$ δεν είναι καθαρός αριθμός αλλά μετριέται σε $m^3/(kg \cdot s^2)$.

20 Χρυσό είναι ένα ορθογώνιο αν ο λόγος της μεγαλύτερης προς τη μικρότερη πλευρά του είναι:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$



α) Να δώσετε την τιμή του σε δεκαδική μορφή με προσέγγιση χιλιοστού.

β) Το αντίγραφο της «Μόνα Λίζα» είναι σχήματος «χρυσού» ορθογωνίου και πρόκειται να τοποθετηθεί σε κορνίζα επίσης σχήματος «χρυσού» ορθογωνίου. Αν η μεγάλη διάσταση της κορνίζας είναι 32 cm να βρείτε τη μικρή διάσταση.



Να ανοίξετε την εφαρμογή «ΓΛΩΣΣΑΡΙ: ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΣ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΣ» για να ανακεφαλαιώσετε όρους και έννοιες τις οποίες γνωρίσατε στο κεφάλαιο αυτό.

Αλγεβρικός Συλλογισμός

Κεφάλαιο

2

ΑΛΓΕΒΡΑ

Γραμμικές αριθμητικές κανονικότητες

Αλγεβρικές παραστάσεις

Εξισώσεις

Επίλυση προβλημάτων

Να ανοίξετε τον σύνδεσμο και να μελετήσετε το Ενημερωτικό σημείωμα: «Εισαγωγή στην Άλγεβρα».



Στο Κεφάλαιο αυτό θα μάθουμε:

- Να αξιοποιούμε κανονικότητες της μορφής $a \cdot n + b$ στην ανάπτυξη μαθηματικών επιχειρημάτων και την επίλυση προβλημάτων.
- Να αναγνωρίζουμε αλγεβρικές παραστάσεις, να τις απλοποιούμε και να υπολογίζουμε την αριθμητική τιμή τους.
- Να χρησιμοποιούμε την επιμεριστική ιδιότητα και τη διπλή επιμεριστική ιδιότητα.
- Να λύνουμε εξισώσεις της μορφής $ax + b = \gamma x + \delta$ και να αναγνωρίζουμε το πλήθος των λύσεων.
- Να μοντελοποιούμε και να λύνουμε προβλήματα με τη βοήθεια εξισώσεων.

2.1

Γραμμικές αριθμητικές κανονικότητες ρητών αριθμών

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

- Να λύνουν προβλήματα που συναντούν στα Μαθηματικά και την καθημερινή ζωή με κανονικότητες της μορφής $a \cdot n + b$ όπου a και b ρητοί αριθμοί.
- Να διατυπώνουν επιχειρήματα και να αιτιολογούν τους συλλογισμούς τους σχετικά με τον προσδιορισμό μιας κανονικότητας.

Στο περιβάλλον μπορούμε να αναγνωρίσουμε ομάδες στοιχείων που ακολουθούν έναν κανόνα και είναι τοποθετημένα με συγκεκριμένο τρόπο. Τέτοιες δομές στις οποίες οι διαδοχικοί όροι δημιουργούνται από έναν κανόνα είναι γνωστές ως **κανονικότητες**. Τις κανονικότητες τις λέμε και μοτίβα. Μερικές κανονικότητες απλώς επαναλαμβάνονται, όπως το μοτίβο ABΓ, ABΓ, ABΓ, ... που μάθαμε στο Δημοτικό Σχολείο. Υπάρχουν όμως και άλλες των οποίων οι όροι αυξάνονται ή ελαττώνονται. Παρατηρώντας τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλονται οι όροι τους, μπορούμε να ανακαλύψουμε τον κανόνα που τις παράγει. Στην Α΄ Γυμνασίου μάθαμε για παράδειγμα την κανονικότητα των άρτιων φυσικών αριθμών 2, 4, 6, 8, ...

Αυτή είναι μία **γραμμική αριθμητική κανονικότητα** στην οποία οι όροι της αυξάνονται κάθε φορά κατά την ίδια ποσότητα. Σύμφωνα με τη διπλανή εικόνα, η κανονικότητα ξεκινά με τον αριθμό 2 (1ος όρος) και κάθε φορά μπορούμε να βρούμε τον επόμενο όρο προσθέτοντας τον σταθερό αριθμό 2. Η ακολουθία των όρων κανονικότητας προσδιορίζεται με δύο τρόπους:

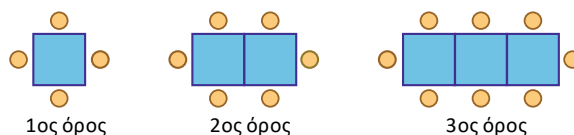


- Βρίσκοντας τον κανόνα μετάβασης από έναν όρο στον επόμενο (**κανόνας από όρο σε όρο**). Στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι: «προσθέτουμε τον αριθμό 2».
- Βρίσκοντας τον **γενικό κανόνα** με τον οποίο προκύπτει η αριθμητική τιμή κάθε όρου αν είναι γνωστή η θέση του στην κανονικότητα. Στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι: $y = 2 \cdot n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, όπου y είναι το πλήθος των στοιχείων και n η σειρά του όρου.

Οι κανονικότητες είναι ένας συνδετικός κρίκος ανάμεσα στην Αριθμητική και την Άλγεβρα. Στις παρακάτω διερευνήσεις θα ανακαλύψουμε τον γενικό κανόνα σε κανονικότητες γραμμικού τύπου και έτσι θα μπορούμε να βρούμε κάθε όρο με τη βοήθεια της θέσης του στη σειρά των όρων.

Διερεύνηση 1. Γραμμική Αριθμητική Κανονικότητα.

Εργασία μαθητών κατά ζεύγη ή σε μικρές ομάδες. Η κυρία Ρένα είναι ιδιοκτήτρια εστιατορίου. Διαθέτει μικρά τετράγωνα τραπέζια που χωρούν ένα άτομο σε κάθε πλευρά. Τα τραπέζια μπορούν να ενωθούν μεταξύ τους για να σχηματίσουν μεγαλύτερα. Η κανονικότητα συνεχίζεται και για τους όρους που δεν δίνονται στην εικόνα.



- α) Να σχεδιάσετε τα τραπέζια των δύο επόμενων όρων και να παρατηρήσετε με προσοχή τους διαδοχικούς όρους.
- β) Πώς μπορούμε να βρούμε τον αριθμό των ατόμων που μπορούν να καθίσουν σε 6 τραπέζια; Σε 10 τραπέζια; Να διατυπώσετε με λόγια έναν **κανόνα εύρεσης του επόμενου όρου** αν γνωρίζουμε τον προηγούμενο.
- γ) Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών. Ποιον κανόνα θα χρησιμοποιήσετε για να τον συμπληρώσετε;

Σειρά του όρου (n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Πλήθος ατόμων (y)										

- δ) Ποιος είναι ο αριθμός των ατόμων που μπορούν να καθίσουν σε 90 τραπέζια;
- ε) Να βρείτε έναν **γενικό κανόνα** που συνδέει το πλήθος των ατόμων (y) με τον αριθμό των τραπέζιων (n) και να ελέγξετε αν ο κανόνας ισχύει. **Συγκρίνουμε τα αποτελέσματα. Εάν βρήκαμε διαφορετικούς τρόπους, τους εξηγούμε στην ολομέλεια.**



Να ανοίξετε τον σύνδεσμο και να διερευνήσετε με την ψηφιακή εφαρμογή την έννοια της γραμμικής αριθμητικής κανονικότητας.

Διερεύνηση 2. Εύρεση αναδρομικού και γενικού κανόνα ακολουθίας.

Εργασία μαθητών ατομικά ή κατά ζεύγη.

Οι παρακάτω γραμμικές κανονικότητες περιγράφουν ακολουθίες αριθμών. Να παρατηρήσετε τους διαδοχικούς αριθμούς κάθε ακολουθίας και να αναζητήσετε έναν κανόνα που τους παράγει.

(A) 7, 12, 17, 22, ... (B) 3, 1, -1, -3, ...

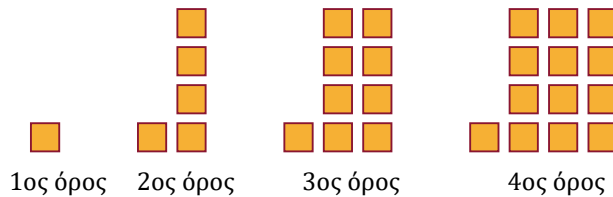
- α) Ποιοι είναι οι τρεις επόμενοι όροι των ακολουθιών; Να διατυπώσετε με λόγια τον **κανόνα εύρεσης του επόμενου όρου** κάθε ακολουθίας (κανόνας από όρο σε όρο).
- β) Να περιγράψετε έναν σύντομο τρόπο για να βρείτε:
 - τον 48ο όρο της ακολουθίας (A).
 - τον 57ο όρο της ακολουθίας (B).
- γ) Να γράψετε έναν **γενικό κανόνα** για κάθε μία από τις παραπάνω ακολουθίες ώστε να προσδιορίζουμε κάθε όρο με τη βοήθεια της θέσης του. Να ελέγξετε αν οι κανόνες ισχύουν για τους τέσσερις πρώτους όρους της αντίστοιχης ακολουθίας.
- δ) Για τις ακολουθίες (A) και (B) να κατασκευάσετε δύο πίνακες τιμών. Σε ένα σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε τα σημεία (n, y) κάθε πίνακα και να τα ενώσετε. Τι διαπιστώνουμε από τη σύγκριση των δύο γραμμών που σχηματίζονται; **Να εξηγήσετε πώς σκεφτήκατε. Να επικυρώσετε την ορθότητα των λύσεων στην ολομέλεια της τάξης.**



Διερεύνηση 3. Έλεγχος εικασιών, προβολή επιχειρημάτων, αιτιολόγηση συλλογισμών.

Εργασία μαθητών ατομικά ή κατά ζεύγη.

Δίνονται οι τέσσερις πρώτοι όροι μίας κανονικότητας με τετράγωνα.



Τέσσερις μαθητές διατυπώνουν τις ακόλουθες εικασίες που θεωρούν ότι περιγράφουν το πλήθος των τετραγώνων για $n = 1, 2, 3, \dots$ όπου n η σειρά του όρου:

$$A = n + (n - 1) \cdot 3, \quad B = 4n + 1, \quad \Gamma = 5 - 4n \quad \text{και} \quad \Delta = 1 + (n - 1) \cdot 4$$

- α) Να εξετάσετε ποιες από τις προηγούμενες εικασίες περιγράφουν σωστά έναν γενικό κανόνα και ποιες όχι.
- β) Να διατυπώσετε δικές σας εικασίες για την περιγραφή του γενικού κανόνα και να τις ελέγξετε.

Συζητάμε και εξηγούμε πώς βρήκαμε τις απαντήσεις μας.



Με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής να διερευνήσετε και να λύσετε το πρόβλημα: «Σταυρός με σπιρτόξυλα».

Μαθηματικές Έννοιες και Διεργασίες Μάθησης

Η έννοια της γραμμικής αριθμητικής κανονικότητας

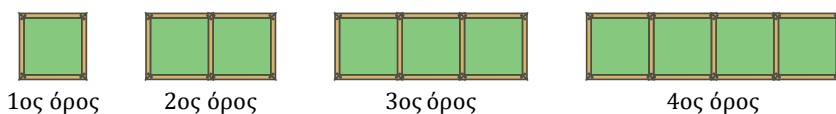
Κανονικότητες μπορούμε να συναντήσουμε σε αριθμούς, σχήματα, χρώματα, εικόνες, ήχους ή άλλα στοιχεία. Μία επαναλαμβανόμενη και προβλέψιμη δομή στοιχείων η οποία βασίζεται σε έναν κανόνα περιγράφει μία κανονικότητα. Δηλαδή:

Κανονικότητα λέγεται μία δομή στοιχείων που παράγεται από έναν κανόνα.

Συχνά η κανονικότητα είναι μία διαδοχή ή μία ακολουθία όρων.

Κάθε στοιχείο ή ομάδα στοιχείων μιας τέτοιας διαδοχής ονομάζεται **όρος της κανονικότητας**. Κάθε όρος έχει μία σειρά στη διαδοχή που δείχνει τη **θέση του όρου** στην κανονικότητα. Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα: Όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα για 1 παρτέρι χρειάζονται 4 ίδιου μήκους σανίδες, για 2 παρτέρια 7, για 3 παρτέρια 10 και για 4 παρτέρια 13.



Παρατηρούμε ότι αυτό που μεταβάλλεται είναι ο αριθμός των παρτεριών και το πλήθος των σανίδων και αυτό που παραμένει σταθερό είναι ο αριθμός 3 που προσθέτουμε κάθε φορά για να βρούμε τον επόμενο όρο από τον πρώτο και μετά. Ο πρώτος όρος είναι: $1+3$.

Αριθμός παρτεριών, v	Μοτίβο για το πλήθος σανίδων, y	Πλήθος σανίδων, y
1	$1 + 3$	$1 + 1 \cdot 3$
2	$1 + 3 + 3$	$1 + 2 \cdot 3$
3	$1 + 3 + 3 + 3$	$1 + 3 \cdot 3$
4	$1 + 3 + 3 + 3 + 3$	$1 + 4 \cdot 3$
:	:	:
v	$1 + \underbrace{3 + 3 \dots + 3}_{v \text{ φορές}}$	$1 + v \cdot 3$

Όπως βλέπουμε με τη βοήθεια του πίνακα ο γενικός κανόνας ή τύπος είναι: $y = 3v + 1, v = 1, 2, 3, \dots$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο $y = 3v + 1$ για $v = 1, 2, 3, \dots$ μπορούμε να βρούμε από πόσες σανίδες αποτελείται οποιοσδήποτε όρος της κανονικότητας αν γνωρίζουμε τη σειρά του. Για παράδειγμα ο 5ος όρος ($v = 5$), σχηματίζεται από $y = 3 \cdot 5 + 1 = 16$ σανίδες. Ο 12ος όρος σχηματίζεται από $y = 3 \cdot 12 + 1 = 37$ σανίδες. Ο 100ός όρος σχηματίζεται από $y = 3 \cdot 100 + 1 = 301$ σανίδες.

Στη συνέχεια θα γνωρίσουμε την κανονικότητα της μορφής $y = \alpha v + \beta$, όπου α και β είναι ρητοί αριθμοί και v και y μεταβλητές. Η κανονικότητα αυτή ονομάζεται **γραμμική αριθμητική κανονικότητα**.

Γραμμική αριθμητική κανονικότητα ονομάζεται η κανονικότητα $y = \alpha \cdot v + \beta, v = 1, 2, 3, \dots$ στην οποία κάθε όρος εκτός του πρώτου προκύπτει από τον προηγούμενό του με την πρόσθεση του ίδιου πάντοτε ρητού αριθμού.

- Η ισότητα $y = \alpha \cdot v + \beta$ ονομάζεται τύπος του γενικού όρου της γραμμικής αριθμητικής κανονικότητας.
- Η μεταβλητή v λέγεται **ανεξάρτητη** μεταβλητή.
- Η μεταβλητή y λέγεται **εξαρτημένη** μεταβλητή.
- Ο σταθερός αριθμός α ονομάζεται **διαφορά**.

Χαρακτηριστικό γνώρισμα των γραμμικών κανονικοτήτων της μορφής $y = \alpha \cdot v + \beta$ είναι ότι οι διαδοχικοί όροι τους έχουν σταθερή διαφορά που είναι ο συντελεστής α του v , αφού: $[\alpha(v + 1) + \beta] - (\alpha v + \beta) = \alpha v + \alpha + \beta - \alpha v - \beta = \alpha$.



Με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής να διερευνήσετε τη γραφική παράσταση της γραμμικής αριθμητικής κανονικότητας.

Μια αριθμητική ακολουθία είναι γραμμική αριθμητική κανονικότητα όταν οι διαφορές των διαδοχικών όρων της είναι ίσες.

Σημείωση: Σε ορισμένες γραμμικές κανονικότητες, οι όροι μπορεί να προσδιορίζονται για $x = 0, 1, 2, 3, \dots$ (π.χ. Εφαρμογή 2).

Σε κάθε γραμμική αριθμητική κανονικότητα της μορφής $y = \alpha \cdot v + \beta$, όπου α και β είναι ρητοί αριθμοί διακρίνουμε δύο κανόνες:

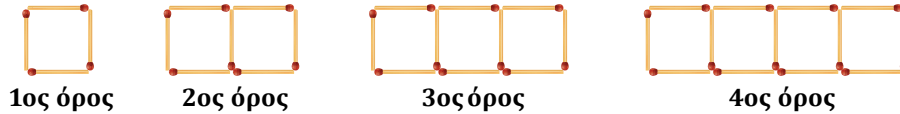
- Τον κανόνα «από όρο σε όρο», για να βρούμε τον επόμενο όρο αν ήδη γνωρίζουμε τον προηγούμενο (**αναδρομικός κανόνας**).
- Τον κανόνα προσδιορισμού «κάθε όρου από τη σειρά του», που μας δίνει τη δυνατότητα να βρούμε τον νιοστό όρο (**γενικός κανόνας**).

Για την περιγραφή της γραμμικής αριθμητικής κανονικότητας, αρκεί να γνωρίζουμε τη σταθερή **διαφορά μεταξύ δύο διαδοχικών** όρων της και **έναν όρο** με τη σειρά που καταλαμβάνει στην κανονικότητα. Συνήθως, επιλέγουμε τον πρώτο όρο.

Εικασία και διαδικασία επαλήθευσης

Η μελέτη των κανονικοτήτων είναι θεμελιώδης για τα Μαθηματικά. Η παρατήρησή τους επιτρέπει την εικασία, τον έλεγχο, τη γενίκευση. Η εικασία είναι η καλύτερη ιδέα για να μαντέψουμε τον γενικό κανόνα μίας γραμμικής αριθμητικής κανονικότητας. Μπορούμε να διατυπώνουμε μια εικασία για τον τύπο του γενικού όρου της κανονικότητας, να τη διαψεύσουμε με ένα αντιπαράδειγμα ή να την αιτιολογήσουμε με αλγεβρικά ή οπτικά επιχειρήματα.

Παράδειγμα: Έστω η παρακάτω γραμμική αριθμητικής κανονικότητα με τετράγωνα από σπίρτα.



Για τον τύπο του γενικού όρου της κανονικότητας, που εκφράζει το πλήθος των σπιρτών, μπορούν να διατυπωθούν οι εικασίες:

$$A = 4n, \quad B = 4n - (n - 1), \quad \Gamma = 2n + (n + 1) \text{ και } \Delta = 4 + (n - 1) \cdot 3 \text{ με } n = 1, 2, 3, \dots \text{ Τότε:}$$

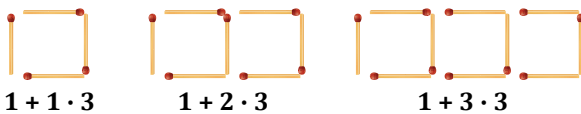
- α) Για $n = 2$ ο γενικός τύπος $A = 4n$ δίνει: $4 \cdot 2 = 8$ σπίρτα. Όμως ο δεύτερος όρος έχει 7 σπίρτα. Με ένα αντιπαράδειγμα η εικασία καταρρίπτεται. Άρα, η εικασία $A = 4n$ δεν περιγράφει τον τύπο του γενικού όρου της κανονικότητας.
- β) Οι τρεις τύποι του γενικού όρου B, Γ και Δ είναι ισοδύναμοι με τον τύπο $y = 3n + 1, n = 1, 2, 3, \dots$ αφού:

$$B = 4n - (n - 1) = 4n - n + 1 = 3n + 1, \quad \Gamma = n + n + (n + 1) = n + n + n + 1 = 3n + 1$$

$$\text{και } \Delta = 4 + (n - 1) \cdot 3 = 4 + 3n - 3 = 3n + 1.$$

Ο τύπος $1 + 3n, n = 1, 2, 3, \dots$ διαπιστώνουμε ότι επαληθεύεται για τις τιμές της μεταβλητής n .

Για τον νιοστό όρο εικάζουμε ότι ο τύπος του γενικού όρου της γραμμικής αριθμητικής κανονικότητας είναι: $1 + 3n$.



Στο σχήμα αιτιολογείται οπτικά η εικασία μετάβασης στον γενικό κανόνα $y = 3n + 1$.

Ο τύπος $y = 3n + 1, n = 1, 2, 3, \dots$ προσδιορίζει τους όρους της κανονικότητας και επομένως οι ισοδύναμοι τύποι B, Γ και Δ περιγράφουν τον γενικό κανόνα.



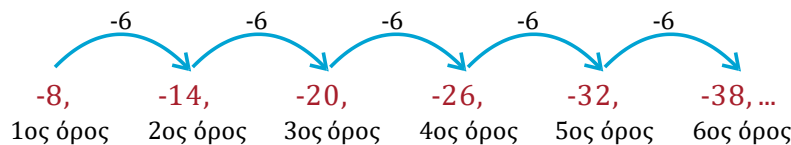
Με την εφαρμογή να βρείτε από τον πίνακα τιμών τον γενικό κανόνα της γραμμικής αριθμητικής κανονικότητας.

Εφαρμογή 1

Η παρακάτω γραμμική αριθμητική κανονικότητα δίνεται από την ακολουθία των αριθμών: $-8, -14, -20, -26, -32, \dots$ Να βρείτε τον γενικό όρο της και να συμπληρώσετε έναν πίνακα τιμών.

Απάντηση

Η ακολουθία γράφεται παραστατικά στην ακόλουθη μορφή:



Η αρίθμηση των όρων της ακολουθίας γίνεται με χρήση των φυσικών αριθμών: $1, 2, 3, \dots$ Η σταθερή διαφορά μεταξύ δύο διαδοχικών όρων της ακολουθίας είναι -6 . Π. χ. $-14 - (-8) = -14 + 8 = -6$.

Οι όροι με βάση τη θέση τους και ο αντίστοιχος πίνακας τιμών είναι:

1ος όρος: $-2 + 1 \cdot (-6)$, 2ος όρος: $-2 + 2 \cdot (-6)$, 3ος όρος: $-2 + 3 \cdot (-6)$, ..., Νιοστός όρος: $-2 + n \cdot (-6)$

Σειρά του όρου (n)	1	2	3	...	n
Αριθμητική τιμή του όρου (y)	-8	-14	-20	...	$-2 - 6n$

Επομένως, ο γενικός όρος της ακολουθίας είναι:

$$y = -6n - 2, n = 1, 2, 3, \dots$$

Σημείωση: Μπορούμε επίσης να σκεφτούμε ως εξής: 1ος όρος: -8 , 2ος όρος: $-8 + (2 - 1) \cdot (-6)$, 3ος όρος: $-8 + (3 - 1) \cdot (-6)$, ... Με τον τρόπο αυτό καταλήγουμε στον τύπο του γενικού όρου $y = -8 + (v - 1) \cdot (-6)$. Κάνοντας λίγες πράξεις βρίσκουμε: $y = -8 - 6v + 6 = -6v - 2$. Επομένως, οι δύο τύποι $y = -6v - 2$ και $y = -8 + (v - 1) \cdot (-6)$ είναι ισοδύναμοι και περιγράφονται από τη γενική μορφή $y = \alpha \cdot v + \beta$, με $\alpha = -6$ και $\beta = -2$.



Εφαρμογή 2

Ένα αεροπλάνο ξεκινάει από τα 10000 m τη διαδικασία προσγειώσης. Ο ακόλουθος πίνακας δείχνει το ύψος του αεροπλάνου κάθε λεπτό από την έναρξη της διαδικασίας.

Χρόνος (t σε min)	0	1	2	3	4
Ύψος (h σε m)	10000	9700	9400	9100	8800

- α) Να γράψετε έναν αλγεβρικό τύπο που να συσχετίζει το ύψος (h) με τον χρόνο (t) από τότε που το αεροπλάνο ξεκίνησε την κάθοδό του.
 β) Σε ποιο ύψος θα βρίσκεται το αεροπλάνο μετά από 20 λεπτά;
 γ) Σε πόσο χρόνο από την έναρξη της καθόδου θα προσγειωθεί το αεροπλάνο;

Απάντηση

- α) Καθώς ο χρόνος αυξάνεται κατά 1 λεπτό, το ύψος μειώνεται κατά 300 m.

Χρόνος (t minutes)	Ύψος (h m)	Ύψος ως προς τον χρόνο
0	10000	$10000 - 300 \cdot 0$
+1	9700	$10000 - 300 \cdot 1$
+1	9400	$10000 - 300 \cdot 2$
+1	9100	$10000 - 300 \cdot 3$
+1	8800	$10000 - 300 \cdot 4$
:		:
t		$10000 - 300t$



Ο αλγεβρικός τύπος που συσχετίζει το ύψος h με τον χρόνο t είναι: $h = 10000 - 300t$.

- β) Για να βρούμε το ύψος του αεροπλάνου μετά από 20 λεπτά, θέτουμε στον τύπο $t = 20$:
 $h = 10000 - 300t = 10000 - 300 \cdot 20 = 10000 - 6000 = 4000$.

Επομένως, μετά από 20 λεπτά, το αεροπλάνο βρίσκεται σε ύψος 4000 m.

- γ) Το αεροπλάνο προσγειώνεται όταν $h = 0$. Στον τύπο $h = 10000 - 300t$ θέτουμε $h = 0$ και λύνουμε ως προς t.

$$0 = 10000 - 300t \text{ ή } 300t + 0 = 10000 - 300t + 300t \text{ ή } 300t = 10000 \text{ ή } \frac{300t}{300} = \frac{10000}{300} \text{ ή } t \approx 33,33.$$

Άρα, το αεροπλάνο θα προσγειωθεί περίπου 33 λεπτά μετά την έναρξη της καθόδου του.



Εφαρμογή 3

Ο κ. Αντωνίου ξοδεύει καθημερινά ένα ποσό χρημάτων για να σταθμεύει το αυτοκίνητό του σε ένα πάρκινγκ. Κάθε μέρα πληρώνει 3 € για είσοδο στο πάρκινγκ και επιπλέον 2 € για κάθε ώρα στάθμευσης.

- α) Να δημιουργήσετε έναν πίνακα τιμών που να δείχνει πόσα χρήματα θα πληρώσει ο κ. Αντωνίου για διάφορες ακέραιες ώρες στάθμευσης του αυτοκινήτου του. Να περιγράψετε έναν τρόπο συμπλήρωσης του πίνακα.
 β) Από τον πίνακα τιμών να βρείτε τον γενικό όρο της κανονικότητας.
 γ) Να αποτυπώσετε τα ζεύγη του πίνακα τιμών με σημεία σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων και να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση.

Απάντηση

α) Στο πρόβλημα εξετάζουμε τη δαπάνη σε ευρώ (y) του κ. Αντωνίου σύμφωνα με τις ώρες στάθμευσης (v). Για μία ώρα στάθμευσης ο κ. Αντωνίου πληρώνει 3 € για είσοδο στο πάρκινγκ και επιπλέον 2 €, δηλαδή 5 € (3 + 2 = 5). Για κάθε επιπλέον ώρα πληρώνει 2 € ακόμα, δηλαδή για τη 2η ώρα 7 € (5 + 2 = 7) για την 3η ώρα 9 € κ.ο.κ. Επομένως, η κανονικότητα είναι: 5, 7, 9, ... Η σχέση μεταξύ των δύο μεταβλητών μπορεί να παρασταθεί με ζεύγη στον διπλανό πίνακα τιμών.

Αριθμός ωρών (v)	1	2	3	4	5	6	7	8
Δαπάνη σε € (y)	5	7	9	11	13	15	17	19



β) Παρατηρούμε ότι η διαφορά μεταξύ δύο διαδοχικών όρων είναι πάντοτε ίση με 2. Αφού έχουμε **σταθερή διαφορά** 2, η κανονικότητα είναι της μορφής $y = \alpha \cdot v + \beta$ και επειδή $\alpha = 2$ ο τύπος γίνεται $y = 2 \cdot v + \beta$, $v = 1, 2, 3, \dots$

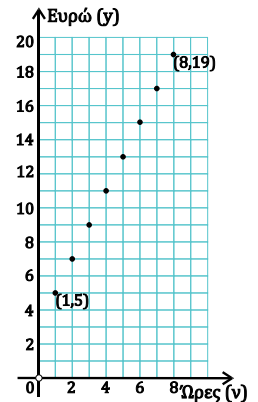
Για να προσδιορίσουμε τον αριθμό β αντικαθιστούμε ένα ζεύγος (v, y) από τον πίνακα στον τύπο. Αν πάρουμε το (1, 5), τότε με αντικατάσταση στον τύπο $y = 2 \cdot v + \beta$ προκύπτει: $5 = 2 \cdot 1 + \beta$, από την οποία παίρνουμε: $\beta = 3$. Άρα, ο γενικός όρος έχει τη μορφή:

$$y = 2v + 3, v = 1, 2, 3, \dots$$

γ) Η γραφική παράσταση στο καρτεσιανό επίπεδο καθιστά δυνατή την οπτικοποίηση της σχέσης μεταξύ των δύο μεταβλητών. Για να τη σχεδιάσουμε, πρέπει να γνωρίζουμε τα ζεύγη των αντίστοιχων τιμών. Χρησιμοποιώντας τον πίνακα τιμών απεικονίζουμε την κανονικότητα στη γραφική παράσταση του διπλανού σχήματος.

- Το σημείο (1, 5) δείχνει ότι ο πρώτος όρος της κανονικότητας είναι 5.
- Το σημείο (8, 19) δείχνει ότι ο όγδοος όρος είναι 19.

Η γραφική παράσταση αποτελείται από σημεία τα οποία βρίσκονται πάνω σε μία ευθεία γραμμή. Γι' αυτό κάθε κανονικότητα του τύπου $y = \alpha \cdot v + \beta$ λέγεται **γραμμική**. Η θέση των σημείων αυτών στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων καθιστά δυνατή τη σύγκριση των όρων της κανονικότητας σύμφωνα με τη σειρά τους.



Σημείωση: Το καρτεσιανό επίπεδο είναι ένα σύστημα αναφοράς που αποτελείται από δύο κάθετους άξονες. **Ο οριζόντιος άξονας είναι ο άξονας των τετμημένων και ο κατακόρυφος, ο άξονας των τεταγμένων.** Το σημείο τομής των αξόνων ονομάζεται αρχή. Κάθε σημείο του καρτεσιανού επιπέδου έχει συγκεκριμένες συντεταγμένες. **Η τετμημένη (v) και η τεταγμένη (y) όπως στο σχήμα,** καθορίζουν τη θέση ενός σημείου (v, y) στο καρτεσιανό επίπεδο. Σε ένα ζεύγος συντεταγμένων η τιμή του πρώτου αριθμού είναι η **τετμημένη** και η τιμή του δεύτερου αριθμού η **τεταγμένη**.

Ερωτήσεις για Αξιολόγηση

- 1 Ποια από τις ακολουθίες είναι γραμμική αριθμητική κανονικότητα;

A. 1, 2, 4, 5, 10, ... B. 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... Γ. 9, 16, 23, 30, ...
- 2 Ο γενικός όρος της γραμμικής αριθμητικής κανονικότητας 10, 13, 16, 19, ... είναι:

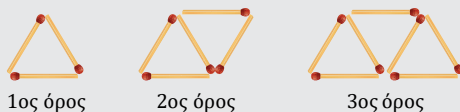
A. $A = 3v + 10$ B. $\Gamma = 3v + 7$ Γ. $B = 3v - 7$
- 3 Ο πέμπτος όρος της γραμμικής αριθμητικής κανονικότητας 7, 0, - 7, - 14, ... είναι:

A. 21 B. - 28 Γ. - 21
- 4 Να σχεδιάσετε τα δύο επόμενα σχήματα, να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών και να γράψετε τον κανόνα.

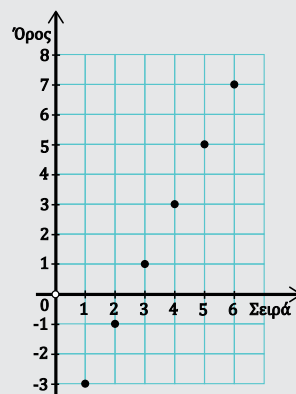
Σειρά					
Πλήθος σπέρτων					

Κανόνας

- 5 Ο κανόνας $A = -5n + 8$ περιγράφει μία γραμμική αριθμητική κανονικότητα. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή;
- A. Η διαφορά δύο διαδοχικών όρων της κανονικότητας είναι -5 .
 B. Ο πρώτος όρος της κανονικότητας είναι -5 .
 Γ. Κάθε φορά για να βρούμε τον επόμενο όρο προσθέτουμε 8 .
- 6 Ποια από τις παρακάτω αριθμητικές κανονικότητες αντιστοιχεί στη σειρά ομάδων κυκλικών δίσκων;
- A. $0, 6, 9, 12, 15, 17, \dots$
 B. $1, 4, 7, 10, 13, 16, \dots$
 Γ. $1, 6, 9, 12, 15, 17, \dots$
- 7 Να παρατηρήσετε τη γραμμική αριθμητική κανονικότητα. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι λανθασμένη;



- A. Ο γενικός όρος της κανονικότητας δίνεται από τους τύπους: $3n - (n - 1)$, $3 + 2(n - 1)$ και $1 + 2n$.
 B. Ο 6ος όρος της κανονικότητας αντιστοιχεί σε 13 σπίρτα.
 Γ. Η εικασία: «Ο γενικός όρος της κανονικότητας έχει $3n$ σπίρτα» ισχύει για $n = 1, 2, 3, \dots$ ».
- 8 Να δείτε προσεκτικά τη διπλανή γραφική παράσταση. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι λανθασμένη;
- A. Η γραφική παράσταση απεικονίζει την ακολουθία: $-3, -1, 1, 3, 5, 7, \dots$
 B. Ο πρώτος όρος της ακολουθίας είναι -3 .
 Γ. Ο κανόνας που περιγράφει την ακολουθία είναι $A = 2n - 3, n = 1, 2, 3, \dots$
- 9 Ο γενικός όρος μίας κανονικότητας είναι: $y = -2n + 7$.
- A. Ποια είναι η τιμή του 7ου όρου; B. Ποιος όρος είναι ίσος με -23 ;



Ασκήσεις και Προβλήματα

- 1 Δίνονται οι γραμμικές αριθμητικές κανονικότητες:
 A: $5, 8, 11, 14, \dots$ B: $7, 12, 17, 22, \dots$ Γ: $3, -1, -5, -9, \dots$
- α) Να γράψετε τον κανόνα εύρεσης του επόμενου όρου (κανόνα από όρο σε όρο).
 β) Να γράψετε τις τρεις κανονικότητες σε ισάριθμους πίνακες.
 γ) Να βρείτε κάθε φορά τον γενικό κανόνα.
 δ) Να επαληθεύσετε ότι ο κανόνας λειτουργεί για τους τρεις πρώτους όρους.
- 2 Δίνονται οι επόμενες γραμμικές κανονικότητες αριθμών:
 A) $99, 105, 111, 117, \dots$, B) $18, 15, 12, 9, \dots$,
 Γ) $-5, -1, 3, 7, \dots$, Δ) $214, 211, 208, 205, \dots$
- α) Ποιοι είναι οι τρεις επόμενοι όροι; Να εξηγήσετε πώς σκεφτήκατε. Για κάθε κανονικότητα να διατυπώσετε με λόγια έναν κανόνα που συνδέει έναν όρο της με τον επόμενο.
 β) Να βρείτε τον 50ό και τον 90ό όρο κάθε κανονικότητας. Να εξηγήσετε πώς σκεφτήκατε.

Να κάνετε την
 Εργασία με προεκτάσεις:
 «Ζωγραφική και ακολουθία του Fibonacci».



- 3 Με βάση την περιγραφή σε κάθε γραμμική αριθμητική κανονικότητα να γράψετε τους τέσσερις πρώτους όρους της:
- α) Ο πρώτος όρος είναι 5 και η διαφορά δύο διαδοχικών όρων είναι 3 .
 β) Ο πρώτος όρος είναι 6 και η διαφορά δύο διαδοχικών όρων είναι -8 .
 γ) Ο τρίτος όρος είναι 0 και η διαφορά δύο διαδοχικών όρων είναι 12 .
 δ) Ο δεύτερος όρος είναι 40 και η διαφορά δύο διαδοχικών όρων -150 .
- 4 Να βρείτε τους 5 πρώτους όρους των γραμμικών αριθμητικών κανονικότητων: α) Ο πρώτος όρος είναι 3 και κάθε επόμενος όρος προκύπτει αν στον προηγούμενο προσθέτουμε κάθε φορά -2 . β) Ο γενικός όρος είναι $4n + 1$.
- 5 Ποιος είναι ο γενικός όρος των κανονικότητων:
 α) $8, 10, 12, 14, \dots$, β) $-9, -12, -15, -18, \dots$,
 γ) $-9, 0, 9, 18, \dots$, δ) $1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}, \dots$

6 Δίνεται η γραμμική αριθμητική κανονικότητα:

$$-5, -\frac{5}{2}, 0, \frac{5}{2}, 5, \frac{15}{2}, \dots$$

- α) Να βρείτε τον 10ο όρο της.
- β) Να βρείτε τον 100ό όρο της.
- γ) Να βρείτε έναν γενικό κανόνα με τον οποίο θα μπορούμε να βρούμε κάθε όρο της κανονικότητας.

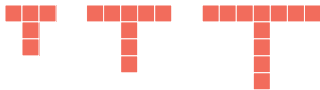
7 Για κάθε ακολουθία αριθμών να χρησιμοποιήσετε τον κανόνα και να βρείτε τη διαφορά δύο διαδοχικών όρων. Στη συνέχεια, να γράψετε τους πέντε πρώτους όρους κάθε ακολουθίας και τον 10ο όρο.

- α) $A = 2n + 3$, β) $B = 5n + 4$, γ) $\Gamma = 2n$,
- δ) $\Delta = 3n - 4$, ε) $E = -4n - 2$

8 Να παρατηρήσετε τις κανονικότητες.



Σειρά	1	2	3	4	...
Όρος					

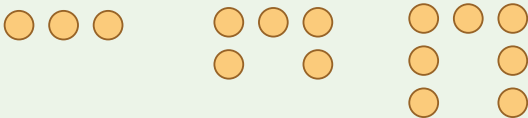


Σειρά	1	2	3	4	...
Όρος					

- α) Να σχεδιάσετε στο τετράδιό σας τα σχήματα των δύο επόμενων όρων.
- β) Να αντιγράψετε τους πίνακες τιμών και να τους συμπληρώσετε.

9 **Εικασία – γενίκευση**

α) Παρακάτω δίνονται τα τρία πρώτα βήματα μίας κανονικότητας κυκλικών δίσκων. Να διατυπώσετε μία τουλάχιστον εικασία για τον γενικό όρο και να ελέγξετε αν είναι σωστή ή όχι.



1ο Σχήμα 2ο Σχήμα 3ο Σχήμα

β) Να σχηματίσετε ομάδες και να σχεδιάσετε στο τετράδιό σας εικόνες κυκλικών δίσκων με άλλες κανονικότητες όπως η προηγούμενη. Για καθεμία να κάνετε μία γενίκευση για το πλήθος των κυκλικών δίσκων στο βήμα n της κανονικότητας και να εξετάσετε αν ο κανόνας λειτουργεί. **Να μοιραστείτε τις λύσεις σας στην ομάδα σας.**

10 Με ίδια κανονικά εξάγωνα πλευράς 1 cm δίνεται η κανονικότητα.



α) Να βρείτε την περίμετρο κάθε σχήματος και στη συνέχεια να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών.

Όρος	1	2	3	4	5	6	7	8
Περίμετρος (cm)								

Ποιον κανόνα χρησιμοποιήσατε για να συμπληρώσετε τον πίνακα;

- β) Ποια είναι η περίμετρος του 100ού σχήματος της κανονικότητας;
- γ) Να βρείτε έναν γενικό κανόνα για να υπολογίζετε την περίμετρο οποιουδήποτε σχήματος και να εξηγήσετε γιατί ο κανόνας λειτουργεί.

11 Η Κωνσταντίνα έχει 193 τραγούδια στο MP3 player. Προσθέτει 5 τραγούδια την εβδομάδα.



Αριθμός εβδομάδας	1	2	3	4	5	6	7	8
Αριθμός τραγουδιών								

- α) Πόσα τραγούδια θα υπάρχουν μετά από 8 εβδομάδες; Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα.
- β) Να γράψετε έναν γενικό κανόνα που περιγράφει αυτή την κατάσταση.

12 Αρκετές πόλεις εφαρμόζουν ένα σύστημα αυτοεξυπηρέτησης το οποίο επιτρέπει στους πολίτες να νοικιάζουν περιστασιακά ένα ποδήλατο. Ο Ιμπραήμ χρησιμοποιεί ποδήλατα στην πόλη του. Η χρέωση είναι 30 € για ετήσια συνδρομή με επιπλέον πληρωμή 2 € ανά ώρα.



α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών που σχετίζεται με το πρόβλημα.

Ώρες μετακίνησης	1	2	3	4	5	6	...	n
Κόστος με ετήσια συνδρομή (€)								

- β) Να βρείτε τον γενικό κανόνα που διέπει την κατάσταση και να εξηγήσετε πώς τον βρήκατε.
- γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της κανονικότητας.

13 Δίνονται οι παρακάτω κανονικότητες κυκλικών δίσκων.



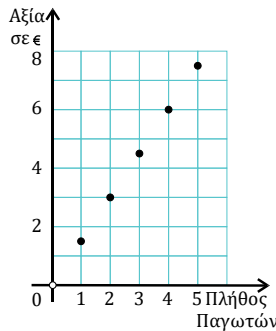


- α) Να δημιουργήσετε έναν πίνακα τιμών για κάθε κανονικότητα.
β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση κάθε κανονικότητας.

14 Δημιουργία προβλήματος. Να κατασκευάσετε μία γραμμική αριθμητική κανονικότητα. Να ζητήσετε από τον συμμαθητή σας να βρει τους τρεις επόμενους όρους και να διατυπώσει αρχικά με λόγια και ύστερα με σύμβολα τον κανόνα, που παράγει τους όρους της ακολουθίας.

15 Δημιουργία προβλήματος. Να κατασκευάσετε ένα πρόβλημα κανονικότητας με τον τύπο $0,5n + 2$.

16 Ο κ. Περικλής πουλά παγωτά σε ένα περίπτερο. Η διπλανή γραφική παράσταση παρουσιάζει τις εισπράξεις σύμφωνα με τον αριθμό των παγωτών που πωλήθηκαν.

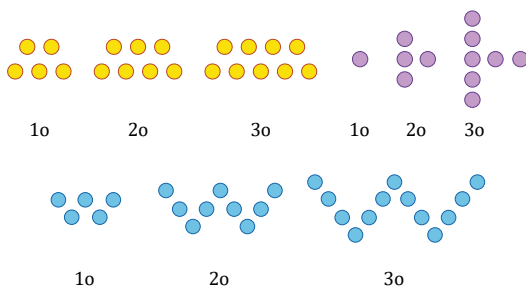


- α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών ο οποίος συνδέεται με την κατάσταση που παριστάνει η γραφική παράσταση.

Πλήθος παγωτών	1	2	3	4	5	6	...
Αξία παγωτών σε €							

- β) Να μεταφράσετε αυτή την κατάσταση σε έναν γενικό κανόνα.
γ) Μία ημέρα ο κ. Περικλής πούλησε 250 παγωτά. Πόσα ευρώ εισέπραξε;

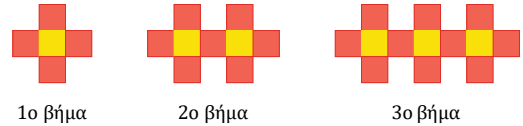
17 Να παρατηρήσετε τις παρακάτω κανονικότητες που σχηματίζονται από κυκλικούς δίσκους.



- α) Πόσοι κυκλικόι δίσκοι χρειάζονται για τον σχηματισμό του 6ου όρου κάθε κανονικότητας;
β) Να συμπληρώσετε πίνακες τιμών για τους πρώτους 10 όρους κάθε κανονικότητας.
γ) Ποιον κανόνα χρησιμοποιήσατε για να συμπληρώσετε τον πίνακα; Να τον περιγράψετε.

- δ) Πόσοι κυκλικόι δίσκοι απαιτούνται για τον 100ό όρο κάθε κανονικότητας;
ε) Ποιον όρο σε κάθε κανονικότητα θα σχηματίσετε με 601 κυκλικούς δίσκους;
στ) Με βάση τους πίνακες τιμών να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις.

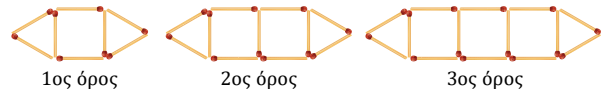
18 Παρακάτω δίνεται μία κανονικότητα με κόκκινα και κίτρινα τετράγωνα.



1ο βήμα 2ο βήμα 3ο βήμα

- α) Σε ένα φύλλο με τετραγωνάκια να σχεδιάσετε το 5ο βήμα της κανονικότητας.
β) Πόσα κόκκινα τετραγωνάκια χρειάζονται για το 9ο βήμα της κανονικότητας;
γ) Η Κατερίνα ισχυρίζεται: «Θα χρειαστώ ακριβώς 43 κόκκινα τετράγωνα για το βήμα που έχει σειρά 17». Έχει δίκιο η Κατερίνα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
δ) Να γράψετε έναν γενικό κανόνα για το πλήθος των κόκκινων τετραγώνων του νιοστού όρου και να εξηγήσετε γιατί ο κανόνας αυτός λειτουργεί.

19 Η εικόνα δείχνει τους τρεις πρώτους όρους μίας κανονικότητας σπирτοσχημάτων.



1ος όρος 2ος όρος 3ος όρος

- α) Ποιες από τις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις περιγράφουν τον αριθμό των σπирτων του νιοστού όρου; Να αιτιολογήσετε.
 $A = 3 + 3n + 2$ $B = 2 + 4n + 2$
 $\Gamma = 8 + 3 \cdot (n - 1)$ $\Delta = 5 + 3n$
β) Να υπολογίσετε τον αριθμό των σπирτων του 40ού, του 60ού και του 80ού όρου με μία από τις προηγούμενες αλγεβρικές παραστάσεις, που περιγράφει τον τύπο του γενικού όρου.
γ) Υπάρχουν όροι της κανονικότητας με 35 σπирτα και με 51 σπирτα; Να αιτιολογήσετε.

20 **Εργασία μαθητών κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες.**

Οι διαδοχικοί όροι της παρακάτω σειράς με συλλογές από πούλια συνδέονται μεταξύ τους με τον εξής τρόπο: Ο 1ος όρος αποτελείται από ένα πούλι, ο 2ος από τρία πούλια και οι συλλογές γίνονται βήμα - βήμα όλο και μεγαλύτερες.



1ος όρος 2ος όρος 3ος όρος

- α) Παρατηρείτε κάποια κανονικότητα; Αν ναι, να εξηγήσετε πώς σχηματίζεται;
- β) Πόσα πούλια θα έχει ο 4ος και πόσα ο 5ος όρος; Να συμπληρώσετε τις κενές θέσεις του πίνακα τιμών.

Σειρά του όρου	1	2	3	4	5	6	7	8
Πλήθος από πούλια								

Ποιον κανόνα χρησιμοποιήσατε για να συμπληρώσετε τον πίνακα;

- γ) Θα σας έπαιρνε πολύ χρόνο για να φτιάξετε τη συλλογή με τα πούλια του 100ού όρου. Να περιγράψετε έναν σύντομο τρόπο υπολογισμού του πλήθους αυτών για τον όρο που κατέχει την 100ή θέση.
- δ) Να βρείτε έναν κανόνα για να υπολογίζετε το πλήθος από τα πούλια της κανονικότητας οποιουδήποτε όρου, να τον εκφράσετε αλγεβρικά και να εξηγήσετε γιατί λειτουργεί ο κανόνας.

Να μοιραστείτε τα αποτελέσματα με τους συμμαθητές σας στην ολομέλεια της τάξης.

- 21 Σε ένα πολυκατάστημα χρησιμοποιούν καλάθια που έχουν ύψος 55 cm. Όταν αποθηκεύονται σχηματίζουν πύργο. Οι πρώτες τιμές του πύργου σε εκατοστά είναι: 55, 61, 67, 73, 79, ...



- α) Να βρείτε τον γενικό όρο της κανονικότητας.
- β) Αν το ύψος του πύργου δεν υπερβαίνει τα 170 cm πόσα το πολύ καλάθια θα έχει ο κάθε πύργος;

- 22 Η Ελένη πληρώνει ως ετήσια συνδρομή σε ένα γυμναστήριο 50 € και για κάθε επίσκεψη επιπλέον 10 €.



- α) Να δημιουργήσετε έναν πίνακα τιμών που να δείχνει πόσα χρήματα θα πληρώνει η Ελένη σύμφωνα με τον αριθμό επισκέψεων στο γυμναστήριο. Να περιγράψετε έναν τρόπο συμπλήρωσης του πίνακα.

- β) Από τον πίνακα τιμών να βρείτε τον γενικό όρο της κανονικότητας.
- γ) Να αποτυπώσετε τα ζεύγη του πίνακα τιμών με σημεία σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων και να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση.

- 23 Ένα στάδιο έχει 26 σειρές καθισμάτων. Στην πρώτη σειρά υπάρχουν 680 θέσεις. Κάθε επόμενη σειρά έχει 32 θέσεις περισσότερες από την προηγούμενη. Να βρείτε:

- α) Τη διαφορά με την οποία αυξάνονται οι θέσεις στις σειρές των καθισμάτων.
- β) Πόσους όρους έχει η κανονικότητα;
- γ) Πόσοι θεατές κάθονται στην 26η σειρά;

- 24 **Εργασία ετεροαξιολόγησης:**

- α) Να γράψετε σε μορφή ανάγωγου κλάσματος τον 7ο και τον 9ο όρο της γραμμικής αριθμητικής κανονικότητας:

$$\frac{1}{3}, \frac{7}{12}, \frac{10}{12}, \frac{13}{12}$$

- β) Να γράψετε τον γενικό όρο της κανονικότητας.
- γ) Να βρείτε τον εκατοστό όρο της κανονικότητας. Να συζητήσετε τις απαντήσεις σας με έναν συμμαθητή σας.



Με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής να λύσετε το πρόβλημα με τίτλο «Τραπέζια πέντε θέσεων».



Με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής να λύσετε το πρόβλημα με τίτλο «Το γράμμα Η».

2.2 Αλγεβρικές παραστάσεις

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

- Να αναγνωρίζουν και να ερμηνεύουν μια αλγεβρική παράσταση ως γινόμενο ή άθροισμα.
- Να απλοποιούν απλές αλγεβρικές παραστάσεις με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας (απαλοιφή παρένθεσης και αναγωγή όμοιων όρων).
- Να διερευνούν και να αποδεικνύουν αλγεβρικά και γεωμετρικά την ιδιότητα:
 $(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta$.
- Να υπολογίζουν την αριθμητική τιμή μιας αλγεβρικής παράστασης.



Διερεύνηση 1. «Αλγεβρικά πλακίδια»: αλγεβρική παράσταση ως γινόμενο ή άθροισμα.

Εργασία μαθητών κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες:

Ένα μοντέλο 6 αλγεβρικών πλακιδίων φαίνεται στην εικόνα. Τα θετικά αλγεβρικά πλακίδια παριστάνουν εμβαδά, ενώ το αρνητικό πρόσημο χρησιμοποιείται συμβολικά για να εκφράσει αρνητικές αλγεβρικές τιμές.



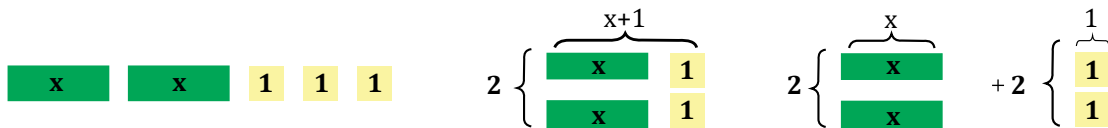
α) Να γράψετε τις αλγεβρικές παραστάσεις που εκφράζουν οι ακόλουθοι σχηματισμοί πλακιδίων.



Να αναγνωρίσετε τις δύο πρώτες αλγεβρικές παραστάσεις ως άθροισμα και τις άλλες δύο ως γινόμενο.

β) Να φτιάξετε με χαρτόνια αλγεβρικά πλακίδια. Να μετατρέψετε σχηματισμούς πλακιδίων σε άθροισμα αλγεβρικών παραστάσεων ή γινόμενο, και αντίστροφα, όπως στο (α).

γ) Πώς ερμηνεύονται οι αλγεβρικές παραστάσεις που προκύπτουν από τους σχηματισμούς πλακιδίων;



δ) Να χρησιμοποιήσετε αλγεβρικά πλακίδια για να γράψετε σε απλούστερη μορφή τις παραστάσεις:

$$3x + 2x, \quad 3x - 2x, \quad 3x + 2x + 5, \quad 5x^2 - 2 + 6x - 3 - 2x - 3x^2$$

Να εκφράσετε συμβολικά τη διαδικασία.

ε) Να χρησιμοποιήσετε την επιμεριστική ιδιότητα για να γράψετε σε απλούστερη μορφή αλγεβρικές παραστάσεις.

στ) Ένας μαθητής έγραψε ότι ισχύουν οι ισότητες: $3x + 2x = 5x^2$ και $3x + 4 + 7x = 14x$. Να χρησιμοποιήσετε αλγεβρικά πλακίδια για να εξηγήσετε τα λάθη. Ποιες είναι οι σωστές ισότητες;

Μοιραζόμαστε τις ιδέες μας και εξηγούμε πώς σκεφτήκαμε.



Με την ψηφιακή εφαρμογή να διερευνήσετε την πρόσθεση αλγεβρικών παραστάσεων με τη βοήθεια αλγεβρικών πλακιδίων.



Με την ψηφιακή εφαρμογή να διερευνήσετε αλγεβρικές παραστάσεις με τη βοήθεια «αλγεβρικών πλακιδίων».



Διερεύνηση 2. Αλγεβρικές παραστάσεις: επιμεριστική ιδιότητα, απλοποίηση, αριθμητική τιμή.

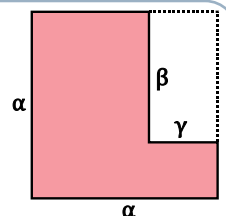
Εργασία μαθητών κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες.

Ορθογώνιο διαστάσεων β και γ έχει αποκοπεί από τετράγωνο μήκους πλευράς α .

α) Να εκφράσετε το εμβαδόν του υπόλοιπου σχήματος με διαφορετικούς τρόπους.

β) Τρεις μαθητές έγραψαν για το εμβαδόν του υπόλοιπου σχήματος τις ακόλουθες αλγεβρικές παραστάσεις. Είναι σωστές ή όχι; Να αιτιολογήσετε;

$$E_1 = \beta \cdot (\alpha - \gamma) + \alpha \cdot (\alpha - \beta) \quad E_2 = \alpha^2 - \beta\gamma \quad E_3 = \gamma \cdot (\alpha - \beta) + \alpha \cdot (\alpha - \gamma)$$



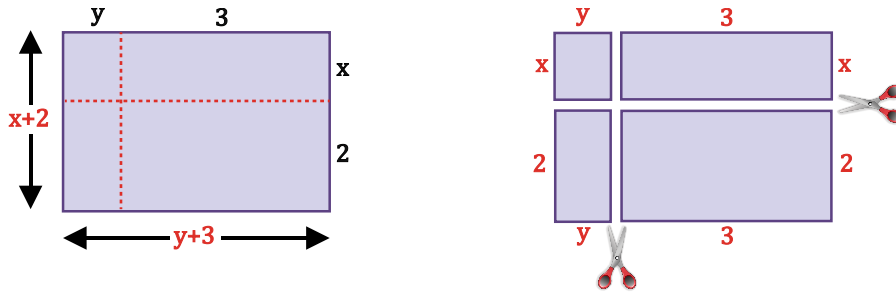
- γ) Να θέσετε στις αλγεβρικές παραστάσεις $\alpha = 10 \text{ cm}$, $\beta = 6 \text{ cm}$ και $\gamma = 3 \text{ cm}$ καθώς και άλλες αριθμητικές τιμές της επιλογής σας. Τι παρατηρείτε;
- δ) Να διατυπώσετε μία εικασία για τις τρεις αλγεβρικές παραστάσεις του εμβαδού και να την αποδείξετε.
- ε) Να εξηγήσετε γεωμετρικά πώς οι αλγεβρικές παραστάσεις περιγράφουν το εμβαδόν; Ποια αλγεβρική παράσταση το περιγράφει με τις λιγότερες πράξεις;



Διερεύνηση 3. $(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta$: Αλγεβρική και γεωμετρική απόδειξη.

Εργασία μαθητών κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες.

Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει διαστάσεις $x + 2$ και $y + 3$, όπου οι x, y , είναι θετικοί ρητοί αριθμοί. Με βάση τα παρακάτω σχήματα γράφουμε δύο αλγεβρικές παραστάσεις.



- α) Το εμβαδόν του μεγάλου ορθογωνίου είναι:
- β) Το άθροισμα των εμβαδών των τεσσάρων μικρών ορθογωνίων είναι:
- γ) Να συγκρίνετε το εμβαδόν του μεγάλου ορθογωνίου με το άθροισμα των εμβαδών των 4 μικρών ορθογωνίων.
- δ) Για οποιουδήποτε ρητούς αριθμούς x, y να κάνετε τις πράξεις: $(x + 2)(y + 3) =$
Τι συμπεραίνουμε; Μοιραζόμαστε τις ιδέες μας και εξηγούμε πώς σκεφτήκαμε.

Να επεξεργαστείτε το Μαθηματικό έργο: «Τιμή αλγεβρικής παράστασης, ισοδυναμία αλγεβρικών παραστάσεων».

Με την ψηφιακή εφαρμογή να διερευνήσετε την επιμεριστική ιδιότητα με γεωμετρικά σχήματα.

Μαθηματικές Έννοιες και Διεργασίες Μάθησης

Η έννοια της αλγεβρικής παράστασης

Μία έννοια ή ένα μέγεθος μπορεί να εκφραστεί πολλές φορές με μια παράσταση η οποία περιέχει μεταβλητές. Μεταβλητή είναι ένα γράμμα του οποίου οι τιμές αλλάζουν.

Αλγεβρική παράσταση λέγεται μία έκφραση που περιέχει πράξεις με μεταβλητές και αριθμούς.

Οι μεταβλητές μπορούν να αντικατασταθούν από αριθμούς. Μπορούμε να αναγνωρίσουμε τη δομή μιας αλγεβρικής παράστασης ως γινόμενο ή άθροισμα. Για παράδειγμα, η παράσταση $x + 1$ είναι άθροισμα, με όρους (προσθετέους) το x και το 1 , ενώ η $2x^2y$ είναι γινόμενο, με παράγοντες το 2 , το x^2 και το y .

Οι αλγεβρικές παραστάσεις $2x^2y, 3\alpha, 5\alpha\beta$, στις οποίες μεταξύ του αριθμητικού παράγοντα και των μεταβλητών σημειώνονται μόνο πολλαπλασιασμοί, λέγονται **όροι**. Μία αλγεβρική παράσταση περιέχει έναν ή περισσότερους όρους. Οι όροι αποτελούν συστατικά μέρη της αλγεβρικής παράστασης. Ένας όρος μπορεί να σχηματιστεί από έναν συντελεστή με μία ή περισσότερες μεταβλητές ή έναν σταθερό όρο.

- **Συντελεστής** είναι ο αριθμητικός παράγοντας ο οποίος πολλαπλασιάζεται με τη μεταβλητή ή τις μεταβλητές του όρου.

- **Μεταβλητή** είναι ένα γράμμα που παριστάνει έναν ή περισσότερους αριθμούς. Μια μεταβλητή μπορεί να πάρει διαφορετικές τιμές.
- **Σταθερός όρος** είναι ένας αριθμός.

Στην αλγεβρική παράσταση $3xy^2 + 4$ όροι είναι οι $3xy^2$ και 4 . Ο αριθμός 4 είναι ο σταθερός όρος. Συντελεστής του όρου $3xy^2$ είναι ο αριθμός 3 και μεταβλητές τα γράμματα x, y . Τις μεταβλητές τις χρησιμοποιούμε για να δημιουργούμε αλγεβρικές παραστάσεις που περιγράφουν καταστάσεις με αριθμούς. Για παράδειγμα, για να βρούμε την αλγεβρική παράσταση που εκφράζει «το εξαπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 5», συμβολίζουμε με x τον αριθμό. Τότε: Το «εξαπλάσιο ενός αριθμού» είναι: $6x$. Επίσης: «Το εξαπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 5» είναι: $6x + 5$. Η μετάφραση λειτουργεί και αντίστροφα, δηλαδή από την αλγεβρική παράσταση στη λεκτική διατύπωσή της.

Όροι και όμοιοι όροι μιας αλγεβρικής παράστασης

Σε μία αλγεβρική παράσταση, **όμοιοι όροι** είναι αυτοί που έχουν τις ίδιες μεταβλητές υψωμένες στους ίδιους εκθέτες. Οι σταθεροί όροι είναι επίσης πάντοτε όμοιοι όροι.

Εφόσον μια αλγεβρική παράσταση έχει τη δομή του αθροίσματος μπορούμε να διακρίνουμε τους όμοιους όρους από τους όρους. Στην αλγεβρική παράσταση $3x^2 + 8xy - 9xy + 5x$ μόνο οι $8xy$ και $-9xy$ είναι όμοιοι όροι, επειδή αποτελούνται από τις ίδιες μεταβλητές, x και y , στις οποίες σημειώνεται ο ίδιος εκθέτης 1 . Οι $3x^2$ και $5x$ δεν είναι όμοιοι όροι γιατί, παρότι περιέχουν την ίδια μεταβλητή x , έχουν διαφορετικούς εκθέτες, 2 και 1 .

Παρατηρήσεις: Όταν γράφουμε το γινόμενο ενός αριθμού και μίας ή περισσότερων μεταβλητών, δεν είναι απαραίτητο να σημειώνουμε σύμβολα του πολλαπλασιασμού. Για παράδειγμα αντί για $26 \cdot x \cdot y$ γράφουμε $26xy$. Επίσης: $-6 \cdot (2\alpha) = (-6 \cdot 2) \cdot \alpha = -12\alpha$, $\beta \cdot 2 \cdot \alpha = 2\alpha\beta$, $3\alpha \cdot 6\beta \cdot \alpha = 3 \cdot 6 \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \beta = 18\alpha^2\beta$. Το σύμβολο του πολλαπλασιασμού δεν μπορεί να παραλειφθεί όταν πολλαπλασιάζουμε αριθμούς. Έτσι γράφουμε: $6 \cdot 5$ ή $6 \cdot (-7)$. Όταν ο συντελεστής ενός όρου είναι 1 , τότε παραλείπεται. Για παράδειγμα $1x^2 = x^2$.

Αριθμητική τιμή αλγεβρικής παράστασης, ισοδύναμες αλγεβρικές παραστάσεις

Για να υπολογίσουμε την αριθμητική τιμή μιας απλής αλγεβρικής παράστασης αντικαθιστούμε τις τιμές των μεταβλητών με τους αριθμούς που δίνονται και εφαρμόζουμε τους κανόνες της προτεραιότητας των πράξεων.

Ας υπολογίσουμε την αριθμητική τιμή της αλγεβρικής παράστασης.

$$A = 4x^2 - 3y + 7 \text{ για } x = 3 \text{ και } y = -5$$

Η παράσταση A δεν μπορεί να μετασχηματιστεί σε απλούστερη μορφή.

Έχουμε: $A = 4 \cdot 3^2 - 3 \cdot (-5) + 7 = 36 + 15 + 7 = 58$.

Αν παρατηρήσουμε τους παρακάτω πίνακες διαπιστώνουμε ότι:

x	$5x + x$	$6x$
-2	$5 \cdot (-2) + (-2) = -12$	$6 \cdot (-2) = -12$
0	$5 \cdot 0 + 0 = 0$	$6 \cdot 0 = 0$
1	$5 \cdot 1 + 1 = 6$	$6 \cdot 1 = 6$
4	$5 \cdot 4 + 4 = 24$	$6 \cdot 4 = 24$

x	$x^2 + x$	x^3
-2	$(-2)^2 + (-2) = 2$	$(-2)^3 = -8$
0	$0^2 + 0 = 0$	$0^3 = 0$
1	$1^2 + 1 = 2$	$1^3 = 1$
4	$4^2 + 4 = 20$	$4^3 = 64$

Στον πίνακα στα αριστερά οι αλγεβρικές παραστάσεις $(5x + x)$ και $6x$ καταλήγουν στο ίδιο αποτέλεσμα για όλες τις τιμές του x . Στον πίνακα στα δεξιά οι αλγεβρικές παραστάσεις $(x^2 + x)$ και x^3 καταλήγουν στην ίδια τιμή μόνο για $x = 0$. Παραστάσεις όπως οι $5x + x$ και $6x$ λέγονται ισοδύναμες.

Γενικά

Ισοδύναμες αλγεβρικές παραστάσεις ονομάζονται οι αλγεβρικές παραστάσεις που λαμβάνουν την ίδια τιμή για όλες τις τιμές των μεταβλητών που περιλαμβάνουν.

Για να απλοποιήσουμε αλγεβρικές παραστάσεις, μπορούμε να τις μετατρέψουμε σε ισοδύναμες μέσω μετασχηματισμών. Για τον σκοπό αυτό, πρέπει να τηρούνται οι κανόνες των πράξεων και της αναγωγής όμοιων όρων.

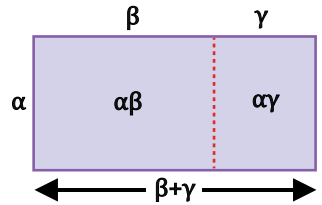
Ιδιότητες των πράξεων και επιμεριστική ιδιότητα

Στους μετασχηματισμούς αλγεβρικών παραστάσεων χρησιμοποιούνται οι ίδιες ιδιότητες που μάθαμε στις πράξεις με ρητούς αριθμούς.

$\alpha + \beta = \beta + \alpha$	$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$	(αντιμεταθετική ιδιότητα πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού)
$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$	$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$	(προσεταιριστική ιδιότητα πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού)
$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$		(επιμεριστική ιδιότητα)

Για τη γεωμετρική απόδειξη της επιμεριστικής ιδιότητας $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$, θεωρούμε ένα ορθογώνιο με πλευρές α και $(\beta + \gamma)$, όπως στο σχήμα. Το εμβαδόν του μεγάλου ορθογωνίου είναι $E = \alpha \cdot (\beta + \gamma)$ και τα εμβαδά των δύο μικρότερων ορθογωνίων είναι: $E_1 = \alpha \cdot \beta$ και $E_2 = \alpha \cdot \gamma$. Επειδή $E = E_1 + E_2$, παίρνουμε:

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$$



Η επιμεριστική ιδιότητα ισχύει για όλους τους ρητούς αριθμούς.

Την επιμεριστική ιδιότητα μπορούμε να χρησιμοποιούμε με τους εξής τρόπους:

A) Για να εκτελούμε πολλαπλασιασμούς της μορφής: $\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$

Παραδείγματα: $\alpha) 3 \cdot (x + 2) = 3 \cdot x + 3 \cdot 2 = 3x + 6$

$$\beta) -3\alpha \cdot (2\beta - 4\alpha) = -3\alpha \cdot 2\beta - (-3\alpha) \cdot 4\alpha = -6\alpha\beta + 12\alpha^2.$$

B) Για να βγάλουμε κοινό παράγοντα: $\beta \cdot \alpha + \gamma \cdot \alpha = (\beta + \gamma) \cdot \alpha$

Στην περίπτωση αυτή αντικαθιστούμε τους όμοιους όρους με το άθροισμά τους γράφοντας τις αλγεβρικές παραστάσεις σε απλούστερη μορφή. Η εργασία αυτή ονομάζεται **αναγωγή όμοιων όρων**.

Παραδείγματα: $\alpha) 2x + 3x = (2 + 3)x = 5x$ $\beta) 2\alpha + \alpha = 2\alpha + 1\alpha = (2 + 1)\alpha = 3\alpha$ $\gamma) 5y - y = 5y - 1y = (5 - 1)y = 4y.$

Γ) Για να μετασχηματίσουμε αθροίσματα της μορφής $\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$ σε γινόμενα.

Στην περίπτωση αυτή εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα στη μορφή:

$$\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta + \gamma)$$

Παραδείγματα: $\alpha) 5x + 5y = 5(x + y)$, $\beta) 3\alpha + 3\beta - 3\gamma = 3(\alpha + \beta - \gamma)$

Διπλή επιμεριστική ιδιότητα: $(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta$

Γεωμετρική απόδειξη: Για τη γεωμετρική απόδειξη της διπλής επιμεριστικής ιδιότητας $(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta$ θεωρούμε ένα ορθογώνιο με πλευρές $\alpha + \beta$ και $\gamma + \delta$, όπως στο σχήμα. Το εμβαδόν του μεγάλου ορθογωνίου είναι $E = (\alpha + \beta)(\gamma + \delta)$ και τα εμβαδά των τεσσάρων μικρότερων ορθογωνίων είναι:

$$E_1 = \alpha \cdot \gamma, E_2 = \beta \cdot \gamma, E_3 = \alpha \cdot \delta \text{ και } E_4 = \beta \cdot \delta$$

Επειδή $E = E_1 + E_2 + E_3 + E_4$, παίρνουμε: $(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta.$

Αλγεβρική απόδειξη: Για την απόδειξη εφαρμόζουμε δύο φορές την απλή επιμεριστική ιδιότητα:

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)(\gamma + \delta) &= \alpha(\gamma + \delta) + \beta(\gamma + \delta) \text{ (1η φορά)} \\ &= \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta \text{ (2η φορά)} \end{aligned}$$

Επομένως:

Σχεδιάζουμε τα βέλη, έτσι ώστε να μην ξεχάσουμε κανένα γινόμενο.

Για να πολλαπλασιάσουμε δύο αθροίσματα πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο της πρώτης παρένθεσης με κάθε όρο της δεύτερης παρένθεσης και προσθέτουμε τα γινόμενα.

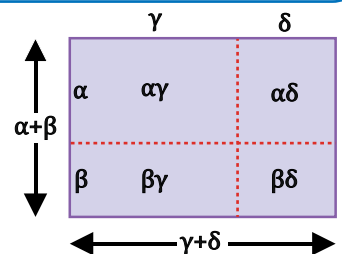
$$(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta$$



Με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής να διερευνήσετε την επιμεριστική ιδιότητα.



Με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής να διερευνήσετε την έννοια του κοινού παράγοντα.



Με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής να διερευνήσετε τη διπλή επιμεριστική ιδιότητα.

Παράδειγμα:

$$(5x+3)(2-x)$$

$$=5x \cdot 2 + 5x \cdot (-x) + 3 \cdot 2 + 3 \cdot (-x)$$

$$=10x - 5x^2 + 6 - 3x = -5x^2 + 7x + 6.$$

Σημείωση: Κατά την απαλοιφή παρενθέσεων, δεν έχει σημασία αν οι παρενθέσεις περιέχουν αριθμούς ή μεταβλητές. Επομένως, οι κανόνες που γνωρίζουμε ισχύουν και στην απαλοιφή παρενθέσεων με αλγεβρικές παραστάσεις.

$$\begin{array}{ll} -(\alpha+\beta)=-\alpha-\beta & -(-\alpha+\beta)=\alpha-\beta \\ -(\alpha-\beta)=-\alpha+\beta & -(-\alpha-\beta)=\alpha+\beta \end{array}$$

Όταν μια αλγεβρική παράσταση έχει ένα ή περισσότερα αρνητικά πρόσημα χρειάζεται προσοχή κατά την αναγωγή όμοιων όρων.

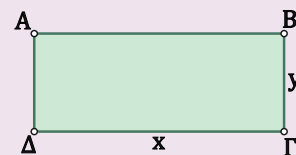
Επιπλέον, όταν υπάρχει αρνητικό πρόσημο πριν από μια παρένθεση, μπορούμε να το αντικαταστήσουμε με «- 1». Για παράδειγμα γράφουμε: $-(-5x + 3) = -1(-5x + 3) = 5x - 3$.



Εφαρμογή 1

Να εκφράσετε την περίμετρο Π του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, με μία αλγεβρική παράσταση:

- α)** Ως άθροισμα. **β)** Ως γινόμενο.
γ) Είναι ίσες οι αλγεβρικές παραστάσεις που βρήκατε;
δ) Αν $x = 9$ m και $y = 4$ m να υπολογίσετε την περίμετρο του ΑΒΓΔ.



Απάντηση

- α)** Είναι: $\Pi = x + x + y + y = 2x + 2y$ (άθροισμα).
β) $\Pi = 2 \cdot (x + y)$ (γινόμενο).
γ) Είναι ίσες αφού: $2 \cdot (x + y) = 2x + 2y$ (επιμεριστική ιδιότητα).
δ) Οι δύο τύποι δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα: $2 \cdot 9 + 2 \cdot 4 = 26$ m και $2(9 + 4) = 2 \cdot 13 = 26$ m.



Εφαρμογή 2

Να γράψετε σε απλούστερη μορφή τις αλγεβρικές παραστάσεις.

- α)** $4x + 6z - x + 8y + 3z - 5y$ **β)** $2(x + 1) + 3(x - 2)$ **γ)** $9x + 6y - (8y - 3x)$ **δ)** $-3\alpha(2\alpha + 5\beta) - 4\beta(2\beta - 8\alpha) - \alpha(-7\alpha + 11\beta)$

Απάντηση

- α)** $4x + 6z - x + 8y + 3z - 5y$ (επισημαίνουμε τους όμοιους όρους)
 $= (4 - 1)x + (6 + 3)z + (8 - 5)y$ (επιμεριστική ιδιότητα, αναγωγή όμοιων όρων)
 $= 3x + 3y + 9z$
- β)** $2(x + 1) + 3(x - 2)$
 $= 2x + 2 \cdot 1 + 3x - 3 \cdot 2$ (επιμεριστική ιδιότητα - απαλοιφή παρενθέσεων)
 $= 2x + 2 + 3x - 6$ (πράξεις)
 $= (2x + 3x) + (2 - 6)$ (αντιμεταθετική ιδιότητα - προσεταιριστική ιδιότητα)
 $= (2 + 3)x - 4$ (επιμεριστική ιδιότητα - αναγωγή όμοιων όρων)
 $= 5x - 4$ (απλοποιημένη μορφή).
- γ)** $9x + 6y - (8y - 3x)$ (απαλοιφή παρενθέσεων)
 $= 9x + 6y - 8y + 3x$ (αναγωγή όμοιων όρων)
 $= 12x - 2y$
- δ)** $-3\alpha(2\alpha + 5\beta) - 4\beta(2\beta - 8\alpha) - \alpha(-7\alpha + 11\beta)$ (απαλοιφή παρενθέσεων)
 $= -3\alpha \cdot 2\alpha - 3\alpha \cdot 5\beta - 4\beta \cdot 2\beta + 4\beta \cdot 8\alpha + \alpha \cdot 7\alpha - \alpha \cdot 11\beta$ (εκτέλεση πολλαπλασιασμών)
 $= -6\alpha^2 - 15\alpha\beta - 8\beta^2 + 32\alpha\beta + 7\alpha^2 - 11\alpha\beta$ (αναγωγή όμοιων όρων)
 $= \alpha^2 + 6\alpha\beta - 8\beta^2$





Εφαρμογή 3

Να βρείτε την αριθμητική τιμή των αλγεβρικών παραστάσεων:

α) $A = 3(\alpha - 2\beta) + 2(\alpha + 3\beta)$, όταν $\alpha = 0,2$, β) $B = 2x + 4x^2 - 2x - 5 + x^2$ για $x = -2$.

Απάντηση

α) Γράφουμε πρώτα την παράσταση A σε απλούστερη μορφή:

$$A = 3(\alpha - 2\beta) + 2(\alpha + 3\beta) = 3\alpha - 6\beta + 2\alpha + 6\beta = 5\alpha$$

Για $\alpha = 0,2$ είναι: $A = 5 \cdot 0,2 = 1$.

β) Μετατρέπουμε πρώτα την αλγεβρική παράσταση B σε απλούστερη μορφή:

$$B = 2x + 4x^2 - 2x - 5 - x^2 = 3x^2 - 5.$$

Επομένως: $B = 3 \cdot (-2)^2 - 5 = 3 \cdot 4 - 5 = 12 - 5 = 7$.

Σημείωση: Για να υπολογίσουμε την αριθμητική τιμή μιας αλγεβρικής παράστασης είναι καλύτερα πρώτα να μετατρέψουμε την παράσταση σε απλούστερη μορφή.



Με την ψηφιακή εφαρμογή να διερευνήσετε τον πολλαπλασιασμό αλγεβρικών παραστάσεων με τη βοήθεια αλγεβρικών πλακιδίων.



Με την ψηφιακή εφαρμογή να διερευνήσετε την αφαίρεση αλγεβρικών παραστάσεων με τη βοήθεια αλγεβρικών πλακιδίων.



Εφαρμογή 4

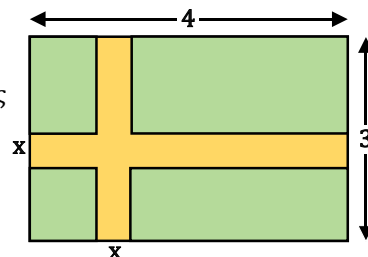
α) Στο ακόλουθο σχήμα να εκφράσετε το εμβαδόν A του σταυρού με τη βοήθεια του x καθώς και το εμβαδόν B του υπόλοιπου μέρους.

β) Για $x = 1$ να επαληθεύσετε ότι $A = B$.

Απάντηση

α) Είναι: $A = 4x + 3x - x^2 = 7x - x^2$ και $B = 3 \times 4 - (7x - x^2) = 12 - 7x + x^2$.

β) Για $x = 1$ έχουμε: $A = 7 \cdot 1 - 1^2 = 6$ και $B = 12 - 7 \cdot 1 + 1^2 = 12 - 7 + 1 = 6$. Επομένως για $x = 1$ ισχύει: $A = B$.



Εφαρμογή 5

Να κάνετε τις πράξεις και τις αναγωγές: α) $(-x + 2)(2x - 3)$, β) $(\kappa - \frac{3}{2}\lambda)(\frac{2}{5}\kappa + \lambda)$

Απάντηση

α) Έχουμε: $(-x+2)(2x-3) = -x \cdot 2x - x \cdot (-3) + 2 \cdot 2x + 2 \cdot (-3)$
 $= -2x^2 + 3x + 4x - 6 = -2x^2 + 7x - 6$.

β) Έχουμε: $(\kappa - \frac{3}{2}\lambda)(\frac{2}{5}\kappa + \lambda) = \kappa \cdot \frac{2}{5}\kappa + \kappa\lambda + (-\frac{3}{2}\lambda) \cdot \frac{2}{5}\kappa + (-\frac{3}{2}\lambda) \cdot \lambda$
 $= \frac{2}{5}\kappa^2 + \frac{5}{5}\kappa\lambda - \frac{3}{5}\kappa\lambda - \frac{3}{2}\lambda^2 = \frac{2}{5}\kappa^2 + \frac{2}{5}\kappa\lambda - \frac{3}{2}\lambda^2$.



Εφαρμογή 6

Να βρείτε την τιμή της αλγεβρικής παράστασης: $A = 4(x + 5y) + 5(4x + y) + x$, όταν $x + y = \frac{1}{5}$.

Απάντηση

$A = 4(x + 5y) + 5(4x + y) + x = 4x + 20y + 20x + 5y + x = 25x + 25y = 25(x + y)$ και επειδή $x + y = \frac{1}{5}$ παίρνουμε:
 $A = 25 \cdot \frac{1}{5} = 5$.



Να ανοίξετε τον σύνδεσμο και να απαντήσετε στις ερωτήσεις αξιολόγησης για την έννοια της αλγεβρικής παράστασης.



Να ανοίξετε τον σύνδεσμο και να απαντήσετε στις ερωτήσεις αξιολόγησης για την έννοια της αλγεβρικής παράστασης (συνέχεια).

Ερωτήσεις για Αξιολόγηση

- Το γινόμενο του τρία και του τετραγώνου ενός αριθμού v γράφεται:
Α. $3 + v^2$ Β. $3v^2$ Γ. $(3v)^2$
- Αν ο a είναι ρητός αριθμός, τότε η αλγεβρική παράσταση $2a^2 + 3a^2$ είναι ίση με:
Α. $6a^4$ Β. $5a^2$ Γ. $5a^4$
- Αν ο a είναι ρητός αριθμός, τότε η αλγεβρική παράσταση $7(a + 2)$ είναι ίση με:
Α. $7a + 2$ Β. $7a + 9$ Γ. $7a + 14$
- Αν ο x είναι ρητός αριθμός, τότε η αλγεβρική παράσταση $5x + x$ γράφεται:
Α. $5x^2$ Β. $6x$ Γ. $5x$
- Αν ο x είναι ρητός αριθμός, τότε η αλγεβρική παράσταση $x(x + 1)$ γράφεται:
Α. $x^2 + 1$ Β. $1 + x^2$ Γ. $x^2 + x$
- Αν ο x είναι ρητός αριθμός, τότε η αλγεβρική παράσταση $-xy$ γράφεται:
Α. $(-x)(-y)$ Β. $x(-y)$ Γ. xy
- Αν ο x είναι ρητός αριθμός, τότε η αλγεβρική παράσταση $-x^2 + x^2$ γράφεται:
Α. $-2x^2$ Β. 0 Γ. $(-2x)^2$
- Στην αλγεβρική παράσταση $-4x + 3 - 4x^2 + 3x$ όμοιοι όροι είναι οι:
Α. $-4x, -4x^2$ Β. $-4x, 3x$ Γ. $3, 3x$
- Η αριθμητική τιμή της παράστασης $13 - 10x$ για $x = -1$ είναι:
Α. -23 Β. 3 Γ. 23
- Η αλγεβρική παράσταση $2(x + 1) - x - 1$ γράφεται στην απλούστερη μορφή:
Α. $x - 1$ Β. $x + 1$ Γ. $3x + 1$

Να κάνετε την Εργασία με προεκτάσεις: «Μαγικά τετράγωνα».



Να αξιοποιήσετε αλγεβρικές παραστάσεις στο υπολογιστικό φύλλο Excel για την αντιμετώπιση καταστάσεων της καθημερινής ζωής.



Ασκήσεις και Προβλήματα

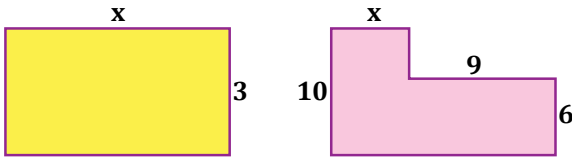
- Να χρησιμοποιήσετε μεταβλητές για να εκφράσετε με μία αλγεβρική παράσταση:
 - Τους περιττούς φυσικούς αριθμούς.
 - Το άθροισμα τριών διαδοχικών φυσικών αριθμών.
 - Το γινόμενο ενός θετικού φυσικού αριθμού με τον επόμενο του.
 - Το τετραπλάσιο ενός αριθμού ελαττωμένο κατά 7.
 - Το μισό ενός αριθμού αυξημένο κατά 10.
 - Την περίμετρο ενός ισοπλεύρου τριγώνου.
 - Την τελική τιμή ενός προϊόντος αν γνωρίζουμε ότι στην αρχική τιμή γίνεται έκπτωση 25%.
 - Το διάστημα που διάνυσε ένα αυτοκίνητο σε t ώρες με μέση ταχύτητα 80 km/h.
- Να εκφράσετε λεκτικά τις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις.

α) $x + 13$	β) $x - 12$	γ) $5a$	δ) $7a - 3$
ε) $\frac{5x}{6}$	στ) $x + 20\%x$	ζ) $\frac{3\beta - 2}{4}$	
- Οι διαστάσεις ενός ποδοσφαιρικού γηπέδου καθορίζονται από τη Διεθνή Ποδοσφαιρική Ομοσπονδία (FIFA). Συνήθως η μεγάλη διάσταση είναι κατά 35 m μεγαλύτερη από τη μικρή (γραμμή του τέρματος).



- α) Αν η γραμμή του τέρματος είναι x m να γράψετε μία αλγεβρική παράσταση που να εκφράζει:
 i. την περίμετρο, ii. το εμβαδόν του γηπέδου.
 β) Αν η γραμμή του τέρματος σε ένα γήπεδο είναι 70 m να υπολογίσετε: i. την περίμετρο και ii. το εμβαδόν του γηπέδου.

- 4 Να γράψετε μία αλγεβρική παράσταση που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του εμβαδού κάθε εικονιζόμενου σχήματος. Όλες οι μετρήσεις δίνονται σε εκατοστά. Στη συνέχεια, να υπολογίσετε το εμβαδόν κάθε σχήματος για τις αντίστοιχες τιμές: α) Για $x = 3, 5, 8$ και 10. β) Για $x = 2, 4, 7$ και 9.



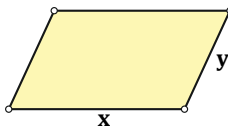
- 5 **Εργασία μαθητών κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες.** Οι εθελοντές της αναδάσωσης ενός δήμου πρόκειται να φυτέψουν σε μια περιοχή



πεύκα και κυπαρίσσια. Σε μερικά στρέμματα θα φυτέψουν μόνο πεύκα και σε μερικά μόνο κυπαρίσσια. Σύμφωνα με τις οδηγίες σε κάθε στρέμμα πεύκων θα φυτεύουν 120 δενδρύλλια και σε κάθε στρέμμα κυπαρισσιών θα φυτεύουν 240 δενδρύλλια.

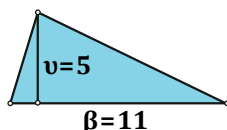
- α) Να γράψετε μία αλγεβρική παράσταση που να δίνει τον συνολικό αριθμό των δενδρυλλίων που θα φυτεύουν με βάση τον εκάστοτε αριθμό στρεμματών που θα αναδασώνονται.
 β) Την πρώτη εβδομάδα της αναδάσωσης οι εθελοντές ολοκλήρωσαν 20 στρέμματα πεύκων και 35 στρέμματα κυπαρισσιών. Πόσα δενδρύλλια φύτεψαν;

- 6 α) Να γράψετε μία αλγεβρική παράσταση για την περίμετρο του παραλληλογράμμου.

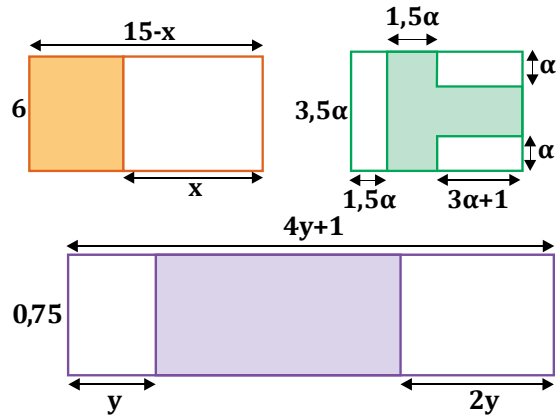


- β) Αν $x = 7,5$ cm και $y = 4$ cm υπολογίστε την περίμετρό του.

- 7 Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ. Όλες οι μετρήσεις που δίνονται είναι σε εκατοστά.



- 8 α) Να γράψετε μία αλγεβρική παράσταση που να αντιπροσωπεύει το εμβαδόν κάθε σκιασμένης περιοχής.



- β) Οι συμμαθητές σας έγραψαν διαφορετικές αλγεβρικές παραστάσεις από τις δικές σας; Εάν ναι, να βρείτε εάν οι εκφράσεις είναι ισοδύναμες.

- 9 **Κριτική σκέψη.** Να εξετάσετε την ορθότητα των συλλογισμών της Ελεάνας.

Είχα 100 € και αγόρασα ένα ζευγάρι παπούτσια που έκανε x €. Πήρα ρέστα $(100 - x)$ €.

Είχα x €. Αγόρασα ένα κασκόλ που έκανε 20 €. Μου έμειναν $(20 - x)$ €.

Είχα x €. Αγόρασα ένα καπέλο που έκανε y €. Μου έμειναν $(x - y)$ €.

- 10 Στις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις να κάνετε τις πράξεις:

α) $-5(-2x + 4)$, β) $3z(2 - 5z)$,
 γ) $7z(-3y - 1)$, δ) $-5(-3y - 6 + x)$

- 11 Να συμπληρώσετε τα κενά για να υπάρχουν σωστές ισότητες.

α) $3 \dots = 18x + 15$, β) $\frac{1}{4}x \dots = 8x$,
 γ) $\dots(x + 4) = 6x + 24$, δ) $\dots(2x + 9) + 1 = 18x + 82$

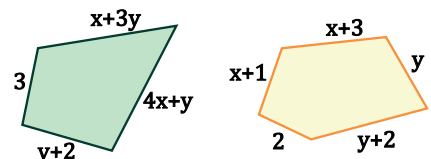
- 12 Να μετατρέψετε τα παρακάτω αθροίσματα στην απλούστερη δυνατή μορφή:

α) $5x - 7x + 3x$, β) $6x + 3x^2 + 2x - 8x^2$, γ) $x^2 - \frac{1}{9}x^2$,
 δ) $2x + 3y - 6x + y$, ε) $2 - 6\alpha + \beta + 5\alpha - 3\beta - 7$

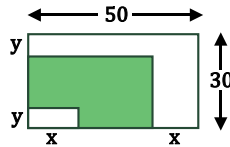
- 13 Να μετατρέψετε τα παρακάτω γινόμενα στην απλούστερη δυνατή μορφή:

α) $3x \cdot 5x$, β) $-2 \cdot 4x$, γ) $6x \cdot (-2x)$,
 δ) $3 \cdot (-4x^2)$, ε) $-x^2 \cdot 3$, στ) $(-2x^2) \cdot (-5)$

- 14 Να γράψετε μία αλγεβρική παράσταση στην απλούστερη μορφή της για την περίμετρο των πολυγώνων.



- 15 α) Να εκφράσετε, συναρτήσει των x και y το εμβαδόν E του πράσινου μέρους.



- β) Να επαληθεύσετε ότι το εμβαδόν E είναι το μισό του εμβαδού του μεγάλου ορθογωνίου όταν $y = 6$ και $x = \frac{5}{2}y$.

- 16 Στις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις να κάνετε τις πράξεις και τις αναγωγές:

- α) $A = -2(3y + 4) - 6(-3y - 6)$
 β) $B = 6(-5\lambda - 4) + (-7)(6 - 3\lambda)$
 γ) $\Gamma = 4(-5x + 8) - 6(4x - 4) + 9(2 - 8x) - (2x - 5)$

- 17 Στις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις να κάνετε τις πράξεις και τις αναγωγές:

- α) $A = \frac{1}{2}(8x - 4) - \frac{1}{4}(6x + 2)$
 β) $B = \left(\frac{7}{2} - \frac{3\beta}{4}\right) - 3\left(\frac{3}{7} - \frac{5\beta}{4}\right)$
 γ) $\Gamma = \frac{7(6\alpha + 3)}{3} - \frac{7(-3\alpha - 4)}{5}$

- 18 Να βρείτε την αριθμητική τιμή:

- α) Των παραστάσεων $A = x^2 + y^2 + 2xy$, $B = (x + y)^2$ και $\Gamma = x^2 + y^2$ για $x = 3$ και $y = -2$.
 β) Των παραστάσεων $\Delta = \alpha^3 + \beta^3$ και $E = (\alpha + \beta)^3$ για $\alpha = 1$ και $\beta = 3$.

- 19 Να κάνετε τις πράξεις και τις αναγωγές, όμοιων όρων. Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων για $x = 1$ και $x = -1$.

- α) $A = 4x + 2x + 4x + 4x$
 β) $B = -2(4x + 7) + (-4)(3x - 9)$
 γ) $\Gamma = 3(x - 2) - 2x - (-4) \cdot (3 - x)$
 δ) $\Delta = \frac{5}{6}\left(2x - \frac{8}{3}\right) - 6\left(\frac{-4x - 7}{7}\right)$

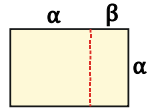
- 20 Αφού πρώτα κάνετε τις πράξεις και τις αναγωγές να βρείτε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων για $x = -3$ και $y = -2$.

- α) $A = 3 - 2(3x - 2y) - (-9x + 5y + 2)$
 β) $B = 5 - (x - 3y) + 7(x + 2y)$

- 21 Η Αρετή, η Νεφέλη και η Πηνελόπη είναι αδερφές. Η Αρετή είναι 3 χρόνια μεγαλύτερη από την Πηνελόπη. Η Νεφέλη είναι το ένα τρίτο του αθροίσματος των ηλικιών των αδελφών της. Ποια αλγεβρική παράσταση εκφράζει την ηλικία της Νεφέλης;

- 22 **Αξιολόγηση εικασίας.** Ο Έρικ ισχυρίζεται ότι οι αλγεβρικές παραστάσεις x^5 και x^3 είναι ισοδύναμες επειδή παίρνουν την ίδια τιμή για $x = -1$, $x = 0$ και $x = 1$. Είναι σωστός ο ισχυρισμός του; Να αιτιολογήσετε τη σκέψη σας.

- 23 Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του ορθογωνίου χρησιμοποιώντας τους τύπους.



	$\alpha = 6 \text{ cm}, \beta = 2 \text{ cm}$	$\alpha = 5 \text{ cm}, \beta = 2,5 \text{ cm}$
$\Pi = 4 \cdot \alpha + 2\beta$		
$E = \alpha \cdot (\alpha + \beta)$		

- 24 **Δημιουργία προβλήματος.** Να δημιουργήσετε μία αλγεβρική παράσταση και να διατυπώσετε ένα λεκτικό πρόβλημα από αυτήν.

- 25 Ο Αριστοτέλης είπε στη Μαίρη: «Σκέψου έναν αριθμό, αφάιρεσε από αυτόν το 5, πολλαπλασίασε τη διαφορά με 7 και πρόσθεσε σε αυτό το γινόμενο 35. Πες μου το αποτέλεσμα και θα σου πω τον αριθμό που σκέφτηκες».

- α) Πώς βρήκε ο Αριστοτέλης τον αριθμό που σκέφτηκε η Μαίρη;
 β) Να σκεφτείτε μόνοι σας τέτοιους γρίφους με αριθμούς και να βάλετε έναν συμμαθητή σας να τους λύσει.

- 26 **Μαγικά τετράγωνα.** Ένα τετράγωνο είναι μαγικό για την πρόσθεση αν όλα τα αθροίσματα οριζόντια, κάθετα και διαγώνια είναι ίσα. Να εξετάσετε αν τα παρακάτω τετράγωνα είναι μαγικά.

x	12	$2x$	x	$3x-4$	$2x+4$
$2x+4$	$x+3$	5	$3x+4$	$2x$	$x-4$
8	$2x-3$	$x+7$	$2x-4$	$x+4$	$3x$

Να σχηματίσετε ομάδες και να συνεργαστείτε. Να μοιραστείτε τις λύσεις σας στην ομάδα σας.

- 27 Να κάνετε τις πράξεις με τον συντομότερο τρόπο:
 α) $A = 8,9 \cdot 3 + 8,9 \cdot 4 + 8,9 \cdot 3$
 β) $B = 3,987 \cdot 146 - 3,987 \cdot 46$
 γ) $\Gamma = 117 \cdot 777 + 117 \cdot 223 - 17 \cdot 777 - 17 \cdot 223$
 δ) $\Delta = 142,8 \cdot 100,85 - 142,8 \cdot 0,85 - 42,8 \cdot 100,85 + 42,8 \cdot 0,85$.

- 28 Να αναπτύξετε τα γινόμενα σε αθροίσματα:
 α) $(x + 2)(x + 2)$ β) $(1 + x)(-6 - 4x)$
 γ) $(5 - 2y)(2x - y)$ δ) $(-8x - 5z)(-11z - 8y)$
 ε) $(7z + 2y)(-3y - 1)$

29 Στις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις να κάνετε τις πράξεις και τις αναγωγές όμοιων όρων:

α) $(\frac{x}{2} + 15)(x - 20)$ β) $(\frac{1}{3}\alpha - \frac{2}{5}\beta)(\frac{1}{3}\alpha + \frac{2}{5}\beta)$
 γ) $(0,5yz + 2x)(2xy - 0,5z)$
 δ) $(\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{7}y)(28x - 7y^2)$

30 Να αντιγράψετε τον πίνακα στο τετράδιό σας. Να πολλαπλασιάσετε τις παραστάσεις στην αριστερή στήλη με αυτές στην επάνω σειρά, να απλοποιήσετε και να εισαγάγετε τα αποτελέσματα στον πίνακα.

·	x + 1	-4 + 5x	2x - y	-x ² - 3x
x - 3				
-x - 2y				

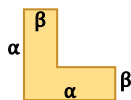
31 **Εύρεση λαθών.** Να εξηγήσετε ποια λάθη έγιναν και να τα διορθώσετε.

α) $(7x + 5)(3y - 6x) = 21xy - 30x$
 β) $(\alpha - 2)(\beta - 3) = \alpha\beta - 3\alpha - 2\beta - 6$

32 Στις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις να κάνετε τις πράξεις και τις αναγωγές όμοιων όρων:

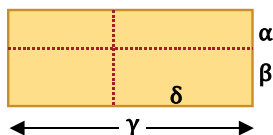
α) $(x + y)(3 + \alpha + \beta)$ β) $(2 - 3\beta)(4\alpha + 5\beta - 2\gamma)$
 γ) $(-4x + 7y)(4z - 9x - 7y)$

33 Να γράψετε μία αλγεβρική παράσταση και να την απλοποιήσετε όσο το δυνατόν περισσότερο.



- α) Για την περίμετρο του σχήματος.
 β) Για το εμβαδόν του σχήματος.

34 α) Να εξετάσετε ποιο εμβαδόν στο σχήμα μπορεί να υπολογιστεί με χρήση κάθε παράστασης.



- $(\alpha + \beta)(\gamma - \delta)$
- $\alpha\gamma - \alpha\delta + \beta\gamma - \beta\delta$

β) Να αποδείξετε αλγεβρικά ότι οι δύο παραστάσεις είναι ισοδύναμες.

35 Σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, η μία πλευρά είναι διπλάσια από την άλλη. Η μικρότερη πλευρά αυξάνεται κατά ένα μέτρο και η μεγαλύτερη πλευρά ελαττώνεται κατά ένα μέτρο.

- α) Πώς μεταβάλλεται η περίμετρος και το εμβαδόν; Να γράψετε κάθε φορά μία παράσταση και να την απλοποιήσετε.
 β) Τι διαστάσεις πρέπει να έχει το αρχικό ορθογώνιο ώστε η περίμετρος και το εμβαδόν του να παραμένουν ίδια;

36 **Μοντελοποίηση πραγματικής κατάστασης.**

Η αριθμητική τιμή της παράστασης $\frac{B}{\nu^2}$, όπου B το βάρος σε kg και ν το ύψος του σε m ενός ατόμου, ονομάζεται Δείκτης Μάζας Σώματος (ΔΜΣ). Τον χρησιμοποιούν οι ειδικοί για να αποφανθούν αν ένα άτομο είναι ελλιποβαρές, έχει κανονικό βάρος ή είναι παχύσαρκο σύμφωνα με τον πίνακα: Να χαρακτηρίσετε: α) τον Κώστα με βάρος 85 kg και ύψος 1,78 m. β) Τη Βασιλική με βάρος 62 kg και ύψος 1,55 m.

	ΓΥΝΑΙΚΕΣ	ΑΝΔΡΕΣ
Κανονικό Βάρος	18,5 - 23,5	19,5 - 24,9
1ος βαθμός παχυσαρκίας	23,6 - 28,6	25 - 29,9
2ος βαθμός παχυσαρκίας	28,7 - 40	30 - 40
3ος βαθμός παχυσαρκίας	πάνω από 40	πάνω από 40

37 Αν $x + y = -2$ να υπολογίσετε τις παραστάσεις: $A = 3x - (2x - y) + 7$, $B = 2 - 2(x - 3y) + 3(x - y) - 2y$, $\Gamma = 4x + 3(2x - 3y) - 2(3x - y) + 11y$

38 **Μαγικά τετράγωνα.** Ένα τετράγωνο είναι μαγικό ως προς την πρόσθεση αν όλα τα αθροίσματα οριζόντια, κάθετα και διαγώνια είναι ίσα. Αν τα παρακάτω 3x3 τετράγωνα είναι μαγικά να συμπληρώσετε τα κενά κελιά με κατάλληλες αλγεβρικές παραστάσεις.

2x - 3		
	x - 2	
	-x	-1

x	3x - 2	2x + 2
	x + 2	

39 Να χρησιμοποιήσετε αλγεβρικά πλακίδια για να γράψετε σε απλούστερη μορφή τις παραστάσεις:

$8x + 3x$, $5x - 2x$, $4x + 6x + 3$

Να εκφράσετε συμβολικά τη διαδικασία.

40 Να χρησιμοποιήσετε αλγεβρικά πλακίδια για να παραστήσετε κάθε αλγεβρική παράσταση.

α) $-3x^2$ β) $2y^2 - y + 3$ γ) $4l - 5$

41 Ποιες από τις αλγεβρικές παραστάσεις μπορούν να παρασταθούν από τα ίδια αλγεβρικά πλακίδια.

α) $2x^2 - 3x + 5$ β) $-3 + 5\kappa + 2\kappa^2$ γ) $-3y + 5 + 2y^2$

Να διερευνήσετε την αριθμητική τιμή αλγεβρικής παράστασης.



2.3 Εξίσωση 1ου βαθμού

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

- Να αναγνωρίζουν τους όρους: εξίσωση πρώτου βαθμού, πρώτο και δεύτερο μέλος, άγνωστος, λύση ή ρίζα.
- Να αναγνωρίζουν αν ένας αριθμός είναι λύση της εξίσωσης ή/και του αντίστοιχου προβλήματος.

Η αλγεβρική σκέψη δίνει τη δυνατότητα χειρισμού άγνωστων μεγεθών και οι εξισώσεις καθιστούν δυνατή την επίλυση προβλημάτων με χρήση άλγεβρας.



Διερεύνηση 1. «Μάντεψε τον αριθμό που σκέφτηκα»

Εργασία μαθητών κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες:

- α) Ο Γιώργος σκέφτεται έναν αριθμό, τον πολλαπλασιάζει με το 3 και μετά αφαιρεί 2. Βρίσκει αποτέλεσμα 55. Η διαδικασία που έκανε ο Γιώργος μπορεί να παρασταθεί με ένα διάγραμμα ροής ως εξής:

$$\dots \xrightarrow{\cdot 3} \dots \xrightarrow{-2} 55$$

Μπορείτε να μαντέψετε ποιον αριθμό σκέφτηκε ο Γιώργος;

- β) Η Βίκυ σκέφτεται έναν αριθμό, προσθέτει 1 και μετά πολλαπλασιάζει με το 2. Βρίσκει αποτέλεσμα 30. Η διαδικασία που έκανε η Βίκυ μπορεί να παρασταθεί με ένα διάγραμμα ροής ως εξής:

$$\dots \xrightarrow{+1} \dots \xrightarrow{\cdot 2} 30$$

Μπορείτε να μαντέψετε ποιον αριθμό σκέφτηκε η Βίκυ;

- γ) Ο Γιώργος και η Βίκυ συμφωνούν να ξεκινήσουν με τον ίδιο αριθμό και ο καθένας να εφαρμόσει τη δική του μέθοδο. Μόλις ολοκλήρωσαν, έκπληκτοι διαπίστωσαν ότι βρήκαν το ίδιο αποτέλεσμα.

Μπορείτε να μαντέψετε με ποιον αριθμό ξεκίνησαν τα δύο παιδιά και ποιο αποτέλεσμα βρήκαν;

Να εξηγήσετε πώς σκεφτήκατε σε κάθε περίπτωση.



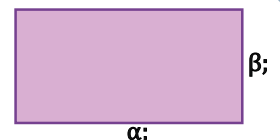
Να αναγνωρίσετε τη λύση εξισώσεων με τη βοήθεια του Υπολογιστικού Φύλλου (Excel).



Διερεύνηση 2. Το γήπεδο του βόλεϊ.

Εργασία μαθητών κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες.

Το βόλεϊ παίζεται σε ένα γήπεδο σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου του οποίου το μήκος είναι διπλάσιο από το πλάτος. Αν η περίμετρος είναι 54 m, ποιες θα είναι οι διαστάσεις του γηπέδου;



Μαθηματικές Έννοιες και Διεργασίες Μάθησης

Εισαγωγή στην έννοια της εξίσωσης

Για να σχηματίσουμε μια εξίσωση συνδέουμε με το σύμβολο της ισότητας (=) δύο αλγεβρικές παραστάσεις μία τουλάχιστον από τις οποίες περιέχει μία μεταβλητή. **Παραδείγματα:** $4x + 5 = 41$, $3(y - 2) + 5 = 38$, $\frac{t}{2} - 1 = 19$.

Οι αλγεβρικές παραστάσεις που συνδέονται με το ίσον (=) λέγονται **μέλη** της εξίσωσης, ενώ η μεταβλητή λέγεται **άγνωστος** της εξίσωσης. Οι όροι που περιέχουν τη μεταβλητή λέγονται **άγνωστοι όροι**.

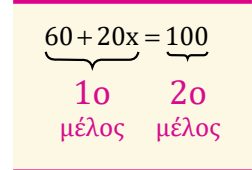
Παράδειγμα: Αν η Σοφία έχει 60 € στην τράπεζα και κάθε μήνα καταθέτει 20 €, τότε τα χρήματα που θα έχει μετά από x μήνες θα είναι: $60 + 20x$. Αν λοιπόν θέλει να μάθει πόσους μήνες πρέπει να αποταμιεύει για να έχει τελικά 1000 €, τότε αρκεί να σχηματίσει μια «εξίσωση» συνδέοντας με το σύμβολο « $=$ » τις δύο αλγεβρικές παραστάσεις και να την λύσει ως προς τον άγνωστο x : $60+20x = 1000$

Εξίσωση ονομάζεται κάθε ισότητα που συνδέει γνωστές ποσότητες με άγνωστες, τις οποίες θέλουμε να προσδιορίσουμε.

Λύση ή ρίζα μιας εξίσωσης λέμε κάθε αριθμό που την επαληθεύει. Στο παράδειγμά μας λύση είναι ο αριθμός $x = 47$ αφού: $60 + 20 \cdot 47 = 1000$.

Στην εξίσωση $60 + 20x = 1000$ και σε κάθε εξίσωση, η αλγεβρική παράσταση που βρίσκεται:

- αριστερά από το ίσον ($=$) λέγεται *πρώτο μέλος της εξίσωσης*.
- δεξιά από το ίσον ($=$) λέγεται *δεύτερο μέλος της εξίσωσης*.

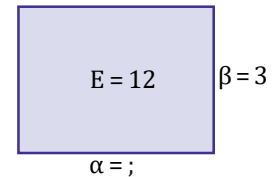


Οι εξισώσεις που μάθαμε στην Α΄ Γυμνασίου είχαν *άγνωστο μόνο στο πρώτο μέλος*.

Σε μία εξίσωση ο άγνωστος μπορεί να είναι υψωμένος σε έναν εκθέτη. Αν ο συντελεστής του αγνώστου είναι διαφορετικός του μηδενός, ο εκθέτης του αγνώστου καθορίζει τον βαθμό της εξίσωσης. Για παράδειγμα στην εξίσωση $4x + 5 = 41$ ο εκθέτης του αγνώστου x είναι ο αριθμός 1 διότι $x^1 = x$ και λέγεται **εξίσωση 1ου βαθμού**. Στην εξίσωση $x^2 - 1 = 24$ ο άγνωστος έχει εκθέτη 2, γι' αυτό λέγεται **εξίσωση 2ου βαθμού**. Στη συνέχεια θα δούμε δύο απλές εισαγωγικές μεθόδους λύσης μιας εξίσωσης.

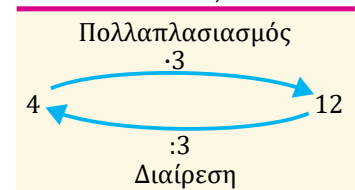
Επίλυση εξίσωσης με αντίστροφες πράξεις

Στο διπλανό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο θέλουμε να βρούμε το μήκος της πλευράς α . Χρησιμοποιώντας τον τύπο του εμβαδού $E = \alpha \cdot \beta$ καταλήγουμε στην εξίσωση: $\alpha \cdot 3 = 12$. Δηλαδή με ποιον αριθμό πρέπει να πολλαπλασιάσουμε με το 3 για να βρούμε αποτέλεσμα 12; Μπορούμε να απαντήσουμε στο ερώτημα με αντίστροφη πράξη, δηλαδή διαιρώντας το 12 με το 3. Έχουμε $12 : 3 = \alpha$ και επομένως, η λύση είναι $\alpha = 4$.



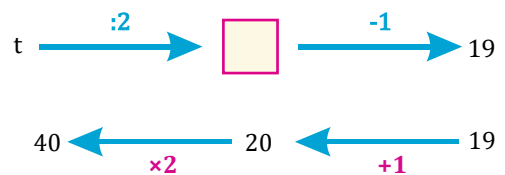
Οι αντίστροφες πράξεις φαίνονται παραστατικά στο διπλανό σχήμα:

Εάν ο άγνωστος εμφανίζεται στην εξίσωση μόνο μία φορά, τότε η εξίσωση μπορεί να λυθεί με τη μέθοδο των αντίστροφων πράξεων.



Παράδειγμα: Για να λύσουμε την εξίσωση $\frac{t}{2} - 1 = 19$ μέσω αντίστροφων πράξεων εργαζόμαστε ως εξής:

Παριστάνουμε την εξίσωση $\frac{t}{2} - 1 = 19$ με τα βέλη του διπλανού διαγράμματος ροής: Διαιρούμε τον ζητούμενο αριθμό με το 2 και στη συνέχεια αφαιρούμε 1. Το αποτέλεσμα είναι 19.



Με τη μέθοδο των αντίστροφων πράξεων ξεκινούμε από το 19.

- Η αντίστροφη πράξη για το $- 1$ είναι $+ 1$. Άρα: $19 + 1 = 20$.
- Η αντίστροφη πράξη για το $(: 2)$ είναι $(\times 2)$. Άρα: $20 \times 2 = 40$, δηλαδή $t = 40$.

Η λύση $t = 40$ είναι σωστή, γιατί επαληθεύει την εξίσωση: $\frac{40}{2} - 1 = 20 - 1 = 19$.

Όταν δύο εξισώσεις έχουν τις ίδιες λύσεις τότε ονομάζονται *ισοδύναμες*.

Για παράδειγμα, οι εξισώσεις $\frac{t}{2} - 1 = 19$ και $t = 40$ είναι *ισοδύναμες* αφού έχουν μόνο μία λύση η οποία είναι κοινή ($t = 40$). Η λύση μιας εξίσωσης στηρίζεται στον μετασχηματισμό της σε άλλη απλούστερη *ισοδύναμη* εξίσωση, όπως θα δούμε στην επόμενη ενότητα.

Με την ψηφιακή εφαρμογή να διερευνήσετε τη λύση της εξίσωσης με αντίστροφες πράξεις.

Κατά τον αντίστροφο υπολογισμό, η αφαίρεση αντιστρέφεται με πρόσθεση, και η διαίρεση με πολλαπλασιασμό.

Επίλυση εξίσωσης με συστηματικές δοκιμές

Κάποιες εξισώσεις μπορούν να λυθούν αντικαθιστώντας στη μεταβλητή διαφορετικές τιμές και εξετάζοντας αν αυτές ικανοποιούν την εξίσωση.

Παράδειγμα: Για να λύσουμε την εξίσωση $4x + 5 = 41$:

- Αν $x = 7$ τότε: $4 \cdot 7 + 5 = 28 + 5 = 33$. Επειδή $33 < 41$, η ζητούμενη λύση είναι μεγαλύτερη από 7.
- Αν $x = 11$ τότε: $4 \cdot 11 + 5 = 44 + 5 = 49$. Επειδή $49 > 41$, η λύση είναι μικρότερη από 11.
- Αν $x = 9$ τότε: $4 \cdot 9 + 5 = 36 + 5 = 41$. Επειδή $41 = 41$, η λύση είναι $x = 9$ της εξίσωσης.

Η μέθοδος αυτή συνίσταται σε εστιασμένες αντικαταστάσεις του αγνώστου με διαφορετικές τιμές μέχρι να βρεθεί η λύση της εξίσωσης.



Με την ψηφιακή εφαρμογή να διερευνήσετε τη λύση της εξίσωσης με συστηματικές δοκιμές στο μοντέλο της ζυγαριάς.



Με τη βοήθεια της εφαρμογής να λύσετε εξισώσεις με συστηματικές δοκιμές.



Εφαρμογή

Να εκφράσετε τα παρακάτω προβλήματα με εξισώσεις και να βρείτε τις λύσεις τους με δοκιμές ή αντίστροφες πράξεις:

- α)** Το διπλάσιο ενός αριθμού ελαττωμένο κατά 9 είναι ίσο με το επταπλάσιο του αριθμού αυξημένο κατά 26. Ποιος είναι ο αριθμός;
- β)** Να βρείτε τρεις διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς με άθροισμα 93.
- γ)** Αν στο τριπλάσιο ενός αριθμού προσθέσουμε 1 βρίσκουμε -17 . Ποιος είναι ο αριθμός;

Απάντηση

- α)** Έστω x ο ζητούμενος αριθμός. Το διπλάσιο του αριθμού είναι $2x$. Το διπλάσιο του αριθμού ελαττωμένο κατά 9 είναι: $2x - 9$. Το επταπλάσιο του αριθμού αυξημένο κατά 26 είναι: $7x + 26$. Άρα η ζητούμενη εξίσωση είναι:

$$2x - 9 = 7x + 26$$

Με δοκιμές και στα δύο μέλη της εξίσωσης, λαμβάνουμε την τιμή -23 για $x = -7$.

Επομένως, βρίσκουμε τη λύση της εξίσωσης $x = -7$.

- β)** Παριστάνουμε τους τρεις διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς με $x - 1$, x , $x + 1$. Σύμφωνα με την εκφώνηση έχουμε: $(x - 1) + x + (x + 1) = 93$ ή $3x = 93$. Εφόσον το γινόμενο του x με τον 3 είναι 93, για να βρούμε τον x διαιρούμε το 93 με το 3. Οπότε: $x = 93 : 3 = 31$. Επομένως οι τρεις διαδοχικοί αριθμοί είναι: 30, 31, 32. Πράγματι το άθροισμά τους είναι ίσο με $93 : 30 + 31 + 32 = 93$.
- γ)** Η ζητούμενη εξίσωση είναι $3x + 1 = -17$. Εφαρμόσουμε τη μέθοδο των αντίστροφων πράξεων: Από το -17 αφαιρούμε 1 και βρίσκουμε -18 . Στη συνέχεια διαιρούμε με το 3 και βρίσκουμε -6 . Το διάγραμμα ροής των αντίστροφων πράξεων είναι:

$$-6 \xleftarrow{:3} -18 \xleftarrow{-1} -17$$

Σημείωση: Εναλλακτικά στο **γ)** μπορούμε να εφαρμόσουμε εστιασμένες δοκιμές. Αν πάρουμε $x = -10$ βρίσκουμε -29 και για $x = -3$ βρίσκουμε -8 . Η λύση της εξίσωσης θα πρέπει να είναι μεταξύ των αριθμών -10 και -3 . Η τιμή $x = -6$ ικανοποιεί την εξίσωση: $3 \cdot (-6) + 1 = -18 + 1 = -17$ και επομένως είναι η λύση της εξίσωσης.

Να κάνετε την Εργασία με προεκτάσεις: «Σταυρός του Πυθαγόρα».



Να ανοίξετε τον σύνδεσμο και να απαντήσετε στις ερωτήσεις αξιολόγησης για την εξίσωση πρώτου βαθμού.

Ερωτήσεις για Αξιολόγηση

- 1 Να λύσετε την εξίσωση $(3x - 2) \cdot 5 = 10x + 30$ με συστηματικές δοκιμές. Να ξεκινήσετε με $x = 1$ και $x = 18$.
- 2 Να κατασκευάσετε μία εξίσωση που να ανταποκρίνεται στο πρόβλημα: «Πέντε σανίδες ίσου μήκους κόβονται από σανίδα μήκους 185 cm. Μένει ένα κομμάτι μήκους 35 cm. Πόσο μήκος έχει καθένα από τα πέντε κομμάτια;». Να λύσετε την εξίσωση σύμφωνα με τη μέθοδο των αντίστροφων πράξεων.

Στις παρακάτω ερωτήσεις να βάλετε σε κύκλο το γράμμα που αντιστοιχεί σε σωστή απάντηση:

- 3 «Σκέπτομαι έναν αριθμό, τον διαιρώ με 7 και βρίσκω 4. Σκέφτηκα τον αριθμό...»
 Α. 4×7 Β. $\frac{7}{4}$ Γ. $\frac{4}{7}$
- 4 Η λύση της εξίσωσης $5x - 8 = 4x - 4$ είναι:
 Α. 0 Β. -1 Γ. 4
- 5 Η Αλίκη έχει 27 τραγούδια στο MP3. Γνωρίζει ότι έχει 5 περισσότερα από τον διπλάσιο αριθμό τραγουδιών της Γεωργίας. Αν συμβολίσουμε με x το πλήθος των τραγουδιών της Γεωργίας, τότε η κατάσταση περιγράφεται μαθηματικά από την εξίσωση:
 Α. $x + 5 = 2 \times 27$ Β. $2x + 5 = 27$ Γ. $2x = 27 + 5$
- 6 Ποια από τις παρακάτω εξισώσεις έχει την ίδια λύση με την εξίσωση $3x - 19 = -2x - 14$:
 Α. $5(x - 1) - 1 = 8x$ Β. $7(x + 2) - 4 = -4$ Γ. $5x - 6 = x - 2$



Ασκήσεις και Προβλήματα

- 1 Να ελέγξετε αν ο αριθμός που δίνεται είναι λύση της εξίσωσης.
 α) $2x - 21 = 1, x = 11$ β) $3x + 5 = 5x - 3, x = 4$
 γ) $-2x + 4 = 5x - 7, x = -3$ δ) $3x + 6 = -3 + 5x, x = \frac{9}{2}$
- 2 Οι αριθμοί 8, 3, 4 και -5 είναι οι λύσεις των παρακάτω εξισώσεων. Να αντιστοιχίσετε τις λύσεις προς τις εξισώσεις.
 α) $2x = 20 - 3x$ β) $5 = 25 + 4x$
 γ) $\frac{1}{2}x + 2x = 20$ δ) $-4x + 10 = 5x - 17$
- 3 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις με δοκιμές.
 α) $-4 = -8 + 2x$ β) $3x - 5 = 46$
 γ) $2,5x - 10,5 = 2$ δ) $\frac{9}{2}x + \frac{3}{2} = 6$
- 4 Να βρείτε με το μυαλό τις λύσεις των εξισώσεων.
 α) $1 = 3 - 4x$ β) $\frac{1}{11}x = 7$
 γ) $3x + \frac{1}{10} = 2,5$ δ) $7x - 12 = 4(x - 3)$
- 5 Να βρείτε τις λύσεις κάθε εξίσωσης δημιουργώντας έναν πίνακα τιμών με τιμές του x από -3 έως 3. Πόσες λύσεις υπάρχουν; Να αιτιολογήσετε.

α) $4x + 5 = 17$ β) $2 - 3x = -1$
 γ) $\frac{3}{4}x - 2 = -\frac{1}{2}$ δ) $\frac{2}{3}x - 5 = 2(x - 1) - 3$

- 6 **Εργασία σε ομάδες.** Να λύσετε την εξίσωση $2 \cdot (2x + 10) = 32 + x$ με συστηματικές δοκιμές. Για $x = 1$, η τιμή του δεξιού μέλους είναι μεγαλύτερη, ενώ για $x = 10$ η τιμή του αριστερού μέλους είναι μεγαλύτερη.

Άρα θα πρέπει να αναζητήσουμε την απάντηση μεταξύ 1 και 10.

x	$2 \cdot (2x + 10)$	$32 + x$
1	$2 \cdot (2 \cdot 1 + 10) = 24$	$32 + 1 = 33$
10	$2 \cdot (2 \cdot 10 + 10) = 60$	$32 + 10 = 42$
5

- α) Στο επόμενο βήμα να δοκιμάσετε για $x = 5$. Να συνεχίσετε με τον ίδιο τρόπο μέχρι να βρείτε τη λύση.
- β) Να λύσετε την εξίσωση $(4x - 3) \cdot 6 = 20x + 50$ με συστηματικές δοκιμές. Να ξεκινήσετε με $x = 1$ και $x = 20$.
- γ) Να σχηματίσετε ομάδες. Να διατυπώσετε εξισώσεις παρόμοιες με τις προηγούμενες και να συνεργαστείτε για την επίλυσή τους με συστηματικές δοκιμές. Να μοιραστείτε τις λύσεις σας στην ομάδα σας.

7 Να λύσετε τις εξισώσεις με αντίστροφες πράξεις.

α) $(y + 1) \cdot 8 = 56$ β) $(x - 3) \cdot 6 = 9$

γ) $(x+12) \cdot (-9) = 36$ δ) $2 \cdot (6,5+\alpha) = 11$

8 **Εργασία σε ομάδες.** Να λύσετε τις εξισώσεις με αντίστροφες πράξεις.

α) $-3x + 9 = 10$ β) $4 - x = 3x$

γ) $\frac{1}{2}x + 1 = -1$ δ) $3x + 1 = \frac{1}{2}x + 6$

Να γράψετε εξισώσεις παρόμοιες με τις προηγούμενες και να συνεργαστείτε για την επίλυσή τους με αντίστροφες πράξεις. Να μοιραστείτε τις λύσεις σας στην ομάδα σας.

9 Να εκφράσετε με εξίσωση τις ακόλουθες λεκτικές διατυπώσεις:

α) Το τριπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 60 είναι ίσο με το διπλάσιό του ελαττωμένο κατά 27.

β) Το άθροισμα τριών διαδοχικών φυσικών αριθμών είναι 162.

γ) Το διπλάσιο ενός αριθμού ελαττωμένο κατά 20 είναι ίσο με 14.

δ) Αν στο τετράγωνο ενός αριθμού προσθέσουμε 11 βρίσκουμε 47.

ε) Αν στους όρους του κλάσματος $\frac{5}{12}$ προσθέσουμε τον ίδιο αριθμό το κλάσμα γίνεται ίσο με $\frac{4}{5}$.

10 Να εκφράσετε με εξίσωση τα ακόλουθα προβλήματα:

α) Η μία διάσταση ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι μεγαλύτερη της άλλης κατά 12 cm και η περίμετρός του είναι 84 cm.

β) Η περίμετρος ενός ισοπλεύρου τριγώνου είναι 48 m.

11 **Συμπλήρωση προβλήματος.** Για καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις να συμπληρώσετε την εκφώνηση και στη συνέχεια να δημιουργήσετε την αντίστοιχη εξίσωση.

α) Το εμβαδόν του ορθογωνίου μήκους 4 cm είναι 91 cm^2 .

β) Ένα ισοσκελές τρίγωνο έχει γωνία βάσης 45° .

γ) Η περίμετρος ενός ισοπλεύρου τριγώνου είναι 165 m.

12 Οι αριθμοί 5, 6 και 10 είναι οι λύσεις των παρακάτω προβλημάτων. Να γράψετε τις εξισώσεις των προβλημάτων και να τις αντιστοιχίσετε με τις λύσεις.

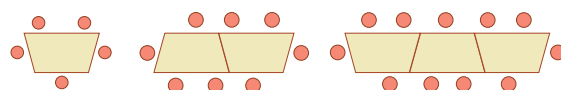
α) Ο Θανάσης έχει τριπλάσια χρήματα από τον αδελφό του. Αν ο Θανάσης ξοδέψει 30 ευρώ και ο αδελφός του 10 ευρώ τότε θα έχουν το ίδιο χρηματικό ποσό. Πόσα χρήματα είχε αρχικά ο καθένας;

β) Μία μαθήτρια είναι 15 ετών και μία καθηγήτρια 35. Μετά από πόσα χρόνια η ηλικία της καθηγήτριας θα είναι διπλάσια από την ηλικία της μαθήτριας;

γ) Η Μαρία αγόρασε 13 τετράδια και μολύβια και πλήρωσε 47 ευρώ. Κάθε μολύβι κοστίζει 2 € και κάθε τετράδιο κοστίζει 5 €. Πόσα μολύβια αγόρασε;

13 **Εργασία ετεροαξιολόγησης:**

α) Ο κύριος Μανώλης είναι ιδιοκτήτης ενός εστιατορίου με μικρά τραπέζια σχήματος ισοσκελούς τραapeζίου που χωρούν ένα άτομο στις τρεις μικρές πλευρές και δύο στη μεγάλη πλευρά. Τα τραπέζια μπορούν να ενωθούν μεταξύ τους για να σχηματίσουν μεγαλύτερα. Το μοτίβο συνεχίζεται.



1ος όρος

2ος όρος

3ος όρος

Αν δεν υπάρχουν κενές θέσεις, πόσα τραπέζια θα χρειαστεί για να χωρέσουν 212 καλεσμένοι για έναν γάμο.

β) Η κυρία Λουκία στο εστιατόριό της διαθέτει τετράγωνα τραπέζια που χωρούν ένα άτομο σε κάθε πλευρά και ακολουθούν παρόμοιο μοτίβο. Πόσα τραπέζια θα χρειαστεί για να χωρέσουν 212 άτομα.

Να ελέγξετε τα αποτελέσματά σας με αυτά του συμμαθητή σας.

Να μελετήσετε το Ιστορικό Σημείωμα: «Οι απαρχές της Αλγεβρας».



2.4 Λύσεις εξίσωσης 1ου βαθμού με τις ιδιότητες της ισότητας

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

- Να επιλύουν εξισώσεις της μορφής $ax + \beta = \gamma x + \delta$ με εφαρμογή των ιδιοτήτων διατήρησης της ισότητας και των πράξεων.
- Να αναγνωρίζουν ισοδύναμες εξισώσεις.
- Να αναγνωρίζουν ότι μια εξίσωση μπορεί να έχει άπειρες λύσεις ή καμία λύση.

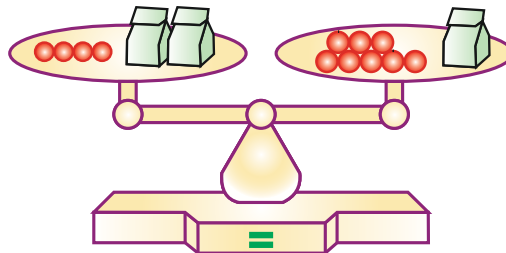
Για να λύσουμε μια εξίσωση τη μετασχηματίζουμε διαδοχικά σε μια απλούστερη έτσι ώστε η τελική εξίσωση να είναι ισοδύναμη με την αρχική, δηλαδή να έχουν τις ίδιες ακριβώς λύσεις. Ένα χρήσιμο μοντέλο για τη λύση μιας εξίσωσης πρώτου βαθμού είναι η ζυγαριά σε ισορροπία, όπως παρουσιάζεται στην εφαρμογή (1).



Διερεύνηση 1. Το μοντέλο της ζυγαριάς.

Εργασία μαθητών κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες: Η παρακάτω εικόνα δείχνει έναν ζυγό. Η ράβδος ισορροπεί στην οριζόντια θέση, δηλαδή κάθε δίσκος έχει ίδια μάζα. Κάθε σακούλα περιέχει τον ίδιο αριθμό αμυγδαλωτών. Όλα τα αμυγδαλωτά έχουν την ίδια μάζα.

α) Πόσα αμυγδαλωτά υπάρχουν μέσα σε κάθε σακούλα; Να περιγράψετε την προσέγγισή σας.



β) Να εξηγήσετε εάν η ζυγαριά θα παραμένει σε ισορροπία με τις ακόλουθες ενέργειες:

- Αν προσθέσουμε από ένα αμυγδαλωτό στους δύο δίσκους.
- Όταν αφαιρέσουμε δύο αμυγδαλωτά από κάθε δίσκο.
- Όταν διπλασιάσουμε τον αριθμό των αμυγδαλωτών στους δύο δίσκους.
- Όταν μειώσουμε στο μισό τον αριθμό των αμυγδαλωτών στους δύο δίσκους.

Να γενικεύσετε τις διαπιστώσεις σας.



Διερεύνηση 2. Το μοντέλο των δύο ράβδων.

Εργασία μαθητών κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες:

Πρόβλημα: Την Τρίτη, ο Παναγιώτης, με τις οικονομίες που είχε συγκεντρώσει, αγόρασε 3 μπλουζάκια, όλα στην ίδια τιμή. Έχει ακόμα 15 € μετά από αυτήν την αγορά. Το Σάββατο άρχισαν οι εκπτώσεις και ο Παναγιώτης διαπίστωσε ότι η τιμή στα μπλουζάκια μειώθηκε κατά 5 €. Τότε συλλογίστηκε: «Με τις οικονομίες που είχα θα μπορούσα στις εκπτώσεις να αγοράσω ακριβώς 5 σε αυτή την τιμή!» Ποια τιμή είχαν αυτά τα μπλουζάκια την Τρίτη και ποια το Σάββατο;

Για να λύσουν το πρόβλημα, η Θεανώ με τη συμμαθήτριά της κατασκεύασαν το διπλανό σχήμα στο οποίο τα μικρά ορθογώνια έχουν ίδιο μήκος x και ανακάλυψαν:

«Το Σάββατο το μπλουζάκι πουλήθηκε ... €».

Ποια ήταν η τιμή που υποστήριζαν στην τάξη; Να αιτιολογήσετε.

Να συζητήσετε ενδεχόμενες διαφορετικές εξισώσεις.



Με την ψηφιακή εφαρμογή να λύσετε εξισώσεις της μορφής $ax + \beta = \gamma x + \delta$ με το μοντέλο των ράβδων.



Τρίτη	x	5	x	5	x	5	15
Σάββατο	x	x	x	x	x	x	



Διερεύνηση 3.

Εργασία μαθητών κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες:

Ο Ανδρέας λέει στον Βασίλη: «Έχω 5 € περισσότερα από σένα. Αν μου δώσεις 2 € τότε θα έχω τετραπλάσια από σένα». Πόσα χρήματα έχει ο καθένας;

Μαθηματικές Έννοιες και Διεργασίες Μάθησης

Ισοδύναμες εξισώσεις

Πολλές εξισώσεις δεν μπορούν να λυθούν εύκολα με αντίστροφες πράξεις, καθώς μπορεί να περιέχουν τη μεταβλητή και στα δύο μέλη της εξίσωσης. Ωστόσο, είναι δυνατό να προκύψουν από αυτήν απλούστερες εξισώσεις από την αρχική εξίσωση, οι οποίες έχουν την ίδια λύση.

Δύο ή περισσότερες εξισώσεις που έχουν την ίδια λύση λέγονται **ισοδύναμες εξισώσεις**.

Για παράδειγμα, οι εξισώσεις $4(x - 1) = 3x$ και $4x - 3x = 4$ έχουν την ίδια λύση $x = 4$, οπότε είναι ισοδύναμες.

Σε μία εξίσωση οι όροι που περιέχουν τον άγνωστο ονομάζονται **άγνωστοι όροι** της εξίσωσης.

Για παράδειγμα, στην εξίσωση $4x = 3x + 4$, οι $4x$ και $3x$ είναι άγνωστοι όροι, ενώ ο 4 είναι γνωστός όρος.

Επίλυση μιας εξίσωσης λέγεται η διαδικασία που εφαρμόζουμε για να βρούμε τη λύση της. Για να επιλύσουμε μία εξίσωση πρέπει να δημιουργήσουμε μια ισοδύναμη εξίσωση, που να έχει άγνωστο στο ένα μέλος.

Αυτή η διαδικασία λέγεται **χωρισμός γνωστών από αγνώστους**.

Κατά την επίλυση μιας εξίσωσης εφαρμόζουμε κατάλληλους μετασχηματισμούς όπως είναι οι ιδιότητες της ισότητας και οι ιδιότητες των πράξεων για να προκύψει μια νέα απλούστερη ισοδύναμη εξίσωση.

Παράδειγμα: Για τη λύση της εξίσωσης $5x + 40 = 3(x + 4) + 48$ έχουμε:

$$\begin{array}{l}
 5x + 40 = 3(x + 4) + 48 \\
 5x + 40 = 3x + 12 + 48 \quad | \text{Κάνουμε την επιμεριστική ιδιότητα} \\
 5x + 40 = 3x + 60 \quad | \text{Κάνουμε την πράξη: } 12 + 48 = 60 \\
 5x - 3x + 40 = 3x - 3x + 60 \quad | \text{Αφαιρούμε } 3x \text{ από τα δύο μέλη} \\
 2x + 40 - 40 = 60 - 40 \quad | \text{Αφαιρούμε } 40 \text{ από τα δύο μέλη} \\
 2x = 20 \quad | \text{Κάνουμε τις πράξεις} \\
 \frac{2x}{2} = \frac{20}{2} \quad | \text{Διαιρούμε τις πράξεις} \\
 x = 10
 \end{array}$$



Όπως είδαμε, για να επιλύσουμε αλγεβρικά μια εξίσωση εφαρμόζουμε τις ιδιότητες της ισότητας και την επιμεριστική ιδιότητα για να κάνουμε αναγωγή όμοιων όρων. Αν υπάρχουν παρενθέσεις κάνουμε απαλοιφή παρενθέσεων. Επειδή δύο ίσες ποσότητες που μεταβάλλονται κατά τον ίδιο τρόπο παραμένουν ίσες σε μια εξίσωση μπορούμε:

- Να προσθέτουμε ή να αφαιρούμε στα μέλη της την ίδια αλγεβρική παράσταση ή τον ίδιο αριθμό.
- Να πολλαπλασιάζουμε ή να διαιρούμε τα μέλη της με τον ίδιο μη μηδενικό αριθμό.

Έτσι για τη λύση μιας εξίσωσης της μορφής $ax + \beta = \gamma x + \delta$ απομονώνουμε τον άγνωστο x στο ένα μέλος (χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους) εφαρμόζοντας κατάλληλους μετασχηματισμούς με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των πράξεων και των προηγούμενων κανόνων.

Πλήθος λύσεων εξίσωσης

Οι εξισώσεις $ax + \beta = \gamma x + \delta$ δεν έχουν πάντοτε ακριβώς μία λύση. Υπάρχουν εξισώσεις που έχουν άπειρες λύσεις, δηλαδή είναι αόριστες και εξισώσεις που δεν έχουν καμία λύση, δηλαδή είναι αδύνατες.

Παραδείγματα:

- Η εξίσωση $x - 7 = x$ γράφεται: $x - x = 7$ ή $0x = 7$ ή $0 = 7$ που είναι αδύνατη.
 - Η εξίσωση $3x + 21 = 3(x + 7)$ γράφεται: $0x = 0$ και είναι αόριστη αφού κάθε αριθμός την επαληθεύει.
- Για το πλήθος των λύσεων μιας εξίσωσης 1ου βαθμού της μορφής $ax + \beta = \gamma x + \delta$, ισχύουν:

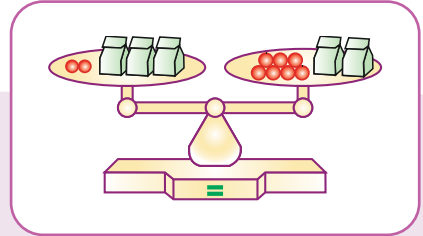
- Η εξίσωση έχει **μοναδική λύση** όταν ανάγεται στη μορφή: $ax = \beta$ με $a \neq 0$.
- Έχει **άπειρες λύσεις** και λέγεται **αόριστη ή ταυτότητα**, όταν ανάγεται στη μορφή: $0x = 0$.
- Δεν έχει καμία λύση και λέγεται **αδύνατη**, όταν ανάγεται στη μορφή: $0x = \beta$ με $\beta \neq 0$.

Απάντηση



Εφαρμογή 1

Η διπλανή ζυγαριά ισορροπεί. Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε δίσκο υπάρχει η ίδια μάζα. Κάθε σακούλα περιέχει τον ίδιο αριθμό αμυγδαλωτών. Όλα τα αμυγδαλωτά έχουν την ίδια μάζα. Πόσα αμυγδαλωτά υπάρχουν μέσα σε κάθε σακούλα;

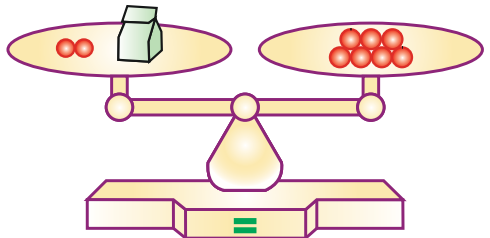


Έστω ότι κάθε σακούλα περιέχει x αμυγδαλωτά. Η αρχική κατάσταση ισορροπίας της ζυγαριάς περιγράφεται από την εξίσωση:

$$3x + 2 = 2x + 7$$

Αφαιρούμε 2 σακούλες και από τους δύο δίσκους της ζυγαριάς. Η ζυγαριά πάλι ισορροπεί, οπότε:

$$\begin{aligned} 3x + 2 - 2x &= 2x + 7 - 2x & | - 2x \\ (3 - 2)x + 2 &= 7 & | 3x - 2x = (3 - 2)x \\ 1x + 2 &= 7 & | 3 - 2 = 1 \\ x + 2 &= 7 \end{aligned}$$



Αφαιρούμε δύο αμυγδαλωτά και από τους δύο δίσκους της ζυγαριάς. Η ζυγαριά και πάλι ισορροπεί, οπότε:

$$\begin{aligned} x + 2 - 2 &= 7 - 2 & | - 2 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Επαλήθευση

1ο μέλος εξίσωσης: $3 \cdot 5 + 2 = 15 + 2 = 17$

2ο μέλος εξίσωσης: $2 \cdot 5 + 7 = 10 + 7 = 17$

Άρα η αρχική ζυγαριά έχει σε κάθε δίσκο 17 αμυγδαλωτά.

Σχόλιο: Οι αλλαγές στη ζυγαριά αντιστοιχούν ακριβώς στους ισοδύναμους μετασχηματισμούς της εξίσωσης. Η ζυγαριά και η εξίσωση παρέμειναν σε ισορροπία μετά από κάθε αλλαγή. Αυτό σημαίνει ότι η λύση δεν αλλάζει ως αποτέλεσμα των μετασχηματισμών.



Εφαρμογή 2

Η Έλενα και η Γιώτα επέλεξαν τον ίδιο θετικό ακέραιο αριθμό. Η Έλενα τον πολλαπλασιάζει με το 5 και προσθέτει 34. Η Γιώτα τον πολλαπλασιάζει με το 2 και προσθέτει 109. Τελικά βρίσκουν και οι δύο τον ίδιο αριθμό. Ποιον αριθμό επέλεξαν;

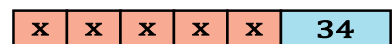
Απάντηση

Το πρώτο σχήμα είναι η ράβδος της Έλενας και δείχνει 5 κόκκινα ορθογώνια που παριστάνουν τον άγνωστο θετικό ακέραιο αριθμό x συν τον αριθμό 34.

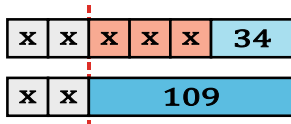
Το δεύτερο σχήμα είναι η ράβδος της Γιώτας και δείχνει 2 κόκκινα ορθογώνια που παριστάνουν τον άγνωστο αριθμό x συν τον αριθμό 109. Κάθε ορθογώνιο x έχει το ίδιο μήκος. Οι δύο ράβδοι εκφράζουν τον ίδιο αριθμό και διατηρούν το ίδιο μήκος.

Η κατάσταση αντιστοιχεί στην ακόλουθη εξίσωση:

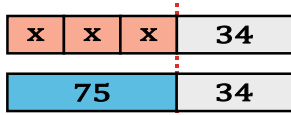
$$5x + 34 = 2x + 109$$



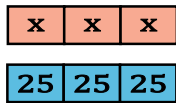
Αλλάζουμε τις δύο ράβδους έτσι ώστε να εκφράζουν πάντα την ίδια ποσότητα. Αυτές οι αλλαγές οδηγούν σε ισοδύναμες εξισώσεις.



$$\begin{aligned} 5x + 34 &= 2x + 109 \\ 5x - 2x + 34 &= 2x - 2x + 109 & | - 2x \\ (5 - 2)x + 34 &= 109 & | 5x - 2x = (5 - 2)x \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 3x + 34 &= 75 + 34 & | (5 - 2)x = 3x \\ 3x + 34 - 34 &= 75 + 34 - 34 & | - 34 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 3x &= 75 & | : 3 \\ x &= 25 \end{aligned}$$

Όλες οι εξισώσεις που προκύπτουν από τους παραπάνω μετασχηματισμούς είναι ισοδύναμες, έχουν δηλαδή την ίδια λύση $x = 25$.

Επαλήθευση

$$5x + 34 = 5 \cdot 25 + 34 = 125 + 34 = 159. \quad 2x + 109 = 2 \cdot 25 + 109 = 159.$$



Με την ψηφιακή εφαρμογή να λύσετε εξισώσεις της μορφής $ax + \beta = \gamma x + \delta$ με το μοντέλο των αλγεβρικών πλακιδίων.



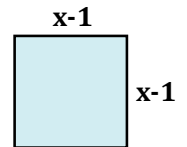
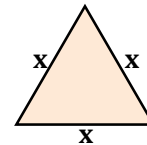
Εφαρμογή 3

Έστω ότι ένα ισόπλευρο τρίγωνο και ένα τετράγωνο έχουν ίσες περιμέτρους. Να βρείτε την πλευρά κάθε σχήματος και την περίμετρο των δύο σχημάτων.

Απάντηση

Η περίμετρος του τετραγώνου είναι $4(x - 1)$ και του ισόπλευρου τριγώνου $3x$. Επειδή οι περιμέτροι είναι ίσες έχουμε: $4(x - 1) = 3x$. Στη συνέχεια λύνουμε την εξίσωση.

$$\begin{aligned} 4(x - 1) &= 3x \\ 4x - 4 &= 3x & | \text{Κάνουμε τις πράξεις (επιμεριστική ιδιότητα)} \\ 4x - 3x - 4 &= 3x - 3x & | -3x \\ x - 4 &= 0 & | 4x - 3x = (4 - 3)x = 1x = x \text{ και } 3x - 3x = 0 \\ x - 4 + 4 &= 4 & | +4 \\ x &= 4 \end{aligned}$$



Επαλήθευση. Ο αριθμός $x = 4$ είναι η λύση της εξίσωσης και επομένως η ζητούμενη πλευρά, αφού:

- Περίμετρος τριγώνου = $3x = 3 \cdot 4 = 12$ μονάδες μήκους.
- Περίμετρος τετραγώνου = $4(x - 1) = 4(4 - 1) = 4 \cdot 3 = 12$ μονάδες μήκους.



Εφαρμογή 4

Να λυθεί η εξίσωση: $6 + 2(x - 1) = 15 + 2x$

Απάντηση

$$\begin{aligned} 6 + 2(x - 1) &= 15 + 2x \\ 6 + 2x - 2 &= 15 + 2x & | \text{Απαλοιφή παρενθέσεων} \\ 4 + 2x &= 15 + 2x & | 6 - 2 = 4 \\ 4 + 2x - 2x &= 15 + 2x - 2x & | \text{Πρόσθεση: } -2x \\ 4 &= 15 & | \text{Αναγωγή όμοιων όρων} \end{aligned}$$

Η τελευταία οπότε και η αρχική είναι **αδύνατη**. Άρα η εξίσωση δεν έχει λύση.



Εφαρμογή 5

Να λυθεί η εξίσωση: $6 - (2x + 1) = 5 - 2x$

Απάντηση

$$\begin{aligned} 6 - (2x+1) &= 5 - 2x \\ 6 - 2x - 1 &= 5 - 2x && | \text{Απαλοιφή παρενθέσεων} \\ -2x + 5 &= 5 - 2x && | 6 - 1 = 5 \\ -2x + 2x + 5 - 5 &= 5 - 5 - 2x + 2x && | +2x \text{ και } -5 \\ 0 \cdot x &= 0 && | \text{Αναγωγές όμοιων όρων} \end{aligned}$$

Η τελευταία, οπότε και η αρχική επαληθεύεται από κάθε αριθμό x . Άρα είναι **αόριστη**.



Εφαρμογή 6

Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{1}{5} - \frac{x-1}{2} = \frac{2x+3}{10} + 1$

Απάντηση

Κάνουμε απαλοιφή παρανομαστών πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το ΕΚΠ $(2, 5, 10) = 10$, οπότε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{5} - \frac{x-1}{2} &= \frac{2x+3}{10} + 1 \\ 10 \cdot \frac{1}{5} - 10 \cdot \frac{x-1}{2} &= 10 \cdot \frac{2x+3}{10} + 10 \cdot 1 && | \text{Απαλοιφή παρανομαστών} \\ 2 - 5 \cdot (x-1) &= 2x + 3 + 10 && | \text{Απλοποιούμε τα κλάσματα} \\ 2 - 5x + 5 &= 2x + 3 + 10 && | \text{Κάνουμε τις πράξεις (επιμεριστική ιδιότητα)} \\ -5x - 2x &= 3 + 10 - 2 - 5 && | \text{Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους} \\ -7x &= 6 && | \text{Κάνουμε αναγωγή όμοιων όρων} \\ \frac{-7x}{-7} &= \frac{6}{-7} && | \text{Διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου και απλοποιούμε τα κλάσματα} \\ x &= -\frac{6}{7} \end{aligned}$$

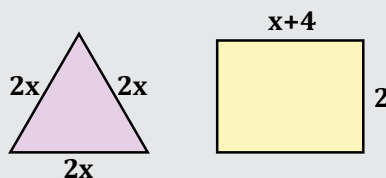
Σχόλιο: Η διαδικασία επίλυσης μπορεί να γίνει πιο γρήγορα με τη βοήθεια του πρακτικού κανόνα: Σε μια εξίσωση μπορούμε να μεταφέρουμε όρους από το ένα μέλος στο άλλο, αλλάζοντας το πρόσημό τους.



Να ανοίξετε τον σύνδεσμο και να απαντήσετε στις ερωτήσεις αξιολόγησης για τη λύση εξίσωσης πρώτου βαθμού με τις ιδιότητες της ισότητας.

Ερωτήσεις για Αξιολόγηση

1 Για ποια τιμή του x τα ακόλουθα σχήματα έχουν την ίδια περίμετρο;



- 2 Να αποδείξετε ότι οι δύο αλγεβρικές παραστάσεις είναι ισοδύναμες. Να αιτιολογήσετε.
 Α. $-3\alpha + 3\beta$ και $(\beta - \alpha) \cdot 3$ Β. $7y - 13y$ και $-6y$
- 3 Να προσδιορίσετε τις λύσεις των εξισώσεων:
 Α. $3x + 7 = x + 2x + 7$ Β. $x + 6 = x - 6$ Γ. $x + 2 = 2x - 1$
- 4 Να συμπληρώσετε τα κενά και να λύσετε τις εξισώσεις:
 Α. $5x + 55 = 5 \quad | - 55$
 $\dots = \dots \quad | :5$
 $\dots = \dots$
 Β. $-13 = -3x - 7 \quad | +7$
 $\dots = \dots \quad | :(-3)$
 $\dots = \dots$
 Γ. $2x = -x + 8 \quad | +x$
 $\dots = \dots \quad | :3$
 $\dots = \dots$
- 5 Η αλγεβρική παράσταση που πρέπει να συμπληρωθεί στο αριστερό μέλος της εξίσωσης $(6x + 2) + \dots = 12x - 8$ για να προκύψει αληθής ισότητα είναι:
 Α. $6x - 10$ Β. $-6x + 10$ Γ. $6x - 6$
- 6 Η εξίσωση $6x + 8 = -4x - 112$ έχει λύση:
 Α. $x = -60$ Β. $x = -12$ Γ. $x = 60$
- 7 Η εξίσωση που εκφράζει την εκφώνηση «Το τριπλάσιο ενός αριθμού ελαττωμένο κατά 13 είναι ίσο με το ένα πέμπτο του 12», είναι:
 Α. $3x - 13 = \frac{x}{5}$ Β. $3x - 13 = \frac{12}{5}$ Γ. $3x - 5 = \frac{12}{13}$
- 8 Η εξίσωση $2(x + 5) - 7 = 2x + 3$:
 Α. έχει λύση $x = -2025$ Β. δεν έχει λύση $x = -2025$ Γ. δεν έχει λύση $x = 2025$

Ένα μαγικό μαθηματικό παιχνίδι

Η Υπατία έχει εντυπωσιάσει τις φίλες της με το εξής «μαγικό» μαθηματικό παιχνίδι:

- Σκέψου έναν αριθμό.
- Διπλασίασέ τον.
- Πρόσθεσε 15.
- Διπλασίασε το αποτέλεσμα.
- Αφαίρεσε 10.
- Διαίρεσε το αποτέλεσμα με 4.
- Αφαίρεσε τον αριθμό που σκέφτηκες.
- Βρήκες 5.

- α) Μπορείτε να εξηγήσετε πώς η Υπατία ξέρει το αποτέλεσμα;
 β) Να δημιουργήσετε ένα δικό σας «μαγικό» μαθηματικό παιχνίδι.



Να μελετήσετε το *Ιστορικό Σημείωμα*: «Η μέθοδος της ψευδούς υπόθεσης στον πάπυρο του Rhind».



Ασκήσεις και Προβλήματα

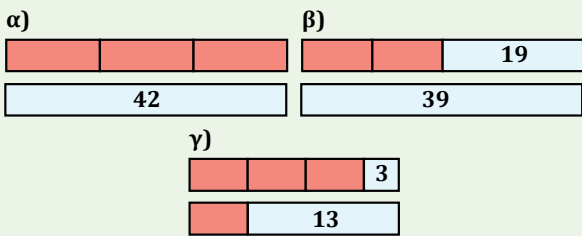
- 1 Να λύσετε τις εξισώσεις:
 α) $-18 = 9x$ β) $6x = -48$ γ) $7x = 0$
 δ) $-9x = 63$ ε) $-\frac{1}{5}x = 3$ στ) $\frac{3}{4}x = 24$
- 2 Να λύσετε τις εξισώσεις:
 α) $9x + 11 = 65$ β) $4x - 7 = 21$
 γ) $26 - 6x = -34$ δ) $-64 = 16 + 4x$
 ε) $-12x + 7 = -101$ στ) $-49 = 30 + 4x$
- 3 **Εργασία σε ομάδες.** Για τις ακόλουθες λεκτικές διατυπώσεις να δημιουργήσετε εξισώσεις και να τις λύσετε.
 α) Αν αφαιρέσουμε τον 28 από το πενταπλάσιο ενός αριθμού, παίρνουμε το τριπλάσιό του. Να προσδιορίσετε τον αριθμό.
 β) Αν αφαιρέσουμε τον 2 από το μισό ενός αριθμού, παίρνουμε το τριπλάσιο του. Ποιος είναι ο αριθμός;

γ) Αν προσθέσουμε 0,5 στο ένα τρίτο ενός αριθμού, παίρνουμε το διπλάσιό του. Ποιος είναι ο αριθμός;

δ) Το διπλάσιο ενός αριθμού ελαττωμένο κατά 3 είναι κατά 10 μεγαλύτερο από το τριπλάσιό του. Ποιος είναι ο αριθμός;

Να σχηματίσετε ομάδες και να επινοήσετε κι άλλες λεκτικές διατυπώσεις, όπως οι προηγούμενες. Να λύσετε τις αντίστοιχες εξισώσεις στην ομάδα σας και να συγκρίνετε τα αποτελέσματά σας.

4 **Εργασία σε ομάδες.** Να μεταφράσετε τις εικόνες σε εξισώσεις. Να βρείτε το μήκος κάθε κόκκινου ορθογωνίου.



Να σχηματίσετε ομάδες και να σχεδιάσετε περισσότερες εικόνες όπως οι προηγούμενες στο τετράδιό σας. Να γράψετε την αντίστοιχη εξίσωση και τη λύση της. Να μοιραστείτε τις εργασίες σας στην ομάδα σας και να συγκρίνετε αν έχετε τις ίδιες εξισώσεις και λύσεις για τις ίδιες εικόνες.

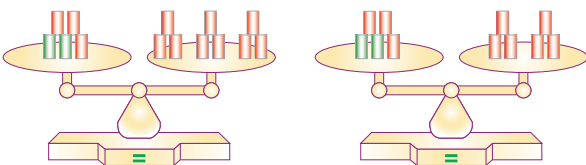
5 Οι παρακάτω ομογενείς δοκοί έχουν το ίδιο μήκος σε μέτρα. Να βρείτε το μήκος τους.



6 Ένα δοκάρι 3,6 m τεμαχίστηκε σε δύο μέρη έτσι ώστε το ένα να είναι τριπλάσιο από το άλλο. Ποιο είναι το μήκος των δύο μερών.

7 **Εργασία σε ομάδες.** Να δημιουργήσετε μία εξίσωση και να βρείτε τη μάζα ενός πράσινου κουτιού.

α) Αν τα κόκκινα κουτιά ζυγίζουν 1 κιλό το καθένα.
β) Αν τα κόκκινα κουτιά ζυγίζουν 1,5 κιλό το καθένα.



Να σχηματίσετε ομάδες και να σχεδιάσετε κι άλλες εικόνες όπως οι προηγούμενες στο τετράδιό σας. Για καθεμία να γράψετε την αντίστοιχη εξίσωση και τη λύση της. Να μοιραστείτε τις λύσεις σας στην ομάδα σας.

8 Η Άννα λέει στη Ναταλία: «Έχω διπλάσια χρήματα από σένα. Αν σου δώσω 3 € τότε θα έχουμε από ίσα». Πόσα χρήματα έχει η καθεμία;

9 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της ζυγαριάς ή την μέθοδο των πλακιδίων. Να επαληθεύσετε την απάντησή σας.

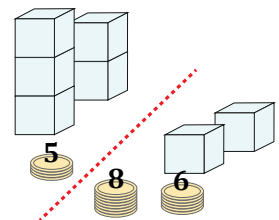
α) $2x + 6 = 28$ **β)** $18 = 2\alpha - 7$
γ) $6y + 2 = 3y + 11$ **δ)** $2\beta + 7 = -4\beta + 37$

10 Ο Νίκος και ο Ηρακλής επέλεξαν τον ίδιο θετικό ακέραιο αριθμό. Ο Νίκος τον πολλαπλασιάζει με το 5 και αφαιρεί 4. Ο Ηρακλής τον πολλαπλασιάζει με το 2 και προσθέτει 90. Τελικά βρίσκουν και οι δύο τον ίδιο αριθμό. Ποιον αριθμό επέλεξαν;

11 Ο Πέτρος και ο Λευτέρης παίζουν με βόλους. Έχουν και οι δύο μαζί 67 βόλους. Ο Πέτρος έχει διπλάσιους βόλους από τον Λευτέρη ελαττωμένους κατά 5. Πόσους βόλους έχει ο καθένας τους;

12 Η ηλικία του πατέρα είναι ενδεκαπλάσια από την ηλικία της κόρης του. Σε 6 χρόνια η ηλικία του θα γίνει πενταπλάσια από την ηλικία της κόρης του. Ποια είναι η σημερινή ηλικία του πατέρα και ποια η ηλικία της κόρης του;

13 Κάθε κουτί έχει ίσο αριθμό κερμάτων των 2 €. Επίσης υπάρχει ο ίδιος συνολικός αριθμός κερμάτων των 2 € αριστερά και δεξιά της γραμμής. Να βρείτε πόσα κέρματα έχει κάθε κουτί.



14 Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $3x - 15 = 27$ **β)** $10 - 8\lambda = 8$ **γ)** $12 = 2y + 32$

δ) $-\frac{1}{2}x + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ **ε)** $\frac{1}{4} = 1 - \frac{3}{4}x$

15 Να λύσετε τις εξισώσεις με ισοδύναμους μετασχηματισμούς:

α) $x + 33 = 5x - 31$ **β)** $17x + 62 = 62 - 4x$
γ) $14x - 12 = 2x$ **δ)** $9 - 3x = 23 - 9x$
ε) $x - 43 = -x + 21$

16 Να λύσετε τις εξισώσεις με ισοδύναμους μετασχηματισμούς:

α) $2x - 14 = 5x - 19$ **β)** $x = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$
γ) $5x - 10 = 3x - 14$ **δ)** $0,5x + 2,7 = 1,2 + 0,8x$
ε) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{8} = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}$

- 17 Να λύσετε τις εξισώσεις:
 α) $5x + 21 = 3(4x + 7)$ β) $2(2x - 2) - 3 = 2x + 9$
 γ) $5(2x - 1) + x = 5(2x - 1)$
 δ) $4(x - 1) = 2\left(\frac{1}{2}x + 3\right) + 2$ ε) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{8} = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}$

- 18 Να λύσετε τις εξισώσεις:
 α) $(4x - 7,5) \cdot 6 - 5 = 4\left(-\frac{9}{2} + 4x\right)$
 β) $x - (3x - 8) = \frac{3}{2} - \left(4x + \frac{7}{2}\right)$
 γ) $\frac{1}{6}\left(\frac{3}{2}x - 8\right) = -\frac{1}{4}\left(x + \frac{13}{3}\right)$

- 19 Να αντιγράψετε τους υπολογισμούς στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε τα κενά.

$$\begin{array}{l|l} 7x - 4 = 2x + 11 & | \dots \\ 5x - 4 = 11 & | \dots \\ 5x = 15 & | \dots \\ x = \dots & | \dots \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{1}{4}(5x + 4) = 6 \\ 5x + 4 = 24 \\ 5x = 20 \\ x = \dots \end{array} \quad \begin{array}{l} | \dots \\ | \dots \\ | \dots \\ | \dots \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} x - 3,5 = 2,5 + 3x & | -x \\ -3,5 = 2,5 + \dots & | \dots \\ -6 = \dots & | : \dots \\ x = \dots & | \dots \end{array} \quad \begin{array}{l} -6x + 10 = 7 - 5x \\ \dots x + 10 = 7 \\ \dots x = -3 \\ x = \dots \end{array} \quad \begin{array}{l} | +5x \\ | -10 \\ | \times (-1) \\ | \dots \end{array}$$

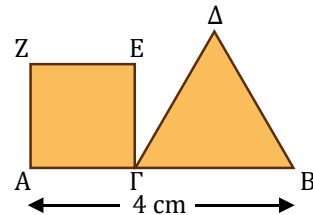
- 20 Να λύσετε τις εξισώσεις:
 α) $7\beta = 9\beta$ β) $2(\kappa + 3) = 6 + 2\kappa$
 γ) $7\lambda = 3\lambda + 4\lambda - 7$ δ) $\frac{1}{5}\left(3x + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{5}\left(x + \frac{1}{6}\right)$
 ε) $\frac{1}{3}(2x - 5) = \frac{1}{2}(3x - 1) - \frac{5x + 1}{6}$

- 21 **Κατασκευή εξίσωσης.** Να γράψετε εξίσωση 1ου βαθμού με έναν άγνωστο η οποία:
 α) Να έχει λύση τον αριθμό $x = 17$.
 β) Να έχει λύσεις όλους τους αριθμούς.
 γ) Να μην έχει καμία λύση.
 δ) Να έχει λύση τον αριθμό $y = 0$.
 ε) Να έχει λύση τον αριθμό $\alpha = \frac{1}{2}$.
 στ) Να έχει λύση τον αριθμό $x = 0,3$.

- 22 Να λύσετε τις εξισώσεις:
 α) $3x + 2 = 3x$ β) $-4 + 7x + 2 = 7x - 2$
 γ) $3(2x - 5) = 6x + 8$ δ) $4(x - 20) = 2(2x - 10)$

- 23 Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο η μία γωνία του είναι διπλάσια από μια άλλη. Να βρεθούν οι γωνίες του τριγώνου. Πόσα τέτοια τρίγωνα υπάρχουν; (Οδηγία: Να διακρίνετε δύο περιπτώσεις.)

- 24 Το σημείο Γ είναι σημείο του τμήματος ΑΒ. Το μήκος του τμήματος ΑΒ είναι 4 cm. Το τετράγωνο ΑΓΕΖ και το ισόπλευρο τρίγωνο ΒΔΓ σχεδιάζονται στο ίδιο μέρος του επιπέδου του τμήματος ΑΒ. Πού πρέπει να τοποθετηθεί το σημείο Γ ώστε η περίμετρος του τετραγώνου να είναι ίση με αυτή του τριγώνου;



- 25 Δύο γωνίες είναι συμπληρωματικές. Η μεγαλύτερη ισούται με το εξαπλάσιο της μικρότερης ελαττωμένο κατά 50° . Να βρεθούν οι δύο γωνίες.

- 26 Ένα Γυμνάσιο έχει 350 μαθητές. Η Α' Τάξη έχει 20 μαθητές περισσότερους από τη Β' Τάξη και η Γ' Τάξη έχει 12 μαθητές λιγότερους από τη Β' Τάξη. Πόσους μαθητές έχει κάθε τάξη;

- 27 Η Θεανώ έθεσε στους συμμαθητές και τις συμμαθήτριές της το εξής μαγικό μαθηματικό παιχνίδι: «Σκέψου έναν αριθμό, πάρε κι άλλα τόσα από τη Βιργινία, πάρε και 4 από εμένα, μετά πέτα τα μισά στη θάλασσα και δώσε στη Βιργινία αυτά που της πήρες. Τώρα να σου πω πόσα έμειναν; Έμειναν δύο». Να εξηγήσετε πώς βρήκε η Θεανώ το αποτέλεσμα.

- 28 **Εργασία ετεροαξιολόγησης:** Χρησιμοποιώντας αλγεβρικά πλακίδια να λύσετε τις εξισώσεις:
 α) $-3x + 7 = 2x - 8$ β) $2x - 5 = 4x + 7$
 Να ελέγξετε το αποτέλεσμά σας με το αποτέλεσμα του συμμαθητή σας.

- 29 Ο Διόφαντος σκέφτηκε πέντε διαδοχικούς ακέραιους αριθμούς. Όταν πρόσθεσε αυτούς τους αριθμούς, το αποτέλεσμα ήταν 100. Ποιοι είναι αυτοί οι αριθμοί;

2.5 Λύση ρεαλιστικών προβλημάτων με εξισώσεις 1ου βαθμού

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

- Να επιλύουν ρεαλιστικά προβλήματα με εξισώσεις της μορφής $ax + \beta = \gamma x + \delta$ με άγνωστο και στα δύο μέλη.
- Να συνθέτουν ρεαλιστικά προβλήματα που επιλύονται με εξισώσεις της μορφής $ax + \beta = \gamma x + \delta$ με άγνωστο και στα δύο μέλη.

Να μελετήσετε το Ενημερωτικό Σημείωμα: «Εισαγωγή στην εξίσωση του Einstein: $E = mc^2$ ».



Διερεύνηση 1. Μία προσφορά στο σουπερμάρκετ.

Εργασία μαθητών κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες:



Ο κυρία Πόπη αγόρασε 12 κουτιά με αναψυκτικά στη λιανική τους τιμή. Στο ταμείο του καταστήματος βλέπει μια προσφορά για τα ίδια αναψυκτικά με μείωση 1,4 € ανά εξάδα. Τότε η κυρία Πόπη σκέφτηκε ότι με τα ίδια χρήματα μπορεί να αγοράσει 6 κουτιά επιπλέον. Ποια είναι η λιανική τιμή του αναψυκτικού;



Διερεύνηση 2. Ποδηλατικός γύρος.

Εργασία μαθητών κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες:

Δύο ποδηλάτες πήραν μέρος στον ποδηλατικό γύρο της πόλης τους. Η μέση ταχύτητά τους ήταν 20 km/h και 25 km/h αντιστοίχως. Ο γρηγορότερος ποδηλάτης τερμάτισε 6 min νωρίτερα από τον πιο αργό. Ποιο ήταν το μήκος της διαδρομής;



Να διερευνήσετε το άθροισμα γωνιών πολυγώνου με τη βοήθεια εξίσωσης.



Μαθηματικές Έννοιες και Διεργασίες Μάθησης

Επίλυση προβλημάτων με χρήση εξισώσεων

Στην καθημερινή μας ζωή παρουσιάζονται συχνά προβλήματα με ποσότητες και μεγέθη τα οποία για να τα λύσουμε χρησιμοποιούμε μεταβλητές και δημιουργούμε ένα μαθηματικό μοντέλο με μορφή εξίσωσης. Ακολουθώντας την εξίσωση και στη συνέχεια εξετάζουμε αν η λύση ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος.

Μοντελοποίηση με εξισώσεις

Σε πολλά ερωτήματα που προέρχονται από πραγματικά προβλήματα μπορούμε να δημιουργούμε μία εξίσωση και να βρούμε τις λύσεις της. Μια τέτοια εξίσωση ονομάζεται **μαθηματικό μοντέλο** του προβλήματος. Ωστόσο, για να σιγουρευτούμε ότι το μοντέλο που δημιουργήσαμε (η εξίσωση) είναι σωστή, πρέπει να εξετάσουμε αν η λύση που βρήκαμε ικανοποιεί τις αρχικές πραγματικές συνθήκες του προβλήματος. Στη συνέχεια επιχειρούμε να ερμηνεύσουμε το αποτέλεσμα και να καταλήξουμε σε συμπεράσματα. Θέτοντας ερωτήματα όπως:

- Τι σημαίνει το αποτέλεσμα για την πραγματική κατάσταση;
- Το αποτέλεσμα έχει νόημα;
- Το αποτέλεσμα συμφωνεί κατά προσέγγιση με μία εκτιμώμενη τιμή;

Η μαθηματική μοντελοποίηση παρέχει αυθεντικές συνδέσεις με προβλήματα της πραγματικής ζωής.

Παράδειγμα 1: Ο κύκλος της μοντελοποίησης

Πραγματική κατάσταση: Ο Αλί εργάζεται στη συγκομιδή των ροδάκινων και αμείβεται σύμφωνα με το έργο που προσφέρει. Για κάθε ροδάκινο που συλλέγει παίρνει ακριβώς 0,39 λεπτά. Αν καθημερινά χρειάζεται περίπου 19 ευρώ για να ζήσει την οικογένειά του, πόσα ροδάκινα πρέπει να μαζέψει;

Κατασκευή ενός : Μεταφράζουμε την πραγματική κατάσταση με μια εξίσωση.

Επιλέγουμε τη μεταβλητή x = «αριθμός ροδάκινων». Διαμορφώνουμε την εξίσωση:

$$x \cdot \frac{39}{100} = 1900 \text{ λεπτά (εκατοστά του ευρώ).}$$

Ερμηνεία και έλεγχος της λύσης: Επειδή ο x δηλώνει τον «αριθμό των ροδάκινων», στρογγυλοποιούμε τον $x = 4871,79$ στα «περίπου 5.000 ροδάκινα την ημέρα».

Επαλήθευση:

$$5.000 \cdot \frac{39}{100} = 1950 \text{ λεπτά}$$

Έτσι, με **5.000 ροδάκινα**, ο Αλί κερδίζει λίγο περισσότερα από 19 ευρώ.

Λύνουμε την εξίσωση με βάση το μοντέλο:

$$x \cdot \frac{39}{100} = 1900$$

$$100 \cdot x \cdot \frac{39}{100} = 1900 \cdot 100$$

$$x = \frac{190000}{39}$$

$$x = 4.871 \frac{31}{39} \text{ ροδάκινα.}$$

Η μαθηματική λύση μιας εξίσωσης δεν είναι πάντα η λύση στο πρόβλημα που περιγράφεται. Οι λύσεις εξισώσεων μπορεί να είναι π. χ. αρνητικοί αριθμοί ή κλάσματα και τέτοιες λύσεις μπορεί να μην είναι αποδεκτές στο πρόβλημα.

Παράδειγμα 2: Από τους 400 μαθητές ενός Γυμνασίου 80 μαθητές δήλωσαν ότι δεν επιθυμούν να λάβουν μέρος στη σχολική εκδρομή. Οι μαθητές θα μεταφερθούν με λεωφορεία των 50 θέσεων, ενώ δεν είναι επιτρεπτή η μεταφορά περισσότερων των 50 μαθητών από το ίδιο λεωφορείο. Πόσα λεωφορεία χρειάζονται για την πραγματοποίηση της εκδρομής;

Η λύση πρέπει να είναι θετικός ακέραιος αριθμός. Αν συμβολίσουμε με x τον αριθμό των λεωφορείων, η εξίσωση $50x = 400 - 80$ οδηγεί στη μαθηματική λύση $x = 6,4$. Για να εκπληρωθούν οι περιορισμοί του πραγματικού προβλήματος θα χρειαστούν **7 λεωφορεία** για την πραγματοποίηση της εκδρομής.

Γενικά, για την επίλυση προβλημάτων ακολουθούμε την παρακάτω πορεία:

- Διαβάζουμε προσεκτικά το πρόβλημα και διακρίνουμε τα δεδομένα από τα ζητούμενα.
- Συμβολίζουμε με x ένα από τα ζητούμενα μεγέθη του προβλήματος και εκφράζουμε τα άλλα μεγέθη με τη βοήθεια του αγνώστου x .
- Γράφουμε την εξίσωση που περιγράφει το πρόβλημα χρησιμοποιώντας τα δεδομένα της εκφώνησης και τη λύνουμε.
- Μετά την επίλυση της εξίσωσης κάνουμε την «επαλήθευση», δηλαδή ελέγχουμε αν η λύση που βρήκαμε ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος.



Στην εφαρμογή να λύσετε προβλήματα με εξισώσεις και να ελέγξετε την ορθότητα των λύσεων στο πλαίσιο του προβλήματος.



Εφαρμογή 1

Οι τρεις τάξεις ενός Γυμνασίου έχουν 360 μαθητές. Η Α' τάξη έχει διπλάσιους μαθητές από τη Β' τάξη και η Γ' τάξη έχει τριπλάσιους μαθητές από τη Β'. Πόσους μαθητές έχει κάθε τάξη;

Απάντηση

Οι λύσεις του προβλήματος πρέπει να είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί. Συμβολίζουμε με x τον αριθμό των μαθητών της τάξης με τον μικρότερο αριθμό μαθητών, δηλαδή της Β' τάξης. Τότε, η Α' τάξη, η οποία έχει διπλάσιους από τους μαθητές της Β' τάξης, θα έχει $2x$ μαθητές και η Γ' τάξη, η οποία έχει τριπλάσιους από τους μαθητές της Β' τάξης, θα έχει $3x$ μαθητές.

Επειδή οι τρεις τάξεις του Γυμνασίου έχουν συνολικά 360 μαθητές η ζητούμενη εξίσωση είναι: $2x + x + 3x = 360$.

Λύνουμε την εξίσωση: $2x + x + 3x = 360$

$$\begin{aligned} 6x &= 360 \\ \frac{6x}{6} &= \frac{360}{6} \\ x &= 60 \quad (\text{θετικός ακέραιος}) \end{aligned}$$

Επαλήθευση: Για $x = 60$, $2x = 120$, $3x = 180$ και $120 + 60 + 180 = 360$ οπότε η τιμή $x = 60$ είναι αποδεκτή.

Άρα η τιμή $x = 60$ είναι λύση του προβλήματος και επομένως, η Α' τάξη θα έχει 60 μαθητές, η Β' τάξη $2 \cdot 60 = 120$ και η Γ' τάξη $3 \cdot 60 = 180$ μαθητές.



Εφαρμογή 2

Ο Αντώνης σε δύο διαγωνίσματα Μαθηματικών πήρε 15 και 19.

- α) Τι βαθμό πρέπει να γράψει στο τρίτο διαγώνισμα για να έχει μέσο όρο 18 και στα τρία διαγωνίσματα;
β) Μπορεί να βγάλει μέσο όρο 19;

Απάντηση

Έστω x ο βαθμός που θα πάρει ο Αντώνης στο τρίτο διαγώνισμα. Ο μέσος όρος των τριών διαγωνισμάτων προκύπτει αν διαιρέσουμε το άθροισμά τους δια 3, δηλαδή είναι: $\frac{15+19+x}{3}$.

α) Για να βγάλει μέσο όρο 18, πρέπει: $\frac{15+19+x}{3} = 18$. Έχουμε: $3 \cdot \frac{15+19+x}{3} = 3 \cdot 18$

$$\begin{aligned} 15+19+x &= 54 \\ 34+x &= 54 \\ x &= 20 \end{aligned}$$

Η λύση $x = 20$ είναι **δεκτή** λύση του προβλήματος.

β) Για να βγάλει μέσο όρο 19 πρέπει, $\frac{15+19+x}{3} = 19$, ή $34 + x = 57$ ή $x = 23$.

Σύμφωνα με την καθιερωμένη βαθμολογική κλίμακα δεν είναι δυνατόν να γράψει ο μαθητής 23. Η λύση που βρέθηκε **απορρίπτεται**. Επομένως, είναι αδύνατον ο Αντώνης να βγάλει μέσο όρο 19.



Εφαρμογή 3

Η κυρία Ματίνα αγόρασε 30 m ύφασμα με έκπτωση 20% και πλήρωσε 240 €. Πόσο κόστιζε το μέτρο το ύφασμα πριν την έκπτωση;

Απάντηση

Έστω x η αξία του υφάσματος πριν την έκπτωση. Σύμφωνα με το πρόβλημα έχουμε: $0,80 \cdot x = 240$. Άρα $x = \frac{240}{0,80} = 300$ €.

Επομένως κάθε μέτρο υφάσματος πριν την έκπτωση κόστιζε: $\frac{300}{30} = 10$ €.



Εφαρμογή 4

Η κυρία Σπυριδούλα θέλει με 12 € να αγοράσει δημητριακά που στοιχίζουν 5,25 € και εμφιαλωμένο μεταλλικό νερό. Αν κάθε πλαστική φιάλη κοστίζει 1,50 €, πόσες φιάλες θα μπορέσει να αγοράσει;

Απάντηση

Η λύση πρέπει να είναι θετικός ακέραιος αριθμός. Αν συμβολίσουμε με x τον αριθμό των πλαστικών φιαλών, η εξίσωση $5,25 + 1,5x = 12$ έχει τη μαθηματική λύση $x = 4,5$. Όμως οι πλαστικές φιάλες δεν τεμαχίζονται και επομένως η λύση στο πλαίσιο του προβλήματος σημαίνει ότι θα μπορέσει να αγοράσει **4 πλαστικές φιάλες** μεταλλικού νερού.



Εφαρμογή 5

Ένα αυτοκίνητο ξεκίνησε από την πόλη Α για να πάει στην πόλη Β με μέση ταχύτητα 60 km/h. Ταυτόχρονα ένα δεύτερο αυτοκίνητο ξεκίνησε από την πόλη Α με μέση ταχύτητα 80 km/h και έφτασε στην πόλη Β 2 ώρες νωρίτερα. Να βρείτε τον χρόνο που έκαναν τα δύο αυτοκίνητα καθώς και την απόσταση των πόλεων Α και Β.

Απάντηση

Οι ζητούμενες λύσεις είναι θετικοί αριθμοί. Έστω ότι το πρώτο αυτοκίνητο έκανε t ώρες για να διανύσει την απόσταση ΑΒ, από την πόλη Α στην πόλη Β. Τότε το δεύτερο αυτοκίνητο για να διανύσει την ίδια απόσταση ΑΒ έκανε $t - 2$ ώρες. Εφόσον σε 1 ώρα το πρώτο αυτοκίνητο διανύει 60 km, τότε σε t ώρες θα διανύσει την απόσταση ΑΒ. Είναι: $AB = 60t$ km. Για το δεύτερο αυτοκίνητο έχουμε $AB = 80(t - 2)$ km. Η εξίσωση είναι: $60t = 80(t - 2)$. Έχουμε:

$$\begin{aligned}60t &= 80t - 160 \\60t - 80t &= -160 \\-20t &= -160 \\ \frac{-20t}{-20} &= \frac{-160t}{-20} \\t &= 8\end{aligned}$$

Άρα, το πρώτο αυτοκίνητο διήνυσε την απόσταση ΑΒ σε **8 ώρες**. Αφού το δεύτερο αυτοκίνητο έφτασε στην πόλη Β δύο ώρες νωρίτερα, διήνυσε την ίδια απόσταση σε **6 ώρες**. Η απόσταση των δύο πόλεων είναι: $AB = 6 \cdot 80 = 480$ km. Οι λύσεις είναι δεκτές, γιατί ικανοποιούν τις εξισώσεις και έχουν νόημα στο πλαίσιο του προβλήματος.



Εφαρμογή 6

Υπάρχει φυσικός αριθμός που αν προστεθεί στους όρους του κλάσματος $\frac{2024}{2025}$ το νέο κλάσμα να ισούται με 2;

Απάντηση

Έστω x ο ζητούμενος αριθμός. Τότε η εξίσωση είναι: $\frac{2024+x}{2025+x} = 2$. Έχουμε:

$$\begin{aligned}2024+x &= 2 \cdot (2025+x) \\2024+x &= 2 \cdot 2025 + 2 \cdot x \\x - 2x &= 4050 - 2024 \\-x &= 2026 \\x &= -2026.\end{aligned}$$

Η λύση $x = -2026$ **απορρίπτεται** γιατί ο αριθμός -2026 δεν είναι φυσικός.



Εφαρμογή 7

Να κατασκευάσετε προβλήματα της καθημερινής ζωής που να λύνονται με τις παρακάτω εξισώσεις.

α) $3x - 70 = x - 10$

β) $4x + 8 = 3(x + 8)$

γ) $1,5x + (14 - x)2,5 = 30$

Απάντηση

α) Για την εξίσωση $3x - 70 = x - 10$: Η Φανή έχει τριπλάσια χρήματα από την αδελφή της. Αν η Φανή ξοδέψει 70 ευρώ και η αδελφή της 10 ευρώ τότε θα έχουν το ίδιο χρηματικό ποσό. Πόσα χρήματα είχε αρχικά η καθεμία;

- β) Για την εξίσωση $4x + 8 = 3(x + 8)$: Η ηλικία του πατέρα είναι τετραπλάσια από την ηλικία του γιου. Σε 8 χρόνια η ηλικία του πατέρα θα είναι τριπλάσια από την ηλικία του γιου. Πόσων χρονών είναι ο πατέρας και πόσων χρονών είναι ο γιος;
- γ) Για την εξίσωση $1,5x + (14 - x)2,5 = 30$: Ο Σωτήρης σε μία βδομάδα αγόρασε 14 χυμούς και τυρόπιτες και πλήρωσε 30 €. Κάθε χυμός κοστίζει 2,5 € και κάθε τυρόπιτα κοστίζει 1,5 €. Πόσους χυμούς και πόσες τυρόπιτες αγόρασε;

Ερωτήσεις για Αξιολόγηση

- 1 Να διατυπώσετε ένα καθημερινό πρόβλημα που λύνεται με την εξίσωση $2x + 3 = 4x - 5$.
- 2 Να κατασκευάσετε μία εξίσωση πρώτου βαθμού με άγνωστο και στα δύο μέλη, η οποία να έχει ως λύση τον αριθμό -3 .
- 3 Το πενταπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 50 είναι ίσο με 110. Η εξίσωση με την οποία λύνεται το πρόβλημα είναι:
 Α. $5x + 110 = 50$ Β. $5x + 50 = 110$ Γ. $50x - 5 = 110$
- 4 Το διπλάσιο ενός αριθμού ελαττωμένο κατά 5 είναι ίσο με 4 αυξημένο κατά το τριπλάσιο αυτού του αριθμού. Ο αριθμός είναι:
 Α. λύση της εξίσωσης $4 + 3x = 2x - 5$ Β. λύση της εξίσωσης $5 - 2x = 4 + 3x$ Γ. -9
- 5 Η Ελένη έχει 40 € και η Μαριάνθη 20 €. Αγόρασαν από δύο τετράδια η καθεμία και τα χρήματα που έχει τώρα η Ελένη είναι τριπλάσια από τα χρήματα που έχει η Μαριάνθη. Πόσο κοστίζει το ένα τετράδιο; Ποια από τις παρακάτω εξισώσεις επιλύει το πρόβλημα;
 Α. $40 - 2x = 3(20 - 2x)$ Β. $40 - x = 3(20 - x)$ Γ. $20 - 2x = 3(40 - 2x)$



Ασκήσεις και Προβλήματα

- 1 Αν αφαιρέσουμε τον αριθμό $\frac{1}{5}$ από το $\frac{1}{4}$ ενός αριθμού βρίσκουμε το $\frac{1}{20}$ του αριθμού. Να βρείτε τον αριθμό.
- 2 Υπάρχει φυσικός αριθμός που αν προστεθεί και στους δύο όρους του κλάσματος $\frac{1789}{1994}$ το νέο κλάσμα ισούται με 2;
- 3 Το ψηφίο των δεκάδων ενός διψήφιου αριθμού είναι διπλάσιο από το ψηφίο των μονάδων του. Αν αλλάξουμε τη θέση των ψηφίων του, προκύπτει αριθμός κατά 36 μικρότερος. Ποιος είναι ο αριθμός;
- 4 Σε έναν αγώνα μπάσκετ ένας παίκτης στις 24 εύστοχες βολές πέτυχε συνολικά 61 πόντους από δίποντα και τρίποντα. Πόσα ήταν τα δίποντα και πόσα τα τρίποντα καλάθια;
- 5 Σε ένα αγρόκτημα υπάρχουν πάπιες και κουνέλια. Μετρήσαμε τα κεφάλια τους και τα βρήκαμε 67, μετρήσαμε τα πόδια τους και τα βρήκαμε 166. Πόσες πάπιες υπάρχουν στο αγρόκτημα;
- 6 Πατέρας και γιος έχουν αντίστοιχα ηλικίες 41 και 18 έτη. Μετά από πόσα χρόνια η ηλικία του πατέρα θα είναι διπλάσια από την ηλικία του γιου του;
- 7 Να κατασκευάσετε προβλήματα της καθημερινής ζωής που να λύνονται με τις παρακάτω εξισώσεις.
 α) $2x - 40 = x - 10$
 β) $35 + x = 2(x + 13)$
 γ) $2x + 5(10 - x) = 38$
- 8 Ένας πατέρας άφησε στους τρεις γιους του 1600 λίρες. Σύμφωνα με τη διαθήκη ο πρωτότοκος πήρε 200 λίρες περισσότερες από τον δεύτερο και ο δεύτερος 100 λίρες περισσότερες από τον τρίτο. Πόσες λίρες πήρε ο καθένας;
- 9 Ο Κώστας και η Νεφέλη αγόρασαν δύο είδη δημητριακών για το πρωινό της οικογένειάς τους.
 Συνολικά αγόρασαν 15 κουτιά δημητριακά και πλήρωσαν 84 €. Πόσα κουτιά από κάθε είδος αγόρασαν εάν τα κουτιά κοστίζουν 5,50 € και 6 € αντίστοιχα;

Να κάνετε την
Εργασία με
προεκτάσεις:
«Τα σχέδια για
το μέλλον σας».



10 Μετά από τη συγκέντρωση των εισπράξεων της θεατρικής παράστασης του σχολείου ο ταμίας δήλωσε: «Σήμερα είχαμε 1680 θεατές. Τα παιδιά πλήρωσαν 4 € και οι ενήλικες 6 €. Τα παιδιά ήταν διπλάσια από τους ενήλικες». Να υπολογίσετε τις εισπράξεις από την παράσταση.

- 11 α) Ένα παντελόνι κοστίζει 55 € με έκπτωση 20%. Ποια ήταν η αρχική τιμή του παντελονιού;
β) Ένα παντελόνι κοστίζει 125 € και το πληρώσαμε 95 €. Πόσο τοις εκατό έκπτωση έκαναν;

12 Να αιτιολογήσετε γιατί το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με διαστάσεις $AB = 3x + 5$, $BΓ = 5y + 1$, $ΓΔ = 2x + 13$ και $ΔΑ = 6y - 7$ είναι τετράγωνο.

13 Ο Μιλτιάδης φροντίζει τα παιδιά του. Κάθε εβδομάδα, αφήνει στην άκρη 30 € για να αγοράσει έναν υπολογιστή που κοστίζει 325 € προ φόρων. Γνωρίζοντας ότι το κατάστημα προσφέρει έκπτωση 20% στην τιμή καταλόγου και ότι οι φόροι είναι 15%, μετά από πόσες εβδομάδες θα μπορέσει να αγοράσει τον υπολογιστή του;

14 Σχεδιάζοντας ένα κτίριο, ένας μηχανικός βλέπει ότι οι διαστάσεις του δαπέδου μίας αίθουσας σχήματος ορθογώνιου παραλληλογράμμου διαφέρουν κατά 4 m. Αν η μεγαλύτερη διάσταση αυξηθεί κατά 2 m και η μικρότερη ελαττωθεί κατά 1 m, το εμβαδόν του δαπέδου παραμένει το ίδιο. Να βρείτε τις διαστάσεις της αίθουσας και το εμβαδόν της.

15 Η μεγαλύτερη πλευρά ενός παραλληλογράμμου είναι 4 dm μεγαλύτερη από τη μικρότερη. Η περίμετρος του παραλληλογράμμου είναι 60 dm. Ποια είναι η περίμετρος ενός τετραγώνου του οποίου η πλευρά είναι 7 dm μικρότερη από μεγαλύτερη πλευρά του παραλληλογράμμου;

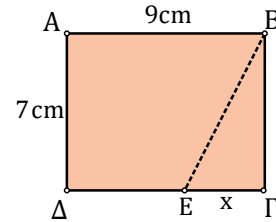
16 Μια βρύση γεμίζει μια άδεια δεξαμενή σε 4 ώρες και μια άλλη σε 12 ώρες. Σε πόσες ώρες θα γεμίσουν τη δεξαμενή αν τρέχουν και οι δύο βρύσες συγχρόνως;

17 Από δύο πόλεις, που απέχουν μεταξύ τους 108 km ξεκινούν συγχρόνως δύο ποδηλάτες με ταχύτητες 19 km/h και 17 km/h και κατευθύνονται ο ένας προς τον άλλο. Ύστερα από πόσες ώρες θα συναντηθούν και σε ποια απόσταση από τις δύο πόλεις;

18 Πόσα κιλά ψευδαργύρου πρέπει να συντήξουμε με 140 κιλά χαλκού ώστε να πάρουμε ένα κράμα που να περιέχει 44% ψευδάργυρο και 56% χαλκό;

19 Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο $ABΓ$ με $\hat{A} = 90^\circ$ η διαφορά των γωνιών \hat{B} και $\hat{\Gamma}$ είναι 12° . Πόσες μοίρες είναι το μέτρο κάθε γωνίας;

20 Να βρείτε το x ώστε το εμβαδόν του τραapeζιού $ABED$ να είναι διπλάσιο του εμβαδού του τριγώνου $BΓE$.



21 Η μεγάλη βάση ενός τραapeζιού είναι 8 cm μεγαλύτερη από τη μικρή βάση. Αν το ύψος του τραapeζιού είναι 12 cm και το εμβαδόν 360 cm^2 να βρεθούν οι βάσεις του τραapeζιού.

22 **Εργασία ετεροαξιολόγησης:** Να εξετάσετε αν υπάρχει ισόπλευρο τρίγωνο και ρόμβος με ίδια περίμετρο, όταν:

- α) Η πλευρά του ισόπλευρου τριγώνου είναι ίση με $5x+6$ και του ρόμβου $3x+7$.
β) Η πλευρά του ισόπλευρου τριγώνου είναι ίση με $7x$ και του ρόμβου $5x-12$.
γ) Η πλευρά του ισόπλευρου τριγώνου είναι ίση με $4x+4$ και του ρόμβου $3x+3$.
δ) Η πλευρά του ισόπλευρου τριγώνου είναι ίση με $4x+1$ και του ρόμβου $3x-2$.

Να απαντήσετε στα ερωτήματα και στη συνέχεια να ελέγξετε τα αποτελέσματά σας με τα αποτελέσματα του/της συμμαθητή/τριας σας.

23 Να εξετάσετε αν υπάρχει ορθογώνιο με συνολικό μήκος διαστάσεων 70 μέτρα, που αν το μήκος αυξηθεί κατά 5 μέτρα και το πλάτος κατά 6 μέτρα, το εμβαδόν του αυξάνεται κατά 530 m^2 .

Να μελετήσετε το ιστορικό σημείωμα: «Πώς έλυναν ορισμένες εξισώσεις τον 16ο αιώνα;»



2.6 Ανακεφαλαίωση και διεύρυνση της θεματικής ενότητας

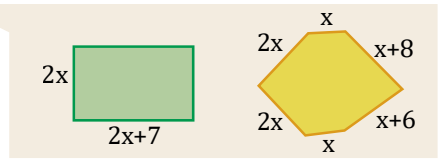
- **Κανονικότητα** ονομάζεται μία δομή στοιχείων που παράγεται από έναν κανόνα. Συχνά η κανονικότητα είναι μια διαδοχή ή μια ακολουθία όρων. Στη Β' Γυμνασίου μελετούμε τη **γραμμική αριθμητική κανονικότητα** της μορφής $a \cdot n + \beta$, όπου a και β είναι ρητοί αριθμοί, στην οποία κάθε όρος εκτός του πρώτου όρου προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού. Διαφορετικά, έχουμε μια **κανονικότητα με σταθερή διαφορά** αφού δύο διαδοχικοί όροι της έχουν σταθερή **διαφορά τον αριθμό a** . **Παράδειγμα:** 6, 11, 16, 21, 26, ... Η διαφορά μεταξύ δύο διαδοχικών όρων είναι 5. Ο κανόνας **όρο από όρο** είναι: «προσθέτουμε 5». Ο γενικός όρος της κανονικότητας είναι: $y = 5n + 1$, $n = 1, 2, 3, \dots$
- **Μεταβλητή** είναι ένα γράμμα που παριστάνει έναν ή περισσότερους αριθμούς. Μια μεταβλητή μπορεί να πάρει διαφορετικές τιμές. Οι μεταβλητές μπορούν να αντικατασταθούν από αριθμούς.
- **Αλγεβρική παράσταση** ονομάζεται μία έκφραση που περιέχει πράξεις με μεταβλητές και αριθμούς. Αντικαθιστώντας τις μεταβλητές με συγκεκριμένους αριθμούς μπορούμε να υπολογίσουμε την **αριθμητική τιμή** της αλγεβρικής παράστασης.
- **Ισοδύναμες αλγεβρικές παραστάσεις** ονομάζονται οι αλγεβρικές παραστάσεις που λαμβάνουν την ίδια τιμή για όλες τις τιμές των μεταβλητών που περιλαμβάνουν. **Παράδειγμα:** $-x + 4 + 5x - 7$ και $4x - 3$. Για να απλοποιήσουμε αλγεβρικές παραστάσεις, τις μετατρέπουμε σε ισοδύναμες. Αν έχουμε **όμοιους όρους** προσθέτουμε ή αφαιρούμε τους συντελεστές τους: $2x + 5x = 7x$, $9y - 3y = 6y$.
- **Διπλή επιμεριστική ιδιότητα:** για να πολλαπλασιάσουμε δύο αθροίσματα πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο της πρώτης παρένθεσης με κάθε όρο της δεύτερης παρένθεσης και προσθέτουμε τα γινόμενα:

$$(a + b)(\gamma + \delta) = a\gamma + a\delta + b\gamma + b\delta$$
- **Εξίσωση** ονομάζεται μια ισότητα που συνδέει δύο αλγεβρικές παραστάσεις. Οι αλγεβρικές παραστάσεις που συνδέονται με το ίσον (=) λέγονται **μέλη** της εξίσωσης, ενώ η μεταβλητή λέγεται **άγνωστος** της εξίσωσης.
- **Λύση ή ρίζα** της εξίσωσης είναι η τιμή του αγνώστου x που επαληθεύει την εξίσωση, δηλαδή ο αριθμός για τον οποίο τα δύο μέλη έχουν την ίδια τιμή.
- **Ισοδύναμες εξισώσεις** λέγονται οι εξισώσεις οι οποίες έχουν τις ίδιες λύσεις.
- **Πλήθος των λύσεων μιας εξίσωσης 1ου βαθμού της μορφής $ax + \beta = \gamma x + \delta$:**
 - ✓ Έχει **μοναδική λύση** όταν ανάγεται στη μορφή: $ax = \beta$ με $a \neq 0$.
 - ✓ Έχει **άπειρες λύσεις** και λέγεται **αόριστη**, όταν ανάγεται στη μορφή: $0x = 0$.
 - ✓ Δεν έχει καμία λύση και λέγεται **αδύνατη**, όταν ανάγεται στη μορφή: $0x = \beta$ με $\beta \neq 0$.
- **Επίλυση εξίσωσης μέσω ισοδύναμων μετασχηματισμών:**
 Με ισοδύναμους μετασχηματισμούς απομονώνουμε τη μεταβλητή στο ένα μέλος της εξίσωσης (Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους):
 - ▷ Με πρόσθεση ή αφαίρεση του ίδιου αριθμού (ή της ίδιας αλγεβρικής παράστασης) και στα δύο μέλη της εξίσωσης.
 - ▷ Με πολλαπλασιασμό ή διαίρεση με τον ίδιο μη μηδενικό αριθμό και των δύο μελών της εξίσωσης.
 - ▷ Με «μεταφορά» όρων από το ένα μέλος στο άλλο αλλάζοντας το πρόσημό τους.

Ερωτήσεις για συζήτηση και αναστοχασμό

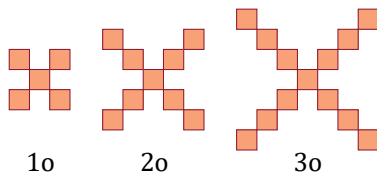
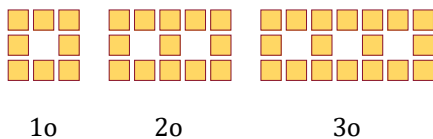
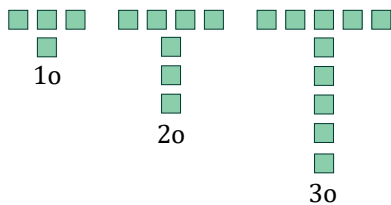
1. Η Ελισάβετ ισχυρίζεται ότι οι αλγεβρικές παραστάσεις x^7 και x^5 είναι ισοδύναμες επειδή παίρνουν την ίδια τιμή για $x = -1$, $x = 0$ και $x = 1$. Είναι σωστός ο ισχυρισμός της; Να αιτιολογήσετε τη σκέψη σας.
2. Να εξηγήσετε ποια λάθη έγιναν και να τα διορθώσετε.
α) $(-3\alpha + 2)(4\beta + 7\alpha) = -12\alpha\beta + 14\alpha$ **β)** $(x - 3)(y - 5) = xy - 5x - 3y - 15$.

3. Να γράψετε εξίσωση 1ου βαθμού με έναν άγνωστο η οποία:
- α)** να έχει λύση τον αριθμό $x = -7$ **β)** να είναι αδύνατη **γ)** να είναι αδύνατη.
4. Να συγκρίνετε τις περιμέτρους του ορθογωνίου και του εξαγώνου. Να αιτιολογήσετε.
5. **Να βρείτε το λάθος.** Ο Πέτρος είναι τρία χρόνια μικρότερος από το τετραπλάσιο της ηλικίας της αδελφής του. Ποια είναι η ηλικία του Πέτρου αν το άθροισμα των ηλικιών τους είναι 37 έτη. «Αν x είναι η ηλικία της αδελφής του Πέτρου τότε η εξίσωση είναι: $4x - 3 = 37$, από την οποία προκύπτει $x = 10$. Άρα η ηλικία της αδελφής είναι 10 έτη. Τότε η ηλικία του Πέτρου θα είναι: $4 \cdot 10 - 3 = 37$ έτη». Ποιο λάθος έκανε ο μαθητής και πώς θα μπορούσε να το είχε αποφύγει;



Επαναληπτικά Έργα & Προεκτάσεις

1. Να παρατηρήσετε τις παρακάτω κανονικότητες που σχηματίζονται από τετραγωνάκια.



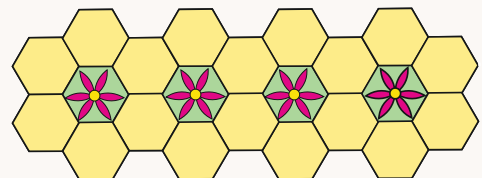
- α)** Πόσα τετραγωνάκια χρειάζονται για τον σχηματισμό του n ου όρου κάθε κανονικότητας;
- β)** Να συμπληρώσετε πίνακες τιμών για τους πρώτους 8 όρους κάθε κανονικότητας.
- γ)** Ποιον κανόνα χρησιμοποιήσατε για να συμπληρώσετε τον πίνακα; Να τον περιγράψετε.
- δ)** Πόσα τετραγωνάκια απαιτούνται για τον 200ό όρο κάθε κανονικότητας;
- ε)** Ποιον όρο σε κάθε κανονικότητα θα σχηματίσετε με 913 τετραγωνάκια;
- στ)** Με βάση τους πίνακες τιμών να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις.

2. Σε ένα υπαίθριο θέατρο στην πρώτη σειρά κάθονται 28 άτομα. Σε κάθε επόμενη σειρά μπορούν να καθίσουν 12 άτομα επιπλέον. Το θέατρο έχει 11 σειρές καθισμάτων. Να βρείτε:

- α)** Τη διαφορά με την οποία αυξάνεται ο αριθμός των θέσεων στις σειρές των καθισμάτων του θεάτρου.
- β)** Πόσους όρους έχει η κανονικότητα;
- γ)** Πόσους θεατές χωράει το θέατρο;

3. **Μαθηματική πρόκληση.** Ένα ρολόι τοίχου «χτυπάει» τις ώρες από 1 - 12 ισάριθμες φορές και τις μισές ώρες με ένα μόνο χτύπημα. Πόσους χτύπους κάνει το 24ωρο.

4. **Εργασία μαθητών κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες.** Το δημοτικό συμβούλιο αποφάσισε να προχωρήσει στην ανάπλαση του κήπου της πόλης. Σύμφωνα με τον σχεδιασμό οι κηπουροί χρησιμοποιούν εξαγωνικά παρτέρια λουλουδιών για τα φυτά και γύρω από αυτά τοποθετούν εξαγωνικές πλάκες σύμφωνα με το παρακάτω μοτίβο.



Στο προηγούμενο σχήμα, 18 εξαγωνικές πλάκες περιβάλλουν 4 εξαγωνικά παρτέρια. Η κανονικότητα συνεχίζεται.

- α)** Πόσες πλάκες θα χρειαστούν για 6 παρτέρια λουλουδιών;
- β)** Πόσες πλάκες θα χρειαστούν για 100 παρτέρια λουλουδιών;
- γ)** Να βρείτε έναν τύπο που θα χρησιμοποιεί το δημοτικό συμβούλιο για να αποφασίζει κάθε φορά ποιος είναι ο απαιτούμενος αριθμός εξαγωνικών πλακών για κάθε αριθμό παρτερών.

Για όλες τις περιπτώσεις να εξηγήσετε τον συλλογισμό σας.

- 5 Εικασία, αιτιολόγηση.** Στο ημερολόγιο ενός μήνα του έτους 2024 σχεδιάζουμε ένα 3×3 τετράγωνο το οποίο περικλείει 9 ημερομηνίες, όπως φαίνεται στο σχήμα.

ΑΥΓΟΥΣΤΟΣ 2024						
ΔΕΥ	ΤΡΙ	ΤΕΤ	ΠΕΜ	ΠΑΡ	ΣΑΒ	ΚΥΡ
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

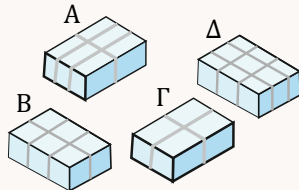
- α) Να υπολογίσετε τα δύο διαγώνια αθροίσματα. Τι παρατηρείτε;
 β) Να διερευνήσετε και άλλα 3×3 τετράγωνα τόσο του ίδιου μήνα όσο και από ημερολόγια άλλων μηνών ή άλλων ετών.
 γ) Να διατυπώσετε μία εικασία και να την αποδείξετε.

- 6 Εργασία μαθητών κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες.** 8 φίλοι χαιρετήθηκαν όλοι μεταξύ τους με μία χειραψία. Πόσες χειραψίες έγιναν; Να συγκρίνετε τις στρατηγικές επίλυσης του προβλήματος; Πόσες ήταν ίδιες; Πόσες ήταν διαφορετικές; Να βρείτε όσο περισσότερους τρόπους μπορείτε για να λύσετε το πρόβλημα. Να γενικεύσετε τη λύση για n άτομα.

- 7** Οι αριθμοί της ακολουθίας 7, 11, 15, 19, 23, ... αυξάνονται κατά 4. Οι αριθμοί της ακολουθίας 1, 10, 19, 28, 37, ... αυξάνονται κατά 9. Ο αριθμός 19 είναι κοινός και στις δύο ακολουθίες. Αν οι δύο ακολουθίες συνεχίζονται, ποιος είναι ο επόμενος αριθμός, ο οποίος είναι κοινός και στις δύο ακολουθίες. (TIMSS, 2003, Grade 8)

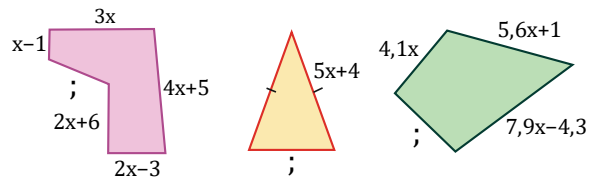
- 8 Εργασία μαθητών κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες.** Μια εταιρεία στέλνει πάντα τα προϊόντα της στα ίδια κουτιά (μήκος μ , πλάτος π , ύψος υ). Δένονται διαφορετικά ανάλογα με το βάρος τους. Για τον υπολογισμό του απαραίτητου μήκους σπάγκου, βρέθηκαν οι ακόλουθες αλγεβρικές παραστάσεις.

- α) $2\mu + \pi + 3\upsilon + 2\mu + \pi + 3\upsilon$
 β) $\pi + \mu + 2\upsilon$
 γ) $4\upsilon + 2\pi + 2\mu$
 δ) $4\mu + 6\upsilon + 2\pi$
 ε) $4(\mu + 2\upsilon + \pi)$
 στ) $2[4\upsilon + 2(\mu + \pi)]$



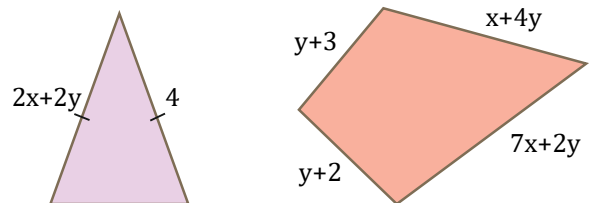
Να αντιστοιχίσετε τα πακέτα με τις αλγεβρικές παραστάσεις. Υπάρχει σωστή αλγεβρική παράσταση για κάθε πακέτο; Υπάρχουν αρκετές σωστές αλγεβρικές παραστάσεις για ένα πακέτο; Να συμπληρώσετε τυχόν αλγεβρικές παραστάσεις που λείπουν. Να γράψετε τις απαντήσεις στο πρόβλημα σε μία μεγάλη αφίσα από λευκό χαρτόνι ή σε συνεργατικό αρχείο υπολογιστή. Να μοιραστείτε τις λύσεις σας στην ολομέλεια της τάξης.

- 9** Για καθένα από τα παρακάτω σχήματα, να βρείτε την αλγεβρική παράσταση που αντιπροσωπεύει τη μέτρηση που λείπει. Όλες οι μετρήσεις που δίνονται είναι σε εκατοστά.



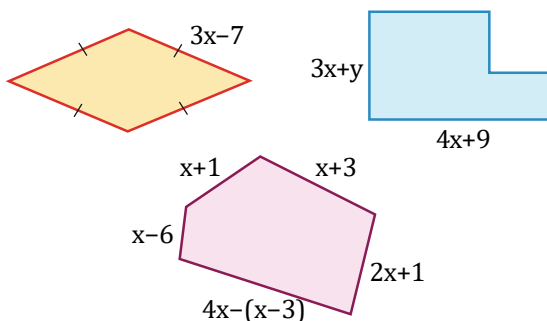
$\Pi = (14x+10) \text{ cm}$ $\Pi = (12x+11) \text{ cm}$ $\Pi = (22,3x-1,6) \text{ cm}$

- 10** Αν $x = -3$ και $y = -1$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:
 $A = 5x - [x - (2y - 7z)] - (4y - 7z)$
- 11** Αν ισχύει ότι $8x + 10y = 1$ να βρείτε την τιμή της παράστασης:
 $A = 2008 - 4(4x + 5y) - 48x - 60y$
Διαγωνισμός Ε.Μ.Ε. «Ο Ευκλείδης» 2008 Β' Γυμνασίου
- 12** Πόσα κιλά νερού πρέπει να εξατμιστούν από διάλυμα 80 κιλών αλατόνευρου, περιεκτικότητας 25% σε αλάτι, για να προκύψει διάλυμα περιεκτικότητας 40% σε αλάτι;
- 13** Αν το παρακάτω τρίγωνο είναι ισοσκελές να βρείτε την περίμετρο του τετραπλεύρου.



- 14** Η απόσταση ασφαλείας ανάμεσα σε δύο αυτοκίνητα δίνεται από τον τύπο: $A = 0,003v^2 + 0,2v + 8$. A είναι η απόσταση σε m και v η ταχύτητα σε km/h. Να υπολογίσετε την απόσταση που πρέπει να σεβαστεί ο οδηγός ενός οχήματος το οποίο κινείται με 50 km/h.

- 15 Να βρείτε την αλγεβρική παράσταση που παριστάνει την περίμετρο καθενός από τα παρακάτω πολύγωνα. Όλες οι μετρήσεις δίνονται σε εκατοστά.



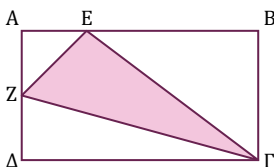
- 16 Μια εταιρεία κατασκευάζει τρία μοντέλα ομπρέλλας. Το μοντέλο Α πωλείται $(6x + 4)$ €. Το μοντέλο Β πωλείται 4 € περισσότερο από το τριπλάσιο της τιμής του Α. Το μοντέλο Γ πωλείται στο ένα τέταρτο του αθροίσματος της τιμής των άλλων δύο μοντέλων. Ποιο είναι το ετήσιο εισόδημα της εταιρείας εάν, κατά μέσο όρο, πουλάει 4.000 ομπρέλες από το μοντέλο Α, 5.500 από το Β και 7.200 από το Γ;



- 17 **Χρυσή τομή.** Οι Αρχαίοι Έλληνες ονόμαζαν ένα ορθογώνιο «χρυσό», αν το μήκος του ήταν περίπου 1,618 φορές το πλάτος του ($\approx 1,618$). Ένας μαραγκός έχει ένα μαδέρι μήκους 2,618 m και θέλει να κατασκευάσει ένα ορθογώνιο πλαίσιο με αναλογίες χρυσής τομής. Μπορείτε να τον βοηθήσετε να βρει τις διαστάσεις του ορθογωνίου με προσέγγιση χιλιοστού; (Η φθορά κατά την κοπή του μαδεριού θεωρείται αμελητέα).

- 18 Μία βρύση γεμίζει μια άδεια δεξαμενή σε 6 ώρες και μία άλλη γεμίζει την ίδια δεξαμενή 4 ώρες. Μία τρίτη βρύση αδειάζει τη δεξαμενή σε 3 ώρες. Αν ανοιχτούν και οι τρεις βρύσες συγχρόνως, σε πόσες ώρες θα γεμίσει η δεξαμενή;

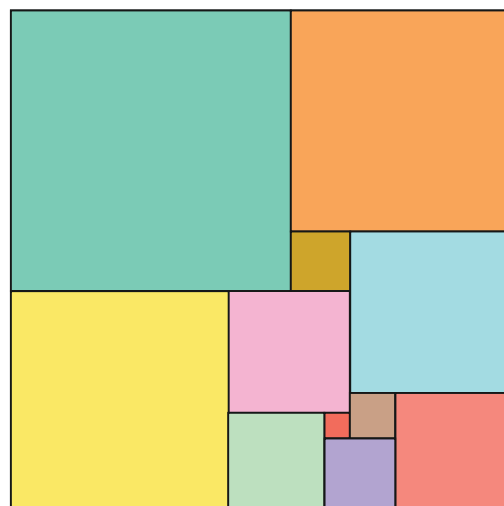
- 19 Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AB = 10$ cm και $BΓ = 6$ cm. Ε είναι σημείο του τμήματος ΑΒ έτσι ώστε $AE = 4$ cm. Ζ είναι σημείο του τμήματος ΑΔ. Πού πρέπει να τοποθετηθεί το σημείο Ζ έτσι ώστε το εμβαδόν του τριγώνου ΓΖΕ να είναι ίσο με 28 cm²;



- 20 Οι γονείς του Γιάννη βάζουν στον κουμπαρά του το ίδιο ποσό χρημάτων κάθε εβδομάδα. Ο Γιάννης για να υπολογίζει το ποσό που θα συγκεντρώνεται στον κουμπαρά του, δημιούργησε τον ακόλουθο πίνακα τιμών:

Αριθμός εβδομάδων	1	2	3	4	...
Ποσό στον κουμπαρά (€)	5	9	13	17	

- α) Ποιο ποσό χρημάτων θα έχει ο Γιάννης την 5η εβδομάδα; Τη 10η εβδομάδα;
- β) Μετά από πόσες εβδομάδες ο Γιάννης θα έχει στον κουμπαρά αρκετά χρήματα για να μπορέσει να αγοράσει ένα βιντεοπαιχνίδι που κάνει 213 ευρώ;
- γ) Πώς μπορεί να παρασταθεί η σχέση ανάμεσα στο πλήθος των εβδομάδων και το χρηματικό ποσό που θα έχει κάθε φορά ο κουμπαράς;
- 21 Ένα αυτοκίνητο αναχώρησε στις 7 το πρωί από την πόλη Α με ταχύτητα 33 km/h. Τι ώρα πρέπει να αναχωρήσει ένα άλλο αυτοκίνητο από την ίδια πόλη και προς την ίδια κατεύθυνση με ταχύτητα 45 km/h, για να φτάσει το πρώτο ύστερα από 2 h και 45 min;
- 22 **Μαθηματική πρόκληση.** Το παρακάτω μεγάλο ορθογώνιο αποτελείται από 11 τετράγωνα. Οι πλευρές του μικρού κόκκινου τετραγώνου αποτελούνται από 9 μονάδες μήκους. Να βρείτε τις διαστάσεις του μεγάλου ορθογωνίου.



Να ανοίξετε την *Εφαρμογή*: «ΓΛΩΣΣΑΡΙ: ΑΛΓΕΒΡΙΚΟΣ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΣ» για να ανακεφαλαιώσετε όρους και έννοιες τις οποίες γνωρίσατε στο κεφάλαιο αυτό.

Συναρτήσεις

Κεφάλαιο

3

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Η έννοια της συνάρτησης

Αναπαραστάσεις συναρτήσεων

Η συνάρτηση $y = ax$

Η συνάρτηση $y = ax + \beta$

Η συνάρτηση $y = \frac{\alpha}{x}$

Στο Κεφάλαιο αυτό θα μάθουμε:

- Να αναγνωρίζουμε σε καταστάσεις της καθημερινότητας μεγέθη τα οποία αλλάζουν ταυτόχρονα.
- Να αναγνωρίζουμε μεταξύ δύο συμμεταβαλλόμενων μεγεθών ποιο καθορίζει το άλλο.
- Να διακρίνουμε σχέσεις που είναι συναρτήσεις από σχέσεις που δεν είναι συναρτήσεις.
- Να χρησιμοποιούμε γραφικές παραστάσεις, πίνακες τιμών και τύπους συναρτήσεων και να μεταβαίνουμε από τη μία αναπαράσταση στην άλλη.
- Να ερμηνεύουμε την κλίση ευθείας ως μεταβολή του y που αντιστοιχεί σε μοναδιαία αύξηση του x .
- Να μελετούμε τις συναρτήσεις $y = ax$, $y = ax + \beta$, $y = \frac{\alpha}{x}$ ($\alpha \neq 0$, $x \neq 0$) και να λύνουμε προβλήματα με αυτές.
- Να λύνουμε γραφικά εξισώσεις της μορφής $ax + \beta = \gamma$.

3.1

Η έννοια της συνάρτησης: πίνακας τιμών και τύπος

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

- Να αναγνωρίζουν σε καταστάσεις της καθημερινότητας μεγέθη που συµμεταβάλλονται και να διακρίνουν ποιο μέγεθος καθορίζει το άλλο.
- Να αναγνωρίζουν τις σχέσεις που τα μεγέθη συµμεταβάλλονται ως συναρτήσεις και να τις διακρίνουν από σχέσεις που δεν είναι συναρτήσεις.
- Να εκφράζουν μια κατάσταση με μια συνάρτηση λεκτικά, αριθμητικά (με πίνακα τιμών) και συμβολικά (με τύπο).

Οι ταυτόχρονες μεταβολές δύο μεγεθών ονομάζονται **συµμεταβολές** και αποτελούν ένα από τα σηµαντικότερα φαινόµενα του περιβάλλοντος και της ζωής µας γενικότερα. Συχνά χρησιµοποιούνται κατάλληλα µαθηµατικά µοντέλα για την περιγραφή και την πρόβλεψη των συµμεταβολών, µε τις οποίες θα ασχοληθούµε σε αυτό το κεφάλαιο.



Διερεύνηση 1. Η έννοια της συµμεταβολής.

Εργασία κατά ζεύγη µαθητών και συζήτηση στην τάξη.

Η Ατιφά και ο Σωκράτης καταγράφουν ηλεκτρονικά µέσω εφαρµογής στο κινητό τους την απόσταση x σε km που διανύουν κατά το καθηµερινό τροχαδάκι και τον αντίστοιχο αριθµό θερµίδων y που «καίνε». Τα δεδοµένα 5 ηµερών που συγκεντρώσαν παρουσιάζονται στους δύο διπλανούς πίνακες τιμών.

- Σε κάθε πίνακα, κάθε απόσταση x µε πόσες τιµές θερµίδων y συνδέεται;
 - Οι τιµές των μεγεθών x και y συµμεταβάλλονται;
 - Μπορούµε να προβλέψουµε µέσω τύπων τον αριθµό θερµίδων που θα «καίνε» η Ατιφά και ο Σωκράτης;
 - Σε ποια περίπτωση οι τιµές της µίας ποσότητας καθορίζουν µε µοναδικό τρόπο τις τιµές της άλλης;
- Αιτιολογούµε τις απαντήσεις µας.**

Τροχαδάκι της Ατιφά		Τροχαδάκι του Σωκράτη	
Απόσταση (x σε km)	Ενέργεια (y σε θερµίδες)	Απόσταση (x σε km)	Ενέργεια (y σε θερµίδες)
4	200	3	180
8	380	4	190
5	350	2	150
8	410	10	500
7	420	9	510
...



Διερεύνηση 2. Συµμεταβολή μεγεθών.

Εργασία µαθητών κατά ζεύγη ή µικρές οµάδες. Όταν ένας δύτης καταδύεται κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας, το βάρος του νερού ασκεί πίεση στο σώµα του.

- Πώς μεταβάλλονται στον πίνακα οι τιµές κάθε μεγέθους;

Βάθος του δύτη (m)	0	5	10	15	20
Πίεση νερού (KiloPascals)	0	50	100	150	200

- Τα δύο μεγέθη αλλάζουν ταυτόχρονα; Ποιο μέγεθος προκαλεί τη µεταβολή του άλλου;
 - Όταν μεγαλώνει το ένα μέγεθος, τότε το άλλο µεγαλώνει ή µικραίνει και κατά πόσο;
 - Να προσδιορίσετε έναν µαθηµατικό τύπο που να περιγράφει τον τρόπο µε τον οποίο η µεταβολή του ενός μεγέθους επηρεάζει το άλλο.
 - Ποια πίεση ασκείται στον δύτη σε βάθος 50 m;
- Εξηγούµε στην ολοµέλεια πώς σκεφτήκαµε.**



Να ανοίξετε τον σύνδεσµο και να διερευνήσετε τη «Συµμεταβολή μεγεθών» µε την ψηφιακή εφαρµογή.



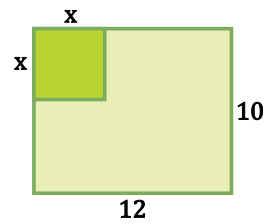
Διερεύνηση 3. Πίνακας τιμών.

Εργασία κατά ζεύγη μαθητών και συζήτηση στην τάξη.

Από έναν κήπο σχήματος ορθογωνίου διαστάσεων 12 m και 10 m, έχει οριοθετηθεί ένα τετράγωνο πλευράς x για τη δημιουργία ανθοκηπίου. Έστω y το εμβαδόν του υπόλοιπου κήπου.

α) Να συμπληρώσετε τον ακόλουθο πίνακα τιμών:

x (σε m)	1	2		5			10
y (σε m²)			104		71	56	



β) Πώς μεταβάλλονται τα μεγέθη x και y; Πώς οι τιμές του ενός μεγέθους επηρεάζουν τις τιμές του άλλου;

γ) Κάθε τιμή x συνδέεται με μία ακριβώς τιμή y; Αν ναι, να εκφράσετε συμβολικά το εμβαδόν y με τη βοήθεια της μεταβλητής x. Ποιες τιμές λαμβάνει η μεταβλητή x;

Αιτιολογούμε τις απαντήσεις μας.



Διερευνήστε τα ερωτήματα με την ψηφιακή εφαρμογή.

Μαθηματικές Έννοιες και Διεργασίες Μάθησης

Η έννοια της συνάρτησης

Σε πολλά καθημερινά προβλήματα εμφανίζονται δύο ποσότητες ή μεγέθη που μεταβάλλονται ταυτόχρονα. Τέτοια προβλήματα είδαμε στις κανονικότητες. Επίσης, στο Δημοτικό Σχολείο γνωρίσαμε τη μονοσήμαντη αντιστοιχία και είδαμε προβλήματα συμμεταβολής, όπως είναι τα ανάλογα και τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά, στα οποία η αλλαγή του ενός ποσού επιφέρει αλλαγή στο άλλο.

Για παράδειγμα, έστω ότι ένα μανάβικο πουλά τα μήλα 3 ευρώ (€) το κιλό (kg). Εύκολα καταλαβαίνουμε ότι για δύο κιλά θα πληρώσουμε 6 €, για τρία κιλά 9 € κ.ο.κ.

Για διευκόλυνσή μας σχηματίζουμε έναν πίνακα με δύο στήλες όπου στην πρώτη στήλη γράφουμε τη μάζα των μήλων και στη δεύτερη τη χρηματική αξία. Μελετώντας προσεκτικά τον πίνακα βλέπουμε ότι η αύξηση της μάζας x των μήλων σε κιλά (kg), προκαλεί αύξηση της αξίας y σε ευρώ (€) που περιγράφεται με έναν **κανόνα**:

«Για να βρούμε την αξία y των μήλων πολλαπλασιάζουμε τη μάζα τους x με 3».

Έτσι, η αξία y σε ευρώ που πληρώνουμε για x κιλά μήλα μπορεί να εκφραστεί συμβολικά με τον τύπο: **y = 3x**

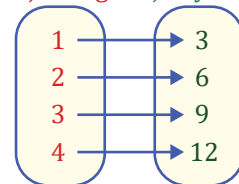
Τα δύο μεταβλητά μεγέθη x και y ονομάζονται **μεταβλητές**. Τα μεγέθη μάζα - αξία μεταβάλλονται ταυτόχρονα μέσω ενός κανόνα που περιγράφεται από τον τύπο **y=3x**.

Αυτός ο σταθερός κανόνας μπορεί να παρασταθεί με την αντιστοιχία του διπλανού διαγράμματος στο οποίο παρατηρούμε ότι κάθε τιμή της ποσότητας των κιλών που θα αγοράσουμε αντιστοιχίζεται σε μία ακριβώς τιμή του ποσού των ευρώ που θα πληρώσουμε.

Μια τέτοια **συμμεταβολή** μεταξύ των τιμών δύο μεταβλητών είναι **συνάρτηση**.

Μάζα x kg	Αξία y σε €
1	3
2	6 = 3·2
3	9 = 3·3
4	12 = 3·4
...	...
x	y = 3·x

Μάζα: x kg Αξία: y=3x €



Γενικά

Συνάρτηση μεταξύ δύο μεγεθών (ποσοτήτων) x,y ονομάζεται μια διαδικασία με την οποία, κάθε τιμή x αντιστοιχίζεται σε μία μόνο τιμή y.

Σε κάθε συνάρτηση διακρίνουμε **δύο μεταβλητές**, την ανεξάρτητη και την εξαρτημένη μεταβλητή. **Ανεξάρτητη μεταβλητή** ονομάζεται η μεταβλητή x και **εξαρτημένη μεταβλητή** ονομάζεται η μεταβλητή y, η οποία εξαρτάται από την τιμή της x. **Τύπος της συνάρτησης** λέγεται η εξίσωση που περιγράφει με συμβολικό τρόπο τη σχέση ανάμεσα στην ανεξάρτητη μεταβλητή x και την εξαρτημένη μεταβλητή y. Λέμε επίσης ότι η μεταβλητή y είναι **συνάρτηση της μεταβλητής x**. Στο παράδειγμα των μήλων ο **τύπος της συνάρτησης** είναι **y = 3x**.



Να διερευνήσετε την έννοια της συνάρτησης ανοίγοντας την ψηφιακή εφαρμογή.

Σχόλιο: Δεν έχουν όλες οι συναρτήσεις τύπο. Για παράδειγμα, ο κανόνας: «Σε κάθε παιδί αντιστοιχίζουμε το ύψος του y » περιγράφει μία συνάρτηση η οποία όμως δεν έχει τύπο.

Πίνακας τιμών

Παρατηρώντας τα ζεύγη (x, y) ενός πίνακα μπορούμε να διαπιστώσουμε αν κάθε x συνδέεται με ένα ακριβώς y . Όταν συμβαίνει αυτό, όπως στον παραπάνω πίνακα των μήλων, στον οποίο είδαμε ότι οι μεταβλητές x, y συνδέονται μέσω της σχέσης $y=3x$, τότε ο πίνακας αυτός λέγεται **πίνακας τιμών** της συνάρτησης.

Γενικά

Πίνακας τιμών μιας συνάρτησης λέγεται ο πίνακας που περιέχει τιμές της μεταβλητής x και τις αντίστοιχες τιμές της y . Αντίστροφα, ένας πίνακας με τιμές x και y είναι πίνακας τιμών μιας συνάρτησης, όταν όλα τα ζεύγη (x, y) του πίνακα έχουν διαφορετικό πρώτο στοιχείο x .

Μπορούμε να παραστήσουμε μια συνάρτηση: λεκτικά, αριθμητικά (πίνακας τιμών), συμβολικά (τύπος) και γραφικά/γεωμετρικά (γραφική παράσταση).

Να μελετήσετε το Ιστορικό σημείωμα με τίτλο: «Ιστορική αναδρομή της έννοιας της συνάρτησης».



Εφαρμογή 1

- α) Να δημιουργήσετε έναν πίνακα τιμών μεταξύ ακέραιων αριθμών και των τετραγώνων τους. Η αντιστοίχιση αυτή είναι συνάρτηση;
β) Αν είναι συνάρτηση, να βρείτε την ανεξάρτητη και την εξαρτημένη μεταβλητή καθώς και τον τύπο της.

Απάντηση

- α) Κάθε ακέραιος αριθμός έχει μόνο ένα τετράγωνο, οπότε η αντιστοίχιση μεταξύ των ακέραιων αριθμών του πίνακα και των τετραγώνων τους είναι συνάρτηση.

Ακέραιος αριθμός (x)	1	2	3	-3	8	-8	...
Τετράγωνο (x^2)	1	4	9	9	64	64	...

- β) Ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο ακέραιος αριθμός x και εξαρτημένη μεταβλητή y το τετράγωνό του x^2 . Ο τύπος της συνάρτησης είναι: $y = x^2$.



Εφαρμογή 2

Ένας ελαιοπαραγωγός έχει υπολογίσει ότι από κάθε κιλό ελιές που πηγαίνει στο ελαιοτριβείο, παίρνει 25% κιλά ελαιόλαδο.

- α) Πόσα κιλά ελαιόλαδο θα πάρει από μία παραγωγή με 400 κιλά ελιές;
β) Να εκφράσετε την ποσότητα y (κιλά ελαιόλαδου), που θα πάρει, ως συνάρτηση της ποσότητας x (κιλά ελιών που παράγει).
γ) Πόσα κιλά ελιές πρέπει να παραγάγει, ώστε να πάρει 150 κιλά ελαιόλαδο;



Απάντηση

- α) Αφού από 1 κιλό ελιές παίρνει 25% κιλά ελαιόλαδο, από 400 κιλά ελιές θα πάρει $\frac{25}{100} \cdot 400 = 100$ κιλά ελαιόλαδου.
β) Από x κιλά ελιές θα πάρει $0,25x$ κιλά ελαιόλαδο. Επομένως $y = 0,25x$. Η σχέση αυτή είναι συνάρτηση αφού σε κάθε τιμή των κιλών ελιών αντιστοιχεί μία ακριβώς τιμή ελαιόλαδου.

γ) Από τη συνάρτηση $y = 0,25x$, για $y = 150$ κιλά ελαιόλαδο έχουμε: $150 = 0,25x$ ή $x = \frac{150}{0,25} = 600$.
Άρα, θα πρέπει να παραγάγει 600 κιλά ελιές.

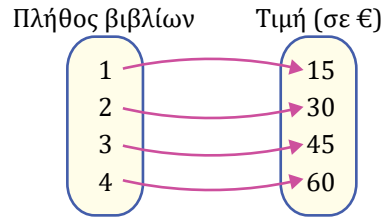


Εφαρμογή 3

Να εκφράσετε λεκτικά δύο ρεαλιστικές καταστάσεις εκ των οποίων η μία να περιγράφει συνάρτηση, η άλλη όχι και να τις παραστήσετε με αντιστοιχίσεις.

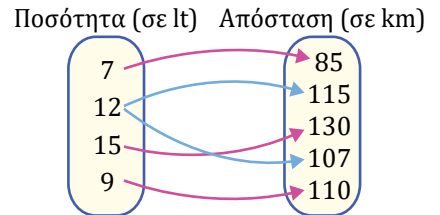
Απάντηση

α) **Λεκτικός κανόνας:** Ένα βιβλίο κάνει 15 ευρώ (€). Δύο ίδια κάνουν 30 €, τρία 45 € κ.ο.κ. Για να βρούμε την τιμή y των βιβλίων πολλαπλασιάζουμε το πλήθος τους x με 15.



Όπως βλέπουμε από το διάγραμμα, σε κάθε πλήθος από ίδια βιβλία αντιστοιχίζεται μία ακριβώς τιμή σε ευρώ. Άρα η αντιστοίχιση του πλήθους x των βιβλίων με την τιμή τους y είναι συνάρτηση. Ο τύπος της συνάρτησης είναι $y = 15x$.

β) **Λεκτικός κανόνας:** Ένας οδηγός ταξί έγραψε σε ένα χαρτί την ποσότητα βενζίνης σε λίτρα (lt) που κατανάλωσε πέντε μέρες μίας εβδομάδας και την αντίστοιχη απόσταση που διάνυσε. Τη Δευτέρα κατανάλωσε 7 lt και διάνυσε 85 km. Την Τρίτη και την Πέμπτη κατανάλωσε από 12 lt και διάνυσε 115 km και 107 km αντίστοιχα. Την Τετάρτη κατανάλωσε 15 lt και διάνυσε 130 km. Την Παρασκευή κατανάλωσε 9 lt και διάνυσε 110 km.



Σύμφωνα με τα δεδομένα δεν αντιστοιχεί σε κάθε ποσότητα βενζίνης που καταναλώνεται μοναδική απόσταση, αφού με 12 lt βενζίνη τη μία φορά διένυσε 115 km και την άλλη 107 km. Αυτό συμβαίνει επειδή η απόσταση που διανύει ένα αυτοκίνητο δεν εξαρτάται μόνο από την ποσότητα βενζίνης αλλά και από άλλους παράγοντες όπως η ταχύτητα κίνησης, αν ο δρόμος είναι ανηφορικός ή κατηφορικός, αν η κυκλοφορία είναι πυκνή ή όχι κ.λπ. Επομένως, η αντιστοίχιση αυτή δεν είναι συνάρτηση.

Ερωτήσεις για Αξιολόγηση

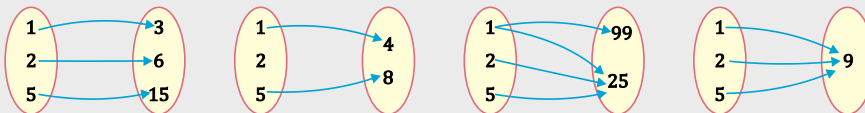
1 Ένας ορειβάτης ανεβαίνει κάθε μέρα ένα ορισμένο ύψος με σκοπό να φτάσει στην κορυφή του Έβερεστ. Στον διπλανό πίνακα φαίνονται τα αποτελέσματα των μετρήσεων. Η αντιστοίχια είναι συνάρτηση; Μπορούμε να υπολογίσουμε πόσο ύψος θα ανέβει ο ορειβάτης κατά την 4η ημέρα; Να εξηγήσετε τον συλλογισμό σας.

2 **Αχμέτ:** Μία συνάρτηση είναι αν «ζευγαρώσουμε» το ύψος κάθε μαθητή της τάξης με τον αριθμό των κατοικιδίων του. Αυτός είναι ο κανόνας.

Νεφέλη: Αυτή η αντιστοίχιση δεν είναι συνάρτηση, γιατί δεν έχει τύπο.

Συμφωνείτε με τον Αχμέτ, με τη Νεφέλη ή με κανέναν από τους δύο; Να αιτιολογήσετε.

3 Να εξηγήσετε σε κάθε περίπτωση εάν η αντιστοίχιση είναι συνάρτηση.



4 Να βρείτε αν οι ακόλουθοι πίνακες μπορεί να είναι πίνακες τιμών συνάρτησης. Να αιτιολογήσετε.

x	0	1	2	3
y	9	9	9	9

x	9	9	9	9
y	1	2	3	4

5 Ένας ρόμβος έχει πλευρά x . Ο τύπος που εκφράζει την περίμετρο y ως συνάρτηση της x είναι:

- A. $y = 4 + x$ B. $y = \frac{x}{4}$ Γ. $y = 4x$

Αρίθμηση ημέρας: x	Ύψος: y m
1η	750
2η	850
3η	135
...	...

- 6 Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με μήκη πλευρών x και y είναι 72 cm^2 . Ο τύπος που εκφράζει το μήκος της πλευράς y ως συνάρτηση του μήκους της πλευράς x είναι:
- A. $y = 72 + x$ B. $y = \frac{72}{x}$ Γ. $y = 72x$
- 7 Ένα εμπορικό κατάστημα κάνει έκπτωση 18% σε όλα τα είδη του. Ο τύπος που εκφράζει τις νέες τιμές y ως συνάρτηση των παλαιών τιμών x είναι:
- A. $y = x - \frac{18}{100}$ B. $y = 0,82x$ Γ. $y = \frac{18}{100}x$
- 8 i. Κάθε συμμεταβολή είναι συνάρτηση;
ii. Κάθε μονοσήμαντη αντιστοιχία είναι συμμεταβολή; Να αιτιολογήσετε με παραδείγματα.

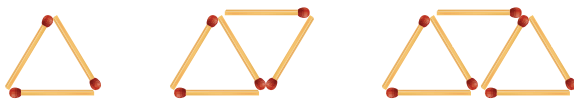


Ασκήσεις και Προβλήματα

- 1 Ποιες από τις ακόλουθες περιγραφές αναφέρονται σε σταθερές και ποιες σε μεταβλητές ποσότητες;
- α) Ο αριθμός των ημερών διανυκτέρευσης σε ξενοδοχείο.
- β) Ο αριθμός των ακμών ενός κύβου.
- γ) Το μέγεθος ενός αρχείου στον υπολογιστή.
- δ) Ο αριθμός των πλανητών του ηλιακού συστήματος.
- ε) Τα κέρδη μιας επιχείρησης ήπιων μορφών ενέργειας.



- 2 Στις ακόλουθες περιπτώσεις συμμεταβολής από ποια ποσότητα εξαρτάται η εκάστοτε μεταβολή της άλλης;
- α) Η σειρά του όρου της κανονικότητας και το πλήθος των σπίρτων.



- β) Ο όγκος κατανάλωσης νερού και η χρέωση στον λογαριασμό ύδρευσης.
- γ) Η απόσταση που διανύει ένα αυτοκίνητο που κινείται ισοταχώς και ο χρόνος.
- δ) Ο όγκος του κυλίνδρου και το ύψος του.
- ε) Η ποσότητα βενζίνης σε λίτρα και η χρηματική αξία.
- στ) Το ύψος ενός παιδιού και η ηλικία του.

- 3 Σκέφτομαι έναν αριθμό. Τον τριπλασιάζω. Προσθέτω 3. Ποιος αριθμός προκύπτει;
- α) Αν σκέφτηκα τον -1 , ποιος αριθμός θα προκύψει;
- β) Αν ο αριθμός που προκύπτει είναι 12, ποιον αριθμό σκέφτηκα;

- γ) Έστω x ο αριθμός που σκέφτηκα και y ο αριθμός που προκύπτει. Να εκφράσετε τον y ως συνάρτηση του x .
- δ) Να χρησιμοποιήσετε τον τύπο που βρήκατε για να απαντήσετε στα ερωτήματα (α) και (β).

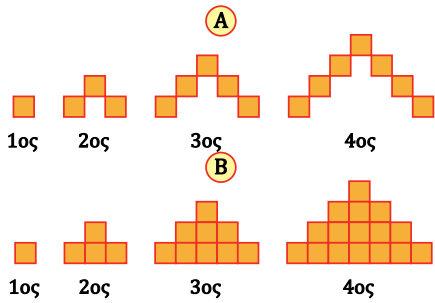
4 Εργασία μαθητών κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες.

Ένας οινοπαραγωγός θέλει να μεταγγίσει κρασί μέχρι τη μέση σε ένα δοχείο σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου για να το πουλήσει. Το δοχείο είναι αδιαφανές και το μόνο που διαθέτει είναι ένα χρονόμετρο. Από προηγούμενες μετρήσεις γνωρίζει ότι για να γεμίσει το δοχείο, με σταθερή παροχή οίνου χρειάζονται 5 λεπτά. Το ύψος του είναι 35 cm.



- α) Αν t είναι ο χρόνος και y το ύψος της στάθμης ο τύπος που περιγράφει τη συνάρτηση είναι $y = 7t$ ή $t = 7y$;
- β) Ποια είναι η ανεξάρτητη και ποια η εξαρτημένη μεταβλητή της συνάρτησης;
- γ) Να συμπληρώσετε έναν πίνακα τιμών της συνάρτησης.

- 5 Για καθεμία από τις κανονικότητες A και B:
- α) Να κατασκευάσετε έναν πίνακα τιμών που να δείχνει τη σχέση μεταξύ της σειράς x του όρου και του εμβαδού E του αντίστοιχου σχήματος σε τετραγωνικές μονάδες (τετραγωνάκια).
- β) Από τον τύπο του γενικού όρου να βρείτε με μία εξίσωση ποιος όρος κάθε κανονικότητας έχει εμβαδόν 81 τετραγωνικές μονάδες.
- γ) Να εξετάσετε αν η σχέση μεταξύ των ποσοτήτων x και E είναι συνάρτηση. Να αιτιολογήσετε.



- 6 Δίνονται οι συναρτήσεις: $y = -\frac{1}{2}x + 1$ και $y = -x^2 + 1$. Για κάθε συνάρτηση:
- α) Αν $x = -2$ να βρείτε την αντίστοιχη τιμή της μεταβλητής y .
 - β) Αν $y = -8$ να βρείτε την αντίστοιχη τιμή της μεταβλητής x . (ή τις αντίστοιχες τιμές της x)

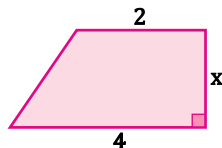
- 7 Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών των παρακάτω συναρτήσεων:
- α) $y = 3x - 3$ β) $y = 2x^2 - 3$

x	-3	-1	1	3
y				

x	-2	-1	0	1
y				

- 8 Ένα ορθογώνιο έχει πλευρές με μήκη x και y (σε cm).
- α) Αν η περίμετρος του ορθογωνίου είναι 36 cm, να εκφράσετε την πλευρά y ως συνάρτηση της πλευράς x .
 - β) Αν το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι 48 cm^2 , να εκφράσετε την πλευρά y ως συνάρτηση της πλευράς x .

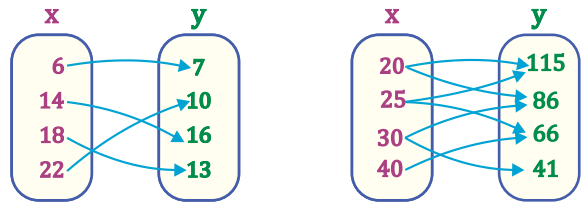
- 9 Να γράψετε έναν τύπο ο οποίος να δίνει το εμβαδόν y του διπλανού τραπεζίου ως συνάρτηση του ύψους x .



- α) Να βρείτε το εμβαδόν αν $x = 2,5$.
 - β) Να βρείτε το x αν το εμβαδόν είναι $y = 7$.
- 10 Τετράγωνο έχει πλευρά με μήκος x (σε cm). Να εκφράσετε το εμβαδόν E και την περίμετρο Π του τετραγώνου ως συναρτήσεις του x . Στη συνέχεια, να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών:

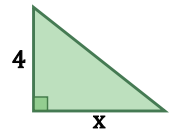
x	1	2	3,5	4	0,4	0,7
Περίμετρος (Π)						
Εμβαδόν (E)						

- 11 Ένα αυτοκίνητο κινείται με ταχύτητα 60 χιλιόμετρα την ώρα.
- α) Πόση απόσταση θα έχει διανύσει σε 3 ώρες και πόση σε 2 ημέρες;
 - β) Να εκφράσετε την απόσταση S (σε χιλιόμετρα) που θα έχει διανύσει το αυτοκίνητο ως συνάρτηση του χρόνου t (σε ώρες).
- 12 α) Να εξετάσετε αν οι αντιστοιχίσεις είναι συνάρτησεις.
- β) Για καθεμιά να περιγράψετε λεκτικά μία δυνατή ρεαλιστική κατάσταση.



- 13 Να εκφράσετε λεκτικά δύο ρεαλιστικές καταστάσεις εκ των οποίων η μία να περιγράφει συνάρτηση και η άλλη όχι και να τις παραστήσετε με αντιστοιχίες.

- 14 α) Να εκφράσετε το εμβαδόν E του τριγώνου ως συνάρτηση της μεταβλητής x .



- β) Να εκφράσετε την υποτείνουσα y του τριγώνου ως συνάρτηση της μεταβλητής x .
- γ) Να εκφράσετε την περίμετρο Π του τριγώνου ως συνάρτηση της μεταβλητής x .

- 15 Τα πορτοκάλια κοστίζουν 0,90 €/kg.

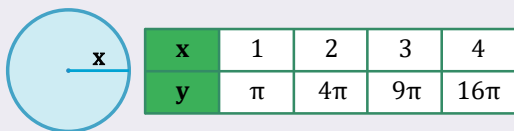
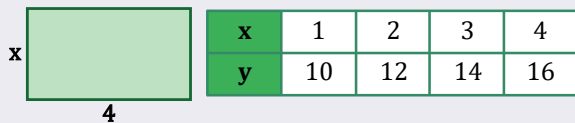


- α) Αν αγοράσουμε x kg και πληρώσουμε y €, να εκφράσετε τη μεταβλητή y ως συνάρτηση της μεταβλητής x .
- β) Αν αγοράσουμε 3,5 kg πορτοκάλια πόσα € θα πληρώσουμε;
- γ) Αν πληρώσαμε 4,5 €, πόσα kg πορτοκάλια αγοράσαμε;

- 16 Η συνάρτηση $y = -3x + 12$ παριστάνει την ποσότητα y ml χυμού που απομένει σε ένα δοχείο χωρητικότητας 12 ml όταν πάρουμε $3x$ ml.

- α) Να αναγνωρίσετε την ανεξάρτητη και την εξαρτημένη μεταβλητή.
- β) Ποιες τιμές μπορεί να λάβει η μεταβλητή x ;
- γ) Ποιες τιμές μπορεί να λάβει η μεταβλητή y ;

- 17 **Εργασία μαθητών κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες.** Κάθε πίνακας δείχνει μία κατάσταση από τη Γεωμετρία. Να προσδιορίσετε τι παριστάνουν οι μεταβλητές x και y . Μετά να εκφράσετε την y ως συνάρτηση της μεταβλητής x .

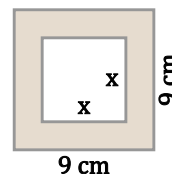


- 18 Ένα κατάστημα επίπλων πουλάει καναπέδες με έκπτωση 40%.
- Να εκφράσετε την τιμή με έκπτωση ως συνάρτηση της αρχικής τιμής.
 - Αν ένας καναπές είχε αρχική τιμή 750 €, πόσο πουλιέται με την έκπτωση;
 - Ένας καναπές πουλήθηκε 720 €. Ποια ήταν η αρχική του τιμή;



Να ανοίξετε τον σύνδεσμο και να απαντήσετε στις ερωτήσεις αξιολόγησης για την έννοια της συνάρτησης.

- 19 Από τετράγωνο πλευράς 9 cm, έχει αποκοπεί το εσωτερικό τετράγωνο πλευράς x . Έστω y το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου μέρους.



- α) Να συμπληρώσετε τον ακόλουθο πίνακα τιμών:

x (σε cm)	1	2		5			8
y (σε cm²)			65		45	32	

- Πώς μεταβάλλονται τα μεγέθη x και y ; Πώς οι τιμές του ενός επηρεάζουν τις τιμές του άλλου;
- Κάθε τιμή x συνδέεται με μία ακριβώς τιμή y ; Αν ναι, να εκφράσετε συμβολικά το εμβαδόν y ως συνάρτηση της μεταβλητής x . Ποιες τιμές παίρνει η μεταβλητή x ;

Να κάνετε την *Εργασία με προεκτάσεις* με τίτλο:

- «Δοχεία και γραφική παράσταση συνάρτησης»,
- Το λούνα παρκ.



Να μελετήσετε την *Εργασία με προεκτάσεις* με τίτλο: «Η χαρτογράφηση της υδρογείου».



3.2 Καρτεσιανές συντεταγμένες – Γραφική παράσταση συνάρτησης

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

- Να χρησιμοποιούν τις αναπαραστάσεις των συναρτήσεων (γραφικές παραστάσεις, πίνακες τιμών, τύπους) και να μεταβαίνουν από τη μία αναπαράσταση στην άλλη (όπου είναι δυνατόν).
- Να εξετάζουν αν ένα σημείο (διατεταγμένο ζεύγος) ανήκει στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης.
- Να υπολογίζουν αλγεβρικά και να εκτιμούν γραφικά τις τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής για δεδομένες τιμές της ανεξάρτητης και αντιστρόφως.

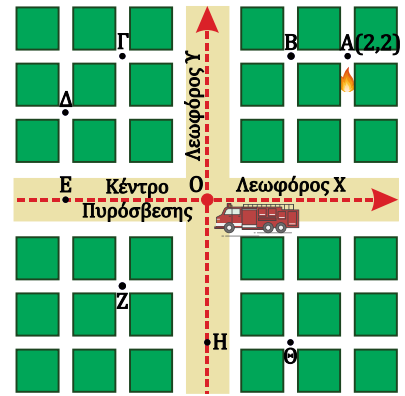


Διερεύνηση 1. Κατάσβεση πυρκαγιάς: Καρτεσιανές συντεταγμένες.

Εργασία κατά ζεύγη μαθητών και συζήτηση στην τάξη.

Η υπηρεσία δασοπροστασίας για τον έλεγχο ενδεχόμενης πυρκαγιάς σε ένα δάσος έχει χαράξει δρόμους και έχει εγκαταστήσει ένα κέντρο πυρόσβεσης, όπως φαίνεται στο σχήμα. Για να φτάσει ένα πυροσβεστικό όχημα στο σημείο πιθανής πυρκαγιάς Α ξεκινώντας από το Κέντρο Πυρόσβεσης Ο πρέπει να κινηθεί δύο (2) δασικά τετράγωνα προς τα δεξιά στη Λεωφόρο Χ και δύο (2) δασικά τετράγωνα προς τα πάνω παράλληλα προς τη Λεωφόρο Υ. Δηλαδή, το σημείο Α προσδιορίζεται επακριβώς από το ζεύγος αριθμών (2, 2).

- Αν το κέντρο πυρόσβεσης δεχτεί σήματα για πιθανή πυρκαγιά στα σημεία Ο, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η και Θ, τα οποία φαίνονται στον χάρτη, πώς θα προτείνατε να δώσει οδηγία για την άμεση μετάβαση του πυροσβεστικού οχήματος;
- Σε τετραγωνισμένο χαρτί να σχεδιάσετε δύο κάθετους άξονες $x'x$ και $y'y$ που αντιστοιχούν στις συντεταγμένες των ίδιων σημείων.
- Να προσδιορίσετε τη θέση των σημείων του επιπέδου με συντεταγμένες: $(-3, 1)$, $(3,0)$, $(-2, 2)$, $(-3,-20)$ και $(0,1)$.



Να διερευνήσετε τις «Καρτεσιανές συντεταγμένες» με την ψηφιακή εφαρμογή.



Διερεύνηση 2. Πίνακας τιμών και γραφική παράσταση συνάρτησης από τύπο.

Εργασία μαθητών ατομικά ή κατά ζεύγη.

- Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης $y = -3x + 4$.
- Σε ένα σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε τα σημεία (x, y) του διπλανού πίνακα.

Ανεξάρτητη μεταβλητή x	-4	-2	0	2	4
Εξαρτημένη μεταβλητή y					
Διατεταγμένα ζεύγη (x, y)					

Αν ενώσετε τα σημεία αυτά, τι γραμμή σχηματίζεται;

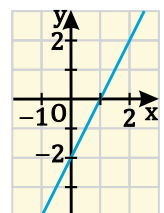
- Να επαναλάβετε τα βήματα (α) και (β) για την ίδια συνάρτηση χρησιμοποιώντας περισσότερα ζεύγη τιμών. Τι παρατηρείτε;
- Τα σημεία $(-8, 28)$ και $(8, -28)$ ανήκουν στην προηγούμενη γραμμή;



Διερεύνηση 3. Εύρεση τύπου και πίνακα τιμών από τη γραφική παράσταση συνάρτησης.

Εργασία μαθητών ατομικά ή κατά ζεύγη.

- Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης στον οποίο αντιστοιχεί η γραφική παράσταση.
- Να συμπληρώσετε έναν πίνακα τιμών της συνάρτησης $y = 2x - 2$.
- Να εξετάσετε αν τα σημεία Κ $(4, 6)$ και Λ $(-3, 4)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση.



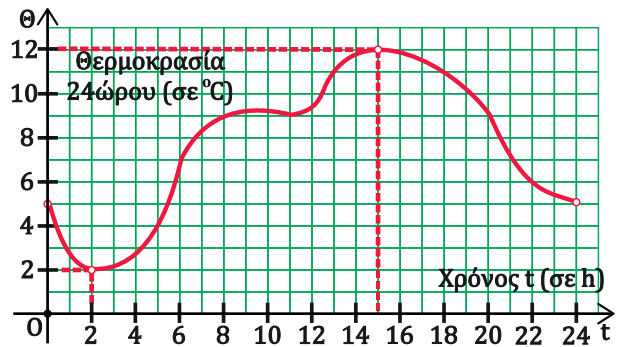


Διερεύνηση 4. Πληροφορίες από τη γραφική παράσταση συνάρτησης.

Εργασία κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες και συζήτηση στην τάξη.

Ένας μετεωρολογικός σταθμός κατέγραψε σε μια πόλη τις θερμοκρασίες (θ) κατά τη διάρκεια των ωρών ενός 24ώρου (t), οι οποίες φαίνονται στη γραφική παράσταση.

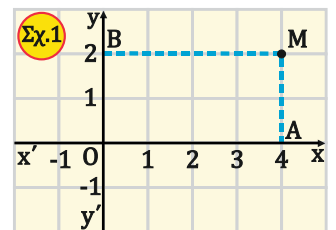
- α) Η σχέση Χρόνος – Θερμοκρασία είναι συνάρτηση; Μπορείτε να βρείτε έναν τύπο;
- β) Ποια ήταν η θερμοκρασία στις 6 π.μ., στις 11 π.μ. και στις 9 μ.μ.;
- γ) Ποιες ώρες η θερμοκρασία ήταν 11°C ;
- δ) Υπάρχει ώρα κατά τη διάρκεια της ημέρας που η θερμοκρασία ήταν μικρότερη από 2°C ;
- ε) Ποια ήταν η ελάχιστη και η μέγιστη θερμοκρασία; Ποια ώρα του 24ώρου συμβαίνουν;
- στ) Τα ζεύγη $(22, 6)$ και $(24, 5)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση; Αν ναι, να τα σημειώσετε.



Μαθηματικές Έννοιες και Διεργασίες Μάθησης

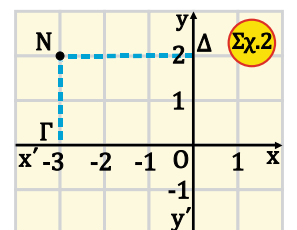
Καρτεσιανές συντεταγμένες στο επίπεδο

Ας πάρουμε σε ένα επίπεδο δύο βαθμολογημένες ευθείες που τέμνονται κάθετα. Την οριζόντια ονομάζουμε «άξονα των x » ή x' , την κατακόρυφη «άξονα των y » ή y' και την τομή τους $O(0,0)$ αρχή των αξόνων. Παίρνουμε ένα σημείο M (σχήμα 1). Από το M φέρουμε κάθετες προς τους άξονες x' και y' οι οποίες τους τέμνουν αντίστοιχα στα σημεία A και B . Στο σχήμα το σημείο A αντιστοιχεί στον αριθμό 4 και το B στον αριθμό 2. Παρατηρούμε ότι αρκεί το διατεταγμένο ζεύγος $(4, 2)$ για να προσδιορίσει το σημείο M . Το M συμβολίζεται $M(4, 2)$.



Ο πρώτος αριθμός λέγεται **τετμημένη** του σημείου M και ο δεύτερος **τεταγμένη**. Και οι δύο μαζί ονομάζονται **συντεταγμένες** του σημείου M .

Αντιστρόφως, από ένα ζεύγος αριθμών π. χ. $(-3, 2)$ μπορούμε να προσδιορίσουμε τη θέση ενός σημείου στο επίπεδο ως εξής: Στους άξονες x' και y' παίρνουμε αντίστοιχως τα σημεία Γ και Δ που παριστάνουν τους αριθμούς -3 και 2 (σχήμα 2). Από τα σημεία Γ και Δ φέρουμε κάθετες προς τους άξονες x' και y' αντίστοιχως που τέμνονται στο σημείο N , το οποίο αντιστοιχίζεται στο ζεύγος $(-3, 2)$.



Το σύστημα των δύο κάθετων αξόνων συμβολίζεται Oxy και ονομάζεται **καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο**, τιμώντας τον μαθηματικό και φιλόσοφο

Καρτέσιο (Descartes) που το επινόησε. Ο οριζόντιος άξονας λέγεται επίσης **άξονας των τετμημένων** και ο κατακόρυφος **άξονας των τεταγμένων**. Το σημείο τομής $O(0,0)$ των δύο αξόνων ονομάζεται **αρχή** του συστήματος συντεταγμένων. Κάθε καρτεσιανό είναι **ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων**. Αν επιπλέον τα μοναδιαία διαστήματα στους δύο άξονες έχουν το ίδιο μήκος, τότε το σύστημα αξόνων λέγεται **ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων**. Η θέση ενός σημείου στο καρτεσιανό επίπεδο προσδιορίζεται μοναδικά από ένα **διατεταγμένο ζεύγος** αριθμών (α, β) , την τετμημένη α και την τεταγμένη β . Η τετμημένη και η τεταγμένη αποτελούν τις **συντεταγμένες** του σημείου.

Γενικά

- Κάθε σημείο M του επιπέδου αντιστοιχεί σε ένα μόνο ζεύγος αριθμών (α, β) και συμβολίζεται $M(\alpha, \beta)$.
- Αντιστρόφως κάθε ζεύγος αριθμών (α, β) αντιστοιχεί σε ένα μόνο σημείο M του επιπέδου.

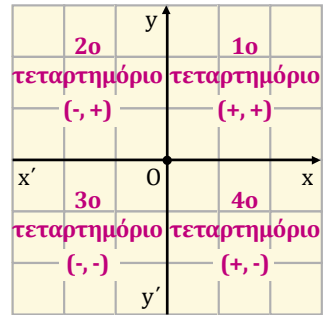
Σημείωση

Στο βιβλίο αυτό όταν μιλάμε για σύστημα αξόνων θα εννοούμε ορθοκανονικό καρτεσιανό σύστημα αξόνων, εκτός αν αναφέρεται κάτι διαφορετικό.



Να διερευνήσετε με την ψηφιακή εφαρμογή τις σχέσεις μεταξύ τύπου συνάρτησης, πίνακα τιμών και γραφικής παράστασης.

Ο άξονας των τετμημένων και ο άξονας των τεταγμένων χωρίζουν το καρτεσιανό επίπεδο σε 4 περιοχές που ονομάζονται **τεταρτημόρια**. Στο διπλανό σχήμα σημειώνεται το πρόσημο της τετμημένης και της τεταγμένης ενός σημείου σε κάθε **τεταρτημόριο**. Οπότε το σημείο $M(\alpha, \beta)$ βρίσκεται:



- στο 1ο τεταρτημόριο, όταν $\alpha > 0$ και $\beta > 0$
- στο 2ο τεταρτημόριο, όταν $\alpha < 0$ και $\beta > 0$
- στο 3ο τεταρτημόριο, όταν $\alpha < 0$ και $\beta < 0$
- στο 4ο τεταρτημόριο, όταν $\alpha > 0$ και $\beta < 0$.

Γραφική παράσταση συνάρτησης

Μία συνάρτηση μεταξύ δύο μεγεθών, ακόμα κι αν δεν έχει τύπο (π.χ. θερμοκρασία – χρόνος), μπορεί να παρασταθεί γραφικά. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι ένας παραστατικός τρόπος μελέτης της συμμεταβολής που παρέχει μια «εποπτική» εικόνα της συνάρτησης και μας βοηθά να αντλούμε χρήσιμες πληροφορίες για τη σχέση των μεταβλητών x και y «ερμηνεύοντας» κατάλληλα τα δεδομένα. Πολλές συναρτήσεις και οι γραφικές παραστάσεις τους είναι «μοντέλα» πραγματικών καταστάσεων, οπότε με κατάλληλη ερμηνεία μπορούμε να δώσουμε απαντήσεις σε διάφορα ερωτήματα.

Έστω ότι έχουμε μια συνάρτηση στην οποία ένα μέγεθος λαμβάνει τιμές y και εκφράζεται ως συνάρτηση ενός άλλου μεγέθους που λαμβάνει τιμές x . Ονομάζουμε **γραφική παράσταση** της συνάρτησης αυτής το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου με συντεταγμένες (x, y) .

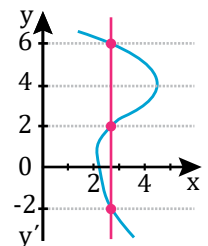
- Αν ένα σημείο $M(\alpha, \beta)$ βρίσκεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης, τότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν τον τύπο της συνάρτησης.
- Αν οι συντεταγμένες ενός σημείου $M(\alpha, \beta)$ επαληθεύουν τον τύπο της συνάρτησης, τότε το σημείο M βρίσκεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

Να μελετήσετε το Ιστορικό σημείωμα με τίτλο: «René Descartes και επινοήση των συντεταγμένων».



Σημείωση

Επειδή η συνάρτηση αντιστοιχίζει σε κάθε τιμή της μεταβλητής x ακριβώς μία τιμή της y , δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης με την ίδια τετμημένη. Αυτό σημαίνει ότι μία ευθεία παράλληλη στον άξονα $y'y$ δεν μπορεί να τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης σε περισσότερα από ένα σημεία. Για παράδειγμα, η γραφική παράσταση του διπλανού σχήματος δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης.



Εφαρμογή 1

Δίνεται η συνάρτηση $y = x + 2$.

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών και να γράψετε τα ζεύγη συντεταγμένων (x, y) .

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

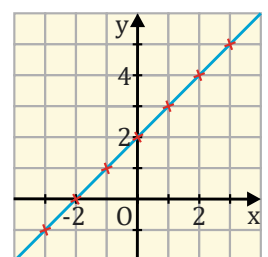
β) Σε ένα σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε τα σημεία (x, y) του παραπάνω πίνακα και στη συνέχεια, να ενώσετε τα σημεία αυτά. Τι εκφράζει η γραμμή που σχηματίζεται;

Απάντηση

α) Συμπληρώνουμε τον πίνακα τιμών:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-1	0	1	2	3	4	5
(x, y)	(-3, -1)	(-2, 0)	(-1, 1)	(0, 2)	(1, 3)	(2, 4)	(3, 5)

β) Απεικονίζουμε τα διατεταγμένα ζεύγη του πίνακα τιμών με σημεία στο καρτεσιανό επίπεδο και παρατηρούμε ότι τα σημεία αυτά βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία. Η γραφική παράσταση αποτελείται από όλα τα σημεία που μπορούμε να βρούμε από τον τύπο της συνάρτησης και όχι μόνο από τα 7 ζεύγη του πίνακα τιμών.





Εφαρμογή 2

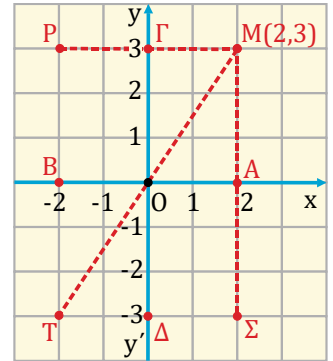
- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A, B, Γ και Δ του παρακάτω σχήματος. Τι συμπεραίνετε για τις τετμημένες A, B και για τις τεταγμένες Γ, Δ;
- β) Δίνεται το σημείο M(2, 3). Να βρείτε το συμμετρικό του M ως προς: **i.** τον άξονα x'x **ii.** τον άξονα y'y **iii.** την αρχή O των αξόνων. Ποιες είναι οι συντεταγμένες των σημείων αυτών;

Απάντηση

α) Το σημείο A έχει τετμημένη $x = 2$ και το σημείο B έχει τετμημένη $x = -2$. Παρατηρούμε ότι από τα σημεία A και B οι κάθετες προς τον άξονα y'y αντιστοιχούν στο σημείο O, οπότε αυτά τα σημεία έχουν τεταγμένες 0. Άρα $A(2, 0)$ και $B(-2, 0)$. Ομοίως, από τα σημεία Γ και Δ οι κάθετες προς τον άξονα x'x αντιστοιχούν στο σημείο O, οπότε αυτά τα σημεία έχουν τετμημένες 0. Άρα $\Gamma(0, 3)$ και $\Delta(0, -3)$. Δηλαδή:

- Κάθε σημείο του άξονα x'x έχει τεταγμένη 0.
- Κάθε σημείο του άξονα y'y έχει τετμημένη 0.

- β) **i.** Για να βρούμε το συμμετρικό του M ως προς τον άξονα x'x φέρνουμε κάθετη από το M προς αυτόν. Αν A είναι το σημείο τομής με τον x'x, παίρνουμε στην προέκταση του MA τμήμα $A\Sigma = MA$. Το Σ είναι το ζητούμενο σημείο και έχει συντεταγμένες $x = 2$ και $y = -3$.
- ii.** Για να βρούμε το συμμετρικό του M ως προς τον άξονα y'y φέρνουμε κάθετη από το M προς αυτόν. Αν Γ το σημείο τομής με τον y'y, παίρνουμε στην προέκταση του MΓ τμήμα $\Gamma P = M\Gamma$. Το σημείο P έχει συντεταγμένες $x = -2$ και $y = 3$.
- iii.** Για να βρούμε το συμμετρικό του M ως προς την αρχή των αξόνων ενώνουμε το M με το σημείο O και προεκτείνουμε κατά τμήμα $OT = MO$. Το σημείο T είναι το συμμετρικό του M ως προς την αρχή των αξόνων και έχει συντεταγμένες $x = -2$ και $y = -3$.



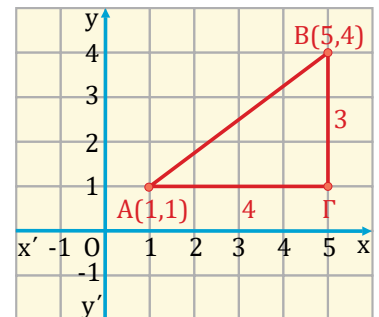
Εφαρμογή 3

Δίνονται τα σημεία $A(1, 1)$ και $B(5, 4)$. Να υπολογίσετε την απόστασή τους AB.

Απάντηση

Σχηματίζουμε το ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ του διπλανού σχήματος. Τότε, το σημείο Γ έχει συντεταγμένες (5, 1), οπότε $AG = 5 - 1 = 4$ και $B\Gamma = 4 - 1 = 3$. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε διαδοχικά ότι:

$$AB^2 = AG^2 + B\Gamma^2 \quad \text{ή} \quad AB^2 = 4^2 + 3^2 \quad \text{ή} \quad AB^2 = 25 \quad \text{ή} \quad AB = 5.$$



Να διερευνήσετε την «Απόσταση σημείων» με την ψηφιακή εφαρμογή.

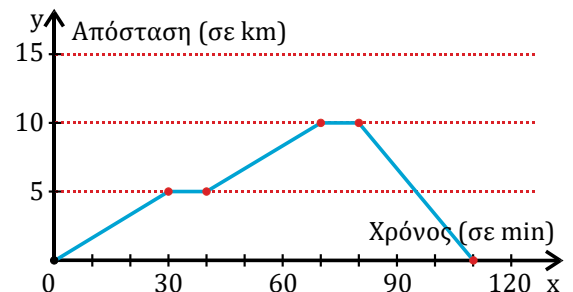


Εφαρμογή 4

Με βάση τη γραφική παράσταση να γράψετε μία ιστορία που να περιγράφει μία βόλτα με ποδήλατο.

Απάντηση

Ιστορία: Ο Ντάριο ξεκίνησε από το σπίτι του. Για 30 λεπτά (min) κινήθηκε και διάνυσε 5 km. Στη συνέχεια σταμάτησε 10 min. Συνέχισε για 30 min και διάνυσε άλλα 5 km. Σταμάτησε πάλι για 10 min. Τέλος, επέστρεψε στο σπίτι σε 30 min διανύοντας τα 10 km της διαδρομής.





Εφαρμογή 5

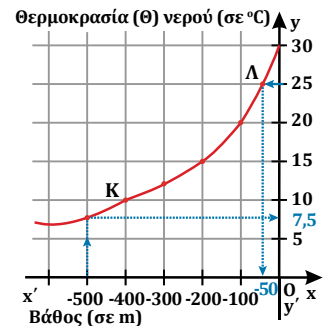
Η θερμοκρασία θ του νερού της θάλασσας ως συνάρτηση του βάθους x φαίνεται στη διπλανή γραφική παράσταση.

- α) Να χρησιμοποιήσετε τη γραφική παράσταση για να εκτιμήσετε τη θερμοκρασία του νερού σε βάθος 500 μέτρα κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας.
- β) Σε ποιο περίπου βάθος η θερμοκρασία του νερού είναι $25\text{ }^\circ\text{C}$;



Απάντηση

- α) Για να βρούμε τη θερμοκρασία του νερού σε βάθος 500 μέτρα κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας φέρνουμε από το σημείο με τετμημένη $x = -500$ του άξονα $x'x$ ευθεία παράλληλη στον άξονα $y'y$ που τέμνει τη γραφική παράσταση στο σημείο K. Στη συνέχεια από το σημείο K φέρνουμε παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη περίπου 7,5. Άρα η θερμοκρασία σε βάθος $x = -500\text{ m}$ είναι περίπου $7,5\text{ }^\circ\text{C}$.
- β) Για να βρούμε σε ποιο βάθος η θερμοκρασία είναι $25\text{ }^\circ\text{C}$, φέρνουμε από το σημείο με τεταγμένη 25 του άξονα $y'y$ παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ που τέμνει τη γραφική παράσταση στο σημείο Λ. Στη συνέχεια, από το Λ φέρνουμε παράλληλη προς τον άξονα $y'y$, η οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη περίπου $x = -50\text{ m}$. Άρα, η θερμοκρασία είναι $25\text{ }^\circ\text{C}$ σε βάθος περίπου 50 m κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας.



Να ανοίξετε τον σύνδεσμο και να απαντήσετε στις ερωτήσεις αξιολόγησης για τις συντεταγμένες και τη γραφική παράσταση συνάρτησης.

Ερωτήσεις για Αξιολόγηση

1. Να τοποθετήσετε τα σημεία A (4, 0), B (0, 3), Γ(2, 5) και Δ(-2, -5) σε ένα σύστημα συντεταγμένων.
2. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $y = -2x + 1$. Να κατασκευάσετε έναν πίνακα τιμών και τη γραφική παράσταση. Τα σημεία A(-100, 201) και B(200, 401) ανήκουν στη γραφική παράσταση;
3. Ο κανόνας «Σε κάθε αριθμό αντιστοιχίζεται ο αριθμός 2,5» περιγράφει μια συνάρτηση. Να την παραστήσετε ως: α) πίνακα τιμών, β) γραφική παράσταση και γ) τύπο. Είναι συμμεταβολή;
4. Σε κάθε αριθμό αντιστοιχίζεται η διαφορά του τριπλασίου του αριθμού από τον αριθμό 10. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης και να την παραστήσετε με τρεις διαφορετικούς τρόπους.
5. Να αντιστοιχίσετε τους πίνακες τιμών με τις γραφικές παραστάσεις. Σε κάθε περίπτωση, να αιτιολογήσετε.

A: Χρόνος καύσης ενός κεριού

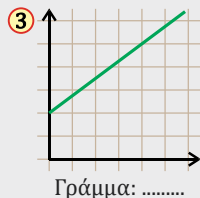
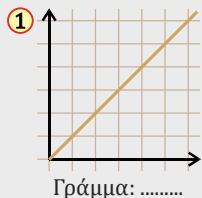
Χρόνος σε h	2	4	6	8
Υψος κεριού σε cm	8	6	4	2

B: Χρηματική αξία μοσχαρίσιου κρέατος

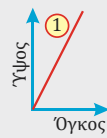
Κρέας σε gr	50	100	150	200
Αξία σε €	1	2	3	4

Γ: Απόσταση και χρέωση από ταξί

Απόσταση σε km	1	2	3	4
Χρέωση σε €	2,75	3,5	4,25	5



6. Γεμίζουμε τα τρία δοχεία με την ίδια σταθερή παροχή νερού. Οι γραφικές παραστάσεις περιγράφουν το ύψος της στάθμης του νερού ως προς τον όγκο νερού που έχουμε ρίξει μέσα. Να αντιστοιχίσετε τα δοχεία με γραφικές παραστάσεις. Να αιτιολογήσετε.





Με την ψηφιακή εφαρμογή να κάνετε την *Εργασία με προεκτάσεις* με τίτλο «Το σκάκι και οι συντεταγμένες».



Με την ψηφιακή εφαρμογή να διερευνήσετε πότε μία σχέση είναι συνάρτηση και να κάνετε την *Εργασία με προεκτάσεις* με τίτλο «Το ηλεκτρονικό τρενάκι».



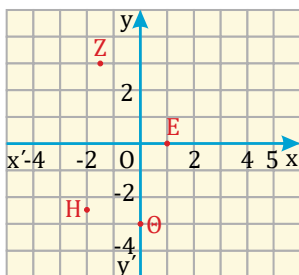
Ασκήσεις και Προβλήματα

- 1 Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων:

α) Να απεικονίσετε στο επίπεδο τα σημεία $A(-2, 4)$, $B(5, 2)$, $\Gamma(0,3)$, $\Delta(-3, 0)$.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων E, Z, H, Θ .

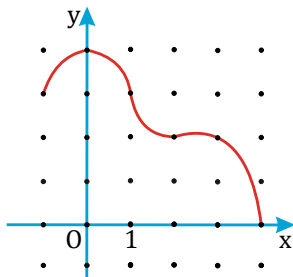
γ) Να βρείτε το μήκος του τμήματος AE .



- 2 Στο διπλανό σχήμα έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης, στην οποία ένα μέγεθος y εκφράζεται ως συνάρτηση ενός άλλου μεγέθους x .

Να συμπληρώσετε τον ακόλουθο πίνακα.

x	-1		1		3	
y		4		2		0

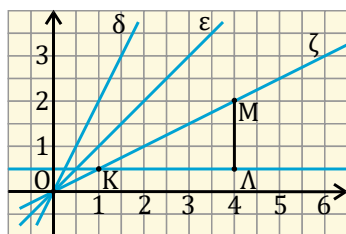


- 3 Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων να τοποθετήσετε τα σημεία $A(3,2)$, $B(2,3)$, $\Gamma(3,4)$ και $\Delta(4,3)$. Τι σχήμα είναι το $AB\Gamma\Delta$; Τα τμήματα $A\Gamma$ και $B\Delta$ τέμνονται στο σημείο K . Ποιες είναι οι συντεταγμένες του K ;

- 4 α) Ποιες είναι οι συντεταγμένες των σημείων K, Λ και M ;

β) Να εξετάσετε ποια από τα σημεία $A(1, 1)$,

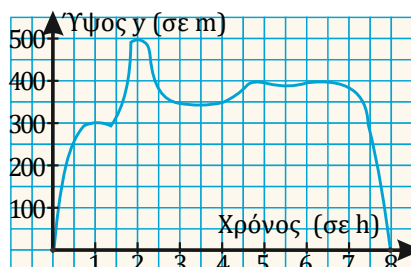
$B(2, \frac{1}{2})$, $\Gamma(3, 3)$, $\Delta(3, 2)$, $K(1, \frac{1}{2})$, $Z(\frac{1}{2}, 3)$, $H(3, \frac{1}{2})$, $P(-1, -1)$ και $\Theta(\frac{1}{2}, 1)$ βρίσκονται σε μία από τις ευθείες. α) δ , β) ϵ , γ) ζ , δ) ευθεία $K\Lambda$.



- 5 Λαμβάνοντας πληροφορίες από τη γραφική παράσταση να περιγράψετε τη βόλτα με το αερόστατο.
α) Τι ύψος έχει το αερόστατο 3 ώρες μετά την έναρξη της πτήσης;

- β) Πότε έφτασε στο μέγιστο ύψος του;

γ) Πότε αρχίζει να προσιώνεται;

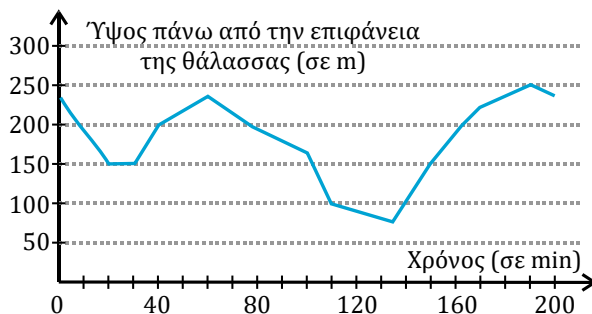


- 6 Ο Παναγιώτης δημιούργησε μία γραφική παράσταση με τις τιμές κατά την περιήγησή του με το ποδήλατο. Ξεκίνησε από υψόμετρο 240 m πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας.

α) Σε ποιο ύψος ήταν 20 λεπτά μετά την έναρξη;

β) Μετά από πόσα λεπτά βρισκόταν για πρώτη φορά κάτω από 100 m;

γ) Πότε έφτασε στο μέγιστο ύψος του;



- 7 Να βρείτε τα συμμετρικά των σημείων $A(-3, 5)$, $B(0, 2)$ και $\Gamma(-4, 0)$:

α) Ως προς τον άξονα x' .

β) Ως προς τον άξονα y' .

γ) Ως προς την αρχή των αξόνων O .

- 8 Να βρείτε τις τιμές του x , για τις οποίες το σημείο $A(-2x - 4, x - 5)$, βρίσκεται:

α) Στον άξονα x' . β) Στον άξονα y' .

- 9 Να συμπληρώσετε τους πίνακες τιμών των συναρτήσεων και να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις τους.

$$y = 3x$$

x	-1	0	1	2	3	4
y						

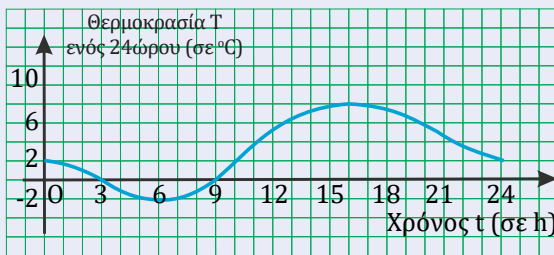
$$y = 3x + 2$$

x	-1	0	1	2	3	4
y						

$$y = 2(x - 3)$$

x	-1	0	1	2	3	4
y						

- 10 Σε έναν μετεωρολογικό σταθμό ένας θερμογράφος καταγράφει σε κάθε χρονική στιγμή t τη θερμοκρασία σε βαθμούς C. Έτσι σ' ένα 24ωρο μας έδωσε την ακόλουθη γραφική παράσταση.



- α) Να βρείτε ποια ώρα είχαμε τη μέγιστη και ποια την ελάχιστη θερμοκρασία και ποιες ήταν αυτές.
 β) Να βρείτε ποια χρονικά διαστήματα η θερμοκρασία ήταν πάνω από το μηδέν και πότε κάτω από το μηδέν.
 γ) Να βρείτε πότε η θερμοκρασία αυξανόταν και πότε ελαττωνόταν.
 δ) Να βρείτε πότε η θερμοκρασία ήταν $6\text{ }^{\circ}\text{C}$.
- 11 Ένα αυτοκίνητο κινείται με σταθερή ταχύτητα 80 km/h .
 α) Να εξετάσετε αν η σχέση μεταξύ της διανυόμενης απόστασης και του αντίστοιχου χρόνου είναι συνάρτηση. Να εξηγήσετε.
 β) Αν είναι συνάρτηση ποια είναι η ανεξάρτητη και ποια η εξαρτημένη μεταβλητή;
 γ) Αν συμβολίσουμε με S την απόσταση και t τον χρόνο να εκφράσετε το S ως συνάρτηση του t .
 δ) Να κατασκευάσετε έναν πίνακα τιμών και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

- 12 Η Ελένη έκανε μία βόλτα με τον σκύλο:
 «Πήγα σε 20 λεπτά (min) στο πάρκο με τον σκύλο μου. Κάναμε μαζί 2 km . Εκεί σταματήσαμε για 10 λεπτά όπου ο σκύλος έπαιξε με μία μπάλα.



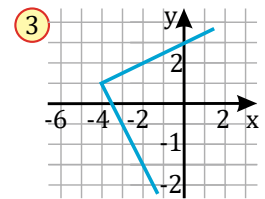
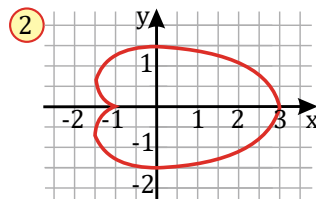
Τέλος, επιστρέψαμε στο σπίτι σε 20 min διανύοντας τα 2 km της διαδρομής».

Να σχεδιάσετε μία πρόχειρη γραφική παράσταση που ταιριάζει στην ιστορία.

- 13 Να βρείτε: α) Τις αποστάσεις του σημείου $A(2, -3)$ από τους άξονες. β) Την απόσταση των σημείων $B(4, -1)$ και $\Gamma(7, -5)$. γ) Την απόσταση ρ του σημείου $M(6, 8)$ από την αρχή των αξόνων. Πρώτα να απεικονίσετε τα σημεία σε ένα καρτεσιανό σύστημα αξόνων.
- 14 Η θερμοκρασία του αέρα ως συνάρτηση του ύψους h φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Ύψος h σε km	0	1	2	4
Θερμοκρασία T σε $^{\circ}\text{C}$	18	16	8	0

- α) Σε σύστημα ορθογώνιων αξόνων να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.
 β) Πόση είναι περίπου η θερμοκρασία του αέρα σε ύψος 1500 m ;
 γ) Σε ποιο περίπου ύψος η θερμοκρασία του αέρα είναι $2\text{ }^{\circ}\text{C}$;
- 15 Να βρείτε την τιμή του λ , ώστε το σημείο $K(2\lambda - 3, \lambda - 1)$ να βρίσκεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 2x - 5$.
- 16 Ποιες γραμμές είναι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



- 17 Δίνεται η συνάρτηση: $y = 5x + 2$. Να συμπληρώσετε τον αριθμό που λείπει σε κάθε ζεύγος συντεταγμένων.
 α) (, 2) β) (4,) γ) (, 13) δ) (8,)
 Να εξηγήσετε πώς βρήκατε την απάντησή σας.

3.3 Η συνάρτηση αναλογίας $y = ax$

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

- Να αναγνωρίζουν μέσα σε ποικίλα πλαίσια τη σχέση που συνδέει δύο ανάλογα ποσά ως σχέση αναλογίας.
- Να αναπαριστούν τις σχέσεις αναλογίας που εμφανίζονται σε διάφορα πλαίσια ως σχέση της μορφής $y = ax$.
- Να σχεδιάζουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax$ και να διαπιστώνουν ότι είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- Να ερμηνεύουν τη σταθερά αναλογίας (κλίση της ευθείας) ως μεταβολή του y που αντιστοιχεί σε μοναδιαία αύξηση του x .



Διερεύνηση 1. Πειράματα με κυλινδρικά κουτιά.

Εργασία μαθητών κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες.

Με έναν σπάγκο να κάνετε μετρήσεις σε όσο το δυνατόν περισσότερα κυλινδρικά κουτιά.

- Να μετρήσετε το μήκος y του κύκλου της βάσης και τη διάμετρο x και να συγκεντρώσετε τα δεδομένα σε έναν πίνακα τιμών.
- Να βρείτε τον λόγο του μήκους y του κύκλου προς την αντίστοιχη διάμετρο x . Τι παρατηρείτε;
- Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση.
- Πόσο χαρτί θα χρειαστεί για να καλύψουμε την κυρτή επιφάνεια κουτιού διαμέτρου 10 cm και ύψους 12 cm;

Συζητούμε στην ολομέλεια και εξηγούμε πώς σκεφτήκαμε.



Διερεύνηση 2. Συμμεταβολή μεγεθών.

Εργασία κατά ζεύγη μαθητών και συζήτηση στην τάξη. Ένας μανάβης πουλάει τα πεπόνια προς 1,5 € το κιλό.

Ο μανάβης γνωρίζει από την εμπειρία του ότι αν πουλήσει διπλάσια (τριπλάσια, ...) κιλά πεπόνια θα εισπράξει διπλάσια (τριπλάσια, ...) χρηματική αξία σε ευρώ και αν πουλήσει τα μισά (το ένα τρίτο, ...) κιλά πεπόνια θα εισπράξει τα μισά (το ένα τρίτο, ...) ευρώ. Τα πεπόνια τα οποία πούλησε συνολικά μία ημέρα ζύγισαν συνολικά 58 κιλά. Έγραψε, σ' ένα χαρτί, τα χρήματα που εισέπραξε. Ξέχασε, όμως, μία φορά να σημειώσει το ποσό που εισέπραξε.

- Να συμπληρώσετε τα κενά του παρακάτω πίνακα.

Κιλά x (σε kg)	1						7			
Αξία y (σε €)	1,5	3	4,5	6	7,5	9	10,5	12		18

- Να συμπληρώσετε τους λόγους των αντίστοιχων τιμών y/x . Τι παρατηρείτε;
- Η σχέση μεταξύ των y και x είναι συνάρτηση; Αν ναι, να βρείτε τον τύπο και να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση.
- Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης ποια είναι η μεταβολή του y από $x = 1$ σε $x = 2$;
- Αν ο μανάβης αποφασίσει να πουλάει τα πεπόνια με 3 € το κιλό, να συμπληρώσετε τον ακόλουθο πίνακα.

Κιλά x (σε kg)	1	2	3	4	5	6
Αξία y (σε €)						

στ) Να απαντήσετε στα ερωτήματα (β), (γ) και (δ) για τον νέο πίνακα τιμών.

- Να συγκρίνετε τις δύο περιπτώσεις. Πώς επηρεάζει η μοναδιαία αύξηση του x τη μεταβολή του y και τη μορφή της γραφικής παράστασης;



- Να κάνετε τη Διερεύνηση: «Μέτρηση φωτός».
- Να επεξεργαστείτε την εφαρμογή: «Σχεδίαση σε κλίμακα».



Να διερευνήσετε τη συνάρτηση αναλογίας με την ψηφιακή εφαρμογή.

Μαθηματικές Έννοιες και Διεργασίες Μάθησης

Στα μέσα ενημέρωσης διαβάζουμε φράσεις όπως «... η τιμή της βενζίνης αυξήθηκε ανάλογα με την τιμή του πετρελαίου...». Σε τέτοιες φράσεις αναγνωρίζουμε ποσά ή μεγέθη τα οποία συνδέονται με σχέσεις αναλογίας.

Καθημερινά στη ζωή μας χρησιμοποιούμε τα ανάλογα ποσά όταν κάνουμε υπολογισμούς για την αγορά ενός προϊόντος. Για παράδειγμα, το σουπερμάρκετ πουλάει τα 100 γραμμάρια (g) τυρί γραβιέρα 2 €. Αν αγοράσουμε 200 g, τότε θα πληρώσουμε 4 €, αν αγοράσουμε 300 g, τότε θα πληρώσουμε 6 € κ.ο.κ. Δηλαδή, όταν διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται κ.λπ. η ποσότητα του τυριού που αγοράζουμε, τότε διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται κ.λπ. και η αντίστοιχη αξία σε ευρώ. Σε αυτή την περίπτωση η μάζα του τυριού και το ποσό που αντιστοιχεί λέμε ότι είναι ανάλογα ποσά.

Μάζα x (σε g)	Αξία y (σε €)
100	2
200	4
50	1
150	3
750	15

Αντιστοιχίες πολλαπλασιασμού: (100, 2) → (200, 4) με $\cdot 2$, (50, 1) → (150, 3) με $\cdot 3$, (100, 2) → (750, 15) με $\cdot 5$.

Γενικά

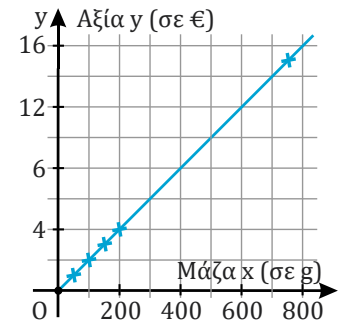
Δύο ποσά λέγονται **ανάλογα**, όταν οι τιμές του ενός προκύπτουν από τις αντίστοιχες τιμές του άλλου πολλαπλασιάζοντας (ή διαιρώντας) κάθε φορά με τον ίδιο αριθμό.

Στον διπλανό πίνακα τιμών για τα ποσά μάζα - αξία παρατηρούμε ότι ο λόγος $\frac{y}{x}$ είναι πάντοτε σταθερός και ίσος με 0,02, οπότε $\frac{y}{x} = 0,02$ ή $y = 0,02x$.

Μάζα x (σε g)	50	100	150	200	750
Αξία y (σε €)	1	2	3	4	15
y/x	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02

Ο τύπος αυτός είναι η συμβολική έκφραση της αναλογίας μάζας - αξίας του τυριού. Η συνάρτηση $y = 0,02x$, λέγεται συνάρτηση αναλογίας και ο συντελεστής 0,02 λέγεται σταθερά αναλογίας.

Αν δεν αγοράσουμε καθόλου τυρί δεν θα πληρώσουμε τίποτα ή διαφορετικά για 0 g γραβιέρας θα πληρώσουμε 0 ευρώ. Αναπαριστώντας σε ένα σύστημα αξόνων το σημείο (0,0) και τα σημεία του πίνακα, παρατηρούμε ότι αυτά βρίσκονται πάνω σε μία ευθεία γραμμή που διέρχεται από την αρχή των αξόνων (Σχήμα).



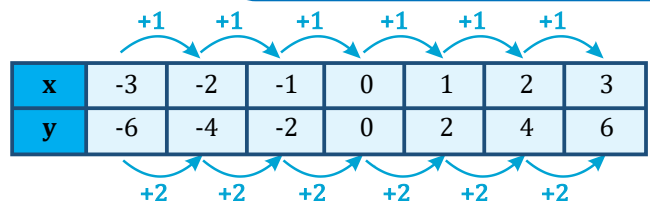
Γενικά

- Οι αντίστοιχες τιμές δύο ανάλογων ποσών y και x έχουν πάντοτε **τον ίδιο λόγο** $\frac{y}{x} = \alpha$ ($x \neq 0$) που λέγεται **σταθερά αναλογίας**.
- Τα ανάλογα ποσά παριστάνονται από τις αντίστοιχες τιμές μίας συνάρτησης της μορφής $y = \alpha x$.
- Όλα τα σημεία της $y = \alpha x$ βρίσκονται σε μία ευθεία γραμμή η οποία **διέρχεται από την αρχή των αξόνων**.

Σημείωση: Όταν αναφερόμαστε σε ευθεία (ε) η οποία είναι γραφική παράσταση της συνάρτησης αναλογίας $y = \alpha x$, θα λέμε **η ευθεία με εξίσωση $y = \alpha x$** ή απλώς η ευθεία (ε): $y = \alpha x$.

Έστω η συνάρτηση αναλογίας $y = 2x$, όπου x πραγματικός αριθμός. Στον πίνακα παρατηρούμε ότι σε κάθε μοναδιαία αύξηση της μεταβλητής x, η μεταβλητή y αυξάνεται κατά 2 και η μεταβολή αυτή είναι ίση με τη **σταθερά αναλογίας** της ευθείας με εξίσωση $y = 2x$.

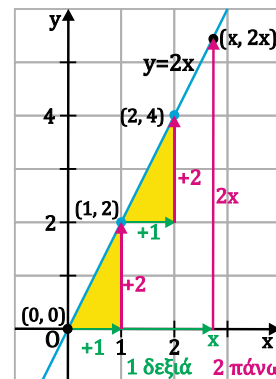
Από την παρακάτω γραφική παράσταση βλέπουμε ότι για μία οριζόντια μετακίνηση κατά 1 (αύξηση) έχουμε μία κατακόρυφη μετακίνηση κατά 2. Δηλαδή σε μια μοναδιαία αύξηση του x η μεταβολή του y είναι ίση με τη σταθερά αναλογίας 2.



Με την ψηφιακή εφαρμογή να διερευνήσετε τον ρόλο της παραμέτρου α στη συνάρτηση $y = \alpha x$.

Κλίση της ευθείας $y = ax$ ονομάζουμε τη μεταβολή του y για μια μοναδιαία αύξηση του x και είναι ο συντελεστής a του x .

Όταν αναφερόμαστε στη γραφική παράσταση της ευθείας (ε) με εξίσωση $y = ax$, ο συντελεστής αναλογίας a λέγεται **κλίση της ευθείας** (ε). Στο διπλανό σχήμα η κλίση της ευθείας $y = 2x$ είναι 2.



Γενικά

Για να χαράξουμε μια ευθεία αρκεί να βρούμε δύο σημεία της. Η ευθεία $y = ax$ διέρχεται πάντοτε από την αρχή των αξόνων, δηλαδή από το σημείο $O(0,0)$ οπότε αρκεί να βρούμε ένα ακόμα σημείο της. Μπορούμε για παράδειγμα ως δεύτερο σημείο να πάρουμε το σημείο $(1, a)$.

Ένα σημείο βρίσκεται πάνω στην ευθεία $\varepsilon: y = ax$, ή αλλιώς η ευθεία διέρχεται από το σημείο αυτό, όταν οι συντεταγμένες του σημείου M επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας.

Ειδικότερα, η συνάρτηση $y = \beta$ παριστάνει μια ευθεία κάθετη στον άξονα $y'y$ (παράλληλη στον $x'x$) και η $y = 0$ είναι η εξίσωση του άξονα $x'x$.

Σημειώσεις:

1. Η ευθεία με εξίσωση $y = x$ είναι η διχοτόμος της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων και η ευθεία με εξίσωση $y = -x$ είναι διχοτόμος της 2ης και 4ης γωνίας.

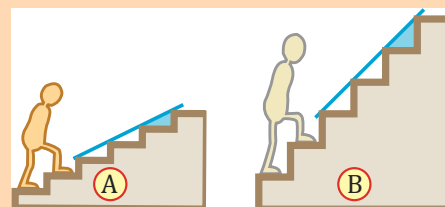
2. Όταν το ποσό y είναι ποσοστό $\alpha\%$ του ποσού x , τα δύο ποσά συνδέονται με την τη συνάρτηση αναλογίας $y = \frac{\alpha}{100} \cdot x$ και είναι ανάλογα με σταθερά αναλογίας το $\frac{\alpha}{100}$ ή $\alpha\%$.

Σχόλιο



Με την ψηφιακή εφαρμογή να διερευνήσετε την κλίση a της ευθείας $y = ax$.

Η κλίση είναι χρήσιμη για να περιγράψουμε πόσο «απότομη» είναι μία ευθεία. Μια εποπτεία της κλίσης έχουμε αν συγκρίνουμε δύο σκάλες με σκαλιά ίδιου πλάτους. Η σκάλα Β είναι πιο απότομη, γιατί το ύψος κάθε σκαλιού είναι μεγαλύτερο.



Εφαρμογή 1

- α)** Μία συνάρτηση αναλογίας έχει σταθερά αναλογίας $a = -\frac{3}{2}$. Να βρείτε τον τύπο της και να συμπληρώσετε τον διπλανό πίνακα τιμών της συνάρτησης.

x	-10	0		2	
y			-1,5		-6

- β)** Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.
γ) Ποια είναι η μεταβολή του y για μια μοναδιαία αύξηση του x ;
δ) Ποια είναι η κλίση της ευθείας;

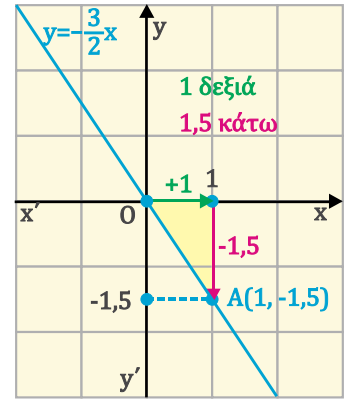
Απάντηση

- α)** Αφού έχουμε συνάρτηση αναλογίας και η σταθερά αναλογίας είναι $a = -\frac{3}{2}$, ο τύπος της θα είναι: $y = -\frac{3}{2}x$.
- Για $x = -10$ είναι: $y = -\frac{3}{2} \cdot (-10) = 15$. Για $x = 0$, η τιμή του y θα είναι: $y = -\frac{3}{2} \cdot 0 = 0$.
 - Για $y = -1,5$, θα είναι: $-1,5 = -\frac{3}{2}x$ ή $-3x = -1,5 \cdot 2$ ή $x = 1$. Για $x = 2$ είναι: $y = -\frac{3}{2} \cdot 2 = -3$.
 - Για $y = -6$, θα έχουμε, αντίστοιχα: $-6 = -\frac{3}{2}x$ ή $-3x = -12$ ή $x = 4$.

Επομένως, ο ζητούμενος πίνακας τιμών είναι:

x	-10	0	1	2	4
y	15	0	-1,5	-3	-6

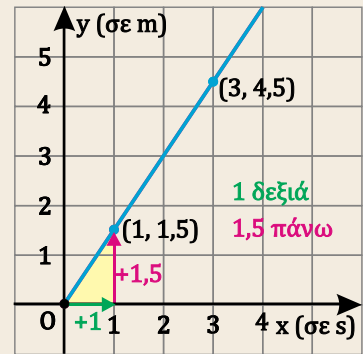
- β) Αρκεί να βρούμε δύο σημεία της ευθείας. Από τον πίνακα βλέπουμε ότι δύο σημεία της είναι για παράδειγμα τα $O(0, 0)$ και $A(1, -1,5)$ οπότε τα απεικονίζουμε σε ένα σύστημα αξόνων και σχεδιάζουμε την ευθεία που διέρχεται από αυτά. (Σχήμα)
- γ) Από το σχήμα βλέπουμε ότι για μοναδιαία αύξηση του x (1 δεξιά), το y «κατεβαίνει» κατά 1,5, δηλαδή η μεταβολή του y , η οποία είναι ίση με την κλίση της ευθείας (ή με τον συντελεστή αναλογίας), είναι $-1,5$. Το ίδιο βρίσκουμε από τον πίνακα τιμών αν το x αυξηθεί για παράδειγμα από το $x = 0$ στο $x = 1$.
- δ) Η κλίση της ευθείας $y = -\frac{3}{2}x$ είναι $\alpha = -\frac{3}{2} = -1,5$.



Εφαρμογή 2

Η γραφική παράσταση δείχνει την απόσταση y (σε m) που διατρέχει με σταθερό ρυθμό ένας άνθρωπος στο πάρκο ως συνάρτηση του χρόνου x (σε sec).

- α) Να εξετάσετε αν τα ποσά x και y είναι ανάλογα.
- β) Αν είναι, να εκτιμήσετε τη σταθερά αναλογίας και την κλίση της ευθείας.
- γ) Να εκτιμήσετε τον τύπο που συνδέει τα x και y .
- δ) Να εκτιμήσετε πόση απόσταση θα διανύσει ο άνθρωπος σε 20 sec.
- ε) Αν ο περιπατητής διάνυσε απόσταση 900 m χωρίς να σταματήσει, πόση ώρα περίπου περπατούσε;
- στ) Τι πληροφορίες δίνουν τα σημεία $(1, 1,5)$ και $(3, 4,5)$ της γραφικής παράστασης;



Απάντηση

- α) Επειδή η γραφική παράσταση είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0, 0)$ τα ποσά x και y είναι ανάλογα.
- β) Από τη γραφική παράσταση προκύπτει ότι για $x = 1$ είναι περίπου $y = 1,5$, οπότε μία εκτίμηση για τη σταθερά αναλογίας και την κλίση της ευθείας είναι 1,5.
- γ) Από τον γενικό τύπο $y = ax$ για $\alpha = 1,5$ βρίσκουμε ότι μία εκτίμηση είναι $y = 1,5x$.
- δ) Από τον τύπο $y = 1,5x$ για $x = 20$ παίρνουμε $y = 1,5 \cdot 20 = 30$. Άρα διάνυσε περίπου απόσταση 30 m.
- ε) Από τον τύπο $y = 1,5x$ αν $y = 900$ έχουμε:
 $900 = 1,5x$ ή $x = \frac{900}{1,5}$ ή $x = 600$. Άρα περπάτησε 600 sec ή 10 min.
- στ) Το σημείο $(1, 1,5)$ σημαίνει ότι σε 1 sec ο περιπατητής διανύει περίπου απόσταση 1,5 m. Αντίστοιχα το σημείο $(3, 4,5)$ σημαίνει ότι σε 3 sec διανύει περίπου απόσταση 4,5 m.



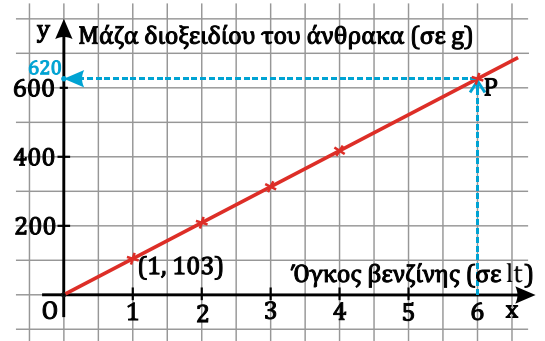
Εφαρμογή 3

Ένα αυτοκίνητο εκπέμπει 103 g διοξειδίου του άνθρακα για κάθε λίτρο βενζίνης που «καίει».

- α) Να γράψετε τον τύπο και να σχεδιάσετε την αντίστοιχη γραφική παράσταση της συνάρτησης.
- β) Από τη γραφική παράσταση να εκτιμήσετε πόσα γραμμάρια διοξειδίου του άνθρακα εκπέμπονται από την καύση 6 λίτρων βενζίνης.
- γ) Να υπολογίσετε πόσα γραμμάρια διοξειδίου του άνθρακα εκπέμπονται από την καύση 6 λίτρων βενζίνης.
- δ) Πόσα λίτρα βενζίνης έκαψε ένα αυτοκίνητο αν παρήγαγε 1000 g διοξειδίου του άνθρακα;

Απάντηση

- α) Έστω y η μάζα του διοξειδίου του άνθρακα σε g και x ο αριθμός των λίτρων βενζίνης που χρησιμοποιήθηκαν. Ο τύπος της συνάρτησης είναι: $y = 103x$ από τον οποίο για $x = 1$ παίρνουμε $y = 103$. Άρα η ευθεία διέρχεται από τα σημεία $(0, 0)$, το $(1, 103)$ και παρουσιάζεται στο σχήμα.
- β) Φέρνουμε ευθεία κάθετη στον άξονα x' στο σημείο $(6, 0)$ που τέμνει τη γραφική παράσταση στο P. Από το σημείο P φέρνουμε κάθετη στον άξονα y' η οποία τον τέμνει περίπου στο $(620, 0)$. Άρα, παράγονται περίπου 620 g διοξειδίου του άνθρακα.
- γ) Θέτοντας $x = 6$ στο τύπο $y = 103x$ παίρνουμε $y = 103 \cdot 6 = 618$ g διοξειδίου του άνθρακα (ακριβής τιμή).
- δ) Από τον τύπο της συνάρτησης για $y = 1000$, έχουμε $1000 = 103x$ ή $x = \frac{1000}{103} \approx 9,71$ λίτρα βενζίνης.



Να ανοίξετε τον σύνδεσμο και να απαντήσετε στις ερωτήσεις αξιολόγησης για τη συνάρτηση $y = ax$.

Ερωτήσεις για Αξιολόγηση

- 1 Τα ποσά x και y είναι ανάλογα

A. Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών.

B. Ποιος από τους παρακάτω τύπους εκφράζει το y ως συνάρτηση του x .

α) $y=3x$ β) $y=\frac{3}{2}x$ γ) $y=\frac{2}{3}x$

x	2	6	
y	3		9

- 2 Αν οι πίνακες τιμών περιγράφουν συναρτήσεις αναλογίας να βρείτε τη σταθερά αναλογίας σε κάθε περίπτωση.

x	2	4	5	20	25	35
y	6	12	15	60	75	105

x	2	3	4	18	34	40
y	1	1,5	2	9	17	20

- 3 Ποια είναι η κλίση των ευθειών;

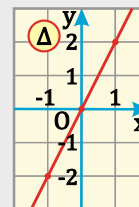
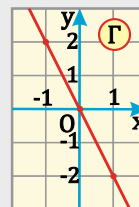
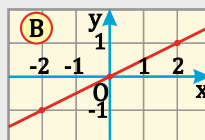
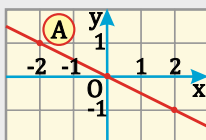
A. $y=5x$ B. $y=\frac{1}{5}x$ Γ. $y=-\frac{1}{5}x$

- 4 Η Λάιλα ισχυρίζεται ότι η μάζα του ανθρώπου είναι ανάλογη προς το ύψος του. Μετρήθηκαν μερικοί μαθητές της τάξης και έβαλαν τα αποτελέσματα στον παρακάτω πίνακα.

Μάζα (σε kg)	60	71	57	55	67	80	75
Ύψος (σε cm)	161	164	159	163	173	162	178

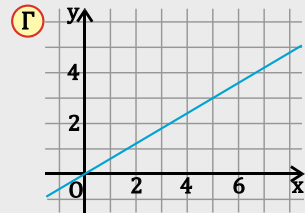
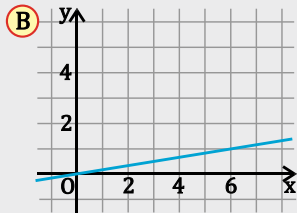
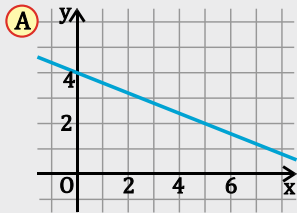
Να επιβεβαιώσετε ή να καταρρίψετε τον ισχυρισμό. Να αιτιολογήσετε το συμπέρασμά σας.

- 5 Η Βάσω υποστήριξε ότι αν 2 πουκάμισα χρειάζονται 50 λεπτά για να στεγνώσουν στον ήλιο, τότε τα 4 ίδια πουκάμισα που τοποθετούνται μαζί στον ήλιο για να στεγνώσουν χρειάζονται 100 λεπτά. Συμφωνείτε με τη λύση της Βάσως; Να αιτιολογήσετε.
- 6 Ποια από τις παρακάτω ευθείες είναι η $y = -2x$.



- 7 Ένα πλοίο το οποίο πλέει με σταθερή ταχύτητα κάνει μία απόσταση 36 ναυτικών μιλίων σε 3 ώρες. Πόσο χρόνο θα χρειαστεί για μια απόσταση 108 ναυτικών μιλίων, αν πλέει με την ίδια ταχύτητα;

- 8 Ένα κατάστημα κατά την περίοδο των εκπτώσεων πουλά όλα τα είδη με έκπτωση 40%. Σε αρχική τιμή x (πριν την έκπτωση) αντιστοιχεί μία τελική τιμή y (μετά την έκπτωση). Το y είναι συνάρτηση του x . Ποια από τις επόμενες γραφικές παραστάσεις ταιριάζει σε αυτή τη συνάρτηση. Να αιτιολογήσετε.



Ασκήσεις και Προβλήματα

- 1 α) Οι πίνακες τιμών παριστάνουν ανάλογα ποσά. Να τους συμπληρώσετε στο τετράδιό σας.

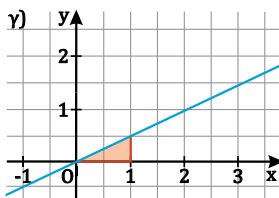
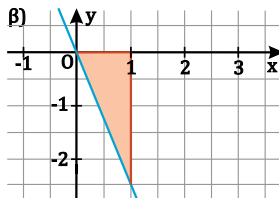
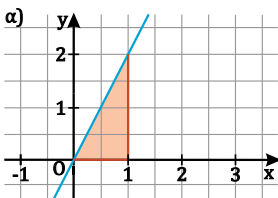
Αριθμός μολυβιών x	4	8	12	16	20
Μάζα (σε g)		40			

Χρόνος t (σε h)		1	3		5
Απόσταση S (σε km)	30		180	240	

- β) Να εκφράσετε κάθε φορά την εξαρτημένη μεταβλητή συναρτήσει της ανεξάρτητης μεταβλητής.
 γ) Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις.

- 2 Μία συσκευασία τροφής για σκύλους 12 κιλών κοστίζει 13,9 ευρώ. Μια μεγαλύτερη συσκευασία 32 κιλών κοστίζει 25,9 ευρώ. Να εξετάσετε αν οι συγκεκριμένες τιμές βρίσκονται σε αναλογία.

- 3 Να βρείτε την κλίση των γραφικών παραστάσεων αναλογίας.



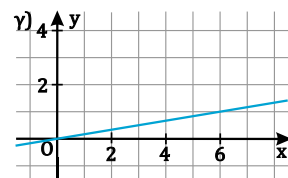
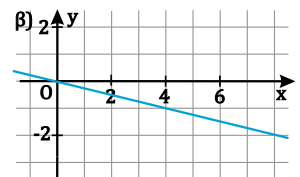
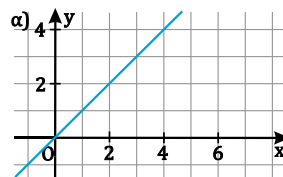
- 4 Να χρησιμοποιήσετε την κλίση για να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων αναλογίας.

α) $y = 2x$ β) $y = -0,5x$
 γ) $y = \frac{2}{3}x$ δ) $y = -\frac{1}{4}x$ ε) $y = \frac{2}{5}x$

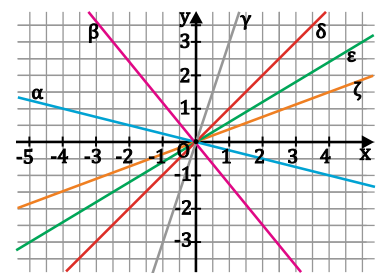
- 5 Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων τις ευθείες:

α) $y = 2x$, $y = 4x$, $y = 6x$
 β) $y = \frac{1}{3}x$, $y = -\frac{1}{3}x$, $y = -3x$

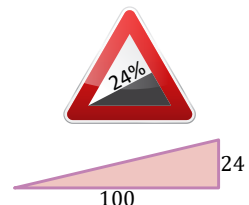
- 6 Να βρείτε τους τύπους των συναρτήσεων.



- 7 Να προσδιορίσετε τις κλίσεις των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων αναλογίας. Να περιγράψετε πώς αλλάζει η γραφική παράσταση για διαφορετικές τιμές του a . Ποιες περιπτώσεις διακρίνετε.



- 8 Για δρόμους, η κλίση δίνεται σε ποσοστό. Μια κλίση 24% σημαίνει: για κάθε 100 m οριζόντιας απόστασης ο δρόμος «ανεβαίνει» κατά 24 m.

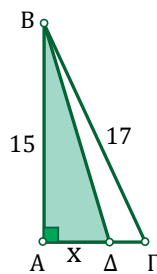


Με την ψηφιακή εφαρμογή να κάνετε την Εργασία με προεκτάσεις με τίτλο «Η ράμπα του θαλάσσιου σκι».

- α) Να υπολογίσετε πόσα μέτρα ανεβαίνει ένας δρόμος με κλίση 24% στα 50 m οριζόντιας απόστασης, στα 10 m και στο 1 m.
β) Να γράψετε μία εξίσωση που περιγράφει δρόμο με κλίση 24% (15%, 7%).

- 9) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο $A(3, -12)$.
10) Να σχεδιάσετε σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων μία ευθεία η οποία να διέρχεται από την αρχή O των αξόνων και να έχει κλίση $5/2$.
11) Στην κάτοψη ενός σπιτιού οι διαστάσεις είναι 18 cm και 24 cm. Αν η κλίμακα είναι 1:100 να βρεθούν οι πραγματικές διαστάσεις του σπιτιού.

- 12) Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $AB = 15$ cm, $B\Gamma = 17$ cm και $0 < x < A\Gamma$. Να εκφράσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου σχήματος ως συνάρτηση του x και να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για τις τιμές που παίρνει το x .



- 13) Ένας πάσσαλος ύψους 1,6 m ρίχνει σκιά 4,8 m. Την ίδια στιγμή ένα δέντρο ρίχνει σκιά 12 m. Αν γνωρίζουμε ότι τα ποσά ύψος - σκιά είναι ανάλογα, να βρείτε το ύψος του δέντρου.
14) α) Αν αναμείξουμε 1 λίτρο (lt) κόκκινο χρώμα και 2 lt μπλε χρώμα φτιάχνουμε 3 lt μοβ απόχρωση. Θέλουμε να παρασκευάσουμε 12 lt μοβ χρώμα. Πόσα λίτρα κόκκινου και μπλε χρώματος θα χρειαστούμε;
β) Αν αναμείξουμε 2 λίτρα (lt) κίτρινο χρώμα και 3 lt μπλε χρώμα φτιάχνουμε 5 lt πράσινη απόχρωση. Θέλουμε να παρασκευάσουμε 38,5 lt πράσινο χρώμα. Πόσα λίτρα κίτρινου και μπλε χρώματος θα χρειασθούν;
γ) Αν αναμείξουμε 2 lt κόκκινο χρώμα και 3 lt κίτρινο χρώμα φτιάχνουμε πορτοκαλί απόχρωση. Αν ανακατέψουμε 3 lt κόκκινο χρώμα και 5 lt κίτρινο, θα πάρουμε την ίδια απόχρωση; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



- 15) Στις τιμές των περισσότερων προϊόντων που αγοράζουμε περιλαμβάνεται Φόρος Προστιθέμενης Αξίας (ΦΠΑ) και εφαρμόζεται βασικός συντελεστής 24%.

- α) Αν ένα προϊόν έχει τιμή χωρίς ΦΠΑ 50 € και προστεθεί ΦΠΑ 24%, πόσο θα πουληθεί στον καταναλωτή;
β) Αν ένα προϊόν κοστίζει x € χωρίς ΦΠΑ και y € με ΦΠΑ να εκφράσετε τη μεταβλητή y ως συνάρτηση της μεταβλητής x . Να εξετάσετε αν τα ποσά x και y είναι ανάλογα. Αν ναι, ποια είναι η σταθερά της αναλογίας;
γ) Αν ένα προϊόν κοστίζει στον καταναλωτή 62 €, ποια είναι η τιμή του χωρίς ΦΠΑ;

- 16) Ένα κεφάλαιο δίνει τόκο 400 € τον χρόνο, με επιτόκιο 4%. Αν το επιτόκιο μειωθεί κατά 25%, πόσο τοις εκατό πρέπει να αυξήσουμε το κεφάλαιό μας για να έχουμε τον ίδιο τόκο, παρά τη μείωση του επιτοκίου;

- 17) Ένα κατάστημα πουλά έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή 1750 €. Πολύ πριν τις εκπτώσεις αύξησε την τιμή κατά 20% και στις εκπτώσεις μείωσε την τιμή κατά 20% πάνω στη νέα τιμή.

- α) Ποια τιμή είχε ο ηλεκτρονικός υπολογιστής μετά την αύξηση; (πριν από τις εκπτώσεις)
β) Ποια τιμή έχει ο ηλεκτρονικός υπολογιστής μετά τη μείωση; (κατά τη διάρκεια των εκπτώσεων)
γ) Ένας καταναλωτής και μια καταναλώτρια διαφωνούσαν για την τελική τιμή:
Καταναλωτής: Στο τέλος η τιμή μειώθηκε κατά περίπου 4%.
Καταναλώτρια: Όχι, η έκπτωση είναι 20%. Ποιος έχει δίκιο; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

- 18) Ένα φορτηγό εκπέμπει 2,2 kg διοξείδιο του άνθρακα για κάθε λίτρο ντίζελ που καταναλώνει. Η «οικονομία καυσίμου» του φορτηγού είναι 8 km/lt. Να γράψετε μία συνάρτηση που να περιγράφει τη σχέση μεταξύ του εκπεμπόμενου διοξειδίου του άνθρακα και της απόστασης που διανύεται και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

3.4 Η γραμμική συνάρτηση $y = ax + \beta$

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

- Να σχεδιάζουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax + \beta$ και να εξηγούν τη σημασία των a και β .
- Να επιλύουν (γραφικά και αλγεβρικά) προβλήματα χρησιμοποιώντας τις αναπαράστασεις της συνάρτησης $y = ax + \beta$.
- Να επιλύουν γραφικά εξισώσεις της μορφής $ax + \beta = \gamma$.



Διερεύνηση 1. Οι χρεώσεις στο ταξί.

Εργασία μαθητών κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες.

Το ταξί χρεώνει 2,50 € για τη «σημαία» και 1,20 € για κάθε χιλιόμετρο διαδρομής.

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών. Τα ποσά x και y είναι ανάλογα;

Απόσταση (x km)	1	2	3	4	5		11		25
Χρέωση (y €)							14,5		26,5

β) Να γράψετε τη συνολική χρέωση y σε ευρώ που θα πληρώσουμε για διαδρομή x χιλιομέτρων. Η σχέση είναι συμμεταβολή; Είναι συνάρτηση;

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης. Σε ποιο σημείο αυτή τέμνει τον άξονα y ;

δ) Αν η χρέωση γίνει 2 €/km και η σημαία 1 € ανά χιλιόμετρο διαδρομής, να συμπληρώσετε έναν νέο πίνακα με τις ίδιες τιμές του x και να απαντήσετε στα (β) και (γ). Πώς επηρεάζεται η μορφή της γραφικής παράστασης;

Ανταλλάσσουμε επιχειρήματα στην τάξη και εξηγούμε πώς σκεφτήκαμε.



Να διερευνήσετε τη συνάρτηση $y = ax + \beta$ με την ψηφιακή εφαρμογή.



Διερεύνηση 2. Το ύψος του κεριού.

Εργασία μαθητών κατά ζεύγη και συζήτηση στην τάξη.

Ένα επιτραπέζιο κεριό ύψους $\beta = 12$ cm, καθώς καίγεται για κάθε μία ώρα ελαττώνεται το ύψος του κατά $\alpha = 2$ cm.

α) Ποιο θα είναι το ύψος του κεριού μετά από 1, 2, 3,... ώρες;

β) Να δείξετε σε έναν πίνακα τιμών πώς μεταβάλλεται το ύψος του κεριού που απομένει ως προς τον χρόνο.

γ) Να απεικονίσετε γραφικά τις τιμές της συνάρτησης.

δ) Ποια είναι η σημασία των παραμέτρων a και β στη γραφική παράσταση της συνάρτησης;



Να διερευνήσετε τη συνάρτηση $y = ax + \beta$ με την ψηφιακή εφαρμογή.

Μαθηματικές Έννοιες και Διεργασίες Μάθησης

Η γραμμική συνάρτηση $y = ax + \beta$

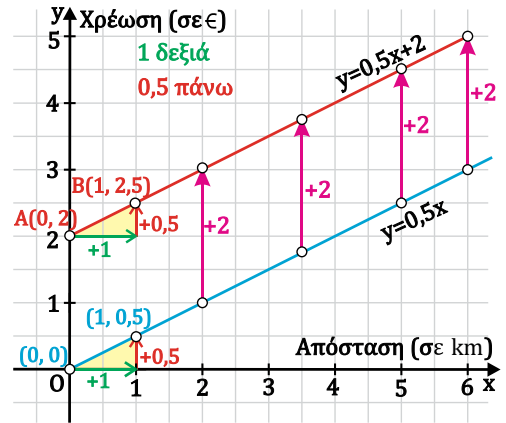
Υπάρχουν περιπτώσεις όπου ένα μέγεθος αλλάζει αναλογικά, αλλά πρέπει επίσης να ληφθεί υπόψιν μια σταθερή ποσότητα, όπως μια πάγια χρέωση ή ένα αρχικό ποσό. Για παράδειγμα, αν μία εταιρεία ενοικίασης ποδηλάτων χρεώνει 0,5 € για κάθε χιλιόμετρο (km) διαδρομής και επιπλέον πάγια χρέωση 2 €, τότε αν x είναι η απόσταση (σε km) που διανύει ένα ποδήλατο, η αναλογική χρέωση θα είναι $0,5x$ και η συνολική χρέωση: $0,5x + 2$ ευρώ. Γενικά τέτοιες καταστάσεις περιγράφονται από συναρτήσεις της μορφής $y = ax + \beta$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης αναλογίας $y = 0,5x$ είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Για $x = 1$, $y = 0,5 \cdot 1 = 0,5$, οπότε ένα ακόμα σημείο της είναι το $(1, 0,5)$. Έτσι διέρχεται από τα σημεία $(0, 0)$ και $(1, 0,5)$.

Παρατηρούμε ότι αν προσθέσουμε τον αριθμό 2 στις τεταγμένες των σημείων αυτών, προκύπτουν τα σημεία $A = (0, 0 + 2) = (0, 2)$ και $B = (1, 0,5 + 2) = (1, 2,5)$ (Σχήμα). Σχεδιάζοντας την ευθεία που διέρχεται από τα A, B βλέπουμε ότι η ευθεία που προκύπτει είναι παράλληλη προς την $y = 0,5x$. Δημιουργείται δηλαδή από αυτήν με μια παράλληλη μετατόπιση κατά 2 μονάδες και έχει εξίσωση $y = 0,5x + 2$.

Στη γραφική παράσταση φαίνεται ότι για μοναδιαία αύξηση του x η αντίστοιχη τιμή της μεταβλητής y μεταβάλλεται κατά 0,5. Οι δύο ευθείες $y = 0,5x$ και $y = 0,5x + 2$ έχουν την ίδια κλίση 0,5.



Γενικά

$H y = ax + \beta$ είναι ευθεία παράλληλη προς την $y = ax$ και έχει κλίση a .

Ερμηνεία των συντελεστών a, β της $y = ax + \beta$.

- Ο συντελεστής a είναι η κλίση της ευθείας και εκφράζει τη μεταβολή του y για μια μοναδιαία αύξηση του x .
- Ο συντελεστής β εκφράζει την αρχική τιμή της μεταβλητής y , αφού για $x = 0$, $y = a \cdot 0 + \beta = \beta$.

Σημειώσεις:

- Η εξίσωση $y = \beta$ παριστάνει σταθερή συνάρτηση. Η γραφική της παράσταση είναι μια ευθεία παράλληλη στον x' με κλίση $a = 0$, η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, \beta)$.
- Όταν $\beta \neq 0$ η ευθεία $y = ax + \beta$ δεν διέρχεται από την αρχή O των αξόνων, αλλά από το σημείο $(0, \beta)$ του άξονα $y'y$.
- Για να βρούμε το σημείο τομής της ευθείας $y = ax + \beta$ με τον άξονα $x'x$ θέτουμε $y = 0$ και λύνουμε την εξίσωση $ax + \beta = 0$ ως προς x .
- Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = ax$ και $y = ax + \beta$ είναι ευθείες γραμμές και γι' αυτό οι συναρτήσεις ονομάζονται **γραμμικές**.



Να διερευνήσετε τις παραμέτρους a και β της συνάρτησης $y = ax + \beta$ με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής.

Γραφική επίλυση της εξίσωσης $ax + \beta = \gamma$.

Η λύση της εξίσωσης $ax + \beta = \gamma$ ανάγεται στην εύρεση των συντεταγμένων του κοινού σημείου (αν υπάρχει) των ευθειών $y = ax + \beta$ και $y = \gamma$.

Για να λύσουμε γραφικά την εξίσωση $ax + \beta = \gamma$ ακολουθούμε τα εξής βήματα:

- Σχεδιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = ax + \beta$ (ευθεία) και $y = \gamma$ (ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$) στο ίδιο σύστημα αξόνων.
- Βρίσκουμε το κοινό σημείο των δύο ευθειών (αν υπάρχει).
- Η τετμημένη του κοινού σημείου είναι η λύση της εξίσωσης $ax + \beta = \gamma$.

Παράδειγμα: Εφαρμογή (4).



Εφαρμογή 1

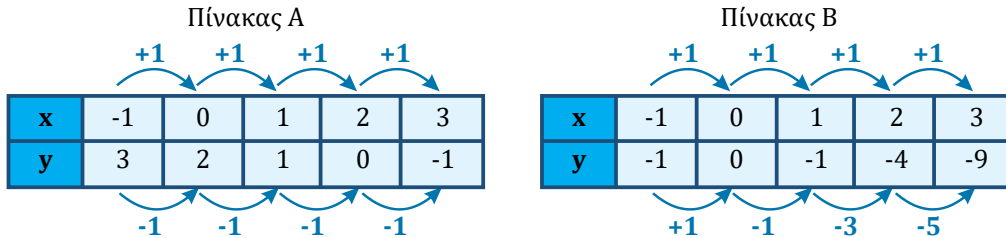
Ποιος από τους πίνακες A και B είναι πίνακας γραμμικής συνάρτησης.

x	-1	0	1	2	3
y	3	2	1	0	-1

x	-1	0	1	2	3
y	-1	0	-1	-4	-9

Απάντηση

Ο πίνακας A περιγράφει γραμμική συνάρτηση διότι σε κάθε μοναδιαία αύξηση της μεταβλητής x, η μεταβλητή y μεταβάλλεται κατά την ίδια σταθερή ποσότητα ίση με -1.



Ο Πίνακας B δεν αντιστοιχεί σε γραμμική συνάρτηση διότι σε κάθε μοναδιαία αύξηση της μεταβλητής x, η μεταβλητή y δεν μεταβάλλεται κατά την ίδια σταθερή ποσότητα.

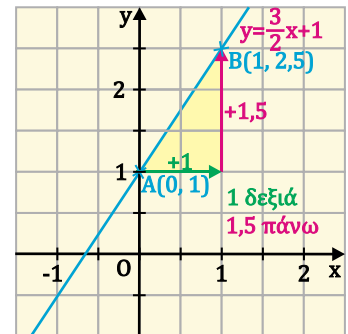
Εφαρμογή 2

Δίνεται συνάρτηση με τύπο $y = \frac{3}{2}x + 1$. Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση. Ποια είναι η ερμηνεία του $\frac{3}{2}$ στην εξίσωση;

Απάντηση

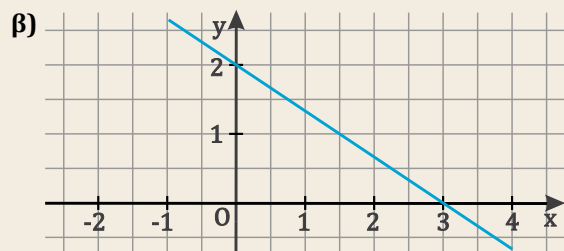
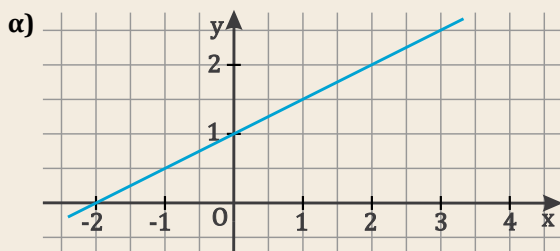
Αρκεί να βρούμε δύο σημεία της ευθείας. Δίνουμε δύο τιμές στο x, για παράδειγμα τις $x = 0$ και $x = 1$ και βρίσκουμε τις αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης που είναι $y = 1$ και $y = 2,5$. Έτσι η γραφική παράσταση είναι η ευθεία AB (Σχήμα), που διέρχεται από τα σημεία A(0, 1) και B(1, 2,5).

Ο $\frac{3}{2}$ δείχνει την αύξηση του y, όταν αυξηθεί κατά μία μονάδα ο x.



Εφαρμογή 3

Να βρείτε τις εξισώσεις των παρακάτω ευθειών (τους τύπους των συναρτήσεων).



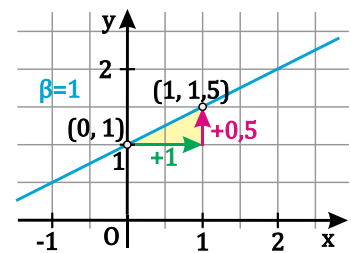
Απάντηση

α) Αφού η ευθεία δεν περνάει από την αρχή των αξόνων είναι της μορφής $y = ax + \beta$. Από το σχήμα έχουμε:

Για $\beta = 1$ η εξίσωση της ευθείας είναι $y = ax + 1$ και επειδή διέρχεται από το σημείο $(-2, 0)$ έχουμε: $0 = a(-2) + 1$ ή $2a = 1$ ή $a = \frac{1}{2} = 0,5$. Επομένως, η εξίσωση της ευθείας είναι: $y = 0,5x + 1$.

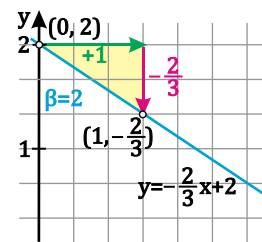
Σημείωση. Εναλλακτικά:

Ξέρουμε ότι ο α είναι η αύξηση του y για μια μοναδιαία αύξηση του x. Από το τρίγωνο του σχήματος βλέπουμε ότι η μεταβολή του y είναι 0,5 οπότε $\alpha = 0,5$. Επομένως $y = 0,5x + 1$.



β) Ανάλογα προς το (α) ή με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος βρίσκουμε:

$$\beta = 2 \text{ και } \alpha = -\frac{2}{3}. \text{ Επομένως η εξίσωση της ευθείας είναι: } y = -\frac{2}{3}x + 2.$$



Εφαρμογή 4

α) Να λύσετε γραφικά την εξίσωση $3x - 1 = 3$ (1).

β) Να λύσετε αλγεβρικά την εξίσωση και να συγκρίνετε το αλγεβρικό αποτέλεσμα με τη γραφική λύση.

Απάντηση

α) Θεωρούμε τις ευθείες $y = 3x - 1$ και $y = 3$, οπότε για να βρούμε τη γραφική λύση της (1) αρκεί να βρούμε την τετμημένη του κοινού τους σημείου, αν υπάρχει.

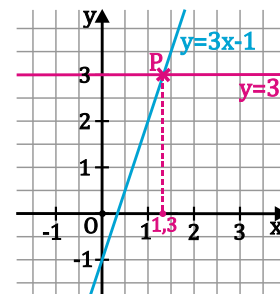
Σχεδιάζοντας κατά τα γνωστά τις γραφικές παραστάσεις των ευθειών, βλέπουμε ότι τέμνονται στο σημείο P του σχήματος.

Από το κοινό σημείο P των γραφικών παραστάσεων φέρνουμε ευθεία κάθετη στον άξονα x'x η οποία από το σχήμα βλέπουμε ότι τον τέμνει στο $x \approx 1,3$. Άρα η τετμημένη του κοινού τους σημείου που είναι και η λύση της εξίσωσης είναι περίπου $x \approx 1,3$.

β) Λύνουμε αλγεβρικά την εξίσωση: $3x - 1 = 3$ ή $3x = 4$ ή $x = \frac{4}{3}$ οπότε η ακριβής λύση είναι: $x = \frac{4}{3}$.

Επαλήθευση: $3 \cdot \frac{4}{3} - 1 = 4 - 1 = 3$ που ισχύει.

Από τη σύγκριση των δύο τιμών διαπιστώνουμε ότι η γραφική λύση, η οποία είναι μία εκτίμηση, προσεγγίζει με ακρίβεια ενός δεκαδικού ψηφίου την ακριβή λύση.



Σημείωση: Η (1) γράφεται ισοδύναμα $3x - 4 = 0$, οπότε μπορούμε εναλλακτικά να θεωρήσουμε τις ευθείες $y = 3x - 4$, $y = 0$ (άξονας x'x) και να βρούμε την τετμημένη του κοινού τους σημείου.

Εφαρμογή 5

Ένα φορτηγό αυτοκίνητο που ζυγίζει 6 τόνους (T) φορτώνεται με σιτάρι. Η μηχανή φόρτωσης φορτώνει 5T σε 10 λεπτά (min). Αν η μεταβλητή t παριστάνει τον χρόνο σε min και η y το αντίστοιχο μικτό βάρος (μάζα) του φορτηγού σε T, τότε:

α) Να εκφράσετε τη μεταβλητή y ως συνάρτηση της μεταβλητής t.

β) Να βρείτε πόσο χρόνο θα διαρκέσει η φόρτωση, αν το μέγιστο επιτρεπόμενο μικτό βάρος του φορτηγού είναι 20 T.

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.



Απάντηση

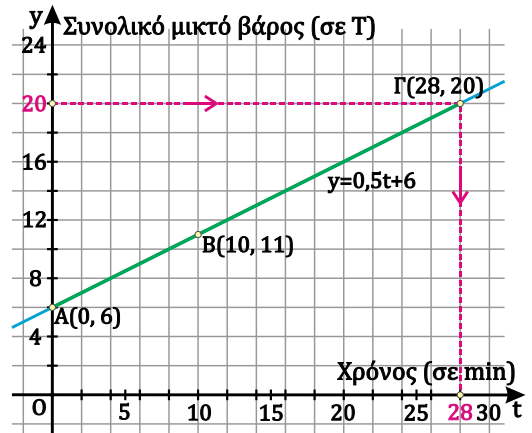
α) Ο χρόνος και το βάρος (μάζα) του φορτίου που φορτώνει η μηχανή είναι ανάλογα ποσά. Επειδή η μηχανή φόρτωσης σε 10 min φορτώνει 5 τόνους, σε 1 min θα φορτώνει $5:10 = 0,5$ τόνους. Επομένως, σε t min θα φορτώνει 0,5t τόνους (T). Το συνολικό μικτό βάρος y βρίσκεται, αν στο φορτίο 0,5t προσθέσουμε και τη μάζα του φορτηγού (απόβαρο) που είναι 6 τόνοι. Άρα $y = 0,5t + 6$.

β) Εφόσον το μέγιστο επιτρεπόμενο βάρος του φορτηγού είναι 20 τόνοι (T), από τον τύπο προκύπτει η εξίσωση $20 = 0,5t + 6$. Ο υπολογισμός της μεταβλητής t μπορεί να γίνει είτε γραφικά είτε αλγεβρικά. Για να βρούμε την αλγεβρική λύση αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $0,5t + 6 = 20$. Έχουμε:

$$0,5t + 6 = 20 \text{ ή } 0,5t = 20 - 6 \text{ ή } 0,5t = 14 \text{ ή } t = 28$$

Επομένως, η φόρτωση θα διαρκέσει 28 min.

γ) Η γραφική παράσταση της $y = 0,5t + 6$ είναι ευθεία που τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, 6)$. Χρειαζόμαστε ένα ακόμα σημείο B για να τη χαράξουμε. Για παράδειγμα για $t = 10$ είναι $y = 0,5 \cdot 10 + 6 = 11$. Άρα ένα δεύτερο σημείο είναι το $B(10, 11)$. Όμως στο πρόβλημά μας η μεταβλητή t δεν μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές και η μεγαλύτερη τιμή της είναι 28. Επομένως η γραφική παράσταση είναι το ευθύγραμμο τμήμα της $y = 0,5t + 6$ με t από 0 έως 18 (Πράσινο χρώμα στο σχήμα).

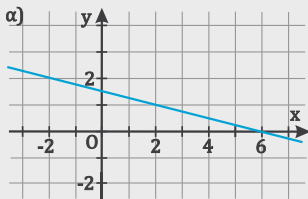




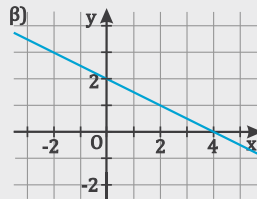
Να ανοίξετε τον σύνδεσμο και να απαντήσετε στις ερωτήσεις αξιολόγησης για τη γραμμική συνάρτηση $y = ax + \beta$.

Ερωτήσεις για Αξιολόγηση

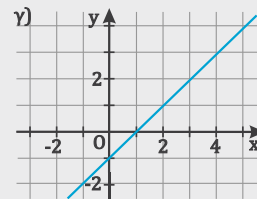
1 Στην εργασία της η Μαριέττα έγραψε τις εξισώσεις συναρτήσεων της μορφής $y = ax + \beta$. Να ελέγξετε τις λύσεις της και να τις διορθώσετε, όπου χρειάζεται.



$y = 0,25x + 1,5$



$y = -0,5 + 2x$



$y = x + 1$

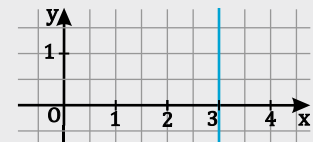
2 A. Να συζητήσετε στην τάξη τα σχόλια των μαθητών για την μπλε ευθεία.

Σοφία: Έχει εξίσωση $y = 3$

Μοχάμεντ: Έχει εξίσωση $x = 3$

Λίζα: Είναι γραφική παράσταση συνάρτησης

B. Να σχεδιάσετε την ευθεία $y = 3$ και να δώσετε την κλίση της.

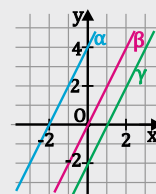


3 Να αντιστοιχίσετε κάθε ευθεία του διπλανού σχήματος με την εξίσωσή της:

A. $y = 2x + 4$

B. $y = 2x$

Γ. $y = 2x - 2$



4 Ένας αγρότης ταΐζει τα κοτόπουλά του με 1,5 κιλό συμπυκνωμένη τροφή την ημέρα. Πόσες ημέρες θα κρατήσει το φαγητό αν έχει απόθεμα 90 κιλά τροφής;

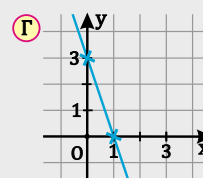
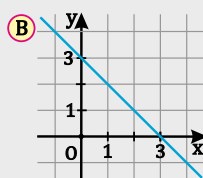
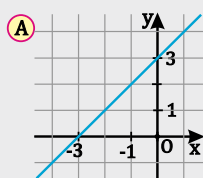
5 Η ευθεία $y = 5x$ είναι παράλληλη προς την ευθεία:

A. $y = x + 5$

B. $y = 5x - 2$

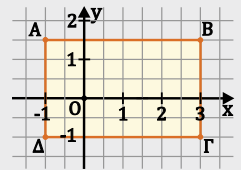
Γ. $y = -5x - 7$

6 Ποια είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 3 - x$; Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.



7 Σε ένα χιονοδρομικό κέντρο, το εισιτήριο κοστίζει 5 € την ώρα. Προστίθεται πάγια τιμή 10 € για τον εξοπλισμό. A. Πόσο κοστίζει για 4 ώρες μαζί με τον εξοπλισμό; B. Διπλασιάζεται η τιμή για 8 ώρες;

- 8 Οι πλευρές του διπλανού ορθογωνίου είναι παράλληλες προς τους άξονες x' και y' . Να γράψετε τις εξισώσεις των ευθειών: AB, ΒΓ, ΔΓ και ΑΔ.



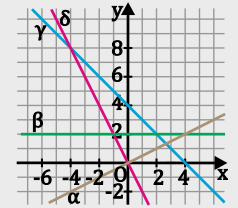
- 9 Να αντιστοιχίσετε σε κάθε ευθεία α , β , γ , δ του σχήματος την εξίσωσή της.

A. $y = 2x$

B. $y = 4 - x$

Γ. $y = \frac{1}{2}x$

Δ. $y = 2$



- 10 Να περιγράψετε μια κατάσταση που θα μπορούσε να παρασταθεί από καθεμία από τις συναρτήσεις:
 α) $y = 2x + 5$ β) $y = 2,5x$ γ) $y = 5x + 12$ δ) $y = 100 - 5x$



Με την ψηφιακή εφαρμογή να κάνετε την Εργασία με προεκτάσεις με τίτλο «Βαθμοί Κελσίου και βαθμοί Φαρενάιτ».



Ασκήσεις και Προβλήματα

- 1 Ποιος από τους πίνακες περιγράφει γραμμική συνάρτηση.

x	-1	0	1	2	3
y	-2	-1	0	-3	-6

x	-1	0	1	2	3
y	8	5	2	-1	-4

- 2 Να εξετάσετε αν τα σημεία βρίσκονται πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 3x - 5$:
 α) A(1, -2) β) B(-7, 30) γ) Γ(4, -7) δ) Δ(3, 4)

3 **Εργασία μαθητών κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες.**

Ο πίνακας δείχνει το ποσοστό y (σε δεκαδική μορφή) της ισχύος που απομένει σε μπαταρία φορητού υπολογιστή μετά από x ώρες χρήσης.

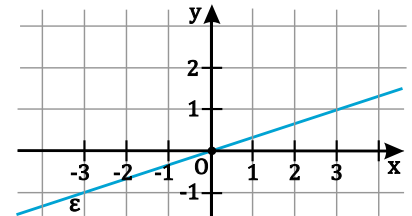
Ωρες χρήσης (x)	0	2	4
Ισχύς που απομένει (y)	1	0,6	0,2

- α) Η σχέση που συσχετίζει τη μεταβλητή y με τη μεταβλητή x είναι συνάρτηση; Αν ναι πώς μπορεί να εκφραστεί η μεταβλητή y ως συνάρτηση της μεταβλητής x ;
 β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης και να σημειώσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής με τους άξονες και να εξηγήσετε πώς αυτά ερμηνεύονται στο πλαίσιο του προβλήματος.
 γ) Μετά από πόσες ώρες η μπαταρία θα έχει το 75% της ισχύος της;
 δ) Αληθεύει ο ισχυρισμός ότι: «η μπαταρία χάνει το 20% της ισχύος της κάθε ώρα;»

- 4 Στις ακόλουθες προτάσεις δίνονται συναρτήσεις της μορφής $y = ax + \beta$. Να αναγνωρίσετε την κλίση α , τον σταθερό όρο β , να χαράξετε τη γραφική παράσταση και να εξηγήσετε τη σημασία των α , β .

- α) Το κέρδος K σε ευρώ από την πώληση x προϊόντων δίνεται από τη σχέση $K = 0,75x - 200$.
 β) Το μήκος y (σε cm) ενός ορθογωνίου ως συνάρτηση του πλάτους x (σε cm) είναι $y = 80 - x$.
 γ) Ο πληθυσμός μιας χώρας δίνεται από τη σχέση $\Pi = 0,5t + 20$. Το Π παριστάνει τον πληθυσμό σε εκατομμύρια κατοίκους και το t τον χρόνο σε έτη.
 δ) Η ποσότητα V της βενζίνης που μένει στο ρεζερβουάρ ενός αυτοκινήτου σε λίτρα (lt) δίνεται από τον τύπο $V = 70 - 0,08S$, όπου S είναι η διαυθείσα απόσταση σε χιλιόμετρα (km).

- 5 Στο διπλανό σύστημα αξόνων έχει σχεδιαστεί η ευθεία ϵ .



- α) Να βρείτε την εξίσωση της ϵ .

- β) Να σχεδιάσετε την ευθεία $y = \frac{1}{3}x + 1$ στο ίδιο σύστημα αξόνων χωρίς πίνακα τιμών. Να εξηγήσετε πώς θα το κάνετε.

- 6 Για καθεμία από τις ακόλουθες ευθείες να βρείτε την κλίση και το σημείο τομής με τον άξονα y' .

α) $y = 4x + 3$

β) $y = -2x + 2$

γ) $y = 2,5x + 3,5$

δ) $y = 1 - 3x$

- 7 Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων.

α) $y = 5x + 2$

β) $y = \frac{3}{5}x - 3$

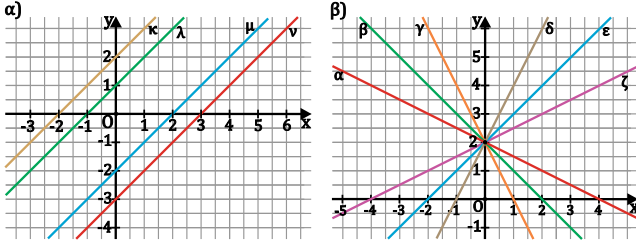
γ) $y = -4x - 2$

δ) $y = -\frac{7}{2}x + 2,5$

Να κάνετε την Εργασία με προεκτάσεις με τα θέματα: **α)** «Η αποδόσωση του Αμαζονίου» και **β)** «Η επιμήκυνση του ελατηρίου».



- 8 Να γράψετε την εξίσωση κάθε ευθείας και να περιγράψετε ομοιότητες και διαφορές στις εξισώσεις.



- 9 Σε κάθε περίπτωση να σχεδιάσετε σε ένα σύστημα συντεταγμένων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων. Να εξηγήσετε τη σημασία των α και β .
- α)** $y = -1,5x + \beta$ για $\beta = 0, 1, 2, 3$
β) $y = 2x + \beta$ για $\beta = -4, -3, -2, -1$
γ) $y = \alpha x + 1$ για $\alpha = 0,5, 1, 1,5, 2$
δ) $y = \alpha x + 4$ για $\alpha = -4, -3, -2, -1$

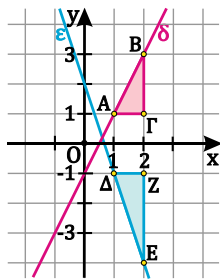
- 10 Να βρείτε στα (α), (γ) την κλίση α και στα (β), (δ) το β έτσι ώστε η συνάρτηση να μηδενίζεται για τη δεδομένη τιμή.
- α)** $y = \alpha x + 3, x = 1,5$ **β)** $y = 2x + \beta, x = -2,5$
γ) $y = \alpha x + 40, x = 8$ **δ)** $y = -\frac{6}{5}x + \beta, x = 4$

- 11 Να βρείτε την εξίσωση ευθείας που διέρχεται από το σημείο A και έχει τη δεδομένη κλίση.
- α)** $A(1, -3), \alpha = -1$ **β)** $B(2, -3), \alpha = 2$
γ) $\Gamma(3, 1), \alpha = -0,5$ **δ)** $\Delta(1, -1), \alpha = 0,5$

- 12 Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \alpha x + 2$, αν γνωρίζουμε ότι το σημείο $A(-7, -12)$ ανήκει στη γραφική παράσταση.

- 13 Για ποια τιμή του α οι ευθείες $\epsilon: y = (\alpha - 1)x + 3$ και $\zeta: y = 3x - 2$ είναι παράλληλες;

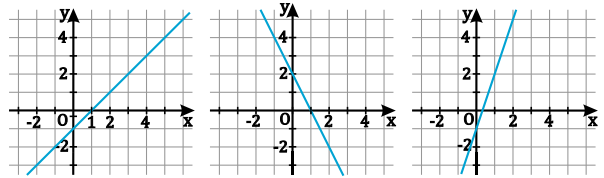
- 14 Στο διπλανό σύστημα αξόνων είναι σχεδιασμένες οι ευθείες δ και ϵ .



- α)** Χρησιμοποιώντας το τρίγωνο $AB\Gamma$ να εξηγήσετε με ποιο τρόπο μπορεί να υπολογιστεί η κλίση της ευθείας δ .
- β)** Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής της ευθείας δ με τον άξονα $y'y$.
- γ)** Χρησιμοποιώντας τα (α) και (β) να βρείτε την εξίσωση της ευθείας δ .
- δ)** Να κάνετε τα βήματα (α), (β) και (γ) για την ευθεία ϵ . Να χρησιμοποιήσετε το τρίγωνο $\Delta Z\epsilon$.

- 15 Ένα πυροσβεστικό όχημα περιέχει 3500 λίτρα νερό. Να βρείτε πόσο θα διαρκέσει η παροχή νερού εάν διοχετεύονται 175 λίτρα νερού το λεπτό.

- 16 Να γράψετε τις εξισώσεις των παρακάτω ευθειών.



- 17 Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε κατά προσέγγιση το σημείο τομής των συναρτήσεων με τον άξονα $x'x$. Στη συνέχεια, να βρείτε την ακριβή τιμή. Να κάνετε επαλήθευση.

α) $y = 3x - 6$ **β)** $y = -\frac{1}{2}x + 5$ **γ)** $y = 0,4x + 2,4$
δ) $y = -\frac{5}{3}x + 2$ **ε)** $y = -\frac{4}{5}x + 3$

- 18 Να προσδιορίσετε την τιμή του x για την οποία η συνάρτηση παίρνει τη δεδομένη τιμή.

α) $y = 3x - 2, y = 4$ **β)** $y = -\frac{2}{3}x + 5, y = 2$
γ) $y = 15x + 21, y = 18$ **δ)** $y = -1,3x + 50, y = -4,6$

- 19 Να λύσετε γραφικά και αλγεβρικά τις ακόλουθες εξισώσεις και να συγκρίνετε τα αποτελέσματα.

α) $3x + 4 = 11$ **β)** $-7x + 1 = 13$
γ) $11x - 1 = 17$ **δ)** $-13x + 19 = 2$

- 20 Η τιμή ενοικίασης ενός διαμερίσματος σε μία πλατφόρμα βραχυχρόνιας μίσθωσης αποτελείται από το ενοίκιο 50 € ανά διανυκτέρευση και το εφάπαξ τέλος καθαρισμού 30 €.

- α)** Να εξηγήσετε ποια σχέση είναι αναλογική και ποια ποσότητα παριστάνει τη σταθερή τιμή.
β) Να υπολογίσετε το συνολικό κόστος για 7 διανυκτερεύσεις.
γ) Να βρείτε τη συνάρτηση που μας δίνει το ποσό y που θα πληρώσουμε για x διανυκτερεύσεις.

- 21 Μια εταιρεία προσφέρει υπηρεσίες διαδικτύου με χρέωση 0,20 € ανά λεπτό, χωρίς πάγια συνδρομή. Μια άλλη εταιρεία παρέχει την ίδια υπηρεσία, αλλά με πάγιο κόστος 5 € και επιπλέον 0,20 € ανά λεπτό.

- α)** Να εκφράσετε τη συνολική χρέωση y συναρτήσει του χρόνου χρήσης x για κάθε εταιρεία.
β) Να κατασκευάσετε πίνακες τιμών και να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων στο ίδιο σύστημα αξόνων.
γ) Να εξηγήσετε γιατί οι γραφικές τους παραστάσεις δεν τέμνονται.
δ) Ποια εταιρεία είναι πάντα ακριβότερη και γιατί;

3.5

Η συνάρτηση της αντιστροφής αναλογίας $y = \frac{\alpha}{x}$

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

- Να διερευνούν μέσα από προβλήματα τη σχέση που συνδέει δύο αντιστρόφως ανάλογα ποσά.
- Να εκφράζουν τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά που ανακύπτουν σε προβλήματα της καθημερινής ζωής στη μορφή $y = \frac{\alpha}{x}$, $x \neq 0$, $\alpha \neq 0$.
- Να διερευνούν αν στη συνάρτηση $y = \frac{\alpha}{x}$ αυξάνεται ή μειώνεται το y όταν αυξάνεται το x για $\alpha > 0$ και $\alpha < 0$.
- Να επιλύουν προβλήματα αντιστρόφως ανάλογων ποσών με τη συνάρτηση $y = \frac{\alpha}{x}$, $x \neq 0$, $\alpha \neq 0$.



Διερεύνηση. Η κατασκευή της γέφυρας.

Εργασία μαθητών κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες.

Δέκα (10) εργάτες για να κατασκευάσουν μία γέφυρα χρειάζονται 6 ημέρες.

- α) Να εξετάσετε αν τα ποσά «πλήθος εργατών» και «χρόνος εργασίας» είναι ανάλογα και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών.

Πλήθος εργατών (x)	1	5	10	20	40	60
Χρόνος (y σε ημέρες)						

- β) Τι παρατηρείτε για το γινόμενο xy ;
- γ) Η σχέση που συνδέει τις ποσότητες x και y είναι συμμεταβολή; Είναι συνάρτηση; Αν είναι συνάρτηση να εκφράσετε τον χρόνο y που απαιτείται για να τελειώσει η γέφυρα ως συνάρτηση του αριθμού x των εργατών που εργάζονται σε αυτήν.
- δ) Πόσοι εργάτες πρέπει να εργαστούν για να τελειώσει το έργο σε 4 ημέρες; Σε πόσες ημέρες θα τελειώσει το έργο αν εργάζονται 30 εργάτες;
- ε) Να τοποθετήσετε τα ζεύγη αριθμών του πίνακα τιμών σε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων. Αν ενώσετε τα σημεία, τι παρατηρείτε;



Να διερευνήσετε τη συνάρτηση $y = \frac{\alpha}{x}$ με την ψηφιακή εφαρμογή.

Μαθηματικές Έννοιες και Διεργασίες Μάθησης

Δέκα μαθητές προγραμματίζουν ένα ταξίδι. Έχει συμφωνηθεί με το πρακτορείο ταξιδιών ότι το συνολικό κόστος θα είναι 300 €, ανεξάρτητα από τον αριθμό των μαθητών που θα συμμετάσχουν. Παρατηρούμε ότι:

- Για 10 μαθητές το ταξίδι κοστίζει 30 € το άτομο.
- Εάν ο αριθμός των μαθητών διπλασιαστεί (20), η αξία ανά μαθητή ελαττώνεται στο μισό (15 €).
- Εάν ο αριθμός των μαθητών γίνει μισός (5), η αξία ανά άτομο διπλασιάζεται (60 €).
- Εάν πενταπλασιάσουμε τον αριθμό των μαθητών, η αξία πέφτει στο ένα πέμπτο.

Δηλαδή όταν αυξάνεται ο αριθμός των μαθητών μειώνεται η τιμή συμμετοχής και αντίστροφα όταν μειώνεται ο αριθμός των μαθητών αυξάνεται η τιμή συμμετοχής, έτσι ώστε το γινόμενό τους να παραμένει πάντοτε το ίδιο. Τέτοια ποσά, όπως ο αριθμός των συμμετεχόντων και η τιμή συμμετοχής ανά άτομο, λέγονται **αντιστρόφως ανάλογα** ποσά.

Αριθμός μαθητών (x)	Αξία ανά μαθητή (y σε €)
10	30
20	15
5	60
25	12

Annotations:
 - From (10, 30) to (20, 15): x multiplied by 2, y divided by 2.
 - From (10, 30) to (5, 60): x divided by 2, y multiplied by 2.
 - From (10, 30) to (25, 12): x multiplied by 2.5, y divided by 2.5.

Γενικά

- Δύο ποσά λέγονται **αντιστρόφως ανάλογα** ή **αντίστροφα** αν μεταβάλλονται έτσι ώστε όταν το ένα ποσό πολλαπλασιάζεται (διαιρείται) με έναν αριθμό το άλλο διαιρείται (πολλαπλασιάζεται) με τον ίδιο αριθμό.

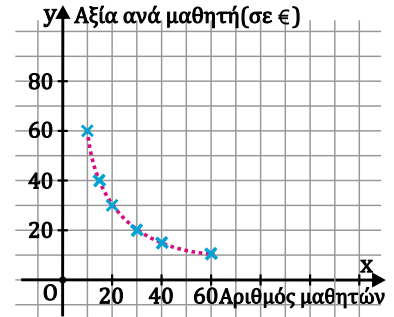
Ισοδύναμα

- Δύο μεγέθη x, y λέγονται **αντιστρόφως ανάλογα** όταν το γινόμενο των αντίστοιχων τιμών τους παραμένει σταθερό, δηλαδή όταν $x \cdot y = \alpha, \alpha \neq 0$.

Στην περίπτωση του παραδείγματός μας, ισχύει ότι $x \cdot y = 300$ ή $y = \frac{300}{x}$ και ονομάζεται **συνάρτηση της αντίστροφης αναλογίας**.

Αναπαριστώντας σε ένα σύστημα αξόνων τα ζεύγη του πίνακα του παραδείγματος, παίρνουμε το διπλανό σχήμα από το οποίο διαπιστώνουμε τη μορφή της καμπύλης πάνω στην οποία βρίσκονται τα σημεία.

Στη συνάρτηση $y = \frac{\alpha}{x}, x \neq 0, \alpha \neq 0$ τα x και y παριστάνουν τις τιμές δύο ποσών τα οποία είναι αντιστρόφως ανάλογα.

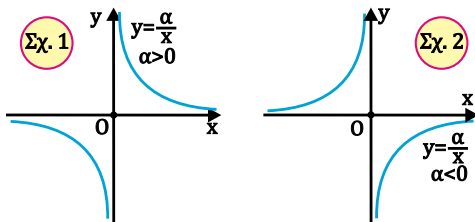


Γενικά

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{\alpha}{x}, x \neq 0, \alpha \neq 0$ λέγεται **υπερβολή** και αποτελείται από **δύο ξεχωριστούς κλάδους** οι οποίοι δεν τέμνουν κανέναν από τους άξονες συντεταγμένων.

Οι κλάδοι της υπερβολής βρίσκονται:

- Στο 1ο και στο 3ο τεταρτημόριο των αξόνων, όταν $\alpha > 0$ (σχ. 1).
- Στο 2ο και στο 4ο τεταρτημόριο των αξόνων, όταν $\alpha < 0$ (σχ. 2).



Με την ψηφιακή εφαρμογή να διερευνήσετε τον ρόλο της παραμέτρου α στη συνάρτηση $y = \frac{\alpha}{x}$.



Εφαρμογή 1

α) Να εξετάσετε αν τα ποσά x και y του πίνακα είναι αντιστρόφως ανάλογα.

x	4/3	4	8	5	40	60
y	60	20	10	16	2	4/3

β) Να εκφράσετε τη μεταβλητή y ως συνάρτηση της μεταβλητής x .

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

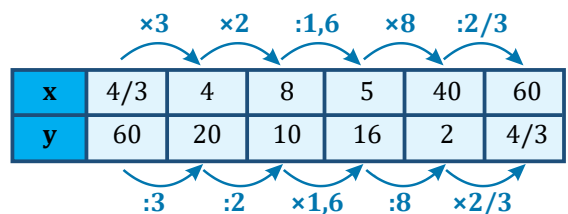
Απάντηση

α) Διαπιστώνουμε ότι:

$$4 \cdot 20 = 8 \cdot 10 = 5 \cdot 16 = 4 \cdot 20 = 5 \cdot 16 = 40 \cdot 2 = 80,$$

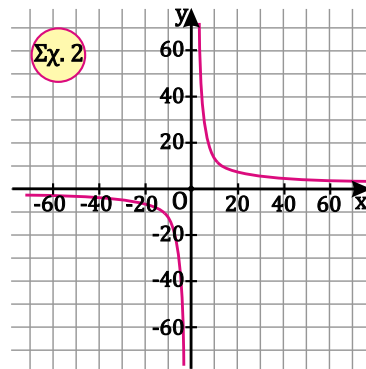
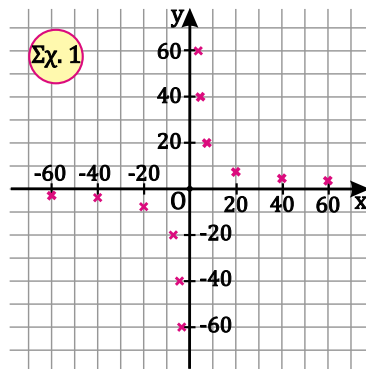
δηλαδή ότι το γινόμενο των αντίστοιχων τιμών τους είναι σταθερό. Συνεπώς, τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα.

β) Από το σταθερό γινόμενο $xy = 80$ προκύπτει ότι $y = \frac{80}{x}$.



Στη συνάρτηση αυτή οι τιμές x και y παριστάνουν τις τιμές δύο ποσών τα οποία είναι αντιστρόφως ανάλογα.

γ) Αν απεικονίσουμε τα ζεύγη των αντίστοιχων τιμών του πίνακα με σημεία του καρτεσιανού επιπέδου και τοποθετήσουμε και αντίστοιχες αρνητικές τιμές βλέπουμε ότι αυτά δεν βρίσκονται σε ευθεία, αλλά φαίνεται να βρίσκονται σε μία καμπύλη (σχήμα 1).



Στη συνάρτηση $y = \frac{80}{x}$, η μεταβλητή x μπορεί να είναι οποιοσδήποτε αριθμός ($\neq 0$), οπότε η γραφική παράσταση δεν θα αποτελείται μόνο από τα σημεία του πίνακα, αλλά θα σχηματίζεται μια συνεχής καμπύλη (σχήμα 2).



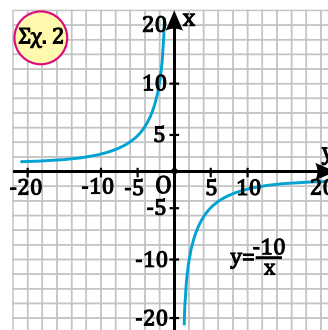
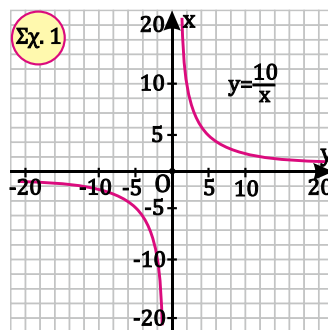
Εφαρμογή 2

- α) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων **i.** $y = \frac{10}{x}$, **ii.** $y = \frac{-10}{x}$.
- β) Σε ποια τεταρτημόρια βρίσκονται οι κλάδοι της υπερβολής σε κάθε γραφική παράσταση; Από τι εξαρτάται;
- γ) Να εξετάσετε τι συμβαίνει στη μεταβλητή y όταν αυξάνεται η μεταβλητή x .
- δ) Γιατί οι δύο υπερβολές δεν τέμνουν τους άξονες $y'y$ και $x'x$;

Απάντηση

α) Κατασκευάζουμε πίνακες τιμών και χαράσσουμε τις γραφικές παραστάσεις.

x	-20	-10	-5	-4	-2	-1	1	2	4	5	10	20
$y = \frac{10}{x}$	-0,5	-1	-2	-2,5	-5	-10	10	5	2,5	2	1	0,5
$y = \frac{-10}{x}$	0,5	1	2	2,5	5	10	-10	-5	-2,5	-2	-1	-0,5



β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{10}{x}$ ($\alpha = 10 > 0$) αποτελείται από δύο συμμετρικούς κλάδους (ως προς την αρχή των αξόνων και ως προς τις διχοτόμους των γωνιών των αξόνων) που βρίσκονται στο 1ο και 3ο τεταρτημόριο (σχήμα 1). Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{-10}{x}$ ($\alpha = -10 < 0$) αποτελείται από δύο

συμμετρικούς κλάδους (ως προς την αρχή των αξόνων και ως προς τις διχοτόμους των γωνιών των αξόνων) που βρίσκονται στο 2ο και 4ο τεταρτημόριο (σχήμα 2). Το πρόσημο του α καθορίζει σε ποια τεταρτημόρια βρίσκεται η υπερβολή $y = \frac{\alpha}{x}$.

- γ) Για $\alpha > 0$ (συνάρτηση $y = \frac{10}{x}$) παρατηρούμε από τον πίνακα και από τη γραφική παράσταση ότι «όταν αυξάνεται το x οι αντίστοιχες τιμές του y μειώνονται». Για $\alpha < 0$ (συνάρτηση $y = \frac{-10}{x}$) παρατηρούμε από τον πίνακα και από τη γραφική παράσταση ότι «όταν αυξάνεται το x οι αντίστοιχες τιμές του y αυξάνονται».
- δ) Οι δύο υπερβολές δεν τέμνουν τους άξονες $y'y$ και $x'x$ γιατί οι συναρτήσεις $y = \frac{10}{x}$ και $y = \frac{-10}{x}$ δεν ορίζονται για $x = 0$ και $y = 0$.



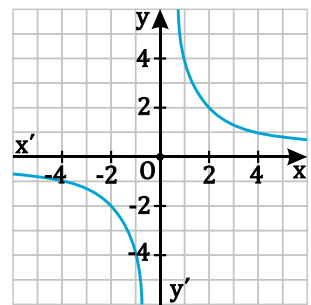
Εφαρμογή 3

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης που έχει γραφική παράσταση την υπερβολή του σχήματος.

Απάντηση

Επειδή η γραφική παράσταση είναι υπερβολή ο τύπος της είναι της μορφής $y = \frac{\alpha}{x}$.

Για να προσδιορίσουμε το α αρκεί να βρούμε ένα σημείο της γραφικής παράστασης, οι συντεταγμένες του οποίου να επαληθεύουν τον τύπο της συνάρτησης. Από το σχήμα βλέπουμε ότι ένα σημείο είναι το $(4, 1)$. Αντικαθιστώντας στον τύπο $x = 4$ και $y = 1$ παίρνουμε $1 = \frac{\alpha}{4}$ ή $\alpha = 4$. Συνεπώς ο τύπος της συνάρτησης είναι $y = \frac{4}{x}$.



Εφαρμογή 4

Για να ξεφορτώσουν ένα φορτηγό 2 εργάτες χρειάζονται 3 ώρες.

- α) Να εξετάσετε αν τα ποσά «αριθμός εργατών – αριθμός ωρών» συνδέονται με κάποια σχέση αναλογίας.
- β) Να κατασκευάσετε έναν πίνακα τιμών.
- γ) Σε πόσες ώρες θα ξεφορτώσουν το ίδιο φορτηγό 5 εργάτες;



Απάντηση

- α) Είναι φανερό ότι αφού 2 εργάτες ξεφορτώνουν το φορτηγό σε 3 ώρες, οι διπλάσιοι εργάτες θα ξεφορτώσουν το φορτηγό στις μισές ώρες. Δηλαδή, όταν πολλαπλασιάζεται το ένα ποσό με 2, η αντίστοιχη τιμή του άλλου διαιρείται με το 2. Άρα τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα.

- β) Πίνακας τιμών:

Αριθμός εργατών (x)	2	4	5
Αριθμός ωρών (y)	3	1,5	y

- γ) **1ος τρόπος:** Εφόσον τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα τα γινόμενα των αντίστοιχων τιμών θα είναι ίσα. Δηλαδή $2 \cdot 3 = 4 \cdot 1,5 = 5 \cdot y$. Λύνοντας την εξίσωση $2 \cdot 3 = 5 \cdot y$ με άγνωστο το y παίρνουμε:

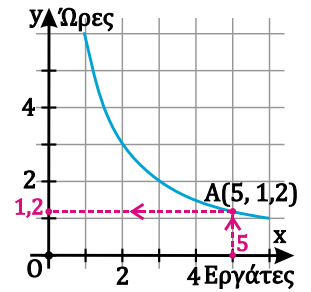
$$2 \cdot 3 = 5 \cdot y \text{ ή } 5y = 6 \text{ ή } y = 1,2$$

Άρα οι 5 εργάτες θα ξεφορτώσουν το φορτηγό σε 1,2 ώρες.



Να ανοίξετε τον σύνδεσμο και να απαντήσετε στις ερωτήσεις αξιολόγησης για τη συνάρτηση $y = \frac{\alpha}{x}$.

2ος τρόπος: Σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{6}{x}$ για $x > 0$ με τη βοήθεια ενός πίνακα τιμών (Σχήμα). Στη συνέχεια φέρνουμε ευθεία κάθετη στο σημείο A του άξονα των x η οποία τέμνει τη γραφική παράσταση στο σημείο A . Από το σημείο A φέρνουμε κάθετη στον άξονα των y , που τον τέμνει στο $(0, 1,2)$. Το 1,2 είναι η αντίστοιχη τιμή του 5. Δηλαδή το A έχει συντεταγμένες $(5, 1,2)$. Με βάση το πλαίσιο της κατάστασης το σημείο $A(5, 1,2)$ ερμηνεύεται από την περιγραφή: στους 5 εργάτες αντιστοιχούν 1,2 ώρες.



Ερωτήσεις για Αξιολόγηση

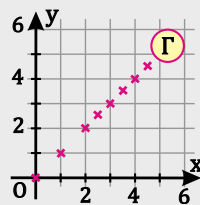
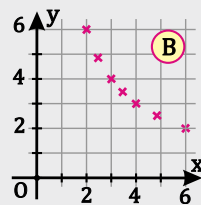
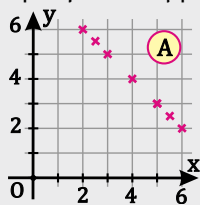
- 1 Να εξετάσετε σε ποιον από τους πίνακες τα ποσά x και y είναι αντιστρόφως ανάλογα. Να βρείτε τον τύπο που τα συνδέει.

Πίνακας Α			
x	2	4	6
y	0,2	0,4	0,6

Πίνακας Β			
x	3	1	4
y	2	6	2

Πίνακας Γ			
x	1/2	1/3	1/4
y	2	3	4

- 2 Ποια γραφική παράσταση παριστάνει τα ζεύγη θετικών ακεραίων (x, y) , όπου x το μήκος και y το πλάτος ενός ορθογωνίου εμβαδού 12 cm^2 . Να αιτιολογήσετε.

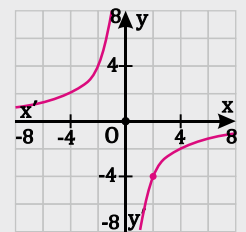


Με την ψηφιακή εφαρμογή να κάνετε την Εργασία με προεκτάσεις με τίτλο «Μοντελοποίηση μιας κατάστασης από τη Γεωμετρία».

- 3 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή (Λ) αν είναι λανθασμένες. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

A. $y = \frac{1}{x}$ βρίσκεται στο 1ο και 3ο τεταρτημόριο. B. $y = -\frac{3}{x}$ βρίσκεται στο 2ο και 3ο τεταρτημόριο.

- 4 Ποιος είναι ο τύπος της συνάρτησης, της οποίας η γραφική παράσταση είναι η υπερβολή του σχήματος.



- 5 Ποια είναι εξίσωση αντίστροφης αναλογίας:

A. $y = \pi x$ B. $y = 2(x-1)$ Γ. $xy = 28$



Ασκήσεις και Προβλήματα

- 1 Αν τα ποσά x και y είναι αντιστρόφως ανάλογα να συμπληρώσετε τον πίνακα:

x	5	4		2		-64	
y	12,8		8		16		-4

Να εκφράσετε τη μεταβλητή y ως συνάρτηση της μεταβλητής x .

- 2 Να ελέγξετε εάν οι πίνακες παριστάνουν αντίστροφη αναλογία. Αν ναι, να δώσετε τον τύπο.

α)

x	1	2	3	4	5	30
y	60	30	20	25	12	2

β)

x	1	2	4	5	10	50
y	100	50	25	20	10	2

γ)

x	2	3	5	10	25	20
y	75	50	30	15	6	12

δ)

x	600	300	200	150	120	100
y	1	2	3	4	5	6

- 3 Η Νεφέλη συμπλήρωσε τον ακόλουθο πίνακα τιμών της συνάρτησης $y = -\frac{3}{x}$

α) Να ελέγξετε τις τιμές και να διορθώσετε τυχόν λάθη.

β) Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών με όλους τους ακέραιους αριθμούς από -5 έως 5 και να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

x	-1	0	1	3
y	-3	0	-3	-1

4 α) Να δημιουργήσετε έναν πίνακα τιμών και να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

i. $y = \frac{2}{x}$ ii. $y = -\frac{2}{x}$ iii. $y = \frac{1}{2x}$

β) Τι συμβαίνει κάθε φορά στη μεταβλητή y όταν αυξάνεται η μεταβλητή x;

5 Αν x είναι θετικός πραγματικός αριθμός να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων: α) $y = \frac{12}{x}$ β) $y = -\frac{12}{x}$

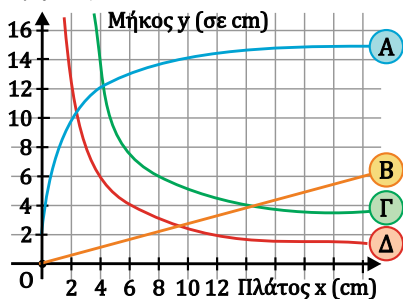
6 Να προσδιορίσετε την υπερβολή που διέρχεται από το σημείο A.
α) A(3, 7) β) A(2, 2) γ) A(-1, 2) δ) A(3, 0,25)

7 Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{2x+3}{x}$ διέρχεται από το σημείο A(-4, 2), να βρείτε την τιμή του λ.

8 Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου είναι 24 cm².

Πλάτος x (σε cm)	1	2	6	9,6	10
Μήκος y (σε cm)		16		2,5	1,5

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα.
β) Ποια από τις γραφικές παραστάσεις αντιστοιχεί στη συνάρτηση y; Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.



9 Μία οικογένεια μπορεί να κάνει 15 μέρες διακοπές, αν ξοδεύει καθημερινά 200 €.

α) Να εξετάσετε αν τα ποσά «ημέρες διακοπών - ημερήσια έξοδα» είναι αντιστρόφως ανάλογα. Αν είναι να εκφράσετε τα ημερήσια έξοδα ως συνάρτηση των ημερών διακοπών.

β) Αν η οικογένεια θέλει να κάνει 20 μέρες διακοπές, πόσο πρέπει να περιορίσει τα ημερήσια έξοδά της;

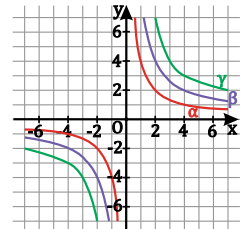
10 Ένας ποδηλάτης αν κινείται με σταθερή ταχύτητα 20 km/h χρειάζεται 45 min για να διανύσει μία απόσταση.

α) Να εξετάσετε αν τα ποσά «ταχύτητα (v) και χρόνος (t)» είναι αντιστρόφως ανάλογα. Αν είναι, να εκφράσετε το t ως συνάρτηση του v.

β) Πόσο χρόνο χρειάζεται για την ίδια απόσταση:
i. μοτοποδήλατο που τρέχει 25 km/h;
ii. πεζός που βαδίζει 6 km/h;
iii. αυτοκίνητο που τρέχει 80 km/h;

11 Ένα πλοίο έχει πλήρωμα 30 άνδρες και τρόφιμα για 40 ημέρες. Περισυνέλεξε όμως 20 ναυαγούς. Για πόσες ημέρες θα φτάσουν τώρα τα τρόφιμα αν η μερίδα του φαγητού δεν ελαττωθεί;

12 Να βρείτε τους τύπους των συναρτήσεων που έχουν γραφικές παραστάσεις τις υπερβολές, οι οποίες είναι σχεδιασμένες στο ίδιο σύστημα αξόνων.



13 Μία βρύση παρέχει 10 m³ σε μία ώρα και γεμίζει μία άδεια δεξαμενή σε 3/8 της ώρας. Σε πόσες ώρες θα γεμίσει τη δεξαμενή μία άλλη βρύση με παροχή 15 m³/h;

14 Για τον χρωματισμό ενός σχολείου χρειάζονται 60 μεροκάματα.

α) Πόσοι ελαιοχρωματιστές ίδιας απόδοσης πρέπει να εργαστούν ώστε το έργο να τελειώσει σε 5 ημέρες;
β) Σε πόσες ημέρες θα τελειώσει το έργο, αν εργαστούν 15 ελαιοχρωματιστές;

15 Για την ύδρευση ενός χωριού χρειάζονται 250 σωλήνες με μήκος 4 m ο καθένας. Όμως το εργοστάσιο σταμάτησε να κατασκευάζει σωλήνες 4 μέτρων και τώρα κατασκευάζει σωλήνες μόνο 5 m, 8 m και 10 m.

α) Να εξετάσετε αν τα ποσά «πλήθος σωλήνων - μήκος σωλήνων» είναι αντιστρόφως ανάλογα. Αν είναι να εκφράσετε το πλήθος των σωλήνων ως συνάρτηση του μήκους αυτών.

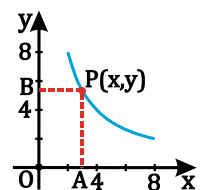
β) Πόσους σωλήνες 5 m χρειάζονται για την ύδρευση του χωριού;

16 Στο διπλανό σχήμα έχουμε έναν κλάδο της υπερβολής $y = \frac{16}{x}$, $1 \leq x \leq 1000$ και το ορθογώνιο ΡΑΟΒ.

α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του ΡΑΟΒ είναι σταθερό.

β) Να εκτιμήσετε το εμβαδόν του ΡΑΟΒ για $x = 999,999$.

γ) Πότε το ορθογώνιο γίνεται τετράγωνο;



3.6 Ανακεφαλαίωση και διεύρυνση της θεματικής ενότητας

Η Συνάρτηση. Όταν έχουμε δύο μεταβλητές ποσότητες x και y που αλληλεξαρτώνται, λέμε ότι η μεταβλητή y είναι συνάρτηση του x όταν σε κάθε τιμή της μεταβλητής x αντιστοιχεί μόνο μία τιμή της μεταβλητής y .

Αναπαραστάσεις της συνάρτησης: Λεκτική, αριθμητική (πίνακας τιμών), αλγεβρική – συμβολική (τύπος) και γεωμετρική (γραφική παράσταση).

Η συνάρτηση $y = ax$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax$ είναι μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0, 0)$. Οι μεταβλητές ποσότητες x και y παριστάνουν ανάλογα ποσά. Η βασική ιδιότητα των ανάλογων ποσών είναι ότι οι λόγοι των αντίστοιχων τιμών τους είναι ίσοι, δηλαδή σχηματίζουν αναλογία. Συγκεκριμένα είναι $\frac{y}{x} = a$ ($x \neq 0$). Η παράμετρος a είναι η **σταθερά της αναλογίας** και η **κλίση της ευθείας** $y = ax$.

Η συνάρτηση $y = ax + \beta$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax + \beta$ είναι μια ευθεία που τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, \beta)$. Η παράμετρος β είναι το σημείο τομής της γραφικής παράστασης με τον άξονα $y'y$ και η παράμετρος a είναι η κλίση της ευθείας $y = ax + \beta$. Οι $y = ax$ και $y = ax + \beta$ έχουν το ίδιο a (π.χ. οι $y = 2x$ και $y = 2x + 1$), δηλαδή την ίδια κλίση και είναι ευθείες **παράλληλες**. Οι συναρτήσεις $y = ax$ και $y = ax + \beta$ έχουν γραφικές παραστάσεις ευθείες γραμμές και γι' αυτό λέγονται **γραμμικές συναρτήσεις**.

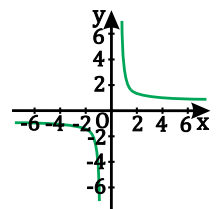
Η συνάρτηση $y = \frac{\alpha}{x}$, $x \neq 0$, $\alpha \neq 0$. Η συνάρτηση έχει γραφική παράσταση μια καμπύλη που αποτελείται από δύο συμμετρικούς κλάδους και ονομάζεται **υπερβολή**. Οι μεταβλητές x και y αντιπροσωπεύουν **αντιστρόφως ανάλογα ποσά**. Η βασική ιδιότητα των αντιστρόφως ανάλογων ποσών είναι ότι **το γινόμενο των αντίστοιχων τιμών τους είναι σταθερό**. Συγκεκριμένα ισχύει: $x \cdot y = \alpha$. Η παράμετρος α είναι η σταθερά της αντίστροφης αναλογίας (το σταθερό γινόμενο).

Να κάνετε την *Εργασία με προεκτάσεις*: «Μοντελοποίηση προβλημάτων της καθημερινής ζωής».

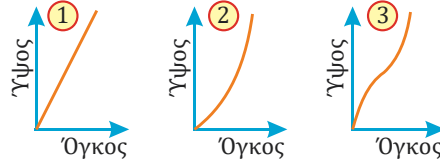
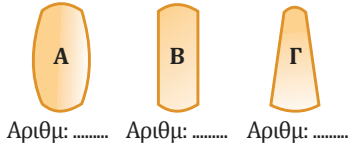


Ερωτήσεις για συζήτηση και αναστοχασμό

- Για τις ακόλουθες καταστάσεις να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης και να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση.
 - Το κόστος παραγωγής ενός κουλουριού είναι 0,30 €. Να βρείτε το συνολικό κόστος y για x κουλούρια.
 - Σε ένα λεβητοστάσιο το νερό έχει ύψος 25 cm. Το νερό αντλείται ομοιόμορφα με αντλία νερού. Το νερό κατεβαίνει κατά 2 εκατοστά την ώρα. Να βρείτε τη στάθμη του νερού σε x ώρες.
 - Η αρχική θερμοκρασία μιας μηχανής είναι 100 °C και αυξάνεται 25 °C ανά δευτερόλεπτο (sec). Ποια είναι κάθε φορά η θερμοκρασία T ως προς τον χρόνο t .
 - Ένα συνεργείο χρειάζεται 40 ώρες για να ολοκληρώσει μια κατασκευή με έναν εργάτη, 20 ώρες για 2 εργάτες κ.ο.κ. Να βρείτε τον χρόνο y ολοκλήρωσης της εργασίας για x εργάτες.
- Δίνεται η ευθεία $y = (\lambda + 4)x$. Να βρείτε την τιμή του λ , αν η ευθεία: **α)** έχει κλίση 7, **β)** έχει την ίδια κλίση με την ευθεία $y = -5$.
- Ένας ελαιοχρωματιστής έβαψε ένα δωμάτιο σε 3 ημέρες. Ο Κώστας ισχυρίζεται ότι για να βάψει ο ελαιοχρωματιστής ένα δωμάτιο με διπλάσιες διαστάσεις θα χρειαστούν 6 ημέρες. Συμφωνείτε; Να αιτιολογήσετε.
- Η Μαριάμ ισχυρίστηκε ότι αν ένα παιδί 5 ετών έχει βάρος 20 κιλά, τότε όταν θα είναι 30 χρονών θα έχει βάρος 120 κιλά. Συμφωνείτε; Να αιτιολογήσετε.
- Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{2}{x}$. Να εξετάσετε αν οι κλάδοι της υπερβολής τέμνουν τους άξονες $x'x$ και $y'y$. Αν ναι, να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής. Αν όχι, να εξηγήσετε γιατί.



6. Γεμίζουμε τα τρία δοχεία με σταθερή παροχή νερού. Οι γραφικές παραστάσεις περιγράφουν το ύψος της στάθμης του νερού ως προς τον όγκο νερού που έχουμε ρίξει μέσα. Να αντιστοιχίσετε τα δοχεία με γραφικές παραστάσεις. Να αιτιολογήσετε.



Να ανοίξετε τον σύνδεσμο και να απαντήσετε στις επαναληπτικές ερωτήσεις αξιολόγησης.



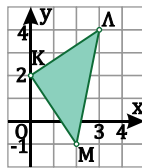
Να ανοίξετε τον σύνδεσμο και να απαντήσετε στις επαναληπτικές ερωτήσεις αξιολόγησης.



Να ανοίξετε τον σύνδεσμο και να απαντήσετε στις επαναληπτικές ερωτήσεις αξιολόγησης.

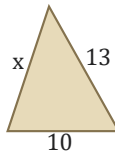
Επαναληπτικά Έργα & Προεκτάσεις

1 Οι συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου ΚΛΜ είναι $K(0, 2)$, $L(3, 4)$ και $M(2, -1)$. Να εξετάσετε αν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

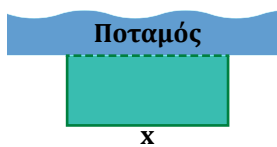


2 **Μαθηματικές συνδέσεις.**

- α) Να βρείτε την περίμετρο Π του διπλανού τριγώνου.
 β) Να αναγνωρίσετε την ανεξάρτητη και την εξαρτημένη μεταβλητή της συνάρτησης που προκύπτει.
 γ) Ποιες τιμές μπορεί να πάρει η πλευρά x και η περίμετρος Π .



3 Για την περιφράξη ενός αγροκτήματος σχήματος ορθογωνίου το οποίο βρίσκεται παράπλευρα από έναν ποταμό χρειάζονται 200 μέτρα φράκτη.



Να εκφράσετε το εμβαδόν της επιφάνειας που πρέπει να περιφραχθεί ως προς x .

4 Αν η ευθεία $\epsilon: y = ax + \beta$ έχει τον ακόλουθο πίνακα τιμών, να συμπληρώσετε τις τιμές που λείπουν.

α)	x	-3	-1	0		3	5
	y	8	4		-2		-8

β)	x	-3	-2	-1	0		2
	y	6			-3	-6	-9

5 **Μαθηματική πρόκληση.** Οι τιμές μιας συνάρτησης δίνονται από τον ακόλουθο πίνακα τιμών:

x	1	2	3	4
y	2	4	6	8

- α) Επαληθεύει η συνάρτηση $y = 2x$ τον παραπάνω πίνακα τιμών; Ποια είναι η τιμή της συνάρτησης $y = 2x$ για $x = 5$;
 β) Η συνάρτηση $y = 2x + (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$ επαληθεύει τον παραπάνω πίνακα τιμών; Ποια είναι η τιμή της συνάρτησης: $y = 2x + (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$, για $x = 5$;
 γ) Ποιο συμπέρασμα βγάζετε από τη σύγκριση των α) και β);

6 Για καθεμιά από τις ακόλουθες ευθείες να βρείτε την κλίση και το σημείο τομής με τον άξονα $y'y$.

- α) $y = 3x - 2,5$ β) $y = -x + 4$
 γ) $y = -1,5x + 2,5$ δ) $y = 2 + 4x$

7 Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

- α) $y = 3x + 2$, όταν $x \leq 1$
 β) $y = 2x + 2$, όταν $2 < x < 3$

8 Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

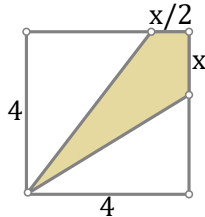
- α) $y = \frac{1}{4}x + 2$ β) $y = \frac{2}{5}x - 3$
 γ) $y = -\frac{1}{3}x - 2$ δ) $y = -\frac{5}{2}x + 2,5$

9 Αν το σημείο $A(1, -6)$ βρίσκεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax^2 - 8$ να βρείτε την τιμή του a .

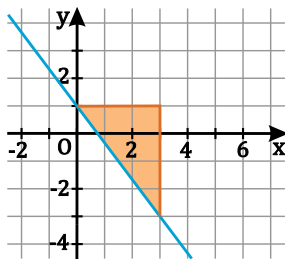
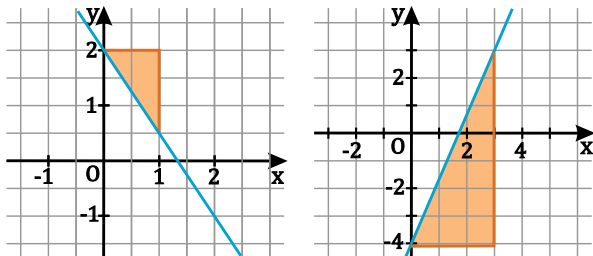
- 10 Να βρείτε την τιμή του λ , για την οποία:
 α) Η ευθεία $\varepsilon: y = (2\lambda - 3)x$ διέρχεται από το σημείο $A(-1, 7)$.
 β) Η ευθεία $\zeta: y = -\frac{3}{4}x$ διέρχεται από το σημείο $B(3\lambda + 1, -3)$.

11 **Εργασία σε μικρές ομάδες.**

Δίνεται το διπλανό τετράγωνο πλευράς 4 cm με $0 < x < 4$. Να εκφράσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου σχήματος ως συνάρτηση του x και να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για τις τιμές που παίρνει το x .



- 12 Ένας ηλεκτρολόγος είχε έσοδα 13392 ευρώ το δεύτερο τρίμηνο του έτους. Πόσα χρήματα πρέπει να αποδώσει στο κράτος, αν ο ΦΠΑ που παρακρατά από τους πελάτες του είναι 24%.
- 13 Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που τέμνει τον άξονα x' στο σημείο $A(-6, 0)$ και έχει κλίση $-\frac{1}{4}$.
- 14 Με τη βοήθεια της κλίσης και του σημείου τομής με τον άξονα y' , να βρείτε την εξίσωση κάθε ευθείας.



- 15 Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{1}{2}x + \beta$, αν γνωρίζουμε ότι διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- 16 Η ευθεία (ε): $y = ax + \beta$ διέρχεται από το σημείο $(-2, -1)$ και είναι παράλληλη στην ευθεία (δ): $y = 3x$. Να βρείτε τα a και β και να σχεδιάσετε την ευθεία.
- 17 Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο A και έχει κλίση α :
 α) $A(-1, 3)$, $\alpha = 3$ β) $A(0, 0)$, $\alpha = -1$
 γ) $A(0, 1)$, $\alpha = 2$ δ) $A(1, 4)$, $\alpha = -2$.

- 18 Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -3x + \beta$, αν γνωρίζουμε ότι το σημείο $B(-2, 4)$ ανήκει στη γραφική παράσταση.

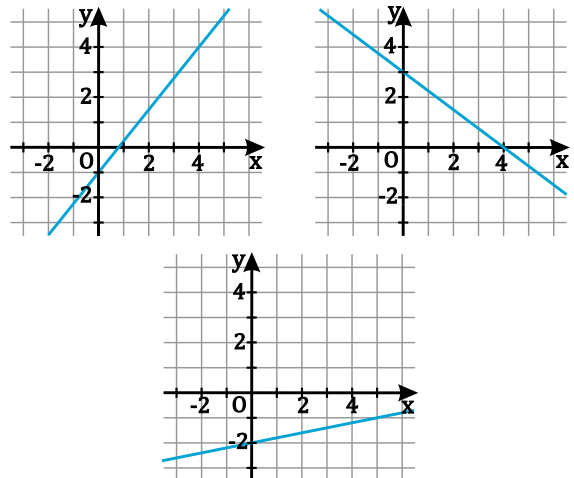
- 19 Να σχεδιάσετε την ευθεία $y = ax + \beta$ με κλίση α και β το σημείο τομής με τον άξονα y' .

- α) $\alpha = 3,5$, $\beta = -3$ β) $\alpha = \frac{3}{4}$, $\beta = 3$
 γ) $\alpha = 0,25$, $\beta = 0,5$ δ) $\alpha = \frac{3}{10}$, $\beta = \frac{7}{10}$

- 20 Το κόστος ενός αυτοκινήτου είναι 20000 €. Η αξία μειώνεται κατά 1500 € κάθε χρόνο.

- α) Να εκφράσετε την αξία (A), σε χιλιάδες ευρώ, ως συνάρτηση του χρόνου (t) σε χρόνια.
 β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.
 γ) Πότε θα πέσει η αξία στα 11000 €;

- 21 Να γράψετε τις εξισώσεις των παρακάτω ευθειών.



- 22 Να σχεδιάσετε τα δύο σημεία σε ένα σύστημα συντεταγμένων και να τα συνδέσετε για να σχηματίσετε μία ευθεία γραμμή. Στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της ευθείας.

- α) $A(1, 0)$, $B(3, 1)$ β) $\Gamma(0, 2)$, $\Delta(4, -4)$
 γ) $E(1, 2)$, $Z(-1, -2)$ δ) $H(3, 5)$, $\Theta(2, 3)$

- 23 Να εξετάσετε αν τα σημεία $A(-2, -1)$, $B(1, 5)$ και $\Gamma(4, 11)$ ανήκουν στην ίδια ευθεία, χωρίς να σχεδιάσετε την ευθεία.

- 24 Να προσδιορίσετε γραφικά και αλγεβρικά το σημείο x στο οποίο η συνάρτηση:

- α) με εξίσωση $y = 3x - 2$ έχει τιμή $y = 3$.
 β) με εξίσωση $y = -2x + 1$ έχει τιμή $y = 5$.

25 Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των γραμμικών συναρτήσεων $y = 0,5x$ και $y = 8 - 2x$. Από τις γραφικές παραστάσεις να βρείτε τις λύσεις των εξισώσεων:

- α) $0,5x = 11$, β) $8 - 2x = 0$,
 γ) $8 - 2x = -4$, δ) $0,5x = 8 - 2x$.

Να επαληθεύσετε τις λύσεις των εξισώσεων αλγεβρικά.

26 Δίνονται οι συναρτήσεις $y = 2x - 1$ και $y = -x + 5$.

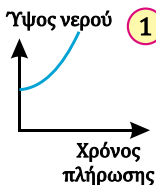
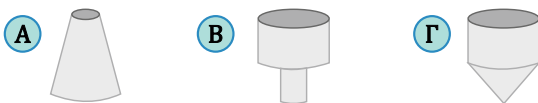
- α) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων στο ίδιο σύστημα αξόνων;
 β) Ποιες είναι τις συντεταγμένες του κοινού σημείου των ευθειών;
 γ) Ποια είναι η λύση της εξίσωσης $2x - 1 = -x + 5$.

27 **Μοντελοποίηση πραγματικής ζωής.** Με τη μέτρηση των οστών οι επιστήμονες μπορούν να εκτιμήσουν το ύψος των ανθρώπων. Οι παρακάτω τύποι δείχνουν κατά προσέγγιση τη σχέση ανάμεσα στο μήκος της κνήμης k και στο ύψος h των ανδρών και των γυναικών. Οι μετρήσεις γίνονται σε cm. Άνδρες: $h = 81,69 + 2,39k$ και γυναίκες: $h = 72,57 + 2,53k$

- α) Αν η κνήμη ενός άνδρα είναι 38 cm να βρείτε το ύψος του.
 β) Αν η κνήμη μιας γυναίκας είναι 38 cm να βρείτε το ύψος της.

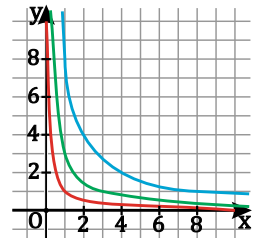
28 Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β , αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = \alpha x$ και $y = \frac{\beta}{x}$ διέρχονται από το σημείο $A(8, -4)$.

29 **Μαθηματική πρόκληση.** Να αντιστοιχίσετε τα δοχεία με γραφικές παραστάσεις. Ξεκινάμε να γεμίζουμε τα δοχεία με σταθερή ροή νερού και βλέπουμε το ύψος της στάθμης ως προς τον χρόνο.



30 α) Να αντιστοιχίσετε τον τύπο κάθε συνάρτησης με τη γραφική παράσταση.

- A. $y = \frac{1}{x}$ B. $y = \frac{3}{x}$
 Γ. $y = \frac{8}{x}$



- β) Ποιο ζεύγος τιμών μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αναγνώριση της κατάλληλης γραφικής παράστασης; Να αιτιολογήσετε.
 γ) Να περιγράψετε πώς η παράμετρος α επηρεάζει τη γραφική παράσταση $y = \frac{\alpha}{x}$. Να λάβετε επίσης υπόψη τις αρνητικές τιμές του α .
 δ) Τι επίδραση έχει η παράμετρος β στον τύπο $y = \frac{1}{\beta x}$; Να εξετάσετε δικά σας παραδείγματα και να περιγράψετε τις παρατηρήσεις σας.



Να ανοίξετε την εφαρμογή «ΓΛΩΣΣΑΡΙ: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ», για να ανακεφαλαιώσετε όρους και έννοιες στα τρία πρώτα κεφάλαια.



Να ανοίξετε την εφαρμογή «ΓΛΩΣΣΑΡΙ: ΑΡΙΘΜΟΙ-ΑΛΓΕΒΡΑ», για να ανακεφαλαιώσετε όρους και έννοιες στο σύνολο των τριών πρώτων κεφαλαίων.

Γεωμετρία

Κεφάλαιο

4

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

Επίκεντρες και εγγεγραμμένες γωνίες

Κανονικά πολύγωνα

Πυθαγόρειο Θεώρημα

Μελετούμε το
Ιστορικό σημεί-
ωμα με τίτλο:
«Η Ευκλείδεια
Γεωμετρία».



Στο Κεφάλαιο αυτό θα μάθουμε:

- Να διερευνούμε και να αιτιολογούμε εμπειρικά τις σχέσεις εγγεγραμμένης και επίκεντρης γωνίας που βαίνουν στο ίδιο τόξο.
- Να αναγνωρίζουμε και να διακρίνουμε ένα κανονικό από ένα μη κανονικό πολύγωνο και να διαμορφώνουμε σχετικούς ορισμούς.
- Να προσδιορίζουμε την κεντρική γωνία κανονικών n -γώνων και τη γωνία κανονικού n -γώνου (με $n = 3, 4, 6$).
- Να σχεδιάζουμε κανονικά πολύγωνα χρησιμοποιώντας γεωμετρικά όργανα ή ψηφιακά εργαλεία.
- Να διερευνούμε και να διατυπώνουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα και το αντίστροφό του και να το χρησιμοποιούμε για τον υπολογισμό μηκών και τον προσδιορισμό ορθής γωνίας τριγώνου.

4.1

Επίκεντρες και εγγεγραμμένες γωνίες

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

Να διερευνούν και να αιτιολογούν εμπειρικά τις σχέσεις εγγεγραμμένης και επίκεντρης γωνίας που βαίνουν στο ίδιο τόξο.

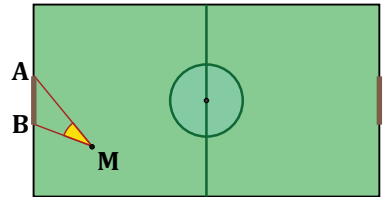


Διερεύνηση 1. Εύρεση σημείων στο γήπεδο.

Εργασία μαθητών κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες.

Ο ποδοσφαιριστής Λιονέλ Μέσι βρίσκεται στο σημείο M του γηπέδου και βλέπει το τέρμα AB υπό γωνία 30° . Να αναζητήσετε κι άλλες θέσεις του γηπέδου από τις οποίες να φαίνεται το τέρμα υπό γωνία 30° . Πού μπορεί να βρίσκονται όλα αυτά τα σημεία;

Υπόδειξη: Να σχεδιάσετε σε διαφανές χαρτί με το μοιρογνωμόνιο μία γωνία 30° την οποία να τοποθετήσετε στο γήπεδο και να την προσαρμόσετε με τέτοιο τρόπο, έτσι ώστε οι πλευρές της να διέρχονται από τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος AB.



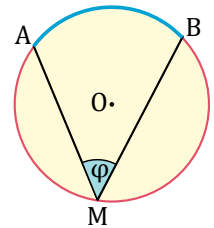
Να εντοπίσετε κατάλληλες θέσεις στο γήπεδο, έτσι ώστε ο ποδοσφαιριστής Λιονέλ Μέσι να βλέπει το τέρμα υπό γωνία 30° .



Διερεύνηση 2. Εγγεγραμμένες γωνίες.

Εργασία μαθητών ατομικά ή κατά ζεύγη.

- Με το μοιρογνωμόνιο να βρείτε το μέτρο της γωνίας $\widehat{AMB} = \varphi$.
- Να επιλέξετε ένα σημείο N πάνω στο μεγάλο τόξο \widehat{AB} και με το μοιρογνωμόνιο να μετρήσετε τη γωνία \widehat{ANB} . Τι παρατηρείτε;
- Να επιλέξετε δύο σημεία Λ και Ρ πάνω στο μικρό τόξο \widehat{AB} και να βρείτε με το μοιρογνωμόνιο το μέτρο των γωνιών $\widehat{ALB} = \omega$ και \widehat{APB} . Τι παρατηρείτε;
- Να διερευνήσετε τη σχέση των γωνιών ω και φ .



Με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής να διερευνήσετε τη σχέση μεταξύ των γωνιών των οποίων οι κορυφές βρίσκονται στον ίδιο κύκλο και βλέπουν το ίδιο τόξο ή ίσα τόξα.



Διερεύνηση 3. Σχέση εγγεγραμμένης και επίκεντρης γωνίας.

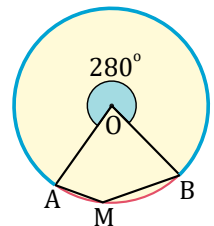
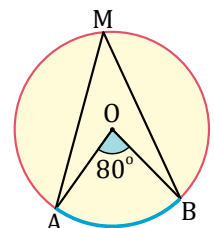
Εργασία μαθητών κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες.

Σε κύκλο κέντρου O σχεδιάζουμε με το μοιρογνωμόνιο επίκεντρη γωνία $\widehat{AOB} = 80^\circ$ και τη γωνία \widehat{AMB} όπου M τυχόν σημείο του μεγάλου τόξου \widehat{AB} .

- Τι κοινό έχουν οι δύο γωνίες;
- Να βρείτε με το μοιρογνωμόνιο το μέτρο της γωνίας \widehat{AMB} . Να συγκρίνετε τις γωνίες \widehat{AMB} και \widehat{AOB} . Τι παρατηρείτε;
- Να πάρετε το σημείο M σε διαφορετικές θέσεις στον κύκλο πάνω στο μεγάλο τόξο \widehat{AB} και να μετρήσετε τη γωνία \widehat{AMB} . Τι παρατηρείτε;

Να διατυπώσετε τα «συμπεράσματα» στα οποία καταλήξατε.

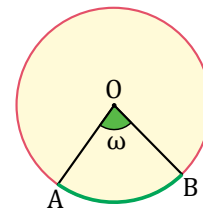
Αν το σημείο M ανήκει στο μικρό τόξο \widehat{AB} της διπλανής εικόνας, τι παρατηρείτε για τη σχέση της γωνίας \widehat{AMB} με τη μη κυρτή γωνία \widehat{AOB} ;



Μαθηματικές Έννοιες και Διεργασίες Μάθησης

Επίκεντρη γωνία

Στην Α΄ Γυμνασίου μάθαμε ότι μια γωνία όπως η κυρτή γωνία $\widehat{A\hat{O}B}$, της οποίας η κορυφή είναι το κέντρο του κύκλου και τα σημεία A και B ανήκουν στον κύκλο, ονομάζεται επίκεντρη. Το αντίστοιχο τόξο της $\widehat{A\hat{O}B}$ είναι το μικρό τόξο \widehat{AB} . Σε κάθε τόξο στον ίδιο κύκλο αντιστοιχεί μία μόνο επίκεντρη γωνία. Το μέτρο της επίκεντρης γωνίας $\widehat{A\hat{O}B}$ είναι ίσο με το μέτρο του αντίστοιχου τόξου \widehat{AB} και αντίστροφα. Αντίστοιχα με τα παραπάνω ισχύουν και για τη μη κυρτή γωνία AOB.



Παράδειγμα: Αν $\widehat{A\hat{O}B} = 60^\circ$, τότε και $\widehat{AB} = 60^\circ$. Αντίστροφα, αν $\widehat{AB} = 60^\circ$, τότε $\widehat{A\hat{O}B} = 60^\circ$.

Επίσης, μάθαμε ότι, στον ίδιο κύκλο ή σε ίσους κύκλους, σε ίσα τόξα αντιστοιχούν ίσες επίκεντρες γωνίες και αντίστροφα, σε ίσες επίκεντρες γωνίες αντιστοιχούν ίσα τόξα.

Ένας κύκλος είναι τόξο 360° αφού αντιστοιχεί στην πλήρη επίκεντρη γωνία. Ένα ημικύκλιο είναι 180° , αφού αντιστοιχεί στην ευθεία επίκεντρη γωνία.

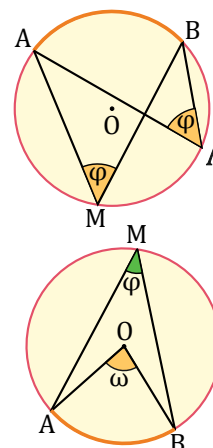


Με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής να διερευνήσετε τις επίκεντρες γωνίες που σχηματίζουν ο ωροδείκτης και ο λεπτοδείκτης του ρολογιού.

Εγγεγραμμένη γωνία

Εγγεγραμμένη γωνία σε κύκλο ονομάζεται η γωνία της οποίας η κορυφή είναι σημείο του κύκλου και οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο.

Εγγεγραμμένες γωνίες στο διπλανό σχήμα είναι οι \widehat{AMB} , $\widehat{A\hat{L}B}$ κ.λπ. Το τόξο του κύκλου που περιέχεται στην εγγεγραμμένη γωνία λέγεται **αντίστοιχο τόξο** της. Το αντίστοιχο τόξο της γωνίας \widehat{AMB} είναι το \widehat{AB} . Λέμε ακόμη ότι η εγγεγραμμένη \widehat{AMB} **βαίνει στο τόξο \widehat{AB}** ή ότι το τόξο \widehat{AB} **φαίνεται** από την εγγεγραμμένη γωνία \widehat{AMB} . Υπάρχουν άπειρες εγγεγραμμένες γωνίες οι οποίες βαίνουν στο τόξο \widehat{AB} .



Σχέση εγγεγραμμένης και επίκεντρης γωνίας

Όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, η εγγεγραμμένη γωνία $\widehat{AMB} = \varphi$ και η αντίστοιχη επίκεντρη αυτής $\widehat{A\hat{O}B} = \omega$ βαίνουν στο ίδιο τόξο. Αν μετρήσουμε τις γωνίες ω και φ θα διαπιστώσουμε ότι το μέτρο της γωνίας \widehat{AMB} είναι ίσο με το μισό του μέτρου της γωνίας $\widehat{A\hat{O}B}$ δηλαδή $\varphi = \frac{\omega}{2}$.

Γενικά, αποδεικνύεται ότι:

Κάθε εγγεγραμμένη γωνία σε κύκλο είναι ίση με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας.

Επίσης:

- Το μέτρο κάθε εγγεγραμμένης γωνίας είναι ίσο με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της.
- Οι εγγεγραμμένες γωνίες ενός κύκλου που βαίνουν στο ίδιο τόξο ή σε ίσα τόξα είναι ίσες μεταξύ τους.

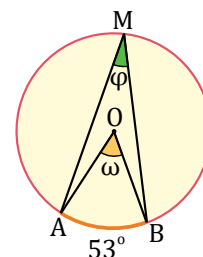
Παράδειγμα: Στο διπλανό σχήμα οι γωνίες φ και ω βαίνουν σε τόξο 53° .

Το μέτρο της επίκεντρης γωνίας $\widehat{A\hat{O}B}$ είναι ίσο με το μέτρο του αντίστοιχου τόξου \widehat{AB} οπότε $\omega = 53^\circ$. Η εγγεγραμμένη γωνία φ είναι ίση με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας ω ,

$$\text{οπότε } \varphi = \frac{\omega}{2} = \frac{53^\circ}{2} = 26,5^\circ.$$



Να διερευνήσετε τη σχέση μεταξύ εγγεγραμμένης και επίκεντρης γωνίας με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής.



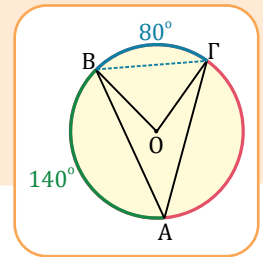


Εφαρμογή 1

Στον κύκλο του διπλανού σχήματος είναι $\widehat{B\Gamma} = 80^\circ$ και $\widehat{A\Gamma} = 140^\circ$.

Να υπολογίσετε τα μέτρα:

- α) του τόξου $\widehat{A\Gamma}$
- β) της γωνίας $\widehat{B\hat{O}\Gamma}$
- γ) των γωνιών του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$.



Απάντηση

α) Επειδή ο κύκλος είναι τόξο 360° θα είναι:

$$\widehat{A\Gamma} + \widehat{B\Gamma} + \widehat{A\Gamma} = 360^\circ \text{ ή } 140^\circ + 80^\circ + \widehat{A\Gamma} = 360^\circ \text{ ή } 220^\circ + \widehat{A\Gamma} = 360^\circ \text{ ή } \widehat{A\Gamma} = 140^\circ.$$

β) Αφού η γωνία $\widehat{B\hat{O}\Gamma}$ είναι επίκεντρη και βαίνει σε τόξο 80° έχουμε ότι $\widehat{B\hat{O}\Gamma} = 80^\circ$.

γ) Επειδή η εγγεγραμμένη γωνία $\widehat{B\hat{A}\Gamma}$ βαίνει στο ίδιο τόξο με την επίκεντρη $\widehat{B\hat{O}\Gamma}$ ισχύει:

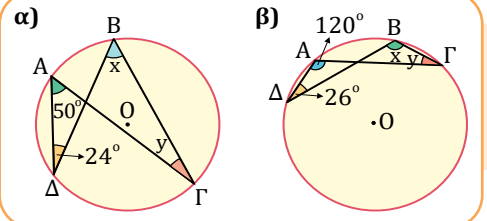
$$\widehat{B\hat{A}\Gamma} = \frac{\widehat{B\hat{O}\Gamma}}{2} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ. \text{ Ομοίως } \widehat{B\hat{\Gamma}A} = \frac{140^\circ}{2} = 70^\circ \text{ και } \widehat{A\hat{B}\Gamma} = \frac{140^\circ}{2} = 70^\circ.$$



Εφαρμογή 2

Να υπολογίσετε τις γωνίες x και y των διπλανών σχημάτων όταν:

- α) $\widehat{\Delta\hat{A}\Gamma} = 50^\circ$ και $\widehat{A\hat{\Delta}B} = 24^\circ$.
- β) $\widehat{\Delta\hat{A}\Gamma} = 120^\circ$ και $\widehat{A\hat{\Delta}B} = 26^\circ$.



Απάντηση

α) Οι εγγεγραμμένες γωνίες $\widehat{A\hat{\Delta}B}$ και $\widehat{A\hat{\Gamma}B}$ είναι ίσες μεταξύ τους γιατί βαίνουν στο ίδιο τόξο $\widehat{A\Gamma}$. Άρα, $y = 24^\circ$.

Οι εγγεγραμμένες γωνίες $\widehat{\Delta\hat{A}\Gamma}$ και $\widehat{\Delta\hat{B}\Gamma}$ είναι ίσες μεταξύ τους γιατί βαίνουν στο ίδιο τόξο $\widehat{\Delta\Gamma}$. Άρα, $x = 50^\circ$.

β) Οι εγγεγραμμένες γωνίες $\widehat{A\hat{\Delta}B}$ και $\widehat{A\hat{\Gamma}B}$ είναι ίσες μεταξύ τους γιατί βαίνουν στο ίδιο τόξο $\widehat{A\Gamma}$. Άρα, $y = 26^\circ$.

Οι εγγεγραμμένες γωνίες $\widehat{\Delta\hat{A}\Gamma}$ και $\widehat{\Delta\hat{B}\Gamma}$ είναι ίσες μεταξύ τους γιατί βαίνουν στο ίδιο τόξο $\widehat{\Delta\Gamma}$. Άρα, $x = 120^\circ$.



Εφαρμογή 3

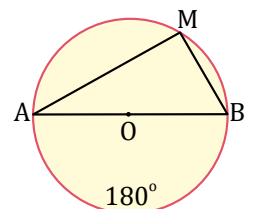
Κάθε εγγεγραμμένη γωνία η οποία βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.

Απάντηση

Η εγγεγραμμένη γωνία $\widehat{A\hat{M}B}$ και η επίκεντρη $\widehat{A\hat{O}B}$ βαίνουν στο ίδιο τόξο $\widehat{A\Gamma}$. Επειδή $\widehat{A\Gamma} = 180^\circ$ είναι $\widehat{A\hat{O}B} = 180^\circ$. Εφόσον το μέτρο της εγγεγραμμένης $\widehat{A\hat{M}B}$ είναι το μισό του μέτρου της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας $\widehat{A\hat{O}B}$ θα είναι: $\widehat{A\hat{M}B} = \frac{\widehat{A\hat{O}B}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$. Επομένως, η εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.



Να διερευνήσετε γωνίες που βαίνουν σε ημικύκλιο με την ψηφιακή εφαρμογή.



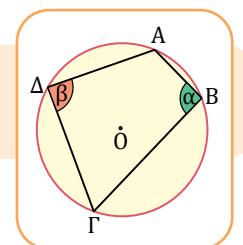
Εφαρμογή 4

Οι κορυφές του τετράπλευρου $\triangle AB\Gamma\Delta$ βρίσκονται πάνω σε κύκλο.

Να δείξετε ότι οι γωνίες $\widehat{A\hat{\Delta}\Gamma}$ και $\widehat{A\hat{B}\Gamma}$ είναι παραπληρωματικές.

Απάντηση

Η εγγεγραμμένη γωνία $\widehat{A\hat{B}\Gamma}$ βαίνει στο τόξο $\widehat{A\Delta\Gamma}$, επομένως το μέτρο της θα είναι ίσο με το μισό του μέτρου του τόξου αυτού.



Η εγγεγραμμένη γωνία $\widehat{A\Delta\Gamma}$ βαίνει στο τόξο $\widehat{AB\Gamma}$ επομένως το μέτρο της θα είναι ίσο με το μισό του μέτρου του τόξου αυτού.

Επειδή το άθροισμα των μέτρων των τόξων $\widehat{A\Delta\Gamma}$ και $\widehat{AB\Gamma}$ είναι 360° , παίρνουμε: $\alpha + \beta = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$. Άρα, οι απέναντι γωνίες α και β του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ που οι κορυφές του βρίσκονται πάνω στον κύκλο είναι παραπληρωματικές.

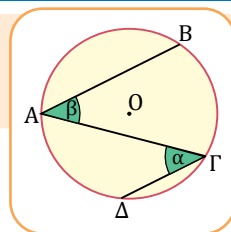


Με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής να διερευνήσετε τη σχέση των απέναντι γωνιών κυρτού τετραπλεύρου του οποίου οι κορυφές βρίσκονται στον ίδιο κύκλο.



Εφαρμογή 5

Στον κύκλο της διπλανής εικόνας οι χορδές AB και $\Gamma\Delta$ είναι παράλληλες. Να αποδείξετε ότι τα μέτρα των δύο τόξων $\widehat{A\Delta}$ και $\widehat{\Gamma B}$ είναι ίσα.



Απάντηση

Εφόσον $AB \parallel \Gamma\Delta$, δηλαδή οι χορδές AB και $\Gamma\Delta$ είναι παράλληλες τότε οι γωνίες α και β είναι ίσες ως εντός εναλλάξ.

Οι γωνίες α και β είναι εγγεγραμμένες στον ίδιο κύκλο και ως ίσες θα βαίνουν σε ίσα τόξα. Συνεπώς $\widehat{A\Delta} = \widehat{\Gamma B}$

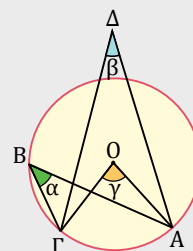
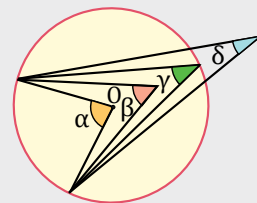
Ερωτήσεις για Αξιολόγηση

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με τη λέξη Σωστό (Σ), αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος (Λ), αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- 1 Δύο ίσες εγγεγραμμένες γωνίες του ίδιου κύκλου βαίνουν πάντα στο ίδιο τόξο.
- 2 Το μέτρο της εγγεγραμμένης γωνίας που βαίνει σε ημικύκλιο είναι 90° .
- 3 Το μέτρο της εγγεγραμμένης γωνίας είναι διπλάσιο του μέτρου της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας.
- 4 Δύο εγγεγραμμένες γωνίες του ίδιου κύκλου που βαίνουν σε ίσα τόξα είναι ίσες.
- 5 Δύο κάθετες διάμετροι του κύκλου χωρίζουν τον κύκλο σε τέσσερα ίσα τόξα.

Στις παρακάτω ερωτήσεις να βάλετε σε κύκλο το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση:

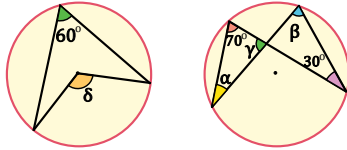
- 1 Η εγγεγραμμένη γωνία στο διπλανό σχήμα είναι:
 - A. Η γωνία α που η κορυφή της βρίσκεται στο κέντρο O του κύκλου και οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο.
 - B. Η γωνία β που οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο.
 - Γ. Η γωνία γ που η κορυφή της βρίσκεται στον κύκλο και οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο.
 - Δ. Η γωνία δ που οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο.
- 2 Οι ερωτήσεις αναφέρονται στο διπλανό σχήμα:
 - A. Οι γωνίες α και β βαίνουν στο ίδιο τόξο $\widehat{\Gamma A}$ άρα είναι ίσες.
 - B. Η γωνία α είναι διπλάσια της γ .
 - Γ. Η γωνία β είναι η μισή της γ .
 - Δ. Η γωνία γ είναι διπλάσια της α .



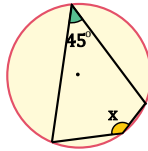


Ασκήσεις και Προβλήματα

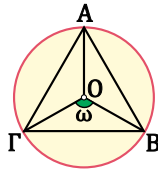
- 1 Να υπολογίσετε τις γωνίες α , β , γ , δ στα παρακάτω σχήματα.



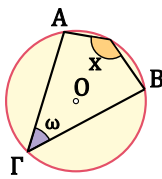
- 2 Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε τη γωνία x .



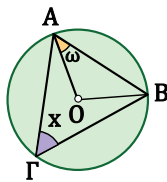
- 3 Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ του διπλανού σχήματος είναι ισόπλευρο, να υπολογίσετε τη γωνία ω .



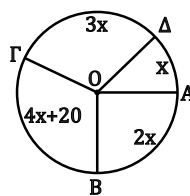
- 4 Στο διπλανό σχήμα η γωνία x είναι τριπλάσια της γωνίας ω . Να υπολογίσετε τις γωνίες x και ω .



- 5 Στο διπλανό σχήμα το μικρό τόξο \widehat{AB} είναι 106° . Να υπολογίσετε τα μέτρα των γωνιών x και ω .

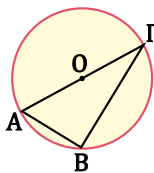


- 6 Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε τα μέτρα των τόξων \widehat{AB} , $\widehat{B\Gamma}$, $\widehat{\Gamma\Delta}$, $\widehat{\Delta A}$



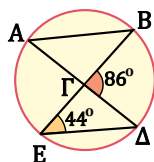
- 7 Σε κύκλο κέντρου K είναι $\widehat{AB} = 105^\circ$. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου AKB .

- 8 Το ευθύγραμμο τμήμα $A\Gamma$ είναι διάμετρος του κύκλου και η χορδή AB είναι ίση με την ακτίνα. Να υπολογίσετε τις γωνίες $A\widehat{B}\Gamma$ και $A\widehat{\Gamma}B$.



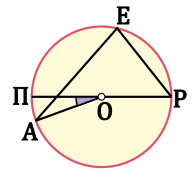
- 9 Στο διπλανό σχήμα τα σημεία A , Γ και Δ είναι συνευθειακά, όπως και τα σημεία B , Γ και E .

- α) Το σημείο Γ μπορεί να είναι το κέντρο του κύκλου; Να αιτιολογήσετε.

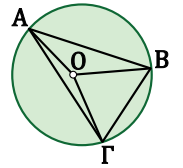


- β) Να βρείτε το μέτρο της γωνίας $\Gamma\widehat{B}A$.

- 10 Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $A\widehat{E}P$ όπου O είναι το κέντρο του κύκλου. Τα σημεία Π , O , P είναι συνευθειακά και $A\widehat{O}\Pi = 20^\circ$.

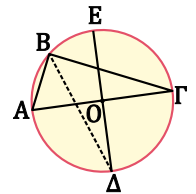


- 11 Να βρείτε το μέτρο των γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$ αν γνωρίζουμε ότι $A\widehat{O}B = 130^\circ$ και $B\widehat{O}\Gamma = 70^\circ$ και να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



Το σημείο O είναι το κέντρο του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία A , B και Γ .

- 12 Στο διπλανό σχήμα το ευθύγραμμο τμήμα $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\widehat{B}\Gamma$ ενώ το $A\Gamma$ είναι διάμετρος του κύκλου.



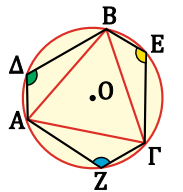
- α) Να υπολογίσετε τη γωνία $A\widehat{B}\Delta$.

- β) Να υπολογίσετε τη αντίστοιχη επίκεντρη γωνία του τόξου $\widehat{A\Delta}$.

- γ) Να δείξετε ότι οι διάμετροι του κύκλου $A\Gamma$ και ΔE είναι κάθετοι μεταξύ τους.

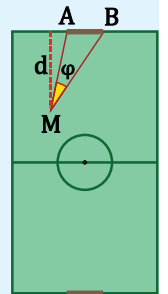
- 13 Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο.

- α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Delta B$, $B\epsilon\Gamma$, $\Gamma Z A$ είναι αμβλυγώνια και β) Να υπολογίσετε την αμβλεία τους γωνία.



- 14 **Ψάχνοντας για τον Ρονάλντο. Εργασία κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες.**

Ο ποδοσφαιριστής Λιονέλ Μέσι βρίσκεται στο σημείο M του γηπέδου και βλέπει το τέρμα AB υπό γωνία $\varphi = 22^\circ$ ενώ απέχει από τη γραμμή του τέρματος απόσταση $d = 36$ m.



Να εντοπίσετε τη θέση στην οποία βρίσκεται στο γήπεδο ο ποδοσφαιριστής Ρονάλντο, ο οποίος βλέπει κι αυτός το τέρμα AB υπό γωνία 22° και απέχει από τη γραμμή του τέρματος AB απόσταση $d = 36$ m. Να θεωρήσετε ότι ο Ρονάλντο δεν βρίσκεται στην ίδια θέση του γηπέδου με τον Μέσι. Ο εντοπισμός του Ρονάλντο να πραγματοποιηθεί με γεωμετρικά όργανα.

4.2 Κανονικά πολύγωνα

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

- Να αναγνωρίζουν και να διακρίνουν ένα κανονικό από ένα μη κανονικό πολύγωνο και να διαμορφώνουν σχετικούς ορισμούς.
- Να προσδιορίζουν την κεντρική γωνία κανονικών n -γώνων και τη γωνία κανονικού n -γώνου (με $n = 3, 4, 6$).
- Να σχεδιάζουν κανονικά πολύγωνα χρησιμοποιώντας γεωμετρικά όργανα ή ψηφιακά εργαλεία.



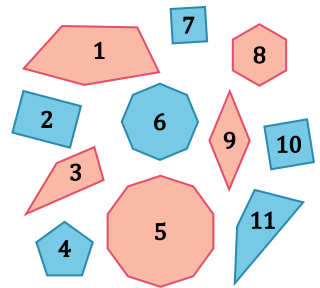
Διερεύνηση 1. Ταξινόμηση επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων.

Εργασία μαθητών ατομικά ή κατά ζεύγη.

Τα επίπεδα γεωμετρικά σχήματα της διπλανής εικόνας μπορούν να ταξινομηθούν με τη χρωματική τους ιδιότητα σε δύο ομάδες: στα ροζ και στα μπλε σχήματα.

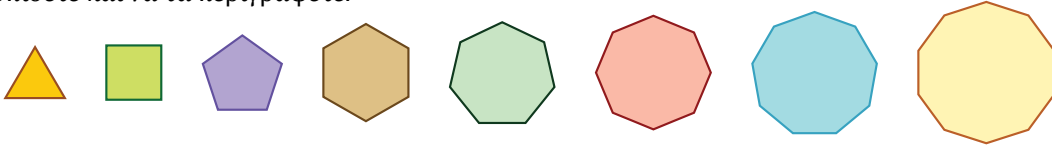
Να ταξινομήσετε τα σχήματα σε ομάδες με κριτήριο τις γεωμετρικές τους ιδιότητες, τις οποίες διακρίνετε.

Να περιγράψετε τις γεωμετρικές ιδιότητες της ταξινόμησης.



Διερεύνηση 2. Αναζήτηση κοινών χαρακτηριστικών πολυγώνων.

Εργασία μαθητών ατομικά ή κατά ζεύγη. Τα πολύγωνα της εικόνας έχουν όλα ορισμένα κοινά χαρακτηριστικά. Να τα εντοπίσετε και να τα περιγράψετε.



Διερεύνηση 3. Κατασκευή τετραγώνου.

Εργασία μαθητών ατομικά ή κατά ζεύγη.

Να κατασκευάσετε ένα τετράγωνο.

- Με χάρακα και γνώμονα.
- Με μοιρογνωμόνιο και χάρακα.
- Με κανόνα και διαβήτη.
- Με κατάλληλες διπλώσεις ενός χαρτιού.

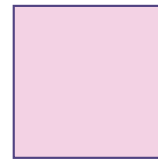


Μαθηματικές Έννοιες και Διεργασίες Μάθησης

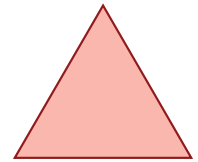
Κανονικά πολύγωνα

Στην Α΄ Γυμνασίου γνωρίσαμε διάφορα είδη πολυγώνων, όπως για παράδειγμα τα τρίγωνα και τα τετράπλευρα. Τετράπλευρα είναι τα πολύγωνα τα οποία έχουν τέσσερις πλευρές, όπως το παραλληλόγραμμο, το ορθογώνιο, ο ρόμβος, το τετράγωνο και το τραπέζιο. Μπορούμε να κατασκευάσουμε πολύγωνα με 5, 6, 7, ..., n πλευρές. Ένα πολύγωνο με 5 πλευρές ονομάζεται **πεντάγωνο**, με 6 πλευρές **εξάγωνο** κ.λπ. Ένα πολύγωνο με n πλευρές ονομάζεται **n -γωνο**. Εξάρση αποτελεί το πολύγωνο με 4 κορυφές που λέγεται **τετράπλευρο** και όχι τετράγωνο.

Υπάρχουν πολύγωνα που έχουν όλες τους τις πλευρές ίσες, όπως για παράδειγμα ο ρόμβος καθώς και κάποια πολύγωνα που έχουν όλες τους τις γωνίες ίσες, όπως για παράδειγμα το ορθογώνιο. Αν τα πολύγωνα έχουν όλες τις πλευρές τους και όλες τις γωνίες τους ίσες ονομάζονται **κανονικά πολύγωνα**, όπως για παράδειγμα το τετράγωνο και το ισόπλευρο τρίγωνο.



Τετράγωνο



Ισόπλευρο τρίγωνο

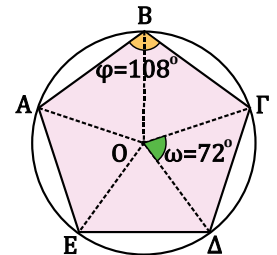
Κάθε γωνία του ισόπλευρου τριγώνου είναι 60° και κάθε γωνία του τετραγώνου είναι 90° .

Γενικά

Κανονικό ονομάζεται το πολύγωνο, που έχει όλες τις πλευρές του ίσες και όλες τις γωνίες του ίσες.

Σχεδιασμός κανονικού πολυγώνου

Θα κατασκευάσουμε ένα κανονικό πεντάγωνο χωρίζοντας έναν κύκλο (O, ρ) σε 5 ίσα τόξα. Επειδή ο κύκλος είναι τόξο 360° , το κάθε τόξο πρέπει να είναι $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$. Σχηματίζουμε στον κύκλο διαδοχικά επίκεντρες γωνίες 72° η καθεμία, δηλαδή $\widehat{A\hat{O}B} = \widehat{B\hat{O}\Gamma} = \widehat{\Gamma\hat{O}\Delta} = \widehat{\Delta\hat{O}E} = \widehat{E\hat{O}A} = \omega = 72^\circ$ (σχήμα), οπότε τα αντίστοιχα τόξα τους $\widehat{AB}, \widehat{BG}, \widehat{GD}, \widehat{DE}, \widehat{EA}$ θα είναι 72° το καθένα.



Η γωνία ω ονομάζεται **κεντρική γωνία** του κανονικού πενταγώνου.

Το πεντάγωνο $AB\Gamma\Delta E$ είναι κανονικό διότι:

- α) Έχει όλες του τις πλευρές ίσες, $AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta E = EA$, ως χορδές ίσων τόξων και
- β) Έχει όλες τις γωνίες του ίσες ως εγγεγραμμένες οι οποίες βλέπουν τόξο $3 \cdot 72^\circ = 216^\circ$.

Για παράδειγμα, η γωνία $\widehat{A\hat{B}\Gamma}$ βλέπει το τόξο $\widehat{A\hat{E}\Delta\Gamma}$.

Συνεπώς κάθε γωνία του κανονικού πενταγώνου είναι ίση με $\frac{216}{2} = 108^\circ$.

Δηλαδή: $\widehat{A\hat{B}\Gamma} = \widehat{B\hat{\Gamma}\Delta} = \widehat{\Gamma\hat{\Delta}E} = \widehat{\Delta\hat{E}A} = \widehat{E\hat{A}B} = 108^\circ$.

Με τον ίδιο τρόπο που σχεδιάσαμε το κανονικό πεντάγωνο μπορούμε να σχεδιάσουμε γενικά ένα κανονικό πολύγωνο με n πλευρές. Ακολουθούμε τα εξής βήματα:

- Βήμα 1ο: Υπολογίζουμε τη γωνία $\omega = \frac{360^\circ}{n}$.
- Βήμα 2ο: Σχηματίζουμε διαδοχικά n επίκεντρες γωνίες ω , οι οποίες χωρίζουν τον κύκλο σε n ίσα τόξα.
- Βήμα 3ο: Ενώνουμε με διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα τα άκρα των τόξων.



Κατασκευή κανονικού πενταγώνου με χαρτοδιπλωτική. Κατασκευάζουμε με οριγκάμι ένα κανονικό πεντάγωνο.



Καθεμία από τις ίσες επίκεντρες γωνίες ω με τις οποίες χωρίζουμε τον κύκλο σε n ίσα τόξα ονομάζεται **κεντρική γωνία** του κανονικού n -γώνου και είναι: $\omega = \frac{360^\circ}{n}$.

Καθεμία από τις ίσες κυρτές γωνίες που σχηματίζεται με δύο διαδοχικές πλευρές του κανονικού πολυγώνου ονομάζεται **εσωτερική γωνία ή γωνία** του κανονικού n -γώνου.

Αποδεικνύεται ότι όλα τα κανονικά πολύγωνα περιγράφονται από κύκλο, δηλαδή οι κορυφές τους είναι σημεία ενός κύκλου.

Ο κύκλος (O, ρ) που περνά από τις κορυφές του κανονικού πολυγώνου ονομάζεται **περιγεγραμμένος κύκλος του πολυγώνου**. Επίσης λέμε ότι το πολύγωνο είναι **εγγεγραμμένο στον κύκλο** (O, ρ) . Το κέντρο του κύκλου λέγεται και **κέντρο του κανονικού πολυγώνου**.

Σχέση κεντρικής και εσωτερικής γωνίας κανονικού πολυγώνου

Στο προηγούμενο πεντάγωνο παρατηρούμε ότι: $\omega + \varphi = 180^\circ$.

Γενικά, αν ενώσουμε το κέντρο O του κανονικού πολυγώνου με τις κορυφές του σχηματίζονται n ίσα ισοσκελή τρίγωνα.

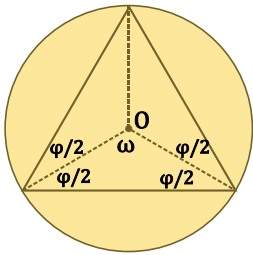
Αν $\frac{\varphi}{2}$ μία γωνία σε ένα από αυτά τα ισοσκελή τρίγωνα και ω η κεντρική γωνία, τότε έχουμε: $\frac{\varphi}{2} + \frac{\varphi}{2} + \omega = 180^\circ$.

Επομένως:

$$\varphi + \omega = 180^\circ \text{ ή } \varphi = 180^\circ - \omega$$

Δηλαδή η κεντρική γωνία ω και μία από τις ίσες γωνίες φ του κανονικού πολυγώνου είναι παραπληρωματικές.

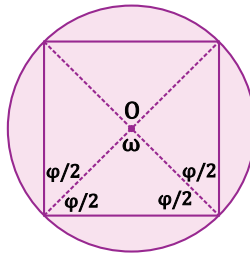
Παραδείγματα: Οι γωνίες ω και φ για ισόπλευρο τρίγωνο, τετράγωνο και κανονικό εξάγωνο.



Ισόπλευρο τρίγωνο

$$\omega = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$$

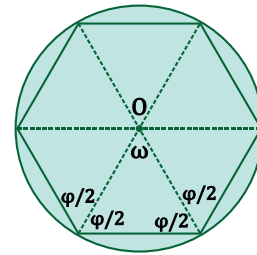
$$\varphi = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$



Τετράγωνο

$$\omega = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$$

$$\varphi = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$



Κανονικό εξάγωνο

$$\omega = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$$

$$\varphi = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

Γεωμετρική κατασκευή κανονικών πολυγώνων

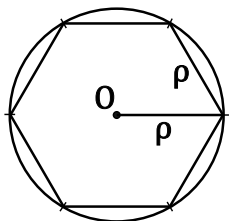
Η κατασκευή ενός κανονικού πολυγώνου με κανόνα και διαβήτη μπορεί να πραγματοποιηθεί με διαφορετικούς τρόπους.

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε έναν για το κανονικό εξάγωνο, έναν για το ισόπλευρο τρίγωνο και έναν για το τετράγωνο.

α) Κατασκευή κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο (O, ρ) με κανόνα και διαβήτη

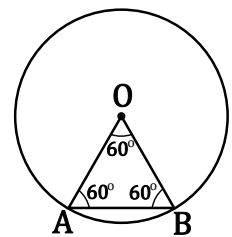
Η κεντρική γωνία του κανονικού εξαγώνου είναι $\omega = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$.

Αφού στο ισοσκελές τρίγωνο AOB η γωνία της κορυφής O είναι 60° καθεμία από τις ίσες γωνίες οι οποίες είναι προσκείμενες στη βάση AB θα είναι $\frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$.



Δηλαδή το τρίγωνο AOB είναι ισόπλευρο και επομένως η πλευρά του AB είναι ίση με την ακτίνα ρ. Ομοίως προκύπτει ότι όλες οι πλευρές του εξαγώνου είναι ίσες με την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου.

Έτσι κατασκευάζουμε ένα εξάγωνο σχεδιάζοντας με τον διαβήτη χορδές ίσες με ρ όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα αριστερά.



Να κάνετε την Εργασία με προεκτάσεις: «Κατασκευή κανονικών πολυγώνων με χαρτοκοπτική».



Η χελώνα σχεδιάζει κανονικά πολύγωνα. Με κατάλληλη χρήση κουμπιών που θα βρείτε στην εφαρμογή να κατευθύνετε μία χελώνα να σχεδιάσει κανονικά πολύγωνα.



Με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής να διερευνήσετε τα κανονικά πολύγωνα με n πλευρές.



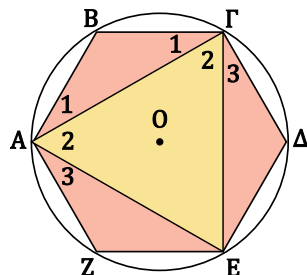
Με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής να κατασκευάσετε εξάγωνο με κανόνα και διαβήτη.

β) Κατασκευή ισοπλεύρου τριγώνου με κανόνα και διαβήτη

Σχεδιάζουμε ένα κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ και στη συνέχεια σχεδιάζουμε το τρίγωνο ΑΓΕ:

Το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισόπλευρο διότι:

- Κάθε γωνία του είναι εγγεγραμμένη και βαίνει σε τόξο 120° .
Άρα, $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = 60^\circ$.
- Κάθε πλευρά του είναι χορδή τόξου 120° , άρα είναι ίσες μεταξύ τους.
Άρα, $ΑΓ = ΓΕ = ΕΑ$.



γ) Κατασκευή τετραγώνου με κανόνα και διαβήτη

Ακολουθούμε την παρακάτω κατασκευή.

Βήμα 1ο

Σχεδιάζουμε κύκλο (O, OA) κέντρου O και ακτίνας OA. Σχεδιάζουμε τη διάμετρο AB.

Βήμα 2ο

Σχεδιάζουμε τη μεσοκάθετη της διαμέτρου AB, η οποία τέμνει τον κύκλο στα Γ και Δ. Οι δύο διαμέτροι AB και ΓΔ είναι κάθετες μεταξύ τους.

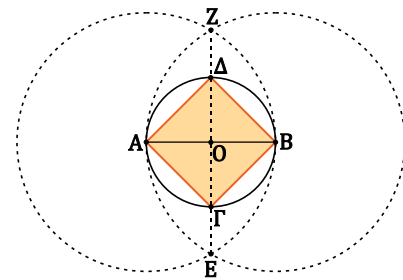
Βήμα 3ο

Σχεδιάζουμε το τετράπλευρο ΑΔΒΓ, το οποίο είναι τετράγωνο, διότι:

- Καθεμία από τις τέσσερις κεντρικές γωνίες με κορυφή O είναι 90° . Έτσι και τα αντίστοιχα τόξα τους \widehat{AD} , \widehat{DB} , \widehat{BG} και \widehat{GA} θα είναι ίσα. Όμως σε ίσα τόξα του ίδιου κύκλου αντιστοιχούν ίσες χορδές, άρα $ΑΔ = ΔΒ = ΒΓ = ΓΑ$.
- Οι γωνίες του ΑΔΒΓ είναι 90° διότι καθεμία είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο.

Συνεπώς το τετράπλευρο ΑΔΒΓ είναι κανονικό, δηλαδή τετράγωνο διότι έχει όλες τις πλευρές και όλες τις γωνίες του ίσες.

Μελετούμε το Ιστορικό σημείωμα με τίτλο: «Ο Γκάους και τα κανονικά πολύγωνα».



Με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής να κατασκευάσετε τετράγωνο με κανόνα και διαβήτη.



Εφαρμογή 1

Να βρείτε την κεντρική γωνία ω καθώς και την εσωτερική γωνία φ του κανονικού:

α) δωδεκαγώνου και **β)** δεκαπενταγώνου.

Απάντηση

- α)** Για το κανονικό δωδεκάγωνο θέτοντας όπου $n = 12$ στον τύπο της κεντρικής γωνίας έχουμε: $\omega = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$ και $\varphi = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$.
- β)** Για το κανονικό δεκαπεντάγωνο θέτοντας όπου $n = 15$ στον τύπο της κεντρικής γωνίας παίρνουμε: $\omega = \frac{360^\circ}{15} = 24^\circ$ και $\varphi = 180^\circ - 24^\circ = 156^\circ$.



Εφαρμογή 2

Να εξετάσετε αν υπάρχει κανονικό πολύγωνο με γωνία $\varphi = 145^\circ$.

Απάντηση

Αν υπάρχει κανονικό πολύγωνο με γωνία $\varphi = 145^\circ$, τότε η κεντρική του γωνία θα είναι $\omega = 180^\circ - 145^\circ$ ή $\omega = 35^\circ$. Επομένως θα πρέπει να υπάρχει φυσικός αριθμός $n > 2$, τέτοιος ώστε: $\omega = \frac{360^\circ}{n}$ ή $n = \frac{360^\circ}{\omega}$ ή $n = \frac{360^\circ}{35^\circ} \approx 10,29$. Αυτό όμως δεν συμβαίνει και επομένως δεν υπάρχει κανονικό πολύγωνο με γωνία 145° .



Εφαρμογή 3

Να σχεδιάσετε με κανόνα και διαβήτη ένα ισόπλευρο τρίγωνο χωρίς να βασιστείτε στο κανονικό εξάγωνο.

Να κάνετε την *Εργασία με προεκτάσεις*: «Γεωμετρική κατασκευή κανονικών πολυγώνων με κανόνα και διαβήτη».



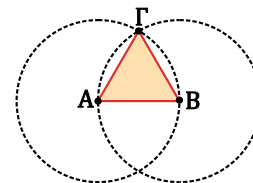
Απάντηση

Σχεδιάζουμε με τον κανόνα ένα ευθύγραμμο τμήμα AB.

Σχεδιάζουμε με τον διαβήτη κύκλο με κέντρο το σημείο A και ακτίνα AB καθώς και κύκλο με κέντρο B και την ίδια ακτίνα.

Σημειώνουμε ένα από τα δύο σημεία τομής των δύο κύκλων και το ονομάζουμε Γ (σχήμα).

Χαράσσουμε με τον κανόνα τα ευθύγραμμο τμήματα ΑΓ και ΒΓ. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, διότι τα ευθύγραμμο τμήματα ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ είναι ακτίνες ίσων κύκλων. Άρα, $AB = AG = BG$.



Με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής να κατασκευάσετε ισόπλευρο τρίγωνο με κανόνα και διαβήτη.

Ερωτήσεις για Αξιολόγηση

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με τη λέξη **Σωστό (Σ)**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος (Λ)**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- 1 Αν ένα τρίγωνο έχει όλες τις πλευρές του ίσες, είναι κανονικό.
- 2 Αν ένα τρίγωνο έχει όλες τις γωνίες του ίσες, είναι κανονικό.
- 3 Αν ένα τετράπλευρο έχει τις πλευρές του ίσες, είναι κανονικό.
- 4 Αν ένα τετράπλευρο έχει τις γωνίες του ίσες, είναι κανονικό.
- 5 Η κεντρική γωνία του κανονικού εξαγώνου είναι 120° .
- 6 Ένα τετράγωνο είναι κανονικό τετράπλευρο.
- 7 Αν ω η κεντρική γωνία και φ μία από τις ίσες γωνίες κανονικού πολυγώνου, τότε ισχύει $\omega = 180^\circ - \varphi$.
- 8 Η κεντρική γωνία ω ενός κανονικού πολυγώνου είναι συμπληρωματική της εσωτερικής του γωνίας φ .

Στις παρακάτω ερωτήσεις να βάλετε σε κύκλο το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση:

- 1 Η κεντρική γωνία του κανονικού δεκαγώνου είναι:
Α. 30° Β. 60° Γ. 36° Δ. 40°
- 2 Ένα κανονικό πολύγωνο έχει κεντρική γωνία 18° . Η εσωτερική του γωνία είναι:
Α. 148° Β. 162° Γ. 170° Δ. 152°
- 3 Ένα κανονικό πολύγωνο έχει εσωτερική γωνία 150° . Η κεντρική γωνία του είναι:
Α. 15° Β. 40° Γ. 50° Δ. 30°
- 4 Ένα κανονικό πολύγωνο έχει εσωτερική γωνία 165° . Το πλήθος των πλευρών του είναι:
Α. 12 Β. 15 Γ. 20 Δ. 24
- 5 Ένα κανονικό πολύγωνο έχει 8 πλευρές. Η εσωτερική γωνία του είναι:
Α. 135° Β. 140° Γ. 130° Δ. 125°
- 6 Ένα κανονικό πολύγωνο έχει κεντρική γωνία $22,5^\circ$. Το πλήθος των πλευρών του είναι:
Α. 14 Β. 16 Γ. 18 Δ. 22



Ασκήσεις και Προβλήματα

- 1 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα που αναφέρεται σε κανονικά πολύγωνα.

Πλήθος πλευρών	Κεντρική γωνία πολυγώνου ω	Εσωτερική γωνία πολυγώνου φ
8		
	40°	
		144°

- 2 Να ελέγξετε ποιες από τις παρακάτω γωνίες αντιστοιχούν σε κεντρική γωνία κανονικού πολυγώνου. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
α) 12° β) 50° γ) 15° δ) 24°

- 3 Να εξετάσετε αν ένα κανονικό πολύγωνο μπορεί να έχει γωνία $\varphi = 160^\circ$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

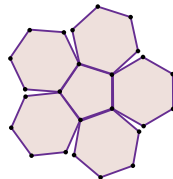
- 4 Να εξετάσετε αν υπάρχουν κανονικά πολύγωνα με εσωτερικές γωνίες 120° , 135° , $158,5^\circ$, 160° .

- 5 Υπάρχει κανονικό πολύγωνο στο οποίο η εσωτερική του γωνία είναι ίση με την κεντρική γωνία του; (δηλαδή $\varphi = \omega$). Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

- 6 Υπάρχει κανονικό πολύγωνο στο οποίο η εσωτερική γωνία του να είναι μικρότερη από την κεντρική του γωνία; (δηλαδή $\varphi < \omega$). Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

- 7 Χρησιμοποιώντας κανόνα και διαβήτη να κατασκευάσετε ένα κανονικό οκτάγωνο.

- 8 Το διπλανό σχήμα αποτελείται από ένα κανονικό πεντάγωνο και περιμετρικά αυτού πέντε κανονικά εξάγωνα. Γιατί εμφανίζονται κενά μεταξύ των εξαγώνων;



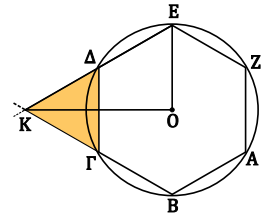
- 9 Να διαιρέσετε έναν κύκλο σε 9 ίσα τόξα.

- 10 Να σχεδιάσετε με μοιρογνωμόνιο, χάρακα και διαβήτη ένα κανονικό πεντάγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο με ακτίνα 3 cm.

- 11 Να σχεδιάσετε ένα κανονικό πεντάγωνο και να φέρετε τις διαγωνίους του. Να εξετάσετε με τη βοήθεια γεωμετρικών οργάνων αν το πεντάγωνο που έχει κορυφές τα σημεία τομής των διαγωνίων είναι κανονικό.

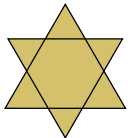
- 12 Να σχεδιάσετε: α) ένα κανονικό εξάγωνο και β) ένα κανονικό πεντάγωνο. Να εξετάσετε αν και πόσους άξονες συμμετρίας έχουν τα δύο πολύγωνα.

- 13 Να κατασκευάσετε το κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ. Να προεκτείνετε τις πλευρές ΕΔ και ΒΓ και πάνω στις προεκτάσεις να ορίσετε το σημείο τομής τους Κ. Να σχεδιάσετε τα ευθύγραμμα τμήματα ΚΟ και ΟΕ. Να εξηγήσετε γιατί:

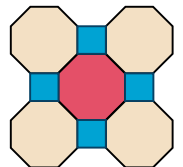


- α) Το τρίγωνο ΓΚΔ είναι ισόπλευρο.
β) Το τρίγωνο ΚΟΕ είναι ορθογώνιο.
γ) Η ΚΟ είναι μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος ΔΓ.
δ) Η γωνία ΕΚΟ είναι 30° .
ε) Η γωνία ΚΕΟ είναι 60° .

- 14 Να κατασκευάσετε με κανόνα και διαβήτη το αστέρι της διπλανής εικόνας. Να κάνετε την κατασκευή με δύο διαφορετικούς τρόπους.



- 15 Να σχεδιάσετε με κανόνα και διαβήτη την πλακόστρωση της διπλανής εικόνας. Το σχήμα αυτό αποτελείται από ένα κανονικό οκτάγωνο όπου περιμετρικά υπάρχουν τέσσερα τετράγωνα και τέσσερα οκτάγωνα.



Να κάνετε τις Εργασίες με προεκτάσεις: «Κηρήθρα μελισσών, Το θέατρο της Επιδαύρου, Κάλυψη επιπέδου με κανονικά πολύγωνα, Τα Μαθηματικά στη διακοσμητική τέχνη».



Κατασκευή κανονικού εξαγώνου με χαρτοδιπλωτική: Η χαρτοδιπλωτική είναι επινόηση των Ιαπώνων. Στα Ιαπωνικά ονομάζεται οριγκάμι που σημαίνει δίπλωμα χαρτιού. Με αυτήν την τεχνική να κατασκευάσετε ένα κανονικό εξάγωνο ακολουθώντας σχετικές οδηγίες. Μετά το πέρας της κατασκευής του πολυγώνου να αιτιολογήσετε γιατί το σχήμα είναι κανονικό.



Να εξερευνήσετε την κάλυψη του επιπέδου με κανονικά πολύγωνα.

4.3 Πυθαγόρειο Θεώρημα

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

Να διερευνούν και να διατυπώνουν το Πυθαγόρειο Θεώρημα και το αντίστροφό του και να τα χρησιμοποιούν για τον υπολογισμό μηκών και τον προσδιορισμό ορθής γωνίας τριγώνου, αντίστοιχα.

Ο Πυθαγόρας ήταν σπουδαίος Έλληνας μαθηματικός και φιλόσοφος ο οποίος απέδειξε ένα από τα πιο περίφημα θεωρήματα, που προς τιμή του ονομάζεται **Πυθαγόρειο Θεώρημα** και θα δούμε στη συνέχεια.

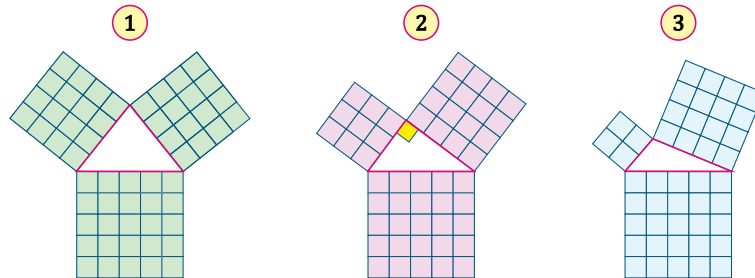
Όταν μία πρόταση αληθεύει για μερικές περιπτώσεις και υποθέτουμε ότι αληθεύει για όλες, τότε διατυπώνουμε μία **εικασία**. Η εικασία είναι η καλύτερη ιδέα για να μαντέψουμε μια μαθηματική σχέση. Είναι συνήθως η γενίκευση μιας κανονικότητας, που σκεφτόμαστε ότι μπορεί να είναι σωστή, αλλά δεν είμαστε ακόμα βέβαιοι. Όταν βεβαιωθούμε ότι η πρόταση ισχύει για όλες τις περιπτώσεις, τότε η πρόταση αυτή γίνεται θεώρημα (κανόνας) και η διαδικασία ονομάζεται **απόδειξη**. Περισσότερα για την απόδειξη θα μάθουμε σε μεγαλύτερες τάξεις.



Διερεύνηση 1. Διατύπωση μίας εικασίας για τα ορθογώνια τρίγωνα.

Εργασία κατά ζεύγη.

α) Να βρείτε τα εμβαδά των τετραγώνων κάθε σχήματος σε τετραγωνικές μονάδες και να συγκρίνετε το εμβαδόν του μεγάλου τετραγώνου με το άθροισμα των εμβαδών των δύο τετραγώνων τα οποία βρίσκονται στο πάνω μέρος.



β) Να διατυπώσετε μία εικασία για τη σχέση των εμβαδών των τετραγώνων στις πλευρές ενός ορθογώνιου τριγώνου.
γ) Να σχεδιάσετε κι άλλα ορθογώνια τρίγωνα και να ελέγξετε την εικασία που διατυπώσατε στο ερώτημα **(β)**.

Μαθηματικές Έννοιες και Διεργασίες Μάθησης

Πυθαγόρειο Θεώρημα

Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο, οι πλευρές της ορθής γωνίας ονομάζονται **κάθετες πλευρές**.

Η πλευρά που είναι απέναντι από την ορθή γωνία ονομάζεται **υποτείνουσα**.

Ο Πυθαγόρας απέδειξε, πριν από περίπου 2500 χρόνια, την ακόλουθη πρόταση, που συνδέει τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου και προς τιμήν του ονομάστηκε **Πυθαγόρειο Θεώρημα**:

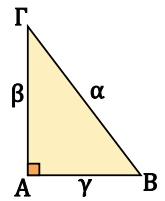


Να διερευνήσετε το Πυθαγόρειο Θεώρημα με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής.

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο της υποτείνουσας είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών του.

Αν α, β, γ οι πλευρές ενός ορθογώνιου τριγώνου $AB\Gamma$ με ορθή γωνία \hat{A} , το Πυθαγόρειο Θεώρημα διατυπώνεται συμβολικά ως εξής:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$



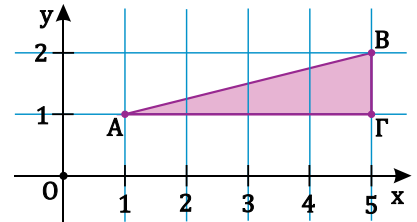
Στο έκτο κεφάλαιο θα δούμε μια εξήγηση για το Πυθαγόρειο Θεώρημα χρησιμοποιώντας το εμβαδόν.

Με το Πυθαγόρειο Θεώρημα μπορούμε να υπολογίζουμε μήκη και αποστάσεις.

Παράδειγμα 1. Η απόσταση των σημείων $A(1, 1), B(5, 2)$ προσδιορίζεται από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο του σχήματος και είναι:

$$AB^2 = A\Gamma^2 + B\Gamma^2 \text{ ή } AB^2 = 4^2 + 1^2 \text{ ή } AB^2 = 17 \text{ ή } AB = \sqrt{17} \text{ μονάδες.}$$

Παράδειγμα 2. Αν η υποτείνουσα ενός ορθογώνιου τριγώνου είναι 5 m και η μία κάθετη πλευρά του 3 m, τότε η άλλη κάθετη πλευρά του x θα είναι $5^2 = 3^2 + x^2$ ή $x^2 = 25 - 9$ ή $x^2 = 16$ ή $x = 4$ m.



Διερεύνηση 2. Εικασία του αντιστρόφου του Πυθαγόρειου Θεωρήματος

Εργασία μαθητών κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες.

α) Να αντιγράψετε τον παρακάτω πίνακα στο τετράδιό σας. Για κάθε σειρά του πίνακα να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ με μήκη α, β, γ των πλευρών που δίνονται. Για τον σχεδιασμό των τριγώνων να λάβετε υπόψη σας τη σημείωση που ακολουθεί μετά τη διερεύνηση. Να εξετάσετε αν ισχύει η ισότητα $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$. Να μετρήσετε με το μοιρογνωμόνιο τη γωνία φ που σχηματίζουν οι πλευρές β και γ .

Πλευρά α	Πλευρά β	Πλευρά γ	α^2	$\beta^2 + \gamma^2$	$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$	Γωνία φ
5	3	4	25	25	ΝΑΙ	90°
13	5	12				
11	7	10				
10	6	8				
13	8	9				
26	10	24				
17	8	15				

β) Για κάθε ένα από τα παραπάνω τρίγωνα, να αναζητήσετε πιθανή σύνδεση μεταξύ των δύο τελευταίων στηλών του πίνακα. Να διατυπώσετε μία **εικασία** για τη σχέση της ισότητας $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ με τη γωνία φ .

γ) Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο με οποιαδήποτε μήκη πλευρών, τα οποία είναι διαφορετικά από εκείνα του πίνακα και να ελέγξετε την εικασία με βάση το ερώτημα **β**.



Να διερευνήσετε με την εφαρμογή την εικασία του αντιστρόφου του Πυθαγόρειου Θεωρήματος.

Σημείωση

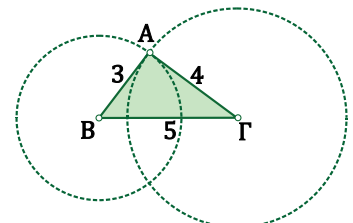
Για να κατασκευάσουμε ένα τρίγωνο με κανόνα και διαβήτη όπως αυτό που έχει πλευρές 3, 4 και 5, ακολουθούμε τα βήματα:

Βήμα 1ο: Σχεδιάζουμε τμήμα $B\Gamma = 5$.

Βήμα 2ο: Κατασκευάζουμε τους κύκλους $(B, 3)$ και $(\Gamma, 4)$.

Βήμα 3ο: Βρίσκουμε το σημείο τομής A των κύκλων.

Βήμα 4ο: Σχεδιάζουμε το τρίγωνο $AB\Gamma$, που είναι το ζητούμενο.



Μαθηματικές Έννοιες και Διεργασίες Μάθησης

Αντίστροφο Πυθαγόρειου Θεωρήματος

Ήδη από το 2300 π.Χ. ήταν γνωστό στην Αρχαία Αίγυπτο ότι ένα τρίγωνο με κατάλληλη επιλογή για τα μήκη των πλευρών του είναι ορθογώνιο. Οι αρχαίοι Αιγύπτιοι για την κατασκευή ορθών γωνιών χρησιμοποιούσαν ένα σκοινί με 13 κόμπους σε ίσα διαστήματα που σχηματίζουν 12 ίσα ευθύγραμμα τμήματα και ονομάζονταν «αρπεδόνη». Ένωσαν τα άκρα και σχημάτιζαν ένα τρίγωνο με πλευρές που είχαν μήκη τρεις, τέσσερις και πέντε μονάδες. Το τρίγωνο αυτό είναι ορθογώνιο και η ορθή γωνία βρίσκεται απέναντι από το μεγαλύτερο κομμάτι σκοινοῦ με μήκος πέντε μονάδες.



Αυτός ο απλός τρόπος που χρησιμοποιούσαν οι αρχαίοι Αιγύπτιοι για να δημιουργούν ορθές γωνίες στο έδαφος και στα κτίρια είναι το αντίστροφο του Πυθαγόρειου Θεωρήματος.

Αποδεικνύεται ότι, αν για τις πλευρές α, β, γ ενός τριγώνου ισχύει η ισότητα $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και η ορθή γωνία βρίσκεται απέναντι από την πλευρά α . Η πρόταση αυτή είναι γνωστή ως **αντίστροφο του Πυθαγόρειου Θεωρήματος** και με τη βοήθειά της ελέγχουμε αν ένα τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

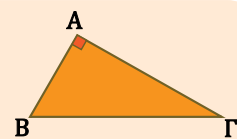
Μελετούμε το *Ιστορικό σημείωμα* με τίτλο: «Το “αντίστροφο” του Πυθαγόρειου Θεωρήματος και η αρπεδόνη».

Γενικά

Αν σε ένα τρίγωνο το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών του, τότε η γωνία που βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά είναι ορθή.

Εφαρμογή 1

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) να υπολογίσετε:
α) Την πλευρά $B\Gamma$ όταν $A\Gamma = 12$ cm και $AB = 5$ cm.
β) Την πλευρά $A\Gamma$ όταν $AB = 6$ cm, $B\Gamma = 10$ cm.



Απάντηση

α) Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$: $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$. Επειδή $A\Gamma = 12$ cm και $AB = 5$ cm προκύπτει ότι: $B\Gamma^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$ ή $B\Gamma = \sqrt{169} = 13$ (cm). (η αρνητική τιμή απορρίπτεται αφού το μήκος είναι θετικός αριθμός).

β) Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε:

$$AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2 \text{ ή } A\Gamma^2 = B\Gamma^2 - AB^2$$

Επειδή $AB = 6$ cm, $B\Gamma = 10$ cm προκύπτει ότι: $A\Gamma^2 = 10^2 - 6^2$ ή $A\Gamma^2 = 64$, ή $A\Gamma = 8$ (cm).



Εφαρμογή 2

Να εξετάσετε αν είναι ορθογώνιο το τρίγωνο με πλευρές:

- α) 6, 8 και 10 μονάδες μήκους, β) 3, 6 και 8 μονάδες μήκους.

Απάντηση

- α) Επιλέγουμε τη μεγαλύτερη πλευρά και υψώνοντας στο τετράγωνο, παίρνουμε: $10^2 = 100$. Υπολογίζουμε το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών: $6^2 + 8^2 = 100$. Διαπιστώνουμε ότι $10^2 = 6^2 + 8^2$ οπότε σύμφωνα με το αντίστροφο του Πυθαγόρειου Θεωρήματος το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και η ορθή γωνία του βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά.
- β) Παρόμοια έχουμε: $8^2 = 64$ και $6^2 + 3^2 = 36 + 9 = 45$. Ωστόσο, $8^2 \neq 6^2 + 3^2$, οπότε δεν ισχύει το αντίστροφο του Πυθαγόρειου Θεωρήματος. Άρα το τρίγωνο δεν είναι ορθογώνιο.



Εφαρμογή 3

Ένα ισοσκελές τρίγωνο ABΓ έχει μήκη πλευρών $\beta = \gamma = 5$ cm και $\alpha = 3$ cm. Να υπολογίσετε το μήκος του ύψους u .

Απάντηση

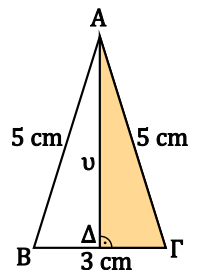
Έστω ότι $AD = u$ είναι το ύψος του ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχεί στη βάση ΒΓ.

Το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα $ΑΓ = 5$ cm και $ΔΓ = 1,5$ cm.

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε:

$$u^2 = AG^2 - DG^2 \text{ ή } u^2 = 5^2 - (1,5)^2 \text{ ή } u^2 = 25 - 2,25 \text{ ή } u = \sqrt{22,75} \approx 4,8 \text{ (cm)}$$

Άρα, το ύψος u έχει μήκος περίπου 4,8 cm.



Ερωτήσεις για Αξιολόγηση

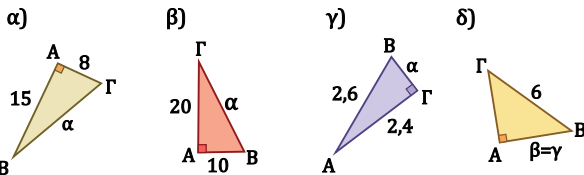
Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με τη λέξη Σωστό (Σ), αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος (Λ), αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- 1 Ένα τρίγωνο με πλευρές 13, 12 και 5 είναι ορθογώνιο.
- 2 Ένα τρίγωνο με πλευρές 3, 3,5 και 4,5 είναι ορθογώνιο.
- 3 Αν οι δύο κάθετες πλευρές ενός ορθογώνιου τριγώνου είναι 11 και 60 μονάδες μήκους, τότε η υποτείνουσα είναι 61 μονάδες μέτρησης.
- 4 Αν οι δύο κάθετες πλευρές ενός ορθογώνιου τριγώνου είναι 8 cm και 15 cm, η υποτείνουσα είναι 18 cm.
- 5 Αν η μία κάθετη πλευρά ενός ορθογώνιου τριγώνου είναι 21 cm και η υποτείνουσα είναι 29 cm, τότε η άλλη κάθετη πλευρά του είναι 20 cm.
- 6 Αν η μία κάθετη πλευρά ενός ορθογώνιου τριγώνου είναι 12 cm και η υποτείνουσα είναι 37 cm, τότε η άλλη κάθετη πλευρά του είναι 30 cm.



Ασκήσεις και Προβλήματα

1 Να υπολογίσετε το μήκος της τρίτης πλευράς των ορθογώνιων τριγώνων. Οι μετρήσεις είναι σε εκατοστά (cm).



2 Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο και να υπολογίσετε το μήκος της τρίτης πλευράς.

- α) $\alpha = 6$ m β) $\alpha = 41$ cm γ) $\alpha = 3,0$ dm
 $\beta = 8$ m $\beta = 40$ cm $\gamma = 1,6$ dm
 $\hat{\Gamma} = 90^\circ$ $\hat{\Lambda} = 90^\circ$ $\hat{B} = 90^\circ$
- δ) $\alpha = 2,9$ m ε) $\alpha = 1,2$ mm
 $\beta = 2,1$ m $\gamma = 2$ mm
 $\hat{\Lambda} = 90^\circ$ $\hat{\Gamma} = 90^\circ$

3 Δίνονται τα εμβαδά των τετραγώνων με πλευρές τις κάθετες πλευρές ενός ορθογώνιου τριγώνου. Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου.

- α) $E_1 = 144$ cm², $E_2 = 256$ cm²
 β) $E_1 = 81$ cm², $E_2 = 400$ cm².

4 Δίνονται τα εμβαδά των επτά τετραγώνων.
 $E_1 = 25$ cm², $E_2 = 144$ cm², $E_3 = 9$ cm², $E_4 = 169$ cm²,
 $E_5 = 16$ cm², $E_6 = 64$ cm² και $E_7 = 49$ cm².

- α) Να βρείτε συνδυασμούς τετραγώνων στα οποία εφαρμόζεται το Πυθαγόρειο Θεώρημα.
 β) Να βρείτε τα αντίστοιχα μήκη των πλευρών.

5 Να υπολογίσετε την πλευρά ενός ρόμβου που έχει διαγώνιους 130 m και 144 m.

6 Να αποφασίσετε αν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο. Εάν ναι, να δώσετε την ορθή γωνία και την υποτείνουσα.

- α) $\alpha = 16$ cm, $\beta = 30$ cm, $\gamma = 34$ cm.
 β) $\alpha = 10$ cm, $\beta = 4$ cm, $\gamma = 6$ cm.
 γ) $\alpha = 1,8$ m, $\beta = 3,0$ m, $\gamma = 1,2$ m.

7 Ορθογώνιο ABΓΔ έχει τις κορυφές του σε κύκλο ακτίνας 8,5 cm. Αν το πλάτος του ορθογώνιου είναι 10 cm, να βρείτε το μήκος του.

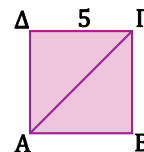
8 Ένα ισοσκελές τρίγωνο ABΓ έχει μήκη πλευρών $\alpha = \beta = 12$ cm και $\gamma = 8$ cm. Να υπολογίσετε το μήκος του ύψους υ που αντιστοιχεί στην πλευρά γ.

9 Οι δύο πλευρές ενός τριγώνου είναι 30 και 40 μονάδες μήκους αντίστοιχα. Ποιο είναι το μήκος της τρίτης πλευράς, έτσι ώστε το τρίγωνο να είναι ορθογώνιο;

10 Να εξετάσετε ποια τρίγωνα με τα ακόλουθα μήκη πλευρών είναι ορθογώνια.

- α) 12, 10 και 8 β) 16, 12 και 20 γ) 15, 9 και 11
 δ) $\sqrt{2}$, 1 και 1

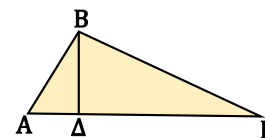
11 Το τετράγωνο ABΓΔ του διπλανού σχήματος έχει πλευρά ίση με 5 μονάδες. Να υπολογίσετε το τετράγωνο του μήκους της διαγωνίου ΑΓ.



12 Στο τρίγωνο ABΓ του διπλανού σχήματος δίνονται:

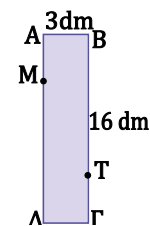
$\Gamma B = 20$ cm, $\Gamma \Delta = 16$ cm,
 $A \Delta = 5$ cm.

Αν ΒΔ είναι το ύψος του τριγώνου να υπολογίσετε τα μήκη ΒΔ και ΑΒ.

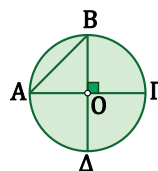


13 Έστω ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές α, β και γ, όπου α είναι η υποτείνουσα. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με πλευρές 2α, 2β και 2γ είναι ορθογώνιο.

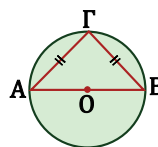
14 Το ορθογώνιο του διπλανού σχήματος δείχνει ένα τμήμα τοίχου με βάση ΑΒ = 3 dm και ύψος ΒΓ = 16 dm. Παίρνουμε τα σημεία Μ και Τ, έτσι ώστε $AM = \frac{A\Delta}{4}$ και $\Gamma T = \frac{B\Gamma}{4}$. Στη θέση Μ, βρίσκεται ένα μυρμήγκι το οποίο θα ακολουθήσει τη συντομότερη διαδρομή για να φθάσει στην τροφή που βρίσκεται στη θέση Τ. Να υπολογίσετε το μήκος της διαδρομής του μυρμηγκιού.



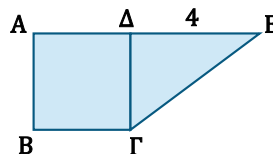
15 Η διάμετρος του κύκλου (Ο, ΟΑ) ισούται με 4 μονάδες μήκους. Να υπολογίσετε το μήκος της χορδής ΑΒ.



16 Στον διπλανό κύκλο η ΑΒ είναι διάμετρος και επιπλέον ισχύει:
 $A\Gamma = B\Gamma = 2$ cm.
 Να υπολογίσετε την ακτίνα του κύκλου.

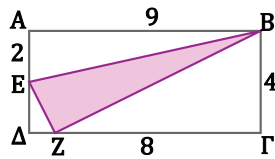


17 Στο διπλανό σχήμα το ABΓΔ είναι τετράγωνο με εμβαδόν 9 cm² και το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΔΕ είναι 4 cm.



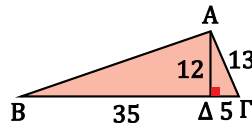
Να υπολογίσετε το μήκος της περιμέτρου του τετραπλεύρου ABΓΕ.

- 18 Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Οι μετρήσεις δίνονται σε εκατοστά (cm).



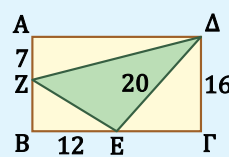
Να δείξετε ότι το τρίγωνο EZB είναι ορθογώνιο τρίγωνο.

- 19 Οι μετρήσεις στο διπλανό σχήμα δίνονται σε εκατοστά (cm).



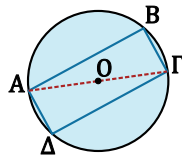
- α) Να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB.
β) Να εξετάσετε αν το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο.

- 20 **Εργασία κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες.** Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος είναι ορθογώνιο. Οι μετρήσεις δίνονται σε εκατοστά (cm).



- α) Να υπολογίσετε τις πλευρές του τριγώνου ΔΕΖ.
β) Να δείξετε ότι η γωνία ΖΕΔ είναι 90° .

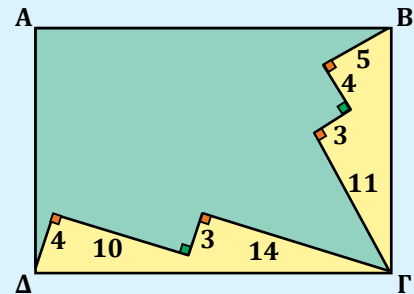
- 21 Στο διπλανό σχήμα οι χορδές του κύκλου ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες και η ΑΓ είναι διάμετρος. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.



- 22 Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές: $\alpha = \frac{15}{8}$, $\beta = \frac{9}{8}$, $\gamma = \frac{3}{2}$ είναι ορθογώνιο.

- 23 **Εργασία μαθητών στην τάξη κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες:**

Από ένα αγρόκτημα ΑΒΓΔ σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου αποσπάστηκαν δύο κίτρινα τμήματα, τα οποία χαρακτηρίστηκαν στο κτηματολόγιο ως δασική έκταση. Το πράσινο μέρος του αγροκτήματος που απέμεινε είναι χορτολιβαδική έκταση. Πόσες τετραγωνικές μονάδες είναι το εμβαδόν της χορτολιβαδικής έκτασης; Να μοιραστείτε τις στρατηγικές λύσης και τα επιχειρήματα στην ολομέλεια της τάξης.



- 24 Μια πόρτα έχει ύψος 2 m και πλάτος 1 m. Ένα τετράγωνο κομμάτι κόντρα πλακέ έχει πλευρά μήκους 2,2 m. Μπορεί το κόντρα πλακέ να περάσει από την πόρτα; Να εξηγήσετε.



Να διερευνήσετε τη θέση του πλοίου σε σχέση με την ορατότητα του φάρου με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής.

Μαθηματικές προκλήσεις. Εδώ θα βρείτε ενδιαφέρουσες δραστηριότητες σχετικές με τα θέματα που μελετήσαμε όπως: Τρίγωνοι αριθμοί, Φωτισμός σκηνής θεάτρου, Σχεδιάζουμε όπως οι Αρχαίοι Αιγύπτιοι, «Ζυγίζουμε τετράγωνα».

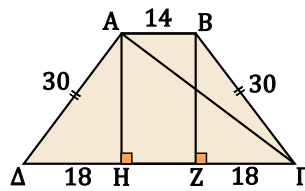


4.4 Ανακεφαλαίωση και διεύρυνση της θεματικής ενότητας

- **Επίκεντρη γωνία** σε κύκλο ονομάζεται η γωνία η οποία έχει την κορυφή της στο κέντρο του κύκλου και οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο.
Οι επίκεντρες γωνίες οι οποίες βαίνουν σε ίσα τόξα είναι μεταξύ τους ίσες.
- **Εγγεγραμμένη γωνία** σε κύκλο ονομάζεται η γωνία η οποία έχει την κορυφή της στον κύκλο και οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο.
Όλες οι εγγεγραμμένες γωνίες του ίδιου κύκλου, οι οποίες βαίνουν στο ίδιο τόξο ή σε ίσα τόξα είναι μεταξύ τους ίσες.
Κάθε εγγεγραμμένη γωνία σε κύκλο είναι ίση με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας.
- Ένα πολύγωνο λέγεται **κανονικό** όταν έχει όλες τις πλευρές του ίσες και όλες τις γωνίες του ίσες.
- Το μέτρο της **κεντρικής γωνίας** ω του κανονικού n -γωνου είναι ίσο με $\omega = \frac{360^\circ}{n}$.
- Η **εσωτερική γωνία** ή **γωνία** φ (μία από τις ίσες γωνίες) ενός κανονικού n -γωνου είναι παραπληρωματική της κεντρικής γωνίας του ω και ισχύει: $\varphi = 180^\circ - \omega$.
- **Πυθαγόρειο θεώρημα:**
Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο της υποτεινουσας είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών του.
Δηλαδή αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με $\hat{A}=90^\circ$ τότε $a^2 = b^2 + \gamma$.
- **Αντίστροφο Πυθαγόρειου θεωρήματος:**
Αν σε ένα τρίγωνο το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών του, τότε η γωνία που βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά είναι ορθή.

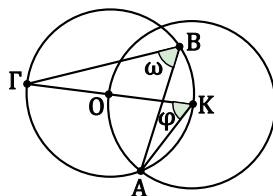
Επαναληπτικά Έργα & Προεκτάσεις

- 1 Σε ένα ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ είναι $AB = 14$, $B\Gamma = A\Delta = 30$.



- α) Να υπολογίσετε το ύψος AH .
β) Να υπολογίσετε τη διαγώνιο AG .
γ) Να αποδείξετε ότι $A\Delta \perp AG$.

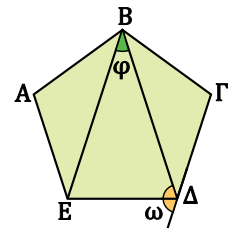
- 2 Στο διπλανό σχήμα οι δύο κύκλοι έχουν ίσες ακτίνες.



- Να υπολογίσετε:
α) Τη γωνία φ .
β) Τη γωνία ω .

- 3 Να κατασκευάσετε με κανόνα και διαβήτη ένα ορθογώνιο τρίγωνο με οξείες γωνίες 60° και 30° αντίστοιχα.

- 4 Το διπλανό σχήμα $AB\Gamma\Delta E$ είναι κανονικό πεντάγωνο. Προεκτείνουμε την πλευρά $\Gamma\Delta$ και σχηματίζεται η γωνία ω .
Να δείξετε ότι οι γωνίες ω και φ είναι παραπληρωματικές.



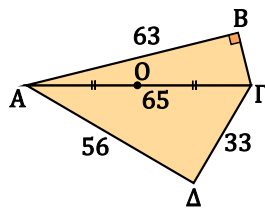
- 5 Το τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει πλευρές $AB = 5$ cm, $A\Gamma = x$ cm, $B\Gamma = x + 1$ cm, όπου x είναι η λύση της εξίσωσης:

$$\frac{2(x-3)}{5} - \frac{x}{2} = -\frac{24}{10}$$

- α) Να λύσετε την εξίσωση.
 β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο.
 γ) Να εντοπίσετε τη γωνία του τριγώνου η οποία είναι ορθή.

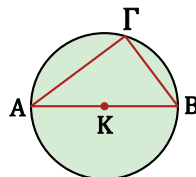
- 6 Έστω α , β και γ είναι τα μήκη πλευρών ενός ορθογώνιου και ισοσκελούς τριγώνου, με υποτεινούσα α και ισχύει η ισότητα $2\alpha + \alpha^2 + 3 - \beta^2 = 8 + \alpha + \gamma^2$.
 Να υπολογίσετε:
 α) Το μήκος της υποτεινούσας.
 β) Το μήκος των κάθετων πλευρών.

- 7 Με βάση το διπλανό σχήμα:
 α) Να υπολογίσετε τη ΒΓ.
 β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ορθογώνιο.

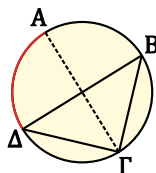


- δ) Να εξηγήσετε γιατί οι κορυφές των τριγώνων ABΓ και ΑΓΔ βρίσκονται στον ίδιο περιγεγραμμένο κύκλο.
 γ) Αν Ο είναι το μέσο της ΑΓ να αιτιολογήσετε ότι $OB = OD = 32,5$.

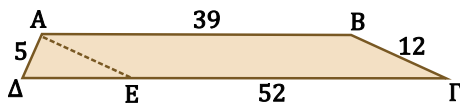
- 8 Στο διπλανό σχήμα AB είναι η διάμετρος του κύκλου.
 Αν $AG = 16$ και $BG = 12$, να βρείτε την AB.



- 9 Στο διπλανό σχήμα το τόξο \widehat{DA} είναι 90° . Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ διχοτομεί τη γωνία $\widehat{D\Gamma B}$.
 Να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΔΒ είναι διάμετρος του κύκλου.



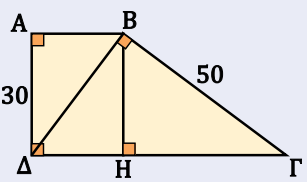
- 10 Δίνεται τραπέζιο ABΓΔ οι μετρήσεις είναι σε εκατοστά (cm). Φέρνουμε $AE // BF$.



Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AΔΕ είναι ορθογώνιο.

- 11 **Εργασία κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες.**

Ένα τραπέζιο ABΓΔ είναι ορθογώνιο με $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$, $AD = 30$ m

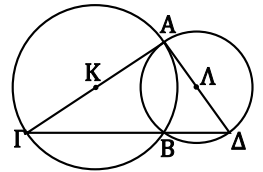


και $BG = 50$ m.

Επίσης ισχύει $BD \perp BG$. Φέρνουμε: $BH \perp DG$.

- α) Να υπολογίσετε το ευθύγραμμο τμήμα ΗΓ.
 β) Να βρείτε τη βάση AB του τραπέζιου.

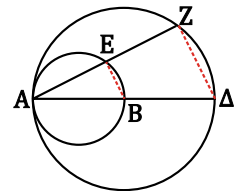
- 12 Δύο κύκλοι με κέντρα K και Λ τέμνονται στα σημεία A και B. Από το σημείο A φέρνουμε τις διαμέτρους ΑΓ και ΑΔ, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



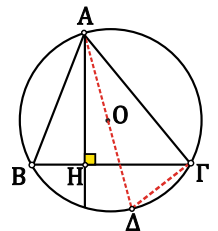
Να φέρετε τις χορδές ΓΒ και ΒΔ.

Να αποδείξετε ότι: $\widehat{GBA} + \widehat{BDA} = 180^\circ$ ή ότι τα σημεία Γ, Β, Δ είναι συνευθειακά.

- 13 Δίνεται κύκλος κέντρου Β με διάμετρο ΑΔ και δεύτερος κύκλος με διάμετρο ΑΒ. Έστω Ζ σημείο του πρώτου κύκλου. Η ευθεία ΑΖ τέμνει τον δεύτερο κύκλο στο Ε. Να αποδείξετε ότι $BE // \Delta Z$.

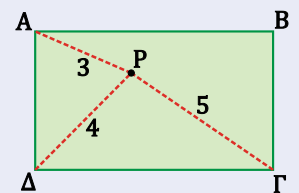


- 14 Στο ακόλουθο σχήμα η ΑΔ είναι διάμετρος του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι:



- α) $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{A\Delta\Gamma}$.
 β) $\widehat{BAH} = \widehat{DA\Gamma}$.

- 15 **Ανοιχτό πρόβλημα. Εργασία κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες.** Δίνεται σημείο P στο εσωτερικό ορθογώνιου ABΓΔ, έτσι ώστε $PA = 3$, $PD = 4$ και $PG = 5$. Να υπολογίσετε το μήκος του PB.



- 16 Ο Βασίλης θέλει να μεταφέρει στο δωμάτιό του μία ορθογώνια ξύλινη κατασκευή διαστάσεων 2,1 m x 2,5 m. Η πόρτα του δωματίου έχει ύψος 2,00 m και πλάτος 0,80 m. Να αποφασίσετε εάν η ξύλινη κατασκευή θα χωρέσει στην πόρτα. Να αιτιολογήσετε την απόφασή σας.



Να ανοίξετε την εφαρμογή «ΓΛΩΣΣΑΡΙ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ» για να ανακεφαλαιώσετε όρους και έννοιες τις οποίες γνωρίσατε στο κεφάλαιο αυτό.

Γεωμετρία

Κεφάλαιο

5


ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

Διάνυσμα

Μεταφορά

Στροφή

Κεντρική συμμετρία



Το Πυργί είναι ένα πανέμορφο χωριό της Χίου που μοιάζει να κεντήθηκε στο χέρι με τα λεγόμενα «ξυστά». Τα σπίτια είναι παραδοσιακά διακοσμημένα με μετασχηματισμούς.

Στο Κεφάλαιο αυτό θα μάθουμε:

- Να παριστάνουμε θέσεις, διευθύνσεις και διαδρομές με τη βοήθεια διανυσμάτων.
- Να συνδέουμε τα διανύσματα με φυσικά διανυσματικά μεγέθη και να τα διακρίνουμε από τα ευθύγραμμα τμήματα.
- Να αναγνωρίζουμε μετασχηματισμούς μεταφοράς κατά διάνυσμα και στροφής ως προς κέντρο και γωνία στροφής και να βρίσκουμε τα στοιχεία των σχημάτων που παραμένουν αναλλοίωτα.
- Να αναγνωρίζουμε την κεντρική συμμετρία ως ειδική περίπτωση μετασχηματισμού στροφής κατά
- Να αξιοποιούμε τις ιδιότητες των μετασχηματισμών στον σχεδιασμό σχημάτων και στην αιτιολόγηση των ιδιοτήτων τους.
- Να σχεδιάζουμε γεωμετρικά σχήματα με ποικιλία εργαλείων και στρατηγικών.
- Να αναγνωρίζουμε και να περιγράφουμε μετασχηματισμούς σε ένα γεωμετρικό μοτίβο, ένα σχέδιο, ένα έργο τέχνης ή μια πλακόστρωση.

5.1 Γνωριμία με την έννοια του διανύσματος

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

- Να αναπαριστούν θέσεις, διευθύνσεις και διαδρομές με τη βοήθεια διανυσμάτων.
- Να συνδέουν τα διανύσματα με φυσικά διανυσματικά μεγέθη και να προσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά τους αναγνωρίζοντας τη διαφορά ανάμεσα σε ευθύγραμμο τμήμα και διάνυσμα.



Διερεύνηση 1. Μονόμετρα μεγέθη

Εργασία μαθητών κατά ζεύγη.

Να καταγράψετε στο τετράδιό σας:

- Το ύψος σας.
- Το πλήθος των θρανίων της τάξης σας.
- Το πλήθος των ωρών του εβδομαδιαίου προγράμματος διδασκαλίας.
- Το μήκος του μολυβιού σας.

α) Τι χρειάζεται για να προσδιορίσετε πλήρως την απάντησή σας;

β) Να σκεφτείτε και να περιγράψετε και άλλα παρόμοια μεγέθη.

Μοιραζόμαστε και συζητάμε τις προτάσεις μας στην ολομέλεια της τάξης.



Διερεύνηση 2. Διανυσματικά μεγέθη

Εργασία μαθητών κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες.

Έχουμε την πληροφορία ότι ένα αυτοκίνητο κινείται με ταχύτητα 80 km/h.

α) Μπορούμε μόνο με αυτή την πληροφορία να προσδιορίσουμε επακριβώς την κίνησή του;

β) Αν όχι, ποιες άλλες πληροφορίες χρειαζόμαστε για να μπορέσουμε να προσδιορίσουμε με ακρίβεια την κίνησή του;

γ) Η ταχύτητα είναι μονόμετρο μέγεθος;

δ) Να αναφέρετε δύο μεγέθη παρόμοια με την ταχύτητα.

Ανταλλάσσουμε επιχειρήματα και αιτιολογούμε τις απαντήσεις μας.



Μαθηματικές Έννοιες και Διεργασίες Μάθησης

Μονόμετρα μεγέθη

Για να προσδιορίσουμε μεγέθη όπως τον χρόνο σε λεπτά που χρειαζόμαστε για να μεταβούμε από το σπίτι μας στο σχολείο ή το νούμερο των παπουτσιών που φοράμε, είναι αρκετό να αναφέρουμε έναν αριθμό που είναι το αποτέλεσμα της μέτρησης με μία μονάδα μέτρησης. Για παράδειγμα, για τον χρόνο μετάβασης αναφέρουμε ότι ο χρόνος είναι 15 λεπτά ή ότι φοράμε παπούτσια νούμερο 39 (αντιστοιχεί σε 22,5 cm).

Μεγέθη όπως αυτά τα οποία προσδιορίζονται πλήρως όταν δοθεί η αριθμητική τιμή τους ή το μέτρο τους και η αντίστοιχη μονάδα μέτρησής τους λέγονται βαθμωτά ή μονόμετρα μεγέθη.

Μονόμετρα ή βαθμωτά μεγέθη ονομάζονται τα μεγέθη τα οποία προσδιορίζονται μόνο από την αριθμητική τιμή τους ή αλλιώς το μέτρο τους.

Διανυσματικά μεγέθη

Εκτός από τα μονόμετρα μεγέθη τα οποία προσδιορίζονται επακριβώς μόνο με το μέτρο τους, υπάρχουν και μεγέθη τα οποία για να προσδιοριστούν χρειάζονται και άλλα στοιχεία.

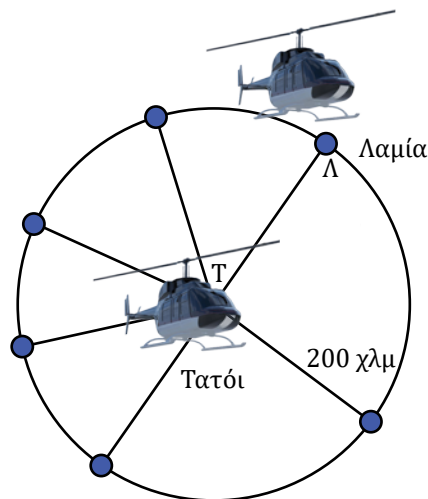
Για παράδειγμα, αν ξέρουμε ότι ένα ελικόπτερο ξεκίνησε από το αεροδρόμιο του Τατοΐου και έκανε ευθύγραμμη πτήση 200 km, παρόλο που γνωρίζουμε το σημείο από το οποίο ξεκίνησε η πτήση καθώς και το μήκος της πτήσης δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε τη διαδρομή του.



Παρατηρώντας το διπλανό σχήμα, το ελικόπτερο θα μπορούσε να έχει πάει σε οποιοδήποτε σημείο με κέντρο το Τατόι και ακτίνα 200 χιλιομέτρα.

Για τον προσδιορισμό της διαδρομής του χρειαζόμαστε και την κατεύθυνσή του, δηλαδή την ευθεία πάνω στην οποία κινήθηκε (διεύθυνση) καθώς προς ποια πλευρά πάνω στην ευθεία κινήθηκε (φορά). Αν λοιπόν ξέρουμε ότι ξεκίνησε από το σημείο T και κινήθηκε πάνω στην ευθεία TΛ με φορά προς το σημείο Λ, τότε μπορούμε να προσδιορίσουμε επακριβώς τη διαδρομή του.

Μεγέθη όπως αυτά ονομάζονται διανυσματικά.



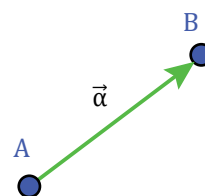
Διανυσματικά ονομάζονται τα μεγέθη τα οποία για να προσδιοριστούν πλήρως πρέπει να γνωρίζουμε το μέτρο τους και την κατεύθυνσή τους (διεύθυνση και φορά).

Παραδείγματα:

Μετατόπιση, δύναμη, επιτάχυνση, βάρος, άνεμος, μαγνητικό πεδίο.



Με τη βοήθεια της εφαρμογής να διακρίνετε μονόμετρα και διανυσματικά μεγέθη.



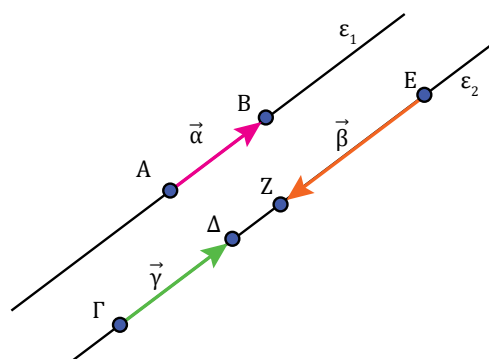
Διάνυσμα ονομάζεται ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα.

Τα διανύσματα παριστάνονται με βέλη, τα οποία έχουν ένα σημείο που ονομάζεται αρχή ή σημείο εφαρμογής του διανύσματος και ένα άλλο σημείο που ονομάζεται πέρας του διανύσματος. Αν A είναι η αρχή ενός διανύσματος και B το πέρας του, τότε το διάνυσμα συμβολίζεται με \vec{AB} . Εναλλακτικά μπορούμε να συμβολίσουμε ένα διάνυσμα με ένα μικρό γράμμα της αλφαβήτου, όπως \vec{a} , \vec{b} , \vec{v} κ.λπ.

Χαρακτηριστικά διανύσματος

Ένα διάνυσμα \vec{AB} , έχει τα ακόλουθα τρία χαρακτηριστικά:

- i. **Διεύθυνση:** Είναι η ευθεία που ορίζεται από τα άκρα A, B του ευθυγράμμου τμήματος AB ή οποιαδήποτε άλλη ευθεία παράλληλη προς αυτήν. Για παράδειγμα, τα διανύσματα \vec{AB} , $\vec{\Gamma\Delta}$, \vec{EZ} ή \vec{a} , \vec{b} , $\vec{\gamma}$ του διπλανού σχήματος έχουν την ίδια διεύθυνση, αφού $\epsilon_1 // \epsilon_2$.
- ii. **Φορά:** Προσδιορίζεται από την αρχή και το πέρας του. Για παράδειγμα, τα διανύσματα \vec{AB} , $\vec{\Gamma\Delta}$ ή \vec{a} , $\vec{\gamma}$ του διπλανού σχήματος έχουν την ίδια φορά, ενώ τα διανύσματα \vec{AB} , \vec{EZ} ή \vec{a} , \vec{b} , $\vec{\gamma}$ του διπλανού σχήματος έχουν αντίθετη φορά.
- iii. **Μέτρο:** Είναι το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB και συμβολίζεται με $|\vec{AB}|$. Το μέτρο είναι πάντοτε ένας αριθμός θετικός ή μηδέν, αφού εκφράζει μήκος.



Η διεύθυνση μαζί με τη φορά καθορίζουν την **κατεύθυνση** ενός διανύσματος, οπότε ένα διάνυσμα προσδιορίζεται πλήρως όταν ξέρουμε την κατεύθυνσή του και το μέτρο του.

Σημειώσεις:

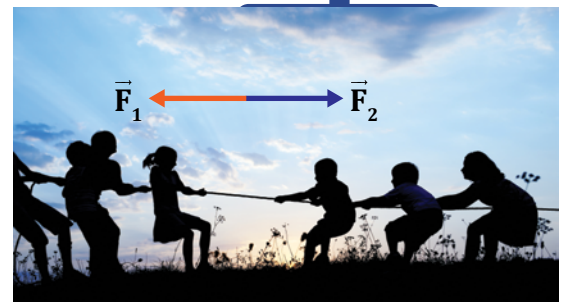
- Όταν η αρχή και το τέλος ενός διανύσματος συμπίπτουν, τότε το διάνυσμα ονομάζεται **μηδενικό**. Το συμβολίζουμε με $\vec{0}$ και ισχύει $|\vec{0}| = 0$. Για παράδειγμα, $\vec{AA} = \vec{0}$ με $|\vec{AA}| = 0$.
- Ένα διάνυσμα το οποίο έχει μέτρο τη μονάδα ονομάζεται **μοναδιαίο**. Για παράδειγμα όταν $|\vec{AB}| = 1$ το διάνυσμα \vec{AB} είναι μοναδιαίο.
- Διανύσματα που έχουν την ίδια κατεύθυνση όπως τα $\vec{AB}, \vec{\Gamma\Delta}$ λέγονται **ομόρροπα**.
- Διανύσματα που έχουν αντίθετες κατευθύνσεις όπως τα $\vec{AB}, \vec{E\Z}$ λέγονται **αντίρροπα**.

Αν τοποθετήσουμε δύο σώματα με μάζες m_1, m_2 σε μία ζυγαριά και ισορροπεί, τότε τα σώματα έχουν την ίδια μάζα και επομένως τα ίδια βάρη. Άρα τα διανύσματα \vec{B}_1, \vec{B}_2 έχουν την ίδια κατεύθυνση και το ίδιο μέτρο. Διανύσματα όπως αυτά τα λέμε **ίσα**.



Ίσα ονομάζονται δύο διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ όταν έχουν την ίδια διεύθυνση, την ίδια φορά και ίσα μέτρα. Συμβολικά: $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$

Όταν δύο ομάδες μαθητών τραβάνε ένα σχοινί, καθεμιά προς τη μεριά της αλλά καμιά δεν καταφέρνει να υπερισχύσει, τότε οι δυνάμεις \vec{F}_1, \vec{F}_2 οι οποίες ασκούνται έχουν το ίδιο μέτρο αλλά αντίθετες κατευθύνσεις. Διανύσματα όπως αυτά τα λέμε **αντίθετα**.



Αντίθετα ονομάζονται δύο διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ όταν έχουν ίδια διεύθυνση και το ίδιο μέτρο αλλά αντίθετες φορές. Συμβολικά: $\vec{\alpha} = -\vec{\beta}$



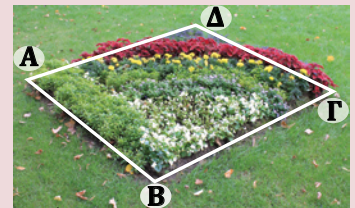
Με τη βοήθεια του ψηφιακού εργαλείου να παίξετε τη διεγκυστίνδα.



Εφαρμογή 1

Στον κήπο έχει οριοθετηθεί παρτέρι ΑΒΓΔ σχήματος ορθογώνιου παραλληλόγραμμου.

- α) Να γράψετε δύο διανύσματα τα οποία έχουν ως αρχή το σημείο Α.
- β) Να γράψετε ένα διάνυσμα το οποίο να είναι ίσο με το διάνυσμα $\vec{B\Gamma}$.
- γ) Ποια σχέση συνδέει τα διανύσματα:
 - i. $\vec{AB}, \vec{\Gamma\Delta}$
 - ii. $\vec{\Delta A}, \vec{\Gamma B}$
- δ) Είναι ίσα τα διανύσματα $\vec{A\Gamma}$ και $\vec{B\Delta}$.
- ε) Ποια είναι η διαφορά μεταξύ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΔ και του διανύσματος $\vec{A\Delta}$;



Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Απάντηση

- α) Τα διανύσματα \vec{AB} και $\vec{A\Delta}$ έχουν ως αρχή το σημείο Α.
- β) Τα διανύσματα $\vec{A\Delta}$ και $\vec{B\Gamma}$ είναι ίσα γιατί έχουν:
 - Την ίδια διεύθυνση αφού οι ευθείες ΑΔ και ΒΓ είναι παράλληλες ως απέναντι πλευρές ορθογωνίου.
 - Την ίδια φορά και
 - Το ίδιο μέτρο, ως απέναντι πλευρές ορθογωνίου.
- γ) i. Τα διανύσματα \vec{AB} και $\vec{\Gamma\Delta}$ είναι αντίθετα, αφού έχουν την ίδια διεύθυνση και το ίδιο μέτρο, αλλά, αντίθετη φορά.
ii. Τα διανύσματα $\vec{\Delta A}$ και $\vec{\Gamma B}$ είναι ίσα γιατί έχουν:
 - Την ίδια διεύθυνση αφού οι ευθείες ΔΑ και ΓΒ είναι παράλληλες ως απέναντι πλευρές ορθογωνίου.

- Την ίδια φορά και
 - Το ίδιο μέτρο, ως πλευρές ορθογωνίου.
- δ) Τα διανύσματα $\vec{A\Gamma}$ και $\vec{B\Delta}$ έχουν το ίδιο μέτρο αφού τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΒΔ είναι οι διαγώνιοι του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, αλλά δεν είναι ίσα γιατί δεν έχουν την ίδια διεύθυνση.
- ε) Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ έχει μέτρο που είναι το μήκος του αλλά δεν έχει προσανατολισμό. Έτσι το ΑΔ είναι ίσο με το ΔΑ. Το διάνυσμα $\vec{A\Delta}$ έχει ίδιο μέτρο με το ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ, αλλά επιπλέον έχει προσανατολισμό, δηλαδή έχει οριστεί φορά από το Α προς το Δ. Έτσι, το $\vec{A\Delta}$ δεν είναι ίσο με το .



Με την ψηφιακή εφαρμογή να διερευνήσετε τα ομόρροπα, τα αντίρροπα, τα ίσα και τα αντίθετα διανύσματα.



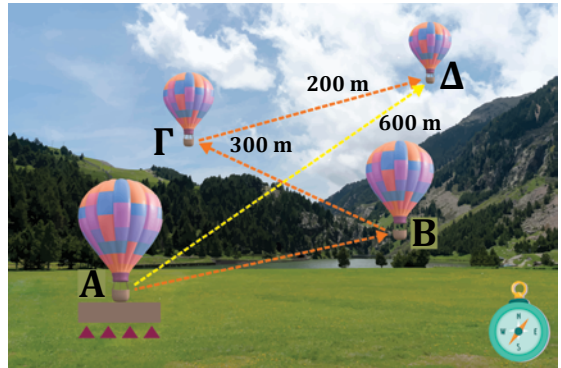
Διερεύνηση 3. Απόσταση και Μετατόπιση

Εργασία μαθητών κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες.

Ένα αερόστατο ξεκινάει από το σημείο Α. Καθώς ανεβαίνει, σε διαφορετικά ύψη συναντά ανέμους διαφορετικής κατεύθυνσης με αποτέλεσμα να βρίσκεται διαδοχικά στο σημείο Β μετά από 400 μέτρα, στο σημείο Γ μετά από 300 μέτρα και τέλος στο σημείο Δ μετά από 200 μέτρα, όπως φαίνεται στην εικόνα.

- α) Ποιο είναι το μήκος της συνολικής διαδρομής (διάστημα) την οποία διήνυσε το αερόστατο για να φτάσει από το σημείο Α στο σημείο Δ;
- β) Ποια είναι η απόσταση του αερόστατου από τη θέση Α στη θέση Δ;

Συζητούμε τις απαντήσεις μας στην τάξη.



Ο Μανώλης έχει ένα μπαλόνι γεμισμένο με ήλιο (He) και το αφήνει ελεύθερο από το σημείο Α να πετάξει στον ουρανό. Το μπαλόνι δεν ανεβαίνει κατακόρυφα προς τα πάνω αλλά ακολουθεί μία πορεία όπως φαίνεται στην εικόνα, περνώντας διαδοχικά από τα σημεία Β, Γ και Δ.



Να οδηγήσετε το αερόστατο στην ψηφιακή εφαρμογή με τη βοήθεια της πυξίδας.

Παρατηρούμε ότι το μπαλόνι κατά τη μετακίνησή του από το σημείο Α στο Β, ακολουθώντας από το Β στο Γ και τέλος

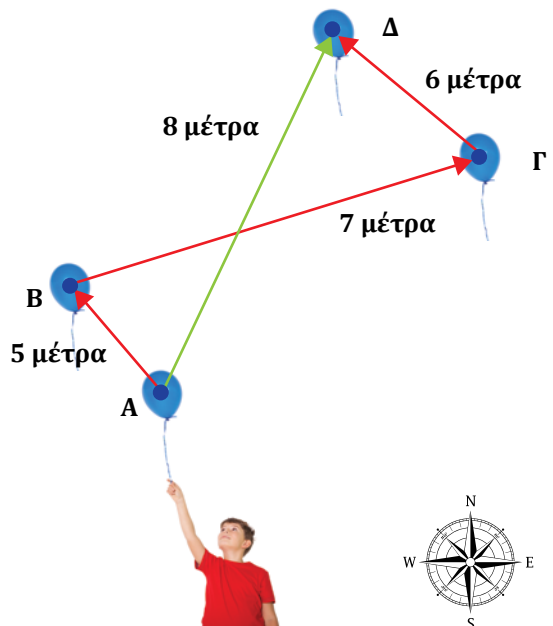
από το Γ στο Δ, διαγράφει μία διαδρομή με συνολικό μήκος:

$$|\vec{A\text{B}}| + |\vec{B\text{G}}| + |\vec{\text{G}\Delta}| = 5 + 7 + 6 = 18 \text{ μέτρα.}$$

Ο Μανώλης δεν συγκρατεί τις ενδιάμεσες θέσεις αλλά βλέπει την τελική θέση του μπαλονιού στο σημείο Δ.

Η διαδρομή ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ είναι διαφορετική από τη διαδρομή ΑΔ παρότι και οι δύο ξεκινούν από το ίδιο σημείο και καταλήγουν στο ίδιο σημείο.

Η διαδρομή ΑΔ δείχνει την αρχική και την τελική θέση του μπαλονιού. Έχει τα χαρακτηριστικά διανύσματος αφού έχει αρχή το σημείο Α και τέλος το σημείο Δ, δηλαδή διεύθυνση ΑΔ, φορά από το Α στο Δ καθώς και μέτρο το οποίο είναι το μήκος του ΑΔ ίσο με 8 μέτρα.



Μετατόπιση ονομάζεται το διάνυσμα που έχει αρχή την αρχική θέση ενός κινητού και τέλος την τελική του θέση.

Συμπερασματικά:

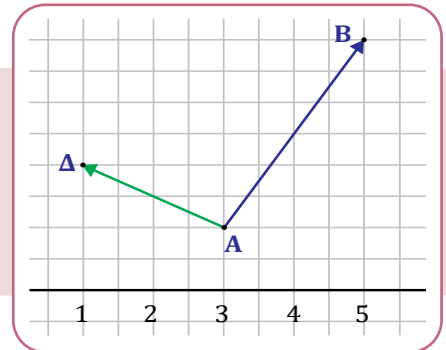
- Η απόσταση (διάστημα) είναι μονόμετρο μέγεθος, το οποίο εκφράζει το συνολικό μήκος της διαδρομής που διάνυσε ένα σώμα.
- Η μετατόπιση είναι διανυσματικό μέγεθος, που προσδιορίζει την αρχική και την τελική θέση ενός σώματος.



Εφαρμογή 2

Ένα διάνυσμα \vec{AB} δηλώνει μία μετατόπιση από το αρχικό σημείο A στο τελικό σημείο B.

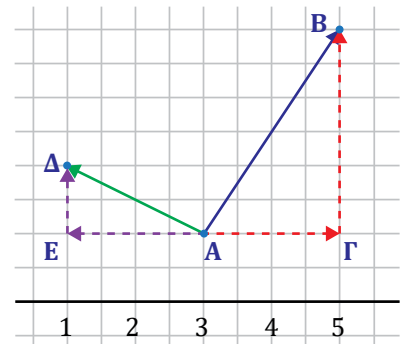
Να εκφράσετε τις μετατοπίσεις του σημείου A που δηλώνουν τα διανύσματα \vec{AB} και \vec{AD} στο διπλανό σχήμα με τη βοήθεια μίας οριζόντιας και στη συνέχεια μίας κατακόρυφης μετατόπισης.



Απάντηση

Για το διάνυσμα \vec{AB} που δηλώνει τη μετατόπιση από το σημείο A στο σημείο B, παρατηρούμε ότι αυτή μπορεί να πραγματοποιηθεί αρχικά κατά μία οριζόντια μετακίνηση προς τα δεξιά κατά 2 μονάδες και στη συνέχεια κατακόρυφα προς τα πάνω κατά 3 μονάδες.

Ανάλογα για το διάνυσμα \vec{AD} που δηλώνει τη μετατόπιση από το σημείο A στο σημείο Δ, παρατηρούμε ότι αυτή μπορεί να πραγματοποιηθεί αρχικά κατά μία οριζόντια μετακίνηση προς τα αριστερά κατά 2 μονάδες και στη συνέχεια κατακόρυφα προς τα πάνω κατά 1 μονάδα.



Σημείωση:

Ανάλογα συμπεράσματα ισχύουν για οποιαδήποτε θέση ενός διανύσματος.

Δηλώνουμε τη μετατόπιση αυτή λέγοντας για παράδειγμα στην περίπτωση του διανύσματος AB ότι είναι σύνθεση (πρόσθεση) των διανυσμάτων \vec{AG} και \vec{GB} .



Να ανοίξετε τον σύνδεσμο και να απαντήσετε στις ερωτήσεις αξιολόγησης για την έννοια του διανύσματος.

Ερωτήσεις για Αξιολόγηση

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με τη λέξη Σωστό (Σ), αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος (Λ), αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

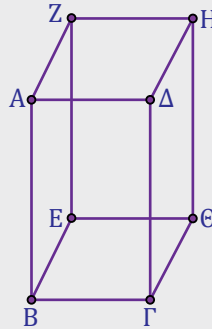
- 1 Τα αντίθετα διανύσματα έχουν ίσα μέτρα.
- 2 Κατεύθυνση διανύσματος είναι η διεύθυνση και η φορά του.
- 3 Η απόσταση και η μετατόπιση είναι ίδια μεγέθη.
- 4 Το βάρος και η μάζα ενός σώματος είναι μονόμετρα μεγέθη.
- 5 Μέτρο ενός διανύσματος είναι η απόσταση της αρχής του από το πέρας του.
- 6 Ένα ευθύγραμμο τμήμα είναι διάνυσμα.

- 7 Η μετατόπιση είναι ευθύγραμμο τμήμα.
- 8 Η απόσταση είναι διάνυσμα.
- 9 Ένα ευθύγραμμο τμήμα έχει φορά.

Στις παρακάτω ερωτήσεις να βάλετε σε κύκλο το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση:

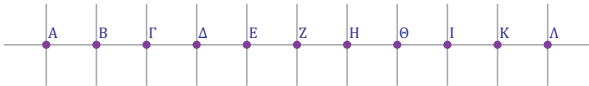
Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με βάση ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

- 1 Ίσα διανύσματα είναι τα παρακάτω:
 - i. $\vec{A\Delta}, \vec{E\Theta}$ ii. $\vec{A\Delta}, \vec{\Gamma B}$
 - iii. $\vec{A\Delta}, \vec{\Theta H}$ iv. $\vec{A\Delta}, \vec{A\Gamma}$
- 2 Ίσα μέτρα έχουν τα παρακάτω διανύσματα:
 - i. $\vec{A\Delta}, \vec{A\Gamma}$ ii. $\vec{A\Delta}, \vec{\Gamma B}$
 - iii. $\vec{A\Delta}, \vec{\Theta H}$ iv. $\vec{A\Delta}, \vec{A\Gamma}$
- 3 Αντίθετα διανύσματα είναι τα παρακάτω:
 - i. $\vec{A\Delta}, \vec{\Gamma B}$ ii. $\vec{A\Delta}, \vec{\Gamma B}$
 - iii. $\vec{A\Delta}, \vec{\Theta H}$ iv. $\vec{A\Delta}, \vec{\Delta\Gamma}$

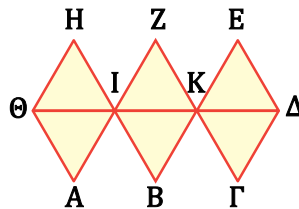


Ασκήσεις και Προβλήματα

- 1 Στο πιο κάτω σχήμα οι αποστάσεις μεταξύ όλων των διαδοχικών σημείων είναι ίσες με 1 cm.
 - α) Να υπολογίσετε το μέτρο των διανυσμάτων: $\vec{A\Gamma}, \vec{\Gamma H}, \vec{K\Theta}, \vec{Z\Lambda}, \vec{\Gamma B}, \vec{\Lambda A}$.
 - β) Ποια από τα παρακάτω διανύσματα είναι μεταξύ τους ίσα και ποια αντίθετα; $\vec{A\Gamma}, \vec{\Gamma\Lambda}, \vec{K\Theta}, \vec{\Delta Z}, \vec{\Delta\Theta}, \vec{\Gamma E}, \vec{Z\Lambda}, \vec{Z\Gamma}$
 - γ) Να γράψετε ένα διάνυσμα που δεν έχει ίδια κατεύθυνση με το $\vec{B\Delta}$ και έχει μέτρο τριπλάσιο από το μέτρο του $\vec{B\Delta}$.

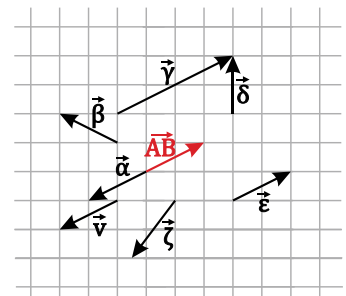


- 2 Το διπλανό σχήμα αποτελείται από ισόπλευρα τρίγωνα πλευράς 4 cm. Τα σημεία A, B, Γ, Δ, E, Ζ, Η, Θ, I και K είναι οι κορυφές των τριγώνων.

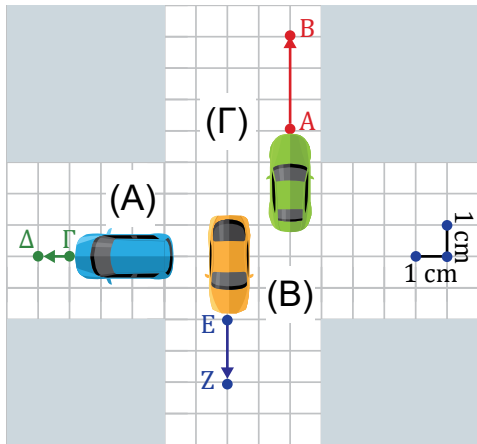


- α) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{A\Gamma}, \vec{\Theta I}, \vec{H\Gamma}, \vec{A\Gamma}, \vec{\Theta K},$ και $\vec{\Theta\Delta}$.
- β) Να βρείτε δύο ζεύγη ίσων διανυσμάτων και δύο ζεύγη αντίθετων διανυσμάτων.

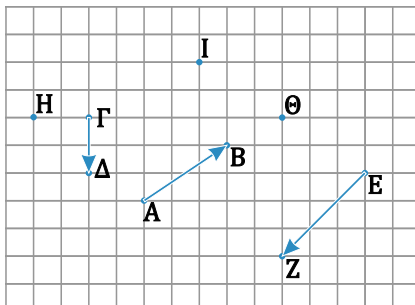
- 3 Να αντιγράψετε το διπλανό σχήμα στο τετράδιό σας. Με βάση το σχήμα να βρείτε διανύσματα τα οποία:



- α) Έχουν την ίδια φορά με το διάνυσμα $\vec{A\Gamma}$.
 - β) Είναι ίσα με το διάνυσμα $\vec{A\Gamma}$.
 - γ) Έχουν την ίδια διεύθυνση με το διάνυσμα $\vec{A\Gamma}$.
 - δ) Είναι αντίθετα με το διάνυσμα $\vec{A\Gamma}$.
 - ε) Έχουν το ίδιο μέτρο με το διάνυσμα $\vec{A\Gamma}$.
- 4 Τρία αυτοκίνητα (A), (B), (Γ) κινούνται σε μία διασταύρωση όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Τα $\vec{A\Gamma}, \vec{\Gamma\Delta}$ και $\vec{E\Gamma}$ είναι οι ταχύτητες των αυτοκινήτων.
 - α) Αν η κλίμακα είναι 1 cm για κάθε 20 km/h να υπολογίσετε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{A\Gamma}, \vec{\Gamma\Delta}$ και $\vec{E\Gamma}$.
 - β) Ποια αυτοκίνητα κινούνται στην ίδια διεύθυνση;
 - γ) Ποια αυτοκίνητα κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις;
 - δ) Ποιο αυτοκίνητο έχει τη μικρότερη ταχύτητα;

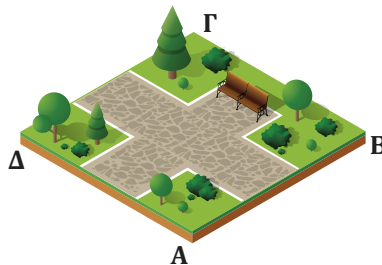


5 Να αντιγράψετε το διπλανό σχήμα στο τετράδιό σας και να σχεδιάσετε ένα διάνυσμα, το οποίο να:



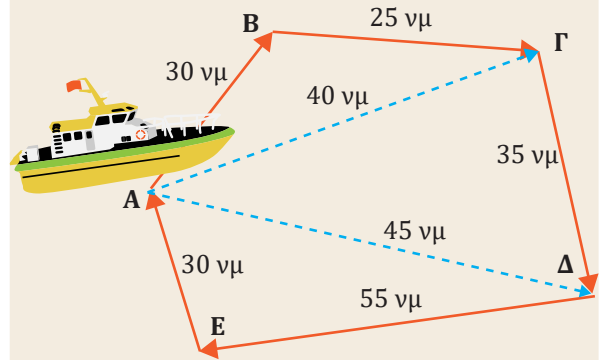
- α) είναι ίσο με το \vec{AB} και να αρχίζει από το σημείο Θ.
- β) είναι αντίθετο του \vec{AB} και να αρχίζει από το σημείο Η.
- γ) είναι ίσο με το $\vec{ΓΔ}$ και να αρχίζει από το σημείο Θ.
- δ) έχει μέτρο ίσο με το μέτρο του \vec{EZ} , χωρίς να είναι ίσο ούτε αντίθετο με το \vec{EZ} , και να έχει αρχή το σημείο Ι.
- ε) έχει μέτρο ίσο με το μέτρο του \vec{AB} , έχει αρχή το σημείο Ι και πέρασ το Κ, ώστε να ισχύει $\vec{IK} = -\vec{EZ}$.

6 Στην τετράγωνη περιοχή ΑΒΓΔ του σχήματος:



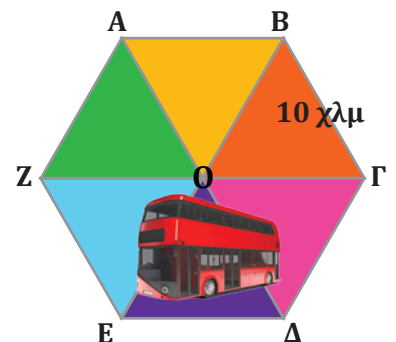
- α) Να γράψετε δύο διανύσματα τα οποία έχουν ως αρχή το σημείο Δ.
 - β) Να γράψετε ένα διάνυσμα που να είναι ίσο με το διάνυσμα $\vec{ΔΓ}$.
 - γ) Ποια είναι ίσα και ποια αντίθετα από τα διανύσματα: $\vec{ΔΑ}$, $\vec{ΓΒ}$, $\vec{ΔΑ}$, $\vec{ΓΔ}$, $\vec{ΑΔ}$, $\vec{ΒΑ}$
 - δ) Είναι ίσα τα διανύσματα $\vec{ΓΑ}$ και $\vec{ΒΔ}$;
 - ε) Ποια είναι η διαφορά μεταξύ του ευθυγράμμου τμήματος ΒΓ και του διανύσματος $\vec{ΒΓ}$;
- Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

7 **Εργασία κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες.** Ένα πλοίο ξεκινά από το λιμάνι Α και κάνοντας διαδοχικές στάσεις στα λιμάνια Β, Γ, Δ και Ε επιστρέφει στην αρχική του θέση.



- α) Ποιο είναι το μήκος της διαδρομής του σε ναυτικά μίλια (νμ) από το Α στο:
 - i. Β ii. Γ iii. Δ iv. Ε
- β) Ποια είναι η μετατόπιση του πλοίου από το Α στο:
 - i. Β ii. Γ iii. Δ iv. Ε
- γ) Ποιο είναι το μήκος της διαδρομής και ποια η μετατόπιση του πλοίου όταν περάσει από όλα τα διαδοχικά λιμάνια και επιστρέψει στην αρχική του θέση.

8 Ένα τουριστικό λεωφορείο κινείται από το σημείο Ο στις τοποθεσίες Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ που είναι κορυφές κανονικού εξαγώνου.



- α) Να βρείτε τρία διανύσματα ίσα και τρία αντίθετα με το διάνυσμα $\vec{ΟΑ}$.
- β) Να βρείτε τα μήκη των διαδρομών και τις μετατοπίσεις όταν το λεωφορείο μετακινηθεί από το Ο:
 - i. Στα Α, Β και Γ.
 - ii. Στα Ε, Δ, Γ και Ο.
 - iii. Στα Ζ, Α, Β και Γ.

Να κάνετε την Εργασία με προεκτάσεις: «Εφαρμογές για την απόσταση και τη μετατόπιση: "η διαδρομή του αυτοκινήτου" και "η σκούπα ρομπότ"».



5.2 Ο μετασχηματισμός της μεταφοράς

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

- Να αναγνωρίζουν μετασχηματισμούς μεταφοράς και να καθορίζουν τα στοιχεία και τα χαρακτηριστικά τους.
- Να διερευνούν και να εντοπίζουν τις ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά των σχημάτων που παραμένουν αναλλοίωτα από έναν μετασχηματισμό μεταφοράς.
- Να αξιολογούν τις ιδιότητες του μετασχηματισμού μεταφοράς κατά διάνυσμα στον σχεδιασμό σχημάτων και την αιτιολόγηση ιδιοτήτων τους.
- Να σχεδιάζουν το σχήμα που προκύπτει από τη μεταφορά ενός σχήματος κατά διάνυσμα χρησιμοποιώντας μία ποικιλία εργαλείων και στρατηγικών.

Γεωμετρικός μετασχηματισμός ή απλά **μετασχηματισμός** ενός αρχικού σχήματος στο επίπεδο ονομάζεται μια διαδικασία με την οποία σε κάθε σημείο του αντιστοιχίζουμε ένα και μοναδικό σημείο ενός άλλου σχήματος στο επίπεδο το οποίο ονομάζεται εικόνα του.

Στην Α' τάξη γνωρίσαμε τον μετασχηματισμό της **αξονικής συμμετρίας (ανάκλαση)**, με τον οποίο κάθε σημείο ενός σχήματος αντιστοιχίζεται στο συμμετρικό του. Ένα παράδειγμα παρουσιάζεται στο σχήμα, όπου το τρίγωνο $AB\Gamma$ μετασχηματίζεται στο τρίγωνο $A'B'\Gamma$ με τον μετασχηματισμό της συμμετρίας ως προς άξονα, στον οποίο παρατηρούμε ότι:

Το τελικό σχήμα $A'B'\Gamma$ (εικόνα) παραμένει αναλλοίωτο ως προς το $AB\Gamma$ (αρχικό σχήμα), δηλαδή διατηρεί τη μορφή και το μέγεθός του.

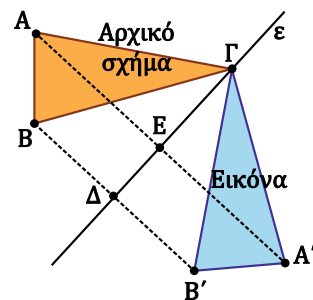
Οι αποστάσεις των σημείων A, B από τον άξονα συμμετρίας (ϵ) είναι ίσες με τις αποστάσεις των σημείων A', B' αντίστοιχα (δηλαδή η ευθεία ϵ είναι κοινή μεσοκάθετος των τμημάτων AA' και BB').

Το σημείο Γ έχει ως συμμετρικό τον εαυτό του, δηλαδή παραμένει αναλλοίωτο ως προς τον μετασχηματισμό διότι, ανήκει στον άξονα συμμετρίας (ϵ).

Αν διπλώσουμε το χαρτί μας στο οποίο είναι σχεδιασμένα τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma$ κατά μήκος της ευθείας ϵ , βλέπουμε ότι τα δύο σχήματα εφαρμόζουν πλήρως. Αυτό σημαίνει ότι το συμμετρικό του τριγώνου $AB\Gamma$ ως προς τον άξονα (ϵ) είναι ένα τρίγωνο $A'B'\Gamma$ ίσο με το $AB\Gamma$.

Μετασχηματισμοί οι οποίοι διατηρούν τις αποστάσεις ονομάζονται **ισομετρίες**. Η αξονική συμμετρία (ανάκλαση) που ξέρουμε, όπως και οι μετασχηματισμοί της μεταφοράς, της στροφής, καθώς και της συμμετρίας ως προς κέντρο, τους οποίους θα γνωρίσουμε στο κεφάλαιο αυτό, είναι ισομετρίες. Οι ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά των σχημάτων που προκύπτουν με αυτούς τους μετασχηματισμούς δεν μεταβάλλονται σε σχέση με το αρχικό σχήμα, δηλαδή παραμένουν αναλλοίωτα. Οι ισομετρίες μετασχηματίζουν ευθείες σε ευθείες, ευθύγραμμα τμήματα σε ίσα ευθύγραμμα τμήματα, γωνίες σε ίσες γωνίες, κύκλους σε ίσους κύκλους.

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε τον μετασχηματισμό της μεταφοράς κατά διάνυσμα, δηλαδή την αλλαγή θέσης μόνο με ολίσθηση. Το σχήμα «ολισθαίνει» αριστερά, δεξιά, πάνω ή κάτω ή οπουδήποτε αλλού πάνω στο επίπεδο. Μπορούμε να έχουμε μία οριζόντια ή μία κάθετη μεταφορά ή έναν συνδυασμό αυτών.



Επιβεβαιώνουμε τα παραπάνω συμπεράσματα για τον μετασχηματισμό ανάκλασης με αντίστοιχες διερευνήσεις με το λογισμικό.



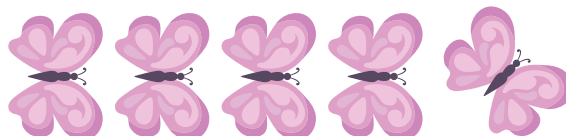
Διερεύνηση 1. Παράλληλη μεταφορά εικόνων και σχημάτων

Εργασία μαθητών ατομικά ή κατά ζεύγη.

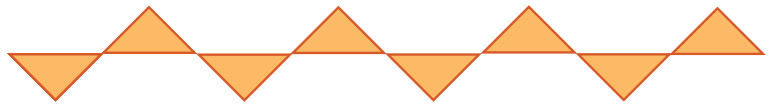
Α. Όταν ίδιες εικόνες τοποθετούνται η μία δίπλα στην άλλη, σχηματίζουν διακοσμητικά επαναληπτικά μοτίβα:

α) Να περιγράψετε με δικά σας λόγια τις διαδοχικές μετακινήσεις της πεταλούδας.

β) Τι διαπιστώνετε για την τελευταία πεταλούδα δεξιά.



B. Η παρακάτω διαδοχή τριγώνων είναι μέρος της ζωφόρου ενός αρχαίου ναού.



α) Να εντοπίσετε το «μοτίβο» που επαναλαμβάνεται.

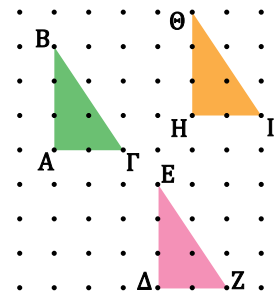
β) Να σχεδιάσετε το μοτίβο και να περιγράψετε την επανάληψη με δικά σας λόγια.

Γ. Στον διάστικτο τετραγωνικό καμβά ένα τρίγωνο φαίνεται σε τρεις διαφορετικές θέσεις. Να εξηγήσετε σε έναν φίλο σας:

α) Πόσο δεξιά και πόσο πάνω μετακινήθηκε το τρίγωνο $AB\Gamma$ στη θέση του τριγώνου $H\Theta I$;

β) Πώς «μεταφέρθηκε» το τρίγωνο $AB\Gamma$ στη θέση του τριγώνου ΔEZ ;

γ) Πώς «μεταφέρθηκε» το τρίγωνο ΔEZ στη θέση του τριγώνου $H\Theta I$;



Περιγράψουμε κάθε μεταφορά με δύο διαφορετικούς τρόπους.



Διερεύνηση 2. Ο μετασχηματισμός της παράλληλης μεταφοράς σχήματος κατά διάνυσμα.

Εργασία μαθητών ατομικά ή κατά ζεύγη.

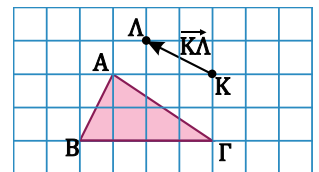
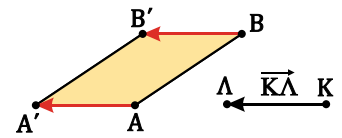
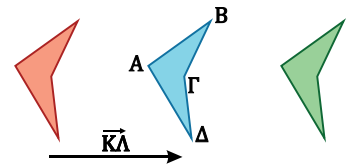
α) Στη διπλανή εικόνα, να βρείτε ποιο από τα τετράπλευρα είναι η μεταφορά του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ κατά το διάνυσμα $\vec{K\Lambda}$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. Το άλλο τετράπλευρο πώς μπορεί να προκύψει από το $AB\Gamma\Delta$;

β) Στο διπλανό σχήμα έχουμε το ευθύγραμμο τμήμα AB και το $A'B'$ το οποίο έχει προκύψει από το AB με παράλληλη μεταφορά κατά διάνυσμα $\vec{K\Lambda}$. Ποια σχέση νομίζετε ότι υπάρχει ανάμεσα στο αρχικό και το τελικό ευθύγραμμο τμήμα; Είναι ίσα; Είναι παράλληλα; Να αιτιολογήσετε.

γ) Να αντιγράψετε σε τετραγωνισμένο χαρτί το διπλανό τρίγωνο και το διάνυσμα $\vec{K\Lambda}$. Να σχεδιάσετε το σχήμα που προκύπτει από τη μετατόπιση του τριγώνου $AB\Gamma$, κατά το διάνυσμα $\vec{K\Lambda}$.

Να συγκρίνετε τις πλευρές και τις γωνίες του αρχικού σχήματος με τις αντίστοιχες πλευρές και γωνίες του τελικού σχήματος.

Εξηγούμε πώς σκεφτήκαμε.



Διερεύνηση 3. Μεταφορά στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

Εργασία μαθητών κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες.

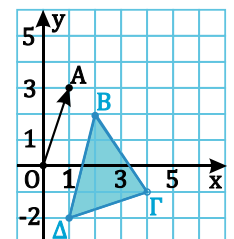
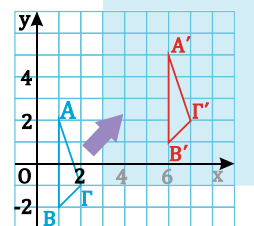
A. α) Να αντιγράψετε με διαφανές χαρτί το τρίγωνο $AB\Gamma$ σε τετραγωνισμένο χαρτί και να σύρετε το αντίγραφο σε μία νέα θέση. Να περιγράψετε στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων τη θέση του αντιγράφου σε σύγκριση με τη θέση του αρχικού σχήματος.

β) Τι παρατηρείτε για τις πλευρές, τις γωνίες και τα παράλληλα τμήματα;

B. α) Να αντιγράψετε το διπλανό σχήμα σε τετραγωνισμένο χαρτί. Στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων να πάρετε τα σημεία $A(1, 3)$, $B(2, 2)$, $\Gamma(4, -1)$ και $\Delta(1, -2)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου $B'\Gamma'\Delta'$ που προκύπτει από τη μεταφορά του τριγώνου $B\Gamma\Delta$ κατά το διάνυσμα $\vec{O\Lambda}$ το οποίο παριστάνει μεταφορά κατά 1 μονάδα δεξιά και 3 μονάδες πάνω. Να συγκρίνετε τις πλευρές $B\Gamma$, $B'\Gamma'$ και τις γωνίες \hat{B} , \hat{B}' .

β) Έστω $M(x, y)$ σημείο του καρτεσιανού επιπέδου. Ποιες είναι οι συντεταγμένες της μεταφοράς του σημείου M κατά διάνυσμα $\vec{O\Lambda}$.

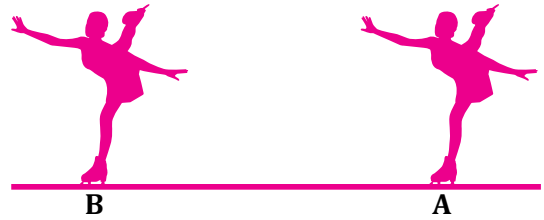
γ) Να περιγράψετε τη θέση των σημείων $E(x - 1, y + 2)$ και $Z(x + 4, y - 3)$ σε σχέση με ένα σημείο $K(x, y)$.



Μαθηματικές Έννοιες και Διεργασίες Μάθησης

Ο μετασχηματισμός της μεταφοράς

Στη διπλανή εικόνα παρατηρούμε δύο στιγμιότυπα της κίνησης μίας αθλήτριας καλλιτεχνικού πατινάζ. Η αθλήτρια ολισθαίνει από τη θέση Α στη θέση Β του παγοδρομίου. Αυτό είναι ένα παράδειγμα παράλληλης μεταφοράς του σώματός της κατά τη διεύθυνση της ευθείας ΑΒ, που λέγεται **άξονας μεταφορικής συμμετρίας**.



Παράλληλη μεταφορά κατά διάνυσμα

Η παράλληλη μεταφορά, ή απλώς μεταφορά, μετατοπίζει ένα αρχικό σχήμα σε μία άλλη θέση, σε ορισμένη απόσταση και κατεύθυνση από την αρχική του θέση. Έτσι, η παράλληλη μεταφορά καθορίζεται από ένα διάνυσμα. Το διάνυσμα που γνωρίσαμε στην προηγούμενη ενότητα χρησιμεύει ως οδηγός στον μετασχηματισμό μεταφοράς.

Σχεδιάζουμε στο επίπεδο ένα τρίγωνο ΑΒΓ και ένα διάνυσμα $\vec{OP} = \vec{a}$. Η αιχμή του βέλους δείχνει τη φορά του διανύσματος \vec{a} . Για να μετακινήσουμε το τρίγωνο ΑΒΓ κατά το διάνυσμα \vec{a} , ακολουθούμε τα βήματα:

Βήμα 1ο: Σχεδιάζουμε ημιευθεία Αx, παράλληλη προς τη διεύθυνση του διανύσματος $\vec{OP} = \vec{a}$ που ξεκινά από το σημείο Α.

Βήμα 2ο: Με το υποδεκάμετρο ή με τον διαβήτη λαμβάνουμε στην ημιευθεία Αx διάνυσμα $\vec{AA'}$ με μέτρο ίσο με το μέτρο του \vec{a} . Έτσι το διάνυσμα $\vec{AA'}$ είναι ίσο με το διάνυσμα \vec{a} αφού έχουν την ίδια διεύθυνση, την ίδια φορά και το ίδιο μέτρο. Ισχύει $\vec{AA'} = \vec{a}$. Το αρχικό σημείο Α αντιστοιχίζεται στο Α' και έτσι παίρνουμε την εικόνα Α' του Α. Το ζητούμενο σημείο είναι το πέρας Α' του διανύσματος $\vec{AA'}$. (Σχήμα)

Βήμα 3ο: Κάνουμε το ίδιο για τα σημεία Β και Γ. Έτσι το τελικό τρίγωνο Α'Β'Γ' είναι η εικόνα του αρχικού τριγώνου ΑΒΓ στη μεταφορά κατά διάνυσμα \vec{a} . (Σχήμα)

Στον μετασχηματισμό της μεταφοράς, κάθε σημείο του σχήματος μετατοπίζεται κατά το διάνυσμα \vec{a} και έτσι δημιουργείται σχήμα ίσο με το αρχικό, γιατί:

Τα σημεία Α, Β και Γ του σχήματος κινούνται παράλληλα και διανύουν ίσες αποστάσεις, οπότε: $\vec{AA'} = \vec{BB'} = \vec{GG'}$ και $\vec{AA'} // \vec{BB'} // \vec{GG'}$.

Άρα, τα τετράπλευρα ΑΒΒ'Α', ΒΓΓ'Β' και ΑΓΓ'Α' είναι παραλληλόγραμμα και επειδή οι απέναντι πλευρές των παραλληλογράμμων είναι ίσες, προκύπτει ότι: $\vec{AB} = \vec{A'B'}$, $\vec{BG} = \vec{B'G'}$ και $\vec{AG} = \vec{A'G'}$.

Επομένως, τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' είναι ίσα (συμπτώσιμα) οπότε θα έχουν και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες:

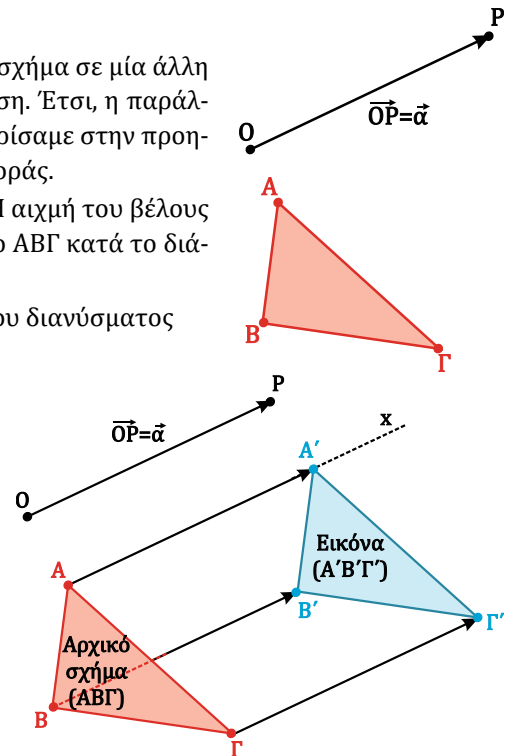
$$\hat{A} = \hat{A'}, \hat{B} = \hat{B'}, \hat{G} = \hat{G'}$$

Στη διαδικασία αυτή το διάνυσμα μεταφοράς \vec{a} δείχνει την κατεύθυνση (διεύθυνση και φορά) και το μήκος της μεταφοράς. Συμβολικά για να δείξουμε ότι το τρίγωνο Α'Β'Γ' προκύπτει με μεταφορά του αρχικού τριγώνου ΑΒΓ κατά διάνυσμα \vec{a} γράφουμε: $ΑΒΓ \xrightarrow[\text{Μ}]{\vec{a}} Α'Β'Γ'$ ή $ΑΒΓ \xrightarrow{\text{Μ}(\vec{a})} Α'Β'Γ'$.

Γενικά

Σε κάθε μεταφορά κατά διάνυσμα διατηρείται τόσο η ισότητα των σχημάτων όσο και η διεύθυνση των ευθειών. Κάθε σημείο ενός σχήματος μετακινείται κατά την ίδια απόσταση και προς την ίδια κατεύθυνση και αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς σημείο της εικόνας του. Σε μία μεταφορά το αρχικό και το τελικό σχήμα είναι ίσα. Ειδικότερα, τα αντίστοιχα ευθύγραμμα τμήματα έχουν ίσα μήκη και οι αντίστοιχες γωνίες έχουν ίσα μέτρα (Ισομετρία).

Μπορούμε να αντιγράψουμε ένα σχήμα σε διαφανές χαρτί και να το μεταφέρουμε παράλληλα σε άλλη θέση. Η μεταφορά διευκολύνεται με τη χρήση διάστικτων καμβάδων, τετραγωνισμένου χαρτιού, καθώς και του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων. Η κίνηση μιας μεταφοράς αισθητοποιείται επίσης με την αξιοποίηση ψηφιακών εργαλείων.





Με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής να διερευνήσετε τον μετασχηματισμό μεταφοράς με τη χρήση διάνυσματος.



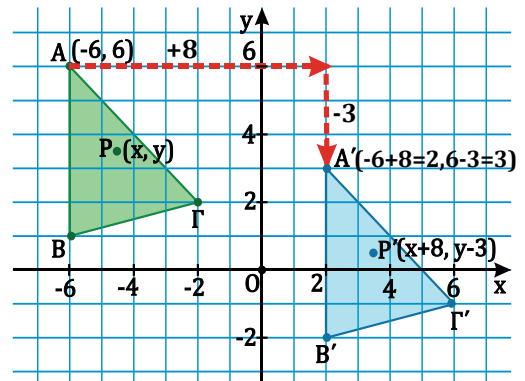
Να διερευνήσετε τη διατήρηση της ισότητας των γωνιών κατά τον μετασχηματισμό μεταφοράς με την ψηφιακή εφαρμογή.

Η μεταφορά στο καρτεσιανό επίπεδο

Στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε το τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(-6, 6)$, $B(-6, 1)$ και $\Gamma(-2, 2)$. Θέλουμε να κάνουμε παράλληλη μεταφορά του τριγώνου $AB\Gamma$ κατά 8 μονάδες οριζόντια δεξιά και κατά 3 μονάδες κατακόρυφα κάτω.

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η μετατόπιση της κορυφής $A(-6, 6)$ στην $A'(2, 3)$. Με τον ίδιο τρόπο γίνεται η μεταφορά των κορυφών B και Γ . Ανάλογα, όλα τα σημεία του $AB\Gamma$ μπορούν να μετατοπιστούν κατά 8 μονάδες δεξιά και 3 μονάδες κάτω και να σχηματίσουν την τελική εικόνα $A'B'\Gamma'$. Η εικόνα ενός τυχόντος σημείου $P(x, y)$ του τριγώνου είναι $P'(x + 8, y - 3)$. Διαβάζουμε τις συντεταγμένες των κορυφών της εικόνας από το σχήμα: $A'(2, 3)$, $B'(2, -2)$ και $\Gamma'(6, -1)$. Το τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ είναι ίσο με το $AB\Gamma$. Οι αντίστοιχες πλευρές και οι αντίστοιχες γωνίες τους είναι ίσες, δηλαδή:

$$AB = A'B', B\Gamma = B'\Gamma', A\Gamma = A'\Gamma' \text{ και } \hat{A} = \hat{A}', \hat{B} = \hat{B}', \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$$



Γενικά

Στον μετασχηματισμό μεταφοράς στο καρτεσιανό επίπεδο αν το αρχικό σημείο $P(x, y)$ μεταφέρεται κατά α μονάδες οριζόντια και κατά β μονάδες κάθετα, τότε η εικόνα του είναι το σημείο $P'(x + \alpha, y + \beta)$. Θετικές τιμές των α και β παριστάνουν αντίστοιχα μεταφορές προς τα δεξιά και πάνω. Αρνητικές τιμές των α και β παριστάνουν μεταφορές προς τα αριστερά και κάτω.



Να διερευνήσετε τον μετασχηματισμό μεταφοράς στο Καρτεσιανό επίπεδο.



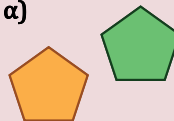
Με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής να διερευνήσετε ισοδύναμους μετασχηματισμούς μεταφοράς κατά διάνυσμα.



Εφαρμογή 1

Ζητήθηκε από την Αντιγόνη να κάνει μεταφορά ενός κανονικού πενταγώνου και ενός ορθογωνίου και σχεδίασε τα διπλανά σχήματα. Συμφωνείτε μαζί της; Να αιτιολογήσετε.

α)



β)



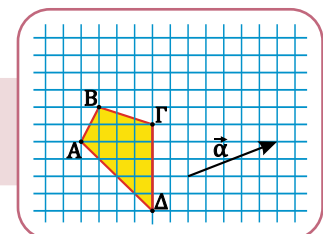
Απάντηση

- α) Το κανονικό πεντάγωνο με χρώμα πορτοκαλί ολισθαίνει και μεταφέρεται στη θέση του πράσινου σχήματος. Επομένως, το πράσινο σχήμα είναι μεταφορά του πορτοκαλόχρωμου σχήματος.
- β) Το κόκκινο σχήμα δεν ολισθαίνει μόνο αλλά επιπλέον στρέφεται για να σχηματίσει το μπλε σχήμα. Επομένως, το μπλε σχήμα δεν είναι μεταφορά του κόκκινου σχήματος.



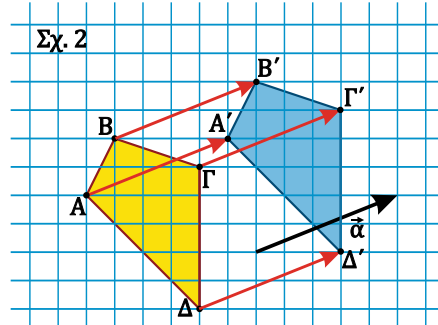
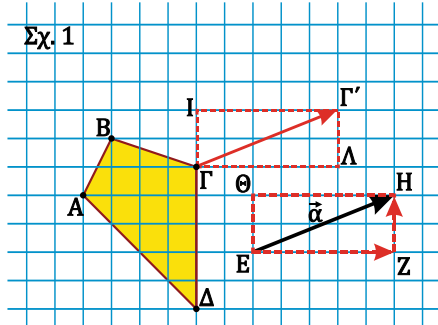
Εφαρμογή 2

Να μετατοπίσετε με μετασχηματισμό μεταφοράς το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ κατά το διάνυσμα \vec{a} .



Απάντηση

Μετατόπιση κατά το διάνυσμα \vec{a} σημαίνει όπως παρατηρούμε στο σχήμα (1), οριζόντια μετακίνηση προς τα δεξιά κατά 5 μονάδες και στη συνέχεια κάθετη προς τα πάνω κατά 2 μονάδες. Έτσι μετακινούμε το σημείο Γ, 5 μονάδες δεξιά και 2 πάνω και με τη βοήθεια του τετραγωνισμένου χαρτιού και παίρνουμε το Γ'.



Συνεπώς $\Gamma \xrightarrow{\vec{a}} \Gamma'$. Ομοίως $A \xrightarrow{\vec{a}} A', B \xrightarrow{\vec{a}} B', \Delta \xrightarrow{\vec{a}} \Delta'$ (σχήμα 2).

Κατασκευάζοντας διανύσματα $\vec{AA'} = \vec{BB'} = \vec{\Gamma\Gamma'} = \vec{\Delta\Delta'} = \vec{a}$ βρίσκουμε τις εικόνες Α', Β', Γ', Δ', των Α, Β, Γ, Δ.

Έτσι, η μεταφορά του ΑΒΓΔ είναι το Α'Β'Γ'Δ', δηλαδή $ΑΒΓΔ \xrightarrow{M(\vec{a})} Α'Β'Γ'Δ'$.



Με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής να διερευνήσετε τη μεταφορά τετραπλεύρου κατά διάνυσμα.



Εφαρμογή 3

Μοντελοποίηση πραγματικής ζωής.

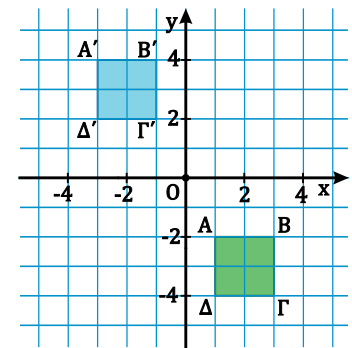
Ένας τοπογράφος χρησιμοποιώντας καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων μέσα σε ένα πάρκο σχεδίασε ένα τετράγωνο παρτέρι λουλουδιών με κορυφές Α(1, -2), Β(3, -2), Γ(3, -4) και Δ(1, -4). Οι δημοτικοί υπάλληλοι θέλουν να οριοθετήσουν τον ανθοκήπο 4 μονάδες οριζόντια αριστερά και 6 μονάδες κάθετα πάνω. Να βρείτε τις συντεταγμένες της εικόνας του. Να σχεδιάσετε το αρχικό σχήμα και την εικόνα του σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

Απάντηση

Αφαιρούμε 4 από κάθε τετημημένη x και προσθέτουμε 6 σε κάθε τεταγμένη y.

Κορυφές ΑΒΓΔ	(x - 4, y + 6)	Κορυφές Α'Β'Γ'Δ'
A(1, -2)	(1 - 4, -2 + 6)	A'(-3, 4)
B(3, -2)	(3 - 4, -2 + 6)	B'(-1, 4)
Γ(3, -4)	(3 - 4, -4 + 6)	Γ'(-1, 2)
Δ(1, -4)	(1 - 4, -4 + 6)	Δ'(-3, 2)

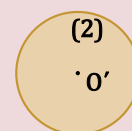
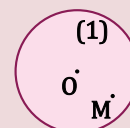
Το αρχικό σχήμα και η εικόνα του φαίνονται στο σχήμα.



Εφαρμογή 4

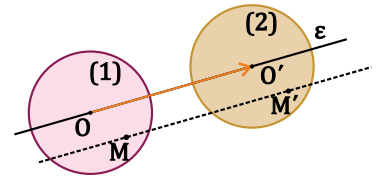
Στο διπλανό σχήμα ο κυκλικός δίσκος (2) είναι η μεταφορά του κυκλικού δίσκου (1) κατά διάνυσμα \vec{a}

- α) Να χαράξετε τον άξονα μεταφορικής συμμετρίας και το διάνυσμα \vec{a} .
- β) Να βρείτε την εικόνα Μ' του τυχόντος σημείου Μ του κυκλικού δίσκου, που προκύπτει από τη μεταφορά του σχήματος (1) κατά διάνυσμα \vec{a} .



Απάντηση

- α) Είναι $O \xrightarrow{M(\vec{\alpha})} O'$. Άρα, $\vec{OO'} = \vec{\alpha}$ και ο άξονας μεταφοράς είναι ο φορέας του διανύσματος $\vec{\alpha}$, δηλαδή η ευθεία ϵ .
- β) Βρίσκουμε την εικόνα M' του αρχικού σημείου M αν μεταφέρουμε το σημείο M κατά διάνυσμα $\vec{\alpha}$. Δηλαδή $\vec{MM'} = \vec{\alpha}$.



Με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής να διερευνήσετε την ισοδυναμία του μετασχηματισμού μεταφοράς με δύο κατάλληλους μετασχηματισμούς ανάκλασης.



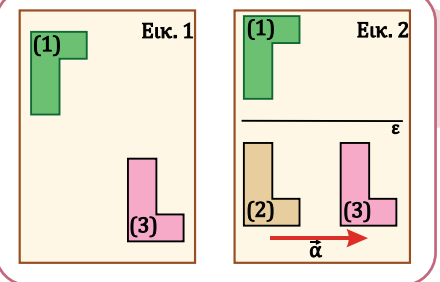
Εφαρμογή 5

Με ποιον ή με ποιους μετασχηματισμούς μπορεί το σχήμα (3) να προκύψει από το σχήμα (1); (εικόνα 1)

Απάντηση

Όπως φαίνεται στην εικόνα (2), το σχήμα (2) είναι το συμμετρικό του σχήματος (1) με άξονα συμμετρίας την ευθεία (ϵ) και το σχήμα (3) είναι η μεταφορά του σχήματος (2) κατά διάνυσμα $\vec{\alpha}$.

Το σχήμα (3) προέκυψε από την εφαρμογή ενός συνδυασμού δύο διαδοχικών μετασχηματισμών στο σχήμα (1), αρχικά μίας αξονικής συμμετρίας και κατόπιν μίας μεταφοράς. Συμβολικά: $(1) \xrightarrow{A(\epsilon)} (2) \xrightarrow{M(\vec{\alpha})} (3)$.



Να κάνετε την Εργασία με προεκτάσεις: «Εμπλουτίζοντας τον μετασχηματισμό μεταφοράς με ποικιλία μεθόδων».



Με τη βοήθεια του λογισμικού να διερευνήσετε τον βηματισμό με διαδοχικούς μετασχηματισμούς αξονικής συμμετρίας (ανάκλασης) και μεταφοράς.

Ερωτήσεις για Αξιολόγηση

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με τη λέξη Σωστό (Σ), αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος (Λ), αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- 1 Στον μετασχηματισμό μεταφοράς κάθε σημείο του αρχικού σχήματος αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς σημείο της εικόνας του.
- 2 Το μπλε σχήμα προκύπτει με μεταφορά του κόκκινου σχήματος.
- 3 Το μπλε σχήμα είναι μεταφορά του κόκκινου σχήματος.
- 4 Το μπλε σχήμα είναι μεταφορά του κόκκινου σχήματος.
- 5 Σε μετασχηματισμό μεταφοράς τα αντίστοιχα μήκη του αρχικού σχήματος και της εικόνας του παραμένουν σταθερά, αλλά όχι οι αντίστοιχες γωνίες.
- 6 Σε μετασχηματισμό μεταφοράς με άξονα μεταφορικής συμμετρίας (ϵ) οι αντίστοιχες γωνίες και τα αντίστοιχα μήκη του αρχικού σχήματος και της εικόνας του παραμένουν αναλλοίωτα.



Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με τη λέξη Σωστό (Σ), αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος (Λ), αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

7 Το μπλε σχήμα είναι μεταφορά του κόκκινου σχήματος.



8 Το μπλε σχήμα είναι μεταφορά του κόκκινου σχήματος.

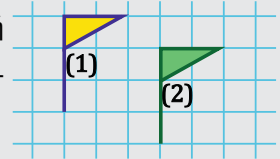


9 Στον μετασχηματισμό μεταφοράς κατά διάνυσμα \vec{a} η διεύθυνση του διανύσματος είναι ο άξονας μεταφορικής συμμετρίας.

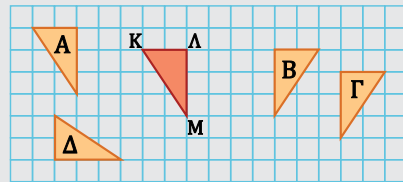
10 Η εικόνα και το αρχικό σχήμα στον μετασχηματισμό μεταφοράς κατά διάνυσμα \vec{a} ταυτίζονται αν το διάνυσμα αυτό είναι το μοναδιαίο διάνυσμα.

Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις.

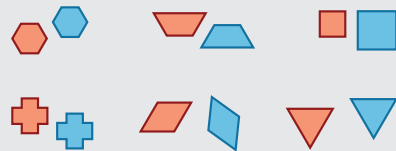
1 Στη μεταφορά κατά διάνυσμα \vec{a} το σχήμα (1) απεικονίζεται στο σχήμα (2), δηλαδή $(1) \xrightarrow{M(\vec{a})} (2)$. Να προσδιορίσετε το διάνυσμα \vec{a} καθώς και το μέτρο του αν το τετραγώνάκι έχει πλευρά 1.



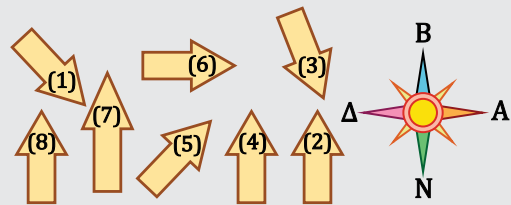
2 Ποια εικόνα του τριγώνου ΚΛΜ προκύπτει μόνο από μετασχηματισμό μεταφοράς;



3 Σε ποιες περιπτώσεις το μπλε σχήμα είναι μεταφορά του κόκκινου σχήματος; Να αιτιολογήσετε.



4 Ποια σχήματα έχουν ίδια μορφή, ίδιο μέγεθος καθώς και ίδιο προσανατολισμό προς τον Βορρά;

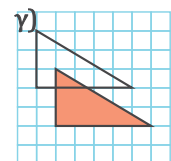
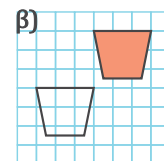
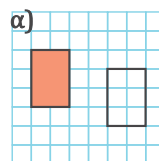


5 Οι κορυφές ενός τριγώνου είναι $A(-2, -2)$, $B(0, 2)$ και $\Gamma(3, 0)$. Να μεταφέρετε το τρίγωνο 1 μονάδα αριστερά και 2 μονάδες πάνω. Ποιες είναι οι συντεταγμένες της εικόνας του;

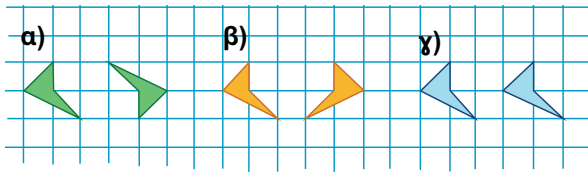


Ασκήσεις και Προβλήματα

1 Να αντιγράψετε τα σχήματα σε τετραγωνισμένο χαρτί. Σε κάθε περίπτωση, να σχεδιάσετε το διάνυσμα μεταφοράς \vec{a} που σας επιτρέπει να βρείτε την εικόνα του κόκκινου σχήματος.

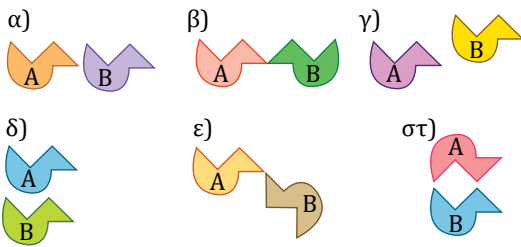


- 2 Να προσδιορίσετε ποιο ζεύγος απεικονίζει μεταφορά και να εξηγήσετε γιατί.

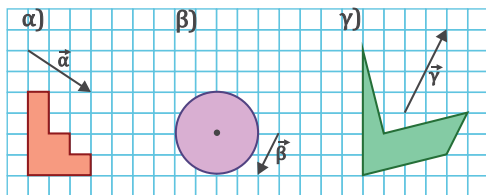


3 **Εργασία ανά ζεύγη ή σε μικρές ομάδες**

Για καθεμία από τις έξι περιπτώσεις, να βρείτε μια γεωμετρική διαδικασία που επιτρέπει να περάσουμε από το σχήμα A στο σχήμα B και να την περιγράψετε με δικά σας λόγια στο τετράδιό σας.



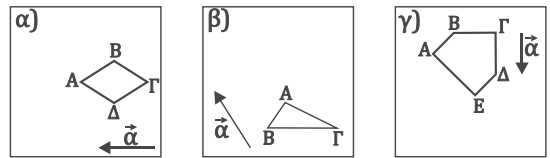
- 4 Να αντιγράψετε τα σχήματα σε τετραγωνισμένο χαρτί. Να χαράξετε την εικόνα καθενός από τα σχήματα με μεταφορά κατά διάνυσμα.



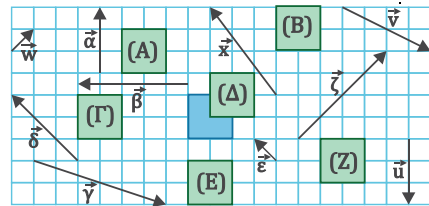
5 **Εργασία κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες.**

- Στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων να σχεδιάσετε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Να βρείτε τις διαστάσεις του.
 - Να μετακινήσετε κάθε κορυφή 3 μονάδες δεξιά και στη συνέχεια 4 πάνω. Να σχεδιάσετε το νέο σχήμα και να ονομάσετε τις κορυφές του.
 - Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος μεταφοράς.
 - Να συγκρίνετε τις διαστάσεις και τα μέτρα των γωνιών του νέου σχήματος με αυτές του αρχικού ορθογωνίου.
 - Οι απέναντι πλευρές του νέου σχήματος είναι παράλληλες; Να αιτιολογήσετε.
 - Μπορείτε να συμπεράνετε ότι τα δύο σχήματα είναι ίσα; Να εξηγήσετε;
- Να συγκρίνετε τα αποτελέσματά σας με αυτά των άλλων μαθητών της τάξης σας.**

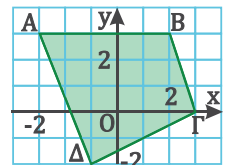
- 6 Να αντιγράψετε τα σχήματα με τη βοήθεια διαφανούς χαρτιού. Χρησιμοποιώντας γεωμετρικά όργανα, να χαράξετε την εικόνα καθενός από τα σχήματα με μεταφορά κατά διάνυσμα \vec{a} .



- 7 Τα σχήματα Α, Β, Γ, Δ, Ε και Ζ είναι εικόνες από τη μεταφορά του μπλε τετραγώνου. Να αντιστοιχίσετε κάθε εικόνα με το κατάλληλο διάνυσμα μεταφοράς.



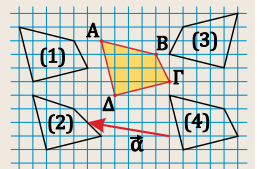
- 8 Να αντιγράψετε σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων το διπλανό τετράπλευρο και να βρείτε την εικόνα του μετά από τη μεταφορά:



- 3 μονάδες δεξιά και 1 κάτω.
- 3 μονάδες αριστερά και 2 πάνω.
- 2 μονάδες δεξιά και 1 πάνω.

9 **Εργασία κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες.**

- α) Ένα από τα 4 τετράπλευρα της εικόνας έχει προκύψει από



- παράλληλη μεταφορά του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ κατά το διάνυσμα \vec{a} . Να βρείτε ποιο τετράπλευρο είναι.
- β) Ποιο ή ποια από τα υπόλοιπα τετράπλευρα μπορεί να προκύψει από παράλληλη μεταφορά του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ως προς κάποιο διάνυσμα; Να προσδιορίσετε το διάνυσμα μεταφοράς ώστε το αρχικό σχήμα και η εικόνα του να είναι ίσα. Να εξηγήσετε πώς σκεφτήκατε.

Σε κάθε περίπτωση να τεκμηριώσετε με επιχειρήματα τα συμπεράσματά σας.

- 10 Οι κορυφές ενός τριγώνου είναι Κ(0, 1), Λ(1, -2) και Μ(-2, 1). Να σχεδιάσετε το σχήμα και την εικόνα του μετά από μεταφορά:

- Κατά 1 μονάδα αριστερά και 6 μονάδες πάνω.
- 5 μονάδες δεξιά.
- $(x + 2, y + 3)$.
- $(x - 3, y - 4)$.

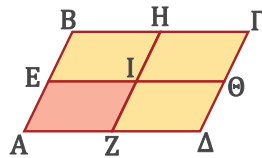
11 Σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(1, 1)$, $B(0, 2)$, $\Gamma(-2, 0)$. Σε μία παράλληλη μεταφορά η εικόνα του σημείου A είναι το σημείο $O(0, 0)$. Ποιες είναι οι εικόνες των άλλων κορυφών του $AB\Gamma$;

12 Σε τετραγωνισμένο χαρτί να σχεδιάσετε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με κορυφές τα σημεία $K(2, -1)$, $\Lambda(1, 3)$, $M(4, 3)$, $N(6, 1)$. Να βρείτε την εικόνα του με μεταφορά:

- α) 3 μονάδες δεξιά και 2 μονάδες κάτω.
- β) 3 μονάδες αριστερά και 2 μονάδες πάνω.

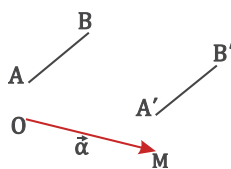
13 Η προτεινόμενη θέση για ένα νέο οικολογικό πάρκο παριστάνεται σε ένα σύστημα συντεταγμένων από ένα ορθογώνιο με κορυφές $A(1, -3)$, $B(1, 4)$, $\Gamma(4, 4)$ και $\Delta(4, -3)$. Ένας περιβαλλοντολόγος προτείνει την οριοθέτηση του πάρκου 4 μονάδες δεξιά και 2 μονάδες προς τα κάτω. Να βρείτε τις συντεταγμένες της εικόνας. Να σχεδιάσετε το αρχικό σχήμα και την εικόνα του στο επίπεδο συντεταγμένων.

14 Στο διπλανό σχήμα τα τετράπλευρα $AEIZ$, $ZI\Theta\Delta$, $I\Theta\Delta$, $EBHI$ είναι παραλληλόγραμμα με ίσες πλευρές.



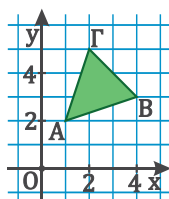
Με αρχικό σχήμα το παραλληλόγραμμο $AEIZ$ και μία μεταφορά κάθε φορά να εξηγήσετε πώς μπορούν να προκύψουν τα άλλα τρία παραλληλόγραμμα. Σε κάθε περίπτωση να προσδιορίσετε το διάνυσμα μεταφοράς.

15 Το ευθύγραμμο τμήμα $A'B'$ είναι η μεταφορά κατά διάνυσμα $\vec{\alpha}$ του ευθύγραμμου τμήματος AB .



- α) Να σχηματίσετε το τετράπλευρο $ABB'A'$ και να δείξετε ότι είναι παραλληλόγραμμο.
- β) Να διερευνήσετε για ποια θέση του $\vec{\alpha}$ το παραλληλόγραμμο $ABB'A'$ είναι ορθογώνιο.
- γ) Να εξετάσετε για ποια διανύσματα $\vec{\alpha}$ δεν σχηματίζεται παραλληλόγραμμο.

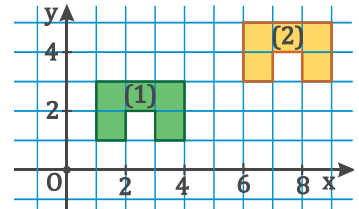
16 Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές: $A(1, 2)$, $B(4, 3)$ και $\Gamma(2, 5)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών της εικόνας του τριγώνου $AB\Gamma$ στη μεταφορά:



- α) Τρεις μονάδες οριζόντια προς τα δεξιά.

- β) Τρεις μονάδες κατακόρυφα προς τα κάτω.
- γ) Δύο μονάδες οριζόντια προς τα αριστερά και τρεις μονάδες προς τα πάνω.

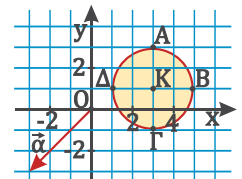
17 Στη διπλανή εικόνα το σχήμα (2) είναι η εικόνα του αρχικού σχήματος (1) μέσω μεταφοράς κατά διάνυσμα $\vec{\alpha}$.



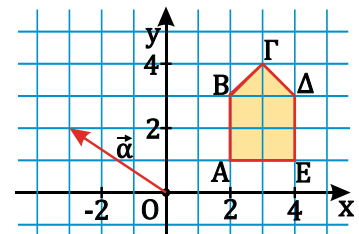
Να σχεδιάσετε:

- α) τον άξονα μεταφορικής συμμετρίας.
- β) το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ της μεταφοράς και
- γ) να υπολογίσετε το μέτρο του $\vec{\alpha}$.

18 Να μεταφέρετε τον κύκλο $(K, 2\text{ cm})$ κατά διάνυσμα $\vec{\alpha}$. Να βρείτε τις συντεταγμένες των εικόνων των σημείων A, B, Γ, Δ .



19 Το σπιτάκι $AB\Gamma\Delta E$ έχει κορυφές τα σημεία $A(2, 1)$, $B(2, 3)$, $\Gamma(3, 4)$, $\Delta(4, 3)$, $E(4, 1)$.

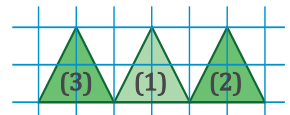


- α) Να κάνετε τη μεταφορά:

$$AB\Gamma\Delta E \xrightarrow{M(\vec{\alpha})} A'B'\Gamma'\Delta'E'$$

- β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των $A', B', \Gamma', \Delta', E'$.

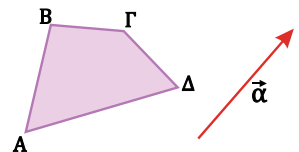
20 Το σχήμα (2) είναι η εικόνα του αρχικού σχήματος (1) στη μεταφορά κατά διάνυσμα $\vec{\alpha}$.



Το σχήμα (3) είναι η εικόνα του αρχικού σχήματος (1) στη μεταφορά κατά διάνυσμα $\vec{\beta}$.

- α) Να σχεδιάσετε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$
- β) Να βρείτε ποια σχέση συνδέει τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

21 Να σχεδιάσετε την εικόνα του τετράπλευρου $AB\Gamma\Delta$ στη μεταφορά του κατά το διάνυσμα $\vec{\alpha}$.



5.3 Ο μετασχηματισμός της στροφής

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

- Να αναγνωρίζουν μετασχηματισμούς στροφής και να καθορίζουν τα στοιχεία και τα χαρακτηριστικά τους.
- Να διερευνούν και να εντοπίζουν τις ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά των σχημάτων που παραμένουν αναλλοίωτα από έναν μετασχηματισμό στροφής ως προς κέντρο και γωνία στροφής.
- Να αξιοποιούν τις ιδιότητες του μετασχηματισμού στροφής ως προς κέντρο και γωνία στροφής στον σχεδιασμό σχημάτων και στην αιτιολόγηση ιδιοτήτων τους.
- Να σχεδιάζουν με ποικιλία εργαλείων και στρατηγικών το σχήμα που προκύπτει από τη στροφή δεδομένου σχήματος ως προς κέντρο και συγκεκριμένη γωνία στροφής αξιοποιώντας τις ιδιότητες του μετασχηματισμού.

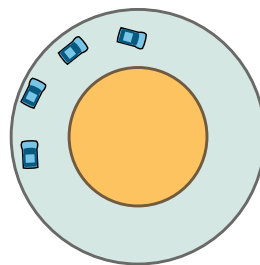


Διερεύνηση 1. Μετασχηματισμός στροφής.

Εργασία μαθητών κατά ζεύγη και συζήτηση στην τάξη.

Στη διπλανή εικόνα φαίνονται τέσσερα στιγμιότυπα της κυκλικής τροχιάς ενός αυτοκινήτου που κινείται δεξιόστροφα σε πίστα αγώνων. Να εξετάσετε αν τελικά το αυτοκίνητο θα καταφέρει να ολοκληρώσει τον πρώτο γύρο χωρίς να ακουμπήσει την πορτοκαλόχρωμη κεντρική περιοχή της πίστας.

Υπόδειξη: Να εντοπίσετε το κέντρο περιστροφής του αυτοκινήτου.



Με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής να διερευνήσετε την τροχιά του αυτοκινήτου.



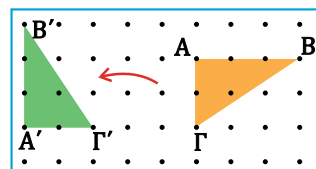
Διερεύνηση 2. Ισότητα σχημάτων μετά από μετασχηματισμό στροφής.

Εργασία μαθητών κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες.

Στον διάστικτο τετραγωνικό καμβά το τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει περιστραφεί δημιουργώντας την εικόνα του $A'B'\Gamma'$.

- α) Να περιγράψετε με δικά σας λόγια τη στροφή. Ποια σημεία της αρχικής εικόνας αντιστοιχούν στα σημεία A' , B' και Γ' της τελικής εικόνας;
- β) Ποια σχέση νομίζετε ότι υπάρχει ανάμεσα στο αρχικό και το τελικό σχήμα; Είναι ίσα ή όχι; Τα ευθύγραμμα τμήματα είναι ίσα με τις εικόνες τους; Οι γωνίες;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

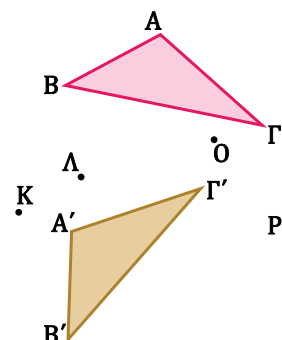


Διερεύνηση 3. Εύρεση κέντρου και γωνίας στροφής.

Εργασία μαθητών ατομικά ή κατά ζεύγη.

- α) Ως προς ποιο από τα σημεία K , Λ , O και P πρέπει να περιστραφεί το τρίγωνο $AB\Gamma$, έτσι ώστε να προκύψει το τρίγωνο $A'B'\Gamma'$; Πώς θα επαληθεύσετε την πρόβλεψή σας; (Μπορείτε να κάνετε μετρήσεις ή να χρησιμοποιήσετε διαφανές χαρτί).
- β) Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τη διπλανή εικόνα, να προσδιορίσετε με κανόνα και διαβήτη το κέντρο στροφής και στη συνέχεια με χρήση μοιρογνωμονίου να βρείτε τη γωνία στροφής.

Να τεκμηριώσετε με επιχειρήματα τα συμπεράσματά σας.

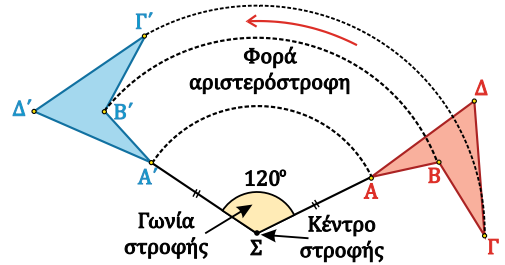


Μαθηματικές Έννοιες και Διεργασίες Μάθησης

Ο μετασχηματισμός στροφής

Αν κοιτάξουμε ένα ρολόι, βλέπουμε ότι ο ωροδείκτης στρέφεται δεξιόστροφα γύρω από ένα σταθερό σημείο, το κέντρο του ρολογιού. Στις 3:00, δείχνει προς τα δεξιά και στις 6:00 δείχνει προς τα κάτω. Αυτή η κίνηση είναι ένα παράδειγμα στροφής.

Η διπλανή εικόνα δείχνει τη στροφή του τετραπλεύρου ABΓΔ ως προς το σημείο Σ, στο επίπεδο κατά γωνία 120° με φορά αριστερόστροφη, δηλαδή αντίθετη από τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού. Τα αντίστοιχα σημεία Α και Α' ισαπέχουν από το Σ, ομοίως τα Β και Β' κ.λπ. Οι γωνίες ΑΣΑ', ΒΣΒ' κ.λπ. είναι ίσες με 120°. Τα αντίστοιχα σημεία Α και Α' είναι τα άκρα τόξου κέντρου Σ, ακτίνας ΣΑ και μέτρου ίσου με το μέτρο της γωνίας στροφής (Εικόνα).



Ο μετασχηματισμός στροφής ενός σχήματος ως προς σημείο, περιστρέφει ένα αρχικό σχήμα γύρω από αυτό το σημείο κατά συγκεκριμένη γωνία. Στη στροφή, ένα αρχικό και το αντίστοιχο του τελικό σημείο λέγονται **ομόλογα** και ισαπέχουν από το κέντρο.

Ένας μετασχηματισμός στροφής ως προς σημείο καθορίζεται από το **κέντρο στροφής ή περιστροφής** το οποίο είναι ένα σταθερό σημείο, το **μέτρο της γωνίας στροφής** και τη **φορά περιστροφής**.

Η διατήρηση της ισότητας των σχημάτων στον μετασχηματισμό στροφής

Στην εικόνα, το αρχικό τρίγωνο ΑΒΓ περιστράφηκε στο επίπεδο δεξιόστροφα γύρω από το σημείο Ο με γωνία περιστροφής 90° και δημιουργήθηκε η εικόνα του, το τρίγωνο Α'Β'Γ'.

- Η γωνία περιστροφής δείχνει το μέγεθος της περιστροφής. Συχνά εκφράζεται σε μοίρες.
- Η περιστροφή μπορεί να γίνει δεξιόστροφα ή αριστερόστροφα.

Η εικόνα του Α είναι το σημείο Α', το οποίο βρίσκεται στην ίδια απόσταση από το κέντρο περιστροφής Ο με το Α, δηλαδή ισχύει $OA = OA'$. Ανάλογα ισχύουν: $OB = OB'$ και $OG = OG'$.

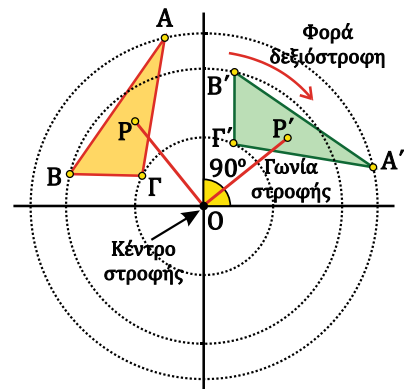
Η στροφή είναι μία ισομετρία, διατηρεί δηλαδή τα μεγέθη των πλευρών και των γωνιών.

- Η απόσταση μεταξύ ενός τυχόντος σημείου Ρ και του κέντρου περιστροφής Ο είναι ίση με την απόσταση μεταξύ της εικόνας Ρ' και του Ο, δηλαδή $OP = OP'$.
- Σε αντίθεση με τη μεταφορά, οι ομόλογες πλευρές ενός σχήματος και η εικόνα που προκύπτει με στροφή δεν είναι απαραίτητα παράλληλες.
- Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' είναι ίσα και επομένως όλα τα μήκη και οι γωνίες του αρχικού σχήματος και της εικόνας του παραμένουν αμετάβλητα, δηλαδή:

$$AB = A'B', BG = B'G', AG = A'G' \text{ και } \hat{A} = \hat{A'}, \hat{B} = \hat{B'}, \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$$

Τον μετασχηματισμό του τριγώνου ΑΒΓ, στη στροφή με κέντρο στροφής Ο και γωνία περιστροφής 90°, στην εικόνα του Α'Β'Γ' γράφουμε συμβολικά:

$$AB\Gamma \xrightarrow{\Sigma(O, 90^\circ)} A'B'\Gamma'$$



Με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής να διερευνήσετε τον μετασχηματισμό στροφής.

Γενικά

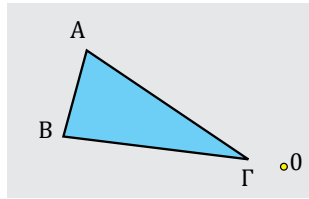
- Στον μετασχηματισμό στροφής με κέντρο στροφής Ο και γωνία ω, δεξιόστροφα ή αριστερόστροφα, το τυχόν σημείο Ρ του αρχικού σχήματος αντιστοιχίζεται σε ένα σημείο Ρ', την εικόνα του. Συμβολικά: $P \xrightarrow{\Sigma(O, \omega)} P'$.
- Στη στροφή $\Sigma(O, \omega)$, το αρχικό σχήμα και το τελικό είναι ίσα, δηλαδή τα χαρακτηριστικά τους παραμένουν αναλλοίωτα. Τα αντίστοιχα ευθύγραμμα τμήματα έχουν ίσα μήκη και οι αντίστοιχες γωνίες ίσα μέτρα.

Στη συνέχεια θα δούμε διάφορους τρόπους στους οποίους μπορούμε να εφαρμόσουμε έναν μετασχηματισμό στροφής χρησιμοποιώντας χειραπτικά μέσα και ψηφιακά εργαλεία.

Στροφή με διαφανές χαρτί

Για να περιστρέψουμε το τρίγωνο της διπλανής εικόνας γύρω από το σημείο O κατά 37° ακολουθούμε τα βήματα:

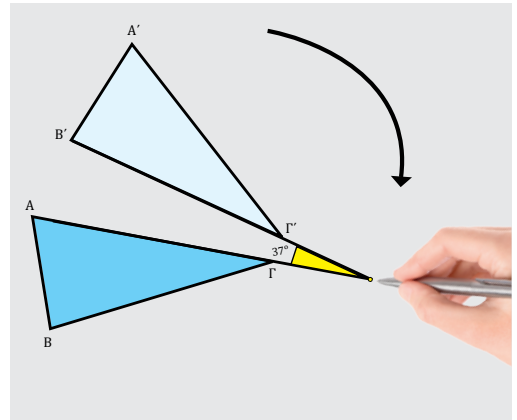
Βήμα 1ο: Τοποθετούμε ένα διαφανές χαρτί πάνω στο τρίγωνο $AB\Gamma$ και το αντιγράφουμε.



Βήμα 2ο: Πιέζουμε το κέντρο στροφής O με τη μύτη του μολυβιού.

Βήμα 3ο: Περιστρέφουμε το διαφανές χαρτί κατά 37° δεξιόστροφα (κατά τη φορά του βέλους). Αποτυπώνουμε το τρίγωνο στο αρχικό χαρτί, στο οποίο είχαμε σχεδιάσει το τρίγωνο.

Βήμα 4ο: Η νέα θέση του τριγώνου, το τρίγωνο $A'B'\Gamma'$, είναι η εικόνα του $AB\Gamma$ μετά την περιστροφή με κέντρο στροφής O και γωνία στροφής 37° .



Η στροφή αυτή συμβολίζεται: $\Sigma(O, 37^\circ)$. Με το διαφανές χαρτί μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι τα δύο τρίγωνα συμπίπτουν, δηλαδή είναι ίσα. Στον μετασχηματισμό της στροφής τα μήκη και οι γωνίες είναι αναλλοίωτα.

Στροφή με χρήση γεωμετρικών οργάνων

Στροφή σημείου:

Για να βρούμε την εικόνα ενός σημείου κατά τον μετασχηματισμό στροφής γύρω από ένα κέντρο περιστροφής με μία γωνία περιστροφής, εργαζόμαστε όπως στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα: Για την εικόνα ενός σημείου A κατά τον μετασχηματισμό της στροφής γύρω από το κέντρο O , με γωνία περιστροφής 60° αριστερόστροφα, ακολουθούμε τα εξής βήματα:

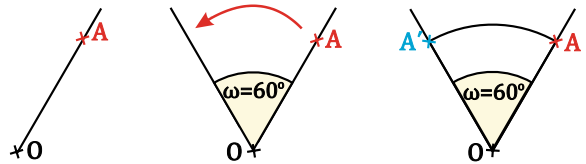
Βήμα 1ο: Σχεδιάζουμε την ημιευθεία OA .

Βήμα 2ο: Με το μοιρογνωμόνιο μετράμε γωνία 60° αριστερά από την ημιευθεία OA και τη σχεδιάζουμε.

Βήμα 3ο: Γράφουμε κύκλο με κέντρο O και ακτίνα OA .

Το σημείο τομής A' του κύκλου με την ημιευθεία OA' είναι η εικόνα του A στη στροφή με κέντρο στροφής O και γωνία στροφής 60° και φανερά: $OA' = OA$.

Ο μετασχηματισμός της εν λόγω στροφής γράφεται συμβολικά: $A \xrightarrow{\Sigma(O, 60^\circ)} A'$.



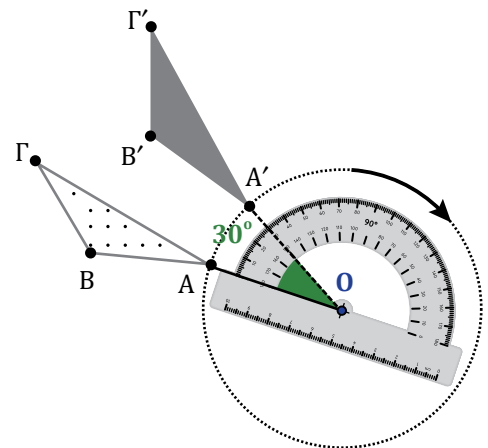
Στροφή σχήματος:

Έστω ότι θέλουμε να περιστρέψουμε δεξιόστροφα το τρίγωνο $AB\Gamma$ με κέντρο περιστροφής το σημείο O και γωνία περιστροφής 30° . Βρίσκουμε τις εικόνες A' , B' , Γ' των σημείων A , B , Γ .

Δηλαδή $A \xrightarrow{\Sigma(O, 30^\circ)} A'$, $B \xrightarrow{\Sigma(O, 30^\circ)} B'$, $\Gamma \xrightarrow{\Sigma(O, 30^\circ)} \Gamma'$.

Για να βρούμε πρώτα την εικόνα του A σχεδιάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα OA . Γράφουμε κύκλο (O, OA) . Τοποθετούμε το μοιρογνωμόνιο, έτσι ώστε να σχηματίσουμε γωνία 30° και χαράσσουμε ημιευθεία που τέμνει τον κύκλο στο σημείο A' , το οποίο είναι η εικόνα του A .

Με αντίστοιχο τρόπο βρίσκουμε και τις εικόνες B' και Γ' των σημείων B και Γ στη στροφή $\Sigma(O, 30^\circ)$. Το τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ είναι η εικόνα του τριγώνου $AB\Gamma$, στη στροφή $\Sigma(O, 30^\circ)$.



Σημείωση:

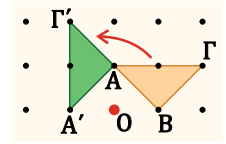
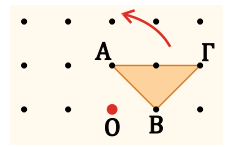
Με διαφανές χαρτί μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα, δηλαδή κατά τη στροφή τα μήκη των πλευρών και τα μέτρα των γωνιών παρέμειναν αναλλοίωτα.

Στροφή με χρήση διάστικτου τετραγωνικού καμβά

Θα σχεδιάσουμε σε τετραγωνικό πλέγμα με μετασχηματισμό στροφής την εικόνα του τριγώνου $AB\Gamma$ γύρω από το σημείο O κατά 90° αριστερόστροφα. Εδώ μπορούμε να μετρήσουμε τη θέση των σημείων στον τετραγωνικό καμβά.

- Η εικόνα του σημείου A με στροφή γύρω από το κέντρο στροφής O κατά 90° αριστερόστροφα είναι το σημείο A' , διότι $OA = OA'$ και $\widehat{AOA'} = 90^\circ$.
- Ομοίως οι εικόνες των B και Γ είναι τα σημεία B' και Γ' .

Επομένως, το τρίγωνο $A'\Gamma'B'$ είναι η εικόνα στροφής του τριγώνου $AB\Gamma$ γύρω από το σημείο O κατά 90° αριστερόστροφα.



Να κάνετε την Εργασία με προεκτάσεις με τίτλο: «Οι φάσεις της σελήνης και ο μετασχηματισμός της στροφής».

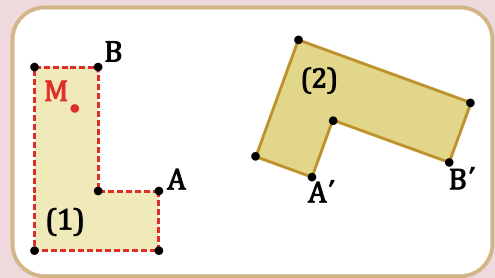


Εφαρμογή 1

Το σχήμα (2) είναι η εικόνα του σχήματος (1) που προέκυψε από τη στροφή $\Sigma(O, \widehat{\varphi})$ δεξιόστροφα.

Το σημείο M είναι ένα τυχόν σημείο του σχήματος (1).

- Χρησιμοποιώντας κανόνα και διαβήτη να βρείτε το κέντρο περιστροφής O .
- Να σχεδιάσετε τη γωνία περιστροφής $\widehat{\varphi}$ και να την μετρήσετε με το μοιρογνωμόνιο.
- Να βρείτε στο σχήμα (2) την εικόνα του σημείου M του σχήματος.



Απάντηση

- Αφού το σημείο A' είναι η εικόνα του σημείου A μετά από τον μετασχηματισμό στροφής με κέντρο το σημείο O (σχήμα 1) τότε $OA = OA'$ και το σημείο O θα βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετο (ϵ_2) του ευθύγραμμου τμήματος AA' . Αφού το σημείο B' είναι η εικόνα του σημείου B μετά από τον μετασχηματισμό στροφής με κέντρο το σημείο O (σχήμα 1) τότε $OB = OB'$ και το σημείο O θα βρίσκεται πάνω και στη μεσοκάθετο (ϵ_1) του ευθύγραμμου τμήματος BB' .

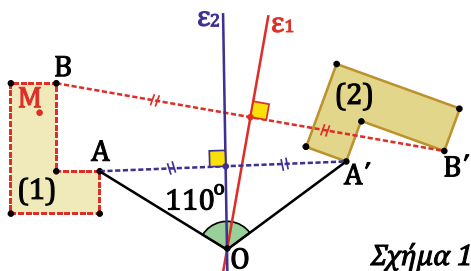
Επομένως, το ζητούμενο σημείο O είναι το σημείο τομής των μεσοκαθέτων (ϵ_1) και (ϵ_2).

- Χαράσσουμε τα ευθύγραμμα τμήματα OA και OA' (σχήμα 1). Αφού η αρχική εικόνα περιστρέφεται με τη φορά των δεικτών του ρολογιού (δεξιόστροφα), η ζητούμενη γωνία $\widehat{\varphi}$ είναι η κυρτή γωνία $\widehat{AOA'}$. Με το μοιρογνωμόνιο βρίσκουμε ότι $\widehat{\varphi} = 110^\circ$.

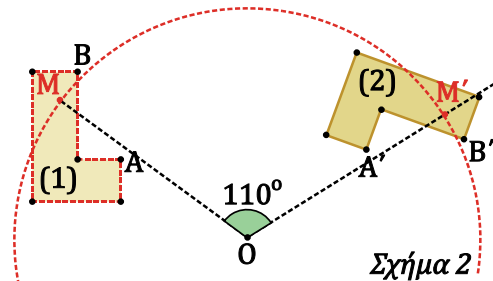
- Σχεδιάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα OM και τον κύκλο (O, OM) (σχήμα 2). Με τη χρήση του μοιρογνωμόνιου εντοπίζουμε πάνω στον κύκλο το σημείο M' , έτσι ώστε η γωνία $\widehat{MOM'}$ να είναι $\widehat{\varphi} = 110^\circ$.



Με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής να βρείτε το κέντρο και τη γωνία στροφής.



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Εφαρμογή 2

Να δείξετε ότι μία στροφή ενός τριγώνου μπορεί να πραγματοποιηθεί με διαδοχικές αξονικές συμμετρίες.

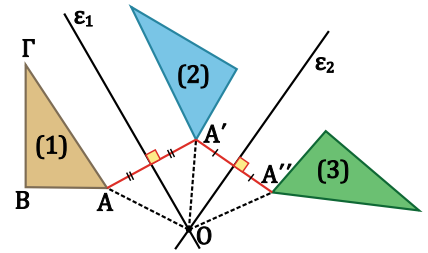
Απάντηση

Στη διπλανή εικόνα φαίνεται η στροφή $(1) \xrightarrow{\Sigma(0,130^\circ)} (3)$ με δεξιόστροφη φορά περιστροφής, όπου το τρίγωνο (1) έχει εικόνα το τρίγωνο (3).

Αν θεωρήσουμε ένα σημείο O ως κέντρο της στροφής και (ε_1) μία ευθεία ως άξονα συμμετρίας, το τρίγωνο (1) έχει συμμετρικό το τρίγωνο (2). Δηλαδή έχουμε τον μετασχηματισμό: $(1) \xrightarrow{A(\varepsilon_1)} (2)$.

Επιλέγουμε στη συνέχεια ως άξονα συμμετρίας την ευθεία (ε_2) η οποία είναι μεσοκάθετος στο $A'A''$ και παρατηρούμε ότι το τρίγωνο (3) προκύπτει ως συμμετρικό του τριγώνου (2) ως προς την (ε_2) . Δηλαδή έχουμε τον μετασχηματισμό: $(2) \xrightarrow{A(\varepsilon_2)} (3)$.

Επομένως, η στροφή $(1) \xrightarrow{\Sigma(0,130^\circ)} (3)$ είναι ισοδύναμη με τις δύο αξονικές συμμετρίες: $(1) \xrightarrow{A(\varepsilon_1)} (2)$ και $(2) \xrightarrow{A(\varepsilon_2)} (3)$. Δηλαδή το σχήμα (1) έχει εικόνα το σχήμα (3) είτε μέσω μίας στροφής, είτε ισοδύναμα, μέσω δύο αξονικών συμμετριών.

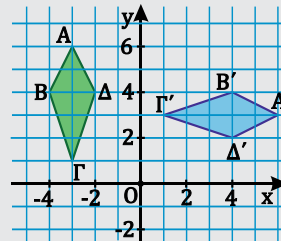


Με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής να διερευνήσετε την ισοδυναμία του μετασχηματισμού στροφής με δύο κατάλληλους μετασχηματισμούς ανάκλασης.

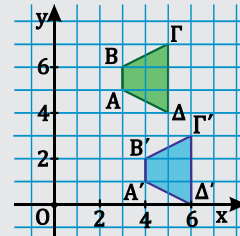
Ερωτήσεις για Αξιολόγηση

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με τη λέξη Σωστό (Σ), αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος (Λ), αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- 1 Στον μετασχηματισμό στροφής ως προς κέντρο οι γωνίες και τα μήκη του αρχικού σχήματος και της εικόνας του παραμένουν αναλλοίωτα.
- 2 Η τελική εικόνα και το αρχικό σχήμα στον μετασχηματισμό στροφής ως προς κέντρο κατά 360° ταυτίζονται.
- 3 Το μπλε σχήμα έχει προκύψει από το πράσινο σχήμα από μετασχηματισμό στροφής.



- 4 Το μπλε σχήμα έχει προκύψει από το πράσινο σχήμα από μετασχηματισμό στροφής.

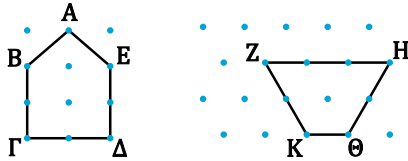


- 5 Στον μετασχηματισμό στροφής η εικόνα ενός τετραγώνου είναι πάντοτε τετράγωνο με παράλληλες τις ομόλογες πλευρές.



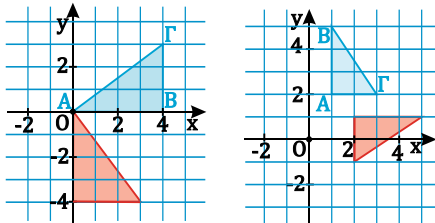
Ασκήσεις και Προβλήματα

- 1 Να μεταφέρετε τα σχήματα σε κατάλληλο ισομετρικό καμβά.

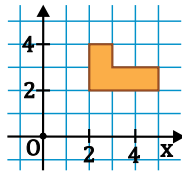


- α) Να σχεδιάσετε την εικόνα του ΑΒΓΔΕ με περιστροφή 90° δεξιόστροφα ως προς την κορυφή Ε.
 β) Να σχεδιάσετε την εικόνα του ΖΗΘΚ με περιστροφή 120° αριστερόστροφα ως προς την κορυφή Ζ.

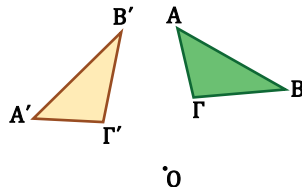
- 2 Να βρείτε το κέντρο στροφής και τη γωνία στροφής των μπλε τριγώνων ώστε να απεικονίζονται στα κόκκινα τρίγωνα αντίστοιχα.



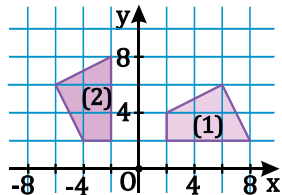
- 3 Να βρείτε τη στροφή του διπλανού σχήματος με κέντρο στροφής την αρχή των αξόνων και γωνία στροφής 90° (αριστερόστροφα). Να χρησιμοποιήσετε γεωμετρικά όργανα.



- 4 Το τρίγωνο Α'Β'Γ' είναι η στροφή του τριγώνου ΑΒΓ γύρω από το κέντρο στροφής Ο αριστερόστροφα. Χρησιμοποιώντας κανόνα και μοιρογνωμόνιο να βρείτε τη γωνία στροφής.



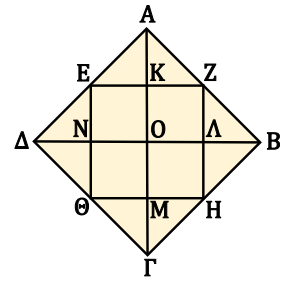
- 5 Το σχήμα (2) είναι η στροφή του σχήματος (1) αριστερόστροφα. Να βρείτε το κέντρο και τη γωνία περιστροφής.



- 6 Να σχεδιάσετε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με μήκη πλευρών $\alpha = 5$ cm και $\beta = 3$ cm και να κατασκευάσετε τα σχήματα:

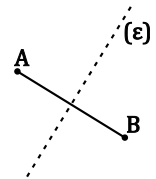
- α) Με στροφή γύρω από το Β και γωνία περιστροφής 140° αριστερόστροφα.
 β) Με στροφή γύρω από το Ο και γωνία περιστροφής 60° , όπου Ο είναι το σημείο τομής των διαγωνίων.

- 7 Στο διπλανό σχήμα να βρείτε ποια είναι η εικόνα της στροφής γύρω από το Ο:



- α) Του ΟΒ κατά 90° αριστερόστροφα.
 β) Του ΑΚ κατά 90° αριστερόστροφα.
 γ) Του ΔΕ κατά 90° αριστερόστροφα.
- 8 Δίνεται ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Με κατάλληλες στροφές να κατασκευάσετε τετράγωνο πλευράς ΑΒ.

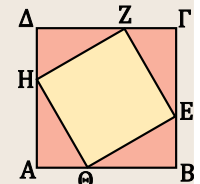
- 9 Στο διπλανό σχήμα η ευθεία (ε) είναι μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.



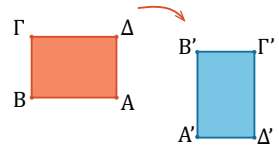
- α) Να βρείτε σημείο Ο στην ευθεία (ε) ώστε $ΟΑ = ΑΒ$.
 β) Να σχεδιάσετε κανονικό εξάγωνο με πλευρά ίση με ΑΒ, εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας ΟΑ χρησιμοποιώντας μετασχηματισμό στροφής.

- 10 **Εργασία κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες.**

Το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο και $\Delta Η = Α\Theta = ΒΕ = \Gamma Ζ$. Να χρησιμοποιήσετε κατάλληλη στροφή (ή στροφές) για να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΔΗΖ, ΖΓΕ, ΕΒΘ και ΑΘΗ έχουν τις αντίστοιχες πλευρές και γωνίες ίσες.

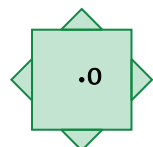


- 11 Να αντιγράψετε στο τετράδιό σας το διπλανό σχήμα που δείχνει το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο Α'Β'Γ'Δ' το οποίο είναι η εικόνα του ΑΒΓΔ μέσω μετασχηματισμού στροφής $\Sigma(O, \varphi)$ δεξιόστροφα.



- α) Με κανόνα και διαβήτη να προσδιορίσετε το κέντρο περιστροφής Ο.
 β) Να σχεδιάσετε τη γωνία περιστροφής φ και να τη μετρήσετε με το μοιρογνωμόνιο.

- 12 Στο διπλανό σχήμα το ένα τετράγωνο είναι εικόνα του άλλου, μέσω μίας στροφής. Αν το σημείο στροφής Ο βρίσκεται στο σημείο τομής των διαγωνίων των τετραγώνων να βρείτε τη γωνία στροφής φ .



5.4 Συμμετρία ως προς κέντρο: Η περίπτωση στροφής κατά 180°

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

- Να αναγνωρίζουν την κεντρική συμμετρία ως ειδική περίπτωση μετασχηματισμού στροφής κατά 180° .
- Να αναγνωρίζουν σχήματα με κέντρο συμμετρίας και να προσδιορίζουν το κέντρο συμμετρίας τους.

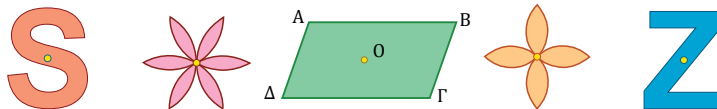


Διερεύνηση. Στροφή σχήματος κατά 180° .

Εργασία μαθητών κατά ζεύγη.

Δίνονται τα παρακάτω σχήματα στα οποία έχει σημειωθεί ένα σημείο με κίτρινο χρώμα.

- α) Να κατασκευάσετε με χαρτόνια τα σχήματα των λουλουδιών και τα γράμματα S και Z δύο φορές το καθένα. Να τοποθετήσετε καθένα από αυτά πάνω στο άλλο και να περιστρέψετε το ένα αντίγραφο του ζεύγους γύρω από το κίτρινο σημείο κατά 180° . Τι παρατηρείτε;
- β) Να αποτυπώσετε σε διαφανές χαρτί το παραλληλόγραμμο ABΓΔ και να περιστρέψετε το αντίγραφο γύρω από το κίτρινο σημείο κατά 180° . Να βρείτε όσα περισσότερα στοιχεία του παραλληλογράμμου ABΓΔ είναι ίσα μεταξύ τους.



- γ) Να κατασκευάσετε δικά σας σχήματα που όταν περιστραφούν γύρω από ένα κέντρο κατά 180° δεξιόστροφα ή αριστερόστροφα συμπίπτουν με το αρχικό σχήμα. Να προσδιορίσετε αυτό το σημείο.

Σε κάθε περίπτωση να τεκμηριώσετε με επιχειρήματα τα συμπεράσματά σας.

Μαθηματικές Έννοιες και Διεργασίες Μάθησης

Η κεντρική συμμετρία ως ειδική περίπτωση στροφής κατά 180°

Σε ορισμένα τραπουλόχαρτα υπάρχει ένα σημείο τους O, τέτοιο ώστε αν τα περιστρέψουμε κατά 180° δεξιόστροφα ή αριστερόστροφα γύρω από αυτό, συμπίπτουν με τον εαυτό τους. Δηλαδή, το συμμετρικό κάθε σημείου τους ως προς το κέντρο είναι πάλι σημείο του σχήματος. Σχήματα με αυτά τα χαρακτηριστικά λέμε ότι είναι **συμμετρικά ως προς κέντρο** ή ότι **το σχήμα έχει κέντρο συμμετρίας** ένα σημείο.



Συμμετρία ως προς κέντρο ή κεντρική συμμετρία ονομάζεται η περιστροφή γύρω από ένα σημείο O με γωνία περιστροφής 180° .

Στο διπλανό σχήμα, το τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ είναι η εικόνα του αρχικού τριγώνου ABΓ με στροφή ως προς το κέντρο O κύκλου (O, ρ) και γωνία στροφής 180° .

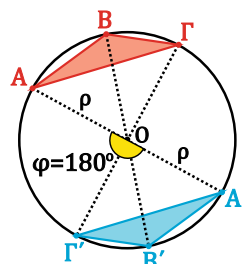
Παρατηρούμε ότι τα σημεία A και A' βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία διότι $\widehat{AOA'} = \varphi = 180^\circ$. Επιπλέον $AO = OA' = \rho$ ως ακτίνες του ίδιου κύκλου από τη διαδικασία περιστροφής. Ομοίως συμπεραίνουμε ότι $BO = OB'$ και $\Gamma O = O\Gamma'$ και τα σημεία B, O, B' είναι συνευθειακά, όπως και τα Γ, O, Γ' συνευθειακά.

Το σημείο A' , το οποίο είναι η εικόνα του A, λέγεται **συμμετρικό του A ως προς το O**.

Το νέο τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ είναι το **συμμετρικό του ABΓ** με κέντρο συμμετρίας το **κέντρο O του κύκλου**. Ο μετασχηματισμός στροφής $\Sigma(O, 180^\circ)$ ονομάζεται **συμμετρία ως προς κέντρο O** ή **κεντρική συμμε-**

τρία και γράφουμε συμβολικά: $AB\Gamma \xrightarrow{\Sigma(O, 180^\circ)} A'B'\Gamma'$.

Για τα συμμετρικά σημεία A και A' ισχύει ότι το κέντρο συμμετρίας O είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AA' .

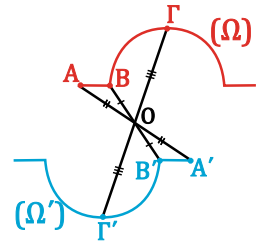


Εύρεση συμμετρικού σχήματος ως προς κέντρο

Με την κεντρική συμμετρία, η εικόνα ενός αρχικού σχήματος μπορεί να κατασκευαστεί πιο εύκολα από ό,τι με μία περιστροφή κατά 180° . Σε κάθε σημείο A ενός σχήματος (Ω) μπορούμε να αντιστοιχίσουμε το σημείο A' που βρίσκουμε, αν φέρουμε την AO και στην προέκτασή της πάρουμε τμήμα $OA' = OA$. Το συμμετρικό A' είναι επίσης η εικόνα του A με κέντρο στροφής O και γωνία περιστροφής $\widehat{AOA'} = \varphi = 180^\circ$.

Αν στο σχήμα (Ω) πάρουμε τα συμμετρικά των σημείων του A, B, Γ, \dots ως προς το O και τα ενώσουμε θα βρούμε ένα νέο σχήμα (Ω') το οποίο λέγεται **συμμετρικό του (Ω) ως προς κέντρο συμμετρίας O** και γράφουμε: $(\Omega) \xrightarrow{\Sigma(O, 180^\circ)} (\Omega')$

Ισχύει επίσης ότι $(\Omega') \xrightarrow{\Sigma(O, 180^\circ)} (\Omega)$. Δηλαδή το σχήμα (Ω') είναι συμμετρικό ως προς κέντρο συμμετρίας O , του σχήματος (Ω) , όπως και το σχήμα (Ω) είναι συμμετρικό του σχήματος (Ω') ως προς κέντρο συμμετρίας O . Τέλος, είναι φανερό ότι το συμμετρικό του O είναι το ίδιο το O .



Γενικά

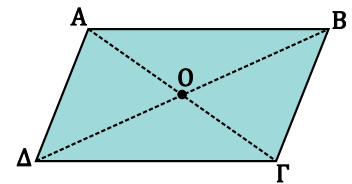
Ένα σχήμα (Ω) έχει κέντρο συμμετρίας ένα σημείο O , αν το συμμετρικό κάθε σημείου του σχήματος ως προς κέντρο O είναι επίσης σημείο του σχήματος.

Κέντρο συμμετρίας παραλληλογράμμου

Το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ αν περιστραφεί κατά 180° γύρω από το σημείο τομής των διαγωνίων του διαπιστώνουμε ότι το O είναι κέντρο συμμετρίας του. Επειδή κατά τη στροφή αυτή το A θα συμπίψει με το Γ και το B με το Δ καταλαβαίνουμε ότι $OA = O\Gamma$ και $OB = O\Delta$. Συνεπώς:

Σε κάθε παραλληλόγραμμο:

- Το σημείο τομής των διαγωνίων του είναι κέντρο συμμετρίας.
- Οι απέναντι πλευρές είναι ίσες.
- Οι απέναντι γωνίες είναι ίσες.
- Οι διαγώνιοι διχοτομούνται.



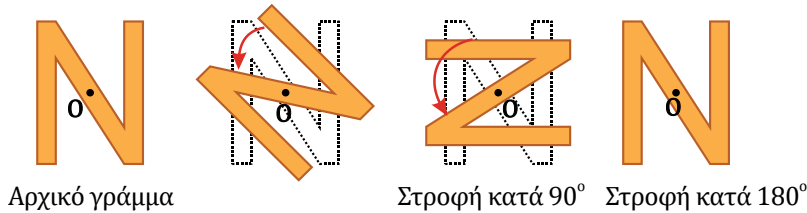
Με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής να διερευνήσετε τον μετασχηματισμό συμμετρίας ως προς κέντρο.



Εφαρμογή 1

Να ελέγξετε αν το γράμμα N έχει κέντρο συμμετρίας.

Απάντηση



Μετά από στροφή κατά 180° , το γράμμα μοιάζει ακριβώς με το αρχικό. Επομένως το γράμμα N έχει κέντρο συμμετρίας το σημείο O .



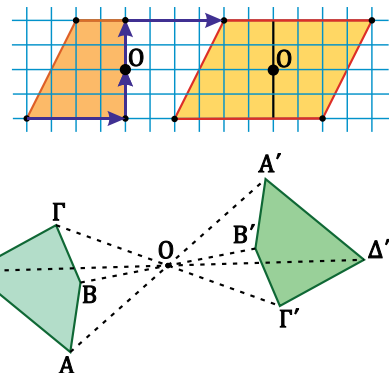
Εφαρμογή 2

Να βρείτε τα συμμετρικά των ακόλουθων σχημάτων ως προς κέντρο συμμετρίας το σημείο O .



Απάντηση

- α)** Εδώ μπορούμε να μετρήσουμε τη θέση των σημείων στο τετραγωνισμένο χαρτί. Βρίσκουμε τα συμμετρικά των κορυφών του σχήματος, και τα συνδέουμε. Μετά από μισή περιστροφή του σχήματος γύρω από το σημείο O , προκύπτει το συμμετρικό του αρχικού σχήματος.
- β)** Το συμμετρικό ως προς κέντρο O του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ βρίσκεται αν προσδιορίσουμε τα συμμετρικά των κορυφών του. Έτσι π.χ. για να βρούμε το συμμετρικό του A , πάνω στην ημιευθεία AO με τον διαβήτη προσδιορίζουμε σημείο A' ώστε $OA = OA'$. Ομοίως και για τις άλλες κορυφές του τετραπλεύρου για τα συμμετρικά τους ισχύει $OB = OB'$, $OG = OG'$, $OD = OD'$. Συνδέουμε τα σημεία της εικόνας A', B', Γ' και Δ' για να σχηματίσουμε το τετράπλευρο $A'B'\Gamma'\Delta'$, το οποίο είναι το συμμετρικό του $AB\Gamma\Delta$ στην κεντρική συμμετρία με κέντρο το σημείο O .

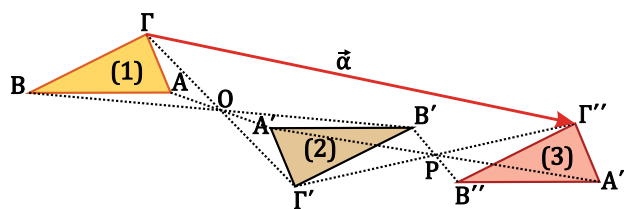


Εφαρμογή 3

Να δείξετε ότι μία μεταφορά ενός τριγώνου είναι ισοδύναμη με δύο κεντρικές συμμετρίες.

Απάντηση

Στη διπλανή εικόνα το σχήμα (3) είναι μεταφορά του σχήματος (1) κατά διάνυσμα $\vec{\alpha}$, δηλαδή $(1) \xrightarrow{M(\vec{\alpha})} (3)$. Παρατηρούμε όμως ότι αυτή η μεταφορά μπορεί να πραγματοποιηθεί με δύο κεντρικές συμμετρίες ως εξής. Πρώτα, επιλέγουμε τυχόν σημείο O ως κέντρο συμμετρίας και βρίσκουμε κατά τα γνωστά, το συμμετρικό του σχήματος (1) ως προς κέντρο O , το οποίο είναι το σχήμα (2). Κατόπιν παίρνουμε ως κέντρο της νέας συμμετρίας το P , το οποίο είναι μέσο του $A'A''$ (επίσης των $B'B''$ και $\Gamma'\Gamma''$). Το συμμετρικό του σχήματος (2) με κέντρο συμμετρίας το P είναι το σχήμα (3).



Διαπιστώσαμε δηλαδή ότι η μεταφορά $(1) \xrightarrow{M(\vec{\alpha})} (3)$, μπορεί να προκύψει με δύο διαδοχικές συμμετρίες ως προς κέντρο.

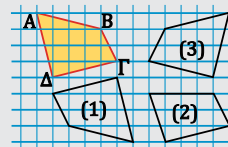
Συγκεκριμένα: $(1) \xrightarrow{\Sigma(O, 180^\circ)} (2) \xrightarrow{\Sigma(P, 180^\circ)} (3)$.



Με την ψηφιακή εφαρμογή να διερευνήσετε τον μετασχηματισμό μεταφοράς ως ισοδύναμο με δύο μετασχηματισμούς κεντρικής συμμετρίας.

Ερωτήσεις για Αξιολόγηση

- Κάποιο από τα 4 τετράπλευρα της εικόνας έχει προκύψει από έναν μετασχηματισμό στροφής κατά 180° στο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$. Να προσδιορίσετε το κέντρο στροφής. Να αιτιολογήσετε.
- Να εξηγήσετε γιατί το τετράγωνο έχει κέντρο συμμετρίας το σημείο τομής των διαγωνίων του.
- Ποιο ή ποια από τα παρακάτω σχήματα έχουν συμμετρία ως προς κέντρο. Να εξηγήσετε πώς σκεφτήκατε.

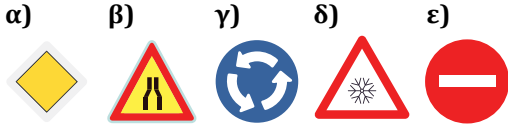


- Να εξετάσετε αν το κέντρο O του περιγεγραμμένου κύκλου ενός κανονικού εξαγώνου είναι κέντρο συμμετρίας του.



Ασκήσεις και Προβλήματα

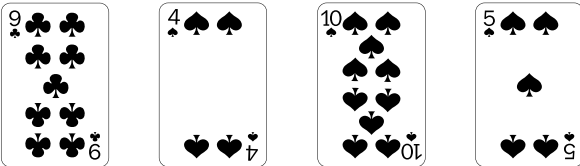
1 Ποιες από τις παρακάτω πινακίδες οδοσήμανσης είναι συμμετρικές ως προς κέντρο. Να αιτιολογήσετε.



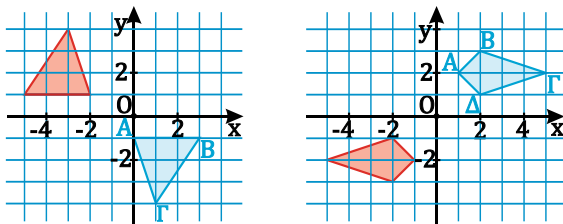
2 Να εξετάσετε ποιο ή ποια από τα παρακάτω γράμματα έχουν κέντρο συμμετρίας.

Δ Ζ Η Θ Ι Κ Ξ Ο Φ Χ Ψ

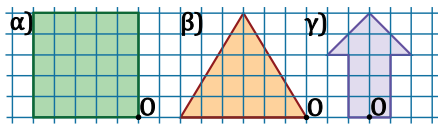
3 Να εξετάσετε ποια ή ποιες από τις παρακάτω κάρτες έχουν κέντρο συμμετρίας.



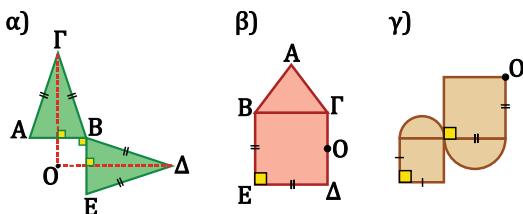
4 Να βρείτε το κέντρο στροφής και τη γωνία στροφής ώστε το μπλε σχήμα έχει ως εικόνα το κόκκινο σχήμα.



5 Να μεταφέρετε τα σχήματα σε τετραγωνισμένο χαρτί και να βρείτε τα συμμετρικά τους με κέντρο το σημείο O. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ως οδηγό τα τετράγωνα του πλέγματος.

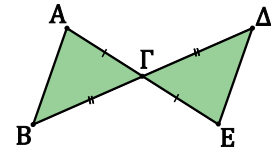


6 Να αντιγράψετε με ακρίβεια τα ακόλουθα σχήματα στο τετράδιό σας και να βρείτε τα συμμετρικά τους ως προς κέντρο συμμετρίας το σημείο O.



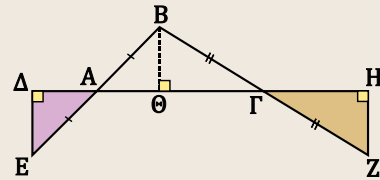
7 Να κατασκευάσετε τα συμμετρικά: α) Ευθυγράμμου τμήματος AB ως προς σημείο O εκτός του AB. β) Κύκλου (K, ρ) ως προς εξωτερικό σημείο O. γ) Τριγώνου ABΓ ως προς σημείο O εσωτερικό του τριγώνου. δ) Τριγώνου ABΓ ως προς σημείο O εξωτερικό του τριγώνου.

8 Στο διπλανό σχήμα ισχύουν τα εξής: $A\hat{\Gamma}B = \Delta\hat{\Gamma}E$, $A\Gamma = \Gamma E$ και $B\Gamma = \Gamma\Delta$. Να προσδιορίσετε μία κατάλληλη στροφή προκειμένου να δείξετε ότι:



- α) τα τρίγωνα ABΓ και ΓΔE έχουν όλες τις γωνίες τους ίσες.
- β) $AB = \Delta E$.

9 **Εργασία κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες.** Στο τρίγωνο ABΓ του παρακάτω σχήματος έχουμε προεκτείνει την πλευρά BA ώστε $BA = AE$, καθώς και την πλευρά BΓ ώστε $B\Gamma = \Gamma Z$. Από τα σημεία E και Z φέρνουμε κάθετα ευθύγραμμα τμήματα ΔE και ΖΗ προς την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και Γ.



- α) Να βρείτε την εικόνα του ΔE στη στροφή με $\Sigma(A, 180^\circ)$.
- β) Να βρείτε την εικόνα του ΗZ στη στροφή με $\Sigma(\Gamma, 180^\circ)$.
- γ) Να δείξετε ότι $\Delta E = ZH$.

10 Η AM είναι διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ABΓ.

- α) Να σχεδιάσετε το συμμετρικό του τριγώνου ABΓ με κέντρο συμμετρίας το μέσο M της υποτείνουσάς του BΓ.
- β) Τι είδους τετράπλευρο προκύπτει και γιατί;
- γ) Να εξετάσετε αν η διάμεσος AM είναι το μισό της υποτείνουσας BΓ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

11 Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων xOy να σχεδιάσετε το ευθύγραμμο τμήμα AB με $A(-3, 2)$ και $B(-1, -3)$. Να κατασκευάσετε το συμμετρικό A'B' του AB ως προς το σημείο O και να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των σημείων A' και B'. Τι παρατηρείτε;

5.5 Εφαρμογές των μετασχηματισμών

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

Να αναγνωρίζουν και να περιγράφουν μετασχηματισμούς σε ένα γεωμετρικό μοτίβο, ένα σχέδιο, ένα έργο τέχνης ή μία πλακόστρωση.

Όταν τα πλακάκια καλύπτουν πλήρως μία επίπεδη επιφάνεια χωρίς κενά και επικαλύψεις ο σχηματισμός ονομάζεται πλακόστρωση.

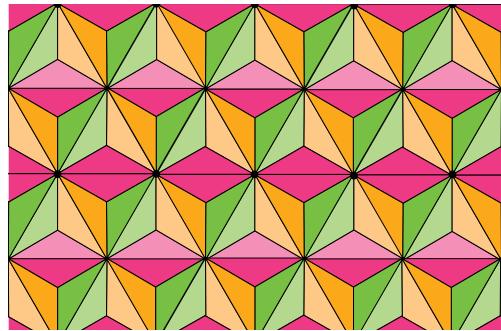


Διερεύνηση 1. Περιγραφή πλακοστρώσεων.

Εργασία μαθητών κατά ζεύγη.

Χωρίς να λάβετε υπόψιν τα χρώματα, να βοηθήσετε τη Νεφέλη να ανακαλύψει και να περιγράψει στην πλακόστρωση:

- Δύο σχήματα συμμετρικά ως προς μία ευθεία.
- Δύο σχήματα συμμετρικά ως προς ένα σημείο.
- Ένα σχήμα και την εικόνα του με μεταφορά.
- Ένα σχήμα και την εικόνα του με στροφή.



Διερεύνηση 2. Δημιουργία πλακοστρώσεων.

Εργασία μαθητών ατομική ή κατά ζεύγη.

Με έναν συνδυασμό σχημάτων σε διάστικτο ισομετρικό καμβά να δημιουργήσετε μία πλακόστρωση με κατάλληλους μετασχηματισμούς (ανάκλασης, μεταφοράς, στροφής) καλύπτοντας πλήρως το επίπεδο.



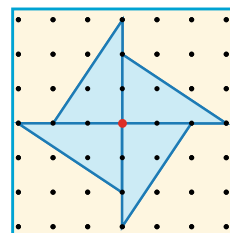
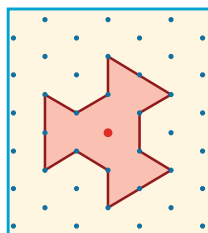
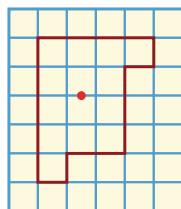
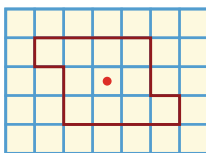
Να αιτιολογήσετε την πλακόστρωση.



Διερεύνηση 3. Περιστροφική συμμετρία.

Εργασία μαθητών κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες.

Να αντιγράψετε σχήματα από τα παρακάτω σε τετραγωνισμένο χαρτί ή διάστικτο πλέγμα.



- Να αποτυπώσετε τα σχήματα σε διαφανές χαρτί και να τοποθετήσετε κάθε αντίγραφο, έτσι ώστε να συμπίπτουν με το αρχικό σχήμα.
- Να βάλετε τη μύτη του μολυβιού στην κόκκινη κουκκίδα. Να περιστρέψετε το αντίγραφο και να μετρήσετε πόσες φορές αυτό συμπίπτει με το αρχικό σχήμα κατά τη διάρκεια μίας πλήρους περιστροφής.

- γ) Να επαναλάβετε την περιστροφή και να μετρήσετε τη μικρότερη γωνία με την οποία περιστρέψατε κάθε φορά το αντίγραφο, έτσι ώστε αυτό να συμπίπτει με το αρχικό σχήμα.
 - δ) Να σχεδιάσετε ένα σχήμα το οποίο συμπίπτει με τον εαυτό του έξι φορές κατά τη διάρκεια μίας περιστροφής 360° .
 - ε) Να κατασκευάσετε με χαρτόνια δικά σας σχήματα με περιστροφική συμμετρία από τη φύση και την τέχνη.
- Να μοιραστείτε τα αποτελέσματά σας στην τάξη.**

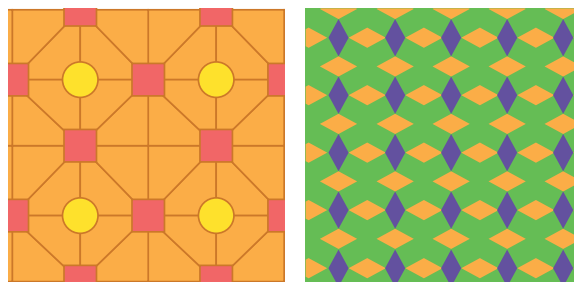
Μαθηματικές Έννοιες και Διεργασίες Μάθησης

Οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί δεν αποτελούν απλώς αφηρημένα μαθηματικά εργαλεία, αλλά έχουν βαθιές συνδέσεις με την τέχνη, τη φύση και την καθημερινή ζωή. Οι μετασχηματισμοί επηρεάζουν και εμπνέουν τις δημιουργίες μας, κάνουν τη μάθηση πιο διασκεδαστική και δημιουργική, ενώ παράλληλα μας βοηθούν να κατανοούμε τον κόσμο γύρω μας. Οι εφαρμογές αυτής της ενότητας εστιάζουν στις πλακοστρώσεις και την περιστροφική συμμετρία.

Αναγνώριση μετασχηματισμών σε πλακοστρώσεις

Στα διπλανά σχήματα μπορούμε να αναγνωρίσουμε και να περιγράψουμε γεωμετρικούς μετασχηματισμούς. Μπορούμε να αναγνωρίσουμε, διακοσμητικά στοιχεία και μοτίβα που επαναλαμβάνονται με κανονικότητα σε γεωμετρικά σχέδια, έργα τέχνης, ψηφιδωτά, μωσαϊκά και πλακοστρώσεις, δημιουργώντας συμμετρίες.

Σε τέτοιες περιπτώσεις μπορούμε να αποσυνθέσουμε τα γεωμετρικά ή φυτικά μοτίβα που γεμίζουν την επίπεδη επιφάνεια φτάνοντας στις στοιχειώδεις δομικές μονάδες τους.



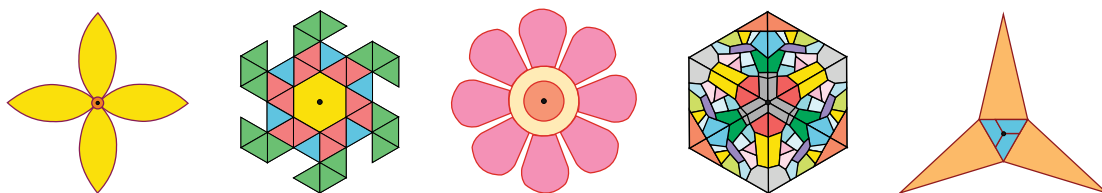
Όταν τα πλακάκια καλύπτουν πλήρως το επίπεδο χωρίς αλληλεπικαλύψεις και κενά διαστήματα, ο σχηματισμός ονομάζεται πλακόστρωση. Στην ουσία, πρόκειται για τη διαδικασία κατά την οποία χρησιμοποιούμε επίπεδα σχήματα, γεωμετρικά ή μη, τα οποία ενώνουμε ώστε να καλύψουμε μία επιφάνεια. Μπορούμε να διευρύνουμε τη ματιά διερεύνησης των μετασχηματισμών δημιουργώντας νέες δομές με όμορφα χρωματικά σύνολα που συνδέουν τα Μαθηματικά με την Τέχνη.

Περιστροφική συμμετρία

Όταν ένα αντικείμενο περιστρέφεται δεξιόστροφα ή αριστερόστροφα κατά 180° ή λιγότερο, γύρω από ένα σημείο του σχήματος και συμπίπτει με το αρχικό, τότε έχουμε **περιστροφική συμμετρία**. Αυτό το σημείο είναι το κέντρο της περιστροφικής συμμετρίας. Μπορούμε να βρούμε πολλά αντικείμενα στη φύση και την καθημερινή ζωή που έχουν περιστροφική συμμετρία, όπως πτερύγια ανεμογεννητριών, τροχούς σε λούνα παρκ, καλειδοσκόπια, ζάντες, αστερίες, λουλούδια, φύλλα δέντρων, δημιουργίες από τη διακόσμηση, την αρχιτεκτονική κ.λπ. Ο διάσημος τροχός London Eye είναι ένα παράδειγμα περιστροφικής συμμετρίας.



Στη Γεωμετρία, υπάρχουν πολλά σχήματα που απεικονίζουν περιστροφική συμμετρία. Για παράδειγμα, σχήματα όπως κύκλος, τετράγωνο, ισόπλευρο τρίγωνο και κανονικό εξάγωνο απεικονίζουν περιστροφική συμμετρία. Τα ακόλουθα σχέδια έχουν περιστροφική συμμετρία.



Το πρώτο σχήμα συμπίπτει με τον εαυτό του όταν περιστραφεί κατά 90° , 180° , 270° ή 360° , δηλαδή κατά τη διάρκεια μίας πλήρους περιστροφής κατά 360° , το σχήμα συμπίπτει με τον εαυτό του τέσσερις φορές. Η μικρότερη στροφή είναι το ένα τέταρτο της περιστροφής (90°). Πόσες φορές τα άλλα σχήματα συμπίπτουν με τον εαυτό τους σε μία πλήρη περιστροφή και ποια είναι κάθε φορά η μικρότερη γωνία περιστροφής;

Με γεωμετρικά όργανα όπως κανόνα, διαβήτη και μοιρογνωμόνιο μπορούμε να δημιουργήσουμε σχήματα όπως τα παραπάνω. Θα χρειαστούμε επίσης, μολύβι με μύτη και ειδικό χαρτί (π.χ. διαφανές, τετραγωνισμένο χαρτί ή καμβά με διάστικτο ισομετρικό πλέγμα).



Εφαρμογή 1

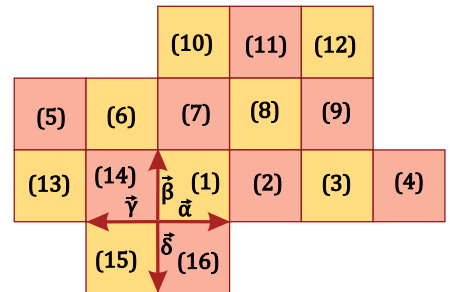
Να εξετάσετε με ποιον τρόπο με κατάλληλες μεταφορές μπορούμε να καλύψουμε πλήρως το επίπεδο με πλακάκια σχήματος: **α)** Τετραγώνου. **β)** Ισόπλευρου τριγώνου.

Απάντηση

α) Ξεκινώντας από το τετράγωνο πλακάκι (1) μπορούμε να καλύψουμε σταδιακά το επίπεδο με 4 μεταφορές κατά διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ αντίστοιχα.

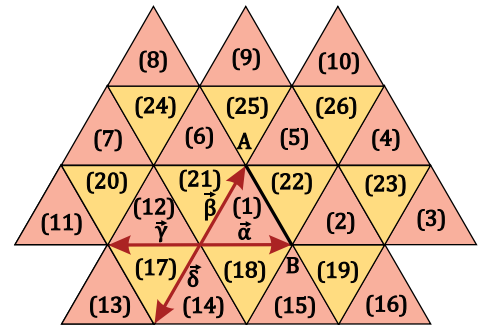
Έτσι στη διπλανή εικόνα έχουμε τις εξής μεταφορές:

$$\begin{aligned} (1) &\xrightarrow{\vec{\gamma}} (14), (14) \xrightarrow{\vec{\gamma}} (13) \\ (14) &\xrightarrow{\vec{\gamma}} (13), (1) \xrightarrow{\vec{\delta}} (16) \\ (1) &\xrightarrow{\vec{\alpha}} (2), (2) \xrightarrow{\vec{\alpha}} (3), (3) \xrightarrow{\vec{\alpha}} (4) \\ (13) &\xrightarrow{\vec{\beta}} (5), (14) \xrightarrow{\vec{\beta}} (6), (1) \xrightarrow{\vec{\beta}} (7), (2) \xrightarrow{\vec{\beta}} (8), \\ (8) &\xrightarrow{\vec{\beta}} (11), (9) \xrightarrow{\vec{\beta}} (12). \end{aligned}$$



β) Αρχίζοντας από το πλακάκι (1) σχήματος ισόπλευρου τριγώνου μπορούμε να καλύψουμε σταδιακά το επίπεδο με 4 μεταφορές κατά διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ αντίστοιχα. Έτσι, στη διπλανή εικόνα για παράδειγμα βλέπουμε μερικές μεταφορές κατά διάνυσμα:

$$\begin{aligned} (1) &\xrightarrow{M(\vec{\alpha})} (2) \xrightarrow{M(\vec{\alpha})} (3) \\ (1) &\xrightarrow{M(\vec{\beta})} (5) \xrightarrow{M(\vec{\beta})} (10) \\ (1) &\xrightarrow{M(\vec{\gamma})} (12) \xrightarrow{M(\vec{\gamma})} (11) \\ (1) &\xrightarrow{M(\vec{\delta})} (14) \xrightarrow{M(\vec{\delta})} (15), \text{κ.λπ.} \end{aligned}$$



Να κάνετε την *Εργασία* με προεκτάσεις με τίτλο: «Πλακόστρωση του επιπέδου με μετασχηματισμούς στροφής».

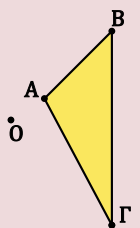


Να διερευνήσετε με την ψηφιακή εφαρμογή τη μερική κάλυψη του επιπέδου με μη κανονικό σχήμα το οποίο προέκυψε με την τροποποίηση τετραγώνου σχήματος.



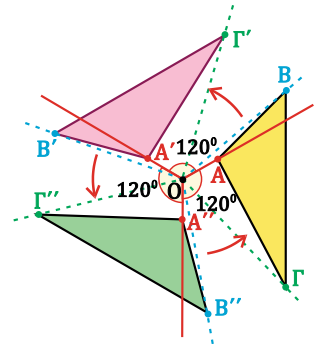
Εφαρμογή 2

- α)** Να περιστρέψετε το τρίγωνο $AB\Gamma$ αριστερόστροφα γύρω από το σημείο O με γωνία περιστροφής 120° . Να επαναλάβετε τη διαδικασία έως ότου να δημιουργήσετε ένα σχήμα με περιστροφική συμμετρία. Ποιο σχήμα αν περιστραφεί γύρω από το σημείο O συμπίπτει με τον εαυτό του;
- β)** Πόσες φορές το περιστρεφόμενο σχήμα συμπίπτει με τον εαυτό του σε μία πλήρη περιστροφή και ποια είναι η μικρότερη γωνία περιστροφής.



Απάντηση

α) Στην εικόνα δεξιά, το αρχικό τρίγωνο $AB\Gamma$ περιστράφηκε στο επίπεδο αριστερόστροφα γύρω από το σημείο O με γωνία περιστροφής 120° και δημιουργήθηκε η εικόνα του, το τρίγωνο $A'B'\Gamma'$. Η εικόνα του A είναι το σημείο A' , το οποίο βρίσκεται στην ίδια απόσταση από το κέντρο περιστροφής O με το A , δηλαδή ισχύει $OA = OA'$. Ανάλογα ισχύουν: $OB = OB'$ και $O\Gamma = O\Gamma'$. Το σχήμα που προέκυψε περιστράφηκε εκ νέου και δημιουργήθηκε το $A''B''\Gamma''$. Το σχήμα των τριών τριγώνων έχει περιστροφική συμμετρία, επειδή συμπίπτει με τον εαυτό του όταν περιστρέφεται κατά 120° , 240° ή 360° .



β) Ξεκινώντας από την αρχική θέση κατά τη διάρκεια μίας πλήρους περιστροφής 360° , το συνολικό σχήμα συμπίπτει με τον εαυτό του τρεις φορές, καθεμία ίση με το ένα τρίτο της περιστροφής. Η μικρότερη γωνία η οποία χωρά τρεις φορές στην αρχική θέση του σχήματος είναι 120° .

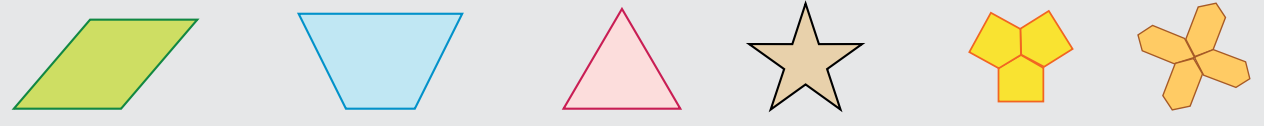
Να κάνετε την Εργασία με προεκτάσεις με τίτλο: «Πλακόστρωση με μη κανονικά σχήματα με μεταφορά».

Να κάνετε την Εργασία με προεκτάσεις με τίτλο: «Εφαρμογές πλακοστρώσεων με μη κανονικά σχήματα με στροφή».

Να διερευνήσετε τη μερική κάλυψη του επιπέδου με μετασχηματισμούς στροφής.

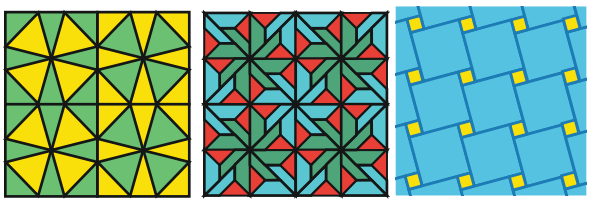
Ερωτήσεις για Αξιολόγηση

- 1) Να βρείτε πόσες μοίρες μπορεί να περιστραφεί το τετράγωνο γύρω από το κέντρο του, ώστε να ταυτιστεί με τον εαυτό του. Υπάρχουν περισσότεροι τρόποι;
- 2) Ποιο ή ποια από τα παρακάτω σχήματα έχουν περιστροφική συμμετρία. Να εξηγήσετε πώς σκεφτήκατε.

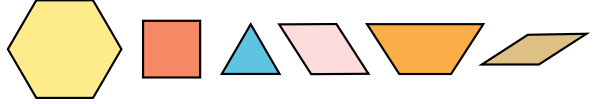


Ασκήσεις και Προβλήματα

- 1) **α)** Στις ακόλουθες πλακοστρώσεις να αναγνωρίσετε ένα γεωμετρικό μοτίβο που επαναλαμβάνεται.
β) Να περιγράψετε μετασχηματισμούς (π.χ. ανάκλασης, μεταφοράς, στροφής) με τους οποίους το μοτίβο μπορεί να βρεθεί σε άλλη θέση της πλακόστρωσης.



- 2) Με έναν συνδυασμό σχημάτων να φτιάξετε ένα γεωμετρικό μοτίβο. Να το χρησιμοποιήσετε για να κάνετε το σχέδιο μίας πλακόστρωσης με κατάλληλους μετασχηματισμούς.



- 3) Να εξετάσετε αν τα ακόλουθα σχήματα έχουν περιστροφική συμμετρία.



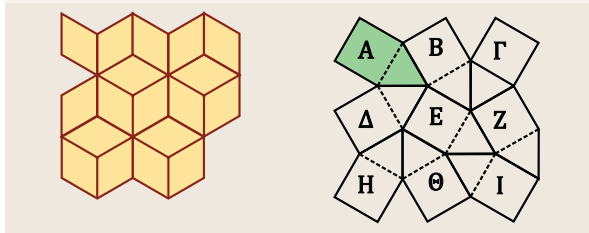
Πόσες φορές συμπίπτει με το αρχικό σχήμα κατά τη διάρκεια μίας πλήρους περιστροφής και ποια είναι η μικρότερη γωνία περιστροφής;

- 4 Ένα τετράγωνο και ένα ισόπλευρο τρίγωνο περιστρέφονται γύρω από το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου.

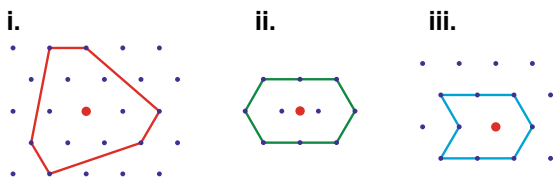
- α) Να αιτιολογήσετε γιατί τα σχήματα αυτά έχουν περιστροφική συμμετρία.
β) Πόσες φορές κατά τη διάρκεια μίας περιστροφής 360° κάθε σχήμα συμπίπτει με τον εαυτό του;

- 5 Να βρείτε τις ανακλάσεις και τις στροφές που κάνουν το τελικό σχήμα να συμπίπτει με το αρχικό, για:
- α) ένα κανονικό οκτάγωνο.
β) ένα ορθογώνιο που δεν είναι τετράγωνο.
γ) έναν ρόμβο που δεν είναι τετράγωνο.
δ) ένα παραλληλόγραμμο που δεν είναι ορθογώνιο ούτε ρόμβος.

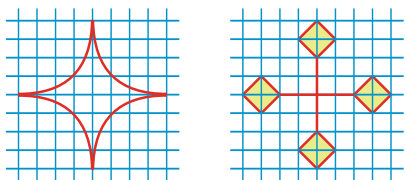
- 6 Σε καθεμία από τις παρακάτω πλακοστρώσεις να αναγνωρίσετε από έναν μετασχηματισμό:
- α) Μεταφοράς. β) Ανάκλασης. γ) Στροφής.



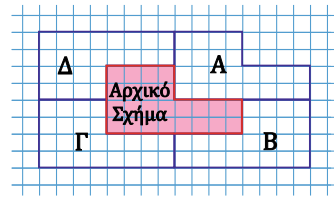
- 7 α) Να προσδιορίσετε ποια από τα παρακάτω εξάγωνα έχουν περιστροφική συμμετρία.
β) Πόσες φορές κατά τη διάρκεια μίας περιστροφής 360° ένα σχήμα συμπίπτει με τον εαυτό του;



- 8 Να εξετάσετε αν τα ακόλουθα σχήματα έχουν αξονική και περιστροφική συμμετρία. Σε κάθε περίπτωση να τεκμηριώσετε με επιχειρήματα τα συμπεράσματά σας.

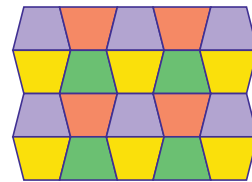


- 9 Στην ακόλουθη πλακόστρωση να αναγνωρίσετε μετασχηματισμούς του αρχικού σχήματος.



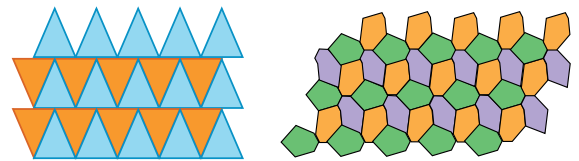
- 10 Στην παρακάτω πλακόστρωση να αναγνωρίσετε και να περιγράψετε μετασχηματισμούς:

- α) Μεταφοράς.
β) Ανάκλασης.
γ) Στροφής.



- 11 **Εργασία ετεροαξιολόγησης:**

- α) Για καθεμία από τις πλακοστρώσεις να αναγνωρίσετε ένα γεωμετρικό μοτίβο που επαναλαμβάνεται.



- β) Να περιγράψετε μετασχηματισμούς (π.χ. ανάκλασης, μεταφοράς, στροφής) με τους οποίους το μοτίβο μπορεί να βρεθεί σε άλλη θέση της πλακόστρωσης. Να ελέγξετε το αποτέλεσμα σας με το αποτέλεσμα του συμμαθητή σας.
γ) Να εξετάσετε με ποιον τρόπο με κατάλληλες μεταφορές μπορούμε να καλύψουμε πλήρως το επίπεδο με πλακάκια σχήματος κανονικού εξαγώνου.

Να κάνετε την Εργασία με προεκτάσεις με τίτλο: «Οι Μετασχηματισμοί στην Τέχνη Ι».



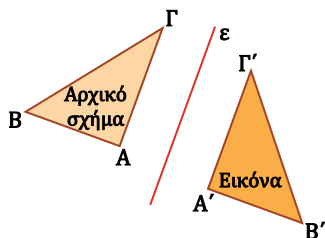
Να κάνετε την Εργασία με προεκτάσεις με τίτλο: «Οι Μετασχηματισμοί στην Τέχνη ΙΙ» που θα βρείτε στο συμπληρωματικό υλικό.



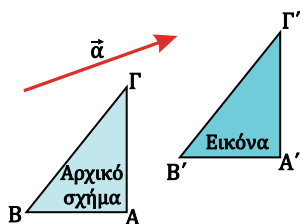
5.6 Ανακεφαλαίωση και διεύρυνση της θεματικής ενότητας

- **Ισομετρίες** είναι οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί στις οποίες οι εικόνες τους διατηρούν τα μήκη των αρχικών σχημάτων.
- Ισομετρίες είναι: **α)** Η **Αξονική συμμετρία**, **β)** Η **Μεταφορά**, **γ)** Η **Στροφή**. **δ)** Η **κεντρική συμμετρία**, η οποία είναι ειδική περίπτωση στροφής με γωνία περιστροφής 180° .

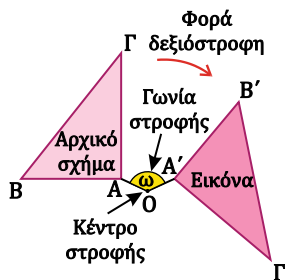
α) Ανάκλαση



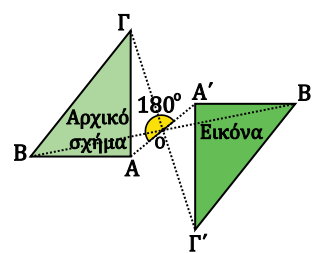
β) Μεταφορά



γ) Στροφή



δ) Κεντρική συμμετρία



Ερωτήσεις για συζήτηση και αναστοχασμό

1. Να σχεδιάσετε ένα ευθύγραμμο τμήμα AB καθώς και την εικόνα του $A'B'$ με μετασχηματισμό μεταφοράς κατά διάνυσμα \vec{a} . Να διερευνήσετε το είδος του σχήματος $ABB'A'$ και να τεκμηριώσετε τις απόψεις σας.
2. Κάθε ζευγάρι αποτελείται από ένα κόκκινο και ένα κίτρινο σχήμα. Το κόκκινο σχήμα σε κάθε περίπτωση είναι η εικόνα του κίτρινου με μετασχηματισμό στροφής με γωνία φ .
 - α) Να εντοπίσετε σε κάθε διαφορετικό ζευγάρι σχημάτων το κέντρο περιστροφής.
 - β) Να εκτιμήσετε τη γωνία περιστροφής φ .
3. Να χρησιμοποιήσετε μετασχηματισμούς ισομετρίας για να σχεδιάσετε τη διπλανή εικόνα.
4. Να χρησιμοποιήσετε μετασχηματισμούς ισομετρίας για να σχεδιάσετε τη διπλανή εικόνα.
5. Για το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, το τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα τραπέζια $AB\Gamma\Delta$ και $EZH\Theta$ δίνεται ένας τρόπος υπολογισμού του εμβαδού τους. Να εξηγήσετε με ποιους μετασχηματισμούς μπορούν να επισημοθούν οι τύποι των εμβαδών τους.

α)

β)

γ)

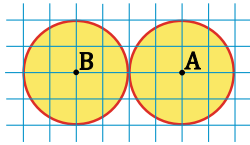
δ)

Να λάβετε μέρος στο *Εργαστήριο δημιουργίας* της τάξης σας με τίτλο: «Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί και πλακοστρώσεις», που θα βρείτε στο συμπληρωματικό υλικό.

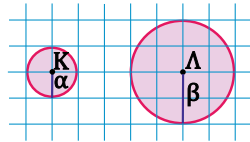


Επαναληπτικά Έργα & Προεκτάσεις

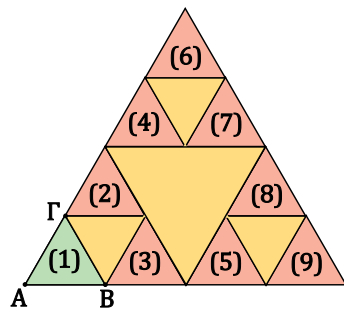
- 1 Στη διπλανή εικόνα είναι σχεδιασμένοι οι κύκλοι (A, 2 cm), (B, 2 cm). Με μεταφορά κατά διάνυσμα $\vec{\alpha}$ βρίσκουμε την εικόνα του κύκλου (B, 2) και με μεταφορά κατά διάνυσμα $\vec{\beta}$ βρίσκουμε την εικόνα του κύκλου (A, 2). Να διερευνήσετε τη σχέση που πρέπει να έχουν τα δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, ώστε οι εικόνες των δύο κύκλων που προκύπτουν από τους δύο μετασχηματισμούς να ταυτίζονται.



- 2 Στο σχήμα είναι σχεδιασμένοι οι κύκλοι (K, $\alpha = 1$) και (Λ, $\beta = 2$). Πραγματοποιούμε τη μεταφορά $(K, \alpha) \xrightarrow{M(\vec{\gamma})} (K', \alpha')$ του κύκλου (K, α) κατά διάνυσμα $\vec{\gamma}$. Να προσδιορίσετε το $\vec{\gamma}$ ώστε οι κύκλοι (K', α') και (Λ, β) να έχουν: **α)** ένα μόνο κοινό σημείο, **β)** δύο κοινά σημεία, **γ)** κανένα κοινό σημείο.



- 3 Με κατάλληλους μετασχηματισμούς μεταφοράς και με αρχικό σχήμα (1) το ισόπλευρο τρίγωνο ABΓ, κατασκευάστηκε το σχήμα της παρακάτω εικόνας. Τα τρίγωνα (2), ..., (9) είναι οι εικόνες των μεταφορών.

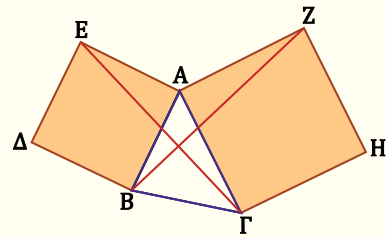


- α) Να προσδιορίσετε τις μεταφορές, που πραγματοποιήθηκαν προκειμένου να δημιουργηθεί το διπλανό σχήμα.

- β) Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός μεταφορών που απαιτούνται για τον σχεδιασμό της παραπάνω εικόνας;

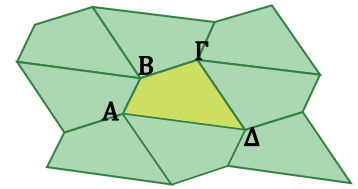
- 4 **Αιτιολόγηση.** Σε ένα τρίγωνο ABΓ να κατασκευάσετε στις πλευρές του AB και AΓ δύο τετράγωνα όπως φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Να σχεδιάσετε τα ευθύγραμμα τμήματα EΓ και BZ.

- α) Να δείξετε ότι $E\Gamma = BZ$.
β) Να δείξετε ότι $E\Gamma \perp BZ$.



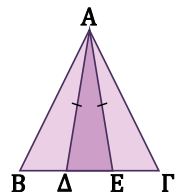
Να διερευνήσετε με την ψηφιακή εφαρμογή τις αναλλοίωτες σχέσεις μεταξύ των ευθυγράμμων τμημάτων EΓ και BZ.

- 5 Στη διπλανή εικόνα παρατηρούμε ότι έχουμε μερική κάλυψη του επιπέδου με βάση το τετράπλευρο πλακάκι ABΓΔ.

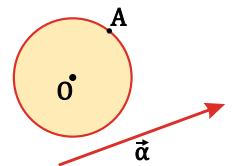


Να διερευνήσετε τους μετασχηματισμούς που απαιτούνται για να πραγματοποιηθεί αυτή η κάλυψη.

- 6 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο AΔE με $A\Delta = AE$ και $\Delta\Gamma = EB$. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές.



- 7 Στο επίπεδο δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα OA. Το σημείο A κινείται πάνω στην περιφέρεια του κύκλου. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον κύκλο και το διάνυσμα της

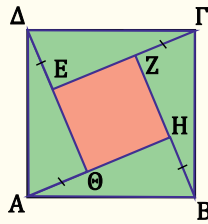


παραπάνω εικόνας και να σχεδιάσετε το σχήμα που διαγράφουν οι εικόνες A', του κινούμενου σημείου A μέσω του μετασχηματισμού μεταφοράς κατά διάνυσμα. Συμβολικά: $A \xrightarrow{M(\vec{\alpha})} A'$.

8 Εργασία κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες.

Το διπλανό σχήμα ΕΘΗΖ είναι τετράγωνο με:

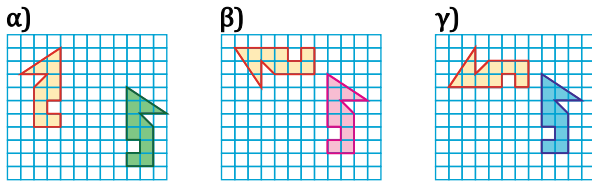
$$\hat{E}=\hat{Z}=\hat{H}=\hat{\Theta}=90^{\circ}.$$



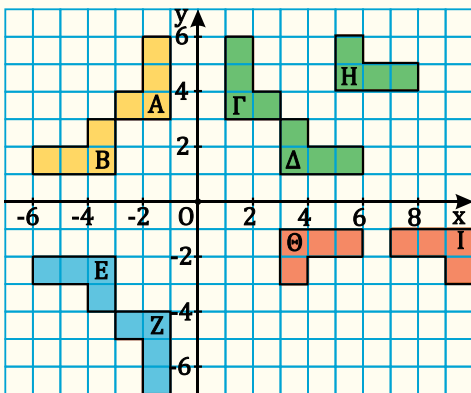
Προεκτείνουμε τις πλευρές τους έτσι ώστε:
 $A\Theta=BH=\Gamma Z=\Delta E.$

Να προσδιορίσετε κατάλληλη στροφή για να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο.

9 Να αντιγράψετε τα παρακάτω σχήματα σε τετραγωνισμένο χαρτί. Να βρείτε τους μετασχηματισμούς (δύο κάθε φορά) που έγιναν ώστε από το αρχικό σχήμα (κίτρινο) να προκύψει το τελικό (πράσινο, ροζ, μπλε).



10 Εργασία σε ομάδες. Να χωριστείτε σε ομάδες και κάθε ομάδα σε δύο υποομάδες. Κάθε υποομάδα να προτείνει στην άλλη δύο σχήματα από αυτά της παρακάτω εικόνας, ένα ως αρχικό και ένα ως τελικό. Η άλλη υποομάδα πρέπει να βρει τον μετασχηματισμό (ή τους διαδοχικούς μετασχηματισμούς) που συνδέει τα δύο αυτά σχήματα.

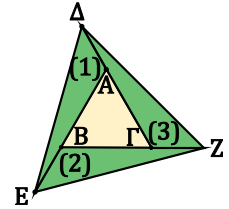


Επαναληπτικό τεστ I στους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς.

11 Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ.

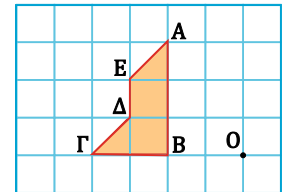
Στις προεκτάσεις των πλευρών του τριγώνου σχεδιάζουμε ευθύγραμμα τμήματα $A\Delta = BE = \Gamma Z.$

Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΕΔΖ είναι ισόπλευρο.



Να εξετάσετε το είδος του τριγώνου ΑΒΓ που θα βρείτε στην ψηφιακή εφαρμογή.

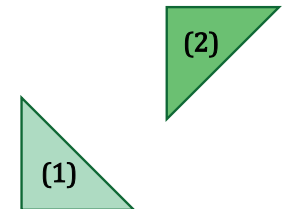
12 Να μεταφέρετε το διπλανό σχήμα σε τετραγωνισμένο χαρτί και να σχεδιάσετε το σχήμα που προκύπτει από στροφή του με κέντρο το σημείο Ο, αντίθετα προς την κίνηση των δεικτών του ρολογιού (αριστερόστροφα) κατά:



α) 90° , β) 180° , γ) 270°

Να συγκρίνετε τις πλευρές και τις γωνίες του αρχικού σχήματος με τις αντίστοιχες της εικόνας του. Τι συμπεραίνετε;

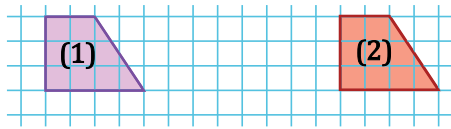
13 Το σχήμα (2) είναι η στροφή του σχήματος (1). Να βρείτε το κέντρο στροφής καθώς και τη γωνία στροφής με κανόνα, διαβήτη και μοιρογνωμόνιο.



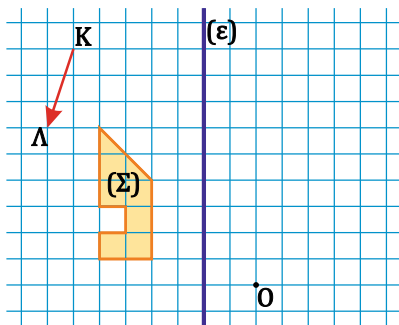
14 Σε ένα σύστημα συντεταγμένων να σχεδιάσετε σε αυτό, το τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $A(-3, -1)$, $B(0, -1)$, $\Gamma(1, 2)$ και $\Delta(-2, 2)$. Να σχεδιάσετε το συμμετρικό του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ως προς κέντρο το σημείο $O(2, 0)$ και να σημειώσετε τις συντεταγμένες των σημείων της εικόνας.

15 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ. Να κατασκευάσετε τα συμμετρικά Β', Μ' και Γ' των σημείων Β, Μ και Γ αντίστοιχα ως προς το σημείο Α και να αιτιολογήσετε γιατί το Μ' είναι το μέσο του Β'Γ'.

- 16 Να δείξετε ότι ο μετασχηματισμός μεταφοράς του τραπέζιου (1) στο τραπέζιο (2) ισοδυναμεί με δύο αξονικές συμμετρίες (ανακλάσεις).



- 17 Να μεταφέρετε το παρακάτω σχήμα σε τετραγωνισμένο χαρτί.



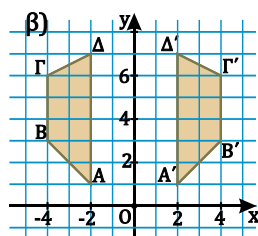
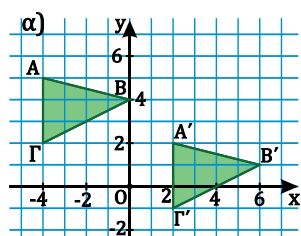
- α) Να βρείτε το συμμετρικό του σχήματος (Σ) με άξονα την ευθεία (ε) και να ονομάσετε το νέο σχήμα (Σ₁). Να στρέψετε το (Σ₁) γύρω από το O κατά γωνία 90° δεξιόστροφα (κατά τη φορά των δεικτών ρολογιού) και να ονομάσετε (Σ₂) το τελικό σχήμα.
- β) Ξεκινώντας πάλι από το σχήμα (Σ), να κάνετε τους ίδιους μετασχηματισμούς με διαφορετική σειρά, δηλαδή πρώτα τη στροφή του (Σ) για να προκύψει το (Σ₃) και μετά την ανάκλαση του (Σ₃) για να προκύψει το (Σ₄). Το (Σ₂) και το (Σ₄) είναι το ίδιο σχήμα;

Μπορείτε να επαναλάβετε τη διαδικασία ως εξής:

- γ) ανάκλαση ως προς την (ε) και μετατόπιση κατά το διάνυσμα $\vec{K\Lambda}$.
- δ) μετατόπιση κατά το διάνυσμα $\vec{K\Lambda}$ και στροφή γύρω από το O.

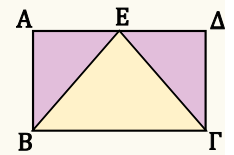
Τι συμπέρασμα βγάζετε; Όταν εφαρμόζουμε δύο διαδοχικούς μετασχηματισμούς, έχει σημασία η σειρά τους ή όχι;

- 18 Κάθε μετασχηματισμό μπορούμε να τον περιγράψουμε λεκτικά, συμβολικά ή με σχήμα. Στις παρακάτω περιπτώσεις δίνεται η μία από τις τρεις περιγραφές και ζητείται να γράψετε τις άλλες δύο.

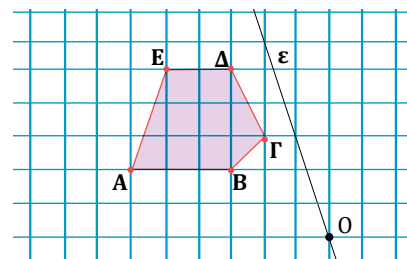


- γ) Μεταφορά του τριγώνου ABΓ κατά 5 αριστερά και 2 πάνω.
- δ) Ανάκλαση του τριγώνου ABΓ ως προς τον άξονα των $y'y'$.
- ε) Ανάκλαση του τραπέζιου ABΓΔ ως προς τον άξονα των $x'x'$.
- στ) $(x, y) \rightarrow (x + 3, y - 3)$
- ζ) $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$
- η) $(x, y) \rightarrow (5 - x, y)$

- 19 Το ABΓΔ είναι ορθογώνιο. Το σημείο E είναι το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος AD. Να δείξετε ότι το τρίγωνο BEΓ είναι ισοσκελές, με όσους περισσότερους τρόπους μπορείτε.



- 20 Δίνεται το πεντάγωνο ABΓΔΕ και ευθεία ε. Να αντιγράψετε το σχήμα σε τετραγωνισμένο χαρτί και να κατασκευάσετε την εικόνα του πενταγώνου:
- α) Με μεταφορά κατά διάνυσμα \vec{AB}
- β) Με άξονα συμμετρίας την ευθεία ε.
- γ) Με στροφή ως προς κέντρο A και γωνία 90° αριστερόστροφα.
- δ) Με συμμετρία ως προς κέντρο O.
- ε) Με στροφή ως προς κέντρο E και γωνία 90° δεξιόστροφα.



Επαναληπτικό τεστ II στους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς.



Να ανοίξετε την εφαρμογή «ΓΛΩΣΣΑΡΙ: ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ & ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ» για να ανακεφαλαιώσετε όρους και έννοιες τις οποίες γνωρίζετε στο κεφάλαιο αυτό.

Μετρήσεις επίπεδων σχημάτων

Κεφάλαιο

6

ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ

Μήκος κύκλου

Εμβαδόν επίπεδων σχημάτων

Εμβαδόν κύκλου

Εμβαδόν μεικτόγραμμων
σχημάτων



Στο Κεφάλαιο αυτό θα μάθουμε:

- Να χρησιμοποιούμε το μήκος κύκλου και το μήκος τόξου στην επίλυση προβλημάτων.
- Να κάνουμε μετατροπές από τη μια μονάδα μέτρησης στην άλλη.
- Να βρίσκουμε τους τύπους εμβαδού τετραγώνου και ορθογώνιου παραλληλογράμμου επιλέγοντας κατάλληλη μονάδα μέτρησης.
- Να χρησιμοποιούμε τη διάσπαση και ανασύνθεση επιφανειών για τον προσδιορισμό του τύπου του εμβαδού παραλληλογράμμου, τριγώνου και τραπεζίου.
- Να υπολογίζουμε το εμβαδόν κυκλικού δίσκου και κυκλικού τομέα.
- Να λύνουμε προβλήματα υπολογισμού εμβαδού μεικτόγραμμων σχημάτων με ποικιλία μεθόδων.
- Να αξιοποιούμε την έννοια του εμβαδού για την εξήγηση του Πυθαγόρειου Θεωρήματος.

6.1 Μήκος κύκλου

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

Να χρησιμοποιούν τον τύπο για το μήκος κύκλου στην επίλυση προβλημάτων.



Διερεύνηση 1. Προσέγγιση του μήκους κύκλου.

Εργασία μαθητών κατά ζεύγη.

- Να κυλήσετε ένα κυλινδρικό δοχείο σε μια επίπεδη επιφάνεια για να βρείτε το μήκος κύκλου της βάσης του.
- Να μετρήσετε τη διάμετρο της βάσης. Πόσες περίπου φορές είναι μεγαλύτερο το μήκος κύκλου από τη διάμετρο;
- Να συγκρίνετε τις απαντήσεις σας στο (β) με την υπόλοιπη τάξη. Τι παρατηρείτε;
- Να επαναλάβετε τα (α) και (β) για κυλινδρικά δοχεία διαφορετικής διαμέτρου.
- Με βάση τα προηγούμενα πειράματα να γράψετε έναν τύπο που συνδέει το μήκος του κύκλου με τη διάμετρό του. Να υπολογίσετε με τον τύπο που επινοήσατε το μήκος του κύκλου της βάσης ενός κυλινδρικού δοχείου αν η διάμετρός του είναι 5 cm.



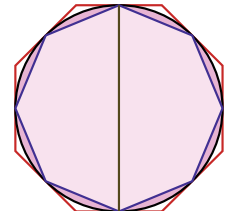
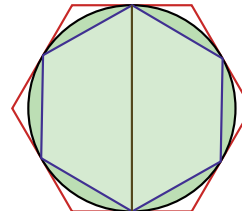
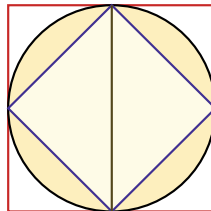
Συζητάμε στην τάξη και εξηγούμε πώς σκεφτήκαμε.



Διερεύνηση 2. Προσέγγιση του λόγου «μήκος κύκλου / διάμετρος κύκλου».

Εργασία μαθητών κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες.

Σε έναν κύκλο διαμέτρου δ «εγγράφουμε» και «περιγράφουμε» διαδοχικά τετράγωνα, εξάγωνα και οκτάγωνα, όπως φαίνεται στα σχήματα.



- Αν συμβολίσουμε με L το μήκος του κύκλου, $\Pi_{\text{εσ}}$ την περίμετρο του εσωτερικού πολυγώνου και $\Pi_{\text{εξ}}$ την περίμετρο του εξωτερικού πολυγώνου, να εξετάσετε αν ισχύουν οι παρακάτω ανισότητες:
i. $\Pi_{\text{εσ}} < L < \Pi_{\text{εξ}}$ και ii. $\frac{\Pi_{\text{εσ}}}{\delta} < \frac{L}{\delta} < \frac{\Pi_{\text{εξ}}}{\delta}$.
- Να μετρήσετε στις τρεις περιπτώσεις τη διάμετρο δ του κύκλου καθώς και τις περιμέτρους $\Pi_{\text{εσ}}$ και $\Pi_{\text{εξ}}$.
- Για τις τρεις περιπτώσεις να βρείτε τον μέσο όρο των λόγων: $\frac{\Pi_{\text{εσ}}}{\delta}$ και $\frac{\Pi_{\text{εξ}}}{\delta}$.
- Να προτείνετε έναν τρόπο εκτίμησης του μήκους του κύκλου. Να εξηγήσετε τον συλλογισμό σας.

Μοιραζόμαστε τις ιδέες μας στην ολομέλεια της τάξης.

Να μελετήσετε το Ιστορικό σημείωμα με τίτλο: «Ο Αρχιμήδης και ο αριθμός π».



Με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής να διερευνήσετε τη μεταβολή της μορφής κανονικού πολυγώνου όταν αυξάνεται ο αριθμός των πλευρών του.

Μαθηματικές Έννοιες και Διεργασίες Μάθησης

Στην Α΄ Γυμνασίου είδαμε ότι **κύκλος** ονομάζεται το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου τα οποία απέχουν την ίδια απόσταση από ένα σταθερό σημείο O . Η απόσταση αυτή συμβολίζεται με ρ και λέγεται **ακτίνα** του κύκλου. Το σημείο O λέγεται **κέντρο** του κύκλου. Ένας κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ , συμβολίζεται σύντομα **(O, ρ)**. Ο λόγος του μήκους ενός κύκλου προς τη διάμετρό του είναι σταθερός και συμβολίζεται διεθνώς με το ελληνικό γράμμα π (αρχικό της λέξης περιφέρεια). Το μήκος του κύκλου και η διάμετρός του είναι ποσά ανάλογα, όπως είδαμε και στο αντίστοιχο κεφάλαιο.

Αν συμβολίσουμε με L το μήκος του κύκλου και δ τη διάμετρό του τότε $\frac{L}{\delta} = \pi$ οπότε:

$$L = \pi \cdot \delta \quad \text{ή} \quad L = 2 \cdot \pi \cdot \rho$$

Αποδεικνύεται ότι ο αριθμός π είναι άρρητος, δηλαδή δεκαδικός με άπειρα ψηφία, χωρίς περιοδικότητα. Στις πράξεις συνήθως χρησιμοποιούμε προσεγγιστικά για τον π την τιμή $\pi \approx 3,14$.



Εφαρμογή 1

Ένας κύκλος έχει μήκος $L = 12,56$ cm. Να βρείτε το μήκος της ακτίνας του.

Απάντηση

Για το μήκος του κύκλου ισχύει ότι $L = 2\pi\rho$ και επομένως $\rho = \frac{L}{2\pi} \approx \frac{12,56}{2 \cdot 3,14} = 2$ (cm).



Εφαρμογή 2

Τα μήκη δύο κύκλων διαφέρουν κατά 30 cm. Πόσο διαφέρουν οι ακτίνες τους;

Απάντηση

Αν L_1 και L_2 τα μήκη των δύο κύκλων και ρ_1 και ρ_2 οι αντίστοιχες ακτίνες τους, τότε έχουμε:

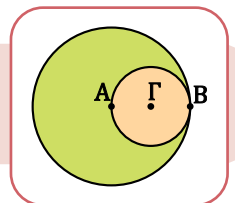
$$L_1 - L_2 = 30 \quad \text{ή} \quad 2\pi\rho_1 - 2\pi\rho_2 = 30 \quad \text{ή} \quad 2\pi(\rho_1 - \rho_2) = 30 \quad \text{ή} \quad 6,28 \cdot (\rho_1 - \rho_2) \approx 30 \quad \text{ή} \quad \rho_1 - \rho_2 \approx \frac{30}{6,28} \approx 4,77 \text{ (cm)}.$$

Άρα οι ακτίνες διαφέρουν περίπου κατά 4,77 cm.



Εφαρμογή 3

Δίνονται οι κύκλοι (A, AB) και $(\Gamma, \Gamma B)$, όπως φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Να βρείτε τον λόγο των μηκών τους.



Απάντηση

Αν συμβολίσουμε με L_1 το μήκος του κύκλου (A, AB) και με L_2 το μήκος του κύκλου $(\Gamma, \Gamma B)$ έχουμε:

$$L_1 = 2 \cdot \pi \cdot AB \quad \text{και} \quad L_2 = 2 \cdot \pi \cdot \Gamma B. \quad \text{Όμως} \quad AB = 2 \cdot \Gamma B \quad \text{οπότε:} \quad \frac{L_1}{L_2} = \frac{2 \cdot \pi \cdot AB}{2 \cdot \pi \cdot \Gamma B} \quad \text{ή} \quad \frac{L_1}{L_2} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot \Gamma B}{2 \cdot \pi \cdot \Gamma B} \quad \text{ή} \quad \frac{L_1}{L_2} = 2 \quad \text{ή} \quad L_1 = 2 \cdot L_2.$$

Άρα, ο κύκλος (A, AB) έχει διπλάσιο μήκος από τον κύκλο $(\Gamma, \Gamma B)$.



Να ανοίξετε τον σύνδεσμο και να απαντήσετε στις ερωτήσεις κλειστού τύπου (Σωστού-Λάθους, Πολλαπλής Επιλογής) για το μήκος κύκλου.

Ερωτήσεις για Αξιολόγηση

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με τη λέξη Σωστό (Σ), αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος (Λ), αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- 1 Ο τύπος που δίνει το μήκος ενός κύκλου ακτίνας ρ , είναι $L = \pi \cdot \rho$.
- 2 Το μήκος ενός ημικυκλίου κύκλου ακτίνας ρ , είναι μεγαλύτερο από το διπλάσιο της διαμέτρου του.
- 3 Ένας κύκλος με μήκος L , έχει διάμετρο $\delta = \frac{L}{2\pi}$.
- 4 Ένας κύκλος με διάμετρο 10 cm έχει πενταπλάσιο μήκος από έναν κύκλο με ακτίνα 2 cm.
- 5 Το μήκος ενός κύκλου είναι πάντοτε άρρητος αριθμός.

Στις παρακάτω ερωτήσεις να βάλετε σε κύκλο το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση:

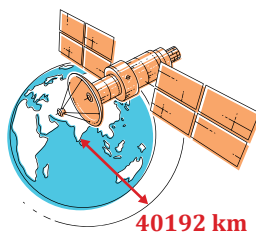
- 1 Αν διπλασιάσουμε την ακτίνα ενός κύκλου (O, ρ), τότε το μήκος του κύκλου:
Α. διπλασιάζεται Β. τριπλασιάζεται Γ. τετραπλασιάζεται Δ. παραμένει το ίδιο
- 2 Αν διπλασιάσουμε τη διάμετρο ενός κύκλου (O, ρ), τότε το μήκος του κύκλου:
Α. διπλασιάζεται Β. τριπλασιάζεται Γ. τετραπλασιάζεται Δ. παραμένει το ίδιο
- 3 Ένας κύκλος με μήκος 18,84 cm έχει ακτίνα:
Α. 2 Β. 3 Γ. 4 Δ. 5
- 4 Ένας κύκλος με διάμετρο 5 mm έχει μήκος:
Α. 7,85 Β. 15,7 Γ. 31,4 Δ. 314

Να κάνετε την
Εργασία με προεκτάσεις:
Επίλυση πραγματικού
προβλήματος: «Τα ελαστι-
κά αυτοκινητών».



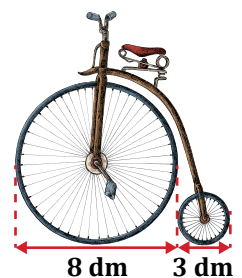
Ασκήσεις και Προβλήματα

- 1 Να υπολογίσετε πόσα εκατοστά (cm) είναι το μήκος ενός κύκλου με ακτίνα: **α)** $\frac{35}{\pi}$ cm, **β)** 100 cm.
- 2 Να υπολογίσετε πόσα εκατοστά (cm) είναι το μήκος ενός κύκλου με διάμετρο: **α)** $\frac{46}{\pi}$ cm, **β)** 100 cm.
- 3 Τα μήκη δύο κύκλων έχουν λόγο 3 προς 2. Να βρείτε τον λόγο: **α)** των διαμέτρων τους, **β)** των ακτίνων τους.
- 4 Οι ακτίνες δύο κύκλων διαφέρουν κατά 10 mm. Να βρείτε πόσο διαφέρουν:
α) οι διαμέτροί τους, **β)** τα μήκη των κύκλων.
- 5 Θεωρούμε ότι η Γη είναι σφαιρική και έχει περίμετρο περίπου 40192 km. Ένας δορυφόρος περιστρέφεται σε κυκλική τροχιά γύρω από τη Γη σε απόσταση 7000 km από το κέντρο της.
α) Πόσα km απέχει ο δορυφόρος από την επιφάνεια της;

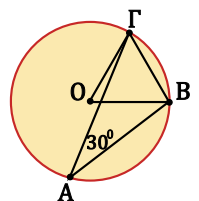


- β)** Πόσα km διανύει ο δορυφόρος σε μία πλήρη περιστροφή;

- 6 Τα ποδήλατα τον 18ο αιώνα ήταν διαφορετικά από τα σημερινά. Πόσες περιστροφές θα κάνει κάθε ρόδα αν το ποδήλατο διανύσει 300 m; Ποιο λάστιχο θα χρειαστεί πιο γρήγορα αντικατάσταση;



- 7 Δίνονται δύο κύκλοι (O_1, ρ_1) και (O_2, ρ_2). Να συγκρίνετε τους λόγους: **α)** των ακτίνων τους, **β)** των διαμέτρων τους και **γ)** των μηκών τους. Τι παρατηρείτε;
- 8 Να υπολογίσετε το μήκος του κύκλου στο διπλανό σχήμα, αν $B\Gamma = 4$ cm.



6.2 Μήκος τόξου

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

Να υπολογίζουν τα μήκη των τόξων ως μέρη του μήκους του κύκλου τους.



Διερεύνηση 1. Μήκος Τόξου.

Εργασία μαθητών κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες.

α) Να βρείτε το $\frac{1}{2}$, το $\frac{1}{4}$ και το $\frac{1}{6}$ του μήκους κύκλου, ακτίνας ρ .

β) Ποιο είναι το μήκος μέρους κύκλου ακτίνας ρ , με επίκεντρο γωνία 360° , 180° , 90° και 60° ;

γ) Να βρείτε έναν τύπο για οποιαδήποτε επίκεντρο γωνία μ° .

Μοιραζόμαστε τις προτάσεις μας στην ολομέλεια της τάξης.



Με την ψηφιακή εφαρμογή να διερευνήσετε το μήκος τόξου για μεταβολές της ακτίνας του κύκλου και της γωνίας περιστροφής.

Μαθηματικές Έννοιες και Διεργασίες Μάθησης

Μήκος τόξου

Ο κύκλος θεωρείται ως τόξο 360° και έχει μήκος $L = 2\pi\rho$.

Τόξο 1° θα έχει μήκος $\frac{2\pi\rho}{360}$. Τόξο μ° θα έχει μήκος $S = \frac{2\pi\rho}{360} \cdot \mu = \frac{\pi\rho\mu}{180}$.

Γενικά, το μήκος S τόξου μ° , κύκλου ακτίνας ρ δίνεται από τον τύπο:

$$S = \frac{\pi\rho\mu}{180}$$

Παράδειγμα: Τόξο 60° κύκλου ακτίνας 4 cm έχει μήκος:

$$S \approx \frac{3,14 \cdot 4 \cdot 60}{180} \approx 4,19 \text{ (cm)}$$

Το ακτίνιο

Αν σε έναν κύκλο (O, ρ) χρησιμοποιήσουμε ως μονάδα μέτρησης τόξων, τόξο που έχει μήκος ίσο με την ακτίνα του ρ , τότε η μονάδα αυτή λέγεται ακτίνιο ή rad.

Αφού το 1 rad έχει μήκος ίσο με την ακτίνα ρ , τότε τόξο α rad θα έχει μήκος:

$$S = \alpha \cdot \rho$$

Παράδειγμα: Σε κύκλο ακτίνας 5 cm ένα τόξο 2 rad έχει μήκος $S = 2 \cdot 5 = 10$ cm.

Παρατήρηση: Από τον τύπο $L = 2\pi\rho$ φαίνεται ότι ο κύκλος αν μετρηθεί σε ακτίνια, τότε το μήκος του είναι 2π rad, δηλαδή προσεγγιστικά 6,28 rad.

Σχέση μοιρών και ακτινίων

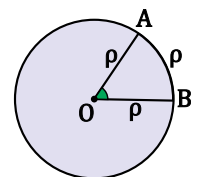
Αν έχουμε ένα τόξο μ° το οποίο αντιστοιχεί σε α rad, τότε από τους τύπους

$S = \frac{\pi\rho\mu}{180}$ και $S = \alpha \cdot \rho$ προκύπτει ότι η ισότητα: $\frac{\pi\rho\mu}{180} = \alpha \cdot \rho$ ή $\frac{\mu}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$. Ο τύπος

αυτός συνδέει τις μοίρες με τα ακτίνια ενός τόξου.

Παράδειγμα: Για να βρούμε πόσα rad είναι ο κύκλος (θεωρείται τόξο 360°),

αντικαθιστούμε στον τύπο όπου $\mu = 360^\circ$ και έχουμε: $\frac{360}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$ ή $\alpha = 2\pi$ (rad).



Με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής να διερευνήσετε την έννοια του ακτινίου.



Εφαρμογή 1

Να βρείτε πόσα rad είναι: **α)** ένα ημικόκλιο, **β)** ένα τεταρτοκύκλιο, **γ)** ένα τόξο 60° .

Απάντηση

- α) Ο κύκλος είναι 2π rad, οπότε το ημικύκλιο (τόξο 180°) είναι $\frac{2\pi}{2} = \pi$ rad.
β) Ο κύκλος είναι 2π rad, συνεπώς το τεταρτοκύκλιο (τόξο 90°) είναι $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ rad.
γ) Ο κύκλος είναι 2π rad, επομένως τόξο 60° , που αντιστοιχεί στο $\frac{1}{6}$ του κύκλου, είναι $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ rad.



Εφαρμογή 2

Σε έναν κύκλο (O, ρ) ένα τόξο $\widehat{AB} = 60^\circ$ έχει μήκος $\frac{\pi}{4}$ cm.

Να υπολογίσετε: α) την ακτίνα του κύκλου, β) το μήκος τόξου $\widehat{KL} = 30^\circ$ του κύκλου.

Απάντηση

α) Εφόσον το μήκος του τόξου $\widehat{AB} = 60^\circ$ έχει μήκος $S = \frac{\pi}{4}$ cm, έχουμε:

$$S = \frac{\pi \cdot \rho \cdot \mu}{180} \text{ ή } \frac{\pi}{4} = \frac{\pi \cdot \rho \cdot 60}{180} \text{ ή } \frac{180}{4} = \frac{\pi \cdot \rho \cdot 60}{\pi} \text{ ή } 45 = \rho \cdot 60 \text{ ή } \rho = 0,75 \text{ (cm)}$$

β) Έστω S το μήκος του τόξου $\widehat{KL} = 30^\circ$ αυτού του κύκλου. Τότε έχουμε:

$$S = \frac{\pi \cdot 0,75 \cdot 30}{180} \text{ ή } S = \frac{\pi \cdot 0,75 \cdot 30}{180} \text{ ή } S \approx \frac{3,14 \cdot 0,75}{6} \text{ ή } S = 0,39 \text{ (cm)}$$

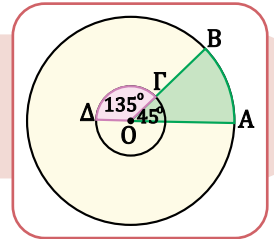


Εφαρμογή 3

Στο διπλανό σχήμα δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι $(O, 4 \text{ cm})$ και $(O, 12 \text{ cm})$.

Να υπολογίσετε τα μήκη των τόξων $\widehat{AB} = 45^\circ$ και $\widehat{\Gamma\Delta} = 135^\circ$.

Είναι ίσα τα τόξα;



Απάντηση

Εφόσον το μήκος του τόξου $\widehat{AB} = 45^\circ$ ανήκει στον κύκλο ακτίνας 12 cm, έχει μήκος:

$$S_1 = \frac{\pi \cdot 12 \cdot 45}{180} \text{ ή } S_1 = \frac{\pi \cdot 12}{4} \text{ ή } S_1 = 3\pi \text{ ή } S_1 = 9,42 \text{ (cm)}$$

Αντίστοιχα το μήκος του τόξου $\widehat{\Gamma\Delta} = 135^\circ$, που ανήκει στον κύκλο ακτίνας 4 cm, έχει μήκος:

$$S_2 = \frac{\pi \cdot 4 \cdot 135}{180} \text{ ή } S_2 = \frac{\pi \cdot 4 \cdot 3}{4} \text{ ή } S_2 = 3\pi \text{ ή } S_2 = 9,42 \text{ (cm)}$$

Παρατηρούμε ότι τα τόξα \widehat{AB} και $\widehat{\Gamma\Delta}$ ενώ έχουν το ίδιο μήκος, δεν είναι ίσα αφού δεν ανήκουν στον ίδιο κύκλο ούτε σε ίσους κύκλους.



Να ανοίξετε τον σύνδεσμο και να απαντήσετε στις ερωτήσεις αξιολόγησης.

Ερωτήσεις για Αξιολόγηση

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με τη λέξη Σωστό (Σ), αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος (Λ), αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- 1 Δύο τόξα με ίσα μήκη είναι ίσα.
- 2 Δύο τόξα του ίδιου ή ίσων κύκλων, με ίσα μήκη, είναι ίσα.
- 3 Ένα τεταρτοκύκλιο κύκλου ακτίνας ρ έχει μήκος $\frac{\pi\rho}{4}$.
- 4 Το μήκος S ενός τόξου που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία μ° είναι $S = \frac{\pi \cdot \rho^2 \cdot \mu}{180}$.

Να κάνετε τις σωστές αντιστοιχίσεις:

Μοίρες	Ακτίνια (rad)
1. 30°	1. 2π
2. 150°	2. $\frac{\pi}{6}$
3. 270°	3. $\frac{5\pi}{6}$
4. 360°	4. $\frac{3\pi}{2}$

Μοίρες	Ακτίνια (rad)
5. 90°	5. $\frac{5\pi}{3}$
6. 10°	6. $\frac{\pi}{2}$
7. 300°	7. $\frac{\pi}{18}$



Να ανοίξετε τον σύνδεσμο και να κάνετε την αντιστοίχιση.

Στις παρακάτω ερωτήσεις να βάλετε σε κύκλο το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση:

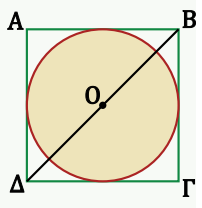
- Το μήκος S ενός τόξου που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία 30° , κύκλου ακτίνας $\rho = 12$ cm, είναι περίπου:
 Α. 3,14 cm Β. 6,28 cm Γ. 9,42 cm
- Το μήκος S ενός τόξου που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία $\frac{5\pi}{6}$ rad, κύκλου ακτίνας $\rho = 12$ cm, είναι περίπου:
 Α. 31,4 cm Β. 62,8 cm Γ. 94,2 cm



Ασκήσεις και Προβλήματα

- Δίνονται τρεις κύκλοι με ακτίνες 2 cm, 3 cm, 4 cm. Να υπολογίσετε το μήκος ενός τόξου 60° και ενός τόξου 18° , για κάθε κύκλο.
- Να υπολογίσετε την ακτίνα ενός κύκλου του οποίου ένα τόξο έχει μήκος 10,048 cm και επίκεντρη γωνία 72° .
- Να διατάξετε, από το μικρότερο στο μεγαλύτερο, τα τόξα: 25° , $\frac{\pi}{9}$ rad, 300° , 135° , $\frac{2\pi}{5}$ rad, $\frac{3\pi}{2}$ rad.
- Σε έναν κύκλο, ένα τόξο 108° έχει μήκος 33,912 cm. Να βρείτε πόσων μοιρών είναι ένα τόξο του ίδιου κύκλου που έχει μήκος 50,868 cm.
- Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Τόξο σε μοίρες	15°		18°		
Τόξο σε rad		$\frac{\pi}{8}$		1	3,14
- Να βρείτε σε ακτίνια τα τόξα:
 120° , 1620° , 135° , 3° και $7,5^\circ$
- Να βρείτε σε μοίρες τα τόξα:
 $\frac{\pi}{4}$ rad, $\frac{2\pi}{5}$ rad, $\frac{3\pi}{4}$ rad, $\frac{\pi}{20}$ rad, 2 rad.
- Να βρείτε σε μοίρες τα τόξα του κύκλου που έχουν μήκος: **α)** $\frac{2\pi\rho}{5}$, **β)** $\frac{2\pi\rho}{3}$, **γ)** 4ρ , **δ)** $\frac{2\rho}{3}$.
- Σε έναν κύκλο ακτίνας ρ , το μήκος ενός τόξου 50° είναι $\frac{5\pi}{3}$ cm. Να υπολογίσετε: **α)** Την ακτίνα ρ του κύκλου. **β)** Το μήκος του κύκλου. **γ)** Το μήκος τόξου $\frac{5\pi}{6}$ rad.
- Εργασία κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες.** Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ, πλευράς α , με διαγώνιο $B\Delta = 4\sqrt{2}$ mm. Να υπολογίσετε το μήκος του κύκλου που βρίσκεται εσωτερικά του τετραγώνου ΑΒΓΔ.



6.3 Εμβαδόν επίπεδης επιφάνειας

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

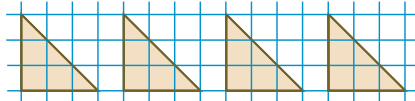
Να μετασχηματίζουν επιφάνειες σε ισοδύναμες με τη διαδικασία διάσπασης και ανασύνθεσης επιφάνειας.




Διερεύνηση 1. Εμβαδόν επίπεδης επιφάνειας.

Εργασία μαθητών κατά ζεύγη.

Παρακάτω δίνονται τέσσερα ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα με κάθετες πλευρές 3 cm.



- α) Να χρησιμοποιήσετε και τα τέσσερα τρίγωνα για να σχεδιάσετε σε τετραγωνικό πλέγμα:
- ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, **ii.** ένα ορθογώνιο τρίγωνο, **iii.** ένα πλάγιο παραλληλόγραμμο, **iv.** ένα τραπέζιο.
- β) Τι έκταση καταλαμβάνουν τα παραπάνω σχήματα στο επίπεδο, αν θεωρήσουμε ως μονάδα μέτρησης ένα τετραγωνάκι  πλευράς 1 cm και τι έκταση καταλαμβάνουν αν θεωρήσουμε ως μονάδα μέτρησης ένα από τα αρχικά ορθογώνια τρίγωνα;



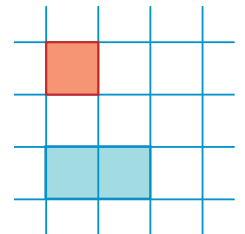
Με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής να διερευνήσετε την κατασκευή σχημάτων.



Διερεύνηση 2. Περίμετρος και Εμβαδόν.

Εργασία μαθητών κατά ζεύγη.

- α) Στο διπλανό σχήμα είναι σχεδιασμένα ένα τετράγωνο 1×1 και ένα ορθογώνιο 1×2 . Σε ένα φύλλο με τετραγωνικό πλέγμα να κατασκευάσετε σχήματα με διαστάσεις:
- διπλάσιες, **ii.** τριπλάσιες και **iii.** τετραπλάσιες, από το τετράγωνο και το ορθογώνιο αντίστοιχα.
- β) Να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας έναν πίνακα με τις περιμέτρους των δύο αρχικών σχημάτων καθώς και των σχημάτων με διπλάσιες, τριπλάσιες και τετραπλάσιες διαστάσεις. Παρατηρείτε κάποια κανονικότητα στην ακολουθία των περιμέτρων; Αν ναι, είναι γραμμική κανονικότητα;
- γ) Να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας έναν πίνακα με τα εμβαδά των δύο αρχικών σχημάτων καθώς και των σχημάτων με διπλάσιες, τριπλάσιες και τετραπλάσιες διαστάσεις. Παρατηρείτε κάποια κανονικότητα στην ακολουθία των εμβαδών; Αν ναι, είναι γραμμική κανονικότητα;



Με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής να διερευνήσετε το εμβαδόν και την περίμετρο τετραγώνου και ορθογώνιου παραλληλογράμμου.

Μαθηματικές Έννοιες και Διεργασίες Μάθησης

Για να μετρήσουμε μια επιφάνεια είναι αναγκαίο να έχουμε καθορίσει πρώτα μια άλλη επιφάνεια ως μονάδα μέτρησης και στη συνέχεια να τη συγκρίνουμε με την αρχική μας επιφάνεια. Το αποτέλεσμα της σύγκρισης αυτής μας δίνει το ζητούμενο εμβαδόν της επιφάνειας.

Το **εμβαδόν** μιας επίπεδης επιφάνειας είναι ο θετικός αριθμός, ο οποίος εκφράζει την έκταση που καταλαμβάνει η επιφάνεια αυτή στο επίπεδο και εξαρτάται από την επιλεγμένη μονάδα μέτρησης.

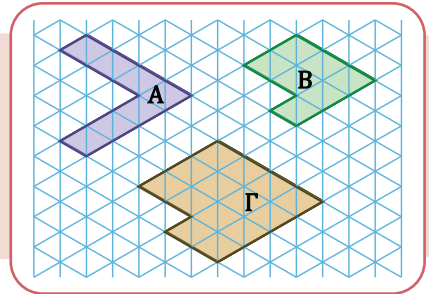
Περίμετρος ενός σχήματος ονομάζεται το άθροισμα του μήκους όλων των πλευρών του τα οποία έχουν μετρηθεί με την ίδια μονάδα μέτρησης (π.χ. με cm).



Εφαρμογή 1

Να υπολογίσετε τα εμβαδά των σχημάτων Α, Β και Γ χρησιμοποιώντας ως μονάδα μέτρησης εμβαδού:

- α) Το τρίγωνο:
- β) Τον ρόμβο:
- γ) Να συγκρίνετε τα εμβαδά των τριών σχημάτων.



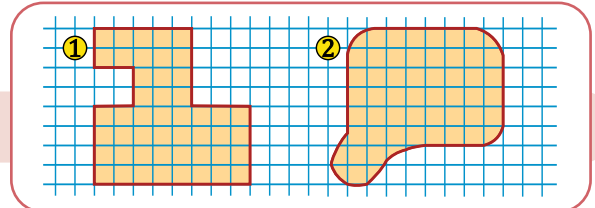
Απάντηση

- α) Με μονάδα μέτρησης το «τριγωνάκι» βρίσκουμε: Εμβαδόν Α = 14, Εμβαδόν Β = 14, Εμβαδόν Γ = 28.
- β) Με μονάδα μέτρησης τον «ρόμβο» βρίσκουμε: Εμβαδόν Α = 7, Εμβαδόν Β = 7, Εμβαδόν Γ = 14.
- γ) Τα σχήματα Α και Β έχουν το ίδιο εμβαδόν. Το σχήμα Γ έχει διπλάσιο εμβαδόν από τα σχήματα Α και Β.



Εφαρμογή 2

Ποια από τις δύο επιφάνειες έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν;



Απάντηση

Μετρούμε τα τετράγωνα των σχημάτων και τα συγκρίνουμε. Τα δύο περίπου μισά τετραγωνάκια σχηματίζουν περίπου ένα τετραγωνάκι. Το σχήμα 1 έχει εμβαδόν ακριβώς 48 τετράγωνα. Το σχήμα (2) έχει εμβαδόν περίπου 52 τετράγωνα. Επομένως, το σχήμα 2 έχει τη μεγαλύτερη επιφάνεια.



Να ανοίξετε τον σύνδεσμο και να απαντήσετε στις ερωτήσεις αξιολόγησης.

Ερωτήσεις για Αξιολόγηση

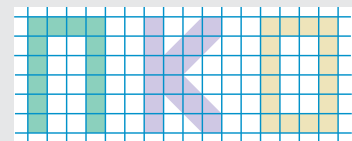
Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με τη λέξη Σωστό (Σ), αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος (Λ), αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- 1 Μπορούμε να συγκρίνουμε τα εμβαδά δύο σχημάτων με διαφορετικές μονάδες μέτρησης.
- 2 Δύο σχήματα με ίδια περίμετρο έχουν ίσα εμβαδά.

Στις παρακάτω ερωτήσεις να βάλετε σε κύκλο το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση:

Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζονται τρία σχήματα που αντιστοιχούν στα γράμματα της αλφαβήτου Π, Κ, Ο.

- 1 Ίσα εμβαδά έχουν τα παρακάτω:
 Α. Π και Κ Β. Π και Ο Γ. Κ και Ο
- 2 Να επιλέξετε τη σωστή σχέση διάταξης:
 Α. (Εμβαδόν Π) < (εμβαδόν Κ)
 Β. (Εμβαδόν Π) > (εμβαδόν Κ) Γ. (Εμβαδόν Ο) < (εμβαδόν Π)



Ατομική εργασία

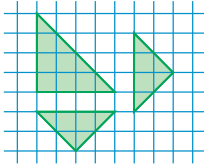
Σε μιλιμετρέ χαρτί να σχεδιάσετε δύο διαφορετικά σχήματα:

- α) Με ίσα εμβαδά και διαφορετικές περιμέτρους.
- β) Με ίσες περιμέτρους και διαφορετικά εμβαδά.
- γ) Με ίσα εμβαδά και ίσες περιμέτρους.

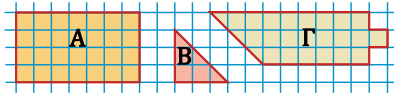


Ασκήσεις και Προβλήματα

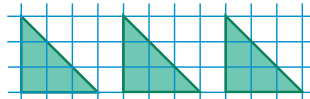
- 1 Στο διπλανό σχήμα δίνονται τρία ορθογώνια τρίγωνα. Να τα αντιγράψετε σε μιλιμετρέ χαρτί, και να κατασκευάσετε:
- α) Ένα τρίγωνο και ένα τετράγωνο με δύο μόνο τρίγωνα.
- β) Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με τα τρία τρίγωνα.



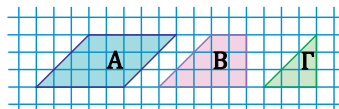
- 2 Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του σχήματος Α είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των σχημάτων Β και Γ.





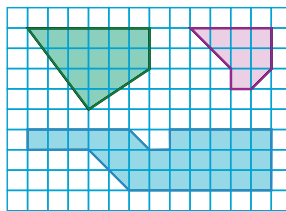
- 3 Δίνονται τρία ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα. Να τα αντιγράψετε σε μιλιμετρέ χαρτί και να κατασκευάσετε:
- α) Ένα τρίγωνο και ένα τετράγωνο με μόνο δύο από αυτά.
- β) Ένα τραπέζιο και με τα τρία τρίγωνα.



- 4 Να επιλέξετε κατάλληλη μονάδα μέτρησης για να υπολογίσετε το εμβαδόν των σχημάτων Α, Β και Γ. Ποια σχέση συνδέει τα εμβαδά των σχημάτων Α, Β και Γ; Να ανασυνθέσετε, σε μιλιμετρέ χαρτί, τα σχήματα Β και Γ, έτσι ώστε να προκύψει ένα σχήμα ίσο με το Α;

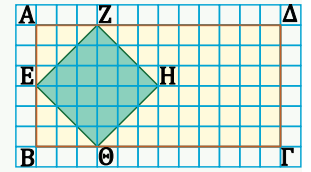


- 5 Να υπολογίσετε το εμβαδόν των παρακάτω σχημάτων χρησιμοποιώντας ως μονάδα μέτρησης εμβαδού:
- α) Το , β) Το 

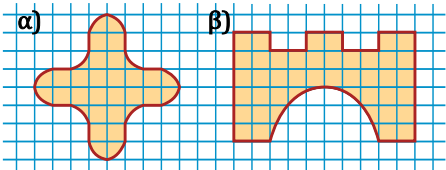


- 6 Ένα τετράγωνο έχει εμβαδόν 36 και ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει εμβαδόν 18. Όμως η μονάδα μέτρησης της επιφάνειας του ορθογωνίου είναι διπλάσια από αυτή του τετραγώνου. Ένας μαθητής ισχυρίστηκε ότι το τετράγωνο έχει μεγαλύτερη επιφάνεια από το ορθογώνιο γιατί το τετράγωνο έχει εμβαδόν 36 και το ορθογώνιο 18. Συμφωνείτε με την εξήγηση του μαθητή; Να αιτιολογήσετε τη θέση σας. Τι συμπεραίνετε για τις περιμέτρους;

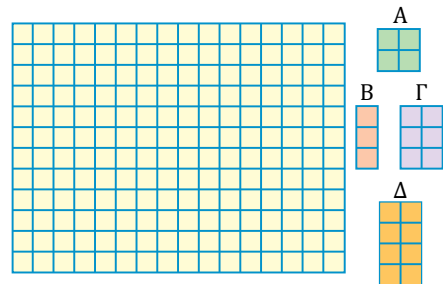
- 7 **Εργασία κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες.** Με μονάδα μέτρησης εμβαδού το τετράπλευρο ΕΖΗΘ, να υπολογίσετε το εμβαδόν του ΑΒΓΔ.



- 8 Ποια από τις δύο επιφάνειες έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν;



- 9 **Εργασία ετεροαξιολόγησης.** Να βρείτε το εμβαδόν του κίτρινου ορθογωνίου με μονάδες μέτρησης τα Α, Β, Γ και Δ.



6.4 Μονάδες μέτρησης επιφανειών

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

Να επιλέγουν τις κατάλληλες μονάδες μέτρησης εμβαδού επιφάνειας και να κάνουν μετατροπές από τη μία μονάδα μέτρησης στην άλλη.

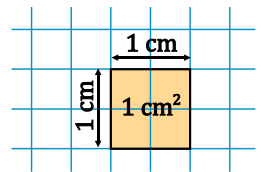


Διερεύνηση 1. Η αναγκαιότητα των μονάδων μέτρησης.

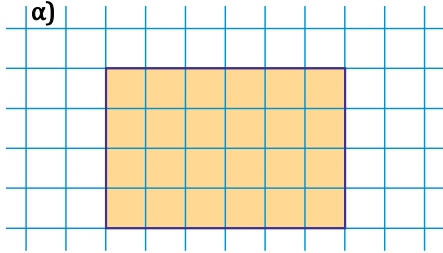
Έχει οριστεί ότι ένα τετράγωνο με μήκος 1 cm και πλάτος 1 cm έχει εμβαδόν 1 cm^2 (1 τετραγωνικό εκατοστό).

Από πόσα τετραγωνάκια αποτελείται 1 τετραγωνικό εκατοστό (1 cm^2) του διπλανού σχήματος;

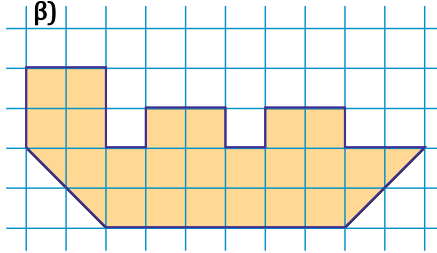
Να βρείτε το εμβαδόν των παρακάτω σχημάτων σε cm^2 .



α)



β)



Να κάνετε τη Διερεύνηση: «Η αναγκαιότητα των μονάδων μέτρησης».



Μαθηματικές Έννοιες και Διεργασίες Μάθησης

Πόσα μπλε τρίγωνα χρειάζονται για να καλύψουμε ολόκληρη η επιφάνεια του τριγώνου $AB\Gamma$ του σχήματος;

Πόσα πράσινα τετράγωνα χρειάζονται για να καλύψουμε ολόκληρη την επιφάνεια του τριγώνου $AB\Gamma$ του σχήματος;

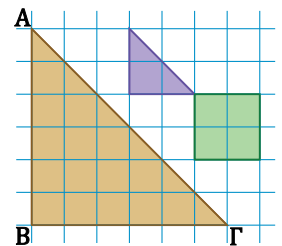
Πόση είναι η επιφάνεια του τριγώνου $AB\Gamma$;

Όπως μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε, χρειαζόμαστε εννέα (9) μπλε τρίγωνα ή 4,5 πράσινα τετράγωνα για να καλύψουμε πλήρως την επιφάνεια του τριγώνου $AB\Gamma$.

Άρα μπορούμε να πούμε ότι η επιφάνεια του $AB\Gamma$ είναι εννέα μπλε τρίγωνα ή 4,5 πράσινα τετράγωνα.

Με τον τρόπο αυτό **μετρήσαμε** την επιφάνεια του τριγώνου με μονάδα μέτρησης το μπλε τρίγωνο ή το πράσινο τετράγωνο. Η διαδικασία αυτή γενικά ονομάζεται μέτρηση και το αποτέλεσμα της μέτρησης της επιφάνειας **εμβαδόν**. Άλλα μεγέθη είναι το μήκος, ο όγκος, το βάρος, ο χρόνος, η θερμοκρασία κ.ά. για καθένα από τα οποία χρησιμοποιείται κατάλληλη μονάδα μέτρησης.

Αντί να χρησιμοποιούμε για τη μέτρηση επιφανειών εμπειρικές μονάδες μέτρησης όπως τρίγωνα και τετράγωνα, έχουμε συμφωνήσει να χρησιμοποιούμε κοινές μονάδες μέτρησης και σε αυτές αναφερόμαστε στα επόμενα.



Οι κυριότερες μονάδες μέτρησης επιφανειών

Η κυριότερη μονάδα μέτρησης για το εμβαδόν μιας επιφάνειας είναι το **τετραγωνικό μέτρο (m^2)**, τα πολλαπλάσιά του και οι υποδιαίρέσεις του. Το τετραγωνικό μέτρο (m^2) είναι ένα τετράγωνο με πλευρά 1 m.

Υποδιαίρέσεις του τετραγωνικού μέτρου είναι:

- το τετραγωνικό δεκατόμετρο: $1 \text{ d m}^2 = \frac{1}{100} \text{ m}^2 = 0,01 \text{ m}^2$
- το τετραγωνικό εκατοστόμετρο: $1 \text{ cm}^2 = \frac{1}{10000} \text{ m}^2 = 0,0001 \text{ m}^2$
- το τετραγωνικό χιλιοστόμετρο: $1 \text{ m m}^2 = \frac{1}{1000000} \text{ m}^2 = 0,000001 \text{ m}^2$

Πολλαπλασία του τετραγωνικού μέτρου είναι:

- το τετραγωνικό δεκάμετρο: $1 \text{ dam}^2 = 100 \text{ m}^2$
- το τετραγωνικό εκατόμετρο: $1 \text{ hm}^2 = 10000 \text{ m}^2$
- το τετραγωνικό χιλιόμετρο: $1 \text{ km}^2 = 1000000 \text{ m}^2$

Στη χώρα μας για τη μέτρηση μεγάλων επιφανειών, όπως αγρών και δασικών εκτάσεων χρησιμοποιούμε το **στρέμμα** και είναι $1 \text{ στρέμμα} = 1000 \text{ m}^2$.



Εφαρμογή 1

Ποια από τις μονάδες μέτρησης εμβαδού είναι πιο κατάλληλη για να μετρήσουμε το εμβαδόν:

- α)** του σαλονιού μας, **β)** του νομού Αττικής, **γ)** ενός καναπέ, **δ)** ενός κινητού, **ε)** ενός κτήματος.

Απάντηση

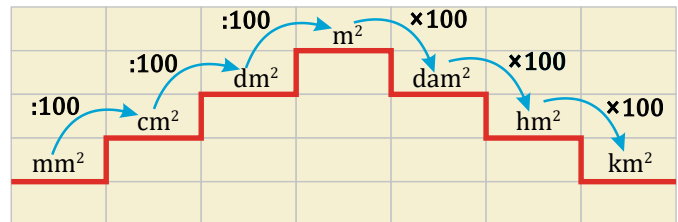
- α)** το m^2 , **β)** το km^2 , **γ)** το m^2 , **δ)** το cm^2 , **ε)** το στρέμμα.



Εφαρμογή 2

Με τη βοήθεια του σχήματος μετατροπής μονάδων εμβαδού, να μετατρέψετε σε m^2 τα επόμενα εμβαδά:

- α)** 14860 mm^2 , **β)** $0,48 \text{ km}^2$, **γ)** 670 cm^2 ,
δ) $13,7 \text{ dm}^2$, **ε)** 234 hm^2 , **στ)** 3 dam^2 .



Απάντηση

- α)** Για να μετατρέψουμε mm^2 σε m^2 πρέπει να διαιρέσουμε τρεις φορές με το 100 (ή διαίρεση με το 1000000), οπότε έχουμε: $14860 \text{ mm}^2 = (14860:1000000) \text{ m}^2 = 0,01486 \text{ m}^2$.
- β)** Για να μετατρέψουμε km^2 σε m^2 πρέπει να πολλαπλασιάσουμε τρεις φορές με το 100 (ή πολλαπλασιασμό με το 1000000), οπότε έχουμε: $0,48 \text{ km}^2 = (0,48 \cdot 1000000) \text{ m}^2 = 480000 \text{ m}^2$.
- γ)** Για να μετατρέψουμε cm^2 σε m^2 πρέπει να διαιρέσουμε δύο φορές με το 100 (ή διαίρεση με το 10000), οπότε έχουμε: $670 \text{ cm}^2 = (670:10000) \text{ m}^2 = 0,067 \text{ m}^2$.
- δ)** Για να μετατρέψουμε dm^2 σε m^2 πρέπει να διαιρέσουμε μία φορά με το 100, οπότε έχουμε: $13,7 \text{ dm}^2 = (13,7:100) \text{ m}^2 = 0,137 \text{ m}^2$.



Εφαρμογή 3

Στις παρακάτω περιπτώσεις να εκφράσετε τα εμβαδά στην ίδια μονάδα μέτρησης και στη συνέχεια να τα κατατάξετε κατά σειρά μεγέθους από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο.

$$14850 \text{ mm}^2, 0,22 \text{ m}^2, 0,43 \text{ m}^2, 650 \text{ cm}^2, 14,7 \text{ dm}^2.$$

Απάντηση

Εκφράζουμε όλα τα εμβαδά σε m^2 , οπότε έχουμε: $14850 \text{ mm}^2 = (14850 : 1.000.000) \text{ m}^2 = 0,01485 \text{ m}^2$.

$$650 \text{ cm}^2 = (650 : 10.000) \text{ m}^2 = 0,065 \text{ m}^2 \quad 14,7 \text{ dm}^2 = (14,7 : 100) \text{ m}^2 = 0,147 \text{ m}^2$$

Επομένως: $0,01485 \text{ m}^2 < 0,065 \text{ m}^2 < 0,147 \text{ m}^2 < 0,22 \text{ m}^2 < 0,43 \text{ m}^2$



Εφαρμογή 4

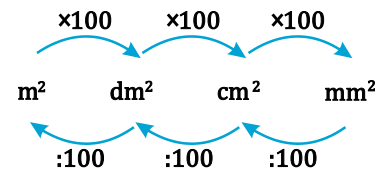
Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

m^2	dm^2	cm^2	mm^2
153			
	734		
		623	
			235000

Απάντηση

Με βάση το διπλανό σχήμα συμπληρώνουμε τον πίνακα ως εξής:

m^2	dm^2	cm^2	mm^2
153	15300	1530000	153000000
7,34	734	73400	7340000
0,0623	6,23	623	62300
0,235	23,5	2350	235000





Να ανοίξετε τον σύνδεσμο και να απαντήσετε στις ερωτήσεις αξιολόγησης.

Ερωτήσεις για Αξιολόγηση

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με τη λέξη Σωστό (Σ), αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος (Λ), αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- 1 Όταν μετατρέπουμε τα m^2 σε dm^2 , πολλαπλασιάζουμε με 10.
- 2 Όταν μετατρέπουμε τα dm^2 σε cm^2 , πολλαπλασιάζουμε με 100.
- 3 Όταν μετατρέπουμε τα cm^2 σε m^2 , διαιρούμε με 10000.
- 4 Όταν μετατρέπουμε τα m^2 σε cm^2 , πολλαπλασιάζουμε με 100.
- 5 Όταν μετατρέπουμε τα km^2 σε m^2 , διαιρούμε με 10000.

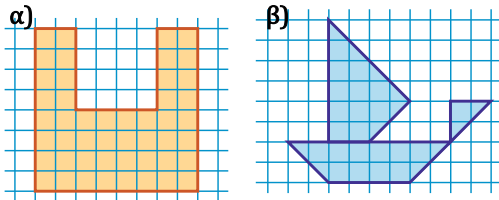
Στις παρακάτω ερωτήσεις να βάλετε σε κύκλο το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση:

- 1 Τα $5,3 m^2$ είναι ίσα με: **A.** $530 cm^2$, **B.** $5300000 mm^2$, **Γ.** $0,53 dm^2$
- 2 Τα $5,3 m^2$ είναι ίσα με: **A.** $0,00053 cm^2$, **B.** $530 dm^2$, **Γ.** $0,53 mm^2$
- 3 Τα $5,3 m^2$ είναι ίσα με: **A.** $0,0000053 km^2$, **B.** $5300 cm^2$, **Γ.** $530 mm^2$.
- 4 Αν η πλευρά ενός τετραγώνου αυξάνεται κατά 15%, τότε το εμβαδόν του αυξάνεται κατά: **A.** 15% **B.** 25% **Γ.** 32,25%
- 5 Αν το εμβαδόν ενός τετραγώνου αυξάνεται κατά 44%, τότε η πλευρά του αυξάνεται κατά: **A.** 22% **B.** 20% **Γ.** 12%



Ασκήσεις και Προβλήματα

- 1 Αν τέσσερα τετραγωνάκια ισοδυναμούν με 1 cm^2 , να βρείτε το εμβαδόν των παρακάτω σχημάτων σε cm^2 .



- 2 Να τραπούν σε dam^2 τα παρακάτω m^2 :
 α) 753, β) 33,4, γ) 143,6, δ) 237,006,
 ε) 120,232, στ) 150,08, ζ) 200,612, η) 408,76
- 3 Να τραπούν σε m^2 τα παρακάτω cm^2 :
 α) 1534, β) 3,462, γ) 691, δ) 27,0434,
 ε) 585,532, στ) 13,3, ζ) 1, η) 20
- 4 Να τραπούν σε km^2 τα παρακάτω m^2 :
 α) 634, β) 34,62, γ) 7681, δ) 279,434,
 ε) 85,53, στ) 19,36, ζ) 1, η) 98520

- 5 Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

m^2	dm^2	km^2	cm^2	mm^2
94				
				7050
		0,83		
			770017	
	526			

- 6 Να εκφράσετε τα ακόλουθα εμβαδά στην ίδια μονάδα μέτρησης και στη συνέχεια να τα διατάξετε κατά σειρά μεγέθους από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο.

1450 mm^2 , 0,29 m^2 , 0,83 m^2 , 950 cm^2 , 16,7 dm^2

- 7 Να εκφράσετε τα εμβαδά στην ίδια μονάδα μέτρησης και στη συνέχεια να τα διατάξετε κατά σειρά μεγέθους από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο.

132 dm^2 , 1,63 m^2 , 24290 mm^2 , 14536 cm^2

- 8 Στις παρακάτω περιπτώσεις να εκφράσετε τα εμβαδά στην ίδια μονάδα μέτρησης και στη συνέχεια να τα κατατάξετε κατά σειρά μεγέθους από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο.

32 dm^2 , 1,23 m^2 , 23270 mm^2 , 1356 cm^2

- 9 **Εργασία κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες.** Ένας γεωργός αγόρασε ένα κτήμα 10,2 στρεμμάτων και φύτεψε στα $\frac{2}{3}$ του κτήματος πορτοκαλιές, ενώ στο υπόλοιπο κτήμα φύτεψε λεμονιές. Να γράψετε το εμβαδόν του κτήματος σε m^2 και στη συνέχεια να υπολογίσετε πόσα m^2 καλύπτουν οι λεμονιές.

- 10 Ένας γεωργός αγόρασε ένα κτήμα για να φυτέψει πεπόνια και καρπούζια. Αν το τετραγωνικό μέτρο στοιχίζει 21,5 € και πλήρωσε 39.861 €, πόσα στρέμματα είναι το κτήμα;

- 11 Πόσα δέντρα θα χρειαστούμε για να φυτέψουμε ένα χωράφι 3,528 στρεμμάτων, αν κάθε δέντρο χρειάζεται επιφάνεια 36 m^2 ;

6.5 Εμβαδά επίπεδων σχημάτων

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

- Να επικυρώνουν τους τύπους εμβαδού τετραγώνου και ορθογώνιου παραλληλογράμμου επιλέγοντας κατάλληλη μονάδα μέτρησης.
- Να χρησιμοποιούν τη διάσπαση και ανασύνθεση επιφανειών για τον προσδιορισμό του τύπου του εμβαδού παραλληλογράμμου, τριγώνου και τραπέζιου.



Διερεύνηση 1. Εμβαδόν τετραγώνου και ορθογώνιου.

Εργασία μαθητών κατά ζεύγη.

Δεχόμαστε ότι το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς μίας (1) μονάδας μήκους είναι μία (1) τετραγωνική μονάδα.

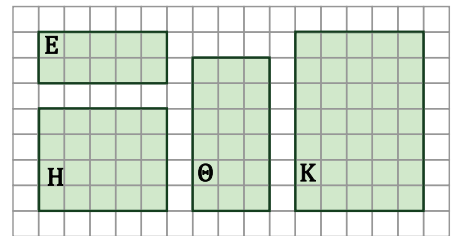
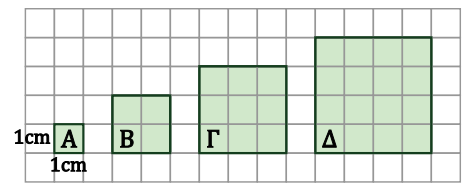
α) Να βρείτε τα εμβαδά των τετραγώνων Α, Β, Γ, Δ.

Πώς μπορείτε να υπολογίσετε το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς α;

β) Να βρείτε τα εμβαδά των ορθογώνιων Ε, Η, Θ, Κ.

Πώς μπορείτε να υπολογίσετε το εμβαδόν ενός ορθογώνιου με πλευρές α και β.

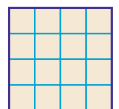
Μοιραζόμαστε και συζητάμε τις προτάσεις μας στην ολομέλεια της τάξης.



Μαθηματικές Έννοιες και Διεργασίες Μάθησης

Εμβαδόν τετραγώνου

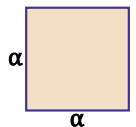
Αν έχουμε ένα τετράγωνο με πλευρά 4 cm μπορούμε να το χωρίσουμε σε $4 \cdot 4 = 16$ τετράγωνα πλευράς 1 cm, καθένα από τα οποία έχει εμβαδόν 1 cm^2 . Συνεπώς, το τετράγωνο με πλευρά 4 cm, έχει εμβαδόν $16 = 4^2 \text{ (cm}^2\text{)}$.



Γενικά

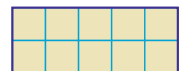
Το εμβαδόν ενός τετραγώνου με πλευρά α είναι ίσο με α^2 . Δηλαδή:

$$E_{\text{τετραγώνου}} = \alpha^2$$



Εμβαδόν ορθογώνιου

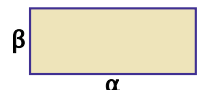
Αν έχουμε ένα ορθογώνιο με πλευρές 2 cm και 5 cm μπορούμε να το χωρίσουμε σε $2 \cdot 5 = 10$ τετράγωνα πλευράς 1 cm, καθένα από τα οποία έχει εμβαδόν 1 cm^2 . Επομένως, το ορθογώνιο έχει εμβαδόν $2 \cdot 5 = 10 \text{ cm}^2$.



Γενικά

Το εμβαδόν ενός ορθογώνιου με πλευρές α και β είναι ίσο με $\alpha \cdot \beta$. Δηλαδή:

$$E_{\text{ορθογώνιου}} = \alpha \cdot \beta$$



Η μεγαλύτερη πλευρά του ορθογώνιου ονομάζεται **μήκος** και η μικρότερη **πλάτος**. Το μήκος και το πλάτος ονομάζονται **διαστάσεις** του ορθογώνιου. Συνεπώς:

$$E_{\text{ορθογώνιου}} = \text{μήκος} \cdot \text{πλάτος}$$

Σημείωση: Για να συμβολίσουμε το εμβαδόν ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ γράφουμε (ΑΒΓΔ), ενός τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒΓ) κ.λπ. Επίσης χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $E_{\text{ΑΒΓΔ}}$ ή $E_{\text{ΑΒΓ}}$ αντίστοιχα.



Εφαρμογή 1

Ένα δωμάτιο σχήματος τετραγώνου έχει περίμετρο 12 m. Θέλουμε να στρώσουμε το δωμάτιο αυτό με πλακάκια. Αν το κάθε πλακάκι έχει εμβαδόν $0,25 \text{ m}^2$, να βρείτε:

- α) Πόσα πλακάκια θα χρειαστούν;
- β) Αν το κάθε πλακάκι κοστίζει 1,13 € και ο εργάτης που θα κάνει την εργασία τοποθέτησης αμείβεται με 20 € το τετραγωνικό μέτρο, πόσο θα στοιχίσει η πλακόστρωση;

Απάντηση

- α) Έστω α η πλευρά του τετράγωνου δωματίου. Αφού η περίμετρος του δωματίου είναι 12 m, τότε $4 \cdot \alpha = 12$, οπότε $\alpha = 3 \text{ m}$. Άρα το εμβαδόν του δωματίου είναι $E_{\text{δωματίου}} = \alpha^2 = 3^2 = 9 \text{ (m}^2\text{)}$.
- β) Έστω ότι θα χρειαστούμε x πλακάκια για το πάτωμα του δωματίου, τότε:
 $E_{\text{δωματίου}} = x \cdot 0,25$ ή $9 = x \cdot 0,25$ ή $x = \frac{9}{0,25}$ ή $x = 36$ πλακάκια.
- γ) Το κόστος πλακόστρωσης K είναι: $K = 36 \cdot 1,13 + 20 \cdot 9 = 40,68 + 180 = 220,68 \text{ €}$.



Εφαρμογή 2

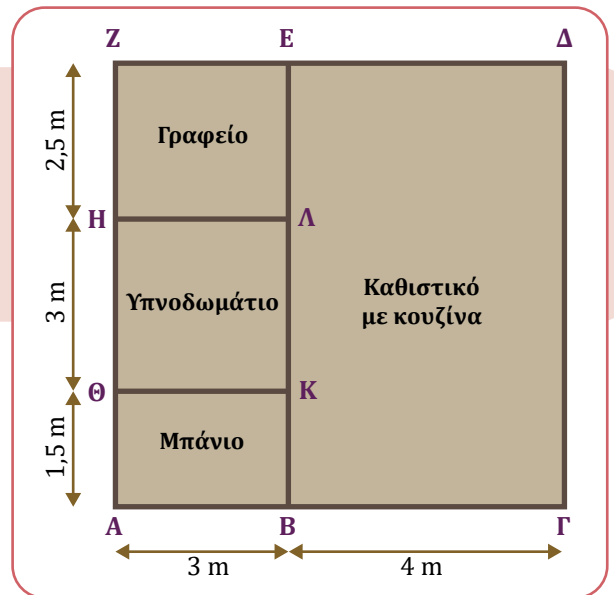
Στο διπλανό σχήμα δίνεται η κάτοψη ενός διαμερίσματος.

Να βρείτε το εμβαδόν:

- α) Του μπάνιου.
- β) Του υπνοδωματίου.
- γ) Του καθιστικού μαζί με την κουζίνα.
- δ) Του διαμερίσματος.

Απάντηση

- α) Το εμβαδόν του μπάνιου είναι:
 $E_{\text{μπάνιου}} = AB \cdot A\theta = 3 \cdot 1,5 = 4,5 \text{ (m}^2\text{)}$.
- β) Το εμβαδόν του υπνοδωματίου είναι:
 $E_{\text{υπν}} = \theta K \cdot \theta H = 3 \cdot 3 = 9 \text{ (m}^2\text{)}$.
- γ) Το εμβαδόν του καθιστικού μαζί με την κουζίνα είναι:
 $E_{\text{καθ}} = E_{\text{BΓΔE}} = 4 \cdot (1,5 + 3 + 2,5) = 4 \cdot 7 = 28 \text{ (m}^2\text{)}$.
- δ) Το εμβαδόν του διαμερίσματος είναι: $E_{\text{διαμ}} = E_{\text{ΑΓΔZ}} = (3 + 4) \cdot (1,5 + 3 + 2,5) = 7 \cdot 7 = 49 \text{ (m}^2\text{)}$.

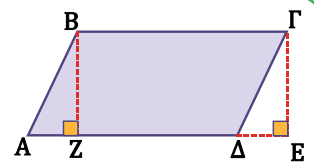


Διερεύνηση 2. Εμβαδόν παραλληλογράμμου και εμβαδόν τριγώνου.

Εργασία μαθητών κατά ζεύγη.

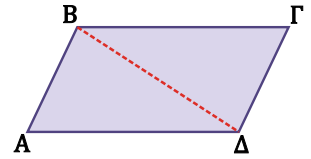
Α. Στο διπλανό σχήμα ΒΖ και ΓΕ είναι ύψη του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

- α) Να εξετάσετε με τη βοήθεια διαφανούς χαρτιού αν τα τρίγωνα ΑΖΒ και ΔΕΓ είναι ίσα.
- β) Να συγκρίνετε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ με το εμβαδόν του ορθογωνίου ΒΓΕΖ. Τι παρατηρείτε;
- γ) Πώς μπορείτε να υπολογίσετε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αν γνωρίζετε μία πλευρά και το αντίστοιχο ύψος της; Να αιτιολογήσετε.



B. Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ φέρουμε τη διαγώνιο ΒΔ.

- α)** Να εξετάσετε με τη βοήθεια διαφανούς χαρτιού αν τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΔΓ είναι ίσα.
- β)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΔ.
- γ)** Πώς μπορείτε να υπολογίσετε το εμβαδόν ενός τριγώνου αν γνωρίζετε μία πλευρά του και το αντίστοιχο ύψος του;



Να διερευνήσετε τα εμβαδά επίπεδων σχημάτων στον γεωπίνακα.

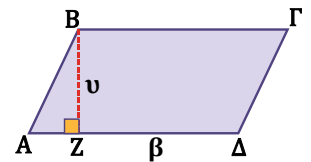


Μαθηματικές Έννοιες και Διεργασίες Μάθησης

Εμβαδόν παραλληλογράμμου

Έστω το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με βάση την πλευρά $AD = BG = \beta$ και αντίστοιχο ύψος το $BZ = u$ (απόσταση μεταξύ των ίσων και παράλληλων πλευρών AD και BG).

Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου είναι: $E_{ABGD} = AD \cdot BZ = \beta \cdot u$



Γενικά

Το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο μιας βάσης του επί το αντίστοιχο ύψος.



Με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής να διερευνήσετε το εμβαδόν παραλληλογράμμου.

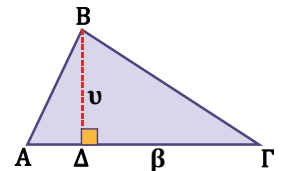
Εμβαδόν τριγώνου

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με βάση την πλευρά $AG = \beta$ και αντίστοιχο ύψος $BD = u$.

Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι: $E_{ABG} = \frac{1}{2} AG \cdot BD = \frac{1}{2} \beta \cdot u$

Δηλαδή:

Το εμβαδόν ενός τριγώνου είναι ίσο με το μισό του γινομένου μιας βάσης (πλευράς) επί το αντίστοιχο ύψος.



Με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής να διερευνήσετε το εμβαδόν τριγώνου.



Εφαρμογή 3

- α)** Ένα ορθογώνιο οικόπεδο έχει μήκος 6250 cm και εμβαδόν 1,968 στρέμματα. Να βρείτε την περίμετρό του (σε m).
- β)** Σε ένα δεύτερο ορθογώνιο οικόπεδο το μήκος του είναι τετραπλάσιο από το πλάτος του, ενώ η περίμετρός του είναι 100 m. Το οικόπεδο θα διαμορφωθεί σε ανθόκηπο. Να βρείτε το κόστος για την κατασκευή του ανθόκηπου αν το κόστος ανά m^2 είναι 100 €.



Απάντηση

α) Αρχικά μετατρέπουμε το μήκος σε m και το εμβαδόν του οικόπεδου σε m^2 : Μήκος = $6250 : 100 = 62,5$ m.

$$E_{\text{οικόπεδου}} = 1,968 \cdot 1000 = 1968 (m^2).$$

Από τον τύπο: $\text{Εμβαδόν} = \text{πλάτος} \times \text{μήκος}$ με αντικατάσταση προκύπτει:

$$1968 = \text{Πλάτος} \cdot 62,5 \text{ ή } \text{Πλάτος} = \frac{1968}{62,5} = 31,5 (m).$$

Επομένως, η περίμετρος είναι:

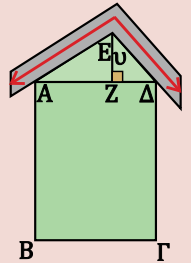
$$\Pi_{\text{οικόπεδου}} = 62,5 + 31,5 + 62,5 + 31,5 = 188 (m).$$

- β) Έστω ότι το πλάτος του οικοπέδου είναι x , οπότε το μήκος του θα είναι $4x$.
 Έστω Π η περίμετρος του οικοπέδου και E το εμβαδόν του οικοπέδου, άρα $\Pi = x + x + 4x + 4x = 10x$.
 Όμως $\Pi = 100$ ή $10x = 100$ ή $x = 10$ m, οπότε το εμβαδόν του οικοπέδου είναι: $E_{\text{οικοπέδου}} = 40 \cdot 10 = 400$ (m²).
 Συνεπώς, η κατασκευή του κήπου θα κοστίσει $400 \cdot 100 = 40000$ €.



Εφαρμογή 4

Ένας γεωργός θέλει να περιφράξει ένα αγρόκτημα (εικόνα), το οποίο αποτελείται από ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές $AB = 120$ m, $B\Gamma = 80$ m και τρίγωνο ύψους $u = 20,45$ m. Οι πλευρές του χωραφιού με μήκος $AE = 40$ m και $E\Delta = 50$ m εφάπτονται σε δρόμο. Η περίφραξη κοστίζει 120 €/m.



- α) Να υπολογίσετε το κόστος περίφραξης του οικοπέδου.
 β) Ο γεωργός πρόκειται να σπείρει το χωράφι του. Αν το κόστος σποράς είναι 6 €/m², να υπολογίσετε το συνολικό κόστος σποράς του χωραφιού.

Απάντηση

- α) Η περίμετρος του οικοπέδου είναι:
 $\Pi = AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta E + EA = 120 + 80 + 120 + 40 + 50 = 410$ (m).
 Συνεπώς το κόστος της περίφραξης είναι: $K_{\text{περίφραξης}} = 410 \text{ m} \cdot 120 \text{ €/m} = 49200$ €.
- β) Το εμβαδόν του οικοπέδου είναι:
 $E = (AB\Gamma\Delta) + (A\Delta E) = AB \cdot B\Gamma + \frac{1}{2} A\Delta \cdot u = 120 \cdot 80 + \frac{1}{2} 80 \cdot 20,45 = 9600 + 818 = 10418$ (m²).
 Συνεπώς το κόστος της σποράς είναι: $K_{\text{σποράς}} = 10418 \text{ m}^2 \cdot 6 \text{ €/m}^2 = 62508$ €.

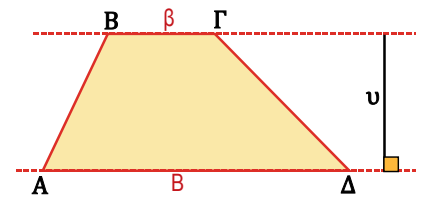


Διερεύνηση 3. Εμβαδόν τραπεζίου με διάσπαση.

Εργασία μαθητών κατά ζεύγη.

Ας θεωρήσουμε το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ που έχει μεγάλη βάση $A\Delta = B$, μικρή βάση $B\Gamma = \beta$ και ύψος u .

- α) Να φέρετε τη διαγώνιο $B\Delta$, η οποία χωρίζει το τραπέζιο σε δύο τρίγωνα. Να βρείτε το εμβαδόν των τριγώνων και το εμβαδόν του τραπεζίου.
 β) Από το σημείο Γ να φέρετε παράλληλη στην AB , η οποία τέμνει τη βάση $A\Delta$ στο σημείο Z . Το τραπέζιο χωρίζεται σε ένα παραλληλόγραμμο και ένα τρίγωνο. Να βρείτε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου και του τριγώνου και το εμβαδόν του τραπεζίου.
 γ) Να συγκρίνετε τα αποτελέσματα που βρήκατε για το εμβαδόν του τραπεζίου στα (α) και (β). Να διατυπώσετε έναν κανόνα για την εύρεση του εμβαδού του τραπεζίου.



Ανταλλάσσουμε επιχειρήματα και αιτιολογούμε τις απαντήσεις μας.



Να χρησιμοποιήσετε την εφαρμογή για να διερευνήσετε το εμβαδόν τραπεζίου.



Με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής να διερευνήσετε το εμβαδόν τραπεζίου.

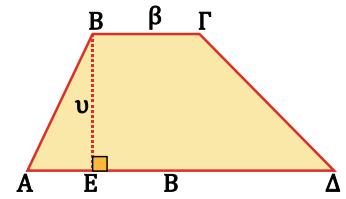
Μαθηματικές Έννοιες και Διεργασίες Μάθησης

Εμβαδόν τραπεζίου

Έστω το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με μεγάλη βάση B την πλευρά $A\Delta$ και μικρή βάση β την πλευρά $B\Gamma$ και ύψος το $BE = u$.

Το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι

$$E_{AB\Gamma\Delta} = \frac{(A\Delta + B\Gamma)}{2} \cdot BE \quad \text{ή} \quad E_{AB\Gamma\Delta} = \frac{(B + B)}{2} \cdot \upsilon$$



Γενικά

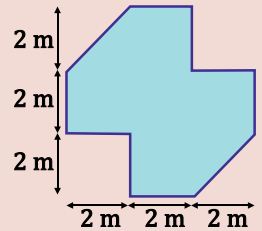
$$\text{Εμβαδόν τραπεζίου} = \frac{(\text{Βάση μεγάλη} + \text{βάση μικρή})}{2} \cdot \text{ύψος}$$



Εφαρμογή 5

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το τοπογραφικό διάγραμμα του πυθμένα μίας πισίνας. Να βρείτε:

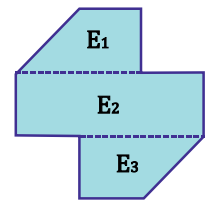
- α) Το εμβαδόν του πυθμένα της.
- β) Τα πλακάκια που θα χρειαστούν για την επίστρωση του πυθμένα της, αν η πλευρά σε κάθε τετραγωνικό πλακάκι έχει μήκος 25 cm.
- γ) Το κόστος της επίστρωσης, αν κάθε πλακάκι κοστίζει 3 € και ο τεχνίτης που θα τα τοποθετήσει χρεώνει 15 €/m².



Απάντηση

- α) Χωρίζουμε τον πυθμένα της πισίνας σε τρία μέρη, όπως φαίνεται στο σχήμα. Συνεπώς το εμβαδόν του πυθμένα της πισίνας υπολογίζεται ως εξής:

$$E = E_1 + E_2 + E_3, \text{ όπου } E_1 = \frac{(2+4) \cdot 2}{2} = 6 \text{ (m}^2\text{)}, E_2 = 6 \cdot 2 = 12 \text{ (m}_2\text{)} \text{ και } E_3 = \frac{(2+4)2}{2} = 6 \text{ (m}^2\text{)}.$$



Άρα τελικά έχουμε $E = 6 + 12 + 6 = 24 \text{ (m}^2\text{)}$.

- β) Κάθε πλακάκι έχει εμβαδόν: $E_{\text{πλακ}} = (0,25)^2 = 0,0625 \text{ (m}^2\text{)}$.

Έστω ότι θα χρειαστούμε x πλακάκια για την επίστρωση της πισίνας, οπότε:

$$E = x \cdot 0,0625 \text{ ή } 24 = x \cdot 0,0625 \text{ ή } x = \frac{24}{0,0625} \text{ ή } x = 384 \text{ πλακάκια.}$$

- γ) Το κόστος επίστρωσης είναι:

$$K_{\text{επίστρωσης}} = 384 \cdot 3 + 24 \cdot 15 = 1152 + 360 = 1512 \text{ €}$$

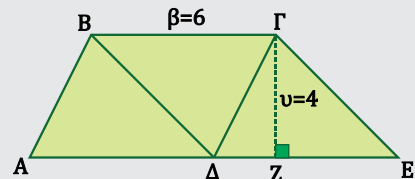


Να ανοίξετε τον σύνδεσμο και να απαντήσετε στις ερωτήσεις αξιολόγησης.

Ερωτήσεις για Αξιολόγηση

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με τη λέξη Σωστό (Σ), αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος (Λ), αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

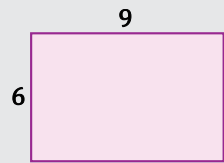
Δίνεται το διπλανό τραπέζιο ΑΒΓΕ, με παραλληλόγραμμα τα ΑΒΓΔ και ΒΔΕΓ. Το τραπέζιο ΑΒΓΕ έχει μικρή βάση ΒΓ = 6 cm και ύψος υ = 4 cm.



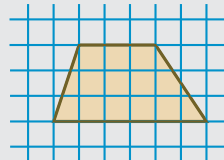
- 1 Τα παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και ΒΔΕΓ είναι ισεμβαδικά.
- 2 Το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΕ είναι 38 cm².
- 3 Το εμβαδόν του τριγώνου ΔΓΕ είναι 12 cm².
- 4 Τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΔΓ και ΔΕΓ είναι ισεμβαδικά.
- 5 Αν ΖΕ = 4 cm τότε το εμβαδόν του ΑΒΓΖ είναι 28 cm².

Στις παρακάτω ερωτήσεις να βάλετε σε κύκλο το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση:

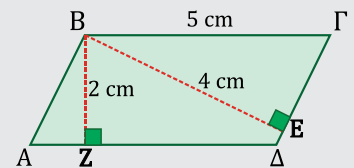
- 1 Αν οι διαστάσεις του ορθογωνίου δίνονται σε cm, το εμβαδόν του είναι:
 Α. 15 cm^2 Β. 30 cm^2 Γ. 54 cm^2 Δ. 58 cm^2 .



- 2 Το διπλανό σχήμα είναι τραπέζιο. Κάθε τετραγωνάκι που σχηματίζεται από τις διακεκομμένες γραμμές έχει πλευρά 1 cm. Το εμβαδόν του τραπεζίου είναι:
 Α. 10 cm^2 Β. 11 cm^2 Γ. $11,5 \text{ cm}^2$ Δ. $13,5 \text{ cm}^2$.



- 3 Στο παραλληλόγραμμο του διπλανού σχήματος ισχύει:
 $B\Gamma = 5 \text{ cm}$, ύψος $BE = 4 \text{ cm}$ και ύψος $BZ = 2 \text{ cm}$.
 Η περίμετρος του παραλληλογράμμου είναι:
 Α. 24 cm^2 Β. 15 cm^2 Γ. 20 cm^2 Δ. $20,5 \text{ cm}^2$.

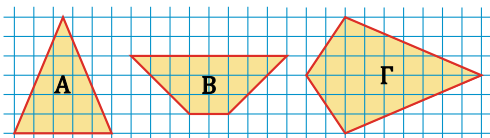


Να κάνετε την Εργασία με προεκτάσεις: «Πολλαπλές αποδείξεις εμβαδού τραπεζίου».

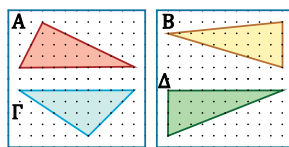


Ασκήσεις και Προβλήματα

- 1 Να αντιγράψετε τα ακόλουθα σχήματα σε τετραγωνισμένο χαρτί. Να τεμαχίσετε κάθε επιφάνεια έτσι ώστε όταν την ανασυνθέσετε, να έχετε ένα ορθογώνιο. Ποιο σχήμα έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν; Να αιτιολογήσετε.

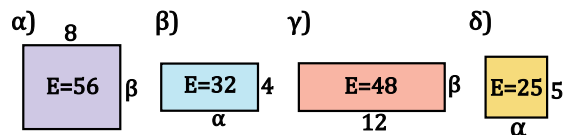


- 2 Να συγκρίνετε τα εμβαδά των τριγώνων. Να αιτιολογήσετε τη σκέψη σας.



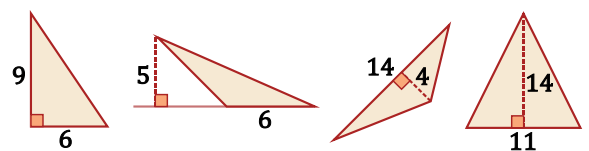
- 3 Να βρείτε το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου με διαστάσεις $4,5 \text{ dm}$ και 37 cm .
 4 Να βρείτε το εμβαδόν ενός τετραγώνου με περίμετρο 64 cm .

- 5 Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς κάθε ορθογωνίου. Οι μετρήσεις δίνονται σε εκατοστά (cm).



- 6 Σε ένα τρίγωνο η βάση του είναι τριπλάσια από το αντίστοιχο ύψος του. Αν το ύψος του είναι 4 cm να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

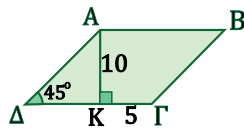
- 7 Να βρείτε ποιο από τα παρακάτω σχήματα έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν. Οι μετρήσεις δίνονται σε εκατοστά.



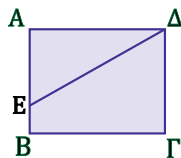
- 8 Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος 19 cm και πλάτος όσο η αριθμητική τιμή του εμβαδού τετραγώνου πλευράς 0,4 dm. Να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου.
- 9 Ένα φύλλο χαρτί έχει διαστάσεις 30 cm και 21 cm. Αν από κάθε πλευρά κόψουμε μια λωρίδα πλάτους 1,5 cm, να βρείτε το εμβαδόν του φύλλου που έμεινε.
- 10 Τετράγωνο έχει εμβαδόν ίσο με τρίγωνο του οποίου η βάση είναι 8 cm και το αντίστοιχο ύψος 4 cm. Να υπολογίσετε την περίμετρο του τετραγώνου.
- 11 Η περίμετρος ενός ορθογωνίου είναι 30 cm και το μήκος του είναι διπλάσιο από το πλάτος του.

Η πλευρά ενός τετραγώνου είναι διπλάσια από το πλάτος του ορθογωνίου. Να βρείτε τις πλευρές των δύο σχημάτων καθώς και τα εμβαδά τους.

- 12 Σε παραλληλόγραμμο ABΓΔ με $\hat{A} = 45^\circ$ φέρνουμε $AK \perp \Delta\Gamma$. Αν $AK = 10$ cm και $K\Gamma = 5$ cm, να υπολογίσετε το εμβαδόν του ABΓΔ.

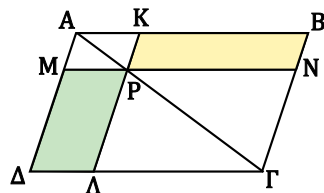


- 13 Ένα οικοπέδο σχήματος ορθογωνίου έχει μήκος 34,2 cm και πλάτος 1,327 dm. Να βρείτε το εμβαδόν και την περιμέτρό του σε cm^2 , dm^2 , m^2 .
- 14 Δίνεται το διπλανό ορθογώνιο ABΓΔ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου BΓΔΕ, αν $AB = 15$ cm, $AD = 16$ cm και $DE = \frac{4}{3} AB$.



- 15 **Εργασία κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες.** Ένα τετράγωνο γήπεδο έχει την ίδια περίμετρο με ένα ορθογώνιο γήπεδο διαστάσεων 78 m και 36 m.
 α) Ποιο είναι το μήκος της πλευράς του τετραγώνου γηπέδου;
 β) Τα δύο γήπεδα έχουν το ίδιο εμβαδόν;
- 16 Ένα ορθογώνιο έχει μήκος 65 cm και πλάτος 42 cm. Ελαττώνουμε το μήκος του κατά 5 cm. Πόσο πρέπει να αυξήσουμε το πλάτος του για να μην αλλάξει το εμβαδόν του;

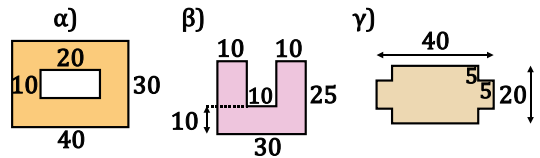
- 17 Το σχήμα ABΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. Το P είναι τυχόν σημείο της διαγωνίου ΑΓ.



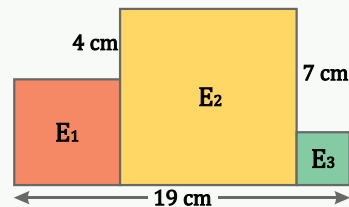
Η MN είναι παράλληλη στην AB και η ΚΛ είναι παράλληλη στην ΑΔ. Να αποδείξετε τις παρακάτω ισότητες εμβαδών:

- α) $(AMP) = (AKP)$ και $(PL\Gamma) = (P\Delta\Gamma)$.
 β) $(\Delta\Delta PM) = (KBNP)$.

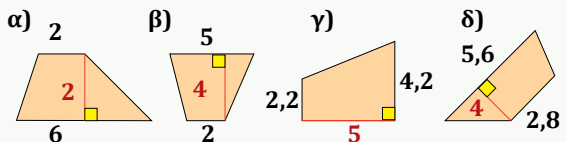
- 18 Να βρείτε το εμβαδόν κάθε σχήματος. (Οι μετρήσεις δίνονται σε cm)



- 19 **Μαθηματική πρόκληση.** Να υπολογίσετε τα εμβαδά των τετραγώνων E_1 , E_2 και E_3 .



- 20 Να υπολογίσετε το εμβαδόν κάθε τραπεζίου. (Οι μετρήσεις δίνονται σε cm)



- 21 **Ανοιχτό πρόβλημα για εργασία σε μικρές ομάδες:**

Τα γενέθλια της Μελίνας. Η Μελίνα γιορτάζει τα γενέθλιά της και θέλει να κατασκευάσει χάρτινες προσκλήσεις που θα μοιράσει στους καλεσμένους της. Κάθε πρόσκληση έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλογράμμου με διαστάσεις 30 cm μήκος και 20 cm πλάτος. Η Μελίνα διαθέτει ένα μεγάλο χαρτόνι σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου διαστάσεων 90 cm μήκος και 70 cm πλάτος. Πόσες προσκλήσεις θα μπορέσει να κατασκευάσει απ' αυτό το χαρτόνι; Μπορείτε να τις χαράξετε πάνω σε χαρτόνι; Προσοχή! Δεν επιτρέπεται να ενώσετε δύο κομμάτια για να φτιάξετε μια πρόσκληση.

- 22 **Εργασία ετεροαξιολόγησης:** Αν αυξήσουμε την πλευρά ενός τετραγώνου κατά 4 cm, τότε η περίμετρός του γίνεται 72 cm. Να υπολογίσετε την πλευρά του αρχικού τετραγώνου. Να ελέγξετε τις απαντήσεις σας με αυτές του συμμαθητή σας.

6.6 Εμβαδόν κυκλικού δίσκου

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

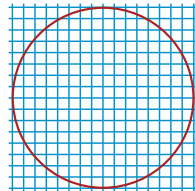
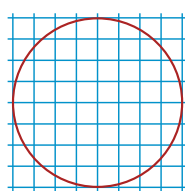
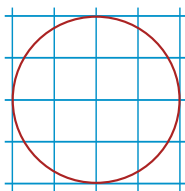
Να υπολογίζουν το εμβαδόν ενός κυκλικού δίσκου όταν γνωρίζουν την ακτίνα ή τη διάμετρο του κύκλου.



Διερεύνηση 1. Εκτίμηση του εμβαδού κυκλικού δίσκου.

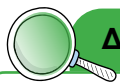
Εργασία μαθητών κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες.

Οι κύκλοι στα παρακάτω τρία πλέγματα έχουν την ίδια ακτίνα ίση με 4 cm.



- Να χρησιμοποιήσετε κάθε πλέγμα ξεχωριστά για να κάνετε μία εκτίμηση για το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου.
- Ποια εκτίμηση πιστεύετε ότι είναι πιο κοντά στο πραγματικό εμβαδόν του κυκλικού δίσκου; Να αιτιολογήσετε.

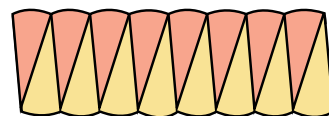
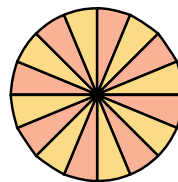
Μοιραζόμαστε τις σκέψεις μας στην ολομέλεια της τάξης.



Διερεύνηση 2. Προσέγγιση του εμβαδού κυκλικού δίσκου.

Εργασία μαθητών κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες.

- Σχεδιάζουμε έναν κύκλο με 16 ίσα κομμάτια («κυκλικούς τομείς») όπως φαίνεται στο σχήμα. Κόβουμε τα τμήματα και στη συνέχεια φτιάχνουμε κατά προσέγγιση ένα σχήμα που μοιάζει με ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.
- Ποιο είναι κατά προσέγγιση το ύψος και ποια η βάση του «ορθογώνιου παραλληλόγραμμου»;
- Να βρείτε το εμβαδόν του «ορθογώνιου». Τι συμπεραίνετε για το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου;



Συζητάμε τις προτάσεις μας στην ολομέλεια της τάξης.



Με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής να διερευνήσετε το εμβαδόν κυκλικού δίσκου.

Μαθηματικές Έννοιες και Διεργασίες Μάθησης

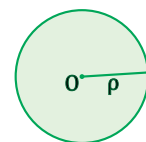
Ένας κύκλος (O, ρ) μαζί με το μέρος του επιπέδου που περικλείει ονομάζεται

κυκλικός δίσκος, κέντρου O και ακτίνας ρ . Τα σημεία του κυκλικού δίσκου που απέχουν από το κέντρο O απόσταση μικρότερη της ακτίνας είναι εσωτερικά σημεία του κύκλου, ενώ όσα σημεία του επιπέδου τα οποία απέχουν από το O απόσταση μεγαλύτερη της ακτίνας είναι εξωτερικά σημεία του κύκλου.

Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν ενός κυκλικού δίσκου ακτίνας ρ , χωρίζουμε τον κυκλικό δίσκο σε όσο πιο μικρά μέρη («κυκλικούς τομείς») μπορούμε. Παρατηρούμε ότι τοποθετώντας κατάλληλα τα μέρη αυτά (όπως στην παραπάνω διερεύνηση) σχηματίζεται ένα σχήμα που «μοιάζει» με ορθογώνιο. Αν εξακολουθήσουμε να χωρίζουμε τον κυκλικό δίσκο σε όλο και πιο μικρά ίσα μέρη, τότε το τελικό σχήμα θα προσεγγίζει όλο και περισσότερο ένα ορθογώνιο, του οποίου η «βάση» θα είναι ίση με το μισό του μήκους του κύκλου, δηλαδή με $\pi \cdot \rho$, και το «ύψος» ίσο με την ακτίνα ρ του κύκλου. Άρα, το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου είναι περίπου ίσο με το εμβαδόν του ορθογώνιου που σχηματίζεται, δηλαδή με $\rho \cdot \pi \cdot \rho = \pi \rho^2$.

Γενικά, αποδεικνύεται ότι το εμβαδόν κυκλικού δίσκου με ακτίνα ρ είναι:

$$E = \pi \rho^2$$





Εφαρμογή 1

Μία σειρήνα προειδοποίησης για τσουνάμι έχει εμβέλεια 2 km προς όλες τις κατευθύνσεις. Σε πόσα τετραγωνικά χιλιόμετρα μπορεί να ακουστεί η σειρήνα;



Απάντηση

Δύο χιλιόμετρα προς όλες τις κατευθύνσεις του οριζώντιου επιπέδου είναι στην ουσία ένας κυκλικός δίσκος με κέντρο τη σειρήνα και ακτίνα 2 km. Για να υπολογίσουμε σε πόσα τετραγωνικά χιλιόμετρα μπορεί να ακουστεί η σειρήνα, πρέπει να υπολογίσουμε το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου με ακτίνα $\rho = 2$ km. Άρα έχουμε: $E = \pi \cdot \rho^2 \approx 3,14 \cdot 2^2 = 12,56$ (km²). Δηλαδή, η σειρήνα μπορεί να ακουστεί σε μία κυκλική περιοχή 12,56 km².



Εφαρμογή 2

Το στόμιο ενός στρογγυλού πηγαδιού έχει περίμετρο 3,14 m. Το πηγάδι έχει στερέψει και ο ιδιοκτήτης αποφάσισε να το κλείσει από πάνω με ένα μεταλλικό καπάκι κυκλικού σχήματος. Τι εμβαδόν πρέπει να έχει το μεταλλικό καπάκι με το οποίο θα κλείσει ο ιδιοκτήτης το πηγάδι.



Απάντηση

Το μήκος του κύκλου, δηλαδή η περίμετρος του πηγαδιού, δίνεται από τον τύπο $L = 2\pi\rho$, οπότε είναι:

$$3,14 \approx 2 \cdot 3,14 \cdot \rho, \text{ οπότε } \rho = 0,5 \text{ m.}$$

Άρα το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου, δηλαδή του μεταλλικού καπακιού θα είναι:

$$E = \pi \cdot \rho^2 \approx 3,14 \cdot 0,5^2 = 0,785 \text{ (m}^2\text{)}.$$

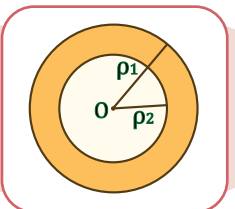


Με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής να διερευνήσετε το εμβαδόν κυκλικού δακτυλίου.



Εφαρμογή 2

Το διπλανό σχήμα δείχνει δύο ομόκεντρους κύκλους (O, ρ_1) και (O, ρ_2) , με ακτίνες $\rho_1 = 7$ cm και $\rho_2 = 0,05$ m αντίστοιχα. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου (γραμμωσκιασμένη επιφάνεια).



Απάντηση

Έστω E_1 το εμβαδόν του κύκλου (O, ρ_1) και E_2 το εμβαδόν του (O, ρ_2) αντίστοιχα.

Τότε, $E_1 = \pi \cdot \rho_1^2 \approx 3,14 \cdot 7^2 = 153,86$ cm² και $E_2 = \pi \cdot \rho_2^2 \approx 3,14 \cdot 5^2 = 78,5$ cm², αφού $\rho_2 = 0,05$ m = 5 (cm).

Επομένως, το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου, είναι:

$$E_{\text{κυκλ.δακτ.}} = E_1 - E_2 = 153,86 - 78,5 = 75,36 \text{ (cm}^2\text{)}.$$



Να ανοίξετε τον σύνδεσμο και να απαντήσετε στις ερωτήσεις αξιολόγησης.

Ερωτήσεις για Αξιολόγηση

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με τη λέξη **Σωστό (Σ)**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος (Λ)**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- 1 Αν η ακτίνα ενός κύκλου τριπλασιαστεί, τότε το εμβαδόν εννεαπλασιάζεται.
- 2 Ο λόγος των εμβαδών δύο κύκλων με ακτίνες ρ_1, ρ_2 είναι $\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2$.
- 3 Το εμβαδόν κυκλικού δίσκου με διάμετρο δ , είναι $4 \cdot \pi \cdot \delta^2$.



4 Το εμβαδόν κυκλικού δίσκου με ακτίνα ρ , είναι $2 \cdot \pi \cdot \rho^2$.

Στις παρακάτω ερωτήσεις να βάλετε σε κύκλο το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση:

1 Ένας κύκλος έχει μήκος $L = 8$ cm. Το εμβαδόν του είναι:

A. $16\pi^2$ cm² B. $\frac{16}{\pi^2}$ c m² Γ. $\frac{16}{\pi}$ c m² Δ. 16π cm²

2 Ένας κύκλος έχει διάμετρο $\delta = 8$ m. Το εμβαδόν του είναι:

A. $16\pi^2$ m² B. $\frac{16}{\pi^2}$ m² Γ. $\frac{16}{\pi}$ m² Δ. 16π m²

3 Αν διπλασιάσουμε την ακτίνα ενός κύκλου, τότε το εμβαδόν του:

A. διπλασιάζεται B. τετραπλασιάζεται Γ. παραμένει αναλλοίωτο Δ. εξαπλασιάζεται



Ασκήσεις και Προβλήματα

1 Η διαφορά των περιμέτρων δύο κύκλων είναι 30 cm. Να βρείτε η διαφορά των ακτίνων.

2 Σε κάθε περίπτωση να βρείτε την ακτίνα του κύκλου, ο οποίος έχει:

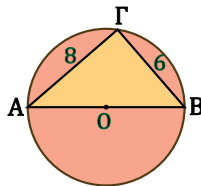
α) $L = 263,76$ cm β) $L = 596,6$ cm
γ) $E = 3322,12$ cm² δ) $E = 12,717$ cm²

3 Να υπολογίσετε το μήκος ενός κύκλου που έχει εμβαδόν 628 cm².

4 Να υπολογίσετε το εμβαδόν ενός κυκλικού δίσκου που έχει μήκος 47,1 cm².

5 Στο διπλανό σχήμα, αν AB διάμετρος του κύκλου, να υπολογίσετε:

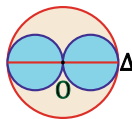
α) Το μήκος του κύκλου.
β) Το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου.
γ) Το εμβαδόν του κόκκινου μέρους του κυκλικού δίσκου.



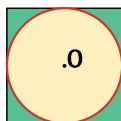
6 Ένας στόχος A έχει διάμετρο 26 cm και ένας στόχος B έχει περίμετρο 0,628 m. Και οι δύο στόχοι βρίσκονται στην ίδια απόσταση από τον παίκτη που θέλει να πετύχει τον έναν από τους δύο.

Ποιον στόχο είναι πιο εύκολο να πετύχει ο παίκτης; Να αιτιολογήσετε.

7 Να υπολογίσετε το εμβαδόν του γαλάζιου μέρους, αν ο εξωτερικός κύκλος έχει κέντρο O και ακτίνα $OD = 4$ cm.



8 Να υπολογίσετε το εμβαδόν του πράσινου μέρους του σχήματος, αν το εμβαδόν του τετραγώνου είναι 16 m².



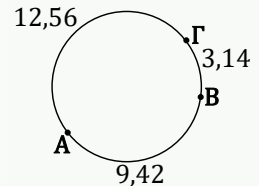
9 Ο φάρος Τουρλίτης στην Άνδρο χτίστηκε το 1887 πάνω σε βράχο μέσα στη θάλασσα. Πρόκειται για τον μοναδικό φάρο που έχει κατασκευαστεί στη θάλασσα και έχει εμβέλεια φωτεινής ακτίνας περίπου 15 ναυτικά μίλια. Στο Ακρωτήριο Ταίναρο βρίσκεται ο φάρος του Ταινάρου με εμβέλεια φωτεινής ακτίνας περίπου 18 ναυτικά μίλια.



Αν ένα ναυτικό μίλι αντιστοιχεί σε 1852 m, να υπολογίσετε πόσα περίπου περισσότερα τετραγωνικά χιλιόμετρα καλύπτει ο φάρος του Ταινάρου σε σύγκριση με τον φάρο Τουρλίτη;

10 Μία κυκλική κηλίδα πετρελαίου έχει ακτίνα 2 km. Μετά από μία μέρα, η ακτίνα της κηλίδας αυξήθηκε κατά 3 km. Πόσα τετραγωνικά χιλιόμετρα αυξήθηκε η περιοχή μόλυνσης της πετρελαιοκηλίδας;

11 **Εργασία κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες.** Το μήκος τριών διαδοχικών κυκλικών τόξων σε m είναι $S_{AB} = 9,42$, $S_{BG} = 3,14$ και $S_{GA} = 12,56$. Να υπολογίσετε:



α) Το μήκος της χορδής AG.
β) Το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου.

6.7 Εμβαδόν κυκλικού τομέα

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

Να υπολογίζουν τα εμβαδά κυκλικών τομέων ως μέρη του εμβαδού του κυκλικού δίσκου τους.



Διερεύνηση 1. Εκτίμηση του Εμβαδόν του κυκλικού τομέα.

Εργασία μαθητών κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες.

- α) Να βρείτε το $\frac{1}{2}$, το $\frac{1}{4}$ και το $\frac{1}{6}$ του εμβαδού κυκλικού δίσκου ακτίνας ρ .
- β) Ποιο είναι το εμβαδόν μέρους κυκλικού δίσκου ακτίνας ρ με επίκεντρη γωνία 360° , 180° , 90° και 60° ;
- γ) Να βρείτε έναν τύπο για το εμβαδόν μέρους του κυκλικού δίσκου για οποιαδήποτε γωνία μ° .

Μαθηματικές Έννοιες και Διεργασίες Μάθησης

Εμβαδόν κυκλικού τομέα

Στον κύκλο (O, ρ) η επίκεντρη γωνία $\widehat{xOy} = \mu^\circ$ καλύπτει ένα μέρος του κυκλικού δίσκου. Η τομή του κυκλικού δίσκου με την επίκεντρη γωνία μ° ονομάζεται **κυκλικός τομέας γωνίας μ°** του κύκλου (O, ρ) .

Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα γωνίας μ° σκεφτόμαστε ως εξής: Ο κυκλικός δίσκος είναι κυκλικός τομέας 360° και έχει εμβαδόν $\pi \rho^2$.

Ο κυκλικός τομέας μίας μοίρας (1°) έχει εμβαδόν $\frac{\pi \rho^2}{360}$.

Άρα, ο κυκλικός τομέας μ° έχει εμβαδόν $\frac{\pi \rho^2}{360} \cdot \mu$.

Επομένως, το εμβαδόν κυκλικού τομέα μ° , κύκλου ακτίνας ρ είναι: $E_{\text{κυκλικού τομέα}} = \frac{\pi \rho^2 \mu}{360}$

Ο τύπος μπορεί να γραφεί και ως εξής: $E_{\text{κυκλικού τομέα}} = \frac{\pi \rho^2 \mu}{360} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi \rho \mu}{180} \cdot \rho$. Όμως $\frac{\pi \rho \mu}{180}$ είναι το μήκος S του αντίστοιχου τόξου. Συνεπώς το εμβαδόν κυκλικού τομέα με μήκος αντίστοιχου τόξου S , κύκλου ακτίνας ρ είναι:

$$E_{\text{κυκλικού τομέα}} = \frac{1}{2} \cdot S \cdot \rho$$

Αν το τόξο του κυκλικού τομέα είναι α rad, επειδή $S = \alpha \cdot \rho$, ο προηγούμενος τύπος γίνεται:

$$E_{\text{κυκλικού τομέα}} = \frac{1}{2} \cdot S \cdot \rho = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \rho \cdot \rho = \frac{1}{2} \alpha \cdot \rho^2 \text{ δηλαδή: } E_{\text{κυκλικού τομέα}} = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \rho^2$$

Παράδειγμα: Το εμβαδόν του κυκλικού τομέα 65° της σφαιροβολίας στον στίβο, κύκλου ακτίνας $\rho = 24$ m είναι:

$$E_{\text{κυκλικού τομέα}} \approx \frac{3,14 \cdot 24^2 \cdot 65}{360} = 326,6 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Κυκλικό τμήμα λέγεται καθένα από τα δύο μέρη στα οποία χωρίζει τον κυκλικό δίσκο μία χορδή του κύκλου.

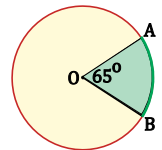
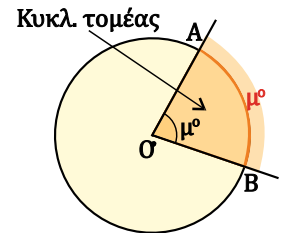


Εφαρμογή 1

Σε κύκλο ακτίνας $\rho = 8$ cm να βρείτε το μήκος ενός τόξου 36° καθώς και το εμβαδόν του αντίστοιχου κυκλικού τομέα.



Να διερευνήσετε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα για μεταβολές της ακτίνας του κυκλικού δίσκου και της επίκεντρης γωνίας.



Απάντηση

Το μήκος του τόξου είναι: $S = \frac{\pi \cdot \rho \cdot \mu}{180}$ ή $S \approx \frac{3,14 \cdot 8 \cdot 36}{180}$ ή $S = \frac{904,32}{180}$ ή $S = 5,024$ (cm).

Το εμβαδόν του κυκλικού τομέα έχουμε:

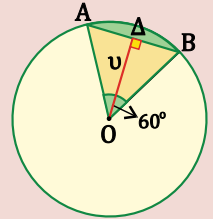
$$E = \frac{\pi \cdot \rho^2 \cdot \mu}{360} \text{ ή } E \approx \frac{3,14 \cdot 8^2 \cdot 36}{360} \text{ ή } E = \frac{7234,56}{360} \text{ ή } E = 20,096 \text{ (cm}^2\text{)}.$$



Εφαρμογή 2

Το εμβαδόν κυκλικού τομέα 60° είναι $216\pi \text{ m}^2$.

- α) Να βρείτε την ακτίνα και το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου, στον οποίο ανήκει ο κυκλικός τομέας.
- β) Να βρείτε το ύψος και το εμβαδόν του τριγώνου OAB.
- γ) Να βρείτε το εμβαδόν του πράσινου κυκλικού τμήματος.



Απάντηση

α) Για το εμβαδόν του κυκλικού τομέα έχουμε:

$$E_{\text{κυκλ.τομ.}} = \frac{\pi \cdot \rho^2 \cdot \mu}{360} \text{ ή } 216\pi = \frac{\pi \cdot \rho^2 \cdot 60}{360} \text{ ή } \rho^2 = 6 \cdot 216 \text{ ή } \rho = 36 \text{ (m)}$$

$$\text{Άρα } E_{\text{κυκλ.δισκ.}} = \pi \cdot \rho^2 \text{ ή } E_{\text{κυκλ.δισκ.}} = \pi \cdot 36^2 \text{ ή } E_{\text{κυκλ.δισκ.}} = 1296\pi \text{ (m}^2\text{)}.$$

β) Το τρίγωνο OAB είναι ισόπλευρο. Είναι: $u^2 = \rho^2 - B\Delta^2$ ή $u^2 = 36^2 - 12^2$ ή $u^2 = 1296 - 144$ ή $u = \sqrt{1152}$ ή $u \approx 33,94$ και επομένως το εμβαδόν του τριγώνου OAB είναι: $(OAB) = \frac{1}{2} AB \cdot u \approx \frac{1}{2} 36 \cdot 33,94 = 610,92 \text{ (m}^2\text{)}.$

γ) Για να βρούμε το εμβαδόν του πράσινου κυκλικού τμήματος αφαιρούμε από το εμβαδόν του κυκλικού τομέα των 60° το εμβαδόν του τριγώνου OAB. Έχουμε: $E_{\text{κυκλ.τμ.}} = E_{\text{τομ.}} - E_{\text{τρ.}} = 216\pi - 610,92.$

$$\text{Επομένως: } E_{\text{κυκλ.τμ.}} \approx 678,24 - 610,92 = 67,32 \text{ (m}^2\text{)}.$$



Εφαρμογή 3

Στο διπλανό σχήμα το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου είναι $4\pi \text{ m}^2$. Να βρείτε το εμβαδόν των κυκλικών τομέων του σχήματος.

Απάντηση

$$\text{Έχουμε: } E_{\text{κυκλ.δισκ.}} = \pi \cdot \rho^2 \text{ ή } 4\pi = \pi \cdot \rho^2 \text{ ή } \rho^2 = 4 \text{ ή } \rho = 2 \text{ (m)}.$$

Το άθροισμα των επίκεντρων γωνιών είναι 360° , οπότε:

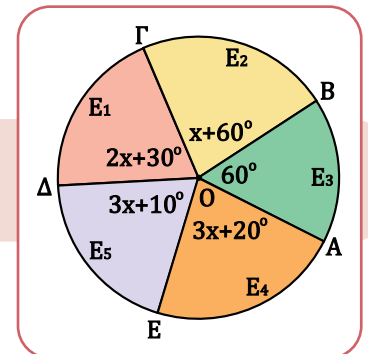
$$2x + 30^\circ + x + 60^\circ + 60^\circ + 3x + 20^\circ + 3x + 10^\circ = 360^\circ \text{ ή } 9x = 180^\circ \text{ ή } x = 20^\circ$$

Άρα, $\widehat{AB} = 60^\circ$, $\widehat{BG} = 80^\circ$, $\widehat{GD} = 70^\circ$, $\widehat{DE} = 70^\circ$, $\widehat{EA} = 80^\circ$ και επομένως:

$$E_1 = E_5 = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 80}{360} \text{ ή } E_1 = E_5 = \frac{8}{9} \pi \text{ (m}^2\text{)}.$$

$$E_2 = E_4 = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 70}{360} \text{ ή } E_2 = E_4 = \frac{7}{9} \pi \text{ (m}^2\text{)}.$$

$$E_3 = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 60}{360} \text{ ή } E_3 = \frac{2}{3} \pi \text{ (m}^2\text{)}.$$



Να ανοίξετε τον σύνδεσμο και να απαντήσετε τις ερωτήσεις αξιολόγησης.

Ερωτήσεις για Αξιολόγηση

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με τη λέξη Σωστό (Σ), αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος (Λ), αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- 1 Το εμβαδόν του κυκλικού τομέα, επίκεντρης γωνίας μ° , είναι $\frac{\pi \cdot \rho^2 \cdot \mu}{180}$.
- 2 Ίσες επίκεντρες γωνίες δίνουν ίσα εμβαδά κυκλικών τομέων.
- 3 Το εμβαδόν κυκλικού τομέα, κύκλου με διάμετρο δ , είναι $\frac{\pi \cdot \delta^2 \cdot \mu}{1440}$.
- 4 Το εμβαδόν κυκλικού τομέα (O, \widehat{AB}) είναι ίσο με το μισό του γινομένου του μήκους του αντίστοιχου τόξου S επί την ακτίνα του κύκλου, δηλαδή $\frac{1}{2} S \cdot \rho$.

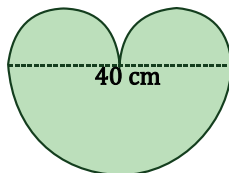
Στις παρακάτω ερωτήσεις να βάλετε σε κύκλο το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση:

- 1 Το εμβαδόν κυκλικού τομέα ακτίνας $\rho = 10$ (mm) και $\mu = 40^\circ$, είναι:
 Α. $\frac{200}{9} \pi \text{ m m}^2$ Β. $\frac{100}{9} \pi \text{ m m}^2$ Γ. $\frac{4}{9} \pi \text{ m m}^2$ Δ. $\frac{8}{9} \pi \text{ m m}^2$
- 2 Αν το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα είναι $720\pi \text{ cm}^2$ και η ακτίνα του είναι 36 cm, τότε η γωνία είναι:
 Α. 200° Β. 100° Γ. 120° Δ. 180°
- 3 Αν διπλασιάσουμε την ακτίνα ενός κύκλου, τότε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα:
 Α. διπλασιάζεται Β. τετραπλασιάζεται Γ. παραμένει αναλλοίωτο Δ. εξαπλασιάζεται

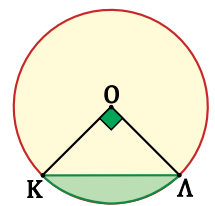


Ασκήσεις και Προβλήματα

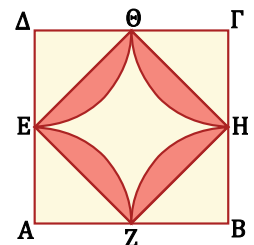
- 1 Να υπολογίσετε το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα γωνίας: **α)** 60° ενός κύκλου $(O, 6 \text{ cm})$, **β)** 30° ενός κύκλου $(O, 13 \text{ cm})$, **γ)** 150° ενός κύκλου $(O, 20 \text{ cm})$.
- 2 Σε κύκλο $(O, 10 \text{ cm})$ ένα τόξο \widehat{AB} έχει μήκος $\pi \text{ cm}$.
α) Να βρείτε σε μοίρες το \widehat{AB} .
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα γωνίας $A\widehat{O}B$.
- 3 Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν στο διπλανό σχήμα, το οποίο αποτελείται από τρία ημικύκλια.
- 4 Το μήκος κύκλου (O_1, ρ_1) είναι διπλάσιο του μήκους κύκλου (O_2, ρ_2) , ενώ το εμβαδόν του (O_1, ρ_1) είναι κατά 243π μεγαλύτερο από το εμβαδόν του κύκλου (O_2, ρ_2) . Να βρείτε τις ακτίνες των δύο κύκλων.



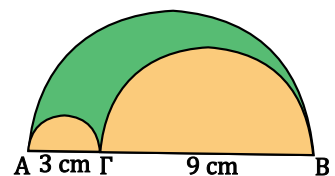
- 5 Να υπολογίσετε το εμβαδόν της πράσινης επιφάνειας, αν ο κύκλος του σχήματος έχει κέντρο O και ακτίνα 10 cm.



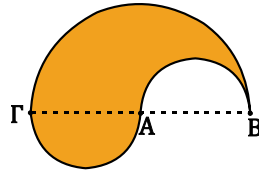
- 6 Αν E, θ, H, Z είναι τα μέσα των πλευρών του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$, πλευράς 14 cm, να υπολογίσετε:
α) Την περίμετρο του κόκκινου σχήματος.
β) Το εμβαδόν του κόκκινου σχήματος.



- 7 Να υπολογίσετε το εμβαδόν του πράσινου χωρίου.

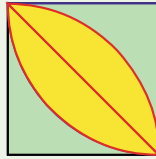


- 8 Να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο του πορτοκαλόχρωμου χωρίου, αν δίνεται ότι $AB = AG = 10$ cm και A το κέντρο του μεγάλου κύκλου.



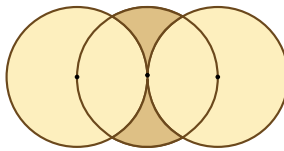
- 9 **Εργασία κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες**

α) Με κέντρα δύο απέναντι κορυφές ενός τετραγώνου πλευράς 2 cm σχεδιάζουμε τεταρτοκύκλια στο εσωτερικό του τετραγώνου. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κοινού κίτρινου μέρους των δύο τεταρτοκυκλίων, όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

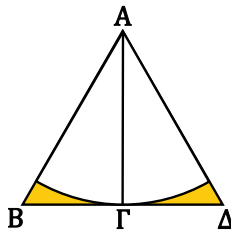


β) Να βρείτε άλλους τρόπους για τον υπολογισμό του κίτρινου εμβαδού.

- 10 Δίνονται τρεις ίσοι κύκλοι όπως φαίνονται στο σχήμα. Να υπολογίσετε με όσο το δυνατό περισσότερους τρόπους το εμβαδόν το οποίο βρίσκεται εντός του μεσαίου κύκλου αλλά εκτός των δύο άλλων κύκλων.



- 11 Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ πλευράς $AB = 12$ cm. Με κέντρο την κορυφή A και ακτίνα το ύψος $A\Gamma$ γράφουμε κύκλο. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της χρωματισμένης επιφάνειας.



- 12 Το εμβαδόν κυκλικού τομέα 30° είναι 12π cm². Να βρείτε το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου στον οποίο ανήκει ο τομέας.

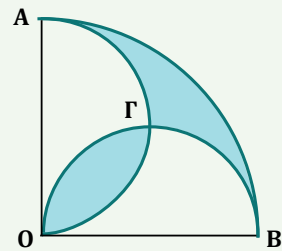
- 13 **Μαθηματική πρόκληση:** Δίνεται τεταρτοκύκλιο AOB . Με διαμέτρους $OA=OB=2$ cm γράφουμε δύο ημικύκλια στο εσωτερικό του τεταρτοκυκλίου, τα οποία τέμνονται στο σημείο Γ .

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B και Γ είναι συνευθειακά.

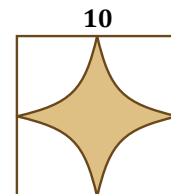
β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τα δύο ημικύκλια είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των κυκλικών τμημάτων που ορίζονται από τις χορδές $A\Gamma$ και $B\Gamma$.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χρωματισμένου «πέλεκου».

Να ελέγξετε τις απαντήσεις σας με αυτές του συμμαθητή σας.



- 14 Να υπολογίσετε το εμβαδόν της χρωματισμένης επιφάνειας του παρακάτω σχήματος.



6.8 Εμβαδόν μεικτόγραμμων σχημάτων

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

Να επιλύουν προβλήματα υπολογισμού εμβαδού μεικτόγραμμων σχημάτων αξιοποιώντας ποικιλία μεθόδων και στρατηγικών.



Διερεύνηση 1. Λύση προβλημάτων με εμβαδά μεικτόγραμμων σχημάτων.

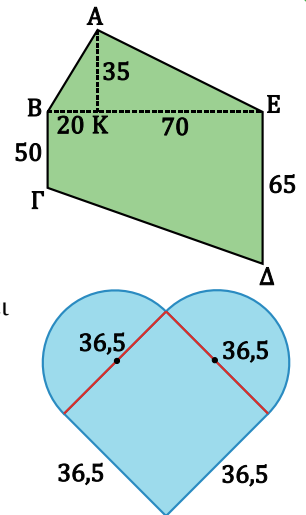
Εργασία μαθητών κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες.

Οι μετρήσεις στα σχήματα δίνονται σε μέτρα (m).

α) Το αγρόκτημα του διπλανού σχήματος πουλήθηκε 9000 €/στρέμμα. Πόσα χρήματα εισέπραξε ο πωλητής;

β) Μία πισίνα με σχήμα καρδιάς, όπως στο σχήμα, σκεπάστηκε με μουσαμά που κοστίζει 12 €/m². Πόσο κόστισε η αγορά μουσαμά για την πισίνα;

Μοιραζόμαστε τις σκέψεις μας στην ολομέλεια της τάξης.



Διερεύνηση 2. Μοντελοποίηση.

Εργασία μαθητών κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες.

Να βρείτε κατά προσέγγιση το εμβαδόν της αφρικανικής ηπείρου από το σχήμα που δίνεται.



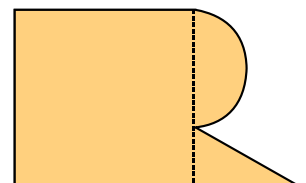
Μαθηματικές Έννοιες και Διεργασίες Μάθησης

Ένα μεικτόγραμμο σχήμα αποτελείται από τρίγωνα, τετράγωνα, παραλληλόγραμμο, τραπέζια, κύκλους, ημικύκλια και ενδεχομένως άλλα επίπεδα σχήματα.

Παράδειγμα: το διπλανό σχήμα είναι μεικτόγραμμο και αποτελείται από ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, ένα ημικύκλιο και ένα τρίγωνο.

- Για να βρούμε την περίμετρο ενός μεικτόγραμμου σχήματος, υπολογίζουμε το μήκος του περιγράμματος που το περιβάλλει.
- Για να βρούμε το εμβαδόν ενός μεικτόγραμμου σχήματος, το διαμερίζουμε σε σχήματα των οποίων μπορούμε να υπολογίσουμε τα εμβαδά τους. Έπειτα προσθέτουμε αυτά τα εμβαδά.

Το εμβαδόν ενός καμπυλόγραμμου ή μεικτόγραμμου χωρίου, ενδεχομένως με πολλές εξοχές και εσοχές (π. χ. μία γεωγραφική περιοχή) μπορεί να προσεγγιστεί από άλλα γνωστά μας σχήματα όπως τρίγωνα, ορθογώνια, παραλληλόγραμμο, τραπέζια ή και συνδυασμούς αυτών.



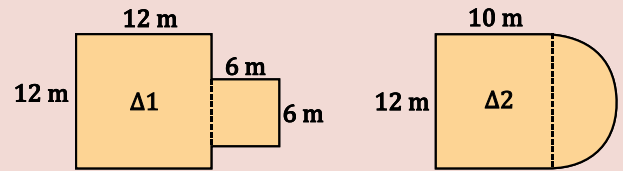
Όταν επιχειρούμε να προσδιορίσουμε το εμβαδόν ενός καμπυλόγραμμου χωρίου προσεγγιστικά με άλλα σχήματα των οποίων μπορούμε να βρούμε το εμβαδόν, τότε κάνουμε μια γραφική μοντελοποίησή τους και βρίσκουμε μία εκτίμηση του πραγματικού εμβαδού αθροίζοντας τα εμβαδά των γνωστών σχημάτων.



Εφαρμογή 1

Σε καθένα από τα δύο δωμάτια Δ1 και Δ2 των οποίων φαίνεται η κάτοψη, θέλουμε να τοποθετήσουμε μοκέτα και μία αυτοκόλλητη μπορντούρα στην άκρη του ταβανιού.

- α) Ποιο δωμάτιο χρειάζεται περισσότερη μοκέτα;
β) Ποιο δωμάτιο χρειάζεται την περισσότερη μπορντούρα;



Απάντηση

Το δωμάτιο Δ1 αποτελείται από δύο τετράγωνα, με πλευρές 12 m και 6 m το καθένα. Άρα, το εμβαδόν του Δ1, είναι:

$$E_{\Delta 1} = 12^2 + 6^2 = 144 + 36 = 180 \text{ (m}^2\text{)}$$

Η περίμετρος του είναι: $\Pi_{\Delta 1} = 12 \cdot 3 + 6 \cdot 3 + (12 - 6) = 36 + 18 + 6 = 60 \text{ (m)}$.

Το δωμάτιο Δ2 αποτελείται από ένα ορθογώνιο, μήκους 12 m και πλάτους 10 m, καθώς και ένα ημικύκλιο διαμέτρου 12 m. Άρα το εμβαδόν το δωματίου Δ2, είναι:

$$E_{\Delta 2} = 12 \cdot 10 + \frac{1}{2}\pi \cdot 6^2 = 120 + 18\pi \approx 120 + 18 \cdot 3,14 = 120 + 56,52 = 176,52 \text{ (m}^2\text{)}$$

Η περίμετρος του είναι: $\Pi_{\Delta 2} = 12 + 2 \cdot 10 + \pi \cdot 6 = 32 + 6\pi \approx 32 + 18,84 = 50,84 \text{ (m)}$.

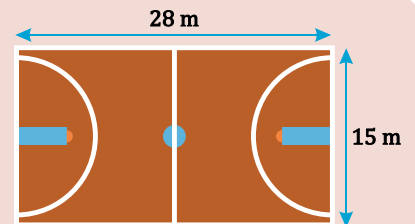
- α) Αφού $E_{\Delta 1} > E_{\Delta 2}$, τότε το Δ1, χρειάζεται περισσότερη μοκέτα.
β) Επειδή $\Pi_{\Delta 1} > \Pi_{\Delta 2}$, το Δ1 χρειάζεται περισσότερη μπορντούρα.



Εφαρμογή 2

Ο κυκλικός δίσκος που βρίσκεται στο κέντρο ενός γηπέδου μπάσκετ έχει ακτίνα $r = 1,5 \text{ m}$ και είναι βαμμένος γαλάζιος. Οι δύο ορθογώνιες περιοχές τέρματος, έχουν πλάτος όσο η διάμετρος του κυκλικού δίσκου και μήκος όσο το $1/7$ του μήκους του γηπέδου. Επίσης τα ημικύκλια στις περιοχές τέρματος έχουν ακτίνα $r = 1 \text{ m}$ και είναι βαμμένα πορτοκαλί. Το γήπεδο για να επισκευασθεί πρέπει πρώτα να τριφτεί το ξύλινο πάτωμα (καφέ χρώμα) από ειδικό συνεργείο και στη συνέχεια να περαστεί με ειδικό βερνίκι. Το συνεργείο χρεώνει 8 ευρώ ανά τετραγωνικό μέτρο για το τρίψιμο και το πέρασμα του βερνικιού. Ένα λίτρο βερνίκι κοστίζει 14 ευρώ και επαρκεί για επιφάνεια 5 τετραγωνικά μέτρα.

- α) Πόσα λίτρα βερνίκι θα χρειαστεί το συνεργείο;
β) Ποια είναι η αμοιβή του συνεργείου και ποιο το συνολικό κόστος επισκευής του γηπέδου;



Απάντηση

α) Το εμβαδόν του ξύλινου πατώματος είναι όσο το εμβαδόν του ορθογώνιου, δηλαδή ολόκληρου του γηπέδου, εξαιρώντας τα χρωματισμένα τμήματα του. Είναι:

$$E_{\text{μπλε επιφ.}} = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{7} 28 + \pi \cdot (1,5)^2 = 24 + 2,25\pi \text{ m}^2, \quad E_{\text{πορτ. επιφ.}} = 2 \cdot \frac{\pi \cdot 1^2}{2} = \pi \text{ (m}^2\text{)}$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα, έχουμε: } E_{\text{ξύλ. επιφ.}} &= 15 \cdot 28 - (E_{\text{μπλε επιφ.}} + E_{\text{πορτ. επιφ.}}) = 420 - (24 + 2,25\pi + \pi) = \\ &= 396 - 3,25\pi \approx 396 - 10,205 = 385,795 \text{ (m}^2\text{)} \end{aligned}$$

Εφόσον κάθε λίτρο βερνικιού καλύπτει 5 m^2 , το συνεργείο θα χρειαστεί:

$$\frac{385,795}{5} = 77,159, \text{ δηλαδή περίπου } 78 \text{ λίτρα βερνίκι.}$$

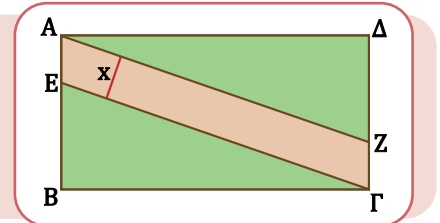
- β) Αφού το συνεργείο χρεώνει με 8 €/m², το κόστος του συνεργείου θα είναι: 8 · 85,795 = 3.086,36 €
 Άρα, συνολικό κόστος = Κόστος συνεργείου + Κόστος βερνικιού =
 = 3.086,36 + 14 · 78 = 3086,36 + 1092 = 4178,36 €



Εφαρμογή 3

Σε ένα χωράφι σχήματος ορθογωνίου, με μήκος 24 m και πλάτος 10,5 m, θέλουμε να φτιάξουμε έναν δρόμο πλάτους x μέτρων, ώστε (ΑΔΖ) = ΑΖΓΕ) = (ΒΓΕ).

- α) Πόσο θα είναι το εμβαδόν κάθε τριγώνου;
 β) Ποιο θα είναι το πλάτος του δρόμου;



Απάντηση

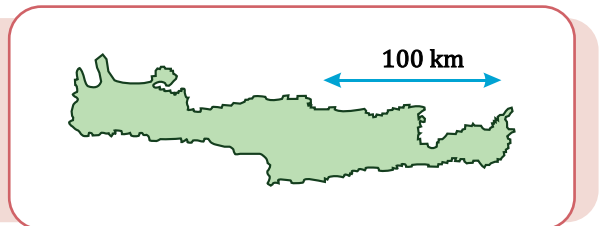
- α) Θέλουμε και τα τρία εμβαδά να είναι ίσα, δηλαδή: (ΕΒΓ) = (ΑΕΓΖ) = (ΑΔΖ).
 Όμως (ΑΒΓΔ) = (ΕΒΓ) + (ΑΕΓΖ) + (ΑΔΖ) = 3 (ΑΔΖ), με (ΑΒΓΔ) = 24 · 10,5 = 252 (m²)
 Άρα: (ΕΒΓ) = (ΑΕΓΖ) = (ΑΔΖ) = $\frac{(ΑΒΓΔ)}{3} = \frac{252}{3} = 84 \text{ (m}^2\text{)}$.
 β) Έχουμε ότι (ΕΒΓ) = 84 m² ή $\frac{1}{2} BE \cdot BG = 84$ ή $\frac{1}{2} BE \cdot 24 = 84$ ή BE = 7 m.

Εξάλλου, σύμφωνα με το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε: ΓΕ² = ΕΒ² + ΒΓ² = 7² + 24² = 625 ή ΓΕ = 25 m.
 Όμως (ΑΕΓΖ) = ΓΕ · x ή 84 = 25 · x ή x = 3,36 m και επομένως το πλάτος του δρόμου θα είναι 3,36 m.



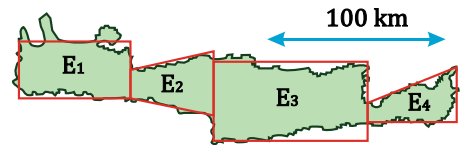
Εφαρμογή 4

Να βρείτε κατά προσέγγιση το εμβαδόν του νησιού της Κρήτης. Να χρησιμοποιήσετε κλίμακα.



Απάντηση

Διαμόρφωση μοντέλου: Επιλέγουμε επίπεδα γεωμετρικά σχήματα έτσι ώστε να καλύπτουν όσο γίνεται μεγαλύτερο εμβαδόν του σχήματος που απεικονίζει την περιοχή της οποίας ζητάμε το εμβαδόν και των οποίων μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν. Στη συγκεκριμένη περίπτωση καλύπτουμε την επιφάνεια του νησιού με δύο ορθογώνια και δύο τραπέζια, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Εύρεση της λύσης στο μοντέλο: Μετρούμε τα μήκη στην εικόνα σε κλίμακα έτσι ώστε 1 mm στην εικόνα να αντιστοιχεί σε 5 km στην πραγματικότητα. Με αυτές τις μετρήσεις υπολογίζοντας τα εμβαδά των μοντέλων ορθογωνίων και τραπεζίων, έχουμε:

$$E_1 = 65 \cdot 35 = 2275 \text{ km}^2, E_2 = \frac{40+15}{2} \cdot 45 \approx 1238 \text{ km}^2, E_3 = 90 \cdot 45 = 4050 \text{ km}^2 \text{ και } E_4 = \frac{30+10}{2} \cdot 50 = 1000 \text{ km}^2.$$

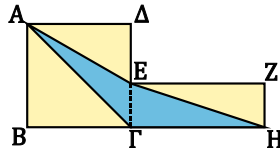
Άρα μια εκτίμηση του εμβαδού του νησιού της Κρήτης είναι: $E_{ολ} \approx E_1 + E_2 + E_3 + E_4 \approx 8563 \text{ km}^2$.

Έλεγχος των λύσεων: Η Κρήτη έχει πραγματική έκταση 8336 km². Η λύση που βρέθηκε είναι 8563 km² και αποκλίνει από την ακριβή τιμή κατά περίπου 200 km² (δηλ. λιγότερο από 2,5%. Επομένως, είναι μία καλή προσέγγιση.

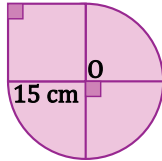


Ασκήσεις και Προβλήματα

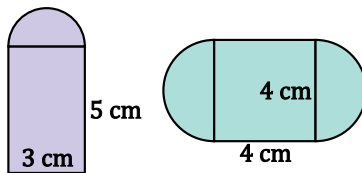
- 1 Το διπλανό σχήμα αποτελείται από ένα τετράγωνο πλευράς 7 m και από ένα ορθογώνιο μήκους 9 m και πλάτους 3 m. Να βρείτε το εμβαδόν του μπλε χωρίου.



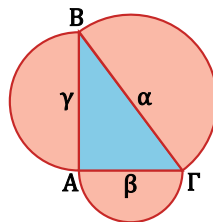
- 2 Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του διπλανού σχήματος.



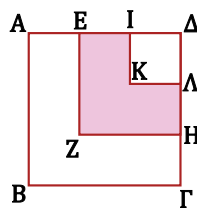
- 3 Να υπολογίσετε το εμβαδόν των σχημάτων.



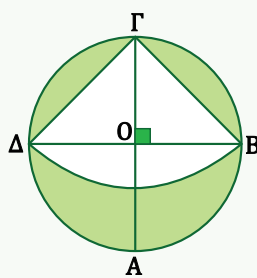
- 4 Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν στο διπλανό σχήμα, αν $\beta = 3$ cm και $\gamma = 4$ cm.



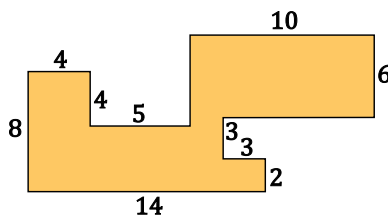
- 5 Αν $AB\Gamma\Delta$, $EZH\Delta$, $IK\Lambda\Delta$ είναι τετράγωνα και $AE = EI = I\Delta = \Delta\Lambda = \Delta H = H\Gamma = 3$ cm, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χρωματισμένου σχήματος.



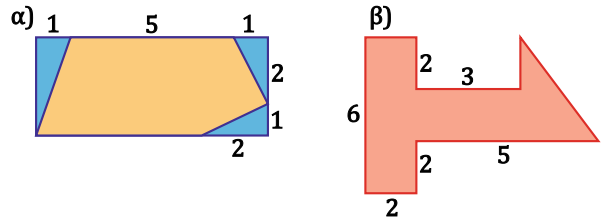
- 6 **Εργασία κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του πράσινου χωρίου στο διπλανό σχήμα αν γνωρίζετε ότι ο κύκλος κέντρου O , έχει ακτίνα 4 cm.



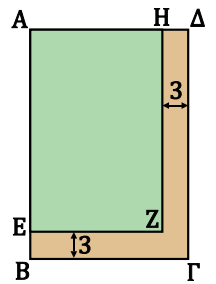
- 7 Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σχήματος. Οι μετρήσεις έχουν γίνει σε εκατοστά (cm).



- 8 Να υπολογίσετε το εμβαδόν κάθε σχήματος. Οι μετρήσεις έχουν γίνει σε εκατοστά (cm).

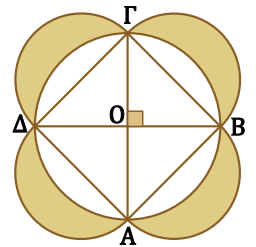


- 9 Στο οικόπεδο $AB\Gamma\Delta$ σχήματος ορθογωνίου, λόγω απαλλοτρίωσης, ανοίχτηκε κατά μήκος της πλευράς $B\Gamma$ ένας δρόμος πλάτους 3 m, με αποτέλεσμα να ελαττωθεί το εμβαδόν του οικοπέδου κατά 90 (m^2). Στη συνέχεια, κατά μήκος της πλευράς $\Gamma\Delta$, ανοίχτηκε επιπλέον δρόμος πλάτους 3 m, με αποτέλεσμα να ελαττωθεί το εμβαδόν του οικοπέδου κατά 111 (m^2) ακόμη. Να υπολογίσετε το αρχικό εμβαδόν του οικοπέδου.



- 10 Στον κύκλο $(O, 8$ cm) είναι εγγεγραμμένο τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$.

- α) Να υπολογίσετε την πλευρά του τετραγώνου.
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χρωματισμένου χωρίου.



- 11 **Ανοιχτό πρόβλημα.** Χρησιμοποιώντας διαφορετικά μοντέλα να βρείτε δύο τρόπους για την εκτίμηση του εμβαδού της Πελοποννήσου. Ποιος από τους δύο τρόπους αποκλίνει λιγότερο από το πραγματικό εμβαδόν; Να χρησιμοποιήσετε κλίμακα.

6.9 Εμβαδόν και Πυθαγόρειο Θεώρημα

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

Να αξιοποιούν την έννοια του εμβαδού για την εξήγηση του Πυθαγόρειου Θεωρήματος.

Όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 4, το Πυθαγόρειο Θεώρημα συνδέεται άμεσα με τα εμβαδά των τετραγώνων των πλευρών. Μπορούμε με τα εμβαδά να εξηγήσουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα και να το χρησιμοποιούμε σε προβλήματα που έχουν σχέση με εμβαδά.



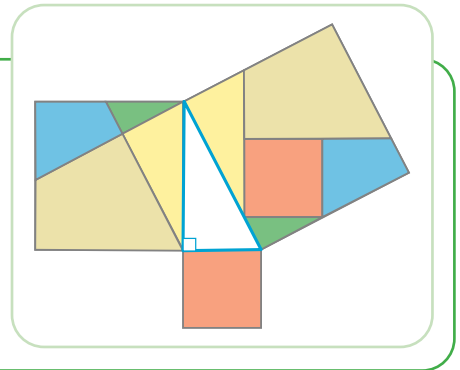
Διερεύνηση. Απόδειξη χωρίς λόγια.

Εργασία μαθητών κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες.

Το λευκό τρίγωνο του σχήματος είναι ορθογώνιο. Να παρατηρήσετε προσεκτικά στο διπλανό σχήμα τα εμβαδά των τετραγώνων στις πλευρές του ορθογώνιου τριγώνου και να βρείτε με ποιο τρόπο συνδέονται τα εμβαδά των τριών τετραγώνων. Να διατυπώσετε με λόγια το συμπέρασμά σας.

Συνδέεται με γνωστή πρόταση; Να εξηγήσετε αναλυτικά πώς σκεφτήκατε.

Να κατασκευάσετε τα πολύχρωμα σχήματα στα δύο μικρότερα τετράγωνα και να εξετάσετε αν καλύπτουν το μεγάλο τετράγωνο.



Μαθηματικές Έννοιες και Διεργασίες Μάθησης

Αν ΑΒΓ ορθογώνιο τρίγωνο με ορθή γωνία \widehat{A} , τότε σύμφωνα με το Πυθαγόρειο Θεώρημα: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$. Επειδή τα $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$, εκφράζουν εμβαδά τετραγώνων με πλευρές α, β, γ αντίστοιχα, μια γεωμετρική εξήγηση του Πυθαγόρειου Θεωρήματος μπορεί να δοθεί με τη χρήση εμβαδών.

Συγκεκριμένα, σχεδιάζουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (τ) με πλευρές α, β, γ και δημιουργούμε άλλα επτά αντίγραφα του, οπότε έχουμε οχτώ συνολικά ίσα τρίγωνα (τ).

Στη συνέχεια σχεδιάζουμε τρία τετράγωνα με πλευρές, τις πλευρές α, β, γ του τριγώνου (σχήμα 1).

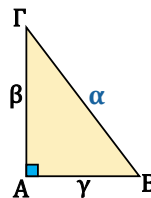
Κόβουμε τα οχτώ τρίγωνα και τα διατάσσουμε όπως φαίνεται στο σχήμα (2).

Παρατηρούμε στο σχήμα (2) ότι έχουν δημιουργηθεί δύο νέα ίσα τετράγωνα με πλευρά $\beta + \gamma$, τα οποία προφανώς έχουν ίσα εμβαδά.

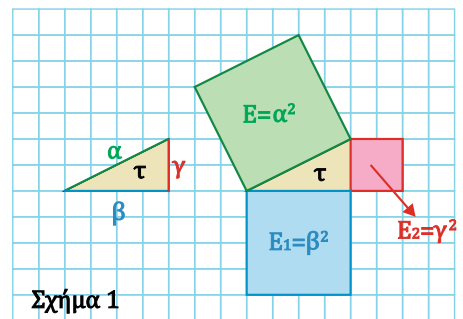
Αν από καθένα από τα ίσα τετράγωνα αφαιρέσουμε τα τέσσερα ίσα τρίγωνα τότε τα εμβαδά που απομένουν σε καθένα από τα ίσα τετράγωνα θα είναι ίσα.

Άρα: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$

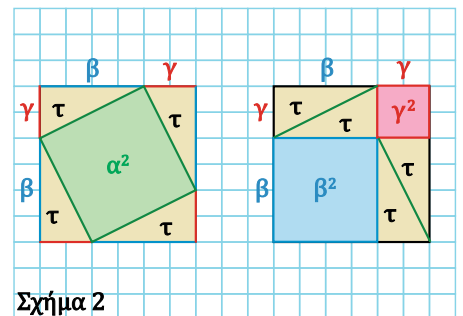
Υπάρχουν εκατοντάδες αποδείξεις του Πυθαγόρειου Θεωρήματος. Κάποιες από αυτές είναι αρκετά πολύπλοκες ενώ κάποιες άλλες είναι εντυπωσιακές για την απλότητά τους.



Με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής, να εξηγήσετε το Πυθαγόρειο Θεώρημα με αναδιατάξεις σχημάτων.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Να μελετήσετε το υλικό και να κάνετε την *Εργασία με προεκτάσεις*: «Η μαγεία των αρίφνητων θαυμαστών αποδείξεων του Πυθαγόρειου Θεωρήματος».

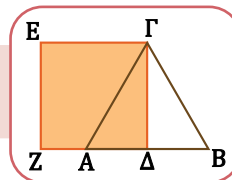


Με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής να εξηγήσετε το Πυθαγόρειο Θεώρημα ακολουθώντας την ιδέα του Τζέιμς Γκάρφιλντ.



Εφαρμογή

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς 10 cm, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν ΓΔ είναι το ύψος του τριγώνου, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραγώνου ΓΔΖΕ.



Απάντηση

Αφού το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο ($AB = BG = GA = 10$ cm), τότε το ύψος του θα είναι και διάμεσος. Άρα $\Delta B = \frac{AB}{2} = 5$ cm. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΒΓΔ προκύπτει:

$$BG^2 = \Delta B^2 + \Delta G^2 \text{ ή } \Delta G^2 = BG^2 - \Delta B^2 \text{ ή } \Delta G^2 = 10^2 - 5^2 \text{ ή } \Delta G^2 = 75$$

Το ΓΔΖΕ είναι τετράγωνο, οπότε $(\Gamma\Delta Z E) = \Delta G^2$ και επομένως $(\Gamma\Delta Z E) = 75$ (cm²).



Να ανοίξετε τον σύνδεσμο και να απαντήσετε τις ερωτήσεις αξιολόγησης.

Ερωτήσεις για Αξιολόγηση

Στις παρακάτω ερωτήσεις να βάλετε σε κύκλο το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση:

- 1 Δίνεται το διπλανό σχήμα με $\Delta\Delta = 15$ cm, $A\Gamma = 12$ cm, $AB = 5$ cm.

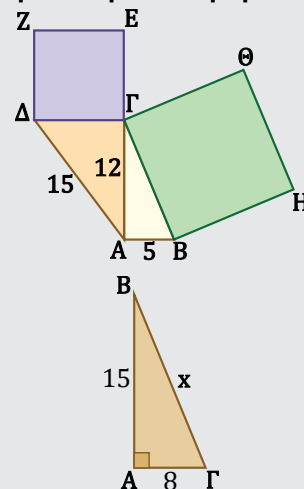
Το εμβαδόν του μπλε σχήματος είναι:

- A. $(Z\Delta\Gamma E) = 169$ cm²,
 B. $(Z\Delta\Gamma E) = 25$ cm²,
 Γ. $(Z\Delta\Gamma E) = 81$ cm².

- 2 Το διπλανό τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

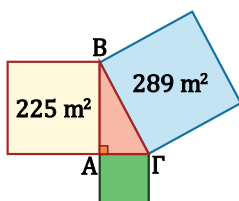
Η υποτείνουσα του, είναι ίση με:

- A. $x = 18$ B. $x = 17$ Γ. $x = 10$ Δ. $x = 16$.



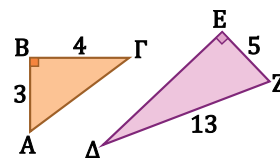
Ασκήσεις και Προβλήματα

- 1 Να υπολογίσετε το εμβαδόν του πράσινου τετραγώνου.



- 2 Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ορθογώνια. Να υπολογίσετε το εμβαδόν τετραγώνου με πλευρά:

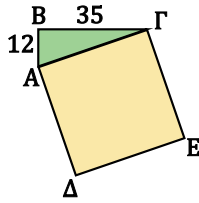
α) ΑΓ, β) ΕΔ.



Να κάνετε την *Εργασία με προεκτάσεις*: «Πορίσματα του Πυθαγόρειου Θεωρήματος».



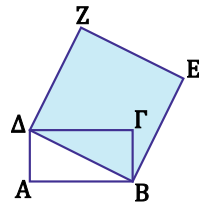
3 Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κίτρινου τετραγώνου. Οι μετρήσεις δίνονται σε εκατοστά (cm).



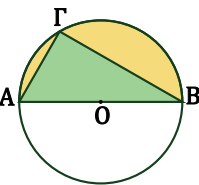
4 Η περίμετρος ενός ισοσκελούς τραπεζιού είναι 64 cm και η μία από τις ίσες πλευρές του είναι 15 cm. Αν το ύψος του είναι 12 cm, να υπολογίσετε το εμβαδόν του.



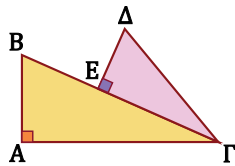
5 Δίνεται το διπλανό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ABΓΔ, με πλευρά AB = 10 cm και εμβαδόν 40 cm². Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραγώνου ΔΒΕΖ, όπου ΔΒ είναι η μία διαγώνιος του παραλληλογράμμου.



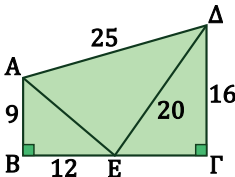
6 Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κίτρινου χωρίου, αν η AB είναι διάμετρος του κύκλου, η ακτίνα του είναι OA = 5 cm και η χορδή ΒΓ = 8 cm.



7 Στο διπλανό σχήμα δίνονται ΑΓ = 12 cm, ΓΕ = 8 cm, EB = 5 cm και ΕΔ = 6 cm. Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του σχήματος.

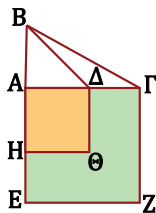


8 Στο διπλανό σχήμα δίνονται: AB = 9 cm, BE = 12 cm, ΓΔ = 16 cm, ΑΔ = 25 cm, ΕΔ = 20 cm.



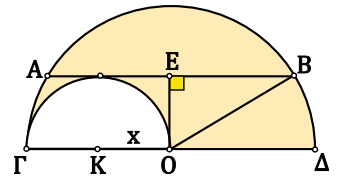
- α) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών ΕΓ και ΕΑ.
- β) Είναι το τρίγωνο ΑΕΔ ορθογώνιο;
- γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τραπεζιού ΑΒΓΔ.

9 Στο διπλανό σχήμα τα ΑΕΖΓ και ΑΗΘΔ είναι τετράγωνα. Επίσης, δίνονται AB = 15 m, ΒΔ = 25 m, ΒΓ = 39 m. Να βρείτε:



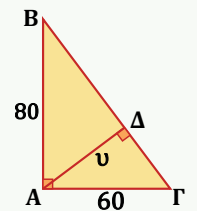
- α) Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΔΓ.
- β) Το εμβαδόν του πράσινου χωρίου.

10 Στο διπλανό σχήμα δίνονται δύο ημικύκλια με κέντρα Ο και Κ. Η χορδή AB του μεγάλου ημικυκλίου είναι εφαπτομένη στο μικρό ημικύκλιο και είναι παράλληλη στη διάμετρο ΓΔ του μεγάλου. Έστω AB = 12 cm και η OE είναι κάθετη στη AB.



- α) Να αποδείξετε ότι EB = 6 cm.
- β) Αν KO = x, να εκφράσετε τις OB και OE συναρτήσει του x. Να βρείτε το x.
- γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χρωματισμένου χωρίου.

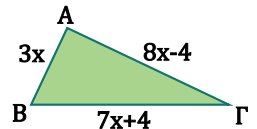
11 **Εργασία κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με κάθετες AB = 80 και ΑΓ = 60. Να υπολογίσετε:



- α) Την υποτεινούσα ΒΓ.
- β) Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.
- γ) Το ύψος ΑΔ.
- δ) Τα τμήματα ΔΒ και ΔΓ.

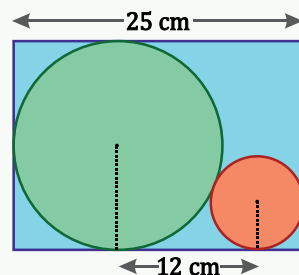
12 Το εμβαδόν ενός ισοπλεύρου τριγώνου είναι $36\sqrt{3}$. Να βρείτε την πλευρά α και το ύψος υ του τριγώνου.

13 Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με περίμετρο 90 cm και πλευρές όπως φαίνονται στο διπλανό σχήμα:



- α) Να βρείτε την τιμή της μεταβλητής x.
- β) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών ΑΒ, ΒΓ και ΑΓ.
- γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

14 **Μαθηματική πρόκληση. Εργασία κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες.** Να υπολογίσετε το μπλε εμβαδόν.



Να ανοίξετε την εφαρμογή «ΓΛΩΣΣΑΡΙ: ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ» για να ανακεφαλαιώσετε όρους και έννοιες τις οποίες γνωρίσατε σε αυτό το κεφάλαιο.

6.10

Ανακεφαλαίωση και διεύρυνση της θεματικής ενότητας

Το μήκος του κύκλου το συμβολίζουμε με L και υπολογίζεται: $L = \pi \cdot \delta$ ή $L = 2 \cdot \pi \cdot \rho$, όπου δ είναι η διάμετρος του και ρ η ακτίνα του.

Ακτίνιο ή rad ονομάζουμε εκείνο το τόξο κύκλου (O, ρ) , που έχει μήκος ίσο με την ακτίνα ρ .

Το μήκος S τόξου μ° , κύκλου ακτίνας ρ δίνεται από τον τύπο: $S = \frac{\pi \rho \mu}{180}$

Ίσα τόξα είναι εκείνα που ανήκουν στον ίδιο κύκλο ή σε κύκλους με ίσες ακτίνες και οι αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες τους είναι ίσες.

Εμβαδόν μιας επίπεδης επιφάνειας είναι ο θετικός αριθμός, ο οποίος εκφράζει την έκταση που καταλαμβάνει η επιφάνεια αυτή στο επίπεδο, και εξαρτάται από την επιλεγμένη μονάδα μέτρησης.

Περίμετρος ενός σχήματος ονομάζεται το άθροισμα όλων των μηκών των πλευρών του.

- Το εμβαδόν τετραγώνου με πλευρά α είναι ίσο με α^2 .
- Το εμβαδόν ορθογώνιου με πλευρές α και β είναι ίσο με $\alpha \cdot \beta$.
- Το εμβαδόν παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο μίας βάσης του επί το αντίστοιχο ύψος.
- Το εμβαδόν τριγώνου είναι ίσο με το μισό του γινομένου μίας βάσης (πλευράς) επί το αντίστοιχο ύψος.
- Το εμβαδόν τραπεζίου είναι ίσο με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεων επί το ύψος του.
- Το εμβαδόν κυκλικού δίσκου με ακτίνα ρ είναι: $E = \pi \rho^2$.

Κυκλικός τομέας γωνίας μ° κύκλου (O, ρ) λέγεται η τομή του κυκλικού δίσκου με την επίκεντρη γωνία μ° .

Κυκλικό τμήμα λέγεται καθένα από τα δύο μέρη στα οποία χωρίζει τον κυκλικό δίσκο μία χορδή του κύκλου.

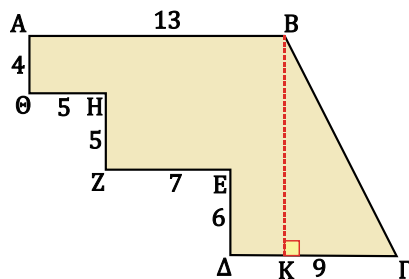
Το εμβαδόν κυκλικού τομέα μ° , κύκλου ακτίνας ρ είναι: $E_{\text{κυκλικού τομέα}} = \frac{\pi \rho^2 \mu}{360}$

Το εμβαδόν κυκλικού τομέα με μήκος αντίστοιχου τόξου S , κύκλου ακτίνας ρ είναι: $E_{\text{κυκλικού τομέα}} = \frac{1}{2} \cdot S \cdot \rho$.

Επαναληπτικά Έργα & Προεκτάσεις

- 1 Στο σχήμα φαίνεται το διάγραμμα ενός οικοπέδου που έχει πλευρές:

$AB = 13$ m,
 $A\theta = 4$ m,
 $\theta H = HZ = 5$ m,
 $ZE = 7$ m,
 $E\Delta = 6$ m,
 $\Delta\Gamma = 9$ m
 και ΓB .



Ο ιδιοκτήτης του οικοπέδου ζήτησε από τον μηχανικό του να χαράξει ένα ευθύγραμμο τμήμα BK κάθετο στην πλευρά $\Gamma\Delta$ προκειμένου στο εσωτερικό του τριγωνικού μέρους $BK\Gamma$ να κατασκευαστεί θερμοκήπιο. Να βρείτε:

- α) Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος BK .
 β) Το εμβαδόν του τριγώνου $BK\Gamma$ όπου θα κατασκευαστεί το θερμοκήπιο.
 γ) Για να γίνουν οι εργασίες στο οικοπέδο ο μηχανικός ζητά να το περιφράξουν. Πόσα μέτρα (m) πλέγματος χρειάζεται για να γίνει η περίφραξη;

- 2 **Εργασία κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες.** Σε ένα τετράγωνο πλευράς 60 m ελαττώνουμε τη μια πλευρά κατά 10 m και αυξάνουμε την άλλη κατά 10 m και σχηματίζουμε ένα ορθογώνιο.

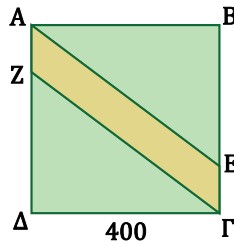
- α) Η περίμετρος του ορθογώνιου είναι μεγαλύτερη, ίση ή μικρότερη από την περίμετρο του τετραγώνου;

Να κάνετε την Εργασία με προεκτάσεις: «Οστομάχιον: Το παζλ του Αρχιμήδη».



- β) Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι μεγαλύτερο, ίσο ή μικρότερο από το εμβαδόν του τετραγώνου;
- γ) Να γενικεύσετε το πρόβλημα.

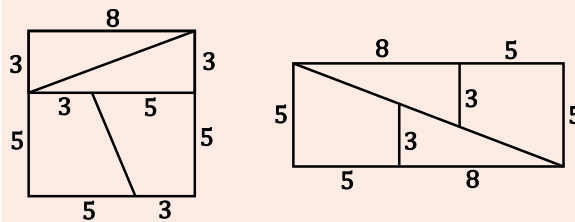
- 3 Ένα αγρόκτημα σχήματος τετραγώνου ΑΒΓΔ με πλευρά 400 m διασχίστηκε διαγωνίως από τον δρόμο που φαίνεται στο σχήμα. Αν ο δρόμος καλύπτει το 25% του αγροκτήματος να υπολογίσετε:



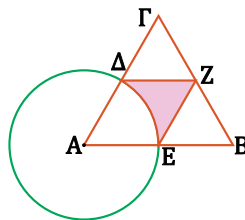
- α) Το εμβαδόν του δρόμου.
- β) Γιατί το $AB \cdot BE$ παριστάνει το 75% του εμβαδού του αγροκτήματος;
- γ) Να βρείτε τα τμήματα BE και ΕΓ και έπειτα το πλάτος του δρόμου.

4 Μαθηματική πρόκληση.

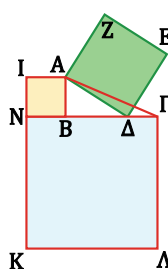
Τα μήκη είναι σε εκατοστά. Το εμβαδόν του τετραγώνου είναι $8 \times 8 = 64 \text{ cm}^2$. Τα μέρη αναδιατάσσονται για να σχηματίσουν ένα ορθογώνιο. Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $5 \times 13 = 65 \text{ cm}^2$. Θα πρέπει να είναι 64 cm^2 ! Πού είναι το επιπλέον 1 cm^2 ;



- 5 Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς $AB = 10 \text{ cm}$. Γράφουμε κύκλο (Α, 5 cm), ο οποίος τέμνει τις πλευρές του τριγώνου ΑΒ και ΑΓ, στα σημεία Ε και Δ αντίστοιχα. Αν υποθέσουμε ότι το Ζ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ του ισόπλευρου τριγώνου, τότε να υπολογίσετε το εμβαδόν του χρωματισμένου χωρίου.



- 6 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 90^\circ$. Τα ΚΛΓΝ και ΑΒΝΙ είναι τετράγωνα. Αν $(ΚΛΓΝ) = 289 \text{ m}^2$ και $(ΑΒΝΙ) = 25 \text{ m}^2$ και $BD = \frac{2}{3} BG$, τότε να υπολογίσετε:

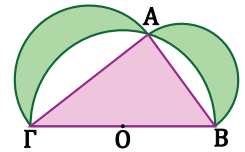


- α) Τις πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου.

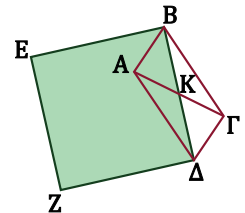
- β) Το εμβαδόν του πράσινου τετραγώνου χωρίου.

- 7 Ένα οικοπέδο έχει σχήμα τραapeζίου και αγοράστηκε από έναν κτηματία προς 1000 € το τετραγωνικό μέτρο και κόστισε 1.000.000 €. Αν οι δύο παράλληλες πλευρές του οικοπέδου ήταν 75 m και 85 m αντίστοιχα, να υπολογίσετε την ευθεία που συνδέει τις δύο παράλληλες πλευρές και είναι κάθετη σ' αυτές (ύψος).

- 8 Το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος είναι εγγεγραμμένο σε ημικύκλιο. Έξω από το τρίγωνο έχουμε γράψει τα ημικύκλια με διαμέτρους $AB = 8 \text{ m}$ και $AG = 6 \text{ m}$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της πράσινης επιφάνειας.



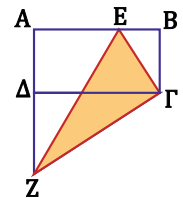
- 9 Δίνεται τετράγωνο ΕΖΔΒ και παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, με $AB = 5 \text{ cm}$, $AG = 12 \text{ cm}$ και $BG = 13 \text{ cm}$.



- α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου.
- β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΔΒ.

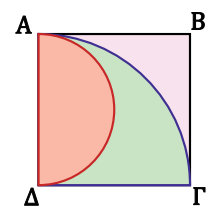
- 10 Σε παραλληλόγραμμο η μία πλευρά είναι τα $\frac{3}{4}$ της άλλης και η περίμετρός του είναι 49 cm. Αν το εμβαδόν του είναι 84 cm^2 , να βρείτε το ύψος που αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη πλευρά.

- 11 Θεωρούμε ορθογώνιο ΑΒΓΔ με $AD = 12 \text{ cm}$ και ΑΒ διπλάσια της ΑΔ. Στην πλευρά ΑΒ θεωρούμε σημείο Ε με $EB = \frac{1}{3} AB$ και στην προέκτασή της ΑΔ θεωρούμε σημείο Ζ με $DZ = 2 \cdot EB$.



- α) Να υπολογίσετε το $(\Delta ΔΓΕ)$.
- β) Να υπολογίσετε τα EG^2 , ZG^2 και EZ^2 .
- γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΕΖΓ είναι ορθογώνιο.
- δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν $(EZΓ)$.

- 12 Στο τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 10 cm του διπλανού σχήματος, γράφουμε τεταρτοκύκλιο εσωτερικά του τετραγώνου με κέντρο Δ και ακτίνα ΔΓ.



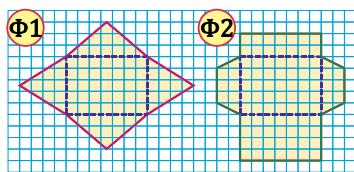
- α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τεταρτοκυκλίου.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου του τετραγώνου που βρίσκεται εξωτερικά του τεταρτοκυκλίου (ροζ χωρίο).

γ) Με διάμετρο ΑΔ κατασκευάζουμε ημικύκλιο εσωτερικά του τετραγώνου. Να συγκρίνετε τα εμβαδά των τριών χρωματισμένων χωρίων.

13 Ένα δωμάτιο σχήματος τετραγώνου έχει περίμετρο 108 m. Θέλουμε να στρώσουμε το δωμάτιο αυτό με πλακάκια. Αν το κάθε πλακάκι έχει εμβαδόν $0,25 \text{ m}^2$, πόσα πλακάκια θα χρειαστούν και πόσο θα στοιχίσει αν το κάθε πλακάκι κοστίζει 1,17 €;

14 Καλείστε να αποφασίσετε μεταξύ δύο σχεδίων φακέλων Φ1 και Φ2, που φαίνονται στο διπλανό σχήμα.

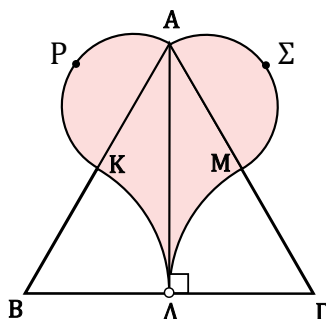


Κάθε τετραγωνάκι έχει πλευρά 1 cm:

α) Να βρείτε ποιος φάκελος χρειάζεται το περισσότερο χαρτί για την κατασκευή του;

β) Αν φτιάξουμε 1000 φακέλους με το σχέδιο που χρειάζεται περισσότερο χαρτί, πόσους φακέλους περισσότερους θα φτιάξουμε με το σχέδιο που απαιτεί το λιγότερο χαρτί;

15 Σε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΒΓ = ΓΑ = 12 cm) θεωρούμε τα μέσα Κ, Λ και Μ των ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ αντιστοίχως. Με διαμέτρους ΑΚ και ΑΜ κατασκευάζουμε ημικύκλια στο εξωτερικό του



τριγώνου. Επίσης με κέντρα τα σημεία Β και Γ και ακτίνα $\rho = \frac{AB}{2}$ γράφουμε τα τόξα $\widehat{ΚΛ}$ και $\widehat{ΛΜ}$ στο εσωτερικό του τριγώνου. Ολόκληρη η κατασκευή φαίνεται στο σχήμα.

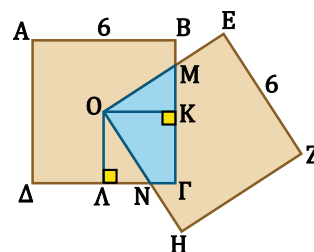
α) Να υπολογίσετε το ύψος ΑΛ του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ.

β) Να υπολογίσετε την περίμετρο του χρωματισμένου σχήματος ΑΚΛΜΑ.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου ΑΚΛΜΑ. (καρδιάς)

16 Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ κέντρου Ο με πλευρά ΑΒ = 6 cm. Κατασκευάζουμε δεύτερο τετράγωνο ΟΕΖΗ με πλευρά ΕΖ = 6 cm. Τα δύο τετράγωνα τέμνονται στα σημεία Μ και Ν. Φέρνουμε: $OK \perp BG$ και $OL \perp GD$.

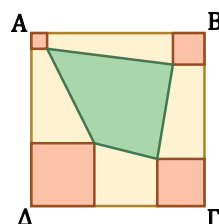
α) Να αποδείξετε ότι το ΟΚΓΛ είναι τετράγωνο και να βρείτε το εμβαδόν του.



β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΚΜ και ΟΛΝ έχουν ίσα εμβαδά.

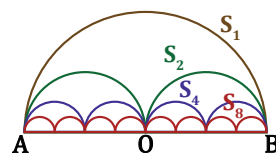
γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του συνολικού χωρίου ΑΒΜΕΖΗΝΔΑ.

17 Το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς 11 και τα γωνιακά τετράπλευρα με κορυφές Α, Β, Γ, Δ είναι τετράγωνα με πλευρές 1, 2, 3, και 4 αντιστοίχα. Ποιο είναι το εμβαδόν του πράσινου τετραπλεύρου;



18 Μαθηματική πρόκληση.

Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ = 2 cm. Χωρίζουμε τη διάμετρο σε δύο, τέσσερα, οκτώ, ίσα τμήματα.

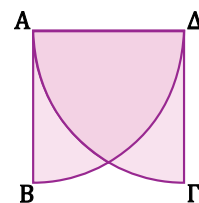


Γράφουμε διαδοχικά ημικύκλια στο εσωτερικό του αρχικού ημικυκλίου με διαμέτρους τα τμήματα αυτά όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

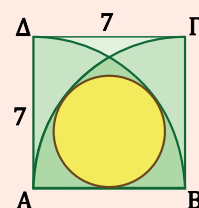
α) Να βρείτε το άθροισμα των μηκών των εκάστοτε ίσων ημικυκλίων.

β) Ο Αγησίλαος ισχυρίζεται ότι αν χωρίσουμε τη διάμετρο σε 1024 ίσα τμήματα, τότε το άθροισμα των μηκών των αντίστοιχων ημικυκλίων, θα είναι περίπου ίσο με τη διάμετρο του αρχικού ημικυκλίου. Συμφωνείτε; Να αιτιολογήσετε.

19 Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κοινού μέρους δύο τεταρτοκυκλίων αν αυτά τοποθετηθούν όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



20 Εργασία κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες. Να βρείτε το μήκος του κίτρινου κύκλου. Οι μετρήσεις δίνονται σε εκατοστά.



Να ανοίξετε την εφαρμογή «ΓΛΩΣΣΑΡΙ: ΣΥΝΟΛΙΚΟ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ» για να ανακεφαλιώσετε όρους και έννοιες τις οποίες γνωρίσατε στα κεφάλαια 4, 5, 6.

Στοχαστικά Μαθηματικά

Κεφάλαιο

7

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Χρονοδιαγράμματα

Απλά θηκογράμματα

Μεταβλητότητα

Παραπλανητικά
διαγράμματα



Στο Κεφάλαιο αυτό θα μάθουμε:

- Να διατυπώνουμε στατιστικές ερωτήσεις και να διαχειριζόμαστε δεδομένα, για να δώσουμε απαντήσεις.
- Να χρησιμοποιούμε χρονοδιαγράμματα, την «περίληψη των πέντε αριθμών», θηκογράμματα, τη μέση τιμή, τη διάμεσο, το 1ο και 3ο τεταρτημόριο, καθώς και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος στην επίλυση στατιστικών προβλημάτων.
- Να διερευνούμε τα μέτρα θέσης και μεταβλητότητας.
- Να αξιολογούμε συμπεράσματα και παραπλανητικές χρήσεις των διαγραμμάτων.

7.1 Απογραφικά Δεδομένα και χρονοδιαγράμματα

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

- Να διατυπώνουν ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με απογραφικά χρονικά δεδομένα.
- Να συλλέγουν χρονικά δεδομένα που προκύπτουν από επαναλαμβανόμενες μετρήσεις κάποιου χαρακτηριστικού.
- Να κατασκευάζουν χρονοδιαγράμματα για χρονικά δεδομένα.

Τα σύγχρονα κράτη διαθέτουν ειδικές υπηρεσίες που ασχολούνται με τη συγκέντρωση δεδομένων και την καταγραφή στοιχείων. Στη χώρα μας η Ελληνική Στατιστική Αρχή (ΕΛΣΤΑΤ) διενεργεί έρευνες για διάφορους τομείς της κοινωνικής και οικονομικής ζωής, καθώς και για την εκπαίδευση κάθε 10 χρόνια στον πληθυσμό. Τα στοιχεία που συλλέγονται υποβάλλονται σε επεξεργασία και παρουσιάζονται συνήθως σε μορφή πινάκων και αποτελούν τα στατιστικά δεδομένα, όπως λέγονται. Η ΕΛΣΤΑΤ σχεδίασε και έθεσε σε λειτουργία το εκπαιδευτικό πρόγραμμα «Απογραφή στο Σχολείο» το οποίο αποσκοπεί στη μύηση των μαθητών στη διενέργεια στατιστικής απογραφικής έρευνας (<https://www.statistics.gr/census-at-school>) και υλοποιείται σε πολλές χώρες. Αναμφίβολα, μπορείτε κι εσείς να θέσετε κατάλληλες ερευνητικές ερωτήσεις και να κάνετε τις δικές σας μικρής κλίμακας στατιστικές έρευνες.

Να μελετήσετε το Ιστορικό σημείωμα: «Η Ιστορία της Στατιστικής: ένα ταξίδι χιλιετιών».



Διερεύνηση 1. Διατύπωση στατιστικών ερωτήσεων.

Εργασία μαθητών κατά ζεύγη.

Οι παρακάτω ομάδες μαθητών της Β΄ Γυμνασίου διατύπωσαν τις ακόλουθες ερωτήσεις:

- **Ομάδα Α:** Πόσα χρήματα ξόδεψε κάθε μαθητής της Β΄ Τάξης την περασμένη εβδομάδα στο κυλικείο του σχολείου
- **Ομάδα Β:** Πώς μεταβάλλεται το ύψος μίας φασολιάς που βρίσκεται σε φωτεινό περιβάλλον κατά τη διάρκεια δεκαπέντε ημερών;
- **Ομάδα Γ:** Πόσες χώρες υπάρχουν στην Ευρωπαϊκή Ένωση;
- **Ομάδα Δ:** Πόσα ενεργά ηφαίστεια υπήρχαν στον πλανήτη ανά δεκαετία κατά τα τελευταία 100 χρόνια;
- **Ομάδα Ε:** Πόσες μέρες είναι φέτος οι διακοπές των Χριστουγέννων;
- **Ομάδα ΣΤ:** Ποιος είναι ο πιο δημοφιλής καθηγητής στο σχολείο σας;

Ποιες από τις ερωτήσεις των ομάδων είναι στατιστικές ερωτήσεις και ποιες όχι;

Ποιες από τις στατιστικές ερωτήσεις μπορούν να απαντηθούν με χρονικά δεδομένα;

Συγκρίνουμε τις απαντήσεις μας με εκείνες του συμμαθητή μας παραθέτοντας επιχειρήματα. Στη συνέχεια ανταλλάσσουμε επιχειρήματα στην ολομέλεια της τάξης.



Να ανοίξετε τον σύνδεσμο και να απαντήσετε στις ερωτήσεις Σωστού-Λάθους για να αναγνωρίζετε τις στατιστικές ερωτήσεις.





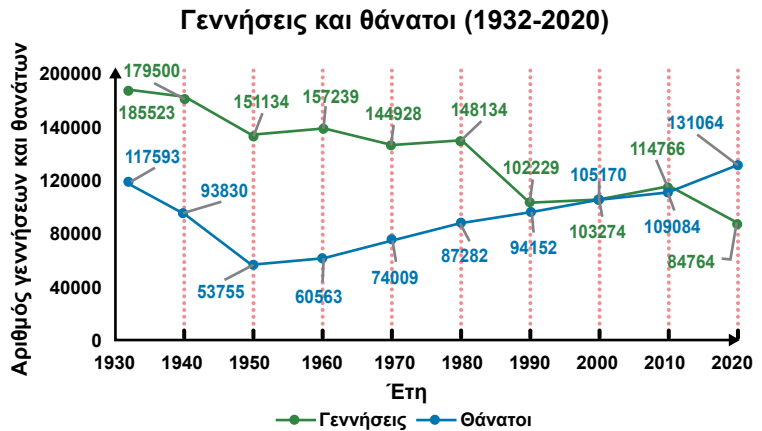
Διερεύνηση 2. Εξέλιξη γεννήσεων και θανάτων.

Εργασία μαθητών κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες.

Το παρακάτω χρονοδιάγραμμα προέρχεται από την Ελληνική Στατιστική Αρχή (ΕΛΣΤΑΤ) και δείχνει τη φυσική εξέλιξη των γεννήσεων και των θανάτων του ελληνικού πληθυσμού από το 1932 έως και το 2020.

- α) Τι εκφράζει η πράσινη και τι η μπλε γραμμή στο χρονοδιάγραμμα;
- β) Ποιο έτος ο αριθμός των θανάτων ξεπέρασε για πρώτη φορά τον αριθμό των γεννήσεων;
- γ) Με βάση το χρονοδιάγραμμα να θέσετε δικά σας ερωτήματα και να τα απαντήσετε.
- δ) Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις που δώσατε στα ερωτήματα.

Συζητάμε τις απαντήσεις μας στην τάξη.



Πηγή: Ελληνική Στατιστική Αρχή (ΕΛΣΤΑΤ)



Να ανοίξετε τον σύνδεσμο και να απαντήσετε στις ερωτήσεις συμπλήρωσης κενών για να εξοικειωθείτε με την ερμηνεία ενός χρονοδιαγράμματος.

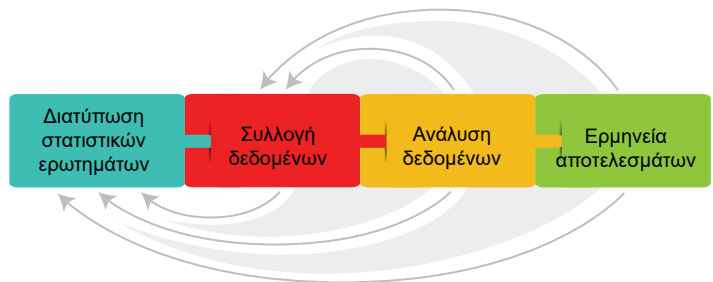
Μαθηματικές Έννοιες και Διεργασίες Μάθησης

Κύκλος στατιστικής έρευνας

Για να μάθουμε περισσότερα για ζητήματα που μας ενδιαφέρουν συχνά κάνουμε έρευνα. Για παράδειγμα, για να αγοράσουμε παπούτσια κάνουμε έρευνα αγοράς σε διάφορα φυσικά ή διαδικτυακά καταστήματα ή ζητάμε τη γνώμη φίλων μας. Για ζητήματα στα οποία πρέπει να πείσουμε για τα επιχειρηματά μας και άλλους, χρειάζεται να παραθέσουμε αντικειμενικά στοιχεία και για να τα αποκτήσουμε πρέπει να πραγματοποιήσουμε στατιστική έρευνα. Η Στατιστική χρησιμοποιεί εμπειρικά δεδομένα που προέρχονται από παρατηρήσεις και πειράματα, τα οποία επεξεργάζεται, αναλύει και ερμηνεύει με σκοπό την εξαγωγή συμπερασμάτων για τη λήψη ορθών αποφάσεων. Ο σχεδιασμός και η διενέργεια στατιστικής έρευνας περιλαμβάνει τέσσερα βασικά στάδια:

- Διατύπωση ερωτήσεων στατιστικής διερεύνησης.
- Συλλογή δεδομένων.
- Ανάλυση των δεδομένων με χρήση διαγραμμάτων και στατιστικών μέτρων.
- Ερμηνεία των αποτελεσμάτων και εξαγωγή συμπερασμάτων.

Η στατιστική έρευνα εξετάζει και αναλύει τη μεταβλητότητα των δεδομένων, την οποία λαμβάνει υπόψη για την εξαγωγή συμπερασμάτων.



Να μελετήσετε το Ενημερωτικό σημείωμα: «Σχεδιασμός κύκλου στατιστικής έρευνας».



Τι είναι στατιστική ερώτηση;

Σε μια στατιστική έρευνα, οι ερωτήσεις απαντώνται με δεδομένα και αποσκοπούν στην κατανόηση τάσεων ή σχέσεων ανάμεσα σε χαρακτηριστικά ενός πληθυσμού. Μια ερώτηση είναι στατιστική όταν οι απαντήσεις των ερωτώμενων ποικίλλουν, δηλαδή όταν διαφέρουν από άτομο σε άτομο. Για παράδειγμα, αν ρωτήσουμε μία ομάδα μαθητών:

- Οι ερωτήσεις: «Ποια είναι η θερμοκρασία βρασμού του νερού;» και «Πόσες ημέρες έχει η εβδομάδα;», δεν είναι στατιστικές ερωτήσεις αφού επιδέχονται μόνο μία απάντηση.
- Οι ερωτήσεις: «Ποιο είναι το ύψος σου σε εκατοστά;» και «Πόσα κατοικίδια έχετε;», είναι στατιστικές ερωτήσεις αφού αναμένονται περισσότερες από μία δυνατές απαντήσεις.

Γενικά

Μία ερώτηση είναι στατιστική όταν δεν έχει μοναδική απάντηση αλλά οι απαντήσεις σε αυτήν ποικίλλουν ανάλογα με το άτομο που θα ερωτηθεί ή τη χρονική στιγμή στην οποία αναφέρεται.

Οι στατιστικές ερωτήσεις απευθύνονται σε ομάδες ατόμων και όχι σε ένα άτομο.

Για να σχεδιάσουμε μία έρευνα πρέπει να διαμορφώσουμε στατιστικές ερωτήσεις που εξετάζουν σημαντικές διαστάσεις του θέματος, είναι σαφείς, κατανοητές και μπορούν απαντηθούν με δεδομένα. Οι κλειστές ερωτήσεις μπορούν να έχουν προκαθορισμένες επιλογές απαντήσεων που επιτρέπουν την ταχύτερη συλλογή και στατιστική επεξεργασία των δεδομένων.

Παράδειγμα: Στον παρακάτω πίνακα οι ερωτήσεις (1), (2) είναι κλειστές και η (3) ανοιχτή ερώτηση.

1) Σε ποιο βαθμό περνάτε τον χρόνο σας στο διαδίκτυο με τις παρακάτω δραστηριότητες;	Να σημειώσετε από 1 έως 5: 1. Καθόλου, 2. Λίγο, 3. Μέτρια, 4. Πολύ, 5. Πάρα πολύ				
α) Κοινωνικά δίκτυα.					
β) Εργασίες στο σπίτι και σχολικές παρουσιάσεις.					
γ) Παιχνίδια στον υπολογιστή.					
δ) Άλλο (να αναφέρετε).					
2) Έχετε υποστηρίξει συμμαθητή/τρια σας στο σχολείο σε κάποιο πρόβλημα;	Ναι		Όχι		
3) Να γράψετε ενδεικτικά τι είδους υποστήριξη παρείχατε, αναφέροντας το πρόβλημα..					

Χρονοδιαγράμματα

Τα χρονοδιαγράμματα χρησιμοποιούνται για τη γραφική παράσταση της διαχρονικής εξέλιξης ενός δημογραφικού, γεωφυσικού, επιστημονικού, οικονομικού ή κοινωνικού φαινομένου. Με τα χρονοδιαγράμματα μελετάμε τη μεταβλητή που μας ενδιαφέρει με την πάροδο του χρόνου όπως για παράδειγμα, οι ώρες που αφιερώνουμε την εβδομάδα για να επικοινωνούμε με τους φίλους μας, οι γεννήσεις και οι θάνατοι κατά την τελευταία δεκαετία, τα κέρδη μιας επιχείρησης κατά τη διάρκεια μιας χρονικής περιόδου κ.λπ.

Το χρονοδιάγραμμα είναι ένα διάγραμμα το οποίο δείχνει πώς αλλάζουν τα δεδομένα με την πάροδο του χρόνου.

Τα χρονοδιαγράμματα αξιοποιούν **χρονικά δεδομένα**. Σε μια στατιστική έρευνα οι χρονικές παρατηρήσεις λαμβάνονται συνήθως σε ίσα χρονικά διαστήματα (σε δεκαετίες, έτη, μήνες, εβδομάδες, ημέρες, ώρες κ.λπ.). Τα χρονοδιαγράμματα αφηγούνται την «ιστορία» των δεδομένων και αποκαλύπτουν τάσεις ή χαρακτηριστικά που μπορεί να ενυπάρχουν. Είναι σημαντικά εργαλεία, τα οποία μας βοηθούν να αντλούμε πληροφορίες από τα δεδομένα. Επιπλέον, τα χρονοδιαγράμματα είναι πολύ χρήσιμα για τη χρονική σύγκριση δύο ή περισσότερων μεταβλητών και την εκτίμηση της μελετώμενης μεταβλητής μεταξύ ενδιάμεσων χρονικών στιγμών. Πλεονεκτούν σε σύγκριση με τους πίνακες επειδή οι παρατηρούμενες μεταβολές είναι άμεσα ορατές.





Εφαρμογή 1

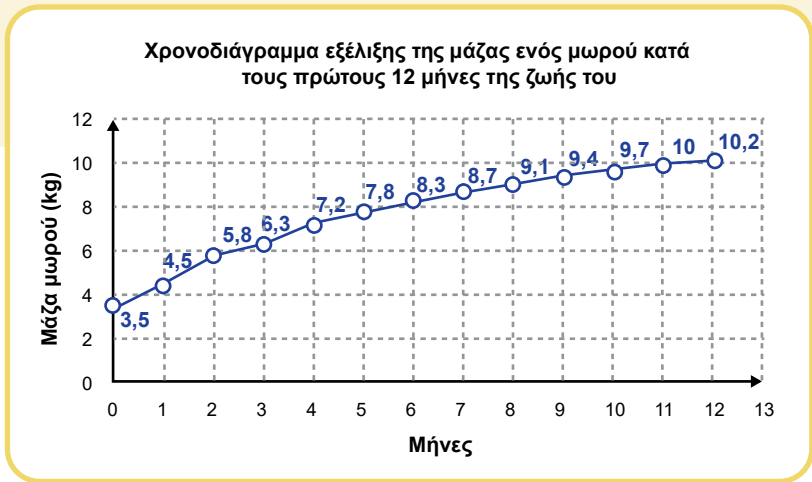
Η μάζα ενός μωρού κατά τους πρώτους 12 μήνες της ζωής του φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Μήνες	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Μάζα (kg)	3,5	4,5	5,8	6,3	7,2	7,8	8,3	8,7	9,1	9,4	9,7	10	10,2

- α) Να κατασκευάσετε ένα χρονοδιάγραμμα που να δείχνει την εξέλιξη της μάζας του μωρού.
- β) Μεταξύ ποιων μηνών αυξήθηκε περισσότερο η μάζα του;
- γ) Να εκτιμήσετε το ύψος του μωρού, όταν ήταν 6,5 μηνών.

Απάντηση

- α) Βρίσκουμε πρώτα σ' ένα σύστημα αξόνων τα σημεία που ορίζονται από τον παραπάνω πίνακα και ύστερα τα συνδέουμε διαδοχικά με ευθύγραμμα τμήματα.
- β) Συγκρίνοντας τις διαφορές της μάζας από μήνα σε μήνα, βρίσκουμε ότι η μεγαλύτερη διαφορά σημειώθηκε από τον πρώτο στον δεύτερο μήνα και ήταν 1,3 kg.
- γ) Από το διάγραμμα διαπιστώνουμε ότι, όταν το μωρό ήταν 6,5 μηνών, η μάζα του ήταν περίπου 8,5 kg.



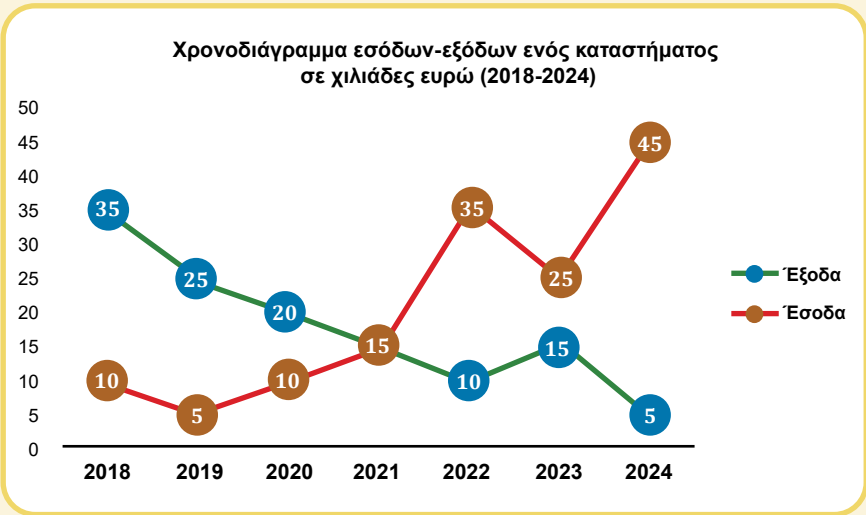
Με το ψηφιακό εργαλείο που θα βρείτε στον σύνδεσμο να διερευνήσετε την έννοια του χρονοδιαγράμματος.



Εφαρμογή 2

Στο παρακάτω χρονοδιάγραμμα παρουσιάζονται τα έσοδα και τα έξοδα ενός νέου εμπορικού καταστήματος (σε χιλιάδες ευρώ) σε ετήσιες επαναλαμβανόμενες μετρήσεις από το έτος 2018 έως και το έτος 2024.

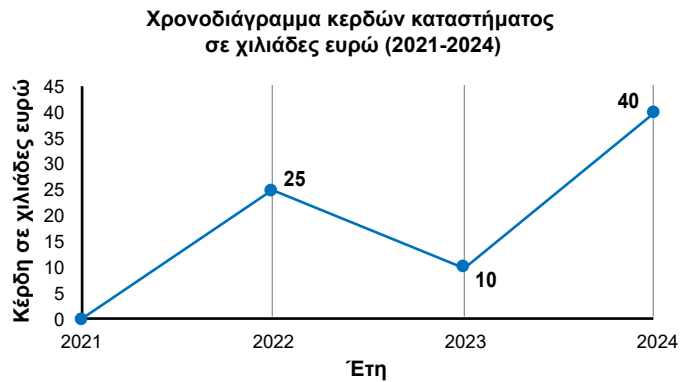
- α) Ποιο έτος το κατάστημα είχε ταυτόχρονα τα περισσότερα έσοδα και τα λιγότερα έξοδα; Πόσα ήταν τα κέρδη εκείνο το έτος;
- β) Ποιο έτος το κατάστημα άρχισε να έχει κέρδη;
- γ) Ποιο έτος το κατάστημα είχε τη μεγαλύτερη ζημιά;
- δ) Να κατασκευάσετε το χρονοδιάγραμμα των κερδών του καταστήματος από το έτος που άρχισε να έχει κέρδη.
- ε) Ποιο ήταν το ποσοστό μεταβολής των κερδών κατά το έτος 2024 σε σχέση με το προηγούμενο έτος;



Απάντηση

- α) Σύμφωνα με το χρονοδιάγραμμα, το έτος 2024 το κατάστημα είχε ταυτόχρονα τα περισσότερα έσοδα και τα λιγότερα έξοδα. Η αύξηση ήταν $45 - 5 = 40$ χιλιάδες ευρώ (κέρδος).
- β) Σύμφωνα με το χρονοδιάγραμμα το έτος 2021 τα έσοδα του καταστήματος σε χιλιάδες ευρώ ήταν ίσα με τα έξοδα, ενώ κατά τα επόμενα έτη το κατάστημα είχε περισσότερα έσοδα από έξοδα. Επομένως από το έτος 2021 το κατάστημα άρχισε να είχε κέρδη.
- γ) Το κατάστημα παρουσίασε ζημιά κατά τα έτη 2018, 2019 και 2020 αφού τα έξοδα ήταν περισσότερα από τα έσοδα. Σύμφωνα με το χρονοδιάγραμμα η ζημιά για τα έτη αυτά ήταν: 25 χιλιάδες ευρώ το 2018, 20 χιλιάδες ευρώ το 2019 και 10 χιλιάδες ευρώ το 2020. Άρα το έτος κατά το οποίο το κατάστημα έχει τη μεγαλύτερη ζημιά ήταν το 2018.
- δ) Στον πίνακα παρουσιάζονται τα κέρδη του καταστήματος κατά τα έτη: 2021, 2022, 2023 και 2024. Τοποθετώντας στον οριζόντιο άξονα τα έτη και στον κατακόρυφο τα αντίστοιχα κέρδη, παίρνουμε το ακόλουθο χρονοδιάγραμμα:

Κερδοφόρα έτη	Κέρδος σε χιλιάδες ευρώ
2021	0
2022	25
2023	10
2024	40



- ε) Το έτος 2023 τα κέρδη ήταν 10 χιλιάδες ευρώ και το έτος 2024 ήταν 40 χιλιάδες ευρώ. Άρα το ποσοστό αύξησης είναι:

$$\frac{40 - 10}{10} \cdot 100 = 300\%$$



Να ανοίξετε τον σύνδεσμο και να απαντήσετε στις ερωτήσεις αξιολόγησης για την έννοια του χρονοδιαγράμματος.

Ερωτήσεις για Αξιολόγηση

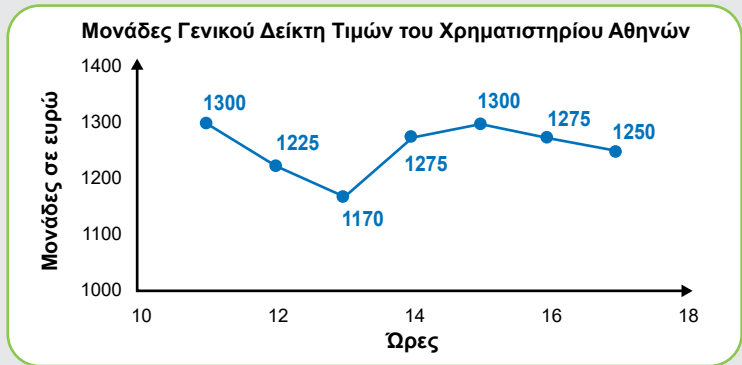
Στις παρακάτω ερωτήσεις να βάλετε σε κύκλο το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση:

- Μια στατιστική έρευνα:
 - Χρησιμοποιεί μόνο έτοιμα δεδομένα.
 - Συλλέγει απαντήσεις από ένα μόνο άτομο.
 - Διερευνά ερωτήσεις που επιδέχονται μοναδική απάντηση.
 - Λαμβάνει υπόψη τη μεταβλητότητα των δεδομένων.
- Ποια από τις ακόλουθες ερωτήσεις δεν μπορεί να απαντηθεί με χρονικά δεδομένα; Να αιτιολογήσετε.
 - Πόσοι διαδραστικοί πίνακες υπάρχουν στην τάξη σας;
 - Πόσες ώρες την ημέρα ασχολούνται με σπορ οι μαθητές της τάξης κατά τη διάρκεια ενός μήνα;
 - Πώς μεταβάλλεται η μέγιστη ημερήσια θερμοκρασία κάθε μέρα κατά τη διάρκεια του Ιουλίου στον τόπο διαμονής σας;
 - Ποια είναι η κατανάλωση ηλεκτρικού ρεύματος κάθε μήνα στο σπίτι σας κατά τη διάρκεια ενός έτους;
- Χρονοδιάγραμμα είναι:
 - Ένας πίνακας επαναλαμβανόμενων χρονολογιών.
 - Ένα διάγραμμα το οποίο δείχνει πώς αλλάζουν τα δεδομένα με την πάροδο του χρόνου.
 - Ένας πίνακας συχνοτήτων.
 - Ένα διάγραμμα που συνδέει υποχρεωτικά δύο χρονικές μεταβλητές.

- 4 Στο διπλανό χρονοδιάγραμμα παρουσιάζεται η μεταβολή του Γενικού Δείκτη Τιμών Χρηματιστηρίου Αθηνών σε ευρώ κατά τη συνεδρίαση της 6ης Ιουλίου 2023.

Το ποσοστό της πτώσης του δείκτη κατά το πρώτο δίωρο της συνεδρίασης ήταν:

- A. 11,1%
- B. 5,77%
- Γ. 10%
- Δ. 4,49%



Εργασία με Προεκτάσεις

Σχεδιασμός και διεξαγωγή στατιστικής έρευνας

Να σχεδιάσετε μία έρευνα στην τάξη σας για να γνωρίσετε καλύτερα τους συμμαθητές σας. Για παράδειγμα, μπορείτε να ρωτήσετε πόσο χρόνο χρειάζονται κάθε πρωί για να έρθουν στο σχολείο, το πλήθος των κατοικιδίων, το πλήθος των αδελφών τους, τον διαθέσιμο εβδομαδιαίο χρόνο, τις δραστηριότητες, τα χόμπι κ.λπ. Να πραγματοποιήσετε την έρευνα και να υποβάλετε γραπτή έκθεση με τους εξής άξονες:

- α) Διατύπωση του θέματος της έρευνας.
- β) Εκπόνηση του ερωτηματολογίου και συλλογή δεδομένων από κάθε συμμαθητή σας.
- γ) Ανάλυση των δεδομένων-Υπολογισμός στατιστικών μέτρων (π.χ. μέσων όρων, εύρους κ.λπ.) και κατασκευή πινάκων και διαγραμμάτων για την παρουσίαση των αποτελεσμάτων.
- δ) Ερμηνεία των αποτελεσμάτων και εξαγωγή συμπερασμάτων.

Να κάνετε την Εργασία: «Μέτρηση γονιμότητας».



Ασκήσεις και Προβλήματα

- 1 Να εξηγήσετε ποιες από τις παρακάτω ερωτήσεις προς τους συμμαθητές σας είναι στατιστικές ερωτήσεις.
- α) Πόσα λίτρα νερό καταναλώσατε στο νοικοκυριό σας κατά την τελευταία χρονιά;
 - β) Ποια είναι η πρωτεύουσα της Ελλάδας;
 - γ) Πόσο συχνά ακούτε μουσική;
 - δ) Με ποια ταχύτητα κινείται το φως στο κενό;
 - ε) Πόσα λογοτεχνικά βιβλία διαβάσατε την περασμένη σχολική χρονιά;
- Στη συνέχεια να διατυπώσετε δύο δικές σας στατιστικές ερωτήσεις.
- 2 Σε μια τάξη της Β' Γυμνασίου με 24 μαθητές, τα μέλη του πενταμελούς της μαθητικής κοινότητας έκαναν μία έρευνα για τον χρόνο μελέτης των μαθητών στο σπίτι. Ένας μαθητής δήλωσε ότι δεν μελετά, οι μισοί μαθητές είπαν ότι μελετούν 30 λεπτά, το ένα τέταρτο των μαθητών 45 λεπτά, δύο μαθητές 15 λεπτά και οι υπόλοιποι μία ώρα.

- α) Να απεικονίσετε τα δεδομένα σε ένα διάγραμμα.
 - β) Να χρησιμοποιήσετε τα αποτελέσματα της έρευνας για την περαιτέρω διερεύνηση του θέματος.
- 3 Ποιες από τις ακόλουθες ερωτήσεις μπορούν να απαντηθούν με χρονικά δεδομένα; Να αιτιολογήσετε.
- α) Τι είδους μουσική αρέσει στους μαθητές της τάξης σας;
 - β) Πόσες ώρες ασχολήθηκαν με τα κοινωνικά δίκτυα οι μαθητές της Β' Γυμνασίου κατά τον τελευταίο μήνα ;
 - γ) Πόσα νέα κινητά τηλέφωνα πουλήθηκαν στην Ελλάδα κάθε χρόνο από το 2015 έως και το 2024;
 - δ) Εξαρτάται το ύψος των μαθητών της Β' Γυμνασίου από το άνοιγμα των χεριών τους;
- 4 Κατά την πανδημία COVID-19, η θερμοκρασία ενός ασθενούς μετρήθηκε πρωί, μεσημέρι και βράδυ από

το Σάββατο μέχρι και τη Δευτέρα και οι μετρήσεις φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα.

Σάββατο		
Πρωί	Μεσημέρι	Βράδυ
38,5	39,1	39,4
Κυριακή		
Πρωί	Μεσημέρι	Βράδυ
39	40,2	40,5
Δευτέρα		
Πρωί	Μεσημέρι	Βράδυ
39	38,5	37,8

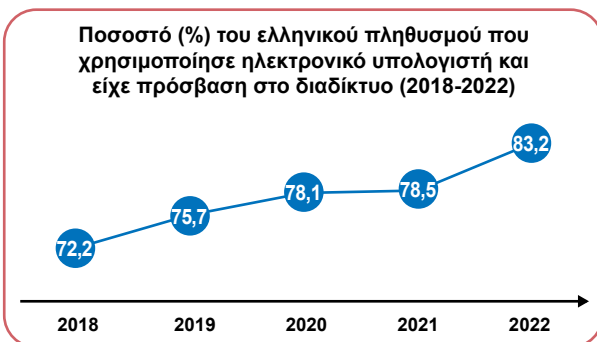
Να κατασκευάσετε χρονοδιάγραμμα της εξέλιξης του πυρετού το τριήμερο.

- 5 Το ετήσιο ύψος του Ρασίντ από το 10ο έως και το 17ο έτος παρουσιάζεται στον ακόλουθο πίνακα:

Ηλικία (έτη)	10ο	11ο	12ο	13ο	14ο	15ο	16ο	17ο
Ύψος	140	144	150	161	169	175	179	182

- α) Να σχεδιάσετε το χρονοδιάγραμμα εξέλιξης του ύψους.
 β) Μεταξύ ποιων διαδοχικών ετών ο Ρασίντ ψήλωσε πιο γρήγορα;
 γ) Να εκτιμήσετε το ύψος του Ρασίντ, όταν ήταν 11,5 χρονών.
 δ) Ποιο ήταν το ποσοστό αύξησης του ύψους του Ρασίντ μεταξύ του 16ου και του 17ου έτος;

- 6 Η παρακάτω γραφική παράσταση προέρχεται από την Ελληνική Στατιστική Αρχή (ΕΛΣΤΑΤ) και δείχνει το ποσοστό (%) του ελληνικού πληθυσμού που χρησιμοποίησε ηλεκτρονικό υπολογιστή και είχε πρόσβαση στο διαδίκτυο από το έτος 2018 έως και το έτος 2022.



Τα στοιχεία αναφέρονται στο Α' τρίμηνο των αντίστοιχων ετών.

- α) Τι διαπιστώνετε από το διάγραμμα;
 β) Μεταξύ ποιων διαδοχικών ετών σημειώθηκε η μεγαλύτερη αύξηση και ποιο ήταν το ποσοστό αυτής;

- 7 Η τιμή αγοράς ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή το έτος 2024 ήταν 2.000 € και η αξία μειώνεται κατά 10% κάθε έτος.

- α) Να βρείτε την αξία του υπολογιστή σε ευρώ για τα έτη 2025 έως και 2028.

- β) Να κατασκευάσετε ένα χρονοδιάγραμμα που να δείχνει την ελάττωση της αξίας του υπολογιστή για τα έτη 2024 έως και 2028.

- 8 Εργασία μαθητών κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες.

Τα δεδομένα του παρακάτω πίνακα δείχνουν τις μετρήσεις ατμοσφαιρικών εκπομπών αερίων του θερμοκηπίου στην Ευρωπαϊκή Ένωση και την Ελλάδα από το έτος 1990 έως και το έτος 2020 (μέσοι όροι) στο πλαίσιο προσπάθειας περιορισμού της υπερθέρμανσης του πλανήτη. Έτος αναφοράς είναι το 1990 με κοινή βάση μετρήσεων τις 100 μονάδες.

Έτη	1990	1995	2000	2005
Μέσος όρος ΕΕ	100,0	91,5	89,8	91,2
Ελλάδα	100,0	104,8	121,5	130,3

Έτη	2010	2015	2020
Μέσος όρος ΕΕ	83,4	76,4	66,2
Ελλάδα	113,6	90,8	68,5

- α) Να κατασκευάσετε ένα χρονοδιάγραμμα το οποίο να δείχνει τη συγκριτική εξέλιξη των τιμών των ατμοσφαιρικών εκπομπών αερίων του θερμοκηπίου (1990–2020).

- β) Με βάση το χρονοδιάγραμμα, ποιο έτος παρατηρείτε τη μεγαλύτερη τιμή ατμοσφαιρικών εκπομπών αερίων του θερμοκηπίου στην Ελλάδα και την ΕΕ;

- γ) Τι συμπεράσματα βγάζετε από τη συγκριτική εικόνα της εξέλιξης των δύο γραμμών;

Να μοιραστείτε τα αποτελέσματα της συνεργασίας σας στην ολομέλεια της τάξης.

- 9 Να συλλέξετε δικές σας επαναλαμβανόμενες μετρήσεις για τον χρόνο που αφιερώσατε στα κοινωνικά δίκτυα κατά τις τελευταίες 10 ημέρες και να τις παρουσιάσετε σε έναν πίνακα. Να κατασκευάσετε ένα χρονοδιάγραμμα και με βάση αυτό να διατυπώσετε δικές σας ερωτήσεις.

- 10 Ο ακόλουθος πίνακας δείχνει τις τελικές θέσεις κατάταξης του Ολυμπιακού στο Εθνικό Πρωτάθλημα Ποδοσφαίρου από το 2014 μέχρι και το 2022.

2014	2015	2016	2017	2018
1	1	1	3	2

2019	2020	2021	2022
1	1	1	3

- α) Να μεταφέρετε τα δεδομένα σε ένα χρονοδιάγραμμα αντιστρέφοντας την κλίμακα τιμών στον άξονα y'y.

β) Να χρησιμοποιήσετε το χρονοδιάγραμμα για να κρίνετε την αθλητική πορεία της ομάδας. Να αιτιολογήσετε τον ισχυρισμό σας.

11 Στον ακόλουθο πίνακα αποτυπώνεται ο αριθμός νεκρών από τροχαία ατυχήματα στην Ελλάδα από το 2012 μέχρι το 2021.

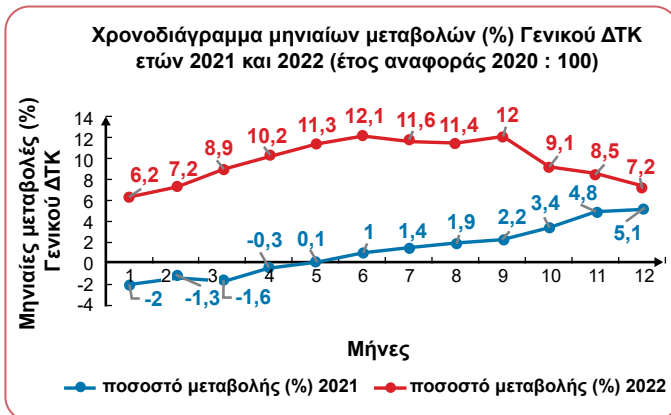
2012	2013	2014	2015	2016
988	879	795	793	824
2017	2018	2019	2020	2021
731	700	688	584	624

- α) Να κατασκευάσετε ένα χρονοδιάγραμμα.
- β) Ποιο έτος σημειώθηκε ο μεγαλύτερος αριθμός τροχαίων ατυχημάτων και ποιο έτος ο μικρότερος;
- γ) Ποιο ήταν το ποσοστό της μείωσης των τροχαίων ατυχημάτων στην Ελλάδα από το 2012 έως το 2021;

12 Ο ακόλουθος πίνακας περιλαμβάνει την ποσότητα χαρτιού (σε τόνους) που ανακυκλώθηκε από έναν δήμο από το 2017 μέχρι το 2024.

2017	2018	2019	2020
5,35	5,60	6,25	6,75
2021	2022	2023	2024
7,35	8,82	9,30	9,80

- α) Να μεταφέρετε τα δεδομένα σε ένα χρονοδιάγραμμα.
 - β) Ποιο έτος παρατηρείται η μεγαλύτερη και ποιο η μικρότερη ποσότητα ανακύκλωσης χαρτιού;
 - γ) Σε ποιο έτος σημειώθηκε η μεγαλύτερη αύξηση σε σχέση με το προηγούμενο έτος; Κατά πόσους τόνους αυξήθηκε και ποιο ήταν το ποσοστό της αύξησης;
- 13 Τα δεδομένα του παρακάτω χρονοδιαγράμματος δείχνουν τις μηνιαίες μεταβολές (%) του Δείκτη Τιμών Καταναλωτή (πληθωρισμού) ετών 2021 και 2022 (έτος αναφοράς 2020 = 100).



α) Με βάση το χρονοδιάγραμμα ποιον μήνα του έτους 2021 παρατηρείτε τη μεγαλύτερη μείωση του Γενικού ΔΤΚ και ποιον μήνα του έτους 2022 τη μεγαλύτερη αύξηση;

β) Τι συμπεράσματα βγάξετε για την εξέλιξη του πληθωρισμού κατά τα δύο έτη;

14 Ένα βιβλιοπωλείο κατέγραψε τις παρακάτω μηνιαίες πωλήσεις βιβλίων ενός χρόνου. Να παραστήσετε τα δεδομένα με: ραβδόγραμμα, κυκλικό διάγραμμα και χρονοδιάγραμμα.

Πωλήσεις βιβλίων ανά μήνα			
Μήνας	Πωλήσεις Βιβλίων	Μήνας	Πωλήσεις Βιβλίων
Ιανουάριος	350	Ιούλιος	900
Φεβρουάριος	280	Αύγουστος	850
Μάρτιος	410	Σεπτέμβριος	720
Απρίλιος	520	Οκτώβριος	650
Μάιος	600	Νοέμβριος	400
Ιούνιος	730	Δεκέμβριος	500

- α) Ποιοι είναι οι δύο μήνες που σημειώθηκαν οι περισσότερες πωλήσεις βιβλίων;
- β) Ποιο είναι το εύρος των πωλήσεων βιβλίων;
- γ) Ποιον μήνα καταγράφηκε η μεγαλύτερη αύξηση στις πωλήσεις σε σύγκριση με τον προηγούμενο μήνα και ποιο είναι το ποσοστό της αύξησης;
- δ) Ποιο είναι το καταλληλότερο διάγραμμα για την ανάλυση των δεδομένων και γιατί;

Να κάνετε την Εργασία με προεκτάσεις: «Η πυραμίδα των ηλικιών».



7.2 Θηκογράμματα

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

- Να περιγράφουν και προσδιορίζουν τα τεταρτημόρια ενός συνόλου δεδομένων
- Να κατασκευάζουν απλά θηκογράμματα χρησιμοποιώντας την «περίληψη πέντε αριθμών» για συνεχή ποσοτικά δεδομένα.
- Να περιγράφουν τα δεδομένα με βάση την περίληψη των πέντε αριθμών: ελάχιστη τιμή, τεταρτημόρια και μέγιστη τιμή.



Διερεύνηση. Κατασκευή θηκογράμματος – περίληψη των πέντε αριθμών.

Εργασία μαθητών κατά ζεύγη.

Ένας καταστηματάρχης πώλησης ενδυμάτων σύμφωνα με τις αποδείξεις μίας ημέρας συγκέντρωσε τα ακόλουθα ποσά σε ευρώ από αντίστοιχους πελάτες:

25, 30, 15, 15, 60, 10, 20, 65, 70, 130, 20, 35, 50

και θέλει να απαντήσει στις παρακάτω ερωτήσεις:

- Ποιο είναι το μικρότερο ποσό που πλήρωσε ένας πελάτης;
- Ποιο είναι το μεγαλύτερο ποσό που πλήρωσε ένας πελάτης;
- Ποιο ήταν το «μεσαίο» ποσό που πλήρωσε ένας πελάτης;
- Μέχρι πόσα ευρώ πλήρωσε το 25% των πελατών που ξόδεψε λιγότερα;
- Ανάμεσα σε ποια ποσά βρίσκεται το «μεσαίο» 50% των πωλήσεων;
- Από πόσα ευρώ και πάνω πλήρωσε το 25% των πελατών που ξόδεψε περισσότερα;

Τι απαντήσεις θα δίναμε στον καταστηματάρχη αν ζητούσε τη βοήθειά μας;

Ελέγχουμε τις απαντήσεις μας και εξηγούμε πώς τις βρήκαμε.



Με την ψηφιακή εφαρμογή να διερευνήσετε την έννοια του θηκογράμματος.

Μαθηματικές Έννοιες και Διεργασίες Μάθησης

Διάμεσος

Όπως ξέρουμε:

Διάμεσος (δ) ενός συνόλου παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά λέγεται:

- η «μεσαία» παρατήρηση, όταν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττός αριθμός, ή
- το ημίαθροισμα των δύο «μεσαίων» παρατηρήσεων όταν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιος αριθμός.

Δηλαδή, η διάμεσος χωρίζει τις στατιστικές παρατηρήσεις μιας κατανομής σε δύο ισοπληθείς ομάδες. Η διάμεσος δ αποτελεί μέτρο θέσης μιας κατανομής.

Παράδειγμα: Η διάμεσος των αριθμών: 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12 είναι $\delta = 5$,

ενώ η διάμεσος των αριθμών: 3, 4, 7, 9 είναι $\delta = \frac{4+7}{2} = 5,5$

Σημείωση: Η διάμεσος ενός συνόλου παρατηρήσεων είναι η τιμή για την οποία το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτήν και το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από αυτήν.

Τεταρτημόρια

Είδαμε ότι η διάμεσος χωρίζει τις διατεταγμένες παρατηρήσεις σε δύο περίπου ισοπληθικά μέρη. Αν πάρουμε τη διάμεσο του κατώτερου μισού και τη διάμεσο του ανώτερου μισού, τότε τα δεδομένα χωρίζονται σε τέσσερα μέρη, καθένα από τα οποία περιλαμβάνει περίπου το ένα τέταρτο των παρατηρήσεων, δηλαδή το 25% του συνόλου.

Η διάμεσος χωρίζει τα δεδομένα σε δύο μισά



Με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής να διερευνήσετε την έννοια της διαμέσου.

Όταν το πλήθος των διατεταγμένων παρατηρήσεων είναι άρτιος αριθμός ($2n$), τις χωρίζουμε στη μέση. Όταν το πλήθος τους είναι περιττός αριθμός ($2n+1$) εξαιρούμε τη διάμεσο.

Πρώτο τεταρτημόριο Q_1 είναι η διάμεσος των n μικρότερων παρατηρήσεων και **τρίτο τεταρτημόριο Q_3** είναι η διάμεσος των n μεγαλύτερων παρατηρήσεων.

Παραδείγματα: Το πλήθος των παρατηρήσεων 2, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 7, 8, 9 είναι $11 = 2 \cdot 5 + 1$ ($n = 5$) οπότε $\delta = 5$ (μεσαία παρατήρηση), $Q_1 = 4$ (διάμεσος των 2,3,4,5,5) και $Q_3 = 7$ (διάμεσος των 5, 6, 7, 8, 9).

Το πλήθος των παρατηρήσεων 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 είναι $8 = 2 \cdot 4$ ($n = 4$) οπότε $\delta = \frac{4+5}{2} = 4,5$ (ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων), $Q_1 = \frac{2+3}{2} = 2,5$ (διάμεσος των 1, 2, 3, 4) και $Q_3 = \frac{6+7}{2} = 6,5$ (διάμεσος των 5, 6, 7, 8).



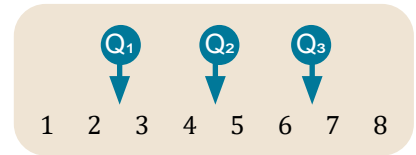
Με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής να διερευνήσετε την έννοια του τρίτου τεταρτημορίου.

- **Πριν από το πρώτο τεταρτημόριο Q_1** βρίσκεται περίπου το 25% του συνόλου των δεδομένων και μετά από αυτό περίπου το 75%.
- **Πριν από το δεύτερο τεταρτημόριο Q_2** που είναι η διάμεσος δ ($Q_2 = \delta$), βρίσκεται περίπου το 50% του συνολικού αριθμού των δεδομένων και μετά από αυτό περίπου το υπόλοιπο 50%.
- **Πριν από το τρίτο τεταρτημόριο Q_3** βρίσκεται περίπου το 75% του συνολικού αριθμού των δεδομένων και μετά από αυτό περίπου το 25%.

Σημείωση:

Τα τεταρτημόρια:

- Χωρίζουν τα δεδομένα σε τέσσερα τμήματα με ίσα ποσοστά, αλλά τα τμήματα δεν είναι αναγκαία ίσα.
- Δεν συμπίπτουν αναγκαία με μια παρατήρηση.



Παρατήρηση: Ο τρόπος εύρεσης των τεταρτημορίων μπορεί να είναι διαφορετικός σε κάποια λογισμικά ή σε άλλα συγγράμματα, χωρίς να σημαίνει πως είναι εσφαλμένος. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να προκύπτουν διαφορετικά αποτελέσματα για τα Q_1, Q_3 όταν έχουμε μικρό αριθμό παρατηρήσεων, αλλά γενικά δεν συμβαίνει σε μεγάλο αριθμό παρατηρήσεων.

Θηκογράμματα

Η διάμεσος, η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή, το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο αποτελούν την «**περίληψη των πέντε αριθμών**».

Το διάγραμμα που δημιουργείται με την «**περίληψη των πέντε αριθμών**» ονομάζεται **θηκόγραμμα** και χρησιμοποιείται για την ευσύνοπτη παρουσίαση ποσοτικών δεδομένων ως ακολούθως:

- Παραθέτουμε σε αύξουσα σειρά τα δεδομένα.
- Βρίσκουμε τη διάμεσο, την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή, το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο.
- Δημιουργούμε ένα ορθογώνιο που ξεκινάει από το πρώτο τεταρτημόριο και σταματάει στο τρίτο τεταρτημόριο.
- Ενώνουμε το πρώτο τεταρτημόριο με το ελάχιστο και το τρίτο με το μέγιστο, όπως στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα:

Για τους αριθμούς 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 6, 7, 8, 9:

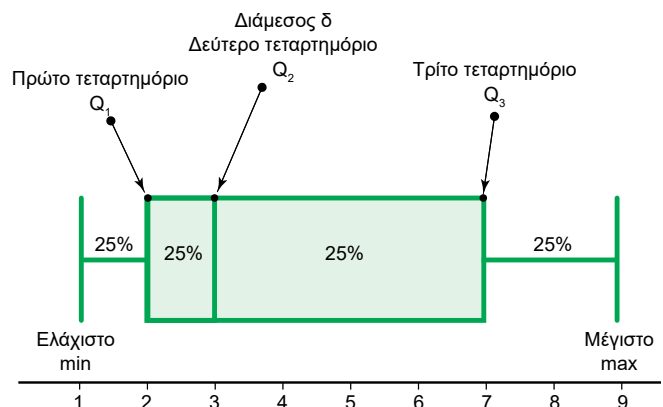
- Ελάχιστη τιμή = 1 Μέγιστη τιμή = 9
- Πρώτο τεταρτημόριο $Q_1 = 2$
- Δεύτερο τεταρτημόριο $\delta = Q_2 = 3$
- Τρίτο τεταρτημόριο $Q_3 = 7$.

Με τη βοήθεια της περίληψης των πέντε αριθμών κατασκευάζουμε το θηκόγραμμα.

Παρατηρούμε ότι οι αποστάσεις μεταξύ των τεταρτημορίων, δεν είναι ίσες.

Σημειώσεις:

- α) Οι γραμμές σύνδεσης του ορθογωνίου σε ένα θηκόγραμμα όπως φαίνεται στο σχήμα με την ελάχιστη και μέγιστη τιμή, λέγονται κεραίες ή μουστάκια (whiskers).



- β) Το μήκος του ορθογωνίου είναι η διαφορά $Q_3 - Q_1$.
- γ) Το πλάτος του ορθογωνίου επιλέγεται αυθαίρετα.
- δ) Ένα θηκόγραμμα μπορεί να εμφανίζεται κατακόρυφα (π.χ. Excel, SPSS) ή οριζόντια. (π.χ. Geogebra).



Με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής να εξοικειωθείτε με την περίληψη των πέντε αριθμών.



Εφαρμογή 1

Το τσιτάχ τρέχει με 70 km/h, το λιοντάρι με 50 km/h και η αράχνη με 1 km/h. Στον πίνακα δίνονται οι ταχύτητες 20 διαφορετικών ζώων.

- α) Να βρείτε τη διάμεση ταχύτητα.
- β) Να βρείτε τα τεταρτημόρια.
- γ) Να κατασκευάσετε το θηκόγραμμα.
- δ) Πού κατατάσσεται ένα ζώο το οποίο τρέχει με ταχύτητα 55 km/h σε σχέση με τις ταχύτητες των ζώων του πίνακα;

ΤΑΧΥΤΗΤΕΣ ΖΩΩΝ									
70	50	30	25	8	1	20	15	60	45
10	15	15	25	8	20	35	55	50	60



Απάντηση

Αρχικά διατάσσουμε τις ταχύτητες: 1,8,8,10,15,15,15,20,20,25,25,30,35,45,50,50,55,60,60,70.

- α) Το πλήθος των ταχυτήτων είναι 20 (άρτιος), οπότε η διάμεσος είναι ίση με το ημίαθροισμα των δύο μεσαίων ταχυτήτων: $\delta = \frac{25+25}{2} = 25$.

- β) Η διάμεσος δ και το δεύτερο τεταρτημόριο είναι: $\delta = Q_2 = 25$.

Κάτω από τη διάμεσο υπάρχουν 10 δεδομένα οπότε η διάμεσός τους (πρώτο τεταρτημόριο) είναι:

$$Q_1 = \frac{15+15}{2} = 15.$$

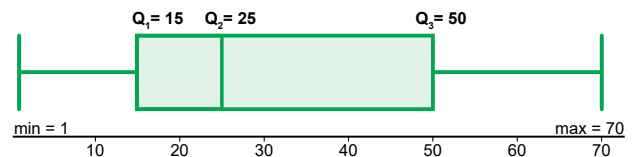
Πάνω από τη διάμεσο υπάρχουν 10 δεδομένα οπότε η διάμεσός τους (τρίτο τεταρτημόριο) είναι: $Q_3 = \frac{50+50}{2} = 50$.

- γ) Για να κατασκευάσουμε το θηκόγραμμα, χρειαζόμαστε την περίληψη των πέντε αριθμών.

Τα τεταρτημόρια από το προηγούμενο ερώτημα είναι: $Q_1 = 15$, $\delta = Q_2 = 25$, $Q_3 = 50$.

Εξάλλου $\min = 1$ και $\max = 70$ οπότε το θηκόγραμμα παρουσιάζεται στο σχήμα.

- δ) Ένα ζώο με ταχύτητα 55 km/h κατατάσσεται στο 25% των πιο γρήγορων ζώων.



Σημείωση:

Ο μικρός αριθμός παρατηρήσεων δίνεται για την ευκολότερη κατασκευή θηκογραμμάτων «με το χέρι», κάτι που δεν είναι δυνατόν για μεγάλο πλήθος δεδομένων, όπου είναι αναγκαία η χρήση κάποιου λογισμικού.

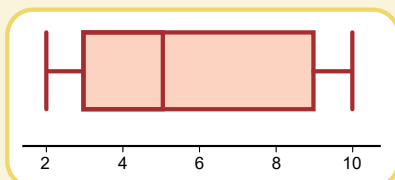


Να ανοίξετε τον σύνδεσμο και εφαρμόζοντας την τεχνική μεταφοράς και απόθεσης να εξοικειωθείτε με την ανάγνωση θηκογραμμάτων.



Εφαρμογή 2

Το ακόλουθο θηκόγραμμα δείχνει τους βαθμούς που έλαβαν οι φοιτητές μιας πανεπιστημιακής σχολής κατά τις εξετάσεις ενός μαθήματος:



- α) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη βαθμολογία, τα τεταρτημόρια Q_1, Q_3 και τη διάμεση βαθμολογία $\delta = Q_2$.
- β) Πού κυμαίνονται οι βαθμολογίες που συγκέντρωσε το «μεσαίο» 50% των φοιτητών;
- γ) Τι βαθμολογίες πήρε το 25% των φοιτητών με τη χαμηλότερη βαθμολογία;
- δ) Τι βαθμολογίες πήρε το 75% των φοιτητών με την υψηλότερη βαθμολογία;

Απάντηση

Παρατηρώντας το θηκόγραμμα έχουμε:

- α) Ελάχιστο (min) = 2, Μέγιστο (max) = 10, $Q_1 = 3, Q_3 = 9$ και η διάμεση βαθμολογία είναι $\delta = Q_2 = 5$.
- β) Το «μεσαίο» 50% των φοιτητών συγκέντρωσε βαθμολογίες από το πρώτο τεταρτημόριο Q_1 μέχρι το τρίτο τεταρτημόριο Q_3 . Δηλαδή από 3 έως 9.
- γ) Το «κατώτερο» 25% των φοιτητών βαθμολογήθηκε από το ελάχιστο (min) έως το πρώτο τεταρτημόριο Q_1 . Δηλαδή από 2 έως 3.
- δ) Το «ανώτερο» 75% των φοιτητών βαθμολογήθηκε από το πρώτο τεταρτημόριο Q_1 έως το μέγιστο (max). Δηλαδή από 3 έως 10.

Ερωτήσεις για Αξιολόγηση

Στις παρακάτω ερωτήσεις να βάλετε σε κύκλο το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση:

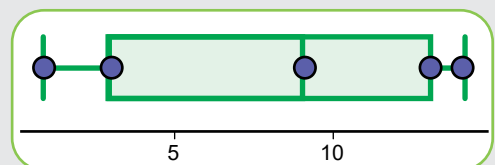
- 1 Σε ένα σύνολο στατιστικών παρατηρήσεων η διάμεσος:
 - A. Χωρίζει τις παρατηρήσεις σε δύο περίπου ισοπληθείς ομάδες.
 - B. Είναι η μέση τιμή των τριών μεσαίων παρατηρήσεων.
 - Γ. Είναι ο αριθμητικός μέσος όρος των παρατηρήσεων.
 - Δ. Είναι η παρατήρηση με τη μεγαλύτερη συχνότητα.
- 2 Για τον υπολογισμό της διαμέσου ενός συνόλου παρατηρήσεων με περιττό πλήθος, οι οποίες έχουν διαταχθεί κατά αύξουσα σειρά, βρίσκουμε:
 - A. Τη μέση τιμή του πρώτου και του τρίτου τεταρτημορίου.
 - B. Τη μεσαία παρατήρηση του συνόλου των παρατηρήσεων.
 - Γ. Τη μέση τιμή της ελάχιστης και της μέγιστης τιμής.
 - Δ. Τη μεσαία παρατήρηση μετά την εξάλειψη των απόμακρων τιμών.
- 3 Αν για ένα σύνολο δεδομένων δίνεται ότι $\delta = 45$, τότε μια πιθανή τιμή για το τρίτο τεταρτημόριο είναι:
 - A. 33 B. 2 Γ. 55 Δ. 31
- 4 Στο ακόλουθο σύνολο δεδομένων να βρείτε το πρώτο και το δεύτερο τεταρτημόριο:

9, 11, 15, 6, 20, 5, 11, 12, 17, 10, 4, 8, 11
- 5 Αν τα ύψη 10 αγοριών είναι: 58, 72, 74, 92, 84, 40, 74, 81, 76, 83, τότε το διάμεσο ύψος είναι:
 - A. 74 B. 92 Γ. 76 Δ. 75
- 6 Αν τα ύψη 10 αγοριών είναι: 58, 72, 74, 92, 84, 40, 74, 81, 76, 83, τότε η τιμή του τρίτου τεταρτημορίου είναι:
 - A. 72 B. 81 Γ. 76 Δ. 83
- 7 Από τις πληροφορίες που περιέχονται στο διπλανό θηκόγραμμα, μια εκτίμηση για τη διάμεσο δ , το εύρος R και τη διαφορά $Q_3 - Q_1$ είναι:

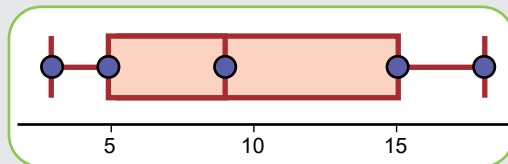
A. $\delta = 7, R = 14, Q_3 - Q_1 = 10$	B. $\delta = 6,5, R = 13, Q_3 - Q_1 = 10$
Γ. $\delta = 9, R = 13, Q_3 - Q_1 = 10$	Δ. $\delta = 6,5, R = 14, Q_3 - Q_1 = 12$



Να ανοίξετε τον σύνδεσμο και να απαντήσετε στις ερωτήσεις αξιολόγησης για την έννοια της περίληψης των πέντε αριθμών.



- 8 Το θηκόγραμμα δείχνει το πλήθος από μήλα που έφαγαν οι συμμετέχοντες σε έναν σχετικό διαγωνισμό φαγητού. Σύμφωνα με το θηκόγραμμα:



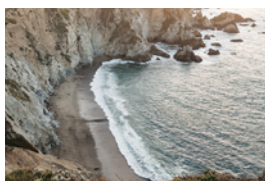
- α) Πόσα περίπου μήλα έφαγε ο νικητής του διαγωνισμού;
A. 4 B. 17 Γ. 14 Δ. 13
- β) Πόσα το πολύ μήλα έφαγε το «χαμηλότερο» 25%;
 γ) Πόσα τουλάχιστον μήλα έφαγε το «υψηλότερο» 25%;
 δ) Πόσα περίπου μήλα έφαγε το μεσαίο 50% των συμμετεχόντων;

Να κάνετε την Εργασία: «Η κατανάλωση νερού».



Ασκήσεις και Προβλήματα

- 1 Τα μήκη των ακτογραμμών μιας περιοχής σε χιλιόμετρα είναι: 80, 75, 35, 45, 50, 65, 70, 30, 80, 77 και 25 km.
- α) Να κατασκευάσετε το θηκόγραμμα.
- β) Ποια μήκη ακτογραμμών συγκαταλέγονται στο κεντρικό 50%;
- γ) Ποια μήκη ακτογραμμών βρίσκονται στο 50% των μεγαλύτερων παρατηρήσεων ;
- δ) Ποια μήκη ακτογραμμών συγκαταλέγονται στο 50% των μικρότερων παρατηρήσεων ;
- 2 Να βρείτε, το ελάχιστο, το μέγιστο, τη διάμεσο, το πρώτο και τρίτο τεταρτημόριο του παρακάτω πλήθους θεατών που παρακολούθησαν τη συναυλία ενός τραγουδιστή σε διαφορετικές ημερομηνίες:
 346, 250, 433, 369, 422, 298, 300, 320, 410
- 3 Ομοίως για τη συνολική δαπάνη για εισιτήρια του μετρό σε διάφορες χρονικές στιγμές:
 13, 24, 12, 20, 24, 19, 23, 18, 29, 23 και 28 ευρώ.
- 4 Ομοίως για το σύνολο των διαγωνισμάτων που διεξάγονται κάθε τρίμηνο σε ένα σχολείο:
 24, 13, 38, 12, 31, 19, 26, 14 και 14.



- 5

Ο Μιχάλης έχει ύψος 1,80 εκατοστά και βρίσκεται στη θέση με τον κύκλο στην κατάταξη των υψών των μαθητών της τάξης του.

- α) Σε ποιο τεταρτημόριο κατατάσσεται;
 β) Τι ποσοστό των συμμαθητών του έχει μεγαλύτερο ύψος;

- 6 Στον πίνακα παρουσιάζονται οι λέξεις τις οποίες πληκτρολόγησαν οι υποψήφιοι προκειμένου να προσληφθούν ως δακτυλογράφοι σε μια εταιρεία.

Λέξεις ανά λεπτό				
42	63	73	68	55
65	76	40	59	62
72	67	67	51	51

Να βρείτε τον ελάχιστο και τον μέγιστο αριθμό λέξεων, τη διάμεση τιμή καθώς και το κάτω και άνω 25% των λέξεων τις οποίες πληκτρολόγησαν οι υποψήφιοι.

- 7 **Βρες το λάθος.**

Η Ελένη σκέπτεται για τα δεδομένα:
 89, 110, 93, 99, 128, 135, 144, 159 και 152.

Να βρείτε πού έκανε λάθος και να το διορθώσετε.

$$Q_1 = 96, Q_3 = 144$$

$$\delta = 128, R = 70$$

$$\min = 89, \max = 152$$



- 8 Μια εταιρεία κατασκευής πουκαμίσων θέλει να ανταμείψει τους υπαλλήλους της για τις προσπάθειές τους στην ανοδική πορεία της. Η μέση τιμή παραγωγής πουκαμίσων τις τελευταίες 10 ημέρες ήταν: **54, 69, 87, 50, 77, 45, 40, 90, 73, 56** και με βάση αυτήν το σχέδιο ανταμοιβής είναι:

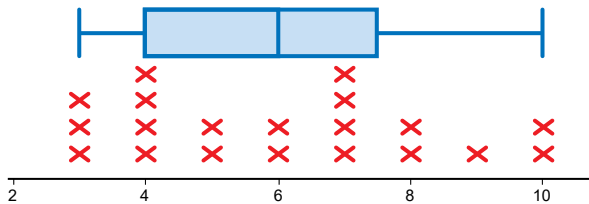


- Αν η παραγωγή ενός υπαλλήλου ανήκει στο υψηλότερο 25% τότε θα παίρνει 30 ευρώ ανά πουκάμισο.

- Αν η παραγωγή ενός υπαλλήλου ανήκει στο μεσαίο 50% τότε θα παίρνει 20 ευρώ ανά πουκάμισο.
- Αν η παραγωγή ενός υπαλλήλου ανήκει στο χαμηλότερο 25% τότε θα παίρνει 15 ευρώ ανά πουκάμισο.

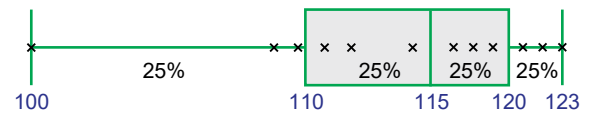
Τι ανταμοιβή θα πάρει ένας υπάλληλος που έφτιαξε 75 πουκάμισα κατά μέσο όρο την περίοδο αυτή;

- 9 Σωστό ή λάθος.** Με βάση το παρακάτω θηκόγραμμα να απαντήσετε αν είναι σωστός ή λανθασμένος καθενας από τους ισχυρισμούς (α) έως (στ). Να εξηγήσετε σε κάθε περίπτωση γιατί.



- α) $\min = 2$ β) $\max = 10$ γ) $Q_1 = 4$
 δ) $Q_3 = 7$ ε) $\delta = 6$
 στ) Το πλήθος των δεδομένων είναι 20.

- 10** Σε έναν Πανευρωπαϊκό αγώνα δρόμου 800 m ανδρών οι αθλητές πέτυχαν τους χρόνους σε δευτερόλεπτα που παρουσιάζονται στο παρακάτω θηκόγραμμα.



- α) Ποιο χρόνο πέτυχε ο νικητής;
 β) Πόσοι αθλητές συμμετείχαν;
 γ) Ποιους χρόνους πέτυχαν όσοι πήραν μετάλλιο;
 δ) Ποιους χρόνους πέτυχε το πιο αργό 25% των αθλητών;
 ε) Ποια ήταν η απόκλιση των χρόνων από τη διάμεσο του μεσαίου 50%;
 στ) Πού κατατάσσεται ένας αθλητής με χρόνο 114 και πού ένας με χρόνο 109 δευτερόλεπτα;

- 11** Η Νεκταρία συγκρίνει τις τιμές σε ευρώ (€) μιας συσκευής MP3 σε επτά διαφορετικά καταστήματα: 45 €, 47 €, 52 €, 49 €, 51 €, 49 € και 50 €
- α) Να διατάξετε τις τιμές κατά μέγεθος.
 β) Να βρείτε την περιλήψη των πέντε αριθμών.
 γ) Να κατασκευάσετε το θηκόγραμμα.

- 12** Να σχεδιάσετε το θηκόγραμμα για τα δεδομένα: 60, 70, 90, 95, 61, 55, 100, 96, 65, 92, 74, 88, 97, 85, 75

- 13** Ομοίως για τα δεδομένα: 20, 25, 30, 18, 22, 32, 26, 22, 27, 15, 30, 28, 32, 24, 21, 27

- 14** Το ύψος των κυμάτων σε μια θαλάσσια περιοχή μία ημέρα μετρήθηκε σε διάφορες χρονικές στιγμές και βρέθηκε σε εκατοστά:



72, 55, 65, 50, 81, 68, 63, 73, 59, 42, 78, 67, 51, 52, 76
 Να σχεδιάσετε το θηκόγραμμα που αντιστοιχεί στα δεδομένα.

- 15** Το κόστος ενός δίσκου CD χωρητικότητας 9,4 GB μετρήθηκε σε 15 καταστήματα μιας περιοχής και τα αποτελέσματα σε λεπτά του ευρώ ήταν:
- 105, 100, 85, 140, 120, 174, 165, 162, 95, 55, 100, 110, 120, 130, 125, 115, 105, 95, 115, 125, 130, 140, 95, 105, 100.



Να σχεδιάσετε το θηκόγραμμα που αντιστοιχεί στα δεδομένα.

- 16 Δημιουργία προβλήματος.** Να διατυπώσετε ένα δικό σας πρόβλημα το οποίο να απαιτεί την κατασκευή θηκογράμματος.

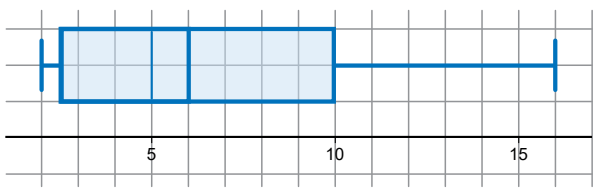
- 17 Εργασία μαθητών σε μικρές ομάδες.** Ο αριθμός των παιχνιδιών που κέρδισαν 18 παίχτες σε ένα τουρνουά σκάκι ήταν:



- 4, 6, 8, 10, 2, 7, 5, 13, 15, 9, 11, 11, 12, 10, 6, 9, 8, 7
 Ποιοι από τους παρακάτω ισχυρισμούς δεν υποστηρίζονται από τα δεδομένα:
- α) Οι μισοί παίχτες κέρδισαν περισσότερα από 10,5 παιχνίδια.
 β) Το ένα τέταρτο των παικτών κέρδισε κάτω από 6 παιχνίδια.
 γ) Το "μεσαίο" 50% των παιχτών κέρδισε από 6 έως 11 παιχνίδια.

Να ελέγξετε τις απαντήσεις σας ανταλλάσσοντας επιχειρήματα στην τάξη.

- 18 Ανοιχτό πρόβλημα.** Να βρείτε εννέα ακέραιους που θα μπορούσαν να αναπαρασταθούν με το ακόλουθο θηκόγραμμα:



Εξετάσεις ΒΑΚ

7.3 Μέτρα θέσης και μεταβλητότητας

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

- Να διερευνούν ιδιότητες της μέσης τιμής, όπως τη μεταβολή της όταν προστίθενται ή πολλαπλασιάζονται όλα τα δεδομένα με τον ίδιο αριθμό.
- Να διερευνούν πώς επηρεάζονται η μέση τιμή και η διάμεσος από την ύπαρξη απόμακρων τιμών.
- Να περιγράφουν και να διερευνούν την έννοια της μεταβλητότητας χρησιμοποιώντας το ενδοτεταρτημοριακό εύρος.

Μέτρα θέσης και μεταβλητότητας

Για να περιγράψουμε και να αναλύσουμε ένα σύνολο δεδομένων χρησιμοποιούμε τα μέτρα θέσης και μεταβλητότητας.

Μέτρα θέσης είναι αριθμοί οι οποίοι μας πληροφορούν για τη θέση του «κέντρου» των παρατηρήσεων πάνω στον οριζόντιο άξονα. Τα πιο συνηθισμένα μέτρα που χρησιμοποιούνται για την περιγραφή της θέσης ή της κεντρικής τάσης ενός συνόλου δεδομένων είναι η **μέση τιμή**, η **διάμεσος** και η **επικρατούσα τιμή**.

Μέτρα μεταβλητότητας ή διασποράς είναι αριθμοί οι οποίοι μας πληροφορούν πόσο απέχουν οι τιμές μιας μεταβλητής από τα μέτρα θέσης. Μέτρα μεταβλητότητας τα οποία θα μας απασχολήσουν είναι το **εύρος** και το **ενδοτεταρτημοριακό εύρος**.



Διερεύνηση 1. Μεταβολή της μέσης τιμής μετά από πρόσθεση ή πολλαπλασιασμό.

Εργασία μαθητών κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες.

Σε ένα σουπερμάρκετ πωλούνται 5 διαφορετικά είδη λαχανικών στις ακόλουθες τιμές: 2, 3, 4, 7 και 9 ευρώ.

- α) Ποια είναι η μέση τιμή πώλησης αυτών των 5 ειδών λαχανικών;
- β) Αν μειωθούν κατά 1 ευρώ οι τιμές αυτών των 5 ειδών λαχανικών, ποια θα είναι η νέα μέση τιμή πώλησής τους; Πόσα ευρώ μειώνεται η αρχική μέση τιμή;
- γ) Αν αυξηθούν κατά 2 ευρώ οι τιμές αυτών των λαχανικών, ποια θα είναι η νέα μέση τιμή πώλησής τους; Πόσα ευρώ αυξάνεται η αρχική μέση τιμή;
- δ) Το σουπερμάρκετ λόγω υψηλής αύξησης του κόστους αποφάσισε να διπλασιάσει τις τιμές πώλησης αυτών των λαχανικών. Ποια θα είναι η νέα μέση τιμή πώλησής τους; Πόσα ευρώ αυξήθηκε η αρχική μέση τιμή πώλησής τους;
- ε) Το σουπερμάρκετ για να κάνει δελεαστικές τις διπλασιασμένες τιμές των λαχανικών του προηγούμενου ερωτήματος, αφαιρεί από κάθε τιμή πώλησης, 2 ευρώ. Ποια θα είναι η νέα μέση τιμή; Πόσο μεταβάλλεται η αρχική μέση τιμή πώλησής τους;



Μοιραζόμαστε τα αποτελέσματα και ελέγχουμε τις απαντήσεις μας στην τάξη.



Με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής να διερευνήσετε τη μεταβολή των μέτρων θέσης και διασποράς μετά από πρόσθεση/αφαίρεση ενός αριθμού στις τιμές όλων παρατηρήσεων.



Με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής να διερευνήσετε τη μεταβολή των μέτρων θέσης και διασποράς αν οι τιμές όλων των παρατηρήσεων πολλαπλασιαστούν με τον ίδιο αριθμό.



Διερεύνηση 2. Η επίδραση νέας παρατήρησης στη Μ.Τ. και τη διάμεσο.

Εργασία μαθητών κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες.

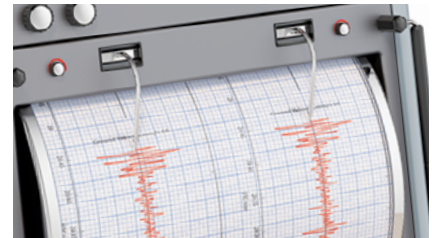
Το Γεωδυναμικό Ινστιτούτο μιας χώρας συγκεντρώνει μετρήσεις για τα μεγέθη των σεισμικών δονήσεων μιας σεισμογενούς περιοχής. Οι επτά τελευταίες καταγραφές είχαν μεγέθη: 2, 2.5, 2.5, 3, 3.5, 3.5 και 4 βαθμούς της κλίμακας ρίχτερ.

- Ποιο είναι το μέσο μέγεθος των σεισμών;
- Ποιο είναι το διάμεσο μέγεθος των σεισμών;
- Να συγκρίνετε το μέσο και το διάμεσο μέγεθος των σεισμών.

Αν η αμέσως επόμενη καταγραφή είναι 7,5 βαθμοί ρίχτερ:

- Ποιο θα είναι το νέο μέσο μέγεθος των σεισμών;
- Ποιο θα είναι το νέο διάμεσο μέγεθος των σεισμών;
- Να συγκρίνετε το νέο μέσο μέγεθος και το νέο διάμεσο μέγεθος των σεισμών με τα αντίστοιχα των ερωτημάτων (α) και (β). Τι συμπεραίνετε;

Συζητούμε τα αποτελέσματα και εξηγούμε πώς σκεφτήκαμε.



Διερεύνηση 3. Σύγκριση ομάδων δεδομένων με βάση το θηκόγραμμα.

Εργασία μαθητών κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες.

Οι χρόνοι σε δευτερόλεπτα στην πισίνα για δύο ομάδες αθλητών σε ένα αγώνισμα είναι:

Ομάδα Α': 6, 9, 9, 11, 12, 15, 17, 19, 18, 18, 20.

Ομάδα Β': 11, 12, 12, 13, 13, 14, 14, 15, 15, 16, 18.

- Να κατασκευάσετε θηκόγραμμα για τους χρόνους της ομάδας Α'.
- Να βρείτε τις διαφορές $\max - \min$ και $Q_3 - Q_1$ των χρόνων των αθλητών της ομάδας Α'.
- Να κατασκευάσετε θηκόγραμμα για τους χρόνους της ομάδας Β'.
- Να βρείτε τις διαφορές $\max - \min$ και $Q_3 - Q_1$ των χρόνων των αθλητών της ομάδας Β'.
- Να συγκρίνετε τις διαφορές $\max - \min$ και $Q_3 - Q_1$ των χρόνων των δύο ομάδων. Τι συμπεραίνετε; Να αιτιολογήσετε.

Συζητάμε και εξηγούμε πώς βρήκαμε τις απαντήσεις μας.



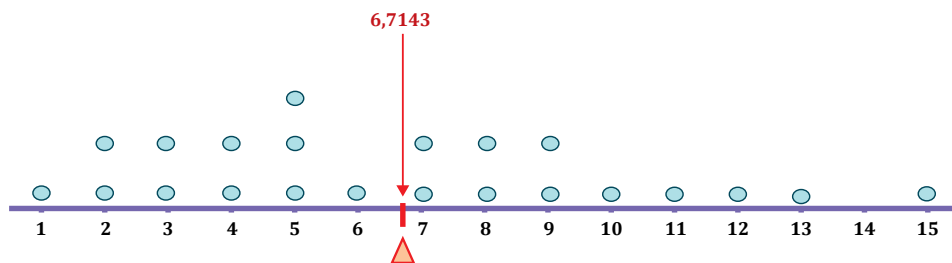
Μαθηματικές Έννοιες και Διεργασίες Μάθησης

Μέση τιμή

Όπως ξέρουμε η μέση τιμή είναι ένα μέτρο θέσης και ορίζεται ως ακολούθως:

Μέση τιμή (Μ.Τ.) ή αριθμητικός μέσος ενός συνόλου παρατηρήσεων ονομάζεται το άθροισμα των παρατηρήσεων δια του πλήθους αυτών.

Σημείωση: Αν παραστήσουμε τις τιμές της μεταβλητής με σημεία ενός άξονα, η μέση τιμή θα παριστάνεται με ένα σημείο του άξονα, το οποίο θα βρίσκεται ανάμεσα στα άλλα σημεία. Δηλαδή η μέση τιμή είναι ένα σημείο, γύρω από το οποίο βρίσκονται οι τιμές της μεταβλητής και για αυτό λέμε ότι αποτελεί χαρακτηριστικό θέσεως.



Ιδιότητες μέσης τιμής

Η μέση τιμή των αριθμών 2, 3, 5, 7, 9, 10 είναι: $\frac{2+3+5+7+9+10}{6} = 6$

Αν σε όλους τους αριθμούς προσθέσουμε 3, τότε γίνονται 5, 6, 8, 10, 12, 13 και η μέση τιμή τους είναι:

$$\frac{5+6+8+10+12+13}{6} = 9 = 6 + 3$$

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι η νέα μέση τιμή τους 9, είναι ίση με την παλιά μέση τιμή τους 6, αυξημένη κατά τον ίδιο αριθμό 3. Το συμπέρασμα αυτό ισχύει ανεξάρτητα από το πλήθος των παρατηρήσεων.

Γενικά

Αν σε όλες τις τιμές ενός συνόλου παρατηρήσεων προσθέσουμε έναν σταθερό αριθμό, τότε η νέα μέση τιμή των παρατηρήσεων που προκύπτουν βρίσκεται, αν στην αρχική μέση τιμή προσθέσουμε τον ίδιο αριθμό.

Η μέση τιμή των αριθμών 2, 3, 5, 7, 9, 10 είναι 6. Αν όλοι οι αριθμοί πολλαπλασιαστούν με 4, τότε γίνονται 8, 12, 20, 28, 36, 40 και η μέση τιμή τους είναι: $\frac{8+12+20+28+36+40}{6} = 24 = 6 \cdot 4$

Παρατηρούμε ότι η νέα μέση τιμή τους 24, είναι ίση με την παλιά μέση τιμή τους 6, πολλαπλασιασμένη με τον ίδιο αριθμό 4. Το συμπέρασμα αυτό ισχύει ανεξάρτητα από το πλήθος των παρατηρήσεων.

Γενικά

Αν όλες οι τιμές ενός συνόλου παρατηρήσεων πολλαπλασιαστούν με έναν μη μηδενικό αριθμό, τότε η μέση τιμή των νέων παρατηρήσεων πολλαπλασιάζεται με τον ίδιο αριθμό.

Απόμακρες τιμές

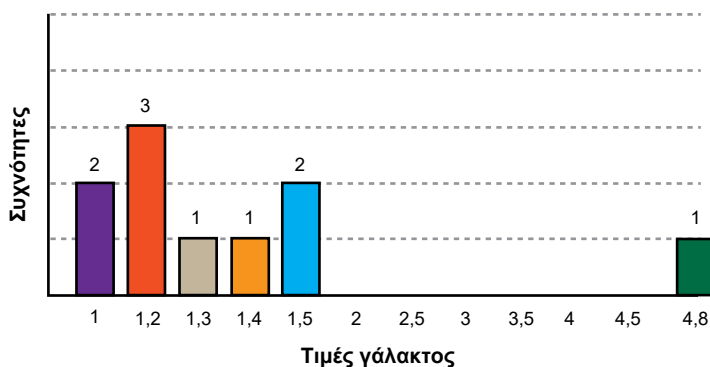
Όπως έχουμε αναφέρει στην Α' Τάξη, **απόμακρες ή ακραίες τιμές** λέγονται αυτές που φαίνονται ασυνήθιστες και διαφέρουν «πολύ» από τις άλλες τιμές/παρατηρήσεις. Διακρίνονται στα διαγράμματα από την ύπαρξη σημείων «αποκομμένων» από τα υπόλοιπα σημεία. Δηλαδή από την ύπαρξη σημείων αρκετά μακριά από τα υπόλοιπα σημεία.

Για παράδειγμα, στο σχήμα η τιμή γάλακτος ενός λίτρου μιας εταιρείας είναι 4,8 € η οποία είναι πολύ υψηλότερη από τις τιμές πώλησης των άλλων εταιρειών. Μια τέτοια τιμή είναι απόμακρη ή ακραία και θα δούμε ακριβή κριτήρια προσδιορισμού της στο Λύκειο.

Οι απόμακρες τιμές επηρεάζουν πολύ τη μέση τιμή και λιγότερο τη διάμεσο.



Με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής να διερευνήσετε την έννοια της μέσης τιμής.



Επικρατούσα τιμή

Επικρατούσα τιμή ενός συνόλου παρατηρήσεων είναι η παρατήρηση με τη μεγαλύτερη συχνότητα. Για παράδειγμα, επικρατούσα τιμή των παρατηρήσεων -3, 0, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 6, 6, 7 είναι ο αριθμός 2.

Συμμετρικά και ασύμμετρα δεδομένα

Στον υπολογισμό της μέσης τιμής συμμετέχουν όλες ανεξαιρέτως οι παρατηρήσεις, οπότε η μέση τιμή επηρεάζεται όταν υπάρχουν πολύ μεγάλες ή πολύ μικρές τιμές (απόμακρες ή ακραίες τιμές). Αντίθετα η διάμεση τιμή επηρεάζεται λιγότερο ή καθόλου από την ύπαρξη απόμακρων τιμών. Ας δούμε το ακόλουθο παράδειγμα:

- Έστω οι αριθμοί: -3, -1, 0, 1, 3. Τότε $M.T. = \delta = 0$.
- Αν στη θέση του αριθμού 3 βάλουμε τον αριθμό 17, τότε για τους αριθμούς: -3, -1, 0, 1, 17 παίρνουμε $M.T. = 2,8 > \delta = 0$. Παρατηρούμε δηλαδή ότι η τοποθέτηση μιας απόμακρης προς τα δεξιά τιμής (αρκετά μεγαλύτερης) **αυξάνει τη μέση τιμή προς την κατεύθυνση της απόμακρης τιμής**, ενώ δεν επηρεάζει καθόλου τη διάμεσο.
- Αν αντικαταστήσουμε τον αριθμό 3 με τον αριθμό -13, τότε για τους αριθμούς: -13, -3, -1, 0, 1 παίρνουμε $M.T. = -3,2 < \delta = -1$. Παρατηρούμε δηλαδή ότι η τοποθέτηση μιας απόμακρης τιμής προς τα αριστερά (αρκετά μικρότερης) **μειώνει τη μέση τιμή προς την κατεύθυνση της απόμακρης τιμής** και επηρεάζει λίγο τη διάμεσο.

Γενικά, όταν **οι παρατηρήσεις είναι συμμετρικές** τότε η μέση τιμή είναι ίση με τη διάμεσο: $M.T. = \delta$. Το αντίστροφο δεν ισχύει, αφού, για παράδειγμα, οι αριθμοί -5, -1, 0, 2, 4 δεν είναι συμμετρικοί, αλλά $M.T. = \delta = 0$.

Πρέπει να θυμόμαστε ότι η μέση τιμή είναι ένας αριθμός γύρω από τον οποίο βρίσκονται τα δεδομένα ή αλλιώς το σημείο ισορροπίας των δεδομένων, ενώ η διάμεσος διαχωρίζει τα δεδομένα "σε δύο μισά".

Έτσι λοιπόν, σε ένα ερώτημα όπως αυτό του μαθητή στη διπλανή εικόνα, η απάντηση είναι **«Όχι, απαραίτητα»**.

Εύρος (R)

Εύρος R ποσοτικών δεδομένων ονομάζεται η διαφορά της μικρότερης τιμής από τη μεγαλύτερη.

Δηλαδή: $R = \text{μέγιστη παρατήρηση} - \text{ελάχιστη παρατήρηση}$.

Παράδειγμα: Για τους αριθμούς 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 6, 7, 8, 9 η ελάχιστη τιμή είναι 1 και η μέγιστη τιμή 9. Άρα, το εύρος είναι: $R = 9 - 1 = 8$.

Το εύρος είναι ένας δείκτης της μεταβλητότητας των δεδομένων. Μικρό εύρος δείχνει μικρή μεταβλητότητα, ενώ μεγάλο εύρος δείχνει μεγάλη μεταβλητότητα.

Ενδοτεταρτημοριακό εύρος (IQR*)

Ενδοτεταρτημοριακό εύρος (IQR) ονομάζεται η διαφορά του πρώτου τεταρτημορίου Q_1 από το τρίτο τεταρτημόριο Q_3 ή αλλιώς η έκταση του «μεσαίου» 50% των παρατηρήσεων. Δηλαδή: $IQR = Q_3 - Q_1$.

Παράδειγμα: Για τους αριθμούς 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 6, 7, 8, 9, το πρώτο τεταρτημόριο είναι $Q_1 = 2$ και το τρίτο τεταρτημόριο $Q_3 = 7$. Άρα το ενδοτεταρτημοριακό εύρος είναι: $IQR = Q_3 - Q_1 = 7 - 2 = 5$.



Με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής να διερευνήσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο.



Με τη βοήθεια της εφαρμογής εξοικειωθείτε στα συμμετρικά και ασύμμετρα δεδομένα.

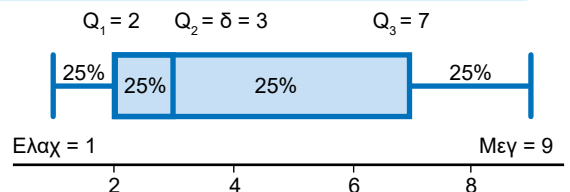


Να ανοίξετε τον σύνδεσμο και να απαντήσετε στις ερωτήσεις Σωστού-Λάθους για τον εντοπισμό συμμετρίας / ασυμμετρίας.

Αφού πήρα μικρότερο βαθμό από τη μέση βαθμολογία (Μ.Ο.) της τάξης μου, κατατάσσομαι στο χαμηλότερο μισό της τάξης;



Με τη βοήθεια της εφαρμογής να διερευνήσετε την έννοια του εύρους.



*IQR: Inter (ενδο) Quartile (τεταρτημοριακό) Range (εύρος) - Ενδοτεταρτημοριακό εύρος

Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος είναι ένα μέτρο διασποράς που περιγράφει τη μεταβλητότητα του μεσαίου 50% των παρατηρήσεων. Μικρό ενδοτεταρτημοριακό εύρος δείχνει ότι οι παρατηρήσεις είναι συγκεντρωμένες, ενώ μεγάλο ενδοτεταρτημοριακό εύρος δείχνει ότι οι παρατηρήσεις είναι απλωμένες, γύρω από τη διάμεσο.



Με τη βοήθεια της εφαρμογής να διερευνήσετε την έννοια του ενδοτεταρτημοριακού εύρους.



Εφαρμογή 1

ΤΙΜΕΣ ΤΗΛΕΦΩΝΩΝ	
Μοντέλο	Τιμή (σε €)
Μοντέλο 1	100
Μοντέλο 2	150
Μοντέλο 3	150
Μοντέλο 4	100
Μοντέλο 5	250
Μοντέλο 6	300
Μοντέλο 7	400
Μοντέλο 8	150
Μοντέλο 9	350
Μοντέλο 10	500

Ένα κατάστημα κινητών τηλεφώνων πουλάει διάφορα μοντέλα στις τιμές που παρουσιάζονται στον πίνακα:

- α) Ποια είναι η μέση τιμή πώλησης αυτών των 10 κινητών τηλεφώνων;
- β) Αν το κατάστημα μειώσει κατά 50 ευρώ τις τιμές σε αυτά τα μοντέλα κινητών τηλεφώνων, ποια θα είναι η νέα μέση τιμή πώλησής τους; Πόσο ελαττώνεται η αρχική μέση τιμή μετά τη μείωση;
- γ) Αν το κατάστημα πουλήσει για λόγους διαφήμισης μια συγκεκριμένη ημέρα αυτά τα μοντέλα κινητών στη μισή τιμή, ποια θα είναι η νέα μέση τιμή πώλησής τους; Πώς διαμορφώνεται η νέα μέση τιμή σε σχέση με την αρχική μέση τιμή;



Απάντηση

α) Η μέση τιμή πώλησης αυτών των 10 κινητών τηλεφώνων είναι:

$$M.T. = \frac{100 + 150 + 150 + 100 + 250 + 300 + 400 + 150 + 350 + 500}{10} = 245$$

β) Αν το κατάστημα μειώσει κατά 50 ευρώ τις τιμές των κινητών τότε οι νέες τιμές τους είναι: 50, 100, 100, 50, 200, 250, 350, 100, 300 και 450 οπότε η νέα μέση τιμή πώλησης είναι:

$$M.T. (\text{νέα}) = \frac{50+100+100+50+200+250+350+100+300+450}{10} = 195$$

Είναι: $245 - 195 = 50$ και επομένως η νέα μέση τιμή προκύπτει από την αρχική μέση τιμή μειώνοντάς την κατά 50 ευρώ, δηλαδή όση ήταν και η μείωση της τιμής κάθε κινητού. Δηλαδή: $M.T. (\text{νέα}) = M.T. - 50$

γ) Αν το κατάστημα πουλήσει για λόγους διαφήμισης μια συγκεκριμένη ημέρα αυτά τα μοντέλα κινητών στη μισή τιμή τότε οι νέες τιμές τους προκύπτουν από τις παλιές διαιρώντας τες με 2. Δηλαδή οι νέες τιμές εκείνη την ημέρα θα είναι:

$$\frac{100}{2} = 50, \frac{150}{2} = 75, \frac{150}{2} = 75, \frac{100}{2} = 50, \frac{250}{2} = 125,$$

$$\frac{300}{2} = 150, \frac{400}{2} = 200, \frac{150}{2} = 75, \frac{350}{2} = 175, \frac{500}{2} = 250.$$

Επομένως η μέση τιμή πώλησης εκείνη την ημέρα θα είναι:

$$M.T. (\text{νέα}) = \frac{50 + 75 + 75 + 50 + 125 + 150 + 200 + 75 + 175 + 250}{10} = 122,5$$

Είναι: $\frac{245}{2} = 122,5$ και επομένως η νέα μέση τιμή προκύπτει από την αρχική μέση τιμή διαιρώντας την με 2, όπως ακριβώς προέκυψαν και οι νέες τιμές των τηλεφώνων. Δηλαδή: $M.T. (\text{νέα}) = \frac{M.T.}{2}$



Να ανοίξετε τον σύνδεσμο και να απαντήσετε στις ερωτήσεις συμπλήρωσης κενών για να εξοικειωθείτε με τη μεταβολή μέτρων θέσης και διασποράς.



Εφαρμογή 2

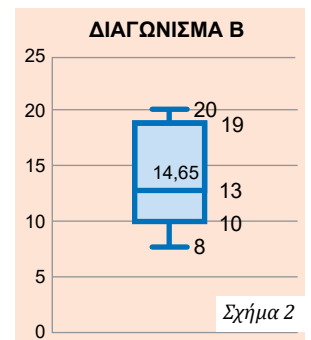
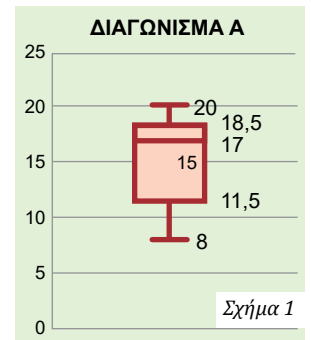
Οι βαθμοί των μαθητών μίας τάξης σε δύο διαγωνίσματα Α και Β ήταν:
 Διαγώνισμα Α: 8, 9, 10, 11, 12, 13, 13, 15, 17, 17, 17, 18, 18, 19, 19, 19, 20.
 Διαγώνισμα Β: 8, 9, 9, 10, 10, 11, 12, 13, 13, 18, 19, 19, 19, 19, 20, 20, 20.

- α) Να κατασκευάσετε το θηκόγραμμα για τις βαθμολογίες του διαγωνίσματος Α.
- β) Να συγκρίνετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των βαθμολογιών του διαγωνίσματος Α.
- γ) Να κατασκευάσετε το θηκόγραμμα για τις βαθμολογίες του διαγωνίσματος Β.
- δ) Να συγκρίνετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των βαθμολογιών του διαγωνίσματος Β.
- ε) Ο Γιάννης πήρε και στα δύο διαγωνίσματα 14 που είναι βαθμός μικρότερος από τη μέση τιμή (Μ.Ο.) των βαθμών των μαθητών όλης της τάξης και στα δύο διαγωνίσματα. Σκέπτεται: «Η βαθμολογία μου με κατατάσσει στο χαμηλότερο μισό της τάξης μου». Είναι σωστή ή λανθασμένη η σκέψη του Γιάννη;
- στ) Να συγκρίνετε ως προς τη μεταβλητότητα τις βαθμολογίες στα δύο διαγωνίσματα.



Απάντηση

- α) Κατασκευάζουμε το θηκόγραμμα για τις βαθμολογίες του διαγωνίσματος Α (Σχήμα 1) σύμφωνα με τις οδηγίες που έχουν αναφερθεί.
- β) Η μέση τιμή είναι 15 και η διάμεση βαθμολογία 17, οπότε η μέση τιμή είναι μικρότερη από τη διάμεσο των βαθμολογιών των μαθητών στο διαγώνισμα Α.
- γ) Ομοίως κατασκευάζουμε το θηκόγραμμα για τις βαθμολογίες του διαγωνίσματος Β (Σχήμα 2) σύμφωνα με όσα έχουν αναφερθεί.
- δ) Η μέση τιμή είναι 14,65 με στρογγυλοποίηση εκατοστού και η διάμεση βαθμολογία 13, οπότε η μέση τιμή είναι μεγαλύτερη από τη διάμεσο των βαθμολογιών των μαθητών στο διαγώνισμα Β.



- ε) Για το διαγώνισμα Α παρατηρούμε ότι η βαθμολογία του Γιάννη είναι μικρότερη από τη μέση τιμή των βαθμολογιών και επίσης μικρότερη από τη διάμεση τιμή τους. Άρα, η βαθμολογία του Γιάννη κατατάσσεται στο χαμηλότερο μισό των βαθμολογιών της τάξης του και επομένως η σκέψη του Γιάννη είναι σωστή για το διαγώνισμα Α.
 Για το διαγώνισμα Β παρατηρούμε ότι η βαθμολογία του Γιάννη είναι μικρότερη από τη μέση τιμή των βαθμολογιών, αλλά μεγαλύτερη από τη διάμεση τιμή τους. Άρα, η βαθμολογία του Γιάννη δεν κατατάσσεται στο χαμηλότερο μισό των βαθμολογιών της τάξης του και επομένως η σκέψη του Γιάννη είναι λάθος για το διαγώνισμα Β. Σωστό είναι ότι η βαθμολογία του Γιάννη κατατάσσεται στο υψηλότερο μισό των βαθμολογιών της τάξης του για το διαγώνισμα Β.

στ) Το εύρος των βαθμολογιών του διαγωνίσματος Α είναι $R = 20 - 8 = 12$ και στο διαγώνισμα Β, $R_1 = 20 - 8 = 12$. Άρα οι βαθμολογίες στα δύο διαγωνίσματα έχουν το ίδιο εύρος.

Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος των βαθμολογιών του διαγωνίσματος Α είναι $IQR = 18,5 - 11,5 = 7$ και το αντίστοιχο του διαγωνίσματος Β είναι $IQR_1 = 19 - 10 = 9$. Άρα, το ενδοτεταρτημοριακό εύρος των βαθμολογιών του διαγωνίσματος Α είναι μικρότερο από το αντίστοιχο του διαγωνίσματος Β. Επομένως το ενδιαμέσο 50% των βαθμολογιών στο διαγώνισμα Α είναι περισσότερο συγκεντρωμένο γύρω από τη μέση τιμή και τη διάμεσο, σε σύγκριση με το ενδιαμέσο 50% των βαθμολογιών στο διαγώνισμα Β, κάτι που φαίνεται και στα θηκογράμματα.



Να χρησιμοποιήσετε την ψηφιακή εφαρμογή για να εξοικειωθείτε με τη σύγκριση θηκογραμμάτων.



Ασκήσεις και Προβλήματα

1 Ο διπλανός πίνακας δείχνει τις μάζες 10 σκύλων.

Μάζες Σκύλων (σε kg)				
21	8	25	33	59
27	26	5	31	24

- α) Ποια από τις τιμές του πίνακα εκτιμάτε ότι είναι απόμακρη τιμή;
- β) Να βρείτε τη μέση τιμή και τη διάμεσο με την απόμακρη τιμή και χωρίς αυτήν.
- γ) Να περιγράψετε την επίδραση της απόμακρης τιμής στη μέση τιμή και τη διάμεσο.

2 Οι ακόλουθες αριθμητικές παρατηρήσεις δείχνουν το ωρομίσθιο σε ευρώ 8 εργαζομένων:

16, 8, 8, 8, 8, 8, 9, 9

- α) Να βρείτε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και την επικρατούσα τιμή των ωρομισθίων.
- β) Ποια εκτιμάτε ότι είναι η απόμακρη τιμή;
- γ) Ποιο στατιστικό μέτρο κεντρικής θέσης περιγράφει καλύτερα τα δεδομένα;
- δ) Να βρείτε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και την επικρατούσα τιμή χωρίς την απόμακρη τιμή. Ποιο μέτρο επηρεάζει περισσότερο η απόμακρη τιμή; Να αιτιολογήσετε.

3 Ο έλεγχος που έκανε η αρμόδια υπηρεσία στις τιμές πώλησης της απλής βενζίνης μία συγκεκριμένη εβδομάδα βρήκε ότι η μέση τιμή της ήταν 1,70 ευρώ ανά λίτρο. Ο σύνδεσμος βενζινοπωλών.



αποφάσισε μια αύξηση της τιμής της βενζίνης κατά 5%.

- α) Ποια θα είναι η νέα μέση τιμή πώλησης της βενζίνης αν όλες οι άλλες συνθήκες παραμείνουν αμετάβλητες;
- β) Οι καταναλωτές διαμαρτυρήθηκαν για τις τιμές και το Υπ. Μεταφορών μετά την αύξηση προσδιόρισε τον ΦΠΑ έτσι ώστε η τιμή κάθε λίτρου απλής βενζίνης να μειώνεται κατά 5 λεπτά. Ποια θα είναι η τελική μέση τιμή πώλησης ανά λίτρο;

4 Οι εργαζόμενοι σε μια εταιρεία βρίσκονται σε διαπραγματεύσεις με τον ιδιοκτήτη της εταιρείας ζητώντας αύξηση των αποδοχών τους.



Ο ιδιοκτήτης συζητά με τον σύλλογο των εργαζομένων έχοντας ως βάση συζήτησης τη μέση τιμή των μισθών τους. Οι εργαζόμενοι συμβουλευονται έναν εργατολόγο ο οποίος τους προτείνει να χρησιμοποιήσουν ως βάση συζήτησης στις διαπραγματεύσεις τη διάμεση και όχι τη μέση τιμή των μισθών.

Συμφωνείτε ή όχι με την πρόταση του εργατολόγου; Να εξηγήσετε γιατί.

5 Ο ΟΗΕ (Οργανισμός Ηνωμένων Εθνών) χρησιμοποιεί τη διάμεσο ή τη μέση τιμή για να περιγράψει την ηλικία των κατοίκων:



- α) Στις αναπτυσσόμενες χώρες.
 - β) Στις αναπτυγμένες χώρες.
- Τι προτείνετε για κάθε περίπτωση; Να εξηγήσετε γιατί.

6 Ένα βιβλιοπωλείο αύξησε την τιμή των τετραδίων κατά 0,5 ευρώ ανά τετράδιο. Η νέα μέση τιμή πώλησης ανά τετράδιο είναι 2,3 ευρώ. Ποια ήταν η αρχική μέση τιμή πώλησης ανά τετράδιο;

7 Ένας παραγωγός αύξησε την τιμή των μήλων που πουλάει κατά 3% ανά κιλό και μετά δύο εβδομάδες μείωσε την τιμή κατά 0,16 ευρώ ανά κιλό. Η νέα μέση τιμή πώλησης ανά κιλό είναι 4 ευρώ. Ποια ήταν η αρχική μέση τιμή πώλησης ανά κιλό;

8 **Ανοιχτό πρόβλημα.** Να δημιουργήσετε δύο διαφορετικά σύνολα δεδομένων τα οποία αποτελούνται από 6 τιμές και έχουν:

- α) Την ίδια μέση τιμή 21.
 - β) Την ίδια διάμεσο 10.
 - γ) Την ίδια μέση τιμή και την ίδια διάμεσο 5.
- 9 Σε μια επαρχιακή πόλη πουλήθηκαν 10 σπίτια. Οι τιμές πώλησης αυτών σε χιλιάδες ευρώ παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα:

Χιλιάδες Ευρώ				
146	131	211	148	256
127	132	162	192	378



- α) Ποια ήταν η μέση και ποια η διάμεση τιμή πώλησης αυτών των 10 σπιτιών;
- β) Αν ήσασταν μεσίτης και πουλούσατε σπίτια στην περιοχή αυτή θα χρησιμοποιούσατε τη μέση τιμή ή τη διάμεσο; Να εξηγήσετε γιατί.
- γ) Αν ήσασταν αγοραστής και θέλατε να αγοράσετε σπίτι στην περιοχή αυτή θα χρησιμοποιούσατε στις διαπραγματεύσεις τη μέση τιμή ή τη διάμεσο; Να εξηγήσετε γιατί.

- 10 Δίνονται οι ακόλουθες αριθμητικές παρατηρήσεις:

3, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 11

- α) Εάν προστεθεί ο αριθμός 34 στο υπάρχον σύνολο αριθμών, η μέση τιμή ή η διάμεσος αντιπροσωπεύει καλύτερα το σύνολο δεδομένων;
 β) Να βρείτε δύο αριθμούς οι οποίοι αν προστεθούν στο υπάρχον σύνολο αριθμών θα αλλάξουν τη μέση τιμή αλλά όχι τη διάμεσο. Να εξηγήσετε πώς επιλέξατε αυτούς τους δύο αριθμούς.
 γ) Να βρείτε δύο αριθμούς οι οποίοι αν προστεθούν στο υπάρχον σύνολο αριθμών θα αλλάξουν τη διάμεσο αλλά όχι τη μέση τιμή. Να εξηγήσετε πώς επιλέξατε αυτούς τους δύο αριθμούς.

- 11 Μια μέρα ένας ψαράς έπιασε σε μια λίμνη 6 ψάρια με τις ακόλουθες μάζες σε κιλά: 7, 5, 8, 4, 1, 5.

Στο τέλος του ψαρέματος έριξε το πιο ελαφρύ ψάρι πάλι στη λίμνη.



- α) Ποιο ήταν το μέσο βάρος και το διάμεσο βάρος των 6 ψαριών πριν ρίξει στη λίμνη το πιο μικρό ψάρι;
 β) Ποιο ήταν το μέσο βάρος και το διάμεσο βάρος των ψαριών αφού έριξε στη λίμνη το πιο μικρό ψάρι;
 γ) Να συγκρίνετε τις μέσες και τις διάμεσες τιμές στις δύο περιπτώσεις. Τι παρατηρείτε; Να εξηγήσετε γιατί.

- 12 Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται τα τέρματα (γκολ) που δέχτηκαν τέσσερις ομάδες κατά τα πέντε τελευταία πρωταθλήματα.

Γκολ Πρωταθλήματος			
ΟΜΑΔΑ Α'	ΟΜΑΔΑ Β'	ΟΜΑΔΑ Γ'	ΟΜΑΔΑ Δ'
4	1	8	1
7	5	9	3
10	10	10	10
13	15	11	17
16	19	12	19

- α) Να βρείτε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των τερμάτων που δέχτηκε κάθε ομάδα. Τι παρατηρείτε;
 β) Να εξετάσετε τη μεταβλητότητα των τερμάτων που δέχτηκε κάθε ομάδα.

- 13 Οι χρόνοι αναμονής που χρειάστηκαν για να εξυπηρετηθούν 24 άνθρωποι σε μια τράπεζα σε λεπτά είναι:

Χρόνος Αναμονής							
0	3,2	2,3	3,1	0	1,2	0	2
1,5	2,8	2,8	0	1,7	4,7	1,5	1,8
3,4	0,9	5,7	1,5	1,6	3,1	2,9	2,9

- α) Να βρείτε τον διάμεσο χρόνο αναμονής, το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο.

- β) Να βρείτε το εύρος και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος.

- γ) Να συμπληρώσετε τις ακόλουθες δηλώσεις:

i. «Οι πελάτες περίμεναν από έως λεπτά».

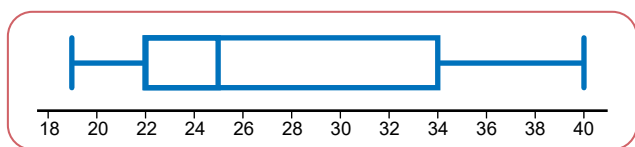
ii. «Το μεσαίο 50% των χρόνων αναμονής ήταν από έως λεπτά».

iii. «Το 25% των μεγαλύτερων χρόνων αναμονής ήταν λεπτά».

iv. «Οι μισοί πελάτες περίμεναν λιγότερο από λεπτά».

- 14 Ταχύτητες στην πόλη.

Στο παρακάτω ηθικόγραμμα απεικονίζονται οι μέσες ταχύτητες των λεωφορείων σε χιλιόμετρα ανά ώρα ενός δείγματος στο κέντρο μιας πόλης.



- α) Με ποιες ταχύτητες κινούνται τα μισά λεωφορεία με τις πιο μεγάλες ταχύτητες;

- β) Με ποιες ταχύτητες κινούνται τα μισά λεωφορεία με τις πιο μικρές ταχύτητες;

- γ) Τι ποσοστό λεωφορείων κινούνται με ταχύτητες πάνω από 34 χιλιόμετρα την ώρα;

- δ) Με ποιες ταχύτητες κινείται το ένα τέταρτο των λεωφορείων με τις χαμηλότερες ταχύτητες;

- ε) Με ποιες ταχύτητες κινείται το μεσαίο μισό των λεωφορείων του δείγματος;

- 15 Σε ένα έργο λειτουργούν ταυτόχρονα δύο μηχανήματα εκσκαφής. Ένα μεγάλο και ένα μικρό. Ο μικρός εκσκαφέας σκάβει κάθε ημέρα 2 κυβικά μέτρα ενώ κατά τις



τελευταίες 10 ημέρες έλαβε μέρος και ο μεγάλος εκσκαφέας ο οποίος έσκαψε: 10, 11, 12, 13, 11, 14, 10, 15, 12, 16 κυβικά μέτρα.

- α) Να περιγράψετε με την περίληψη των πέντε αριθμών τα κυβικά μέτρα εκσκαφής του μεγάλου εκσκαφέα;

- β) Να βρείτε τη μέση τιμή και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος των κυβικών μέτρων εκσκαφής του μεγάλου εκσκαφέα;

- γ) Χρησιμοποιώντας τη μέση τιμή και το ενδοτεταρ-

τημοριακό εύρος των κυβικών μέτρων εκσκαφής του μεγάλου εκσκαφέα, να βρείτε τη μέση τιμή και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος των κυβικών μέτρων εκσκαφής όταν δουλεύουν ταυτόχρονα οι δύο εκσκαφείς. Να εξηγήσετε την απάντησή σας.

- 16 Νάτριο στα μπιφτέκια.** Ένα εργαστήριο εξετάζει την ποσότητα νατρίου σε mg σε δύο συσκευασίες 20 μπιφτεκιών η κάθε μία ίδιου βάρους τα οποία παρασκευάζονται από κοτόπουλο η μία και βοδινό κρέας η άλλη. Οι περιλήψεις των πέντε αριθμών παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

Περίληψη των πέντε αριθμών για την ποσότητα νατρίου (σε mg)		
	Μπιφτέκια από βοδινό κρέας	Μπιφτέκια από κοτόπουλο
Min	252	356
Q1	321	378
Διάμεσος	381,4	431
Q3	476	536
Max	646	589

- α)** Να βρείτε το εύρος και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος των τιμών του νατρίου στα μπιφτέκια κάθε συσκευασίας.
- β)** Να συγκρίνετε τις διαμέσους και τα μέτρα μεταβλητότητας των δύο συσκευασιών.
- γ)** Να συγκρίνετε το ανώτερο 50% της περιεκτικότητας σε νάτριο των μπιφτεκιών με κοτόπουλο με το ανώτερο 50% των μπιφτεκιών με βοδινό κρέας.
- δ)** Να συγκρίνετε το ανώτερο 75% της περιεκτικότητας σε νάτριο των μπιφτεκιών με κοτόπουλο με το ανώτερο 75% των μπιφτεκιών με βοδινό κρέας.
- 17** Για την αξιολόγηση της ταχύτητας δακτυλογράφησης σωστών λέξεων ανά λεπτό από τις γραμματείς σε μια μεγάλη εταιρεία εξετάστηκε η επίδοση 15 γραμματέων. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

Δακτυλογράφηση λέξεων ανά λεπτό				
78	51	67	72	80
55	68	73	63	42
77	59	40	81	65

- α)** Να περιγράψετε με την περίληψη των πέντε αριθμών το πλήθος των λέξεων του πίνακα.
- β)** Να κατασκευάσετε το σχετικό θηκόγραμμα.
- γ)** Να σχολιάσετε τη μεταβλητότητα του πλήθους των λέξεων.

- 18** Διενεργήθηκε ένα πείραμα απομνημόνευσης του πλήθους των λέξεων μετά την ανάγνωση ενός κειμένου από δύο ομάδες 25 φοιτητών, με μουσική και χωρίς μουσική. Τα αποτελέσματα του πειράματος με την περίληψη των πέντε αριθμών παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

Απομνημόνευση λέξεων		
	Μουσική	Ησυχία
Min	3	6
Q1	6	8
Διάμεσος	7	10
Q3	9	12
Max	15	14

- α)** Να περιγράψετε τη μεταβλητότητα του πλήθους των λέξεων που απομνημονεύονται στις δύο καταστάσεις.
- β)** Να συγκρίνετε τις διαμέσους, το εύρος και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος στις δύο καταστάσεις

- 19** Για να πάτε στον προορισμό σας από τον σταθμό στον οποίο βρίσκεστε μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μία από τις δύο γραμμές A και B του μετρό, με χρόνους καθυστέρησης:
Γραμμή A: 1, 1, 2, 3, 4, 4, 13 και Γραμμή B: 1, 2, 3, 3, 6, 6, 7.

- α)** Να περιγράψετε τους χρόνους για τη γραμμή A με την περίληψη των πέντε αριθμών.
- β)** Να περιγράψετε τους χρόνους για τη γραμμή B με την περίληψη των πέντε αριθμών.
- γ)** Να συγκρίνετε τη διάμεση και μέση αναμονή στις δύο γραμμές.
- δ)** Να συγκρίνετε το εύρος και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος των χρόνων αναμονής στις δύο γραμμές.



Να κάνετε την Εργασία: «Μετάβαση από το σπίτι στο σχολείο».



7.4

Κριτική ανάγνωση στατιστικών διαγραμμάτων

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

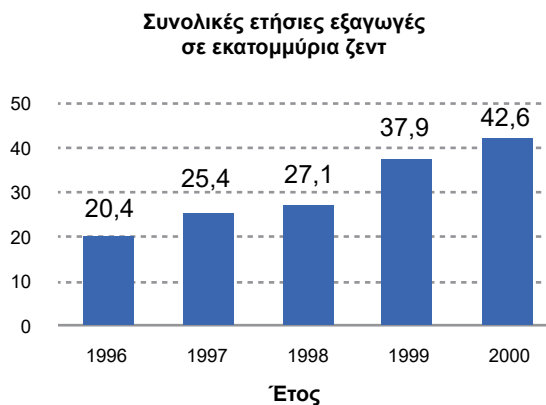
- Να επιλέγουν πληροφορίες από διαφορετικές αναπαραστάσεις ποσοτικών και χρονικών δεδομένων και να καταλήγουν σε συμπεράσματα.
- Να εντοπίζουν παραδείγματα χρήσης στατιστικών διαγραμμάτων που μπορούν να οδηγήσουν σε εσφαλμένα συμπεράσματα και να παραπλανήσουν.



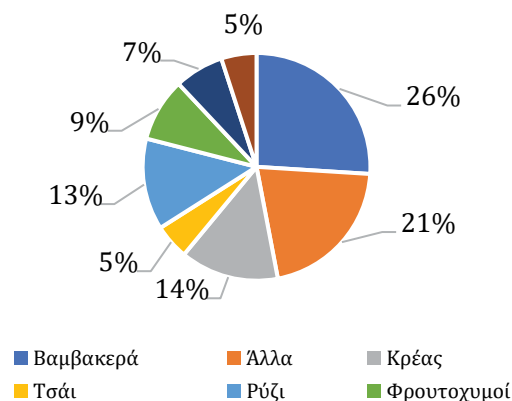
Διερεύνηση 1. Πληροφορίες από διαγράμματα.

Εργασία μαθητών κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες.

Η χώρα Ζεντ είναι μια φανταστική χώρα που έχει ένα φανταστικό νόμισμα ζεντ. Τα ακόλουθα διαγράμματα δίνουν πληροφορίες για τις εξαγωγές που έκανε η χώρα Ζεντ.



Κατανομή εξαγωγών χώρας Ζεντ το 2000



- α) Ποια ήταν η συνολική αξία των εξαγωγών σε εκατομμύρια ζεντ το έτος 1998;
- β) Ποιο ήταν το ποσοστό μεταβολής της συνολικής αξίας των εξαγωγών σε εκατομμύρια ζεντ το έτος 2000 σε σχέση με το έτος 1997;
- γ) Πόση ήταν η αξία των εξαγωγών σε φρουτοχυμούς από τη χώρα Ζεντ το έτος 2000;
- δ) Πόση ήταν η αξία των εξαγωγών σε κρέας από τη χώρα Ζεντ το έτος 2000;

(Αναπροσαρμογή από τη διεθνή αξιολόγηση PISA)

Συζητούμε και εξηγούμε πώς βρήκαμε τις απαντήσεις μας.

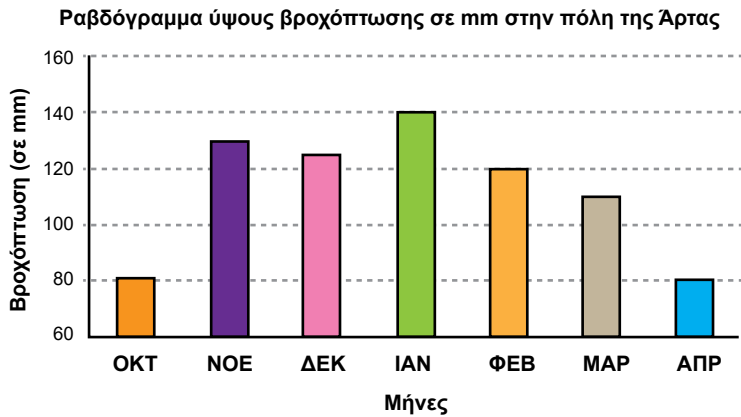


Διερεύνηση 2. Κριτική ανάγνωση διαγράμματος.

Εργασία μαθητών κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες.

Η πόλη της Άρτας παρουσιάζει δύο διαφορετικές περιόδους: Την ξηρή περίοδο από τον Μάιο έως τον Σεπτέμβριο και την υγρή περίοδο από τον Οκτώβριο έως τον Απρίλιο. Σε ατομική εργασία, ζητήθηκε από τους μαθητές μιας τάξης να χρησιμοποιήσουν τις μετρήσεις της Εθνικής Μετεωρολογικής Υπηρεσίας (ΕΜΥ) του πίνακα και να παραστήσουν με ένα ραβδόγραμμα την ποσότητα βροχόπτωσης κατά την υγρή περίοδο.

Η Αιμιλία κατασκεύασε το ακόλουθο ραβδόγραμμα:



Μήνες	Ύψος Βροχόπτωσης σε mm
ΟΚΤ	80
ΝΟΕ	130
ΔΕΚ	125
ΙΑΝ	140
ΦΕΒ	120
ΜΑΡ	110
ΑΠΡ	80

- α) Το ραβδόγραμμα παρουσιάζει σωστά τα δεδομένα του πίνακα;
- β) Όταν η Αιμιλία παρουσίασε την εργασία της στην τάξη, ισχυρίστηκε: «Τον Ιανουάριο βρέχει περίπου τέσσερις φορές περισσότερο από τον Οκτώβριο ή τον Απρίλιο». Είναι σωστός ο ισχυρισμός της; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- γ) Να προσκομίσετε παραδείγματα χρήσης στατιστικών διαγραμμάτων από το διαδίκτυο ή τα μέσα μαζικής ενημέρωσης τα οποία μπορούν να οδηγήσουν σε "παραπλανητικά" ή εσφαλμένα συμπεράσματα.

Μοιραζόμαστε τα επιτεύγματα της συνεργασίας μας. Εξηγούμε πώς σκεφτήκαμε.



Διερεύνηση 3. Κριτική ανάγνωση διαγράμματος.

Εργασία μαθητών κατά ζεύγη.

Ένα επαρχιακό τηλεοπτικό κανάλι παρουσίασε μία έκτακτη είδηση κάνοντας αναφορά στη μεταβολή της θερμοκρασίας που έχει επέλθει τα τελευταία χρόνια. Ο παρουσιαστής παρουσίασε το παρακάτω χρονοδιάγραμμα σχολιάζοντας: «Όπως βλέπουμε είναι φανερή η δραματική αύξηση της θερμοκρασίας στην πόλη μας και πρέπει η πολιτεία να λάβει άμεσα μέτρα».

- α) Το χρονοδιάγραμμα προβάλλει την πραγματική εικόνα των μετρήσεων της θερμοκρασίας;
- β) Να κρίνετε τον ισχυρισμό του καναλιού τεκμηριώνοντας την άποψή σας.
- γ) Με βάση το παραπάνω χρονοδιάγραμμα να κατασκευάσετε ένα άλλο χρονοδιάγραμμα το οποίο να απεικονίζει καλύτερα την κατάσταση.



Ανταλλάσσουμε επιχειρήματα και αιτιολογούμε τις απαντήσεις μας.

Μαθηματικές Έννοιες και Διεργασίες Μάθησης

Οι περισσότεροι άνθρωποι όταν βλέπουν μια οπτικοποίηση δεδομένων, βγάζουν βιαστικά συμπεράσματα σχετικά με τις πληροφορίες που αυτά παρουσιάζουν. Σε ορισμένες μάλιστα περιπτώσεις τα διαγράμματα εκλαμβάνονται ως εικόνες κι αυτό μπορεί να οδηγήσει σε συμπεράσματα τα οποία μπορεί να είναι εντελώς διαφορετικά από αυτά που δείχνουν τα πραγματικά δεδομένα. Ένα διάγραμμα μπορεί να είναι παραπλανητικό όταν ο άξονας συχνότητων δεν ξεκινάει από το μηδέν ή αν επιλεγεί λανθασμένη κλίμακα.

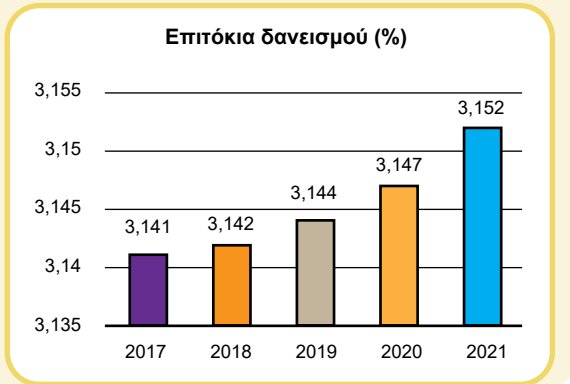
Για να ερμηνεύουμε σωστά ένα διάγραμμα στη Στατιστική, πρέπει να αναλύουμε τις αριθμητικές πληροφορίες που δίνονται σε αυτό, έτσι ώστε να μην παγιδευόμαστε από το σχήμα και να προβάλλουμε τις επιφυλάξεις μας αναπτύσσοντας κριτική στάση απέναντι στις παραπλανητικές παρουσιάσεις δεδομένων.



Εφαρμογή 1

Οι τράπεζες μιας χώρας κατέθεσαν αίτηση στο αρμόδιο τμήμα της Ευρωπαϊκής Ένωσης και ζήτησαν να λάβουν επιχορήγηση εκατομμυρίων ευρώ. Οι εκπρόσωποι των τραπεζών ισχυρίστηκαν ότι το κόστος δανεισμού αυξήθηκε κατά την τελευταία πενταετία προσκομίζοντας το διπλανό διάγραμμα.

- α)** Έχουν δίκιο οι τράπεζες ως προς τον ισχυρισμό τους για πολύ μεγάλη αύξηση του κόστους δανεισμού; Να αιτιολογήσετε την άποψή σας.
- β)** Αν εργαζόσασταν στο αρμόδιο τμήμα της Ευρωπαϊκής Τράπεζας και ζητούσαν τη γνώμη σας πώς θα απαντούσατε στο συγκεκριμένο αίτημα των τραπεζών;



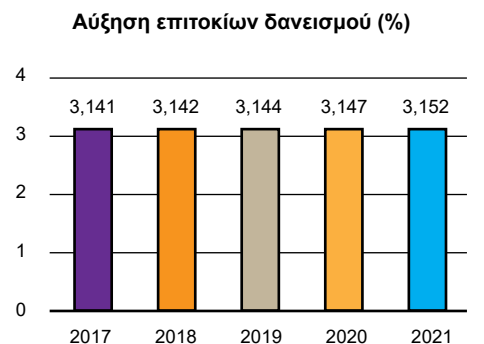
Απάντηση

- α)** Βλέποντας το ραβδόγραμμα φαίνεται μια αύξηση του ύψους των ράβδων που απεικονίζουν τα επιτόκια του κόστους δανεισμού τους από το 2017 μέχρι και το 2021. Μάλιστα η αύξηση στο ραβδόγραμμα φαίνεται μεγάλη αν συγκριθεί το τελευταίο έτος με τα υπόλοιπα.

Ωστόσο παρατηρώντας λεπτομερώς το ραβδόγραμμα βλέπουμε ότι οι τιμές στον κατακόρυφο άξονα δεν αρχίζουν από το μηδέν αλλά από 3,135. Για να καταλάβουμε καλύτερα τι συμβαίνει κατασκευάζουμε ένα νέο διάγραμμα για τα ίδια έτη και τα ίδια στοιχεία. Το νέο διάγραμμα που προκύπτει είναι αποκαλυπτικό και περιγράφει μια διαφορετική εικόνα για τα ίδια δεδομένα.

Η αύξηση του κόστους δανεισμού που προκύπτει όχι μόνο δεν είναι πολύ μεγάλη αλλά αντίθετα είναι σχεδόν σταθερή. Επομένως, δεν έχει βάση ο ισχυρισμός των τραπεζών.

- β)** Λαμβάνοντας υπόψη το νέο διάγραμμα που προκύπτει από τα στοιχεία του αρχικού διαγράμματος των τραπεζών θα προτείναμε με βάση τον συγκεκριμένο ισχυρισμό να απορριφθεί το αίτημα.

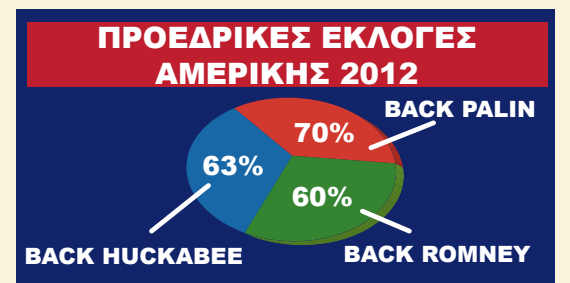


Εφαρμογή 2

Το πολύ γνωστό κανάλι Fox News της Αμερικής παρουσίασε το 2012 σε μία εκπομπή του τα ποσοστά των υποψηφίων για την ανάδειξη του υποψήφιου του κόμματος των Ρεπουμπλικάνων, ο οποίος θα διεκδικούσε την εκλογή του Προέδρου της Αμερικής στις μετέπειτα εκλογές.

Στο διπλανό κυκλικό διάγραμμα που παρουσίασε το κανάλι απεικονίζονται τα ποσοστά των τριών διεκδικητών: Χάκαμπι (Huckabee), Ρόμνεϊ (Romney) και Πέιλιν (Palin).

- α)** Τι συμπεραίνετε από το διάγραμμα;
- β)** Οι υποψήφιοι Χάκαμπι (Huckabee) και Ρόμνεϊ (Romney) διαμαρτυρήθηκαν στο κανάλι για την παρουσίαση αυτή. Έχουν δίκιο; Να αιτιολογήσετε την άποψή σας.
- γ)** Πώς θα προτείνατε στο κανάλι να διαμορφωθεί το κυκλικό διάγραμμα για να μην υπάρχει πρόβλημα;
- δ)** Αν το κανάλι έγραψε κατά λάθος ποσοστά αντί να γράψει απόλυτους αριθμούς σε ψήφους, μπορείτε με τα δεδομένα αυτού του διαγράμματος να αποκαταστήσετε την πραγματική κατάσταση; Να αιτιολογήσετε την άποψή σας.



Απάντηση

- α)** Βλέποντας το κυκλικό διάγραμμα:
- Αν εστιάσουμε στο μέγεθος των κυκλικών τομέων, φαίνεται ότι ο υποψήφιος Ρόμνεϊ (Romney) προηγείται αφού απεικονίζεται με μεγαλύτερο κυκλικό τομέα.
 - Αν εστιάσουμε στα ποσοστά φαίνεται ότι η υποψήφια Πέιλιν (Palin) προηγείται αφού το ποσοστό που συγκροτώνει είναι μεγαλύτερο από τα ποσοστά των δύο άλλων υποψηφίων.
- β)** Οι υποψήφιοι Χάκαμπι (Huckabee) και Ρόμνεϊ (Romney) έχουν δίκιο που διαμαρτύρονται στο κανάλι για την παρουσίαση αυτή. Ο λόγος είναι ότι αν προσθέσουμε τα ποσοστά των τριών υποψηφίων έχουμε: $60\% + 63\% + 70\% = 193\%$ κάτι που δεν είναι επιτρεπτό αφού το άθροισμα θα έπρεπε να ήταν 100%.
- γ)** Θα προτείναμε στο κανάλι να δημιουργήσει ένα άλλο σωστό κυκλικό διάγραμμα με βάση τις προτιμήσεις των ψηφοφόρων σε ποσοστά επί τοις εκατό.
- δ)** Αν οι αριθμοί αναφέρονται σε απόλυτους αριθμούς και όχι σε ποσοστά τότε:
- Μετατρέπουμε τους απόλυτους αριθμούς σε ποσοστά:

Ρόμνεϊ (Romney): $\frac{60}{193} \cdot 100 = 31,09\%$

Χάκαμπι (Huckabee): $\frac{63}{193} \cdot 100 = 32,64\%$ και

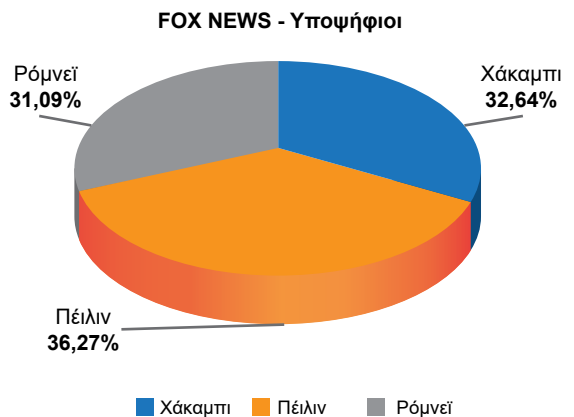
Πέιλιν (Palin): $\frac{70}{193} \cdot 100 = 36,27\%$

- Κατασκευάζουμε ένα νέο κυκλικό διάγραμμα απεικονίζοντας τα ποσοστά που βρήκαμε.

Στο νέο κυκλικό διάγραμμα που κατασκευάσαμε τα ποσοστά των κυκλικών τομέων έχουν άθροισμα 100% και φαίνεται ότι η Πέιλιν (Palin) προηγείται τόσο με βάση το ποσοστό όσο και με βάση το μέγεθος του κυκλικού τομέα.



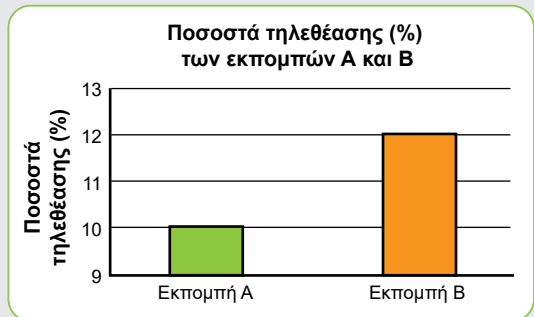
Να ανοίξετε τον σύνδεσμο και να ασκηθείτε στην κριτική ανάγνωση διαγραμμάτων.



Ερωτήσεις για Αξιολόγηση

Στις παρακάτω ερωτήσεις να βάλετε σε κύκλο το γράμμα που αντιστοιχεί σε σωστή απάντηση:

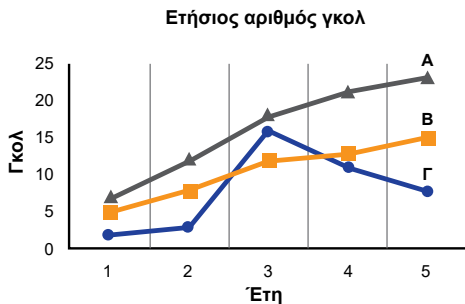
- 1** Ένας μαθητής έγραψε κατά λάθος ποσοστά αντί για απόλυτους αριθμούς στο διπλανό κυκλικό διάγραμμα, που αντιστοιχεί στην επιλογή αθλήματος για τους μαθητές του σχολείου του.
- A.** Το 230% των μαθητών επιλέγουν ποδόσφαιρο ή βόλεϊ.
 - B.** Το 250 % των μαθητών επιλέγουν ποδόσφαιρο ή μπάσκετ.
 - Γ.** Το 66,67% των μαθητών επιλέγουν μπάσκετ ή βόλεϊ.
 - Δ.** Το 360% των μαθητών επιλέγουν ποδόσφαιρο ή μπάσκετ ή βόλεϊ.
- 2** Στο ραβδόγραμμα παρουσιάζονται τα ποσοστά τηλεθέασης δύο εκπομπών A και B σε ένα κανάλι της τηλεόρασης.
- A.** Η εκπομπή B είναι δύο φορές πιο δημοφιλής από την εκπομπή A.
 - B.** Η εκπομπή A είναι τρεις φορές πιο δημοφιλής από την εκπομπή B.
 - Γ.** Η εκπομπή B είναι κατά 20% πιο δημοφιλής από την εκπομπή A.
 - Δ.** Η εκπομπή B είναι τρεις φορές πιο δημοφιλής από την εκπομπή A.





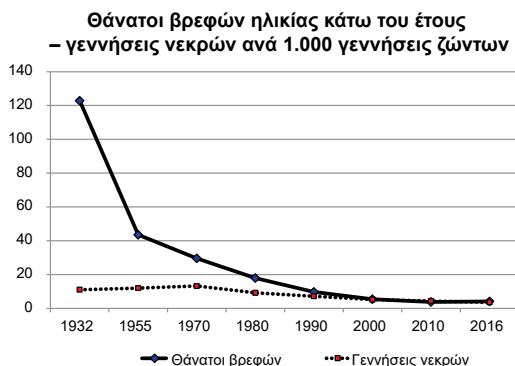
Ασκήσεις και Προβλήματα

- 1 Ο πρόεδρος μιας ποδοσφαιρικής ομάδας θέλει να κάνει μια μεταγραφή και να φέρει στην ομάδα του έναν επιθετικό παίκτη που θα βάζει γκολ. Του δείχνουν το παρακάτω χρονοδιάγραμμα που απεικονίζει τον αριθμό των γκολ που έβαλαν οι τρεις παίκτες A, B και Γ κατά τα τελευταία 5 χρόνια με τις ομάδες τους. Με μοναδικό κριτήριο το χρονοδιάγραμμα, ποιον παίκτη θα συμβουλευάτε να επιλέξει ο πρόεδρος; Να αιτιολογήσετε.



- 2 Στο χρονοδιάγραμμα που δίνεται παρακάτω φαίνεται ο αριθμός των θανάτων βρεφών ηλικίας κάτω του έτους και οι γεννήσεις νεκρών ανά 1000 γεννήσεις ζώντων στη χώρα μας από το 1932 έως και το 2016.

Πηγή: ΕΛ.ΣΤΑΤ. Φυσική Κίνηση πληθυσμού 2016.



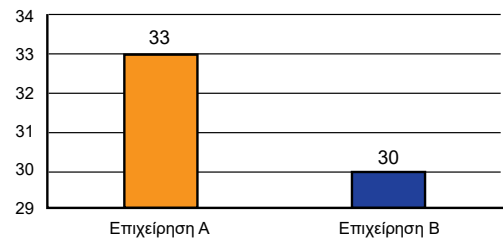
- α) Από ποια χρονιά και μετά ο αριθμός των θανάτων βρεφών ηλικίας κάτω του έτους ήταν ίδιος με τις γεννήσεις νεκρών ανά 1000 γεννήσεις ζώντων;
β) Ποια χρονική περίοδο υπήρξε μεγάλη μείωση του αριθμού των θανάτων βρεφών;
γ) Τι παρατηρείτε για τις γεννήσεις των νεκρών βρεφών;

Να κάνετε την Εργασία: «Γνωριμία με την Ελληνική Στατιστική Υπηρεσία».

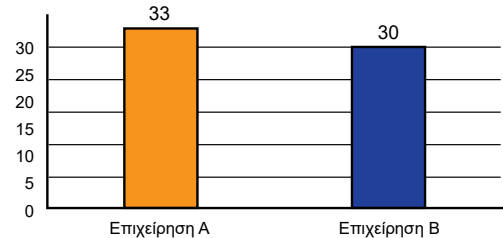


- 3 **Κριτική σκέψη.** Σε ποιο από τα παρακάτω ραβδογράμματα αναγνωρίζετε παραπλανητική παρουσίαση δεδομένων; Να αιτιολογήσετε.

A Σύγκριση των ετήσιων κερδών των πολυεθνικών επιχειρήσεων A και B (σε εκατομμύρια ευρώ)

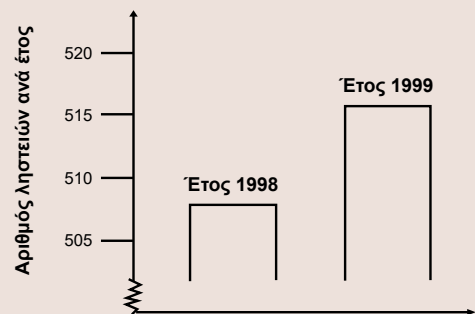


B Σύγκριση των ετήσιων κερδών των πολυεθνικών επιχειρήσεων A και B (σε εκατομμύρια ευρώ)



- 4 **Ερμηνεία ραβδογράμματος.** Σε ένα τηλεοπτικό κανάλι, ένας δημοσιογράφος σχολίασε την παρακάτω γραφική παράσταση ως εξής:

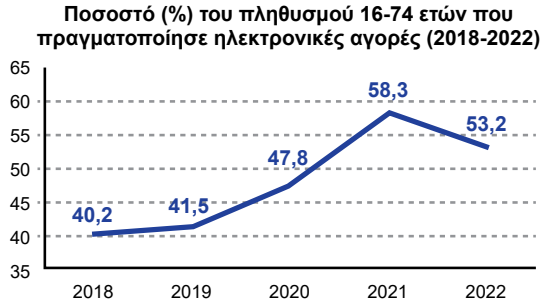
«Η γραφική παράσταση δείχνει ότι σημειώθηκε τεράστια αύξηση στον αριθμό των ληστειών από το έτος 1998 μέχρι το έτος 1999».



Νομίζετε ότι ο δημοσιογράφος ερμήνευσε σωστά την παραπάνω γραφική παράσταση; Να γράψετε ένα επιχειρήμα που να τεκμηριώνει την απάντησή σας. (PISA 2003)

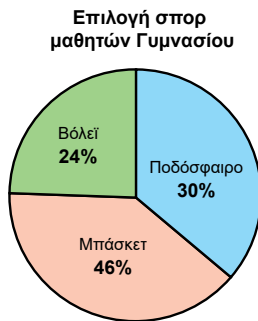
- 5 **Δημιουργία προβλήματος.** Να διατυπώσετε ένα πρόβλημα στο οποίο η οπτική αντίληψη του διαγράμματος μπορεί να οδηγήσει σε παραπλανητικό συμπέρασμα.

- 6 **Σωστό ή λάθος.** Ο Λεωνίδας ισχυρίζεται ότι αν ο κάθετος άξονας του παρακάτω χρονοδιαγράμματος ξεκινούσε από το μηδέν (0) τότε η αύξηση του ποσοστού (%) του πληθυσμού 16–74 ετών που πραγματοποίησε ηλεκτρονικές αγορές από το 2019 έως το 2021 θα φαινόταν μεγαλύτερη.



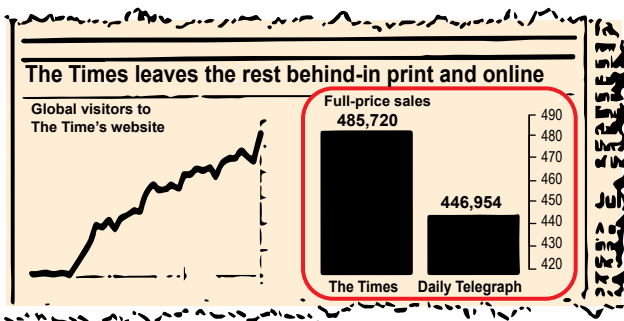
Ο ισχυρισμός του είναι σωστός ή λανθασμένος; Αν αλλάξει η κλίμακα στον άξονα y'γ τι θα συμβεί;

- 7 **Σωστό ή λάθος.** Σε μια έρευνα 100 μαθητές του Γυμνασίου ρωτήθηκαν ποια σπορ προτιμούν. Τα αποτελέσματα φαίνονται στο διπλανό κυκλικό διάγραμμα.



- α) Να εξηγήσετε γιατί το διάγραμμα δεν είναι σωστό.
β) Ποιος τρόπος παρουσίασης των δεδομένων είναι καταλληλότερος. Να αιτιολογήσετε;

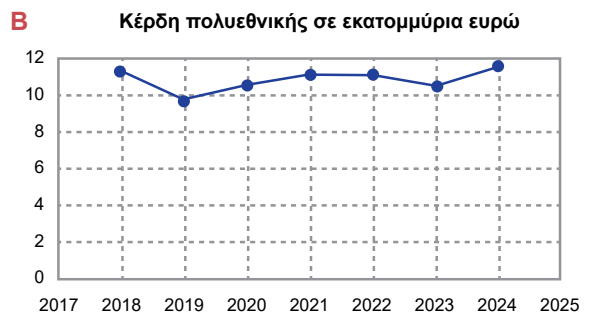
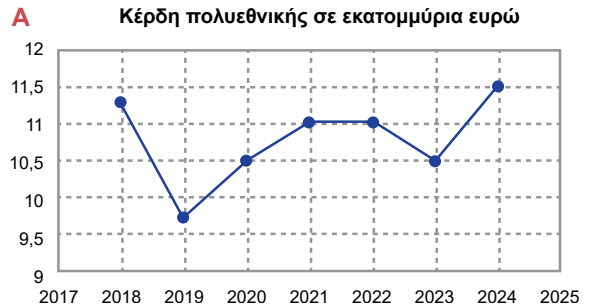
- 8 **Σωστό ή λάθος.** Η εφημερίδα Τάιμς της Νέας Υόρκης (New York Times) δημοσίευσε το 2016 την είδηση ότι έκανε περισσότερες πωλήσεις από την εφημερίδα Daily Telegraph παρουσιάζοντας το παρακάτω ραβδόγραμμα



- α) Τι θέλησε η εφημερίδα να καταλάβουν οι αναγνώστες;

- β) Είναι σωστό το ραβδόγραμμα; Να εξηγήσετε την απάντησή σας.

- 9 **Σωστό ή λάθος.** Σε ποιο από τα παρακάτω χρονοδιαγράμματα αναγνωρίζετε παραπλανητική παρουσίαση δεδομένων; Να αιτιολογήσετε γιατί.



- 10 **Σωστό ή λάθος.** Το κανάλι Fox News της Αμερικής πρόβαλε το 2011 σε μια εκπομπή το παρακάτω διάγραμμα το οποίο έδειχνε ότι η μεγάλη πλειονότητα του πληθυσμού των κατοίκων της Αμερικής επιβιώνει από την κοινωνική πρόνοια στην οποία είναι ενταγμένοι περισσότεροι από 100 εκατομμύρια άνθρωποι.

- α) Είναι σωστό το διάγραμμα που παρουσίασε το κανάλι;



- β) Είναι σωστό το μήνυμα που θέλησε να μεταδώσει με αυτό το διάγραμμα; Να εξηγήσετε την απάντησή σας.

Ο κύκλος στατιστικής έρευνας περιλαμβάνει τα στάδια: διατύπωση στατιστικών ερωτήσεων, συλλογή δεδομένων, ανάλυση των δεδομένων και ερμηνεία αποτελεσμάτων.

Χρονοδιάγραμμα ονομάζεται το διάγραμμα το οποίο δείχνει πώς αλλάζουν τα δεδομένα με την πάροδο του χρόνου.

Η περίληψη των πέντε αριθμών περιλαμβάνει χαρακτηριστικές τιμές που χρησιμοποιούνται για την περιγραφή και αξιολόγηση των δεδομένων: διάμεσος, ελάχιστη και μέγιστη τιμή, πρώτο και τρίτο τεταρτημόριο.

Ελάχιστη τιμή είναι η μικρότερη τιμή του συνόλου δεδομένων.

Μέγιστη τιμή είναι η μεγαλύτερη τιμή του συνόλου των δεδομένων.

Μέση τιμή (Μ.Τ.) ενός συνόλου δεδομένων είναι ο αριθμός που προκύπτει αν προσθέσουμε όλους τους αριθμούς και διαιρέσουμε το άθροισμα με το πλήθος τους.

- Αν σε όλες τις τιμές ενός συνόλου δεδομένων προσθέσουμε έναν αριθμό, τότε η νέα μέση τιμή τους βρίσκεται αν στην αρχική μέση τιμή, προσθέσουμε τον ίδιο αριθμό.
- Αν όλες οι τιμές ενός συνόλου δεδομένων πολλαπλασιαστούν με έναν αριθμό τότε και η μέση τιμή τους πολλαπλασιάζεται με τον ίδιο αριθμό.

Διάμεσος (δ) διατεταγμένων παρατηρήσεων είναι η τιμή που τις χωρίζει σε δύο ισοπληθείς ομάδες με βάση το μέγεθός τους.

- Όταν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττός αριθμός, τότε η διάμεσος είναι η «μεσαία» παρατήρηση.
- Όταν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιος αριθμός, τότε η διάμεσος είναι το ημίαθροισμα των δύο «μεσαίων» παρατηρήσεων.

Για τα τεταρτημόρια:

Όταν το πλήθος των διατεταγμένων παρατηρήσεων είναι άρτιος αριθμός ($2n$), το χωρίζουμε στη μέση. Όταν το πλήθος τους είναι περιττός αριθμός ($2n+1$) εξααιρούμε τη διάμεσο.

Πρώτο τεταρτημόριο είναι η διάμεσος των n μικρότερων παρατηρήσεων και τρίτο τεταρτημόριο η διάμεσος των n μεγαλύτερων παρατηρήσεων.

Το **θηκόγραμμα** είναι η γραφική αναπαράσταση της περίληψης των πέντε αριθμών: Πρώτο τεταρτημόριο Q_1 , διάμεσος δ ή το δεύτερο τεταρτημόριο Q_2 , τρίτο τεταρτημόριο (Q_3), ελάχιστη και μέγιστη τιμή.

Η διάμεσος (δ) σημειώνεται μέσα στο ορθογώνιο. Οι κεραίες (μουστάκια) συνδέουν το θηκόγραμμα με την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της λίστας των δεδομένων.

Μέτρα μεταβλητότητας είναι το εύρος (R) και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος (IQR).

Το εύρος (R) είναι η διαφορά μεταξύ της μέγιστης και της ελάχιστης τιμής.

Ενδοτεταρτημοριακό εύρος (IQR) ονομάζεται η διαφορά του πρώτου τεταρτημρίου Q_1 από το τρίτο τεταρτημόριο Q_3 : $IQR = Q_3 - Q_1$.

Παράδειγμα 1:

Μέγιστες ημερήσιες θερμοκρασίες μιας εβδομάδας σε °C:

15, 19, 18, 21, 22, 24, 21

Μέγιστη τιμή: $M = 24$

Ελάχιστη τιμή: $E = 15$

Εύρος: $R = 24 - 15 = 9$, $Q_1 = 18$, $Q_2 = 22$

Μέση τιμή:

$$M.T. = \frac{13 + 19 + 18 + 21 + 22 + 24 + 21}{7} = \frac{140}{7} = 20$$

Διάμεσος: 15, 18, 19, **21**, 21, 22, 24. Άρα: $\delta = 21$

Παράδειγμα 2:

Βαθμοί που πέτυχαν σε ένα διαγώνισμα Μαθηματικών 15 μαθητές:

14, 15, 13, 12, 17, 16, 6,

14, 13, 10, 18, 19, 10,

15, 16

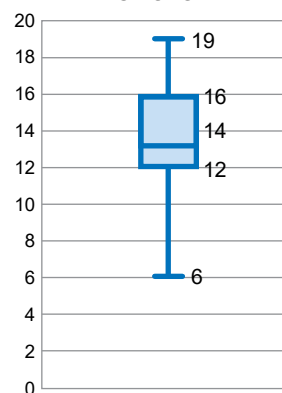
Μέγιστη τιμή: $\max = 19$

Ελάχιστη τιμή: $\min = 6$

Εύρος: $R = 16 - 12 = 4$

$Q_1 = 12$, $\delta = Q_2 = 14$, $Q_3 = 16$

ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΑ



Να ανοίξετε την εφαρμογή «ΓΛΩΣΣΑΡΙ: ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ» για να ανακεφαλαιώσετε όρους και έννοιες τις οποίες γνωρίσατε στο κεφάλαιο αυτό.

Ερωτήσεις για Συζήτηση και Αναστοχασμό

1. Ποια στάδια περιλαμβάνει ο κύκλος στατιστικής έρευνας;
2. Να διατυπώσετε δύο στατιστικές ερωτήσεις που μπορούν να απαντηθούν με χρονικά δεδομένα.
3. Να εντοπίσετε στο Διαδίκτυο ή στα Μέσα Μαζικής Ενημέρωσης δύο παραδείγματα χρήσης στατιστικών διαγραμμάτων τα οποία μπορούν να οδηγήσουν σε παραπλανητικά ή εσφαλμένα συμπεράσματα.
4. Αν σε ένα σύνολο θετικών δεδομένων προστεθεί ο αριθμός 0 να διευκρινίσετε τι θα συμβεί στη μέση τιμή και γιατί;
5. Δίνονται οι αριθμοί 1,2,7,10,20. Τι θα συμβεί στη μέση τιμή και τη διάμεσο εάν προστεθούν δύο νέοι αριθμοί, 6 και 8 στο υπάρχον σύνολο δεδομένων; Να αιτιολογήσετε το αποτέλεσμα.
6. Να βρείτε δύο αριθμούς που μπορούν να προστεθούν σε ένα σύνολο δεδομένων, έτσι ώστε να μη μεταβληθεί η μέση τιμή. Να εξηγήσετε πώς επιλέξατε αυτούς τους δύο αριθμούς.
7. Να βρείτε τρεις αριθμούς που μπορούν να προστεθούν στο υπάρχον σύνολο δεδομένων αριθμών, έτσι ώστε να μην επέλθει μεταβολή στη μέση τιμή. Να διευκρινίσετε πώς επιλέξατε αυτούς τους τρεις αριθμούς.

Να κάνετε την Εργασία:
«Δυστυχήματα μοτοσυκλετιστών».



Να κάνετε την Εργασία:
«Πλαστικά καπάκια».



Επαναληπτικά Μαθηματικά Έργα

- 1 Ο ακόλουθος πίνακας δείχνει τις τελικές θέσεις κατάταξης του Παναθηναϊκού στο Εθνικό Πρωτάθλημα Ποδοσφαίρου από το 2014 μέχρι και το 2022.

2014	2015	2016	2017	2018
2	3	3	11	8
2019	2020	2021	2022	
4	5	4	2	

- α) Να κατασκευάσετε το αντίστοιχο χρονοδιάγραμμα αντιστρέφοντας την κλίμακα τιμών στον άξονα y' .
 - β) Να χρησιμοποιήσετε το χρονοδιάγραμμα για να κρίνετε την αθλητική εξέλιξη της ομάδας. Να αιτιολογήσετε τον ισχυρισμό σας.
- 2 Οι ακόλουθες αριθμητικές παρατηρήσεις δείχνουν το πλήθος των πόλεων που έχει επισκεφθεί καθένας από τους μαθητές της Β' Γυμνασίου:
1, 7, 5, 31, 4, 7, 1, 6, 11, 3, 6, 2, 2, 2, 8, 2, 5, 12, 3, 10
α) Να βρείτε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και την επικρατούσα τιμή του πλήθους των πόλεων που επισκέφτηκαν οι μαθητές.
β) Να φτιάξετε ένα σημειόγραμμα.
γ) Ποιο στατιστικό μέτρο περιγράφει καλύτερα τα δεδομένα;

- δ) Να εκτιμήσετε την απόμακρη τιμή. Να βρείτε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και την επικρατούσα τιμή χωρίς την απόμακρη τιμή. Ποιο μέτρο επηρεάζει περισσότερο η απόμακρη τιμή;

- 3 Κατασκευή χρονοδιαγράμματος.
Οι μέγιστες μηνιαίες τιμές συγκέντρωσης του όζοντος (O_3) σε ένα παρατηρητήριο ατμοσφαιρικής ρύπανσης της Αττικής σε οκτώ μήνες του έτους 2023 ήταν:

Μήνες 2023	Μάρτ.	Απρ.	Μάι	Ιούν.
Όζον σε mg/m^3	77	89	117	105
Μήνες 2023	Ιούλ.	Αύγ.	Σεπτ.	Οκτ.
Όζον σε mg/m^3	122	112	90	75

- α) Να κατασκευάσετε το σχετικό χρονοδιάγραμμα.
 - β) Με βάση το χρονοδιάγραμμα να θέσετε και να συζητήσετε ερωτήσεις που σας ενδιαφέρουν.
- 4 Ένας παραγωγός φυτών θέλει να δοκιμάσει για ένα συγκεκριμένο φυτό δύο διαφορετικά λιπάσματα. Για τον σκοπό αυτό φυτεύει δύο ομάδες από 20 ίδιους σπόρους στην καθεμία και ρίχνει τα διαφορετικά λιπάσματα στις δύο ομάδες. Μετά από τρεις εβδομάδες μετράει το ύψος των φυ-



τών σε εκατοστά στις δύο ομάδες και καταγράφει τα ύψη που παρουσιάζονται στον πίνακα.

α) Να κατασκευάσετε το θηκόγραμμα για τα ύψη των φυτών με το λίπασμα Α.

β) Να περιγράψετε με βάση την περίληψη των πέντε αριθμών: ελάχιστη τιμή, μέγιστη τιμή και τεταρτημόρια, τα ύψη των φυτών της ομάδας με το λίπασμα Α.

γ) Να κατασκευάσετε το θηκόγραμμα για τα ύψη των φυτών της ομάδας με το λίπασμα Β.

δ) Να περιγράψετε με βάση την περίληψη των πέντε αριθμών: ελάχιστη τιμή, μέγιστη τιμή και τεταρτημόρια, τα ύψη των φυτών της ομάδας με το λίπασμα Β.

ε) Να συγκρίνετε το εύρος και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος των υψών των φυτών για τα δύο λίπασματα.

ΥΨΗ ΦΥΤΩΝ (cm)	
ΛΙΠΑΣΜΑ Α'	ΛΙΠΑΣΜΑ Β'
1	4
1	4
2	5
2	5
2	6
2	6
3	7
3	7
3	8
3	8
3	9
3	9
4	10
4	11
5	12
5	12
6	12
7	13
8	13
8	14

5 Οι εργαζόμενοι δύο τμημάτων της διεύθυνσης μιας τράπεζας αξιολογήθηκαν ως προς την επίτευξη στόχων σε μια εικοσάβαθμη κλίμακα.



Οι αξιολογήσεις παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα :

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΤΡΑΠΕΖΑΣ									
12	16	19	12	14	15	16	17	14	18
13	15	19	16	11	16	17	13	16	18
14	13	18	15	17	12	18	12	13	20

α) Να βρείτε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και το εύρος των αξιολογήσεων των εργαζομένων στη διεύθυνση της τράπεζας.

β) Οι αξιολογήσεις του Α' τμήματος της διεύθυνσης

παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα. Να συγκρίνετε τις αξιολογήσεις των δύο τμημάτων της διεύθυνσης της τράπεζας ως προς τη μέση τιμή, τη διάμεσο και το εύρος.

ΤΜΗΜΑ Α' Δ/ΝΣΗΣ				
12	15	12	14	16
13	16	16	16	15
14	12	15	13	13

6 Δίνονται οι αριθμοί: **12, 3, 15, 7, 10.**

α) Να βρείτε «με το χέρι» τη μέση τιμή και τη διάμεσο.

β) Να προσθέσετε έναν ακόμα αριθμό ώστε να αυξηθεί η μέση τιμή.

γ) Να προσθέσετε έναν ακόμα αριθμό ώστε να ελαττωθεί η μέση τιμή.

δ) Να αντικαταστήσετε έναν από τους αριθμούς ώστε να αυξηθεί η μέση τιμή χωρίς να μεταβληθεί η διάμεσος.

ε) Να αντικαταστήσετε έναν από τους αριθμούς ώστε να ελαττωθεί η μέση τιμή χωρίς να μεταβληθεί η διάμεσος.

7 Σχολικοί αγώνες.

α) Ο Αργύρης συμμετέχει στους σχολικούς αγώνες ταχύτητας 400 μέτρων και 800 μέτρων. Οι χρόνοι σε δευτερόλεπτα των 8 συμμετεχόντων σε κάθε αγώνα ήταν:



400 Μέτρα: 11,5, 11,8, 11,9, 12,2, 12,6, 13, 13,8, 14, 12, 13, 12,6, 11,9, 12,5, 13,2, 13,5, 13,3.

800 Μέτρα: 55, 59, 60, 64, 70, 78, 80, 85, 56, 59, 61, 62, 70, 75, 80, 73, 65, 68, 58, 71, 77.

i. Να κάνετε «με το χέρι» ένα θηκόγραμμα για τους χρόνους των 400 μέτρων.

ii. Να συγκρίνετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των χρόνων στα 400 μέτρα.

iii. Να κάνετε ένα θηκόγραμμα για τους χρόνους των 800 μέτρων.

iv. Να συγκρίνετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των χρόνων στα 800 μέτρα.

β) Ο Αργύρης πέτυχε και στους δύο αγώνες ταχύτητας χρόνο χαμηλότερο από τον αντίστοιχο μέσο όρο.

i. Κατατάσσεται στο χαμηλότερο 50% των αθλητών στα 400 μέτρα ;

ii. Κατατάσσεται στο χαμηλότερο 50% των αθλητών στα 800 μέτρα ;

Στοχαστικά Μαθηματικά

Κεφάλαιο

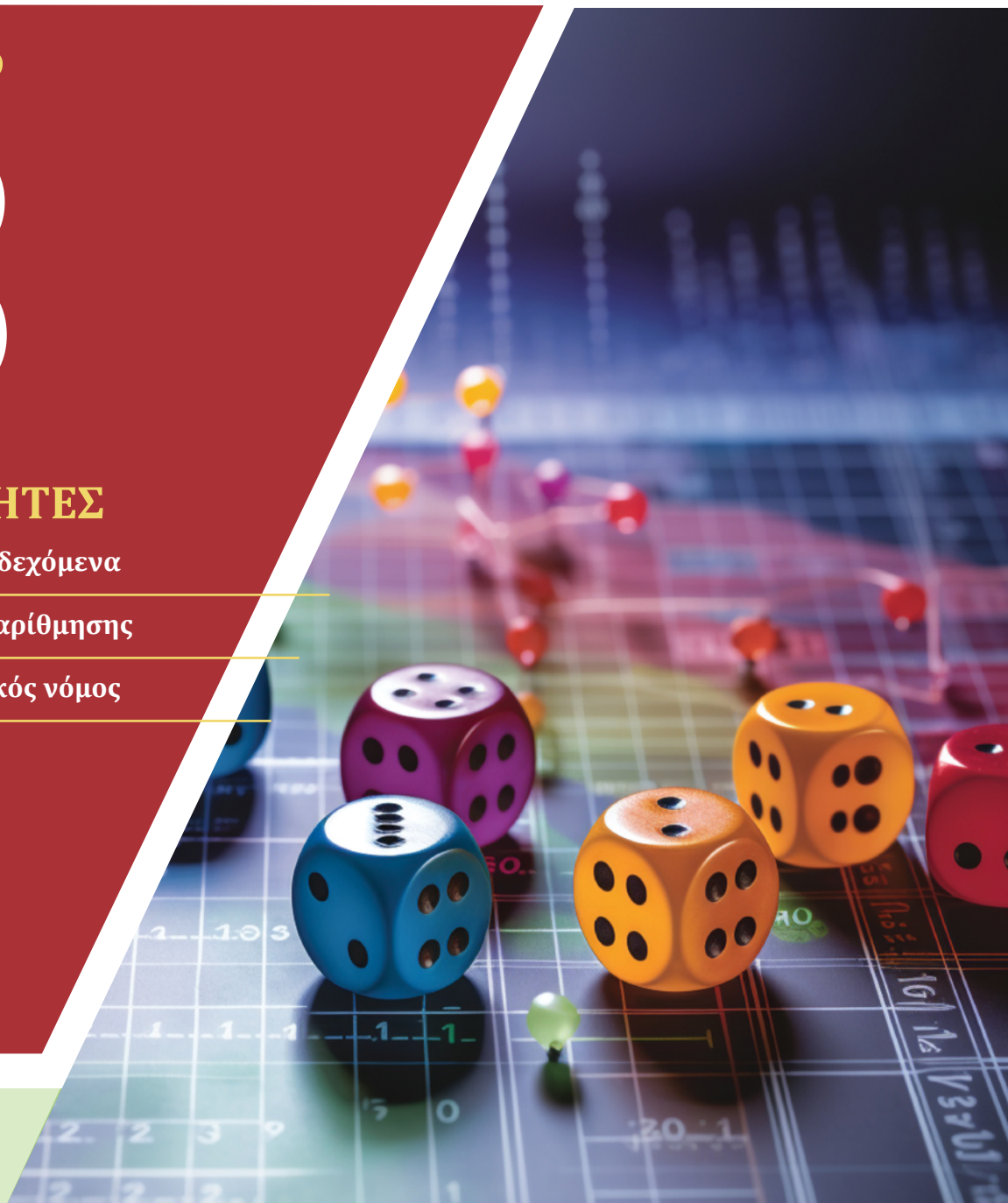
8

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Ασυμβίβαστα ενδεχόμενα

Βασική Αρχή Απαρίθμησης

Απλός προσθετικός νόμος



Στο Κεφάλαιο αυτό θα μάθουμε:

- Να ελέγχουμε αν δύο ενδεχόμενα είναι ασυμβίβαστα.
- Να απαριθμούμε το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου με χρήση της Βασικής Αρχής Απαρίθμησης (BAA) και να υπολογίζουμε την αντίστοιχη πιθανότητα.
- Να χρησιμοποιούμε τον απλό προσθετικό νόμο για να υπολογίσουμε την πιθανότητα σύνθετων ενδεχόμενων.

8.1 Ασυμβίβαστα ενδεχόμενα

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

Να ελέγχουν αν δύο ενδεχόμενα είναι ασυμβίβαστα.

Στην Α΄ Γυμνασίου μάθαμε ότι:

Αν A, B δύο σύνολα, τότε:

- Το σύνολο « A και B » αποτελείται μόνο από τα κοινά στοιχεία των συνόλων A και B .
- Το σύνολο « A ή B » αποτελείται από τα κοινά και τα μη κοινά στοιχεία των συνόλων A, B .

Παράδειγμα: Αν $A = \{1,2\}$, $B = \{1,2,3\}$ και $\Gamma = \{3,4\}$, τότε:

« A και B » = $\{1,2\}$, « A ή B » = $\{1,2,3\}$, « B ή Γ » = $\{1, 2, 3, 4\}$.

Το **κενό σύνολο** δεν περιέχει κανένα στοιχείο. Συμβολίζεται με \emptyset ή $\{\}$.

Δειγματικός χώρος είναι το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης. Τον συμβολίζουμε με Ω και συχνά μπορούμε να τον περιγράψουμε με **δεντροδιάγραμμα**, **πίνακα** ή **πλέγμα**.

Ενδεχόμενο είναι κάθε υποσύνολο ενός δειγματικού χώρου.

Ένα ενδεχόμενο A **πραγματοποιείται** όταν το αποτέλεσμα του πειράματος τύχης είναι ένα από τα στοιχεία του A .

Κλασικός ορισμός πιθανότητας. Αν ένας δειγματικός χώρος αποτελείται από ισοπίθανες εκβάσεις, τότε πιθανότητα ενός ενδεχομένου ονομάζεται το πηλίκο του πλήθους των περιπτώσεων πραγματοποίησής του, προς το πλήθος των δυνατών περιπτώσεων.

Σημείωση: Τα ενδεχόμενα είναι σύνολα, οπότε ισχύουν και γι' αυτά όσα ξέρουμε για τα σύνολα.



Διερεύνηση 1. Ασυμβίβαστα ενδεχόμενα.

Εργασία μαθητών κατά ζεύγη.

Να εξετάσετε αν μπορούν να πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα τα παρακάτω ενδεχόμενα:

- α) "Όταν χιονίσει ξανά στην πόλη μου θα είναι Σάββατο" και "Όταν χιονίσει ξανά στην πόλη μου θα είναι Κυριακή"
- β) "Όταν στρίψουμε ένα νόμισμα: «εμφανίζεται κεφάλι» και «εμφανίζεται γράμματα».
- γ) "Όταν ρίξουμε ένα ζάρι: «εμφανίζεται 3» και «εμφανίζεται άρτιος αριθμός».
- δ) Σε μια διασταύρωση ένα λεωφορείο: «στρίβει αριστερά» και «στρίβει δεξιά».

Συζητάμε και συγκρίνουμε τις απαντήσεις μας με τις απαντήσεις των συμμαθητών μας.



Διερεύνηση 2. Ασυμβίβαστα ενδεχόμενα.

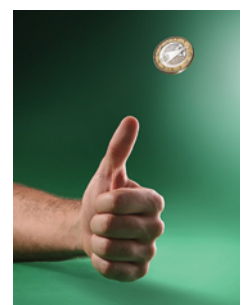
Εργασία μαθητών ατομικά ή κατά ζεύγη.

Ρίχνουμε ένα νόμισμα δύο φορές και θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

$A = \{KK\}$, $B = \{\Gamma\Gamma, KK\}$ και $\Gamma = \{K\Gamma, \Gamma K\}$, όπου K : Κεφάλι και Γ : Γράμματα.

- α) Μπορούν να πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα δύο από τα ενδεχόμενα A, B, Γ ; Αν ναι, ποια;
- β) Να βρείτε τα ενδεχόμενα: « A και B », « A και Γ » και « B και Γ ». Τι παρατηρείτε;

Συζητάμε και εξηγούμε πώς σκεφτήκαμε. Ελέγχουμε την ορθότητα των απαντήσεων στην τάξη.



Μαθηματικές Έννοιες και Διεργασίες Μάθησης

Ασυμβίβαστα ενδεχόμενα

Υπάρχουν ενδεχόμενα τα οποία δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα. Για παράδειγμα, αν ρίξουμε ένα ζάρι τότε τα ενδεχόμενα $A = \{1,2\}$ και $B = \{3,4,5,6\}$ δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα, όποιος αριθμός κι αν εμφανισθεί.

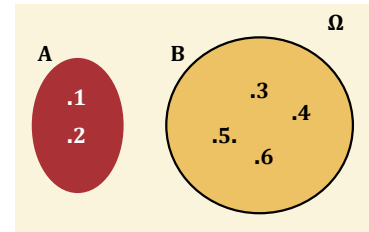
Ενδεχόμενα όπως αυτά λέγονται **ασυμβίβαστα**.

Ασυμβίβαστα ενδεχόμενα, όπως τα $A = \{1,2\}$ και $B = \{3,4,5,6\}$ τα οποία παρουσιάζονται και στο σχήμα, παρατηρούμε ότι δεν έχουν κοινά στοιχεία. Δηλαδή το σύνολο «A και B» είναι το κενό σύνολο.

Αυτό συμβαίνει για όλα τα ασυμβίβαστα ενδεχόμενα και έτσι μπορούμε να διατυπώσουμε τον ακόλουθο ορισμό ο οποίος μας δίνει έναν τρόπο ελέγχου για να βρίσκουμε αν δύο ενδεχόμενα είναι ασυμβίβαστα.



Να ανοίξετε τον σύνδεσμο και να απαντήσετε στις ερωτήσεις Σωστού-Λάθους για να διακρίνετε ασυμβίβαστα από μη ασυμβίβαστα ενδεχόμενα.



Ασυμβίβαστα ονομάζονται δύο ενδεχόμενα A, B όταν το σύνολο «A και B» είναι το κενό σύνολο.

Παράδειγμα: Ρίχνουμε ένα ζάρι και θεωρούμε τα ενδεχόμενα A: «εμφανίζεται άρτιος αριθμός», B: «εμφανίζεται 3». Τα ενδεχόμενα A, B δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν συγχρόνως αφού δεν έχουν κοινό στοιχείο. Άρα το σύνολο «A και B» είναι το κενό και επομένως είναι ασυμβίβαστα.

Σημειώσεις:

1. Δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα λέγονται επίσης **ξένα** ή **αμοιβαίως αποκλειόμενα**.
2. Στα ασυμβίβαστα ενδεχόμενα η μη πραγματοποίηση του ενός δεν συνεπάγεται απαραίτητα την πραγματοποίηση του άλλου.

Όταν η τομή δύο ενδεχομένων είναι το κενό σύνολο, τότε τα ενδεχόμενα είναι ασυμβίβαστα.

Όταν η τομή δύο ενδεχομένων δεν είναι το κενό σύνολο, τότε τα ενδεχόμενα δεν είναι ασυμβίβαστα.



Εφαρμογή 1

Ανοίγουμε στην τύχη ένα βιβλίο Μαθηματικών σε μία από τις 20 πρώτες σελίδες του.

Να εξετάσετε αν είναι ασυμβίβαστα τα ενδεχόμενα:

- α) «Αριθμός σελίδας μεγαλύτερος από 13» και «Αριθμός σελίδας άρτιος».
- β) «Αριθμός σελίδας μικρότερος από 4» και «Διψήφιος αριθμός σελίδας».
- γ) «Μονοψήφιος αριθμός σελίδας» και «Αριθμός σελίδας πολλαπλάσιο του 10».



Απάντηση

- α) Οι 13 αριθμοί σελίδων της πρώτης εικοσάδας που είναι μεγαλύτεροι από 13 είναι: 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20. Οι άρτιοι αριθμοί σελίδων στην πρώτη εικοσάδα είναι: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20. Τα δύο ενδεχόμενα έχουν κοινά στοιχεία τους αριθμούς: 14, 16, 18, 20 οπότε τα ενδεχόμενα δεν είναι ασυμβίβαστα.
- β) Οι αριθμοί σελίδων μικρότεροι από 4 είναι: 1, 2, 3. Οι διψήφιοι αριθμοί σελίδων είναι: 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20. Τα δύο ενδεχόμενα δεν έχουν κοινά στοιχεία και επομένως είναι ασυμβίβαστα.
- γ) Οι μονοψήφιοι αριθμοί σελίδων είναι: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Οι σελίδες με αριθμό πολλαπλάσιο του 10 στην πρώτη εικοσάδα είναι: 10, 20. Τα δύο ενδεχόμενα δεν έχουν κοινά στοιχεία και επομένως είναι ασυμβίβαστα.



Με την ψηφιακή εφαρμογή να διερευνήσετε την έννοια των ασυμβίβαστων ενδεχομένων.



Εφαρμογή 2

Σε ένα τοπικό σχολικό πρωτάθλημα στίβου συμμετέχουν συνολικά 120 αθλητές. Η ομάδα στίβου Α ενός σχολείου έχει $2\alpha + 3$ παίκτες και η ομάδα Β ενός άλλου σχολείου έχει $\alpha + 1$ παίκτες, όπου α φυσικός αριθμός.

- α)** Αν και οι δύο ομάδες Α, Β έχουν 25 παίκτες, να βρείτε το πλήθος των παικτών κάθε ομάδας.
β) Αν διαλέξουμε στην τύχη έναν παίκτη από αυτό το πρωτάθλημα, να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων: **i.** Να είναι παίκτης της ομάδας Α. **ii.** Να είναι παίκτης της ομάδας Β.



Απάντηση

α) Ένας παίκτης μπορεί να παίζει μόνο σε μία ομάδα. Άρα, τα σύνολα των παικτών των δύο ομάδων δεν έχουν κοινά στοιχεία, οπότε τα ενδεχόμενα «παίκτης της Α ομάδας» και «παίκτης της Β ομάδας» είναι ασυμβίβαστα και επομένως: $(2\alpha + 3) + (\alpha + 1) = 25$ ή $3\alpha + 4 = 25$ ή $3\alpha = 21$ ή $\alpha = 7$.

Άρα:

- Η ομάδα Α έχει: $2\alpha + 3 = 2 \cdot 7 + 3 = 17$ παίκτες.
- Η ομάδα Β έχει: $\alpha + 1 = 7 + 1 = 8$ παίκτες

β) i. Η πιθανότητα του ενδεχόμενου ένας παίκτης από αυτό το πρωτάθλημα να είναι παίκτης της Α ομάδας είναι:

$$\frac{\text{Πλήθος των στοιχείων του } A}{\text{Πλήθος των στοιχείων του } \Omega} = \frac{17}{120} \approx 0,1417 \text{ ή } 14,2\%$$

ii. Η πιθανότητα του ενδεχόμενου ένας παίκτης από αυτό το πρωτάθλημα να είναι παίκτης της Β ομάδας είναι:

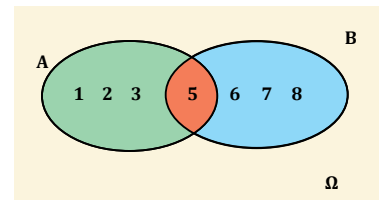
$$\frac{\text{Πλήθος των στοιχείων του } B}{\text{Πλήθος των στοιχείων του } \Omega} = \frac{8}{120} \approx 0,067 \text{ ή } 6,7\%$$

Να μελετήσετε το
 Ιστορικό σημείωμα:
 «Η Ιστορία των Πιθανοτήτων: Μία πορεία
 προς την Τυχαιότητα».



Ασκήσεις και Προβλήματα

- 1** Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ασυμβίβαστα:
- α)** Ρίχνουμε ένα ζάρι. Α είναι το ενδεχόμενο «να φέρουμε 2» και Β είναι το ενδεχόμενο «να φέρουμε άρτιο αριθμό».
- β)** Επιλέγουμε έναν μαθητή του σχολείου μας. Α είναι το ενδεχόμενο «να έχει γεννηθεί στην Ελλάδα» και Β το ενδεχόμενο «να έχει γεννηθεί στην Ιταλία».
- γ)** Επιλέγουμε έναν άντρα που ζει στην πόλη μας. Α είναι το ενδεχόμενο να «έχει ηλικία κάτω των 25» και Β το ενδεχόμενο «να έχει κόρη 26 ετών».
- 2** Είναι ασυμβίβαστα τα ενδεχόμενα Α, Β που απεικονίζονται στο σχήμα;



Να εξηγήσετε πώς βρήκατε την απάντησή σας.

- 3 Στα ακόλουθα πειράματα τύχης να βρείτε ποια από τα παρακάτω ζεύγη ενδεχομένων είναι ασυμβίβαστα:
- α) Τραβάμε δύο φύλλα από μία τράπουλα.
A: «Τραβάμε κόκκινο φύλλο».
B: «Τραβάμε δεκάρι».
- β) Ρίχνουμε ένα ζάρι.
A: «Το αποτέλεσμα είναι αριθμός μικρότερος από 4».
B: «Το αποτέλεσμα είναι άρτιος αριθμός».
- γ) Ρίχνουμε ένα νόμισμα.
A: «Το αποτέλεσμα είναι κεφάλι».
B: «Το αποτέλεσμα είναι γράμματα».
- 4 Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές και βρίσκουμε κάθε φορά το άθροισμα των ενδείξεων. Ποια από τα παρακάτω ενδεχόμενα είναι ασυμβίβαστα:
- α) «Το άθροισμα είναι άρτιος αριθμός», «Το άθροισμα είναι μεγαλύτερο από 6».
- β) «Το άθροισμα είναι μεγαλύτερο από 8», «Και οι δύο αριθμοί είναι μικρότεροι από 4».
- 5 Μία σακούλα περιέχει μικρές και μεγάλες σφαίρες σε μπλε και κόκκινο χρώμα. Το 80% έχουν μπλε χρώμα και το 70% είναι μεγάλου μεγέθους. Επιλέγουμε τυχαία μία σφαίρα. Να εξετάσετε αν είναι ασυμβίβαστα τα ενδεχόμενα **A:** «Παίρνω μπλε σφαίρα» και **B:** «Παίρνω σφαίρα μεγάλου μεγέθους».
- 6 Διαλέγουμε στην τύχη έναν από τους αριθμούς: **25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36** και θεωρούμε τα ενδεχόμενα:
- A:** «Ο αριθμός είναι άρτιος».
B: «Ο αριθμός είναι περιττός».
Γ: «Ο αριθμός είναι πολλαπλάσιο του 4».
Δ: «Ο αριθμός είναι πρώτος».
E: «Ο αριθμός είναι τετράγωνο κάποιου αριθμού».
- α) Να βρείτε τις πιθανότητες κάθε ενδεχόμενου.
 β) Ποια από τα ακόλουθα ζεύγη ενδεχομένων είναι ασυμβίβαστα;
 (A, B), (B, Γ), (A, Δ), (Γ, E).
- 7 Η Σάρα παίρνει στην τύχη ένα από τα γράμματα της λέξης ΕΥΧΑΡΙΣΤΩ.
- α) Να εξετάσετε αν είναι ασυμβίβαστα τα ενδεχόμενα «να πάρει φωνήεν» και «να πάρει σύμφωνο».
- β) Να βρείτε την πιθανότητα να πάρει:
 i. Φωνήεν. ii. Σύμφωνο.
- 8 Ένας τροχός της τύχης έχει την ίδια πιθανότητα να σταματήσει σε έναν από τους εννέα αριθμημένους κυκλικούς τομείς του. Αν περιστρέψουμε τον τροχό, να εξετάσετε αν είναι ασυμβίβαστα τα ενδεχόμενα ο τροχός να σταματήσει:
- α) «Στο τρία» και «Στο έξι».
- β) «Σε αριθμό μεγαλύτερο από το 3» και «Στη ρίζα της εξίσωσης $2x - 1 = x + 3$ ».
- 9 Σε ένα τοπικό σχολικό πρωτάθλημα μπάσκετ συμμετέχουν συνολικά 90 αθλητές. Η ομάδα A μπάσκετ ενός σχολείου έχει $3x + 4$ παίκτες και η ομάδα B ενός άλλου σχολείου έχει $2x + 5$ παίκτες, όπου x θετικός φυσικός αριθμός.
- α) Αν οι δύο ομάδες έχουν 29 παίκτες, να βρείτε το πλήθος των παικτών κάθε ομάδας.
- β) Να βρείτε την πιθανότητα αν διαλέξουμε στη τύχη έναν παίκτη από αυτό το πρωτάθλημα:
 i. Να είναι παίκτης της A ομάδας.
 ii. Να είναι παίκτης της B ομάδας.



8.2 Βασική αρχή της απαρίθμησης

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

- Να απαριθμούν το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου με χρήση της Βασικής Αρχής Απαρίθμησης (BAA) και να υπολογίζουν την αντίστοιχη πιθανότητα.



Διερεύνηση 1. Βασική Αρχή Απαρίθμησης.

Εργασία μαθητών κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες.

Δύο φίλοι στις διακοπές, σκέφτονται να πάνε πρώτα για καφέ, ύστερα σινεμά και τέλος για παγωτό.

Έχουν να επιλέξουν ανάμεσα σε δύο καφετέριες K_1, K_2 , σε τρία σινεμά $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ και σε δύο παγωτατζίδικα Π_1, Π_2 .

- α) Να φτιάξετε ένα δεντροδιάγραμμα για να βρείτε όλες τις πιθανές επιλογές.
- β) Να προσδιορίσετε το πλήθος των στοιχείων των ενδεχομένων κάθε επιλογής διασκέδασης.
- γ) Να εξετάσετε αν το πλήθος των συνολικών ενδεχομένων, μπορεί να βρεθεί από το πλήθος των στοιχείων των ενδεχομένων κάθε επιλογής.

Μοιραζόμαστε τις απαντήσεις μας στην τάξη και εξηγούμε πώς τις βρήκαμε.



Διερεύνηση 2. Βασική Αρχή Απαρίθμησης.

Εργασία μαθητών κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες.

Η θεία Σοφία θέλει να ετοιμάσει μελομακάρονα για τα παιδιά της και τα ανίψια της. Έχει μια συνταγή με 4 υλικά που τοποθετούνται με συγκεκριμένη σειρά στην εκτέλεσή της. Το πρώτο υλικό από αυτά της συνταγής κατασκευάζεται μόνο από μια εταιρεία, το δεύτερο από 2, το τρίτο από 3 και το τέταρτο από 4 αντίστοιχα εταιρείες του εμπορίου. Πόσες συνολικά δυνατότητες επιλογής για τα υλικά της συνταγής έχει από την αγορά;

Συζητούμε στην τάξη τρόπους λύσης του προβλήματος.



Να ανοίξετε την ψηφιακή εφαρμογή για να διερευνήσετε την έννοια του δεντροδιαγράμματος.

Μαθηματικές Έννοιες και Διεργασίες Μάθησης

Βασική Αρχή Απαρίθμησης (BAA)

Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα ενός ενδεχομένου, θα πρέπει σύμφωνα με τον ορισμό να ξέρουμε το πλήθος των ευνοϊκών ενδεχομένων και το πλήθος των δυνατών ενδεχομένων. Για να βρούμε το πλήθος των δυνατών ενδεχομένων χρησιμοποιούμε συχνά δεντροδιαγράμματα ή πίνακες.

Ωστόσο επειδή δεν χρειάζεται να ξέρουμε ποια είναι ακριβώς τα ενδεχόμενα, αλλά το πλήθος τους, μπορούμε να εργαστούμε όπως φαίνεται στο παράδειγμα, το οποίο ακολουθεί.

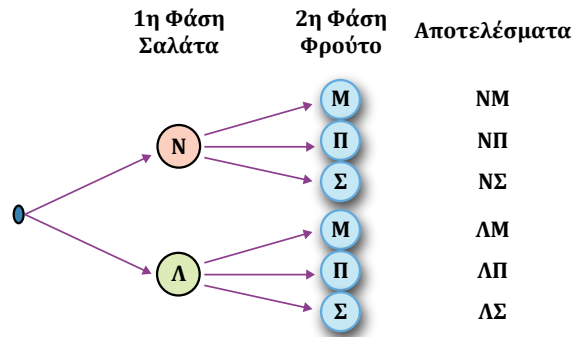
Παράδειγμα: Το δείπνο της Αλίκης περιλαμβάνει σαλάτα και φρούτο. Προσφέρονται δύο διαφορετικές σαλάτες (ντομάτα και λάχανο) και τρία διαφορετικά φρούτα (μήλο, πορτοκάλι και σταφύλι). Να βρείτε με πόσους τρόπους μπορεί η Αλίκη να ετοιμάσει το δείπνο της.

Φτιάχνουμε το ακόλουθο δεντροδιάγραμμα και μετράμε το πλήθος των απλών ενδεχομένων, δηλαδή το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου.

Ο δειγματικός χώρος που προκύπτει από το δεντροδιάγραμμα είναι $\Omega = \langle \text{NM}, \text{NΠ}, \text{NΣ}, \text{ΛM}, \text{ΛΠ}, \text{ΛΣ} \rangle$. Επομένως το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων είναι 6.

Παρατηρούμε ότι αφού η Αλίκη μπορεί να επιλέξει σαλάτα με 2 τρόπους και σε κάθε τρόπο αντιστοιχούν 3 τρόποι να επιλέξει φρούτο, τότε για να ολοκληρωθεί η διαδικασία της επιλογής δείπνου χρειάζονται $2 \times 3 = 6$ τρόποι.

Δηλαδή, το πλήθος των αποτελεσμάτων του δειγματικού χώρου μπορεί να βρεθεί χωρίς το δεντροδιάγραμμα πολλαπλασιάζοντας το πλήθος των τρόπων κάθε φάσης (σταδίου).



Γενικά

Βασική Αρχή Απαρίθμησης (BAA):

«Αν μια διαδικασία μπορεί να χωριστεί σε 1, 2, 3 διαδοχικές φάσεις και κάθε φάση πραγματοποιείται αντίστοιχα με α, β, γ τρόπους, τότε για να ολοκληρωθεί η διαδικασία υπάρχουν $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma$ διαφορετικοί τρόποι».

ΒΑΣΙΚΗ ΑΡΧΗ ΑΠΑΡΙΘΜΗΣΗΣ (BAA)			
	Φάση 1η	Φάση 2η	Φάση 3η
Τρόποι	α	β	γ
Σύνολο διαφορετικών τρόπων: $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma$			

Σημειώσεις:

1. Στη BAA η επιλογή ενός οποιουδήποτε τρόπου αποκλείει την επιλογή οποιουδήποτε άλλου.
2. Η BAA γενικεύεται και ισχύει για οποιοδήποτε πλήθος φάσεων.



Να ανοίξετε τον σύνδεσμο και να απαντήσετε στις ερωτήσεις για να εξοικειωθείτε με τη Βασική Αρχή της Απαρίθμησης.



Εφαρμογή 1. Πινακίδες κυκλοφορίας.

Οι πινακίδες κυκλοφορίας των επιβατικών αυτοκινήτων στην Ελλάδα, σύμφωνα με το σύστημα ταξινόμησης που εφαρμόζεται, αποτελούνται από τρία γράμματα του ελληνικού αλφάβητου τα οποία υπάρχουν και στο αγγλικό αλφάβητο, ακολουθούμενα από 4 ψηφία (από το 0, 1,..., 9), όπως φαίνεται και στο ακόλουθο σχήμα. Το πρώτο ψηφίο του αριθμητικού μέρους δεν μπορεί να είναι μηδέν (0).



- α) Πόσες διαφορετικές πινακίδες κυκλοφορίας μπορούν να σχηματιστούν;
- β) Πόσες πινακίδες κυκλοφορίας μπορούν να σχηματιστούν από τρία ίδια γράμματα και τέσσερις ίδιους αριθμούς;
- γ) Ας υποθέσουμε ότι όλες οι δυνατές πινακίδες κυκλοφορίας έχουν διανεμηθεί σε αυτοκίνητα. Αν διαλέξουμε ένα αυτοκίνητο στην τύχη, ποια είναι η πιθανότητα η πινακίδα του να αποτελείται από τρία ίδια γράμματα και τέσσερις ίδιους αριθμούς;

Απάντηση

Τα γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου τα οποία υπάρχουν στο αγγλικό αλφάβητο είναι 14: Α, Β, Ε, Ζ, Η, Ι, Κ, Μ, Ν, Ο, Ρ, Τ, Υ, Χ και τα ψηφία που χρησιμοποιούνται είναι 10, από το 0 έως και το 9. Έτσι λοιπόν έχουμε:

- α) Η διαδικασία σχηματισμού μίας έγκυρης πινακίδας κυκλοφορίας γίνεται σε 2 στάδια. Στο 1ο στάδιο συμπληρώνονται οι 3 θέσεις των γραμμάτων και στο 2ο στάδιο τα τέσσερα ψηφία του αριθμού.
 - Το 1ο στάδιο της επιλογής των τριών γραμμάτων στην πινακίδα αναλύεται σε 3 φάσεις, μία για κάθε γράμμα. Η τοποθέτηση ενός γράμματος στην 1η θέση μπορεί να γίνει με 14 τρόπους και το ίδιο συμβαίνει για τη 2η θέση και την 3η θέση.

Άρα, σύμφωνα με τη βασική αρχή της απαρίθμησης για να ολοκληρωθεί η διαδικασία σχηματισμού των τριών γραμμάτων στην πινακίδα χρειάζονται: $14 \cdot 14 \cdot 14 = 2744$ τρόποι.

- Το 2ο στάδιο της τοποθέτησης των τεσσάρων ψηφίων στην πινακίδα αναλύεται σε 4 φάσεις, μία για κάθε ψηφίο. Η τοποθέτηση ενός ψηφίου στην 1η θέση μπορεί να γίνει με 9 τρόπους (όσα και τα ψηφία του δεκαδικού συστήματος εκτός του μηδενός). Η 2η θέση μπορεί να συμπληρωθεί με 10 τρόπους (όσα και τα ψηφία του δεκαδικού συστήματος) και το ίδιο συμβαίνει για την 3η και 4η θέση.

Άρα, σύμφωνα με τη βασική αρχή της απαρίθμησης για να ολοκληρωθεί η διαδικασία τοποθέτησης των τεσσάρων ψηφίων στην πινακίδα χρειάζονται: $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$ τρόποι.

Αφού λοιπόν για το 1ο στάδιο χρειάζονται 2744 τρόποι και για το 2ο στάδιο 9000 τρόποι, σύμφωνα με τη βασική αρχή της απαρίθμησης για να ολοκληρωθεί η διαδικασία σχηματισμού μίας πινακίδας χρειάζονται: $(2744) \cdot (9000) = 24696000$ τρόποι.

Επομένως, με το σύστημα αυτό θα μπορούσαν να πάρουν έγκυρες πινακίδες 24696000 αυτοκίνητα.

- β)** Αφού όλα τα γράμματα θα είναι ίδια, για το 1ο στάδιο της συμπλήρωσης των τριών θέσεων με τα ίδια γράμματα χρειάζονται 14 γράμματα (π.χ. AAA, BBB κ.λπ.) και για το 2ο στάδιο της συμπλήρωσης των τεσσάρων ψηφίων με τους ίδιους αριθμούς χρειάζονται 9 ψηφία π.χ. 1111, 2222, 3333 κ.λπ. καθώς εξαιρείται ο αριθμός 0000. Άρα, σύμφωνα με τη βασική αρχή απαρίθμησης το πλήθος των πινακίδων θα είναι: $14 \cdot 9 = 126$.
- γ)** Η πιθανότητα ενός ενδεχομένου είναι ίση με το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων προς το πλήθος των δυνατών περιπτώσεων. Ο αριθμός των πινακίδων κυκλοφορίας τις οποίες βρήκαμε στο ερώτημα (β) είναι το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων και ο αριθμός των πινακίδων που βρήκαμε στο ερώτημα (α) είναι το πλήθος των δυνατών περιπτώσεων.

Επομένως, η πιθανότητα να αποτελείται η πινακίδα ενός αυτοκινήτου από τρία ίδια γράμματα και τέσσερις ίδιους αριθμούς είναι:

$$\frac{\text{Πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\text{Πλήθος δυνατών περιπτώσεων}} = \frac{126}{24696000} \approx 0,0000051$$

ή 0,00051%



Να ανοίξετε τον σύνδεσμο για να εξοικειωθείτε με τον υπολογισμό πιθανοτήτων με τη βοήθεια δεντροδιαγράμματος.



Εφαρμογή 2. Τι θα φορέσει ο Κώστας;



Ο Κώστας για να πάει βόλτα με τους φίλους του επιλέγει στην τύχη από την ντουλάπα ένα καπέλλο από τα δύο (μαύρο και κόκκινο), ένα από τα τρία ζευγάρια πάνινα αθλητικά παπούτσια (μαύρο, πράσινο και κόκκινο) και ένα ζευγάρι κάλτσες από τα τέσσερα (μπλε, πράσινο, κόκκινο, κίτρινο).

- α)** Πόσοι είναι οι δυνατοί τρόποι να φορέσει ο Κώστας καπέλο, αθλητικά παπούτσια και κάλτσες;
- β)** Να βρείτε την πιθανότητα ο Κώστας να φορέσει:
- i. Μαύρο καπέλο, πράσινα αθλητικά παπούτσια και κίτρινες κάλτσες.
 - ii. Ένα οποιοδήποτε καπέλο, μαύρα αθλητικά παπούτσια και κίτρινες ή μπλε κάλτσες.
 - iii. Κόκκινο καπέλο, πράσινα ή κόκκινα αθλητικά παπούτσια και πράσινες ή κόκκινες ή κίτρινες κάλτσες.

Απάντηση

α) Για να βρούμε όλους τους δυνατούς τρόπους μπορούμε να εργαστούμε κατασκευάζοντας ένα δεντροδιάγραμμα ή έναν πίνακα, αλλά θα χρειαστεί αρκετός χρόνος και μεγάλη προσοχή γιατί οι περιπτώσεις είναι πολλές.

Ωστόσο, επειδή δεν μας ενδιαφέρει η ακριβής καταγραφή τους αλλά το πλήθος τους, μπορούμε να εργαστούμε χρησιμοποιώντας τη *Βασική Αρχή Απαρίθμησης* (BAA).

Η διαδικασία αναλύεται σε τρεις φάσεις και ο Κώστας μπορεί να επιλέξει:

- καπέλο με 2 τρόπους (1η φάση),
- αθλητικά με 3 τρόπους (2η φάση) και
- κάλτσες με 4 τρόπους (3η φάση).

Άρα, σύμφωνα με τη *Βασική Αρχή Απαρίθμησης*, η διαδικασία ολοκληρώνεται με $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ τρόπους και επομένως το πλήθος των δυνατών τρόπων να φορέσει ο Κώστας, καπέλο, αθλητικά παπούτσια και κάλτσες είναι 24.

β) Για να βρούμε τις ζητούμενες πιθανότητες χρειάζεται να βρούμε τις ευνοϊκές περιπτώσεις.

Σε όλες τις περιπτώσεις εργαζόμαστε με τη *Βασική Αρχή Απαρίθμησης*:

i. Το μαύρο καπέλο μπορεί να το διαλέξει με έναν τρόπο. Τα πράσινα αθλητικά παπούτσια με έναν τρόπο και επίσης με έναν τρόπο τις κίτρινες κάλτσες. Στη συγκεκριμένη περίπτωση χρειάζεται $1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ τρόπος (BAA).

Άρα υπάρχει μία ευνοϊκή περίπτωση και επομένως:

$$P(\text{Μαύρο καπέλο και Πράσινα αθλητικά παπούτσια και Κίτρινες κάλτσες}) =$$

$$\frac{\text{Πλήθος ευνοϊκών αποτελεσμάτων}}{\text{Πλήθος δυνατών αποτελεσμάτων}} = \frac{1}{24} \approx 0,0417 \text{ ή } 4,17\%.$$

ii. Το καπέλο μπορεί να το διαλέξει με δύο τρόπους. Τα μαύρα αθλητικά παπούτσια με έναν τρόπο και κίτρινες ή μπλε κάλτσες με δύο τρόπους. Άρα στην περίπτωση αυτή χρειάζονται $2 \cdot 1 \cdot 2 = 4$ τρόποι (BAA), οπότε οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι 4. Επομένως:

$$P(\text{Οποιοδήποτε καπέλο και Μαύρα αθλητικά παπούτσια και Κίτρινες ή Μπλε κάλτσες}) =$$

$$\frac{\text{Πλήθος ευνοϊκών αποτελεσμάτων}}{\text{Πλήθος δυνατών αποτελεσμάτων}} = \frac{4}{24} \approx 0,167 \text{ ή } 16,17\%.$$

iii. Στην περίπτωση αυτή χρειάζονται $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ τρόποι (BAA), οπότε οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι 6 και επομένως:

$$P(\text{Κόκκινο καπέλο και Πράσινα ή Κόκκινα αθλητικά παπούτσια και Πράσινες ή Κόκκινες ή Κίτρινες κάλτσες}) =$$

$$\frac{\text{Πλήθος ευνοϊκών αποτελεσμάτων}}{\text{Πλήθος δυνατών αποτελεσμάτων}} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ ή } 25\%.$$



Να ανοίξετε την ψηφιακή εφαρμογή για να διερευνήσετε την έννοια του δεντροδιαγράμματος.



Ασκήσεις και Προβλήματα

1 Ο φούρνος της γειτονιάς πουλάει 20 διαφορετικά κέικ, 10 διαφορετικά ντόνατς και 15 διαφορετικά είδη σφολιάτας. Αν θέλουμε να καταναλώνουμε τρία διαφορετικά είδη κάθε ημέρα παίρνοντας ένα από κάθε είδος, με όλους τους δυνατούς τρόπους, φτάνει ένας χρόνος; Να εξηγήσετε.



2 Το παιχνίδι ΠΡΟΠΟ περιλαμβάνει 13 αγώνες ποδοσφαίρου και νικητής είναι όποιος προβλέψει σωστά και τα 13 αποτελέσματα που σημειώνουμε στις στήλες του δελτίου. Στα αποτελέσματα για κάθε ζευγάρι ομάδων που βρίσκεται σε κάθε μία από τις 13 θέσεις σημειώνουμε με «1» για τη νίκη της πρώτης από τις αναγραφόμενες ομάδες, με «X» για την ισοπαλία και με «2» για τη νίκη της δεύτερης από τις αναγραφόμενες ομάδες.

α) Πόσες διαφορετικές στήλες πρέπει να συμπληρώσουμε σε ένα δελτίο ΠΡΟΠΟ για να είμαστε βέβαιοι ότι θα πετύχουμε και τα 13 αποτελέσματα;

β) Ποια είναι η πιθανότητα να πετύχουμε 13άρι αν συμπληρώσουμε μία στήλη;

3 Ένα παιδί σχηματίζει λέξεις με 3 γράμματα που παίρνει στην τύχη διαδοχικά από τρία κουτιά. Το πρώτο γράμμα παίρνει από το κουτί που έχει τα γράμματα Ο, Ν, το δεύτερο από το κουτί που έχει τα γράμματα Ε, Β, Χ και το τρίτο από το κουτί που έχει τα γράμματα Α, Ι.

α) Πόσες και ποιες διαφορετικές λέξεις (όχι αναγκαία με νόημα) μπορεί να φτιάξει το παιδί;

β) Ποια είναι η πιθανότητα η λέξη που θα σχηματιστεί να αρχίζει με Ν;

β) Ποια είναι η πιθανότητα η λέξη που θα σχηματιστεί να έχει νόημα;

4 Οι πινακίδες κυκλοφορίας των επιβατικών αυτοκινήτων σε έναν δήμο της Ανατολικής Αττικής αποτελούνται από τρία γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου ακολουθούμενα από τέσσερα ψηφία (0, 1, ..., 9). Τα δύο πρώτα γράμματα για τις πινακίδες σε αυτό τον Δήμο είναι ΒΚ και το τρίτο είναι ένα από τα Α, Β, Ε, Ζ, Η, Ι, Κ, Μ Ν, Ο, Ρ, Τ, Υ, Χ.



α) Πόσες διαφορετικές πινακίδες κυκλοφορίας μπορούν να σχηματιστούν για αυτόν το Δήμο;

β) Αν υποθέσουμε ότι όλες οι δυνατές πινακίδες κυκλοφορίας έχουν εκδοθεί σε αυτοκίνητα και διαλέξουμε ένα αυτοκίνητο στην τύχη, από αυτό τον Δήμο ποια είναι η πιθανότητα:

i. Τα δύο τελευταία ψηφία της πινακίδας κυκλοφορίας να είναι "28";

ii. Το τελευταίο ψηφίο να είναι "1" ή "2";

5 Εργασία κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες. Οι πινακίδες κυκλοφορίας των δικύκλων με μηχανή στην Ελλάδα αποτελούνται από τρία γράμματα από τα Α, Β, Ε, Η, Ι, Κ, Μ, Ν, Ο, Ρ, Τ, Χ, Υ, Ζ



ακολουθούμενα από 3 ψηφία (0, 1, ..., 9). Το πρώτο ψηφίο του αριθμητικού μέρους δεν μπορεί να είναι μηδέν (0).

α) Πόσες διαφορετικές πινακίδες κυκλοφορίας μηχανοκίνητων δικύκλων μπορούν να σχηματιστούν;

β) Πόσα δίκυκλα με μηχανή μπορούν να λάβουν έγκυρες πινακίδες κυκλοφορίας που αποτελούνται από τρία ίδια γράμματα;

γ) Πόσα μηχανοκίνητα δίκυκλα μπορούν να λάβουν έγκυρες πινακίδες κυκλοφορίας που αποτελούνται από τρεις ίδιους αριθμούς;

δ) Πόσες πινακίδες κυκλοφορίας μπορούν να σχηματιστούν από τρία ίδια γράμματα και τρεις ίδιους αριθμούς;

ε) Ποια είναι η πιθανότητα η πινακίδα του να αποτελείται από τρία ίδια γράμματα και τρεις ίδιους αριθμούς;

6 Η Μαρία για να λάβει μέρος στο πάρτι του σχολείου της επέλεξε στην τύχη από την ντουλάπα, ένα παντελόνι από τα τρία (μπλε, καφέ και κόκκινο),



ένα από τα τρία πουκάμισα (φλοράλ, πράσινο και λευκό) και ένα από τα τέσσερα ζευγάρια παπούτσια (μπλε, λευκό, κόκκινο, κίτρινο).

α) Πόσοι είναι οι δυνατοί τρόποι να φορέσει η Μαρία παντελόνι, πουκάμισο και παπούτσια;

β) Να βρείτε την πιθανότητα η Μαρία να φορέσει:

i. Μπλε παντελόνι, φλοράλ πουκάμισο και μπλε παπούτσια.

ii. Ένα οποιοδήποτε παντελόνι, πράσινο πουκάμισο με μπλε ή λευκά παπούτσια.

iii. Καφέ παντελόνι, φλοράλ ή πράσινο πουκάμισο με μπλε ή λευκά ή κίτρινα παπούτσια.

7 Ρίχνουμε ένα κανονικό τετραεδρικό ζάρι (με ενδείξεις 1, 2, 3, 4) και καταγράφουμε την



ένδειξη της βάσης του (κάτω έδρας). Ρίχνουμε μαζί και ένα συνηθισμένο ζάρι (κανονικό εξάεδρο με ενδείξεις 1, 2, 3, 4, 5, 6).

Έστω τα ενδεχόμενα:

A: «το άθροισμα των δύο ενδείξεων είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 7».

B: «το άθροισμα των δύο ενδείξεων είναι περιττός αριθμός μικρότερος του 7».

α) Να βρείτε τον δειγματικό χώρο του πειράματος με πίνακα διπλής εισόδου.

β) Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα.

γ) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων: A, B.

- 8** Ένα αμερόληπτο εξαεδρικό ζάρι φέρει στις έδρες του τους αριθμούς 1, 1, 2, 2, 3, 3 και ένα άλλο τους αριθμούς 4, 4, 5, 5, 6, 6. Ρίχνουμε τα δύο ζάρια και βρίσκουμε το άθροισμα των άνω εδρών που εμφανίζονται. Έστω τα ενδεχόμενα:

A: «το άθροισμα των δύο ενδείξεων είναι πρώτος αριθμός».

B: «το άθροισμα των δύο ενδείξεων είναι άρτιος αριθμός μεγαλύτερος του 6».

- α)** Να βρείτε τον δειγματικό χώρο του πειράματος.
β) Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα.
γ) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων: A, B.

- 9** Σε μια οικογένεια με 3 παιδιά, υποθέτουμε ότι η πιθανότητα να γεννηθεί αγόρι ή κορίτσι είναι ίδια και ότι το φύλο ενός παιδιού δεν επηρεάζεται από το φύλο ενός άλλου παιδιού.

- α)** Να κάνετε το δέντροδιάγραμμα και να βρείτε τον δειγματικό χώρο του πειράματος.
β) Να βρείτε την πιθανότητα μεταξύ των τριών παιδιών να υπάρχουν:
- Ακριβώς ένα κορίτσι.
 - Ακριβώς δύο κορίτσια.
 - Τρία κορίτσια.

- 10** Η Ερατώ θυμάται ότι ο κωδικός εισόδου (PIN) στον υπολογιστή της αποτελείται από τα ψηφία 1, 3, 5 και 8, κανένα από τα οποία δεν επαναλαμβάνεται.

- α)** Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός των απαιτούμενων δοκιμών για να βρεθεί ο κωδικός;
β) Ποια είναι η πιθανότητα να βρει το σωστό κωδικό με την πρώτη δοκιμή;

- 11** **Εργασία Ετεροαξιολόγησης:** Ο Μιχάλης και η Ευγενία θέλουν να προγραμματίσουν τι θα κάνουν το Σάββατο. Θα πρέπει να αποφασίσουν ποιες δραστηριότητες θα κάνουν και τι θα φάνε, ως εξής:

Βήμα 1: Επιλογή μιας από τις ακόλουθες δραστηριότητας εξωτερικού χώρου:

- Βόλτα στο δάσος.
- Ποδηλασία στο πάρκο.
- Τρέξιμο στην παραλία.

Βήμα 2: Επιλογή ενός υγιεινού γεύματος μετά τη δραστηριότητα από τα παρακάτω:

- Όσπρια με ελιές.
- Ψάρι με ρύζι.
- Κοτόπουλο με λαχανικά.

α) Πόσους διαφορετικούς συνδυασμούς μπορούν να κάνουν ο Μιχάλης και η Ευγενία για τη μέρα τους;

β) Αν προσθέσουν στα φαγητά ως τρίτη επιλογή και τη φρουτοσαλάτα (μήλο, αχλάδι), πόσοι είναι οι συνολικοί συνδυασμοί που μπορούν να κάνουν; Να ελέγξετε τις απαντήσεις σας με αυτές του συμμαθητή σας.



Να ανοίξετε την εφαρμογή «Τροχός της τύχης» για να διερευνήσετε την έννοια της πιθανότητας.

8.3 Απλός προσθετικός νόμος

Στο τέλος αυτής της διδακτικής ενότητας αναμένεται οι μαθητές/τριες να μπορούν:

Να χρησιμοποιούν τον απλό προσθετικό νόμο για να υπολογίζουν την πιθανότητα σύνθετων ενδεχόμενων.



Διερεύνηση. Απλός προσθετικός νόμος.

Ρίχνουμε ένα ζάρι και θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

$$A = \{1,2,6\}, B = \{3,5\} \text{ και } \Gamma = \{1,3,4,6\}$$

Να βρείτε:

- Ποια από τα ενδεχόμενα A, B και Γ είναι ασυμβίβαστα μεταξύ τους ανά δύο;
- Να βρείτε τις πιθανότητες: P(A) και P(B).
- Να βρείτε την πιθανότητα P(A ή B).
- Συνδέεται η P(A ή B) με τις πιθανότητες P(A) και P(B);



Μαθηματικές Έννοιες και Διεργασίες Μάθησης

Απλός προσθετικός νόμος

Όπως μάθαμε στην Α΄ Γυμνασίου σύνθετο είναι ένα ενδεχόμενο όταν μπορεί να πραγματοποιηθεί με περισσότερους από έναν τρόπους. Δηλαδή όταν έχει δύο ή περισσότερα στοιχεία. Για παράδειγμα, το ενδεχόμενο «A ή B» = {1,3} που προκύπτει από τα ενδεχόμενα A = {1} και B = {3} είναι ένα σύνθετο ενδεχόμενο.

Αν $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και A = {1}, B = {2,3,4} δύο ενδεχόμενά του, τότε:

- $P(A) = \frac{\text{Πλήθος των στοιχείων του } A}{\text{Πλήθος των στοιχείων του } \Omega} = \frac{1}{5}, P(B) = \frac{\text{Πλήθος των στοιχείων του } B}{\text{Πλήθος των στοιχείων του } \Omega} = \frac{3}{5}$.
- Τα ενδεχόμενα A, B είναι ασυμβίβαστα αφού το σύνολο «A και B» = \emptyset
- $P(A \text{ ή } B) = \frac{\text{Πλήθος των στοιχείων του «A ή B»}}{\text{Πλήθος των στοιχείων του } \Omega} = \frac{4}{5}$.

Εξάλλου παρατηρούμε ότι: $\frac{4}{5} = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}$ και επομένως στην περίπτωση αυτή για τα ασυμβίβαστα ενδεχόμενα, «A»,

«B» ισχύει ότι: $P(A \text{ ή } B) = P(A) + P(B)$.

Η ισότητα αυτή ισχύει πάντοτε για δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα.

Γενικά

Αν A, B είναι δύο οποιαδήποτε **ασυμβίβαστα** μεταξύ τους ενδεχόμενα, ισχύει ο ακόλουθος **απλός προσθετικός νόμος**: $P(A \text{ ή } B) = P(A) + P(B)$

Σημειώσεις:

- Ο απλός προσθετικός νόμος γενικεύεται για 3, 4 ή περισσότερα ανά δύο ξένα ενδεχόμενα, όπως θα δούμε σε επόμενη τάξη.
- Με τον απλό προσθετικό νόμο μπορούμε να βρούμε την πιθανότητα ενός σύνθετου ενδεχόμενου της μορφής «A ή B» όταν τα A, B είναι ασυμβίβαστα ενδεχόμενα.



Εφαρμογή 1. Πιθανότητα συμπληρωματικού ενδεχόμενου.

Αν A' το συμπληρωματικό ενδεχόμενο ενός ενδεχόμενου A, τότε:

$$P(A) + P(A') = 1$$

Απάντηση

Αν A' το συμπληρωματικό ενδεχόμενο ενός ενδεχομένου A , τότε:

- Τα ενδεχόμενα A και A' είναι ασυμβίβαστα αφού είναι συμπληρωματικά.
- A ή $A' = \Omega$

Άρα, από τον απλό προσθετικό νόμο παίρνουμε:

$$P(A \text{ ή } A') = P(A) + P(A') \text{ ή } P(\Omega) = P(A) + P(A') \text{ και επομένως: } P(A) + P(A') = 1$$



Εφαρμογή 2. Τι μουσική ακούμε στο σχολείο μας;

Οι μαθητές ενός σχολείου συμμετείχαν σε μία έρευνα στην οποία ζητήθηκε να επιλέξουν από τα εξής είδη μουσικής: Ροκ, Ποπ και Ραπ.

120 μαθητές δήλωσαν ότι ακούνε μόνο Ροκ μουσική, 40 μόνο Ποπ, 60 μόνο Ραπ και 40 Ποπ και Ραπ. Έστω A το ενδεχόμενο «οι μαθητές που ακούν Ροκ», B το ενδεχόμενο «οι μαθητές που ακούν Ποπ» και Γ το ενδεχόμενο «οι μαθητές που ακούν Ραπ»:

- Ποιο είναι το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου;
- Ποιο είναι το πλήθος των στοιχείων των ενδεχομένων A , B , Γ ;
- Να εξετάσετε ποια από τα ενδεχόμενα A , B , Γ είναι ασυμβίβαστα ανά δύο.
- Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων A , B και Γ .
- Αν ρωτήσουμε τυχαία έναν μαθητή του σχολείου, να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων ο μαθητής να ακούει:
 - Ροκ ή Ποπ μουσική,
 - Ροκ ή Ραπ μουσική.



Απάντηση

- Ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από τους μαθητές οι οποίοι ακούνε και τα 3 είδη μουσικής.

Το πλήθος τους είναι: $120 + 40 + 40 + 60 = 260$.

- Μόνο Ροκ μουσική ακούν 120 μαθητές και μόνο Ποπ μουσική ακούνε 40 μαθητές. Επειδή 40 μαθητές ακούνε Ποπ και Ραπ, οι μαθητές οι οποίοι ακούνε Ποπ είναι $40 + 40 = 80$.

Μόνο Ραπ μουσική ακούνε 60 μαθητές και επειδή 40 μαθητές ακούνε Ραπ και Ποπ, οι μαθητές οι οποίοι ακούνε Ραπ είναι $60 + 40 = 100$.

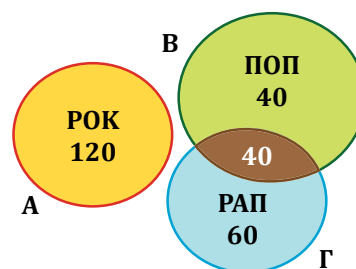
- Όπως βλέπουμε και από το διάγραμμα:

- Το σύνολο « A και B » είναι το κενό σύνολο. Άρα τα σύνολα A , B είναι ασυμβίβαστα.
- Το σύνολο « A και Γ » είναι το κενό σύνολο. Άρα τα σύνολα A , Γ είναι ασυμβίβαστα.
- Το σύνολο « B και Γ » δεν είναι το κενό σύνολο, αφού 40 μαθητές ακούνε και τα δύο είδη μουσικής. Άρα τα σύνολα A , B δεν είναι ασυμβίβαστα.

- Είναι: $P(A) = \frac{\text{Πλήθος μαθητών που ακούν Ροκ}}{\text{Συνολικό πλήθος μαθητών}} = \frac{120}{260} \approx 0,46$ ή περίπου 46%.

$$P(B) = \frac{\text{Πλήθος μαθητών που ακούν Ποπ}}{\text{Συνολικό πλήθος μαθητών}} = \frac{80}{260} \approx 0,307$$
 ή περίπου 30,7%.

$$P(\Gamma) = \frac{\text{Πλήθος μαθητών που ακούν Ραπ}}{\text{Συνολικό πλήθος μαθητών}} = \frac{100}{260} \approx 0,385$$
 ή περίπου 38,5%.



- ε) **i.** Η πιθανότητα ένας μαθητής να ακούει Ροκ ή Ποπ μουσική είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου «A ή B». Επειδή τα A, B είναι ασυμβίβαστα, από τον απλό προσθετικό νόμο έχουμε:
- $$P(A \text{ ή } B) = P(A) + P(B) \approx 0,46 + 0,307 = 0,767 \text{ ή } 76,7\%$$
- ii.** Η πιθανότητα ένας μαθητής να ακούει Ροκ ή Ραπ μουσική είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου «A ή Γ». Επειδή τα A, Γ είναι ασυμβίβαστα, από τον απλό προσθετικό νόμο έχουμε:
- $$P(A \text{ ή } \Gamma) = P(A) + P(\Gamma) \approx 0,46 + 0,385 = 0,845 \text{ ή } 84,5\%$$

Παρατήρηση

Για να βρούμε την πιθανότητα να ακούει ένας μαθητής Ποπ ή Ραπ δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τον απλό προσθετικό νόμο αφού, τα ενδεχόμενα B, Γ δεν είναι ασυμβίβαστα. Πράγματι $P(B \text{ ή } \Gamma) = \frac{140}{260} \neq P(A) + P(B) = \frac{80}{260} + \frac{100}{260}$. Σε επόμενη τάξη θα μάθουμε πώς να βρίσκουμε την πιθανότητα σε τέτοιες περιπτώσεις.



Εφαρμογή 3. Πόσες είναι οι κίτρινες;

Ένα βάζο περιέχει 40 χρωματιστές καραμέλες. Έξι είναι κόκκινες, δώδεκα είναι πράσινες, οχτώ είναι μπλε και οι υπόλοιπες είναι λευκές ή κίτρινες.

Ανακατεύουμε καλά και παίρνουμε στην τύχη μία καραμέλα.

- α)** Να βρείτε τις πιθανότητες:
- Η καραμέλα να είναι κόκκινη
 - Η καραμέλα να είναι πράσινη
 - Η καραμέλα να είναι κόκκινη ή πράσινη
- β)** Αν η πιθανότητα η καραμέλα να είναι κίτρινη ή μπλε είναι 0,4 να βρείτε ποιο είναι το πιθανό πλήθος από κίτρινες καραμέλες στη σακούλα.



Απάντηση

- α) i.** Η πιθανότητα να είναι η καραμέλα κόκκινη (K), είναι $P(K) = \frac{\text{Πλήθος από κόκκινες καραμέλες}}{\text{Συνολικό πλήθος από καραμέλες}} = \frac{6}{40} = \frac{3}{20}$.
- ii.** Η πιθανότητα να είναι η καραμέλα πράσινη (Π), είναι $P(\Pi) = \frac{\text{Πλήθος από πράσινες καραμέλες}}{\text{Συνολικό πλήθος από καραμέλες}} = \frac{12}{40} = \frac{6}{20}$.
- iii.** Τα ενδεχόμενα «Κόκκινη καραμέλα» και «Πράσινη καραμέλα» είναι ασυμβίβαστα αφού μία καραμέλα δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα κόκκινη και πράσινη, οπότε σύμφωνα με τον απλό προσθετικό νόμο παίρνουμε:

$$P(\text{Κόκκινη ή Πράσινη}) = P(K \text{ ή } \Pi) = P(K) + P(\Pi) = \frac{3}{20} + \frac{6}{20} = \frac{9}{20}$$

- β)** Τα ενδεχόμενα A: «Κίτρινη καραμέλα» και B: «Μπλε καραμέλα» είναι ασυμβίβαστα, οπότε:

$$P(\text{Κίτρινη ή Μπλε}) = P(A \text{ ή } B) = P(A) + P(B) \quad (1)$$

$$\text{Εξάλλου: } P(\text{Κίτρινη ή Μπλε}) = P(A \text{ ή } B) = 0,4 \text{ και } P(\text{Μπλε}) = \frac{\text{Πλήθος από μπλε καραμέλες}}{\text{Συνολικό πλήθος από καραμέλες}} = \frac{8}{40} = \frac{1}{5} = 0,2$$

οπότε από την (1) παίρνουμε: $0,4 = P(A) + 0,2$ ή $P(A) = 0,2$.

Δηλαδή η πιθανότητα να είναι η καραμέλα κίτρινη είναι 0,2 και επομένως το πλήθος από κίτρινες καραμέλες που μπορεί να υπάρχουν στη σακούλα είναι: $(0,2) \cdot 40 = 8$.



Με την ψηφιακή εφαρμογή «Βάζο με σφαιρίδια» να διερευνήσετε την έννοια της πιθανότητας.

Ερωτήσεις για Αξιολόγηση

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με τη λέξη Σωστό (Σ), αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος (Λ), αν η πρόταση είναι λανθασμένη.



Να ανοίξετε τον σύνδεσμο και να απαντήσετε στις ερωτήσεις αξιολόγησης για την έννοια της πιθανότητας.

- 1 Αν μπορώ να διαλέξω παντελόνι με 2 τρόπους και πουκάμισο με 3 τρόπους, τότε από τη βασική αρχή απαρίθμησης μπορώ να διαλέξω παντελόνι και πουκάμισο με 5 τρόπους.
- 2 Ο απλός προσθετικός νόμος εφαρμόζεται όταν τα ενδεχόμενα δεν είναι ασυμβίβαστα.
- 3 Με τον απλό προσθετικό νόμο βρίσκουμε την πιθανότητα να πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα δύο ενδεχόμενα.
- 4 Η βασική αρχή απαρίθμησης λέει ότι: «Αν μια διαδικασία μπορεί να χωριστεί σε 1, 2, 3, διαδοχικές φάσεις και κάθε φάση πραγματοποιείται αντίστοιχα με α, β, γ, τρόπους, τότε για να ολοκληρωθεί η διαδικασία χρειάζονται α + β + γ + τρόποι».



Να ανοίξετε τον σύνδεσμο και να απαντήσετε στις ερωτήσεις αξιολόγησης για την έννοια της πιθανότητας.

- 5 Αν όλες οι εκβάσεις ενός πειράματος τύχης είναι ισοπίθανες και για δύο ενδεχόμενα A B ισχύει ότι: $P(A \text{ και } B) = 0$ και $P(A \text{ ή } B) = 1$, τότε τα A, B είναι συμπληρωματικά.
- 6 Αν $P(A) = 0,1$ τότε $P(A') = 1 + 0,1$.
- 7 Η Αγγελική πηγαίνει να πάρει το τρένο για τη δουλειά της. Τα ενδεχόμενα: «Προλαβαίνει το τρένο» και «χάνει το τρένο» είναι ασυμβίβαστα.
- 8 Αν A, B δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα, τότε: $P(A) + P(B) = 1$. Να εξηγήσετε την απάντησή σας.
- 9 Για δύο ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου ισχύει:
 $P(A) = \frac{1}{5}$, $P(B) = \frac{2}{3}$ και $P(A \text{ ή } B) = 0,75$.
 Είναι τα A, B ασυμβίβαστα; Να εξηγήσετε την απάντησή σας.
- 10 Η πιθανότητα να κερδίσει ένα παιχνίδι η ομάδα του Γιώργου είναι $\frac{3}{5}$. Ποια είναι η πιθανότητα να φέρει ισοπαλία ή να χάσει;
- 11 Ένας παίκτης έχει 0,6 πιθανότητα να κερδίσει έναν αγώνα στο σκάκι. Αν η πιθανότητα να φέρει ισοπαλία ή να χάσει είναι ίδια, να βρεθεί η πιθανότητα να χάσει.



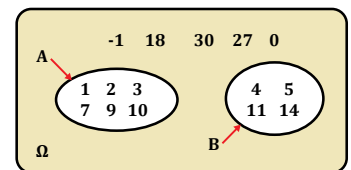
Να ανοίξετε τον σύνδεσμο και να απαντήσετε στις ερωτήσεις αξιολόγησης για την έννοια της πιθανότητας.



Ασκήσεις και Προβλήματα

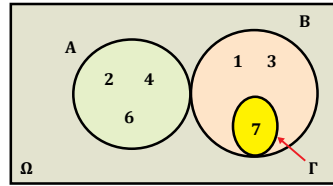
- 1 Τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα. Να βρείτε την πιθανότητα $P(A \text{ ή } B)$ στις παρακάτω περιπτώσεις:
 - α) $P(A) = 0,3$ και $P(B) = 0,1$
 - β) $P(A) = 41\%$ και $P(B) = 34\%$
 - γ) $P(A) = 15\%$ και $P(B) = 0,55$
 - δ) $P(A) = \frac{1}{5}$ και $P(B) = 0,4$

- 2 Να βρείτε:
 - α) Την πιθανότητα $P(A)$.
 - β) Την πιθανότητα $P(B)$.
 - γ) Την πιθανότητα $P(A \text{ ή } B)$.



3 Να βρεθούν οι πιθανότητες:

- α) $P(A \text{ ή } B)$
β) $P(A \text{ ή } \Gamma)$



4 Ρίχνουμε ένα συνηθισμένο κέρμα 3 φορές και θεωρούμε τα ενδεχόμενα A: «ΚΚΚ, ΚΚΓ», B: «ΓΓΓ, ΓΓΚ, ΓΚΓ, ΚΓΓ» και Γ: «ΓΓΚ, ΓΓΓ, ΚΓΓ». Να βρείτε:

- α) Τον δειγματικό χώρο Ω.
β) Ποια από τα σύνολα A, B και Γ είναι ασυμβίβαστα ανά δύο μεταξύ τους.
γ) Τις πιθανότητες: $P(A)$ και $P(B)$.
δ) Την πιθανότητα $P(A \text{ ή } B)$.

5 Ο Φίλιππος επιλέγει στην τύχη ένα γράμμα από τη λέξη ΥΠΕΡΗΡΩΑΣ.

- α) Να εξετάσετε αν είναι ασυμβίβαστα μεταξύ τους τα ενδεχόμενα A: «Επιλέγει φωνήεν», B: «Επιλέγει σύμφωνο» και Γ: «Επιλέγει γράμμα από το πρώτο συνθετικό της λέξης».
β) Να βρείτε τις πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$.

6 Ρίχνουμε 2 συνηθισμένα ζάρια ταυτόχρονα και καταγράφουμε τις ενδείξεις. Να βρείτε την πιθανότητα να πάρουμε άθροισμα 6 ή να πάρουμε άθροισμα 10.

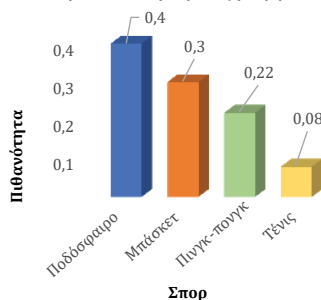
7 Ο Μιχάλης ρίχνει ένα αμερόληπτο ζάρι. Να βρείτε τις πιθανότητες:

- α) $P(\text{μικρότερος από } 3 \text{ ή μεγαλύτερος από } 4)$.
β) $P(\text{άρτιος ή } 3)$.
γ) $P(\text{άρτιος ή περιττός})$.
δ) $P(2 \text{ ή περιττός})$.



8 Ο Ασάρ αγοράζει 20 από τους 400 κλήρους μιας λοταρίας που δημιούργησε το σχολείο του για ενίσχυση της εκδρομής των μαθητών, με δώρο μια μπάλα ποδοσφαίρου για τον τυχερό. Ποια είναι η πιθανότητα να μην κερδίσει;

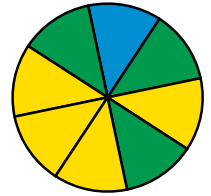
9 Οι πιθανότητες να συμμετέχει στα τέσσερα αθλήματα του διαγράμματος ένας μαθητής ενός σχολείου παρουσιάζονται στο παρακάτω ραβδόγραμμα:



Να βρείτε την πιθανότητα ένας μαθητής να παίζει:

- α) Ποδόσφαιρο ή μπάσκετ.
β) Πινγκ-πονγκ ή μπάσκετ.
γ) Ποδόσφαιρο ή τένις.

10 Στον διπλανό τροχό της τύχης οι κυκλικοί τομείς έχουν το ίδιο εμβαδόν. Γυρίζουμε τον τροχό.



- α) Να βρείτε την πιθανότητα εμφάνισης κάθε χρώματος.
β) Να βρείτε τις πιθανότητες:
i. Να πάρουμε μπλε ή πράσινο χρώμα.
ii. Να πάρουμε κίτρινο ή πράσινο χρώμα.
iii. Να πάρουμε κίτρινο ή μπλε χρώμα.

11 Η Κλαούντια στο πρωινό της συνηθίζει να τρώει ένα φρούτο. Μέσα σε ένα πανέρι υπάρχουν 6 ροδάκινα, 8 νεκταρίνια και 5 μήλα. Με κλειστά τα μάτια παίρνει στην τύχη ένα φρούτο, από το πανέρι. Να βρείτε τις πιθανότητες:

- α) Να πάρει ροδάκινο ή μήλο.
β) Να πάρει νεκταρίνι ή μήλο.
γ) Να πάρει ροδάκινο ή νεκταρίνι.

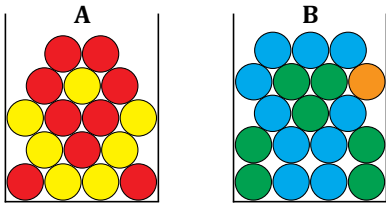
12 Ένα αμερόληπτο τετραεδρικό ζάρι (4 πλευρές, ίσα ισόπλευρα τρίγωνα) φέρει στις έδρες του τους αριθμούς -2, -1, 1 και 2. Ρίχνουμε το ζάρι δύο φορές. Έστω τα ενδεχόμενα:

- A: «το γινόμενο των κάτω εδρών είναι θετικός άρτιος αριθμός».
B: «το γινόμενο των κάτω εδρών είναι θετικός περιττός αριθμός».
α) Να βρείτε τον δειγματικό χώρο του πειράματος.
β) Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα.
γ) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων: i. A, ii. B και iii. A ή B.

13 **Εργασία κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες.** Διαθέτουμε δύο αμερόληπτα τετραεδρικά ζάρια A και B (4 πλευρές, ίσα ισόπλευρα τρίγωνα). Το A φέρει στις έδρες του τις ενδείξεις 1, 3, 5, 7. Το B φέρει τις ενδείξεις 3, 4, 5, 6. Ρίχνουμε ταυτόχρονα τα δύο ζάρια και καταγράφουμε τις ενδείξεις των βάσεων (κάτω έδρες).

- α) Να βρείτε τον δειγματικό χώρο του πειράματος.
β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα το άθροισμα των ενδείξεων των δύο βάσεων να είναι σύνθετος αριθμός.
γ) Να υπολογίσετε την πιθανότητα το γινόμενο των ενδείξεων των δύο βάσεων να είναι πολλαπλάσιο του 5.
δ) Μπορούμε να εφαρμόσουμε τον απλό προσθετικό νόμο για να βρούμε την πιθανότητα το γινόμενο των ενδείξεων των δύο βάσεων να είναι σύνθετος αριθμός ή πολλαπλάσιο του 5;

- 14 Στην κάλπη A υπάρχουν 9 κόκκινα και 7 κίτρινα σφαιρίδια ενώ στην κάλπη B, 7 πράσινα, 10 μπλε και ένα πορτοκαλί. Από κάθε κάλπη τραβάμε στην τύχη ένα σφαιρίδιο. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες:
- α) Από την κάλπη A να πάρουμε κόκκινο σφαιρίδιο.
 β) Από την κάλπη A να πάρουμε κόκκινο ή κίτρινο σφαιρίδιο.
 γ) Από την κάλπη B να πάρουμε πράσινο σφαιρίδιο.
 δ) Από την κάλπη B να πάρουμε πορτοκαλί ή μπλε σφαιρίδιο.

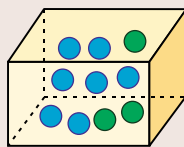


- 15 Μόλις άνοιξε μία νέα καφετέρια ανακοίνωσε ότι για διαφημιστικούς λόγους προσφέρει στους 40 πρώτους πελάτες έναν δωρεάν καφέ από τους αναφερόμενους στον πίνακα.

ΔΩΡΑ	ΠΛΗΘΟΣ
Φραπέ	20
Καπουτσίνο	12
Εσπρέσο	5
Ελληνικό	3

- α) Ποια είναι η πιθανότητα ο πρώτος πελάτης να κερδίσει:
- i. «Φραπέ». ii. «Καπουτσίνο».
 iii. «Φραπέ ή Καπουτσίνο».
- β) Αν ο πρώτος πελάτης κέρδισε το δώρο «Φραπέ», ποια είναι η πιθανότητα ο δεύτερος πελάτης να κερδίσει:
- i. «Φραπέ». ii. «Καπουτσίνο».
 iii. «Φραπέ ή Εσπρέσο».

- 16 Ένα κουτί περιέχει 3 πράσινες και 7 μπλε σφαίρες. Τραβάμε μία σφαίρα στην τύχη.



- α) Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:
 A: «Πράσινη σφαίρα», B: «Μπλε σφαίρα»,
 Γ: «Πράσινη ή μπλε σφαίρα».
- β) Παίρνουμε στην τύχη μία μπλε σφαίρα και την αφήνουμε έξω. Παίρνουμε στη συνέχεια μία δεύτερη σφαίρα.



Με την ψηφιακή εφαρμογή «Κουτί με μπάλες» να διερευνήσετε την έννοια της πιθανότητας.

Να βρείτε για τη δεύτερη σφαίρα τις πιθανότητες των ενδεχομένων A: «Πράσινη σφαίρα», B: «Μπλε σφαίρα», Γ: «Πράσινη ή μπλε σφαίρα».

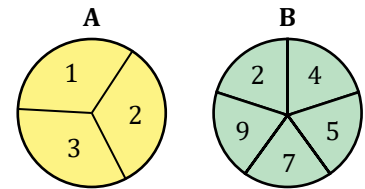
- 17 Ένα καλάθι με φρούτα περιέχει 3 μπανάνες, 2 κόκκινα μήλα, 4 πράσινα μήλα και 3 πορτοκάλια. Ο Γιάννης παίρνει στην τύχη ένα φρούτο από το καλάθι. Ποια είναι η πιθανότητα το φρούτο να είναι:
- α) Πράσινο μήλο ή πορτοκάλι.
 β) Πράσινο μήλο ή κόκκινο μήλο.
 γ) Μπανάνα ή πορτοκάλι.

- 18 Σε ένα ράφι μιας βιβλιοθήκης υπάρχουν 9 νουβέλες, 5 βιογραφίες, 3 βιβλία ποίησης και 7 βιβλία Μαθηματικών. Η Άννα παίρνει στην τύχη ένα βιβλίο από το ράφι. Να βρείτε την πιθανότητα το βιβλίο να είναι:
- α) Νουβέλα ή βιογραφία.
 β) Βιογραφία ή ποίηση.
 γ) Μαθηματικά ή νουβέλα.



- 19 Αν A, B είναι δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα με $P(B) = 2P(A)$ και η πιθανότητα του ενδεχομένου «A ή B» είναι 0,90 να βρείτε την πιθανότητα $P(B)$.

- 20 Ο Γιάννης περιστρέφει τους τροχούς της τύχης A και B και προσθέτει τους δύο αριθμούς που δείχνει ο δείκτης.



- α) Να βρείτε τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος.
 β) Να βρείτε την πιθανότητα το άθροισμα των δύο ενδείξεων να είναι άρτιος αριθμός.
 γ) Να βρείτε την πιθανότητα το άθροισμα να είναι περιττός μεγαλύτερος του 3.



Να ανοίξετε την εφαρμογή «ΓΛΩΣΣΑΡΙ: ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ» για να ανακεφαλαιώσετε όρους και έννοιες τις οποίες γνωρίσατε στο κεφάλαιο αυτό.

Ασυμβίβαστα ή αμοιβαίως αποκλειόμενα ονομάζονται δύο ενδεχόμενα όταν δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα.

Δύο ενδεχόμενα A, B είναι ασυμβίβαστα όταν:

$$\llbracket A \text{ και } B \rrbracket = \emptyset$$

Βασική Αρχή Απαρίθμησης (BAA):

«Αν μια διαδικασία μπορεί να χωριστεί σε 1, 2, 3 διαδοχικές φάσεις και κάθε φάση πραγματοποιείται αντίστοιχα με α, β, γ τρόπους, τότε για να ολοκληρωθεί η διαδικασία υπάρχουν $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma$ διαφορετικοί τρόποι».

ΒΑΣΙΚΗ ΑΡΧΗ ΑΠΑΡΙΘΜΗΣΗΣ (BAA)

	Φάση 1η	Φάση 2η	Φάση 3η
Τρόποι	α	β	γ

Σύνολο τρόπων: $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma$

Απλός προσθετικός νόμος:

Αν A, B είναι δύο οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα, ισχύει ότι:

$$P(A \text{ ή } B) = P(A) + P(B)$$

Παράδειγμα 1:

Ρίχνουμε ένα νόμισμα. Αν A το ενδεχόμενο να εμφανισθεί «κεφάλι» και B το ενδεχόμενο να εμφανισθεί «γράμματα», τότε τα ενδεχόμενα A, B είναι ασυμβίβαστα αφού δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα.

Παράδειγμα 2:

Για να ταξιδέψουμε από την Αθήνα στην Αλεξανδρούπολη μέσω Θεσσαλονίκης μπορούμε:


Να ταξιδέψουμε από την Αθήνα στη Θεσσαλονίκη με αυτοκίνητο, αεροπλάνο ή πλοίο και από την Θεσσαλονίκη στην Αλεξανδρούπολη με αυτοκίνητο ή με αεροπλάνο. Άρα η ολοκλήρωση της μετάβασης μπορεί να γίνει με $3 \cdot 2 = 6$ διαφορετικούς τρόπους.

Παράδειγμα 3:

Ρίχνουμε ένα ζάρι. Αν A είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε άρτιο αριθμό και B το ενδεχόμενο να φέρουμε περιττό αριθμό μικρότερο από 5, τότε επειδή τα A, B είναι ασυμβίβαστα, έχουμε:

$$P(A \text{ ή } B) = P(A) + P(B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

Επαναληπτικά Έργα & Προεκτάσεις

- 1 Διαθέτουμε τρεις κάρτες αριθμημένες με τους αριθμούς 1, 2 και 3. Οι κάρτες ανακατεύονται και τοποθετούνται στην τύχη ανάποδα η μία δίπλα στην άλλη.
 
 - α) Να βρείτε όλους τους τριψήφιους αριθμούς που μπορούν να δημιουργηθούν από αυτές τις τρεις κάρτες όταν τις αναποδογυρίσουμε.
 - β) Ποια είναι η πιθανότητα όταν αναποδογυριστούν οι κάρτες να σχηματίσουν τον αριθμό 213;
 - γ) Ποια είναι η πιθανότητα όταν αναποδογυριστούν οι κάρτες να σχηματίσουν έναν αριθμό ανάμεσα στον 200 και τον 300;
 - δ) Ποια είναι η πιθανότητα όταν αναποδογυριστούν οι κάρτες να σχηματίσουν άρτιο αριθμό;
 - ε) Ποια είναι η πιθανότητα όταν αναποδογυριστούν οι κάρτες να σχηματίσουν αριθμό μικρότερο του 300;

Να κάνετε την
Εργασία με
προεκτάσεις:
«Πινακίδες
κυκλοφορίας».



- 2 Διαλέγουμε στην τύχη έναν από τους αριθμούς: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 και θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

A: «Ο αριθμός είναι άρτιος»,
B: «Ο αριθμός είναι περιττός»,
Γ: «Ο αριθμός είναι πολλαπλάσιο του 2»,
Δ: «Ο αριθμός είναι πρώτος» και
E: «Ο αριθμός είναι τετράγωνο κάποιου αριθμού».

 - α) Να βρείτε τις πιθανότητες κάθε ενδεχόμενου.
 - β) Ποια από τα ακόλουθα ζεύγη ενδεχόμενων είναι ασυμβίβαστα;

(A,B), (B,Γ), (A,Δ), (B,Δ), (Γ,E), (Γ,Δ), (Δ,E)
 - γ) Ποια είναι η πιθανότητα ο αριθμός να είναι:
 - i. Περιττός ή πολλαπλάσιο του 2;
 - ii. Πρώτος ή τετράγωνο κάποιου αριθμού;
 - iii. Άρτιος ή πολλαπλάσιο του 2;
 - iv. Άρτιος ή πρώτος;

3 Για τα σφαιρίδια που βρίσκονται στο δοχείο:

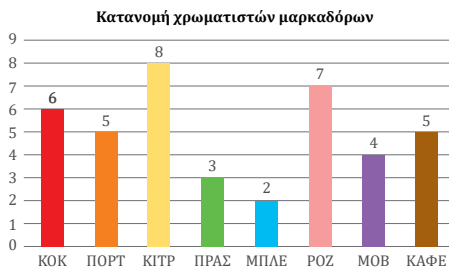
α) Να βάψετε με πράσινο, κόκκινο και κίτρινο τα σφαιρίδια τα οποία βρίσκονται στο δοχείο, έτσι ώστε η πιθανότητα να λάβουμε στην τύχη πράσινο σφαιρίδιο να είναι 0,3.



β) Να βάψετε με πράσινο, κόκκινο και κίτρινο τα σφαιρίδια τα οποία βρίσκονται στο δοχείο έτσι ώστε η πιθανότητα να λάβουμε στην τύχη πράσινο ή κόκκινο σφαιρίδιο να είναι 0,2.

γ) Να βάψετε με πράσινο, κόκκινο και κίτρινο τα σφαιρίδια τα οποία βρίσκονται στο δοχείο έτσι ώστε η πιθανότητα να λάβουμε στην τύχη κόκκινο ή κίτρινο σφαιρίδιο να είναι 0,5.

4 Η Έλενα έχει μια κασετίνα με μαρκαδόρους διαφόρων χρωμάτων και διαλέγει στην τύχη έναν από αυτούς. Το παρακάτω ραβδόγραμμα δείχνει τον αριθμό των μαρκαδόρων κάθε χρώματος μέσα στην κασετίνα.



α) Ποια είναι η πιθανότητα να τραβήξει η Έλενα έναν κίτρινο μαρκαδόρο;
 β) Ποια είναι η πιθανότητα να τραβήξει η Έλενα μαρκαδόρο με χρώμα διαφορετικό από το κίτρινο;
 γ) Ποια είναι η πιθανότητα να τραβήξει η Έλενα ροζ ή πράσινο μαρκαδόρο;

5 Μία έρευνα μεταξύ των μαθητών οι οποίοι αθλούνται σε ένα σχολείο έδειξε ότι το 15% αυτών των μαθητών παίζει μόνο βόλεϊ, το 20% παίζει μόνο πινγκ πονγκ, το 30% παίζει μόνο μπάσκετ και το 35% παίζει μόνο ποδόσφαιρο. Να βρείτε την πιθανότητα ένας τυχαία επιλεγμένος μαθητής από αυτούς να παίζει:



α) Βόλεϊ ή μπάσκετ.
 β) Πινγκ πονγκ ή ποδόσφαιρο.
 γ) Ποδόσφαιρο ή μπάσκετ.

6 Η Αλίκη έχει μια σακούλα με 24 κόκκινες και μαύρες μπάλες και διαλέγει μια μπάλα στην τύχη από τη σακούλα.

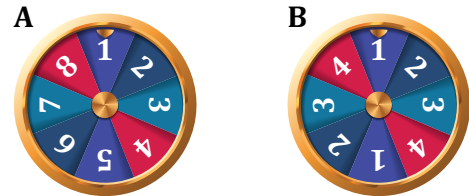
Η πιθανότητα να επιλέξει κόκκινη μπάλα είναι x και η πιθανότητα να επιλέξει μαύρη μπάλα είναι $3x$. Να υπολογίσετε πόσες κόκκινες και πόσες μαύρες μπάλες υπάρχουν στη σακούλα.

7 Ο Νίκος έχει 20 CD, 4 με κλασική μουσική που αρέσει πολύ στους γονείς του, 10 με Ποπ και Ροκ που ευχάριστα ακούν οι γονείς του και 6 με ηλεκτρονική μουσική για την οποία οι γονείς του καλούν να ελαττώσει την ένταση. Ο Νίκος παίρνει στην τύχη ένα CD. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες:



α) Ο δίσκος να μην αρέσει στους γονείς του.
 β) Οι γονείς του να μην του ζητήσουν να ελαττώσει την ένταση.
 γ) Ο δίσκος να έχει κλασική ή ηλεκτρονική μουσική.

8



Περιστρέφουμε τους παραπάνω τροχούς της τύχης. Σε περίπτωση που ο δείκτης πέσει σε ενδιάμεση γραμμή περιστρέφουμε ξανά. Για κάθε τροχό Α και Β να βρείτε τις πιθανότητες να φέρουμε:

α) Τον αριθμό 7.
 β) Πολλαπλάσιο του 4.
 γ) Πρώτο αριθμό.
 δ) Πολλαπλάσιο του 4 ή πρώτο αριθμό.

9 Ο διπλανός πίνακας περιλαμβάνει ένα δείγμα από τυχαίους αριθμούς. Παίρνουμε στην τύχη έναν τυχαίο αριθμό από τον κατάλογο. Να υπολογίσετε την πιθανότητα:

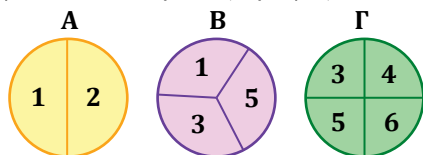
5	7	9	0	8
3	7	5	8	2
1	6	7	2	6
3	4	0	1	9
7	4	3	6	2
3	2	9	6	4
4	9	3	2	4
3	0	7	1	3
7	3	2	1	8
1	8	7	3	1

α) Ο αριθμός να είναι 7.
 β) Ο αριθμός να είναι μικρότερος του 5.
 γ) Ο αριθμός να είναι άρτιος ή μικρότερος του 7.
 δ) Ο αριθμός να γράφεται ως τετράγωνο φυσικού.

10 Σε μία λαχειοφόρο αγορά εκδόθηκαν 1000 λαχνοί αριθμημένοι από το 1 έως και το 1000. Κατά την κλήρωση εκλέγεται στην τύχη ένας αριθμός. Ποια είναι η πιθανότητα να κληρωθεί αριθμός:

α) Άρτιος και μικρότερος ή ίσος του 500;
 β) Πολλαπλάσιο του 5 μεγαλύτερο του 500;
 γ) Άρτιος και μικρότερος ή ίσος του 500 ή πολλαπλάσιο του 5 μεγαλύτερο του 500;

- 11 Ο Γιώργος περιστρέφει τους τροχούς της τύχης Α, Β και Γ και προσθέτει τους τρεις αριθμούς που δείχνουν οι δείκτες. Να βρείτε την πιθανότητα το άθροισμα να είναι περιττός αριθμός.



- 12 Αν η πιθανότητα του ενδεχόμενου «Α ή Β» για τα ασυμβίβαστα ενδεχόμενα Α, Β είναι 0,2 και η πιθανότητα του ενδεχόμενου Α είναι πενταπλάσια της εμφάνισης του ενδεχόμενου Β, να υπολογίσετε την πιθανότητα εμφάνισης του ενδεχόμενου Α.

- 13 **Διαλέγοντας δώρο.** Σε μία οικογένεια με τρία παιδιά η μητέρα αγόρασε τρία δώρα για την Πρωτοχρονιά. Ζήτησε από κάθε παιδί να γράψει σε ένα χαρτί ποιο από τα τρία δώρα θέλει, χωρίς να γνωρίζει τι δώρο είχε διαλέξει το άλλο παιδί. Ποια είναι η πιθανότητα:

- α) Κανένα από τα τρία παιδιά να μη διαλέξει το ίδιο δώρο με τα άλλα δύο;
β) Τουλάχιστον δύο παιδιά να διαλέξουν το ίδιο δώρο;

- 14 Ζητάμε από έναν φίλο μας να μας πει στην τύχη έναν φυσικό αριθμό μικρότερο από 100. Να υπολογίσετε η πιθανότητα ο αριθμός που θα μας πει να περιέχει μία τουλάχιστον φορά το ψηφίο επτά.

- 15 Σε μια τράπουλα υπάρχουν 52 κάρτες χωρισμένες σε 4 ομάδες: Τις κόυπες ♥, τα σπαθιά ♣, τα καρό ♦ και τα μπαστούνια ♠.

Σε κάθε ομάδα υπάρχει ένας άσος (Α), οι αριθμοί από το 2 έως και το 10, ο βαλές (J), η ντάμα (Q) και ο ρήγας (K).

Ο Μιχάλης ανακατεύει τις κάρτες, τις γυρίζει ανάποδα και διαλέγει μία στην τύχη.

Να βρεθεί η πιθανότητα:

- α) Να τραβήξει κόκκινη κάρτα.
β) Να τραβήξει 3.
γ) Να τραβήξει μαύρο βαλέ.
δ) Να τραβήξει κούπα ή σπαθί.
ε) Να τραβήξει άσο ή ρήγα.



- 16 Η ακολουθία του Fibonacci αποτελείται από την παρακάτω σειρά των αριθμών:

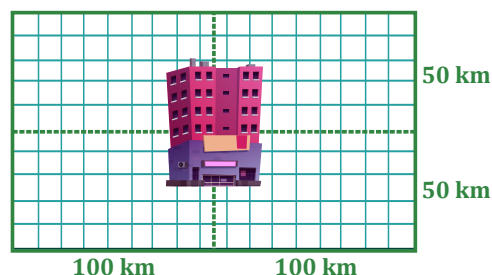
0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

Κάθε αριθμός της σειράς από τον τρίτο και ύστερα ισούται με το άθροισμα των δύο προηγούμενων π.χ. $0 + 1 = 1$, $1 + 1 = 2$, $1 + 2 = 3$, $2 + 3 = 5$ κ.λπ.

Οι έξι έδρες ενός αμερόληπτου ζαριού φέρουν τους έξι παρακάτω διαδοχικούς όρους της ακολουθίας του Fibonacci, δηλαδή τους αριθμούς: 1, 1, 2, 3, 5, 8. Ρίχνουμε το ζάρι δύο φορές και καταγράφουμε τις ενδείξεις.

- α) Να βρείτε τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος.
β) Να βρείτε την πιθανότητα το άθροισμα των δύο ενδείξεων να είναι πρώτος αριθμός.
γ) Να βρείτε την πιθανότητα το άθροισμα των δύο ενδείξεων να είναι αριθμός της ακολουθίας του Fibonacci.

- 17 **Μοντελοποίηση της πραγματικής ζωής.** Ένα κτίριο βρίσκεται στο κέντρο μιας περιοχής σεισμικής δραστηριότητας, όπως φαίνεται παρακάτω. Το επίκεντρο ενός σεισμού είναι εξίσου πιθανό να βρίσκεται σε οποιοδήποτε τετραγωνάκι.



- α) Ποια είναι η πιθανότητα το επίκεντρο να βρίσκεται σε απόσταση μέχρι 40 χιλιόμετρα από το κτίριο;
β) Ποια είναι η πιθανότητα το επίκεντρο να απέχει περισσότερο από 30 χιλιόμετρα από το κτίριο;
γ) Ποια είναι η πιθανότητα το επίκεντρο να βρίσκεται μεταξύ 30 και 40 km από το κτίριο;



Να ανοίξετε την εφαρμογή «ΓΛΩΣΣΑΡΙ: ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ» για να ανακεφαλιώσετε όρους και έννοιες τις οποίες γνωρίσατε στα κεφάλαια Στατιστικής και Πιθανοτήτων.

Υποδείξεις - Απαντήσεις Ασκήσεων & Προβλημάτων

Κεφάλαιο 1 - Αριθμητικός Συλλογισμός

1.1. Ιδιότητες δυνάμεων ρητών αριθμών με εκθέτη θετικό ακέραιο

- α) 2^7 β) $(-3)^8$ γ) 3^4 δ) x^{15} ε) $(y^2x)^2$ στ) z^{15}
- α) 7^6 β) $(-3)^1$ γ) 5^8 δ) $(-2)^5$ ε) α^3 στ) y^2
- α) -1 β) $(\frac{2}{3})^3 \approx 0,3$ γ) 36 δ) $0,5^4 = 0,625$
- $162 \cdot (\frac{2}{3})^4 = 32$
- α) $E = 10^7, \Pi = 22000$ β) π.χ. διαστάσεις 10^2 και $10^5 \Pi = 200200$.
γ) Στα εμβαδά εφαρμόζονται οι ιδιότητες των εκθετών.
- α) 7^6 β) 7^2 γ) 7^6
- $A = 3^3 \cdot 5^3 \cdot 2 = 6750$ και $B = 11^3 \cdot 7^8 \cdot 2^3$
- 10^5
- α) $16 = 4^2 = 2^4$ β) $64 = 8^2 = 4^3$ γ) $81 = 9^2 = 3^4$
δ) $10.000 = 100^2 = 10^4$ ε) $256 = 16^2 = 4^4$
- Σωστή.
- $2^{22} = 4194304$
- $A = (\frac{2}{3})^{13}$

1.2. Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη ακέραιο

- α) 1 β) 10 γ) 1
- 9, 3, 1, $1/3, 1/27$
- α) $\frac{1}{49}$ β) 128 γ) $\frac{9}{4}$ δ) -125
- α) 25 β) 0,000125 γ) 0,0000085
δ) $\frac{1}{27}$ ε) $\frac{4}{9}$ στ) $\frac{49}{20}$
- α) 9^{-7} β) 7^8 γ) 7^{-6} δ) 8^6
- α) $\frac{6}{25}$ β) $\frac{1}{2}$ γ) $-\frac{5}{1296}$ δ) $-\frac{2}{9}$ ε) $\frac{1}{625}$
- α) 1 β) $\frac{27}{8}$ γ) $\frac{1}{64}$ δ) $\frac{10}{3}$ 10. Σωστό
- Οι τιμές των κλάσματος μειώνονται και τείνουν προς το 0.
- α) $A > B$ β) $B < \Gamma < A < \Delta$

1.3. Τυποποιημένη μορφή μικρών αριθμών

- α) 10^{-3} β) 10^{-4} γ) 10^{-12} δ) 10^{-9}
- $A = 2356,0$ $B = 0,01236$ $\Gamma = 37,0$ $\Delta = 0,0000456712$ $E = 7,5$
- $9,25 \cdot 10^{-5} < 7,05 \cdot 10^{-4} < 3,275 \cdot 10^{-3} < 1,281 \cdot 10^7$
- α) $8 \cdot 10^5 < 2 \cdot 10^7$ β) $7,16 \cdot 10^5 < 7,24 \cdot 10^5$ γ) $10^{-5} > 9 \cdot 10^{-7}$
δ) $3,2 \cdot 10^{-4} < 3,7 \cdot 10^{-4}$
- $12,7 \cdot 10^3 < 345 \cdot 10^3 < 0,078 \cdot 10^8 < 1,2 \cdot 10^7$
- α) $1,06 \cdot 10^{-10}$ β) 10^{-14}
- $A = 0,00015 = 1,5 \cdot 10^{-4}$ $B = 4200000 = 4,2 \cdot 10^7$
 $\Gamma = 4200000 = 4,2 \cdot 10^5$
- $A = 7,5 \cdot 10^{12}$ $B = 3 \cdot 10^{10}$ $\Gamma = 1,8 \cdot 10^{-7}$
- Η πενικιλίνη 100000 φορές.
- $2,79 \cdot 10^{19}$
- α) $1,664 \text{ mm}^3$ β) $1,73 \cdot 10^4$ γ) 481 φορές.
- β) $0,01 \cdot 4000 = 40$
γ) $8 \cdot 10^{-4} \cdot 50000 = 4 \cdot 10$ και $4 \cdot 10^{-3} \cdot 50000 = 2 \cdot 10^2$
- α) 500 και 575 β) $6,325 \cdot 10^9$
- α) $2 \cdot 10^5 = 200000 = 200$ στρέμματα β) $2 \cdot 10^7 \text{ m}^3$

1.4. Υπολογισμός αριθμητικών παραστάσεων

- $A = -\frac{5}{12}$ $B = \frac{51}{14}$ $\Gamma = -\frac{11}{60}$
- $A = -\frac{221}{8}$ $B = -\frac{6}{5}$ $\Gamma = 3,9$
- $A = 1006$ $B = -256$ $\Gamma = -331$
- $A = 14$ $B = -\frac{4}{5}$ $\Gamma = -49$
- $A = -766$ $B = +38$
- $A = 1,099511628 \cdot 10^{19}$ και 10000
- $A = 100$
- Υπόδειξη: Να γράψετε τον δοσμένο αριθμό ως γινόμενο δύο άλλων εκ των οποίων ο ένας γράφεται στη μεγαλύτερη δυνατή δύναμη του 10. Έχει 28 ψηφία.
- $A = -4, B = 956$

1.5. Τετράγωνοι αριθμοί και τετραγωνικές ρίζες

- 36 81 121
- α) 11 m β) 8 cm γ) 20dm δ) 32 mm ε) 1,7 km
- α) $1 < 2 < 4$ β) $16 < 17 < 25$ γ) $49 < 50 < 64$ δ) $81 < 83 < 100$
ε) $81 < 99 < 100$
- α) 12 β) 20 γ) 30 δ) 27 ε) 60
- α) 8 β) 1,6 γ) 800 δ) 160
- α) $(\frac{7}{3})^2$ β) $(\frac{2}{3})^2$ γ) $(\frac{5}{3})^2$ δ) $2,5^2$ ε) $0,8^2$
- α) 7 β) 6 γ) 5 δ) 6
- α) 81 β) 7 γ) 6 δ) $2 - \sqrt{2}$
- α) $x = 2$ β) $x = 6$ γ) $x = 10$ δ) $x = \frac{4}{9}$
- 160 m
- $v = 2 \text{ m}$ $E = 3 \text{ m}^2$.
- 60 m.
- $x = 10, y = 12$
- $\Pi_{\text{ορθ}} = 178$ και $\Pi_{\text{τετρ}} = 160$
- Υπόδειξη: $A = 3, B = 6, \Gamma = 10 (= 6 + 4)$. Εικασία: $\Delta = 10 + 5$.
Πράγματι $\Delta = 15$
- 230 m.
- α) 1936 β) 44 γ) 1980
- α) Κίτρινα-κόκκινα: $5 + 4, 13 + 12, 25 + 24, 41 + 40$
β) $(2 \cdot 100 + 1)^2 = 201^2 = 40401$.
Κόκκινα 20200 και κίτρινα 20201.

1.6. Ρητοί, άρρητοι αριθμοί και δεκαδικές αναπαραστάσεις τους

1. Τρέπονται σε δεκαδικούς αριθμούς τα κλάσματα: $\frac{3}{20}, \frac{49}{4}, -\frac{17}{5}, \frac{13}{32}$.
Τα υπόλοιπα δεν τρέπονται σε περιοδικούς δεκαδικούς αριθμούς.
2. $x = \sqrt{5}, y=3$.
3. Ρητοί: $\frac{4}{5}, -0,0\overline{123}, \sqrt{81}, (\sqrt{5})^2$.
4. α) ρητός β) ρητός γ) άρρητος δ) άρρητος.
5. α) ρητός β) ρητός γ) άρρητος δ) άρρητος
ε) ρητός.
6. Ρητοί: $\sqrt{16}, \sqrt{289}, -\sqrt{625}$. Άρρητοι οι υπόλοιποι.
7. α) $2 < \sqrt{7} < 3$ β) $4 < \sqrt{17} < 5$ γ) $6 < \sqrt{41} < 7$
δ) $9 < \sqrt{95} < 10$ ε) $10 < \sqrt{120} < 11$ στ) $26 < \sqrt{700} < 27$
8. $x = \sqrt{23}$ και $y = \sqrt{27}y - x \approx 0,4$
8. $x = \sqrt{23} \approx 4,8, y = \sqrt{27} \approx 5,2$ και $y - x \approx 0,4$
9. α) $\sqrt{8} \approx 2,83$ β) $\sqrt{11} \approx 3,32$ γ) $\sqrt{33} \approx 5,74$
δ) $\sqrt{\frac{5}{6}} \approx 0,91$ ε) $\sqrt{1000} \approx 31,62$ στ) $\sqrt{88,52} \approx 9,41$.
10. α) $\sqrt{19} \approx 4,36$ β) $\sqrt{10} \approx 3,16$ γ) $\sqrt{35} \approx 5,92$
δ) $-\sqrt{13} \approx -3,61$ ε) $\sqrt{0,3} \approx 0,55$.
11. α) $5 > \sqrt{17}$ β) $\sqrt{39} > \sqrt{19}$.
14. $\Pi = 4\sqrt{32} \approx 22,64$ dm.
15. $\Pi \approx 25,6$ m.
16. 17 cm ή 12,69 cm.
17. α) $5\sqrt{2}$ β) 7 και 7,1.

1.7. Πραγματικοί αριθμοί

1. $2 < \sqrt{5} < 3, 3 < \sqrt{14} < 4, 3 < \sqrt{15} < 4, 5 < \sqrt{29} < 6,$
 $11 < \sqrt{125} < 12.$
5. α) $-\sqrt{6} \approx -2,45$ β) $\sqrt{19} \approx 4,36$ γ) $-\sqrt{11} \approx -3,32$
δ) $\sqrt{28} \approx 5,29$ ε) $\sqrt{35} \approx 5,92$ στ) $-\sqrt{40} \approx -6,32$.
6. **Υπόδειξη:** Για τους απειροψήφιους περιοδικούς αριθμούς και τους άρρητους να δημιουργήσετε προσεγγιστικούς αντιπροσώπους.
8. α) $x = \pm 20$ β) $x = \pm\sqrt{17}$ γ) $x = \pm 0,8$ δ) $x = \pm 50$ ε) αδύνατη.
9. α) αδύνατη β) $x = \pm\sqrt{19}$ γ) $x = \pm 1,3$ δ) $x = 0$
11. α) $\sqrt{2} = 1,41$, β) $\sqrt{41} = 6,4$, γ) $\sqrt{325} = 18,03$,
δ) $\sqrt{32} = 5,66$.
12. $A\Delta \approx 8,66, BE \approx 6,61$.
13. α) $P = 6154,4$ kW β) 44,61 m
14. α) 300 dm² β) 17,32 dm.
15. α) 49 in β) $41/26 \approx 1,58$, ενώ $\varphi \approx 1,62$.

1.8. Επαναληπτικά έργα και προεκτάσεις

1. α) -4 β) -0,125 γ) Ναι
2. Είναι 4.
3. $A = 2187 \cdot 10^7$ (11 ψηφία) $B = 17 \cdot 10^{12}$ (14 ψηφία).
4. 9^{99}
5. α) $16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ β) $32 = 2 \cdot 2^{2 \cdot 2}$ γ) $64 = (2 \cdot 2^2)^2$
δ) $256 = ((2^2)^2)^2$
6. $A = 3^{16} \cdot 2^{-13} B = 2^{-4} \cdot 5^{-1} \Gamma = \frac{81}{4} y^{-13}$
7. $x = 8, y = -3 A = \frac{67}{192}$ 8. $A = 2^{22}$ 9. $A = -\frac{13}{3}$
10. $A = \frac{174}{11}$ 11. $A = 2022$
12. 1 κόκκος ρύζι: $0,029 > 0,00625$ (10 κόκκοι ζάχαρη).
 $2,9 \times 10^{-2} > 6,25 \times 10^{-3}$
13. α) ορθογώνιο 33×22 β) δημιουργούμε μία αναλογία.
14. α) $1^2 + 4, 2^2 + 4, 3^2 + 4, 4^2 + 4$
β) Είναι: $v^2 + 4 = 173$, άρα $v = 13$.
15. $\sqrt{12} \approx 3,46, \sqrt{20} \approx 4,47, \sqrt{41} \approx 6,40$.
16. α) $\sqrt{26}$, β) $E = 6$ (ρητός).
17. α) $t = 3,19$ s, β) $t = 28,56$ s.
18. 26,46 A
19. α) $8,3 \cdot 10^6$ m, β) 9842 m/s.
20. α) 1,618 m, β) 19,778 cm.

Κεφάλαιο 2 - Αλγεβρικός Συλλογισμός

2.1. Γραμμικές αριθμητικές κανονικότητες

1. α) Ο κανόνας από όρο σε όρο είναι: A: 3, B: 5 και Γ: -4.
β) A: 17, 20, 23, B: 22, 27, 32 και Γ: -9, -13, -17.
γ) A: $y = 3v + 2$, B: $y = 5v + 2$, Γ: $y = -4v + 7$
2. α) Η διαφορά είναι: A: 6, για τη B: -3, για τη Γ: 4 και για τη Δ: -3. β) Γενικός όρος για A: $y = 6v + 93$, 50ός όρος 393 και 90ός όρος 533, B: $y = -3v + 21$, Γ: $y = 4v - 9$, Δ: $y = -3v + 217$ κ.λπ.
3. α) 5, 8, 11, 14. β) 6, -2, -10, -18. γ) -24, -12, 0, 12.
δ) 190, 40, -110, -260.
4. α) 3, 1, -1, -3, -5. β) 5, 9, 13, 17, 21.
5. α) $y = 2v + 6$ β) $y = -3v - 6$ γ) $y = 9v - 18$ δ) $y = v + \frac{1}{2}$.
6. α) $\frac{35}{2}$. β) $\frac{485}{2}$. γ) $\frac{5}{2}v - \frac{15}{2}$.
7. α) 2, 10ος 23 β) 5, 10ος 54 γ) 2, 10ος 20
δ) 3, 10ος, 26 ε) -4 10ος, -43.
9. α) Π.χ. $y = 2v + 3$, για $v = 1, y = 5$, οπότε η εικασία δεν είναι σωστή.
10. β) 501 γ) $y = 5v + 1$.
11. α) 228 β) $y = 5v + 188$.
12. β) $y = 2v + 30$
16. β) $y = 1,5v$ γ) 375
17. δ) 203, 298, 401 ε) 299, 201, 75
18. δ) $y = 3v + 1$

19. **α)** Α, Γ και Δ. **β)** 40ός 125, 60ός 185 και 80ός 245.
γ) 35 σπύρτα έχει ο 10ος όρος με 51 σπύρτα δεν υπάρχει όρος.
 20. **δ)** $y = 2v + 1$.
 21. **α)** $y = 6v + 49$, **β)** 20.
 22. **β)** $y = 10v + 50$.

23. **α)** 32 **β)** 26 **γ)** Ο γενικός τύπος είναι: $y = 32v + 648$.
 Για $v = 26$ είναι: 1480.
 24. **α)** 7ος: $\frac{11}{6}$, 9ος: $\frac{7}{3}$ **β)** $\frac{1}{12} + \frac{1}{4} \cdot v$ **γ)** 30

2.2. Αλγεβρικές παραστάσεις

1. **α)** $2v + 1$ **β)** $3v$ **γ)** $v(v + 1)$ **δ)** $4\alpha - 7$ **ε)** $\frac{1}{2}\alpha + 10$
στ) $3x$ **ζ)** $0,75x$ **η)** $80t$
3. **α)** i. $4x + 70$ ii. $x(x + 35)$. **β)** i. 350 ii. 7350.
4. Είναι $E = 3x$ και $E = 10x + 54$. **α)** 9, και 84 κ.λπ.
β) 8 και 74 κ.λπ.
5. Έστω x ο αριθμός των στρεμμάτων πεύκων και y των ο αριθμός των στρεμμάτων κυπαρισσιών. Είναι: **α)** $120x + 240y$ **β)** 10800.
6. **α)** $2x + 2y$ **β)** $\Pi = 23 \text{ cm}$.
7. $E = 27,5 \text{ cm}^2$
8. $6(15 - x)$, $9,75\alpha^2 + 1,5\alpha$, $0,75y + 0,75$.
9. Σωστό, Λάθος, Σωστό
10. **α)** $10x - 20$ **β)** $6z - 15z^2$ **γ)** $-21zy - 7z$ **δ)** $15y - 5x + 30$
11. **α)** $3(6x + 5) = 18x + 15$ **β)** $\frac{1}{4}x \cdot 32 = 8x$ **γ)** $6(x + 4) = 6x + 24$
δ) $9(2x + 9) + 1 = 18x + 82$
12. **α)** x **β)** $-5x^2 + 8x$ **γ)** $\frac{8}{9}x^2$ **δ)** $-4x + 4y$ **ε)** $-\alpha - 2\beta - 5$
13. **α)** $15x^2$ **β)** $-8x$ **γ)** $-12x^2$ **δ)** $-12x^2$ **ε)** $-3x^2$ **στ)** $10x^2$
14. $5(x + y + 1)$ και $2(x + y + 4)$
15. **α)** $1500 - 50y - 30x$ **β)** 750.
16. **α)** $A = 12y + 28$ **β)** $B = -9\lambda - 66$ **γ)** $\Gamma = -118x + 79$
17. **α)** $A = \frac{5}{2}x - \frac{5}{2}$ **β)** $B = 3\beta + \frac{31}{14}$ **γ)** $\Gamma = \frac{91\alpha}{5} + \frac{63}{5}$
18. **α)** $A = B = 1$ $\Gamma = 13$ **β)** $\Delta = 28, E = 64$.
18. **α)** $A = B = 1$ και $\Gamma = 13$ **β)** $\Delta = 28$ και $E = 64$.
19. **α)** $A = 14x$. Για $x = 1$ έχουμε $A = 14$ και για $x = -1$ $A = -14$.
β) $B = -20x + 22$ (2 και 42) **γ)** $\Gamma = -3x + 6$ (3 και 9)
- δ)** $\Delta = \frac{107}{21}x + \frac{34}{9} \left(\frac{559}{63} \text{ και } -\frac{83}{63} \right)$.
20. **α)** $A = 3x - y + 1$ και $A = -6$ **β)** $B = 6x + 17y + 5$ $B = -47$.
21. $\frac{2}{3}x + 1$.
22. Οι παραστάσεις $A = x^5$ και $B = x^3$ δεν είναι ισοδύναμες.
 Π. χ. για $x = 2$ είναι: $A = 32$ και $B = 8$.
25. **α)** $7x$
27. **Υπόδειξη:** Στα (α) και (β) να εφαρμόσετε την επιμεριστική ιδιότητα. Στα (γ) και (δ) να εφαρμόσετε τη σύνθετη επιμεριστική ιδιότητα.
28. **α)** $x^2 + 4x + 4$ **β)** $-4x^2 - 10x - 6$ **γ)** $2y^2 - 4xy - 5y + 10x$
δ) $88xz + 64xy + 55z^2 + 40yz$ **ε)** $-6y^2 - 21yz - 2y - 7z$
29. **α)** $\frac{x^2}{2} + 5x - 300$ **β)** $\frac{1}{9}\alpha^2 - \frac{4}{25}\beta^2$
γ) $xy^2z - 0,25y^2z + 4x^2y - xz$ **δ)** $7x^3 - \frac{7}{4}x^2y^2 + 12xy - 3y^3$
31. **Υπόδειξη:** **α)** να ελέγξετε την εφαρμογή της σύνθετης επιμεριστικής ιδιότητας. **β)** Να ελέγξετε την ορθή εφαρμογή των προσήμων.
32. **α)** $3x + ax + bx + 3y + ay + by$
β) $-15\beta^2 - 12\alpha\beta + 6\beta\gamma + 8\alpha + 10\beta - 4\gamma$
γ) $36x^2 - 49y^2 - 35xy - 16xz + 28yz$
33. **α)** 4α **β)** $\alpha^2 - \beta^2$
35. **α)** Περίμετρος $6x$ (ίδια). Εμβαδόν από $2x^2$ σε $2x^2 + x - 1$ **β)** $x = 1$
36. **α)** Κώστας $\Delta M \Sigma = 26,83$ (1ος βαθμός).
β) Βασιλική $\Delta M \Sigma = 25,81$ (1ος βαθμός).
37. $A = 5$ $B = 0$ $\Gamma = -8$
41. Οι **α)** και **γ)**

2.3. Εξίσωση 1ου βαθμού

1. **α)** ναι **β)** ναι **γ)** όχι **δ)** ναι
2. **α)** 4 **β)** -5 **γ)** 8 **δ)** 3
6. **Υπόδειξη:** Να εργαστείτε ανάλογα με την Εφαρμογή 1 της 3ης διδακτικής ενότητας.
7. **Υπόδειξη:** Να λύσετε τις εξισώσεις σύμφωνα με την Εφαρμογή 1 της 3ης διδακτικής ενότητας.
8. **Υπόδειξη:** Να λύσετε τις εξισώσεις σύμφωνα με την Εφαρμογή 1 της 3ης διδακτικής ενότητας.
9. **α)** $3x + 60 = 2x - 27$ **β)** $(x - 1) + x + (x + 1) = 162$
- γ)** $2x - 20 = 14$ **δ)** $x^2 + 11 = 47$ **ε)** $\frac{5 + x}{12 + x} = \frac{4}{5}$.
10. **α)** $2x + 2(x + 12) = 84$ **β)** $3x = 48$.
11. **α)** Να βρείτε το πλάτος του ορθογωνίου. $4x = 91$.
β) Να βρείτε τη γωνία της κορυφής. $2 \cdot 45^\circ + x = 180^\circ$.
γ) Να βρείτε την πλευρά του. $3x = 165$.
12. **α)** $3x - 30 = x - 10$ ($x = 10$, Ο Θανάσης είχε στην αρχή 30 €)
β) $(x + 35) = 2(x + 15)$ ($x = 5$) **γ)** $2x + (13 - x) \cdot 5 = 47$ ($x = 6$)
13. **α)** 70 άτομα. **β)** 105 άτομα.

2.4. Λύση εξίσωσης 1ου βαθμού με τις ιδιότητες της ισότητας

1. **α)** $x = -2$ **β)** $x = -8$ **γ)** $x = 0$ **δ)** $x = -7$ **ε)** $x = -15$
στ) $x = 32$
2. **α)** $x = 6$ **β)** $x = 7$ **γ)** $x = 10$ **δ)** $x = -20$ **ε)** $x = 9$
στ) $x = -19,75$
3. **Υπόδειξη:** Να λυθούν οι εξισώσεις σύμφωνα με το παράδειγμα της ενότητας
4. **α)** $3x - 28 = 3x$ **β)** $\frac{x}{2} - 2 = 3x$ **γ)** $\frac{1}{3}x + 0,5 = 2x$
δ) $2x - 3 = 3x + 10$
4. **α)** $3x = 42$ **β)** $2x + 19 = 39$ **γ)** $3x + 3 = x + 13$
5. $2x = x + 4$
6. $3x + x = 3,6$
7. **α)** $2x + 3 = 9$ **β)** $2x + 3 \cdot 1,5 = 6 \cdot 1,5$
8. $2x - 3 = x + 3$
9. **α)** 11, **β)** $\alpha = 12,5$, **γ)** $y = 3$, **δ)** $\beta = 5$
10. $x = 32$ **11.** $2x - 5 + x = 67$ **12.** $x = 4$ **13.** $x = 3$
14. **α)** $x = 14$ **β)** $\lambda = \frac{1}{4}$ **γ)** $y = -10$ **δ)** $x = \frac{2}{3}$ **ε)** $x = 1$
15. **α)** $x = 16$ **β)** $x = 0$ **γ)** $x = 1$ **δ)** $x = \frac{7}{3}$ **ε)** $x = 32$
16. **α)** $x = \frac{5}{3}$ **β)** $x = 3$ **γ)** $x = -2$ **δ)** $x = 5$ **ε)** $x = \frac{3}{4}$
17. **α)** $x = 0$ **β)** $x = 8$ **γ)** $x = 0$ **δ)** $x = 4$.
18. **α)** $x = 4$ **β)** $x = -5$ **γ)** $x = \frac{1}{2}$
20. **α)** $\beta = 0$ **β)** αόριστη **γ)** αδύνατη **δ)** αδύνατη
ε) αδύνατη.
22. **α)** αδύνατη **β)** αόριστη **γ)** αδύνατη
δ) αδύνατη.
23. Υπάρχουν δύο τρίγωνα: **α)** $36^\circ, 72^\circ, 72^\circ$. **β)** $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$.
24. $A\Gamma = \frac{12}{7}$
25. 20° και 70° . **26.** 134, 114 και 102
29. 18, 19, 20, 21, 22

2.5. Λύση ρεαλιστικών προβλημάτων με εξισώσεις 1ου βαθμού

1. $x = 1$.
2. όχι.
3. 84.
4. 11 δίποντα 13 τρίποντα.
5. 51 πάπιες 16 κουνέλια.
6. 5 χρόνια.
7. **Υπόδειξη:** να εργαστείτε κατά την εφαρμογή 7 της 5ης ενότητας.
8. 700, 500, 400.
9. 12 των 5,50 € και 3 των 6 €.
10. 7840 €.
11. 68,75 € **β)** 24%.
12. Είναι $x = 8, y = 6$ και $AB = BG = 29$.
13. 21 εβδομάδες.
14. Διαστάσεις: 6 m και 10 m με εμβαδόν 60 m².
15. 40 dm.
16. 3 ώρες.
17. 3 ώρες με αποστάσεις 57 km και 51 km από τις δύο πόλεις.
18. 110 κιλά ψευδαργύρου
19. $\widehat{B} = 51^\circ, \widehat{\Gamma} = 39^\circ$.
20. $x = 6$
21. 26 cm 34 cm.
22. **α)** Πλ. ισοπλ.: 68/3, Πλ. ρόμβου: 17. **β)** αδύνατη. **γ)** αόριστη
23. **δ)** αδύνατη.

2.6. Επαναληπτικά έργα και προεκτάσεις

2. **α)** 12 **β)** 11 **γ)** 968.
3. 180.
4. **α)** 26 **β)** 402 **γ)** $4n + 2$.
5. **α)** είναι ίσα, από 39 **β)** τα αθροίσματα είναι ίσα
γ) είναι ίσα: $3n + 24$.
6. $28, \frac{n(n-1)}{2}$
7. 55.
8. Το πακέτο Α παραπέμπει στις παραστάσεις α και δ, το Β ($2\mu + 4\pi + 6\upsilon$) δεν έχει παράσταση, Γ σε γ, Δ σε ε και στ.
9. **α)** $2x + 3$ **β)** $2x + 3$ **γ)** $4,7x + 1,7$.
10. -10.
11. 2000.
12. 30 κιλά νερού.
13. 21 μονάδες.
14. $A = 25,5$ m.
15. **α)** $12x - 28$ **β)** $14x + 2y + 18$ **γ)** $8x + 2$.
16. 166225 €.
17. Οι διαστάσεις είναι: 0,5 και 0,809.
18. 12.
19. $\frac{26}{3}$.
20. **α)** την 5η εβδομάδα 21 € και τη 10η 41€ **β)** 53 **γ)** $y = 4n + 1$.
21. 8 το πρώι.

Κεφάλαιο 3 – Συναρτήσεις

3.1. Η έννοια της συνάρτησης: πίνακας τιμών και τύπος

1. **α)** μεταβλητή **β)** σταθερή **γ)** μεταβλητή **δ)** σταθερή
ε) μεταβλητή.
2. Η μεταβολή της άλλης ποσότητας εξαρτάται: **α)** από τη σειρά του όρου **β)** τον όγκο **δ)** από τον από το ύψος και **στ)** από την ηλικία.
3. **α)** 0 **β)** 3 **γ)** $y = 3x + 3$ **δ)** $3 \cdot (-1) + 3 = 0$ $3x + 3 = 12$, οπότε $x = 3$.
4. **α)** $y = 7t$ **β)** η μεταβλητή t είναι ανεξάρτητη.
5. **β)** $2x - 1 = 81, x = 41$, άρα ο 41ος όρος. $x^2 = 81, x = 9$, άρα ο 9ος όρος. **γ)** Είναι συναρτήσεις με τύπους $y = 2x - 1$ και $y = x^2$.
6. **α)** $y = 2$ και $y = -3$ αντίστοιχα **β)** $x = 18$ και $x = \pm 3$.
8. **α)** $y = 18 - x$ **β)** $y = \frac{48}{x}$.
9. **α)** $E = 3x, x = 7,5$ **β)** $x = 7/3$.
10. $E = x^2 \Pi = 4x$.
11. **α)** 180 και 2880 **β)** $S = 60t$.
12. **α)** Στο 1ο διάγραμμα έχουμε μονοσήμαντη αντιστοιχία στο 2ο όχι.
β) Για το 1ο διάγραμμα αντιστοιχίζονται π.χ. ώρες του 24ώρου και θερμοκρασίες.
13. **Υπόδειξη:** μα εργαστείτε σύμφωνα με την Εφαρμογή 3 της 1ης διδακτικής ενότητας.
14. **α)** $E = 2x$ **β)** $y = \sqrt{x^2 + 16}$ **γ)** $\Pi = x + 4\sqrt{x^2 + 16}$.
15. **α)** $y = 0,9x$ **β)** 3,15 **γ)** 5
16. **α)** Η ανεξάρτητη είναι x και η εξαρτημένη μεταβλητή y .
β) $y: 12, 11, 10, 9$ και 7.
17. **α)** $\Pi = 2x + 8$ **β)** πx^2 .
18. **α)** $y = 0,6x$ **β)** $y = 450€$ **γ)** $x = 1200 €$.
19. **γ)** $y = 81 - x^2, 0 < x < 9$.

3.2. Καρτεσιανές συντεταγμένες – Γραφική παράσταση συνάρτησης

1. **β)** $E(1,0), Z(-1,5,3), H(-2,-2,5), \Theta(0,-3)$ **γ)** $AE = 5$
3. Το σχήμα ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο. Είναι $K(3,3)$.
4. **α)** $K(1,0,5), \Lambda(4,0,5), M(4,2)$.
β) Τα $A(1,1)$ και $\Gamma(3,3)$ βρίσκονται στην ϵ , τα $B(2,1/2)$ και $H(3,1/2)$ βρίσκονται στην $\kappa\lambda$, το $K(1,1/2)$ στις ζ και $\kappa\lambda$ και το $\Theta(1/2,1)$ στη δ , τέλος τα σημεία $\Delta(3,2), Z(1/2,3)$ και $P(-1,-1)$ ανήκουν στην, (ϵ).
5. **α)** 350 m **β)** σε 2h **γ)** σε 6,5 h.
6. **α)** 150 m **β)** σε 110 min **γ)** σε 190 min.
7. **α)** $A'(-3,-5), B'(0,-2), \Gamma'(-4,0)$. **β)** $A''(3,5), B''(0,-2), \Gamma''(4,0)$. **γ)** $A'''(3,-5), B'''(0,-2), \Gamma'''(4,0)$.
8. **α)** $x = 5$. **β)** $x = -2$.
10. **α)** Στις 6 και στις 16. **β)** πάνω από το 0: από το 0 μέχρι το 3 και από το 9 μέχρι το 24 και κάτω από το 0 από το 3 μέχρι το 9.
γ) Από το 6 μέχρι το 16 αυξανόταν. Από το 2 μέχρι το 6 και από το 16 μέχρι το 24 ελαττωνόταν (τα άκρα δεν συμπεριλαμβάνονται). **δ)** Στις 13 και στις 20.
11. **α)** Είναι συνάρτηση επειδή σε κάθε τιμή του χρόνου αντιστοιχεί μία μόνο τιμή της διανυόμενης απόστασης. **β)** Ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος (t) και εξαρτημένη μεταβλητή το διάστημα (S). **γ)** $S = 80t$.
13. **α)** Η απόσταση του Α από τον άξονα x' είναι 3 και από τον άξονα y' είναι 2. **β)** $B\Gamma = 5$. **γ)** $OM = 10$.
14. **β)** 12 °C περίπου. **γ)** 3500 m περίπου.
15. $\kappa = \frac{10}{3}$
16. Συνάρτηση είναι μόνο η γραμμή (1) επειδή κάθε κατακόρυφη ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση σε ένα ακριβώς σημείο.
17. **α)** (0,2) **β)** (4,22) **γ)** (11,5,13) **δ)** (8,42)

3.3. Συνάρτηση αναλογίας $y = ax$.

1. **β)** $y = 5x$ και $S = 60t$.
2. Δεν βρίσκονται σε αναλογία.
3. **α)** 2 **β)** -2,5 **γ)** 0,5.
4. Να χρησιμοποιήσετε την εφαρμογή 1 (γ) της 3ης διδακτικής ενότητας.
5. Να χρησιμοποιήσετε την εφαρμογή 1 (β) της 3ης διδακτικής ενότητας.
6. **α)** $y = x$ **β)** $y = -\frac{1}{4}x$ **γ)** $y = \frac{1}{6}x$.

7. $\alpha: -\frac{1}{4}, \beta: -\frac{6}{5}, \gamma: 3, \delta: 1 \varepsilon: \frac{3}{5}, \zeta: \frac{3}{8}$.

8. **α)** 12 m, 2,4 m, 0,24 m.

β) $y = 0,24x, y = 0,15x, y = 0,07x$.

9. $y = -4x$.

11. 24 m και 18 m.

12. $E = 7,5x, 0 < x < 8$.

13. 4m

14. **α)** 4 lt κόκκινο, 8 lt μπλε **β)** 15,4 lt κίτρινο, 23,1 lt μπλε **γ)** όχι.

15. **α)** 62 **β)** $y = 1,24x$ με σταθερά αναλογίας 1,24 **γ)** 50.

16. 3333 €.

17. **α)** 2100 **β)** 1680 **γ)** Ο καταναλωτής.

18. $y = 0,275x$.

3.4. Η γραμμική συνάρτηση $y = ax + \beta$.

1. Ο πρώτος επειδή για μοναδιαία αύξηση του x το y ελαττώνεται κάθε φορά κατά 3.

2. **α)** ναι **β)** όχι **γ)** όχι **δ)** ναι.

3. **α)** $y = -0,2x + 1$ **γ)** 1,25 ώρες **δ)** Ναι.

5. **α)** Η ευθεία $y = \frac{1}{3}x + 1$ και η ευθεία $y = \frac{1}{3}x$ έχουν την ίδια κλίση, επομένως είναι παράλληλες.

6. **α)** $\alpha = 4, \beta = 3$ **β)** $\alpha = -2, \beta = 2$ **γ)** $\alpha = 2,5, \beta = 3,5$ **δ)** $\alpha = -3, \beta = 1$.

8. **α)** $\kappa: y = x + 2, \lambda: y = x + 1, \mu: y = x - 2, \nu: y = x - 3$. Όλες οι ευθείες έχουν την ίδια κλίση. **β)** $\alpha: y = -\frac{1}{2}x + 2, \beta: y = -x + 2, \gamma: y = -2x + 2, \delta: y = 2x + 2, \varepsilon: y = x + 2, \zeta: y = \frac{1}{2}x + 2$. Όλες οι ευθείες διέρχονται από το σημείο (0, 2).

9. **Υπόδειξη:** Να εργαστείτε πρώτα όπως στην Εφαρμογή 2.

10. **α)** $\alpha = -2$ **β)** $\beta = 5$ **γ)** $\alpha = -5$ **δ)** $\beta = 4,8$.

11. **α)** $y = -x - 2$ **β)** $y = 2x - 7$ **γ)** $y = -0,5x + 2,5$ **δ)** $y = 0,5x - 1,5$.

12. $\alpha = 2$.

13. $\alpha = 4$.

14. **γ)** $\delta: y = 2x - 1$ **δ)** $\varepsilon: y = -3x + 2$.

15. 20 λεπτά.

16. **α)** $y = x - 1$ **β)** $y = -2x + 2$ **γ)** $y = 3x - 1$.

17. **α)** $x = 2$ **β)** $x = 10$ **γ)** $x = -6$ **δ)** $x = \frac{6}{5}$ **ε)** $x = \frac{15}{4}$

18. **α)** $x = 2$ **β)** $x = \frac{9}{2}$ **γ)** $x = \frac{1}{5}$ **δ)** $x = 42$

19. **α)** $x = \frac{7}{3}$ **β)** $x = -\frac{12}{7}$ **γ)** $x = \frac{18}{11}$ **δ)** $x = \frac{17}{13}$.

20. **α)** 380 **γ)** $y = 50x + 30$.

21. **α)** Εταιρεία 1 (χωρίς πάγιο): $y = 0,2x$ και Εταιρεία 2 (με πάγιο 5€): $y = 5 + 0,2x$. **γ)** Γιατί έχουν την ίδια κλίση και δεν συμπίπτουν **δ)** Η Εταιρεία 2.

3.5. Η συνάρτηση της αντίστροφης αναλογίας $y = \frac{\alpha}{x}$

1. $y = \frac{64}{x}$.

2. **α)** $y = \frac{60}{x}$ **β)** $y = \frac{100}{x}$ **γ)** όχι **δ)** $y = \frac{600}{x}$.

3. **α)** Για $x = -1$ προκύπτει $y = 3$. Για $x = 0$ η συνάρτηση δεν ορίζεται, επομένως δεν ισχύει $y = 0$.

6. **α)** $y = \frac{21}{x}$ **β)** $y = \frac{4}{x}$ **γ)** $y = -\frac{2}{x}$ **δ)** $y = \frac{0,75}{x}$.

7. $\lambda = -\frac{11}{2}$.

8. Η συνάρτηση $y = \frac{12}{x}$ αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση Δ.

9. **α)** Τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα. Η συνάρτηση είναι $y = \frac{3000}{x}$. **β)** Πρέπει να περιορίσει τα ημερήσια έξοδα κατά 50 €.

10. **α)** $t = \frac{15}{v}$ **β)** i. 0,6 h ii. 2,5 h iii. 0,1875 h.

11. 24 ημέρες **12.** $\alpha: y = \frac{4}{x}$ $\beta: y = \frac{8}{x}$ $\gamma: y = \frac{12}{x}$.

13. Σε 1/4 της ώρας.

14. **α)** 12 ελαιοχρωματιστές **β)** 4 ημέρες

15. **α)** $y = \frac{1000}{x}$. **β)** 200 σωλήνες.

16. **α)** 16 **β)** 16 **γ)** $x = y = 4$.

3.6. Επαναληπτικά έργα και προεκτάσεις

1. **Υπόδειξη:** Να εφαρμόσετε το αντίστροφο του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο τρίγωνο ΚΛΜ.

2. **α)** $\Pi = x + 23$. **β)** Ανεξάρτητη μεταβλητή είναι η x . **γ)** Από την τριγωνική ανισότητα προκύπτει: $3 < x < 23$. Είναι $26 < \Pi < 46$.

3. $E = -\frac{x^2}{2} + 100x$.

5. **Υπόδειξη:** Ο πίνακας τιμών δεν εξασφαλίζει με σιγουριά τον τύπο της συνάρτησης γιατί δεν γνωρίζουμε τους επόμενους όρους.

6. **α)** $\alpha = 3, \beta = -2,5$ **β)** $\alpha = -1, \beta = 4$ **γ)** $\alpha = 1,5, \beta = 2,5$

δ) $\alpha = 4, \beta = 2$

9. $\alpha = 2$

10. **α)** $\lambda = -2$

β) $\lambda = 1$

11. $y = 3x$

12. 2592 €

13. $y = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{2}$.

14. **α)** $y = -\frac{3}{2}x + 2$, **β)** $y = \frac{7}{3}x - 4$, **γ)** $y = -\frac{4}{3}x + 1$.

15. $y = \frac{1}{2}x$

16. $y = 3x + 5$

17. **α)** $y = 3x + 6$ **β)** $y = -x$ **γ)** $y = 2x + 1$ **δ)** $y = -2x + 6$

18. $y = -3x - 2$

20. **α)** $A = -1500t + 20000$ **γ)** σε 6 χρόνια.

21. **α)** $y = \frac{5}{4}x - 1$. **β)** $y = -\frac{3}{4}x + 3$. **γ)** $y = \frac{1}{5}x - 2$.

22. **Υπόδειξη:** Τα δύο σημεία επαληθεύουν την εξίσωση $y = ax + \beta$.

α) $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ **β)** $y = -\frac{3}{2}x + 2$ **γ)** $y = 2x$ **δ)** $y = 2x - 1$.

23. **Υπόδειξη:** Να εξετάσετε με τη βοήθεια σχήματος αν οι ευθείες AB και ΒΓ έχουν την ίδια κλίση. Η κλίση των δύο ευθειών είναι 2 και έχουν κοινό το σημείο Β, οπότε ταυτίζονται. Άρα τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

24. **α)** $x = 5/3$ **β)** $x = -2$

25. **α)** $x = 22$ **β)** $x = 4$, **γ)** $x = 6$, **δ)** $x = 3,2$.

26. **β)** (2, 3) **γ)** $x = 2$.

27. **α)** 172,51 cm **β)** 168,71 cm.

28. $\alpha = -\frac{1}{2}, \beta = -32$.

29. Α-4, Β-3, Γ-2

30. α) Ο τύπος Α αντιστοιχίζεται με την κόκκινη γραφική παράσταση, ο Β με την πράσινη και ο Γ με τη μπλε.

β) Η κόκκινη αναγνωρίζεται από το (1, 1), η πράσινη από το (3,1) ή το (1,3) και η μπλε από το (4, 2) ή το (2, 4).

γ), δ) Καθώς αυξάνεται η α ή η $\frac{1}{|\beta|}$, η υπερβολή απομακρύνεται από τους άξονες.

Κεφάλαιο 4 – Γεωμετρία του Επιπέδου

4.1. Επίκεντρες και εγγεγραμμένες γωνίες

1. $\alpha = 30^\circ, \beta = 70^\circ, \gamma = 80^\circ, \delta = 120^\circ$

2. $x = 135^\circ$

3. $\omega = 120^\circ$

4. $x + \omega = 180^\circ$ ή $3\omega + \omega = 180^\circ$ ή $4\omega = 180^\circ$ ή $\omega = 45^\circ$.
Άρα $x = 135^\circ$.

5. $x = 53^\circ$ και $\omega = 37^\circ$

6. $\widehat{AB} = 68^\circ, \widehat{BF} = 156^\circ, \widehat{AD} = 102^\circ, \widehat{AA} = 34^\circ$.

7. $\widehat{K} = 105^\circ, \widehat{A} = 37,5^\circ, \widehat{B} = 37,5^\circ$.

8. $\widehat{AB\Gamma} = 90^\circ, \widehat{A\Gamma B} = 30^\circ$.

9. Όχι γιατί η γωνία δεν είναι επίκεντρη.

β) $\widehat{B\Gamma A} = 42^\circ$.

10. $\widehat{A\hat{E}P} = 80^\circ$

11. $\widehat{A} = 35^\circ, \widehat{\Gamma} = 65^\circ$, και $\widehat{B} = 80^\circ$

12. α) $\widehat{A\hat{B}D} = 45^\circ$. β) $\widehat{A\hat{O}D} = 90^\circ$.

γ) $AG \perp DE$ αφού $\widehat{A\hat{O}D} = 90^\circ$.

13. $\widehat{\Delta} = \widehat{\Xi} = \widehat{Z} = 120^\circ$.

14. Χαράσσουμε κύκλο που να διέρχεται από τα σημεία Α, Β, και Γ και στη συνέχεια από το σημείο Μ φέρνουμε ευθεία παράλληλη στο ΑΒ.

4.2. Κανονικά Πολύγωνα

1. Για 8 πλευρές, η κεντρική γωνία είναι 45° , η εσωτερική γωνία 135° . κ.λπ.

2. 12,15,24 ως διαιρέτες του 360

3. $\omega = 20^\circ$. Είναι κανονικό δεκαοκτάγωνο.

4. 6γωνο, 8γωνο, δεν υπάρχει, 18γωνο

5. Τετράγωνο, $\omega = 90^\circ$ και η $\varphi = 90^\circ$.

6. Ισόπλευρο

7. Δες κατασκευή τετραγώνου με κανόνα και διαβήτη και στη συνέχεια σχεδίασε τις διχοτόμους των κεντρικών γωνιών του τετραγώνου.

8. Η εσωτερική γωνία του εξαγώνου είναι 120° και του πενταγώνου 108° . Διαπιστώνονται κενά διότι $2 \cdot 120^\circ + 108^\circ \neq 360^\circ$.

9. Σχεδιάζουμε 9 διαδοχικές επίκεντρες γωνίες 40°

10. Κατασκευάζουμε κύκλο με ακτίνα 3 και χαράσσουμε 5 επίκεντρες γωνίες 72° .

11. Είναι κανονικό πεντάγωνο.

12. Το εξάγωνο έχει έξι άξονες συμμετρίας ενώ το πεντάγωνο κανένα.

13. **Υπόδειξη:** Να εφαρμόσετε τις ιδιότητες εγγεγραμμένων και επίκεντρων γωνιών.

14. α) Κατασκευάζουμε το εξάγωνο και τα έξι ισόπλευρα τρίγωνα ή β) Κατασκευάζουμε το εξάγωνο και φέρνουμε κατάλληλες διαγωνίους.

15. Δες την κατασκευή του κανονικού εξαγώνου και τετραγώνου.

4.3. Πυθαγόρειο Θεώρημα

1. α) $\alpha = 17$ cm β) $\alpha \approx 22,36$ cm γ) $\alpha = 1$ cm

δ) $\beta = \gamma \approx 4,23$ cm.

2. α) $\gamma = 10$ m β) $\gamma = 9$ cm γ) $\beta = 3,4$ dm δ) $\gamma = 2$ m

ε) $\beta = 1,6$ mm

3. α) 12 cm-16 cm-20 cm β) 9 cm - 20 cm - $\approx 21,93$ cm.

4. α) $E_1 + E_2 = E_4, E_3 + E_5 = E_1$ β) 5-12-13, 3-4-5

5. $\alpha = 97$ m

6. α) $\widehat{\Gamma} = 90^\circ, \gamma = 34$ cm. β) όχι γ) όχι

7. Μήκος 13,7 cm περίπου.

8. Μήκος ύψους 11,3 cm περίπου.

9. Το μήκος της τρίτης πλευράς, πρέπει να είναι 50.

10. Ορθογώνια τρίγωνα είναι τα τρίγωνα των περιπτώσεων β και δ.

11. Το τετράγωνο του μήκους της διαγωνίου ΑΓ είναι 50.

12. ΒΔ = 12 cm, ΑΒ = 13 cm.

13. **Υπόδειξη:** Να εφαρμόσετε το αντίστροφο του Π.Θ.

14. Φέρνουμε ΗΤ \perp ΑΔ. Το τρίγωνο ΗΜΤ είναι ορθογώνιο.
ΗΜ = 16-8 = 4 dm. ΜΤ = 8,54 dm.

15. ΑΒ = $\sqrt{8}$ μονάδες μήκους.

16. Η ακτίνα του κύκλου είναι $\rho = \frac{\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2}$ cm.

17. Η περίμετρος του τετραπλεύρου ΑΒΓΕ είναι 18 cm

18. **Υπόδειξη:** Εφαρμόστε το αντίστροφο του Π. Θ. στο τρίγωνο ΕΖΒ.

19. α) ΑΒ = 37 cm. β) Το ΑΒΓ δεν είναι ορθογώνιο.

20. α) ΔΖ = 25cm, ΕΖ = 15cm. β) Το τρίγωνο ΖΕΔ είναι ορθογώνιο διότι: $15^2 + 20^2 = 25^2$.

21. Είναι $\widehat{B} = 90^\circ$ διότι η γωνία είναι εγγεγραμμένη και βαίνει σε ημικόκλιο.

22. Το τρίγωνο είναι ορθογώνιο διότι: $\left(\frac{15}{8}\right)^2 = \left(\frac{9}{8}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$.

23. 281 τετρ. μον.

24. Ναι, γιατί διαγώνιος πόρτας $\approx 2,4 > 2,2$.

4.4. Επαναληπτικά έργα και προεκτάσεις

1. α) ΑΗ = 24 β) ΑΓ = 40

γ) Εφαρμόζουμε το αντίστροφο του ΠΘ στο τρίγωνο ΔΑΓ.

2. α) $\varphi = 60^\circ$. β) $\omega = 60^\circ$.

3. **Υπόδειξη:** Να αναζητήσετε γωνία 60° σε κατάλληλο κανονικό πολύγωνο.

4. $\varphi = 36^\circ$

5. α) $x = 12$ cm. β) ΑΒ = 5cm, ΑΓ = 12cm, ΒΓ = 13. γ) Σύμφωνα με το αντίστροφο του ΠΘ το ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\widehat{A} = 90^\circ$.

6. α) $\alpha = 5$ β) $\gamma = \beta \approx 3,53$.

7. α) ΒΓ = 16 β) Να εφαρμόσετε το αντίστροφο του ΠΘ στο τρίγωνο ΑΓΔ. γ) Τα Δ και Β ανήκουν σε κύκλο με ακτίνα ΑΟ και κέντρο Ο, δηλαδή ΒΟ = ΟΔ = ΑΟ = 32,5.

8. ΑΒ = 20.

9. $\widehat{\Delta\Gamma A} = \widehat{A\Gamma B} = 45^\circ$. Άρα $\widehat{\Delta\Gamma B} = 90^\circ$.

10. ΔΕ = 52-39 = 13 cm. ΑΕ = ΒΓ = 12 cm. Από το αντίστροφο του ΠΘ το τρίγωνο ΔΑΕ είναι ορθογώνιο.

11. α) ΓΗ = 40 m. β) ΑΒ = 22,5 m.

12. Η γωνίες $\widehat{B\Gamma A}$ και $\widehat{A\hat{B}D}$ είναι ίσες με 90° ως εγγεγραμμένες που βαί-

- νουν σε ημικύκλιο. Άρα $\widehat{\Gamma\hat{B}A} + \widehat{A\hat{B}D} = 180^\circ$
13. Οι γωνίες $\widehat{A\hat{E}B}$ και $\widehat{A\hat{Z}D}$ είναι ορθές επειδή βαίνουν σε ημικύκλια, οπότε $EB \perp AZ$ και $ZD \perp AZ$. Άρα $EB \parallel ZD$.
14. α) $\widehat{A\hat{B}\Gamma} = \widehat{A\hat{D}\Gamma}$ ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο τόξο $\widehat{A\hat{D}}$. β) Είναι $\widehat{B\hat{A}H} = \widehat{D\hat{A}\Gamma}$ ως συμπληρωματικές των ίσων γωνιών $\widehat{A\hat{B}\Gamma} = \widehat{A\hat{D}\Gamma}$.

15. $PB = 3\sqrt{2}$.
16. Δεν θα χωρέσει επειδή η διαγώνιος της ξύλινης κατασκευής είναι περίπου 3,27 m, ενώ η διαγώνιος της πόρτας περίπου 2,15 m. Επομένως δεν χωράει.

Κεφάλαιο 5 – Διανύσματα και Μετασχηματισμοί

5.1. Γνωριμία με την έννοια του διανύσματος

1. α) $|\vec{AB}| = 1, |\vec{GH}| = 4, |\vec{K\Theta}| = 2, |\vec{Z\Lambda}| = 5, |\vec{\Gamma\beta}| = 1, |\vec{\lambda\lambda}| = 10$.
β) Ίσα: $\vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta}, \vec{\Delta\zeta} = \vec{\Gamma\Xi}, \vec{\Delta\theta} = \vec{Z\kappa}$.
Αντίθετα: $\vec{K\theta} = -\vec{\Delta\zeta}, \vec{\Delta\theta} = -\vec{Z\beta}, \vec{Z\kappa} = -\vec{Z\beta}$.
γ) $\vec{\Theta\beta}$.
2. α) $|\vec{A\Gamma}| = 4, |\vec{\Theta\Gamma}| = 4, |\vec{H\Gamma}| = 4, |\vec{A\zeta}| = 8, |\vec{\Theta\kappa}| = 8, |\vec{\Theta\Delta}| = 12$.
β) $\vec{A\Gamma} = \vec{\Gamma\zeta}, \vec{\Theta\kappa} = \vec{\Gamma\Delta}, \vec{H\Gamma} = -\vec{B\Gamma}, \vec{A\zeta} = -\vec{E\beta}$.
3. α) Είναι τα $\vec{\gamma}, \vec{\xi}$. β) $\vec{A\beta} = \vec{\xi}$. γ) Είναι τα $\vec{\alpha}, \vec{\gamma}, \vec{\nu}, \vec{\epsilon}$.
δ) $\vec{A\beta} = -\vec{\alpha}$ και $\vec{A\beta} = -\vec{\nu}$. ε) $|\vec{A\beta}| = |\vec{\alpha}| = |\vec{\nu}| = |\vec{\epsilon}| = |\vec{\beta}|$.
4. α) $|\vec{A\beta}| = 60, |\vec{\Gamma\Delta}| = 20, |\vec{E\zeta}| = 40$.
6. α) $\vec{\Delta\Gamma}, \vec{\Delta\beta}$. β) $\vec{A\beta}$. γ) $\vec{\Delta\alpha} = \vec{\Gamma\beta}, \vec{\Delta\alpha} - \vec{A\Delta}, \vec{\Gamma\alpha} = \vec{B\alpha}$.
δ) Όχι, δεν έχουν ίδια διεύθυνση. ε) Βλέπε θεωρία.
7. α) $|\vec{A\beta}| = 30, |\vec{A\Gamma}| = 40, |\vec{A\Delta}| = 45, |\vec{A\Xi}| = 30$.
β) $\vec{A\beta}, \vec{A\Gamma}, \vec{A\Delta}, \vec{A\Xi}$.
γ) Μήκος διαδρομής: 175νμ, Μετατόπιση: $\vec{A\alpha} = \vec{0}$.
8. α) $\vec{O\alpha} = \vec{\Gamma\beta} = \vec{E\zeta} = \vec{\Delta\theta}$ και $\vec{O\alpha} = -\vec{B\Gamma}, \vec{O\alpha} = -\vec{Z\Xi}, \vec{O\alpha} = -\vec{O\Delta}$.
β) i. Μήκος διαδρομής: $|\vec{O\alpha}| + |\vec{A\beta}| + |\vec{B\Gamma}| = 10 + 10 + 10 = 30$ km. Μετατόπιση: $\vec{O\Gamma}$ ii. Μήκος διαδρομής: $|\vec{O\Xi}| + |\vec{E\Delta}| + |\vec{\Delta\Gamma}| + |\vec{O\Gamma}| = 10 + 10 + 10 + 10 = 40$ km. Μετατόπιση: $\vec{O\delta} = \vec{0}$.
iii. Μήκος διαδρομής: $|\vec{O\zeta}| + |\vec{Z\alpha}| + |\vec{A\beta}| + |\vec{B\Gamma}| = 10 + 10 + 10 + 10 = 40$ km. Μετατόπιση: $\vec{O\Gamma}$

5.2. Ο μετασχηματισμός της μεταφοράς

1. Βλέπε εφαρμογή 4.
2. Βλέπε εφαρμογή 2.
3. Βλέπε εφαρμογή 2.
4. Βλέπε εφαρμογή 3.
5. Βλέπε εφαρμογή.
6. Βλέπε εφαρμογή 3.
7. Α με \vec{x} , Δ με \vec{w} , Β με $\vec{\zeta}$, Ε με \vec{u}, \dots
8. Βλέπε εφαρμογή 3.
9. α) το (1) β) το (4)
10. Βλέπε εφαρμογή 3.
11. Β(-1,-1) και Γ(-3,-1)
12. Βλέπε εφαρμογή 3
13. Α(5,-5), Β(5,2), Γ(8,2), Δ(1,1)
14. Εφαρμόζουμε μετασχηματισμούς μεταφοράς του παραλληλογράμμου ΑΕΙΖ κατά $\vec{A\zeta}, \vec{A\Xi}$ και $\vec{A\Gamma}$ διαδοχικά.
15. α) $\vec{\alpha} = \vec{A\alpha} = \vec{B\beta}$, β) $\vec{\alpha} \perp AB$, γ) Αν $\vec{\alpha} = \vec{0}$ καθώς και όταν ισχύει $\vec{\alpha} \parallel AB$.
16. α) Α(4, 2), Β(7, 3) και Γ(6, 5).
β) Α(1, -1), Β(4, 0) και Γ(2, 2).
γ) Α(3, 5), Β(6, 6) και Γ(4, 8).
17. γ) $AB = \sqrt{29}$.
18. Οι συντεταγμένες των εικόνων των σημείων Α, Β, Γ και Δ είναι Α'(0,0), Β'(2,-2), Γ'(0,4), Δ'(-2,-2).
19. α) Οι κορυφές της εικόνας του μετασχηματισμού είναι Α'(-1,3), Β'(-1,5), Γ'(0,6), Δ'(1,5), Ε'(1,3).
20. β) Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι αντίθετα.
21. Αντίστοιχα όπως στην εφαρμογή 2.

5.3. Ο μετασχηματισμός της στροφής

1. **Υπόδειξη:** Να εργαστείτε σύμφωνα με όσα περιγράφονται στις ενότητες: «Στροφή με χρήση γεωμετρικών οργάνων» και «Στροφή με χρήση διάστικτου καμβά».
2. **Υπόδειξη:** **Υπόδειξη:** Να εργαστείτε σύμφωνα με όσα περιγράφονται στην ενότητα: «Στροφή με χρήση διάστικτου καμβά».
3. **Υπόδειξη:** Να εργαστείτε σύμφωνα με όσα περιγράφονται στην ενότητα: «Στροφή με χρήση διάστικτου καμβά».
4. **Υπόδειξη:** Να εργαστείτε σύμφωνα με όσα περιγράφονται στην ενότητα: «Στροφή με χρήση γεωμετρικών οργάνων». Εφαρμογή 1.
5. Κέντρο (0,1) και γωνία 90°
6. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιήσετε διαφανές χαρτί ή γεωμετρικά όργανα.
7. α) ΑΟ, β) ΔΝ, γ) ΘΓ
8. **Υπόδειξη:** α) Περιστροφή του ΑΒ αριστερόστροφα 90° με κέντρο στροφής το σημείο Α. β) Περιστροφή της εικόνας του προηγούμενου μετασχηματισμού αριστερόστροφα 90° με κέντρο στροφής το σημείο Β. γ) ...
9. α) Γράφουμε κύκλο με κέντρο το σημείο Α και ακτίνα ΑΒ. Το σημείο τομής Μ της ευθείας (ε) και του κύκλου είναι το ζητούμενο. β) Σχεδιάζουμε το τρίγωνο ΑΟΜ και στη συνέχεια για την κατασκευή του εξαγώνου χρησιμοποιούμε το «εργαλείο» του μετασχηματισμού στροφής.
10. **Υπόδειξη:** Διαδοχικές στροφές του τριγώνου ΔΗΖ ως προς κέντρο το κέντρο συμμετρίας του ΗΘΕΖ κατά 90° .
11. Εφαρμογή 1
12. **Υπόδειξη:** Προτείνεται να χρησιμοποιήσετε διαφανές χαρτί.

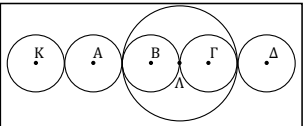
5.4. Συμμετρία ως προς κέντρο: μία ειδική περίπτωση στροφής

1. α, δ, ϵ
2. $Z, H, \theta, I, \Xi, O, \Phi, X$
3. 4, 10
4. Σημείο (-1, 0), Σημείο (0, 0)
5. **Υπόδειξη:** Βλέπε *Εφαρμογή 1*.
6. **Υπόδειξη:** Βλέπε *Εφαρμογή 1*.
7. Δείτε την αντίστοιχη εφαρμογή.
8. **Υπόδειξη:** Να εφαρμόσετε μετασχηματισμό στροφής 180° με κέντρο στροφής το σημείο Γ.
9. Χρησιμοποιούμε δύο φορές ως αποδεικτικό «εργαλείο» το μετασχηματισμό στροφής ώστε να κατορθώσουμε να δείξουμε ότι οι αποστάσεις ΔΕ και ΖΗ είναι ίσες με το ύψος ΒΘ του τριγώνου ΑΒΓ.
10. **β)** Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, **γ)** **Υπόδειξη:** Οι διαγωνίοι παραλληλογράμμου διχοτομούνται.
11. $A'(-3, -2)$ και $B'(1, 3)$.

5.5. Εφαρμογές των μετασχηματισμών σε πλακοστρώσεις

1. **Υπόδειξη:** Να αναζητήσετε μετασχηματισμούς ισομετρίας.
2. **Υπόδειξη:** Να υλοποιήσετε τη δική σας επιλογή.
3. **Υπόδειξη:** Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε και διαφανές χαρτί.
4. **Υπόδειξη:** Μετά από κάθε περιστροφική συμμετρία το σχήμα βρίσκεται στην αρχική του θέση.
5. **Υπόδειξη:** Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε και διαφανές χαρτί.
6. **Υπόδειξη:** Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε και διαφανές χαρτί.
7. **Υπόδειξη:** Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε και διαφανές χαρτί.
8. **Υπόδειξη:** Τα σχήματα αυτά έχουν αξονική και περιστροφική συμμετρία.
9. Τα Α, Γ από μεταφορά. Τα Β, Δ ανάκλαση και μεταφορά.
10. Βλέπε *Εφαρμογή 1*.
11. Βλέπε *Εφαρμογή 1*. Εναλλακτικά, διαφανές χαρτί.

5.6 Επαναληπτικά έργα και προεκτάσεις

1. **Υπόδειξη:** Αν τα διανύσματα που επιλέξατε έχουν ως αρχή τα σημεία Α και Β αντίστοιχα θα πρέπει τα πέρατα αυτών να ταυτίζονται
2. 
3. **β)** Πέντε μετασχηματισμοί μεταφοράς
4. **Υπόδειξη:** Αντιγράφουμε το σχήμα στο τετράδιο. Σχεδιάζουμε σε ένα διαφανές χαρτί το τρίγωνο ΕΑΓ και το ονομάζουμε ΕΑ'Γ'. Ταυτίζουμε τα τρίγωνα ΕΑΓ και ΕΑ'Γ'. Περιστρέφουμε το τρίγωνο ΕΑ'Γ' γύρω από το σημείο Α κατά 90° με φορά αναστροφή της περιστροφής των δεικτών του ρολογιού.
5. Να εντοπίσετε το μέσον Μ της πλευράς ΑΔ και να περιστρέψετε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ αριστερόστροφα κατά 180° . Να εντοπίσετε το μέσον Ν της πλευράς ΑΒ και να περιστρέψετε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ αριστερόστροφα κατά 180° , κ.λπ.
6. Μεταφορά τριγ. ΑΔΒ κατά διάνυσμα ΔΕ. Αν ΕΓΑ' η εικόνα της μεταφοράς Δ.Ο. ΑΕΓΑ' ισοσκελές τραπέζιο. Ιδιότητα των διαγωνίων.
7. **Υπόδειξη:** Να μεταφέρετε τον κύκλο (Ο,ΟΑ) κατά διάνυσμα \vec{a}
8. **Υπόδειξη:** Εφαρμόζουμε τρεις διαδοχικούς μετασχηματισμούς στροφής κατά 90° του τριγώνου ΔΑΘ ως προς κέντρο το κέντρο συμμετρίας του τετραγώνου ΕΖΗΘ.
9. **Υπόδειξη:** **α)** Μεταφορά και ανάκλαση, **β)** Στροφή και μεταφορά, **γ)** Στροφή και μεταφορά.
10. **Υπόδειξη:** Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μετασχηματισμούς Μεταφοράς, Ανάκλαση και Στροφής.
11. **Υπόδειξη:** Περιστρέψτε το τρίγωνο (1) 120° με κέντρο περιστροφής το σημείο Κ που είναι το σημείο τομής των μεσοκαθέτων του τριγώνου ΑΒΓ. Περιστρέψτε το τρίγωνο (2) 120° με κέντρο περιστροφής το σημείο Κ.
12. **Υπόδειξη:** Να εργαστείτε σύμφωνα με όσα περιγράφονται στην ενότητα: «Στροφή με χρήση διάστικτου καμβά».
13. **Υπόδειξη:** Βλέπε αντίστοιχη εφαρμογή.
14. Βλέπε αντίστοιχη εφαρμογή.
15. Βλέπε αντίστοιχη εφαρμογή.
16. Βλέπε αντίστοιχη εφαρμογή.
17. Να χρησιμοποιήσετε διαφανές χαρτί.
18. Βλέπε αντίστοιχες εφαρμογές.
19. Στροφή του τριγώνου ΕΔΓ με κέντρο το Ε κατά 180° αριστερόστροφα και ανάκλαση ως προς ΑΕ.
20. Βλέπε αντίστοιχες εφαρμογές.

Κεφάλαιο 6 – Μετρήσεις επιπέδων σχημάτων

6.1. Μήκος κύκλου

1. **α)** $L = 70$ cm. **β)** $L = 628$ cm.
2. **α)** $L = 46$ cm. **β)** $L = 314$ cm.
3. **α)** $\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{3}{2}$. **β)** $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{3}{2}$.
4. **α)** $\delta_2 - \delta_1 = 20$ mm. **β)** $L_2 - L_1 = 62,8$ mm.
5. **α)** Ο δορυφόρος απέχει από την επιφάνεια της Γης 600 km.
β) Ο δορυφόρος διανύει 43960 km.
6. Ο αριθμός των περιστροφών της μεγάλης ρόδας είναι 375 και της μικρής 1000. Το μικρό.
7. $\frac{L_1}{L_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\delta_1}{\delta_2}$.
8. $L = 2\pi r = 8\pi$ cm. Ήμετας.

6.2. Μήκος τόξου

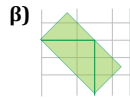
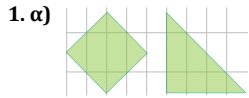
1. Κύκλο ακτίνας 2cm: $s_{60^\circ} = 2,093$ cm, $s_{18^\circ} = 0,628$ cm.
3cm: $s_{60^\circ} = 3,14$ cm, $s_{18^\circ} = 0,942$ cm.
4cm: $s_{60^\circ} = 4,188$ cm, $s_{18^\circ} = 1,256$ cm.
2. Είναι $\rho = 8$ cm.
3. $\frac{\pi}{9} \rightarrow 20^\circ$, $\frac{2\pi}{5} \rightarrow 72^\circ$, $\frac{3\pi}{2} \rightarrow 270^\circ$, άρα $20^\circ < 25^\circ < 72^\circ < 135^\circ < 300^\circ$.
4. $\mu = 162^\circ$.
5. Τόξο 15° αντιστοιχεί σε τόξο $\frac{\pi}{12}$ rad κ.λπ.
6. $120^\circ \rightarrow \frac{2\pi}{3}$ rad, $1620^\circ \rightarrow 9\pi$ rad, $135^\circ \rightarrow \frac{3\pi}{4}$ rad, $3^\circ \rightarrow \frac{\pi}{60}$ rad και $7,5^\circ \rightarrow \frac{\pi}{24}$ rad.
7. $\frac{\pi}{4}$ rad $\rightarrow 45^\circ$, $\frac{2\pi}{5}$ rad $\rightarrow 72^\circ$, $\frac{3\pi}{4}$ rad $\rightarrow 135^\circ$,
 $\frac{\pi}{20}$ rad $\rightarrow 9^\circ$, 2 rad $\rightarrow \left(\frac{360}{\pi}\right)^\circ$

8. **α)** $\mu = 180^\circ$. **β)** $\mu = 72^\circ$. **γ)** $\mu = \left(\frac{720}{\pi}\right)^\circ$. **δ)** $\mu = \left(\frac{120}{\pi}\right)^\circ$.

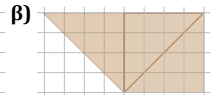
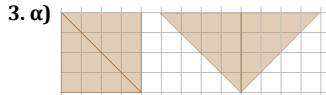
9. **α)** $\rho = 6$ cm **β)** $L = 12\pi$ cm. **γ)** $s = 5\pi$ cm.

10. $L = 12,56$ mm.

6.3. Εμβαδόν επίπεδης επιφάνειας



2. $A = 28$ τετράγωνα, $B = 4,5$ τετράγωνα, $\Gamma = 23,5$ τετράγωνα, άρα το εμβαδόν του A είναι ίσο με το εμβαδόν του B και Γ .



4. Το εμβαδόν του σχήματος A είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των σχημάτων B και Γ .

5. **α)** $A = 14$ τετράγωνα, $B = 26,5$ τετ., $\Gamma = 7,5$ τετ. **β)** $A = 28$ τρίγωνα, $B = 53$ τρίγ., $\Gamma = 15$ τρίγ.

6. Έχουν ίσα εμβαδά. Το τετράγωνο έχει την ελάχιστη περίμετρο.

7. $(AB\Gamma\Delta) = 4(EZH\Theta)$.

8. Το δεύτερο σχήμα.

9. $E_A = 48$, $E_B = 64$, $E_\Gamma = 32$, $E_\Delta = 24$

6.4. Μονάδες μέτρησης επιφανειών

1. **α)** 12 cm^2 **β)** 7 cm^2

2. **α)** $7,53$ dam^2 **β)** $0,334$ dam^2 **γ)** $1,436$ dam^2

δ) $2,37006$ dam^2

ε) $1,20232$ dam^2 **στ)** $1,5008$ dam^2 **ζ)** $2,00612$ dam^2

η) $4,0876$ dam^2 .

3. **α)** $0,1534$ m^2 **β)** $0,0003462$ m^2 **γ)** $0,0691$

δ) $0,00270434$ m^2 **ε)** $0,0585532$ m^2 . **στ)** $0,00133$ m^2

ζ) $0,0001$ m^2 **η)** $0,002$ m^2 .

4. **α)** $0,000634$ km^2 **β)** $0,00003462$ km^2 **γ)** $0,007681$ km^2

δ) $0,000279434$ km^2 **ε)** $0,00008553$ km^2

στ) $0,00001936$ km^2 **ζ)** $0,000001$ km^2 **η)** $0,09852$ km^2 .

5. **Υπόδειξη:** εργαζόμαστε σύμφωνα με την εφαρμογή 4.

6. 1450 $\text{m}^2 < 950$ $\text{cm}^2 < 16,7$ $\text{dm}^2 < 0,29$ $\text{m}^2 < 0,83$ m^2

7. $0,00145$ m^2 , $0,29$ m^2 , $0,83$ m^2 , $0,095$ m^2 , $0,167$ m^2 , άρα $0,00145$ $\text{m}^2 < 0,095$ $\text{m}^2 < 0,167$ $\text{m}^2 < 0,29$ $\text{m}^2 < 0,83$ m^2 .

8. $23270\text{mm}^2 < 1356$ $\text{cm}^2 < 32\text{dm}^2 < 1,23\text{m}^2$

9. $10,2 \cdot 1000 = 10200$ m^2 , οπότε $E_{\lambda\epsilon\mu\omicron\nu} = \frac{1}{3} \cdot 10200 = 3400$ m^2 .

10. $1,854$ στρέμματα.

11. 98 .

6.5. Εμβαδά επίπεδων σχημάτων

1. Το σχήμα Γ που αποτελείται από 27 τετραγωνάκια.

2. 1665 cm^2 .

3. $E = 256$ cm^2 .

4. **α)** $\beta = 7$. **β)** $\alpha = 8$. **γ)** $\beta = 4$. **δ)** $\alpha = 5$.

5. **Υπόδειξη:** Να συγκρίνετε τις βάσεις και τα αντίστοιχα ύψη των τριγώνων.

6. $E = 24$ cm^2 .

7. $(AB\Gamma) = 27$ cm^2 , $(\Delta EZ) = 30$ cm^2 , $(H\Theta I) = 28$ cm^2 , $(K\Lambda M) = 77$ cm^2 .

Άρα το τρίγωνο $K\Lambda M$ έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.

8. $E = 19 \cdot 16 = 304$ cm^2 .

9. Το εμβαδόν του φύλλου που έμεινε είναι: $27 \cdot 18 = 486$ cm^2 .

10. $\Pi = 16$ cm.

11. Πλάτος ορθογωνίου = 5 cm, μήκος ορθ. = 10 cm, πλευρά τετραγώνου = 10 cm. Εμβαδόν ορθογωνίου = 50 cm^2 . Εμβαδόν τετραγώνου = 100 cm^2 .

12. $E = 150$ cm^2 .

13. $\Pi = 1,327$ dm = $13,27$ cm = $0,1327$ m.

$E = 453,834$ $\text{cm}^2 = 4,53834$ $\text{dm}^2 = 0,0453834$ m^2 .

14. $(B\Gamma\Delta E) = 144$ cm^2 .

15. **α)** $\alpha = 57$. **β)** Δεν έχουν το ίδιο εμβαδόν. $E_\tau = 3249$. $E_{\sigma\theta\beta} = 2808$.

16. $3,5$ cm

17. **α)** Το $AKPM$ είναι παραλληλόγραμμο. Χωρίζεται σε δύο ίσα τρίγωνα, τα οποία έχουν ίσα εμβαδά. Άρα $(AMP) = (AKP)$. Ομοίως $(PA\Gamma) = (P\Lambda\Gamma)$. **β)** Είναι $(AB\Gamma) = A\Gamma\Delta$. Ισχύει: $(AB\Gamma) - (AMP) - (PA\Gamma) = (A\Gamma\Delta) - (AKP) - (P\Lambda\Gamma)$. Επομένως: $(\Delta\Lambda PM) = (KBNP)$.

18. **α)** 1000 cm^2 . **β)** 600 cm^2 . **γ)** 700 cm^2 .

19. $E_1 = 36$ cm^2 , $E_2 = 100$ cm^2 και $E_3 = 9$ cm^2 .

20. $8, 14, 16, 16,8$

22. 14 cm

6.6. Εμβαδόν κυκλικού δίσκου

1. $\rho_1 - \rho_2 = \frac{15}{\pi}$ cm.

2. **α)** $\rho \approx 42$ cm **β)** $\rho \approx 95$ cm **γ)** $\rho \approx 32,53$ cm

δ) $\rho \approx 2,01$ cm.

3. $L \approx 88,81$ cm.

4. $E \approx 176,625$ cm^2 .

5. **α)** $L \approx 31,4$ cm. **β)** $E \approx 78,5$ cm^2 . **γ)** $E_{\gamma\text{ραμ}} \approx 54,5$ cm^2 .

6. $E_A = 338\pi$ m^2 και $E_B = 200\pi$ cm^2 .

Πιο εύκολα να πετύχει τον στόχο A , αφού έχει μεγαλύτερη επιφάνεια.

7. $E_{\gamma\text{ραμ}} = 8\pi$ cm^2 .

8. $E_{\text{πράσ}} \approx 3,44$ m^2 .

9. $E_{\text{ταίν}} - E_{\text{τουρλ}} \approx 1066,22$ km^2 .

10. $E_{\text{μολυσμ}} \approx 65,94$ km^2 .

11. $A\Gamma = 8$ m, $E \approx 50,24$ m^2 .

6.7. Εμβαδόν κυκλικού τομέα

1. **α)** $E_{κ.τ} = \frac{3\pi}{5} \text{ cm}^2$. **β)** $E_{κ.τ} = \frac{169\pi}{12} \text{ cm}^2$. **γ)** $E_{κ.τ} = \frac{500\pi}{3} \text{ cm}^2$.
2. **α)** $\widehat{AB} = 180^\circ$. **β)** $E_{κ.τ} = 50\pi \text{ cm}^2$.
3. $\text{Περ} = 60\pi \text{ cm}$. $E_{μβ} = 300\pi \text{ cm}^2$.
4. $\rho_2 = 9$ και $\rho_1 = 18$.
5. $E_{\text{πράσ}} \approx 28,5 \text{ cm}^2$.
6. $\Pi \approx 83,44 \text{ cmE} \approx 55,86 \text{ cm}^2$.
6. **α)** $\text{Περίμ.} = (14 \cdot \pi + 4 \cdot \sqrt{98}) \text{ cm}$.
β) $E_{μβ} = (98 - 49\pi) \text{ cm}^2$.
7. $E_{μβ} = \frac{27}{4} \pi \text{ cm}^2$.
8. $E_{κ.τ} = 12\pi \text{ cm}^2$.
9. $E_{μβ} = 50\pi \text{ cm}^2$.
10. $2\pi - 4 \text{ cm}^2$.
11. $E \approx 5,82 \text{ cm}^2$.
12. $E \approx 452,16 \text{ cm}^2$.
13. **α)** $\widehat{O\Gamma A} + \widehat{O\Gamma B} = 180^\circ$, **β)** $O\Gamma = \Gamma A = \Gamma B$, **γ)** Να λάβετε υπόψη το **(β)**.
 $E_{\text{πελ}} = \frac{\pi \cdot 2}{4} \approx 0,29 \text{ (cm}^2\text{)}$.
14. $100 - 25\pi$

6.8. Εμβαδόν μεικτόγραμμων σχημάτων

1. $E_{\text{μβαδόν}} = 24 \text{ m}^2$.
2. $\text{Περίμετρος} \approx 100,65 \text{ cm}$. $E_{\text{μβαδόν}} \approx 754,875 \text{ cm}^2$.
3. $E_1 \approx 18,5325 \text{ cm}^2$. και $E_2 \approx 28,56 \text{ cm}^2$.
4. $\text{Περίμετρος} \approx 18,84 \text{ cm}$. $E_{\text{μβαδόν}} \approx 25,625 \text{ cm}^2$.
5. $E_{\text{χρoμ}} = 72 \text{ cm}^2$.
6. $E_{\text{μβαδόν}} \approx 25,12 \text{ cm}^2$.
7. $E = 22 \text{ cm}^2$.
8. **α)** 22 cm^2 . **β)** 22 cm^2 .
9. $(AB\Gamma\Delta) = 1200 \text{ m}^2$.
10. **α)** $\Gamma\Delta = 8\sqrt{2} \text{ cm}$. **β)** $E_{\text{μβαδόν}} \approx 128 \text{ cm}^2$.

6.9. Εμβαδόν και Πυθαγόρειο Θεώρημα

1. $E = 289 - 225 = 64 \text{ m}^2$.
2. **α)** $(AB\Gamma) = 25$. **β)** $(\Delta EZ) = 144$.
3. $(A\Gamma E\Delta) = 1369 \text{ cm}^2$.
4. $\text{Περίμετρος} = 34 \text{ cm}$. $E_{\text{μβαδόν}} = 204 \text{ cm}^2$.
5. $(\Delta BEZ) = 116 \text{ cm}^2$.
6. $E_{\text{μβαδόν}} \approx 15,25 \text{ cm}^2$.
7. $\text{Περίμετρος} = 38 \text{ cm}$. $E_{\text{μβαδόν}} = 54 \text{ cm}^2$.
8. **α)** $E\Gamma = 12 \text{ cm}$. $EA = 15 \text{ cm}$. **β)** Το τρίγωνο $A\Gamma E\Delta$ είναι ορθογώνιο. **γ)** $(AB\Gamma\Delta) = 300 \text{ cm}^2$.
9. **α)** $\Delta\Gamma = 16 \text{ m}$. **β)** $E_{\text{μβαδόν}} = 896 \text{ m}^2$.
10. **β)** $x = 2\sqrt{3} \text{ cm}$. **γ)** $E_{\text{μβαδόν}} = 18 \pi \text{ cm}^2$.
11. **α)** $B\Gamma = 100$ **β)** $AB\Gamma = 2400$. **γ)** $A\Delta = 48$. **δ)** $\Delta B = 64$ και $\Delta\Gamma = 36$.
12. $\alpha = 12$ $x = 6\sqrt{3} \text{ cm}$.
13. **α)** $x = 5$ **β)** $AB = 15$. $B\Gamma = 39$ και $A\Gamma = 36$. **γ)** Να εξετάσετε το αντίστροφο του Π.Θ.
14. $E \approx 145,42 \text{ cm}^2$.

6.10. Επαναληπτικά έργα και προεκτάσεις

1. **α)** $BK = 15 \text{ m}$ **β)** $(BK\Gamma) = 60 \text{ m}$ **γ)** 66 m .
2. **α)** Περίμετροι ίσες . **β)** $E_{\text{μβαδόν}} \text{ ορθογωνίου μικρότερο του εμβαδού τετραγώνου}$ **γ)** Περίμετροι ίσες . Το τετράγωνο έχει το μέγιστο εμβαδόν.
3. **α)** 40000 m^2 **β)** Το $AB \cdot BE$ παριστάνει τα δύο πράσινα τρίγωνα (100%-25%). **γ)** $BE = 300 \text{ m}$, $E\Gamma = 100 \text{ m}$. Το πλάτος του δρόμου είναι 80 m .
4. **Υπόδειξη:** Να δημιουργήσετε από χαρτόνι τα σχήματα του τετραγώνου. Αναδιατάσσονται επακριβώς σε τετράγωνο;
5. $(\Delta ZE) = \frac{75\sqrt{3} - 25\pi}{6} \text{ cm}^2$.
6. **α)** $A\Gamma = 13 \text{ m}$. **β)** $(\Delta DEZ) = 89 \text{ m}^2$.
7. $v = 12,5 \text{ m}$.
8. $E_{\text{μβαδόν}} = 24 \text{ m}^2$.
9. **α)** $(AB\Gamma\Delta) = 5 \cdot 12 = 60 \text{ cm}^2$. **β)** $(B\Delta ZE) = 244 \text{ cm}^2$.
10. $v = 6 \text{ cm}$.
11. **α)** $(A\Delta\Gamma E) = 240 \text{ cm}^2$. **β)** $EZ^2 = 1040$, $E\Gamma^2 = 208$, $Z\Gamma^2 = 832$.
γ) $E\Gamma^2 + Z\Gamma^2 = EZ^2$. Το τρίγωνο ΓZE είναι ορθογώνιο.
δ) $(EZ\Gamma) = 208 \text{ cm}^2$.
12. **α)** $E_{\text{μπλε}} = 25\pi \text{ cm}^2$. **β)** $E_{\text{πράσινου}} = 25(4 - \pi) \text{ cm}^2$.
γ) $E_{\text{καφέ}} = \frac{25 \cdot \pi}{2} \text{ cm}^2$, άρα $E_{\text{πράσινου}} < E_{\text{καφέ}} < E_{\text{μπλε}}$.
13. 2916 πλακάκια. Κόστος πλακόστρωσης 3411,72 €
14. **α)** Ο 2ος φάκελος απαιτεί το περισσότερο χαρτί: 105 cm^2 .
β) 615 περισσότεροι φάκελοι.
15. **α)** $AA = 6\sqrt{3} \text{ cm}$. **β)** $S_{\text{καρδιάς}} \approx 31,4 \text{ cm}$. **γ)** $E_{\text{καρδιάς}} \approx 52,86 \text{ cm}^2$.
16. **α)** Το $OK\Gamma A$ είναι τετράγωνο επειδή έχει τις πλευρές του ίσες με 3 cm και τις γωνίες του ορθές. $(OK\Gamma A) = 9 \text{ cm}^2$.
β) Τα τρίγωνα OKM και OLN με στροφή κατά 90° συμπίπτουν, επομένως $(OKM) = (OLN)$ **γ)** Είναι $(OM\Gamma N) = (OK\Gamma A)$. Επομένως: $(ABMEZH\Delta A) = 2 \cdot 36 - 9 = 63 \text{ cm}^2$.
17. $E_{\text{μβαδόν}} = 35$.
18. **α)** $S_1 = 2S_2 = 4S_4 = 8S_8 = \pi$ **β)** Όχι
19. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιήσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$
20. $L = \frac{21\pi}{4}$.

Κεφάλαιο 7 - Στατιστική

7.1 Απογραφικά δεδομένα και χρονοδιαγράμματα

1. α, γ, δ.
2. Εφαρμογή 2.
4. Εφαρμογή 2.
5. Εφαρμογές 1 και 2.
6. Αύξηση τα έτη 2019,2020 και 2022. Στασιμότητα το 2021.
7. Εφαρμογή 2.
8. **β)** 2005 **γ)** Στην Ελλάδα, αύξηση μέχρι το 2005 και στη συνέχεια μείωση, η οποία πλησιάζει τον μέσο όρο της Ε.Ε.
10. Την καλύτερη θέση τα έτη, 2014,2015,2016, 2019,2020,2021 και την χειρότερη τα έτη 2017 και 2022.
11. **β)** Μεγαλύτερο: 2012, μικρότερο: 2020 **γ)** $\approx 36,84\%$
12. **β)** Μεγαλύτερη: 2022, μικρότερη: 2023 **γ)** Μεγαλύτερη: 2022 κατά 20%, μικρότερη: 2023 κατά 5,44%
13. **α)** Μεγαλύτερη μείωση τον Μάρτιο του 2021 κατά 1,6%. Μεγαλύτερη αύξηση τον Ιούνιο του 2022 κατά 12,1% **β)** Μεγαλύτερη αύξηση του Γενικού ΔΤΚ το 2022, αφού ακόμα και η χαμηλότερη τιμή του είναι μεγαλύτερη κατά 2 πρπ μονάδες από την υψηλότερη του 2021.
14. **α)** Ιούλιος και Αύγουστος. **β)** 620 βιβλία. **γ)** Ο Μάρτιος. 46.43%. **δ)** χρονοδιάγραμμα, επειδή δείχνει πώς μεταβάλλονται οι πωλήσεις από μήνα σε μήνα.

7.2 Θηκογράμματα

1. **β)** 35 έως 75 **γ)** , **δ)** Μικρότερες ακτογραμμές
2. 250, 433, 346, 299, 416
3. 12, 29, 23, 18, 24
4. 12, 38, 13,5, 28,5, 19
5. $Q_1 = 96, Q_3 = 148, \max = 159$
6. 40, 76, 63, 55, 72
7. **α)** Στο τρίτο, **β)** 25%
8. 150€
9. **α)** Λάθος, **β)** Σωστό, **γ)** Σωστό, **δ)** Λάθος, **ε)** Σωστό, **στ)** Σωστό.
10. **α)** 100, **β)** 12, **γ)** 100 έως 110, **δ)** 120 έως και 123, **ε)** 110 έως 120 **στ)** 2ο Τετ. και 1ο Τετ
11. **α)** 45,47,49,49,50,51,52 **β)** $\min = 45, \max = 52, Q_1 = 47, \delta = Q_2 = 49, Q_3 = 51$
12. $\min = 55, \max = 100, Q_1 = 65, \delta = Q_2 = 85, Q_3 = 95$
13. $\min = 15, \max = 32, Q_1 = 21,5, \delta = Q_2 = 25,5, Q_3 = 29$
14. $\min = 42, \max = 81, Q_1 = 55, \delta = Q_2 = 65, Q_3 = 73$
15. $\min = 55, \max = 174, Q_1 = 100, \delta = Q_2 = 115, Q_3 = 130$
17. **α)** Όχι, αφού $\delta = 8.5$ **β)** Ναι, αφού $Q_1 = 6$ **γ)** Ναι αφού $Q_1 = 6$ και $Q_3 = 11$.
18. 2,2,3,3,6,7,8,12,16

7.3 Μέτρα θέσης και μεταβλητότητας

1. **α)** 59 **β)** Με απόμακρη τιμή: $M.T. = 26,9, \delta = 25,5$ Χωρίς απόμακρη τιμή: $M.T. \approx 23,33, \delta = 26$ **γ)** Χωρίς α.τ. $M.T.$ μειώνεται, δ πρπ ίδια
2. **α)** $M.T. = 9,25, \delta = 8, E.T. = 8$ **β)** 16 **γ)** διάμεσος **δ)** $M.T. \approx 8,29, \delta = 8, E.T. = 8$, Την $M.T.$
3. **α)** $M.T_{NEA} = 1,785$, **β)** 1,735
5. Ναι γιατί η μέση τιμή είναι μεγαλύτερη συνήθως από την διάμεση τιμή επειδή υπάρχουν υψηλές αμοιβές στα στελέχη μιας εταιρείας.
5. **α)** Την διάμεση **β)** την $M.T.$, γιατί υπάρχουν μεγάλες ανισότητες στις αναπτυσσόμενες χώρες που επιδρούν στο ηλικιακό προσδόκιμο.
6. 1,8 €
7. πρπ 4,039 €
8. **α)** 12,18,22,24,24,26 / 10,20,22,24,24,26, **β)** 6,8,10,10,12,14 / 4,6,10,10,12,14, **γ)** 2,4,5,5,6,8 / 3,4,5,5,6,7.
9. **α)** $MT = 188,3, \delta = 162$ **β)** Την $M.T.$ **γ)** Την διάμεση τιμή γιατί υπάρχει ακραία άνω τιμή (378)
10. **α)** Η διάμεσος **β)** 1, 12 **γ)** 1 και 13
11. **α)** $MT = 5, \delta = 5$ **β)** $MT = 5,8, \delta = 5$, **γ)** Μεγαλώνει η MT γιατί βγαίνει μια μικρή τιμή.
12. **α)** $M.T. = \delta = 10$ όλες.
- β)** Εύρος των Α,Β,Γ,Δ αντίστοιχα: 8, 18, 4, 18.
13. **α)** $\delta = 1,9, MT = 2,1, Q_1 = 1,275, Q_3 = 3,05$
β) $R = 5,7, IQR = 1,775$ **γ)** 2/1,275 έως 3,05
γ) 3/3,05-5,7 **γ)** 3/1,9
14. **α)** 25-40 **β)** 19-25 **γ)** 25% **δ)** 19-22 **ε)** 22-34
15. **α)** $\min = 10, \max = 16, \delta = 12, Q_1 = 10,75, Q_3 = 14,25$
β) $MT = 12,4, IQR = 3,5$ **γ)** $MT = 12,4 + 2 = 14,4, Q_1$ και Q_3 αμετάβλητα.
16. **α)** Μπιφτέκια: $R = 394, Q = 155$ /Κοτόπουλο: $R = 233, IQR = 158$
β) Μπιφτέκια: Μικρότερη διάμεσο, Μεγαλύτερη μεταβλητότητα
γ) Κοτόπουλο: Μικρότερο **δ)** Κοτόπουλο: Μικρότερο
ε) Περισσότερο νάτριο τα μπιφτέκια.
17. **α)** $\min = 40, \max = 81, Q_1 = 55, Q_2 = \delta = 67, Q_3 = 77.$ **γ)** $R = 41, IQR = 22$
18. **α)** $R_M = 12, R_H = 8$ **β)** $\delta_M = 7 < \delta_H = 10, IQR_M = 9-6 = 3 < IQR_H = 12-8 = 4$ **γ)** Μεγαλύτερη μεταβλητότητα με μουσική.
19. **α)** $\min = 1, \max = 16, \delta = 2,5, Q_1 = 1, Q_3 = 4$
β) $\min = 1, \max = 7, \delta = 3, Q_1 = 2, Q_3 = 6$ **γ)** $\delta_A = 2,5 < \delta_B = 3, MT_A = MT_B = 4$ **δ)** $R_A = 15 > R_B = 6, IQR_A = 3 < IQR_B = 4$ **ε)** Α.

7.4 Κριτική ανάγνωση στατιστικών διαγραμμάτων

1. Α ή Β.
2. **α)** 2000 **β)** 1932-1955 **γ)** Μειώνονται συνέχεια μετά το 1970
3. Στο (Α) γιατί ο άξονας των κερδών δεν αρχίζει από το μηδέν.
4. Όχι γιατί ο άξονας του αριθμού ληστειών δεν αρχίζει από το μηδέν
6. Λάθος
7. **α)** Οι κυκλικοί τομείς με μπλε και καφέ χρώμα έχουν εμβαδόν δυσανάλογο των ποσοστών. **β)** Ραβδόγραμμα.
8. **α)** Ότι η εφημερίδα New York Times είχε σχεδόν διπλάσιες πωλήσεις από την εφημερίδα Daily Telegraph **β)** Όχι
9. Στο (Α) λόγω της κλίμακας του άξονα των κερδών.
10. Όχι. Το διάγραμμα είναι παραπλανητικό.

7.5 Ερωτήσεις για αναστοχασμό

4. Μειώνεται
5. Δεν μεταβάλλεται
6. Αρκεί το ημίθροισμά τους να είναι ίσο με τη μέση τιμή
7. Αρκεί η μέση τιμή τους να είναι ίση με την μέση τιμή των αριθμών

7.5 Επαναληπτικά Μαθηματικά Έργα

1. **β)** Φθίνουσα 2014-2017 – Αύξουσα 2017-2022 (εκτός 2020)
2. **α)** $MT = 6,4, \delta = 5, ET = 2$ **γ)** Διάμεσος
δ) 31. Χωρίς την απόμακρη τιμή: $MT = 5,1, \delta = 5, ET = 2$. Επηρεάζει περισσότερο την μέση τιμή
4. **β)** $\min = 1, \max = 8, \delta = 3, Q_1 = 2, Q_3 = 5$
δ) $\min = 4, \max = 14, \delta = 8,5, Q_1 = 6, Q_3 = 14$
5. **α)** $MT = 15,3 \delta = 15,5 R = 9$ **β)** $MT = 14,13, \delta = 14,$
 $R = 4, IQR = 3$. Όλοι οι δείκτες είναι μικρότεροι για το Α' τμήμα της διεύθυνσης.
6. **α)** $MT=13,5, \delta=10$ **β)** 18, **γ)** 1, **δ)** 14 αντί 12 **ε)** 4 αντί 7.
7. **α)** **ii)** $\bar{x}=12,675 > \delta=12,6$ **iii)** $\bar{x}=68,4 < \delta=69$
β) **i)** Όχι απαραίτητα, αφού $\bar{x} > \delta$ **ii)** Ναι, γιατί $\bar{x} < \delta$

Κεφάλαιο 8 – Πιθανότητες

8.1 Ασυμβίβαστα ενδεχόμενα

1. **α)** Όχι **β)** Ναι, **γ)** Ναι
2. Όχι.
3. **α)** Όχι **β)** Όχι, **γ)** Ναι, **δ)** Όχι
4. **α)** Όχι, **β)** Ναι
5. Όχι
6. **α)** $P(A) = 6/25, P(B) = 6/25, P(\Gamma) = 3/25, P(\Delta) = 3/25,$
 $P(E) = 2/25$ **β)** (A,B), (B,Γ), (A,Δ)
7. **α)** Ναι, **β)** **i.** 1/3, **ii.** 2/3
8. **α)** Ναι **β)** Όχι,
9. **α)** $x = 4, A = 16, B = 13$ **β)** **i.** 16/90 **ii.** 13/90

8.2 Βασική αρχή της απαρίθμησης

1. Όχι
2. **α)** 1594323 **β)** 1/1594323
3. **α)** 12 **β)** **i)** 1/2 **ii)** 1/2
4. **α)** 140000 **β)** **i.** 0,1 **ii.** 0,2
5. **α)** 2469600 **β)** 176400 **γ)** 2744 **δ)** 126
ε) πρπ 0,0005
6. **α)** 36 **β)** 1/36 **γ)** 1/6 **δ)** 1/6
7. **γ)** 1/4, 1/4
8. **γ)** 4/9, 2/9
9. **β)** 3/8, 3/8, 1/8
10. **α)** $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ **β)** 1/24
11. **α)** 9 **β)** 18

8.3 Απλός προσθετικός νόμος

1. **α)** 0,4 **β)** 0,75 **γ)** 0,7 **δ)** 0,6
2. **α)** 6/15 **β)** 4/15 **γ)** 10/15
3. **α)** 1 **β)** 5/8
4. **α)** $\Omega = \{KKK, KKG, GGG, GKG, KGG, KGG, GKK\}$ **β)** A, B και A, Γ
γ) 1/4, 1/2 **δ)** 3/4
5. **α)** A, B (ναί) A, Γ (όχι) B, Γ (όχι) **β)** 5/8, 3/8
6. 2/9
7. **α)** 2/3 **β)** 2/3 **γ)** 1, **δ)** 2/3
8. 0,8
9. **α)** 0,7 **β)** 0,52 **γ)** 0,48
10. **α)** 1/2, 1/8, 3/8 **β)** **i.** 5/2 **ii.** 7/8 **iii.** 5/8
11. **α)** 11/19 **β)** 13/9 **γ)** 14/19
12. **α)** $\Omega = \{(-2,-2), (-2,-1), (-2,1), (-2,2), (-1,-2), (-1,-1), (-1,1), (-1,2),$
 $(1,-2), (1,-1), (1,1), (1,2), (2,-2), (2,-1), (2,1), (2,2)\}$
β) Ναι **γ)** **i.** 3/8, **ii.** 1/8, **iii.** 1/2
13. **α)** $\Omega = \{(1,3), (1,4), \dots\}$ **β)** 10/16, **γ)** 7/15, **δ)** Όχι
14. **α)** 9/16, **β)** 1, **γ)** 7/18, **δ)** 11/18
15. **α)** **i.** 1/2, **ii.** 0,3, **iii.** 0,8 **β)** **i.** 19/39, **ii.** 12/39 **iii.** 31/39
16. **α)** 0,3, 0,7 **β)** 1/3, 2/3, 1
17. **α)** 7/12 **β)** 1/2 **γ)** 1/2
18. **α)** 7/12 **β)** 1/3 **γ)** 2/3
19. $x = 0,3$
20. **α)** $\Omega = \{(1,2), (1,4), \dots, (2,2), (2,4), \dots, (3,2), (3,4), \dots, (3,9)\}$
β) 8/15 **γ)** 6/15

8.4 Επαναληπτικές ασκήσεις

1. **α)** 6, **β)** 1/6, **γ)** 1/3, **δ)** 1/3, **ε)** 2/3
2. **α)** 4/9, 5/9, 4/9, 1/3, 2/9 **β)** (A,B), (B,Γ), (A,Δ), (Δ,E)
γ) **i.** 1, **ii.** 7/9, **iii.** 4/9, **iv.** 8/9
3. **α)** 3 πράσινες, **β)** 1 πράσινη, 1 κόκκινη
γ) 1 κόκκινη 4 κίτρινες, 2 κόκκινες 3 κίτρινες, 3 κόκκινες 2 κίτρινες, 4 κόκκινες 1 κίτρινη
4. **α)** 1/5, **β)** 4/5, **γ)** 1/4
5. **α)** 31,5% **β)** 55% **γ)** 65%
6. $x = 0,25$, Κόκκινες 6 και μαύρες 18
7. **α)** 0,3 **β)** 0,7 **γ)** 0,5
8. **α)** 1/8, 0 **β)** 1/4, 1/2 **γ)** 1/2, 1/2 **δ)** 1/4, 1/4
9. **α)** 7/50 **β)** 29/50, **γ)** 17/50 **δ)** 9/50
10. **α)** 1/4 **β)** 0,1 **γ)** 0,35
11. 0,5
12. $P(A') \approx 0,967$
13. **α)** 24/27 **β)** 6/27
14. 0,19
15. **α)** 26/52, **β)** 4/52, **γ)** 2/52, **δ)** 26/52 **ε)** 8/52
16. $\Omega = \{(1,1), (1,2), \dots, (2,1), (2,2), \dots, (3,1), (3,2), \dots\}$
17. Μετρήστε τα τετραγωνάκια

A

άγνωστοι όροι εξίσωσης..... 74, 80
 άγνωστος εξίσωσης..... 74, 93
 αδύνατη εξίσωση..... 81, 82, 93
 ακέραιοι αριθμοί..... 43
 ακτίνα κύκλου 195, 228
 ακτίνιο 197, 228
 αλγεβρικά πλακίδια..... 64
 αλγεβρική παράσταση..... 65, 93
 αμοιβαίως αποκλειόμενα
 ενδεχόμενα 267, 282
 αναγωγή όμοιων όρων 67
 αναδρομικός κανόνας
 ακολουθίας 55, 56
 ανάκλαση..... 165, 189
 ανάλογα ποσά 113, 132
 ανεξάρτητη μεταβλητή 56, 99
 αντίθετα διανύσματα 160
 αντιμεταθετική ιδιότητα 67
 αντίρροπα διανύσματα 160
 αντίστροφες πράξεις..... 75
 αντίστροφο του Πυθ.
 θεωρήματος..... 151, 155
 αντιστρόφως ανάλογα ποσά... 127,
 132
 άξονας μεταφορική
 συμμετρίας 167
 άξονας πραγματικών αριθμών... 44
 άξονας τεταγμένων 59, 106
 άξονας τετμημένων..... 59, 106
 αξονική συμμετρία 165, 189
 αόριστη εξίσωση..... 81, 83, 93
 απλός προσθετικός νόμος..... 276,
 282
 απόδειξη..... 149
 απόμακρες τιμές 248
 απόσταση 162
 αριθμητική ακολουθία 56
 αριθμητική τιμή αλγ.
 παράστασης 66, 93
 αριθμητικός μέσος 253
 άρρητος αριθμός..... 36, 37, 44,
 50, 195
 αρχή του συστήματος
 συντεταγμένων 106, 113
 ασυμβίβαστα ενδεχόμενα 267, 282

B

βαθμωτά μεγέθη 158
 βασική αρχή απαρίθμησης 271,
 282

Γ

γενικός κανόνας ακολουθίας..... 54,
 55, 56
 γεωμετρικός μετασχηματισμός 165
 γραμμική αριθ/κή κανονικότητα 54,
 56, 59, 93
 γραμμική συνάρτηση 119, 120, 132
 γραφική παράσταση συνάρτησης..
 107

Δ

δειγματικός χώρος 266
 δεκαδικός αριθμός 11, 34
 δεντροδιάγραμμα..... 270, 271
 δεύτερο τεταρτημόριο 241
 διάμεσος παρατηρήσεων 240, 246,
 262
 διάμετρος κύκλου 195, 228
 διάνυσμα..... 159
 διανυσματικά μεγέθη 159
 διαστάσεις ορθογωνίου 207
 διατεταγμένων ζεύγος αριθμών 106
 διαφορά γραμμικής αριθ/κής
 κανονικότητας..... 56, 93
 διεύθυνση διανύσματος 159
 δύναμη πραγμ. αριθμού με
 ακέραιο εκθέτη..... 45, 49
 δύναμη ρητού αριθμού με ακέραιο
 εκθέτη 16, 17
 δύναμη ρητού αριθμού με φυσικό
 εκθέτη 11

E

εγγεγραμμένη γωνία 139, 155
 εγγεγραμμένο πολύγωνο 144
 εικασία 149
 ελάχιστη τιμή παρατηρήσεων.. 241,
 262
 εμβαδόν επίπεδης επιφάνειας 200,
 203, 228
 εμβαδόν κυκλικού δίσκου 214, 228
 εμβαδόν κυκλικού τομέα .. 217, 228
 εμβαδόν ορθογωνίου..... 207, 228
 εμβαδόν παραλληλογράμμου.. 209,
 228
 εμβαδόν τετραγώνου 207, 228
 εμβαδόν τραπεζίου .. 210, 211, 228
 εμβαδόν τριγώνου 209, 228
 ενδεχόμενο 266
 ενδοτεταρτημοριακό εύρος 242,
 246, 249, 262

εξαρτημένη μεταβλητή 56, 99
 εξίσωση 1ου βαθμού 75
 εξίσωση 2ου βαθμού 75
 εξίσωση 75, 93
 επίκεντρη γωνία..... 139, 155
 επικρατούσα τιμή..... 246, 249
 επίλυση εξίσωσης..... 80
 επιμεριστική ιδιότητα 67, 93
 εσωτερική γωνία κανονικού
 πολυγώνου 144, 155
 εύρος δεδομένων 246, 249, 262

H

ημικόκλιο 197

Θ

θηκόγραμμα..... 241, 262

I

ίσα διανύσματα 160
 ίσα τόξα 198, 228
 ισοδύναμες αλγεβρικές
 παραστάσεις..... 66, 93
 ισοδύναμες εξισώσεις..... 80, 93
 ισομετρίες 165, 189

K

κάθετες πλευρές ορθογωνίου
 τριγώνου 149
 κανονικό πολύγωνο . 143, 144, 155
 κανονικότητα..... 54, 55, 93
 καρτεσιανό σύστημα
 συντεταγμένων 106
 κατεύθυνση διανύσματος..... 159
 κενό σύνολο..... 266
 κεντρική γωνία κανονικού
 πολυγώνου 144, 155
 κεντρική συμμετρία 180, 189
 κέντρο κανονικού πολυγώνου.. 144
 κέντρο κύκλου..... 195
 κέντρο περιστροφής 175
 κέντρο στροφής 175
 κέντρο συμμετρίας
 παραλληλογράμμου 181
 κεραίες θηκογράμματος... 242, 262
 κλασικός ορισμός
 πιθανότητας..... 266
 κλίση ευθείας 114, 120, 132
 κυκλικό τμήμα 217, 228
 κυκλικός δίσκος 214

κυκλικός τομέας γωνίας
κύκλου 217, 228
κύκλος 195

Λ

λύση εξίσωσης..... 75, 93

Μ

μαγικά τετράγωνα 14, 24, 27,
72, 73
μαθηματικό μοντέλο 87
μέγιστη τιμή παρατηρήσεων... 241,
262
μεικτόγραμμα σχήμα 221
μέλη εξίσωσης 74, 93
μέση τιμή 246, 247
μεταβλητή 66, 93, 99
μετασχηματισμός στροφής 175
μετατόπιση..... 161, 162
μεταφορά στο καρτεσιανό
επίπεδο 168, 189
μέτρα διασποράς 252
μέτρα θέσης..... 240, 246
μέτρα μεταβλητότητας 246, 262
μέτρο γωνίας στροφής..... 175
μέτρο διανύσματος 159
μηδενικό διάνυσμα 160
μήκος κύκλου..... 195, 228
μήκος ορθογωνίου 207
μήκος τόξου 197, 228
μονάδες μέτρησης επιφανειών 203
μοναδιαίο διάνυσμα..... 160
μοναδική λύση εξίσωσης
1ου βαθμού 81, 93
μονόμετρα μεγέθη 158

Ν

ν-οστή δύναμη του α..... 11

Ξ

ξένα ενδεχόμενα 267

Ο

όμοιοι όροι 66
ομόλογα σημεία 175
ομόροπα διανύσματα 160
ορθογώνιο σύστημα
συντεταγμένων 106
ορθοκανονικό σύστημα
συντεταγμένων 106
όροι αλγεβρικής παράστασης.... 65
όρος κανονικότητας 55

Π

π (αριθμός) 195
παράλληλη μεταφορά κατά
διάνυσμα 167
παραπλανητικά διαγράμματα .. 246
παραπλανητικά
χρονοδιαγράμματα 247
περιγεγραμμένος κύκλος
κανονικού πολυγώνου 144
περίληψη των πέντε
αριθμών 241, 262
περίμετρος σχήματος 200, 228
περιοδικός δεκαδικός
αριθμός..... 11, 35
περίοδος 35
περιστροφική συμμετρία..... 185
πίνακας τιμών συνάρτησης 100
πλακόστρωση..... 184, 185
πλάτος ορθογωνίου 207
πλήθος λύσεων εξίσωσης
1ου βαθμού 81, 93
πολλαπλάσια τετραγωνικού
μέτρου 204
πραγματικοί αριθμοί 43, 50
προσέγγιση με έλλειψη..... 36
προσέγγιση με υπεροχή 36
προσεταιριστική ιδιότητα 67
πρώτο τεταρτημόριο 241
Πυθαγόρειο θεώρημα 46, 108,
149, 155, 225

Ρ

ρητές προσεγγίσεις..... 37
ρίζα εξίσωσης 75, 93
ρητός αριθμός..... 11, 35, 43, 50

Σ

σταθερά αναλογίας..... 113, 132
σταθερός όρος..... 66
στατιστική ερώτηση 234
στατιστικός κύκλος έρευνας.... 233,
262
στρέμμα 204
στροφή σχήματος 175, 176,
177, 189
συμμεταβολή 98, 99
συμμετρία ως προς κέντρο..... 180
συμμετρικές παρατηρήσεις..... 249
συμμετρικό σχήμα ως προς
κέντρο συμμετρίας..... 181
συμπληρωματικό
ενδεχόμενο 276, 277
συνάρτηση αναλογίας..... 113

συνάρτηση αντίστροφης
αναλογίας 127
συνάρτηση..... 99, 132
συντελεστής..... 65
συντεταγμένες σημείου..... 106

Τ

ταυτότητα 81
τεταγμένη..... 59, 106
τεταρτημόρια διατετ.
παρατηρήσεων 240, 241
τεταρτημόρια καρτεσιανού
συστήματος 107
τεταρτημόριο 2ο διατ.
παρατηρήσεων 241, 262
τεταρτημόριο 1ο διατ.
παρατηρήσεων 241, 262
τεταρτημόριο 3ο διατ.
παρατηρήσεων 241, 262
τεταρτοκύκλιο..... 197
τετμημένη..... 59, 106
τετραγωνική ρίζα..... 29, 49
τετραγωνικό δεκάμετρο 204
τετραγωνικό δεκατόμετρο 203
τετραγωνικό εκατόμετρο 204
τετραγωνικό εκατοστόμετρο 203
τετραγωνικό μέτρο 203
τετραγωνικό χιλιόμετρο..... 204
τετραγωνικό χιλιοστόμετρο..... 204
τετράγωνος αριθμός 29
τρίτο τεταρτημόριο 241
τυποποιημένη μορφή..... 21, 49
τύπος συνάρτησης..... 99

Υ

υπερβολή..... 127, 132
υποδιαίρεσεις τετραγωνικού
μέτρου 203
υποτείνουσα 149

Φ

φορά διανύσματος..... 159
φυσικοί αριθμοί..... 43

Χ

χρονικά δεδομένα 234
χρονοδιάγραμμα..... 234, 262
χωρισμός γνωστών από
αγνώστους..... 80

Πηγές εικόνων

Η σχολή των Αθηνών, Ραφαήλ. Αποθετήριο πολυμέσων Wikimedia: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:%22The_School_of_Athens%22_by_Raffaello_Sanzio_da_Urbino.jpg

Παγκόσμιο Κέντρο Νέου Αιώνα. Αποθετήριο πολυμέσων Wikimedia: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Chengdu_Global_Center.jpg

Παρθενώνας, φωτογραφία του 1978. Creative Commons άδειες και αποθετήριο πολυμέσων Wikimedia: [Steve Swayne, CC BY 2.0](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:The_Parthenon_in_Athens.jpg), via Wikimedia Commons. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:The_Parthenon_in_Athens.jpg

Μόνα Λίζα, Λεονάρντο Ντα Βίντσι. Αποθετήριο πολυμέσων Wikimedia: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Mona_Lisa_by_Leonardo_da_Vinci_from_C2RMF_retouched.jpg

Παραδοσιακό σπίτι στο Πυργί Χίου. Αποθετήριο πολυμέσων Wikimedia: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pyrgi_house1.JPG

Φάρος Τουρλίτης. Creative Commons άδειες και αποθετήριο πολυμέσων Wikimedia: [anjči, CC BY 2.0](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Faros_Tourlitis_01.jpg), via Wikimedia Commons. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Faros_Tourlitis_01.jpg

Στρίψιμο νομίσματος. Creative Commons άδειες και αποθετήριο πολυμέσων Wikimedia: [ICMA Photos, CC BY-SA 2.0](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Coin_Toss_(3635981474).jpg), via Wikimedia Commons. URL: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Coin_Toss_\(3635981474\).jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Coin_Toss_(3635981474).jpg)

