

### Συμπληρωματικό Υλικό 2.3.2.1 Διάταξη στην πραγματική ευθεία

Στην πραγματική ευθεία, αυτό σημαίνει ότι αν επιλέξουμε δύο σημεία  $\alpha$  και  $\beta$  πάνω του, τότε ή το  $\alpha$  είναι αριστερά του  $\beta$  ή το  $\alpha$  θα συμπέσει με το  $\beta$  ή το  $\alpha$  θα είναι δεξιά του  $\beta$ . Η πρόταση αυτή φαίνεται προφανής, όπως φαίνεται επίσης προφανές και το γεγονός ότι η πραγματική ευθεία δεν διακόπτεται και πουθενά δεν έχει κενά. Δηλαδή, δεν υπάρχει σημείο της που να μην αντιστοιχεί σε κάποιο πραγματικό αριθμό, ούτε πραγματικός αριθμός που να μην έχει θέση στην πραγματική ευθεία. Θα αποδείξουμε (με πολύ απλό τρόπο) ακόμα (βλ Πυκνότητα των πραγματικών αριθμών) ότι το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι πυκνό, πολύ πυκνό, μάλιστα τόσο πολύ πυκνό που πάντα μεταξύ δυο πραγματικών αριθμών, όσο κοντά και αν βρίσκονται μεταξύ τους πάνω στην πραγματική ευθεία, πάντα υπάρχει τουλάχιστον ακόμα ένας αναμεσά τους. Μπορεί να αποδειχτεί ότι μεταξύ δύο πραγματικών βρίσκεται ένας ρητός και μεταξύ δυο πραγματικών βρίσκεται ένας άρρητος. Συνέπεια, αυτού του γεγονότος είναι ότι μεταξύ δυο ρητών βρίσκεται ένας άρρητος και μεταξύ δυο αρρήτων ένας ρητός. Αυτό όμως που φαίνεται πολύ «παράξενο» είναι ότι ενώ οι άρρητοι είναι πολύ περισσότεροι από τους ρητούς (με απλά λόγια τους δεύτερους, παρόλο που είναι άπειροι, μπορούμε να τους μετρήσουμε, δηλαδή, να τους θέσουμε σε μια ένα προς ένα αντιστοιχία με τους φυσικούς αριθμούς, ενώ τους πρώτους δεν μπορούμε) έχουν την πιο πάνω ιδιότητα, δηλαδή, «ανακατεύονται» μεταξύ τους κατά αυτόν τον τρόπο.