Τοποθέτηση του $\sqrt{2}$ στην Πραγματική Ευθεία (Γεωμετρική κατασκευή)

Συμπληρωματικό Υλικό 1.1.6

Πώς θα τοποθετήσουμε έναν άρρητο, αφού ούτε καν ξέρουμε ποιος είναι; Είναι αλήθεια αυτό. *Κανέναν άρρητο δεν ξέρουμε ακριβώς και ποτέ δε θα μάθουμε κάποιον*. Φαίνεται απαισιόδοξη αυτή η άποψη αλλά είναι αληθινή. Με βάση όσα είπαμε παραπάνω οι άρρητοι είναι δεκαδικοί με άπειρα δεκαδικά ψηφία που δεν είναι περιοδικοί. Επομένως, δεν είναι κλάσματα, που θα μπορούσαμε να τους ξέρουμε ακριβώς ποιοι είναι και να τους τοποθετήσουμε στη «σωστή» τους θέση, στην ευθεία των πραγματικών αριθμών. Φανταστείτε έναν υπερυπολογιστή εφοδιασμένο με το κατάλληλο πρόγραμμα ώστε με κάθε πάτημα του πλήκτρου enter να μας δίνει ένα δεκαδικό ψηφίο του $\sqrt{2}$. Προφανώς, αυτή η διαδικασία δεν τελειώνει ποτέ, γιατί τα δεκαδικά ψηφία του $\sqrt{2}$ είναι άπειρα και επομένως ποτέ δεν θα μάθουμε ακριβώς ποιος είναι ο $\sqrt{2}$. Με την βοήθεια των υπολογιστών, ωστόσο, μπορούμε να τον προσεγγίσουμε με μεγάλη ακρίβεια, βρίσκοντας όλο και περισσότερα δεκαδικά του ψηφία αλλά ποτέ ακριβώς. Φυσικά μια καλή προσέγγιση μας παρέχει η δυνατότητα να βρούμε με μεγάλη ακρίβεια τη θέση στην ευθεία των πραγματικών αριθμών. Μήπως όμως θα μπορούσαμε να βρούμε την ακριβή θέση ενός άρρητου στην ευθεία; Η ερώτηση προφανώς παραπέμπει σε μια *γεωμετρική κατασκευή*. Η απάντηση είναι ότι για κάποιους μπορούμε και για κάποιους όχι. Αυτό που στην πραγματικότητα θέλουμε να κάνουμε είναι να τοποθετήσουμε το $\sqrt{2}$, που είναι περίπου ίσο με *1,4142135624*, στην ακριβή θέση του. Δηλαδή, αν έχουμε ορίσει θέσεις για το 0 και το 1 να κατασκευάσουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα με μήκος $\sqrt{2}$.

Κατασκευάζουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές ίσες με το 1. Ονομάζουμε x την υποτείνουσα και από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$x^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2$, οπότε, $x = \sqrt{2}$.

Πάνω στην ευθεία των πραγματικών αριθμών ορίζουμε την απόσταση από το 0 ως το 1 ίση με την πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου που κατασκευάσαμε. Στη συνέχεια, με αρχή το 0 και πάνω στο θετικό ημιάξονα παίρνουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ίσο με την υποτείνουσα του τριγώνου, δηλαδή με μήκος $\sqrt{2}$. Το $\sqrt{2}$ βρίσκεται στο δεύτερο άκρο αυτού του ευθύγραμμου τμήματος.

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να βρούμε τις θέσεις του $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ κτλ. , ωστόσο δεν μπορούμε, να βρούμε τη θέση των τετραγωνικών ριζών όλων των άρρητων. Για παράδειγμα, *δεν μπορούμε να κατασκευάσουμε* ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές τέτοιες ώστε η υποτείνουσα να έχει μήκος ίσο με το π (γιατί;).

Τίτλος: «**Τοποθέτηση του $\sqrt{2}$ στην Πραγματική Ευθεία (Γεωμετρική κατασκευή)**»

Έκδοση: **1.5**

Ημερομηνία: **10/09/2025**

Συντονιστής ομάδας σχεδιασμού και ανάπτυξης: **Κέλλυ Σαρρή Πασχαλίδη**

Δημιουργία: **ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΓΡΑΦΗ**

Το παρόν αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της Πράξης «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ (MIS) 6010165, του Προγράμματος «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή 2021-2027» που υλοποιείται από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής και συγχρηματοδοτείται από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο.