

Μερικές ακόμα βασικές ιδιότητες των πραγματικών αριθμών

Συμπληρωματικό Υλικό 1.1.9

Για τις τέσσερις πράξεις και την ισότητα ισχύουν οι ακόλουθες πολύ βασικές ιδιότητες που είναι γνωστές από το Γυμνάσιο.

$$1. (\alpha = \beta \text{ και } \gamma = \delta) \Rightarrow \alpha + \gamma = \beta + \delta \text{ και } \alpha - \gamma = \beta - \delta$$

Δηλαδή:

Μπορούμε δυο ισότητες να τις προσθέσουμε (ή να τις αφαιρέσουμε) κατά μέλη και να πάρουμε πάλι μια ισότητα.

$$2. (\alpha = \beta \text{ και } \gamma = \delta) \Rightarrow \alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \delta$$

Δηλαδή:

Μπορούμε δυο ισότητες να τις πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη και να πάρουμε πάλι μια ισότητα.

$$3. \alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma$$

Δηλαδή:

Μπορούμε και στα δυο μέλη μιας ισότητας να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό και να διατηρηθεί η ισότητα.

Όταν μεταβαίνουμε από τη ισότητα $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$ στην ισότητα $\alpha = \beta$, λέμε ότι διαγράφουμε τον ίδιο προσθετέο, δηλαδή τον γ , και από τα δύο μέλη της ισότητας και αυτό μπορούμε να το κάνουμε για οποιουδήποτε αριθμούς α , β και γ .

4. Αν $\gamma \neq 0$, τότε:

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$$

Δηλαδή:

Μπορούμε και τα δυο μέλη μιας ισότητας να τα πολλαπλασιάσουμε ή να τα διαιρέσουμε με τον ίδιο μη μηδενικό αριθμό και να διατηρηθεί η ισότητα.

Όταν μεταβαίνουμε από την ισότητα $\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$ στην ισότητα $\alpha = \beta$, λέμε ότι διαγράφουμε (ή διαιρούμε κατά μέλη) με τον ίδιο παράγοντα, δηλαδή τον γ , και τα δύο μέλη της ισότητας και αυτό μπορούμε να το κάνουμε για οποιουδήποτε αριθμούς α , β αλλά όχι για οποιονδήποτε γ . Ο γ πρέπει να είναι διάφορος από το μηδέν. (Δεν μπορούμε να κάνουμε διαίρεση με το 0.)

Δείτε ένα περίεργο πρόβλημα:

Έχουμε στο μυαλό μας το $\alpha = 0$ και σκεφτόμαστε ότι $\alpha^2 = \alpha$ που είναι, προφανώς, σωστό. Λέμε στο φίλο μας ότι $\alpha^2 = \alpha$ και μας απαντάει ότι το $\alpha = 1$, που είναι σωστό. Ο διδάσκων μας είπε ότι το δικό μας συμπέρασμα είναι σίγουρα σωστό, ενώ αυτό που κατέληξε ο φίλος μας είναι λανθασμένο. Ο φίλος μας διαμαρτύρεται ότι δεν του δώσαμε σωστά την εκφώνηση. Μπορείτε να βοηθήσετε ώστε να δοθεί η σωστή απάντηση και να είναι όλοι ικανοποιημένοι; (Αυτή η δυνατότητα όντως υπάρχει. Σας ενθαρρύνουμε να το προσπαθήσετε αλλά αν δεν τα καταφέρετε συζητήστε το με τον διδάσκοντα).

$$5. \alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0$$

Δηλαδή:

Το γινόμενο δύο πραγματικών αριθμών είναι ίσο με το μηδέν, αν και μόνο αν ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς είναι ίσος με το μηδέν.

(Αυτή την ιδιότητα την έχουμε ξανασυναντήσει ως μια πρόταση, την αναφέρουμε, ωστόσο σε αυτό το σημείο γιατί εδώ είναι η «φυσική» της θέση και γιατί είναι πολύ χρήσιμη.)

Το σύμβολο \neq μας είναι γνωστό και δηλώνει ανισότητα. Δηλαδή, η γραφή $\alpha \neq \beta$ σημαίνει ότι το α δεν είναι ίσο με το β .

Σε αντίθεση με το σύμβολο της ισότητας ($=$), για το οποίο υπάρχουν σαφείς και χρήσιμες ιδιότητες (όπως η συμμετρία, η μεταβατικότητα κ.λπ.), δεν υπάρχουν αντίστοιχες «ιδιότητες» που να βασίζονται στο σύμβολο \neq .

Ο λόγος είναι ότι η ανισότητα δεν έχει τη σταθερή λογική δομή που επιτρέπει να γίνονται αλυσιδωμένα συμπεράσματα με την ίδια ευκολία — και πολλές φορές, τέτοιες προτάσεις δεν μπορούν να χαρακτηριστούν με σαφήνεια ως αληθείς ή ψευδείς χωρίς πρόσθετες πληροφορίες. Υπάρχει όμως μια πολύ απλή και σημαντική συνάμα ιδιότητα, η οποία (για τη μαθηματική λογική) είναι άμεση συνέπεια της ιδιότητας 5, θα την αναφέρουμε όμως σαν πρόταση (την έχουμε ξανασυναντήσει άλλωστε) για να της δώσουμε το κύρος που της αξίζει.

ΠΡΟΤΑΣΗ

$$\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0$$

Οι ιδιότητες στα μαθηματικά είναι βασικές προτάσεις που μπορούν να αποδειχθούν με βάση τους ορισμούς των σχετικών εννοιών αλλά και τυχόν αξιωμάτων που σχετίζονται με το περιεχόμενό τους.

Δραστηριότητα Με βάση τον ορισμό της ισότητας, αλλά και ότι άλλο θεωρείτε βασικό, αποδείξτε τις παραπάνω ιδιότητες και κάντε μια συζήτηση (μεταξύ σας ή και με τον διδάσκοντα) σχετικά με το αντίστροφο όπου ισχύει ή δεν ισχύει.

Τίτλος: «**Μερικές ακόμα βασικές ιδιότητες των πραγματικών αριθμών**»

Έκδοση: **1.5**

Ημερομηνία: **10/09/2025**

Συντονιστής ομάδας σχεδιασμού και ανάπτυξης: **Κέλλυ Σαρρή Πασχαλίδη**

Δημιουργία: **ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΓΡΑΦΗ**



Το παρόν αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της Πράξης «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ (ΜΙΣ) 6010165, του Προγράμματος «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή 2021-2027» που υλοποιείται από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής και συγχρηματοδοτείται από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο.



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας, Θρησκευμάτων
και Αθλητισμού



Με τη συγχρηματοδότηση
της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Πρόγραμμα
Ανθρώπινο Δυναμικό και
Κοινωνική Συνοχή