

Οι Ιδιότητες των Τεσσάρων Πράξεων

Συμπληρωματικό Υλικό 1.1.8

Στους πραγματικούς αριθμούς έχουμε ορίσει την πρόσθεση ως τη διαδικασία που όταν δίνονται δύο αριθμοί α και β μας δίνει έναν τρίτο αριθμό το άθροισμά τους $\alpha + \beta$.

(Δεν είναι ανάγκη να εξηγήσουμε και πολύ περισσότερο να αποδείξουμε το γιατί $2 + 3 = 5$. Δεν τα αποδεικνύουμε όλα στα μαθηματικά.. Μερικές απλές αλήθειες απλά τις δεχόμαστε. Ωστόσο, υπάρχουν και κάποιες αλήθειες που τις δεχόμαστε, απλά γιατί έχουμε πειστεί ότι είναι αλήθειες, χωρίς να μπορούμε να τις αποδείξουμε. Αυτές λέγονται αξιώματα στα μαθηματικά. Για παράδειγμα, στη θεμελίωση των φυσικών αριθμών δεχόμαστε ότι το 0 είναι φυσικός. Ακόμα, δεχόμαστε ότι υπάρχει ένα φυσικός αριθμός, (συνήθως εννοούμε το 1 και όχι το 0), τον οποίο θεωρούμε ως πρώτο (στη σειρά) και κάθε ένας φυσικός κατασκευάζεται από τον προηγούμενο του με πρόσθεση του 1. Έτσι ξεκινώντας από το 1, παίρνουμε το 2 ως $1 + 1$, το 3 ως $2 + 1$ κ.ο.ε. Δεν μπορεί να αποδείξει κανένας αυτή την αλήθεια αλλά ούτε και να την αμφισβητήσει.)

Με ανάλογο τρόπο με την πρόσθεση έχουμε ορίσει τον πολλαπλασιασμό ως τη διαδικασία που όταν δίνονται δύο αριθμοί α και β μας δίνει ένα τρίτο αριθμό το γινόμενο τους $\alpha \cdot \beta$.

Για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό ισχύουν οι ιδιότητες οι ακόλουθες, οι οποίες και αποτελούν τη βάση του αλγεβρικού λογισμού.

- $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ και $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ (Αντιμεταθετική)
- $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$ και $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$ (Προσεταιριστική)
- $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$ και $\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$ (Ουδέτερο)
- $\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0$ και $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \cdot \alpha = 1, \alpha \neq 0$ (Συμμετρικό)
- $\kappa(\alpha + \beta) = \kappa \cdot \alpha + \kappa \cdot \beta$ (Επιμεριστική του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση)

Οι αριθμοί α και $-\alpha$ λέγονται αντίθετοι και οι αριθμοί α και $\frac{1}{\alpha}$ λέγονται αντίστροφοι.

Ακόμα λέμε ότι το $-\alpha$ είναι το συμμετρικό του α (ή το α του $-\alpha$) ως προς την πρόσθεση καθώς και ότι $\frac{1}{\alpha}$ ($\alpha \neq 0$) είναι το συμμετρικό του α (ή το α του $\frac{1}{\alpha}$) ως προς τον πολλαπλασιασμό. Το 0 λέγεται και ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης, διότι προστιθέμενο σε οποιονδήποτε αριθμό δεν τον μεταβάλλει. Επίσης το 1 λέγεται και ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού, διότι οποιοσδήποτε αριθμός πολλαπλασιαζόμενος με αυτόν δεν μεταβάλλεται. Αντίθετο έχουν όλοι οι πραγματικοί (το 0 έχει τον εαυτό του), ενώ αντίστροφο έχουν όλοι (το 1 έχει τον εαυτό του) εκτός από το 0.

Η αφαίρεση και η διαίρεση ορίζονται με τη βοήθεια της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού αντιστοίχως ως εξής:

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta) \quad \text{και} \quad \alpha : \beta = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}.$$

Δηλαδή:

Για να βρούμε τη διαφορά $\alpha - \beta$, προσθέτουμε στο μειωτέο τον αντίθετο του αφαιρετέου, ενώ για να βρούμε το πηλίκο $\alpha : \beta$, με $\beta \neq 0$, πολλαπλασιάζουμε το διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη. Δηλαδή, κάθε αφαίρεση μετατρέπεται σε μια πρόσθεση και κάθε διαίρεση σε ένα πολλαπλασιασμό. Επομένως, δεν χρειάζεται να ορίσουμε ιδιότητες για την αφαίρεση και τη διαίρεση.)

Είναι, γνωστό, ότι:

Δυο αριθμοί α και β λέγονται ίσοι, το γράφουμε $\alpha = \beta$, όταν τα α και β παριστάνουν τον ίδιο αριθμό (το ίδιο σημείο) στην πραγματική ευθεία ή ισοδύναμα όταν $\alpha - \beta = 0$. Κάθε σχέση της μορφής $A = B$, όπου τα A και B μπορεί να είναι αριθμοί αλλά και αλγεβρικές παραστάσεις λέγεται ισότητα.

Οι Ιδιότητες των Τεσσάρων Πράξεων

ΣΧΟΛΙΟ

Οι ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού είναι χρήσιμες και μας διευκολύνουν όταν έχουμε να υπολογίσουμε αθροίσματα με πολλούς προσθετέους καθώς και γινόμενα με πολλούς παράγοντες πράξεις. Για παράδειγμα, χρησιμοποιώντας πρώτα την αντιμεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης και στη συνέχεια το γεγονός ότι το άθροισμα δυο αντιθέτων αριθμών είναι ίσο με το 0, βρίσκουμε ότι

$$-5 + 3 - \sqrt{2} + 5 - 2 + \sqrt{2} - 3 = -5 + 5 + 3 - 3 - \sqrt{2} + \sqrt{2} - 2 = -2.$$

Όμοια, χρησιμοποιώντας πρώτα την αντιμεταθετική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού και στη συνέχεια το γεγονός ότι το γινόμενο δυο αντίστροφων αριθμών είναι ίσο με το 1, βρίσκουμε ότι

$$(-2) \left(-\frac{3}{4}\right) \frac{2}{5} (-5) 3 \frac{5}{2} \left(-\frac{4}{3}\right) \frac{1}{5} = (-2) \left(-\frac{3}{4}\right) \left(-\frac{4}{3}\right) \frac{2}{5} \frac{5}{2} (-5) \frac{1}{5} 3 = 6.$$

Τίτλος: «**Οι Ιδιότητες των Τεσσάρων Πράξεων**»

Έκδοση: **1.5**

Ημερομηνία: **10/09/2025**

Συντονιστής ομάδας σχεδιασμού και ανάπτυξης: **Κέλλυ Σαρρή Πασχαλίδη**

Δημιουργία: **ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΓΡΑΦΗ**



Το παρόν αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της Πράξης «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ (ΜΙΣ) 6010165, του Προγράμματος «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή 2021-2027» που υλοποιείται από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής και συγχρηματοδοτείται από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο.



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας, Θρησκευμάτων
και Αθλητισμού

ΙΕΠ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ
ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ



Με τη συγχρηματοδότηση
της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Πρόγραμμα
Ανθρώπινο Δυναμικό και
Κοινωνική Συνοχή