Άθροισμα και Γινόμενο των ριζών της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ \alpha\neq 0$

Κατασκευή εξίσωσης 2ου βαθμού

Μπορούμε να κατασκευάσουμε μια εξίσωση 2ου βαθμού, όταν γνωρίζουμε τις ρίζες της x_1, x_2 ή το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών της.

Έστω η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ \alpha\neq 0$ και έστω x_1, x_2 οι ρίζες της. Αν συμβολίσουμε με S και P το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών αντίστοιχα, τότε

$$S=x_1+x_2=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}+\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}=\frac{-2\beta}{2\alpha}=-\frac{\beta}{\alpha}$$

και

$$P=x_1\cdot x_2=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}\cdot\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}=\frac{\beta^2-\left(\beta^2-4\alpha\gamma\right)}{4\alpha^2}=\frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2}=\frac{\gamma}{\alpha}.$$

Άρα

$$S=-\frac{\beta}{\alpha}\quad \text{και}\quad P=\frac{\gamma}{\alpha}\quad \text{(Τύποι του Vieta)}$$

(*Βλέπε και* https://en.wikipedia.org/wiki/Vieta%27s_formulas)

Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ \alpha\neq 0$, με τη βοήθεια των τύπων του Vieta, γράφεται ισοδύναμα

$$\begin{aligned}\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 &\Leftrightarrow x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}=0\\ &\Leftrightarrow x^2-\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)x+\frac{\gamma}{\alpha}=0\\ &\Leftrightarrow x^2-Sx+P=0\end{aligned}$$

Η τελευταία μορφή μας δίνει τις εξής δυνατότητες:

(i) Να κατασκευάζουμε μια εξίσωση 2ου βαθμού αν είναι γνωστό το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών της.

Για παράδειγμα, αν το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών μιας εξίσωσης είναι $S=4$ και $P=3$ τότε η εξίσωση είναι η $x^2-4x+3=0$.

(ii) Να βρίσκουμε δύο αριθμούς αν γνωρίζουμε το άθροισμά τους S και το γινόμενό τους P.

Για παράδειγμα, αν το άθροισμα και το γινόμενο αριθμών είναι $S=-6$ και $P=-391$ τότε οι αριθμοί αυτοί είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2+6x-391=0$, οπότε για να τους βρούμε λύνουμε κατά τα γνωστά την εξίσωση και βρίσκουμε

$$x_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot(-391)}}{2}=\frac{-6\pm\sqrt{36+1564}}{2}=\frac{-6\pm\sqrt{1600}}{2}=\frac{-6\pm 40}{2}=\begin{cases}\dfrac{-6+40}{2}=\dfrac{34}{2}=17\\[2mm] \dfrac{-6-40}{2}=\dfrac{-46}{2}=-23\end{cases}$$

Συνεπώς οι αριθμοί είναι οι 17 και -23 .

Παράδειγμα Να σχηματίσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού της οποίας οι ρίζες έχουν άθροισμα S και γινόμενο P και να βρείτε τις ρίζες (χωρίς την χρήση των τύπων) όταν

(α) $S=-3$ και $P=-4$ (β) $S=-6,5$ και $P=3$

(γ) $S=1-\sqrt{5}$ και $P=\sqrt{5}$ (δ) $S=\frac{\kappa-\lambda}{\kappa\lambda}$ και $P=-\frac{1}{\kappa\lambda}$, $\kappa\lambda\neq 0$

Λύση

Θα σχηματίσουμε σε κάθε περίπτωση την εξίσωση $x^2-Sx+P=0$.

(*Για την εύρεση των ριζών από τα ζεύγη των αριθμών με γινόμενο P επιλέγουμε εκείνο με άθροισμα S.*)

(α) $x^2+3x-4=0,\ x_1=-4$ ή $x_2=1$.

(β) $x^2+6,5x+3=0$ ή $x^2+(6+0,5)x+6\cdot 0,5=0 \Leftrightarrow x=-6$ ή $x=-0,5$

(γ) $x^2-\left(1-\sqrt{5}\right)x-\sqrt{5}=0$ ή $x^2-\left[1+\left(-\sqrt{5}\right)\right]x+1\cdot\left(-\sqrt{5}\right)=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=-\sqrt{5}$.

(δ) $x^2-\frac{\kappa-\lambda}{\kappa\lambda}x-\frac{1}{\kappa\lambda}=0$ ή $x^2-\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\kappa}\right)x+\frac{1}{\lambda}\left(-\frac{1}{\kappa}\right)=0 \Leftrightarrow x_1=\frac{1}{\lambda}$ ή $x_2=-\frac{1}{k}$.

Παράδειγμα Να υπολογιστεί η τιμή των παρακάτω παραστάσεων χωρίς να υπολογίσετε τις ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης $x^2-x-1=0$.

(α) $x_1^2+x_2^2$ (β) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$ (γ) $x_1^3+x_2^3$ (δ) $x_1^4+x_2^4$

Λύση

Έχουμε

$$S=x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{-1}{1}=1 \quad \text{και} \quad P=x_1\cdot x_2=\frac{-1}{1}=-1.$$

(α) $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=1^2-2(-1)=1+2=3$.

(β) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}\overset{(\alpha)}{=}\frac{3}{-1}=-3$.

(γ) $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=1^3-3(-1)1=1+$

(δ) $\left(x_1^4+x_2^4=\left(x_1^2+x_2^2\right)^2-2(x_1x_2)^2=\left[(x_1+x_2)^2-2(x_1x_2)\right]^2-2(x_1x_2)^2=3^2-2(-1)^2=9-2=7\right.$

Τίτλος: «**Άθροισμα και Γινόμενο των ριζών της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha\neq 0$**»

Έκδοση: **1.5**

Ημερομηνία: **10/09/2025**

Συντονιστής ομάδας σχεδιασμού και ανάπτυξης: **Κέλλυ Σαρρή Πασχαλίδη**

Δημιουργία: **ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΓΡΑΦΗ**

Το παρόν αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της Πράξης «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ (MIS) 6010165, του Προγράμματος «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή 2021-2027» που υλοποιείται από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής και συγχρηματοδοτείται από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο.