

### Συμπληρωματικό Υλικό 1.1.7 Οι Τέσσερις Πράξεις

Υποθέτουμε ακόμα ότι ξέρουμε πώς να προσθέτουμε, να αφαιρούμε να πολλαπλασιάζουμε και να διαιρούμε (χρειάζεται λίγη προσοχή η διαίρεση) και δεν χρειάζεται να εξηγήσουμε τίποτα για το πώς το κάνουμε και γιατί κάνει τόσο. Για παράδειγμα, λέμε χωρίς καμία αιτιολόγηση ότι  $2 + 3 = 5$ . Αν και μπορούμε να δώσουμε κάποιο ορισμό στις πράξεις δεν το κάνουμε. Για παράδειγμα, μπορούμε να πούμε: Πρόσθεση είναι μια διαδικασία όπου όταν δίνονται δυο αριθμοί μας δίνει ένα τρίτο το άθροισμά τους. Φυσικά δημιουργούμε μια νέα έννοια το *άθροισμα* και αρχίζουμε πάλι από την αρχή. Δεν θα αναζητήσουμε ορισμούς για τις έννοιες *άθροισμα*, *διαφορά*, *γινόμενο* και *πηλίκο* δυο φυσικών αριθμών, όταν αυτές γίνονται, (σκεφτείτε πράξεις και περιπτώσεις αριθμών που δεν γίνονται αυτές οι πράξεις) δεν χρειάζεται, όλοι τις ξέρουμε. Χρειάζεται μια προσοχή η διαίρεση. Δεν μπορούμε να διαιρέσουμε με το μηδέν. (Επιχειρήστε να κάνετε μια διαίρεση με το μηδέν και προσπαθήστε να καταλάβετε το γιατί δεν γίνεται. Τα πειράματα στα μαθηματικά είναι ακίνδυνα....) Φυσικά, για να ορίσουμε τις πράξεις στους ακεραίους, όταν αυτό γίνεται, (σκεφτείτε πράξεις και περιπτώσεις αριθμών που δεν γίνονται αυτές οι πράξεις) βασιζόμαστε στις πράξεις μεταξύ δυο φυσικών αριθμών και τις επεκτείνουμε με βάση συγκεκριμένους κανόνες. Για παράδειγμα, ξέρουμε ότι:

$$4 - 7 = -3, 0 + 5 = 5, 0 - 3 = -3, 2 \times 3 = 6, 0 \times 6 = 0, 2 \times (-4) = -8, (-3) \times (-3) = -12, 6 : (-2) = -3,$$

Επιχειρήστε να θυμηθείτε τους κανόνες που χρησιμοποιήσαμε για τα πάρουμε τα παραπάνω αποτελέσματα να τους διατυπώσετε και να τους πείτε (φωναχτά). Να το κάνετε αυτό τακτικά. Είναι ένα πολύ καλό αυτοδιαγνωστικό τεστ.

**ΣΧΟΛΙΟ** Αν παρατηρήσετε προσεκτικά τον τίτλο της ενότητας αυτής θα δείτε ότι δεν υπάρχει άρθρο. Δεν γράφει «Οι πράξεις στους πραγματικούς αριθμούς» αλλά «Πράξεις στους πραγματικούς αριθμούς». Επίσης, ο υπότιτλος παραπάνω είναι «Οι Τέσσερες Πράξεις...» και όχι «Οι Πράξεις και οι ιδιότητές τους». Αυτά τα δυο δεν είναι τυχαία. Είδαμε, όταν ορίσαμε την πρόσθεση αλλά και τον πολλαπλασιασμό, ότι όταν δίνεται ένα ζευγάρι αριθμών όταν κάνουμε πρόσθεση βρίσκουμε το άθροισμά τους και όταν κάνουμε πολλαπλασιασμό το γινόμενο τους και στη συνέχεια ορίσαμε την αφαίρεση και τη διαίρεση με βάση την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό αντίστοιχα. Αυτές είναι οι τέσσερις (βασικές) πράξεις της άλγεβρας, γι' αυτό και όταν λέμε «οι τέσσερις πράξεις» ή «προβλήματα των τεσσάρων πράξεων» εννοούμε αυτές. Στα μαθηματικά όμως υπάρχουν και άλλες πράξεις που τις ορίζουμε κατά περίπτωση ανάλογα με το τι θέλουμε να μελετήσουμε. Για παράδειγμα, μπορούμε για δυο

αριθμούς  $\alpha$  και  $\beta$  να ορίσουμε μια πράξη που να μας δίνει τον αριθμό  $\alpha + \beta + \alpha \cdot \beta$ . Είναι πολύ όμορφη πράξη αυτή με ωραίες ιδιότητες. Προφανώς είναι αντιμεταθετική, έχει ουδέτερο στοιχείο και όλα της τα στοιχεία έχουν συμμετρικό εκτός από ένα. (Προσπαθήστε να βρείτε το ουδέτερο στοιχείο, το συμμετρικό κάθε στοιχείου που έχει συμμετρικό και το στοιχείο που δεν έχει.) Επομένως, οι πράξεις που θα μας απασχολήσουν στη μελέτη των πραγματικών αριθμών αλλά και γενικότερα στα μαθηματικά του Λυκείου είναι οι τέσσερες βασικές και δεν είναι οι μόνες πράξεις που ορίζονται στους πραγματικούς αριθμούς. Όσες και όποιες θέλουμε μπορούμε να ορίσουμε, αρκεί να είναι χρήσιμες. Η διαχρονικότητα στα μαθηματικά είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την χρησιμότητα. Για παράδειγμα, ποιος θα θυμόταν την πρόσθεση στο δυαδικό σύστημα που ορίζεται από τις σχέσεις  $0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1, 1 + 0 = 1$  και  $1 + 1 = 0$  (εδώ υπάρχουν μόνο δύο ψηφιά το 0 και το 1) αν δεν υπήρχαν οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές, οι οποίοι αποθηκεύουν και επεξεργάζονται δεδομένα στο δυαδικό σύστημα.