

Οι Ρίζες των Αριθμών που δεν είναι Τέλεια Τετράγωνα είναι Άρρητοι Αριθμοί – Απόδειξη με Απαγωγή σε Άτοπο (Σ. Υ. 1.1.5)

Παράδειγμα: Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ δεν είναι ρητός.

Πέρα από το προφανές συμπέρασμα, δηλαδή, ότι υπάρχουν αριθμοί που δεν είναι ρητοί, το οποίο θα ήταν δύσκολο να το αποδείξουμε αν μας δινόταν έτσι, διαπιστώνουμε ότι δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ευθεία απόδειξη. Πώς να συμβολίσουμε ένα αριθμό που δεν ξέρουμε καν πως είναι; (Σε κάθε περίπτωση ένας συμβολισμός είναι χρήσιμος αν δηλώνει κάτι που στη συνέχεια θα βοηθήσει να πάμε από το Α στο Β.) Επομένως, πρέπει να σκεφτούμε διαφορετικά. Ας υποθέσουμε ότι το $\sqrt{2}$ είναι ρητός. Τότε, θα μπορεί να γράφεται σαν ένα κλάσμα. Έστω λοιπόν ότι

$$\sqrt{2} = \frac{\alpha}{\beta}, \text{ όπου } \alpha \text{ και } \beta \text{ θετικοί ακέραιοι.}$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ακόμα ότι το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι *ανάγωγο κλάσμα* (δηλαδή, δεν απλοποιείται). (Κάθε κλάσμα μπορούμε να το φέρουμε σε μια τέτοια μορφή, δηλαδή, τέτοιο ώστε ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των α και β να είναι ίσος με το 1 (μκδ (α, β) = 1). Ανατρέξτε σε βιβλία των προηγούμενων τάξεων για μια σύντομη επανάληψη). Τότε, θα έχουμε

$$(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2, \text{ οπότε } 2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2} \text{ ή } \alpha^2 = 2\beta^2.$$

Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι το $2 \mid 2\beta^2$ (γιατί είναι πολλαπλάσιό του), επομένως, το 2 θα διαιρεί και το ίσο του, δηλαδή, το $2 \mid \alpha^2$. Μπορούμε στο σημείο αυτό να κάνουμε τον εξής συλλογισμό. Αν ο α είναι περιττός, τότε ο $\alpha^2 = \alpha \cdot \alpha$ είναι περιττός, οπότε δεν διαιρείται με το 2. Άρα, ο α είναι άρτιος, έστω ο $\alpha = 2\kappa$, όπου κ είναι κάποιος ακέραιος. Από την $\alpha^2 = 2\beta^2$ για $\alpha = 2\kappa$ παίρνουμε $(2\kappa)^2 = 2\beta^2$ ή $4\kappa^2 = 2\beta^2$, οπότε, $2\kappa^2 = \beta^2$.

Από την τελευταία με τα ίδια επιχειρήματα που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω συμπεραίνουμε ότι ο β είναι άρτιος. Όμως δεν μπορεί οι α και β να είναι και οι δύο άρτιοι, γιατί έχουμε υποθέσει ότι μκδ (α, β) = 1 (δηλαδή, οι α και β είναι *πρώτοι μεταξύ τους*, όπως λέγονται.). Καταλήξαμε σε λανθασμένο συμπέρασμα, *σε άτοπο* (χωρίς λογική βάση, παραλογισμό), όπως λέμε στα μαθηματικά, γιατί υποθέσαμε ότι το $\sqrt{2}$ είναι ρητός. Επομένως, δεν είναι.

Σχόλιο

Η απόδειξη ότι το $\sqrt{2}$ είναι άρρητος, που παρουσιάσαμε παραπάνω έχει μεγάλη δόση υπερβολής με την έννοια ότι είναι γραμμένη πολύ σχολαστικά. Στα μαθηματικά δεν γράφονται έτσι οι αποδείξεις. Πρέπει να είναι σύντομες περιεκτικές και πλήρεις. Γράψτε πάλι την απόδειξη αυτή παραλείποντας ότι νομίζετε ότι είναι αυτονόητο κατά τη γνώμη σας, ωστόσο, κάντε το με μεγάλη προσοχή, ώστε να μην παραλείψετε έννοιες που είναι κρίσιμες για την απόδειξη. Στο παράδειγμα που συζητήσαμε μια πολύ κρίσιμη (βασική, σημαντική) έννοια είναι η λέξη *ανάγωγο*. Σκεφτείτε λίγο το γιατί.

Η μέθοδος απόδειξης που χρησιμοποιήσαμε λέγεται **απαγωγή σε άτοπο** και είναι ιδιαίτερως χρήσιμη αλλά και εύχρηστη, όπως φαίνεται στα επόμενα παραδείγματα. Το παραπάνω παράδειγμα που τη χρησιμοποιήσαμε ίσως δεν επιβεβαιώνει την άποψη ότι είναι εύχρηστη, ωστόσο, το παράδειγμα αυτό είναι πολύ σημαντικό, γιατί *αποδεικνύεται η ύπαρξη αριθμών που δεν είναι ρητοί*.

Τίτλος: «**Οι Ρίζες των Αριθμών που δεν είναι Τέλεια Τετράγωνα**»

Έκδοση: **1.5**

Ημερομηνία: **10/09/2025**

Συντονιστής ομάδας σχεδιασμού και ανάπτυξης: **Κέλλυ Σαρρή Πασχαλίδη**

Δημιουργία: **ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΓΡΑΦΗ**



Το παρόν αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της Πράξης «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ (ΜΙΣ) 6010165, του Προγράμματος «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή 2021-2027» που υλοποιείται από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής και συγχρηματοδοτείται από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο.



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας, Θρησκευμάτων
και Αθλητισμού



ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ
ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ



Με τη συγχρηματοδότηση
της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Πρόγραμμα
Ανθρώπινο Δυναμικό και
Κοινωνική Συνοχή