## Βασικές ανισότητες και οι αποδείξεις τους

**5.** (Μεταβατική Ιδιότητα) Αν $\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma$, τότε $\alpha > \gamma$.

*Απόδειξη*

Αν $\alpha > \beta$, τότε $\alpha - \beta > 0$ και αν $\beta > \gamma$, τότε $\beta - \gamma > 0$. Τότε, επειδή το άθροισμα θετικών αριθμών είναι θετικός αριθμός (1ο αξίωμα) έχουμε, διαδοχικά

$$(\alpha - \beta) + (\beta - \gamma) > 0 \Rightarrow \alpha - \gamma > 0 \Rightarrow \alpha > \gamma$$

Για παράδειγμα, έχουμε ότι αν $x > 5$ και $5 > y$, τότε $x > y$.

6. Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$, τότε $\alpha + \gamma > \beta + \delta$

*Απόδειξη*

Αν $\alpha > \beta$, τότε $\alpha - \beta > 0$ και αν $\gamma > \delta$, τότε $\gamma - \delta > 0$. Τότε, επειδή το άθροισμα θετικών αριθμών είναι θετικός αριθμός (1ο αξίωμα) έχουμε, διαδοχικά

$$(\alpha - \beta) + (\gamma - \delta) > 0 \Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \delta$$

Για παράδειγμα, έχουμε ότι από τις ανισώσεις $3 > 1$ και $2 > -4$, παίρνουμε $3 + 2 > 1 + (-4)$.

ΣΧΟΛΙΟ: *Ποτέ δεν αφαιρούμε ανισότητες κατά μέλη.*

Η ιδιότητα αυτή ισχύει και για περισσότερες ανισότητες.

$$(\alpha_1 > \beta_1 \quad \text{και} \quad \alpha_2 > \beta_2 \quad \text{και} \quad \ldots. \quad \text{και} \quad \alpha_\nu > \beta_\nu) \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu > \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_\nu$$

7. Αν $\alpha > \beta > 0$ και $\gamma > \delta > 0$, τότε $\alpha\gamma > \beta\delta$.

*Απόδειξη*

Αν $\alpha > \beta > 0$ και $\gamma > \delta > 0$, τότε $\alpha\gamma > \beta\gamma$ και $\beta\gamma > \beta\delta$, αφού $\beta, \gamma > 0$. Άρα, $\alpha\gamma > \beta\delta$ (*μεταβατική ιδιότητα*).

Για παράδειγμα, έχουμε ότι από τις ανισώσεις $3 > 2$ και $2 > 4/5$, παίρνουμε $3 \cdot 2 > 2 \cdot 4/5$.

ΣΧΟΛΙΟ: *Ποτέ δεν διαιρούμε ανισότητες κατά μέλη.*

Η ιδιότητα αυτή ισχύει και για περισσότερες ανισότητες.

(ii) Για θετικούς αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu$ ισχύει η συνεπαγωγή

$$(\alpha_1 > \beta_1 \quad \text{και} \quad \alpha_2 > \beta_2 \quad \text{και} \quad \ldots. \quad \text{και} \quad \alpha_\nu > \beta_\nu) \Rightarrow \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_\nu > \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \ldots \cdot \beta_\nu$$

8. Ισχύει ότι $\alpha^2 \geq 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό $\alpha$. Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $\alpha = 0$.

*Απόδειξη*

Αν $\alpha > 0$ τότε $\alpha \cdot \alpha > \alpha \cdot 0 = 0$. Άρα, $\alpha^2 > 0$.

Αν $\alpha = 0$ τότε $\alpha \cdot \alpha = \alpha \cdot 0 = 0$. Άρα, $\alpha^2 = 0$.

Για παράδειγμα, έχουμε ότι $(2x - 1)^2 \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

## Βασικές ανισότητες και οι αποδείξεις τους

9. Αν $\alpha,\beta$ ομόσημοι, τότε $\alpha>\beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}<\frac{1}{\beta}$

*Απόδειξη*

Αφού $\alpha,\beta$ είναι ομόσημοι, τότε ισχύει $\alpha\beta>0$. Άρα

$$\alpha>\beta \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha\beta}>\frac{\beta}{\alpha\beta} \Leftrightarrow \frac{1}{\beta}>\frac{1}{\alpha}$$

ΣΧΟΛΙΟ: *Για να αποδείξουμε το ευθύ διαιρούμε και τα δύο μέλη της ανισότητας με τον θετικό αριθμό $\alpha\beta$, ενώ για το αντίστροφο πολλαπλασιάζουμε με τον θετικό αριθμό $\alpha\beta$.*

Για παράδειγμα, έχουμε ότι

- $2<3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}>\frac{1}{3}$
- $-5<-1 \Leftrightarrow -\frac{1}{5}>-1$

10. Για θετικούς αριθμούς $\alpha,\beta$ και θετικό ακέραιο $\nu$ ισχύει η ισοδυναμία

$$\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha^{\nu}>\beta^{\nu}$$

Απόδειξη

*Ευθύ*: Έστω $\alpha>\beta$. Από την Ιδιότητα 7(ii) για $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_\nu=\alpha$ και $\beta_1=\beta_2=\ldots=\beta_\nu=\beta$ προκύπτει η συνεπαγωγή $\alpha>\beta \Rightarrow \alpha^{\nu}>\beta^{\nu}$.

*Αντίστροφο*: Για την απόδειξη του αντιστρόφου, θα υποθέσουμε ότι $\alpha^{\nu}>\beta^{\nu}$ και με βάση αυτή την υπόθεση θα αποδείξουμε ότι δεν μπορεί να ισχύει η ισότητα $\alpha=\beta$ ούτε η ανισότητα $\alpha<\beta$ και επομένως, θα είναι $\alpha>\beta$.

Αν ήταν $\alpha=\beta$, από τον ορισμό της ισότητας θα είχαμε $\alpha^{\nu}=\beta^{\nu}$ (άτοπο), ενώ αν ήταν $\alpha<\beta$, θα είχαμε $\alpha^{\nu}<\beta^{\nu}$ (άτοπο). Άρα, $\alpha>\beta$.

ΣΧΟΛΙΟ: *Για την παραπάνω απόδειξη χρησιμοποιήσαμε τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο.*

12. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $\alpha$ και $\beta$ και για κάθε θετικό ακέραιο $\nu$ ισχύει η ισοδυναμία

$$\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha^{2\nu+1}>\beta^{2\nu+1}$$

## Βασικές ανισότητες και οι αποδείξεις τους

Απόδειξη

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $\alpha > \beta > 0 \Rightarrow \alpha^{\nu} > \beta^{\nu}$, για κάθε θετικό ακέραιο $\nu$ (Πρόταση 7), επομένως, και για κάθε περιττό.
- $\alpha > 0 > \beta \Rightarrow \alpha^{2\nu+1} > 0 > \beta^{2\nu+1} \Rightarrow \alpha^{2\nu+1} > \beta^{2\nu+1}$
- $0 > \alpha > \beta \Rightarrow -\beta > -\alpha > 0 \Rightarrow (-\beta)^{2\nu+1} > (-\alpha)^{2\nu+1} > 0 \Rightarrow -\beta^{2\nu+1} > -\alpha^{2\nu+1} \Rightarrow \alpha^{2\nu+1} > \beta^{2\nu+1}$

Το αντίστροφο αποδεικνύεται όμοια με πριν με απαγωγή σε άτοπο.

(i) Έχουμε διαδοχικά,

$$a^{\kappa} > a^{\lambda} \Leftrightarrow a^{\kappa} - a^{\lambda} > 0 \Leftrightarrow \alpha^{\lambda}\left(a^{\kappa-\lambda} - 1\right) > 0 \Leftrightarrow a^{\kappa-\lambda} - 1 > 0 \Leftrightarrow \alpha^{\kappa-\lambda} > 1 \Leftrightarrow \alpha^{\kappa-\lambda} > 1^{\kappa-\lambda} \Leftrightarrow \alpha > 1$$

(ii) Όμοια έχουμε

$$a^{\kappa} < a^{\lambda} \Leftrightarrow a^{\kappa} - a^{\lambda} < 0 \Leftrightarrow \alpha^{\lambda}\left(a^{\kappa-\lambda} - 1\right) < 0 \Leftrightarrow a^{\kappa-\lambda} - 1 < 0 \Leftrightarrow \alpha^{\kappa-\lambda} < 1 \Leftrightarrow \alpha^{\kappa-\lambda} < 1^{\kappa-\lambda} \Leftrightarrow \alpha < 1$$

14. Για οποιουσδήποτε αριθμούς $\alpha$ και $\beta$ ισχύει η ανισότητα

$$\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta$$

*Απόδειξη*

Έχουμε

$\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 \geq 0$, που ισχύει. Το ίσον ισχύει για $\alpha = \beta$.

ΣΧΟΛΙΟ: *Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται και η ανισότητα* $\alpha^2 + \beta^2 \geq -2\alpha\beta$. *Πότε ισχύει το ίσον;*

15. Για οποιουσδήποτε αριθμούς $\alpha$ και $\beta$ ισχύει η ανισότητα

$$\alpha^2 \pm \alpha\beta + \beta^2 \geq 0$$

*Απόδειξη*

Έχουμε

$$\alpha^2 \pm \alpha\beta + \beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2\alpha^2 \pm 2\alpha\beta + 2\beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + \left(\alpha^2 \pm 2\alpha\beta + \beta^2\right) + \beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + (\alpha \pm \beta)^2 + \beta^2 \geq 0$$

που ισχύει. Το ίσον ισχύει όταν $\alpha = \beta = 0$.

16. Για οποιουσδήποτε αριθμούς $\alpha, \beta$ και $\gamma$ ισχύει η ανισότητα

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$$

*Απόδειξη*

Έχουμε

$$\begin{aligned}
&\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \Leftrightarrow 2\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\gamma^2 \geq 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha \Leftrightarrow \\
&\alpha^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta - 2\beta\gamma - 2\gamma\alpha \geq 0 \Leftrightarrow \\
&\left(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2\right) + \left(\beta^2 - 2\beta\gamma + \gamma^2\right) + \left(\gamma^2 - 2\gamma\alpha + \alpha^2\right) \geq 0 \Leftrightarrow \\
&(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

## Βασικές ανισότητες και οι αποδείξεις τους

που ισχύει. Το ίσον ισχύει όταν $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

ΣΧΟΛΙΟ: *Μπορούμε να αποδείξουμε και την ανισότητα* $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \geq 0$.

*Πότε ισχύει το ίσον;*

17. Αν $\alpha > 0$, τότε $\alpha > 0 \Leftrightarrow a + \frac{1}{a} \geq 2$.

Απόδειξη

Έχουμε $a + \frac{1}{a} \geq 2 \Rightarrow \alpha^2 + 1 \geq 2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)^2 \geq 0$. Το ίσον ισχύει για $\alpha = 1$.

18. (i) Αν $\alpha, \beta$ ομόσημοι τότε $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \geq 2$.

(ii) Αν $\alpha, \beta$ ετερόσημοι τότε $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \leq -2$.

*Απόδειξη*

(i) Έχουμε

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(\alpha - \beta)^2}{\alpha\beta} \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 \geq 0$$

(ii) Αποδεικνύεται όμοια.

19. Αν $\alpha + \beta + \gamma > 0$ τότε $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 \geq 3\alpha\beta\gamma$.

*Απόδειξη*

Από την ταυτότητα του Euler έχουμε

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)\left[(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2\right]$$

Αφού το β' μέλος είναι μη αρνητικό το ίδιο θα συμβαίνει και για το α'. Έτσι

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 \geq 3\alpha\beta\gamma$$

Τίτλος: «**Βασικές ανισότητες και οι αποδείξεις τους**»

Έκδοση: **1.5**

Ημερομηνία: **10/09/2025**

Συντονιστής ομάδας σχεδιασμού και ανάπτυξης: **Κέλλυ Σαρρή Πασχαλίδη**

Δημιουργία: **ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΓΡΑΦΗ**

---

*Το παρόν αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της Πράξης «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ (MIS) 6010165, του Προγράμματος «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή 2021-2027» που υλοποιείται από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής και συγχρηματοδοτείται από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο.*