ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Ειρήνη Δεληγιάννη • Σταύρος Δροσάκης • Σωτήρης Ζωιτσάκος
Παύλος Μαραγκουδάκης • Ελευθέριος Μαστορίδης

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Α΄ Λυκείου

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Α΄ Λυκείου

Επιστημονική Επιτροπή Αξιολόγησης	
Συντονιστής / Αξιολογητής	**Ανδρέας Αρβανιτογεώργος** Εν ενεργεία μέλος Δ.Ε.Π.
Αξιολογητής	**Απόστολος Σιδέρης** Εν ενεργεία εκπαιδευτικός
Αξιολογητής	**Ελευθέριος Ευθυμίου** Εν ενεργεία εκπαιδευτικός
Τεχνικός Εμπειρογνώμονας	**Γεώργιος Ζάχος** Πτυχιούχος Πληροφορικής
Επικουρικός Εμπειρογνώμονας	**Αικατερίνη Γαλάτη** Πτυχιούχος τεχνολογίας γραφικών τεχνών
Υπεύθυνος Διδακτικού Πακέτου για το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής	**Στυλιανός Μαυρατζάς** Σύμβουλος Α΄ ΙΕΠ

Πράξη με τίτλο: «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ 6010165 στο Πρόγραμμα «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή» 2021-2027

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ
Σπυρίδων Δουκάκης
Πρόεδρος του Δ.Σ. του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Υπεύθυνος Πράξης
Διονύσιος Μουρελάτος
Σύμβουλος Α΄ του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Αναπληρωτής Υπεύθυνος Πράξης
Στυλιανός Μαυρατζάς
Σύμβουλος Α΄ του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

«Με τη συγχρηματοδότηση της Ευρωπαϊκής Ένωσης»
και το Πρόγραμμα «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή»

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Ειρήνη Δεληγιάννη • Σταύρος Δροσάκης • Σωτήρης Ζωιτσάκος
Παύλος Μαραγκουδάκης • Ελευθέριος Μαστορίδης

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Α΄ Λυκείου

ΑΝΑΔΟΧΟΣ ΣΥΓΓΡΑΦΗΣ

πεδίο

Η συγγραφή και η επιστημονική επιμέλεια του βιβλίου πραγματοποιήθηκε
υπό την αιγίδα του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΚΔΟΣΗΣ

ΣΥΓΓΡΑΦΙΚΗ ΟΜΑΔΑ	**Ειρήνη Δεληγιάννη,** Μαθηματικός **Σταύρος Δροσάκης,** Μαθηματικός **Σωτήρης Ζωιτσάκος,** Μαθηματικός **Παύλος Μαραγκουδάκης,** Μαθηματικός **Ελευθέριος Μαστορίδης,** Μαθηματικός
ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ – ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΕΚΔΟΣΗΣ	**Σίνος Γκιώκας,** Φυσικός
ΓΛΩΣΣΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ	**Τέτη Παλαιοθοδώρου,** Φιλόλογος
ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΕΝΤΥΠΟΥ – ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗ ΣΕΛΙΔΟΠΟΙΗΣΗ	**Γιώργος Γιάκος,** Designer & Art Director
ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΣΗ	**Ευθύμης Αργυράτος,** Art Director
ΜΑΚΕΤΑ ΕΞΩΦΥΛΛΟΥ	**Εκδόσεις Πεδίο**
ΣΤΟ ΕΞΩΦΥΛΛΟ	Έργο του **Paul Walker** από τη σειρά **Μονοτυπίες 2005**
ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΜΑΘΗΣΙΑΚΩΝ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ	
ΣΥΛΛΗΨΗ – ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΜΑΘΗΣΙΑΚΩΝ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ	**Συγγραφική ομάδα**
ΤΕΧΝΙΚΗ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΜΑΘΗΣΙΑΚΩΝ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ	**Μαρία Σκιαδέλλη,** Μηχανικός Η/Υ και Πληροφορικής, MA στην Εκπαίδευση, Εκπαιδευτικός Πληροφορικής Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης

Ταυτότητα του βιβλίου

Το βιβλίο αυτό έρχεται να υποστηρίξει μαθητές και εκπαιδευτικούς στη μελέτη και τη διδασκαλία της Γεωμετρίας τόσο μέσω της επιστημονικής όσο και μέσω της κοινωνικής και πολιτισμικής προσέγγισής της.

Οι μαθητές προτρέπονται να μελετήσουν γεωμετρικά ζητήματα, να διατυπώσουν γεωμετρικές προτάσεις και να τις ελέγξουν εφαρμόζοντας μαθηματική επιχειρηματολογία. Ακόμα, οι μαθητές ενθαρρύνονται, βασιζόμενοι στις υπάρχουσες γνώσεις τους, να διερευνήσουν γεωμετρικά θέματα που παρουσιάζονται στο φυσικό ή το ανθρωπογενές περιβάλλον, μοντελοποιώντας και επιλύοντας προβλήματα, αλλά και προτείνοντας δικά τους.

Στόχος είναι αφενός να οργανώσουν τις γνώσεις τους σε μία συνεκτική δομή και αφετέρου να εντοπίσουν και να ισχυροποιήσουν διασυνδέσεις της Γεωμετρίας με θέματα εντός και εκτός των Μαθηματικών.

Δομή του βιβλίου

Το βιβλίο αναπτύσσεται σε πέντε κεφάλαια. Το πρώτο κεφάλαιο πραγματεύεται τις παράλληλες ευθείες, το δεύτερο τα τρίγωνα, το τρίτο τον κύκλο, το τέταρτο τα τετράπλευρα και το πέμπτο τις ευθείες και τα επίπεδα στον χώρο.[1]

Κάθε κεφάλαιο επιμερίζεται σε διδακτικές ενότητες.

Κάθε διδακτική ενότητα αρχίζει με τα **βασικά ερωτήματα**, τα οποία εισάγουν τους μαθητές στους στόχους της ενότητας και στα θέματα που θα αναπτυχθούν.

Ακολουθεί ένα έργο **εξερεύνησης**, του οποίου η επεξεργασία βασίζεται στις προϋπάρχουσες γνώσεις των μαθητών και έχει στόχο την εμπλοκή τους στα θέματα που πρόκειται να μελετηθούν.

Στη συνέχεια, αναπτύσσονται οι **βασικές γνώσεις** της διδακτικής ενότητας που περιλαμβάνουν ορισμούς, προτάσεις, πορίσματα, αποδείξεις και γεωμετρικές κατασκευές.

Παράλληλα, η νέα γνώση εφαρμόζεται όχι μόνο στο μαθηματικό περιβάλλον, αλλά και σε άλλα γνωστικά πεδία και τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας. Έτσι, προτείνονται **εφαρμογές** αξιοποίησης της γνώσης και **ασκήσεις** διαβαθμισμένης δυσκολίας που έχουν πολλαπλή στόχευση: παρέχουν ευκαιρίες εμπέδωσης και ανάπτυξης της μαθηματικής δραστηριότητας, αλλά οδηγούν και σε διαθεματικές αναζητήσεις. Σε κάθε κεφάλαιο υπάρχει **συμπληρωματικό υλικό** με πρόσθετα έργα.

Κάθε κεφάλαιο ολοκληρώνεται με μια διδακτική ενότητα **ανακεφαλαίωσης**, όπου περιλαμβάνονται τα βασικά ζητήματα του κεφαλαίου, έργα αποτίμησης των θεμάτων που μελετήθηκαν, καθώς και έργα που απαιτούν πιο σύνθετες διερευνήσεις.

Στόχος των έργων που προτείνονται στην ανακεφαλαίωση είναι η αυτοαξιολόγηση και ο αναστοχασμός του μαθητή, η ανάπτυξη μεταγνωστικών ικανοτήτων, αλλά και η ενθάρρυνση της συνεργασίας.

[1] Προτείνεται τα κεφάλαια να διδαχθούν με τη σειρά που παρουσιάζονται στο βιβλίο για να αποφευχθούν λογικές ανακολουθίες.

Εικονίδια διάκρισης των έργων

Τα εικονίδια που ακολουθούν χρησιμοποιούνται για να χαρακτηρίσουν κάποια από τα έργα ως προς το περιεχόμενο και τη στόχευσή τους.

Εμπλοκή των μαθητών με έργα επίλυσης, μοντελοποίησης και κατασκευής προβλήματος, που δημιουργούν **διασυνδέσεις** με άλλους τομείς.

Προτροπή για **επικοινωνία** και **συνεργασία**.

Σχεδιασμός σχημάτων και **γεωμετρικές κατασκευές**.

QR Παραπομπή σε **ψηφιακό περιβάλλον.**

Παρουσίαση **ιστορικών αναφορών**.

Κριτική και δημιουργική σκέψη

Κάποια από τα προτεινόμενα έργα εστιάζουν περισσότερο στην ανάπτυξη της **κριτικής σκέψης**, καθώς καλλιεργούν την ικανότητα ελέγχου υποθέσεων και εξαγωγής συμπερασμάτων με διαδικασίες που βασίζονται σε αντικειμενικά κριτήρια, ενώ κάποια έργα στοχεύουν στην ανάπτυξη της **δημιουργικής σκέψης,** δηλαδή, στην ικανότητα παραγωγής νέας γνώσης που βασίζεται στην υπάρχουσα και την επεκτείνει.

Διαβάθμιση των ασκήσεων

Οι ασκήσεις διαβαθμίζονται ως προς τη δυσκολία τους σε τρεις κατηγορίες:

Με κύκλο (●) στην αρίθμηση χαρακτηρίζονται οι πιο εύκολες, δηλαδή αυτές που αποτελούν άμεση εφαρμογή των βασικών γνώσεων.

Με τετράγωνο (■) στην αρίθμηση χαρακτηρίζονται οι πιο δύσκολες, αυτές που η επίλυσή τους απαιτεί έναν σχεδιασμό με κάποια βήματα.

Με ρόμβο (◆) στην αρίθμηση χαρακτηρίζονται τα σύνθετα προβλήματα, των οποίων η αντιμετώπιση μπορεί να απαιτεί εμβάθυνση στη θεωρία ή πιο τεχνικούς χειρισμούς επίλυσης (επεμβάσεις στο σχήμα, εξέταση ειδικών περιπτώσεων κ.ά.).

Η Σοφία και ο Μελέτης

Σε διάφορα σημεία του βιβλίου θα συναντήσετε δύο χαρακτήρες μαθητών, τη Σοφία και τον Μελέτη, οι οποίοι εκφράζουν αντιρρήσεις για την εγκυρότητα ισχυρισμών, κάνουν λάθη, θέτουν ερωτήματα και αναζητούν απαντήσεις, αντιπαραθέτοντας τα επιχειρήματά τους για γεωμετρικά θέματα που τους κινούν ιδιαίτερα το ενδιαφέρον.

Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Κεφάλαιο 1: Παράλληλες ευθείες

- Αποδεικνύουν τις σχέσεις γωνιών που σχηματίζουν παράλληλες ευθείες όταν τέμνονται από τρίτη, διατυπώνουν τους αντίστροφους ισχυρισμούς και τους αναγνωρίζουν ως κριτήρια παραλληλίας.
- Αποδεικνύουν ότι το άθροισμα γωνιών τριγώνου είναι ίσο με μία ευθεία γωνία.
- Αναγνωρίζουν ζεύγη γωνιών με πλευρές κάθετες ή παράλληλες, διερευνούν και αποδεικνύουν τις μεταξύ τους σχέσεις.
- Σχεδιάζουν με γεωμετρικά όργανα από σημείο εκτός ευθείας, ευθεία παράλληλη προς αυτήν και αιτιολογούν τη διαδικασία.
- Χρησιμοποιούν ιδιότητες των παράλληλων ευθειών για την επίλυση μαθηματικών και ρεαλιστικών προβλημάτων.
- Ανακαλύπτουν και αποδεικνύουν τον τύπο για το άθροισμα γωνιών κυρτού ν-γώνου.
- Αναγνωρίζουν τη σημασία του 5ου Ευκλείδειου Αιτήματος στην εξέλιξη της Γεωμετρίας.

Κεφάλαιο 2: Τρίγωνα

- Ελέγχουν πότε σχέσεις μεταξύ βασικών στοιχείων τριγώνων και ορθογώνιων τριγώνων αποτελούν κριτήριο ισότητας αυτών.
- Κατασκευάζουν με κανόνα και διαβήτη τρίγωνα με δεδομένα κύρια στοιχεία τους (γωνίες, πλευρές).
- Αποδεικνύουν και χρησιμοποιούν κριτήρια που καθορίζουν ότι ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές.
- Διερευνούν και αποδεικνύουν βασικές ανισοτικές σχέσεις στοιχείων τριγώνου (τριγωνική ανισότητα και σύνδεση σχέσης πλευρών με σχέση αντίστοιχων γωνιών).
- Χρησιμοποιούν ιδιότητες των ίσων τριγώνων στην επίλυση μαθηματικών και ρεαλιστικών προβλημάτων.

Κεφάλαιο 3: Κύκλος – Γεωμετρικοί τόποι και κατασκευές

- Αποδεικνύουν ότι, σε ίσους κύκλους, ίσα τόξα ορίζουν ίσες χορδές και ίσα αντίστοιχα σε αυτές αποστήματα. Διατυπώνουν και ελέγχουν τους αντίστροφους ισχυρισμούς.
- Κατασκευάζουν εφαπτομένη κύκλου σε σημείο του με κανόνα και διαβήτη.
- Βρίσκουν απλούς γεωμετρικούς τόπους εξηγώντας τον συλλογισμό τους.
- Αναγνωρίζουν τη διχοτόμο γωνίας και τη μεσοκάθετο ευθύγραμμου τμήματος ως γεωμετρικούς τόπους σημείων και αποδεικνύουν τις ιδιότητές τους.
- Κατασκευάζουν με κανόνα και διαβήτη τη διχοτόμο γωνίας και τη μεσοκάθετο ευθύγραμμου τμήματος και αιτιολογούν τη διαδικασία.
- Αποδεικνύουν ότι οι μεσοκάθετοι των πλευρών ενός τριγώνου και οι διχοτόμοι των γωνιών του συντρέχουν αντιστοίχως σε σημεία που αποτελούν κέντρα χαρακτηριστικών κύκλων του.
- Διαπιστώνουν ότι τα ύψη του και οι διάμεσοι ενός τριγώνου συντρέχουν αντιστοίχως.
- Μοντελοποιούν και επιλύουν προβλήματα αξιοποιώντας τα κέντρα τριγώνου.

Κεφάλαιο 4: Τετράπλευρα

- Διερευνούν και αποδεικνύουν τις βασικές ιδιότητες του παραλληλογράμμου και των ειδικών παραλληλογράμμων (ορθογώνιο, ρόμβος, τετράγωνο) και διακρίνουν αυτές που τα χαρακτηρίζουν.
- Αποδεικνύουν ιδιότητες που αφορούν το ευθύγραμμο τμήμα το οποίο συνδέει μέσα πλευρών τριγώνου.
- Προσδιορίζουν και αποδεικνύουν τις σχέσεις που συνδέουν την υποτείνουσα ορθογώνιου τριγώνου αφενός με τη διάμεσο που αντιστοιχεί σε αυτήν και αφετέρου με την κάθετη πλευρά που είναι απέναντι από γωνία 30 μοιρών. Διαπιστώνουν ότι οι ιδιότητες αυτές χαρακτηρίζουν τα ορθογώνια τρίγωνα.
- Αναγνωρίζουν το τραπέζιο ως το τετράπλευρο με μόνο δύο πλευρές παράλληλες, καθώς και το ισοσκελές τραπέζιο, και αποδεικνύουν τις βασικές ιδιότητές τους.
- Μοντελοποιούν και επιλύουν προβλήματα χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των παραλληλογράμμων και τραπεζίων.

Κεφάλαιο 5: Ευθείες και επίπεδα στον χώρο

- Σχεδιάζουν ευθείες και επίπεδα στον χώρο.
- Διερευνούν τις σχετικές θέσεις ευθειών και επιπέδων στον χώρο, καθώς και ευθείας και επιπέδου.
- Αναγνωρίζουν τις δίεδρες γωνίες.
- Ορίζουν το μέτρο δίεδρης γωνίας.

Περιεχόμενα

Γεωμετρία: Μια ιστορία 40 αιώνων

Βαβυλώνιοι και Αιγύπτιοι

Η Γεωμετρία έχει εντυπωσιακό παρελθόν που ξεκινά τουλάχιστον πριν από 4.000 χρόνια, με την ανάπτυξη του βαβυλωνιακού και του αιγυπτιακού πολιτισμού.

Η Γεωμετρία φαίνεται να αναπτύχθηκε και στους δύο πολιτισμούς κυρίως για πρακτικούς σκοπούς, όπως, για παράδειγμα, τον υπολογισμό του εμβαδού ενός χωραφιού ή του όγκου μιας αποθήκης σιτηρών.

Είναι γνωστό ότι τόσο οι Αιγύπτιοι όσο και οι Βαβυλώνιοι, τουλάχιστον από το 1800 π.Χ., υπολόγιζαν σωστά το **εμβαδόν** του ορθογωνίου, του ορθογώνιου τριγώνου, καθώς και του τραπεζίου με μια πλευρά κάθετη προς τις βάσεις. Επίσης, ήξεραν να υπολογίζουν **όγκους** απλών στερεών πολλαπλασιάζοντας το εμβαδόν της βάσης επί το ύψος.

Οι Βαβυλώνιοι φαίνεται ότι γνώριζαν επιπλέον τη μετρική σχέση που συνδέει τις πλευρές ενός ορθογώνιου τριγώνου, δηλαδή το γνωστό μας **Πυθαγόρειο Θεώρημα**.

Ωστόσο, η προσέγγιση των Αιγυπτίων για τον λόγο του μήκους του κύκλου προς τη διάμετρό του, δηλαδή του αριθμού **π**, ήταν 3,16, κατά πολύ ακριβέστερη από το 3 που χρησιμοποιούσαν οι Βαβυλώνιοι.

Μεγάλο μέρος της γνώσης μας για τα βαβυλωνιακά μαθηματικά προέρχεται από πήλινες πινακίδες στις οποίες είναι γραμμένα μαθηματικά προβλήματα, σαν και αυτά που θα μπορούσαν να βρεθούν και σήμερα σε ένα σχολικό βιβλίο. (**QR1**)

QR1

Αντίστοιχα, μία από τις σημαντικότερες πρωτογενείς πηγές για τα αιγυπτιακά μαθηματικά της ίδιας περιόδου είναι ο πάπυρος του Rhind. (Στο **QR2** μπορείτε να δείτε ένα από τα γεωμετρικά προβλήματα που είναι καταγεγραμμένα σε αυτόν).

QR2

Έλληνες

Σχεδόν 1.000 χρόνια μετά την εποχή που γράφτηκαν οι βαβυλωνιακές πινακίδες και ο αιγυπτιακός πάπυρος του Rhind, στον τότε ελληνικό χώρο που εκτείνεται από τα παράλια της Μικράς Ασίας (Ιωνία) μέχρι την Κάτω Ιταλία και τη Σικελία (Μεγάλη Ελλάδα), ανατέλλει μια νέα εποχή για την ανθρώπινη σκέψη. Για πρώτη φορά στην ιστορία, **αναζητείται η φυσική αιτία** των φαινομένων, που ως τότε αποδίδονταν σε θεϊκή παρέμβαση.

Είναι η αρχή της επιστημονικής σκέψης.

Συνυφασμένη με αυτή τη νέα αντίληψη για την αναζήτηση της αιτίας είναι και η **ιδέα της απόδειξης** στα Μαθηματικά. Η Ιστορία αποδίδει στον Ίωνα φιλόσοφο και μαθηματικό **Θαλή**, που έζησε κατά το τέλος του 7ου και τις αρχές του 6ου αιώνα π.Χ., την πατρότητα των πρώτων γεωμετρικών αποδείξεων.

Η ιδιαίτερη συνεισφορά του Θαλή στη Γεωμετρία έγκειται στο εξής: κατανοεί την ανάγκη να αιτιολογηθούν προτάσεις που μπορεί να φαίνονται προφανείς.

Είναι βέβαιο ότι οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί στηρίχθηκαν στις γνώσεις που αναπτύχθηκαν από τους Αιγύπτιους και τους Βαβυλώνιους.

Η Γεωμετρία όμως που ανέπτυξαν οι Έλληνες διαφέρει ουσιαστικά από τη Γεωμετρία των παλαιότερων πολιτισμών.

Αντικείμενο της Γεωμετρίας των Ελλήνων δεν είναι πια η εφαρμογή εμπειρικών κανόνων για πρακτικούς σκοπούς.

Οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί[1] διατυπώνουν για πρώτη φορά γενικές προτάσεις σχετικά με τις ιδιότητες των σχημάτων και προσπαθούν να αιτιολογήσουν με λογικά επιχειρήματα τις προτάσεις αυτές.

Κατά τους τρεις αιώνες που ακολουθούν την εποχή του Θαλή, τα Μαθηματικά αναπτύσσονται παράλληλα με τη Φιλοσοφία, θέτοντας τα θεμέλια των σύγχρονων επιστημών.

Τα Μαθηματικά αναγνωρίζονται, πλέον, ως μέσο για την κατανόηση του κόσμου που μας περιβάλλει και, ακόμα περισσότερο, σύμφωνα με τον Πλάτωνα, ως το μέσο για την προσέγγιση της απόλυτης ιδεατής αλήθειας.

Η Γεωμετρία αναπτύσσεται ως καθαρή επιστήμη, ανεξάρτητη από τις εφαρμογές, και αποτελεί αναπόσπαστο μέρος μιας ολοκληρωμένης παιδείας.

Χαρακτηριστικά, στην είσοδο της Ακαδημίας του Πλάτωνα υπήρχε η επιγραφή: **«Μηδείς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω μοι τῇ θύρᾳ»** (Απαγορεύεται η είσοδος σε όποιον δεν ξέρει γεωμετρία).

«Στοιχεία»: Το εμβληματικό έργο του Ευκλείδη

Τριακόσια χρόνια μετά την εποχή του Θαλή (το 300 π.Χ. περίπου), στην Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου, ο Ευκλείδης γράφει το έργο «Στοιχεία», που αποτελείται από δεκατρία βιβλία. Σε μεγάλο μέρος του έργου αυτού, ο **Ευκλείδης** οργανώνει και συστηματοποιεί την ως τότε γνώση της Γεωμετρίας σε ένα **λογικό σύστημα**.

Αρχικά παρουσιάζει τους **Ορισμούς** (**QR3**) που αποσαφηνίζουν την έννοια των αντικειμένων της θεωρίας και κάθε όρου που χρησιμοποιείται (σημείο, ευθεία, επίπεδο, γωνία, κύκλος κ.ά.). Σύμφωνα με τη θεώρηση του Ευκλείδη, τα αντικείμενα της Γεωμετρίας δεν έχουν υλική υπόσταση, αλλά αναπαριστούν αφαιρετικές «ιδέες» αντικειμένων. Ένα σημείο, για παράδειγμα, δεν έχει διαστάσεις, μια ευθεία είναι μονοδιάστατη, έχει δηλαδή μηδενικό πάχος και εκτείνεται απεριόριστα.

QR3

Μετά τους ορισμούς παραθέτει μια ομάδα σαφώς διατυπωμένων, κοινά αποδεκτών παραδοχών, τα **Αιτήματα**.

Τα **Αιτήματα** ή **Αξιώματα**, όπως τα λέμε σήμερα, είναι προτάσεις τις οποίες δεχόμαστε ως αληθείς και περιγράφουν ιδιότητες και σχέσεις μεταξύ των βασικών γεωμετρικών αντικειμένων.

Τα πέντε αξιώματα (αιτήματα) στα Στοιχεία του Ευκλείδη είναι τα εξής:

1. Από κάθε σημείο μπορούμε να φέρουμε ευθεία που το συνδέει με οποιοδήποτε άλλο σημείο.
2. Το ευθύγραμμο τμήμα μπορεί να προεκτείνεται συνεχώς και ευθύγραμμα.
3. Με κέντρο οποιοδήποτε σημείο και ακτίνα οποιοδήποτε τμήμα, είναι δυνατό να γραφεί κύκλος.
4. Όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες.
5. Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες με άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές, τότε οι ευθείες τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας που βρίσκονται οι γωνίες αυτές.

QR4

[1] Μια χρονογραμμή, που εκτείνεται από τον 6ο π.Χ. αιώνα μέχρι τον 6ο μ.Χ. αιώνα με τις εξέχουσες μορφές των ελληνικών Μαθηματικών και χρονικούς παραλληλισμούς τους με προσωπικότητες και ιστορικά γεγονότα, θα βρείτε στο **QR4**.

QR5

Μετά τους Ορισμούς και τα Αιτήματα ο Ευκλείδης παραθέτει τις **Κοινές Έννοιες**, δηλαδή κοινά αποδεκτές αρχές που θα μπορούσαν να χαρακτηριστούν πιο προφανείς και βασικές από τα αιτήματα. Σήμερα θα τις λέγαμε και αυτές αξιώματα (**QR5**).

Στη συνέχεια, κάθε άλλο αποτέλεσμα (**Πρόταση**) προκύπτει είτε από τα αιτήματα είτε από ήδη αποδεδειγμένες προτάσεις με χρήση ρητά διατυπωμένων κανόνων της λογικής. Σήμερα χρησιμοποιούμε τον όρο «Αξίωμα» αντί για «Αίτημα» και μία θεωρία οργανωμένη ως λογικό οικοδόμημα με αυτόν τον τρόπο (ορισμοί-παραδοχές-αποδείξεις) λέγεται **Αξιωματικό Σύστημα**.

Με τη δομή του Αξιωματικού Συστήματος, η οποία για πρώτη φορά εμφανίζεται στη Γεωμετρία του Ευκλείδη, επιδιώκεται το εξής: Με αφετηρία λίγες βασικές αρχές, να μπορούμε, χρησιμοποιώντας μόνο κανόνες της λογικής και όχι τη διαίσθηση, να αποδεικνύουμε ισχυρισμούς, εμπλουτίζοντας τη θεωρία μας με προτάσεις, χωρίς τον κίνδυνο να οδηγηθούμε σε αντιφάσεις.

Το Αξιωματικό Σύστημα αναγνωρίστηκε διαχρονικά ως ο ενδεδειγμένος τρόπος ανάπτυξης μιας μαθηματικής θεωρίας και αποτελεί μέχρι σήμερα, γενικότερα, υπόδειγμα για τη θεμελίωση επιστημονικών θεωριών.

Για την ευρύτητα της χρήσης του Αξιωματικού Συστήματος, ενδεικτικά μπορούμε να αναφέρουμε ότι τόσο ο Νεύτων στο έργο του Βασικές Αρχές Φυσικής Φιλοσοφίας όσο και ο φιλόσοφος Σπινόζα στο έργο του Ηθική υιοθετούν μια τέτοια δομή: Σε καθένα από αυτά τα έργα, δηλαδή, προτάσσονται ορισμοί και αξιώματα και ακολουθούν προτάσεις που αποδεικνύονται με λογικούς κανόνες και στηρίζονται σε αξιώματα ή σε ήδη αποδεδειγμένες προτάσεις.

Έτσι λοιπόν, η Ευκλείδεια Γεωμετρία έχει –με διάφορους τρόπους και μορφές– κεντρική θέση στη σχολική μαθηματική παιδεία μέχρι την εποχή μας, όχι μόνο λόγω της αξίας των ίδιων των αποτελεσμάτων της, αλλά και επειδή αποτελεί ένα μοντέλο θεμελίωσης της επιστημονικής σκέψης.

Η σημασία της απόδειξης

Η απόδειξη μιας πρότασης είναι απαραίτητη για να επιβεβαιώσει τη γενική ισχύ της. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να αποδείξουμε την πρόταση:

Το άθροισμα των μέτρων των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 180°.

Σε μια εμπειρική προσέγγιση, θα μετρούσαμε τις γωνίες ενός τριγώνου και θα τις προσθέταμε. Τότε όμως προκύπτουν τα εξής προβλήματα: Πρώτον, πώς γνωρίζουμε ότι δεν υπάρχει έστω και κάποιο μικρό σφάλμα στη διαδικασία της μέτρησης και, δεύτερον, πώς είμαστε σίγουροι ότι το συμπέρασμα ισχύει για το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου;

QR6

Οι μετρήσεις λοιπόν έχουν σχετική μόνο αξιοπιστία και αναφέρονται σε συγκεκριμένες περιπτώσεις. Έτσι, δεν προσφέρονται για να επιβεβαιώσουν γενικές αλήθειες. Αντίστοιχα, ένα γεωμετρικό σχήμα, αν και προσφέρει μια εποπτεία του προβλήματος, δεν αρκεί από μόνο του για να μας οδηγήσει σε ένα ασφαλές γενικό συμπέρασμα (**QR6**).

Από τον Θαλή και μετά, έγινε σαφές ότι μόνο ο **λογικός συλλογισμός** έχει τη δύναμη να παράγει βέβαια συμπεράσματα. Η ενεργητική συμμετοχή των πολιτών στη διοίκηση των δημοκρατικών πόλεων-κρατών, κατά τους αιώνες που ακολούθησαν, ενθάρρυνε την ανάπτυξη της λογικής επιχειρηματολογίας.

Όμως, η συστηματική μελέτη των τρόπων συλλογισμού κωδικοποιείται από τον **Αριστοτέλη**, τον 4ο π.Χ. αιώνα. Αυτός ήταν που θεμελίωσε τη Λογική, καταγράφοντας σαφείς λογικούς κανόνες, περιγράφοντας τους αποδεικτικούς συλλογισμούς και υποδεικνύοντας λάθη που γίνονται εάν αυτοί δεν ακολουθούνται. Ο Ευκλείδης, στα Στοιχεία, επιχειρεί να θεμελιώσει τη Γεωμετρία σύμφωνα με τους κανόνες της Λογικής που έθεσε ο Αριστοτέλης.

Γεωμετρικές κατασκευές

Επιστρέφοντας στα αιτήματα των Στοιχείων, βλέπουμε ότι τα δύο πρώτα σχετίζονται με τη βασική λειτουργία του γεωμετρικού οργάνου που λέγεται **κανόνας**, δηλαδή του χάρακα χωρίς διαβάθμιση: αν δοθούν δύο διαφορετικά σημεία του επιπέδου, τότε με τον κανόνα μπορούμε να σχεδιάσουμε μια ευθεία που τα συνδέει. Το τρίτο αίτημα σχετίζεται με τη λειτουργία του γεωμετρικού οργάνου που λέγεται **διαβήτης**.

Οι αρχαίοι Έλληνες γεωμέτρες έδιναν μεγάλη σημασία στα σχήματα που μπορούν να κατασκευαστούν χρησιμοποιώντας μόνο τα γεωμετρικά όργανα κανόνα και διαβήτη. Οι κατασκευές που μπορούν να γίνουν μόνο με κανόνα και διαβήτη ονομάζονται **γεωμετρικές κατασκευές**. [Παράδειγμα: Κατασκευή μεσοκαθέτου ευθύγραμμου τμήματος (QR7).]

QR7

Από την αρχαιότητα είχαν διατυπωθεί κάποια προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών, τα οποία για περισσότερα από 2.000 χρόνια αντιστάθηκαν στις προσπάθειες των μαθηματικών να τα επιλύσουν (με κανόνα και διαβήτη) και για τα οποία σήμερα πλέον γνωρίζουμε ότι η γεωμετρική επίλυσή τους (δηλαδή, με κανόνα και διαβήτη) είναι αδύνατη. Σε αυτή την κατηγορία ανήκουν τα τρία φημισμένα «μη επιλύσιμα» προβλήματα της αρχαιότητας:

1. Η τριχοτόμηση τυχαίας γωνίας, δηλαδή η διαίρεση μιας τυχαίας γωνίας σε τρία ίσα μέρη.
2. Ο τετραγωνισμός του κύκλου, δηλαδή η κατασκευή τετραγώνου με εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν ενός δεδομένου κύκλου.
3. Το Δήλιο πρόβλημα, δηλαδή η κατασκευή κύβου με όγκο διπλάσιο από τον όγκο ενός δεδομένου κύβου.

Για να δοθεί οριστική απάντηση σε καθένα από αυτά τα προβλήματα, η οποία και στις τρεις περιπτώσεις ήταν ότι η ζητούμενη κατασκευή είναι αδύνατο να γίνει με κανόνα και διαβήτη, έπρεπε να μεσολαβήσει η εμφάνιση της Αναλυτικής Γεωμετρίας τον 17ο αιώνα –που επέτρεψε τη μετάφραση αυτών των γεωμετρικών προβλημάτων σε αλγεβρικά προβλήματα– και στη συνέχεια η μεγάλη ανάπτυξη της Άλγεβρας κατά τον 18ο και τον 19ο αιώνα.

QR8 Η Σχολή των Αθηνών

QR9 Γενέθλιες πόλεις

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

Το κτίριο που φαίνεται στην εικόνα βρίσκεται στο λιμάνι της Μελβούρνης στην Αυστραλία. Ο τρόπος κατασκευής του δημιουργεί ψευδαισθήσεις σχετικά με το αν οι κόκκινες γραμμές του κτιρίου είναι ευθείες παράλληλες μεταξύ τους.

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τις ιδιότητες των παράλληλων ευθειών και θα αναπτύξουμε κριτήρια για να διαπιστώνουμε πότε δύο ευθείες είναι παράλληλες.

Με τον τρόπο αυτό θα αρχίσουμε να διαμορφώνουμε ένα πλαίσιο που θα μας επιτρέπει να βγάζουμε ασφαλή συμπεράσματα χωρίς να βασιζόμαστε αποκλειστικά στις αισθήσεις μας, οι οποίες μπορεί κάποιες φορές να μας παραπλανούν.

1.1 Ευθείες τεμνόμενες και ευθείες παράλληλες

Βασικά ερωτήματα της ενότητας

- Πώς μπορούμε να ελέγξουμε αν δύο ευθείες στο επίπεδο τέμνονται ή είναι παράλληλες;
- Ποιες είναι οι σχέσεις μεταξύ των γωνιών που σχηματίζονται όταν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από μια τρίτη;

Σχετικές θέσεις δύο ευθειών στο επίπεδο

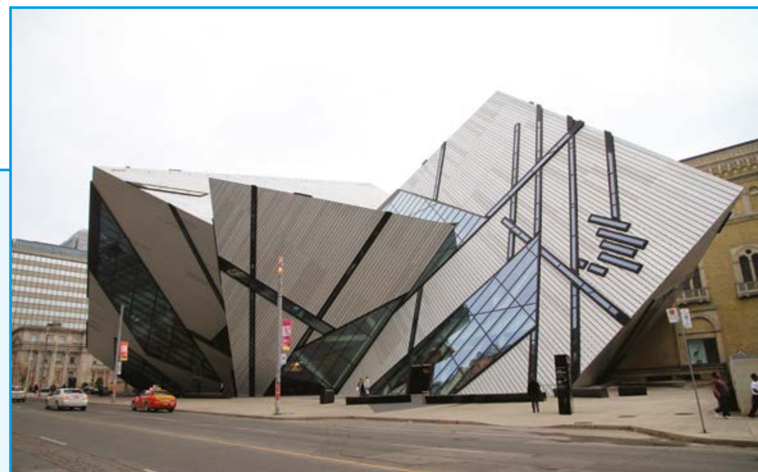
Εξερεύνηση

Στο Σχήμα 1 φαίνεται το Royal Ontario Museum στο Τορόντο του Καναδά. Παρατηρώντας την εικόνα μπορείτε να εντοπίσετε ευθείες που:

α. έχουν μοναδικό κοινό σημείο;

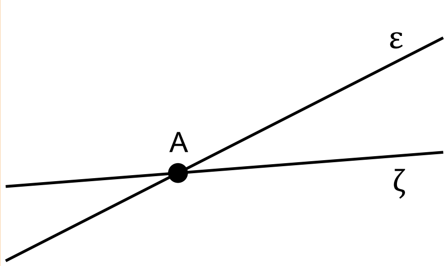
β. δεν έχουν κοινό σημείο;

γ. έχουν δύο ή περισσότερα κοινά σημεία;

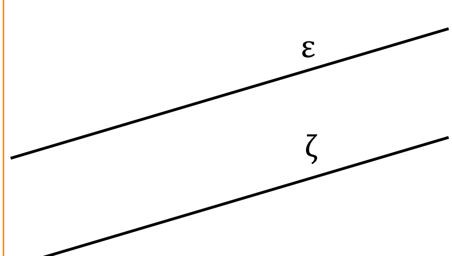


Σχήμα 1

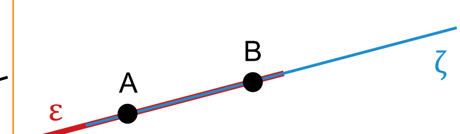
Οι ευθείες (ε) και (ζ) του Σχήματος 2α τέμνονται στο σημείο Α το οποίο είναι το μοναδικό κοινό τους σημείο.	Οι ευθείες (ε) και (ζ) του Σχήματος 2β δεν έχουν κοινό σημείο.	Δύο σημεία ορίζουν μοναδική ευθεία. Άρα οι ευθείες (ε) και (ζ) του Σχήματος 2γ ταυτίζονται επειδή έχουν δύο τουλάχιστον κοινά σημεία.



Σχήμα 2α



Σχήμα 2β



Σχήμα 2γ

Οι σχετικές θέσεις δύο ευθειών στο επίπεδο είναι οι εξής:

α. τέμνονται σε ένα σημείο

β. δεν έχουν κοινό σημείο

γ. ταυτίζονται

Ορισμός

Δύο ευθείες που είναι στο ίδιο επίπεδο και δεν έχουν κοινό σημείο λέγονται ***παράλληλες****.*

Δύο ευθείες του χώρου που δεν έχουν κοινό σημείο και δεν είναι στο ίδιο επίπεδο λέγονται **ασύμβατες**.

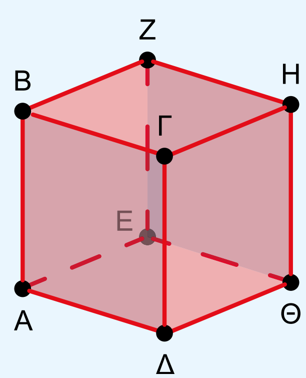
Εφαρμογή 1

Να προσδιορίσετε στον κύβο του σχήματος ζεύγη ευθειών που είναι:

α. παράλληλες

β. ασύμβατες

γ. τεμνόμενες



Σχήμα 3

Ένας διάλογος για την ύπαρξη παραλλήλων

Καθηγητής: Παιδιά, στην ευκλείδεια γεωμετρία ισχύει ότι από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται παράλληλη σε αυτή.

Μελέτης: Κύριε, αυτό δεν είναι προφανές; Αφού, ορίστε, έχω σχεδιάσει μία παράλληλη σε μια ευθεία.

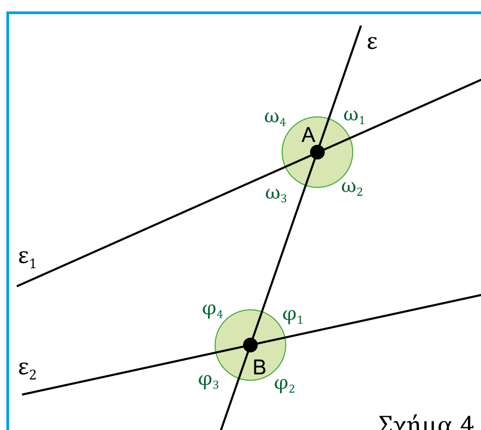
Σοφία: Και πώς είσαι σίγουρος ότι οι ευθείες που σχεδίασες δεν τέμνονται κάπου πολύ μακριά;

Καθηγητής: Η αλήθεια είναι ότι στα Μαθηματικά δεν βασιζόμαστε στη διαίσθησή μας. Υπάρχουν γεωμετρίες στις οποίες δεν υπάρχουν παράλληλες ευθείες, αλλά γι' αυτό το ζήτημα θα πούμε περισσότερα στο τέλος αυτού του κεφαλαίου.

Γωνίες που σχηματίζονται από δύο ευθείες τεμνόμενες από μια τρίτη

Στο Σχήμα 4 οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται από την ευθεία (ε) και θα συσχετίσουμε τις γωνίες ω με κορυφή το σημείο Α με τις γωνίες φ με κορυφή το σημείο Β. Οι γωνίες που είναι μεταξύ των ευθειών (ε_1) και (ε_2) λέγονται **εντός** των ευθειών αυτών, αλλιώς λέγονται **εκτός** των ευθειών αυτών.

Δύο γωνίες που είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία (ε) λέγονται **επί τα αυτά μέρη**, ενώ δύο γωνίες που είναι σε διαφορετικό ημιεπίπεδο ως προς την (ε) λέγονται **εναλλάξ**. Για παράδειγμα, οι γωνίες φ_1 και ω_3 λέγονται εντός εναλλάξ των ευθειών ε_1 και ε_2 που τέμνονται από την ευθεία (ε) και οι γωνίες φ_1 και ω_1 λέγονται εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των ευθειών (ε_1) και (ε_2) που τέμνονται από την ευθεία (ε).



Σχήμα 4

Εφαρμογή 2

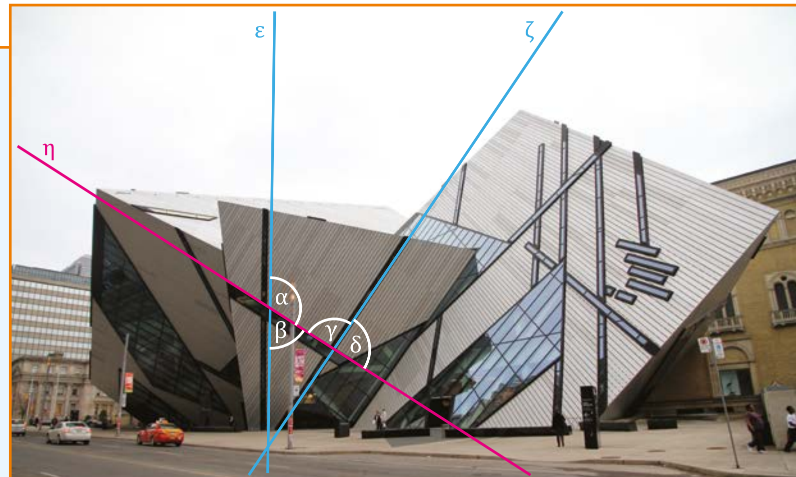
Στο Σχήμα 5 οι ευθείες (ε) και (ζ) τέμνονται από την ευθεία (η) και σχηματίζονται οι γωνίες α, β, γ, δ. Να βρείτε μεταξύ αυτών ζεύγη γωνιών που είναι:

α. εντός και εναλλάξ

β. εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη

γ. εντός και επί τα αυτά μέρη.

Να χαρακτηρίσετε αντίστοιχα στο ίδιο σχήμα τις γωνίες β και δ.



Σχήμα 5

Το 5ο Ευκλείδειο Αίτημα. Σχέσεις μεταξύ των γωνιών που σχηματίζονται όταν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη

Ιστορικά

Ορισμός παραλλήλων ευθειών στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη (κγ´ [23]).	Μετάφραση
Παράλληλοί εἰσιν εὐθεῖαι, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.	Παράλληλες είναι οι ευθείες που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και προεκτεινόμενες επ' άπειρον και προς τις δύο κατευθύνσεις δεν συναντά η μία την άλλη.

Με βάση τον ορισμό των παράλληλων ευθειών φαίνεται ότι, για να ελέγξουμε αν δύο ευθείες είναι παράλληλες ή τέμνονται, θα πρέπει να τις προεκτείνουμε, ίσως απεριόριστα. Είναι φανερό ότι μία τέτοια διαδικασία είναι ανεφάρμοστη και έτσι αναζητούμε άλλα κριτήρια με τα οποία να μπορούμε να ελέγχουμε αν δύο ευθείες είναι παράλληλες ή όχι.

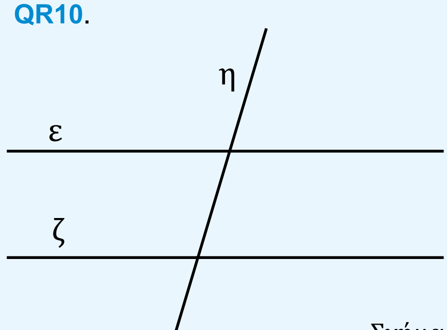
Το 5ο Αίτημα των *Στοιχείων* του Ευκλείδη είναι ένα τέτοιο κριτήριο: μας επιτρέπει να γνωρίζουμε ότι δύο ευθείες στο επίπεδο τέμνονται χωρίς να χρειάζεται να τις προεκτείνουμε μέχρι να βρούμε το σημείο τομής τους. Το 5ο Αίτημα, σε αντίθεση με τα υπόλοιπα, δεν φαίνεται προφανές και γι' αυτό, μέσα στους αιώνες που ακολούθησαν την εποχή του Ευκλείδη, πολλοί προσπάθησαν να το αποδείξουν βασιζόμενοι στα υπόλοιπα αιτήματα.

Οι προσπάθειες απόδειξης του 5ου Αιτήματος οδήγησαν τελικά σε κάποια αναπάντεχα αποτελέσματα, τα οποία θα δούμε στην ενότητα 1.3.

QR10

Εξερεύνηση

Στο Σχήμα 6 ποιες ευθείες θεωρείτε παράλληλες και ποιες τεμνόμενες; Είστε βέβαιοι σε κάθε περίπτωση για τον ισχυρισμό σας; Εξηγήστε. Να ελέγξετε τον ισχυρισμό σας στο **QR10**.



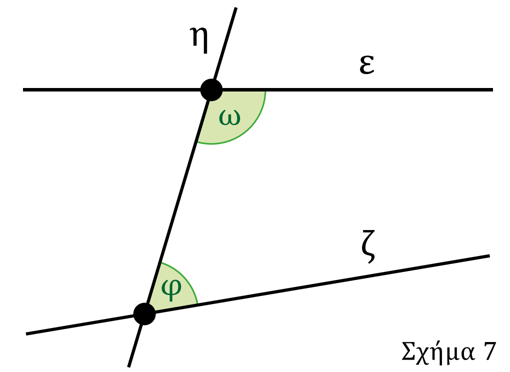
Σχήμα 6

5ο Ευκλείδειο Αίτημα

Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες με άθροισμα μικρότερο από 180°, τότε οι ευθείες τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας που βρίσκονται οι γωνίες αυτές.

Δηλαδή:

Οι γωνίες ω και φ του Σχήματος 7 είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των ευθειών (ε) και (ζ) που τέμνονται από την ευθεία (η). Αν ισχύει ότι $\omega + \varphi < 180°$, τότε οι ευθείες (ε) και (ζ) τέμνονται προς το μέρος της (η) που βρίσκονται οι γωνίες φ και ω.



Σχήμα 7

Εφαρμογή 3

Ο Μελέτης ισχυρίζεται ότι οι ευθείες που δίνονται στο (**QR11**) είναι παράλληλες. Χρησιμοποιήστε το 5ο Ευκλείδειο Αίτημα για να ελέγξετε τον ισχυρισμό του.

Οι Προτάσεις I, II και III που ακολουθούν αναφέρονται στις **σχέσεις μεταξύ των γωνιών που σχηματίζονται όταν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από μια τρίτη**. Όπως θα δούμε, οι αποδείξεις των προτάσεων αυτών βασίζονται στο 5ο Αίτημα.

QR11

Πρόταση I

Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από μια τρίτη, τότε οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες που σχηματίζονται είναι παραπληρωματικές.

Απόδειξη

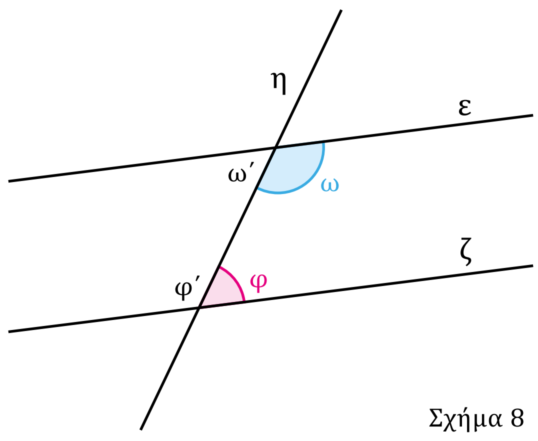
Έστω ότι οι παράλληλες ευθείες (ε) και (ζ) τεμνόμενες από την ευθεία (η) σχηματίζουν εντός και επί τα αυτά μέρη τις γωνίες ω και φ (Σχήμα 8).

Ισχυρισμός: $\omega + \varphi = 180°$.

Ας δούμε τι θα συνέβαινε αν ο ισχυρισμός δεν ίσχυε:

- Αν $\omega + \varphi < 180°$ τότε, σύμφωνα με το 5ο Ευκλείδειο Αίτημα, οι ευθείες (ε) και (ζ) τέμνονται, το οποίο είναι αδύνατο (άτοπο), αφού $\varepsilon \,//\, \zeta$.
- Αν $\omega + \varphi > 180°$ τότε οι παραπληρωματικές γωνίες ω΄ και φ΄ των ω και φ που είναι επίσης εντός και επί τα αυτά μέρη (Σχήμα 8) θα έχουν άθροισμα μικρότερο από 180° (αφού $\omega + \varphi + \omega' + \varphi' = 360°$), συνεπώς πάλι οι ευθείες (ε) και (ζ) τέμνονται, το οποίο είναι επίσης αδύνατο (άτοπο).

Συμπεραίνουμε ότι ο ισχυρισμός αληθεύει, δηλαδή $\omega + \varphi = 180°$.



Σχήμα 8

Μια σημαντική αποδεικτική μέθοδος: Απαγωγή σε άτοπο

Στην απόδειξη της Πρότασης Ι και συγκεκριμένα για να αποδείξουμε τον ισχυρισμό «$\omega + \varphi = 180°$», εφαρμόσαμε μια αποδεικτική μέθοδο που ονομάζεται **απαγωγή σε άτοπο**.

Αξίζει να σταθούμε σε αυτήν: Έστω ότι θέλουμε να αποδείξουμε πως ένας ισχυρισμός αληθεύει. Όταν εφαρμόζουμε τη **μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο, ξεκινάμε υποθέτοντας ότι ο ισχυρισμός δεν αληθεύει.** Αν στη συνέχεια, με λογικούς συλλογισμούς, **καταλήξουμε σε κάτι άτοπο (αδύνατο, αντίθετο με τις υποθέσεις μας, αντίθετο με κάτι ορθό)**, τότε συμπεραίνουμε ότι ο ισχυρισμός αληθεύει. Η απαγωγή σε άτοπο είναι βασική αποδεικτική μέθοδος στα Μαθηματικά, αλλά την εφαρμόζουμε συχνά και στους καθημερινούς μας συλλογισμούς, όπως, για παράδειγμα, στο **QR12**.

Πρόταση ΙΙ

Δύο παράλληλες ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες τους ίσες.

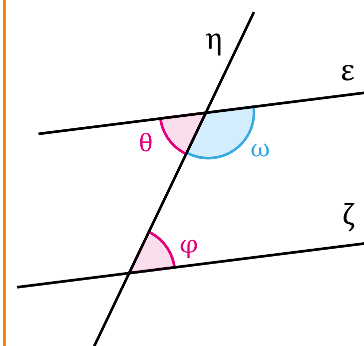
Δηλαδή: Αν $\varepsilon // \zeta$, τότε $\theta = \varphi$ (Σχήμα 9).

Απόδειξη

Στο Σχήμα 9 οι γωνίες θ και φ είναι εντός εναλλάξ των παράλληλων ευθειών (ε) και (ζ) που τέμνονται από την ευθεία (η). Θα δείξουμε ότι $\theta = \varphi$.

Επειδή οι γωνίες ω και φ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων (ε) και (ζ), ισχύει ότι $\omega + \varphi = 180°$. Όμως οι γωνίες ω και θ είναι παραπληρωματικές, δηλαδή $\omega + \theta = 180°$.

Άρα $\theta = \varphi$.

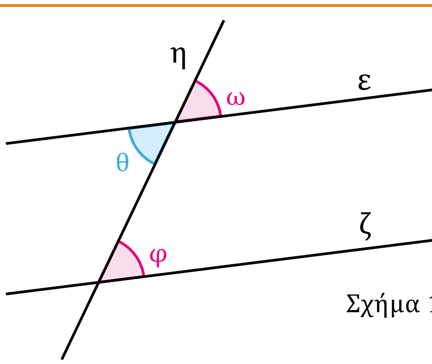


Σχήμα 9

QR12

Πρόταση ΙΙΙ

Δύο παράλληλες ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν τις εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες τους ίσες.



Σχήμα 10

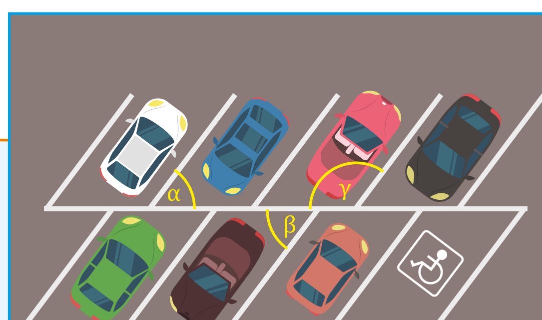
Δηλαδή: Αν $\varepsilon // \zeta$, τότε $\omega = \varphi$ (Σχήμα 10).

Απόδειξη

Στο Σχήμα 10 οι γωνίες φ και ω είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παράλληλων ευθειών (ε) και (ζ) που τέμνονται από την ευθεία (η). Θα δείξουμε ότι $\varphi = \omega$.
Οι γωνίες φ και θ είναι ίσες ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων (ε) και (ζ). Όμως $\omega = \theta$ ως κατακορυφήν, άρα $\omega = \varphi$.

Εφαρμογή 4 – Χώρος στάθμευσης

Στο Σχήμα 11 οι θέσεις στάθμευσης ορίζονται με παράλληλες ευθείες. Αν το μέτρο της γωνίας α είναι 54°, να βρείτε τις γωνίες β και γ.



Σχήμα 11

Μοναδικότητα παράλληλης από σημείο εκτός ευθείας

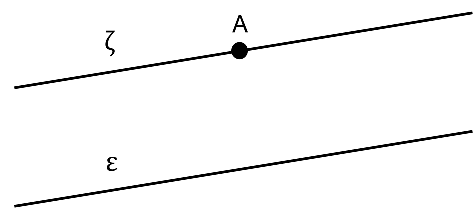
Πρόταση IV ***Από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μοναδική παράλληλη σε αυτή.***

Δηλαδή, αν το σημείο Α είναι εκτός της ευθείας (ε), τότε υπάρχει μοναδική ευθεία (ζ) που διέρχεται από το Α και είναι παράλληλη στην (ε).

Η Πρόταση IV χαρακτηρίζει την ευκλείδεια γεωμετρία. Η απόδειξή της (QR13) βασίζεται στο 5ο Ευκλείδειο Αίτημα.

Μάλιστα, η Πρόταση IV αναφέρεται και ως **«Αίτημα Παραλληλίας»**, γιατί θα μπορούσε να αντικαταστήσει το 5ο Ευκλείδειο Αίτημα. Στην ενότητα 1.3 θα δούμε τι θα σήμαινε για τη Γεωμετρία μια διαφορετική απάντηση ως προς το πλήθος των παραλλήλων από σημείο εκτός ευθείας.

QR13



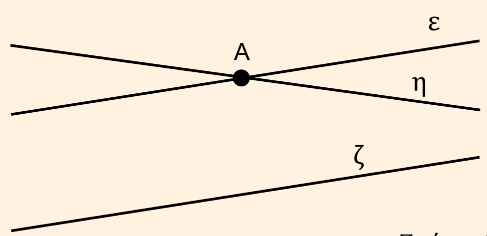
Σχήμα 12

Πόρισμα 1 ***Αν μια ευθεία τέμνει μια άλλη ευθεία, τότε θα τέμνει και οποιαδήποτε παράλληλη αυτής.***

Δηλαδή: Αν ε // ζ και η ευθεία (η) τέμνει την (ε) τότε θα τέμνει και την ευθεία (ζ) (Σχήμα 13).

Πράγματι: Έστω Α το σημείο τομής των (η) και (ε).

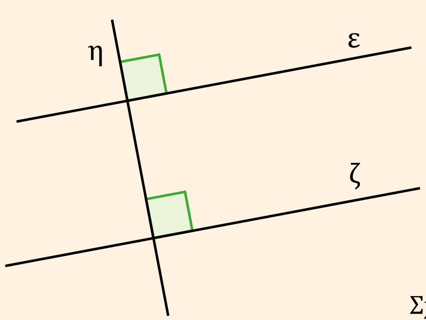
Με στόχο να καταλήξουμε σε άτοπο, υποθέτουμε ότι η (η) δεν τέμνει τη (ζ), οπότε η // ζ. Τότε από το σημείο Α θα διέρχονται δύο ευθείες παράλληλες προς τη (ζ). Αυτό είναι άτοπο, γιατί έρχεται σε αντίφαση με τη μοναδικότητα της παράλληλης από σημείο εκτός ευθείας. Συμπεραίνουμε ότι η (η) τέμνει τη (ζ).



Σχήμα 13

Πόρισμα 2 ***Αν μια ευθεία είναι κάθετη σε μία από δύο παράλληλες ευθείες, τότε είναι κάθετη και στην άλλη.***

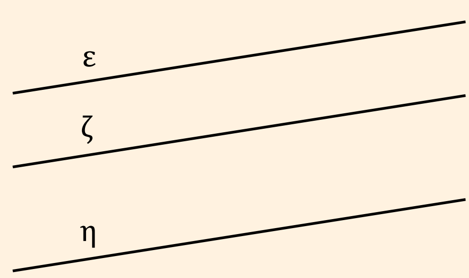
Δηλαδή: Αν ε // ζ και η ⊥ ε, τότε η ⊥ ζ .



Σχήμα 14

Πόρισμα 3 ***Δύο ευθείες που είναι παράλληλες σε μια τρίτη ευθεία είναι και μεταξύ τους παράλληλες.***

Δηλαδή: Αν ε // ζ και ε // η τότε ζ // η.



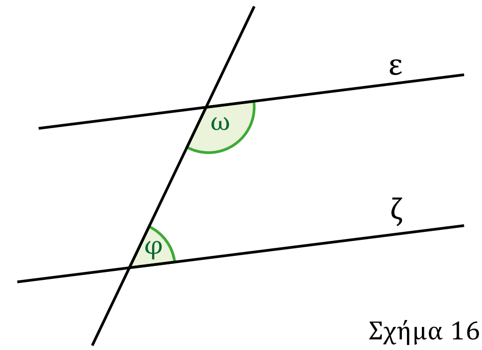
Σχήμα 15

Κριτήρια παραλληλίας

Έχουμε αναφέρει ότι το 5ο Αίτημα αποτελεί ένα κριτήριο που εξασφαλίζει ότι δύο ευθείες τέμνονται.
Στη συνέχεια θα δούμε αντίστοιχα κριτήρια παραλληλίας δύο ευθειών, τα οποία βασίζονται σε συνθήκες που μπορούμε να ελέγξουμε σε μια περιορισμένη περιοχή του επιπέδου, αποφεύγοντας την ατέρμονη διαδικασία προέκτασης των ευθειών που απαιτείται από τον ορισμό της παραλληλίας.

Πρόταση V

Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές, τότε οι ευθείες αυτές είναι παράλληλες.



Σχήμα 16

Δηλαδή: Αν $\varphi + \omega = 180°$ τότε ε//ζ (Σχήμα 16).

Αντίστροφη μιας πρότασης

Όταν έχουμε μία πρόταση Π της μορφής «Αν ισχύει το Α, τότε ισχύει το Β», τότε η **αντίστροφη** της Π είναι η πρόταση Π΄: «Αν ισχύει το Β, τότε ισχύει το Α».

Παρατηρήστε ότι η Πρόταση V είναι η αντίστροφη της Πρότασης I.

Επισημαίνεται ότι μία πρόταση μπορεί να αληθεύει αλλά η αντίστροφή της να μην αληθεύει. Για παράδειγμα, η πρόταση «Αν δύο γωνίες είναι κατακορυφήν, τότε είναι ίσες» είναι αληθής, αλλά η αντίστροφή της «Αν δύο γωνίες είναι ίσες, τότε είναι κατακορυφήν» δεν είναι αληθής.

Στην περίπτωση που και η πρόταση Π και η αντίστροφή της αληθεύουν, τότε μπορούμε να τις συνθέσουμε σε μία πρόταση λέγοντας:

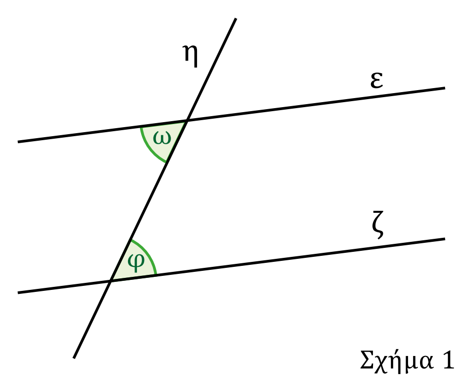
«Το Α ισχύει **αν και μόνο αν** ισχύει το Β».

Έτσι, συνδυάζοντας τις Προτάσεις I και V, έχουμε την ακόλουθη πρόταση:
Όταν δύο ευθείες (ε) και (ζ) τέμνονται από μια τρίτη ευθεία, τότε οι (ε) και (ζ) είναι παράλληλες αν και μόνο αν οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες που σχηματίζονται είναι παραπληρωματικές.

Με βάση το πρώτο κριτήριο παραλληλίας (Πρόταση V) αποδεικνύονται και τα ακόλουθα κριτήρια (Προτάσεις VI, VII):

Πρόταση VI

Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, τότε οι ευθείες αυτές είναι παράλληλες.

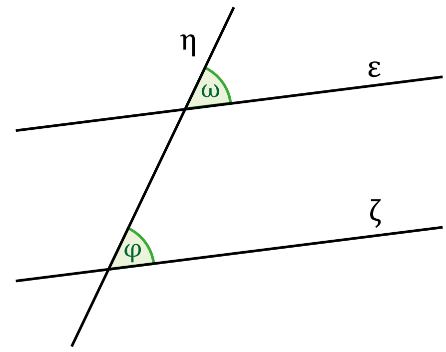


Σχήμα 17

Δηλαδή: Αν $\varphi = \omega$, τότε ε // ζ (Σχήμα 17).

Πρόταση VII

Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες, τότε οι ευθείες αυτές είναι παράλληλες.



Σχήμα 18

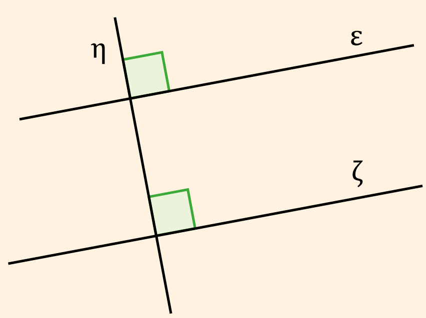
Δηλαδή: Αν φ = ω τότε ε // ζ (Σχήμα 18).

Παρατήρηση. Καθεμιά από τις Προτάσεις VI και VII είναι η αντίστροφη κάποιας πρότασης που είδαμε νωρίτερα. Βρείτε τις αντίστοιχες προτάσεις.

Πόρισμα 1

Αν δύο ευθείες είναι κάθετες σε μια τρίτη ευθεία, τότε οι ευθείες αυτές είναι παράλληλες.

Δηλαδή: Αν ε ⊥ η και ζ ⊥ η τότε ε // ζ.



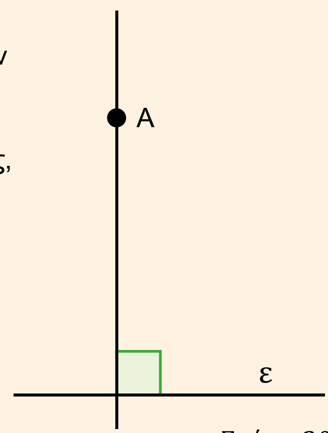
Σχήμα 19

Πόρισμα 2

Μοναδικότητα κάθετης

Η κάθετη που φέρεται προς μια ευθεία από σημείο εκτός αυτής, είναι μοναδική.

Πράγματι:
Αν από το Α διέρχονταν δύο κάθετες προς την (ε), τότε αυτές θα ήταν μεταξύ τους παράλληλες, το οποίο είναι άτοπο, αφού τέμνονται στο Α.



Σχήμα 20

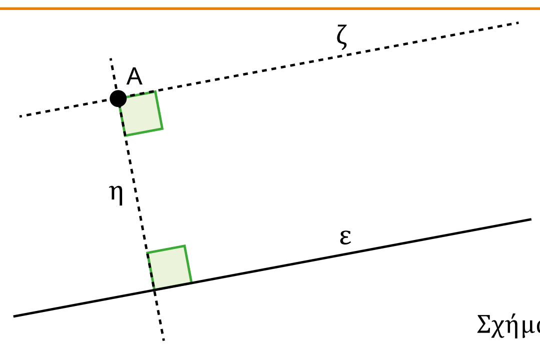
Το Πόρισμα 1 μας δίνει έναν απλό τρόπο κατασκευής μιας ευθείας παράλληλης σε δεδομένη:

Κατασκευή παράλληλης σε ευθεία από σημείο εκτός αυτής

Έστω ευθεία (ε) και ένα σημείο Α εκτός αυτής.

Για να κατασκευάσουμε ευθεία παράλληλη στην (ε), η οποία διέρχεται από το σημείο Α, φέρουμε από το Α ευθεία (η) κάθετη στην (ε) και στη συνέχεια πάλι από το Α φέρουμε ευθεία (ζ) κάθετη στην (η).

Τότε είναι ζ // ε (Σχήμα 21).



Σχήμα 21

Εφαρμογές

Εφαρμογή 5

Κατασκευή παράλληλης με συγκεκριμένα εργαλεία

Να σχεδιάσετε την παράλληλη μιας ευθείας στο **QR14**:

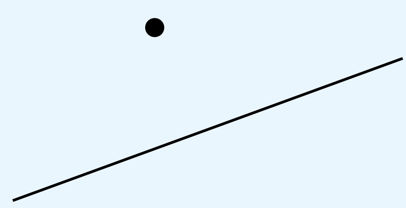
QR14

Εφαρμογή 6

Κατασκευή παράλληλης με χαρτοδιπλωτική

Σε ένα κομμάτι χαρτί σχεδιάζουμε μία ευθεία και ένα σημείο εκτός αυτής. Με διαδοχικές διπλώσεις του χαρτιού να σχεδιάσετε μία ευθεία παράλληλη στη δοθείσα που διέρχεται από το σημείο αυτό.

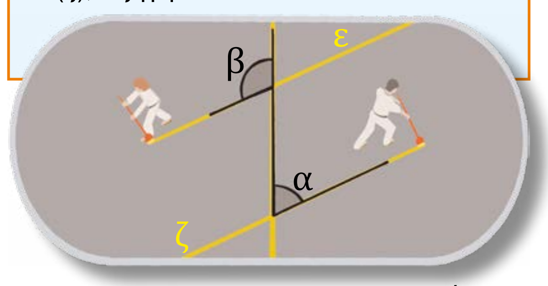
Να αιτιολογήσετε την κατασκευή σας.



Σχήμα 22

Εφαρμογή 7

Στο Σχήμα 23, δύο εργάτες σχεδιάζουν τις γραμμές για έναν υπαίθριο χώρο στάθμευσης. Αν η γωνία α είναι 65° και η γωνία β είναι 115°, τι συμπεραίνετε για τις γραμμές (ε) και (ζ); Εξηγήστε.



Σχήμα 23

Εφαρμογή 8

Συνευθειακά σημεία

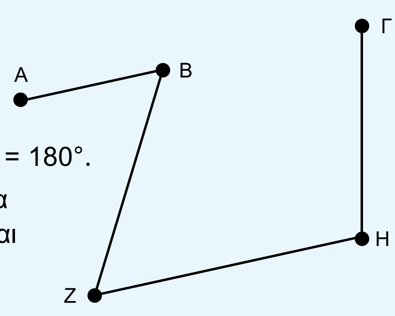
Για να αποδείξουμε ότι τρία σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά, αρκεί να αποδείξουμε ένα από τα παρακάτω:

α. οι ευθείες ΑΒ και ΒΓ είναι παράλληλες σε μία τρίτη ευθεία (ε) (γιατί;)

β. $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma = 180°$.

Στο Σχήμα 24 είναι
$\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{Z} = \mathrm{B}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{H}$ και $\mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{H} + \mathrm{Z}\hat{\mathrm{H}}\Gamma = 180°$.

Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά και με τους δύο τρόπους.



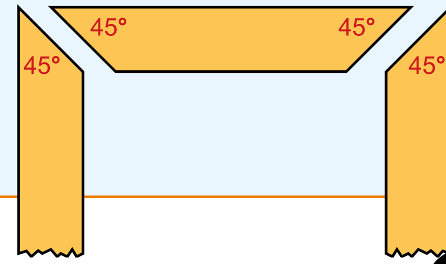
Σχήμα 24

Εφαρμογή 9

Η κάσα της πόρτας

Ένας μαραγκός, για να φτιάξει την κάσα μιας πόρτας, κόβει τα άκρα των ξύλων του πάνω μέρους και των όρθιων μερών ώστε να σχηματίζουν γωνίες 45°, όπως φαίνεται στο Σχήμα 25. Είναι τα όρθια μέρη παράλληλα μεταξύ τους; Εξηγήστε.

Σχήμα 25



Εφαρμογή 10

Αν στο Σχήμα 26 οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ είναι παράλληλες και οι γωνίες α και γ είναι ίσες, να αποδείξετε ότι οι ευθείες $ζ_1$ και $ζ_2$ είναι παράλληλες.

Δηλαδή:
Αν $ε_1 // ε_2$ και $α = γ$ τότε $ζ_1 // ζ_2$.

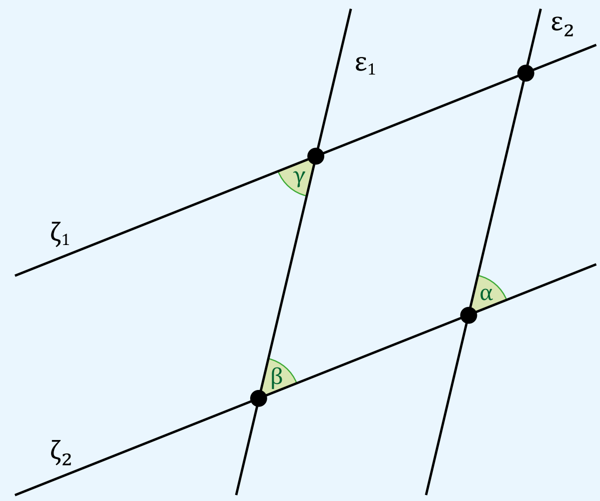
Παρακάτω δίνουμε τα βήματα της απόδειξης. Αναπτύξτε την απόδειξη, συμπληρώνοντας τις αιτιολογήσεις που λείπουν.

Σκέψη: Για να είναι $ζ_1 // ζ_2$ αρκεί $β = γ$.

Βήμα1ο: Είναι $ε_1 // ε_2$ άρα $β = α$ (1).

Βήμα 2ο: Ισχύει $α = γ$ (2) από υπόθεση.

Βήμα 3ο: Από (1) και (2) προκύπτει: $β = γ$.



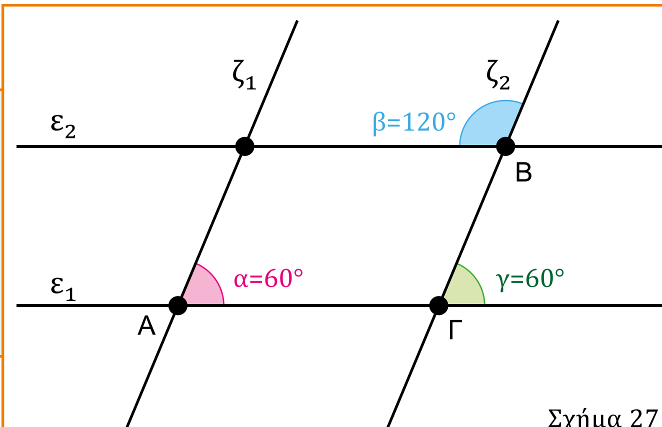
Σχήμα 26

Γωνίες με πλευρές παράλληλες

Εξερεύνηση

Ο Μελέτης ισχυρίζεται ότι δύο γωνίες με πλευρές παράλληλες είναι πάντα ίσες.

Η Σοφία υποστηρίζει ότι ο Μελέτης κάνει λάθος και, για να του το αποδείξει, σχεδιάζει το Σχήμα 27, στο οποίο $ε_1 // ε_2$ και $ζ_1 // ζ_2$, αλλά $α \neq β$.



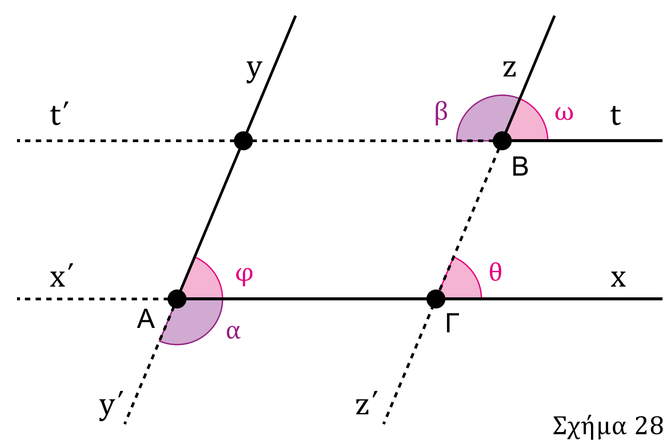
Σχήμα 27

Όταν θέλουμε να αποδείξουμε ότι ένας γενικός ισχυρισμός δεν αληθεύει, αρκεί, όπως έκανε η Σοφία, να βρούμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα στο οποίο ισχύουν οι προϋποθέσεις του ισχυρισμού, αλλά δεν ισχύει το συμπέρασμά του. Ένα τέτοιο παράδειγμα λέγεται **αντιπαράδειγμα**.

Παρατηρώντας πιο προσεκτικά το σχήμα η Σοφία και ο Μελέτης κατέληξαν στις παρακάτω προτάσεις:

Πρόταση VIII Α

Δύο οξείες γωνίες με τις πλευρές τους παράλληλες μία προς μία είναι ίσες.



Σχήμα 28

Απόδειξη: Θεωρούμε τις οξείες γωνίες $x\hat{A}y = φ$ και $t\hat{B}z = ω$ του Σχήματος 28 που έχουν τις πλευρές τους παράλληλες.

Προεκτείνοντας κατάλληλα τις πλευρές των γωνιών, βλέπουμε ότι:

Οι ευθείες $x'x$ και $z'z$ τέμνονται στο Γ και ισχύει:

- $φ = θ$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $y'y$ και $z'z$ με τέμνουσα τη $x'x$
- $θ = ω$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $x'x$ και $t't$ με τέμνουσα τη $z'z$.

Συμπεραίνουμε ότι $φ = ω$.

Πρόταση VIII Β

Δύο αμβλείες γωνίες με τις πλευρές τους παράλληλες μία προς μία είναι ίσες.

Πράγματι: Οι αμβλείες γωνίες α και β του Σχήματος 28 είναι παραπληρωματικές των γωνιών φ και ω αντίστοιχα. Αφού, σύμφωνα με το (Α), ισχύει $φ = ω$, συμπεραίνουμε ότι $α = β$.

Πρόταση VIII Γ

Μία οξεία γωνία και μία αμβλεία γωνία με τις πλευρές τους παράλληλες μία προς μία είναι παραπληρωματικές.

Πράγματι: Η οξεία γωνία φ και η αμβλεία γωνία β στο Σχήμα 28 είναι παραπληρωματικές επειδή $φ = ω$ (από το Α) και $β + ω = 180°$.

Εφαρμογή 11

Στο Σχήμα 29 οι θέσεις στάθμευσης ορίζονται με παράλληλες ευθείες.

Αν το μέτρο της γωνίας α είναι 115°, να βρείτε τις γωνίες β και γ.

Σχήμα 29

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Δίνονται τρεις ευθείες στο επίπεδο. Εξετάστε ποια από τα παρακάτω είναι δυνατό να συμβαίνουν και ποια όχι. Κάντε σχήμα για όσα είναι δυνατά.

α. Καμιά από τις ευθείες δεν τέμνει τις άλλες δύο.
β. Οι τρεις ευθείες διέρχονται από το ίδιο σημείο.
γ. Οι τρεις ευθείες τέμνονται ανά δύο.
δ. Δύο ευθείες τέμνονται, ενώ η τρίτη δεν τέμνει καμία από αυτές.
ε. Δύο ευθείες τέμνονται και η τρίτη τέμνει μόνο μία από αυτές.

2 Έλεγχος ισχυρισμού

Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ).

α. Δύο παράλληλες ευθείες τεμνόμενες από τρίτη ευθεία σχηματίζουν τις εκτός εναλλάξ γωνίες τους ίσες.

β. Δύο γωνίες με πλευρές παράλληλες είναι ίσες.

γ. Δύο ευθείες που είναι κάθετες στην ίδια ευθεία είναι και μεταξύ τους κάθετες.

δ. Δύο διαφορετικές ευθείες που είναι κάθετες στην ίδια ευθεία δεν έχουν κοινό σημείο.

ε. Δύο αμβλείες γωνίες με πλευρές παράλληλες είναι ίσες.

στ. Δύο παράλληλες ευθείες τεμνόμενες από τρίτη ευθεία σχηματίζουν τις εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες τους ίσες.

ζ. Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες τους ίσες, τότε οι ευθείες αυτές είναι παράλληλες.

3 Αν δύο ευθείες είναι παράλληλες και τέμνονται από μία τρίτη (όχι κάθετα), ποια από τις παρακάτω προτάσεις **δεν** είναι αληθής;

α. Οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες.

β. Όλες οι αμβλείες γωνίες είναι ίσες.

γ. Οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες είναι ίσες.

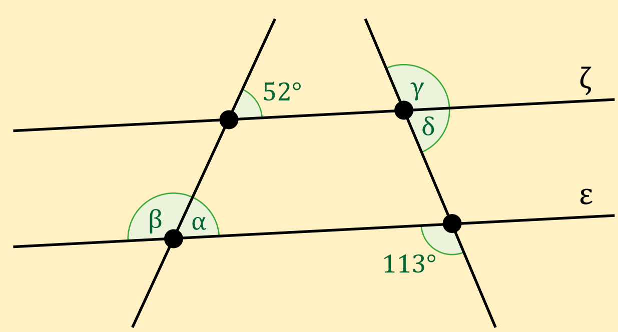
δ. Οι οξείες γωνίες είναι ίσες.

ε. Κάθε οξεία με κάθε αμβλεία γωνία είναι παραπληρωματικές.

4 Να συμπληρώσετε με τέσσερις διαφορετικούς τρόπους την πρόταση που ακολουθεί, ώστε να πάρετε αληθείς προτάσεις:

Δίνονται δύο ευθείες ($ε_1$) και ($ε_2$) που τέμνονται από μια τρίτη ευθεία (ζ). Οι ευθείες ($ε_1$) και ($ε_2$) είναι παράλληλες αν και μόνο αν...

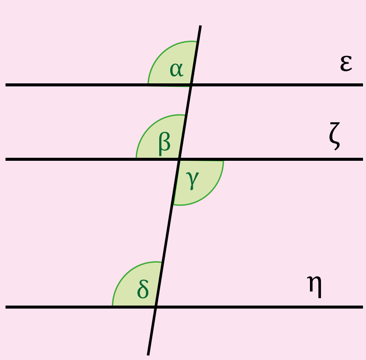
5 Αν οι ευθείες (ε) και (ζ) του παρακάτω σχήματος είναι παράλληλες, να υπολογίσετε τις γωνίες α, β, γ και δ.



6 Να συμπληρώσετε την απόδειξη.

Δεδομένα: ε // ζ, γ = δ
Ζητούμενο: ε // η

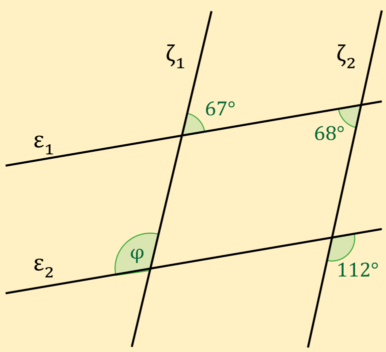
Μπορείτε να δώσετε και μια διαφορετική, πιο σύντομη απόδειξη;



Απόδειξη	
Δηλώσεις	Αιτιολογήσεις
1. ε // ζ	;
2. α = β	;
3. β = γ	;
4. ;	από (2) και (3)
5. ;	Δεδομένα
6. α = δ	;
7. ;	;

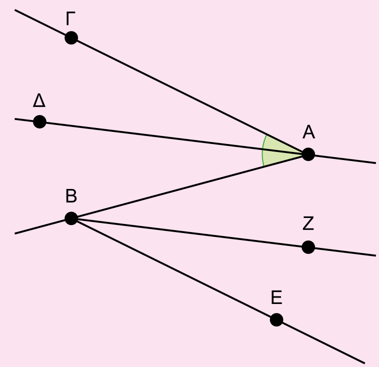
7 Στο παρακάτω σχήμα ποιες ευθείες είναι παράλληλες μεταξύ τους και ποιες είναι τεμνόμενες;

Αιτιολογήστε την απάντησή σας. Στη συνέχεια, βρείτε το μέτρο της γωνίας φ.

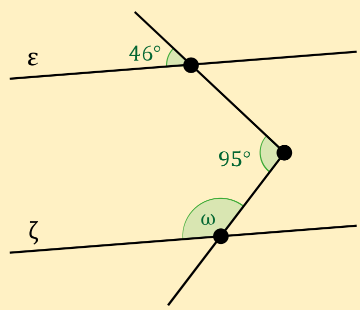


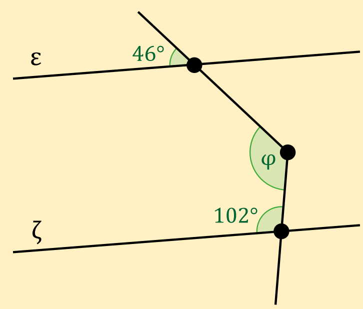
8 Στο διπλανό σχήμα είναι $ΑΓ \parallel ΒΕ$, ΑΔ διχοτόμος της γωνίας $Β\hat{Α}Γ$ και $ΒΖ \parallel ΑΔ$.

Να αποδείξετε ότι η ΒΖ είναι διχοτόμος της γωνίας $Α\hat{Β}Ε$.

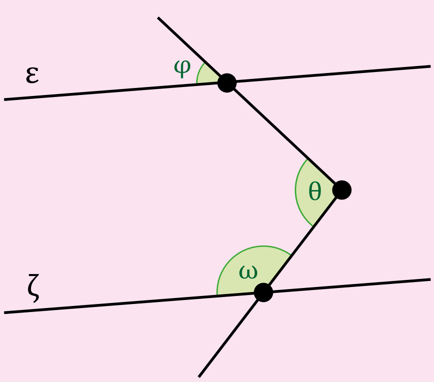


9 Αν οι ευθείες (ε) και (ζ) στα παρακάτω σχήματα είναι παράλληλες, να υπολογίσετε τις γωνίες φ και ω.

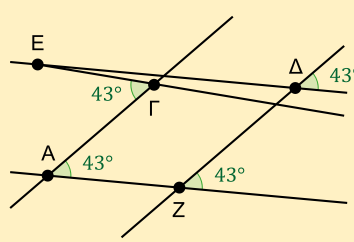




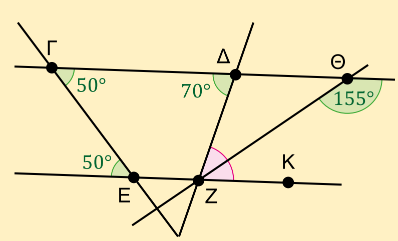
10 Αν οι ευθείες (ε) και (ζ) στο παρακάτω σχήμα είναι παράλληλες, να βρείτε μια σχέση που εκφράζει τη γωνία θ σε σχέση με τις γωνίες φ και ω.



11 Να εντοπίσετε από ένα λάθος σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα.



Η ΖΘ είναι η διχοτόμος της γωνίας ΔΖΚ



12 Δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από μια τρίτη ευθεία.

Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι δύο εντός εναλλάξ γωνιών είναι παράλληλες.

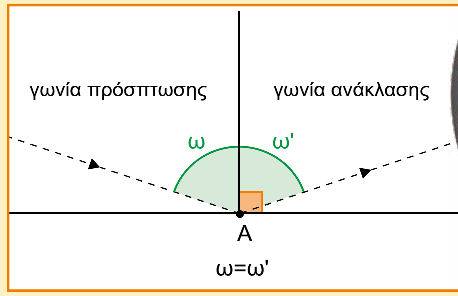
13 **Σύνδεση με την τέχνη**

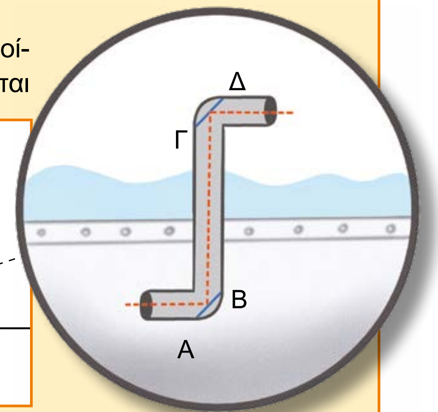
Στο **QR15** θα δείτε τρεις πίνακες ζωγραφικής στους οποίους κυριαρχούν οι παράλληλες ευθείες.

Βρείτε και άλλους τέτοιους πίνακες και δημιουργήστε τις δικές σας σχετικές συνθέσεις.

QR15

14 Ένα περισκόπιο αποτελείται από δύο καθρέφτες ΑΒ και ΓΔ οι οποίοι είναι στερεωμένοι στις δύο γωνίες ενός σωλήνα όπως αυτός που φαίνεται στο διπλανό σχήμα και σχηματίζουν γωνία 45° με το οριζόντιο επίπεδο. Αν θεωρήσουμε ότι η γωνία πρόσπτωσης μιας οπτικής ακτίνας είναι ίση με τη γωνία ανάκλασης, να αποδείξετε ότι ο παρατηρητής του καθρέφτη ΑΒ έχει τη δυνατότητα να βλέπει αντικείμενα που βρίσκονται στην επιφάνεια της θάλασσας.





1.2 Άθροισμα γωνιών τριγώνου και κυρτού πολυγώνου

Βασικά ερωτήματα της ενότητας

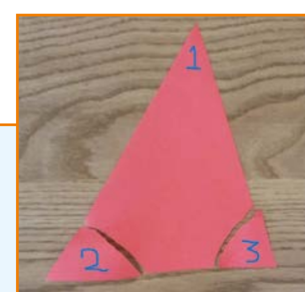
- Πώς μπορούμε να δείξουμε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι πάντα το ίδιο;
- Πώς συνδέεται το άθροισμα των γωνιών ενός κυρτού πολυγώνου με το πλήθος των πλευρών του;

Άθροισμα γωνιών τριγώνου

Εξερεύνηση

Σε ένα χάρτινο τρίγωνο κόψτε τις δύο γωνίες του και τοποθετήστε τες ώστε οι τρεις γωνίες του τριγώνου να γίνουν διαδοχικές (Σχήμα 30).

Να κάνετε μια εικασία για το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου.



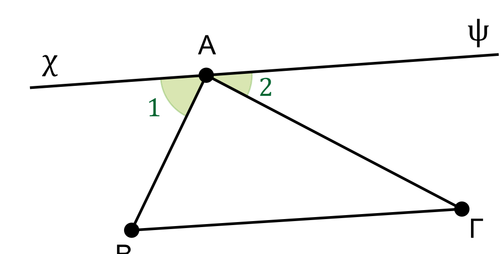
Σχήμα 30

Πρόταση Ι *Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι μια ευθεία γωνία.*

Σχέδιο απόδειξης:

- Για να βρούμε γεωμετρικά το άθροισμα γωνιών πρέπει να τις κάνουμε διαδοχικές.
- Θα βρούμε, λοιπόν, γωνίες ίσες με τις Β και Γ που είναι διαδοχικές με την Α.

  Για να το πετύχουμε, σχεδιάζουμε την ευθεία χψ που είναι παράλληλη της ΒΓ και διέρχεται από το Α (Σχήμα 31).



Σχήμα 31

Απόδειξη

Δηλώσεις	Αιτιολογήσεις
1. Ευθεία $x\psi \parallel B\Gamma$	από κατασκευή
2. $\hat{B} = \hat{A}_1$	εντός εναλλάξ, $x\psi \parallel B\Gamma$, με τέμνουσα την ΑΒ
3. $\hat{\Gamma} = \hat{A}_2$	εντός εναλλάξ, $x\psi \parallel B\Gamma$, με τέμνουσα την ΑΓ
4. $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = \hat{A} + \hat{A}_1 + \hat{A}_2$	από (2) και (3)
5. $\hat{A} + \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = x\hat{A}\psi$	από κατασκευή
6. $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = x\hat{A}\psi = 180°$	από (4) και (5)

Παρατηρήσεις

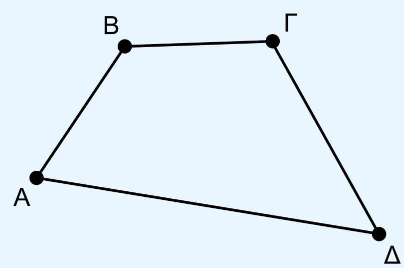
1. Με την προηγούμενη πρόταση δείξαμε ότι το άθροισμα των μέτρων των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 180°.
2. Μια ευθεία που δεν περιλαμβάνεται στη διατύπωση μιας πρότασης και τη φέρουμε εμείς για τις ανάγκες της απόδειξης, όπως εδώ τη χψ, λέγεται *βοηθητική ευθεία*.

Πόρισμα ***Ένα τρίγωνο μπορεί να έχει το πολύ μία ορθή ή μία αμβλεία γωνία.***

Εφαρμογή 1

Άθροισμα γωνιών τετραπλεύρου

Να φέρετε κατάλληλη βοηθητική ευθεία για να βρείτε το άθροισμα των γωνιών ενός τετραπλεύρου.

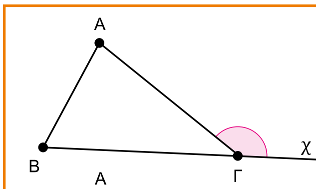


Σχήμα 32

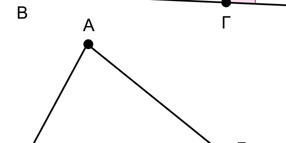
Εξωτερικές γωνίες τριγώνου

Οποιαδήποτε εφεξής και παραπληρωματική γωνίας τριγώνου λέγεται **εξωτερική** γωνία του τριγώνου.

Για παράδειγμα, η εξωτερική γωνία με κορυφή Γ σχηματίζεται είτε από την πλευρά ΓΑ και την προέκταση Γχ της ΒΓ (Σχήμα 33α) είτε από την πλευρά ΓΒ και την προέκταση Γy της ΑΓ (Σχήμα 33β). Αυτές οι δύο γωνίες, ως παραπληρωματικές της $\hat{\Gamma}$, είναι ίσες, οπότε συμβολίζουμε οποιαδήποτε από αυτές με $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}$ και ισχύει $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = 180° - \hat{\Gamma}$.



Σχήμα 33α



Σχήμα 33β

Πορίσματα

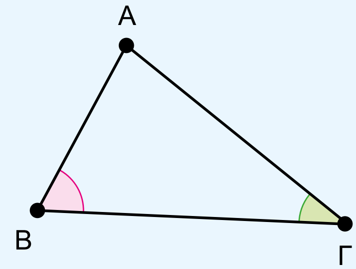
1. **Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι γωνιών του τριγώνου.**
   Πράγματι: Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180°$, δηλαδή $\hat{A} + \hat{B} = 180° - \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}$

2. **Το άθροισμα των μέτρων των εξωτερικών γωνιών του τριγώνου είναι 360°.**
   Πράγματι: Με βάση το 1, είναι
   $\hat{A}_{\varepsilon\xi} + \hat{B}_{\varepsilon\xi} + \hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = (\hat{B} + \hat{\Gamma}) + (\hat{A} + \hat{\Gamma}) + (\hat{A} + \hat{B}) = 2(\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma}) = 2 \cdot 180° = 360°$

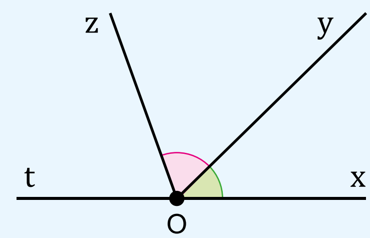
Εφαρμογή 2

Στο Σχήμα 34α δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και στο Σχήμα 34β ισχύει ότι $x\hat{O}y = \hat{\Gamma}$ και $z\hat{O}y = \hat{B}$.

Να βρείτε με ποια γωνία του Σχήματος 34β είναι ίση καθεμιά από τις γωνίες: $\hat{A}$, $\hat{A}_{εξ}$, $\hat{\Gamma}_{εξ}$.



Σχήμα 34α



Σχήμα 34β

Γωνίες με κάθετες πλευρές

Εξερεύνηση

Καθηγητής: Παιδιά, θα ήθελα να σκεφτείτε αν ισχύει ότι «Δύο γωνίες με τις πλευρές τους κάθετες είναι ίσες».

Μελέτης: Πρέπει να ισχύει. Νομίζω ότι το είπαμε και στη Φυσική, στο κεκλιμένο επίπεδο.

Σοφία: Ναι, αλλά εκεί οι γωνίες ήταν οξείες.

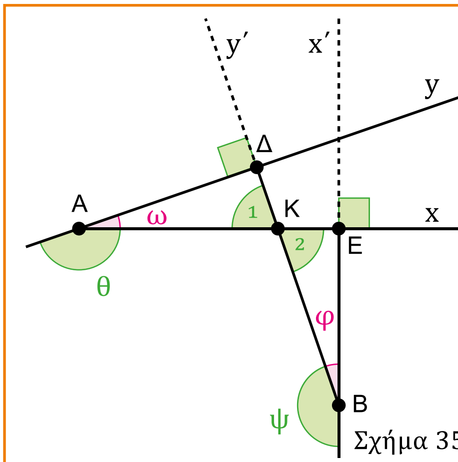
Καθηγητής: Σκεφτείτε ξανά το ερώτημα με βάση το Σχήμα 35 για να βρείτε τις σχέσεις γωνιών με κάθετες πλευρές.

Η Σοφία και ο Μελέτης καταλήγουν στα παρακάτω συμπεράσματα:

Πρόταση ΙΙ Α ***Δύο οξείες γωνίες με πλευρές σε κάθετες ευθείες είναι ίσες.***

Απόδειξη

Έστω δύο οξείες γωνίες $x\hat{A}y = ω$ και $x'\hat{B}y' = φ$ με $Ax \perp Bx'$ και $Ay \perp By'$.
Τα τρίγωνα ΑΚΔ και ΒΚΕ έχουν $\hat{\Delta} = \hat{E} = 90°$ και $\hat{K}_1 = \hat{K}_2$ (κατακορυφήν).
Στο τρίγωνο ΑΚΔ ισχύει $ω = 90° - \hat{K}_1$ και στο τρίγωνο ΒΓΕ ισχύει $φ = 90° - \hat{K}_2$. Άρα $φ = ω$.



Σχήμα 35

Πρόταση ΙΙ Β ***Δύο αμβλείες γωνίες με πλευρές σε κάθετες ευθείες είναι ίσες.***

Απόδειξη: Θεωρούμε τις γωνίες θ και ψ που είναι οι παραπληρωματικές των ω και φ αντίστοιχα (Σχήμα 35) και έχουν τις πλευρές τους κάθετες.

Αφού $ω = φ$, είναι και $θ = ψ$ ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών.

Πρόταση ΙΙ Γ ***Μία οξεία και μία αμβλεία γωνία με πλευρές σε κάθετες ευθείες είναι παραπληρωματικές.***

Απόδειξη: Θεωρούμε τις γωνίες θ και φ οι οποίες έχουν τις πλευρές τους κάθετες και η θ είναι αμβλεία ενώ η φ είναι οξεία. Είναι $θ = 180° - ω$ και $ω = φ$.

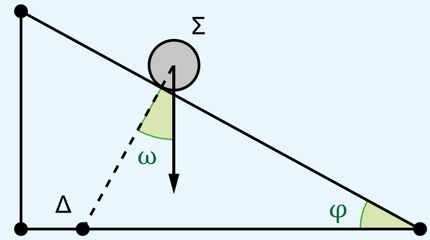
Άρα $θ = 180° - φ$, δηλαδή $θ + φ = 180°$.

Εφαρμογές

Εφαρμογή 3

Γωνίες στο κεκλιμένο επίπεδο

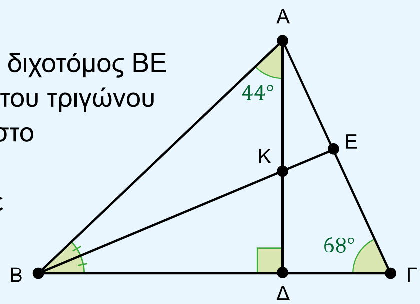
Ένα σώμα Σ βρίσκεται σε κεκλιμένο επίπεδο που σχηματίζει γωνία φ με το οριζόντιο επίπεδο. Το βάρος του σώματος είναι κάθετο στο οριζόντιο επίπεδο και σχηματίζει γωνία ω με τη ΣΔ που είναι κάθετη στο κεκλιμένο επίπεδο. Να βρείτε τη σχέση των γωνιών φ και ω αιτιολογώντας τον συλλογισμό σας.



Σχήμα 36

Εφαρμογή 4

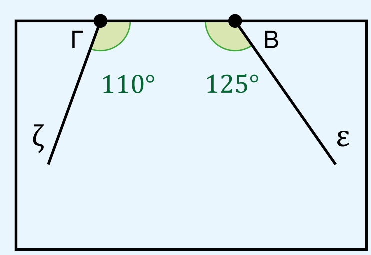
Στο Σχήμα 37 η διχοτόμος ΒΕ και το ύψος ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται στο σημείο Κ. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΚΕ.



Σχήμα 37

Εφαρμογή 5

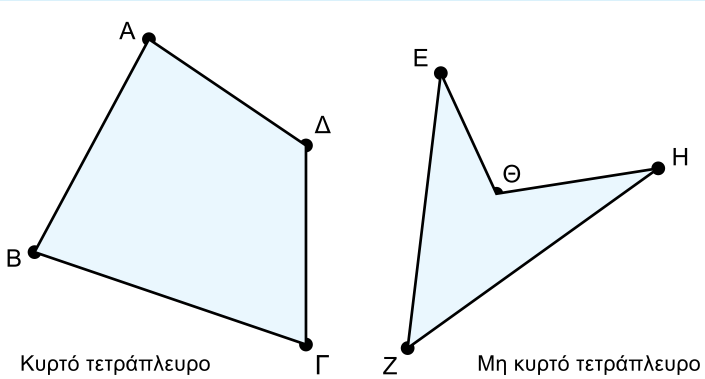
Σε ένα φύλλο χαρτί είναι σχεδιασμένες δύο ευθείες (ε) και (ζ) οι οποίες τέμνονται σε ένα σημείο Α εκτός του χαρτιού. Αν οι ευθείες σχηματίζουν γωνίες 125° και 110° με τη μία πλευρά του χαρτιού, όπως φαίνεται στο Σχήμα 38, να βρείτε τη γωνία Α του τριγώνου ΑΒΓ.



Σχήμα 38

Άθροισμα γωνιών κυρτού πολυγώνου

Υπενθυμίζουμε ότι ένα πολύγωνο λέγεται κυρτό αν ο φορέας[1] οποιασδήποτε πλευράς του αφήνει το πολύγωνο στο ίδιο ημιεπίπεδο. Κάθε γωνία ενός κυρτού πολυγώνου είναι μικρότερη από 180°, δηλαδή κυρτή.



Σχήμα 39

Εξερεύνηση

Να συμπληρώσετε τον πίνακα στο **QR16** με στόχο να βρείτε το άθροισμα των γωνιών κυρτού ν-γώνου σε σχέση με το πλήθος ν των πλευρών του.

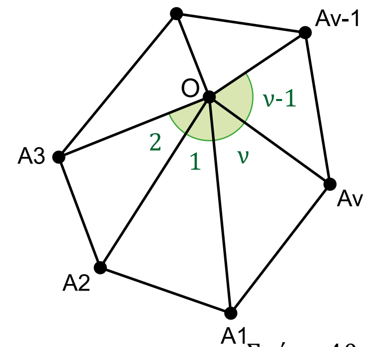
QR16

[1] Φορέας ενός ευθύγραμμου τμήματος ονομάζεται η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται το τμήμα αυτό.

Πρόταση ΙΙΙ

Το άθροισμα Σ_ν των μέτρων των γωνιών κυρτού ν-γώνου είναι $\Sigma_\nu = \nu \cdot 180° - 360°$.

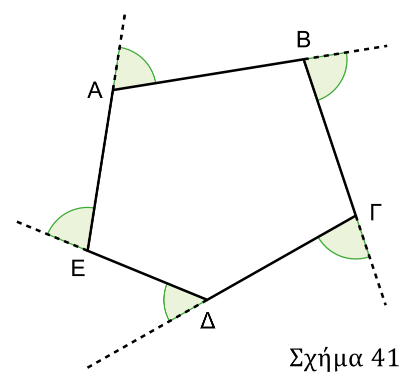
Εκτός από την αποδεικτική διαδικασία που περιγράψαμε στην προηγούμενη εξερεύνηση, μπορούμε να δώσουμε και την ακόλουθη απόδειξη:
Θεωρούμε κυρτό ν-γωνο $A_1A_2A_3, ..., A_\nu$ και ένα εσωτερικό του σημείο Ο. Φέρουμε τα τμήματα OA_1, OA_2, ..., OA_ν οπότε σχηματίζονται ν τρίγωνα, τα OA_1A_2, OA_2A_3, ...,$OA_\nu A_1$. Το άθροισμα των γωνιών των ν αυτών τριγώνων είναι $\nu \cdot 180°$.
Το άθροισμα των γωνιών του κυρτού ν-γώνου $A_1A_2A_3... A_\nu$ είναι ίσο με το άθροισμα των γωνιών αυτών των ν τριγώνων μειωμένο κατά το άθροισμα των γωνιών $O_1, O_2, ..., O_\nu$ το οποίο είναι 360°. Άρα το άθροισμα των γωνιών κυρτού ν-γώνου είναι $\Sigma_\nu = \nu \cdot 180° - 360°$.



Σχήμα 40

Παρατήρηση: Το άθροισμα των μέτρων των εξωτερικών γωνιών κυρτού ν-γώνου είναι 360°, δηλαδή δεν εξαρτάται από το πλήθος των κορυφών του κυρτού πολυγώνου.

Πράγματι: Επειδή κάθε εξωτερική γωνία ενός κυρτού ν-γώνου είναι παραπληρωματική της αντίστοιχης εσωτερικής γωνίας του, προκύπτει ότι το άθροισμα όλων των εσωτερικών και εξωτερικών γωνιών είναι $\nu \cdot 180°$.
Έτσι, το άθροισμα των μέτρων των εξωτερικών γωνιών κυρτού ν-γώνου είναι $\nu \cdot 180° - \Sigma_\nu = 360°$.



Σχήμα 41

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ).

α. Αν δύο γωνίες ενός τριγώνου είναι ίσες μία προς μία με δύο γωνίες ενός άλλου τριγώνου, τότε και οι τρίτες γωνίες των δύο τριγώνων είναι ίσες.

β. Αν το άθροισμα δύο γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με την τρίτη γωνία του τριγώνου, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

γ. Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι μεγαλύτερη από κάθε γωνία του τριγώνου.

δ. Αν ένα τρίγωνο έχει δύο γωνίες ίσες, τότε αυτές οι γωνίες είναι οξείες.

ε. Αν δύο γωνίες έχουν τις πλευρές τους σε κάθετες ευθείες, τότε είναι ίσες.

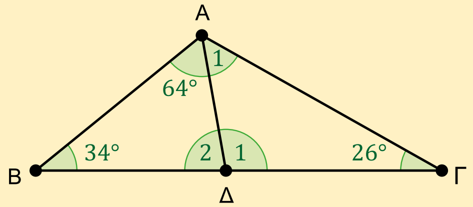
στ. Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών ενός κυρτού πολυγώνου δεν εξαρτάται από το πλήθος των κορυφών του.

2 Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 78°$ και $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$.

α. Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

β. Αν τα ύψη ΑΔ και ΓΕ του τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται στο σημείο Η, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΗΓ.

3 Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{A}_1$, $\hat{\Delta}_1$, $\hat{\Delta}_2$.



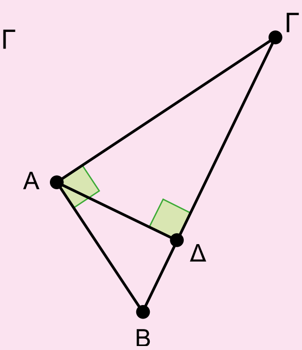
4 Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 73°$ και $\hat{\Gamma} = 35°$.

Φέρουμε τη διχοτόμο ΑΔ και το ύψος ΑΕ του τριγώνου ΑΒΓ.

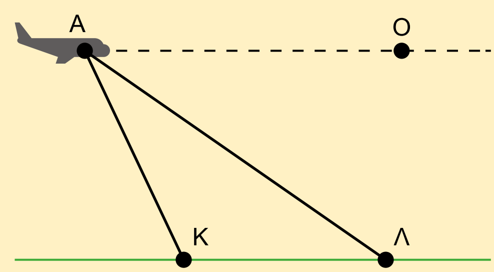
Να υπολογίσετε τη γωνία $\Delta\hat{A}E$.

5 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με Α = 90° και το ύψος του ΑΔ.

Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΒΓ και ΑΓΔ έχουν ίσες γωνίες μία προς μία.

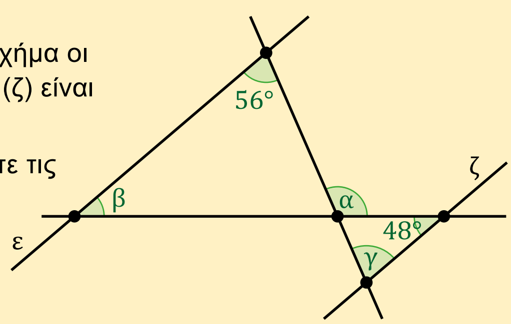


6 Ο πιλότος ενός αεροπλάνου το οποίο κινείται παράλληλα στο έδαφος βλέπει τις θέσεις Κ και Λ υπό γωνίες $K\hat{A}O = 65°$ και $\Lambda\hat{A}O = 35°$ σε σχέση με την κατεύθυνση του αεροπλάνου. Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου ΑΚΛ.



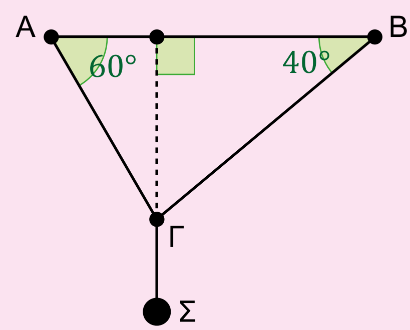
7 Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες (ε) και (ζ) είναι παράλληλες.

Να υπολογίσετε τις γωνίες α, β και γ.



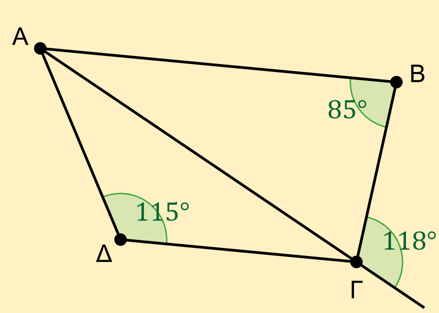
8 Ένα σώμα Σ κρέμεται από νήμα το οποίο είναι κάθετο στην οροφή ΑΒ. Το νήμα συνδέεται στο σημείο Γ με δύο άλλα νήματα που σχηματίζουν με την οροφή γωνίες 40° και 60° όπως φαίνεται στο σχήμα.

Να υπολογίσετε τις γωνίες $B\hat{\Gamma}\Sigma$ και $A\hat{\Gamma}\Sigma$.

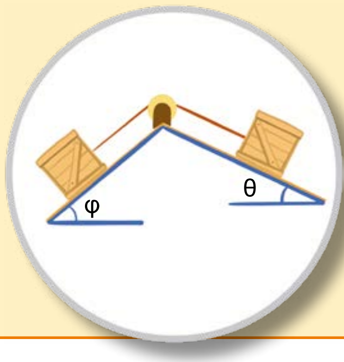


9 Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες.

Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΔΑΓ.



10 Στο παρακάτω σχήμα να εκφράσετε τη γωνία που σχηματίζεται από τις ευθείες του νήματος που συγκρατεί τα δύο κιβώτια, σε σχέση με τις γωνίες φ και θ που σχηματίζουν τα δύο κεκλιμένα επίπεδα με το έδαφος.



11 Να βρείτε το πλήθος των πλευρών κυρτού πολυγώνου με άθροισμα γωνιών ίσο με:

α. 16 ορθές
β. 1080°.

12 Να αποδείξετε ότι κάθε κυρτό πολύγωνο μπορεί να έχει το πολύ τρεις οξείες γωνίες.

13 Σε ένα κυρτό πολύγωνο το άθροισμα των γωνιών του εκτός από μία είναι 2190°.

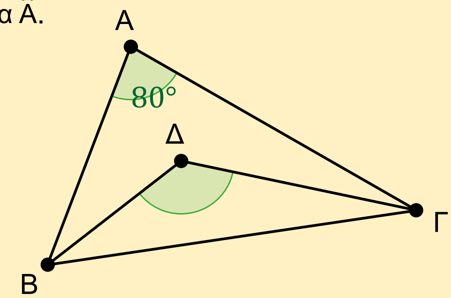
Να βρεθεί το πλήθος των πλευρών του πολυγώνου.

14

α. Στο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος είναι $\hat{A} = 80°$ και οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο σημείο Δ. Να υπολογίσετε τη γωνία $B\hat{\Delta}\Gamma$.

β. Σε τρίγωνο ΑΒΓ οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο σημείο Δ. Να εκφράσετε τη γωνία $B\hat{\Delta}\Gamma$ σε σχέση με τη γωνία $\hat{A}$.

γ. Υπάρχει τρίγωνο στο οποίο οι διχοτόμοι των δύο γωνιών του τέμνονται κάθετα;



15 Η Άννα αρχικά βρίσκεται στο σημείο Α και τρέχει μέχρι το σημείο Β όπου στρίβει κατά γωνία φ (αριστερόστροφα). Συνεχίζει την πορεία της μέχρι το σημείο Γ όπου και στρίβει κατά γωνία ω (αριστερόστροφα) και τότε βλέπει μπροστά της το σημείο Α από το οποίο ξεκίνησε.

α. Να σχεδιάσετε ένα μοντέλο για την πορεία της Άννας και να υπολογίσετε τη γωνία Α του τριγώνου ΑΒΓ σε σχέση με τις γωνίες φ και ω.

β. Ποια προϋπόθεση πρέπει να ικανοποιούν οι γωνίες φ και ω ώστε να μπορεί να πραγματοποιηθεί η πορεία της Άννας;

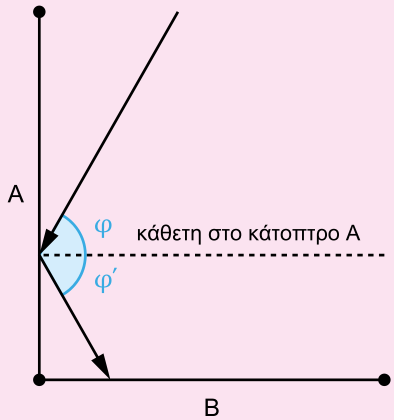
16 Δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από μια τρίτη ευθεία. Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών τέμνονται κάθετα.

17 **Ανάκλαση (QR17)**

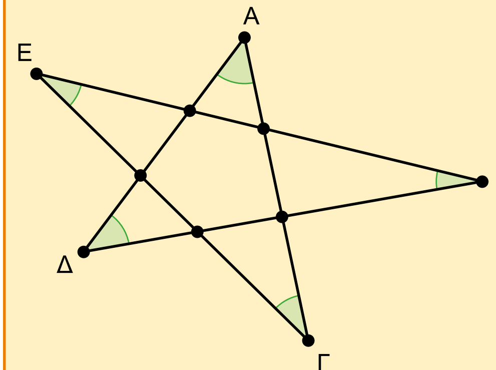
QR17

Δύο επίπεδα κάτοπτρα Α και Β είναι κάθετα.

Να αποδείξετε ότι μια ακτίνα φωτός που πέφτει στο Α και ανακλώμενη πέφτει στο Β ανακλάται τελικά από το Β σε διεύθυνση παράλληλη με την αρχική. (Θεωρήστε γνωστό ότι κατά την ανάκλαση μιας ακτίνας σε ένα επίπεδο κάτοπτρο η γωνία πρόσπτωσης φ είναι ίση με τη γωνία ανάκλασης φ΄.)



18 Να υπολογίσετε το άθροισμα των γωνιών του αστεροειδούς πενταγώνου που είναι σημειωμένες στο παρακάτω σχήμα.



19 **Προτείνω ένα πρόβλημα**

Διατυπώστε ένα γεωμετρικό πρόβλημα στο οποίο θα δίνονται κάποια διχοτόμος και κάποιο ύψος ενός τριγώνου και θα ζητείται να εκφραστεί κάποια από τις σχηματιζόμενες γωνίες σε σχέση με κάποιες από τις γωνίες του τριγώνου. (Δείτε ως παράδειγμα την Εφαρμογή 4.)

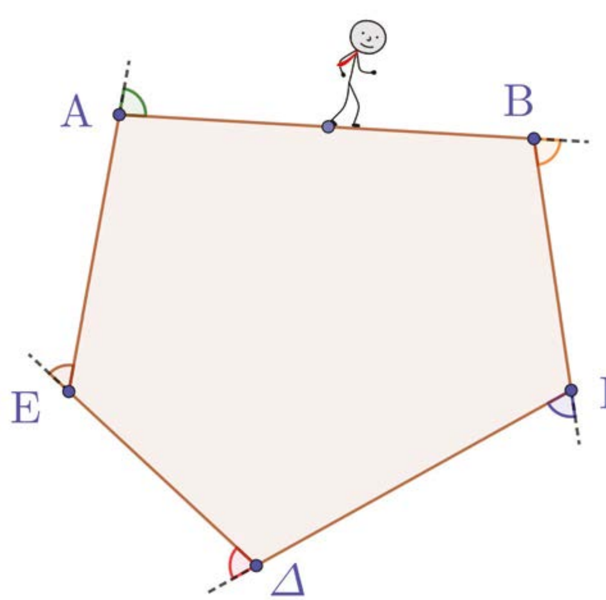
20 Φανταστείτε ότι περπατάτε πάνω στις πλευρές ενός κυρτού πολυγώνου κάνοντας μια πλήρη περιστροφή. Δηλαδή, ξεκινάτε από ένα οποιοδήποτε σημείο και περπατάτε κατά μήκος των πλευρών μέχρι να ξαναφτάσετε στο σημείο από όπου ξεκινήσατε (κοιτάζοντας και προς την ίδια κατεύθυνση που κοιτάζατε αρχικά).

Πόσες μοίρες ήταν η περιστροφή που κάνατε;

Με το άθροισμα ποιων γωνιών σχετίζεται η περιστροφή που κάνατε;

Γράψτε έναν τύπο που να συνδέει τις απαντήσεις των δύο προηγούμενων ερωτημάτων.

QR18



1.3 Η σημασία του 5ου Ευκλείδειου Αιτήματος στην εξέλιξη της Γεωμετρίας

Βασικά ερωτήματα της ενότητας

- Πώς είναι ένας κόσμος στον οποίο από σημείο εκτός ευθείας υπάρχουν πολλές παράλληλες προς αυτήν ή δεν υπάρχει καμία παράλληλη;
- Έχει νόημα ένας τέτοιος κόσμος;

Για περισσότερα από 2.000 χρόνια, οι μαθηματικοί αποδέχονταν το «μη στοιχειώδες» 5ο Ευκλείδειο Αίτημα, το οποίο εξασφαλίζει τη μοναδικότητα της παράλληλης από σημείο εκτός ευθείας. Θεωρούσαν όμως ότι αυτό θα πρέπει να προκύπτει με βάση τα άλλα, πιο απλά αιτήματα. Έτσι, στη διάρκεια αυτών των 20 αιώνων, πολλοί προσπάθησαν να το αποδείξουν. Οι προσπάθειες αυτές έπεφταν πάντα στο κενό.

Δημιούργησα ένα παράξενο νέο σύμπαν από το τίποτα (Janos Bolyai)

Τον 19ο αιώνα, οι Bolyai, Lobachevsky, Gauss, ο καθένας ανεξάρτητα από τους άλλους, υπέθεσαν ότι η παράλληλη προς δεδομένη ευθεία από σημείο εκτός αυτής δεν είναι μοναδική, προσπαθώντας να καταλήξουν σε άτοπο. Αντί όμως να οδηγηθούν σε άτοπο, δημιούργησαν μια νέα γεωμετρία, τη λεγόμενη **υπερβολική**, στην οποία από σημείο εκτός ευθείας διέρχονται πολλές παράλληλες προς αυτήν. Λίγο αργότερα, ο Riemann ανέπτυξε τη λεγόμενη **ελλειπτική** γεωμετρία, στην οποία από σημείο εκτός ευθείας δεν υπάρχει καμία παράλληλη προς αυτήν. Τα αποτελέσματα αυτά ήταν εξαιρετικά αναπάντεχα για την επιστημονική κοινότητα της εποχής, καθώς ανέτρεψαν την εδραιωμένη για αιώνες αντίληψη ότι το Αίτημα Παραλληλίας αποτελεί «μοναδική αλήθεια».

Τελικά, το Αίτημα Παραλληλίας δεν μπορεί να αποδειχθεί με βάση τα τέσσερα πρώτα αιτήματα, αλλά η προσπάθεια απόδειξής του ήταν εξαιρετικά γόνιμη.

Η συνειδητοποίηση ότι είναι δυνατόν να θεμελιωθούν «μη ευκλείδειες γεωμετρίες» –δηλαδή γεωμετρίες στις οποίες το Αίτημα Παραλληλίας δεν ισχύει– άνοιξε τον δρόμο για τη γενική θεωρία της σχετικότητας του Αϊνστάιν, η οποία άλλαξε την αντίληψή μας για το σύμπαν. Γιατί τελικά η γεωμετρία του σύμπαντος –σε κοσμολογική κλίμακα– δεν είναι ευκλείδεια.

Από τους ιστορικούς της επιστήμης, η ανακάλυψη των μη ευκλείδειων γεωμετριών συγκρίνεται με τη θεωρία του ηλιοκεντρικού συστήματος του Κοπέρνικου, καθώς και οι δύο οδήγησαν στην απελευθέρωση του ανθρώπινου νου από εδραιωμένα μοντέλα σκέψης που είχαν επικρατήσει για αιώνες.

Σχήμα 42

Σχήμα 43
Το πλανητάριο James S. McDonnell στο St Louis των ΗΠΑ

Δύο δισδιάστατα μοντέλα μη ευκλείδειων γεωμετριών

Στη συνέχεια, μελετάμε δύο επιφάνειες που αποτελούν παραδείγματα μη ευκλείδειων γεωμετριών: τη σφαίρα (Σχήμα 42) και το υπερβολοειδές (Σχήμα 43). Έχουμε δύο μη επίπεδες επιφάνειες, οπότε θα πρέπει να διευκρινίσουμε ποιες είναι σε κάθε περίπτωση οι γραμμές που παίζουν τον ρόλο που έχουν οι ευθείες στο επίπεδο. Στο επίπεδο, το ευθύγραμμο τμήμα είναι η διαδρομή ελάχιστου μήκους μεταξύ δύο σημείων. Αντίστοιχα, **σε μια καμπυλωμένη επιφάνεια ονομάζουμε «ευθεία» τη γραμμή πάνω στην οποία βρίσκεται η συντομότερη διαδρομή μεταξύ δύο σημείων.**

Όπως και στο επίπεδο, έτσι και σε κάθε επιφάνεια, λέμε ότι **δύο «ευθείες» είναι παράλληλες, αν δεν τέμνονται, δηλαδή αν δεν έχουν κοινό σημείο.**

Α. Η επιφάνεια της σφαίρας – Ελλειπτική γεωμετρία

Εξερεύνηση

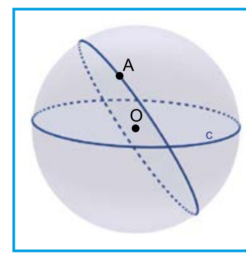
1. Έχετε αναρωτηθεί ποια είναι η συντομότερη διαδρομή που μπορεί να ακολουθήσει ένα αεροπλάνο για να πάει από την Αθήνα στο Λονδίνο (Σχήμα 44);
2. Πάνω στην επιφάνεια μιας σφαίρας, τεντώστε έναν σπάγγο μεταξύ δύο σημείων της. Τι ιδιότητες έχει η καμπύλη που σχηματίζει ο σπάγγος;

Σχήμα 44

Αν κόψουμε τη σφαίρα με ένα επίπεδο, η τομή της επιφάνειας της σφαίρας με αυτό είναι πάντα ένας κύκλος. Αν αυτό το επίπεδο **διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας,** τότε αυτή η τομή μάς δίνει έναν **μέγιστο κύκλο.**

Με τη σύμβαση ότι η Γη είναι σφαιρική, ο ισημερινός είναι ένας μέγιστος κύκλος και οι μεσημβρινοί είναι ημικύκλια μέγιστων κύκλων.

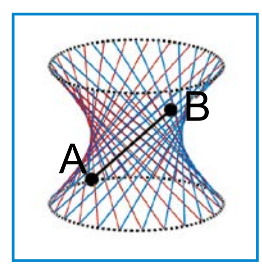
Στην επιφάνεια της σφαίρας «ευθείες» θεωρούμε ότι είναι οι μέγιστοι κύκλοι, επειδή η συντομότερη διαδρομή μεταξύ δύο σημείων της σφαίρας είναι αυτή που βρίσκεται πάνω σε έναν μέγιστο κύκλο.



Σχήμα 45

Αν προσπαθήσουμε να φέρουμε από την Αθήνα μία «ευθεία» (μέγιστο κύκλο) που δεν τέμνει τον ισημερινό, δεν θα τα καταφέρουμε. Γενικότερα, αν θεωρήσουμε έναν μέγιστο κύκλο (c) και ένα σημείο Α της σφαίρας που δεν ανήκει σε αυτόν, τότε κάθε μέγιστος κύκλος που διέρχεται από το Α θα τέμνει τον (c) – και μάλιστα σε δύο σημεία (Σχήμα 45). Άρα **η επιφάνεια της σφαίρας είναι ένας κόσμος όπου δεν υπάρχουν παράλληλες «ευθείες».**

Β. Η επιφάνεια του υπερβολοειδούς – Υπερβολική γεωμετρία



Σχήμα 46

Επιφάνειες όπως αυτή της στέγης του πλανητάριου που βλέπουμε στο Σχήμα 43 λέγονται υπερβολοειδή.

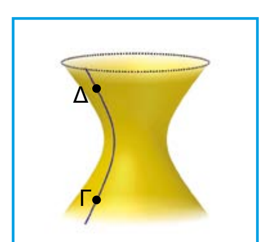
Ας φανταστούμε ένα σκαθάρι που κινείται πάνω στην επιφάνεια ενός υπερβολοειδούς. Ποια είναι η συντομότερη διαδρομή που μπορεί να ακολουθήσει για να πάει από ένα σημείο σε ένα άλλο; Όπως θα δούμε, η απάντηση εξαρτάται από τη σχετική θέση αυτών των σημείων.

Ένα υπερβολοειδές μπορεί να δημιουργηθεί με «στρίψιμο» ευθειών, όπως φαίνεται στο QR19.

QR19

Μάλιστα, επειδή το «στρίψιμο» των ευθειών μπορεί να γίνει και δεξιόστροφα και αριστερόστροφα, έχουμε δύο τέτοιες οικογένειες ευθειών· μία με τις μπλε και μία με τις κόκκινες γραμμές του Σχήματος 46.

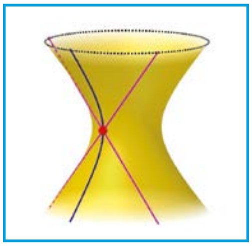
Αν θεωρήσουμε δύο σημεία Α και Β της επιφάνειας του υπερβολοειδούς που βρίσκονται πάνω σε μια τέτοια ευθεία, είναι φανερό ότι η συντομότερη διαδρομή από το ένα στο άλλο είναι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ (Σχήμα 46).



Σχήμα 47

Αν τώρα θεωρήσουμε δύο σημεία Γ, Δ της επιφάνειας του υπερβολοειδούς που βρίσκονται πάνω στην ίδια κατακόρυφο όπως στο Σχήμα 47, τότε η συντομότερη διαδρομή μεταξύ τους είναι η μπλε γραμμή του σχήματος, επομένως μια τέτοια γραμμή θεωρείται «ευθεία» στο υπερβολοειδές.

Στο Σχήμα 48 βλέπουμε τις «ευθείες» των δύο κατηγοριών που είδαμε, οι οποίες διέρχονται από το κόκκινο σημείο.

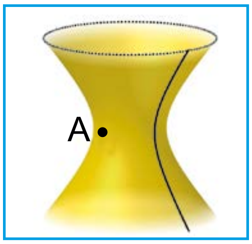


Σχήμα 48

Ας πάρουμε, τώρα, πάνω σε ένα υπερβολοειδές μια «ευθεία» της δεύτερης κατηγορίας και ένα σημείο του Α που δεν ανήκει σε αυτήν (Σχήμα 49).

Παρατηρούμε ότι από το σημείο Α διέρχονται τουλάχιστον δύο «ευθείες» οι οποίες δεν έχουν κανένα κοινό σημείο με την αρχική. Στο Σχήμα 50 βλέπουμε τρεις τέτοιες.

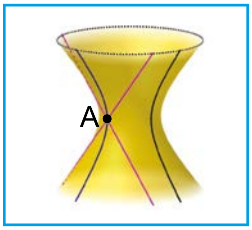
Επομένως, **σε ένα υπερβολοειδές είναι δυνατόν από ένα σημείο εκτός «ευθείας» να περνούν περισσότερες από μία παράλληλες προς την αρχική.**



Σχήμα 49

Άθροισμα γωνιών τριγώνου

Στην ευκλείδεια γεωμετρία, η απόδειξη ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 180° βασίστηκε στην παραδοχή ότι από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μοναδική παράλληλη προς αυτήν. Ας δούμε λοιπόν τι ισχύει για το άθροισμα γωνιών τριγώνου στην ελλειπτική γεωμετρία (σφαίρα) και στην υπερβολική γεωμετρία (υπερβολοειδές).



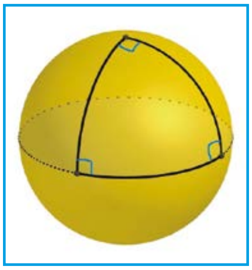
Σχήμα 50

Κατ' αρχάς, σε καθεμιά από αυτές τις επιφάνειες, τρίγωνο είναι το σχήμα που σχηματίζεται από τρεις «ευθείες» που τέμνονται ανά δύο χωρίς να διέρχονται από το ίδιο σημείο. Τώρα για το μέτρο της γωνίας μεταξύ δύο καμπυλών δεν θα δώσουμε αυστηρό ορισμό, αλλά θα βασιστούμε στη διαίσθησή μας. Για παράδειγμα, στην επιφάνεια της Γης, κάθε μεσημβρινός είναι κάθετος στον ισημερινό.

Α. Άθροισμα γωνιών τριγώνου στην επιφάνεια της σφαίρας

Στο Σχήμα 51 βλέπουμε ένα τρίγωνο πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας, το οποίο έχει τρεις ορθές γωνίες, δηλαδή το άθροισμα των γωνιών του είναι 270°.

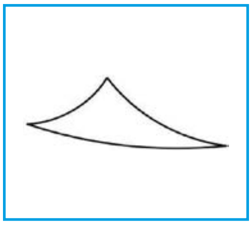
Γενικότερα, **στην επιφάνεια της σφαίρας ισχύει ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι μεγαλύτερο από 180°.**



Σχήμα 51

Β. Άθροισμα γωνιών τριγώνου στην επιφάνεια του υπερβολοειδούς

Αντίστοιχα, ένα τρίγωνο στην επιφάνεια του υπερβολοειδούς θα μοιάζει όπως αυτό του Σχήματος 52 και ισχύει γενικά ότι **στο υπερβολοειδές το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι μικρότερο από 180°.**



Σχήμα 52

Στον πίνακα που ακολουθεί συνοψίζουμε όσα μάθαμε για τις τρεις διαφορετικές γεωμετρίες: ευκλείδεια, ελλειπτική και υπερβολική.

Γεωμετρία	Ευκλείδεια	Ελλειπτική	Υπερβολική
Δισδιάστατο παράδειγμα	Επίπεδο	Σφαίρα	Υπερβολοειδές
Πλήθος παραλλήλων από σημείο εκτός ευθείας	Μία	Καμία	Πολλές
Άθροισμα γωνιών τριγώνου	= 180°	> 180°	< 180°

Καθώς ετοιμαζόμαστε να επιστρέψουμε στη μελέτη της ευκλείδειας γεωμετρίας, ας επισημάνουμε ότι:

Αν και η ευκλείδεια γεωμετρία δεν είναι η μόνη δυνατή γεωμετρία και μάλλον δεν είναι κατάλληλη για να περιγράψει τον χώρο κοντά σε μια μαύρη τρύπα, παραμένει η πιο κατάλληλη για την περιγραφή του κόσμου γύρω μας σε ανθρώπινη κλίμακα. Αυτή χρησιμοποιούμε όταν χτίζουμε ουρανοξύστες, κατασκευάζουμε γέφυρες, ανοίγουμε σήραγγες και σχεδόν σε κάθε ανθρώπινη δραστηριότητα πάνω στη Γη.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Στο σχήμα υπάρχει μία σφαίρα με κέντρο το Ο, δύο σημεία Α και Β πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας και διαδρομές που συνδέουν αυτά τα σημεία.

Με την προϋπόθεση ότι είστε αναγκασμένοι να κινείστε μόνο επάνω στην επιφάνεια της σφαίρας, επιλέξτε ποια είναι η συντομότερη διαδρομή μεταξύ των Α και Β, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

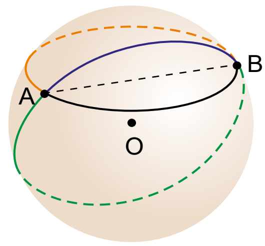
1. Ροζ διαδρομή

2. Πράσινη διαδρομή

3. Μαύρη διαδρομή

4. Μπλε διαδρομή

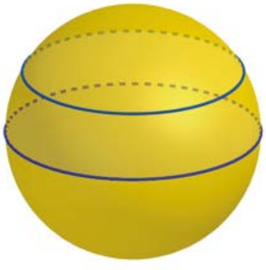
5. Πορτοκαλί διαδρομή



(Τα διακεκομμένα τόξα βρίσκονται στο πίσω μέρος της σφαίρας. Η μαύρη και η πορτοκαλί διαδρομή είναι τόξα του ίδιου κύκλου της σφαίρας. Ομοίως, η μπλε και η πράσινη διαδρομή είναι τόξα του ίδιου κύκλου της σφαίρας, ενώ η ροζ διαδρομή είναι χορδή της σφαίρας.)

2 Ένας συμμαθητής σου ισχυρίζεται ότι το διπλανό σχήμα έρχεται σε αντίφαση με το συμπέρασμα ότι στην επιφάνεια της σφαίρας δεν υπάρχουν παράλληλες.

Τι θα του απαντούσες;



3 Οι δύο προτάσεις που ακολουθούν ισχύουν στην ευκλείδεια γεωμετρία. Δείξτε ότι καμία από αυτές δεν ισχύει στην ελλειπτική γεωμετρία (σφαίρα), δίνοντας κατάλληλα αντιπαραδείγματα.

α. Από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μοναδική κάθετη προς αυτήν.

β. Αν δύο τρίγωνα έχουν τις δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες.

4 Ποιες από τις παρακάτω δηλώσεις χαρακτηρίζουν την πρόταση «Από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μοναδική παράλληλη προς αυτήν»;

α. Η πρόταση ισχύει επειδή είναι προφανής.

β. Η πρόταση αποδείχθηκε με βάση το 5ο Ευκλείδειο Αίτημα το οποίο δεχόμαστε ότι ισχύει.

γ. Αν δεν ισχύει η πρόταση αυτή, τότε δεν ισχύει ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 180°.

δ. Η πρόταση αυτή ισχύει ειδικά στην ευκλείδεια γεωμετρία.

ε. Οι γεωμετρίες στις οποίες η πρόταση αυτή δεν αληθεύει, δεν έχουν κάποια χρησιμότητα.

Ανακεφαλαίωση

Στο κεφάλαιο αυτό δώσαμε τον ορισμό των παράλληλων ευθειών και με βάση το 5ο Ευκλείδειο Αίτημα αποδείξαμε σχέσεις γωνιών που σχηματίζουν δύο παράλληλες ευθείες του επιπέδου που τέμνονται από μία τρίτη. Στη συνέχεια διατυπώσαμε κριτήρια παραλληλίας δύο ευθειών και υπολογίσαμε το άθροισμα των γωνιών τριγώνου και κυρτού πολυγώνου.

Για την απόδειξη κάποιων προτάσεων χρησιμοποιήθηκε η «ευθεία απόδειξη», όπου ξεκινώντας από τα δεδομένα και αξιοποιώντας τις ήδη γνωστές προτάσεις καταλήγουμε στο συμπέρασμα. Επιπλέον, για την απόδειξη ορισμένων προτάσεων του κεφαλαίου χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος της «απαγωγής σε άτοπο», η οποία είναι βασική μέθοδος απόδειξης στα Μαθηματικά.

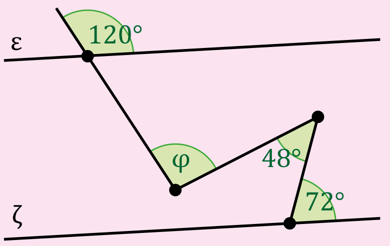
Το κεφάλαιο έκλεισε με μια συζήτηση για τη σημασία του 5ου Ευκλείδειου Αιτήματος στην εξέλιξη της Γεωμετρίας.

Σημαντικοί όροι

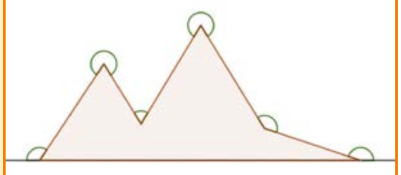
Παράλληλες ευθείες
Εναλλάξ γωνίες
Επί τα αυτά μέρη γωνίες
Βοηθητική γραμμή
Αντιπαράδειγμα
Απαγωγή σε άτοπο
Αντίστροφη μιας πρότασης

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Αν οι ευθείες (ε) και (ζ) του διπλανού σχήματος είναι παράλληλες, να υπολογίσετε τη γωνία φ.



2 Να υπολογίσετε το άθροισμα των έξι γωνιών που είναι σημειωμένες στο διπλανό σχήμα.



3 Ένας πεζοπόρος διαθέτει μια πυξίδα η οποία δείχνει τη γωνία (σε μοίρες) που σχηματίζει η πορεία του σε σχέση με τον Βορρά (προς τα ανατολικά).

Ο πεζοπόρος ξεκινάει από το κατάλυμά του ακολουθώντας ένα μονοπάτι για το οποίο η πυξίδα του δείχνει 15° και φτάνει σε μία λίμνη. Στη συνέχεια ακολουθεί μία άλλη διαδρομή για την οποία η πυξίδα του δείχνει 117° προκειμένου να συναντήσει κάποιους φίλους του.

Μπορείτε να βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν οι δύο διαδρομές;

4 Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένα οκτάγωνο πλακάκι με ίσες γωνίες (και πλευρές ανά τέσσερις ίσες).

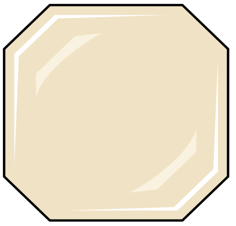
α. Να υπολογίσετε τις γωνίες του οκταγώνου.

β. Να εξετάσετε αν μπορείτε να πλακοστρώσετε το επίπεδο

i. χρησιμοποιώντας ίσα μεταξύ τους τέτοια πλακάκια.

ii. χρησιμοποιώντας ίσα μεταξύ τους τέτοια πλακάκια και ίσα μεταξύ τους τετράγωνα πλακάκια.

Στην περίπτωση που η απάντησή σας είναι καταφατική, σχεδιάστε μια τέτοια πλακόστρωση.



Συνθετική Εργασία

Υπολογισμός της περιφέρειας της Γης από τον Ερατοσθένη τον Κυρηναίο

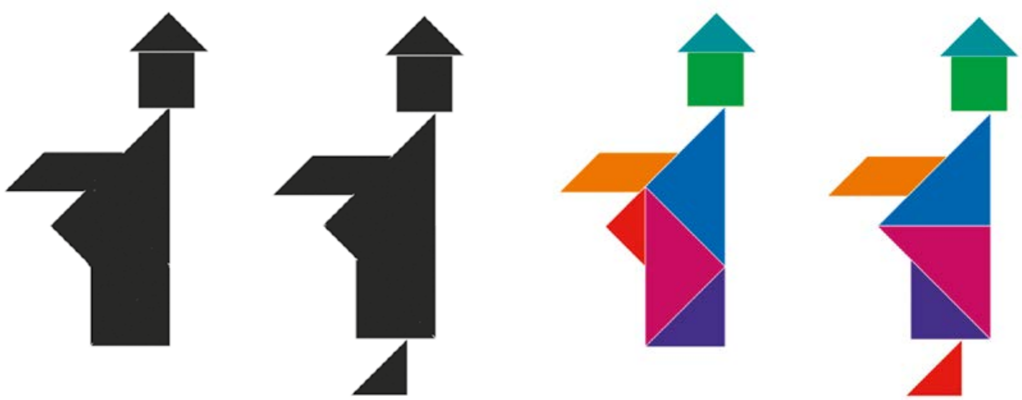
Στο **QR20** μπορείτε να δείτε πώς ο Ερατοσθένης, τον 3ο αιώνα π.Χ., αξιοποίησε τη θεωρία των παραλλήλων για να υπολογίσει την περιφέρεια της Γης, χωρίς να απομακρυνθεί από την Αίγυπτο, όπου ζούσε. Επιπλέον, θα βρείτε οδηγίες για να επαναλάβετε και εσείς το πείραμα του Ερατοσθένη.

QR20

QR21 Συμπληρωματικό υλικό στις παράλληλες

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
ΤΡΙΓΩΝΑ

Το τάνγκραμ, το διάσημο κινέζικο παζλ, αποτελείται από επτά επίπεδα κομμάτια, τρίγωνα και τετράπλευρα, τα οποία μπορούν να συνδυαστούν ώστε να δημιουργηθούν άλλα σχήματα.



Στόχος του παζλ είναι να διαμορφωθεί κάποιο σχήμα, του οποίου δίνεται μόνο το περίγραμμα, χρησιμοποιώντας και τα επτά κομμάτια χωρίς επικαλύψεις. Στην εικόνα φαίνονται δύο φιγούρες οι οποίες αποτελούνται από το ίδιο σύνολο κομματιών, αλλά η μία φαίνεται να είναι μέρος της άλλης. Η εικόνα αυτή είναι γνωστή ως «το παράδοξο των δύο μοναχών». Η απάντηση φυσικά είναι ότι τα σώματα των δύο μοναχών φαίνονται ίσα, αλλά δεν είναι ίσα.

Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζουμε κριτήρια που μας επιτρέπουν να συμπεραίνουμε την ισότητα δύο τριγώνων. Καθώς το τρίγωνο είναι το πιο βασικό πολύγωνο, η σύγκριση τριγώνων είναι ένα εργαλείο για να ελέγχουμε την ισότητα άλλων πολυγώνων, αλλά και ευθύγραμμων τμημάτων και γωνιών σε κάθε μορφής πολυγωνικά σχήματα.

2.1 Ισότητα τριγώνων

Ισότητα σχημάτων

Εξερεύνηση

Μπορείτε να περιγράψετε πώς διαπιστώνουμε ότι ένα κομμάτι του παζλ έχει το ίδιο σχήμα με το κενό στο οποίο αντιστοιχεί; Γενικότερα, πότε δύο σχήματα λέγονται ίσα;

Σχήμα 1

Ιστορικά

Στο πρώτο βιβλίο των *Στοιχείων* του Ευκλείδη παρατίθεται η παρακάτω πρόταση ως «κοινή έννοια», δηλαδή ως μια κοινά αποδεκτή αρχή που μαζί με άλλες δημιουργούν τη βάση για όσα θα ακολουθήσουν:

Τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ’ ἄλληλα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.	Όσα συμπίπτουν όταν τοποθετηθούν το ένα πάνω στο άλλο είναι ίσα μεταξύ τους.

Όμως, ο Ευκλείδης αποφεύγει να χρησιμοποιήσει τη δυνατότητα ταύτισης δύο σχημάτων μέσω της τοποθέτησης του ενός πάνω στο άλλο για να διαπιστώσει την ισότητά τους. Ο λόγος είναι ότι στα Μαθηματικά η ισότητα των σχημάτων δεν είναι μια σχέση που διαπιστώνεται εμπειρικά όπως στο παζλ, αλλά νοητικά και απαιτεί την ισότητα όλων των επιμέρους στοιχείων τους.

Στα σύγχρονα Μαθηματικά αποδεικνύεται ότι δύο ίσα σχήματα μπορούν να ταυτιστούν χρησιμοποιώντας τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς μεταφορά, στροφή και ανάκλαση.

QR22

Ισότητα τριγώνων

Με βάση την προηγούμενη συζήτηση, για τη μελέτη της ισότητας τριγώνων που ακολουθεί, ξεκινάμε με έναν ισοδύναμο, αλλά πιο τυπικό ορισμό:

Ορισμός

Δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν τις πλευρές και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες μία προς μία.

Ο ορισμός μας χρειάζεται κάποιες διευκρινίσεις:

α. Αντίστοιχες γωνίες δύο τριγώνων ονομάζουμε τις γωνίες που είναι απέναντι από ίσες πλευρές (όπως αντίστοιχες πλευρές λέμε αυτές που βρίσκονται απέναντι από ίσες γωνίες).

β. Η έκφραση «μία προς μία» σημαίνει ότι συγκρίνουμε μία πλευρά ή μία γωνία του ενός τριγώνου με μία πλευρά ή μία γωνία του άλλου τριγώνου.

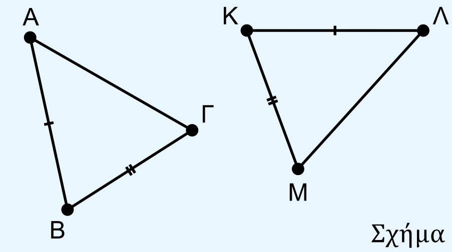
Σύμφωνα λοιπόν με τον ορισμό:

> Σε δύο **ίσα** τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες και απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές.

Εφαρμογή 1

Αν τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΜ του Σχήματος 2 είναι ίσα και γνωρίζουμε ότι ΑΒ = ΚΛ και ΒΓ = ΚΜ,
τότε να συμπληρωθούν οι παρακάτω ισότητες αιτιολογώντας:

α. ΑΓ =   **β.** $\hat{A}$ =   **γ.** $\hat{B}$ =   **δ.** $\hat{\Gamma}$ =



Σχήμα 2

Παρατηρήσεις:

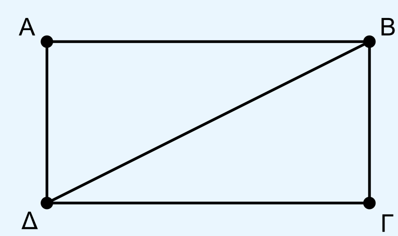
1. Στη συνέχεια, όταν γράφουμε ΑΒΓ, θα εννοούμε το τρίγωνο ΑΒΓ.
2. Όταν γνωρίζουμε ότι δύο τρίγωνα είναι ίσα, μας βοηθάει να γράφουμε την ισότητα με τέτοιον τρόπο ώστε οι κορυφές που αντιστοιχούν σε ίσες γωνίες να εμφανίζονται με την ίδια σειρά, οπότε, αντίστοιχα, οι ίσες πλευρές εμφανίζονται με την ίδια σειρά. Έτσι, στην Εφαρμογή 1, θα γράφαμε ΑΒΓ = ΛΚΜ. Επιστρέφοντας στον αρχικό ορισμό της ισότητας σχημάτων, η ισότητα ΑΒΓ = ΛΚΜ δείχνει πώς πρέπει να τοποθετήσουμε το τρίγωνο ΑΒΓ πάνω στο ΚΛΜ ώστε αυτά να ταυτιστούν: Η κορυφή Α θα πάει πάνω στην κορυφή Λ, η Β στην Κ και η Γ στη Μ.

Εφαρμογή 2

Στο Σχήμα 3 το τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει:

α. τις γωνίες του Α και Γ ορθές **β.** ΑΒ // ΓΔ και ΑΒ = ΓΔ
γ. ΑΔ // ΒΓ και ΑΔ = ΒΓ

Με βάση τον ορισμό, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΔ είναι ίσα και να γράψετε την ισότητα σύμφωνα με τη σύμβαση της προηγούμενης παρατήρησης.



Σχήμα 3

2.2 Κριτήρια ισότητας τριγώνων

Βασικά ερωτήματα της ενότητας

- Ποιες ισότητες μεταξύ των στοιχείων δύο τριγώνων αρκούν για να εξασφαλίσουν ότι τα τρίγωνα είναι ίσα;
- Πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα τρίγωνο όταν δίνονται κάποια στοιχεία του;

Εξερεύνηση στην τάξη

Σε μια κόλλα χαρτί σχεδιάστε μια γωνία $x\hat{O}y$ = 40° και στις πλευρές της μετρήστε τμήματα ΟΑ = 9 cm και ΟΒ = 7 cm. Κόψτε το τρίγωνο ΟΑΒ που σχηματίστηκε. Στη συνέχεια, συγκρίνετε το τρίγωνο που φτιάξατε με αυτά που έφτιαξαν οι συμμαθητές σας με τα ίδια δεδομένα, τοποθετώντας τα το ένα πάνω στο άλλο. Τι παρατηρείτε; Αν θέλετε, μπορείτε να επαναλάβετε τη διαδικασία ξεκινώντας με διαφορετική γωνία και διαφορετικά μήκη στις πλευρές της. Μπορείτε να διατυπώσετε μια εικασία με βάση τις παρατηρήσεις σας;

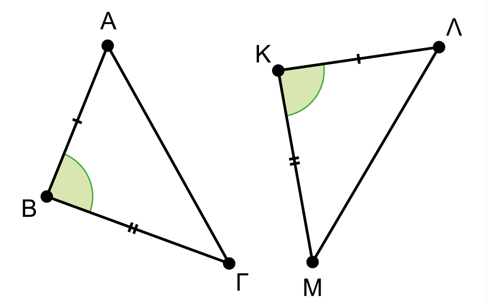
Τα κριτήρια που ακολουθούν δείχνουν ότι η ισότητα δύο τριγώνων εξασφαλίζεται μέσω της ισότητας τριών μόνο *κατάλληλων* στοιχείων τους.

Πρόταση Ι

1ο κριτήριο ισότητας τριγώνων: Πλευρά Γωνία Πλευρά (ΠΓΠ)

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα.

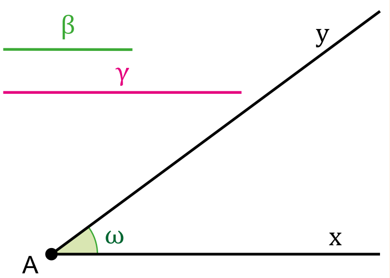
Υπόθεση: ΑΒ = ΚΛ, ΒΓ = ΚΜ, $\hat{B} = \hat{K}$
Συμπέρασμα: ΑΒΓ = ΛΚΜ (Σχήμα 4)



Σχήμα 4

Κατασκευή τριγώνου όταν δίνονται δύο πλευρές του και η περιεχόμενη σε αυτές γωνία

Δίνονται τα ευθύγραμμα τμήματα β και γ, καθώς και μια κυρτή γωνία $x\hat{A}y = \omega$. Θέλουμε να κατασκευάσουμε με κανόνα και διαβήτη τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ = γ, ΑΓ = β και $\hat{A} = \omega$ (Σχήμα 5).



Σχήμα 5

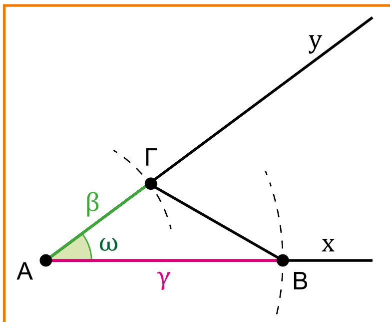
Κατασκευή: Χρησιμοποιώντας τον διαβήτη, στις πλευρές Αx και Αy της γωνίας $x\hat{A}y = \omega$ βρίσκουμε σημεία Β και Γ αντίστοιχα τέτοια ώστε ΑΒ = γ και ΑΓ = β. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι το ζητούμενο (Σχήμα 6).

Στο **QR23** μπορείτε να κάνετε αυτή την κατασκευή σε ψηφιακό περιβάλλον.

QR23

Το κριτήριο ΠΓΠ εξασφαλίζει ότι κάθε τρίγωνο με πλευρές β και γ και περιεχόμενη γωνία ω θα είναι ίσο με το τρίγωνο ΑΒΓ που κατασκευάσαμε.

Συμπεραίνουμε ότι, αν δοθούν δύο ευθύγραμμα τμήματα β, γ και μια κυρτή γωνία ω, υπάρχει μοναδικό τρίγωνο με πλευρές β, γ και περιεχόμενη γωνία ω. Διευκρινίζουμε ότι η λέξη «μοναδικό» σημαίνει ότι όλα τα τρίγωνα με αυτά τα στοιχεία είναι ίσα μεταξύ τους. Αφού όλα αυτά τα τρίγωνα μπορούν να ταυτιστούν, θεωρούμε ότι πρόκειται για ένα μοναδικό τρίγωνο, το οποίο μπορεί να τοποθετηθεί σε διαφορετικές θέσεις.



Σχήμα 6

Εφαρμογή 1

Επιστρέψτε στο Σχήμα 3.

Ποιες υποθέσεις αρκούν για να εξασφαλίσουν την ισότητα των δύο τριγώνων με βάση το κριτήριο ΠΓΠ;
Προσπαθήστε να κρατήσετε όσο γίνεται λιγότερες από τις αρχικές υποθέσεις.

Εφαρμογή 2

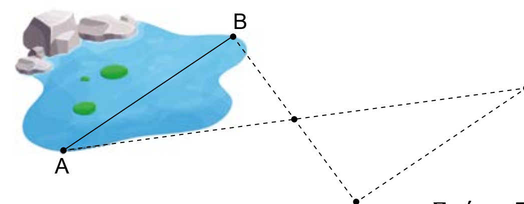
Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Αx η διχοτόμος της γωνίας Α στην οποία θεωρούμε τμήματα ΑΕ = ΑΒ και ΑΖ = ΑΓ.

Να αποδείξετε ότι ΒΖ = ΓΕ και $A\hat{\Gamma}E = A\hat{Z}B$.

Παρατήρηση: Με αφορμή την Εφαρμογή 2, παρατηρούμε ότι η ισότητα τριγώνων είναι ένα βασικό εργαλείο για την απόδειξη ισότητας ευθύγραμμων τμημάτων και γωνιών: Όταν μας ζητείται να αποδείξουμε ότι δύο ευθύγραμμα τμήματα είναι ίσα ή ότι δύο γωνίες είναι ίσες, συνήθως επιλέγουμε δύο τρίγωνα που έχουν πλευρές ή γωνίες τα αντίστοιχα στοιχεία και αποδεικνύουμε ότι τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα.

Εφαρμογή 3
Υπολογισμός απρόσιτων αποστάσεων

Συνεργαστείτε ανά δύο για να περιγράψετε μια διαδικασία μέτρησης της απόστασης ΑΒ των σημείων στις όχθες αυτής της μικρής λίμνης χρησιμοποιώντας το 1ο κριτήριο ισότητας τριγώνων (Σχήμα 7). Έχετε στη διάθεσή σας μια μετροταινία και δεν πρέπει να βραχείτε.



Σχήμα 7

Παρατήρηση: Με τη βοήθεια της ισότητας τριγώνων, μια απόσταση που δεν μπορεί να μετρηθεί άμεσα, μεταφέρεται σε μια άλλη θέση ώστε να μπορεί να μετρηθεί. Αυτή η ιδέα, που μπορεί τώρα να μας φαίνεται απλή, ήταν σίγουρα μεγαλοφυής όταν εφαρμόστηκε για πρώτη φορά από τον Θαλή.

Έλεγχος ισχυρισμού

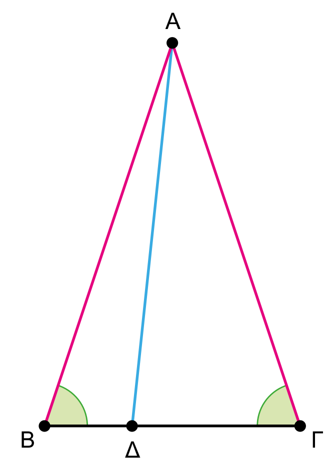
Καθηγητής: Παιδιά, στο Σχήμα 8 είναι ΑΒ = ΑΓ, $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ και Δ σημείο της ΒΓ. Είναι ίσα τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ;

Μελέτης: Τα τρίγωνα προφανώς δεν είναι ίσα επειδή μπορεί ΒΔ < ΔΓ.

Σοφία: Όμως τα τρίγωνα αυτά έχουν δύο πλευρές και μία αντίστοιχη γωνία ίσες μία προς μία. Το ζήτημα είναι ποια είναι η σχέση του σχήματος αυτού με το πρώτο κριτήριο ισότητας τριγώνων.

Μελέτης: Το βρήκα! Η ίση γωνία δεν είναι περιεχόμενη στις ίσες πλευρές.

Σχόλιο: Το Σχήμα 8 δίνει ένα *αντιπαράδειγμα* το οποίο αποδεικνύει ότι σε δύο τρίγωνα η ισότητα δύο πλευρών και μίας γωνίας –που δεν είναι η περιεχόμενη– δεν εξασφαλίζει την ισότητα των τριγώνων.

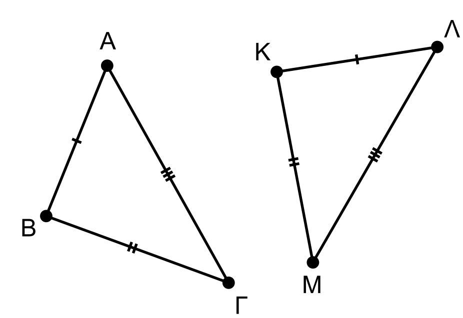


Σχήμα 8

Πρόταση ΙΙ

2ο κριτήριο ισότητας τριγώνων: Πλευρά Πλευρά Πλευρά (ΠΠΠ).
Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

Υπόθεση: ΑΒ = ΚΛ, ΒΓ = ΚΜ, ΑΓ = ΛΜ
Συμπέρασμα: ΑΒΓ = ΛΚΜ (Σχήμα 9)



Σχήμα 9

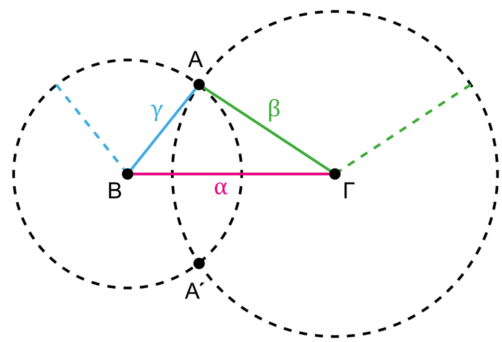
Κατασκευή τριγώνου όταν δίνονται οι τρεις πλευρές του

Δίνονται τρία ευθύγραμμα τμήματα α, β, γ με $\beta \le \alpha$, $\gamma \le \alpha$ και $\alpha < \beta + \gamma$.
Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΒΓ = α, ΑΓ = β και ΑΒ = γ (Σχήμα 10).

Κατασκευή

Θεωρούμε τη μεγαλύτερη πλευρά ΒΓ = α. Με κέντρο το σημείο Β και ακτίνα γ γράφουμε κύκλο (Β, γ) και με κέντρο το σημείο Γ και ακτίνα β γράφουμε κύκλο (Γ, β). Οι συνθήκες $\beta \le \alpha$, $\gamma \le \alpha$ και $\alpha < \beta + \gamma$ εξασφαλίζουν ότι οι κύκλοι τέμνονται σε δύο σημεία.
Έστω Α ένα από τα σημεία αυτά. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι το ζητούμενο (Σχήμα 11).

Σχήμα 10



Σχήμα 11

Στο **QR24** μπορείτε να κάνετε αυτή την κατασκευή σε ψηφιακό περιβάλλον.

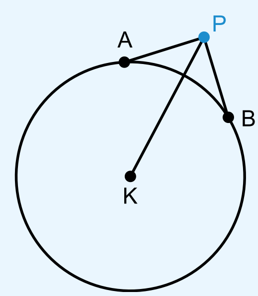
QR24

Το κριτήριο ΠΠΠ εξασφαλίζει ότι κάθε τρίγωνο με πλευρές ίσες με α, β και γ θα είναι ίσο με το τρίγωνο ΑΒΓ που κατασκευάσαμε. Συμπεραίνουμε ότι αν δοθούν τρία ευθύγραμμα τμήματα α, β, γ με $\beta \le \alpha$, $\gamma \le \alpha$ και $\alpha < \beta + \gamma$, τότε υπάρχει μοναδικό τρίγωνο με πλευρές α, β, γ.

Ερώτηση: Προσπαθήστε να κατασκευάσετε τρίγωνο με πλευρές (α) 1, 2, 3 και (β) 1, 2, 4. Τι παρατηρείτε;[1]

Εφαρμογή 4

Δίνεται κύκλος κέντρου Κ και σημείο Ρ εκτός αυτού. Αν τα σημεία Α και Β του κύκλου ισαπέχουν από το Ρ, να αποδείξετε ότι η ΡΚ είναι η διχοτόμος της γωνίας ΑΡΒ.

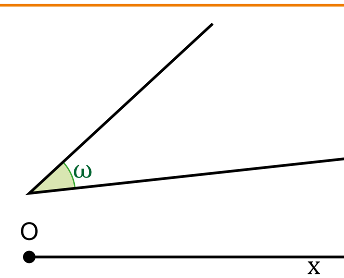


Σχήμα 12

Κατασκευή γωνίας ίσης με δεδομένη

Είναι εύκολο να δούμε πώς, χρησιμοποιώντας μόνο τον διαβήτη, μπορούμε να μεταφέρουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα πάνω σε μια δεδομένη ευθεία. Πώς όμως μπορούμε να μεταφέρουμε μια γωνία έτσι ώστε η μια πλευρά της να συμπίπτει με μια δεδομένη ημιευθεία;

Το κριτήριο ΠΠΠ μάς βοηθάει σε αυτό:
Δίνεται γωνία ω και ημιευθεία Οx. Να κατασκευαστεί γωνία $x\hat{O}y = \omega$ (Σχήμα 13α).



Σχήμα 13α

[1] Στην ενότητα 2.4 θα αποδειχθεί ότι, για να ορίζουν τρία ευθύγραμμα τμήματα τρίγωνο, πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη «καθένα από τα τρία τμήματα είναι μικρότερο από το άθροισμα των δύο άλλων».

Κατασκευή

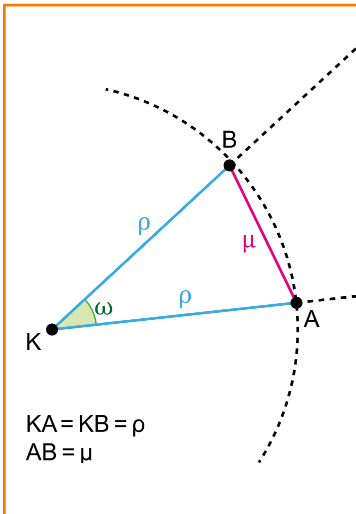
Έστω Κ η κορυφή της γωνίας ω. Με τυχαία ακτίνα ρ, γράφουμε κύκλο (Κ, ρ) ο οποίος τέμνει τις πλευρές της γωνίας ω στα σημεία Α και Β. Έστω τώρα μ = ΑΒ (Σχήμα 13β).

Με την ίδια ακτίνα ρ γράφουμε κύκλο (Ο, ρ) ο οποίος τέμνει την Οx στο σημείο Λ.

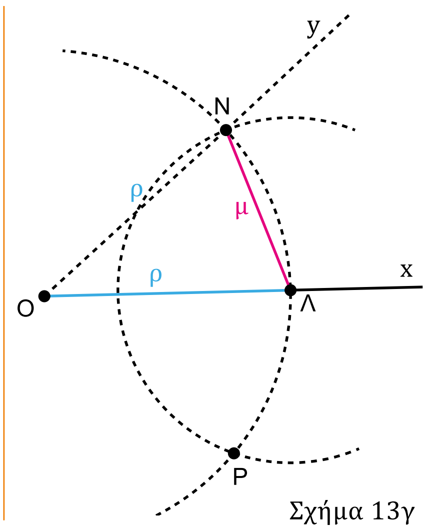
Στη συνέχεια, γράφουμε κύκλο (Λ, μ) ο οποίος τέμνει τον (Ο, ρ) στα σημεία Ν και Ρ.

Τα τρίγωνα ΚΑΒ και ΟΛΝ είναι ίσα επειδή έχουν ίσες πλευρές. Άρα $Λ\hat{Ο}Ν = ω$ (Σχήμα 13γ).

Το πρόβλημα έχει και δεύτερη λύση, τη γωνία ΛΟΡ.



Σχήμα 13β

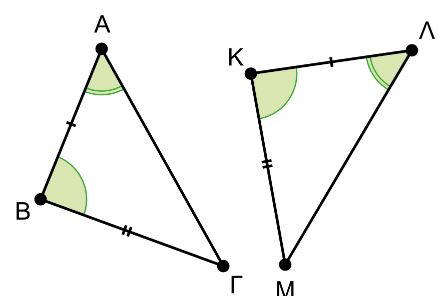


Σχήμα 13γ

Πρόταση ΙΙΙ

3ο κριτήριο ισότητας τριγώνων: Γωνία – Πλευρά – Γωνία (ΓΠΓ)

Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτήν γωνίες ίσες μία προς μία τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

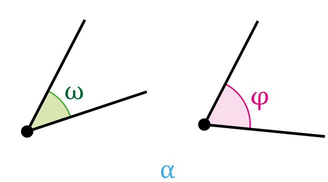


Σχήμα 14

Υπόθεση: ΑΒ = ΚΛ, $\hat{Β} = \hat{Κ}$, $\hat{Α} = \hat{Λ}$
Συμπέρασμα: ΑΒΓ = ΛΚΜ (Σχήμα 14)

Κατασκευή τριγώνου όταν δίνεται μια πλευρά του και οι προσκείμενες σε αυτή γωνίες

Δίνονται δύο γωνίες ω και φ με ω + φ < 180°, καθώς και ένα ευθύγραμμο τμήμα α. Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά ΒΓ = α και προσκείμενες σε αυτήν γωνίες $\hat{Β} = ω$ και $\hat{Γ} = φ$ (Σχήμα 15α).

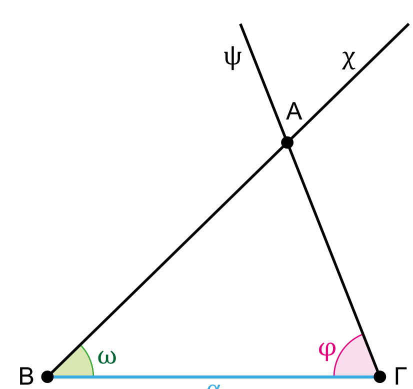


Σχήμα 15α

Κατασκευή

Θεωρούμε την πλευρά ΒΓ = α και παίρνουμε προς το ίδιο μέρος της ευθείας ΒΓ γωνίες $Γ\hat{Β}χ = ω$ και $Β\hat{Γ}ψ = φ$. Αφού οι γωνίες ω και φ έχουν άθροισμα μικρότερο από 180°, με βάση το 5ο Ευκλείδειο Αίτημα, οι ημιευθείες Βχ και Γψ τέμνονται σε σημείο Α.

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι το ζητούμενο (Σχήμα 15β).



Σχήμα 15β

Στο **QR25** μπορείτε να κάνετε αυτή την κατασκευή σε ψηφιακό περιβάλλον.

QR25

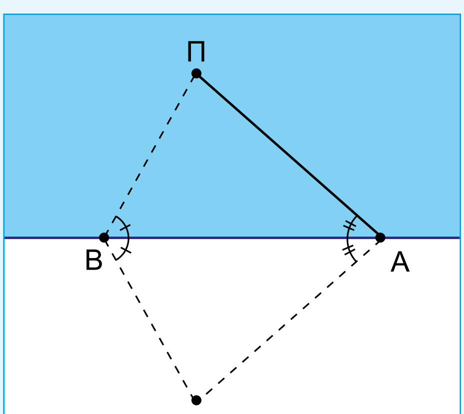
Το κριτήριο ΓΠΓ εξασφαλίζει ότι κάθε τρίγωνο με πλευρά α και προσκείμενες σε αυτή γωνίες ω και φ θα είναι ίσο με το ΑΒΓ. Συμπεραίνουμε ότι, αν δοθούν δύο γωνίες ω και φ με $\omega + \varphi < 180°$ και ένα ευθύγραμμο τμήμα α, υπάρχει μοναδικό τρίγωνο με πλευρά ίση με α και προσκείμενες γωνίες ω και φ.

Η συνθήκη $\omega + \varphi < 180°$ είναι αναγκαία για να ορίζεται τρίγωνο, αφού το άθροισμα δύο γωνιών τριγώνου είναι πάντα μικρότερο των 180°.

Εφαρμογή 5 – Υπολογισμός απρόσιτων αποστάσεων

Συνεργαστείτε ανά δύο για να περιγράψετε, σύμφωνα με το Σχήμα 16β, μία διαδικασία υπολογισμού της απόστασης ενός πλοίου που βρίσκεται στη θέση Π της θάλασσας από ένα σημείο Α της ακτής, αν έχετε μια μετροταινία και ένα γωνιόμετρο.

Σχήμα 16α

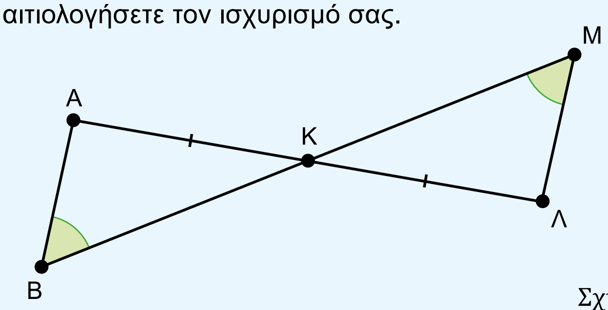


Σχήμα 16β

Εφαρμογή 6

Στο Σχήμα 17 τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΛ και ΒΜ τέμνονται στο μέσο Κ του ΑΛ και ισχύει $\hat{B} = \hat{M}$.
Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ΚΑΒ = ΚΛΜ;

Να αιτιολογήσετε τον ισχυρισμό σας.

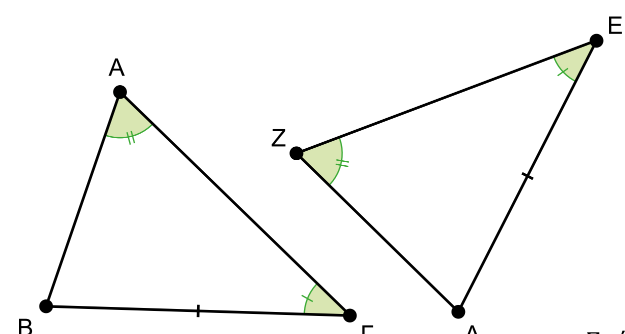


Σχήμα 17

Μπορείτε να αποδείξετε την ακόλουθη πρόταση η οποία γενικεύει το παράδειγμα της Εφαρμογής 6;

Πρόταση IV

Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά, την απέναντι γωνία και μια προσκείμενη γωνία ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.



Σχήμα 18

Παρατήρηση: Θα μπορούσαμε να ονομάσουμε την προηγούμενη πρόταση «Κριτήριο ΠΓΓ», αλλά συνήθως αυτό δεν θεωρείται ξεχωριστό κριτήριο ισότητας τριγώνων, αφού είναι εξίσου απλό να σκεφτόμαστε κάθε φορά ότι δύο τρίγωνα που έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία θα έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες, οπότε άμεσα αναγόμαστε στο κριτήριο ΓΠΓ.

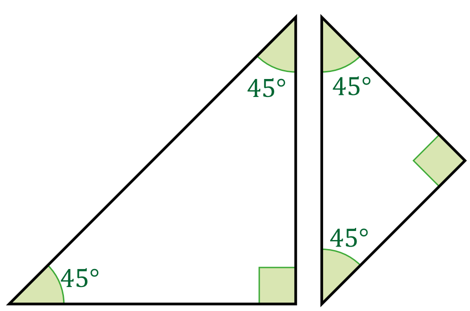
Έλεγχος ισχυρισμού

Καθηγητής: Στο Σχήμα 19 είναι δύο τρίγωνα που έχουν μία πλευρά και τις γωνίες τους ίσες. Είναι ίσα τα τρίγωνα αυτά;

Μελέτης: Δεν φαίνονται ίσα, αλλά πλέον ξέρω ότι τα φαινόμενα απατούν.

Σοφία: Δεν είναι ίσα, επειδή η κάθετη πλευρά του ενός είναι ίση με την υποτείνουσα του άλλου, αλλά το θέμα είναι γιατί δεν ικανοποιείται το κριτήριο ισότητας ΓΠΓ.

Μελέτης: Το βρήκα! Οι υποθέσεις του κριτηρίου δεν ικανοποιούνται, επειδή οι ίσες γωνίες δεν είναι προσκείμενες στις ίσες πλευρές.



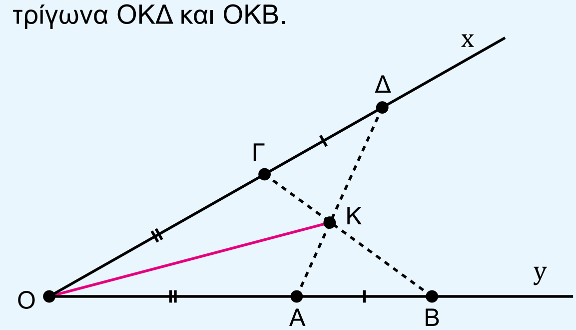
Σχήμα 19

Εφαρμογή 7 – Κατασκευή διχοτόμου γωνίας

Δίνεται μια γωνία $x\hat{O}y$. Στην πλευρά της Oy θεωρούμε σημεία Α και Β. Στην πλευρά της Ox θεωρούμε σημεία Γ και Δ τέτοια ώστε ΟΓ = ΟΑ και ΟΔ = ΟΒ. Αν οι ευθείες ΑΔ και ΒΓ τέμνονται στο Κ, να αποδείξετε ότι η ΟΚ είναι η διχοτόμος της γωνίας $x\hat{O}y$ (Σχήμα 20).

Σχέδιο απόδειξης: Θα θέλαμε να συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΟΚΔ και ΟΚΒ, αλλά δεν έχουμε επαρκή στοιχεία. Για αυτόν τον λόγο, δείχνουμε πρώτα ότι ΟΑΔ = ΟΓΒ από όπου παίρνουμε $O\hat{\Delta}A = O\hat{B}\Gamma$.

Στη συνέχεια μπορούμε να δείξουμε ότι ΓΚΔ=ΑΚΒ για να πάρουμε ΚΔ = ΚΒ. Τέλος, συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΟΚΔ και ΟΚΒ.

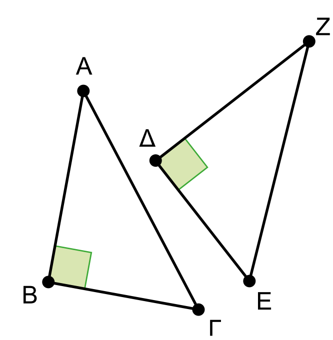


Σχήμα 20

Παρατήρηση: Αξίζει να σταθούμε λίγο στην αποδεικτική διαδικασία που ακολουθήσαμε στην Εφαρμογή 7: Αν στην προσπάθειά μας να συγκρίνουμε δύο τρίγωνα δεν έχουμε επαρκή δεδομένα, τότε συγκρίνουμε πρώτα δύο άλλα τρίγωνα ώστε να εξασφαλίσουμε την ισότητα των στοιχείων που λείπουν.

Κριτήρια ισότητας ορθογώνιων τριγώνων

Να διατυπώσετε δύο κριτήρια ισότητας ορθογώνιων τριγώνων με βάση τα γνωστά κριτήρια ισότητας τριγώνων (Σχήμα 21).



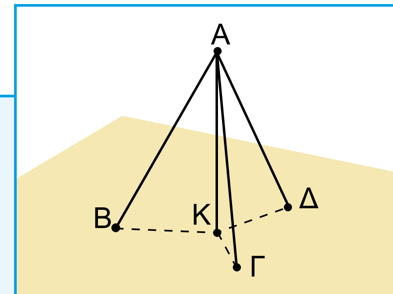
Σχήμα 21

Ερώτημα
Υπάρχουν κριτήρια ισότητας που ισχύουν ειδικά για τα ορθογώνια τρίγωνα;

Εξερεύνηση

Στο Σχήμα 22 η κεραία ΚΑ είναι τοποθετημένη κάθετα στο επίπεδο του εδάφους και σταθεροποιείται με τα ίσου μήκους συρμάτινα στηρίγματα ΑΒ, ΑΓ και ΑΔ.

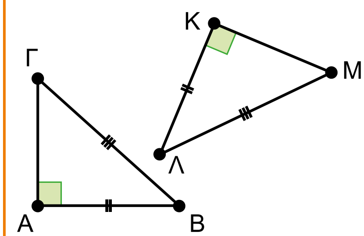
Προκύπτει από κάποιο από τα γνωστά μας κριτήρια ότι τα ορθογώνια τρίγωνα ΚΑΒ, ΚΑΓ και ΚΑΔ είναι ίσα;



Σχήμα 22

Πρόταση V

Κριτήριο ισότητας ορθογώνιων τριγώνων: Υποτείνουσα-Κάθετη (ΥΚ).
Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μία κάθετη πλευρά ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

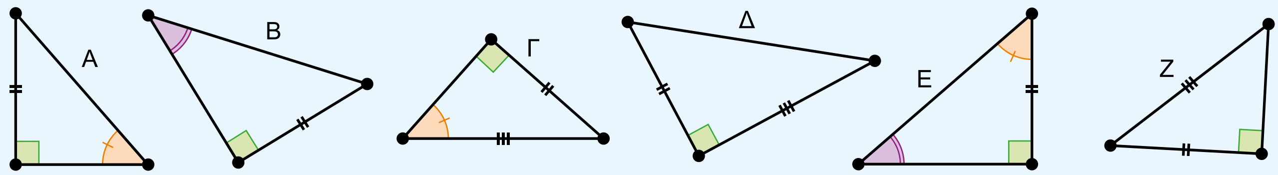


Σχήμα 23

Υπόθεση: $\hat{\mathrm{A}} = \hat{\mathrm{K}} = 90°$, ΒΓ = ΛΜ, ΑΒ = ΚΛ
Συμπέρασμα: ΑΒΓ = ΚΛΜ (Σχήμα 23)

Εφαρμογή 8

Να βρείτε ποια από τα ορθογώνια τρίγωνα του Σχήματος 24 είναι ίσα μεταξύ τους αιτιολογώντας την απάντησή σας.



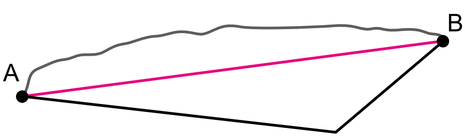
Σχήμα 24

Αποστάσεις

Απόσταση δύο σημείων

Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει δύο σημεία το λέμε **απόσταση** των σημείων αυτών.

Ο ορισμός αυτός βασίζεται στην παραδοχή, που διατύπωσε πρώτος ο Αρχιμήδης, ότι *το ευθύγραμμο τμήμα είναι η διαδρομή με το ελάχιστο μήκος μεταξύ δύο σημείων* (Σχήμα 25).



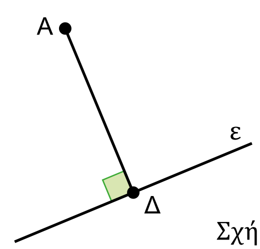
Σχήμα 25

Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, στις μη ευκλείδειες γεωμετρίες η ιδιότητα της συντομότερης διαδρομής μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως το χαρακτηριστικό γνώρισμα της «ευθείας».

Απόσταση σημείου από ευθεία

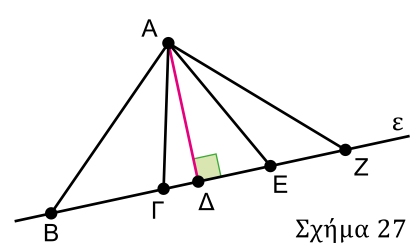
Δίνεται μια ευθεία (ε) και ένα σημείο Α που δεν ανήκει σε αυτήν.

Είναι φανερό διαισθητικά (και θα αποδειχθεί στην ενότητα 2.4) ότι από όλα τα ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν το Α με σημείο της (ε) αυτό που είναι κάθετο στην (ε) έχει το ελάχιστο μήκος (Σχήμα 26). Δίνουμε λοιπόν τον ακόλουθο ορισμό:



Σχήμα 26

Απόσταση σημείου από ευθεία είναι το μήκος του κάθετου τμήματος από το σημείο στην ευθεία.

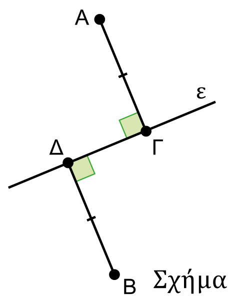


Σχήμα 27

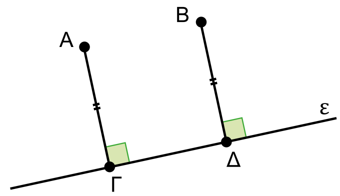
Με βάση τον ορισμό της απόστασης ενός σημείου από μια ευθεία, προκύπτουν και οι ακόλουθοι ορισμοί:

Ορισμοί

Α. Δύο σημεία Α και Β ισαπέχουν από ευθεία (ε) όταν τα κάθετα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΒΔ προς την ευθεία (ε) είναι ίσα μεταξύ τους (Σχήματα 28α, β).

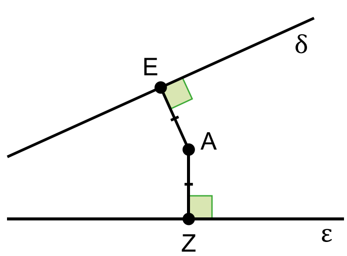


Σχήμα 28α

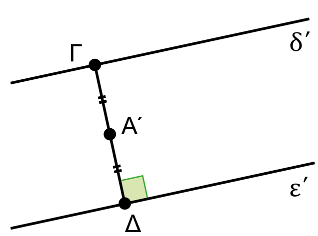


Σχήμα 28β

Β. Ένα σημείο Α ισαπέχει από τις ευθείες (ε) και (δ) όταν τα κάθετα ευθύγραμμα τμήματα ΑΕ και ΑΖ προς τις δύο ευθείες είναι ίσα μεταξύ τους (Σχήματα 29α, β).



Σχήμα 29α



Σχήμα 29β

Εφαρμογή 9

Αποδείξτε ότι:

1. Τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ ισαπέχουν από κάθε ευθεία που διέρχεται από το μέσο του τμήματος.
2. Ειδικότερα, αν η ΑΜ είναι διάμεσος ενός τριγώνου ΑΒΓ, τότε οι κορυφές Β και Γ ισαπέχουν από την ευθεία ΑΜ.
3. Αν η ΑΔ είναι διχοτόμος ενός τριγώνου ΑΒΓ, τότε το σημείο Δ ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας Α.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 **Έλεγχος ισχυρισμού**

Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ).

α. Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.
β. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και μία γωνία ίση, τότε είναι ίσα.
γ. Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά και δύο γωνίες ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.
δ. Σε δύο τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες.
ε. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία ίση, τότε έχουν και τις τρίτες πλευρές τους ίσες.
στ. Κάθε κριτήριο ισότητας τριγώνων προϋποθέτει τουλάχιστον τρία στοιχεία ίσα, ένα τουλάχιστον από τα οποία να είναι πλευρά.

2 **Έλεγχος ισχυρισμού**

Πρόταση Α: Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε έχουν και τις γωνίες τους ίσες μία προς μία.

α. Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση Α.

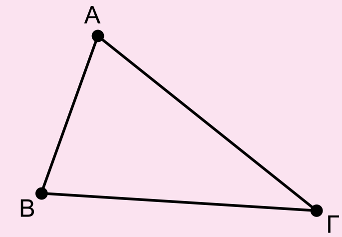
β. Να διατυπώσετε την αντίστροφη της πρότασης Α και να εξετάσετε αν ισχύει.

3 **Κατασκευή**

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να κατασκευάσετε με κανόνα και διαβήτη τρίγωνο ΔΒΓ με πλευρές ίσες με τις πλευρές του ΑΒΓ.

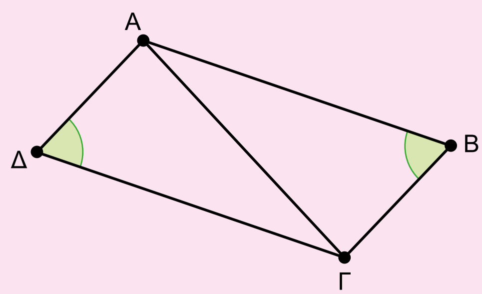
Πόσα τέτοια τρίγωνα μπορείτε να κατασκευάσετε;

Ποια σχέση ισχύει μεταξύ των τριγώνων που κατασκευάσατε;



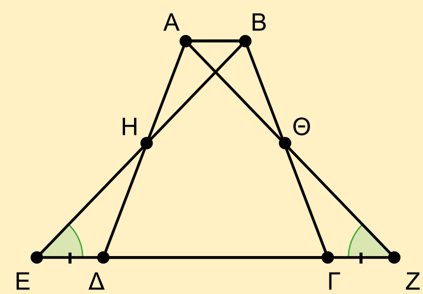
4 Στο παρακάτω σχήμα ισχύει ότι ΑΒ // ΓΔ και $\hat{\Delta} = \hat{B}$.

Να εξετάσετε αν τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΓ είναι ίσα.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



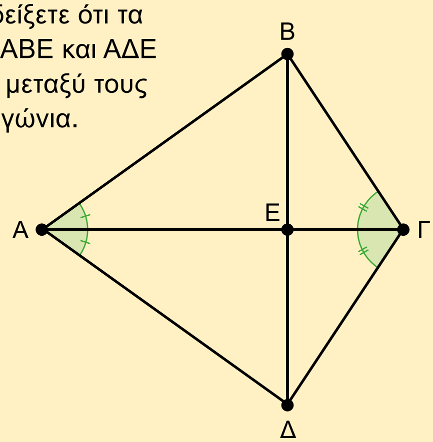
5 Στο παρακάτω σχήμα είναι ΕΔ = ΓΖ, $\hat{E} = \hat{Z}$ και ΒΕ = ΑΖ.

Να βρείτε δύο ίσα τρίγωνα αιτιολογώντας την απάντησή σας.



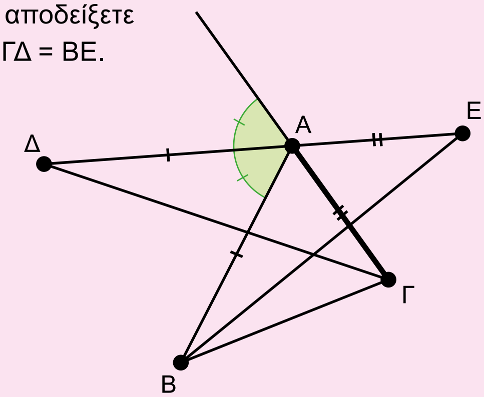
6 Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ του οποίου οι διαγώνιοι τέμνονται στο σημείο Ε και ισχύει $B\hat{A}\Gamma = \Gamma\hat{A}\Delta$ και $B\hat{\Gamma}A = A\hat{\Gamma}\Delta$.

Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΔΕ είναι ίσα μεταξύ τους και ορθογώνια.



7 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και στην ευθεία της εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας Α θεωρούμε σημεία Δ και Ε ώστε ΑΔ = ΑΒ και ΑΕ = ΑΓ όπως φαίνονται στο σχήμα.

Να αποδείξετε ότι ΓΔ = ΒΕ.



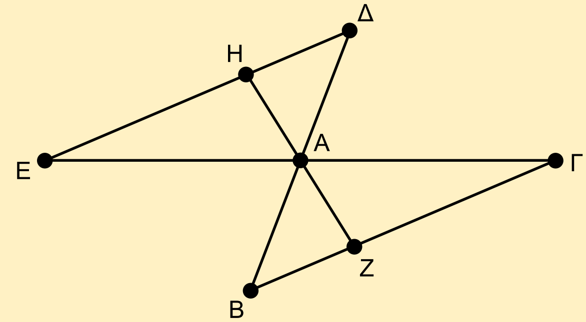
8 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και στις προεκτάσεις των πλευρών του ΒΑ και ΓΑ θεωρούμε σημεία Δ και Ε αντίστοιχα τέτοια ώστε ΑΔ = ΑΒ και ΑΕ = ΑΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α. ΒΓ = ΔΕ.

β. Αν η προέκταση της διχοτόμου ΖΑ του τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τη ΔΕ στο σημείο Η, τότε

- **i.** η ΑΗ είναι διχοτόμος του ΑΔΕ
- **ii.** ΔΗ = ΒΖ



9 **Κρυμμένος θησαυρός**

Σε ένα παιχνίδι κρυμμένου θησαυρού η ομάδα σου είναι σε μία περιοχή όπου υπάρχει ένα πεύκο (Π) και ένας φοίνικας (Φ).

Σύμφωνα με το σημείωμα που έχετε, τα ευθύγραμμα τμήματα ΘΠ από τη θέση του θησαυρού (Θ) προς το πεύκο και ΘΦ από τη θέση του θησαυρού προς τον φοίνικα σχηματίζουν με το τμήμα ΠΦ γωνίες 80° και 40° αντίστοιχα.

Να σχεδιάσετε ένα σχήμα για να βρείτε τα σημεία στα οποία θα πρέπει να σκάψετε ώστε να εντοπίσετε το θησαυρό.

10 Να αποδείξετε ότι στις αντίστοιχες πλευρές δύο ίσων τριγώνων αντιστοιχούν ίσες διάμεσοι, ίσες διχοτόμοι και ίσα ύψη.

11 Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι. Θεωρούμε μια διάμετρο ΑΒ του εσωτερικού κύκλου και μια διάμετρο ΓΔ του εξωτερικού κύκλου που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

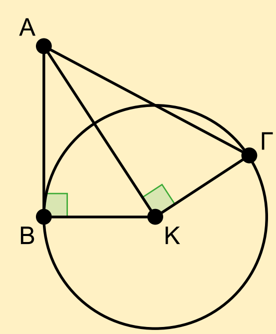
Να αποδείξετε ότι οι απέναντι πλευρές και γωνίες του τετραπλεύρου ΑΓΒΔ είναι ίσες.

12 Να αποδείξετε ότι, αν δύο τρίγωνα είναι ίσα, τότε και τα τρίγωνα με κορυφές τα μέσα των πλευρών τους είναι ίσα.

13 **Έλεγχος ισχυρισμού**

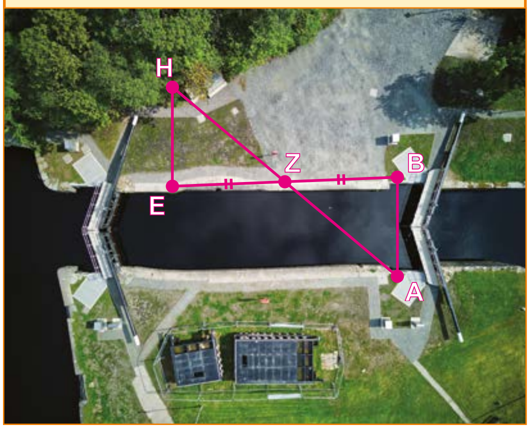
Δίνεται ο ισχυρισμός: «Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα».

Να ελέγξετε τον ισχυρισμό με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος.



14 **Υπολογισμός απρόσιτης απόστασης**

Να περιγράψετε έναν τρόπο με τον οποίο μπορείτε να υπολογίσετε το πλάτος ΑΒ του καναλιού της εικόνας, παραμένοντας στην πάνω όχθη.

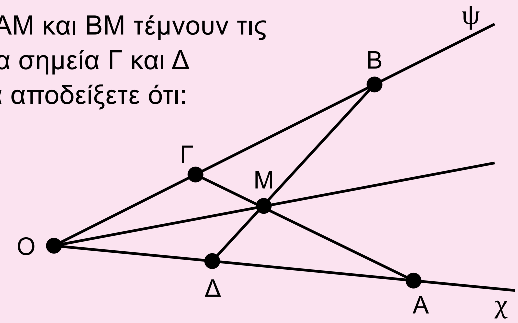


15 Στις πλευρές Οχ και Οψ γωνίας $\chi\hat{O}\psi$ θεωρούμε τα σημεία Α και Β αντίστοιχα τέτοια ώστε ΟΑ = ΟΒ.

α. Να αποδείξετε ότι κάθε σημείο Μ της διχοτόμου της γωνίας $\chi\hat{O}\psi$ ισαπέχει από τα Α και Β.

β. Αν οι ευθείες ΑΜ και ΒΜ τέμνουν τις Οψ και Οχ στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

i. ΑΓ = ΒΔ
ii. ΜΓ = ΜΔ
iii. ΒΓ = ΑΔ



16 Σε τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε την πλευρά ΒΑ κατά τμήμα ΑΔ = ΒΑ, την πλευρά ΓΑ κατά τμήμα ΑΕ = ΑΓ και τη διάμεσο ΒΚ κατά τμήμα ΚΝ = ΒΚ.

Να αποδείξετε ότι ΑΝ = ΔΕ.

17 Σε τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ κατά τμήμα ΜΔ = ΑΜ.

Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΓΒ είναι ίσα.

18 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ κατά τμήμα ΒΕ = ΑΒ και την πλευρά ΑΓ κατά τμήμα ΓΖ = ΑΓ.

Να αποδείξετε ότι τα σημεία Ε και Ζ ισαπέχουν από την ευθεία ΒΓ.

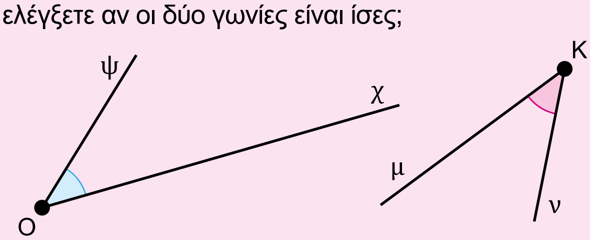
19 Έστω ευθεία (ε) και δύο σημεία Α και Β εκατέρωθεν αυτής τέτοια ώστε οι αποστάσεις τους ΑΓ και ΒΔ από την (ε) να είναι ίσες. Αν Μ το μέσο του ΓΔ να αποδείξετε ότι:

α. $A\hat{M}\Gamma = B\hat{M}\Delta$

β. τα σημεία Α, Μ, Β είναι συνευθειακά

γ. το Μ είναι το μέσο του ΑΒ.

20 Δίνονται δύο γωνίες $\chi\hat{O}\psi$ και $\mu\hat{K}\nu$ στο επίπεδο. Χρησιμοποιώντας μόνο τον διαβήτη, πώς μπορείτε να ελέγξετε αν οι δύο γωνίες είναι ίσες;



21 Θεωρούμε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ με ΑΒ = Α΄Β΄, ΑΓ = Α΄Γ΄ και $\hat{A} = \hat{A}'$. Η διάμεσος ΑΜ και η διχοτόμος ΒΔ του ΑΒΓ τέμνονται στο Ε, ενώ η διάμεσος Α΄Μ΄ και η διχοτόμος Β΄Δ΄ του Α΄Β΄Γ΄ τέμνονται στο Ε΄. Να αποδείξετε ότι: **α.** τα τρίγωνα ΑΒΕ και Α΄Β΄Ε΄ είναι ίσα, **β.** ΕΔ = Ε΄Δ΄.

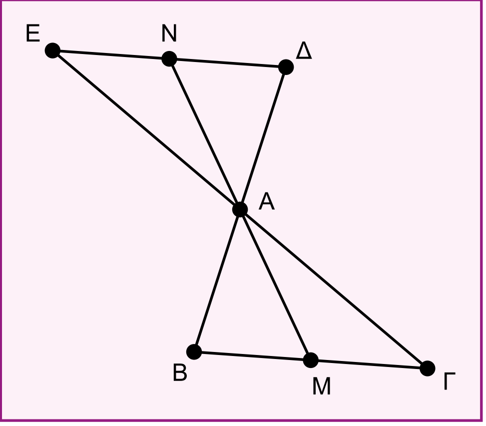
22 Να αποδείξετε ότι δύο τρίγωνα που έχουν δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες διαμέσους στις πλευρές αυτές ίσες είναι ίσα.

23 Τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΒΔ διχοτομούνται, δηλαδή τέμνονται στο κοινό τους μέσο Μ. Να αποδείξετε ότι η προέκταση της διαμέσου ΕΜ του τριγώνου ΜΑΒ διέρχεται από το μέσο του ΓΔ.

24 Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ και ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα έτσι ώστε ΔΑ = ΑΒ και ΑΕ = ΑΓ. Αν Μ και Ν τα μέσα των ΒΓ και ΔΕ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α. τα σημεία Μ, Α, Ν είναι συνευθειακά.

β. το σημείο Α είναι το μέσο του ΜΝ.



2.3 Ισοσκελές τρίγωνο

Βασικό ερώτημα της ενότητας

- Ποιες ιδιότητες χαρακτηρίζουν τα ισοσκελή τρίγωνα;

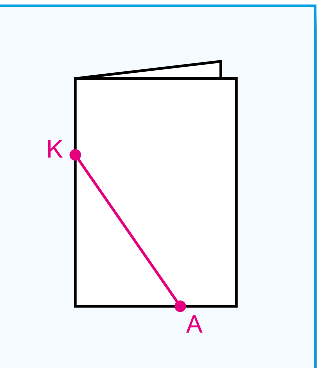
Ορισμοί

Ισοσκελές *λέγεται κάθε τρίγωνο που έχει δύο ίσες πλευρές. Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ, τότε η πλευρά ΒΓ λέγεται* ***βάση*** *του και το σημείο Α* ***κορυφή*** *του.*

Ισόπλευρο *λέγεται το τρίγωνο που έχει τις τρεις πλευρές του ίσες.*

Εξερεύνηση

Διπλώστε μια κόλλα χαρτί στη μέση και σχεδιάστε ένα ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει ένα σημείο της γραμμής δίπλωσης με ένα σημείο της κάτω πλευράς της κόλλας (Σχήμα 30). Κόψτε το χαρτί κατά μήκος αυτού του ευθύγραμμου τμήματος. Ξεδιπλώστε το χαρτί. Τι είδους τρίγωνο δημιουργήθηκε; Παρατηρώντας την κατασκευή σας, βρείτε όσο γίνεται περισσότερες ιδιότητες αυτού του τριγώνου.



Σχήμα 30

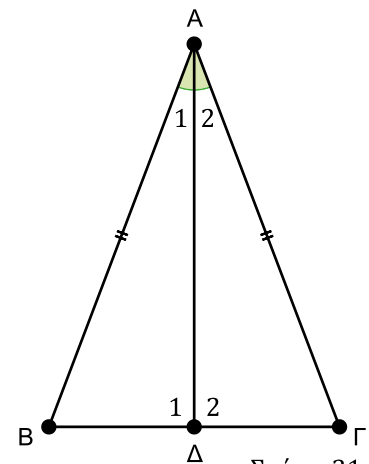
Ιδιότητες ισοσκελούς τριγώνου

Πρόταση Ι

Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο:

α. οι προσκείμενες στη βάση γωνίες του είναι ίσες.

β. η διχοτόμος, η διάμεσος και το ύψος που αντιστοιχούν στη βάση του ταυτίζονται.



Σχήμα 31

Απόδειξη: Στο τρίγωνο ΑΒΓ υποθέτουμε ότι ΑΒ = ΑΓ.
Φέρουμε τη **διχοτόμο** ΑΔ της γωνίας Α (Σχήμα 31).

Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ έχουν ΑΒ = ΑΓ, $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ και την ΑΔ κοινή πλευρά, άρα είναι ίσα σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ. Από την ισότητα των τριγώνων συμπεραίνουμε ότι:

α. $\hat{B} = \hat{\Gamma}$

β. ΒΔ = ΔΓ, δηλαδή η διχοτόμος ΑΔ είναι και διάμεσος.

γ. $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$ και αφού ισχύει $\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = 180°$, παίρνουμε ότι $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = 90°$, δηλαδή η διχοτόμος ΑΔ είναι και ύψος.

Στο **QR26** μπορείτε να δείτε την απόδειξη του Ευκλείδη για την ίδια πρόταση, η οποία είναι γνωστή και με το περίεργο όνομα «Η γέφυρα των γαϊδάρων».

QR26

Διαφορετικές αποδείξεις
Μπορείτε να αποδείξετε την Πρόταση Ι φέροντας αντί για τη διχοτόμο τη διάμεσο ή το ύψος;

Υπενθυμίζουμε ότι **μεσοκάθετος** ενός ευθύγραμμου τμήματος λέγεται η μοναδική ευθεία που διέρχεται από το μέσο του τμήματος και είναι κάθετη σε αυτό.

Πόρισμα

Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η διχοτόμος, το ύψος και η διάμεσος που φέρουμε από την κορυφή του βρίσκονται πάνω στη μεσοκάθετο της βάσης του.

Σχέσεις μεταξύ των γωνιών ενός ισοσκελούς τριγώνου

Εξερεύνηση

Στο Σχήμα 32 φαίνεται το κτίριο Transamerica Pyramid που βρίσκεται στο Σαν Φρανσίσκο. Η κορυφή του σχηματίζεται από τέσσερα ισοσκελή τρίγωνα. Σε καθένα από αυτά τα τρίγωνα, καθεμία από τις γωνίες της βάσης του είναι περίπου 84°.

Να βρείτε κατά προσέγγιση τη γωνία της κορυφής του κάθε τριγώνου.


Σχήμα 32

Τύποι

Να αποδείξετε ότι, αν το ΑΒΓ είναι ισοσκελές τρίγωνο με ΑΒ = ΑΓ, τότε:

α. $\hat{A} = 180° - 2\hat{B}$

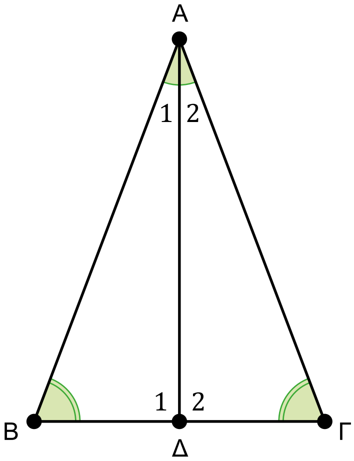
β. $\hat{B} = \hat{\Gamma} = \frac{180° - \hat{A}}{2}$

Κριτήρια για ισοσκελή τρίγωνα

Στην Πρόταση Ι είδαμε δύο βασικές ιδιότητες του ισοσκελούς τριγώνου. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι αυτές οι ιδιότητες *χαρακτηρίζουν* τα ισοσκελή τρίγωνα, δηλαδή αν κάποια από αυτές ισχύει σε ένα τρίγωνο, τότε αυτό είναι ισοσκελές.

Συνεπώς, οι ιδιότητες αυτές αποτελούν κριτήρια για να είναι ένα τρίγωνο ισοσκελές.

Πρόταση ΙΙ ***Αν ένα τρίγωνο έχει δύο ίσες γωνίες, τότε είναι ισοσκελές.***



Σχήμα 33

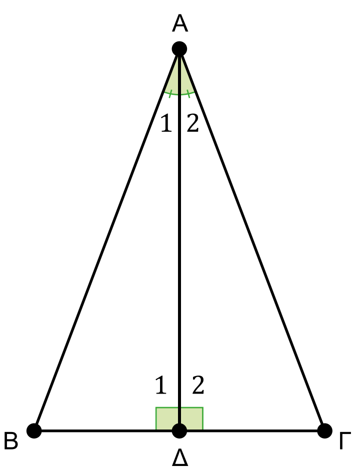
Απόδειξη: Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ και θα αποδείξουμε ότι ΑΒ = ΑΓ.

Φέρουμε τη διχοτόμο ΑΔ (Σχήμα 33).
Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ έχουν $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.
Αφού έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, θα έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες, δηλαδή $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$.

Συγκρίνοντας λοιπόν τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ έχουμε: ΑΔ κοινή πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, άρα ΑΒΔ = ΑΓΔ. Έπεται ότι ΑΒ = ΑΓ.

Πόρισμα ***Αν ένα τρίγωνο έχει τις τρεις γωνίες του ίσες, τότε είναι ισόπλευρο.***

Πρόταση ΙΙΙ ***Αν σε ένα τρίγωνο μία διχοτόμος είναι και ύψος, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.***



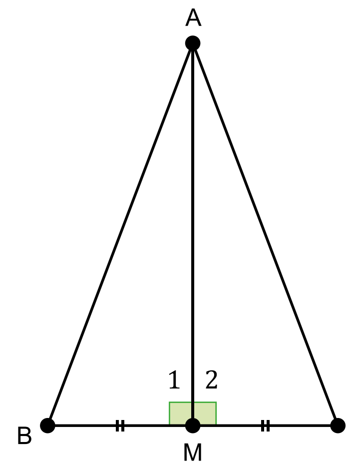
Σχήμα 34

Απόδειξη: Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ (Σχήμα 34). Υποθέτουμε ότι η διχοτόμος ΑΔ είναι και ύψος και θα αποδείξουμε ότι ΑΒ = ΑΓ.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ. Αυτά έχουν:
ΑΔ κοινή πλευρά, $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ και $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = 90°$. Με βάση το κριτήριο ΓΠΓ συμπεραίνουμε ότι ΑΒΔ = ΑΓΔ και άρα ΑΒ = ΑΓ.

Πρόταση IV

Αν σε ένα τρίγωνο μία διάμεσος είναι και ύψος, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.



Σχήμα 35

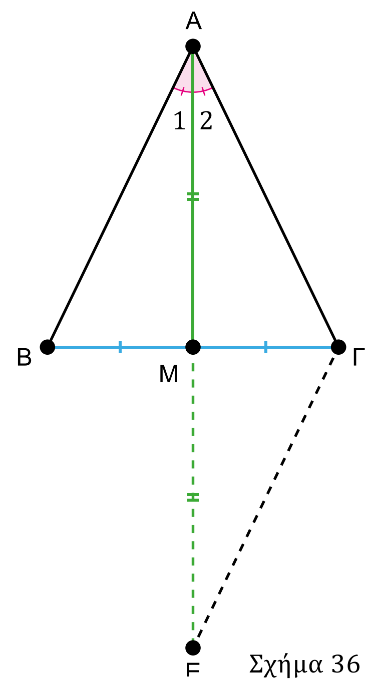
Απόδειξη: Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ (Σχήμα 35). Υποθέτουμε ότι η διάμεσος ΑΜ είναι και ύψος και θα αποδείξουμε ότι ΑΒ = ΑΓ.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΑΓΜ. Αυτά έχουν:
ΑΜ κοινή πλευρά, ΜΒ = ΜΓ και $\hat{M}_1 = \hat{M}_2 = 90°$. Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ συμπεραίνουμε ότι ΑΒΜ = ΑΓΜ και άρα ΑΒ = ΑΓ.

Η πρόταση που ακολουθεί, αν και μοιάζει εξίσου απλή με τις προηγούμενες, δεν μπορεί να αποδειχθεί άμεσα με μία σύγκριση τριγώνων, όπως αυτές. Δοκιμάστε και μόνοι σας για να εντοπίσετε τη δυσκολία.

Πρόταση V

Αν σε ένα τρίγωνο μία διάμεσος είναι και διχοτόμος, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.



Σχήμα 36

Απόδειξη: Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ. Υποθέτουμε ότι η διάμεσος ΑΜ είναι και διχοτόμος της γωνίας Α και θα αποδείξουμε ότι ΑΒ = ΑΓ.

Προεκτείνουμε την ΑΜ κατά τμήμα ΜΕ = ΑΜ (Σχήμα 36). Τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΕΓΜ έχουν ΒΜ = ΜΓ (ΑΜ διάμεσος του ΑΒΓ), ΑΜ = ΕΜ (κατασκευή) και $B\hat{M}A = \Gamma\hat{M}E$ (κατακορυφήν), άρα είναι ίσα (ΠΓΠ).

Έπεται ότι ΑΒ = ΕΓ (1) και $\hat{A}_1 = \hat{E}$.

Όμως $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, άρα $\hat{A}_2 = \hat{E}$. Τώρα το τρίγωνο ΓΑΕ έχει δύο γωνίες ίσες, άρα είναι ισοσκελές με ΑΓ = ΕΓ (2).

Από τις σχέσεις (1), (2), συμπεραίνουμε ότι ΑΒ = ΑΓ, δηλαδή το ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Παρατήρηση

Η τελευταία απόδειξη βασίστηκε στην ακόλουθη γενική παρατήρηση: Αν προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ ενός τριγώνου ΑΒΓ κατά ίσο τμήμα ΜΕ, τότε το τρίγωνο ΕΓΜ είναι ίσο με το ΑΒΜ. Αυτή η παρατήρηση μπορεί να είναι χρήσιμη σε πολλά προβλήματα στα οποία εμφανίζεται κάποια διάμεσος τριγώνου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ).

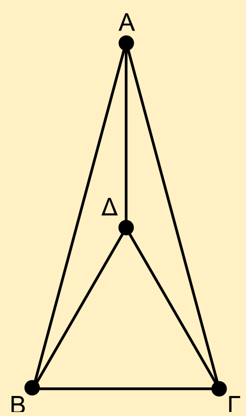
α. Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο κάθε διάμεσος είναι και ύψος.
β. Κάθε ισοσκελές τρίγωνο είναι ισόπλευρο.
γ. Κάθε ισόπλευρο τρίγωνο είναι ισοσκελές.
δ. Αν ένα ισοσκελές τρίγωνο έχει μία γωνία 60°, τότε είναι ισόπλευρο.
ε. Αν μια διάμεσος ενός τριγώνου είναι και ύψος του, τότε είναι και διχοτόμος.
στ. Αν σε ένα τρίγωνο δύο διάμεσοι είναι και διχοτόμοι, τότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.
ζ. Κάθε ισοσκελές τρίγωνο έχει άξονα συμμετρίας.
η. Κάθε τρίγωνο που έχει άξονα συμμετρίας είναι ισοσκελές.
θ. Ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές αν και μόνο αν η μεσοκάθετος μιας πλευράς του διέρχεται από την απέναντι κορυφή.

2 Να αποδείξετε ότι τα ύψη ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσα.

3 **α.** Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.
β) Αν ΒΔ και ΓΕ είναι οι διχοτόμοι των γωνιών της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ και Ε ισαπέχουν από τη ΒΓ.

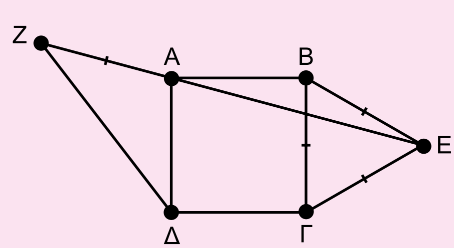
4 Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ, το ΔΒΓ είναι ισόπλευρο και ΑΔ = ΒΓ.

Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{BAΓ}$.



5 Στο παρακάτω σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισόπλευρο και έχουμε προεκτείνει το ΕΑ κατά τμήμα ΑΖ = ΒΓ.

Να υπολογίσετε τη γωνία ΑΖΔ.



6 **α.** Να αποδείξετε ότι: Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ, τότε η διχοτόμος της γωνίας Αεξ είναι παράλληλη στη ΒΓ.
β. Να διατυπώσετε την αντίστροφη της πρότασης του ερωτήματος (α) και να την αποδείξετε.

7 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ, η διχοτόμος ΑΔ και από το Β φέρουμε κάθετη στην ΑΔ η οποία τέμνει την ΑΓ στο Ε.
Να αποδείξετε ότι ΕΓ = ΑΓ - ΑΒ.

8

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και σημείο Κ στο εσωτερικό του τέτοιο ώστε ΚΒ = ΚΓ.

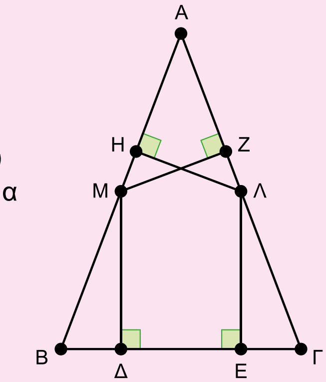
Να αποδείξετε ότι:

α. ΑΚ διχοτόμος της γωνίας Α.
β. η προέκταση της ΑΚ διχοτομεί τη γωνία ΒΚΓ του τριγώνου ΒΚΓ.

9

Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ θεωρούμε τα μέσα Μ και Λ των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Αν $ΜΔ \perp ΒΓ$, $ΛΕ \perp ΒΓ$, $ΜΖ \perp ΑΓ$ και $ΛΗ \perp ΑΒ$, να αποδείξετε ότι:

α. ΜΔ = ΛΕ
β. ΜΖ = ΛΗ
γ. Να διατυπώσετε λεκτικά (χωρίς τη χρήση συμβόλων) την πρόταση με συμπέρασμα το ερώτημα (α).



10

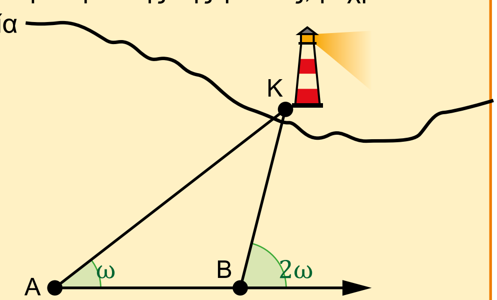
Δίνεται γωνία $χ\hat{Ο}ψ$ και σημεία Α, Γ στην πλευρά Οχ και Β, Δ στην πλευρά Οψ με ΟΑ = ΟΒ και ΟΓ = ΟΔ.

Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ έχουν κοινή μεσοκάθετο.

11 **Υπολογισμός απρόσιτης απόστασης: Εφαρμογή στη ναυσιπλοΐα**

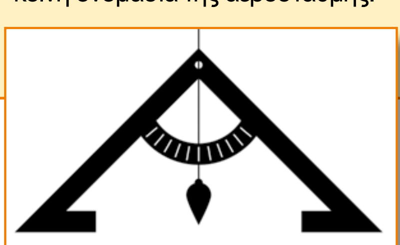
Για να υπολογίσουν την απόσταση του πλοίου από ένα σημείο Κ της ακτής οι ναυτικοί εφαρμόζουν την ακόλουθη μέθοδο: όταν το πλοίο βρίσκεται σε σημείο Α, καταγράφουν τη γωνία ω που σχηματίζει η ΑΚ με τη διεύθυνση κίνησης του πλοίου. Καθώς το πλοίο συνεχίζει να κινείται, παρακολουθούν τη μεταβολή αυτής της γωνίας, μέχρι το σημείο Β όπου η γωνία θα γίνει ίση με 2ω.
Η απόσταση του σημείου Κ από το Β θα είναι τότε ίση με την απόσταση ΑΒ που διάνυσε το πλοίο.

Εξηγήστε γιατί.



12

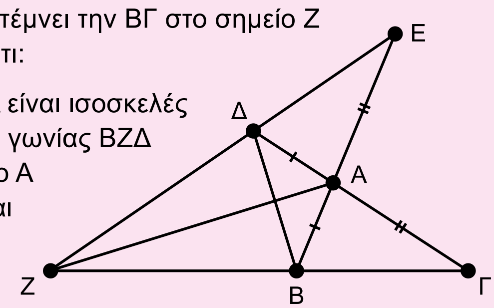
Το εργαλείο αυτό χρησιμοποιείται από την αρχαιότητα σε οικοδομικές εργασίες για να ελέγχει αν μία επιφάνεια είναι οριζόντια. Οι αρχαίοι Έλληνες έλεγαν αυτό το όργανο «διαβήτη» (οριζοντιώσεως), ενώ στους βυζαντινούς χρόνους πήρε το όνομα «άλφάδιν» λόγω της ομοιότητάς του με το (κεφαλαίο) γράμμα άλφα. Το εργαλείο αποτελείται από ένα ισοσκελές τρίγωνο και ένα βαρίδι το οποίο είναι κρεμασμένο με ένα νήμα από την κορυφή του τριγώνου. Σημείωση: (μετά το σχήμα στο τέλος της σελίδας και με παραπομπή στο (οριζοντιώσεως) Οι αρχαίοι Έλληνες, παλιά, ονόμαζαν τον διαβήτη για την χάραξη κύκλων τόρνο, έπειτα καρκίνο και μετά κιρκίνο, ενώ σήμερα αλφάδι είναι η κοινή ονομασία της αεροστάθμης.



13

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ. Στις προεκτάσεις ΒΑ και ΓΑ των πλευρών θεωρούμε τα σημεία Ε και Δ αντίστοιχα έτσι ώστε ΑΕ = ΑΓ και ΑΔ = ΑΒ.
Αν η ευθεία ΔΕ τέμνει την ΒΓ στο σημείο Ζ να αποδείξετε ότι:

α. το τρίγωνο ΖΒΔ είναι ισοσκελές
β. η διχοτόμος της γωνίας ΒΖΔ διέρχεται από το Α
γ. η ευθεία ΖΑ είναι μεσοκάθετος του ΔΒ.



14 Έστω ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ.

Στις προεκτάσεις των πλευρών του ΓΒ, ΑΓ και ΒΑ θεωρούμε τα σημεία Δ, Ε και Ζ αντίστοιχα έτσι ώστε ΒΔ = ΓΕ = ΑΖ.

Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισόπλευρο.

15 Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $Α = 90°$ και η διχοτόμος του ΒΔ. Η κάθετη από τη Δ στη ΒΓ τέμνει την ευθεία ΑΒ στο Ζ.

Να αποδείξετε ότι:

α. το τρίγωνο ΒΓΖ είναι ισοσκελές

β. η ΒΔ είναι η μεσοκάθετος του ΓΖ.

16 Να κατασκευάσετε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ όταν δίνονται:

α. η πλευρά ΑΒ και η γωνία Β

β. η πλευρά ΑΒ και η γωνία Α.

17 **Το πρόβλημα του καθρέφτη**

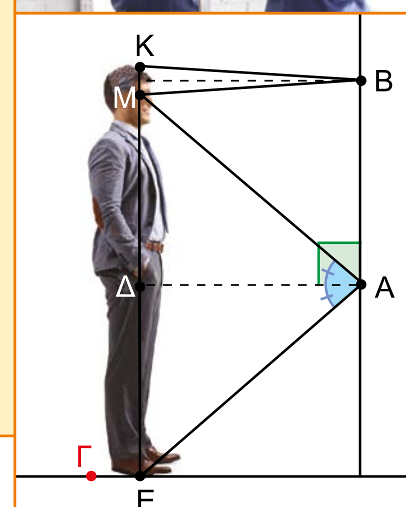
Όταν είμαστε όρθιοι και κοιτάμε έναν όρθιο καθρέφτη, η οπτική ακτίνα που προσπίπτει στον καθρέφτη ανακλάται με ίση γωνία. Για παράδειγμα, στο σχήμα η οπτική ακτίνα ΕΑ ανακλάται στην ΑΜ ώστε $\hat{ΜΑΔ} = \hat{ΔΑΕ}$ όπου ΑΔ κάθετη στην ΑΒ στο σημείο Α.

Να βρείτε το ελάχιστο ύψος καθρέφτη που χρειάζεται ένας άνθρωπος με ύψος 1,78 m, ώστε να φαίνεται ολόκληρο το σώμα του στον καθρέφτη. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Να εξετάσετε αν το ύψος του καθρέφτη ή το ύψος στο οποίο πρέπει να τοποθετηθεί εξαρτώνται από την απόσταση του ανθρώπου από τον καθρέφτη.

Δείτε και το QR27.

QR27

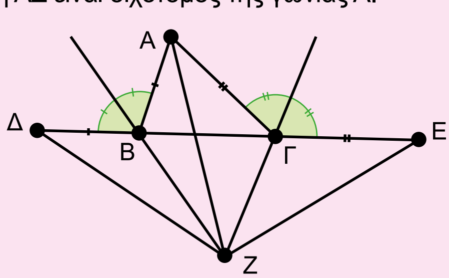


18 Στην προέκταση της πλευράς ΓΒ (προς το Β) τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε ΑΒ = ΔΒ και στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο ώστε ΓΕ = ΑΓ. Αν οι διχοτόμοι των γωνιών ΑΒΔ και ΑΓΕ τέμνονται στο Ζ, να αποδείξετε ότι:

α. το τρίγωνο ΑΖΔ είναι ισοσκελές.

β. το τρίγωνο ΔΖΕ είναι ισοσκελές.

γ. η ΑΖ είναι διχοτόμος της γωνίας Α.

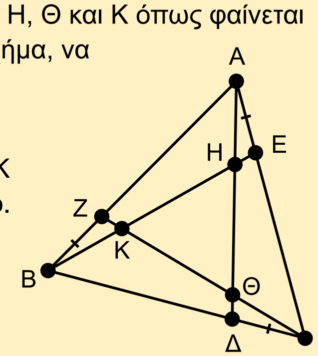


19 Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε και Ζ των πλευρών ΒΓ, ΓΑ και ΑΒ αντίστοιχα ώστε ΒΔ = ΓΕ = ΑΖ.

Αν τα τμήματα ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ τέμνονται ανά δύο στα σημεία Η, Θ και Κ όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, να αποδείξετε ότι:

α. ΑΔ = ΒΕ = ΓΖ

β. το τρίγωνο ΗΘΚ είναι ισόπλευρο.



2.4 Ανισοτικές σχέσεις στο τρίγωνο

Βασικά ερωτήματα της ενότητας

- Μπορούμε να σχεδιάσουμε τρίγωνο με πλευρές τρία οποιαδήποτε ευθύγραμμα τμήματα;
- Αν γνωρίζουμε ότι μία γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από μία άλλη, μπορούμε να συγκρίνουμε τις απέναντι από αυτές τις γωνίες πλευρές του;

Εξερεύνηση

Στην εικόνα βλέπουμε μια γέφυρα στον ποταμό του Σικάγου. Να συγκρίνετε το άθροισμα των μηκών των δύο κινητών μερών της γέφυρας με το πλάτος του ποταμού σε αυτό το σημείο. Τι θα συνέβαινε αν αυτό το άθροισμα ήταν μεγαλύτερο από το πλάτος του ποταμού και τι αν ήταν μικρότερο;

Σχήμα 37

Ιστορικά

Στην πρόταση 20 του πρώτου βιβλίου των *Στοιχείων* του Ευκλείδη αποδεικνύεται ότι: «Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων».

Οι Επικούρειοι φιλόσοφοι ειρωνεύονταν αυτή την πρόταση λέγοντας χαρακτηριστικά «... και όνω το προκείμενον θεώρημα γνώριμον...», δηλαδή ότι και ένας γάιδαρος γνωρίζει αυτό το θεώρημα, αφού, για να πάει από το σημείο όπου βρίσκεται στο σανό, θα ακολουθήσει την ευθεία οδό και όχι κάποια άλλη διαδρομή.
Η απάντηση του Πρόκλου, σχολιαστή του Ευκλείδη, στους Επικούρειους ήταν ότι είναι αντιεπιστημονικό να γίνεται αποδεκτό χωρίς απόδειξη ό,τι θεωρείται προφανές.

Σχήμα 38

Πρόταση I

Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι μεγαλύτερη από τις απέναντι εσωτερικές.

Αυτό προκύπτει άμεσα από την πρόταση «κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών», την οποία αποδείξαμε στο 1ο Κεφάλαιο.

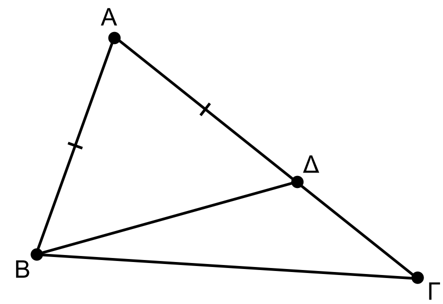
Πρόταση II

Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από άνισες πλευρές είναι όμοια άνισες γωνίες και αντιστρόφως.

Απόδειξη

Ευθύ: Αν στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $ΑΒ < ΑΓ$, τότε $\hat{Γ} < \hat{Β}$.
Πράγματι: Επειδή $ΑΒ < ΑΓ$, υπάρχει εσωτερικό σημείο Δ της ΑΓ τέτοιο ώστε $ΑΔ = ΑΒ$ (Σχήμα 39). Τότε το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ισοσκελές και συνεπώς $Α\hat{Β}Δ = Α\hat{Δ}Β$ (1). Επίσης, $Α\hat{Β}Δ < \hat{Β}$ (2).
Όμως η $Α\hat{Δ}Β$ είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου ΒΔΓ οπότε $\hat{Γ} < Α\hat{Δ}Β$ (3).
Από τις σχέσεις (1), (2), (3) προκύπτει $\hat{Γ} < \hat{Β}$.

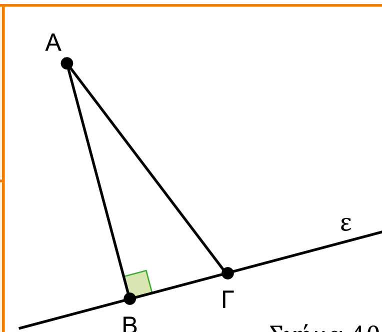
Αντίστροφο: Αν στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\hat{Γ} < \hat{Β}$, τότε $ΑΒ < ΑΓ$.
Πράγματι: Αν $ΑΒ > ΑΓ$ τότε $\hat{Γ} > \hat{Β}$, άτοπο. Αν $ΑΒ = ΑΓ$ τότε $\hat{Γ} = \hat{Β}$, άτοπο.
Άρα $ΑΒ < ΑΓ$.



Σχήμα 39

Πορίσματα

1. ***Αν μια γωνία τριγώνου είναι ορθή ή αμβλεία, τότε η απέναντι πλευρά της είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου.***
2. ***Δίνεται ευθεία και σημείο που δεν ανήκει σε αυτήν. Το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα από το σημείο στην ευθεία είναι μικρότερο από κάθε πλάγιο.***



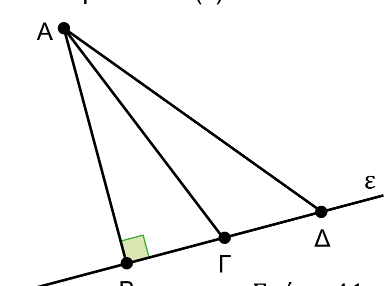
Σχήμα 40

Παρατήρηση

Το προηγούμενο πόρισμα (2) αποδεικνύει ότι από όλα τα τμήματα από το Α σε σημείο της (ε) το κάθετο τμήμα έχει το ελάχιστο μήκος. Αυτό δικαιολογεί την ονομασία «απόσταση του σημείου Α από την ευθεία (ε)» που δώσαμε στο μήκος αυτού του κάθετου τμήματος.

Σύγκριση πλάγιων τμημάτων

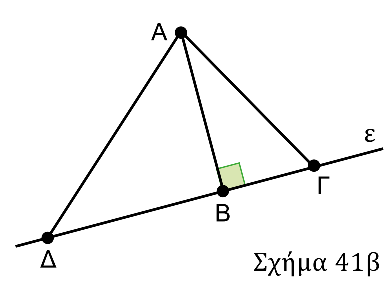
Δίνεται ευθεία (ε), ένα σημείο της Γ και σημείο Α εκτός αυτής. Αν το τμήμα ΑΓ δεν είναι κάθετο στην (ε), τότε λέγεται **πλάγιο** τμήμα από το Α στην (ε).
Το σημείο Γ της ευθείας (ε) λέγεται **ίχνος**[1] του τμήματος ΑΓ στην ευθεία (ε).
Ισχύουν τα ακόλουθα:
Αν για τα σημεία Β, Γ και Δ της ευθείας (ε) ισχύει ότι $ΑΒ \perp ε$ και $ΒΓ < ΒΔ$, τότε $ΑΓ < ΑΔ$.
Αντίστροφα: Αν $ΑΓ < ΑΔ$, τότε $ΒΓ < ΒΔ$ (Σχήματα 41α, β). Επομένως:



Σχήμα 41α

Πρόταση III

Όταν μεγαλώνει η απόσταση του ίχνους ενός πλάγιου τμήματος από το ίχνος του κάθετου τμήματος, τότε μεγαλώνει και το μήκος του πλάγιου τμήματος και αντίστροφα.

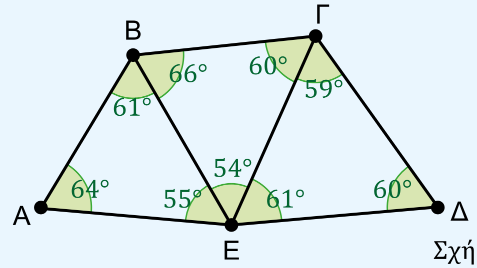


Σχήμα 41β

[1] Το ίχνος του κάθετου τμήματος από το Α στην ευθεία (ε) λέγεται και **προβολή** του Α στην (ε).

Εφαρμογή 1

Στο Σχήμα 42 ποιο από τα τμήματα ΑΒ, ΓΔ, ΑΕ, ΓΕ, ΒΓ είναι το μεγαλύτερο και γιατί;



Σχήμα 42

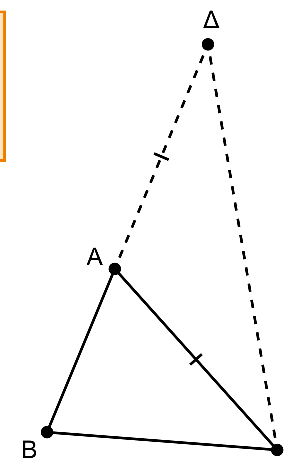
Τριγωνική ανισότητα

Πρόταση IV

Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων πλευρών.

Απόδειξη

Στο τρίγωνο ΑΒΓ (Σχήμα 43) θα αποδείξουμε ότι $B\Gamma < AB + A\Gamma$. Θεωρούμε σημείο Δ στην προέκταση της ΒΑ τέτοιο ώστε $A\Delta = A\Gamma$. Τότε το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές, συνεπώς $\hat{\Delta} = A\hat{\Gamma}\Delta$. Είναι $\hat{\Delta} = A\hat{\Gamma}\Delta < B\hat{\Gamma}\Delta$, οπότε, στο τρίγωνο ΔΒΓ είναι $B\Gamma < B\Delta$.
Όμως, $B\Delta = AB + A\Delta = AB + A\Gamma$, άρα $B\Gamma < AB + A\Gamma$.



Σχήμα 43

Άρα: Αν οι α, β, γ είναι πλευρές τριγώνου, τότε $\alpha < \beta + \gamma$. Όμοια προκύπτει ότι: $\beta < \alpha + \gamma$ και $\gamma < \alpha + \beta$. Αν $\alpha \geq \gamma$, από την πρώτη ανισότητα παίρνουμε $\beta > \alpha - \gamma$ και ανάλογα για τις άλλες πλευρές, επομένως ισχύει η ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση V

Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μεγαλύτερη από τη διαφορά των δύο άλλων πλευρών.

Πορίσματα

1. ***Αν Α, Β, Γ είναι τρία σημεία, τότε $AB + B\Gamma \geq A\Gamma$. Η ισότητα ισχύει μόνο όταν τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά και το Β είναι ανάμεσα στα Α, Γ.***
2. ***Αν Α, Β, Γ είναι τρία σημεία τότε $AB - B\Gamma \leq A\Gamma$. Η ισότητα ισχύει μόνο όταν τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά και το Γ είναι ανάμεσα στα Α, Β.***

Παρατήρηση

Στην ενότητα 2.2 είδαμε ότι ισχύει και το αντίστροφο της Πρότασης IV: Αν δοθούν τρία ευθύγραμμα τμήματα με την ιδιότητα καθένα από αυτά να είναι μικρότερο από το άθροισμα των άλλων δύο, τότε μπορεί να κατασκευαστεί τρίγωνο με πλευρές ίσες με αυτά τα τμήματα. Έχουμε λοιπόν το ακόλουθο κριτήριο:

Κριτήριο ύπαρξης τριγώνου με πλευρές δεδομένα τμήματα

Αν το μεγαλύτερο από τρία ευθύγραμμα τμήματα είναι μικρότερο από το άθροισμα των δύο άλλων, τότε υπάρχει τρίγωνο με πλευρές αυτά τα ευθύγραμμα τμήματα.

Εφαρμόζω την τριγωνική ανισότητα

Εφαρμογή 2

1. Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι υπάρχει τρίγωνο με πλευρές 1, 2, 3, επειδή $2 < 1 + 3$. Τι θα του απαντούσατε;
2. Να ελέγξετε αν υπάρχει τρίγωνο με πλευρές που έχουν μήκη (α) 1, 3, 4, (β) 5, 7, 11, (γ) 5, 9, 6, (δ) x, $\frac{x}{3}$, $\frac{3x}{5}$, ($x > 0$).

Εφαρμογή 3

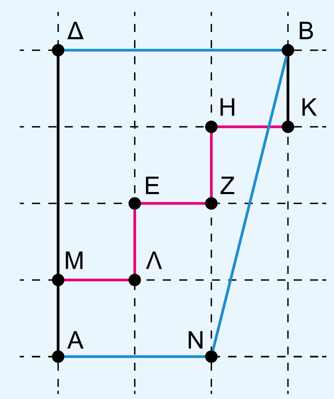
Στο Σχήμα 44 φαίνονται οι εξής τρεις διαδρομές για να πάμε από το Α στο Β σε ένα τετραγωνικό πλέγμα.

Δ1: ΑΜΛΕΖΗΚΒ

Δ2: ΑΔΒ

Δ3: ΑΝΒ

Να βρείτε ποια από τις διαδρομές αυτές είναι η μικρότερη και να εξηγήσετε την επιλογή σας.



Σχήμα 44

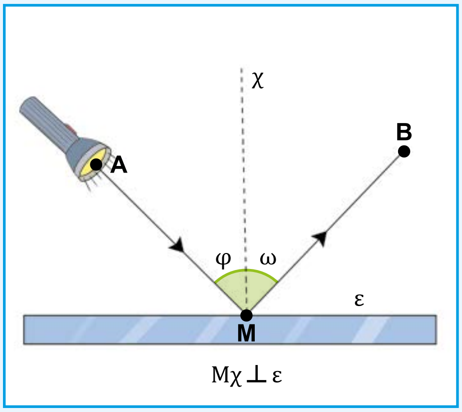
Εφαρμογή 4

Νόμος της ανάκλασης – Ελάχιστες διαδρομές

Ο Ήρων ο Αλεξανδρινός (1ος αι. μ.Χ.) είχε διατυπώσει τον γνωστό μας από τη Φυσική νόμο της ανάκλασης (Σχήμα 45), σύμφωνα με τον οποίο όταν μία ακτίνα φωτός εκπέμπεται από ένα σημείο Α, προσπίπτει σε σημείο Μ μιας ευθείας (ε) και ανακλάται σε ένα σημείο Β, τότε:

α. η γωνία πρόσπτωσης φ είναι ίση με τη γωνία ανάκλασης ω.

β. μεταξύ όλων των διαδρομών ΑΚ+ΚΒ, όπου Κ σημείο της ευθείας (ε), η διαδρομή ΑΜ + ΜΒ είναι η ελάχιστη.



Σχήμα 45

Στο **QR28** αξιοποιούμε κάποια από τα αποτελέσματα αυτής της ενότητας για να μελετήσουμε το φαινόμενο αυτό.

QR28

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ).

α. Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι ΑΒ > ΒΓ > ΑΓ. Τότε $\hat{B} < \hat{A} < \hat{\Gamma}$.

β. Σε κάθε σκαληνό τρίγωνο καθεμία από τις γωνίες που είναι προσκείμενες στη μικρότερη πλευρά είναι μεγαλύτερη από την τρίτη γωνία του τριγώνου.

γ. Υπάρχει τρίγωνο με μήκη πλευρών 16, 24, 40.

δ. Αν το μικρότερο από τρία ευθύγραμμα τμήματα α, β, γ είναι μεγαλύτερο από τη διαφορά των δύο άλλων, τότε υπάρχει τρίγωνο με πλευρές α, β, γ.

2 Σε καθεμία από τις παρακάτω ερωτήσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

α. Ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ έχει βάση ΒΓ = 11 cm και ΑΒ = ΑΓ = x cm, όπου x ακέραιος αριθμός. Ποια είναι η μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει το x (σε cm);
i. 5 **ii.** 4 **iii.** 6 **iv.** 1

β. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΒ = 12 cm και ΒΓ = 15 cm και η γωνία $\hat{B}$ είναι η μεγαλύτερη γωνία του τριγώνου. Ποιο από τα παρακάτω θα μπορούσε να είναι το μήκος (σε cm) της πλευράς ΑΓ;
i. 28 **ii.** 14 **iii.** 27 **iv.** 17

γ. Ποια από τις παρακάτω τριάδες δεν αντιστοιχεί σε μήκη πλευρών τριγώνου;
i. 5, 7, 9 **ii.** 4, 5, 10 **iii.** 7, 8, 13 **iv.** 10, 13, 21

δ. Αν οι αριθμοί 7, 12 και x, όπου x ακέραιος, είναι τα μήκη των πλευρών ενός σκαληνού τριγώνου και το x δεν αντιστοιχεί στη μικρότερη πλευρά, ποια είναι η μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει το x;
i. 6 **ii.** 4 **iii.** 11 **iv.** 8

3 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90°$ και $\hat{\Gamma} = 2\hat{B}$, η διχοτόμος του ΓΔ και ΔΕ κάθετη στη ΒΓ. Να τοποθετήσετε το κατάλληλο σύμβολο (<, >, =) σε καθένα από τα παρακάτω κενά αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας.

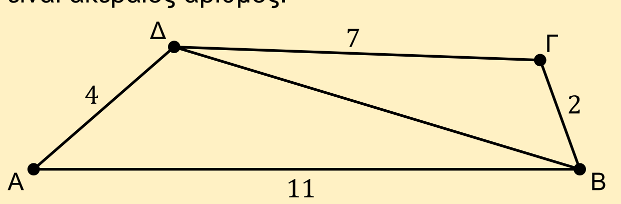
α. ΑΒ ... ΒΓ **β.** ΑΔ ... ΔΕ **γ.** ΒΕ ... ΒΔ
δ. ΒΔ ... ΓΔ **ε.** ΑΔ ... ΔΒ **στ.** ΒΓ ... ΒΔ
ζ. ΑΓ ... ΑΒ

4 Για τα σημεία Α, Β, Γ, Δ του επιπέδου γνωρίζουμε ότι ΑΒ = 3 cm, ΒΓ = 7 cm, ΑΓ = 10 cm, ΓΔ = 19 cm και ΑΔ = 9 cm. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ, Δ είναι συνευθειακά και να υπολογίσετε το μήκος του ΒΔ.

5 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και Ν σημείο της ΒΓ.

Να αποδείξετε ότι ΑΝ < ΑΒ.

6 Να βρείτε το μήκος της διαγωνίου ΒΔ του τετράπλευρου ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος, αν γνωρίζετε ότι είναι ακέραιος αριθμός.



7 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ στη ΒΓ τέτοιο ώστε ΑΔ = ΔΓ.

Να αποδείξετε ότι ΑΒ < ΒΓ.

8 Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ.

Να αποδείξετε ότι ΑΔ < ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ.

9 Τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου ΑΒΓ με ΑΒ < ΒΓ < ΑΓ είναι τρεις διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί.

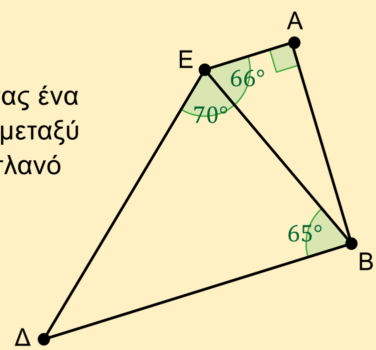
α. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν άπειρα τέτοια τρίγωνα.

β. Να βρείτε ποιο από τα τρίγωνα αυτά έχει την ελάχιστη περίμετρο.

γ. Να βρείτε ποιο από τα άπειρα τρίγωνα του ερωτήματος (α) έχει την ιδιότητα η διάμεσός του ΒΕ να είναι κάθετη στη διχοτόμο του ΑΔ.

10 Να βρείτε το διάστημα των δυνατών τιμών σε μοίρες της γωνίας της κορυφής ισοσκελούς τριγώνου του οποίου η βάση είναι μεγαλύτερη από τις ίσες πλευρές του. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

11 Να θέσετε σε έναν συμμαθητή σας ένα ερώτημα για ανισοτικές σχέσεις μεταξύ ευθύγραμμων τμημάτων στο διπλανό σχήμα.



12 Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) φέρουμε τη διχοτόμο του ΒΔ.
Να αποδείξετε ότι ΑΔ < ΔΓ.

13 Αν ΑΜ διάμεσος από την κορυφή Α τριγώνου ΑΒΓ, να συγκρίνετε τη γωνία Α με την ορθή γωνία σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α. 2ΑΜ < ΒΓ

β. 2ΑΜ > ΒΓ

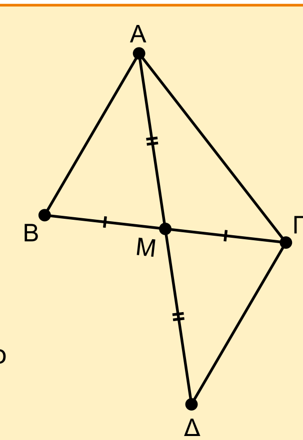
γ. 2ΑΜ = ΒΓ

14 Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ, η διάμεσός του ΑΜ από την κορυφή Α και η προέκτασή της ΜΔ = ΑΜ.
Να αποδείξετε ότι:

α. $A\hat{\Delta}\Gamma > \Delta\hat{A}\Gamma$

β. ΑΓ – ΑΒ < 2 ΑΜ < ΑΒ + ΑΓ

γ. το άθροισμα των μηκών των διαμέσων του ΑΒΓ είναι μικρότερο από την περίμετρό του.

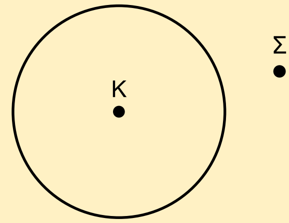


15 Δίνεται κύκλος κέντρου Κ και σημείο Σ εκτός αυτού.
Να προσδιορίσετε γεωμετρικά το σημείο του κύκλου που απέχει:

α. ελάχιστη απόσταση από το Σ

β. μέγιστη απόσταση από το Σ.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



16 Αν Μ εσωτερικό σημείο ενός τριγώνου ΑΒΓ, να αποδειχθεί ότι:

α. $B\hat{M}\Gamma > \hat{A}$

β. ΜΒ + ΜΓ < ΑΒ + ΑΓ.

Ανακεφαλαίωση

Στο κεφάλαιο αυτό αρχικά μελετήσαμε **κριτήρια ισότητας τριγώνων** και ορθογώνιων τριγώνων, τα οποία στη συνέχεια αξιοποιήσαμε για να συμπεράνουμε ισότητα τμημάτων και γωνιών κατά την επίλυση γεωμετρικών, αλλά και ρεαλιστικών προβλημάτων.

Κατασκευάσαμε τρίγωνα με βάση κάποια δεδομένα στοιχεία τους.

Διατυπώσαμε και αποδείξαμε τις **ιδιότητες των ισοσκελών τριγώνων** και –στην αντίστροφη κατεύθυνση– **κριτήρια για να είναι ένα τρίγωνο ισοσκελές.**

Το κεφάλαιο ολοκληρώθηκε με τις βασικές **ανισοτικές σχέσεις** μεταξύ των στοιχείων ενός τριγώνου, τις οποίες αξιοποιήσαμε σε συγκρίσεις τμημάτων και γωνιών, καθώς και στην επίλυση προβλημάτων εύρεσης ελάχιστων και μέγιστων αποστάσεων.

Σημαντικοί όροι

Κριτήρια ισότητας τριγώνων
Κριτήρια ισότητας ορθογώνιων τριγώνων

Κατασκευές τριγώνων

Αποστάσεις: α) Απόσταση σημείου από ευθεία, β) το σημείο Α ισαπέχει από τις ευθείες (ε) και (ζ), γ) δύο σημεία ισαπέχουν από μία ευθεία

Βασικές ιδιότητες ισοσκελούς τριγώνου – Κριτήρια για ισοσκελή τρίγωνα

Βασικές ανισοτικές σχέσεις στο τρίγωνο (με κυριότερη την τριγωνική ανισότητα)

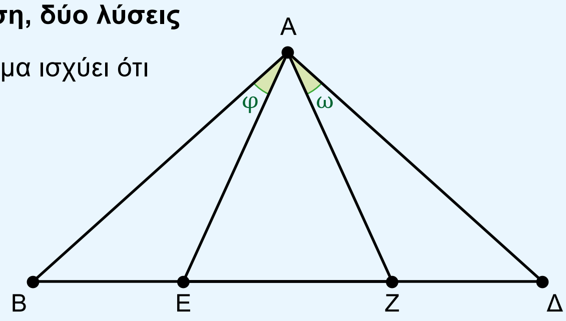
Υπολογισμός απρόσιτων αποστάσεων

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 **Μία άσκηση, δύο λύσεις**

Στο διπλανό σχήμα ισχύει ότι $\hat{B} = \hat{\Delta}$ και $\hat{\varphi} = \hat{\omega}$.

Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές.



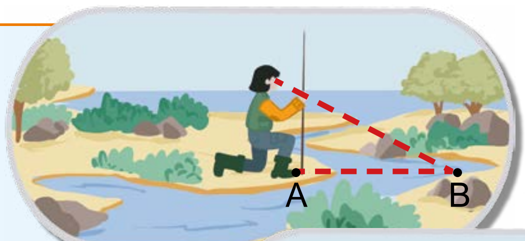
α. Να συμπληρώσετε την απόδειξη στον παρακάτω πίνακα:

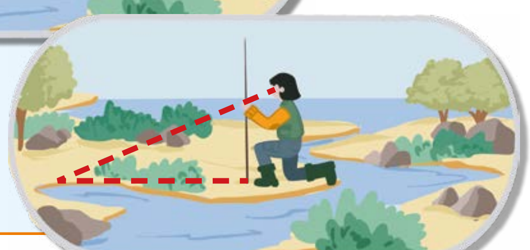
Δηλώσεις	Αιτιολογήσεις
	Δεδομένα
ΑΒ = ΑΔ	
ΑΒΕ = ΑΔΖ	
	ΑΒΕ = ΑΔΖ

β. Μπορείτε να αποδείξετε το ζητούμενο χωρίς να συγκρίνετε τρίγωνα;

2 **Υπολογισμός απρόσιτων αποστάσεων**

Η Λόρα προσπαθεί να μετρήσει το πλάτος του ποταμού χωρίς να βραχεί. Μπορείτε να περιγράψετε μία διαδικασία με την οποία μπορεί να τα καταφέρει βασιζόμενοι στις εικόνες;
Να αναφερθείτε στις γεωμετρικές προτάσεις που χρησιμοποιήσατε και στις παραδοχές που κάνατε.





3 Φτιάχνοντας τρίγωνα

Φανταστείτε ότι λυγίζετε ένα καλαμάκι σε δύο σημεία ώστε να σχηματιστεί τρίγωνο.

Να βρείτε τα μήκη των πλευρών όλων των διαφορετικών τριγώνων αν γνωρίζετε ότι είναι ακέραιοι αριθμοί και το καλαμάκι έχει μήκος

α. 10 cm **β.** 20 cm.

Να περιγράψετε τη διαδικασία που ακολουθήσατε για να βρείτε τα ζητούμενα μήκη.

4 Πλοίο σε κίνδυνο

Ένα πλοίο Π βρίσκεται σε κίνδυνο και εκπέμπει σήματα SOS. Το ραντάρ ενός πλοίου Α εντοπίζει το πλοίο Π σε κατεύθυνση για την οποία η πυξίδα του δείχνει 36° (σε σχέση με τον Βορρά και δεξιόστροφα), ενώ ένα άλλο πλοίο Β εντοπίζει το πλοίο Π σε κατεύθυνση για την οποία η πυξίδα του δείχνει 316°. Αν η πυξίδα του πλοίου Α δείχνει ότι το πλοίο Β βρίσκεται σε κατεύθυνση 86°, να κάνετε ένα σχήμα και να βρείτε ποιο από τα πλοία Α, Β είναι πιο κοντά στο πλοίο που βρίσκεται σε κίνδυνο.

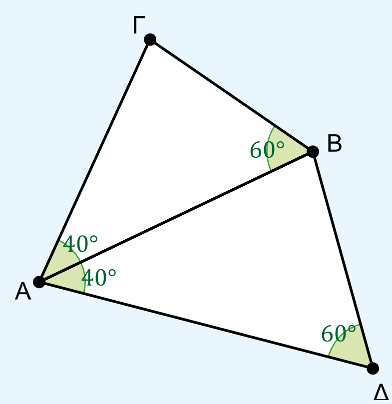
5 Διάλογος για την ισότητα τριγώνων

Ο καθηγητής των Μαθηματικών ζητάει από τους μαθητές να εξετάσουν αν τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ του παρακάτω σχήματος είναι ίσα, αιτιολογώντας τη γνώμη τους. Ακολουθεί ο παρακάτω διάλογος.

Ηλίας: Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ είναι ίσα επειδή έχουν μία πλευρά ίση και δύο γωνίες ίσες.

Μελέτης: Ηλία, τα ίσα στοιχεία που αναφέρεις δεν ικανοποιούν κάποιο κριτήριο ισότητας τριγώνων, οπότε τα δύο τρίγωνα δεν είναι ίσα.

Σοφία: Μελέτη, συμφωνώ μαζί σου σχετικά με το ότι τα δύο τρίγωνα δεν είναι ίσα, αλλά δεν νομίζω ότι το επιχείρημά σου είναι πειστικό, επειδή μπορεί να υπάρχει κάποιο κριτήριο ισότητας τριγώνων που δεν το έχουμε μάθει.



Με ποιον από τους τρεις μαθητές συμφωνείτε;
Μπορείτε να τους βοηθήσετε να βγάλουν ένα ασφαλές συμπέρασμα;

Δικτυώματα

Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΠΠ, τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου προσδιορίζουν πλήρως το σχήμα του, αφού κάθε άλλο τρίγωνο με τα ίδια μήκη πλευρών θα είναι ίσο με αυτό. Ισχύει άραγε το ίδιο για πολύγωνα με τέσσερις ή περισσότερες πλευρές; Με αφορμή αυτό το ερώτημα βλέπουμε εδώ **(QR29)** μια εφαρμογή των τριγώνων στην Τεχνική Μηχανική.

QR29

QR30 Συνθετική εργασία: Περίεργα μπιλιάρδα

QR31 Συμπληρωματικό υλικό στα τρίγωνα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3
ΚΥΚΛΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ ΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ

Στην εικόνα φαίνεται η εκκλησία Oude Kerk , που είναι το παλαιότερο κτίριο στο κέντρο του Άμστερνταμ. Χτίστηκε το 1213 και επιβίωσε από φωτιές, βομβαρδισμούς και μεγάλες πολιτικές εξεγέρσεις.
Η φωτογραφία τραβήχτηκε με έναν φακό «fisheye» που προσφέρει ευρεία οπτική γωνία, ανάλογη με αυτήν που βλέπει το μάτι ενός ψαριού. Η προοπτική fisheye προβάλλει πρώτα την εικόνα σε ένα ημισφαίριο και στη συνέχεια στον υποκείμενο κύκλο του.

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τον **κύκλο** και τα χαρακτηριστικά του στοιχεία τόσο σε αφαιρετικό επίπεδο, δηλαδή ως προς τις γεωμετρικές τους ιδιότητες, όσο και σε σχέση με τη φυσική πραγματικότητα. Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με **γεωμετρικούς τόπους**, δηλαδή σχήματα τα οποία προσδιορίζονται από μια κοινή ιδιότητα των σημείων τους, και θα δούμε πιο συστηματικά τις **γεωμετρικές κατασκευές**. Τέλος, θα επιστρέψουμε στο τρίγωνο για να εξετάσουμε τα τέσσερα «κέντρα» του, καθώς και τους δύο κύκλους (περιγεγραμμένο, εγγεγραμμένο) που συνδέονται με αυτό.

3.1 Κύκλος – Χορδή – Τόξο – Απόστημα

Βασικά ερωτήματα της ενότητας

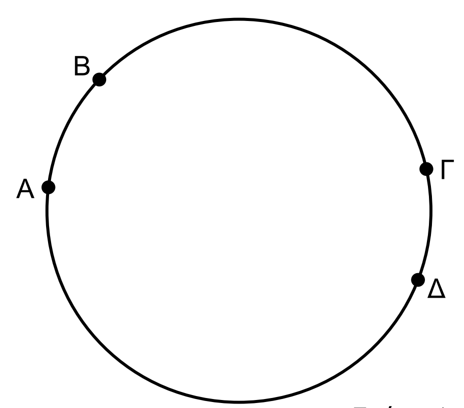
- Πώς ορίζεται ο κύκλος;
- Ποια είναι τα στοιχεία του κύκλου και πώς σχετίζονται μεταξύ τους;

Εξερεύνηση

Στο Σχήμα 1 έχουμε έναν κύκλο σχεδιασμένο σε ένα κομμάτι χαρτί και τα σημεία Α, Β, Γ, Δ πάνω στον κύκλο.

α. Μπορείτε να συγκρίνετε τις χορδές ΑΒ και ΓΔ και τα τόξα ΑΒ και ΓΔ με κατάλληλη δίπλωση;

β. Μπορείτε να βρείτε το κέντρο του κύκλου με κατάλληλες διπλώσεις και στη συνέχεια να συγκρίνετε τις αποστάσεις του κέντρου από τις χορδές ΑΒ και ΓΔ;



Σχήμα 1

Κύκλος με κέντρο σημείο Ο και ακτίνα ευθύγραμμο τμήμα ρ είναι το σύνολο των σημείων του επιπέδου που οι αποστάσεις τους από το Ο είναι ίσες με ρ. Τον συμβολίζουμε (Ο, ρ).

Χορδή του κύκλου είναι κάθε ευθύγραμμο τμήμα με άκρα δύο σημεία του κύκλου.

Διάμετρος ενός κύκλου είναι κάθε χορδή του που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου.

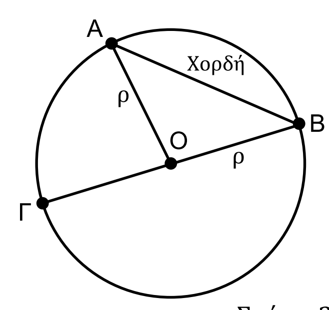
Δύο σημεία ενός κύκλου λέγονται **αντιδιαμετρικά** αν είναι άκρα μιας διαμέτρου (τα Β, Γ στο Σχήμα 2).

Ομοκυκλικά λέγονται σημεία που ανήκουν στο ίδιο κύκλο (τα Α, Β, Γ στο Σχήμα 2).

Ίσοι κύκλοι λέγονται εκείνοι που ταυτίζονται με κατάλληλη μετατόπιση. Δύο κύκλοι είναι ίσοι αν και μόνο αν έχουν ίσες ακτίνες.

Επίκεντρη λέγεται μια γωνία η οποία έχει κορυφή το κέντρο ενός κύκλου.[1]

Τόξο κύκλου είναι το μέρος του κύκλου μεταξύ δύο σημείων του.[2]



Σχήμα 2

[1] Δύο ακτίνες που δεν βρίσκονται στην ίδια διάμετρο ορίζουν δύο επίκεντρες γωνίες (κυρτή – μη κυρτή).

[2] Δύο σημεία ενός κύκλου ορίζουν δύο τόξα. Αν τα σημεία δεν είναι αντιδιαμετρικά, τότε το τόξο που είναι μικρότερο λέγεται **έλασσον** και το μεγαλύτερο λέγεται **μείζον**. Στη συνέχεια, όταν αναφερόμαστε στο "αντίστοιχο τόξο" μιας επίκεντρης γωνίας ή μιας χορδής θα εννοούμε το έλασσον εκτός αν επισημαίνεται διαφορετικά. Αντίστοιχα ως επίκεντρη γωνία θα εννοούμε την κυρτή.

Μέσο τόξου είναι το σημείο του που το χωρίζει σε δύο ίσα τόξα. Το μέσο ενός τόξου είναι μοναδικό.

Μέτρο τόξου είναι το μέτρο της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας.

Αν οι πλευρές μιας επίκεντρης γωνίας κύκλου κέντρου Ο τέμνουν τον κύκλο στα σημεία Α και Β, τότε το τόξο $\overset{\frown}{AB}$ που περιέχεται στη γωνία λέγεται **αντίστοιχο** τόξο της επίκεντρης γωνίας και η γωνία $A\hat{O}B$ λέμε ότι **βαίνει** στο τόξο ΑΒ (Σχήμα 3).

Δύο τόξα του ίδιου κύκλου ή ίσων κύκλων λέγονται ίσα όταν με κατάλληλη μετατόπιση το ένα ταυτίζεται με το άλλο (Σχήμα 4).

Αποδεικνύεται ότι **στον ίδιο κύκλο ή σε ίσους κύκλους ίσα τόξα βαίνουν σε ίσες επίκεντρες γωνίες** και αντίστροφα.

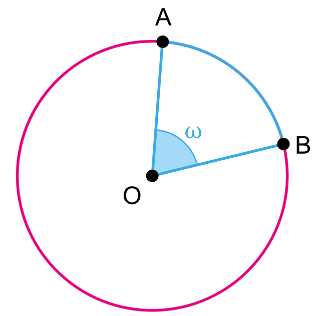
Τεταρτοκύκλιο λέγεται καθένα από τα τέσσερα ίσα τόξα στα οποία διαιρείται ένας κύκλος από δύο κάθετες διαμέτρους.

Δύο τόξα του ίδιου ή ίσων κύκλων είναι άνισα αν και μόνο αν οι επίκεντρες γωνίες που βαίνουν σε αυτά είναι όμοια άνισες.

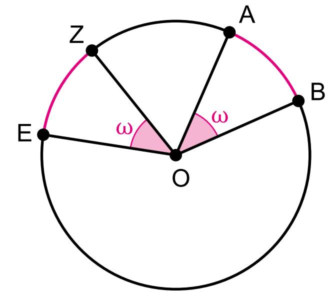
Τόξα που δεν ανήκουν στον ίδιο κύκλο ή σε ίσους κύκλους δεν είναι συγκρίσιμα.

Δεν θα πρέπει να γίνεται σύγχυση ανάμεσα στο **μέτρο** ενός τόξου και στο **μήκος** του. Για παράδειγμα: σε κύκλο ακτίνας R =1 cm ένα τεταρτοκύκλιο έχει μέτρο $90°$ και μήκος $\frac{\pi}{2}$cm, ενώ σε έναν κύκλο ακτίνας R = 2 cm ένα τεταρτοκύκλιο έχει μέτρο $90°$ και μήκος π cm (μήκος κύκλου ακτίνας R: $L = 2\pi R$, $\pi \approx 3{,}14$). Τα τόξα αυτά έχουν λοιπόν ίδιο μέτρο αλλά διαφορετικό μήκος και φυσικά δεν είναι ίσα.

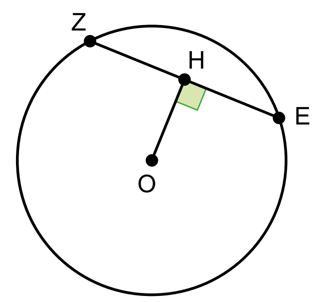
Απόστημα χορδής κύκλου είναι το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα από το κέντρο του κύκλου στη χορδή. Στο Σχήμα 5 το απόστημα της χορδής ΖΕ είναι το τμήμα ΟΗ που είναι κάθετο στη χορδή.



Σχήμα 3



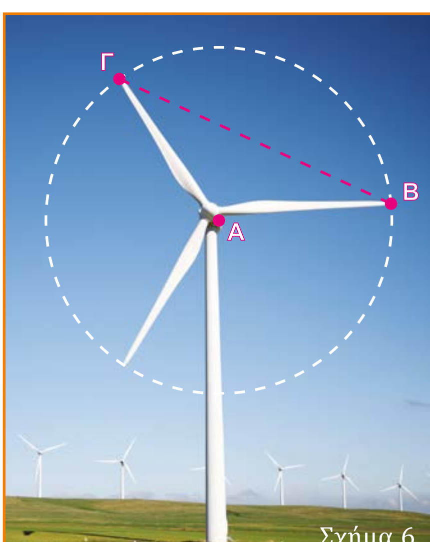
Σχήμα 4



Σχήμα 5

Εφαρμογή 1
Ανεμολόγιο

QR32



Σχήμα 6

Εφαρμογή 2 – Ανεμογεννήτρια

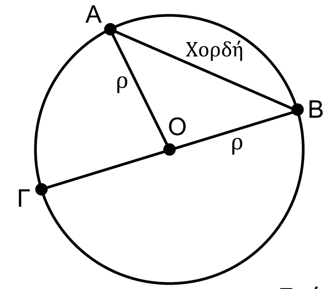
Στο Σχήμα 6, με κατάλληλες παραδοχές, να υπολογίσετε το μέτρο του ελάσσονος τόξου της χορδής ΒΓ.

Στη συνέχεια να σχεδιάσετε μοντέλο με τις φτερωτές της ανεμογεννήτριας.

QR33

Παρατήρηση

Κάθε χορδή που δεν διέρχεται από το κέντρο του κύκλου είναι μικρότερη της διαμέτρου. Στο Σχήμα 7 φαίνεται ένας κύκλος κέντρου Ο. Τα σημεία του Α και Β ορίζουν τη χορδή ΑΒ, ενώ τα Β και Γ είναι αντιδιαμετρικά. Είναι $B\Gamma = 2\rho$. Η τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο ΟΑΒ δίνει $AB < OA + OB$ ή $AB < 2\rho$.



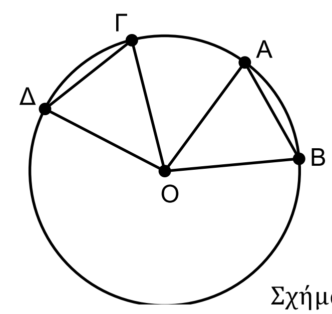
Σχήμα 7

Πρόταση I	***Αν δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες, τότε τα τόξα που αντιστοιχούν σε αυτές είναι ίσα και αντίστροφα.***

Απόδειξη

Ευθύ

Έστω $AB = \Gamma\Delta$ (Σχήμα 8). Επιπλέον ισχύει ότι $O\Gamma = OA = O\Delta = OB$, οπότε τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ είναι ίσα (ΠΠΠ). Συνεπώς, $A\hat{O}B = \Gamma\hat{O}\Delta$, άρα $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$.



Σχήμα 8

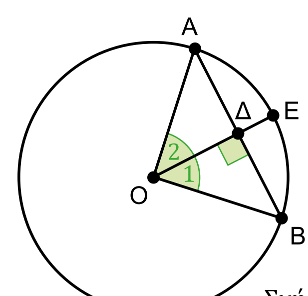
Αντίστροφο

Αν τα $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ είναι ίσα, τότε οι αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες είναι ίσες. Επίσης, $OA = OB = O\Gamma = O\Delta$. Άρα τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε $AB = \Gamma\Delta$.

Πρόταση II	***Η κάθετη ημιευθεία από το κέντρο κύκλου προς μία χορδή διχοτομεί τη χορδή και το αντίστοιχο τόξο της.***

Απόδειξη

Από το κέντρο Ο ενός κύκλου φέρουμε κάθετη στη χορδή ΑΒ που τέμνει τη χορδή ΑΒ στο Δ και τον κύκλο στο Ε (Σχήμα 9). Το τμήμα ΟΔ είναι ύψος στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΟΒ, οπότε είναι διάμεσος και διχοτόμος, δηλαδή το Δ είναι μέσο της χορδής ΑΒ και $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$, άρα $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{BE}$, συνεπώς το Ε είναι μέσο του τόξου ΑΒ.



Σχήμα 9

Παρατήρηση

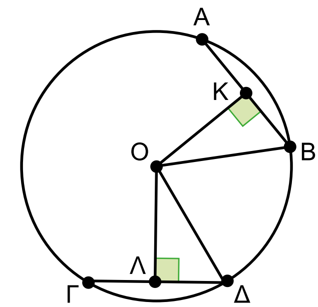
Η Πρόταση ΙΙ δίνει και έναν τρόπο κατασκευής του μέσου ενός τόξου.

Πρόταση III

Δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες αν και μόνο αν τα αποστήματά τους είναι ίσα.

Απόδειξη

Έστω ότι ΑΒ, ΓΔ είναι χορδές ενός κύκλου κέντρου Ο και ΟΚ και ΟΛ είναι τα αντίστοιχα αποστήματά τους (Σχήμα 10).



Σχήμα 10

Ευθύ

Θα αποδείξουμε ότι **αν** $ΑΒ = ΓΔ$ **τότε** $ΟΚ = ΟΛ$. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $ΑΒ = ΓΔ$, οπότε τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΚΒ και ΟΛΔ είναι ίσα, αφού $\hat{Κ} = \hat{Λ} = 90°$, $ΟΒ = ΟΔ$ (ακτίνες κύκλου) και $ΚΒ = ΛΔ$ (μισά ίσων ευθύγραμμων τμημάτων).
Άρα $ΟΚ = ΟΛ$.

Αντίστροφο

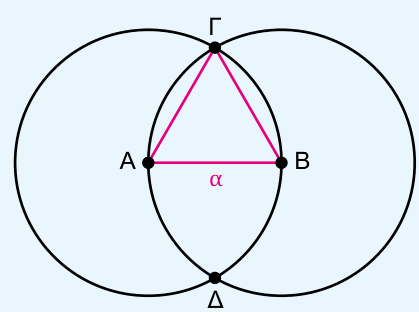
Θα αποδείξουμε ότι **αν** $ΟΚ = ΟΛ$ **τότε** $ΑΒ = ΓΔ$. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $ΟΚ = ΟΛ$, οπότε τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΚΒ και ΟΛΔ είναι ίσα, αφού $\hat{Κ} = \hat{Λ} = 90°$, $ΟΒ = ΟΔ$ (ακτίνες κύκλου) και $ΟΚ = ΟΛ$ (υπόθεση). Άρα $ΚΒ = ΛΔ$ και συνεπώς $ΑΒ = ΓΔ$.

Εφαρμογή 4

Η κατασκευή αυτή είναι η πρώτη πρόταση του πρώτου βιβλίου των *Στοιχείων* του Ευκλείδη:

Να κατασκευαστεί ισόπλευρο τρίγωνο του οποίου δίνεται η πλευρά α.

Σχεδιάζουμε δύο κύκλους με κέντρα τα άκρα Α, Β ευθύγραμμου τμήματος μήκους α και ακτίνας α. Οι κύκλοι τέμνονται σε δύο σημεία και έστω Γ ένα από αυτά. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο αφού $ΑΒ = ΑΓ = ΒΓ = α$ (Σχήμα 11).
Παρατήρηση: Με αυτόν τον τρόπο κατασκευάζουμε και γωνία 60°.



Σχήμα 11

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ).

α. Δύο τόξα που αντιστοιχούν σε ίσες επίκεντρες γωνίες είναι ίσα.
β. Δύο τόξα 30° είναι πάντοτε ίσα.
γ. Αν ένα τόξο ΑΒ κύκλου (Ο, ρ) έχει τριπλάσιο μέτρο από το ΓΔ του ίδιου κύκλου, τότε για τις χορδές ΑΒ, ΓΔ ισχύει $ΑΒ = 3ΓΔ$.
δ. Αν το κέντρο ενός κύκλου ισαπέχει από δύο χορδές του, τότε οι χορδές αυτές είναι ίσες.
ε. Αν μια ευθεία διχοτομεί μια χορδή ενός κύκλου, τότε διχοτομεί και τα δύο τόξα που αντιστοιχούν στη χορδή αυτή.
στ. Αν δύο χορδές κύκλου είναι παράλληλες, τότε η μεσοκάθετος της μίας διχοτομεί την άλλη και τα αντίστοιχα τόξα τους.
ζ. Αν τα διαδοχικά τόξα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ ενός κύκλου είναι ίσα, τότε $ΑΓ \perp ΒΔ$.
η. Οι μεσοκάθετοι δύο μη παράλληλων χορδών ενός κύκλου τέμνονται στο κέντρο του κύκλου.
θ. Οι μεσοκάθετοι δύο παράλληλων χορδών ενός κύκλου συμπίπτουν.
ι. Σε ίσες χορδές ενός κύκλου αντιστοιχούν ίσα τόξα.

2 Ο τροχός ενός ποδηλάτου έχει 40 ακτίνες. Με την παραδοχή ότι η γωνία μεταξύ δύο διαδοχικών ακτίνων είναι πάντα ίδια:

α. Να βρείτε το μέτρο της γωνίας δύο διαδοχικών ακτίνων.

β. Αν η γωνία που σχηματίζουν δύο ακτίνες είναι 72° βρείτε πόσες ακτίνες περιέχονται μεταξύ των δύο.

Γενικεύοντας: Αν το σύνολο των ακτίνων είναι ν, να βρείτε έναν τύπο για το πλήθος των ακτίνων που περιέχονται μεταξύ δύο ακτίνων γωνίας ω.

3 Αν ΑΒ και ΓΔ διάμετροι κύκλου κέντρου Ο να αποδειχθεί ότι $\overset{\frown}{A\Delta} = \overset{\frown}{B\Gamma}$.

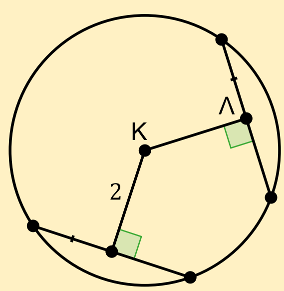
4 Έστω Α και Β αντιδιαμετρικά σημεία κύκλου κέντρου Ο, Γ σημείο του τόξου ΑΒ και Μ, Ν τα μέσα των τόξων ΑΓ και ΓΒ.

Να αποδείξετε ότι το τόξο ΜΝ είναι ίσο με ένα τεταρτοκύκλιο.

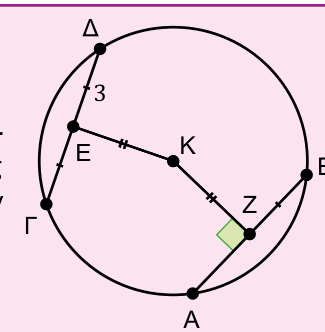
5 Δύο ίσοι κύκλοι με κέντρα Κ και Λ τέμνονται στα σημεία Α και Β.

Να αποδείξετε ότι $A\hat{K}B = A\hat{\Lambda}B$.

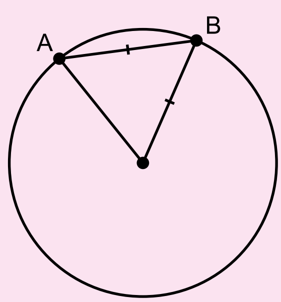
6 Να υπολογίσετε το μήκος του αποστήματος ΚΛ στο διπλανό σχήμα αιτιολογώντας την απάντησή σας.



7 Να υπολογίσετε το μήκος της χορδής ΑΒ του διπλανού σχήματος αιτιολογώντας την απάντησή σας.



8 Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε το μέτρο του μείζονος τόξου $\overset{\frown}{AB}$.



9 Οι όψεις σε πολλά ρολόγια είναι κυκλικές. Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί;

Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει ο ωροδείκτης με τον λεπτοδείκτη στο παρακάτω ρολόι.

Στη συνέχεια να αντιστοιχίσετε σε κάθε ώρα της πρώτης στήλης μία γωνία της δεύτερης.

Ώρα	Γωνία
4:00	120°
3:30	90°
8:20	180°
7:10	75°
	130°
	80°
	155°

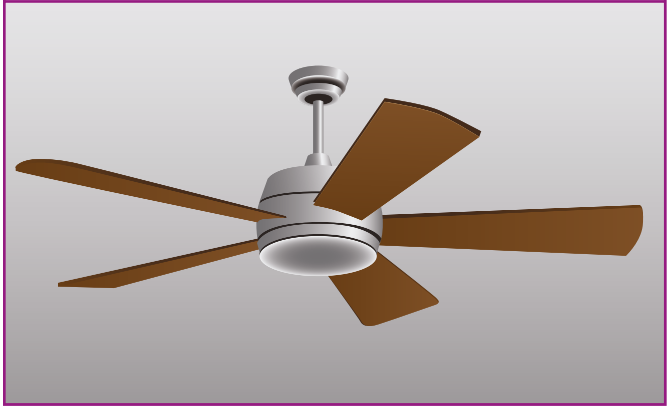
10 **Μοντελοποίηση.** Στην παρακάτω εικόνα φαίνεται ένας ανεμιστήρας οροφής με πέντε πτερύγια. Τα πτερύγια στηρίζονται σε μία κυκλική βάση διαμέτρου 20 cm και κάθε πτερύγιο έχει μήκος 50 cm.

Με κατάλληλη παραδοχή:

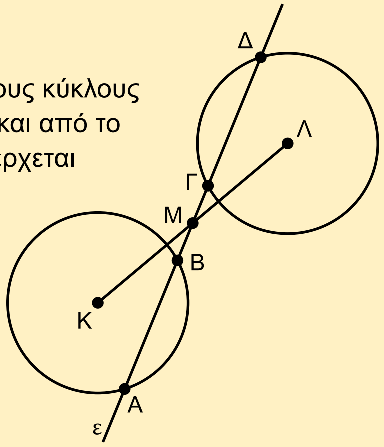
α. Να σχεδιάσετε ένα μοντέλο του ανεμιστήρα στο οποίο κάθε πτερύγιο αναπαρίσταται από ένα ευθύγραμμο τμήμα.

β. Να ορίσετε και να υπολογίσετε τη γωνία δύο διαδοχικών πτερυγίων στο μοντέλο.

γ. Αν Μ και Ν είναι τα σημεία στήριξης δύο διαδοχικών πτερυγίων στο μοντέλο και Α και Β είναι τα άκρα των αντίστοιχων πτερυγίων, να βρείτε τη σχέση των μέτρων των τόξων ΜΝ και ΑΒ.



11 Θεωρούμε δύο ίσους κύκλους με κέντρα Κ και Λ και από το μέσο Μ του ΚΛ διέρχεται ευθεία (ε) η οποία τέμνει τον κύκλο κέντρου Κ στα σημεία Α, Β και τον κύκλο κέντρου Λ στα σημεία Γ και Δ.



Να αποδειχθεί ότι ΑΒ = ΓΔ.

12 Οι προεκτάσεις δύο ίσων χορδών ΒΑ και ΓΔ κύκλου κέντρου Ο τέμνονται στο σημείο Ρ.

Να αποδειχθεί ότι ΡΑ = ΡΔ.

13 Σε κύκλο κέντρου Ο θεωρούμε δύο ίσες χορδές ΑΒ και ΓΔ.

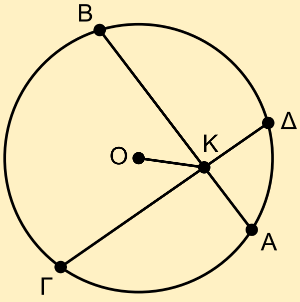
Αν τα σημεία Κ και Λ των ΑΒ και ΓΔ είναι τέτοια ώστε ΑΚ = ΔΛ, να αποδειχθεί ότι ΟΚ = ΟΛ.

14 Στον κύκλο κέντρου Ο του σχήματος δύο ίσες χορδές ΑΒ και ΓΔ τέμνονται στο σημείο Κ. Να αποδειχθεί ότι:

α. η ΚΟ είναι διχοτόμος της $B\hat{K}\Gamma$

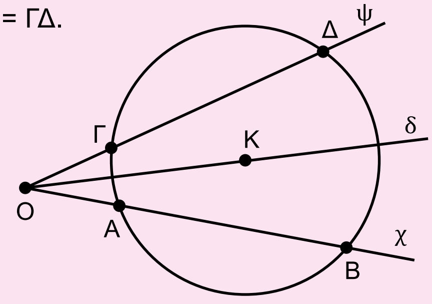
β. ΚΒ = ΚΓ

γ. ΑΓ = ΒΔ



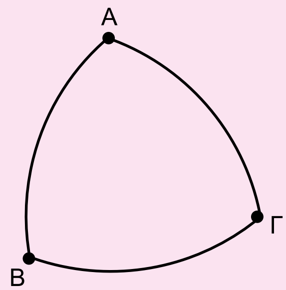
15 Δίνεται γωνία $x\hat{O}\psi$ και σημείο Κ στη διχοτόμο της Οδ. Με κέντρο το Κ γράφουμε κύκλο ο οποίος τέμνει την Οχ στα σημεία Α και Β και την Οψ στα σημεία Γ και Δ.

Να αποδειχθεί ότι ΑΒ = ΓΔ.



16 Τα σημεία Α, Β, Γ του διπλανού σχήματος είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου με πλευρά α = 4 cm και ύψος υ = $2\sqrt{3}$cm.

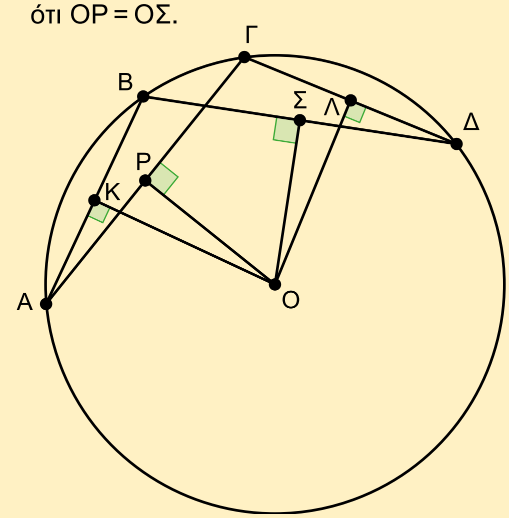
Τα τόξα ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ ανήκουν σε κύκλους με κέντρα Γ, Α, Β αντίστοιχα.



Ποια είναι η μέγιστη απόσταση που μπορεί να έχει ένα σημείο του τόξου ΑΒ από τη χορδή ΑΒ;

17 Στον παρακάτω κύκλο το Ο είναι το κέντρο του. Τα ΟΚ, ΟΛ, ΟΡ, ΟΣ είναι τα αποστήματα των χορδών ΑΒ, ΓΔ, ΑΓ, ΒΔ αντίστοιχα.

Αν γνωρίζετε ότι ΟΚ = ΟΛ, να αποδείξετε ότι ΟΡ = ΟΣ.



18 Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι, οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα. **(Πρόταση IV στο βιβλίο III των *Στοιχείων* του Ευκλείδη).**
Να αποδειχθεί ότι, αν δύο χορδές κύκλου που δεν διέρχονται από το κέντρο του κύκλου τέμνονται, τότε δεν διχοτομούνται.[3]

3.2 Σχετικές θέσεις: σημείου - κύκλου, ευθείας - κύκλου, δύο κύκλων

Βασικά ερωτήματα της ενότητας

- Πόσα κοινά σημεία μπορεί να έχουν:
  α. μια ευθεία και ένας κύκλος, **β.** δύο κύκλοι;
- Από τι εξαρτάται το πλήθος των κοινών σημείων
  α. ευθείας και κύκλου, **β.** δύο κύκλων;

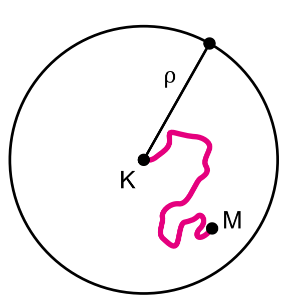
Σχετικές θέσεις σημείου και κύκλου

Δίνεται κύκλος κέντρου Κ και ακτίνας ρ (Σχήμα 12). Ένα σχοινί μήκους d έχει το ένα άκρο του σταθερό στο Κ. Αν τεντωθεί το σχοινί τότε το άλλο του άκρο Μ:

α. **Είναι εσωτερικό** του κύκλου αν και μόνο αν $d < \rho$.

β. **Είναι σημείο του κύκλου** αν και μόνο αν $d = \rho$.

γ. **Είναι εξωτερικό** του κύκλου αν και μόνο αν $d > \rho$.



Σχήμα 12

[3] Δύο τμήματα διχοτομούνται όταν το σημείο τομής τους είναι κοινό μέσο τους.

Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου – Εφαπτομένη κύκλου

Εξερεύνηση

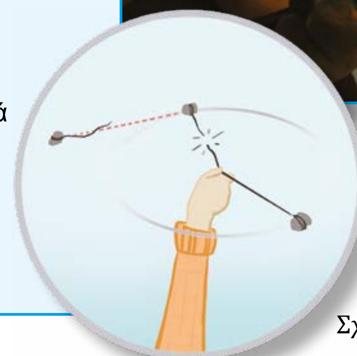
Στην εικόνα του Σχήματος 13 φαίνονται πυρακτωμένα ρινίσματα μετάλλου να ξεκινούν από τον κυκλικό τροχό κινούμενα σε μια ευθεία.

Στην εικόνα του Σχήματος 14 φαίνεται ότι μετά την κοπή του νήματος το σώμα εκτρέπεται από την κυκλική τροχιά και κινείται σε μια ευθεία.

Σχεδιάστε ένα κοινό μοντέλο για τις δύο εικόνες. Πόσα κοινά σημεία έχει σε κάθε περίπτωση ο κύκλος με την ευθεία;

Η ευθεία στην οποία κινούνται τα πυρακτωμένα ρινίσματα (και, αντίστοιχα, το σώμα μετά την κοπή του νήματος) λέγεται **εφαπτομένη** του κύκλου.

Σχήμα 13



Σχήμα 14

Δίνεται κύκλος κέντρου Κ και ακτίνας ρ.
Έστω d η απόσταση του κέντρου του κύκλου από δεδομένη ευθεία.

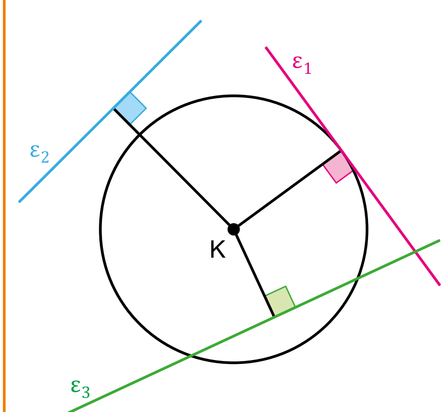
Αποδεικνύεται ότι (Σχήμα 15):

Αν d > ρ, τότε η ευθεία δεν έχει κανένα κοινό σημείο με τον κύκλο (ευθεία $ε_2$).

Αν d < ρ, τότε η ευθεία έχει δύο κοινά σημεία με τον κύκλο και λέγεται τέμνουσα του κύκλου (ευθεία $ε_3$).

Αν d = ρ, τότε η ευθεία έχει ένα μόνο κοινό σημείο με τον κύκλο και λέγεται **εφαπτομένη** του κύκλου (ευθεία $ε_1$). Το μοναδικό κοινό σημείο κύκλου και εφαπτομένης λέγεται **σημείο επαφής**.

Παρατήρηση: Η ακτίνα του κύκλου που αντιστοιχεί στο σημείο επαφής είναι κάθετη στην εφαπτομένη του κύκλου. Επομένως, για να σχεδιάσουμε την εφαπτομένη σε ένα σημείο του κύκλου, αρκεί να σχεδιάσουμε ευθεία κάθετη στην ακτίνα στο σημείο επαφής.



Σχήμα 15

Εφαπτόμενα τμήματα

Αποδεικνύεται ότι: Αν το Σ είναι σημείο εκτός κύκλου, τότε από το Σ διέρχονται δύο εφαπτόμενες του κύκλου. Αν Α, Β είναι τα σημεία επαφής αυτών με τον κύκλο, τα τμήματα ΣΑ και ΣΒ λέγονται εφαπτόμενα τμήματα από το Σ στον κύκλο. Η ευθεία ΚΣ λέγεται **διακεντρική** του Σ (Σχήμα 16). Για τα εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από σημείο εκτός κύκλου ισχύουν τα ακόλουθα:

Πρόταση Ι

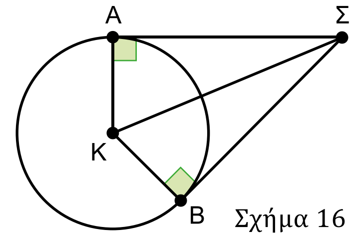
Τα εφαπτόμενα τμήματα από σημείο εκτός κύκλου στον κύκλο είναι ίσα μεταξύ τους.

Πορίσματα

Αν από σημείο Σ εκτός κύκλου κέντρου Κ φέρουμε τα εφαπτόμενα στον κύκλο τμήματα ΣΑ και ΣΒ, τότε η ευθεία ΣΚ:

α. είναι μεσοκάθετος της χορδής ΑΒ του κύκλου.

β. διχοτομεί τις γωνίες ΑΣΒ και ΑΚΒ.

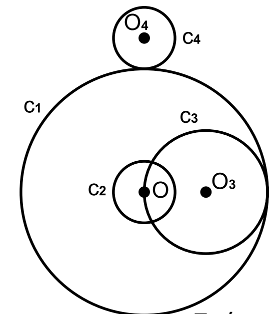


Σχήμα 16

Σχετικές θέσεις δύο κύκλων

Εξερεύνηση

Στο Σχήμα 17 δίνονται οι κύκλοι c_1, c_2 με κέντρο Ο και οι κύκλοι c_3, c_4 με κέντρα O_3 και O_4 αντίστοιχα. Με βάση το σχήμα, συμπληρώστε τον πίνακα που ακολουθεί.



Σχήμα 17

Σχετικές θέσεις δύο κύκλων	Ζεύγος κύκλων	Πλήθος κοινών σημείων
Κύκλοι εφαπτόμενοι εσωτερικά		
Κύκλοι εφαπτόμενοι εξωτερικά		
Κύκλοι ομόκεντροι		
Κύκλοι τεμνόμενοι		
Κύκλοι χωρίς κοινό σημείο (ο καθένας στο εξωτερικό του άλλου)		
Κύκλοι χωρίς κοινό σημείο (ο ένας στο εσωτερικό του άλλου)		

Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα κέντρα δύο κύκλων λέγεται **διάκεντρος** αυτών των κύκλων.

QR34

Δίνονται οι κύκλοι (K, ρ_1), (Λ, ρ_2) με $\rho_1 > \rho_2$.
Ανοίξτε το **QR34** και συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα:

Σχετικές θέσεις δύο κύκλων	Σχέση διακέντρου ΚΛ με $\rho_1 + \rho_2$, $\rho_1 - \rho_2$	Πλήθος κοινών εφαπτομένων
	$K\Lambda < \rho_1 - \rho_2$	
	$K\Lambda = \rho_1 - \rho_2$	
	$\rho_1 - \rho_2 < K\Lambda < \rho_1 + \rho_2$	
	$K\Lambda = \rho_1 + \rho_2$	
	$K\Lambda > \rho_1 + \rho_2$	

Πρόταση ΙΙ

Όταν δύο κύκλοι εφάπτονται, τότε:

α. Η ευθεία της διακέντρου τους διέρχεται από το σημείο επαφής τους.

β. Η κάθετος στην ευθεία της διακέντρου στο σημείο επαφής είναι κοινή εφαπτομένη των δύο κύκλων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ).

α. Δύο εφαπτομένες ενός κύκλου τέμνονται σε κάθε περίπτωση.

β. Αν τα τμήματα ΣΑ και ΣΒ είναι εφαπτόμενα σε κύκλο, τότε το τμήμα ΑΒ είναι διάμετρος του κύκλου.

γ. Αν τα τμήματα ΣΑ και ΣΒ είναι εφαπτόμενα σε κύκλο κέντρου Κ, τότε το Κ ισαπέχει από τις ευθείες ΣΑ και ΣΒ.

δ. Αν τα τμήματα ΣΑ και ΣΒ είναι εφαπτόμενα σε κύκλο κέντρου Κ, τότε οι γωνίες $A\hat{K}B$ και $A\hat{\Sigma}B$ είναι παραπληρωματικές.

ε. Αν μία ευθεία (ε) απέχει απόσταση δ = 2 από το κέντρου κύκλου (Κ, 3) τότε η ευθεία έχει δύο κοινά σημεία με τον κύκλο.

στ. Τρία σημεία κύκλου μπορεί να είναι συνευθειακά.

ζ. Υπάρχει σημείο του επιπέδου που ισαπέχει από τρία διαφορετικά σημεία μιας ευθείας.

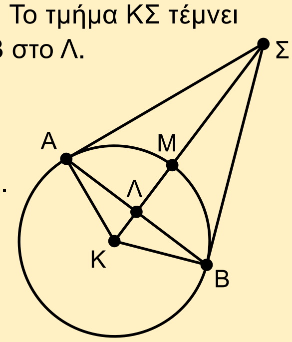
2 Να αποδείξετε την Πρόταση Ι (εφαπτόμενα τμήματα) και τα πορίσματά της.

3 Δίνεται κύκλος κέντρου Κ και σημείο Σ εκτός αυτού. Τα τμήματα ΣΑ και ΣΒ είναι εφαπτόμενα στον κύκλο. Το τμήμα ΚΣ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Μ και τη χορδή ΑΒ στο Λ.
Να αποδείξετε ότι:

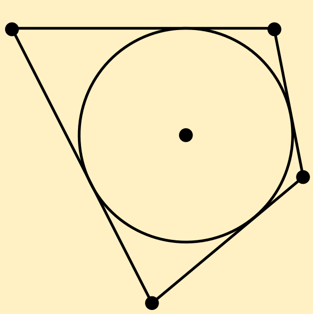
α. το σημείο Μ είναι το μέσο του τόξου ΑΒ.

β. το σημείο Λ είναι το μέσο της χορδής ΑΒ.

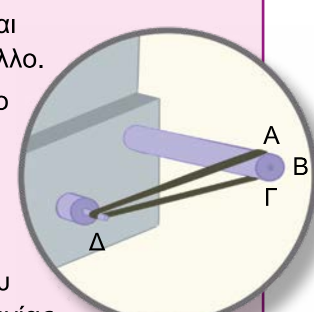
γ. η ΜΚ είναι η διχοτόμος της γωνίας ΑΜΒ.



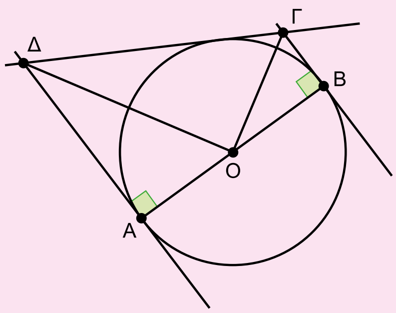
4 Να αποδείξτε ότι, αν οι πλευρές ενός τετραπλεύρου εφάπτονται σε κύκλο, τότε τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών του είναι ίσα.



5 Σε ένα μηχάνημα, η κίνηση μεταφέρεται μέσω ενός ιμάντα από τον έναν άξονα στον άλλο.
Στη διπλανή εικόνα ο κινητήριος άξονας είναι στο σημείο Δ και το μέτρο του τόξου ΑΒΓ είναι 210°.
Να σχεδιάσετε ένα μοντέλο στο οποίο να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζουν τα τμήματα ΔΑ και ΔΓ του ιμάντα. Να περιγράψετε τις παραδοχές που κάνατε για την κατασκευή του μοντέλου και τον υπολογισμό της ζητούμενης γωνίας.



6 Δίνεται κύκλος (Ο, ρ), μια διάμετρός του ΑΒ και οι εφαπτόμενες ε_1 και ε_2 στα Α,Β. Αν μια τρίτη εφαπτομένη τέμνει τις ε_1 και ε_2 στα Γ και Δ να αποδείξετε ότι $\Gamma\hat{O}\Delta = 90°$.



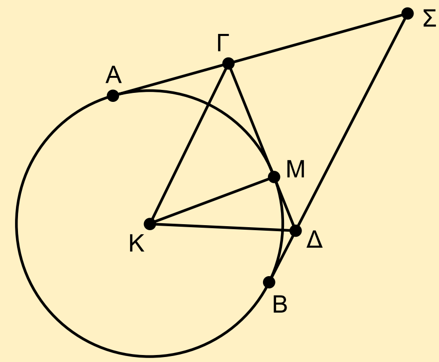
7 Έστω Σ σημείο εκτός κύκλου (Κ, ρ) και τα εφαπτόμενα τμήματα ΣΑ και ΣΒ του κύκλου. Θεωρούμε σημείο Μ του τόξου ΑΒ και την εφαπτομένη του κύκλου στο Μ η οποία τέμνει τις ΣΑ και ΣΒ στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α. αν το Μ ανήκει στο έλασσον τόξο ΑΒ, τότε

i. $\Gamma\hat{K}\Delta = 90° - \dfrac{\Gamma\hat{\Sigma}\Delta}{2}$

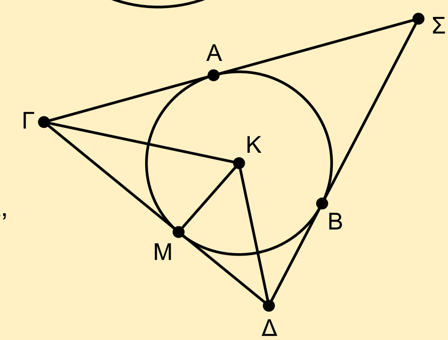
ii. η περίμετρος του τριγώνου ΓΔΣ είναι σταθερή.



β. Αν το Μ ανήκει στο μείζον τόξο ΑΒ, τότε

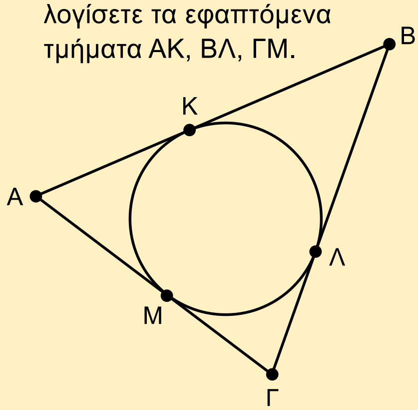
i. $\Gamma\hat{K}\Delta = 90° + \dfrac{\Gamma\hat{\Sigma}\Delta}{2}$

ii. να βρεθεί η περίμετρος του τριγώνου ΣΓΔ σε σχέση με τα τμήματα ΣΑ, ΣΒ και ΓΔ.



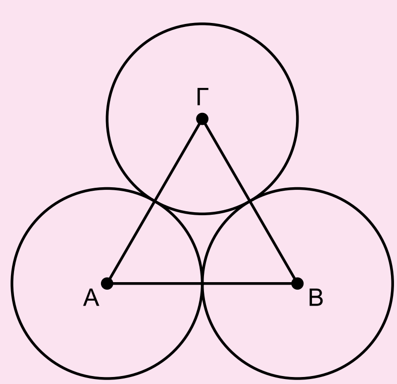
8 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 9, ΒΓ = 8 και ΑΓ = 7.

Αν οι πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ του τριγώνου εφάπτονται σε κύκλο στα σημεία Κ, Λ και Μ αντίστοιχα, να υπολογίσετε τα εφαπτόμενα τμήματα ΑΚ, ΒΛ, ΓΜ.



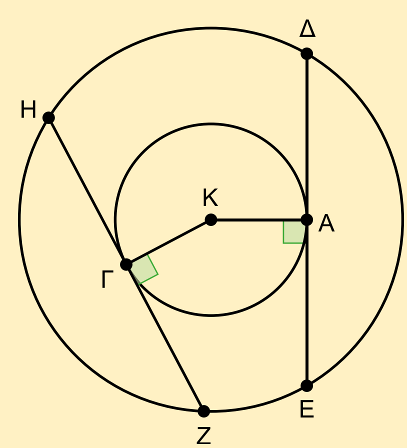
9 Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και Μ το μέσο του ΒΓ. Γράφουμε τον κύκλο (Β, ΒΜ) και φέρουμε την εφαπτομένη ΑΔ του κύκλου. Να αποδείξετε ότι $B\hat{A}\Gamma = 2\,B\hat{A}\Delta$.

10 Αν τρεις ίσοι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά ανά δύο, να αποδείξετε ότι τα κέντρα τους είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου.



11 Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι.

Να αποδείξετε ότι όλες οι χορδές του μεγάλου κύκλου που εφάπτονται στον μικρό είναι ίσες.



12 Δύο κύκλοι με κέντρα Κ και Λ εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Μ.

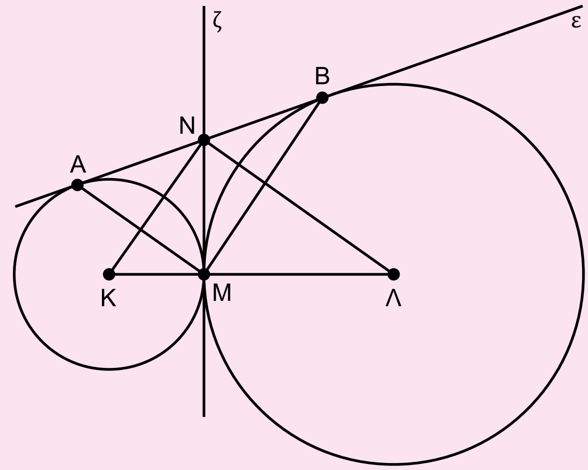
Η ευθεία (ε) εφάπτεται στους δύο κύκλους στα σημεία Α και Β και η κοινή εσωτερική τους εφαπτομένη[4] (ζ) τέμνει την ευθεία (ε) στο σημείο Ν.

Να αποδειχθεί ότι:

α. το σημείο Ν είναι μέσο του ΑΒ.

β. η γωνία $K\hat{N}\Lambda$ είναι ορθή.

γ. η γωνία $A\hat{M}B$ είναι ορθή.



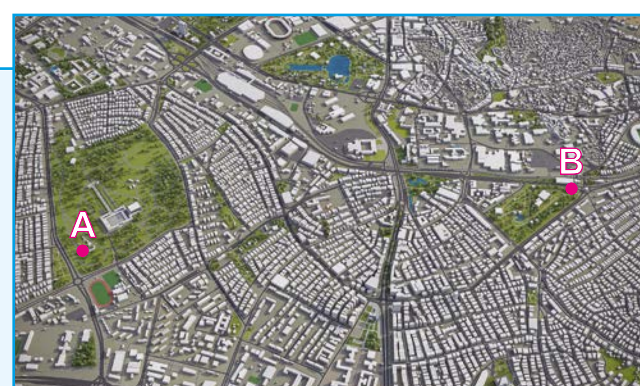
3.3 Γεωμετρικοί τόποι και κατασκευές

Βασικά ερωτήματα της ενότητας

- Αν δίνεται μια γεωμετρική ιδιότητα, πώς μπορούμε να προσδιορίσουμε το σχήμα που αποτελείται από όλα τα σημεία με αυτή την ιδιότητα;
- Πώς κατασκευάζουμε με κανόνα και διαβήτη σχήματα που ικανοποιούν συγκεκριμένες ιδιότητες;

Εξερεύνηση

Στο Σχήμα 18 βλέπουμε την αεροφωτογραφία μιας αστικής περιοχής. Υποθέτουμε ότι στα σημεία Α, Β υπάρχουν δύο κεραίες κινητής τηλεφωνίας ίδιας ισχύος. Με την παραδοχή ότι η ισχύς του σήματος που λαμβάνει ένας δέκτης, εξαρτάται μόνο από την απόσταση πομπού - δέκτη, προσδιορίστε τα σημεία της περιοχής στα οποία το σήμα που προέρχεται από την κεραία που βρίσκεται στο σημείο Α είναι εξίσου ισχυρό με το σήμα από την κεραία που είναι στο σημείο Β.



Σχήμα 18

Ορισμός

*Ένα σύνολο που περιλαμβάνει όλα τα σημεία που έχουν μια δεδομένη ιδιότητα και μόνο αυτά το λέμε **γεωμετρικό τόπο** των σημείων με αυτή την ιδιότητα.*

[4] Έστω (ε) μια κοινή εφαπτομένη δύο κύκλων. Αν οι δύο κύκλοι βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την (ε), τότε αυτή λέγεται κοινή **εξωτερική** τους εφαπτομένη, ενώ αν οι δύο κύκλοι βρίσκονται σε διαφορετικά ημιεπίπεδα ως προς την (ε), τότε αυτή λέγεται κοινή **εσωτερική** τους εφαπτομένη.

Βασικοί γεωμετρικοί τόποι στο επίπεδο

Ο **κύκλος**, η **μεσοκάθετος** ευθύγραμμου τμήματος και η **διχοτόμος** γωνίας είναι χαρακτηριστικά παραδείγματα γεωμετρικών τόπων.

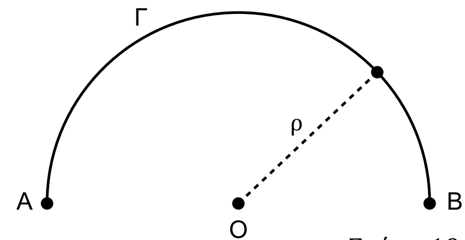
1. Κύκλος

Δίνεται ένα σημείο Ο και ένα μήκος ρ. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου τα οποία απέχουν από το σημείο Ο απόσταση ίση με ρ είναι ο **κύκλος** κέντρου Ο και ακτίνας ρ.

Παρατήρηση

Ας θεωρήσουμε το ημικύκλιο ΑΓΒ του κύκλου (Ο, ρ) (Σχήμα 19). Κάθε σημείο του ημικυκλίου έχει την ιδιότητα να απέχει απόσταση ρ από το Ο, αλλά το ημικύκλιο δεν είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων με αυτή την ιδιότητα, αφού δεν περιλαμβάνει όλα τα σημεία που την ικανοποιούν.

Ας προσέξουμε λοιπόν ότι:



Σχήμα 19

Αν δοθεί μια ιδιότητα Ι, για να διαπιστώσουμε ότι ένα γεωμετρικό σχήμα Σ αποτελεί το γεωμετρικό τόπο των σημείων με την ιδιότητα Ι, πρέπει να αποδείξουμε δύο προτάσεις:

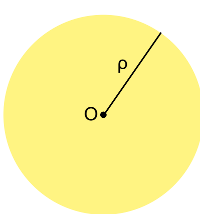
Ευθύ: Κάθε σημείο του σχήματος Σ έχει την ιδιότητα Ι.

Αντίστροφο: Κάθε σημείο που έχει την ιδιότητα Ι ανήκει στο σχήμα Σ.

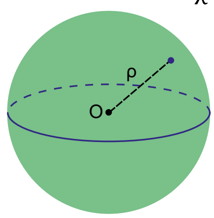
Παρατηρήσεις

1. Σε κάποιες περιπτώσεις ένας γεωμετρικός τόπος είναι ένα χωρίο και όχι μία γραμμή. Για παράδειγμα, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που απέχουν από ένα σημείο του Ο απόσταση μικρότερη από ρ είναι ο κυκλικός δίσκος κέντρου Ο και ακτίνας ρ – χωρίς τα σημεία του κύκλου (Ο, ρ) (Σχήμα 20).
2. Όταν αναζητούμε έναν γεωμετρικό τόπο, δηλαδή ένα σύνολο σημείων που έχουν μια δεδομένη ιδιότητα, θα πρέπει να διευκρινίζουμε αν μιλάμε για έναν γεωμετρικό τόπο στο επίπεδο ή στον χώρο. Για παράδειγμα, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του χώρου τα οποία απέχουν από το σημείο Ο απόσταση ίση με ρ είναι η σφαίρα κέντρου Ο και ακτίνας ρ (Σχήμα 21).

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε μόνο με γεωμετρικούς τόπους στο επίπεδο.



Σχήμα 20

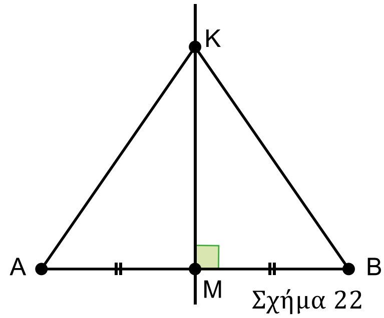


Σχήμα 21

2. Μεσοκάθετος τμήματος

Πρόταση Ι

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από δύο δεδομένα σημεία είναι η μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα αυτά τα σημεία.



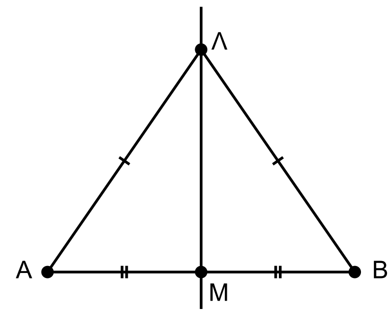
Σχήμα 22

Απόδειξη

Θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και έστω Μ το μέσο του.

Ευθύ: *Αν το σημείο Κ ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος ΑΒ, τότε ΚΑ = ΚΒ* (Σχήμα 22). Πράγματι: Το ΚΜ είναι διάμεσος και ύψος του τριγώνου ΚΑΒ. Συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο ΚΑΒ είναι ισοσκελές με ΚΑ = ΚΒ.

Αντίστροφο: *Αν για κάποιο σημείο Λ ισχύει ΛΑ = ΛΒ, τότε το Λ βρίσκεται στη μεσοκάθετο του ΑΒ* (Σχήμα 23). Πράγματι: Το τρίγωνο ΛΑΒ είναι ισοσκελές και αφού ΛΜ είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση του, είναι και ύψος. Συμπεραίνουμε ότι η ευθεία ΛΜ είναι η μεσοκάθετος του ΑΒ.



Σχήμα 23

Η επόμενη εφαρμογή αποτελεί συνέχεια της Εξερεύνησης με την οποία ξεκινήσαμε αυτή την ενότητα:

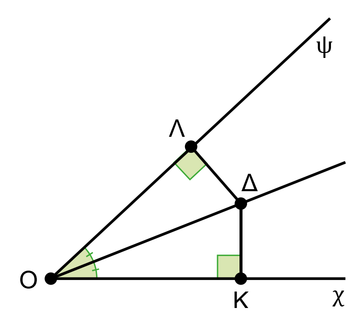
Εφαρμογή 1

Δύο κεραίες κινητής τηλεφωνίας ίδιας ισχύος βρίσκονται στις θέσεις Α και Β ενός χάρτη. Με την παραδοχή ότι η ισχύς του σήματος που λαμβάνει ένας δέκτης εξαρτάται μόνο από την απόσταση πομπού-δέκτη, να χωρίσετε τον χάρτη σε δύο περιοχές $Π_Α$ και $Π_Β$, έτσι ώστε κάθε σημείο της περιοχής $Π_Α$ να λαμβάνει ισχυρότερο σήμα από την κεραία της θέσης Α και κάθε σημείο της περιοχής $Π_Β$ να λαμβάνει ισχυρότερο σήμα από την κεραία της θέσης Β.

3. Διχοτόμος γωνίας

Πρόταση ΙΙ

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που βρίσκονται στο εσωτερικό μιας γωνίας και ισαπέχουν από τις πλευρές της είναι η διχοτόμος της γωνίας.



Σχήμα 24

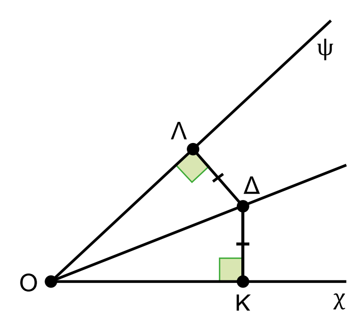
Απόδειξη

Ευθύ: *Αν το σημείο Δ ανήκει στη διχοτόμο Οδ της γωνίας $x\hat{O}ψ$, τότε το Δ ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας* (Σχήμα 24).

Πράγματι: Φέρουμε τα κάθετα τμήματα ΔΚ και ΔΛ προς τις πλευρές Οχ και Οψ αντίστοιχα. Τότε τα τρίγωνα ΚΟΔ και ΛΟΔ είναι ίσα, αφού έχουν $\hat{K} = \hat{Λ} = 90°$, ΟΔ κοινή υποτείνουσα και $Δ\hat{O}K = Δ\hat{O}Λ$. Συμπεραίνουμε ότι ΔΚ = ΔΛ.

Αντίστροφο: *Αν το σημείο Δ βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας $χ\hat{O}ψ$ και ισαπέχει από τις πλευρές της, τότε το Δ ανήκει στη διχοτόμο της $χ\hat{O}ψ$* (Σχήμα 25).

Πράγματι, αν για τα τμήματα ΔΚ ⊥ Οχ και ΔΛ ⊥ Οψ ισχύει ΔΚ = ΔΛ, τότε τα ορθογώνια τρίγωνα ΚΟΔ και ΛΟΔ είναι ίσα σύμφωνα με το κριτήριο Υ-Κ, αφού έχουν ΔΚ = ΔΛ και ΟΔ κοινή υποτείνουσα. Συμπεραίνουμε ότι $Δ\hat{O}K = Δ\hat{O}Λ$, δηλαδή η ΟΔ είναι η διχοτόμος της $χ\hat{O}ψ$.



Σχήμα 25

Γεωμετρικές κατασκευές

Μια κατασκευή ονομάζεται γεωμετρική αν σε αυτή χρησιμοποιούνται μόνο τα γεωμετρικά όργανα **κανόνας**, δηλαδή χάρακας χωρίς διαβάθμιση και **διαβήτης**.

Μπορούμε να κατασκευάσουμε με κανόνα και διαβήτη τη μεσοκάθετο δεδομένου ευθύγραμμου τμήματος αξιοποιώντας την ακόλουθη παρατήρηση:

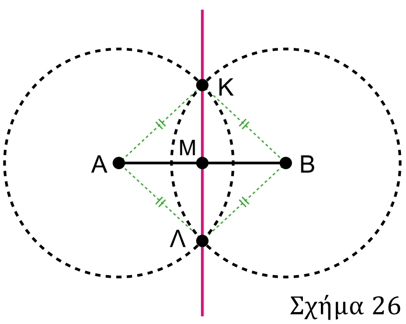
Αν καθένα από δύο σημεία Κ και Λ ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, τότε η ευθεία ΚΛ είναι η μεσοκάθετος του ΑΒ.

Όπως θα δούμε στη συνέχεια, πολλές γεωμετρικές κατασκευές βασίζονται στην κατασκευή της μεσοκαθέτου.

Γεωμετρική κατασκευή μεσοκαθέτου και μέσου ευθύγραμμου τμήματος

Κατασκευή: Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Επιλέγουμε ευθύγραμμο τμήμα ρ με $\rho > \frac{AB}{2}$ και γράφουμε τους κύκλους (Α, ρ) και (Β, ρ).

Αφού 2ρ > ΑΒ, οι κύκλοι τέμνονται σε δύο σημεία Κ και Λ. Η ευθεία ΚΛ είναι η μεσοκάθετος του τμήματος ΑΒ (Σχήμα 26).



Σχήμα 26

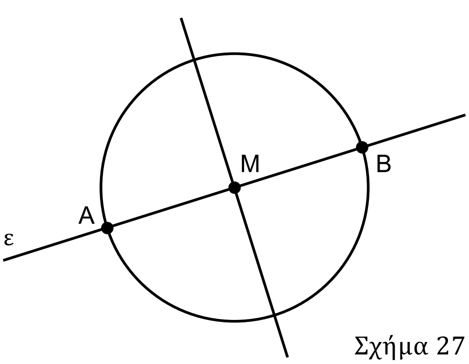
Απόδειξη: Επειδή ΚΑ = ΚΒ = ρ, το Κ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΒ. Όμοια, επειδή ΛΑ = ΛΒ = ρ το Λ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΒ. Τα σημεία Κ και Λ ορίζουν μοναδική ευθεία ΚΛ η οποία είναι η μεσοκάθετος του ΑΒ.

Ειδικότερα, το σημείο τομής Μ της ΚΛ με το ΑΒ είναι το μέσο του ΑΒ.

Γεωμετρική κατασκευή κάθετης σε ευθεία σε ένα σημείο της

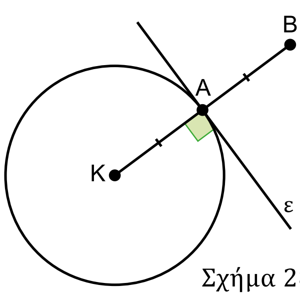
Θεωρούμε ευθεία (ε) και σημείο της Μ. Θέλουμε να κατασκευάσουμε ευθεία η οποία τέμνει κάθετα την (ε) στο σημείο Μ.

Κατασκευή: Αρχικά, γράφουμε κύκλο με κέντρο το Μ και τυχαία ακτίνα ρ, ο οποίος τέμνει την ευθεία (ε) σε δύο σημεία Α και Β. Τώρα το Μ είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ. Κατασκευάζουμε λοιπόν τη μεσοκάθετο του ΑΒ. Αυτή διέρχεται από το Μ και είναι κάθετη στην ευθεία (ε) (Σχήμα 27).



Σχήμα 27

Παρατήρηση – Κατασκευή εφαπτομένης κύκλου: Αφού η εφαπτομένη ενός κύκλου είναι κάθετη στην ακτίνα που αντιστοιχεί στο σημείο επαφής, με τον ίδιο τρόπο κατασκευάζουμε και την εφαπτομένη σε δεδομένο σημείο κύκλου (Σχήμα 28).



Σχήμα 28

Στο **QR35** μπορείτε να κάνετε αυτή την κατασκευή σε ψηφιακό περιβάλλον.

QR35

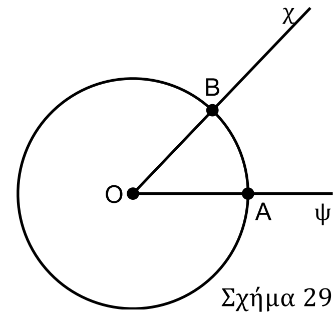
Γεωμετρική κατασκευή της διχοτόμου γωνίας

Στην κατασκευή που ακολουθεί αξιοποιούμε τις ιδιότητες του ισοσκελούς τριγώνου, ειδικότερα ότι η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής του συμπίπτει με τη μεσοκάθετο της βάσης του.

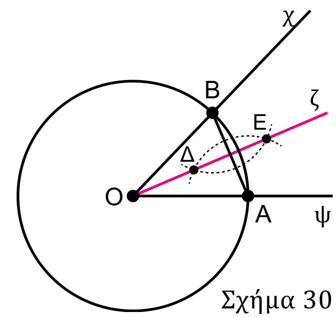
Δίνεται γωνία $\chi\hat{O}\psi$ και θέλουμε να κατασκευάσουμε τη διχοτόμο της.

Κατασκευή: Αρχικά κατασκευάζουμε ένα ισοσκελές τρίγωνο με γωνία κορυφής τη $\chi\hat{O}\psi$. Για αυτόν τον σκοπό, με τυχαία ακτίνα ρ γράφουμε κύκλο (Ο, ρ) ο οποίος τέμνει τις ημιευθείες Οχ και Οψ στα σημεία Α και Β αντίστοιχα (Σχήμα 29). Στη συνέχεια κατασκευάζουμε τη μεσοκάθετο (ζ) του τμήματος ΑΒ. Η ευθεία (ζ) διέρχεται από το Ο και διχοτομεί τη γωνία $\chi\hat{O}\psi$ (Σχήμα 30).

Πράγματι: Αφού το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές, η μεσοκάθετος (ζ) της βάσης του ΑΒ είναι και διχοτόμος της γωνίας της κορυφής του Ο.



Σχήμα 29



Σχήμα 30

Γεωμετρικός προσδιορισμός σημείου

Εξερεύνηση

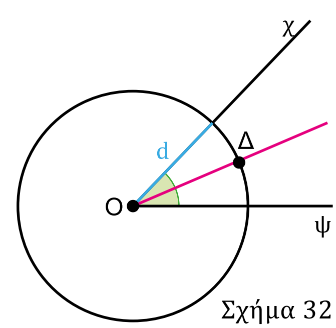
Στο Σχήμα 31 βλέπουμε τον χάρτη ενός προαστίου. Το λεωφορείο ακολουθεί τη διαδρομή που είναι σημειωμένη με κόκκινο. Σε ποιο σημείο της διαδρομής πρέπει να τοποθετηθεί η στάση του λεωφορείου ώστε να έχει ίση απόσταση από το νοσοκομείο Ν και το σχολείο Σ;

Σχήμα 31

Το να προσδιορίσουμε γεωμετρικά ένα σημείο σημαίνει ότι το σημείο θα προκύπτει από την τομή δύο γραμμών (ευθειών, κύκλων ή άλλων γραμμών), οι οποίες είτε δίνονται είτε μπορούν να κατασκευαστούν.

Παράδειγμα. *Να προσδιορίσετε γεωμετρικά σημείο του επιπέδου το οποίο ισαπέχει από τις πλευρές μιας γωνίας και απέχει από την κορυφή της απόσταση d.*

Έστω γωνία $\chi\hat{O}\psi$. Επειδή το ζητούμενο σημείο ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας, θα ανήκει στη διχοτόμο της. Επειδή το ζητούμενο σημείο απέχει απόσταση d από την κορυφή της γωνίας θα ανήκει σε κύκλο (Ο, d). Οπότε το σημείο που ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας **και** απέχει απόσταση d από την κορυφή της είναι το **σημείο τομής** Δ της διχοτόμου της χΟψ και του κύκλου (Ο, d) (Σχήμα 32).



Σχήμα 32

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος του κέντρου μιας ρόδας (δηλαδή η γραμμή που διαγράφει το κέντρο της ρόδας) ενός αυτοκινήτου το οποίο κινείται ευθύγραμμα κατά μήκος ενός ομαλού οριζόντιου δρόμου;

2 Στο μέσο μιας ακτίνας της ρόδας ενός ποδηλάτου, έχουμε στερεώσει ένα φωτάκι Φ. Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος του Φ, καθώς η ρόδα περιστρέφεται ενώ το ποδήλατο παραμένει ακίνητο;

3 Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από δύο τεμνόμενες ευθείες.

4 Δίνεται τμήμα ΒΓ. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Α ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ισοσκελές με κορυφή Α.

5 Δίνονται τα τμήματα ΒΓ και μ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της κορυφής Α των τριγώνων ΑΒΓ τα οποία έχουν διάμεσο ΑΜ = μ.

6 Δίνεται μια ευθεία (ε) και ένα σημείο Α εκτός αυτής.
Να κατασκευάσετε γεωμετρικά ευθεία κάθετη στην (ε) που διέρχεται από το σημείο Α.

7 Σε κύκλο (Ο, ρ) να κατασκευάσετε με κανόνα και διαβήτη τόξα: **45°, 60°, 30°**.

8 Να κατασκευάσετε με κανόνα και διαβήτη τόξα **15°** και **105°**.

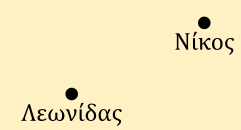
9 Δίνεται γωνία $x\hat{O}\psi$ και σημεία Β και Γ στις πλευρές της Οχ και Οψ αντίστοιχα. Να προσδιορίσετε γεωμετρικά εσωτερικό σημείο Μ της γωνίας, το οποίο ισαπέχει από τις πλευρές της και για το οποίο ισχύει ΜΒ = ΜΓ.

10 Έστω Μ σημείο της μεσοκαθέτου (ε) ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. Στις προεκτάσεις των ΑΜ και ΒΜ θεωρούμε σημεία Γ και Δ αντίστοιχα τέτοια ώστε ΜΓ = ΜΔ. Να αποδείξετε ότι ΑΔ = ΒΓ.

11 Δίνονται τα ευθύγραμμα τμήματα α και β με α > β.
Να κατασκευάσετε ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα α και κάθετη πλευρά β.

12 Δίνεται ευθεία (ε) και σημείο Α που δεν ανήκει σε αυτήν.
Να περιγράψετε δύο διαφορετικούς τρόπους για την κατασκευή ευθείας παράλληλης στην (ε) που διέρχεται από το σημείο Α. Στη συνέχεια, να πραγματοποιήσετε αυτές τις δύο κατασκευές με κανόνα και διαβήτη.

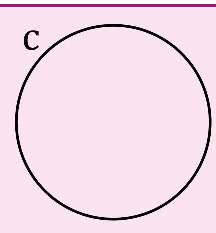
13 **Επίλυση προβλήματος – Προσδιορισμός σημείου**



Οι φίλοι Νίκος και Λεωνίδας παρακολουθούν ο καθένας από το σπίτι του κάποια πυροτεχνήματα που σκάνε κάπου προς τον Βορρά και μετρούν τον χρόνο που μεσολαβεί από τη στιγμή που βλέπουν τη λάμψη μέχρι τη στιγμή που ακούν τον κρότο. Ο Νίκος μετράει 5 δευτερόλεπτα και ο Λεωνίδας 7. Οι δύο φίλοι ξέρουν ότι τα σπίτια τους απέχουν μεταξύ τους 2 χιλιόμετρα. Γνωρίζουν επίσης ότι –λόγω της μεγάλης ταχύτητας του φωτός– η λάμψη φαίνεται αμέσως, ενώ ο ήχος ταξιδεύει με ταχύτητα 340 m/sec. Έχουν οι δύο φίλοι αρκετές πληροφορίες για να εντοπίσουν το σημείο όπου σκάνε τα πυροτεχνήματα; Κάντε ένα σχήμα για να τους βοηθήσετε να το προσδιορίσουν στον χάρτη.

14 Να προσδιορίσετε γεωμετρικά ένα σημείο που ισαπέχει από τρία δεδομένα σημεία του επιπέδου.
Υπάρχει πάντα τέτοιο σημείο;

15 Δίνεται ο κύκλος c του σχήματος.
Να προσδιορίσετε γεωμετρικά το κέντρο του.



16

α. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ).

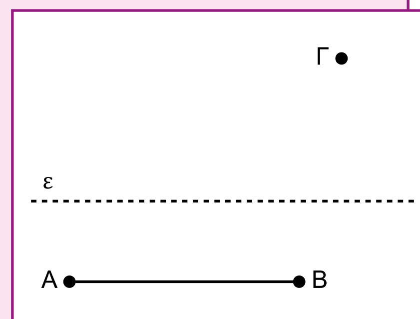
i. Ο τερματοφύλακας πρέπει να στέκεται σε θέση που ισαπέχει από τα κατακόρυφα δοκάρια του τέρματος για να προστατέψει καλύτερα την εστία του όταν ο αντίπαλος είναι στη θέση του πέναλτι.

ii. Ο τερματοφύλακας πρέπει να στέκεται σε θέση που ισαπέχει από τα κάθετα δοκάρια του τέρματος για να προστατέψει καλύτερα την εστία του σε κάθε περίπτωση.

εικόνα Α

β. Στην εικόνα Β το τμήμα ΑΒ παριστάνει το τμήμα της εστίας που προστατεύει ένας τερματοφύλακας. Η ευθεία (ε) είναι παράλληλη στη γραμμή της εστίας. Να προσδιορίσετε τη θέση στην ευθεία (ε) που πρέπει να σταθεί ένας τερματοφύλακας ώστε να προστατέψει καλύτερα την εστία του από έναν αντίπαλο που βρίσκεται στη θέση Γ αιτιολογώντας την απάντησή σας.

γ. Ένας φίλαθλος ισχυρίζεται ότι ο τερματοφύλακας πρέπει να στέκεται πάντα στο μέσο του τμήματος της εστίας του. Συμφωνείτε με αυτόν τον ισχυρισμό; Εξηγήστε την άποψή σας.



εικόνα Β

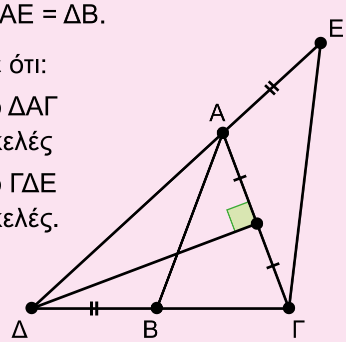
17 Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Η μεσοκάθετος της πλευράς ΑΓ τέμνει την προέκταση της ΓΒ στο Δ.

Στην προέκταση της ΔΑ θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο ώστε ΑΕ = ΔΒ.

Να αποδείξετε ότι:

α. το τρίγωνο ΔΑΓ είναι ισοσκελές

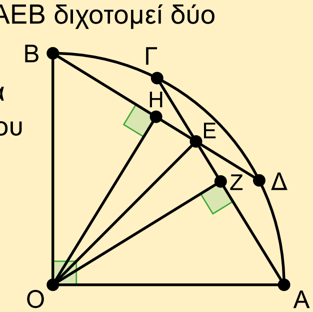
β. το τρίγωνο ΓΔΕ είναι ισοσκελές.



18 Σε τεταρτοκύκλιο ΟΑΒ φέρουμε δύο ίσες χορδές ΑΓ και ΒΔ οι οποίες τέμνονται στο σημείο Ε στο εσωτερικό του τεταρτοκυκλίου, καθώς και τα ΟΖ ⊥ ΑΓ και ΟΗ ⊥ ΒΔ.

α. Να αποδείξετε ότι μια από τις διαγωνίους του τετραπλεύρου ΟΑΕΒ διχοτομεί δύο γωνίες του.

β. Να αποδείξετε ότι μία από τις διαγωνίους του τετραπλεύρου ΟΑΕΒ είναι μεσοκάθετος της άλλης.



19 Όπως είδαμε στην Εισαγωγή, κάποια από τα πιο φημισμένα προβλήματα που απασχόλησαν τους αρχαίους Έλληνες γεωμέτρες αφορούσαν τη δυνατότητα γεωμετρικής κατασκευής συγκεκριμένων σχημάτων. Ένα τέτοιο πρόβλημα είναι η τριχοτόμηση μιας γωνίας: Μπορούμε, για οποιαδήποτε δεδομένη γωνία φ, να κατασκευάσουμε γεωμετρικά γωνία ω ίση με το 1/3 της φ; Σήμερα γνωρίζουμε ότι στη γενική περίπτωση αυτή η κατασκευή δεν μπορεί να γίνει μόνο με κανόνα και διαβήτη. Αξίζει όμως να δούμε έναν τρόπο εύρεσης της γωνίας φ/3 που οφείλεται στον Αρχιμήδη και γίνεται με τη λεγόμενη **μέθοδο της νεύσεως**, δηλαδή με μια κατασκευή που δεν είναι «γεωμετρική» στο QR36.

QR36

3.4 Κέντρα τριγώνου και αξιοσημείωτοι κύκλοι

Βασικά ερωτήματα της ενότητας

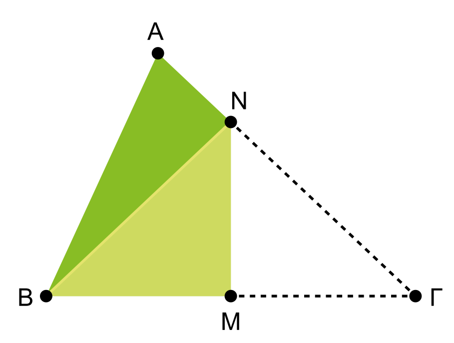
- Διέρχονται οι μεσοκάθετοι των τριών πλευρών ενός τριγώνου από το ίδιο σημείο; Αν ναι, ποιες ιδιότητες έχει το σημείο αυτό; Ανάλογα ερωτήματα για τις διχοτόμους, τις διαμέσους και τις ευθείες των υψών του τριγώνου.
- Υπάρχει κύκλος που διέρχεται από τις τρεις κορυφές του τριγώνου; Αν ναι, ποιο είναι το κέντρο και ποια η ακτίνα του;
- Υπάρχει κύκλος που εφάπτεται στις πλευρές του τριγώνου; Αν ναι, ποιο είναι το κέντρο και ποια η ακτίνα του;

Περιγεγραμμένος κύκλος τριγώνου – Περίκεντρο

Εξερεύνηση

Φτιάξτε ένα χάρτινο οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, διπλώστε το έτσι ώστε το Γ να συμπέσει με το Β και σχεδιάστε το ευθύγραμμο τμήμα ΜΝ κατά μήκος του οποίου διπλώσατε (Σχήμα 33). Ποια είναι η σχέση της ευθείας ΜΝ με τη ΒΓ; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Να επαναλάβετε τη διαδικασία ώστε το Β να συμπέσει με το Α και στη συνέχεια το Γ με το Α. Τι παρατηρείτε; Να διατυπώσετε μια εικασία που προκύπτει από αυτή τη δραστηριότητα.

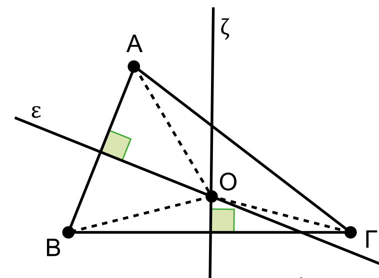


Σχήμα 33

Πρόταση Ι

Οι τρεις μεσοκάθετοι των πλευρών ενός τριγώνου συντρέχουν σε ένα σημείο, το οποίο είναι κέντρο του κύκλου που διέρχεται από τις τρεις κορυφές του τριγώνου.

Σχέδιο απόδειξης: Γενικά, για να αποδείξουμε ότι τρεις ευθείες διέρχονται από το ίδιο σημείο, θεωρούμε το σημείο τομής των δύο από αυτές και αποδεικνύουμε ότι αυτό ανήκει και στην τρίτη ευθεία.



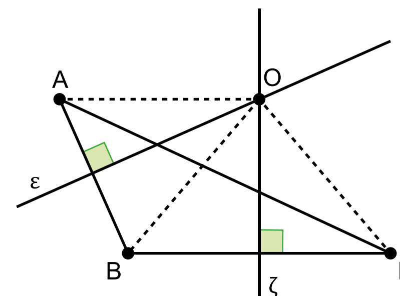
Σχήμα 34α

Απόδειξη

Σε τρίγωνο ΑΒΓ θεωρούμε τις μεσοκαθέτους (ε) και (ζ) των πλευρών ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα, οι οποίες τέμνονται σε σημείο Ο. Αφού το Ο είναι σημείο της μεσοκαθέτου (ε) του ΑΒ, ισχύει ΟΑ = ΟΒ. Όμως το Ο ανήκει και στη μεσοκάθετο (ζ) του ΒΓ, άρα ισχύει και ΟΒ = ΟΓ. Συμπεραίνουμε ότι ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ, δηλαδή το Ο ισαπέχει από τις τρεις κορυφές του τριγώνου (Σχήμα 34α).

Επιπλέον, ισχύουν τα ακόλουθα:

- Αφού ΟΑ = ΟΓ, το Ο ανήκει και στη μεσοκάθετο της πλευράς ΑΓ, δηλαδή οι τρεις μεσοκάθετοι συντρέχουν στο Ο.
- Αφού ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ, ο κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα R = ΟΑ διέρχεται από τις τρεις κορυφές του τριγώνου.



Σχήμα 34β

Παρατηρήσεις

1. Ο κύκλος που διέρχεται από τις τρεις κορυφές του τριγώνου λέγεται **περιγεγραμμένος κύκλος** του τριγώνου ΑΒΓ. Το κέντρο του Ο, που είναι το σημείο στο οποίο συντρέχουν οι τρεις μεσοκάθετοι των πλευρών λέγεται **περίκεντρο** του τριγώνου. Ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου είναι η απόσταση του κέντρου του από μια κορυφή. Λέμε ακόμη ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε αυτόν τον κύκλο.
2. **Ας προσέξουμε ότι:** Αν σε ένα τρίγωνο οι μεσοκάθετοι των δύο πλευρών του τέμνονται σε ένα σημείο και

α. από το σημείο αυτό φέρουμε κάθετη στην τρίτη πλευρά του, τότε αυτή θα διέρχεται από το μέσο της.

β. το σημείο αυτό το ενώσουμε με το μέσο της τρίτης πλευράς, τότε το ευθύγραμμο τμήμα που σχηματίζεται είναι κάθετο στην τρίτη πλευρά.

Εφαρμογή 1

Όπως φαίνεται στα Σχήματα 34α και β, το περίκεντρο μπορεί να βρίσκεται είτε στο εσωτερικό είτε στο εξωτερικό του τριγώνου. Υπάρχει περίπτωση το περίκεντρο να βρίσκεται σε μια από τις πλευρές του τριγώνου;

Με τη βοήθεια του **QR37**, βρείτε από ποιο χαρακτηριστικό του τριγώνου εξαρτάται η θέση του περίκεντρου (μέσα, έξω ή σε μια από τις πλευρές του τριγώνου).

QR37

Η Εφαρμογή 1 μάς οδηγεί στην ακόλουθη πρόταση, η οποία θα αποδειχθεί στο 4ο Κεφάλαιο:

Το περίκεντρο ενός ορθογώνιου τριγώνου συμπίπτει με το μέσο της υποτείνουσάς του.

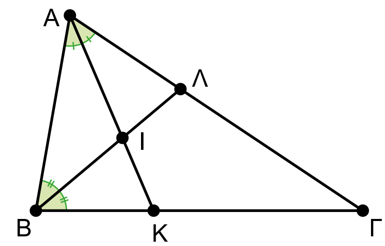
Εγγεγραμμένος κύκλος τριγώνου – Έγκεντρο

Εξερεύνηση

Έχετε ένα χάρτινο τρίγωνο.
Μπορείτε να το διπλώσετε κατάλληλα ώστε να βρείτε τη διχοτόμο μιας γωνίας του;
Να αιτιολογήσετε την κατασκευή σας γεωμετρικά. Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία για όλες τις διχοτόμους του τριγώνου μπορείτε να διατυπώσετε μία εικασία για μια ιδιότητα των διχοτόμων του τριγώνου;

Πρόταση ΙΙ

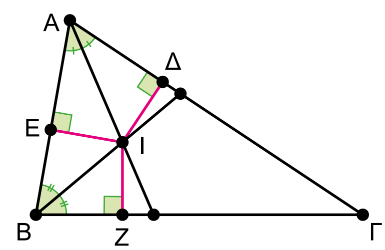
Οι τρεις διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου συντρέχουν σε ένα σημείο, το οποίο είναι κέντρο ενός κύκλου που εφάπτεται στις τρεις πλευρές του τριγώνου.



Σχήμα 35

Σχέδιο απόδειξης: Όπως και στην απόδειξη της Πρότασης Ι, θα θεωρήσουμε το σημείο τομής των δύο διχοτόμων και θα δείξουμε ότι αυτό ανήκει και στην τρίτη διχοτόμο.

Απόδειξη: Σε τρίγωνο ΑΒΓ έστω Ι το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών του Α και Β (Σχήμα 35). Φέρουμε τα κάθετα τμήματα από το Ι στις πλευρές του τριγώνου: $ΙΔ \perp ΑΓ$, $ΙΖ \perp ΒΓ$ και $ΙΕ \perp ΑΒ$.

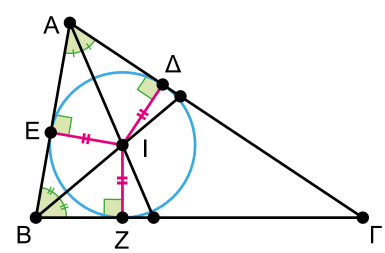


Σχήμα 36

Αφού το Ι είναι σημείο της διχοτόμου της γωνίας Α, ισαπέχει από τις πλευρές της, δηλαδή ισχύει $ΙΔ = ΙΕ$. Όμως το Ι ανήκει και στη διχοτόμο της γωνίας Β, άρα ισχύει και $ΙΕ = ΙΖ$. Συμπεραίνουμε ότι $ΙΔ = ΙΕ = ΙΖ$, δηλαδή το Ι ισαπέχει από τις τρεις πλευρές του τριγώνου (Σχήμα 36).

Επιπλέον, ισχύουν τα ακόλουθα:

- Αφού $ΙΔ = ΙΖ$, το Ι ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας Γ, επομένως ανήκει στη διχοτόμο της. Συμπεραίνουμε ότι η ΓΙ είναι η διχοτόμος της γωνίας Γ, άρα οι τρεις διχοτόμοι του τριγώνου συντρέχουν στο Ι.
- Αφού το Ι ισαπέχει από τις τρεις πλευρές του τριγώνου, ο κύκλος με κέντρο Ι και ακτίνα $ρ = ΙΔ$ εφάπτεται στις τρεις πλευρές του (Σχήμα 37).



Σχήμα 37

Παρατηρήσεις

1. Το σημείο τομής των διχοτόμων ενός τριγώνου λέγεται **έγκεντρο** του τριγώνου και, όπως είδαμε, είναι το κέντρο ενός κύκλου που εφάπτεται στις πλευρές του τριγώνου. Ο κύκλος αυτός λέγεται **εγγεγραμμένος κύκλος** του τριγώνου, ενώ λέμε ότι το τρίγωνο είναι **περιγεγραμμένο** σε αυτόν τον κύκλο.
2. Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι, αν οι διχοτόμοι δύο γωνιών Α και Β τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται σε σημείο Ι, τότε η ΓΙ διχοτομεί τη γωνία Γ.

Εφαρμογή 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Αν ο εγγεγραμμένος κύκλος του εφάπτεται στις πλευρές του α, β και γ στα σημεία Ζ, Δ και Ε αντίστοιχα και ισχύει ΑΕ = 5, ΒΖ = 3, ΓΔ = 4, να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου.

Ορθόκεντρο τριγώνου

Εξερεύνηση

Στο **QR38** έχουμε σχεδιάσει ένα τρίγωνο ΑΒΓ και τις ευθείες των υψών του.
Σύρετε οποιαδήποτε κορυφή του τριγώνου για να το μεταβάλετε. Τι παρατηρείτε;
Να διατυπώσετε μία εικασία από την παρατήρησή σας.
Να διατυπώσετε συμπεράσματα για τις περιπτώσεις που το τρίγωνο ΑΒΓ είναι:
α. οξυγώνιο, **β.** ορθογώνιο, **γ.** αμβλυγώνιο.

QR38

Πρόταση ΙΙΙ

Οι ευθείες των υψών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο λέγεται ορθόκεντρο του τριγώνου.

Παρατηρήσεις:

1. Από την πρόταση ΙΙΙ προκύπτει ότι αν τα ύψη ΑΔ και ΒΕ τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται στο Η, τότε η ευθεία ΓΗ είναι κάθετη στην ΑΒ.
2. Το τρίγωνο ΔΕΖ που έχει κορυφές τα ίχνη των υψών ενός τριγώνου ΑΒΓ λέγεται ορθικό τρίγωνο του ΑΒΓ (Σχήμα 38).

Εφαρμογή 3

i. Με τη βοήθεια του Σχήματος 38 να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις.

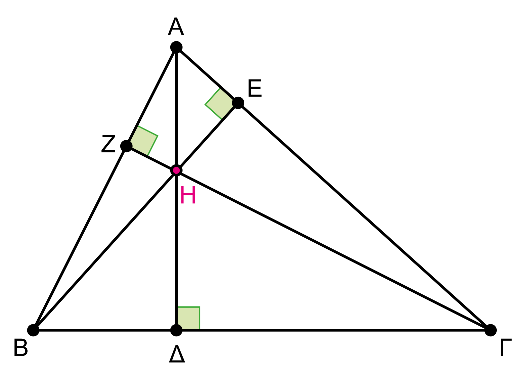
α. Το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ είναι το σημείο…

β. Το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΗ είναι το σημείο…

γ. Το ορθόκεντρο του τριγώνου ΒΓΗ είναι το σημείο…

δ. Το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΓΗ είναι το σημείο…

ii. Δίνονται τρία μη συνευθειακά σημεία Κ, Λ και Ζ. Να προσδιορίσετε σημείο Μ ώστε το τρίγωνο ΚΛΜ να έχει ορθόκεντρο το Ζ.



Σχήμα 38

Λέμε ότι οι κορυφές Α, Β, Γ κάθε τριγώνου μαζί με το ορθόκεντρό του Η αποτελούν μια **ορθοκεντρική τετράδα**. Με βάση την προηγούμενη εφαρμογή, εξηγήστε τι εννοούμε με αυτόν τον όρο.

Βαρύκεντρο τριγώνου

Εξερεύνηση

Στο **QR39** έχουμε σχεδιάσει ένα τρίγωνο ΑΒΓ και τις τρεις διαμέσους του ΑΚ, ΒΛ, ΓΜ. Σύρετε οποιαδήποτε κορυφή του τριγώνου για να το μεταβάλετε. Τι παρατηρείτε;

QR39

Πρόταση IV

Οι διάμεσοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο λέγεται βαρύκεντρο του τριγώνου.
Η απόσταση του βαρύκεντρου από κάθε κορυφή του τριγώνου είναι ίση με τα δύο τρίτα της αντίστοιχης διαμέσου.

Παρατήρηση: Από την προηγούμενη πρόταση προκύπτει ότι οι διάμεσοι ΑΚ και ΒΛ ενός τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται στο σημείο Θ, τότε η ευθεία ΓΘ διέρχεται από το μέσο της ΑΒ.

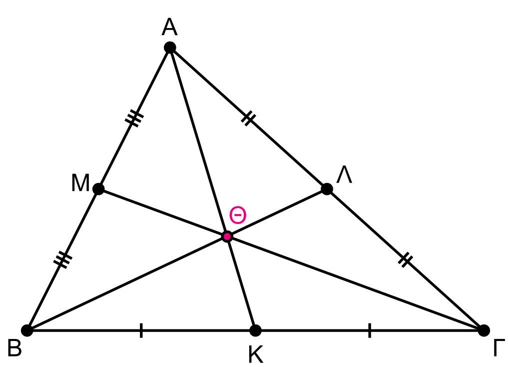
Εφαρμογή 4

Αν Θ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ του Σχήματος 39, να συμπληρώσετε με τους κατάλληλους αριθμούς τις παρακάτω ισότητες.

α. ΘΜ = … ΓΜ

β. ΘΒ = … ΘΛ

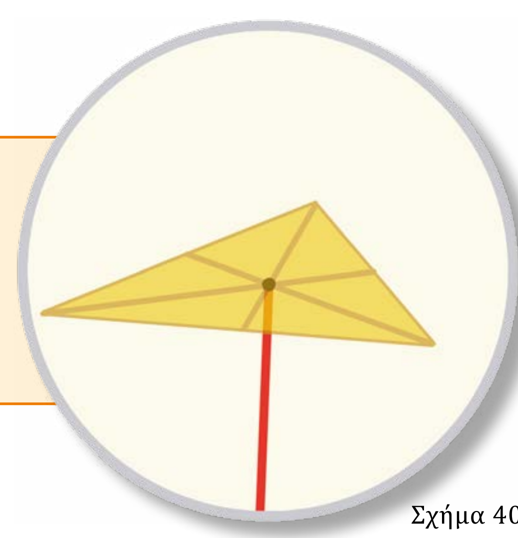
γ. ΑΚ = … ΑΘ



Σχήμα 39

Φυσική σημασία του βαρύκεντρου τριγώνου

Ας θεωρήσουμε μια τριγωνική ομοιογενή επίπεδη πλάκα.
Το βαρύκεντρο αυτής της τριγωνικής πλάκας είναι το **κέντρο βάρους** της, δηλαδή το σημείο στο οποίο πρέπει να τη στηρίξουμε ώστε να ισορροπεί (Σχήμα 40).



Σχήμα 40

Εφαρμογή 5 – Ευθεία του Euler

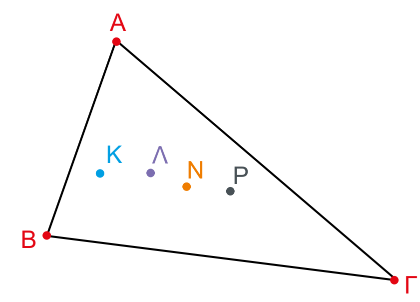
Στο **QR40** είναι σχεδιασμένα το περίκεντρο, το έγκεντρο, το βαρύκεντρο και το ορθόκεντρο ενός τριγώνου.

α. Σύροντας τις κορυφές του τριγώνου ΑΒΓ να βρείτε ποιο σημείο αντιστοιχεί σε ποιο κέντρο.

β. Να βρείτε αν υπάρχει τρίγωνο στο οποίο αυτά τα τέσσερα κέντρα είναι συνευθειακά.

γ. Να βρείτε αν υπάρχει τρίγωνο στο οποίο τα τέσσερα κέντρα ταυτίζονται.

δ. Ο Leonhard Euler (1707-1783) απέδειξε ότι σε κάθε τρίγωνο τα τρία από τα τέσσερα κέντρα του τριγώνου (το περίκεντρο, το έγκεντρο, το βαρύκεντρο και το ορθόκεντρο) είναι συνευθειακά (Σχήμα 42). Μπορείτε να βρείτε ποια είναι αυτά τα τρία κέντρα;



Σχήμα 42

QR40

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ).

α. Από τρία οποιαδήποτε σημεία του επιπέδου διέρχεται κύκλος.

β. Ο εγγεγραμμένος και ο περιγεγραμμένος κύκλος κάθε ισοσκελούς τριγώνου έχουν το ίδιο κέντρο.

γ. Το περίκεντρο κάθε τριγώνου είναι εντός του τριγώνου.

δ. Το έγκεντρο κάθε τριγώνου ισαπέχει από τις πλευρές του τριγώνου.

ε. Το βαρύκεντρο τριγώνου χωρίζει κάθε διάμεσό του σε δύο τμήματα που το ένα είναι διπλάσιο του άλλου.

στ. Το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των δύο πλευρών ενός τριγώνου είναι κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

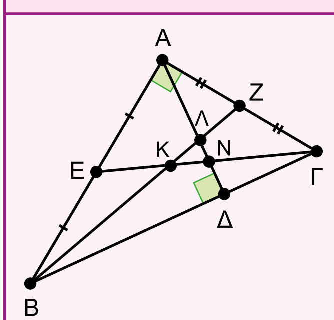
ζ. Το ορθόκεντρο κάθε ορθογώνιου τριγώνου είναι κορυφή του τριγώνου.

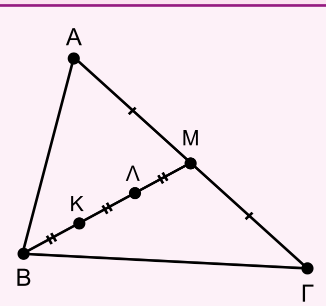
η. Αν για το σημείο Θ της διαμέσου ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ ισχύει ότι ΑΘ = 2ΘΔ, τότε η ημιευθεία ΒΘ διέρχεται από το μέσο της πλευράς ΑΓ.

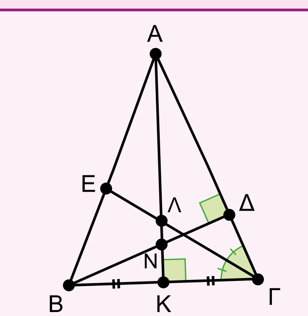
θ. Αν για ένα τρίγωνο υπάρχει σημείο που ισαπέχει τόσο από τις πλευρές όσο και από τις κορυφές του, τότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

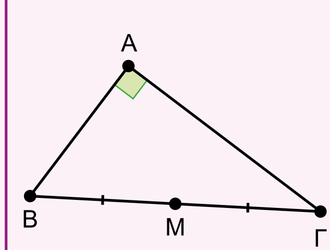
ι. Το έγκεντρο ενός ισοσκελούς τριγώνου ανήκει στη διάμεσο που αντιστοιχεί στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου.

2 Να εντοπίσετε (όπου είναι δυνατό) το ορθόκεντρο, το βαρύκεντρο, το περίκεντρο ή το έγκεντρο των τριγώνων ΑΒΓ μεταξύ των σημείων που δίνονται στα παρακάτω σχήματα. Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.









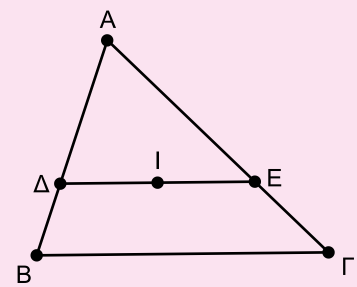
3 Έστω Ι το έγκεντρο, Θ το βαρύκεντρο, Ο το περίκεντρο και Η το ορθόκεντρο ενός τριγώνου ΑΒΓ.
Να εξετάσετε με βάση τη θεωρία:

α. ποια από τα σημεία Ι, Θ, Ο και Η είναι σε κάθε περίπτωση εντός του ΑΒΓ.

β. ποια από τα σημεία Ι, Θ, Ο και Η μπορεί να είναι εκτός του τριγώνου ΑΒΓ και το είδος του τριγώνου ΑΒΓ στο οποίο συμβαίνει αυτό.

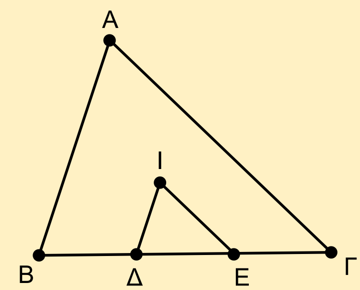
4 Από το έγκεντρο Ι τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε ευθεία παράλληλη της ΒΓ η οποία τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι ΔΕ = ΒΔ + ΓΕ.

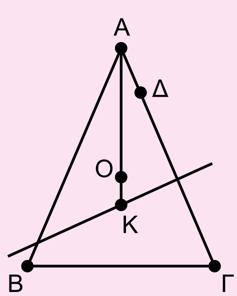


5 Από το έγκεντρο Ι τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε ΙΔ // ΑΒ και ΙΕ //ΑΓ.

Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τριγώνου ΔΙΕ είναι ίση με τη ΒΓ.

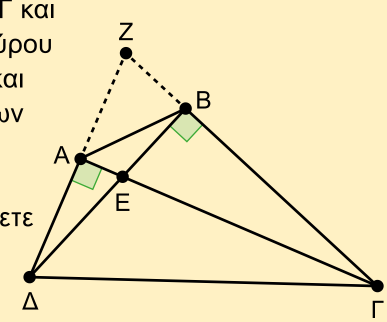


6 Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και Ο το περίκεντρό του. Θεωρούμε Δ σημείο της ΑΓ και τη μεσοκάθετο του τμήματος, ΓΔ η οποία τέμνει την ημιευθεία ΑΟ στο Κ. Να αποδείξετε ότι το Κ είναι το περίκεντρο του τριγώνου ΒΓΔ.



7 Έστω τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ΔΒ ⊥ ΒΓ και ΑΓ ⊥ ΑΔ.

Αν οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ του τετραπλεύρου τέμνονται στο Ε και οι προεκτάσεις των πλευρών του ΔΑ και ΓΒ τέμνονται στο Ζ να αποδείξετε ότι ΖΕ ⊥ ΓΔ.



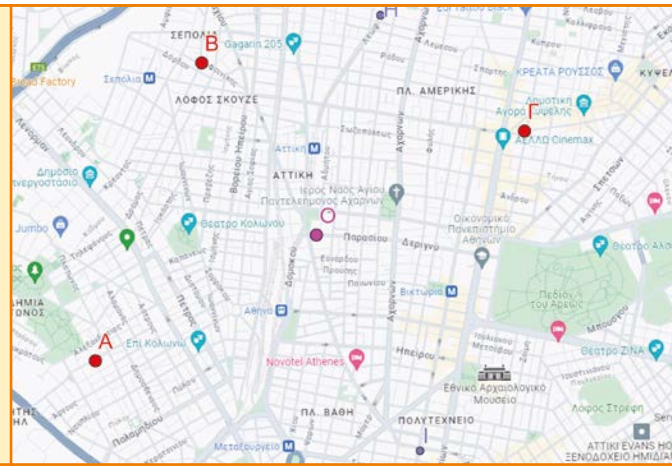
8 Ένας πειρατής έθαψε σε ένα σημείο έναν θησαυρό και από το σημείο αυτό μέτρησε τα ίδια βήματα σε τρεις διαφορετικές κατευθύνσεις και φύτεψε τρία δέντρα.
Όταν επέστρεψε στην περιοχή μετά από είκοσι χρόνια, βρήκε τα δέντρα που είχαν μεγαλώσει.

Πώς μπορεί τώρα να βρει τη θέση του κρυμμένου θησαυρού;

9 Να αποδείξετε ότι αν οι δύο διάμεσοι ενός τριγώνου είναι ίσες, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

10 Ας υποθέσουμε ότι στον διπλανό χάρτη στις θέσεις Α, Β και Γ είναι τρεις πιτσαρίες της ίδιας αλυσίδας. Οι τρεις πιτσαρίες έχουν χωρίσει τον χάρτη σε περιοχές ευθύνης τους ώστε να γνωρίζουν ποια πιτσαρία είναι πιο κοντά στη διεύθυνση του πελάτη και να αναλαμβάνει η κοντινότερη την κάθε παραγγελία.

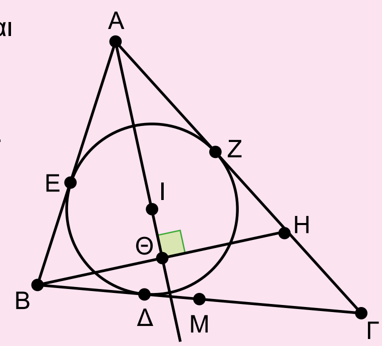
Να προσδιορίσετε τις περιοχές ευθύνης της κάθε πιτσαρίας και να βρείτε ποια από τις τρεις θα αναλάβει μία παραγγελία από τη θέση Ο που φαίνεται στον χάρτη.



11 Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΓ > ΑΒ και Μ το μέσο της ΒΓ.

Ο εγγεγραμμένος κύκλος του ΑΒΓ έχει κέντρο Ι και εφάπτεται στις πλευρές ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ στα σημεία Ε, Ζ και Δ αντίστοιχα. Η κάθετη από το Β στην ευθεία ΑΙ τέμνει την ΑΓ στο Η και την ΑΙ στο Θ. Να αποδείξετε ότι:

α. ΖΗ = ΒΕ, **β.** ΓΗ = 2ΔΜ



12 Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει

$$\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma > \frac{3}{4}(\alpha + \beta + \gamma)$$

13 Δίνονται δύο παράλληλες ευθείες και μια τρίτη ευθεία που τις τέμνει.
Υπάρχει κύκλος που εφάπτεται στις τρεις αυτές ευθείες;
Αν ναι, περιγράψτε πώς μπορεί να κατασκευαστεί.

14 Έστω Ι το έγκεντρο, Θ το βαρύκεντρο, Κ το περίκεντρο και Η το ορθόκεντρο ενός τριγώνου ΑΒΓ.

Να αποδείξετε ότι αν δύο από τα τέσσερα σημεία Ι, Θ, Κ και Η ταυτίζονται, τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

Όλα τα τρίγωνα είναι ισοσκελή! Βρείτε το λάθος (**QR 41**).

QR41

Ανακεφαλαίωση

Στο κεφάλαιο αυτό αρχικά μελετήσαμε τον **κύκλο** και τα χαρακτηριστικά του στοιχεία. Εξετάσαμε τις σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου και σταθήκαμε ιδιαίτερα στις ιδιότητες της **εφαπτομένης** του κύκλου. Επιπλέον εξετάσαμε τις σχετικές θέσεις δύο κύκλων.

Στη συνέχεια ασχοληθήκαμε με **γεωμετρικούς τόπους**, δηλαδή γεωμετρικά αντικείμενα ή σχήματα τα οποία μπορούν να προσδιοριστούν από μια κοινή ιδιότητα των σημείων τους. Επιπλέον πραγματοποιήσαμε κάποιες βασικές **γεωμετρικές κατασκευές**.

Το κεφάλαιο ολοκληρώθηκε με μια παρουσίαση των κέντρων του τριγώνου (**περίκεντρο, έγκεντρο, βαρύκεντρο, ορθόκεντρο**), καθώς και των δύο αξιοσημείωτων κύκλων που συνδέονται με κάθε τρίγωνο (**περιγεγραμμένος** και **εγγεγραμμένος κύκλος**).

Σημαντικοί όροι

Κύκλος, χορδή, απόστημα χορδής, τόξο, επίκεντρη γωνία, εφαπτομένη κύκλου, εφαπτόμενα τμήματα από σημείο εκτός κύκλου, σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου/δύο κύκλων

Βασικοί γεωμετρικοί τόποι
(κύκλος, μεσοκάθετος τμήματος, διχοτόμος γωνίας)

Βασικές γεωμετρικές κατασκευές
(κατασκευή μεσοκαθέτου ευθύγραμμου τμήματος, κατασκευή κάθετης σε δεδομένη ευθεία σε δεδομένο σημείο της, κατασκευή διχοτόμου γωνίας)

Γεωμετρικός προσδιορισμός σημείου

Κέντρα τριγώνου
(περίκεντρο, έγκεντρο, βαρύκεντρο, ορθόκεντρο)

Αξιοσημείωτοι κύκλοι τριγώνου
(περιγεγραμμένος και εγγεγραμμένος)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Στο **QR42** δίνεται ένας κύκλος και μία χορδή του. Τι είδους γραμμή διαγράφει το μέσο της χορδής καθώς αυτή περιστρέφεται;
Με ποια ιδιότητα των χορδών του κύκλου συνδέεται το συμπέρασμά σας;

QR42

2 Η αρχαιολόγος Μαρία Χ. βρήκε ένα θραύσμα που πιστεύει ότι προέρχεται από ένα κυκλικό πιάτο (στο σχήμα φαίνεται το θραύσμα σε κλίμακα 1:5). Μπορείτε να τη βοηθήσετε να συμπληρώσει την εικόνα αυτού του πιάτου και να υπολογίσει τη διάμετρό του;

3 Δίνονται τρεις ευθείες που τέμνονται ανά δύο, αλλά δεν συντρέχουν. Πόσοι κύκλοι υπάρχουν που εφάπτονται και στις τρεις ευθείες;
Μπορείτε να προσδιορίσετε τα κέντρα τους;

4 Δίνεται ένα σημείο Δ στο επίπεδο. Να κατασκευάσετε με κανόνα και διαβήτη (ή με λογισμικό) ένα σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ με:
α. ορθόκεντρο το Δ, **β.** βαρύκεντρο το Δ,
γ. περίκεντρο το Δ, **δ.** έγκεντρο το Δ.

QR43 Μέθοδος Ανάλυσης - Σύνθεσης

QR44 Συνθετική Εργασία: Origami και Μαθηματικά

QR45 Συνθετικές εργασίες στον κύκλο

QR46 Συνθετική Εργασία: Διαγράμματα Voronoi

QR47 Συμπληρωματικό υλικό στον κύκλο

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4
ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

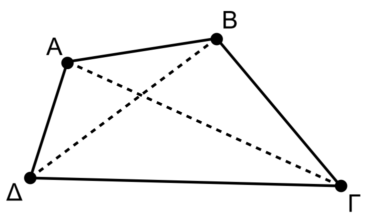
Το κτίριο της φωτογραφίας άρχισε να λειτουργεί το 1993 ως πυροσβεστικός σταθμός στην πόλη Βάιλ αμ Ράιν της Γερμανίας και στη συνέχεια έγινε μουσείο. Είναι σχεδιασμένο από τη Ζάχα Χαντίτ, η οποία γεννήθηκε το 1950 στη Βαγδάτη του Ιράκ, σπούδασε Μαθηματικά στον Λίβανο και αρχιτεκτονική στο Λονδίνο. Βραβεύτηκε με το κορυφαίο για την αρχιτεκτονική βραβείο Πρίτσκερ (Pritzker) και απεβίωσε το 2016.

Το κτίριο της φωτογραφίας διακρίνεται από όγκους με λιτές γραμμές, αιχμηρές απολήξεις, ευκρινή άκρα που δίνουν την αίσθηση εισχώρησης του ενός στον άλλον και αποτέλεσε την αφετηρία για την παγκόσμια αναγνώριση της Χαντίτ.

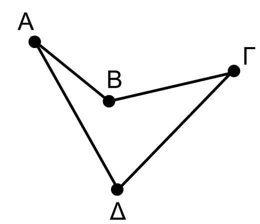
Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τα τετράπλευρα όπως αυτά που διακρίνονται στην εικόνα και, κυρίως, συγκεκριμένες κατηγορίες τους όπως τα παραλληλόγραμμα και τα τραπέζια. Θα διερευνήσουμε τις χαρακτηριστικές τους ιδιότητες και τις διασυνδέσεις τους με το φυσικό και ανθρωπογενές περιβάλλον.

Τετράπλευρα

Το πολύγωνο που έχει τέσσερις διαδοχικές πλευρές λέγεται **τετράπλευρο**. Αν ο φορέας κάθε πλευράς ενός τετραπλεύρου αφήνει το τετράπλευρο στο ίδιο ημιεπίπεδο, τότε το τετράπλευρο λέγεται **κυρτό**, διαφορετικά λέγεται **μη κυρτό**. Στη συνέχεια, όταν αναφερόμαστε σε τετράπλευρο, θα εννοούμε κυρτό τετράπλευρο. Σε κάθε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο εσωτερικό του.



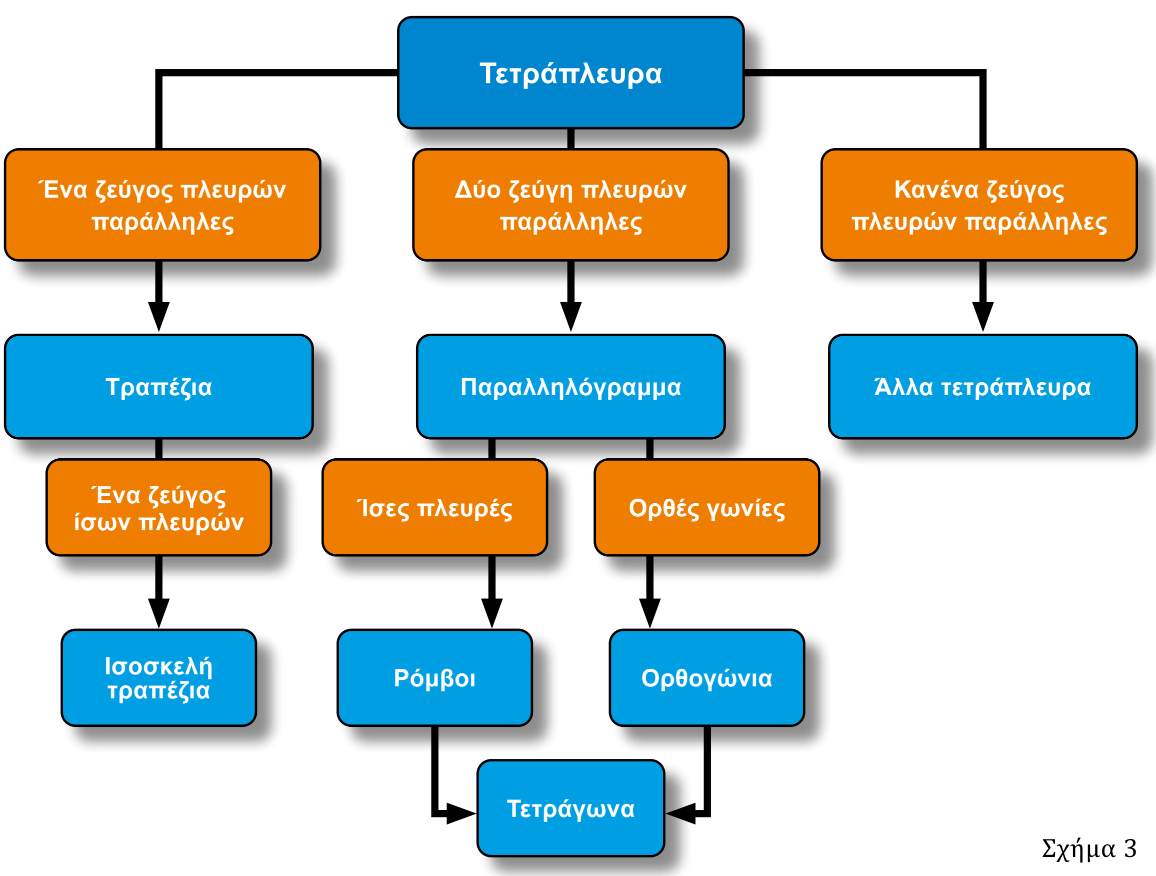
κυρτό τετράπλευρο
Σχήμα 1



μη κυρτό τετράπλευρο
Σχήμα 2

Στη συνέχεια μελετάμε τα τετράπλευρα ταξινομώντας τα στις εξής κατηγορίες:

α. Τετράπλευρα που έχουν τις απέναντι πλευρές παράλληλες.
β. Τετράπλευρα που έχουν μόνο δύο (απέναντι) πλευρές παράλληλες.
γ. Τετράπλευρα που δεν έχουν παράλληλες πλευρές.



Σχήμα 3

4.1 Παραλληλόγραμμα

Βασικά ερωτήματα της ενότητας

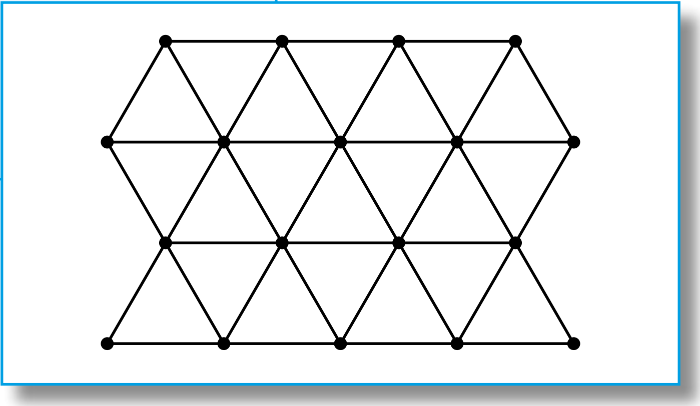
- Πώς ορίζεται ένα παραλληλόγραμμο;
- Ποιες είναι οι βασικές ιδιότητες του παραλληλογράμμου;
- Ποιες ιδιότητες ενός τετραπλεύρου εξασφαλίζουν ότι αυτό είναι παραλληλόγραμμο;
- Πώς αξιοποιούνται οι ιδιότητες του παραλληλογράμμου στην επίλυση προβλημάτων;

Εξερεύνηση

Το διπλανό πλέγμα αποτελείται από ισόπλευρα τρίγωνα.

Μπορείτε να βρείτε τετράπλευρα που έχουν τις απέναντι πλευρές τους παράλληλες;
Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

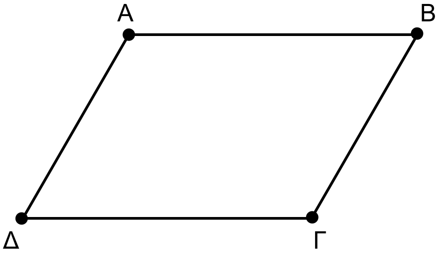
Να συγκρίνετε τις απέναντι πλευρές και γωνίες των τετραπλεύρων που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα.



Σχήμα 4

Ορισμός

Παραλληλόγραμμο είναι το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.



Σχήμα 5

Ιδιότητες παραλληλογράμμων

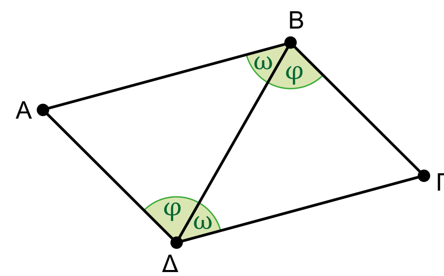
Πρόταση Ι

Σε κάθε παραλληλόγραμμο:

α. οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.
β. οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες.
γ. οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

Υπόθεση: ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο (ΑΒ // ΔΓ και ΑΔ // ΒΓ)

Συμπέρασμα: **α.** ΑΔ = ΒΓ, ΑΒ = ΔΓ **β.** $\hat{Α} = \hat{Γ}$ και $\hat{Β} = \hat{Δ}$.



Σχήμα 6

Σχέδιο απόδειξης

Σχεδιάζοντας τη διαγώνιο ΒΔ σχηματίζονται δύο τρίγωνα με στοιχεία τα τμήματα και τις γωνίες που θέλουμε να βγάλουμε ίσα.

Αποδεικνύουμε ότι ΑΒΔ = ΓΔΒ.

Απόδειξη των (α), (β)

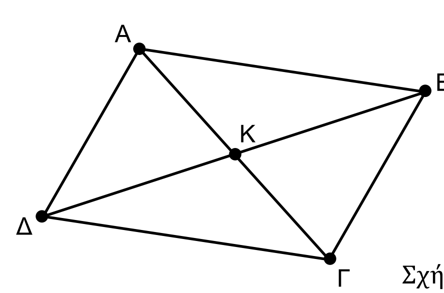
Δηλώσεις	**Αιτιολογήσεις**
1. ΑΒ // ΓΔ και ΑΔ // ΒΓ	α. υπόθεση
2. $Α\hat{Δ}Β = Δ\hat{Β}Γ = φ$	β. εντός εναλλάξ των ΑΔ // ΒΓ τεμνόμενων από ΒΔ
3. $Α\hat{Β}Δ = Β\hat{Δ}Γ = ω$	γ. εντός εναλλάξ των ΑΒ // ΔΓ τεμνόμενων από ΒΔ
4. ΒΔ = ΒΔ	δ. κοινή πλευρά
5. ΑΒΔ = ΓΔΒ	ε. από 2, 3, 4 (ΓΠΓ)
6. ΑΔ = ΒΓ	στ. από το 5
7. ΑΒ = ΔΓ	ζ. από το 5
8. $\hat{Α} = \hat{Γ}$	η. από το 5
9. $\hat{Β} = \hat{Δ}$	θ. $\hat{Β} = \hat{Δ} = ω + φ$

Απόδειξη της (γ)

Έστω ότι οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ τέμνονται στο Κ. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΚΔ και ΓΚΒ.

- ΑΔ = ΒΓ (απέναντι πλευρές του ΑΒΓΔ)
- $Α\hat{Δ}Β = Δ\hat{Β}Γ$ (εντός εναλλάξ των ΑΔ//ΒΓ τεμνόμενων από τη ΒΔ)
- $Δ\hat{Α}Γ = Α\hat{Γ}Β$ (εντός εναλλάξ των ΑΔ// ΒΓ τεμνόμενων από την ΑΓ)

Άρα ΑΚΔ = ΓΚΒ (ΓΠΓ). Συνεπώς, ΚΑ = ΚΓ και ΚΒ = ΚΔ.
Οπότε οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου διχοτομούνται.

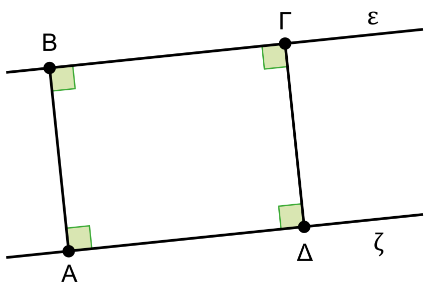


Σχήμα 7

Απόσταση παράλληλων ευθειών – Ύψη παραλληλογράμμου

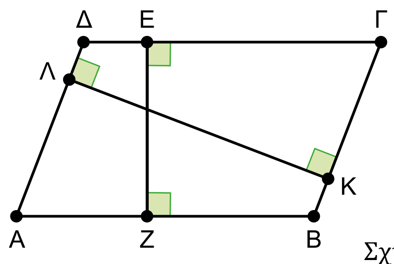
Τα ευθύγραμμα τμήματα που έχουν τα άκρα τους σε δύο παράλληλες ευθείες και είναι κάθετα σε αυτές είναι ίσα μεταξύ τους ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου. Το κοινό μήκος των τμημάτων αυτών λέγεται **απόσταση των δύο παράλληλων ευθειών**.

Κάθε ευθύγραμμο τμήμα που έχει τα άκρα του στις απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου και είναι κάθετο σε αυτές λέγεται **ύψος** του παραλληλογράμμου.



Σχήμα 8

Είναι ΑΒ = ΓΔ και το κοινό μήκος των ΑΒ, ΓΔ λέγεται απόσταση των παράλληλων ευθειών (ε) και (ζ).



Σχήμα 9

Τα τμήματα ΕΖ, ΚΛ είναι ύψη του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ

Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο παραλληλόγραμμο

Στην αντίστροφη κατεύθυνση καθεμιά από τις ιδιότητες της Πρότασης Ι εξασφαλίζει ότι το δεδομένο τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο.

Πρόταση ΙΙ

Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο αν έχει μία από τις επόμενες ιδιότητες:

α. έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες.
β. έχει τις απέναντι γωνίες του ίσες.
γ. οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.
δ. έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες.

α. Απέναντι πλευρές ίσες

Πρόταση: Αν οι απέναντι πλευρές ενός τετραπλεύρου είναι ίσες, τότε το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο.

Υπόθεση: ΑΒ = ΓΔ, ΒΓ = ΑΔ   Συμπέρασμα: ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο

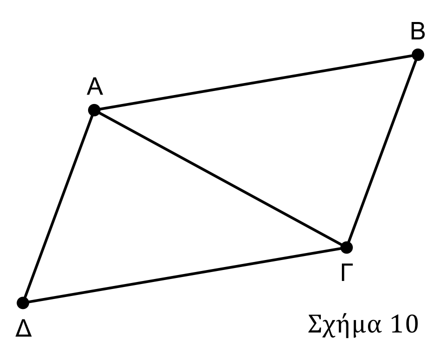
Σχέδιο απόδειξης

α. Θεωρούμε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ΑΒ = ΔΓ και ΒΓ = ΑΔ.
Θα αποδείξουμε ότι ΑΒ // ΔΓ και ΑΔ // ΒΓ.

β. Για να αποδείξουμε ότι δύο ευθείες είναι παράλληλες αρκεί να αποδείξουμε ότι, όταν τέμνονται από άλλη ευθεία, οι εντός εναλλάξ γωνίες που σχηματίζονται είναι ίσες.

γ. Φέρουμε την ΑΓ, ώστε να σχηματιστούν εντός εναλλάξ γωνίες.

δ. Αποδεικνύουμε την ισότητα των εντός εναλλάξ γωνιών μέσω της ισότητας των τριγώνων ΑΒΓ και ΓΔΑ που σχηματίστηκαν.



Σχήμα 10

Απόδειξη

Δηλώσεις	**Αιτιολογήσεις**
1. $AB = \Gamma\Delta$ και $A\Delta = B\Gamma$	α. υπόθεση
2. $A\Gamma = A\Gamma$	β. κοινή πλευρά
3. $AB\Gamma = \Gamma\Delta A$	γ. από 1, 2 (ΠΠΠ)
4. $\Gamma\hat{A}B = A\hat{\Gamma}\Delta$	δ. από το 3
5. $\Delta\hat{A}\Gamma = A\hat{\Gamma}B$	ε. από το 3
6. $AB \,//\, \Delta\Gamma$	στ. από 4 ($\Gamma\hat{A}B$, $A\hat{\Gamma}\Delta$ εντός εναλλάξ των ΑΒ, ΔΓ με τέμνουσα ΑΓ)
7. $A\Delta \,//\, B\Gamma$	ζ. από το 5 ($\Delta\hat{A}\Gamma$, $A\hat{\Gamma}B$ εντός εναλλάξ των ΑΔ, ΒΓ με τέμνουσα ΑΓ)
8. ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο	η. από 6, 7

β. Απέναντι γωνίες ίσες

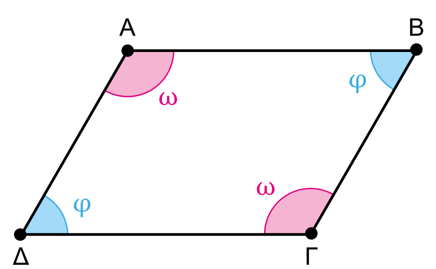
Πρόταση: Αν οι απέναντι γωνίες ενός τετραπλεύρου είναι ίσες, τότε το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο.

Υπόθεση: $\hat{B} = \hat{\Delta}$, $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ Συμπέρασμα: ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο

Απόδειξη

Έστω τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $\hat{B} = \hat{\Delta}$ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$. Είναι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 360°$, οπότε $\hat{\Gamma} + \hat{\Delta} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 360°$, συνεπώς $\hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 180°$. Δηλαδή, οι γωνίες Γ και Δ που είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των ΑΔ και ΒΓ τεμνόμενων από τη ΔΓ είναι παραπληρωματικές. Άρα ΑΔ // ΒΓ.

Όμοια αποδεικνύεται ότι ΑΒ // ΔΓ. Συνεπώς ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο.



Σχήμα 11

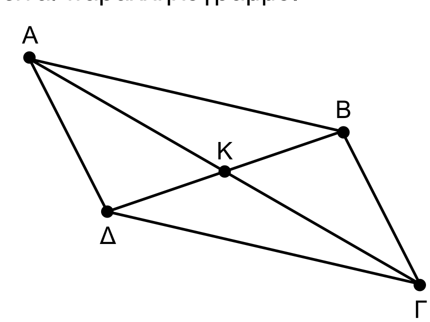
γ. Διαγώνιοι διχοτομούνται

Πρόταση: Αν οι διαγώνιοι τετραπλεύρου διχοτομούνται, τότε το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο.

Υπόθεση: ΑΚ = ΓΚ, ΚΔ = ΚΒ   Συμπέρασμα: ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο

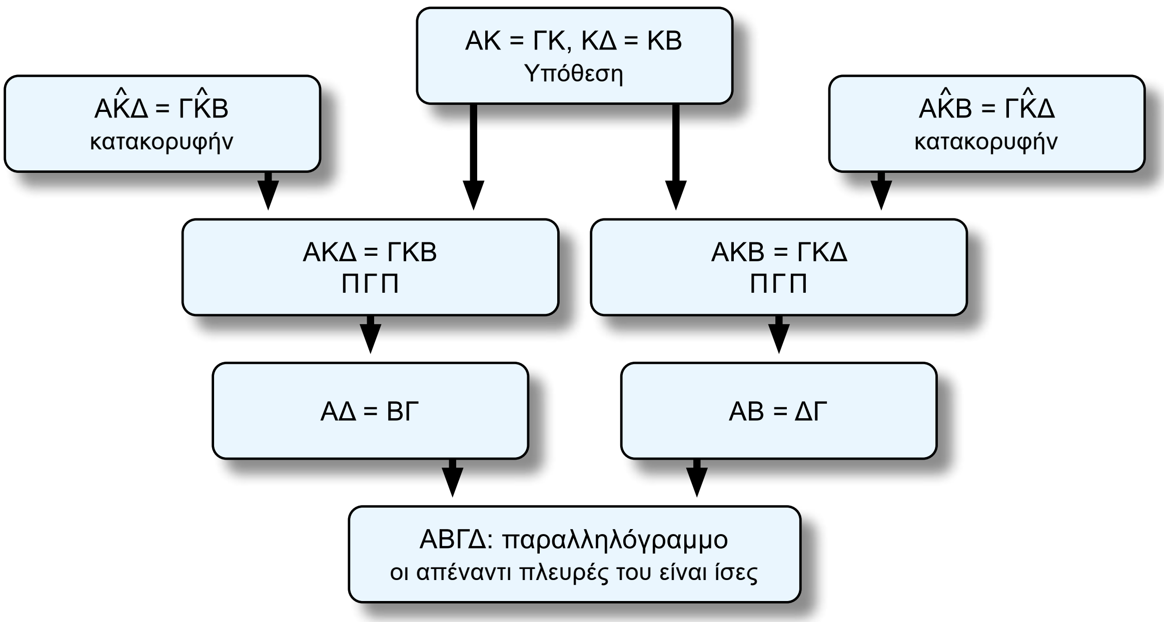
Απόδειξη

Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ του οποίου οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ διχοτομούνται στο Κ.



Σχήμα 12

Υπόθεση	Συμπέρασμα
ΑΚ = ΓΚ ΚΔ = ΚΒ	ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο



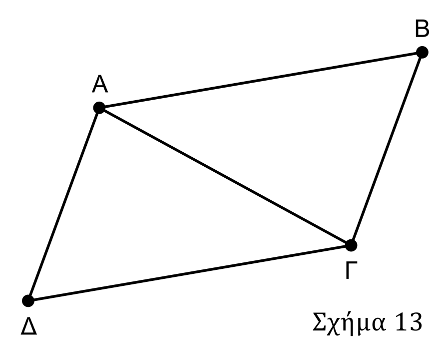
δ. Δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες

Πρόταση: Αν δύο απέναντι πλευρές ενός τετραπλεύρου είναι ίσες και παράλληλες, τότε το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο.

Υπόθεση: ΑΒ = ΔΓ, ΑΒ // ΔΓ   Συμπέρασμα: ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο

Απόδειξη

Φέρουμε την ΑΓ και ισχύει ΑΓΒ = ΓΑΔ (ΑΓ κοινή, ΑΒ = ΔΓ, $B\hat{A}\Gamma = A\hat{\Gamma}\Delta$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΑΓ). Άρα ΑΔ = ΒΓ. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες, επομένως είναι παραλληλόγραμμο.



Σχήμα 13

Παραλληλόγραμμο και συμμετρία

- Κάθε παραλληλόγραμμο έχει κέντρο συμμετρίας το σημείο τομής των διαγωνίων του.
- Κάθε τετράπλευρο με κέντρο συμμετρίας είναι παραλληλόγραμμο.
- Το κέντρο συμμετρίας του παραλληλογράμμου λέγεται **κέντρο του παραλληλογράμμου**.

Εφαρμογή 1

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η ταχύτητα ενός αεροπλάνου και η ταχύτητα του ανέμου.

Να σχεδιάσετε την κατεύθυνση του αεροπλάνου.

Σχήμα 14

Εφαρμογή 2

QR48

Παραλληλόγραμμα στον καθρέφτη λεπτομερειών.

QR48

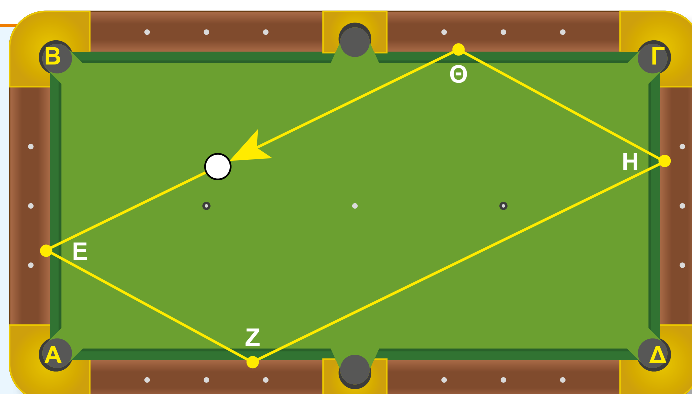
Σχήμα 15

Εφαρμογή 3

Στο μπιλιάρδο θεωρούμε ότι κατά την πρόσκρουση της μπάλας σε έναν τοίχο, ισχύει ο νόμος της ανάκλασης, από τον οποίο προκύπτει για παράδειγμα ότι $B\hat{E}\Theta = A\hat{E}Z$.

Στη βολή που φαίνεται στο σχήμα η μπάλα ξεκινώντας από ένα σημείο χτύπησε στους τέσσερις τοίχους και επανήλθε στην αρχική της θέση.

Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο που διέγραψε η μπάλα είναι παραλληλόγραμμο.

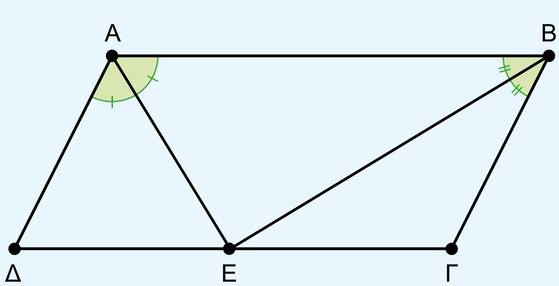


Σχήμα 16

Εφαρμογή 4

Προτείνω ένα πρόβλημα

Στο σχήμα φαίνεται ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ στο οποίο οι διχοτόμοι των γωνιών του Α και Β τέμνονται στο σημείο Ε της ΓΔ. Να προτείνετε ένα ερώτημα σε έναν συμμαθητή σας και να απαντήσετε σε ένα που θα σας προτείνει αυτός.



Σχήμα 17

Εφαρμογή 5

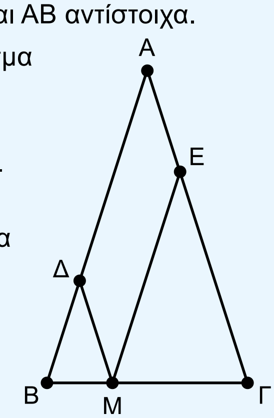
Σταθερό άθροισμα τμημάτων (QR49)

Από σημείο Μ της βάσης ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ φέρουμε παράλληλες ΜΔ και ΜΕ στις πλευρές του ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα.

Να εξετάσετε αν το άθροισμα ΜΔ + ΜΕ είναι σταθερό ή μεταβάλλεται.

Να αιτιολογήσετε τον ισχυρισμό σας. Αξιοποιήστε το ψηφιακό περιβάλλον για να βρείτε με ποιο τμήμα είναι ίσο το ΜΔ + ΜΕ.

QR49



Σχήμα 18

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ).

α. Οι διαγώνιοι κάθε παραλληλογράμμου είναι ίσες.

β. Το συμμετρικό κάθε κορυφής οποιουδήποτε παραλληλογράμμου ως προς το κέντρο του είναι κορυφή του παραλληλογράμμου.

γ. Κάθε παραλληλόγραμμο έχει άξονα συμμετρίας.

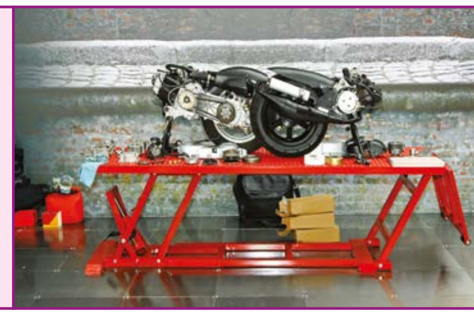
δ. Οι απέναντι κορυφές κάθε παραλληλογράμμου ισαπέχουν από το κέντρο του.

ε. Αν δύο απέναντι πλευρές τετραπλεύρου είναι παράλληλες και οι άλλες δύο είναι ίσες, τότε το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο.

στ. Αν οι διαγώνιοι ενός τετραπλεύρου δεν διχοτομούνται, τότε το τετράπλευρο αυτό δεν είναι παραλληλόγραμμο.

2 Στο ανυψωτικό μοτοσικλετών που φαίνεται στη διπλανή εικόνα οι βραχίονες στήριξης είναι ίσοι μεταξύ τους και σχηματίζουν ίσες γωνίες με το έδαφος.

Να εξηγήσετε γιατί η βάση ανύψωσης είναι παράλληλη στη βάση στήριξης.



3 **Παραλληλόγραμμα στην εργαλειοθήκη**

Στην εργαλειοθήκη που φαίνεται στην παρακάτω εικόνα τα ράφια στηρίζονται με ίσες αρθρωτές λάμες που τοποθετούνται σε ίσες αποστάσεις μεταξύ τους.

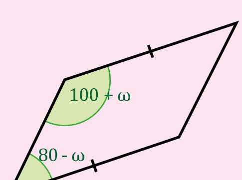
Να εξηγήσετε γιατί τα ράφια της εργαλειοθήκης είναι παράλληλα στη βάση της.

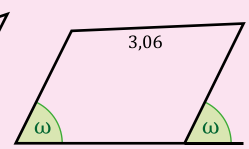
4 Αν μία γωνία ενός παραλληλογράμμου είναι 32° να υπολογίσετε τις υπόλοιπες γωνίες του παραλληλογράμμου.

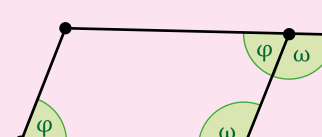
5 Τα μέτρα των γωνιών Α, Β και Γ ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ είναι 58°, 122° και 58° αντίστοιχα.

Να εξετάσετε αν το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

6 Να εξετάσετε ποια από τα παρακάτω τετράπλευρα είναι παραλληλόγραμμα αιτιολογώντας την απάντησή σας.







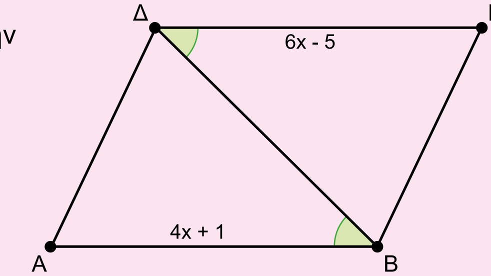
7 **Έλεγχος ισχυρισμού**

Να εξετάσετε αν ισχύει η παρακάτω πρόταση: Αν σε ένα τετράπλευρο δύο απέναντι πλευρές είναι παράλληλες και οι άλλες δύο πλευρές είναι ίσες, τότε το τετράπλευρο αυτό είναι παραλληλόγραμμο.

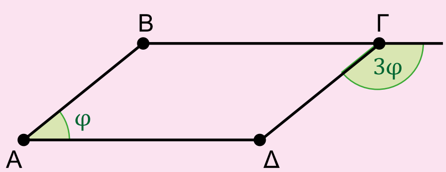
Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

8 Να βρείτε την τιμή του x ώστε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος να είναι παραλληλόγραμμο.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

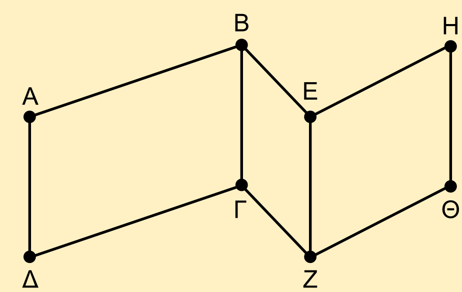


9 Να υπολογίσετε τις γωνίες του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ που φαίνεται στο σχήμα.

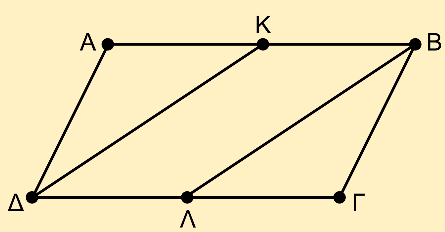


10 Στο σχήμα τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ, ΒΓΖΕ και ΖΕΗΘ είναι παραλληλόγραμμα. Να αποδείξετε ότι:

α. ΑΔ = ΘΗ
β. ΑΔ // ΘΗ
γ. ΑΔΗΘ παραλληλόγραμμο



11 Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ τα σημεία Κ και Λ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΛΔΚ είναι παραλληλόγραμμο (συμπληρώνοντας τον πίνακα).



Απόδειξη	
Δηλώσεις	Αιτιολογήσεις
1. ΚΒ // ΔΛ	α. τμήματα στις απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ
2. ΚΒ = ΑΒ/2	β…
3. …	γ. Λ μέσο ΔΓ
4. ΑΒ = ΓΔ	δ…
5. …	ε. από 2, 3, 4
6. ΒΛΔΚ παραλληλόγραμμο	στ. από…

12 Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Η διχοτόμος της γωνίας Α τέμνει τη ΔΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι ΔΕ = ΒΓ (συμπληρώνοντας το λογικό διάγραμμα στο **QR50**).

QR50

13 Να αποδείξετε ότι αν σε ένα τετράπλευρο δύο απέναντι πλευρές είναι παράλληλες και δύο απέναντι γωνίες είναι ίσες, τότε το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο.

14

α. Να αποδείξετε ότι παράλληλα τμήματα μεταξύ παράλληλων ευθειών είναι ίσα.
β. Να εξετάσετε αν ίσα τμήματα μεταξύ παράλληλων ευθειών είναι παράλληλα.

15 Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών παραλληλογράμμου (που δεν είναι στην ίδια ευθεία) είναι παράλληλες.

Να σχεδιάσετε ένα παραλληλόγραμμο που οι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών του είναι στην ίδια ευθεία.

16 Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ = 2ΒΓ.
Να αποδείξετε ότι:

οι διχοτόμοι των γωνιών Α και Β τέμνονται κάθετα στο μέσο Μ της ΓΔ.

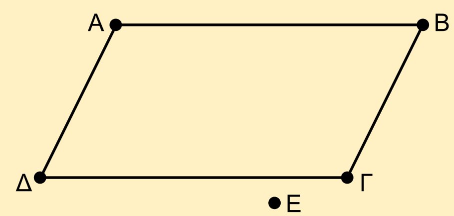
17 Σε τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τη διάμεσο ΒΜ κατά τμήμα ΜΕ = ΒΜ και τη διάμεσο ΓΝ κατά τμήμα ΝΖ = ΓΝ.

Να αποδείξετε ότι τα σημεία Ε, Α και Ζ είναι συνευθειακά και το Α είναι μέσο του ΕΖ.

18 **Ομαδική εργασία**

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Να σχεδιάσετε ευθεία η οποία χωρίζει το παραλληλόγραμμο σε δύο:

α. ίσα τρίγωνα
β. ίσα παραλληλόγραμμα
γ. ίσα τετράπλευρα που δεν είναι παραλληλόγραμμα
δ. ίσα τετράπλευρα και διέρχεται από δεδομένο σημείο Ε.



Υπενθυμίζουμε ότι δύο σχήματα είναι ίσα αν έχουν τα αντίστοιχα στοιχεία τους (πλευρές και γωνίες) ίσα ένα προς ένα.

19 Δίνονται δύο ευθύγραμμα τμήματα α και β. Να κατασκευάσετε με κανόνα και διαβήτη ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με:

α. ΑΒ = α και ΒΓ = β
β. ΑΒ = α και ΑΓ = β
γ. ΑΓ = α και ΒΔ = β

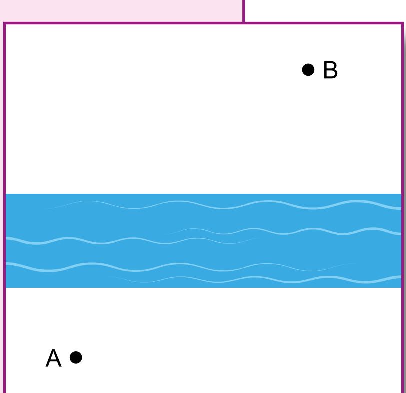
20 Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Στην προέκταση της ΑΒ θεωρούμε σημείο Μ τέτοιο ώστε ΒΜ = ΒΓ και στην ημιευθεία ΔΑ θεωρούμε σημείο Ν τέτοιο ώστε ΔΝ = ΑΒ.

Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΓΝ και ΓΜ είναι κάθετες.

21 Να αποδείξετε ότι αν τρεις παράλληλες ευθείες ορίζουν ίσα τμήματα σε μία ευθεία που τις τέμνει, τότε ορίζουν ίσα μεταξύ τους τμήματα και σε κάθε άλλη ευθεία που τις τέμνει.

22 **Προσδιορισμός σημείου**

Τους οικισμούς Α και Β του διπλανού σχήματος τους χωρίζει ένα ποτάμι. Ο δήμος σχεδιάζει να κατασκευάσει μία γέφυρα κάθετη στο ποτάμι ώστε τα άκρα της γέφυρας να απέχουν ίσες αποστάσεις από τους οικισμούς. Να προσδιορίσετε τα άκρα της γέφυρας.



Κατασκευές παραλληλογράμμων

QR51 QR52

QR53 QR54

4.2 Είδη παραλληλογράμμων Ρόμβος, Ορθογώνιο, Τετράγωνο

Βασικά ερωτήματα της ενότητας

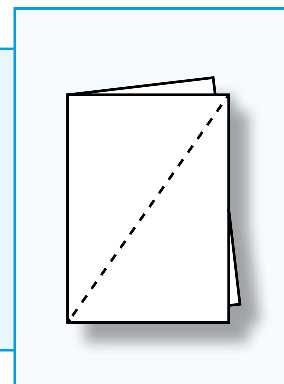
- Πώς ορίζονται τα ειδικά παραλληλόγραμμα ρόμβος, ορθογώνιο, τετράγωνο και πώς σχετίζονται μεταξύ τους;
- Ποιες είναι οι βασικές ιδιότητες των ειδικών παραλληλογράμμων;
- Ποιες ιδιότητες εξασφαλίζουν ότι ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος, ορθογώνιο , τετράγωνο;

Εξερεύνηση

Διπλώστε ένα ορθογώνιο φύλλο χαρτί στη μέση και ξανά στη μέση, αλλά από την άλλη διεύθυνση. Σχεδιάστε τη διαγώνιο στην οποία δεν ανήκει το σημείο τομής των γραμμών δίπλωσης και κόψτε το χαρτί κατά μήκος αυτής της διαγωνίου.

Τι σχήμα θεωρείτε ότι θα προκύψει όταν ξεδιπλωθεί το χαρτί;

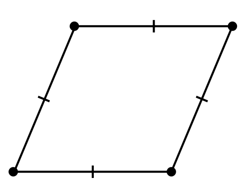
Διπλώστε και κόψτε κατάλληλα δύο άλλα χαρτιά έτσι ώστε τη μία φορά να προκύψει ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και την άλλη φορά τετράγωνο.



Σχήμα 19

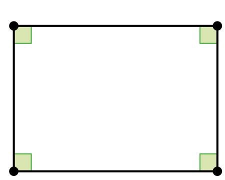
Ορισμοί

Ρόμβος *είναι το παραλληλόγραμμο που έχει τις πλευρές του ίσες.*



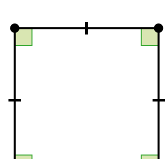
Σχήμα 20

Ορθογώνιο *είναι το παραλληλόγραμμο που έχει τις γωνίες του ορθές.*



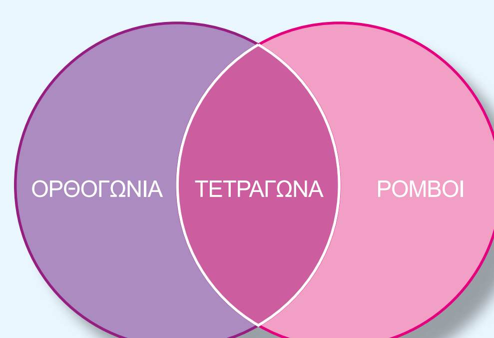
Σχήμα 21

Τετράγωνο *είναι το παραλληλόγραμμο που είναι ορθογώνιο και ρόμβος.*



Σχήμα 22

Διάγραμμα Venn για τα ειδικά παραλληλόγραμμα

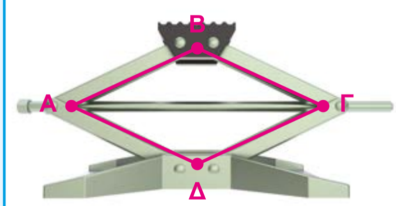


Σχήμα 23

Ρόμβος

Εξερεύνηση

Στη διπλανή εικόνα φαίνεται ένας μηχανικός γρύλος που χρησιμοποιείται για την ανύψωση αυτοκινήτου. Παρατηρώντας το τετράπλευρο ΑΒΓΔ που σχηματίζεται να βρείτε σχέσεις μεταξύ των πλευρών του και των γωνιών του. Όταν βιδώνεται ο κεντρικός άξονας ΑΓ, τότε η απόσταση των σημείων Α και Γ μικραίνει. Να εξετάσετε στην περίπτωση αυτή αν ο γρύλος ανυψώνει ή κατεβάζει το αυτοκίνητο και σε ποια διεύθυνση.



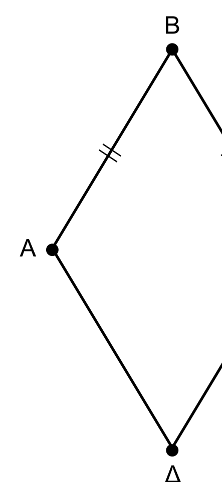
Σχήμα 24

Χαρακτηριστικές ιδιότητες και κριτήρια του ρόμβου

Πρόταση Ι

Αν δύο διαδοχικές πλευρές ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες, τότε αυτό είναι ρόμβος.

Απόδειξη: Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ = ΒΓ. Τότε ΑΒ = ΓΔ και ΒΓ = ΑΔ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Άρα ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ΔΑ και συνεπώς το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.



Σχήμα 25

Πρόταση ΙΙ

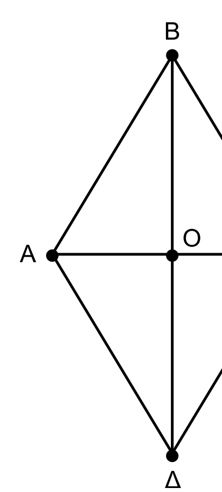
Ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος αν και μόνο αν οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα.

Ευθύ: Οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται κάθετα.

Απόδειξη: Έστω ότι το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος και οι διαγώνιοί του ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο Ο. Επειδή ΑΒΓΔ ρόμβος είναι ΑΒ = ΒΓ, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. Είναι ΒΟ διάμεσος του ΑΒΓ, αφού οι διαγώνιοι του ΑΒΓΔ διχοτομούνται. Οπότε η ΒΟ είναι και ύψος του ΑΒΓ. Άρα οι ΑΓ και ΒΔ τέμνονται κάθετα.

Αντίστροφο: Αν οι διαγώνιοι ενός παραλληλογράμμου τέμνονται κάθετα, τότε αυτό είναι ρόμβος.

Απόδειξη: Έστω ότι το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του ΑΓ και ΒΔ τέμνονται κάθετα στο Ο. Τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΒΓ επειδή η ΒΟ είναι διάμεσος και ύψος του. Άρα ΑΒΓΔ ρόμβος.



Σχήμα 26

Πρόταση III

Σε κάθε ρόμβο οι διαγώνιοί του διχοτομούν τις απέναντι γωνίες του.

Απόδειξη: Αν οι διαγώνιοι του ρόμβου ΑΒΓΔ τέμνονται στο Ο, τότε η ΒΟ είναι διάμεσος στο ισοσκελές ΑΒΓ (ΑΒ = ΒΓ), άρα ΒΟ διχοτόμος της γωνίας Β (Σχήμα 26). Όμοια για τις υπόλοιπες.

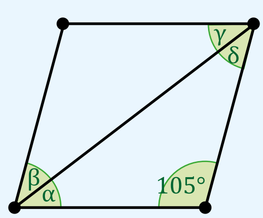
Πρόταση IV

Αν σε ένα παραλληλόγραμμο μία διαγώνιος διχοτομεί μία γωνία του, τότε αυτό είναι ρόμβος.

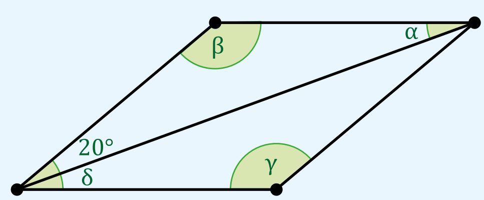
Απόδειξη: Έστω ότι το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του τέμνονται στο Ο. Η ΒΟ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ επειδή οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου διχοτομούνται. Αν η ΒΟ είναι και διχοτόμος της γωνίας Β, τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ. Οπότε το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.

Εφαρμογή 1

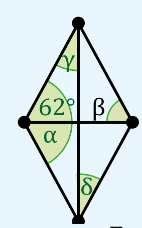
Να υπολογίσετε τα μέτρα των γωνιών α, β, γ, δ στους παρακάτω ρόμβους.



Σχήμα 27



Σχήμα 28



Σχήμα 29

Εφαρμογή 2: Ικανή και αναγκαία συνθήκη

QR55

Εφαρμογή 3

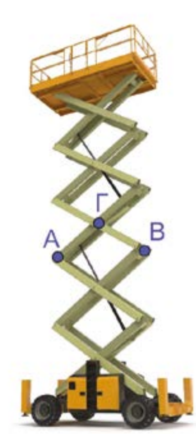
Στη διπλανή εικόνα φαίνεται ένα ψαλιδωτό ανυψωτικό το οποίο σχηματίζεται από ίσους βραχίονες οι οποίοι συνδέονται αρθρωτά στά άκρα και στα μέσα τους.

α. Να εξηγήσετε γιατί, όταν η πλατφόρμα του ανυψωτικού είναι οριζόντια, τότε ο άξονας που συνδέει τα μέσα των βραχιόνων είναι κατακόρυφος.

β. Να εξηγήσετε γιατί τα σημεία σύνδεσης Α, Β ορίζουν ευθύγραμμο τμήμα παράλληλο στην πλατφόρμα.

γ. Να προβλέψετε αν η πλατφόρμα ανεβαίνει ή κατεβαίνει όταν η γωνία ΑΓΒ δύο συνδεδεμένων βραχιόνων αυξάνεται.

QR56



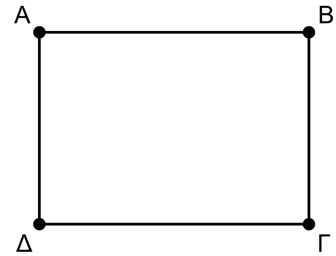
Σχήμα 30

Ορθογώνιο

Χαρακτηριστικές ιδιότητες και κριτήρια του ορθογωνίου

Πρόταση V

Αν μία γωνία ενός παραλληλογράμμου είναι ορθή, τότε αυτό είναι ορθογώνιο.

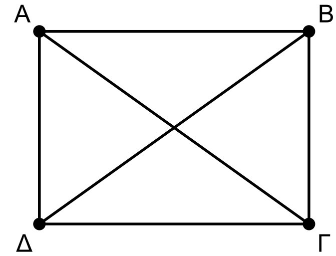


Σχήμα 31

Απόδειξη: Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\hat{Α} = 90°$ (Σχήμα 31). Τότε $\hat{Γ} = \hat{Α}$ ως απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Επιπλέον $\hat{Δ} + \hat{Α} = 180°$ και $\hat{Β} + \hat{Α} = 180°$. Άρα $\hat{Α} = \hat{Β} = \hat{Γ} = \hat{Δ} = 90°$. Οπότε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.

Πρόταση VI

Ένα παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο αν και μόνο αν οι διαγώνιοί του είναι ίσες.



Σχήμα 32

Ευθύ: Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι ίσες.

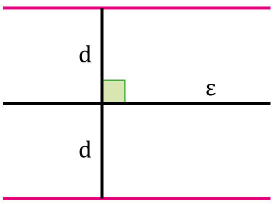
Απόδειξη: Αν ΑΒΓΔ ορθογώνιο, τότε τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΒΔΓ είναι ίσα, επειδή $\hat{Δ} = \hat{Γ} = 90°$, ΒΓ = ΑΔ και ΓΔ κοινή πλευρά (Σχήμα 32). Οπότε ΑΓ = ΒΔ, δηλαδή οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι ίσες.

Αντίστροφο: Αν σε ένα παραλληλόγραμμο οι διαγώνιοι είναι ίσες, τότε αυτό είναι ορθογώνιο.

Απόδειξη: Έστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο και ΑΓ = ΒΔ. Τότε τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΒΔΓ είναι ίσα επειδή ΑΓ = ΒΔ, ΓΔ κοινή πλευρά και ΑΔ = ΒΓ, οπότε $\hat{Γ} = \hat{Δ}$. Όμως $\hat{Γ} + \hat{Δ} = 180°$, συνεπώς $\hat{Γ} = \hat{Δ} = 90°$. Άρα το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.

Γεωμετρικοί τόποι

α. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που απέχουν από μία ευθεία (ε) σταθερή απόσταση d είναι δύο ευθείες παράλληλες στην (ε) σε απόσταση d από αυτήν (Σχήμα 33).

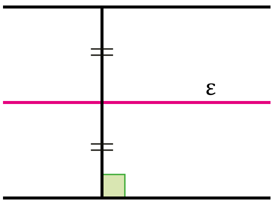


Σχήμα 33

β. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από δύο παράλληλες ευθείες είναι ευθεία (ε) παράλληλη σε αυτές η οποία διέρχεται από το μέσο της απόστασής τους (Σχήμα 34).
Η ευθεία (ε) λέγεται **μεσοπαράλληλη** των δύο παράλληλων ευθειών.

Απόδειξη QR57

QR57



Σχήμα 34

Εφαρμογή 1 – Έλεγχος ισχυρισμού

Ένας συμμαθητής σας ισχυρίζεται ότι αν ένα τετράπλευρο έχει τρεις γωνίες ίσες τότε είναι ορθογώνιο. Συμφωνείτε ή διαφωνείτε με τον ισχυρισμό του συμμαθητή σας; Αιτιολογήστε σε κάθε περίπτωση.

Εφαρμογή 2

Στο ψαλιδωτό ανυψωτικό του Σχήματος 30 να σχεδιάσετε το τετράπλευρο που ορίζουν τα άκρα δύο τεμνόμενων βραχιόνων και να αποδείξετε ότι είναι ορθογώνιο.

Εφαρμογή 3

Στο πτυσσόμενο κρεβάτι της εικόνας, να βρείτε το είδος του τετραπλεύρου που σχηματίζουν τα άκρα δύο συνδεδεμένων ποδιών του.
Να καθορίστε τις υποθέσεις που αποδεχθήκατε.

Σχήμα 35

Τετράγωνο

Χαρακτηριστικές ιδιότητες και κριτήρια του τετραγώνου

Από τον ορισμό του, το τετράγωνο είναι ορθογώνιο και ρόμβος. Οπότε το τετράγωνο έχει κάθε ιδιότητα του ορθογωνίου και κάθε ιδιότητα του ρόμβου. Αντίστοιχα, για να αποδειχθεί ότι ένα τετράπλευρο είναι τετράγωνο, πρέπει να αποδειχθεί με κατάλληλο κριτήριο ότι είναι ορθογώνιο και με κατάλληλο κριτήριο ότι είναι και ρόμβος.

Εφαρμογή 1 – Εργαστείτε σε ζεύγη

α. Να διατυπώσετε ιδιότητες του τετραγώνου που δεν ισχύουν στο ορθογώνιο.

β. Να διατυπώσετε ιδιότητες του τετραγώνου που δεν ισχύουν στον ρόμβο.

γ. Να διατυπώσετε τις ιδιότητες που πρέπει να ικανοποιούν οι πλευρές ενός τετραπλεύρου για να είναι το τετράπλευρο αυτό τετράγωνο.

δ. Να διατυπώσετε τις ιδιότητες που πρέπει να ικανοποιούν οι διαγώνιοι ενός τετραπλεύρου για να είναι το τετράπλευρο αυτό τετράγωνο

Αιτιολογήστε κατάλληλα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ).

α. Οι διαγώνιοι ενός ορθογωνίου το χωρίζουν σε τέσσερα ισοσκελή τρίγωνα.
β. Αν οι διαγώνιοι ενός τετραπλεύρου διχοτομούνται κάθετα, τότε αυτό είναι ρόμβος.
γ. Αν δύο απέναντι γωνίες ενός τετραπλεύρου είναι ορθές, τότε το τετράπλευρο είναι ορθογώνιο.
δ. Κάθε τετράγωνο είναι ρόμβος.
ε. Οι διαγώνιοι κάθε ρόμβου είναι άνισες.
στ. Αν ένας ρόμβος έχει ίσες διαγωνίους, είναι τετράγωνο.
ζ. Αν ένας ρόμβος έχει δύο διαδοχικές γωνίες ίσες, τότε είναι τετράγωνο.
η. Αν οι διαγώνιοι ενός τετραπλεύρου διχοτομούν τις γωνίες του, τότε το τετράπλευρο αυτό είναι ρόμβος.
θ. Αν οι διαγώνιοι ενός τετραπλεύρου είναι ίσες, τότε το τετράπλευρο είναι ορθογώνιο.

2 Δίνονται τα παρακάτω σύνολα: Π = {παραλληλόγραμμα}, Ο = {ορθογώνια}, Ρ = {ρόμβοι}, Τ = {τετράγωνα}.
Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ): **α.** $Ρ \subseteq Π$ **β.** $Ο \subseteq Τ$ **γ.** $Ο \cap Ρ = Τ$ **δ.** $Π = Ο \cup Ρ$

3 Να συμπληρώσετε τον εννοιολογικό χάρτη στο **QR58.**

QR58

4 Να σχεδιάσετε όλους τους άξονες συμμετρίας σε ένα: **α.** ορθογώνιο **β.** ρόμβο **γ.** τετράγωνο

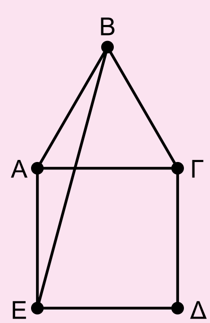
5 Ένας φίλος σου ισχυρίζεται ότι σε έναν ρόμβο οι διαγώνιοί του είναι οπωσδήποτε άνισες επειδή αν ήταν ίσες τότε θα ήταν τετράγωνο.
Συμφωνείτε ή διαφωνείτε με τον ισχυρισμό του φίλου σας;
Να αιτιολογήσετε σε κάθε περίπτωση.

6 Ένας συμμαθητής σας σχεδίασε ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ και οι διαγώνιοί του ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο Κ. Σχεδιάζοντας τον κύκλο (Κ, ΚΑ) φαίνεται ότι αυτός διέρχεται και από τις υπόλοιπες κορυφές του ορθογωνίου. Να εξετάσετε αν αυτό που φαίνεται, ισχύει σε κάθε περίπτωση ή όχι επιχειρηματολογώντας κατάλληλα.

7 Στο διπλανό σχήμα το ΑΓΔΕ είναι τετράγωνο και το ΑΒΓ είναι ισόπλευρο τρίγωνο.

α. Το μέτρο της γωνίας ΑΒΕ είναι:
i. 30°, **ii.** 10°, **iii.** 15°, **iv.** 40°

β. Το μέτρο της γωνίας ΒΕΔ είναι:
i. 130°, **ii.** 70°, **iii.** 75°, **iv.** 85°

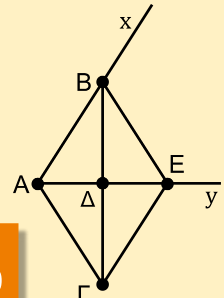


8 Στο εσωτερικό τετραγώνου ΑΒΓΔ κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΕ.

Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΓΔΕ.

9 Έστω γωνία xAy και σημείο Β της Αx. Φέρουμε ΒΔ κάθετη στην Αy. Αν Ε και Γ είναι τα συμμετρικά σημεία των Α και Β ως προς το Δ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ΑΒΕΓ είναι ρόμβος (συμπληρώνοντας το λογικό διάγραμμα **QR59**).

QR59

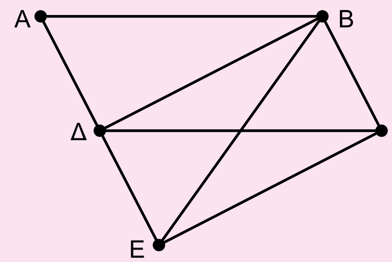


10 Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο και το ΒΓΕΔ είναι ορθογώνιο. Να αποδείξετε ότι:

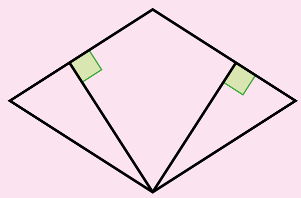
α. το σημείο Δ είναι μέσο του ΑΕ

β. το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές

γ. $A\hat{B}\Delta = \Delta\hat{\Gamma}E$



11 Να αποδείξετε ότι ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος αν και μόνο αν οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες.



12 Δύο ίσοι κύκλοι με κέντρα Κ και Λ τέμνονται στα σημεία Α και Β.

Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο με κορυφές Κ, Α, Λ, Β είναι ρόμβος.

13 Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ και σημεία Ε και Ζ της διαγωνίου του ΒΔ τέτοια ώστε ΒΕ = ΔΖ.

Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι ρόμβος.

14 Στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ τετραγώνου ΑΒΓΔ θεωρούμε αντίστοιχα τα σημεία Ε, Ζ, Η, Θ έτσι ώστε ΑΕ = ΒΖ = ΓΗ = ΔΘ.

Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι τετράγωνο.

15 Να αποδείξετε ότι, αν οι διχοτόμοι των γωνιών ενός παραλληλογράμμου δεν συντρέχουν, τότε σχηματίζουν ορθογώνιο.

16 Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με κέντρο Κ και ΒΔ = 2ΑΓ. Αν Ε και Ζ είναι τα μέσα των ΚΒ και ΚΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι ορθογώνιο.

17 Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ με ύψος ΑΔ. Προεκτείνουμε τη διάμεσο ΔΜ του τριγώνου ΑΔΓ κατά τμήμα ΜΕ = ΔΜ.

α. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΓΕ είναι ορθογώνιο.

β. Αν οι προεκτάσεις των ΜΔ και ΑΒ τέμνονται στο Ζ, να αποδείξετε ότι $\hat{Z} = \hat{B} - \hat{\Gamma}$ όπου Β, Γ οι γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

18 Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Ε και Ζ οι προβολές του Α στην εσωτερική και την εξωτερική διχοτόμο της γωνίας Β. Να αποδείξετε ότι:
α. το τετράπλευρο ΑΕΒΖ είναι ορθογώνιο **β.** ΖΕ//ΒΓ.

19 Έστω ρόμβος ΑΒΓΔ με κέντρο Κ. Με κέντρο Κ και ακτίνα ΚΓ γράφουμε κύκλο ο οποίος τέμνει την ευθεία ΒΔ στα σημεία Ε και Δ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι τετράγωνο.

20 Σε ένα πρόγραμμα δυναμικής γεωμετρίας να σχεδιάσετε έναν ρόμβο, ένα ορθογώνιο και ένα τετράγωνο, τα οποία να παραμένουν ρόμβος, ορθογώνιο και τετράγωνο αντίστοιχα όταν «σύρονται» οι μεταβλητές κορυφές τους.

QR60

21 Στις πλευρές ΑΒ και ΒΓ τετραγώνου ΑΒΓΔ θεωρούμε τα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, ώστε ΑΕ = ΒΖ. Να αποδείξετε ότι τα τμήματα ΑΖ και ΔΕ είναι ίσα και κάθετα.

22 Δίνονται τα ευθύγραμμα τμήματα α και β και μία γωνία φ. Να κατασκευάσετε με κανόνα και διαβήτη:

α. ορθογώνιο ΑΒΓΔ με ΑΒ = α και ΒΔ = β

β. ρόμβο ΑΒΓΔ με ΑΒ = α

γ. ρόμβο ΑΒΓΔ με ΑΓ = α και ΒΔ = β

δ. τετράγωνο ΑΒΓΔ με ΑΒ = α

ε. ορθογώνιο ΑΒΓΔ με ΑΒ = α και ΒΑΓ = φ

QR61

23 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και σημείο Μ της βάσης του ΒΓ. Έστω Δ και Ε οι προβολές του Μ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι το άθροισμα ΜΔ + ΜΕ είναι σταθερό.

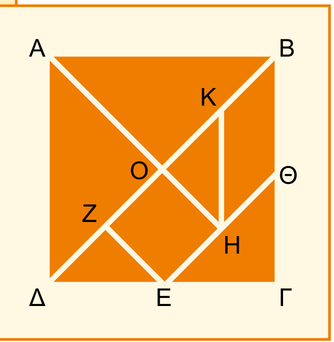
QR62

24 Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ, Μ και Ν είναι τα μέσα των ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα. Αν Κ είναι το σημείο τομής των ΒΜ και ΑΝ και Λ το σημείο τομής των ΔΝ και ΓΜ να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΜΚΝΛ είναι ρόμβος.

25 Να αποδείξετε ότι, αν οι διχοτόμοι των γωνιών ορθογωνίου δεν συντρέχουν, τότε σχηματίζουν τετράγωνο.

26 Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένα τάνγκραμ το οποίο αποτελείται από επτά επιμέρους σχήματα τα οποία σχηματίζουν ένα τετράγωνο. Τα τρίγωνα ΚΟΗ, ΑΟΒ, ΔΖΕ, ΑΟΔ, ΘΕΓ είναι ορθογώνια και ισοσκελή και το τετράπλευρο ΖΟΗΕ είναι τετράγωνο. Επιπλέον ισχύει ότι ΚΟΗ = ΔΖΕ και ΑΟΒ = ΑΟΔ.
Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΒΘΗ είναι παραλληλόγραμμο.

27 Να αποδείξετε ότι, αν δύο κάθετα τμήματα έχουν τα άκρα τους στις απέναντι πλευρές ενός τετραγώνου, τότε είναι ίσα.



4.3 Εφαρμογές των παραλληλογράμμων

Βασικά ερωτήματα της ενότητας

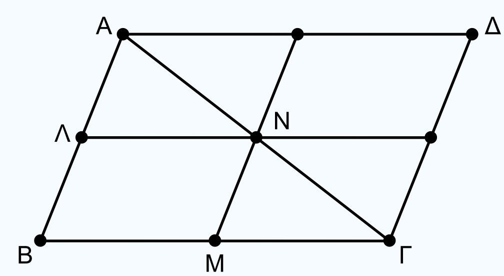
- Ποιες σχέσεις συνδέουν το τμήμα με άκρα τα μέσα δυο πλευρών τριγώνου με την τρίτη πλευρά του τριγώνου;
- Ποια είναι η σχέση της υποτείνουσας ορθογώνιου τριγώνου με τη διάμεσο που αντιστοιχεί σε αυτήν; Χαρακτηρίζει η σχέση αυτή τα ορθογώνια τρίγωνα;
- Σε ορθογώνιο τρίγωνο με γωνία 30° ποια είναι η σχέση της απέναντι κάθετης πλευράς με την υποτείνουσα;

Τμήμα με άκρα τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου

Εξερεύνηση

Παίρνουμε ένα χάρτινο παραλληλόγραμμο και κάνουμε δύο διπλώσεις ώστε να συμπέσουν οι ευθείες των απέναντι πλευρών του. Επιπλέον το διπλώνουμε γύρω από τη διαγώνιό του και τελικά προκύπτει το Σχήμα 36.

Να βρείτε σχέσεις μεταξύ των τμημάτων ΛΝ και ΒΓ τις οποίες να εξηγήσετε.

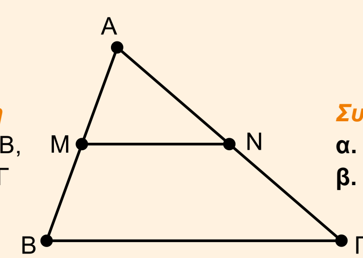


Σχήμα 36

Πρόταση Ι

Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών ενός τριγώνου είναι παράλληλο στην τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.

Υπόθεση
Μ μέσο ΑΒ,
Ν μέσο ΑΓ

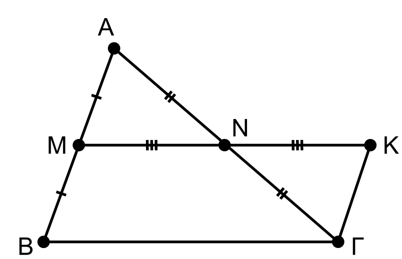


Συμπέρασμα
α. ΜΝ // ΒΓ
β. $ΜΝ = \frac{ΒΓ}{2}$

Σχήμα 37

Απόδειξη: Αρκεί να αποδείξουμε ότι ΒΓ = 2 ΜΝ και ΜΝ // ΒΓ.
Προεκτείνουμε το ΜΝ κατά ίσο τμήμα ΝΚ.
Τα τρίγωνα ΑΜΝ και ΓΚΝ είναι ίσα
(ΑΝ = ΝΓ, ΜΝ = ΝΚ και $M\hat{N}A = K\hat{N}Γ$) (ΠΓΠ).

Άρα ΚΓ = ΑΜ και επειδή ΑΜ = ΒΜ προκύπτει ΒΜ = ΓΚ.
Επιπλέον $\hat{A} = N\hat{Γ}K$, οπότε ΑΒ // ΓΚ.
Συνεπώς, το τετράπλευρο ΒΓΚΜ είναι παραλληλόγραμμο.
Συμπεραίνουμε ότι ΒΓ = ΜΚ = 2ΜΝ και ΜΝ // ΒΓ.

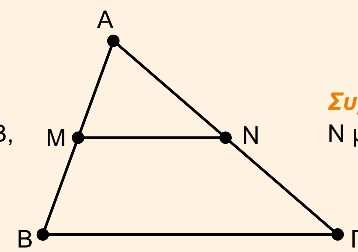


Σχήμα 38

Πρόταση ΙΙ

Αν από το μέσο μίας πλευράς τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη σε μία άλλη πλευρά του, τότε αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του τριγώνου.

Υπόθεση
Μ μέσο ΑΒ,
ΜΝ // ΒΓ

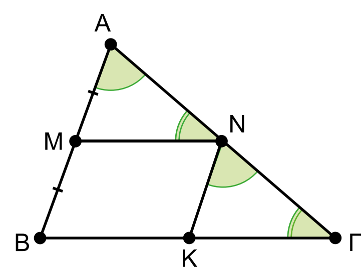


Συμπέρασμα
Ν μέσο ΑΓ

Σχήμα 39

Απόδειξη: Έστω ότι η παράλληλη από το Ν στην ΑΒ τέμνει τη ΒΓ στο Κ. Τότε ΜΝΚΒ είναι παραλληλόγραμμο, αφού ΜΝ // ΒΚ και ΝΚ // ΒΜ. Οπότε ΝΚ = ΒΜ. Όμως, ΑΜ = ΒΜ άρα ΝΚ = ΑΜ. Τα τρίγωνα ΑΜΝ και ΝΚΓ είναι ίσα επειδή ΑΜ = ΝΚ, $\hat{Α}$ = Κ$\hat{Ν}$Γ και Μ$\hat{Ν}$Α = $\hat{Γ}$, επομένως και $\hat{Κ}$ = $\hat{Μ}$. Συνεπώς, ΑΝ = ΝΓ δηλαδή Ν μέσο ΑΓ.

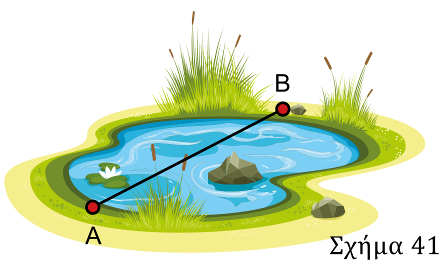
Σημείωση: Η Πρόταση ΙΙ μπορεί να αποδειχθεί και με τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο. Προσπαθήστε το.



Σχήμα 40

Εφαρμογή 1 – Επίλυση προβλήματος

Συνεργαστείτε ανά δύο για να περιγράψετε μία διαδικασία υπολογισμού της απόστασης δύο σημείων Α και Β όταν δεν μπορείτε να την μετρήσετε άμεσα, χρησιμοποιώντας κάποιες από τις προτάσεις της ενότητας 4.3.
Έχετε στη διάθεσή σας μία μετροταινία.



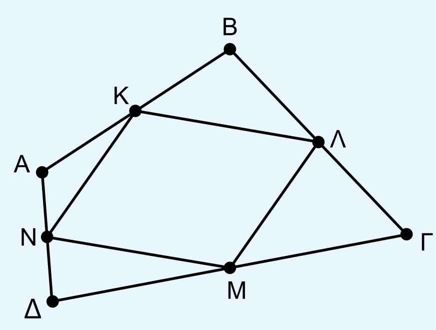
Σχήμα 41

Εφαρμογή 2 QR63

Σε ένα πρόγραμμα δυναμικής γεωμετρίας, να σχεδιάσετε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ και να θεωρήσετε τα μέσα Κ, Λ, Μ, Ν των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα.

Σύρετε μία κορυφή του ΑΒΓΔ και διατυπώστε μία πρόταση για το είδος του τετραπλεύρου ΚΛΜΝ την οποία να αποδείξετε. Ισχύει το συμπέρασμά σας όταν το ΑΒΓΔ είναι μη κυρτό τετράπλευρο; Αιτιολογήστε κατάλληλα.

QR63



Σχήμα 42

Εφαρμογή 3 Συνεργαστείτε ανά δύο για:

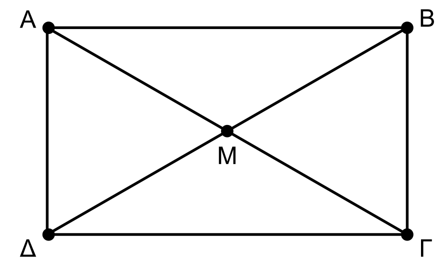
α. να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ρόμβου είναι κορυφές ορθογωνίου.

β. να εξετάσετε αν ισχύει ότι, αν τα μέσα των πλευρών ενός τετραπλεύρου είναι κορυφές ορθογωνίου, τότε το τετράπλευρο είναι ρόμβος.

Διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ορθογώνιου τριγώνου

Εξερεύνηση

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ και οι διαγώνιοί του τέμνονται στο σημείο Μ.
Να βρείτε τη σχέση των τμημάτων ΒΜ και ΑΓ.

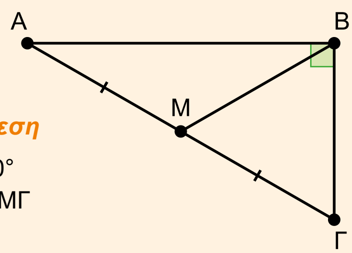


Σχήμα 43

Πρόταση III

Η διάμεσος ορθογώνιου τριγώνου που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

Υπόθεση
$\hat{B} = 90°$
ΑΜ = ΜΓ



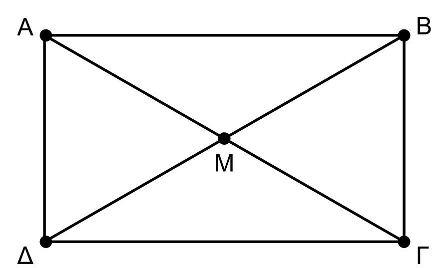
Συμπέρασμα
$ΒΜ = \frac{ΑΓ}{2}$

Σχήμα 44

Απόδειξη: Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 90°$.
Προεκτείνουμε τη διάμεσο του ΒΜ κατά τμήμα ΜΔ ίσο με το ΒΜ.
Τότε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο επειδή οι διαγώνιοί του διχοτομούνται στο Μ και $\hat{B} = 90°$.

Άρα ΒΔ = ΑΓ ή 2 ΒΜ = ΑΓ ή $ΒΜ = \frac{ΑΓ}{2}$.

Παρατήρηση: Σύμφωνα με την Πρόταση III, το μέσο της υποτείνουσας του ορθογώνιου τριγώνου ισαπέχει από τις τρεις κορυφές του, δηλαδή συμπίπτει με το περίκεντρό του.



Σχήμα 45

Πρόταση IV

Αν η διάμεσος ενός τριγώνου είναι ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή.

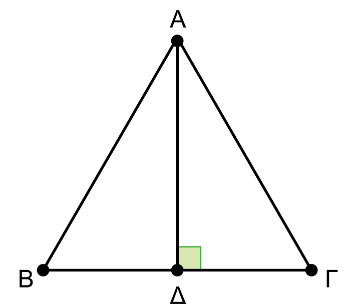
Υπόθεση: ΑΜ = ΜΓ, $ΒΜ = \frac{ΑΓ}{2}$
Συμπέρασμα: $\hat{B} = 90°$

Απόδειξη: Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ, τη διάμεσό του ΒΜ και ισχύει ότι $ΒΜ = \frac{ΑΓ}{2}$.
Προεκτείνουμε τη διάμεσο ΒΜ κατά τμήμα ΜΔ ίσο με το ΒΜ.
Τότε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει ίσες διαγωνίους που διχοτομούνται, οπότε είναι ορθογώνιο. Συνεπώς, $\hat{B} = 90°$.

Γωνία 30° σε ορθογώνιο τρίγωνο

Εξερεύνηση

Σε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε το ύψος του ΑΔ.
Να βρείτε μία γωνία 30° σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο στο σχήμα και να προσδιορίσετε τη σχέση της απέναντι κάθετης πλευράς της με την υποτείνουσα.

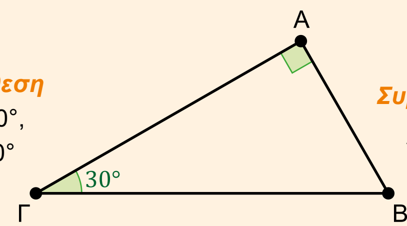


Σχήμα 46

Πρόταση V

Αν μία γωνία ενός ορθογώνιου τριγώνου είναι 30°, τότε η απέναντι κάθετη πλευρά είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

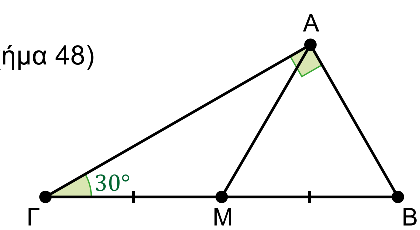
Υπόθεση
$\hat{A} = 90°$,
$\hat{\Gamma} = 30°$



Συμπέρασμα
$AB = \frac{B\Gamma}{2}$

Σχήμα 47

Απόδειξη: Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90°$ και $\hat{\Gamma} = 30°$, οπότε $\hat{B} = 60°$. Φέρουμε τη διάμεσο ΑΜ και ισχύει ότι $AM = \frac{B\Gamma}{2} = BM$. (Σχήμα 48)
Συνεπώς, το τρίγωνο ΑΒΜ είναι ισόπλευρο, οπότε $AB = BM = \frac{B\Gamma}{2}$.

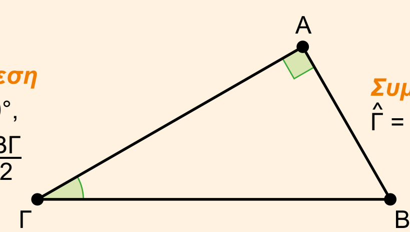


Σχήμα 48

Πρόταση VI

Αν μία κάθετη πλευρά ενός ορθογώνιου τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, τότε η απέναντι γωνία της πλευράς αυτής είναι 30°.

Υπόθεση
$\hat{A} = 90°$,
$AB = \frac{B\Gamma}{2}$



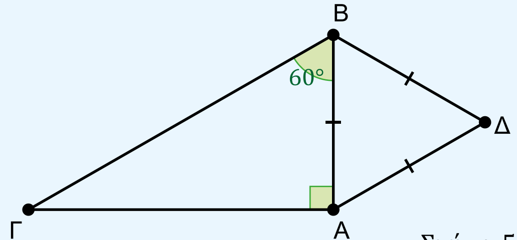
Συμπέρασμα
$\hat{\Gamma} = 30°$

Σχήμα 49

Απόδειξη: Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90°$ και $AB = \frac{B\Gamma}{2}$.
Φέρουμε τη διάμεσο ΑΜ και ισχύει ότι $AM = \frac{B\Gamma}{2} = BM$.
Οπότε το τρίγωνο ΑΒΜ είναι ισόπλευρο. Συνεπώς, $\hat{B} = 60°$ και επομένως $\hat{\Gamma} = 30°$.

Εφαρμογή 4 – Προτείνω ένα πρόβλημα

Με βάση το διπλανό σχήμα, να διατυπώσετε μία πρόταση και να την απευθύνετε στην τάξη προς απόδειξη.



Σχήμα 50

Εφαρμογή 5

Να γράψετε μία τουλάχιστον διαφορετική απόδειξη από τη δοθείσα για την πρόταση:

«Η διάμεσος ορθογώνιου τριγώνου που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας».

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ).

α. Το μέσο της υποτείνουσας ενός ορθογώνιου τριγώνου ισαπέχει από τις κορυφές του τριγώνου.

β. Η διάμεσος ορθογώνιου τριγώνου που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίση με το τμήμα με άκρα τα μέσα των κάθετων πλευρών του τριγώνου.

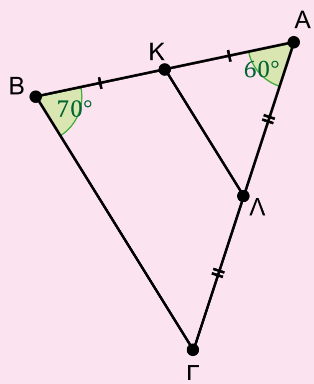
γ. Η διάμεσος ορθογώνιου τριγώνου που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισοσκελή τρίγωνα.

δ. Αν σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο μία γωνία είναι 60°, τότε η απέναντι κάθετη πλευρά είναι διπλάσια της άλλης κάθετης πλευράς.

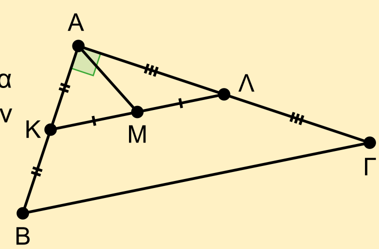
2 Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΚΛ.

Αν η περίμετρος του τριγώνου ΑΚΛ είναι 35 cm, να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ.

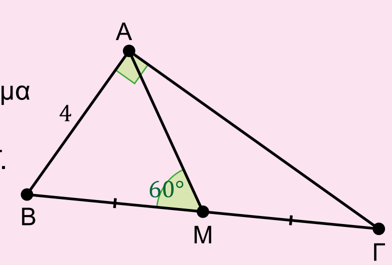
Εξηγήστε.



3 Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε την ΑΜ αν ΒΓ = 8 cm. Εξηγήστε.

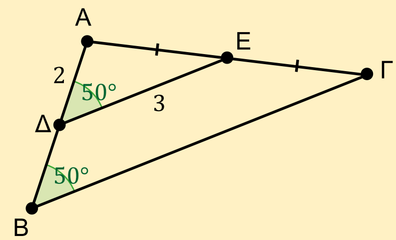


4 Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε την ΑΜ και τη ΒΓ. Εξηγήστε.



5

Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε τη ΔΒ και τη ΒΓ. Εξηγήστε.



6

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Κ, Λ, Μ τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΚΛΜ είναι παραλληλόγραμμο.

7

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Κ, Λ, Μ τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ αντίστοιχα.
Να συμπληρώσετε κατάλληλα τις παρακάτω προτάσεις και στη συνέχεια να τις αποδείξετε.

α. Αν ΑΒΓ ισοσκελές τότε το ΚΛΜ είναι ....

β. Αν ΑΒΓ ισόπλευρο τότε ΚΛΜ ....

γ. Αν ΑΒΓ ορθογώνιο και ισοσκελές τότε ΚΛΜ ....

8

Αν οι διάμεσοι ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) τέμνονται στο Θ να αποδείξετε ότι $ΑΘ = \frac{1}{3}ΒΓ$.

9

Ο Πέτρος ένα βράδυ στέκεται όρθιος σε ένα πεζοδρόμιο σε μία απόσταση από έναν φανοστάτη.

Μετρώντας τις πλάκες του πεζοδρομίου παρατηρεί ότι το μήκος της σκιάς του είναι ίσο με το μήκος της απόστασής του από τον φανοστάτη.

Αν ο Πέτρος έχει ύψος 170 cm, να βρείτε το ύψος του φανοστάτη.

10

Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, σημείο Ε της πλευράς ΔΓ και Μ, Ν τα μέσα των ΑΕ και ΒΕ αντίστοιχα.

Αν η ευθεία ΜΝ τέμνει τις ΑΔ και ΒΓ στα Κ και Λ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α. τα Κ και Λ είναι μέσα των ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα

β. ΚΜ + ΝΛ = ΜΝ

11

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ και το ύψος του ΑΔ. Αν Ε και Ζ τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:

α. $Δ\hat{E}Z = \hat{B}$ **β.** $E\hat{Δ}Z = \hat{A}$.

12

Έστω ΒΔ και ΓΕ τα ύψη τριγώνου ΑΒΓ.

Να αποδείξετε ότι το μέσο Μ της ΒΓ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΕΔ.

13

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} > \hat{Γ}$, διάμεσο ΑΜ και ύψος ΑΔ.

Να αποδείξετε ότι $M\hat{A}Δ = \hat{B} - \hat{Γ}$.

14

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90°$, το ύψος του ΑΔ και Ε, Ζ τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α. $E\hat{Δ}Z = 90°$

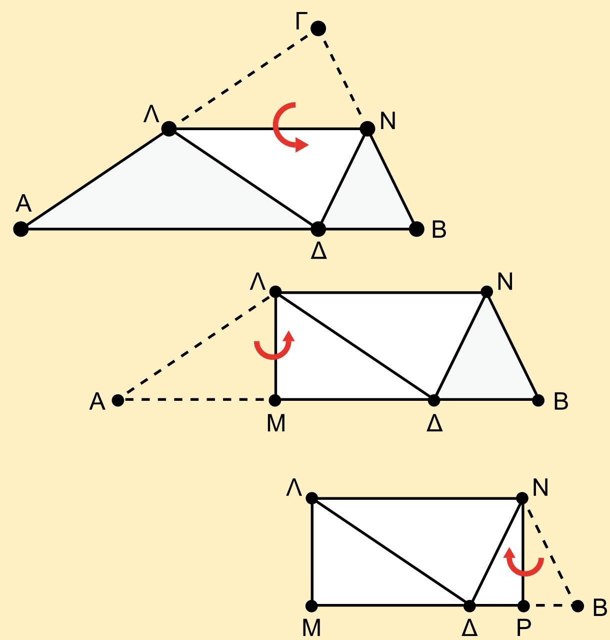
β. αν Μ το μέσο του ΕΖ τότε $ΔΜ = \frac{ΒΓ}{4}$.

15 Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ε, Ζ τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΔ αντίστοιχα. Αν η ΕΖ τέμνει την ΑΓ στο Η να αποδείξετε ότι $ΑΗ = \frac{ΑΓ}{4}$.

16 Έχετε ένα χάρτινο τρίγωνο ΑΒΓ και το διπλώνετε γύρω από το ύψος ΓΔ, το ξεδιπλώνετε και στη συνέχεια το διπλώνετε γύρω από την ευθεία ΛΝ ώστε η κορυφή Γ να πέσει πάνω στο Δ. Στη συνέχεια διπλώνετε έτσι ώστε το Α να ταυτιστεί με το Δ.

Να εξηγήσετε γιατί η ΑΛ ταυτίζεται με τη ΛΔ. Στη συνέχεια, διπλώστε έτσι ώστε το Β να ταυτιστεί με το Δ.

Να γράψετε μία απόδειξη της πρότασης Ι η οποία να βασίζεται στη διαδικασία που προηγήθηκε.



17 Δίνεται ισοσκελές και οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με ΑΒ = ΑΓ, το ύψος του ΒΔ και Μ, Ν τα μέσα των ΒΓ και ΑΒ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α. το τρίγωνο ΝΜΔ είναι ισοσκελές

β. $Μ\hat{Δ}Ν = \hat{Γ}$

18 Να αποδείξετε ότι η διχοτόμος της ορθής γωνίας ορθογώνιου τριγώνου διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν η διάμεσος και το ύψος του που αντιστοιχούν στην υποτείνουσα.

19 Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με $\hat{Α} = 90°$ και ΑΔ το ύψος του.

Να αποδείξετε ότι:

$\hat{Β} = 15°$ αν και μόνο αν $ΑΔ = \frac{ΒΓ}{4}$.

20 Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ε και Ζ τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι οι ΑΖ και ΓΕ τριχοτομούν τη ΒΔ.

21 Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ < ΑΓ$, η διχοτόμος του ΑΔ και Μ το μέσο της ΒΓ.

Αν Ε η προβολή του Β στην ΑΔ να αποδείξετε ότι:

α. $ΕΜ // ΑΓ$ **β.** $ΕΜ = \frac{ΑΓ - ΑΒ}{2}$ **γ.** $Δ\hat{Ε}Μ = \frac{\hat{Α}}{2}$

22 Δίνονται τρία σημεία Κ, Λ, Μ.

Να κατασκευαστεί τρίγωνο ΑΒΓ που τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ είναι τα σημεία Κ, Λ, Μ αντίστοιχα.

QR64

23 Δίνονται τρία μη συνευθειακά σημεία Α, Β και Γ.

Να κατασκευαστεί γεωμετρικά ευθεία η οποία να ισαπέχει από τα σημεία Α, Β και Γ.

QR65

24 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Κ και Λ είναι σημεία των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα με $2ΚΛ = ΒΓ$.

Να εξετάσετε αν τα Κ και Λ είναι μέσα των ΑΒ και ΑΓ.

25 **Γεωμετρικός τόπος**

Έστω ευθεία (ε) και σημείο Α εκτός αυτής.

Αν το σημείο Μ κινείται στην (ε), να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του μέσου Ν του ΑΜ.

QR66

26 **Γεωμετρικός τόπος**

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της κορυφής Κ ορθογώνιου τριγώνου ΚΑΒ με υποτείνουσα το ΑΒ.

4.4 Τραπέζιο

Βασικά ερωτήματα της ενότητας

- Πώς ορίζεται το τραπέζιο και το ισοσκελές τραπέζιο και ποιες είναι οι βασικές τους ιδιότητες;
- Ποιες συνθήκες εξασφαλίζουν ότι ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές;

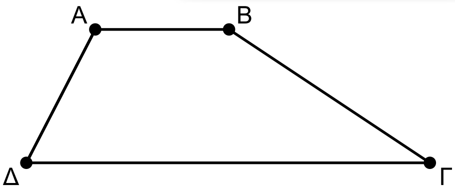
Εξερεύνηση

Στη διπλανή εικόνα φαίνεται μια επαγγελματική σκάλα.
Μπορείτε να εντοπίσετε τετράπλευρα που δεν είναι παραλληλόγραμμα;
Να περιγράψετε τις σχέσεις των βασικών τους στοιχείων.

Σχήμα 51

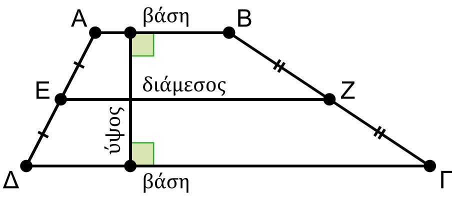
Ορισμός

Τραπέζιο *λέγεται το τετράπλευρο που έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες.*



Σχήμα 52

Οι παράλληλες πλευρές του τραπεζίου λέγονται **βάσεις** του και κάθε ευθύγραμμο τμήμα που είναι κάθετο στις βάσεις του και έχει τα άκρα του στις ευθείες των βάσεων λέγεται **ύψος** του τραπεζίου. Το ευθύγραμμο τμήμα που τα άκρα του είναι τα μέσα των μη παραλλήλων πλευρών τραπεζίου λέγεται **διάμεσος** του τραπεζίου.



Σχήμα 53

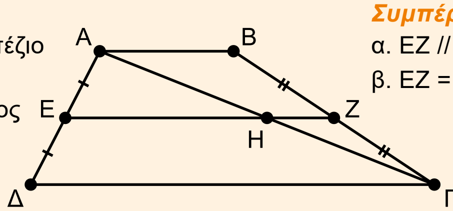
Πρόταση Ι

Η διάμεσος του τραπεζίου είναι παράλληλη προς τις βάσεις του και ίση με το ημιάθροισμά τους.

Υπόθεση

ΑΒΓΔ τραπέζιο (ΑΒ//ΓΔ)

ΕΖ διάμεσος του ΑΒΓΔ



Σχήμα 54

Συμπέρασμα

α. ΕΖ // ΑΒ,

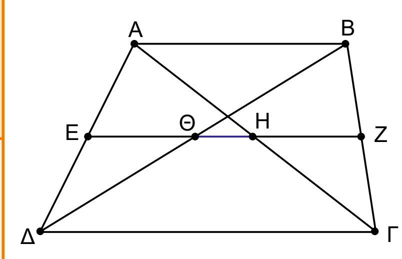
β. $ΕΖ = \frac{ΑΒ + ΓΔ}{2}$

Απόδειξη: Έστω τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ) και η διαγώνιός του ΑΓ. Αν από το μέσο Ε της πλευράς ΑΔ του τριγώνου ΑΔΓ φέρουμε ευθεία παράλληλη στη ΔΓ τότε αυτή διέρχεται από το μέσο Η της ΑΓ. Επειδή ΑΒ // ΔΓ η προέκταση της ΕΗ θα διέρχεται και από το μέσο Ζ της πλευράς ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ. Οπότε $ΕΗ = \frac{ΔΓ}{2}$ και $ΗΖ = \frac{ΑΒ}{2}$.
Άρα ΕΖ // ΑΒ // ΔΓ και $ΕΖ = ΕΗ + ΗΖ = \frac{ΔΓ}{2} + \frac{ΑΒ}{2} = \frac{ΔΓ + ΑΒ}{2}$.

Πόρισμα

Το τμήμα με άκρα τα μέσα των διαγωνίων τραπεζίου είναι παράλληλο στις βάσεις του και ίσο με την ημιδιαφορά τους.

Δηλαδή, αν ΑΒΓΔ τραπέζιο (ΑΒ // ΓΔ, ΑΒ < ΓΔ) και Η και Θ τα μέσα των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα, ισχύει ότι: $ΗΘ = \frac{ΓΔ - ΑΒ}{2}$ (Σχήμα 55).



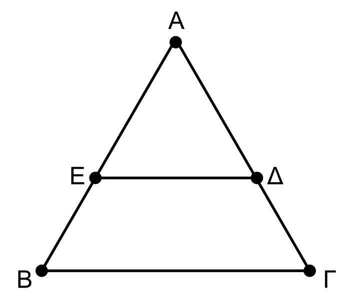
Σχήμα 55

Ισοσκελές τραπέζιο

Εξερεύνηση

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και από σημείο Δ της ΑΓ φέρουμε ΔΕ // ΒΓ.

Να προσδιορίσετε ιδιότητες του τραπεζίου ΒΓΔΕ αιτιολογώντας την απάντησή σας.



Σχήμα 56

Ορισμός

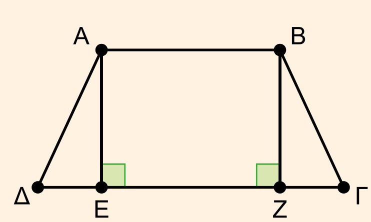
Ένα τραπέζιο του οποίου οι μη παράλληλες πλευρές είναι ίσες λέγεται ***ισοσκελές τραπέζιο.***

Σημείωση: Επισημαίνουμε ότι σύμφωνα με τον ορισμό του τραπεζίου τα παραλληλόγραμμα δεν είναι ισοσκελή τραπέζια. Ένας βασικός λόγος που αποκλείσαμε τη δυνατότητα των παραλληλογράμμων να θεωρούνται ισοσκελή τραπέζια είναι ότι, όπως μπορούμε να αποδείξουμε, κάθε ισοσκελές τραπέζιο είναι εγγράψιμο σε κύκλο, ενώ κάθε (μη ορθογώνιο) παραλληλόγραμμο δεν είναι. Έτσι, για να αποδείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι τραπέζιο, θα πρέπει να αποδείξουμε όχι μόνο ότι έχει δύο πλευρές παράλληλες αλλά και ότι οι άλλες δύο πλευρές του δεν είναι παράλληλες.

Ιδιότητες ισοσκελούς τραπεζίου

Πρόταση ΙΙ

Οι προσκείμενες σε μία βάση γωνίες ισοσκελούς τραπεζίου είναι ίσες μεταξύ τους.

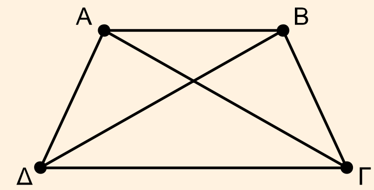


Σχήμα 57

Απόδειξη: Έστω ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ // ΓΔ και ΑΔ = ΒΓ. Φέρουμε τα ύψη του ΑΕ και ΒΖ.
Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΖ είναι ίσα (ΑΔ = ΒΓ, ΑΕ = ΒΖ, $\hat{Ε} = \hat{Ζ} = 90°$). Άρα $\hat{Δ} = \hat{Γ}$.
Ακόμη οι γωνίες Α και Β του τραπεζίου είναι παραπληρωματικές των Δ και Γ αντίστοιχα, οπότε $\hat{Α} = \hat{Β}$.

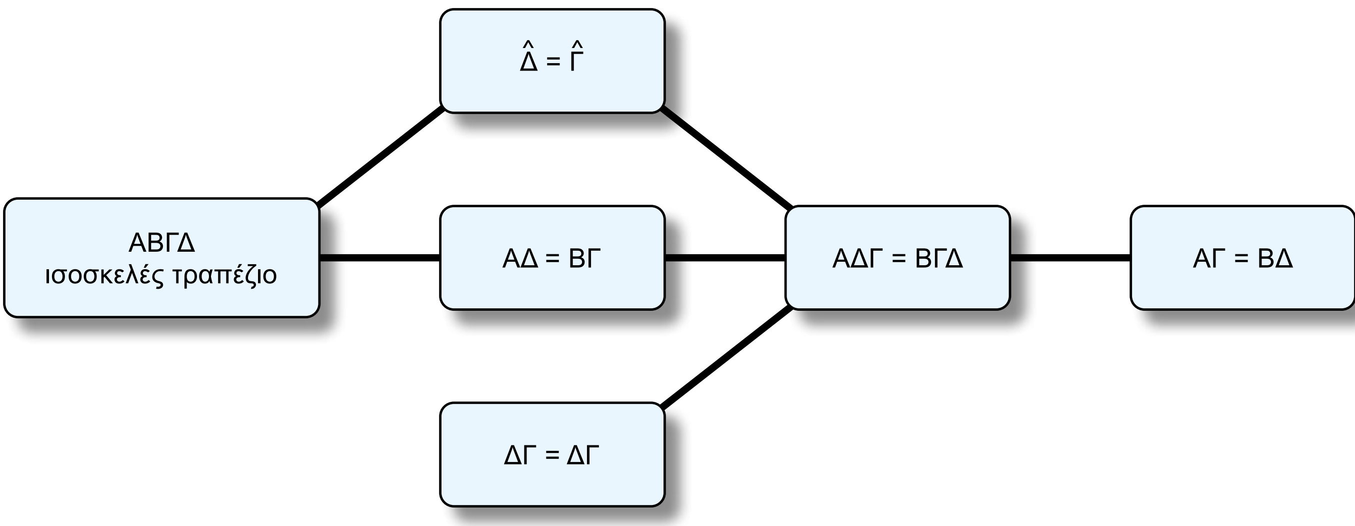
Πρόταση III

Οι διαγώνιοι ισοσκελούς τραπεζίου είναι ίσες.



Σχήμα 58

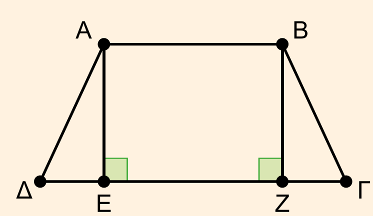
Απόδειξη: Έστω ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ // ΓΔ και ΑΔ = ΒΓ.
Τότε το παρακάτω λογικό διάγραμμα αποδεικνύει το ζητούμενο.



Κριτήρια για να είναι ένα τραπέζιο ισοσκελές

Πρόταση IV

Αν οι γωνίες μιας βάσης τραπεζίου είναι ίσες, τότε το τραπέζιο είναι ισοσκελές.

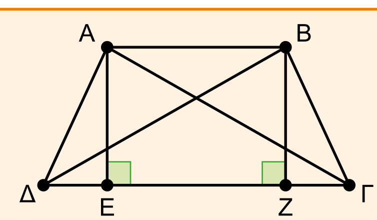


Σχήμα 59

Απόδειξη: Έστω τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ // ΓΔ και $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$ και τα ύψη του ΑΕ και ΒΖ. Τότε τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΖ είναι ίσα επειδή ΑΕ = ΒΖ, $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{E} = \hat{Z} = 90°$. Άρα ΑΔ = ΒΓ οπότε ΑΒΓΔ ισοσκελές τραπέζιο.

Πρόταση V

Αν οι διαγώνιοι ενός τραπεζίου είναι ίσες, τότε το τραπέζιο είναι ισοσκελές.



Σχήμα 60

Απόδειξη: Έστω τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ // ΓΔ και ΑΓ = ΒΔ. Φέρουμε τα ύψη του ΑΕ και ΒΖ. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΕΓ και ΒΖΔ είναι ίσα (ΑΕ = ΒΖ, ΔΒ = ΑΓ, $\hat{E} = \hat{Z} = 90°$). Άρα $B\hat{\Delta}Z = A\hat{\Gamma}E$. Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΑΓΔ είναι ίσα (ΔΓ κοινή πλευρά, ΒΔ = ΑΓ και $B\hat{\Delta}Z = A\hat{\Gamma}E$). Άρα ΒΓ=ΑΔ, οπότε το τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές.

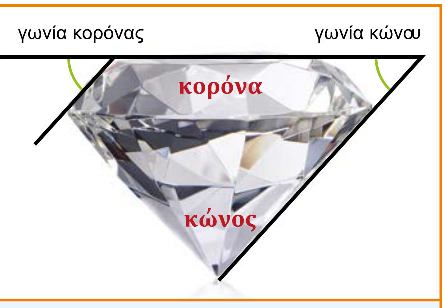
Εφαρμογή 1 – Δημιουργία προβλήματος

Θεωρούμε ευθεία (ε) και ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Για διάφορες σχετικές θέσεις μεταξύ τους να εκφράσετε την απόσταση του μέσου Μ του ΑΒ από την ευθεία (ε) σε σχέση με τις αποστάσεις των άκρων του ΑΒ από την ευθεία (ε).

Εφαρμογή 2 – Διαμάντια και τραπέζια

Σε ένα διαμάντι με ιδανική κοπή το μεγαλύτερο μέρος του φωτός το οποίο εισέρχεται από πάνω διαθλάται στα εσωτερικά τοιχώματα του διαμαντιού και εξέρχεται πάλι από το πάνω μέρος του προσδίδοντας στο διαμάντι περισσότερη λάμψη.

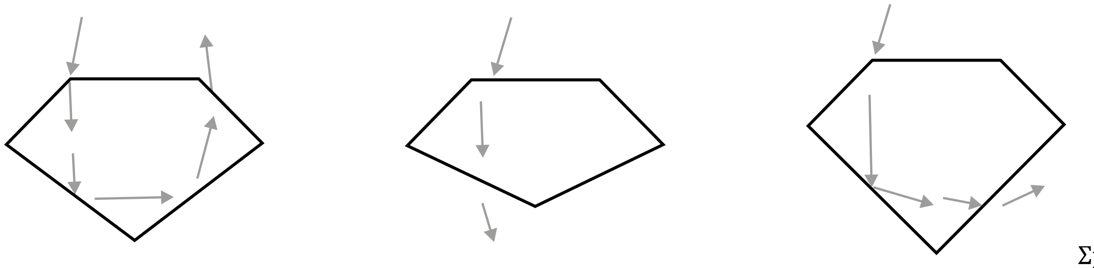
Έτσι, η γωνία της κορόνας και η γωνία του κώνου έχουν καθοριστικό ρόλο στη λαμπρότητα ενός διαμαντιού. Ιδανική γωνία κορόνας θεωρείται μία γωνία μεταξύ 32 και 36 μοιρών.



Σχήμα 61

Να σχεδιάσετε ως τετράπλευρο την όψη της κορόνας του διαμαντιού και υποθέτοντας ότι η γωνία της κορόνας είναι 34° να βρείτε τις υπόλοιπες γωνίες του τετραπλεύρου.

Παρατηρήστε ότι οι γωνίες της κορόνας και του κώνου σημειώνονται εξωτερικά αυτού. Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί συμβαίνει αυτό και σε ποιες εσωτερικές γωνίες αντιστοιχούν;



Σχήμα 62

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ).

α. Υπάρχει τραπέζιο που έχει μόνο μία γωνία ορθή.

β. Σε ένα τραπέζιο το πολύ δύο πλευρές είναι ίσες.

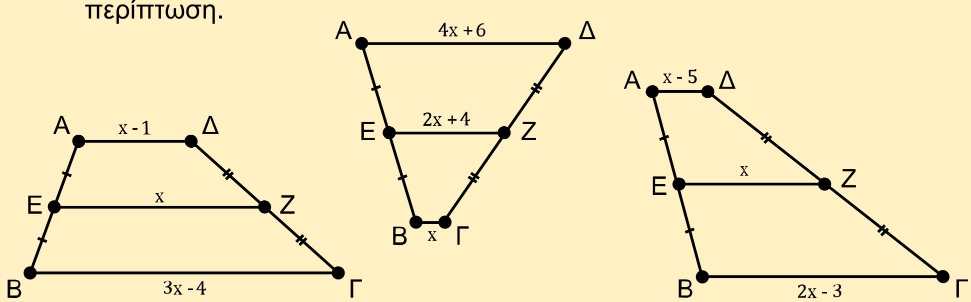
γ. Οι διαγώνιοι ισοσκελούς τραπεζίου διχοτομούνται.

δ. Αν ένα τραπέζιο έχει δύο γωνίες ίσες, τότε και οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

ε. Το ύψος ενός τραπεζίου είναι κάθετο στη διάμεσο του τραπεζίου.

στ. Δύο απέναντι γωνίες ενός τραπεζίου είναι παραπληρωματικές αν και μόνο αν οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

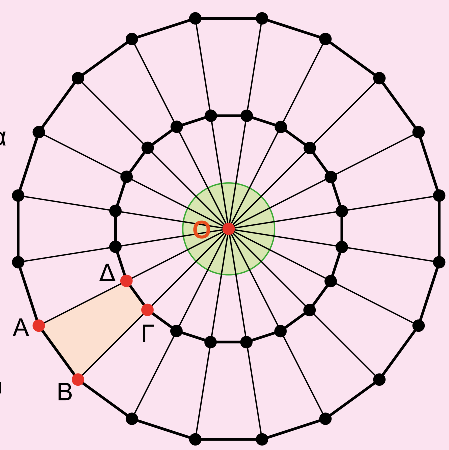
2 Καθένα από τα παρακάτω τετράπλευρα ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο και το τμήμα ΕΖ είναι διάμεσός του. Να υπολογίσετε τη μεταβλητή x σε κάθε περίπτωση.



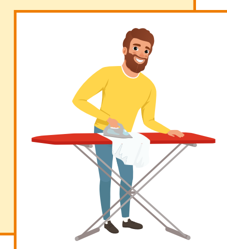
3 Αν η μία γωνία ενός ισοσκελούς τραπεζίου είναι 50° να υπολογίσετε τις υπόλοιπες γωνίες του τραπεζίου.

4 Το διπλανό σχήμα αποτελείται από 20 ισοσκελή τρίγωνα όπως το ΟΑΒ με κοινή κορυφή, τα οποία ανά δύο έχουν κοινή πλευρά και κανένα άλλο κοινό σημείο. Θεωρούμε επίσης τα μέσα Δ και Γ των ΟΑ και ΟΒ και όμοια τα μέσα των άλλων πλευρών των ισοσκελών τριγώνων.

Να βρείτε τις γωνίες Α και Γ του ισοσκελούς τραπεζίου ΑΒΓΔ.



5 Τα πόδια της σιδερώστρας του παρακάτω σχήματος είναι ίσα μεταξύ τους. Είναι ανάγκη να συνδέονται στο μέσο τους ώστε να εξασφαλίζεται ότι το επίπεδο σιδερώματος είναι παράλληλο στο έδαφος;



6 Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ) με ΑΒ < ΓΔ, και τα ύψη του ΑΕ και ΒΖ.

Να αποδείξετε ότι:
ΔΕ = ΓΖ = (ΔΓ-ΑΒ)/2 .

7 Αποδείξτε το πόρισμα της Πρότασης Ι.

8 Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{A} = 90°$ και $\hat{\Gamma} = 60°$, ΒΓ = x και ΑΒ = 2x. Να εκφράσετε τη διάμεσο ΕΖ του τραπεζίου ως συνάρτηση του x.

9 Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ισοσκελούς τραπεζίου είναι κορυφές ρόμβου.

10 Να εξετάσετε αν ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις:

α. Αν το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα μέσα δύο πλευρών ενός τετραπλεύρου είναι παράλληλο στις δύο πλευρές του, τότε το τετράπλευρο είναι τραπέζιο.

β. Αν οι δύο απέναντι πλευρές ενός τετραπλεύρου είναι παράλληλες, τότε το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα μέσα των άλλων δύο πλευρών είναι ίσο με το ημιάθροισμα των παράλληλων πλευρών.

11 Να βρείτε τον άξονα συμμετρίας ισοσκελούς τραπεζίου αιτιολογώντας την απάντησή σας.

12 Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και το ύψος του ΑΕ. Αν Κ, Λ τα μέσα των ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι το ΚΛΓΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

14 Από το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ ισοσκελούς τραπεζίου ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ) φέρουμε ευθεία παράλληλη στην ΑΔ η οποία τέμνει τη ΔΓ στο Ε.

Να αποδείξετε ότι οι ΒΕ, ΔΓ είναι κάθετες.

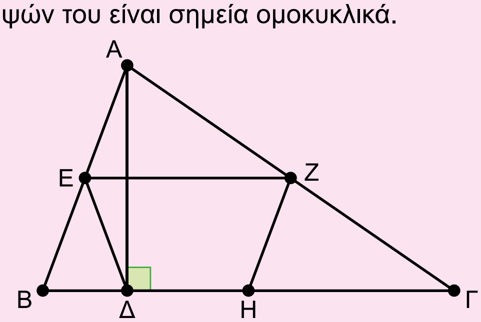
15 Να κατασκευαστεί τραπέζιο, όταν δίνονται:

α. οι τέσσερις πλευρές του **β.** οι βάσεις και οι διαγώνιοί του

16 Έστω ΑΒΓ ένα μη ορθογώνιο και σκαληνό τρίγωνο. Αν ΑΔ το ύψος του και Ε, Ζ, Η τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο ΕΖΗΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

β) τα μέσα των πλευρών του ΑΒΓ και τα ίχνη των υψών του είναι σημεία ομοκυκλικά.



13 Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ) θεωρούμε Ε και Ζ τα μέσα των ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα και η διχοτόμος της γωνίας Β τέμνει τη διάμεσο ΕΖ στο Η.

Να αποδείξετε ότι:

α. $ΒΗ \perp ΗΓ$

β. ΓΗ διχοτόμος της γωνίας Γ

γ. $ΕΗ = \dfrac{ΑΒ + ΓΔ - ΒΓ}{2}$

17 Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με, $ΑΒ = 2ΒΓ$ και η κάθετη από το Α στη ΒΓ τέμνει την ΒΓ σε εσωτερικό σημείο της Ε.

Αν Ζ και Η είναι τα μέσα των ΓΔ και ΑΒ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α. το τετράπλευρο ΗΒΓΖ είναι ρόμβος

β. η ημιευθεία ΕΖ είναι διχοτόμος της $Η\hat{Ε}Γ$

γ. το τετράπλευρο ΗΕΓΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο

δ. $Δ\hat{Ζ}Ε = 3Ζ\hat{Ε}Γ$

ε. $\hat{Β} > 60°$

Ανακεφαλαίωση

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήθηκαν οι ιδιότητες τετραπλεύρων όπως το παραλληλόγραμμο, το ορθογώνιο, ο ρόμβος, το τετράγωνο και το τραπέζιο, καθώς και τα αντίστοιχα κριτήρια. Επιπλέον μελετήθηκαν κάποιες εφαρμογές των παραλληλογράμμων στο τρίγωνο.

QR68 Ιδιότητες τετραπλεύρων

QR69 Αυτοέλεγχος

Σημαντικοί όροι

Παραλληλόγραμμο
(διαγώνιοι διχοτομούνται, ύψη, κέντρο συμμετρίας)

Ορθογώνιο
Ρόμβος
Τετράγωνο

Τραπέζιο
(βάσεις, ύψος, διάμεσος)

Τμήμα με άκρα μέσα πλευρών τριγώνου
Διάμεσος στην υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου
Γωνία 30° σε ορθογώνιο τρίγωνο

QR70 Παίξτε με τις ιδιότητες των τετραπλεύρων

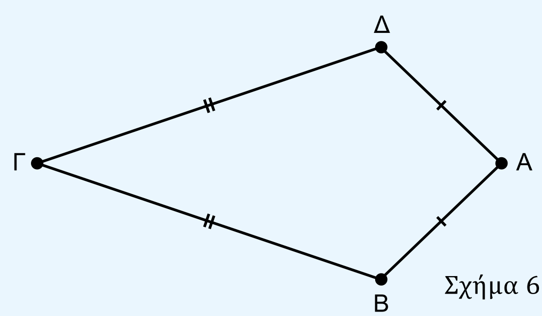
QR71 Φτιάξτε προτάσεις για τα τετράπλευρα

QR72 Διάγραμμα Venn

1. Γεωμετρία με τον χαρταετό

Η Σοφία, παρατηρώντας έναν χαρταετό όπως αυτόν που φαίνεται στην εικόνα, σκέφτηκε ότι αν του αφαιρέσει την ουρά προκύπτει ένα γεωμετρικό σχήμα το οποίο μοιάζει με ρόμβο. Ονόμασε λοιπόν **ρομβοειδές** το τετράπλευρο που έχει δύο ζεύγη διαδοχικών πλευρών ίσες αλλά όχι όλες τις πλευρές ίσες.

Σχήμα 63



Σχήμα 64

Μπορείτε να βοηθήσετε τη Σοφία να διερευνήσει τις ιδιότητες του ρομβοειδούς;
Επιλέξτε κατάλληλα από τις παρακάτω λέξεις για να συμπληρώσετε τις προτάσεις που ακολουθούν και να τις αποδείξετε. Στη συνέχεια να διατυπώσετε ένα κριτήριο για να είναι ένα τετράπλευρο ρομβοειδές και να το αποδείξετε.

α. κορυφές **β. παράλληλες** **γ. ισαπέχουν** **δ. διαγώνιοι** **ε. απέναντι** **στ. κάθετες** **ζ. διαγωνίου**

i. Στο ρομβοειδές οι .... πλευρές δεν είναι ....
ii. Οι .... του ρομβοειδούς είναι ....
iii. Δύο από τις .... του ρομβοειδούς .... από τις άλλες δύο.
iv. Τα σημεία της μιας .... του ρομβοειδούς .... από τις πλευρές του.

2. Συμμετρία και τετράπλευρα

α. Να σχεδιάσετε ένα ισοσκελές τρίγωνο και να βρείτε το συμμετρικό του ως προς:
i. τη βάση του, **ii.** την κορυφή του. Στη συνέχεια να βρείτε το είδος του κυρτού τετραπλεύρου που σχηματίζεται αιτιολογώντας την απάντησή σας.

β. Να σχεδιάσετε ένα σκαληνό τρίγωνο και να βρείτε το συμμετρικό του ως προς:
i. τη μία πλευρά του, **ii.** μία κορυφή του, **iii.** ευθεία παράλληλη στη μία πλευρά του η οποία διέρχεται από την απέναντι κορυφή.

Στη συνέχεια να βρείτε το είδος του τετραπλεύρου που σχηματίζεται αιτιολογώντας την απάντησή σας.

Μπορείτε να επεξεργαστείτε το θέμα στο **QR73**.

QR73

QR74 Συνθετικές εργασίες στα τετράπλευρα

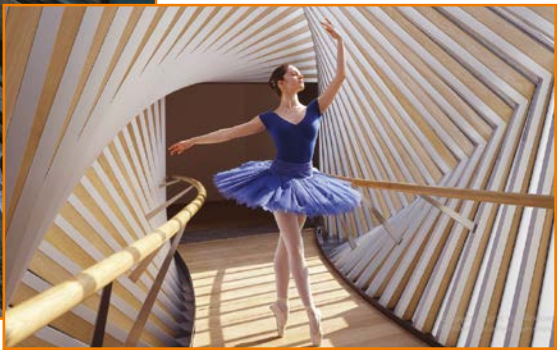
QR75 Εικαστικές συνθέσεις με τετράπλευρα

QR76 Κατασκευή τμήματος με άκρα σε παράλληλες ευθείες

QR77 Συμπληρωματικό υλικό στα τετράπλευρα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5
ΕΥΘΕΙΕΣ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΑ ΣΤΟΝ ΧΩΡΟ

Στρέφοντας το βλέμμα ψηλά στη Floral Street, στο Κόβεντ Γκάρντεν του Λονδίνου, συναντά κανείς τη «Γέφυρα της προσδοκίας» (Bridge of aspiration) που παρέχει στους χορευτές της Σχολής του Βασιλικού Μπαλέτου άμεση πρόσβαση στο κτίριο της Βασιλικής Όπερας. Έχοντας τη μορφή μιας περιστρεφόμενης φυσαρμόνικας, φέρνει στον νου τη ρευστότητα και τη χάρη του χορού, παρέχοντας ταυτόχρονα ένα ορόσημο για τη σχολή και τη σύνδεσή της με τον παγκοσμίου φήμης χώρο παραστάσεων.



Ο φυσικός χώρος στον οποίο ζούμε και, αντίστοιχα, ο γεωμετρικός χώρος που μελετάμε στο κεφάλαιο αυτό, έχει τρεις διαστάσεις. Ο χώρος περιλαμβάνει βασικά στοιχεία: σημεία, ευθείες, επίπεδα, αλλά και πιο σύνθετα σχήματα που ορίζονται από τα βασικά ή από τμήματά τους. Πολλές γεωμετρικές ιδιότητες του χώρου προκύπτουν κατ’ αναλογία με αντίστοιχες ιδιότητες του επιπέδου.

5.1 Σχετικές θέσεις δύο ευθειών, δύο επιπέδων, ευθείας και επιπέδου στον χώρο

Βασικά ερωτήματα της ενότητας

- Πώς προσδιορίζεται ένα επίπεδο στον χώρο;
- Ποιες είναι οι σχετικές θέσεις δύο ευθειών, δύο επιπέδων, μίας ευθείας και ενός επιπέδου στον χώρο;
- Πότε λέμε ότι μια ευθεία είναι κάθετη σε ένα επίπεδο;

Εξερεύνηση

Να εξετάσετε αν στέκεται πιο σταθερά στο πάτωμα ένα τραπέζι με τέσσερα πόδια ή με τρία πόδια. Να εξηγήσετε την απάντησή σας.

Εξερεύνηση

Παρατηρήστε το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο στο Σχήμα 1 .

α. Πόσα είναι τα λιγότερα σημεία που προσδιορίζουν το επίπεδο μιας έδρας του παραλληλεπιπέδου;

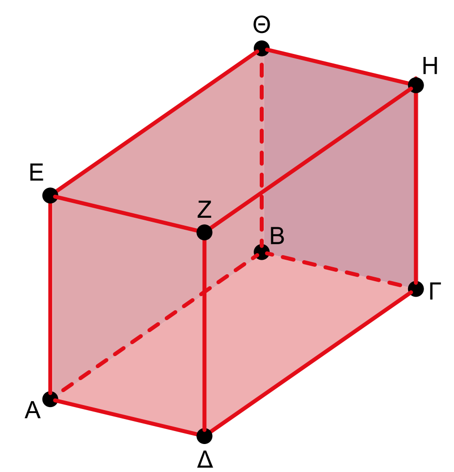
β. Πόσες είναι οι λιγότερες ευθείες που προσδιορίζουν το επίπεδο μιας έδρας του παραλληλεπιπέδου;

γ. Βρείτε δύο ευθείες που δεν ανήκουν στο ίδιο επίπεδο.

δ. Βρείτε ένα επίπεδο που δεν περιέχει έδρα του παραλληλεπιπέδου.

ε. Βρείτε την τομή δύο επιπέδων που περιέχουν έδρες του παραλληλεπιπέδου.

στ. Βρείτε δύο επίπεδα που δεν έχουν κοινό σημείο.



Σχήμα 1

Προσδιορισμός επιπέδου στον χώρο

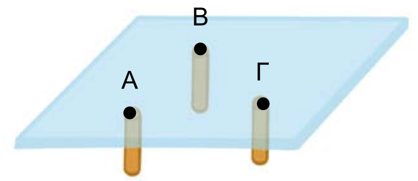
Ένα επίπεδο στον χώρο ορίζεται από:

α. από τρία μη συνευθειακά σημεία (Σχήμα 2).

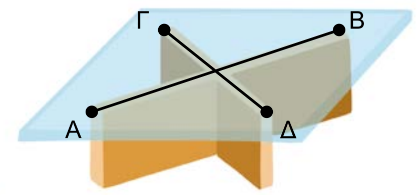
β. από δύο τεμνόμενες ευθείες (Σχήμα 3).

γ. από μία ευθεία και ένα σημείο εκτός αυτής (Σχήμα 4).

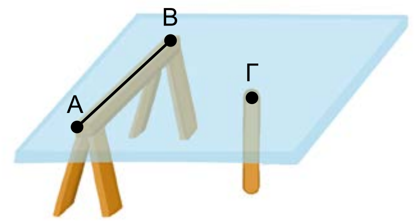
δ. Από δύο παράλληλες ευθείες (Σχήμα 5).



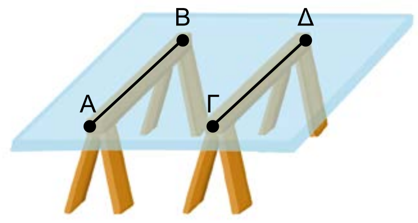
Σχήμα 2



Σχήμα 3



Σχήμα 4



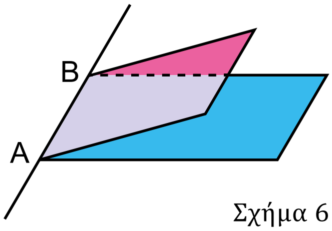
Σχήμα 5

Συμβολισμός: Το επίπεδο που ορίζεται από:

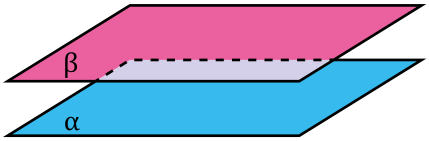
1. τα σημεία Α, Β, Γ το συμβολίζουμε (Α, Β, Γ).
2. τις τεμνόμενες ευθείες ΑΒ και ΓΔ το συμβολίζουμε (ΑΒ, ΓΔ).
3. την ευθεία ΑΒ και το σημείο Γ εκτός αυτής το συμβολίζουμε (ΑΒ, Γ).
4. τις παράλληλες ευθείες ΑΒ και ΓΔ το συμβολίζουμε (ΑΒ, ΓΔ).

Σχετικές θέσεις δύο επιπέδων

Δύο (διαφορετικά) επίπεδα στον χώρο είτε **τέμνονται** σε μία ευθεία (Σχήμα 6) είτε δεν έχουν κοινό σημείο, οπότε λέγονται **παράλληλα** (Σχήμα 7).



Σχήμα 6



Σχήμα 7

Σημείωση: Όταν σχεδιάζουμε στο επίπεδο σχήματα του χώρου, σχεδιάζουμε με διακεκομμένες γραμμές τα τμήματα που δεν φαίνονται.

Εφαρμογή 1

Να προσδιορίσετε στο παραλληλεπίπεδο του Σχήματος 1:

α. δύο τεμνόμενα επίπεδα καθώς και την ευθεία στην οποία τέμνονται
β. δύο τεμνόμενα επίπεδα τα οποία δεν περιέχουν έδρες του παραλληλεπιπέδου
γ. δύο παράλληλα επίπεδα.

Οι παρακάτω προτάσεις είναι ανάλογες με αντίστοιχες προτάσεις της γεωμετρίας του επιπέδου:

Πρόταση I ***Από σημείο εκτός επιπέδου διέρχεται μοναδικό επίπεδο παράλληλο σε αυτό.***

Πρόταση II ***Αν δύο επίπεδα είναι παράλληλα προς τρίτο επίπεδο, τότε είναι και μεταξύ τους παράλληλα.***

Σχετικές θέσεις δύο ευθειών στον χώρο

Δύο διαφορετικές ευθείες στον χώρο είτε θα βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο είτε όχι.

Αν δύο ευθείες ανήκουν στο ίδιο επίπεδο, τότε υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις:

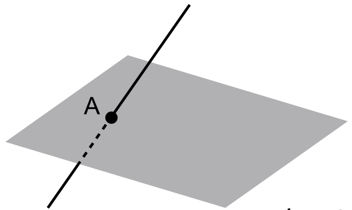
α. τέμνονται σε ένα σημείο.
β. δεν έχουν κοινό σημείο, οπότε είναι παράλληλες.

Αν δύο ευθείες δεν ανήκουν στο ίδιο επίπεδο, τότε λέγονται **ασύμβατες**.
Δηλαδή, δύο ασύμβατες ευθείες δεν είναι ούτε τεμνόμενες ούτε παράλληλες.

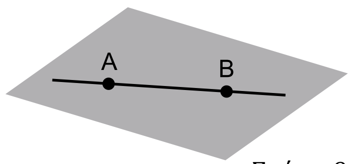
Εφαρμογή 2
Να προσδιορίσετε στο παραλληλεπίπεδο του Σχήματος 1:
α. δύο παράλληλες ευθείες
β. δύο παράλληλες ευθείες που δεν περιέχουν ακμές του παραλληλεπιπέδου
γ. ζεύγη ασύμβατων ευθειών
δ. τρεις ευθείες που είναι ανά δύο ασύμβατες.

Σχετικές θέσεις ευθείας και επιπέδου

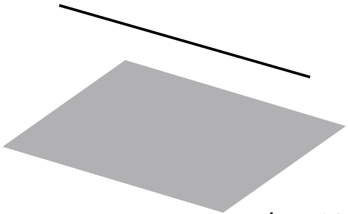
Για μία ευθεία και ένα επίπεδο στον χώρο υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις:
α. Η ευθεία έχει ακριβώς ένα κοινό σημείο με το επίπεδο, οπότε λέμε ότι η ευθεία τέμνει το επίπεδο (Σχήμα 8).
β. Η ευθεία ανήκει στο επίπεδο (Σχήμα 9).
γ. Η ευθεία δεν έχει κοινό σημείο με το επίπεδο, οπότε λέμε ότι είναι **παράλληλη** σε αυτό (Σχήμα 10).



Σχήμα 8



Σχήμα 9

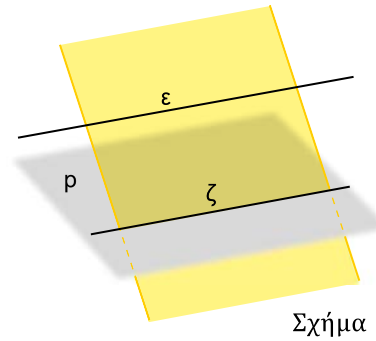

Σχήμα 10

Πρόταση ΙΙΙ

Αν μια ευθεία (ε) είναι παράλληλη σε μια ευθεία (ζ) ενός επιπέδου p και δεν ανήκει στο επίπεδο αυτό, τότε είναι παράλληλη σε αυτό.

Πράγματι: Οι παράλληλες ευθείες (ε) και (ζ) ορίζουν ένα επίπεδο, το (ε, ζ), διαφορετικό από το p (Σχήμα 11). Τα επίπεδα (ε, ζ) και p τέμνονται στην ευθεία (ζ), επομένως οποιοδήποτε κοινό σημείο αυτών των επιπέδων ανήκει στη (ζ).

Αν λοιπόν η (ε) τέμνει το p σε σημείο A, τότε το A θα ανήκει στη (ζ), άτοπο, αφού ε // ζ. Συμπεραίνουμε ότι η (ε) είναι παράλληλη στο p.



Σχήμα 11

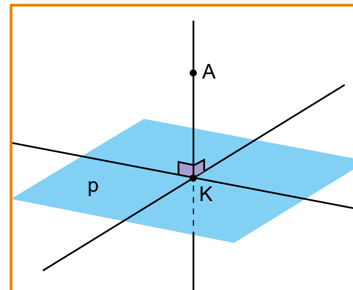
Πρόταση ΙV

Αν δύο ευθείες στον χώρο είναι παράλληλες προς τρίτη, τότε είναι και μεταξύ τους παράλληλες.

Καθετότητα ευθείας και επιπέδου στον χώρο

Ορισμός

*Μια **ευθεία** (ε) λέγεται **κάθετη** σε ένα **επίπεδο** p, όταν είναι κάθετη σε δύο ευθείες του επιπέδου που διέρχονται από το σημείο τομής K της (ε) με το p.*



Σχήμα 12

Συμβολίζουμε ε ⊥ p και λέμε επίσης ότι το επίπεδο p είναι κάθετο στην ευθεία (ε). Αποδεικνύεται ότι:

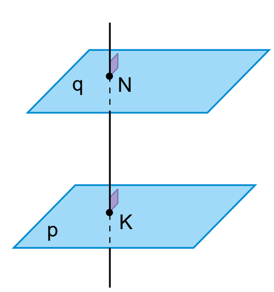
Αν μια ευθεία είναι κάθετη σε ένα επίπεδο στο σημείο του K, τότε είναι κάθετη σε κάθε ευθεία του επιπέδου που διέρχεται από το K.

Αν δίνονται ένα σημείο A και ένα επίπεδο p στον χώρο, το μήκος του κάθετου προς το επίπεδο ευθύγραμμου τμήματος AK (Σχήμα 12) λέγεται **απόσταση** του σημείου A από το επίπεδο p.

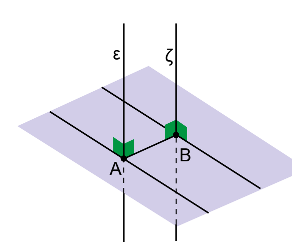
Πρόταση V

α. Αν δύο διαφορετικά επίπεδα είναι κάθετα στην ίδια ευθεία, τότε είναι παράλληλα μεταξύ τους *(Σχήμα 13).*

β. Αν δύο διαφορετικές ευθείες είναι κάθετες στο ίδιο επίπεδο, τότε είναι παράλληλες μεταξύ τους *(Σχήμα 14).*



Σχήμα 13



Σχήμα 14

QR78 **Κατασκευή ευθείας κάθετης σε επίπεδο**

Εφαρμογή 3 – Γεωμετρικός τόπος σημείων στον χώρο

Να περιγράψετε το σύνολο των σημείων του χώρου που ισαπέχουν από τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος. Να συνδέσετε την πρόταση στην οποία καταλήξατε με την αντίστοιχη πρόταση της γεωμετρίας του επιπέδου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ).

α. Αν δύο διαφορετικές ευθείες στον χώρο είναι παράλληλες στην ίδια ευθεία, τότε είναι και μεταξύ τους παράλληλες.
β. Αν δύο διαφορετικές ευθείες είναι παράλληλες στο ίδιο επίπεδο, τότε είναι και μεταξύ τους παράλληλες.
γ. Αν δύο διαφορετικά επίπεδα είναι κάθετα στην ίδια ευθεία, τότε είναι μεταξύ τους παράλληλα.
δ. Αν μία ευθεία είναι κάθετη σε μία ευθεία ενός επιπέδου, τότε είναι κάθετη στο επίπεδο αυτό.
ε. Αν δύο ευθείες στον χώρο είναι κάθετες στην ίδια ευθεία σε διαφορετικά σημεία της, τότε είναι παράλληλες μεταξύ τους.

2 Στην αίθουσα διδασκαλίας:

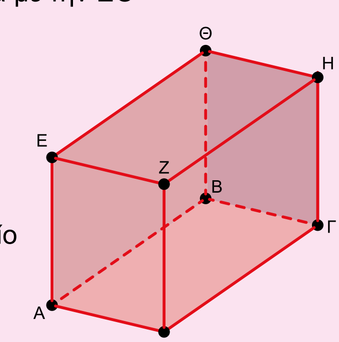
α. να προσδιορίσετε με τρεις τρόπους το επίπεδο του πίνακα.

β. Να βρείτε:
- **i.** δύο ασύμβατες ευθείες
- **ii.** τρεις ευθείες ανά δύο ασύμβατες
- **iii.** τρεις ευθείες που διέρχονται από το ίδιο σημείο
- **iv.** τρεις ευθείες που τέμνονται ανά δύο και δεν διέρχονται από το ίδιο σημείο
- **v.** δύο παράλληλα επίπεδα
- **vi.** δύο τεμνόμενα επίπεδα καθώς και την τομή τους.

3 Στο παραλληλεπίπεδο του σχήματος να βρείτε:

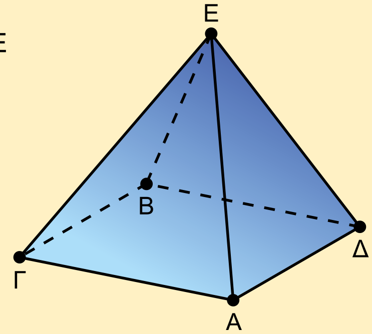
α. ευθείες που τέμνουν την ΗΓ και δεν ανήκουν στα επίπεδα των εδρών του
β. ευθεία παράλληλη στην ΗΔ
γ. ευθεία που τέμνει την ΗΔ
δ. ευθεία ασύμβατη με την ΗΔ
ε. ευθύγραμμο τμήμα που είναι παράλληλο στην ΕΘ και δεν ανήκει στην ίδια έδρα με την ΕΘ
στ. την τομή των επιπέδων:
- **i.** (Α, Δ, Β), (Δ, Ζ, Η)
- **ii.** (Ε, ΖΗ), (Θ, ΑΒ)
- **iii.** (ΕΔ, ΑΔ), (Θ, Η, Ζ)

ζ. τρία επίπεδα που τέμνονται ανά δύο και
- **i.** διέρχονται από το ίδιο σημείο
- **ii.** δεν διέρχονται από το ίδιο σημείο

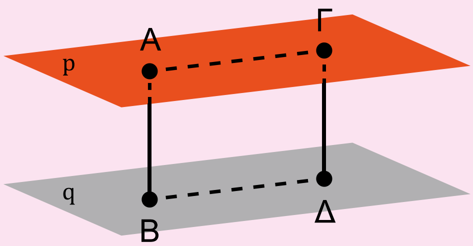


4 Στη διπλανή τετραγωνική πυραμίδα να προσδιορίσετε:

α. ευθείες παράλληλες
β. ευθεία ασύμβατη με την ΑΕ
γ. ευθεία τεμνόμενη με τη ΓΔ
δ. ευθεία ασύμβατη με τη ΓΔ
ε. δύο τεμνόμενα επίπεδα καθώς και την τομή τους
στ. την τομή του επιπέδου (Α, Β, Δ) και της ευθείας ΕΓ



5 Έστω δύο παράλληλα επίπεδα p και q.
Αν τα σημεία Α, Γ ανήκουν στο επίπεδο p και τα σημεία Β, Δ ανήκουν στο επίπεδο q και είναι τέτοια ώστε ΑΒ // ΓΔ, να αποδείξετε ότι ΑΓ = ΒΔ.



6 **Αποδείξτε ότι:**
Αν τρεις ευθείες τέμνονται ανά δύο και δεν διέρχονται από το ίδιο σημείο, τότε είναι συνεπίπεδες.

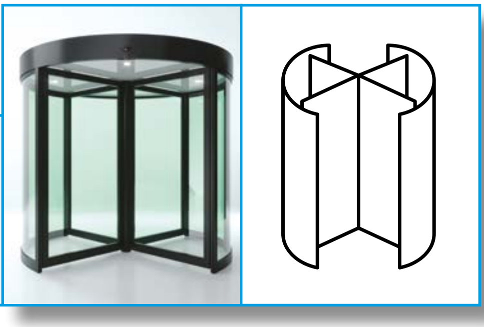
5.2 Δίεδρη γωνία

Βασικό ερώτημα της ενότητας

- Πώς ορίζεται η «γωνία» δύο τεμνόμενων επιπέδων;

Εξερεύνηση

Στο Σχήμα 15 βλέπουμε μια περιστρεφόμενη πόρτα και το μοντέλο της.
Πώς θα ορίζατε τη γωνία μεταξύ δύο διαδοχικών φύλλων της;



Σχήμα 15

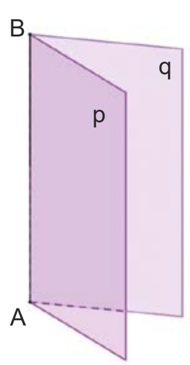
Ορισμός

Δίεδρη γωνία *λέγεται το σχήμα που αποτελείται από δύο ημιεπίπεδα με κοινή ακμή (Σχήμα 16).*

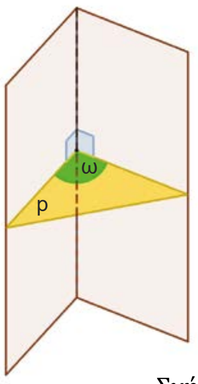
Τα δύο ημιεπίπεδα λέγονται **έδρες** της δίεδρης γωνίας και η κοινή ακμή τους λέγεται **ακμή** της δίεδρης γωνίας.

Μέτρο δίεδρης γωνίας

Αν ένα επίπεδο p τέμνει κάθετα την ακμή μιας δίεδρης γωνίας, τότε σχηματίζεται μία αντίστοιχη κυρτή επίπεδη γωνία στο p (Σχήμα 17). Ως μέτρο της δίεδρης γωνίας ορίζεται το μέτρο αυτής της κυρτής επίπεδης γωνίας.



Σχήμα 16



Σχήμα 17

Εφαρμογή 1

Είναι γνωστό από τη γεωμετρία του επιπέδου ότι, αν δύο οξείες ή δύο αμβλείες γωνίες έχουν τις πλευρές τους παράλληλες, τότε είναι ίσες. Να διατυπώσετε μια αντίστοιχη πρόταση για δίεδρες γωνίες.
Ποια σχέση συνδέει μια οξεία και μια αμβλεία δίεδρη γωνία με τις έδρες τους σε παράλληλα επίπεδα;
Για να έχετε εποπτεία του θέματος, μπορείτε να ανοίξετε τις πόρτες δύο απέναντι αιθουσών του σχολείου έτσι ώστε να σχηματίζουν με την κάσα τους δίεδρες γωνίες με παράλληλες έδρες.

Εφαρμογή 2

Ποιο είναι το σύνολο των σημείων του χώρου που ισαπέχουν από δύο τεμνόμενα επίπεδα;

Κάθετα επίπεδα

Ορισμός

Δύο τεμνόμενα επίπεδα που σχηματίζουν μία δίεδρη γωνία ορθή λέγονται κάθετα.

Εφαρμογή 3

Δίνονται ένα επίπεδο p και ένα σημείο του A.
Πόσα επίπεδα υπάρχουν που είναι κάθετα στο p και διέρχονται από το σημείο A;

QR79 **Εφαρμογή 4** Η μελέτη των σκιών

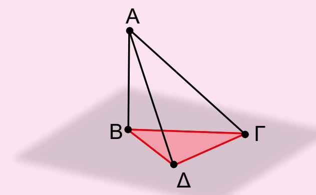
QR80 **Εφαρμογή 5** Όψεις στερεών

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Αν το τμήμα ΑΒ είναι κάθετο στο επίπεδο p και το τρίγωνο ΒΓΔ του επιπέδου p είναι ισόπλευρο,

α. να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισοσκελές.

β. να βρείτε το μέτρο της δίεδρης γωνίας που ορίζεται από τα ημιεπίπεδα (ΑΒ, Γ) και (ΑΒ, Δ).



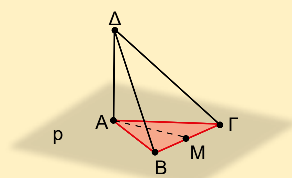
2 Αν το τμήμα ΔΑ είναι κάθετο στο επίπεδο p και ΒΓ είναι τμήμα του επιπέδου p ώστε το τρίγωνο ΔΒΓ να είναι ισοσκελές με ΔΒ = ΔΓ,

α. να αποδείξετε ότι ΑΒ = ΑΓ.

β. Αν Μ είναι το μέσο του ΒΓ,

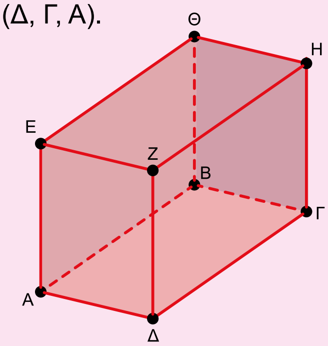
i. να προσδιορίσετε το επίπεδο που διχοτομεί τη δίεδρη γωνία που ορίζεται από τα ημιεπίπεδα (ΔΑ, Β) και (ΔΑ, Γ)

ii. να αποδείξετε ότι η ευθεία ΒΓ είναι κάθετη στο επίπεδο (Δ,Α,Μ)



3 Στο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο η ΔΗ είναι διπλάσια της ΓΗ.

Να υπολογίσετε το μέτρο της μικρότερης δίεδρης γωνίας που σχηματίζουν τα επίπεδα (Δ, Η, Θ) και (Δ, Γ, Α).



Ανακεφαλαίωση

Σχετικές θέσεις δύο επιπέδων στον χώρο

Δύο διαφορετικά επίπεδα μπορεί να έχουν:

α. ένα τουλάχιστον κοινό σημείο, οπότε τέμνονται σε ευθεία που διέρχεται από το σημείο αυτό.

β. κανένα κοινό σημείο, οπότε είναι παράλληλα.

Δύο επίπεδα δεν μπορεί να έχουν μοναδικό κοινό σημείο.

Αν δύο επίπεδα έχουν τρία μη συνευθειακά σημεία κοινά, τότε ταυτίζονται.

Σχετικές θέσεις δύο ευθειών στον χώρο

Δύο ευθείες στον χώρο μπορεί να έχουν:

α. δύο τουλάχιστον κοινά σημεία, οπότε ταυτίζονται.

β. ένα μόνο κοινό σημείο, οπότε τέμνονται στο σημείο αυτό και ορίζουν το επίπεδο στο οποίο ανήκουν.

γ. κανένα κοινό σημείο και να ανήκουν στο ίδιο επίπεδο, οπότε ορίζουν το επίπεδο στο οποίο ανήκουν και είναι παράλληλες.

δ. κανένα κοινό σημείο και να μην ανήκουν στο ίδιο επίπεδο, οπότε είναι ασύμβατες.

Σχετικές θέσεις ευθείας και επιπέδου στον χώρο

Μία ευθεία και ένα επίπεδο στον χώρο μπορεί να έχουν:

α. κανένα κοινό σημείο, οπότε η ευθεία είναι παράλληλη στο επίπεδο.

β. ένα μόνο κοινό σημείο, οπότε η ευθεία τέμνει το επίπεδο.

γ. δύο τουλάχιστον κοινά σημεία, οπότε η ευθεία ανήκει στο επίπεδο.

Καθετότητα ευθείας και επιπέδου

Μια ευθεία (ε) λέγεται κάθετη σε ένα επίπεδο όταν τέμνει το επίπεδο και είναι κάθετη σε δύο ευθείες του επιπέδου που διέρχονται από το σημείο τομής. Τότε, η ευθεία (ε) είναι κάθετη σε κάθε ευθεία του επιπέδου που διέρχεται από το σημείο τομής της με το επίπεδο.

Δίεδρες γωνίες

Ως μέτρο μιας δίεδρης γωνίας ορίζεται το μέτρο της κυρτής επίπεδης γωνίας που σχηματίζεται από την τομή της δίεδρης με ένα επίπεδο κάθετο στην ακμή της.

QR81 Δίεδρη γωνία

QR82 Συμπληρωματικό υλικό

Βιβλιογραφία

Στοιχεία. Πραγματεία Ευκλείδου του Αλεξανδρέως (Απόδοση: Ν. Ροκοπάνος, Σ. Σακελλάρη, Α. Τσολομύτης) (2022). Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστημίου Αιγαίου. https://myria.math.aegean.gr/elements/Stoixeia.pdf (Δημοσίευση πρωτότυπου έργου περίπου 300 π.Χ.)
Αξιοποιήσαμε αυτό το αρχείο για πρόσβαση στο έργο του Ευκλείδη.

Αργυρόπουλος, Η., Βλάμος Π., Κατσούλης, Γ., Μαρκάτης, Σ., & Σίδερης, Π. (2001). *Ευκλείδεια Γεωμετρία* (τεύχος Α΄ και τεύχος Β΄). Ι.Τ.Υ.Ε. Διόφαντος. Αξιοποιήσαμε στοιχεία αυτού του βιβλίου για το διδακτικό υλικό.

Θωμαΐδης, Γ., & Πούλος, Α. (2000). *Διδακτική της Ευκλείδειας Γεωμετρίας*. Εκδόσεις Ζήτη.
Αξιοποιήσαμε στοιχεία αυτού του βιβλίου για το διδακτικό υλικό και την υποστήριξη συγκεκριμένων επιλογών.

Νεγρεπόντης, Σ., & Φαρμάκη, Β. (2019). *Ιστορία των αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών. Από τον Θαλή στον Ευκλείδη μέσω Πυθαγορείων, Ζήνωνος, Πλάτωνος, Θεαίτητου, Ευδόξου* (Τομ. 1). Εκκρεμές.
Αξιοποιήσαμε στοιχεία αυτού του βιβλίου για τις ιστορικές αναφορές.

Πάμφιλος, Π. (2012). *Έλασσον Γεωμετρικόν*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
Αξιοποιήσαμε στοιχεία αυτού του βιβλίου για τη θεωρητική υποδομή καθώς και για την παραγωγή προτεινόμενων έργων για τους μαθητές.

Alexander, D., & Koeberlein, G. (2011). *Elementary Geometry for college students* (5η έκδ.). Brooks/Cole.
Αξιοποιήσαμε στοιχεία αυτού του βιβλίου για την οργάνωση του κειμένου και τις συνδέσεις της Γεωμετρίας με τον πραγματικό κόσμο.

Gantert, A. X. (2008). Amsco's Geometry. Amsco School Publications.
Αξιοποιήσαμε στοιχεία αυτού του βιβλίου για τη θεωρητική υποδομή καθώς και για την παραγωγή προτεινόμενων έργων για τους μαθητές.

Katz, V. J. (2013). Ιστορία των Μαθηματικών. Μια εισαγωγή (Κ. Χατζηκυριάκου, Μετφ.). Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. (Δημοσίευση πρωτότυπου έργου 1993)
Αξιοποιήσαμε στοιχεία αυτού του βιβλίου για τις ιστορικές αναφορές.

Moise, E. (1963). *Elementary Geometry from an advanced standpoint*. Addison.
Αξιοποιήσαμε στοιχεία αυτού του βιβλίου για τη θεωρητική υποδομή.

Randall, C. I., Hall, B., Kennedy, D., Bass, L. E., Johnson, A., Murphy, S. J., & Wiggins, G. (2015). *Geometry, Common core*. Pearson.
Αξιοποιήσαμε στοιχεία αυτού του βιβλίου στην ανάπτυξη προτεινόμενων έργων για τους μαθητές.

van der Waerden, B. L. (2003) *Η αφύπνιση της επιστήμης* (Γ. Χριστιανίδης, Μετφ.). Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. (Δημοσίευση πρωτότυπου έργου 1950)
Αξιοποιήσαμε στοιχεία αυτού του βιβλίου για τις ιστορικές αναφορές.

Υποδείξεις για τις Ασκήσεις

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 – ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

1.1 Ευθείες τεμνόμενες και ευθείες παράλληλες

1. Μόνο το (δ) είναι αδύνατο.

2. **α.** Σ **β.** Λ **γ.** Λ **δ.** Σ **ε.** Σ **στ.** Λ **ζ.** Σ

3. γ

5. $\alpha = 52°, \beta = 128°, \gamma = 113°, \delta = 67°$

7. Οι ε_1, ε_2 είναι παράλληλες ενώ οι ζ_1, ζ_2 είναι τεμνόμενες, $\varphi = 113°$.

8. Αν $x = \Delta\hat{A}B$, να δείξετε ότι $A\hat{B}Z = x$ και $E\hat{B}Z = x$.

9. Από την κορυφή της γωνίας των 95° φέρτε παράλληλη στις (ε), (ζ), $\omega = 131°$, $\varphi = 124°$.

10. $\theta = 180° - \omega + \varphi$.

11. Σχήμα Α: Από το Ε διέρχονται δύο παράλληλες προς την ΑΖ.
Σχήμα Β: Οι ευθείες ΓΘ, ΕΚ είναι παράλληλες, ενώ οι γωνίες $\Theta\hat{Z}K$ και 155° δεν είναι παραπληρωματικές.

12. Οι μισές δύο ίσων γωνιών είναι ίσες.

14. Οι δύο καθρέφτες είναι παράλληλοι.

1.2 Άθροισμα γωνιών τριγώνου και κυρτού πολυγώνου

1. **α.** Σ **β.** Σ **γ.** Λ **δ.** Σ **ε.** Λ **στ.** Σ

2. **α.** $\hat{B} = 68°, \hat{\Gamma} = 34°$ **β.** $H\hat{A}\Gamma = 56°, H\hat{\Gamma}A = 12°, A\hat{H}\Gamma = 112°$.

3. $\hat{A}_1 = 56°, \hat{\Delta}_1 = 98°, \hat{\Delta}_2 = 82°$.

4. $\Delta\hat{A}E = 19°$.

5. Αρκεί $B\hat{A}\Delta = \hat{\Gamma}$ και $\Gamma\hat{A}\Delta = \hat{B}$.

6. $K\hat{A}\Lambda = 30°, A\hat{K}\Lambda = 115°, A\hat{\Lambda}K = 35°$.

7. $\alpha = 104°, \beta = 48°, \gamma = 56°$.

8. $B\hat{\Gamma}\Sigma = 130°, A\hat{\Gamma}\Sigma = 150°$.

9. $A\hat{\Gamma}\Delta = 33°, \Delta\hat{A}\Gamma = 32°$.

10. $180° - \varphi - \theta$.

11. **α.** 10 **β.** 8.

12. Απαγωγή σε άτοπο. Αν είχε 4 οξείες, τότε οι εξωτερικές τους θα ξεπερνούσαν τις 360°.

13. Η γωνία που λείπει είναι από 0° έως 180°.
Άρα $2190° < \nu \cdot 180° - 360° < 2370°$, $\nu = 15$.

14. **α.** $B\hat{\Delta}\Gamma = 130°$ (β) $90° + \dfrac{\hat{A}}{2}$ (γ) Όχι

15. **α.** $\hat{A} = \omega + \varphi - 180°$ **β.** $180° < \omega + \varphi < 360°$.

16. Οι μισές δύο παραπληρωματικών γωνιών είναι συμπληρωματικές.

17. Αρκεί να σχηματίζουν δύο εντός και επί τα αυτά γωνίες παραπληρωματικές.

18. Οι εξωτερικές γωνίες του εσωτερικού κυρτού πενταγώνου έχουν άθροισμα 360°. Τα 5 μικρά τρίγωνα έχουν άθροισμα γωνιών 900°. Το ζητούμενο άθροισμα είναι $900° - 2 \cdot 360°$.

20. Ήταν 360°. Σχετίζεται με το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών του πολυγώνου.

1.3 Η σημασία του 5ου Ευκλείδειου Αιτήματος

1. Η μπλε διαδρομή (4).

4. β, γ, δ

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

1. 96° **2.** 1080° **3.** 78°

4. **α.** 135° **β.** **i.** όχι **ii.** ναι

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 – ΤΡΙΓΩΝΑ

2.2 Κριτήρια ισότητας τριγώνων

1. **α.** Λ **β.** Λ **γ.** Λ **δ.** Λ **ε.** Σ **στ.** Σ

3. Τρία ακόμα τρίγωνα

4. Ναι.

5. Είναι ΕΓ = ΔΖ. Τα τρίγωνα ΒΕΓ και ΑΖΔ.

6. Συγκρίνετε πρώτα τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΔΓ.

7. Συγκρίνετε τα ΔΑΓ, ΒΑΕ.

8. **α.** Συγκρίνετε τα ΑΒΓ, ΑΔΕ.
β. **i.** Κατακορυφήν γωνίες **ii.** ΑΔΗ = ΑΒΖ.

10. Χρησιμοποιήστε κάθε φορά κατάλληλο κριτήριο ισότητας.

11. Υπάρχουν δύο ζεύγη ίσων τριγώνων.

12. Με ΠΓΠ προκύπτουν τρία ζεύγη ίσων τριγώνων και κατόπιν με ΠΠΠ συγκρίνουμε τα ζητούμενα τρίγωνα.

15. **α.** Τα τρίγωνα ΟΜΒ, ΟΜΑ ίσα. **β.** **i.** Τα ΟΑΓ, ΟΒΔ είναι ίσα. **ii.** Διαφορές ίσων τμημάτων. **iii.** Ομοίως.

16. Τα ΑΒΓ, ΑΔΕ και τα ΒΚΓ, ΑΚΝ είναι ίσα.

17. Συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΓΜΔ.

18. Έστω ΕΚ, ΖΛ οι αποστάσεις των Ε, Ζ από την ευθεία ΒΓ και ΑΔ το ύψος ΑΒΓ. Τα ΑΒΔ και ΚΒΕ είναι ίσα. Ομοίως τα ΑΔΓ, ΓΛΖ.

19. **α.** Τα τρίγωνα ΑΜΓ, ΒΔΜ είναι ίσα.
β. Αρκεί $A\hat{M}B = 180°$ **γ.** Συνέπεια των (α), (β).

20. Εφαρμόστε κατάλληλα το κριτήριο ΠΠΠ.

21. **α.** Τα ΑΒΓ, Α΄Β΄Γ΄είναι ίσα.
Κατόπιν τα ΑΒΜ = Α΄Β΄Μ΄. Τώρα ΑΒΕ = Α΄Β΄Ε΄.
β. Αρκεί να δείξουμε ότι ΒΔ = Β΄Δ΄.

22. Προεκτείνετε κατάλληλα τις διαμέσους.

23. Αν η προέκταση της ΜΕ τέμνει τη ΔΓ στο Ε΄, τότε τα τρίγωνα ΒΜΕ και ΜΔΕ΄ είναι ίσα.

24. **α.** Τα ΑΒΓ, ΑΔΕ είναι ίσα. Κατόπιν τα ΑΝΔ και ΑΒΜ είναι ίσα. Τώρα μπορούμε να δείξουμε ότι $M\hat{A}N = 180°$. **β.** Λόγω της ισότητας των ΑΝΔ, ΑΒΜ και του (α).

2.3 Ισοσκελές τρίγωνο

1. **α.** Λ **β.** Λ **γ.** Σ **δ.** Σ **ε.** Σ **στ.** Σ **ζ.** Σ **η.** Σ **θ.** Σ

2. Κριτήριο ισότητας ορθογώνιων τριγώνων.

3. **α.** Κριτήριο ΓΠΓ για τα τρίγωνα ΒΔΓ, ΒΓΕ. **β.** Κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων.

4. $B\hat{A}\Gamma = 30°$.

5. $A\hat{Z}\Delta = 37{,}5°$.

6. **α.** Είναι $\hat{A}_{εξ} = \hat{B} + \hat{\Gamma} = 2\hat{\Gamma}$, οπότε η διχοτόμος της και η ΒΓ τεμνόμενες από την ΑΓ σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες. **β.** Η $\hat{A}_{εξ}$ χωρίζεται από την παράλληλη σε δύο μέρη, το ένα ίσο με $\hat{B}$ και το άλλο ίσο με $\hat{\Gamma}$.

7. Η ΑΔ είναι διχοτόμος και ύψος στο τρίγωνο ΑΒΕ οπότε είναι ισοσκελές.

8. Τα Α, Κ ισαπέχουν από τα Β, Γ άρα η ευθεία ΑΚ είναι η μεσοκάθετος του ΒΓ.

9. **α.** ΒΔΜ = ΓΕΛ **β.** ΑΜΖ = ΑΛΗ **γ.** Τα μέσα των ίσων πλευρών ενός τριγώνου ισαπέχουν από τη βάση και τις ίσες πλευρές.

10. Τα τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΓΔ είναι ισοσκελή. Η διχοτόμος της Ο είναι μεσοκάθετος του ΑΒ και του ΓΔ.

11. Αρκεί να δείξουμε ότι οι γωνίες $\hat{K}$ και $\hat{A}$ είναι ίσες.

13. **α.** Πρώτα ΑΒΓ = ΑΔΕ , μετά ΖΒΕ = ΖΔΓ **β.** ΑΔΖ = ΑΒΖ (γ) Προκύπτει από τα (α), (β).

14. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΕΑΖ, ΔΒΖ, ΔΓΕ.

15. **α.** Αν Ε το ίχνος του Δ στη ΒΓ, τότε ΑΒ = ΒΕ και ΑΒΓ = ΖΕΒ. **β.** ΔΖ = ΔΓ

17. 0,89 m.

18. **α.** Η ΒΖ είναι μεσοκάθετος του ΑΔ. **β.** Ομοίως, ΑΖΕ ισοσκελές με ΑΖ = ΖΕ. **γ.** $B\hat{A}Z = B\hat{\Delta}Z = \Gamma\hat{E}Z = Z\hat{A}\Gamma$.

19. **α.** Δείχνουμε ότι τα ΑΔΓ, ΒΕΑ, ΓΖΒ είναι ίσα. **β.** Τα ΑΗΕ, ΒΖΚ, ΓΔΘ είναι ίσα.

2.4 Ανισοτικές σχέσεις στο τρίγωνο

1. **α.** Σ **β.** Σ **γ.** Λ **δ.** Σ

2. **α.** iii **β.** iv **γ.** ii **δ.** iv

4. Παρατηρούμε ότι ΑΒ + ΒΓ = ΑΓ και ΓΔ = ΓΑ + ΑΔ.

5. Η $A\hat{N}\Gamma$ είναι μεγαλύτερη από τη $\hat{B}$.

6. Εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας στα τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΓΔ δίνει ΒΔ = 8.

7. Αρκεί να δείξουμε ότι $\hat{A} > \hat{\Gamma}$.

8. Εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας στα τρίγωνα ΑΔΓ και ΑΒΓ.

9. **α.** Κάθε τρίγωνο με μήκη πλευρών ν, ν + 1, ν + 2 όπου ν φυσικός με ν > 1.

10. (60°, 180°)

12. Έστω Ε η προβολή του Δ στη ΒΓ. Τότε ΑΔ = ΔΕ < ΔΓ.

13. **α.** αμβλεία **β.** οξεία **γ.** ορθή

14. **α.** Από ΠΓΠ τα τρίγωνα ΑΒΜ , ΓΜΔ είναι ίσα. Εύκολα τότε ΑΓ > ΓΔ, οπότε στο τρίγωνο ΑΓΔ οι απέναντι γωνίες είναι ομοίως άνισες. **β.** Τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο ΑΓΔ. **γ.** Το (β) μπορεί ομοίως να εφαρμοστεί και για τις άλλες δύο διαμέσους του τριγώνου ΑΒΓ.

15. Το τμήμα ΚΣ τέμνει τον κύκλο σε σημείο Α και η προέκταση του ΣΚ στο Β. Το Α είναι το πλησιέστερο στο Σ σημείο του κύκλου, ενώ το Β το πιο απομακρυσμένο.

16. **α.** Η προέκταση της ΒΜ τέμνει την ΑΓ σε σημείο Δ. Τότε $B\hat{M}\Gamma > B\hat{\Delta}\Gamma > \hat{A}$. **β.** Τριγωνική ανισότητα στα τρίγωνα ΑΒΔ και ΜΔΓ.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

1. Φέρτε το ύψος από το Α.

3. **α.** (4, 4, 2), (4, 3, 3) **β.** (9, 9, 2), (9, 8, 3), (9, 7, 4), (9, 6, 5), (8, 8, 4), (8, 7, 5), (8, 6, 6), (7, 7, 6)

4. Τα Α, Β ισαπέχουν από το πλοίο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 – ΚΥΚΛΟΣ

3.1 Κύκλος - Χορδή - Τόξο - Απόστημα

1. **α.** Λ **β.** Λ **γ.** Λ **δ.** Σ **ε.** Λ **στ.** Σ **ζ.** Σ **η.** Σ **θ.** Σ **ι.** Λ

2. **α.** 9° **β.** 7 ακτίνες. Γενίκευση: $\frac{\omega\nu}{360} - 1$.

3. Αρκεί οι αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες να είναι ίσες.

4. Αρκεί $2\widehat{MN} = \widehat{AB}$.

6-7. Το απόστημα χωρίζει τη χορδή σε ίσα μέρη.

8. Το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

9. (4:00, 120°), (3:30, 75°), (8:20, 130°), (7:10, 205°)

11. Σχεδιάστε τα αποστήματα και αποδείξτε ότι είναι ίσα.

12. Σχεδιάστε τα αποστήματα ΟΜ, ΟΝ των χορδών ΑΒ, ΓΔ αντίστοιχα και συγκρίνετε τα τρίγωνα ΟΜΡ και ΟΝΡ.

13. Σχεδιάστε τα αποστήματα ΟΜ, ΟΝ των χορδών ΑΒ, ΓΔ αντίστοιχα και συγκρίνετε τα τρίγωνα ΟΜΚ, ΟΝΛ.

14. Σχεδιάστε τα αποστήματα ΟΜ, ΟΝ των χορδών ΑΒ, ΓΔ αντίστοιχα και συγκρίνετε τα τρίγωνα ΟΜΚ, ΟΝΚ.

15. Αρκεί να έχουν ίσα αποστήματα.

16. $4 - 2\sqrt{3}$.

17. Χρησιμοποιήστε κατάλληλα την Πρόταση ΙΙΙ, ευθύ και αντίστροφο.
18. Απαγωγή σε άτοπο.

3.2 Σχετικές θέσεις: σημείου - κύκλου, ευθείας - κύκλου, δύο κύκλων

1. **α.** Λ **β.** Λ **γ.** Σ **δ.** Σ **ε.** Σ **στ.** Λ **ζ.** Λ
4. Χρησιμοποιήστε την Πρόταση Ι τέσσερις φορές.
5. Παραδοχές: Θεωρούμε τον κινητήριο άξονα ως σημείο και τα τμήματα του ιμάντα ΔΑ και ΔΒ ως εφαπτόμενα τμήματα στον κύκλο..
6. Έστω Ε το σημείο επαφής της ΓΔ και του κύκλου.
7. Φέρτε τις ακτίνες ΚΑ και ΚΒ και χρησιμοποιηστε τα πορίσματα της Πρότασης Ι.
8. ΑΚ = 4, ΒΛ = 5, ΓΜ = 3.
9. Η ΑΜ είναι εφαπτομένη του κύκλου (Β, ΒΜ).
10. Αν ρ η ακτίνα τους, τότε ΑΒ = 2ρ.
11. Τα αποστήματα των χορδών είναι ακτίνες του μικρού κύκλου.
12. **α.** Είναι ΝΑ = ΝΜ και ΝΒ = ΝΜ.
    β. Οι ΝΚ, ΝΛ είναι διχοτόμοι δύο παραπληρωματικών και εφεξής γωνιών.
    γ. Οι ΚΝ, ΜΒ είναι κάθετες στη ΝΛ και η ΜΑ είναι κάθετη στην ΚΝ.

3.3 Γεωμετρικοί τόποι και κατασκευές

2. Είναι κύκλος ομόκεντρος της ρόδας με τη μισή ακτίνα.
3. Είναι οι δύο ευθείες που διχοτομούν τις τέσσερις σχηματιζόμενες γωνίες.
4. Είναι η μεσοκάθετος του τμήματος ΒΓ χωρίς το μέσο του ΒΓ.
5. Είναι ο κύκλος με κέντρο το μέσο Μ του τμήματος ΒΓ και ακτίνα μ, εκτός από τα σημεία τομής του με την ευθεία ΒΓ.
8. Είναι 15° = 60° - 45° και 105° = 60° + 45°.
9. Το σημείο Μ ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας και στη μεσοκάθετο του ΒΓ.
11. Σχεδιάστε τμήμα ΑΒ = β, ευθεία $\varepsilon \perp$ ΑΒ από το Α. Γράφουμε κύκλο (Β, α).
13. Είναι το σημείο τομής δύο κατάλληλων κύκλων.
14. Είναι το σημείο τομής δύο μεσοκαθέτων.
    Έχει λύση όταν δεν είναι συνευθειακά.
15. Σχεδιάστε δύο διαδοχικές χορδές και τις μεσοκαθέτους τους.
16. **α. i.** Σ **ii.** Λ
    β. Σημείο τομής της (ε) με τη διχοτόμο της γωνίας ΑΓΒ.

17. **α.** Το Δ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΓ.
    β. Τα ΓΕΑ, ΑΔΒ είναι ίσα τρίγωνα.
18. **α.** Δείξτε ότι τα τρίγωνα ΟΗΕ, ΟΖΕ είναι ίσα.
    β. Το ΟΑΒ είναι ισοσκελές τρίγωνο και η ΟΕ είναι διχοτόμος του.

3.4 Κέντρα τριγώνου και αξιοσημείωτοι κύκλοι

1. **α.** Λ **β.** Λ **γ.** Λ **δ.** Σ **ε.** Σ **στ.** Σ **ζ.** Σ **η.** Σ **θ.** Σ **ι.** Σ
2. 1ο) Α ορθόκεντρο, Κ βαρύκεντρο
   2ο) Λ βαρύκεντρο
   3ο) Λ έγκεντρο, Ν ορθόκεντρο
   4ο) Μ περίκεντρο, Α ορθόκεντρο

4-5. Αποδείξτε ότι τα τρίγωνα ΒΔΙ και ΓΕΙ είναι ισοσκελή.

6. Το Κ είναι το σημείο τομής των μεσοκαθέτων δύο πλευρών του τριγώνου ΒΓΔ.
7. Το Ε είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΖΔΓ.
8. Ο θησαυρός βρίσκεται στο περίκεντρο του τριγώνου που ορίζουν τα δέντρα.
9. Αξιοποιήστε τη χαρακτηριστική ιδιότητα του βαρύκεντρου.
11. **α.** ΖΗ = ΑΗ - ΑΖ = ΑΒ - ΑΕ = ΒΕ.
    β. ΓΗ = ΖΓ -ΖΗ =ΔΓ - ΒΕ = ΔΜ + ΒΜ - ΒΔ.
12. Αν Θ το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, εφαρμόζουμε την τριγωνική ανισότητα στα τρίγωνα ΑΒΘ, ΑΓΘ, ΒΓΘ.
13. Ναι. Σχεδιάζουμε τις διχοτόμους δύο εντός και επί τα αυτά γωνιών.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

2. Επιλέξτε τρία σημεία στην περιφέρεια του πιάτου και βρείτε το περίκεντρο του τριγώνου που σχηματίζουν.
3. Οι τρεις ευθείες σχηματίζουν ένα τρίγωνο. Κάθε κύκλος που εφάπτεται σε αυτές έχει ως κέντρο το σημείο τομής των διχοτόμων δύο από τις εσωτερικές ή εξωτερικές γωνίες αυτού του τριγώνου. Υπάρχουν συνολικά τέσσερις τέτοιοι κύκλοι.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 – ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

4.1 Παραλληλόγραμμα

1. **α.** Λ **β.** Σ **γ.** Λ **δ.** Σ **ε.** Λ **στ.** Σ
4. 32°, 148°, 32°, 148°
5. $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 360°$.
6. α, γ.
7. Λάθος. Αντιπαράδειγμα: Ισοσκελές τραπέζιο
8. x = 3.
9. φ = 45°.
10. **α.** ΑΔ = ΒΓ = ΕΖ = ΘΗ
    β. ΑΔ // ΒΓ // ΕΖ // ΘΗ

11. (β) Κ μέσο ΑΒ, 5. ΔΛ = ΚΒ, (στ) Από 1 και 5.

13. Αν ΑΒ // ΓΔ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ τότε $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180°$ άρα ΑΔ // ΒΓ.

14. (β) Λάθος

15. Μισές ίσων γωνιών είναι ίσες.

16. Τα τρίγωνα ΑΔΜ και ΒΓΜ είναι ισοσκελή.

17. ΑΒΓΕ, ΑΓΒΔ παραλληλόγραμμα

18. **α.** ΑΓ ή ΒΔ.
β. ευθεία παράλληλη στις πλευρές που διέρχεται από το κέντρο Κ του ΑΒΓΔ.
γ. ευθεία που διέρχεται από το κέντρο Κ του ΑΒΓΔ και δεν είναι παράλληλη στις πλευρές του.
δ. ΚΕ.

20. ΓΜ, ΓΝ διχοτόμοι εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών.

22. Έστω ΚΛ η γέφυρα, με το Κ από τη μεριά του Α και ΚΛΒΜ παραλληλόγραμμο. Τότε το Κ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΜ.

4.2 Είδη παραλληλογράμμων: Ρόμβος – Ορθογώνιο – Τετράγωνο

1. **α.** Σ **β.** Σ **γ.** Λ **δ.** Σ **ε.** Λ **στ.** Σ **ζ.** Σ **η.** Σ **θ.** Λ

2. **α.** Σ **β.** Λ **γ.** Σ **δ.** Λ

4. **α.** ευθείες παράλληλες στις απέναντι πλευρές που διέρχονται από το κέντρο του.
β. διαγώνιοι.
γ. (α) και (β).

5. Το τετράγωνο είναι ρόμβος.

6. Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι ίσες και διχοτομούνται.

7. **α.** iii **β.** iii

8. $\hat{E} = 150°$, $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma} = 15°$.

10. **α.** ΑΔ = ΒΓ, ΒΓ = ΔΓ
β. ΑΒ = ΔΓ, ΔΓ = ΒΕ
γ. οξείες γωνίες με παράλληλες πλευρές

11. Ισότητα ορθογώνιων τριγώνων

12. Οι πλευρές του τετραπλεύρου είναι ακτίνες ίσων κύκλων.

13. Οι διαγώνιοι του ΑΕΓΖ διχοτομούνται κάθετα.

14. Ισότητα 4 ορθογώνιων τριγώνων

15. Οι μισές δύο παραπληρωματικών γωνιών είναι συμπληρωματικές.

16. Οι διαγώνιοι του ΑΕΓΖ είναι ίσες και διχοτομούνται.

17. **α.** Το τετράπλευρο ΑΔΓΕ έχει μία ορθή γωνία και οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.
β. είναι $\hat{B} = \hat{Z} + B\hat{\Delta}Z$ και ΔΜΓ ισοσκελές.

18. **α.** Η εσωτερική και η εξωτερική διχοτόμος της $\hat{B}$ τέμνονται κάθετα.
β. Αν Κ είναι το κέντρο του ΑΕΒΖ τότε το τρίγωνο ΒΚΕ είναι ισοσκελές.

19. Οι διαγώνιοι του ΑΕΓΔ διχοτομούνται, είναι ίσες και τέμνονται κάθετα.

21. Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΖ είναι ίσα.

23. Φέρουμε το ύψος ΒΖ και Η η προβολή του Μ στη ΒΖ. Τότε ΜΕΖΗ ορθογώνιο και ΒΗ = ΜΔ.

24. Είναι ΒΝΔΜ και ΑΜΓΝ παραλληλόγραμμα και ΑΜΝΒ ορθογώνιο.

25. Οι διχοτόμοι δύο διαδοχικών γωνιών του ορθογωνίου σχηματίζουν ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο.

26. Είναι $\Delta\hat{B}\Gamma = E\hat{\Theta}\Gamma = 45°$ και $K\hat{B}\Theta = O\hat{K}H = 45°$.

27. Από τα άκρα των κάθετων τμημάτων φέρουμε παράλληλες στις πλευρές του τετραγώνου.

4.3 Εφαρμογές των παραλληλογράμμων

1. **α.** Σ **β.** Σ **γ.** Σ **δ.** Λ

2. $\hat{\Gamma} = 50°$, $\hat{K} = 70°$, $\hat{\Lambda} = 50°$

3. ΑΜ = ΚΛ/2 = ΒΓ/4 = 2cm

4. ΑΜ = ΒΓ/2 = 4

5. ΔΒ = 2 και ΒΓ = 6

6. $\Lambda M = \frac{AB}{2} = AK$, ΛΜ/ΑΚ

7. **α.** ισοσκελές **β.** ισόπλευρο **γ.** ορθογώνιο και ισοσκελές.

8. Αν ΑΜ διάμεσος τότε ΑΘ = 2/3ΑΜ = 2/3 ½ ΒΓ = 1/3 ΒΓ.

9. 340cm.

10. ΜΚ // ΑΒ και Μ μέσο ΑΕ, άρα Κ μέσο ΑΔ και ΚΜ = ΔΕ/2.

11. **α.** ΕΖ // ΒΓ και ΔΕ διάμεσος στο ορθογώνιο ΑΔΒ
β. ΑΔΕ, ΑΔΖ ισοσκελή

12. Αρκεί ΕΜ = ΜΔ.

13. $\Delta\hat{A}\Gamma = B$, $M\hat{A}\Gamma = \Gamma$.

14. **α.** ΔΕ = ΑΒ / 2, ΔΖ = ΑΓ / 2
β. ΔΜ = ΕΖ / 2 = ΒΓ / 4

15. Αν Ο κέντρο του ΑΒΓΔ τότε ΑΗ = ΑΟ / 2.

16. Θα αποδειχθεί ότι ΛΝ // ΑΒ και ΛΝ = ΑΒ / 2. Είναι Λ, Ν μέσα των ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα, ΑΛ = ΛΔ και ΝΔ = ΝΒ.

17. ΔΝ = ΑΒ/2, ΜΝ = ΑΓ/2, $M\hat{\Delta}N = \hat{B}$.

18. Αν ΑΔ διχοτόμος, ΑΜ διάμεσος, ΑΕ ύψος τότε $M\hat{A}\Gamma = \hat{\Gamma}$, $E\hat{A}B = \hat{\Gamma}$.

19. Φέρουμε ΑΜ διάμεσο του ΑΒΓ.

20. Χρησιμοποιήστε την ιδιότητα του βαρύκεντρου στο τρίγωνο ΑΒΓ.

21. Προεκτείνουμε τη ΒΕ μέχρι να τμήσει την ΑΓ στο Ζ.

22. Από το Κ φέρνουμε παράλληλη στη ΜΝ, από το Λ στην ΚΝ και από το Μ στην ΚΛ.

23. Αν Κ, Λ, Μ είναι τα μέσα των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, τότε οι ευθείες ΚΛ, ΛΜ, ΜΝ είναι λύσεις του προβλήματος.

24. Τα Κ, Λ δεν είναι απαραίτητα τα μέσα. Αν Μ, Ν μέσα των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα και Κ σημείο του ΑΜ, γράφουμε κύκλο (Κ, ΜΝ).

25. Αν (η) ευθεία παράλληλη στην (ε) από το Α τότε ο γ.τ. είναι η μεσοπαράλληλη των (ε), (η).

26. Κύκλος με διάμετρο ΑΒ χωρίς τα Α, Β.

4.4 Τραπέζια

1. **α.** Λ **β.** Λ **γ.** Λ **δ.** Λ **ε.** Σ **στ.** Σ

2. **α.** x = 2,5 **β.** x = 2 **γ.** x = 8

3. 50°, 130°, 130°.

4. $A\hat{O}B = 360° : 20 = 18°, \hat{A} = \hat{B} = \dfrac{180° - 18°}{2} = 81°, \hat{\Delta} = \hat{\Gamma} = 99°.$

5. Αρκεί το σημείο σύνδεσης των ποδιών να ισαπέχει από τα άνω άκρα τους, οπότε τα τέσσερα άκρα θα σχηματίζουν ισοσκελές τραπέζιο.

6. Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΖ είναι ίσα.

8. ΕΖ = 9x/4

9. Τα μέσα των πλευρών ισοσκελούς τραπεζίου ορίζουν τμήματα ίσα με τα μισά των ίσων διαγωνίων του.

10. **α.** Δεν ισχύει, μπορεί να είναι παραλληλόγραμμο.
β. Ισχύει.

11. Η ευθεία που διέρχεται από τα μέσα των βάσεών του.

13. Αν η ΒΗ τέμνει τη ΔΓ στο Θ, τότε ΒΘΓ ισοσκελές.

14. Φέρουμε ΒΚ // ΑΔ, ΕΜ = ΒΓ/2.

15. Με κατάλληλη ευθεία χωρίζουμε το τραπέζιο σε ένα παραλληλόγραμμο και ένα τρίγωνο. Κατασκευάζουμε το τρίγωνο.

16. **α.** ΔΕ = ΖΗ = ΑΒ / 2, ΖΗ // ΑΒ και ΔΕ τέμνει την ΑΒ, άρα ΕΔ τέμνει την ΑΒ.
β. Αν Ο το κέντρο του κύκλου που διέρχεται από τα Ε, Ζ, Η, τότε ΟΕΔ = ΟΖΗ άρα ΟΔ = ΟΗ.

17. **α.** ΗΒ // ΖΓ, ΗΒ = ΖΓ, ΗΒ = ΒΓ
β. $H\hat{Z}E = Z\hat{E}\Gamma$, $H\hat{Z}E = Z\hat{E}H$
γ. ΗΕ = ΑΒ / 2 = ΗΒ = ΖΓ, ΕΓ // ΗΖ, ΗΕ τέμνει τη ΖΓ επειδή ΗΕ τέμνει την ΗΒ και ΗΒ // ΖΓ
δ. κάθετα σε αυτή. Η ΖΗ διέρχεται από το μέσο της ΑΕ κάθετα σε αυτή.
ε. Αν Β ≤ 60°, τότε ΒΗΕ ≥ 60° άρα ΒΕ ≥ ΗΒ = ΒΓ άτοπο, επειδή Ε εσωτερικό του ΒΓ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 – ΕΥΘΕΙΕΣ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΑ ΣΤΟΝ ΧΩΡΟ

5.1 Σχετικές θέσεις δύο ευθειών, δύο επιπέδων, ευθείας και επιπέδου στον χώρο

1. **α.** Σ **β.** Λ **γ.** Σ **δ.** Λ **ε.** Λ

3. **α.** ΑΗ, ΕΓ **β.** ΑΘ **γ.** ΘΔ **δ.** ΒΓ **ε.** ΔΓ
στ. i. ΔΓ **ii.** ΕΘ **iii.** ΕΖ
ζ. i. (Α, ΕΔ), (Α, ΒΔ), (Α, ΒΕ) **ii.** (Α,ΒΔ), (Α, ΒΕ), (Ε, ΔΘ)

4. **α.** ΑΔ, ΒΓ **β.** ΒΓ **γ.** ΒΔ **δ.** ΕΒ
ε. (Γ, ΕΒ), (Δ, ΕΒ) με τομή ΕΒ **στ.** το σημείο Γ

5. Οι ευθείες ΑΓ, ΒΔ περιέχονται στο επίπεδο που ορίζουν οι παράλληλες ΑΒ, ΓΔ και δεν τέμνονται αφού περιέχονται σε παράλληλα επίπεδα.

6. Αν οι ευθείες τέμνονται στα Α, Β, Γ, τότε το επίπεδο (Α, Β, Γ) περιέχει και τις τρεις ευθείες.

5.2 Δίεδρη γωνία

1. **α.** Τα ΑΒΓ και ΑΒΔ είναι ίσα. **β.** 60°.

2. **α.** Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ίσα.
β. i. (ΔΑ, Μ) **ii.** Τα ΑΜ, ΔΜ είναι ύψη των τριγώνων ΑΒΓ και ΔΒΓ.

3. 30°.

Ευρετήριο